特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

七年级 数学 下 （R版）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提分攻略

第五章 相交线与平行线

知识点 75 个 必得分

	页码
1 邻补角	2
2 对顶角	3
3 垂线	7
4 垂线的画法及性质	8
5 垂线段及点到直线的距离	9
6 同位角	15
7 内错角	16
8 同旁内角	17
9 平行线的定义	21
10 平行线的画法	21
11 平行公理及其推论	22
12 平行线的判定方法 1	26
13 平行线的判定方法 2	27
14 平行线的判定方法 3	27
15 平行线判定方法的推论	28
16 平行线的性质 1	34
17 平行线的性质 2	35
18 平行线的性质 3	36
19 命题	41
20 定理与证明	42
21 平移的定义	46
22 平移的性质	47
23 平移作图	47

考向点 89 个 速提分

	页码
1 利用邻补角的定义解决问题	2
2 利用对顶角的性质求角的度数	3
3 利用建模思想进行实物测量	4
4 利用计数法进行角的计数	4
5 利用垂线的画法画垂线	9
6 利用分类讨论思想解垂直中求角的问题	10
7 利用垂线段性质法解选择方案问题	11
8 利用定义法从复杂的图形中找位置角	17
9 利用平行公理及其推论说明直线的位置关系	22
10 利用平行公理说明三点共线	23
11 利用平行线的判定方法说明两直线平行	28
12 利用逆向思维法探究有关平行的拐角问题	29
13 利用分析综合法寻找说明平行的方法	29
14 利用作辅助线法说明两条直线平行	30
15 利用平行线的性质 1 解决问题	34
16 利用平行线的性质 2 进行推理说明	35
17 利用平行线的性质 3 求角的度数	36
18 利用折叠法求平行线中的角度问题	36
19 利用拐点添辅助线法探究角之间的数量关系	37
20 利用已学过的基本事实或定理填写推理的根据	42
21 利用建模思想对文字命题进行证明	43
22 利用平移的性质解决问题	47
23 利用平移作图的步骤作平移后的图形	48
24 利用平移法解几何中的计算问题	49
25 利用平移法解造桥中最短路线问题	49

第六章 实数

1 算术平方根	61
2 算术平方根的估算	62
3 平方根	63
4 平方根的性质	64
5 立方根	70
6 立方根的性质	71
7 用计算器求一个数的立方根	72
8 无理数	77
9 实数	78
10 实数与数轴	79
11 实数的性质	80
12 实数的运算	80

1 利用算术平方根的定义解决问题	61
2 利用平方根的性质解决问题	65
3 利用定义法求算术平方根中的字母值	66
4 利用性质法求算术平方根中字母的值	66
5 利用估算法确定一个数的整数部分和小数部分	67
6 利用立方根的定义解题	70
7 利用立方根的性质解题	72
8 利用无理数的定义识别无理数	77
9 利用数轴比较实数的大小	79
10 利用实数的性质解决实数的问题	80
11 利用实数的运算步骤进行计算	81
12 利用相反数、倒数、绝对值的性质求值	81
13 利用实数与数轴的关系化简绝对值	82

第七章 平面直角坐标系

1 有序数对	93
2 平面直角坐标系	94
3 点的坐标	95
4 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征	96
5 特殊位置的点的坐标特征	97
6 用坐标表示地理位置	104
7 用方位角及距离表示平面内点的位置	105
8 用坐标表示点的平移	106
9 用点的坐标表示图形的平移	106

1 利用有序数对确定位置	93
2 利用点的坐标的定义解决问题	95
3 利用点的位置特征求字母的值（取值范围）	97
4 利用等积法求平面直角坐标系中点的坐标	99
5 利用割补法求平面直角坐标系中不规则图形的面积	99
6 利用找规律法求运动中的点的坐标	100
7 利用坐标表示地理位置	104
8 利用“方位角 + 距离”确定位置	105
9 根据平移求点的坐标	106
10 利用坐标的变化表示图形的平移	107

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分↑方法↑学霸

方法点 68 个 得高分

	页码
1 找两个角是否互为对顶角的方法	3
2 几何计数的方法	4
3 分类讨论思想	10
4 判断两个角是不是同位角的方法	15
5 寻找一个角的内错角的方法	16
6 识别同位角、内错角和同旁内角的方法	17
7 判定两条直线平行的方法	22
8 说明三点共线的方法	23
9 用数量关系判定两直线平行的方法	27
10 寻找说明平行的方法	29
11 综合法与分析法	35
12 利用平行线的性质求角的度数的方法	38
13 命题改写的方法	41
14 证明一个命题的一般步骤	43
15 画平移图形的方法	48
16 数形结合思想	56
17 转化思想	56
18 方程思想	56
1 确定后整数部分、小数部分的方法	62
2 求一个正数的算术平方根和平方根的方法	64
3 利用平方根的定义解方程的一般步骤	65
4 解决条件式中被开方数互为相反数问题的方法	66
5 利用绝对值的性质进行化简的方法	82
6 特殊值法	87
7 数形结合思想	88
1 利用行列定位法确定物体的位置的方法	93
2 经纬定位法	94
3 利用有序数对表示点的位置的方法	94
4 确定点的坐标的方法	95
5 根据点的坐标描点的方法	96
6 求平面直角坐标系中几何图形面积的方法	100
7 点的平移与点的坐标变化规律	106
8 分类讨论思想	115
9 割补法	116
10 转化思想	116

考法点 51 个 争满分

	页码
第五章 相交线与平行线	
1 对顶角的识别	5
2 利用从特殊到一般思想求直线的交点个数	5
3 利用画垂线的方法解画垂线问题	12
4 利用点到直线的距离的定义判断点到直线的距离	12
5 利用垂直的概念求角的度数	13
6 利用同位角、内错角、同旁内角识别位置角	18
7 利用手势模型识别位置角	19
8 利用平行线的相关概念进行辨析	23
9 利用平行线判定方法找寻两线平行的条件	31
10 利用平行线的判定方法从不同角度说明两直线平行	31
11 利用平行线的性质求角的度数	38
12 利用平行线的判定与性质综合求角的度数	39
13 命题真假的辨析	44
14 利用网格中的平移判断移动方向	50
15 利用平移的性质解实际生活中的应用	50
第六章 实数	
1 利用估算法在数轴上表示平方根问题	67
2 利用找规律法解新定义问题	68
3 求一个数的立方根	74
4 立方根的规律探究	75
5 利用实数与数轴的对应关系比较式子的大小	82
6 利用实数的运算求新定义中式子的值	83
第七章 平面直角坐标系	
1 利用象限角的符号特征确定点的位置	101
2 利用点的坐标的规律变化求点的坐标	101
3 利用建立平面直角坐标系表示几何应用中点的位置	109
4 利用点的平移与坐标的变化规律求坐标	109
5 利用图形的平移与点的坐标变化规律求坐标	109

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 75 个 必得分

第八章 二元一次方程组

		页码
1	二元一次方程	122
2	二元一次方程组	123
3	二元一次方程的解	124
4	二元一次方程组的解	124
5	代入消元法解二元一次方程组	131
6	加减消元法解二元一次方程组	132
7	列二元一次方程组解应用题的基本步骤	140
8	列方程组解应用题的常见题型	141
9	建立二元一次方程组的模型对实际问题进行判断或方案设计	145
10	三元一次方程组	152
11	解三元一次方程组	153
12	列三元一次方程组解决问题	154

第九章 不等式与不等式组

1	不等式	170
2	不等式的解与解集	171
3	不等式的解集的表示方法	172
4	不等式的性质	176
5	利用不等式的性质解不等式	177
6	一元一次不等式	182
7	一元一次不等式的解法	183
8	一元一次不等式的实际应用	184
9	一元一次不等式组	191
10	一元一次不等式组的解集	192
11	解一元一次不等式组	193
12	一元一次不等式组的应用	195

第十章 数据的收集、整理与描述

1	数据的收集	213
2	数据的描述	214
3	全面调查与抽样调查	216
4	总体、个体、样本与样本容量	217
5	简单随机抽样	218
6	频数分布表	225
7	频数分布直方图	226

考向点 89 个 速提分

		页码
1	利用二元一次方程组的解的定义解决问题	124
2	利用列举法求二元一次方程的特殊解	126
3	利用类比法根据二元一次方程组的特殊结构找解	126
4	利用代入消元法解二元一次方程组	132
5	利用加减消元法解二元一次方程组	133
6	利用特殊法解方程组	135
7	利用方程组法求多项式中字母系数的值	135
8	利用代入消元法求非整式式子的值	137
9	利用二元一次方程组进行判断或方案设计	146
10	利用阅读图文信息法解二元一次方程组应用问题	147
11	利用分段法解二元一次方程组应用问题	147
12	利用分类法解二元一次方程组应用问题	148
13	利用三元一次方程组解决在非负数中的求值问题	156
14	利用三元一次方程组解实际生活中的求整数解问题	156

1	利用不等式的定义解决问题	170
2	在数轴上表示不等式的解集	172
3	利用数形结合法求不等式的特殊解	172
4	利用不等式的特殊解确定字母的取值范围	173
5	利用不等式性质求不等式解集	177
6	利用不等式法解与方程的解有关的应用	178
7	利用不等式性质解含字母常数的不等式	179
8	利用一元一次不等式解决实际问题	184
9	利用两个不等式的同解定义求字母值	186
10	利用不等式解与方程组综合的应用	186
11	利用不等式解方案设计的实际应用	187
12	建立一元一次不等式组的模型解决问题	195
13	利用构造不等式组法求字母的范围	196
14	利用已知不等式组的特殊解求字母的取值范围	197
15	利用建模法解方程和不等式组的实际问题	198

1	利用数据的收集与整理方法收集整理数据	213
2	利用统计图表描述数据	215
3	选择合适的调查方式	217
4	利用总体与样本的相关概念进行辨析	218
5	利用简单随机抽样解决问题	218
6	不规范统计图的误导	219
7	补全统计图并从统计图中获取正确的信息	220
8	样本、总体与二元一次方程组的综合题	221
9	利用频数分布表的相关数据解决问题	225
10	利用频数分布直方图解决问题	227
11	频数分布直方图的有关计算	229
12	从多种统计图中获取信息	229

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ↑ 方法 ↑ 学霸

方法点 68 个 得高分

	页码
1 判断一个方程是不是二元一次方程的方法	122
2 已知二元一次方程的解确定字母参数的方法	124
3 利用方程组的解确定字母参数的方法	125
4 求二元一次方程的整数解的方法	126
5 类比法	126
6 列举法	129
7 求二元一次方程组中的字母系数的一般步骤	136
8 解决配套问题的技巧	142
9 整体代入法	155
10 参数法	156
11 求三元一次方程组特殊解的方法	157
12 转化思想	164
13 整体思想	164
14 分类讨论思想	165
1 识别不等式的解与解集的方法	171
2 用数轴表示解集的一般方法	172
3 辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法	176
4 判断一个不等式是否为一元一次不等式的步骤	182
5 解方案设计问题的方法	187
6 确定一元一次不等式组解集的常用方法	192
7 数轴法	192
8 口诀法	192
9 利用数轴找不等式组整数解的方法	194
10 根据不等式组的解的情况求字母的取值范围的方法	195
11 求实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法	196
12 转化思想	207
13 数形结合思想	207
1 扇形圆心角度数的求法	215
2 统计图的灵活选用	216
3 随机数表法	218
4 确定组数的方法	225
5 用样本估计总体的思想	239
6 数形结合思想	240

考法点 51 个 争满分

	页码
第八章 二元一次方程组	
1 二元一次方程组的解	128
2 在实际问题中建立二元一次方程组的模型	128
3 利用二元一次方程的特殊解解决问题	129
4 解二元一次方程组	138
5 利用非负数性质建立二元一次方程组的模型	138
6 二元一次方程组的简单应用	138
7 列二元一次方程组解决商品销售问题	149
8 列二元一次方程组解决工程问题	149
9 三元一次方程组的应用	157
第九章 不等式与不等式组	
1 用不等式表示数量关系	174
2 用数轴表示不等式的解集	174
3 利用不等式的性质识别不等式的变形	179
4 利用不等式的性质比较大小	180
5 一元一次不等式的特殊解	188
6 一元一次不等式与一元一次方程的综合	188
7 一元一次不等式与二元一次方程组的综合	188
8 一元一次不等式的应用	189
9 求不等式组的解集	199
10 一元一次不等式组的特殊解	200
11 一元一次不等式组的应用	200
第十章 数据的收集、整理与描述	
1 数据的描述	222
2 调查方式的选择	222
3 抽样调查的相关概念的考查	223
4 从频数直方图中获取信息	230
5 补全频数分布直方图	231



注：“提分攻略　学霸图谱”中，所列“考向点”“方法点”为重要条目，全书不仅限于此.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

看微课

邻补角的定义…… 2
垂直的定义……7
垂线的性质…… 8
三线八角识别方法…… 17
平移的性质…… 47

观动画

平移制作图案…… 47

学方法

实数大小比较的方法…… 87

看微课

求算术平方根…… 61
探究算术平方根规律…… 63
求平方根…… 64
实数的分类…… 78

看微课

点的坐标特征…… 96
特殊位置的点的坐标…… 97
点的坐标的应用……104
图形的平移……106

第五章 相交线与平行线

5.1 相交线 ……2
5.1.1 相交线 ……2
5.1.2 垂线 ……7
5.1.3 同位角、内错角、同旁内角 …… 15
5.2 平行线及其判定 …… 21
5.2.1 平行线 …… 21
5.2.2 平行线的判定 …… 26
5.3 平行线的性质 …… 34
5.3.1 平行线的性质 …… 34
5.3.2 命题、定理、证明 …… 41
5.4 平移 …… 46

素养提分

行动篇：平行线间的是非曲直 ☞ P40
技巧篇：相交线与平行线中角的运用技巧 ☞ P53
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P54

第六章 实数

6.1 平方根 …… 61
6.2 立方根 …… 70
6.3 实数 …… 77

素养提分

行动篇：实数应澄清的几个问题 ☞ P84
技巧篇：平方根概念解题的几个技巧 ☞ P85
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P86

第七章 平面直角坐标系

7.1 平面直角坐标系 …… 93
7.2 坐标方法的简单应用 ……104

素养提分

行动篇：笛卡儿的《几何学》 ☞ P103
类型篇：平面直角坐标系中求几何图形面积 ☞ P112
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P114

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



第八章 二元一次方程组

8.1 二元一次方程组 ……122
8.2 消元——解二元一次方程组 ……131
8.3 实际问题与二元一次方程组 ……140
*8.4 三元一次方程组的解法 ……152

素养提分

行动篇：转化 ☞ P159
技巧篇：找特点巧消元 ☞ P160
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P162

学方法
解方程组的思想方法……165

看微课
代入法解方程组…… 131
加减法解方程组……134
用方程组解实际问题……143

第九章 不等式与不等式组

9.1 不等式 ……170
9.1.1 不等式及其解集 ……170
9.1.2 不等式的性质 ……176
9.2 一元一次不等式 ……182
9.3 一元一次不等式组 ……191

素养提分

行动篇：实数的大小比较 ☞ P181
类型篇：一元一次不等式（组）与方程（组）的巧妙结合 ☞ P203
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P205

看微课
不等式的性质……176
一元一次不等式组的解法…193
一元一次不等式组的应用…196

观动画
数轴上表示解集……172

第十章 数据的收集、整理与描述

10.1 统计调查 ……213
10.2 直方图 ……225
10.3 课题学习 从数据谈节水 ……234

素养提分

行动篇：用频率谈论谁是《红楼梦》的作者 ☞ P233
归纳篇：三种常见统计图的特点及综合应用 ☞ P235
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P237

期末达标检测卷 …… 246

参考答案及点拨（单独成册）

看微课
全面调查与抽样调查……216
从统计图中获取信息…… 220
画频数分布直方图…… 228

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

2. **转化思想**：转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

3. **数形结合思想**：数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法.数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

4. **从特殊到一般的思想**：从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.它的特点：由特殊→一般.

5. **分类讨论思想**：把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称之为分类讨论思想.

6. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

7. **建模思想**：是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题模型的一种强有力的数学手段.

8. **统计思想**：所谓统计思想，就是在统计实际工作、统计学理论的应用研究中，必须遵循的基本理念和指导思想.统计思想主要包括：均值思想、估计思想等.

9. **定义法**：就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的.因此，用定义法解题，是最直接的方法.

10. **作差法**：通过求两个数的差来比较两数大小的方法.

11. **特殊值法**：又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，运用简单的运算，得出最终答案的一种方法.这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要跟最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干中给出的等量关系是一个不可或缺的量.

12. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则图形转化为规则图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答.有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的.

13. **设参数法**：设参数法是指在解题过程中，通过适当引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，使问题得以解决的方法.

14. **分析法**：分析法就是指从命题的结论出发，步步寻找使结论成立的条件，直到得到一个已知条件，从而判定原命题的结论成立的一种解题方法，分析法也称“执果索因”法，即执结论，步步索条件.

15. **综合法**：综合法是指从已知条件出发，借助其性质和有关定理，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证结论或需求问题，其特点和思路是“由因导果”，即从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

探秘直线位置关系

探秘直线位置关系











第五章 相交线与平行线

核心考点

你将见到的

- 对顶角和邻补角
- 垂线与平行公理
- 平行线的判定
- 平行线的性质
- 平移

核心方法

我们为你提供的

- 概念辨析法
- 等积变形法
- 基本图形法
- 分析法
- 综合法
- 分类讨论思想
- 方程思想
- 转化思想
- 数形结合思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.1 相交线

5.1.1 相交线

核心知识
- 相交线
- 邻补角
- 对顶角

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 邻补角

1. **相交线**：有一个公共点的两条直线是相交线，这个公共点叫交点．

特别提醒：（1）相交指的是同一平面内两条直线的一种位置关系；（2）两条直线相交有且只有一个交点．

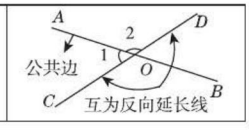
2. **邻补角**：两个角有一条公共边，它们的另一边互为反向延长线，具有这种关系的两个角，互为邻补角．


邻补角的定义

特别提醒：互为邻补角的“两要素”：

（1）有一条边是公共边；

（2）另一边互为反向延长线．

示图	∠1和∠2互为邻补角．	

3. **邻补角与补角的关系**：

（1）互为邻补角是互为补角的特殊情况．互为邻补角的两个角除具备两角互补这一数量关系外，还要具备相邻的位置关系．

（2）一个角的邻补角有两个，但一个角的补角可以有多个．

拔考向 利用邻补角的定义解决问题

例1 如图5.1−1，直线AB，CD，EF相交于点O，请找出图中∠AOC，∠EOB的邻补角．

解题秘方：根据邻补角的定义的“两要素”找已知角的邻补角．

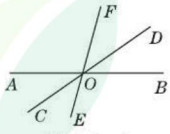


图 5.1−1

解：∠AOC的邻补角是∠AOD和∠BOC；∠EOB的邻补角是∠BOF和∠AOE.

方法点拨：判断两个角是不是邻补角，应从两个方面去看：一看这两个角有没有公共边；二看这两个角的另一边是否互为反向延长线．

提分·必记

特别解读

- 邻补角是成对出现的，单独一个角不能成为邻补角．
- 邻补角定义中既指明了位置关系，又指明了数量关系，“邻”指的是位置相邻，即两个角有一条公共边，“补”指的是两个角的数量关系是互补．

提分·秘诀

特别警示

两条直线相交，同一个角的邻补角有两个，分别从已知角的一条边为“邻边”（公共边），另一条边的反向延长线去确定．

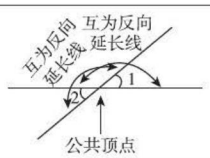
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 对顶角

1. **定义**：两个角有一个公共顶点，并且一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为对顶角.

特别提醒：对顶角是成对出现的，指两个角之间的位置关系，一个角的对顶角只有一个.

示图	∠1和∠2互为对顶角.	

2. **性质**：对顶角相等.

特别提醒：（1）两个角互为对顶角，它们一定相等；

（2）相等的两个角不一定是对顶角.

提分·必记

特别解读

对顶角的位置关系和数量关系

- 位置关系：有公共顶点，两边互为反向延长线.
- 数量关系：对顶角相等.

拔考向▸ 利用对顶角的性质求角的度数

例2 如图5.1-2，直线AE与CD相交于点O，OC平分$\angle AOB$，

（1）请找出图中$\angle 3$的对顶角；

（2）若$\angle 3=25°$，求$\angle 1$的度数.

解题秘方：（1）根据对顶角的位置特征找对顶角；（2）根据对顶角的数量关系求未知角的度数.

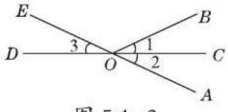


图 5.1-2

解：（1）$\angle 3$的对顶角是$\angle 2$；

（2）由对顶角相等，得$\angle 2=\angle 3=25°$，

因为OC平分$\angle AOB$，所以$\angle 1=\angle 2=25°$.

方法点拨：在进行角的计算时，“对顶角相等”这个结论常常被用来将要求的角和特征相同的两个角转化成与已知条件相关的角来求解，即对顶角构建了一个已知条件和待求结论之间的“桥梁”.

提分·秘诀

方法点拨

找两个角是否互为对顶角的方法：

一看它们有没有**公共顶点**；

二看这两个角的**两边是否互为反向延长线**，实质就是看这两个角是否是两条直线相交所形成的没有公共边的两个角.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用方程思想解决角度的计算

例3 如图5.1-3，直线AB，CD相交于点O，OE平分$\angle BOD$，OF平分$\angle COE$，$\angle AOD:\angle BOE=4:1$，求$\angle AOF$的度数.

解题秘方：利用$\angle AOD$与$\angle BOE$的比例关系，设出两个角的度数，再利用邻补角的定义得两个角的和等于180°，列方程求出角的度数.

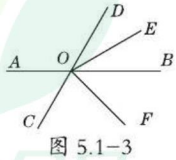


图 5.1-3

解：由已知可设$\angle BOE=x$，

则$\angle AOD=4x$. 易得$\angle BOD=2\angle BOE=2x$.

由邻补角的定义得$4x+2x=180°$，解得$x=30°$，

所以$\angle BOE=30°$，所以$\angle DOE=30°$，所以$\angle COE=150°$.

挑战·高分

技巧点拨

邻补角和对顶角具有“隐蔽性”，即这两种角大都以隐含条件的方式出现，通常不出现在已知条件中，解题时要充分挖掘这种关系，寻找已知角和未知角的关系，从而解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又因为 OF 平分 $\angle COE$，

所以 $\angle EOF=\frac{1}{2}\angle COE=\frac{1}{2}\times 150^\circ=75^\circ$.

所以 $\angle BOF=\angle EOF-\angle BOE=75^\circ-30^\circ=45^\circ$.

所以 $\angle AOF=180^\circ-\angle BOF=135^\circ$.

方法点拨：求一个角的度数时，总是设法将这个角转化为其他几个角的度数的和或差，然后分别求出这几个角的度数．当题目中出现角的度数比时，可通过设未知数，找出等量关系列方程，运用方程思想求角的度数．

拔尖角度 2 利用建模思想进行实物测量

挑战·高分

例 4 如图 5.1−4 是某城市古建筑群中一座古塔底部的建筑平面图，请你利用学过的知识设计测量出古塔底部 $\angle ABC$ 的大小的方案，并说明理由．

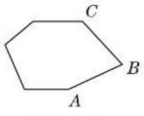


图 5.1−4

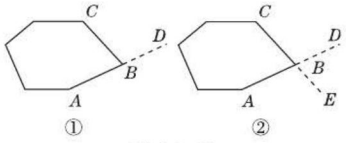


图 5.1−5

解题秘方：根据物体的结构特征，建立邻补角或对顶角的模型，利用邻补角或对顶角的性质，将不能测量的角转化为能测量的角．

解：方法一 如图 5.1−5 ①，延长 AB 到点 D，量出 $\angle CBD$ 的度数，则 $\angle ABC=180^\circ-\angle CBD$（邻补角的定义）．

方法二 如图 5.1−5 ②，分别延长 AB 到点 D，CB 到点 E，量出 $\angle DBE$ 的度数，则 $\angle ABC=\angle DBE$（对顶角相等）．

技巧点拨

当测量一个角比较麻烦(无法直接测量)时，可利用相交线的性质将这个角转化为其邻补角或对顶角来测量．

拔尖角度 3 利用计数法进行角的计数

挑战·高分

例 5 如图 5.1−6 ①，两条直线相交于一点所组成的角中，互为对顶角的角有 2 对，$\angle AOD$ 和 $\angle COB$，$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$.

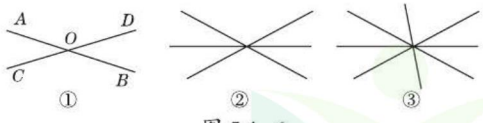


图 5.1−6

（1）如图 5.1−6 ②，三条直线相交于同一点所组成的角中，互为对顶角的角有_____对；

（2）如图 5.1−6 ③，四条直线相交于同一点所组成的角中，互为对顶角的角有_____对；

（3）n 条直线相交于同一点所组成的角中，互为对顶角的角有_____对．

解题秘方：根据“基本图形法”的特征，从复杂的多条直线相交的图形中分离出两条直线相交的基本图形进行计数．

知识储备

几何计数的方法：

1. 按顺序计数；
2. 按画图计数；
3. 按基本图形计数；
4. 按从特殊到一般的思想计数．

特别提醒

基本图形法就是从基本图形入手，进行计数，首先要弄清图形中包含的基本图形是什么，有

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：找对顶角的对数其实质就是找有多少对不同的相交直线．

（1）三条直线相交于一点，形成了3对相交直线，即$\frac{3\times(3-1)}{2}$个“叉”，每个“叉”中有2对对顶角，所以互为对顶角的角有6对；

（2）四条直线相交于一点，有$\frac{4\times(4-1)}{2}$个“叉”，所以互为对顶角的角有12对；

（3）n条直线相交于一点，有$\frac{n(n-1)}{2}$个“叉”，所以互为对顶角的角有$n(n-1)$对．

答案：（1）6　（2）12　（3）$n(n-1)$

多少个，然后再数出由基本图形组成的新的图形，并求出它们的和．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

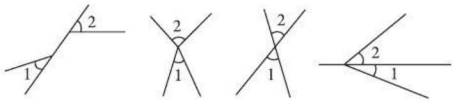
本节主要考点有邻补角的性质和对顶角的性质，一般考查的方式就是结合角平分线的性质求角的度数．在中考试卷中，单独考查较少，一般以选择题的形式考查较多，且非常简单，属送分题．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 对顶角的识别

例6 [中考·铜仁]如图5.1-7，∠1与∠2是对顶角的是(　　)



A　B　C　D

图5.1-7

试题评析：本题考查对顶角的识别，解题的关键是抓住互为对顶角的两个角的特征．

解：判断两个角是不是对顶角，要紧扣对顶角的定义，A选项中∠1和∠2的顶点不同；B选项中∠1和∠2的两边都不是互为反向延长线；C选项中∠1和∠2符合对顶角的定义；D选项中∠1和∠2有一条公共边．

答案：C

解法提醒

判断两个角是否互为对顶角，实质就是看这两个角是否是两条直线相交所形成的没有公共边的两个角．

考法2 利用从特殊到一般思想求直线的交点个数

例7 [月考·潮南区]观察如图5.1-8的图形，并阅读图形下面的相关文字，像这样的十条直线相交最多有_____个交点．



两条直线相交，最多有1个交点　三条直线相交最多有3个交点　四条直线相交最多有6个交点

图5.1-8

方法点拨

本例通过例题中的阅读材料，从特殊的两条直线相交、三条直线相交、四条直线相交交点的个数特征，得出一般的n条直线相交的交

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了相交线，n 条直线相交，交点最多时，每条直线都与其他直线有一个交点，共有（$n-1$）个交点，n 条直线共有 $n(n-1)$ 个交点，每个交点都重复数了一次，所以 n 条直线最多有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个交点.

解：十条直线相交最多有 $\frac{10\times(10-1)}{2}=45$（个）交点.

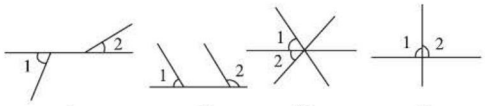
答案：45

点个数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 这一规律进行求解.

两年模拟兵法

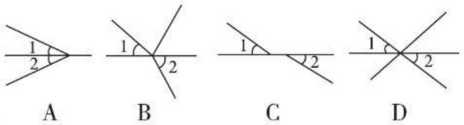
☞答案见 249 页

1. 下列选项中∠ 1 与∠ 2 互为邻补角的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 下列选项中∠ 1 和∠ 2 互为对顶角的是（　　）

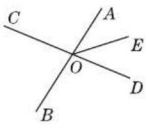


A　　B　　C　　D

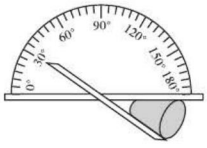
3. [**中考 · 淮安**]如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OE 平分∠ AOD，若∠ BOC=80°，则∠ AOE 的度数是（　　）

A.40°　　B.50°

C.80°　　D.100°



（第 3 题）



（第 5 题）

4. [**期中 · 武清区**]平面内三条直线的交点个数可能有（　　）

A. 1 个或 3 个

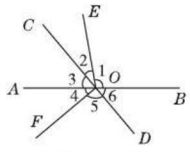
B. 2 个或 3 个

C. 1 个或 2 个或 3 个

D. 0 个或 1 个或 2 个或 3 个

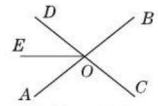
5. [**中考 · 吉林**]如图是对顶角量角器，用它测量角的原理是_____.

6. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，∠ FOC=90°，∠ 1=100°，∠ 2=30°，求∠ 3，∠ 4，∠ 5，∠ 6 的度数.



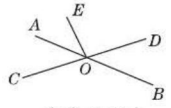
（第 6 题）

7. 如图，直线 AB 与直线 CD 相交于点 O，OE 平分∠ AOD，∠ BOC=∠ BOD − 30°，求∠ COE 的度数.　　**【导学号：7207895】**



（第 7 题）

8. [**中考 · 黄冈**]如图，已知直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分∠ COE，∠ COE : ∠ EOD=4 : 5，求∠ BOD 的度数.

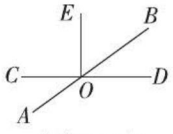


（第 8 题）

9. [**期末 · 天河区**]如图，已知直线 AB 和 CD 相交于点 O，在∠ COB 的内部作射线 OE.

（1）若∠ AOC=36°，∠ COE=90°，求∠ BOE 的度数.

（2）若∠ COE : ∠ EOB : ∠ BOD = 4 : 3 : 2，求∠ AOE 的度数.



（第 9 题）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.1.2 垂线

核心知识

- 垂直
- 垂线
- 点到直线的距离

知识链接

垂线的性质 ← 垂线 → 垂线段 → 性质；点到直线的距离

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 垂线

1. 定义： 当两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就称这两条直线互相垂直，其中一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点叫做垂足.

特别解读： 垂直的定义具有双重作用，已知直角得线垂直，已知线垂直得直角.

2. 推理格式：

如图 5.1−9，因为∠ AOC=90° （已知），

所以 $AB \perp CD$（垂直的定义）.

反过来：因为 $AB \perp CD$（已知），

所以∠ AOC=90° （垂直的定义）.

垂直的定义

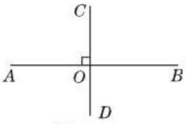


图 5.1−9

提分·必记

特别提醒

- 垂直和垂线是两个不同的概念，垂直是两条直线的位置关系，是相交的一种特殊情况，特殊在夹角为直角，而垂线是一条直线.
- 画一条线段、射线的垂线，都是指画它们所在直线的垂线.

拨考向 利用垂直的定义解决问题

类型 1：利用垂直的定义求角的度数

例 1 如图 5.1−10，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE \perp AB$ 于点 O，且∠ COE=40°，求∠ BOD 的度数.

解题秘方： 利用垂直的定义及对顶角的性质将要求的角向已知角转化.

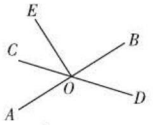


图 5.1−10

解：解法一 因为 $OE \perp AB$，

所以∠ AOE=90°.

又因为∠ AOE= ∠ AOC+ ∠ COE，∠ COE=40°，

所以∠ AOC=90° −40° =50°.

所以∠ BOD= ∠ AOC=50°.

解法二 因为 $OE \perp AB$，所以∠ BOE=90°.

又因为∠ COD 是平角，

所以∠ COE+ ∠ BOE+ ∠ BOD=180°.

所以∠ BOD=180° −90° −40° =50°.

提分·秘诀

解法提醒

两条直线互相垂直，所夹的四个角都等于90°，为求角的度数提供了四个已知角的度数，为从未知角向已知角的转化创造了条件.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用垂直的定义判断两条直线的位置关系

例 2 将一张长方形纸片按如图 5.1-11 所示方式折叠，EF，EG 为折痕，判断 EF 与 EG 的位置关系．

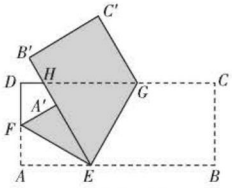


图 5.1-11

解题秘方：利用折叠的性质求出两线的夹角，根据夹角是 90° 判断两条直线的位置关系．

解：因为三角形 $A'EF$ 是由三角形 AEF 折叠得到的，四边形 $B'EGC'$ 是由四边形 $BEGC$ 折叠得到的，

所以 $\angle AEF=\angle A'EF$，$\angle BEG=\angle B'EG$.

所以 $\angle A'EF=\frac{1}{2}\angle AEA'$，$\angle A'EG=\frac{1}{2}\angle A'EB$.

所以 $\angle FEG=\angle A'EF+\angle A'EG=\frac{1}{2}\angle AEA'+\frac{1}{2}\angle A'EB=\frac{1}{2}(\angle AEA'+\angle A'EB)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

所以 $EF\perp EG$.

知识储备

折叠后，点 A 与点 A'，点 B 与点 B' 重合，所以三角形 AEF 与三角形 $A'EF$ 大小、形状完全相同，四边形 $BEGC$ 与四边形 $B'EGC'$ 大小、形状完全相同，所以 $\angle AEF=\angle A'EF$，$\angle BEG=\angle B'EG$.

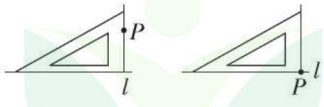
结论归纳：邻补角的角平分线互相垂直．

点知识 2 垂线的画法及性质

提分·必记

1. 垂线的画法

经过一点（已知直线上或直线外），画已知直线的垂线，步骤如下：

步骤	内容	示图
一落	让三角尺的一条直角边落在已知直线上，使其与已知直线重合．	过点 P 作直线 l 的垂线：
二移	沿已知直线移动三角尺，使其另一条直角边经过已知点．	
三画	沿此直角边画直线，则这条直线就是已知直线的垂线．	点 P 在直线 l 外　　点 P 在直线 l 上

特别提醒

画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线，垂足不一定在这条线段或射线上，垂足可能在线段的延长线上或射线的反向延长线上．

2. 垂线的性质：在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直．



垂线的性质

特别提醒：性质中的唯一性有两个关键条件不能少：一是“同一平面”；二是过一点，这一点可以在直线上也可以在直线外．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向 ▸ 利用垂线的画法画垂线

例 3 在图 5.1-12 中，分别过点 P 作 AB 的垂线．

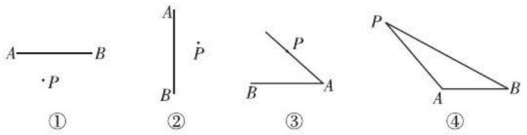


图 5.1-12

解题秘方：利用三角尺和直尺根据画垂线的步骤进行操作．

解：如图 5.1-13.

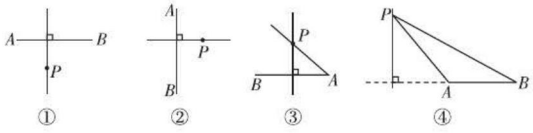


图 5.1-13

提分·秘诀

解法提醒

画垂线时是画实线，如需要延长线段或反向延长射线时，则要用虚线延长．

知识点 ▸ 3 垂线段及点到直线的距离

提分·必记

1. 垂线段：

（1）**定义**：过直线外一点画已知直线的垂线，连接这点与垂足之间的线段，叫做这点到已知直线的垂线段．

（2）**性质**：连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短，简单说成：垂线段最短．

（3）**垂线、垂直与垂线段之间的区别与联系**：

①**区别**：垂线是一条与已知直线垂直的直线；垂直是两条直线之间的位置关系；垂线段是一条与已知直线垂直的线段．

②**联系**：垂线段所在的直线是已知直线的垂线；垂线段所在的直线与已知直线垂直．

2. 点到直线的距离：直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离．

（1）垂线段与点到直线的距离的区别：垂线段是一个几何图形，而点到直线的距离是一个数量，是垂线段的长度．

（2）点到直线的距离与两点间的距离的区别：

	两点间的距离	点到直线的距离
定义	连接两点的线段的长度	直线外一点到这条直线的垂线段的长度
性质	两点之间，线段最短	垂线段最短

特别提醒

- 斜线段有无数条，但垂线段只有一条．
- 垂线是一条直线，长度不可度量，而垂线段是一条线段，长度可度量．

示图

点到直线的距离

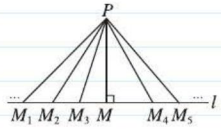


图 5.1-14

点 P 到直线 l 的距离为 PM 的长度．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▸利用垂线段的长度解决问题

例 4 （1）如图 5.1−15，在三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD \perp AB$，垂足为 D. 若 $AC=4$ cm，$BC=3$ cm，$AB=5$ cm，则点 A 到直线 BC 的距离为_____cm，点 B 到直线 AC 的距离为_____cm，点 C 到直线 AB 的距离为_____cm.

（2）点 P 为直线 m 外一点，点 A，B，C 为直线 m 上三点，$PA=4$ cm，$PB=5$ cm，$PC=2$ cm，则点 P 到直线 m 的距离（　　）

A. 等于 4 cm　　B. 等于 2 cm

C. 小于 2 cm　　D. 不大于 2 cm

解题秘方：根据点到直线的距离的定义，找出垂线段.

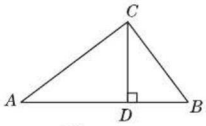


图 5.1−15

解：（1）根据点到直线的距离的定义可知，

点 A 到直线 BC 的距离是线段 AC 的长，

点 B 到直线 AC 的距离是线段 BC 的长，

点 C 到直线 AB 的距离是线段 CD 的长.

因为三角形 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2}AB \cdot CD$，所以 $AC \cdot BC=AB \cdot CD$，进而可得 $CD=2.4$ cm.

（2）点到直线的距离是该点到这条直线的垂线段的长度，而垂线段是该点与直线上各点的连线中最短的. 从条件看，PC 是三条线段中最短的，但不一定是所有连线中最短的，所以点 P 到直线 m 的距离应该是不大于 2 cm.

答案：（1）4；3；2.4　（2）D

提分·秘诀

方法点拨

1. 求点到直线的距离关键就是找准“垂线段”；虽然垂线段最短，但不是在给出的线段中最短的那条就是垂线段.
2. 直角三角形中斜边上的高可以通过“**面积法**”来求，即两直角边的乘积等于斜边乘斜边上的高.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸[1] 利用分类讨论思想解垂直中求角的问题

例 5 已知，直线 AB 与 CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle AOC$，射线 $OF \perp CD$ 于点 O，且 $\angle BOF=32°$，求 $\angle COE$ 的度数.

解题秘方：根据图形可能出现的情况进行分类画图，结合相交线的相关性质进行解答.

解：分两种情况讨论：

（1）如图 5.1−16.

因为 AOB 是直线，所以 $\angle AOC+\angle COF+\angle BOF=180°$.

因为 $OF \perp CD$，所以 $\angle COF=90°$.

因为 $\angle BOF=32°$，所以 $\angle AOC=180°-90°-32°=58°$.

又因为 OE 平分 $\angle AOC$，所以 $\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=29°$.

挑战·高分

方法提醒

本题用到了分类讨论思想. 由于题目中未给出图形，不能确定 $\angle AOC$ 的大小，因此解题时需要分类讨论所有可能出现的情况；先根据条件画出图形，然后利用角的和差关系求出角的度数.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

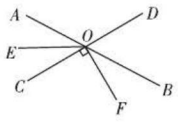


图 5.1−16

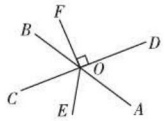


图 5.1−17

（2）如图 5.1−17.

因为 $OF \perp CD$，所以 $\angle FOD=90°$.

因为 $\angle BOF=32°$，所以 $\angle BOD=\angle BOF+\angle FOD=32°+90°=122°$.

因为 $\angle AOC=\angle BOD$，所以 $\angle AOC=122°$.

因为 OE 平分 $\angle AOC$，所以 $\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times 122°=61°$.

综上所述，$\angle COE$ 的度数是 $29°$ 或 $61°$.

拔尖角度▸ 2 利用分段法解说理问题

挑战·高分

例 6 如图 5.1−18，一辆汽车在平直的公路 AB 上由 A 向 B 行驶，M，N 分别是位于公路 AB 两侧的村庄.

（1）设汽车行驶到公路 AB 上的点 P 位置时，距离村庄 M 最近；行驶到点 Q 位置时，距离村庄 N 最近. 请在图中的公路 AB 上分别画出点 P，Q 的位置.

（2）当汽车从 A 出发向 B 行驶时，在公路 AB 的哪一段上距离 M，N 两村庄都越来越近？在哪一段上距离村庄 N 越来越近，而距离村庄 M 却越来越远？（分别用文字表述你的结论，不必说明理由）

解题秘方：先利用作垂线对公路进行分段，然后根据“垂线段最短”判断距离的变化情况.

解法提醒

画已知直线的垂线，可以画出无数条；过一点画已知直线的垂线，只能画一条，要找直线外一点到直线的距离，就必须作垂线.

解：（1）如图 5.1−18，过点 M 作 $MP \perp AB$，垂足为点 P，过点 N 作 $NQ \perp AB$，垂足为 Q，则点 P，Q 即为所求.

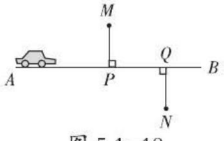


图 5.1−18

（2）当汽车从 A 向 B 行驶时，在 AP 段上距离 M，N 两村庄都越来越近；在 PQ 段上距离村庄 N 越来越近，而距离村庄 M 却越来越远.

拔尖角度▸ 3 利用垂线段性质法解选择方案问题

挑战·高分

例 7 如图 5.1−19，AB 是一条河流，要铺设管道将河水引到 C，D 两个用水点，现有两种铺设管道的方案.

方案一：分别过点 C，D 作 AB 的垂线，垂足分别为 E，F，沿 CE，DF 铺设管道.

方案二：连接 CD 交 AB 于点 P，沿 PC，PD 铺设管道.

这两种铺设管道的方案中，哪一种更节省材料？为什么？

详解

因为 $CE \perp AB$，$DF \perp AB$，所以 CE 是点 C 到直线 AB 的垂线段，DF 是点 D 到直线 AB 的垂线段.

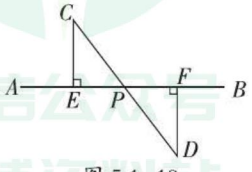


图 5.1−19

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：方案一铺设管道的长为 $CE+DF$，方案二铺设管道的长为 $PC+PD$. 两种方案中，将哪一种更节省材料的问题转化为数学问题：比较 $CE+DF$ 与 $PC+PD$ 的大小.

解：按方案一铺设管道更节省材料. 理由如下：

因为 $CE \perp AB$，$DF \perp AB$，

根据“垂线段最短”，可得 $CE < PC$，$DF < PD$.

所以 $CE+DF < PC+PD$.

所以沿 CE，DF 铺设管道更节省材料.

特别警示

要准确理解题意，将实际问题转化为数学问题分析，此题容易盲目根据“两点之间，线段最短”，误认为方案二更节省材料.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点有垂线的画法及性质，点到直线的距离. 其中利用垂线的性质求角的度数在中考中常考，一般都是以填空题或选择题形式出现，属送分题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用画垂线的方法解画垂线问题

例 8 [中考·柳州]如图 5.1−20，经过直线 l 外一点 A 画 l 的垂线，能画出（　　）

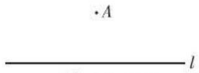


图 5.1−20

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

试题评析：本题主要考查垂线的性质，解题的关键是掌握垂线的性质.

解：因为在同一平面内，过一点有且只有一条直线垂直于已知直线，

所以经过直线 l 外一点 A 画 l 的垂线，能画出 1 条，故选 A.

答案：A

解法提醒

本题是将“垂线的性质”用图形展示进行考查，解答时结合垂线性质的文字叙述进行辨析.

考法 2 利用点到直线的距离的定义判断点到直线的距离

例 9 [中考·北京]如图 5.1−21 所示，点 P 到直线 l 的距离是（　　）

A. 线段 PA 的长度

B. 线段 PB 的长度

C. 线段 PC 的长度

D. 线段 PD 的长度

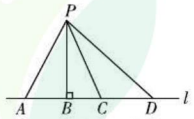


图 5.1−21

试题评析：本题考查了点到直线的距离，解题的关键是能从图形的角度识别出垂线段，能从语言的角度理解点到直线的距离的实质是指点到直线的垂线段的长度.

答案：B

方法点拨

由图中的标注可知，PB 是直线 l 外一点 P 到直线 l 的垂线段，根据点到直线的距离的定义可知，线段 PB 的长就是点 P 到直线 l 的距离.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用垂直的概念求角的度数

例 10 [中考·南通]如图 5.1−22，直线 AB 与 CD 相交于点 O，$OE \perp AB$，$\angle COE=60°$，则 $\angle BOD$ 等于_____.

试题评析：本题考查垂线的性质，解题的关键是能根据两条直线垂直得到夹角为 90°.

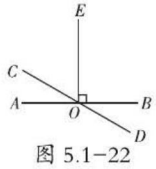


图 5.1−22

解：因为 $OE \perp AB$，

所以 $\angle AOE=90°$.

所以 $\angle AOC=\angle AOE-\angle COE=90°-60°=30°$.

所以 $\angle BOD=\angle AOC=30°$.

答案：30°

思路点拨

根据垂线的定义，可得∠AOE 的度数，根据余角的性质可得∠AOC 的度数，根据对顶角相等，可得答案.

两年模拟兵法 ☞答案见 249 页

1. 到直线 l 的距离等于 2 cm 的点有（　　）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 无数个　　D. 无法确定

2. [期末·南山区]如图所示，$\angle BAC=90°$，$AD \perp BC$，则下列结论中，正确的有（　　）

① $AB \perp AC$；

② AD 与 AC 互相垂直；

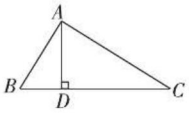
③点 C 到 AB 的垂线段是线段 AB；

④点 A 到 BC 的距离是线段 AD 的长度；

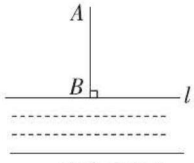
⑤线段 AB 的长度是点 B 到 AC 的距离；

⑥ $AD+BD>AB$.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个



（第 2 题）



（第 3 题）

3. [模拟·黔南州]如图，计划把河水引到水池 A 中，先作 $AB \perp l$，垂足为 B，然后沿 AB 开渠，能使所开的渠道最短，这样设计的依据是（　　）

A. 两点之间线段最短

B. 垂线段最短

C. 过一点只能作一条直线

D. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

4. 点 P 为直线 m 外一点，点 A，B，C 为直线 m 上三点，$PA=7$ cm，$PB=8$ cm，$PC=5$ cm，则点 P 到直线 m 的距离（　　）

A. 等于 7 cm　　B. 等于 5 cm

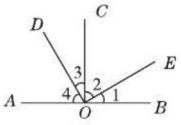
C. 小于 5 cm　　D. 不大于 5 cm

5. 如图，点 O 是直线 AB 上的一点，$CO \perp AB$ 于点 O，$DO \perp EO$ 于点 O.

（1）图中互为余角的角有几对？各是哪些？

（2）$\angle 1$ 的余角是哪个？

（3）图中互为邻补角的角有几对？各是哪些？

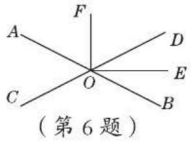


（第 5 题）

6. 如图，已知直线 AB，CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOD$，且 $\angle AOC:\angle AOD=3:7$.

（1）求 $\angle DOE$ 的度数；

（2）若 $OF \perp OE$，求 $\angle COF$ 的度数.



（第 6 题）

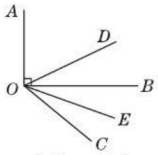
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，OD 平分 $\angle AOC$，OE 平分 $\angle BOC$，$OA \perp OB$.

（1）当 $\angle BOC=30°$ 时，$\angle DOE=$_____；

当 $\angle BOC=60°$ 时，$\angle DOE=$_____；

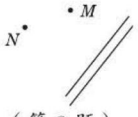
（2）通过上面的计算，猜想 $\angle DOE$ 与 $\angle AOB$ 有什么数量关系，并说明理由.



（第 7 题）

8. 如图，小河同侧有 M，N 两个村子. 如果小丽要从 N 村到 M 村去，怎样走最近？如果小丽要从 N 村直接到河边去，怎样走最近？如果小丽要从 N 村先到 M 村再到河边，怎样走最近？分别就上述情况画出路线图，并说明理由.

【导学号：7207895】

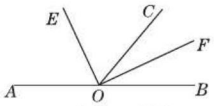


（第 8 题）

9. 如图，点 O 为直线 AB 上一点，OC 为一条射线，OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$.

（1）若 $\angle BOC=50°$，试探究 OE 与 OF 的位置关系，并说明理由；

（2）若 $\angle BOC$ 为任意角 α（$0° < \alpha < 180°$），（1）中 OE 与 OF 的位置关系是否仍然成立？请说明理由. 由此你发现了什么规律？



（第 9 题）

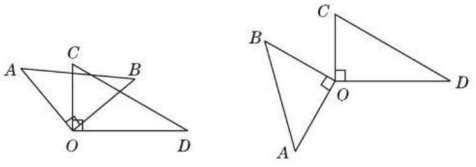
10. 将一副三角尺的两个直角顶点 O 重合在一起，按如图位置放置.

（1）如图①，若 $\angle BOC=50°$，求 $\angle AOD$ 的度数；

（2）如图②，若 $\angle BOC=60°$，求 $\angle AOD$ 的度数；

（3）如图②，猜想 $\angle AOD$ 与 $\angle BOC$ 的关系，并说明理由；

（4）如图②，若 $\angle BOC : \angle AOD=7 : 29$，求 $\angle BOC$ 和 $\angle AOD$ 的度数.



（第 10 题）

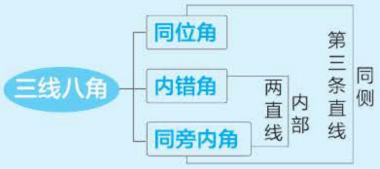
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.1.3 同位角、内错角、同旁内角

核心知识

- 同位角
- 内错角
- 同旁内角

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同位角

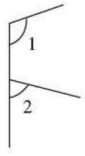
1. 定义： 两条直线被第三条直线所截，得到的八个角（简称“三线八角”）中，两个角分别在两条直线的同一方，并且都在第三条直线的同侧，具有这种位置关系的一对角叫做同位角.

特别提醒：

（1）同位角指的是两个角之间的位置关系，不是大小关系；

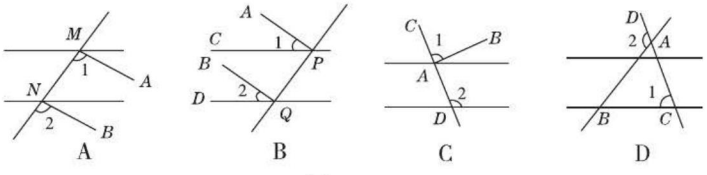
（2）在“三线八角”中，有 4 对同位角.

2. 位置特征：

角的名称	位置特征	基本图形	图形的结构特征
同位角	在截线同侧，在两条被截直线同一方.		形如字母“F”（或倒置、反置、旋转）.

拨考向 利用两个角的位置关系识别同位角

例 1 如图 5.1-23，下列四个图形中，∠1 和∠2 不是同位角的是（　　）



A　　B　　C　　D

图 5.1-23

解题秘方： 根据同位角的位置特征进行识别.

提分·必记

特别解读

1. 同位角是成对出现的，并且是由三条直线组成的，即一对边共线，另一对边不共线.
2. 同位角的顶点不是公共的.
3. “同”表示“相同”，“位”表示“位置”，“同位角”可理解为“相同位置的两个角”，即如果一个角在左上方，那么另一个角也应在左上方，从此类推，两个同位角的位置关系具有“同上、同左”、“同上、同右”、“同下、同左”、“同下、同右”的特征.

提分·秘诀

方法点拨

判断两个角是不是同位角的方法：

首先要看这两个角是不是两条直线被第三条直线所截形成的，即是不是“三线八角”中的两角；

其次看这两个角是不是具有不同的顶点；

最后看这两个角的位

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：根据同位角的定义，找出“三线”之后再看是否为“F”形即可判定.

选项 B 中的∠ 1 与∠ 2 由四条线构成，分别为 PA，PC，QB，QD，不满足“三线”的条件，故选项 B 中的∠ 1 与∠ 2 不是同位角；

其他 A，C，D 三个选项中的∠ 1，∠ 2 均满足同位角的条件，故选 B.

答案：B

置特征是否满足同位角的特征：三线成“F”形.

点知识 ▶ 2 内错角

1. 定义：两条直线被第三条直线所截，得到的八个角（简称“三线八角”）中，两个角都在两条直线之间，并且分别在第三条直线的两侧，具有这种位置关系的一对角叫做内错角.

提分·必记

特别解读

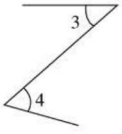
1. 内错角是成对出现的，并且是由三条直线组成的，即一对边共线，另一对边不共线.
2. 内错角的顶点不是公共的.
3. “内”可理解为夹在两直线之间，“错”可理解为交错，即位于第三条直线的两侧. 内错角的位置关系具有“同内、异侧”的特征.

特别提醒：

（1）内错角指的是两个角之间的位置关系，不是大小关系；

（2）在“三线八角”中，有 2 对内错角.

2. 位置特征：

角的名称	位置特征	基本图形	图形的结构特征
内错角	在截线两侧，在两条被截直线之间.		形如字母“Z”（或倒置、反置、旋转）.

拔考向 ▶ 利用两个角之间的位置关系识别内错角

提分·秘诀

解法提醒

寻找已知角的同位角、内错角时，先要寻找基本图形，即弄清哪条直线是截线，哪两条直线是被截直线，然后利用同位角、内错角的位置特征去寻找符合该特征的角.

例 2 如图 5.1−24，试找出图中与∠ 2 是同位角、内错角的角.

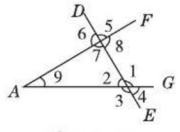


图 5.1−24

解题秘方：根据同位角及内错角的位置特征进行识别.

解：在 AF 和 AG 被 DE 所截的这个基本图形中，可以看出∠ 6 和∠ 2 处于“同一个位置”，因此∠ 2 的同位角为∠ 6. 根据内错角的特征可知∠ 2 和∠ 8 是内错角.

故∠ 2 的同位角为∠ 6，∠ 2 的内错角为∠ 8.

方法点拨：寻找一个角的内错角的方法

首先应该把这个角放在一个“三线八角”的基本图形中，其次是看这两个角各有一条边在同一直线上，这条直线就是定义中的“第三条直线”，而这两个角各剩下的一条边所在的直线就是两条被截的直线；最后看这两个角的位置特征是否满足内错角的特征：三线成“Z”形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸3 同旁内角

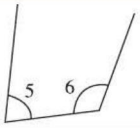
1. 定义：两条直线被第三条直线所截，得到的八个角（简称“三线八角”）中，两个角都在两条直线之间，且它们都在第三条直线的同一旁，具有这种位置关系的一对角叫做同旁内角.

特别提醒：（1）同旁内角指的是两个角之间的位置关系，不是大小关系；

（2）在“三线八角”中，有2对同旁内角.

三线八角识别方法

2. 位置特征：

角的名称	位置特征	基本图形	图形的结构特征
同旁内角	在截线同侧，在两条被截直线之间.		形如字母“U”（或倒置、反置、旋转）.

提分·必记

特别解读

1. 同旁内角是成对出现的，并且是由三条直线组成的，即一对边共线，另一对边不共线.
2. 同旁内角的顶点不是公共的.
3. “同旁”即在第三条直线的同一旁，“内”表示夹在两直线之间. 同旁内角的位置关系具有“同内、同侧”的特征.

拔考向▸利用同旁内角的位置关系识别同旁内角

例3 如图5.1-25，$\angle B$与图中哪些角是同旁内角？分别指出它们是哪两条直线被哪条直线所截的同旁内角？

解题秘方：先画出$\angle B$的两边，然后按照同旁内角的位置关系找出另一条直线，再确定另一个角.

解：$\angle B$与$\angle EAB$是直线DE、BC被直线AB所截的同旁内角；$\angle B$与$\angle CAB$是直线AC，BC被直线AB所截的同旁内角；$\angle B$与$\angle ACB$是直线AB，AC被直线BC所截的同旁内角.

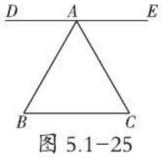


图5.1-25

提分·秘诀

解法提醒

三线八角由三条直线构成，其中两个角（同位角、内错角或同旁内角）共线的一条边所在的直线是截线，两个角不共线的另一条边所在的两条直线是被截直线.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸1 利用定义法从复杂的图形中找位置角

例4 如图5.1-26，结合图形解答下列问题：

（1）$\angle 1$与$\angle 2$是直线_____和直线_____被第三条直线_____所截而成的_____角；

（2）$\angle 2$与$\angle 3$是直线_____和直线_____被第三条直线_____所截而成的_____角；

（3）$\angle 4$与$\angle A$是直线_____和直线_____被第三条直线_____所截而成的_____角.

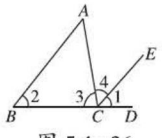


图5.1-26

解题秘方：根据同位角、内错角和同旁内角的定义确定答案.

解：（1）$\angle 1$与$\angle 2$都有一条边在直线BC上，另一条边分别在直线CE，AB上，两角都在直线BC的上方，分别在直线CE，AB的右侧，所以$\angle 1$与$\angle 2$是直线CE和直线AB被直线BC所截而成的同位角；

挑战·高分

方法点拨

识别同位角、内错角和同旁内角的方法：

1. **定义法：**一看三线、二找截线、三查位置来分辨，这三种角的共同特征是：一对边共线，不共顶点，另一对边分别在两条直线上，再根据位置关系确定是哪种角；
2. **分离图形法：**通过分离图形，把每一对角从复杂图形中分离出来，观察分离出的角的形状结构特征，按定义法加以区分；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∠2与∠3都有一条边在直线BC上，另一条边分别在直线AB，AC上，两角都在直线BC的上方，在直线AB，AC之间，所以∠2与∠3是直线AB和直线AC被直线BC所截而成的同旁内角；

（3）∠4与∠A都有一条边在直线AC上，另一条边分别在直线CE，AB上，两角分别在直线AC的两侧，在直线CE，AB之间，所以∠4与∠A是直线CE和直线AB被直线AC所截而成的内错角.

答案：（1）CE；AB；BC；同位　（2）AB；AC；BC；同旁内

（3）CE；AB；AC；内错

3. **粗描相关线条法**：把相关的两角用粗线条描出，两角关系便极易识别；
4. **特征法**：把相关的一对角用彩笔描出，看其是否符合“F”“Z”“U”形特征；
5. **方位法**：同位角：同左、同上，同左、同下，同右、同上，同右、同下；
内错角：同内、异侧；
同旁内角：同内、同侧.

拔尖角度 2 利用相交角的性质法判断“三线八角”中八个角之间的大小关系

例5　如图5.1-27，∠1=∠5，图中还有哪些相等的角？为什么？

解题秘方：结合邻补角和对顶角的性质找出图中相等的角.

解：∠1=∠5=∠3=∠7，∠2=∠4=∠6=∠8. 理由如下：

因为∠1=∠3，∠5=∠7（对顶角相等），∠1=∠5（已知），所以∠1=∠5=∠3=∠7.

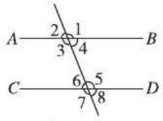


图5.1-27

因为∠1+∠2=180°，∠5+∠6=180°，∠1=∠5，所以∠2=∠6，又因为∠2=∠4，∠6=∠8（对顶角相等），所以∠2=∠4=∠6=∠8.

挑战·高分

结论归纳

两条直线被第三条直线所截，形成了8个角，其中共有2个顶点，同一个顶点处各有4个角. 若一对同位角（不等于90°时）相等，则其他的同位角也相等，内错角也相等，同旁内角互补.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点就是找“位置角”——同位角、内错角、同旁内角. 在中考中很少单独考查. 若独立考查，都属中考送分题，一般都是结合后面将要学习的平行线的判定和性质进行考查或渗透到其他几何图形内进行考查.

三年中考兵法

考法1 利用同位角、内错角、同旁内角识别位置角

例6　[中考·广西]如图5.1-28，直线a，b被c所截，则∠1与∠2是（　　）

A. 同位角　　B. 内错角

C. 同旁内角　　D. 邻补角

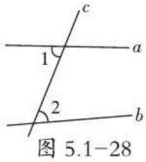


图5.1-28

试题评析：本题主要考查内错角、同位角、同旁内角、邻补角的定义，熟练掌握相关概念是解题的关键.

解：∠1和∠2是直线a和直线b被直线c所截形成的，它们位于两条被截直线之间，位于截线的两侧，故为一对内错角，故选B.

答案：B

冲刺·满分

考法点评

识别位置角是本节的重点，也是学好平行线的判定和性质的关键. 主要考查学生的识图能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用手势模型识别位置角

例 7 [期中·上杭县]两条直线被第三条直线所截，就第三条直线上的两个交点而言形成了“三线八角”，为了便于记忆，同学们可仿照图 5.1-29 用双手表示“三线八角”（两大拇指代表被截直线，食指代表截线）. 下列三幅图依次表示（　　）



图 5.1-29

A. 同位角、同旁内角、内错角

B. 同位角、内错角、同旁内角

C. 同位角、对顶角、同旁内角

D. 同位角、内错角、对顶角

试题评析：本题考查了同位角、内错角、同旁内角. 解题的关键是掌握同位角、内错角、同旁内角，并能区别它们.

解：根据同位角、内错角、同旁内角的概念，可知第一幅图是同位角，第二幅图是内错角，第三幅图是同旁内角.

答案：B

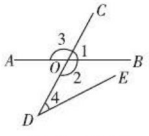
解法提醒

利用建模思想，用识别同位角、内错角、同旁内角的方法进行识别.

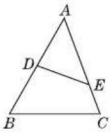
两年模拟兵法 ☞答案见 251 页

1. [期末·漳州]如图，∠1 的同位角是（　　）

A. ∠4　　B. ∠3　　C. ∠2　　D. ∠*AOD*



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，∠*ADE* 和∠*CED* 是（　　）

A. 同位角　　B. 同旁内角

C. 内错角　　D. 互为补角

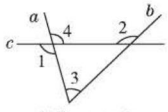
3. 如图所示，下列判断错误的是（　　）

A. ∠2 和∠3 是同位角

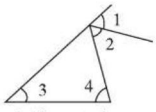
B. ∠1 和∠3 是内错角

C. ∠2 和∠4 是同旁内角

D. ∠1 和∠2 是内错角



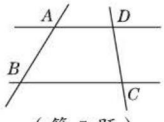
（第 3 题）



（第 4 题）

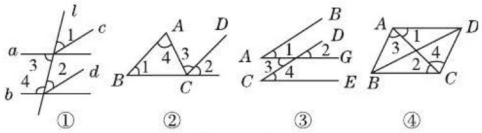
4. 如图所示，∠1 与∠3 是_____，∠2 与∠4 是_____，∠3 与∠4 是_____.

5. 如图所示，内错角共有_____对.



（第 5 题）

6. 如图，∠1 与∠2，∠3 与∠4 分别是哪两条直线被哪一条直线所截得到的？是什么角？

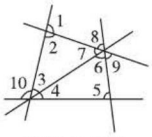


①　②　③　④

（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图所示，在∠1~∠10这些角中，有同位角、内错角、同旁内角各几对，请分别写出来.



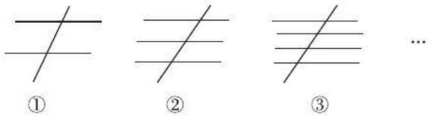
（第7题）

8. 两条直线被第三条直线所截，∠1是∠2的同旁内角，∠2是∠3的内错角.

（1）画出示意图；

（2）若∠1=2∠2，∠2=2∠3，求∠1，∠2的度数.

9. 下列各图（如图），都是水平直线被一条倾斜的直线所截：



（第9题）

（1）请观察上图并填写下表：

图形编号	①	②	③	…
同位角对数				…
内错角对数				…
同旁内角对数				…

（2）若n条水平直线被一条倾斜直线所截，请用含n的式子表示同位角、内错角、同旁内角的对数.

【导学号：7207895】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2 平行线及其判定

5.2.1 平行线

核心知识
- 平行
- 平行线
- 平行公理及其推论

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线的定义

1. 定义： 在同一平面内，不相交的两条直线叫做平行线.

特别提醒： 平行线的定义三要素：

（1）在同一平面内；

（2）不相交；

（3）都是直线.

2. 表示方法： 用“//”表示平行，如图 5.2–1，记作“$AB \parallel CD$”或“$CD \parallel AB$”，读作“AB 平行于 CD”或“CD 平行于 AB”.



图 5.2–1

提分·必记

特别解读

在同一平面内，不重合的两条直线的位置关系：

- 相交；
- 平行.

重合的直线视为一条直线，不属于相交与平行中任何一种位置关系.

拨考向 利用平行线的定义进行判断

例 1 判断下列说法是否正确，并说明理由.

（1）不相交的两条直线是平行线；

（2）在同一平面内，两条不相交的线段是平行线.

解题秘方： 根据平行线的定义进行辨析.

解：（1）不正确；

理由：根据定义，它缺少了“在同一平面内”这一条件.

（2）不正确；

理由：定义中是两条不相交的“直线”，而不是“线段”，线段不相交不代表线段所在的直线不相交.

提分·秘诀

方法点拨

1. 此题运用定义法检验两条直线是否平行. 若不涉及第三条直线，则常常根据平行线的定义来判断两条直线是否平行.
2. 说明线段、射线的位置关系，常指线段、射线所在直线的位置关系.

点知识 2 平行线的画法

1. 过直线外一点画已知直线的平行线的步骤：

一落： 把三角尺的一边落在已知直线上；

二靠： 紧靠三角尺的另一边放一直尺；

三移： 把三角尺沿着直尺移动使其经过已知点；

四画： 沿三角尺的一边画直线. 此直线即为已知直线的平行线.

提分·必记

特别提醒

1. 经过直线上一点不可以作已知直线的平行线.
2. 画线段或射线的平行线是画它们所在直线的平行线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 示图

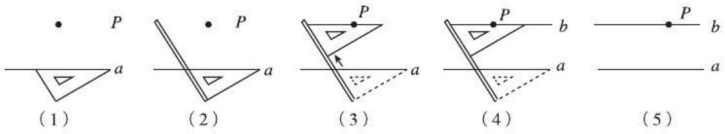


图 5.2-2

3. 借助三角尺画平行线时，必须保持紧靠，否则画出的直线不平行.

核心考向▶利用平行线的画法画给定位置关系的直线

例 2 读下列语句，并画出图形. 直线 AB，CD 是两条直线，P 是直线 AB，CD 外的一点，直线 EF 经过点 P 与 AB 平行，直线 MN 经过点 P 与 CD 垂直.

解题秘方：按照语句的要求，结合平行线的画法进行作图.

解：如图 5.2-3.

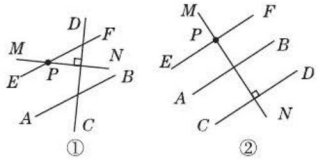


图 5.2-3

提分·秘诀

解法提醒

根据语句画图时，要注意画出的图形符合语句的要求，若语句中没有交待清楚的，要考虑各种情况，如本题中 AB，CD 之间没有指明位置关系，所以画图时可以平行也可以相交.

点知识▶3 平行公理及其推论

1. 平行公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

特别提醒：平行公理的前提是经过直线外一点，若点在直线上，则不可能有平行线.

2. 平行公理的推论：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

简称：平行于第三条直线的两条直线平行.

表达方式：如果 $a \parallel c$，$b \parallel c$，那么 $a \parallel b$.

提分·必记

特别解读

“有且只有”强调这样的直线的存在性和唯一性.

核心考向▶利用平行公理及其推论说明直线的位置关系

例 3 如图 5.2-4，直线 $a \parallel b$，$b \parallel c$，d 与 a 相交于点 M.

（1）试判断直线 a，c 的位置关系，并说明理由；

（2）判断 c 与 d 的位置关系，并说明理由.

解题秘方：根据平行公理及其推论判定两条直线的位置关系.

解：（1）因为 $a \parallel b$，$b \parallel c$，所以 $a \parallel c$.

理由：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

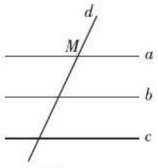


图 5.2-4

（2）因为直线 a，d 都过点 M，且 $a \parallel c$，所以 d 与 c 相交.

理由：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

提分·秘诀

方法点拨

判定两条直线平行的方法：

1. 若涉及相交问题，则用平行线的定义；
2. 若涉及三条直线的位置关系问题，则用平行公理的推论，较常用的方法是平行公理的推论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平行公理说明三点共线

例 4 如图 5.2-5，如果 $CD \parallel AB$，$CE \parallel AB$，那么 C，D，E 三点是否共线？你能说明理由吗？

解题秘方：通过说明两条直线是同一条直线的方式说明三点共线.

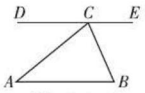


图 5.2-5

解：C，D，E 三点共线. 理由如下：

因为 $CD \parallel AB$，$CE \parallel AB$，

所以根据平行公理，知 CD 与 CE 是同一条直线. 所以 C, D, E 三点共线.

挑战·高分

方法点拨

说明三点共线的方法：

1. 夹角为 180°；
2. 过两点确定的两条直线为同一条直线.

详解

过一点 C 平行于直线 AB 的直线只有一条.

拔尖角度 2 利用画图法探究直线交点个数的规律

例 5 我们知道两条相交直线的交点个数是 1，两条平行线的交点个数是 0，同一平面内三条平行线的交点个数是 0，经过同一点的三条直线的交点个数是 1……

（1）请你画图说明同一平面内的 5 条直线最多有几个交点；

（2）同一平面内的 5 条直线可以有 4 个交点吗？如果可以，请你画出符合条件的所有图形；如果不可以，请说明理由.

解题秘方：根据直线的两种位置关系：相交与平行，进行画图探究.

解：（1）如图 5.2-6，最多有 10 个交点.

（2）可以. 如图 5.2-7，有三种不同的情况.


图 5.2-6

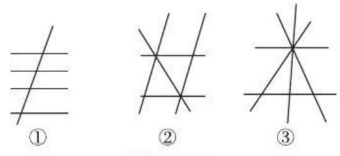


图 5.2-7

挑战·高分

规律点拨

n 条直线两两相交（即每条直线都与其他直线相交），交点的个数最多有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个. 这一公式在握手问题、单循环赛等数学问题中已得到验证.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要是几个概念与公理，考查的主要形式是文字性的辨析，一般都是以选择题形式进行考查.

三年中考兵法

考法 利用平行线的相关概念进行辨析

例 6 [期中·黄冈]下列结论中正确的个数是（　　）

①两条不相交的直线叫做平行线；

②过一点有且只有一条直线与已知直线平行；

③在同一平面内，不相交的两条射线是平行线；

冲刺·满分

特别解读

1. 在平行线的定义中，“在同一平面内”是很重要的前提，因为在空间里，两条直线还有既不平行也不相交的情况；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

④如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

试题评析：本题考查平行线的定义及平行公理及其推论，解题的关键是把握相关概念中的关键字词.

解：①平行必须强调在同一平面内. 如图 5.2−8 中的 AB 与 CC' 不相交，但也不平行，故①错误；

②该点若在已知直线上，则画不出与已知直线平行的直线，故②错误；

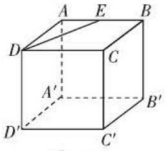


图 5.2−8

③如图 5.2−8，射线 EA 与射线 BC 既不相交，也不平行，故③错误.

④由平行公理的推论知④正确.

答案：A

2. 平行线指的是"两条直线"而不是两条射线或线段，两条射线或线段平行，是指它们所在的两条直线平行；

3. 平行公理要强调"经过直线外一点"，否则结论不成立.

两年模拟兵法 ☞答案见 251 页

1. [期中·龙口市]下列说法中错误的个数是(　　)

①过一点有且只有一条直线与已知直线平行

②在同一平面内，两条直线的位置关系只有相交、平行两种

③不相交的两条直线叫做平行线

④相等的角是对顶角

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2. 在同一平面内，直线 a，b 相交于点 P，$a \parallel c$，b 与 c 的位置关系是(　　)

A. 平行　　B. 相交

C. 重合　　D. 平行或相交

3. 下列说法：

①若 a 与 c 相交，b 与 c 相交，则 a 与 b 相交；

②若 $a \parallel b$，$b \parallel c$，则 $a \parallel c$；

③过一点有且只有一条直线与已知直线平行；

④在同一平面内，两条直线的位置关系有平行、相交、垂直三种.

其中错误的有(　　)

A.3 个　　B.2 个

C.1 个　　D.0 个

4. [期中·宁晋县]平面内有三条直线 a、b、c，下列说法：

①若 $a \parallel b$，$b \parallel c$，则 $a \parallel c$；

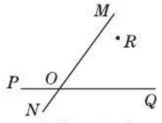
②若 $a \perp b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$.

其中正确的是(　　)

A. 只有①　　B. 只有②

C. ①②都正确　　D. ①②都不正确

5. 如图所示，直线 MN，PQ 相交于点 O，R 为 MN，PQ 外一点，过 R 点画直线 $AB \parallel PQ$，直线 $CD \parallel MN$.



(第 5 题)

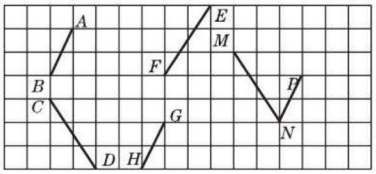
6. 读句画图：

(1) 点 M 是直线 AB 外一点，过点 M 的直线 MN 与 AB 交于点 N，过点 M 画直线 CD，使 $CD \parallel AB$；

(2) 点 P 是 $\angle ABC$ 的边 BA 上一点，直线 EF 经过点 P，且与 BC 平行.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

7. 在下图的方格纸中：



（第 7 题）

（1）找出互相平行的线段，并用符号表示出来；

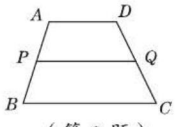
（2）用三角尺试着画出与 EF 平行的线段，并用符号表示出来.

8. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，点 P 是 AB 的中点，过点 P 作 AD 的平行线 PQ 交 DC 于点 Q.

（1）PQ 与 BC 平行吗？为什么？

（2）测量 DQ 与 CQ 的长，并判断 DQ 与 CQ 是否相等.

【导学号：7207895】



（第 8 题）

9. 在平面内作四条直线，使它们分别满足以下条件：

（1）它们没有交点；

（2）它们有一个交点；

（3）它们有四个交点.

10. 地面上有 10 条公路（假设公路是笔直的并且可以无限延伸），无任何 3 条公路相交于同一个岔口. 现有 31 名值班交警，刚好满足每个岔口有且只有 1 名交警执勤，请你画出公路示意图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2.2 平行线的判定

核心知识

- 平行线的判定 1
- 平行线的判定 2
- 平行线的判定 3

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线的判定方法 1

1. 方法 1： 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简单说成： 同位角相等，两直线平行.

特别解读： （1）构成同位角的两条直线不一定平行，只有形成的一对同位角相等，这两条直线才平行.

（2）“同位角相等，两直线平行”是通过两个同位角的大小关系（相等）推导出两直线的位置关系（平行）. 它是构建起角的大小关系与直线的位置关系的桥梁.

2. 表达方式： 如图 5.2-9，

因为∠ 1= ∠ 2（已知），

所以 $a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

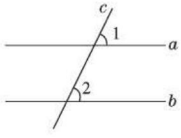


图 5.2-9

提分·必记

特别解读

判定两直线平行的方法

1. 直线的位置关系：

（1）同一平面内不相交的两条直线平行.

（2）同平行于第三条直线的两条直线平行.

2. 角的大小关系：

同位角相等，两直线平行.

拔考向 利用平行线的判定方法 1 判定两直线平行

例 1 如图 5.2-10，已知直线 AB，CD 被直线 EF 所截，∠ 1+ ∠ 2=180°，AB 与 CD 平行吗？请说明理由.

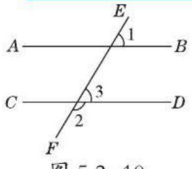


图 5.2-10

解题秘方： 找出一对同位角，通过已知条件说明这对同位角相等来说明两条直线平行.

解： $AB \parallel CD$. 理由如下：

因为∠ 1+ ∠ 2=180°（已知），

∠ 2+ ∠ 3=180°（邻补角的定义），

所以∠ 1= ∠ 3（同角的补角相等）.

所以 $AB \parallel CD$（同位角相等，两直线平行）.

提分·秘诀

解法提醒

判断两条直线是否平行，当题中涉及角的关系时，则可通过找出这两条直线被第三条直线所截得到的一对同位角，并利用相关角的条件判断其是否相等，如果相等，那么这两条直线平行，否则不平行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 平行线的判定方法 2

1. 方法 2： 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单说成： 内错角相等，两直线平行.

特别解读：（1）“内错角相等，两直线平行”是利用“对顶角相等”和“同位角相等，两直线平行”推导得出的.

（2）利用“内错角相等”来确定“两直线平行”的关键是弄清这对内错角是哪两条直线被第三条直线所截得到的内错角，再说明这两条直线平行.

2. 表达方式： 如图 5.2−11，

因为∠ 1= ∠ 2（已知），

所以 $a \parallel b$（内错角相等，两直线平行）.

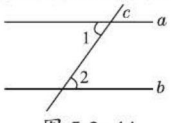


图 5.2−11

提分·必记

特别提醒

构成内错角的两条被截线不一定平行，只有形成的一对内错角相等，这两条被截线才平行.

核考向▶ 利用平行线的判定方法 2 判定直线平行

例 2 如图 5.2−12，已知 $\angle ADE=60°$，DF 平分 $\angle ADE$，$\angle 1=30°$，试说明 $DF \parallel BE$.

解题秘方： 先找出 DF 和 BE 这两条被截线所形成的一对内错角，然后利用条件说明这对内错角相等来说明这两条被截线平行.

解： 因为 DF 平分 $\angle ADE$（已知），

所以 $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADE$（角平分线的定义）.

又因为 $\angle ADE=60°$（已知），

所以 $\angle EDF=30°$.

又因为 $\angle 1=30°$（已知），

所以 $\angle EDF=\angle 1$.

所以 $DF \parallel BE$（内错角相等，两直线平行）.

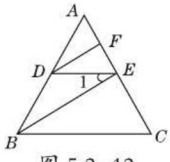


图 5.2−12

提分·秘诀

解法提醒

要判定两直线平行可以通过说明同位角相等或内错角相等来实现，至于到底选用同位角还是选用内错角，要看具体的题目，要尽可能与已知条件联系.

点知识▶ 3 平行线的判定方法 3

1. 方法 3： 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

简单说成： 同旁内角互补，两直线平行.

特别解读： 利用同旁内角证明两直线平行时，同旁内角之间的关系是互补，不是相等.

2. 表达方式： 如图 5.2−13，

因为∠ 1+ ∠ 2=180°（已知），

所以 $a \parallel b$（同旁内角互补，两直线平行）.

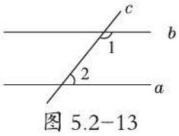


图 5.2−13

提分·必记

方法点拨

用数量关系判定两直线平行的方法：

在“三线八角”中，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补，只要其中一个结论成立，则利用对顶角、邻补角等相关知识，可得到另两个结论也成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用平行线的判定 3 判定两直线平行

例 3 如图 5.2−14，直线 AE，CD 相交于点 O，如果 $\angle A=110°$，$\angle 1=70°$，就可以说明 $AB \parallel CD$，这是为什么？

解题秘方：找出 AB，CD 被 AE 所截形成的同旁内角，利用两个角之间的数量关系来说明这两条直线平行.

解：因为 $\angle 1=\angle AOD$（对顶角相等），$\angle 1=70°$，

所以 $\angle AOD=70°$.

又因为 $\angle A=110°$，

所以 $\angle A+\angle AOD=180°$（等式的性质）.

所以 $AB \parallel CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

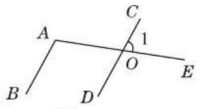


图 5.2−14

提分·秘诀

解法提醒

- 本题运用了数形结合思想. 平行线的判定是由角之间的数量关系到直线的位置关系的判定.
- 说明两直线平行时，一般都要结合对顶角、补角等知识来说明.

点知识▶4 平行线判定方法的推论

1. 判定方法：在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行.

简称：在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行.

表达方式：如图 5.2−15，直线 a，b，c 在同一平面内.

因为 $a \perp b$，$a \perp c$，所以 $b \parallel c$.

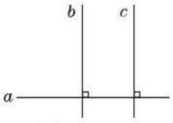


图 5.2−15

2. 拓展：

a，b，c 为同一平面内的三条不重合直线，在下列结论中：

① $a \perp b$；② $a \perp c$；③ $b \parallel c$. 已知其中任意两个结论，总能推出第三个结论成立，即如果 $a \perp b$，$a \perp c$，那么 $b \parallel c$；如果 $a \perp b$，$b \parallel c$，那么 $a \perp c$；如果 $a \perp c$，$b \parallel c$，那么 $a \perp b$.

提分·必记

特别解读

1. 三条直线“在同一平面内”是前提，丢掉这个前提，结论不一定成立.
2. 本结论（方法）可看成是判定方法 1，2，3 的推论，因为它可由判定方法 1，2，3 得到.

拔考向▶利用平行线的判定方法说明两直线平行

例 4 如图 5.2−16，$AB \perp EF$ 于 B，$CD \perp EF$ 于 D，$\angle 1=\angle 2$.

（1）请说明 $AB \parallel CD$ 的理由；

（2）试问 BM 与 DN 是否平行？为什么？

解题秘方：根据平行的几种判定方法的模型，从图中找出符合判定的条件，选用合适的方法进行说明.

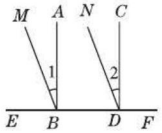


图 5.2−16

解：（1）$\because AB \perp EF$，$CD \perp EF$，

$\therefore AB \parallel CD$（在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行）.

（2）$BM \parallel DN$.

提分·秘诀

解法提醒

判定两直线平行的方法：

方法一：平行线的定义：在同一平面内，不相交的两条直线就是平行线.

方法二：平行公理的推论：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

方法三：同位角相等，两直线平行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

理由如下：

∵ $AB \perp EF$，$CD \perp EF$，

∴ $\angle ABE = \angle CDE = 90°$.

又∵ $\angle 1 = \angle 2$，

∴ $\angle ABE - \angle 1 = \angle CDE - \angle 2$（等式的性质），

即 $\angle MBE = \angle NDE$.

∴ $BM \parallel DN$（同位角相等，两直线平行）.

警示误区：∠1和∠2不是同位角，不能误认为∠1和∠2是同位角，直接得出 $BM \parallel DN$，要得到 $BM \parallel DN$，应说明 $\angle MBE = \angle NDE$.

方法四：内错角相等，两直线平行.

方法五：同旁内角互补，两直线平行.

方法六：在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用逆向思维法探究有关平行的拐角问题

挑战·高分

例 5 如图 5.2-17 是一块弯曲的角铁，其中拐角 $\angle ABD = 130°$，现从点 C 处作第二次弯曲，使弯曲后的方向与 AB 的方向平行，求第二次拐角的度数.

特别提醒

解决拐角问题，关键是紧扣弯曲后的方向与哪个方向平行. 当拐角的方向不明确时，要注意分类考虑拐角的方向.

解题秘方：由于第二次弯曲后的方向与 AB 的方向平行，故可根据平行线的判定方法，逆向找第二次拐角与第一次拐角之间的关系.

解：当在点 C 处向左弯曲时，如图 5.2-18①所示，要使 AB 与 CD 平行，则需 $\angle ABC + \angle BCD = 180°$.

因为 $\angle ABC = 130°$，所以第二次拐角 $\angle BCD = 50°$.

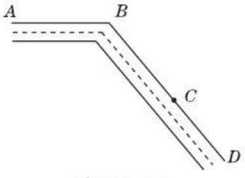


图 5.2-17

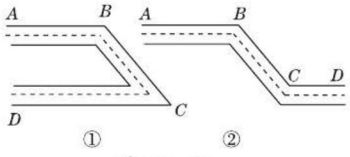


图 5.2-18

当在点 C 处向右弯曲时，如图 5.2-18②所示，要使 AB 与 CD 平行，则需 $\angle ABC = \angle BCD$.

因为 $\angle ABC = 130°$，所以第二次拐角 $\angle BCD = 130°$.

拔尖角度 2 利用分析综合法寻找说明平行的方法

挑战·高分

例 6 如图 5.2-19 所示，$\angle B = \angle D$，$\angle CEF = \angle A$，试问 CD 与 EF 平行吗？为什么？

方法点拨

寻找说明平行的方法：

1. **分析法**：由结论往前推，要说明这个结论成立需要什么样的条件，一直递推到已知条件为止；

解题秘方：方法 1：要说明 $CD \parallel EF$，我们无法找出相等的同位角、内错角，也无法说明其同旁内角互补，因此需找第三条直线与它们平行（即 $AB \parallel CD$，$AB \parallel EF$）即可，这都能由已知 $\angle B = \angle D$，$\angle CEF = \angle A$ 说明.

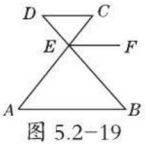


图 5.2-19

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法2：由已知 $\angle B=\angle D$，$\angle CEF=\angle A$ 很容易就能得出 $AB\parallel CD$ 及 $EF\parallel AB$，再由平行公理的推论就可得到 $CD\parallel EF$.

解：$CD\parallel EF$，理由如下：

$\because \angle B=\angle D$，

$\therefore AB\parallel CD$（内错角相等，两直线平行）.

$\because \angle CEF=\angle A$，

$\therefore EF\parallel AB$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore CD\parallel EF$（平行于同一条直线的两条直线平行）.

2. **综合法**：由已知条件一步一步往后推理，看这个已知条件能推出什么结论，一直推导出要说明的结论为止；

3. **两头凑**：当遇到复杂问题的时候，我们常常将分析法和综合法同时进行，即由两头向中间推，寻找到中间的结合点.

拔尖角度 3 利用作辅助线法说明两条直线平行

例7 如图5.2-20，若 $MN\perp AB$，$\angle ABC=130°$，$\angle FCB=40°$，试判断直线 MN 与 EF 的位置关系，并说明理由.

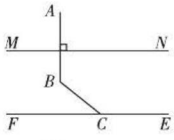
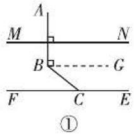
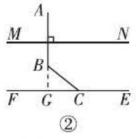


图 5.2-20





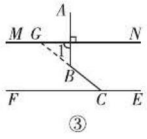


图 5.2-21

解题秘方：将折断的截线延长，使其形成位置角，利用位置角的数量关系说明两条被截线平行.

解：$MN\parallel EF$. 理由如下：

方法一 过点 B 作 $BG\perp AB$，如图5.2-21①.

$\because AB\perp MN$，$BG\perp AB$，$\therefore MN\parallel BG$，$\angle ABG=90°$.

又 $\because \angle ABC=130°$，$\therefore \angle GBC=40°$.

$\because \angle FCB=40°$，$\therefore \angle GBC=\angle FCB$.

$\therefore BG\parallel EF$，$\therefore MN\parallel EF$.

方法二 延长 AB 交 EF 于点 G，如图5.2-21②.

$\because \angle ABC=130°$，$\therefore \angle GBC=180°-\angle ABC=50°$.

又 $\because \angle FCB=40°$，

$\therefore \angle BGC=180°-\angle GBC-\angle FCB=90°$.

$\therefore AG\perp EF$.

又 $\because AG\perp MN$，$\therefore MN\parallel EF$.

方法三 延长 CB 交 MN 于点 G，如图5.2-21③.

$\because MN\perp AB$，$\therefore \angle 1=90°$.

$\because \angle ABC=130°$，$\therefore \angle ABG=180°-\angle ABC=50°$.

$\therefore \angle NGB=180°-\angle ABG-\angle 1=40°$.

$\because \angle FCB=40°$，$\therefore \angle NGB=\angle FCB$，

$\therefore MN\parallel EF$.

挑战·高分

解法提醒

- 辅助线：题目已知条件中不存在，为了解题方便人为添加的直线叫做辅助线，一般都用虚线的形式呈现.
- 作辅助线时，要抓住关键点，如本题截线被折断，所以通过补充完整的截线来作辅助线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的重要考点就是平行线的判定，平行线的判定是解决其他几何问题的基础，直接考查时，一般出现在填空题和选择题中，平时考查时，以简单的几何推理形式出现.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用平行线判定方法找寻两线平行的条件

例8 [中考·深圳]如图5.2-22，下列选项中，哪个不可以得到$l_1 // l_2$？（　　）

A. $\angle 1=\angle 2$　　B. $\angle 2=\angle 3$

C. $\angle 3=\angle 5$　　D. $\angle 3+\angle 4=180°$

试题评析：本题考查了平行线的判定，解题的关键是掌握平行线的判定方法.

解：A选项中，因为$\angle 1$与$\angle 2$是同位角，根据同位角相等，两直线平行可得到$l_1 // l_2$；B选项中，$\angle 2$与$\angle 3$是内错角，根据内错角相等，两直线平行可得到$l_1 // l_2$；

D选项中，$\angle 3$与$\angle 4$是同旁内角，根据同旁内角互补，两直线平行可得到$l_1 // l_2$；

只有C选项不能得到$l_1 // l_2$.

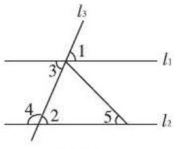


图5.2-22

答案：C

考法点评

在运用同位角、内错角、同旁内角判定直线是否平行时，一定要搞清楚这一对角是由哪两条直线被哪一条直线所截而形成的，从而确定这两条直线是否平行.

考法2 利用平行线的判定方法从不同角度说明两直线平行

例9 如图5.2-23，直线MN和直线AB，CD，EF分别交于点G，H，P，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2+\angle 3=180°$，试问：AB与EF平行吗？为什么？

试题评析：本题考查了平行线的判定方法，解题的关键是根据已知位置角的数量关系选择合适的判定方法进行说明.

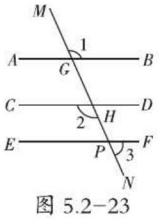


图5.2-23

解：$AB // EF$. 理由如下：

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle AGH$，

$\therefore \angle 2=\angle AGH$.

$\therefore AB // CD$（同位角相等，两直线平行）.

$\because \angle 2+\angle 3=180°$，$\angle 3=\angle EPH$，

$\therefore \angle 2+\angle EPH=180°$.

$\therefore EF // CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

$\therefore AB // EF$（平行公理的推论）.

另解1

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle GHD$，

$\therefore \angle 1=\angle GHD$.

$\therefore AB // CD$.

$\because \angle 2+\angle 3=180°$，

$\angle 2+\angle DHP=180°$，

$\therefore \angle 3=\angle DHP$.

$\therefore EF // CD$.

$\therefore AB // EF$.

另解2

$\because \angle 2+\angle 3=180°$，

$\angle 3+\angle HPF=180°$，

$\therefore \angle 2=\angle HPF$.

$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 1=\angle HPF$.

$\therefore AB // EF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见252页

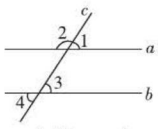
1. [中考·山西]如图，直线 a，b 被直线 c 所截，下列条件不能判定直线 a 与 b 平行的是（　　）

A. $\angle 1=\angle 3$

B. $\angle 2+\angle 4=180°$

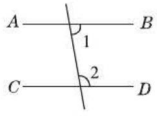
C. $\angle 1=\angle 4$

D. $\angle 3=\angle 4$

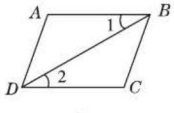


（第1题）

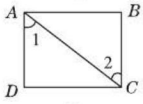
2. [中考·福州]下列图形中，由 $\angle 1=\angle 2$ 能得到 $AB\parallel CD$ 的是（　　）



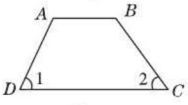
A



B



C



D

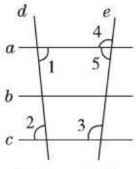
3. [中考·黔南州]如图，下列说法错误的是（　　）

A. 若 $a\parallel b$，$b\parallel c$，则 $a\parallel c$

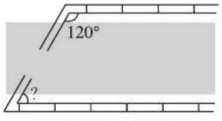
B. 若 $\angle 1=\angle 2$，则 $a\parallel c$

C. 若 $\angle 3=\angle 2$，则 $b\parallel c$

D. 若 $\angle 3+\angle 5=180°$，则 $a\parallel c$



（第3题）



（第4题）

4. [中考·邵阳]如图所示，要在一条公路的两侧铺设平行管道，已知一侧铺设的角度为 $120°$，为使管道对接，另一侧铺设的角度大小为（　　）

A. $120°$　　B. $100°$　　C. $80°$　　D. $60°$

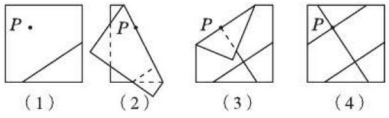
5. 学习了平行线的判定后，小敏想出了过已知直线外一点画这条直线的平行线的新方法，她是通过折一张半透明的纸得到的，如图（1）~（4），从图中可知，小敏画平行线的依据有（　　）

①同位角互补，两直线平行；

②内错角互补，两直线平行；

③同位角相等，两直线平行；

④内错角相等，两直线平行.



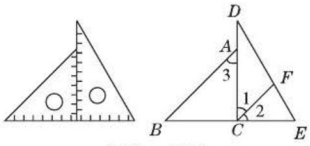
（第5题）

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

6. [中考·邵阳]将一副三角尺拼成如图所示的图形，过点 C 作 CF 平分 $\angle DCE$ 交 DE 于点 F.

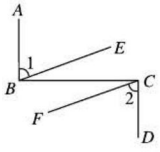
（1）试说明 $CF\parallel AB$；

（2）求 $\angle DFC$ 的度数.



（第6题）

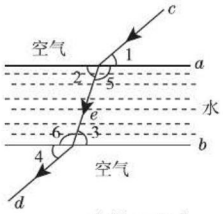
7. 如图，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$ 且 $\angle 1=\angle 2$，试说明 $BE\parallel CF$.　　【导学号：7207895】



（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 光线从空气射入水中时，传播方向会发生改变，这种现象叫做光的折射现象．同样，光线从水中射入空气中时，也会发生折射现象，一束光线从空气射入水中再从水中射入空气中时，光线的传播方向如图，其中，直线 a，b 都表示空气与水的分界面，e 表示光线在水中的部分．已知 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$，请你判断光线 c 与 d 是否平行，为什么？



（第 8 题）

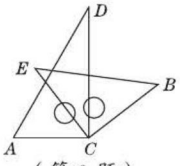
9. [探究题]将一副三角尺按如图所示的方式叠放在一起（其中 $\angle A=60°$，$\angle D=30°$，$\angle E=\angle B=45°$）．

（1）①若 $\angle DCE=45°$，则 $\angle ACB$ 的度数为_____；

②若 $\angle ACB=140°$，则 $\angle DCE$ 的度数为_____；

（2）由（1）猜想 $\angle ACB$ 与 $\angle DCE$ 的数量关系，并说明理由；

（3）若将三角尺 ECB 绕点 C 旋转，当 $\angle ACE<180°$ 且点 E 在直线 AC 的上方时，这两块三角尺是否存在一组边互相平行？若存在，请直接写出 $\angle ACE$ 所有可能的度数（不必说明理由）；若不存在，请说明理由．



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.3 平行线的性质

5.3.1 平行线的性质

核心知识
- 平行线的性质 1
- 平行线的性质 2
- 平行线的性质 3

知识链接

平行线的性质 —条件→ 两直线平行 —结论→ 同位角相等 / 内错角相等 / 同旁内角互补

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线的性质 1

1. 性质 1： 两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.

简单说成： 两直线平行，同位角相等.

表达方式： 如图 5.3-1，因为 $a \parallel b$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

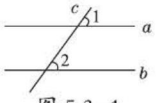


图 5.3-1

2. 平行线的性质与平行线的判定的区别：

（1）平行线的判定是根据两角的数量关系得到两条直线的位置关系，而平行线的性质是根据两条直线的位置关系得到两角的数量关系；

（2）平行线的判定的条件是平行线的性质的结论，而平行线的判定的结论是平行线的性质的条件.

提分·必记

特别警示

- 两条直线平行是前提，只有在这个前提下才有同位角相等；
- 格式书写时，顺序不能颠倒，与判定不能混淆.

拨考向 利用平行线的性质 1 解决问题

类型 1：利用平行线的性质 1 求角的度数

例 1 如图 5.3-2，把三角尺的直角顶点放在直尺的一边上，若 $\angle 1 = 30°$，则 $\angle 2$ 的度数为（　　）

A.60°　　B.50°　　C.40°　　D.30°

解题秘方： 根据直尺的两边分别平行，利用平行线的性质建立已知角 $\angle 1$ 与待求的角 $\angle 2$ 之间的数量关系.

解： ∵ $\angle 1 + \angle BAC + \angle DAB = 180°$，$\angle BAC = 90°$，$\angle 1 = 30°$，

∴ $\angle DAB = 180° - \angle 1 - \angle BAC = 60°$.

∵直尺的两边平行，即 $EF \parallel AD$，∴ $\angle 2 = \angle DAB = 60°$.

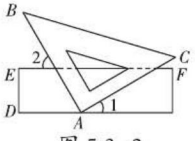


图 5.3-2

答案： A

方法点拨： 利用平行线的性质 1 求角度时，主要看要求的角与已知角之间是否是已知的平行线被第三条直线所截的同位角，若是，可直接求出；若不是，还需要通过中间角进行转化.

提分·秘诀

另解

如图 5.3-3，设 EF 与 AB，AC 分别交于点 H，G.

∵直尺的两边平行，即 $EF \parallel AD$，

∴ $\angle AGE = \angle 1 = 30°$.

∵ $\angle BAC = 90°$，

∴ $\angle AHG + \angle AGE = 90°$.

∴ $\angle AHG = 90° - \angle AGE = 60°$.

∴ $\angle 2 = \angle AHG = 60°$.

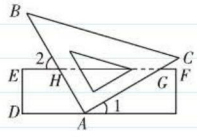


图 5.3-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用平行线的性质 1 进行推理说明

例 2 如图 5.3-4，若 $AB \parallel CD$，且 $\angle 1 = \angle 2$，试判断 AM 与 CN 的位置关系，并说明理由.

解题秘方：利用已知的平行线和要说明的平行线的同位角之间的数量关系去推理说明.

解：$AM \parallel CN$. 理由如下：

$\because AB \parallel CD$（已知），

$\therefore \angle BAE = \angle ACD$（两直线平行，同位角相等）.

又 $\because \angle 1 = \angle 2$（已知），

$\therefore \angle MAE = \angle NCA$（等式的性质）.

$\therefore AM \parallel CN$（同位角相等，两直线平行）.

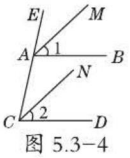


图 5.3-4

解法提醒

平行线和角的大小关系是紧密联系在一起的，由平行线可以得到相等的角，反过来又可以由相等的角得到新的一组平行线，这种角的大小关系与直线的位置关系的相互转化在解题中会经常涉及.

知识 2 平行线的性质 2

1. 性质 2：两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

简单说成：两直线平行，内错角相等.

2. 表达方式：如图 5.3-5，

因为 $a \parallel b$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

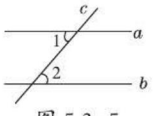


图 5.3-5

提分·必记

特别警示

并不是所有的内错角都相等，只有在“两直线平行”的前提下，才有内错角相等.

考向 利用平行线的性质 2 进行推理说明

例 3 如图 5.3-6，$AB \parallel CD$，BE 平分 $\angle ABC$，CF 平分 $\angle BCD$，你能发现 BE 和 CF 有何特殊的位置关系吗？说说你的理由.

解题秘方：由两直线平行得到内错角相等，再由内错角相等得到两直线平行.

解：$BE \parallel CF$. 理由如下：

$\because AB \parallel CD$（已知），

$\therefore \angle ABC = \angle BCD$（两直线平行，内错角相等）.

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$，CF 平分 $\angle BCD$（已知），

$\therefore \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BCD$（角平分线的定义）.

$\therefore \angle 2 = \angle 1$.

$\therefore BE \parallel CF$（内错角相等，两直线平行）.

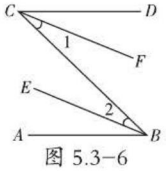


图 5.3-6

方法点拨：通过同位角相等、内错角相等或同旁内角互补，我们可以得出两直线平行. 根据两直线平行，我们又可以得出同位角相等、内错角相等或同旁内角互补.

提分·秘诀

方法点拨

综合法与分析法

几何推理的方法主要有两种：

一种是综合法，即由“因”导“果”，由已知条件逐步推导出结论；

另一种是分析法，即执“果”索“因”，根据要推出的结论，必须找到什么样的条件，一步一步反向找到条件.

解答问题时一般用综合法，分析问题时一般用分析法，有时也可以两种方法综合应用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 3 平行线的性质 3

1. **性质 3**：两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补.

简单说成：两直线平行，同旁内角互补.

2. **表达方式**：如图 5.3−7，

因为 $a \parallel b$（已知），

所以 $\angle 1+\angle 2=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

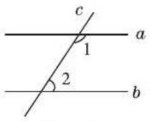


图 5.3−7

提分·必记

警示误区

- 两直线平行时，同旁内角是互补的关系而不是相等的关系；
- 平行线的性质是由“位置关系”到“数量关系”；而平行线的判定是由“数量关系”到“位置关系”.

拔考向▸ 利用平行线的性质 3 求角的度数

例 4 [中考·黄冈]已知：如图 5.3−8，直线 $a \parallel b$，$\angle 1=50°$，$\angle 2=\angle 3$，则 $\angle 2$ 的度数为（　　）

A.50°　　B.60°　　C.65°　　D.75°

解题秘方：由平行线的性质找出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 之间的数量关系，利用 $\angle 1$ 的度数求出 $\angle 2$ 的度数.

解：$\because a \parallel b$，$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$.

又 $\because \angle 1=50°$，$\therefore \angle 2+\angle 3=130°$.

$\because \angle 2=\angle 3$，$\therefore \angle 2=65°$.

答案：C

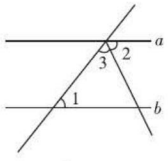


图 5.3−8

提分·秘诀

方法点拨

解决与平行线性质有关的计算题时，要熟悉图形及其性质，还要能结合其他角（如对顶角、邻补角等）的相关性质，把待求的角与已知角逐步联系起来.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用折叠法求平行线中的角度问题

例 5 如图 5.3−9，将一张长方形的纸片沿 EF 折叠后，点 D，C 分别落在 D'，C' 的位置上，ED' 与 BC 的交点为点 G，若 $\angle EFG=50°$，求 $\angle EGB$ 的度数.

解题秘方：根据长方形纸片的对边平行，运用平行线的性质，结合折叠的性质可以建立已知角和未知角之间的数量关系.

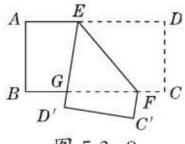


图 5.3−9

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形（已知），

$\therefore \angle A=\angle B=90°$（长方形的定义）.

$\therefore \angle A+\angle B=180°$，$\therefore AD \parallel BC$（同旁内角互补，两直线平行）.

$\therefore \angle DEF=\angle EFG$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\because \angle EFG=50°$（已知），$\therefore \angle DEF=50°$（等量代换）.

又 $\because \angle DEF=\angle D'EF$（折叠的性质），

$\therefore \angle D'EF=50°$（等量代换）.

$\therefore \angle AEG=180°-\angle DEF-\angle D'EF=80°$（平角的定义）.

$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle AEG+\angle EGB=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\therefore \angle EGB=180°-\angle AEG=180°-80°=100°$.

挑战·高分

解法提醒

- 根据折叠可找出相等的角：$\angle DEF=\angle GEF$，$\angle EFC=\angle EFC'$；
- 根据平行线的性质可以得出如下角的数量关系：$\angle DEF=\angle EFG$，$\angle AEG=\angle EGF$，$\angle AEG+\angle BGE=180°$，$\angle GEF+\angle EFC'=180°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用作图法探究平行线中的两个角之间的数量关系

挑战·高分

结论归纳

若一个角的两边分别与另一个角的两边平行，则这两个角相等或互补.

例 6 已知一个角的两边分别平行于另一个角的两边，则这两个角之间有何数量关系？并说明理由.

解题秘方：根据题意，画出图形（同类结论的图形只画一次），利用平行线的性质去探究两个角之间的数量关系.

解：这两个角相等或者互补，如图 5.3−10，$AB \parallel DE$，$EF \parallel BC$，则$\angle B = \angle E$，理由如下：

$\because AB \parallel DE$，$\therefore \angle B = \angle 1$.

又 $\because EF \parallel BC$，$\therefore \angle E = \angle 1$.

$\therefore \angle B = \angle E$.

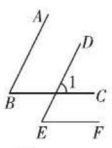


图 5.3−10

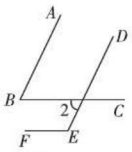


图 5.3−11

如图 5.3−11，$AB \parallel DE$，$EF \parallel BC$，则$\angle B + \angle E = 180°$，理由如下：

$\because AB \parallel DE$，$\therefore \angle B = \angle 2$.

又 $\because EF \parallel BC$，$\therefore \angle 2 + \angle E = 180°$. $\therefore \angle B + \angle E = 180°$.

综上所述，$\angle B = \angle E$ 或 $\angle B + \angle E = 180°$.

拔尖角度 3 利用拐点添辅助线法探究角之间的数量关系

挑战·高分

技巧点拨

两条平行线间存在拐点时，通常过拐点作平行线，构造出同位角、内错角、同旁内角，为应用平行线的性质创造条件.

例 7 如图 5.3−12，$AB \parallel CD$，分别探索下面四个图中$\angle P$与$\angle A$，$\angle C$之间的关系.

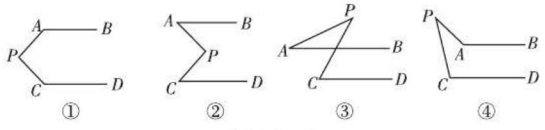


图 5.3−12

解题秘方：分别过拐点作已知直线的平行线，利用平行线的性质求解.

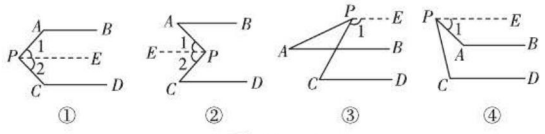


图 5.3−13

解：图 5.3−12 ①中，$\angle APC + \angle A + \angle C = 360°$.

理由如下：如图 5.3−13 ①，过点 P 作 $PE \parallel AB$.

$\because AB \parallel CD$（已知），

$\therefore PE \parallel AB \parallel CD$（平行于同一条直线的两条直线互相平行）.

$\therefore \angle 1 + \angle A = 180°$（两直线平行，同旁内角互补），

$\angle 2 + \angle C = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

$\therefore \angle 1 + \angle A + \angle 2 + \angle C = 360°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵∠APC=∠1+∠2，∴∠APC+∠A+∠C=360°.

图5.3-12②中，∠APC=∠A+∠C.

理由如下：如图5.3-13②，过点P作PE∥AB.

∵AB∥CD，∴PE∥AB∥CD.

∴∠A=∠1，∠2=∠C.

∵∠APC=∠1+∠2，∴∠APC=∠A+∠C.

图5.3-12③中，∠APC+∠A=∠C.

理由如下：如图5.3-13③，过点P作PE∥AB.

∴∠EPA+∠A=180°.

∵∠EPA=∠APC+∠1，∴∠APC+∠1+∠A=180°，

∴∠APC+∠A=180°−∠1.

∵AB∥CD，∴PE∥CD.

∴∠1+∠C=180°，∴∠C=180°−∠1.

∴∠APC+∠A=∠C.

图5.3-12④中，∠A=∠APC+∠C.

理由如下：如图5.3-13④，过点P作PE∥AB，

则∠1+∠A=180°，即∠1=180°−∠A.

∵AB∥CD，∴PE∥CD.

∴∠EPC+∠C=180°，即∠1+∠APC+∠C=180°.

∴180°−∠A+∠APC+∠C=180°.

∴∠A=∠APC+∠C.

另解

如图5.3-14，过点P作PE∥AB.

∵AB∥CD，∴PE∥CD.

∴∠EPC=∠C.

∵∠EPC=∠1+∠APC，

∴∠C=∠1+∠APC.

∵PE∥AB，

∴∠1=∠A.

∴∠APC+∠A=∠C.

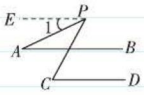


图5.3-14

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是平行线的性质，主要考查利用平行线的性质及对顶角、邻补角和角平分线的性质等求角的度数或探究角之间的数量关系．有时借助直尺或三角尺等学具进行综合考查．

三年中考兵法

考法1 利用平行线的性质求角的度数

例8 [中考·宁波]已知直线m∥n，将一块含30°角的直角三角尺ABC按如图5.3-15方式放置（∠ABC=30°），其中A，B两点分别落在直线m，n上，若∠1=20°，则∠2的度数为（　　）

A.20°　　B.30°　　C.45°　　D.50°

试题评析：本题考查了平行线的性质，解决问题的关键是利用平行线的性质建立图中角之间的数量关系．

解：因为m∥n，

所以∠2=∠ABC+∠1=30°+20°=50°.

答案：D

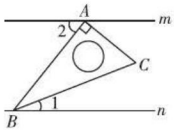


图5.3-15

冲刺·满分

考试对策

利用平行线的性质求角的度数的方法：

题目中出现两直线平行的条件时，应立即想到平行线的三个性质，要注意分析图形特征，明确角与角的位置关系，从而明确角与角之间的数量关系是相等还是互补．平行线还通常会与角平分线、垂线等知识结合，求

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用平行线的判定与性质综合求角的度数

例 9 [中考·宿迁]如图 5.3-16，直线 a，b 被直线 c，d 所截．若 $\angle 1=80°$，$\angle 2=100°$，$\angle 3=85°$，则 $\angle 4$ 的度数是（　　）

A.80°　　B.85°

C.95°　　D.100°

试题评析：本题考查了平行线的判定和性质，解题的关键是判断直线 $a \parallel b$，找出 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 具有相等关系．

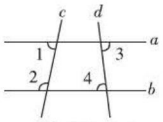


图 5.3-16

解：$\because \angle 1=80°$，$\angle 2=100°$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=180°$．$\therefore a \parallel b$.

$\therefore \angle 4=\angle 3=85°$.

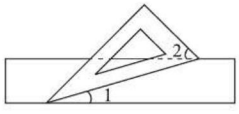
答案：B

角的度数有时需要根据已知条件综合利用角平分线、垂线的定义以及对顶角相等、邻补角互补等性质求解．

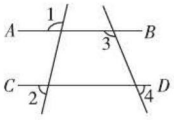
两年模拟兵法 ☞答案见 252 页

1. [中考·绵阳]如图，有一块含有 30° 角的直角三角尺的两个顶点放在直尺的对边上，如果 $\angle 2=44°$，那么 $\angle 1$ 的度数是（　　）

A.14°　　B.15°　　C.16°　　D.17°



（第 1 题）



（第 2 题）

2. [中考·滨州]如图，直线 $AB \parallel CD$，则下列结论正确的是（　　）

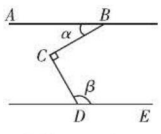
A. $\angle 1=\angle 2$　　B. $\angle 3=\angle 4$

C. $\angle 1+\angle 3=180°$　　D. $\angle 3+\angle 4=180°$

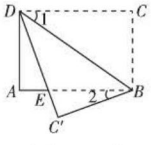
3. [中考·潍坊]如图，$\angle BCD=90°$，$AB \parallel DE$，则 $\angle \alpha$ 与 $\angle \beta$ 满足（　　）

A. $\angle \alpha+\angle \beta=180°$　　B. $\angle \beta-\angle \alpha=90°$

C. $\angle \beta=3\angle \alpha$　　D. $\angle \alpha+\angle \beta=90°$



（第 3 题）



（第 4 题）

4. [中考·山西]如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠，得到三角形 $BC'D$，$C'D$ 与 AB 交于点 E．若 $\angle 1=35°$，则 $\angle 2$ 的度数为（　　）

A.20°　　B.30°　　C.35°　　D.55°

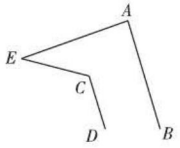
5. 如图所示：已知 $AB \parallel CD$，$\angle BAE=87°$，$\angle DCE=121°$，则 $\angle E$ 的度数是（　　）

A. 28°

B. 34°

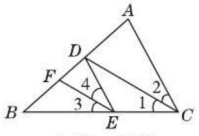
C. 46°

D. 56°



（第 5 题）

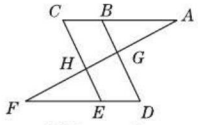
6. 如图，已知 $\angle 1=\angle 2$，$DC \parallel EF$，$DE \parallel AC$，试说明 $\angle 3=\angle 4$.　　【导学号：7207895】



（第 6 题）

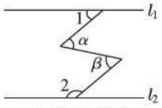
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，已知点 E 在直线 DF 上，点 B 在直线 AC 上，且 $\angle AGB=\angle EHF$，$\angle C=\angle D$，试说明 $\angle A=\angle F$.



（第 7 题）

8. [中考·泰州] 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，$\angle \alpha=\angle \beta$，$\angle 1=40°$，求 $\angle 2$ 的度数.



（第 8 题）

素养提分 行动篇

平行线间的是非曲直

平行线的性质与判定都与平行线被第三条直线所截的位置角（同位角、内错角、同旁内角）有关系，平行线的性质揭示了这些位置角的数量关系，为后面证明三角形全等或相似提供了角相等的依据，也为求角的度数提供了思路，近几年中考中有关平行线的试题也是五花八门，抓住截线不放.

类型 1：将截线折断后任意拉伸探究角的关系

（1）如图 5.3−17 ②，在平行线内部将截线折断，有两个重要的结论：

Ⅰ. $\angle 1+\angle 2=\angle A$，Ⅱ. $\angle 3+\angle A+\angle 4=360°$.

其实这两个结论与截线是直的时候的结论是一样的，如图 5.3−17 ①，$\angle A=180°$，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3+\angle 4=180°$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle A$，$\angle A+\angle 3+\angle 4=360°$.

将截线折断拉伸，$\angle A$ 的度数在变化，同时 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数也随之在改变，但它们之间的数量关系还是不变.

（2）若将截线的折点拉至两条平行线的外部，如图 5.3−17 ③，过点 B，C 作直线，易知 $180°+\angle 1+180°-\angle 2+\angle A=360°$，$\therefore \angle A=\angle 2-\angle 1$. 由此不管将折点拉伸至何处，其根本的平行线的性质永远保持不变.

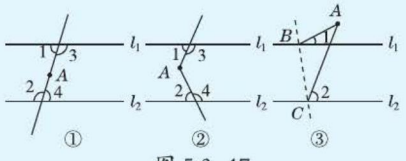


图 5.3−17

类型 2：夹在两条平行线之间的图形面积的探究

如图 5.3−18 ①，平行四边形的面积为 S，将两条截线以同样的方式折断拉伸，如图 5.3−18 ②，$S_{阴影}=S$. 若将两条截线以同样的方式，在平行线内部无数次左右折断，如图 5.3−18 ③，$S_{阴影}=S$.

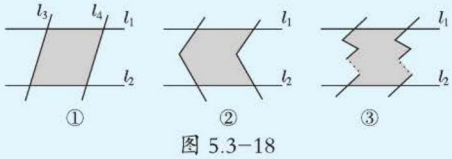


图 5.3−18

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.3.2 命题、定理、证明

核心知识
- 命题及其结构
- 命题的真假
- 定理与证明

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 命题

1. 定义： 判断一件事情的语句，叫做命题.

特别解读：（1）命题只是对事情进行判断，判断的结果可能是正确的，也可能是错误的；

（2）命题必须是一个完整的句子，不能是一个词语；

（3）命题必须具有“判断”作用，要对事情作出肯定或否定的判断，故命题不能是祈使句或疑问句.

2. 命题的结构： 命题由题设（条件）和结论两部分组成. 题设（条件）是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.

3. 命题的种类：

（1）**真命题：** 如果题设成立，那么结论一定成立，这样的命题叫做真命题.

（2）**假命题：** 题设成立时，不能保证结论一定成立，这样的命题叫做假命题.

提分·必记

特别提醒

- 命题常可以写成“如果……那么……”的形式，其中“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论.
- 有些命题的题设和结论不明显，可将它经过适当变形，改写成“如果……那么……”的形式.

拨考向 利用命题相关概念解决问题

类型 1：利用命题的结构形式改写命题

例 1 把下列命题改写成“如果……那么……”的形式.

（1）对顶角相等；

（2）垂直于同一条直线的两条直线平行；

（3）同角或等角的余角相等.

解题秘方： 紧扣命题的结构形式进行改写.

解：（1）如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

（2）如果两条直线垂直于同一条直线，那么这两条直线平行.

（3）如果两个角是同一个角的余角或两个相等的角的余角，那么这两个角相等.

提分·秘诀

解法提醒

- 命题改写的原则：不改变命题的原意.
- 命题改写的方法：先弄清命题的题设（已知事项）部分和结论部分，再将其改写为“如果……那么……”的形式：“如果”后面跟的是已知事项，“那么”后面跟的是由已知事项推出的事项（即结论）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用判断命题真假的方法判断命题的真假

例 2 指出下列命题的题设和结论，并判断是真命题还是假命题.

（1）互为补角的两个角相等；

（2）若 $a=b$，则 $a+c=b+c$；

（3）如果两个长方形的周长相等，那么这两个长方形的面积相等.

解题秘方：紧扣真命题和假命题的意义进行判断.

解：（1）题设：两个角互为补角；结论：这两个角相等. 假命题.

（2）题设：$a=b$；结论：$a+c=b+c$. 真命题.

（3）题设：两个长方形的周长相等；

结论：这两个长方形的面积相等. 假命题.

解法提醒

判断一个命题是假命题，只要举出一个例子（反例），它符合命题的题设，但不满足结论就可以了，而说明一个命题是真命题，需要从已知出发，经过一步一步推理，最后得出正确结论.

点知识 ▸ 2 定理与证明

1. 定理：经过推理证实得到的真命题叫做定理.

2. 证明：在很多情况下，一个命题的正确性需要经过推理才能作出判断，这个推理过程叫做证明.

（1）证明一个命题是真命题的依据可以是已知条件，也可以是学过的定义、基本事实（公理）、定理等.

（2）证明一个命题是假命题，只要举出一个反例即可.

3. 证明的一般步骤：

（1）审题，分清命题的题设和结论；

（2）画图，结合图形写出已知和求证；

（3）分析因果关系，找出证明途径；

（4）有条理地写出证明过程.

提分·必记

特别解读

定义、命题、基本事实（公理）、定理之间的区别与联系

联系：这四者都是命题.

区别：定义、基本事实（公理）、定理都是真命题，都**可以作为进一步判断其他命题真假的依据**，只不过基本事实（公理）是最原始的依据；而命题不一定是真命题，因而**不一定能作为进一步判断其他命题真假的依据**.

拔考向 ▸ 利用已学过的基本事实或定理填写推理的依据

例 3 填写下列证明过程中的推理根据.

如图 5.3-19，已知 AC，BD 相交于点 O，DF 平分 $\angle CDO$ 与 AC 相交于点 F，BE 平分 $\angle ABO$ 与 AC 相交于点 E，$\angle A=\angle C$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

解题秘方：根据上一步的因为条件填写下一步的论据的依据.

证明：$\because \angle A=\angle C$（已知），

$\therefore AB \parallel CD$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle ABO=\angle CDO$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\because DF$ 平分 $\angle CDO$，BE 平分 $\angle ABO$（已知），

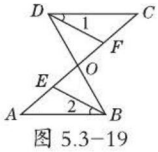


图 5.3-19

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle CDO$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABO$（角平分线的定义）.

$\therefore \angle 1=\angle 2$（等量代换）.

提分·秘诀

方法点拨

证明是从条件出发，经过一步一步推理，最后推出结论的过程. 证明的每一步推理都要有根据，不能“想当然”，这些根据可以是已知条件，也可以是定义、基本事实、已学过的定理. 在初学证明时要把根据写在每一步推理后面的括号里，如本例中的“已知”“等量代换”等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度 1 利用综合法或分析法进行推理证明

例4 已知：如图5.3-20所示，$DE \perp AC$于点E，$BC \perp AC$于点C，$FG \perp AB$于点G，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$CD \perp AB$.

解题秘方：可由条件进行分析得到结论，也可由结论逆推符合条件.

证明：$\because DE \perp AC$，$BC \perp AC$（已知），

$\therefore \angle 5=\angle ACB=90°$（垂直的定义）.

$\therefore DE /\!/ BC$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle 2=\angle 3$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because \angle 1=\angle 2$（已知），$\therefore \angle 1=\angle 3$（等量代换）.

$\therefore GF /\!/ CD$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle 4=\angle 6$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because FG \perp AB$（已知），$\therefore \angle 6=90°$（垂直的定义）.

$\therefore \angle 4=90°$（等量代换）. $\therefore CD \perp AB$（垂直的定义）.

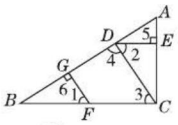


图 5.3-20

挑战·高分

解法思路展示

分析法（由果索因）

$CD \perp AB$

⇓

$FG \perp AB$，$\angle BDC=90°$

⇓

$FG /\!/ CD$

⇓

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$

⇓

$\angle 2=\angle 3$

⇓

$DE /\!/ BC$

⇓

$BC \perp AC$，$DE \perp AC$

拨尖角度 2 利用建模思想对文字命题进行证明

例5 求证：两条平行线被第三条直线所截，同位角的角平分线互相平行.

解题秘方：分析命题的题设和结论，写出已知和求证，最后写出证明过程.

已知：如图5.3-21，$AB /\!/ CD$，GP平分$\angle EGB$，HQ平分$\angle EHD$.

求证：$GP /\!/ HQ$.

证明：$\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle EGB=\angle GHD$.

$\because GP$平分$\angle EGB$，$\therefore \angle EGP=\frac{1}{2}\angle EGB$.

又$\because HQ$平分$\angle GHD$，$\therefore \angle GHQ=\frac{1}{2}\angle GHD$.

$\therefore \angle EGP=\angle GHQ$. $\therefore GP /\!/ HQ$.

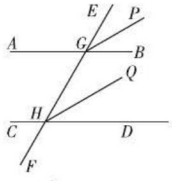


图 5.3-21

挑战·高分

方法点拨

证明一个命题的一般步骤：

1. 分清命题的题设和结论，如果与图形有关，首先根据题意，画出图形，并在图形上标出有关字母与符号；
2. 根据题设、结论，结合图形，写出已知、求证；
3. 经过分析，找出由已知推出结论的途径，有条理地写出证明过程.

拨尖角度 3 利用归纳法探究平行线中的拐角的规律

例6 阅读下面材料，并解答下列问题：

如图5.3-22①，$AB /\!/ CD$，EO和FO交于点O. 过点O向右作AB的平行线，我们可以得出$\angle 2$与$\angle 1$，$\angle 3$之间的数量关系是$\angle 2=\angle 1+\angle 3$.

（1）如图5.3-22②，直线$l_1 /\!/ l_2$，$AB \perp l_1$，垂足为O，BC与l_2相交于点E，若$\angle 1=30°$，则$\angle B=$_____.

（2）如图5.3-22③，$AB /\!/ CD$，则图中$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$之间的数量关系是什么？并说明理由.

挑战·高分

解法提醒

平行线间拐角问题的规律探究，通常是过拐点作平行线，利用平行公理及其推论得到一组（几组）平行线后，由平行线的性质来完成对问题的探究.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）如图 5.3-22 ④，$AB \parallel CD$，试猜想图中 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，…，$\angle(2n-1)$，$\angle 2n$ 之间的数量关系．

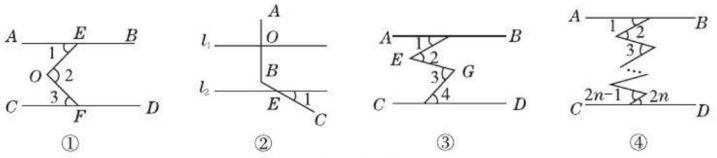


图 5.3-22

解题秘方：本题是基本图形“Z”的变式探究题，可以按照研究基本图形“Z”的方法作出猜想和验证．

解：（1）120°　（2）$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$．

理由：如图 5.3-23，过点 E 向右作 $EF \parallel AB$，则 $\angle 1=\angle \alpha$．

过点 G 向左作 $GH \parallel EF$，则 $\angle \theta=\angle \beta$．

$\because EF \parallel AB$，$GH \parallel EF$，$\therefore AB \parallel GH$．

又 $\because AB \parallel CD$，$\therefore CD \parallel GH$．

$\therefore \angle \gamma=\angle 4$，

$\therefore \angle 1+\angle \theta+\angle \gamma=\angle \alpha+\angle \beta+\angle 4$，

即 $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$．

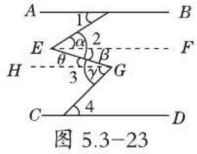


图 5.3-23

（3）猜想：$\angle 1+\angle 3+\cdots+\angle(2n-1)=\angle 2+\angle 4+\cdots+\angle 2n$．

规律点拨

两平行线之间的折线所成的角之间的关系是——奇数角之和等于偶数角之和．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

命题、定理和证明是学习几何的基础，常考的知识点有判断一个命题的真假、将命题改写成“如果……那么……”的形式，一般都比较简单，常出现在选择题和填空题中．

三年中考兵法

考法 命题真假的辨析

例 7 ［中考·凉山］下列命题中：①邻补角是互补的角；②相等的角是对顶角；③同位角相等；④两锐角的和不一定是钝角．

其中正确的个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

试题评析：本题考查命题真假的辨析，解题的关键是利用举例的方式进行辨析．

解：①邻补角是互补的角，说法正确；

②相等的角不一定是对顶角，说法错误；

③同位角相等，没有说两直线平行这个条件，说法错误；

④两锐角的和不一定是钝角，也可以是锐角，还可以是直角，说法正确．

综上可得①④正确，共 2 个，故选 C．

答案：C

冲刺·满分

详解

“不一定是”含两层意义，“是”或者“不是”“两锐角的和不一定是钝角”的意思是：两锐角的和既可能是钝角，也可能是锐角，还可能是直角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 答案见253页

1. 下列语句是命题的是（　　）

A. 画两条相等的线段

B. 等于同一个角的两个角相等吗

C. 延长线段 AO 到 C，使 $OC=OA$

D. 两条直线相交，有且只有一个交点

2. 下列命题：①对顶角相等；②相等的角是对顶角；③在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；④平行于同一条直线的两条直线垂直．其中是真命题的有（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

3. 下列说法中正确的是（　　）

A. 命题一定是正确的

B. 不正确的判断就不是命题

C. 命题可以没有题设

D. 定理一定是经过证明了的真命题

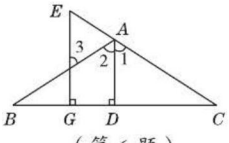
4. 下列句子：①作线段 $AB=AC$；②如果 $a=b$，那么 $|a|=|b|$；③分数都是有理数；④两点确定一条直线．其中是命题的有_____．（填序号）

5. 判断下列命题是真命题还是假命题．若是假命题，请举出反例．

（1）一个角的补角一定是钝角；

（2）互补的两个角一定是一个锐角，一个钝角．

6. 如图，$AD\perp BC$ 于 D，$EG\perp BC$ 于 G，$\angle E=\angle 3$，AD 平分 $\angle BAC$ 吗？为什么？



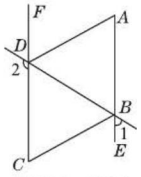
（第6题）

7. 如图，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle A=\angle C$，DA 平分 $\angle BDF$．

（1）AE 与 FC 平行吗？说明理由．

（2）AD 与 BC 的位置关系如何？为什么？

（3）BC 平分 $\angle DBE$ 吗？为什么？



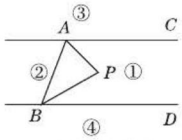
（第7题）

8. 如图，直线 $AC\parallel BD$，连接 AB，直线 AC，BD 及线段 AB 把平面分成①②③④四个部分，规定线上各点不属于任何部分．当动点 P 落在某个部分时，连接 PA，PB，构成 $\angle PAC$，$\angle PBD$，$\angle APB$ 三个角．（提示：有公共端点的两条重合的射线所组成的角是 $0°$ 角）

（1）当动点 P 落在第①部分时，求证：$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$；

（2）当动点 P 落在第②部分时，$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$ 是否成立？（直接回答成立或不成立）

（3）当动点 P 落在第③部分时，全面探究 $\angle PAC$，$\angle PBD$，$\angle APB$ 之间的关系，并写出动点 P 的具体位置和相应的结论，选择一种结论加以证明．



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.4 平移

核心知识
- 平移的定义
- 平移的性质
- 平移作图

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平移的定义

1. 平移： 把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，图形的这种移动，叫做平移.

2. 平移的“两要素”：

（1）平移的方向；

（2）平移的距离.

特别提醒： 平移图形中，原图形上的点到它对应点的方向就是平移的方向；任意一对对应点所连线段的长度就是平移的距离.

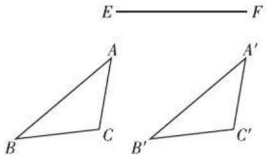


图 5.4−1

3. 平移中的对应元素：

如图 5.4−1，把三角形 ABC 沿直线 EF 的方向平移到三角形 $A'B'C'$.

对应点：点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，点 C 与点 C'；

对应线段：AB 与 $A'B'$，AC 与 $A'C'$，BC 与 $B'C'$；

对应角：$\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$.

提分·必记

特别解读

1. **图形的平移**是一种位置变换，它**只改变图形的位置，不改变图形的形状、大小、方向**.
2. **平移的方向**可以是上下平移和左右平移，也可以是按任意指定的方向平移，只要是直线方向即可.

拔考向 利用平移的定义识别平移现象

例 1 在以下现象中：①用打气筒打气时，气筒里活塞的运动；②传送带上瓶装饮料的移动；③随风摆动的旗帜；④钟摆的摆动. 属于平移的是（　　）

A. ①　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ①②③④

解题秘方： 扣住平移的定义中的关键点“直线方向”进行辨析.

解： ①中打气筒里活塞的运动属于平移；

②中传送带上瓶装饮料的形状、大小和方向均没有改变，只是改变了位置，所以属于平移；

③中随风摆动的旗帜的形状发生了改变，所以不属于平移；

④中钟摆的摆动属于旋转.

答案： B

提分·秘诀

方法提醒

判断一个运动是不是平移现象，要紧扣平移定义的特征：一变三不变，即图形的位置改变，而图形的形状、大小、方向都不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 平移的性质

1. 平移的性质：

（1）平移后得到的新图形与原图形的形状、大小完全相同；

（2）连接各组对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等；

（3）平移前后两个图形中的对应线段平行（或在同一条直线上）且相等，对应角相等.

特别警示：“连接各组对应点的线段”和“对应线段”是不同的，“连接各组对应点的线段”是原图形上的点与平移后的图形上的点连接而成的；而“对应线段”就存在于原来的图形与平移后的图形之中，是图形的一部分.

2. 示图：平移后，图形中有平行且相等的线段、相等的角. 如图 5.4−2，三角形 ABC 平移到三角形 $A'B'C'$ 的位置，则

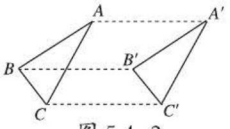


图 5.4−2

（1）$AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，$BC \parallel B'C'$，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$；

（2）$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，$AA'=BB'=CC'$；

（3）$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

提分·必记

特别解读

1. 连接对应点的线段的长度就是平移距离.
2. 从原图上一点到其对应点的方向即起始点到终止点的方向为平移方向.
3. 平移前后图形的对应边平行（或在同一条直线上）且相等，对应角相等.


平移的性质

技考向▶ 利用平移的性质解决问题

例 2 如图 5.4−3，将面积为 3 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移到三角形 DEF 的位置，$CE=5$，$EF=2$，$\angle B=40°$，则

（1）$BC=$_____，$\angle DEF=$_____；

（2）平移的距离是_____，三角形 DEF 的面积是_____.

解题秘方：找准对应元素，根据平移的性质求出各个未知量.

解：根据平移后的新图形与原图形的形状、大小完全相同，得到 $BC=EF=2$，三角形 DEF 的面积 = 三角形 ABC 的面积 =3，$\angle DEF=\angle B=40°$，所以平移的距离 = $BE=BC+CE=2+5=7$.

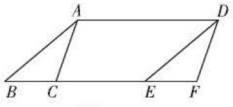


图 5.4−3

答案：（1）2；40°　（2）7；3

提分·秘诀

解法提醒

图形的平移是整个图形都在移动，不是局部移动，即图形中所有点、线平移的距离都相同，所以确定一个图形平移的距离，只需确定其上一个点平移的距离即可.

点知识▶ 3 平移作图

平移作图的一般步骤：平移作图是平移基本性质的应用，利用平移可以得到许多美丽的图案，在具体作图时，应抓住作图的“四部曲”——定、找、移、连.


平移制作图案

（1）**定**：确定平移的方向和距离；

（2）**找**：找出表示图形的关键点（图形的顶点、拐点、连接点）；

（3）**移**：过关键点作平行且相等的线段，得到关键点的对应点；

（4）**连**：按原图顺次连接对应点.

提分·必记

特别解读

1. 平移的性质是平移作图的依据；
2. **确定一个图形平移后的位置需要三个条件**：

（1）图形原来的位置；

（2）平移的方向；

（3）平移的距离.

这三个条件缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用平移作图的步骤作平移后的图形

类型 1：利用平移的性质在非网格中作图

例 3 如图 5.4−4，四边形 $ABCD$ 的顶点 A 移动到了 A' 处，作出四边形 $ABCD$ 平移后的图形.

解题秘方：由已知的一对对应点确定平移的方向和平移的距离，然后作出其他对应点的位置，作出平移后的图形.

解：（1）连接 AA'；

（2）分别过点 B，C，D 作 $l_1 // AA'$，$l_2 // AA'$，$l_3 // AA'$；

（3）在 l_1 上沿 AA' 的方向截取 $BB'=AA'$，在 l_2，l_3 上按同样的方法截取 $CC'=AA'$，$DD'=AA'$；

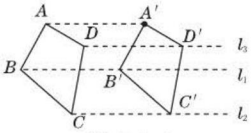


图 5.4−4

（4）顺次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，即得到四边形 $ABCD$ 平移后的图形 $A'B'C'D'$，如图 5.4−4.

类型 2：利用平移的性质在网格中作图

例 4 现要把图 5.4−5 中的方格纸（每个小正方形的边长均为 1 个单位长度）上的小船向右平移 6 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，请在方格纸上画出小船平移后的图形.

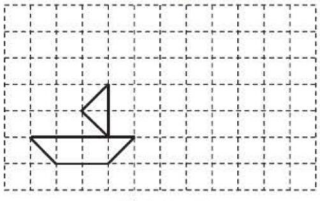


图 5.4−5

解题秘方：将图形中的关键点按照指定的方向和距离平移，再按原图形的顺序依次连接对应点.

解：如图 5.4−6，找到小船的 7 个关键点，并依次标上字母 A，B，C，D，E，F，G. 把点 A 向右平移 6 个单位长度，到达点 A_1，然后把点 A_1 向上平移 3 个单位长度，到达点 A'，用同样的方法分别将小船的其他关键点 B，C，D，E，F，G 平移得到对应点，顺次连接对应点即可得到平移后的图形.

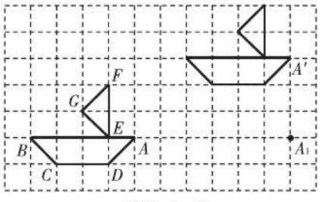


图 5.4−6

提分·秘诀

方法点拨

画平移图形的方法：

首先找出平移的方向和距离，再确定构成图形的关键点，

然后根据平移的方向和距离平移每个关键点，

最后顺次连接每个关键点的对应点，并标出相应的字母，得出平移后的图形.

技巧点拨

在网格中左右（或上下）平移整数倍的格数作图，可以找到原图形的关键点，按要求在网格中平移得到其对应点，顺次连接各对应点即可得到平移后的图形. 原图形的点在格点上的，通过左右（或上下）平移整数倍的格数，它的对应点还在格点上，不会在其他位置.

另解

按要求平移点 A，得到其对应点 A'，因为平移前后对应线段是平行（或在同一条直线上）且相等的，所以以点 A' 为顶点，按原图形直接画出平移的图形即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平移法解几何中的计算问题

例 5 如图 5.4-7，将周长为 6 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移 1 个单位长度得到三角形 DEF，则四边形 $ABFD$ 的周长为_____.

解题秘方：利用平移的性质，将求四边形 $ABFD$ 的周长转化为与三角形 ABC 的周长和平移距离相关的计算.

解：∵三角形 ABC 沿 BC 方向平移 1 个单位长度得到三角形 DEF，∴ $DF=AC$，$AD=CF=1$.

∵ 三角形 ABC 的周长为 6，∴ $AB+BC+AC=6$.

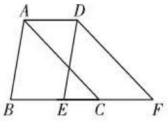


图 5.4-7

∴ 四边形 $ABFD$ 的周长为 $AB+BF+DF+AD=AB+BC+CF+AC+AD=6+1+1=8$.

答案：8

例 6 如图 5.4-9，将直角三角形 ABC 沿 CB 方向平移 BE 的距离后得到直角三角形 DEF，已知 $\angle ABC=90°$，$AG=2$，$BE=4$，$DE=6$，求阴影部分的面积.

解题秘方：利用平移的性质将阴影部分的面积转化为梯形 $BEDG$ 的面积.

解：∵三角形 DEF 是三角形 ABC 经过平移后得到的，

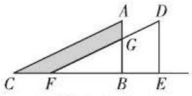


图 5.4-9

∴ $AB=DE=6$，三角形 DEF 的面积 = 三角形 ABC 的面积.

∴ $BG=AB-AG=6-2=4$.

三角形 ABC 的面积 − 三角形 FGB 的面积 = 三角形 DEF 的面积 − 三角形 FGB 的面积，

即阴影部分的面积 = 梯形 $BEDG$ 的面积 = $\frac{1}{2}(BG+DE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(4+6)\times 4=20$.

挑战·高分

图解

如图 5.4-8，根据平移前后对应线段相等，得四边形 ABFD 的周长 = 三角形 ABC 的周长 + 2AD.

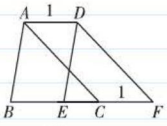


图 5.4-8

另解

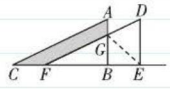


图 5.4-10

如图 5.4-10，连接 GE. 阴影部分的面积 = 四边形 $BEDG$ 的面积 = 三角形 BEG 的面积 + 三角形 DEG 的面积 = $\frac{1}{2}BG\cdot BE+\frac{1}{2}DE\cdot BE=\frac{1}{2}\times 4\times 4+\frac{1}{2}\times 6\times 4=20$.

拔尖角度 2 利用平移法解造桥中最短路线问题

例 7 如图 5.4-11，两个单位位于一条封闭式街道的两旁，分别用点 M，N 表示，现准备修建一座过街天桥，天桥建在何处时才能使点 M 到点 N 的路线最短？请说明理由.（注意：天桥必须和街道垂直）

解题秘方：将点 N 向上平移一个街道的宽度到达点 N' 处，连接 MN'，MN' 与 AB 的交点就是造桥处.

解：作法如下：

（1）作 $NE\perp AB$ 于点 E，交 CD 于点 F；

（2）在 NE 上截取 $NN'=EF$；

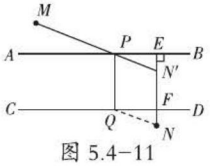


图 5.4-11

挑战·高分

技巧点拨

利用平移巧造桥：

造桥问题一般是两点分布在河的两岸，要在河两岸分别寻找到一点，连接两点得到桥的位置. 那么如何确定岸边两点的位置呢？一般先将两点间的折线改为线段，这一过程要用到

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）连接 MN' 交 AB 于点 P；

（4）作 $PQ \perp CD$ 于点 Q，如图 5.4−11，则 PQ 为天桥的位置．

理由如下：如图 5.4−11，连接 QN.

$\because PQ \perp CD$，$AB \parallel CD$，$NE \perp AB$，$\therefore PQ \parallel NE$.

又 $\because NN'=EF$，$EF=PQ$，

$\therefore PQ=NN'$（相当于将 PQ 平移到 NN'）．$\therefore QN=PN'$．

$\therefore MP+PN'$ 最短（两点之间线段最短），PQ 为定值．

$\therefore$ 天桥建在 PQ 处时，点 M 到点 N 的路线最短．

平移，再利用“两点之间线段最短”解决问题．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 平移在中考试题中的考查一般不会太难，常出现在选择题或填空题中，一般直接考查平移的性质，有时也与其他知识综合考查．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用网格中的平移判断移动方向

例 8 ［中考·广州］在 6×6 的方格中，将图 5.4−12 ①中的图形 N 平移后位置如图 5.4−12 ②所示，则图形 N 的平移方法中，正确的是（　　）

A. 向下移动 1 格

B. 向上移动 1 格

C. 向上移动 2 格

D. 向下移动 2 格

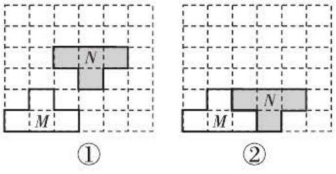


图 5.4−12

试题评析：本题考查了图形平移，解题的关键理解平移的定义．

解：$\because$ 将图①中的图形 N 向下平移 2 格后位置如图②所示，

$\therefore$ 图形的平移方法是向下移动 2 格．

答案：D

方法规律

图形的平移包含两要素：

一是平移的方向，

二是平移的距离．

判断平移的时候，只需要沿平移的“路径”进行平移便可确定其两要素．

考法 2 利用平移的性质解实际生活中的应用

例 9 如图 5.4−13 ①，在长为 50 m，宽为 22 m 的长方形地面上修筑宽度为 2 m 的道路，余下的部分种植花草，求种植花草部分的面积．

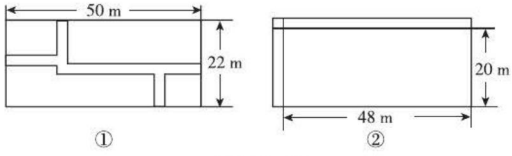


图 5.4−13

思路剖析

因种植花草部分比较分散，且有的是不规则的图形，所以直接求其面积较困难，因小路都是宽度相同的长方形，所以可想到把小路平移到一起，这样种植花草部分将汇集成一个长方形，问题便迎刃而解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：利用平移将分散的小路聚在一起，将零散的种植花草面积聚在一起求.

解：如图 5.4−13 ②，把几条 2 m 宽的小路分别平移到大长方形的上边缘和左边缘，则种植花草部分汇集成一个长方形. 显然，这个长方形的长是 50−2=48（m），宽是 22−2=20（m），于是种植花草部分的面积为 $48\times20=960$（m^2）.

两年模拟兵法

☞答案见 254 页

1. 下列现象不属于平移的是（　　）

A. 小华乘电梯从一楼至三楼

B. 足球在操场上沿直线滚动

C. 一个铁球从高处自由落下

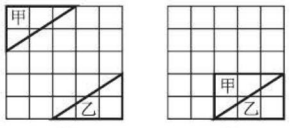
D. 小朋友坐滑梯下滑

2. 长度为 5 cm 的线段 AB 沿竖直方向平移了 10 cm 得到线段 $A'B'$，则线段 $A'B'$ 的长度为（　　）

A. 10 cm　　B. 2 cm

C. 5 cm　　D. 不确定

3. 如图，在方格纸中，将图①中的三角形甲平移到图②中所示的位置，与三角形乙拼成一个长方形，那么，下面的平移方法中，正确的是（　　）



①　②

（第 3 题）

A. 先向下平移 3 格，再向右平移 1 格

B. 先向下平移 2 格，再向右平移 1 格

C. 先向下平移 2 格，再向右平移 2 格

D. 先向下平移 3 格，再向右平移 2 格

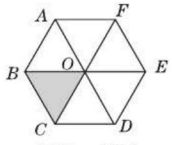
4. 如图，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的对角线的交点，下列三角形中可由三角形 OBC 平移得到的是（　　）

A. 三角形 OCD

B. 三角形 OAB

C. 三角形 OAF

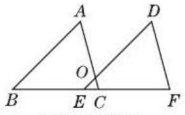
D. 三角形 OEF



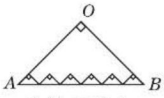
（第 4 题）

5. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8 cm，若把它向右平移 10 cm，那么点 A 移动了_____cm.

6. 如图，三角形 ABC 通过平移得到三角形 DEF，AC 与 DE 相交于 O. 已知 $\angle B=45°$，$\angle A=60°$，$\angle F=75°$，则 $\angle DEF=$_____，$\angle EOC=$_____. 若 $BC=3$ cm，$EC=0.5$ cm，则 $CF=$_____cm.



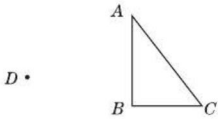
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，直角三角形 AOB 的周长为 100，在其内部有 6 个小直角三角形，则 6 个小直角三角形的周长之和为_____.

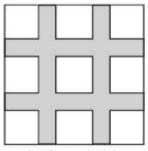
8. 如图，已知三角形 ABC 和点 A 平移后的对应点 D，请作出三角形 ABC 平移后的图形.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [**探究题**]如图，一块边长为 8 米的正方形土地，上面修了横竖各两条道路，宽都是 1 米，空白的部分种上花草，请利用平移的知识求出种花草的面积.

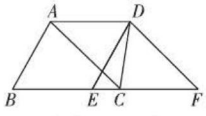


（第 9 题）

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $AD < BC$，将三角形 ABC 平移得到三角形 DEF.

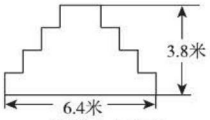
（1）指出平移的方向和平移的距离；

（2）试说明 $AD+BC=BF$.



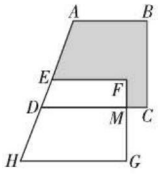
（第 10 题）

11. 某学校准备在升旗台的台阶上铺设一种红色的地毯（含台阶的最上层），已知这种地毯的批发价为每平方米 40 元，升旗台的台阶宽为 3 米，其侧面如图所示，请你帮助算一下，买地毯至少需要多少元?



（第 11 题）

12. 如图，将直角梯形 $ABCD$ 平移到直角梯形 $EFGH$，若 $HG=10$，$MC=2$，$MG=5$，求图中阴影部分的面积. **【导学号：7207895】**



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

相交线与平行线中角的运用技巧

荣老师告诉你 角是平面几何图形中最活跃的元素，前面我们已学习过特殊角、数量关系角（补角、余角）等角的知识．当两条直线相交就产生对顶角，分别与第三条直线相交产生同位角、内错角、同旁内角等位置关系角，进一步丰富了角的知识，它们在角的计算与证明中有广泛的应用．

技巧一 由角定角

例1 [中考·重庆]如图1，$AB \parallel CD$，点E是CD上一点，$\angle AEC=42°$，EF平分$\angle AED$交AB于点F，求$\angle AFE$的度数．

解题秘方：先由$\angle AEC=42°$，利用邻补角的定义，求出$\angle AED$的度数；再由EF平分$\angle AED$，求出$\angle FED$的度数；最后利用“两直线平行，内错角相等”，求出$\angle AFE$的度数．

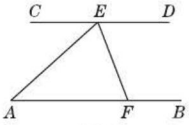


图1

解：$\because \angle AEC=42°$，$\angle AEC+\angle AED=180°$，

$\therefore \angle AED=180°-42°=138°$．

$\because EF$平分$\angle AED$，

$\therefore \angle FED=\frac{1}{2}\angle AED=69°$．

又$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle AFE=\angle FED=69°$．

方法点拨：由已知角的度数求未知角的度数，可利用平行线的性质，建立未知角与已知角之间的关系，从而求出未知角的度数．

技巧二 缺角补角

例2 [中考·枣庄]如图2，将一副三角板和一张对边平行的纸条按下列方式摆放，两个三角板的一直角边重合，含30°角的直角三角板的斜边与纸条一边重合，含45°角的三角板的一个顶点在纸条的另一边上，则$\angle 1$的度数是（　　）

A.15°　B.22.5°　C.30°　D.45°

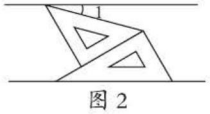


图2

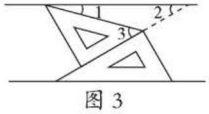


图3

解题秘方：在两条平行线间没有任何位置角，利用将两个三角板重合的边延长与纸条的一边相交，产生内错角解题．

解：如图3，延长两个三角板重合的边与纸条的一边相交，根据两直线平行，内错角相等求出$\angle 2=30°$，再利用邻补角的定义和三角形的内角和为180°可得$\angle 1+\angle 2+180°-\angle 3=180°$，所以$\angle 1=\angle 3-\angle 2=45°-30°=15°$．故选A．

答案：A

方法点拨：在图形中虽然具备了“三线”，但“八角”没有完全显露出来，为了使解题思路流畅自然，应利用延长线段的方法，将“八角”补齐．

例3 [中考·南充]如图4，直线$a \parallel b$，将一个直角三角板按如图所示的位置摆放，若$\angle 1=58°$，则$\angle 2$的度数为（　　）

A.30°　B.32°　C.42°　D.58°

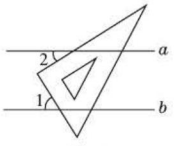


图4

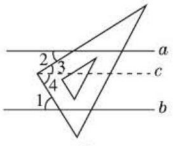


图5

解题秘方：题图中的两条平行线间没有可利用已知条件的同位角、内错角或同旁内角，可过直角顶点作直线a的平行线，构造三线八角模型．

解：如图5，过直角顶点作$c \parallel a$．

$\therefore \angle 3=\angle 2$．

$\because a \parallel b$，$\therefore c \parallel b$．

$\therefore \angle 4=\angle 1$．

$\therefore \angle 2+\angle 1=\angle 3+\angle 4=90°$．

$\because \angle 1=58°$，$\therefore \angle 2=90°-\angle 1=32°$．

答案：B

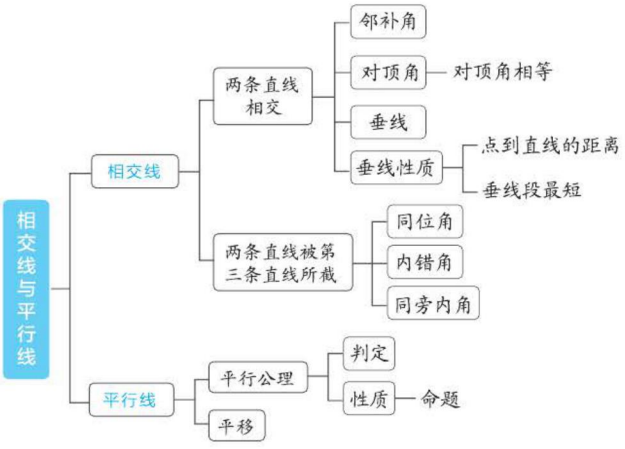
方法点拨：若图中的“三线”尚不齐全，则首要的任务是添线，通常是作平行线进行添线，构造“三线八角”，产生同位角、内错角或同旁内角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两直线相交，形成两对对顶角和四对邻补角，其中对顶角相等，邻补角互补.
2. 两直线相交，当有一个角是直角时，两直线互相垂直，其中一条直线叫做另一条直线的垂线. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.
3. 在同一平面内，两条不相交的直线互相平行. 过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行. 平行于同一直线的两条直线平行.
4. **平行线的判定方法：** 同位角相等，两直线平行；内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行.
5. **平行线的性质：** 两直线平行，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补.
6. 图形的平行移动简称平移，平移由平移的方向和平移的距离决定. 平移前后的两个图形，对应边平行(或在同一条直线上)且相等，对应角相等.

知识方法专题

知识必学

专题一 三角形的三边关系

链接中考» 在同一平面内，两条直线的位置关系有相交和平行两种，其中垂直是两直线相交的一种特殊情况，垂直经常与邻补角和对顶角、平行线等知识综合考查，题型以填空题和选择题为主.

例1 [中考·荆门]如图5-1，$m \parallel n$，直线l分别交m，n于点A，点B，$AC \perp AB$，AC交直线n于点C，若$\angle 1=35°$，则$\angle 2$等于(　　)

A.35°　　B.45°　　C.55°　　D.65°

解题秘方： 首先根据平行线的性质得到$\angle ABC$的度数，然后根据三角形的内角和为180°即可求得$\angle 2$的度数.

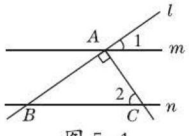


图5-1

解： $\because m \parallel n$，

$\therefore \angle ABC=\angle 1=35°$.

$\because AC \perp AB$，

$\therefore \angle BAC=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵∠BAC+∠ABC+∠2=180°，

∴∠2=55°.

答案：C

专题二 平行线的性质与判定

链接中考» 平行线的性质与判定是学习推理说明问题的开始，是进一步学习几何知识的基础，其中平行线的判定是根据角的相等或互补关系得出平行线，而平行线的性质则是根据直线的平行关系得出角的相等或互补关系．综合运用平行线的性质与判定可以解决很多问题，所以是中考命题的热点．常见的考查形式有选择题、填空题及解答题．

例 2 [中考·莱芜]如图 5-2，AB // CD，EF 平分∠AEG，若∠FGE=40°，那么∠EFG 的度数为（　　）

A.35°　　B.40°　　C.70°　　D.140°

解题秘方：看清楚∠FGE 与∠AEG 是同旁内角关系，从而确定互补关系，再根据角平分线的定义求出∠AEF，由 AB // CD，得∠EFG=∠AEF，问题即可获得解决．

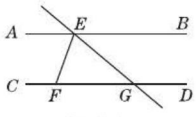


图 5-2

解：∵ AB // CD，∠FGE=40°，

∴∠AEG=180° −40° =140°．

∵ EF 平分∠AEG，

$$\therefore \angle AEF=\frac{1}{2}\angle AEG=70°.$$

∵ AB // CD，∴∠EFG=∠AEF=70°．

故选 C.

答案：C

专题三 平移

链接中考» 平移是一种图形变换的方式，应熟练掌握平移的条件，理解平移的特征：平移前后图形的大小和形状不发生变化．平移也是近几年中考的热点，题型多以选择题、填空题或作为综合题中的一个小题形式出现．主要考查是否能判断出平移的基本图形、平移后形成的图形，能够作出平移后的图形，利用平移的性质计算角度、面积或长度．

例 3 [中考·舟山]如图 5-3 所示，将三角形 ABC 沿 BC 方向平移 2 cm 得到三角形 DEF，若三角形 ABC 的周长为 16 cm，则四边形 $ABFD$ 的周长为（　　）

A.16 cm　　B.18 cm　　C.20 cm　　D.22 cm

解：根据题意，将周长为 16 cm 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移 2 cm 得到三角形 DEF，

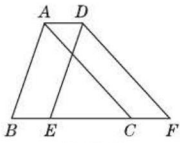


图 5-3

∴ $AD=CF=2$ cm，$BF=BC+CF=BC+2$ cm，$DF=AC$.

又∵ $AB+BC+AC=16$ cm，

∴四边形 $ABFD$ 的周长 $=AD+AB+BF+DF=20$ cm. 故选 C.

答案：C

方法必会

专题四 分类讨论思想

专题解读» 当被研究对象包含多种可能情况，导致我们不能对它一概而论时，必须对出现的所有情况进行分类讨论，得出各种情况下相应的结论，这种解决问题的思想方法，我们称为分类讨论思想．

例 4 已知 OA ⊥ OC 于点 O，且∠AOB ∶ ∠AOC=2 ∶ 3，求∠BOC 的度数．

解题秘方：根据 OB 在图中的位置不定，分在∠AOC 的内部和外部两种情况画图计算．

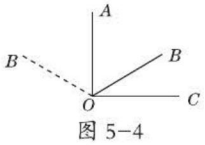


图 5-4

解：因为 OA ⊥ OC，所以∠AOC=90°．

因为∠AOB ∶ ∠AOC=2 ∶ 3，

所以∠AOB=60°．

∠AOB 的位置有两种：一种是在∠AOC 内，一种是在∠AOC 外，如图 5-4 所示．

① 当在∠AOC 内时，∠BOC=90° −60° =30°；

② 当在∠AOC 外时，∠BOC=90° +60° =150°．

所以∠BOC 的度数为 30°或 150°．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题五 数形结合思想

专题解读≫ 数形结合思想就是把一些抽象的数学运算和用相关的几何图形形象地展示出来，并结合该几何图形得到运算结果，它是我们解答数学题时常用的思想方法．本章中“数形结合”思想有着重要的作用，如同位角、内错角、同旁内角的概念、平行线的性质和判定、平移的特征都要放到图形中，结合图形来理解．

例5 把一把直尺与一块三角板按如图5-5所示的方式放置，若∠1=45°，则∠2的度数为（　　）

A.115°　　B.120°　　C.145°　　D.135°

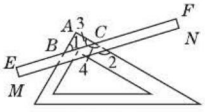


图5-5

解：如图5-5，在直角三角形ABC中，$\angle A=90°$，因为$\angle 1=45°$，所以$\angle 3=180°-\angle A-\angle 1=45°$，所以$\angle 4=180°-\angle 3=135°$．由题意知$EF\parallel MN$，所以$\angle 2=\angle 4=135°$．故选D.

答案：D

专题六 转化思想

专题解读≫ 转化思想作为一种思想方法主要是把未知的转化为已知的，把陌生的转化为熟悉的，从而达到解题的目的．转化是一种重要的数学解题技巧．在运用平行线的性质和判定解题时，可以通过添加辅助线来构造平行线，这是转化思想在本章的一个重要应用．

例6 如图5-6所示，若$\angle BCD=\angle B+\angle D$，试说明$AB$与$DE$的位置关系．

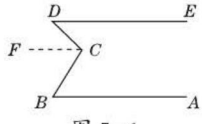


图5-6

解题秘方：欲得出AB与DE的位置关系，从已知条件中无法直接得出结论，需作辅助线将$\angle DCB$分成两个角，可利用平行线的判定方法和“平行于同一条直线的两条直线互相平行”达到目的．

解：$AB\parallel DE$. 理由如下：

在$\angle DCB$的内部作$\angle DCF=\angle D$，如图5-6所示，则$DE\parallel FC$（内错角相等，两直线平行）．

因为$\angle DCB=\angle D+\angle B$，所以$\angle FCB=\angle B$，所以$FC\parallel BA$（内错角相等，两直线平行），所以$AB\parallel DE$（平行于同一条直线的两条直线互相平行）．

方法点拨：解这种类型的题目时，通常是过“拐点”作平行线，把一个大角分成两个小角，使分成的角与已知角建立联系，这种转化思想在解题时经常用到．

专题七 方程思想

专题解读≫ 方程思想就是通过设未知数建立方程来求解问题的思想方法．比如求角的大小，对要求的角列式计算很复杂时，即可采用列方程来解决．本章中，对顶角相等、邻补角互补、平行线的性质都可以为列方程提供等量关系．

例7 如图5-7所示，已知$FC\parallel AB\parallel DE$，$\angle\alpha:\angle D:\angle B=2:3:4$，求$\angle\alpha$，$\angle D$，$\angle B$的大小．

解题秘方：本题没有已知角的度数，故无法做到未知角向已知角转化，根据已知条件中角的关系设出未知数，结合平角这一隐含条件解方程求解．

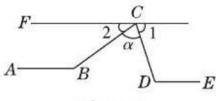


图5-7

解：设$\angle\alpha=2x°$，$\angle D=3x°$，$\angle B=4x°$．

因为$FC\parallel AB\parallel DE$，

所以$\angle 2+\angle B=180°$，$\angle 1+\angle D=180°$．

则$\angle 2=180°-\angle B=180°-4x°$，$\angle 1=180°-\angle D=180°-3x°$．

由题意知$\angle 1+\angle 2+\angle\alpha=180°$，

所以$(180°-3x°)+(180°-4x°)+2x°=180°$，解得$x=36$.

所以$\angle\alpha=2x°=72°$，$\angle D=3x°=108°$，$\angle B=4x°=144°$．

方法点拨：利用方程思想求解有关角度问题时，往往通过分析问题的数量关系，适当设元建立起关于问题中的已知量和未知量之间的数量关系的方程，然后通过解方程使问题得解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见 254 页

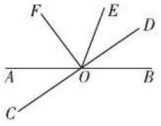
类型 1：求角的度数

题型 1：利用相交线的性质求角的度数

1. 如图所示，直线 AB，CD 相交于点 O，作 $\angle DOE=\angle BOD$，OF 平分 $\angle AOE$.

（1）判断 OF 与 OD 的位置关系；

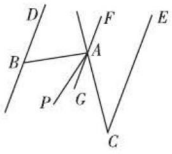
（2）若 $\angle AOC:\angle AOD=1:5$，求 $\angle EOF$ 的度数.



（第 1 题）

题型 2：利用平行线的性质求角的度数

2. 如图，$DB\parallel FG\parallel EC$，$\angle ACE=36°$，$AP$ 平分 $\angle BAC$，$\angle PAG=12°$，求 $\angle ABD$ 的度数.

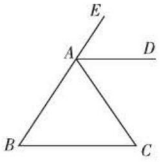


（第 2 题）

类型 2：几种常见的证明结论

题型 1：证明两个角相等

3. 如图，已知 $\angle B=\angle C$，$AD\parallel BC$，求证：AD 平分 $\angle CAE$.

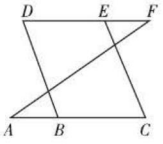


（第 3 题）

题型 2：证明两条直线平行

4. 如图，已知 $\angle A=\angle F$，$\angle C=\angle D$.

求证：$BD\parallel EC$.



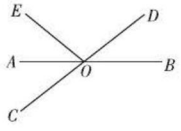
（第 4 题）

题型 3：证明两条直线垂直

5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分 $\angle EOC$.

（1）若 $\angle EOC=72°$，求 $\angle BOD$ 的度数；

（2）若 $\angle DOE=2\angle AOC$，判断射线 OE，OD 的位置关系并说明理由.



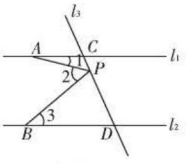
（第 5 题）

题型 4：证明角的和差

6. 如图，已知直线 $l_1\parallel l_2$，直线 l_3 和直线 l_1，l_2 分别交于点 C 和 D，P 为直线 l_3 上的一动点，A，B 分别是直线 l_1，l_2 上的定点.

（1）当点 P 在线段 CD（C，D 两点除外）上运动时，问 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 之间的关系是什么？这种关系是否发生变化？

（2）当点 P 在线段 CD 之外时，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 的关系又怎样？说明理由.



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

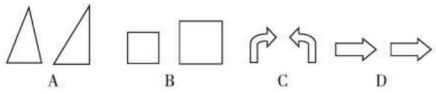
第五章测试卷

答案见 255 页

（100 分 60 分钟）

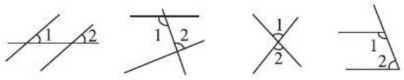
一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下面的每组图形中，左图平移后可以得到右图的是（　　）



A　　B　　C　　D

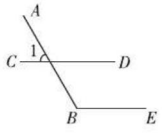
2. 下列图形中，∠1 和∠2 是内错角的是（　　）



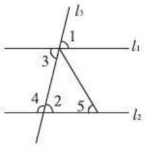
A　　B　　C　　D

3. 如图，已知∠1=60°，如果 $CD \parallel BE$，那么∠B 的度数为（　　）

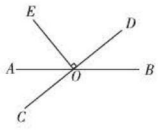
A.70°　　B.100°　　C.110°　　D.120°



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

4. 如图，下列选项中，不可以得到 $l_1 \parallel l_2$ 的是（　　）

A. ∠1=∠2　　B. ∠2=∠3

C. ∠3=∠5　　D. ∠3+∠4=180°

5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE \perp CD$，∠AOE=52°，则∠BOD 等于（　　）

A.24°　　B.26°　　C.36°　　D.38°

6. 下列命题中，真命题的个数是（　　）

①过一点有且只有一条直线与已知直线平行；

②在同一平面内，过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直；

③图形平移的方向一定是水平的；

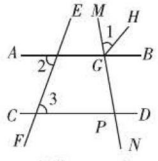
④内错角相等．

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

7. 如图，AB，CD，EF，MN 均为直线，∠2=∠3=70°，∠GPC=80°，GH 平分∠MGB，则∠1=（　　）

A.35°　　B.40°

C.45°　　D.50°



（第 7 题）

8. 点 P 为直线 l 外一点，点 A，B，C 为直线 l 上三点，PA=4 cm，PB=5 cm，PC=2 cm，则点 P 到直线 l 的距离（　　）

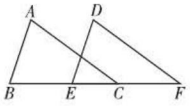
A. 等于 5 cm　　B. 等于 4 cm

C. 等于 2 cm　　D. 不大于 2 cm

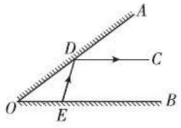
9. 如图，把三角形 ABC 沿直线 BC 方向平移得到三角形 DEF，则下列结论错误的是（　　）

A. ∠A=∠D　　B.BE=CF

C. AC=DE　　D.$AB \parallel DE$



（第 9 题）



（第 10 题）

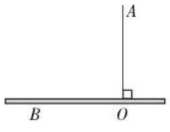
10. 如图，∠AOB 的一边 OA 为平面镜，∠AOB=37°，在 OB 上有一点 E，从 E 点射出一束光线经 OA 上一点 D 反射，∠ODE=∠ADC. 若反射光线 DC 恰好与 OB 平行，则∠DEB 的度数是（　　）

A.74°　　B.63°　　C.64°　　D.73°

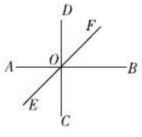
二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. 命题“同旁内角互补，两直线平行”写成“如果……那么……”的形式是_____，它是_____（填“真”或“假”）命题．

12. 自来水公司为某小区 A 改造供水系统，如图，沿路线 AO 铺设管道和 BO 主管道衔接（$AO \perp BO$），路线最短，工程造价最低，根据是_____．



（第 12 题）

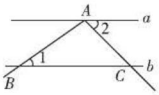


（第 13 题）

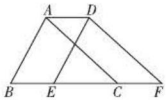
13. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O，∠AOF=3∠BOF，∠AOC=90°，那么∠COE=_____．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

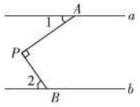
14. 如图，直线 $a \parallel b$，$\angle BAC$ 的顶点 A 在直线 a 上，且 $\angle BAC=100°$. 若 $\angle 1=34°$，则 $\angle 2=$ _____.



（第 14 题）



（第 15 题）



（第 16 题）

15. 如图，将周长为 10 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移 1 个单位长度得到三角形 DEF，则四边形 $ABFD$ 的周长为_____.

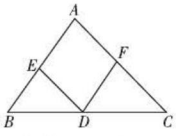
16. 如图，$a \parallel b$，$PA \perp PB$，$\angle 1=35°$，则 $\angle 2$ 的度数是_____.

三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）完成下面的证明.

已知：如图，D，F，E 分别是 BC，AC，AB 上的点，$DF \parallel AB$，$DE \parallel AC$，

求证：$\angle A=\angle EDF$.



（第 17 题）

证明：$\because DF \parallel AB$（_____），

$\therefore \angle A+\angle AFD=$_____（_____）.

$\because DE \parallel AC$（_____），

$\therefore \angle AFD+$_____=_____（_____）.

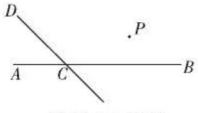
$\therefore \angle A=\angle EDF$（_____）.

18.（10 分）如图，直线 CD 与直线 AB 相交于点 C，直线外有一点 P.

（1）作图：过点 P 作 $PQ \parallel CD$，交 AB 于点 Q；

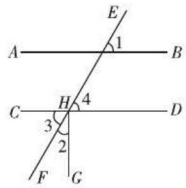
（2）作图：过点 P 作 $PR \perp CD$，垂足为 R；

（3）若 $\angle DCB=120°$，猜想 $\angle PQC$ 是多少度？并说明理由.



（第 18 题）

19.（10 分）如图，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，H 为 CD 与 EF 的交点，$GH \perp CD$ 于点 H，$\angle 2=30°$，$\angle 1=60°$. 求证：$AB \parallel CD$.



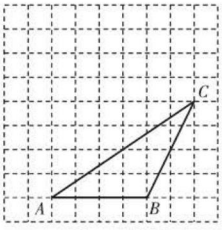
（第 19 题）

20.（12 分）如图，在每个小正方形边长为 1 的方格纸中，三角形 ABC 的顶点都在方格纸的格点上. 将三角形 ABC 向左平移 2 格，再向上平移 4 格.

（1）请在图中画出平移后的三角形 $A'B'C'$；

（2）再在图中画出三角形 ABC 的高 CD；

（3）在图中能使 $S_{\text{三角形 }PBC}=S_{\text{三角形 }ABC}$ 的格点 P 有_____个（点 P 异于 A）.



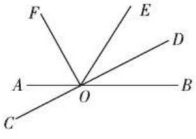
（第 20 题）

21.（12 分）如图，直线 AB 与 CD 相交于点 O，OF，OD 分别是 $\angle AOE$，$\angle BOE$ 的平分线.

（1）写出 $\angle DOE$ 的补角；

（2）若 $\angle BOE=62°$，求 $\angle AOD$ 和 $\angle EOF$ 的度数；

（3）试问射线 OD 与 OF 之间有什么特殊的位置关系？为什么？



（第 21 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数字领域的再次拓展

数字领域的再次拓展



第六章 实数









核心考点

你将见到的

- 算术平方根与平方根
- 立方根
- 实数
- 近似数

核心方法

我们为你提供的

- 作差法
- 夹逼法
- 估算法
- 特殊值法
- 分类讨论思想
- 数形结合思想
- 整体思想
- 方程思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.1 平方根

核心知识
- 算术平方根
- 平方根
- 平方根的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 算术平方根

1. **定义**：一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫做 a 的**算术平方根**. 规定：0 的算术平方根是 0.

表示方法：a 的算术平方根记为 $\sqrt{a}$，读作“根号 a”，a 叫做被开方数.

特别解读：（1）算术平方根 $\sqrt{a}$ 具有双重非负性：

①被开方数 a 是非负数，即 $a\geqslant 0$；

②算术平方根 $\sqrt{a}$ 是非负数，即 $\sqrt{a}\geqslant 0$.

（2）算术平方根是它本身的数只有 0 和 1.

2. **性质**：

（1）正数的算术平方根是一个正数；

（2）0 的算术平方根是 0；

（3）负数没有算术平方根；

（4）被开方数越大，对应的算术平方根也越大.



提分·必记

特别提醒

- 求一个正数的算术平方根与求一个正数的平方刚好是互逆的两个运算；
- 任何一个数的平方都是非负数，所以求算术平方根时，被开方数必须是非负数，它的算术平方根也一定是非负数.

拨考向 利用算术平方根的定义解决问题

类型 1：求一个数的算术平方根

例 1 求下列各数的算术平方根.

（1）64；（2）$2\frac{1}{4}$；（3）0.36；（4）5^2；（5）$(-5)^2$；

（6）0；（7）$\sqrt{81}$；（8）7；（9）-16.

解题秘方：先根据平方运算找出这个正数，然后根据算术平方根的定义求出算术平方根.

解：（1）因为 $8^2=64$，所以 64 的算术平方根是 8，即 $\sqrt{64}=8$；

（2）因为 $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$，所以 $2\frac{1}{4}$ 的算术平方根是 $\frac{3}{2}$，即 $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$；

（3）因为 $0.6^2=0.36$，所以 0.36 的算术平方根是 0.6，即 $\sqrt{0.36}=0.6$；

提分·秘诀

知识储备

1. **求带分数的算术平方根**，先将带分数化成假分数，再求算术平方根；
2. **求一个数的算术平方根必须明确两点**：
（1）这个数是非负数；
（2）求出的算术平方根（结果）必须是非负数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）因为$5^2=5^2$，所以5^2的算术平方根是5，即$\sqrt{5^2}=5$；

（5）因为$5^2=(-5)^2$，所以$(-5)^2$的算术平方根是5，即$\sqrt{(-5)^2}=5$；

（6）0的算术平方根是0；

（7）因为$\sqrt{81}=9$，9的算术平方根是3，所以$\sqrt{81}$的算术平方根是3；

（8）7的算术平方根是$\sqrt{7}$；

（9）-16没有算术平方根.

特别提醒

有的数开方开得尽，有的数开方开不尽，对于开方开不尽的数，算术平方根不能化简.

不要误认为是求81的算术平方根.

类型2：已知算术平方根求被开方数

例2 已知a的算术平方根是3，b的算术平方根是4，求$a+b$的算术平方根.

解题秘方：根据算术平方根与被开方数的关系求出a，b的值，然后求$a+b$的算术平方根.

解：因为a的算术平方根是3，所以$a=3^2=9$.

因为b的算术平方根是4，所以$b=4^2=16$.

所以$a+b=9+16=25$.

因为$5^2=25$，所以25的算术平方根是5，即$a+b$的算术平方根是5.

方法点拨

本题运用了**定义法**.**首先**根据算术平方根的定义求出a，b的值，**再**根据有理数的加法法则求出$a+b$的值，**最后**根据算术平方根的定义得出结果.

知识▶2 算术平方根的估算

1. 求一个正数（非平方数）的算术平方根的近似值，一般采用夹逼法.

“夹”就是从两边确定取值范围；“逼”就是一点一点加强限制，使其所处范围越来越小，从而达到理想的精确程度.

2. 大多数计算器都有$\sqrt{\ }$键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）. 按键顺序：先按$\sqrt{\ }$键，再输入被开方数，最后按$=$键. 计算器上就会显示这个数的算术平方根（或其近似值）.

提分·必记

特别解读

1. **求一个正数（非平方数）的算术平方根的近似值，通常有三种方法：**

一是用计算器；

二是查平方根表；

三是估算.

2. 计算器里显示的数值中，许多都是近似值.

拔考向▶利用估算解决算术平方根问题

类型1：利用估算法求算术平方根的范围

例3 已知a，b为两个连续整数，且$a<\sqrt{7}<b$，则$a+b=$_____.

解题秘方：找出与7接近的两个平方数，确定7的算术平方根的范围.

解：本题运用夹逼法来求整数a与b的值.

因为a，b为连续整数，$a<\sqrt{7}<b$，

而$2^2<7<3^2$，所以$2<\sqrt{7}<3$.

所以$a=2$，$b=3$. 所以$a+b=5$.

答案：5

提分·秘诀

技巧点拨

确定$\sqrt{a}$整数部分、小数部分的方法：

首先确定$\sqrt{a}$的整数部分，根据算术平方根的定义，有$m^2<a<n^2$，其中m，n是连续的非负整数，则$m<\sqrt{a}<n$，则$\sqrt{a}$的整数部分为m；然后进一步可得$\sqrt{a}$的小数部分为$\sqrt{a}-m$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用估算法比较两个数的大小

例 4 比较下列各组数的大小：

（1）$\sqrt{12}$与 4；　（2）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$与$\frac{1}{2}$；　（3）$\frac{\sqrt{401}-5}{4}$与 3.75.

解题秘方：（1）题可用平方法比较大小；（2）题可用作差法比较大小；（3）题可用比较被开方数大小进行比较.

解：（1）$(\sqrt{12})^2=12$，$4^2=16$，

因为 $12<16$，所以$\sqrt{12}<4$.

（2）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$，

因为 $3<4$，所以$\sqrt{3}<2$.

所以$\frac{\sqrt{3}-2}{2}<0$，即$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{1}{2}$.

（3）因为$\sqrt{401}>\sqrt{400}=20$，

所以$\frac{\sqrt{401}-5}{4}>\frac{\sqrt{400}-5}{4}=\frac{20-5}{4}=3.75$.

技巧点拨

（1）中两数同时平方后再比较大小；

（2）运用了作差法，通过相减判断得到的差的正负来比较大小；

（3）被开方数大的算术平方根较大，即当 $a\geq b\geq 0$ 时，$\sqrt{a}\geq\sqrt{b}\geq 0$，反过来也成立.

类型 3：利用计算器探究算术平方根的规律

例 5 已知$\sqrt{7.16}\approx 2.676$，$\sqrt{71.6}\approx 8.462$，

（1）$\sqrt{0.071\,6}\approx$_____，$\sqrt{71\,600}\approx$_____.

（2）$\sqrt{0.007\,16}\approx$_____，$\sqrt{7\,160}\approx$_____.

（3）若$\sqrt{a}\approx 26.76$，则 a 的值是_____.

探究算术平方根规律

解题秘方：利用计算器求出各个算术平方根，对照被开方数和算术平方根寻找小数点移动的规律.

解：利用计算器探究发现：被开方数的小数点向左（或向右）移动两位，其算术平方根的小数点相应地向左（或向右）移动一位.

答案：（1）0.267 6；267.6　（2）0.084 62；84.62　（3）716

规律点拨

对于此类规律探究题，要从两个方向进行比较：

第一，把被开方数进行比较；

第二，把它们的结果进行比较，从中发现规律.

利用计算器探究发现：被开方数的小数点向右（或向左）移动两位，其算术平方根的小数点就向右（或向左）移动一位.

知识点 3 平方根

1. 定义：

一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根或二次方根. 这就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根.

表示方法：非负数 a 的平方根记为 $\pm\sqrt{a}$，读作“正、负根号 a”.

2. 开平方：求一个数 a 的平方根的运算，叫做开平方.

特别提醒：$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$，$\pm\sqrt{a}$（$a\geq 0$）的区别

	$\sqrt{a}$	$-\sqrt{a}$	$\pm\sqrt{a}$
表示的意义	a 的算术平方根	a 的算术平方根的相反数	a 的平方根

提分·必记

特别解读

1. 平方根的定义中 a 是非负数，即 $a\geq 0$；其中正的平方根就是它的算术平方根；

2. 平方与开平方是**互逆运算**，平方的结果叫做幂，而开平方的结果叫做平方根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用平方根的定义求一个正数的平方根

例6 求下列各数的平方根和算术平方根：

（1）121；（2）$2\frac{7}{9}$；（3）$-(-4)^3$；（4）$\sqrt{49}$.

解题秘方：先根据平方运算找出平方等于这个数的数，然后根据平方根和算术平方根的定义确定.

解：（1）因为$(\pm 11)^2=121$，

所以121的平方根是± 11，算术平方根是11.

（2）$2\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$，因为$\left(\pm\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，

所以$2\frac{7}{9}$的平方根是$\pm\frac{5}{3}$，算术平方根是$\frac{5}{3}$.

（3）$-(-4)^3=64$，因为$(\pm 8)^2=64$，

所以$-(-4)^3$的平方根是± 8，算术平方根是8.

（4）$\sqrt{49}=7$，因为$(\pm\sqrt{7})^2=7$，所以$\sqrt{49}$的平方根是$\pm\sqrt{7}$，算术平方根是$\sqrt{7}$.

求平方根

提分·秘诀

方法点拨

求一个正数的算术平方根和平方根的方法：

先找出平方等于这个正数的数，这样的数有两个，它们互为相反数，因而这两个数均为这个正数的平方根，其中正的平方根为这个正数的算术平方根.

如果一个数为带分数，一般先将其化为假分数，再求平方根；如果有平方运算，那么先用平方运算求出结果，针对结果再求平方根；如果这个正数a不能写成有理数的平方的形式，那么可以将a的平方根表示成$\pm\sqrt{a}$.

点知识▶4 平方根的性质

1. 平方根的性质：

（1）正数有两个平方根，它们互为相反数；

（2）0的平方根是0；

（3）负数没有平方根.

2. 平方根与算术平方根的区别与联系

关系 \ 名称		算术平方根	平方根
区别	定义不同	一般地，如果一个正数x的平方等于a，即$x^2=a$，那么这个正数x叫做a的算术平方根	一般地，如果一个数的平方等于a，那么这个数叫做a的平方根或二次方根
	个数不同	一个正数的算术平方根只有一个	一个正数的平方根有两个，它们互为相反数
	表示方法不同	非负数a的算术平方根表示为$\sqrt{a}$	非负数a的平方根表示为$\pm\sqrt{a}$
	取值范围不同	正数的算术平方根一定是正数	正数的平方根是一正一负
联系	具有包含关系	平方根包含算术平方根，算术平方根是平方根中正的那个（0除外）	
	存在条件相同	平方根和算术平方根都只有非负数才有，0的平方根与算术平方根都是0	

提分·必记

拓展提醒

- 两个重要公式：

（1）$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

- 比较$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$的关系

项目 \ 式子		$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a^2}$
区别	运算顺序	先开方再求平方	先求平方再开方
	a的取值范围	$a\geqslant 0$	全体数
联系		当$a\geqslant 0$时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$	

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用平方根的性质解决问题

类型1：利用平方根的性质求值

例7 求下列各式的值：

（1）$\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}$；（2）$\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}$；（3）$\sqrt{41^2-40^2}$.

解题秘方：首先观察式子的结构特点，弄清式子所表示的意义．即要明确是求算术平方根还是求平方根，然后根据算术平方根或平方根的定义求解．

解：（1）$\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}$表示$1\frac{9}{16}$的平方根，

$\because\left(\pm\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1\frac{9}{16}$，

$\therefore 1\frac{9}{16}$的平方根是$\pm\frac{5}{4}$．$\therefore\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}=\pm\frac{5}{4}$．

（2）$\sqrt{0.81}$表示0.81的算术平方根，$\sqrt{0.04}$表示0.04的算术平方根，

$\because 0.9^2=0.81$，$0.2^2=0.04$，$\therefore\sqrt{0.81}=0.9$，$\sqrt{0.04}=0.2$.

$\therefore\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}=0.9-0.2=0.7$.

（3）$\because\sqrt{41^2-40^2}$表示41^2-40^2的算术平方根，

又$41^2-40^2=81$，$9^2=81$，

$\therefore\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{81}=9$.

类型2：利用平方根的性质解方程

例8 求下列各式中x的值：

（1）$x^2=361$；（2）$81x^2-49=0$；（3）$(3x-1)^2=(-5)^2$.

解题秘方：若$x^2=a$（$a\geqslant 0$），则$x=\pm\sqrt{a}$．先把各题化为$x^2=a$的形式，再求x的值．

解：（1）因为$x^2=361$，

所以开平方，得$x=\pm\sqrt{361}=\pm 19$.

（2）整理$81x^2-49=0$，得$x^2=\frac{49}{81}$，

所以开平方，得$x=\pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.

（3）因为$(3x-1)^2=(-5)^2$，

所以开平方，得$3x-1=\pm 5$.

当$3x-1=5$时，$x=2$；

当$3x-1=-5$时，$x=-\frac{4}{3}$.

综上所述，$x=2$或$x=-\frac{4}{3}$.

提分·秘诀

特别警示

求$1\frac{9}{16}$的平方根时易误将$1\frac{9}{16}$的整数部分1和分数部分$\frac{9}{16}$分别求平方根，导致错解．

特别警示

$\sqrt{0.81}$表示0.81的算术平方根，而0.81的算术平方根只有0.9．本题容易误认为$\sqrt{0.81}$表示0.81的平方根，导致错误．

被开方数41^2-40^2是一个整体，首先要将41^2-40^2化简，再去计算它的算术平方根．

方法点拨

利用平方根的定义解方程的一般步骤：

1. **移项**，使含未知数的项在等号的一边，常数项在等号的另一边；
2. **系数化为1**，将方程化为“$x^2=a$”的形式；
3. **根据平方根的定义求出未知数x的值**．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：利用平方根的性质求字母的值

例 9 （1）一个正数的平方根是 $2a-1$ 和 $a-5$，则这个正数是多少？

（2）已知 $2a-1$ 与 $-a+2$ 是 m 的平方根，求 m 的值.

解题秘方： 根据平方根的性质，找出两个平方根之间的关系列方程求值.

解：（1）根据题意，得 $(2a-1)+(a-5)=0$，解得 $a=2$.

$\therefore$ 这个正数为 $(2a-1)^2=(2\times2-1)^2=9$.

（2）根据题意，分以下两种情况：

当 $2a-1=-a+2$ 时，$a=1$，

$\therefore m=(2a-1)^2=(2\times1-1)^2=1$；

当 $(2a-1)+(-a+2)=0$ 时，$a=-1$，

$\therefore m=(2a-1)^2=[2\times(-1)-1]^2=(-3)^2=9$.

故 m 的值为 1 或 9.

解法提醒

- 正数有两个平方根，它们互为相反数，列方程先求出 a，再根据平方根的定义求这个正数的值；
- 已知 a,b 是 m 的平方根，则有 $a=b$ 或 $a+b=0$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用定义法求算术平方根中的字母值

例 10 已知 $y=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}+5$，求 $x+y$ 的值.

解题秘方： 因为只有非负数才有算术平方根，由此我们可以得知 $x-8\geqslant0$ 且 $8-x\geqslant0$，而同时满足条件的只有 $x=8$，进而便可求出 y 的值，$x+y$ 的值也就随即可知了.

解： 由题意可得 $x-8\geqslant0$ 且 $8-x\geqslant0$，

即 $x\geqslant8$ 且 $x\leqslant8$.

$\therefore x=8$.

当 $x=8$ 时，$y=5$.

$\therefore x+y=8+5=13$.

挑战·高分

方法点拨

解决条件式中被开方数互为相反数问题的方法：

在一个条件式子中同时含有类似 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{-a}$ 的式子，即条件式子中被开方数互为相反数，只有它们都等于 0 时，这两个式子才都有意义.

拔尖角度 2 利用性质法求算术平方根中字母的值

例 11 若 $\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=0$，求 $x^{2\,019}+y^{2\,020}$ 的值.

解题秘方： 非负数与非负数的和为 0 当且仅当这两个非负数都为 0 时成立，可列方程求出 x，y 的值，从而求出含 x，y 的式子的值.

解： $\because\sqrt{x-1}\geqslant0$，$\sqrt{y+1}\geqslant0$，$\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=0$，

$\therefore x-1=0$，$y+1=0$，

$\therefore x=1$，$y=-1$.

$\therefore x^{2\,019}+y^{2\,020}=1^{2\,019}+(-1)^{2\,020}=2$.

挑战·高分

技巧点拨

算术平方根和绝对值一样，都是非负数，当几个非负数的和等于 0 时，其中每一个非负数都为 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用估算法确定一个数的整数部分和小数部分

例 12 设 $2+\sqrt{6}$ 的整数部分和小数部分分别是 x，y，试求出 x，y 的值.

解题秘方：先估算 $\sqrt{6}$ 的整数部分，再表示出其小数部分（$\sqrt{6}-$整数部分 = 小数部分），从而可求出 x，y 的值.

解：因为 $\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$，所以 $2<\sqrt{6}<3$.

所以 $\sqrt{6}$ 的整数部分是 2，则 $\sqrt{6}$ 的小数部分是 $\sqrt{6}-2$.

所以 $2+\sqrt{6}$ 的整数部分是 4，小数部分是 $\sqrt{6}-2$（$2+\sqrt{6}-4=\sqrt{6}-2$），

即 $x=4$，$y=\sqrt{6}-2$.

挑战·高分

技巧点拨

确定 $\sqrt{a}$ 的整数部分、小数部分的一般方法：

- 确定整数部分的方法：直接取与其最接近的两个连续整数中较小的那个整数；
- 确定小数部分的方法：先确定其整数部分，然后用这个数减去它的整数部分得出它的小数部分，即小数部分 = 原数 − 整数部分.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要内容是算术平方根和平方根的概念和性质，中考中以考查算术平方根、平方根的概念及估算为主，多以选择题和填空题的形式出现，属中考中的送分题.

三年中考兵法

考法 1 利用估算法在数轴上表示平方根问题

例 13 [中考·潍坊] 用教材中的计算器依次按键如图 6.1−1 所示，显示的结果在数轴上对应点的位置介于（　　）之间.

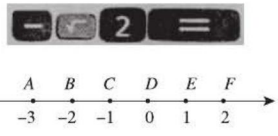


图 6.1−1

A. B 与 C　　B. C 与 D

C. E 与 F　　D. A 与 B

试题评析：本题考查了平方根与数轴以及计算器的使用，解题的关键是先判断出要求的数.

解：由按键顺序可知该数为 $-\sqrt{2}$，

∵ $(-\sqrt{2})^2=2$，而 $1<2<4$，故可知 $-2<-\sqrt{2}<-1$，

所以该对应点位于点 B 和点 C 之间，故答案选 A.

答案：A

冲刺·满分

思路点拨

先从按键的顺序中确定所要求的数为 $-\sqrt{2}$；

再用估算法确定 $-\sqrt{2}$ 在哪两个连续整数之间；

最后确定它对应的点在数轴上的位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用找规律法解新定义问题

例 14 [中考·贺州改编]将一组数$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，…，$\sqrt{40}$，按下列方式进行排列：

$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$；

$\sqrt{12}$，$\sqrt{14}$，4，$\sqrt{18}$，$\sqrt{20}$；

……

若 2 的位置记为（1，2），$\sqrt{12}$的位置记为（2，1），则$\sqrt{38}$这个数的位置记为（　　）

A.（5，4）　　B.（4，4）　　C.（4，5）　　D.（3，5）

试题评析：本题主要考查的是数的变化规律，找出其中的规律是解题的关键.

解：这组数据可表示为：

$\sqrt{2}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$；

$\sqrt{12}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{16}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{20}$；

……

∵ $19\times2=38$，

∴ $\sqrt{38}$为第 4 行，第 4 个数.

答案：B

思路点拨

先读懂记位置的(a，b)的意义，第1个数a表示行数，第2个数b表示列数，

再分析被开方数的变化规律，确定$\sqrt{38}$是第几个数；

最后根据每行5个数这一排列规律确定$\sqrt{38}$的行列数求出a，b的值.

两年模拟兵法 ☞答案见 256 页

1. [中考·武汉]计算$\sqrt{36}$的结果为（　　）

A.6　　B.−6　　C.18　　D.−18

2. 下列说法正确的是（　　）

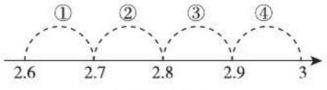
A.−5 是 −25 的平方根

B.3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根

C. $(-2)^2$ 的平方根是 2

D.8 的平方根是 ±4

3. [中考·河北]在数轴上标注了四段范围，如图，则表示$\sqrt{8}$的点落在（　　）



（第 3 题）

A. 段①　　B. 段②　　C. 段③　　D. 段④

4. [中考·南京]若$\sqrt{3}<a<\sqrt{10}$，则下列结论中正确的是（　　）

A.$1<a<3$　　B.$1<a<4$

C.$2<a<3$　　D.$2<a<4$

5. 已知甲、乙、丙三数，甲 $=5+\sqrt{15}$，乙 $=3+\sqrt{17}$，丙 $=1+\sqrt{19}$，则甲、乙、丙的大小关系是（　　）

A. 丙＜乙＜甲　　B. 乙＜甲＜丙

C. 甲＜乙＜丙　　D. 甲 = 乙 = 丙

6. $\sqrt{(-6)^2}=$_____，$-\sqrt{(-7)^2}=$_____，$\pm\sqrt{5^2}=$_____.

7. 已知一个正数的平方根是 $3x-2$ 和 $5x+6$，则这个正数是_____.

8. 求下列各数的平方根.

（1）$\left(-\frac{1}{3}\right)^2$；（2）0；（3）−2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 求下列各式中 x 的值.

(1) $9x^2-25=0$;

(2) $4(2x-1)^2=36$;

(3) $(x+1)^2-81=0$;

(4) $4(2x+3)^2=(-3)^2$.

10. 已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3，$3a+b-1$ 的平方根是 ± 4，求 $a+2b$ 的平方根.

11. 已知 $\sqrt{7}+7$ 的小数部分是 a，$7-\sqrt{7}$ 的小数部分是 b，求 $a+b$ 的值.

12. 若 a，b 为有理数，且 $b=\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+7}+4$，$a>0$，求 $a+b$ 的值. 【导学号：7207895】

13. 某公路规定汽车速度不得超过 80 km/h，当发生交通事故时，交通警察通常根据刹车后车轮滑过的距离估计车辆行驶的速度，所用的经验公式是 $v=16\sqrt{df}$，其中 v 表示车速（单位：km/h），d 表示刹车后车轮滑过的距离（单位：m），f 表示摩擦系数. 在一次交通事故中，已知 $d=16$ m，$f=1.69$，请你判断一下，肇事汽车当时的速度是否超过了规定的速度?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.2 立方根

核心知识
- 立方根
- 立方根的性质
- 用计算器求立方根

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 立方根

1. 定义：

一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根或三次方根．这就是说，如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根．

表示方法：一个数 a 的立方根，用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号 a”，其中 a 是被开方数，3 是根指数．

特别警示：$\sqrt[3]{a}$ 中的根指数 3 不能省略．若省略了 3，$\sqrt{a}$ 表示非负数 a 的算术平方根而非 a 的立方根．

2. 开立方：求一个数的立方根的运算，叫做开立方．

特别解读：立方根与开立方的关系：立方根是一个数，是开立方的结果；而开立方是求一个数的立方根的运算．

提分·必记

特别提醒

立方根与平方根的区别

1. 被开方数：前者可为任何数，后者为非负数；
2. 根指数：前者不能省略，后者可省略不写；
3. 个数：立方根只有一个，平方根有两个（特殊情况0的平方根只有1个，是0）．

拔考向▸利用立方根的定义解题

类型 1：利用立方根的定义求立方根

例 1 求下列各数的立方根：

（1）-125；（2）$2\frac{10}{27}$；（3）-1.

解题秘方：根据立方根的定义用立方法求解．

解：（1）因为 $(-5)^3=-125$，

所以 -125 的立方根是 -5，即 $\sqrt[3]{-125}=-5$.

（2）因为 $2\frac{10}{27}=\frac{64}{27}$，而 $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$，

所以 $2\frac{10}{27}$ 的立方根是 $\frac{4}{3}$，即 $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\frac{4}{3}$.

（3）因为 $(-1)^3=-1$，

所以 -1 的立方根是 -1，即 $\sqrt[3]{-1}=-1$.

提分·秘诀

解法提醒

如果被开方数为带分数，一般先将带分数化为假分数，然后再求其立方根．求一个数的立方根时要注意结果的正负．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用立方根的定义求值

例 2 已知 $x-2$ 的平方根是 ± 2，$2x+y+7$ 的立方根是 3，求 x^2+y^2 的算术平方根.

解题秘方：一个数等于它平方根的平方，等于它立方根的立方.

解：∵ $x-2$ 的平方根是 ± 2，

∴ $x-2=4$.

∴ $x=6$.

∵ $2x+y+7$ 的立方根是 3，

∴ $2x+y+7=27$.

把 $x=6$ 代入解得：$y=8$，

∴ $x^2+y^2=6^2+8^2=100$.

∴ x^2+y^2 的算术平方根为 10.

方法点拨

本题根据**平方根中被开方数等于平方根的平方，立方根中被开方数等于立方根的立方**这一关系，运用方程思想列方程求出 x，y 的值，再根据算术平方根的定义求出 x^2+y^2 的算术平方根.

知识 2 立方根的性质

1. 性质：

（1）正数的立方根是正数；

（2）负数的立方根是负数；

（3）0 的立方根是 0；

（4）$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$；

（5）$(\sqrt[3]{a})^3=a$.

2. 平方根与立方根的比较

关系 \ 名称		平方根	立方根
区别	定义	一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根	一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根
	性质	正数有两个平方根，它们互为相反数	正数有一个立方根，仍为正数
		负数没有平方根	负数有一个立方根，仍为负数
	表示法	$\pm\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）	$\sqrt[3]{a}$（a 为任意数）
联系		①开平方与开立方都与相应的乘方运算互为逆运算 ②0 的平方根和立方根都是 0	

提分·必记

特别提醒

1. 立方根是它本身的数只有 0 和 ±1.
2. 互为相反数的两个数，它们的立方根也互为相反数，即 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$. 利用“$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$”可以把求一个负数的立方根转化为求一个正数的立方根的相反数.
3. $(\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a^3}=a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用立方根的性质解题

类型1：利用立方根的性质求值

例3 求下列各式的值：

（1）$-\sqrt[3]{343}$；（2）$\sqrt[3]{\frac{10}{27}-5}$；

（3）$-\sqrt[3]{-8}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}$.

解题秘方：根据立方根和平方根的性质进行化简计算.

解：（1）$-\sqrt[3]{343}=-7$；

（2）$\sqrt[3]{\frac{10}{27}-5}=\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$；

（3）$-\sqrt[3]{-8}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}=2\div\frac{3}{2}+1=2\times\frac{2}{3}+1=\frac{7}{3}$.

类型2：利用立方根的性质求值

例4 已知$\sqrt[3]{3y-1}$和$\sqrt[3]{1-2x}$互为相反数，且$x\neq0$，$y\neq0$，求$\frac{x}{y}$的值.

解题秘方：根据立方根互为相反数，则被开方数互为相反数，建立x与y之间的等量关系求解.

解：∵$\sqrt[3]{3y-1}$和$\sqrt[3]{1-2x}$互为相反数，

∴$3y-1$和$1-2x$互为相反数，

即$(3y-1)+(1-2x)=0$.

∴$3y=2x$.

又∵$x\neq0$，$y\neq0$，

∴$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

点知识▶3 用计算器求一个数的立方根

用计算器求一个数的立方根和求一个数的算术平方根的步骤相同，只是按的根指数键不同.

步骤：按键$\boxed{\sqrt[3]{\square}}$→被开方数→$\boxed{=}$→根据显示结果写出立方根.

或者：按键$\boxed{2nd\ F}$ $\boxed{\sqrt[3]{\square}}$→被开方数→$\boxed{=}$→根据显示结果写出立方根.

提分·秘诀

解法提醒

做开平方或开立方运算时，一般都是利用它们的定义，运用平方法或立方法去掉根号；当被开方数不是单独一个数时，则需先将它们进行化简，再进行开方运算.

知识储备

正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0的立方根是0，因此只有互为相反数的两个数，它们的立方根才能互为相反数，即互为相反数的立方根互为相反数.

提分·必记

特别警示

不同型号的计算器按键的顺序可能不同，使用计算器时，一定要按说明书操作.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用计算器求立方根

类型 1：利用计算器求立方根

例 5 用计算器求下列各数的立方根：

（1）64；（2）100（精确到 0.01）；（3）−13.27（精确到 0.001）.

解题秘方：根据计算器求立方根的步骤进行按键操作.

解：（1）依次按键 2nd F $\sqrt[3]{\ }$ 64 = ，显示：4.

所以$\sqrt[3]{64}=4$.

（2）依次按键 2nd F $\sqrt[3]{\ }$ 100 = ，显示：4.641 588 834.

所以$\sqrt[3]{100}\approx 4.64$.

（3）依次按键 2nd F $\sqrt[3]{\ }$ 13.27 = ，显示：2.367 501 744.

所以$\sqrt[3]{13.27}\approx 2.368$，所以$\sqrt[3]{-13.27}\approx -2.368$.

类型 2：利用计算器比较大小

例 6 比较下列各组数的大小：

（1）$\sqrt[3]{9}$与$\sqrt{3}$；（2）$-\sqrt[3]{42}$与 −3.4；（3）$\sqrt[3]{6}$与 2.

解题秘方：可以用计算器求出各个数的近似数进行比较，也可以借助中间值进行比较.

解：（1）**用中间值法**：∵ $2=\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{9}$，$2=\sqrt{4}>\sqrt{3}$，

∴$\sqrt[3]{9}>\sqrt{3}$.

（2）**用计算器求值法**：∵$\sqrt[3]{42}\approx 3.476>3.4$，

∴$-\sqrt[3]{42}<-3.4$.

（3）**用立方法**：∵$(\sqrt[3]{6})^3=6$，$2^3=8$，$6<8$，

∴$\sqrt[3]{6}<2$.

另解

$|-\sqrt[3]{42}|=\sqrt[3]{42}$，

$|-3.4|=3.4$.

∵$(\sqrt[3]{42})^3=42$，

$3.4^3=39.304$，

$42>39.304$，

∴$\sqrt[3]{42}>3.4$.

∴$|-\sqrt[3]{42}|>|-3.4|$，

∴$-\sqrt[3]{42}<-3.4$.

提分·秘诀

解法提醒

利用互为相反数的两个数的立方根互为相反数这一关系，要求一个负数的立方根，可用计算器先求这个负数的绝对值的立方根，再在这个负数的绝对值的立方根前面加负号，即得这个负数的立方根.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用定义法求字母式子的立方根

例 7 如果$\sqrt[b+4]{a-3b}$为 $a-3b$ 的算术平方根，$\sqrt[a+2]{1-a^2}$为 $1-a^2$ 的立方根，求 $2a-3b$ 的立方根.

解题秘方：算术平方根的根指数为 2，立方根的根指数为 3，由此可以分别列出关于 a，b 的方程，得到 a，b 后即可求出题目要求的结果.

解：由题意，得 $b+4=2$，$a+2=3$.

所以 $b=-2$，$a=1$.

所以 $2a-3b=8$.

所以$\sqrt[3]{2a-3b}=\sqrt[3]{8}=2$.

根据算术平方根和立方根根指数的意义列方程求解.

挑战·高分

特别警示

求出字母的值必须满足算术平方根的被开方数为非负数，否则求出的值就无意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想求立方根中字母的值

例 8 已知$\sqrt[3]{1-a^2}=1-a^2$，求 a 的值.

解题秘方：$\sqrt[3]{1-a^2}=1-a^2$ 表示 $1-a^2$ 的立方根是它本身，由立方根的性质和立方根等于它本身的数有 0，±1，分情况列方程求解即可.

解：立方根等于它本身的数有 −1，0，1. 当 $1-a^2=-1$ 时，$a=\pm\sqrt{2}$；当 $1-a^2=0$ 时，$a=\pm1$；当 $1-a^2=1$ 时，$a=0$.

故 a 的值为 0，±1，$\pm\sqrt{2}$.

挑战·高分

解法提醒

解决本题用到了分类讨论的数学思想. 即要根据立方根等于它本身的数有 0，1，−1 进行分类讨论.

拔尖角度▸ 3 利用观察法探究立方根的变化规律

例 9 观察下列式子，并解决问题：

$\sqrt[3]{0.2}\approx0.5848$，$\sqrt[3]{2}\approx1.260$，$\sqrt[3]{20}\approx2.714$，$\sqrt[3]{200}\approx5.848$，$\sqrt[3]{2\,000}\approx12.60$.

（1）你能发现什么规律？用一句话描述出来；

（2）求$\sqrt[3]{0.002}$和$\sqrt[3]{200\,000}$的近似值；

（3）若$\sqrt[3]{x}\approx12.60$，求 x 的值.

解题秘方：依据被开方数的小数点与立方根的小数点的移动规律求解即可.

解：（1）在开立方运算时，被开方数的小数点每向左（或向右）移动 3 位，立方根的小数点就相应地向左（或向右）移动 1 位.

（2）$\sqrt[3]{0.002}\approx0.1260$，$\sqrt[3]{200\,000}\approx58.48$.

（3）$\because\sqrt[3]{x}\approx12.60\approx\sqrt[3]{2\,000}$，$\therefore x=2\,000$.

挑战·高分

详解

将$\sqrt[3]{2}$中被开方数的小数点向左移动 3 位，可得$\sqrt[3]{0.002}$，则 1.260 的小数点向左移动 1 位可得$\sqrt[3]{0.002}$的近似值；将$\sqrt[3]{200}$中被开方数的小数点向右移动 3 位，可得$\sqrt[3]{200\,000}$，则 5.848 的小数点向右移动 1 位可得$\sqrt[3]{200\,000}$的近似值.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的重要考点就是立方根，直接考查求立方根是中考的主要考查方式，以选择题形式为主. 立方根的规律探究也是今后考查的一个趋势.

三年中考兵法

考法 1 求一个数的立方根

例 10 [中考·济宁]$\sqrt[3]{-1}$的值是（　　）

A. 1　　B. −1　　C. 3　　D. −3

试题评析：本题考查了立方根的定义，掌握立方根的定义是解题的关键.

解：$\because\sqrt[3]{-1}$表示的是 −1 的立方根，

又 $(-1)^3=-1$，$\therefore\sqrt[3]{-1}=-1$.

答案：B

冲刺·满分

另解

$\because\sqrt[3]{-1}$表示 −1 的立方根，由立方根的性质知立方根等于本身的数有 ±1，0，

$\therefore\sqrt[3]{-1}=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 立方根的规律探究

例 11 [模拟 · 潜江]观察下列各式：

① $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$；

② $\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$；

③ $\sqrt[3]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$；

④ $\sqrt[3]{5\frac{5}{124}}=5\sqrt[3]{\frac{5}{124}}$；…

你能发现其中包含的规律吗？试用含 n（n 为大于 1 的整数）的式子表示出你所发现的规律.

试题评析：本题考查了立方根的规律探究，分析被开方数的变化规律是解题的关键.

解：1. 观察①②③④四个等式左边根号内分数的特点，在四个带分数中，

（1）整数部分与分数部分的分子相等；即 2=2，3=3，4=4，5=5；

（2）整数部分与分数部分的分母有下列关系：$7=2^3-1$，$26=3^3-1$，$63=4^3-1$，$124=5^3-1$；

2. 观察①②③④四个等式右边的“$\sqrt[3]{\ }$”前的倍数正好是被开方数的分子，被开方数是等式左边被开方数的带分数减去带分数的整数部分后的数，所以其中的规律可以表示为：$\sqrt[3]{n+\frac{n}{n^3-1}}=n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$（$n$ 为大于 1 的整数）.

思路点拨

找本题规律分两步：

- 分析左边被开方数的特点
  - (1) 整数部分与分子的关系；
  - (2) 整数部分与分母的关系；
- 分析等式左、右两边的关系，找出等式共同具有的规律.

两年模拟兵法 ☞答案见 257 页

1. [中考 · 聊城]64 的立方根是（　　）

A. 4　　B. 8

C. ±4　　D. ±8

2. 下列说法正确的是（　　）

A. 无论 a 是何值，$-a^2$ 一定没有平方根

B. 一个数若有平方根，则它的平方根是一正、一负两个数

C. 负数没有立方根

D. $-\sqrt[3]{-10}$ 表示 −10 的立方根的相反数

3. 估计 58 的立方根的大小在（　　）

A. 2 与 3 之间　　B. 3 与 4 之间

C. 4 与 5 之间　　D. 5 与 6 之间

4. 一个正方体的体积为 64，则这个正方体的棱长的算术平方根为（　　）

A. ±4　　B. 4　　C. ±2　　D. 2

5. 若 $\sqrt{x}=8$，则 $\sqrt[3]{-x}=$_____.

6. 已知 $\sqrt[3]{68.8}\approx 4.098$，且 $\sqrt[3]{-x}\approx 40.98$，则 $x=$_____.

7. 比较 2，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{7}$ 的大小，并用“<”连接起来：_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 求下列各数的立方根：

（1）1 000；（2）-8；（3）$\frac{27}{125}$；

（4）$-\frac{27}{125}$；（5）$\sqrt{64}$；（6）0.001；

（7）-0.027；（8）1；（9）-1；（10）0.

9. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$；（2）$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$；

（3）$\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}$；（4）$\sqrt[3]{-(m+1)^3}$.

10. 求下列各式中 x 的值.

（1）$(x+2)^3+1=0$；

（2）$\frac{1}{4}(2x+3)^3=54$.

11. ［**模拟 · 重庆**］已知 $A=\sqrt[4a-6]{a+2}$ 是 $a+2$ 的算术平方根，$B=\sqrt[3a+2b-9]{2-b}$ 是 $2-b$ 的立方根，求 $A+B$ 的立方根. 【**导学号：7207895**】

12. 求满足 $\sqrt[3]{x+1}-1=x$ 的 x 的值.

13. 小明家楼房的顶层上有一个正方体储水箱坏了，工人师傅打算用铁皮焊制一个新的密封的正方体储水箱，使其最多容纳 1.728 m^3 的水，至少需要多大面积的铁皮?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.3 实数

核心知识

- 无理数
- 实数
- 实数的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 无理数

1. 定义： 无限不循环小数叫做无理数.

判断标准： 小数位数无限，小数形式为不循环.

2. 三种常见形式：

（1）开方开不尽的数，如$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，…；

（2）含有π的一类数，如$\frac{1}{3}\pi$，$\frac{1}{5}\pi$，$\pi+1$，…；

（3）以无限不循环小数的形式出现的特定结构的数，如0.101 001 000 1…（每相邻两个1之间依次多一个0）.

3. 无理数与有理数的区别：

（1）有理数是有限小数或无限循环小数，而无理数是无限不循环小数；

（2）所有的有理数都可以写成分数的形式（整数可以看成分母为1的分数），而无理数不能写成分数的形式.

提分·必记

特别警示

- 无理数都是无限小数，但无限小数不一定是无理数，只有无限不循环小数才是无理数. 例如：$0.\dot{3}$是无限小数，但不是无理数.
- 某些数的平方根或立方根是无理数，但带根号的数不一定都是无理数. 例如$\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{27}$就不是无理数.

拨考向▸利用无理数的定义识别无理数

例1 下列各数：3.141 59，$-\sqrt[3]{8}$，0.131 131 113…（每相邻两个3之间依次多一个1），$\pi-5$，$\sqrt{2}+1$，$-\frac{22}{7}$中，无理数有（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

解题秘方： 根据无理数的三种形式去辨析.

解： ∵ 3.141 59是有限小数，∴ 3.141 59是有理数. ∵ $-\sqrt[3]{8}=-2$，∴ $-\sqrt[3]{8}$是有理数. ∵ 0.131 131 113…（每相邻两个3之间依次多一个1）是无限不循环小数，∴ 0.131 131 113…（每相邻两个3之间依次多一个1）是无理数，∵ π是无理数，∴ $\pi-5$是无理数，∵ $\sqrt{2}$是无理数，∴ $\sqrt{2}+1$是无理数. ∵ $-\frac{22}{7}$是分数，∴ $-\frac{22}{7}$是有理数. 故选C.

答案： C

提分·秘诀

特别警示

- 对有理数和无理数进行区分时，应先对某些数进行计算或化简，然后根据最后结果进行分类，不能仅看到用根号表示的数就认为是无理数.
- π是无理数，化简后含π的数也是无理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 2 实数

1. 定义： 有理数和无理数统称实数.

特别解读：（1）在实数范围内，一个数不是有理数，那么它一定是无理数，反之亦成立.

（2）引入无理数后，数的范围由原来的有理数扩大到实数，今后我们研究问题计算时，若没有特殊说明，就应在实数范围内进行.

2. 分类：

（1）按定义分类：

实数 ⎧ 有理数 ⎧ 整数 ⎧ 正整数
⎪ ⎪ ⎪ 0
⎪ ⎪ ⎩ 负整数 ⎫ 有限小数或
⎪ ⎪ 分数 ⎧ 正分数 ⎪ 无限循环小数
⎪ ⎪ ⎩ 负分数 ⎭
⎪ 无理数 ⎧ 正无理数 ⎫ 无限不循环小数
⎩ ⎩ 负无理数 ⎭

（2）按性质分类：

实数 ⎧ 正实数 ⎧ 正有理数
⎪ ⎪ 正无理数
⎪ 0
⎪ 负实数 ⎧ 负有理数
⎩ ⎩ 负无理数


实数的分类

提分·必记

特别提醒

1. 实数的分类有不同的方法，但不论用哪一种分类的方法，都要按同一标准，做到不重复不遗漏；
2. 0既不是正实数也不是负实数.
3. 对实数进行分类时，某些数应先进行计算或化简，然后根据最后结果进行分类. 不能看到带根号的数，就认为是无理数，也不能看到有分数线的数，就认为是有理数.

技考向 ▸ 利用实数中各类数的特征进行分类

例 2 把下列各数填入相应的集合内：

$-\frac{1}{2}$，$-\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\frac{9}{2}$，$-\sqrt[3]{-8}$，0，$-\pi$，$-\frac{119}{3}$，$-4.20\dot{1}$，3.101 001 000 1…（每相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1）.

有理数集合：{ …};

无理数集合：{ …};

整数集合：{ …};

分数集合：{ …};

正实数集合：{ …};

负实数集合：{ …}.

解题秘方： 根据有理数、无理数等概念进行分类时，应注意先把一些数进行化简再进行判断，如 $-\sqrt[3]{-8}=2$.

解： 有理数集合：$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, -\sqrt[3]{-8}, 0, -\frac{119}{3}, -4.20\dot{1}, \cdots\right\}$;

提分·秘诀

解法提醒

判断一个实数的属性（如有理数、无理数）应遵循：一化简，二辨析，三判断.

1. 所有的有理数都可以化成有限小数或无限循环小数，而无理数只能化成无限不循环小数.
2. 要注意将“3.101 001 000 1”与“3.101 001 000 1…（每相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1）”区别开. 前者是有限小数，是有理数；后者是无限不循环小数，是无理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

无理数集合：$\left\{-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3},\ -\pi,\ 3.101\ 001\ 000\ 1\cdots$（每相邻两个1之间0的个数逐次加1），$\cdots\right\}$；

整数集合：$\{-\sqrt[3]{-8},\ 0,\ \cdots\}$；

分数集合：$\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ -\frac{119}{3},\ -4.\dot{2}0\dot{1},\ \cdots\right\}$；

正实数集合：$\left\{\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{9}{2},\ -\sqrt[3]{-8},\ 3.101\ 001\ 000\ 1\cdots$（每相邻两个1之间0的个数逐次加1），$\cdots\right\}$；

负实数集合：$\left\{-\frac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ -\pi,\ -\frac{119}{3},\ -4.\dot{2}0\dot{1},\ \cdots\right\}$.

3. **判断时要看结果，不要看表面形式**，如 $-\sqrt[3]{-8}=2$ 是有理数，而不是无理数.

点知识▶3 实数与数轴

1. 实数与数轴间的关系：实数与数轴上的点是一一对应的.

（1）“一一对应”包含着两层含义：

①每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；

②数轴上的每一个点都表示一个实数.

（2）数轴上两点间的距离可用两点所表示的实数来表示. 即点 A，点 B 在数轴上表示的数为 x_1，x_2，则 $AB=|x_1-x_2|$.

2. 利用数轴比较实数的大小：对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大.

提分·必记

特别提醒

- 在数轴上表示无理数时，一般只能通过估算标出其近似位置；
- 借助数轴上的点可以把实数直观地表示出来，数轴上的任意一点表示的数，不是有理数就是无理数.

拔考向▶利用数轴比较实数的大小

例3 用“<”号连接下列各数：

$-\frac{1}{2}$，$\sqrt{3}$，$-2\sqrt{2}$，2.5，0.

解题秘方：比较一组实数的大小和比较一组有理数的大小一样，可先将这些数在数轴上表示出来，然后根据“在数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示的数大”求解.

解：将各数的大致位置在数轴上表示出来，如图6.3-1所示.

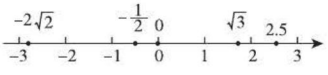


图 6.3-1

由图可知，$-2\sqrt{2}<-\frac{1}{2}<0<\sqrt{3}<2.5$.

提分·秘诀

方法点拨

根据“实数与数轴上的点是一一对应的”，并且“在数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示的数大”，我们可以利用数形结合思想比较实数的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶4 实数的性质

1. 相关概念：

（1）**相反数**：实数 a 的相反数为 $-a$，若 a，b 互为相反数，则 $a+b=0$；

（2）**倒数**：非零实数 a 的倒数为 $\frac{1}{a}$，若 a，b 互为倒数，则 $ab=1$；

（3）**绝对值**：$|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0).\end{cases}$

2. 法则法比较实数的大小：

（1）**定义法**：正数大于 0，0 大于一切负数.

（2）**性质法**：两个正数，绝对值大的数大；两个负数，绝对值大的数反而小.

拔考向▶利用实数的性质解决实数的问题

例 4 求下列各数的相反数、倒数和绝对值.

（1）$\sqrt{2}$；（2）$-\sqrt{5}$；（3）$\sqrt{\frac{9}{64}}$；（4）$2-\sqrt{3}$.

解题秘方：利用实数的性质求相反数、倒数、绝对值.

解：（1）$\sqrt{2}$ 的相反数是 $-\sqrt{2}$，倒数是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，绝对值是 $\sqrt{2}$.

（2）$-\sqrt{5}$ 的相反数是 $\sqrt{5}$，倒数是 $-\frac{1}{\sqrt{5}}$，绝对值是 $\sqrt{5}$.

（3）$\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$，则它的相反数是 $-\frac{3}{8}$，倒数是 $\frac{8}{3}$，绝对值是 $\frac{3}{8}$.

（4）$2-\sqrt{3}$ 的相反数是 $\sqrt{3}-2$，倒数是 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，绝对值是 $2-\sqrt{3}$.

点知识▶5 实数的运算

1. 在实数范围内，进行加、减、乘、除、乘方和开方运算时，有理数的运算法则和运算律仍然适用；实数混合运算的运算顺序与有理数的混合运算顺序一样，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，同级运算按照自左向右的顺序进行，有括号先算括号里面的.

2. 实数的运算律

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律：$ab=ba$；

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$；

乘法分配律：$(a+b)c=ac+bc$.

3. 运算种类：

运算级别	第一级		第二级		第三级	
运算名称	加	减	乘	除	乘方	开方
运算结果	和	差	积	商	幂	方根

提分·必记

特别提醒

- 在有理数范围内的一些基本概念（如相反数、倒数、绝对值）在实数范围内依然适用.
- 对实数的有关概念进行辨析时，错误的说法只需举一个反例即可.

提分·秘诀

方法点拨

1. 求一个数的相反数，就是在这个数前面添上“-”.
2. **求一个数的绝对值时，首先**要判断所求数的符号，**然后**根据“正数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数，0 的绝对值等于 0”写出这个数的绝对值.

提分·必记

特别提醒

1. 有理数的运算律在实数范围内仍然适用，在进行实数运算的过程中，要做到：
   一“看”——看算式的结构特点，能否运用运算律或公式；
   二“用”——运用运算律或公式；
   三“查”——检查过程和结果是否正确.
2. 负实数只能开奇次方，不能开偶次方；
3. 计算结果中如果包含开方开不尽的数，则保留根号，结果要化为最简形式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用实数的运算步骤进行计算

例5 计算：

（1）$\frac{\sqrt{5}}{2}+2.34-\pi$（精确到0.1）；

（2）$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-1)$（精确到0.01）；

（3）$\left(\sqrt[3]{-216}+\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{64}\right)\times\sqrt{\frac{1}{(-0.1)^2}}$.

解题秘方：在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

解：（1）$\frac{\sqrt{5}}{2}+2.34-\pi\approx\frac{1}{2}\times2.24+2.34-3.14\approx0.3$.

（2）$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-1)\approx(1.732+2.236)\times(1.414-1)=3.968\times0.414\approx1.64$.

（3）$\left(\sqrt[3]{-216}+\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{64}\right)\times\sqrt{\frac{1}{(-0.1)^2}}=\left(-6+\frac{3}{2}+4\right)\times10=-0.5\times10=-5$.

提分·秘诀

特别提醒

实数的运算顺序同有理数的运算顺序.实数运算中，无理数可选取近似值转化为有理数计算，中间结果所取的近似值要比结果要求的近似值多一位小数.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用无理数的相等性质求无理数中字母的值

例6 若有理数a，b满足$a+\sqrt{2}=3+b\sqrt{2}$，则$a=$_____，$b=$_____.

解题秘方：根据无理数的结构分析有理数部分和无理数部分，求出字母的值.

解：因为a，b为有理数，且满足$a+\sqrt{2}=3+b\sqrt{2}$，所以$b\sqrt{2}$为无理数.由等号两边的有理数部分和无理数部分要分别对应相等，得$a=3$，$b=1$.

答案：3；1

挑战·高分

技巧点拨

两个实数相等，可分成两个部分对应相等：有理数部分和有理数部分对应相等，无理数部分和无理数部分对应相等.

拔尖角度▶2 利用相反数、倒数、绝对值的性质求值

例7 若a，b互为相反数，c，d互为倒数，m的绝对值为4，求$\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|$的值.

解题秘方：根据实数的性质求出各字母值，然后代入求值.

解：因为a，b互为相反数，所以$a+b=0$.

因为c，d互为倒数，所以$cd=1$.

因为$|m|=4$，所以$m=\pm4$，所以$m^2=16$.

所以$\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|=\frac{0}{m}-16-|\sqrt{2}-1|=-16-\sqrt{2}+1=-15-\sqrt{2}$.

挑战·高分

方法点拨

当数从有理数扩充到实数后，有理数中相反数、倒数和绝对值的意义同样适用于实数；由于本例中a，b，c，d的值不确定，因此在求$a+b$，cd的值时，运用了整体思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用实数与数轴的关系化简绝对值

挑战·高分

例 8 实数 a 在数轴上对应的点的位置如图 6.3-2 所示，化简：$|a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$.

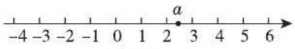


图 6.3-2

解题秘方：根据数轴判断 a，π，$\sqrt{2}$ 的大小，再判断 $a-\pi$ 与 $\sqrt{2}-a$ 的符号，最后根据绝对值的性质化简.

解：由图可知 $\sqrt{2}<a<\pi$，

所以 $a-\pi<0$，$\sqrt{2}-a<0$.

所以 $|a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$

$=\pi-a+a-\sqrt{2}$

$=\pi-\sqrt{2}$.

方法点拨

利用绝对值的性质进行化简的方法：

首先要判断绝对值符号内实数的正负，

再根据“正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数”进行化简.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 实数的相关知识是中考的必考内容，这部分概念性的知识点较多，通常以选择题或填空题的形式出现，近几年中考命题集中在有理数、无理数的辨析，实数与数轴上的点的对应关系及运用，进行简单的实数运算等方面.

三年中考兵法

考法 1 利用实数与数轴的对应关系比较式子的大小

冲刺·满分

例 9 [中考·枣庄]实数 a，b，c，d 在数轴上的位置如图 6.3-3 所示，下列关系式不正确的是（　　）

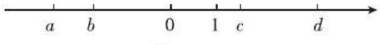


图 6.3-3

A. $|a|>|b|$　　B. $|ac|=ac$

C. $b<d$　　D. $c+d>0$

试题评析：本题主要考查了数轴的知识，理解相关概念的意义及实数的大小比较方法是解题的关键.

解：从 a，b，c，d 在数轴上的位置可知，$a<b<0$，$d>c>0$；

A. $|a|>|b|$，故选项正确；

B. a，c 异号，则 $|ac|=-ac$，故选项错误；

C. $b<d$，故选项正确；

D. $d>c>0$，则 $c+d>0$，故选项正确.

答案：B

详解

$\because a<b<0$，

$\therefore |a|>|b|$（两个负数，绝对值大的反而小）.

由加法法则，同号取原来的符号得出.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用实数的运算求新定义中式子的值

例 10 [中考·张家界]阅读理解题：

定义：如果一个数的平方等于 -1，记 $i^2=-1$，这个数 i 叫做虚数单位，把形如 $a+bi$（a，b 为实数）的数叫做复数，其中 a 叫做这个复数的实部，b 叫做这个复数的虚部．它的加、减、乘法运算与整式的加、减、乘法运算类似．

例如计算：$(2-i)+(5+3i)=(2+5)+(-1+3)i=7+2i$；

$(1+i)\times(2-i)=1\times(2-i)+i(2-i)=1\times2-i+2\times i-i^2=2+(-1+2)i+1=3+i$；

根据以上信息，完成下列问题：

（1）填空：$i^3=$_____，$i^4=$_____；

（2）计算：$(1+i)\times(3-4i)$；

（3）计算：$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,017}$．

试题评析：本题考查了整式的混合运算、复数的定义，能读懂题意是解此题的关键，主要考查了学生的理解能力和计算能力，难度适中．

解：（1）$-i$；1

（2）$(1+i)\times(3-4i)$

$=1\times(3-4i)+i(3-4i)$

$=3-4i+3i-4i^2$

$=3-i+4$

$=7-i$．

（3）$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,017}$

$=i-1-i+1+\cdots+i$

$=i$．

思路点拨

（1）把 $i^2=-1$ 代入求出即可；

（2）把其中一个多项式看成一个整体，用另一个多项式的每一项去乘，再把所得的积相加，最后把 $i^2=-1$ 代入求出即可；

（3）先根据复数的定义计算，再合并即可求解．

两年模拟兵法 ☞答案见 258 页

1. [中考·长沙]下列实数中，为有理数的是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. π　　C. $\sqrt[3]{2}$　　D. 1

2. [中考·重庆]估计 $5\sqrt{6}-\sqrt{24}$ 的值应在（　　）

A. 5 和 6 之间　　B. 6 和 7 之间

C. 7 和 8 之间　　D. 8 和 9 之间

3. [中考·烟台]用我们数学课本上采用的科学计算器进行计算，其按键顺序如下：

2nd F	$\sqrt[3]{\ }$	6	4	+	(	(−)
3	)	x^2	a b/c	2	=	

则输出结果为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{13}{2}$　　C. $\frac{17}{2}$　　D. $\frac{25}{2}$

4. [中考·泰安]下列四个数：-3，$-\sqrt{3}$，$-\pi$，-1，其中最小的数是（　　）

A. $-\pi$　　B. -3

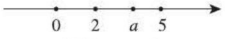
C. -1　　D. $-\sqrt{3}$

5. [中考·邵阳]$3-\pi$ 的绝对值是（　　）

A. $3-\pi$　　B. $\pi-3$

C. 3　　D. π

6. [中考·乐山]在数轴上表示实数 a 的点如图所示，化简 $\sqrt{(a-5)^2}+|a-2|$ 的结果为_____．



（第 6 题）

7. [中考·陕西]将实数 $\sqrt{5}$，π，0，-6 由小到大用“<”号连起来，可表示为_____．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 数轴上 A，B 两点对应的实数分别是 $\sqrt{2}$ 和 2，若点 A 关于点 B 的对称点为 C，则点 C 所对应的实数为_____.

9. 把下列各数填入相应的集合内：

-7，0.32，$\frac{1}{3}$，46，0，$-\sqrt{8}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{216}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，5π，$0.\dot{8}\dot{7}$，$\sqrt{16}$.

有理数集合：{ …};

无理数集合：{ …};

负实数集合：{ …}.

10. 计算：

（1）$|-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-2|$；

（2）$(\sqrt{2})^2-\sqrt{(-4)^2}+4\times\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

11. 写出所有符合下列条件的数：

（1）大于 $-\sqrt{19}$ 且小于 $\sqrt{10}$ 的所有整数；

（2）绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数.

12. [**阅读理解题**] 阅读下面的文字，解答问题.

大家知道 $\sqrt{2}$ 是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此 $\sqrt{2}$ 的小数部分我们不可能全部写出来，事实上，$\sqrt{2}$ 的整数部分是 1，用 $\sqrt{2}$ 减去其整数部分，差就是小数部分，所以 $\sqrt{2}-1$ 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分.

请解答： 【导学号：7207895】

（1）你能求出 $\sqrt{5}+2$ 的整数部分和小数部分吗?

（2）已知 $10+\sqrt{3}=x+y$，其中 x 是整数，且 $0<y<1$，请求出 $x-y$ 的相反数.

素养提分 行动篇

实数应澄清的几个问题

实数是中学数学的一个重要概念，初学者因对其理解不透彻，常会出现一些错误认识，现就几个常见的问题说明如下：

（1）无理数都是无限小数，但反过来无限小数不都是无理数.

（2）带根号的数未必是无理数，不带根号的数也可能是无理数.

（3）有的同学说“$\frac{22}{7}$ 是无理数，因其不循环”，这是一种错误认识，事实上 $\frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,857\dot{}$，该数不是不循环，而是循环节较长，事实上所有的分数都为有理数.

（4）有理数和无理数的个数不可以比较多少，因为二者都有无限个，故不能比较其个数的多少.

（5）有的同学说“无理数也分正无理数，0 和负无理数”，这也是一种错误认识，因为 0 属于有理数的范畴，无理数可分为正无理数和负无理数.

（6）有些同学说“有些无理数如 π，很难在数轴上找到表示它的点，因此实数和数轴上的点之间不是一一对应的关系”. 这是对数轴上的点和实数是一一对应关系的一种误解，虽然在数轴上很难找到表示 π 的点，但是不能因为很难就否定它在数轴上的存在性.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平方根概念解题的几个技巧



如果一个数的平方等于 a（$a \geqslant 0$），那么这个数是 a 的平方根，其中正的平方根叫做算术平方根，这个概念在解题中有着重要的应用，同学们想必已经知道．今天要告诉同学们的是它的几个巧妙应用，希望对大家的学习有所帮助．

技巧一 ▸ 巧用被开方数的非负性求值

例 1 若 $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}-y=6$，求 y^x 的立方根．

解题秘方：认真观察此题可以发现被开方数为非负数，即 $2-x \geqslant 0$，得 $x \leqslant 2$；$x-2 \geqslant 0$，得 $x \geqslant 2$；进一步可得 $x=2$. 从而可求出 $y=-6$.

解：由题意得 $2-x \geqslant 0$ 且 $x-2 \geqslant 0$，

所以 $x \leqslant 2$ 且 $x \geqslant 2$，

即 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$y=-6$.

所以 $y^x=(-6)^2=36$.

所以 y^x 的立方根为 $\sqrt[3]{36}$．

方法点拨：若互为相反数的两个数同时作为根指数为 2 的被开方数，则这两个被开方数都等于 0.

技巧二 ▸ 巧用正数的两个平方根互为相反数求值

例 2 已知：一个正数的平方根是 $2a-1$ 与 $2-a$，求 a 的平方的相反数的立方根．

解题秘方：由正数的两个平方根互为相反数，列出以 a 为未知数的方程，求出 a 的值，然后再求 a 的平方的相反数的立方根．

解：∵一个正数的平方根是 $2a-1$ 与 $2-a$，

∴ $(2a-1)+(2-a)=0$.

∴ $a=-1$.

∴ a 的平方的相反数的立方根是 $\sqrt[3]{-1}=-1$.

方法点拨：当 $a \geqslant 0$ 时，a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$，而 $(+\sqrt{a})+(-\sqrt{a})=0$，所以一个正数的平方根有两个，它们互为相反数．

技巧三 ▸ 巧用算术平方根的最小值求值

例 3 已知：$y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，当 a，b 取不同的值时，y 也有不同的值．当 y 最小时，求 b^a 的算术平方根．

解题秘方：$y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，要使 y 最小，就是要使 $\sqrt{a-2}$ 和 $\sqrt{3(b+1)}$ 最小，而 $\sqrt{a-2} \geqslant 0$，$\sqrt{3(b+1)} \geqslant 0$，显然当 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$ 时，y 最小，可得 $a=2$，$b=-1$.

解：∵$\sqrt{a-2} \geqslant 0$，$\sqrt{3(b+1)} \geqslant 0$，

$y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，

∴当 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$ 时，y 最小．

由 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$，可得 $a=2$，$b=-1$.

所以 b^a 的算术平方根是 $\sqrt{(-1)^2}=1$.

方法点拨：$\sqrt{a} \geqslant 0$，即 $a=0$ 时 $\sqrt{a}$ 的值最小，换句话说 $\sqrt{a}$ 的最小值是 0.

技巧四 ▸ 巧用平方根定义解方程

例 4 解方程 $(x+1)^2=36$.

解题秘方：把 $x+1$ 看成是 36 的平方根即可．

解：∵$(x+1)^2=36$，

∴ $x+1$ 是 36 的平方根．

∴ $x+1=\pm 6$.

∴ $x=5$ 或 $x=-7$.

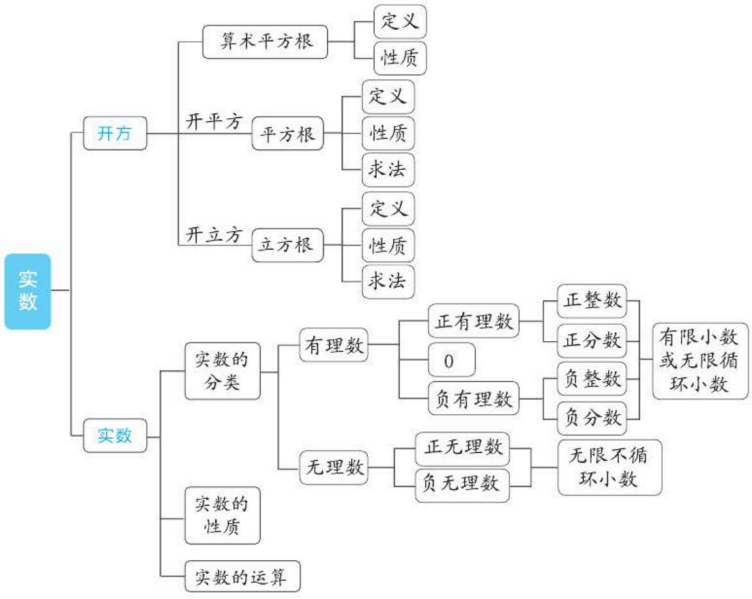
方法点拨：如果 $x^2=a$（$a \geqslant 0$），那么 x 就是 a 的平方根．若从方程的角度观察，这里的 x 实际是方程 $x^2=a$（$a \geqslant 0$）的根．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 乘方与开方是互逆运算，这种互逆关系是求平方根和立方根的关键所在.
2. 一个正数的平方根有两个，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根.
3. 任何数都有立方根，正数的立方根是正数；负数的立方根是负数；0 的立方根是 0.
4. 无限不循环小数是无理数，无理数和有理数统称实数.
5. 当数的范围从有理数扩充到实数后，有理数的运算性质、运算律在实数范围内仍然适用. 在实数范围内运算时，不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且可以进行开立方运算，任何非负数都可以进行开平方运算.

知识方法专题

知识必学

专题一 平方根与立方根

链接中考» 平方根与立方根的求法是本章的关键也是核心，本知识点也是中考中的常客，考查形式大多数都是填空、选择题，都属于送分题.

例 1 [中考·随州] 4 的算术平方根是_____，9 的平方根是_____，-27 的立方根是_____.

解题秘方：根据算术平方根、平方根和立方根的定义求出即可.

解：4 的算术平方根是$\sqrt{4}=2$，9 的平方根是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\pm\sqrt{9}=\pm3$，-27 的立方根是 $\sqrt[3]{-27}=-3$.

答案：2；±3；-3

方法点拨：正数 a 的平方根有两个，记为 $\pm\sqrt{a}$，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根．正数 a 的正的平方根叫做算术平方根，记为 $\sqrt{a}$．实数 a 的立方根只有一个，记为 $\sqrt[3]{a}$，正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，0 的立方根是 0.

专题二 无理数的辨别

链接中考» 开方开不尽的数是无理数中的主流，对无理数的识别是对无理数这一知识点最常见的考查方式，一般都是以选择题形式出现．

例 2 ［中考·泰州］下列 4 个数中，$\sqrt{9}$，$\frac{22}{7}$，π，$(\sqrt{3})^0$，其中无理数是（　　）

A. $\sqrt{9}$　　B. $\frac{22}{7}$　　C. π　　D. $(\sqrt{3})^0$

解题秘方：根据无理数的概念逐个进行识别．

解：$\sqrt{9}=3$ 是整数，$\frac{22}{7}$ 是分数，$(\sqrt{3})^0=1$（提示：当 $a\neq0$ 时，$a^0=1$）是整数，π 是无理数，故选 C.

答案：C

方法点拨：无理数是无限不循环小数，在初中阶段常见的无理数包括三种情况：①含有根号且开方开不尽的数；②含有 π 的式子；③特殊结构的数，如 1.010 010 001…（每相邻两个 1 之间依次多一个 0）．

易错点津：此类问题容易出错的地方是 $\frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,857\dot{}$ 是无限循环小数，有的学生会把它误判为无理数．

专题三 非负数的性质

链接中考» 本章学习了初中阶段的第三类非负数—算术平方根，前面已经学习了两类非负数，一类是绝对值，另一类是偶次幂．利用非负数的性质可以求含有多个字母的等式中各个字母的值．可以独立考查，也可以作为其他解答题的条件进行考查．

例 3 若 $\sqrt{a+2}+|2a-b+1|=0$，则 $(b-a)^{2\,020}=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. $5^{2\,020}$　　D. $-5^{2\,020}$

解题秘方：一个数的绝对值为非负数，一个非负数的算术平方根也是非负数，如果几个非负数的和等于 0，那么它们都等于 0.

解：由题意得 $a+2=0$ 且 $2a-b+1=0$，解得 $a=-2$，$b=-3$．$\therefore(b-a)^{2\,020}=1$，故选 B.

答案：B

方法点拨：初中阶段已学习了三类非负数，①$|a|\geqslant0$；②$a^2\geqslant0$；③$\sqrt{a}\geqslant0$，如果出现几个非负数的和为零，则说明这几个非负数都等于 0.

专题四 实数的大小比较

链接中考» 实数的大小比较方法与有理数的大小比较方法相类似，在中考中也是热门考点，属送分题，考查形式都是选择题．

例 4 ［中考·衢州］在 $\sqrt{2}$，-1，-3，0 这四个实数中，最小的是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. -1　　C. -3　　D. 0

解：首先 4 个数中有正数、负数和 0，由于要求最小的数，依据“正数大于 0”，“0 大于负数”，所以只需比较两个负数的大小．因为 $-3<-1$，所以最小的数是 -3，故选 C.

答案：C

方法点拨：（1）实数大小比较的一般方法：①定义法：正数都大于 0，负数都小于 0，正数大于一切负数；②两个负数比较大小，绝对值大的反而小；③在数轴上表示的数，右边的总比左边的大．

（2）比较无理数的大小时，可先利用平方法估计其在哪两个有理数之间，然后再进行比较．


实数大小比较的方法

Ⅱ 方法必会

专题五 特殊值法

专题解读» 特殊值法，就是在限定的范围内，取某个特殊的数值来解决问题．运用特殊值法的关键有两条：一是取的特殊值

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

要在限定的范围之内；二是特殊值法只适宜于选择题.

例5 [中考·广元]当 $0<x<1$ 时，x，$\frac{1}{x}$，x^2 的大小顺序是（　　）

A. $\frac{1}{x}<x<x^2$　　B. $x<x^2<\frac{1}{x}$

C. $x^2<x<\frac{1}{x}$　　D. $\frac{1}{x}<x^2<x$

解题秘方：采用特殊值法，取 $x=\frac{1}{2}$，求出 x^2 和 $\frac{1}{x}$ 的值，再比较即可.

解：令 $x=\frac{1}{2}$，则 $x^2=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{x}=2$，所以 $x^2<x<\frac{1}{x}$，故答案选 C.

答案：C

方法点拨：**实数大小比较的方法**：

（1）**数轴比较法**：将 a，b 分别表示在数轴上，右边的数总比左边的数大；

（2）**差值比较法**：$a-b>0$ 等价于 $a>b$；$a-b=0$ 等价于 $a=b$；$a-b<0$ 等价于 $a<b$.

（3）**商值比较法**：设 a，$b>0$，则 $\frac{a}{b}=1$ 等价于 $a=b$；$\frac{a}{b}>1$ 等价于 $a>b$；$\frac{a}{b}<1$ 等价于 $a<b$.

除此之外，还有平方法、倒数法、绝对值法等，在选择题的问题上，还可以采取特殊值法.

专题六 数形结合思想

专题解读≫本章数形结合的载体是数轴，依靠数轴反映出数与点的对应关系，运用数形结合的思想方法思考问题，能把抽象的数量关系从形象的几何呈现，也能把几何图形问题转化为数量关系问题去解决.通过数形结合的数学思想方法来学习相反数，绝对值的定义，实数的大小比较等，可以大大减小学习这些知识的难度.

例6 已知实数 m，n 在数轴上的对应点的位置如图 6-1 所示，则下列判断正确的是（　　）

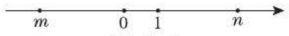


图 6-1

A. $\frac{1}{m}>0$　　B. $|-n|<0$

C. $mn<0$　　D. $m-n>0$

解：从数轴知 $m<0$，$n>0$，$n>m$，$\therefore \frac{1}{m}<0$，$|-n|>0$，$mn<0$，$m-n<0$. $\therefore$ A，B，D 均错误，C 正确.

答案：C

方法点拨：本题运用了数形结合思想，根据实数 m，n 在数轴上的对应点的位置得出 m，n 的符号是解题的关键.

好题必解 答案见 258 页

类型 1：利用实数的相关概念解决问题

1. 实数 -7.5，$\sqrt{15}$，4，$\sqrt[3]{8}$，$-\pi$，$0.\dot{1}\dot{5}$，$\frac{2}{3}$ 中，有理数的个数为 a，无理数的个数为 b，则 $a-b$ 的值为（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

2. [中考·东营]$\sqrt{81}$ 的平方根是（　　）

A. ±3　　B. 3

C. ±9　　D. 9

3. 若 $\sqrt{x+2}=3$，求 $2x+5$ 的平方根_____.

4. 已知：$M=\sqrt[a-b]{a+b+3}$ 是 $a+b+3$ 的算术平方根，$N=\sqrt[a-2b+2]{a+6b}$ 是 $a+6b$ 的算术平方根，求 $M\cdot N$ 的值.

类型 2：利用实数的相关性质解决问题

5. 已知实数 x，y 满足 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$，则 $x-y$ 等于（　　）

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 如图，数轴上 A，B 两点表示的数分别为 $\sqrt{2}$ 和 5.1，则 A，B 两点之间表示整数的点共有（　　）



（第 6 题）

A.6 个　　B.5 个　　C.4 个　　D.3 个

7. （1）一个非负数的平方根是 $2a-1$ 和 $a-5$，这个非负数是多少？

（2）已知 $a-1$ 和 $5-2a$ 都是 m 的平方根，求 a 与 m 的值.

8. 计算：

（1）$\sqrt{0.25}-\sqrt[3]{-27}+\sqrt{(-7)^2}$；

（2）$|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-2|+\sqrt{(-2)^2}$；

（3）$|\sqrt{3}-2|+\sqrt[3]{-8}+\sqrt{(-2)^2}-|-2|$.

9. 求下列各式中 x 的值：

（1）$25(x-1)^2=49$；

（2）$64(x-2)^3-1=0$.

类型 3：利用实数的大小估算解决问题

10. 若 $\sqrt[3]{0.367}\approx 0.716$，$\sqrt[3]{3.67}\approx 1.542$，则 $\sqrt[3]{367}\approx$_____.

11. 由下列等式 $\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$，…，所提示的规律，可得出一般性的结论是_____（用含 n 的式子表示）.

12. 已知 a 为 $\sqrt{250}$ 的整数部分，$b-1$ 是 400 的算术平方根，求 $\sqrt{a+b}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第六章测试卷

答案见 259 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $\frac{1}{4}$的平方根是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. $\pm\frac{1}{4}$

2. 下列实数是无理数的是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\sqrt{14}$

C. 0　　D. $-1.010\,101$

3. 下列说法不正确的是（　　）

A. 8 的立方根是 2　　B. -8 的立方根是 -2

C. 0 的立方根是 0　　D. 125 的立方根是 ±5

4. 下列运算中，正确的是（　　）

A. $\sqrt{25^2-1}=24$　　B. $\sqrt{9\frac{1}{4}}=3\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{81}=\pm9$　　D. $-\sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2}=-\frac{4}{15}$

5. 下列四个数：-3，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，-1，其中最小的数是（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. -3　　C. -1　　D. $-\sqrt{3}$

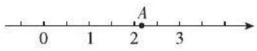
6. 正方体 A 的体积是正方体 B 的体积的 27 倍，那么正方体 A 的棱长是正方体 B 的棱长的（　　）

A. 2 倍　　B. 3 倍　　C. 4 倍　　D. 5 倍

7. 若一个数的平方根与立方根都是它本身，则这个数是（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. ±1，0

8. 如图，数轴上点 A 表示的数可能是（　　）



（第 8 题）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

9. 关于$\sqrt{8}$的叙述，正确的是（　　）

A. 在数轴上不存在表示$\sqrt{8}$的点

B. $\sqrt{8}=2$

C. $\sqrt{8}$表示 8 的平方根

D. 与$\sqrt{8}$最接近的整数是 3

10. 已知$\sqrt{a-1}+|b+2|=0$，则$\sqrt{(a+b)^2}$的值为（　　）

A. 0　　B. 2　　C. -1　　D. 1

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. 请写出一个大于 0 而小于 2 的无理数：_____.

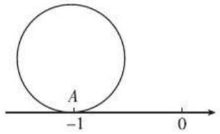
12. $\sqrt{3}-2$的相反数是_____，绝对值是_____.

13. 比较大小：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$_____0.5.（填“$>$”或“$<$”）

14. 若一个数的算术平方根是 8，则这个数的立方根是_____.

15. 一个正数 x 的平方根是 $3a-4$ 和 $1-6a$，则 $a=$_____，$x=$_____.

16. 如图，已知直径为 1 个单位长度的圆形纸片上的点 A 与数轴上表示 -1 的点重合．若将该圆形纸片沿数轴正方向滚动一周（无滑动）后点 A 与数轴上的点 A' 重合，则点 A' 表示的数为_____.



（第 16 题）

三、解答题（共 52 分）

17.（16 分）计算：

（1）$|-2|+(-3)^2-\sqrt{4}$；

（2）$\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3) $\sqrt{6}\times\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}\right)$;

(4) $|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-2|-|\sqrt{2}-1|$.

18. (8分) 求下列各式中 x 的值.

(1) $4x^2-9=0$;

(2) $8(x-1)^3=-\frac{125}{8}$.

19. (9分) 已知一个正方体的体积是 1 000 cm^3, 现在要在它的 8 个角上分别截去 8 个大小相同的小正方体, 使得截去后余下的体积是 488 cm^3, 问截得的每个小正方体的棱长是多少?

20. (9分) 已知 a 是 $\sqrt{10}$ 的整数部分, b 是它的小数部分, 求 $(-a)^3+(b+3)^2$ 的值.

21. (10分) 借助于计算器计算下列各题:

(1) $\sqrt{11-2}$;

(2) $\sqrt{1\,111-22}$;

(3) $\sqrt{111\,111-222}$;

(4) $\sqrt{11\,111\,111-2\,222}$.

仔细观察上面几道题及其计算结果, 你能发现什么规律, 并用发现的这一规律直接写出下面的结果: $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2018\text{个}1}-\underbrace{22\cdots2}_{1009\text{个}2}}=$ _____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

飞跃一维到二维

飞跃一维到二维

第七章 平面直角坐标系









核心考点

你将见到的

- 有序数对
- 平面直角坐标系
- 用坐标表示地理位置
- 用坐标表示平移

核心方法

我们为你提供的

- 确定点的坐标法
- 根据坐标描点法
- 方位角和距离定位法
- 割补法
- 分类讨论思想
- 转化思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.1 平面直角坐标系

核心知识
- 有序数对
- 平面直角坐标系
- 点的坐标
- 特殊位置的点的坐标的特征

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 有序数对

1. 定义：

有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫做有序数对，记作 (a, b).

一是"有序"指两个数的位置不能随意交换；
二是"数对"指必须是两个数.

2. 作用：

平面上每一个点都对应着一个有序数对，每一个有序数对都对应着平面上一个点，因此，利用有序数对可以准确地描述物体的位置，即：平面上的点与有序数对一一对应.

3. 应用类型：

（1）按已定"有序数对"表示其他"有序数对"；

（2）按已定"有序数对"在约定平面上找点的位置；

（3）由约定平面上的点，写出表示该点位置的"有序数对".

提分·必记

特别解读

有序数对表示平面上点的位置的常用方法：
(1) 行、列法；
(2) 经纬法；
(3) 方格法.

拨考向 利用有序数对确定位置

类型 1：有序数对在表示行列位置中的应用

例 1 （1）在电影院内如何找到电影票上所指的位置？

（2）电影票上"10 排 2 号"与"4 排 10 号"中"10"的含义有什么不同？

（3）如果"2 排 3 号"简记作（2，3），那么"5 排 12 号"如何表示？（6，8）表示什么意义？

解题秘方：找准有序数对中的"序"，确定"数对"中的数.

解：（1）在电影院内找位置必须先确定在电影院的第几排，然后确定在第几号，从而可以确定电影票上所指的位置.

（2）"10 排 2 号"中的"10"指的是在电影院的第 10 排，是排号；"4 排 10 号"中的"10"指的是座位号，是第 4 排中的第 10 号.

（3）"5 排 12 号"简记作（5，12），（6，8）表示 6 排 8 号.

提分·秘诀

方法点拨

利用行列定位法确定物体的位置的方法：

首先要弄明白有序数对中每个数的含义，才能对其他的有序数对作出解释或写出相应的有序数对.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

类型 2：有序数对在表示经纬位置中的应用

例 2 下列说法中能确定台风位置的是（　　）

A. 西太平洋　　B. 北纬 28°，东经 135°

C. 距离海南 300 海里　　D. 上海与南京之间

解题秘方：紧扣有序数对表示位置需要两个数据信息进行判断.

答案：B

类型 3：有序数对在表示方格位置中的应用

例 3 中国象棋规定：马走“日”，如图 7.1−1 所示，画出了中国象棋棋盘的一部分，上面标有 A，B，C，D，E 五个点，如果点 A 记作（1，0），点 C 记作（0，3），请用有序数对表示马从点 A 走到点 C 的最短路线.

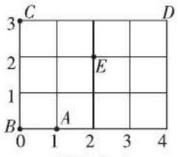


图 7.1−1

解题秘方：紧扣马走“日”的特征解答.

解：马从点 A 走到点 C 的最短路线是 $A(1,0)\rightarrow E(2,2)\rightarrow C(0,3)$.

知识 2 平面直角坐标系

1. 坐标：数轴上每个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标.

2. 平面直角坐标系：

（1）**定义**：在平面内画两条互相垂直、原点重合的数轴，组成平面直角坐标系.

（2）**相关概念**：水平的数轴称为 x 轴或横轴，习惯上取向右为正方向；竖直的数轴称为 y 轴或纵轴，取向上方向为正方向；两坐标轴的交点为平面直角坐标系的原点.

示图（图 7.1−2）：

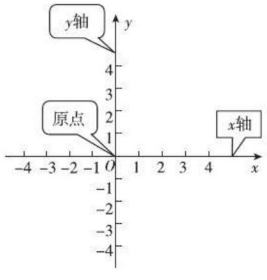


图 7.1−2

方法点拨

经纬定位法：

通过地球上的经度和纬度可以确定一个地点在地球上的位置. 在地图上，水平方向的线是纬线，表示纬度；竖直方向的线是经线，表示经度. 指明一点的经度和纬度，就可以确定这一点在地球上的位置.

解题方法

利用有序数对表示点的位置的方法：

1. 明确有序数对中行与列代表的顺序；
2. 由已知点确定起始行与列；
3. 用有序数对表示所求各点的位置.

提分·必记

特别解读

- 平面直角坐标系的两条数轴共原点，且互相垂直；
- 一般情况下两坐标轴的单位长度是一致的，在有些实际问题中，两坐标轴的的单位长度可以不同，但在同一坐标轴上的单位长度必须相同.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平面直角坐标系的定义识别

例4 图7.1–3所示选项中，平面直角坐标系的画法正确的是（　　）

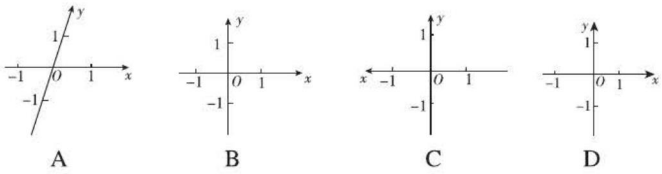


图 7.1–3

解题秘方：根据平面直角坐标系的定义去识别.

解：A中两条坐标轴不是互相垂直的；C中的横轴的正方向画反了，应取向右为正方向；D中横轴的长度单位不一致. 故选B.

答案：B

提分·秘诀

特别提醒

辨识平面直角坐标系的“三要素”：

1. 两条数轴；
2. 共原点；
3. 互相垂直.

注意：一般取向上、向右为正方向.

知识▶3 点的坐标

1. 定义：

若平面直角坐标系中有一点A，过点A作横轴的垂线，垂足在横轴上表示的数为a，过点A作纵轴的垂线，垂足在纵轴上表示的数为b，则有序实数对（a，b）叫做点A的坐标，其中a叫横坐标，b叫纵坐标.

特别提醒：（1）在写点的坐标时，必须先写横坐标，再写纵坐标，中间用逗号隔开，最后用小括号把它们括起来；

（2）点的坐标是有序数对，（a，b）和（b，a）虽然数字相同，但由于顺序不同，表示的位置就不同. 即当$a \neq b$时，这两个坐标表示的是两个不同的点.

2. 平面直角坐标系内的点与有序实数对的一一对应关系：

（1）坐标平面内的任意一点，都有唯一的一个有序实数对（点的坐标）与它对应.

（2）任意一个有序实数对（点的坐标）在坐标平面内都有唯一的一个点和它对应.

提分·必记

特别解读

- 点的坐标是有序数对，有序要求：横坐标在前，纵坐标在后.
- 根据点的坐标的定义，已知点的位置可以读出点的坐标，反之已知点的坐标可以在平面直角坐标系中标出点的位置.

考向▶利用点的坐标的定义解决问题

类型1：利用点的坐标的定义读点的坐标

例5 如图7.1–4，写出点A，B，C，D，E，F，G，O的坐标.

解题秘方：紧扣点的坐标的定义，利用过点向两坐标轴作垂线，用读垂足表示的数法的方求点的坐标.

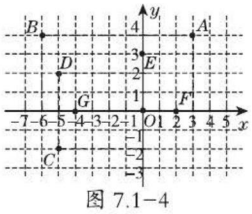


图 7.1–4

解：由图7.1–4可知A（3，4），B（−6，4），C（−5，−2），D（−5，2），E（0，3），F（2，0），G（−4，0），O（0，0）.

提分·秘诀

方法点拨

确定点的坐标的方法：

首先确定横坐标，方法是从该点向x轴作垂线，垂足在x轴上表示的数为该点的横坐标；

再从该点向y轴作垂线，垂足在y轴上表示的数为该点的纵坐标；

最后用有序数对将它表示出来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：已知点的坐标在平面直角坐标系中描点

例 6 请你在如图 7.1−5 所示的平面直角坐标系中，描出以下各点：$A(3, 2)$，$B(0, 3)$，$C(-1, -2)$，$D(2, -1)$.

解题秘方：紧扣点的坐标的意义，利用数轴上表示点的坐标的数作垂线，两垂线的交点即为所求点.

解：描出的点 A，B，C，D 如图 7.1−5 所示.

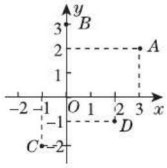


图 7.1−5

类型 3：利用点到坐标轴的距离确定点的坐标

例 7 已知点 P 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 1. 如果过点 P 作两坐标轴的垂线，垂足分别在 x 轴的正半轴上和 y 轴的负半轴上，那么点 P 的坐标是（　　）

A.（2，−1）　　B.（1，−2）　　C.（−2，−1）　　D.（1，2）

解题秘方：紧扣点的坐标与点到两坐标轴的距离的意义之间的关系解答.

解：由点 P 到 x 轴的距离为 2，可知点 P 的纵坐标的绝对值为 2，由点 P 到 y 轴的距离为 1，可知点 P 的横坐标的绝对值为 1，

又因为垂足分别在 x 轴的正半轴上和 y 轴的负半轴上，

所以横坐标为 1，纵坐标为 −2.

故点 P 的坐标是（1，−2）.

答案：B

方法点拨

根据点的坐标描点的方法：

假设点 P 的坐标为 (a, b)，先在 x 轴上找到表示的数为 a 的点 A，在 y 轴上找到表示的数为 b 的点 B，再过点 A 作 x 轴的垂线，过点 B 作 y 轴的垂线，两垂线的交点就是所要描出的点 P.

特别警示

本例的易错点有三处：

1. 混淆距离与坐标之间的区别；
2. 不知道“点 P 到 x 轴的距离”对应的是纵坐标的绝对值，“点 P 到 y 轴的距离”对应的是横坐标的绝对值；
3. 忽略坐标的符号.

知识 4 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征

提分·必记

1. 象限的划分：

如图 7.1−6，建立了平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分，每个部分称为象限，分别叫第一象限、第二象限、第三象限和第四象限，坐标轴上的点不属于任何象限.



图 7.1−6

特别提醒

- 象限的划分是从“右上”开始的，按“逆时针”方向依次排列为第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 各象限的名称是一种规定，不能随意更改.
- 坐标原点既在 x 轴上，又在 y 轴上，它是两条坐标轴唯一的公共点.

2. 平面直角坐标系中各区域的点的坐标的特征：

点 $M(x, y)$ 所处的位置		坐标特征
象限内的点	点 M 在第一象限	M（正，正）
	点 M 在第二象限	M（负，正）
	点 M 在第三象限	M（负，负）
	点 M 在第四象限	M（正，负）
坐标轴上的点	点 M 在 x 轴上	在 x 轴正半轴上：M（正，0）
		在 x 轴负半轴上：M（负，0）
	点 M 在 y 轴上	在 y 轴正半轴上：M（0，正）
		在 y 轴负半轴上：M（0，负）


点的坐标特征

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用点的位置特征求字母的值（取值范围）

例 8 已知点 P 的坐标为 $(a+3,\ b-1)$.

（1）若点 P 在 x 轴上，则 $b=$_____；

（2）若点 P 在 y 轴上，则 $a=$_____；

（3）若点 P 在第三象限，则 a 的取值范围为_____，b 的取值范围为_____.

（4）若点 P 在第四象限，则 a 的取值范围为_____，b 的取值范围为_____.

解题秘方：紧扣 x 轴、y 轴上及象限内点的坐标特征解答.

解：（1）∵点 P 在 x 轴上，

∴ $b-1=0$，解得 $b=1$.

（2）∵点 P 在 y 轴上，

∴ $a+3=0$，解得 $a=-3$.

（3）∵ 点 P 在第三象限，

∴ $a+3<0$，$b-1<0$，∴ $a<-3$，$b<1$.

（4）∵ 点 P 在第四象限，

∴ $a+3>0$，$b-1<0$，∴ $a>-3$，$b<1$.

答案：（1）1　（2）-3　（3）$a<-3$；$b<1$

（4）$a>-3$；$b<1$

提分·秘诀

解法提醒

x 轴上的点的纵坐标是 0，y 轴上的点的横坐标是 0，第三象限内点的横、纵坐标都是负数，第四象限内点的横坐标为正数，纵坐标为负数.

知识▶5 特殊位置的点的坐标特征

1. 两坐标轴夹角平分线上的点的坐标特征：

（1）第一、三象限的角平分线上的点的横、纵坐标相等；

（2）第二、四象限的角平分线上的点的横、纵坐标互为相反数.

2. 平行于 x 轴、y 轴的直线上的点的坐标特征：

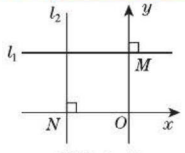


图 7.1−7


特殊位置的点的坐标

如图 7.1−7 所示，直线 $l_1 // x$ 轴，直线 $l_2 // y$ 轴，因为由 l_1 上的任意一点向 y 轴作垂线，垂足都是同一个点 M，所以 l_1 上所有点的纵坐标都相同；因为由 l_2 上的任意一点向 x 轴作垂线，垂足都是同一个点 N，所以 l_2 上所有点的横坐标都相同.

3. 若两个点的横坐标相同，则这两个点之间的距离为纵坐标差的绝对值；若两个点的纵坐标相同，则这两个点之间的距离为横坐标差的绝对值.

提分·必记

特别解读

1. 若 $AB // x$ 轴，则 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 的横坐标不相等，纵坐标相等且不为 0，即 $x_1 \neq x_2$，$y_1=y_2 \neq 0$；反之，若 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且 $x_1 \neq x_2$，$y_1=y_2 \neq 0$，则 $AB // x$ 轴.

2. 若 $CD // y$ 轴，则 $C(m_1, n_1)$，$D(m_2, n_2)$ 的横坐标相等且不为 0，纵坐标不相等，即 $m_1=m_2 \neq 0$，$n_1 \neq n_2$；反之，若 $C(m_1, n_1)$，$D(m_2, n_2)$，且 $m_1=m_2 \neq 0$，$n_1 \neq n_2$，则 $CD // y$ 轴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用特殊位置点的坐标特征解决问题

类型1：利用特殊位置点的坐标的特征求值

例9 已知平面直角坐标系内的不同两点$A(3, a-1)$，$B(b+1, -2)$，

（1）若点A在第一、三象限的角平分线上，求a的值；

（2）若点B在第二、四象限的角平分线上，求b的值；

（3）若直线AB平行于x轴，求a，b的值或取值范围；

（4）若直线AB平行于y轴，且$AB=5$，求a，b的值.

解题秘方：分别根据特殊位置点的坐标特征列出以a，b为未知数的方程，求出a，b的值.

解：（1）∵点A在第一、三象限的角平分线上，∴$a-1=3$，∴$a=4$.

（2）∵点B在第二、四象限的角平分线上，∴$b+1=2$，∴$b=1$.

（3）∵直线AB平行于x轴，∴$a-1=-2$，$b+1\neq 3$.

∴$a=-1$，$b\neq 2$.

（4）∵直线AB平行于y轴，且$AB=5$，

∴$b+1=3$，$|(a-1)-(-2)|=5$.

∴$b=2$，$a=4$或-6.

类型2：利用建立适当的坐标系解决求几何图形的顶点坐标问题

例10 如图7.1-8，长方形$ABCD$的长$AB=5$，宽$BC=3$，请建立适当的平面直角坐标系，写出长方形的顶点A，B，C，D的坐标.

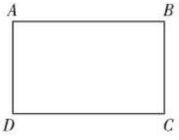


图7.1-8

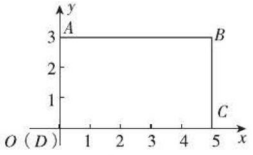


图7.1-9

解题秘方：建立适当的平面直角坐标系，然后根据长方形的长$AB=5$，宽$BC=3$，写出四个顶点的坐标.

解：建立平面直角坐标系如图7.1-9所示（建系方法不唯一），$A(0, 3)$，$B(5, 3)$，$C(5, 0)$，$D(0, 0)$.

方法点拨：几何图形中建立适当的平面直角坐标系的方法

（1）使图形中尽量多的点在坐标轴上；

（2）以某些特殊线段所在的直线为x轴或y轴；

（3）若图形被一条直线分得的两部分形状、大小相同，则可以将此直线作为x轴或y轴；

（4）以某已知点为原点，使它的坐标为$(0, 0)$.

提分·秘诀

特别警示

- 两点确定的直线平行于坐标轴，既要考虑一个坐标相等，又要考虑另一个坐标不能相等，否则两个点重合不能确定一条直线；
- 已知两点之间的距离求点的坐标时，要带上绝对值，即求出的点的坐标不止一个.

另解1

建立平面直角坐标系如图7.1-10所示，$A(-5, 3)$，$B(0, 3)$，$C(0, 0)$，$D(-5, 0)$.

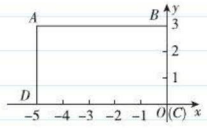


图7.1-10

另解2

建立平面直角坐标系如图7.1-11所示，$A(-2.5, 3)$，$B(2.5, 3)$，$C(2.5, 0)$，$D(-2.5, 0)$.

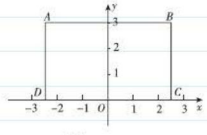


图7.1-11

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用等积法求平面直角坐标系中点的坐标

例 11 已知：三角形 ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(2,3)$.

（1）在图 7.1-12 所给的平面直角坐标系中画出三角形 ABC，并求三角形 ABC 的面积；

（2）若点 P 在 y 轴上，且三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积，求点 P 的坐标.

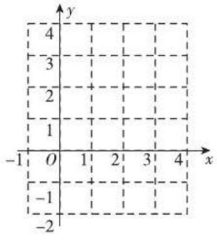


图 7.1-12

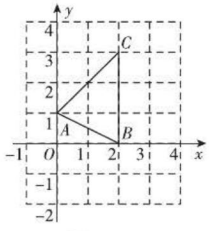


图 7.1-13

解题秘方：利用点的坐标表示三角形的一边长及此边上的高，结合三角形的面积公式计算.

解：（1）在平面直角坐标系中画出三角形 ABC 如图 7.1-13 所示，

三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$.

（2）设点 P 的坐标为 $(0,y)$.

由三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积可得 $\frac{1}{2}|y-1|\times 2=3$，

即 $|y-1|=3$，$\therefore y-1=3$ 或 $y-1=-3$，

解得 $y=4$ 或 $y=-2$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-2)$.

挑战·高分

图解

点 P 的位置如图 7.1-14 所示.

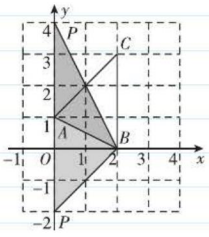


图 7.1-14

当点 P 的坐标为（0，4）时，三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积；

当点 P 的坐标为（0，-2）时，三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积.

拔尖角度▸ 2 利用割补法求平面直角坐标系中不规则图形的面积

例 12 如图 7.1-15，在平面直角坐标系中，$A(1,2)$，$B(5,4)$，$C(6,0)$，$O(0,0)$，求四边形 $ABCO$ 的面积.

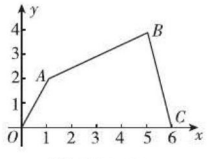


图 7.1-15

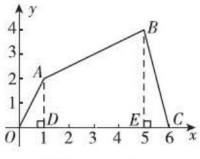


图 7.1-16

解题秘方：将四边形进行分割，结合点的坐标表示图形的边长，求出

挑战·高分

另解 1

如图 7.1-17，过点 B 作 $BG\perp y$ 轴于点 G，连接 AG，则 $OG=4$，$BG=5$，$OC=6$. $\therefore S_{四边形ABCO}=S_{梯形BGOC}-S_{三角形AOG}-S_{三角形ABG}=\frac{1}{2}\times(5+6)\times 4-\frac{1}{2}\times 4\times 1-\frac{1}{2}\times 5\times 2=22-2-5=15$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

各部分的面积.

解：如图 7.1−16，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E，则 $AD=2$，$OD=1$，$DE=4$，$CE=1$，$BE=4$.

$\therefore S_{四边形ABCO}=S_{三角形AOD}+S_{梯形ABED}+S_{三角形BEC}$

$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times(2+4)\times4+\frac{1}{2}\times1\times4$

$=1+12+2$

$=15$.

答：四边形 $ABCO$ 的面积为 15.

解题通法：求平面直角坐标系中几何图形面积的方法

求平面直角坐标系中几何图形的面积，常见的图形是三角形或四边形.（1）当三角形有一条边平行于坐标轴或落在坐标轴上时，直接应用三角形的面积公式进行计算；（2）当三角形没有一条边平行于坐标轴或落在坐标轴上时，要用割补法，将三角形的面积转化为其他图形面积的和或差；（3）求不规则多边形的面积时，一般采用割补法，将不规则的多边形割补为规则图形，进而求出其面积. 解答这类问题时，应结合图形灵活选用方法，首先将点的坐标转化为线段的长度.

拔尖角度 3 利用找规律法求运动中的点的坐标

例 13 如图 7.1−19，动点 P 在平面直角坐标系中按箭头所示方向运动，第 1 次从原点运动到点（1，1），第 2 次接着运动到点（2，0），第 3 次接着运动到点（3，2）……按这样的运动规律，经过第 2 019 次运动后，动点 P 的坐标是_____.

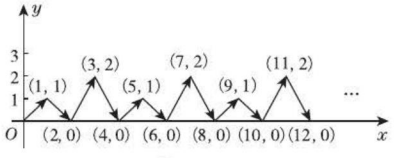


图 7.1−19

解题秘方：分析点的坐标的变化规律，根据规律确定 P 点运动后的坐标.

解：根据如图 7.1−19 所示的点 P 的坐标变化规律，可以看出：①点 P 的横坐标依次为 1，2，3，4，…，即点 P 的横坐标等于运动的次数，所以第 2 019 次运动后，点 P 的横坐标是 2 019；②点 P 的纵坐标依次是 1，0，2，0，1，0，2，0，…，即每运动四次一个循环，因为 $2\,019\div4=504\cdots\cdots3$，所以运动第 2 019 次后，点 P 的纵坐标与第 3 次运动后的纵坐标相同，所以经过第 2 019 次运动后，点 P 的坐标为（2 019，2）.

答案：（2 019，2）

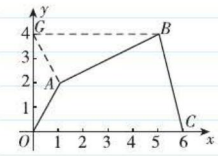


图 7.1−17

另解 2

如图 7.1−18，过点 B 作 $BN \perp y$ 轴于点 N，过点 C 作 $CM \perp x$ 轴，交 NB 的延长线于点 M，连接 AN，则 $ON=4$，$BN=5$，$MN=OC=6$，$BM=1$，$CM=4$.

$\therefore S_{四边形ABCO}=S_{长方形MNOC}-S_{三角形AON}-S_{三角形ABN}-S_{三角形BMC}=6\times4-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times5\times2-\frac{1}{2}\times4\times1=24-2-5-2=15$.

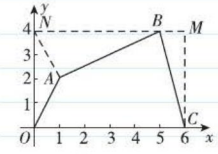


图 7.1−18

挑战·高分

规律点拨

本题的解题规律在于观察图中点的坐标的变化情况，因为点 P 的横、纵坐标变化情况不相同，所以应对点 P 的横、纵坐标变化情况分别分析，其中能找到点 P 的纵坐标按照一定的周期循环是解题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考点就是有序数对和点的坐标，内容虽然简单，但是它是学习函数的基础．主要考查的方式就是利用点的坐标解决问题．探究点的坐标的变化规律也是常见的考查方式．

三年中考兵法

考法 1 利用象限角的符号特征确定点的位置

例 14 ［中考·贵港］在平面直角坐标系中，点 $P(m-3,\ 4-2m)$ 不可能在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

试题评析：本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解题的关键．

解：①当 $m-3>0$，即 $m>3$ 时，由特殊值法易知 $-2m<-6$，$4-2m<-2$，所以点 $P(m-3,\ 4-2m)$ 在第四象限，不可能在第一象限；

②当 $m-3<0$，即 $m<3$ 时，由特殊值法易知 $-2m>-6$，$4-2m>-2$，所以点 $P(m-3,\ 4-2m)$ 可能在第二或三象限，

综上所述，点 P 不可能在第一象限．

答案：A

考法 2 利用点的坐标的规律变化求点的坐标

例 15 ［中考·岳阳］如图 7.1-20，在平面直角坐标系中，每个最小方格的边长均为 1 个单位长，P_1，P_2，P_3，…均在格点上，其顺序按图中“→”方向排列，如：$P_1(0,\ 0)$，$P_2(0,\ 1)$，$P_3(1,\ 1)$，$P_4(1,\ -1)$，$P_5(-1,\ -1)$，$P_6(-1,\ 2)$，…，根据这个规律，点 P_{2016} 的坐标为_____．

试题评析：本题考查平面直角坐标系中点的坐标的变化规律，解题的关键是分析点在平面直角坐标系中的特殊位置及其变化规律．

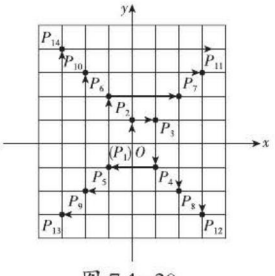


图 7.1-20

解：观察图可得，点 P_{2016} 在第四象限的角平分线上，且横、纵坐标的绝对值 $=2016\div4=504$，再根据第四象限内点的符号特点即可得点 $P_{2016}(504,\ -504)$．

答案：$(504,\ -504)$

冲刺·满分

另解

分点 P 的纵坐标是正数和负数两种情况讨论求解．

（1）当 $4-2m>0$ 时，由特殊值法易知 $m<2$．

∴ $m-3<-1$．

∴ 点 $P(m-3,\ 4-2m)$ 在第二象限．

（2）当 $4-2m<0$ 时，由特殊值法易知 $m>2$．

∴ $m-3>-1$．

∴ 点 $P(m-3,\ 4-2m)$ 可能在第三、四象限．

综上可知，点 P 不可能在第一象限．

答案：A

解法提醒

利用点的坐标的规律变化求点的坐标的方法：

先利用已知点的坐标规律分析出待求坐标的点所在的象限，从及该点横纵坐标的绝对值，再根据象限内点的符号特点求出该点的坐标．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 若（3，6）表示教室内第3排第6列的位置，某同学的座位号为（2，4），则该同学所坐的位置是（　　）

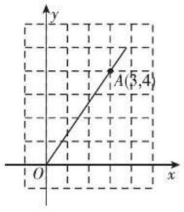
A. 第2排第4列　　B. 第4排第2列

C. 第2排第6列　　D. 不能确定

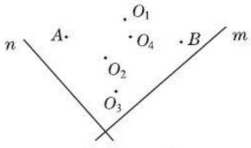
2. 如图，在平面直角坐标系中，点A的坐标为（3，4），那么点A到x轴的距离为（　　）

A.3　　B.4

C.5　　D. $\frac{4}{3}$



（第2题）



（第4题）

3. 过A（4，−2）和B（−2，−2）两点的直线一定（　　）

A. 垂直于x轴

B. 与y轴相交但不平行于x轴

C. 平行于x轴

D. 经过原点

4. [中考·北京]如图，直线$m \perp n$，在某平面直角坐标系中，x轴$/\!/ m$，y轴$/\!/ n$，点A的坐标为（−4，2），点B的坐标为（2，−4），则坐标原点为（　　）

A.O_1　　B.O_2

C.O_3　　D.O_4

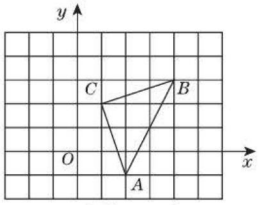
5. 若点P（x，y）的坐标满足$xy=0$，则点P的位置是（　　）

A. 在x轴上　　B. 在y轴上

C. 在坐标原点　　D. 在坐标轴上

6. 在平面直角坐标系中，点P（m^2+2，−4）一定在第_____象限.

7. 在如图所示的平面直角坐标系中，三角形ABC的顶点都在网格格点上，其中A点坐标为（2，−1），则三角形ABC的面积为_____.



（第7题）

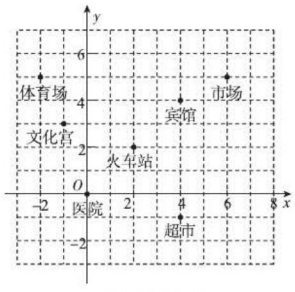
8. 已知点M（$3a-9$，$a-1$），

（1）若点M在y轴上，求点M的坐标；

（2）若点M到两坐标轴的距离相等，求点M的坐标；

（3）若点N的坐标为（3，−6），且直线$MN /\!/ x$轴，求点M的坐标.

9. 小明建立了如图所示的平面直角坐标系，使医院的坐标为（0，0），火车站的坐标为（2，2）.



（第9题）

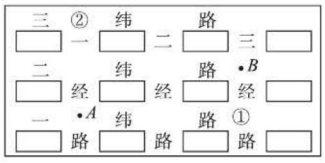
（1）写出体育场、文化宫、超市、宾馆、市场的坐标；

（2）请指出（1）中的场所分别在第几象限？

（3）小丽针对这幅图也建立了一个平面直角坐标系，可是她得到的同一场所的坐标和小明的不一样，是小丽做错了吗？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图，①处表示三经路与一纬路的十字交叉口，②处表示一经路与三纬路的十字交叉口，①、②处分别记为（3，1）和（1，3）.



（第 10 题）

（1）用有序数对表示 A，B 两处的位置.

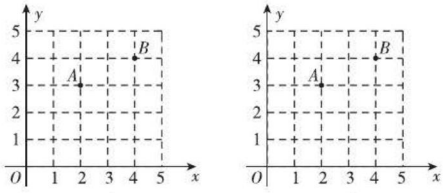
（2）把实物图转化成网格图，用有序数对表示从 A 到 B 经过格点处的一条最短路线.

【导学号：7207895】

11. [**中考·温州**]在直角坐标系中，我们把横、纵坐标都为整数的点称为整点，记顶点都是整点的三角形为整点三角形. 如图，已知整点 $A(2,3)$，$B(4,4)$，请在所给网格区域（含边界）上按要求画整点三角形.

（1）在图①中画一个三角形 PAB，使点 P 的横、纵坐标之和等于点 A 的横坐标；

（2）在图②中画一个三角形 PAB，使点 P，B 横坐标的平方和等于它们纵坐标和的 4 倍.



（第 11 题）

素养提分 行动篇

笛卡儿的《几何学》

笛卡儿生于法国的一个贵族家庭，从小好奇心强，勤奋好学，自学了大量的数学，哲学方面的书籍，这些积累成为他数学和哲学思想的主要来源. 笛卡儿毕业于法国巴黎普瓦捷大学，获法律学位. 毕业两年后，他不满足于书本知识，决心走向社会，“去读世界这本大书”. 于是他入伍随军远游，但他始终在专心思考着数学与哲学问题. 笛卡儿认为，希腊人的综合几何只研究一些非常抽象，而看起来无用的问题，过于依赖图形，束缚了人的想象力；而对于当时流行的代数，他认为过于强调法则和公式，不能成为一门有利于增进智力的科学；他对于三段论逻辑也有看法，认为不产生任何新的结果. 因此，笛卡儿对逻辑学、几何学和代数学进行了系统思考，从而建立了一种“普遍的数学”.

《几何学》是笛卡儿唯一公开发表的数学著作. 这本书的发表，标志着解析几何学的诞生，是数学史上划时代的光辉巨著. 笛卡儿首先建立了坐标的思想，引入坐标和变量的概念，使变量数学开始登上历史舞台，从而使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来. 也就是说，可以用代数方法研究解决几何问题，也可以运用几何方法来解决代数问题，对后来牛顿、莱布尼茨建立微积分理论起着关键性的作用，为当时科学的发展提供了数学的工具，推动了 17 世纪以来数学的大发展.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 坐标方法的简单应用

核心知识

- 用坐标表示地理位置
- 用方位角和距离表示地理位置
- 用坐标表示平移
- 图形的平移变换

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用坐标表示地理位置

平面直角坐标系表示地理位置的方法：

（1）建立平面直角坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、y 轴的正方向．

（2）根据具体问题确定单位长度．

（3）在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和各个地点的名称．


点的坐标的应用

特别解读：（1）坐标轴的方向通常以正北为纵轴的正方向，正东为横轴的正方向，这样可以使东西南北方向与地理位置一致．

（2）平面直角坐标系变化时，坐标平面内的各点坐标发生变化，但各点之间的相对位置并不会发生变化．

拨考向 利用坐标表示地理位置

例 1 根据下面的条件画一幅示意图，并在图中标出各个景点的位置和坐标．

菊花园：从中心广场向北走 150 m，再向东走 150 m；

湖心亭：从中心广场向西走 150 m，再向北走 100 m；

松风亭：从中心广场向西走 100 m，再向南走 50 m；

育德泉：从中心广场向北走 200 m．

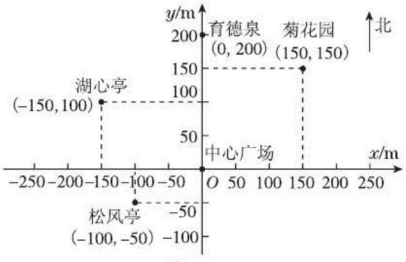


图 7.2−1

解题秘方：选择以一个核心为坐标原点，按平面直角坐标系表示地理位置的方法，建立平面直角坐标系．

解：如图 7.2−1，选中心广场所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 1m 长．

提分·必记

特别提醒

1. 建立平面直角坐标系的方法不是唯一的，要本着方便、简单、美观的原则；
2. 选取坐标原点要“适当”，一般取比较有名的地点，或是所要绘制的区域内较居中的位置；
3. 在地点比较集中，坐标平面又较小时，各地点的名称在图上可以用代号标出，在图外另附名称．

提分·秘诀

方法点拨

建立平面直角坐标系描述物体的位置时，建立的平面直角坐标系不同，各个点的坐标一般也不同；建立的坐标系在符合题意的基础上，**应尽量使较多的点落在坐标轴上或点都落在原点附近**．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▸ 2 用方位角及距离表示平面内点的位置

1. 定义： 确定平面内一个物体的位置，可以选择一个参照物，然后用方位角和距离来表示物体的位置，这种表示物体位置的方法称为方位角距离定位法.

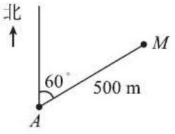
2. 方法：

（1）选取某个点 A 为参照点，过参照点 A 画出表示东西和南北方向的直线；

（2）用量角器量出点 M 相对于参照点的方位角；

（3）用刻度尺量出点 M 与参照点之间的距离，并利用比例尺计算出点 M 与参照点之间的实际距离；

（4）用方位角和距离表示点 M 的位置.

示例	用“方位角＋距离”描述点的位置	如图，M 相对于 A 的位置是：北偏东 60°，500 m. 

提分·必记

特别解读

- 用方位角和距离表示平面内点的位置时，必须有两个数据，缺一不可.
  (1)该点相对于参照点的方位角；
  (2)该点与参照点之间的实际距离；
- 用方位角和距离表示平面内点的位置和地图上的方向一样，按上北下南，左西右东划分，处于四个直角平分线上的方向分别是东南、东北、西北、西南.

拔考向▸ 利用“方位角＋距离”确定位置

例 2 如图 7.2–2 是某次海战中敌我双方舰艇对峙的示意图，对我方潜艇来说：

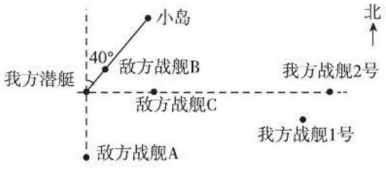


图 7.2–2

（1）北偏东 40° 方向上有哪些目标？要想确定敌方战舰 B 的位置还需要什么条件？

（2）在图上距我方潜艇 1 cm 处的敌方战舰有哪几艘？

（3）要确定各艘敌方战舰的位置还需要哪些数据？

解题秘方： 紧扣确定位置的两个要素：“方位角与距离”解答.

解：（1）北偏东 40° 方向上的目标有两个，分别是小岛和敌方战舰 B. 要想确定敌方战舰 B 的位置还需要知道我方潜艇和它的距离.

（2）在图上经过测量可知，距我方潜艇 1 cm 处的敌方战舰有两艘，分别为敌方战舰 A 和 C.

（3）要确定各艘敌方战舰的位置，需要两个数据：方位角和距离. 图中已经知道了方位角，所以还需要知道每艘敌方战舰和我方潜艇的距离.

提分·秘诀

特别解读

利用“方位角＋距离”描述物体的位置时，需要利用量角器测量角的度数、利用刻度尺测量图上距离，一般还要利用比例尺求出实际距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 用坐标表示点的平移

1. 点在坐标系中的平移：

在平面直角坐标系中，某个点经过平移后，其位置发生了变化，其坐标也发生了变化．

2. 点的平移与坐标变化的关系：

根据点的平移情况可以得到平移后点的坐标变化情况；反过来，根据点的坐标变化情况，可以得到点的平移情况，即：

$$(x,\ y)\ \underset{\text{向左平移 } a \text{ 个单位长度}}{\overset{\text{向右平移 } a \text{ 个单位长度}}{\rightleftarrows}}\ (x+a,\ y)$$

$$(x,\ y)\ \underset{\text{向下平移 } b \text{ 个单位长度}}{\overset{\text{向上平移 } b \text{ 个单位长度}}{\rightleftarrows}}\ (x,\ y+b)$$

拔考向▶ 根据平移求点的坐标

例 3 在平面直角坐标系中，将点 $A(x,\ y)$ 向右平移 5 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度后与点 $B(-3,\ 2)$ 重合，则点 A 的坐标是（　　）

A. $(2,\ 5)$　　B. $(-8,\ 5)$　　C. $(-8,\ -1)$　　D. $(2,\ -1)$

解题秘方： 根据平移的方向和平移的距离确定平移后的坐标．

解： 点 A 向右平移 5 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度后与点 $B(-3,\ 2)$ 重合，则将点 B 向左平移 5 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度后得到点 A．点 $B(-3,\ 2)$ 向左平移 5 个单位长度后对应的点的坐标为 $(-8,\ 2)$，再向下平移 3 个单位长度后对应的点的坐标为 $(-8,\ -1)$，即点 A 的坐标为 $(-8,\ -1)$．

答案： C

解题通法： 已知平移方式，确定点的坐标的方法

1. 已知平移前的点的坐标和平移方式，确定平移后的点的坐标时，按点的平移与坐标变化的关系求点的坐标．

2. 已知平移后的点的坐标和平移方式，确定平移前的点的坐标时，只需将平移后的点按照相反的方向平移即可．

点知识▶ 4 用点的坐标表示图形的平移

1. 图形在坐标平面中的平移： 是指在坐标系中，在保持坐标轴不动的情况下，图形的整体移动．

图形在坐标平面中平移变换的实质：

（1）图形的位置及表示位置的坐标发生变化；

（2）图形的形状、大小、方向不变．

图形的平移

2. 图形的平移与图形上各点的坐标变化的关系：

（1）因为图形的平移是图形的整体平移，所以已知图形的平移情况，即可得到图形上各点坐标的变化情况；

（2）平移时，因为图形上各点的变化情况相同，所以已知图形上某点的坐标变化情况，即可知道图形的变化情况．

提分·必记

知识储备

平移的“两要素”：方向和距离．

特别解读

点的平移与点的坐标变化规律：

将点左右平移，纵坐标不变；上下平移，横坐标不变；即右加左减纵不变；上加下减横不变．

提分·秘诀

另解

∵ 点 A 向右平移 5 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度后的坐标是 $(-3,\ 2)$，

∴ $x+5=-3$，$y+3=2$．

∴ $x=-8$，$y=-1$．

∴ 点 A 的坐标为 $(-8,\ -1)$．

提分·必记

特别解读

- 图形的平移首先应转化为图形顶点的平移，再按照点的平移规律进行平移；
- 一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用坐标的变化表示图形的平移

提分·秘诀

例4 在平面直角坐标系中，三角形ABC的三个顶点的位置如图7.2-3所示，点A'的坐标是（-2，2），现将三角形ABC平移，使点A变换为点A'，点B'，C'分别是B，C的对应点.

（1）请画出平移后的三角形$A'B'C'$，并写出点B'，C'的坐标；

（2）试说明三角形ABC经过怎样的平移得到三角形$A'B'C'$；

（3）若三角形ABC内部一点P的坐标为（a，b），则点P的对应点P'的坐标是_____.

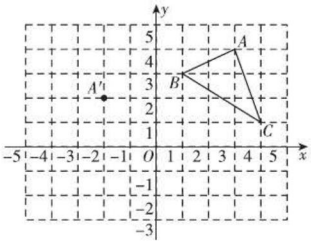


图7.2-3

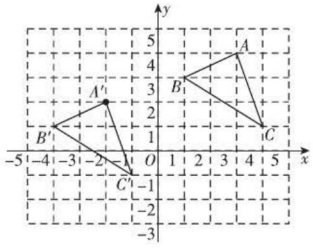


图7.2-4

详解

观察点A和A'的位置可知，将三角形ABC向左平移5个单位长度，再向下平移2个单位长度得到三角形A'B'C'，据此即可描出点B'，C'的位置.

解题秘方：根据一对对应点的坐标可确定平移的方向和平移的距离，图形边上的点和图形内部的点平移方式相同.

解：（1）三角形$A'B'C'$如图7.2-4所示.$B'(-4,1)$，$C'(-1,-1)$.

（2）将三角形ABC先向左平移5个单位长度，再向下平移2个单位长度得到三角形$A'B'C'$（或将三角形ABC先向下平移2个单位长度，再向左平移5个单位长度得到三角形$A'B'C'$）.

（3）$(a-5,\ b-2)$

详解

由图可知点A(3,4)，又点A平移后得到A'(-2,2)，即：平移后各点的横坐标减5，纵坐标减2，根据平移后图形上所有点都进行了相同方式的平移，可知P'(a-5,b-2).

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用点的坐标法确定平面直角坐标系

挑战·高分

例5 如图7.2-5所示，若在中国象棋盘上建立平面直角坐标系，使“将”位于点（1，-2），“象”位于点（3，-2），则“炮”位于点（　　）

A.（1，3）　　B.（-2，0）　　C.（-1，2）　　D.（-2，2）

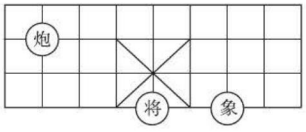


图7.2-5

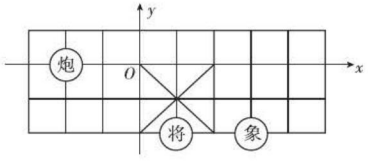


图7.2-6

图解

如图7.2-7，根据“将”和“象”所在点的坐标，可知在平面直角坐标系中，每个小方格的边长表示一个单位长度，将“将”向左平移1个单位长度，再向上平移2个单位长度，可以得到原点的位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据“将”和“象”所在点的坐标确定平面直角坐标系，即可得到“炮”所在点的坐标.

解：**方法一** “将”位于点（1，−2），“象”位于点（3，−2），∴建立的平面直角坐标系如图7.2−6所示，则“炮”所在点的坐标为（−2，0）.

方法二 由“炮”和“将”的位置可知，将“将”先向上平移2格，再向左平移3格得到“炮”，故“炮”的坐标为（1−3，−2+2），即（−2，0），故选B.

答案：B

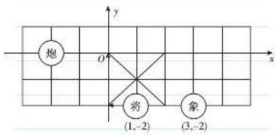


图 7.2−7

拔尖角度▸ 2 利用图形平移的定义法求点的坐标

例6 如图7.2−8，在平面直角坐标系中，$A(1,4)$，$B(3,2)$，$OC=AB$，$OC\parallel AB$.

（1）试用平移的知识求点C的坐标；

（2）求四边形$ABCO$的面积.

解题秘方：（1）利用图形的平移与点的坐标的变化关系即可求解；（2）利用割补法求图形的面积.

解：（1）将AB平移可以得到OC，

∵将点$A(1,4)$平移到点$O(0,0)$，点A的横坐标减少1，纵坐标减少4，

∴将点$B(3,2)$的横坐标减少1，纵坐标减少4，即可得到点C的坐标.

∴点C的坐标为$(2,-2)$.

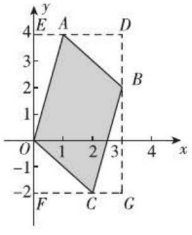


图 7.2−8

（2）过点A作$AE\perp y$轴于点E，过点C作$CF\perp y$轴于点F，过点B作y轴的平行线，交EA的延长线于点D，交FC的延长线于点G，如图7.2−8所示.

则$S_{长方形DEFG}=3\times6=18$，$S_{三角形AOE}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，$S_{三角形ABD}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，$S_{三角形BCG}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，$S_{三角形OCF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

∴$S_{四边形ABCO}=S_{长方形DEFG}-S_{三角形AOE}-S_{三角形ABD}-S_{三角形BCG}-S_{三角形OCF}=18-2-2-2-2=10$.

挑战·高分

技巧点拨

一条线段平移前后平行且相等，根据$OC=AB$，$OC\parallel AB$，可知线段OC可以看作是由线段AB平移得到的，利用图形平移前后坐标的变化规律，即可求出点C的坐标.

另解

本题第（2）问也可借助网格求四边形$ABCO$的面积，如图7.2−9：

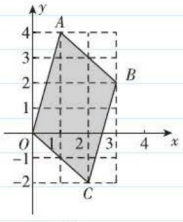


图 7.2−9

利用网格将四边形$ABCO$分割后，观察并计算可知四边形$ABCO$的面积为10.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容主要考点有：（1）用坐标表示地理位置，主要考查建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示地理位置；（2）用坐标表示平移，主要考查图形的平移与点的坐标之间的变化规律，考查的题型主要都是填空、选择题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用建立平面直角坐标系表示几何应用中点的位置

例 7 [中考·浙江]小明为画一个零件的轴截面，以该轴截面底边所在的直线为 x 轴，对称轴为 y 轴，建立如图 7.2-10 所示的平面直角坐标系，若坐标轴的单位长度取 1 mm，则图中转折点 P 的坐标表示正确的是（　　）

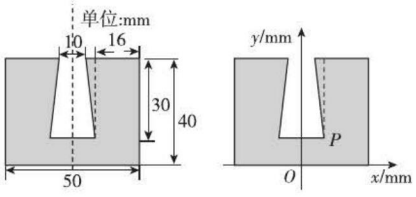


图 7.2-10

A.（5，30）　B.（8，10）　C.（9，10）　D.（10，10）

试题评析：此题考查了用坐标表示位置，根据题意建立适当的平面直角坐标系，确定出点 P 到 x 轴与 y 轴的距离是解本题的关键.

答案：C

详解

如图 7.2-11，过点 C 作 CD ⊥ y 轴于 D.

∴ AP = CD = 50 ÷ 2 - 16 = 9(mm)，

OA = OD - AD = 40 - 30 = 10(mm).

∴ P(9, 10).

故选 C.

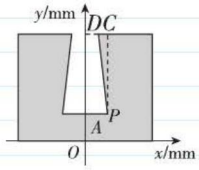


图 7.2-11

考法 2 利用点的平移与坐标的变化规律求坐标

例 8 [中考·黔东南州]在平面直角坐标系中有一点 $A(-2, 1)$，将点 A 先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位，则平移后点 A 的坐标为_____.

试题评析：本题考查的是利用图形变化确定点的坐标，解答本题的关键是掌握其变化规律.

解：∵点 $A(-2, 1)$ 向右平移 3 个单位，∴此时坐标为 $(1, 1)$.

∵点 $(1, 1)$ 又向下平移 2 个单位，∴此时坐标为 $(1, -1)$.

答案：$(1, -1)$

解法提醒

根据点平移的方向和距离，可以得出点的坐标的变化情况；反过来，根据点的横、纵坐标的变化情况，可以判断出点平移的方向和距离.

考法 3 利用图形的平移与点的坐标变化规律求坐标

例 9 [中考·邵阳]如图 7.2-12 所示，三架飞机 P，Q，R 保持编队飞行，某时刻在坐标系中的坐标分别为 $(-1, 1)$，$(-3, 1)$，$(-1, -1)$. 30 秒后，飞机 P 飞到 $P'(4, 3)$ 位置，则飞机 Q，R 的位置 Q'，R' 的坐标分别为（　　）

A. $Q'(2, 3)$，$R'(4, 1)$

B. $Q'(2, 3)$，$R'(2, 1)$

C. $Q'(2, 2)$，$R'(4, 1)$

D. $Q'(3, 3)$，$R'(3, 1)$

试题评析：本题考查了图形平移中点的坐标变化规律，熟练掌握图形的平移与图形中各点平移相同这一特征是解答本题的关键.

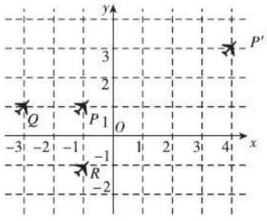


图 7.2-12

答案：A

详解

P、P' 的位置如图 7.2-12 所示；点 P 的坐标为(-1, 1)，P' 的坐标为(4, 3)，所以，飞机 P 向右飞行 5 个单位，向上飞行 2 个单位，由图形的平移的性质知，飞机 Q, R 也都是向右飞行 5 个单位，向上飞行 2 个单位，所以分别将点 Q(-3, 1)，R(-1, -1) 的横坐标加 5，纵坐标加 2 得，点 Q'(2, 3)，R'(4, 1)；故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 张老师家在学校正东300米处，从张老师家向北走250米就到李老师家了．若选取学校为原点，分别以正东、正北方向为x轴、y轴正方向，建立平面直角坐标系，则李老师家的位置可用坐标表示为（　　）

A.（−300，−250）　B.（300，250）

C.（−250，−300）　D.（250，300）

2. 在一条东西方向的道路与一条南北方向的道路的交会处有一座雕像，甲车位于雕像东方5 km处，乙车位于雕像北方7 km处，若甲、乙两车以相同的速度同时向雕像匀速驶去，当甲车到了雕像西方1 km处时，乙车在（　　）

A. 雕像北方1 km处　B. 雕像北方3 km处

C. 雕像南方1 km处　D. 雕像南方3 km处

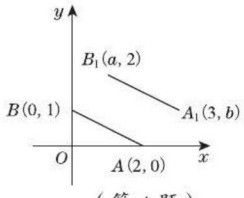
3. 将点A（2，1）向下平移2个单位长度得到点A'，则点A'的坐标是（　　）

A.（2，3）　B.（2，−1）

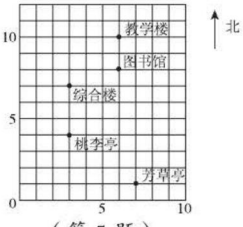
C.（4，1）　D.（0，1）

4. [中考·菏泽]如图，A，B的坐标分别为(2,0)，(0,1)，若将线段AB平移至A_1B_1，则$a+b$的值为（　　）

A.2　B.3　C.4　D.5



（第4题）



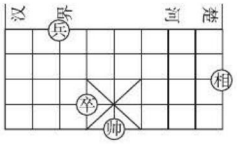
（第5题）

5. 如图所示是某校的部分平面示意图，借助刻度尺和量角器看图填空：

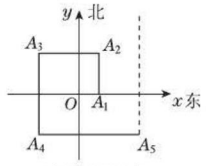
（1）图书馆相对于桃李亭的方位是_____，到桃李亭的图上距离约为_____cm；

（2）如果用（3，4）表示图上桃李亭的位置，那么综合楼的位置表示为_____；（6，8）表示_____的位置；（7，1）表示_____的位置．

6. [中考·绵阳]如图，在中国象棋的残局上建立平面直角坐标系，如果“相”和“兵”的坐标分别是（3，−1）和（−3，1），那么“卒”的坐标为_____．



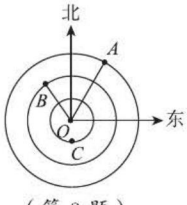
（第6题）



（第7题）

7. 如图，一个机器人从O点出发，向正东方向走3米到达A_1点，再向正北方向走6米到达A_2点，再向正西方向走9米到达A_3点，再向正南方向走12米到达A_4点，再向正东方向走15米到达A_5点，按如此规律走下去，并且以点O为原点，以1米长为单位长度，正东方向为x轴正方向，正北方向为y轴正方向建立平面直角坐标系，当机器人走到点A_{10}时，A_{10}的坐标是_____．

8. 如图，三个圆的半径长分别为10 km，20 km，30 km，OA与正北方向的夹角为30°，OB与正北方向的夹角为35°，C在点O的正南方向，A，B，C分别是位于三环、二环、一环上的三所学校，请用方位角和距离表示这三所学校的位置．



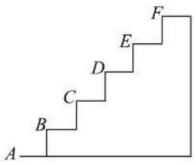
（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图是某体育场看台台阶的一部分示意图（每一级台阶的高度和宽度均相等），如果点 A 的坐标为（0，0），点 B 的坐标为（1，1）.

（1）请建立平面直角坐标系，并写出点 C，D，E，F 的坐标.

（2）说明点 B，C，D，E，F 的坐标与点 A 的坐标相比较有什么变化.



（第 9 题）

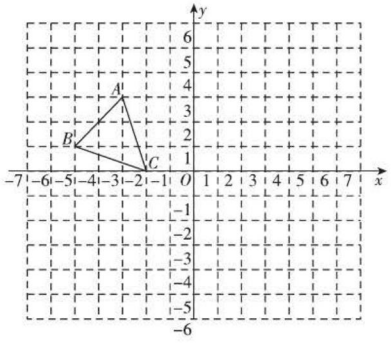
10. 如图，平面直角坐标系中，已知点 $A(-3, 3)$，$B(-5, 1)$，$C(-2, 0)$，$P(a, b)$ 是三角形 ABC 的边 AC 上任意一点，三角形 ABC 经过平移后得到三角形 $A_1B_1C_1$，点 P 的对应点为 P_1（$a+6$，$b-2$）.

（1）写出点 A_1，B_1，C_1 的坐标.

（2）在图中画出三角形 $A_1B_1C_1$.

（3）连接 OA，OA_1，AA_1，求三角形 AOA_1 的面积.

【导学号：7207895】



（第 10 题）

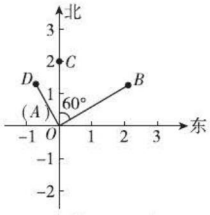
11. 如图，图中 1 个单位长度表示 10 km，一艘船在 A 处遇险后向相距 25 km 位于 B 处的救生船报警，可将救生船 B 相对于遇险船 A 的位置表示为（北偏东 60°，25）.

（1）遇险船 A 相对于救生船 B 的位置应表示为_____；

（2）货船 C 处与遇险船 A 相距 20 km，且在遇险船 A 的正北方向，那么货船 C 相对于遇险船 A 的位置应怎样表示?

（3）货船 D 处与遇险船 A 相距 15 km，且 $AD \perp AB$，那么货船 D 相对于遇险船 A 的位置应怎样表示?

（4）如果小岛 E 相对于遇险船 A 的位置为（南偏东 50°，20），请在图中画出小岛 E.



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平面直角坐标系中求几何图形面积

荣老师告诉你 在平面直角坐标系中，点 $P(a, b)$ 到 x 轴的距离等于 $|b|$，到 y 轴的距离等于 $|a|$，若 $P(a, b)$，$Q(a, c)$，$M(d, b)$（$a\neq 0$，$b\neq 0$，$b\neq c$，$a\neq d$），则 $PM\parallel x$ 轴，$PQ\parallel y$ 轴，PM 的长为 $|a-d|$，PQ 的长为 $|b-c|$. 利用这些知识点可以求在平面直角坐标系中几何图形的面积.

类型一 求三角形的面积

题型 1：有一边在坐标轴上

例 1 如图 1，在平面直角坐标系中，三角形 ABC 的顶点坐标分别为 $A(-3, 0)$，$B(0, 3)$，$C(0, -1)$，你能求出三角形 ABC 的面积吗？

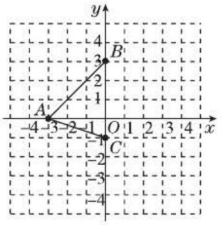


图 1

解题秘方：根据三个顶点的坐标特征可以看出，三角形 ABC 的边 BC 在 y 轴上，由图形可得 $BC=4$，点 A 到 BC 边的距离就是 A 点到 y 轴的距离，也就是 A 点横坐标的绝对值 3，然后根据三角形的面积公式求解.

解：因为 $B(0, 3)$，$C(0, -1)$，所以 $BC=3-(-1)=4$. 因为 $A(-3, 0)$，所以 A 点到 y 轴的距离，即 BC 边上的高为 3，所以

$$S_{\text{三角形}ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot OA=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6.$$

题型 2：有一边与坐标轴平行

例 2 如图 2，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(4, 1)$，$B(4, 5)$，$C(-1, 2)$，求三角形 ABC 的面积.

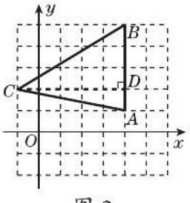


图 2

解题秘方：由 $A(4, 1)$，$B(4, 5)$ 两点的横坐标相同，可知边 AB 与 y 轴平行，因而 AB 的长度易求. 作 AB 边上的高 CD，则 D 点的横坐标与 A 点的横坐标相同，也是 4，这样就可求得线段 CD 的长，进而可求得三角形 ABC 的面积.

解：因为 A，B 两点的横坐标相同，

所以边 $AB\parallel y$ 轴，

所以 $AB=5-1=4$.

如图 2，作 AB 边上的高 CD，

则 D 点的横坐标为 4，

所以 $CD=4-(-1)=5$，

所以 $S_{\text{三角形}ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$.

方法点拨：求三角形面积的关键是确定某条边的长及这条边上的高，如果在坐标系中，某个三角形中有一条边在坐标轴上或平行于坐标轴，则根据这条边的两个顶点的坐标易求出这条边的长，根据这条边的相对的顶点的坐标可求出这条边上的高.

题型 3：三边均不与坐标轴平行且三边均不在坐标轴上

例 3 如图 3，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-3, -1)$，$B(1, 3)$，$C(2, -3)$，你能求出三角形 ABC 的面积吗？

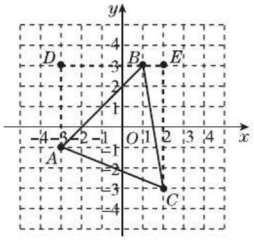


图 3

解题秘方：利用过三角形的三个顶点作坐标轴的平行线，将三角形放在长方形或梯形中求面积.

解：如图 3，过点 A，C 分别作平行于 y 轴的直线，

过点 B 作平行于 x 轴的直线，交点为 D，E，则四边形 $ADEC$ 为梯形.

因为 $A(-3, -1)$，$B(1, 3)$，$C(2, -3)$，

所以 $AD=4$，$CE=6$，$DB=4$，$BE=1$，$DE=5$.

所以 $S_{\text{三角形}ABC}=\frac{1}{2}(AD+CE)\times DE-\frac{1}{2}AD\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$DB-\frac{1}{2}CE\times BE=\frac{1}{2}\times(4+6)\times5-\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times6\times1=14.$

方法点拨：若在平面直角坐标系中，三角形无边在坐标轴上且无边平行于坐标轴，则需将图形通过添加辅助线转化为有边与坐标轴平行或在坐标轴上的图形进行计算.

类型二 ▶ 求四边形的面积

题型1：有一边平行于坐标轴（或在坐标轴上）的四边形

例4 如图4，已知四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-4,5)$，$B(2,3)$，$C(4,-2)$，$D(-4,-5)$. 求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：因为A，D的横坐标相同，所以$AD\parallel y$轴，分别过点B，C作$BE\perp AD$，$CF\perp AD$，垂足分别为E，F，则四边形$ABCD$的面积就可转化为两个有两边平行于坐标轴的三角形和一个两底平行于坐标轴的梯形的面积之和.

解：如图4，分别过点B，C作$BE\perp AD$，$CF\perp AD$，垂足分别为E，F，则$S_{四边形ABCD}=S_{三角形AEB}+S_{三角形CFD}+S_{梯形BEFC}=\frac{1}{2}\times2\times6+\frac{1}{2}\times3\times8+\frac{1}{2}\times(6+8)\times5=53.$

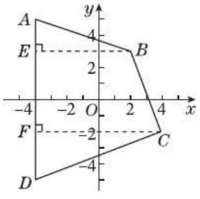


图4

方法点拨：当四边形只有一边平行于坐标轴时，要求四边形的面积，可过平行于坐标轴的一边所对边的两个端点向平行于坐标轴的一边作垂线，将四边形的面积转化为两个有两边平行于坐标轴的三角形和一个两底平行于坐标轴的梯形的面积之和再求解.

题型2：有两边平行于坐标轴（或在坐标轴上）的四边形

例5 如图5，已知四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-4,5)$，$B(1,5)$，$C(4,-2)$，$D(-4,-5)$. 求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：因为点A，B的纵坐标相同，A，D的横坐标相同，所以$AB\parallel x$轴，$AD\parallel y$轴，连接AC，则四边形$ABCD$的面积就可转化为两个有一边平行于坐标轴的三角形的面积之和.

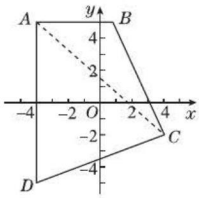


图5

解：如图5，连接AC.

则$S_{四边形ABCD}=S_{三角形ADC}+S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}\times10\times8+\frac{1}{2}\times5\times7=57.5.$

方法点拨：当四边形相邻两边平行于坐标轴时，要求四边形的面积，可连接过直角顶点的一条对角线，将四边形的面积转化为两个有一边平行于坐标轴的三角形的面积之和后再计算.

题型3：四边都不平行于坐标轴且都不在坐标轴上的四边形

例6 如图6，已知四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-5,2)$，$B(1,5)$，$C(5,-2)$，$D(-4,-5)$. 求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：过A，B，C，D四个点分别作坐标轴的平行线，将四边形置于正方形之中求面积.

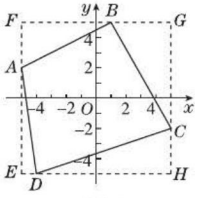


图6

解：如图6，分别过点B，D作$FG\parallel x$轴、$EH\parallel x$轴，过点A作$EF\parallel y$轴与EH，FG分别交于E，F，过点C作$GH\parallel y$轴与FG，EH分别交于G，H.

则$S_{四边形ABCD}=S_{正方形EFGH}-S_{三角形AFB}-S_{三角形BGC}-S_{三角形CHD}-S_{三角形DEA}=10\times10-\frac{1}{2}\times3\times6-\frac{1}{2}\times4\times7-\frac{1}{2}\times3\times9-\frac{1}{2}\times1\times7=60.$

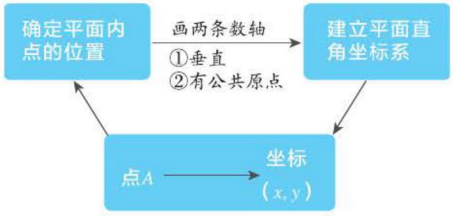
方法点拨：当四边形的四边都不平行于坐标轴且都不在坐标轴上时，分别过四个点中纵坐标最大和最小的点作x轴的平行线；再分别过四个点中横坐标最大和最小的点作y轴的平行线，四线构成长方形，那么求四边形的面积就可以转化成一个长方形的面积与几个有两边平行于坐标轴的三角形的面积之差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 由两条共原点且互相垂直的数轴构成平面直角坐标系，在坐标系中，每一个点的坐标都是一对有序数对.

2. **平面直角坐标系内点（m，n）的坐标特征为：**第一象限（+，+），即 $m>0$，$n>0$；第二象限（−，+），即 $m<0$，$n>0$；第三象限（−，−），即 $m<0$，$n<0$；第四象限（+，−），即 $m>0$，$n<0$；x 轴正半轴上的点，$m>0$，$n=0$；x 轴负半轴上的点，$m<0$，$n=0$；y 轴正半轴上的点，$m=0$，$n>0$；y 轴负半轴上的点，$m=0$，$n<0$；反之亦成立.

3. **点的平移与其坐标变化的规律是：**上加下减，右加左减. 即向上平移 a 个单位长度，纵坐标加 a，向下平移 a 个单位长度，纵坐标减 a；向右平移 a 个单位长度，横坐标加 a，向左平移 a 个单位长度，横坐标减 a.

知识方法专题

知识必学

专题一 平面直角坐标系与点的坐标

链接中考» 在平面直角坐标系中，点的坐标是核心，在特殊位置的点的坐标的特征是中考考查的热点，一般都是以选择题形式出现.

例 1 [中考·威海]若点 $A(a+1, b-2)$ 在第二象限，则点 $B(-a, b+1)$ 在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题秘方：依题意，点 A 在第二象限，则有 $a+1<0$，$b-2>0$，从而有 $-a>0$，$b+1>0$，于是可以确定点 B 所在的象限.

解： ∵ 点 $A(a+1, b-2)$ 在第二象限，∴ $a+1<0$，$b-2>0$，解得 $a<-1$，$b>2$，∴ $-a>0$，$b+1>0$，即点 $B(-a, b+1)$ 在第一象限，故应选 A.

答案： A

方法点拨：对于点 $P(a, b)$ 来说，点的位置与坐标的特征的关系：

点的位置		坐标特征
象限内的点	点 P 在第一象限	$a>0$，$b>0$
	点 P 在第二象限	$a<0$，$b>0$
	点 P 在第三象限	$a<0$，$b<0$
	点 P 在第四象限	$a>0$，$b<0$
坐标轴上的点	点 P 在 x 轴正半轴上	$a>0$，$b=0$
	点 P 在 x 轴负半轴上	$a<0$，$b=0$
	点 P 在 y 轴正半轴上	$a=0$，$b>0$
	点 P 在 y 轴负半轴上	$a=0$，$b<0$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续表

点的位置		坐标特征
两坐标轴夹角平分线上的点	点 P 在第一、三象限角平分线上	$a=b$
	点 P 在第二、四象限角平分线上	$a+b=0$

专题二 用坐标表示地理位置

链接中考» 学习坐标的目的就是表示地理位置，这是中考命题的宗旨——运用知识解决实际问题．这一考点考查的形式也简单，主要都是选择题形式出现．

例 2 ［中考·北京］如图 7-1 是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建筑分布图，若这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，表示太和门的点的坐标为（0，-1），表示九龙壁的点的坐标为（4，1），则表示下列宫殿的点的坐标正确的是（　　）

A. 景仁宫（4，2）　B. 养心殿（-2，3）

C. 保和殿（1，0）　D. 武英殿（-3.5，-4）

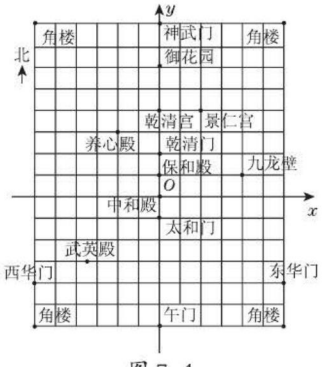


图 7-1

解题秘方：先根据两个已知点建立平面直角坐标系如图 7-1，再找出四个选项中宫殿所在位置的坐标即可．

解：∵表示太和门的点的坐标为（0，-1），表示九龙壁的点的坐标为（4，1），∴建立平面直角坐标系如图 7-1 所示．由图可知，表示景仁宫的点的坐标为（2，4），表示养心殿的点的坐标为（-2，3），表示保和殿的点的坐标为（0，1），表示武英殿的点的坐标为（-3.5，-3），四个选项中只有 B 正确，故选 B.

答案：B

方法点拨：利用坐标表示某区域内有关建筑物（地点）的地理位置，即把建筑物（地点）看成一个点，确定它在坐标系中的位置，根据坐标系中的位置确定出它的坐标．

专题三 点的坐标的变化规律

链接中考» 点的坐标的变化规律是图形变化规律的关键，图形的变化主要有平移、对称和旋转几种，每种变化的坐标变化都有规律，在中考中是热门考点，一般都是以选择题形式出现．

例 3 ［中考·梧州］点 P（2，-3）先向左平移 4 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到点 P'，则点 P' 的坐标为_____.

解：向左平移，给横坐标减；向上平移，给纵坐标加．所以 P' 的坐标为（2-4，-3+1），即（-2，-2），故答案为（-2，-2）．

答案：（-2，-2）

规律点拨：坐标系中的点（x，y）向左（或右）平移 a 个单位长度，横坐标减去（或加上）a；坐标系中的点（x，y）向上（或下）平移 b 个单位长度，纵坐标加上（或减去）b；点关于 x 轴对称横坐标不变，纵坐标变为相反数；点关于 y 轴对称横坐标变为相反数，纵坐标不变；关于原点对称的点的坐标特征：横、纵坐标都变为原来的相反数．

Ⅱ 方法必会

专题四 分类讨论思想

专题解读» 分类讨论思想是在解决问题中出现不确定性时的有效方法．因为不确定，所以需要我们正确地运用分类讨论思想解决问题．分类讨论思想不仅可以有效地解决一些问题，同时还可以培养同学们的观察能力和全面思考问题的能力．

例 4 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=4$，$BC=6$，若将该长方形放在平面直角坐标系中，使点 A 的坐标为（-1，2）且 $AB \parallel x$ 轴，试求点 C 的坐标．

解题秘方：点 C 的坐标由长方形 $ABCD$ 的具体位置来确定，应分四种情况来讨论．

解：如图 7-2，长方形 $AB_1C_1D_1$、长方形 $AB_1C_2D_2$、长方形 $AB_2C_3D_1$、长方形 $AB_2C_4D_2$ 均符

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

合题意，所以点 C 的坐标为（3，−4）或（3，8）或（−5，−4）或（−5，8）.

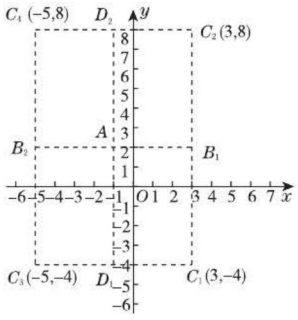


图 7−2

规律点拨：已知两点（这两点确定的直线与 x 轴（或 y 轴）平行或重合）之间的距离和其中一个点的坐标求另一个点的坐标时，分未知点在已知点的左右两侧（或上下两边）两种情况.

专题五 割补法、转化思想

专题解读» 不规则图形的面积求解策略：利用“分割”或“补形”将不规则图形的面积转化为规则图形的面积的和或差的形式，把所要解决的问题转化为另一个较容易解决的问题来解决. 这种求不规则图形面积的方法叫割补法；指导思想是化不规则为规则、化难为易的转化思想.

例 5 如图 7−3 所示的平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 A（0，0），B（9，0），C（7，5），D（2，7），试求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方：由于该图形不是规则图形，因此可以考虑把它分割成三角形和梯形来解决.

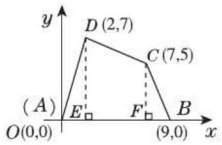


图 7−3

解：如图 7−3，分别过点 D，C 向 x 轴作垂线，垂足分别是 E，F，则四边形 $ABCD$ 被分割为三角形 AED、梯形 $EFCD$、三角形 CFB.

由各点的坐标可得 $AE=2$，$DE=7$，$FB=2$，$CF=5$，$EF=5$.

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{三角形AED}+S_{梯形EFCD}+S_{三角形CFB}=\frac{1}{2}\times AE\times DE+\frac{1}{2}\times(CF+DE)\times EF+\frac{1}{2}\times CF\times FB=\frac{1}{2}\times 2\times 7+\frac{1}{2}\times(5+7)\times 5+\frac{1}{2}\times 5\times 2=42$.

规律点拨：在平面直角坐标系中求不规则图形的面积，一般采用割补法，将不规则图形割补为规则且易求面积的图形，从而求出整个图形的面积.

好题必解 ☞答案见 261 页

类型 1：利用平面直角坐标系的特征解决问题

1. 如果 P（$a+b$，ab）在第二象限，那么点 Q（a，$-b$）在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若 y 轴上的点 P 到 x 轴的距离为 3，则点 P 的坐标是（　　）

A.（3，0）

B.（0，3）

C.（3，0）或（−3，0）

D.（0，3）或（0，−3）

3. 点 P（$a-1$，a^2-9）在 x 轴负半轴上，则 P 点坐标是_____.

4. 已知点 P（$2m+4$，$m-1$）. 试分别根据下列条件，求出点 P 的坐标.

（1）点 P 的纵坐标比横坐标大 3；

（2）点 P 在过点 A（2，−3），且与 x 轴平行的直线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用坐标表示地理位置

5. “健步走”越来越受到人们的喜爱，某个“健步走”小组将自己的活动场地定在奥林匹克公园，所走路线为：森林公园——玲珑塔——国家体育场——水立方．如图，设在奥林匹克公园设计图上玲珑塔的坐标为（−1，0），森林公园的坐标为（−2，2），那么水立方的坐标为（　　）

A.（−2，−4）

B.（−1，−4）

C.（−2，4）

D.（−4，−1）



（第 5 题）

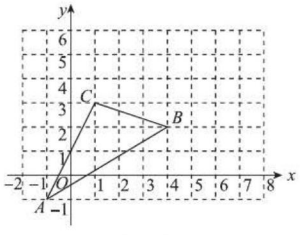
类型 3：利用平移的特征求点的坐标

6. 如图，三角形 ABC 在平面直角坐标系中．

（1）请写出三角形 ABC 各顶点的坐标；

（2）求三角形 ABC 的面积；

（3）若将三角形 ABC 向上平移 3 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度后得到三角形 $A'B'C'$，在图中画出变化后的三角形 $A'B'C'$，并直接写出三角形 ABC 内的点 $M(a, b)$ 平移后的对应点 M' 的坐标．



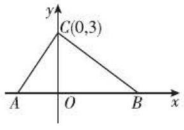
（第 6 题）

类型 4：利用点的坐标求平面直角坐标系中图形的面积

7. 如图所示，在平面直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别是 $A(a, 0)$，$B(b, 0)$，且 a，b 满足 $|a+2|+\sqrt{b-4}=0$，点 C 的坐标为 $(0, 3)$．

（1）求 a，b 的值及 $S_{三角形ABC}$；

（2）若点 M 在 x 轴上，且 $S_{三角形ACM}=\frac{1}{3}S_{三角形ABC}$，试求点 M 的坐标．



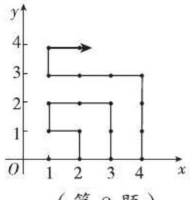
（第 7 题）

类型 5：探究平面直角坐标系中点的坐标变化规律

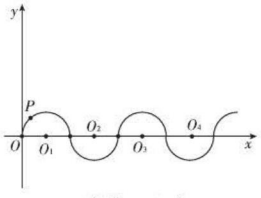
8. 如图，在平面直角坐标系中，有若干个横、纵坐标分别为整数的点，其顺序为（1，0），（2，0），（2，1），（1，1），（1，2），（2，2）…，根据这个规律，第 2 020 个点的坐标为（　　）

A.（45，9）　　B.（45，5）

C.（45，18）　　D.（45，0）



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图所示，在平面直角坐标系中，半径均为 1 个单位长度的半圆 O_1、O_2、O_3…组成一条平滑的曲线，点 P 从原点 O 出发，沿这条曲线向右运动，速度为每秒 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，则第 2021 秒时，点 P 的坐标是（　　）

A.（2020，0）　　B.（2021，1）

C.（2021，−1）　　D.（2022，0）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第七章测试卷

答案见 261 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 在平面直角坐标系中，点（−5，1）在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 下列数据不能确定物体位置的是（　　）

A. 北偏东 30°　　B. 祥云花园 4 号楼

C. 希望路 25 号　　D. 东经 118°，北纬 40°

3. 已知点 $P(x+5, x-4)$ 在 y 轴上，则 x 的值为（　　）

A.5　　B.−5　　C.−4　　D.4

4. 在平面直角坐标系中，若一图形各点的纵坐标不变，横坐标分别减 5，则图形与原图形相比，（　　）

A. 向右平移了 5 个单位长度

B. 向左平移了 5 个单位长度

C. 向上平移了 5 个单位长度

D. 向下平移了 5 个单位长度

5. 若点 (a, b) 在第二象限，则点 $B(a, -b)$ 在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

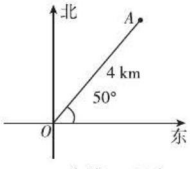
6. 点 A 的位置如图所示，则关于点 A 的位置下列说法中正确的是（　　）

A. 距点 O 4 km 处

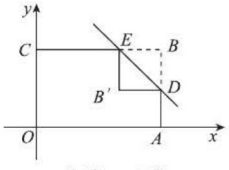
B. 北偏东 40° 方向上 4 km 处

C. 在点 O 北偏东 50° 方向上 4 km 处

D. 在点 O 北偏东 40° 方向上 4 km 处



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，长方形 $OABC$ 的边 OA，OC 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为（3，2）. 点 D，E 分别在边 AB，BC 上，$BD=BE=1$. 若沿直线 DE 将三角形 BDE 翻折，点 B 落在 B' 处，则点 B' 的坐标为（　　）

A.（1，2）　　B.（2，1）

C.（2，2）　　D.（3，1）

8. 已知点 A（−1，0）和点 B（1，2），将线段 AB 平移至 $A'B'$，点 A' 与点 A 对应. 若点 A' 的坐标为（1，−3），则点 B' 的坐标为（　　）

A.（3，0）　　B.（3，−3）

C.（3，−1）　　D.（−1，3）

9. 已知点 A（−1，0），点 B（2，0），在 y 轴上存在一点 C，使三角形 ABC 的面积为 6，则点 C 的坐标为（　　）

A.（0，4）　　B.（0，2）

C.（0，2）或（0，−2）　　D.（0，4）或（0，−4）

10. 定义：平面内的直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于该平面内任意一点 M，点 M 到直线 l_1，l_2 的距离分别为 a，b，则称有序非负实数对（a，b）是点 M 的“距离坐标”，根据上述定义，“距离坐标”为（2，3）的点的个数是（　　）

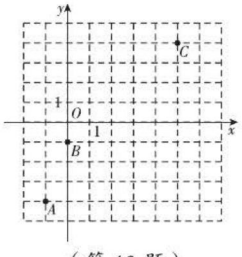
A.2　　B.1　　C. 4　　D.3

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. 如果电影院中“5 排 7 号”记作（5，7），那么（3，4）表示的是_____.

12. 在平面直角坐标系中，将点 A 向右平移了 3 个单位长度得到点 B（−2，1），则点 A 的坐标为_____.

13. 如图为 A，B，C 三点在平面直角坐标系的位置. 若 A，B，C 的横坐标的数字总和为 a，纵坐标的数字总和为 b，则 $a-b$ 的值为_____.



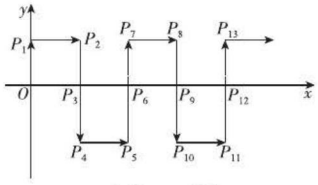
（第 13 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 在平面直角坐标系中，第四象限的点 M 到横轴的距离为 28，到纵轴的距离为 6，则点 M 的坐标为_____.

15. 已知 $AB \parallel x$ 轴，A 点的坐标为（-3，2），并且 $AB=4$，则 B 点的坐标为_____.

16. 如图，在平面直角坐标系中，一动点从原点 O 出发，沿着箭头所示方向，每次移动 1 个单位长度，依次得到点 $P_1(0, 1)$，$P_2(1, 1)$，$P_3(1, 0)$，$P_4(1, -1)$，$P_5(2, -1)$，$P_6(2, 0)$，…，则点 P_{2022} 的坐标是_____.



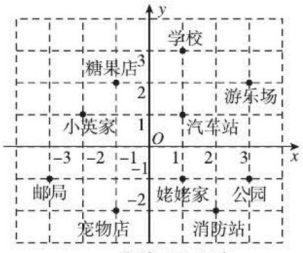
（第 16 题）

三、解答题（共 52 分）

17. （8 分）图中标明了小英家附近的一些地方.

（1）写出汽车站和消防站的坐标；

（2）某星期日早晨，小英同学从家里出发，沿（3，2），（3，-1），（1，-1）（-1，-2），（-3，-1）的路线转了一下，又回到了家里，写出她路上经过的地方.

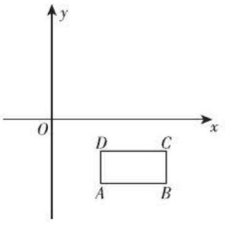


（第 17 题）

18. （10 分）如图，已知长方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2, -2\sqrt{2})$，$B(5, -2\sqrt{2})$，$C(5, -\sqrt{2})$，$D(2, -\sqrt{2})$.

（1）长方形 $ABCD$ 的面积是多少?

（2）将长方形 $ABCD$ 向上平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度，求所得的长方形 $A'B'C'D'$ 的四个顶点的坐标.



（第 18 题）

19. （10 分）四边形 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(0, 1)$，$B(5, 1)$，$C(7, 3)$，$D(2, 5)$.

（1）在平面直角坐标系中画出该四边形；

（2）四边形 $ABCD$ 内（边界点除外）一共有_____个整点（即横坐标和纵坐标都是整数的点）；

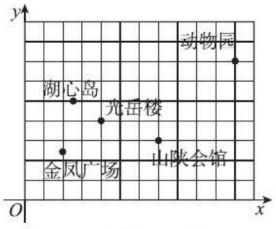
（3）求四边形 $ABCD$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.（12 分）如图是某市市区的几个旅游景点的示意图（图中每个小正方形的边长为 1 个单位长度），如果以 O 为原点建立两条互相垂直的数轴，用（2，2.5）表示金凤广场的位置，用（11，7）表示动物园的位置．根据此规定：

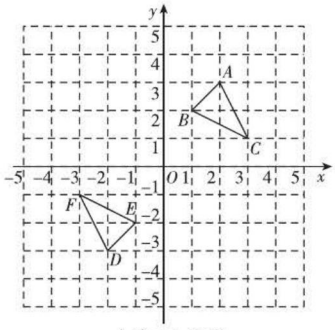
（1）湖心岛、光岳楼、山陕会馆的位置如何表示？

（2）（11，7）和（7，11）是同一个位置吗？为什么？



（第 20 题）

21.（12 分）如图，三角形 DEF 是由三角形 ABC 经过某种变换得到的图形，点 A 与点 D，点 B 与点 E，点 C 与点 F 分别是对应点，观察点与对应点的坐标之间的关系，解答下列问题：



（第 21 题）

（1）分别写出点 A 与点 D，点 B 与点 E，点 C 与点 F 的坐标，并说说对应点的坐标有哪些特征；

（2）若点 $P(a+3,\ 4-b)$ 与点 $Q(2a,\ 2b-3)$ 也是通过上述变换得到的对应点，求 a，b 的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

深度解密『鸡兔同笼』问题
深度解密『鸡兔同笼』问题











第八章 二元一次方程组

核心考点

你将见到的

- 二元一次方程与二元一次方程组
- 二元一次方程组的解法
- 二元一次方程组的应用
- 三元一次方程组的解法

核心方法

我们为你提供的

- 代入消元法
- 加减消元法
- 列举法
- 参数法
- 转化思想
- 分类讨论思想
- 整体思想
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.1 二元一次方程组

核心知识

- 二元一次方程
- 二元一次方程组
- 二元一次方程的解
- 二元一次方程组的解

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二元一次方程

1. **定义**：含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的整式方程，叫做二元一次方程.

2. **二元一次方程的条件**：

原方程：

（1）整式方程；

（2）只含有两个未知数；

化简后的方程：

（1）两个未知数的系数都不为 0；

（2）含有未知数的项的次数都是 1.

3. **关于 x，y 的二元一次方程的一般形式**：$ax+by=c$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）.

提分·必记

特别警示

“含有未知数的项的次数都是1”不可理解为两个未知数的次数都是1，例如 $2xy+1=0$，含有两个未知数，且未知数的次数都是1，但含未知数的项 $2xy$ 的次数是2，所以不是二元一次方程.

拨考向 利用二元一次方程的定义进行识别

例 1 有下列方程：① $xy=1$；② $2x=3y$；③ $x-\frac{1}{y}=2$；④ $x^2+y=3$；⑤ $\frac{x}{4}=3y-1$.

其中，二元一次方程有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方：紧扣二元一次方程必备的条件去识别.

解：根据二元一次方程的定义进行判断.

①含未知数的项 xy 的次数是 2；

③不是整式方程；

④含未知数的项 x^2，y 中，x^2 的次数不是 1.

②⑤满足二元一次方程的定义.

答案：B

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是不是二元一次方程的方法：

一看原方程是不是整式方程且只含有两个未知数；

二看化简整理后的方程是否具备两个未知数的系数都不为 0 且含未知数的项的次数都是 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 二元一次方程组

1. 定义：

方程组中有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做二元一次方程组.

2. 二元一次方程组应满足的条件：

（1）两个方程都是整式方程；

（2）共含有两个未知数；

（3）一共有两个方程，每个方程都是一次方程.

特别解读：（1）二元一次方程组不一定都是由两个二元一次方程合在一起组成的，其中有的方程可以是一元一次方程.

（2）二元一次方程组必须一共含有两个未知数.

提分·必记

特别警示

判断二元一次方程组时，忽视先整理化简后进行判断；

判断二元一次方程组时，误认为每个方程必须是二元一次方程，实际上只需满足：

(1) 共含有两个未知数，

(2) 一共有两个方程，每个方程都是一次方程即可.

拔考向▶ 利用二元一次方程组的定义解决问题

类型 1：利用二元一次方程组的定义进行识别

例 2 有下列方程组：

$$①\begin{cases}xy=1,\\x+y=2;\end{cases}\quad②\begin{cases}x-y=3,\\\dfrac{1}{x}+y=1;\end{cases}\quad③\begin{cases}2x+z=0,\\3x-y=\dfrac{1}{5};\end{cases}$$

$$④\begin{cases}x=5,\\\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=7;\end{cases}\quad⑤\begin{cases}x+\pi=3,\\x-y=1.\end{cases}$$

其中二元一次方程组有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方：紧扣二元一次方程组应满足的条件去识别.

解：①方程组中第一个方程含未知数的项 xy 的次数不是 1；

②方程组中第二个方程不是整式方程；

③方程组中共有 3 个未知数.

只有④⑤满足，其中⑤中的 π 是常数.

答案：B

提分·秘诀

知识储备

组成二元一次方程组的两个整式方程，有以下三种常见形式：

（1）两个方程都是一元一次方程，如$\begin{cases}x=1,\\y+2=5.\end{cases}$

（2）两个方程都是二元一次方程，如$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=5.\end{cases}$

（3）两个方程一个是一元一次方程，一个是二元一次方程，如$\begin{cases}x=1,\\y+2x=5.\end{cases}$

类型 2：利用二元一次方程组的模型分析实际问题

例 3 某中学组织七年级学生春游，原计划租用 45 座的客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租用同样数量的 60 座客车，则多出一辆车，且其余客车恰好坐满，试问七年级学生人数是多少？原计划租用 45 座客车多少辆？（只列方程组）

解题秘方：分析出题意中蕴含的等量关系，用未知量表示出等量关系.

解：设七年级学生有 x 人，原计划租用 y 辆 45 座客车. 根据题意，有

$$\begin{cases}45y+15=x,\\60(y-1)=x.\end{cases}$$

解法提醒

解决这类问题的关键是建立二元一次方程组的数学模型. 建立方程组的方法是根据实际问题找出题目中的两个等量关系，并分别列出相应的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 二元一次方程的解

1. 二元一次方程的解：

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程的解.

2. 判断一对数值是不是二元一次方程的解的方法：

判断一对数值是不是二元一次方程的解，只需将这对数值分别代入方程的左右两边，

若左边 = 右边，则这对数值是这个方程的解，

若左边≠右边，则这对数值不是这个方程的解.

提分·必记

特别解读

- 二元一次方程只要给定其中的一个未知数的值，就可以相应地求出另一个未知数的值，因此二元一次方程有无数组解；
- 二元一次方程的整数解有时只有有限组解.

技考向▶ 利用二元一次方程的解的定义求字母参数的值

例 4 若$\begin{cases}x=3m+1,\\y=2m-2\end{cases}$是方程 $4x-3y=10$ 的一个解，求 m 的值.

解题秘方：紧扣二元一次方程解的定义，将解代入方程中求值.

解：将$\begin{cases}x=3m+1,\\y=2m-2\end{cases}$代入方程 $4x-3y=10$，得 $4(3m+1)-3(2m-2)=10$. 解这个方程，得 $m=0$.

提分·秘诀

方法点拨

已知二元一次方程的解确定字母参数的方法：

将方程的解代入方程，得到一个关于这个字母参数的新方程，解这个方程即可求出这个字母参数的值.

点知识▶ 4 二元一次方程组的解

1. 二元一次方程组的解：

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做二元一次方程组的解.

2. 判断一对数值是不是二元一次方程组的解的方法：

判断一对数值是否为一个二元一次方程组的解，必须将这对数值分别代入方程组中的每一个方程进行检验，若满足每一个方程，则这对数值就是这个方程组的解，只要不满足其中任何一个方程，则这对数值就不是这个方程组的解.

提分·必记

特别解读

- 二元一次方程组一般都只有一组解，有时也无解.
- 方程组的解一定是方程组中每个方程的解，而方程组中某个方程的解不一定是方程组的解.

技考向▶ 利用二元一次方程组的解的定义解决问题

类型 1：利用二元一次方程组的解的定义求解

例 5 根据下表所给出的 x 的值及关于 x，y 的二元一次方程，求出相应的 y 的值，并填入表内.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2x$										
$y=x+5$										

请你从上表中找出二元一次方程组$\begin{cases}y=2x,\\y=x+5\end{cases}$的解.

解题秘方：根据二元一次方程组的解的概念，找出同时满足两个二元

提分·秘诀

方法点拨

本题运用**定义法**，检验一组数是不是某个二元一次方程组的解，常用的方法是将这组数分别代入方程组的每个方程，只有这组数满足每个方程，才能说这组数是此方程组的解；只要发现

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一次方程的公共解，即为二元一次方程组的解.

解：填表如下：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2x$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y=x+5$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

从表中可以看出：$\begin{cases}x=5,\\y=10\end{cases}$ 既是二元一次方程 $y=2x$ 的解，也是二元一次方程 $y=x+5$ 的解，所以二元一次方程组$\begin{cases}y=2x,\\y=x+5\end{cases}$ 的解是$\begin{cases}x=5,\\y=10.\end{cases}$

这组数不满足其中一个方程，即可判定这组数不是此方程组的解.

类型 2：利用二元一次方程组的解的定义确定字母的值

例 6 若关于 x，y 的方程组$\begin{cases}ax+y=0,\\2x+by=6\end{cases}$ 的解是$\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$ 则 $a^2+b^2=$_____.

解题秘方：紧扣二元一次方程组解的定义，将解代入方程组求字母的值.

解：将$\begin{cases}x=1,\\y=-2\end{cases}$ 代入关于 x，y 的方程组$\begin{cases}ax+y=0,\\2x+by=6\end{cases}$ 中，得$\begin{cases}a-2=0,\\2-2b=6\end{cases}$ 所以$\begin{cases}a=2,\\b=-2.\end{cases}$ 所以 $a^2+b^2=4+4=8$.

答案：8

方法点拨

利用方程组的解确定字母参数的方法：

将方程组的解代入它适合的每个方程，得到**关于字母参数的新方程组**，从而求解.

类型 3：利用二元一次方程组的解的定义解决错解问题

例 7 甲、乙两人共同解方程组$\begin{cases}ax+5y=15,\ ①\\4x-by=-2.\ ②\end{cases}$ 甲看错了方程①中的 a，得到方程组的解为$\begin{cases}x=-3,\\y=-1;\end{cases}$ 乙看错了方程②中的 b，得到方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$ 试计算 $a^{2020}+\left(-\frac{1}{10}b\right)^{2019}$ 的值.

特别解读

因看错一个方程而求出的方程组的错解，应是另一个没有看错的方程的解，因此可以将甲得到的这组解代入没看错的方程，从而得到含有 b 的等式.

解题秘方：方程组的解同时满足两个方程，若看错一个方程，则满足另一个方程.

解：把$\begin{cases}x=-3,\\y=-1\end{cases}$ 代入②，得 $-12+b=-2$，解得 $b=10$；

把$\begin{cases}x=5,\\y=4\end{cases}$ 代入①，得 $5a+20=15$，解得 $a=-1$.

所以 $a^{2020}+\left(-\frac{1}{10}b\right)^{2019}=(-1)^{2020}+\left(-\frac{1}{10}\times10\right)^{2019}=1-1=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用定义法求二元一次方程中的字母的取值范围

例 8 若方程 $3x+4y=my+10$ 是关于 x，y 的二元一次方程，则 m 的取值范围是_____.

解题秘方：紧扣二元一次方程必备的条件求出方程中字母的取值范围.

解：∵方程 $3x+4y=my+10$ 变形后为 $3x+(4-m)y=10$，

∴ $4-m\neq 0$，∴ $m\neq 4$.

答案：$m\neq 4$

挑战·高分

特别警示

方程有两项含有 y，需要将原方程进行化简，化简后的方程应满足一次项的系数不等于 0，不能不化简，直接误认为 $m\neq 0$.

拔尖角度 2 利用列举法求二元一次方程的特殊解

例 9 求二元一次方程 $3x+2y=12$ 的非负整数解.

解题秘方：紧扣非负整数解，从 x 为非负整数入手列举判断 y 是否为非负整数.

解：原方程可化为 $y=\dfrac{12-3x}{2}$.

因为 x，y 都是非负整数，所以必须保证 $12-3x$ 能被 2 整除，

所以 x 必为偶数.

当 $x=0$ 时，$y=6$；

当 $x=2$ 时，$y=3$；

当 $x=4$ 时，$y=0$.

所以原方程的非负整数解为 $\begin{cases}x=0,\\y=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=0.\end{cases}$

挑战·高分

方法点拨

求二元一次方程的整数解的方法：

1. **变形**：把 x 看成常数，把方程变形为用 x 表示 y 的形式；
2. **划界**：根据方程的解都是整数的特点，划定 x 的取值范围；
3. **试值**：在 x 的取值范围内逐一试值；
4. **确定**：根据试值结果得到二元一次方程的整数解.

拔尖角度 3 利用类比法根据二元一次方程组的特殊结构找解

例 10 [巧解题]阅读例子：已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 求关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=3c_1,\\2a_2x+b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解.

解：方程组 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=3c_1,\\2a_2x+b_2y=3c_2\end{cases}$ 可化为 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}a_1x+\dfrac{1}{3}b_1y=c_1,\\\dfrac{2}{3}a_2x+\dfrac{1}{3}b_2y=c_2,\end{cases}$

∵关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x=2,\\\dfrac{1}{3}y=3,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x=3,\\y=9.\end{cases}$

挑战·高分

解法提醒

用类比法解方程组，关键是构造出与已知方程组具有相同结构特征的方程组，然后利用已知方程组的解求出待求方程组的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=3c_1,\\2a_2x+b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=3,\\y=9.\end{cases}$

通过对上面材料的认真阅读，解决问题：

已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$ 求关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+2b_1y=3c_1,\\a_2x+2b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解.

解题秘方：分析两个方程组之间的结构特征，用类比法找出两个方程组解之间的关系.

解：方程组 $\begin{cases}a_1x+2b_1y=3c_1,\\a_2x+2b_2y=3c_2\end{cases}$ 可化为 $\begin{cases}\frac{1}{3}a_1x+\frac{2}{3}b_1y=c_1,\\\frac{1}{3}a_2x+\frac{2}{3}b_2y=c_2,\end{cases}$

∵关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$

∴$\begin{cases}\frac{1}{3}x=-1,\\\frac{2}{3}y=2,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=-3,\\y=3.\end{cases}$

∴关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+2b_1y=3c_1,\\a_2x+2b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-3,\\y=3.\end{cases}$

技巧点拨

本题难点在于根据题中的例子得出求解方法.对于需求解的方程组，用阅读类比法将其不含未知数的项化成和已知解的方程组不含未知数的项相同，然后让需求解方程组含未知数的项除去相同的系数后的部分等于已知方程组的解，进而求出需求解的方程组的解.

拔尖角度▸ 4 利用整体求值解实际应用问题

挑战·高分

例 11 [中考·台州]滴滴快车是一种便捷的出行工具，计价规则如下表：

计费项目	里程费	时长费	远途费
单价	1.8 元 / 公里	0.3 元 / 分钟	0.8 元 / 公里
注：车费由里程费、时长费、远途费三部分构成，其中里程费按行车的实际里程计算；时长费按行车的实际时间计算；远途费的收取方式为：行车里程 7 公里以内（含 7 公里）不收远途费，超过 7 公里的，超出部分每公里收 0.8 元.			

小王与小张各自乘坐滴滴快车，行车里程分别为 6 公里与 8.5 公里，如果下车时两人所付车费相同，那么这两辆滴滴快车的行车时间相差（　　）

A.10 分钟　　B.13 分钟　　C.15 分钟　　D.19 分钟

解题秘方：设小王的行车时间为 x 分钟，小张的行车时间为 y 分钟，根据题意列出小王与小张各自的车费，由两者相等列出方程，通过化简整体求出时间差.

解：设小王的行车时间为 x 分钟，小张的行车时间为 y 分钟.

根据题意，得 $1.8\times6+0.3x=1.8\times8.5+0.3y+0.8\times(8.5-7)$.

∴ $10.8+0.3x=16.5+0.3y$，∴ $0.3(x-y)=5.7$，

∴ $x-y=19$，即这两辆滴滴快车的行车时间相差 19 分钟.

答案：D

详解

∵小王行车里程=6公里<7公里，

∴小王的车费包括两部分：里程费和时长费.

∵小张行车里程=8.5公里>7公里，

∴小张的车费包括三部分：里程费、时长费和远途费.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要有两个考点，一是二元一次方程（组）的解，考查的形式主要是找解和利用解求值；二是根据实际问题列二元一次方程（组），考查的形式一般都以填空、选择题为主，难度也不大.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 二元一次方程组的解

例12 [中考·枣庄]若二元一次方程组$\begin{cases}x+y=3,\\3x-5y=4\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=a,\\y=b,\end{cases}$则$a-b=$（　　）

A.1　　B.3　　C.$-\frac{1}{4}$　　D.$\frac{7}{4}$

试题评析：本题考查了二元一次方程组的解和求式子的值，解题的关键是分析二元一次方程组中的方程系数特征与所求式子的关系.

解：把$\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$代入原方程组，则$\begin{cases}a+b=3,①\\3a-5b=4,②\end{cases}$

两式相加，得$4a-4b=7$，

所以$4(a-b)=7$，所以$a-b=\frac{7}{4}$.

答案：D

解法提醒

建立以a、b为未知数的二元一次方程组模型后，可以利用解二元一次方程组的方法求出a、b的值（下节学），再求a-b的值；也可以观察方程组，将方程组中的两个方程相加或相减，得到要求的式子或要求式子的倍数，然后整体求值.

考法2 在实际问题中建立二元一次方程组的模型

例13 [中考·随州]小明到商店购买“五四青年节”活动奖品，购买20支铅笔和10本笔记本共需110元，但购买30支铅笔和5本笔记本只需85元. 设每支铅笔x元，每本笔记本y元，则可列方程组（　　）

A.$\begin{cases}20x+30y=110\\10x+5y=85\end{cases}$　　B.$\begin{cases}20x+10y=110\\30x+5y=85\end{cases}$

C.$\begin{cases}20x+5y=110\\30x+10y=85\end{cases}$　　D.$\begin{cases}5x+20y=110\\10x+30y=85\end{cases}$

试题评析：本题考查了在实际问题中建立二元一次方程组模型，解题的关键是找出等量关系.

解：由题意，得$\begin{cases}20x+10y=110,\\30x+5y=85.\end{cases}$故选择B.

答案：B

特别提醒

等量关系是建立二元一次方程组模型的主要依据，本题有两个等量关系：

①20支铅笔的钱+10本笔记本的钱=110元；

②30支铅笔的钱+5本笔记本的钱=85元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用二元一次方程的特殊解解决问题

例 14 [中考·龙东地区]为了丰富学生课外小组活动，培养学生动手操作能力，王老师让学生把 5 m 长的彩绳截成 2 m 或 1 m 长的彩绳，用来做手工编织，在不造成浪费的前提下，你有（　　）种不同的截法.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

试题评析：本题考查二元一次方程的特殊解问题，解题的关键是把握方程中两个未知数的特殊性来求方程的特殊解.

解：设截得 2 m 长的彩绳有 x 根，截得 1 m 长的彩绳有 y 根. 根据题意，得 $2x+y=5$，且 x，y 都是非负整数，

所以 $\begin{cases}x=0,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

所以有 3 种不同的截法：

①截成 2 m 长的彩绳 2 根，1 m 长的彩绳 1 根；

②截成 2 m 长的彩绳 1 根，1 m 长的彩绳 3 根；

③截成 1 m 长的彩绳 5 根.

答案：C

解法提醒

用列举法求二元一次方程的特殊解时注意两点：

- 紧扣解的特殊性，二元一次方程的解是成对出现的，即两个未知数的值都必须满足特殊的条件.
- 列举时，选定两个未知数中的一个按从小到大列举，求出对应的另一个未知数的值，直到另一个未知数不满足其特殊性为止.

两年模拟兵法

答案见 262 页

1. 有下列式子：① $3x+2y$；② $2(2-x)+3y+5=0$；③ $3x-4y=z$；④ $x+xy=1$；⑤ $4x=\dfrac{y-2}{4}$；⑥ $y^2+3y=5x$；⑦ $\dfrac{1}{x}+4y=4$，其中二元一次方程有（　　）

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

2. 下列方程组中，是二元一次方程组的是（　　）

A. $\begin{cases}a=2b+1\\3b-4c=2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}5x-xy=6\\3x+2y=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=7\\y=\dfrac{3}{2}x\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x^2=9\\y=2x\end{cases}$

3. 方程 $2x+y=9$ 的正整数解有（　　）

A.1 组　　B.2 组

C.3 组　　D.4 组

4. 在二元一次方程 $-\dfrac{1}{2}x+3y=2$ 中，当 $x=4$ 时，$y=$_____；当 $y=-1$ 时，$x=$_____.

5. 若关于 x，y 的方程 $2x^{3a-3}-2y^{b+1}=5$ 是二元一次方程，则 $a=$_____，$b=$_____.

6. [中考·北京]某活动小组购买了 4 个篮球和 5 个足球，一共花费了 435 元，其中篮球的单价比足球的单价多 3 元，求篮球的单价和足球的单价. 设篮球的单价为 x 元，足球的单价为 y 元，依题意，可列方程组为_____.

7. [中考·湛江]请写出一个二元一次方程组：_____，使它的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

8. 若 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 是关于 x，y 的二元一次方程 $mx+ny=-2$ 的一个解，则 $6-2m+n$ 的值为_____.

9. 若 $\begin{cases}x=-2,\\y=3\end{cases}$ 是方程 $3x-3y=m$ 和 $5x+y=n$ 的公共解，则 m^2-3n 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 已知方程组$\begin{cases}3x-(m-3)y^{|m-2|-2}=1,\\(m+1)x=-2\end{cases}$是二元一次方程组，求$m$的值.

11. 甲、乙二人共同解方程组$\begin{cases}mx+2y=-6,①\\2x-ny=-3,②\end{cases}$由于甲看错了方程①中的$m$的值，得到方程组的解为$\begin{cases}x=-3,\\y=-2;\end{cases}$乙看错了方程②中的$n$的值，得到方程组的解为$\begin{cases}x=-5,\\y=2.\end{cases}$试求$m^2+n^2+mn$的值.

【导学号：7207895】

12. 已知方程组$\begin{cases}2a-3b=13,\\3a+5b=30.9\end{cases}$的解是$\begin{cases}a=8.3,\\b=1.2,\end{cases}$求方程组$\begin{cases}2(x+2)-3(y-1)=13,\\3(x+2)+5(y-1)=30.9\end{cases}$的解.

13. [中考·黄石]一食堂需要购买盒子存放食物，盒子有A，B两种型号，单个盒子的容量和价格如下表，现有15升食物需要存放且要求每个盒子要装满，由于A型号盒子正在做促销活动：购买三个及三个以上可一次性返现金4元，则购买盒子所需要的最少费用为多少元?

型号	A	B
单个盒子的容量/升	2	3
单价/元	5	6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.2 消元——解二元一次方程组

核心知识
- 代入消元法
- 加减消元法
- 二元一次方程组的简单应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 代入消元法解二元一次方程组

1. 消元思想：

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为一元一次方程．先求出一个未知数，然后再求另一个未知数，这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做消元思想．


代入法解方程组

2. 代入消元法：

（1）**定义**：把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解，这种方法叫做代入消元法，简称代入法．

（2）**用代入消元法解二元一次方程组的一般步骤：**

步骤	具体做法	目的	注意事项
①变形	选取一个系数比较简单的二元一次方程变形，用含一个未知数的式子表示另一个未知数．	变形为 $y=ax+b$（或 $x=ay+b$）$(a,b$ 是常数$)$ 的形式．	一般选未知数系数比较简单的方程变形．
②代入	把 $y=ax+b$（或 $x=ay+b$）代入另一个没有变形的方程．	消去一个未知数，将二元一次方程组转化为一元一次方程．	变形后的方程只能代入另一个方程（或另一个方程变形后的方程）．
③求解	解消元后的一元一次方程．	求出一个未知数的值．	去括号时不能漏乘，移项时所移的项要变号．

提分·必记

特别提醒

- 将方程组中的一个二元一次方程写成用含一个未知数的式子表示另一个未知数的形式，是用代入法解二元一次方程组的前提和关键，其方法就是利用等式的性质将其变形为 $y=ax+b$（或 $x=ay+b$）的形式，其中 a，b 为常数，$a\neq 0$；
- 用含一个未知数的式子表示另一个未知数后，应代入另一个方程来解，否则只能得到一个恒等式，并不能求出方程组的解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续表

步骤	具体做法	目的	注意事项
④回代	把求得的未知数的值代入步骤①中变形后的方程中.	求出另一个未知数的值.	一般代入变形后的方程.
⑤写解	把两个未知数的值用大括号联立起来.	表示为$\begin{cases}x=\cdots,\\y=\cdots\end{cases}$的形式.	用“{”将未知数的值联立起来.

考向▶利用代入消元法解二元一次方程组

例1 用代入法解下列方程组:

(1) $\begin{cases}2x+3y=-19,\ ①\\x+5y=1;\ ②\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-3y=1,\ ①\\\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{x+2}{3}.\ ②\end{cases}$

解题秘方:紧扣用代入消元法解二元一次方程组的步骤解方程组.

解:(1)由②,得$x=1-5y$. ③

把③代入①,得$2(1-5y)+3y=-19$.

解这个方程,得$y=3$.

把$y=3$代入③,得$x=-14$.

所以这个方程组的解是$\begin{cases}x=-14,\\y=3.\end{cases}$

(2)将原方程组整理为$\begin{cases}2x-3y=1,\ ③\\4x-3y=-5.\ ④\end{cases}$

由③,得$3y=2x-1$. ⑤

把⑤代入④,得$4x-(2x-1)=-5$.

解这个方程,得$x=-3$.

把$x=-3$代入⑤,得$3y=2\times(-3)-1$.

解得$y=-\dfrac{7}{3}$.

所以这个方程组的解是$\begin{cases}x=-3,\\y=-\dfrac{7}{3}.\end{cases}$

提分·秘诀

解法提醒

如果方程中有一个未知数的系数为±1,通常选择用这个方程的另一个未知数表示系数为±1的未知数.

如果方程组中某一未知数的系数成倍数关系或相同,那么可用整体代入法消去这个未知数再求解.

方法点拨

当二元一次方程组中的系数较复杂时,可先将方程组整理成标准形式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$其中$x$,$y$是未知数,其余字母为常数.

知识▶2 加减消元法解二元一次方程组

1. 加减消元法的定义:

当二元一次方程组的两个方程中同一未知数的系数相反或相等时,把这两个方程的两边分别相加或相减,就能消去这个未知数,得到一个一元一次方程,这种方法叫做加减消元法,简称加减法.

提分·必记

特别解读

1. 两个方程同一未知数的系数的绝对值相等或成倍数关系时,解方程组应考虑用加减消元法;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 用加减消元法解二元一次方程组的一般步骤：

步骤	具体做法	目的	注意事项
①变形	根据绝对值较小的未知数(同一个未知数)的系数的最小公倍数，将方程的两边都乘适当的数.	使某一个未知数在两个方程中的系数相等或互为相反数.	(1)选择消元对象：两个方程中，当某个未知数的系数相等或互为相反数或有倍数关系时，选择消去该未知数较简单； (2)把某个方程乘一个数时，方程两边的每一项都要和这个数相乘.
②代入	两个方程中同一个未知数的系数互为相反数时，将两个方程相加，同一个未知数的系数相等时，将两个方程相减.	消去一个未知数，将二元一次方程组转化为一元一次方程.	(1)把两个方程相加(减)时，一定要把两个方程两边分别相加(减)； (2)应用减法消元时，注意符号的变化.
③求解	解消元后的一元一次方程.	求出一个未知数的值.	
④回代	把求得的未知数的值代入方程组中某个较简单的方程中.	求出另一个未知数的值.	回代时选择系数较简单的方程.
⑤写解	把两个未知数的值用大括号联立起来.	表示为$\begin{cases}x=\cdots,\\y=\cdots\end{cases}$的形式.	用“{”将未知数的值联立起来.

2. 如果同一未知数的系数的绝对值既不相等又不成倍数关系，我们应**设法将一个未知数的系数的绝对值转化为相等关系**；

3. 用加减法时，一般选择系数比较简单(同一未知数的系数的绝对值相等或成倍数关系)的未知数作为消元对象.

核心考向▶利用加减消元法解二元一次方程组

类型1：利用加减消元法解二元一次方程组

题型1　系数相等或相反

例2　用加减法解下列方程组：

$$\begin{cases}3x-7y=-1, & ①\\3x+7y=13. & ②\end{cases}$$

解题秘方：方程组的两个方程中，x的系数相同，y的系数互为相反数，这样可以把两个方程相加消去y，或者把两个方程相减消去x.

解：①＋②，得$6x=12$，解得$x=2$.

把$x=2$代入②，得$3\times2+7y=13$，解得$y=1$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

提分·秘诀

解法提醒

方程组中某个未知数的系数的绝对值相等，则直接利用加减法求解.

另解

①－②，得$-14y=-14$，解得$y=1$.

把$y=1$代入①，得$3x-7\times1=-1$，解得$x=2$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　系数的绝对值成倍数关系

例 3　用加减法解下列方程组：

$$\begin{cases}8x+9y=73, & ①\\ 17x-3y=74. & ②\end{cases}$$

解题秘方：方程组的两个方程中，y 的系数的绝对值成倍数关系，方程②乘 3 就可与方程①相加消去 y.

解：② ×3，得 $51x-9y=222.$ ③

① + ③，得 $59x=295$，解得 $x=5.$

把 $x=5$ 代入①，得 $8\times5+9y=73$，解得 $y=\frac{11}{3}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=5,\\ y=\frac{11}{3}.\end{cases}$


加减法解方程组

解法提醒

方程组中任意一个未知数的系数的绝对值都不相等，但某个未知数的系数的绝对值成倍数关系，则其中一个方程乘这个倍数后再利用加减法求解.

题型 3　系数的绝对值既不相等又不成倍数关系

例 4　用加减法解下列方程组：

$$\begin{cases}2x+3y=3, & ①\\ 3x+2y=11. & ②\end{cases}$$

解题秘方：方程①和②中 x，y 的系数的绝对值既不相等又不成倍数关系，应取系数的绝对值的最小公倍数 6，可以先消去 x，也可以先消去 y.

解：① ×3，得 $6x+9y=9.$ ③

② ×2，得 $6x+4y=22.$ ④

③ − ④，得 $5y=-13$，解得 $y=-\frac{13}{5}$.

把 $y=-\frac{13}{5}$ 代入①，解得 $x=\frac{27}{5}$.

所以这个方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{27}{5},\\ y=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

解法提醒

方程组中任意一个未知数的系数的绝对值既不相等又不成倍数关系，可利用最小公倍数的知识，把两个方程都适当地乘一个数，使某个未知数的系数的绝对值相等.

另解

① ×2，得 $4x+6y=6.$ ⑤

② ×3，得 $9x+6y=33.$ ⑥

⑥ − ⑤，得 $5x=27$，解得 $x=\frac{27}{5}$.

把 $x=\frac{27}{5}$ 代入①，

解得 $y=-\frac{13}{5}$.

所以这个方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{27}{5},\\ y=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

类型 2：利用加减消元法解决实际问题

例 5　[中考 · 吉林]被誉为“最美高铁”的长春至珲春城际铁路途经许多隧道和桥梁，其中隧道累计长度与桥梁累计长度之和为 342 km，隧道累计长度的 2 倍比桥梁累计长度多 36 km. 求隧道累计长度与桥梁累计长度.

解题秘方：紧扣等量关系“隧道累计长度 + 桥梁累计长度 = 342 km”和“2× 隧道累计长度 = 桥梁累计长度 +36 km”列方程组求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设隧道累计长度为 x km，桥梁累计长度为 y km.

依题意，得$\begin{cases}x+y=342,\\2x=y+36.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=126,\\y=216.\end{cases}$

答：隧道累计长度为 126 km，桥梁累计长度为 216 km.

解法提醒

解题的流程是找到题目中的等量关系，设未知数，构造二元一次方程组解决问题.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用特殊法解方程组

挑战·高分

例 6 解方程组：

（1）$\begin{cases}2x-3y-2=0,①\\\dfrac{2x-3y+5}{7}+2y=9.②\end{cases}$　（2）$\begin{cases}\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2},①\\3x-2y=22.②\end{cases}$

解题秘方：（1）将 $2x-3y$ 看作一个整体，采用“整体代入”达到消元的目的；

（2）令 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=k$，将 x，y 用 k 表示，再代入另一个方程求解.

解：（1）由①得 $2x-3y=2$. ③

把③代入②，得 $\dfrac{2+5}{7}+2y=9$，解得 $y=4$.

把 $y=4$ 代入①，得 $2x-3\times4-2=0$，

解得 $x=7$.

所以这个方程组的解是$\begin{cases}x=7,\\y=4.\end{cases}$

（2）设 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=k$，则 $x=5k$，$y=2k$.

将 $x=5k$，$y=2k$ 代入②，得 $15k-4k=22$，解得 $k=2$.

所以 $x=5k=10$，$y=2k=4$.

所以这个方程组的解为$\begin{cases}x=10,\\y=4.\end{cases}$

解法提醒

要注意观察两个方程中的共同部分，把它们看成一个整体，利用“整体思想”可以避繁就简地解决问题.

特别解读

当方程组中的一个方程出现如 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$（$a$，$b$ 为常数，且 $a\neq0$，$b\neq0$）或 $x:y=a:b$（a，b 为常数，且 $a\neq0$，$b\neq0$）的形式时，可以引入参数 k，用含 k 的式子分别表示 x，y，再代入另一个方程得到关于 k 的方程，解方程求出 k 的值后，即可得到方程组的解.

拔尖角度 2 利用方程组法求多项式中字母系数的值

挑战·高分

例 7 在多项式 x^2+px+q 中，当 $x=-1$ 时，值为 -5；当 $x=3$ 时，值为 3，求 p，q 的值.

解题秘方：根据多项式的两对对应值列出方程组模型，求出待定字母 p、q 的值.

解：由题意，得$\begin{cases}(-1)^2-p+q=-5,\\3^2+3p+q=3.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}p=0,\\q=-6.\end{cases}$

方法点拨

本例根据多项式的值的定义，即由数值代替多项式中的字母计算所得的结果叫做多项式的值；联立用两组数值代入列出的方程组成方程组，求解得到所要求的字母系数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用方程组解的定义法求字母系数的值

挑战·高分

类型 1：方程组的解满足附加条件型

例 8 若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x+3y=k-3, & ①\\ x+2y=2k+1 & ②\end{cases}$ 的解互为相反数，求 k 的值.

解题秘方：把 k 看成已知数，解方程组可得到含有 k 的方程组的解，根据方程组的解互为相反数，可以得到关于 k 的方程，解方程可求得 k.

解：① − ② ×2，得 $-y=-3k-5$，

解得 $y=3k+5$.

把 $y=3k+5$ 代入①，

解得 $x=-4k-9$.

因为方程组的解互为相反数，

所以 $3k+5+(-4k-9)=0$，

解得 $k=-4$.

方法点拨

求二元一次方程组中的字母系数的一般步骤：

1. 把字母系数看成已知数并解方程组；
2. 根据方程组的解的定义，得到关于字母系数的方程；
3. 解方程求得字母系数.

类型 2：二元一次方程组与二元一次方程同解型

例 9 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x+2y=3m,\\ x-y=9m\end{cases}$ 的解也是方程 $3x+2y=17$ 的解，求 m 的值.

解题秘方：将待定字母 m 看作已知数，求出方程组的解. 然后将方程组的解代入二元一次方程中，转化成以 m 为未知数的一元一次方程，求出 m 的值.

解：**方法一** $\begin{cases}x+2y=3m, & ①\\ x-y=9m. & ②\end{cases}$

① − ②，得 $3y=-6m$，即 $y=-2m$.

把 $y=-2m$ 代入方程①，得 $x-4m=3m$，

解得 $x=7m$.

把 $x=7m$，$y=-2m$ 代入 $3x+2y=17$，

得 $21m-4m=17$. 解得 $m=1$.

方法二 $\begin{cases}x+2y=3m, & ①\\ x-y=9m. & ②\end{cases}$

① ×3 − ②，得 $2x+7y=0$.

$2x+7y=0$ 与 $3x+2y=17$ 组成的新方程组为 $\begin{cases}2x+7y=0,\\ 3x+2y=17.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=7,\\ y=-2.\end{cases}$

把 $\begin{cases}x=7,\\ y=-2\end{cases}$ 代入方程①，

得 $7-4=3m$，解得 $m=1$.

技巧点拨

“殊途”何以“同归”：

解方程组的消元策略很多，这主要是由解方程组时的消元策略的多样性造成的. 例如，在解此题时，可以把 m 当成已知数，首先用含 m 的整式表示 x，y，然后把 x，y 代入 $3x+2y=17$ 中，得到一个关于 m 的一元一次方程，再解这个方程；也可以先在方程组中消去 m，得到一个关于 x，y 的二元一次方程，再将这个方程与方程 $3x+2y=17$ 组成一个新的方程组，解这个方程组求出 x，y 的值，最后求 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：两个二元一次方程组同解型

例 10 已知方程组$\begin{cases}2x+5y=-6,\\ ax-by=-4\end{cases}$和方程组$\begin{cases}3x-5y=16,\\ bx+ay=-8\end{cases}$的解相同，求$(2a+b)^{2020}$的值.

解题秘方：本题的解题技巧在于对二元一次方程组的解的理解，由于题目中的四个方程有公共解，故这个公共解必然满足方程组$\begin{cases}2x+5y=-6,\\ 3x-5y=16.\end{cases}$由此即可求得两个方程组的公共解，进而求得方程组中的字母参数 a，b.

解：依题意联立方程组$\begin{cases}2x+5y=-6,\ ①\\ 3x-5y=16.\ ②\end{cases}$

① + ②，得 $5x=10$，解得 $x=2$.

把 $x=2$ 代入①，得 $2\times2+5y=-6$，解得 $y=-2$.

所以$\begin{cases}x=2,\\ y=-2.\end{cases}$

又联立 $ax-by=-4$，$bx+ay=-8$，得方程组$\begin{cases}ax-by=-4,\\ bx+ay=-8.\end{cases}$

将$\begin{cases}x=2,\\ y=-2\end{cases}$代入，则有$\begin{cases}2a+2b=-4,\\ -2a+2b=-8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-3.\end{cases}$

所以 $(2a+b)^{2020}=(2\times1-3)^{2020}=1$.

解法提醒

当几个二元一次方程有公共解或两个二元一次方程组同解时，可利用两个已知的二元一次方程组成方程组，并求出方程组的解，然后利用这个解得到关于字母参数的方程(组)，进而求得字母参数.

拔尖角度 4 利用代入消元法求非整式式子的值

例 11 已知$\begin{cases}a+2b=3c,\ ①\\ 2a-3b=-8c,\ ②\end{cases}$求$\dfrac{3a+4b+c}{4a-3b+2c}$的值.($a$，$b$，$c\neq0$，且 $4a-3b+2c\neq0$)

解题秘方：把方程组中 a，b 当成未知数，c 当成已知数，将方程组视为关于 a，b 的二元一次方程组，用含 c 的式子表示 a，b，再代入所求式子即可求解.

解：① $\times2-$ ②，得 $7b=14c$，即 $b=2c$.

把 $b=2c$ 代入①，得 $a+2\times2c=3c$，则 $a=-c$.

把 $a=-c$，$b=2c$ 代入所求式子，得

$$\frac{3a+4b+c}{4a-3b+2c}=\frac{3\times(-c)+4\times2c+c}{4\times(-c)-3\times2c+2c}=-\frac{3}{4}.$$

挑战·高分

技巧点拨

如果方程组的两个方程中含有三个字母，一般把其中两个字母看成未知数，另一个字母看成已知数，把这个含有三个字母的方程组视为二元一次方程组求解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 解二元一次方程组是中考的重要考点，题型呈多样化. 解决此类问题的关键是掌握代入消元法和加减消元法的一般步骤，并能建立二元一次方程组的模型解决简单的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 解二元一次方程组

例12 [中考·天津]方程组$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$的解是(　　)

A. $\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$

试题评析：本题考查了二元一次方程组的解法，掌握加减消元法的步骤是解题的关键.

解：方程组$\begin{cases}x+y=10,①\\2x+y=16.②\end{cases}$

②－①得$x=6$,

将$x=6$代入①得$6+y=10$，解得$y=4$.

∴方程组的解为$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$

答案：A

另解

本题由于是选择题，可以根据二元一次方程组的解的定义进行代入**验证选择**，如由$x+y=10$，可直接排除B、C选项，再由$2x+y=16$，很快就能确定A选项正确.

考法2 利用非负数性质建立二元一次方程组的模型

例13 [中考·绵阳]若$|a-b-1|+(b-2a)^2=0$，求a，b的值.

试题评析：本题主要考查建立二元一次方程组模型解决问题，解题的关键是掌握非负数的性质.

解：因为$|a-b-1|\geqslant 0$，$(b-2a)^2\geqslant 0$,

且$|a-b-1|+(b-2a)^2=0$,

所以$\begin{cases}a-b-1=0,\\b-2a=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

解法提醒

初中阶段学习了三种非负数，①$|a|\geqslant 0$；②$a^2\geqslant 0$；③$\sqrt{a}\geqslant 0$，如果出现几个非负数的和为零，则说明这几个非负数的值都等于0，此时可得一个方程组，解方程组即可求得未知数的值.

考法3 二元一次方程组的简单应用

例14 [中考·福建]我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足.问鸡兔各几何.”其大意是：“有若干只鸡和兔关在同一笼子里，它们一共有35个头，94条腿.问笼中的鸡和兔各有多少只?”试用列方程(组)解应用题的方法求出问题的解.

试题评析：本题考查了二元一次方程组的应用，解题的关键是弄清题意，找到合适的等量关系，列出方程组并熟练解方程组.

解：设鸡有x只，兔有y只.

依题意，得$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=23,\\y=12.\end{cases}$

答：鸡有23只，兔有12只.

题意解读

“35个头”：即鸡和兔共35只；

“94条腿”：一只鸡两条腿，一只兔四条腿，即鸡的只数×2+兔的只数×4=94.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 对于方程 $3x-2y-5=0$，用含 y 的式子表示 x，应是（　　）

A. $y=6x-10$

B. $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

C. $x=\frac{1}{3}(2y+5)$

D. $x=6y+15$

2. [中考·河北]利用加减消元法解方程组 $\begin{cases}2x+5y=-10, & ①\\ 5x-3y=6, & ②\end{cases}$ 下列做法正确的是（　　）

A. 要消去 y，可以将① $\times 5$ + ② $\times 2$

B. 要消去 x，可以将① $\times 3$ + ② $\times(-5)$

C. 要消去 y，可以将① $\times 5$ + ② $\times 3$

D. 要消去 x，可以将① $\times(-5)$ + ② $\times 2$

3. 已知 a，b 满足方程组 $\begin{cases}a+5b=12,\\ 3a-b=4,\end{cases}$ 则 $a+b$ 的值为（　　）

A. -4　　B. 4　　C. -2　　D. 2

4. 若方程组 $\begin{cases}4x+3y=1,\\ ax-(a-1)y=3\end{cases}$ 的解 x 与 y 互为相反数，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知单项式 $-3x^{m-1}y^3$ 与 $\frac{5}{2}x^ny^{m+n}$ 是同类项，那么 m，n 的值分别是_____.

6. 已知 $|x-2y|+|5x-7y-2|=0$，则 $x=$_____，$y=$_____.

7. 已知式子 $ax+by$，当 $x=5$，$y=2$ 时，它的值为 7；当 $x=8$，$y=5$ 时，它的值为 4，则 $a=$_____，$b=$_____.

8. 对于实数 x，y，定义新运算：$x*y=ax+by-1$，其中 a，b 是常数. 已知 $1*2=8$，$(-3)*3=-1$，则 $4*(-5)=$_____.

9. 若方程组 $\begin{cases}x+y=8m,\\ x-y=2m\end{cases}$ 的解满足 $2x-5y=-1$，则 $m=$_____.

10. 用适当的方法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=0,\\ 3x+4y=6;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y+1}{3}=1,\\ 3x+2y=10.\end{cases}$

11. 若方程组 $\begin{cases}4x-y=5,\\ ax+by=-1\end{cases}$ 与 $\begin{cases}3x+y=9,\\ 3ax-4by=18\end{cases}$ 有公共解，求 a，b 的值.　【导学号：7207895】

12. 已知非零实数 x，y，z 满足方程组 $\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 7x+4y-5z=0,\end{cases}$ 求 $x:y:z$.

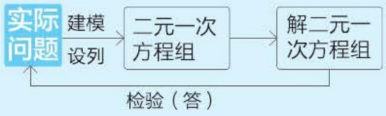
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.3 实际问题与二元一次方程组

核心知识

- 列方程组解决实际问题的步骤
- 几种常见的应用类型
- 利用二元一次方程组进行方案设计

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 列二元一次方程组解应用题的基本步骤

1. 基本思想方法：

（1）列方程组解应用题是把“未知”转化成“已知”的过程；它的关键是把未知量与已知量联系起来，找出题目中的等量关系列方程组.

（2）一般情况下，有几个未知量就必须列出几个方程，所列方程必须满足：①方程两边表示的是同类量；②同类量的单位要统一；③方程两边的数值要相等.

2. 列二元一次方程组解应用题的一般步骤：

审→设→找→列→解→答

（1）**审**：通过审题，把实际问题抽象成数学问题；

（2）**设**：分析已知量和未知量，并用字母表示其中的两个未知量（设元）；

（3）**找**：找出能表示题意的两个相等关系；

（4）**列**：根据相等关系列出方程组；

（5）**解**：解这个方程组，求出未知数的值；

（6）**答**：检验所求解是否符合实际意义，写出答案.

提分·必记

特别解读

1. 一般设几个未知数就列几个方程；
2. 设未知数和写答案时，都要写清单位名称.

拨考向 利用列二元一次方程组解应用题的基本步骤解应用题

例 1 某船的载质量为 300 吨，容积为 1 200 立方米，现有甲、乙两种货物要运，其中甲种货物每吨体积为 6 立方米，乙种货物每吨体积为 2 立方米，要充分利用这艘船的载质量和容积，甲、乙两种货物应各装多少吨？

解题秘方：分析题目中已知量和未知量，找准题目中的等量关系，列出方程组解决问题.

已知量：（1）甲种货物每吨体积为 6 立方米；（2）乙种货物每吨体积为 2 立方米；（3）船的载质量为 300 吨；（4）船的容积为 1 200 立方米.

提分·秘诀

解法提醒

- 列方程组解应用题的关键是准确地找出题中的等量关系，正确地列出方程组.
- 找等量关系的方法：
  (1) 抓住题目中的关键词，常见的关键词有：“比”“是”“等于”等；
  (2) 根据常见的数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

未知量：甲、乙两种货物应装的质量各为多少吨．若以 x，y 表示它们的吨数，则甲种货物的体积为 $6x$ 立方米，乙种货物的体积为 $2y$ 立方米．

相等关系："要充分利用这艘船的载质量和容积"的意思是"货物的总质量等于船的载质量"且"货物的总体积等于船的容积"，即：

$$\underset{\downarrow\ x}{\text{甲种货物质量}}+\underset{\downarrow\ y}{\text{乙种货物质量}}=\underset{\downarrow\ 300}{\text{船的载质量}};$$

$$\underset{\downarrow\ 6x}{\text{甲种货物的体积}}+\underset{\downarrow\ 2y}{\text{乙种货物的体积}}=\underset{\downarrow\ 1\,200}{\text{船的容积}}.$$

解：设甲种货物应装 x 吨，乙种货物应装 y 吨．

由题意，得$\begin{cases}x+y=300,\\6x+2y=1\,200,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=150,\\y=150.\end{cases}$

答：甲、乙两种货物应各装 150 吨．

量关系，如体积公式、面积公式等，找等量关系；

(3) 挖掘题目中的隐含条件，如飞机沿同一航线航行，顺风航行与逆风航行的路程相等；

(4) 借助列表格、画线段示意图等方法找等量关系．

知识▸ 2 列方程组解应用题的常见题型

根据在实际问题中等量关系的不同类型，归纳出应用题几种常见题型：

（1）和、差、倍、分问题；

（2）数字问题；

（3）配套问题；

（4）销售问题；

（5）行程问题；

（6）百分比问题；

（7）古代算术问题．

提分·必记

特别提醒

- 不同类型的问题中都有各自的代表性词语，如配套问题中的"配套"，利润问题中的"售价""标价""折扣"等等．
- 不同类型的问题中都有不同的等量关系．

考向▸ 常见类型应用题的解法

类型 1：和、差、倍、分问题

例 2 某中学七年级甲、乙两班共有 93 人，其中参加数学课外兴趣小组的共有 27 人，已知甲班有 $\frac{1}{4}$ 的学生、乙班有 $\frac{1}{3}$ 的学生参加数学课外兴趣小组，求这两个班各有多少人．

解题秘方：紧扣人数之间的数量关系，关键是和、差、倍、分关系，建立已知量与未知量的等量关系．

解：设甲班有 x 人，乙班有 y 人，根据题意，得$\begin{cases}x+y=93,\\\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=27,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=48,\\y=45.\end{cases}$

答：甲班有 48 人，乙班有 45 人．

提分·秘诀

方法点拨

设未知数时，一般是求什么，设什么，并且所列方程的个数与未知数的个数相等．

解和、差、倍、分问题的应用题，要抓住题中反映数量关系的关键字：和、差、倍、几分之几、比、大、小、多、少、增加、减少等，明确各种反映数量关系的关键字的含义．

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

类型 2：数字问题

例 3 有一个三位数，现将最左边的数字移到最右边，则比原来的数小 45；又知原百位数字的 9 倍比原三位数去掉百位数字后的两位数小 3，求原三位数．

解题秘方：设出数位上的数字，利用数位上的数字表示出数，根据题目中的数量关系列出方程组．

解：设原百位数字为 x，原三位数去掉百位数字后的两位数为 y，

由题意得$\begin{cases}9x=y-3,\\10y+x=100x+y-45,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\y=39.\end{cases}$ 则 $4\times100+39=439$.

答：原三位数为 439.

技巧点拨：利用方程组解决数字问题时，一般不直接设这个数，而是设这个数的数位上的数字，再根据数的表示方法表示出这个数．

类型 3：配套问题

例 4 某服装厂生产一批某种款式的秋装，已知每 2 m 的某种布料可做衣身 3 个或衣袖 5 只，现计划用 132 m 这种布料生产这批秋装（不考虑布料的损耗），应分别用多少布料才能使做的衣身和衣袖恰好配套？

解题秘方：紧扣配套规则列方程，如本题衣身与衣袖（恰好配套）的比是 1 ∶ 2.

解：设用 x m 布料做衣身，用 y m 布料做衣袖才能使做的衣身和衣袖恰好配套．

根据题意，得$\begin{cases}x+y=132,\\\dfrac{3}{2}x\times2=\dfrac{5}{2}y,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=60,\\y=72.\end{cases}$

答：用 60 m 布料做衣身，用 72 m 布料做衣袖才能使做的衣身和衣袖恰好配套．

类型 4：销售问题

例 5 某商场购进甲、乙两种商品后，甲商品加价 50%、乙商品加价 40% 作为标价，适逢元旦，商场举办促销活动，甲商品打八折销售，乙商品打八五折销售．某顾客购买甲、乙商品各 1 件，共付款 538 元，已知商场共盈利 88 元，求甲、乙两种商品的进价各是多少元．

解题秘方：紧扣利润问题中，每个量的意义及各个量之间的数量关系列出方程组，解决问题．

解：设甲商品的进价为 x 元，乙商品的进价为 y 元，根据题意，得

$\begin{cases}x+y+88=538,\\(1+50\%)x\times80\%+(1+40\%)y\times85\%=538.\end{cases}$

化简，得$\begin{cases}x+y=450,\\1.2x+1.19y=538.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=250,\\y=200.\end{cases}$

答：甲商品的进价为 250 元，乙商品的进价为 200 元．

解法提醒

- 解决这类题的关键在于正确地用式子表示一个多位数：如一个三位数，当它的百位数字为 a，十位数字为 b，个位数字为 c 时，这个三位数可表示为 $100a+10b+c$.
- 在数字问题中，应注意：(1) 数字与数的区别，即怎样用数字表示数；(2) 根据数字的特点，求得的解应是小于 10 的非负整数（最高位上的数字不能为 0）.

技巧点拨

解决配套问题的技巧：制作的工件由若干种零件组成，如果 a 件甲产品和 b 件乙产品配成一套，那么甲产品的件数：乙产品的件数 = a ∶ b，即 b× 甲产品的件数 = a× 乙产品的件数．

方法点拨

销售问题中进价、利润率、利润、售价、标价、折扣等之间的关系：

利润 = 售价 − 进价，

售价 = 标价 × 折扣，

售价 = 进价 + 利润，

利润率 $=\dfrac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 5：行程问题

1. 相遇（追及）问题

例 6 张明沿公路匀速前进，每隔 4 min 就迎面开来一辆公共汽车，每隔 6 min 就有一辆公共汽车从背后超过他．假定公共汽车的速度不变，而且迎面开来的相邻两车的距离和从背后开来的相邻两车的距离都是 1 200 m，求张明前进的速度和公共汽车的速度．

解题秘方：分析相遇或追及问题中两者运动的路程与相隔路程之间的关系，列出方程组，解决问题．

解：设张明前进的速度是 x m/min，公共汽车的速度是 y m/min．

根据题意，得$\begin{cases}4x+4y=1\,200,\\6y-6x=1\,200.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=50,\\y=250.\end{cases}$

答：张明前进的速度是 50 m/min，公共汽车的速度是 250 m/min．

2. 上、下坡问题

例 7 某人骑自行车从 A 地出发去 B 地，先以每小时 12 km 的速度下坡，再以每小时 9 km 的速度在平路上行驶至 B 地，共用 55 min；回来时他以每小时 8 km 的速度通过平路后，再以每小时 4 km 的速度上坡至 A 地，共用 1.5 h．求 A，B 两地之间的路程．

解题秘方：解决有上、下坡路程的往返问题时，虽然每段路程不变，但速度发生了改变．根据时间总量列出方程组解决问题．

解：设从 A 地到 B 地的下坡路程为 x km，平路路程为 y km．

由题意，得$\begin{cases}\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{9}=\dfrac{55}{60},\\\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{8}=1.5.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\y=6.\end{cases}$



用方程组解实际问题

$x+y=3+6=9$．

答：A，B 两地之间的路程为 9 km．

3. 航行问题

例 8 A，B 两码头相距 140 km，一艘轮船在其间航行，顺水航行用了 7 h，逆水航行用了 10 h，求这艘轮船在静水中的速度和水流速度．

解题秘方：本题关键是找到各速度之间的关系：顺速 = 静速 + 水速，逆速 = 静速 − 水速，再结合公式“路程 = 速度 × 时间”列方程组求解．

解：设这艘轮船在静水中的速度为 x km/h，水流速度为 y km/h．

由题意，得$\begin{cases}7(x+y)=140,\\10(x-y)=140.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=17,\\y=3.\end{cases}$

答：这艘轮船在静水中的速度为 17 km/h，水流速度为 3 km/h．

方法点拨

1. “**相向而遇**”时，两者所走的路程之和等于他们原来的距离；
2. “**同向追及**”时，快者所走的路程减去慢者所走的路程等于他们原来的距离．

特别提醒

解本题关键是弄清从A地到B地的下坡路程，在从B地到A地时变为上坡路程，从时间为等量关系建立方程组．

解法提醒

列表描述等量关系：

设这艘轮船在静水中的速度为 x km/h，水流速度为 y km/h，列表如下：

	路程	速度	时间
顺流	140 km	$(x+y)$ km/h	7 h
逆流	140 km	$(x-y)$ km/h	10 h

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 行车问题

例 9 一列载客火车和一列运货火车分别在两条平行的铁轨上行驶，载客火车长 150 m，运货火车长 250 m. 若两车相向而行，从车头相遇到车尾离开共需 10 s；若载客火车从后面追赶运货火车，从车头追上运货火车到车尾完全超过运货火车共需 100 s，试求两车速度.

解题秘方：这是一道特殊的相遇与追及结合的混合应用题.

①两车相向而行是相遇问题，两车所行的路程总和 = 两车车长之和；

②载客火车从后面追赶运货火车是追及问题，追及时两车所行的路程差 = 两车车长之和.

解：设载客火车的速度为 x m/s，运货火车的速度为 y m/s.

由题意，得$\begin{cases}10x+10y=150+250,\\100x-100y=150+250,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=22,\\y=18.\end{cases}$

答：载客火车的速度是 22 m/s，运货火车的速度是 18 m/s.

技巧点拨

行车问题属于特殊的行程问题，它与行程问题的主要区别是：行程问题不考虑车本身的长，而行车问题要考虑车本身的长；与行车问题类似的还有过桥问题、过隧道问题等.

类型 6：百分比问题

例 10 在当地农业技术部门的指导下，李明家增加种植菠萝的投资，使今年的菠萝喜获丰收. 如图 8.3-1 是李明和他的爸爸、妈妈的一段对话.



图 8.3-1

请你用所学过的知识帮助李明算出他家今年菠萝的收入.（收入 − 投资 = 净赚）

解题秘方：紧扣今年与去年的收入和投资之间的数量关系解题，其中增长率揭示了这个数量关系.

解：设李明家去年种植菠萝的收入为 x 元，投资为 y 元.

由题意，得$\begin{cases}x-y=8\,000,\\(1+35\%)x-(1+10\%)y=11\,800.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=12\,000,\\y=4\,000.\end{cases}$

所以 $(1+35\%)x=1.35\times 12\,000=16\,200.$

答：李明家今年菠萝的收入为 16 200 元.

方法点拨

在此类等量关系比较复杂的题目中，仅靠想象寻找等量关系或列方程组时，难免会出现顾此失彼的错误，如果能借助于表格分析，将会帮助我们理清解题思路，列出比较方便于解题的方程组.

	投资 / 元	收入 / 元	净赚 / 元
去年	y	x	8 000
今年	$(1+10\%)y$	$(1+35\%)x$	11 800

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 7：古算问题

例 11 列方程组解古算题：

“巍巍古寺在山林，不知寺内几多僧．

三百六十四只碗，看看用尽不差争．

三人共食一碗饭，四人共吃一碗羹．

请问先生明算者，算来寺内几多僧？”

解题秘方：先将古算题用通俗的文字叙述，然后再找等量关系，列方程组解决问题．此题如果直接将僧人的人数设为 x，那么求解较复杂，因此需采用间接设元法．

解：设饭碗有 x 只，汤碗有 y 只．

由题意，得$\begin{cases} x+y=364, \\ 3x=4y. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=208, \\ y=156. \end{cases}$

则僧人的人数为 $3\times 208=624$.

答：寺庙内共有 624 位僧人．

译题

题目大意是一座寺庙内不知有多少僧人，但饭碗和汤碗共有 364 只．如果 3 人共用一只饭碗吃饭，4 人共用一只汤碗喝汤，正好用完所有的碗．问：寺庙内共有多少僧人？

思路点拨

解古算题时，弄懂题意是关键，要先用通俗的文字把题目叙述出来，然后找出题中的相等关系，列出方程组求解．

类型 8：图形面积问题

例 12 小敏做拼图游戏时发现：8 个一样大小的小长方形恰好可以拼成一个大的长方形，如图 8.3-2 所示．小颖看见了，也来试一试，结果拼成了如图 8.3-2 所示的正方形，不过中间留下一个空白，恰好是一个边长为 2cm 的小正方形，你能算出每个小长方形的长和宽各是多少吗？

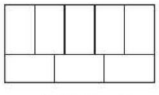


图 8.3-2

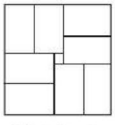


图 8.3-3

解题秘方：根据拼图方式求出小长方形的长和宽之间的数量关系．

解：设小长方形的长为 x cm，宽为 y cm.

依题意得$\begin{cases} 3x=5y, & ① \\ 2x+2=x+2y. & ② \end{cases}$ 整理得$\begin{cases} 3x-5y=0, & ③ \\ x-2y=-2. & ④ \end{cases}$

③ − ④ × 3 得 $y=6$，将 $y=6$ 代入④得 $x=10$.

因此，这个方程组的解是$\begin{cases} x=10, \\ y=6. \end{cases}$

答：每个小长方形的长为 10 cm，宽为 6 cm.

思路点拨

在图 8.3-2 中大长方形的长有两种表示形式，一种是 5 个小长方形的宽的和，另一种是 3 个小长方形的长的和．

在图 8.3-3 中大正方形的边长也有两种表示形式，一种是 1 个小长方形的长和 2 个小长方形的宽的和，另一种从中间看为 2 个小长方形的长和小正方形的边长的和，由此可设未知数列出方程组求解．

知识点 3 建立二元一次方程组的模型对实际问题进行判断或方案设计

建立二元一次方程组的模型就是为了解决实际问题．对某个问题要进行判断或设计方案时，关键之处在于：

（1）要分析解决此问题时需要解决哪几个未知量，然后根据需要设未知数；

（2）方程组的解是否符合实际问题的限制条件．

提分·必记

特别提醒

设计方案问题应从不同角度去考虑，先考虑多种可能的方案，最后根据结果合理地选择方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用二元一次方程组进行判断或方案设计

类型1：利用二元一次方程组的解下结论

例13 [中考·遂宁]我市某超市举行店庆活动，对甲、乙两种商品实行打折销售．打折前，购买3件甲商品和1件乙商品需要190元；购买2件甲商品和3件乙商品需要220元．而店庆期间，购买10件甲商品和10件乙商品仅需735元，这比打折前少花多少钱？

解题秘方：分析解决问题的关键点是求甲、乙两商品的单价，采取间接设未知数解决问题．

解：设甲商品的单价为x元，乙商品的单价为y元，由题意得：

$$\begin{cases}3x+y=190,\\2x+3y=220,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=50,\\y=40,\end{cases}$$

则购买10件甲商品和10件乙商品需要$10\times(50+40)=900$（元）．

因为打折后实际花费735元，

所以这比打折前少花$900-735=165$（元）．

类型2：利用二元一次方程组进行方案设计

例14 某地生产一种绿色蔬菜，若在市场上直接销售，每吨利润为1 000元；经粗加工后销售，每吨利润可达4 500元；经精加工后销售，每吨利润涨至7 500元．当地一家公司收获这种蔬菜140吨，该公司的加工生产能力是：如果对蔬菜进行粗加工，每天可加工16吨；如果进行精加工，每天可加工6吨，但两种加工方式不能同时进行，受季节条件的限制，公司必须在15天之内将这批蔬菜全部销售或加工完毕，为此公司制定了三种加工方案：

方案一：将蔬菜全部进行粗加工；

方案二：尽可能多地对蔬菜进行精加工，并将没有来得及加工的蔬菜在市场上全部销售；

方案三：将部分蔬菜进行精加工，其余蔬菜进行粗加工，并恰好在15天内完成．

你认为哪种方案获利最多？为什么？

解题秘方：分别求出三种方案的利润，进行比较选择，求利润时，找出与利润相关的未知量去设未知数．

解：（方案一）只对蔬菜进行粗加工，易知15天内能全部加工完，获利为$4\,500\times140=630\,000$（元）．

（方案二）尽可能多地对蔬菜进行精加工，即精加工的质量为$6\times15=90$（吨）．

获利为$7\,500\times90+1\,000\times(140-90)=725\,000$（元）．

（方案三）设将x吨蔬菜进行精加工，y吨蔬菜进行粗加工．

提分·秘诀

方法点拨

对某个实际问题进行判断时，先分析解决问题的关键点，即需要设出的未知数有哪两个，然后根据题目中给出的等量关系列出二元一次方程组．

解法提醒

解决优化方案问题，首先要列举出所有可能的方案，再按题中的要求分别求出每种方案的具体结果，从中选择最优方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由题意，得$\begin{cases}x+y=140,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{16}=15.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=60,\\ y=80.\end{cases}$

所以获利为 $7\,500\times60+4\,500\times80=810\,000$（元）.

因为 $630\,000<725\,000<810\,000$，

所以方案三获利最多.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用阅读图文信息法解二元一次方程组应用问题

挑战·高分

例 15 教师节来临之际，群群所在的班级准备向每位辛勤工作的老师献一束鲜花，每束由 4 枝鲜花包装而成，如图 8.3-4. 其中有象征母爱的康乃馨和象征尊敬的水仙花，同一种鲜花每枝的价格相同. 请你根据第一、二束鲜花提供的信息，求出第三束鲜花的价格.



第一束共计19元　第二束共计18元　第三束

图 8.3-4

解法提醒

这是一道图文信息题，解决这类问题时，先读懂题意，从图中获取有用的信息，再对这些信息进行加工处理，并联系相关的数学知识找出相等关系，从而实现信息的转换，顺利地解决问题.

解题秘方：图文中的信息揭示了等量关系，利用此等量关系列二元一次方程组解决问题.

解：设 1 枝康乃馨的价格为 x 元，1 枝水仙花的价格为 y 元.

由题意，得$\begin{cases}3x+y=19,\\ 2x+2y=18.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\ y=4.\end{cases}$

故第三束鲜花的价格为 $x+3y=5+3\times4=17$（元）.

答：第三束鲜花的价格是 17 元.

拔尖角度 2 利用分段法解二元一次方程组应用问题

挑战·高分

例 16 [中考·娄底]假如娄底市的出租车是这样收费的：起步价所包含的路程为 0 ~ 1.5 千米，超过 1.5 千米的部分按每千米另收费.

小刘说："我乘出租车从市政府到娄底汽车站走了 4.5 千米，付车费 10.5 元."

小李说："我乘出租车从市政府到娄底火车站走了 6.5 千米，付车费 14.5 元."

问：（1）出租车的起步价是多少元？超过 1.5 千米后每千米收费多少元？

（2）小张乘出租车从市政府到娄底南站（高铁站）走了 5.5 千米，应付车费多少元？

方法点拨

分段收费在现实生活中应用相当广泛，出租车收费、电费、水费、通讯收费等都是分段收费，这类问题最易出错的地方就是超出部分收费的计算方式，**超出部分应等于全部减去基本部分**.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解题秘方：分段收费中每段的收费方式不同，根据里程确定收费方式，再根据车费列出方程组.

解：（1）设出租车的起步价是 x 元，超过 1.5 千米后每千米收费 y 元，

则$\begin{cases}x+(4.5-1.5)y=10.5,\\x+(6.5-1.5)y=14.5.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4.5,\\y=2.\end{cases}$

答：出租车的起步价是 4.5 元，超过 1.5 千米后每千米收费 2 元.

（2）$4.5+(5.5-1.5)\times 2=12.5$（元）.

答：应付车费 12.5 元.

拔尖角度▸ 3 利用分类法解二元一次方程组应用问题

挑战·高分

例 17 某水果批发市场香蕉的价格如下表：

购买香蕉质量	不超过 20 kg	20 kg 以上但不超过 40 kg	40 kg 以上
单价/（元/kg）	6	5	4

张强两次购买香蕉 50 kg，一共付款 264 元，如果第二次购买的质量多于第一次购买的质量，请问张强每次分别购买香蕉多少千克?

特别提醒

利用分类讨论思想解决问题时，要注意为什么要分类，如本题第一次购买香蕉的质量有两种情况，所以要分类，对于分类的不同情况，列出的方程组也不一样.

解题秘方：因为购买香蕉的质量不同，其单价可能不同，所以要根据购买质量分类讨论.

解：设张强第一次购买香蕉 x kg，第二次购买香蕉 y kg，则 $0<x<25$.

当 $0<x\leqslant 20$ 且 $20<y\leqslant 40$ 时，

根据题意，得$\begin{cases}x+y=50,\\6x+5y=264,\end{cases}$ 解这个方程组，得$\begin{cases}x=14,\\y=36.\end{cases}$

当 $0<x\leqslant 20$ 且 $y>40$ 时，

根据题意，得$\begin{cases}x+y=50,\\6x+4y=264,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=32,\\y=18.\end{cases}$（舍去）

当 $20<x<25$ 且 $20<y\leqslant 40$ 时，

根据题意，得$\begin{cases}x+y=50,\\5x+5y=264,\end{cases}$ 此方程组无解.

当 $20<x<25$ 且 $y>40$ 时，$x+y>50$，不合题意，舍去.

所以张强第一次购买香蕉 14 kg，第二次购买香蕉 36 kg.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘 二元一次方程组的实际应用题是中考考查的热点，常出现在选择题和解答题中，选择题中一般以列方程组为主，解答题考查较多的是行程问题和商品利润问题，难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 列二元一次方程组解决商品销售问题

例 18 [中考·长沙]随着中国传统节日“端午节”的临近，东方红商场决定开展“欢度端午，回馈顾客”的让利促销活动，对部分品牌粽子进行打折销售，其中甲品牌粽子打八折，乙品牌粽子打七五折. 已知打折前，买 6 盒甲品牌粽子和 3 盒乙品牌粽子需 600 元；打折后，买 50 盒甲品牌粽子和 40 盒乙品牌粽子需 5 200 元.

（1）打折前甲、乙两种品牌粽子每盒分别为多少元？

（2）阳光敬老院需购买甲品牌粽子 80 盒，乙品牌粽子 100 盒，问打折后购买这批粽子比不打折节省了多少钱？

试题评析：本题考查利用二元一次方程组解决商品销售问题，解题的关键是扣住销售问题中常见量之间的关系.

解：（1）设打折前甲品牌粽子每盒 x 元，乙品牌粽子每盒 y 元，根据题意得 $\begin{cases}6x+3y=600,\\50\times0.8x+40\times0.75y=5\,200,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40,\\y=120.\end{cases}$

答：打折前甲品牌粽子每盒 40 元，乙品牌粽子每盒 120 元.

（2）$80\times40+100\times120-(80\times0.8\times40+100\times0.75\times120)=3\,640$（元）.

答：打折后购买这批粽子比不打折节省了 3 640 元.

考法 2 列二元一次方程组解决工程问题

例 19 [中考·聊城改编]建设中的大外环路是我市的一项重点民生工程. 某工程公司承建的一段路基工程的施工土方量为 120 万立方，原计划由公司的甲、乙两个工程队从公路的两端同时相向施工 150 天完成. 由于特殊情况需要，公司抽调甲队外援施工. 由乙队先单独施工 40 天后甲队返回，两队又共同施工了 110 天，这时甲乙两队共完成土方量 103.2 万立方. 问甲、乙两队原计划平均每天的施工土方量分别为多少万立方？

试题评析：本题考查利用二元一次方程组解决工程问题，解题的关键是扣住工程问题中常见量之间的关系.

解：设甲队原计划平均每天的施工土方量为 x 万立方. 乙队原计划平均每天的施工土方量为 y 万立方. 根据题意得

$\begin{cases}150(x+y)=120,\\40y+110(x+y)=103.2,\end{cases}$

解方程组，得 $\begin{cases}x=0.42,\\y=0.38.\end{cases}$

答：甲、乙两队原计划平均每天的施工土方量分别为 0.42 万立方和 0.38 万立方.

冲刺·满分

考题剖析

1. “打八折”即原价的 80%，若设打折前价格为 m 元，则打折后的价格为 $80\%m$（或 $0.8m$）元；
2. 揭示两个等量关系：
   (1) 打折前：6 盒甲品牌粽子的价钱 +3 盒乙品牌粽子的价钱 =600 元；
   (2) 打折后：50 盒甲品牌粽子的价钱 +40 盒乙品牌粽子的价钱 =5 200 元.
3. 节省钱数 = 原价购买所需的钱数 − 打折后购买所需的钱数.

解法提醒

1. **工程问题中常见的等量关系：**
   （1）工作效率 × 工作时间 = 工作量.
   （2）工作效率之和 × 合作时间 = 合作工作量.
   （3）各部分的工作量之和 = 工作总量.
2. **本题等量关系剖析：**
   （1）甲、乙工作效率之和 ×150 天 =120 万立方.
   （2）乙工作效率 ×40 天 + 甲、乙工作效率之和 ×110 天 =103.2 万立方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见264页

1. 某个体商店在一次买卖中同时卖出两件上衣，每件都是以135元卖出，其中一件盈利25%，另一件亏损25%，则这家商店在这次买卖中（　　）

A. 不赔不赚　　B. 赚9元

C. 赔8元　　D. 赔18元

2. 甲、乙两地相距100 km，一艘轮船往返甲、乙两地，顺流用4 h，逆流用5 h，那么这艘轮船在静水中的航速与水速分别是（　　）

A.24 km/h，8 km/h　　B.22.5 km/h，2.5 km/h

C.18 km/h，24 km/h　　D.12.5 km/h，1.5 km/h

3. 甲、乙两个工程队各有员工80人、100人，现在从外部调90人充实两队，调配后甲队人数是乙队人数的$\frac{2}{3}$，则甲、乙两队分别分到的人数为（　　）

A.50，40　　B.36，54

C.28，62　　D.20，70

4. 足球比赛的计分规则为胜一场得3分，平一场得1分，负一场得0分. 如果一个队踢了14场比赛，负了5场，共得19分，那么这个队胜了_____场.

5. [中考·自贡]我国明代数学家程大位的名著《直指算法统宗》里有一道著名算题：“一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚各几丁？”意思是：有100个和尚分100个馒头，正好分完；如果大和尚1人分3个，小和尚3人分1个，试问大、小和尚各几人？设大、小和尚各有x、y人，则可列方程组为_____.

6. 一个三位数的各位数字之和等于14，个位数字与十位数字的和比百位数字大2，如果把百位数字与十位数字对调，所得新数比原数小270，则原三位数是_____.

7. 甲、乙二人加工同一种零件. 两个人1 h可以加工70个零件，甲做2 h、乙做3 h可以加工180个零件. 求甲、乙每小时各加工多少个零件.

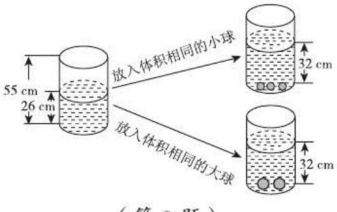
8. [中考·宿迁]某学校组织学生乘汽车去自然保护区野营，先以60 km/h的速度走平路，后又以30 km/h的速度爬坡，共用了6.5 h；原路返回时，汽车以40 km/h的速度下坡，又以50 km/h的速度走平路，共用了6 h. 问平路和坡路各有多远？

9. 根据图中给出的信息，解答下列问题：

（1）放入一个小球水面升高_____cm，放入一个大球水面升高_____cm；

（2）现放入大球、小球共10个，水面上升到了50 cm，那么放入大球、小球各多少个？

【导学号：7207895】



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 某种产品是由A种原料和B种原料混合而成的，其中A种原料每千克50元，B种原料每千克40元. 根据最新消息，这两种原料过几天要调价，A种原料价格上涨10%，B种原料价格下降15%，经过核算，产品的成本仍不变，因而产品不需调价. 已知这批产品共重11 000千克，问A种原料和B种原料各需多少千克?

11. [**中考 · 佛山**]某景点的门票价格如下表：

购票人数 / 人	1 ~ 50	51 ~ 100	100以上
每人门票价 / 元	12	10	8

某校七年级（1）、（2）两班计划去游览该景点，其中（1）班人数少于50人，（2）班人数多于50人且少于100人，如果两班都以班为单位单独购票，那么一共支付1 118元；如果两班联合起来作为一个团体购票，那么只需花费816元.

（1）两个班各有多少人?

（2）团体购票与单独购票相比较，两个班各节约了多少钱?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*8.4 三元一次方程组的解法

核心知识

- 三元一次方程组
- 三元一次方程组的解法
- 三元一次方程组的简单应用

知识链接

二元一次方程组 ← 解法：消元 — 三元一次方程组 → 应用 → 建立三元一次方程组的模型

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三元一次方程组

1. 三元一次方程：

含有三个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，像这样的方程叫做三元一次方程.

必备条件：（1）是整式方程；（2）含三个未知数；（3）是一次方程.

2. 三元一次方程组：

含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做三元一次方程组.

必备条件：（1）是整式方程；（2）含三个未知数；（3）三个方程；（4）都是一次方程.

提分·必记

特别警示

易误认为三元一次方程组中每个方程必须是三元一次方程，组成三元一次方程组中的某个方程，可以是一元一次方程，或二元一次方程，或三元一次方程. 实际上只需方程组中共有三个未知数即可.

拔考向 利用三元一次方程组的定义进行识别

例1 下列方程组中，是三元一次方程组的是（　　）

A. $\begin{cases} x^2-y=1 \\ y+z=0 \\ xz=2 \end{cases}$　B. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=1 \\ \dfrac{1}{y}+z=2 \\ \dfrac{1}{z}+x=6 \end{cases}$　C. $\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a-c=2 \\ b-d=3 \end{cases}$　D. $\begin{cases} m+n=18 \\ n+t=12 \\ t+m=0 \end{cases}$

解题秘方：紧扣三元一次方程组的必备条件进行识别.

解：A选项中，方程 $x^2-y=1$ 与 $xz=2$ 中有含未知数的项的次数为2的，不符合三元一次方程组的定义，故A选项不是；

B选项中，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{z}$ 不是整式，故B选项不是；

C选项中，方程组含有四个未知数，故C选项不是；

D选项符合三元一次方程组的定义.

答案：D

提分·秘诀

方法点拨

识别三元一次方程组时，先看组成方程组的三个方程是不是整式方程，再看方程组是否含有三个未知数，最后看含未知数的项的次数是否都是1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 解三元一次方程组

1. 解三元一次方程组的基本思路：

通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程，用简图表示为

三元一次方程组 —消元→ 二元一次方程组 —消元→ 一元一次方程

2. 求解方法： 加减消元法和代入消元法.

3. 解三元一次方程组的一般步骤：

（1）**消元**：利用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，得到关于另外两个未知数的二元一次方程组；

（2）**求解**：解这个二元一次方程组，求出两个未知数的值；

（3）**回代**：将求得的两个未知数的值代入原方程组中的一个系数比较简单的方程，得到一个一元一次方程；

（4）**求解**：解这个一元一次方程，求出最后一个未知数的值；

（5）**写解**：将求得的三个未知数的值用符号“{”合写在一起.

提分·必记

特别解读

解三元一次方程组时，消去哪个“元”都是可以的，得到的结果都一样，我们应该根据方程组中各方程的特点选择最为简便的解法，灵活地确定消元步骤和消元方法，不要盲目消元.

技考向▶ 利用解三元一次方程组的方法步骤解三元一次方程组

例 2 解方程组：

（1）$\begin{cases} x+3y+2z=2, & ① \\ 3x+2y-4z=3, & ② \\ 2x-y=7; & ③ \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 2x+3y+z=6, & ① \\ x-y+2z=-1, & ② \\ x+2y-z=5. & ③ \end{cases}$

解题秘方：（1）方程 $2x-y=7$ 是二元一次方程，可以将另外两个方程结合起来消去 z，再和 $2x-y=7$ 联立方程组求解；（2）三个方程中，x 和 z 的系数的绝对值的最小公倍数都是 2，y 的系数的绝对值的最小公倍数是 6，可以消去 x 或 z，再联立方程组求解.

解：（1）① ×2+ ②，得 $5x+8y=7$. ④

③与④组成二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-y=7, \\ 5x+8y=7. \end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

把 $x=3$，$y=-1$ 代入①，得 $3+3\times(-1)+2z=2$，所以 $z=1$.

所以这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$

（2）① + ③，得 $3x+5y=11$；④

③ ×2+ ②，得 $3x+3y=9$，即 $x+y=3$. ⑤

④与⑤组成二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ x+y=3. \end{cases}$

提分·秘诀

另解

由③得 $y=2x-7$. ④

把④代入①，得 $7x+2z=23$；⑤

把④代入②，得 $7x-4z=17$. ⑥

⑤与⑥组成二元一次方程组 $\begin{cases} 7x+2z=23, \\ 7x-4z=17. \end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3, \\ z=1. \end{cases}$

把 $x=3$ 代入④，得 $y=-1$.

所以这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解这个方程组，得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

把$x=2$，$y=1$代入③，得$2+2-z=5$，所以$z=-1$.

所以这个三元一次方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1.\end{cases}$

另解

①－②×2，得$5y-3z=8$；④

①－③×2，得$-y+3z=-4$；⑤

④与⑤组成二元一次方程组得$\begin{cases}5y-3z=8,\\-y+3z=-4.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}y=1,\\z=-1.\end{cases}$

把$y=1$，$z=-1$代入③，得$x+2+1=5$，所以$x=2$.

所以这个三元一次方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1.\end{cases}$

技巧点拨：解三元一次方程组的技巧

（1）当方程组中有一个方程是二元一次方程时，先将另外两个方程结合起来，消去已有二元一次方程中没有的未知数，得到一个新的二元一次方程，再与原有的二元一次方程联立成二元一次方程组求解.

（2）当方程组中的方程都是三元一次方程时，选择首次消去的未知数的方法如下：①若方程组中有一个方程的某个未知数的系数是1或-1，则可选择消去此未知数；②若三个方程中同一未知数的系数相等或互为相反数，则可选择消去此未知数；③若三个方程中同一未知数的系数的绝对值成整数倍关系，则可选择消去此未知数.

点知识▸3 列三元一次方程组解决问题

列三元一次方程组解决实际问题的步骤：

（1）弄清题意和题目中的数量关系，用三个未知数表示题目中的数量关系；

（2）找出能够表达应用题全部含义的三个相等关系；

（3）根据相等关系列出方程，建立方程组；

（4）解出方程组求出未知数的值；

（5）写出答案，包括单位名称.

提分·必记

特别解读

- 一般来说，设几个未知数，就应列出几个方程并组成方程组；
- “设”“答”两步都要写清单位名称，应该注意单位是否统一.

拔考向▸利用三元一次方程组解决问题

类型1：利用三元一次方程组解决整式值的问题

例3 在等式$y=ax^2+bx+c$中，当$x=-1$时，$y=2$；当$x=2$时，$y=8$；当$x=5$时，$y=158$，求a，b，c的值.

解题秘方：将三对对应值分别代入等式中，建立以a，b，c为未知数的三元一次方程组.

提分·秘诀

详解

$\begin{cases}2=a\times(-1)^2+b\times(-1)+c\\8=a\times2^2+b\times2+c\\158=a\times5^2+b\times5+c\end{cases}$

解：根据题意，得$\begin{cases}a-b+c=2, & ①\\4a+2b+c=8, & ②\\25a+5b+c=158. & ③\end{cases}$

②－①，得$3a+3b=6$，即$a+b=2$. ④

③－①，得$24a+6b=156$，即$4a+b=26$. ⑤

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

④与⑤组成二元一次方程组$\begin{cases}a+b=2,\\4a+b=26,\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}a=8,\\b=-6.\end{cases}$

把$a=8$，$b=-6$代入①，

得$8-(-6)+c=2$，所以$c=-12$.

因此$\begin{cases}a=8,\\b=-6,\\c=-12,\end{cases}$即$a$，$b$，$c$的值分别为8，$-6$，$-12$.

方法点拨

对于一个含待定系数的式子，**有几个待定的系数，就必须有几对对应值，列出几个方程**，组成一个方程组，求出待定系数的值.

类型2：利用三元一次方程组解决实际问题

例4 某汽车在相距70 km的甲、乙两地往返行驶，行驶中有一坡度均匀的小山.该汽车从甲地到乙地需要2.5 h，从乙地到甲地需要2.3 h.假设该汽车在平路、上坡路、下坡路的行驶过程中时速分别是30 km，20 km，40 km，则从甲地到乙地的过程中，上坡路、平路、下坡路的长度各是多少？

解题秘方：题中有三个等量关系：①上坡路长度＋平路长度＋下坡路长度＝70 km；②从甲地到乙地的过程中，上坡时间＋平路时间＋下坡时间＝2.5 h；③从乙地到甲地的过程中，上坡时间＋平路时间＋下坡时间＝2.3 h.

解：设从甲地到乙地的过程中，上坡路、平路、下坡路的长度分别是x km，y km，z km.

由题意得$\begin{cases}x+y+z=70,\\\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{40}=2.5,\\\dfrac{z}{20}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{x}{40}=2.3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=12,\\y=54,\\z=4.\end{cases}$

答：从甲地到乙地的过程中，上坡路的长度是12 km，平路的长度是54 km，下坡路的长度是4 km.

详解

整理得

$\begin{cases}x+y+z=70,①\\6x+4y+3z=300,②\\3x+4y+6z=276,③\end{cases}$

②－①×4得

$2x-z=20$，④

②－③得

$x-z=8$，⑤

④⑤联立得方程组$\begin{cases}2x-z=20,\\x-z=8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\z=4.\end{cases}$

将$x=12$，$z=4$代入①得

$y=54$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=12,\\y=54,\\z=4.\end{cases}$

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用特殊方法解三元一次方程组

挑战·高分

类型1：轮换系数型三元一次方程组的解法（整体代入法）

例5 解方程组：$\begin{cases}x+y=1,①\\y+z=6,②\\z+x=3.③\end{cases}$

解题秘方：方程组的各个方程中所含未知数的个数相等，且未知数的系数都是1，如果将三个方程相加，那么可得$x+y+z=5$，用$x+y+z=5$分别减去每个方程，可以得到方程组的解.

技巧点拨

此题运用整体代入法得到方程组的解，这是一种比较简单的求解轮换系数型三元一次方程组的方法.实际上此题也可以先用方程①②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：①＋②＋③，得 $2(x+y+z)=10$，即 $x+y+z=5$. ④

由④－①，得 $z=4$. 由④－②，得 $x=-1$.

由④－③，得 $y=2$.

所以这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\\z=4.\end{cases}$

消去 y，再把所得到的方程和③组成二元一次方程组求解.

类型 2：连等型三元一次方程组的解法（参数法）

例 6 解方程组：$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5},\ ①\\x-2y+3z=22.\ ②\end{cases}$

技巧点拨

此题运用参数法，先将连等方程中的未知数用参数表示，再求解. 当方程中含有连等式或比时，通常采用设参数的方法达到消元的目的.

解题秘方：因为方程①是连等形式，所以可以根据其特点令其等于一个常数 k，直接将三元转化为一元求解.

解：设 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}=k$，所以 $x=2k$，$y=3k$，$z=5k$.

把它们代入方程②，整理，得 $11k=22$，解得 $k=2$.

所以 $x=4$，$y=6$，$z=10$.

故这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=6,\\z=10.\end{cases}$

拔尖角度▸ 2 利用三元一次方程组解决在非负数中的求值问题

挑战·高分

例 7 若 $|x-3y+5|+|3x+y-5|+(x+y-3z)^2=0$，求 x，y，z 的值.

方法点拨

当几个非负数的和为 0 时，则每一个非负数都为 0，这为建立方程组提供了等量关系.

解题秘方：根据“如果几个非负数之和为零，那么这几个非负数都为零”可得到一个三元一次方程组，解方程组即可求得 x，y，z 的值.

解：由题意，得 $\begin{cases}x-3y+5=0,\\3x+y-5=0,\\x+y-3z=0.\end{cases}$

解这个三元一次方程组，得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=1.\end{cases}$

则 x，y，z 的值分别是 1，2，1.

拔尖角度▸ 3 利用三元一次方程组解实际生活中的求整数解问题

挑战·高分

例 8 在中国古算术《张丘建算经》（约公元 5 世纪）里，有一道著名的“百鸡问题”：今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一. 凡百钱买百鸡，问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何？（三种鸡都买）

译题

本题的大意是：公鸡 1 只值 5 钱，母鸡 1 只值 3 钱，3 只鸡雏值 1 钱，如果用 100 钱买 100 只鸡，公鸡、母鸡和鸡雏各买多少只？

解题秘方：待求的未知数有三个，而题目中的等量关系只有两个，即“百钱”与“百鸡”. 由于鸡的只数是正整数，因此本题可利用正整数的特点求方程组的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设鸡翁、鸡母、鸡雏分别买 x 只、y 只、z 只．根据题意，得

$$\begin{cases} x+y+z=100, & ① \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100. & ② \end{cases}$$

② $\times 3-$ ①，得 $14x+8y=200$，即 $7x+4y=100$，

故 $y=\dfrac{100-7x}{4}=25-\dfrac{7}{4}x$.

因为 x，y 均为正整数，所以 x 一定是 4 的倍数，且 x 是小于 $\dfrac{100}{7}$ 的正整数，所以 x 的取值只能为 4，8，12.

若 $x=4$，则 $y=18$，$z=78$；

若 $x=8$，则 $y=11$，$z=81$；

若 $x=12$，则 $y=4$，$z=84$.

所以方程组的正整数解为 $\begin{cases} x=4, \\ y=18, \\ z=78 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=8, \\ y=11, \\ z=81 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12, \\ y=4, \\ z=84. \end{cases}$

答：鸡翁为 4 只，鸡母为 18 只，鸡雏为 78 只或鸡翁为 8 只，鸡母为 11 只，鸡雏为 81 只或鸡翁为 12 只，鸡母为 4 只，鸡雏为 84 只．

技巧点拨

求三元一次方程组特殊解的方法：

可类比求二元一次方程特殊解的方法，即在把方程组转化为用一个未知数表示另一个未知数的形式之后，利用方程组特殊解的特点，尽量缩小未知数的取值范围，然后再通过具体计算得到方程组的特殊解．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容为选学内容，在中考中一般都不单独考查，但解三元一次方程组在九年级求二次函数的解析式中经常用到，故必须要掌握．考查的方式一般只有解三元一次方程组和三元一次方程组的实际应用．

三年中考兵法

考法 三元一次方程组的应用

例 9 [中考·六盘水]为确保信息安全，在传输时往往需加密，当发送方发出一组密码 a，b，c 时，接收方对应收到的密码为 A，B，C. 双方约定 $A=2a-b$，$B=2b$，$C=b+c$，例如当发出 1，2，3 时，收到 0，4，5.

（1）当发送方发出一组密码 2，3，5 时，接收方收到的密码是多少？

（2）当接收方收到一组密码 2，8，11 时，发送方发出的密码是多少？

试题评析：本题考查利用三元一次方程组解决实际问题，解题的关键是找出题目中的等量关系，列出方程组．

解：（1）由题意得 $A=2\times 2-3=1$，$B=2\times 3=6$，$C=3+5=8$，

答：接收方收到的密码是 1，6，8.

（2）由题意得 $\begin{cases} 2a-b=2, \\ 2b=8, \\ b+c=11. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=4, \\ c=7. \end{cases}$

答：发送方发出的密码是 3，4，7.

冲刺·满分

解法提醒

本题的解题关键就是找准对应关系：

第(1)问是已知 a=2，b=3，c=5，求 A，B，C 的值；

第(2)问是已知 A=2，B=8，C=11，求 a，b，c 的值．

两者的对应关系都是 A=2a-b，B=2b，C=b+c.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见264页

1. 下列方程是三元一次方程的是（　　）

A.$x+3y=\frac{1}{7}z+3$　　B.$xy+z=8$

C.$y+3z=-7$　　D.$xy+xz=11$

2. 下列方程组是三元一次方程组的是（　　）

A.$\begin{cases}x+y-z=2\\4x-2yz=8\end{cases}$　　B.$\begin{cases}x+y=2\\4x-3y=8\end{cases}$

C.$\begin{cases}x+y=2\\y+z=8\\m+z=6\end{cases}$　　D.$\begin{cases}x+y-2z=2\\3x-y+z=9\\x+y-z=7\end{cases}$

3. 已知$x+2y+3z=54$，$3x+y+2z=47$，$2x+y+z=31$，那么$x+y+z$的值是（　　）

A.23　　B.24

C.25　　D.26

4. 已知单项式$-8a^{3x+y+z}b^{12}c^{x+y+z}$与$-2a^{42}b^{2x-y}c^{4x}$是同类项，则$x=$_____，$y=$_____，$z=$_____.

5. 已知ax^2+bx+c，当$x=-1$时，其值为4；当$x=1$时，其值为8；当$x=2$时，其值为25，则当$x=3$时，其值为_____.

6. 已知$xyz\neq 0$，且x，y，z满足方程组$\begin{cases}4x-3y-6z=0,\\x+2y-7z=0,\end{cases}$则$\frac{x-y+z}{x+y+z}$的值为_____.

7. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x+4y+3z=9,\\3x-2y+5z=11,\\5x+6y+8z=0;\end{cases}$

（2）$\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5},\\2a+b+3c=88;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x+y=1,\\y+z=2,\\z+x=3.\end{cases}$

8. 某车间共有职工63人，加工一件产品需要三道工序，平均每人每天在第一道工序里能加工300件，在第二道工序里能加工500件，在第三道工序里能加工600件，为使每天能生产出最多的产品，应如何安排各工序里的人数？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 某汽车公司计划用 20 辆汽车装运甲、乙、丙三种蔬菜 36 t 到外地销售（每辆汽车按规定满载，每辆汽车只能装同一种蔬菜，每种蔬菜不少于 1 车），下表为装运甲、乙、丙三种蔬菜的质量及利润，应该如何安排，可使公司获得利润 18 300 元?

	甲	乙	丙
每辆汽车能装的吨数 /t	2	1	1.5
每吨蔬菜可获得的利润 / 百元	5	7	4

10. 某学校为了教学需要，特派采购员去购买教学用具，已知购买五种教学用具 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 的件数和总钱数如下表：

	件数					总钱数 / 元
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
第一次购买	1	3	4	5	6	1 992
第二次购买	1	5	7	9	11	2 984

那么，购买每种教学用具各一件共需多少元?

素养提分 行动篇

转化

举办运动会时，参赛的运动员都有一个号码，这样就把运动员的姓名转化成了数，给比赛带来了许多方便.

用数轴上的点表示数，一个数的绝对值等于数轴上表示这个数的点到原点的距离……这些都是数与形的转化. 根据有理数的运算法则，减法可以转化为加法，除法可以转化为乘法……这些都是运算的转化. 像这样，把复杂的问题转化为简单的问题，把未知转化为已知，是解决问题的一种常用的思想方法.

本章里，用二元一次方程组解决问题时，要把实际问题转化为方程组，这是实际问题到数学问题的转化；用代入消元法或加减消元法，可以把解二元一次方程组转化为解一元一次方程，这是从二元到一元的转化. 类似地，消去三元一次方程组中某个未知数，就可以把解三元一次方程组转化为解二元一次方程组.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

找特点巧消元

荣老师告诉你 代入法和加减法是解二元一次方程组的基本方法，其基本思路是通过消元使二元一次方程组转化为一元一次方程求解．但有不少二元一次方程组，它们的系数间有着某种联系，若细致观察，抓住其特点，还可以采取更为灵活，更为巧妙的消元方法，使解题过程变得更为简捷、明快．

技巧一 其中一个未知数的系数相差 1，先相减，再代入

例 1 解方程组$\begin{cases}4x+7y=222, & ①\\ 5x+6y=217, & ②\end{cases}$

解题秘方：x 与 y 的系数都相差 1，将两个方程相减，得到的方程中 x 与 y 的系数是 1 或 -1，再代入就非常简单．

解：② − ①，

得 $x-y=-5$，

即 $x=y-5$. ③

将③代入①，

得 $4(y-5)+7y=222$.

解得 $y=22$.

把 $y=22$ 代入③，

得 $x=17$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=17,\\ y=22.\end{cases}$

方法点拨：凡方程组中有一个未知数的系数相差 1 的，都可以先用加减法，再用代入法消元，这比常规消元要简捷．

技巧二 两个未知数的系数之差分别相等

例 2 解方程组$\begin{cases}9x+3y=9, & ①\\ 7x+5y=-1. & ②\end{cases}$

解题秘方：方程组中两个未知数的系数之差都是 2，将两个方程相减，得到的方程中两个未知数的系数相等或互为相反数，两边同时除以一个数可将两个未知数的系数变为 1 或 -1.

解：① − ②，得 $2x-2y=10$.

∴ $x-y=5$. ③

③ ×5+ ②，得 $12x=24$，

解得 $x=2$.

将 $x=2$ 代入③，

得 $y=-3$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\ y=-3.\end{cases}$

方法点拨：凡方程组中两个未知数的系数之差分别相等，均可先相减，再适当变形消元．

技巧三 两个未知数的系数之和分别相等

例 3 解方程组$\begin{cases}2x+3y=7, & ①\\ 3x+2y=8. & ②\end{cases}$

解题秘方：x 与 y 的系数之和分别相等，可将两个方程相加和相减，得到系数较简单的方程组．

解：① + ②，得

$5x+5y=15$，即 $x+y=3$. ③

② − ①，得

$x-y=1$. ④

③④联立方程组，

得$\begin{cases}x+y=3,\\ x-y=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

方法点拨：凡两个未知数的系数之和分别相等，且两个方程中两个未知数系数互换，都可仿本题思路既加又减，获得一个系数较简单的方程组求解．

技巧四 两个方程的常数项相同，先消常数项，再代入

例 4 解方程组$\begin{cases}5x-y=110, & ①\\ 9y-x=110. & ②\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：先直接消去常数项，得到没有常数项的方程，然后代入消元求解.

解：②－①，

得 $10y-6x=0$，即 $y=0.6x$. ③

将③代入①

得 $4.4x=110$，

解得 $x=25$.

把 $x=25$ 代入③，

得 $y=15$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}x=25,\\y=15.\end{cases}$

方法点拨：凡常数项相同，先消去常数项，得到没有常数项的简易方程，然后通过代入消元法解方程组.

技巧五 一个未知数的系数成倍数关系，先变形，再整体代入

例 5 解方程组 $\begin{cases}3m-4n=7,①\\9m-10n+25=0.②\end{cases}$

解题秘方：观察发现方程②中 m 的系数是方程①的3倍，故可直接将①变形整体代入②中消元求解.

解：由①得 $3m=4n+7$，③

将③代入②，

得 $3(4n+7)-10n+25=0$.

解得 $n=-23$.

将 $n=-23$ 代入③，

得 $m=-28\frac{1}{3}$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}m=-28\frac{1}{3},\\n=-23.\end{cases}$

方法点拨：方程组中，同一个未知数的系数，一个方程是另一个方程的几倍，则可直接用整体代入法消元求解.

技巧六 创造条件，整体代入求解

例 6 解方程组 $\begin{cases}x+1=5(y+2),①\\3(2x-5)-4(3y+4)=5.②\end{cases}$

解题秘方：观察方程①，将 $x+1$ 看成一个整体，将方程②变形使含有 $(x+1)$，然后再将①整体代入，可实现消元，进而求出方程组的解.

解：由②，得 $6(x+1)-4(3y+4)=26$. ③

将①代入③，得

$30(y+2)-4(3y+4)=26$.

解得 $y=-1$.

将 $y=-1$ 代入①，得 $x=4$.

∴方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}$

方法点拨：从已知方程的结构和系数特点出发，通过局部变形创造条件，再将其整体代入，达到迅速消元的目的.

技巧七 有一个方程是比例式，先设参，再代入

例 7 解方程组 $\begin{cases}\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2},①\\3x+4y=32.②\end{cases}$

解题秘方：方程①是一个比例式，设出比值，将 x 与 y 都用这个比值来表示，然后代入方程②求出比值，从而求出方程组的解.

解：设 $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=k$，

可得 $\begin{cases}x=5k-1,③\\y=2k+3.④\end{cases}$

将③④代入②，得

$3(5k-1)+4(2k+3)=32$.

解得 $k=1$.

将 $k=1$ 分别代入③④，

得原方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$

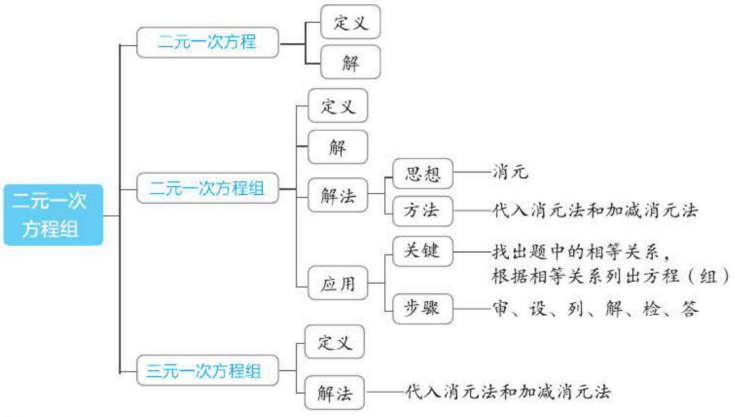
方法点拨：若有一个方程是比例式，可设出该比例式的比值，然后用这个比值表示方程组的两个未知数，通过这个比值求出方程组的解，此法又叫参数消元法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 同时使两个方程左右两边都相等的未知数的值是二元一次方程组的解.

2. 解二元一次方程组的基本思想是消元，基本方法是代入消元法与加减消元法.

（1）**代入消元法**：把其中一个方程的某一个未知数用含有另一个未知数的式子表示，然后代入另一个方程，就可以消去这个未知数而先求得另一个未知数的值；

（2）**加减消元法**：先用适当的数同乘方程的两边，使得两个方程中的某一未知数的系数的绝对值相等，然后把两个方程的两边相加或相减，就可以消去一个未知数而先求得另一未知数的值. 当某一未知数的系数较简单时（如是 ±1），可选择代入消元法求解；当同一未知数的系数互为相反数或相等时，采用加减消元法更简单些.

3. **列方程（组）解应用题的一般步骤：**

（1）**审**：审清题意，找出已知量、未知量及等量关系；

（2）**设**：直接或间接设出未知数；

（3）**列**：根据等量关系列方程（组）；

（4）**解**：解这个方程（组），求出未知数的值；

（5）**检**：检验所求的未知数的值是否为所列方程（组）的解，是否符合实际问题；

（6）**答**：写出答案（包括单位名称）.

知识方法专题

知识必学

专题一 二元一次方程（组）的解

链接中考» 二元一次方程的解是能使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，二元一次方程组的解是方程组中两个方程的公共解. 考查时除直接找解外，已知解求待定的系数值的逆向考查也很多.

例1 [中考·襄阳]若方程 $mx+ny=6$ 的两个解是 $\begin{cases}x=1\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ 则 m，n 的值为（　　）

A. 4，2　　B. 2，4

C. −4，−2　　D. −2，−4

解题秘方：将 x 与 y 的两对值代入方程计算即可求出 m 与 n 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：将$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$分别代入$mx+ny=6$中，得$\begin{cases}m+n=6,①\\2m-n=6,②\end{cases}$

①+②，得$3m=12$，即$m=4$，

将$m=4$代入①，得$n=2$，故选A.

答案：A

专题二 二元一次方程组的解法

链接中考» 解二元一次方程组的方法有代入消元法和加减消元法，不论是“代入”还是“加减”，目的都是消元，即把二元一次方程组转化为一元一次方程，再解一元一次方程，从而求出方程组的解．此类问题是近年来中考的一大热点，一般以选择题和填空题以及简单解答题为主．

例2 [中考·重庆]解方程组$\begin{cases}y=2x-4,①\\3x+y=1.②\end{cases}$

解题秘方：因为方程①是用含x的式子表示y，所以运用代入法简便．

解：把方程①代入方程②，

得$3x+2x-4=1$，

解得$x=1$.

把$x=1$代入①，

得$y=-2$，

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

专题三 建立二元一次方程组的模型解决问题

链接中考» 建立二元一次方程组的模型必须找出两个等量关系，除实际问题中的等量关系之外，还有很多等量关系，如非负数的性质，同类项的概念等等，都是中考命题的热点．

例3 若$\sqrt{a+b+5}+|2a-b+1|=0$，则$(b-a)^{2021}=$（　　）

A.-1　　B.1　　C.5^{2021}　　D.-5^{2021}

解题秘方：一个数的绝对值为非负数，一个非负数的算术平方根也是非负数，如果几个非负数的和等于0，那么它们分别等于0.

解：由题意得$\begin{cases}a+b+5=0,\\2a-b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=-3.\end{cases}$

$\therefore(b-a)^{2021}=-1$，故选A.

答案：A

规律点拨：初中阶段学习了三种非负数，①$|a|\geqslant 0$；②$a^2\geqslant 0$；③$\sqrt{a}\geqslant 0$，如果出现几个非负数的和为零，则说明这几个非负数的值都等于0，此时可得一个方程组，解方程组即可求得未知数的值．

例4 [中考·巴中]若单项式$2x^2y^{a+b}$与$-\frac{1}{3}x^{a-b}y^4$是同类项，则a，b的值分别为（　　）

A.$a=3$，$b=1$　　B.$a=-3$，$b=1$

C.$a=3$，$b=-1$　　D.$a=-3$，$b=-1$

解题秘方：根据同类项的定义，列方程组并求解即可．

解：由同类项的定义，得$\begin{cases}2=a-b,\\4=a+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$，故选A.

答案：A

专题四 二元一次方程组的应用

链接中考» 列二元一次方程组解应用题，关键是找到两个等量关系，然后列出方程组求解，利用二元一次方程组解决实际问题是每年中考的热点内容，其题型常以选择题、填空题和解答题形式出现．

例5 [中考·张家界]如图8-1，小华从家里到学校的路是一段平路和一段下坡路，假设他始终保持平路每分钟走60 m，下坡路每分钟走80 m，上坡路每分钟走40 m，则他从家里到学校需10 min，从学校到家里需15 min. 问：从小华家到学校的平路和下坡路各有多远？

解题秘方：本题的两个等量关系是：去学校时，走平路的时间+走下坡路的时间=10 min；回家时，走上坡路的时间+走平路的时间=15 min，通过设元列方程组再解之即可．

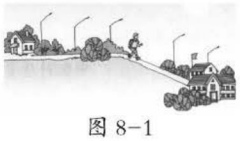


图8-1

解：设从小华家到学校的平路有x m，下坡路有y m，则$\begin{cases}\frac{x}{60}+\frac{y}{80}=10,\\\frac{x}{60}+\frac{y}{40}=15,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}x=300,\\y=400.\end{cases}$

答：从小华家到学校的平路和下坡路分别为300 m，400 m.

Ⅱ 方法必会

专题五 枚举法

专题解读» 二元一次方程的解有无数组，但在限定条件下，往往可以求出其整数解；求二元一次方程的整数解，在问题不是特别复杂的条件下，可以采用枚举法，即将其中一个未知数可以取的整数一一列出来，求出对应的另一个未知数的值，并找出符合题意的整数解.

例6 [中考·龙东]为推进课改，王老师把班级里40名学生分成若干小组，每小组只能是5人或6人，则有几种分组方案（　　）

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

解题秘方：根据题意设5人一组的有x个小组，6人一组的有y个小组，根据“把班级里40名学生分成若干小组”得出等式，求解即可.

解：设5人一组的有x个小组，6人一组的有y个小组，根据题意可得

$5x+6y=40$，故$y=\dfrac{40-5x}{6}$.

若$x=0$，则$y=\dfrac{20}{3}$（不合题意）；

若$x=1$，则$y=\dfrac{35}{6}$（不合题意）；

若$x=2$，则$y=5$；

若$x=3$，则$y=\dfrac{25}{6}$（不合题意）；

若$x=4$，则$y=\dfrac{10}{3}$（不合题意）；

若$x=5$，则$y=\dfrac{5}{2}$（不合题意）；

若$x=6$，则$y=\dfrac{5}{3}$（不合题意）；

若$x=7$，则$y=\dfrac{5}{6}$（不合题意）；

若$x=8$，则$y=0$.

故有2种分组方案. 故选C.

答案：C

专题六 转化思想

专题解读» 将要研究和要解决的问题转化为已经学过的问题来处理的数学思想称为转化思想，它是一种研究和解决数学问题的基本思想，如方程组中含有多个未知数，解方程组的基本思想是“消元”，化多为少，而代入法和加减法则是落实转化思想的措施.

例7 [中考·南充]已知关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}2x+3y=k,\\x+2y=-1\end{cases}$的解互为相反数，则$k$的值是_____.

解题秘方：解方程组用k表示出x，y，根据方程组的解互为相反数，得到关于k的方程，即可求出k的值.

解：解方程组$\begin{cases}2x+3y=k,\\x+2y=-1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2k+3,\\y=-2-k,\end{cases}$

因为关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}2x+3y=k,\\x+2y=-1\end{cases}$的解互为相反数，

所以$2k+3-2-k=0$，解得$k=-1$.

答案：-1

方法点拨：求解二元一次方程组中的字母常数，一般用以下方法：通常是先求方程组的解，再根据x与y之间的关系建立关于字母常数的方程求解.

专题七 整体思想

专题解读» 在研究某些数学问题时，往往不是从问题的某个组成部分为着眼点，而是有意识地放大考查问题的视角，将要解决的问题看成一个整体，通过研究问题的整体形式、整体结构或整体处理后，达到顺利而又简捷地解决问题的目的，这就是整体思想. 解方程组时，注意观察方程组的特点，灵活运用方程组变形技巧来进行处理.

例8 解方程组$\begin{cases}x+y+z=8,①\\x+y+m=12,②\\x+z+m=14,③\\y+z+m=17.④\end{cases}$

解题秘方：此方程组中，每个方程都缺少一个未知数，且所缺少的未知数又都不相同，每个未知数的系数都是1，这样的方程组若一一消元很麻烦，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

可考虑整体相加、整体相减的方法.

解：①+②+③+④，并整理，

得 $x+y+z+m=17$，⑤

⑤−①，得 $m=9$，⑤−②，得 $z=5$.

⑤−③，得 $y=3$，⑤−④，得 $x=0$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=0,\\y=3,\\z=5,\\m=9.\end{cases}$


解方程组的思想方法

专题八 分类讨论思想

专题解读≫ 分类讨论思想是在解题过程中，将某一数学对象根据它本身的属性按照一定的原则或标准分成若干类，然后逐类进行讨论解决，再把这几类的结论汇总，得出问题的答案的一种思想，其作用是克服思维的片面性，防止漏解.

例 9 某旅行社拟在暑假期间面向学生推出“林州红旗渠一日游”活动，收费标准如下：

人数 m/ 人	$0<m\leqslant 100$	$100<m\leqslant 200$	$m>200$
收费标准 /（元 / 人）	90	85	75

甲、乙两所学校计划组织本校学生自愿参加此项活动. 已知甲校报名参加的学生人数多于 100 人，乙校报名参加的学生人数少于 100 人. 经核算，若两校分别组团共需花费 20 800 元，若两校联合组团只需花费 18 000 元.

（1）两所学校报名参加旅游的学生人数之和超过 200 人吗？为什么？

（2）两所学校报名参加旅游的学生各有多少人？

解题秘方：设两所学校报名参加旅游的学生人数之和为 a 人.（1）由已知分两种情况讨论，即 $a>200$ 和 $100<a\leqslant 200$，得出结论；（2）根据两种情况的费用，设未知数列方程组求解，讨论得出答案.

解：（1）超过 200 人. 理由：设两所学校报名参加旅游的学生人数之和为 a 人.

若 $a>200$，则 $a=18\,000\div 75=240$.

若 $100<a\leqslant 200$，则 $a=18\,000\div 85=211\frac{13}{17}$，不合题意，舍去.

所以两所学校报名参加旅游的学生人数之和为 240 人，超过 200 人.

（2）设甲校报名参加旅游的学生有 x 人，乙校报名参加旅游的学生有 y 人.

①当 $100<x\leqslant 200$ 时，得

$\begin{cases}x+y=240,\\85x+90y=20\,800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=160,\\y=80.\end{cases}$

②当 $x>200$ 时，得 $\begin{cases}x+y=240,\\75x+90y=20\,800,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=53\frac{1}{3},\\y=186\frac{2}{3}.\end{cases}$ 不合题意，舍去.

所以甲校报名参加旅游的学生有 160 人，乙校报名参加旅游的学生有 80 人.

好题必解 答案见 266 页

类型 1：利用方程组的解解决问题

1. 方程组 $\begin{cases}2x+y=\blacksquare,\\x+y=3\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=\blacksquare,\end{cases}$ 则被遮盖的两个数分别为（　　）

A.5，1　　B.1，3　　C.2，3　　D.2，4

2. 已知 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$ 是关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}ax+cy=1,\\cx-by=2\end{cases}$ 的解，则 a，b 间的关系是（　　）

A.$4b-9a=1$　　B.$3a+2b=1$

C.$4b-9a=-1$　　D.$9a+4b=1$

3. [期末 · 玉林] 已知 $\begin{cases}x=1,\\y=-2\end{cases}$ 是二元一次方程 $3x-ay=9$ 的一个解，那么 a 的值是_____.

类型 2：利用解方程组解决问题

4. 若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=k,\\2x-y=8k\end{cases}$ 的解也是二元一次方程 $3x+2y=10$ 的解，则 k 的值为（　　）

A.1　　B.−2

C.2　　D.4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 若二元一次方程组$\begin{cases}2x+3y=k-3,\\x-2y=2k+1\end{cases}$的解互为相反数，则 k 的值为（　　）

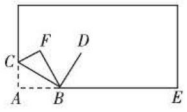
A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $-\frac{8}{5}$

6. 已知方程组$\begin{cases}5x-2y=3,\\mx+5y=4\end{cases}$与$\begin{cases}x-4y=-3,\\5x+ny=1\end{cases}$有相同的解，求 m 和 n 的值.

类型 3：建立二元一次方程组模型解决问题

7. 如果 $4x^{a+2b-5}-2y^{3a-b-3}=8$ 是二元一次方程，那么 $a-b=$_____.

8. [期末 · 陆川]小东将一张长方形纸的一角折过来，该角顶点 A 落在 F 处，BC 为折痕，如图所示，若 DB 平分 $\angle FBE$，$\angle DBE$ 比 $\angle CBA$ 大 30°，设 $\angle CBA$ 和 $\angle DBE$ 分别为 $x°$，$y°$，那么可求出这两个角的度数的方程组是_____.

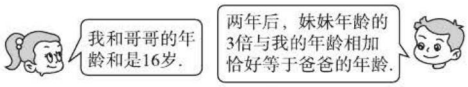


（第 8 题）

9. 定义运算“*”，规定 $x*y=ax^2+by$，其中 a，b 为常数，且 $1*2=5$，$2*1=6$，则 $2*3=$_____.

10. [中考 · 湘潭]“鸡兔同笼”是我国古代著名的数学趣题之一，大约在 1500 年前成书的《孙子算经》中，就有关于“鸡兔同笼”的记载：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”这句话的意思是：有若干只鸡兔关在一个笼子里，从上面数，有 35 个头，从下面数，有 94 条腿，问笼中各有几只鸡和兔？

11. [中考 · 徐州]4 月 9 日上午 8 时，2017 徐州国际马拉松赛鸣枪开跑，一名 34 岁的男子带着他的两个孩子一同参加了比赛，下面是两个孩子与记者的对话：



（第 11 题）

根据对话内容，请你用方程的知识帮记者求出哥哥和妹妹的年龄.

12. 小丽购买学习用品的收据如下表，因污损导致部分数据无法识别，根据下表，解决下列问题：

（1）小丽买了自动铅笔、记号笔各几支？

（2）若小丽再次购买软皮笔记本和自动铅笔两种文具，共花费 15 元，则有哪几种不同的购买方案？

商品名	单价（元）	数量	金额（元）
签字笔	3	2	6
自动铅笔	1.5		
记号笔	4		
软皮笔记本		2	9
圆规		1	
合计		8	28

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第八章测试卷

答案见 266 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列不属于二元一次方程组的是（　　）

A. $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=3\\x-y=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+y=3\\y=1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}xy=3\\x-y=1\end{cases}$

2. 用加减法解方程组$\begin{cases}2x-3y=5,\\3x-2y=7\end{cases}$时，下列方法错误的是（　　）

A. ① ×3− ② ×2，消去 x

B. ① ×2− ② ×3，消去 y

C. ① ×（−3）+ ② ×2，消去 x

D. ① ×2− ② ×（−3），消去 y

3. 已知一个二元一次方程组的解是$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$则这个二元一次方程组可能是（　　）

A. $\begin{cases}x+y=-3\\xy=2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x+y=-3\\x-2y=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}2x=y\\y+x=-3\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x+y=0\\3x-y=5\end{cases}$

4. 三元一次方程组$\begin{cases}x+y=1,\\y+z=5,\\z+x=6\end{cases}$的解是（　　）

A. $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=5\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=4\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=4\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=4\\y=1\\z=0\end{cases}$

5. 已知方程 $5m-2n=1$，当 m 与 n 相等时，m 与 n 的值分别是（　　）

A. $\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$　B. $\begin{cases}m=-3\\n=-3\end{cases}$　C. $\begin{cases}m=-1\\n=-1\end{cases}$　D. $\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\n=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

6. 下列说法中正确的是（　　）

A. 二元一次方程 $3x-2y=5$ 的解为有限个

B. 方程 $3x+2y=7$ 的自然数解有无数对

C. 方程组$\begin{cases}x-y=0,\\x+y=0\end{cases}$的解为 0

D. 方程组中各个方程的公共解叫做这个方程组的解

7. 由方程组$\begin{cases}2x+m=1,\\y-3=m\end{cases}$可得出 x 与 y 的关系是（　　）

A. $2x+y=4$　　B. $2x-y=4$

C. $2x+y=-4$　　D. $2x-y=-4$

8. 某校七年级（2）班 40 名同学为“希望工程”捐款，共捐款 100 元．捐款情况如下表：

捐款（元）	1	2	3	4
人数	6			7

表格中捐款 2 元和 3 元的人数不小心被墨水污染已看不清楚．

若设捐款 2 元的有 x 名同学，捐款 3 元的有 y 名同学，根据题意，可得方程组（　　）

A. $\begin{cases}x+y=27\\2x+3y=66\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x+y=27\\2x+3y=100\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+y=27\\3x+2y=66\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x+y=27\\3x+2y=100\end{cases}$

9. 对于非零的两个实数 a，b，规定 $a\oplus b=am-bn$，若 $3\oplus(-5)=15$，$4\oplus(-7)=28$，则 $(-1)\oplus 2$ 的值为（　　）

A. −13　　B. 13　　C. 2　　D. −2

10. 有甲、乙、丙三种商品，如果购甲 3 件，乙 2 件，丙 1 件共需 315 元钱，购甲 1 件，乙 2 件，丙 3 件共需 285 元钱，那么购甲、乙、丙三种商品各 1 件共需（　　）

A. 50 元　　B. 100 元　　C. 150 元　　D. 200 元

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. 若一个二元一次方程组的解为$\begin{cases}x=18,\\y=-10,\end{cases}$则这个方程组可以是_____.

12. 已知方程组$\begin{cases}2a+b=5,\\a+2b=1,\end{cases}$那么 $b-a$ 的值为_____.

13. 如果方程 $3x^{3m-2n}-2y^{m+n}+16=0$ 是关于 x，y 的二元一次方程，那么 $m-n=$_____.

14. 内江至成都全程 182 千米，一辆小汽车和一辆客车同时从内江、成都两地相向开出，经过 1 小时 10 分钟相遇．相遇时，小汽车比客车多行驶

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28 千米．设小汽车和客车的平均速度分别为 x 千米／时和 y 千米／时，那么根据题意列出的方程组是_____.

15. 已知 $|2x-3y+4|$ 与 $(x-2y+5)^2$ 互为相反数，则 $(x-y)^{2021}$=_____.

16. 有三个家庭团队结伴到一景区游玩，一号家庭团队有 3 个成年人和 4 个小孩参加，共交费 150 元，二号家庭团队有 2 个成年人和 1 个小孩参加，共交费 75 元，按照这样的收费标准，三号家庭团队有 3 个成年人和 3 个小孩参加，应交的费用为_____元.

三、解答题（共 52 分）

17.（10 分）解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x-2y=1, \\ 3x-5y=8; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+2}{3}=-2, \\ 3x+5y=-1. \end{cases}$

18.（8 分）已知 $\begin{cases} x=2, \\ y=-3 \end{cases}$ 是关于 x，y 的二元一次方程 $3x=y+a$ 的解，求 $a(a-1)$ 的值.

19.（10 分）已知 $y=x^2+px+q$，当 $x=1$ 时，y 的值为 2；当 $x=-2$ 时，y 的值为 2，求当 $x=-3$ 时，y 的值.

20.（12 分）为响应国家节能减排的号召，鼓励居民节约用电，各省先后出台了居民用电“阶梯价格”制度，如下表是某省的电价标准（每月）（电量按整度数计价）．例如：方女士家 5 月份用电 500 度，电费 =180×0.6+220× 二档电价 + 100× 三档电价 =352 元；李先生家 5 月份用电 460 度，交费 316 元．请问表中二档电价、三档电价各是多少？

阶梯	电量	电价
一档	0 ~ 180 度	0.6 元 / 度
二档	181 ~ 400 度	二档电价
三档	401 度及以上	三档电价

21.（12 分）为庆祝“六一”儿童节，某市中小学统一组织文艺会演，甲、乙两所学校共 92 人（其中甲校人数多于乙校人数，且甲校人数不够 90 人）准备统一购买服装参加演出，下面是某服装厂给出的演出服装的价格表：

购买服装的套数	1 套至 45 套	46 套至 90 套	91 套及以上
每套服装的价格	60 元	50 元	40 元

如果两所学校分别单独购买服装，一共应付 5 000 元．

（1）如果甲、乙两校联合起来购买服装，那么比各自购买服装共可以节省多少钱？

（2）甲、乙两校各有多少学生准备参加演出？

（3）如果甲校有 10 名同学抽调去参加书法绘画比赛不能参加演出，请为两校设计一种省钱的购买服装方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

探究倾斜天平的奥秘

探究倾斜天平的奥秘











第九章 不等式与不等式组

核心考点

你将见到的

- 不等式的性质
- 解一元一次不等式
- 解一元一次不等式组
- 不等式及不等式组的应用

核心方法

我们为你提供的

- 数值验证法
- 口诀法
- 建模思想
- 作差法
- 分类讨论思想
- 转化思想
- 数轴法
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.1 不等式

9.1.1 不等式及其解集

核心知识
- 不等式的概念
- 不等式的解与解集
- 用数轴表示不等式的解集

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 不等式

1. **定义**：用符号“$<$”或“$>$”表示大小关系的式子叫做不等式．用符号“$\neq$”或“$\leqslant$”或“$\geqslant$”表示不等关系的式子也是不等式．

2. **基本的表达形式**：

（1）常见的不等号：

符号	名称	实际意义	读法	举例
$<$	小于号	小于、不足	小于	$3+2<6$
$>$	大于号	大于、高出	大于	$3+3>5$
$\leqslant$	小于或等于号	不大于、不超过、至多	小于或等于	$x\leqslant 8$
$\geqslant$	大于或等于号	不小于、不低于、至少	大于或等于	$x\geqslant 5$
$\neq$	不等于号	不相等	不等于	$4\neq 5$

（2）常见的不等式基本语言与符号表示：

① a 是正数表示为 $a>0$，a 是负数表示为 $a<0$；

② a 是非负数表示为 $a\geqslant 0$，a 是非正数表示为 $a\leqslant 0$；

③ a，b 同号表示为 $ab>0$，a，b 异号表示为 $ab<0$.

提分·必记

特别提醒

- 判断一个式子是否为不等式，关键是看所给式子是否含不等号；
- 不等号具有方向性，不等号两边的数（或式子）不能随意交换．

拨考向 利用不等式的定义解决问题

类型 1：利用不等式的定义进行识别

例 1 判断下列各式哪些是等式，哪些是不等式，哪些既不是等式也不是不等式．

（1）$x+y$；（2）$3x>7$；（3）$5=2x+3$；（4）$x^2>0$；

（5）$2x-3y=1$；（6）$5\div 2$；（7）$2>3$.

解题秘方：紧扣不等式的定义进行识别，关键是看式子是否含有不等号．

解：等式是（3）（5），不等式是（2）（4）（7），既不是等式也不是不等式的是（1）（6）．

提分·秘诀

特别警示

判断一个式子是否为不等式与不等式是否成立没有关系．例如，例题中的“$2>3$”，虽然这个式子不成立，但它是不等式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用不等关系列不等式

例 2 用不等式表示：

（1）a 的一半与 3 的和大于 5；

（2）x 的 3 倍与 1 的差小于 2；

（3）a 的 $\frac{1}{2}$ 与 1 的差是正数；

（4）m 与 2 的差是负数．

解题秘方：紧扣不等关系中的关键词语列出不等式．

解：（1）$\frac{1}{2}a+3>5$.（2）$3x-1<2$.

（3）$\frac{1}{2}a-1>0$.（4）$m-2<0$.

解法提醒

用不等式表示不等关系时，一定要抓住关键词语，弄清不等关系，把文字语言描述的不等关系转化为用数学符号表示的不等式．

点知识 ▸ 2 不等式的解与解集

1. 不等式的解：使不等式成立的未知数的值叫做不等式的解．

判断一个数是否为不等式的解，就是将这个数代替不等式中的未知数，看不等式是否成立，若成立，则该数就是不等式的一个解，若不成立，则该数就不是不等式的解．

2. 不等式的解集：一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的解集．

特别提醒：不等式的解集必须符合两个条件：

（1）解集中的每一个数值都能使不等式成立；

（2）能够使不等式成立的所有数值都在解集中．

3. 解不等式：求不等式的解集的过程叫做解不等式．

提分·必记

特别解读

不等式的解与不等式解集的区别与联系

- 区别：不等式的解集是能使不等式成立的未知数的所有取值，是所有解的集合，而不等式的解是使不等式成立的未知数的值．
- 联系：解集包括所有的解，所有的解组成了解集．

拔考向 ▸ 利用不等式的解与解集的定义进行辨析

例 3 有下列四种说法：

① $x=\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的一个解；

② $x=\frac{5}{2}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的一个解；

③ $x>\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集；

④ $x>2$ 中的任何一个数都可以使不等式 $4x-5>0$ 成立，所以 $x>2$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集．

其中正确的有（　　）．

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方：紧扣不等式的解及解集的定义，以及它们的区别与联系进行辨析．

解：①将 $x=\frac{5}{4}$ 代入不等式左边，得左边等于 0，不等式不成立，所以 $x=\frac{5}{4}$ 不是这个不等式的解；

提分·秘诀

方法点拨

识别不等式的解与解集的方法：

代入不等式，能使不等式成立的未知数的值就是不等式的解；所有不等式的解的集合为不等式的解集．**注意如果一个范围不包括不等式所有的解或包括有使不等式不成立的数，那么这个范围就不是不等式的解集．**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②将 $x=\frac{5}{2}$ 代入不等式左边，得左边等于 5，$5>0$，所以 $x=\frac{5}{2}$ 是这个不等式的一个解；

③在 $x>\frac{5}{4}$ 内所有 x 的值都满足不等式 $4x-5>0$，而不等式 $4x-5>0$ 的所有的解都在 $x>\frac{5}{4}$ 内，所以 $x>\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集；

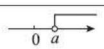
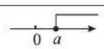
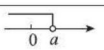
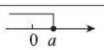
④尽管 $x>2$ 中的任何一个数都可以使不等式 $4x-5>0$ 成立，但这个范围并不包含这个不等式所有的解，因而 $x>2$ 不是该不等式的解集．故选 B.

答案：B

点知识 ▸ 3 不等式的解集的表示方法

在数轴上表示不等式的解集：

不等式的解集表示的是未知数的取值范围，所以不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来．一般地，利用数轴表示不等式的解集通常有以下四种情况（设 $a>0$）：

不等式的解集	$x>a$	$x\geqslant a$	$x<a$	$x\leqslant a$
数轴表示				

注意：在数轴上表示不等式的解集时，大于向右画，小于向左画；有等号画实心圆点（表示包括这一点），无等号画空心圆圈（表示不包括这一点）．

提分·必记

特别提醒

用数轴表示解集的一般方法：

1. 画数轴；
2. 定界点，注意界点是实心圆点，还是空心圆圈；
3. 定方向，原则是“小于向左，大于向右”.

拔考向 ▸ 在数轴上表示不等式的解集

例 4 在数轴上表示下列不等式的解集：

（1）$x>-1$；（2）$-2<x\leqslant 1$.

解题秘方：根据在数轴上表示解集的方法，确定界点以及方向．

解：（1）如图 9.1−1.

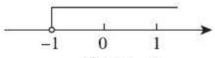


图 9.1−1

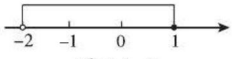


图 9.1−2

数轴上表示解集

（2）如图 9.1−2.

提分·秘诀

特别提醒

因为 $x>-1$ 无等号，故在表示 −1 的点上画空心圆圈表示．

$-2<x\leqslant 1$ 中，$x\leqslant 1$ 有等号，$x>-2$ 无等号，故在表示 1 的点上画实心圆点，在表示 −2 的点上画空心圆圈．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 ▸ 1 利用数形结合法求不等式的特殊解

例 5 填空：

（1）写出不等式 $x<3$ 的所有正整数解：_____；

（2）写出不等式 $x>-4$ 的所有负整数解：_____；

（3）写出不等式 $x<2$ 的所有非负整数解：_____；

（4）写出不等式 $x>-3$ 的最小整数解：_____.

挑战·高分

方法点拨

借助数轴这个“形”表示不等式中 x 的取值范围，再在该范围内找出符合条件的特殊“数”，利用数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：此类不等式本身就是其解集，将解集表示在数轴上，结合数轴的特征找出其特殊解.

解：将这几个不等式的解集在数轴上表示出来，如图 9.1−3 所示.

（1）满足 $x<3$ 的正整数为 1，2.

（2）满足 $x>-4$ 的负整数为 -1，-2，-3.

（3）满足 $x<2$ 的非负整数（包括正整数和 0）为 0，1.

（4）大于 -3 的整数有 -2，-1，0，1，…，其中最小的整数为 -2.

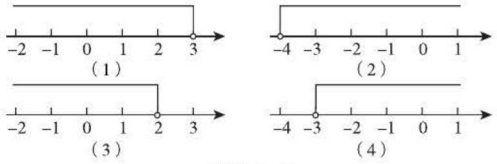


图 9.1−3

答案：（1）1，2　（2）-3，-2，-1　（3）0，1　（4）-2

形结合思想能很直观地求出符合条件的数.

详解

∵满足 $x<3$ 的正整数的意思是 $0<x<3$ 且 x 为整数，∴满足 $x<3$ 的正整数为 1，2.

拔尖角度 2 利用不等式的特殊解确定字母的取值范围

挑战·高分

例 6　已知不等式 $x<a$ 的正整数解为 1，2，3，求 a 的取值范围.

解题秘方：将 $x<a$ 在数轴上表示出来，再根据正整数解为 1，2，3，求出 a 的取值范围.

解：将 $x<a$ 在数轴上表示出来，如图 9.1−4.

因为 $x<a$ 的正整数解为 1，2，3，

所以 $3<a\leqslant 4$，

即 a 的取值范围是 $3<a\leqslant 4$.

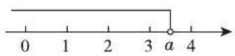


图 9.1−4

警示误区

已知不等式的特殊解确定字母的取值范围时，因为特殊解有限，所以该字母的取值一定是在某一范围内，最关键是包不包括端点的问题，为了防止出错，可以把包括和不包括分情况讨论.

拔尖角度 3 利用作差法比较大小解生活中的方案选择问题

挑战·高分

例 7　制作某种产品有两种用料方案，方案 1 是用 4 张 A 型钢板，8 张 B 型钢板；方案 2 是用 3 张 A 型钢板，9 张 B 型钢板，已知 A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大.从省料的角度考虑，应选择哪种方案?

解题秘方：分别表示出两种方案的用料面积，然后利用作差法比较大小.

解：设 A 型钢板和 B 型钢板的面积分别为 x 和 y，

于是两种方案用料面积分别为 $4x+8y$ 和 $3x+9y$，

则 $4x+8y-(3x+9y)=x-y$.

因为 A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大，即 $x>y$，

所以 $x-y>0$.

所以 $4x+8y>3x+9y$.

从省料的角度考虑，应选择方案 2.

方法点拨

若 a，b 为任意两个实数，先求出 a 与 b 的差，再根据“当 $a-b<0$ 时，$a<b$；当 $a-b=0$ 时，$a=b$；当 $a-b>0$ 时，$a>b$”来比较 a 与 b 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点有列不等式及不等式的解集，它是继续学习不等式知识的基础，在中考中直接考查较少，若出现，一般出现在填空题或选择题中，题目都非常简单.

三年中考兵法

考法1 用不等式表示数量关系

例8 [中考·柳州]如图9.1-5，身高为 x cm 的1号同学与身高为 y cm 的2号同学站在一起时，如果用一个不等式来表示他们的身高关系，则这个式子可以表示成 x_____y（用“>”或“<”填空）.

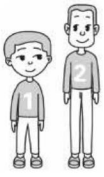


图 9.1-5

试题评析：本题主要考查了不等式的定义，仔细看图是解题的关键.

解：如果用一个不等式来表示他们的身高关系，则这个式子可以表示成 $x < y$.

答案：<

考法2 用数轴表示不等式的解集

例9 [中考·贵阳]关于 x 的不等式的解集在数轴上的表示如图9.1-6所示，则该不等式的解集为_____.

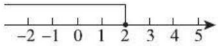


图 9.1-6

试题评析：本题考查了不等式的解集，解题的关键是掌握不等式解集的数轴表示.

解：从图9.1-6知，解集表示在数轴上时方向向左且在表示2的点处为实心圆点，故其解集为 $x \leqslant 2$.

答案：$x \leqslant 2$

冲刺·满分

解法方法

站在同一水平线上比较身高，类似于比较两条线段的长短，可以直接从“形”上判断出“量”的大小.

考法点津

考法1：已知解集，在数轴上表示解集是从“数”到“形”的过程；

考法2：已知解集在数轴上的表示，写出解集是从“形”到“数”的过程.

两者都要关注两点：一是方向，二是空心与实心.

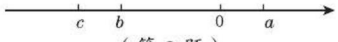
两年模拟兵法

答案见267页

1. 式子 ① $-3 < 0$；② $4x+3y > 0$；③ $2x+7$；④ $x+2 \geqslant 5$；⑤ $3x=7$ 中，是不等式的有（　　）

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

2. 已知实数 a，b，c 在数轴上对应的点的位置如图所示，则下列式子中正确的是（　　）

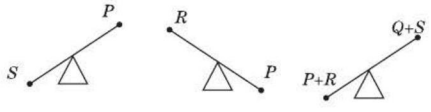


（第2题）

A.$cb < ab$　　B.$ac > ab$

C.$cb > ab$　　D.$c+b > a+b$

3. 四个小朋友玩跷跷板，他们的体重分别为 P，Q，R，S，如图，他们体重的大小关系为（　　）



（第3题）

A.$P>R>S>Q$　　B.$Q>S>P>R$

C.$S>P>Q>R$　　D.$S>P>R>Q$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 列不等式：

（1）m 的 2 倍不小于 n 的 $\frac{1}{3}$：_____；

（2）x 的 $\frac{1}{5}$ 与 y 的和是非负数：_____；

（3）m，n 的和的平方的 $\frac{1}{3}$ 不小于 16：_____；

（4）m，n 的平方和不等于 0：_____.

5. 已知关于 x 的方程 $3m-5x=-9$ 的解是非负数，请你列出一个关于 m 的不等式：_____.

6. 若 $x+y<0$，$xy<0$，$x<y$，则 x，$-x$，y，$-y$ 的大小关系是_____.

7.（1）直接写出下列不等式的解集：

① $x-1>2$；② $y+2<0$；③ $2a<10$.

（2）在数轴上表示以下不等式的解集：

① $x\geqslant -3$；② $x\leqslant -3$.

8. 求适合下列不等式的整数解：

（1）$|x|<4$；（2）$|x|<3$.

9. **[实际应用题]** 小刚准备用自己节省的零花钱购买一部 MP4 来学习英语，他已存有 50 元，并计划以后每个月再存 30 元，直到他存的钱超过 280 元才可以买．设 x 个月后小刚存的钱超过 280 元，请你列出不等式，并找出此不等式的最小整数解．

10. 某市自来水公司收费标准如下：每户每月用水不超过 6 m^3 时，收费为 1.5 元/m^3；若超过 6 m^3，则超过的部分按 2 元/m^3 收费．小超家某月水费不足 12 元且大于或等于 9 元，若设小超家该月的用水量为 x m^3.

（1）x 应满足什么关系式?

（2）小超家该月的用水量有可能是 7 m^3 或 8 m^3 吗？ **【导学号：7207895】**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.1.2 不等式的性质

核心知识
- 不等式的性质
- 利用不等式的性质解不等式
- 带等号的不等式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 不等式的性质

1. 性质1：

不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．即如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$.

2. 性质2：

不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．即如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$（或 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）.

3. 性质3：

不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．即如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$（或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）.


不等式的性质

4. 不等式的性质与等式的性质的关系：

类别	不同点	相同点
不等式	两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向要改变．	（1）两边加（或减）同一个数（或式子），不等式和等式仍成立； （2）两边乘（或除以）同一个正数，不等式和等式仍成立．
等式	两边乘（或除以）同一个负数，等式仍然成立．	

提分·必记

特别解读

- 不等式的三条性质是不等式变形的依据，运用不等式的性质时，不等式的两边要同时进行相同的变形．
- 在不等式的变形中，还常用到性质：
  (1) 对称性：若 $a>b$，则 $b<a$；
  (2) 传递性：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

拨考向 利用不等式的性质解决问题

类型1：利用不等式的性质识别不等式的变形

例1 若 $x>y$，则下列式子中错误的是（　　）

A. $x-3>y-3$　　B. $\frac{x}{3}>\frac{y}{3}$

C. $x+3>y+3$　　D. $-3x>-3y$

解题秘方：认清每个选项变形的方式，紧扣不等式的性质进行解答．

提分·秘诀

方法点拨

辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法：

先判断出第二个不等式是由第一个不等式经过怎样的变形得到的，再确定出每一步变形的依据，最后确定不等号是否改变方向．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：分析如下表：

将 $x>y$ 变形	依据	结论
两边同时减 3，得 $x-3>y-3$	不等式的性质 1	A 正确
两边同时除以 3，得 $\frac{x}{3}>\frac{y}{3}$	不等式的性质 2	B 正确
两边同时加 3，得 $x+3>y+3$	不等式的性质 1	C 正确
两边同时乘 -3，得 $-3x<-3y$	不等式的性质 3	D 错误

答案：D

方法点拨

判断不等式两边乘（或除以）的同一个数的符号时，**只需看不等号的方向是否改变**，若不变，则这个数为正数；若改变，则这个数为负数．

类型 2：利用不等式的性质确定字母系数的范围

例 2 若关于 x 的不等式 $(m-1)x>m-1$ 的解集为 $x<1$，求 m 的取值范围．

解题秘方：根据运用不等式的性质得到的结果，识别变形的条件．

解：∵关于 x 的不等式 $(m-1)x>m-1$ 的解集为 $x<1$，

∴ $m-1<0$，即 $m<1$.

知识 2 利用不等式的性质解不等式

提分·必记

特别解读

- 利用不等式的性质 1，可使含未知数的项在不等号的一边，常数项在不等号的另一边．
- 利用不等式的性质 2 或性质 3 可把未知数的系数化为 1.

1. 解不等式就是将不等式化为 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）（a 为常数）的形式．

对于不等式两边多余的项用不等式性质 1 消去，而不等式性质 2、性质 3 可将不等式中 x 的系数化为 1.

2. 用不等式的性质解不等式的步骤：

（1）用不等式的性质 1 将不等式变成 $ax>b$（$ax\geqslant b$）或 $ax<b$（$ax\leqslant b$）的形式；

（2）用不等式的性质 2、3 将不等式变成 $x>\frac{b}{a}\left(x\geqslant\frac{b}{a}\right)$ 或 $x<\frac{b}{a}\left(x\leqslant\frac{b}{a}\right)$ 的形式．

技 考向 利用不等式性质求不等式解集

提分·秘诀

提示 1

不等式两边加 $\frac{3}{4}x$，使含 x 的项在不等号的一边，不含 x 的项在不等号的另一边．

例 3 利用不等式的性质解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来．

（1）$\frac{1}{4}x<-\frac{3}{4}x+2$；（2）$5x-6\leqslant 7x-4$.

解题秘方：利用不等式的性质把题中的不等式化为 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）（a 为常数）的形式，然后在数轴上表示解集．

解：（1）利用不等式的性质 1，不等式两边加 $\frac{3}{4}x$，不等号的方向不变，

得 $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x<-\frac{3}{4}x+2+\frac{3}{4}x$，∴ $x<2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.1−7 所示.

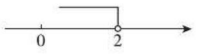


图 9.1−7

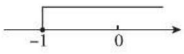


图 9.1−8

（2）利用不等式的性质 1，不等式两边减 $7x$，不等号的方向不变，

得 $5x-6-7x \leqslant 7x-4-7x$，

$\therefore -2x-6 \leqslant -4$.

利用不等式的性质 1，不等式两边加 6，不等号的方向不变，

得 $-2x-6+6 \leqslant -4+6$，

$\therefore -2x \leqslant 2$.

利用不等式的性质 3，不等式两边除以 -2，不等号的方向改变，

得 $\frac{-2x}{-2} \geqslant \frac{2}{-2}$，

$\therefore x \geqslant -1$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.1−8 所示.

提示 2

不等式两边减 $7x$，使含 x 的项在不等号的左边；不等式两边加 6，使常数项在不等号的右边；利用不等式的性质 3，使 x 的系数化为 1.

不等式两边除以 -2 时，切记不等号的方向要改变.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用不等式法解与方程的解有关的应用

挑战·高分

例 4 当 a 取什么值时，解关于 x 的方程 $3x-2=a$ 得到的 x 值满足下列条件：

（1）是正数？（2）是 0？（3）是负数？

解题秘方：利用方程的解的情况列出以 a 为未知数的不等式或方程，求出不等式的解集或方程的解即可.

解：解关于 x 的方程 $3x-2=a$，得 $x=\frac{a+2}{3}$.

（1）根据题意，得 $\frac{a+2}{3}>0$.

两边同时乘 3，得 $a+2>0$.

两边同时减去 2，得 $a>-2$.

$\therefore$ 当 a 取大于 -2 的数时，x 的值是正数.

（2）根据题意，得 $\frac{a+2}{3}=0$，

解方程得 $a=-2$.

$\therefore$ 当 a 的值为 -2 时，x 的值是 0.

（3）根据题意，得 $\frac{a+2}{3}<0$.

两边同时乘 3，得 $a+2<0$.

两边同时减去 2，得 $a<-2$.

$\therefore$ 当 a 取小于 -2 的数时，x 的值是负数.

方法点拨

数学综合题的实质是由几个互相关联的“小题”组合而成的一个“大题”；解题时，应先对综合题进行分析，把它分解成几个互相关联的“小题”，并逐一解答，然后把分析所得的结果综合起来，从而求出综合题的答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 [2] 利用不等式性质解含字母常数的不等式

挑战·高分

例 5 已知关于 x 的不等式 $2(a-b)x+a-5b>0$ 的解集为 $x<\frac{7}{10}$，求关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集.

解题秘方：根据不等式性质与已知不等式的解集的关系，确定不等式中字母的等量关系和不等关系，用此关系再求未知不等式的解集.

解：整理 $2(a-b)x+a-5b>0$，得 $2(a-b)x>-a+5b$.

由其解集为 $x<\frac{7}{10}$，得 $2(a-b)<0$ 且 $\frac{-a+5b}{2(a-b)}=\frac{7}{10}$.

于是 $-10a+50b=14(a-b)$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{8}$.

$\because \frac{-a+5b}{2(a-b)}=\frac{7}{10}>0$，

$\therefore$ 分子与分母是同号的.

$\therefore -a+5b<0$，所以 $5b<a$.

又 $\because a-b<0$，即 $a<b$，

$\therefore 5b<a<b$，

$\therefore 5b<b$，所以 $b<0$.

又 $\because a<b$，所以 $a<0$.

$\therefore$ 由 $ax>b$（a 为负数），

得 $x<\frac{b}{a}=\frac{3}{8}$，即 $x<\frac{3}{8}$.

详解

$\because$ 不等号改变了方向.

$\therefore \frac{-a+5b}{2(a-b)}=\frac{7}{10}$ 且 $2(a-b)<0$.

$\therefore -a+5b<0$.

方法点拨

解题时要充分挖掘题中的已知条件，包括隐含的条件，如确定 a 的取值范围（正负性）之后，才能正确解决本题.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 不等式的性质及利用不等式的性质解不等式是本节的重点，也是历年中考的重要考点之一，主要题型有选择题和填空题，有时也与方程知识综合起来以解答题的形式进行考查.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用不等式的性质识别不等式的变形

例 6 [中考·株洲] 已知实数 a，b 满足 $a+1>b+1$，则下列选项可能错误的为（　　）

A. $a>b$　　B. $a+2>b+2$　　C. $-a<-b$　　D. $2a>3b$

试题评析：本题考查了不等式的性质，解题的关键是不等式两边同时乘或除以一个负数不等号改变方向.

解：将原不等式的两边同时减去 1，得到 $a>b$；

将原不等式的两边同时加 1，得到 $a+2>b+2$；

将原不等式的两边先同时减去 1，再同时乘 -1，得到 $-a<-b$；选项 D 的变形不符合不等式的性质，故选 D.

答案：D

考法点津

不等式的性质是不等式的变形以及解不等式的依据，运用不等式的性质识别不等式变形是否正确注意两点：

一是“两同”，两边同时与同一个数；

二是不等号的变与不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用不等式的性质比较大小

例 7 [中考·绵阳]设“▲”“●”“■”分别表示三种不同的物体，现用天平称两次，情况如图 9.1-9 所示，那么▲，●，■这三种物体按质量从大到小排列应为（　　）

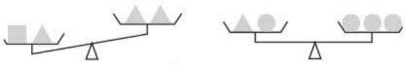


图 9.1-9

A. ■，●，▲　　B. ▲，■，●

C. ■，▲，●　　D. ●，▲，■

试题评析：本题考查了不等式的性质，解题的关键是从图中分析出如何利用不等式的性质.

答案：C

试题精析

这是一道看图识图题，设▲，●，■的质量分别为 a，b，c，由第一个天平可得 a+c>2a，由不等式的性质 1，两边同时减去 a，得 c>a. 由第二个天平可得 a+b=3b，移项得 a=2b. 所以 a>b. 因此 c>a>b.

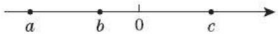
两年模拟兵法 ☞答案见 268 页

1. [中考·常州]若 $x > y$，则下列不等式中不一定成立的是（　　）

A. $x+1 > y+1$　　B. $2x > 2y$

C. $\frac{x}{2} > \frac{y}{2}$　　D. $x^2 > y^2$

2. [中考·枣庄]实数 a，b，c 在数轴上对应的点的位置如图所示，下列式子中，正确的是（　　）



（第 2 题）

A. $ac > bc$　　B. $|a-b| = a-b$

C. $-a < -b < -c$　　D. $-a-c > -b-c$

3. 不等式 $x+1 < 3$ 的正整数解有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

4. 根据不等式的性质，用“<”或“>”填空.

（1）若 $a-1 > b-1$，则 a_____b；

（2）若 $a+3 > b+3$，则 a_____b；

（3）若 $2a > 2b$，则 a_____b；

（4）若 $-2a > -2b$，则 a_____b.

5. 若 $a > b$，$m > 0$，$n < 0$，用“>”或“<”填空.

（1）$a+m$_____$b+m$；（2）$a+n$_____$b+n$；

（3）$m-a$_____$m-b$；（4）an_____bn；

（5）$\frac{a}{m}$_____$\frac{b}{m}$；（6）$\frac{a}{n}$_____$\frac{b}{n}$.

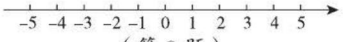
6. [中考·湖州]已知四个有理数 a，b，x，y 同时满足以下关系式：$b > a$，$x+y=a+b$，$y-x < a-b$. 请将这四个有理数按从小到大的顺序用“<”号连接起来是_____.

7. 根据不等式的性质，把下列不等式化为 $x > a$ 或 $x < a$ 的形式.

（1）$x-3 > 1$；　　（2）$-\frac{2}{3}x > -1$；

（3）$3x < 1+2x$；　　（4）$2x > 4$.

8. [中考·连云港]解不等式：$\frac{3}{2}x-1 > 2x$，并把解集在如图所示的数轴上表示出来.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}3x+y=1+a, & ①\\ x+3y=3, & ②\end{cases}$ 的解满足 $x+y<2$，求 a 的取值范围.

【导学号：7207895】

10. 某人要去 3 420 米远的 B 地办事，要求在 23 分钟内到达，已知这人每分钟走 90 米，每分钟跑 240 米，则这人至少要跑多少分钟?

素养提分 行动篇

实数的大小比较

两个数量的大小可以通过它们的差来判断，如果两个实数 a 和 b 比较大小，那么

若 $a>b$，则 $a-b>0$；

若 $a=b$，则 $a-b=0$；

若 $a<b$，则 $a-b<0$.

同样，反过来也是成立的，即：

若 $a-b>0$，则 $a>b$；

若 $a-b=0$，则 $a=b$；

若 $a-b<0$，则 $a<b$.

因此，我们经常对于两个要比较的对象先求出它们的差，根据差的正负性判断对象的大小. 两个实数的大小比较除上面的求差法比较外，还有下列几种方法供大家参考：

1. **求商法**：设 a，b 为任意两个正实数，先求出 a 与 b 的商，再根据“当 $\frac{a}{b}<1$ 时，$a<b$；当 $\frac{a}{b}=1$ 时，$a=b$；当 $\frac{a}{b}>1$ 时，$a>b$”来比较 a 与 b 的大小.

2. **倒数法**：设 a，b 为任意两个正实数，先分别求出 a 与 b 的倒数，再根据“当 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 时，$a>b$；当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ 时，$a=b$；当 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 时，$a<b$”来比较 a 与 b 的大小.

3. **估算法**：设 a，b 为任意两个正实数，先估算出 a，b 两数或两数中某部分的取值范围，再进行比较.

4. **平方法**：比较两个无理数的大小时，先将要比较的两个数分别平方，再根据“当 $a>0$，$b>0$ 时，可由 $a^2>b^2$ 得到 $a>b$”比较大小. 也就是说，两个正数比较大小时，如果一个数的平方比另一个数的平方大，则这个数大于另一个数.

两个实数的大小比较，形式多种多样，只要我们在实际操作时，有选择性地灵活运用上述方法，一定能方便快捷地取得令人满意的结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.2 一元一次不等式

核心知识

- 一元一次不等式
- 一元一次不等式的解法
- 一元一次不等式的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元一次不等式

1. 定义: 含有一个未知数，未知数的次数是1的不等式，叫做一元一次不等式.

一元一次不等式的“三要素”：

（1）不等式的两边都是整式；

（2）只含一个未知数；

（3）未知数的次数是1.

2. 一元一次不等式与一元一次方程间的关系：

		一元一次方程	一元一次不等式
相同点	未知数个数	1	1
	未知数次数	1	1
	式子特点	含有未知数的式子均为整式	含有未知数的式子均为整式
不同点	表示关系	相等	不等

提分·必记

特别警示

- 判断一个不等式是否为一元一次不等式，必须化简整理后再判断.
- 只含有一个未知数，隐含着未知数的系数不为零，即化成最简形式 $ax>0$（$ax\geqslant 0$），或 $ax<0$（$ax\leqslant 0$）时，$a\neq 0$.

拨考向 利用一元一次不等式的定义进行识别

例1 下列不等式中，是一元一次不等式的有（　　）

（1）$x^2+1>2x$；（2）$\frac{1}{x}+2>0$；（3）$x>y$；（4）$\frac{1-x}{2}\leqslant 1$.

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

解题秘方： 紧扣一元一次不等式的“三要素”去识别.

解：（1）中未知数的最高次数是2，故不是一元一次不等式；

（2）中左边不是整式，故不是一元一次不等式；

（3）中有两个未知数，故不是一元一次不等式；

（4）是一元一次不等式.

答案： A

提分·秘诀

方法点拨

判断一个不等式是否为一元一次不等式的步骤：

先对所给不等式进行化简整理，再看是否满足一元一次不等式的“三要素”，同时要注意：

（1）化简前不等式的左右两边都是**整式**；

（2）化简后**未知数的次数是1且系数不为0**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 一元一次不等式的解法

1. 解一元一次不等式，要根据不等式的性质，将不等式逐步化为$x<a$（$x\leqslant a$）或$x>a$（$x\geqslant a$）的形式．解一元一次不等式的步骤如下：

去分母→去括号→移项→合并同类项→系数化为 1.

2. 解一元一次不等式与解一元一次方程的区别与联系：

	一元一次方程	一元一次不等式
解法步骤	①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤系数化为 1.（解不等式时，去分母、系数化为 1 时，若两边同时乘（或除以）一个负数，不等号的方向改变）	
依据	等式的性质	不等式的性质
解的个数	只有一个解	有无数多个解
解（集）的形式	$x=a$	$x<a$（$x\leqslant a$）或$x>a$（$x\geqslant a$）

提分·必记

特别提醒

解一元一次不等式时，五个步骤不一定都要用到，并且不一定都要按照这个顺序求解，应根据不等式的特点灵活求解．

拔考向▶ 利用解一元一次不等式解决问题

类型 1：利用解一元一次不等式的步骤解一元一次不等式

例 2 解不等式：$x-\dfrac{3x-8}{2}+1\geqslant\dfrac{2(10-x)}{7}$，并把解集在数轴上表示出来．

解题秘方：先根据解一元一次不等式的步骤求出解集，然后在数轴上表示出解集．

解：去分母，得$14x-7(3x-8)+14\geqslant 4(10-x)$．

去括号，得$14x-21x+56+14\geqslant 40-4x$.

移项，得$14x-21x+4x\geqslant 40-56-14$.

合并同类项，得$-3x\geqslant -30$.

系数化为 1，得$x\leqslant 10$.　注意改变不等号方向.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.2-1 所示．



图 9.2-1

提分·秘诀

方法点拨

解一元一次不等式时，有两步可能会改变不等号的方向：其一，去分母；其二，系数化为 1. 为了使问题更加简便，可以在“去分母”这一步里，两边同乘一个正数，这样，使“改变不等号方向”的问题落到“系数化为 1”这一步，由于要注意的只有这一步，这样就不容易出错了．

类型 2：利用已知不等式的解集求字母的值

例 3 已知不等式$\dfrac{1}{3}(x-m)>3-m$的解集为$x>1$，则m的值为_____.

解题秘方：先用含m的式子表示出不等式的解集，再根据已知条件列出关于m的方程，求解即可．

解：去分母，得$x-m>3(3-m)$，

去括号，得$x-m>9-3m$.

移项、合并同类项，得$x>9-2m$.

∵不等式的解集为$x>1$，

∴$9-2m=1$，解得$m=4$.　∵ $x>9-2m$ 与 $x>1$ 表示同一个不等式的解集，∴ $9-2m=1$.

答案：4

题意解读

已知不等式$\dfrac{1}{3}(x-m)>3-m$的解集为$x>1$，则x为未知数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：构造一元一次不等式求字母的取值范围

例 4 当 x 取何正整数时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值？

解题秘方：先根据题意列出不等式，再解不等式．

解：根据题意，得 $\frac{x-2}{2} \leqslant \frac{7-x}{3}$．

去分母，得 $3(x-2) \leqslant 2(7-x)$．

去括号，得 $3x-6 \leqslant 14-2x$．

移项、合并同类项，得 $5x \leqslant 20$．

系数化为 1，得 $x \leqslant 4$，

则不等式的正整数解为 1，2，3，4．

所以当 x 取 1，2，3，4 时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值．

方法点拨

求满足不等关系式子成立时的字母的值或取值范围时，其关键是列出正确的不等式．

点知识 ▸ 3 一元一次不等式的实际应用

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的解．

列不等式解决实际问题的步骤：

（1）**审**：认真审题，找出已知量和未知量，并找出它们之间的关系；

（2）**设**：设出适当的未知数；

（3）**列**：根据题中的不等关系列出不等式；

（4）**解**：解不等式，求出其解集；

（5）**验**：检验所求出的不等式的解集是否符合题意；

（6）**答**：写出答案．

提分·必记

警示误区

- 设未知数时，表示不等关系的文字（如至少或最多）不能写；
- 检验时，要注意实际问题中的隐含条件，结果必须满足两个方面：一是不等式的解；二是要符合实际意义．

拔考向 ▸ 利用一元一次不等式解决实际问题

类型 1：利用一元一次不等式解决实际问题

例 5 某物流公司要将 300 吨物资运往某地，现有 A，B 两种型号的车可供调用，已知 A 型车每辆可装 20 吨，B 型车每辆可装 15 吨，在每辆车不超载的条件下，把 300 吨物资装运完，问：在已确定调用 5 辆 A 型车的前提下，至少还需调用 B 型车多少辆？

解题秘方：分析题中隐含的不等关系建立不等式模型解决问题．

解：设还需调用 B 型车 x 辆．

根据题意，得 $20\times5+15x \geqslant 300$．

解得 $x \geqslant 13\frac{1}{3}$．

因为 x 为整数，所以 x 的最小值为 14．

答：至少还需调用 B 型车 14 辆．

提分·秘诀

特别提醒

- 隐含的不等关系：A、B 两种型号的汽车总共运的物资的吨数不少于 300 吨．
- 本题中由于车的辆数为整数，因此要在这个范围内取最小整数解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：方程与不等式的综合实际应用

例 6 某电器商场销售 A，B 两种型号计算器，A，B 两种计算器的进货价格分别为每台 30 元，40 元．商场销售 5 台 A 型号和 1 台 B 型号计算器，可获利润 76 元；销售 6 台 A 型号和 3 台 B 型号计算器，可获利润 120 元．（利润 = 销售价格 − 进货价格）

（1）求商场销售 A，B 两种型号计算器的销售价格分别是每台多少元？

（2）商场准备用不多于 2 500 元的资金购进 A，B 两种型号计算器共 70 台，问最少需要购进 A 型号的计算器多少台？

解题秘方：根据题中的等量关系列出方程组，求出题目中关键的未知量，再根据不等关系建立不等式模型解决问题．

解：（1）设 A，B 两种型号计算器的销售价格分别是每台 x 元，y 元，

则 $\begin{cases}5(x-30)+(y-40)=76,\\6(x-30)+3(y-40)=120,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=42,\\y=56.\end{cases}$

答：A，B 两种型号计算器的销售价格分别为每台 42 元，56 元．

（2）设需要购进 A 型号的计算器 a 台，则

$30a+40(70-a)\leqslant 2\,500$，解得 $a\geqslant 30$.

答：最少需要购进 A 型号的计算器 30 台．

方法点拨

运用方程组或不等式解决实际问题时，从实际问题中发现相等关系或不等关系，通过方程组模型或不等式模型解决实际问题．列不等式解应用题时，首先审题，找出题中的未知量和所有的已知量，直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为未知数，然后用含未知数的式子表示相关的量，找出不等关系列不等式、求解、作答，即审、设、列、解、验、答．

类型 3：利用一元一次不等式解决优化方案问题

例 7 某校组织学生参加“周末郊游”．甲旅行社说：“只要一名学生买全票，那么其余学生可享受半价优惠．”乙旅行社说：“全体学生都可按 6 折优惠．”已知全票价为 240 元．

（1）设学生数为 x 人，甲旅行社收费为 $y_{甲}$ 元，乙旅行社收费为 $y_{乙}$ 元，用含 x 的式子表示出 $y_{甲}$ 与 $y_{乙}$；

（2）讨论哪一家旅行社更优惠．

解题秘方：（1）根据题意直接列式、化简即可；（2）分三种情况讨论：$y_{甲}>y_{乙}$，$y_{甲}=y_{乙}$，$y_{甲}<y_{乙}$，分别求出满足要求的学生数．

解：（1）$y_{甲}=240+(x-1)\times 120=120x+120$，

$y_{乙}=240\times 0.6x=144x$.

（2）当 $y_{甲}>y_{乙}$ 时，$120x+120>144x$，

解得 $x<5$.

∴当学生数少于 5 人时，乙旅行社更优惠．

当 $y_{甲}=y_{乙}$ 时，$120x+120=144x$，

解得 $x=5$.

∴当学生数正好为 5 人时，两家旅行社一样优惠．

当 $y_{甲}<y_{乙}$ 时，$120x+120<144x$，

解得 $x>5$.

∴当学生数超过 5 人时，甲旅行社更优惠．

解法提醒

当一个问题有多种可能的情况时，需要分情况讨论出所有可能的结果，体现了分类讨论思想．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用两个不等式的同解定义求字母值

例 8 如果关于 x 的不等式 $(2-a)x-3a<-1$ 的解集与 $2x<4$ 的解集相同，求 a 的值.

解题秘方：先把字母 a 当成常数，求出两个关于 x 的不等式的解集，再根据两个不等式的解集相同，得出关于 a 的方程，最后求出 a 的值.

解：整理，得 $(2-a)x<3a-1$.

①当 $2-a>0$，即 $a<2$ 时，$x<\dfrac{3a-1}{2-a}$；

②当 $2-a=0$，即 $a=2$ 时，x 取一切实数；

③当 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，$x>\dfrac{3a-1}{2-a}$.

解不等式 $2x<4$，得 $x<2$.

∵两个不等式的解集相同，

∴②③与 $x<2$ 不相符，舍去.

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{3a-1}{2-a}=2, \\ a<2, \end{cases}$$ 解得 $a=1$.

挑战·高分

解法提醒

参数也可做已知数：遇到含字母参数的一元一次不等式求解集的问题时，千万不要怕，其解题步骤和解不含字母参数的一元一次不等式的步骤基本一致，应注意去分母和系数化为1，两步中乘（或除以）的若是含字母的式子，则要对式子的取值范围进行分类讨论.

拔尖角度 2 利用不等式解与方程组综合的应用

例 9 已知方程组 $\begin{cases} 3x+y=k+1, \\ x+3y=k-1 \end{cases}$ 的解满足 $x+y<0$，求 k 的取值范围.

解题秘方：由于方程组的解满足 $x+y<0$，故可考虑把 k 看成已知数，求出 x，y 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解：$\begin{cases} 3x+y=k+1, & ① \\ x+3y=k-1. & ② \end{cases}$

① $\times 3-$ ②，得 $8x=2k+4$，

$\therefore x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2}$.

② $\times 3-$ ①，得 $8y=2k-4$，

$\therefore y=\dfrac{k}{4}-\dfrac{1}{2}$.

∵ $x+y<0$，

$\therefore \dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{4}-\dfrac{1}{2}<0$.

∴ $k<0$，即 k 的取值范围为 $k<0$.

挑战·高分

另解

分析：观察这个方程组，可以发现：我们只需把两个方程相加，就可以得到 $x+y$ 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解：$\begin{cases} 3x+y=k+1, & ① \\ x+3y=k-1. & ② \end{cases}$

① + ②，得 $4x+4y=2k$，

$\therefore x+y=\dfrac{2k}{4}=\dfrac{k}{2}$.

∵ $x+y<0$，

$\therefore \dfrac{k}{2}<0$.

∴ $k<0$，

即 k 的取值范围为 $k<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 3 利用不等式解方案设计的实际应用

挑战·高分

例10 某公司为了扩大经营，决定购进6台机器用于生产某种活塞．现有甲、乙两种机器可供选择，其中每台机器的价格和每台机器日生产活塞的数量如下表：

	甲	乙
价格/（万元/台）	7	5
每台日生产量/个	100	60

公司要求本次购买机器所耗资金不能超过34万元．

（1）按该公司要求，有哪几种购买方案？

（2）若该公司购进的6台机器的日生产量不低于380个，那么为了节约资金应选择哪种购买方案？

解题秘方：根据题目中的不等关系建立不等式模型，利用解集中特殊解设计方案．

解：（1）设购买甲种机器x（$0 \leqslant x \leqslant 6$）台，则购买乙种机器（$6-x$）台．

依题意，得$7x+5(6-x) \leqslant 34$，解得$x \leqslant 2$.

∵ x取非负整数，

∴ $x=0$，1，2.

∴该公司有以下三种购买方案：

方案一：不购买甲种机器，购买乙种机器6台；

方案二：购买甲种机器1台，购买乙种机器5台；

方案三：购买甲种机器2台，购买乙种机器4台．

（2）按方案一购买机器，所耗资金为$6\times5=30$（万元），新购买的6台机器的日生产量为$6\times60=360$（个）；

按方案二购买机器，所耗资金为$1\times7+5\times5=32$（万元），新购买的6台机器的日生产量为$1\times100+5\times60=400$（个）；

按方案三购买机器，所耗资金为$2\times7+4\times5=34$（万元），新购买的6台机器的日生产量为$2\times100+4\times60=440$（个）．

∵方案二既能达到日生产量不低于380个的要求，又比方案三节约2万元资金，

∴应选择方案二．

解法提醒

解方案设计问题的方法：先由题意列出不等式，解不等式，得出符合题意的解，然后对不同的情况进行讨论，从而得出其最优方案．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

熟练地运用不等式的性质解一元一次不等式，并把解集表示在数轴上，会求不等式的特殊解（整数解、非负整数解或负整数解），利用不等式解决实际问题等是历年中考的重要考点．考查的形式多样，选择题、填空题和解答题都有涉及．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法1 一元一次不等式的特殊解

例11 [中考·遵义]不等式$6-4x \geqslant 3x-8$的非负整数解有(　　)

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

试题评析：本题考查了求一元一次不等式特殊解，掌握解一元一次不等式的一般步骤是解决问题的关键.

解：移项，得$-4x-3x \geqslant -8-6$.

合并同类项，得$-7x \geqslant -14$.

系数化为1，得$x \leqslant 2$.

∴非负整数解为0，1，2.

答案：B

考法2 一元一次不等式与一元一次方程的综合

例12 [中考·丽水]关于x的一元一次方程$x-m+2=0$的解是负数，则m的取值范围是(　　)

A.$m \geqslant 2$　　B.$m > 2$　　C.$m < 2$　　D.$m \leqslant 2$

试题评析：本题主要考查了解一元一次方程以及一元一次不等式，解题的关键是对“解是负数”的理解，从而将题目转化为不等式进行求解.

解：$x-m+2=0$，

移项，得$x=m-2$.

∵关于x的一元一次方程$x-m+2=0$的解是负数，

∴$x=m-2<0$，∴$m<2$.

答案：C

考法3 一元一次不等式与二元一次方程组的综合

例13 [中考·宜宾]若关于x、y的二元一次方程组$\begin{cases}x-y=2m+1,\\x+3y=3\end{cases}$的解满足$x+y>0$，则$m$的取值范围是_____.

试题评析：本题考查解二元一次方程组，解一元一次不等式的综合运用，熟练掌握二元一次方程组的解法和一元一次不等式的解法是解题的关键.

解：关于x、y的二元一次方程组$\begin{cases}x-y=2m+1,①\\x+3y=3,②\end{cases}$

②－①得，$4y=2-2m$，$y=\dfrac{1-m}{2}$.

①×3+②得，$4x=6m+6$，$x=\dfrac{3m+3}{2}$.

∵$x+y>0$，∴$\dfrac{3m+3}{2}+\dfrac{1-m}{2}>0$.

解得$m>-2$.

答案：$m>-2$

另解

将方程组中的两个方程相加得，

$2x+2y=2m+4$，

∴$x+y=m+2$.

∵$x+y>0$，

∴$m+2>0$.

∴$m>-2$.

冲刺·满分

特别提醒

- 求一元一次不等式的特殊解，先必须求出一元一次不等式的解集，然后在解集中根据特殊解的“特殊”性取解.
- 非负整数包括正整数和0其中“0”易忽视.

考法点评

一元一次方程与一元一次不等式转化的细节是“解或解集的情况”：由一元一次方程解的情况列一元一次不等式，也可由一元一次不等式解集的情况列一元一次方程.如：关于x的一元一次不等式$x-m+2>0$的解集为$x>2$，则$m=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 一元一次不等式的应用

例 14 [中考·齐齐哈尔]为有效开展“阳光体育”活动，某校计划购买篮球和足球共 50 个，购买资金不超过 3 000 元. 若每个篮球 80 元，每个足球 50 元，则篮球最多可购买（　　）

A.16 个　　B.17 个　　C.33 个　　D.34 个

试题评析：本题考查了一元一次不等式(组)的应用——求范围的问题，解题的关键是列出不等式.

解：设篮球可购买 x 个，由题意可得 $80x+50(50-x)\leqslant 3\,000$，解得 $x\leqslant\frac{50}{3}$，故不等式的最大整数解为 $x=16$.

答案：A

剖题

1. 等量关系：“篮球和足球共 50 个”，用于两个未知量之间的转化，若设篮球购买 x 个，则足球购买(50-x)个；
2. 不等关系：“购买资金不超过 3 000 元”，用于列一元一次不等式.
3. 取解时，注意未知数的实际意义.

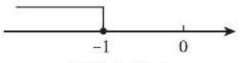
两年模拟兵法 ☞答案见 268 页

1. 下列各式是一元一次不等式的是（　　）

A.$2x<3y$　　B.$x^2+2x+1>0$

C.$4x-5<x$　　D.$3x=4(2-x)$

2. 关于 x 的不等式 $2x-a\leqslant -1$ 的解集在数轴上的表示如图所示，则 a 的值是（　　）



（第 2 题）

A. 0　　B. −3

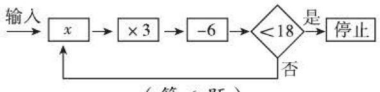
C. −2　　D. −1

3. 若 $(m-2)x^{2m+1}-1>5$ 是关于 x 的一元一次不等式，则该不等式的解集为_____.

4. 若 $1-\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{1+3x}{3}$ 的值，则 x 的取值范围是_____.

5. [中考·台州]商家花费 760 元购进某种水果 80 千克，销售中有 5% 的水果正常损耗，为了避免亏本，售价至少应定为_____元/千克.

6. [中考·烟台]运行程序如图所示，从“输入实数 x”到“结果是否 < 18”为一次程序操作，若输入 x 后程序操作仅进行了一次就停止，则 x 的取值范围是_____.



（第 6 题）

7. [中考·舟山]小明解不等式 $\frac{1+x}{2}-\frac{2x+1}{3}\leqslant 1$ 的过程如下，请指出他解答过程中错误步骤的序号，并写出正确的解答过程.

> 解：去分母，得 $3(1+x)-2(2x+1)\leqslant 1$…①
> 去括号，得 $3+3x-4x+1\leqslant 1$…②
> 移项，得 $3x-4x\leqslant 1-3-1$…③
> 合并同类项，得 $-x\leqslant -3$…④
> 两边都除以 −1，得 $x\leqslant 3$…⑤

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来.

（1）$2(x-1)-3<1$；

（2）[中考·巴中] $\frac{2x-1}{3}-\frac{9x+2}{6}\leqslant 1$.

9. 已知不等式 $2(x+1)-5<3(x+1)+4$ 的最小整数解是关于 x 的方程 $\frac{1}{3}x-mx=5$ 的解，求 $m^2-2m-11$ 的值.

10. 已知 $|2m-6|+(3m-n-5)^2=0$，且 $(3n-2m)x<-15$，化简：$|2x+5|-|2x-5|+3$.

11. [中考·泰安] 某水果商从批发市场用 8 000 元购进了大樱桃和小樱桃各 200 千克，大樱桃的进价比小樱桃的进价每千克多 20 元. 大樱桃售价为每千克 40 元，小樱桃售价为每千克 16 元.

（1）大樱桃和小樱桃的进价分别是每千克多少元？销售完后，该水果商共赚了多少元钱？

（2）该水果商第二次仍用 8 000 元钱从批发市场购进了大樱桃和小樱桃各 200 千克，进价不变，但在运输过程中小樱桃损耗了 20%. 若小樱桃的售价不变，要想让第二次赚的钱不少于第一次所赚钱的 90%，大樱桃的售价最少应为多少？

【导学号：7207895】

12. 为了保护环境，某企业决定购买 10 台污水处理设备，现有 A，B 两种型号的设备，其中每台的价格、月处理污水量如下表：

经预算，该企业购买设备的资金不高于 105 万元.

	A 型	B 型
价格/（万元/台）	12	10
月处理污水量/t	240	200

（1）该企业有哪几种购买方案？

（2）若该企业每月产生的污水量为 2 040 t，为了节约资金，应选择哪种购买方案？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.3 一元一次不等式组

核心知识

- 一元一次不等式组的定义
- 一元一次不等式组的解集
- 一元一次不等式组的解法
- 一元一次不等式组的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元一次不等式组

1. 定义： 把几个含有相同未知数的一元一次不等式合在一起，就组成了一个一元一次不等式组.

特别提醒： 一元一次不等式组必须同时满足两个条件：

（1）组成不等式组的每个不等式都是一元一次不等式；

（2）整个不等式组中只含一个未知数.

2. 表示方式： 不等式组可以用“{”表示，也可以用形如 $a_2x+b_2<ax+b<a_1x+b_1$ 的方式表示.

提分·必记

特别解读

1. 一元一次不等式组中包含的一元一次不等式可以是两个，也可以是多个；
2. 未知数的个数必须唯一.

拨考向 利用一元一次不等式组的定义进行识别

例 1 下列各不等式组，其中是一元一次不等式组的是_____.（填序号）

① $\begin{cases} x+2<3x, \\ y>2; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+1>2x, \\ x<1; \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2(x-1)>3x, \\ x\leqslant -2; \end{cases}$

④ $-4x\leqslant x<5$; ⑤ $\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+3<0, \\ x-4>2x-1; \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x+6\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}>2. \end{cases}$

解题秘方： 紧扣一元一次不等式组的定义的两个条件去识别.

解： ①中含有两个未知数，不是一元一次不等式组；

②中未知数的最高次数是 2，不是一元一次不等式组；

③中含有两个一元一次不等式，且只含一个未知数，是一元一次不等式组；

④可以写成 $\begin{cases} x\geqslant -4x, \\ x<5, \end{cases}$ 是一元一次不等式组；

⑤中含有三个一元一次不等式，但只含一个未知数，是一元一次不等式组；

⑥中的 $\dfrac{1}{x}$ 不是整式，不是一元一次不等式组.

答案： ③④⑤

提分·秘诀

特别提醒

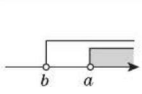
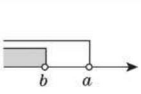
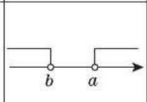
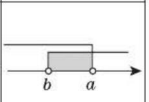
- 组成不等式组的每个不等式必须是一元一次不等式，这句话包含如下两层意思：
  (1) 每个不等式的左右两边必须是整式；
  (2) 每个不等式化简后，未知数的次数是 1，且系数不为零.
- 含有同一字母的几个一次整式连续不等的式子也是一元一次不等式组.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 一元一次不等式组的解集

1. **定义**：一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的解集.

2. **一元一次不等式组解集的四种情况**：

不等式组（$a>b$）	$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$
不等式组的解集	$x>a$	$x<b$	无解	$b<x<a$
不等式组的解集在数轴上的表示				

提分·必记

特别解读

- “公共部分”是指同时满足不等式组中每一个不等式的解集的部分. 如果组成不等式组的各个不等式的解集没有公共部分，则这个不等式组无解.
- 不等式组的解集中的每一个解满足不等式组中的每一个不等式.

拔考向▶ 利用一元一次不等式组的解集解决问题

类型 1：利用数轴确定一元一次不等式组的解集

例 2 利用数轴求下列不等式组的解集.

（1）$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x>-1;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x<-1;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x<-1;\end{cases}$ （4）$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x>-1.\end{cases}$

解题秘方：解题时先在同一数轴上表示出不等式组中两个不等式的解集，再找出两个不等式解集的公共部分.

解：（1）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.3−1 所示.

所以这个不等式组的解集为 $x\geqslant 2$.

（2）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.3−2 所示.

所以这个不等式组的解集为 $x<-1$.

（3）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.3−3 所示.

所以这个不等式组无解.

（4）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.3−4 所示.

所以这个不等式组的解集为 $-1<x\leqslant 2$.

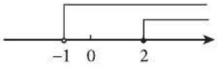


图 9.3−1

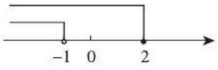


图 9.3−2

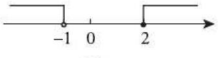


图 9.3−3

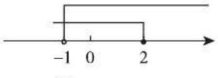


图 9.3−4

提分·秘诀

方法点拨

确定一元一次不等式组解集的常用方法：

1. **数轴法**：就是将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来，然后找出它们解集的公共部分，这个公共部分就是此不等式组的解集，如果没有公共部分，那么这个不等式组无解.
2. **口诀法**：“同大取大”“同小取小”“大小小大中间找”“大大小小无处找”，数轴法找解集直观，口诀法找解集便于记忆.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用不等式组的解集确定字母的值

例 3 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > m-1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > -1$，则 $m=$ _____.

解题秘方：根据不等式组解集的确定方法得出两个不等式解集端点值之间的数量关系.

解：$\because 2 > -1$，$\therefore m+2 > m-1$.

根据“同大取大”可知，关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > m-1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > m+2$，

而题中给出其解集为 $x > -1$，$\therefore m+2=-1$，$\therefore m=-3$.

答案：-3

方法点拨

解答这类题，一般先将字母视为常数，再逆用不等式组解集的意义，由不等式组的解集反推得出含字母的方程，最后求出字母的值.

点知识 ▸ 3 解一元一次不等式组

提分·必记

1. 定义：求不等式组的解集的过程叫做解不等式组.

2. 解一元一次不等式组的一般步骤：

（1）分别解每一个不等式；

（2）利用数轴法或口诀法确定不等式组的解集；

（3）写出不等式组的解集.

一元一次不等式组的解法

特别提醒

解一元一次不等式组的实质就是寻找不等式组中所有不等式解集的公共部分.

技考向 ▸ 利用解一元一次不等式组解决问题

提分·秘诀

类型 1：解一元一次不等式组

例 4 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 5x-2>3(x+1), & ① \\ \frac{1}{2}x-1 \leqslant 7-\frac{3}{2}x; & ② \end{cases}$

（2）$-1<\frac{3x-1}{2} \leqslant 5$.

解题秘方：紧扣解一元一次不等式组的一般步骤求解.

解：（1）解不等式①，得 $x>2.5$.

解不等式②，得 $x \leqslant 4$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 9.3-5.

由数轴可知这两个不等式解集的公共部分是 $2.5<x \leqslant 4$，所以原不等式组的解集是 $2.5<x \leqslant 4$.

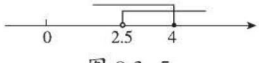


图 9.3-5

解法提醒

解不等式组的关键是要正确地求出每个不等式的解集，再利用数轴正确地表示出每个不等式的解集，从而找出不等式组的解集；熟练后，可不画数轴，直接利用“口诀法”写出不等式组的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）$-1<\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 5$ 可转化为不等式组 $\begin{cases}-1<\dfrac{3x-1}{2}, & ①\\ \dfrac{3x-1}{2}\leqslant 5. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-\dfrac{1}{3}$. 解不等式②，得 $x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 9.3−6.



图 9.3−6

由数轴可知这两个不等式解集的公共部分是 $-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$，所以原不等式组的解集为 $-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

另解（2）

$-2<3x-1\leqslant 10$,

$-1<3x\leqslant 11$,

$-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

类型 2：利用解一元一次不等式组确定特殊解

例 5 解不等式组 $\begin{cases}3x+1<2(x+2) & ①,\\ -\dfrac{1}{3}x\leqslant\dfrac{5}{3}x+2 & ②,\end{cases}$ 并求出该不等式组的整数解.

解题秘方：先求出不等式组的解集，然后在解集中取特殊解.

解：解不等式①，得 $x<3$.

解不等式②，得 $x\geqslant -1$.

不等式①和②的解集在数轴上的表示如图 9.3−7 所示.

所以不等式组的解集为 $-1\leqslant x<3$.

所以该不等式组的整数解为 -1，0，1，2.

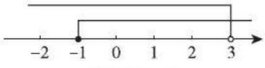


图 9.3−7

解法提醒

利用数轴找不等式组整数解的方法：

(1) 解不等式组；

(2) 将不等式组的解集在数轴上表示出来；

(3) 观察解集在数轴上的区间范围；

(4) 确定其整数解.

类型 3：利用不等式组的解集情况求字母的值或取值范围

例 6 不等式组 $\begin{cases}x-2>a,\\ x+2<b\end{cases}$ 的解集为 $-3<x<2$，则 $(a+b)^{2\,022}=$_____.

解题秘方：先解关于 x 的不等式组得到其解集；然后根据不等式组解集的意义，结合已知条件，得到关于 a，b 的二元一次方程组，求得 a，b 的值.

解：对于不等式组 $\begin{cases}x-2>a, & ①\\ x+2<b, & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>2+a$.

解不等式②，得 $x<b-2$.

∵不等式组的解集为 $-3<x<2$，

∴$\begin{cases}2+a=-3,\\ b-2=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-5,\\ b=4.\end{cases}$

∴$(a+b)^{2\,022}=(-5+4)^{2\,022}=(-1)^{2\,022}=1$.

答案：1

详解

∵$\begin{cases}x-2>a,\\ x+2<b\end{cases}$ 有解集，

∴由解集口诀“大小小大中间找”，得 $2+a<x<b-2$.

又 $-3<x<2$.

∴$\begin{cases}2+a=-3,\\ b-2=2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 7 若不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\1-2x>x-2\end{cases}$有解，则 a 的取值范围是_____.

解题秘方：先解不等式组中的两个不等式，再根据不等式组有解确定字母的取值范围.

解：对于不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,①\\1-2x>x-2,②\end{cases}$

解不等式①，得 $x\geqslant -a$. 解不等式②，得 $x<1$.

∵不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\1-2x>x-2\end{cases}$有解，

∴由“大小小大中间找”得 $-a<1$. ∴ $a>-1$.

答案：$a>-1$

方法点拨

根据不等式组的解的情况求字母的取值范围的方法：

已知不等式组的解的情况，确定这个不等式组中未知字母的取值范围，可先求出不等式组的解集，然后结合已知条件，或利用数轴直观地得到关于未知字母的关系式，即可解决问题.

点知识▶ 4 一元一次不等式组的应用

提分·必记

基本步骤：审→设→列→解→验→答（与列一元一次不等式相同）.

（1）**审**：认真审题，分清题中的已知量、未知量，并明确它们之间的不等关系；

（2）**设**：恰当地设未知数；

（3）**列**：依据题中的不等关系列出不等式组；

（4）**解**：解不等式组，求出解集；

（5）**验**：检验所求得的解集是否符合题意和实际意义；

（6）**答**：写出答案.

解法提醒

列一元一次不等式组的步骤和要求与列一元一次不等式一样；所不同的是题中所反映的数量关系不只一个，因此需要将所有反映数量关系的语句用不等式一一表示出来，形成一元一次不等式组.

拔考向▶ 建立一元一次不等式组的模型解决问题

类型 1：利用不等式组解决实际问题

例 8 在保护地球爱护家园活动中，校团委把一批树苗分给八（1）班同学去栽种. 如果每人分 2 棵，还剩 42 棵；如果前面每人分 3 棵，那么最后一人得到的树苗少于 5 棵（但至少分得一棵）.

（1）设八（1）班有 x 名同学，则这批树苗有多少棵？（用含 x 的式子表示）

（2）八（1）班至少有多少名同学？最多有多少名同学？

解题秘方：用式子表示最后一人得到的树苗棵数并根据最后一人得到的树苗棵数的范围列不等式组.

解：（1）这批树苗有（$2x+42$）棵.

（2）根据题意，得 $1\leqslant 2x+42-3(x-1)<5$.

解这个不等式组，得 $40<x\leqslant 44$.

答：八（1）班至少有 41 名同学，最多有 44 名同学.

提分·秘诀

解读

2×八（1）班学生数+42=树苗数.

即：树苗数为（2x+42）棵.

3×[八（1）班学生数-1]=已分树苗数.

即：除最后一人分得的树苗外的树苗数为3(x-1)棵.

解读

1≤最后一人分得的树苗数<5，而最后一人分得的树苗数为[(2x+42)-3(x-1)]棵.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用不等式组解决实际应用中的方案设计问题

例 9 某房地产开发公司计划建A、B两种户型的住房共80套．该公司所筹资金不少于2 090万元，但不超过2 096万元，且所筹资金全部用于建房．两种户型的建房成本和售价如下表：

	A型	B型
成本/（万元/套）	25	28
售价/（万元/套）	30	34


一元一次不等式组的应用

（1）该公司有哪几种建房方案？

（2）该公司如何建房可获得最大利润？

解题秘方：根据题意中揭示的不等关系列出不等式组，在解集中找出其特殊解设计方案．

解：（1）设建A型住房x套，则建B型住房（$80-x$）套．

根据题意，得$\begin{cases}25x+28(80-x)\geqslant 2\,090,\\25x+28(80-x)\leqslant 2\,096.\end{cases}$

解得$48\leqslant x\leqslant 50$.

因为x为整数，所以$x=48$，49，50. 所以有三种建房方案：

方案一：A型48套，B型32套；

方案二：A型49套，B型31套；

方案三：A型50套，B型30套．

（2）第一种方案获利：$48\times(30-25)+32\times(34-28)=432$（万元）；

第二种方案获利：$49\times(30-25)+31\times(34-28)=431$（万元）；

第三种方案获利：$50\times(30-25)+30\times(34-28)=430$（万元）．

所以选方案一获利最大．

解法提醒

求实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法：

常通过求不等式（组）的解集，分类讨论找出答案，即先根据题意，设出未知数，列出不等式（组），求出相应的取值范围，再根据题目的条件分类讨论，写出答案．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用构造不等式组法求字母的范围

挑战·高分

例 10 若点$P\left(2m+1,\ \dfrac{3m-1}{2}\right)$在第四象限，则$m$的取值范围是（　　）

A. $m<\dfrac{1}{3}$　　B. $m>-\dfrac{1}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant\dfrac{1}{3}$

解题秘方：第四象限内的点的横坐标大于0，纵坐标小于0，据此建立不等式组求解即可．

解：∵点$P\left(2m+1,\ \dfrac{3m-1}{2}\right)$在第四象限，∴$\begin{cases}2m+1>0,①\\\dfrac{3m-1}{2}<0.②\end{cases}$

详解

对于不等式组

$\begin{cases}2m+1>0,①\\\dfrac{3m-1}{2}<0.②\end{cases}$

由不等式①，得$2m>-1$.

∴$m>-\dfrac{1}{2}$.

由不等式②，得$3m-1<0$.

∴$3m<1$.

∴$m<\dfrac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解不等式①，得 $m > -\frac{1}{2}$.

解不等式②，得 $m < \frac{1}{3}$.

∴不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$.

∴ m 的取值范围是 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$.

答案：C

∴不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$.

拔尖角度▸ 2 利用已知不等式组的特殊解求字母的取值范围

挑战·高分

例 11 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-m<0, & ① \\ 7-2x \leqslant 1 & ② \end{cases}$ 的整数解共有 4 个，求 m 的取值范围.

解题秘方：先解不等式组，再根据其特殊解的情况找出临界点的取值范围.

解：解不等式①，得 $x < m$,

解不等式②，得 $x \geqslant 3$,

所以原不等式组的解集为 $3 \leqslant x < m$,

因为原不等式组有 4 个整数解，

所以原不等式组的解集在数轴上的表示如图 9.3−8 所示.

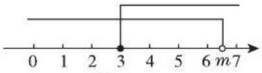


图 9.3−8

从图中可得 $6 < m < 7$.

当 m=6 时，不等式组只有 3 个整数解，不符合题意.

当 m=7 时，符合题意.

所以 m 的取值范围为 $6 < m \leqslant 7$.

解题时 m=6 和 m=7 的情况易被忽视，做此类型题时需注意.

方法点拨

结合不等式组解集的确定方法，灵活运用不等式组解集的意义，构造不等式（或方程）是解此类问题的关键，本类题利用了**数形结合思想**.

拔尖角度▸ 3 利用构造不等式组法求方程组中字母的范围

挑战·高分

例 12 在关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1, & ① \\ x+2y=3m & ② \end{cases}$ 中，已知 $x > 1$，$y < 2$，求 m 的取值范围.

解题秘方：先解方程组，求出 x，y（用含 m 的式子表示），再根据 $x > 1$，$y < 2$ 得到关于 m 的不等式组，解不等式组即可.

解：② − ①，得 $3y=m-1$,

∴ $y=\frac{m-1}{3}$.

把 $y=\frac{m-1}{3}$ 代入①，得 $x-\frac{m-1}{3}=2m+1$,

解法提醒

当方程组的解满足特定要求时，先设法求出这个方程组的解，然后根据题意列出不等式组，求出所求字母的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x=\dfrac{7m+2}{3}$.

$\because x>1$，$y<2$，$\therefore \begin{cases}\dfrac{7m+2}{3}>1,\\ \dfrac{m-1}{3}<2.\end{cases}$

解得 $\dfrac{1}{7}<m<7$，

$\therefore m$ 的取值范围为 $\dfrac{1}{7}<m<7$.

拔尖角度▸ 4 利用建模法解方程和不等式组的实际问题

挑战·高分

技巧点拨

解决这类问题的关键是在理解题意的基础上寻找明显或隐含的等量关系或不等关系，准确列出方程(组)或不等式(组).

例 13 某学校为开展“阳光体育”活动，计划拿出不超过 3 000 元的资金购买一批篮球、羽毛球拍和乒乓球拍，已知篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8 ∶ 3 ∶ 2，且其单价和为 130 元.

（1）请问篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别是多少元?

（2）若要求购买篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的总数量是 80 个（副），羽毛球拍的数量是篮球数量的 4 倍，且购买乒乓球拍的数量不超过 15 副，请问有几种购买方案?

解题秘方：（1）根据题中的等量关系列方程求解.

（2）根据题中的等量关系和不等关系列一元一次不等式组，利用解集中的特殊解设计方案.

解：（1）因为篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8 ∶ 3 ∶ 2，所以，可设它们的单价分别为 $8x$ 元、$3x$ 元、$2x$ 元，

于是，得 $8x+3x+2x=130$，解得 $x=10$.

所以，篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别为 80 元、30 元和 20 元.

（2）设购买篮球的数量为 y 个，则购买羽毛球拍的数量为 $4y$ 副，购买乒乓球拍的数量为（$80-y-4y$）副.

根据题意，得

$$\begin{cases}80y+30\times 4y+20(80-y-4y)\leqslant 3\,000, & ①\\ 80-y-4y\leqslant 15. & ②\end{cases}$$

解不等式①，得 $y\leqslant 14$.

解不等式②，得 $y\geqslant 13$.

于是，不等式组的解集为 $13\leqslant y\leqslant 14$.

因为 y 取整数，所以 y 只能取 13 或 14.

因此，一共有两种购买方案：

方案一：当 $y=13$ 时，篮球购买 13 个，羽毛球拍购买 52 副，乒乓球拍购买 15 副；

方案二：当 $y=14$ 时，篮球购买 14 个，羽毛球拍购买 56 副，乒乓球拍购买 10 副.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点有：（1）一元一次不等式组的解法，主要考查一元一次不等式组解集的确定，属于基础题，既有选择题、填空题，也有解答题；（2）求一元一次不等式组的特殊解；（3）应用一元一次不等式组解决实际问题，题型以解答题为主，考查学生分析问题、解决问题的能力.

三年中考兵法

考法1 求不等式组的解集

例14 [中考·聊城] 已知不等式组 $\frac{2-x}{2}\leqslant\frac{2x-4}{3}<\frac{x-1}{2}$ 的解集在数轴上（如图9.3-9）表示正确的是（　　）

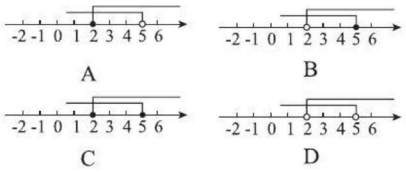


图 9.3-9

试题评析：本题考查了不等式组的解法及解集，解题的关键是掌握不等式组解集的求法.

解：由题意得 $\begin{cases}\frac{2-x}{2}\leqslant\frac{2x-4}{3},\\ \frac{2x-4}{3}<\frac{x-1}{2},\end{cases}$ 解不等式组得 $2\leqslant x<5$. 故选 A.

答案：A

例15 [中考·泰安] 不等式组 $\begin{cases}2x+9>6x+1,\\ x-k<1\end{cases}$ 的解集为 $x<2$. 则 k 的取值范围为（　　）

A.$k>1$　　B.$k<1$　　C.$k\geqslant 1$　　D.$k\leqslant 1$

试题评析：本题考查了已知一元一次不等式组解集的情形求不等式组中字母系数的情形. 解题的关键是根据“同小取小”来求不等式组中字母系数的范围.

解：对于不等式组 $\begin{cases}2x+9>6x+1,\ ①\\ x-k<1,\ ②\end{cases}$

由①得 $x<2$，由②得 $x<1+k$.

因为不等式组 $\begin{cases}2x+9>6x+1,\\ x-k<1\end{cases}$ 的解集为 $x<2$，

所以 $1+k\geqslant 2$，解得 $k\geqslant 1$.

答案：C

冲刺·满分

解题方法

求不等式组的解集，通常利用“分开解”“集中解”的方法.

- 分别求出不等式组中各不等式的解集；
- 利用数轴求出各个不等式解集的公共部分.

解题方法

1. 解不等式或不等式组，含有字母系数的，把字母系数当已知数来解，这是必不可少的步骤；
2. 借助于数轴，形象准确地把握不等式组有解、无解以及有几个整数解的问题；
3. 注意端点值，这类问题一般都与端点有关，一是利用数轴来说明是哪个端点，二是进行检验，端点是不是满足题意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 一元一次不等式组的特殊解

例 16 [中考·枣庄] x 取哪些整数值时，不等式 $5x+2>3(x-1)$ 与 $\frac{1}{2}x \leqslant 2-\frac{3}{2}x$ 都成立？

试题评析：本题考查了求一元一次不等式组的整数解的方法，求出不等式组的解集是解决问题的关键.

解：解不等式 $5x+2>3(x-1)$，得 $x>-\frac{5}{2}$；

解不等式 $\frac{1}{2}x \leqslant 2-\frac{3}{2}x$，得 $x \leqslant 1$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $-\frac{5}{2}<x \leqslant 1$. 故满足条件的整数有 -2，-1，0，1.

解题方法

- 正确解出不等式组的解集；
- 根据题目中对解的限制条件求得不等式组的特殊解.

考法 3 一元一次不等式组的应用

例 17 [中考·东营] 为解决中小学大班额问题，东营市各县区今年将改扩建部分中小学. 某县计划对 A、B 两类学校进行改扩建，根据预算，改扩建 2 所 A 类学校和 3 所 B 类学校共需资金 7 800 万元，改扩建 3 所 A 类学校和 1 所 B 类学校共需资金 5 400 万元.

（1）改扩建 1 所 A 类学校和 1 所 B 类学校所需资金分别是多少万元？

（2）该县计划改扩建 A、B 两类学校共 10 所，改扩建资金由国家财政和地方财政共同承担. 若国家财政拨付资金不超过 11 800 万元，地方财政投入资金不少于 4 000 万元，其中地方财政投入到 A、B 两类学校的改扩建资金分别为每所 300 万元和 500 万元，请问共有哪几种改扩建方案？

试题评析：本题考查了构建二元一次方程组、一元一次不等式组解决实际问题. 解题关键是寻找“等量关系或不等关系”.

解题方法

1. 寻找等量关系与不等关系，其中不等关系的常见词语，如“不超过”，“不少于”或某一范围等；
2. 建立方程(组)或不等式(组)的模型；
3. 求出解或解集；
4. 利用未知数的实际意义确定其特殊解；
5. 根据特殊解设计方案.

解：（1）设改扩建 1 所 A 类学校需资金 x 万元，改扩建 1 所 B 类学校需资金 y 万元，则 $\begin{cases}2x+3y=7\,800,\\3x+y=5\,400,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\,200,\\y=1\,800.\end{cases}$

答：改扩建 1 所 A 类学校需资金 1 200 万元，改扩建 1 所 B 类学校需资金 1 800 万元.

（2）设 A 类学校有 a 所，则 B 类学校有 $(10-a)$ 所.

则 $\begin{cases}(1\,200-300)a+(1\,800-500)(10-a) \leqslant 11\,800,\\300a+500(10-a) \geqslant 4\,000,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a \geqslant 3,\\a \leqslant 5.\end{cases}$ $\therefore 3 \leqslant a \leqslant 5$，即 $a=3$，4，5.

答：有 3 种改扩建方案，

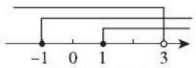
方案一：A 类学校改扩建 3 所，B 类学校改扩建 7 所；

方案二：A 类学校改扩建 4 所，B 类学校改扩建 6 所；

方案三：A 类学校改扩建 5 所，B 类学校改扩建 5 所.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 已知不等式①②③的解集在数轴上的表示如图所示，则它们的解集的公共部分是（　　）

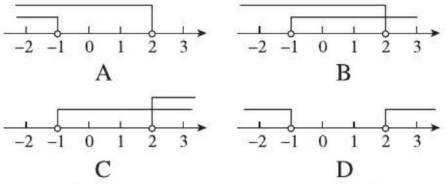


（第1题）

A. $-1 \leqslant x<3$　　B. $1 \leqslant x<3$

C. $-1 \leqslant x<1$　　D. 无解

2. [中考·湘潭]不等式组$\begin{cases}x<2,\\x>-1\end{cases}$的解集在数轴上表示为（　　）



3. [中考·鄂州]对于不等式组$\begin{cases}\frac{1}{3}x-6 \leqslant 1-\frac{5}{3}x,\\3(x-1)<5x-1,\end{cases}$下列说法正确的是(　　)

A. 此不等式组的正整数解为1，2，3

B. 此不等式组的解集为$-1<x \leqslant \frac{7}{6}$

C. 此不等式组有5个整数解

D. 此不等式组无解

4. [中考·永州]若不等式组$\begin{cases}x<1,\\x>m-1\end{cases}$恰好有两个整数解，则$m$的取值范围是（　　）

A. $-1 \leqslant m<0$　　B. $-1<m \leqslant 0$

C. $-1 \leqslant m \leqslant 0$　　D. $-1<m<0$

5. 在平面直角坐标系内，若点$P(x-2,\ x+1)$在第二象限，则x的取值范围为_____.

6. [中考·黔西南州]一元一次不等式组$\begin{cases}x-2>3x,\\x<a\end{cases}$的解集为$x<-1$，则$a$的取值范围是_____.

7. 已知关于x的不等式组$\begin{cases}3x-a \geqslant b,\\2x-a<2b+1\end{cases}$的解集为$3 \leqslant x<4$，则$a-2b=$_____.

8. 解下列不等式组.

(1) $-7 \leqslant \frac{2(1+3x)}{7} \leqslant 9$;

(2) $\begin{cases}3(1-x)>2(x+9), & ①\\ \frac{x-3}{0.5}-\frac{3.5x+1.4}{0.7} \leqslant -1.4. & ②\end{cases}$

9. 若关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}3x-2y=m+2,\\2x+y=m-5\end{cases}$中，$x$的值是正数，$y$的值是负数，求$m$的取值范围.

【导学号：7207895】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.[中考·武汉]某公司为奖励在趣味运动会上取得好成绩的员工，计划购买甲、乙两种奖品共20件，其中甲种奖品每件40元，乙种奖品每件30元.

（1）如果购买甲、乙两种奖品共花费了650元，求甲、乙两种奖品各购买了多少件?

（2）如果购买乙种奖品的件数不超过甲种奖品件数的2倍，总花费不超过680元，求该公司有哪几种不同的购买方案?

11.[中考·天水]天水某公交公司将淘汰某一条线路上“冒黑烟”较严重的公交车，计划购买A型和B型两种环保节能公交车共10辆，若购买A型公交车1辆，B型公交车2辆，共需400万元；若购买A型公交车2辆，B型公交车1辆，共需350万元.

（1）求购买A型和B型公交车每辆各需多少万元.

（2）预计在该线路上A型和B型公交车每辆年均载客量分别为60万人次和100万人次.若该公司购买A型和B型公交车的总费用不超过1 220万元，且确保这10辆公交车在该线路的年均载客总和不少于650万人次，则该公司有哪几种购车方案?哪种购车方案总费用最少?最少总费用是多少?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一元一次不等式（组）与方程（组）的巧妙结合

荣老师告诉你 一元一次不等式（组）与一元一次方程（组）有很多相似的地方，解题依据——等式的性质和不等式的性质；解题步骤——去分母、去括号、移项、合并同类项等基本步骤，都基本相同．所以在解题时，两者经常巧妙结合在一起．

结合点一 利用不等式求方程的正整数解

例 1 求方程 $3x+2y=17$ 的正整数解．

解题秘方：先用含 x 的式子表示 y，然后利用方程的解为正整数，列出以 x 为未知数的不等式，求出 x 的取值范围，最后确定正整数 x 的值．

解：将方程变形为 $2y=17-3x$，

即 $y=\dfrac{17-3x}{2}$．

$\because y>0$，$\therefore \dfrac{17-3x}{2}>0$．

$\therefore x<\dfrac{17}{3}$，即 $x<5\dfrac{2}{3}$．

$\because x>0$，$\therefore 0<x<5\dfrac{2}{3}$．

又 $\because y$ 为正整数（即 $\dfrac{17-3x}{2}$ 为正整数），

$\therefore 17-3x$ 为偶数．

$\therefore x$ 必为奇数．

$\therefore x=1$，3，5．

当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times1}{2}=7$；

当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times3}{2}=4$；

当 $x=5$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times5}{2}=1$．

故原方程的正整数解为 $\begin{cases}x=1,\\y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

方法点拨：（1）一般地，一个二元一次方程有无数个解，但它的特殊解有时是有限个，如一个二元一次方程的正整数解、非负整数解都是有限个．

（2）求不定方程的正（非负）整数解时，往往借助不等式、整数的奇偶性等相关知识来帮助求解．

结合点二 利用方程（组）解的情况求字母的取值范围

例 2 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$ 若 $x>y$，求 a 的取值范围．

解题秘方：解本题的关键是构建以 a 为未知数的不等式，解之即得 a 的取值范围，构建不等式的依据就是 $x>y$，而解方程组即可用含 a 的式子分别表示 x 和 y，进而可得不等式．

解：解方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=2a+1,\\y=a-2.\end{cases}$

$\because x>y$，

$\therefore 2a+1>a-2$，解得 $a>-3$．

故 a 的取值范围是 $a>-3$．

方法点拨：由方程（组）解的不等关系，列出不等式（组），求出方程（组）中待定字母的取值范围，关键点有两个：一是要会解除未知数以外还含有其他字母的方程（组）；二是要会根据解的不等关系列出不等式（组）．

结合点三 利用不等式组的解集建立方程组

例 3 若不等式组 $\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0\end{cases}$ 的解集是 $-1<x<1$，求 $(a+b)^{2021}$ 的值．

解题秘方：解此不等式组得 $a+2<x<\dfrac{b}{2}$，依题意，该不等式组的解集又是 $-1<x<1$，而解集是唯一的，因此两解集的边界点分别“吻合”，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

从而得两等式，即得方程组，解之可得 a，b 的值.

解：解不等式组$\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0,\end{cases}$

得 $a+2<x<\dfrac{b}{2}$.

又∵此不等式组的解集是 $-1<x<1$，

$\therefore\begin{cases}a+2=-1,\\\dfrac{b}{2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-3,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore(a+b)^{2021}=(-1)^{2021}=-1.$

方法点拨：若已知不等式组的解集，先解出除未知数外还含有其他字母的不等式组的解集，然后对比已知的解集，列出以待定字母为未知数的方程组.

结合点四 ▶ 利用方程组求出的数据列不等式解决实际问题

例 4 [中考·永春]商场正在销售“福娃”玩具和徽章两种奥运商品，已知购买 1 盒“福娃”玩具和 2 盒徽章共需 145 元；购买 2 盒“福娃”玩具和 3 盒徽章共需 280 元.

（1）一盒“福娃”玩具和一盒徽章的价格各是多少元？

（2）某公司准备购买这两种奥运商品共 20 盒送给幼儿园（要求每种商品都要购买），且购买金额不能超过 450 元，请你帮该公司设计购买方案.

解题秘方：本题属于方程组与不等式结合的实际应用题. 第（1）问只需依照题目所提供的两个等量关系即可列出二元一次方程组. 第（2）问由题目所给不等关系“购买金额不能超过 450 元”及第（1）问所求出的数据列出不等式，从而求解.

解：（1）设一盒“福娃”玩具和一盒徽章的价格分别为 x 元和 y 元.

依题意，得$\begin{cases}x+2y=145,\\2x+3y=280.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=125,\\y=10.\end{cases}$

答：一盒“福娃”玩具和一盒徽章的价格分别是 125 元和 10 元.

（2）设购买“福娃”玩具 m 盒，则购买徽章 $(20-m)$ 盒.

由题意，得 $125m+10(20-m)\leqslant 450$，

解得 $m\leqslant\dfrac{50}{23}$.

所以 m 可以取 1，2.

则该公司有两种购买方案：

方案一：购买“福娃”玩具 1 盒，徽章 19 盒；

方案二：购买“福娃”玩具 2 盒，徽章 18 盒.

结合点五 ▶ 同时建立方程和不等式的模型解决实际问题

例 5 认真阅读下面三个人的对话.

小朋友：阿姨，我买一盒饼干和一袋牛奶（递上 10 元钱）.

售货员：本来你用 10 元钱买一盒饼干还有剩余，但再买一袋牛奶就不够了. 不过今天是儿童节，我给你买的饼干打九折，两样东西请拿好，还有找你的 8 角钱.

旁观者：一盒饼干的标价可是整数哦！

根据对话内容，试求出饼干和牛奶的标价各是多少？

解题秘方：本题的条件隐含在对话中，应学会从对话中获取信息，“用 10 元钱买一盒饼干还有剩余”，说明一盒饼干的售价小于 10 元；“但再买一袋牛奶就不够了”，说明一盒饼干和一袋牛奶的价格之和大于 10 元. 对话中还隐含一个等量关系，就是用 10 元钱买一盒打九折的饼干和一袋牛奶剩余 0.8 元钱. 由一个方程和两个不等式结合最终可求出答案.

解：设饼干的标价为每盒 x 元，牛奶的标价为每袋 y 元.

根据题意，得$\begin{cases}x+y>10,①\\0.9x+y=10-0.8,②\\x<10,③\end{cases}$

由②，得 $y=9.2-0.9x$，④

将④代入①，

得 $x+9.2-0.9x>10$，

解得 $x>8$.

所以综合③可知 $8<x<10$.

又因为 x 为整数，所以 $x=9$.

所以 $y=9.2-0.9x=9.2-0.9\times9=1.1$.

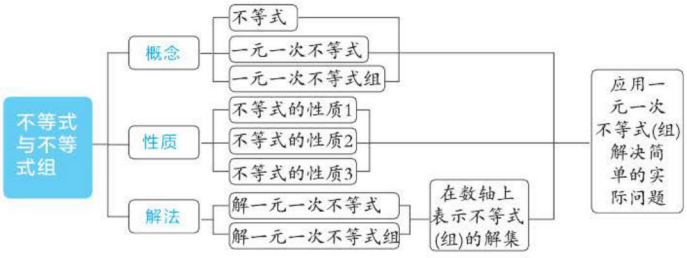
即饼干的标价为每盒 9 元，牛奶的标价为每袋 1.1 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **在数轴上表示不等式(组)的解集时要注意“两定”:** 一定边界点，二定方向. 在定边界点时，若不等号是“ ”或“≥”，边界点为实心圆点；若不等号是“<”或“>”，边界点为空心圆圈. 二定方向，相对于边界点而言，“小于向左，大于向右”.
2. **解不等式通常按以下步骤进行:** 去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1. 容易出问题的地方是在“系数化为 1”时，如果不等式的两边除以同一个负数时，要注意不等号的方向需改变.
3. **一元一次不等式组的解法是:** 对组成不等式组的不等式分别求解，取各个不等式解集的公共部分，即为不等式组的解集；确定一元一次不等式组解集应遵循的原则是：同大取大，同小取小，小大大小中间找，大大小小无处找.

知识方法专题

知识必学

专题一 不等式的性质

链接中考» 不等式的性质是解不等式的理论依据，特别是性质 3 的运用很容易出错，在解不等式的最后一步也经常用到. 在中考中，一般都是以选择题形式直接考查不等式的性质.

例 1 [中考·怀化]下列不等式变形正确的是(　　)

A. 由 $a>b$ 得 $ac>bc$

B. 由 $a>b$ 得 $-2a>-2b$

C. 由 $a>b$ 得 $-a<-b$

D. 由 $a>b$ 得 $a-2<b-2$

解题秘方: 根据不等式的性质，进行选择即可.

解: 当 $c\leqslant 0$ 时，选项 A 错误；根据不等式的性质 3，在不等式两边乘同一个负数时，不等号的方向改变，故选项 B 错误，选项 C 正确；在不等式两边加上或减去同一个数时，不等号的方向不变，故选项 D 错误，故选 C.

答案: C

警示误区: 此类问题容易出错的地方是对不等式的性质 3 掌握不透彻，认为 B 答案也正确.

专题二 解一元一次不等式

链接中考» 解不等式是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是直接解不等式；另一种是根据解不等式求其特殊解. 一般都是以填空题和选择题形式出现. 在有些地区也以解答题形式考查.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例2 [中考·安徽]解不等式：

$\frac{x}{3}>1-\frac{x-3}{6}$.

解题秘方：根据一元一次不等式的解题步骤求解即可.

解：去分母得，$2x>6-(x-3)$，去括号，得 $2x>6-x+3$，

移项，合并同类项得 $3x>9$，系数化为1得 $x>3$.

方法点拨：解一元一次不等式的一般步骤与解一元一次方程的步骤一样，只是解不等式时，给不等式两边乘或除以同一个负数，要改变不等号的方向.

专题三 解一元一次不等式组

链接中考» 解不等式组是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是已知不等式组求解集；另一种是已知不等式组的解集求不等式组中待定字母的值或范围.一般都是以填空题和选择题形式出现.在有些地区也以解答题形式考查.

例3 [中考·泰安]不等式组$\begin{cases}4x-3>2x-6,\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5}\end{cases}$的整数解的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：分别解出每一个不等式，求出不等式组的解集，然后找出不等式组的整数解.

解：$\begin{cases}4x-3>2x-6,①\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5},②\end{cases}$

解不等式①得 $x>-\frac{3}{2}$，

解不等式②得 $x\leqslant 1$，

因此不等式组的解集为 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$，

所以整数解为$-1,0,1$，所以一共有3个整数解，故本题选C.

答案：C

方法点拨：求不等式组的整数解的关键是正确地解出每个不等式，确定出未知数的取值范围，从而求出整数解.

例4 [中考·恩施州]关于 x 的不等式组$\begin{cases}3x-1>4(x-1),\\ x<m\end{cases}$的解集为 $x<3$，那么 m 的取值范围为（　　）

A.$m=3$　　B.$m>3$

C.$m<3$　　D.$m\geqslant 3$

解题秘方：先分别解两个不等式，然后再利用“同小取小”来求解.

解：由 $3x-1>4(x-1)$，

得 $x<3$，

而不等式组的解集为 $x<3$，

$\therefore m\geqslant 3$.

答案：D

方法点拨：解含有参数的不等式组的步骤：

（1）解不等式组，含有参数的也要解，把参数当已知数来解，这是必不可少的步骤；

（2）借助于数轴，形象准确地把握不等式组有解，无解，以及有几个整数解的问题；

（3）注意端点值，这类问题一般都与端点值有关，一是用数轴来说明哪个是端点值，二是进行检验，看无端值是不是满足题意.

专题四 一元一次不等式的应用

链接中考» 不等式的应用题与方程的应用题相类似，方程是找等量关系，而不等式是找不等关系，不等关系有标志语—大于、小于、超过、不超过等等.不等式的应用题在中考中一般都是以解答题形式出现.

例5 [中考·本溪]暑期临近，本溪某旅行社准备组织“亲子一家游”活动，去我省沿海城市旅游，报名的人数共有69人，其中成人的人数比儿童人数的2倍少3人.

（1）旅游团中成人和儿童各有多少人？

（2）旅行社为了吸引游客，打算给每名游客准备一件T恤衫.购买时，成人T恤衫每购买10件赠送1件儿童T恤衫（不足10件不赠送），儿童T恤衫每件15元，旅行社购买服装的费用不超过1 200元，请问每件成人T恤衫的价格最高是多少元？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）设旅游团中儿童有 x 人，则成人有（$2x-3$）人，根据报名的人数共有 69 人，列方程求解；（2）根据题意可得能赠送 4 件儿童 T 恤衫，设每件成人 T 恤衫的价格是 m 元，根据旅行社购买服装的费用不超过 1 200 元，列不等式求解.

解：（1）设旅游团中儿童有 x 人，则成人有（$2x-3$）人，

根据题意得 $x+(2x-3)=69$，

解得 $x=24$，

则 $2x-3=2\times24-3=45$.

答：旅游团中成人有 45 人，儿童有 24 人.

（2）$\because 45\div10=4.5$，

$\therefore$ 可赠送 4 件儿童 T 恤衫.

设每件成人 T 恤衫的价格是 m 元，

根据题意可得 $45m+15\times(24-4)\leqslant1\,200$，

解得 $m\leqslant20$.

答：每件成人 T 恤衫的价格最高是 20 元.

方法点拨：对于一元一次不等式的应用，解题的关键是读懂题意，找出合适的不等关系，设未知数并列不等式求解.

方法必会

专题五 转化思想

专题解读» 在不等式（组）与方程（组）的综合应用中，常会用到转化思想，将解方程（组）的问题转化为解不等式（组）的问题.

例 6 ［中考·十堰改编］关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}5x+3y=23, & ①\\ x+y=p & ②\end{cases}$ 的解是正整数，则整数 p 的值为_____.

解题秘方：把 p 看成常数，求出方程组的解，再根据题意转化成关于 p 的不等式组，求解即可.

解：② $\times3$，得 $3x+3y=3p$，③

① $-$ ③，得 $2x=23-3p$，

则 $x=\dfrac{23-3p}{2}$，

把 $x=\dfrac{23-3p}{2}$ 代入②，

得 $y=\dfrac{5p-23}{2}$.

$\because x$，y 为正整数，

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{23-3p}{2}>0,\\ \dfrac{5p-23}{2}>0,\end{cases}$$

解得 $4\dfrac{3}{5}<p<7\dfrac{2}{3}$，

$\because p$ 是整数，

$\therefore p=5$，6，7.

把 $p=5$，$p=6$，$p=7$ 分别代入原方程组的解中，只有当 $p=5$ 或 $p=7$ 时方程组的解是正整数，故填 5 或 7.

答案：5 或 7

专题六 数形结合思想

专题解读» 不等式及不等式组的解集都可以在数轴上表示出来，特别是确定不等式组的解集时利用数轴的“形”，可以非常直观地看出不等式组的解集.

例 7 ［中考·丽水］如图 9-1，数轴上所表示关于 x 的不等式组的解集是（　　）

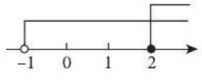


图 9-1

A. $x\geqslant2$　　B. $x>2$

C. $x>-1$　　D. $-1<x\leqslant2$

解题秘方：先从数轴上获取各个不等式的解集信息，再确定各个不等式解集的公共部分，即可确定不等式组的解集.

解：由数轴可以获取各个不等式的解集分别为 $x>-1$，$x\geqslant2$，则两个不等式解集的公共部分为 $x\geqslant2$，故选择 A.

答案：A

方法点拨：解决此类题的关键是能够将数、形结合起来，掌握在数轴上表示不等式解集的方法“大于向右画，小于向左画，有等号为实心圆点，无等号为空心圆圈”. 另外，要知道不等式的解集是用“$x>a$ 或 $x<a$ 或 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant a$”等形式来表示的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见271页

类型1：解一元一次不等式及不等式组

1. 解不等式 $\frac{1}{2}x-1 \leqslant \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$，并把它的解集在数轴上表示出来.

2. 解不等式组 $\begin{cases}2x-(4-x) \leqslant -1, & ① \\ \frac{x-1}{4}<\frac{2x+8}{3}, & ②\end{cases}$ 并将它的解集在数轴上表示出来.

类型2：方程与不等式的综合

3. 若不等式组 $\begin{cases}2x-a<1, \\ x-2b>3\end{cases}$ 的解集为 $-1<x<1$，则 $(a-3)(b+3)$ 的值为（　　）

A.1　　B.-1　　C.2　　D.-2

4. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases}x-1<0, \\ x-a>0\end{cases}$ 无解，则 a 的取值范围是（　　）

A.$a \geqslant 1$　　B.$a>1$

C.$a \leqslant -1$　　D.$a<-1$

5. 若不等式组 $\begin{cases}x-b<0, \\ x+a>0\end{cases}$ 的解集为 $2<x<3$，则 a，b 的值分别为（　　）

A.-2，3　　B.2，-3

C.3，-2　　D.-3，2

6. [中考·宜宾]若关于 x、y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x-y=2m+1, \\ x+3y=3\end{cases}$ 的解满足 $x+y>0$，则 m 的取值范围是_____.

7. 当 m 在什么范围内取值时，关于 x 的方程 $(m-2)x+2=1-m(4-x)$：

（1）有正数解；

（2）有负数解；

（3）有不大于2的解.

8. [中考·黄石]已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}5x+1>3(x-1), \\ \frac{1}{2}x \leqslant 8-\frac{3}{2}x+2a\end{cases}$ 恰有两个整数解，求实数 a 的取值范围.

9. [中考·遂宁]关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2x+y=4a+6, \\ 3x-y=a+4\end{cases}$ 的解满足 x 大于0，y 小于4. 求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：建立不等式的模型解决问题

10. [**中考 · 泸州**]某商店购买 60 件 A 商品和 30 件 B 商品共用了 1 080 元，购买 50 件 A 商品和 20 件 B 商品共用了 880 元.

（1）A，B 两种商品的单价分别为多少元?

（2）已知该商店购买 B 商品的件数比购买 A 商品的件数的 2 倍少 4 件，如果需要购买 A，B 两种商品的总件数不少于 32 件，且该商店购买的 A，B 两种商品的总费用不超过 296 元，那么该商店有哪几种购买方案?

11. [**中考 · 桂林**]“全民阅读”深入人心，好读书，读好书，让人终身受益. 为满足同学们的读书需求，学校图书馆准备到新华书店采购文学名著和动漫书两类图书. 经了解，20 本文学名著和 40 本动漫书共需 1 520 元，20 本文学名著比 20 本动漫书多 440 元（注：所采购的文学名著价格都一样，所采购的动漫书价格都一样）.

（1）求每本文学名著和动漫书各多少元.

（2）若学校要求购买动漫书比文学名著多 20 本，动漫书和文学名著总数不低于 72 本，总费用不超过 2 000 元，请求出所有符合条件的购书方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第九章测试卷 ☞答案见272页

（100分 60分钟）

一、选择题（每小题3分，共30分）

1. 下列各式：

①$x^2 \neq 0$；②$|x|+1>0$；③$x+2<-5$；

④$x+y=3$；⑤$\frac{1}{x}<0$，

其中是不等式的是（　　）

A. ①②③⑤　　B. ①②③④

C. ①②③④⑤　　D. ②③⑤

2. 不等式$3x \leqslant 2(x-1)$的解集为（　　）

A.$x \leqslant -1$　　B.$x \geqslant -1$

C.$x \leqslant -2$　　D.$x \geqslant -2$

3. 若$a>b$，则下列不等式中正确的是（　　）

A.$a-b<0$　　B.$-5a<-5b$

C.$a+8<b-8$　　D.$\frac{a}{4}<\frac{b}{4}$

4. 下列说法中正确的是（　　）

A.$y=3$是不等式$y+4<5$的解

B.$y=3$是不等式$3y<11$的解集

C. 不等式$3y<11$的解集是$y<3$

D.$y=2$是不等式$3y \geqslant 6$的解

5. 不等式组$\begin{cases}2x-1<3,\\ -\frac{x}{2} \leqslant 1\end{cases}$的整数解有（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

6. 若代数式$\frac{1}{4}a$的值不大于$\frac{1}{2}a+1$的值，则a应满足（　　）

A.$a \geqslant -4$　　B.$a \leqslant -4$

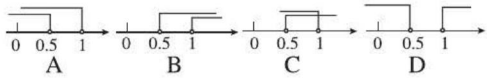
C.$a>4$　　D.$a \leqslant 4$

7. 小丽同学准备用自己节省的零花钱购买一台售价为1 080元的学生平板电脑，她已存有750元，并计划从本月起每月节省30元，直到她至少存有1 080元，设x个月后小丽至少有1 080元，则可列计算月数的不等式为（　　）

A.$30x+750>1\,080$　　B.$30x-750 \geqslant 1\,080$

C.$30x-750 \leqslant 1\,080$　　D.$30x+750 \geqslant 1\,080$

8. 已知点$P(2a-1, 1-a)$在第一象限，则a的取值范围在数轴上表示正确的是（　　）



9. 若不等式组$\begin{cases}1+x>a,\\ 2x-4 \leqslant 0\end{cases}$有解，则$a$的取值范围是（　　）

A.$a \leqslant 3$　　B.$a<3$

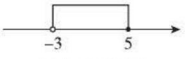
C.$a<2$　　D.$a \leqslant 2$

10. 小红读一本500页的书，计划10天内读完，前5天因种种原因只读了100页，为了按计划读完，则从第六天起平均每天至少要读（　　）

A.50页　　B.60页　　C.80页　　D.100页

二、填空题（每小题3分，共18分）

11. 若关于x的不等式的解集在数轴上表示如图，则其解集为_____.



（第11题）

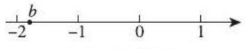
12. 如图，请任意选取一幅图，根据图中信息，写出一个关于温度x（℃）的不等式：_____.

天气消息
今夜　晴 降水概率0% 偏北风 四至五级 最低气温 −8℃

洗涤说明
单独手洗勿浸泡 30℃以下水温 低温垫布熨烫不 超过110℃ 悬挂晾干

（第12题）

13. 数轴上实数b的对应点的位置如图所示. 比较大小：$\frac{1}{2}b+1$_____0（用“<”或“>”填空）.



（第13题）

14. 已知代数式$5-2x$的值为非负数，则x的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 在一次课外知识竞赛中，一共有 30 道判断题，答对一道题得 4 分，不答或答错一道题扣 1 分. 如果在这次竞赛中得分要超过 72 分，那么至少应答对_____道题.

16. 若关于 x 的不等式 $3x-a\leqslant 0$ 只有两个正整数解，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题（共 52 分）

17.（10 分）（1）解不等式：$5(x-2)+8<6(x-1)+7$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}\dfrac{x+1}{3}>0, & ①\\ 2(x+5)\geqslant 6(x-1), & ②\end{cases}$ 并在数轴上表示其解集.

18.（8 分）已知实数 a 是不等于 3 的常数，解不等式组 $\begin{cases}-2x+3\geqslant -3, & ①\\ \dfrac{1}{2}(x-2a)+\dfrac{1}{2}x<0, & ②\end{cases}$ 并依据 a 的取值情况写出其解集.

19.（10 分）定义新运算：对于任意实数 a，b，都有 $a\oplus b=a(a-b)+1$，等式右边是通常的加法、减法及乘法运算.

比如：$2\oplus 5=2\times(2-5)+1$

$=2\times(-3)+1$

$=-6+1$

$=-5$.

（1）求 $(-2)\oplus 3$ 的值；

（2）若 $3\oplus x$ 的值小于 13，求 x 的取值范围，并在数轴上表示出来.

20.（12 分）某校计划组织师生共 300 人参加一次大型公益活动，如果租用 6 辆大客车和 5 辆小客车恰好全部坐满，已知每辆大客车的乘客座位数比小客车多 17 个.

（1）求每辆大客车和每辆小客车的乘客座位数；

（2）由于最后参加活动的人数增加了 30 人，学校决定调整租车方案，在保持租用车辆总数不变的情况下，为将所有参加活动的师生装载完成，求租用小客车数量的最大值.

21.（12 分）学校为了奖励初三优秀毕业生，计划购买一批平板电脑和一批学习机，经投标，购买 1 台平板电脑 3 000 元，购买 1 台学习机 800 元.

（1）学校根据实际情况，决定购买平板电脑和学习机共 100 台，要求购买的总费用不超过 168 000 元，则购买平板电脑最多多少台?

（2）在（1）的条件下，购买学习机的台数不超过平板电脑台数的 1.7 倍. 请问有哪几种购买方案? 哪种方案最省钱?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

让我们走入数据世界

让我们走入数据世界



第十章

数据的收集、整理与描述









核心考点

你将见到的

- 全面调查与抽样调查
- 统计图的制作与运用
- 直方图

核心方法

我们为你提供的

- 收集数据法
- 设计调查问卷法
- 合理选取样本法
- 样本估计总体法
- 数形结合思想
- 统计思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.1 统计调查

核心知识

- 数据的收集
- 数据的描述
- 全面调查与抽样调查
- 总体与样本

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 数据的收集

1. **数据及数据的收集**：通过调查得到的结果叫做数据；得到结果的过程叫做数据的收集.

2. **收集数据常用的方法**：

（1）**民意调查**：问卷调查、访问、投票……

（2）**实地调查**：现场观察……

（3）**媒体调查**：报纸、杂志、电视、互联网……

3. **数据收集的步骤**：

（1）明确调查问题；

（2）确定调查对象；

（3）选择调查方法；

（4）展开调查；

（5）记录结果；

（6）分析结果，得出结论.

提分·必记

特别提醒

1. 在收集数据的过程中，要根据实际情况选取合适的方法.
2. 选取收集数据的方法时，要掌握两个要点：一要简便易行；二要真实、全面.
3. 整理收集的数据时，统计表的设计要合理；设计调查问卷时，不能存在选项中的内容有重叠现象、问题不容易回答或问题带有调查者的某种倾向等情况.

拨考向 利用数据的收集与整理方法收集整理数据

例 1 下面是六种国家一级保护动物及编号：

1. 大熊猫 2. 滇金丝猴 3. 藏羚羊 4. 丹顶鹤 5. 遗鸥 6. 亚洲象

某班同学按学号顺序排出同学们最喜爱的动物编号，得出如下42个数据：

1 1 2 2 4 6 3 4 5 1 2 4 1 4 6 2 1 2

3 5 5 6 1 3 1 4 2 1 1 3 2 1 5 4 5 4

1 4 5 3 2 5

（1）请你设计一份调查问卷，对全班同学中男、女生喜爱这些动物的情况进行问卷调查；

（2）请用表格对全班同学喜爱某种动物的人数进行整理.

解题秘方：根据调查的目的设计调查问卷，根据收集的数据划记整理.

提分·秘诀

方法点拨

调查问卷要**根据调查的需要和要求进行设计**，如果考虑不周，有的数据了解不到，调查的结果就不具备代表性，因此**设计调查问卷时要进行周密的考虑**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）调查问卷设计如下：

调查问卷　　年　月

学号	性别	你最喜爱的动物编号（只写一种）

（2）数据整理如下表：

全班同学最喜爱某种动物的人数分布表

动物编号	动物名称	划记	人数	百分比
1	大熊猫	正正一	11	26%
2	滇金丝猴	正下	8	19%
3	藏羚羊	正	5	12%
4	丹顶鹤	正下	8	19%
5	遗鸥	正丁	7	17%
6	亚洲象	下	3	7%
合计			42	100%

技巧点拨

- 表格通常由行和列组成，表格上方一般要有表头；
- 用划记法记录数据时，“正”字的每一划（笔画）代表一个数据.

点知识 2 数据的描述

1. 数据的描述方法有：统计表和统计图两种.

其中统计图常见的有：条形统计图，折线统计图和扇形统计图三种.

2. 统计表：

（1）为了实际需要，常要把日常工作中所得到的相互关联的数据按照一定的要求进行整理、归类，并按照一定的顺序把数据排列起来，制成表格，这种表格叫做统计表.

（2）**统计表的作用：**

①使数据更直观、清楚，便于分析；

②用数据把研究对象之间的变化规律清楚地表示出来；

③用数据把研究对象之间的差别清楚地表示出来，以便于人们分析问题和研究问题.

3. 统计图：

特性 \ 统计图	条形统计图	折线统计图	扇形统计图
特点	用一个单位长度表示一定的数量，用直条的长短表示数量的多少	用一个单位长度表示一定的数量，用折线的起伏表示数量的增减变化	用整个圆表示总体，用圆内的每一个扇形表示总体的一部分，通过扇形的大小来反映各个部分占总体的百分比

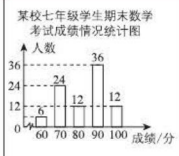
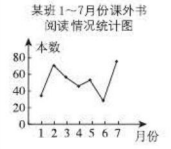
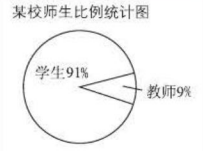
提分·必记

特别解读

1. 分析条形统计图时，首先要看条形统计图的横轴和纵轴分别代表什么量；分析扇形统计图时，根据各部分所占百分比或各部分扇形对应的圆心角大小来分析解答；折线统计图清晰地反映了数据的变化趋势.
2. 绘制统计图时，根据其绘图的一般步骤进行绘制.
3. 利用统计图表示经过整理的数据，能更直观地反映数据的变化规律.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续表

特性 \ 统计图	条形统计图	折线统计图	扇形统计图
图例			
作用	能清楚地表示每个项目的具体数目，便于相互比较，但不容易看出各部分在总体中所占的百分比	能清楚地看出数量增减变化的情况，也能看出数量的多少	能清楚地表示各部分在总体中所占的百分比，但不容易看出各部分的具体数目
选用	比较数据之间的大小关系时	表示某一数据的发展变化趋势时	表示各部分数据占总体的百分比时

考向▶利用统计图表描述数据

类型1：利用数据制作扇形统计图

例2 李程对本班50名同学进行了“我最喜爱的运动项目”的调查，统计出了最喜爱跳绳、打羽毛球、打篮球、打乒乓球、踢毽子等运动项目的人数．根据调查结果绘制了条形统计图（如图10.1-1），若将其转化为扇形统计图，则最喜爱打篮球的人数所在扇形区域的圆心角的度数为_____.

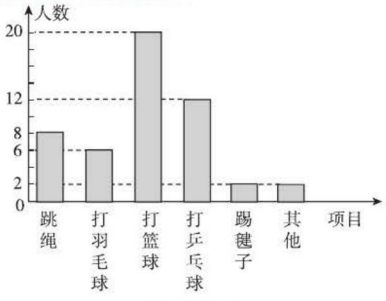


图 10.1-1

解题秘方：先根据条形统计图求出总数，然后求最喜爱打篮球的人数占总人数的百分比，最后求圆心角的度数．

解：总人数为8+6+20+12+2+2=50，

其中最喜爱打篮球的人数占总人数的$\frac{20}{50}\times100\%=40\%$，

所以最喜爱打篮球的人数所在扇形区域的圆心角的度数为$360^\circ\times40\%=144^\circ$．

答案：144°

提分·秘诀

解法提醒

扇形圆心角度数的求法：在扇形统计图中，每部分占总体的百分比等于该部分所对应的扇形的圆心角的度数与360°的比，即圆心角的度数=扇形所占的百分比×360°，并且各扇形占整个圆的百分比之和等于1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用统计图描述数据

例 3 某校八年级共有 150 名男生，从中随机抽取 30 名男生在“阳光体育活动”启动日进行“引体向上”测试，下表是测试成绩记录（单位：个）：

3	2	1	2	3	3	5	2	2	4
2	4	2	5	2	3	4	4	1	3
3	2	5	1	4	2	3	1	2	4

（1）我们已经会列统计表，画条形统计图、折线统计图和扇形统计图．为了能让体育老师更清楚地知道整个测试情况，请你选择一种合适的统计表或统计图整理、表示上述数据．

（2）观察分析（1）中的统计表或统计图，请你写出两条从中获得的信息：

①_____；

②_____．

解题秘方： 根据调查数据及调查目的选择合适的统计图．

解：（1）统计表如下：

测试成绩 / 个	人数
1	4
2	10
3	7
4	6
5	3

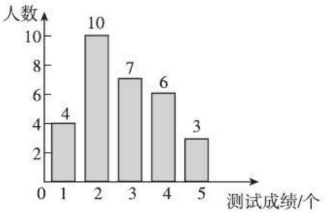


图 10.1-2

或制作条形统计图如图 10.1-2.

（2）①成绩为 5 个的有 3 人

②成绩为 2 个的人数最多（答案不唯一）

解法提醒

统计图的灵活选用：

我们学习了三种统计图，它们有各自的特点，因此在特定的情况下要选用哪种统计图对同学们来说是一个难点，各统计图适用的情况为：当需要直观地表示出数据进行比较时，宜选用条形统计图；当需要显示数据的变化趋势时，宜选用折线统计图；当需要反映部分占总体的百分比时，宜选用扇形统计图．

点知识 3 全面调查与抽样调查

1. 全面调查：

（1）**定义：** 考察全体对象的调查叫做全面调查．

（2）**主要方法：** 问卷调查、访问调查、电话调查等．

（3）**适用范围：** 调查范围小、调查不具有破坏性、数据要求准确全面．

2. 抽样调查：

（1）**定义：** 从被考察的全体对象中抽取一部分对象进行调查，然后根据调查数据推断全体对象的情况．

（2）**主要方法：**

①简单随机抽样：它的特点是每个对象被抽取的可能性都相等；当全体对象较少时，常采取简单随机抽样．

全面调查与抽样调查

提分·必记

误区警示

- 选择哪种调查方式，一定要依据具体问题灵活选择，使得调查既有可靠的结果，又不会造成较大的损失或付出较大的代价；
- 在进行抽样时，要注意：(1)调查对象不宜太少（要具有广泛性）；(2)调查对象应随意抽取（要具有代表性）；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②分层抽样：当全体对象是由有明显差异的几部分构成时，可将全体对象按差异情况分成几个部分，然后按各个部分所占的比例进行抽样，这样的抽样方法叫做分层抽样.

（3）**适用范围**：调查对象涉及面广，范围大，或受条件限制，或具有破坏性等.

(3)调查数据应真实可靠(要具有真实性).

拔考向▶选择合适的调查方式

提分·秘诀

例4 下列调查中，哪些适宜抽样调查，哪些适宜全面调查？

（1）调查我市中学生每天做作业的时间；

（2）学校招聘教师，对应聘人员进行面试；

（3）调查某班学生对“中国梦”的知晓率；

（4）调查一架“歼20”隐形战机各零部件的质量；

（5）调查伦敦奥运会100 m跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况.

解题秘方：紧扣全面调查和抽样调查的优缺点及适用范围进行判断.

解：（1）中涉及的范围较大，适宜抽样调查.

（2）学校招聘教师，应对所有应聘人员进行面试，所以应采用全面调查.

（3）中某班学生的人数有限，适宜全面调查.

（4）中考虑到一架“歼20”隐形战机各零部件的数量有限，并且其安全性对质量的要求较高，适宜全面调查.

（5）中调查伦敦奥运会100 m跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况适宜全面调查.

解法提醒

选择抽样调查的情况有：

- 当被调查的对象数目较多时，全面调查的工作量较大，可选择抽样调查；
- 当客观条件限制，无法对所有调查对象进行全面调查时，可选择抽样调查；
- 3. 当调查具有破坏性时，可选择抽样调查.

点知识▶4 总体、个体、样本与样本容量

提分·必记

1. 相关概念：

总体：所要考察的全体对象称为总体.

个体：组成总体的每一个考察对象称为个体.

样本：从总体中被抽取调查的那部分对象构成总体的一个样本.

样本容量：一个样本中包含的个体的数目称为样本容量.

注意：样本容量没有单位.

特别解读

1. 样本、个体、总体所要考察的内容是相同的，只是数量不同.
2. 样本的抽取是否得当直接关系到对总体估计的准确度，因此**抽取的样本要具有代表性和广泛性**.
3. 样本容量是一个样本中包含的个体的数目；**样本容量越大，样本的特征越接近总体的特征**.

2. 总体和样本的区别与联系：

总体包括所有个体，样本只包括所抽取的个体；样本是总体的一部分，一个总体中可以有多个样本；样本在一定程度上能反映总体，用样本的特征可以估计总体的特征.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用总体与样本的相关概念进行辨析

例5 某市有3万名学生参加2018年的中考，想要了解这3万名考生的中考成绩，从中抽取了500名考生的中考成绩进行统计分析，以下说法正确的是（　　）

A. 这500名考生是总体的一个样本

B. 每名考生的中考成绩是个体

C. 3万名考生是总体

D. 500名考生是样本容量

解题秘方：紧扣总体、个体、样本与样本容量的概念进行辨析.

解：首先要明确考察对象是3万名考生的中考成绩，再按相关概念判断.500名考生的中考成绩是总体的一个样本，所以选项A不正确；3万名考生的中考成绩是总体，所以选项C也不正确；由于选项D中所说的样本容量带有单位，因此选项D也不正确，故本题的正确答案是B.

答案：B

提分·秘诀

特别提醒

本例中总体是3万名考生的中考成绩，而不是3万名考生；样本是500名考生的中考成绩；个体是每名考生的中考成绩；样本容量是500.

点知识▶5 简单随机抽样

1. 简单随机抽样：

在抽取样本的过程中，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到，像这样的抽样方法是一种简单随机抽样.

特别提醒：抽样调查时要使样本的特征能准确反映总体的特征，就必须要求所抽取的样本中的个体具有随机性，不偏向总体中的某些个体，每一个个体都有相等的机会被抽到.

2. 用样本估计总体：

抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系到对总体估计的准确程度.如果样本抽取方法得当，一般能较客观地反映总体的情况，抽样调查的结果会比较接近总体的情况，否则抽样调查的结果往往会偏离总体的情况.

特别提醒：用样本的情况去估计总体的情况的思想称为用样本估计总体思想.

提分·必记

特别解读

- 随机抽取的样本一定要具有代表性、广泛性.
- 一般地，样本容量越大，通过样本对总体的估计越精确.因此，在条件允许的情况下，尽量选取较大的样本容量.在条件有限的情况下，要根据实际情况选定.

拔考向▶利用简单随机抽样解决问题

类型1：利用随机抽样的特点进行简单的随机抽样

例6 某车间工人加工一种轴100件，为了了解这种轴的直径，要从中抽取10件轴在同一条件下测量，如何采用简单随机抽样的方法抽取样本？

解题秘方：简单随机抽样一般采用两种方法：抽签法和随机数表法.

解：（抽签法）将100件轴分别编号1，2，…，100，并做好大小，形状相同的签，分别写上这100个数，将这些号签放在一起，搅拌均匀，接着逐个不放回地抽取10个号签，然后测量这10个号签对应的轴的直径.

提分·秘诀

另解

（随机数表法）将100件轴分别编号00，01，…，99，在随机数表中选定一个起始位置，然后开始选取10个数，这10个数对应的10件轴的直径即为所要抽取的样本.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用样本估计总体的思想解决问题

例 7 某学校要了解学生上学的方式，选取九年级全体学生进行调查，根据调查结果，画出扇形图（如图 10.1-3），图中“公交车”对应的扇形圆心角为 60°，“自行车”对应的扇形圆心角为 120°，已知九年级乘公交车上学的人数为 50 人.

（1）九年级学生中，骑自行车和乘公交车上学哪个多？多多少人？

（2）如果全校有学生 2 100 人，学校准备的 400 个自行车停车位是否足够？

解题秘方：利用扇形统计图反映的样本情况估计总体情况.

解：（1）九年级骑自行车上学的学生多.

被调查的学生总人数为 $50\div\frac{60}{360}=300$（人）.

骑自行车的人数为 $300\times\frac{120}{360}=100$（人）.

$100-50=50$（人）.

所以九年级学生中，骑自行车比乘公交车上学的人多 50 人.



图 10.1-3

（2）$2\,100\times\frac{120}{360}=700$（人），

所以学校准备的 400 个自行车停车位不够.

技巧点拨

分析扇形图时，根据各种情况所占百分比或每个扇形对应的圆心角大小来分析解答.

图解

解决此类问题时，可将已知条件在扇形图中用铅笔标注出来，找到对应关系，进而求解问题. 根据已知，可得图 10.1-4.

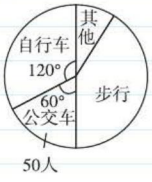


图 10.1-4

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 不规范统计图的误导

例 8 （1）图 10.1-5 给出了两种品牌衬衫近几年的价格变化情况，哪一种衬衫的价格增长较快？这与统计图给你的感觉一致吗？为什么统计图给人这样的感觉？

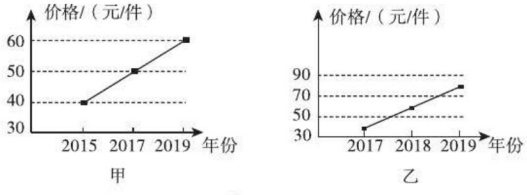


图 10.1-5

（2）图 10.1-6 是根据甲、乙两村苹果和梨的产量绘制的扇形统计图，是否可以根据此图得出结论：乙村苹果的产量远高于甲村？

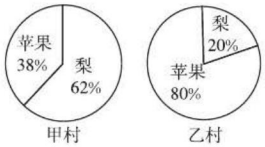


图 10.1-6

挑战·高分

方法点拨

在不同的折线统计图中获取变化趋势信息时，**应认真思考每个点所对应的横坐标和纵坐标的意义，而不应只是看趋势.**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：认真分析统计图中的统计量，找出误导的原因.

解：（1）因为2017 ~ 2019年这3年间，乙种衬衫的价格从40元/件增长到80元/件，而甲种衬衫在2015 ~ 2019年这5年间，其价格从40元/件增长到60元/件，所以乙种衬衫的价格增长较快，这与统计图给人的感觉不一致.因为此题中两个统计图相比，甲的横坐标(年份)被“压缩了”，而纵坐标(价格)被“放大了”，所以从直观上看甲种衬衫的价格增长较快.

（2）从两个扇形统计图观察甲村苹果占总产量的比例比乙村苹果占总产量的比例小，但由于两村的总产量不一定相同，所以无法判断乙村苹果的产量高于甲村.

拔尖角度▶ 2 补全统计图并从统计图中获取正确的信息

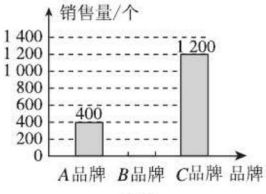
例9 某商场对今年端午节这天销售的A，B，C三种品牌的粽子情况进行了统计，绘制了如图10.1-7(1)和10.1-7(2)所示的不完整的统计图.根据图中信息，解答下列问题：

（1）哪一种品牌粽子的销售量最大？

（2）补全图10.1-7(1)中的条形统计图.

（3）求出A品牌粽子在图10.1-7(2)中所对应的圆心角的度数.

（4）根据上述统计信息，明年端午节期间该商场对A，B，C三种品牌的粽子应如何进货？请你提出一条合理化的建议.



(1)



(2)



图 10.1-7

挑战·高分

解法提醒

要抓住条形统计图的特征和扇形统计图中的百分比来分析数据，特别要注意数形结合思想的运用.题目中的部分信息隐含于统计图中，解题时需要运用数形结合思想，从两种统计图中获取正确的信息，从而达到解题的目的.

解题秘方：（1）由扇形统计图获取信息解答；（2）从条形统计图和扇形统计图中获取信息补全条形统计图；（3）由扇形面积与对应的圆心角之间的关系解答；（4）可根据各种品牌粽子的销售量所占总销售量的比例决定进货量等.

解：（1）C品牌粽子的销售量最大.

（2）如图10.1-8.

（3）三种品牌粽子的总销售量为$1\,200\div50\%=2\,400$(个).

A品牌粽子所对应的圆心角的度数为$\frac{400}{2\,400}\times360^\circ=60^\circ$.

（4）根据上述统计信息，明年端午节期间该商场对A，B，C三种品牌的粽子可按1∶2∶3的比例进货.(答案不唯一，合理即可)

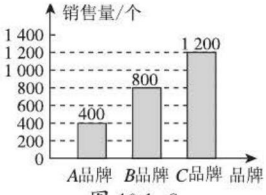


图 10.1-8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 样本、总体与二元一次方程组的综合题

例10 为了保护环境，某校环保小组成员小明每天坚持收集废电池，第一天收集1号废电池4节，5号废电池5节，总质量为450克；第二天收集1号废电池2节，5号废电池3节，总质量为240克.

（1）1号废电池和5号废电池每节的质量分别为多少克?

（2）学校环保小组为估算四月份收集废电池的总质量，他们随机抽取了该月某5天每天收集废电池的数量，如下表：

1号废电池（单位：节）	29	30	32	28	31
5号废电池（单位：节）	51	53	47	49	50

分别计算这两种废电池的样本平均数，并由此估计该月（30天）环保小组收集废电池的总质量大约是多少千克.

（3）试说明上述表格中数据的获取方法.你认为这种方法合理吗?

解:（1）设1号废电池每节的质量为x克，5号废电池每节的质量为y克.

依题意，得$\begin{cases}4x+5y=450,\\2x+3y=240.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=75,\\y=30.\end{cases}$

即1号废电池每节的质量为75克，5号废电池每节的质量为30克.

（2）每天收集1号废电池的样本平均数为$\dfrac{29+30+32+28+31}{5}=30$（节）.

每天收集5号废电池的样本平均数为$\dfrac{51+53+47+49+50}{5}=50$（节）.

故每天可收集的废电池总质量大约为$30\times75+50\times30=3\,750$（克）.

因而该月环保小组收集废电池的总质量大约为$3\,750\times30=112\,500$（克）$=112.5$千克.

（3）上述表格中数据是抽样调查的结果，且由抽样的“随机性”知，这种抽样调查方法是合理的.

挑战·高分

思路点拨

1. 题中有两个未知量——1号废电池和5号废电池每节的质量，有两个相等关系，即“4节1号废电池的质量+5节5号废电池的质量=450克”和“2节1号废电池的质量+3节5号废电池的质量=240克”，应该考虑列二元一次方程组解决这个问题；
2. 通过表格中的数据计算出样本的平均数，这个样本平均数可当作总体的平均数，即可求出该月环保小组收集废电池的总质量；
3. 上述表格中数据是抽样调查的结果，并且这种抽样调查方法是合理的.

方法点拨

要使样本平均数能当作总体平均数，必须使得**抽取的样本具有代表性和广泛性**，本题抽样具有“随机性”，因此这种抽样方法是合理的.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点有：（1）数据的描述，主要考查用扇形统计图、条形统计图来描述数据，或从统计图中获取信息，题型多样，难度中等；（2）调查方式的选择，以及抽样调查时相关概念的考查，以选择题为主，难度较小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 数据的描述

例 11 [中考·邵阳]“救死扶伤”是我国的传统美德. 某媒体就“老人摔倒该不该扶”进行了调查，将得到的数据经统计分析后绘制成如图 10.1-9 所示的扇形统计图. 根据统计图判断下列说法，其中错误的一项是（　　）

A. 认为依情况而定的占 27%

B. 认为该扶的在统计图中所对应的圆心角是 234°

C. 认为不该扶的占 8%

D. 认为该扶的占 92%

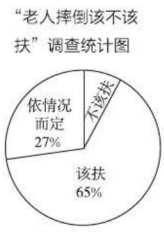


图 10.1-9

试题评析：本题主要考查了扇形统计图，掌握扇形统计图各数据占总量的百分比和扇形统计图中各部分所对扇形圆心角的度数是解答本题的关键.

解：认为依情况而定的占 27%，故 A 正确；

认为该扶的在统计图中所对应的圆心角是 $65\% \times 360° = 234°$，故 B 正确；

认为不该扶的占 $1-27\%-65\%=8\%$，故 C 正确；

认为该扶的占 65%，故 D 错误.

答案：D

考法 2 调查方式的选择

例 12 [中考·襄阳]下列调查中，调查方式选择合理的是（　　）

A. 为了解襄阳市初中生每天锻炼所用的时间，选择全面调查

B. 为了解襄阳电视台《襄阳新闻》栏目的收视率，选择全面调查

C. 为了解神舟飞船设备零件的质量情况，选择抽样调查

D. 为了解一批节能灯的使用寿命，选择抽样调查

试题评析：本题考查了抽样调查与全面调查，解题的关键是正确理解全面调查和抽样调查的联系与区别.

解：选项 A 中了解襄阳市初中生每天锻炼所用的时间，全面调查工作量大，适合抽样调查；

选项 B 中了解襄阳电视台《襄阳新闻》栏目的收视率，范围比较大，适合抽样调查；

选项 C 中了解神舟飞船设备零件的质量情况必须对零件进行全面调查，才能保证不出问题；

选项 D 中了解一批节能灯的使用寿命，破坏性比较强，所以适合抽样调查. 故选择 D.

答案：D

冲刺·满分

解法提醒

1. 扇形统计图中扇形的大小反映部分占总体的百分比的大小；
2. 扇形图各部分所占百分比之和为 100%；
3. 各部分扇形圆心角的度数等于各部分所占的比例乘以 360°.

解法提醒

本题考查了抽样调查和全面调查的区别：

一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行全面调查、全面调查的意义或价值不大时，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用全面调查. 选择全面调查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 抽样调查的相关概念的考查

例 13 [中考·柳州]某校为了了解本届初三学生体质健康情况，从全校初三学生中随机抽取 46 名学生进行调查，上述抽取的样本容量为_____.

试题评析：本题考查了样本容量的概念，解题的关键是理解概念的意义，总体、个体和样本中的考察对象是考察的项目而不是某个人或事物.

解：∵从全校初三学生中随机抽取 46 名学生进行调查，

∴上述抽取的样本容量为 46.

答案：46

解法提醒

样本是总体的一部分，样本通常只包括一部分个体，样本在一定程度上能够反映总体.特别注意，样本容量不带单位.

两年模拟兵法

☞答案见 272 页

1.[中考·衡阳]下列调查方式中，合适的是（　　）

A. 调查你所在班级同学的身高，采用抽样调查方式

B. 调查湘江的水质情况，采用抽样调查的方式

C. 调查 CCTV-5《NBA 总决赛》栏目在我市的收视率，采用全面调查的方式

D. 要了解全市初中学生的业余爱好，采用全面调查的方式

2. [中考·南京]为了了解某中学学生的视力情况，需要抽取部分学生进行调查.下列抽取学生的方法最合适的是（　　）

A. 随机抽取该校一个班级的学生

B. 随机抽取该校一个年级的学生

C. 随机抽取该校一部分男生

D. 分别从该校七、八、九年级中各随机抽取 10% 的学生

3. [中考·内江]今年我市有近 4 万名学生参加中考，为了解这些考生的数学成绩，从中抽取 1 000 名考生的数学成绩进行统计分析，以下说法正确的是（　　）

A. 这 1 000 名考生是总体的一个样本

B. 近 4 万名考生是总体

C. 每名考生的数学成绩是个体

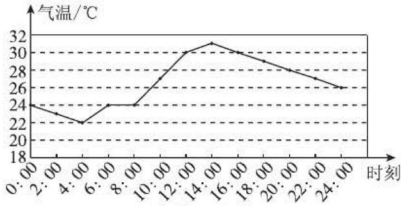
D.1 000 名考生是样本容量

4. [中考·福州]下列选项中，显示部分在总体中所占百分比的统计图是（　　）

A. 扇形图　　B. 条形图

C. 折线图　　D. 以上都不对

5. 如图所示的折线图描述了某地某日的气温变化情况.



（第 5 题）

根据图中信息，下列说法错误的是（　　）

A.4:00 气温最低

B.6:00 气温为 24 ℃

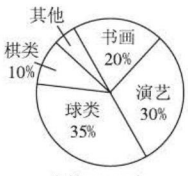
C. 14:00 气温最高

D. 气温是 30 ℃的时刻为 16:00

6. [中考·邵阳]如图是某校参加各兴趣小组的学生人数分布扇形统计图，则参加人数最多的小组是（　　）

A. 棋类　　B. 书画

C. 球类　　D. 演艺



（第 6 题）

7. 下列调查的样本不缺乏代表性的有（　　）

（1）为了了解某校七年级学生期末考试数学成绩，抽取七（2）班 50 名学生的成绩进行分析；

（2）为了了解我国 18 岁青年的身高，从不同的地区随机抽取 1 000 名 18 岁青年的身高；

（3）为了了解一批洗衣粉的质量情况，从中抽取 50 袋进行检查；

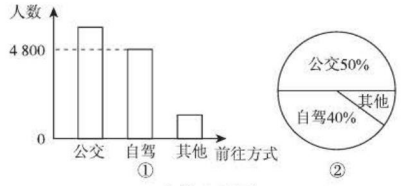
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）为了了解某公园每天的游园人数，从中抽查一年中每个星期天的游园人数．

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

8. [**中考·上海**]今年 5 月份有关部门对计划去上海迪士尼乐园的部分市民的前往方式进行了调查，图①和图②是收集数据后绘制的两幅不完整的统计图，根据图中提供的信息，那么本次调查的对象中选择公交前往的人数是_____.



（第 8 题）

9. 下列抽样调查中抽取的样本合适吗？为什么？

（1）数学老师为了了解全班同学数学学习中存在的困难和问题，请数学成绩好的 10 名同学开座谈会；

（2）在上海市调查我国公民的受教育程度；

（3）在中学生中调查青少年对网络的态度；

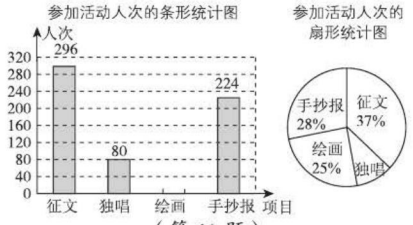
（4）调查每个班学号为 5 的倍数的学生的身高和体重，以了解学校全体学生的身高和体重；

（5）调查七年级中的两名同学，以了解全校学生课外辅导用书的拥有量．

10. [**中考·泉州**]某校开展“中国梦·泉州梦·我的梦”主题教育系列活动，设有征文、独唱、绘画、手抄报四个项目，该校共有 800 人次参加活动，如图是该校根据参加人次绘制的两幅不完整的统计图，请根据图中提供的信息，解答下面的问题：

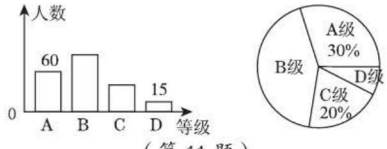
（1）此次有_____名同学参加绘画活动，扇形统计图中“独唱”部分的圆心角是_____度，请你把条形统计图补充完整；

（2）经研究，决定拨给各项目活动经费，标准是：征文、独唱、绘画、手抄报每人次分别为 10 元、12 元、15 元、12 元，请你帮学校计算开展本次活动共需多少经费？



（第 10 题）

11. 某校九年级有 1 200 名学生，在体育考试前随机抽取部分学生进行体能测试，成绩分别记为 A，B，C，D 共四个等级，其中 A 级和 B 级成绩为“优”，将测试结果绘制成如图所示的条形统计图和扇形统计图．



（第 11 题）

（1）求抽取参加体能测试的学生人数；

（2）估计该校九年级全体学生参加体能测试成绩为“优”的学生大约有多少人？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.2 直方图

核心知识
- 频数分布表
- 频数分布直方图

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 频数分布表

1. 相关概念：

（1）**组距**：把所有数据分成若干组，每个小组的两个端点之间的距离（组内数据的取值范围）称为组距.

（2）**组数**：把数据分成若干组，分成组的个数叫组数.

（3）**频数**：对落在各个小组内的数据进行累计，得到各个小组内的数据的个数叫频数.

2. 频数分布表：

（1）**定义**：根据频数整理得到的表格就是频数分布表. 频数分布表反映了数据落在各个小组内的频数，从而反映了一组数据中各数据的分布情况.

（2）**制作步骤**：

①**算**：计算该组数据中最大值与最小值的差，得到这组数据的变化范围；

②**定**：根据数据的个数与数据的变化范围，确定组距、组数；

③**划**：利用划记的方法累计落在各组内的数据个数，得到各组的频数.

④**列**：根据上述过程列频数分布表；频数分布表一般由数据分组、划记、频数三部分组成.

提分·必记

特别提醒

1. 各小组的频数之和等于总数；
2. 组距可以相同，也可以不同；为研究方便，本节中我们作等距分组；
3. 数据所分组数没有明确要求，一般根据数据的多少，常分成5～12组.
4. 为了使数据“不重不漏”，分组时常采用“上限不在内”的原则；如：149～152包含149，但不包含152.

拔考向 利用频数分布表的相关数据解决问题

类型1：利用组数和组距的关系确定组数

例1 有60个数据，其中最大的数据是187，最小的数据是140，如果分组时的组距为6，那么这组数据应分为（　　）

A.7组　　B.$7\frac{5}{6}$组　　C.8组　　D.10组

解题秘方：紧扣组数与组距的关系，结合最大数据和最小数据确定组数.

解：因为这组数据的最大值是187，最小值是140，最大值与最小值的差是47，且$\frac{47}{6}=7\frac{5}{6}$，所以应分为8组.

答案：C

提分·秘诀

方法点拨

确定组数的方法：

若最大值与最小值的差除以组距所得的商是整数，则这个商即为组数；若最大值与最小值的差除以组距所得的商是小数，则这个商的整数部分+1即为组数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用频数分布表解决问题

思路点拨

利用频数分布表可以清楚地反映出一组数据中数据出现的频数，从而反映出这组数据的整体分布情况，同时从表中可知，各组频数之和等于样本容量.

例 2 七年级某班 20 名男生某次投掷标枪的测试成绩如下（单位：m）：25，21，23，25，27，29，25，28，28，29，26，24，25，27，26，22，24，25，26，28.

（1）将这 20 名男生的测试成绩按从小到大的顺序排列，统计出每种成绩的数值出现的频数，并制成频数分布表.

（2）根据频数分布表回答：

①成绩小于 25 m 的同学有几人？占总人数的百分之几？

②成绩大于 27 m 的同学有几人？占总人数的百分之几？

解题秘方：根据要求，先将成绩按从小到大的顺序排列，然后制作频数分布表；

解：（1）这 20 名男生的测试成绩按从小到大的顺序排列如下（单位：m）：21，22，23，24，24，25，25，25，25，25，26，26，26，27，27，28，28，28，29，29.

列频数分布表如下：

测试成绩（单位：m）	21	22	23	24	25	26	27	28	29
划记	一	一	一	下	正	下	下	下	下
频数	1	1	1	2	5	3	2	3	2

（2）由频数分布表可知：

①成绩小于 25 m 的同学有 5 人，占总人数的 25%.

②成绩大于 27 m 的同学有 5 人，占总人数的 25%.

知识 2 频数分布直方图

1. 定义：用小长方形的长和宽来表示频数分布的统计图；它由横轴、纵轴、条形图三部分组成.

（1）**横轴**：直方图的横轴表示分组的情况；

（2）**纵轴**：直方图的纵轴表示频数与组距的比值；

（3）**条形图**：直方图的主体部分是条形图，每一条是立于横轴之上的一个小长方形.

2. 作频数分布直方图（简称直方图）的步骤：

（1）计算出数据中最大值与最小值的差；

（2）确定组距与组数；

（3）列出频数分布表；

（4）由频数分布表画出频数分布直方图.

提分·必记

特别解读

- 频数分布直方图是用小长方形的面积来反映数据落在各个小组内的频数的大小；小长方形的宽为组距，高为频数与组距的比值；小长方形面积 = 组距 $\times \frac{\text{频数}}{\text{组距}}$ = 频数；
- 画等距分组的频数分布直方图时，为画图与看图方便，通常直接用小长方形的高表

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 条形图与直方图的关系.（拓展点）

不同点：（1）条形图用小长方形的高表示频数的多少；直方图用小长方形的面积表示频数的多少；

（2）直方图中的各小长方形是连续排列的，中间没有空隙；条形图中的各小长方形是分开排列的，中间有空隙.

相同点：都易于比较各数据组与组之间的差别，能够显示每组中的具体数据和频数分布情况.

核心考向▶利用频数分布直方图解决问题

类型1：利用频数分布直方图获取相关信息

例3 某中学部分同学参加全国初中数学竞赛，取得了优异的成绩，指导老师统计了所有参赛同学的成绩（成绩都是整数，试题满分为120分），并且绘制了如图10.2-1所示的频数分布直方图（每组中含最低分数，但不含最高分数），请回答：

（1）该中学参加本次数学竞赛的共有多少人？

（2）如果成绩在90分以上（含90分）的同学获奖，那么该中学参赛同学的获奖率是多少？

（3）图中还提供了其他信息，例如该中学没有获得满分的同学等，请再写出两条信息.

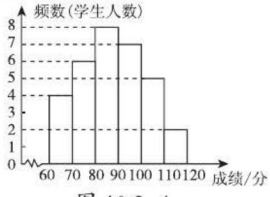


图 10.2-1

解题秘方：紧扣直方图中横轴和纵轴反映的数据信息解决问题.

解：由频数分布直方图知，从左到右各分数段的人数分别为4、6、8、7、5、2.

（1）4+6+8+7+5+2=32（人）.

所以该中学参加本次数学竞赛的共有32人.

（2）成绩在90分以上（含90分）的同学有7+5+2=14（人），所以该中学参赛同学的获奖率是$\frac{14}{32}\times100\%=43.75\%$.

（3）该中学参赛同学的成绩均不低于60分；成绩在80～90分（含80分，但不含90分）的人数最多.（答案不唯一，合理即可）

类型2：利用数据信息绘制直方图

例4 为了解某地区八年级男学生的身高情况，随机抽取了60名男生，测得他们的身高（单位：cm）分别是：

156	162	163	172	160	141	152	173	180	174
157	174	145	160	153	165	156	167	161	172
178	156	166	155	140	157	167	156	168	150
164	163	155	162	160	168	147	161	157	162
165	160	166	164	154	161	158	164	151	169
169	162	158	163	159	164	162	148	170	161

示频数.
(1)直方图中的各小长方形之间没有空隙；
(2)一般情况下，相邻各分点的归宿："上限不在内".

提分·秘诀

特别提醒

根据频数分布直方图获取信息时，要注意三点：
1. 理解横轴、纵轴分别表示的意义；
2. 注意题目中的关键词语，如"每组中含最低分数，但不含最高分数"等；
3. 在累计总数时不要出现遗漏或重复等错误.

解法提醒

为了使数据"不重不漏"，分组时常采用"上限不在内"的原则.例如：$140\leqslant x<145$中包含140，但不包含145.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（1）将数据适当分组，并绘制相应的频数分布直方图；

（2）如果身高在 155 cm ~ 170 cm（含 155 cm，不含 170 cm）的男学生为正常，试求身高正常的男学生所占的百分比.

解题秘方：根据最大值与最小值确定组数和组距，先列频数分布表，再画直方图.

解：（1）计算这组数据的最大值与最小值的差为 180−140=40.

确定组数与组距，将数据按组距为 5 分组，可分为 40÷5=8（组），即每个小组的范围分别是 $140 \leqslant x < 145$，$145 \leqslant x < 150$，$150 \leqslant x < 155$，$155 \leqslant x < 160$，$160 \leqslant x < 165$，$165 \leqslant x < 170$，$170 \leqslant x < 175$，$175 \leqslant x \leqslant 180$.

列频数分布表如下：

分组	划记	频数
$140 \leqslant x < 145$	丅	2
$145 \leqslant x < 150$	下	3
$150 \leqslant x < 155$	正	5
$155 \leqslant x < 160$	正正丅	12
$160 \leqslant x < 165$	正正正正	20
$165 \leqslant x < 170$	正正	10
$170 \leqslant x < 175$	正一	6
$175 \leqslant x \leqslant 180$	丅	2
合计	60	60

画频数分布直方图如图 10.2−2 所示：

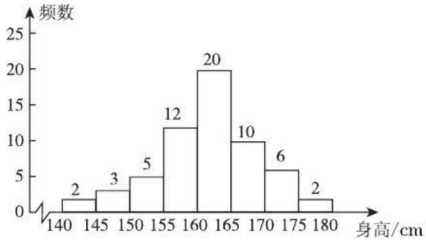


图 10.2−2

画频数分布直方图

（2）由图可知，身高在正常范围内的男学生有 12+20+10=42（名），其所占的百分比是 $\frac{42}{60} \times 100\% = 70\%$.

解法提醒

作频数分布直方图要按步骤进行操作，其关键是列频数分布表；频数分布表和频数分布直方图都表示数据落在各小组的个数；绘制频数分布直方图是为了把表中的结果直观地表示出来，它们是频数分布的“数”与“形”的两种不同形式，互相补充.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 频数分布直方图的有关计算

例5 某市教育局在全市党员教职工中开展的“学习新党章、树立新形象”活动中，进行了论文的评比，论文的交稿时间为11月1日至24日，评委会把各校交的论文的篇数按4天一组分组统计，绘制成如图10.2-3所示的频数分布直方图（每组包括左端点，不包括右端点）.已知从左往右各小长方形的高的比为2∶3∶4∶6∶4∶1，第二组的频数为18.请回答下列问题：

（1）本次活动共有多少篇论文参加评比？

（2）哪组上交的论文数量最多？是多少？

（3）经过评比，第四组和第六组分别有20篇、4篇论文获奖，则这两组哪组的获奖率高？

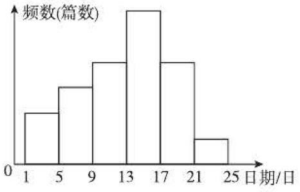


图10.2-3

解题秘方：（1）根据小长方形的高的比，可知每组的频数之比，由第二组的频数及其在总数中所占的份数可以求出总数；（2）上交论文最多的组的频数最大；（3）获奖率＝获奖篇数÷该组的频数×100%.

解：（1）∵从左往右各小长方形的高的比为2∶3∶4∶6∶4∶1，

∴从左往右各组的频数的比为2∶3∶4∶6∶4∶1.

∵第二组的频数为18，

∴总数为 $18\div\frac{3}{2+3+4+6+4+1}=120$.

∴本次活动共有120篇论文参加评比.

（2）第四组上交的论文数量最多，是36篇.

（3）第四组的获奖率为 $20\div36\times100\%\approx56\%$，

第六组的获奖率为 $4\div(120\times\frac{1}{20})\times100\%\approx67\%$.

∵56%<67%，∴第六组的获奖率高.

挑战·高分

另解（1）

设从左往右各组的频数分别为$2x$，$3x$，$4x$，$6x$，$4x$，x.

∵第二组的频数为18，

∴$3x=18$，

∴$x=6$.

∴$2x+3x+4x+6x+4x+x=20x=20\times6=120$.

∴本次活动共有120篇论文参加评比.

详解

观察频数分布直方图可知，第四组的小长方形最高，所以该组的频数最大，所以第四组上交的论文数量最多，篇数为$\frac{6}{20}\times120=36$（篇）.

拔尖角度 2 从多种统计图中获取信息

例6 初中学生的视力状况受到全社会的广泛关注.2019年，某市有关部门对全市20万名初中学生的视力状况进行了一次抽样调查，从中随机抽查了10所中学全体学生的视力情况，绘制了如图10.2-4所示的统计图.请你根据统计图，解答下列问题：

挑战·高分

方法点拨

本题以实际问题为背景，考查读图、识图并从中获取信息的能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

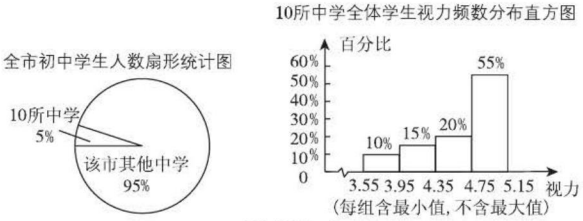


图 10.2-4

(1) 2019 年这 10 所中学的学生总人数是多少?

(2) 2019 年这 10 所中学的学生中，视力在 4.75 以上（含 4.75）的学生人数占全市初中学生总人数的百分比是多少?

(3) 2019 年该市参加中考的学生达 66 000 人，请你估计 2019 年该市这 10 所中学参加中考的学生人数.

解: (1) 2019 年这 10 所中学的学生总人数是 $20\times5\%=1$（万人）.

(2) 2019 年这 10 所中学的学生中，视力在 4.75 以上（含 4.75）的学生人数是 $1\times55\%=0.55$（万人），故所求百分比为 $\frac{0.55}{20}\times100\%=2.75\%$.

(3) 2019 年该市参加中考的学生人数占全市初中学生总人数的百分比是 $\frac{66\,000}{20\times10\,000}\times100\%=33\%$. 所以估计 2019 年该市这 10 所中学参加中考的学生人数大约是 $10\,000\times33\%=3\,300$（人）.

思路点拨

1. 全市初中学生总人数×这 10 所中学全体学生所占百分比 = 这 10 所中学的学生总人数;
2. 应先求出这 10 所中学的学生中，视力在 4.75 以上（含 4.75）的学生人数，再求它占全市初中学生总人数的百分比是多少;
3. 先求出该市参加中考的学生人数占全市初中学生总人数的百分比，即可估计出这 10 所中学参加中考的学生人数占这 10 所中学学生总人数的百分比，从而求出结果.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考点有：频数分布表和频数分布直方图，主要考查对直方图的读图、识图、从图中获取信息的能力以及数形结合的思想方法. 题型以解答题为主，多以时代热点问题为背景命题，难度中等.

三年中考兵法

考法 1 从频数直方图中获取信息

例 7 [中考·温州] 如图 10.2-5 是九（1）班 45 名同学每周课外阅读时间的频数直方图（每组含前一个边界值，不含后一个边界值）. 由图可知，人数最多的一组是（　　）

A. 2 ~ 4 小时　　B. 4 ~ 6 小时

C. 6 ~ 8 小时　　D. 8 ~ 10 小时

试题评析: 本题考查从频数直方图中获取信息，解题的关键是看清直方图中横纵轴中的数据信息.

解: 由频数直方图可得，人数最多的一组是 4 ~ 6 小时，频数为 22，故选 B.

答案: B

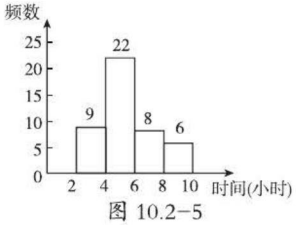


图 10.2-5

冲刺·满分

技巧点拨

读取频数分布直方图的技巧: 用直方图解决实际问题时，先从图中读取信息，即通过观察弄清统计图的横轴和纵轴所表示的意义以及每组数据所对应的长方形的高，再根据题目要求获取适当的信息.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 补全频数分布直方图

例 8 [中考·黄石]随着社会的发展，私家车变得越来越普及，使用节能低油耗汽车，对环保有着非常积极的意义. 某市有关部门对本市的某一型号的若干辆汽车，进行了一项油耗抽样试验：即在同一条件下，被抽样的该型号汽车，在耗油 1 L 的情况下，所行驶的路程（单位：km）进行统计分析，结果如图 10.2-6 所示：

（注：记 A 为 12~12.5，B 为 12.5~13，C 为 13~13.5，D 为 13.5~14，E 为 14~14.5）

请依据统计结果回答以下问题：

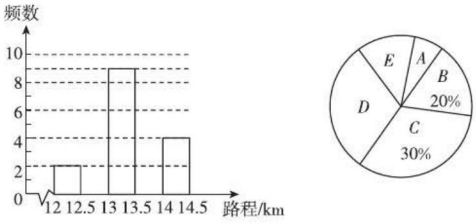


图 10.2-6

（1）试求进行该试验的车辆数；

（2）请补全频数分布直方图；

（3）若该市有这种型号的汽车约 900 辆（不考虑其他因素），请利用上述统计数据初步预测，该市约有多少辆该型号的汽车，在耗油 1 L 的情况下可以行驶 13 km 以上？

试题评析：本题考查了直方图和扇形图，解题的关键是读懂统计图.

解：（1）由直方图可得 C 组的频数为 9，由扇形图可得 C 组所占的百分比为 30%，∴进行该试验的车辆数为 $9\div30\%=30$（辆）.

（2）∵车辆数为 30 辆，B 组所占的百分比为 20%，

∴ B 组的频数为 $30\times20\%=6$，

∴ D 组的频数为 $30-2-6-9-4=9$.

补全直方图如图 10.2-7 所示：

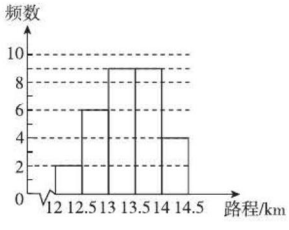


图 10.2-7

（3）该市该型号的汽车，在耗油 1 L 的情况下可以行驶 13 km 以上的车辆数约为 $900\times\dfrac{9+9+4}{30}=660$（辆）.

考法点津

- 扇形统计图与直方图（或条形统计图）结合是常见的考查方式，直方图与条形图都是反映频数，而扇形统计图中的百分比可看成频率.
- 一般解决三个问题：
  (1) 利用扇形统计图和直方图（或条形图）求样本容量；
  (2) 补全残缺的直方图（或条形图）和扇形图.
  (3) 利用样本的情况估计总体的情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 一组数据的最大值与最小值之差为80，若取组距为9，则分成的组数应是（　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.12

2. 在频数分布直方图中，小长方形的高（　　）

A. 是该组的频数与组距的比值

B. 是该组的频数与数据总数的比值

C. 是该组的组距

D. 与该组的频数无关

3. 在统计图中，直方图的主要作用是（　　）

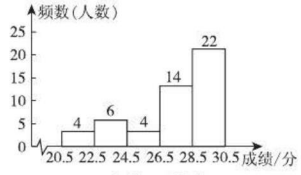
A. 可以反映整体的平均水平

B. 可以反映整体的波动大小

C. 可以反映整体的分布情况

D. 可以看出整体的最大值和最小值

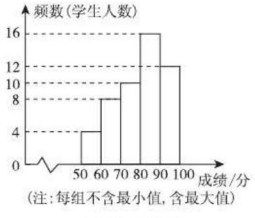
4. [**中考·黄石**]九年级（3）班共有50名同学，如图是该班一次体育模拟测试成绩的频数分布直方图（满分为30分，成绩均为整数）. 若将不低于23分的成绩评为合格，则该班此次成绩达到合格的同学占全班人数的百分比是_____.



（第4题）

5. 已知一个样本中的50个数据分别落在五个小组内，第一、二、三、五小组数据的个数分别占数据总数的4%，16%，30%，10%，则第四小组的频数为_____.

6. 某校八年级（1）班全体学生举行了“首义精神耀千秋”知识竞赛. 根据竞赛成绩（得分为整数，满分为100分）绘制了频数分布直方图，如图所示，根据频数分布直方图解答下列问题：



（第6题）

（1）求该班的学生人数；

（2）若成绩不低于80分为优秀，且该班有3名学生的成绩为80分，则该班学生成绩的优秀率是多少？

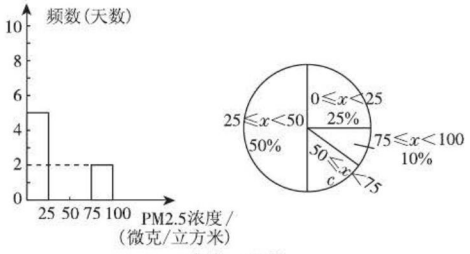
7. 国家环保部发布的《环境空气质量标准》规定：居民区的PM2.5的年平均浓度不得超过35微克/立方米，PM2.5的24小时平均浓度不得超过75微克/立方米. 某市环保部门随机抽取了一居民区去年若干天PM2.5的24小时平均浓度的监测数据，并统计得如下图表：

PM2.5浓度x/（微克/立方米）	频数
$0 \leqslant x < 25$	5
$25 \leqslant x < 50$	a
$50 \leqslant x < 75$	b
$75 \leqslant x < 100$	2

根据图表中的信息回答下面的问题：

（1）a=_____，b=_____，c=_____%；

（2）补全频数分布直方图.

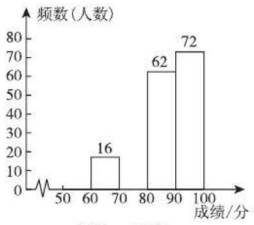


（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 某区八年级的学生参加了“爱我中华知识竞赛”活动. 为了了解本次知识竞赛的成绩分布情况，从中抽取了200名学生的成绩进行统计，得到如下图表：

成绩 x / 分	频数
$50 \leqslant x < 60$	10
$60 \leqslant x < 70$	16
$70 \leqslant x < 80$	a
$80 \leqslant x < 90$	62
$90 \leqslant x < 100$	72



（第8题）

根据图表中提供的信息，解答下列问题：

（1）a=_____，并补全频数分布直方图；

（2）若将成绩转化为等级，规定 $50 \leqslant x < 60$ 评为“D”，$60 \leqslant x < 70$ 评为“C”，$70 \leqslant x < 90$ 评为“B”，$90 \leqslant x < 100$ 评为“A”. 这次抽查的学生中，有多少人的参赛成绩被评为“B”？

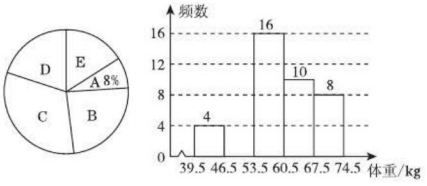
9. 某校为了解九年级1 000名学生的身体健康情况，从该年级随机抽取了若干名学生，将他们按体重（均为整数，单位：kg）分成五组（A：39.5 ~ 46.5；B：46.5 ~ 53.5；C：53.5 ~ 60.5；D：60.5 ~ 67.5；E：67.5 ~ 74.5），并依据统计数据绘制了如图所示的两幅尚不完整的统计图.

解答下列问题：　　【导学号：7207895】

（1）这次抽样调查的样本容量是_____，并补全频数分布直方图；

（2）在扇形统计图中D组的圆心角是_____度；

（3）请你估计该校九年级体重超过60 kg的学生大约有多少名.



（第9题）

素养提分　行动篇

用频率谈论谁是《红楼梦》的作者

我国有一部古典文学名著《红楼梦》，虽然书的封面上通常都印有曹雪芹和高鹗两位作家的名字，但是，它的作者究竟是谁，现在还是一个谜. 一些专家正在试图用数学的方法揭开这个谜.

有一种研究方法是以计算机为工具，对这部名著的遣词造句进行了统计分析，看写作手法是否前后完全一致. 如果整本小说出自一人之手，那么不管翻到书的哪一部分，遣词造句的写作手法应该极其相像.

谈祥柏先生在他的《数学广角镜》一书中介绍说，湖南师范大学的一位学者发现，在《红楼梦》的前80回中，佣人，老妈子等下人都自称为“小的”，可到了后40回，则一般都自称为“奴才”，这就露出了一个“马脚”，说明前80回和后40回的作者可能不是同一个人.

1987年《复旦大学学报(社科版)》介绍说，复旦大学的李贤平先生将《红楼梦》120回看成一个整体，统计了47个虚字的出现频率，又提出了不能笼统地认定为前80回为一人所写，后40回为另一个不相干的人所写的看法.

那么《红楼梦》的作者究竟是曹雪芹一个人呢，还是曹雪芹和高鹗两个人呢，还是它原本就是一部在几本民间小说基础上合成的长篇小说呢？至今还没有定论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.3 课题学习 从数据谈节水 ☞答案见 274 页

一、阅读回答：

1. 地球上的水包括_____三大类.

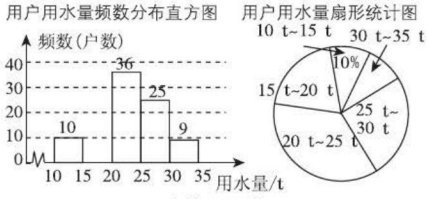
2. 地表水可分为_____和_____；陆地水可分为_____、_____、_____等.

3. 地球上水的总体积是_____；其中，海洋水约占_____以上，淡水约占_____；人类可以利用的水还不到淡水的_____.

4. 结合我国水资源的状况，谈谈你应当怎样节约用水?

二、用数据谈节水：

1. 某地为提倡节约用水.准备实行自来水“阶梯计费”方式，用户用水不超出基本用水量的部分享受基本价格.超出基本用水量的部分实行加价收费，为更好地决策，自来水公司随机抽取部分用户的用水量数据，并绘制了如图所示的不完整的统计图（每组数据包括右端点，但不包括左端点），请你根据统计图解决下列问题：



（第 1 题）

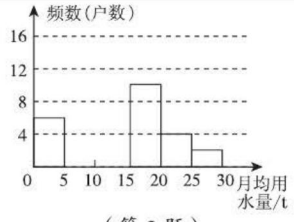
（1）此次调查抽取了多少户的用水量数据?

（2）补全频数分布直方图，求扇形统计图中“25 t~30 t”部分的圆心角度数.

（3）如果自来水公司将基本用水量定为每户 25 t.那么该地 20 万用户中约有多少户的用水全部享受基本价格?

2. 七（1）班同学为了解 2015 年某小区家庭月均用水情况，随机调查了该小区部分家庭，并绘制了如下不完整的频数分布表和如图所示不完整的频数分布直方图.

月均用水量 x/t	频数（户数）	百分比
$0 < x \leqslant 5$	6	12%
$5 < x \leqslant 10$		24%
$10 < x \leqslant 15$	16	32%
$15 < x \leqslant 20$	10	20%
$20 < x \leqslant 25$	4	
$25 < x \leqslant 30$	2	4%



（第 2 题）

请解答以下问题：

（1）把频数分布表和频数分布直方图补充完整；

（2）求月均用水量不超过 15 t 的家庭数占被调查的家庭总数的百分比；

（3）若该小区有 1 000 户家庭，根据调查数据估计，该小区月均用水量超过 20 t 的家庭大约有多少户?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三种常见统计图的特点及综合应用

荣老师告诉你 在当今信息化时代，数据已经成为一种重要的信息．而扇形统计图、条形统计图、折线统计图可以从不同的角度反映一组数据信息的特点与规律，三种统计图有着各自的特点，因此解决实际问题时要注意统计图的特点，学会收集、描述、分析数据，从而作出合理的决策．

应用一 扇形统计图反映部分与整体的关系

例 1 如图 1 是甲、乙两户居民家庭全年支出费用的扇形统计图．根据统计图，下面对全年食品支出费用判断正确的是（　　）

A. 甲户比乙户多

B. 乙户比甲户多

C. 甲、乙两户一样多

D. 无法确定哪一户多

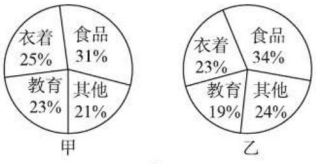


图 1

解：扇形统计图只提供了甲、乙两户居民家庭全年各项支出费用占总支出费用的百分数，因为不知道甲、乙两户居民家庭全年的总支出费用，所以无法比较甲、乙两户居民家庭全年食品支出费用的多少，故应选 D.

答案：D

应用二 折线统计图反映事物的变化趋势

例 2 美化城市，改善人们的居住环境已成为城市建设的一项重要内容，某市城区近几年来，通过拆迁旧房、植草、栽树、修建公园等措施，使城区绿地面积不断增加，如图 2 所示，根据图中所提供的信息，回答下列问题．

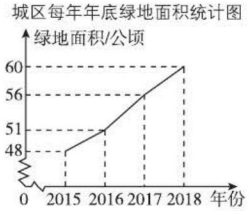


图 2

（1）2018 年年底的绿地面积为_____公顷，比 2017 年年底增加了_____公顷；

（2）在 2016 年、2017 年、2018 年这三年中，增加绿地面积最多的是_____年；

（3）为满足城市发展的需要，计划在 2019 年年底使城区绿地面积达到 70.2 公顷，则 2019 年年底绿地面积的年增长率为_____．

解：从折线统计图看，城区绿地面积随着年份不断增加，其中（1）（2）题的信息易从统计图中得到；（3）题可借助列方程来求解，设年增长率为 x，列方程从而求出 x.

答案：（1）60；4　（2）2017　（3）17%

应用三 条形统计图反映事物的具体数目

例 3 如图 3 显示的是某班 20 人在“献爱心”活动中捐图书的情况，该班人均捐了_____本书．

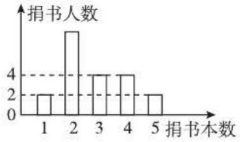


图 3

解题秘方：本题设计别具匠心，新颖独到．主要考查了对条形统计图的识别、理解和推理能力．

解：从条形统计图中，我们可以直接看出：有 2 人捐了 1 本书，有 4 人捐了 3 本书，有 4 人捐了 4 本书，有 2 人捐了 5 本书，则捐了 2 本书的人数为 $20-2-4-4-2=8$，则该班人均捐书 $(1\times2+2\times8+3\times4+4\times4+5\times2)\div20=2.8$（本）．

答案：2.8

应用四 三种统计图的综合运用

例 4 [中考·威海]央视热播节目“朗读者”激发了学生的阅读兴趣，某校为满足学生的阅读需求，欲购进一批学生喜欢的图书，学校组织学生会成员随机抽取部分学生进行问卷调查，被调查学生须从“文史类、社科类、小说类、生活类”中选择自己喜欢的一类，根据调查结果绘制了如图 4 所示的统计图（未完成），请根据图中信息，解答下列问题：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）此次共调查了_____名学生；

（2）将条形统计图补充完整；

（3）图②中小说类所在扇形的圆心角为_____度；

（4）若该校共有学生 2 500 人，估计该校喜欢“社科类”书籍的学生人数．

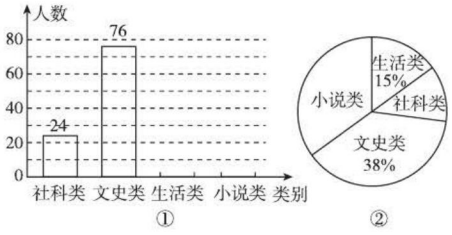


图 4

解题秘方：（1）依据统计图可得到选择文史类的人数和所占的百分比，然后依据总人数 = 频数 ÷ 百分比求解即可；

（2）频数 = 总人数 × 百分比可求得选择生活类的人数，然后依据四个组别的频数和为 200 可求得选择小说类的频数，从而可补全条形统计图；

（3）依据扇形的圆心角 =360° × 百分比求解即可；

（4）先求得喜欢社科类的人数所占的百分比，然后依据频数 = 总人数 × 百分比估算出该校喜欢“社科类”书籍的学生人数即可．

解：（1）200

（2）200×15%=30，200−24−30−76=70. 补全条形统计图如图 5 所示．



图 5

（3）126

（4）$2\,500\times\left(\frac{24}{200}\times100\%\right)=300.$

所以估计该校喜欢“社科类”书籍的学生人数为 300.

警示误区：本题的易错点是：①不能够从条形统计图和扇形统计图中获取到各组别的频数和百分比等相关信息；②没有掌握频数、百分比、总人数之间的关系；③没有掌握圆心角的计算方法．

例 5 ［**中考 · 济宁**］为了参加学校举行的传统文化知识竞赛，某班进行了四次模拟训练．将成绩优秀的人数和优秀率绘制成如图 6 所示两幅不完整的统计图．

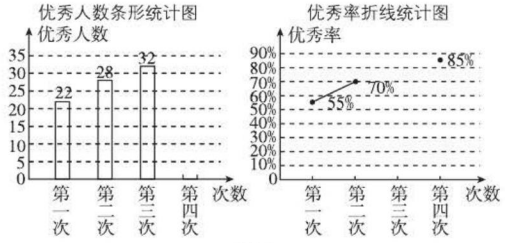


图 6

请根据以上两幅图解答下列问题：

（1）该班总人数是_____；

（2）根据计算，请你补全两幅统计图；

（3）观察补全后的统计图，写出一条你发现的结论．

解题秘方：（1）结合条形统计图和折线统计图，用第一次优秀人数除以优秀率可得该班总人数．

（2）用该班总人数乘第四次的优秀率可得第四次的优秀人数，用第三次的优秀人数除以该班总人数再乘 100%，可得第三次的优秀率，最后补全统计图．

（3）答案不唯一，结合统计图回答即可．

解：（1）40 人

（2）第四次的优秀人数为 40×85%=34（人）；第三次的优秀率为 32÷40×100%=80%. 补图如图 7 所示．

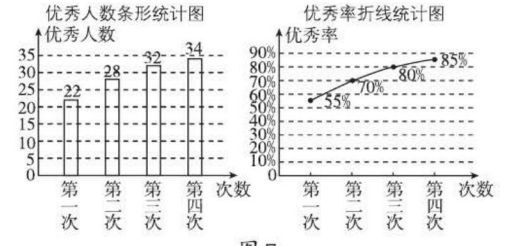


图 7

（3）答案不唯一，如优秀人数逐渐增多，增大的幅度逐渐减小等．

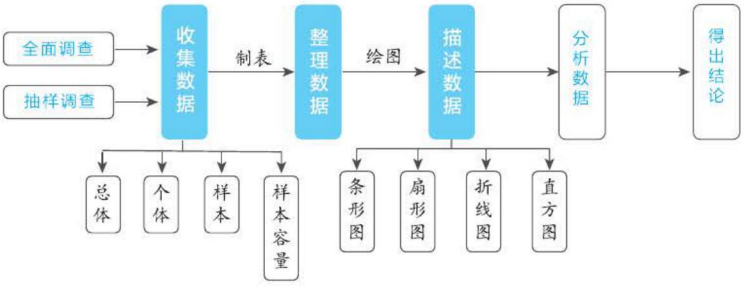
方法点拨：统计图中，已知部分求总体，通常用除法；已知总体求部分，通常用乘法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一般来说，对于具有破坏性、无法进行全面调查、全面调查的意义或价值不大的调查，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用全面调查．选择全面调查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用．

2. **所要考察对象的全体叫做总体；**总体中的每一个考察对象叫做个体；从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本；样本中个体的数目叫做样本容量．样本是总体的一部分，样本通常只包括一部分个体，样本在一定程度上能够反映总体．

3. **统计图中相关量的计算方法：**

（1）条形统计图：一般涉及补图，也就是求未知组的频数，方法如下：

①未知组的频数 = 样本容量 − 已知组的频数之和；

②未知组的频数 = 样本容量 × 该组所占样本百分比．

（2）扇形统计图：一般涉及求未知组的百分比或其所占圆心角的度数，方法如下：

①未知组的百分比 =1− 已知组的百分比之和；

②未知组的百分比 $=\dfrac{\text{未知组的频数}}{\text{样本容量}}\times 100\%$；

③若求未知组在扇形统计图中圆心角的度数，利用 360° × 其所占样本百分比即可．

（3）统计表：一般涉及求频数和百分比，方法同上．

（4）折线统计图：一般涉及补图，根据统计表中未知组的数量（或根据题目条件求出未知组数量），描点即可．

知识方法专题

知识必学

专题一 全面调查与抽样调查

链接中考» 统计调查的常用方法是全面调查与抽样调查，抽样调查是用样本估计总体的思想，它是统计知识和方法的源头，也是中考命题的热点内容，题型多以选择题为主．

例 1 ［中考·重庆］下列调查中，最适宜采用全面调查方式的是（　　）

A. 对重庆市中学生每天学习所用时间的调查

B. 对全国中学生心理健康现状的调查

C. 对某班学生进行 6 月 5 日是“世界环境日”知晓情况的调查

D. 对重庆市初中学生课外阅读量的调查

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据全面调查和抽样调查适用条件确定正确答案.

解：A，B，D中调查范围较大，不适宜全面调查，只有C中调查范围小，操作容易，适宜全面调查，故选择C.

答案：C

方法点拨：本题考查了抽样调查和全面调查的适用条件的区别：一般来说，对于具有破坏性、调查范围广、无法进行全面调查、全面调查的意义或价值不大的调查，应选择抽样调查；对于精确度要求高的调查、调查范围比较小、事关重大的调查往往选用全面调查. 选择全面调查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用.

专题二 数据的描述——统计图

链接中考» 调查中，收集并整理数据后，可以用统计图来描述数据，统计图包括条形统计图、扇形统计图和折线统计图. 选择正确的统计图来描述数据至关重要，在近几年中考中，从选择题和解答题考查最多.

例2 [中考·威海]某学校为了推动球类运动的普及，拟成立多个球类运动社团，为此，学生会采取抽样调查的方法，从足球、乒乓球、篮球、排球四个项目中调查了若干名学生的兴趣爱好（要求每名同学只能选择其中一种自己喜欢的球类运动），并将调查结果绘制成了如图10-1所示的条形统计图和扇形统计图（不完整）. 请你根据图中提供的信息，解答下列问题：

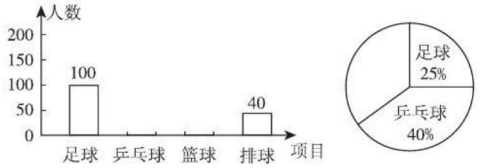


图10-1

（1）本次抽样调查，共调查了_____名学生.

（2）请将条形统计图和扇形统计图补充完整.

（3）若该学校共有学生1 800名，根据以上数据分析，试估计选择排球运动的同学约有多少名.

解题秘方：本题考查了统计图、通过样本估计总体，解答本题的关键是能从条形统计图和扇形统计图中读取有用的信息，利用读取的信息进行判断.

解：（1）400

（2）选择乒乓球的人数为$400\times40\%=160$，选择篮球的人数为$400-100-160-40=100$，扇形统计图中“篮球”所占的百分比为$\frac{100}{400}\times100\%=25\%$，“排球”所占的百分比为$\frac{40}{400}\times100\%=10\%$.

∴补全图形如图10-2所示.

（3）∵$1\,800\times10\%=180$（名），

∴估计选择排球运动的同学约有180名.

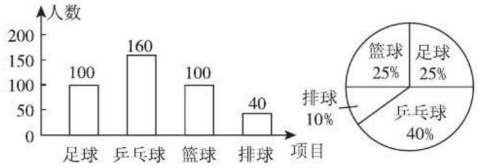


图10-2

专题三 频数分布直方图

链接中考» 统计主要研究日常生活中的数据，从统计数据中可以了解情况、发现规律、作出判断. 正确收集数据，并能根据具体情况选择适当的统计图表来描述数据至关重要，在近几年的中考题中，对此类问题的考查频繁出现，题型以填空题和解答题为主.

例3 [中考·昆明] 2015年4月25日，尼泊尔发生了里氏8.1级地震，某中学组织了献爱心捐款活动，该校数学兴趣小组对本校学生献爱心捐款额进行了一次随机抽样调查，并绘制了不完整的频数分布表和频数分布直方图（每组含前一个边界值，不含后一个边界值），如图10-3所示.

捐款额/元	频数	百分比
$5\leqslant x<10$	5	10%
$10\leqslant x<15$	a	20%
$15\leqslant x<20$	15	30%
$20\leqslant x<25$	14	b
$25\leqslant x<30$	6	12%
合计		100%

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

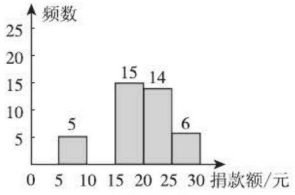


图 10-3

（1）a=_____，b=_____；

（2）补全频数分布直方图；

（3）该校共有 1 600 名学生，估计这次活动中爱心捐款额不低于 20 元的学生大约有多少名.

解题秘方：（1）先利用第一组的频数与百分比计算出样本容量，再用样本容量乘 20% 即可得到 a 的值，用 14 除以样本容量再乘 100% 得到 b 的值.（2）由（1）可补全频数分布直方图.（3）根据样本可得爱心捐款额不低于 20 元的学生人数所占的百分比，然后用总人数乘百分比即可估计出爱心捐款额不低于 20 元的学生人数.

解：（1）10；28%

（2）如图 10-4 所示.

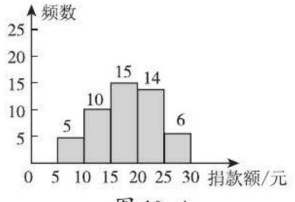


图 10-4

（3）1 600×（28%+12%）=640（名）.

答：估计这次活动中爱心捐款额不低于 20 元的学生大约有 640 名.

方法必会

专题四 用样本估计总体的思想

专题解读» 用样本估计总体是统计中最基本的思想方法，从总体中抽取样本，通过对样本的整理、分析，去估计总体的情况.

例 4 [中考·绵阳]要估计鱼塘中的鱼数，养鱼者首先从鱼塘中打捞了 50 条鱼，在每条鱼身上做好记号后把这些鱼放归鱼塘，再从鱼塘中打捞出 100 条鱼，发现只有 2 条鱼是刚才做了记号的鱼，假设鱼在鱼塘内均匀分布，那么估计这个鱼塘的鱼数大约为（　　）

A.5 000 条　　B.2 500 条

C.1 750 条　　D.1 250 条

解题秘方：首先求出有记号的 2 条鱼在 100 条鱼中所占的比例，然后根据样本中有记号的鱼所占的比例等于鱼塘中有记号的鱼所占的比例，从而求得这个鱼塘的鱼数大约为 $50\div\frac{2}{100}=2\,500$（条）.故选 B.

答案：B

例 5 [中考·吉林]某校组织了主题为“让勤俭节约成为时尚”的电子小报作品征集活动，现从中随机抽取部分作品，按 A，B，C，D 四个等级进行评价，并根据统计结果绘制了如图 10-5 所示的两幅不完整的统计图.

（1）求抽取了多少份作品；

（2）此次抽取的作品中等级为 B 的作品有多少份？并补全条形统计图；

（3）若该校共征集到 800 份作品，请估计等级为 A 的作品大约有多少份.

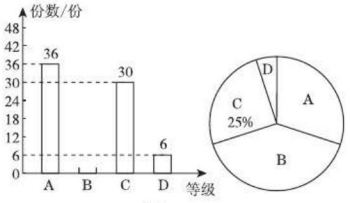


图 10-5

解题秘方：（1）根据等级为 C 的份数除以所占的百分比，得到抽取作品的总份数；（2）由总份数减去其他份数，求出 B 等级的份数，补全条形统计图即可；（3）求出 A 等级的作品所占的百分比，乘 800 即可得到结果.

解：（1）根据题意得 30÷25%=120（份），则抽取了 120 份作品.

（2）等级为 B 的作品有 120−（36+30+6）=48（份），

补全条形统计图如图 10-6 所示.

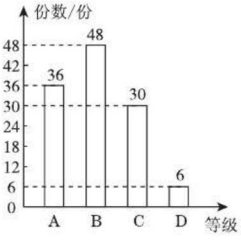


图 10-6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）根据题意得 $800\times\left(\frac{36}{120}\times100\%\right)=240$（份），

则估计等级为 A 的作品大约有 240 份.

解题策略：此题考查了条形统计图、扇形统计图，以及用样本估计总体，弄清题意是解本题的关键.

专题五 数形结合思想

专题解读≫涉及有关统计图、表的问题时，需要从统计图、表中准确提取信息，恰当分析统计图、表中数据的含义.

例 6 某同学在学习了统计知识后，就下表所列的 5 种用牙不良习惯对全班每一名同学进行了问卷调查（每名被调查的同学必须选择而且只能在 5 种用牙不良习惯中选择一项），调查结果如图 10-7 所示.

种类	A	B	C	D	E
不良习惯	睡前吃水果喝牛奶	用牙开瓶盖	常喝饮料嚼冰	常吃生冷零食	磨牙

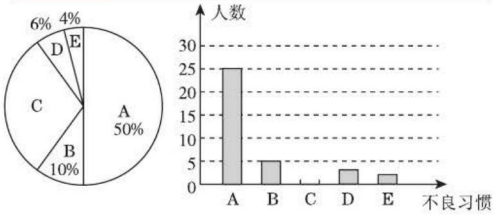


图 10-7

根据以上统计图提供的信息，回答下列问题：

（1）这个班共有多少名学生？

（2）这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生多少名？占全班人数的百分比是多少？

（3）请补全条形统计图.

（4）根据调查结果，估计这个年级 850 名学生中有 *B* 类用牙不良习惯的学生约多少名.

解题秘方：由统计图可知 A 类人数占 50%，则可求出全班的人数，进而解决问题.

解：（1）$25\div50\%=50$（名）.

∴这个班共有 50 名学生.

（2）$1-50\%-10\%-6\%-4\%=30\%$，$50\times30\%=15$（名）.

∴这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生 15 名，占全班人数的 30%.

（3）如图 10-8 所示.

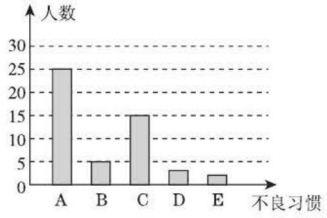


图 10-8

（4）$850\times10\%=85$（名）.

∴估计这个年级 850 名学生中有 B 类用牙不良习惯的学生约 85 名.

好题必解 ☞答案见 274 页

类型 1：调查方式的选择

1. [中考·重庆]下列调查中，最适合采用全面调查（普查）方式的是（　　）

A. 对重庆市初中学生每天阅读时间的调查

B. 对端午节期间市场上粽子质量情况的调查

C. 对某批次手机的防水功能的调查

D. 对某校九年级 3 班学生肺活量情况的调查

2. 在下列调查中：

①对市场上某一品牌电脑使用寿命的调查；

②了解某池塘鱼的产量；

③调查某市合资企业的数量；

④调查全国中学生的环保意识；

⑤审查某篇文章中的错别字的数量.

其中适合全面调查的有_____，适合抽样调查的有_____.（填序号）

类型 2：抽样调查中相关统计量

3. 为了了解攀枝花市 2019 年中考数学学科各分数段的成绩分布情况，从中抽取 150 名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是指（　　）

A.150

B. 被抽取的 150 名考生

C. 被抽取的 150 名考生的中考数学成绩

D. 攀枝花市 2019 年中考数学成绩

4. 为纪念中国人民抗日战争的胜利，9 月 3 日被确定为抗日战争胜利纪念日，某校为了了解学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

生对“抗日战争”的知晓情况，从全校 6 000 名学生中，随机抽取了 120 名学生进行调查，在这次调查中（　　）

A.6 000 名学生是总体

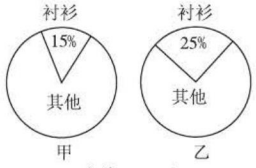
B. 所抽取的每名学生对“抗日战争”的知晓情况是总体的一个样本

C.120 名是样本容量

D. 所抽取的 120 名学生对“抗日战争”的知晓情况是总体的一个样本

类型 3：利用统计图解决问题

5. 如图是甲、乙两个服装公司销售情况统计图，则从统计图中可以看出（　　）



（第 5 题）

A. 甲公司的衬衫销量比乙公司的多

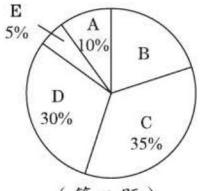
B. 乙公司的衬衫销量比甲公司的多

C. 甲、乙两公司的衬衫销量一样多

D. 不能判断哪个公司的衬衫销量多

6. [**中考 · 安徽**]自来水公司调查了若干用户的月用水量 x（单位：吨），按月用水量将用户分成 A，B，C，D，E 五组进行统计，并制作了如图所示的扇形统计图．已知除 B 组以外，参与调查的用户共 64 户，则所有参与调查的用户中月用水量在 6 吨以下的共有（　　）

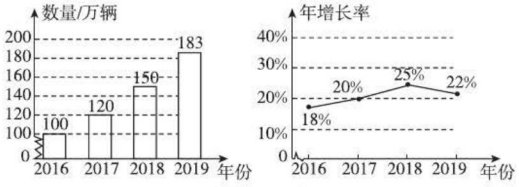
组别	月用水量 x（单位：吨）
A	$0 \leqslant x < 3$
B	$3 \leqslant x < 6$
C	$6 \leqslant x < 9$
D	$9 \leqslant x < 12$
E	$x \geqslant 12$



（第 6 题）

A.18 户　　B.20 户　　C.22 户　　D.24 户

7. 如图是某市 2016 ~ 2019 年私人汽车拥有量和年增长率的统计图，该市私人汽车拥有量年净增量最多的是_____年，私人汽车拥有量年增长率最大的是_____年．



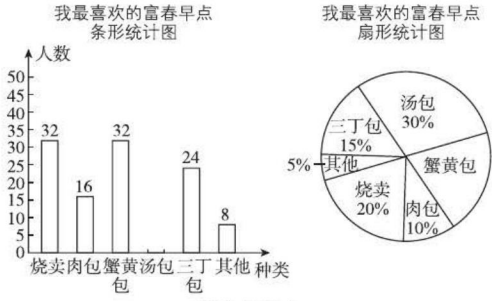
（第 7 题）

8. [**中考 · 扬州**]“富春包子”是扬州特色早点，富春茶社为了了解顾客对各种早点的喜爱情况，设计了如下的调查问卷，对顾客进行了抽样调查．根据统计数据绘制了如下尚不完整的统计图．

下列富春早点中你最喜欢的是（　　）[单选]

A. 烧卖　　B. 肉包　　C. 蟹黄包

D. 汤包　　E. 三丁包　　F. 其他



（第 8 题）

根据以上信息，解决下列问题：

（1）条形统计图中最喜欢“汤包”的人数是_____，扇形统计图中最喜欢“蟹黄包”部分的圆心角为_____；

（2）根据抽样调查结果，请你估计富春茶社 1 000 名顾客中最喜欢“汤包”的有多少人？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十章测试卷

答案见 274 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列调查适合采用抽样调查的是（　　）

A. 审核书稿中的错别字

B. 对某社区的卫生死角进行调查

C. 对八名同学的身高情况进行调查

D. 对中学生目前的睡眠情况进行调查

2. 某市 2019 年中考考生约为 4 万人，从中抽取 2 000 名考生的数学成绩进行分析，在这个问题中样本是指（　　）

A. 2 000

B. 被抽取的 2 000 名考生的数学成绩

C. 4 万名考生的数学成绩

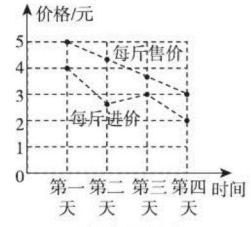
D. 被抽取的 2 000 名考生

3. 天籁音乐行出售三种音乐 CD，即古典音乐、流行音乐、民族音乐，为了表示这三种唱片的销售量占总销售量的百分比，应该用（　　）

A. 扇形统计图　　B. 折线统计图

C. 条形统计图　　D. 以上都可以

4. 某商品四天内每天每斤的进价与售价信息如图所示，则售出这种商品每斤利润最大的是（　　）



（第 4 题）

A. 第一天　　B. 第二天

C. 第三天　　D. 第四天

5. 下列调查中，用全面调查方式收集数据的是(　　)

①为了了解全校学生对任课教师的意见，学校向全校学生进行问卷调查；

②为了了解初中生上网情况，某市团委对 10 所初中的部分学生进行调查；

③某班学生拟组织一次春游活动，为了确定春游的地点，向全班同学进行调查；

④了解全班同学的作业完成情况，对学号为奇数的学生进行调查．

A. ①③　　B. ①②

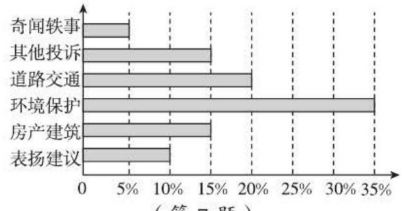
C. ②④　　D. ②③

6. 为了鼓励学生课外阅读，学校公布了“阅读奖励”方案，并设置了“赞成、反对、无所谓”三种意见．现从学校所有 2 400 名学生中随机征求了 100 名学生的意见，其中持“反对”和“无所谓”意见的共有 30 名学生，估计全校持“赞成”意见的学生人数约为（　　）

A.70　　B.720

C.1 680　　D.2 370

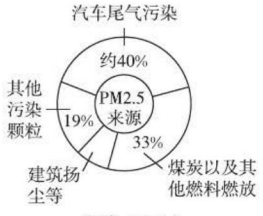
7. 如图是某晚报“百姓热线”一周内接到热线电话的统计图，其中有关环境保护话题的电话最多，共 70 个，则本周“百姓热线”共接到热线电话有（　　）



（第 7 题）

A.350 个　B.200 个　C.180 个　D.150 个

8. 如图是某市 PM2.5 来源统计图，根据该统计图，下列判断正确的是（　　）



（第 8 题）

A. 表示汽车尾气污染的圆心角约为 72°

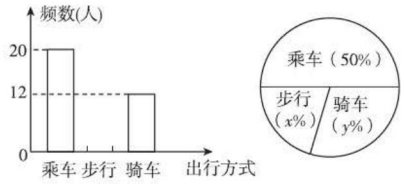
B. 表示建筑扬尘的约占 6%

C. 汽车尾气污染约为建筑扬尘的 5 倍

D. 煤炭以及其他燃料燃放占所有 PM2.5 污染源的 $\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图反映的是某中学九（3）班学生外出方式（乘车、步行、骑车）的频数（人数）分布直方图（部分）和扇形统计图，那么下列说法正确的是（　　）



（第 9 题）

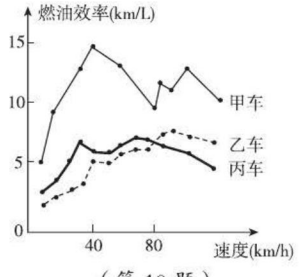
A. 九（3）班外出的学生共有 42 人

B. 九（3）班外出步行的学生有 8 人

C. 在扇形统计图中，步行的学生人数所占的圆心角为 82°

D. 如果该校九年级外出的学生共有 500 人，那么估计全年级外出骑车的学生约有 140 人

10. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 L 汽油行驶的里程数．“燃油效率”越高表示汽车每消耗 1 L 汽油行驶的里程数越多；“燃油效率”越低表示汽车每消耗 1 L 汽油行驶的里程数越少．如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况，下列说法中，正确的是（　　）



（第 10 题）

A. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多

B. 以低于 80 km/h 的速度行驶时，行驶相同路程，三辆车中，乙车消耗汽油最少

C. 以高于 80 km/h 的速度行驶时，行驶相同路程，丙车比乙车省油

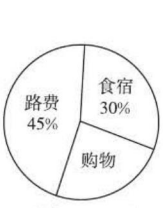
D. 以 80 km/h 的速度行驶时，行驶 100 km，甲车消耗的汽油量约为 10 L

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

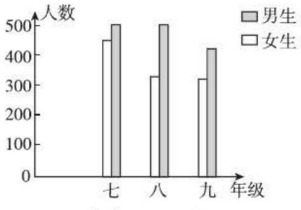
11. 为了了解 10 000 只灯泡的使用寿命，从中抽取 10 只进行试验，则该考察中的样本容量是_____.

12. 小明想了解自己一学期数学成绩的变化趋势，应选用_____统计图来描述数据．

13. 小明一家三口随旅游团外出旅游，旅途的费用支出情况如图所示．若他们共支出了 4 800 元，则在购物上用去了_____元．



（第 13 题）



（第 14 题）

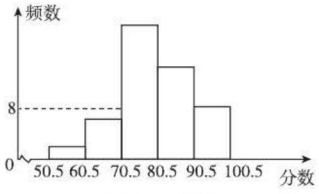
14. 如图是某校初中三个年级男、女生人数的条形统计图，则学生最多的年级是_____.

15. 学校为七年级学生订制校服，校服型号有小号、中号、大号、特大号四种．随机抽取了 100 名学生调查他们的身高，得到身高频数分布表如下：

型号	身高（x/cm）	人数（频数）
小号	$145 \leqslant x < 155$	22
中号	$155 \leqslant x < 165$	45
大号	$165 \leqslant x < 175$	28
特大号	$175 \leqslant x \leqslant 185$	5

已知该校七年级学生有 800 名，那么中号校服应订制_____套．

16. 某班将全班同学一次知识竞赛成绩（整数）进行整理后，分成五组，绘成如图所示频数分布直方图，图中从左到右的前四组的百分比分别是 4%，12%，40%，28%，最后一组的频数是 8，则该班有_____名同学参赛．



（第 16 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）下面这几个抽样调查选取样本的方法是否合适，并说明理由.

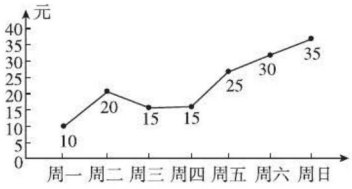
（1）为调查全校学生对购买正版书籍、唱片和软件的支持率，在全校所有的班级中任意抽取 8 个班级，调查这 8 个班所有学生对购买正版书籍、唱片和软件的支持率；

（2）为调查一个省的环境污染情况，调查省会城市的环境污染情况.

18.（10 分）如图，该折线图反映了小明家在某一周内每天的购菜所需费用情况.

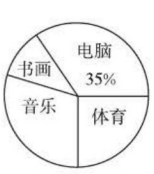
（1）在周_____购菜金额最小；

（2）小明家在这一周内平均每天购菜多少元？（精确到 1 元）

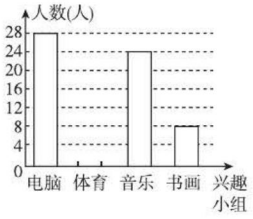


（第 18 题）

19.（10 分）实验中学现有学生 2 870 人，学校为了进一步丰富学生课余生活，拟调查各兴趣小组人数情况，为此校学生会委托小容、小易进行一次随机抽样调查. 根据采集到的数据，小容绘制的统计图如图①，小易绘制的统计图如图②（不完整）.



①



②

（第 19 题）

请你根据统计图①、②中提供的信息，解答下列问题：

（1）写出 2 条有价值的信息（不包括下面要计算的信息）；

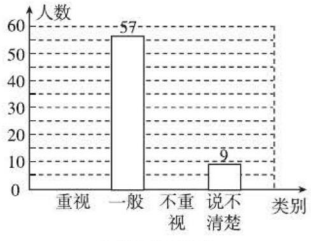
（2）这次抽样调查的样本容量是多少？在图②中，请将小易画的统计图中的“体育”部分的图形补充完整；

（3）爱好“书画”的人数占被调查人数的百分数是多少？估计实验中学现有的学生中，有多少人爱好“书画”？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.（12 分）某教研机构为了解在校初中生阅读数学教科书的现状，随机抽取某校部分初中学生进行了调查．依据相关数据绘制成以下不完整的统计图表，请根据图表中的信息解答下列问题：

类别	人数	占总人数比例
重视	a	0.3
一般	57	0.38
不重视	b	c
说不清楚	9	0.06



（第 20 题）

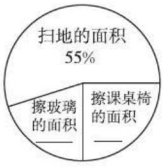
（1）求样本容量及表格中 a，b，c 的值，并补全统计图；

（2）若该校共有初中生 2 300 名，请估计该校“不重视阅读数学教科书”的初中生人数；

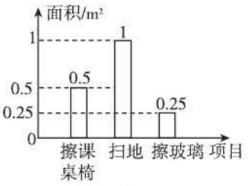
（3）①根据上面的统计结果，谈谈你对该校初中生阅读数学教科书的现状的看法及建议；

②如果要了解全省初中生阅读数学教科书的情况，你认为应该如何进行抽样？

21.（12 分）某班 12 位同学参加每周一次的教室卫生大扫除，有扫地、擦玻璃和擦课桌椅三个项目，扫地的面积为 88 m^2，擦玻璃的面积为 32 m^2，根据实际情况将三个项目的面积分配情况和每人每分钟完成各项目的工作量制作如下统计图：



①



②

（第 21 题）

（1）擦课桌椅的面积为_____ m^2，请补全图①中的各项目面积分配情况扇形统计图；

（2）卫生委员设计两种方案：

方案一：12 位同学先一起完成扫地任务，再一起完成擦玻璃任务，最后一起完成擦课桌椅任务；

方案二：12 位同学先一起完成扫地任务后，再把这 12 位同学分成两组，每组 6 人，一组去擦玻璃，另一组去擦课桌椅．

你认为哪种方案完成大扫除任务所用的时间少，少多长时间？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

期末达标检测卷

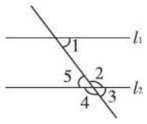
答案见 275 页

（120 分 90 分钟）

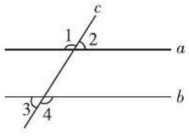
一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 如图，∠1 的内错角是（　　）

A. ∠2　　B. ∠3　　C. ∠4　　D. ∠5



（第 1 题）



（第 5 题）

2. 若 $a > b$，则下列不等式中不成立的是（　　）

A. $a-1 > b-1$　　B. $1-5a > 1-5b$

C. $\frac{a}{7} > \frac{b}{7}$　　D. $-b > -a$

3. 在平面直角坐标系中，将点（−2，3）向上平移 1 个单位长度，所得到的点的坐标是（　　）

A.（−1，3）　　B.（−2，2）

C.（−2，4）　　D.（−3，3）

4. 下列说法不正确的是（　　）

A. 4 是 16 的算术平方根

B. $\frac{5}{3}$ 是 $\frac{25}{9}$ 的一个平方根

C. $(-6)^2$ 的平方根是 −6

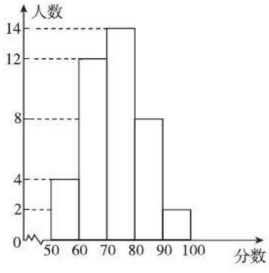
D. $(-3)^3$ 的立方根是 −3

5. 如图，直线 c 与直线 a，b 相交，不能判定直线 a，b 平行的条件是（　　）

A. ∠2 = ∠3　　B. ∠1 = ∠4

C. ∠1 + ∠3 = 180°　　D. ∠1 + ∠4 = 180°

6. 某班的一次数学考试成绩统计图如图，则下列说法错误的是（　　）



（第 6 题）

A. 得分在 70 ~ 80 分的人数最多

B. 该班的总人数为 40

C. 人数最少的得分段的频数为 2

D. 得分及格（≥ 60 分）的有 12 人

7. 若 $\begin{cases}x=4,\\y=-2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=-2,\\y=-5\end{cases}$ 都是方程 $y=kx+b$ 的解，则 k 与 b 的值分别为（　　）

A. $k=\frac{1}{2}$，$b=-4$　　B. $k=-\frac{1}{2}$，$b=4$

C. $k=\frac{1}{2}$，$b=4$　　D. $k=-\frac{1}{2}$，$b=-4$

8. 有下列四个命题：①对顶角相等；②等角的补角相等；③如果 $b \parallel a$，$c \parallel a$，那么 $b \parallel c$；④如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补．其中是真命题的有（　　）

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

9. 小林在某商店两次购买商品 A，B，购买商品 A，B 的数量和费用如下表：

	购买商品 A 的数量（个）	购买商品 B 的数量（个）	购买总费用（元）
第一次购买	6	5	1 140
第二次购买	3	7	1 110

则商品 A，B 的标价分别是（　　）

A. 60 元，90 元　　B. 90 元，60 元

C. 90 元，120 元　　D. 120 元，90 元

10. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3x+m<0,\\x>-5\end{cases}$ 的整数解只有 3 个，则 m 的取值范围是（　　）

A. $-3 \leqslant m<6$　　B. $3 \leqslant m<6$

C. $3<m \leqslant 6$　　D. $3 < m < 6$

二、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

11. $\sqrt{64}$ 的立方根是_____.

12. 写出一个比 3 大且比 4 小的无理数：_____.

13. 直线 m 外有一定点 A，点 A 到直线 m 的距离是 7 cm，B 是直线 m 上的任意一点，则线段 AB 的

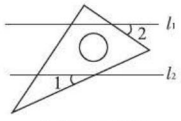
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

长度：AB_____7 cm.（填“<”“>”“=”“≤”或“≥”）

14. 为了保证婴幼儿的饮食安全，质检部门准备对某品牌罐装牛奶进行检测，这种检测适合用的调查方式是_____.（填“全面调查”或“抽样调查”）

15. 将点 P（-3，4）先向下平移 3 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度后得到点 Q，则点 Q 的坐标是_____.

16. 已知：直线 $l_1 \parallel l_2$，一块含 30° 角的直角三角板按如图所示放置，$\angle 1=25°$，则 $\angle 2$ 等于_____.



（第 16 题）

17. 某超市账目记录显示，第一天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；第二天以同样的价格卖出同样的 52 支牙刷和 28 盒牙膏，收入应该是_____元.

18. 某次个人象棋赛规定：赢一局得 2 分，平一局得 0 分，负一局倒扣 1 分，在 12 局比赛中，积分超过 15 分就可以晋级下一轮比赛，小王进入了下一轮比赛，而且在全部 12 局比赛中，没有出现平局，则小王最多输了_____局比赛.

三、解答题（共 66 分）

19.（6 分）计算：

（1）$\sqrt{4}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$；

（2）$2(\sqrt{2}-\sqrt{3})+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.

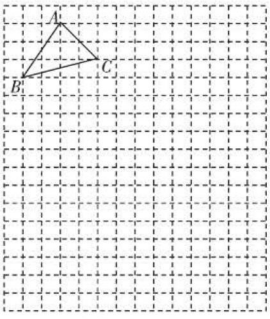
20.（6 分）（1）解方程组：$\begin{cases}2x+5y=25, & ①\\ 4x+3y=15; & ②\end{cases}$

（2）解不等式：$\frac{2x-1}{3}-1\leqslant\frac{5x+1}{2}$.

21.（8 分）在如图所示的网格中，已知三角形 ABC 的顶点 A（0，5），B（-2，2）.

（1）根据点 A，B 的坐标在网格中建立平面直角坐标系，并写出点 C 的坐标；

（2）平移三角形 ABC，使点 C 移动到点 F（7，-4）处，画出平移后的三角形 DEF，其中点 D 与点 A 对应，点 E 与点 B 对应.



（第 21 题）

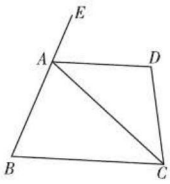
22.（8 分）已知点 P（$2a-4$，$3a+6$）在第三象限，求点 Q（$-a$，$2a+4$）所在的象限.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.（8分）如图，已知四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=100°$，CA 平分 $\angle BCD$，且 $\angle ACB=40°$，$\angle BAC=70°$.

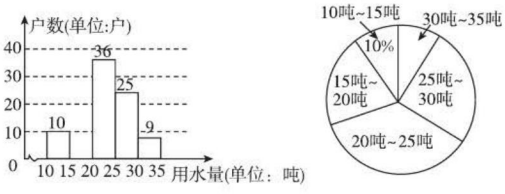
（1）AD 与 BC 平行吗？试写出推理过程；

（2）求 $\angle DAC$ 和 $\angle EAD$ 的度数.



（第 23 题）

24.（8分）某地为提倡节约用水，准备实行自来水“阶梯计费”方式，用户用水不超出基本用水量的部分享受基本价格，超出基本用水量的部分实行加价收费. 为更好地决策，自来水公司随机抽取部分用户的用水量数据，并绘制了如下不完整的统计图（每组数据包括右端点但不包括左端点），请你根据统计图解决下列问题：



（第 24 题）

（1）此次调查抽取了多少户的用水量数据？

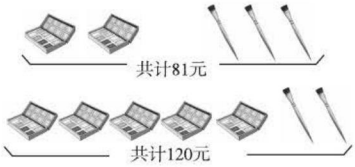
（2）补全频数分布直方图，求扇形统计图中“25吨~ 30吨”部分的圆心角度数；

（3）如果自来水公司将基本用水量定为每户 25 吨，那么该地 20 万用户中约有多少户的用水全部享受基本价格？

25.（10分）某校为表彰在美术展览活动中获奖的同学，老师决定购买一些颜料笔和颜料盒作为奖品，请你根据图中所给的信息，解答下列问题：

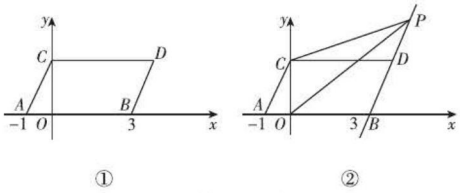
（1）求出每个颜料盒、每支颜料笔各多少元.

（2）若学校计划购买颜料盒和颜料笔的总数目为 20，所花费用不超过 340 元，则颜料盒至多购买多少个？



（第 25 题）

26.（12分）如图①，在平面直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别为（-1，0），（3，0），现同时将点 A，B 分别向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度，得到 A，B 的对应点 C，D，连接 AC，BD，CD.



（第 26 题）

（1）写出点 C，D 的坐标并求出四边形 $ABDC$ 的面积；

（2）在 x 轴上是否存在一点 F，使得三角形 DFC 的面积是三角形 DFB 面积的 2 倍，若存在，请求出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如图②，点 P 是直线 BD 上的一个动点，连接 PC，PO，当点 P 在直线 BD 上运动时，请直接写出 $\angle OPC$ 与 $\angle PCD$，$\angle POB$ 的数量关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第五章 相交线与平行线

5.1 相交线

5.1.1 相交线

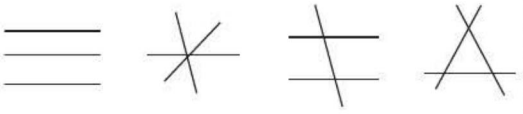
【两年模拟兵法】

1. D **点拨**:根据邻补角的定义判断.

2. D **点拨**:互为对顶角的两个角,有一个公共的顶点,且一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线. 满足条件的只有 D.

3. A

4. D **点拨**:如图所示.



(第 4 题)

分别有 0 个交点,1 个交点,2 个交点,3 个交点,所以交点个数可能有 0 个或 1 个或 2 个或 3 个. 故选 D.

5. 对顶角相等

6. **解**:因为 AB,CD 相交于点 O,

所以 $\angle 3 = \angle 6$.

因为 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$,$\angle 1 = 100°$,

$\angle 2 = 30°$,

所以 $\angle 3 = 180° - 100° - 30° = 50°$.

所以 $\angle 6 = \angle 3 = 50°$.

因为 $\angle 3 + \angle 4 = \angle FOC = 90°$,

所以 $\angle 4 = 40°$.

又因为 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$,

所以 $\angle 5 = 180° - 40° - 50° = 90°$.

7. **解**:设 $\angle BOD = x$,则 $\angle BOC = x - 30°$.

因为 $\angle BOD + \angle BOC = 180°$,

所以 $x + (x - 30°) = 180°$.

解得 $x = 105°$.

所以 $\angle BOD = 105°$,$\angle BOC = 75°$.

所以 $\angle AOD = \angle BOC = 75°$,$\angle AOC = \angle BOD = 105°$.

因为 OE 平分 $\angle AOD$,

所以 $\angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOD = 37.5°$.

所以 $\angle COE = \angle AOC + \angle AOE = 142.5°$.

点拨:要求 $\angle COE$ 的度数,可将其转化为求 $\angle AOE$ 和 $\angle AOC$ 的度数. 根据对顶角的性质和角平分线的定义,求 $\angle AOE$ 和 $\angle AOC$ 可转化为求 $\angle BOC$ 和 $\angle BOD$. 又 $\angle BOC$ 和 $\angle BOD$ 互为邻补角且有关系 $\angle BOC = \angle BOD - 30°$,则 $\angle BOC$ 和 $\angle BOD$ 可求,从而 $\angle COE$ 可求.

8. **解**:因为 $\angle COE + \angle EOD = 180°$,$\angle COE : \angle EOD = 4:5$,所以 $\angle COE = 80°$.

因为 OA 平分 $\angle COE$,

所以 $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle COE = 40°$.

因为 $\angle AOC = \angle BOD$(对顶角相等),

所以 $\angle BOD = 40°$.

9. **解**:(1)因为 $\angle AOC = 36°$,$\angle COE = 90°$,

所以 $\angle BOE = 180° - \angle AOC - \angle COE = 54°$.

(2)因为 $\angle COE : \angle EOB : \angle BOD = 4 : 3 : 2$,

所以设 $\angle COE = 4\alpha$,则 $\angle EOB = 3\alpha$,$\angle BOD = 2\alpha$.

因为 $\angle COE + \angle EOB + \angle BOD = 180°$.

所以 $4\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 180°$.

所以 $\alpha = 20°$.

所以 $\angle COE = 4\alpha = 80°$,$\angle EOB = 3\alpha = 60°$,

$\angle BOD = 2\alpha = 40°$.

所以 $\angle AOE = 180° - \angle EOB = 180° - 60° = 120°$.

5.1.2 垂线

【两年模拟兵法】

1. C

2. C **点拨**:由 $\angle BAC = 90°$,$AD \perp BC$,

得 $AB \perp AC$,故①正确;

AD 与 AC 不垂直,故②错误;

点 C 到 AB 的垂线段是线段 AC,故③错误;

点 A 到 BC 的距离是线段 AD 的长度,故④正确;

线段 AB 的长度是点 B 到 AC 的距离,故⑤正确;

$AD + BD > AB$,故⑥正确;

故选 C.

3. B 4. D

5. **解**:(1)因为 $CO \perp AB$,$DO \perp EO$,

所以 $\angle AOC = \angle BOC = \angle DOE = 90°$.

所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$,$\angle 3 + \angle 4 = 90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle 2+\angle 3=90°$,$\angle 1+\angle 4=90°$.

所以图中互为余角的角有4对,分别是

$\angle 1$与$\angle 2$,$\angle 3$与$\angle 4$,$\angle 2$与$\angle 3$,$\angle 1$与$\angle 4$.

(2)因为$\angle 1+\angle 2=90°$,$\angle 1+\angle 4=90°$,

所以$\angle 1$的余角是$\angle 2$和$\angle 4$.

(3)因为$\angle AOB=180°$,

所以$\angle 1+\angle AOE=180°$,$\angle AOC+\angle BOC=180°$,$\angle 4+\angle BOD=180°$.

结合图形可知,图中互为邻补角的角有3对,分别是$\angle 1$与$\angle AOE$,$\angle AOC$与$\angle BOC$,$\angle 4$与$\angle BOD$.

6. 解:(1)因为$\angle AOC:\angle AOD=3:7$,$\angle AOC+\angle AOD=180°$,

所以$\angle AOC=180°\times\frac{3}{7+3}=54°$.

所以$\angle BOD=54°$.

又因为OE平分$\angle BOD$,

所以$\angle DOE=\frac{1}{2}\angle BOD=27°$.

(2)因为$OF\perp OE$,$\angle DOE=27°$,

所以$\angle DOF=63°$.

所以$\angle COF=180°-\angle DOF=117°$.

7. 解:(1)45°;45°

(2)$\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB$. 理由如下:

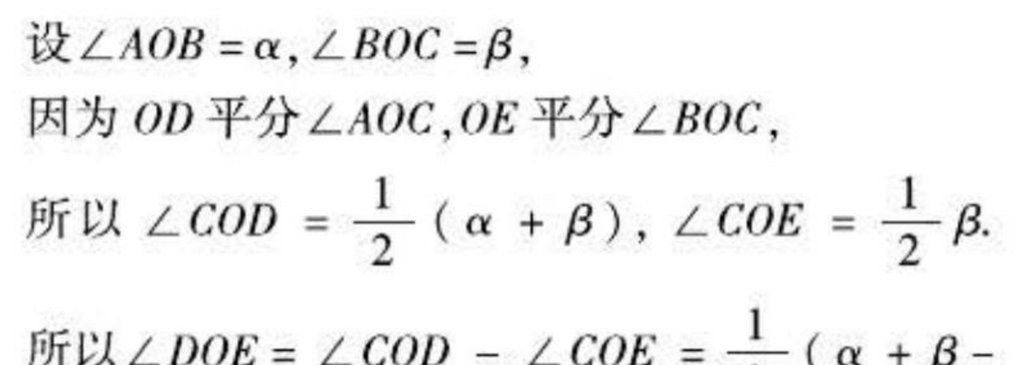
设$\angle AOB=\alpha$,$\angle BOC=\beta$,

因为OD平分$\angle AOC$,OE平分$\angle BOC$,

所以$\angle COD=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$,$\angle COE=\frac{1}{2}\beta$.

所以$\angle DOE=\angle COD-\angle COE=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\beta)=\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\angle AOB$.

8. 解:如果小丽要从N村到M村去,连接MN,根据"两点之间,线段最短"知小丽沿NM走最近,如图①.



(第8题)

如果小丽要从N村直接到河边去,过点N向河边作垂线,垂足为A,根据"垂线段最短"知小丽沿NA走最近,如图②.

如果小丽要从N村先到M村再到河边,先连接MN,再过M点向河边作垂线,垂足为B,则这时小丽沿$NM\rightarrow MB$走最近,如图③.

9. 解:(1)$OE\perp OF$. 理由如下:

由邻补角的定义,可得$\angle AOC=180°-\angle BOC=130°$.

因为OE平分$\angle AOC$,OF平分$\angle BOC$,

所以$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=65°$,$\angle COF=\frac{1}{2}\angle BOC=25°$.

所以$\angle EOF=\angle COE+\angle COF=90°$,

所以$OE\perp OF$.

(2)$OE\perp OF$仍成立. 理由如下:

因为$\angle BOC=\alpha$,所以$\angle AOC=180°-\alpha$.

因为OE平分$\angle AOC$,OF平分$\angle BOC$,

所以$\angle COF=\frac{1}{2}\alpha$,$\angle COE=\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°-\frac{1}{2}\alpha$.

所以$\angle EOF=\angle COF+\angle COE=\frac{1}{2}\alpha+\left(90°-\frac{1}{2}\alpha\right)=90°$. 所以$OE\perp OF$.

由此可以发现:无论$\angle BOC$的度数是多少,$\angle EOF$总等于90°,即互为邻补角的两个角的角平分线互相垂直.

10. 解:(1)因为$\angle AOB=90°$,$\angle BOC=50°$,

所以$\angle AOC=\angle AOB-\angle BOC=90°-50°=40°$.

因为$\angle COD=90°$,

所以$\angle AOD=\angle AOC+\angle COD=40°+90°=130°$.

(2)因为$\angle AOB=90°$,$\angle COD=90°$,$\angle BOC=60°$,

所以$\angle AOD=360°-\angle AOB-\angle BOC-\angle COD=360°-90°-60°-90°=120°$.

(3)$\angle AOD$与$\angle BOC$互补.

理由如下:

因为$\angle AOB=90°$,$\angle COD=90°$,

所以$90°+\angle BOC+90°+\angle AOD=360°$.

所以$\angle AOD+\angle BOC=180°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

即$\angle AOD$与$\angle BOC$互补.

(4)由(3)知$\angle BOC+\angle AOD=180°$.

因为$\angle BOC:\angle AOD=7:29$,

所以$\angle BOC=\frac{7}{29+7}\times180°=35°$,

$\angle AOD=\frac{29}{29+7}\times180°=145°$.

5.1.3 同位角、内错角、同旁内角

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** D

4. 同位角;内错角;同旁内角 **5.** 8

6. **解**:题图①中,$\angle1$与$\angle2$是直线c,d被直线l所截得到的同位角,$\angle3$与$\angle4$是直线a,b被直线l所截得到的同旁内角;

题图②中,$\angle1$与$\angle2$是直线AB,CD被直线BC所截得到的同位角,$\angle3$与$\angle4$是直线AB,CD被直线AC所截得到的内错角;

题图③中,$\angle1$与$\angle2$是直线AB,CD被直线AG所截得到的同位角,$\angle3$与$\angle4$是直线AG,CE被直线CD所截得到的内错角;

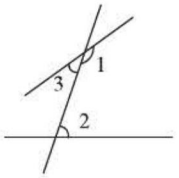
题图④中,$\angle1$与$\angle2$是直线AD,BC被直线AC所截得到的内错角,$\angle3$与$\angle4$是直线AB,CD被直线AC所截得到的内错角.

7. **解**:同位角有4对:$\angle1$与$\angle3$;$\angle2$与$\angle9$;$\angle5$与$\angle8$;$\angle5$与$\angle10$.

内错角有6对:$\angle1$与$\angle7$;$\angle2$与$\angle8$;$\angle2$与$\angle10$;$\angle3$与$\angle6$;$\angle4$与$\angle7$;$\angle5$与$\angle9$.

同旁内角有7对:$\angle1$与$\angle8$;$\angle2$与$\angle7$;$\angle2$与$\angle3$;$\angle3$与$\angle7$;$\angle4$与$\angle5$;$\angle4$与$\angle6$;$\angle5$与$\angle6$.

8. **解**:(1)示意图如图.



(第8题)

(2)因为$\angle1=2\angle2$,$\angle2=2\angle3$,

所以$\angle1=4\angle3$.

又因为$\angle1+\angle3=180°$,

所以$4\angle3+\angle3=180°$.

所以$\angle3=36°$.

所以$\angle1=36°\times4=144°$,$\angle2=36°\times2=72°$.

点拨:本题是"三线八角"与角度计算的综合题,与常规的计算题不同,它巧在先是根据所学的"同旁内角"、"内错角"等相关概念设想图形中角的位置情况,然后画出图形并计算.

9. **解**:(1)4;12;24;2;6;12;2;6;12

(2)同位角的对数:$2n(n-1)$,内错角的对数:$n(n-1)$,同旁内角的对数:$n(n-1)$.

5.2 平行线及其判定

5.2.1 平行线

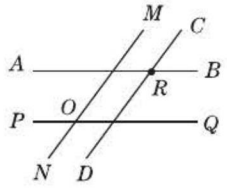
【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:①③④错误.

2. B **3.** A

4. A **点拨**:①若$a\parallel b$,$b\parallel c$,则$a\parallel c$,说法正确;②若$a\perp b$,$b\perp c$,则$a\perp c$,说法错误,应为若$a\perp b$,$b\perp c$,则$a\parallel c$,故选A.

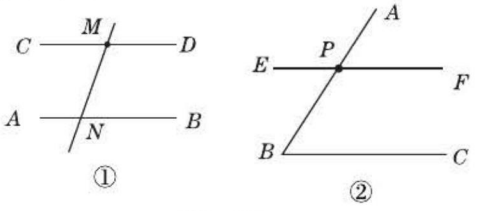
5. **解**:如图所示.



(第5题)

6. **解**:(1)如图①所示.

(2)如图②所示.



(第6题)

7. **解**:(1)$CD\parallel MN$,$AB\parallel GH\parallel PN$.

(2)略.

8. **解**:(1)平行.

因为$PQ\parallel AD$,$AD\parallel BC$,

所以$PQ\parallel BC$.

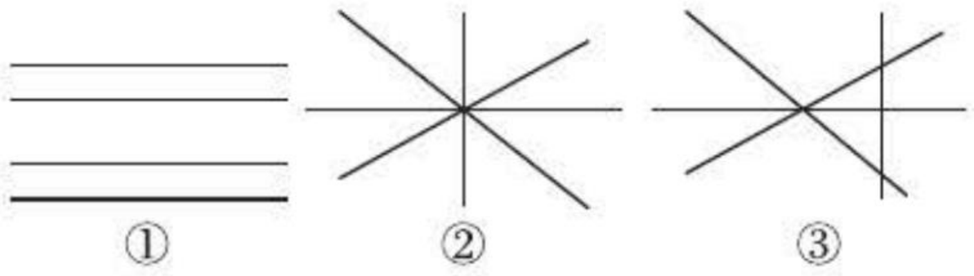
(2)测量略.$DQ=CQ$.

9. **解**:(1)如图①.

(2)如图②.

(3)如图③(答案不唯一).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



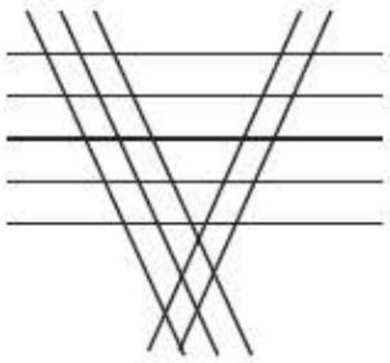
(第9题)

点拨:(1)当四条直线都互相平行时,它们没有交点.

(2)当四条直线交于同一点时,四条直线只有一个交点.

(3)当三条直线交于一点,第四条与其余三条直线都相交时,它们有四个交点. 此问答案不唯一.

10. 解:如图(只是其中一种情况,只要符合题意均可).



(第10题)

点拨:10条公路最多有$\frac{10\times(10-1)}{2}=45$(个)岔口. 因为无任何3条公路相交于同一个岔口,所以可能会出现平行公路. 若有6条平行公路,则少$\frac{6\times(6-1)}{2}=15$(个)岔口,只剩30个岔口,所以有一组5条平行公路,一组3条平行公路,一组2条平行公路,岔口数为$5\times3+5\times2+3\times2=31$(个).

5.2.2 平行线的判定

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B **3.** C **4.** D **5.** C

6. 解:(1)因为CF平分$\angle DCE$,

所以$\angle1=\angle2=\frac{1}{2}\angle DCE$.

因为$\angle DCE=90°$,所以$\angle1=45°$.

因为$\angle3=45°$,所以$\angle1=\angle3$,

所以$CF\parallel AB$.

(2)因为$\angle D=30°$,$\angle1=45°$,

所以$\angle DFC=180°-\angle D-\angle1=105°$.

点拨:(1)首先根据角平分线的定义可得$\angle1=45°$,再由$\angle3=45°$,根据"内错角相等,两直线平行"可判定$CF\parallel AB$;(2)利用三角形内角和为180°进行计算即可.

7. 解:因为$AB\perp BC$,$BC\perp CD$,

所以$\angle ABC=\angle DCB=90°$.

因为$\angle1=\angle2$,

所以$\angle ABC-\angle1=\angle DCB-\angle2$.

所以$\angle CBE=\angle BCF$.

所以$BE\parallel CF$.

8. 解:$c\parallel d$. 理由如下:

$\because\ \angle2+\angle5=180°$,$\angle3+\angle6=180°$,$\angle2=\angle3$,

$\therefore\ \angle5=\angle6$(等角的补角相等).

又$\because\ \angle1=\angle4$,

$\therefore\ \angle1+\angle5=\angle4+\angle6$.

$\therefore c\parallel d$(内错角相等,两直线平行).

9. 解:(1)①135° ②40°

(2)$\angle ACB+\angle DCE=180°$.

理由如下:

因为$\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=90°+\angle DCB$,

所以$\angle ACB+\angle DCE=90°+\angle DCB+\angle DCE=90°+90°=180°$.

(3)存在,$\angle ACE$的度数可能为30°,45°,120°,135°,165°.

点拨:解本题的关键是理清题图中角的和差关系. (1)①首先计算出$\angle DCB$的度数,再用$\angle ACD+\angle DCB$即可求出$\angle ACB$的度数;②首先计算出$\angle DCB$的度数,再计算出$\angle DCE$的度数;(2)根据(1)中的计算结果可猜想$\angle ACB+\angle DCE=180°$,再根据题图中角的和差关系进行推理即可;(3)根据平行线的判定方法可得.

5.3 平行线的性质

5.3.1 平行线的性质

【两年模拟兵法】

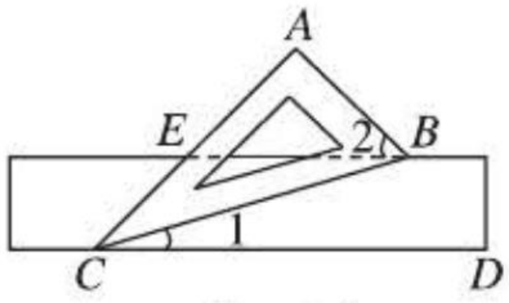
1. C **点拨**:如图,$\because\ \angle ABC=60°$,$\angle2=44°$,

$\therefore\ \angle EBC=16°$.

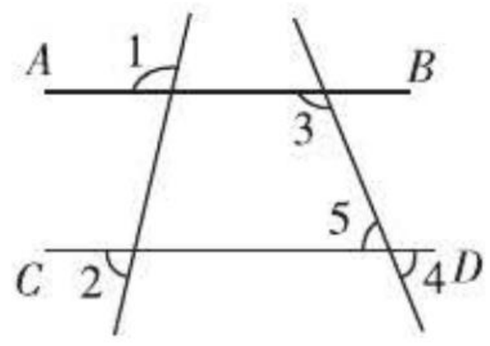
$\because BE\parallel CD$,

$\therefore\ \angle1=\angle EBC=16°$.

故选C.



(第1题)



(第2题)

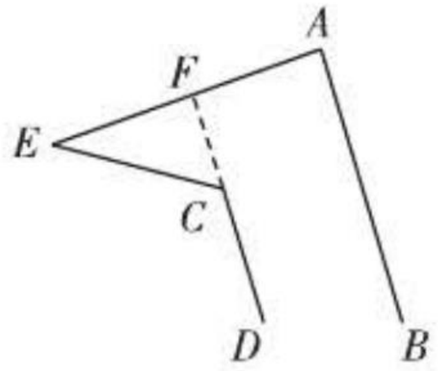
2. D **点拨**:依据$AB\parallel CD$,可得$\angle3+\angle5=180°$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

再根据∠5 = ∠4,即可得出∠3 + ∠4 = 180°.

3. B　**4**. A

5. B　**点拨**:如图,延长 DC,交 AE 于 F,



(第 5 题)

∵ $AB \parallel CD$, $\angle BAE = 87°$,

∴ $\angle CFE = 87°$.

又∵ $\angle DCE = 121°$,

∴ $\angle ECF = 180° - \angle DCE = 59°$.

又∵ $\angle E + \angle ECF + \angle CFE = 180°$,

∴ $\angle E = 180° - \angle ECF - \angle CFE = 34°$.

故选 B.

6. **解**:因为 $DC \parallel EF$,

所以∠3 = ∠1(两直线平行,同位角相等),

∠4 = $\angle CDE$(两直线平行,内错角相等).

又因为 $DE \parallel AC$,

所以 $\angle CDE$ = ∠2(两直线平行,内错角相等).

所以∠4 = ∠2(等量代换).

又因为∠1 = ∠2,∠1 = ∠3,

所以∠3 = ∠4(等量代换).

7. **解**:因为∠AHC = ∠EHF(对顶角相等),

∠AGB = ∠EHF,

所以∠AHC = ∠AGB(等量代换).

所以 $BD \parallel CE$(同位角相等,两直线平行).

所以∠C = ∠ABD(两直线平行,同位角相等).

又因为∠C = ∠D,

所以∠D = ∠ABD(等量代换).

所以 $AC \parallel DF$(内错角相等,两直线平行).

所以∠A = ∠F(两直线平行,内错角相等).

8. **解**:如图,延长 AB 与直线 l_2 相交于点 C,

因为直线 $l_1 \parallel l_2$,

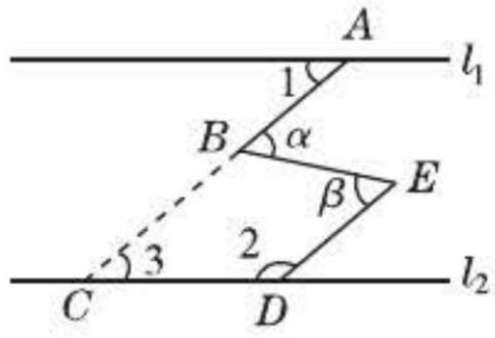
所以∠3 = ∠1 = 40°.

因为∠α = ∠β,

所以 $AC \parallel DE$.

所以∠3 + ∠2 = 180°.

所以∠2 = 140°.



(第 8 题)

5.3.2　命题、定理、证明

【两年模拟兵法】

1. D　**2**. B　**3**. D

4. ②③④

5. **解**:(1)假命题. 反例:钝角的补角是锐角. (反例不唯一)

(2)假命题. 反例:互补的两个角可以都是直角.

6. **解**:AD 平分∠BAC,理由如下:

因为 $AD \perp BC$, $EG \perp BC$,

所以 $AD \parallel EG$.

所以∠2 = ∠3, ∠1 = ∠E.

因为∠E = ∠3,

所以∠1 = ∠2.

即 AD 平分∠BAC.

7. **解**:(1)平行. 理由如下:

因为∠1 + ∠2 = 180°, ∠2 + ∠CDB = 180°,

所以∠1 = ∠CDB.

所以 $AE \parallel FC$(同位角相等,两直线平行).

(2)平行. 理由如下:

因为 $AE \parallel CF$,

所以∠C = ∠CBE(两直线平行,内错角相等).

又因为∠A = ∠C,所以∠A = ∠CBE.

所以 $AD \parallel BC$(同位角相等,两直线平行).

(3)BC 平分∠DBE. 理由如下:

因为 DA 平分∠BDF,

所以∠FDA = ∠ADB.

因为 $AE \parallel CF$, $AD \parallel BC$,

所以∠FDA = ∠A = ∠CBE, ∠ADB = ∠CBD.

所以∠CBE = ∠CBD.

所以 BC 平分∠DBE.

8. (1)**证明**:如图(1)所示,过点 P 作 $FP \parallel AC$.

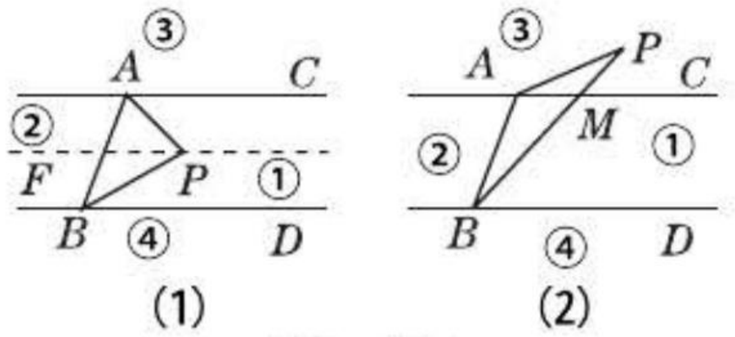
则∠PAC = ∠APF.

因为 $AC \parallel BD$,所以 $FP \parallel BD$.

所以∠FPB = ∠PBD.

所以∠APB = ∠APF + ∠FPB = ∠PAC + ∠PBD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第8题)

(2)**解**:不成立.

(3)**解**:(a)当动点 P 在射线 BA 的右侧时,结论是 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

(b)当动点 P 在射线 BA 上时,结论是 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$ 或 $\angle PAC=\angle PBD+\angle APB$ 或 $\angle APB=0°$,$\angle PAC=\angle PBD$.(任写一个即可)

(c)当动点 P 在射线 BA 的左侧时,结论是 $\angle PAC=\angle APB+\angle PBD$.

选择(a)证明:

如图(2)所示,设 PB 交 AC 于 M.

因为 $AC\parallel BD$,

所以 $\angle PMC=\angle PBD$.

又因为 $\angle APM+\angle PAM+\angle AMP=180°$,$\angle AMP+\angle PMC=180°$,

所以 $\angle PMC=\angle PAM+\angle APM$.

所以 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

5.4 平移

【两年模拟兵法】

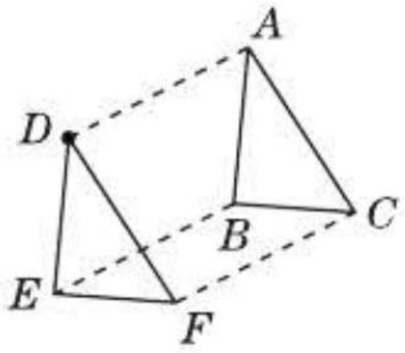
1. B

2. C **点拨**:平移不改变图形的形状和大小,因此,平移前后线段的长度不变.

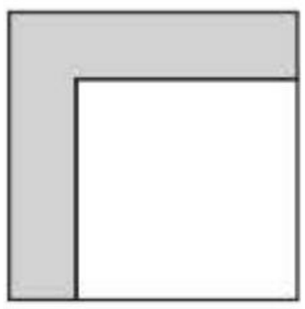
3. D **4**. C **5**. 10 **6**. 45°;60°;2.5

7. 100

8. **解**:如图,三角形 DEF 即为所求作的图形.



(第8题)



(第9题)

9. **解**:由平移,可把种花草的面积看成是如图所示的边长为(8 − 1 − 1)米的正方形的面积.

所以种花草的面积为(8 − 1 − 1) × (8 − 1 − 1) = 36(平方米).

点拨:根据平移的知识,把横竖各两条道路平移到正方形的边上,求剩余空白部分的面积即可.

10. **解**:(1)(答案不唯一)平移的方向是点 A 到点 D 的方向,平移的距离是线段 AD 的长度.

(2)∵ 将三角形 ABC 平移得到三角形 DEF,

∴ $CF=AD$.

∵ $CF+BC=BF$,

∴ $AD+BC=BF$.

11. **解**:利用平移知识,把台阶的横竖边向上,向左右平移,构成一个长方形,长、宽分别为 6.4 米,3.8 米,

所以地毯的长度为 6.4 + 3.8 + 3.8 = 14(米),地毯的面积为 14 × 3 = 42(平方米),

所以买地毯至少需要 42 × 40 = 1 680(元).

点拨:解决此题的关键是利用平移的知识,把要求的所有线段进行平移,在规则图形中进行计算.

12. **解**:∵ 阴影部分的面积既等于梯形 $ABCD$ 的面积减去 $EFMD$ 的面积,也等于梯形 $EFGH$ 的面积减去梯形 $EFMD$ 的面积,

∴ 阴影部分的面积等于梯形 $DHGM$ 的面积.

∵ $HG=10$,$MC=2$,$MG=5$,

∴ $DM=8$.

∴ $S_{阴影}=S_{梯形DHGM}=\frac{1}{2}\times(8+10)\times5=45$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:(1)∵ OF 平分 $\angle AOE$,

∴ $\angle AOF=\angle EOF=\frac{1}{2}\angle AOE$.

又∵ $\angle DOE=\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOE$,

∴ $\angle DOE+\angle EOF=\frac{1}{2}(\angle BOE+\angle AOE)=\frac{1}{2}\times180°=90°$,即 $\angle FOD=90°$. ∴ $OF\perp OD$.

(2)设 $\angle AOC=x°$,

∵ $\angle AOC:\angle AOD=1:5$,∴ $\angle AOD=5x°$.

∵ $\angle AOC+\angle AOD=180°$,

∴ $x+5x=180$,解得 $x=30$.

∴ $\angle DOE=\angle BOD=\angle AOC=30°$.

又∵ $\angle FOD=90°$,

∴ $\angle EOF=\angle FOD-\angle DOE=90°-30°=60°$.

2. **解**:因为 $FG\parallel EC$,$\angle ACE=36°$,

所以 $\angle CAG=\angle ACE=36°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

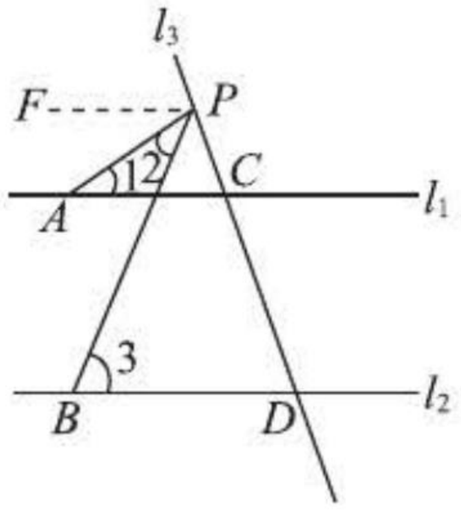
因为$\angle PAG=12°$,
所以$\angle PAC=\angle CAG+\angle PAG=48°$.
因为AP平分$\angle BAC$,
所以$\angle BAP=\angle PAC=48°$.
所以$\angle BAG=\angle BAP+\angle PAG=60°$.
又因为$DB\parallel FG$,
所以$\angle ABD=\angle BAG=60°$.

3. 证明:因为$AD\parallel BC$,
所以$\angle B=\angle EAD$,$\angle DAC=\angle C$.
又因为$\angle B=\angle C$,
所以$\angle EAD=\angle DAC$.
所以AD平分$\angle CAE$.

4. 证明:因为$\angle A=\angle F$,
所以$DF\parallel AC$.
所以$\angle D=\angle DBA$.
又因为$\angle C=\angle D$,
所以$\angle DBA=\angle C$.
所以$BD\parallel EC$.

5. 解:(1)因为OA平分$\angle EOC$,$\angle EOC=72°$,
所以$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle EOC=36°$.
所以$\angle BOD=\angle AOC=36°$.
(2)$OE\perp OD$. 理由如下:
因为OA平分$\angle EOC$,
所以$\angle EOC=2\angle AOC$.
又因为$\angle DOE=2\angle AOC$,
所以$\angle DOE=\angle EOC$.
因为$\angle DOE+\angle EOC=180°$,
所以$\angle DOE=\angle EOC=90°$.
所以$OE\perp OD$.

6. 解:(1)$\angle 2=\angle 1+\angle 3$. 不变化.
(2)当点P在线段DC的延长线上时,
$\angle 2=\angle 3-\angle 1$. 理由:



(第6题)

如图,过P作$PF\parallel l_1$,所以$\angle FPA=\angle 1$.
因为$l_1\parallel l_2$,所以$PF\parallel l_2$,所以$\angle FPB=\angle 3$.
所以$\angle 2=\angle FPB-\angle FPA=\angle 3-\angle 1$.
同理,当点P在线段CD的延长线上时,
$\angle 2=\angle 1-\angle 3$.

【第五章测试卷】

一、1. D **2.** B **3.** D **4.** C

5. D **点拨:**$\because OE\perp CD$,$\therefore \angle COE=90°$.
又$\because \angle AOE=52°$,$\therefore \angle AOC=\angle COE-\angle AOE=90°-52°=38°$.$\therefore \angle BOD=\angle AOC=38°$.

6. D **点拨:**②正确.

7. D **点拨:**由$\angle 2=\angle 3$,可得$AB\parallel CD$,
所以$\angle GPC+\angle AGP=180°$.
所以$\angle AGP=180°-80°=100°$.
所以$\angle BGM=100°$.
又因为GH平分$\angle BGM$,
所以$\angle 1=\frac{1}{2}\angle BGM=\frac{1}{2}\times 100°=50°$.

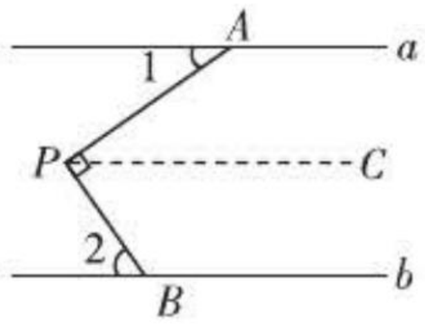
8. D **9.** C **10.** A

二、11. 两条直线被第三条直线所截,如果同旁内角互补,那么这两条直线平行;真

12. 垂线段最短

13. 45° **14.** 46° **15.** 12

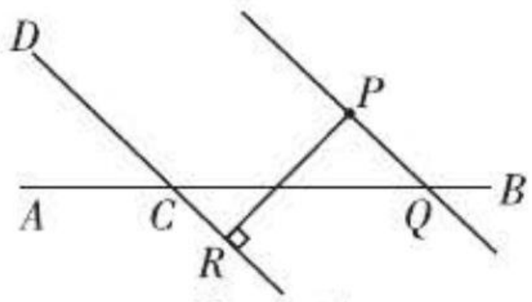
16. 55° **点拨:**如图,过点P作$PC\parallel a$.$\because a\parallel PC$,
$\therefore \angle APC=\angle 1=35°$.
$\because PA\perp PB$,$\therefore \angle APB=90°$.
$\therefore \angle BPC=\angle APB-\angle APC=90°-35°=55°$.
$\because a\parallel PC$,$a\parallel b$,$\therefore PC\parallel b$.$\therefore \angle 2=\angle BPC=55°$.



(第16题)

三、17. 已知;180°;两直线平行,同旁内角互补;
已知;$\angle EDF$;180°;两直线平行,同旁内角互补;
同角的补角相等

18. 解:(1)如图所示.



(第18题)

(2)如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$\angle PQC=60°$,理由如下:

$\because PQ\parallel CD$,

$\therefore \angle DCB+\angle PQC=180°$.

$\because \angle DCB=120°$,

$\therefore \angle PQC=60°$.

19. 证明:$\because GH\perp CD$,

$\therefore \angle CHG=90°$.

又$\because \angle 2=30°$,

$\therefore \angle 3=60°$.

$\therefore \angle 4=60°$.

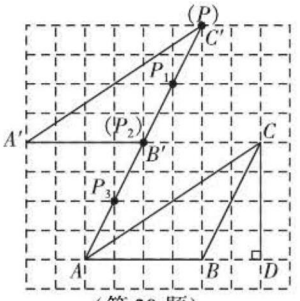
又$\because \angle 1=60°$,

$\therefore \angle 1=\angle 4$.

$\therefore AB\parallel CD$(同位角相等,两直线平行).

20. 解:(1)如图所示,三角形$A'B'C'$即为所求.

(2)如图所示,CD即为所求.



(第20题)

(3)4 **点拨:**如图所示,能使$S_{三角形PBC}=S_{三角形ABC}$的格点P有4个.

21. 解:(1)$\angle DOE$的补角为:$\angle COE$,$\angle AOD$,$\angle BOC$.

(2)$\because OD$是$\angle BOE$的平分线,$\angle BOE=62°$,

$\therefore \angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOE=31°$,

$\angle AOE=180°-\angle BOE=118°$.

$\therefore \angle AOD=180°-\angle BOD=149°$.

$\because OF$是$\angle AOE$的平分线,

$\therefore \angle EOF=\frac{1}{2}\angle AOE=59°$.

(3)射线OD与OF互相垂直.理由如下:

$\because OF$,OD分别是$\angle AOE$,$\angle BOE$的平分线,

$\therefore \angle DOF=\angle DOE+\angle EOF$

$=\frac{1}{2}\angle BOE+\frac{1}{2}\angle EOA$

$=\frac{1}{2}(\angle BOE+\angle EOA)$

$=\frac{1}{2}\times 180°$

$=90°$.

$\therefore OD\perp OF$.

第六章 实数

6.1 平方根

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B

3. C **点拨:**$2.6^2=6.76$,$2.7^2=7.29$,$2.8^2=7.84$,$2.9^2=8.41$,$3^2=9$,因为$7.84<8<8.41$,所以$2.8<\sqrt{8}<2.9$,所以表示$\sqrt{8}$的点落在段③.

4. B **5.** A

6. 6;-7;± 5 **7.** $\frac{49}{4}$

8. 解:(1)因为$\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,$\left(\pm\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,

所以$\left(-\frac{1}{3}\right)^2$的平方根是$\pm\frac{1}{3}$,

即$\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\frac{1}{3}$.

(2)因为$0^2=0$,所以0的平方根是0.

(3)因为$-2<0$,所以-2没有平方根.

9. 解:(1)因为$9x^2-25=0$,所以$x^2=\frac{25}{9}$.

所以$x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$.

(2)因为$4(2x-1)^2=36$,

所以$(2x-1)^2=9$.

所以$2x-1=\pm 3$.所以$x=2$或$x=-1$.

(3)因为$(x+1)^2-81=0$,

所以$(x+1)^2=81$.

所以$x+1=\pm 9$,所以$x=8$或$x=-10$.

(4)因为$4(2x+3)^2=(-3)^2$,

所以$(2x+3)^2=\frac{9}{4}$.

所以$2x+3=\pm\frac{3}{2}$.

所以$x=-\frac{3}{4}$或$x=-\frac{9}{4}$.

10. 解:依题意,得$2a-1=9$且$3a+b-1=16$,

所以$a=5$,$b=2$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以 $a+2b=5+4=9$.

所以 $a+2b$ 的平方根为 ± 3,

即 $\pm\sqrt{a+2b}=\pm 3$.

11. 解: 因为 $2<\sqrt{7}<3$,

所以$\sqrt{7}$的整数部分是 2,小数部分是$\sqrt{7}-2$.

所以$\sqrt{7}+7$ 的小数部分是$\sqrt{7}-2$,即 $a=\sqrt{7}-2$.

因为 $7-\sqrt{7}$的整数部分是 4,

所以 $7-\sqrt{7}$的小数部分是 $7-\sqrt{7}-4=3-\sqrt{7}$,

即 $b=3-\sqrt{7}$.

所以 $a+b=(\sqrt{7}-2)+(3-\sqrt{7})=1$.

点拨: 先估算$\sqrt{7}$的整数部分,根据它的整数部分,算出它的小数部分,再根据它参与的算式确定算式结果的整数部分和小数部分.

12. 解: 由题意知,$a^2-1\geqslant 0$ 且 $1-a^2\geqslant 0$,

$\therefore a^2=1$.

又$\because a>0$,

$\therefore a=1$,$\therefore b=4$.

$\therefore a+b=1+4=5$.

13. 解: 根据题意,得 $v=16\times\sqrt{16\times 1.69}=16\times 5.2=83.2(\text{km/h})$,

因为 83.2 km/h > 80 km/h,

所以肇事汽车当时的速度超过了规定的速度.

6.2 立方根

【两年模拟兵法】

1. A

2. D **点拨:** 对于 a^2,无论 a 为何值时,都有 $a^2\geqslant 0$,所以 $-a^2\leqslant 0$,当 $-a^2=0$ 时,$-a^2$ 的平方根是 0,所以 A 错误;0 有平方根,但它的平方根只有 0,所以 B 错误;由立方根的性质可知 C 错误;由立方根的概念可知 D 正确. 故选 D.

3. B **点拨:** $\because 3^3=27$,$4^3=64$,$\therefore 3<\sqrt[3]{58}<4$. 故选 B.

4. D **点拨:** $\sqrt[3]{64}=4$,4 的算术平方根为$\sqrt{4}=2$.

5. -4 **点拨:** 因为$\sqrt{x}=8$,所以 $x=64$,所以 $\sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{-64}=-4$.

6. $-68\,800$ **点拨:** 由题意可知,$-x$ 的立方根是 68.8 的立方根的 10 倍,因此 $-x$ 是 68.8 的 1 000 倍.

7. $\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$ **点拨:** 因为$\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$,$\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}=2$,所以$\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$.

8. 解: (1) 因为 $10^3=1\,000$,

所以 1 000 的立方根是 10.

(2) 因为 $(-2)^3=-8$,

所以 -8 的立方根是 -2.

(3) 因为 $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$,

所以$\frac{27}{125}$的立方根是$\frac{3}{5}$.

(4) 因为 $\left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{27}{125}$,

所以 $-\frac{27}{125}$的立方根是 $-\frac{3}{5}$.

(5) $\sqrt{64}=8$,因为 $2^3=8$,

所以 $\sqrt{64}$的立方根是 2.

(6) 因为 $0.1^3=0.001$,

所以 0.001 的立方根是0.1.

(7) 因为 $(-0.3)^3=-0.027$,

所以 -0.027的立方根是 -0.3.

(8) 因为 $1^3=1$,

所以 1 的立方根是 1.

(9) 因为 $(-1)^3=-1$,

所以 -1 的立方根是 -1.

(10) 因为 $0^3=0$,

所以 0 的立方根是 0.

9. 解: (1) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2}$.

(2) 方法一:$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

方法二:$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}$.

(3) $\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}=\sqrt[3]{\frac{343}{512}}=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^3}=\frac{7}{8}$.

(4) $\sqrt[3]{-(m+1)^3}=-\sqrt[3]{(m+1)^3}=-(m+1)=-m-1$.

点拨: 本题根据 $\sqrt[3]{a^3}=a$ 进行求解.

10. 解: (1) $(x+2)^3=-1$,

$x+2=-1$,

$x=-3$.

(2) $(2x+3)^3=216$,

$2x+3=6$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$2x=3,$$

$$x=\frac{3}{2}.$$

11. 解:由题意,得 $4a-6=2,3a+2b-9=3$,

$\therefore a=2,b=3.$

$\therefore A=\sqrt{4}=2,B=\sqrt[3]{-1}=-1.$

$\therefore A+B$ 的立方根即 $2-1=1$ 的立方根,为 1.

12. 解:$\because \sqrt[3]{x+1}-1=x,$

$\therefore \sqrt[3]{x+1}=x+1.$

$\therefore x+1=0$ 或 -1 或 1.

$\therefore x=-1$ 或 -2 或 0.

13. 解:设正方体的棱长为 x m,

根据题意,得 $x^3=1.728$,

$\therefore x=1.2.$

$\therefore$ 正方体的表面积是 $6\times1.2^2=6\times1.44=8.64(\text{m}^2)$.

故至少需要 8.64 m^2 的铁皮.

6.3 实数

【两年模拟兵法】

1. D

2. C **点拨:**解决本题的关键是估算出无理数的大小.

3. C **4.** A **5.** B

6. 3 **点拨:**由数轴可知,$2<a<5$,所以 $a-2>0$,$a-5<0$,所以 $\sqrt{(a-5)^2}+|a-2|=5-a+a-2=3.$

7. $-6<0<\sqrt{5}<\pi$

8. $4-\sqrt{2}$ **点拨:**设数轴上的原点为 O,因为点 A,C 关于点 B 对称,所以 $BC=AB=2-\sqrt{2}$,所以 $OC=OB+BC=2+2-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$,所以点 C 所对应的实数为 $4-\sqrt{2}$.

9. 解:有理数集合:$\{-7,0.32,\frac{1}{3},46,0,\sqrt[3]{216},0.\dot{8}\dot{7},\sqrt{16},\cdots\}$;

无理数集合:$\{-\sqrt{8},\sqrt{\frac{1}{2}},-\frac{\sqrt{2}}{2},5\pi,\cdots\}$;

负实数集合:$\{-7,-\sqrt{8},-\frac{\sqrt{2}}{2},\cdots\}$.

10. 解:(1)原式 $=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}$

$=2.$

(2)原式 $=2-4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=2-4+(-2)$

$=-4.$

11. 解:(1)因为 $-5<-\sqrt{19}<-4$,

$3<\sqrt{10}<4.$

所以大于 $-\sqrt{19}$ 且小于 $\sqrt{10}$ 的所有整数为 -4,$\pm3,\pm2,\pm1,0.$

(2)因为 $4<\sqrt{18}<5.$

所以绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数为 $\pm4,\pm3,\pm2,\pm1,0.$

点拨:此题主要考查了无理数的估算.

12. 解:(1)因为 $2<\sqrt{5}<3$,所以 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2,小数部分是 $\sqrt{5}-2.$

所以 $\sqrt{5}+2$ 的整数部分是 $2+2=4$,小数部分是 $\sqrt{5}+2-4$,即 $\sqrt{5}-2.$

(2)因为 $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1,小数部分是 $\sqrt{3}-1$,所以 $10+\sqrt{3}$ 的整数部分是 $10+1=11$,小数部分是 $\sqrt{3}-1$,即 $x=11,y=\sqrt{3}-1$. 所以 $x-y$ 的相反数为 $y-x=\sqrt{3}-12.$

点拨:(1)易求得 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2,然后再去求其小数部分,从而解决问题;(2)先找出 $10+\sqrt{3}$ 的整数部分与小数部分,从而可知 x,y 的值,再求 $x-y$ 的相反数 $y-x.$

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B **2.** A

3. $\pm\sqrt{19}$ **点拨:**$\because \sqrt{x+2}=3,$

$\therefore x+2=9,x=7.$

$\therefore \pm\sqrt{2x+5}=\pm\sqrt{19}.$

4. 解:由题意,得 $a-b=2,a-2b+2=2.$

$\therefore a=4,b=2.$

$\therefore M=\sqrt{a+b+3}=\sqrt{4+2+3}=\sqrt{9}=3,$

$N=\sqrt{a+6b}=\sqrt{4+6\times2}=\sqrt{16}=4.$

$\therefore M\cdot N=3\times4=12.$

5. A **6.** C

7. 解:(1)根据题意,得 $(2a-1)+(a-5)=0.$

解得 $a=2.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以这个非负数是$(2a-1)^2=(2\times2-1)^2=9$.

(2)根据题意,分以下两种情况:

①$a-1=5-2a$. 解得 $a=2$.

此时,$m=1^2=1$;

②$a-1+5-2a=0$. 解得 $a=4$.

此时,$m=3^2=9$.

8. 解:(1)原式$=0.5+3+7=10.5$.

(2)原式$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+2=4-\sqrt{2}$.

(3)原式$=2-\sqrt{3}+(-2)+2-2=-\sqrt{3}$.

9. 解:(1)化简,得$(x-1)^2=\frac{49}{25}$.

所以$x-1=\pm\frac{7}{5}$.

所以$x=\frac{12}{5}$或$x=-\frac{2}{5}$.

(2)化简,得$(x-2)^3=\frac{1}{64}$,

所以$x-2=\frac{1}{4}$.

所以$x=\frac{9}{4}$.

10. 7. 16

11. $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$($n$为大于或等于2的自然数)

12. 解:$\because 15^2<250<16^2$,

$\therefore 15<\sqrt{250}<16$.

$\therefore \sqrt{250}$的整数部分是15,即$a=15$.

$\because b-1=\sqrt{400}=20$,

$\therefore b=21$.

$\therefore \sqrt{a+b}=\sqrt{15+21}=\sqrt{36}=6$.

【第六章测试卷】

一、1. C **2.** B **3.** D **4.** D **5.** B **6.** B **7.** C **8.** C **9.** D **10.** D

二、11. $\sqrt{2}$ **点拨**:答案不唯一.

12. $2-\sqrt{3}$;$2-\sqrt{3}$ **13.** >

14. 4 **15.** -1;49 **16.** $\pi-1$

三、17. 解:(1)原式$=2+9-2=9$.

(2)原式$=(1+3-5)\times\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

(3)原式$=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{6}}-(\sqrt{6})^2=1-6=-5$.

(4)原式$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$.

18. 解:(1)$4x^2=9$.

$x^2=\frac{9}{4}$.

$x=\pm\frac{3}{2}$.

(2)$(x-1)^3=-\frac{125}{64}$.

$x-1=-\frac{5}{4}$.

$x=-\frac{1}{4}$.

19. 解:设截得的每个小正方体的棱长为x cm. 依题意,得

$1000-8x^3=488$.

$\therefore 8x^3=512$.

$\therefore x=4$.

答:截得的每个小正方体的棱长是4 cm.

20. 解:根据题意,得$a=3$,$b=\sqrt{10}-3$,

$\therefore (-a)^3+(b+3)^2$

$=(-3)^3+(\sqrt{10}-3+3)^2$

$=-27+10$

$=-17$.

21. 解:(1)$\sqrt{11-2}=3$.

(2)$\sqrt{1\,111-22}=33$.

(3)$\sqrt{111\,111-222}=333$.

(4)$\sqrt{11\,111\,111-2\,222}=3\,333$.

规律为$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$($n$为正整数).

$\underbrace{33\cdots3}_{1\,009个3}$

第七章 平面直角坐标系

7.1 平面直角坐标系

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B

3. C **点拨**:A,B两点的纵坐标相等,横坐标不相等,所以过A,B两点的直线一定平行于x轴. 故选C.

4. A

5. D **点拨**:$\because xy=0$,$\therefore x=0$或$y=0$或$x=0$且$y=0$. 当$x=0$时,点P在y轴上;当$y=0$时,点P在

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

x 轴上;当 $x=0$ 且 $y=0$ 时,点 P 为坐标原点. 故选 D.

6. 四　**7.** 5

8. **解:**(1)∵ 点 M 在 y 轴上,

∴ $3a-9=0$,解得 $a=3$.

∴ $a-1=2$.

∴ 点 M 的坐标为(0,2).

(2)当点 M 在坐标轴上时显然不满足题意,下面分两种情况讨论:

①当点 M 位于第一或第三象限时,$3a-9=a-1$,解得 $a=4$.

∴ $3a-9=3$,$a-1=3$.

∴ 点 M 的坐标为(3,3).

②当点 M 位于第二或第四象限时,

$3a-9+a-1=0$,

解得 $a=2.5$.

∴ $3a-9=-1.5$,$a-1=1.5$.

∴ 点 M 的坐标为$(-1.5,1.5)$.

综上可知,点 M 的坐标为(3,3)或$(-1.5,1.5)$.

(3)∵ 点 N 的坐标为$(3,-6)$,且直线 $MN\parallel x$ 轴,∴ $a-1=-6$,解得 $a=-5$.

∴ $3a-9=-24$.

∴ 点 M 的坐标为$(-24,-6)$.

9. **解:**(1)根据题图中的平面直角坐标系可知,体育场的坐标为$(-2,5)$,文化宫的坐标为$(-1,3)$,超市的坐标为$(4,-1)$,宾馆的坐标为(4,4),市场的坐标为(6,5).

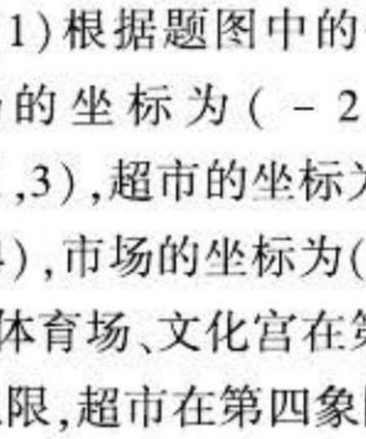
(2)体育场、文化宫在第二象限,市场、宾馆在第一象限,超市在第四象限.

(3)不是,因为对于同一幅图,平面直角坐标系的原点不同,得到的点的坐标也就不同.

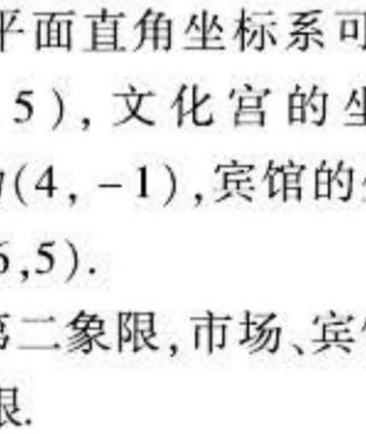
10. **解:**(1)$A(1,1)$,$B(3,2)$.

(2)图略. 所经路线为$(1,1)\rightarrow(1,2)\rightarrow(2,2)\rightarrow(3,2)$(路线不唯一).

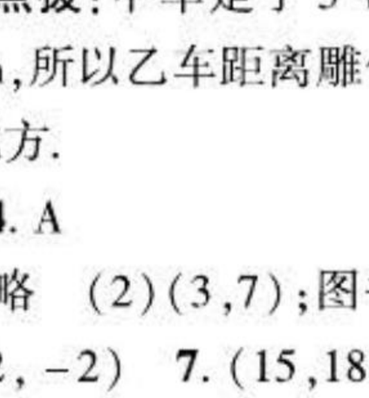
11. **解:**(1)如图①或②;(2)如图③或④



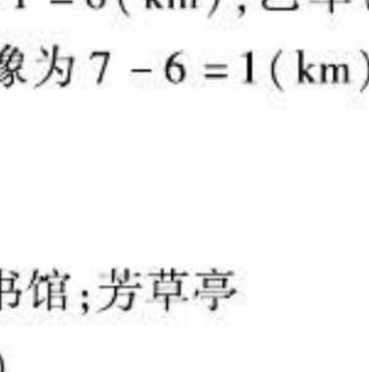
①



②



③



④

(第 11 题)

7.2　坐标方法的简单应用

【两年模拟兵法】

1. B

2. A　**点拨:**甲车走了 $5+1=6$(km),乙车也应走 6 km,所以乙车距离雕像为 $7-6=1$(km),在雕像北方.

3. B　**4.** A

5. (1)略　(2)(3,7);图书馆;芳草亭

6. $(-2,-2)$　**7.** (15,18)

8. **解:**以点 O 为中心,A 在点 O 的北偏东 30°方向,到点 O 的距离为 30 km;

B 在点 O 的北偏西 35°方向,到点 O 的距离为 20 km;

C 在点 O 的正南方向,到点 O 的距离为 10 km.

9. **解:**(1)图略. C,D,E,F 各点的坐标分别为 $C(2,2)$,$D(3,3)$,$E(4,4)$,$F(5,5)$.

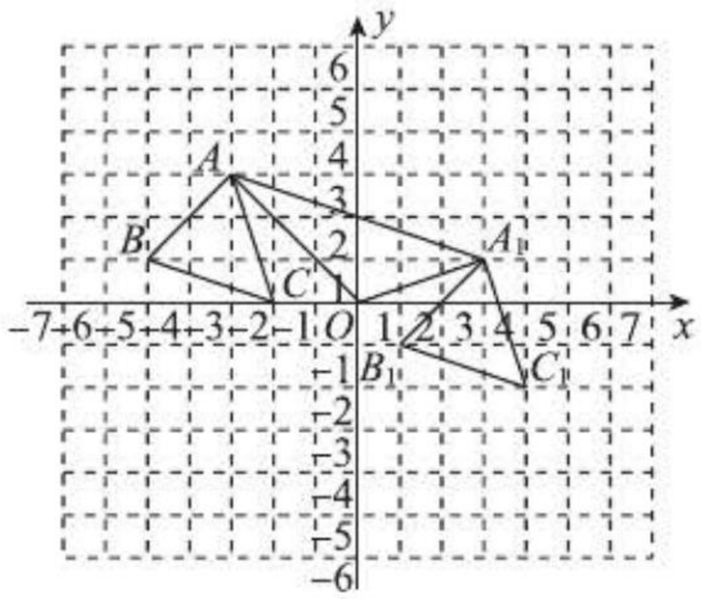
(2)点 B,C,D,E,F 的坐标与点 A 的坐标相比较,横坐标与纵坐标分别加 1,2,3,4,5.

10. **解:**(1)∵ 点 $P(a,b)$ 的对应点为 $P_1(a+6,b-2)$,

∴ 平移规律为向右平移 6 个单位长度,向下平移 2 个单位长度.

∴ $A(-3,3)$,$B(-5,1)$,$C(-2,0)$ 的对应点的坐标为 $A_1(3,1)$,$B_1(1,-1)$,$C_1(4,-2)$.

(2)三角形 $A_1B_1C_1$ 如图所示.



(第 10 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)如图,借助网格可知三角形 AOA_1 的面积 = $6\times3-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times6\times2=18-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-6=6$.

11. 解:(1)(南偏西 60°,25)

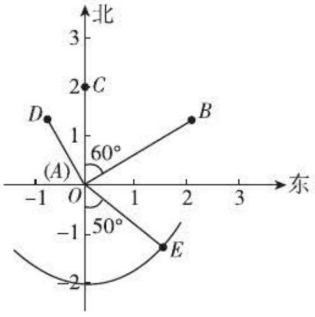
(2)由题意知,货船 C 相对于遇险船 A 的位置应表示为(正北,20).

(3)∵ $AD\perp AB$,∴ $\angle DAB=90°$.

∴ $\angle CAD=\angle DAB-\angle CAB=90°-60°=30°$.

∴ 货船 D 相对于遇险船 A 的位置应表示为(北偏西 30°,15).

(4)如图所示.



(第 11 题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B **2.** D **3.** $(-4,0)$

4. 解:(1)∵ 点 $P(2m+4,m-1)$,点 P 的纵坐标比横坐标大 3,

∴ $m-1-(2m+4)=3$,解得 $m=-8$.

∴ $2m+4=-12$,$m-1=-9$.

∴ 点 $P(-12,-9)$.

(2)∵ 点 P 在过点 $A(2,-3)$,且与 x 轴平行的直线上,

∴ $m-1=-3$,解得 $m=-2$.

∴ $2m+4=0$.

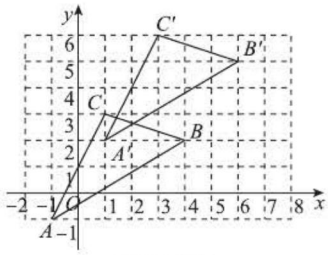
∴ $P(0,-3)$.

5. A

6. 解:(1)$A(-1,-1)$,$B(4,2)$,$C(1,3)$.

(2)$S_{三角形ABC}=4\times5-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times5\times3-\frac{1}{2}\times1\times3=20-4-\frac{15}{2}-\frac{3}{2}=7$.

(3)如图. 点 M' 的坐标为 $(a+2,b+3)$.



(第 6 题)

7. 解:(1)∵ $|a+2|+\sqrt{b-4}=0$,

∴ $a+2=0$,$b-4=0$.

∴ $a=-2$,$b=4$.

∴ 点 $A(-2,0)$,点 $B(4,0)$.

又∵ 点 $C(0,3)$,

∴ $AB=|-2-4|=6$,$CO=3$.

∴ $S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CO=\frac{1}{2}\times6\times3=9$.

(2)设点 M 的坐标为 $(x,0)$,

则 $AM=|x-(-2)|=|x+2|$.

又∵ $S_{三角形ACM}=\frac{1}{3}S_{三角形ABC}$,

∴ $\frac{1}{2}AM\cdot OC=\frac{1}{3}\times9$.

∴ $\frac{1}{2}|x+2|\times3=3$.

∴ $|x+2|=2$. 即 $x+2=\pm2$.

解得 $x=0$ 或 -4,

故点 M 的坐标为 $(0,0)$或$(-4,0)$.

8. B **9.** B

【第七章测试卷】

一、**1.** B **2.** A **3.** B **4.** B **5.** C **6.** D

7. B **点拨:** 由点 B 的坐标为 $(3,2)$ 可知 $AB=2$,$BC=3$. 又因为 $BD=BE=1$,所以 $CE=2$,$AD=1$,所以点 B' 的坐标为 $(2,1)$,故选 B.

8. C **9.** D **10.** C

二、**11.** 3 排 4 号 **12.** $(-5,1)$ **13.** 5

14. $(6,-28)$ **15.** $(1,2)$或$(-7,2)$

16. $(674,0)$

三、**17.** 解:(1)汽车站$(1,1)$,消防站$(2,-2)$.

(2)游乐场,公园,姥姥家,宠物店,邮局.

18. 解:(1)$S_{长方形ABCD}=(5-2)\times(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}$.

(2)$A'(2,-\sqrt{2})$,$B'(5,-\sqrt{2})$,$C'(5,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

0),$D'(2,0)$.

19. 解:(1)如图所示. (2)13

(3)为方便求四边形$ABCD$的面积,将其分割如图所示.

$\because S_{四边形ABCD}=S_{三角形ADE}+S_{三角形DFC}+S_{四边形BEFG}+S_{三角形BCG}$,

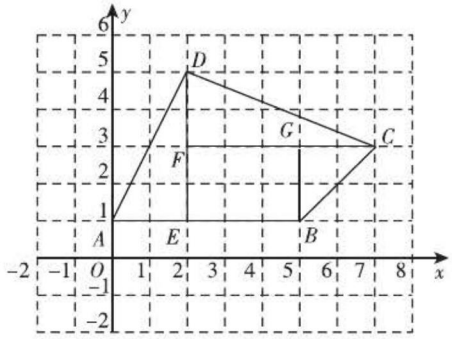
$S_{三角形ADE}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$,

$S_{三角形DFC}=\frac{1}{2}\times2\times5=5$,

$S_{四边形BEFG}=2\times3=6$,

$S_{三角形BCG}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,

$\therefore S_{四边形ABCD}=4+5+6+2=17$.



(第19题)

20. 解:(1)湖心岛的位置可表示为(2.5,5),

光岳楼的位置可表示为(4,4),

山陕会馆的位置可表示为(7,3).

(2)不是同一个位置. 因为前面一个数字代表横坐标,后面一个数字代表纵坐标,所以(11,7)和(7,11)不是同一个位置.

21. 解:(1)$A(2,3)$与$D(-2,-3)$;$B(1,2)$与$E(-1,-2)$;$C(3,1)$与$F(-3,-1)$. 对应点的坐标的特征:横坐标互为相反数,纵坐标互为相反数.

(2)由(1)可得$a+3=-2a$,$4-b=-(2b-3)$.

解得$a=-1$,$b=-1$.

第八章 二元一次方程组

8.1 二元一次方程组

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. D **点拨:** 共有4组正整数解,分别是$\begin{cases}x=1,\\y=7,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=5,\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$

4. $\frac{4}{3}$;-10

5. $\frac{4}{3}$;0 **点拨:** 根据二元一次方程的定义,可以得到两个方程:$3a-3=1$,$b+1=1$,从而解得$a=\frac{4}{3}$,$b=0$.

6. $\begin{cases}4x+5y=435,\\x-y=3\end{cases}$

7. $\begin{cases}x+y=1,\\2x-3y=7\end{cases}$ **点拨:** 先写出两个形如$ax+by$的式子,注意两个式子的系数比不相等,然后将$\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$代入两个式子,求出式子的值,即可得到一个二元一次方程组. 本题答案不唯一.

8. 8 **点拨:** $\because\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$是关于$x$,$y$的二元一次方程$mx+ny=-2$的一个解,

$\therefore 2m-n=-2$.

$\therefore -2m+n=2$.

$\therefore 6-2m+n=6+2=8$.

9. 246 **点拨:** $\because\begin{cases}x=-2,\\y=3\end{cases}$是方程$3x-3y=m$和$5x+y=n$的公共解,

$\therefore m=3\times(-2)-3\times3=-15$,$n=5\times(-2)+3=-7$.

$\therefore m^2-3n=(-15)^2-3\times(-7)=225+21=246$.

10. 解:依题意,得$|m-2|-2=1$,

且$m-3\neq0$,$m+1\neq0$,

解得$m=5$.

故m的值是5.

11. 解:将$\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$

代入②中得,$2\times(-3)+2n=-3$,

所以$n=\frac{3}{2}$.

将$\begin{cases}x=-5,\\y=2\end{cases}$

代入①中得$-5m+4=-6$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以 $m=2$.

故 $m^2+n^2+mn=4+\frac{9}{4}+3=\frac{37}{4}$.

12. 解:将 $x+2$ 和 $y-1$ 分别看作 a 和 b,比较两个方程组可得 $x+2=8.3, y-1=1.2$,

解得 $x=6.3, y=2.2$.

故所求方程组的解为 $\begin{cases}x=6.3,\\y=2.2.\end{cases}$

13. 解:设购买 A,B 两种型号的盒子分别为 x 个和 y 个,

由题意知:$2x+3y=15$,

$\because x,y$ 是非负整数,

则方程的非负整数解为 $\begin{cases}x=0,\\y=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6,\\y=1,\end{cases}$

$\therefore$ ①当 $\begin{cases}x=0,\\y=5\end{cases}$ 时,费用为 $0\times5+5\times6=30$(元);

②当 $\begin{cases}x=3,\\y=3\end{cases}$ 时,费用为 $3\times5+3\times6-4=29$(元);

③当 $\begin{cases}x=6,\\y=1\end{cases}$ 时,费用为 $6\times5+1\times6-4=32$(元).

$\because 29<30<32$,$\therefore$ 最少费用为 29 元.

答:购买盒子所需要的最少费用为 29 元.

8.2 消元——解二元一次方程组

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:把 y 看成已知数,x 看成未知数,解出 x 的值即可.

2. D

3. B **点拨**:两个方程相加,得 $4a+4b=16$,所以 $a+b=4$.

4. B **点拨**:$\because x,y$ 的值互为相反数,

$\therefore x+y=0$,

则 $4x+3y=1$ 可以变形为 $4x-3x=1$,

解得 $x=1$.

则 $y=-1$.

把 $x=1, y=-1$ 代入 $ax-(a-1)y=3$ 中,

得 $a+(a-1)=3$,

解得 $a=2$. 故选 B.

5. 2,1 **点拨**:根据同类项的定义,可得 $\begin{cases}m-1=n,\\m+n=3,\end{cases}$ 解方程组即可.

6. $\frac{4}{3};\frac{2}{3}$ **点拨**:由题意得 $\begin{cases}x-2y=0,\\5x-7y-2=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=\frac{2}{3}.\end{cases}$

7. 3; −4 **点拨**:由题意,得 $\begin{cases}5a+2b=7,\\8a+5b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-4.\end{cases}$

8. −4 **点拨**:根据新定义列出方程组 $\begin{cases}a+2b-1=8,\\-3a+3b-1=-1,\end{cases}$ 求出 a,b 的值,再用新定义计算即可.

9. $\frac{1}{5}$

10. 解:(1) $\begin{cases}x+2y=0, & ①\\3x+4y=6. & ②\end{cases}$

由①,得 $x=-2y$, ③

把③代入②,得 $3\times(-2y)+4y=6$,

解得 $y=-3$.

把 $y=-3$ 代入③,得 $x=6$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=6,\\y=-3.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y+1}{3}=1, & ①\\3x+2y=10. & ②\end{cases}$

由①,得 $3x-2y=8$ ③,

②+③,得 $6x=18$,解得 $x=3$.

把 $x=3$ 代入②,得 $3\times3+2y=10$,

解得 $y=\frac{1}{2}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

11. 解:由题意,列方程组 $\begin{cases}4x-y=5,\\3x+y=9.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

把 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}ax+by=-1,\\3ax-4by=18\end{cases}$ 中,

得 $\begin{cases}2a+3b=-1,\\6a-12b=18.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

12. 解: 解关于 x, y 的二元一次方程组$\begin{cases}x-2y=-z,①\\7x+4y=5z.②\end{cases}$

①×2+②,得 $9x=3z$,即 $x=\frac{z}{3}$.

把 $x=\frac{z}{3}$代入①,

得$\frac{z}{3}-2y=-z$,

即 $y=\frac{2}{3}z$.

所以 $x:y:z=\frac{1}{3}z:\frac{2}{3}z:z=1:2:3$.

8.3 实际问题与二元一次方程组

【两年模拟兵法】

1. D **点拨:** 设盈利的上衣的进价为 x 元,亏损的上衣的进价为 y 元,

则$\begin{cases}(1+25\%)x=135,\\(1-25\%)y=135,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=108,\\y=180.\end{cases}$

25%×108−25%×180=−18(元),故选 D.

2. B **点拨:** 设轮船在静水中的航速为 x km/h,水速为 y km/h,依题意得$\begin{cases}4(x+y)=100,\\5(x-y)=100,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=22.5,\\y=2.5.\end{cases}$

3. C

4. 5 **点拨:** 设这个队胜了 x 场,平了 y 场,根据题意,得$\begin{cases}x+y+5=14,\\3x+y=19,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x+y=100,\\3x+\frac{y}{3}=100\end{cases}$

6. 635

7. 解: 设甲每小时加工 x 个零件,乙每小时加工 y 个零件.

根据题意,得$\begin{cases}x+y=70,\\2x+3y=180.\end{cases}$

解这个方程组,得$\begin{cases}x=30,\\y=40.\end{cases}$

答: 甲每小时加工 30 个零件,乙每小时加工 40 个零件.

8. 解: 设平路有 x km,坡路有 y km. 根据题意,得

$\begin{cases}\frac{x}{60}+\frac{y}{30}=6.5,\\\frac{x}{50}+\frac{y}{40}=6,\end{cases}$

即$\begin{cases}x+2y=390,\\4x+5y=1\ 200,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=150,\\y=120.\end{cases}$

答: 平路有 150 km,坡路有 120 km.

点拨: 设平路有 x km,坡路有 y km,利用$\frac{\text{路程}}{\text{速度}}=$时间,根据去时汽车在平路、上坡路用的时间和=6.5 h,回时汽车在平路、下坡路用的时间和=6 h,列方程组求解.

9. 解: (1)2;3

(2)设放入大球 m 个,小球 n 个,由题意得$\begin{cases}m+n=10,\\3m+2n=50-26,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=4,\\n=6.\end{cases}$

答: 放入大球 4 个,小球 6 个.

10. 解: 设 A 种原料需 x 千克,B 种原料需 y 千克. 根据题意,有

$\begin{cases}x+y=11\ 000,\\50x+40y=50(1+10\%)x+40(1-15\%)y,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=6\ 000,\\y=5\ 000.\end{cases}$

答: A 种原料需 6 000 千克,B 种原料需5 000 千克.

11. 解: (1)设七年级(1)班有 x 人,七年级(2)班有 y 人,由题意,得$\begin{cases}12x+10y=1\ 118,\\8(x+y)=816,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=49,\\y=53.\end{cases}$

答: 七年级(1)班有 49 人,七年级(2)班有 53 人.

(2)七年级(1)班节约的费用为(12−8)×49=196(元),七年级(2)班节约的费用为(10−8)×53=106(元).

*8.4 三元一次方程组的解法

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 7;2;19

点拨: 根据题意得$\begin{cases}3x+y+z=42,\\12=2x-y,\\x+y+z=4x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=7,\\y=2,\\z=19.\end{cases}$

5. 52　**点拨:** 根据题意得$\begin{cases}a-b+c=4,\\a+b+c=8,\\4a+2b+c=25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=5,\\b=2,\\c=1.\end{cases}$所以该式子为$5x^2+2x+1$,

当$x=3$时,其值为52.

6. $\frac{1}{3}$　**点拨:** 由$\begin{cases}4x-3y-6z=0,\\x+2y-7z=0\end{cases}$

可得$\begin{cases}x=3z,\\y=2z.\end{cases}$

因为$xyz\neq0$,

所以$\frac{x-y+z}{x+y+z}=\frac{3z-2z+z}{3z+2z+z}=\frac{1}{3}$.

7. 解: (1)$\begin{cases}2x+4y+3z=9,①\\3x-2y+5z=11,②\\5x+6y+8z=0.③\end{cases}$

①+②×2,得$8x+13z=31$,④

②×3+③,得$14x+23z=33$,⑤

联立④⑤,得$\begin{cases}8x+13z=31,\\14x+23z=33,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=142,\\z=-85.\end{cases}$把$x=142$,$z=-85$代入②,

得$3\times142-2y+5\times(-85)=11$,

解得$y=-5$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=142,\\y=-5,\\z=-85.\end{cases}$

(2)设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k$,

则$a=2k,b=3k,c=5k$.

把它们代入$2a+b+3c=88$,

得$4k+3k+15k=88$,

解得$k=4$.

所以$a=8,b=12,c=20$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}a=8,\\b=12,\\c=20.\end{cases}$

(3)$\begin{cases}x+y=1,①\\y+z=2,②\\z+x=3.③\end{cases}$①+②+③,

得$2x+2y+2z=6$,即$x+y+z=3$.④

④-①,得$z=2$;

④-②,得$x=1$;

④-③,得$y=0$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=0,\\z=2.\end{cases}$

8. 解: 设第一道工序安排x人,第二道工序安排y人,第三道工序安排z人.

根据题意,得$\begin{cases}x+y+z=63,\\300x=500y,\\300x=600z.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=30,\\y=18,\\z=15.\end{cases}$

答:为使每天能生产出最多的产品,第一道工序应安排30人,第二道工序应安排18人,第三道工序应安排15人.

9. 解: 设装运甲、乙、丙三种蔬菜的汽车数量分别为x辆,y辆,z辆.

依题意得$\begin{cases}x+y+z=20,\\2x+y+1.5z=36,\\5\times2x+7y+4\times1.5z=183.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=15,\\y=3,\\z=2.\end{cases}$

答: 装运甲、乙、丙三种蔬菜的汽车数量分别为15辆、3辆、2辆时,可使公司获得利润18 300元.

10. 解: 设购买教学用具A_1,A_2,A_3,A_4,A_5各一件分别需a元,b元,c元,d元,e元,

则$\begin{cases}a+3b+4c+5d+6e=1\ 992,\\a+5b+7c+9d+11e=2\ 984,\end{cases}$

整理,得

$\begin{cases}(a+b+c+d+e)+(2b+3c+4d+5e)=1\ 992,\\(a+b+c+d+e)+2(2b+3c+4d+5e)=2\ 984.\end{cases}$

设$a+b+c+d+e=x$,$2b+3c+4d+5e=y$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则原方程组可变形为$\begin{cases}x+y=1\ 992,\\x+2y=2\ 984.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1\ 000,\\y=992,\end{cases}$即$a+b+c+d+e=1\ 000$.

答:购买每种教学用具各一件共需1 000元.

点拨:此题中分别把$a+b+c+d+e$与$2b+3c+4d+5e$用x,y代替,使形式简化,体现了换元法的应用.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. A **2**. D **3**. 3 **4**. C **5**. B

6. **解**:由已知可得$\begin{cases}5x-2y=3,\\x-4y=-3.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

把$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$代入剩下的两个方程组成的方程组

$\begin{cases}mx+5y=4,\\5x+ny=1\end{cases}$中,得到$\begin{cases}m+5=4,\\5+n=1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-1,\\n=-4.\end{cases}$

7. 0

8. $\begin{cases}2x+2y=180\\y-x=30\end{cases}$

9. 10

10. **解**:设笼中有x只鸡,y只兔,根据题意列方程组得$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=23,\\y=12.\end{cases}$

答:笼中有23只鸡,12只兔.

11. **解**:设妹妹的年龄为x岁,哥哥的年龄为y岁,根据题意列出方程组得

$\begin{cases}x+y=16,\\3(x+2)+(y+2)=36,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=6,\\y=10.\end{cases}$

答:哥哥的年龄为10岁,妹妹的年龄为6岁.

12. **解**:(1)圆规的总价为$3.5\times1=3.5$(元).

设小丽买了自动铅笔x支,记号笔y支.

根据题意得

$\begin{cases}2+x+y+2+1=8,\\6+1.5x+4y+9+3.5=28,\end{cases}$

即$\begin{cases}x+y=3,\\1.5x+4y=9.5.\end{cases}$

解方程组得$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

答:小丽买了自动铅笔1支,记号笔2支.

(2)从表格中,容易求出软皮笔记本的单价为$9\div2=4.5$(元),

设小丽后来买了m本软皮笔记本和n支自动铅笔.

由题意得$4.5m+1.5n=15$,即$3m+n=10$,由题意容易知道m,n为正整数,

所以满足题意的解有$\begin{cases}m=1,\\n=7,\end{cases}\begin{cases}m=2,\\n=4,\end{cases}\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

答:有三种购买方案:软皮笔记本1本,自动铅笔7支;软皮笔记本2本,自动铅笔4支;软皮笔记本3本,自动铅笔1支.

【第八章测试卷】

一、**1**. D **2**. D **3**. C **4**. A **5**. D

6. D **7**. A **8**. A **9**. A **10**. C

二、**11**. $\begin{cases}x=18\\x+y=8\end{cases}$(答案不唯一)

12. -4 **13**. $\frac{1}{5}$

14. $\begin{cases}\frac{7}{6}x+\frac{7}{6}y=182\\\frac{7}{6}x-\frac{7}{6}y=28\end{cases}$

15. 1 **16**. 135

三、**17**. **解**:(1)$\begin{cases}x-2y=1,①\\3x-5y=8,②\end{cases}$

②$-$①$\times3$,得$y=5$.

把$y=5$代入①,得$x=11$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=11,\\y=5.\end{cases}$

(2)方程组整理,得$\begin{cases}3x-2y=-8,①\\3x+5y=-1,②\end{cases}$

②$-$①,得$7y=7$,解得$y=1$.

把$y=1$代入①,得$x=-2$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$

18. **解**:∵$\begin{cases}x=2,\\y=-3\end{cases}$是关于$x,y$的二元一次方程$3x=y+a$的解,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 3\times2=-3+a.$

解得 $a=9.$

$\therefore a(a-1)=9\times(9-1)=72.$

19. **解**:根据题意,得$\begin{cases}1+p+q=2,\\4-2p+q=2,\end{cases}$

即$\begin{cases}p+q=1,\\-2p+q=-2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}p=1,\\q=0.\end{cases}$

所以 $y=x^2+x.$

当 $x=-3$ 时,$y=x^2+x=(-3)^2-3=6.$

20. **解**:设表中二档电价为 x 元/度,三档电价为 y 元/度. 根据题意,得

$\begin{cases}180\times0.6+220x+100y=352,\\180\times0.6+220x+60y=316,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=0.7,\\y=0.9.\end{cases}$

答:表中二档电价为 0.7 元/度,三档电价为0.9 元/度.

21. **解**:(1)5 000 $-92\times40=1\ 320$(元).

答:甲、乙两校联合起来购买服装,比各自购买服装共可以节省 1 320 元.

(2)设甲、乙两校各有 x 名、y 名学生准备参加演出,由题意,得$\begin{cases}x+y=92,\\50x+60y=5000,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=52,\\y=40.\end{cases}$

答:甲、乙两校各有 52 名、40 名学生准备参加演出.

(3)∵ 甲校有 10 人不能参加演出,

∴ 甲校参加演出的人数为 $52-10=42$(人).

若两校联合起来购买服装,则需要 $50\times(42+40)=4\ 100$(元),

此时比各自购买服装可以节省$(42+40)\times60-4\ 100=820$(元).

但如果两校联合起来购买 91 套服装,只需 $40\times91=3\ 640$(元),

此时又比两校联合起来购买服装节省 $4\ 100-3\ 640=460$(元),

因此,最省钱的购买服装方案是两校联合起来购买 91 套服装(即比实际人数多购买 9 套).

第九章 不等式与不等式组

9.1 不等式

9.1.1 不等式及其解集

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. D **点拨**:由题图可知 $S>P,P>R,P+R>Q+S$,所以 $S>P>R,R>Q$,所以 $S>P>R>Q.$

4. (1)$2m\geqslant\frac{1}{3}n$

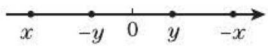
(2)$\frac{1}{5}x+y\geqslant0$

(3)$\frac{1}{3}(m+n)^2\geqslant16$

(4)$m^2+n^2\neq0$

5. $\frac{3m+9}{5}\geqslant0$

6. $x<-y<y<-x$ **点拨**:此题可运用数形结合思想. 根据题目中的条件把 $x,-x,y,-y$ 表示在数轴上,如图,大小关系一目了然.

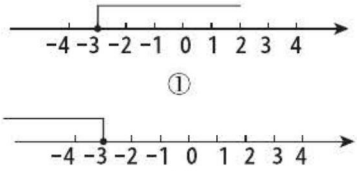


(第 6 题)

7. **解**:(1)①$x>3$;②$y<-2$;③$a<5$.

(2)①如图①所示.

②如图②所示.



[第 7(2)题]

8. **解**:(1)整数解:$-3,-2,-1,0,1,2,3.$

(2)整数解:$-2,-1,0,1,2.$

点拨:此题可运用数形结合思想,结合绝对值的含义,利用数轴找出不等式的整数解.

9. **解**:列不等式为 $50+30x>280$,此不等式的最小整数解是 8.

点拨:本题巧在用不等式进行建模,将实际问题转化为数学问题,同时求不等式的最小整数解时,要去试值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解:(1)x 应满足的关系式是:$1.5\times6+2(x-6)<12$ 且 $x\geqslant6$.

(2)将 $x=7$ 代入上述关系式,得 $1.5\times6+2\times(7-6)<12$,化简,得 $11<12$,不等式成立;

将 $x=8$ 代入上述关系式,得 $1.5\times6+2\times(8-6)<12$,化简,得 $13<12$,不等式不成立.

即 7 是不等式的解,而 8 不是不等式的解. 所以小超家该月的用水量有可能是 7 m^3,不可能是8 m^3.

点拨:本题先根据题意列出不等式,然后将 $x=7$ 和$x=8$分别代入不等式,判断能否使不等式成立,从而得出结果.

9.1.2 不等式的性质

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D **3.** A

4. (1) > (2) > (3) > (4) <

5. (1) > (2) > (3) < (4) < (5) > (6) <

6. $y<a<b<x$ **点拨:**$\because x+y=a+b$,

$\therefore y=a+b-x, x=a+b-y$,

把 $y=a+b-x$ 代入 $y-x<a-b$,得

$a+b-x-x<a-b$,

$2b<2x, b<x$①,

把 $x=a+b-y$ 代入 $y-x<a-b$,得

$y-(a+b-y)<a-b, 2y<2a, y<a$②.

又$\because b>a$③,

$\therefore$ 由①②③得 $y<a<b<x$.

7. 解:(1)$x>4$.

(2)$x<\frac{3}{2}$.

(3)$x<1$.

(4)$x>2$.

8. 解:根据不等式的性质 1,不等式两边都减去 $2x$,不等号的方向不变,得

$\frac{3}{2}x-1-2x>2x-2x$,即 $-\frac{1}{2}x-1>0$.

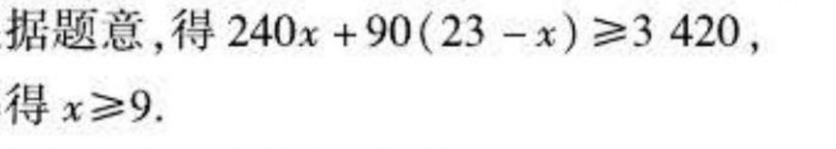
根据不等式的性质 1,不等式两边都加 1,不等号的方向不变,

得 $-\frac{1}{2}x-1+1>0+1$,即 $-\frac{1}{2}x>1$.

根据不等式的性质 3,不等式两边都乘 -2,不等号的方向改变,

得 $(-2)\times\left(-\frac{1}{2}x\right)<(-2)\times1$,即 $x<-2$.

不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



(第 8 题)

9. 解:①+②,得 $4x+4y=4+a$,

所以 $x+y=1+\frac{a}{4}$.

因为 $x+y<2$,

所以 $1+\frac{a}{4}<2$.

解得 $a<4$.

所以 a 的取值范围为 $a<4$.

10. 解:设这人要跑 x 分钟,则他要走$(23-x)$分钟.

根据题意,得 $240x+90(23-x)\geqslant3\,420$,

解得 $x\geqslant9$.

答:这人至少要跑 9 分钟.

9.2 一元一次不等式

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D

3. $x<-3$ **点拨:**先由 x 的次数是 1 求出 m 的值,然后将 m 的值代入不等式,即可求出不等式的解集.

4. $x\geqslant\frac{10}{9}$ **5.** 10 **6.** $x<8$

7. 解:错误步骤的序号是①②⑤. 正确的解答过程:

去分母,得 $3(1+x)-2(2x+1)\leqslant6$.

去括号,得 $3+3x-4x-2\leqslant6$.

移项,得 $3x-4x\leqslant6-3+2$.

合并同类项,得 $-x\leqslant5$.

两边都除以 -1,得 $x\geqslant-5$.

8. 解:(1)去括号,得 $2x-2-3<1$.

移项,得 $2x<1+3+2$.

合并同类项,得 $2x<6$.

系数化为 1,得 $x<3$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图(1)所示.

(2)去分母,得 $2(2x-1)-(9x+2)\leqslant6$.

去括号,得 $4x-2-9x-2\leqslant6$.

移项,得 $4x-9x\leqslant6+2+2$.

合并同类项,得 $-5x\leqslant10$.

系数化为 1,得 $x\geqslant-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

这个不等式的解集在数轴上的表示如图(2)所示.



(第8题)

9. 解:$2(x+1)-5<3(x+1)+4$,

去括号,得$2x+2-5<3x+3+4$.

移项,得$2x-3x<3+4+5-2$.

合并同类项,得$-x<10$.

系数化为1,得$x>-10$.

所以该不等式的最小整数解为$x=-9$.

把$x=-9$代入$\frac{1}{3}x-mx=5$,得$\frac{1}{3}\times(-9)-m\cdot(-9)=5$,解得$m=\frac{8}{9}$.

所以$m^2-2m-11=\left(\frac{8}{9}\right)^2-2\times\frac{8}{9}-11=\frac{64}{81}-\frac{16}{9}-11=-\frac{971}{81}$.

点拨:此题主要考查了一元一次不等式的解法和一元一次方程的解法,根据不等式的解集求出其最小整数解,再将最小整数解代入方程中求出m的值,进而求出$m^2-2m-11$的值.

10. 解:因为$|2m-6|+(3m-n-5)^2=0$,

$|2m-6|\geqslant 0$,$(3m-n-5)^2\geqslant 0$,

所以$|2m-6|=0$,$(3m-n-5)^2=0$.

所以$\begin{cases}2m-6=0,\\3m-n-5=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=3,\\n=4.\end{cases}$

把$m=3$,$n=4$代入$(3n-2m)x<-15$,

得$6x<-15$,故$x<-\frac{5}{2}$.

所以$2x+5<0$,$2x-5<0$.

所以$|2x+5|-|2x-5|+3$

$=-(2x+5)-[-(2x-5)]+3$

$=-2x-5+2x-5+3$

$=-7$.

点拨:先由非负数的性质列出关于m,n的二元一次方程组$\begin{cases}2m-6=0,\\3m-n-5=0.\end{cases}$解出$m$,$n$的值,代入不等式$(3n-2m)x<-15$,可求出$x$的取值范围,进而得$2x+5<0$,$2x-5<0$,从而可以去绝对值符号.

11. 解:(1)设小樱桃的进价为每千克x元,大樱桃的进价为每千克y元,

则$\begin{cases}200x+200y=8\ 000,\\y-x=20,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\y=30.\end{cases}$

所以大樱桃的进价为30元/千克,小樱桃的进价为10元/千克.

$200\times[(40-30)+(16-10)]=3\ 200$(元).

所以该水果商共赚了3 200元.

(2)设大樱桃的售价为m元/千克. 由题意得$(1-20\%)\times 200\times 16+200m-8\ 000\geqslant 3\ 200\times 90\%$,

解得$m\geqslant 41.6$.

所以大樱桃的售价最少应为41.6元/千克.

12. 解:(1)设该企业购买A种型号设备x台,则购买B种型号设备$(10-x)$台.

由题意,得$12x+10(10-x)\leqslant 105$,

解得$x\leqslant\frac{5}{2}$.

因为x取非负整数,所以$x=1$,2,0.

所以共有3种购买方案,分别为:

方案一:购买A种型号设备1台,B种型号设备9台;

方案二:购买A种型号设备2台,B种型号设备8台;

方案三:不购买A种型号设备,购买B种型号设备10台.

(2)方案一:$1\times 240+9\times 200=2\ 040$(t),

$1\times 12+9\times 10=102$(万元).

方案二:$2\times 240+8\times 200=2\ 080$(t),

$2\times 12+8\times 10=104$(万元).

方案三:$10\times 200=2\ 000$(t),

$10\times 10=100$(万元).

若该企业每月产生的污水量为2 040 t,为了节约

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

资金,应选择方案一.

9.3 一元一次不等式组

【两年模拟兵法】

1. B 2. B 3. A 4. A

5. $-1<x<2$ **点拨**:根据象限内点的坐标特征,列出不等式组.因为点 $P(x-2,x+1)$ 在第二象限,所以 $\begin{cases}x-2<0,\\x+1>0,\end{cases}$ 从而可求得 x 的取值范围.

6. $a\geqslant -1$

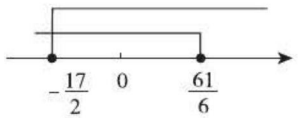
7. 15

8. **解**:(1)由题意得 $\begin{cases}\dfrac{2(1+3x)}{7}\geqslant -7,①\\ \dfrac{2(1+3x)}{7}\leqslant 9,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\geqslant -\dfrac{17}{2}$.

解不等式②,得 $x\leqslant \dfrac{61}{6}$.

把不等式①②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第8(1)题]

所以原不等式组的解集为 $-\dfrac{17}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{61}{6}$.

(2)解不等式①,得 $x<-3$.

解不等式②,得 $x\geqslant -2.2$.

把不等式①②的解集在数轴上表示出来,如图所示.

所以原不等式组无解.



[第8(2)题]

点拨:(1)中将连写不等式组改写成用"{"表示的不等式组来求解.(2)中可根据分数的基本性质将不等式②分母中的小数化为整数后再求解.

9. **解**:解方程组,得 $\begin{cases}x=\dfrac{3m-8}{7},\\ y=\dfrac{m-19}{7}.\end{cases}$ 因为 x 的值是正数,y 的值是负数,

所以 $\begin{cases}\dfrac{3m-8}{7}>0,\\ \dfrac{m-19}{7}<0.\end{cases}$ 解得 $\dfrac{8}{3}<m<19$.

所以 m 的取值范围为 $\dfrac{8}{3}<m<19$.

10. **解**:(1)设购买甲种奖品 x 件,购买乙种奖品 $(20-x)$ 件,则 $40x+30\times(20-x)=650$,解得 $x=5$,

$\therefore 20-x=15$.

答:购买甲种奖品5件,乙种奖品15件.

(2)设购买甲种奖品 y 件,购买乙种奖品 $(20-y)$ 件,则 $\begin{cases}20-y\leqslant 2y,\\ 40y+30(20-y)\leqslant 680,\end{cases}$

解得 $\dfrac{20}{3}\leqslant y\leqslant 8$.

$\because y$ 为整数,$\therefore y=7$ 或 $y=8$.

当 $y=7$ 时,$20-y=13$;当 $y=8$ 时,$20-y=12$.

答:该公司有两种不同的购买方案:甲种奖品7件,乙种奖品13件或甲种奖品8件,乙种奖品12件.

11. **解**:(1)设购买A型公交车每辆需 x 万元,购买B型公交车每辆需 y 万元,由题意得

$\begin{cases}x+2y=400,\\ 2x+y=350.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=100,\\ y=150.\end{cases}$

答:购买A型公交车每辆需100万元,购买B型公交车每辆需150万元.

(2)设购买A型公交车 a 辆,则购买B型公交车 $(10-a)$ 辆,由题意得

$\begin{cases}100a+150(10-a)\leqslant 1\,220,\\ 60a+100(10-a)\geqslant 650.\end{cases}$

解得 $\dfrac{28}{5}\leqslant a\leqslant \dfrac{35}{4}$.

$\because a$ 为正整数,

$\therefore a=6$ 或7或8.

则 $10-a=4$ 或3或2.

则该公司有三种购车方案:

①购买A型公交车6辆,B型公交车4辆,总费用为 $100\times 6+150\times 4=1\,200$(万元);

②购买A型公交车7辆,B型公交车3辆,总费

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

用为 $100\times7+150\times3=1\ 150$(万元);

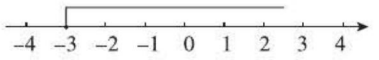
③购买 A 型公交车 8 辆,B 型公交车2 辆,总费用为 $100\times8+150\times2=1\ 100$(万元).

则购买 A 型公交车 8 辆,B 型公交车 2 辆总费用最少,最少总费用为 1 100 万元.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:去分母,得 $3x-6\leqslant4x-3$. 移项,得 $3x-4x\leqslant-3+6$. 合并同类项,得 $-x\leqslant3$. 系数化为 1,得 $x\geqslant-3$. 原不等式的解集在数轴上的表示如图.



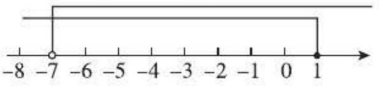
(第 1 题)

2. 解:解不等式①,得 $x\leqslant1$,

解不等式②,得 $x>-7$.

∴ 不等式组的解集为 $-7<x\leqslant1$.

其解集在数轴上的表示如图.



(第 2 题)

3. D **4.** A **5.** A

6. $m>-2$

7. 解:解方程,得 $x=\dfrac{4m+1}{2}$.

(1)方程有正数解,则 $\dfrac{4m+1}{2}>0$. 解得 $m>-\dfrac{1}{4}$.

(2)方程有负数解,则 $\dfrac{4m+1}{2}<0$. 解得 $m<-\dfrac{1}{4}$.

(3)方程有不大于 2 的解,则 $\dfrac{4m+1}{2}\leqslant2$. 解得 $m\leqslant\dfrac{3}{4}$.

8. 解:$\begin{cases}5x+1>3(x-1),①\\ \dfrac{1}{2}x\leqslant8-\dfrac{3}{2}x+2a,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>-2$.

解不等式②,得 $x\leqslant4+a$.

∵ 原不等式组有解集,

∴ 不等式组的解集为 $-2<x\leqslant4+a$.

∵ 原不等式组恰有两个整数解,

∴ $0\leqslant4+a<1$.

∴ $-4\leqslant a<-3$.

9. 解:解这个方程组得 $\begin{cases}x=a+2,\\ y=2a+2.\end{cases}$

∵ x 大于 0,y 小于 4,

∴ $\begin{cases}a+2>0,\\ 2a+2<4,\end{cases}$

解这个不等式组,得 $-2<a<1$.

故 a 的取值范围为 $-2<a<1$.

10. 解:(1)设 A 商品的单价为 x 元,B 商品的单价为 y 元,则根据题意可得

$\begin{cases}60x+30y=1\ 080,\\ 50x+20y=880,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=16,\\ y=4.\end{cases}$

答:A,B 两种商品的单价分别为 16 元和 4 元.

(2)设购买 A 商品 m 件,则购买 B 商品 $(2m-4)$ 件,则根据题意可得

$\begin{cases}m+(2m-4)\geqslant32,\\ 16m+4(2m-4)\leqslant296.\end{cases}$

解得 $12\leqslant m\leqslant13$.

又因为 m 为整数,

所以 $m=12$ 或 $m=13$.

当 $m=12$ 时,$2m-4=20$;

当 $m=13$ 时,$2m-4=22$.

所以该商店有两种购买方案:

方案一:购买 A 商品 12 件,B 商品 20 件;

方案二:购买 A 商品 13 件,B 商品 22 件.

11. 解:(1)设每本文学名著 x 元,每本动漫书 y 元,根据题意,得

$\begin{cases}20x+40y=1\ 520,\\ 20x=20y+440,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40,\\ y=18.\end{cases}$

答:每本文学名著 40 元,每本动漫书 18 元.

(2)设学校要求购买文学名著 a 本,则购买动漫书 $(a+20)$ 本,根据题意,得

$\begin{cases}a+20+a\geqslant72,\\ 40a+18(a+20)\leqslant2\ 000.\end{cases}$

解得 $26\leqslant a\leqslant28\dfrac{8}{29}$.

因为 a 为整数,

所以 $a=26,27,28$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以有三种购书方案:

方案一:购买文学名著26本,动漫书46本;

方案二:购买文学名著27本,动漫书47本;

方案三:购买文学名著28本,动漫书48本.

【第九章测试卷】

一、1. A　2. C　3. B　4. D　5. D

6. A　7. D　8. C　9. B　10. C

二、11. $-3<x\leqslant 5$

12. $x\geqslant -8$(答案不唯一)

13. >

14. $x\leqslant \frac{5}{2}$

15. 21

16. $6\leqslant a<9$

三、17. 解:(1)去括号,得$5x-10+8<6x-6+7$.

移项,得$5x-6x<10-8-6+7$.

合并同类项,得$-x<3$.

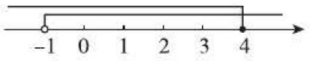
系数化为1,得$x>-3$.

(2)解不等式①,得$x>-1$.

解不等式②,得$x\leqslant 4$.

∴不等式组的解集为$-1<x\leqslant 4$.

解集在数轴上的表示如图.



(第17题)

18. 解:解不等式①,得$x\leqslant 3$.

解不等式②,得$x<a$.

∵a是不等于3的常数,

∴当$a>3$时,不等式组的解集为$x\leqslant 3$;

当$a<3$时,不等式组的解集为$x<a$.

19. 解:(1)$(-2)\oplus 3=-2\times(-2-3)+1$

$=-2\times(-5)+1$

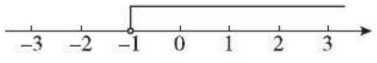
$=10+1$

$=11$.

(2)∵$3\oplus x<13$,

∴$3(3-x)+1<13$. 解得$x>-1$.

解集在数轴上的表示如图.



(第19题)

20. 解:(1)设每辆小客车的乘客座位数是x个,每辆大客车的乘客座位数是y个,

根据题意,得$\begin{cases}y-x=17,\\6y+5x=300,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=18,\\y=35.\end{cases}$

答:每辆小客车的乘客座位数是18个,每辆大客车的乘客座位数是35个.

(2)设租用a辆小客车才能将所有参加活动的师生装载完成,则$18a+35(11-a)\geqslant 300+30$,

解得$a\leqslant 3\frac{4}{17}$.

符合条件的a的最大整数值为3.

答:租用小客车数量的最大值为3.

21. 解:(1)设购买平板电脑a台,则购买学习机$(100-a)$台,由题意,得$3\ 000a+800(100-a)\leqslant 168\ 000$. 解得$a\leqslant 40$.

答:购买平板电脑最多40台.

(2)根据题意,得$100-a\leqslant 1.7a$.

解得$a\geqslant 37\frac{1}{27}$.

又∵a为正整数且$a\leqslant 40$,

∴$a=38,39,40$,则学习机依次购买62台,61台,60台,因此该校有三种购买方案:

	平板电脑(台)	学习机(台)	总费用(元)
方案一	38	62	163 600
方案二	39	61	165 800
方案三	40	60	168 000

答:购买平板电脑38台,学习机62台最省钱.

第十章 数据的收集、整理与描述

10.1 统计调查

【两年模拟兵法】

1. B　2. D　3. C　4. A　5. D

6. C　7. B　8. 6 000人

9. 解:(1)不合适,因为抽取的样本不具有代表性,抽样时应该让成绩好、中、差的同学都有代表参加.

(2)不合适,因为上海市的经济发达,公民受教育程度较高,因而抽取的样本不具有代表性.

(3)不合适,因为青少年不仅仅是中学生,还有

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

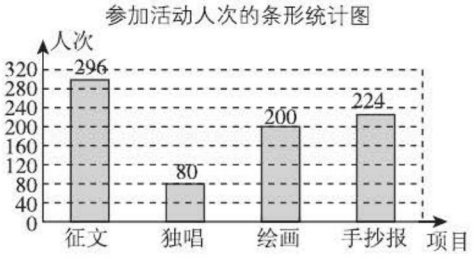
为数众多的非中学生，中学生对网络的态度不代表青少年对网络的态度.

(4)合适，由于抽样是随机的，因此抽取的样本合适.

(5)不合适，因为调查的人数太少，而且各年级的情况可能有所不同.

10. 解：(1)200；36

补全条形统计图如图所示.



(第10题)

(2) $10 \times 296 + 12 \times 80 + 15 \times 200 + 12 \times 224 = 9\,608$(元).

答：学校开展本次活动共需9 608元经费.

11. 解：(1)抽取参加体能测试的学生人数为 $60 \div 30\% = 200$(人).

(2)成绩为C级的人数为 $200 \times 20\% = 40$(人).

所以成绩为B级的人数为 $200 - 60 - 15 - 40 = 85$(人).

所以该校九年级全体学生参加体能测试成绩为“优”的学生大约有 $1\,200 \times \frac{85+60}{200} = 870$(人).

10.2 直方图

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**：因为 $\frac{\text{最大值} - \text{最小值}}{\text{组距}} = 8\frac{8}{9}$，所以应分成9组.

2. A **点拨**：在频数分布直方图中，小长方形的高是该组的频数与组距的比值.

3. C **4. 92%** **5. 20**

6. 解：(1)因为 $4 + 8 + 10 + 16 + 12 = 50$(名)，所以该班有50名学生.

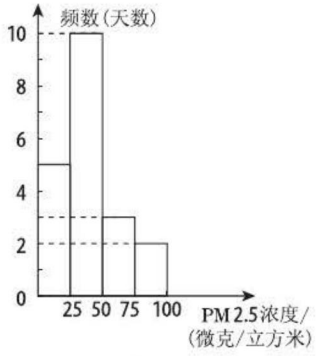
(2)因为 $\frac{3 + 16 + 12}{50} \times 100\% = 62\%$，所以该班学生成绩的优秀率是62%.

点拨：(1)直接把各个小组的人数相加即可得到该班的学生人数.

(2)由于成绩不低于80分为优秀，且该班有3名学生的成绩为80分，而80分以上的学生有 $16 + 12 = 28$(名)，因此可得该班学生成绩为优秀的人数，然后除以总人数乘100%即可求解.

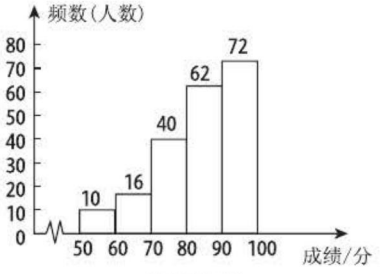
7. 解：(1)10；3；15

(2)补全频数分布直方图如图.



(第7题)

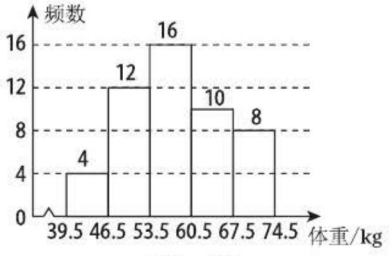
8. 解：(1)40；补全频数分布直方图如图.



(第8题)

(2)这次抽查的学生中，有 $40 + 62 = 102$(人)的参赛成绩被评为“B”.

9. 解：(1)50；补全频数分布直方图如图.



(第9题)

(2)72

(3) $\frac{10 + 8}{50} \times 1\,000 = 360$(名).

所以该校九年级体重超过60 kg的学生大约有360名.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.3 课题学习 从数据谈节水

一、**1**. 大气水、地表水和地下水

2. 海洋水;陆地水;冰川;河流;湖泊

3. 14.2 亿 km^3;96.53%;2.53%;1%

4. **解**:我国是世界上严重缺水的国家之一,为了节约用水,我们可以:①用盆子接水洗锅碗,不直接用水管冲洗;②用淘米水浇花;③用用过的脏水冲马桶;④及时关水龙头;⑤尽量手洗衣服,不用洗衣机;⑥洗澡用淋浴,并及时关闭开关等.

点拨:此题答案不唯一,合理即可.

二、**1**. **解**:(1)$10 \div 10\% = 100$(户).

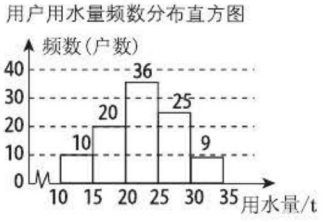
所以此次调查抽取了 100 户的用水量数据.

(2)补全频数分布直方图如图. "25 t ~ 30 t"部分的圆心角度数为:$\frac{25}{100} \times 360° = 90°$.

(3)$10 + 20 + 36 = 66$(户),

$\frac{66}{100} \times 20 = 13.2$(万户).

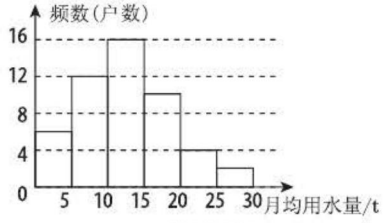
所以该地 20 万用户中约有 13.2 万户的用水全部享受基本价格.



(第 1 题)

2. **解**:(1)表中从上到下分别填 12;8%

补全频数分布直方图如图.



(第 2 题)

(2)12% + 24% + 32% = 68%.

即月均用水量不超过 15 t 的家庭数占被调查的家庭总数的 68%.

(3)(8% + 4%) × 1 000 = 120(户).

所以该小区月均用水量超过 20 t 的家庭大约有 120 户.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. D

2. ③⑤;①②④ **点拨**:①中的调查具有破坏性,适宜抽样调查;②④范围广,不宜采取全面调查,只能采取抽样调查;③⑤适合全面调查.

3. C **4**. D **5**. D

6. D **7**. 2019;2018

8. **解**:(1)48 人;72°

(2)30% × 1 000 = 300(人).

故估计富春茶社 1 000 名顾客中最喜欢"汤包"的有 300 人.

【第十章测试卷】

一、**1**. D **2**. B **3**. A **4**. B **5**. A

6. C **7**. B **8**. C **9**. B **10**. D

二、**11**. 10 **12**. 折线 **13**. 1 200

14. 七年级 **15**. 360 **16**. 50

三、**17**. **解**:(1)合适,在全校所有的班级中任意抽取 8 个班级具有一定的代表性,且工作量也不是特别大.

(2)不合适,调查的范围小,没有代表性和广泛性.

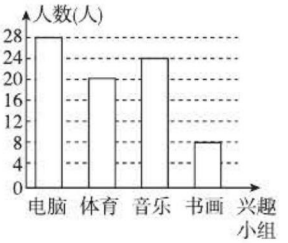
18. **解**:(1)一

(2)$(10 + 20 + 15 + 15 + 25 + 30 + 35) \div 7 \approx 21$(元).

答:小明家在这一周内平均每天购菜约为 21 元.

19. **解**:(1)①电脑小组比音乐小组人数多;②音乐小组比体育小组占的比例大.(答案不唯一,合理即可)

(2)样本容量是 28 ÷ 35% = 80,补全统计图如图所示.



[第 19 题(2)]

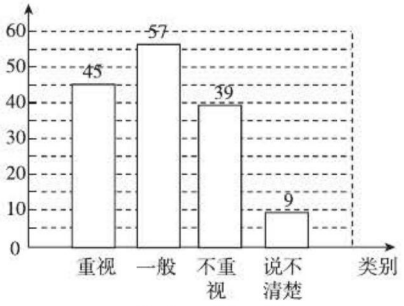
(3)爱好"书画"的人数占被调查人数的百分数

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

是 $8 \div 80 \times 100\% = 10\%$. 估计实验中学现有的学生中,爱好“书画”的人数约为 $2\,870 \times 10\% = 287$(人).

20. 解:(1)由统计表可知,样本容量为 $57 \div 0.38 = 150$.

$\therefore a = 150 \times 0.3 = 45$, $c = 1 - 0.3 - 0.38 - 0.06 = 0.26$, $b = 150 \times 0.26 = 39$, 补全统计图如图所示.



[第 20 题(1)]

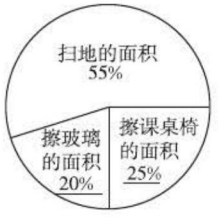
(2) $2\,300 \times 0.26 = 598$(人).

答:估计该校“不重视阅读数学教科书”的初中生人数约为 598 人.

(3)(答案不唯一)①从该校初中生重视阅读数学教科书的人数比例来看,该校初中生对阅读数学教科书的重视程度不够,建议数学教师在课内外加强引导学生阅读数学教科书,逐步提高学生数学阅读能力,重视数学教科书在数学学习过程中的作用.

②考虑到样本具有的随机性、代表性和广泛性,要了解全省初中生阅读数学教科书的情况,抽样时要选择城市、乡镇不同层次的学校.

21. 解:(1)40;如图所示.



(第 21 题)

(2)方案一:$\frac{88}{12 \times 1} + \frac{32}{12 \times 0.25} + \frac{40}{12 \times 0.5} = \frac{22}{3} + \frac{32}{3} + \frac{20}{3} = \frac{74}{3}$(分).

故方案一完成大扫除任务所用的时间为 $\frac{74}{3}$ 分.

方案二:擦玻璃的时间:$\frac{32}{6 \times 0.25} = \frac{64}{3}$(分),擦课桌椅时间:$\frac{40}{6 \times 0.5} = \frac{40}{3}$(分).

$\because \frac{64}{3} > \frac{40}{3}$,

$\therefore$ 方案二完成大扫除任务所用的时间为 $\frac{88}{12 \times 1} + \frac{64}{3} = \frac{86}{3}$(分).

$\because \frac{86}{3}$ 分 $> \frac{74}{3}$ 分, $\frac{86}{3} - \frac{74}{3} = 4$(分),

$\therefore$ 方案一完成大扫除任务所用的时间少,少 4 分钟.

【期末达标检测卷】

一、1. D **2.** B **3.** C **4.** C **5.** D **6.** D **7.** A **8.** A **9.** C **10.** B

二、11. 2

12. π(答案不唯一)

13. $\geqslant$

14. 抽样调查

15. $(-1, 1)$

16. 35°

17. 528

18. 2

三、19. 解:(1)原式 $= 2 - 2 + \left(-\frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3}$.

(2)原式 $= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

20. 解:(1)① $\times 2$,得 $4x + 10y = 50$. ③.

③ − ②,得 $7y = 35$,

解得 $y = 5$.

将 $y = 5$ 代入①,得 $x = 0$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 5. \end{cases}$

(2)去分母,得 $2(2x - 1) - 6 \leqslant 3(5x + 1)$.

去括号,得 $4x - 2 - 6 \leqslant 15x + 3$.

移项,得 $4x - 15x \leqslant 3 + 2 + 6$.

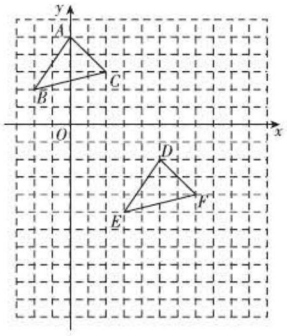
合并同类项,得 $-11x \leqslant 11$.

系数化为 1,得 $x \geqslant -1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21. 解:(1)如图,点 C 的坐标为(2,3).

(2)如图.



(第21题)

22. 解:∵ 点 $P(2a-4,3a+6)$ 在第三象限,

$\therefore \begin{cases} 2a-4<0, \\ 3a+6<0. \end{cases}$

解此不等式组得 $a<-2$.

$\therefore 2a<-4$,即 $2a+4<0$.

又∵ $-a>2$,∴ 点 Q 在第四象限.

23. 解:(1)AD 与 BC 平行. 推理过程如下:

∵ CA 平分 $\angle BCD$,$\angle ACB=40°$,

$\therefore \angle BCD=2\angle ACB=80°$.

又∵ $\angle D=100°$,

$\therefore \angle BCD+\angle D=80°+100°=180°$.

$\therefore AD/\!/BC$.

(2)由(1)知 $AD/\!/BC$,∴ $\angle DAC=\angle ACB=40°$.

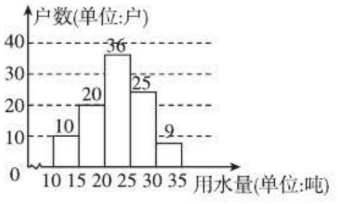
∵ $\angle BAC=70°$,

$\therefore \angle B=180°-\angle BAC-\angle ACB=70°$.

又∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle EAD=\angle B=70°$.

24. 解:(1)$10\div 10\%=100$(户),所以此次调查抽取了100户的用水量数据.

(2)$100-10-36-25-9=20$(户),补全直方图如图.



[第24题(2)]

"25吨~30吨"部分的圆心角为 $\frac{25}{100}\times 360°=90°$.

(3)$\frac{10+20+36}{100}\times 20=13.2$(万户).

答:该地20万用户中约有13.2万户的用水全部享受基本价格.

25. 解:(1)设每个颜料盒 x 元,每支颜料笔 y 元,根据题意,得

$\begin{cases} 2x+3y=81, \\ 5x+2y=120. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=18, \\ y=15. \end{cases}$

答:每个颜料盒18元,每支颜料笔15元.

(2)设购买颜料盒 a 个,则购买颜料笔 $(20-a)$ 支,由题意,得 $18a+15(20-a)\leqslant 340$,

解得 $a\leqslant 13\frac{1}{3}$,

所以颜料盒至多购买13个.

26. 解:(1)$C(0,2)$,$D(4,2)$.

$S_{四边形ABDC}=AB\cdot OC=4\times 2=8$.

(2)存在,当 $BF=\frac{1}{2}CD$ 时,

三角形 DFC 的面积是三角形 DFB 面积的2倍.

∵ $C(0,2)$,$D(4,2)$,

$\therefore CD=4$,

$\therefore BF=\frac{1}{2}CD=2$.

∵ $B(3,0)$,

∴ F 的坐标为(1,0)或(5,0).

(3)当点 P 在线段 BD 上运动时:$\angle OPC=\angle PCD+\angle POB$;

当点 P 在 BD 的延长线上运动时:$\angle OPC=\angle POB-\angle PCD$;

当点 P 在 DB 的延长线上运动时:$\angle OPC=\angle PCD-\angle POB$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第五章 相交线与平行线

5.1 相交线

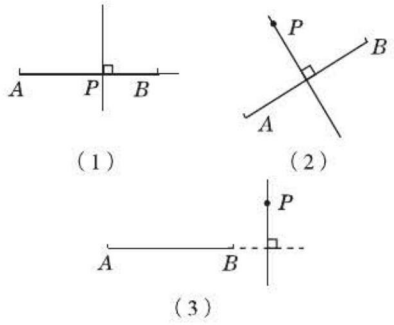
练习：

解：说出邻补角与对顶角略. 如果$\angle\alpha=35°$，那么其他三个角分别是145°，35°，145°；如果$\angle\alpha=90°$，那么其他三个角都是90°；如果$\angle\alpha=115°$，那么其他三个角分别是65°，115°，65°；如果$\angle\alpha=m°$，那么其他三个角分别是$180°-m°$，$m°$，$180°-m°$.

练习：

1. **解：**当两条直线相交所成的四个角都相等时，这两条直线互相垂直. 理由：设所成的四个角中有一个角的度数为$m°$，则其余三个角的度数分别为$180°-m°$，$m°$，$180°-m°$，由题意知，$m°=180°-m°$，得$m°=90°$，所以$180°-m°=90°$，所以这两条直线互相垂直. **点拨：**设其中一个角的度数为$m°$，其余三个角的度数可以用含$m°$的式子表示，从而根据已知求出四个角的度数，确定两直线的位置关系.

2. **解：**如图所示. **点拨：**对于(3)，需延长线段AB，垂足在AB的延长线上.



(1) (2) (3)

(第2题)

练习：

解：(1)点A到直线BC的距离是线段AC的长. 点B到直线AC的距离是线段BC的长.

(2)AB边最长. 因为连接点B与AC上各点的所有线段中，垂线段最短，已知$BC\perp AC$，所以$BC<AB$. 连接点A与BC上各点的所有线段中，垂线段最短，已知$AC\perp BC$，所以$AC<AB$. 综上所述，三条边AB，AC，BC中，AB边最长.

练习：

1. **解：**(1)同位角：$\angle1$与$\angle5$，$\angle2$与$\angle6$，$\angle3$与$\angle7$，$\angle4$与$\angle8$；内错角：$\angle3$与$\angle6$，$\angle4$与$\angle5$；同旁内角：$\angle3$与$\angle5$，$\angle4$与$\angle6$. (2)同位角：$\angle1$与$\angle3$，$\angle2$与$\angle4$；同旁内角：$\angle2$与$\angle3$；无内错角.

2. **解：**$\angle B$与$\angle BAD$是内错角，$\angle B$与$\angle BAE$是同旁内角，它们都是直线BC，DE被直线AB所截形成的. $\angle C$与$\angle CAE$是内错角，$\angle C$与$\angle CAD$是同旁内角，它们都是直线BC，DE被直线AC所截形成的. 另外，$\angle B$与$\angle C$也是同旁内角，它们是直线AB，AC被直线BC所截形成的. $\angle B$与$\angle BAC$是同旁内角，它们是直线AC，BC被直线AB所截形成的. $\angle C$与$\angle BAC$是同旁内角，它们是直线AB，BC被直线AC所截形成的.

习题5.1

1. **解：**题图(1)，(3)，(4)中的$\angle1$与$\angle2$不是对顶角；题图(2)中的$\angle1$与$\angle2$是对顶角.

点拨：两个角有一个公共顶点，并且其中一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角互为对顶角.

2. **解：**(1)$\angle AOC$的邻补角：$\angle COB$，$\angle AOD$；$\angle BOE$的邻补角：$\angle AOE$，$\angle BOF$.

(2)$\angle DOA$的对顶角是$\angle COB$；$\angle EOC$的对顶角是$\angle FOD$.

(3)$\angle BOD=\angle AOC=50°$(对顶角相等)，$\angle COB=180°-\angle AOC=180°-50°=130°$(邻补角的定义).

3. **解：**$OA\perp OC$，$OB\perp OD$.

点拨：也可用量角器检验，培养学生对直角大小的估计能力.

4. **解：**如图所示. 过点P且与l垂直的直线只能折出一条，过点Q且与l垂直的直线也只能折出一条，因为在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

5. **解：**因为$EO\perp AB$，所以$\angle AOE=90°$.

因为$\angle EOC=35°$，

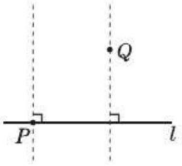
所以$\angle AOC=\angle AOE-\angle COE=55°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

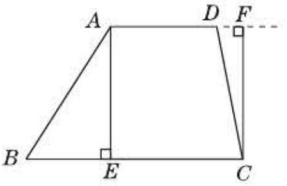
因为点 C,O,D 在同一条直线上，

所以 $\angle AOC+\angle AOD=180°$.

所以 $\angle AOD=180°-\angle AOC=125°$.



（第 4 题）

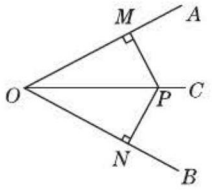


（第 6 题）

6. 解：如图所示. **点拨：**画 $CF\perp AD$ 时，是过点 C 作 AD 的垂线，垂足在 AD 的延长线上，易出现过点 D 作 BC 的垂线的错误.

7. 解：如图所示，OC 平分 $\angle AOB$，$PM\perp OA$ 于点 M，$PN\perp OB$ 于点 N，$PM=PN$，即点 P 到 OA，OB 的距离相等.

点拨：可先用刻度尺量一下 PM，PN 的长，再进行比较.



（第 7 题）

8. 解：（1）因为 OA 平分 $\angle EOC$，$\angle EOC=70°$，所以 $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle EOC=\frac{1}{2}\times 70°=35°$，由对顶角相等，得 $\angle BOD=\angle AOC=35°$.

（2）由 $\angle EOC:\angle EOD=2:3$，$\angle EOC+\angle EOD=180°$，得 $\angle EOC=72°$. 又因为 OA 平分 $\angle EOC$，所以 $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle EOC=36°$. 由对顶角相等，得 $\angle BOD=\angle AOC=36°$.

9. 解：用它测量角的原理是“对顶角相等”.

10. 解：跳远成绩应是沙坑中靠近起跳线的一个脚印的后边缘点到起跳线的距离. 过该脚印上离起跳线最近的一点作起跳线的垂线段，测量知，垂线段的长度约为 2.5 cm，$2.5\times 150=375(\text{cm})=3.75(\text{m})$，因此小明同学的跳远成绩大约是 3.75 m.

11. 解：（1）$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 AB，CD 被直线 BD 所截形成的，它们是内错角. $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 是直线 BC，AD 被直线 BD 所截形成的，它们是内错角.

（2）$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 AB，CD 被直线 CB 所截形成的，它们是同旁内角. $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 是直线 AD，BC 被直线 AB 所截形成的，它们是同位角.

12. 解：因为经过直线上一点（点 B）有且只有一条直线与已知直线垂直，点 A，C 在这条垂线上，所以 A,B,C 三点在同一条直线上.

点拨：如果 A,B,C 三点不在同一条直线上，那么过点 B 就有两条直线和直线 l 垂直，这显然是不可能的.

13. 解：（1）如图所示.

（2）因为 AB，CD 相交于点 O，

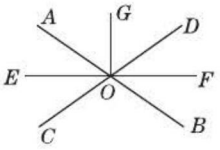
所以 $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$，$\angle AOD$ 与 $\angle BOC$ 互为对顶角.

又因为 OE，OF 分别是 $\angle AOC$，$\angle BOD$ 的平分线，

所以 $\angle EOF=\angle AOE+\angle AOD+\angle DOF=\frac{1}{2}\times 360°=180°$，

所以射线 OE，OF 在同一条直线上.

（3）如图所示. 因为 OG 平分 $\angle AOD$，所以 $\angle AOE+\angle AOG=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle AOD)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，所以 $OE\perp OG$.



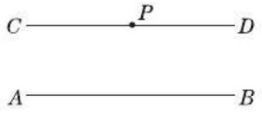
（第 13 题）

5.2 平行线及其判定

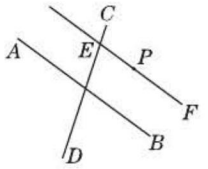
练习：

解：（1）如图（1）所示.

（2）如图（2）所示.



（1）



（2）

（练习）

练习：

1. 解：（1）由 $\angle CBE=\angle A$ 可以判定 $AD/\!/BC$. 根据是：同位角相等，两直线平行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $\angle CBE = \angle C$ 可以判定 $AB \parallel CD$. 根据是:内错角相等,两直线平行.

2. 解:再度量题图中的∠3 或∠4 或∠5,就可以判断两条直轨是否平行. 理由是:如果再度量∠3 或∠4 或∠5,就可以分别根据同旁内角是否互补,同位角是否相等,内错角是否相等来判断两条直轨是否平行.

点拨:根据平行线的判定进行判断,关键是找准同位角、内错角、同旁内角.

3. 解:其中的横格线互相平行. 有 4 种判别方法:①同位角相等,两直线平行. ②内错角相等,两直线平行. ③同旁内角互补,两直线平行. ④在同一平面内,如果两条直线都平行于同一条直线,那么这两条直线平行.

点拨:要求学生熟练掌握平行线的判定方法.

习题 5.2

1. 解:$\angle ADE$ 应为 31°. 理由是:当 $\angle ADE = 31°$ 时,$\angle ADE = \angle ABC$,根据同位角相等,两直线平行,得 $DE \parallel BC$.

2. 解:对. 理由是:因为 $\angle ABC = 120°$,$\angle BCD = 60°$,所以 $\angle ABC + \angle BCD = 180°$,所以 $AB \parallel CD$(同旁内角互补,两直线平行).

3. 略.

4. 解:(1)从∠1 = ∠2 可得出 $a \parallel b$,根据是同位角相等,两直线平行.

(2)从∠1 = ∠3 可得出 $a \parallel c$,根据是内错角相等,两直线平行.

(3)$a \parallel b \parallel c$. 根据是:如果两条直线都与第三条直线平行,那么这两条直线也互相平行.

5. 解:检验同一边上的两个角是否互补.

点拨:本题是开放题,答案不唯一.

6. 解:$a \parallel b$,$c \parallel d$;$a \perp e$,$b \perp e$.

7. 解:(1)如果 $\angle B = \angle DCG$,可以判断 $AB \parallel CD$,因为同位角相等,两直线平行.

(2)如果 $\angle D = \angle DCG$,可以判断 $AD \parallel BC$,因为内错角相等,两直线平行.

(3)如果 $\angle D + \angle DFE = 180°$,可以判断 $AD \parallel EF$,因为同旁内角互补,两直线平行.

点拨:利用平行线的判定方法判断两直线的位置关系.

8. 略.

9. 解:互相平行的直线:$a \parallel b$,$f \parallel g$,$d \parallel e$. 互相垂直的直线:$a \perp d$,$b \perp d$,$a \perp e$,$b \perp e$,$g \perp h$,$f \perp h$.

点拨:通过度量一些角,利用平行线的判定方法和垂直的定义来解答.

10. 解:可通过度量∠2 或∠3 或∠4 或∠5 为 90°来验证这个结论. 理由是:(1)如果∠2 = 90°,则∠1 + ∠2 = 180°,根据同旁内角互补,两直线平行,可说明平安大街与长安街是互相平行的. (2)如果∠3 = 90°,则∠1 = ∠3,根据同位角相等,两直线平行,可说明平安大街与长安街是互相平行的. (3)如果 ∠4 = 90°,则∠2 = ∠4 = 90°(对顶角相等),所以∠1 + ∠2 = 180°,根据同旁内角互补,两直线平行,可说明平安大街与长安街是互相平行的. (4)如果∠5 = 90°,则∠1 = ∠5,根据内错角相等,两直线平行,可说明平安大街与长安街是互相平行的.

点拨:注意抽象出两条直线被第三条直线所截的图形.

11. 解:$\parallel$;$\perp$;$\perp$;$\parallel$. 能.

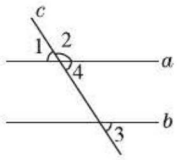
12. 解:当∠1 = ∠3 时,$a \parallel b$.

理由:如图,∵ ∠1 = ∠4,

∠1 = ∠3,

∴ ∠3 = ∠4,

∴ $a \parallel b$(同位角相等,两直线平行).



(第 12 题)

当∠2 + ∠3 = 180°时,$a \parallel b$.

理由:如图,∵ ∠2 + ∠3 = 180°,∠2 + ∠4 = 180°,

∴ ∠3 = ∠4,

∴ $a \parallel b$(同位角相等,两直线平行).

5.3 平行线的性质

练习:

1. 解:∠2 = ∠1 = 54°(对顶角相等). 因为 $a \parallel b$,∠1 = 54°,所以∠4 = ∠1 = 54°(两直线平行,同位角相等),所以∠3 = 180° − ∠4 = 126°(邻补角的定义).

点拨:求∠3 时也可以利用 $a \parallel b$,得∠2 + ∠3 = 180°,从而得∠3 的度数.

2. 解:(1)DE 和 BC 平行. 因为 $\angle ADE = \angle B = 60°$,所以 $DE \parallel BC$(同位角相等,两直线平行).

(2)$\angle C = 40°$. 因为 $DE \parallel BC$,所以 $\angle C = \angle AED = 40°$(两直线平行,同位角相等).

练习:

1. 解:(1)题设:$AB \perp CD$,垂足为 O;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

结论:$\angle AOC=90°$.

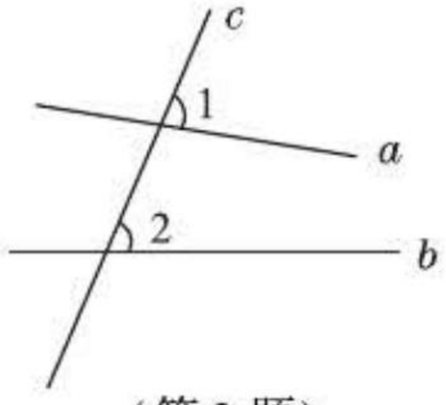
(2)题设:$\angle 1=\angle 2$,$\angle 2=\angle 3$;结论:$\angle 1=\angle 3$.

(3)题设:两直线平行;结论:同位角相等.

2. 解:如:等角的余角相等;同旁内角互补,两直线平行.

练习:

1. 同旁内角互补,两直线平行;两直线平行,同旁内角互补



(第2题)

2. 解:不是真命题. 如图,直线a与b不平行,直线c与直线a,b分别相交,$\angle 1$与$\angle 2$是同位角,但$\angle 1\neq\angle 2$.

点拨:在两直线平行的条件下,同位角才相等,如果两直线不平行,那么同位角不相等.

习题 5.3

1. 解:第二次的拐角$\angle B$是135°,因为两直线平行,内错角相等.

点拨:方向相同说明两次转弯前后公路是平行的,从而求出第二次的拐角是135°.

2. 解:因为$AD/\!/BC$,所以$\angle A+\angle B=180°$(两直线平行,同旁内角互补). 又因为$\angle A=60°$,所以$\angle B=120°$. 不用度量的方法,不能求得$\angle D$的度数.

3. 解:(1)$\angle 2=110°$,因为两直线平行,内错角相等. (2)$\angle 3=110°$,因为两直线平行,同位角相等. (3)$\angle 4=70°$,因为两直线平行,同旁内角互补.

4. 解:$\angle 2=80°$,$\angle 3=110°$,$\angle 4=110°$. 理由:因为$a/\!/b$,$\angle 1=80°$,所以$\angle 2=\angle 1=80°$(两直线平行,内错角相等). 因为$\angle 5=70°$,所以$\angle 4=180°-\angle 5=180°-70°=110°$(邻补角定义). 因为$a/\!/b$,所以$\angle 3=\angle 4=110°$(两直线平行,同位角相等).

5. 解:另一侧应以60°的角度铺设,因为两直线平行,同旁内角互补.

点拨:把公路两侧的管道看成平行线,对接的管道看成截线,应用两直线平行,同旁内角互补便可得出结论.

6. 内错角相等,两直线平行;两直线平行,内错角相等

7. (1)C (2)C **点拨:**利用两直线平行,同旁内角互补,得到$\angle BAC$,$\angle ACE$,$\angle CEF$的度数和.

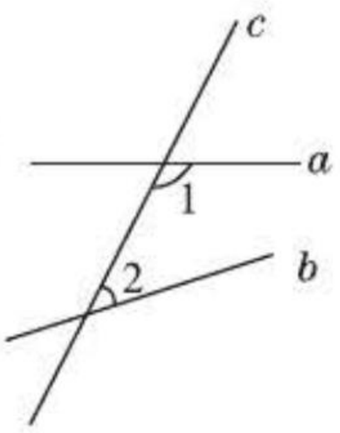
8. 解:$\angle 3=\angle 1=45°$,$\angle 7=180°-\angle 1=135°$,$\angle 8=\angle 7=135°$,$\angle 4=\angle 2=122°$,$\angle 5=180°-\angle 2=180°-122°=58°$,$\angle 6=\angle 5=58°$.

9. 解:(1)因为$\angle 1=\angle 2$,所以$AB/\!/EF$.

(2)因为$DE/\!/BC$,所以$\angle 1=\angle B$,$\angle 3=\angle C$.

10. 略. **11.** 略.

12. 解:(1)假命题,设$\angle A=40°$,$\angle B=60°$,$\angle A$,$\angle B$都是锐角,但$\angle A+\angle B=100°$,为钝角;(2)真命题;(3)假命题,如图,$\angle 1$和$\angle 2$是直线a,b被直线c所截而成的同旁内角,但是$\angle 1+\angle 2\neq 180°$.



(第12题)

13. (1)$\angle C$;两直线平行,内错角相等;两直线平行,同旁内角互补

(2)$\frac{1}{2}\angle A'B'C'$;角平分线的定义;等量代换

14. 解:(1)$\angle DAB=44°$,理由:因为$DE/\!/BC$,所以$\angle DAB=\angle B=44°$(两直线平行,内错角相等).

(2)$\angle EAC=57°$,理由:因为$DE/\!/BC$,所以$\angle EAC=\angle C=57°$(两直线平行,内错角相等).

(3)$\angle BAC=180°-(\angle DAB+\angle EAC)=180°-(44°+57°)=79°$.

能说明. 因为$DE/\!/BC$,所以$\angle DAB=\angle B$,$\angle EAC=\angle C$(两直线平行,内错角相等),又$\angle DAB+\angle BAC+\angle EAC=180°$(平角定义),所以$\angle B+\angle BAC+\angle C=180°$(等量代换).

15. 解:$\angle 2=\angle 3$. 因为潜望镜中的两面镜子是互相平行放置的,所以$\angle 2=\angle 3$. 又因为$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,所以$\angle 5=\angle 6$. 所以进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的.

5.4 平移

习题 5.4

1. 解:题图中的图案由上而下依次可以由图中的图形平移形成.

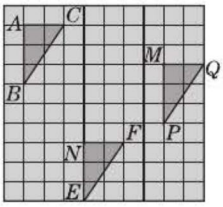

(第1题)

2. 略.

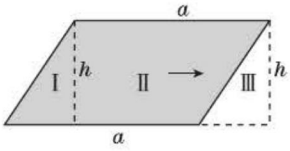
3. 解:如图,平移三角形ABC,使点A移到点M,得到三角形MPQ,点B和点C应分别移到点P和

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点 Q 的位置. 将点 A 由点 M 移到点 N,得到三角形 NEF. 如果直接平移三角形 ABC,使点 A 移到点 N,它和我们前面得到的三角形位置相同.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 解: 如图,平行四边形可以看成是由Ⅰ,Ⅱ两部分组成的,将Ⅰ平移到Ⅲ,这时Ⅱ与Ⅲ构成一个长方形,这个长方形的面积与原来的平行四边形的面积相等,都等于 ah. **点拨:** 注意平移的距离是 a.

5. 略.

6. 解: $(a-1)b$ m^2. **点拨:** 小路的左边的草地向右平移 1 m 后,可以拼成一个长为 $(a-1)$ m,宽为 b m 的长方形.

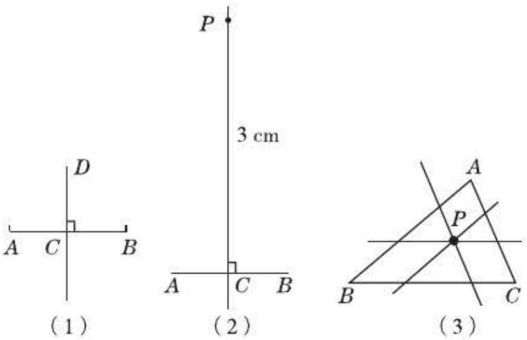
复习题 5

1. (1)√ (2)×

2. 解: (1) $\angle 4=\angle 1=60°$(对顶角相等), $\angle 2=\angle 3=180°-\angle 1=180°-60°=120°$. (2)因为 $2\angle 3=3\angle 1$, $\angle 1+\angle 3=180°$,所以 $\angle 1=72°$, $\angle 3=108°$. 所以 $\angle 2=\angle 3=108°$, $\angle 4=\angle 1=72°$.

3. 解: 因为 $AB\perp CD$,所以 $\angle BOC=90°$. 又因为 $\angle 1=26°$,所以 $\angle 2=90°-\angle 1=64°$, $\angle 3=\angle 1=26°$(对顶角相等), $\angle 4=180°-\angle 1=180°-26°=154°$(邻补角定义).

4. 解: 如图所示.



(1) (2) (3)

(第 4 题)

5. 略.

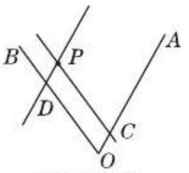
6. 解: (1)因为 $AB\perp AC$,所以 $\angle BAC=90°$,
所以 $\angle DAB=\angle BAC+\angle 1=90°+30°=120°$.
所以 $\angle DAB+\angle B=120°+60°=180°$.
(2)由 $\angle DAB+\angle B=180°$,根据"同旁内角互补,两直线平行",可知 $AD\parallel BC$. 根据已知条件,不能判断 AB 与 CD 平行.

7. 解: 知道 $\angle 1\sim\angle 8$ 中一个角的度数,可以求出其他角的度数. 用其中一个角表示其他各角略.
点拨: 本题利用对顶角相等、邻补角的定义、平行线的性质就可以由其中一个角求出其余 7 个角.

8. (1)B (2)A

9. 略.

10. 解: (1)如图所示.
(2)(3)略.
点拨: 图中相等和互补的角很多,要注意依次寻找,也可分组寻找.



(第 10 题)

11. 略.

12. 解: 指出命题的题设和结论略. (1)真命题;
(2)假命题,举反例略;(3)真命题.

13. (1) $\angle BFD$;两直线平行,内错角相等; $\angle BFD$;两直线平行,同位角相等
(2)对顶角相等; $\angle D$;内错角相等,两直线平行

14. 略.

15. 解: 球经过两次反弹后所滚的路径 CD 平行于原来的路径 AB.

第六章 实 数

6.1 平方根

练习:

1. 解: (1)因为 $0.05^2=0.0025$,所以 0.0025 的算术平方根是 0.05,即 $\sqrt{0.0025}=0.05$;
(2)因为 $9^2=81$,所以 81 的算术平方根是 9,即 $\sqrt{81}=9$;
(3)因为 $3^2=9$,9 的算术平方根是 3,所以 3^2 的算术平方根是 3,即 $\sqrt{3^2}=3$.
点拨: 本题考查算术平方根的概念.

2. 解: (1) $\sqrt{1}=1$; (2) $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$;
(3) $\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$.
点拨: $\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 是 a 的算术平方根.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

练习:

1. 解:(1) $\sqrt{1\ 369}=37$;(2) $\sqrt{101.203\ 6}=10.06$;

(3)$\sqrt{5}\approx2.24$.

点拨:会利用计算器求一个正数的算术平方根,是新课标的要求.

2. 解:(1)因为 $\sqrt{8}\approx2.83$, $\sqrt{10}\approx3.16$,所以 $\sqrt{8}<\sqrt{10}$;

(2)因为 $\sqrt{65}\approx8.06$,所以 $\sqrt{65}>8$;

(3)因为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.62$,所以 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>0.5$;

(4)由(3)知 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$.

点拨:先利用计算器求近似值,再比较大小.

练习:

1. 解:(1)正确;(2)错误;(3)错误;

(4)错误.

2.

x	8	-8	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	4	-4	0.6	-0.6
x^2	64		$\frac{9}{25}$		16		0.36	

点拨:因为互为相反数的两个数的平方相等,所以一个正数的平方根有两个,它们互为相反数.

3. 解:(1)$\sqrt{9}=3$;(2) $-\sqrt{0.49}=-0.7$;

(3)因为 $\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$,所以 $\pm\sqrt{\frac{64}{81}}=\pm\frac{8}{9}$.

4. 解:正方形的面积是边长的平方,根据算术平方根的定义可得正方形的边长是$\sqrt{A}(A>0)$.

点拨:利用正方形的面积公式和算术平方根的定义来解决问题.

习题 6.1

1. 解:(1) $\sqrt{81}=9$;

(2)因为 $\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$,所以$\frac{25}{64}$的算术平方根是 $\frac{5}{8}$,即 $\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$;

(3)因为 $0.2^2=0.04$,所以 0.04 的算术平方根是 0.2,即 $\sqrt{0.04}=0.2$;

(4)因为 $10^2=100$,所以 10^2 的算术平方根是 10,即 $\sqrt{10^2}=10$.

点拨:由算术平方根的概念:一个正数的平方等于 a,这个正数是 a 的算术平方根,可知求 a 的算术平方根,只要求出一个正数的平方等于 a 即可.

2. 解:(1) $-\sqrt{3}$有意义,因为被开方数 $3>0$;

(2) $\sqrt{-3}$无意义,因为被开方数 $-3<0$;

(3) $\sqrt{(-3)^2}$有意义,因为被开方数 $(-3)^2>0$;

(4) $\sqrt{\frac{1}{10^2}}$有意义,因为被开方数$\frac{1}{10^2}>0$.

点拨:式子$\sqrt{a}$有意义的条件是被开方数$a\geqslant0$.

3. 解:(1) ±7;(2) $\pm\frac{2}{5}$;(3) $\pm\frac{1}{1\ 000}$;(4) ±0.04.

4. 解:(1)正确;(2)正确;(3)错误;(4)正确.

点拨:本题考查对平方根、算术平方根的理解.

5. 解:(1) $\sqrt{867}\approx29.44$;

(2) $\sqrt{0.462\ 54}\approx0.68$;

(3) $-\sqrt{\frac{8}{25}}\approx-0.57$;

(4) $\pm\sqrt{2\ 402}\approx\pm49.01$.

6. 解:因为 $36<40<49$,所以 $\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$,即 $6<\sqrt{40}<7$. 所以与 $\sqrt{40}$最接近的两个整数是6 和7.

点拨:解此类题时,可先求出与 40 最接近的两个平方数,然后求出这两个数的算术平方根.

7. 解:(1)268.96的平方根是 ±16.4. (2)16.9

(3) $\sqrt{270}$在 16.4 与 16.5 之间. 因为$268.96<270<272.25$,所以 $\sqrt{268.96}<\sqrt{270}<\sqrt{272.25}$,即 $16.4<\sqrt{270}<16.5$.

8. 解:(1)因为 $(\pm5)^2=25$,所以 $x=\pm5$;

(2)原等式变形为 $x^2=81$,因为 $(\pm9)^2=81$,所以$x=\pm9$;

(3)原等式变形为 $x^2=\frac{36}{25}$,因为 $\left(\pm\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$,所以 $x=\pm\frac{6}{5}$.

点拨:本题考查平方根的定义.

9. 解:根据题意,得 $4.9t^2=120$,化简,得 $t^2=\frac{1\ 200}{49}$.

因为 $t>0$,所以 $t=\sqrt{\frac{1\ 200}{49}}$,即$t\approx5$. 所以物体到达地面大约需要 5 s.

点拨:本题考查算术平方根的知识在实际中的应用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解:正方形的面积扩大为原来的4倍,则它的边长变为原来的2倍;

面积扩大为原来的9倍,则它的边长变为原来的3倍;

面积扩大为原来的n倍,则它的边长变为原来的$\sqrt{n}$倍.

11. 解:(1)因为$2^2=4$,所以$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$;因为$(-3)^2=9$,所以$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$;因为$5^2=25$,所以$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$;因为$(-6)^2=36$,所以$\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6$;因为$7^2=49$,所以$\sqrt{7^2}=\sqrt{49}=7$;因为$0^2=0$,所以$\sqrt{0^2}=0$.

当$a>0$时,$\sqrt{a^2}=a$;当$a=0$时,$\sqrt{a^2}=0$;当$a<0$时,$\sqrt{a^2}=-a$.

(2)因为$\sqrt{4}=2$,所以$(\sqrt{4})^2=2^2=4$;因为$\sqrt{9}=3$,所以$(\sqrt{9})^2=3^2=9$;因为$\sqrt{25}=5$,所以$(\sqrt{25})^2=5^2=25$;因为$\sqrt{36}=6$,所以$(\sqrt{36})^2=6^2=36$;因为$\sqrt{49}=7$,所以$(\sqrt{49})^2=7^2=49$;因为$\sqrt{0}=0$,所以$(\sqrt{0})^2=0^2=0$. 当a为任意非负数时,$(\sqrt{a})^2=a$.

点拨:本题是利用具体的实例,探究出$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0)\end{cases}$和对于任意非负数$a$,有$(\sqrt{a})^2=a$. 这两个性质应用比较多,要认真理解.

12. 解:对于任意一个正数,利用计算器对它开平方,再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去,所得的结果越来越接近1,最后计算器会显示结果为1.

点拨:本题考查利用计算器来探索数学规律.

6.2 立方根

练习:

1. 解:(1)因为$10^3=1\ 000$,所以$\sqrt[3]{1\ 000}=10$;(2)因为$(-0.1)^3=-0.001$,所以$\sqrt[3]{-0.001}=-0.1$;(3)因为$(-1)^3=-1$,所以$\sqrt[3]{-1}=-1$;(4)因为$\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$,所以$-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=-\frac{4}{3}$.

2. 解:(1)$\sqrt[3]{1\ 728}=12$;(2)$\sqrt[3]{15\ 625}=25$;

(3)$\pm\sqrt[3]{2\ 197}=\pm13$.

点拨:正确使用计算器求一个数的立方根. 在求一个负数的立方根时,先求这个负数绝对值的立方根,再添上负号即可.

3. 解:因为$\sqrt[3]{50}\approx3.68$,所以$3<\sqrt[3]{50}<4$.

4. 解:设这个正方体的棱长为x,根据题意,得$x^3=V$,所以$x=\sqrt[3]{V}$. 所以这个正方体的棱长为$\sqrt[3]{V}$.

点拨:本题考查对立方根概念的理解,一个数的立方等于a,这个数就是a的立方根,表示为$\sqrt[3]{a}$.

习题6.2

1. 解:(1)正确;(2)错误;(3)正确;(4)正确.

点拨:本题运用立方根的定义和性质来解题.

2. 解:(1)(2)(3)(4)都有意义,因为对于任意数a,$\sqrt[3]{a}$都有意义.

3. 解:(1)-0.3;(2)$-\frac{2}{3}$;(3)$\frac{3}{4}$;(4)$-\frac{1}{2}$.

4. 解:(1)$\sqrt[3]{868}\approx9.539$;

(2)$\sqrt[3]{0.426\ 254}\approx0.753$;

(3)$-\sqrt[3]{\frac{8}{25}}\approx-0.684$;

(4)$\pm\sqrt[3]{2\ 402}\approx\pm13.392$.

点拨:计算器作为学习数学的辅助工具,我们要会运用它求立方根.

5. 解:(1)因为$0.2^3=0.008$,所以$x=0.2$;

(2)因为$x^3-3=\frac{3}{8}$,所以$x^3=\frac{27}{8}$,又因为$\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$,所以$x=\frac{3}{2}$;

(3)因为$(x-1)^3=64$,且$4^3=64$,所以$x-1=4$,所以$x=5$.

点拨:本题考查对立方根定义的理解,由立方根的定义可求出x的值.

6. 解:根据正方体的体积公式和立方根的定义可知,当正方体的体积扩大为原来的8倍时,它的棱长变为原来的$\sqrt[3]{8}$倍,即2倍;当正方体的体积扩大为原来的27倍时,它的棱长变为原来的$\sqrt[3]{27}$倍,即3倍;当正方体的体积扩大为原来的n倍时,它的棱长变为原来的$\sqrt[3]{n}$倍.

点拨:本题是运用立方根的知识解决正方体的体积扩大倍数与棱长扩大倍数之间的关系. 若一个正方体的体积扩大为原来的n倍,则它的棱长扩大为原来的$\sqrt[3]{n}$倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:设这种容器的底面直径应取 x dm. 根据题意,

得 $\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 2x=50$.

解得 $x\approx 3.2$.

所以这种容器的底面直径应取 3.2 dm.

点拨:本题是利用开立方的知识解决实际问题.

8. 解:(1)因为$\sqrt[3]{9}\approx 2.08$,所以$\sqrt[3]{9}<2.5$;

(2)因为$\sqrt[3]{3}\approx 1.44$,所以$\sqrt[3]{3}<\frac{3}{2}$.

9. 解:(1)因为 $2^3=8$,$\sqrt[3]{8}=2$,所以 $\sqrt[3]{2^3}=2$;

因为$(-2)^3=-8$,$\sqrt[3]{-8}=-2$,

所以 $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$;

因为$(-3)^3=-27$,$\sqrt[3]{-27}=-3$,

所以 $\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$;

因为 $4^3=64$,$\sqrt[3]{64}=4$,

所以 $\sqrt[3]{4^3}=4$;

因为 $0^3=0$,$\sqrt[3]{0}=0$,

所以 $\sqrt[3]{0^3}=0$.

对于任意数 a,$\sqrt[3]{a^3}=a$.

(2)因为 $2^3=8$,$\sqrt[3]{8}=2$,

所以$(\sqrt[3]{8})^3=2^3=8$;

因为$(-2)^3=-8$,$\sqrt[3]{-8}=-2$,

所以$(\sqrt[3]{-8})^3=(-2)^3=-8$;

因为 $3^3=27$,$\sqrt[3]{27}=3$,

所以$(\sqrt[3]{27})^3=3^3=27$;

因为$(-3)^3=-27$,$\sqrt[3]{-27}=-3$,

所以$(\sqrt[3]{-27})^3=(-3)^3=-27$;

因为 $0^3=0$,$\sqrt[3]{0}=0$,

所以$(\sqrt[3]{0})^3=0$.

对于任意数 a,$(\sqrt[3]{a})^3=a$.

点拨:本题是通过具体的实例探索出两个重要性质:$\sqrt[3]{a^3}=a$,$(\sqrt[3]{a})^3=a$(a 为任意数).

10. 略.

6.3 实数

练习:

1. 解:A 表示 -1.5,B 表示$\sqrt{2}$,C 表示$\sqrt{5}$,D 表示 3,E 表示 π.

2. 解:2.5 的相反数是 -2.5,绝对值是 2.5;

$-\sqrt{7}$的相反数是$\sqrt{7}$,绝对值是$\sqrt{7}$;

$-\frac{\pi}{2}$的相反数是$\frac{\pi}{2}$,绝对值是$\frac{\pi}{2}$;

$\sqrt{3}-2$ 的相反数是 $2-\sqrt{3}$,绝对值是$2-\sqrt{3}$;

0 的相反数是 0,绝对值是 0.

点拨:有理数关于相反数和绝对值的定义同样适用于实数.

3. 解:(1)$x=\pm\frac{2}{3}$;(2)$x=0$;

(3)$x=\pm\sqrt{10}$;(4)$x=\pm\pi$.

4. 解:(1)$2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(2-3)\times\sqrt{2}=-\sqrt{2}$;

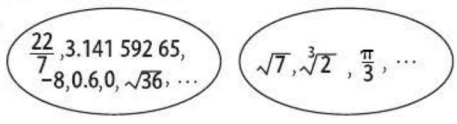
(2)$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{3}+(-1+2)\times\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

习题 6.3

1. 解:(1)错误;(2)正确;(3)错误;(4)错误;(5)正确.

点拨:本题考查对无理数和实数的理解. 无限小数分为无限循环小数和无限不循环小数,无限循环小数是有理数,无限不循环小数是无理数;数轴上的点与实数是一一对应的关系.

2.



有理数集合　　无理数集合

点拨:根据有理数和无理数的特点进行分类.

3. 解:$|\sqrt[3]{-8}|=|-2|=2$;

$|\sqrt{17}|=\sqrt{17}$;

$\left|-\frac{\sqrt{2}}{3}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}$;

$|\sqrt{3}-1.7|=\sqrt{3}-1.7$;

$|1.4-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1.4$.

4. 解:(1)$\sqrt{5}-\sqrt{3}+0.145\approx 2.236-1.732+0.145\approx 0.65$;

(2)$\sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}\approx 1.817-3.142-1.414\approx -2.74$.

点拨:本题考查利用计算器求某数的算术平方根、立方根.

5. 解:(1)$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(3+2)\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$;

(2)$\sqrt[3]{3}-|-\sqrt[3]{3}|=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:当被开方数和根指数分别相等时,可以把它们当成"同类项"进行合并,合并时只合并系数,被开方数和根指数不发生变化.

6. 解:(1)$\pi<3.146$;(2)$\sqrt{3}>1.732$;

(3)$\sqrt{5}-3<\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$;(4)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 解:(1)有最小的正整数,是1;没有最小的整数.

(2)没有最小的有理数;没有最小的无理数.

(3)没有最小的正实数;没有最小的实数.

8. 解:把$l=0.5$代入$t=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{10}}$,得$t=2\pi\sqrt{\dfrac{0.5}{10}}\approx 1.4$. 所以当细线的长度为0.5 m时,小重物来回摆动一次所用的时间约是1.4 s.

9. 解:无理数. 理由:虽然它的小数部分有规律,但是不循环,所以是无限不循环小数,因此是无理数.

复习题6

1. 解:(1)64的算术平方根是8,平方根是± 8;

(2)0.25的算术平方根是0.5,平方根是± 0.5;

(3)$\dfrac{4}{9}$的算术平方根是$\dfrac{2}{3}$,平方根是$\pm\dfrac{2}{3}$;

(4)5^6的算术平方根是125,平方根是± 125;

(5)因为$\left(\pm\dfrac{4}{13}\right)^2=\dfrac{16}{169}=\left(-\dfrac{4}{13}\right)^2$,所以$\left(-\dfrac{4}{13}\right)^2$的算术平方根是$\dfrac{4}{13}$,平方根是$\pm\dfrac{4}{13}$;

(6)10^4的算术平方根是100,平方根是± 100.

点拨:本题考查一个正数的平方根、算术平方根的计算.

2. 解:(1)$-\dfrac{1}{4}$;(2)-0.2;(3)$\dfrac{3}{2}$;(4)9.

点拨:本题是利用立方根的定义来求一个数的立方根.

3. 解:(1)$-\dfrac{7}{5}$;(2)-1;

(3)0.4;(4)0.3.

4. 解:(1)因为$25<28<36$,所以$5<\sqrt{28}<6$;

(2)因为$36<38<49$,所以$6<\sqrt{38}<7$;

(3)因为$64<99<125$,所以$4<\sqrt[3]{99}<5$.

5. 解:(1)$-\sqrt{94.3}\approx -9.711$;

(2)$\sqrt[3]{0.43}\approx 0.755$;

(3)$\sqrt{55\ 225}=235$;

(4)$\sqrt[3]{34\ 012\ 224}=324$.

6. 解:0,1,4,9这四个数的平方根及0,1,8这三个数的立方根是有理数;2,3,5,6,7,8,10这七个数的平方根和2,3,4,5,6,7,9,10这八个数的立方根是无理数.

7. 解:(1)因为$|-1.5|=1.5$,$1.5<1.\dot{5}$,

所以$|-1.5|<1.\dot{5}$;

(2)因为$\sqrt{2}\approx 1.414\ 2$,$1.414<1.414\ 2$,

所以$1.414<\sqrt{2}$;

(3)因为$\dfrac{2}{3}=0.\dot{6}$,$0.\dot{6}<0.666\ 67$,

所以$\dfrac{2}{3}<0.666\ 67$.

点拨:如果无法直接比较两个数的大小,可以先适当变形,再比较大小.

8. 解:(1)$\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\times\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$;

(2)$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=3+1=4$.

点拨:利用实数的运算法则进行计算.

9. 解:因为$(x-1)^2=4$,所以$x-1=2$或$x-1=-2$,所以$x=3$或$x=-1$.

10. 解:由题意知$-2\pi<x<2\pi$.

因为x是整数,所以x取± 6,± 5,± 4,± 3,± 2,± 1,0.

在数轴上表示略.

11. 解:当$h=1.5$ m时,$s=\sqrt{16.88h}=\sqrt{16.88\times 1.5}\approx 5.03$(km). 当$h=35$ m时,$s=\sqrt{16.88h}=\sqrt{16.88\times 35}\approx 24.31$(km).

所以当眼睛离海平面的高度是1.5 m时,能看到大约5.03 km远;

当眼睛离海平面的高度是35 m时,能看到大约24.31 km远.

12. 解:设圆的半径为R cm,正方形的边长为x cm,

根据题意得$\pi R^2=2\pi$,$x^2=2\pi$.

解得$R=\sqrt{2}$(负值舍去),$x=\sqrt{2\pi}$(负值舍去).

所以圆的周长为$2\sqrt{2}\pi\approx 8.89$(cm),正方形的周长为$4\sqrt{2\pi}\approx 10.03$(cm).

因此正方形的周长较大.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

得到的启示:面积相等的圆和正方形,圆的周长小.

点拨:本题是由图形的面积求周长,从而得出一个性质:如果圆的面积与正方形的面积相等,那么正方形的周长大于圆的周长.

13. 解:把 $V=500$ 代入球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,得 $500=\frac{4}{3}\pi R^3$,所以 $R^3=\frac{3\times500}{4\pi}=\frac{375}{\pi}$,所以 $R\approx4.92$. 所以这种球形容器的半径约是 4.92 dm.

点拨:本题是利用立方根的知识来求容器的半径.

14. (1)0 或 1;0;0 或 1

(2)0 或 ±1;0 或 ±1

点拨:本题考查平方根、立方根的知识,要熟记简单的数(如 0,1)的平方根、立方根.

第七章 平面直角坐标系

7.1 平面直角坐标系

练习:

解:答案不唯一,如:(2,5)→(2,4)→(2,3)→(2,2)→(3,2)→(4,2)→(5,2);(2,5)→(2,4)→(3,4)→(3,3)→(4,3)→(4,2)→(5,2).

练习:

1. 解:A 点的坐标为(−2,−2),B 点的坐标为(−5,4),C 点的坐标为(5,−4),D 点的坐标为(0,−3),E 点的坐标为(2,5),F 点的坐标为(−3,0).

点拨:写点的坐标时,横坐标在前,纵坐标在后,还要注意横、纵坐标的符号.

2. 略.

习题 7.1

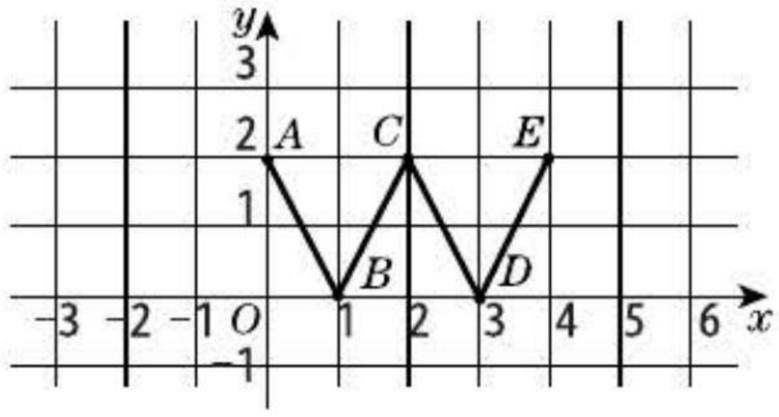
1. $A(3,3)$;$C(7,3)$;$D(10,3)$;$E(10,5)$;$F(7,7)$;$G(5,7)$;$H(3,6)$;$I(4,8)$

点拨:$B(5,2)$ 给出了数对顺序的规定.

2. −;+;−;−;+;−

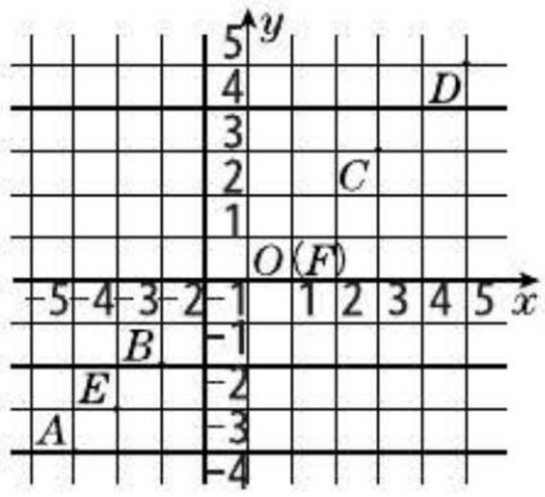
3. 解:$A(-5,4)$,横坐标是 −5,纵坐标是 4;$B(-2,2)$,横坐标是 −2,纵坐标是 2;$C(3,4)$,横坐标是 3,纵坐标是 4;$D(2,1)$,横坐标是 2,纵坐标是 1;$E(5,-3)$,横坐标是 5,纵坐标是 −3;$F(-1,-2)$,横坐标是 −1,纵坐标是 −2;$G(-5,-3)$,横坐标是 −5,纵坐标是 −3;$H(-4,-1)$,横坐标是 −4,纵坐标是 −1.

4. 解:A,B,C,D,E 各点的位置如图所示,依次连接这些点得到的图形像字母 W.



(第 4 题)

5. 解:如图,这些点的横坐标和纵坐标相等,它们在一条直线上. 例如:点(−1,−1),(1,1),(4,4)都具有这个特点.



(第 5 题)

点拨:注意它们的共同特征,再利用这个共同特征找出其他类似的点.

6. 解:以 B 为原点,BC 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系(图略).

点 A 的坐标为(−2,3),在第二象限;

点 D 的坐标为(6,1),在第一象限;

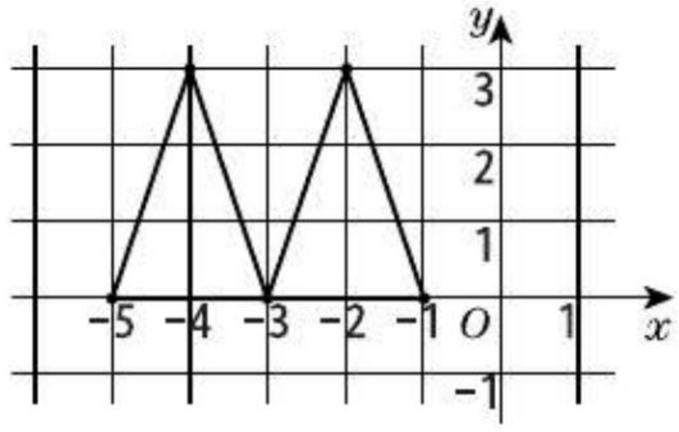
点 E 的坐标为(5,3),在第一象限;

点 F 的坐标为(3,2),在第一象限;

点 G 的坐标为(1,5),在第一象限.

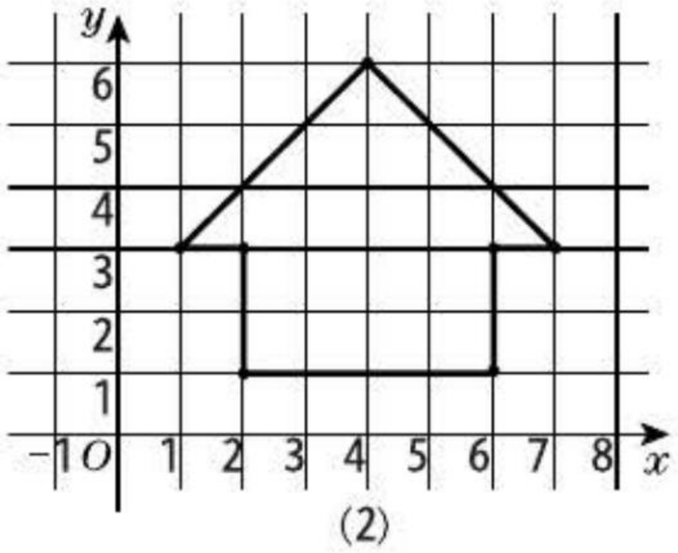
7. 解:(1)如图(1),依次连接图(1)中的各点,得到的图形像两座小山,面积为 6.

(2)如图(2),依次连接图(2)中的各点,得到的图形像一座小房子或一个箭头,面积为 17.



(1)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



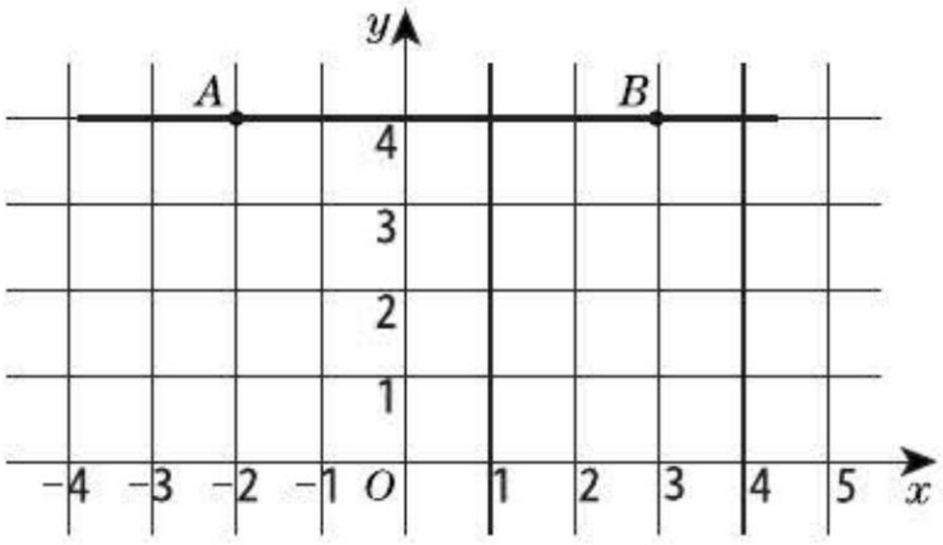
(2)

(第7题)

8. 解:如图,点 C 的纵坐标是4.

(1)这些点的纵坐标相同.

(2)这些点的横坐标相同.



(第8题)

9. 解:画图略. 李强同学家:(1 000,1 500);

张明同学家:(−2 000,−500);

王玲同学家:(0,−1 500).

10. 解:选点略. (1)点 P 在第一象限或第三象限.

(2)点 P 在第二象限或第四象限.

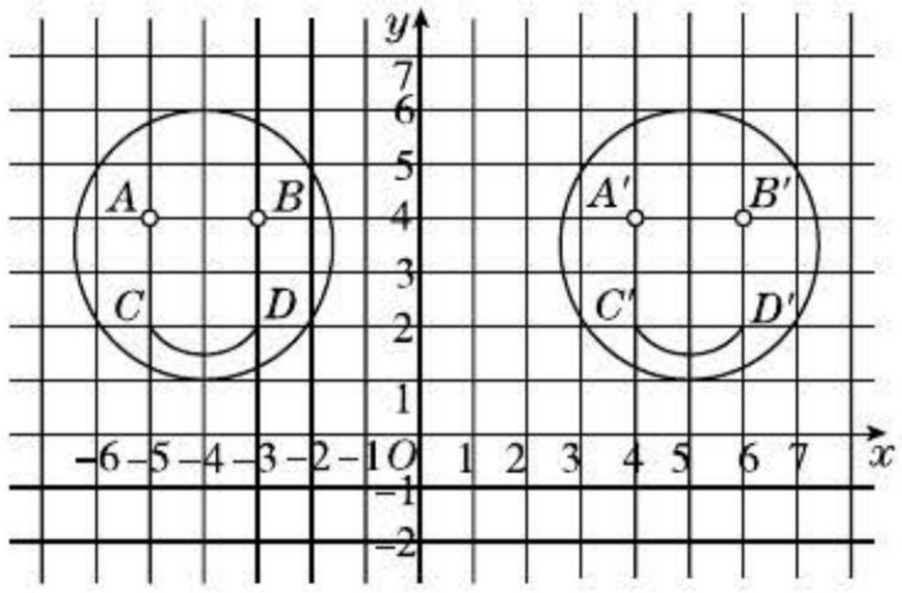
(3)点 P 在 x 轴上或 y 轴上.

点拨:解决本题的关键是掌握各象限内或坐标轴上点的坐标的特征,要注意所有可能的情况.

11. 解:共有12个:(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),(0,−3),(1,−2),(2,−1),(−1,−2),(−2,−1),(−3,0),(−2,1),(−1,2).

12. 略.

13. 解:如图,A',B',C',D'分别是由 A,B,C,D 平移后得到的,它们的坐标分别是 $A(-5,4)$,$B(-3,4)$,$C(-5,2)$,$D(-3,2)$,$A'(4,4)$,$B'(6,4)$,$C'(4,2)$,$D'(6,2)$. 可以发现,将左图向右平移9个单位长度后得到右图,所得右图上各点的横坐标分别等于它们的对应点的横坐标加上9,纵坐标不变.



(第13题)

点拨:本题是讨论在平面直角坐标系中,图形平移后,新图形与原图形对应点的坐标的变化规律.

14. 解:当点 A 在 x 轴上时,点 A 的坐标为(2,0)或(−2,0);当点 A 在 y 轴上时,点 A 的坐标为(0,4)或(0,−4).

7.2 坐标方法的简单应用

练习:

1. 解:以左下角为原点,水平方向为 x 轴(向右为正方向),竖直方向为 y 轴(向上为正方向),建立平面直角坐标系,孔心的坐标为(15,25).

2. 解:灯塔在货轮的南偏东50°,距离货轮40 n mile处;货轮在灯塔的北偏西50°,距离灯塔40 n mile处.

练习:

解:图略. A'点的坐标为(−3,1),B'点的坐标为(1,1),C'点的坐标为(2,4),D'点的坐标为(−2,4).

点拨:把各个顶点的横坐标减去2,纵坐标加上3,即可得到平移后各个顶点的坐标.

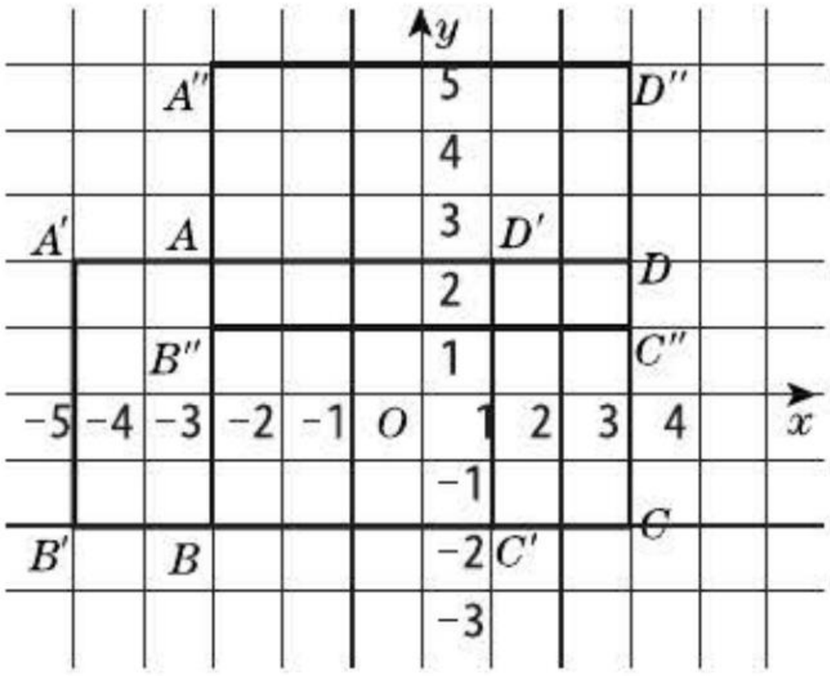
习题7.2

1. 解:$P(-1,1)$,$Q(-3,1)$,$R(-1,-1)$;$P'(4,3)$,$Q'(2,3)$,$R'(4,1)$.

2. 略.

3. 解:将长方形 $ABCD$ 向左平移2个单位长度,对应顶点 A',B',C',D' 的坐标分别为(−5,2),(−5,−2),(1,−2),(1,2). 将长方形 $ABCD$ 向上平移3个单位长度,对应顶点 A'',B'',C'',D'' 的坐标分别为(−3,5),(−3,1),(3,1),(3,5). 如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第3题)

点拨:注意理解平移后图形上点的坐标的变化规律.

4. C　**点拨**:原图形的三个顶点的横坐标都加2,纵坐标都加3,可得平移后三个顶点的坐标.

5. 略.

6. **解**:2班在1班的南偏西40°,距离1班5 km处.1班在2班的北偏东40°,距离2班5 km处.

7. 略.

8. **解**:因为 $P(x_0,y_0)\rightarrow P_1(x_0+5,y_0+3)$,所以 $A(-2,3)\rightarrow A_1(-2+5,3+3)$,$B(-4,-1)\rightarrow B_1(-4+5,-1+3)$,$C(2,0)\rightarrow C_1(2+5,0+3)$,即 $A_1(3,6)$,$B_1(1,2)$,$C_1(7,3)$.

点拨:由 $P(x_0,y_0)\rightarrow P_1(x_0+5,y_0+3)$ 可判断三角形 ABC 经过怎样的平移得到三角形 $A_1B_1C_1$.

9. **解**:过点 A,B 分别作 y 轴、x 轴的垂线,垂足为 C,D,线段 CA,DB 的延长线交于点 E,则 $S_{三角形AOB}=S_{长方形CODE}-S_{三角形AOC}-S_{三角形BOD}-S_{三角形ABE}=6\times4-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times6-\frac{1}{2}\times2\times4=24-4-6-4=10$.

点拨:求三角形的面积问题,可以转化为求图形面积的和或差,关键是理解坐标的含义.

10. **解**:$A'(2,0)$,$B'(5,0)$,$C'(5,-\sqrt{2})$,$D'(2,-\sqrt{2})$.

11. **解**:点 A 和点 C 横坐标相等,纵坐标互为相反数;点 N 的坐标是 $(x,-y)$.

12. 略.

复习题7

1. **解**:点 $A(2,3)$ 的横坐标是2,纵坐标是3,在第一象限;点 $B(-2,3)$ 的横坐标是 -2,纵坐标是3,在第二象限;点 $C(-2,-3)$ 的横坐标是 -2,纵坐标是 -3,在第三象限;点 $D(2,-3)$ 的横坐标是2,纵坐标是 -3,在第四象限.

2. **解**:八边形各顶点的坐标分别是:$(4,2)$,$(2,4)$,$(-2,4)$,$(-4,2)$,$(-4,-2)$,$(-2,-4)$,$(2,-4)$,$(4,-2)$.

点拨:写坐标时,要注意不同象限中点的坐标的符号.

3. 略.

4. **解**:(1)书店的坐标是(100,300),邮局的坐标是(−300,−100).

(2)糖果店、公交车站、电影院、消防站、宠物店、姥姥家.

(3)略.

5. **解**:(1)将蓝色图形先向下平移6个单位长度,再向左平移3个单位长度,得到红色图形;对应点的横坐标减小3,纵坐标减小6.

(2)将蓝色图形先向上平移8个单位长度,再向右平移6个单位长度,得到红色图形;对应点的横坐标增加6,纵坐标增加8.

点拨:平移方法不唯一.

6. **解**:(1)在一条直线上,这条直线与 x 轴平行.

(2)在一条直线上,这条直线与 x 轴垂直.

7. **解**:(1)略.

(2)位于方格的对角线上的点表示平均每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间相同.

(3)位于对角线左上方的点表示平均每周用于阅读课外书的时间多于用于看电视的时间;位于对角线右下方的点表示平均每周用于阅读课外书的时间少于用于看电视的时间.

(4)略.

点拨:本题是坐标知识的应用,体现了数学知识在日常生活中的应用.

8. 略.

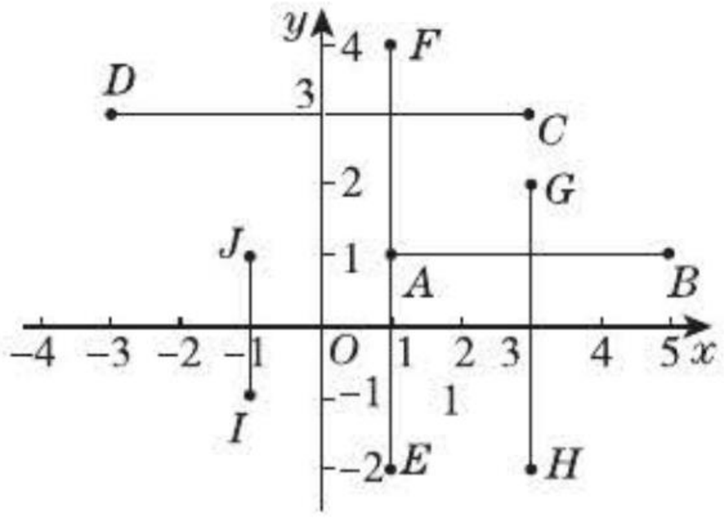
9. **解**:$A'(0,\sqrt{3})$,$B'(2\sqrt{3},\sqrt{3})$,$C'(\sqrt{3},0)$,$O'(-\sqrt{3},0)$.

10. **解**:如图,线段 AB,CD,EF,GH,IJ 的中点的坐标依次是(3,1),(0,3),(1,1),(3,0),(−1,0).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

发现:中点的横坐标(纵坐标)等于两个端点的横坐标(纵坐标)的和的一半.

与其他同学交流略.



(第10题)

11. 解: 点 A 的坐标为(4,3),点 P 的坐标为(-4,-3);点 B 的坐标为(3,1),点 Q 的坐标为(-3,-1);点 C 的坐标为(1,2),点 R 的坐标为(-1,-2). 三角形 ABC 内任意一点 M 的坐标为 (x,y),那么它的对应点 N 的坐标是(-x,-y).

第八章 二元一次方程组

8.1 二元一次方程组

练习:

解: 设应安排 x 人参加第一道工序,y 人参加第二道工序,根据题意得 $\begin{cases} x+y=7, \\ 900x=1\ 200y. \end{cases}$ 方程组整理为 $\begin{cases} x+y=7, \\ 3x=4y. \end{cases}$ 因为 x,y 只能取正整数,并且都小于7,可以看出当 $x=4,y=3$ 时能满足方程组,所以应安排4人参加第一道工序,3人参加第二道工序.

点拨: 分析题意可知,本题有两个相等关系:(1)参加第一道工序的人数+参加第二道工序的人数=总人数;(2)第一道工序每天加工的件数=第二道工序每天加工的件数,由这两个相等关系可以列出方程组.

习题8.1

1. 填表如下:

x	-2	0	0.4	2	$\frac{11}{6}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
y	11	5	3.8	-1	-0.5	-1	0	3

点拨: 解本题时,把表中的 x 值(或 y 值)代入方程 $3x+y=5$,即可求出另一个未知数的值.

2. C **点拨:** 把每对数值分别代入方程组的两个方程中检验,可知 $\begin{cases} x=1, \\ y=0.5 \end{cases}$ 是原方程组的解. 判断某一对数值是否为二元一次方程组的解的方法是:把这对数值分别代入方程组的每个方程中,若能使每个方程都成立,则这对数值就是方程组的解.

3. 解: (1) $x+2y=180$;(2)45;(3)60.

4. 解: 设鸡有 x 只,兔有 y 只,根据题意,得 $\begin{cases} x+y=35, & ① \\ 2x+4y=94. & ② \end{cases}$

因为 x,y 均为正整数,且都小于35,

所以满足方程①的解有 $\begin{cases} x=1, \\ y=34, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=33, \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=32, \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ y=31, \end{cases}$ …,

把这些解代入方程②检验,只有 $\begin{cases} x=23, \\ y=12 \end{cases}$ 满足,

所以 $\begin{cases} x=23, \\ y=12 \end{cases}$ 是方程组的解.

所以鸡有23只,兔有12只.

点拨: 找出相等关系是解本题的关键,本题中的相等关系是:(1)鸡的只数+兔的只数=35;(2)鸡的足数+兔的足数=94. 列出方程组,根据实际意义分析方程组的解.

5. 解: 设2 m长的钢管截 x 根,1 m长的钢管截 y 根.

根据题意得:$2x+y=7$.

该方程的正整数解为:$x=1,y=5$;$x=2,y=3$;$x=3,y=1$.

所以共有3种截法:2 m长的1根,1 m长的5根;2 m长的2根,1 m长的3根;2 m长的3根,1 m长的1根.

8.2 消元——解二元一次方程组

练习:

1. 解: (1)移项,得 $-y=3-2x$.

系数化为1,得 $y=2x-3$.

(2)移项,得 $y=1-3x$.

点拨: 解此类问题,可以把要表示的字母当作未知数,另一个字母当作已知数,解一元一次方程即可.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解:(1)$\begin{cases}y=2x-3,①\\3x+2y=8.②\end{cases}$把①代入②,

得$3x+2(2x-3)=8$,解得$x=2$.

把$x=2$代入①,得$y=1$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}2x-y=5,①\\3x+4y=2.②\end{cases}$由①,得$y=2x-5.$③

把③代入②,得$3x+4(2x-5)=2$,解得$x=2$.

把$x=2$代入③,得$y=-1$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

点拨:用代入法解二元一次方程组时,选出方程组中未知数的系数较小的方程,用含其中一个未知数的式子表示另一个未知数,再代入另一个方程,从而达到消元的目的.

3. 解:设篮球队有x支参赛,排球队有y支参赛. 根据题意,得$\begin{cases}x+y=48,①\\10x+12y=520.②\end{cases}$

由①,得$x=48-y.$③

把③代入②,得$10(48-y)+12y=520$,

解得$y=20$.

把$y=20$代入③,得$x=28$.

所以方程组的解是$\begin{cases}x=28,\\y=20.\end{cases}$

答:篮球队有28支参赛,排球队有20支参赛.

点拨:本题利用二元一次方程组解应用题,先根据题意列出方程组,再用代入法解这个方程组.

4. 解:设张翔骑车用x h,步行用y h. 根据题意,得$\begin{cases}x+y=1.5,①\\15x+5y=20.②\end{cases}$

由①,得$x=1.5-y.$③

把③代入②,得$15(1.5-y)+5y=20$,

解得$y=0.25$.

把$y=0.25$代入③,得$x=1.25$.

所以方程组的解是$\begin{cases}x=1.25,\\y=0.25.\end{cases}$

答:张翔骑车与步行分别用1.25 h,0.25 h.

点拨:本题的两个相等关系是:(1)骑车所用时间+步行所用时间=1.5 h;(2)骑车所行路程+步行所走路程=20 km,据此列出方程组,用代入法解此方程组可得问题的答案.

练习:

1. 解:(1)$\begin{cases}x+2y=9,①\\3x-2y=-1.②\end{cases}$①+②,得$4x=8$,

解这个方程,得$x=2$.

把$x=2$代入①,得$y=\frac{7}{2}$.

因此,这个方程组的解是$\begin{cases}x=2,\\y=\frac{7}{2}.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}5x+2y=25,①\\3x+4y=15.②\end{cases}$①×2,

得$10x+4y=50.$③

③-②,得$7x=35$,解这个方程,得$x=5$.

把$x=5$代入①,得$5\times5+2y=25$,$y=0$.

因此,这个方程组的解是$\begin{cases}x=5,\\y=0.\end{cases}$

(3)$\begin{cases}2x+5y=8,①\\3x+2y=5.②\end{cases}$①×3,

得$6x+15y=24.$③

②×2,得$6x+4y=10.$④

③-④,得$11y=14$,$y=\frac{14}{11}$.

把$y=\frac{14}{11}$代入①,得$2x+5\times\frac{14}{11}=8$,$x=\frac{9}{11}$.

因此,这个方程组的解是$\begin{cases}x=\frac{9}{11},\\y=\frac{14}{11}.\end{cases}$

(4)$\begin{cases}2x+3y=6,①\\3x-2y=-2.②\end{cases}$①×2,

得$4x+6y=12.$③

②×3,得$9x-6y=-6.$④

③+④,得$13x=6$,$x=\frac{6}{13}$.

把$x=\frac{6}{13}$代入①,得$2\times\frac{6}{13}+3y=6$,$y=\frac{22}{13}$.

因此,这个方程组的解是$\begin{cases}x=\frac{6}{13},\\y=\frac{22}{13}.\end{cases}$

2. 解:设轮船在静水中的速度为每小时x km,水的流速为每小时y km.

依题意,得$\begin{cases}x+y=20,①\\x-y=16.②\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

①+②,得 $2x=36$,$x=18$.

把 $x=18$ 代入①,得 $y=2$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=18,\\y=2.\end{cases}$

答:轮船在静水中的速度为每小时 18 km,水的流速为每小时 2 km.

3. 解:设每节火车车厢平均装 x t 化肥,每辆汽车平均装 y t 化肥. 依题意,得 $\begin{cases}6x+15y=360,①\\8x+10y=440.②\end{cases}$

①×2,得 $12x+30y=720$. ③

②×3,得 $24x+30y=1\ 320$. ④

④-③,得 $12x=600$,$x=50$.

把 $x=50$ 代入①,得

$6\times50+15y=360$,$y=4$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=50,\\y=4.\end{cases}$

答:每节火车车厢平均装 50 t 化肥,每辆汽车平均装 4 t 化肥.

习题 8.2

1. 解:(1)移项,得 $2y=1-\frac{3}{2}x$.

系数化为 1,得 $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x$.

(2)移项,得 $\frac{7}{4}y=2-\frac{1}{4}x$.

系数化为 1,得 $y=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}x$.

(3)移项,得 $-3y-2y=x-5x$.

合并同类项,得 $-5y=-4x$.

系数化为 1,得 $y=\frac{4}{5}x$.

(4)去括号,得 $6y-6=6x+4$.

移项、合并同类项,得 $6y=6x+10$.

系数化为 1,得 $y=x+\frac{5}{3}$.

点拨:此类题相当于解一元一次方程,即把 x 当作已知数,解关于 y 的一元一次方程即可.

2. 解:(1) $\begin{cases}y=x+3,①\\7x+5y=9.②\end{cases}$

把①代入②,得 $7x+5(x+3)=9$,解得 $x=-\frac{1}{2}$.

把 $x=-\frac{1}{2}$ 代入①,得 $y=\frac{5}{2}$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\y=\frac{5}{2}.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3s-t=5,①\\5s+2t=15.②\end{cases}$

由①,得 $t=3s-5$. ③

把③代入②,得 $5s+2(3s-5)=15$,解得 $s=\frac{25}{11}$.

把 $s=\frac{25}{11}$ 代入③,得 $t=\frac{20}{11}$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}s=\frac{25}{11},\\t=\frac{20}{11}.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}4x+y=15,①\\3x-2y=3.②\end{cases}$

由①,得 $y=15-4x$. ③

把③代入②,得 $3x-2(15-4x)=3$,解得 $x=3$.

把 $x=3$ 代入③,得 $y=3$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=3,\\y=3.\end{cases}$

(4)化简原方程组,得 $\begin{cases}4x+5y=-7,①\\2x+3y=-3.②\end{cases}$

由①,得 $y=-\frac{7}{5}-\frac{4}{5}x$. ③

把③代入②,得 $2x+3\left(-\frac{7}{5}-\frac{4}{5}x\right)=-3$,

解得 $x=-3$.

把 $x=-3$ 代入③,得 $y=1$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=-3,\\y=1.\end{cases}$

3. 解:(1) $\begin{cases}3u+2t=7,①\\6u-2t=11.②\end{cases}$

①+②,得 $9u=18$,$u=2$.

把 $u=2$ 代入①,得 $3\times2+2t=7$,$t=\frac{1}{2}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}u=2,\\t=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2a+b=3,①\\3a+b=4.②\end{cases}$ ②-①,得 $a=1$.

把 $a=1$ 代入①,得 $2\times1+b=3$,$b=1$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$\begin{cases}2x-5y=-3,①\\-4x+y=-3.②\end{cases}$

①×2,得$4x-10y=-6$③,

②+③,得$-9y=-9$,$y=1$.

把$y=1$代入①,得$2x-5\times1=-3$,$x=1$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

(4)$\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-1,①\\2x+y=3.②\end{cases}$

①×4,得$2x-6y=-4$③,

③-②,得$-7y=-7$,解得$y=1$.

把$y=1$代入②,得$x=1$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

点拨:用加减法解二元一次方程组时,先观察每个方程中未知数的系数,当同一个未知数的系数相等时,把两个方程的两边分别相减;当同一个未知数的系数互为相反数时,把两个方程的两边分别相加;当两个方程的某个未知数的系数的绝对值成倍数关系时,在系数的绝对值较小的方程两边都乘以该倍数,使这个未知数的系数相等或互为相反数,再把方程的两边分别相减或相加;当两个方程中的未知数的系数的绝对值既不相等,又不成倍数关系时,一般选择系数的最小公倍数较小的未知数,把两个方程分别乘以一个适当的数,使两个方程的这个未知数的系数的绝对值相等,再相加或相减,便可求出一个未知数的值,进而可求出另一个未知数的值.

4. 解:设甲、乙两种票分别买了x张,y张,根据题意,得$\begin{cases}x+y=35,①\\24x+18y=750.②\end{cases}$

由①,得$x=35-y$.③

把③代入②,得$24(35-y)+18y=750$,

解得$y=15$.

把$y=15$代入③,得$x=20$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=20,\\y=15.\end{cases}$

答:甲、乙两种票分别买了20张、15张.

点拨:解本题的关键是找出两个相等关系:甲种票的张数+乙种票的张数=总张数;买甲种票用的钱数+买乙种票用的钱数=总钱数.

5. 解:(1)将原方程组化简为$\begin{cases}3x-y=8,①\\-3x+5y=20.②\end{cases}$

①+②,得$4y=28$,$y=7$.

将$y=7$代入①,得$3x-7=8$,$x=5$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=7.\end{cases}$

(2)将原方程组化简为$\begin{cases}8u+9v=6,①\\24u+25v=14.②\end{cases}$

①×3,得$24u+27v=18$.③

③-②,得$2v=4$,解得$v=2$.

把$v=2$代入①,得$u=-\frac{3}{2}$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}u=-\frac{3}{2},\\v=2.\end{cases}$

点拨:解二元一次方程组时,如果方程组比较复杂,可以先化简、整理方程组,使未知数的系数比较简单,然后观察新方程组的特点,选择合适的消元方法解方程组.

6. 解:设到花果岭和云水洞旅游的人数分别是x,y,

依题意,得$\begin{cases}x+y=200,①\\x=2y-1.②\end{cases}$

把②代入①,得$2y-1+y=200$,解得$y=67$.

把$y=67$代入①,得$x=133$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=133,\\y=67.\end{cases}$

答:到花果岭和云水洞旅游的人数分别是133和67.

点拨:列方程组解应用题的关键是找相等关系,本题中的相等关系是:(1)到花果岭旅游的人数+到云水洞旅游的人数=200;(2)到花果岭旅游的人数=到云水洞旅游的人数×2-1.

7. 解:设小方的平均速度是x km/h,小程的平均速度是y km/h.

依题意,得$\begin{cases}(x+y)\times1=6,\\3x-3y=6.\end{cases}$

将原方程组化简为$\begin{cases}x+y=6,①\\x-y=2.②\end{cases}$

①+②,得$2x=8$,$x=4$.

将$x=4$代入①,得$4+y=6$,$y=2$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答:小方的平均速度是 4 km/h,小程的平均速度是 2 km/h.

8. 解:设大盒每盒装 x 瓶,小盒每盒装 y 瓶.

依题意,得 $\begin{cases}3x+4y=108,①\\2x+3y=76.②\end{cases}$

① ×2,得 $6x+8y=216.$ ③

② ×3,得 $6x+9y=228.$ ④

④ − ③,得 $y=12$.

把 $y=12$ 代入①,得 $3x+4\times12=108$,$x=20$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=20,\\y=12.\end{cases}$

答:大盒每盒装 20 瓶,小盒每盒装 12 瓶.

9. 解:设这个长方形的长和宽分别是 x cm,y cm,依题意,得 $\begin{cases}x-5=y+2,\\(x-5)(y+2)=xy.\end{cases}$

化简方程组,得 $\begin{cases}x-y=7,①\\2x-5y=10.②\end{cases}$

① ×2,得 $2x-2y=14.$ ③ ③ − ②,得 $3y=4$,解得 $y=\frac{4}{3}$.

把 $y=\frac{4}{3}$ 代入①,得 $x=\frac{25}{3}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{25}{3},\\y=\frac{4}{3}.\end{cases}$

答:这个长方形的长为 $\frac{25}{3}$ cm,宽为 $\frac{4}{3}$ cm.

点拨:本题中的相等关系是:(1)长 − 5 cm = 宽 + 2 cm;(2)正方形的面积 = 原长方形的面积.

8.3 实际问题与二元一次方程组

习题 8.3

1. 解:(1)原方程组可整理为 $\begin{cases}3x-y=5,①\\3x-5y=-6.②\end{cases}$

① − ②,得 $4y=11$,解得 $y=\frac{11}{4}$.

把 $y=\frac{11}{4}$ 代入①,得 $3x-\frac{11}{4}=5$,解得 $x=\frac{31}{12}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{31}{12},\\y=\frac{11}{4}.\end{cases}$

(2)原方程组可化简为 $\begin{cases}8x+9y=17,①\\x-3y=-2.②\end{cases}$

① + ② ×3,得 $11x=11$,所以 $x=1$.

把 $x=1$ 代入①,得 $8\times1+9y=17$,所以 $y=1$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

点拨:把系数比较复杂的二元一次方程组化简为系数较简单的方程组,然后选择适当的方法解.注意用加减法把两方程相减时易出错,如(1)中①−②易错误地得出 $-6y=11$.

2. 解:设飞机无风时的平均速度是 x km/h,风速是 y km/h.

依题意,得 $\begin{cases}12.5(x+y)=9\,750,\\13(x-y)=9\,750.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=765,\\y=15.\end{cases}$

答:飞机无风时的平均速度是 765 km/h,风速是 15 km/h.

3. 解:设第一天和第二天行军的平均速度分别是 x km/h,y km/h. 依题意,得 $\begin{cases}4x+5y=98,\\4x+2=5y.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=12,\\y=10.\end{cases}$

答:第一天和第二天行军的平均速度分别是 12 km/h,10 km/h.

4. 解:设用 x 张制盒身,y 张制盒底可以使盒身与盒底正好配套,根据题意,得 $\begin{cases}x+y=36,\\2\times25x=40y.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=16,\\y=20.\end{cases}$

答:用 16 张制盒身,20 张制盒底可以使盒身与盒底正好配套.

点拨:本题属于生产中的配套问题,审题的关键是搞清如何配套,存在怎样的数量关系,此处容易把倍数关系弄反.

5. 解:设 1 辆大货车一次可以运货 x t,1 辆小货车一次可以运货 y t,根据题意,得 $\begin{cases}2x+3y=15.5,\\5x+6y=35.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=4,\\y=2.5.\end{cases}$

所以 $3x+5y=3\times4+5\times2.5=24.5.$

答:3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货 24.5 t.

点拨:根据题意,本题需先求出大货车和小货车

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

每辆一次运货各多少吨,所以间接设未知数,然后找出与未知数有关的相等关系,列方程组,解方程组,再进一步求解.

6. **解**:设从甲地到乙地的上坡路为 x km,平路为 y km,

根据题意,得 $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{54}{60},\\ \frac{x}{5}+\frac{y}{4}=\frac{42}{60}.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=1.5,\\ y=1.6.\end{cases}$

所以 $x+y=1.5+1.6=3.1$.

答:甲地到乙地全程是 3.1 km.

点拨:从甲地到乙地的全程包括上坡和平路两段,要计算全程,需求出上坡和平路各有多少千米,因而间接设未知数. 本题中的相等关系是:(1)从甲地到乙地:上坡所用时间 + 平路所用时间 = 54 min;(2)从乙地到甲地:下坡所用时间 + 平路所用时间 = 42 min.

7. **解**:设含药 30% 和 75% 的两种药水分别需 x kg 和 y kg,

根据题意,得 $\begin{cases}x+y=18,\\ 30\%\,x+75\%\,y=50\%\times 18.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=10,\\ y=8.\end{cases}$

答:含药 30% 和 75% 的两种药水分别需 10 kg 和 8 kg.

点拨:此题属于浓度问题,与浓度有关的公式是:溶质质量 = 溶液质量 × 浓度. 溶质在本题中为药,溶液为药水,本题中的相等关系为:30% 的药水质量 + 75% 的药水质量 = 18 kg,30% 的药水中药的质量 + 75% 的药水中药的质量 = 50% 的药水中药的质量,据此可列出方程组,从而解决问题.

8. **解**:设打折前 A 商品每件 x 元,B 商品每件 y 元,

根据题意,得 $\begin{cases}60x+30y=1\,080,\\ 50x+10y=840.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=16,\\ y=4.\end{cases}$

所以打折前买 500 件 A 商品和 500 件 B 商品共需 $500\times(16+4)=10\,000$(元),

因此打折后比不打折少花 $10\,000-9\,600=400$(元).

答:打折后比不打折少花 400 元.

点拨:要比较打折前后花钱多少,需计算打折前花了多少钱,为此需要求出打折前两种商品的单价,因而间接设打折前两种商品的单价分别为 x 元和 y 元,然后根据题中的两个相等关系列出二元一次方程组,求出 x 和 y 的值,再计算打折前的花费,最后进行比较.

9. **解**:这个记录有误,理由如下:设一支牙刷 x 元,一盒牙膏 y 元,可列方程组为 $\begin{cases}39x+21y=396,\\ 52x+28y=518.\end{cases}$

化简这个方程组,得 $\begin{cases}13x+7y=132,①\\ 26x+14y=259.②\end{cases}$

观察方程①与②的特点,两个方程的未知数的系数都是 2 倍的关系,而常数项却不是 2 倍的关系,所以原方程组无解,因此记录有误.

点拨:关于 x,y 的二元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$ $(a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2\neq 0)$ 当 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 时,方程组只有一组解;当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 时,方程组有无数多组解;当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ 时,方程组无解.

*8.4 三元一次方程组的解法

练习:

1. **解**:(1) $\begin{cases}x-2y=-9,①\\ y-z=3,\quad②\\ 2z+x=47.\quad③\end{cases}$

③ − ①,得 $2z+2y=56$,即 $y+z=28$ ④,

② + ④,得 $2y=31$,所以 $y=15.5$.

把 $y=15.5$ 代入①,得 $x=22$.

把 $y=15.5$ 代入②,得 $z=12.5$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=22,\\ y=15.5,\\ z=12.5.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x-y+z=4,①\\ 2x+3y-z=12,\quad②\\ x+y+z=6.\quad③\end{cases}$

① + ②,得 $5x+2y=16$ ④,

① − ③,得 $2x-2y=-2$ ⑤,

④ + ⑤,得 $7x=14$,所以 $x=2$.

将 $x=2$ 代入④,得 $y=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将 $x=2,y=3$ 代入③,得 $z=1$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=1.\end{cases}$

2. 解: 设甲数为 x,乙数为 y,丙数为 z,则

$$\begin{cases}x+y+z=35,\\2x-y=5,\\\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}z.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=10,\\y=15,\\z=10.\end{cases}$

答: 甲数为 10,乙数为 15,丙数为 10.

点拨: 根据题意设未知数,列出方程组,求解即可.

习题 8.4

1. 解: (1) $\begin{cases}y=2x-7,①\\5x+3y+2z=2,②\\3x-4z=4.③\end{cases}$ 将①代入②,

得 $5x+3(2x-7)+2z=2$,即 $11x+2z=23$ ④,

④ $\times 2+$ ③,得 $25x=50$,所以 $x=2$.

将 $x=2$ 代入①,得 $y=-3$.

将 $x=2$ 代入④,得 $z=0.5$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\\z=0.5.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}4x+9y=12,①\\3y-2z=1,②\\7x+5z=\frac{19}{4}.③\end{cases}$

① $-$ ② $\times 3$,得 $4x+6z=9$ ④,

④ $\times 7-$ ③ $\times 4$,得 $22z=44$,所以 $z=2$.

将 $z=2$ 代入②,得 $y=\frac{5}{3}$.

将 $z=2$ 代入③,得 $x=-\frac{3}{4}$. 所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=-\frac{3}{4},\\y=\frac{5}{3},\\z=2.\end{cases}$

2. 解: (1) $\begin{cases}4x-9z=17,①\\3x+y+15z=18,②\\x+2y+3z=2.③\end{cases}$

② $\times 2-$ ③,得 $5x+27z=34$ ④,

① $\times 3+$ ④,得 $17x=85$,所以 $x=5$.

将 $x=5$ 代入①,得 $z=\frac{1}{3}$.

将 $x=5,z=\frac{1}{3}$ 代入②,得 $y=-2$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=5,\\y=-2,\\z=\frac{1}{3}.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+4y+3z=9,①\\3x-2y+5z=11,②\\5x-6y+7z=13.③\end{cases}$

① $+$ ② $\times 2$,得 $8x+13z=31$ ④,

② $\times 3-$ ③,得 $4x+8z=20$ ⑤,

⑤ $\times 2-$ ④,得 $3z=9$,解得 $z=3$.

将 $z=3$ 代入⑤,得 $x=-1$.

将 $x=-1,z=3$ 代入①,得 $y=\frac{1}{2}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=\frac{1}{2},\\z=3.\end{cases}$

3. 解: 设这个三位数百位上的数字是 x,十位上的数字是 y,个位上的数字是 z,则 $\begin{cases}x+z=y,\\7x-2=y+z,\\x+y+z=14.\end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases}x=2,\\y=7,\\z=5,\end{cases}$

所以这个三位数是 275.

点拨: 根据题意设出未知数,列方程组求解即可.

4. 解: $\begin{cases}x:y=3:2,①\\y:z=5:4,②\\x+y+z=66.③\end{cases}$

由①,得 $x=\frac{3}{2}y$ ④,

由②,得 $z=\frac{4}{5}y$ ⑤,

将④⑤同时代入③,得 $\frac{3}{2}y+y+\frac{4}{5}y=66$,

所以 $y=20$. 将 $y=20$ 代入④,得 $x=30$.

将 $y=20$ 代入⑤,得 $z=16$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=30,\\y=20,\\z=16.\end{cases}$

5. 解：依题意，得

$$\begin{cases}a+b+c=-2,\\a-b+c=20,\\\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=\frac{1}{9}a+\frac{1}{3}b+c.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}a=6,\\b=-11,\\c=3.\end{cases}$

点拨：根据题意列出关于a,b,c的三元一次方程组，求解即可.

复习题8

1. 解：(1)$\begin{cases}a=2b+3,①\\a=3b+20.②\end{cases}$

把①代入②，得$2b+3=3b+20$，解得$b=-17$.

把$b=-17$代入①，得$a=-31$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}a=-31,\\b=-17.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}x-y=13,①\\x=6y-7.②\end{cases}$

把②代入①，得$6y-7-y=13$，解得$y=4$.

把$y=4$代入②，得$x=17$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=17,\\y=4.\end{cases}$

(3)$\begin{cases}x-y=4,①\\4x+2y=-1.②\end{cases}$

由①，得$x=y+4$　③，

把③代入②，得$4(y+4)+2y=-1$，解得$y=-\frac{17}{6}$.

把$y=-\frac{17}{6}$代入③，得$x=\frac{7}{6}$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=\frac{7}{6},\\y=-\frac{17}{6}.\end{cases}$

(4)$\begin{cases}5x-y=110,①\\9y-x=110.②\end{cases}$

由①，得$y=5x-110$　③，

把③代入②，得$9(5x-110)-x=110$，解得$x=25$.

把$x=25$代入③，得$y=15$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=25,\\y=15.\end{cases}$

点拨：用代入法解二元一次方程组时，要观察两个方程的特点，像(1)(2)中有一个未知数已经用含另一个未知数的式子表示出来，可以直接代入另一个方程，实现消元；像(3)(4)就要把一个方程变形，用含一个未知数的式子表示出另一个未知数，然后代入另一个方程实现消元.

2. 解：(1)$\begin{cases}3m+b=11,①\\-4m-b=11.②\end{cases}$

①+②，得$-m=22$，解得$m=-22$.

把$m=-22$代入①，得$3\times(-22)+b=11$，解得$b=77$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}b=77,\\m=-22.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}0.6x-0.4y=1.1,①\\0.2x-0.4y=2.3.②\end{cases}$

①−②，得$0.4x=-1.2$，解得$x=-3$.

把$x=-3$代入①，得$y=-7.25$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=-3,\\y=-7.25.\end{cases}$

(3)$\begin{cases}4f+g=15,①\\3g-4f=-3.②\end{cases}$

①+②，得$4g=12$，解得$g=3$.

把$g=3$代入①，得$4f+3=15$，解得$f=3$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}f=3,\\g=3.\end{cases}$

(4)$\begin{cases}\frac{1}{2}x+3y=-6,①\\\frac{1}{2}x+y=2.②\end{cases}$

①−②，得$2y=-8$，解得$y=-4$.

把$y=-4$代入②，得$x=12$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=12,\\y=-4.\end{cases}$

点拨：用加减法解二元一次方程组时，先观察两个方程中同一未知数系数的特点. 如果同一未知数的系数相等或互为相反数，那么把两个方程两边直接相减或相加即可实现消元. 若同一未知数的系数不相等且不互为相反数，则各方程分别乘以某个数，把同一未知数的系数变为相等或互为相反数，然后再相减或相加，消去一个未知数，求

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得另一个未知数的值,进而求出方程组的解.

3. 解:(1)将原方程组化简,得$\begin{cases}4x-y=5,①\\3x+2y=12.②\end{cases}$

①×2,得$8x-2y=10$③,

②+③,得$11x=22$,解得$x=2$.

把$x=2$代入①,得$y=3$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

(2)原方程组可化简为$\begin{cases}5x-11y=-12,①\\-x+5y=8.②\end{cases}$

②×5,得$-5x+25y=40$ ③.

①+③,得$14y=28$,解得$y=2$.

把$y=2$代入②,得$x=2$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$

点拨:当二元一次方程组较复杂(含分母或括号)时,要先化简、整理方程组,得到一个相对简单的二元一次方程组,然后根据新方程组的特点,灵活选择方法去解.

*4. **解**:(1)$\begin{cases}3x-y+z=3,①\\2x+y-3z=11,②\\x+y+z=12.③\end{cases}$

①+③,得$4x+2z=15$ ④,

②-③,得$x-4z=-1$ ⑤,

④×2+⑤,得$9x=29$,所以$x=\frac{29}{9}$.

将$x=\frac{29}{9}$代入⑤,得$z=\frac{19}{18}$.

将$x=\frac{29}{9}$,$z=\frac{19}{18}$代入③,得$y=\frac{139}{18}$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=\frac{29}{9},\\y=\frac{139}{18},\\z=\frac{19}{18}.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}5x-4y+4z=13,①\\2x+7y-3z=19,②\\3x+2y-z=18.③\end{cases}$

①+③×4,得$17x+4y=85$ ④,

③×3-②,得$7x-y=35$ ⑤,

④+⑤×4,得$45x=225$,所以$x=5$.

将$x=5$代入⑤,得$y=0$.

将$x=5$,$y=0$代入③,得$z=-3$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=0,\\z=-3.\end{cases}$

5. 解:设1号仓库和2号仓库原来分别存粮x t和y t.根据题意,得

$\begin{cases}x+y=450,\\(1-40\%)y-(1-60\%)x=30.\end{cases}$

解这个方程组,得$\begin{cases}x=240,\\y=210.\end{cases}$

答:1号仓库原来存粮240 t,2号仓库原来存粮210 t.

6. 解:设甲、乙二人每分分别跑x圈、y圈,根据题意,得$\begin{cases}2(x+y)=1,\\6(x-y)=1.\end{cases}$解这个方程组,得$\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

答:甲、乙二人每分分别跑$\frac{1}{3}$圈、$\frac{1}{6}$圈.

点拨:两人同时同地出发,若反向而行,第一次相遇时,快者所跑路程+慢者所跑路程=1圈;若同向而行,第一次相遇时,快者所跑路程-慢者所跑路程=1圈.

7. 解:设恰好用A型钢板x块,B型钢板y块,根据题意,得$\begin{cases}2x+y=15,\\x+2y=18.\end{cases}$解这个方程组,得$\begin{cases}x=4,\\y=7.\end{cases}$

答:恰好用A型钢板4块,B型钢板7块.

点拨:分析题意,可得出两个等量关系:(1)用A型钢板制成的C型钢板块数+用B型钢板制成的C型钢板块数=15块;(2)用A型钢板制成的D型钢板块数+用B型钢板制成的D型钢板块数=18块,由此可列出二元一次方程组.

8. 解:设1个大桶可以盛酒x斛,1个小桶可以盛酒y斛,根据题意,得$\begin{cases}5x+y=3,\\x+5y=2.\end{cases}$

解这个方程组,得$\begin{cases}x=\frac{13}{24},\\y=\frac{7}{24}.\end{cases}$

答:1个大桶可以盛酒$\frac{13}{24}$斛,1个小桶可以盛酒$\frac{7}{24}$斛.

点拨:本题是我国古代的一个数学问题,要认真

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

审题,找出其中的等量关系,列方程组解决.

9. 解:设1角的硬币取x枚,5角的硬币取y枚,则1元的硬币取$(15-x-y)$枚.

由题意,得$x+5y+10(15-x-y)=70$,

化简,得$9x+5y=80$,所以$y=\frac{80-9x}{5}$.

又因为x,y是非负整数且均不大于10,所以当$x=0$时,$y=\frac{80}{5}=16$(不合题意,舍去);当$x=1$时,$y=\frac{80-9}{5}=14.2$(不合题意,舍去);当$x=2$时,$y=\frac{80-9\times2}{5}=12.4$(不合题意,舍去);当$x=3$时,$y=\frac{80-9\times3}{5}=10.6$(不合题意,舍去);当$x=4$时,$y=\frac{80-9\times4}{5}=8.8$(不合题意,舍去);当$x=5$时,$y=\frac{80-9\times5}{5}=7$,此时$15-x-y=15-5-7=3$;当$x=6$时,$y=\frac{80-9\times6}{5}=5.2$(不合题意,舍去);当$x=7$时,$y=\frac{80-9\times7}{5}=3.4$(不合题意,舍去);当$x=8$时,$y=\frac{80-9\times8}{5}=1.6$(不合题意,舍去);当$x=9,10$时,$y$均为负数,不合题意.

答:1角、5角、1元的硬币分别取5枚、7枚、3枚.

10. 解:设从该电脑公司购进A型电脑x台,购进B型电脑y台,购进C型电脑z台,则可分以下三种情况考虑:

(1)只购进A型电脑和B型电脑,依题意得$\begin{cases}6\,000x+4\,000y=100\,500,\\x+y=36,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=-21.75,\\y=57.75.\end{cases}$不合题意,舍去.

(2)只购进A型电脑和C型电脑,依题意得$\begin{cases}6\,000x+2\,500z=100\,500,\\x+z=36,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=3,\\z=33.\end{cases}$符合题意.

(3)只购进B型电脑和C型电脑,依题意得$\begin{cases}4\,000y+2\,500z=100\,500,\\y+z=36,\end{cases}$

解得$\begin{cases}y=7,\\z=29.\end{cases}$符合题意.

答:有两种方案可供该校选择,第一种方案为:购进A型电脑3台和C型电脑33台;第二种方案为:购进B型电脑7台和C型电脑29台.

***11. 解**:设从甲地到乙地时,上坡的路程为x km,平路的路程为y km,下坡的路程为z km,则有

$$\begin{cases}x+y+z=3.3,\\\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=\frac{51}{60},\\\frac{z}{3}+\frac{y}{4}+\frac{x}{5}=\frac{53.4}{60}.\end{cases}$$

解这个方程组,得$\begin{cases}x=1.2,\\y=0.6,\\z=1.5.\end{cases}$

答:从甲地到乙地时,上坡的路程为1.2 km,平路的路程为0.6 km,下坡的路程为1.5 km.

第九章 不等式与不等式组

9.1 不等式

练习:

1. 解:(1)$a>0$;(2)$a<0$;(3)$a+5<7$;

(4)$a-2>-1$;(5)$4a>8$;(6)$\frac{1}{2}a<3$.

点拨:本题是把语言叙述转化为用数学符号来表示,审题时要抓住关键性的词和语句.

2. 解:3.2,4.8,8,12是不等式$x+3>6$的解;$-4,-2.5,0,1,2.5,3$不是不等式$x+3>6$的解. **点拨**:本题根据不等式的解的概念,把具体的数值代入不等式,能使不等式成立的就是不等式的解.

3. 解:(1)$x>3$;(2)$x<4$;(3)$x>2$.

练习:

(1)$>$ (2)$>$ (3)$<$ (4)$>$

练习:

1. 解:(1)根据不等式的性质1,不等式两边都减去5,得$x+5-5>-1-5$,所以$x>-6$. 在数轴上表示这个不等式的解集如图(1)所示.

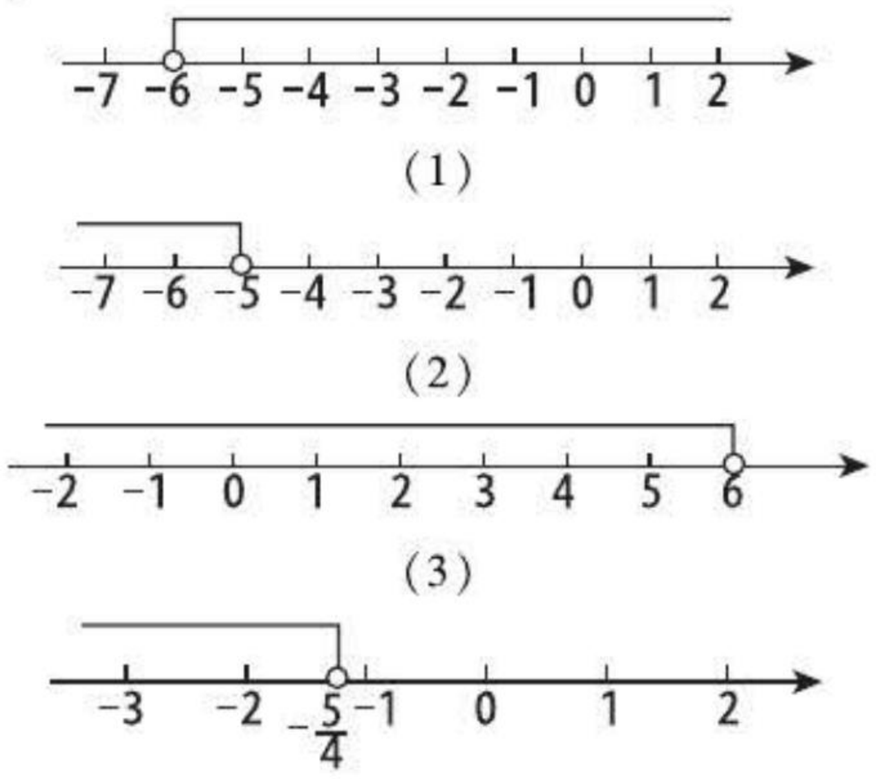
(2)根据不等式的性质1,不等式两边都减去$3x$,得$4x-3x<3x-5-3x$,所以$x<-5$. 在数轴上表示这个不等式的解集如图(2)所示.

(3)根据不等式的性质2,不等式两边都乘7

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\left(\text{或除以}\frac{1}{7}\right)$,得 $\frac{1}{7}x\cdot 7<\frac{6}{7}\times 7$ $\left(\text{或}\frac{1}{7}x\div\frac{1}{7}<\frac{6}{7}\div\frac{1}{7}\right)$,所以 $x<6$. 在数轴上表示这个不等式的解集如图(3)所示.

(4)根据不等式的性质3,不等式两边都除以 -8 $\left(\text{或乘}-\frac{1}{8}\right)$,得 $(-8x)\div(-8)<10\div(-8)$ $\left[\text{或}(-8x)\times\left(-\frac{1}{8}\right)<10\times\left(-\frac{1}{8}\right)\right]$,所以 $x<-\frac{5}{4}$. 在数轴上表示这个不等式的解集如图(4)所示.



(第1题)

点拨:本题是不等式性质的应用,注意运用性质3时,不等号的方向要改变.

2. 解:(1)$3x\geqslant 1$,不等式两边都除以3,得 $x\geqslant\frac{1}{3}$. 在数轴上表示解集略.

(2)$x+3\geqslant 6$,不等式两边都减去3,得 $x\geqslant 3$. 在数轴上表示解集略.

(3)$y-1\leqslant 0$,不等式两边都加上1,得 $y\leqslant 1$. 在数轴上表示解集略.

(4)$\frac{1}{4}y\leqslant -2$,不等式两边都乘4,得 $y\leqslant -8$. 在数轴上表示解集略. **点拨**:解决本题的关键是先要理解"大于或等于""不小于""不大于""小于或等于"的意义,然后用不等式表示,再根据不等式的性质求解集.

习题9.1

1. 解:3.01,4,6,100是不等式 $2x+3>9$ 的解;-4,-2,0,3不是不等式 $2x+3>9$ 的解.

2. 解:(1)$a+5>0$;(2)$a-2<0$;(3)$b+15<27$;(4)$b-12>-5$;(5)$4c\geqslant 8$;(6)$\frac{1}{2}c\leqslant 3$;(7)$d+e\geqslant 0$;(8)$d-e\leqslant -2$.

点拨:解此类问题的关键是抓住题中的关键词语,正确理解它们的含义,如"正数""负数""不大于""不小于"等.

3. 解:(1)$x>4$;(2)$x<5$;(3)$x>2.1$;(4)$x>-\frac{10}{3}$.

4. (1)> (2)> (3)> (4)<

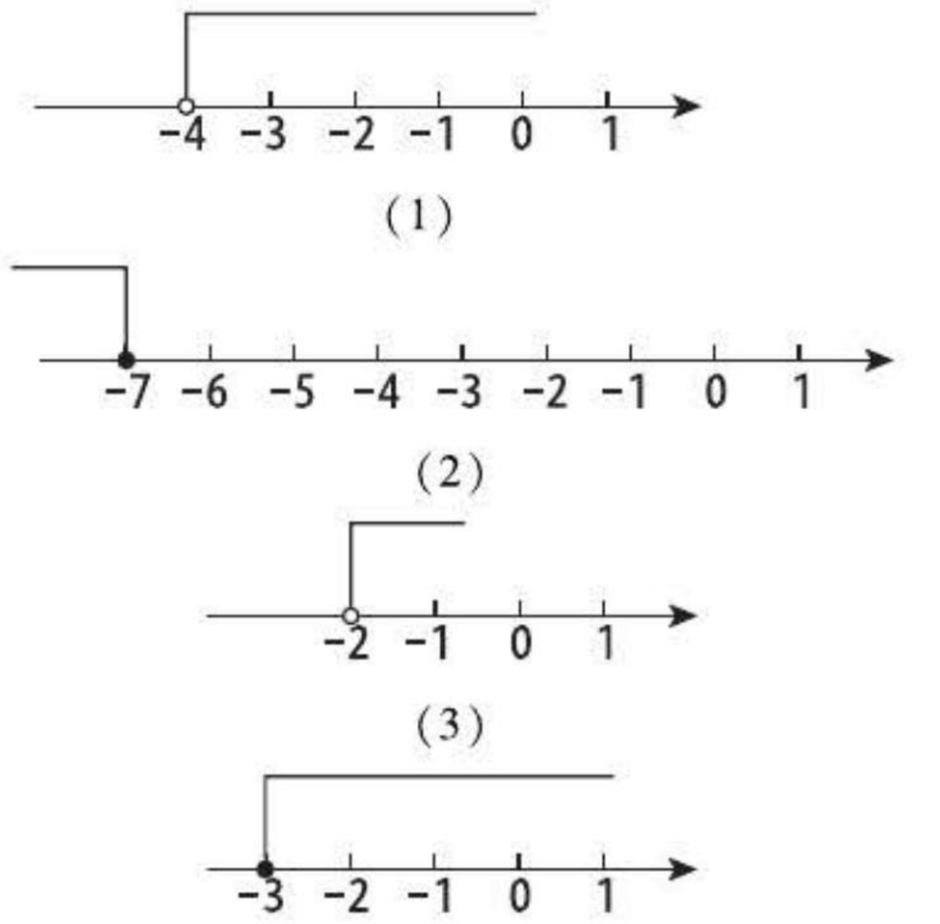
点拨:解本题的关键是先看运用了不等式的哪条性质,然后根据该性质填空.

5. 解:(1)根据不等式的性质1,不等式两边都减3,不等号的方向不变,所以 $x+3-3>-1-3$,$x>-4$. 不等式的解集在数轴上表示如图(1).

(2)根据不等式的性质1,不等式两边都减 $5x$,不等号的方向不变,所以 $6x-5x\leqslant 5x-7-5x$,$x\leqslant -7$. 不等式的解集在数轴上表示如图(2).

(3)根据不等式的性质3,不等式两边都乘 -3,不等号的方向改变,所以 $-\frac{1}{3}x\times(-3)>\frac{2}{3}\times(-3)$,$x>-2$. 不等式的解集在数轴上表示如图(3).

(4)根据不等式的性质2,不等式两边都除以4,不等号的方向不变,所以 $4x\div 4\geqslant(-12)\div 4$,$x\geqslant -3$. 不等式的解集在数轴上表示如图(4).



(第5题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. (1) > (2) >

7. 解:$L \geqslant 40-0.02$ 并且 $L \leqslant 40+0.02$,即 $L \geqslant 39.98$ 并且 $L \leqslant 40.02$.

点拨:本题反映了生活中一些物品的尺寸的数量范围说明,我们要了解它们所表达的意义. 其中 $40-0.02$ 是 L 的最小值,$40+0.02$ 是 L 的最大值.

8. 解:设蛋白质的含量为 x g,根据题意,得 $x \geqslant 300 \times 0.6\%$,即 $x \geqslant 1.8$.

答:其中蛋白质的含量大于或等于 1.8 g.

9. 解:由题意,得原来的两位数为 $10b+a$,对调后的两位数为 $10a+b$. 当 $10a+b>10b+a$,即 $a>b$ 时,对调后的两位数比原来的两位数大;当 $10a+b<10b+a$,即 $a<b$ 时,对调后的两位数比原来的两位数小;当 $10a+b=10b+a$,即 $a=b$ 时,对调后的两位数等于原来的两位数.

点拨:先表示出对调前和对调后的两位数:十位数字 $\times 10$ + 个位数字,然后分三种情况列不等式或等式,即可求出 a 与 b 的关系.

9.2 一元一次不等式

练习:

1. 解:(1)移项,得 $5x-4x>-1-15$,

合并同类项,得 $x>-16$.

这个不等式的解集在数轴上表示略.

(2)去括号,得 $2x+10 \leqslant 3x-15$,

移项,得 $2x-3x \leqslant -15-10$,

合并同类项,得 $-x \leqslant -25$,

系数化为 1,得 $x \geqslant 25$.

这个不等式的解集在数轴上表示略.

(3)去分母,得 $3(x-1)<7(2x+5)$,

去括号,得 $3x-3<14x+35$,

移项,得 $3x-14x<35+3$,

合并同类项,得 $-11x<38$,

系数化为 1,得 $x>-\frac{38}{11}$.

这个不等式的解集在数轴上表示略.

(4)去分母,得 $2(x+1) \geqslant 3(2x-5)+12$,

去括号,得 $2x+2 \geqslant 6x-15+12$,

移项,合并同类项,得 $-4x \geqslant -5$,

系数化为 1,得 $x \leqslant \frac{5}{4}$.

这个不等式的解集在数轴上表示略.

2. 解:(1)由题意,得 $2(x+1) \geqslant 1$,$2x+2 \geqslant 1$,$2x \geqslant -1$,$x \geqslant -\frac{1}{2}$.

所以当 $x \geqslant -\frac{1}{2}$ 时,$2(x+1)$ 大于或等于 1.

(2)由题意,得 $4x+7 \geqslant 6$,$4x \geqslant -1$,$x \geqslant -\frac{1}{4}$.

所以当 $x \geqslant -\frac{1}{4}$ 时,$4x$ 与 7 的和不小于 6.

(3)由题意,得 $y-1 \leqslant 2y-3$,解得 $y \geqslant 2$.

所以当 $y \geqslant 2$ 时,y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差.

(4)由题意,得 $\frac{1}{4}(3y+7)<-2$,解得 $y<-5$.

所以当 $y<-5$ 时,$3y$ 与 7 的和的四分之一小于 -2.

点拨:解这类题的关键是抓住并理解一些关键词,如“不大于”“不小于”等.

练习:

1. 解:设以后几天内平均每天要修路 x km,根据题意,得 $(10-2-2)x \geqslant 6-1.2$,

解这个不等式,得 $6x \geqslant 4.8$,所以 $x \geqslant 0.8$.

答:以后几天内平均每天至少要修路 0.8 km.

点拨:本题的不等关系是:后 6 天修的路不少于计划要修的路减去前 2 天已修的路. 根据不等关系,列出不等式,即可解决问题.

2. 解:设小明答对 x 道题,则他答错或不答的题数为 $(20-x)$.

根据题意,得 $10x-5(20-x)>90$,

$10x-100+5x>90$,

$15x>190$,

$x>12\frac{2}{3}$,

因为 x 为整数,所以 x 最小取 13.

答:小明至少要答对 13 道题.

习题 9.2

1. 解:(1)去括号,得 $6x+15>8x+6$,

移项,得 $6x-8x>6-15$,

合并同类项,得 $-2x>-9$,

系数化为 1,得 $x<\frac{9}{2}$.

在数轴上表示这个不等式的解集如图(1)所示.

(2)去括号,得 $10-4x+16 \leqslant 2x-2$,

移项,得 $-4x-2x \leqslant -2-10-16$,

合并同类项,得 $-6x \leqslant -28$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

系数化为1，得 $x \geqslant \frac{14}{3}$.

在数轴上表示这个不等式的解集如图(2)所示.

(3)去分母，得 $3(x-3)<2(2x-5)$，

去括号，得 $3x-9<4x-10$，

移项，得 $3x-4x<-10+9$，

合并同类项，得 $-x<-1$，

系数化为1，得 $x>1$.

在数轴上表示这个不等式的解集如图(3)所示.

(4)去分母，得 $2(2x-1) \leqslant 3x-4$，

去括号，得 $4x-2 \leqslant 3x-4$，

移项，得 $4x-3x \leqslant -4+2$，

合并同类项，得 $x \leqslant -2$.

在数轴上表示这个不等式的解集如图(4)所示.

(5)去分母，得 $2(5x+1)-24>3(x-5)$，

去括号，得 $10x+2-24>3x-15$，

移项，得 $10x-3x>-15-2+24$，

合并同类项，得 $7x>7$，

系数化为1，得 $x>1$.

在数轴上表示这个不等式的解集如图(5)所示.

(6)去分母，得 $2(y+1)-3(2y-5) \geqslant 12$，

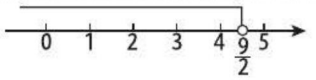
去括号，得 $2y+2-6y+15 \geqslant 12$，

移项，得 $2y-6y \geqslant 12-2-15$，

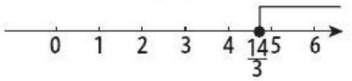
合并同类项，得 $-4y \geqslant -5$，

系数化为1，得 $y \leqslant \frac{5}{4}$.

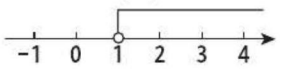
在数轴上表示这个不等式的解集如图(6)所示.



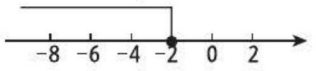
(1)



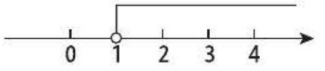
(2)



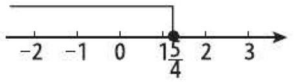
(3)



(4)



(5)



(6)

(第1题)

点拨：解一元一次不等式要按步骤进行，容易出错之处是去分母和系数化为1. 去分母时，不要漏乘不含分母的项；系数化为1时，注意不等号的方向是否要改变. 另外在数轴上表示不等式的解集时，要注意空心圆圈和实心圆点的区别.

2. 解：(1)解不等式 $\frac{4a+1}{6}>0$，得 $a>-\frac{1}{4}$.

所以当 $a>-\frac{1}{4}$ 时，式子 $\frac{4a+1}{6}$ 表示正数.

(2)解不等式 $\frac{4a+1}{6}<-2$，得 $a<-\frac{13}{4}$.

所以当 $a<-\frac{13}{4}$ 时，式子 $\frac{4a+1}{6}$ 表示小于 -2 的数.

(3)解方程 $\frac{4a+1}{6}=0$，得 $a=-\frac{1}{4}$.

所以当 $a=-\frac{1}{4}$ 时，式子 $\frac{4a+1}{6}$ 表示0.

点拨：根据题意可分别列出关于 a 的一元一次不等式或一元一次方程. 解不等式或方程即可求得满足条件的 a 的取值.

3. 解：(1)解不等式 $x+2<6$，得 $x<4$，小于4的正整数有1，2，3.

(2)解不等式 $2x+5<10$，得 $x<\frac{5}{2}$，小于 $\frac{5}{2}$ 的正整数有1，2.

(3)解不等式 $\frac{x-3}{2} \geqslant \frac{2x-5}{3}$，得 $x \leqslant 1$，小于或等于1的正整数是1.

(4)解不等式 $\frac{2+x}{2} \geqslant \frac{2x-1}{3}-2$，得 $x \leqslant 20$，小于或等于20的正整数有1，2，3，…，20.

点拨：本题实质是求不等式的正整数解. 方法是：先解不等式，求出不等式的解集，然后在解集中找正整数.

4. 略.

5. 解：设这时已售出 x 辆自行车，根据题意，

得 $275x>250 \times 200$，解这个不等式，得 $x>\frac{2\,000}{11}$.

因为 x 取正整数，所以 x 最小取182.

答：这时至少已售出182辆自行车.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:设李明需以 x m/s 的速度同时开始冲刺,

根据题意,得$\frac{100}{4}x>100+10$,

解这个不等式得 $x>\frac{22}{5}$.

答:李明需以大于$\frac{22}{5}$ m/s 的速度同时开始冲刺,才能够在张华之前到达终点.

7. 解:设前年全厂年利润是 x 万元,根据题意,得 $\frac{100+x}{280-40}-\frac{x}{280}\geqslant 0.6$,解这个不等式得 $x\geqslant 308$.

答:前年全厂年利润至少是 308 万元.

8. 解:设商家把售价定为 x 元/千克,才能避免亏本,根据题意,得$(1-5\%)x\geqslant 1.5$,

解这个不等式,得 $x\geqslant\frac{30}{19}$,考虑到实际意义,取 $x\geqslant 1.6$.

答:商家把售价至少定为 1.6 元/千克,才能避免亏本.

9. 解:设这批计算机有 x 台,根据题意,

得 $5\ 500\times 60+5\ 000(x-60)>550\ 000$,

解这个不等式得 $x>104$,

因为 x 取正整数,所以 x 最小取 105.

答:这批计算机最少有 105 台.

10. 解:解不等式 $5x-1>3(x+1)$,得$x>2$,

解不等式$\frac{1}{2}x-1<7-\frac{3}{2}x$,得$x<4$.

两个不等式解集的公共部分为 $x>2$ 且$x<4$.

点拨:分别解两个不等式,然后把解集在数轴上表示出来,找出公共部分即为所求.

9.3 一元一次不等式组

练习:

1. 解:(1)$\begin{cases}2x>1-x & ①,\\ x+2<4x-1 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x>\frac{1}{3}$,

解不等式②,得 $x>1$,

所以原不等式组的解集为 $x>1$.

(2)$\begin{cases}x-5>1+2x & ①,\\ 3x+2\leqslant 4x & ②.\end{cases}$

解不等式①,得$x<-6$,

解不等式②,得 $x\geqslant 2$.

所以不等式组无解.

(3)$\begin{cases}\frac{2}{3}x+5>1-x & ①,\\ x-1\leqslant\frac{3}{4}x-\frac{1}{8} & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x>-\frac{12}{5}$,

解不等式②,得 $x\leqslant\frac{7}{2}$.

所以原不等式组的解集为 $-\frac{12}{5}<x\leqslant\frac{7}{2}$.

2. 解:解不等式组$\begin{cases}x+3>6,\\ 2x-1<10,\end{cases}$得 $3<x<\frac{11}{2}$,

所以 x 可取的正整数值是 4,5.

习题 9.3

1. 解:(1)$\begin{cases}x-1<3 & ①,\\ x+1<3 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得$x<4$,

解不等式②,得 $x<2$.

所以原不等式组的解集为 $x<2$.

(2)$\begin{cases}x-1>3 & ①,\\ x+1>3 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得$x>4$,

解不等式②,得 $x>2$.

所以原不等式组的解集为 $x>4$.

(3)$\begin{cases}x-1<3 & ①,\\ x+1>3 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x<4$.

解不等式②,得 $x>2$.

所以原不等式组的解集为 $2<x<4$.

(4)$\begin{cases}x-1>3 & ①,\\ x+1<3 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x>4$,

解不等式②,得 $x<2$.

所以原不等式组无解.

点拨:解出每个不等式的解集,求公共部分时可利用数轴,也可用下面的口诀:“同大取大,同小取小,大小小大中间找,大大小小没处找”.

2. 解:(1)$\begin{cases}2x-1>0 & ①,\\ x+1\leqslant 3 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得$x>\frac{1}{2}$,

解不等式②,得 $x\leqslant 2$,

所以原不等式组的解集为$\frac{1}{2}<x\leqslant 2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)$\begin{cases}-3x-1>3 & ①,\\ 2x+1>3 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得$x<-\frac{4}{3}$,

解不等式②,得 $x>1$.

所以原不等式组无解.

(3)$\begin{cases}3(x-1)+13>5x-2(5-x) & ①,\\ 5-(2x+1)<3-6x & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x<5$,

解不等式②,得 $x<-\frac{1}{4}$.

所以原不等式组的解集为 $x<-\frac{1}{4}$.

(4)$\begin{cases}x-3(x-2)\geqslant 4 & ①,\\ \frac{1+2x}{3}>x-1 & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x\leqslant 1$.

解不等式②,得 $x<4$.

所以原不等式组的解集为 $x\leqslant 1$.

(5)$\begin{cases}x-3(x-2)\geqslant 4 & ①,\\ \frac{2x-1}{5}>\frac{x+1}{2} & ②.\end{cases}$

解不等式①,得 $x\leqslant 1$.

解不等式②,得 $x<-7$.

所以原不等式组的解集为 $x<-7$.

(6)$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+4)<2 & ①,\\ \frac{x+2}{2}>\frac{x+3}{3} & ②.\end{cases}$

解不等式①,得$x<0$,

解不等式②,得 $x>0$.

所以原不等式组无解.

3. 解:解不等式 $4(x-0.3)<0.5x+5.8$,得 $x<2$;

解不等式 $3+x>\frac{1}{2}x+1$ 得$x>-4$. $\therefore -4<x<2$.

$\because x$ 为整数,$\therefore x$ 取 $-3,-2,-1,0,1$.

4. 解:解 $2\leqslant 3x-7<8$,得 $3\leqslant x<5$,

所以 x 可取的整数值是 3,4.

5. 解:解不等式 $5x-1>3(x+1)$,得 $x>2$.

解不等式$\frac{1}{2}x-1>3-\frac{3}{2}x$,得 $x>2$.

解不等式 $x-1<3x+1$,得 $x>-1$.

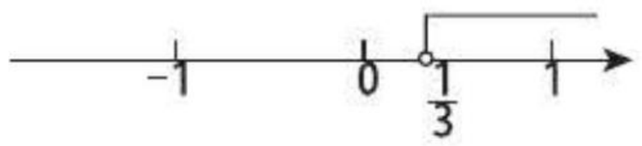
所以这三个不等式的解集的公共部分是$x>2$.

6. 略.

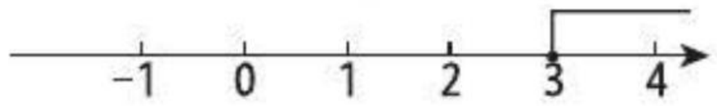
复习题 9

1. 解:(1)$3(2x+7)>23$,$6x+21>23$,$6x>2$,$x>\frac{1}{3}$,这个不等式的解集在数轴上表示如图(1).

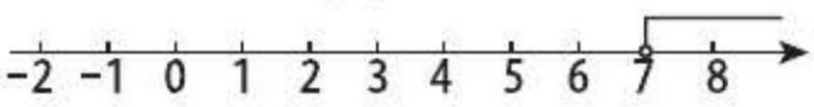
(2)$12-4(3x-1)\leqslant 2(2x-16)$,$12-12x+4\leqslant 4x-32$,$-12x-4x\leqslant -32-4-12$,$-16x\leqslant -48$,$x\geqslant 3$,这个不等式的解集在数轴上表示如图(2).



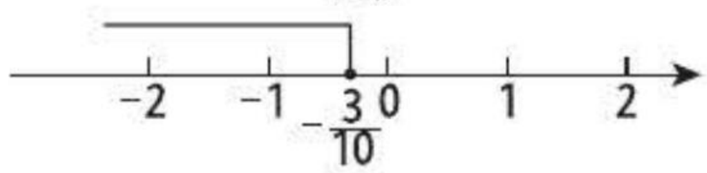
(1)



(2)



(3)



(4)

(第 1 题)

(3)$\frac{x+3}{5}<\frac{2x-5}{3}-1$,$3(x+3)<5(2x-5)-15$,$3x+9<10x-25-15$,$3x-10x<-25-15-9$,$-7x<-49$,$x>7$,这个不等式的解集在数轴上表示如图(3).

(4)$\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-1}{2}\geqslant\frac{5}{12}$,$4(2x-1)-6(3x-1)\geqslant 5$,$8x-4-18x+6\geqslant 5$,$8x-18x\geqslant 5+4-6$,$-10x\geqslant 3$,$x\leqslant -\frac{3}{10}$,这个不等式的解集在数轴上表示如图(4).

点拨:解不等式要按一般步骤进行,注意系数化为 1 时,不等号的方向是否要改变. 在数轴上表示不等式的解集时,要注意空心圆圈和实心圆点的区别.

2. 解:(1)根据题意,解不等式 $15-7a>1$,得 $a<2$.

所以当 $a<2$ 时,$15-7a$ 的值大于 1.

(2)根据题意,解不等式$15-7a<1$,得 $a>2$.

所以当 $a>2$ 时,$15-7a$ 的值小于 1.

(3)根据题意,解方程 $15-7a=1$,得 $a=2$.

所以当 $a=2$ 时,$15-7a$ 的值等于 1.

点拨:根据题中的“大于”“小于”“等于”列不等式或方程,然后解不等式或方程,求出满足条件

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的 a 的取值范围或值.

3. 解:(1)$\begin{cases}2x+1>-1,①\\2x+1<3.②\end{cases}$

解不等式①,得$x>-1$,

解不等式②,得 $x<1$.

所以不等式组的解集是 $-1<x<1$.

(2)$\begin{cases}-(x-1)>3,①\\2x+9>3.②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<-2$,解不等式②,得 $x>-3$.

所以不等式组的解集是 $-3<x<-2$.

(3)$\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),①\\5-(2x-1)<-6x.②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<0$,解不等式②,得$x<-\frac{3}{2}$.

所以不等式组的解集是$x<-\frac{3}{2}$.

(4)$\begin{cases}-3(x-2)\geqslant 4-x,①\\\frac{1+2x}{3}>x-1.②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\leqslant 1$,解不等式②,得 $x<4$.

所以不等式组的解集是 $x\leqslant 1$.

4. 解:不能. 理由:若$\frac{x+3}{5}$的值能同时大于$2x+3$ 和 $1-x$ 的值,则有$\begin{cases}\frac{x+3}{5}>2x+3,①\\\frac{x+3}{5}>1-x.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<-\frac{4}{3}$,

解不等式②,得 $x>\frac{1}{3}$.

所以不等式组无解.

故$\frac{x+3}{5}$的值不能同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值.

5. 解:赵军的说法不对. 因为 a 的值不能确定,若 a 是负数,不等式两边同除以 a,不等号的方向改变,则可得 $1<2$,所以此时$a>2a$ 是成立的.

点拨:本题的关键是对不等式的性质的理解,尤其是不等式的性质 3. 不等式两边同乘(或除以)同一个数时(0 除外),一定要先考虑该数是正数还是负数,再对不等式变形.

6. 解:区别:解一元一次不等式组时,需要解出每个一元一次不等式的解集,再确定各个解集的公共部分,而解一元一次不等式只需解一个不等式就可确定解集.

联系:解不等式组包含解不等式,解不等式是解不等式组的基础.

点拨:本题的目的是加深对解不等式及不等式组的理解.

7. 解:根据题意,得 $10(v+3)<12(v-3)$,解这个不等式,得 $v>33$.

答:v 应该大于 33 km/h.

点拨:分析题意,找出不等关系:从 A 地到 B 地的路程 $10(v+3)$ km 小于轮船逆水行驶 12 h 的路程 $12(v-3)$ km,从而列出不等式,求解即可.

8. 解:设一年前老张买了 x 只种兔,

根据题意,得$x+2\leqslant\frac{2}{3}(2x-1)$,

解这个不等式,得 $x\geqslant 8$.

答:一年前老张至少买了 8 只种兔.

点拨:设一年前老张买了 x 只种兔,则一年后,老张养兔$(x+2)$只,老李养兔$(2x-1)$只,因为老张养兔数不超过老李养兔数的$\frac{2}{3}$,所以得出不等式$x+2\leqslant\frac{2}{3}(2x-1)$.

9. 解:设三个连续正整数分别为 $n-1$,n,$n+1$($n\geqslant 2$ 且 n 为整数),

根据题意,得$\begin{cases}(n-1)+n+(n+1)<333,\\n\geqslant 2.\end{cases}$

解这个不等式组,得 $2\leqslant n<111$,

所以 n 的取值为 2,3,4,…,110. 这样的正整数有 $110-2+1=109$(组).

当 $n=110$ 时,$n-1=109$,$n+1=111$,即最大的一组是 109,110,111.

点拨:先设出三个连续正整数(用 n 或含 n 的式子表示),根据"和小于 333"列出不等式,但需保证最小的正整数大于或等于 1. 解不等式组求出 n 的取值范围,在这个范围内,整数 n 有几个取值,就有几组结果.

第十章 数据的收集、整理与描述

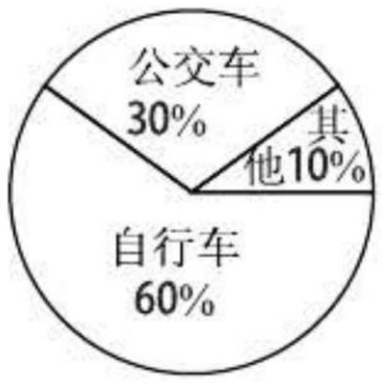
10.1 统计调查

练习:

1. 解:设计不合理. 因为踢足球属于体育活动,可将 D 选项踢足球改为其他.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解:扇形图如图所示.



(第2题)

3. 解:如:调查全班同学喜欢哪一种颜色的同学最多;调查自己所在小组的同学家每月的平均用水量等.

练习:

1. 解:(1)是抽样调查;(2)不能,因为样本容量太小且在抽取样本时没有使每一个个体都有相等的机会被抽到,不具广泛性和代表性.

点拨:如果抽取的个体很少,那么样本就不能很好地反映总体的情况.

2. 解:是简单随机抽样,因为该班中的每名同学被抽到的机会是相等的.

点拨:注意理解简单随机抽样的定义.

3. 解:(1)适宜抽样调查;(2)适宜全面调查;(3)适宜抽样调查;(4)适宜全面调查.

4. 略.

习题 10.1

1. 解:举例如下:

全班同学出生月份统计表

月份	划记	人数
1	一	1
2	下	3
3	正	4
4	正丅	7
5	正丅	7
6	正正	10
7	正正丅	12
8	正	5
9	正	4
10	一	1
11	一	1
12	丅	2
合计	57	57

点拨:正确运用划记法记录数据.

2. 解:(2)的提问方式更好些. 因为(1)的提问方式显露了提问者个人的观点,有误导因素.

3. 解:(1)全面调查;(2)抽样调查;(3)抽样调查.

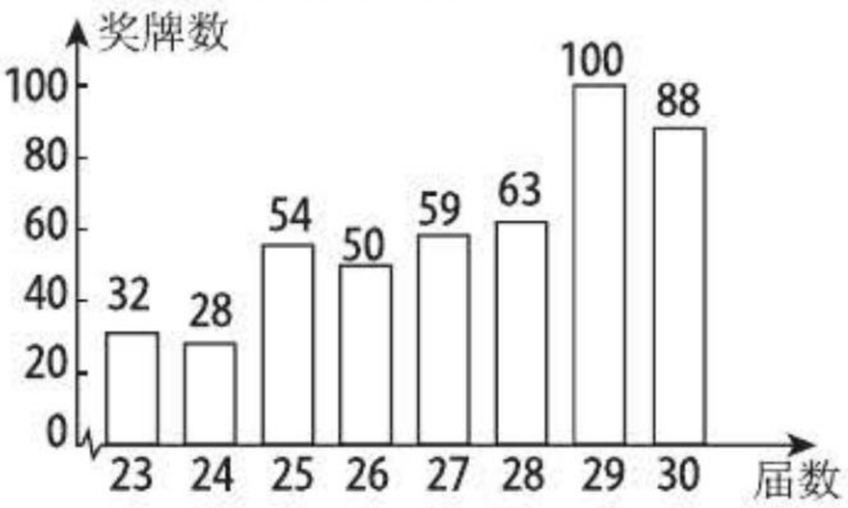
4. 解:如图. 获得的信息:亚洲的陆地面积最大;大洋洲的陆地面积最小……

点拨:画扇形图时,先将各大洲的面积比上全球陆地的总面积,求出各大洲面积占全球陆地总面积的百分比,再确定各大洲对应扇形的圆心角度数.



(第4题)

5. 解:(1)共获奖牌 32 + 28 + 54 + 50 + 59 + 63 + 100 + 88 = 474(枚);(2)如图.

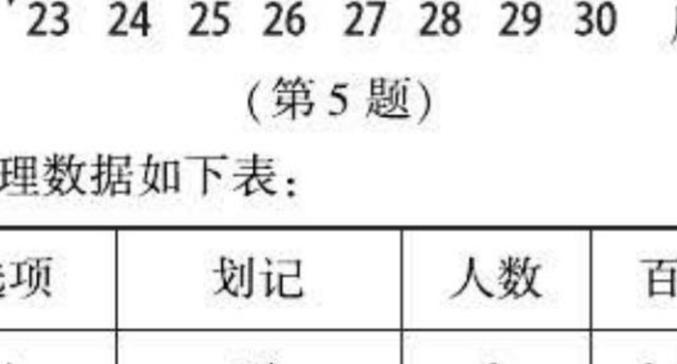


(第5题)

6. 解:整理数据如下表:

选项	划记	人数	百分比
A	下	3	8.33%
B	正丅	7	19.45%
C	正正正下	19	52.78%
D	正	4	11.11%
E	下	3	8.33%

条形图如图所示. 由图可知,该点心的甜度适中.

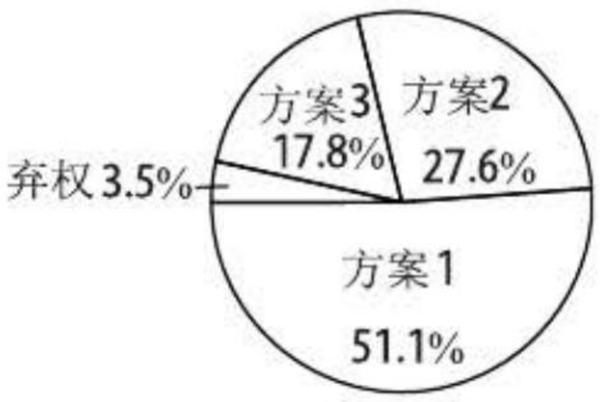


(第6题)

7. 解:扇形图如图,由图可知一半多的学生赞成方

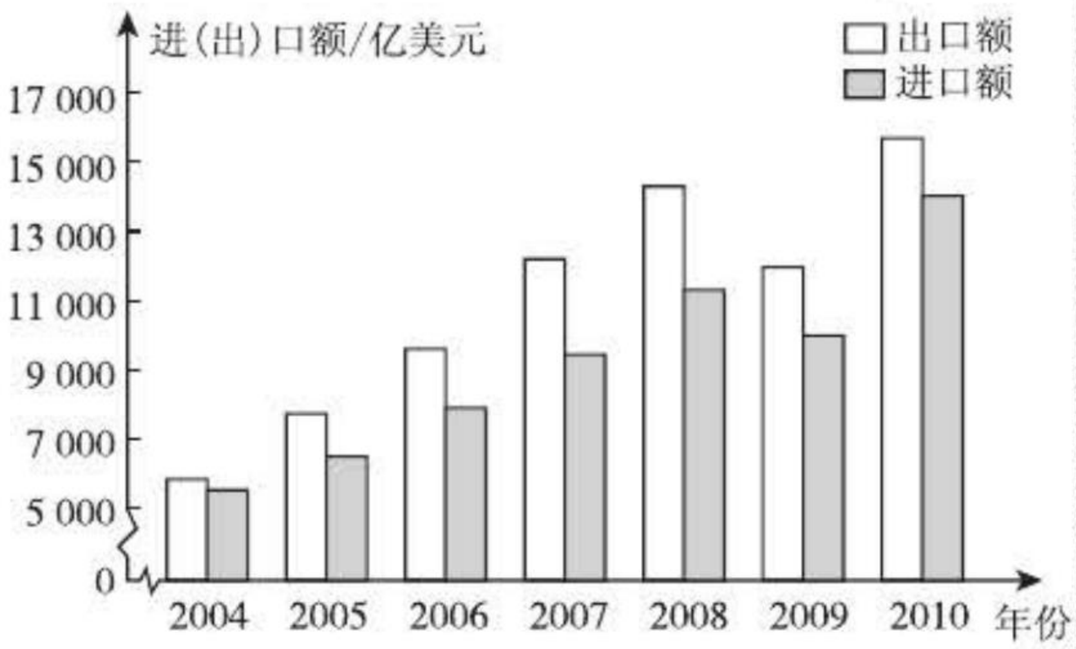
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

案1. 建议：根据少数服从多数的原则，本次元旦活动采用方案1较好.



（第7题）

8. 解：可以用复式条形图来描述这两组数据，如图.



（第8题）

每年的出口额均大于进口额；除2009年，出口额和进口额每年都在增加. **点拨：**选用复式条形图描述这两组数据直观、明了.

9. 解：样本的平均值为$\frac{1}{20}\times(1.3+1.7+\cdots+1.8)=1.82$(万元).

样本中年收入超过1.5万元的有13户，占样本容量的百分比为$\frac{13}{20}\times100\%=65\%$，所以估计李家庄家庭平均年收入约为1.82万元，全村年收入约为$1.82\times130=236.6$(万元)，村中家庭年收入超过1.5万元的百分比约为65%.

点拨：体会用样本估计总体的统计思想.

10. 解：不合理. 理由：小明自己学校家住光明小区的30名同学只是一些小学、中学或大学的某一个学段的学生，他们的家庭教育费用不能代表其他学段学生的家庭教育费用，因此这个抽样不具有代表性. 可以设计的调查方案为抽取门牌号码尾数都为1的家庭进行调查，等等.

11. 解：(1)第二种图能更好地反映两省在校中学生总人数.

(2)第一种图能更好地比较A(B)省城镇与农村在校中学生人数.

(3)第一种图能更好地反映A(B)省城镇与农村在校中学生人数，也能分别比较两省城镇与农村在校中学生人数，缺点是不能形象地反映两省在校中学生总人数. 第二种图能更好地反映两省在校中学生总人数，缺点是不能形象地反映两省城镇与农村各自在校中学生人数.

点拨：条形图的种类有很多，它们有各自描述数据的特点，在实际应用中应注意选择能更好地描述数据的条形图.

12. 略.

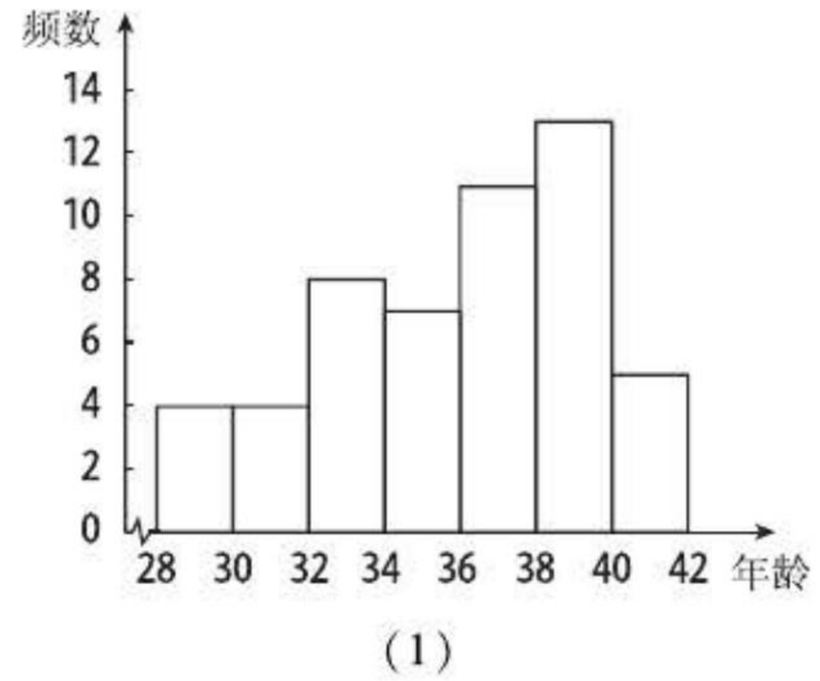
10.2 直方图

练习：

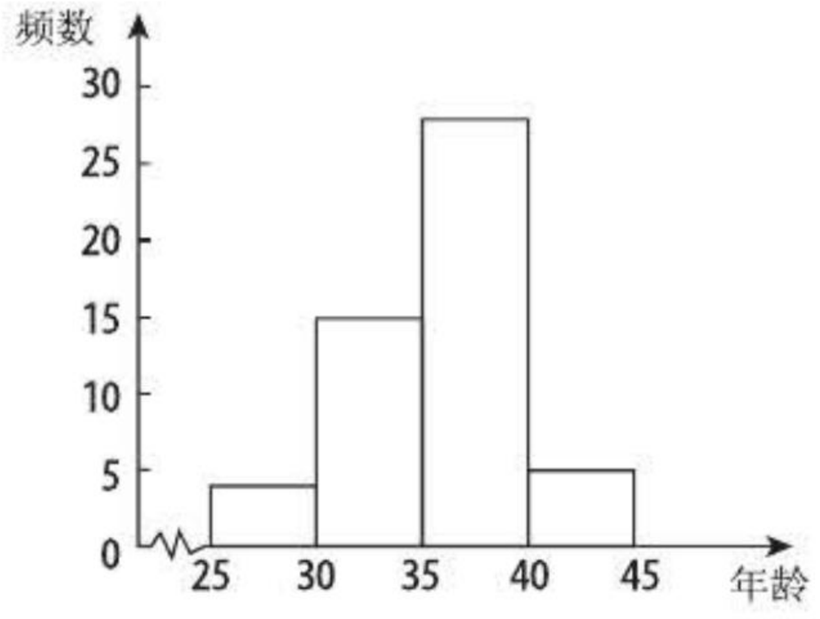
解：(1)列频数分布表.

分组	划记	频数
$28\leqslant x<30$	下	4
$30\leqslant x<32$	下	4
$32\leqslant x<34$	正下	8
$34\leqslant x<36$	正丅	7
$36\leqslant x<38$	正正一	11
$38\leqslant x<40$	正正丅	13
$40\leqslant x<42$	正	5

画频数分布直方图如图(1).

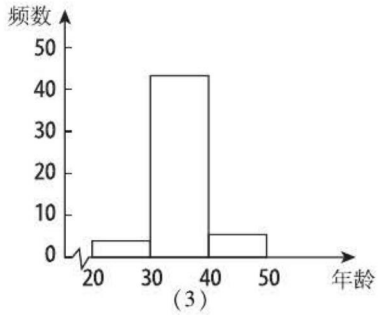


(1)



(2)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(3)

(练习)

(2)列频数分布表.

分组	划记	频数
$25 \leqslant x < 30$	正	4
$30 \leqslant x < 35$	正正正	15
$35 \leqslant x < 40$	正正正正正下	28
$40 \leqslant x < 45$	正	5

画频数分布直方图如图(2).

(3)列频数分布表.

分组	划记	频数
$20 \leqslant x < 30$	正	4
$30 \leqslant x < 40$	正正正正正正正下	43
$40 \leqslant x < 50$	正	5

画频数分布直方图如图(3).

第一种分组能更好地说明费尔兹奖得主获奖时的年龄分布.

习题 10.2

1. 解:(1)他家这个月一共打了 30 + 23 + 13 + 15 + 21 = 102(次)长途电话.

(2)通话时间不足 10 min 的有 30 + 23 = 53(次).

(3)通话时间在 0 min ~ 5 min 范围的通话最多.

通话时间在 10 min ~ 15 min 范围的通话最少.

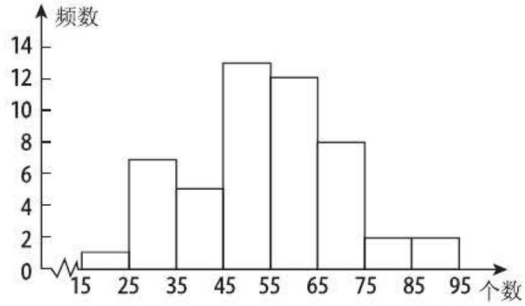
2. 解:列频数分布表.

分组	划记	频数
$15 \leqslant x < 25$	一	1
$25 \leqslant x < 35$	正下	7
$35 \leqslant x < 45$	正	5
$45 \leqslant x < 55$	正正下	13
$55 \leqslant x < 65$	正正下	12

续表

$65 \leqslant x < 75$	正下	8
$75 \leqslant x < 85$	下	2
$85 \leqslant x < 95$	下	2

画频数分布直方图如图.



(第 2 题)

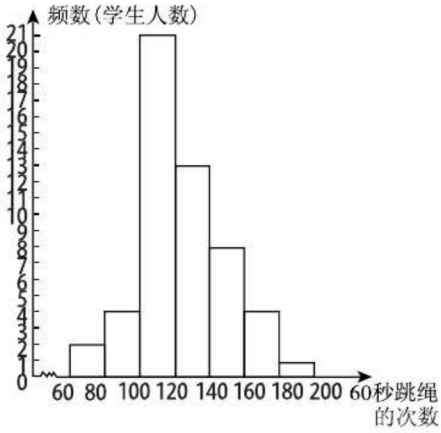
从频数分布表和频数分布直方图看到,小西红柿的个数大部分落在 25 至 75 之间(含 25,不含 75),其他区域较少. 小西红柿的个数在 $45 \leqslant x < 55$ 范围内的西红柿秧株数最多,有 13 株. 而小西红柿的个数在 $15 \leqslant x < 25$, $75 \leqslant x < 85$, $85 \leqslant x < 95$ 范围内的西红柿秧株数很少,总共只有 5 株.

3. 解:(1)全班有 2 + 4 + 21 + 13 + 8 + 4 + 1 = 53(人).

(2)组距是 20,组数是 7.

(3)跳绳次数 x 在 $100 \leqslant x < 140$ 范围的学生有 21 + 13 = 34(人),占全班学生的 $\frac{34}{53} \times 100\% \approx 64\%$.

(4)如图.



(第 3 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(5)这个班 60 秒跳绳的次数在 100 ~ 120(含 100,不含 120)的有 21 人,约占全班总人数的 39.6%;多于 120(包括 120)的有 26 人,约占全班总人数的 49.1%;少于 100 的有6 人,约占全班总人数的 11.3%,可见该班同学的跳绳成绩是较为优秀的.

4. 略. **5.** 略.

10.3 课题学习 从数据谈节水(略)

复习题 10

1. 解:(1)抽样调查,因为不可能对该城市所有的空气进行检测;

(2)抽样调查,因为对全国每名中学生进行逐个调查既费时又费力;

(3)全面调查,因为企业招聘必须了解每名应聘人员的具体情况;

(4)抽样调查,因为把池塘中所有鱼都捞上来统计其数量既费时又费力且不现实.

点拨:要依据具体情况确定选取何种调查方式.

2. 解:(1)(2)(3)调查的样本都缺乏代表性.

点拨:(1)对课程的喜欢情况,男生和女生会有较大差异,只抽取某班男同学进行调查是不合适的;

(2)了解某小区居民的防火意识,要在该小区居民中抽取样本;

(3)商场的日营业额在周末和平常会有较大差别.

3. 解:不可以. 因为男、女生体重差别较大,仅用 30 名男生的体重作为样本是不具有代表性的.

4. 解:整理数据制作统计表如下:

鞋号	划记	人数	百分比
33	一	1	2.63%
34	丅	4	10.53%
35	正正	10	26.32%
36	正正	10	26.32%
37	正丅	9	23.68%
38	丅	2	5.26%
39	一	1	2.63%
40	一	1	2.63%

可以建议学校购买鞋时多购买 35 号、36 号、37 号这三个号码的鞋,比如各买 26% 左右,此外可以适当购买 33 号、34 号、38 号、39 号、40 号的鞋.

5. 解:(1)$180 \div \frac{2}{2+7+3} = 1\ 080$(人),即这个学校共有学生 1 080 人.

(2)甲:$\frac{2}{2+7+3} \times 360° = 60°$;

乙:$\frac{7}{2+7+3} \times 360° = 210°$;

丙:$\frac{3}{2+7+3} \times 360° = 90°$.

6. 解:(1)扇形统计图;

(2)频数分布直方图.

点拨:“一半”的含义里已包含百分比的意思,因此扇形统计图能很好地说明一半以上国家的学生成绩在 $60 \leqslant x < 70$ 之间.

7. 解:三名同学都不能获得比较准确的民意,因为样本都不能很好地反映总体的情况. 同学 A:上网的人只占人口总数的一小部分且多为年轻人;同学 B:小区的居民代表不了全体;同学 C:班级的同学属同一年龄段,不具有代表性.

8. 解:(1)选择折线统计图,图略. 分析这几年国内生产总值的变化趋势略.

(2)2020 年的国内生产总值为:

184 937 × 4 = 739 748(亿元),

增长的百分比为:

$\frac{739\ 748 - 184\ 937}{184\ 937} \times 100\% = 300\%$.

9. 略.

10. 解:(1)这一天的最高气温是 31℃,14:00 达到最高气温.

(2)这一天的最低气温是 22℃,4:00 达到最低气温.

(3)估计这一天 7 时、11 时、15 时和 19 时的气温分别约为 24℃、28.5℃、30.5℃和 28.5℃.

11. 略.

12. 略.

13. 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料