特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法54招·七八九年级共370招



七年级 数学 下

(BS版)

赠教材习题答案

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

七年级 数学 下 （BS版）

荣德基 主编

本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第一章 整式的乘除

知识点 77 个 必得分

	页码
1 同底数幂的乘法	2
2 幂的乘方	5
3 积的乘方	6
4 同底数幂的除法	11
5 零指数幂	12
6 负整数指数幂	13
7 科学记数法	13
8 单项式与单项式相乘	18
9 单项式与多项式相乘	19
10 多项式与多项式相乘	19
11 平方差公式	24
12 平方差公式的验证	25
13 完全平方公式	28
14 完全平方公式的验证	29
15 添括号（拓展点）	30
16 单项式除以单项式	35
17 多项式除以单项式	35

考向点 79 个 速提分

	页码
1 利用同底数幂的乘法法则进行幂的计算	2
2 利用恒等变形法求指数中字母的值	3
3 利用逆向思维解决整除问题	3
4 利用方程思想巧求幂的运算式子中字母的值	8
5 利用幂的转化法比较幂的大小	8
6 利用科学记数法解用科学记数法表示的数与原数的关系问题	14
7 利用等底法求负整数指数幂中字母的值	15
8 利用整式的乘法化简求值	20
9 利用整式的乘法求字母的值	21
10 利用平方差公式进行计算	24
11 利用面积法验证平方差公式	26
12 利用构造公式法进行乘法巧算	26
13 逆用平方差公式求值	26
14 利用添括号法则进行整式的运算	30
15 利用乘法公式的变形公式求整式的值	31
16 利用数形结合思想巧借乘法公式解决实际问题	31
17 利用整式的乘除运算进行化简求值	36
18 利用整式的乘除法求字母的值	37

第二章 相交线与平行线

	页码
1 相交线与平行线	47
2 对顶角	48
3 余角和补角	48
4 余角、补角的性质	50
5 垂线的定义及画法	51
6 垂线的性质	53
7 同位角	60
8 平行线的判定方法 1	61
9 平行线的画法	61
10 平行线的性质及其推论	62
11 内错角、同旁内角	62
12 平行线的判定方法 2，3	64
13 平行线的性质 1	70
14 平行线的性质 2	71
15 平行线的性质 3	72
16 尺规作图	77
17 利用尺规作一个角等于已知角	77

	页码
1 利用对顶角的性质求角的度数	48
2 利用余角、补角的性质说明角的关系	50
3 利用垂线段的长度解决问题	54
4 利用分类讨论思想解垂直中求角的问题	55
5 利用两个角的位置关系识别同位角	60
6 利用平行线的画法作图	62
7 利用平行线的性质及其推论说明直线的位置关系	62
8 利用定义法从复杂的图形中找位置角	65
9 利用逆向思维法探究有关平行的拐角问题	66
10 利用折叠法求平行线中的角度问题	72
11 利用作图法探究平行线中的两个角之间的数量关系	73
12 利用尺规作图的意义识别尺规作图	77
13 利用作一个角等于已知角的方法进行作图	78
14 利用尺规作已知角的和差	79
15 利用转化思想作已知直线的平行线	79
16 利用尺规作长方形	80

第三章 变量之间的关系

	页码
1 常量与变量	90
2 自变量和因变量	91
3 用表格表示变量间的关系	91
4 用关系式表示两个变量之间的关系	95
5 根据关系式求变量的值	96
6 用图象分析两个变量之间的关系	99
7 利用图象获取信息	100
8 用图象表示行程问题中的变量	101

	页码
1 利用常量与变量的定义进行辨识	90
2 利用表格获取变量的值	92
3 利用关系式表示两个变量之间的关系	95
4 利用关系式求两个变量的值	96
5 利用图象表示变量之间的关系	99
6 从图象中获取变量的信息	100
7 利用图象表示行程问题中的两个变量	101
8 利用图象法解决容器注水问题	102

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分——方法——学霸

方法点54个得高分

	页码
1 利用同底数幂的乘法法则求字母的值的方法	3
2 逆用幂的乘方法则求式子值的方法	5
3 求指数相同的几个幂相乘的方法	6
4 底数互为倒数（负倒数）的两个幂相乘的常用方法	7
5 底数比较法	8
6 指数比较法	8
7 逆向运用同底数幂的乘除法和幂的乘方法则进行求值	12
8 底倒指反法	13
9 用科学记数法表示绝对值小于1的数的思路	14
10 涉及整式乘法的方程的求解思路	21
11 面积法	26
12 求解几何图形问题的方法	32
13 多项式除以单项式的方法	36
1 找两个角是否互为对顶角的方法	48
2 定义法	54
3 判断两个角是不是同位角的方法	60
4 判定两直线平行的方法	62
5 用数量关系判定两直线平行的方法	64
6 分离图形法	65
7 方位法	65
8 逆向思维法	66
9 寻找说明平行的方法	66
10 分类讨论思想	84
1 判断一个量是常量还是变量的方法	90
2 表格法	92
3 根据两变量之间的关系求解问题的方法	97
4 从特殊到一般的思想	111

考法点50个争满分

	页码
第一章 整式的乘除	
1 同底数幂的乘法运算	4
2 利用幂的运算法则进行辨析	9
3 利用幂的运算法则求字母的值	9
4 逆用幂的运算法则进行求值	16
5 负整数指数幂的运算	16
6 利用科学记数法解实际应用问题	16
7 单项式的乘法与幂的运算综合	21
8 多项式乘多项式	22
9 利用乘法公式对计算过程进行辨析	27
10 利用乘法公式的变形式子求值	33
11 利用几何图形面积验证完全平方公式	33
12 单项式除以单项式	38
13 多项式除以单项式	38
第二章 相交线与平行线	
1 利用相交线的相关概念求角的度数	56
2 对顶角的识别	57
3 利用点到直线的距离的定义判断点到直线的距离	57
4 利用三角尺的特征探究两个角之间的关系	57
5 利用同位角、内错角、同旁内角识别位置角	67
6 利用平行线的判定方法寻找两直线平行的条件	67
7 利用平行线的判定方法从不同角度说明两直线平行	68
8 利用平行线的性质求角的度数	74
9 利用平行线的判定与性质综合求角的度数	75
10 利用尺规作一个角等于已知角	80
第三章 变量之间的关系	
1 利用表格表示两个变量之间的关系	93
2 用关系式求值	97
3 用图象表示变量间的关系	103
4 从图象中获取信息	104

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第四章 三角形

知识点 77 个 必得分

	页码
1 三角形的有关概念	117
2 三角形内角和定理	118
3 直角三角形的性质与判定	119
4 三角形的三边关系	121
5 三角形的三条重要线段	122
6 全等图形	129
7 全等三角形	130
8 全等三角形的性质	131
9 三角形全等的条件——边边边	135
10 三角形的稳定性	136
11 三角形全等的条件——角边角	136
12 三角形全等的条件——角角边	137
13 三角形全等的条件——边角边	138
14 已知两边及其夹角作三角形	146
15 已知两角及其夹边作三角形	147
16 已知三边作三角形	148
17 利用三角形全等测两点之间的距离	152

考向点 79 个 速提分

	页码
1 利用三角形及相关元素的定义进行辨析	117
2 利用三角形的三边关系解决问题	121
3 利用三角形的三条重要线段解决问题	123
4 利用分类讨论思想巧求涉及中线的三角形线段的长	125
5 利用全等图形的定义识别全等图形	129
6 利用逆向思维解决条件探索问题	132
7 利用“SSS”判定两个三角形全等	135
8 利用三角形的稳定性固定物体的形状	136
9 利用“ASA”判定两个三角形全等	137
10 利用“AAS”判定两个三角形全等	138
11 利用“SAS”判定两个三角形全等	138
12 利用构造全等三角形法用全等三角形的性质解边角问题	139
13 利用已知两边及其夹角作三角形的方法作三角形	146
14 利用“分解作图”法作较复杂的图形	148
15 利用“作三角形”的方法作全等三角形	149
16 利用三角形全等测量两点之间的距离	152
17 利用建立三角形全等的模型解实际问题	153

第五章 生活中的轴对称

	页码
1 轴对称图形	166
2 两个图形成轴对称	167
3 轴对称的性质	170
4 画对称轴	171
5 画轴对称图形	172
6 等腰三角形的轴对称性	177
7 等边三角形的轴对称性	178
8 线段的轴对称性	179
9 角的轴对称性	180
10 剪纸	186
11 利用轴对称设计图案	187

	页码
1 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形	166
2 利用试验法设计轴对称图形	168
3 利用成轴对称和轴对称图形的性质解轴对称问题	170
4 利用轴对称的性质画轴对称图形	172
5 利用轴对称法求折叠中角的度数	173
6 利用轴对称变换法求阴影部分面积	174
7 利用等腰三角形的轴对称性解决问题	177
8 利用等边三角形的性质求角的度数	179
9 利用线段垂直平分线的性质求线段的长度	179
10 利用角平分线的性质解与垂线段相关的应用	180
11 利用设元列方程法求等腰三角形中角的度数	181
12 利用轴对称的性质设计图案	187

第六章 概率初步

	页码
1 事件的认识	198
2 事件发生的可能性	199
3 频率及其稳定性	202
4 用频率估计概率	203
5 等可能事件的概率	210
6 游戏的公平性	211
7 概率的应用	212

	页码
1 利用事件的定义识别事件的类型	198
2 利用随机事件发生的可能性的意义判断事件发生的可能性的大小	199
3 利用随机事件发生的可能性设计方案	200
4 利用频率的概念及其稳定性解决试验问题	202
5 利用频率估计概率解决问题	203
6 利用频率估计试验对象的个数	205
7 利用计算概率判断游戏的公平性	212
8 利用概率的计算公式求几何问题的概率	212

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 — 方法 — 学霸

方法点54个 得高分

	页码
1 几何图形计数的常用方法	118
2 说明三角形内角和定理的思路方法	118
3 求三角形内角的度数的方法	119
4 根据三角形最大角的类型对三角形分类	120
5 说明两条直线垂直的方法	120
6 确定三条线段能否组成三角形的简便方法	121
7 找三角形某边上的高的方法	124
8 判断两个图形全等的方法	129
9 利用全等三角形的性质求角的度数	131
10 说明线段位置关系的方法	132
11 解答探究类题目的方法	132
12 说明三角形全等的方法	138
13 说明一条线段等于两条线段的和的方法	139
1 判断轴对称图形的方法	167
2 识别两个图形成轴对称的方法	167
3 判断一个图形是不是轴对称图形的方法	168
4 利用成轴对称的性质求线段的长度或角的度数的方法	171
5 作轴对称图形的对称轴的两种方法	171
6 求分散的阴影部分面积的方法	174
7 面积法	178
8 轴对称图案的设计方法	187
9 分类讨论思想	190
1 判断一个事件的类型的方法	198
2 判断随机事件发生的可能性大小的方法	199
3 用频率估计概率的方法	204
4 利用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求概率的方法	211
5 判断游戏是否公平的方法	212
6 公式法	213

考法点50个 争满分

	页码
第四章 三角形	
1 利用三角形的三边关系求三角形的边长	126
2 利用角平分线及整体思想求角的度数	127
3 利用三角形内角和定理判定三角形的形状	127
4 利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角	133
5 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数	133
6 三角形全等的灵活运用	142
7 利用全等三角形的性质判断两线段间的关系	143
8 利用全等三角形的判定和性质求图形的面积	143
9 利用尺规作图作三角形	150
10 全等三角形的应用	154
第五章 生活中的轴对称	
1 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形	168
2 利用轴对称图形的性质确定对应边和对应角	175
3 在网格图中作已知图形的轴对称图形	175
4 利用等腰三角形的性质求角的度数	183
5 利用线段垂直平分线和角平分线的性质解题	184
6 利用作线段的垂直平分线解决问题	184
7 分析剪纸图案	188
第六章 概率初步	
1 利用事件的定义识别必然事件	200
2 利用频率与概率的关系说明统计图的信息	207
3 利用频率估计概率解实际问题	208
4 利用概率公式解与统计的综合问题	214
5 利用概率公式解与方程相关的综合问题	215
6 利用概率公式解与几何相关的综合问题	216

注：“提分攻略　学霸图谱”中，所列“考向点”“方法点”为重要条目，全书不仅限于此.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法

幂的运算法则的四个注意… 13

看微课

幂的乘方…… 5
积的乘方…… 6
单项式的乘法…… 18
单项式乘多项式…… 19
平方差公式…… 24
完全平方公式…… 28

学方法

平行线性质和判定的区别… 70

看微课

垂直的定义…… 51
垂线的性质…… 53
“三线八角”的识别方法… 63

看微课

用关系式表示变量间的关系…… 95
用图象表示两个变量间的关系…… 99

第一章 整式的乘除

1 同底数幂的乘法 …… 2
2 幂的乘方与积的乘方 …… 5
3 同底数幂的除法 …… 11
4 整式的乘法 …… 18
5 平方差公式 …… 24
6 完全平方公式 …… 28
7 整式的除法 …… 35

素养提分

行动篇：解读“恒等式” ☞ P23
应用篇：恒等变形在整式运算中的应用 ☞ P39
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P40

第二章 相交线与平行线

1 两条直线的位置关系 …… 47
2 探索直线平行的条件 …… 60
3 平行线的性质 …… 70
4 用尺规作角 …… 77

素养提分

行动篇：平行线间的截线问题 ☞ P76
技巧篇：相交线与平行线中角的运用技巧 ☞ P82
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P83

第三章 变量之间的关系

1 用表格表示的变量间关系 …… 90
2 用关系式表示的变量间关系 …… 95
3 用图象表示的变量间关系 …… 99

素养提分

技巧篇：阅读变量间关系图象的技巧 ☞ P107
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P109

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第四章 三角形

1 认识三角形 …… 117
2 图形的全等 …… 129
3 探索三角形全等的条件 …… 135
4 用尺规作三角形 …… 146
5 利用三角形全等测距离 …… 152

素养提分

行动篇：运用铅垂法找重心 ☞ P127
应用篇：分析综合法在三角形全等中的应用 ☞ P156
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P158

观动画
三角形的高……122
三角形的稳定性……136

看微课
三角形的定义……117
三角形的三边关系……121
全等三角形……130
全等三角形的性质……131
探索三角形全等的条件……135

第五章 生活中的轴对称

1 轴对称现象 …… 166
2 探索轴对称的性质 …… 170
3 简单的轴对称图形 …… 177
4 利用轴对称进行设计 …… 186

素养提分

应用篇：分类讨论思想在等腰三角形中的应用 ☞ P190
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P191

观动画
角平分线的尺规作图……180

看微课
轴对称图形与轴对称……167
等腰三角形的性质……178

第六章 概率初步

1 感受可能性 …… 198
2 频率的稳定性 …… 202
3 等可能事件的概率 …… 210

素养提分

应用篇：概率思想在学科中的应用 ☞ P218
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P219

看微课
事件的判断……198
用频率估计概率…… 203
概率公式……210

参考答案及点拨（单独成册）



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **数形结合思想**：数形结合就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

2. **分类讨论思想**：把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

3. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题得到解决的数学思想．

4. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

5. **建模思想**：是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题模型的一种强有力的数学手段．

6. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

7. **从特殊到一般的思想**：从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论．

8. **面积法**：运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法．

9. **综合法**：综合法是指从已知条件出发，借助其性质和有关定理，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证结论或需求问题，其特点和思路是“由因导果”，即从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”．

10. **倍长中线法**：延长底边的中线，使所延长部分与中线相等，然后往往需要连接相应的顶点，则对应角对应边都对应相等．此法常用于构造全等三角形，利用中线的性质进行证明对应边之间的关系．

11. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

12. **截长补短法**：截长补短法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想．所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一段线段相等．所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长至与另一条已知的较短的线段相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系．

13. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

14. **图象法**：利用图象这种特殊且形象的数学语言工具，来表达各种现象的过程和规律，这种方法称为图象法．

15. **待定系数法**：待定系数法是求函数解析式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数解析式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数解析式的方法就叫做待定系数法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

品赏恒等变形的魅力

品赏恒等变形的魅力











第一章 整式的乘除

核心考点

你将见到的

- 幂的运算
  - （1）同底数幂的乘除法
  - （2）幂的乘方
  - （3）积的乘方
- 整式的乘除法
- 乘法公式

核心方法

我们为你提供的

- 底数比较法
- 指数比较法
- 待定系数法
- 面积法
- 整体思想
- 分类讨论思想

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 同底数幂的乘法

核心知识
- 同底数幂的乘法法则
- 同底数幂的乘法运算

知识链接

同底数幂的乘法
- 性质：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m,n 都是正整数）
- 推广：$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$（$m,n,p$ 都是正整数）
- 逆用：$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$（m,n 都是正整数）

点知识·拨考向 速提分

点知识▸同底数幂的乘法

1. 同底数幂的乘法法则 同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

用字母表示为 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 都是正整数）.

指数相加

示例：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 都是正整数）

底数不变

2. 法则的拓展运用

（1）同底数幂的乘法法则对于三个及三个以上同底数幂相乘同样适用，即，$a^m \cdot a^n \cdot \cdots \cdot a^p = a^{m+n+\cdots+p}$（$m$，$n$，…，$p$ 都是正整数）.

（2）同底数幂的乘法法则既可正用也可逆用，即，$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$（m，n 都是正整数）.

拨考向▸利用同底数幂的乘法法则进行幂的计算

题型 1：同底数幂的乘法法则在计算中的应用

例 1 计算：

（1）$10^8 \times 10^2$；（2）$x^7 \cdot x$；（3）$a^{n+2} \cdot a^{n-1}$；

（4）$-x^2 \cdot (-x)^8$；（5）$(x+3y)^3 \cdot (x+3y)^2 \cdot (x+3y)$；

（6）$(x-y)^3 \cdot (y-x)^4$.

解题秘方：紧扣同底数幂的乘法法则进行计算.

解：（1）$10^8 \times 10^2 = 10^{8+2} = 10^{10}$；（2）$x^7 \cdot x = x^{7+1} = x^8$；

（3）$a^{n+2} \cdot a^{n-1} = a^{n+2+n-1} = a^{2n+1}$；（4）$-x^2 \cdot (-x)^8 = -x^2 \cdot x^8 = -x^{10}$；

（5）$(x+3y)^3 \cdot (x+3y)^2 \cdot (x+3y) = (x+3y)^{3+2+1} = (x+3y)^6$；

（6）$(x-y)^3 \cdot (y-x)^4 = (x-y)^3 \cdot (x-y)^4 = (x-y)^7$.

特别提醒：运用同底数幂的乘法法则计算时应注意以下两点.

1. 底数既可以是单项式也可以是多项式，当底数是多项式时，应将多项式看成一个整体进行计算.

2. 底数不同时，若能化成相同底数，则先转化为同底数幂，再按法则计算.

提分·必记

特别解读

1. 运用此法则有两个关键：一是底数相同；二是指数相加.
2. 指数相加的和作为积中幂的指数，即运算结果仍然是幂的形式.
3. 单个字母或数可以看成指数为 1 的幂，运算时易漏掉.

提分·秘诀

解法提醒

化不同底数为同底数

常用到的两种变形：

1. $(-a)^n =$ $\begin{cases} a^n (n\text{为正偶数}), \\ -a^n (n\text{为正奇数}); \end{cases}$
2. $(a-b)^n =$ $\begin{cases} (b-a)^n (n\text{为正偶数}), \\ -(b-a)^n (n\text{为正奇数}). \end{cases}$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：同底数幂的乘法法则在求整式值中的逆用

例 2 （1）若 $a^m=2$，$a^n=8$，求 a^{m+n} 的值；

（2）已知 $2^x=3$，求 2^{x+3} 的值．

解题秘方：逆用同底数幂的乘法法则，即 $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

解：（1）因为 $a^m=2$，$a^n=8$，所以 $a^{m+n}=a^m\cdot a^n=2\times 8=16$.

（2）因为 $2^x=3$，所以 $2^{x+3}=2^x\cdot 2^3=3\times 8=24$.

解法提醒

此题逆用同底数幂的乘法法则，将 a^{m+n} 和 2^{x+3} 分别转化为同底数幂的乘法的形式，然后把已知条件整体代入求值，体现了整体思想的应用．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用恒等变形法求指数中字母的值

例 3 （1）已知 $a^3\cdot a^m\cdot a^{2m+1}=a^{25}$，求 m 的值；

（2）已知 $4\times 2^{2m}=16$，求 $(m-2)^{2022-m}$ 的值．

解题秘方：（1）先直接运用同底数幂的乘法法则对等号左边进行变形，然后借助等号两边同底数幂的指数相同构建方程求解；（2）先将等号两边转化为同底数幂的形式，再借助等号两边同底数幂的指数相同构建方程求解．

解：（1）因为 $a^3\cdot a^m\cdot a^{2m+1}=a^{3m+4}=a^{25}$，

所以 $3m+4=25$，解得 $m=7$.

（2）因为 $4\times 2^{2m}=2^2\times 2^{2m}=2^{2+2m}=16=2^4$，

所以 $2+2m=4$，解得 $m=1$.

所以 $(m-2)^{2022-m}=(1-2)^{2022-1}=(-1)^{2021}=-1$.

挑战·高分

方法点拨

利用同底数幂的乘法法则求字母的值的方法：先根据同底数幂相乘，底数不变，指数相加进行计算，然后根据等号两边同底数幂的指数相同列方程求解相关字母的值，若底数不同，则需要先把等号两边的数都整理成同底数幂再计算．

拔尖角度 2 利用逆向思维解决整除问题

例 4 如果 3^n+m 能被 13 整除，试说明 $3^{n+3}+m$ 也能被 13 整除．

解题秘方：利用逆向思维，将 $3^{n+3}+m$ 转化为含有 3^n+m 的积或和的形式．

解：$3^{n+3}+m$

$=3^n\cdot 3^3+m$

$=27\times 3^n+m$

$=26\times 3^n+(3^n+m)$.

因为 26×3^n 和 3^n+m 都能被 13 整除，

所以 $26\times 3^n+(3^n+m)$ 也能被 13 整除，即 $3^{n+3}+m$ 也能被 13 整除．

挑战·高分

另解

因为 $(3^{n+3}+m)-(3^n+m)=3^{n+3}-3^n=3^n\cdot 3^3-3^n=27\times 3^n-3^n=26\times 3^n$，所以 $3^{n+3}+m$ 与 3^n+m 的差能被 13 整除．

因为 3^n+m 能被 13 整除，

所以 $3^{n+3}+m$ 也能被 13 整除．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

同底数幂的乘法法则的运用及逆用法则化简求值是近几年本节知识的命题方向，经常与幂的其他运算法则综合考查，在中考中常以选择题或填空题的形式出现，难度适中．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 同底数幂的乘法运算

例5 [中考·温州]计算 $a^6 \cdot a^2$ 的结果是(　　)

A. a^3　　B. a^4　　C. a^8　　D. a^{12}

试题评析:本题考查了同底数幂的乘法运算,掌握运算法则是解题的关键.

解: $a^6 \cdot a^2=a^{6+2}=a^8$.

答案: C

冲刺·满分

考法点评

对同底数幂乘法运算,易将指数相加与相减、相乘、相除混淆.

两年模拟兵法

☞答案见225页

1. 下列各选项中的两个幂是同底数幂的是(　　)

A. $-x^2$ 与 $(-x)^2$　　B. $(-x)^2$ 与 x^2

C. $-x^2$ 与 x　　D. $(x-y)^2$ 与 $(y-x)^2$

2. 下列运算正确的是(　　)

A. $a^3+a^4=a^7$　　B. $b^3 \cdot b^4=b^7$

C. $c^3 \cdot c^4=c^{12}$　　D. $d^3 \cdot d^4=2d^7$

3. [中考·天津]计算 $x^5 \cdot x$ 的结果等于_____.

4. 计算:

(1) $a^3 \cdot (-a)^4$;

(2) $(-2)^9 \cdot (-2)^8 \cdot (-2)^3$;

(3) $(2a+b)^{2n+1} \cdot (2a+b)^3 \cdot (2a+b)^{m-1}$.

5. 我国自行设计制造的“神舟十号”飞船进入预定轨道后的飞行速度为 7.9×10^3 m/s,它沿轨道飞行一周需 5.4×10^3 s,该轨道的一周有多少米?(结果用科学记数法表示)

6. 已知 $a^x=5$, $a^{x+y}=30$,求 a^x+a^y 的值.

7. 规定 $a*b=2^a\times2^b$.

(1) 求 $2*3$ 的值;

(2) 若 $2*(x+1)=16$,求 x 的值.

8. 如果 x 满足方程 $3^{3x+1}=27\times81$,求 x 的值.

9. 已知 $a^{n+1} \cdot a^{m+n}=a^6$,且 $m-2n=1$,求 m^n 的值.

[导学号 7876572]

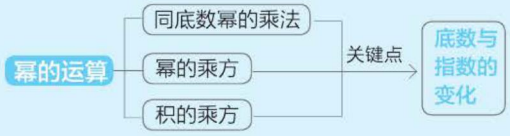
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 幂的乘方与积的乘方

核心知识
- 幂的乘方
- 积的乘方

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 幂的乘方

1. 幂的乘方法则 幂的乘方，底数不变，指数相乘.

用字母表示为 $(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 都是正整数）.

示例：

指数相乘

$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 都是正整数）

底数不变


幂的乘方

2. 法则的拓展运用

（1）幂的乘方运算法则的推广：$[(a^m)^n]^p=a^{mnp}$（m，n，p 都是正整数）；

（2）幂的乘方法则既可以正用，也可以逆用，逆用时 $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$（m，n 都是正整数）.

提分·必记

特别解读

1. “底数不变”是指幂的底数 a 不变，“指数相乘”是指幂的指数 m 与乘方的指数 n 相乘.
2. 底数可以是一个单项式，也可以是一个多项式.

拔考向▸利用幂的乘方法则进行计算

题型 1：幂的乘方法则在计算中的应用

例 1 计算：

（1）$[(-x)^3]^4$；　（2）$[(x-2y)^3]^4$；

（3）$(-a^2)^3$；　（4）$x^2\cdot x^4+(x^2)^3$.

解题秘方：紧扣幂的乘方法则的特征进行计算.

解：（1）$[(-x)^3]^4=(-x)^{3\times4}=(-x)^{12}=x^{12}$；

（2）$[(x-2y)^3]^4=(x-2y)^{3\times4}=(x-2y)^{12}$；

（3）$(-a^2)^3=-a^{2\times3}=-a^6$；

（4）$x^2\cdot x^4+(x^2)^3=x^6+x^6=2x^6$.

当出现混合运算时，先算乘方，再算乘法，最后算加减.

题型 2：逆用幂的乘方法则求整式的值

例 2 已知 $a^{2n}=3$，求 $a^{4n}-a^{6n}$ 的值.

解题秘方：此题已知 $a^{2n}=3$，需逆用幂的乘方法则把 $a^{4n}-a^{6n}$ 用 a^{2n} 表示，再把 $a^{2n}=3$ 整体代入求值.

解：$a^{4n}-a^{6n}=(a^{2n})^2-(a^{2n})^3=3^2-3^3=9-27=-18$.

提分·秘诀

解法提醒

用幂的乘方法则计算时，不要把幂的乘方与同底数幂的乘法混淆，其相同点都是底数不变，不同点是同底数幂的乘法为指数相加，而幂的乘方为指数相乘.

方法提醒

逆用幂的乘方法则求式子值的方法：把指数是积的形式的幂写成幂的乘方，如 $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$（m，n 都是正整数），然后整体代入求式子的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 积的乘方

1. 积的乘方法则

积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

用字母表示为 $(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数）.

示例：

$(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数）

分别乘方



2. 法则的拓展运用

（1）积的乘方法则的推广：$(abc)^n=a^nb^nc^n$（n 为正整数）；

（2）积的乘方法则既可以正用，也可以逆用，逆用时 $a^nb^n=(ab)^n$（n 为正整数）.

拔考向▶ 利用积的乘方法则进行计算

题型 1：积的乘方法则在计算中的应用

例 3 计算：

（1）$(x\cdot y^3)^2$；　　（2）$(-3\times10^2)^3$；

（3）$\left[\left(-\frac{1}{3}a^3\right)^2\right]^2$；　　（4）$(-a^2b^3)^3$.

解题秘方：运用积的乘方、幂的乘方的运算法则进行计算.

解：（1）$(x\cdot y^3)^2=x^2\cdot(y^3)^2=x^2y^6$；

（2）$(-3\times10^2)^3=(-3)^3\times(10^2)^3=-27\times10^6=-2.7\times10^7$；

（3）$\left[\left(-\frac{1}{3}a^3\right)^2\right]^2=\left(\frac{1}{9}a^6\right)^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot(a^6)^2=\frac{1}{81}a^{12}$；

（4）$(-a^2b^3)^3=(-1)^3\cdot(a^2)^3\cdot(b^3)^3=-a^6b^9$.

系数乘方时，要带前面的符号，特别是系数为 -1 时，不要漏掉.

题型 2：逆用积的乘方法则进行计算

例 4 计算：

（1）$4^8\times0.25^8$；

（2）$\left(-\frac{3}{4}\right)^{2020}\times\left(1\frac{1}{3}\right)^{2020}$.

解题秘方：紧扣“两底数互为倒数（或负倒数），而指数相同”这一特征，逆用积的乘方法则进行计算.

解：（1）$4^8\times0.25^8=(4\times0.25)^8=1^8=1$；

（2）$\left(-\frac{3}{4}\right)^{2020}\times\left(1\frac{1}{3}\right)^{2020}=\left(-\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)^{2020}=(-1)^{2020}=1$.

提分·必记

特别提醒

1. 积的乘方的前提是底数是乘积的形式，每个因式可以是单项式，也可以是多项式.
2. 在进行积的乘方运算时，要把底数中的每个因式分别乘方，不要漏掉任何一项.
3. 积的乘方的底数为乘积的形式，若底数为和的形式则不能用，即 $(a+b)^n\neq a^n+b^n$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 利用积的乘方法则计算时，要先确定积中的因式，然后将每个因式都乘方，最后求出所有幂的积.
2. 科学记数法形式的数乘方最后的结果应该用科学记数法形式表示.

方法技巧

求指数相同的几个幂相乘的方法：如果底数的积容易求出，利用 $a^nb^n=(ab)^n$ 可先把底数相乘再进行乘方运算，从而使运算简便.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 幂的混合运算

挑战·高分

例 5 计算：

（1）$(2\times10^2)^3\times(-10^3)^4$；

（2）$[(a^2)^3+(2a^3)^2]^2$；

（3）$(-2a)^6-(-3a^3)^2+[-(2a)^2]^3$.

解题秘方：在幂的混合运算中，先计算积的乘方，再计算幂的乘方、同底数幂的乘法，最后计算加减.

解：（1）$(2\times10^2)^3\times(-10^3)^4=8\times10^6\times10^{12}=8\times10^{18}$；

（2）$[(a^2)^3+(2a^3)^2]^2=(a^6+4a^6)^2=(5a^6)^2=25a^{12}$；

（3）$(-2a)^6-(-3a^3)^2+[-(2a)^2]^3=64a^6-9a^6-64a^6=-9a^6$.

方法点拨

综合应用幂的运算法则时，既要把握各种幂的运算法则，又要注意各种运算之间的顺序.

拔尖角度 2 逆用幂的运算法则解运算中的计算求值问题

挑战·高分

题型 1：逆用幂的运算法则求值

例 6 已知 $10^a=5$，$10^b=6$，求 10^{2a+3b} 的值.

解题秘方：将要求的式子逆用幂的各种运算法则，变成已知幂的形式，整体代入求值.

解：$10^{2a+3b}=10^{2a}\cdot10^{3b}=(10^a)^2\cdot(10^b)^3=5^2\times6^3=25\times216=5\,400$.

解法提醒

同底数幂的乘法及幂的乘方的运算法则都可以逆用，逆用时注意指数的变化情况.

题型 2：逆用幂的运算法则巧算

例 7 用简便方法计算：

（1）$\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times0.25^4\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\times(-4)^4$；

（2）$0.125^{2\,019}\times(-8^{2\,020})$.

技巧点拨

底数互为倒数（负倒数）的两个幂相乘的常用方法：先通过逆用同底数幂的乘法法则化为指数相同的幂，然后逆用积的乘方法则计算.

解题秘方：（1）观察式子的特点可知，可以利用乘法的交换律和结合律，以及逆用积的乘方法则使计算简便；（2）$8^{2\,020}=8^{2\,019}\times8$，故该式应逆用同底数幂的乘法和积的乘方法则计算.

解：（1）$\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times0.25^4\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\times(-4)^4$

$=\left[\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\right]\times[0.25^4\times(-4)^4]$

$=\left(-\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}\right)^6\times(-0.25\times4)^4=1\times1=1$；

（2）$0.125^{2\,019}\times(-8^{2\,020})=-0.125^{2\,019}\times8^{2\,020}$

$=-0.125^{2\,019}\times8^{2\,019}\times8=-(0.125\times8)^{2\,019}\times8$

$=-1^{2\,019}\times8=-8$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用方程思想巧求幂的运算式子中字母的值

例 8 已知 $16^m=4\times2^{2n-2}$，$27^n=9\times3^{m+3}$，求 m，n 的值.

解题秘方：先利用幂的运算性质对已知式子进行变形，再构造方程求解.

解：因为 $16^m=4\times2^{2n-2}$，所以 $(2^4)^m=2^2\times2^{2n-2}$.

所以 $2^{4m}=2^{2n}$. 所以 $4m=2n$，即 $2m=n$.

因为 $27^n=9\times3^{m+3}$，所以 $(3^3)^n=3^2\times3^{m+3}$.

所以 $3^{3n}=3^{m+5}$. 所以 $3n=m+5$. 所以 $m=1$，$n=2$.

挑战·高分

解法提醒

将等式两边的幂进行变形，得到同底数幂的等式，再根据指数相等列方程求解.

拔尖角度 4 利用幂的转化法比较幂的大小

题型 1：底数比较法在比较大小中的应用

例 9 比较大小：3^{555}，4^{444}，5^{333}.

解题秘方：这三个数的底数不同，指数也不同，不能直接比较大小. 通过观察发现三个数的指数都是 111 的倍数，故可考虑逆用幂的乘方法则进行变形.

解：$3^{555}=(3^5)^{111}=243^{111}$，$4^{444}=(4^4)^{111}=256^{111}$，

$5^{333}=(5^3)^{111}=125^{111}$.

因为 $125<243<256$，

所以 $125^{111}<243^{111}<256^{111}$.

即 $5^{333}<3^{555}<4^{444}$.

挑战·高分

方法点拨

对于底数、指数均为正整数的幂的大小比较，一般有两种方法.

1. **底数比较法**：当幂的指数相同时，底数大幂就大；
2. **指数比较法**：当幂的底数相同且都大于 1 时，指数大的幂就大.

解法提醒

这三个数的指数不同，底数 16，8，4 都可以化为 2 的乘方的形式，故可将这三个数化成以 2 为底的幂的形式，比较指数的大小，当指数、底数均大于 1 时，底数相同，指数越大，幂越大.

题型 2：指数比较法在比较大小中的应用

例 10 已知 $a=16^6$，$b=8^9$，$c=4^{13}$，试比较 a，b，c 的大小.

解题秘方：将这三个数化成同底数幂，比较指数的大小即可.

解：$a=16^6=(2^4)^6=2^{24}$，$b=8^9=(2^3)^9=2^{27}$，$c=4^{13}=(2^2)^{13}=2^{26}$.

因为 $24<26<27$，

所以 $2^{24}<2^{26}<2^{27}$，即 $a<c<b$.

拔尖角度 5 利用幂的运算性质说明整除问题

例 11 $5^2\cdot3^{2n+1}\cdot2^n-3^n\cdot6^{n+2}$（$n$ 为正整数）能被 13 整除吗？并说明理由.

解题秘方：只要说明 13 是 $5^2\cdot3^{2n+1}\cdot2^n-3^n\cdot6^{n+2}$ 的一个因式即可.

解：$5^2\cdot3^{2n+1}\cdot2^n-3^n\cdot6^{n+2}$ 能被 13 整除. 理由如下：

$5^2\cdot3^{2n+1}\cdot2^n-3^n\cdot6^{n+2}=5^2\cdot(3^{2n}\cdot3)\cdot2^n-3^n\cdot(6^n\cdot6^2)=75\cdot9^n\cdot2^n-36\cdot3^n\cdot6^n=75\cdot18^n-36\cdot18^n=39\cdot18^n=13\times3\cdot18^n$.

因为 n 为正整数，所以 $3\cdot18^n$ 是正整数.

所以 $5^2\cdot3^{2n+1}\cdot2^n-3^n\cdot6^{n+2}$ 能被 13 整除.

挑战·高分

解法提醒

判断一个式子能否被一个数整除，只要说明这个数是这个式子的一个因式即可.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 幂的乘方和积的乘方是中考的常考内容，多以选择题、填空题的形式出现，既可以单独命题，也可以渗透在其他知识中，综合考查学生的运算能力.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用幂的运算法则进行辨析

例12 [中考·遵义]下列运算正确的是（　　）

A. $(-a^2)^3=-a^5$　　B. $a^3\cdot a^5=a^{15}$

C. $(-a^2b^3)^2=a^4b^6$　　D. $3a^2-2a^2=1$

试题评析：此题主要考查了积的乘方运算以及幂的乘方运算、同底数幂的乘法运算、合并同类项，正确掌握相关运算法则是解题的关键.

解：A. $(-a^2)^3=-a^6$，故此选项错误；

B. $a^3\cdot a^5=a^8$，故此选项错误；

C. $(-a^2b^3)^2=a^4b^6$，正确；

D. $3a^2-2a^2=a^2$，故此选项错误；

答案：C

解法提醒

幂的运算在中考中一般都是直接考查，解此类题的关键是正确运用运算法则，不可相互混淆，特别是指数的运算何时加、何时乘都必须明确.

考法2 利用幂的运算法则求字母的值

例13 [中考·河北]若 $2^n+2^n+2^n+2^n=4$，则 $n=$（　　）

A. -1　　B. -2　　C. 0　　D. $\frac{1}{4}$

试题评析：本题考查了合并同类项、同底数幂的乘法，熟练掌握运算法则是解题的关键.

解：因为 $2^n+2^n+2^n+2^n=4$，所以 $4\cdot 2^n=4$.

所以 $2^2\cdot 2^n=4$. 所以 $2^{2+n}=4$.

所以 $2+n=2$. 所以 $n=0$.

答案：C

思路点拨

合并同类项得到 $4\cdot 2^n=4$，则 $2^2\cdot 2^n=4$，根据同底数幂的乘法法则得到 $2^{2+n}=4$，即 $2+n=2$，解关于 n 的方程即可.

两年模拟兵法

答案见225页

1.[中考·南京]计算 $(a^2b)^3$ 的结果是（　　）

A. a^2b^3　　B. a^5b^3　　C. a^6b　　D. a^6b^3

2.[期末·邢台]下面是芳芳同学计算 $(a\cdot a^2)^3$ 的过程：

解：$(a\cdot a^2)^3=a^3\cdot(a^2)^3\cdots①$

$=a^3\cdot a^6\cdots②$

$=a^9\cdots③$

则步骤①②③依据的运算性质分别是（　　）

A. 积的乘方，幂的乘方，同底数幂的乘法

B. 幂的乘方，积的乘方，同底数幂的乘法

C. 同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方

D. 幂的乘方，同底数幂的乘法，积的乘方

3.[中考·绵阳]已知 $4^m=a$，$8^n=b$，其中 m，n 为正整数，则 $2^{2m+6n}=$（　　）

A. ab^2　　B. $a+b^2$　　C. a^2b^3　　D. a^2+b^3

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·株洲]下列等式错误的是(　　)

A. $(2mn)^2=4m^2n^2$　　B. $(-2mn)^2=4m^2n^2$

C. $(2m^2n^2)^3=8m^6n^6$　　D. $(-2m^2n^2)^3=-8m^5n^5$

5. [中考·苏州]若 $3\times9^m\times27^m=3^{21}$，则 m 的值为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

6. 计算 $(-4\times10^3)^2\times(-2\times10^3)^3$ 的结果为(　　)

A. 1.28×10^{17}　　B. -1.28×10^{17}

C. 4.8×10^{16}　　D. -2.4×10^{16}

7. [期末·岱岳区]已知 $2x+5y-3=0$，则 $4^x\cdot32^y$ 的值为(　　)

A. 4　　B. 8　　C. 32　　D. 128

8. [中考·潍坊]若 $2^x=3$，$2^y=5$，则 $2^{x+y}=$_____.

9. 计算：

(1) $(-a)^3\cdot(-a)^2\cdot a^4$；

(2) $(-x)^2\cdot x^n\cdot x\cdot(-x)^5$.

10. 已知 $a^m=2$，$a^n=3$，求 a^{2m+3n} 的值.

11. 计算：

$$(-0.125)^{12}\times\left(-1\frac{2}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9.$$

12. 试判断 $2^{12}\times5^8$ 的结果是一个几位正整数.

13. 已知 $2^n=a$，$5^n=b$，$20^n=c$，探究 a，b，c 之间有什么关系.　　[导学号 7876572]

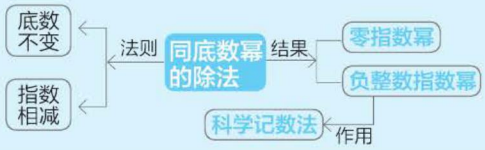
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 同底数幂的除法

核心知识
- 同底数幂的除法
- 零指数幂、负整数指数幂
- 科学记数法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 同底数幂的除法

1. 同底数幂的除法法则

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

用字母表示为 $a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m,n 都是正整数，且 $m>n$）.

2. 法则的拓展运用

（1）法则的推广：适用于三个及三个以上的同底数幂相除，即 $a^m \div a^n \div a^p = a^{m-n-p}$（$a \neq 0$，$m$，$n$，$p$ 都是正整数，并且 $m>n+p$）；

（2）同底数幂的除法法则既可以正用，也可以逆用，逆用时 $a^{m-n} = a^m \div a^n$（$a \neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$）.

拨考向▸利用同底数幂的除法法则进行幂的除法计算

题型 1：同底数幂的除法法则在计算中的应用

例 1 计算：

（1）$(-x)^8 \div (-x)^4$；

（2）$(x-y)^7 \div (y-x)^5$.

解题秘方：同底数幂相除，底数不变，指数相减.

解：（1）$(-x)^8 \div (-x)^4$

$= (-x)^{8-4}$

$= (-x)^4$

$= x^4$；

（2）$(x-y)^7 \div (y-x)^5$

$= (x-y)^7 \div [-(x-y)^5]$

$= -(x-y)^{7-5}$

$= -(x-y)^2$.

提分·必记

特别解读

1. 运用法则的关键有两个：一是底数相同，二是除法运算，二者缺一不可.
2. 底数 a 可以是单项式，也可以是多项式，但底数 a 不能为 0.
3. 同底数幂相除，底数不变，指数相减，而不是相除.

提分·秘诀

知识储备

1. 底数互为相反数的偶次幂相等，奇次幂仍然互为相反数，即：$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$，$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$.
2. 同底数幂的除法直接运用法则计算，底数互为相反数的幂相除，先化为同底数幂，然后再利用法则计算.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：同底数幂的除法法则的逆用在求整式的值中的应用

例 2 已知 $x^m=9$，$x^n=27$，求 x^{3m-2n} 的值.

解题秘方：逆用同底数幂的除法法则，即 $a^{m-n}=a^m\div a^n$（$a\neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$），进行变形求值.

解：x^{3m-2n}

$=x^{3m}\div x^{2n}$

$=(x^m)^3\div(x^n)^2$

$=9^3\div 27^2$

$=1$.

$9^3\div27^2=(3^2)^3\div(3^3)^2$

$=3^6\div3^6=1$.

方法点拨：逆向运用同底数幂的乘除法和幂的乘方法则进行求值时，当幂的指数是含有字母的加法时，通常转化为同底数幂的乘法；当幂的指数是含有字母的减法时，通常转化为同底数幂的除法；当幂的指数是含有字母的乘法时，通常转化为幂的乘方.

解法提醒

观察 x^{3m-2n} 的特征可以发现，其指数里含减号，可逆用同底数幂的除法法则解题.

知识▶2 零指数幂

1. 零指数幂

同底数幂相除，如果被除式的指数等于除式的指数，例如 $a^m\div a^m$，根据除法的意义可知所得的商为 1. 另一方面，如果依照同底数幂的除法来计算，又有 $a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$，故 $a^0=1$.

2. 零指数幂的性质

任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1. 用字母表示为 $a^0=1$（$a\neq 0$）.

提分·必记

特别解读

1. 零指数幂在同底数幂除法中，是除式与被除式的指数相同时的特殊情况；
2. 指数为 0，但底数不能为 0，因为底数为 0 时，除法无意义.

考向▶利用零指数幂的运算法则进行计算

题型 1：利用零指数幂的定义求字母的取值范围

例 3 若 $(x-1)^0=1$，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x>1$　　B. $x\geqslant 1$

C. $x\leqslant 1$　　D. $x\neq 1$

解题秘方：由零指数幂底数不为 0 确定 x 的取值范围.

解：由题意得 $x-1\neq 0$，因此 $x\neq 1$，故选 D.

答案：D

提分·秘诀

解法提醒

零指数幂运算除考查结果为 1 这一特殊结果外，底数不为零也考查较多.

题型 2：利用零指数幂的运算法则计算

例 4 计算：$|-3|+(\pi-1)^0$.

解题秘方：负数的绝对值是它的相反数，任何不为 0 的数的 0 次幂都等于 1.

解：$|-3|+(\pi-1)^0=3+1=4$.

特别警示

对零指数幂的规定记忆不清，容易出现零指数幂的结果为 0 的错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶3 负整数指数幂

1. 负整数指数幂 一般地，当 p 是正整数时，$a^{-p}=\frac{1}{a^p}(a\neq 0)$. 这就是说，$a^{-p}(a\neq 0)$ 是 a^p 的倒数.

2. 整数指数幂的运算性质

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（$a\neq 0$，m，n 是整数）；

（2）$(a^m)^n=a^{mn}$（$a\neq 0$，m，n 是整数）；

（3）$(ab)^n=a^nb^n$（$a\neq 0$，n 是整数）；

（4）$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$a\neq 0$，m，n 是整数）.


幂的运算法则的四个注意

核考向▶利用整数指数幂的运算法则进行幂的计算

题型1：利用整数指数幂的意义求字母的取值范围

例5 若 $(2x-4)^0-2(x-3)^{-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

解题秘方：紧扣零指数幂与负整数指数幂有意义的条件，确定底数中字母的取值范围.

解：由题意得 $2x-4\neq 0$ 且 $x-3\neq 0$，所以 $x\neq 2$ 且 $x\neq 3$.

答案：$x\neq 2$ 且 $x\neq 3$

题型2：整数指数幂的运算法则在数的运算中的应用

例6 计算：$3+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$=_____.

解题秘方：根据各个运算法则的意义进行计算.

解：$3+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$=3+4+1-2$

$=6$.

答案：6

知识▶4 科学记数法

1. 用科学记数法表示数

用科学记数法可以把一个大于 10 的数表示成 $a\times 10^n$ 的形式（其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数），引进负整数指数幂后，也可以用科学记数法把一个小于 1 的正数表示为 $a\times 10^{-n}$ 的形式（其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数）.

2. 用科学记数法表示小于 1 的正数的一般步骤

（1）确定 a：a 是大于或等于 1 且小于 10 的数.

（2）确定 n：确定 n 的方法有两个，即

①n 等于原数中左起第一个非 0 数前 0 的个数（包括小数点前的那个 0）；

②小数点向右移到第一个非 0 的数后，小数点移动了几位，n 就等于几.

（3）将原数用科学记数法表示为 $a\times 10^{-n}$（其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数）.

提分·必记

特别解读

1. 负整数指数幂的运算，既可以等于正整数指数幂的倒数，也可以等于倒数的正整数指数幂. 即 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}=\left(\frac{1}{a}\right)^p$.

2. 整数指数幂的运算结果要化成正整数指数幂的形式.

提分·秘诀

方法点拨

零指数幂和负整数指数幂的底数都不能为零，若在同一个式子中出现，则同时都不为零.

解法提醒

对于底数是分数的负整数指数幂，我们可采用底倒指反法，将其转化为这个数的倒数的正整数指数幂，即 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

提分·必记

特别提醒

- 对于大于 -1 的负数也可以类似地用科学记数法表示成 $a\times 10^{-n}$ 的形式（其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数），也就是说可以用科学记数法表示绝对值小于 1 的数.
- 用科学记数法表示绝对值小于 1 的数时，10 的指数是负数，一定不要忘记指数 n 前面的“-”号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用科学记数法解用科学记数法表示的数与原数的关系问题

题型1：科学记数法在表示数中的应用

例7 用科学记数法表示下列各数：

（1）0.000 003；（2）−0.000 020 8；（3）0.000 000 004 67.

解题秘方：按照科学记数法的要求，将各数写成 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数.

解：（1）$0.000\ 003=3\times10^{-6}$；

3 前面有 6 个 0

（2）$-0.000\ 020\ 8=-2.08\times10^{-5}$；

2 前面有 5 个 0

（3）$0.000\ 000\ 004\ 67=4.67\times10^{-9}$.

4 前面有 9 个 0

题型2：把用科学记数法表示的数还原成原数

例8 将下列用科学记数法表示的数还原成原数.

（1）6×10^{-4}；（2）-7.2×10^{-5}；（3）5.68×10^{-6}.

解题秘方：把用科学记数法表示的绝对值小于 1 的数还原时，指数的绝对值是几，小数点就向左移几位.

解：（1）$6\times10^{-4}=0.000\ 6$；

（2）$-7.2\times10^{-5}=-0.000\ 072$；

（3）$5.68\times10^{-6}=0.000\ 005\ 68$.

教你一招：把 $a\times10^{-n}$（其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数）还原成原数时，只要把 a 的小数点向左移动 n 位即可.

题型3：科学记数法表示的数在计算中的应用

例9 计算：

（1）$(3\times10^{-4})^2\times(2\times10^{-6})^3$；

（2）$(8\times10^{-7})^2\div(2\times10^{-3})^3$.

解题秘方：先计算乘方，再计算乘除.

解：（1）$(3\times10^{-4})^2\times(2\times10^{-6})^3$

$=9\times10^{-8}\times8\times10^{-18}$

$=(9\times8)\times(10^{-8}\times10^{-18})$

$=7.2\times10^{-25}$；

（2）$(8\times10^{-7})^2\div(2\times10^{-3})^3$

$=(64\times10^{-14})\div(8\times10^{-9})$

$=(64\div8)\times(10^{-14}\div10^{-9})$

$=8\times10^{-5}$.

提分·秘诀

教你一招

用科学记数法表示绝对值小于 1 的数的思路：用科学记数法表示绝对值小于 1 的数时，一般形式为 $a\times10^{-n}$，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 由原数左起第一个不为 0 的数字前面 0 的个数所决定.

知识储备

将一个用科学记数法表示的数（$a\times10^n$）还原成原数时，要先判断指数的正负. n 为正数时，小数点向右移动 n 位；n 为负数时，小数点向左移动 $|n|$ 位，不足的数位用“0”补齐.

解法提醒

计算有关科学记数法表示的数的算式时，乘方运算用积的乘方法则，乘除运算用单项式乘除法则，计算的结果也应该用科学记数法形式表示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用法则进行幂的混合运算

例 10 计算：（1）$(x^2)^4\div(-x^2)$；

（2）$(-a^6\div a^2)^2+a^9\div a^3\cdot a^2$；

（3）$(a-b)^2(b-a)^{2n}\div(a-b)^{2n-1}$；

（4）$(-a^3)^3\div(a^2\cdot a^4)^2\div(-a^2)^6$.

解题秘方：紧扣幂的各种运算法则，结合相关的运算顺序进行计算.

解：（1）原式 $=x^8\div(-x^2)=-x^6$；

（2）原式 $=(-a^4)^2+a^6\cdot a^2=a^8+a^8=2a^8$；

（3）原式 $=(a-b)^2(a-b)^{2n}\div(a-b)^{2n-1}=(a-b)^{2+2n-(2n-1)}=(a-b)^3$；

（4）原式 $=-a^9\div(a^6)^2\div a^{12}=-a^9\div a^{12}\div a^{12}=-a^{9-12-12}=-a^{-15}=-\frac{1}{a^{15}}$.

方法点拨：对于幂的混合运算问题，要先判断运算类型，然后根据相关运算顺序、运算性质进行计算. 若底数不同的幂相乘除，可化为同底数幂的形式，此时底数的符号一般有变化. 负数的偶数次幂是正数，互为相反数的两数的同一偶数次幂相等，同一奇数次幂互为相反数.

挑战·高分

易错警示

整式的混合运算的运算顺序与有理数的混合运算的运算顺序相同，同级运算应由左到右依次进行. 本例(4)中易因先算 $a^{12}\div a^{12}$ 而导致计算出错.

拔尖角度 2 利用等底法求负整数指数幂中字母的值

例 11 已知 $3^m=\frac{1}{27}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^n=16$，求 m^n 的值.

解题秘方：将等式两边都用幂的形式表示，对比底数和指数求值.

解：因为 $3^m=\frac{1}{27}=3^{-3}$，所以 $m=-3$.

因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n=16=2^4=\frac{1}{2^{-4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$，所以 $n=-4$.

所以 $m^n=(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$.

挑战·高分

教你一招

运用负整数指数幂解决这类题目时，要先从不含待定字母的一边入手变形，将两边化为同底数或同指数的形式，然后构造方程，并通过解方程确定指数或底数中的待定字母的值.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查同底数幂的除法、零指数幂、负整数指数幂以及科学记数法，是中考的热门考点，一般以选择题和填空题形式出现.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 逆用幂的运算法则进行求值

例12 [中考·威海]已知 $5^x=3$，$5^y=2$，则 $5^{2x-3y}=$（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{9}{8}$

试题评析：此题主要考查了同底数幂的除法法则以及幂的乘方法则，解答此题的关键是要明确底数是什么，指数是什么，逆用同底数幂的除法法则进行计算.

解：因为 $5^x=3$，$5^y=2$，所以 $5^{2x}=3^2=9$，$5^{3y}=2^3=8$.

所以 $5^{2x-3y}=5^{2x}\div 5^{3y}=\frac{9}{8}$.

答案：D

思路点拨

首先根据幂的乘方的运算方法，求出 5^{2x}，5^{3y} 的值，然后逆用同底数幂的除法法则求出 5^{2x-3y} 的值即可.

考法2 负整数指数幂的运算

例13 [中考·济宁]计算 $(a^2)^3+a^2\cdot a^3-a^2\div a^{-3}$，结果是（　　）

A. $2a^5-a$　　B. $2a^5-\frac{1}{a}$　　C. a^5　　D. a^6

试题评析：本题考查了幂的乘方和同底数幂的乘除法，解题的关键是掌握幂的乘方和同底数幂的乘除法的运算法则.

解：$(a^2)^3+a^2\cdot a^3-a^2\div a^{-3}=a^6+a^5-a^5=a^6$，故选 D.

答案：D

考法点评

进行整数指数幂的运算时，要注意两点：一是运算顺序，二是运算法则，运算结果要化为整数指数幂的形式.

考法3 利用科学记数法解决实际问题

例14 [中考·邵阳]据《经济日报》2018年5月21日报道：目前，世界集成电路生产技术水平最高已达到7 nm(1 nm=10^{-9} m)，主流生产线的技术水平为14~28 nm，中国大陆集成电路生产技术水平最高为28 nm. 将28 nm用科学记数法可表示为（　　）

A. 28×10^{-9} m　　B. 2.8×10^{-8} m

C. 28×10^{9} m　　D. 2.8×10^{8} m

试题评析：本题考查了用科学记数法表示小于1的正数的方法，解题的关键是掌握科学记数法表示数的方法.

解：28 nm=28×10^{-9} m=2.8×10^{-8} m.

答案：B

思路点拨

绝对值小于1的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a\times 10^{-n}$，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负整数指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定.

两年模拟兵法

答案见225页

1.[中考·武汉]下列计算的结果是 x^5 的为（　　）

A. $x^{10}\div x^2$　　B. x^6-x

C. $x^2\cdot x^3$　　D. $(x^2)^3$

2. [中考·陕西]计算 $(-3)^0=$（　　）

A. 1　　B. 0　　C. 3　　D. $-\frac{1}{3}$

3.[中考·襄阳]下列计算结果正确的是（　　）

A. $a^3-a^2=a$　　B. $a^2\cdot a^3=a^6$

C. $a^6\div a^2=a^3$　　D. $(a^2)^{-3}=a^{-6}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·烟台]某种计算机完成一次基本运算的时间约为1纳秒，已知1纳秒 = 0.000 000 001秒，该计算机完成15次基本运算，所用时间用科学记数法表示为（　　）

A. 1.5×10^{-9} 秒　　B. 15×10^{-9} 秒

C. 1.5×10^{-8} 秒　　D. 15×10^{-8} 秒

5. 若 $a=0.3^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$，$d=\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}$，则 a，b，c，d 的大小关系是（　　）

A. $a<b<c<d$　　B. $b<a<d<c$

C. $a<d<c<b$　　D. $c<a<d<b$

6. 若 $(x-3)^0+(3x-6)^{-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x\neq3$ 且 $x\neq2$

B. $x\neq3$ 或 $x\neq2$

C. $x\neq3$ 或 $x\neq2$ 或 $x\neq0$

D. $x\neq3$ 且 $x\neq2$ 且 $x\neq0$

7. [中考·河北]若 $7^{-2}\times7^{-1}\times7^0=7^p$，则 p 的值为_____.

8. 已知 $2^x=\frac{1}{32}$，则 $x=$_____.

9. 若 $3^x=4$，$9^y=7$，则 3^{x-2y} 的值为_____.

10. 计算：$(2-\pi)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$.

11. 化简：

（1）$(xy^{-1})^n\div(-x^2y^{-n})^2$（$n$ 是整数）；

（2）$(x^2y^3)^2\cdot(x^{-1}y)^{-2}\div(xy^{-2})^3$.

12. 已知 $(2x-1)^{x-2}=1$，求整数 x 的值.

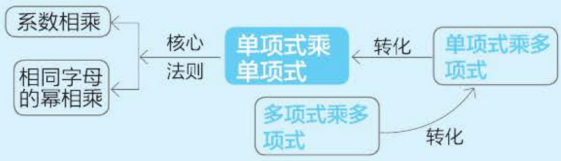
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 整式的乘法

核心知识

- 单项式与单项式相乘
- 单项式与多项式相乘
- 多项式与多项式相乘

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 单项式与单项式相乘

1. 单项式乘法法则 单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，其余字母连同它的指数不变，作为积的因式.

2. 单项式与单项式相乘的步骤

（1）确定积的系数，积的系数等于各项系数的积；

（2）同底数幂相乘，底数不变，指数相加；

（3）只在一个单项式里出现的字母，要连同它的指数写在积里.


单项式的乘法

3. 单项式乘法法则的实质是乘法交换律、乘法结合律和同底数幂的乘法法则的综合运用.

提分·必记

特别提醒

1. 单项式与单项式相乘的结果仍为单项式；
2. 只在一个单项式里含有的字母，写积时不要遗漏；
3. 单项式乘法法则对于三个及三个以上的单项式相乘同样适用.

拔考向▸利用单项式乘法法则进行计算

例1 计算：

（1）$4xy^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)$；

（2）$5x\cdot\left(\frac{1}{3}ax\right)\cdot(-2.25axy)\cdot(-3x^2y^2)$；

（3）$5a^3b\cdot(-3b)^2+(-6ab)^2\cdot(-ab)-ab^3\cdot(-4a)^2$.

解题秘方：紧扣单项式乘单项式的法则，并按步骤进行计算.

解：（1）$4xy^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)=\left[4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot x^{1+2}y^{2+1}z=-2x^3y^3z$；

（2）$5x\cdot\left(\frac{1}{3}ax\right)\cdot(-2.25axy)\cdot(-3x^2y^2)$

$=\left[5\times\frac{1}{3}\times(-2.25)\times(-3)\right]a^{1+1}x^{1+1+1+2}y^{1+2}=\frac{45}{4}a^2x^5y^3$；

（3）$5a^3b\cdot(-3b)^2+(-6ab)^2\cdot(-ab)-ab^3\cdot(-4a)^2$

$=5a^3b\cdot9b^2+36a^2b^2\cdot(-ab)-ab^3\cdot16a^2$

$=45a^3b^3-36a^3b^3-16a^3b^3=-7a^3b^3$.

提分·秘诀

解法提醒

- (1)(2)两题可利用单项式乘法法则直接进行计算，即把系数与同底数的幂分别相乘，(3)是混合运算，要注意运算顺序，应先算乘方，再算乘法，最后算加减.
- 单项式与单项式相乘时，要依据其法则依次运算，特别要注意积的符号，凡是在单项式里出现过的字母，在其结果里也应全都有，不能漏掉.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 单项式与多项式相乘

1. 单项式乘多项式法则

单项式与多项式相乘，就是根据分配律用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加. 用字母表示为 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$.

2. 单项式与多项式相乘的几何解释

如图 1−4−1，大长方形的面积可以表示为 $p(a+b+c)$，也可以表示为三个小长方形的面积之和，所以大长方形的面积也可以表示为 $pa+pb+pc$. 所以 $p(a+b+c)=pa+pb+pc$.

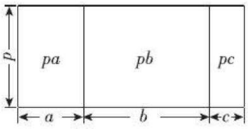


图 1−4−1



技考向▶ 利用单项式乘多项式法则进行计算

例 2 计算：

$(1)(-3x)(-2x^2+1)$；$(2)\left(3xy^2-6xy-1\right)\cdot\frac{1}{3}xy$.

解题秘方：用单项式乘多项式的法则进行计算.

解：$(1)(-3x)(-2x^2+1)=(-3x)\cdot(-2x^2)+(-3x)\times1=6x^3-3x$;

$(2)\left(3xy^2-6xy-1\right)\cdot\frac{1}{3}xy$

$=3xy^2\cdot\frac{1}{3}xy+(-6xy)\cdot\frac{1}{3}xy+(-1)\cdot\frac{1}{3}xy$

$=x^2y^3-2x^2y^2-\frac{1}{3}xy$.

点知识▶ 3 多项式与多项式相乘

1. 多项式乘多项式法则

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加. 用字母表示为 $(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn$.

2. 多项式与多项式相乘的几何解释

如图 1−4−2，大长方形的面积可以表示为 $(a+b)(p+q)$，也可以将大长方形的面积表示为四个小长方形的面积之和，即 $ap+aq+bp+bq$. 所以 $(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq$.

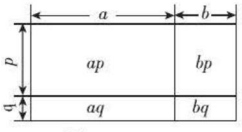


图 1−4−2

提分·必记

警示误区

1. 单项式与多项式相乘，实质上是利用乘法分配律将其转化为单项式与单项式相乘.
2. 单项式与多项式相乘的结果是一个多项式，其项数与因式中多项式的项数相同.
3. 单项式与多项式相乘时，要把单项式和多项式里的每一项都相乘，不要漏乘、多乘.

提分·秘诀

特别警示

- 单项式乘多项式，当多项式的某一项为 1 时，也要与单项式相乘，不能漏乘.
- 多项式的各项都包括它前面的符号，(2) 中多项式的项有 $3xy^2$，$-6xy$，-1，计算时要将这三项分别与 $\frac{1}{3}xy$ 相乘.

提分·必记

特别解读

1. 多项式乘多项式法则的实质是将多项式与多项式相乘转化为几个单项式相乘的和的形式.
2. 多项式与多项式相乘的结果仍为多项式，在合并同类项之前，积的项数应该是两个多项式的项数之积.
3. 计算结果中一定要注意合并同类项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用多项式乘多项式法则进行多项式计算

例3 计算：

（1）$(x-4)(x+1)$；

（2）$(3x+2)(2x-3)$；

（3）$(x+2)(x^2-2x+4)$.

解题秘方：紧扣多项式乘多项式法则，用“箭头法”进行计算.

解：（1）$(x-4)(x+1)$

$=x^2+x-4x-4$

$=x^2-3x-4$;

（2）$(3x+2)(2x-3)$

$=3x\cdot 2x+3x\times(-3)+2\times 2x+2\times(-3)$

$=6x^2-9x+4x-6$

$=6x^2-5x-6$;

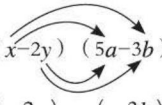
（3）$(x+2)(x^2-2x+4)$

$=x\cdot x^2+x\cdot(-2x)+x\times 4+2\cdot x^2+2\times(-2x)+2\times 4$

$=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$

$=x^3+8$.

教你一招：用“箭头法”解多项式乘多项式的问题时，为了做到不重不漏，可以用“箭头法”标注求解，如计算$(x-2y)(5a-3b)$时，



$(x-2y)(5a-3b)$，根据箭头指示，即可得到$x\cdot 5a$，$x\cdot(-3b)$，$(-2y)\cdot 5a$，$(-2y)\cdot(-3b)$，把各项相加，继续求解即可.

提分·秘诀

方法点拨

$(x+a)(x+b)$型的多项式乘法，直接用$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$计算.

此处切忌犯如下错误：

$(3x+2)(2x-3)$

$=3x\cdot 2x+2\times(-3)$

$=6x^2-6$.

另解

可以将x^2-2x+4看成一个整体，利用分配律计算：

$(x+2)(x^2-2x+4)$

$=x(x^2-2x+4)+2(x^2-2x+4)$

$=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$

$=x^3+8$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用整式的乘法化简求值

例4 先化简，再求值：$x^2(4-x)+(x+1)(x^2-x)$，其中$x=\frac{1}{2}$.

解题秘方：先化简，再将字母的值代入求值.

解：$x^2(4-x)+(x+1)(x^2-x)$

$=4x^2-x^3+x^3-x^2+x^2-x$

$=4x^2-x$.

当$x=\frac{1}{2}$时，原式$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

挑战·高分

方法点拨

整式的化简求值主要分两步：

1. 化简，利用整式的运算法则进行化简；
2. 求值，将已知字母或已知式子的值代入化简的结果中计算. 若字母或式子取值未知，需要先利用已知条件求出来，然后再代入求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用整式的乘法求字母的值

例5 若$(x^2+px+q)(x^2-2x-3)$展开后不含x^2, x^3项，求p,q的值.

解题秘方：紧扣展开后多项式的特征求出字母的值.

解：$(x^2+px+q)(x^2-2x-3)$

$=x^4-2x^3-3x^2+px^3-2px^2-3px+qx^2-2qx-3q$

$=x^4+(p-2)x^3-(2p-q+3)x^2-(3p+2q)x-3q.$

因为原式展开后不含x^2, x^3项，

所以$p-2=0$, 且$2p-q+3=0$.

解得$p=2, q=7$.

挑战·高分

方法点拨

先利用多项式乘多项式的法则，将整式展开并合并同类项，再根据题目要求展开后的多项式不含某一项，即让这一项的系数等于0，由此得到关于要求字母的方程，通过解方程求值.

拔尖角度▸ 3 利用整式的乘法解方程

例6 解方程：$(4x+5)(x-1)=2x(2x-3)-12$.

解题秘方：利用整式的乘法法则，将原方程化为一元一次方程求解.

解：去括号，得$4x^2-4x+5x-5=4x^2-6x-12$,

移项、合并同类项，得$7x=-7$.

系数化为1，得$x=-1$.

挑战·高分

方法点拨

涉及整式乘法的方程的求解思路：一般先利用整式的乘法法则，将原方程化为一元一次方程，然后求解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 整式的乘法是中考的必考内容，它常与幂的几种运算综合到一起考查，以基础题为主，多以选择题、填空题的形式出现.

三年中考兵法

冲刺·满分

方法点拨

将单项式的乘法与幂的运算进行综合考查时，关键要正确运用各种运算的法则，不能相互混淆.

考法1 单项式的乘法与幂的运算综合

例7 [中考·威海]下列运算正确的是(　　)

A. $3x^2+4x^2=7x^4$　　B. $2x^3\cdot 3x^3=6x^3$

C. $a\div a^{-2}=a^3$　　D. $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{6}a^6b^3$

试题评析：本题主要考查的是合并同类项、单项式乘单项式、同底数幂的除法、积的乘方，熟练掌握相关法则是解题的关键.

解：A. $3x^2+4x^2=7x^2$，故A错误；

B. $2x^3\cdot 3x^3=6x^6$，故B错误；

C. $a\div a^{-2}=a^3$，故C正确；

D. $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{8}a^6b^3$，故D错误.

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 多项式乘多项式

例 8 [中考·滨州]计算：$(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

试题评析：本题考查多项式的乘法运算，解题的关键是掌握多项式乘多项式的运算法则.

解：$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-(a^2b+ab^2+b^3)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$.

方法点拨

多项式乘多项式的结果中，最高次数等于两个多项式的次数和，在不合并同类项之前的项数等于两个多项式的项数之积.

两年模拟兵法

答案见 226 页

1. [中考·湖州]计算 $-3a\cdot(2b)$，正确的结果是(　　)

A. $-6ab$　　B. $6ab$　　C. $-ab$　　D. ab

2. [中考·青岛]计算 $(-2m)^2\cdot(-m\cdot m^2+3m^3)$ 的结果是(　　)

A. $8m^5$　　B. $-8m^5$

C. $8m^6$　　D. $-4m^4+12m^5$

3. 下列计算正确的是(　　)

A. $(6xy^2-4x^2y)\cdot 3xy=18xy^2-12x^2y$

B. $(-x)(2x+x^2-1)=-x^3-2x^2+1$

C. $(-3x^2y)(-2xy+3yz-1)=6x^3y^2-9x^2y^2z-3x^2y$

D. $\left(\frac{3}{4}a^{n+1}-\frac{1}{2}b\right)\cdot 2ab=\frac{3}{2}a^{n+2}b-ab^2$

4. 若 $(x+2)(x-4)=x^2+mx+n$，则 m,n 的值分别是(　　)

A. $m=2$，$n=8$　　B. $m=2$，$n=-8$

C. $m=-2$，$n=-8$　　D. $m=-2$，$n=8$

5. 一个长方体的长、宽、高分别为 $3a-4$，$2a$，a，它的体积等于(　　)

A. $3a^3-4a^2$　　B. a^2　　C. $6a^3-8a^2$　　D. $6a^3-8a$

6. 观察下列各式：

$(x-1)(x+1)=x^2-1$，

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$，

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$，

…

请你猜想：$(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1)=$_____($n$ 为正整数).

7. 化简：(1) $x(x+1)-(x+1)(x-2)$；

(2) [中考·咸宁] $(a+3)(a-2)-a(a-1)(2a-6)$.

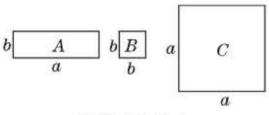
8. 先化简，再求值：

$2(3x+1)(1-3x)+(x-2)(2+x)$，其中 $x=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解方程：$4x(x-1)+5=(2x-1)(2x+3)$.

10. 小思同学用如图所示的 A，B，C 三类卡片若干张，拼出了一个长为 $2a+b$、宽为 $a+b$ 的长方形．请你通过计算求出小思同学拼这个长方形所用 A，B，C 三类卡片各几张（要求：所拼图形中，卡片之间不能重叠，不能有空隙），并画出他的拼图示意图．



（第 10 题）

素养提分 行动篇

解读“恒等式”

一、等式分为三类

1. 条件等式：在一定条件下成立的等式叫做条件等式．

2. 恒等式：等式中的字母无论取何值，等式都成立，这样的等式叫做恒等式．

3. 矛盾等式：等式中的字母无论取何值，等式都不能成立，这样的等式叫做矛盾等式．

二、方程 $ax=b$ 的解的情况与等式类别的对比

1. 当 $a\neq 0$ 时，方程有唯一解，此等式为条件等式；

2. 当 $a=0$，$b=0$ 时，方程有无数个解，此等式为恒等式；

3. 当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，方程无解，此等式为矛盾等式．

三、恒等式性质的应用

应用一：若等式 $ax=b$ 是恒等式，则 $a=0$，$b=0$.

【例 1】甲、乙二人共同计算整式乘法 $(2x+a)\cdot(3x+b)$ 时，由于甲抄错了第一个多项式中 a 的符号，得到的结果为 $6x^2+11x-10$，由于乙漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果为 $2x^2-9x+10$. 求 a，b 的值．

解：根据题意，得 $(2x-a)(3x+b)=6x^2+11x-10$，$(2x+a)(x+b)=2x^2-9x+10$.

所以 $6x^2+(2b-3a)x-ab=6x^2+11x-10$，$2x^2+(2b+a)x+ab=2x^2-9x+10$.

所以 $(2b-3a-11)x=ab-10$，

$(a+2b+9)x=10-ab$，

所以 $2b-3a-11=0$，$ab-10=0$，$a+2b+9=0$，$10-ab=0$，

所以 $a=-5$，$b=-2$.

应用二：利用恒等式的定义解题

【例 2】已知二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式是 $x-1$，求其另一个因式及 m 的值．

解：设另一个因式为 $x+n$，则 $(x-1)(x+n)=x^2-4x+m$.

根据整式的乘法是恒等变形，将 $x=1$ 代入左右两边得 $0=1-4+m$，所以 $m=3$.

又因为 $(x-1)(x+n)=x^2+(n-1)x-n$，

所以 $-n=3$.

所以 $n=-3$.

所以另一个因式为 $x-3$.

【方法规律】若某个等式是恒等式，则等式中的字母为任何值时等式都成立．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 平方差公式

核心知识
- 平方差公式
- 平方差公式的验证

知识链接

面积法 ← 验证 ← 平方差公式 → 结构特征；运用公式计算

点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 平方差公式

1. 平方差公式

两数和与这两数差的积，等于它们的平方差.

用字母表示为 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

2. 平方差公式的几种常见变化及应用

变化形式	应用举例
位置变化	$(b+a)(-b+a)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
符号变化	$(-a-b)(a-b)=(-b-a)(-b+a)=(-b)^2-a^2=b^2-a^2$
系数变化	$(3a+2b)(3a-2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$
指数变化	$(a^3+b^2)(a^3-b^2)=(a^3)^2-(b^2)^2=a^6-b^4$
增项变化	$(a-b+c)(a-b-c)=(a-b)^2-c^2$
连用公式	$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=a^4-b^4$

提分·必记

特别解读

1. 等号左边是两个二项式相乘，这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数.
2. 等号右边是乘式中两项的平方差，即相同项的平方减去相反项的平方.
3. 平方差公式中的 a,b 既可代表一个单项式，也可代表一个多项式.

拨考向▸利用平方差公式进行计算

题型 1：平方差公式在整式计算中的应用



例 1 计算：

(1) $(5m-3n)(5m+3n)$；

(2) $(-2a^2+5b)(-2a^2-5b)$；

(3) $\left(\frac{1}{4}x+y\right)\left(-\frac{1}{4}x+y\right)$；

(4) $(-3y-4x)(3y-4x)$.

解题秘方：先确定公式中的“a”和“b”，然后根据平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 进行计算.

解：(1) $(5m-3n)(5m+3n)=(5m)^2-(3n)^2=25m^2-9n^2$；

(2) $(-2a^2+5b)(-2a^2-5b)=(-2a^2)^2-(5b)^2=4a^4-25b^2$；

提分·秘诀

解法提醒

运用平方差公式计算的三个关键步骤：

第1步：利用加法的交换律调整两个二项式中项的位置，使之与公式左边相对应，已对应的就不需调整，如(3)(4)就必须调整.

第2步：找准公式中的 a,b 分别代表哪个单项式或多项式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$(3)\left(\frac{1}{4}x+y\right)\left(-\frac{1}{4}x+y\right)$$
$$=\left(y+\frac{1}{4}x\right)\left(y-\frac{1}{4}x\right)$$
$$=y^2-\left(\frac{1}{4}x\right)^2$$
$$=y^2-\frac{1}{16}x^2;$$
$$(4)\ (-3y-4x)(3y-4x)$$
$$=(-4x-3y)(-4x+3y)$$
$$=(-4x)^2-(3y)^2$$
$$=16x^2-9y^2.$$

第3步：套用公式计算，注意将底数带上括号．如(1)中$(5m)^2$不能写成$5m^2$．

题型2：平方差公式在数的巧算中的应用

例2 计算：

(1) 10.3×9.7；(2) $2\,018\times2\,020-2\,019^2$.

解题秘方：找出平方差公式的模型，利用平方差公式进行计算．

解：(1) 10.3×9.7
$$=(10+0.3)(10-0.3)$$
$$=10^2-0.3^2$$
$$=100-0.09$$
$$=99.91;$$
(2) $2\,018\times2\,020-2\,019^2$
$$=(2\,019-1)(2\,019+1)-2\,019^2$$
$$=2\,019^2-1-2\,019^2$$
$$=-1.$$

方法点拨

运用平方差公式计算两数乘积时，关键是找到这两个数的平均数，再将原数与这个平均数进行比较，变成两数的和与差的积的形式．

知识▶2 平方差公式的验证

平方差公式的几何解释

如图1-5-1①，边长为a的大正方形中有一个边长为b的小正方形，则图中阴影部分的面积是a^2-b^2；将图1-5-1①中的阴影部分拼成一个长方形，如图1-5-1②，这个长方形的长为$a+b$，宽为$a-b$，面积为$(a+b)(a-b)$．因为图1-5-1①和图1-5-1②中阴影部分的面积相等，所以$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

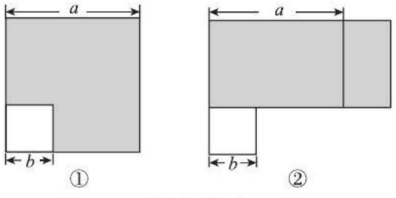


图1-5-1

提分·必记

特别提醒

利用图形验证平方差公式的关键是对同一个图形的面积用不同的方法表示，即直接表示和间接表示．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用面积法验证平方差公式

例 3 如图 1−5−2，在边长为 a 的正方形中，剪去一个边长为 b 的小正方形（$a>b$），将余下部分拼成一个梯形，根据两个图形中阴影部分面积的关系，验证了公式_____.

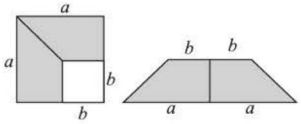


图 1−5−2

解题秘方：紧扣面积法，用面积表示两个图形中阴影部分，利用面积相等验证公式.

解：左图中阴影部分的面积是 a^2-b^2，右图中梯形的面积是 $\frac{1}{2}(2a+2b)\cdot(a-b)=(a+b)(a-b)$. 因为两图中阴影部分的面积相等，所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

答案：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

提分·秘诀

方法点拨

本题主要考查的是平方差公式逆用的几何表示，运用不同方法表示阴影部分的面积是解本题的关键.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用构造公式法进行乘法巧算

例 4 计算：$3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$.

解题秘方：构造出平方差公式的模型，利用平方差公式逐步计算.

解：$3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)+1$

$=2^{32}-1+1=2^{32}$.

挑战·高分

技巧点拨

当出现多个因式相乘时，要仔细观察式子的特点，是否符合平方差公式的结构特征或根据题意“凑”出符合平方差公式结构的形式，然后依次运用公式，一直到不能用为止.

拔尖角度▶2 逆用平方差公式求值

例 5 若 $|x+y-3|+(x-y+5)^2=0$，求 $3x^2-3y^2$ 的值.

解题秘方：紧扣非负数的性质，整体求平方差公式中两个数的和与差.

解：因为 $|x+y-3|+(x-y+5)^2=0$，所以 $x+y-3=0$，$x-y+5=0$，所以 $x+y=3$，$x-y=-5$. 所以 $3x^2-3y^2=3(x^2-y^2)=3(x+y)(x-y)=3\times3\times(-5)=-45$.

挑战·高分

方法点拨

利用非负数的性质求出 $x+y$ 及 $x-y$ 的值，并且逆用平方差公式变形出现 $x+y$ 及 $x-y$，再整体代入求值.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

平方差公式在中考中属于常考内容，主要是利用公式进行计算或化简，选择题、填空题和解答题的形式都会出现，难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 利用乘法公式对计算过程进行辨析

例6 [中考·吉林]某同学化简 $a(a+2b)-(a+b)(a-b)$ 出现了错误，解答过程如下：

原式 $=a^2+2ab-(a^2-b^2)$（第一步）

$=a^2+2ab-a^2-b^2$（第二步）

$=2ab-b^2$（第三步）

（1）该同学解答过程从第_____步开始出错，错误原因是_____；

（2）写出此题正确的解答过程.

试题评析：本题考查整式的乘法运算，主要运用平方差公式和去括号法则.

解：（1）二；去括号时没有变号

（2）原式 $=a^2+2ab-(a^2-b^2)=a^2+2ab-a^2+b^2=2ab+b^2$.

冲刺·满分

解法提醒

本题主要考查整式的乘法运算中出现的去括号错误.即括号前是"-"号时，只改变括号内第一项的符号，而忽视其他各项也要改变符号.

两年模拟兵法

☞答案见226页

1. 选择计算 $(-4xy^2+3x^2y)(4xy^2+3x^2y)$ 的最佳方法是（　　）

A. 运用多项式乘多项式法则

B. 运用平方差公式

C. 运用单项式乘多项式法则

D. 运用单项式乘单项式法则

2. $4x^2-5y$ 需要乘式子（　　）才能利用平方差公式进行计算.

A. $-4x^2-5y$　　B. $-4x^2+5y$

C. $(4x-5y)^2$　　D. $4x^2-5y$

3. [中考·金华]化简 $(x-1)(x+1)$ 的结果是_____.

4. [中考·宁夏]已知 $m+n=12$，$m-n=2$. 则 $m^2-n^2=$_____.

5. 如果 $a^2-\frac{1}{3}k=\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)$，那么 $k=$_____.

6. 计算：（1）1.03×0.97；

（2）$9\frac{7}{8}\times10\frac{1}{8}$；

（3）$2\,016\times2\,020-2\,017\times2\,019$.

7. 先化简，再求值：$x(x+2)-(x+1)(x-1)$，其中 $x=-\frac{1}{2}$.

8. 王大伯把一块边长为 a m 的正方形土地租给了邻居李大妈. 今年王大伯给李大妈说："我把这块土地一边减少 6 m，另一边增加 6 m，继续租给你，你看如何？"李大妈答应了，你认为李大妈吃亏了吗？为什么？

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6 完全平方公式

核心知识

- 完全平方公式
- 利用完全平方公式计算
- 乘法公式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 完全平方公式

1. 完全平方公式

两个数的和（或差）的平方，等于它们的平方和，加上（或减去）它们的积的2倍.

用字母表示为 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2. 完全平方公式的几种常见变形公式

（1）$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$;

（2）$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$;

（3）$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$;

（4）$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;

（5）$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;

（6）$ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$;

（7）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

（8）$a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2]$.

完全平方公式

提分·必记

特别解读

1. 弄清公式的特征：公式的左边是一个二项式的完全平方，公式的右边是一个三项式，包括左边二项式的各项的平方和，以及这两项乘积的2倍.
2. 理解字母a,b的意义：公式中的字母a,b可以表示具体的数，也可以表示含字母的单项式或多项式.
3. 口诀记忆：首平方和尾平方，首(乘)尾两倍在中央，中间符号照原样.

拔考向▸ 利用完全平方公式进行计算

题型1：完全平方公式在整式计算中的应用

例1 计算：

（1）$(x+7y)^2$;　　（2）$(-4a+5b)^2$;

（3）$(-2m-n)^2$;　　（4）$(2x+3y)(-2x-3y)$.

解题秘方：确定公式中的“a”和“b”，利用完全平方公式进行计算.

解：（1）$(x+7y)^2=x^2+2\cdot x\cdot(7y)+(7y)^2=x^2+14xy+49y^2$;

（2）$(-4a+5b)^2$

$=(5b-4a)^2$

$=(5b)^2-2\cdot(5b)\cdot(4a)+(4a)^2$

$=25b^2-40ab+16a^2$;

提分·秘诀

方法点拨

1. **利用完全平方公式进行整式计算的基本步骤：**
   （1）确定公式中的a, b;
   （2）确定和差关系;
   （3）选择公式;
   （4）计算结果.
2. **两个易错点：**
   （1）套用公式时千万不能漏掉“$2ab$”项;
   （2）两个平方项的底数要带上括号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）$(-2m-n)^2$

$=(2m+n)^2$

$=(2m)^2+2\cdot(2m)\cdot n+n^2$

$=4m^2+4mn+n^2$；

（4）$(2x+3y)(-2x-3y)$

$=-(2x+3y)^2$

$=-[(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2]$

$=-(4x^2+12xy+9y^2)$

$=-4x^2-12xy-9y^2$.

解法提醒

两个二项式相乘，若有一项相同，另一项相反，则用平方差公式计算；若两项都相同或都相反，则用完全平方公式计算.

题型 2：完全平方公式在数的巧算中的应用

例 2 计算：（1）999^2；（2）$\left(30\frac{1}{3}\right)^2$.

解题秘方：将原数转化成符合完全平方公式的形式，再利用完全平方公式展开计算即可.

解：（1）999^2

$=(1\,000-1)^2$

$=1\,000^2-2\times1\,000\times1+1^2$

$=1\,000\,000-2\,000+1$

$=998\,001$；

（2）$\left(30\frac{1}{3}\right)^2=\left(30+\frac{1}{3}\right)^2$

$=30^2+2\times30\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=900+20+\frac{1}{9}$

$=920\frac{1}{9}$.

方法点拨

利用完全平方公式进行数值运算时，主要是将底数拆成两个数的和或差，拆分时主要有两种形式：

一是接近整十、整百或整千的数. 将与整十、整百或整千接近的数拆分成整十、整百或整千的数与相差的数的和或差；

二是带分数. 将带分数拆分成整数部分与真分数的和或差.

知识▶2 完全平方公式的验证

1. 验证 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 如图 1-6-1，大正方形的面积可以表示为 $(a+b)^2$，也可用四个部分的面积之和来表示，即 $a^2+ab+ba+b^2$，所以 $(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$.

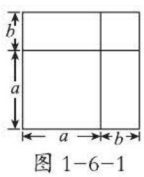


图 1-6-1

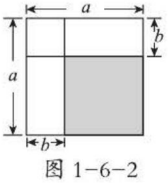


图 1-6-2

2. 验证 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 如图 1-6-2，阴影部分的面积可以表示为 $S_{阴影}=(a-b)^2$，也可用大正方形的面积减去三个空白部分的面积来表示，即 $a^2-(a-b)\cdot b-(a-b)\cdot b-b^2$，所以 $(a-b)^2=a^2-(a-b)\cdot b-(a-b)\cdot b-b^2=a^2-2ab+b^2$.

提分·必记

特别提醒

利用几何图形验证完全平方公式时，所列式子表示同一个图形的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用面积法验证完全平方公式

例 3 李明和王虎学完了乘法公式后，便决定利用如图 1−6−3 的三个图形（一个正方形和两个一样的梯形）拼图来验证一下完全平方公式．请画出你所拼的图形，并写出验证过程．

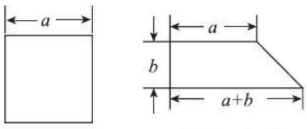


图 1−6−3

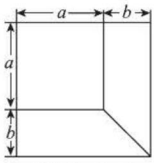


图 1−6−4

解题秘方：紧扣面积法，从面积的角度解释完全平方公式．

解：如图 1−6−4. 所拼成的大正方形的边长为 $a+b$，其面积为 $(a+b)^2$，这个大正方形可看成是由一个边长为 a 的正方形和两个上底为 a，下底为 $a+b$，高为 b 的梯形组成的，即大正方形的面积为 $a^2+2\times\frac{1}{2}\times[a+(a+b)]\times b=a^2+2ab+b^2$，所以 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

提分·秘诀

方法点拨

从求面积的角度解释 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$：图形的总面积 = 组成图形的各部分图形面积的和．

点知识▶3 添括号（拓展点）

1. 添括号法则

添括号时，如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变符号；如果括号前面是负号，括到括号里的各项都改变符号．

用字母表示为

$a+b+c=a+(b+c)=a-(-b-c)$；

$a-b-c=a-(b+c)=a+(-b-c)$.

提分·必记

特别解读

- 添括号只是一个变形，不改变式子的值．
- 添括号是否正确，可利用去括号检验．

2. 添括号法则的应用

添括号在利用乘法公式的计算中应用广泛，利用添括号使原式变成符合乘法公式的形式，特别是利用“括号前面是负号的时候，括到括号里的各项都改变符号”来变形．

拔考向▶利用添括号法则进行整式的运算

例 4 计算：

（1）$(2x-y+4)(2x+y-4)$；

（2）$(m-2n+1)(-2n-1+m)$；

（3）$(2a+3b-1)(1-2a-3b)$；

（4）$(3a-b+c)^2$.

解题秘方：先通过添括号把式子转化为符合平方差公式或完全平方公式的形式，再利用乘法公式进行计算．

解：（1）$(2x-y+4)(2x+y-4)$

提分·秘诀

方法点拨

1. 两个三项式相乘，各项既有符号相同的也有符号不同的，可通过变形用平方差公式计算．平方差公式中完全相同的项为“a”，绝对值相同符号相反的项为“b”．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=[2x-(y-4)][2x+(y-4)]$

$=(2x)^2-(y-4)^2$

$=4x^2-y^2+8y-16$;

（2）$(m-2n+1)(-2n-1+m)$

$=[(m-2n)+1][(m-2n)-1]$

$=(m-2n)^2-1^2$

$=m^2-4mn+4n^2-1$;

（3）$(2a+3b-1)(1-2a-3b)$

$=(2a+3b-1)[-(2a+3b-1)]$

$=-[(2a+3b)-1]^2$

$=-[(2a+3b)^2-2(2a+3b)+1^2]$

$=-(4a^2+12ab+9b^2-4a-6b+1)$

$=-4a^2-12ab-9b^2+4a+6b-1$

$=-4a^2-9b^2-12ab+4a+6b-1$;

（4）$(3a-b+c)^2$

$=[(3a-b)+c]^2$

$=9a^2-6ab+b^2+6ac-2bc+c^2$

$=9a^2+b^2+c^2-6ab+6ac-2bc$.

2. 三个数和的完全平方，利用添括号和整体思想转化为两个数和的完全平方进行计算，也可以直接套用三个数和的完全平方公式$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$进行计算.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用乘法公式的变形公式求整式的值

挑战·高分

例 5 设 $m+n=10$，$mn=24$，求 m^2+n^2 和 $(m-n)^2$ 的值.

解题秘方：紧扣完全平方公式的变形公式进行计算.

解：$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$，$(m-n)^2=(m+n)^2-4mn$.

将 $m+n=10$，$mn=24$ 分别代入上面两式，得

$m^2+n^2=10^2-2\times24=52$，

$(m-n)^2=10^2-4\times24=4$.

解法提醒

求形如 $a+b$，$a-b$ 与 a^2-b^2，$(a\pm b)^2$，a^2+b^2，$2ab$ 等式子的值，均可利用乘法公式的变形求值.

拔尖角度 2 利用数形结合思想巧借乘法公式解决实际问题

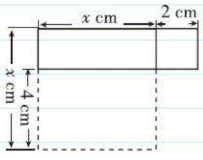
挑战·高分

例 6 将某个正方形的一组对边分别增加 2 cm，另一组对边分别减少 4 cm，所得到的长方形的面积与将这个正方形的每条边均减少 2 cm 所得到的正方形的面积相等，求得到的长方形的长和宽.

解题秘方：根据该正方形经过两种变形后得到的图形的面积相等建立等量关系，列出方程，然后利用乘法公式及整式乘法解方程即可.

解：设原正方形的边长为 x cm，则得到的长方形的长为 $(x+2)$ cm，

图解



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

宽为（$x-4$）cm.

根据题意，得（$x+2$）（$x-4$）=（$x-2$）^{2}.

整理，得 $x^2-2x-8=x^2-4x+4$，即 $2x=12$.

解得 $x=6$.

所以 $x+2=6+2=8$，$x-4=6-4=2$.

所以得到的长方形的长为 8 cm，宽为 2 cm.

方法点拨：求解涉及几何图形的应用题，要灵活运用方程思想和数形结合思想，一般先画出满足题意的图形，并标出相应的数据，然后根据题意找到等量关系，列出反映这个等量关系的方程，再求解.

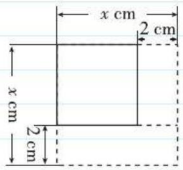


图 1-6-5

可先画出如图 1-6-5 所示的图形，根据题意结合图形列出方程，然后利用乘法公式及整式乘法解方程即可.

拔尖角度▶ 3 运用乘法公式探究规律

挑战·高分

例 7 观察下列各式：

$1^2+(1\times2)^2+2^2=(1\times2+1)^2$；

$2^2+(2\times3)^2+3^2=(2\times3+1)^2$；

$3^2+(3\times4)^2+4^2=(3\times4+1)^2$；

…

请你根据以上规律，写出第 n（n 为正整数）个式子，并验证其正确性.

解题秘方：观察等式左右两边的变化规律，写出一般规律的式子，并用乘法公式计算左右两边是否相等.

解：第 n 个式子为 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

验证：因为 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=n^2+(n^2+n)^2+n^2+2n+1$

$=n^2+n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$，

$[n(n+1)+1]^2=[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1$

$=(n^2+n)^2+2n^2+2n+1=n^4+2n^3+n^2+2n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$，

所以 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

教你一招

1. **探究规律问题的思路：**

（1）找式子中变化部分和不变部分，如本题中（__）^{2}+（__×__）^{2}+（__）^{2}=（__×__+1）^{2}.

（2）找出变化部分与式子个数之间的关系，如第 1 项的底数与个数相同，第 2 项的底数中，前一个因数与个数相同，后一个因数比个数大 1，依此全部分析出与个数之间的关系.

（3）个数是 n 时，用 n 表示出规律.

2. **验证规律的方法：**

（1）可将等式一边变形与另一边相同，

（2）可将等式两边同时计算，结果相同.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

完全平方公式在中考中属于常考内容，同时它也是因式分解（以后学）、整式、分式（以后学）等相关运算必不可少的一部分，在中考题中主要是利用公式进行计算、化简或求值，常以解答题的形式出现，难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法1 利用乘法公式的变形式子求值

例8 [中考·乐山]已知a，b满足$a+b=2$，$ab=\frac{3}{4}$，则$a-b=$（　　）

A.1　　B.$-\frac{5}{2}$　　C.±1　　D.$\pm\frac{5}{2}$

试题评析：本题考查了完全平方公式的运用，熟记公式结构是解题的关键.

解：因为$a+b=2$，$ab=\frac{3}{4}$，所以$(a+b)^2=4=a^2+2ab+b^2$.

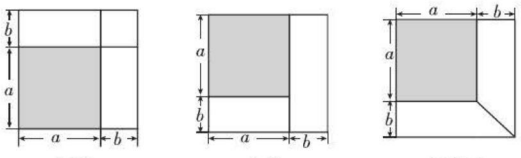
所以$a^2+b^2=\frac{5}{2}$. 所以$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=1$.

所以$a-b=\pm1$.

答案：C

考法2 利用几何图形面积验证完全平方公式

例9 [中考·衢州]有一张边长为a cm的正方形桌面，因为实际需要，需将正方形边长增加b cm，木工师傅设计了如图1-6-6的三种方案：（图中单位：cm）



方案一　　方案二　　方案三

图1-6-6

小明发现这三种方案都能验证公式：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

对于方案一，小明是这样验证的：

$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

请你根据方案二、方案三写出公式的验证过程.

方案二：

方案三：

试题评析：本题考查完全平方公式的几何背景，解答本题的关键是明确题意，写出相应的推导过程.

解：方案二：$a^2+ab+(a+b)b=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

方案三：$a^2+\frac{[a+(a+b)]b}{2}+\frac{[a+(a+b)]b}{2}=a^2+ab+\frac{1}{2}b^2+ab+\frac{1}{2}b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

冲刺·满分

考法点评

用乘法公式的变形求值，关键是对乘法公式的变形式子的结构要相当熟悉，而且明白公式中各部分之间的数量关系.

解法提醒

借助几何背景验证完全平方公式的思路是将几何图形面积分割成几个图形的面积和(或差)后面积不变进行验证.

方案二是两个长方形的面积与一个小正方形的面积的和等于大正方形的面积；

方案三是两个梯形的面积与一个小正方形的面积的和等于大正方形的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·连云港]下列计算正确的是(　　)

A. $x-2x=-x$　　B. $2x-y=-xy$

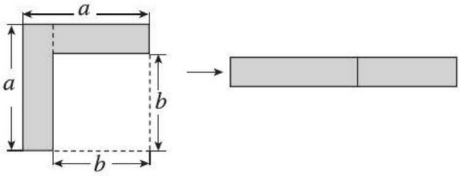
C. $x^2+x^2=x^4$　　D. $(x-1)^2=x^2-1$

2.[中考·怀化]下列计算正确的是(　　)

A. $(x+y)^2=x^2+y^2$　　B. $(x-y)^2=x^2-2xy-y^2$

C. $(x+1)(x-1)=x^2-1$　　D. $(x-1)^2=x^2-1$

3.[中考·宁夏]如图,从边长为 a 的大正方形中剪掉一个边长为 b 的小正方形,将阴影部分沿虚线剪开,拼成右边的长方形.根据图形的变化过程写出的一个正确的等式是(　　)



(第3题)

A. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

B. $a(a-b)=a^2-ab$

C. $(a-b)^2=a^2-b^2$

D. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

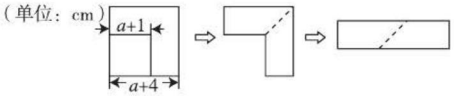
4.[中考·淄博]若 $a+b=3$,$a^2+b^2=7$,则 ab 等于(　　)

A. 2　　B. 1　　C. -2　　D. -1

5.[中考·南昌]已知 $(m-n)^2=8$,$(m+n)^2=2$,则 m^2+n^2 等于(　　)

A. 10　　B. 6　　C. 5　　D. 3

6. 如图,从边长为 $(a+4)$ cm 的正方形纸片中剪去一个边长为 $(a+1)$ cm 的正方形($a>0$),剩余部分沿虚线剪开后拼成一个长方形(不重叠、无缝隙),则长方形的面积为_____cm^2.



(第6题)

7. 若 $|x+y-7|+(xy-6)^2=0$,则 $x^2+y^2=$_____.

8. 若 $(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$,则 $2a+2b=$_____.

9. 运用乘法公式计算:

(1) 39×41;

(2) $\left(99\frac{2}{3}\right)^2$.

10. 计算:

(1)[中考·济宁]$(y+2)(y-2)-(y-1)\cdot(y+5)$;

(2) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$;

(3) $(m+2)(m-2)(m^2-4)$;

(4) $(x-2y+3)(x+2y-3)$.

11.[中考·凉山州]先化简,再求值:$(a+3)^2-(a+1)\cdot(a-1)-2(2a+4)$,其中 $a=-\frac{1}{2}$.

12.[中考·大庆]已知 $x^2-y^2=12$,$x+y=3$,求 $2x^2-2xy$ 的值.

13. 已知 $(2021-a)(2019-a)=2020$,求 $(2021-a)^2+(2019-a)^2$ 的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

7 整式的除法

核心知识
- 单项式除以单项式
- 多项式除以单项式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 单项式除以单项式

1. 单项式除以单项式法则

单项式相除，把系数、同底数幂分别相除后，作为商的因式；对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数一起作为商的一个因式.

2. 步骤

（1）把系数相除，所得结果作为商的系数；

（2）把同底数幂分别相除，所得的结果作为商的因式；

（3）把只在被除式里出现的字母，连同它的指数一起作为商的一个因式.

提分·必记

特别解读

1. 单项式除以单项式最终转化为同底数幂相除；
2. 单项式除以单项式的结果还是单项式；
3. 根据乘除互逆的原则，可用单项式乘单项式来验证结果.

拨考向▸ 利用单项式除以单项式的运算法则计算

例 1 计算：

（1）$-3a^7b^4c \div 9a^4b^2$；

（2）$4a^{3m+1}b \div (-8a^{2m+1})$；

（3）$(6.4\times10^5) \div (2\times10^2)$.

解题秘方：根据单项式除法法则解答.

解：（1）原式 $=[(-3)\div9]\,a^{7-4}b^{4-2}c=-\dfrac{1}{3}a^3b^2c$；

（2）原式 $=[4\div(-8)]\,a^{(3m+1)-(2m+1)}b=-\dfrac{1}{2}a^mb$；

（3）原式 $=(6.4\div2)\times(10^5\div10^2)=3.2\times10^3$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 系数相除运用有理数的除法法则；
2. 字母部分相除，按同底数幂的除法法则进行计算，尽量按顺序进行计算，这样可以防止只在被除式里含有的字母漏写.
3. 最后结果还是单项式.

点知识▸ 2 多项式除以单项式

1. 多项式除以单项式法则

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项分别除以单项式，再把所得的商相加.

用字母表示为 $(am+bm)\div m=am\div m+bm\div m=a+b$.

2. 步骤

（1）用多项式的每一项除以单项式；

（2）把每一项除得的商相加.

提分·必记

特别解读

1. 多项式除以单项式的实质就是转化为单项式除以单项式；
2. 商的项数与多项式的项数相同；
3. 用多项式的每一项除以单项式时，包括每一项的符号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用多项式除以单项式法则进行计算

提分·秘诀

特别警示

多项式除以单项式时，多项式里的每一项与单项式相除时，要逐项相除，不能漏项，并且要注意符号的变化.

例 2 计算：

（1）$(8a^3-2a^2+6a)\div(-2a)$；

（2）$\left(\frac{2}{3}a^5b^8-2a^2b^6\right)\div\frac{1}{3}ab^3$.

解题秘方：先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

解：（1）$(8a^3-2a^2+6a)\div(-2a)$

$=8a^3\div(-2a)+(-2a^2)\div(-2a)+6a\div(-2a)$

$=-4a^2+a-3$；

（2）$\left(\frac{2}{3}a^5b^8-2a^2b^6\right)\div\frac{1}{3}ab^3$

$=\frac{2}{3}a^5b^8\div\frac{1}{3}ab^3-2a^2b^6\div\frac{1}{3}ab^3$

$=2a^4b^5-6ab^3$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用整式的乘除运算进行化简求值

挑战·高分

题型 1：整体代入在化简求值中的应用

例 3 已知 $2a-b=6$，求 $[(a^2+b^2)+2b(a-b)-(a-b)^2]\div4b$ 的值.

解题秘方：先将待求式子化简为含 $2a-b$ 的形式，再将 $2a-b$ 看成一个整体代入求值.

解：$[(a^2+b^2)+2b(a-b)-(a-b)^2]\div4b=(a^2+b^2+2ab-2b^2-a^2+2ab-b^2)\div4b=(-2b^2+4ab)\div4b=-\frac{1}{2}b+a=\frac{1}{2}(2a-b)$.

当 $2a-b=6$ 时，原式 $=\frac{1}{2}\times6=3$.

另解

因为 $2a-b=6$，

所以 $b=2a-6$.

所以，原式 $=[a^2+b^2+2ab-2b^2-(a^2-2ab+b^2)]\div4b$

$=(-2b^2+4ab)\div4b$

$=-\frac{1}{2}b+a$

$=-\frac{1}{2}(2a-6)+a$

$=3$.

题型 2：挖掘条件代入在化简求值中的应用

例 4 已知 $(a-1)^2+|b+1|=0$，求 $(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a-2b)(b-2a)$ 的值.

解题秘方：先根据“若两个非负数的和为 0，则这两个非负数同时为 0”求出 a，b 的值，再把待求式子化简后代入求值.

解：因为 $(a-1)^2+|b+1|=0$，所以 $a-1=0$，$b+1=0$，

解得 $a=1$，$b=-1$.

$(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a-2b)(b-2a)$

$=a^2-2ab-b^2-(ab-2a^2-2b^2+4ab)$

$=3a^2-7ab+b^2$.

当 $a=1$，$b=-1$ 时，原式 $=3\times1^2-7\times1\times(-1)+(-1)^2=11$.

详解

因为 $(a-1)^2\geqslant0$，

$|b+1|\geqslant0$，

$(a-1)^2+|b+1|=0$，

所以 $(a-1)^2=0$，

$|b+1|=0$，

所以 $a-1=0$，$b+1=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用整式的乘除法求字母的值

题型 1：被除式、除式及商式的关系在求未知项中的应用

例 5 某天数学课上，老师讲了整式的除法运算．放学后，王华回到家拿出课堂笔记，认真地复习课上老师讲的内容．他突然发现一道整式除法运算题：$(21x^4y^3-\blacksquare+7x^2y^2)\div(-7x^2y)=\blacksquare+5xy-y$，被除式的第二项被钢笔水弄污了，商式的第一项也被钢笔水弄污了．请通过计算确定这两处被弄污的内容．

解题秘方：多项式除以单项式，要把多项式的每一项分别除以单项式，因此可以对比被除式和商式，找到对应的项，利用除法关系解答．

解：因为 $21x^4y^3\div(-7x^2y)=-3x^2y^2$，而商式中未弄污的部分没有这一项，

所以商式中被弄污的内容就是 $-3x^2y^2$．

因为 $(5xy-y)\cdot(-7x^2y)=-35x^3y^2+7x^2y^2$，

所以被除式中被弄污的内容为 $35x^3y^2$．

题型 2：待定系数法在关于多项式整除问题中求字母的值中的应用

例 6 已知多项式 x^3+mx^2+nx-2 能被多项式 x^2+3x-2 整除，求 m，n 的值．

解题秘方：由被除式与除式次数最高的项，得商式中次数最高的项，设出商式，根据“被除式 = 除式 × 商式”列式，通过计算对比系数得解．

解：设 $x^3+mx^2+nx-2=(x^2+3x-2)(x+a)$，

整理得 $x^3+mx^2+nx-2=x^3+(a+3)x^2+(3a-2)x-2a$，

所以 $\begin{cases}m=a+3,\\n=3a-2,\\-2=-2a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\n=1,\\a=1.\end{cases}$

故 $m=4$，$n=1$．

教你一招：求解多项式整除问题时，可先根据整除的意义设出商式，然后将除式与商式相乘并展开，根据多项式对应项的系数相等建立方程（组）求解．

挑战·高分

解法提醒

多项式除以单项式，结果的项数和多项式的项数相同，并且结果里各项分别是多项式里各项除以单项式的商，对比被除式和商式，可找出被除式和商式里对应的项，从而确定所求的项．

解法提醒

被除式中次数最高的项是 x^3，除式中次数最高的项是 x^2，则商式中次数最高的项是 x，故可设商式为 $x+a$．

详解

$(x^2+3x-2)(x+a)$

$=x^2\cdot x+x^2\cdot a+3x\cdot x+3x\cdot a-2x-2a$

$=x^3+ax^2+3x^2+3ax-2x-2a$

$=x^3+(a+3)x^2+(3a-2)x-2a$．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 整式的除法这一节主要学习单项式除以单项式、多项式除以单项式，中考中多与整式的加法、减法、乘法、乘方等综合考查，有时也会与代数式的运算相结合，以选择题或填空题的形式出现．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 单项式除以单项式

例 7 [中考·宜昌]下列计算正确的是(　　)

A. $x^2+x^2=x^4$　　B. $x^3\cdot x^2=x^6$

C. $2x^4\div x^2=2x^2$　　D. $(3x)^2=6x^2$

试题评析：本题考查了合并同类项、同底数幂的乘法、单项式除以单项式和积的乘方，解决此类问题需要注意分清整式运算的类型，同时要掌握相应的运算法则.

解：$x^2+x^2=2x^2$，选项 A 错误；$x^3\cdot x^2=x^{3+2}=x^5$，选项 B 错误；$2x^4\div x^2=2x^{4-2}=2x^2$，选项 C 正确；$(3x)^2=3^2\cdot x^2=9x^2$，选项 D 错误.

答案：C

冲刺·满分

考法点评

利用幂的运算法则进行计算时，要注意区分加法运算与乘法运算之间，同底数幂的乘法与除法之间，幂的乘方与同底数幂的乘法之间的指数变化情况.

考法 2 多项式除以单项式

例 8 [中考·咸宁改编]化简求值：$(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a-b)^2$. 其中 $b=-2$.

试题评析：本题主要考查整式的混合运算，考查了完全平方公式及多项式除以单项式，解题的关键是正确运用运算法则进行计算.

解：原式 $=a^2-2ab-b^2-a^2+2ab-b^2=-2b^2$.

当 $b=-2$ 时，原式 $=-2b^2=-2\times(-2)^2=-8$.

方法点拨

运用整式的乘除法化简求值时，首先要正确运用法则进行化简，然后将已知条件代入化简后的式子求值.

两年模拟兵法

☞答案见 227 页

1. [中考·十堰]下列计算正确的是(　　)

A. $2x+3y=5xy$　　B. $(-2x^2)^3=-6x^6$

C. $3y^2\cdot(-y)=-3y^2$　　D. $6y^2\div 2y=3y$

2. 下列计算正确的是(　　)

A. $-\frac{1}{2}x^3y^3\div\frac{1}{3}xy=-\frac{2}{3}x^2y^2$

B. $6a^3b^6\div 2ab^3=3a^3b^2$

C. $-a^4b^5c\div a^3b^4c=-ab$

D. $x^3y^2z\div\frac{1}{2}x^2y=2xy$

3. 已知 $5a^3b^m\div\frac{2}{5}a^nb^2=\frac{25}{2}b^2$，则 m，n 的值分别为(　　)

A. $m=4$，$n=3$　　B. $m=4$，$n=1$

C. $m=1$，$n=3$　　D. $m=2$，$n=3$

4. 填空：$8a^6b^4c\div(\quad)=4a^2b^2$.

5. 一个长方形的面积是 xy^2-x^2y，且长为 xy，则这个长方形的宽是_____.

6. 计算：

(1) $(3a^4-6a^3+9a^2)\div\left(-\frac{1}{3}a^2\right)$;

(2) $[(a+b)^2-(a-b)^2]\div(-4ab)$;

(3) $(3a^{n+1}+6a^{n+2}-3a^{n-1})\div 3a^{n-1}$.

7. 有一长方体水箱可装 $(3a^3b^6+6a^4b^5)\ m^3$ 的水，已知水箱高为 a^2b^3 m，求水箱的占地面积(水箱壁的厚度忽略不计).

8. 先化简，再求值：$(x+y)(x-y)-(4x^3y-8xy^3)\div 2xy$，其中 $x=-1$，$y=-\frac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

恒等变形在整式运算中的应用

荣老师告诉你 把一个式子变换成另一个和它恒等的式子，叫做式子的恒等变形．整式的恒等变形主要依据整式的各种运算性质和法则，各种公式的正、逆应用等．

应用一 ▸ 运用面积法验证整式的恒等变形

例 1 ［中考·北京］如图 1 中的四边形均为长方形，根据图形，写出一个正确的等式：_____.

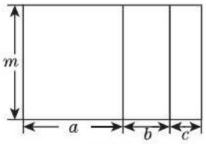


图 1

解题秘方：从图形的结构特征入手，找到一个面积之间的相等关系．

解：因为最大的长方形的长为 $a+b+c$，宽为 m，所以它的面积为 $m(a+b+c)$．

又因为最大的长方形的面积为三个小长方形的面积之和，三个小长方形的面积分别为 am，bm，cm.

所以 $m(a+b+c)=am+bm+cm$.

答案：$m(a+b+c)=am+bm+cm$.

方法点拨：用面积法写恒等式，即用两种不同的方式表示图形的面积．

应用二 ▸ 运用恒等变形求等式中待定字母的值

例 2 ［中考·吉林］若 $x^2-4x+5=(x-2)^2+m$，则 $m=$_____.

解题秘方：运用等式左右两边恒等的性质解决．

解：方法一 $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$，所以 $m=1$.

方法二 $(x-2)^2+m=x^2-4x+4+m$，

所以 $4+m=5$. 所以 $m=1$.

方法三 将 $x=2$ 代入等式中得，$4-8+5=m$，

所以 $m=1$.

答案：1

方法点拨：三种方法都体现了整式的恒等变形，整式的恒等变形既可以从等式的左边推到右边，也可以从右边推到左边，还可以直接代入任何值，等式都成立．

应用三 ▸ 运用恒等变形求式子的值

例 3 已知 $(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=16$，求 xy 的值．

解题秘方：运用完全平方公式的结构特征解题．

解：根据乘法公式知 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，

所以 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

所以 $4xy=25-16=9$. 所以 $xy=\frac{9}{4}$.

方法点拨：乘法公式本身就是整式的恒等变形，常见的乘法公式的变形有以下三个．

（1）$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;

（2）$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$;

（3）$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

应用四 ▸ 运用恒等变形进行说明

例 4 在三角形 ABC 中，两边长 a，b 满足 $a^2+b^2-4a-4b+8=0$，试说明三角形 ABC 为等腰三角形．

解题秘方：逆用完全平方公式，根据完全平方式的结构特征解决问题．

解：已知等式可变形为 $a^2-4a+4+b^2-4b+4=0$，

所以 $(a-2)^2+(b-2)^2=0$.

所以 $a=b=2$.

所以三角形 ABC 为等腰三角形．

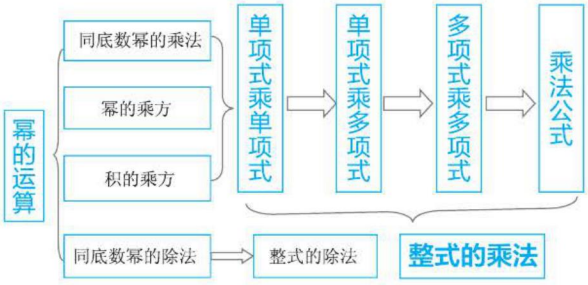
方法点拨：完全平方式是非负数三种类型中的一种，利用非负数的性质可以从一个等式中求多个字母的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **幂的运算法则**：（1）$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$（m，n 都是正整数）；（2）$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 都是正整数）；（3）$(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数）；（4）$a^m \div a^n=a^{m-n}$（$a \neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$）.
2. 整式的乘除法的实质是单项式的乘除法.
3. **平方差公式**：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

   完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
4. 一个数的负整数指数幂等于这个数的正整数指数幂的倒数，利用负整数指数幂的形式可以将一个绝对值小于 1 的数用科学记数法的形式表示出来.

知识方法专题

知识必学

专题一 幂的运算

链接中考» 幂的运算是整式乘除法的基石，主要包括同底数幂的乘除法、幂的乘方和积的乘方运算，中考中往往把几种运算放在一起考查，以选择题的形式出现.

例 1 [中考·梅州]下列计算正确的是(　　)

A. $x+x^2=x^3$　　B. $x^2 \cdot x^3=x^6$

C. $(x^3)^2=x^6$　　D. $x^9 \div x^3=x^3$

解题秘方：利用幂的各种运算法则计算.

解：因为 x 与 x^2 不是同类项，不能合并，所以选项 A 是错误的；

因为 $x^2 \cdot x^3=x^5$，所以选项 B 是错误的；

因为 $(x^3)^2=x^6$，所以选项 C 是正确的；

因为 $x^9 \div x^3=x^6$，所以选项 D 是错误的.

答案：C

方法点拨：幂的运算主要扣住两点：一是底数不变，二是指数的数量关系.

专题二 整式的乘除法运算

链接中考» 整式的乘除法混合运算的关键是扣住运算顺序和运算法则，在中考中是热门考点，考查形式多以化简求值题呈现，难度适中.

例 2 [中考·随州]先化简，再求值：$(2+a)(2-a)+a(a-5b)+3a^5b^3 \div (-a^2b)^2$，其中 $ab=-\frac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用整式的乘除法法则进行计算.

解：原式 $=(2+a)(2-a)+a(a-5b)+3a^5b^3\div a^4b^2=4-a^2+a^2-5ab+3ab=4-2ab$.

把 $ab=-\frac{1}{2}$ 代入得，原式 $=4+1=5$.

方法点拨：在整式混合运算中先乘方再乘除，最后加减. 整式加减的实质就是合并同类项.

专题三 乘法公式

链接中考» 运用乘法公式计算能提高运算速度及准确率，考查的形式也是化简求值，考查的难度适中，也是中考的热门考点.

例 3 [中考·河池]先化简，再求值：$(3-x)(3+x)+(x+1)^2$，其中 $x=2$.

解题秘方：先利用平方差公式与完全平方公式进行运算，再合并同类项进行化简，最后代入数值求解.

解：原式 $=9-x^2+x^2+2x+1=2x+10$，

当 $x=2$ 时，原式 $=2\times2+10=14$.

方法点拨：熟练掌握乘法公式与整式的运算法则是解决此题的关键. 初中数学中的乘法公式有平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

专题四 科学记数法

链接中考» 利用负整数指数幂的形式将一个绝对值小于1的正数用科学记数法的形式表示出来，一般这个数都是生活中出现的数，体现了数学在生活中的应用，是中考的热门考点，一般以选择题的形式出现.

例 4 [中考·邵阳]英国和新加坡研究人员制造出观测极限为 0.000 000 05 m 的光学显微镜（如图 1-1），其中 0.000 000 05 m 用科学记数法表示正确的是（　　）

A. 0.5×10^{-9} m　　B. 5×10^{-8} m

C. 5×10^{-9} m　　D. 5×10^{-7} m

解题秘方：利用科学记数法的表示方法表示提供的数据.



图 1-1

解：0.000 000 05 是绝对值小于1的数，这类数用科学记数法表示的方法是写成 $a\times10^{-n}$（$1\leqslant|a|<10$，n 为正整数）的形式，关键是确定 $-n$，先确定 n 的值，n 的值等于原数中左起第一个非 0 数字前 0 的个数（含整数数位上的 0）. 由于数 0.000 000 05，非 0 数字 5 前面共有 8 个 0，因此 $0.000\ 000\ 05=5\times10^{-8}$.

答案：B

方法点拨：把一个数写成 $a\times10^n$ 的形式（$1\leqslant|a|<10$，n 为非 0 整数），这种记数法称为科学记数法，其方法是

（1）确定 a，a 是大于或等于 1 且小于 10 的数；

（2）确定 n，当原数的绝对值大于等于 10 时，n 为正整数，n 等于原数的整数位数减 1；当原数的绝对值小于 1 时，n 为负整数，n 的绝对值等于原数中左起第一个非 0 数字前 0 的个数（含整数数位上的 0）.

方法必会

专题五 整体思想

专题解读» 整体思想作为重要的思想方法，在我们的解题过程中经常使用. 整体思想运用得当，能减少不必要的计算，从而能够提高解题效率，因而在处理数与式的运算、方程、几何计算方面有着广泛的应用. 比如在求式子的值时，如果题目中所给的条件式和待求式的某一部分（或全部）中含各字母的项存在一定的关系，就可以把条件式中这一部分看成一个整体，再把要求值的式子变形后将条件整体代入，这种求式子的值的方法称为整体代入法.

例 5 [中考·十堰]当 $x=1$ 时，$ax+b+1$ 的值为 -2，则 $(a+b-1)(1-a-b)$ 的值为（　　）

A. -16　　B. -8　　C. 8　　D. 16

解题秘方：通过观察可以发现，把 $x=1$ 代入 $ax+b+1=-2$，可以得到 $a+b$ 的值，然后运用整体

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

思想即可求解.

解：把 $x=1$ 代入 $ax+b+1=-2$，

可得 $a+b=-3$.

所以 $(a+b-1)(1-a-b)$

$=(-3-1)[1-(a+b)]$

$=-4\times[1-(-3)]$

$=-16$.

答案：A

专题六 分类讨论思想

专题解读≫所谓分类讨论思想，就是当要解决的问题包含两种或两种以上的可能情况时，则需要按不同的情况进行讨论来解决问题的一种思想方法.在运用分类讨论思想解题时，需要认真审题，全面考虑，做到分类标准统一，不重不漏.

例 6 二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式，求 k 的值.

解题秘方：在二次三项式 x^2-kx+9 中，x^2 和 9 分别是 x 和 3 的平方，由二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式可知，$-k$ 可能是正的，也可能是负的，故需要分两种情况讨论.

解：因为二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式，所以 $-kx=2x\times3$ 或 $-kx=-2x\times3$，解得 $k=-6$ 或 $k=6$.

方法点拨：本题运用了分类讨论思想，这是由完全平方式出现两数和或差的平方所决定的，因此要分两种情况讨论.

好题必解 ☞答案见 228 页

题型 1：幂的运算

1.（直接运用幂的运算法则）计算：

（1）$x\cdot x^7+x\cdot x+x^2\cdot x^6-3x^4\cdot x^4$；

（2）$2(-a^3)^4+3(-a^2)^6$；

（3）$-2^2(x^3)^2\cdot(x^2)^4-(x^2)^5\cdot(x^2)^2$；

（4）$a\cdot a^3\cdot a^4+(-a^2)^4+(-2a^4)^2$.

2.（逆用幂的各种运算法则）计算：

（1）已知 $10^m=3$，$10^n=2$，$10^p=4$，求 $10^{3m+2n-p}$ 的值.

（2）已知 $a=8^{14}$，$b=256^5$，$c=64^7$，试比较 a，b，c 的大小.

题型 2：整式的乘除法运算

3. 计算：

（1）$\left(-\frac{7}{6}a^3b\right)\cdot\frac{6}{5}abc$；

（2）$(-x)^9\div(-x)^2\div(-x)^3$；

（3）$6mn^2\cdot\left(2-\frac{1}{3}mn^4\right)+\left(-\frac{1}{2}mn^3\right)^2$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）$5x(x^2+2x+1)-(2x+3)(x-5)$.

4. 先化简，再求值：

（1）$\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2b^4\right)-(-a^3b^2)\cdot(-b^2)^2$，其中 $a=-\frac{1}{4}$，$b=4$；

（2）$(a+b)(a-2b)-(a+2b)(a-b)$，其中 $a=-2$，$b=\frac{2}{3}$；

（3）$\left(-\frac{1}{3}xy\right)^2\cdot[xy(2x-y)-2x(xy-y^2)]$，其中 $x=-\frac{3}{2}$，$y=-2$.

题型 3：乘法公式

5.（**运用公式求值**）先化简，再求值：

$(x+2y)^2-(x-2y)^2-(x+2y)(x-2y)-4y^2$，其中 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$.

6.（**运用公式计算**）计算：

（1）$200^2-400\times199+199^2$；

（2）$100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1$.

7.（**运用公式变形求值**）

（1）已知 $(x+y)^2=64$，$(x-y)^2=9$，求 xy 的值；

（2）已知 $(m-53)(m-47)=24$，求 $(m-53)^2+(m-47)^2$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章测试卷

☞答案见228页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下列运算正确的是（　　）

A.$a^3+a^3=a^6$　　B.$2(a+1)=2a+1$

C.$(ab)^2=a^2b^2$　　D.$a^6\div a^3=a^2$

2. 已知$a=2^{-2}$，$b=(\pi-1)^0$，$c=(-1)^3$，则a，b，c的大小关系是（　　）

A.$a>b>c$　　B.$b>a>c$

C.$c>a>b$　　D.$b>c>a$

3. 花粉的质量很小，一粒某种植物花粉的质量约为0.000 037 mg，已知1 g = 1 000 mg，那么0.000 037 mg可以用科学记数法表示为（　　）

A.3.7×10^{-5} g　　B.3.7×10^{-6} g

C.3.7×10^{-7} g　　D.3.7×10^{-8} g

4. 已知$x^2-2=y$，则$x(x-3y)+y(3x-1)-2$的值是（　　）

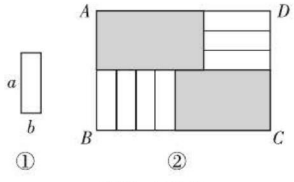
A.-2　　B.0　　C.2　　D.4

5. 若$(a+b)^2=(a-b)^2+A$，则A为（　　）

A.$2ab$　　B.$-2ab$

C.$4ab$　　D.$-4ab$

6. 7张如图①的长为a，宽为b（$a>b$）的小长方形纸片，按图②的方式不重叠地放在长方形$ABCD$内，未被覆盖的部分（两个长方形）用阴影表示，设左上角与右下角的阴影部分的面积的差为S，当BC的长度变化时，按照同样的放置方式，S始终保持不变，则a，b满足（　　）



（第6题）

A.$a=\frac{5}{2}b$　　B.$a=3b$

C.$a=\frac{7}{2}b$　　D.$a=4b$

7. 若$(x^2+3x+2)(x+a)$的结果中不含常数项，则a的值为（　　）

A.-2　　B.0　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{2}$

8. 定义：形如$a+bi$的数称为复数（其中a和b为实数，i为虚数单位，规定$i^2=-1$），a称为复数的实部，b称为复数的虚部，复数可以进行加减乘除等运算. 例如$(1+3i)^2=1^2+2\times1\times3i+(3i)^2=1+6i+9i^2=1+6i-9=-8+6i$，因此$(1+3i)^2$的实部是$-8$，虚部是6. 已知复数$(3-mi)^2$的虚部是12，则实部是（　　）

A.-6　　B.6　　C.5　　D.-5

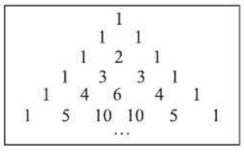
二、填空题（每题4分，共16分）

9. 已知$x=y+4$，则式子$x^2-2xy+y^2-25$的值为_____.

10. 若$ab=3$，$a-2b=5$，则a^2b-2ab^2的值是_____.

11. 若$6^a=5$，$6^b=8$，则$36^{a-b}=$_____.

12. [**中考·烟台**]南宋数学家杨辉在其著作《详解九章算法》中揭示了$(a+b)^n$（n为非负整数）展开式的项数及各项系数的有关规律如下，后人也将下表称为“杨辉三角”.



$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

…

则$(a+b)^9$展开式中所有项的系数和是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（10分）计算：

（1）$5x^2y\div\left(-\frac{1}{3}xy\right)\cdot(2xy^2)^2$；

（2）$[(a-2b)^2+(a-2b)(2b+a)-2a(2a-b)]\div 2a$.

14.（10分）用简便方法计算：

（1）108×92；

（2）$79^2+79\times 42+21^2$.

15.（10分）已知$xy=1$，求式子$-\frac{1}{3}x(xy^2+y+x^3y^4)$的值.

16.（10分）每个周末，冬冬都要到城郊爷爷家的花圃里去玩. 一次，爷爷给冬冬出了一道数学题，爷爷家的花圃呈长方形，长比宽多2 m，如果花圃的长和宽分别增加3 m，那么这个花圃的面积将增加39 m^2，你能帮冬冬算出花圃原来的长和宽各是多少米吗?

17.（12分）观察下列等式：

$12\times 231=132\times 21$，

$13\times 341=143\times 31$，

$23\times 352=253\times 32$，

$34\times 473=374\times 43$，

$62\times 286=682\times 26$，

…

以上每个等式中两边数字分别是对称的，且每个等式中组成两位数与三位数的数字之间具有相同的规律，我们称这类等式为“数字对称等式”.

（1）根据上述各式反映的规律填空，使式子成为“数字对称等式”：

① $52\times$_____$=$_____$\times 25$；

②_____$\times 396=693\times$_____.

（2）设这类等式左边两位数的十位数字为a，个位数字为b，且$2\leqslant a+b\leqslant 9$，写出表示“数字对称等式”的一般规律的式子（含$a$，$b$），并说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

探秘直线位置关系

探秘直线位置关系



第二章

相交线与平行线









核心考点

你将见到的

- 对顶角、余角、补角
- 垂线与平行线
- 直线平行的条件
- 平行线的性质
- 尺规作角

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 分析法
- 方程思想
- 综合法
- 转化思想
- 分离图形法
- 分类讨论思想
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 两条直线的位置关系

核心知识

- 相交线与平行线
- 对顶角
- 补角、余角
- 垂直及垂线

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 相交线与平行线

1. 在同一平面内，两条直线的位置关系有相交和平行两种.

2. 相交线

若两条直线只有一个公共点，我们称这两条直线为相交线. 如图2−1−1，直线 AB 与 CD 相交于点 O.

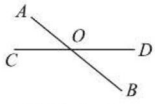


图 2−1−1

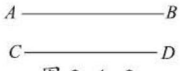


图 2−1−2

3. 平行线

在同一平面内，不相交的两条直线叫做平行线. 如图 2−1−2，直线 AB 与直线 CD 平行.

注意：平行线是指“两条直线”，而不是两条线段或射线. 线段或射线平行是指它们所在的直线平行.

拨考向▸利用相交线与平行线的定义识别

例 1 下列说法中正确的是（　　）

A. 不相交的两条直线是平行线

B. 在同一平面内，不相交的两条射线叫做平行线

C. 在同一平面内，两条直线不相交就重合

D. 在同一平面内，没有公共点的两条直线是平行线

解题秘方：紧扣相交线与平行线的定义进行识别

解：不在同一平面内的两条不相交的直线不一定是平行线，故 A 不正确；平行线是直线，故 B 不正确；在同一平面内，两条直线的位置关系只有相交和平行两种，故 C 不正确. 故选 D.

答案：D

提分·必记

特别解读

1. 平行线必须满足三个条件：（1）在同一平面内；（2）不相交；（3）都是直线. 要特别注意“在同一平面内”这一前提.
2. 判断两条线段、射线之间的位置关系就是判断它们所在直线的位置关系.
3. 在同一平面内，通过判断两条直线的交点个数来判断两条直线的位置关系. 若两条直线有一个交点，则相交；若没有交点，则平行.

提分·秘诀

方法点拨

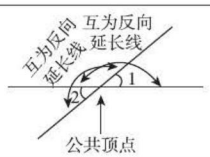
本题运用定义法判断两条线是不是平行线，依据定义，一看是否在同一平面内，二看有无交点，三看是否是两条直线. 只有这三点同时符合定义时才是平行线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸2 对顶角

1. 定义 两个角有相同的顶点，并且一个角的两边分别与另一个角的两边互为反向延长线，我们把这样的两个角叫做对顶角.

特别提醒：对顶角是成对出现的，指两个角之间的位置关系，一个角的对顶角只有一个.

示图	∠1和∠2互为对顶角	

2. 性质 对顶角相等.

特别提醒：（1）两个角互为对顶角，它们一定相等；

（2）相等的两个角不一定是对顶角.

拔考向▸利用对顶角的性质求角的度数

例2 如图2-1-3，直线AE与CD相交于点O，OC平分$\angle AOB$，

（1）请找出图中$\angle 3$的对顶角；

（2）若$\angle 3=25°$，求$\angle 1$的度数.

解题秘方：（1）根据对顶角的位置特征找对顶角；（2）根据对顶角的数量关系求未知角的度数.

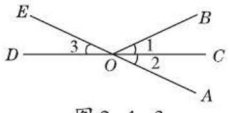


图2-1-3

解：（1）$\angle 3$的对顶角是$\angle 2$.

（2）由对顶角相等，得$\angle 2=\angle 3=25°$.

因为OC平分$\angle AOB$，所以$\angle 1=\angle 2=25°$.

方法点拨：在进行角的计算时，“对顶角相等”这个结论常常被用来将要求的角和特征相同的两个角转化成与已知条件相关的角来求解，即对顶角构建了一个已知条件和待求结论之间的“桥梁”.

点知识▸3 余角和补角

1. 补角 如果两个角的和是$180°$，那么称这两个角互为补角.

数学语言：若$\angle 1+\angle 2=180°$，就说$\angle 1$是$\angle 2$的补角，或$\angle 1$与$\angle 2$互为补角，如图2-1-4.

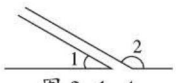


图2-1-4

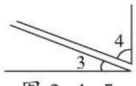


图2-1-5

2. 余角 如果两个角的和是$90°$，那么称这两个角互为余角.

数学语言：若$\angle 3+\angle 4=90°$，就说$\angle 3$是$\angle 4$的余角，或$\angle 3$与$\angle 4$互为余角，如图2-1-5.

3. 一个角的余角（或补角）可以有多个，但它们的度数是相等的，互余、互补是指具有一定数量关系的两个角.

提分·必记

特别解读

对顶角的位置关系和数量关系：

- 位置关系：有公共顶点，两边互为反向延长线.
- 数量关系：对顶角相等.

提分·秘诀

方法点拨

找两个角是否互为对顶角的方法：一看它们有没有公共顶点；二看这两个角的两边是否互为反向延长线，实质就是看这两个角是否是两条直线相交所形成的没有公共边的两个角.

提分·必记

特别解读

1. 互余、互补是指两个角之间的数量关系，它们是成对出现的.
2. 若两个角互余，则两个角都是锐角；若两个角互补，则两个角可能都是直角，也可能一个是锐角，另一个是钝角.
3. 互余、互补只与数量有关，而与位置无关，但若将直角分成两个角，则这两个角互余；若将平角分成两个角，则这两个角互补.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用余角和补角的定义解决问题

题型1：利用余角和补角的数量关系求角的度数

例3 已知一个角的补角比这个角的余角的3倍大10°，求这个角的度数.

解题秘方：紧扣余角和补角的定义结合数量关系列方程解答.

解：设这个角为x，则这个角的补角为$(180°-x)$，余角为$(90°-x)$.

由题意得$(180°-x)-3(90°-x)=10°$，

解得$x=50°$.

所以这个角为50°.

题型2：利用图形中角的位置关系找互余、互补的角

例4 如图2-1-6，点O为直线AB上一点，$\angle AOC=\angle DOE=90°$.

（1）图中互余的角有几对？各是哪些？

（2）图中互补的角有几对？各是哪些？

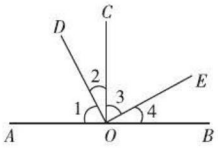


图2-1-6

解题秘方：由已知条件，结合互为余角、互为补角的定义解答.

解：（1）因为点O为直线AB上一点，

所以$\angle AOB=180°$（平角的定义）.

又因为$\angle AOC=\angle DOE=90°$，

所以$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 2+\angle 3=90°$，

$\angle 3+\angle 4=\angle AOB-\angle AOC=90°$，$\angle 1+\angle 4=\angle AOB-\angle DOE=90°$，

所以图中互余的角有4对，分别是$\angle 1$和$\angle 2$，$\angle 2$和$\angle 3$，$\angle 3$和$\angle 4$，$\angle 1$和$\angle 4$.

（2）因为$\angle AOB=180°$，所以$\angle 1+\angle BOD=180°$，$\angle 4+\angle AOE=180°$.

由（1）可知，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，

所以$\angle 3+\angle BOD=180°$，$\angle 2+\angle AOE=180°$.

又因为$\angle AOC+\angle BOC=180°$，$\angle AOC+\angle DOE=180°$，$\angle DOE+\angle BOC=180°$，

所以图中互补的角有7对，分别是$\angle 1$和$\angle BOD$，$\angle 4$和$\angle AOE$，$\angle 3$和$\angle BOD$，$\angle 2$和$\angle AOE$，$\angle AOC$和$\angle BOC$，$\angle AOC$和$\angle DOE$，$\angle DOE$和$\angle BOC$.

提分·秘诀

方法点拨

互余和互补揭示了两个角之间的数量关系：一个锐角α的余角为$90°-\alpha$，补角为$180°-\alpha$.

方法点拨

从图形中找互余或互补的角，可从两个方面入手：一方面从角的度数入手，和为90°互余，和为180°互补；另一方面从整体入手，将直角分成的两个角互余，将平角分成的两个角互补.

详解

因为$\angle 1+\angle 2=90°$，

$\angle 2+\angle 3=90°$，

所以$\angle 1=90°-\angle 2$，

$\angle 3=90°-\angle 2$.

所以$\angle 1=\angle 3$.

因为$\angle 2+\angle 3=90°$，

$\angle 3+\angle 4=90°$，

所以$\angle 2=90°-\angle 3$，

$\angle 4=90°-\angle 3$，

所以$\angle 2=\angle 4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 余角、补角的性质

1. 补角的性质

（1）同角的补角相等：

如果∠1+∠2=180°，∠1+∠3=180°，那么∠2=∠3；

（2）等角的补角相等：

如果∠1+∠2=180°，∠3+∠4=180°，且∠1=∠3，那么∠2=∠4.

2. 余角的性质

（1）同角的余角相等：

如果∠1+∠2=90°，∠1+∠3=90°，那么∠2=∠3；

（2）等角的余角相等：

如果∠1+∠2=90°，∠3+∠4=90°，且∠1=∠3，那么∠2=∠4.

提分·必记

特别提醒

1. 如果互补的两个角相等，那么这两个角都是直角.
2. “同角”指同一个角，“等角”指度数相等的角，同角一定是等角，但等角不一定是同角.
3. 余角、补角的性质是说明两个角相等的重要依据.

拔考向▶ 利用余角、补角的性质说明角的关系

题型1：补角的性质在找相等的角中的应用

例5 如图2-1-7，直线AB与$\angle COD$的两边OC，OD分别相交于点E，F，$\angle 1+\angle 2=180°$.找出图中与$\angle 2$相等的角，并说明理由.

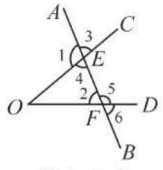


图2-1-7

解题秘方：先找出与∠1和∠2互补的角，然后利用互补的关系找出与∠2相等的角.

解：图中与∠2相等的角有∠3，∠4，∠6.理由如下：

因为∠1+∠3=180°，∠1+∠2=180°，

所以∠3=∠2.（同角的补角相等）

因为∠1+∠4=180°，∠1+∠2=180°，

所以∠4=∠2.（同角的补角相等）

因为∠2+∠5=180°，∠6+∠5=180°，

所以∠2=∠6.（同角的补角相等）

所以图中与∠2相等的角有∠3，∠4，∠6.

提分·秘诀

技巧点拨

“同角（或等角）的余角相等”“同角（或等角）的补角相等”的实质是等量代换.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：余角的性质在证明角平分线中的应用

例 6 如图 2-1-8，已知 O 是直线 AB 上的一点，OC 是一条射线，OD 平分 $\angle AOC$，$\angle DOE=90°$，则 OE 平分 $\angle BOC$ 吗？为什么？

解法提醒

说明某条射线是一个角的平分线就是说明该角被该射线分成的两个角相等，而余角和补角的性质是说明两个角相等的重要依据.

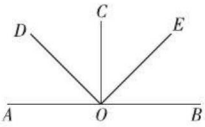


图 2-1-8

解题秘方：紧扣角平分线的定义和余角的性质说明两个角相等.

解：OE 平分 $\angle BOC$，理由如下：

因为 $\angle DOE=90°$，所以 $\angle DOC+\angle COE=90°$.

又因为 $\angle AOB=180°$，

所以 $\angle AOD+\angle BOE=90°$.

又因为 OD 平分 $\angle AOC$，

所以 $\angle AOD=\angle DOC$.

所以 $\angle COE=\angle BOE$.

所以 OE 平分 $\angle BOC$.

知识 5 垂线的定义及画法

提分·必记

1. 定义 两条直线相交成四个角，如果有一个角是直角，那么称这两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点叫做垂足.

特别提醒

垂直和垂线是两个不同的概念，**垂直是两条直线的位置关系**，是相交的一种特殊情况，特殊在夹角为直角，而垂线是一条直线.

特别解读：垂直的定义具有双重作用，已知直角得线垂直，已知线垂直得直角.

2. 表示符号 直线 AB 与直线 CD 互相垂直，记作“$AB\perp CD$”，读作“AB 垂直于 CD”.

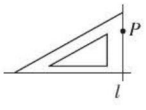
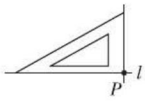

垂直的定义

3. 垂线的画法

经过一点（已知直线上或直线外），画已知直线的垂线的步骤.

特别提醒

画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线，垂足不一定在这条线段或射线上，可能在线段的延长线上或射线的反向延长线上.

步骤	内容	示图
一落	让三角尺的一条直角边落在已知直线上，使其与已知直线重合	过点 P 作直线 l 的垂线.
二移	沿已知直线移动三角尺，使其另一条直角边经过已知点	 点 P 在直线 l 外
三画	沿此直角边画直线，则这条直线就是已知直线的垂线	 点 P 在直线 l 上

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用垂直的定义解决问题

题型1：利用垂直的定义求角的度数

例7 如图2-1-9，直线AB，CD相交于点O，$OE \perp AB$于点O，且$\angle COE=40°$，求$\angle BOD$的度数.

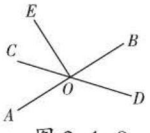


图2-1-9

解题秘方：利用垂直的定义及对顶角的性质将要求的角用已知角来表示.

解：方法一　因为$OE \perp AB$，所以$\angle AOE=90°$.

又因为$\angle AOE=\angle AOC+\angle COE$，$\angle COE=40°$，

所以$\angle AOC=90°-40°=50°$.

所以$\angle BOD=\angle AOC=50°$.

方法二　因为$OE \perp AB$，所以$\angle BOE=90°$.

又因为$\angle COD$是平角，

所以$\angle COE+\angle BOE+\angle BOD=180°$.

所以$\angle BOD=180°-90°-40°=50°$.

题型2：利用垂直的定义判断两条直线的位置关系

例8 将一张长方形纸片按如图2-1-10所示的方式折叠，EF，EG为折痕，判断EF与EG的位置关系.

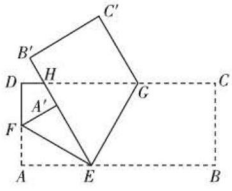


图2-1-10

解题秘方：利用折叠的性质求出两线的夹角，根据夹角的度数判断两条直线的位置关系.

解：因为三角形$A'EF$是由三角形AEF折叠得到的，四边形$B'EGC'$是由四边形$BEGC$折叠得到的，

所以$\angle AEF=\angle A'EF$，$\angle BEG=\angle B'EG$.

所以$\angle A'EF=\frac{1}{2}\angle AEA'$，$\angle A'EG=\frac{1}{2}\angle A'EB$.

所以$\angle FEG=\angle A'EF+\angle A'EG=\frac{1}{2}\angle AEA'+\frac{1}{2}\angle A'EB=\frac{1}{2}(\angle AEA'+\angle A'EB)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

所以$EF \perp EG$.

提分·秘诀

解法提醒

两条直线互相垂直，所夹的四个角都等于90°，提供了四个角的度数，为从未知角向已知角转化创造了条件.

知识储备

折叠后，点A与点A'，点B与点B'，点C与点C'重合，所以三角形AEF与三角形$A'EF$大小、形状完全相同，四边形$BEGC$与四边形$B'EGC'$大小、形状完全相同，所以$\angle AEF=\angle A'EF$，$\angle BEG=\angle B'EG$.

结论归纳：邻补角的平分线互相垂直.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：利用垂线的画法画垂线

例 9 在图 2-1-11 中，分别过点 P 作 AB 的垂线．

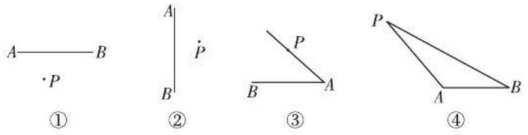


图 2-1-11

解题秘方：利用三角尺和直尺根据画垂线的步骤进行操作．

解：如图 2-1-12.

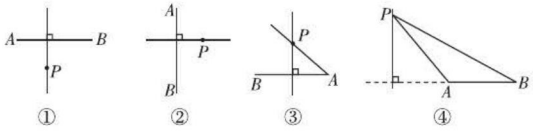


图 2-1-12

解法提醒

画垂线时是画实线，如需要延长线段或反向延长射线，则要用虚线延长．

点知识 6 垂线的性质

提分·必记

特别提醒

1. 性质 1 中隐含两个关键条件：一是“同一平面内”，二是过一点，这一点可以在直线上也可以在直线外．
2. 垂线是一条直线，长度不可度量，而垂线段是一条线段，长度可度量．

1. 垂线的性质

（1）**性质 1**：平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直．

（2）**性质 2**：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短．

（3）**垂线、垂直与垂线段之间的区别与联系**

①区别：垂线是一条与已知直线垂直的直线；垂直是两条直线之间的位置关系；垂线段是一条与已知直线垂直的线段．

垂线的性质

②联系：垂线段所在的直线是已知直线的垂线；垂线段所在的直线与已知直线垂直．

2. 点到直线的距离 从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离．

示意图

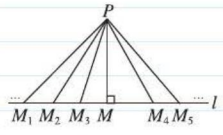


图 2-1-13

如图 2-1-13，点 P 到直线 l 的距离为 PM 的长．

（1）**垂线段与点到直线的距离的区别**：垂线段是一条线段，而点到直线的距离是一个数量，是垂线段的长度．

（2）**点到直线的距离与两点间的距离的区别**．

	两点间的距离	点到直线的距离
定义	连接两点的线段的长度	直线外一点到这条直线的垂线段的长度
性质	两点之间，线段最短	垂线段最短

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用垂线段的长度解决问题

例 10 （1）如图 2-1-14，在三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D. 若 $AC=4$ cm，$BC=3$ cm，$AB=5$ cm，则点 A 到直线 BC 的距离为_____cm，点 B 到直线 AC 的距离为____cm，点 C 到直线 AB 的距离为_____cm.

（2）点 P 为直线 m 外一点，点 A，B，C 为直线 m 上三点，$PA=4$ cm，$PB=5$ cm，$PC=2$ cm，则点 P 到直线 m 的距离（　　）

A. 等于 4 cm　　B. 等于 2 cm

C. 小于 2 cm　　D. 不大于 2 cm

解题秘方：根据点到直线的距离的定义，找出垂线段.

解：（1）根据点到直线的距离的定义可知，

点 A 到直线 BC 的距离是线段 AC 的长，

点 B 到直线 AC 的距离是线段 BC 的长，

点 C 到直线 AB 的距离是线段 CD 的长.

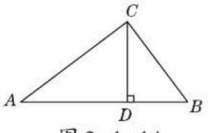


图 2-1-14

因为三角形 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，所以 $AC\cdot BC=AB\cdot CD$，进而可得 $CD=2.4$ cm.

（2）点到直线的距离是该点到这条直线的垂线段的长度，而垂线段是该点与直线上各点的连线中最短的. 从条件看，PC 是三条线段中最短的，但不一定是所有连线中最短的，所以点 P 到直线 m 的距离应该是不大于 2 cm.

答案：（1）4；3；2.4

（2）D

提分·秘诀

解法提醒

1. 求点到直线的距离关键就是找准垂线段；虽然垂线段最短，但不是在给出的线段中最短的那条就是垂线段.
2. 直角三角形中斜边上的高可以通过“面积法”来求，即两直角边的乘积等于斜边乘斜边上的高.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶[1] 利用定义法探究两个角之间的关系

例 11 如图 2-1-15，把一张长方形纸片的一角任意折向长方形内，使点 B 落在点 B' 的位置，折痕为 EF，再把 CF 折叠，使点 C 落在点 C' 的位置，折痕为 GF，如果 $C'F$ 与 FB' 在同一条直线上，请你判断 $\angle GFC'$ 与 $\angle EFB'$ 的关系，并说明理由.

解题秘方：根据折叠图形的特点，可知折痕 FE 平分 $\angle BFB'$，折痕 FG 平分 $\angle CFC'$. 因为 $\angle BFB'$ 与 $\angle CFC'$ 互补，所以可求得 $\angle EFG$ 的度数，并由此判断 $\angle GFC'$ 与 $\angle EFB'$ 的关系.

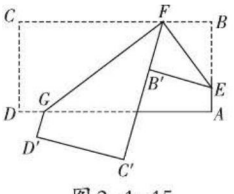


图 2-1-15

挑战·高分

方法点拨

本题的解题方法主要利用了“一个特点”“三个概念”，“一个特点”是指折叠图形中折痕的特点（即角平分线）；“三个概念”分别是指角平分线的概念、互为余角的概念和互为补角的概念.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：∠ GFC' 与∠ EFB' 互为余角，理由如下：

根据折叠的方法及特点可知，FE 是∠ BFB' 的平分线，FG 是∠ CFC' 的平分线，

所以∠ $EFB'=\frac{1}{2}$∠ BFB'，∠ $GFC'=\frac{1}{2}$∠ CFC'.

因为∠ BFC=180°，

所以∠ EFG=∠ GFC'+∠ $EFB'=\frac{1}{2}$(∠ CFC'+∠ BFB')=$\frac{1}{2}$∠ $CFB=\frac{1}{2}\times180°=90°$.

所以∠ GFC' 与∠ EFB' 互为余角.

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想解垂直中求角的问题

挑战·高分

例 12 已知直线 AB 与 CD 相交于点 O，OE 平分∠ AOC，射线 $OF\perp CD$ 于点 O，且∠ BOF=32°，求∠ COE 的度数.

解题秘方：根据可能出现的情况进行分类画图，结合相交线的相关性质进行解答.

解：分两种情况讨论：

（1）如图 2−1−16.

易知∠ AOC+∠ COF+∠ BOF=180°.

因为 $OF\perp CD$，所以∠ COF=90°.

因为∠ BOF=32°，所以∠ AOC=180°−90°−32°=58°.

又因为 OE 平分∠ AOC，所以∠ $COE=\frac{1}{2}$∠ AOC=29°.

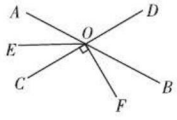


图 2−1−16

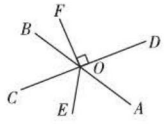


图 2−1−17

（2）如图 2−1−17.

因为 $OF\perp CD$，所以∠ FOD=90°.

因为∠ BOF=32°，

所以∠ BOD=∠ BOF+∠ FOD=32°+90°=122°.

因为∠ AOC=∠ BOD，所以∠ AOC=122°.

因为 OE 平分∠ AOC，

所以∠ $COE=\frac{1}{2}$∠ $AOC=\frac{1}{2}\times122°=61°$.

综上所述，∠ COE 是 29° 或 61°.

方法提醒

本题用到了分类讨论思想.由于题目中未给出图形，不能确定∠AOC的大小，因此解题时需要分类讨论所有可能出现的情况：先根据条件画出图形，然后利用角的和差关系求出角的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用分段法解说理问题

挑战·高分

例13 如图2-1-18，一辆汽车在平直的公路AB上由A向B行驶，M，N分别是位于公路AB两侧的村庄.

（1）设汽车行驶到公路AB上的点P位置时，距离村庄M最近；行驶到点Q位置时，距离村庄N最近.请在图中的公路AB上分别画出点P，Q的位置（保留作图痕迹）.

（2）当汽车从A出发向B行驶时，在公路AB的哪一段上距离M，N两村庄都越来越近？在哪一段上距离村庄N越来越近，而距离村庄M却越来越远？（分别用文字表述你的结论，不必说明理由）

解法提醒

过一点画已知直线的垂线，只能画一条，要找直线外一点到直线的距离，就必须作垂线.

解题秘方：先利用作垂线对公路进行分段，然后根据“垂线段最短”判断距离的变化情况.

解：（1）如图2-1-18，过点M作$MP\perp AB$，垂足为P，过点N作$NQ\perp AB$，垂足为Q，则点P，Q即为所求.

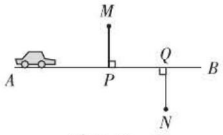


图2-1-18

（2）当汽车从A向B行驶时，在AP段上距离M，N两村庄都越来越近；在PQ段上距离村庄N越来越近，而距离村庄M却越来越远.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

对顶角，角的互补、互余，垂直的概念是几何中最基础的知识，是以后学习平行、全等、相似及圆等必不可少的一个知识点，在中考中以综合题的形式考查时，难度较大，以其他题型考查时难度较低.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用相交线的相关概念求角的度数

例14 [中考·南通]如图2-1-19，直线AB与CD相交于点O，$OE\perp AB$，$\angle COE=60°$，则$\angle BOD$等于_____.

思路点拨

先根据垂线的定义可得$\angle AOE$的度数，再根据$\angle COE$的度数可得$\angle AOC$的度数，最后根据对顶角相等可得答案.

试题评析：本题考查垂线的性质，解题的关键是能根据两条直线垂直得到夹角为$90°$.

解：因为$OE\perp AB$，所以$\angle AOE=90°$，

所以$\angle AOC=\angle AOE-\angle COE=90°-60°=30°$.

所以$\angle BOD=\angle AOC=30°$.

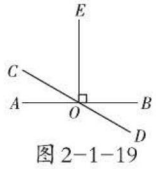


图2-1-19

答案：$30°$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 对顶角的识别

例 15 [中考·铜仁]如图 2-1-20，∠1 与∠2 是对顶角的是(　　)

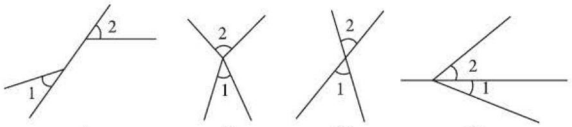


图 2-1-20

试题评析：本题考查对顶角的识别，解题的关键是抓住互为对顶角的两个角的特征.

解：判断两个角是不是对顶角，要紧扣对顶角的定义.

A 选项中∠1 和∠2 的顶点不同；

B 选项中∠1 和∠2 的两边都不互为反向延长线；

C 选项中∠1 和∠2 符合对顶角的定义；

D 选项中∠1 和∠2 有一条公共边.

答案：C

解法提醒

判断两个角是否互为对顶角，实质就是看这两个角是否是两条直线相交所形成的没有公共边的两个角.

考法 3 利用点到直线的距离的定义判断点到直线的距离

例 16 [中考·北京]如图 2-1-21，点 P 到直线 l 的距离是(　　)

A. 线段 PA 的长度　　B. 线段 PB 的长度

C. 线段 PC 的长度　　D. 线段 PD 的长度

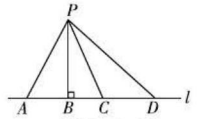


图 2-1-21

试题评析：本题考查了点到直线的距离，解题的关键是能从图形的角度识别出垂线段，能从语言的角度理解点到直线的距离的实质是指点到直线的垂线段的长度.

答案：B

解法提醒

由图中的标注可知，PB 是直线 l 外一点 P 到直线 l 的垂线段，根据点到直线的距离的定义可知，线段 PB 的长度就是点 P 到直线 l 的距离.

考法 4 利用三角尺的特征探究两个角之间的关系

例 17 [中考·德州]如图 2-1-22，将一副三角尺按不同的位置摆放，下列方式中∠α 与∠β 互余的是(　　)

A. 图①　　B. 图②　　C. 图③　　D. 图④

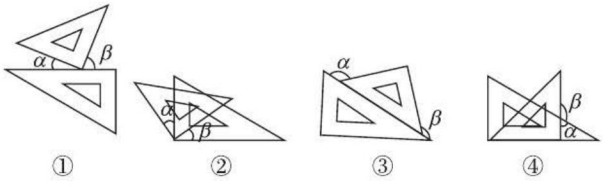


图 2-1-22

思路点拨

- 在探究三角尺中的有关角的关系时，要充分利用三角尺中隐含的 90°，60°，45°，30° 特殊角.
- 根据平角的定义，同角的余角相等，等角的补角相等和邻补角的定义对各图分析判断即可得解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了余角和补角，是基础题，熟记概念与性质是解题的关键.

解：图①，$\angle\alpha+\angle\beta=180°-90°=90°$，互余；

图②，根据同角的余角相等，得$\angle\alpha=\angle\beta$；

图③，根据等角的补角相等，得$\angle\alpha=\angle\beta$；

图④，$\angle\alpha+\angle\beta=180°$，互补.

故选 A.

答案：A

特别提醒

不管两个角的位置如何，只要两个角的和等于 90°，这两个角就互余；只要两个角的和等于 180°，这两个角就互补.

两年模拟兵法

答案见 229 页

1. [中考·湖州]已知$\angle\alpha=60°32'$，则$\angle\alpha$的余角是（　　）

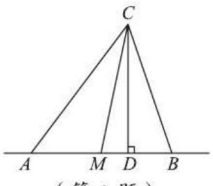
A.29° 28′　　B.29° 68′

C.119° 28′　　D.119° 68′

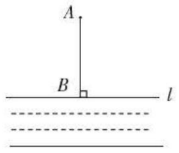
2. [中考·毕节]如图，在三角形 ABC 中，CD 是 AB 边上的高，CM 是 AB 边上的中线，点 C 到边 AB 所在直线的距离是（　　）

A. 线段 CA 的长度　　B. 线段 CM 的长度

C. 线段 CD 的长度　　D. 线段 CB 的长度



（第 2 题）



（第 3 题）

3. [模拟·黔南州]如图，计划把河水引到水池 A 中，先作 $AB\perp l$，垂足为 B，然后沿 AB 开渠，能使所开的渠道最短，这样设计的依据是（　　）

A. 两点之间，线段最短

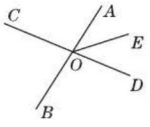
B. 垂线段最短

C. 过一点只能作一条直线

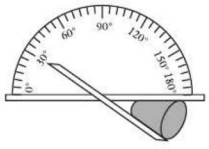
D. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

4. [中考·淮安]如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OE 平分$\angle AOD$，若$\angle BOC=80°$，则$\angle AOE$是（　　）

A.40°　　B.50°　　C.80°　　D.100°



（第 4 题）



（第 6 题）

5. 点 P 为直线 m 外一点，点 A，B，C 为直线 m 上三点，$PA=7$ cm，$PB=8$ cm，$PC=5$ cm，则点 P 到直线 m 的距离（　　）

A. 等于 7 cm　　B. 等于 5 cm

C. 小于 5 cm　　D. 不大于 5 cm

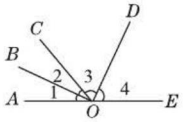
6. [中考·吉林]如图是对顶角量角器，用它测量角的原理是_____.

7. 如图，点 A，O，E 在同一条直线上，OB，OC，OD 都是射线，$\angle1=\angle2$，$\angle1$与$\angle4$互为余角.

（1）$\angle2$与$\angle3$有何关系？请说明理由.

（2）$\angle3$与$\angle4$有何关系？请说明理由.

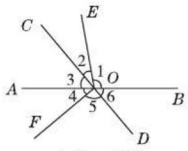
（3）说明$\angle3$的补角是$\angle AOD$.



（第 7 题）

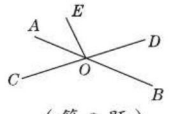
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle FOC=90°$，$\angle 1=100°$，$\angle 2=30°$，求 $\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$ 的度数.



（第 8 题）

9. [中考·黄冈]如图，已知直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分 $\angle COE$，$\angle COE:\angle EOD=4:5$，求 $\angle BOD$ 的度数.



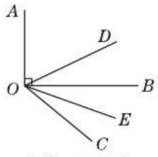
（第 9 题）

10. 如图，OD 平分 $\angle AOC$，OE 平分 $\angle BOC$，$OA\perp OB$.

（1）当 $\angle BOC=30°$ 时，$\angle DOE=$_____；

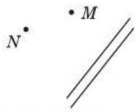
当 $\angle BOC=60°$ 时，$\angle DOE=$_____；

（2）通过上面的计算，猜想 $\angle DOE$ 与 $\angle AOB$ 有什么数量关系，并说明理由.



（第 10 题）

11. 如图，小河同侧有 M，N 两个村子. 如果小丽要从 N 村到 M 村去，怎样走最近？如果小丽要从 N 村直接到河边去，怎样走最近？如果小丽要从 N 村先到 M 村再到河边，怎样走最近？分别就上述情况画出路线图，并说明理由.

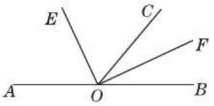


（第 11 题）

12. 如图，点 O 为直线 AB 上一点，OC 为一条射线，OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$.

（1）若 $\angle BOC=50°$，试探究 OE 与 OF 的位置关系，并说明理由；

（2）若 $\angle BOC$ 为任意角 α（$0°<\alpha<180°$），（1）中 OE 与 OF 的位置关系是否仍然成立？请说明理由. 由此你发现了什么规律？ [导学号 7876572]



（第 12 题）

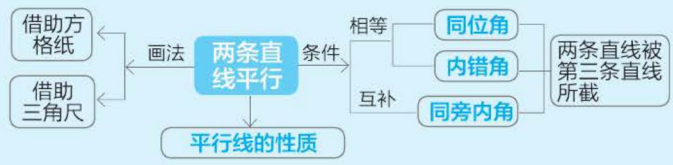
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 探索直线平行的条件

核心知识

- 三线八角
- 直线平行的条件
- 平行线的画法
- 平行线的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同位角

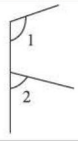
1. 定义 两条直线被第三条直线所截，得到的八个角（简称“三线八角”）中，两个角分别在两条直线的同一方，并且都在第三条直线的同侧，具有这种位置关系的一对角叫做同位角.

特别提醒：

（1）同位角指的是两个角之间的位置关系，不是大小关系；

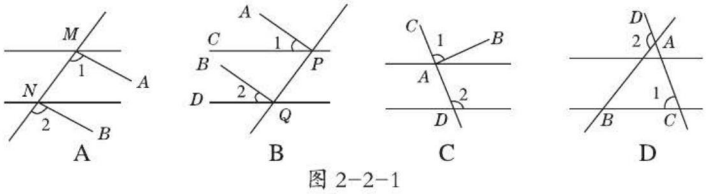
（2）在“三线八角”中，有 4 对同位角.

2. 位置特征

角的名称	位置特征	基本图形	图形的结构特征
同位角	在截线同侧，在两条被截直线同一方		形如字母“F”（或倒置、反置、旋转）

拨考向 利用两个角的位置关系识别同位角

例 1 如图 2-2-1 所示的四个图形中，∠1 和∠2 不是同位角的是（　　）



A　　B　　C　　D

图 2-2-1

解题秘方： 根据同位角的位置特征进行识别.

解： 根据同位角的定义，找出“三线”之后再看是否为“F”形即可判断.

选项 B 中的∠1 与∠2 由四条线构成，分别为 PA，PC，QB，QD，不满足“三线”的条件，故选项 B 中的∠1 与∠2 不是同位角.

A，C，D 三个选项中的∠1，∠2 均满足同位角的条件，故选 B.

答案： B

提分·必记

特别解读

1. 同位角是成对出现的；
2. 同位角的顶点不是公共的；
3. “同”表示“相同”，“位”表示“位置”，“同位角”可理解为“相同位置的两个角”，两个同位角的位置关系具有同上、同左”、“同上、同右”、“同下、同左”、“同下、同右”的特征.

提分·秘诀

方法点拨

判断两个角是不是同位角的方法：首先要看这两个角是不是两条直线被第三条直线所截形成的，即是不是“三线八角”中的两角；其次看这两个角是不是具有不同的顶点；最后看这两个角的位置特征是否满足同位角的特征，即三线成“F”形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 平行线的判定方法 1

1. 方法 1 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简称为：同位角相等，两直线平行.

特别提醒：（1）构成同位角的两条直线不一定平行，只有形成的一对同位角相等，这两条直线才平行.

（2）“同位角相等，两直线平行”是通过两个同位角的大小关系（相等）推导出两直线的位置关系（平行）. 它是构建起角的大小关系与直线的位置关系的桥梁.

2. 表达方式 如图 2-2-2，

因为∠ 1= ∠ 2（已知），

所以 $a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

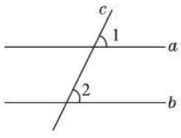


图 2-2-2

拔考向▶ 利用平行线的判定方法 1 判定两直线平行

例 2 如图 2-2-3，已知直线 AB，CD 被直线 EF 所截，∠ 1+ ∠ 2=180°，AB 与 CD 平行吗？请说明理由.

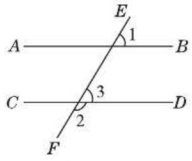


图 2-2-3

解题秘方：找出一对同位角，通过已知条件说明这对同位角相等，从而得出两条直线平行.

解： $AB \parallel CD$. 理由如下：

因为∠ 1+ ∠ 2=180°（已知），

∠ 2+ ∠ 3=180°（邻补角的定义），

所以∠ 1= ∠ 3（同角的补角相等）.

所以 $AB \parallel CD$（同位角相等，两直线平行）.

点知识▶ 3 平行线的画法

过直线外一点画已知直线的平行线的步骤

一落：把三角尺的一边落在已知直线上；

二靠：紧靠三角尺的另一边放一直尺；

三移：把三角尺沿着直尺移动使其经过已知点；

四画：沿三角尺的一边画直线. 此直线即为已知直线的平行线.

提分·必记

特别解读

判定两条直线平行的方法：

1. 直线间的位置关系

（1）同一平面内不相交的两条直线平行.

（2）平行于同一条直线的两条直线平行.

2. 角的大小关系

同位角相等，两直线平行.

提分·秘诀

解法提醒

判断两条直线是否平行，当题中涉及角的关系时，可通过找出这两条直线被第三条直线所截得到的一对同位角，并利用相关角的条件判断其是否相等，如果相等，那么这两条直线平行，否则不平行.

提分·必记

特别提醒

1. 经过直线上一点不可以作已知直线的平行线.

2. 画线段或射线的平行线是画它们所在直线的平行线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用平行线的画法作图

例3 根据语句，画出图形.AB，CD是两条直线，P是直线AB，CD外的一点，直线EF经过点P且与AB平行，直线MN经过点P且与CD垂直.

解题秘方：按照语句的要求，结合平行线的画法进行作图.

解：如图2-2-4.

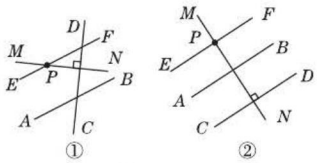


图2-2-4

提分·秘诀

解法提醒

根据语句画图时，若语句中没有交待清楚，要考虑各种可能出现的情况，如本题中AB，CD之间没有指明位置关系，所以画图时要考虑平行和相交两种情况.

点知识▶4 平行线的性质及其推论

1. 平行线的性质 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

特别提醒：平行线的性质的前提是“过直线外一点”，若点在直线上，则不可能有平行线.

2. 平行线的性质的推论 平行于同一条直线的两条直线平行.

表达方式：如果$a \parallel c$，$b \parallel c$，那么$a \parallel b$.

提分·必记

特别解读

“有且只有”强调这样的直线的存在性和唯一性.

拔考向▶利用平行线的性质及其推论说明直线的位置关系

例4 如图2-2-5，直线$a \parallel b$，$b \parallel c$，d与a相交于点M.

（1）试判断直线a，c的位置关系，并说明理由；

（2）判断c与d的位置关系，并说明理由.

解题秘方：根据平行线的性质及其推论判定两条直线的位置关系.

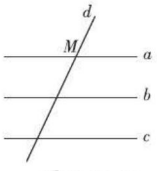


图2-2-5

解：（1）$a \parallel c$.

理由：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

（2）d与c相交.

理由：过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

提分·秘诀

方法点拨

判定两直线平行时，若涉及相交问题，则用平行线的定义判定两直线平行；若涉及三条直线的位置关系问题，则用平行线的性质的推论判定两直线平行.

点知识▶5 内错角、同旁内角

1. 内错角 两条直线被第三条直线所截，得到的八个角（简称“三线八角”）中，两个角都在两条直线之间，并且分别在第三条直线的两侧，具有这种位置关系的一对角叫做内错角.

特别提醒：

（1）内错角指的是两个角之间的位置关系，不是大小关系；

（2）在“三线八角”中，有2对内错角.

提分·必记

特别解读

1. 内错角是成对出现的，并且是由三条直线组成的，即一对边共线，另一对边不共线.
2. 内错角的顶点不是公共的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

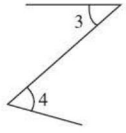
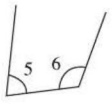
2. 同旁内角 两条直线被第三条直线所截，得到的八个角（简称“三线八角”）中，两个角都在两条直线之间，且它们都在第三条直线的同一旁，具有这种位置关系的一对角叫做同旁内角.

特别提醒：

（1）同旁内角指的是两个角之间的位置关系，不是大小关系；

（2）在“三线八角”中，有 2 对同旁内角.

3. 位置特征

角的名称	位置特征	基本图形	图形的结构特征
内错角	在截线两侧，在两条被截直线之间		形如字母“Z”（或倒置、反置、旋转）
同旁内角	在截线同侧，在两条被截直线之间		形如字母“U”（或倒置、反置、旋转）

核心考向▶利用两个角的位置关系识别内错角、同旁内角

题型 1：利用两个角的位置关系识别内错角

例 5 如图 2-2-6，试找出图中与∠ 2 是同位角、内错角的角.

解题秘方：根据同位角及内错角的位置特征进行识别.

解：在 AF 和 AG 被 DE 所截的这个基本图形中，根据同位角的位置特征，可知∠ 2 与∠ 6 是同位角. 根据内错角的位置特征，可知∠ 2 与∠ 8 是内错角.

故∠ 2 与∠ 6 是同位角，∠ 2 与∠ 8 是内错角.

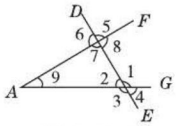


图 2-2-6

题型 2：利用两个角的位置关系识别同旁内角

例 6 如图 2-2-7，∠ B 与图中哪些角是同旁内角？分别指出它们是哪两条直线被哪条直线所截而成的同旁内角？

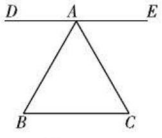


图 2-2-7

“三线八角”的识别方法

解题秘方：先画出∠ B 的两边，然后按照同旁内角的位置关系找出另一条直线，再确定另一个角.

解：∠ B 与∠ EAB 是直线 DE，BC 被直线 AB 所截而成的同旁内角；∠ B 与∠ CAB 是直线 AC，BC 被直线 AB 所截而成的同旁内角；∠ B 与∠ ACB 是直线 AB，AC 被直线 BC 所截而成的同旁内角.

3.“内”可理解为夹在两直线之间，“错”可理解为交错，即位于第三条直线的两侧. 内错角的位置关系具有“同内、异侧”的特征.

特别解读

1. 同旁内角是成对出现的.
2. 同旁内角的顶点不是公共的.
3.“同旁”即在第三条直线的同一旁，“内”表示夹在两直线之间. 同旁内角的位置关系具有“同内、同侧”的特征.

提分·秘诀

解法提醒

寻找已知角的同位角、内错角时，先要寻找基本图形，即弄清哪条直线是截线，哪两条直线是被截直线，然后利用同位角、内错角的位置特征去寻找符合该特征的角.

解法提醒

“三线八角”由三条直线构成，其中两个角（同位角、内错角或同旁内角）共线的一条边所在的直线是截线，两个角不共线的另一条边所在的两条直线是被截直线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 6 平行线的判定方法 2，3

1. 方法 2 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简称为：内错角相等，两直线平行.

特别解读：（1）“内错角相等，两直线平行”是利用“对顶角相等”和“同位角相等，两直线平行”推导得出的.

（2）利用“内错角相等”来确定“两直线平行”的关键是弄清这对内错角是哪两条直线被第三条直线所截得到的内错角，再说明这两条直线平行.

2. 表达方式 如图 2-2-8，

因为∠ 1= ∠ 2（已知），

所以 $a \parallel b$（内错角相等，两直线平行）.

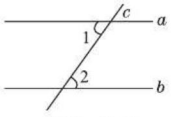


图 2-2-8

3. 方法 3 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

简称为：同旁内角互补，两直线平行.

特别解读：利用同旁内角说明两直线平行时，同旁内角之间的关系是互补，而不是相等.

4. 表达方式 如图 2-2-9，

因为∠ 1+ ∠ 2=180°（已知），

所以 $a \parallel b$（同旁内角互补，两直线平行）.

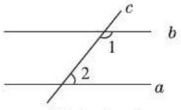


图 2-2-9

拔考向▶ 利用平行线的判定方法说明两直线平行

题型 1：利用平行线的判定方法 2 判定两直线平行

例 7 如图 2-2-10，已知 $\angle ADE=60°$，DF 平分 $\angle ADE$，$\angle 1=30°$，试说明 $DF \parallel BE$.

解题秘方：先找出 DF 和 BE 这两条被截线对应的一对内错角，然后利用条件说明这对内错角相等来说明这两条被截线平行.

解：因为 DF 平分 $\angle ADE$（已知），

所以 $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADE$（角平分线的定义）.

又因为 $\angle ADE=60°$（已知），

所以 $\angle EDF=30°$.

又因为 $\angle 1=30°$（已知），

所以 $\angle EDF=\angle 1$，

所以 $DF \parallel BE$（内错角相等，两直线平行）.

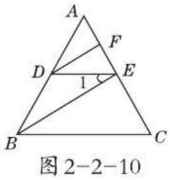


图 2-2-10

提分·必记

特别提醒

构成内错角的两条被截直线不一定平行，只有形成的一对内错角相等，这两条被截直线才平行.

方法点拨

用数量关系判定两直线平行的方法：在“三线八角”中，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补，只要其中一个结论成立，则利用对顶角、邻补角等相关知识，可得到另两个结论也成立.

提分·秘诀

解法提醒

要判定两直线平行，可以通过说明同位角相等或内错角相等来实现，至于到底选用同位角还是选用内错角，要看具体的题目，要尽可能与已知条件联系起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：利用平行线的判定方法 3 判定两直线平行

例 8 如图 2-2-11，直线 AE，CD 相交于点 O，如果 $\angle A=110°$，$\angle 1=70°$，就可以说明 $AB \parallel CD$，这是为什么？

解题秘方：找出 AB，CD 被 AE 所截形成的同旁内角，利用这两个角之间的数量关系来说明这两条直线平行.

解：因为 $\angle 1=\angle AOD$（对顶角相等），

$\angle 1=70°$，

所以 $\angle AOD=70°$.

又因为 $\angle A=110°$，

所以 $\angle A+\angle AOD=180°$（等式的性质）.

所以 $AB \parallel CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

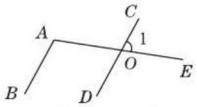


图 2-2-11

解法提醒

- 本题运用了数形结合思想. 平行线的判定是由角之间的数量关系到直线的位置关系的判定.
- 说明两直线平行时，一般都要结合对顶角、补角等知识来说明.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用定义法从复杂的图形中找位置角

例 9 如图 2-2-12，结合图形解答下列问题：

（1）$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是直线_____和直线_____被第三条直线_____所截而成的_____角；

（2）$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是直线____和直线_____被第三条直线_____所截而成的_____角；

（3）$\angle 4$ 与 $\angle A$ 是直线____和直线_____被第三条直线_____所截而成的_____角.

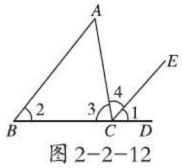


图 2-2-12

解题秘方：根据同位角、内错角和同旁内角的定义确定答案.

解：（1）$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 都有一条边在直线 BC 上，另一条边分别在直线 CE，AB 上，两角都在直线 BC 的上方，分别在直线 CE，AB 的右侧，所以 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是直线 CE 和直线 AB 被直线 BC 所截而成的同位角；

（2）$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 都有一条边在直线 BC 上，另一条边分别在直线 AB，AC 上，两角都在直线 BC 的上方，在直线 AB，AC 之间，所以 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是直线 AB 和直线 AC 被直线 BC 所截而成的同旁内角；

（3）$\angle 4$ 与 $\angle A$ 都有一条边在直线 AC 上，另一条边分别在直线 CE，AB 上，两角分别在直线 AC 的两侧，在直线 CE，AB 之间，所以 $\angle 4$ 与 $\angle A$ 是直线 CE 和直线 AB 被直线 AC 所截而成的内错角.

答案：（1）CE；AB；BC；同位

（2）AB；AC；BC；同旁内

（3）CE；AB；AC；内错

挑战·高分

方法点拨

识别同位角、内错角和同旁内角的常用方法可以归纳为以下三种.

1. 定义法：一看三线、二找截线、三查位置来分辨；
2. 分离图形法：把每一对角从图形中分离出来，观察分离出的角是否符合“F”“Z”“U”形特征；
3. 方位法：同位角可概括为同左、同上，同左、同下，同右、同上，同右、同下；内错角可概括为同内、异侧；同旁内角可概括为同内、同侧.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用逆向思维法探究有关平行的拐角问题

挑战·高分

例 10 如图 2-2-13 是一块弯曲的角铁，其中拐角∠ ABD=130°，现从点 C 处作第二次弯曲，使弯曲后的方向与 AB 的方向平行，求第二次拐角的度数.

特别提醒

解决拐角问题，关键是判断弯曲的方向与角度，当拐角弯曲的方向不明确时，要注意分类考虑.

解题秘方：由于第二次弯曲后的方向与 AB 的方向平行，故可根据平行线的判定方法，逆向找第二次拐角与第一次拐角之间的关系.

解：当在点 C 处向左弯曲时，如图 2-2-14 ①，要使 AB 与 CD 平行，则需∠ ABC+∠ BCD=180°.

因为∠ ABC=130°，

所以第二次拐角∠ BCD=50°.

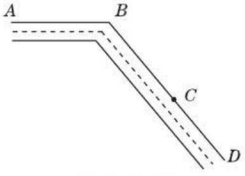


图 2-2-13

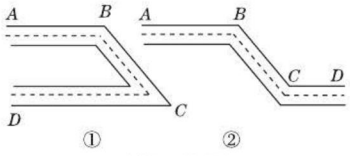


图 2-2-14

当在点 C 处向右弯曲时，如图 2-2-14 ②，要使 AB 与 CD 平行，则需∠ ABC=∠ BCD.

因为∠ ABC=130°，

所以第二次拐角∠ BCD=130°.

拔尖角度▸ 3 利用分析法、综合法寻找说明平行的方法

挑战·高分

例 11 如图 2-2-15，∠ B=∠ D，∠ CEF=∠ A，试问 CD 与 EF 平行吗？为什么？

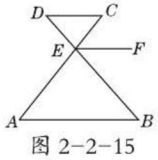


图 2-2-15

解题秘方：由已知∠ B=∠ D，∠ CEF=∠ A 很容易就能得出 AB // CD 及 EF // AB，再由平行线基本事实的推论就可得到 CD // EF.

解：CD // EF，理由如下：

因为∠ B=∠ D，

所以 AB // CD（内错角相等，两直线平行）.

因为∠ CEF=∠ A，

所以 EF // AB（同位角相等，两直线平行）.

所以 CD // EF（平行于同一条直线的两条直线平行）.

方法点拨

在说明直线平行时，经常采用以下三种方法.

1. **分析法**：由结论往前推，要说明这个结论成立需要什么样的条件，一直递推到已知条件为止；
2. **综合法**：由已知条件一步一步往后推理，看这个已知条件能推出什么结论，一直推导出要说明的结论为止；
3. **两头凑**：当遇到复杂问题的时候，我们常常将分析法和综合法同时进行，即由两头向中间推，寻找到中间的结合点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要内容是同位角、内错角、同旁内角的概念及运用“三线八角”的关系判定两直线平行．在中考中，单独命题的较少，易与三角形、四边形，特别是特殊四边形等相关知识综合考查，题型多为选择题、填空题．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用同位角、内错角、同旁内角识别位置角

例12 [中考·广西]如图2-2-16，直线a，b被c所截，则$\angle 1$与$\angle 2$是（　　）

A. 同位角　　B. 内错角

C. 同旁内角　　D. 邻补角

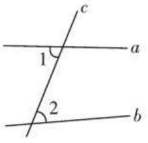


图2-2-16

试题评析：本题主要考查内错角、同位角、同旁内角、邻补角的定义，熟练掌握相关概念是解题的关键．

解：$\angle 1$和$\angle 2$是直线a和直线b被直线c所截形成的，它们位于两条被截直线之间，位于截线的两侧，故为一对内错角，故选B.

答案：B

考法点评

识别位置角是本节的重点，也是学好平行线的判定和性质的关键．

考法2 利用平行线的判定方法寻找两直线平行的条件

例13 [中考·深圳]如图2-2-17，下列选项中，哪个不可以得到$l_1 // l_2$？（　　）

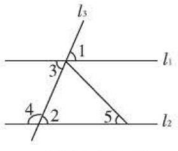


图2-2-17

A. $\angle 1=\angle 2$　　B. $\angle 2=\angle 3$

C. $\angle 3=\angle 5$　　D. $\angle 3+\angle 4=180°$

试题评析：本题考查了平行线的判定，解题的关键是掌握平行线的判定方法.

解：A选项中，$\angle 1$与$\angle 2$是同位角，根据同位角相等，两直线平行可得到$l_1 // l_2$；

B选项中，$\angle 2$与$\angle 3$是内错角，根据内错角相等，两直线平行可得到$l_1 // l_2$；

D选项中，$\angle 3$与$\angle 4$是同旁内角，根据同旁内角互补，两直线平行可得到$l_1 // l_2$；

只有C选项不能得到$l_1 // l_2$.

答案：C

考法点评

在运用同位角、内错角、同旁内角判定直线平行时，一定要搞清楚这一对角是由哪两条直线被哪一条直线所截而形成的．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用平行线的判定方法从不同角度说明两直线平行

例 14 如图 2–2–18，直线 MN 和直线 AB，CD，EF 分别交于点 G，H，P，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2+\angle 3=180°$，试问：AB 与 EF 平行吗？为什么？

试题评析：本题考查了平行线的判定方法，解题的关键是根据已知位置角的数量关系进行说明.

解：$AB \parallel EF$. 理由如下：

因为 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle AGH$，

所以 $\angle 2=\angle AGH$.

所以 $AB \parallel CD$（同位角相等，两直线平行）.

因为 $\angle 2+\angle 3=180°$，$\angle 3=\angle EPH$，

所以 $\angle 2+\angle EPH=180°$.

所以 $EF \parallel CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

所以 $AB \parallel EF$（平行于同一条直线的两条直线平行）.

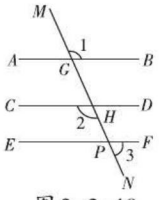


图 2–2–18

另解 1

因为∠1= ∠ 2，∠ 2= ∠ GHD，

所以∠ 1= ∠ GHD.

所以 AB // CD.

因为 ∠ 2+ ∠ 3=180°，

∠ 2+ ∠ DHP=180°，

所以∠ 3= ∠ DHP.

所以 EF // CD.

所以 AB // EF.

另解 2

因为 ∠ 2+ ∠ 3=180°，

∠ 3+ ∠ HPF=180°，

所以∠ 2= ∠ HPF.

因为 ∠ 1= ∠ 2，

所以∠ 1= ∠ HPF.

所以 AB // EF.

两年模拟兵法 答案见 229 页

1. [期中 · 上杭县] 两条直线被第三条直线所截，就第三条直线上的两个交点而言形成了“三线八角”，为了便于记忆，同学们可仿照图用双手表示“三线八角”（两大拇指代表被截直线，食指代表截线）. 下列三幅图依次表示（　　）


（第 1 题）

A. 同位角、同旁内角、内错角

B. 同位角、内错角、同旁内角

C. 同位角、对顶角、同旁内角

D. 同位角、内错角、对顶角

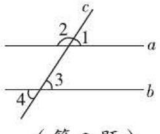
2. [中考 · 山西] 如图，直线 a，b 被直线 c 所截，下列条件不能判定直线 a 与 b 平行的是（　　）

A. $\angle 1=\angle 3$

B. $\angle 2+\angle 4=180°$

C. $\angle 1=\angle 4$

D. $\angle 3=\angle 4$



（第 2 题）

3. [期中 · 龙口] 下列说法中错误的有（　　）

①过一点有且只有一条直线与已知直线平行；

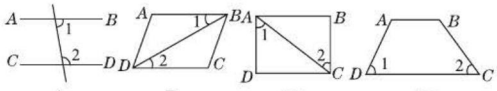
②在同一平面内，两条直线的位置关系只有相交、平行两种；

③不相交的两条直线叫做平行线；

④相等的角是对顶角.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. [中考 · 福州] 下列图形中，由 $\angle 1=\angle 2$ 能得到 $AB \parallel CD$ 的是（　　）



A　　B　　C　　D

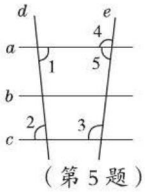
5. [中考 · 黔南州] 如图，下列说法错误的是（　　）

A. 若 $a \parallel b$，$b \parallel c$，则 $a \parallel c$

B. 若 $\angle 1=\angle 2$，则 $a \parallel c$

C. 若 $\angle 3=\angle 4$，则 $b \parallel c$

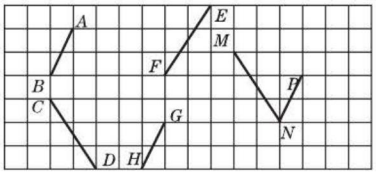
D. 若 $\angle 3+\angle 5=180°$，则 $a \parallel c$



（第 5 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 在如图的方格纸中：

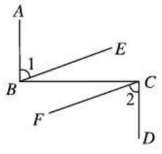


（第 6 题）

（1）找出互相平行的线段，并用符号表示出来；

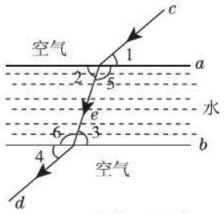
（2）用三角尺试着画出与 EF 平行的线段，并用符号表示出来.

7. 如图，$AB \perp BC$，$BC \perp CD$ 且 $\angle 1 = \angle 2$，试说明 $BE \parallel CF$.　　[导学号 7876572]



（第 7 题）

8. 光线从空气射入水中时，传播方向会发生改变，这种现象叫做光的折射现象. 同样，光线从水中射入空气中时，也会发生折射现象，一束光线从空气射入水中再从水中射入空气中时，光线的传播方向如图，其中，直线 a，b 都表示空气与水的分界面，e 表示光线在水中的部分. 已知 $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 3$，请你判断光线 c 与 d 是否平行，为什么?



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 平行线的性质

核心知识
- 平行线的性质 1
- 平行线的性质 2
- 平行线的性质 3

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线的性质 1

1. 性质 1 两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等.

简称为：两直线平行，同位角相等.

表达方式：如图 2-3-1，因为 $a \parallel b$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

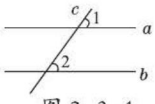


图 2-3-1

2. 平行线的性质与平行线的判定的区别

（1）平行线的判定是根据两角的数量关系得到两条直线的位置关系，而平行线的性质是根据两条直线的位置关系得到两角的数量关系；

（2）平行线的判定的条件是平行线的性质的结论，而平行线的判定的结论是平行线的性质的条件.

拨考向 利用平行线的性质 1 解决问题

题型 1：利用平行线的性质 1 求角的度数

例 1 如图 2-3-2，把三角尺的直角顶点放在直尺的一边上，若 $\angle 1=30°$，则 $\angle 2$ 为（　　）

A.60°　　B.50°　　C.40°　　D.30°

解题秘方：根据直尺的两边平行，利用平行线的性质建立已知角 $\angle 1$ 与待求的角 $\angle 2$ 之间的数量关系.

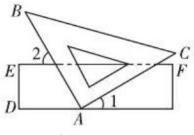


图 2-3-2

解：因为 $\angle 1+\angle BAC+\angle DAB=180°$，$\angle BAC=90°$，$\angle 1=30°$，

所以 $\angle DAB=180°-\angle 1-\angle BAC=60°$.

因为直尺的两边平行，即 $EF \parallel AD$，所以 $\angle 2=\angle DAB=60°$.

答案：A

方法点拨：利用平行线的性质 1 求角度时，主要看要求的角与已知角之间是否是已知的平行线被第三条直线所截而成的同位角，若是，可直接求出；若不是，还需要通过中间角进行转化.

提分·必记

特别警示

- 两条直线平行是前提，只有在这个前提下才有同位角相等；
- 书写时顺序不能颠倒，与判定不能混淆.


平行线性质和判定的区别

提分·秘诀

另解

如图 2-3-3，设 EF 与 AB，AC 分别交于点 H，G.

因为直尺的两边平行，即 $EF \parallel AD$，所以 $\angle AGE=\angle 1=30°$.

因为 $\angle BAC=90°$，所以 $\angle AHG+\angle AGE=90°$.

所以 $\angle AHG=90°-\angle AGE=60°$. 所以 $\angle 2=\angle AHG=60°$.

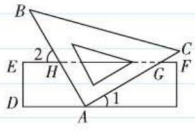


图 2-3-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：利用平行线的性质 1 进行推理说明

例 2 如图 2-3-4，若 $AB \parallel CD$，且 $\angle 1 = \angle 2$，试判断 AM 与 CN 的位置关系，并说明理由.

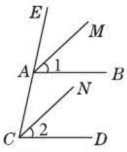


图 2-3-4

解题秘方：利用已知的平行线和要说明的平行线的同位角之间的数量关系去推理说明.

解：$AM \parallel CN$. 理由如下：

因为 $AB \parallel CD$（已知），

所以 $\angle BAE = \angle ACD$（两直线平行，同位角相等）.

又因为 $\angle 1 = \angle 2$（已知），

所以 $\angle MAE = \angle NCA$（等式的性质）.

所以 $AM \parallel CN$（同位角相等，两直线平行）.

方法点拨

平行线和角的大小关系是紧密联系在一起的，由平行线可以得到角相等，反过来又可以由角相等得到平行线，这种角的大小关系与直线的位置关系的相互转化在解题中会经常涉及.

知识 2 平行线的性质 2

1. 性质 2 两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

简称为：两直线平行，内错角相等.

2. 表达方式 如图 2-3-5，

因为 $a \parallel b$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

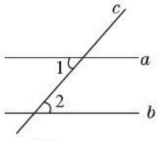


图 2-3-5

提分·必记

特别警示

并不是所有的内错角都相等，只有在“两直线平行”的前提下，才有内错角相等.

考向 利用平行线的性质 2 进行推理说明

例 3 如图 2-3-6，$AB \parallel CD$，BE 平分 $\angle ABC$，CF 平分 $\angle BCD$，你能发现 BE 和 CF 有何特殊的位置关系吗？说说你的理由.

解题秘方：由两直线平行得到内错角相等，再由内错角相等得到另一组直线平行.

解：$BE \parallel CF$. 理由如下：

因为 $AB \parallel CD$（已知），

所以 $\angle ABC = \angle BCD$（两直线平行，内错角相等）.

因为 BE 平分 $\angle ABC$，CF 平分 $\angle BCD$（已知），

所以 $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BCD$（角平分线的定义）.

所以 $\angle 2 = \angle 1$.

所以 $BE \parallel CF$（内错角相等，两直线平行）.

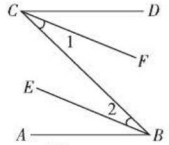


图 2-3-6

方法点拨：通过同位角相等或内错角相等，我们可以得出两直线平行. 根据两直线平行，我们又可以得出同位角相等、内错角相等.

提分·秘诀

方法总结

几何推理的方法主要有两种：一种是综合法，即由“因”导“果”，由已知条件逐步推导出结论；另一种是分析法，即执“果”索“因”，根据要推出的结论，必须找到什么样的条件，一步一步反向找到条件. 解答问题时一般用综合法，分析问题时一般用分析法，有时也可以两种方法综合应用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 3 平行线的性质 3

1. **性质 3** 两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补.

简称为：两直线平行，同旁内角互补.

2. **表达方式** 如图 2−3−7，

因为 $a \parallel b$（已知），

所以 $\angle 1+\angle 2=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

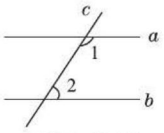


图 2−3−7

拔考向 ▸ 利用平行线的性质 3 求角的度数

例 4 [中考 · 黄冈]如图 2−3−8，已知直线 $a \parallel b$，$\angle 1=50°$，$\angle 2=\angle 3$，则 $\angle 2$ 为（　　）

A.50°　　B.60°　　C.65°　　D.75°

解题秘方：由平行线的性质找出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 之间的数量关系，利用 $\angle 1$ 的度数求出 $\angle 2$ 的度数.

解：因为 $a \parallel b$，所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$.

又因为 $\angle 1=50°$，所以 $\angle 2+\angle 3=130°$.

因为 $\angle 2=\angle 3$，所以 $\angle 2=65°$.

答案：C

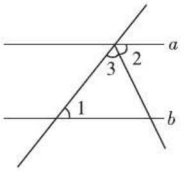


图 2−3−8

提分·必记

警示误区

- 两直线平行时，同旁内角是互补的关系而不是相等的关系；
- 平行线的性质是由“位置关系”到“数量关系”；而平行线的判定是由“数量关系”到“位置关系”.

提分·秘诀

解法提醒

解与平行线性质有关的求角的度数的计算题时，要熟悉图形的特征，结合其他角（如对顶角、邻补角等）的相关性质，把待求的角与已知角联系起来.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 ▸ 1 利用折叠法求平行线中的角度问题

例 5 如图 2−3−9，将一张长方形的纸片沿 EF 折叠后，点 D，C 分别落在 D'，C' 的位置上，ED' 与 BC 的交点为点 G，若 $\angle EFG=50°$，求 $\angle EGB$ 的度数.

解题秘方：根据长方形纸片的对边平行，运用平行线的性质，结合折叠的性质可以建立已知角和未知角之间的数量关系.

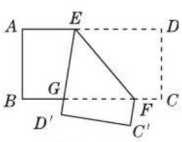


图 2−3−9

解：因为四边形 $ABCD$ 是长方形，

所以 $AD \parallel BC$.

所以 $\angle DEF=\angle EFG$（两直线平行，内错角相等）.

又因为 $\angle EFG=50°$（已知），所以 $\angle DEF=50°$（等量代换）.

又因为 $\angle DEF=\angle D'EF$（折叠的性质），

所以 $\angle D'EF=50°$（等量代换）.

所以 $\angle AEG=180°-\angle DEF-\angle D'EF=80°$（平角的定义）.

因为 $AD \parallel BC$，所以 $\angle AEG+\angle EGB=180°$（两直线平行，同旁内角互补），所以 $\angle EGB=180°-\angle AEG=180°-80°=100°$.

挑战·高分

解法提醒

- 根据折叠可找出以下相等的角：$\angle DEF=\angle GEF$，$\angle EFC=\angle EFC'$；
- 根据平行线的性质可以得出以下角的数量关系：$\angle DEF=\angle EFG$，$\angle AEG=\angle EGF$，$\angle AEG+\angle BGE=180°$，$\angle GEF+\angle EFC'=180°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用作图法探究平行线中的两个角之间的数量关系

挑战·高分

结论归纳

若一个角的两边分别与另一个角的两边平行，则这两个角相等或互补.

例6 已知一个角的两边分别平行于另一个角的两边，则这两个角之间有何数量关系？并说明理由.

解题秘方：根据题意，画出图形（同类结论的图形只画一次），利用平行线的性质去探究两个角之间的数量关系.

解：这两个角相等或互补.

如图2-3-10，$AB \parallel DE$，$EF \parallel BC$，则$\angle B=\angle E$，理由如下：

因为$AB \parallel DE$，所以$\angle B=\angle 1$.

又因为$EF \parallel BC$，所以$\angle E=\angle 1$. 所以$\angle B=\angle E$.

如图2-3-11，$AB \parallel DE$，$EF \parallel BC$，则$\angle B+\angle E=180°$，理由如下：

因为$AB \parallel DE$，所以$\angle B=\angle 2$.

又因为$EF \parallel BC$，

所以$\angle 2+\angle E=180°$.

所以$\angle B+\angle E=180°$.

综上所述，$\angle B=\angle E$或$\angle B+\angle E=180°$.

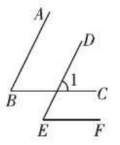


图2-3-10

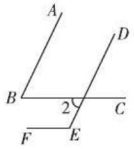


图2-3-11

拔尖角度▸ 3 利用拐点添辅助线法探究角之间的数量关系

挑战·高分

技巧点拨

两条平行线间存在拐点时，通常过拐点作平行线，构造出同位角、内错角或同旁内角.

例7 如图2-3-12，$AB \parallel CD$，分别探索下面四个图中$\angle P$与$\angle A$，$\angle C$之间的关系.

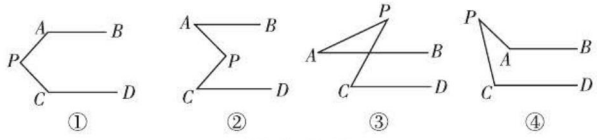


图2-3-12

解题秘方：分别过拐点作已知直线的平行线，利用平行线的性质求解.

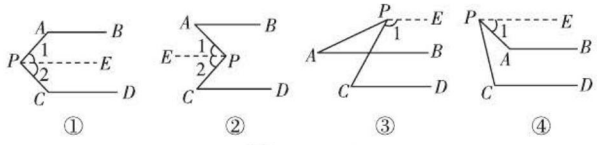


图2-3-13

解：图2-3-12①中，$\angle APC+\angle A+\angle C=360°$. 理由如下：

如图2-3-13①，过点P作$PE \parallel AB$.

因为$AB \parallel CD$，

所以$PE \parallel AB \parallel CD$.

所以$\angle 1+\angle A=180°$，$\angle 2+\angle C=180°$.

所以$\angle 1+\angle A+\angle 2+\angle C=360°$.

又因为$\angle APC=\angle 1+\angle 2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以∠APC+∠A+∠C=360°.

图2-3-12②中，∠APC=∠A+∠C. 理由如下：

如图2-3-13②，过点P作PE∥AB.

因为AB∥CD，所以PE∥AB∥CD.

所以∠A=∠1，∠2=∠C.

因为∠APC=∠1+∠2，

所以∠APC=∠A+∠C.

图2-3-12③中，∠APC+∠A=∠C. 理由如下：

如图2-3-13③，过点P作PE∥AB，

则∠EPA+∠A=180°.

因为∠EPA=∠APC+∠1，

所以∠APC+∠1+∠A=180°，

所以∠APC+∠A=180°−∠1.

因为AB∥CD，所以PE∥CD.

所以∠1+∠C=180°，所以∠C=180°−∠1.

所以∠APC+∠A=∠C.

图2-3-12④中，∠A=∠APC+∠C. 理由如下：

如图2-3-13④，过点P作PE∥AB，

则∠1+∠A=180°，即∠1=180°−∠A.

因为AB∥CD，所以PE∥CD，

所以∠EPC+∠C=180°，即∠1+∠APC+∠C=180°.

所以180°−∠A+∠APC+∠C=180°，

所以∠A=∠APC+∠C.

另解

如图2-3-14，过点P作PE∥AB.

因为AB∥CD，所以PE∥CD.

所以∠EPC=∠C.

因为∠EPC=∠1+∠APC，所以∠C=∠1+∠APC.

因为PE∥AB，所以∠1=∠A. 所以∠APC+∠A=∠C.

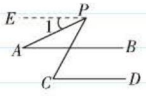


图2-3-14

解后反思

过拐点作平行线时，可以有不同的作法（向左侧作或向右侧作），如图2-3-13③和图2-3-14，不同的作法会有不同的解题思路，但结论始终不变.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是平行线的性质，主要考查利用平行线的性质及对顶角、邻补角和角平分线的性质等求角的度数或探究角之间的数量关系.

三年中考兵法

考法1 利用平行线的性质求角的度数

例8 [中考·宁波]已知直线m∥n，将一块含30°角的直角三角尺ABC按如图2-3-15的方式放置（∠ABC=30°），其中A，B两点分别落在直线m，n上，若∠1=20°，则∠2为（　　）

A.20°　　B.30°　　C.45°　　D.50°

冲刺·满分

考试对策

题目中出现两直线平行时，应立即想到平行线的三个性质，要注意分析图形特征，明确角与角的位置关系，从而确定角与

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了平行线的性质，解决问题的关键是利用平行线的性质建立图中角之间的数量关系.

解：因为 $m \parallel n$，

所以 $\angle 2 = \angle ABC + \angle 1 = 30° + 20° = 50°$.

答案：D

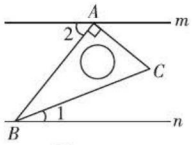


图 2-3-15

角之间的数量关系是相等还是互补. 平行线还通常会与角平分线、垂线等知识结合来求角的度数.

考法 2 利用平行线的判定与性质综合求角的度数

例 9 [中考·宿迁]如图 2-3-16，直线 a，b 被直线 c，d 所截. 若 $\angle 1 = 80°$，$\angle 2 = 100°$，$\angle 3 = 85°$，则 $\angle 4$ 为（　　）

A.80°　　B.85°　　C.95°　　D.100°

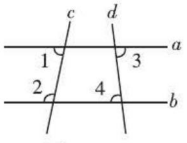


图 2-3-16

试题评析：本题考查了平行线的判定和性质，解题的关键是判断出直线 $a \parallel b$，找出 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 具有相等关系.

解：因为 $\angle 1 = 80°$，$\angle 2 = 100°$，

所以 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. 所以 $a \parallel b$.

所以 $\angle 4 = \angle 3 = 85°$.

答案：B

考试对策

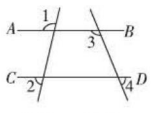
由平行线的性质求得角相等（或互补），再对角与角之间进行等量代换，得到新的一对角相等（或互补），从而说明另一组直线平行；或先由一对角相等（或互补）推得两直线平行，再说明新的一对角相等（或互补），进而解决相关问题.

两年模拟兵法 ☞答案见 230 页

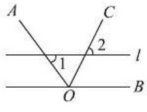
1. [中考·滨州]如图，直线 $AB \parallel CD$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\angle 1 = \angle 2$　　B. $\angle 3 = \angle 4$

C. $\angle 1 + \angle 3 = 180°$　　D. $\angle 3 + \angle 4 = 180°$



（第 1 题）



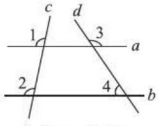
（第 2 题）

2. [中考·陕西]如图，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，$l \parallel OB$，若 $\angle 1 = 52°$，则 $\angle 2$ 为（　　）

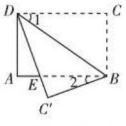
A.52°　　B.54°　　C.64°　　D.69°

3. [中考·济宁]如图，直线 a，b 被直线 c，d 所截，若 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = 125°$，则 $\angle 4$ 等于（　　）

A.65°　　B.60°　　C.55°　　D.75°



（第 3 题）



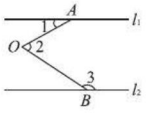
（第 4 题）

4. [中考·山西]如图，将长方形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠，得到三角形 $BC'D$，$C'D$ 与 AB 交于点 E. 若 $\angle 1 = 35°$，则 $\angle 2$ 为（　　）

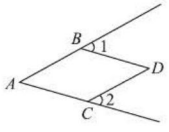
A.20°　　B.30°　　C.35°　　D.55°

5. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，$\angle 1 = 30°$，则 $\angle 2 + \angle 3 =$（　　）

A.150°　　B.180°　　C.210°　　D.240°



（第 5 题）

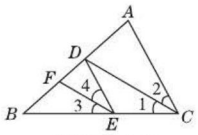


（第 6 题）

6. 如图，$AB \parallel CD$，$AC \parallel BD$，$\angle 1 = 45°$，则 $\angle 2$ 为_____.

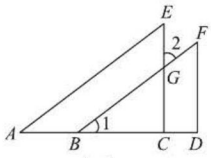
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，已知∠1=∠2，$DC \parallel EF$，$DE \parallel AC$，试说明∠3=∠4.



（第7题）

8. [中考·武汉]如图，点A，B，C，D在一条直线上，CE与BF交于点G，$\angle A=\angle 1$，$CE \parallel DF$. 试说明$\angle E=\angle F$.



（第8题）

素养提分 行动篇

平行线间的截线问题

平行线的性质与判定都与平行线被第三条直线所截的位置角（同位角、内错角、同旁内角）有关系. 平行线的性质揭示了这些位置角的数量关系，为后面说明三角形全等或相似提供了角相等的依据，也为求角的度数提供了思路.

类型一：将截线折断后任意拉伸探究角的关系

（1）如图2-3-17②，在平行线内部将截线折断，有两个重要的结论：

a. $\angle 1+\angle 2=\angle A$，b. $\angle A+\angle 3+\angle 4=360°$.

这两个结论与截线没有被折断时候的结论是相同的，如图2-3-17①，$\angle A=180°$，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3+\angle 4=180°$，

所以$\angle 1+\angle 2=\angle A$，$\angle A+\angle 3+\angle 4=360°$.

将截线折断拉伸，$\angle A$的度数在变化，同时$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$的度数也随之在改变，但它们之间的数量关系不变.

（2）若将截线的折点拉至两条平行线的外部，如图2-3-17③，易知$\angle 1+180°-\angle 2+\angle A=180°$，所以$\angle A=\angle 2-\angle 1$. 由此可知，不管将折点拉伸至何处，其根本的平行线的性质永远保持不变.

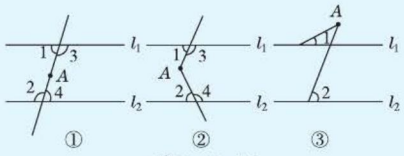


图2-3-17

类型二：夹在两条平行线之间的图形面积的探究

如图2-3-18①，平行四边形的面积为S，将两条截线以同样的方式折断拉伸，如图2-3-18②，$S_{阴影}=S$. 若将两条截线以同样的方式，在平行线内部无数次左右折断，如图2-3-18③，$S_{阴影}=S$.

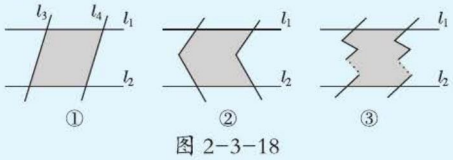


图2-3-18

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 用尺规作角

核心知识

- 尺规作图
- 作一个角等于已知角

知识链接

没有刻度的直尺和圆规 —工具→ 尺规作图 → 作一个角等于已知角

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 尺规作图

1. 尺规作图 只用圆规和没有刻度的直尺来作图，称为尺规作图.

2. 直尺的功能

（1）在两点间连接一条线段；

（2）过平面上的两点画直线；

（3）作射线或线段.

3. 圆规的功能

（1）以任意一点为圆心，任意长为半径作圆或圆弧；

（2）在直线上截取一条线段，使它等于已知线段.

提分·必记

特别解读

1. 尺规作图是一种规定了作图工具，且能够有效地减少误差的较精确的作图方法.
2. 尺规作图是最基本，最常见的作图方法，通常称为基本作图.

拨考向 利用尺规作图的意义识别尺规作图

例 1 下列作图属于尺规作图的是（　　）

A. 用量角器画出∠ AOB 的平分线

B. 用圆规和直尺作∠ AOB 等于已知∠ α

C. 用刻度尺画线段 AB=3 cm

D. 用三角尺作直线 AB 的平行线

解题秘方：紧扣尺规作图的定义，利用作图的工具去识别.

解：选项 A,D 中用的作图工具不是直尺和圆规，选项 C 中用的是带有刻度的直尺，所以只有选项 B 符合尺规作图的定义. 故选 B.

答案：B

提分·秘诀

方法点拨

尺规作图只能用圆规和没有刻度的直尺，关键是不能度量.

点知识 2 利用尺规作一个角等于已知角

已知：∠ AOB（如图 2−4−1）.

求作：∠ $A'O'B'$，使∠ $A'O'B'$ = ∠ AOB.

作法与示范：

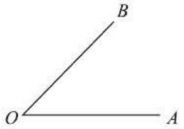


图 2−4−1

提分·必记

特别提醒

几何作图中，应掌握下列几种几何作图语言：

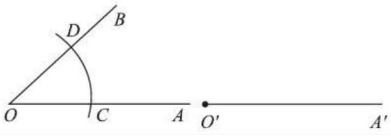
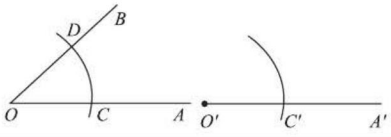
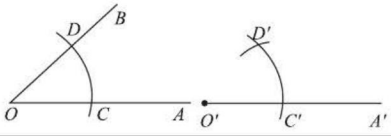
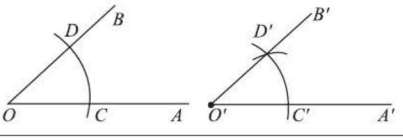
(1) 过点 x 作直线 xx;

(2) 连接 x,x 两点；

(3) 在 xx 上截取 xx=xx;

(4) 以点 x 为圆心，xx 的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

作法	示范
(1) 作射线 $O'A'$	
(2) 以点 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA 于点 C，交 OB 于点 D	
(3) 以点 O' 为圆心，以 OC 长为半径作弧，交 $O'A'$ 于点 C'	
(4) 以点 C' 为圆心，以 CD 长为半径作弧，交前面的弧于点 D'	
(5) 过点 D' 作射线 $O'B'$，$\angle A'O'B'$ 就是所求作的角	

注意：尺规作图题，要保留作图痕迹，若题目没有要求写作法，可不写作法.

核心考向▶利用作一个角等于已知角的方法进行作图

例 2 如图 2-4-2，已知 $\angle\alpha$，求作 $\angle AOB$，使 $\angle AOB=3\angle\alpha$.

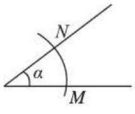


图 2-4-2

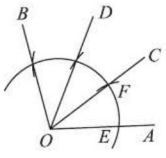


图 2-4-3

解题秘方：紧扣作一个角等于已知角的方法步骤，依次作出已知角的三倍的角.

解：如图 2-4-3.

作射线 OA，分别以点 O 和 $\angle\alpha$（如图 2-4-2）的顶点为圆心，以相同的长度为半径作弧，分别交 OA 于点 E，交 $\angle\alpha$ 的两边于点 M,N；以点 E 为圆心，以 MN 的长为半径作弧，两弧交于点 F；过点 F 作射线 OC，则 $\angle AOC=\angle\alpha$，同理，以 OC 为一边，在 $\angle AOC$ 的外部，作 $\angle COD=\angle\alpha$，再以 OD 为一边，在 $\angle AOD$ 的外部，作 $\angle BOD=\angle\alpha$，则 $\angle AOB=3\angle\alpha$，所以 $\angle AOB$ 就是所求作的角.

提分·秘诀

方法点拨

作一个角等于已知角的 n（n 为正整数）倍的一般步骤：先作出与已知角相等的角，然后作与这个角有一条公共边，另一条边在这个角的外部，且等于已知角的角，依次这样作（$n-1$）个等于已知角的角即可.

长为半径作弧，交 xx 于点 x；
(5) 分别以点 x，x 为圆心，xx 的长为半径作弧，两弧相交于 x；
(6) 延长 xx 至点 x，使 xx=xx.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用尺规作已知角的和差

例 3 如图 2-4-4，已知∠α，∠β，求作一个角，使它等于 2∠α－∠β.

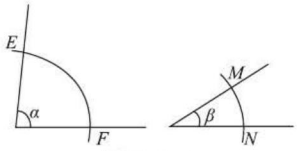


图 2-4-4

解题秘方：将要求作的角的和差转化为作一个角等于已知角.

解：如图 2-4-5，作法：

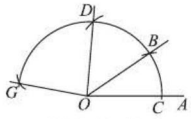


图 2-4-5

（1）作射线 OA；

（2）分别以点 O 和∠ α，∠ β（如图 2-4-4）的顶点为圆心，以相同的长度为半径作弧，分别交 OA 于点 C，交∠ α 的两边于点 E,F，交∠ β 的两边于点 M,N；

（3）以点 C 为圆心，以 EF 长为半径作弧，交前面的弧于点 D；

（4）过点 D 作射线 OD，则∠ AOD= ∠ α；

（5）以点 D 为圆心，以 EF 长为半径在∠ AOD 的外部作弧，与第一次所作的弧交于点 G；

（6）过点 G 作射线 OG，则∠ AOG=2 ∠ α；

（7）以点 C 为圆心，以 MN 长为半径在∠ AOG 内部作弧，与第一次所作的弧交于点 B；

（8）过点 B 作射线 OB，则∠ AOB= ∠ β. ∠ BOG 就是所求作的角.

挑战·高分

易错警示

作已知角的和与差的区别：作一个角等于已知角的和是在角的外部作角，而作一个角等于已知角的差，则在角的内部作角.

拔尖角度▸ 2 利用转化思想作已知直线的平行线

例 4 如图 2-4-6，已知直线 AB 和直线 AB 外一点 P，求作直线 CD，使 CD//AB，且 CD 经过点 P.

解题秘方：利用转化思想和平行线判定的条件，通过作一个角等于已知角解决问题.



图 2-4-6

解：如图 2-4-7. 作法：

（1）过点 P 作一条直线 EF 交 AB 于点 Q；

（2）以点 P 为顶点，PE 为角的一边，作∠ EPD= ∠ PQB. 射线 PD 所在的直线就是所求作的直线 CD.

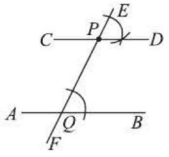


图 2-4-7

挑战·高分

另解

也可以根据“内错角相等，两直线平行”作平行线.

如图 2-4-8.

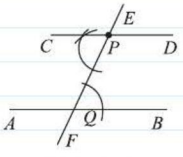


图 2-4-8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用尺规作长方形

例 5 已知：线段 a，b（$a>b$）和一个大小为 $90°$ 的角，如图 2-4-9. 求作：长方形 $ABCD$，使其长与宽分别等于 a 和 b.

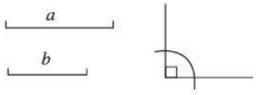


图 2-4-9

解题秘方：先作一个 $90°$ 的角，在其两边上分别截取长为 a 和 b 的线段后，再作两个直角，从而作出一个长方形.

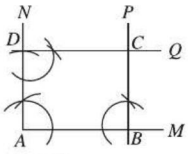


图 2-4-10

解：如图 2-4-10. 作法：

（1）作 $\angle MAN$，使其大小与已知角相等；

（2）在 AM 上截取 $AB=a$，在 AN 上截取 $AD=b$；

（3）作 $\angle ABP$ 和 $\angle ADQ$，使它们的大小均与已知角相等，BP 与 DQ 都在 $\angle MAN$ 的内部，并且相交于点 C. 四边形 $ABCD$ 就是所求作的长方形.

挑战·高分

技巧点拨

根据长方形的每个内角都是 $90°$ 作图. 在作图时，要注意利用已有知识对新知识进行探索，加强新旧知识的贯通，注意几何语言表述和书写格式的规范.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

利用尺规作一个角等于已知角是基本作图，本节知识在中考中以基础题为主，难度不大，常与其他作图题综合在一起考查.

三年中考兵法

考法 利用尺规作一个角等于已知角

例 6 [中考·福建]如图 2-4-11，用尺规作图："过点 C 作 $CN//OA$"，其作图依据是（　　）

A. 同位角相等，两直线平行

B. 内错角相等，两直线平行

C. 同旁内角相等，两直线平行

D. 同旁内角互补，两直线平行

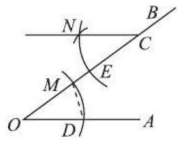


图 2-4-11

试题评析：本题主要考查利用尺规作一个角等于已知角，解题的关键是掌握作图的依据.

解：由图 2-4-11 可知，用尺规作的是 $\angle NCE=\angle MOD$，而 $\angle NCE$ 与 $\angle MOD$ 是内错角，故作图依据是内错角相等，两直线平行，故选 B.

答案：B

冲刺·满分

考法点评

本题通过作一个角等于已知角来判定两直线平行，判定的方法取决于两个角的位置关系.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见230页

1. 下列作图属于尺规作图的是（　　）

A. 画线段 $MN=3$ cm

B. 用量角器画出$\angle AOB$的平分线

C. 用三角尺作过点A垂直于直线l的直线

D. 已知$\angle\alpha$，用没有刻度的直尺和圆规作$\angle AOB$，使$\angle AOB=2\angle\alpha$

2. 下列尺规作图的语句错误的是（　　）

A. 作$\angle AOB$，使$\angle AOB=3\angle\alpha$

B. 以点O为圆心作弧

C. 以点A为圆心，线段a的长为半径作弧

D. 作$\angle ABC$，使$\angle ABC=\angle\alpha+\angle\beta$

3. 下列作图语句正确的是（　　）

A. 作线段AB，使$a=AB$

B. 延长线段AB到点C，使$AC=BC$

C. 作$\angle AOB$，使$\angle AOB=\angle\alpha$

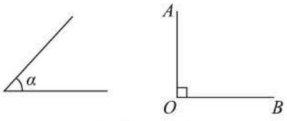
D. 以点O为圆心画弧

4. 已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$（如图），利用尺规作图，比较它们的大小.



（第4题）

5. 如图，已知$\angle\alpha$，$\angle AOB=90°$，求作$\angle AOC$，使其等于$\angle\alpha$的余角.



（第5题）

6. 如图，已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$.

（1）利用尺规作$\angle BOD=\angle\alpha+2\angle\beta$.

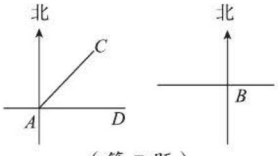
（2）利用尺规作$\angle AOB$，使$\angle AOB=\angle\alpha-\angle\beta$.

（3）利用尺规作$\angle AOE$，使$\angle AOE=2(\angle\alpha-\angle\beta)$.



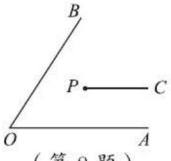
（第6题）

7. 如图，A,B为两个港口，甲船从A港沿AC方向航行，乙船从B港出发，乙船应沿什么航线航行才能使航线与甲船的航线平行？请用尺规作出乙船的航线.



（第7题）

8. 如图，已知$\angle AOB=\angle\alpha$，以点P为顶点，PC为一边作$\angle CPD=\angle\alpha$，并用平移三角尺的方法验证PD与OB，PD与OA是否平行.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

相交线与平行线中角的运用技巧

荣老师告诉你 角是平面几何图形中重要的元素，前面我们已学习过特殊角、数量关系角（补角、余角）等角的知识．当两条直线相交时，就产生对顶角，分别与第三条直线相交时，产生同位角、内错角、同旁内角等位置关系角，它们在角的计算与推理说明中有广泛的应用．

技巧一 由角定角

例1 ［中考·重庆］如图1，$AB \parallel CD$，点E是CD上一点，$\angle AEC=42°$，EF平分$\angle AED$交AB于点F，求$\angle AFE$的度数．

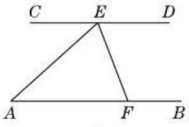


图1

解题秘方：紧扣未知角与已知角之间的数量关系解决问题．

解：因为$\angle AEC=42°$，$\angle AEC+\angle AED=180°$，

所以$\angle AED=180°-42°=138°$．

因为EF平分$\angle AED$，

所以$\angle FED=\frac{1}{2}\angle AED=69°$．

又因为$AB \parallel CD$，

所以$\angle AFE=\angle FED=69°$．

方法点拨：平行线中求角的度数时，可利用平行线的性质，建立未知角与已知角之间的联系，从而求出未知角的度数．

技巧二 缺角补角

例2 ［中考·枣庄］将一副三角尺和一张对边平行的纸条按如图2所示的方式摆放，两个三角尺的一直角边重合，含30°角的直角三角尺的斜边与纸条一边重合，含45°角的三角尺的一个顶点在纸条的另一边上，则$\angle 1$等于（　　）

A.15°　　B.22.5°　　C.30°　　D.45°

解题秘方：补全位置角，利用平行线的性质解决问题．

解：如图2，延长两个三角尺重合的边与纸条的一边相交，根据两直线平行，内错角相等求出$\angle 2=30°$，再利用邻补角的定义和三角形的内角和为180°可得$\angle 1+\angle 2+180°-\angle 3=180°$，所以$\angle 1=\angle 3-\angle 2=45°-30°=15°$．

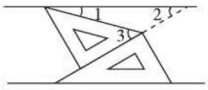


图2

答案：A

方法点拨：在图形中虽然具备了“三线”，但“八角”没有完全显露出来，为了使解题思路流畅自然，应利用延长线段的方法，将“八角”补齐．

技巧三 缺线补线

例3 ［中考·南充］如图3，直线$a \parallel b$，将一个直角三角尺按如图所示的位置摆放，若$\angle 1=58°$，则$\angle 2$为（　　）

A.30°　　B.32°　　C.42°　　D.58°

解题秘方：在两条平行线间没有可利用的同位角、内错角或同旁内角时，可通过作平行线，构造“三线八角”模型．

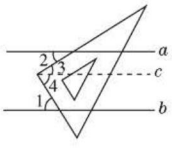


图3

解：如图3，过直角顶点作$c \parallel a$，则$\angle 3=\angle 2$.

因为$a \parallel b$，所以$c \parallel b$. 所以$\angle 4=\angle 1$.

所以$\angle 2+\angle 1=\angle 3+\angle 4=90°$．

因为$\angle 1=58°$，

所以$\angle 2=90°-\angle 1=32°$．

答案：B

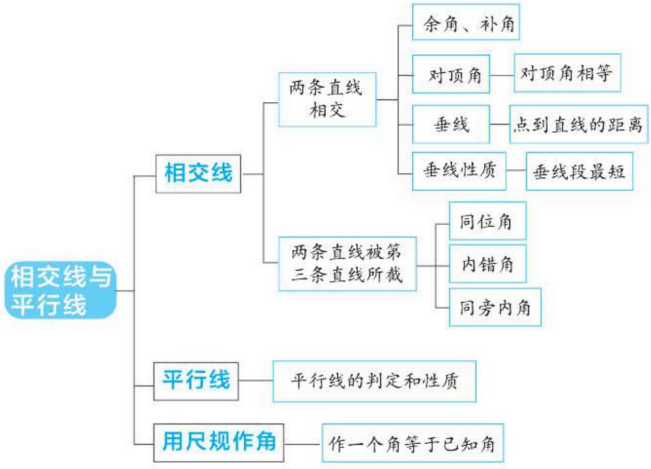
方法点拨：若图中的“三线”尚不齐全，则首要的任务是添线，通常是作平行线进行添线，构造“三线八角”，产生同位角、内错角或同旁内角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两条直线相交，形成两对对顶角和四对邻补角，其中对顶角相等，邻补角互补.
2. 若两个角的和等于 $180°$，则这两个角互补；若两个角的和等于 $90°$，则这两个角互余. 同角或等角的余角（补角）相等.
3. 两条直线相交，当有一个角是直角时，两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的垂线. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.
4. 在同一平面内，两条不相交的直线互相平行. 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行. 平行于同一条直线的两条直线平行.
5. **平行线的判定条件**：同位角相等，两直线平行；内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行.
6. **平行线的性质**：两直线平行，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补.

知识方法专题

知识必学

专题一 相交线

链接中考» 在同一平面内，两条直线的位置关系有相交和平行两种，其中垂直是两条直线相交的一种特殊情况，垂直经常与邻补角和对顶角、平行线等知识综合考查，题型以填空题和选择题为主.

例 1 [中考·荆门]如图 2-1，$m \parallel n$，直线 l 分别交 m，n 于点 A，点 B，$AC \perp AB$，AC 交直线 n 于点 C，若 $\angle 1=35°$，则 $\angle 2$ 等于（　　）

A.35°　　B.45°　　C.55°　　D.65°

解题秘方：首先根据平行线的性质得到 $\angle ABC$ 的度数，然后根据三角形的内角和为 $180°$ 即可求得 $\angle 2$ 的度数.

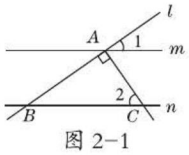


图 2-1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：因为 $m \parallel n$，

所以$\angle ABC = \angle 1 = 35°$.

因为 $AC \perp AB$，所以$\angle BAC = 90°$.

又因为$\angle BAC + \angle ABC + \angle 2 = 180°$，

所以$\angle 2 = 55°$.

答案：C

专题二 “三线八角”

链接中考» 两条直线被第三条直线所截形成的8个角中，有4对同位角、2对内错角、2对同旁内角．在解决问题时，可以先把复杂的图形分解成几个基本图形，找到其中一些量之间的关系，从而使问题得以解决．

例2 如图2-2，在有标号的11个角中，内错角有（　　）

A.2对　　B.4对

C.5对　　D.8对

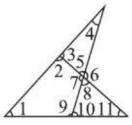


图2-2

解题秘方：要在较复杂的原图形中找出几对内错角是不容易的，先把原图形分解成“三线八角”的基本图形，再看有多少对内错角．如图2-3，很容易得到内错角有8对．故选D.

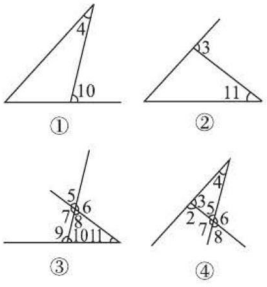


图2-3

答案：D

专题三 平行线的性质与判定

链接中考» 平行线的性质与判定是学习推理说明问题的开始，是进一步学习几何知识的基础，其中平行线的判定是根据角的相等或互补关系得出平行线，而平行线的性质则是根据直线的平行关系得出角的相等或互补关系．平行线的性质与判定是中考命题的热点．常见的考查形式有选择题、填空题及解答题．

例3 [中考·莱芜]如图2-4，$AB \parallel CD$，EF平分$\angle AEG$，若$\angle FGE = 40°$，则$\angle EFG$等于（　　）

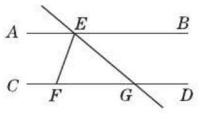


图2-4

A.35°　　B.40°　　C.70°　　D.140°

解题秘方：看清楚$\angle FGE$与$\angle AEG$是同旁内角，从而确定互补关系，再根据角平分线的定义求出$\angle AEF$，由$AB \parallel CD$，得$\angle EFG = \angle AEF$，问题即可获得解决．

解：因为$AB \parallel CD$，$\angle FGE = 40°$，

所以$\angle AEG = 180° - 40° = 140°$.

因为EF平分$\angle AEG$，

所以$\angle AEF = \frac{1}{2}\angle AEG = 70°$.

因为$AB \parallel CD$，

所以$\angle EFG = \angle AEF = 70°$.

答案：C

方法必会

专题四 分类讨论思想

专题解读» 当被研究对象包含多种可能情况，导致我们不能对它一概而论时，必须对出现的所有情况进行分类讨论，得出各种情况下相应的结论，这种解决问题的思想方法，我们称为分类讨论思想．

例4 已知$OA \perp OC$于点O，且$\angle AOB : \angle AOC = 2 : 3$，求$\angle BOC$的度数．

解题秘方：由于OB在图中的位置不确定，因此分在$\angle AOC$的内部和外部两种情况画图计算．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：因为 $OA \perp OC$，所以$\angle AOC=90°$.

因为$\angle AOB : \angle AOC=2 : 3$，

所以$\angle AOB=60°$.

$\angle AOB$ 的位置有两种：一种是在$\angle AOC$ 内，另一种是在$\angle AOC$ 外，如图 2–5.

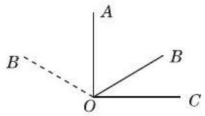


图 2–5

①当$\angle AOB$ 在$\angle AOC$ 内时，$\angle BOC=90° - 60° =30°$；

②当$\angle AOB$ 在$\angle AOC$ 外时，$\angle BOC=90° + 60° =150°$.

所以$\angle BOC$ 为 30°或 150°.

专题五 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想就是把一些抽象的数学运算利用相关的几何图形形象地展示出来，并结合该几何图形得到运算结果，它是我们解答数学题时常用的思想方法. 本章中数形结合思想有着重要的作用，如同位角、内错角、同旁内角的概念、平行线的性质和判定、平移的特征都要放到图形中，结合图形来理解.

例 5 把一把直尺与一块三角尺按如图 2–6 所示的方式放置，若$\angle 1=45°$，则$\angle 2$ 为（　　）

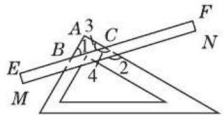


图 2–6

A.115°　　B.120°　　C.145°　　D.135°

解：如图 2–6，在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，因为$\angle 1=45°$，所以$\angle 3=180° - \angle A - \angle 1=45°$，所以$\angle 4=180° - \angle 3=135°$. 由题意知 $EF \parallel MN$，所以$\angle 2= \angle 4=135°$. 故选 D.

答案：D

专题六 方程思想

专题解读» 方程思想就是通过设未知数建立方程来求解问题的思想方法. 比如求角的大小，对要求的角列式计算很复杂时，即可采用列方程来解决. 本章中，对顶角相等、邻补角互补、平行线的性质都可以为列方程提供等量关系.

例 6 如图 2–7，已知 $FC \parallel AB \parallel DE$，$\angle \alpha : \angle D : \angle B=2 : 3 : 4$，求$\angle \alpha$，$\angle D$，$\angle B$ 的大小.

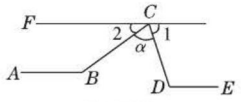


图 2–7

解题秘方：本题没有已知角的度数，故无法做到未知角向已知角转化. 根据已知条件中角的关系设出未知数，结合平角这一隐含条件列方程求解.

解：设$\angle \alpha =2x°$，$\angle D=3x°$，$\angle B=4x°$.

因为 $FC \parallel AB \parallel DE$，

所以$\angle 2+ \angle B=180°$，$\angle 1+ \angle D=180°$.

则$\angle 2=180° - \angle B=180° - 4x°$，

$\angle 1=180° - \angle D=180° -3x°$.

由题意知$\angle 1+ \angle 2+ \angle \alpha =180°$，

所以$(180° -3x°) + (180° - 4x°) +2x° = 180°$，解得 $x=36$.

所以$\angle \alpha =2x° =72°$，$\angle D=3x° =108°$，$\angle B=4x° =144°$.

方法点拨：利用方程思想求解有关角度问题时，往往通过分析题中的数量关系，适当设元建立起关于已知量和未知量之间的数量关系的方程，然后通过解方程使问题得解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见231页

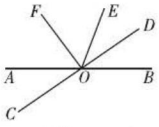
题型1　求角的度数

类型1：利用相交线的性质求角的度数

1. 如图，直线AB，CD相交于点O，$\angle DOE=\angle BOD$，OF平分$\angle AOE$.

（1）判断OF与OD的位置关系；

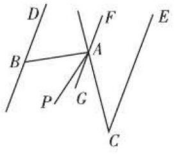
（2）若$\angle AOC:\angle AOD=1:5$，求$\angle EOF$的度数.



（第1题）

类型2：利用平行线的性质求角的度数

2. 如图，$DB\parallel FG\parallel EC$，$\angle ACE=36°$，$AP$平分$\angle BAC$，$\angle PAG=12°$，求$\angle ABD$的度数.

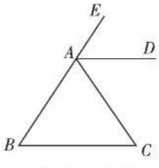


（第2题）

题型2　几种常见的推理结论

类型1：说明两个角相等

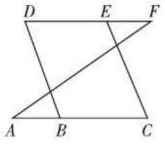
3. 如图，已知$\angle B=\angle C$，$AD\parallel BC$，试说明AD平分$\angle CAE$.



（第3题）

类型2：说明两条直线平行

4. 如图，已知$\angle A=\angle F$，$\angle C=\angle D$. 试说明$BD\parallel EC$.



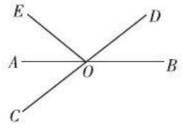
（第4题）

类型3：说明两条直线垂直

5. 如图，直线AB，CD相交于点O，OA平分$\angle EOC$.

（1）若$\angle EOC=72°$，求$\angle BOD$的度数；

（2）若$\angle DOE=2\angle AOC$，判断射线OE，OD的位置关系，并说明理由.



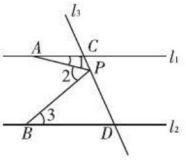
（第5题）

类型4：说明角的和差

6. 如图，已知直线$l_1\parallel l_2$，直线l_3和直线l_1，l_2分别交于点C和D，P为直线l_3上的一动点，A，B分别是直线l_1，l_2上的定点.

（1）当点P在线段CD（C，D两点除外）上运动时，问$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$有什么关系？这种关系是否发生变化？

（2）当点P在线段CD之外时，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$又有怎样的关系？说明理由.



（第6题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

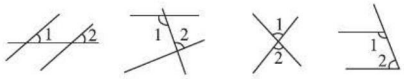
第二章测试卷

☞答案见232页

（100分 60分钟）

一、选择题（每小题4分，共32分）

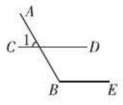
1. 下列图形中，∠1和∠2是内错角的是（　　）



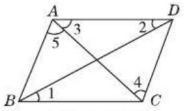
A　　B　　C　　D

2. 如图，已知∠1=60°，如果$CD \parallel BE$，那么∠B等于（　　）

A.70°　　B.100°　　C.110°　　D.120°



（第2题）



（第3题）

3. 如图，在四边形$ABCD$中，连接AC,BD，若要使$AB \parallel CD$，则需要添加的条件可以是（　　）

A. ∠1=∠2　　B. ∠2=∠3

C. ∠3=∠4　　D. ∠4=∠5

4. 下列语句中，正确的有（　　）

① 一条直线的垂线只有一条；

② 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行；

③ 垂线段最短；

④ 互相垂直的两条直线形成的四个角一定都是直角.

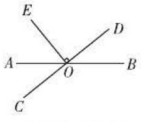
A.0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

5. 如图，直线AB，CD相交于点O，$OE \perp CD$，∠AOE=52°，则∠BOD等于（　　）

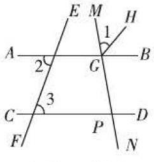
A.24°　　B.26°　　C.36°　　D.38°

6. 如图，AB，CD，EF，MN均为直线，∠2=∠3=70°，∠GPC=80°，GH平分∠MGB，则∠1=（　　）

A.35°　　B.40°　　C.45°　　D.50°



（第5题）



（第6题）

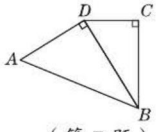
7. 如图，$AD \perp BD$,$BC \perp CD$,AB=6 cm，BC=4 cm，则BD的长度的取值范围是（　　）

A. 大于4 cm

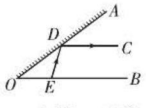
B. 小于6 cm

C. 大于4 cm或小于6 cm

D. 大于4 cm且小于6 cm



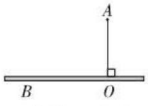
（第7题）



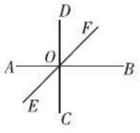
（第8题）

8. 如图，∠AOB的一边OA为平面镜，∠AOB=37°，在OB上有一点E，从E点射出一束光线经OA上一点D反射，∠ODE=∠ADC. 若反射光线DC恰好与OB平行，则∠DEB为（　　）

A.74°　　B.63°　　C.64°　　D.73°



（第9题）



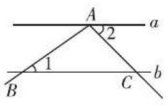
（第10题）

二、填空题（每小题4分，共16分）

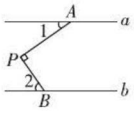
9. 自来水公司为某小区A改造供水系统，如图，沿路线AO铺设管道和BO主管道衔接（$AO \perp BO$），路线最短，工程造价最低，依据是_____.

10. 如图，直线AB，CD，EF相交于点O，∠AOF=3∠BOF，∠AOC=90°，那么∠COE=_____.

11. 如图，直线$a \parallel b$，∠BAC的顶点A在直线a上，且∠BAC=100°. 若∠1=34°，则∠2=_____.



（第11题）



（第12题）

12. 如图，$a \parallel b$，$PA \perp PB$，∠1=35°，则∠2等于_____.

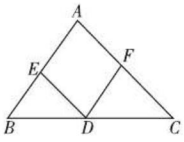
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（8分）完成下面的推理过程.

已知：如图，D，F，E分别是BC，AC，AB上的点，$DF \parallel AB$，$DE \parallel AC$，

试说明$\angle A = \angle EDF$.



（第13题）

解：因为$DF \parallel AB$（_____），

所以$\angle A + \angle AFD =$_____（_____）.

因为$DE \parallel AC$（_____），

所以$\angle AFD +$_____$=$_____（_____）.

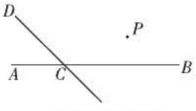
所以$\angle A = \angle EDF$（_____）.

14.（10分）如图，直线CD与直线AB相交于点C，直线外有一点P.

（1）作图：过点P作$PQ \parallel CD$，交AB于点Q；

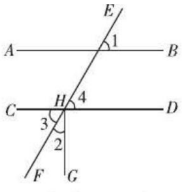
（2）作图：过点P作$PR \perp CD$，垂足为R；

（3）若$\angle DCB = 120°$，猜想$\angle PQC$的度数并说明理由.



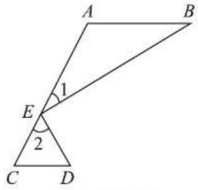
（第14题）

15.（10分）如图，直线AB，CD被直线EF所截，H为CD与EF的交点，$GH \perp CD$于点H，$\angle 2 = 30°$，$\angle 1 = 60°$. 试说明$AB \parallel CD$.



（第15题）

16.（12分）如图，已知$AB \parallel CD$，$\angle 1 = \angle B$，$\angle 2 = \angle D$. 试说明$BE \perp DE$.



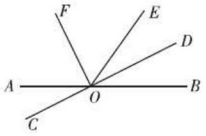
（第16题）

17.（12分）如图，直线AB与CD相交于点O，OF，OD分别是$\angle AOE$，$\angle BOE$的平分线.

（1）写出$\angle DOE$的补角；

（2）若$\angle BOE = 62°$，求$\angle AOD$和$\angle EOF$的度数；

（3）试问射线OD与OF之间有什么特殊的位置关系？为什么？



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

揭示两个变量之间的秘密

揭示两个变量之间的秘密











第二章 变量之间的关系

核心考点

你将见到的

- 用表格表示的变量间关系
- 用关系式表示的变量间关系
- 用图象表示的变量间关系

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 表格法
- 关系式法
- 图象法
- 数形结合思想
- 从特殊到一般的思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 用表格表示的变量间关系

核心知识

- 常量与变量
- 自变量与因变量
- 用表格表示的变量间关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 常量与变量

1. 定义

在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为变量，数值始终不变的量为常量.

说明：（1）“常量”是已知数，是指在整个变化过程中保持不变的量；但“常量”不等于“常数”，它可以是数值不变的字母. 如在匀速运动中的速度 v 就是一个常量.

（2）变量与常量是相对的，前提是“在一个变化过程中”，一个量在某一变化过程中是常量，而在另一个变化过程中，它可能是变量. 如在 $s=vt$ 中，当 s 一定时，v，t 为变量，s 为常量；当 t 一定时，s，v 为变量，t 为常量.

2. 判断一个量是常量还是变量的方法

看这个量在某一变化过程中的值是否发生改变（或者说是否会取不同的数值），若在变化过程中此量的数值不变，则此量是常量，若此量可以取不同的数值，则此量是变量.

注意：（1）常量与变量只与在某一个变化过程中的数值是否发生改变有关，与个数没有关系.

（2）变量、常量与字母的指数没有关系，如 $y=100-2x^2$ 中，x，y 是变量，而不能说 x^2 是变量.

拔考向 利用常量与变量的定义进行辨识

例 1 分别指出下列关系中的变量和常量：

（1）圆面积公式 $S=\pi r^2$（S 表示面积，r 表示半径）；

（2）若等腰三角形底角度数值为 x，则顶角度数值 y 与 x 的关系式是 $y=-2x+180$；

（3）在三角形 ABC 中，它的底边长 a 一定，底边上的高是 h，则三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ah$.

解题秘方：紧扣“常量与变量”的定义进行辨识.

解：（1）r，S 是变量，π 是常量；（2）x，y 是变量，-2，180 是常量；（3）S，h 是变量，$\frac{1}{2}$，a 是常量.

提分·必记

特别提醒

1. 判断一个量是常量还是变量，应先看它是否在一个变化过程中，若在，则看它在这个变化过程中数值是否发生改变.
2. 指出一个变化过程中的常量时，应连同它前面的符号.

提分·秘诀

特别警示

常量与变量是从某一变化过程中该量的值是否发生改变，不要误认为常量为常数，表示不变量的字母，也可以作为常量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 自变量和因变量

1. 自变量和因变量 一般地，在某个变化过程中，如果有两个变量 x，y 并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是因变量.

2. 自变量与因变量的联系与区别

（1）**联系**：二者都是某一变化过程中的变量，因研究的侧重点或先后顺序不同可以互相转化，如当路程一定时，若时间随速度的变化而变化，这时速度是自变量，时间是因变量；当速度一定时，若路程随时间的变化而变化，这时时间是自变量，路程是因变量.

（2）**区别**：自变量是在一定范围内主动发生变化的量，因变量是随着自变量的变化而被动发生变化的量.

提分·必记

特别提醒

自变量和因变量是相对的，一个量在某个变化过程中是自变量，而在另一个变化过程中可能是因变量.

拔考向▸ 利用自变量与因变量的概念进行识别

例 2 圆柱的高 h 为 10 cm，当圆柱的底面半径 r 由小到大变化时，圆柱的体积 V 也发生了变化，在这个变化过程中（　　）

A. r 是因变量，V 是自变量　　B. r 是自变量，V 是因变量

C. r 是自变量，h 是因变量　　D. h 是自变量，V 是因变量

解题秘方：紧扣自变量与因变量的定义，在两个变量中先确定自变量，再确定因变量.

解：圆柱的高 h=10 cm，因此 h 是常量不是变量，故排除 C,D. 因为圆柱的体积 V 随底面半径 r 的变化而变化，所以 r 是自变量，V 是因变量，故选 B.

答案：B

提分·秘诀

方法点拨

自变量是在某个范围内主动发生变化的量，因变量是随着自变量的变化而发生变化的量.

点知识▸ 3 用表格表示变量间的关系

1. 借助表格，我们可以表示因变量随自变量的变化而变化的情况.

2. 用表格表示两个变量之间关系的步骤

（1）确定各行、各列的栏目（一般有两行，第一行表示自变量，第二行表示因变量）；

（2）写出栏目名称并根据问题内容写上单位；

（3）在第一行列出自变量的各个变化取值，在第二行对应列出因变量的各个变化取值. 一般情况下，自变量的取值从左到右应按由小到大的顺序排列，这样便于反映因变量随自变量变化的趋势.

3. 用表格表示两个变量之间关系的优缺点

（1）**优点**：直观，可以直接从表格中找出自变量和因变量的对应值；

（2）**缺点**：具有局限性，只能部分反映两个变量之间的关系，因此要从这部分数据中得出两个变量之间的关系时，需要对表格中的数据进行分析.

提分·必记

特别提醒

1. 用表格表示两个变量之间的关系时，数据必须真实且自变量所取数值要排列有序；
2. 因变量的数值必须与自变量的数值一一对应.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用表格获取变量的值

例3 在一次试验中，小强把一根弹簧固定，在其下端悬挂重物，下表是测得的弹簧长度 y 与所挂重物的质量 x 的部分对应值.

所挂重物的质量 x/kg	0	1	2	3	4	5
弹簧长度 y/cm	20	22	24	26	28	30

（1）上述表格反映了哪两个变量之间的关系？哪个是自变量？哪个是因变量？

（2）当所挂重物为 4 kg 时，弹簧多长？不挂重物呢？

（3）当所挂重物为 6 kg 时（在弹簧允许的范围内），弹簧的长度是多少？

解题秘方：紧扣表格中提供的数据信息解决相关的问题.

解：（1）表格反映了弹簧长度 y 和所挂重物的质量 x 两个变量之间的关系，所挂重物的质量 x 是自变量，弹簧长度 y 是因变量.

（2）当所挂重物的质量为 4 kg 时，弹簧长度为 28 cm；不挂重物时，弹簧长度为 20 cm.

（3）由上表可知，重物质量每增加 1 kg，弹簧长度伸长 2 cm，所以当所挂重物为 6 kg 时，弹簧长度为 32 cm.

提分·秘诀

方法点拨

表格中只是部分反映出两个变量的对应值，需要我们对表格中的数据进行分析，从而得出两个变量之间的变化规律.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用表格法分析两个变量之间的关系

例4 某易拉罐厂设计一种易拉罐，在设计过程中发现符合要求的易拉罐的用铝量与底面半径的关系如下表：

底面半径 x/cm	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
用铝量 y/cm^3	6.9	6.0	5.6	5.5	5.7	6.0	6.5

（1）上表反映了哪两个变量之间的关系？哪个是自变量？哪个是因变量？

（2）当易拉罐的底面半径为 2.4 cm 时，用铝量是多少？

（3）根据表格中的数据，你认为易拉罐的底面半径为多少比较适宜？说说你的理由.

（4）粗略说一说易拉罐的底面半径对用铝量的影响.

解题秘方：紧扣表格中提供的数据，找两个变量之间的对应值，分析两个变量之间的变化趋势.

解：（1）表格反映了易拉罐的用铝量和底面半径的关系，其中易拉罐的底面半径为自变量，用铝量为因变量.

（2）当易拉罐的底面半径为 2.4 cm 时，用铝量为 5.6 cm^3.

（3）易拉罐的底面半径为 2.8 cm 比较适宜，因为此时用铝量最小，节约成本.

挑战·高分

技巧点拨

观察表格三步骤：

1. 通过表格确定自变量与因变量；
2. 纵向观察每一列，发现因变量与自变量的对应关系；
3. 分别观察横向两栏，从中发现因变量随自变量的变化而呈现的变化趋势.

详解

用铝量随着易拉罐的底面半径的变化而变化，所以易拉罐的底面半径是自变量，用铝量是因变量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）当易拉罐的底面半径在 1.6~2.8 cm 变化时，用铝量随底面半径的增大而减小；当易拉罐的底面半径在 2.8~4.0 cm 变化时，用铝量随底面半径的增大而增大.

拔尖角度 2 利用表格法进行规律探究

例 5 某校阅览室有能坐 4 人的方桌，如果多于 4 人，就把方桌拼成一行，2 张方桌拼成一行能坐 6 人，3 张方桌拼成一行能坐 8 人（如图 3-1-1）……请你结合这个规律，填写下表并回答问题：

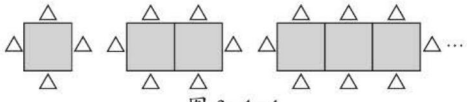


图 3-1-1

拼成一行的方桌数 / 张	1	2	3	4	…	n
能坐的人数	4	6	8		…	

若该校七（1）班有 46 人去阅览室看书，则需要多少张方桌？

解题秘方：根据图形中提供的信息完成表格，利用表格中的数据分析两个变量之间的变化规律.

解：表格中从左到右依次填：10；$2n+2$

令 $2n+2=46$，解得 $n=22$.

故需要 22 张方桌.

挑战·高分

详解

1 张方桌坐 4 人，每多 1 张方桌就多坐 2 人，所以 4 张方桌就多坐 6 人，共坐 10 人.

根据表格中数据呈现出来的规律，可知 n 张方桌能坐的人数是 $4+2(n-1)=2n+2$.

技巧点拨

要求需要多少张方桌，只需求出当人数为 46 时 n 的值即可.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查学生从表格中获取信息、分析信息的能力，并能够进行预测. 在中考中，单独考查的可能性不大.

三年中考兵法

考法 利用表格表示两个变量之间的关系

例 6 [中考·沈阳] 宁宁同学设计了一个计算程序，如下表：

输入数据	1	2	3	4	5	…
输出数据	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$	a	…

根据表格中的数据的对应关系，可得 a 的值是_____.

试题评析：本题主要考查用表格表示两个变量之间的关系，解题的关键是分析表格中的数据得出规律.

解：由表格中数据的规律可知，输出数据的分子是从 2 开始的偶数，分母是从 3 开始的奇数，当输入数据为 n 时，输出数据为 $\frac{2n}{2n+1}$，所以 a 的值是 $\frac{10}{11}$.

答案：$\frac{10}{11}$

冲刺·满分

考法点评

本题通过分析表格给出的数据判断两个变量之间的关系，进而解决问题. 在对数据信息进行分析的过程中，要明确自变量和因变量以及它们之间存在的变化关系.

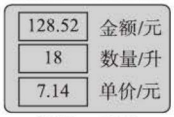
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见233页

1.[期末·迁安市]李师傅到单位附近的加油站加油，如图是所用的加油机上的数据显示牌，则其中的常量是（　　）

A. 金额　　B. 数量

C. 单价　　D. 金额和数量



（第1题）

2. 甲以每时20 km的速度行驶时，他所行驶的路程s（km）随着时间t（h）的增大而增大，则下列说法中正确的是（　　）

A. 数20和s，t都是变量

B. 数20和t都是变量

C.s和t都是变量

D. 数20和s都是变量

3. 某汽车油箱存油量（Q）与汽车行驶时间（t）的关系如下表，下列说法中不正确的是（　　）

时间t/min	0	10	20	30	40	50	60	…
存油量Q/L	20	19	18	17	16	15	14	…

A. 油箱中原存油20 L

B. 汽车每分耗油0.1 L

C. 汽车行驶2 h，油箱中存油8 L

D. 油箱中的油只可供汽车行驶3 h

4. 刘辉利用计算机设计了一个程序，输入和输出的数据如下表：

输入	…	1	2	3	4	5	…
输出	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$	…

那么，当输入的数据为8时，输出的数据是（　　）

A. $\frac{8}{61}$　　B. $\frac{8}{63}$　　C. $\frac{8}{65}$　　D. $\frac{8}{67}$

5. 一种树苗，栽种时高大约为80 cm，为研究这种树苗的生长情况，测得数据如下表：

栽种以后的年数n	1	2	3	4	…
树苗的高度h/cm	105	130	155	180	…

（1）此变化过程中_____是自变量，_____是因变量；

（2）栽种____年后，树苗能长到280 cm.

6.（易错题）父亲告诉小明“距离地面越高，温度越低”，并给小明提供了下面的表格.

距离地面的高度/km	0	1	2	3	4	5
温度/℃	20	14	8	2	−4	−10

根据上表，父亲向小明提出来下面几个问题，请你和小明一起回答.

（1）上表反映了哪两个变量之间的关系？哪个是自变量？哪个是因变量？

（2）如果用h表示距离地面的高度，用t表示温度，那么随着h的变化，t是怎么变化的？

（3）你能猜出距离地面6 km的高空的温度是多少吗？　　[导学号 7876572]

7. 某市场出售某种商品，其销售数量（件）与销售额（元）的关系如下表：

销售数量/件	1	2	3	4	5	…
销售额/元	8.4	16.8	25.2	33.6	42	…

（1）上表中哪些量在变化？自变量和因变量各是什么？

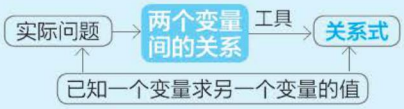
（2）某顾客购买这种商品10件，带了80元钱，他所带的钱够用吗？如果不够用，那么最多可购买该商品多少件？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 用关系式表示的变量间关系

核心知识
- 两个变量间的关系式
- 根据关系式求变量的值

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 用关系式表示两个变量之间的关系

1. 关系式法

两个变量之间的关系有时可以用一个含有两个变量及数学运算符号的等式来表示，这种表示变量之间关系的方法叫做关系式法．例如，正方形的边长为 x，面积为 y，则 $y=x^2$ 这个关系式就表示两个变量之间的关系，其中 x 是自变量，y 是因变量．



2. 关系式的基本特征

关系式一般是用含自变量的代数式表示因变量的等式，通常把表示因变量的字母单独写在等号的左边，含有自变量的代数式写在等号的右边．

3. 求两个变量之间关系式的常见类型

（1）利用公式写出变量之间的关系式，如三角形的面积公式；

（2）根据表格中所列的数据写出变量之间的关系式；

（3）根据实际问题中的等量关系写出变量之间的关系式．

拔考向▸ 利用关系式表示两个变量之间的关系

例 1 已知变量 x，y 满足下面的关系：

x	…	−2	−1	1	2	3	…
y	…	1.5	3	−3	−1.5	−1	…

则 x，y 之间的关系式为（　　）

A. $y=\dfrac{3}{x}$　　B. $y=\dfrac{-x}{3}$

C. $y=\dfrac{-3}{x}$　　D. $y=\dfrac{x}{3}$

解题秘方：紧扣表格中给出的数据规律，用关系式表示两个变量之间的关系．

答案：C

提分·必记

特别提醒

用关系式表示两个变量之间关系的优缺点．

优点：能准确反映整个变化过程中因变量与自变量之间的数值关系，便于分析计算；

缺点：在实际问题中，有的变量之间的关系不一定能用关系式表示出来．

提分·秘诀

方法点拨

对比用表格法和关系式法表示变量间的关系，我发现用关系式表示变量之间的关系简单明了，能方便地求出自变量为任意一个值时，相对应的因变量的值，但需要通过计算才能得到所需结果；表格能直接得到某些具体的对应值，但不能直接反映变量的整体变化情况．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 根据关系式求变量的值

利用关系式，可以根据任何一个自变量的值求出相应的因变量的值，也可根据因变量的值求出相应的自变量的值.

拔考向▶ 利用关系式求两个变量的值

例 2 如图 3-2-1，当自变量 $x=3$ 时，因变量 $y=$_____.

解题秘方：紧扣两个变量之间的关系式，解已知一个变量的值求另一个变量的值的问题.

解：把自变量 x 的值代入计算即可，当 $x=3$ 时，$y=1-2x=1-2\times3=-5$.

答案：-5



图 3-2-1

提分·必记

特别提醒

两个变量间的关系式，应是两个变量为未知数的方程.

提分·秘诀

方法点拨

已知自变量的值，利用关系式求因变量的值，实际上是求代数式的值；已知因变量的值，利用关系式求自变量的值，实际上是求方程的解.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用关系式法表示几何问题中两个变量的关系

例 3 如图 3-2-2，一个长方体的底面是一个边长为 10 cm 的正方形，当它的高变化时，长方体的体积也随着发生变化.

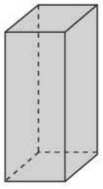


图 3-2-2

（1）在这个变化中，自变量与因变量分别是_____和_____.

（2）如果长方体的高为 h（cm），那么长方体的体积 V（cm^3）与高 h（cm）的关系式为____.

（3）长方体的高由 1 cm 变化到 10 cm，它的体积由_____变化到_____.

（4）当长方体的体积是 900 cm^3 时，长方体的高是_____.

解题秘方：紧扣几何图形的相关公式，写出两个变量之间的关系式，然后利用关系式求出变量的值.

解：（1）因为长方体的高变化时，长方体的体积也随之发生变化，所以长方体的高是自变量，长方体的体积是因变量.

（2）根据长方体的体积公式，可得 $V=10\times10\times h$，即关系式为 $V=100h$.

（3）当长方体的高为 1 cm 时，它的体积是 $100\times1=100$（cm^3）；

当长方体的高为 10 cm 时，它的体积是 $100\times10=1\,000$（cm^3）.

（4）当长方体的体积是 900 cm^3 时，得 $900=100h$，

所以长方体的高是 $900\div100=9$（cm）.

答案：（1）长方体的高；长方体的体积　（2）$V=100h$

（3）100 cm^3；1 000 cm^3　（4）9cm

挑战·高分

方法点拨

解决此类问题的关键是记住一些常见几何图形的相关公式，主要涉及面积、周长、体积公式，求值时要认真仔细，确保运算准确.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用关系式法解决实际问题中两个变量的关系

挑战·高分

例4 某水利部门为了加强公民的节水意识，合理利用水资源，采用了价格调控手段以期达到节约用水的目的，规定用水收费标准如下：每户每月的用水量不超过 10 m^3 时，水费按每立方米 a 元收费；超过 10 m^3 时，不超过的部分每立方米仍按 a 元收费，超过的部分每立方米按 b 元收费，小颖家今年 5,6 月份的用水量和水费如下表：

月份	用水量 /m^3	水费 / 元
5	9	14.4
6	13	23.8

设小颖家每月用水量为 x m^3，应交水费为 y 元.

（1）求 a，b 的值；

（2）写出 y 与 x 之间的关系式；

（3）若小颖家今年 7 月份的用水量为 15.5 m^3，求她家今年 7 月份的水费.

解题秘方：紧扣两个变量在实际问题中所表示的实际意义，利用两个变量之间的等量关系写出关系式解决问题.

解：（1）当 $x \leqslant 10$ 时，$y=ax$，

当 $x=9$ 时，$y=14.4$，即 $14.4=9a$，所以 $a=1.6$；

当 $x>10$ 时，$y=10\times1.6+b(x-10)=16+b(x-10)$，

当 $x=13$ 时，$y=23.8$，即 $23.8=16+b(13-10)$，所以 $b=2.6$.

（2）当 $x \leqslant 10$ 时，$y=1.6x$；

当 $x>10$ 时，$y=10\times1.6+2.6(x-10)=2.6x-10$.

（3）将 $x=15.5$ 代入 $y=2.6x-10$，得 $y=30.3$，

即小颖家今年 7 月份的水费是 30.3 元.

方法点拨

根据两变量之间的关系求解问题的方法：根据两变量之间的关系求解问题时，要先根据实际问题中的等量关系（如路程、速度与时间或总价、单价与数量等）或几何图形中的等量关系（如体积、面积、周长等）构建关系式，求因变量的值就是将自变量的值代入关系式求代数式的值，求自变量的值就是将因变量的值代入关系式构建方程求方程的解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

利用关系式表示两个变量之间的关系是中考的重要考点，以选择题、填空题为主，有时也出现在综合题中，难度较低，多以计算为主.

三年中考兵法

考法 用关系式求值

冲刺·满分

例5 [中考·扬州] 同一温度的华氏度数 y（℉）与摄氏度数 x（℃）之间的关系式是 $y=\frac{9}{5}x+32$，若某一温度的摄氏度数值与华氏度数值恰好相等，则此温度的摄氏度数为_____℃.

试题评析：本题考查了用关系式求值的问题，解决这类问题通常都是利用变量间的关系式求代数式的值或方程的解.

解：由题意可得，当 $y=x$ 时，即 $x=\frac{9}{5}x+32$，解得 $x=-40$.

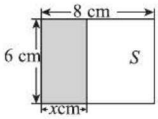
答案：-40

方法点拨

两个变量之间的关系式可以看成含有两个未知数的方程，已知一个变量的值，可以通过解方程求出另一个变量的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[期末·宝鸡岐山]如图，长方形的长和宽分别为8cm和6cm，剪去一个长为x cm（$0<x<8$）的小长方形（阴影部分）后，余下长方形的面积S（cm^2）与x（cm）的关系式可表示为（　　）



（第1题）

A.$S=6x$　　B.$S=8(6-x)$

C.$S=6(8-x)$　　D.$S=8x$

2.某百货大楼购进了一批花布，出售时要在进价（进货价格）的基础上加一定的利润，其售出数量x（m）与售价y（元）的关系如下表：

售出数量x/m	1	2	3	4	…
售价y/元	8+0.3	16+0.6	24+0.9	32+1.2	…

下列用售出数量x（m）表示售价y（元）的关系式中，正确的是（　　）

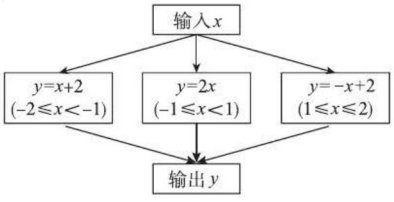
A.$y=8x+0.3$　　B.$y=(8+0.3)x$

C.$y=8+0.3x$　　D.$y=8+0.3+x$

3.在关系式$y=3x+4$中，当自变量$x=7$时，因变量y的值为（　　）

A.1　　B.7　　C.25　　D.31

4.根据如图中的程序计算y值，若输入x的值为$\frac{3}{2}$，则输出y的值是（　　）



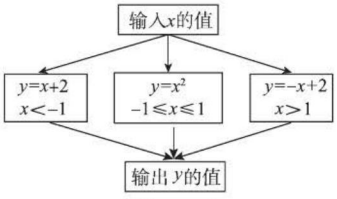
（第4题）

A.$\frac{7}{2}$　　B.$\frac{9}{4}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{9}{2}$

5.一个长方体的体积为12 cm^3，当高变为原来的3倍而底面积不变时，体积变为_____cm^3.

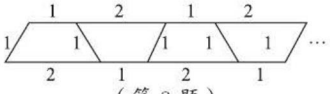
6.赵红到市场共买了20支笔，她平均每月用3支笔，若用y表示赵红剩余笔的数量，用x表示她用的月数，且y与x之间的关系可近似地用$y=20-3x$来表示，当她用了2个月后，还剩____支笔，用了3个月后，还剩____支笔，用了6个月之后，还剩_____支笔，赵红的笔_____用7个月（填“够”或“不够”）.

7.根据如图的程序，当输入x的值为_____时，输出y的值为-4.



（第7题）

8.观察下图，回答问题：



（第8题）

（1）设图形的周长为L，梯形的个数为n，试写出L与n之间的关系式：_____；

（2）当$n=11$时，图形的周长是_____.

9.三角形ABC的边$BC=10$ cm，当边BC上的高AD从小到大变化时，三角形ABC的面积也随之变化.

（1）在这个变化过程中，自变量和因变量各是什么？

（2）如果三角形ABC的边BC上的高为h（cm），那么三角形ABC的面积S（cm^2）与高h（cm）之间的关系式是什么？

（3）用表格表示h由4 cm变到10 cm（每次增加1 cm），S的对应值.

（4）h每增加1cm，S如何变化？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 用图象表示的变量间关系

核心知识

- 用图象表示两个变量的关系
- 从图象中获取变量的信息
- 利用图象分析行程问题中的变量

知识链接

两个变量之间的关系 —表示方法→ 图象法 —解决→ 行程问题中的变量

点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 用图象分析两个变量之间的关系

1. 图象法

用图象来表示两个变量之间关系的方法叫做图象法. 在用图象表示变量之间的关系时，通常用水平方向的数轴（称为横轴）上的点表示自变量，用竖直方向的数轴（称为纵轴）上的点表示因变量. 图象上的每一点表示自变量和因变量之间的相互关系.

2. 用图象法表示两个变量间关系的优缺点

优点：能直观、形象地反映因变量随着自变量变化的趋势.

缺点：难以得到准确的对应值.

用图象表示两个变量间的关系

拨考向▸利用图象表示变量之间的关系

例 1 ［期末·深圳龙岗区］“母亲水窖”是一项集中供水工程，是中国妇女发展基金会 2001 年开始实施的慈善项目，重点帮助西北地区摆脱因严重缺水带来的贫困和落后. 如图 3-3-1 是某母亲水窖的横断面示意图，如果这个母亲水窖以固定的流量注水，能大致表示水的深度 h 和时间 t 之间关系的是图 3-3-2 中的（　　）

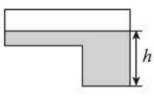


图 3-3-1

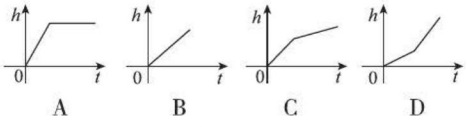


图 3-3-2

解题秘方：利用图象的特征表示两个变量之间的关系.

解：根据图 3-3-1，可知开始时随着注水时间的增加，水的深度增加较快，后来随着注水时间的增加水的深度增加较慢. 故能大致表示水的深度 h 和时间 t 之间关系的是选项 C.

答案：C

提分·必记

特别提醒

1. 图象法能直观、形象地描述两个变量之间的关系，但有的变量之间的关系不能用图象完整地表达出来，图象只是反映两个变量之间关系的一部分，且由图象确定的数值往往是近似的.
2. 在利用图象解决问题时，一定要分清横轴和纵轴分别表示哪个变量.

提分·秘诀

温馨提示

在用图象表示两个变量之间的关系时，横轴与纵轴的单位长度不一定相同.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 利用图象获取信息

利用图象的直观性可以了解因变量随自变量的变化而变化的情况.

(1) 利用图象可以知道自变量取某个值时，因变量的取值;

(2) 利用图象可以判断变量的变化趋势;

图象（或其局部）的呈现形状	变化趋势
“/” “⌜” “丿”或“ʃ”等	因变量随自变量的增大而增大
“\” “⌝” “乚”或“乙”等	因变量随自变量的增大而减小
“⌒” “∧”等	因变量先随自变量的增大而增大，后随自变量的增大而减小
“⌣” “∨”等	因变量先随自变量的增大而减小，后随自变量的增大而增大

(3) 利用图象上一系列的点所表示的自变量与因变量的对应值，还可以得到用表格表示的变量间关系.

提分·必记

特别提醒

从图象上观察两个变量之间的关系时，应有顺序性. 因为自变量从左往右越来越大，因变量从下往上越来越大，所以从左往右看，若图象是上升的，则因变量随着自变量的增大而增大;若图象是下降的，则因变量随着自变量的增大而减小.

拔考向▶ 从图象中获取变量的信息

例 2 如图 3-3-3 是某一天的气温随时间变化的图象，根据图象回答下列问题.

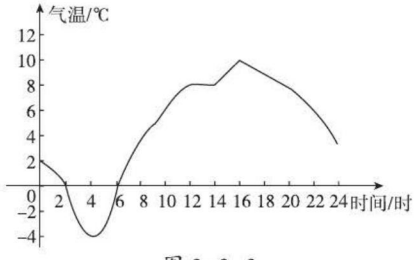


图 3-3-3

(1) 在这一天中，什么时间气温最高？最高气温是多少？什么时间气温最低？最低气温是多少？

(2) 20 时的气温是多少？

(3) 什么时间的气温是 6℃?

(4) 哪段时间内气温不断下降?

(5) 哪段时间内气温持续不变?

解题秘方：理解横轴上的数与纵轴上的数表示的意义是解此题的关键.

解：(1) 16 时气温最高，最高气温是 10℃.4 时气温最低，最低气温是 -4℃.

(2) 20 时的气温是 8℃.

(3) 10 时和 22 时的气温都是 6℃.

(4) 0 ~ 4 时，16 ~ 24 时这两段时间内气温都不断下降.

(5) 12 ~ 14 时这段时间内气温持续不变.

提分·秘诀

方法点拨

利用图象可以判断因变量的变化趋势，当图象自左向右上升时，说明因变量随着自变量的增大而增大;当图象自左向右下降时，说明因变量随着自变量的增大而减小;当图象与横轴平行或重合时，说明因变量随着自变量的增大而保持不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 3 用图象表示行程问题中的变量

1. 行程问题中，在不同的时间内，速度可以发生变化，根据速度与时间之间的关系图象解决问题时，关键是正确理解图象中各段的意义.

根据如图 3−3−4 的速度与时间之间的关系图象，可以得到如下信息：

（1）横轴表示时间，纵轴表示速度；

（2）线段 OA 从左到右是上升的，表示速度在增加，即物体从 0（点 O 处）开始加速运动；

（3）线段 AB 是水平的，表示物体匀速运动；

（4）线段 BC 从左到右是下降的，表示速度在减小，即物体减速运动，直到速度为 0（点 C 处）.

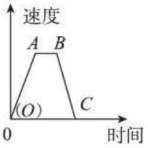


图 3−3−4

2. 根据如图 3−3−5 的离起点的距离与时间的关系图象，可以得到如下信息：

（1）横轴表示时间，纵轴表示离起点的距离；

（2）线段 OA 从左到右是上升的，表示物体离起点越来越远，且是匀速运动；

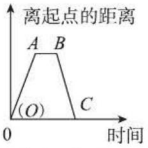


图 3−3−5

（3）线段 AB 是水平的，表示物体离起点的距离不变，即物体静止；

（4）线段 BC 表示物体离起点越来越近，直到回到起点，且是匀速运动.

提分·必记

特别提醒

1. 在速度与时间的关系图象中，上升线表示加速运动，下降线表示减速运动，水平线位于横轴上时表示静止，速度为 0，其他水平线表示匀速运动.
2. 在速度与时间的关系图象中，线段的倾斜程度表示速度变化的快慢，平缓表示速度变化慢，陡峭表示速度变化越快.
3. 在路程与时间的关系图象中，线段的倾斜程度表示速度的大小，越陡峭表示速度越大，越平缓表示速度越小.

核心考向▶ 利用图象表示行程问题中的两个变量

题型 1：图象在表示速度与时间之间关系中的应用

例 3 小雯骑车上学，加速行驶一段时间后，匀速前进，快到十字路口时看到前面是红灯，于是减速到停下来，绿灯亮后，她又加速行驶一段时间，快到学校时就减速行驶，进入校园后停了下来，下列可以近似地刻画出小雯骑车的速度 v 随时间 t 变化情况的是图 3−3−6 中的（　　）

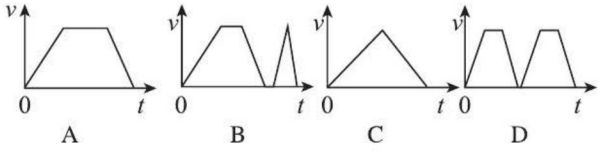


图 3−3−6

解题秘方：紧扣图象中横轴和纵轴代表的实际意义，根据速度的变化情况进行识别.

解：小雯骑车速度的变化经过 7 个过程：加速→匀速→减速→停止→加速→减速→停止，故只有选项 B 中的图象与上面 7 个过程吻合.

答案：B

提分·秘诀

方法点拨

先看清横轴和纵轴的含义，再抓住起点、终点、最高点（最低点）、拐点等特殊位置读图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：图象在表示路程与时间之间关系中的应用

例 4 ［中考·通辽］小刚从家去学校，先匀速步行到车站，等了几分后坐上了公交车，公交车匀速行驶一段时间后到达学校，下列图象能反映小刚从家到学校行驶路程 s（单位：m）与时间 t（单位：min）之间关系的是（　　）

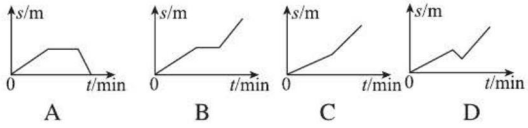


图 3-3-7

解：由题意得，刚开始，小刚匀速步行到车站，s 随着 t 的增加而增加，变化趋势比较缓慢；在等公交车的时间段内，s 随着 t 的增加而不变；坐上公交车后 s 随着 t 的增加而增加，变化趋势比较快；故反映小刚从家到学校行驶路程 s（单位：m）与时间 t（单位：min）之间关系的大致图象是选项 B.

答案：B

方法点拨

在路程与时间的关系图象中，线段的倾斜程度表示速度的大小：线段越平缓，速度就越小；线段越陡峭，速度就越大.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用图象法解决容器注水问题

挑战·高分

例 5 ［中考·青海］均匀地向一个容器注水，最后将容器注满. 在注水过程中，水的高度 h 随时间 t 的变化规律如图 3-3-8 所示，这个容器的形状可能是图 3-3-9 中的（　　）

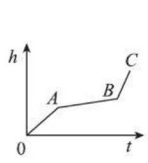


图 3-3-8

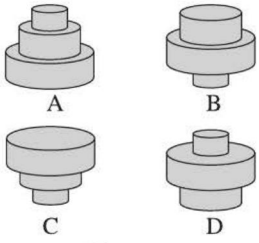


图 3-3-9

解题秘方：紧扣图象变化规律识别容器的形状.

解：从图 3-3-8 中可以看出，当注水速度一定时，随着时间 t 的增加，水面高度 h 也增加，其中水面高度先按一定的速度上升，接着以缓慢的速度上升，最后以很快的速度上升，由此可知这个容器中间部分的横截面最大，最下面的横截面次之，最上面的横截面最小.

答案：D

方法点拨

求解有关具体情境的图象信息分析与识别题，关键是从图象信息中获取因变量与自变量的变化情况，根据图象确定总体变化趋势，进而结合具体情境的变化特点进行正确选择.

技巧点拨

观察容器形状可知，容器横截面越大，单位时间内水面上升的高度越小；容器横截面越小，单位时间内水面上升的高度越大.

拔尖角度 2 利用分段图象的特征解决行程问题

挑战·高分

例 6 ［期中·滕州］放学后，小刚和同学边聊边往家走，突然想起今天是妈妈的生日，赶紧加快速度，跑步回家，小刚离家的距离 s（m）和放学后的时间 t（min）之间的关系如图 3-3-10 所示，由图可知：

知识链接

在一个变化过程中，两个变量之间的关系不是一成不变的，有时随着自变量的变化，因变

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

① 小刚边走边聊阶段的速度是 125 m/min；

② 小刚家离学校的距离是 1 000 m；

③ 小刚回到家时已放学 10 min；

④ 小刚从学校回到家的平均速度是 100 m/min；

其中正确的有（　　）

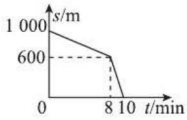


图 3-3-10

A.4 个　　B.3 个　　C.2 个　　D.1 个

解题秘方：紧扣分段图象中“拐点”的实际意义以及纵轴和横轴表示的意义进行逐次判断.

解：①小刚边走边聊阶段的速度是$\frac{1\,000-600}{8}$=50（m/min），故①错误；②当 t=0 时，s=1 000，即小刚家离学校的距离是 1 000 m，故②正确；③当 s=0 时，t=10，即小刚回到家时已放学 10 min，故③正确；④小刚从学校回到家的平均速度是$\frac{1\,000}{10}$=100（m/min），故④正确.

答案：B

量与自变量之间的关系也会发生变化，反映在图象上就是分段图象.

方法点拨

从分段图象中读取信息的关键是找“拐点”，以“拐点”为分界线，弄清每一段图象表示的意义，如 0 ~ 8min 表示“小刚边走边聊阶段”；8 ~ 10min 表示“小刚跑步回家”，再根据问题提取有效信息.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容在中考中主要考查从图象中获取信息的能力，题型以选择题、填空题为主，题目难度一般不大.

考法 1 用图象表示变量间的关系

冲刺·满分

例 7 ［中考·随州］“龟兔赛跑”这则寓言故事讲述的是比赛中兔子开始领先，但它因为骄傲在途中睡觉，而乌龟一直坚持爬行，最终赢得比赛，下列图象可以近似体现这一故事过程的是（　　）

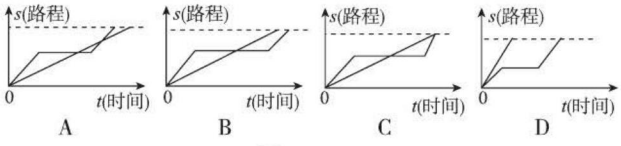


图 3-3-11

试题评析：本题考查了用图象表示两个变量之间的关系，解题的关键是理解横轴、纵轴所表示的意义，弄清“上升线”“下降线”和“水平线”的含义.

解：根据题意得，乌龟运动的图象是一条斜向上的直线，兔子开始领先，此时兔子运动的图象斜向上，并且比乌龟运动的图象更陡；途中兔子睡觉，此时兔子的路程在一段时间内保持不变；最后兔子追赶乌龟，并且乌龟赢得比赛，即乌龟比兔子所用时间少.

答案：B

方法点拨

用图象表示行程问题中路程与时间的关系时，若速度不变，则图象是一条直线，若速度发生变化，则图象是分段的折线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 从图象中获取信息

例 8 [中考·长沙]小明家、食堂、图书馆在同一直线上，小明从家去食堂吃早餐，接着去图书馆读报，然后回家，如图 3-3-12 反映了这个过程中，小明离家的距离 y（km）与时间 x（min）之间的对应关系．根据图象，下列说法正确的是（　　）

A. 小明吃早餐用了 25 min

B. 小明读报用了 30 min

C. 食堂到图书馆的距离为 0.8 km

D. 小明从图书馆回家的速度为 0.8 km/min

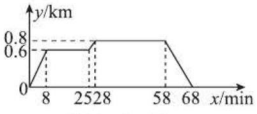


图 3-3-12

试题评析：本题主要考查结合图象，根据路程（距离）、时间与速度之间的关系获取信息，解决此类题的关键是结合具体情境及图象“拐点”所表示的含义、数量关系进行分析与判断．

解：由图象易得，小明吃早餐用了 25−8=17（min），故选项 A 错误；

小明读报用了 58−28=30（min），故选项 B 正确；

食堂到图书馆的距离为 0.8−0.6=0.2（km），故选项 C 错误；

小明从图书馆回家的速度为 0.8÷（68−58）=0.08（km/min），故选项 D 错误．

答案：B

技巧点拨

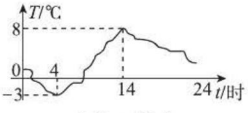
从图象中读取信息看三点：

1. 自变量和因变量对应的横轴、纵轴的含义．
2. 弄清“三线”的含义．“上升线”表示因变量随自变量的增大而增大；“水平线”表示因变量随自变量的增大而不发生变化；“下降线”表示因变量随自变量的增大而减小．
3. 抓住特殊点，如起点、最高点、最低点、终点、拐点等．

两年模拟兵法

答案见 233 页

1. [中考·齐齐哈尔]如图是自动测温仪记录的图象，它反映了齐齐哈尔市的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化，下列从图象中得到的信息正确的是（　　）



（第 1 题）

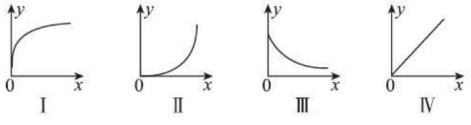
A. 0 时气温达到最低

B. 最低气温是零下 4℃

C. 0 时到 14 时之间气温持续上升

D. 最高气温是 8℃

2. 下面四幅图象近似刻画两个变量之间的关系，请按图象顺序将下面四种情境与之对应排序，正确的是（　　）



（第 2 题）

①一辆汽车在公路上匀速行驶（汽车行驶的路程与时间的关系）

②向锥形瓶中匀速注水（水面的高度与注水时间的关系）

③将常温下的温度计插入一杯热水中（温度计的读数与时间的关系）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

④一杯越来越凉的水（水温与时间的关系）

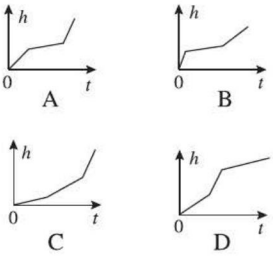
A. ①②④③　　B. ③④②①

C. ①④②③　　D. ③②④①

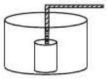
3.[中考·漳州]均匀地向如图所示的容器中注满水，能反映在注水过程中水面高度 h 随时间 t 变化的图象是（　　）



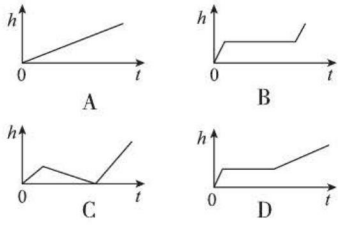
（第 3 题）



4. 小明将一个圆柱形的空玻璃杯放入形状相同的无水鱼缸内，看成一个容器．然后对准玻璃杯口匀速注水，如图所示，在注水过程中，杯底始终紧贴鱼缸底部，则下面可以近似地刻画出容器最高水位 h 与注水时间 t 之间的变化情况的是（　　）



（第 4 题）



5.[期末·北京丰台区]某地男女身高增长速度 y（厘米/年）与年龄 x（岁）的对应关系呈现如图规律．由图可知，以下四个推断：

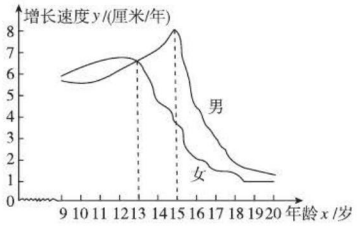
① 13 岁时，男生、女生的身高增长速度相同；

② 13 岁以后、20 岁以前，男生的身高增长速度比女生的身高增长速度快；

③ 15 岁时，男生、女生的身高增长速度达到最高值；

④ 13 岁以前，男生的身高增长速度比女生的身高增长速度慢．

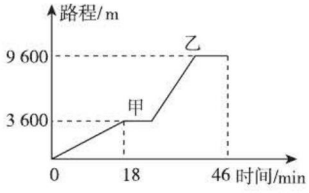
其中合理的是（　　）



（第 5 题）

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

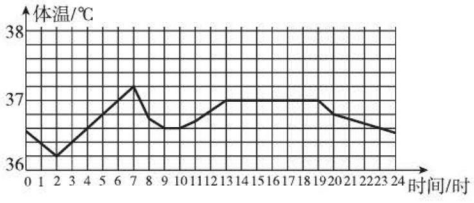
6.[中考·天水]某学校组织团员举行“伏羲文化旅游节”宣传活动，团员们骑自行车从学校出发，先上坡到达甲地后，宣传了 8 min，然后下坡到乙地又宣传了 8 min，行程情况如图所示，若返回时，上、下坡速度保持不变，在甲地仍要宣传 8 min，那么他们从乙地返回学校所用的时间是（　　）



（第 6 题）

A.33 min　B.46 min　C.48 min　D.45.2 min

7. 小明在一天中的体温变化情况如图：



（第 7 题）

（1）大约在_____时，小明的体温最高，这时最高体温是_____．

（2）大约在_____时，小明的体温最低，最低体温是_____．

（3）小明的体温在升高的时段是_____．

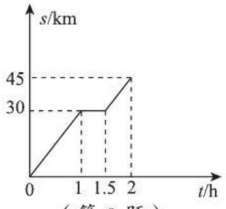
（4）小明的体温在降低的时段是_____．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 某人从甲地出发，骑摩托车去乙地，共用了 2 h，已知摩托车行驶的路程 s（km）与行驶的时间 t（h）的关系如图所示，假设这辆摩托车每行驶 100 km 的耗油量为 2 L，根据图象提供的信息回答下列问题.

（1）这辆摩托车从甲地到乙地共耗油多少升?

（2）请你用简洁的语言描述此人骑摩托车行驶的过程.

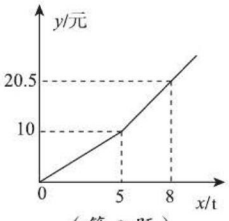


（第 8 题）

9. 某城市为了节约用水，采用分段收费标准. 每户居民每月应交水费 y（元）与每月用水量 x（t）之间关系的图象如图，根据图象回答：

（1）当每户每月的用水量不超过 5 t 时，每吨交水费多少元? 当每户每月的用水量超过 5 t 时，超过的部分每吨交水费多少元?

（2）若某户居民某月用 3.5 t 水，则应交水费多少元? 若某户居民某月交了水费 17 元，则该户居民用了多少吨水?



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阅读变量间关系图象的技巧

荣老师告诉你

阅读变量间关系图象可以归纳为三步：“看”“写”“选”.

（1）“看”就是认真观察几何图形，弄清楚动点从何点开始出发，运动到何点停止，整个运动过程分为不同的几段，何处是特殊点，这是准确解答的前提和关键.

（2）“写”就是计算、写出动点在不同路段的变量间关系式，注意一定要注明自变量的取值范围，求出在特殊点的因变量的值和自变量的值.

（3）“选”就是根据关系式选择准确的变量间图象或答案，多用排除法.首先，排除不符合的图象选项，其次，对于相同类型的图象选项，再用变量的取值范围或最大值和最小值进行排除，选出准确答案.

技巧一 利用图象判断两个变量的变化规律

例 1 [中考·绍兴] 均匀地向一个容器注水直到把容器注满. 在注水过程中，水面的高度 h 随时间 t 的变化规律如图 1 所示（图中 $OABC$ 为折线），这个容器的形状可能是图 2 中的（　　）

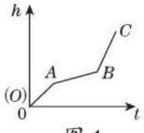


图 1

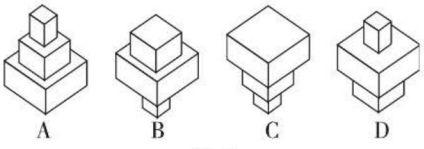


图 2

解题秘方：由图象的变化规律能够分析出决定图象变化的关键因素是容器的横截面积.

解：观察图象的变化趋势，可以发现单位时间内 AB 段比 OA 段增长幅度慢一些，BC 段比前两段增长幅度都要快. 据此可以分析出容器横截面积的变化情况.

答案：D

方法点拨：由图象的变化规律识别实物模型时，先分析图象表示的实际意义，再分析决定图象变化的关键因素. 如本题图象表示水位上升的速度，而决定水位上升速度的关键因素是容器的横截面积的大小.

技巧二 利用两个变量的变化规律确定图象

例 2 如图 3，匀速地向该容器内注水直到把容器注满，在注水过程中容器内液面的高度 h 随时间 t 变化的图象最接近实际情况的是图 4 中的（　　）



图 3

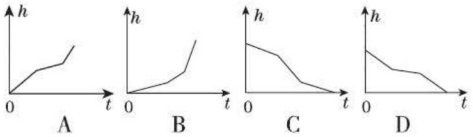


图 4

解题秘方：与例 1 是思维相反的过程，结合图象分析出容器横截面积的大小对图象变化的决定作用，从而选择合理的图象.

解：没有注水前，容器液面高度为 0，匀速地向该容器内注水，容器的最底下的圆柱底面积最大，高度上升得最慢，到一定时间后，高度上升得快一些，再过一段时间后，高度上升得最快，直至注满水，在注水的三个时间段液面上升速度不一样，从选项中可以看出，能够大致刻画变量之间关系的是选项 B，故答案为 B.

答案：B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧三 ▶ 利用图象解行程问题

例 3 [中考·新疆] 小明的父亲从家出发步行 20 min 到一个离家 900 m 的书店，在书店看了 10 min 的书后，用 15 min 返回家，图 5 中表示小明的父亲离家的距离（m）与时间（min）的图象的是（　　）

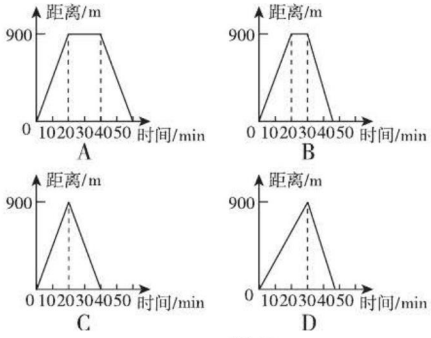


图 5

解题秘方：紧扣图象的变化规律，结合具体的行程选择合适的图象.

解：由题意可知小明的父亲运动的过程分为三段，即从家步行到书店用时 20 min，看书 10 min，从书店返回家用时 15 min. 从家步行到书店用时 20 min，离家的距离是逐渐增大的，图象呈上升的趋势；看书 10 min，离家的距离没有发生变化，此时图象与横轴平行；从书店返回家用时 15 min，离家的距离是逐渐减小的，图象呈下降的趋势. 故选择 B.

答案：B

方法点拨：1. 利用图象判断两个变量关系时，可以从以下三方面考虑：①看图象的升降趋势，当因变量随着自变量的增加而增加时，图象从左至右呈上升趋势，反之，呈下降趋势；②看图象的曲直，因变量随着自变量的变化而均匀变化的，图象是直线，因变量随着自变量的变化而不均匀变化的，图象是曲线；③表示因变量不随自变量的变化而变化的，即因变量是一个定值，图象与横轴平行或重合.

2. 对图象及其数量关系进行一定的分析，要抓住图象中的“转折点”及“拐点”，这些点往往是运动状态发生改变或者相互的数量关系发生改变的地方.

例 4 [中考·重庆] 甲、乙两人在一条笔直的道路上相向而行，甲骑自行车从 A 地到 B 地，乙驾车从 B 地到 A 地，他们分别以不同的速度匀速行驶，已知甲先出发 6 min 后，乙才出发. 在整个过程中，甲、乙两人的距离 y（km）与甲出发的时间 x（min）之间的关系如图 6 所示. 当乙到达终点 A 时，甲还需_____min 到达终点 B.

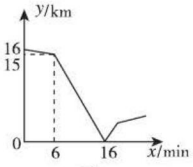


图 6

解题秘方：紧扣图象的变化规律结合行程问题中几个量之间的等量关系解决问题.

解：根据甲 6 min 行驶的距离求出甲的速度，再由 16 min 时甲、乙相遇求出乙的速度，即可分别求出甲、乙走完全程所需要的时间，从而解决问题.

因为甲 6 min 行驶的距离是 16−15 = 1（km），所以甲的速度是$\frac{1}{6}$ km/min，甲、乙相遇时用 16−6=10（min）共行驶了 15 km，

所以乙的速度是$\frac{15}{10}-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$（km/min），

则乙到达终点 A 所需的时间是 $16\div\frac{4}{3}=12$（min），甲到达终点 B 所需的时间是 $16\div\frac{1}{6}=96$（min），

所以当乙到达终点 A 时，甲还需 96−6−12 = 78（min）到达终点 B.

答案：78

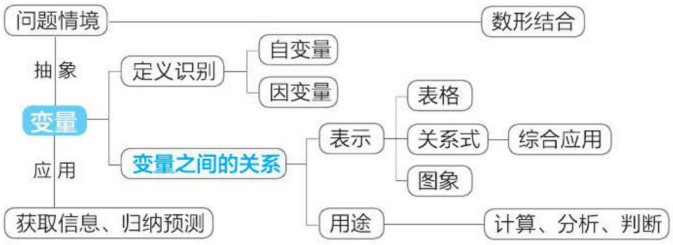
方法点拨：解决此类问题常用的方法是将图象中的数据与实际问题结合. 相遇问题的等量关系是相遇时，所走路程之和等于全程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

—— 核心结构专题 ——

结构必知



核心必读

1. 在某个变化过程中，数值始终不变的量叫做常量．在某个变化过程中，数值发生变化的量叫做变量．

2. 在某个变化过程中，如果有两个变量 x，y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是因变量．

3. **表格法**：用表格来表示两个变量之间的关系的方法，一般第一行表示自变量，第二行表示因变量．

   关系式法：用一个含有两个变量及数学运算符号的等式来表示两个变量之间的关系的方法．

   图象法：用图象来表示两个变量之间的关系的方法．

—— 知识方法专题 ——

知识必学

专题一 常量和变量

链接中考 » 在变化过程中始终不变的量是常量，变化的量是变量，两个变量是相对的而不是绝对的，对于常量与变量的考查一般常在章测试中单独出现，在中考中很少单独出现．

例 1 某学校计划用 100 元钱买乒乓球，所购买乒乓球的数量 W（个）与单价 n（元/个）的关系式 $W=\dfrac{100}{n}$ 中，（　　）

A. 100 是常量，W，n 是变量

B. 100，W 是常量，n 是变量

C. 100，n 是常量，W 是变量

D. 无法确定常量和变量

解题秘方：紧扣常量与变量的定义识别．

解：100 是常数，因此是常量．W，n 会发生变化，是变量．故选 A.

答案：A

专题二 用表格表示变量之间的关系

链接中考 » 表格法是把自变量的一系列值和因变量的对应值列成表格来表示变量之间关系的方法，它的特点是一目了然的，给出表格中自变量的值，就能知道对应的因变量的值，但列出的数值有限，不能看出自变量和因变量的整体变化规律．

例 2 小明家按照分期付款的方式购房，购房时，首付（第 1 年）付款 30 000 元，以后每年付款见下表：

	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年	第 6 年
交付房款 / 元	15 000	20 000	25 000	30 000	35 000

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）表中反映了哪两个变量之间的关系？

（2）根据表推算，第7年应付房款多少元？

（3）若小明家第8年恰好付清房款，则他家购买这套住房共花了多少元？

解题秘方：紧扣表中给出的几对两个变量之间对应的值解决问题.

解：（1）表中反映了交付房款与年份之间的关系.

（2）由表可得，从第2年起，以后每一年都比上一年多交付房款5 000元.

所以第7年应付房款为35 000+5 000=40 000（元）.

（3）由表可得，第8年应付房款为45 000元，所以小明家购买这套住房共花了30 000+15 000+20 000+25 000+30 000+35 000+40 000+45 000=240 000（元）.

专题三 用关系式表示变量之间的关系

链接中考 >> 关系式是根据问题中的数量关系、表格、图象等提供的信息列出等式来表示变量间的关系.它既可以根据任何一个自变量的值求出相应因变量的值(要注意自变量的取值范围)，还能准确地反映整个变化过程中因变量与自变量的关系.

例3 长方形的长是20，宽是x，周长是y，面积是S.

（1）写出y和x之间的关系式.

（2）写出S和x之间的关系式.

（3）当S=200时，x等于多少？y等于多少？

（4）若x增加1，则y增加多少？S增加多少？

解题秘方：根据长方形的周长与面积公式写出变量之间的关系式，然后根据关系式求出相应的变量的值.

解：（1）由长方形的周长公式，得$y=2(20+x)=40+2x$.

（2）由长方形的面积公式，得$S=20x$.

（3）当$S=200$时，代入（2）中的关系式，得$x=10$.把$x=10$代入（1）中的关系式，得$y=60$.

（4）若x增加1，则有$40+2(x+1)-(40+2x)=2$，$20(x+1)-20x=20$，即y增加2，S增加20.

专题四 用图象表示变量之间的关系

链接中考 >> 利用图象可以直观地表示两个变量间的关系，在识别表示变量间关系的图象时要注意以下几点：

(1)自变量与因变量对应横轴、纵轴的含义；

(2)自变量的取值范围；

(3)图象"拐点"的含义；

(4)图象变化特征、陡峭程度、变化快慢及其中蕴含的等量关系.

例4 小明骑自行车上学，开始以正常速度匀速行驶，但中途自行车出现了故障，只好停下来修车，车修好后，因怕耽误上课，他比修车前加快了骑车的速度，继续匀速行驶，下面给出了小明的行驶路程s（m）和时间t（min）的关系图象，那么大致符合小明的行驶情况的图象是图3-1中的（　　）

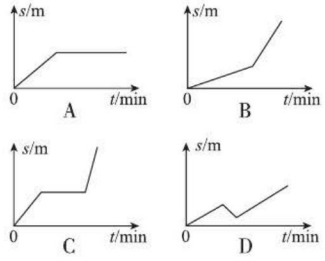


图3-1

解题秘方：紧扣题中叙述两个变量之间的变化规律，结合选项中图象的变化规律，找出正确的选项.

解：由题意得，在修车前，s随t的增大而增大；中途自行车出现了故障，只好停下来修车，说明小明有一段时间行驶的路程为0，即时间增加了但是路程不发生变化，因此图象有一段与横轴平行；修车后，速度加快，说明在相同时间段内行驶的路程比开始的时候要多，即修车后的图象的倾斜程度大于开始部分，综上，选项C符合题意.

答案：C

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

方法必会

专题五 数形结合思想

专题解读≫ 数形结合思想，就是在研究问题的过程中，由数思形、见形思数、数形结合，从而使复杂问题简单化，抽象问题具体化的一种思想方法.

例 5 某洗衣机在洗涤衣服时，经历了进水、清洗、排水、脱水四个连续过程，其中进水、清洗、排水时洗衣机的水量 y(L)与时间 x(min)之间的关系如图 3–2，根据图象解答下列问题.

(1) 洗衣机的进水时间是多少？清洗时洗衣机中的水量是多少？

(2) 已知洗衣机的排水速度为 19 L/min. 如果排水时间为 2 min，求排水结束时洗衣机中剩下的水量.

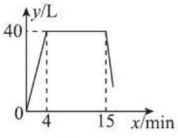


图 3–2

解题秘方：根据图象提供的信息，利用数形结合思想，用图象中提供的数据解决问题.

解：(1) 洗衣机的进水时间是 4 min，清洗时洗衣机中的水量是 40 L.

(2) 排水结束时洗衣机中剩下的水量为 $40-19\times2=2$(L).

专题六 从特殊到一般的思想

专题解读≫ 通过一些具体的、特殊的实例，找出一般的规律，再利用这个规律分析题目，得出所需要的具体的数据.

例 6 已知 x 为正整数，y，z 与 x 的关系如下表所示，请你根据表格中数据的变化规律，解答下列问题.

x	y	z
…	…	…
3	$10\times3+60$	2×10
4	$10\times4+60$	2×11
5	$10\times5+60$	2×12
…	…	…

(1) 分别写出 y 与 x，z 与 x 之间的关系式.

(2) 当 x 为何值时，$y=150$？

(3) 是否存在 x 的值，使得 y 与 z 相等？若存在，求出这个值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：根据表格中提供的特殊有限的数据，用关系式表示两个变量变化的一般规律.

解：(1) 分析表格可知，$y=10x+60$，$z=2(x+7)=2x+14$.

(2) 令 $y=150$，则 $10x+60=150$，解得 $x=9$.

(3) 不存在. 理由如下：

令 $y=z$，可得 $10x+60=2x+14$，解得 $x=-\frac{23}{4}$.

因为 x 为正整数，所以不存在这样的 x，使得 y 与 z 相等.

好题必解 答案见 234 页

题型 1：用表格表示变量间的关系

1. 弹簧挂上物体后会伸长，测得一弹簧的长度 y(cm)与所挂的物体的质量 x(kg)之间有下面的关系，则下列说法中不正确的是(　　)

x/kg	0	1	2	3	4	5
y/cm	10	10.5	11	11.5	12	12.5

A. x 和 y 都是变量，且 x 是自变量，y 是因变量

B. 所挂物体质量为 4 kg 时，弹簧长度为 12 cm

C. 弹簧不挂物体时的长度为 0 cm

D. 在弹簧弹性限度内，物体质量每增加 1 kg，弹簧长度增加 0.5 cm

2. 邓老师设计一个计算程序，输入和输出的数据如下表所示，那么当输入数据是正整数 n 时，输出的数据是_____.

输入数据	1	2	3	4	5	6	…
输出数据	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{17}$	…

3. 下表是三发电器厂 2019 年上半年每个月的产量情况统计表：

月份 x	1	2	3	4	5	6
产量 y/台	10 000	10 000	12 000	13 000	14 000	18 000

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）根据表格中的数据，你能否根据 x 的变化，得到 y 的变化趋势?

（2）根据表格你知道哪几个月的产量保持不变? 哪几个月的产量在匀速增长? 哪个月的产量最高?

（3）试求2019年上半年平均每月的产量是多少.（结果保留整数）

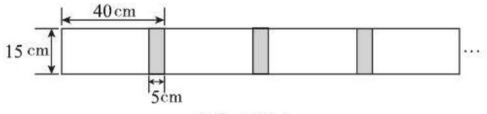
题型 2：用关系式表示的变量间关系

4. 十一期间，小明和父母一起开车到距家 200 km 的景点旅游，出发前，汽车油箱内储油 45 L，当行驶 150 km 时，发现油箱剩余油量为 30 L.（假设行驶过程中汽车的耗油量是均匀的）

（1）求该车平均每千米的耗油量，并写出剩余油量 Q（L）与行驶路程 x（km）间的关系式；

（2）当 x=280 时，求剩余油量 Q 的值.

5. 将长为 40 cm，宽为 15 cm 的长方形白纸按如图所示的方法粘合起来，粘合部分宽为 5 cm.



（第 5 题）

（1）根据上图，将表格补充完整.

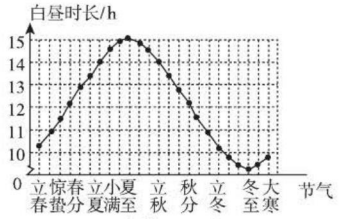
白纸数量 / 张	1	2	3	4	5	…
纸条长度 /cm	40		110	145		…

（2）设 x 张白纸粘合后的总长度为 y cm，则 y 与 x 之间的关系式是什么?

（3）你认为白纸粘合起来总长度可能为2 018 cm 吗? 为什么?

题型 3：用图象表示的变量间关系

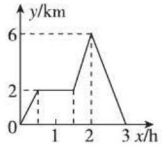
6. 二十四节气是中国古代劳动人民长期经验积累的结晶，它与白昼时长密切相关. 当春分、秋分时，昼夜时长大致相等；当夏至时，白昼时长最长. 如图是一年中部分节气所对应的白昼时长示意图，在下列选项中，白昼时长超过 13 h 的节气是（　　）



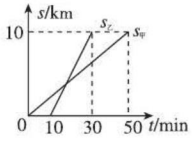
（第 6 题）

A. 惊蛰　　B. 小满　　C. 秋分　　D. 大寒

7. 下图反映的过程是，小明从家去书店，在书店停留一段时间后，又去学校取信后马上回家，其中 x 表示时间，y 表示小明离他家的距离，则小明从学校回家的平均速度为_____km/h.



（第 7 题）



（第 8 题）

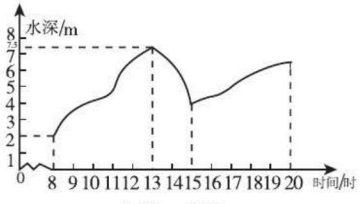
8. 如图，甲骑自行车，乙乘公交车，从同一地点沿相同路线前往某校参加绘画比赛，图中 $s_{甲}$，$s_{乙}$分别表示甲、乙两人前往目的地所行驶的路程 s（km）随时间 t（min）变化的图象，则乙每分比甲多行驶_____km.

9. 如图表示的是某港口从 8 时到 20 时的水深情况，根据图回答下列问题：

（1）在 8 时到 20 时这段时间内，大约什么时间港口的水位最深，深度是多少米?

（2）在 8 时到 20 时这段时间内，大约什么时间港口的水位最浅，深度是多少米?

（3）在这段时间里，水深是如何变化的?



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章测试卷 ☞答案见234页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 在球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 中，下列说法正确的是（　　）

A. V，π，r 是变量，$\frac{4}{3}$ 是常量

B. V，π 是变量，$\frac{4}{3}$，r 是常量

C. V，r 是变量，$\frac{4}{3}$，π 是常量

D. V 是变量，$\frac{4}{3}$，π，r 是常量

2. 下面的表格列出了一个实验的统计数据，表示将皮球从高处落下时，弹跳高度 b（cm）与下降高度 d（cm）的关系，下面能表示这种关系的式子是（　　）

d/cm	50	80	100	150
b/cm	25	40	50	75

A. $b=d^2$　　B. $b=2d$

C. $b=\frac{d}{2}$　　D. $b=d+25$

3. 某大剧场观众席的座位数按下列方式设置.

排数 x	1	2	3	4	…
座位数 y	50	53	56	59	…

下列结论中正确的有（　　）

① x 是自变量，y 是因变量；

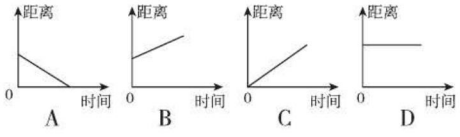
② x 是因变量，y 是自变量；

③ $y=50+3x$；

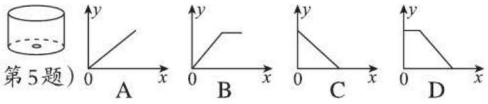
④ $y=47+3x$.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 升旗仪式上，国旗冉冉上升，下列哪个图象能近似地刻画上升的国旗离旗杆顶端的距离与时间的关系？（　　）

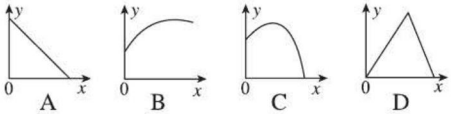


5. 如图是我国古代计时器“漏壶”的示意图，在壶内盛一定量的水，水从壶底的小孔漏出；壶壁内画有刻度，人们根据壶中水面的位置计时，如果用 x 表示时间，y 表示壶底到水面的高度，则表示 y 与 x 的关系的图象是（　　）



（第5题）

6. 将一个球从一定高度竖直向上抛起，球升到最高点，竖直下落到地面上. 在此过程中，球的高度 y 与时间 x 的关系可以用下图中的哪一幅来近似地刻画？（　　）



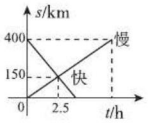
7. 一列快车从甲地开往乙地，一列慢车从乙地开往甲地，两车同时出发，两车离乙地的路程 s（km）与行驶时间 t（h）的关系如图所示，则下列结论中错误的是（　　）

A. 相遇时快车行驶了 150 km

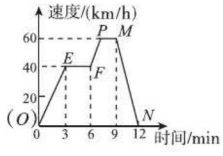
B. 慢车行驶速度为 60 km/h

C. 甲、乙两地的路程是 400 km

D. 快车出发后 4 h 到达乙地



（第7题）



（第8题）

8. 如图，折线 $OEFPMN$ 描述了某汽车在行驶过程中速度与时间的关系，下列说法中错误的是（　　）

A. 第3 min时汽车的速度是40 km/h

B. 第12 min时汽车的速度是0 km/h

C. 从第9 min到第12 min，汽车的速度从60 km/h减少到0 km/h

D. 从第3 min到第6 min，汽车停止

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 点燃一根蜡烛后，蜡烛的高度 h（cm）与燃烧时间 t（min）之间的关系如下表：

t/min	0	2	4	6	8	10
h/cm	30	29	28	27	26	25

（1）蜡烛未点燃时的长度是_____cm；

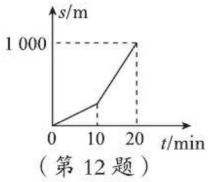
（2）写出蜡烛的高度 h（cm）与燃烧时间 t（min）之间的关系式：_____；

（3）这根蜡烛能燃烧_____min.

10. 汽车开始行驶时，油箱中有油 150 L，如果每时耗油 7 L，则油箱内剩余油量 y（L）与行驶时间 t（h）的关系式为_____；在这个变化过程中，_____是自变量，_____是因变量.

11. 若一个长方体的底面积为 60 cm^2，高为 h cm，则体积 V（cm^3）与 h（cm）的关系式为_____，若 h 从 1cm 变化到 10 cm 时，长方体的体积由_____cm^3 变化到_____cm^3.

12. 如图是小明从学校到家步行的路程 s（m）与时间 t（min）的图象，观察图象，从中得到如下信息：①学校离小明家 1 000 m；②小明用了 20 min 到家；③小明前 10 min 步行了路程的一半；④小明后 10 min 比前 10 min 步行得快，其中正确的有_____（填序号）.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（6 分）下表是实验小学 2014~2019 年五年级学生的平均身高统计表，根据下表回答问题.

年份	2014	2015	2016	2017	2018	2019
平均身高 /m	1.530	1.535	1.540	1.541	1.543	1.550

（1）这个表格反映的是哪两个变量之间的关系？哪个是自变量？哪个是因变量？

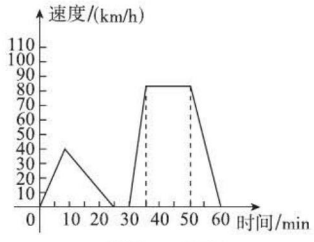
（2）这个表格反映出因变量的变化趋势是怎样的？

14.（8 分）如图反映的是一辆出租车从甲地到乙地的速度与时间的关系图象. 根据图象，回答下列问题：

（1）在这个变化过程中，自变量是什么？因变量是什么？

（2）出租车从出发到最后停止共用了多长时间？最高速度是多少？

（3）汽车在哪段时间保持匀速行驶？速度是多少？



（第 14 题）

15.（12 分）声波传播的速度称为声速，它与介质的性质和状态（如气温）有关. 科学家研究发现，空气中的声速 y（m/s）与气温 x（℃）存在如下关系，当气温是 0℃时，声速是 331m/s；当气温是 5℃时，声速是 334m/s；当气温是 10℃时，声速是 337m/s；当气温是 15℃时，声速是 340m/s；当气温是 20℃时，声速是 343m/s；当气温是 25℃时，声速是 346m/s；当气温是 30℃时，声速是 349m/s.

（1）请用表格表示气温 x 与声速 y 之间的关系；

（2）表格反映了哪两个变量之间的关系？哪个是自变量？哪个是因变量？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

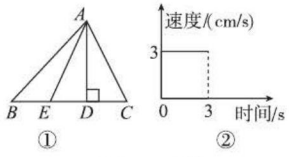
（3）当气温是35℃时，估计声速可能是多少？

（4）用一个式子来表示两个变量之间的关系．

16.（12分）如图①所示，在△ABC中，AD是三角形的高，且AD = 6 cm，E是一个动点，由B向C移动，其速度与时间的变化关系如图②所示，已知BC=9 cm.

（1）求E点在运动过程中△ABE的面积y与运动时间x之间的关系式；

（2）当E运动到C点时，求△ABE的面积．



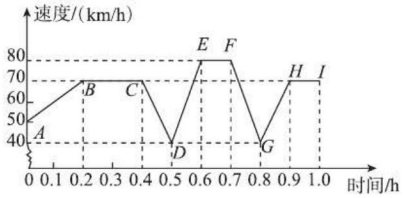
（第16题）

17.（14分）汽车在山区行驶过程中，要经过上坡、下坡、平路等路段，在自身动力不变的情况下，上坡时速度越来越慢，下坡时速度越来越快，平路上保持匀速行驶，如图表示了一辆汽车在山区行驶过程中，速度随时间变化的情况．

（1）汽车在哪些时间段保持匀速行驶？速度分别是多少？

（2）汽车遇到了几个上坡路段？几个下坡路段？在哪个下坡路段上所花时间最长？

（3）大致描述这辆汽车的行驶情况，包括遇到的山路，在山路上的速度变化情况等．



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

品赏三角形及全等的魅力

品赏三角形及全等的魅力



第四章 三角形









核心考点

你将见到的

- 三角形中角的性质
- 三角形中边的性质
- 三角形中三条重要线段
- 全等三角形的性质
- 三角形全等的条件
- 三角形全等的应用

核心方法

我们为你提供的

- 面积法
- 分类讨论思想
- 截长补短法
- 综合法
- 分析法
- 倍长中线法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 认识三角形

核心知识

- 三角形内角和
- 直角三角形的性质
- 三角形的三边关系
- 三角形中三条重要线段

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三角形的有关概念

1. 三角形的定义 由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形.

三角形的表示法：用符号“△”表示三角形，如图 4-1-1，顶点是 A，B，C 的三角形，记作“△ABC”，读作“三角形 ABC”.

字母的顺序可以自由安排.

2. 三角形的“三元素”

（1）**顶点**：三角形相邻两边的公共端点叫做三角形的顶点. 如图 4-1-1，点 A，B，C 是△ABC 的三个顶点.

（2）**边**：组成三角形的线段叫做三角形的边. 如图 4-1-1，线段 AB，BC，AC 是△ABC 的三条边.

（3）**内角**：在三角形中，相邻两边所组成的角叫做三角形的内角，简称三角形的角. 如图 4-1-1，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是△ABC 的三个角.

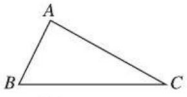


图 4-1-1

提分·必记

特别解读

1. 构成三角形的“三要素”：
（1）三条线段；
（2）三条线段不在同一条直线上；
（3）三条线段首尾顺次相接.
2. 三角形的边是一条线段，既可用两个顶点的大写字母表示，也可用边所对的顶点的小写字母表示，如顶点 A 所对的边 BC 可用 a 表示.

拨考向 利用三角形及相关元素的定义进行辨析

题型 1：三角形的定义在识别图形中的应用

例 1 如图 4-1-2 中都是由三条线段组成的图形，其中是三角形的是（　　）

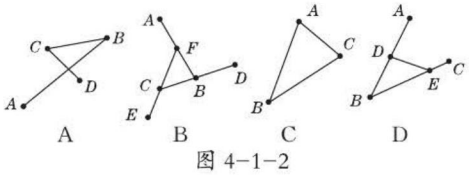


图 4-1-2

三角形的定义

解题秘方：紧扣构成三角形的“三要素”进行识别.

解：选项 A，B，C，D 都是由三条线段组成的图形，但 A，B，D 不是首尾顺次相接，因此只有 C 符合构成三角形的“三要素”.

答案：C

提分·秘诀

特别提醒

图形是三角形与图形内含有三角形是两个不同的概念. 图形是三角形表示整个图形是一个三角形，图形内含有三角形表示图形局部有三角形，如选项 A，B，D 中的图形内都含有三角形，但整个图形不是三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：三角形及其相关元素在计数及识别中的应用

例 2 如图 4-1-3，在△ ABC 中，D，E 分别是 BC，AC 上的点，连接 BE，AD 交于点 F.

（1）图中共有多少个三角形？请把它们表示出来.

（2）△ BDF 的三个顶点是什么？三条边是什么？三个内角呢？

（3）以 AB 为边的三角形有哪些？

（4）以∠ C 为内角的三角形有哪些？

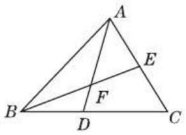


图 4-1-3

解题秘方：紧扣“三角形及其相关元素的定义”及几何图形计数的常用方法进行解答.

解：（1）图中共有 8 个三角形，分别是△ ABF，△ AEF，△ ABE，△ ABD，△ ACD，△ ABC，△ BDF，△ BCE.

（2）△ BDF 的三个顶点是点 B，D，F，三条边是线段 BD，DF，BF，三个内角是∠ FBD，∠ FDB，∠ BFD.

（3）以 AB 为边的三角形有△ ABF，△ ABD，△ ABE，△ ABC.

（4）以∠ C 为内角的三角形有△ ACD，△ BCE，△ ACB.

方法点拨

几何图形计数的常用方法：

1. 按序计数法；
2. 画图计数法；
3. 基本图形计数法；
4. 分类计数法.

特别提醒

三角形的三个顶点的字母的次序可以任意调换，如△ ABF 也可以写成△ BAF，△ BFA，△ FAB 等.

知识 2 三角形内角和定理

1. 定理 三角形三个内角的和等于 180° .

几何语言：在△ ABC 中，∠ A+∠ B+∠ C=180° .

2. 三角形内角和定理的说明思路

思路一：利用“两直线平行，内错角及同位角相等”将三角形的三个内角转化为一个平角. 如图 4-1-4 ①②.

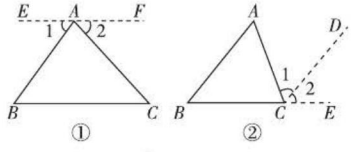


图 4-1-4

思路二：利用“两直线平行，内错角相等”将三角形的三个内角转化为两平行线间的一组同旁内角. 如图 4-1-5 ①②.

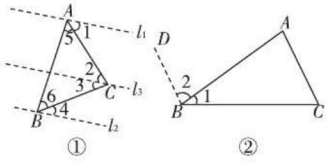


图 4-1-5

提分·必记

特别解读

1. 三角形内角和定理揭示了三角形三个内角之间的数量关系.
2. 三角形的三个内角中最多只有一个钝角或直角，或者说至少有两个锐角.

特别提醒

说明三角形内角和定理的思路方法：运用平行线作为桥梁，将三个内角“转移”集中成一个角或两个角，再说明这个角或两个角的和是 180° 即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用三角形内角和解与三角形内角相关的问题

题型1：三角形内角和定理在求角中的应用

例3 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角.

（1）已知$\angle A=40°$，$\angle B=\angle C$，求$\angle B$，$\angle C$的度数；

（2）已知$\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，求$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的度数.

解题秘方：紧扣三角形内角和定理建立方程求解.

解：（1）设$\angle B=\angle C=x°$，

因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，所以$40°+x°+x°=180°$，

解得$x°=70°$，所以$\angle B=\angle C=70°$.

（2）因为$\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，

所以$\angle B=2\angle A$，$\angle C=3\angle A$.

设$\angle A=x°$，则$\angle B=2x°$，$\angle C=3x°$，

因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

所以$x°+2x°+3x°=180°$. 所以$x°=30°$.

所以$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$.

题型2：三角形内角和定理在解实际问题中的应用

例4 一个零件的形状如图4-1-6，按规定$\angle A$应等于90°，$\angle ABD$，$\angle ACD$应分别是34°和18°. 李叔叔量得$\angle BDC=146°$，请你帮李叔叔判断这个零件是否合格，并说明理由.

解题秘方：建立三角形的模型利用三角形内角和定理求出角度，再用三角形内角和定理进行验证.

解：这个零件不合格. 理由：如图4-1-6，连接BC. 在$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，

因为$\angle A=90°$，$\angle ACD=18°$，$\angle ABD=34°$，

所以$\angle DCB+\angle DBC=38°$.

在$\triangle DCB$中，$\angle BDC+\angle DCB+\angle DBC=146°+38°=184°\neq 180°$，

所以这个零件不合格.

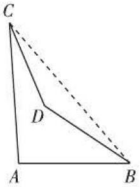


图4-1-6

知识点▶3 直角三角形的性质与判定

1. 三角形按内角的大小分类

三角形 {锐角三角形；直角三角形；钝角三角形}

分类示意图如图4-1-7.



图4-1-7

提分·秘诀

方法点拨

求三角形内角的度数的方法：

1. 若已知两个内角的度数，求第三个内角的度数，则直接利用三角形内角和定理求解.
2. 若已知一个内角的度数及另两个内角之间的等量关系；或不知道任何一个内角的度数，只知道三个内角之间的关系，一般根据“三角形内角和为180°”这个隐含的等量关系列方程（或方程组）求解.

解法提醒

“三角形内角和等于180°”这个定理是任何三角形都必须具备的性质. 若某个三角形三个内角的和不等于180°，则说明该三角形不存在.

提分·必记

特别解读

1. 直角三角形的性质的理论依据是三角形的内角和定理.
2. 在直角三角形中，若已知两个锐角之间的关系，则

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 直角三角形的表示　直角三角形可以用符号“Rt △”表示，直角三角形 ABC 可以写成 Rt △ ABC.

注意：“Rt △”后必须紧跟表示直角三角形的三个顶点的大写字母，不能单独使用. 如“直角三角形的边”不能写成“Rt △的边”.

3. 直角三角形的性质　直角三角形的两个锐角互余.

几何语言：在△ ABC 中，因为∠ C=90°，所以∠ A+ ∠ B=90°.

可结合两个锐角互余求出每个锐角的大小，不需要再利用三角形内角和定理求解.

核心考向▶利用直角三角形的性质与判定解决问题

题型 1：利用三角形的分类标准判断三角形的形状

例 5　根据下列所给条件，判断△ ABC 的形状.

（1）∠ A=45°，∠ B=65°，∠ C=70°；（2）∠ C=120°；（3）∠ C=90°.

解题秘方：根据三角形的分类标准进行判断.

解：（1）因为∠ A=45°，∠ B=65°，∠ C=70°，

所以∠ A <∠ B <∠ C < 90°，所以△ ABC 是锐角三角形.

（2）因为∠ C=120° > 90°，所以△ ABC 是钝角三角形.

（3）因为∠ C=90°，所以△ ABC 是直角三角形.

提分·秘诀

方法技巧

根据三角形最大角的类型对三角形分类时，最大角是钝角的三角形是钝角三角形；最大角是直角的三角形是直角三角形；最大角是锐角的三角形是锐角三角形.

题型 2：直角三角形的性质在求角的度数中的应用

例 6　如图 4-1-8，AB，CD 相交于点 O，AC ⊥ CD 于点 C，若∠ BOD=35°，则∠ A=_____.

解题秘方：根据直角三角形中两锐角之间的数量关系求出角的度数.

解：因为∠ BOD=35°，

所以∠ AOC=35°.

又因为 AC ⊥ CD，所以∠ ACD=90°.

所以∠ A=90° − ∠ AOC=90° −35° = 55°.

答案：55°

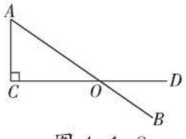


图 4-1-8

解法提醒

求某一锐角的度数时，若这个锐角在一个直角三角形中，则可以先求该直角三角形另一个锐角的度数，然后利用直角三角形中锐角之间的互余关系求出该锐角的度数.

题型 3：直角三角形的性质与判定在说明两线垂直中的应用

例 7　如图 4-1-9，在△ ABC 中，∠ ACB=90°，∠ ACD= ∠ B，试说明 CD ⊥ AB.

解题秘方：利用直角三角形的性质与判定求出 CD，AB 的夹角为直角.

解：因为∠ ACB=90°，

所以∠ A+ ∠ B=90°（直角三角形的性质）.

因为∠ ACD= ∠ B，

所以∠ A+ ∠ ACD=90°（等量代换）.

所以∠ CDA=90°（三角形内角和定理）.

所以 CD ⊥ AB.

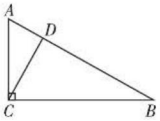


图 4-1-9

教你一招

说明两条直线垂直的方法.

1. **定义法**：推导相交的两直线的夹角中有一个角为直角.
2. **说明直角三角形法**：在三角形中，推导出两个角的和为 90°，从而得此三角形为直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 三角形的三边关系

1. 等腰三角形

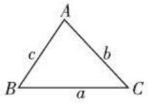
有两边相等的三角形叫做等腰三角形，其中相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰与底边的夹角叫做底角．（如图 4−1−10）



图 4−1−10

特别地：三边都相等的三角形叫做等边三角形，即底边与腰相等的等腰三角形叫做等边三角形，也叫正三角形．

2. 三角形的三边关系

文字语言	数学语言	理论依据	图形
三角形任意两边之和大于第三边	$a+b>c$，$b+c>a$，$a+c>b$	两点之间线段最短	
三角形任意两边之差小于第三边	$a-b<c$，$b-c<a$，$a-c<b$（$a>b>c$）		

3. 三角形三边关系的应用

（1）判断三条线段能否组成三角形；

（2）已知三角形的两边长，确定第三边长（或周长）的取值范围；

（3）三角形的边长用字母表示时，求字母的取值范围；

（4）说明线段的不等关系．


三角形的三边关系

拔考向▶ 利用三角形的三边关系解决问题

题型 1：三角形的三边关系在判断组成三角形的条件中的应用

例 8 下列长度的三条线段能组成三角形的是（　　）

A.1cm，2cm，3.5cm　　B.4cm，5cm，9cm

C.5cm，8cm，15cm　　D.6cm，8cm，9cm

解题秘方：紧扣“三角形的三边关系”进行判断．

解：因为 1+2<3.5，两边之和小于第三边，所以不能组成三角形．

因为 4+5=9，两边之和等于第三边，所以不能组成三角形．

因为 5+8<15，两边之和小于第三边，所以不能组成三角形．

因为 6+8>9，两边之和大于最长边，所以能组成三角形．

答案：D

题型 2：三角形的三边关系在等腰三角形中的应用

例 9 已知等腰三角形的两条边的长分别为 12 cm 和 5 cm，求此三角形的周长．

解题秘方：紧扣等腰三角形的定义对已知的边进行分类求出第三条边长，并利用三角形的三边关系进行验证．

提分·必记

特别提醒

- 应用三角形的三边关系时，必须用任意两边的和与第三边作比较，任意两边的差与第三边作比较．
- 已知三角形两边长分别为 a，b（a>b），根据三角形的三边关系可知，第三边长 c 的取值范围是 a−b<c<a+b．

提分·秘诀

技巧提醒

确定三条线段能否组成三角形的简便方法：

1. 看较短的两条线段的和是否大于最长的线段，若大于，则能组成三角形；反之，则不能组成三角形．
2. 看最长的线段减去最短的线段的差是否小于第三条线段，若小于，则能组成三角形；反之，则不能组成三角形．

解法提醒

对于等腰三角形问题，易出现两种错误：(1)未分类讨论，如此题，只考虑到以 12cm 的长为腰，而忽略了以 5cm 的长为腰的情况；(2)未

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：分两种情况进行讨论：

（1）当长 12 cm 的边为腰时，

三条边的长分别为 12 cm，12 cm，5 cm.

因为 5+12 > 12，所以能组成三角形.

所以三角形的周长为 12+12+5=29（cm）；

（2）当长 5 cm 的边为腰时，

三条边的长分别为 5 cm，5 cm，12 cm.

因为 5+5 < 12，所以不能组成三角形.

综上，此三角形的周长为 29 cm.

对分类结果进行验证，如此题，按照两种情况直接求周长，得周长为 29cm 或 22cm，而忽略了长度为 5cm，5cm，12cm 的三条线段不能组成三角形.

知识点 5 三角形的三条重要线段

1. 三角形的中线 在三角形中，连接一个顶点与它对边中点的线段，叫做这个三角形的中线. 三角形的三条中线交于一点，这点称为三角形的重心.

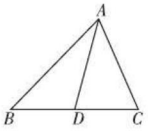


图 4−1−11

几何语言：如图 4−1−11，

（1）AD 是△ ABC 中 BC 边上的中线；

（2）D 是 BC 边的中点；

（3）$BD=DC$，$BD=\frac{1}{2}BC$，$DC=\frac{1}{2}BC$ 或 $BD=DC=\frac{1}{2}BC$.

2. 三角形的角平分线 在三角形中，一个内角的角平分线与它的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线. 三角形的三条角平分线交于一点.

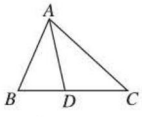


图 4−1−12

几何语言：如图 4−1−12，

（1）AD 是△ ABC 的角平分线；

（2）AD 平分∠ BAC 交 BC 于点 D；

（3）∠ BAD= ∠ CAD= $\frac{1}{2}$∠ BAC.

3. 三角形的高

从三角形的一个顶点向它的对边所在直线作垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高，三角形的三条高所在的直线交于一点.

几何语言：如图 4−1−13，在△ ABC 中，$AD \perp BC$，垂足为 D. 线段 AD 是△ ABC 中 BC 边上的高.

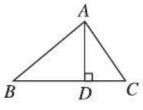


图 4−1−13

提分·必记

特别解读

三角形的中线把三角形分成的两个三角形的面积和周长的关系：

1. 两个三角形的面积相等；
2. 两个三角形的周长的差等于这两个三角形另两边的差.

特别提醒

- 角的平分线是一条射线，而三角形的角平分线是一条线段.
- 三角形的角平分线是其内角的平分线的一部分. 故三角形的角平分线都具有角平分线的性质.


三角形的高

视野拓展

三角形中三个重要的点：三条高所在直线的交点叫垂心，三条中线的交点叫重心，三个内角角平分线的交点叫内心.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用三角形的三条重要线段解决问题

题型1：三角形的中线在求线段长中的应用

例10 如图4-1-14，在△ABC中，AD，BE分别是△ABC，△ABD的中线.

（1）若△ABD与△ADC的周长之差为3，AB=8，求AC的长.

（2）若$S_{\triangle ABC}$=8，求$S_{\triangle ABE}$.

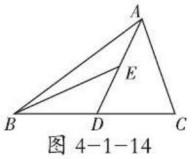


图4-1-14

解题秘方：利用三角形的中线将三角形分成的两个三角形的周长和面积之间的关系解题.

解：（1）因为AD为BC边上的中线，

所以BD=CD.

所以△ABD与△ADC的周长之差=（AB+AD+BD）−（AC+AD+CD）=AB−AC.

因为△ABD与△ADC的周长之差为3，AB=8，

所以8−AC=3，解得AC=5.

（2）因为AD是△ABC的中线，

所以$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$=4.

因为BE是△ABD的中线，

所以$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$=2.

题型2：三角形的角平分线的应用

例11 如图4-1-15，AD是△ABC的角平分线，DE // AB，DF // AC，EF交AD于点O.

试问：DO是否为△DEF的角平分线？并说明理由.

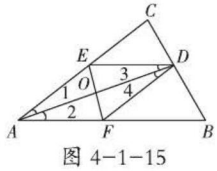


图4-1-15

解题秘方：根据三角形角平分线的定义进行说明.

解：DO是△DEF的角平分线.

理由：因为AD是△ABC的角平分线，

所以∠1=∠2.

因为DE // AB，DF // AC，

所以∠3=∠2，∠1=∠4.

所以∠3=∠4.

所以DO是△DEF的角平分线.

提分·秘诀

详解

三角形的中线把对应边分成相等的两条线段，故BD=CD，且△ABD的边BD上的高与△ACD的边CD上的高相同，根据等底同高的三角形的面积相等，可知所分得的两个三角形的面积相等，即$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

解法提醒

本例题在解题过程中，先利用三角形的角平分线的定义，得出相等的角，再结合相关条件推出一组新的相等的角，最后由三角形角平分线的定义说明是三角形的角平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：三角形的高在求线段长中的应用

例 12 如图 4–1–16，$AE \perp EC$ 于点 E，$CD \perp AD$ 于点 D，AD 交 EC 于点 B.

（1）$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高为_____，边 AB 上的高为_____.

（2）若 $AB=5$，$BC=2$，$CD=\frac{9}{5}$，则 $AE=$_____.

解题秘方：（1）紧扣“三角形高的定义”进行判断.

（2）分别以 BC，AB 为底边计算 $\triangle ABC$ 的面积.

解：（1）$\triangle ABC$ 是钝角三角形，由三角形高的定义可知边 BC 上的高为 AE，边 AB 上的高为 CD.

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

所以 $\frac{1}{2}\times 2\times AE=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{9}{5}$.

所以 $AE=\frac{9}{2}$.

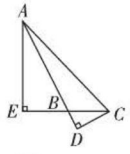


图 4–1–16

答案：（1）AE；CD　　（2）$\frac{9}{2}$

特别提醒

找三角形某边上的高的方法：

1. 找出该边所对的顶点；
2. 过此顶点作该边的垂线，垂线段为该边上的高.

如作△ABC 中 BC 边上的高时，先找 BC 边所对的顶点 A，然后过 A 作 BC 的垂线（E 为垂足），垂线段 AE 即为 BC 边上的高.

教你一招

求三角形的面积联想三角形的高，求三角形的高联想三角形的面积是解三角形问题中常用的方法之一. 用同一个三角形不同的面积表达式建立求线段长度的等量关系是一种很重要的数学方法.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用“面积和差关系法”说明线段的和差关系

例 13 如图 4–1–17，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，$DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F，$BG \perp AC$ 于 G. 试说明 $BG=DE+DF$.

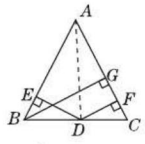


图 4–1–17

解题秘方：判断三角形的高或垂线段之间的关系，可转化为用面积之间的关系解决.

解：如图 4–1–17，连接 AD.

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

所以 $\frac{1}{2}AC\cdot BG=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}AC\cdot DF$.

又因为 $AB=AC$，所以 $BG=DE+DF$.

挑战·高分

方法点拨

等面积法是数学中很重要的解题方法，而在涉及垂线段（或三角形的高）的关系时，常将线段的关系转化为面积的关系来解决；当几个三角形的底边相等时，**面积的和差关系反映的就是高的和差关系**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想巧求涉及中线的三角形线段的长

例 14 在△ABC中，$AB=AC$，AC边上的中线BD把△ABC的周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分，求△ABC的各边长.

解题秘方：根据中线的定义及分类讨论思想分不同情况进行计算.

解：设$AB=x$ cm，则$AD=CD=\frac{1}{2}x$ cm.

由于题中条件不能确定图形形状，因此需分以下两种情况求解：

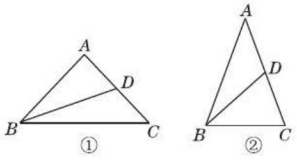


图 4−1−18

（1）如图 4−1−18①，

若$AB+AD=12$ cm，则$x+\frac{1}{2}x=12$.

解得$x=8$，即$AB=AC=8$ cm，则$CD=4$ cm. 故$BC=15-4=11$（cm）.

此时$AB+AC>BC$，三角形存在.

所以△ABC的各边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm.

（2）如图 4−1−18②，若$AB+AD=15$ cm，则$x+\frac{1}{2}x=15$.

解得$x=10$，即$AB=AC=10$ cm，则$CD=5$ cm.

故$BC=12-5=7$（cm）. 此时$AB+AC>BC$，三角形存在.

所以△ABC的各边长分别为 10 cm，10 cm，7 cm.

综上所述，△ABC的各边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm 或 10 cm，10 cm，7 cm.

挑战·高分

解法提醒

1. 若题目中条件交代不是很清楚，如本题“把△ABC的周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分”，具体哪部分长 12 cm，哪部分长 15cm 没有指代清楚，则应分类讨论.
2. 求得的三角形边长必须用三角形的三边关系进行验证.
3. 分类讨论思想是解几何图形不确定问题的一种常用思想.

拔尖角度▸ 3 利用方程思想求三角形中角的度数

例 15 如图 4−1−19，在△ABC中，D是BC边上一点，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle BAC=63°$，求$\angle DAC$的度数.

解题秘方：设未知数，根据三角形的内角和为 180° 及题中条件，将已知角和所求角集中到同一三角形中列方程求解.

解：设$\angle 1=\angle 2=x°$，

则$\angle 3=\angle 4=180°-\angle ADB=\angle 1+\angle 2=2x°$.

因为$\angle BAC=63°$，

所以$\angle DAC=63°-x°$.

因为$\angle 3+\angle 4+\angle DAC=180°$，

所以$2x°+2x°+63°-x°=180°$，解得$x°=39°$.

所以$\angle DAC=63°-39°=24°$.

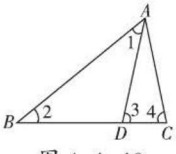


图 4−1−19

挑战·高分

方法点拨

在三角形中用方程思想求角的度数时，三角形内角和定理是常用的等量关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用类比特殊法探究三个角间的数量关系

挑战·高分

例 16 如图 4-1-20，在△ ABC 中，AD 是边 BC 上的高，AE 是∠ BAC 的平分线．若∠ $B=50°$，∠ $C=70°$，求∠ EAD 的度数．试猜想：若∠ $B=\alpha$，∠ $C=\beta$（$\beta>\alpha$），则∠ EAD 的度数是多少？（用含 α，β 的式子表示）

解题秘方：利用三角形的高线和角平分线的知识揭示角的数量关系，从而解决问题．

解：因为∠ $B=50°$，∠ $C=70°$，

所以∠ $BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-50°-70°=60°$．

因为 AD 是边 BC 上的高，所以∠ $ADB=90°$．

所以∠ $BAD=90°-\angle B=90°-50°=40°$．

因为 AE 是∠ BAC 的平分线，

所以∠ $BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$．

所以∠ $EAD=\angle BAD-\angle BAE=40°-30°=10°$．

猜想：∠ $EAD=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$．

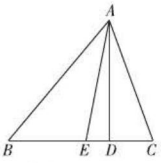


图 4-1-20

详解

因为 AD 是 BC 边上的高，所以∠ BAD=90°−α，因为 AE 是∠ BAC 的平分线，所以∠ BAE=$\frac{1}{2}$∠ BAC=$\frac{1}{2}$(180°−α−β)=90°−$\frac{1}{2}$α−$\frac{1}{2}$β．所以∠ EAD=∠ BAD−∠ BAE=90°−α−(90°−$\frac{1}{2}$α−$\frac{1}{2}$β)=$\frac{1}{2}$(β−α)．

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘 本节内容属中考热门考点，特别是三角形三边关系、三角形内角和及直角三角形两锐角互余等知识点，题型以选择题、填空题为主，多为中、低档题目．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用三角形的三边关系求三角形的边长

例 17 [中考·武威]已知 a，b，c 是△ ABC 的三边长，a，b 满足 $|a-7|+(b-1)^2=0$，c 为奇数，则 $c=$_____．

试题评析：本题考查了三角形的三边关系，解题的关键是先求出另外两边的长，再根据三角形三边的关系确定第三边长的取值范围．

解：因为 $|a-7|+(b-1)^2=0$，

所以 $a=7$，$b=1$．

因为 a，b，c 为△ ABC 的三边长，

所以 $7-1<c<7+1$，

即 $6<c<8$．

因为 c 为奇数，

所以 $c=7$．

答案：7

解法提醒

先由关系式求三角形两边的长，再根据三角形第三边小于两边之和而大于两边之差，求出第三边．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用角平分线及整体思想求角的度数

例 18 [中考·陕西]如图 4-1-21，△ABC 中，BD 和 CE 是△ABC 的两条角平分线，若∠A=52°，则∠1+∠2 等于_____.

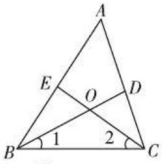


图 4-1-21

试题评析：本题考查了三角形角平分线的定义，解题关键是根据角平分线得出角的数量关系，难度适中.

解：因为∠A=52°，所以∠ABC+∠ACB=180°−52°=128°. 所以∠1+∠2=$\frac{1}{2}$(∠ABC+∠ACB)=$\frac{1}{2}$×128°=64°.

答案：64°

解法提醒

三角形的角平分线揭示了三角形中角的数量关系，通常与三角形内角和等于180°结合在一起求三角形中角的度数.

考法 3 利用三角形内角和定理判定三角形的形状

例 19 [中考·长沙]一个三角形三个内角的度数之比为 1∶2∶3，则这个三角形一定是(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

试题评析：本题主要考查三角形的内角和定理、三角形按角如何分类等知识，解决本题的关键是掌握三角形的内角和定理，以及三角形按角分类标准.

解：设三角形的三个内角分别为 $x°$，$2x°$，$3x°$，

根据三角形内角和定理可得 $x°+2x°+3x°=180°$，解得 $x°=30°$，

因此三角形的三个内角分别为 30°，60°，90°，

故该三角形为直角三角形，选项 B 正确.

答案：B

解法提醒

在一个三角形中，若有一个内角的度数等于另两个内角的度数之和，则这个三角形为直角三角形，表现形式可以是数量关系，如∠A=∠B+∠C，也可以是比例关系，如本题.

素养提分 行动篇

运用铅垂法找重心

[阅读材料] 我们知道，三角形三条中线的交点称为三角形的重心.

重心是一个物理名词，从效果上看，我们可以认为物体各个部分所受重力的合力集中于一点，这一点就叫做该物体的重心. 在生活中，当用手指来支撑一个物体，通过不断变化手指的位置，物体越来越稳定，此时手指的位置离物体的重心越来越接近.

把一根均匀的木棒悬挂在一根细绳上，不断调整悬挂点的位置，直至木棒处于水平状态，记下悬挂点的位置，用刻度尺测量该点在木棒上的位置，刚好处于木棒的正中间，我们可以把一根均匀的木棒抽象地看成一条线段，一条线段的重心就是这条线段的中点.

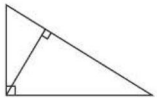
取一块均匀的三角形纸板，画出它的两条中线，用一根细绳在两条中线的交点处将三角形纸板悬挂起来，纸板处于水平状态.

[探究实验] 我们把上面这种找重心的办法叫做铅垂法，可以自己试着用铅垂法找出平行四边形、长方形、正方形的重心.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·柳州] 下图中共有（　　）直角三角形.

A. 1个
B. 2个
C. 3个
D. 4个



（第1题）

2. [中考·淮安] 下列长度的三根小木棒不能搭成三角形的是（　　）

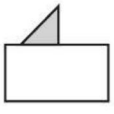
A.2 cm，3 cm，4 cm　　B.1 cm，2 cm，3 cm
C.3 cm，4 cm，5 cm　　D.4 cm，5 cm，6 cm

3. [中考·金华] 若长度分别为 a，3，5的三条线段能组成一个三角形，则 a 的值可能是（　　）

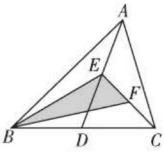
A.1　　B.2　　C.3　　D.8

4. 如图，三角形纸片被木板遮住了一部分，这个三角形是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形
C. 钝角三角形　　D. 以上都有可能



（第4题）



（第5题）

5. 如图，在△ABC中，已知点D，E，F分别为BC，AD，CE的中点，且$S_{\triangle ABC}=8\ \text{cm}^2$，则$S_{\text{阴影}}$等于（　　）

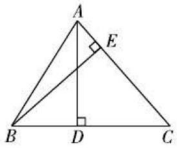
A. $4\ \text{cm}^2$　　B. $2\ \text{cm}^2$　　C. $1\ \text{cm}^2$　　D. $\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$

6. [中考·自贡] 已知三角形的两边长分别为1和4，第三边长为整数，则该三角形的周长为（　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

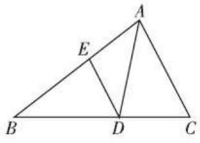
7. 已知等腰三角形的周长等于20 cm，一边长等于4 cm，求其他两边的长.

8. 如图，在△ABC中，$AD\perp BC$于D，$BE\perp AC$于E，$BC=9$，$AC=8$，$AD=6$. 求BE的长.



（第8题）

9. 如图，D是△ABC中BC边上一点，$DE\parallel AC$交AB于点E，若$\angle EDA=\angle EAD$，试说明AD是△ABC的角平分线.　　[导学号 7876572]

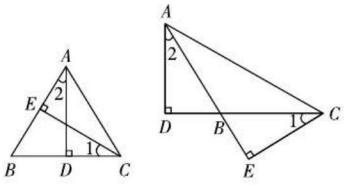


（第9题）

10. 如图①，在△ABC中，$AD\perp BC$于D，$CE\perp AB$于E.

（1）猜想$\angle 1$与$\angle 2$的关系，并说明理由；

（2）如果$\angle ABC$是钝角，如图②，（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由.



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 图形的全等

核心知识

- 全等图形
- 全等三角形
- 全等三角形的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 全等图形

1. **定义** 能够完全重合的两个图形称为全等图形.

全等图形的特征 两相同与两无关.

（1）两相同：①形状相同；②大小相同.

（2）两无关：①与位置无关；②与方向无关.

2. **全等图形的性质** 全等图形的形状和大小都相同.

提分·必记

特别解读

- 完全重合说明两个图形周长和面积相等；
- 周长或面积相等的两个图形不一定是全等图形.

拨考向 利用全等图形的定义识别全等图形

例 1 如图 4-2-1 中是全等图形的是_____.

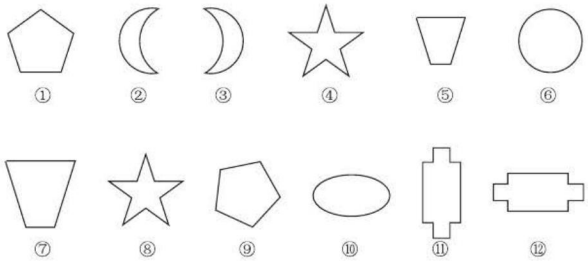


图 4-2-1

解题秘方：根据全等图形的定义和特征进行判断.

解：上述图形中，⑤和⑦形状相同，但大小不同，

⑥和⑩大小、形状都不同；

①和⑨、②和③、⑪和⑫尽管方向不同，但大小、形状完全相同，所以它们是全等图形，④和⑧都是五角星，大小、形状都相同，是全等图形.

答案：①和⑨、②和③、④和⑧、⑪和⑫

提分·秘诀

方法点拨

判断两个图形全等的方法：（1）根据图形的形状是否相同、大小是否相等来进行判定；（2）通过平移、旋转、翻折等方法把两个图形叠合在一起，看它们能否完全重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 全等三角形

1. 全等三角形的相关概念

（1）**全等三角形的概念**　能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.

（2）**全等三角形的对应元素**

①**对应顶点**：全等三角形中，能够重合的顶点.

②**对应边**：全等三角形中，能够重合的边.

③**对应角**：全等三角形中，能够重合的角.

2. 全等三角形的表示方法

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”，记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

3. 对应元素的确定方法

（1）图形特征法：

①最长边对最长边，最短边对最短边.

②最大角对最大角，最小角对最小角.

③相等的边（角）为对应边（角）.


全等三角形

（2）位置关系法：

①公共角（对顶角）为对应角，公共边为对应边.

②对应角的对边为对应边，两个对应角所夹的边是对应边.

③对应边的对角为对应角，两条对应边所夹的角是对应角.

（3）**字母顺序法**：根据书写规范按照对应顶点确定对应边或对应角.

拔考向▶ 利用全等三角形的对应关系确定对应元素

题型 1：图形的位置特征在找对应元素中的应用

例 2　如图 4−2−2，已知△ ABD ≌△ CDB，∠ ABD= ∠ CDB. 写出其对应边和对应角.

解题秘方：根据图形的位置特征确定对应角和对应边.

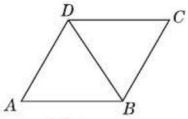


图 4−2−2

解：BD 与 DB，AD 与 CB，AB 与 CD 是对应边；∠ A 与∠ C，∠ ABD 与∠ CDB，∠ ADB 与∠ CBD 是对应角.

题型 2：图形的变换方式在找对应元素中的应用

例 3　如图 4−2−3，将△ ABC 绕其顶点 B 顺时针旋转一定角度后得到△ DBE，请说出图中△ ABC 和△ DBE 是否为全等三角形，若是，写出其对应边和对应角.

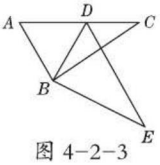


图 4−2−3

解题秘方：根据图形旋转前后的对应位置找对应关系.

解：△ ABC ≌△ DBE，AB 与 DB，AC 与 DE，BC 与 BE 是对应边，∠ A 与∠ BDE，∠ ABC 与∠ DBE，∠ C 与∠ E 是对应角.

提分·必记

特别解读

对应边或对应角与对边或对角的区别：对应边、对应角是两个全等三角形中对应的两条边之间或对应的两个角之间的关系；对边、对角是同一个三角形中边和角之间的关系，对边是指三角形中某个角所对的边，对角是指三角形中某条边所对的角.

特别解读

1. 全等三角形是全等形中的特例.
2. 对应关系可从两个方面理解.
(1) 从动态角度理解：重合是找对应元素的关键.
(2) 从静态角度理解：从表示方法中找准对应点，然后确定对应边和对应角.

提分·秘诀

解法提醒

利用图形的位置特征确定对应边和对应角时，要抓住对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边；当全等三角形的两组对应边（角）已确定时，剩下的一组边（角）就是对应边（角）.

解法提醒

从动态的角度找对应元素，关键抓住图形变换前后的重合元素，重合的边为对应边，重合的角为对应角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 3 全等三角形的性质



1. 性质 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

几何语言：因为△ABC≌△DEF，

所以$\begin{cases}AB=DE,\ BC=EF,\ AC=DF,\\ \angle BAC=\angle EDF,\ \angle ABC=\angle DEF,\ \angle ACB=\angle DFE.\end{cases}$

2. 拓展 全等三角形的对应元素相等.

全等三角形中的对应元素包括对应边、对应角、对应边上的中线、对应边上的高、对应角的平分线、周长、面积等.

提分·必记

要点提醒

1. 应用全等三角形的性质时，要先确定两个条件：（1）两个三角形全等；（2）找对应元素.
2. 全等三角形的性质是说明线段、角相等的常用方法.

核心考向▶ 利用全等三角形的性质求对应元素间的关系

题型 1：全等三角形的性质在说明线段关系中的应用

例 4 如图 4−2−4，已知△ABC≌△EDF.

（1）试说明 $DC=BF$；

（2）试说明 $AC\parallel EF$.

解题秘方：利用全等三角形的对应边相等和对应角相等解决问题.

解：（1）因为△ABC≌△EDF，

所以 $DF=BC$.

所以 $DF-CF=BC-CF$.

即 $DC=BF$.

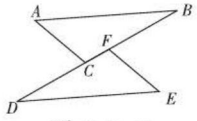


图 4−2−4

（2）因为△ABC≌△EDF，

所以∠ACB=∠EFD.

所以 $AC\parallel EF$.

提分·秘诀

解法提醒

全等三角形的对应边（对应角）相等，由此可得两条线段（两个角）相等，利用线段（或角）的和差关系求线段的长度（或角的度数）.

题型 2：全等三角形的性质在求角度中的应用

例 5 如图 4−2−5，在△ABC中，D，E分别是边AC，BC上的点，若△ADB≌△EDB≌△EDC，求∠C的度数.

解题秘方：利用全等三角形的对应角相等的性质，并结合三角形的内角和为 180°进行计算.

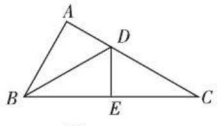


图 4−2−5

解：因为△ADB≌△EDB≌△EDC，

所以∠ABD=∠EBD=∠C，∠A=∠BED=∠CED.

又因为∠BED+∠CED=180°，

所以∠BED=∠CED=90°.

所以∠A=90°.

所以∠ABD+∠DBE+∠C=180°−∠A=90°.

所以 3∠C=90°.

所以∠C=30°.

解法提醒

利用全等三角形的性质求角的度数时，一般先确定两个三角形中角的对应关系，然后由这种关系实现已知角和未知角之间的转换，从而求出所要求的角的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：全等三角形的性质在判断两直线位置关系中的应用

例 6 如图 4-2-6，已知 Rt△ABC≌Rt△CDE，且点 B，C，D 在同一条直线上，试判断 AC 与 CE 的位置关系，并说明理由．

解题秘方：通过求 AC，CE 夹角的度数判断其位置关系．

解：$AC \perp CE$，理由如下：

因为 Rt△ABC≌Rt△CDE，所以∠BAC=∠DCE．

因为∠BAC+∠ACB=90°，所以∠DCE+∠ACB=90°．

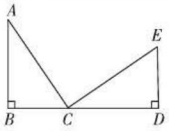


图 4-2-6

所以∠ACE=180°−(∠DCE+∠ACB)=180°−90°=90°．

所以 $AC \perp CE$．

方法点拨

说明线段与线段的位置关系时，通常考虑平行、垂直两种特殊关系，说明平行的方法是转化为说明同位角相等、内错角相等或同旁内角互补；说明垂直的方法是转化为说明它们的夹角为 90° 或三角形的两内角互余．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用逆向思维解决条件探索问题

挑战·高分

例 7 如图 4-2-7，A，D，E 三点在同一条直线上，且△BAD≌△ACE，AB 与 CA，AD 与 CE 是对应边．

（1）试说明 $BD=DE+CE$．

（2）△ABD 满足什么条件时，$BD \parallel CE$？请说明理由．

解题秘方：根据全等三角形的性质找出相等的线段和角，然后利用线段的和差关系解决问题．

解：（1）因为△BAD≌△ACE，所以 $BD=AE$，$AD=CE$．

又因为 $AE=AD+DE$，所以 $BD=DE+CE$．

（2）当△ABD 满足∠ADB=90°时，$BD \parallel CE$．

理由：因为△BAD≌△ACE，所以∠ADB=∠CED．

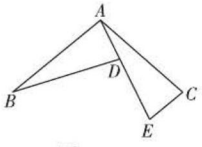


图 4-2-7

若∠ADB=90°，则∠CED=90°．

又因为∠ADB+∠BDE=180°，所以∠BDE=90°．

所以∠BDE=∠CED．所以 $BD \parallel CE$．

方法点拨

解答探究类题目的方法：

1. 先猜想出条件，利用猜想出的条件推出题目的结论；
2. 将题目中的结论当成条件进行推理，这样推出的结果即为要探究的条件．

解题时常采用方法 2 逆向寻找条件，再用方法 1 进行说明．

拔尖角度 2 利用分类讨论思想求动态问题中的速度、时间

挑战·高分

例 8 如图 4-2-8，已知△ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=8$，点 D 为 AB 的中点．点 P 在线段 BC 上以每秒 3 个单位长度的速度由点 B 向点 C 运动，同时点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 以每秒 a 个单位长度的速度运动，设运动时间为 t 秒．

（1）求 CP 的长；

（2）若以点 C，P，Q 为顶点的三角形和以点 B，D，P 为顶点的三角形全等，且∠B 和∠C 是对应角，求 a 和 t 的值．

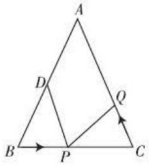


图 4-2-8

解题秘方：（1）点在线段上运动，用点运动的路程表示线段长．

（2）根据对应关系得出线段相等，求出 a，t 的值．

教你一招

解决动态问题时，通常用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想，分情况对题目进行讨论，结合图形根据全等三角形的性质列出方程求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题意得 $BP=3t$. 因为 $BC=8$，所以 $CP=8-3t$.

（2）由题意知，需分两种情况讨论：

若△ BDP ≌△ CPQ，则 $BD=CP$，$BP=CQ$.

因为 $AB=10$，点 D 为 AB 的中点，所以 $BD=\frac{1}{2}AB=5$.

所以 $5=8-3t$，$3t=at$，解得 $t=1$，$a=3$.

若△ BDP ≌△ CQP，则 $BP=CP$，$BD=CQ$，

所以 $3t=8-3t$，$5=at$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$a=\frac{15}{4}$.

综上所述，$a=3$，$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$，$t=\frac{4}{3}$.

解法提醒

由∠B和∠C是对应角可知DP和PQ是对应边，而其他两组边的对应关系不确定，因此要分BD与CP是对应边、BP与CP是对应边两种情况讨论.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查全等三角形的性质，一般不单独命题，常与全等三角形的判定或全等的变换形式（平移、翻折、旋转）综合考查，主要是以选择题和填空题的形式出现，难度适中.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角

例9 [中考·厦门]如图 4-2-9，点 E，F 在线段 BC 上，△ ABF 与△ DCE 全等，点 A 与点 D，点 B 与点 C 是对应顶点，AF 与 DE 交于点 M，则∠ DCE 等于（　　）

A. ∠ B　　B. ∠ A　　C. ∠ EMF　　D. ∠ AFB

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，熟记全等三角形的性质找准对应关系是解题的关键.

答案：A

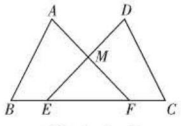


图 4-2-9

解法提醒

全等三角形中，对应角的顶点就是对应顶点，反过来，以对应顶点为顶点的角为对应角.

考法2 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数

例10 [中考·天门]如图 4-2-10，在 Rt△ ABC 中，∠ $ACB=90°$，点 D 在 AB 边上，将△ CBD 沿 CD 折叠，使点 B 恰好落在 AC 边上的点 E 处. 若∠ $A=26°$，则∠ $CDE=$_____.

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是折叠，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数.

解：由三角形的内角和定理可知，∠ $B=64°$，

由折叠可知△ BCD ≌△ ECD.

所以∠ $BCD=$ ∠ $ECD=\frac{1}{2}$ ∠ $ACB=45°$，∠ $CED=$ ∠ $B=64°$.

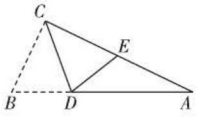


图 4-2-10

所以∠ $CDE=180°-$ ∠ $ECD-$ ∠ $CED=180°-45°-64°=71°$.

答案：71°

解法提醒

平移、旋转、翻折变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等的性质得到对应边相等、对应角相等，从而解决问题. 本题属于翻折变换，它隐含着折叠前后的△CBD与△CED全等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 下列说法中错误的有（　　）

①图形中只有两个三角形才能完全重合；

②如果两个图形全等，那么它们的形状和大小一定都相同；

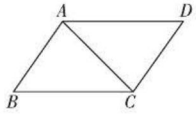
③两个正方形一定是全等图形；

④边数相同的图形一定能互相重合.

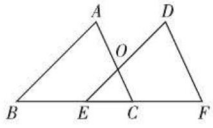
A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

2. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$\angle BAC = \angle DCA$，则$BC$的对应边是（　　）

A. CD　　B. CA　　C. DA　　D. AB



（第2题）



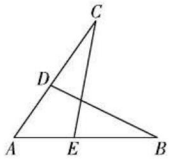
（第4题）

3. 如果$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且$\triangle ABC$的周长为100 cm，$A$，$B$分别与$D$，$E$对应，$AB$=30 cm，$DF$=25 cm，则$BC$的长为（　　）

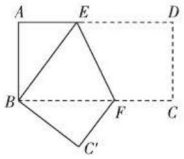
A. 45 cm　　B. 55 cm　　C. 30 cm　　D. 25 cm

4. 如图，点B，E，C，F在同一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle B$=45°，$\angle F$=65°，则$\angle COE$等于_____.

5. 如图，$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，$\angle B$与$\angle C$是对应角. 若$AE$=5 cm，$BE$=7 cm，$\angle ADB$=100°，则$\angle AEC$=_____，$AC$=_____.



（第5题）



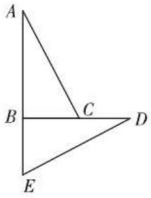
（第6题）

6. 如图，将长方形纸片$ABCD$折叠，使点D与点B重合，点C落在C'处，折痕为EF. 若AB=1，BC=2，则$\triangle ABE$和$\triangle BC'F$的周长之和为_____.

7. 如图，$\triangle ABC$绕着点B顺时针旋转90°到$\triangle DBE$的位置，$\angle ABC$=90°.

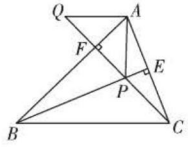
（1）$\triangle ABC$和$\triangle DBE$是否全等？若全等，指出对应边和对应角.

（2）AC和DE有怎样的位置关系？



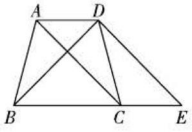
（第7题）

8. 如图，已知BE，CF是$\triangle ABC$的边AC和AB上的高，Q为CF延长线上的一点，P为BE和CF的交点，$\triangle PAB \cong \triangle AQC$. 试说明$AP \perp AQ$.



（第8题）

9. 如图，四边形$ABCD$是梯形，$AD \parallel BC$，若DE交BC的延长线于点E，且$\triangle ADC \cong \triangle ECD$，梯形$ABCD$的面积和$\triangle BDE$的面积相等吗？并说明理由.　　[导学号 7876572]



（第9题）

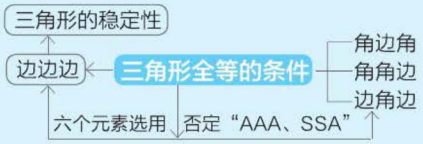
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 探索三角形全等的条件

核心知识

- 三角形全等的条件——边边边
- 三角形的稳定性
- 三角形全等的条件——角边角、角角边
- 三角形全等的条件——边角边

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三角形全等的条件——边边边

1. 条件一 三边分别相等的两个三角形全等，简写为“边边边”或“SSS”.

2. 书写格式 如图 4-3-1，

在△ABC和△$A'B'C'$中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \\ AC=A'C', \end{cases}$$

所以△ABC≌△$A'B'C'$（SSS）.

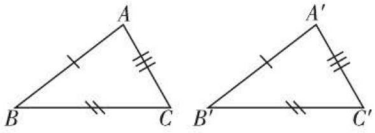


图 4-3-1

探索三角形全等的条件

提分·必记

知识链接

当三角形的三边确定后，其形状、大小也随之确定，这也是三角形具有稳定性的原因.

特别提醒

在列举两个三角形全等的条件时，应把三个条件按顺序排列（一般是把同一个三角形的三个条件放在等号的同一侧），并用大括号将其括起来.

拨考向 利用“SSS”判定两个三角形全等

例 1 如图 4-3-2，已知点A，D，B，F在一条直线上，$AC=FE$，$BC=DE$，$AD=FB$.

试说明△ABC≌△FDE.

解题秘方：紧扣“SSS”找出两个三角形中三边对应相等的条件来判定两个三角形全等.

解：因为$AD=FB$，

所以$AD+DB=FB+DB$，即$AB=FD$.

在△ABC和△FDE中，$\begin{cases} AC=FE, \\ AB=FD, \\ BC=DE, \end{cases}$

所以△ABC≌△FDE（SSS）.

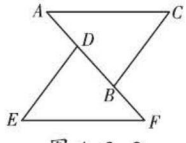


图 4-3-2

提分·秘诀

方法点拨

运用“SSS”说明两个三角形全等就是找边相等，边相等除了题目中已知的边相等以外，还有些相等的边隐含在题设或图形中，常见的隐含的等边有：①公共边相等；②等边加（或减）等边，其和（或差）仍相等；③由中线的定义得出线段相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 三角形的稳定性

1. 三角形的稳定性

（1）如果三角形的三边长确定，这个三角形的形状、大小就完全确定了，三角形的这种性质叫做三角形的稳定性.



（2）四边形及四边以上的图形具有不稳定性.

2. 三角形稳定性的应用

（1）稳定性是三角形特有的，在生产和生活中具有广泛的应用，有很多需要保持稳定性的物体都被制成三角形的形状，如起重机、钢架桥（如图4-3-3）等.

（2）四边形及四边以上的图形具有不稳定性，为保证其稳定性，常在图形中构造三角形. 四边形的不稳定性在生活中也有广泛的应用，如活动挂架、伸缩门（如图4-3-4）等.

提分·必记

示图

钢架桥 →



图 4-3-3

伸缩门 →



图 4-3-4

拔考向▸ 利用三角形的稳定性固定物体的形状

例2 李明家有一个由六根钢管连接而成的钢架 $ABCDEF$，如图4-3-5，为了使这个钢架稳固，他计划用三根钢管来连接使它不变形. 请帮李明解决这个问题.

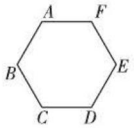
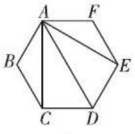
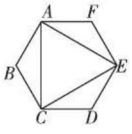


图 4-3-5



①



②

图 4-3-6

解题秘方：根据“三角形的稳定性”进行解答，可以将钢架分割成多个三角形.

解：（答案不唯一）只要将图形分割成三角形即可. 如图4-3-6①②.

提分·秘诀

解法提醒

- 判断一个图形是否具有稳定性要看它的基本组成部分是不是三角形. 若是，则具有稳定性；若不是，则不具有稳定性.
- 为了保证四边形及四边以上的图形稳定，最简单的方法是连对角线（不相邻两个顶点的连线）.

点知识▸ 3 三角形全等的条件——角边角

1. 条件二

两角及其夹边分别相等的两个三角形全等，简写成“角边角”或“ASA”.

2. 书写格式

如图4-3-7，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \\ \angle C=\angle C', \end{cases}$$

所以△ $ABC\cong$△ $A'B'C'$（ASA）.

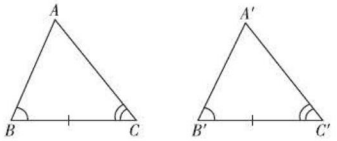


图 4-3-7

提分·必记

特别解读

1. 相等的元素：两角及两角的夹边.
2. 书写顺序：角→边→角.
3. 夹边为两个角的公共边.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用“ASA”判定两个三角形全等

例3 如图4-3-8，已知$AB \parallel DF$，$AC \parallel DE$，$BC=FE$，且点B，E，C，F在一条直线上．试说明$\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

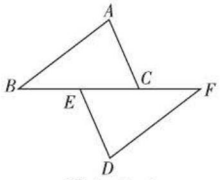


图4-3-8

解题秘方：解题的关键是由两组平行线得出两组角对应相等，构造两角及其夹边对应相等．

解：因为$AB \parallel DF$且点B，E，C，F在一条直线上，

所以$\angle B=\angle F$.

因为$AC \parallel DE$，

所以$\angle ACB=\angle DEF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DFE$中，$\begin{cases}\angle B=\angle F,\\ BC=FE,\\ \angle ACB=\angle DEF,\end{cases}$

所以$\triangle ABC \cong \triangle DFE$（ASA）．

提分·秘诀

方法点拨

运用“ASA”判定两个三角形全等，既要找边相等，又要找角相等．

点知识▶4 三角形全等的条件——角角边

1. 条件三 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等，简写成“角角边”或“AAS”．

2. 书写格式

如图4-3-9，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\begin{cases}\angle A=\angle A',\\ \angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\end{cases}$

所以$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（AAS）．

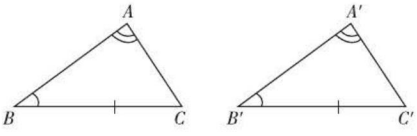


图4-3-9

3. “ASA”与“AAS”的区别与联系

	“S”的意义	书写格式	联系
ASA	“S”是两角的夹边	把夹边相等写在两角相等的中间	“AAS”可由“ASA”结合三角形的内角和定理推导得出
AAS	“S”是其中一角的对边	把两角相等写在一起，边相等放在最后	

提分·必记

特别解读

1. 判定两个三角形全等的三个条件中，“边”是必不可少的．
2. 将“角角边”和“角边角”合起来可得，如果两个三角形的两个角和一条边对应相等，那么这两个三角形全等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用“AAS”判定两个三角形全等

例4 如图 4-3-10，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，试说明△ BOD ≌△ COE.

解题秘方：找出两个三角形中两个角及其中一角的对边对应相等，利用“AAS”判定两个三角形全等.

解：在△ ABE 和△ ACD 中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle A=\angle A, \\ AE=AD, \end{cases}$ 公共角可直接写出，对顶角也可直接写出.

所以△ ABE ≌△ ACD（SAS）.

所以∠ B= ∠ C.

因为 $AB=AC$，$AD=AE$，

所以 $BD=CE$.

在△ BOD 和△ COE 中，

$\begin{cases} \angle B=\angle C, \\ \angle BOD=\angle COE, \\ BD=CE, \end{cases}$

所以△ BOD ≌△ COE（AAS）.

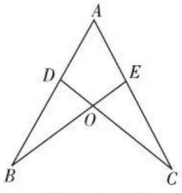


图 4-3-10

点知识▶5 三角形全等的条件——边角边

1. 条件四 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等，简写成“边角边”或“SAS”.

2. 书写格式 如图 4-3-11，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，$\begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$

所以△ ABC ≌△ $A'B'C'$（SAS）.

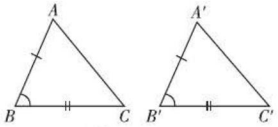


图 4-3-11

拔考向▶利用“SAS”判定两个三角形全等

例5 如图 4-3-12，点 C 是 AB 的中点，$AD=CE$，且 AD // CE. 试说明△ ACD ≌△ CBE.

解题秘方：根据条件找出两个三角形中的两条边及其夹角对应相等，利用“SAS”判定两个三角形全等.

解：因为点 C 是 AB 的中点，所以 $AC=CB$.

因为 AD // CE，所以∠ CAD= ∠ BCE.

在△ ACD 和△ CBE 中，

$\begin{cases} AC=CB, \\ \angle CAD=\angle BCE, \\ AD=CE, \end{cases}$

所以△ ACD ≌△ CBE（SAS）.

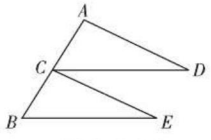


图 4-3-12

提分·秘诀

教你一招

说明三角形全等时，有些条件是已知的，有些条件是隐含在题设或图形中的，比如对顶角，公共角，公共边等，还有些条件是通过说明三角形全等，利用全等三角形的性质得到的.

提分·必记

要点提醒

1. **相等的元素**：两边及这两边的夹角.
2. **书写顺序**：边→角→边.

特别解读

两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

提分·秘诀

方法点拨

常见的隐含角相等的情况：①公共角相等；②对顶角相等；③等角加（或减）等角，其和（或差）仍相等；④同角或等角的余（或补）角相等；⑤由角平分线的定义得出角相等；⑥由垂直的定义得出角相等；⑦由平行线得到同位角或内错角相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用构造全等三角形法用全等三角形的性质解边角问题

技巧 1：公共边在构造全等三角形中的应用

例 6 [中考·十堰] 如图 4-3-13，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$. 试说明 $\angle B=\angle D$.

解题秘方：已知两个三角形的两边相等，可以选择“SSS”构造全等三角形，连接 AC 即可.

解：如图 4-3-13，连接 AC.

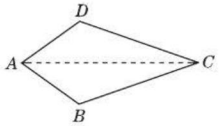


图 4-3-13

在△ ABC 和△ ADC 中，$\begin{cases} AB=AD, \\ CB=CD, \\ AC=AC, \end{cases}$

所以△ ABC ≌△ ADC（SSS）. 所以 $\angle B=\angle D$.

技巧 2：“截长补短法”在构造全等三角形中的应用

例 7 如图 4-3-14，已知 $AB \parallel CD$，CE，BE 分别平分 $\angle BCD$ 和 $\angle CBA$，点 E 在 AD 上. 试说明 $BC=AB+CD$.

解题秘方：利用“截长补短法”构造全等三角形，从而解决问题.

解：如图 4-3-14，在 BC 上取一点 F，使 $BF=BA$，连接 EF.

因为 CE，BE 分别平分 $\angle BCD$ 和 $\angle CBA$，

所以 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$.

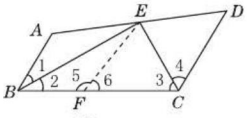


图 4-3-14

在△ ABE 和△ FBE 中，$\begin{cases} BA=BF, \\ \angle 1=\angle 2, \\ BE=BE, \end{cases}$

所以△ ABE ≌△ FBE（SAS）. 所以 $\angle A=\angle 5$.

因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle A+\angle D=180°$.

又因为 $\angle 5+\angle 6=180°$，所以 $\angle 6=\angle D$.

在△ EFC 和△ EDC 中，$\begin{cases} \angle 6=\angle D, \\ \angle 3=\angle 4, \\ EC=EC, \end{cases}$

所以△ EFC ≌△ EDC（AAS）. 所以 $FC=DC$. 所以 $BC=BF+CF=AB+CD$.

技巧 3：“加倍折半法”在构造全等三角形中的应用

例 8 如图 4-3-15，已知 CE，CB 分别是△ ABC，△ ADC 的中线，且 $AB=AC$，$\angle ACB=\angle ABC$. 试说明 $CD=2CE$.

解题秘方：CE 是△ ABC 中 AB 边上的中线，将 CE 延长一倍至 F，可构造△ ACE 和△ BFE 全等，即出现了 $2CE$ 这条线段，因此再说明△ CBD 和△ CBF 全等即可.

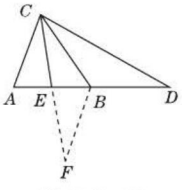


图 4-3-15

挑战·高分

解法提醒

公共边是线段相等的一种形式，若已知有两组边对应相等，而第三边是公共边，则连接公共边，可构造两个三角形全等.

方法提示

利用“截长补短法”构造全等三角形解题的特征：

1. 条件中有角平分线，“截长补短”是在角平分线所在角的两边中进行；
2. 条件或结论中出现一条线段等于另外两条线段的和或差，“截长补短”也是在相关的线段中进行.

技巧点拨

说明一条线段等于两条线段的和的方法：

1. **“截长法”**的基本思路是在长线段上取一段，使之等于其中一短线段的长，然后说明剩下的线段等于另一短线段的长；
2. **“补短法”**的基本思路是延长短线段，使延长部分的长等于另一短线段的长，再说明延长后的线段长等于长线段的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 4-3-15，延长 CE 到点 F，使 $EF=CE$，连接 FB，则 $CF=2CE$.

因为 CE 是△ ABC 的中线，所以 $AE=BE$.

在△ BEF 和△ AEC 中，$\begin{cases} BE=AE, \\ \angle BEF=\angle AEC, \\ EF=EC, \end{cases}$

所以△ $BEF\cong$△ AEC（SAS）. 所以$\angle EBF=\angle A$，$BF=AC$.

又因为$\angle ABC=\angle ACB$，

所以$\angle CBD=180°-\angle ABC=\angle A+\angle ACB=\angle EBF+\angle ABC=\angle CBF$.

因为 CB 是△ ADC 的中线，所以 $AB=BD$.

又因为 $AB=AC$，$AC=BF$，所以 $BF=BD$.

在△ CBF 与△ CBD 中，$\begin{cases} CB=CB, \\ \angle CBF=\angle CBD, \\ BF=BD, \end{cases}$

所以△ $CBF\cong$△ CBD（SAS）. 所以 $CF=CD$. 所以 $CD=2CE$.

技巧 4：基础三角形模型法在构造一个与它全等的三角形中的应用

例 9 如图 4-3-16，已知 $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，$\angle ABC=\angle ACB=45°$，$M$ 为 AC 边的中点，$AD\perp BM$ 于点 E，交 BC 于点 D，连接 DM. 试说明$\angle AMB=\angle CMD$.

解题秘方：由于 $\angle AMB$ 与 $\angle CMD$ 所在的两个三角形不全等，因此可以以 $\angle CMD$ 所在的△ CMD 为基础三角形，在△ ABM 中构造一个含 $\angle AMB$ 的三角形与△ CMD 全等.

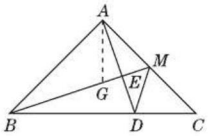


图 4-3-16

解：作$\angle BAC$ 的平分线 AG 交 BM 于点 G，如图 4-3-16.

因为$\angle BAC=90°$，$\angle ABC=\angle ACB=45°$，

所以$\angle MAG=\angle BAG=\angle ACB=45°$.

因为 $AE\perp BM$，所以$\angle MAE+\angle AMB=90°$.

又因为$\angle ABM+\angle AMB=90°$，

所以$\angle ABM=\angle MAE$.

在△ ABG 和△ CAD 中，$\begin{cases} \angle BAG=\angle ACD, \\ AB=CA, \\ \angle ABG=\angle CAD, \end{cases}$

所以△ $ABG\cong$△ CAD（ASA）. 所以 $AG=CD$.

因为 M 为 AC 边的中点，所以 $AM=CM$.

在△ AMG 和△ CMD 中，$\begin{cases} AG=CD, \\ \angle MAG=\angle MCD, \\ AM=CM, \end{cases}$

所以△ $AMG\cong$△ CMD（SAS）. 所以$\angle AMB=\angle CMD$.

技巧点拨

说明一条线段等于另一条线段的 2 倍时，常采用“加倍折半法”.“加倍法”就是延长短线段，使延长后的线段长等于原来线段长的 2 倍，再说明它等于另一线段的长；“折半法”就是取长线段的中点，说明其中一部分等于短线段的长. 本例采用的是“加倍法”，待学过三角形中位线定理后我们还可以用“折半法”来说明.

解法提醒

- 当要说明的两个角所在的三角形明显不全等时，可借助与这两个角相关的边和角添加辅助线构造三角形全等.
- 基础三角形法是构造全等三角形的一种常用方法，它是从要说明的边（角）关系中一边（角）所在的三角形为基础三角形，再从要说明的另一边（角）为一边（角）作一个与基础三角形全等的三角形.

所作的辅助线必须满足：(1) 不能破坏图形中的已知条件；(2) 能够作为说明的一个已知条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用类比法探究全等变换中的动态应用的结论

例 10 [规律探索题]如图 4-3-17，在△ ABC 中，∠ BAC=90°，AB=AC，AE 是过点 A 的一条直线，且 B，C 在 AE 的异侧，BD ⊥ AE 于 D，CE ⊥ AE 于 E.

（1）试说明 BD=DE+CE.

（2）若直线 AE 绕 A 点旋转到如图 4-3-18 ①的位置（BD < CE）时，其余条件不变，则 BD 与 DE，CE 的关系如何？请予以说明.

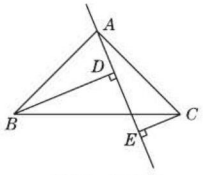


图 4-3-17

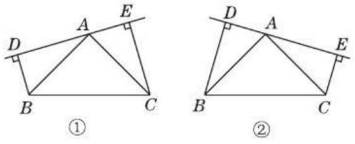


图 4-3-18

（3）若直线 AE 绕 A 点旋转到如图 4-3-18 ②的位置（BD > CE）时，其余条件不变，则 BD 与 DE，CE 的关系怎样？请直接写出结果，不需说明.

（4）根据以上的讨论，请用简洁的语言描述 BD，DE，CE 的关系.

解题秘方：根据条件易说明△ ABD 与△ CAE 全等，从而将 BD 转化为 AE，CE 转化为 AD，从一条直线上线段的和差关系易得出结论，而图 4-3-18 ①和②只是直线的位置改变，其他条件都不变，故探索得到结论的思路都相同，用类比法求解.

解：（1）因为 BD ⊥ AE 于 D，CE ⊥ AE 于 E，

所以∠ ADB= ∠ AEC=90°.

因为∠ BAC=90°，∠ ADB=90°，

所以∠ ABD+ ∠ BAD= ∠ CAE+ ∠ BAD=90°，

所以∠ ABD= ∠ CAE.

在△ ABD 和△ CAE 中，$\begin{cases} \angle ADB = \angle CEA, \\ \angle ABD = \angle CAE, \\ AB = CA, \end{cases}$

所以△ ABD ≌△ CAE（AAS）. 所以 BD=AE，AD=CE.

因为 AE=AD+DE，所以 BD=DE+CE.

（2）BD=DE−CE. 理由如下：

因为 BD ⊥ AE 于 D，CE ⊥ AE 于 E，所以∠ ADB= ∠ AEC=90°.

因为∠ BAC=90°，∠ ADB=90°，

所以∠ ABD+ ∠ BAD= ∠ CAE+ ∠ BAD=90°.

所以∠ ABD= ∠ CAE.

挑战·高分

名师导析

在(1)中，观察图形易得 AE=DE+AD，而要求说明的结论是 BD=DE+CE，则需说明 BD=AE，AD=CE. 故说明△ ABD ≌△ CAE 即可.

(2)(3)完全可根据(1)的思路，借助图形，得出结论.

在(4)中用语言描述 BD 与 DE，CE 的关系时，应注意 B，C 与直线 AE 的位置关系，分情况予以说明.

教你一招

解决图形变化问题需要抓住三个特点：

1. 变化前的结论及说理过程对变化后的结论的作用；
2. 在图形变化前后，明确哪些关系发生变化，哪些关系没有发生变化，变化前的等角、等线段在变化后是否还存在；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ ABD 和△ CAE 中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEA,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$

所以△ $ABD\cong$△ CAE（AAS），

所以 $BD=AE$，$AD=CE$.

所以 $BD=AE=DE-AD=DE-CE$.

（3）$BD=DE-CE$.

（4）归纳（1）（2）（3）可知，当 B，C 在 AE 异侧时，$BD=DE+CE$；当 B，C 在 AE 同侧时 $BD=DE-CE$.

3. 几种图形变化之间，说理思路存在内在联系，变化后的说理思路可模仿与借鉴变化前的说理思路.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

三角形全等的条件，是中考的必考内容，主要考查添加条件或选用适当的方法证明三角形全等.常与全等三角形的性质一起考查，在中考中以填空题、选择题和解答题的形式出现，单独考察时题目以中、低档为主，与其他知识综合考查，难度较大.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 三角形全等的条件的灵活应用

例11 [中考·成都]如图 4-3-19，已知 $\angle ABC=\angle DCB$，添加以下条件，不能判定△ $ABC\cong$△ DCB 的是（　　）

A. $\angle A=\angle D$　　B. $\angle ACB=\angle DBC$

C. $AC=DB$　　D. $AB=DC$

试题评析：添加三角形全等的条件问题，应先分析已存在的对应边、对应角的关系，然后再对所添加的条件进行分析，看是否能构成判定三角形全等的条件.

解：A. $\angle A=\angle D$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，符合“AAS”，即能推出△ $ABC\cong$△ DCB，故本选项不符合题意；

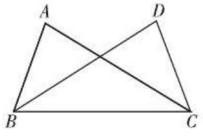


图 4-3-19

B. $\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，$\angle ACB=\angle DBC$，符合“ASA”，即能推出△ $ABC\cong$△ DCB，故本选项不符合题意；

C. $\angle ABC=\angle DCB$，$AC=DB$，$BC=CB$，不符合全等三角形的判定定理，即不能推出△ $ABC\cong$△ DCB，故本选项符合题意；

D. $AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，符合“SAS”，即能推出△ $ABC\cong$△ DCB，故本选项不符合题意.

答案：C

方法点拨

说明两个三角形全等，若条件不够需要补充条件时，有以下几种情况：

1. 已知两边
   - 找第三边，
   - 找两边的夹角；
2. 已知两角
   - 找其中任意一角的对边，
   - 找两角的夹边；
3. 已知一角及其邻边
   - 找任意一角，
   - 找夹该已知角的另一边；
4. 已知一边及其对角，找余下的任意一角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用全等三角形的性质判断两线段间的关系

例 12 [中考·菏泽]如图 4-3-20，$AB \parallel CD$，$AB=CD$，$CE=BF$. 请写出 DF 与 AE 的关系，并说明你的理由.

试题评析：本题主要考查三角形全等的判定与性质，解题的关键是识别两条线段所在的两个三角形全等.

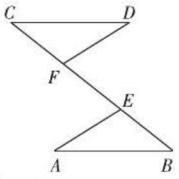


图 4-3-20

解：$DF \parallel AE$ 且 $DF=AE$.

理由：因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle C=\angle B$.

因为 $CE=BF$，所以 $CF=BE$.

又因为 $CD=AB$，所以 $\triangle DCF \cong \triangle ABE$（SAS）.

所以 $DF=AE$，$\angle DFC=\angle AEB$.

所以 $\angle DFE=\angle AEF$.

所以 $DF \parallel AE$.

即 DF 与 AE 的关系是平行且相等.

考法点评

两条线段的关系包括数量关系和位置关系，数量关系一般是相等，位置关系一般是平行或垂直.

线段的这些关系都可以通过这两条线段所在的三角形全等得到.

考法 3 利用全等三角形的判定条件和性质求图形的面积

例 13 [中考·黑龙江]如图 4-3-21，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$AC=5$，$\angle DAB=\angle DCB=90°$，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

A. 15　　B. 12.5　　C. 14.5　　D. 17

试题评析：本题主要考查了三角形全等的判定条件与性质，三角形全等的判定条件是结合全等三角形的性质说明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件，在应用全等三角形的判定条件时，要注意三角形的公共边和公共角，必要时添加适当的辅助线构造三角形.

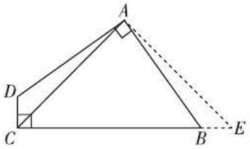


图 4-3-21

解：如图 4-3-21，过 A 作 $AE \perp AC$，交 CB 的延长线于 E.

因为 $\angle DAB=\angle DCB=90°$，

所以 $\angle D+\angle ABC=180°=\angle ABE+\angle ABC$.

所以 $\angle D=\angle ABE$.

又因为 $\angle DAB=\angle CAE=90°$，

所以 $\angle CAD=\angle EAB$.

又因为 $AD=AB$，所以 $\triangle ACD \cong \triangle AEB$（AAS）.

所以 $AC=AE$，四边形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle ACE$ 的面积相等.

因为 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 5\times 5=12.5$，

所以四边形 $ABCD$ 的面积为 12.5.

答案：B

解法提醒

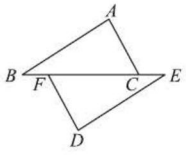
“化不规则图形为规则图形”是求面积问题的一种常用解题方法，本例是利用全等三角形进行割补转化，过 A 作 AE ⊥ AC，交 CB 的延长线于 E，判定 △ ACD ≌ △ AEB，即可得到 AC=AE，从而得到四边形 ABCD 的面积与 △ ACE 的面积相等，根据 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 5\times 5=12.5$，即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

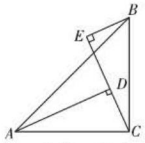
1. [中考·安阳] 如图，点B，F，C，E在一条直线上，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，那么添加下列哪一个条件后，仍无法判定$\triangle ABC \cong \triangle DEF$的是（　　）

A. $\angle A = \angle D$　　B. $AC=DF$

C. $AB=DE$　　D. $BF=EC$



（第1题）



（第2题）

2. [中考·临沂] 如图，$\angle ACB = 90°$，$AC=BC$，$AD \perp CE$，$BE \perp CE$，垂足分别是点D，E. $AD=3$，$BE=1$，则DE的长是（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}$

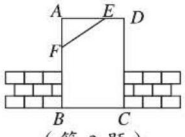
3. 如图，工人师傅砌门时，需要用木条EF固定长方形门框$ABCD$，使其不变形，这样做的依据是（　　）

A. 两点之间线段最短

B. 两点确定一条直线

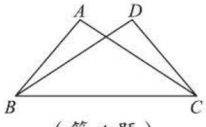
C. 三角形具有稳定性

D. 长方形的四个角都是直角



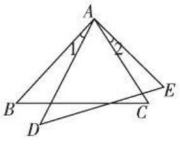
（第3题）

4. [中考·襄阳] 如图，已知$\angle ABC = \angle DCB$，添加下列条件中的一个：①$\angle A = \angle D$，②$AC=DB$，③$AB=DC$，其中不能判定$\triangle ABC \cong \triangle DCB$的是_____.（只填序号）



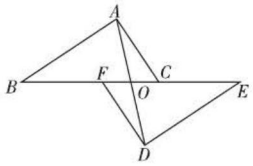
（第4题）

5. [中考·昆明] 如图，在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$AB=AD$，$\angle B = \angle D$，$\angle 1 = \angle 2$，试说明$BC=DE$.



（第5题）

6. [中考·恩施州] 如图，点B，F，C，E在一条直线上，$FB=CE$，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，AD交BE于O. 试说明AD与BE互相平分.

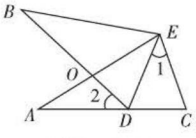


（第6题）

7. [中考·苏州] 如图，$\angle A = \angle B$，$AE=BE$，点D在AC边上，$\angle 1 = \angle 2$，AE和BD相交于点O.

（1）试说明$\triangle AEC \cong \triangle BED$；

（2）若$\angle 1=42°$，求$\angle BDE$的度数.



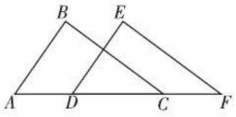
（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考·桂林] 如图，点 A，D，C，F 在同一条直线上，$AD=CF$，$AB=DE$，$BC=EF$.

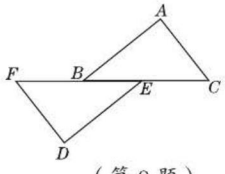
（1）试说明△ ABC ≌△ DEF；

（2）若∠ $A=55°$，∠ $B=88°$，求∠ F 的度数.



（第 8 题）

9. [中考·随州] 如图，点 F，B，E，C 在同一直线上，并且 $BF=CE$，∠ $ABC=$ ∠ DEF. 能否由上面的已知条件说明△ ABC ≌△ DEF？如果能，请说明理由；如果不能，请从下列三个条件中选择一个合适的条件，添加到已知条件中，使△ ABC ≌△ DEF，并说明理由. 提供的三个条件是：① $AB=DE$；② $AC=DF$；③ AC // DF.

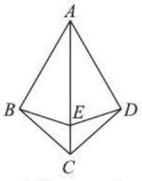


（第 9 题）

10. [中考·桂林] 如图，$AB=AD$，$BC=DC$，点 E 在 AC 上.

（1）试说明 AC 平分∠ BAD；

（2）试说明 $BE=DE$.

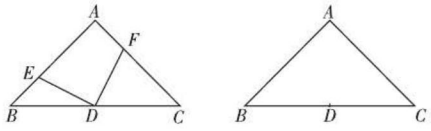


（第 10 题）

11. [中考·滨州] 已知，在△ ABC 中，∠ $A=90°$，$AB=AC$，D 为 BC 的中点.

（1）如图①，若点 E，F 分别为 AB，AC 上的点，且 $DE \perp DF$，试说明 $BE=AF$；

（2）若点 E，F 分别为 AB，CA 延长线上的点，且 $DE \perp DF$，那么 $BE=AF$ 吗？请利用图②说明理由. [导学号 7876572]



（第 11 题）

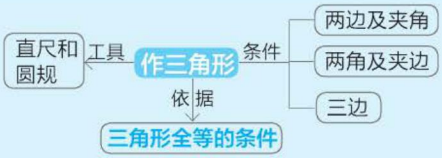
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 用尺规作三角形

核心知识

- 已知两边及其夹角作三角形
- 已知两角及其夹边作三角形
- 已知三边作三角形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 已知两边及其夹角作三角形

已知三角形的两边及其夹角，求作这个三角形是利用三角形全等的条件“边角边”来作图的，具体作图的方法、步骤如下：

已知：线段 a，c，$\angle\alpha$（如图 4-4-1）.

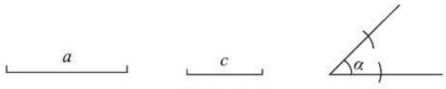
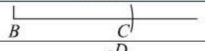
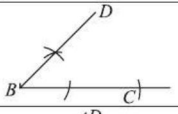
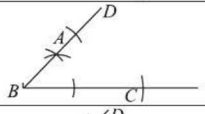
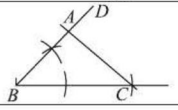


图 4-4-1

求作：$\triangle ABC$，使 $BC=a$，$AB=c$，$\angle ABC=\angle\alpha$.

作法与示范：

作法	示范
(1) 作一条线段 $BC=a$；	
(2) 以点 B 为顶点，以 BC 为一边，作 $\angle DBC=\angle\alpha$；	
(3) 在射线 BD 上截取线段 $BA=c$；	
(4) 连接 AC. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.	

拔考向 利用已知两边及其夹角作三角形的方法作三角形

例 1 已知：如图 4-4-2，线段 m，n，$\angle\alpha$. 求作 $\triangle ABC$，使 $AB=2m$，$AC=2n$，$\angle A=\angle\alpha$.

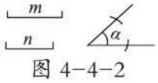


图 4-4-2

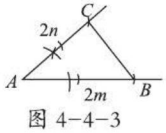


图 4-4-3

解题秘方：紧扣已知两边及其夹角作三角形的步骤进行尺规作图.

解：如图 4-4-3，

提分·必记

特别提醒

1. 作图依据：两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.
2. 作图的方法有两种：一种是先作角，再截取两边；另一种是先作一边（作一边等于已知线段），然后作角，再截取另一边.

提分·秘诀

方法点拨

用尺规作三角形的常见步骤：

1. 分析已知，确定求作类型；
2. 确定作图思路；
3. 依次叙述作图过程并作图；
4. 下结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）作∠A=∠α；

（2）分别在∠A的两边上截取$AB=2m$，$AC=2n$；

（3）连接BC；△ABC就是所求作的三角形.

点知识▶2 已知两角及其夹边作三角形

已知三角形的两角及其夹边，求作这个三角形是利用三角形全等的条件“角边角”来作图的，具体作图的方法、步骤如下：

已知：∠α，∠β，线段c（如图4-4-4所示）.

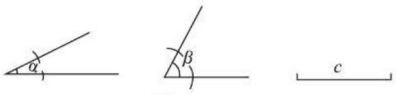
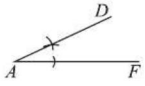
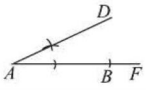
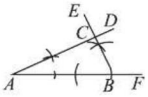


图4-4-4

求作：△ABC，使∠A=∠α，∠B=∠β，$AB=c$.

作法与示范：

作法	示范
（1）作∠DAF=∠α；	
（2）在射线AF上截取线段$AB=c$；	
（3）以B为顶点，以BA为一边，作∠ABE=∠β，BE交AD于点C. △ABC就是所求作的三角形.	

拔考向▶利用已知两角及其夹边作三角形的方法作三角形

例2 已知：线段a和∠α，如图4-4-5. 求作：△ABC，使$BC=a$，∠B=∠C=∠α.

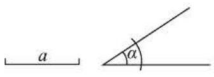


图4-4-5

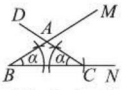


图4-4-6

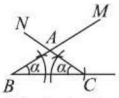


图4-4-7

解题秘方：紧扣基本作图的步骤，将作三角形转化为作线段和角.

解：方法一 （1）作∠MBN=∠α；

（2）在射线BN上截取$BC=a$；

（3）以C为顶点，以CB为一边，作∠DCB=∠α，CD与BM交于点A. △ABC就是所求作的三角形（如图4-4-6）.

方法二 （1）作线段$BC=a$；

（2）在线段BC的同侧，作∠CBM=∠α，∠BCN=∠α；

BM和CN交于点A. △ABC即为所求作的三角形（如图4-4-7）.

提分·必记

特别提醒

1. 作图的依据：两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.
2. 作图的方法有两种：一种是先作角，然后作边，最后作另一个角；另一种是先作一边（作一边等于已知线段），再在边的两端分别作角.

提分·秘诀

方法点拨

紧扣作图的依据，按照尺规作图中作线段等于已知线段、作角等于已知角的方法来作即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 已知三边作三角形

已知三角形的三条边，求作这个三角形是利用三角形全等的条件“边边边”来作图的，具体作图的方法、步骤如下：

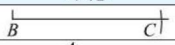
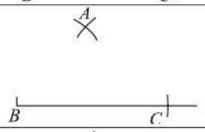
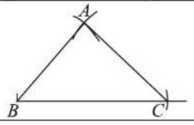
已知：线段 a，b，c（如图 4-4-8 所示）



图 4-4-8

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$.

作法与示范：

作法	示范
（1）作一条线段 $BC=a$；	
（2）分别以点 B,C 为圆心，以 c，b 的长为半径作弧，两弧交于点 A；	
（3）连接 AB,AC. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.	

拔考向▶ 利用已知三边作三角形的方法作三角形

例 3 已知：如图 4-4-9，线段 a,b. 求作：$\triangle ABC$，使 $AB=2a$，$AC=b$，$BC=a$.

图 4-4-9

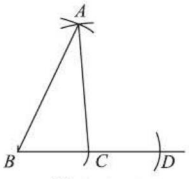


图 4-4-10

解题秘方：紧扣已知三边作三角形的作法与步骤，利用尺规作出三角形.

解：如图 4-4-10.

（1）作线段 $BC=CD=a$；

（2）分别以 B 和 C 为圆心，以 $2a$ 和 b 的长为半径作弧，两弧交于点 A；

（3）连接 AB，AC. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.

提分·必记

特别提醒

1. **作图的依据**：三边分别相等的两个三角形全等.
2. **作图的方法**：先作出一条边（即先确定三角形的两个顶点），再用两条弧的交点确定所作边所对的顶点（确定第三个顶点）.

提分·秘诀

特别提醒

三条线段满足“任意两条线段之和大于第三条线段”时，才能以这三条线段为边作三角形.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用“分解作图”法作较复杂的图形

例 4 如图 4-4-11，已知线段 a，b 和 m，求作 $\triangle ABC$，使 $BC=2a$，$AC=b$，BC 边上的中线 $AD=m$.

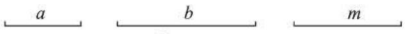


图 4-4-11

挑战·高分

方法点拨

较复杂的几何作图题，通常可以“分解”为简单的作图步骤来进行. 所谓“分解”，就是先根据条件画出

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣三角形中已知的线段长，将图形分解成两个三角形进行作图.

解：如图 4−4−12.

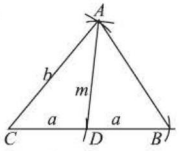


图 4−4−12

作法：（1）作线段 $CD=a$，延长 CD 至点 B，使 $DB=CD$；

（2）以点 C 为圆心，以 b 的长为半径画弧；以点 D 为圆心，以 m 的长为半径画弧，两弧交于点 A；

（3）连接 AC，AD，AB.

$\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.

草图，然后确定可以先作出的基本图形，再进一步作出所求作的图形，要注意的是每一个作图步骤必须正确，有根据.

拔尖角度▸ 2 利用“作三角形”的方法作全等三角形

挑战·高分

例 5 如图 4−4−13，已知 $\triangle ABC$，求作一个三角形，使它与 $\triangle ABC$ 有公共顶点 C，并且与 $\triangle ABC$ 全等.

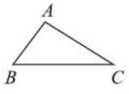


图 4−4−13

解题秘方：紧扣三角形全等的条件及尺规作图的基本步骤进行作图.

解：作法一　如图 4−4−14，（1）延长 AC，在 AC 的延长线上截取 $CA_1=AC$；（2）延长 BC，在 BC 的延长线上截取 $CB_1=BC$；（3）连接 A_1B_1.

$\triangle A_1B_1C$ 就是所求作的三角形.

作法二　如图 4−4−15，（1）分别以点 B，C 为圆心，BA,CA 的长为半径画弧，两弧在边 BC 的另一侧交于点 A_2；（2）连接 A_2B,A_2C.

$\triangle A_2BC$ 就是所求作的三角形.

作法三　如图 4−4−16，（1）延长 BC，在 BC 的延长线上截取 $CB_3=BC$；（2）以点 C 为顶点，以 CB_3 为一边，作 $\angle B_3CD=\angle B$；（3）在射线 CD 上截取 $CA_3=BA$；（4）连接 A_3B_3.

$\triangle A_3B_3C$ 就是所求作的三角形.

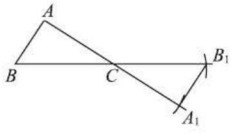


图 4−4−14

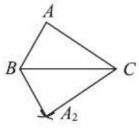


图 4−4−15

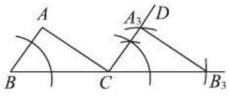


图 4−4−16

方法点拨

本题的结论具有开放性，符合题意的三角形有多种不同的作法，每一种作法的依据都对应三角形全等的一种判定方法. 如本题的作法一和作法三的依据均是“SAS”，而作法二的依据是“SSS”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 用尺规作三角形在中考中大多是与其他的知识综合起来考查，以基础题为主，题量较小.

三年中考兵法

考法 利用尺规作图作三角形

例6 [中考·贵港]尺规作图（只保留作图痕迹，不要求写出作法）：如图4-4-17，已知△ABC，请根据“SAS”作出△DEF，使△DEF≌△ABC.

试题评析：本题主要考查用尺规作图作三角形，尺规作图的步骤及全等三角形的条件是解题的关键.

解：如图4-4-18.

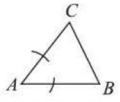


图4-4-17

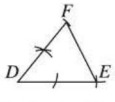


图4-4-18

冲刺·满分

方法归纳

作与已知三角形全等的三角形的方法：已知一个三角形，运用尺规作图作与其全等的三角形，常需结合判定三角形全等的条件“SSS”“SAS”等，作出与已知三角形对应相等的边和角，进而作出与已知三角形全等的三角形.

两年模拟兵法

☞答案见237页

1. 用尺规作图，下列条件中可能作出两个不同的三角形的是（　　）

A. 已知三边

B. 已知两角及其夹边

C. 已知两边及其夹角

D. 已知两边及其中一边的对角

2. 用尺规作图，已知三边作三角形，用到的基本作图是（　　）

A. 作一个角等于已知角

B. 作已知直线的垂线

C. 作一条线段等于已知线段

D. 作角的平分线

3. 根据下列条件能作出唯一△ABC的是（　　）

A. $AB=3, BC=4, AC=8$

B. $AB=3, BC=2$，$\angle A=30°$

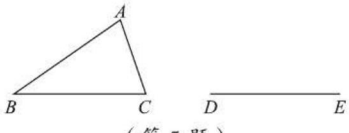
C. $\angle A=30°$，$\angle B=70°$，$\angle C=80°$

D. $\angle A=60°$，$\angle B=30°$，$AB=4$

4. 已知$\angle\alpha$和线段a，用尺规作△ABC，使$\angle A=\angle\alpha$，$\angle C=3\angle\alpha$，$AC=a$，则全班同学用尺规作图作出的△ABC都是全等的，其根据是（　　）

A.SSS　　B.AAS　　C.SAS　　D.ASA

5. 如图，△ABC不是等边三角形，$DE=BC$，以D,E为两个顶点作位置不同的三角形，使所作三角形与△ABC全等，这样的三角形最多可以作（　　）



（第5题）

A.2个　　B.4个　　C.6个　　D.8个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.[**中考·柳州**]如图，已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle A'O'B'$，使得$\angle A'O'B' = \angle AOB$.

作法：①以O为圆心，任意长为半径画弧，分别交OA，OB于点C，D；

②画一条射线$O'A'$，以点O'为圆心，OC长为半径画弧，交$O'A'$于点C'；

③以点C'为圆心，CD长为半径画弧，与第②步中所画的弧相交于点D'；

④过点D'画射线$O'B'$，则$\angle A'O'B' = \angle AOB$.

根据上面的作法，完成以下问题：

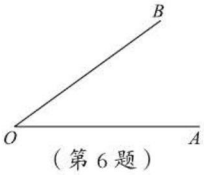
（1）使用直尺和圆规，作出$\angle A'O'B'$.（请保留作图痕迹）

（2）完成下面说明$\angle A'O'B' = \angle AOB$的过程.（注：括号里填写推理的依据）

解：连接$C'D'$.由作法可知$O'C' = OC$，$O'D' = OD$，$D'C' =$_____，

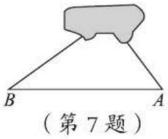
所以$\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$，（_____）

所以$\angle A'O'B' = \angle AOB$.（_____）



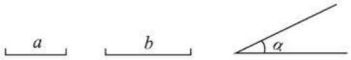
（第6题）

7. 如图，小强在纸上画了一个三角形，不料被墨迹污染了一部分，请你画出一个与小强画的一模一样的三角形，应如何画?



（第7题）

8. 已知：如图，$\angle\alpha$，线段a，b.求作：一个三角形，使其两边长分别为a，$a+b$，两边的夹角等于$\angle\alpha$.

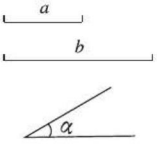


（第8题）

9. 如图，已知线段a，b，$\angle\alpha$，一个三角形的两条边长分别是a和b，一个内角等于$\angle\alpha$.

（1）请你用尺规作图作一个满足条件的三角形；

（2）你是否还能作出既满足条件，又与（1）中所作的三角形不全等的三角形？若能，请你用尺规作图作出这样的三角形；若不能，请你说明理由.



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 利用三角形全等测距离

核心知识

- 利用三角形全等测量不能直接到达的距离
- 利用三角形全等测量无法直接观察到的距离

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 利用三角形全等测两点之间的距离

提分·必记

1. 原理 由于两个全等三角形的对应边相等，因此，利用三角形全等可以测量难以直接测量或不能直接测量的两点之间的距离，其关键是构造两个全等三角形，根据是全等三角形的对应边相等.

2. 方法

（1）构造两边及其夹角分别相等的两个全等三角形；

（2）构造两角及其夹边分别相等的两个全等三角形；

（3）构造三边分别相等的两个全等三角形.

特别提醒

利用三角形全等测距离，实际上仅是三角形全等在生活中应用的一个方面.

拨考向▸ 利用三角形全等测量两点之间的距离

提分·秘诀

题型 1：三角形全等在测量不能直接到达的两点间的距离中的应用

例 1 水流湍急的流沙河流过一片平坦的土地，河的两岸各耸立一座宝塔，遥相对立，在没有过河工具的情况下，怎样测量两塔间的距离呢？

小威是这样测量的：在河的一边作线段 BB'，取其中点 O（如图 4-5-1），再作 $\angle B' = \angle B$，$\angle 1 = \angle 2$，则 $A'B' = AB$（两塔距离），你知道为什么吗？

解题秘方：紧扣测量的原理，构造三角形全等，利用全等三角形的性质设计方案，解释方案的合理性.

解：在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OA'B'$ 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle B', \\ OB = OB', \\ \angle 1 = \angle 2, \end{cases}$$

只有 A, O, A′ 三点共线，才能由对顶角相等得到 $\angle 1 = \angle 2$.

所以 $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$（ASA）.

所以 $A'B' = AB$.

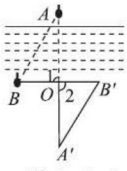


图 4-5-1

方法点拨

利用三角形全等测两地之间的距离，关键是构建全等三角形，利用全等三角形的对应边相等间接计算两地之间的距离.

方法点拨

在现实生活中经常会遇到一些难以测量的距离问题，可以利用全等三角形把这些距离“移”出来，达到测量的目的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：三角形全等在测量无法直接观察到的两点间距离中的应用

例 2 如图 4-5-2，已知零件的外径为 a，要求它的厚度 x，动手制作一个简单的工具，利用三角形全等的知识求出 x.

解题秘方：紧扣“X”形工具的特性，根据“SAS”可得到两个三角形全等，从而利用全等三角形的性质测得内径.

解：可设计如图 4-5-3 这种类似钳子的工具，其中 O 为 AC，BD 的中点.

在△AOB 和△COD 中，$AO=CO$，$\angle AOB=\angle COD$，$BO=DO$，

所以△AOB ≌△COD（SAS）.

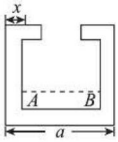


图 4-5-2

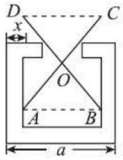


图 4-5-3

所以 $AB=CD$，即 CD 的长就是 A，B 间的距离.

因为 $AB=a-2x$，所以 $x=\dfrac{a-AB}{2}=\dfrac{a-CD}{2}$.

方法点拨

利用全等三角形的对应边相等来测量不能直接测量的距离，关键是构建全等三角形.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 利用建立三角形全等的模型解实际问题

挑战·高分

例 3 某校八年级学生到野外活动，为测量一池塘两端 A，B 的距离，甲、乙、丙三名同学分别设计出如图 4-5-4 的三种方案：

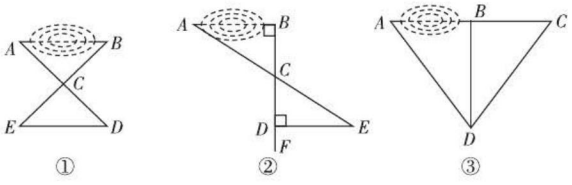


图 4-5-4

甲：如图 4-5-4①，先在平地取一个可直接到达 A，B 的点 C，再连接 AC，BC，并延长 AC 至点 D，延长 BC 至点 E，使 $DC=AC$，$EC=BC$，最后测出 DE 的长（即 A，B 的距离）.

乙：如图 4-5-4②，先过点 B 作 AB 的垂线 BF，再在 BF 上取 C，D 两点，使 $CD=BC$，接着过点 D 作 BD 的垂线 DE，交 AC 的延长线于点 E，测出 DE 的长（即 A，B 的距离）.

丙：如图 4-5-4③，过点 B 作 $BD\perp AB$，连接 AD，在 AB 的延长线上取一点 C，使 $\angle BDC=\angle BDA$，测出 BC 的长（即 A，B 的距离）.

（1）以上三名同学所设计的方案，可行的有_____；

（2）请你选择其中一种可行的方案，说明它可行的理由.

解题秘方：根据方案中给出的条件，判定两个三角形全等，将无法测量的线段转化为可以测量的线段.（2）中任选一种可行的方案说明即可.

解法指导

建立三角形全等的模型解决问题时，需把握以下步骤：

1. 根据实际问题抽象出几何图形；
2. 根据图形结合题意，建立三角形全等的模型；
3. 分析问题，寻找推理途径；
4. 写出推理论证过程，解决问题.

教你一招

构造全等三角形测距离的求解思路：

1. 当两点间的距离不能直接测量时，可以把要测量的两点间的线段作为三角形的一边构造全等三角形，把待测量的线段转化为可直接测量的线段来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）甲、乙、丙

（2）选甲：在△ABC和△DEC中，$AC=DC$，$\angle ACB=\angle DCE$，$BC=EC$，所以△ABC≌△DEC（SAS）. 所以$AB=DE$.

选乙：因为$AB\perp BD$，$DE\perp BD$，所以$\angle B=\angle CDE=90°$.

在△ABC和△EDC中，$\angle ABC=\angle EDC$，$CB=CD$，$\angle ACB=\angle ECD$，

所以△ABC≌△EDC（ASA）. 所以$AB=ED$.

选丙：因为$BD\perp AB$，所以$\angle ABD=\angle CBD=90°$.

在△ABD和△CBD中，$\angle ABD=\angle CBD$，$BD=BD$，$\angle BDA=\angle BDC$，

所以△ABD≌△CBD（ASA）. 所以$AB=CB$.

2. 构造全等三角形模型时，要充分利用地形及已知条件，根据全等三角形的判定条件设计出最简单的测量方案.

点中考·拨模拟 得满分

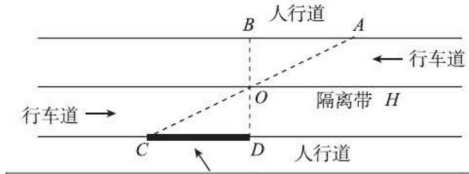
中考探秘 本节内容是利用全等三角形测量距离，主要是通过全等判断两条线段或两个角之间的关系，题型有选择题、填空题，题目难度适中.

三年中考兵法

考法 全等三角形的应用

例4 ［中考·宜昌］杨阳同学沿一段笔直的人行道行走，在由A步行到达B处的过程中，通过隔离带的空隙O，刚好浏览完对面人行道宣传墙上的社会主义核心价值观标语，其具体信息汇集如下：

如图4-5-5，$AB\parallel OH\parallel CD$，相邻两平行线间的距离相等，$AC$，$BD$相交于点$O$，$OD\perp CD$，垂足为$D$. 已知$AB=20$ m，请根据上述信息求标语CD的长度.



富强民主 文明和谐 自由平等 公正法治 爱国敬业 诚信友善

图4-5-5

试题评析：本题考查了全等三角形的应用，解题的关键是能准确建立起数学模型，将实际问题与数学知识有机地结合在一起.

解：因为$AB\parallel CD$，所以$\angle ABO=\angle CDO$.

又因为$OD\perp CD$，所以$\angle CDO=90°$.

所以$\angle ABO=90°$，即$OB\perp AB$.

因为相邻两平行线间的距离相等，所以$OD=OB$.

在△ABO和△CDO中，$\angle ABO=\angle CDO$，$OB=OD$，$\angle AOB=\angle COD$，

所以△ABO≌△CDO（ASA）. 所以$CD=AB=20$ m.

冲刺·满分

方法点拨

本题运用了建模思想和转化思想，从实际问题中抽象出三角形，结合图形和题意分析，将题中涉及的角度、线段的关系转化为判定三角形全等的已知条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见238页

1. 利用三角形全等测量距离的依据是（　　）

A. 全等三角形的对应角相等

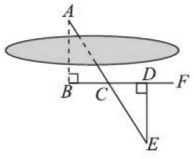
B. 全等三角形的对应边相等

C. 全等三角形的周长相等

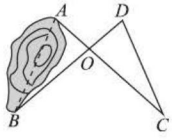
D. 全等三角形的形状相同

2. 如图，要测量河两岸相对的两点A,B的距离，先在AB的垂线BF上取两点C,D，使$BC=CD$，再作出BF的垂线DE，使点A,C,E在同一条直线上，可以说明$\triangle ABC\cong\triangle EDC$，得$AB=ED$，因此测得$ED$的长就是$AB$的长．其中判定$\triangle ABC\cong\triangle EDC$最恰当的理由是（　　）

A. 边角边　B. 角边角　C. 边边边　D. 边边角



（第2题）



（第3题）

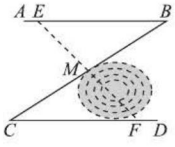
3. 如图，已知$AC=DB,AO=DO,CD=100$ m，则A,B两点间的距离（　　）

A. 大于100 m　　B. 等于100 m

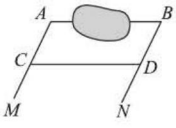
C. 小于100 m　　D. 无法确定

4. 在新建的花园小区中，有一条“Z”形绿色长廊$ABCD$（如图），其中$AB\parallel CD$．在AB,BC,CD三段绿色长廊上各修建一凉亭E,M,F，且$BE=CF$，M是BC的中点．在凉亭M与F之间有一池塘，不能直接到达，要想知道M与F之间的距离，需要测出长度的线段是（　　）

A.EM　　B.BE　　C.BC　　D.CM



（第4题）

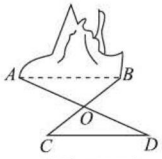


（第5题）

5. 如图，要测量水池两侧A,B间的距离，先过点A作一条射线AM，再过点B作射线$BN\parallel AM$，然后在AM上取一点C，在BN上取一点D，使$AC=BD$，连接CD，则CD的长就是A,B间的距离．若用三角形全等的知识来说明其中的道理，能作为依据的是（　　）

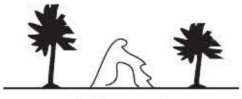
A.SAS　　B.ASA　　C.AAS　　D.SSS

6. 如图，山脚下有A,B两点，要测出A,B两点的距离，在地面上取一个可以直接到达A,B点的点O，连接AO并延长到D，使$DO=AO$，连接BO并延长到C，使$CO=BO$，连接CD，量得$CD=12$ m，那么山脚下A,B两点的距离为_____．



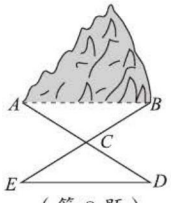
（第6题）

7. 某同学想测量一个小土堆两侧的两棵树的距离，如图，你能帮助他想出办法来吗？说出你的方法和理由．



（第7题）

8. 有一座小山如图所示，现要在小山两侧A,B之间开一条隧道，施工队要知道A,B间的距离，于是先在平地上取一个可以直接到达A和B的点C，连接AC并延长到点D，使$CD=CA$，连接BC并延长到点E，使$CE=CB$，连接DE，那么量出DE的长，就是A,B间的距离，你能说明其中的道理吗？



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分析综合法在三角形全等中的应用

荣老师告诉你 分析法指从要说明的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直到推出一个正确的条件（如已知、性质等）为止，即从未知看需知，逐渐靠拢已知，从而达到说明的目的．综合法是指在推理的过程中，从已知开始，一环扣一环，最后使所要说明的结论成立，即从已知看可知，逐渐靠拢未知的一种说明方法．分析法和综合法不是彼此孤立的，说明题中，我们往往是用分析法探路，用综合法做题．

应用一 利用分析综合法说明三角形全等

例 1 [中考·泉州]如图 1，$\triangle ABC$，$\triangle CDE$ 均是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle DCE=90°$，点 E 在 AB 上．

试说明 $\triangle CDA\cong\triangle CEB$.

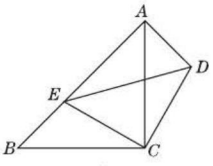


图 1

解题秘方：由题意可知 $BC=AC$，$EC=DC$. 由 $\angle ACB=\angle DCE=90°$，利用等式的基本性质，可得 $\angle ECB=\angle DCA$，从而利用“SAS”说明两个三角形全等．

解：因为 $\angle ACB=\angle DCE=90°$，

所以 $\angle ACB-\angle ACE=\angle DCE-\angle ACE$，

即 $\angle ECB=\angle DCA$.

又因为 $\triangle ABC$，$\triangle CDE$ 均是等腰直角三角形，

所以 $BC=AC$，$EC=DC$.

所以 $\triangle CDA\cong\triangle CEB$（SAS）.

方法点拨：用分析法说明三角形全等，先找出两个三角形中已知的相等量，然后结合判定方法分析出要找的相等量．

应用二 利用分析综合法说明线段相等

例 2 [中考·恩施州]如图 2，$BE\perp AC$，$CD\perp AB$，垂足分别为 E，D，$BE=CD$.

试说明 $AB=AC$.

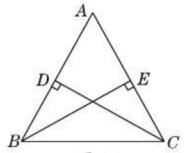


图 2

解题秘方：观察图形可知 AB，AC 分别在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，欲说明 $AB=AC$，只需说明 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$ 即可．分析条件可知，$\angle A$ 是公共角，$\angle AEB=\angle ADC$，$BE=CD$，可说明 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$.

解：因为 $BE\perp AC$，$CD\perp AB$，

所以 $\angle ADC=\angle AEB=90°$．

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle ADC,\\ \angle A=\angle A,\\ BE=CD,\end{cases}$

所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$（AAS）.

所以 $AB=AC$.

方法点拨：要说明两条线段相等时，若两条线段在两个三角形中，则说明这两条线段所在的两个三角形全等；若两条线段在同一个三角形中，则可利用“等角对等边”（以后将学），转化为说明角相等．

应用三 利用分析综合法说明角相等

例 3 [中考·福州]一个平分角的仪器如图 3，其中 $AB=AD$，$BC=DC$.

试说明 $\angle BAC=\angle DAC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

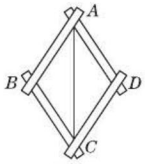


图 3

解题秘方：在△ ABC 和△ ADC 中，由三组边分别相等可得△ ABC ≌△ ADC，再由全等三角形的性质即可得出结论.

解：在△ ABC 和△ ADC 中，

$$\begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$$

所以△ ABC ≌△ ADC（SSS）.

所以∠ BAC= ∠ DAC.

方法点拨：要说明两个角相等时，若两个角在两个三角形中，则说明这两个角所在的两个三角形全等；若两个角在同一个三角形中，则可利用“等边对等角”（以后将学），转化为说明线段相等.

例 4 如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，∠ A= ∠ D. 试说明∠ ABC= ∠ DCB.

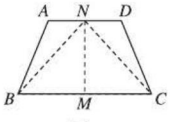


图 4

解题秘方：直接说明∠ ABC= ∠ DCB 难度较大，不妨设想分别把∠ ABC，∠ DCB 分成两个角，说明∠ ABC 分成的两个角与∠ DCB 分成的两个角分别相等即可.

解：如图 4，分别取 AD，BC 的中点 N，M，连接 BN，CN，MN，则有 $AN=ND$，$BM=MC$.

在△ ABN 和△ DCN 中，$\begin{cases} AN=DN, \\ \angle A=\angle D, \\ AB=DC, \end{cases}$

所以△ ABN ≌△ DCN（SAS）.

所以∠ ABN= ∠ DCN，$NB=NC$.

在△ NBM 和△ NCM 中，$\begin{cases} NB=NC, \\ BM=CM, \\ NM=NM, \end{cases}$

所以△ NBM ≌△ NCM（SSS）.

所以∠ NBC= ∠ NCB.

所以∠ NBC+ ∠ ABN= ∠ NCB+ ∠ DCN.

即∠ ABC= ∠ DCB.

方法点拨：说明三角形全等时常需添加适当的辅助线，辅助线的添加以能创造已知条件为目的，如本题取 AD，BC 的中点就是把中点作为已知条件.

应用四 ▶ 利用分析综合法说明线段的位置关系

例 5 [中考·武汉]如图 5，点 B，E，C，F 在同一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 试说明 AB // DE.

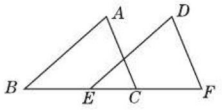


图 5

解题秘方：要说明 AB // DE，只需说明∠ ABC= ∠ DEF，因此只需说明它们所在的三角形全等. 在这两个三角形中根据已知有两组边对应相等，只需说明第三组边相等，即可利用“SSS”说明它们全等.

解：因为 $BE=CF$，

所以 $BC=EF$.

在△ ABC 和△ DEF 中，

$$\begin{cases} BC=EF, \\ AB=DE, \\ AC=DF, \end{cases}$$

所以△ ABC ≌△ DEF（SSS）.

所以∠ ABC= ∠ DEF.

所以 AB // DE.

方法点拨：要说明两条线段平行时，先找一对位置角（如同位角、内错角），然后说明这对位置角所在的三角形全等，最后利用全等三角形的性质说明角相等，进而达到解题的目的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 三角形有三条边，三个内角，三个顶点，三条高，三条中线，三条内角平分线；三角形的三条高，三条中线，三条内角平分线分别都相交于一点.

2. **三角形按角分类**：锐角三角形，直角三角形，钝角三角形.

3. **三角形的角的性质**：三角形内角和等于180°；直角三角形两锐角互余.

4. **三角形按边分类**：不等边三角形，等腰三角形.

5. **三角形的三边关系**：三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

6. 全等三角形是特殊的全等图形，全等三角形的对应边相等，对应角相等.

7. **三角形全等的条件**：SSS,SAS,ASA,AAS.

8. 利用三角形全等作三角形，测量距离.

知识方法专题

知识必学

专题一 三角形的三边关系

链接中考» 三角形的三边关系是判断三条线段能否组成三角形的重要依据，它主要解决两个问题：(1)判断三条线段能否组成三角形；(2)已知三角形的两边长确定第三边长的取值范围.在中考中考查时，一般以填空题形式出现，有时会以解答题形式出现.

例1 某同学从长为10cm，6cm，5cm，4cm的四根木棒中，任选三根组成三角形，则组成三角形的个数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：用列举法列出各种选取情况，紧扣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

“三角形三边关系”进行解答.

解：从四根木棒中任选三根，选法有四种：

（1）选择长度分别为 10 cm，6 cm，5 cm 的三根木棒，因为 5+6>10，所以能组成三角形；

（2）选择长度分别为 10 cm，6 cm，4 cm 的三根木棒，因为 4+6=10，所以不能组成三角形；

（3）选取长度分别为 10 cm，5 cm，4 cm 的三根木棒，因为 4+5 < 10，所以不能组成三角形；

（4）选择长度分别为 6 cm，5 cm，4 cm 的三根木棒，因为 4+5 > 6，所以能组成三角形.

故组成三角形的个数是 2.

答案：B

方法点拨：从四根木棒中任选三根，可利用逆向思维进行列举，即从四根木棒中任意去掉一根，共有四种情况.

专题二 三角形的三条重要线段

链接中考» 三角形的三条重要线段对于解决三角形问题都有非常关键的作用，中线用来求线段长或等分面积，角平分线用来求角，高线用来求面积.其中高线考查的频率较高，一般以选择题形式考查，其他的一般作为解答题的形式进行考查.

例 2 [中考·长沙] 如图 4-1，过△ABC 的顶点 A，作 BC 边上的高，以下作法正确的是（　　）

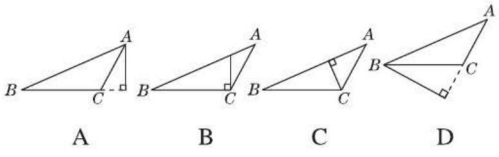


图 4-1

解题秘方：利用三角形高的定义及作法进行判断.

答案：A

方法点拨：作三角形的高时，要分清是作哪条边上的高，过哪个顶点作垂线.

专题三 三角形的角的性质

链接中考» 与三角形的角有关的定理（以后将学）有两个：一个是三角形的内角和定理；另一个是三角形的内外角之间的关系定理（以后将学）.在中考中单独考查时，一般以选择题形式出现，难度较低.

例 3 [中考·绵阳] 如图 4-2，在△ABC 中，∠ABC，∠ACB 的平分线 BE，CD 相交于点 F，∠ABC=42°，∠A=60°，则∠BFC 是（　　）

A.118°　　B.119°　　C.120°　　D.121°

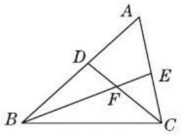


图 4-2

解题秘方：利用三角形内角和为 180° ，建立要求角与已知角之间的关系解决问题.

解：因为∠A=60°，∠ABC=42°，

所以∠ACB=180° − ∠A− ∠ABC=78°.

因为∠ABC，∠ACB 的平分线分别为 BE，CD，

所以$\angle FBC=\frac{1}{2}\angle ABC=21°$ ，

$\angle FCB=\frac{1}{2}\angle ACB=39°$.

所以∠BFC=180° − ∠FBC− ∠FCB=120°.

答案：C

方法点拨：运用三角形内角和为 180° 求角的度数时，先找要求的角所在的三角形，然后结合已知条件分析要求的角与已知角之间的关系.

专题四 全等三角形的性质与判定

链接中考» 三角形全等的判定是常见的考点，全等三角形的性质是解决线段相等或角相等的基本思路，是中考的热门考点，单独考查时，形式多种多样，填空题、选择题、解答题都有.

类型 1：利用三角形全等说明线段的关系

例 4 [中考·武汉] 如图 4-3，点 B，C，E，F 在同一直线上，BC=EF，AC ⊥ BC 于点 C，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$DF \perp EF$ 于点 F，$AC=DF$.

试说明：

（1）$\triangle ABC \cong \triangle DEF$；

（2）$AB /\!/ DE$.

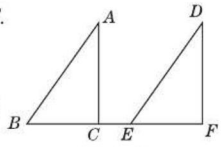


图 4-3

解题秘方：（1）这两个三角形中，根据已知有两组边对应相等，且夹角对应相等，可用“SAS”说明它们全等；（2）要说明 $AB /\!/ DE$，只需说明 $\angle ABC=\angle DEF$，而这可由 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 得到.

解：（1）因为 $AC \perp BC$ 于点 C，

$DF \perp EF$ 于点 F，

所以 $\angle ACB=\angle DFE=90°$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

因为 $BC=EF$，$\angle ACB=\angle DFE$，$AC=DF$，

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（SAS）.

（2）因为 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，

所以 $\angle ABC=\angle DEF$.

所以 $AB /\!/ DE$.

类型 2：利用三角形全等说明角的关系

例 5 [中考·宜宾]如图 4-4，$AC=DC$，$BC=EC$，$\angle ACD=\angle BCE$.

试说明 $\angle A=\angle D$.

解题秘方：先找出要说明相等的两个角所在的三角形，然后结合已知条件，说明这两个三角形全等.

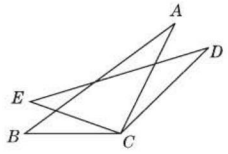


图 4-4

解：因为 $\angle ACD=\angle BCE$，

所以 $\angle ACD+\angle ACE=\angle BCE+\angle ACE$.

所以 $\angle DCE=\angle ACB$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

因为 $AC=DC$，$\angle ACB=\angle DCE$，$BC=EC$，

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$（SAS）.

所以 $\angle A=\angle D$.

方法点拨：全等三角形的性质“对应边相等，对应角相等”，为说明线段或角相等提供了思路，在解题时，首先要找需说明相等的线段或角所在的三角形；然后说明这两个三角形全等.

方法必会

专题五 构造三角形全等的几种方法

专题解读>> 在某些图形中，解决问题时要说明三角形全等，而图形中没有全等的三角形，可通过作辅助线来构造全等三角形，常见的构造方法有“截长补短法”“倍长中线法”“作高法”等.

类型 1：与角平分线有关的“截长补短法”

例 6 如图 4-5 ①，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle C=2\angle B$，试判断 AB，AC，CD 三者之间的数量关系，并说明理由.（注：在一个三角形中，相等的两个角所对的边相等）

解题秘方：借助角平分线构造全等三角形解决问题.

解：$AB=AC+CD$. 理由如下：

方法一　如图 4-5 ②，在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE.

易得 $\triangle AED \cong \triangle ACD$（SAS）.

所以 $ED=CD$，$\angle AED=\angle C$.

因为 $\angle AED=180°-\angle BED=\angle B+\angle EDB$，

所以 $\angle C=\angle AED=\angle B+\angle EDB$.

又因为 $\angle C=2\angle B$，所以 $\angle B=\angle EDB$.

所以 $BE=DE$.

所以 $AB=AE+BE=AC+DE=AC+CD$.

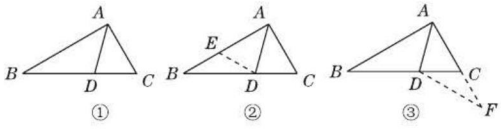


图 4-5

方法二　如图 4-5 ③，延长 AC 到点 F，使 $CF=CD$，连接 DF，

因为 $CF=CD$，所以 $\angle CDF=\angle F$.

因为 $\angle ACB=180°-\angle DCF=\angle CDF+\angle F$.

所以 $\angle ACB=2\angle F$.

又因为 $\angle ACB=2\angle B$，所以 $\angle B=\angle F$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 AD 平分 $\angle BAC$，

所以 $\angle BAD=\angle FAD$.

又因为 $AD=AD$，

所以 $\triangle ABD\cong\triangle AFD$（AAS）.

所以 $AB=AF$.

所以 $AB=AF=AC+CF=AC+CD$.

方法点拨：当题目中涉及角平分线以及“求一条线段等于两条线段的和或者差”，常采用“截长补短法”构造全等三角形.

类型 2：“倍长中线法”

例 7 如图 4-6，已知在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，试说明 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

解题秘方：借助中线，将其延长一倍构造全等三角形解决问题.

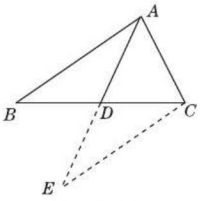


图 4-6

解：如图 4-6，延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 CE，则 $AE=2AD$.

因为在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，

所以 $BD=CD$.

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle EDC$ 中，$\begin{cases}AD=ED,\\ \angle ADB=\angle EDC,\\ BD=CD,\end{cases}$

所以 $\triangle ADB\cong\triangle EDC$（SAS）.

所以 $AB=EC$.

因为在 $\triangle ACE$ 中，$AC+CE>AE$，

所以 $AC+AB>2AD$.

即 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

规律点拨：涉及三角形中线问题时，常采用延长中线一倍的办法，可以将分居中线两旁的两条边集中于同一个三角形中，以利于问题的解决.

专题六 分类讨论思想

专题解读» 当三角形形状不确定，等腰三角形腰或顶角不确定时，往往需要分几种情况进行研究，这就是分类讨论思想，分类讨论思想不仅可以使我们有效地解决一些问题，同时还可以培养我们的观察能力和全面思考问题的能力.

例 8 在等腰三角形 ABC 中，已知 $\angle ABC=\angle C$，且一腰 AC 上的高 BD 与另一腰 AB 的夹角为 40°. 求 $\angle ABC$，$\angle C$ 的度数.

解题秘方：若等腰三角形的顶角是钝角，则腰上的高在三角形外部；若等腰三角形的顶角是锐角，则腰上的高在三角形的内部，题中没明确指出三角形的形状，要分两种情况讨论.

解：由于题目中没有明确指出三角形的形状，因此要分两种情况讨论.

（1）如图 4-7，当 BD 在三角形内部时，因为 $BD\perp AC$，所以 $\angle ADB=90°$.

所以 $\angle A=90°-\angle ABD=90°-40°=50°$.

所以 $\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=65°$.

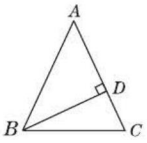


图 4-7

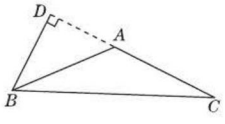


图 4-8

（2）如图 4-8，当 BD 在三角形外部时，

因为 $BD\perp AC$，所以 $\angle ADB=90°$.

所以 $\angle DAB=90°-\angle ABD=90°-40°=50°$.

所以 $\angle BAC=130°$.

所以 $\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}\times50°=25°$.

综上，$\angle ABC=\angle C=65°$ 或 $\angle ABC=\angle C=25°$.

规律点拨：分类讨论思想，也称分情况讨论，当一个数学问题在一定条件下，其结论并不唯一时，就需要对这一问题进行必要的分类. 根据条件分为有限的若干种情况，在每一种情况下分别求解，最后将各种情况下得到的答案进行归纳总结.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见 238 页

题型 1：三角形的三边关系

1. 在△ ABC 中，AC=5 cm，中线 AD 把△ ABC 的周长分为两部分，若其差为 3 cm，则 BA=_____.

2. 已知在△ ABC 中，AB=8，BC=2a+2，AC=22. 若△ ABC 为等腰三角形，求这个三角形的周长.

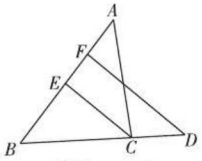
3. 已知 a，b，c 是三角形的三边长.

（1）化简：$|a-b-c|+|b-c-a|+|c-a-b|$；

（2）若 a=5，b=4，c=3，求（1）中式子的值.

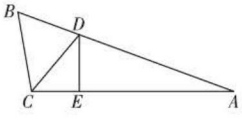
题型 2：三角形中角度的计算

4. 如图，在△ ABC 中，∠ A=46°，CE 是∠ ACB 的平分线，B，C，D 在同一条直线上，DF // EC，∠ D=42°. 求∠ B 的度数.



（第 4 题）

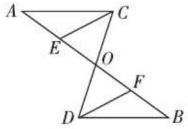
5. 如图，在△ ABC 中，∠ A=20°，CD 是∠ BCA 的平分线，在△ CDA 中，DE 是 CA 边上的高，又有∠ EDA=∠ CDB，求∠ B 的度数.



（第 5 题）

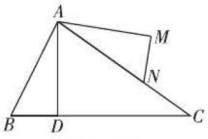
题型 3：全等三角形的性质与判定

6. 如图，AB，CD 交于点 O，E，F 为 AB 上两点，OA=OB，OE=OF，∠ A=∠ B，∠ ACE=∠ BDF. 试说明△ ACE ≌△ BDF.



（第 6 题）

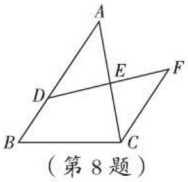
7. 如图，∠ BAC=∠ DAM，AB=AN，AD=AM，试说明∠ B=∠ ANM.



（第 7 题）

8. 如图，D 是△ ABC 的边 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，DE=FE，FC // AB.

试说明 AE=CE.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第四章测试卷 ☞答案见239页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下列长度的三条线段能组成三角形的是（　　）

A. 5cm，2cm，3cm　　B. 5cm，2cm，2cm

C. 5cm，2cm，4cm　　D. 5cm，12cm，6cm

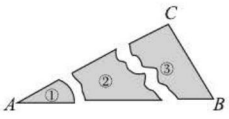
2. 如图，某同学把一块三角形的玻璃打碎成了3块，现在要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃，那么最省事的办法是（　　）

A. 带①去

B. 带②去

C. 带③去

D. ①②③都带去



（第2题）

3. 不能判定两个三角形全等的条件是（　　）

A. 三条边对应相等

B. 两角及一边对应相等

C. 两边及夹角对应相等

D. 两边及一边的对角对应相等

4. 三角形两条边长分别为3和7，则第三条边长可以为（　　）

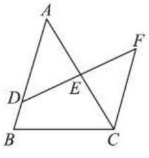
A. 2　　B. 3　　C. 9　　D. 10

5. 如图所示的五角星是用螺栓将两端打有孔的5根木条连接构成的图形，它的形状不稳定. 如果在木条交叉点打孔加装螺栓的办法使其形状稳定，那么至少需要添加（　　）个螺栓.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第5题）



（第6题）

6. [中考·临沂]如图，D是AB上的一点，DF交AC于点E，$DE=EF$，$FC\parallel AB$. 若$AB=4$，$CF=3$，则BD的长是（　　）

A. 0.5　　B. 1　　C. 1.5　　D. 2

7. 有5根小木棒，长度分别为2 cm，3 cm，4 cm，5 cm，6 cm，任意取其中的3根小木棒首尾相接搭三角形，可搭出不同的三角形的个数为（　　）

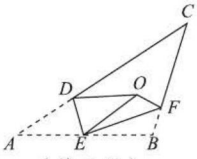
A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

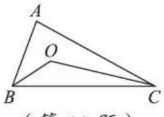
8. 如图，将$\triangle ABC$沿DE，EF翻折，顶点A，B均落在点O处，若$\angle CDO+\angle CFO=98^\circ$，则$\angle C$等于（　　）

A. 40°　　B. 41°

C. 42°　　D. 43°



（第8题）



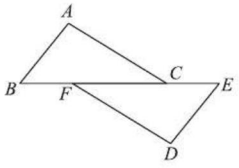
（第10题）

二、填空题（每题4分，共16分）

9. 一个三角形的两边长分别是2和6，第三边长为奇数，则其周长为_____.

10. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=80^\circ$，$\angle ABC$与$\angle ACB$的平分线交于点O，则$\angle BOC=$_____.

11. [中考·齐齐哈尔]如图，已知在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$\angle B=\angle E$，$BF=CE$，点B，F，C，E在同一条直线上，若使$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，则还需添加的一个条件是_____（只添加一个即可）.



（第11题）

12. 已知a，b，c为$\triangle ABC$的三边长，b，c满足$(b-2)^2+|c-3|=0$，且a为方程$|x-4|=2$的一个解，则$\triangle ABC$的形状为_____，周长为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（10分）陆老师布置了一道题目：过直线 l 外一点 A 作 l 的垂线.（用尺规作图）

小淇同学的作法如下：

（1）在直线 l 上任意取一点 C，连接 AC；

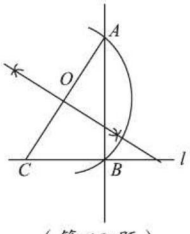
（2）作 AC 的中点 O；

（3）以 O 为圆心，OA 长为半径画弧交直线 l 于点 B，如图所示；

（4）作直线 AB.

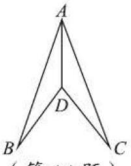
则直线 AB 就是所要作的图形.

你认为小淇同学的作法正确吗？如果不正确，请画出一个反例；如果正确，请说明理由.



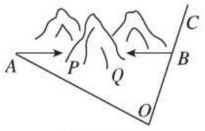
（第13题）

14.（10分）如图，AD 平分 $\angle BAC$，$AB=AC$，试判断 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. 并说明理由.



（第14题）

15.（10分）某工程队准备开挖一条隧道，为了缩短工期，必须在山的两侧同时开挖，为了确保两侧开挖的隧道在同一条直线上，测量人员在如图的同一高度定出了两个开挖点 P 和 Q，然后在左边定出开挖的方向线 AP，为了准确定出右边开挖的方向线 BQ，测量人员取一个可以同时看到点 A，P，Q 的点 O，测得 $\angle A=28°$，$\angle AOC=100°$，那么 $\angle QBO$ 应等于多少度才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上？

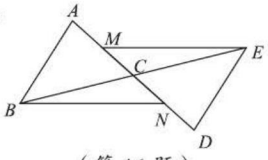


（第15题）

16.（10分）如图，线段 AD，BE 相交于点 C，且 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$，点 M，N 分别为线段 AC，CD 的中点. 试说明：

（1）$ME=BN$；

（2）$ME \parallel BN$.



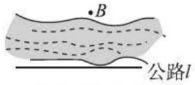
（第16题）

17.（12分）如图，河边有一条笔直的公路 l，公路另一侧是平坦的草地，在数学活动课上，老师要求测量河对岸点 B 到公路 l 的距离，请你设计一个测量方案.

（1）写出你所使用的测量工具；

（2）画出测量的示意图，写出测量的步骤，并用字母表示测得的数据，求出点 B 到公路 l 的距离；

（3）试说明你测量的正确性.



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

领略图形的全等变形











第五章 生活中的轴对称

核心考点

你将见到的

- 轴对称图形
- 轴对称及其性质
- 等腰三角形的性质
- 线段的垂直平分线的性质
- 角的平分线的性质

核心方法

我们为你提供的

- 折叠法
- 定义法
- 转化思想
- 方程思想
- 面积法
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 轴对称现象

核心知识
- 轴对称图形
- 轴对称

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 轴对称图形

1. 定义 如果一个平面图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

2. 几种常见的轴对称图形及对称轴

名称	图形	对称轴	对称轴数量
线段		线段本身所在直线和过线段中点的垂线	2条
角		角平分线所在的直线	1条
等腰三角形		底边上的高所在直线	1条
等边三角形		各条边上的高所在直线	3条
长方形		经过对边中点的直线	2条
正方形		（1）经过对边中点的直线 （2）对角线所在的直线	4条
圆		经过圆心的任意一条直线	无数条
正 n 边形		n 为奇数：过顶点与其对边中点的直线； n 为偶数：过两条对边中点的直线和过相对顶点的直线	n 条

拔考向▸ 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形

例1 如图5-1-1，是轴对称图形的有（　　）



（1）　（2）　（3）　（4）

图 5-1-1

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

解题秘方：根据轴对称图形的定义识别.

答案：D

提分·必记

特别解读

轴对称图形的三个条件：

1. 一个整体图形；
2. 一条直线为对称轴；
3. 直线两旁的部分完全重合.

温馨提示

1. 轴对称图形是一个图形自身的特性，它被对称轴分成的两部分能够互相重合，其对称点在同一图形上.
2. 对称轴是一条直线，而不是射线或线段.
3. 一个轴对称图形的对称轴可以有一条，也可以有多条，还可以有无数条.

提分·秘诀

知识储备

1. 在中国汉字中有很多汉字是轴对称图形.
2. 在26个英文字母中也有很多是轴对称图形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：判断一个图形是否为轴对称图形，关键是看能否找到一条直线，沿着这条直线对折，直线两旁的部分能够重合，即可确定这个图形是轴对称图形，否则就不是轴对称图形.

点知识▶ 2 两个图形成轴对称

1. 定义

如果两个平面图形沿一条直线对折后能够完全重合，那么称这两个图形成轴对称，这条直线叫做这两个图形的对称轴，对折后重合的点是对应点，叫做对称点.

提分·必记

特别解读

- 成轴对称的三个条件：
  1. 有两个图形；
  2. 存在一条直线；
  3. 一个图形沿着这条直线对折后与另一个图形重合.
- 成轴对称的两个特性：
  1. 成轴对称的两个图形全等.但全等的两个图形不一定成轴对称.
  2. 成轴对称是图形的一种全等变换.

2. 两个图形成轴对称与轴对称图形的区别与联系

名称		两个图形成轴对称	轴对称图形
区别	对象不同	两个图形	一个图形
	意义不同	两个图形的特殊位置关系	一个具有特殊形状的图形
	对称点位置不同	对称点分别在两个图形上	对称点在同一个图形上
	对称轴位置不同	两个图形成轴对称，其对称轴可能在两个图形的外部，也可能经过两个图形的内部或它们的公共边（点）	轴对称图形的对称轴一定经过这个图形的内部
	对称轴数量不同	只有一条对称轴	有一条、多条或无数条
联系	（1）定义中都有一条直线，都要沿着这条直线折叠 （2）把成轴对称的两个图形看成一个整体，它就是一个轴对称图形；把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条直线成轴对称		


轴对称图形与轴对称

拔考向▶ 利用成轴对称的定义识别轴对称

例 2 如图 5-1-2 的四组图形中，成轴对称的有（　　）

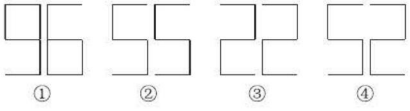


图 5-1-2

A. 4 组　　B. 3 组

C. 2 组　　D. 1 组

解题秘方：根据成轴对称的定义，沿某条直线对折，直线两旁的两个图形能完全重合，即成轴对称.

解：根据成轴对称的定义，可以判断只有④中的两个图形沿着某一条直线对折后，两个图形能够完全重合，所以成轴对称的只有 1 组.

答案：D

提分·秘诀

方法点拨

识别两个图形成轴对称的方法主要有以下两种.

1. 定义法：紧扣定义中的“两个图形，一条直线，完全重合.”
2. 反面观察法：从纸的反面观察图形，若观察到的和正面一样，就是轴对称.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用试验法设计轴对称图形

例 3 如图 5–1–3，在 3×3 的正方形网格中，有两个小正方形已被涂上阴影，再将图中剩余小正方形中任意一个涂上阴影，那么能使整个图案构成一个轴对称图形的涂法有（　　）

A. 5 种　　B. 6 种　　C. 4 种　　D. 7 种

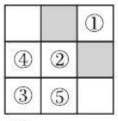


图 5–1–3

解题秘方：对图形的各种（不遗漏）情况进行涂色，并用轴对称图形的定义进行一一验证，找出使整个图案构成轴对称图形的涂法.

解：如图 5–1–3，从标有①②③④⑤的小正方形中任选一个涂上阴影，均可使整个图案构成一个轴对称图形，故涂法有 5 种.

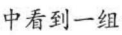
答案：A

挑战·高分

方法点拨

解决此类问题时，可以先将每种可能情况进行试验，然后根据轴对称图形的定义进行筛选；也可以先确定对称轴，再根据对称轴的位置确定符合要求的情况.

拔尖角度 2 利用实践法体会生活中的成轴对称现象

例 4 从平面镜中看到一组号码是“  ”，那么实际中这组号码是多少？

解题秘方：识别生活中的轴对称现象，关键是要找准对称轴，利用轴对称的变换解释轴对称现象.

解：实际中这组号码是 645379.

挑战·高分

实践操作

解决平面镜中看到的号码问题，可以把从平面镜中看到的号码写在纸上，把纸翻过来，从纸背面看，即可看到实际的号码.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 在中考中，简单的轴对称图形及其对称轴的识别与画法属于常考知识点，多以选择题、填空题和作图题的形式出现.

三年中考兵法

考法 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形

例 5 [中考·泰州]如图 5–1–4 所示的图形中，是轴对称图形的是（　　）

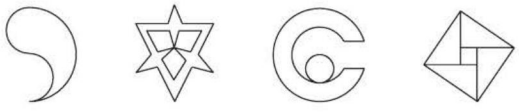


图 5–1–4

试题评析：本题考查了轴对称图形的定义，解题的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合.

答案：B

冲刺·满分

教你一招

判断一个图形是不是轴对称图形的方法：根据图形的特征，尝试找到一条直线，沿这条直线对折，使直线两旁的部分能够互相重合，若能够重合，则这个图形是轴对称图形，否则不是轴对称图形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·齐齐哈尔]下面四个图形分别是节能、节水、低碳和绿色食品标志，在这四个标志中，是轴对称图形的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. [中考·广州]如图所示的五角星是轴对称图形，它的对称轴共有（　　）



（第2题）

A. 1条　　B. 3条

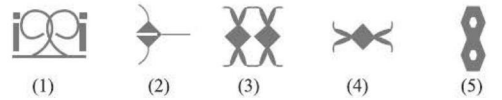
C. 5条　　D. 无数条

3. [中考·呼和浩特]甲骨文是我国的一种古代文字，下面是“北”“比”“鼎”“射”四个字的甲骨文，其中不是轴对称图形的是（　　）



A　　B　　C　　D

4. 如图所示的轴对称图形，其中只有1条对称轴的是_____；有2条对称轴的是_____；有4条对称轴的是_____.（写出图形的序号即可）



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)



(6)　(7)　(8)　(9)　(10)

（第4题）

5. 如图，镜子中号码的实际号码是_____.

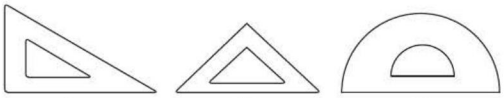


（第5题）

6. 在学习“轴对称现象”内容时，邱老师让同学们寻找身边的轴对称图形，小明有一副三角尺和一个量角器（如图所示）.

（1）小明的这三件文具中，可以看成轴对称图形的是_____（填字母代号）；

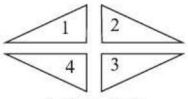
（2）请用这三个图形中的两个拼成一个轴对称图案，画出草图（只需画出一种）.



A　　B　　C

（第6题）

7. 写出图中与三角形4成轴对称的三角形，并画出对称轴. 整个图形是轴对称图形吗？如果是，那么它共有几条对称轴？



（第7题）

8. 如图是由三个小正方形组成的图形，请你在图中补画一个小正方形，使补画后的图形为轴对称图形.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 探索轴对称的性质

核心知识

- 轴对称的性质
- 作对称轴
- 作已知图形的轴对称图形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 轴对称的性质

1. 对应点、对应线段及对应角的概念 沿对称轴对折后能够重合的点叫做对应点；能够重合的线段叫做对应线段；能够重合的角叫做对应角.

2. 轴对称的性质 在轴对称图形或两个成轴对称的图形中，对应点所连的线段被对称轴垂直平分，对应线段相等，对应角相等，如图 5-2-1.

特别地：成轴对称的两个图形的对应线段所在直线平行或者重合或者相交于某一点，且该点一定在对称轴上.

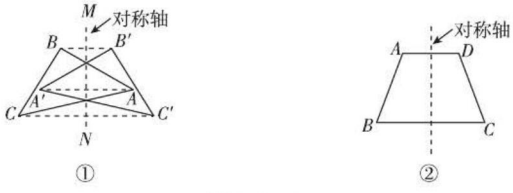


图 5-2-1

提分·必记

特别解读

1. 找对应线段和对应角先找准对应点，对应点也就是对称点.
2. 轴对称图形被对称轴分成的两部分全等，并且这两部分关于对称轴成轴对称. 成轴对称的两个图形也全等，但全等的两个图形不一定成轴对称.

拔考向 利用成轴对称和轴对称图形的性质解轴对称问题

题型 1：轴对称图形的性质在判断相关关系中的应用

例 1 如图 5-2-2 是轴对称图形，图中直线 l 是它的对称轴. 请据此解决下列问题.

（1）$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 有什么关系？AB 与 $A'B'$ 呢？为什么？

（2）DD' 与直线 l 有什么关系？为什么？

（3）写出图中其他相等关系.（不少于三对）

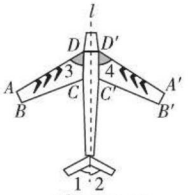


图 5-2-2

解题秘方：紧扣轴对称图形的性质进行说明.

解：（1）$\angle 3=\angle 4$，$AB=A'B'$. 因为轴对称图形被对称轴分成的两部分全等，由全等得到对应角、对应边相等.

（2）直线 l 垂直平分 DD'，因为在轴对称图形中，任何一对对应点所连线段都被对称轴垂直平分.

（3）$AD=A'D'$，$\angle 1=\angle 2$，$DC=D'C'$.（答案不唯一）

提分·秘诀

解法提醒

轴对称图形和成轴对称的性质中关键有两点：
1. 对应图形的全等性，根据全等的性质可得到对应的边、对应角相等；
2. 对称轴的垂直平分性，揭示对称轴与对应点所连线段之间的位置关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：成轴对称的性质在计算中的应用

例 2 如图 5−2−3，$\angle A=31°$，$\angle C'=60°$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，则 $\angle B=$_____.

解题秘方：紧扣成轴对称的性质确定对应元素进行计算.

解：因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，$\angle C'=60°$，

所以 $\angle C=\angle C'=60°$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-31°-60°=89°$.

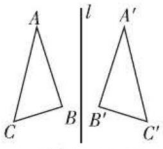


图 5−2−3

答案：89°

解法提醒

利用成轴对称的性质求线段的长度或角的度数的方法：先根据成轴对称的特征确定两个图形的对应边、对应角，再运用成轴对称的性质（对应边相等，对应角相等）把要求的边或角与已知的对应边或对应角建立联系，从而求出待求的线段的长度或角的度数.

点知识▶2 画对称轴

1. 画对称轴的依据

画对称轴的依据是成轴对称和轴对称图形的性质，即对应点所连的线段被对称轴垂直平分.

2. 画对称轴的步骤

（1）**找**：找到任意一对对应点.

（2）**连**：连接这对对应点.

（3）**画**：过对应点所连线段的中点作垂线.

这条垂线就是对称轴.

提分·必记

特别解读

- 画成轴对称的两个图形的对称轴时，任找一对对应点，过连接它们的线段的中点作垂线即可.
- 画轴对称图形的对称轴，由于对称轴不一定只有一条，所以要注意选取不同的对应点，作出其所有的对称轴.

技考向▶利用画对称轴的步骤作图形的对称轴

题型 1：画对称轴的步骤在画轴对称图形的对称轴中的应用

例 3 画出如图 5−2−4 所示的图形的对称轴.

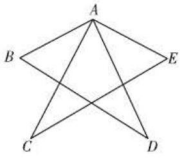


图 5−2−4

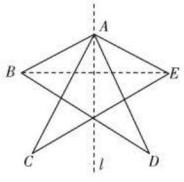


图 5−2−5

解题秘方：利用轴对称图形中任意一组对应点所连线段被对称轴垂直平分作对称轴.

解：作法：如图 5−2−5.

（1）连接 BE；

（2）过线段 BE 的中点作垂线 l，

则直线 l 即为所求作的对称轴.

提分·秘诀

方法点拨

作轴对称图形的对称轴的两种方法：

1. 折叠法，将轴对称图形对折，折痕所在的直线为对称轴；
2. 先找到轴对称图形的一组对应点，过连接这组对应点的线段的中点作垂线，这条垂线就是对称轴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：画对称轴的步骤在画成轴对称的两个图形的对称轴中的应用

例 4 如图 5–2–6，△ ABC 与△ $A'B'C'$ 关于某条直线对称，请作出这条直线．

解题秘方：利用成轴对称的两个图形中任意一组对应点所连线段被对称轴垂直平分作对称轴．

解：如图 5–2–6，

（1）连接 BB'；

（2）过 BB' 的中点作垂线 l，则直线 l 即为所求作的直线．

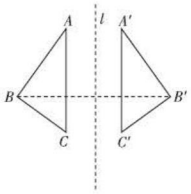


图 5–2–6

方法点拨

作成轴对称的两个图形的对称轴与作轴对称图形的对称轴的方法类似，关键是找对应点和过对应点连线的中点作垂线．

点知识 3 画轴对称图形

1. 方法 几何图形都可以看作由点组成．对于某些图形，只要画出图形中的一些特殊点（如线段端点）的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形．

2. 步骤 画轴对称图形的方法可简单归纳为“一找二画三连”．

找—在原图形上找特殊点；

↓

画—画出各个特殊点关于对称轴的对称点；

↓

连—依次连接各对称点．

提分·必记

特别提醒

1. 特殊点对画轴对称图形特别重要，找特殊点一定要找全，否则画出的图形不准确或不完整．
2. 常见的特殊点，除线段的端点外，还有线与线的交点、中点等．
3. 不在对称轴上的点的对称点在对称轴的另一侧，在对称轴上的点的对称点是它本身．

拔考向 利用轴对称的性质画轴对称图形

题型 1：画轴对称图形在画关于直线成轴对称的图形中的应用

例 5 如图 5–2–7，画出下列图形关于直线 l 对称的图形．

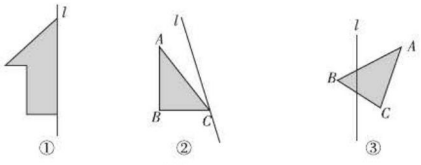


图 5–2–7

解题秘方：找全确定已知图形形状的特殊点，画出这些特殊点关于直线 l 的对称点，然后按原图顺序连接所画的对称点．

解：如图 5–2–8.

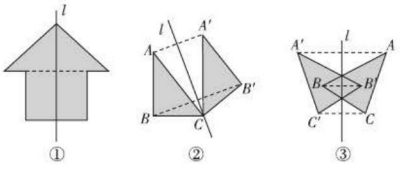


图 5–2–8

提分·秘诀

方法点拨

1. **找特殊点的方法**：规则图形的特殊点是图形的顶点，不规则图形的特殊点是线与线的交点．
2. **作对称点的方法**：过这个点作对称轴的垂线，并延长一倍，就得到该点的对称点．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：画轴对称图形在设计轴对称图案中的应用

例 6 如图 5-2-9，在 3×3 的正方形网格中有一个格点△ ABC（顶点都在正方形网格中交点上的三角形为格点三角形），请在正方形网格中画出另一个格点△ DEF，使两个三角形关于某条直线对称.

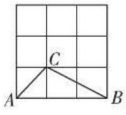


图 5-2-9

解题秘方：自主确定对称轴，作出关于该对称轴对称的图形即可.

解：如图 5-2-10.

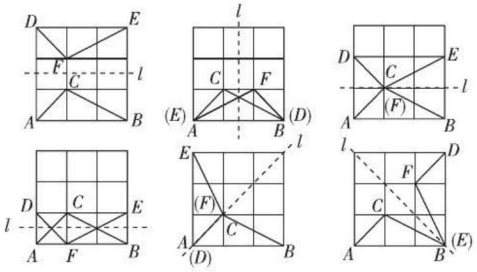


图 5-2-10

解法提醒

本题属于开放性画轴对称图形的题目. 对称轴的位置不同，画出的图形不同.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用轴对称法求折叠中角的度数

例 7 如图 5-2-11，在 Rt△ ABC 中，∠ ACB=90°，∠ A=50°，将其沿 CD 折叠，使点 A 落在边 CB 上的点 A' 处，折痕为 CD，则∠ $A'DB$=（　　）

A. 40°　　B. 30°　　C. 20°　　D. 10°

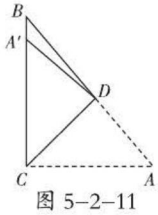


图 5-2-11

解题秘方：紧扣折叠的特征将其看成轴对称变换，结合轴对称的性质进行计算.

解：折叠前后的两部分关于折痕所在直线成轴对称，由成轴对称的两个图形是全等形，得∠ $CA'D$= ∠ A=50°.

因为∠ ACB=90°，∠ A=50°，

所以∠ B=90° − ∠ A=90° −50° =40°.

又因为∠ $CA'D$= ∠ A=50°，

所以∠ $BA'D$=180° − ∠ $CA'D$=180° −50° =130°.

所以∠ $A'DB$=180° − ∠ $BA'D$− ∠ B=180° −130° −40° =10°.

答案：D

挑战·高分

解法提醒

折叠是轴对称变换最常见的形式，折叠时，互相重合的两部分关于折痕所在直线成轴对称. 如本题中△ ACD 与△ A′ CD 关于 CD 所在直线成轴对称，利用成轴对称的两个图形是全等图形得到对应角相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用轴对称变换法求阴影部分面积

例 8 如图 5–2–12，△ ABC 是轴对称图形，且直线 AD 是△ ABC 的对称轴，E，F 是 AD 上的任意两点，若△ ABC 的面积为 18 cm^2，则图中阴影部分的面积为_____cm^2.

解题秘方：根据轴对称图形的性质，将阴影部分的面积集中转化为△ ABD 的面积进行求解.

解：因为△ ABC 是轴对称图形，且直线 AD 是对称轴，

所以△ ABD 和△ ACD 关于直线 AD 成轴对称.

所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

因为 E，F 是 AD 上的任意两点，

所以△ BEF 与△ CEF 关于直线 AD 成轴对称.

所以 $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle BEF}$.

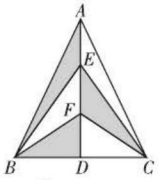


图 5–2–12

所以 $S_{阴影}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CEF}+S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 18=9\ (cm^2)$.

答案：9

挑战·高分

技巧点拨

求分散的阴影部分面积的方法：一般先通过观察找到阴影部分与非阴影部分的关系，再结合条件把阴影部分集中转化为一个规则图形或便于求面积的图形，从而求出阴影部分的面积.

拔尖角度▸ 3 利用轴对称变换法巧求镜子中的时间

例 9 小明在镜子中看到的时钟的指针如图 5–2–13，那么此时是什么时刻？


图 5–2–13


①


②


③

图 5–2–14

解题秘方：平面镜成像的原理是轴对称变换，想要知道物（或像），只要画出像（或物）关于镜面的轴对称变换的图形即可.

解：方法一　“反看正读法”，从纸的背面看图，再采用常规读法，即可读出此时是 11：35；

方法二　“正看逆读法”，如图 5–2–14 ①，图上的数按逆时针方向从小到大排列，可读出此时是 11：35；

方法三　“12 扣除法”，如图 5–2–14 ②，将镜子中时钟上的时刻按常规读出后，再用 12 减去这个时刻，即按常规读出的时刻是 0：25，则此时是 12：00−0：25=11：35；

方法四　“对称法”，如图 5–2–14 ③，分别作出镜子中时钟的时针和分针以过 6 和 12 的直线为对称轴的对称指针，从而得出此时是 11：35.

挑战·高分

解法提醒

镜子中成像问题有两种：

1. 当镜子在图形的左边（或右边）时，即题中情形，镜子中的像与实物左右对称，此时可采用背面读数法；

2. 当镜子在图形的正上方（或正下方）时，镜子中的像与实物上下对称.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 轴对称的性质是说明线段相等、角相等的重要依据，也是中考的热点内容之一，主要以选择题、填空题的形式出现，解答题中以作图题的形式出现，难度较低.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用轴对称图形的性质确定对应边和对应角

例 10 [中考·南充]如图 5-2-15，直线 MN 是四边形 $AMBN$ 的对称轴，点 P 是直线 MN 上的点，下列说法错误的是（　　）

A. $AM=BM$

B. $AP=BN$

C. $\angle MAP=\angle MBP$

D. $\angle ANM=\angle BNM$

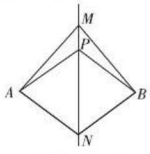


图 5-2-15

试题评析：本题考查轴对称图形的性质，运用轴对称图形的性质找对应关系是解题的关键.

特别提醒

轴对称图形中对称轴两旁的图形的对应关系与全等的对应关系一样，找准了对应点就确定了对应边和对应角.

解：因为直线 MN 是四边形 $AMBN$ 的对称轴，

所以 $AM=BM$，$AN=BN$，$\angle ANM=\angle BNM$，$\angle AMN=\angle BMN$.

因为点 P 是直线 MN 上的点，

所以 $AP=BP$，$\angle APM=\angle BPM$.

所以 $180°-\angle APM-\angle AMN=180°-\angle BPM-\angle BMN$.

即 $\angle MAP=\angle MBP$，

所以 A，C，D 正确，B 错误，故选 B.

答案：B

考法 2 在网格图中作已知图形的轴对称图形

例 11 [中考·南充]如图 5-2-16，在每个小正方形的边长均为 1 个单位长度的方格纸中，有线段 AB 和直线 MN，点 A，B，M，N 均在小正方形的顶点上. 在方格纸中画四边形 $ABCD$（四边形的各顶点均在小正方形的顶点上），使四边形 $ABCD$ 是以直线 MN 为对称轴的轴对称图形，点 A 的对称点为点 D，点 B 的对称点为点 C.

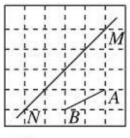


图 5-2-16

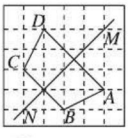


图 5-2-17

试题评析：本题考查轴对称图形的画法，根据网格的特殊性，找出点 A 的对称点 D，点 B 的对称点 C，并连接 BC，CD，DA.

解：如图 5-2-17.

方法点拨

借助网格图作轴对称图形是中考的一个热门考点，观察图中已知图形的特殊点与对称轴，利用轴对称的性质，找出各特殊点的对称点，再依次连线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 下列说法中错误的是（　　）

A. 两个成轴对称的图形对应点所连线段被对称轴垂直平分

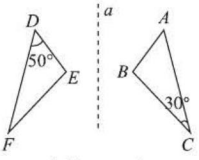
B. 关于某直线对称的两个图形全等

C. 面积相等的两个三角形对称

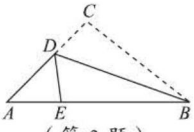
D. 轴对称指的是两个图形沿着某一直线对折后重合

2. 如图，△ ABC 与△ DEF 关于直线 a 成轴对称，则∠ E 等于（　　）

A.30°　　B.50°　　C.90°　　D.100°



（第 2 题）



（第 3 题）

3.[**中考 · 天津**]如图，将一张三角形纸片 ABC 沿过点 B 的直线折叠，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD，则下列结论一定正确的是（　　）

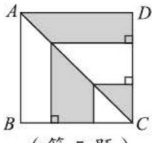
A.$AD=BD$　　B.$AE=AC$

C.$ED+EB=DB$　　D.$AE+CB=AB$

4. 如图，把对折纸去掉黑色部分后展开，所得字是_____.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 cm，则图中阴影部分的面积为_____.

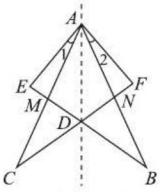
6. 如图，△ AFC 和△ AEB 关于虚线成轴对称，现给出下列结论：

①∠ 1= ∠ 2；

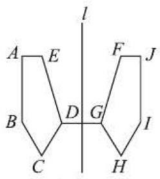
②△ ANC ≌△ AMB；

③ $CD=DN$，

其中正确的结论是_____.（填序号）



（第 6 题）



（第 7 题）

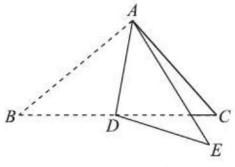
7. 如图，五边形 $ABCDE$ 与五边形 $JIHGF$ 关于直线 l 对称，则线段 AB 的对应线段是_____；∠ C 的对应角是_____；连接 DG，则 DG 被直线 l_____.

8. 一辆汽车的车牌在水中的倒影如图所示，则该车的车牌号码是_____.



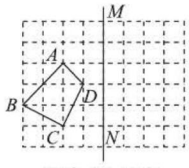
（第 8 题）

9.[**中考 · 江西**]如图，在△ ABC 中，点 D 是 BC 上的点，∠ BAD = ∠ ABC = 40°，将△ ABD 沿着 AD 翻折得到△ AED，则∠ CDE=_____.



（第 9 题）

10. 如图所示，在正方形网格中画出四边形 $A_1B_1C_1D_1$，使四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 关于直线 MN 成轴对称.　　[**导学号** 7876572]



（第 10 题）

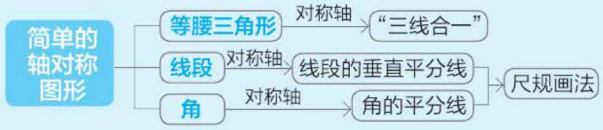
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 简单的轴对称图形

核心知识

- 等腰三角形的轴对称性
- 线段的轴对称性
- 角平分线的轴对称性

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 等腰三角形的轴对称性

1. 对称性 等腰三角形是轴对称图形，顶角平分线（或底边上的高、底边上的中线）所在的直线是它的对称轴.

2. 性质 1 等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高重合（也称“三线合一”）.

如图 5−3−1，在△ ABC 中，

（1）因为 $AB=AC$，$AD \perp BC$，

所以 AD 平分∠ BAC（或 $BD=CD$）；

（2）因为 $AB=AC$，$BD=DC$，

所以 $AD \perp BC$（或 AD 平分∠ BAC）；

（3）因为 $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

所以 $BD=DC$（或 $AD \perp BC$）.

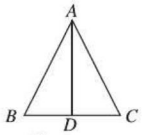


图 5−3−1

3. 性质 2 等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”）.

几何语言：如图 5−3−1，在△ ABC 中，

因为 $AB=AC$，所以∠ B = ∠ C.

提分·必记

特别解读

1. **适用条件：**
（1）必须是等腰三角形.
（2）必须是底边上的中线、底边上的高和顶角的平分线才相互重合.
2. **作用：** 是说明线段相等、角相等、线段垂直等关系的重要方法.

特别提醒

1. **适用条件：** 必须在同一个三角形中.
2. **作用：** 是说明角相等的常用方法，应用它说明角相等时可省去三角形全等的说明.

拔考向 利用等腰三角形的轴对称性解决问题

题型 1：等腰三角形的性质在求边角中的应用

例 1 如图 5−3−2，在△ ABC 中，$AB=AC$，AD 平分∠ BAC.

（1）求∠ ADB 的度数；

（2）若∠ $BAC=100°$，求∠ B，∠ C 的度数；

（3）若 $BC=3$ cm，求 BD 的长.

解题秘方： 紧扣等腰三角形的性质进行解答.

解：（1）因为 $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

所以 $AD \perp BC$.

所以∠ $ADB=90°$.

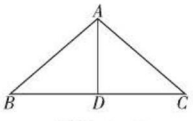


图 5−3−2

提分·秘诀

特别提醒

1. 在等腰三角形中，运用“三线合一”时，“三线”必须是底边上的中线、底边上的高和顶角的平分线.
2. “等边对等角”的前提是在同一个三角形中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）在△ABC中，因为$AB=AC$，$\angle BAC=100°$，

所以$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$.

（3）因为$AB=AC$，AD平分$\angle BAC$，

所以AD是BC边上的中线.

所以$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times3=1.5$（cm）.



题型2：等腰三角形的性质在说明线段相等中的应用

例2 如图5-3-3，在△ABC中，$AB=AC$，BD，CE分别是AC，AB边上的高. 试说明$BD=CE$.

解题秘方：等腰三角形的性质为说明△BEC和△CDB全等创造了条件.

解：方法一 因为$AB=AC$，所以$\angle ABC=\angle ACB$.

因为$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，

所以$\angle BDC=\angle BEC=90°$.

在△BEC和△CDB中，

$$\begin{cases}\angle EBC=\angle DCB,\\ \angle BEC=\angle CDB,\\ BC=CB,\end{cases}$$

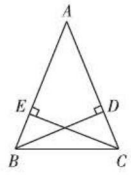


图5-3-3

所以△$BEC\cong$△CDB（AAS）. 所以$BD=CE$.

方法二

因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，$AB=AC$，

所以$BD=CE$.

解法提醒

方法一是利用等腰三角形的性质2来说明两条边所在的两个三角形全等. 由此可进一步得到等腰三角形的性质：

（1）等腰三角形两腰上的中线相等，

（2）等腰三角形两腰上的高相等，

（3）等腰三角形两底角的平分线相等.

方法二是利用面积法，由此方法还可得等腰三角形的性质：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

点知识▶2 等边三角形的轴对称性

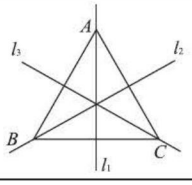
1. 等边三角形的性质

（1）等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴，是等边三角形三条角平分线（三条中线或三条高线）所在的直线.

（2）等边三角形的三条边都相等.

（3）等边三角形的三个内角都相等，并且每个内角都等于60°.

2. 示例

等边三角形	$AB=AC=BC$ $\angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60°$ l_1，l_2，l_3是△ABC的对称轴	

提分·必记

特别提醒

1. 等边三角形是特殊的等腰三角形，它具有等腰三角形的一切性质，但等腰三角形不一定是等边三角形.
2. 等边三角形每条边上的中线、高和所对角的平分线互相重合，即“三线合一”，它们的长度相等，且所在的直线都是等边三角形的对称轴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用等边三角形的性质求角的度数

例3 等边三角形两条中线相交所成的锐角为（　　）

A.30°　　B.45°　　C.60°　　D.75°

解题秘方：紧扣等边三角形的轴对称性可知任意一条边满足“三线合一”.

解：如图5-3-4，$\triangle ABC$为等边三角形，BD，CE分别为AC，AB边上的中线，且交于点O，则由等边三角形的性质可知，$CE\perp AB$，BD平分$\angle ABC$，所以$\angle OEB=90°$，$\angle EBO=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$，所以$\angle BOE=90°-30°=60°$.

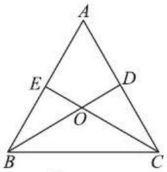


图5-3-4

答案：C

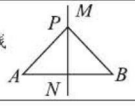
提分·秘诀

方法点拨

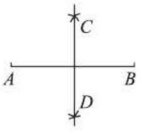
等边三角形任意一边都具有“三线合一”的性质，利用它们之间相互转化可解决边角问题.

知识▶3 线段的轴对称性

1. 线段的轴对称性及线段垂直平分线的性质

线段的轴对称性	线段是轴对称图形，它有两条对称轴：（1）垂直并且平分线段的直线；（2）线段所在的直线（拓展）	
线段的垂直平分线	定义	垂直于一条线段，并且平分这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线（简称中垂线）
	性质	文字语言：线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等
		数学语言：点P是线段AB垂直平分线MN上的一点，则$PA=PB$ 

2. 用尺规作图作线段的垂直平分线

作法	图形	依据
（1）分别以点A和点B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧，两弧相交于点C和D. （2）作直线CD. 直线CD就是线段AB的垂直平分线		SSS，等腰三角形的性质

提分·必记

特别解读

1. 线段的垂直平分线的性质中的“距离”是该点与这条线段两个端点之间的线段长度.
2. 用直尺和圆规作线段的垂直平分线时，不能说“经过一点作已知线段的垂直平分线”，因为线段的垂直平分线是唯一的，不一定经过某一点，但可以说“过一点作线段的垂线”.
3. 作线段AB的垂直平分线时分别以点A，B为圆心，必须以大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径画弧，否则所画的弧就不能相交或只交于线段AB的中点.

考向▶利用线段垂直平分线的性质求线段的长度

例4 如图5-3-5，在$\triangle ABC$中，$AB=5$ cm，BC的垂直平分线分别交AB，BC于点D，E，$\triangle ACD$的周长为8 cm，求线段AC的长.

解题秘方：利用线段的垂直平分线的性质将要求的线段用已知条件来表示.

解：因为DE为BC的垂直平分线，

所以$CD=BD$.

所以$\triangle ACD$的周长$=AC+AD+CD=AC+AD+BD=AC+AB=8$ cm.

又因为$AB=5$ cm，所以$AC=3$ cm.

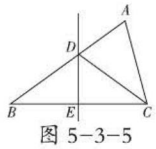


图5-3-5

提分·秘诀

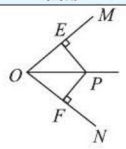
解法指导

利用线段的垂直平分线的性质进行等量代换，是一种常用的解题方法.本题中解题的关键是利用线段垂直平分线的性质将△ACD的周长转化为线段AB+AC的长，进而求解.

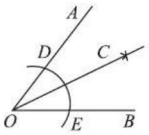
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 角的轴对称性

1. 角的轴对称性及角平分线的性质

类别	内容	图形	依据
角的轴对称性	角是轴对称图形，角平分线所在的直线是它的对称轴，即 OP 所在的直线为 $\angle MON$ 的对称轴		AAS
角平分线的性质	角平分线上的点到这个角的两边的距离相等，即 $PE=PF$		

2. 用尺规作图画角的平分线

作法	图形	依据
（1）在 OA 和 OB 上分别截取 OD,OE，使 $OD=OE$. （2）分别以 D,E 为圆心、以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 C. （3）作射线 OC. OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线		SSS

利用“角平分线的性质”必须要具备两个条件：①点在角平分线上；②过该点作角两边的垂线段．二者缺一不可．

提分·必记

特别提醒

- 角平分线的性质是由两个条件（角平分线，垂线）得到一个结论（线段相等）．
- 利用角的平分线的性质说明线段相等时，所要说明的线段是“垂直于角两边的线段”而不是“垂直于角平分线的线段”．


角平分线的尺规作图

拔考向▶ 利用角平分线的性质解与垂线段相关的应用

题型 1：角平分线的性质在说明线段相等中的应用

例 5 如图 5-3-6，OD 平分 $\angle EOF$，在 OE，OF 上分别取点 A，B，使 $OA=OB$，P 为 OD 上一点，$PM\perp BD$，$PN\perp AD$，垂足分别为 M，N.

试说明 $PM=PN$.

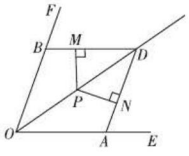


图 5-3-6

解题秘方：在图中找出符合角平分线性质的模型，利用角平分线的性质说明线段相等．

解：因为 OD 平分 $\angle EOF$，所以 $\angle BOD=\angle AOD$.

在 $\triangle BOD$ 和 $\triangle AOD$ 中，$\begin{cases} OB=OA, \\ \angle BOD=\angle AOD, \\ OD=OD, \end{cases}$

所以 $\triangle BOD\cong\triangle AOD$（SAS）．

所以 $\angle BDO=\angle ADO$，即 DO 平分 $\angle BDA$.

又 P 为 DO 上一点，且 $PM\perp BD$，$PN\perp AD$，

所以 $PM=PN$.

提分·秘诀

方法点拨

1. 在说明两条线段相等时，若两条线段分别在两个三角形中，可考虑使用全等三角形的性质或角平分线的性质，若条件中有垂直和角平分线，则优先考虑使用角平分线的性质．
2. 运用角平分线的性质说明线段相等时，不需要利用三角形全等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：角平分线的性质在求线段的和差关系中的应用

例 6 如图 5-3-7，在△ ABC 中，∠ C=90°，AC=BC，AD 平分∠ CAB，交 BC 于点 D，DE ⊥ AB，垂足为 E，若 AB=8 cm，求△ DEB 的周长.

解题秘方：运用角平分线的性质及全等三角形的性质，将△ DEB 的周长转化为线段 AB 的长.

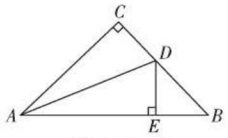


图 5-3-7

解：在△ ABC 中，∠ C=90°，

所以 DC ⊥ AC.

因为 DE ⊥ AB，AD 平分∠ CAB，所以 DC=DE.

在 Rt△ ACD 和 Rt△ AED 中，$\begin{cases}\angle CAD=\angle EAD,\\ \angle C=\angle DEA=90^\circ,\\ AD=AD,\end{cases}$

所以 Rt△ ACD ≌ Rt△ AED（AAS）. 所以 AC=AE.

因为 AC=BC，所以 AE=BC.

所以△ DEB 的周长 =DE+DB+EB=DC+DB+EB=BC+EB=AE+EB=AB=8 cm.

解法提醒

求三角形的周长时，若三角形各边的长不易求解，可考虑找出题中的相等线段进行等量替换，而利用角平分线的性质能说明线段相等，使三角形的周长转化为一条线段的长.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用设元列方程法求等腰三角形中角的度数

挑战·高分

例 7 如图 5-3-8，在△ ABC 中，AB=AC，点 D，E 分别在 AC，AB 边上，且 BC=BD，AD=DE=EB，求∠ A 的度数.

解题秘方：利用“等边对等角”将△ ABC 中的三个内角都用要求的∠ A 来表示，利用三角形内角和为 180° 解决问题.

解：设∠ A=x°.

因为 AD=DE，所以∠ AED=∠ A=x°.

因为 DE=EB，所以∠ EBD=∠ BDE=$\frac{1}{2}$(180°−∠ BED)=$\frac{1}{2}$∠ AED=$\frac{1}{2}x$°.

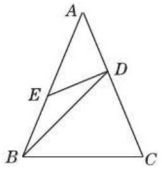


图 5-3-8

所以∠ BDC=180°−(180°−∠ A−∠ EBD)=$\frac{3}{2}x$°.

因为 BC=BD，所以∠ C=∠ BDC=$\frac{3}{2}x$°.

因为 AB=AC，所以∠ ABC=∠ C=$\frac{3}{2}x$°.

所以 x°+$\frac{3}{2}x$°+$\frac{3}{2}x$°=180°，解得 x°=45°. 所以∠ A=45°.

方法点拨

当条件中没有给出已知度数的角而又要求角的度数时，一般采用**方程思想**来解决. 设出要求的角的度数，然后根据等腰三角形的性质，结合三角形的内角和等于 180° 列出方程，求出未知数的值即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用建模思想借助尺规作图作角平分线及垂直平分线选址

例 8 如图 5-3-9，校园内有两条路 OA，OB，在交叉口附近有两块宣传牌 C，D，学校准备在这里安装一盏路灯，要求灯柱的位置 P 到两块宣传牌的距离相等，并且到两条路的距离也相等，请你帮忙画出灯柱的位置 P.

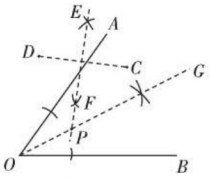


图 5-3-9

解题秘方：根据题意知，点 P 既在线段 CD 的垂直平分线上，又在两条路 OA，OB 夹角的平分线上，所以这两条线的交点就是灯柱的位置 P.

解：如图 5-3-9，连接 CD，分别作线段 CD 的垂直平分线 EF 和 $\angle AOB$ 的平分线 OG，EF 与 OG 相交于点 P，则点 P 就是所要确定的灯柱的位置.

挑战·高分

方法点拨

若要找到某两个点的距离相等的点，一般在这两点所连线段的垂直平分线上找；若要找到某两条不平行的直线的距离相等的点，一般在这两条直线相交所成的角的平分线上找；若要同时满足上述两个条件，则两线（垂直平分线与角平分线）的交点为满足条件的点.

拔尖角度▸ 3 利用图形的轴对称性解决最小距离问题

例 9 观察发现

（1）如图 5-3-10 ①，若点 A，B 在直线 l 同一侧，在直线 l 上找一点 P，使 $AP+BP$ 的值最小.

作法：作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB'，则 AB' 与直线 l 的交点就是所求的点 P.

（2）如图 5-3-10 ②，在等边三角形 ABC 中，$AD=2$，点 E 是 AB 的中点，AD 是高，在 AD 上找一点 P，使 $BP+PE$ 的值最小.

作法：作点 B 关于直线 AD 的对称点 B'，则点 B' 与点 C 重合，连接 CE 交 AD 于一点，则该点就是所求的点 P，故 $BP+PE$ 的最小值为_____.

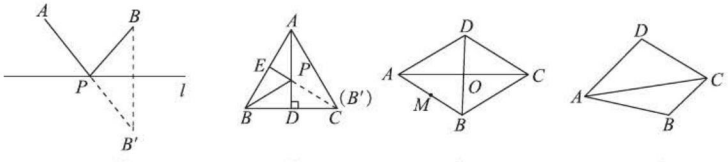


图 5-3-10

挑战·高分

知识链接

“最短路径问题”通常以直线、角、等腰（边）三角形等为背景.借助轴对称及两点之间线段最短来解决.

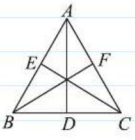


图 5-3-11

等边三角形三边上的高（中线）相等，即 AD=BF=CE（如图 5-3-11）.

实践运用

如图 5-3-10 ③，在四边形 $ABCD$ 中，点 B 与点 D 关于直线 AC 对称，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AC=8$，点 P 是对角线 AC 上的一个动点，$AB=BC=CD=AD=BD$，点 M 是 AB 的中点，求 $PM+PB$ 的最小值.

拓展延伸

如图 5-3-10 ④，在四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上找一点 P，使 $\angle APB=\angle APD$.（保留作图痕迹，不必写出作法）

解题秘方：紧扣几种常见图形的轴对称性，将折线段最短转化为两点之间线段最短来解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：观察发现

（2）2　提示：因为点 C 是点 B 关于直线 AD 的对称点，

所以 $BP=CP$，所以 $BP+PE=CP+PE=CE$.

由题意可知△ BAD ≌△ BCE，所以 $CE=AD=2$.

实践运用

如图 5−3−12 ①，由题意可知直线 AC 是 BD 的垂直平分线，连接 MD 交 AC 于点 P，则 $PM+PB$ 的最小值为 MD 的长.

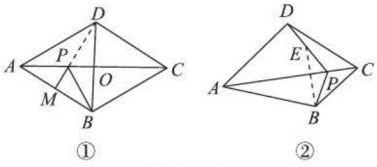


图 5−3−12

根据题意易得△ BMD ≌△ BOA. 所以 $MD=OA$.

又易知 $OA=OC=\frac{1}{2}AC=4$，

所以 $MD=4$. 即 $PM+PB$ 的最小值为 4.

拓展延伸　如图 5−3−12 ②.

图解

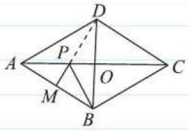


图 5−3−13

如图 5−3−13，易知 O 为 BD 的中点，所以 $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB=BM$.

在△ BMD 和△ BOA 中，

$$\begin{cases} BD=BA, \\ \angle DBM=\angle ABO, \\ BM=BO, \end{cases}$$

所以 △ BMD ≌ △ BOA（SAS）.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘　本节主要考查线段的垂直平分线、等腰三角形的性质、以及角平分线的性质，常常与其他知识相结合，涉及题型较为广泛，难度适中.

三年中考兵法

考法 1　利用等腰三角形的性质求角的度数

例 10　[中考·滨州]如图 5−3−14，在△ ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，且 $DA=DC$，$BD=BA$，则 $\angle B$ 的大小为（　　）

A. 40°　　B. 36°　　C. 30°　　D. 25°

试题评析：本题考查等腰三角形的性质、三角形内角和为 180°，解题的关键是将不在同一个三角形中的角用同一个未知数表示出来.

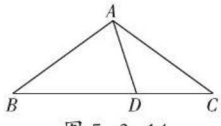


图 5−3−14

解：设 $\angle B=x$，因为 $AB=AC$，所以 $\angle C=\angle B=x$.

因为 $DA=DC$，所以 $\angle DAC=\angle C=x$. 所以 $\angle ADB=180°-\angle ADC=180°-(180°-\angle C-\angle DAC)=\angle DAC+\angle C=2x$.

因为 $BD=BA$，所以 $\angle BAD=\angle ADB=2x$.

所以 $x+x+x+2x=180°$，解得 $x=36°$. 所以 $\angle B=36°$.

答案：B

冲刺·满分

归纳拓展

对于涉及等腰三角形的内角时，如果题中没有给出已知度数的角，不妨考虑利用等腰三角形的性质和三角形的内角和将不在同一个三角形中的角建立等量关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用线段垂直平分线和角平分线的性质解题

例 11 [中考·湘潭]如图 5-3-15，在 Rt△ABC 中，∠C=90°. BD 平分∠ABC 交 AC 于点 D，DE 垂直平分 AB，垂足为点 E，请任意写出一组相等的线段：_____.

试题评析：本题考查了全等三角形的判定和性质、角平分线的性质、线段垂直平分线的性质. 可依据条件说明△BDE ≌△BDC，从而得到线段相等，也可利用角平分线的性质或线段垂直平分线的性质得到线段相等.

解：因为 DE 垂直平分 AB，

所以 $AE=BE$，∠BED=90°，$DB=DA$.

因为∠C=90°，BD 平分∠CBA，

所以 $CD=ED$，∠C=∠BED=90°，∠CBD=∠EBD.

所以 Rt△BDE ≌ Rt△BDC（AAS）.

所以 $BC=BE$. 所以 $BC=AE$.

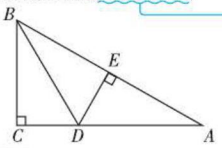


图 5-3-15

答案：$AE=BE$（或 $AD=BD$ 或 $CD=DE$ 或 $BC=BE$ 或 $BC=AE$）

方法点拨

线段垂直平分线的性质以及角平分线的性质都能揭示两条线段相等，只要具备模型就可直接应用，不需要再说明三角形全等.

考法 3 利用作线段的垂直平分线解决问题

例 12 [中考·绥化]如图 5-3-16，A，B，C 为某公园的三个景点，景点 A 和景点 B 之间有一条笔直的小路，现要在小路上建一个凉亭 P，使景点 B、景点 C 到凉亭 P 的距离之和等于景点 B 到景点 A 的距离，请用直尺和圆规在所给图中作出点 P.（不写作法，只保留作图痕迹）

试题评析：本题考查了基本作图、线段的垂直平分线的性质，解题的关键是深入理解线段垂直平分线的性质.

解：如图 5-3-14，点 P 即为所求的点.

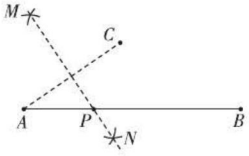


图 5-3-16

特别提醒

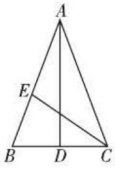
利用作线段的垂直平分线解决问题时，关键要分析出需要作哪条线段的垂直平分线.

两年模拟兵法

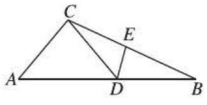
答案见 240 页

1.[中考·湖州]如图，AD，CE 分别是△ABC 的中线和角平分线. 若 $AB=AC$，∠CAD=20°，则∠ACE 为（　　）

A. 20°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 70°



（第 1 题）



（第 2 题）

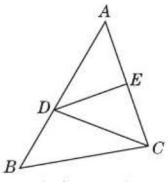
2.[中考·滨州]如图，△ABC 中，D 为 AB 上一点，E 为 BC 上一点，且 $AC=CD=BD=BE$，∠A=50°，则∠CDE 等于（　　）

A. 50°　　B. 51°　　C. 51.5°　　D. 52.5°

3.[中考·黄石]如图，线段 AC 的垂直平分线 DE 交线段 AB 于点 D，∠A=50°，则∠BDC 等于（　　）

A. 50°　　B. 100°

C. 120°　　D. 130°

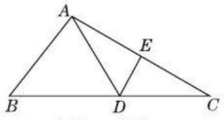


（第 3 题）

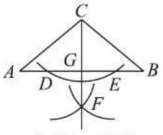
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.[中考·天门]如图，在△ABC中，AC的垂直平分线分别交AC，BC于E，D两点，EC=4，△ABC的周长为23，则△ABD的周长为(　　)

A. 13　　B. 15　　C. 17　　D. 19



（第4题）

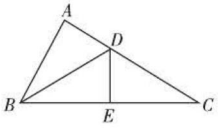


（第5题）

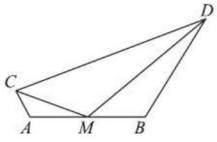
5. 如图，在△ABC中，AC = BC，∠A = 40°，观察图中尺规作图的痕迹，可知∠BCG为(　　)

A.40°　　B.45°　　C.50°　　D.60°

6.[中考·徐州]如图，在△ABC中，∠C=31°，∠ABC的平分线BD交AC于点D，如果DE垂直平分BC，那么∠A=_____°.



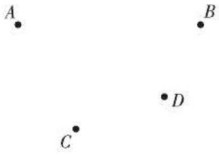
（第6题）



（第7题）

7.[中考·黄冈]如图，AC，BD在AB的同侧，AC=2，BD=8，AB=8. 点M为AB的中点. 若∠CMD=120°，则CD的最大值是_____.

8. 如图，某城区有A,B两所学校，在距学校不远处有C,D两家机关单位，现在要在它们之间安装一个邮筒，使得这个邮筒到A,B两所学校的距离相等，同时到C,D两家机关单位的距离也相等，请在图中标出邮筒的位置.

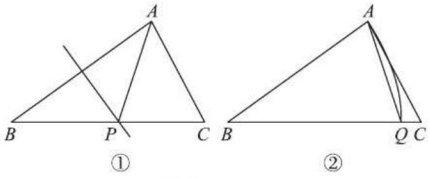


（第8题）

9.[中考·杭州]如图，在△ABC中，AC < AB < BC.

（1）已知线段AB的垂直平分线与BC边交于点P，连接AP，试说明∠APC=2∠B.

（2）以点B为圆心，线段AB的长为半径画弧，与BC边交于点Q，连接AQ. 若∠AQC=3∠B，求∠B的度数.



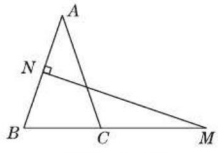
（第9题）

10. 如图，在△ABC中，AB=AC，AB的垂直平分线交AB于点N，交BC的延长线于点M.

（1）若∠A=40°，求∠NMB的度数.

（2）如果将（1）中∠A改为70°，其余条件不变，求∠NMB的度数.

（3）由（1）（2）你发现了什么规律？并说明理由.



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 利用轴对称进行设计

核心知识
- 分析轴对称图案
- 设计轴对称图案

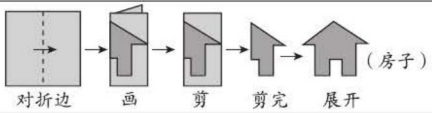
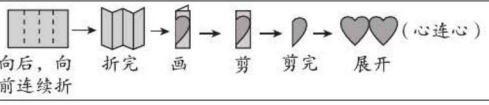
知识链接

利用轴对称进行设计 → 欣赏与分析图案 / 剪纸 / 设计图案 → 体验轴对称在现实生活中的应用和文化价值

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 剪纸

剪纸是中华民族民间艺术的精华之一，我国的民间剪纸从内容到形式都是丰富多彩的，具有鲜明的民族特色．剪纸与轴对称紧密相连．只要有对折，无论怎样剪，都会出现轴对称图案．剪纸的原理及方法如下表所示．

剪纸的原理	图形的轴对称性
剪纸中的对称轴	纸上的折痕所在的直线就是相邻两个图案的对称轴
剪纸的步骤	①折——将纸通过一正一反的方式折成若干个相等的部分； ②画——在折叠好的纸上画出要裁剪的图案； ③剪——用剪刀按照所画图案进行裁剪，注意边缘的平滑； ④展——将裁剪好的纸展开即可
对折边	
“手风琴”式折	

拔考向 利用剪纸的原理分析剪纸图案

例 1 如图 5-4-1，将一张正方形纸片两次对折，并剪出一个平行四边形小洞后展开、铺平，得到的图形是图 5-4-2 中的（　　）

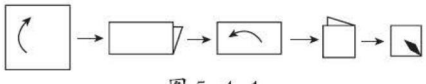


图 5-4-1

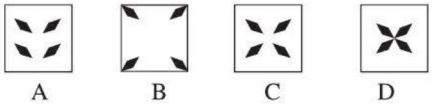


图 5-4-2

解题秘方：紧扣折痕所在的直线为对称轴对图案进行分析，作出选择．

解：两次的折痕是对称轴，利用折痕两边的部分关于折痕所在的直线对称来解决问题．观察四个选项中的图案，只有 D 符合题意．

答案：D

提分·必记

特别提醒

1. 由折叠剪成的相邻的两幅图案可知，它们是以折痕所在的直线为对称轴的轴对称图形．
2. 剪纸中的对称也是以点的对称为基础的，由各点的对称形成线的对称，最终形成面的对称．

提分·秘诀

方法点拨

分析剪纸图案把握3个关键点：
1. 分清对称轴；
2. 把握图案的“单元”；
3. 灵活地运用轴对称的性质．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 利用轴对称设计图案

1. 利用轴对称设计图案的依据 轴对称的性质，即若两个图形成轴对称，那么对称轴就是对应点连线的垂直平分线.

2. 轴对称图案的设计方法

（1）利用线段、圆、三角形设计轴对称图案.

（2）利用简单的轴对称图形组合成复杂的轴对称图案.

（3）利用网格设计出轴对称图案.

（4）利用自然界中类似的轴对称图形设计出轴对称图案.

提分·必记

特别提醒

利用轴对称设计图案应注意以下问题：①要有明确的设计意图；②创意要新颖独特，设计出的图案要符合要求；③能清楚地表达出自己的设计意图和制作过程.

拔考向▸ 利用轴对称的性质设计图案

例 2 某学校搞校园绿化，准备将一块长方形空地建成花坛，现向全体学生征集设计图案，要求设计的图案由圆和正方形组成（个数不限），并使整个花坛成轴对称图形，请在如图 5-4-3 所示的长方形中画出你的设计图案.



图 5-4-3

解题秘方：先设计“单元”图案，然后运用轴对称设计整体图案.

解：由轴对称图形的性质设计出如图 5-4-4 所示的图案.（图案不唯一）

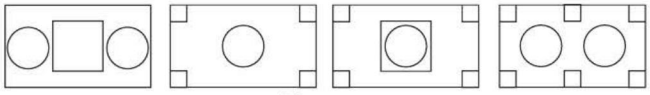


图 5-4-4

提分·秘诀

方法点拨

对于在生活中设计轴对称图案时，要统筹规划，根据区域的大小和“单元”图案的个数，合理设计图案.最后要注意检验所设计的图案是否为轴对称图形.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 利用网格中的特征进行图案设计

例 3 由 16 个相同的小正方形拼成的正方形网格，现将其中的 2 个小正方形涂色（如图 5-4-5）.请你用两种不同的方法分别再将 2 个空白的小正方形涂色，使它们成为轴对称图形.

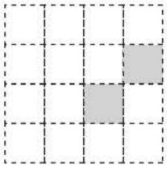
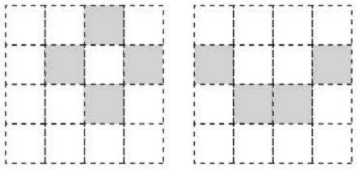


图 5-4-5



(1) (2)

图 5-4-6

解题秘方：抓住正方形的四条对称轴，根据正方形的对称轴构建轴对称图形.

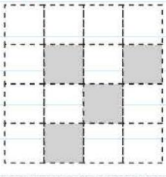
解：由题意设计的轴对称图形如图 5-4-6 所示.（答案不唯一）

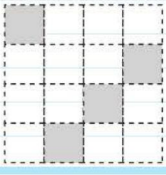
挑战·高分

方法点拨

网格中的轴对称图案的设计问题，关键是抓住对称轴，找到了对称轴，即可轻松解题.

另解





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节考查利用轴对称的性质进行图案设计，多以选择题或选择题的形式出现，难度较小.

三年中考兵法

考法 分析剪纸图案

例 4 [中考·舟山]将一张正方形纸片按如图 5-4-7 所示的步骤①，②沿虚线对折两次，然后沿③中平行于底边的虚线剪去一个角，展开铺平后的图形是图 5-4-8 中的（　　）

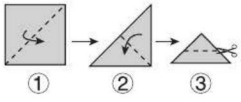


图 5-4-7

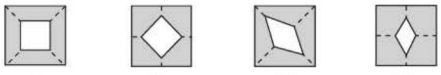


图 5-4-8

试题评析：本题考查了利用轴对称及其性质进行折叠剪纸，不仅考查学生的动手操作能力，还考查学生的想象能力. 求解时，可以采用动手操作的方式，也可以利用空间想象进行分析判断.

解：由剪纸的方式可知，图形的中间是正方形，且顶点在原来的正方形的对角线上，故结合选项可知，展开铺平后的图形是选项 A 中的图形.

答案：A

冲刺·满分

易错警示

注意折纸与所得图形之间的联系，找准图案的对应位置与对应方向，切不可凭想象轻易下结论.

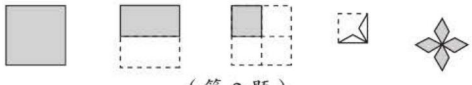
两年模拟兵法

答案见 241 页

1. [中考·达州]剪纸是我国传统的民间艺术，下列剪纸作品中，轴对称图形是（　　）

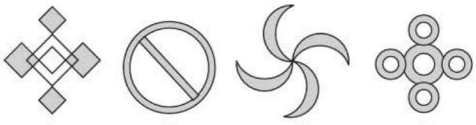


2. 剪纸是中国的民间艺术，剪纸的方法很多，下面是一种剪纸的图示（先将纸折叠，然后再剪，展开即得到图案）.

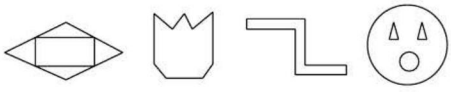


（第 2 题）

下面四幅图案中，不能用上述方法剪出的图案是（　　）

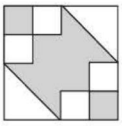


3. 下列四幅图案中，不能由一张长方形纸片对折后，沿一定的线剪纸，再铺开而得到的是（　　）

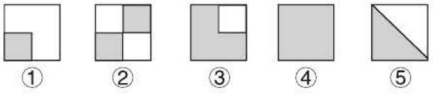


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 如图（1）是由图（2）中的五种基本图形中的两种拼接而成的，则这两种基本图形是（　　）



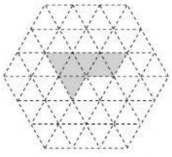
［第 4 题（1）］



［第 4 题（2）］

A. ①⑤　　B. ②④　　C. ③⑤　　D. ②⑤

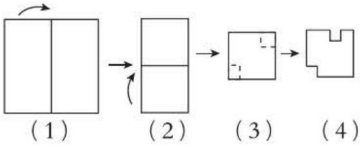
5. ［**中考 · 河北**］如图，在小正三角形组成的网格中，已有 6 个小正三角形涂黑，还需涂黑 n 个小正三角形，使它们与原来涂黑的小正三角形组成的新图案恰有三条对称轴，则 n 的最小值为（　　）



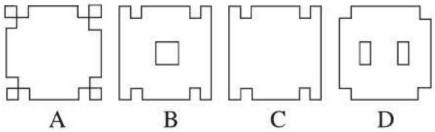
（第 5 题）

A.10　　B.6　　C.3　　D.2

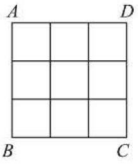
6. 如图，将一张正方形纸片按图（1）（2）的方式依次对折后，再沿图（3）中的虚线剪开，最后将图（4）中的纸片打开铺平，所得到的图案应该是（　　）



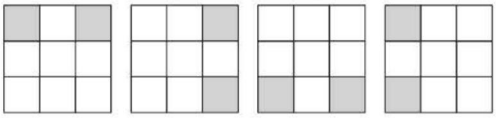
（第 6 题）



7. ［**中考 · 广安**］在数学活动课上，王老师要求学生将如图（1）所示的 3×3 正方形方格纸，剪掉其中两个方格，使之成为轴对称图形. 规定：凡通过旋转能重合的图形视为同一种图形，如图（2）的四幅图就视为同一种设计方案（阴影部分为要剪掉部分）.

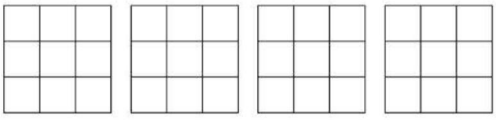


［第 7 题（1）］



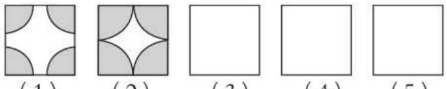
［第 7 题（2）］

请在如图（3）中画出四种不同的设计方案，将每种方案中要剪掉的两个方格涂黑（每个 3×3 的正方形方格画一种，例图除外）



［第 7 题（3）］

8. 为创建绿色校园，学校决定在一块正方形的空地上种植花草，现在向学生征集设计图案. 图案要求只能用圆弧在正方形内加以设计，使正方形和所画的圆弧构成的图案是轴对称图形，种植花草部分用阴影表示，请在图（3）（4）（5）中画出三种不同的设计图案. {提示：在两个图案中，只有半径变化而圆心不变的属于同一种，如图（1）（2）只能算同一种}



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分类讨论思想在等腰三角形中的应用

荣老师告诉你 分类讨论思想是一种重要的思想方法．如果所研究的问题有多种不同的情境，那么我们常常按照一定的标准，把所研究的问题分成若干类，互不包含，没有遗漏，一类一类地解决，然后进行归纳，得到问题的答案．等腰三角形是一种特殊而又十分重要的三角形，就是因为这种特殊性，因此在求解有关等腰三角形的问题时一定要注意分类讨论．

应用一 ▸ 对顶角和底角的分类讨论

例 1 等腰三角形中有一个角为 36°，它的一条腰上的高与底边的夹角为多少度？

解题秘方：已知等腰三角形的一个角的度数，而不知这个角是顶角还是底角，在解决问题时应分两种情况讨论．

解：若已知的这个角为顶角，则底角为（180° − 36°）÷2=72°，故它的一条腰上的高与底边的夹角为 18°；若已知的这个角为底角，则一条腰上的高与底边的夹角为 54°．因此它的一条腰上的高与底边的夹角为 18°或 54°．

应用二 ▸ 对腰长和底边长的分类讨论

例 2 已知等腰三角形的两边长为 3 和 7，求等腰三角形的周长．

解题秘方：已知等腰三角形的两边长，但不知道哪个是底边长，哪个是腰长，因此要分类讨论．

解：当腰长为 3 时，则等腰三角形的三边长为 3，3，7，

因为 3+3<7，

所以不能构成三角形．

当腰长为 7 时，则等腰三角形的三边长为 7，7，3，这三边能构成三角形，

所以等腰三角形的周长为 7+7+3=17.

方法点拨：在解答已知等腰三角形边长的问题时，当题目中没有指明已知的这条边长是腰长还是底边长时，就要分类讨论，从腰长和底边长两种情况去分类．同时运用三角形的三边关系进行辨别取舍．

应用三 ▸ 对等腰三角形从角的角度进行分类讨论

例 3 已知△ ABC 中，$AB=AC$，AB 边的垂直平分线与 AC 所在的直线相交成 58°的角，求底角的度数．

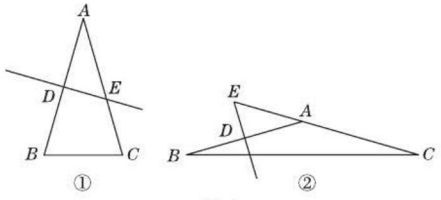


图 1

解题秘方：由题意可知，△ ABC 不可能是直角三角形，可能是锐角三角形或钝角三角形，故分两种情况画图解决．

解：当△ ABC 是锐角三角形时，如图 1 ①，AB 边的垂直平分线与 AC 交于点 E，与 AB 交于点 D，∠ AED=58°．

则∠ A=32°，

所以∠ B= ∠ C=74°．

当△ ABC 为钝角三角形时，如图 1 ②，AB 边的垂直平分线与 CA 的延长线交于点 E，与 AB 交于点 D，∠ AED=58°．

则∠ DAE=32°，

所以∠ B= ∠ C=16°．

综上可知，底角为 74°或 16°．

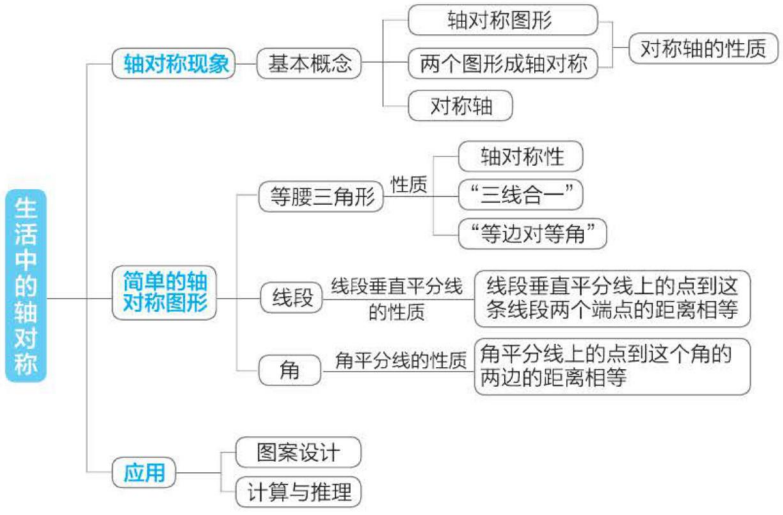
方法点拨：根据等腰三角形的顶角的度数，可以将等腰三角形分为锐角等腰三角形、直角等腰三角形和钝角等腰三角形．不同类型的等腰三角形其边上的高线或垂直平分线的交点位置不同．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 成轴对称和轴对称图形之间的区别与联系.

区别：成轴对称是两个图形的位置关系，轴对称图形是某一个图形具有轴对称这一特征.

联系：把成轴对称的两个图形看成一个图形时是轴对称图形；将轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条对称轴成轴对称.

2. **轴对称和轴对称图形的性质**：①任何一对对应点的连线被对称轴垂直平分；②对应线段相等；③对应角相等；利用轴对称的性质可以分析轴对称图案和设计轴对称图案.

3. 等腰三角形是一个轴对称图形，根据轴对称性可得出等腰三角形的性质：①“三线合一”；②“等边对等角”.

4. 线段是一个轴对称图形，线段的垂直平分线是线段的对称轴，线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

5. 角是一个轴对称图形，角平分线所在的直线是角的对称轴，角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

知识方法专题

知识必学

专题一 轴对称图形的识别

链接中考» 轴对称图形识别的关键是要抓住轴对称图形的特征，题目中的图形都是来源于身边的生活中，主要让学生感受图形的重要性.它是中考的热门考点，考查的形式以选择题为主.

例1 [中考·遵义]如图5-1所示的图形中，是轴对称图形的是(　　)

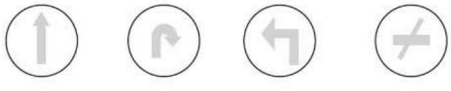


图5-1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据轴对称图形的定义想象是否能找到一条直线、再沿这条直线折叠后折线两旁的部分能够完全重合.

答案：A

方法点拨：如果一个平面图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.例如等腰三角形、正方形、等边三角形、等腰梯形、圆和正多边形都是轴对称图形.轴对称图形的对称轴可以有一条，也可以有多条，甚至无数条.

专题二 等腰三角形的性质

链接中考» 等腰三角形的性质从根本上体现了“线段相等”与“角相等”之间的相互转化，等腰三角形“三线合一”的性质应用相当广泛，是中考的热门考点，多以填空题、选择题的形式出现.

例2 [中考·北京]如图5-2，在△ABC中，$AB=AC$，AD是BC边上的中线，$BE\perp AC$于点E.试说明：$\angle CBE=\angle BAD$.

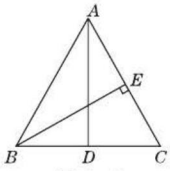


图5-2

解题秘方：利用等腰三角形的性质转化角，使要说明的两个角建立等量关系.

解：方法一 因为$AB=AC$，所以△ABC是等腰三角形.因为AD是BC边上的中线，所以$AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD$.所以$\angle CAD+\angle C=90^\circ$.因为$BE\perp AC$，所以$\angle CBE+\angle C=90^\circ$.所以$\angle CBE=\angle CAD$.所以$\angle CBE=\angle BAD$.

方法二 因为$AB=AC$，所以$\angle ABC=\angle C$.又因为AD是BC边上的中线，所以$AD\perp BC$.所以$\angle BAD+\angle ABC=90^\circ$.因为$BE\perp AC$，所以$\angle CBE+\angle C=90^\circ$.

所以$\angle CBE=\angle BAD$.

方法点拨：说明两个角相等时，若两个角在同一个三角形中，利用“等边对等角”；若两个角在两个三角形中，可以说明两个三角形全等；也可以利用相等的中间角进行转化，如同角或等角的余角（补角）相等.

专题三 线段的垂直平分线

链接中考» 由线段的垂直平分线可以得到两条线段相等，多与三角形结合，实现边的转化，还能构成等腰三角形，利用等腰三角形的性质解决问题.单独考查时，一般以填空题、选择题的形式出现，与等腰三角形的性质综合考查，多以解答题的形式出现.

例3 [中考·来宾]如图5-3，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=100^\circ$，AB的垂直平分线DE分别交AB，BC于点D，E，则$\angle BAE$等于(　　)

A. 80°　　B. 60°

C. 50°　　D. 40°

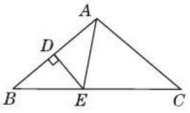


图5-3

解题秘方：利用线段的垂直平分线的性质得到线段相等，再将线段相等转化为角相等，进而求角的度数.

解：因为$AB=AC$，$\angle BAC=100^\circ$，

所以$\angle B=\angle C=(180^\circ-100^\circ)\div2=40^\circ$.

因为AB的垂直平分线DE分别交AB，BC于点D，E，所以$AE=BE$.

所以$\angle BAE=\angle B=40^\circ$.

答案：D

方法点拨：线段的垂直平分线的性质揭示两条线段相等，结合等腰三角形的性质可转化说明角相等，为求角的度数提供了思路.

专题四 角平分线的性质

链接中考» 角平分线的性质与点到直线的距离有关，主要考查应用性质求线段的长，或与线段的垂直平分线的性质综合考查，一般多以填空题、选择题的形式出现.

例4 [中考·来宾]如图5-4，在△ABC中，CD平分$\angle ACB$交AB于点D，$DE\perp AC$于点E，$DF\perp BC$于点F，且$BC=4$，$DE=2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则△ BCD 的面积是_____.

解题秘方：先利用角平分线的性质求出 DF 的长度，再根据三角形的面积公式求出△ BCD 的面积.

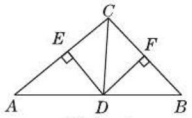


图 5-4

解：因为 CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp BC$ 于点 F，且 $DE=2$，所以 $DF=2$.

所以△ BCD 的面积为 $2\times4\div2=4$.

答案：4

方法必会

专题五 方程思想

专题解读» 方程思想是指在求解数学题时，从题中已知量和未知量之间的关系入手，找出等量关系，运用数学符号语言将等量关系转化成方程，再通过解方程使问题得到解决. 本章中等腰(等边)三角形的内角、边长都存在特殊关系，因此，在求等腰(等边)三角形的内角的度数或边的长度时，常需要通过设未知数列方程的方法来解决.

例 5 [中考·南通]如图 5-5，△ ABC 中，D 是 BC 上一点，$AC=AD=DB$，$\angle BAC=102°$，则 $\angle ADC=$_____°.

解题秘方：利用等腰三角形的性质建立各个角之间的联系，利用方程建立已知角与未知角之间的等量关系.

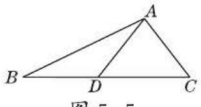


图 5-5

解：因为 $AC=AD=DB$，

所以 $\angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=\angle C$.

设 $\angle B=\angle BAD=x°$，所以 $\angle ADC=2x°$.

所以 $\angle C=2x°$. 所以 $\angle B+\angle C=3x°$.

因为 $\angle BAC=102°$，所以 $\angle B+\angle C=78°$.

所以 $3x=78$，解得 $x=26$. 所以 $\angle ADC=52°$.

答案：52

方法点拨：本题运用了方程思想. 结合等腰三角形中“等边对等角”及三角形的内角和为 180°，通过设未知数列方程的方法解决问题.

专题六 分类讨论思想

专题解读» 等腰三角形是特殊的三角形，它除了具有一般三角形的性质外，还具有自身特有的性质，主要体现在它的两腰相等，两底角相等. 正是因为等腰三角形的特殊性，所以有关等腰三角形的题目在很多情况下的解不唯一. 因此，在计算求解有关等腰三角形的角、边的问题时常需要分类讨论. 分类讨论后还要检验所得结果是否满足题意，不满足题意的要舍去.

例 6 [中考·西宁]等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 20°，则顶角为_____.

解题秘方：根据题意先画图，由于涉及高，所以考虑到高的位置，而腰上的高的位置取决于顶角的类型，故从顶角分类讨论.

解：本题要分情况讨论，分等腰三角形的顶角是钝角和等腰三角形的顶角是锐角两种情况.

当等腰三角形的顶角是钝角时(如图 5-6①)，腰上的高在其外部. 可求得顶角是 110°；当等腰三角形的顶角是锐角时(如图 5-6②)，腰上的高在其内部，可求得顶角是 70°. 综上所述，顶角为 110° 或 70°.

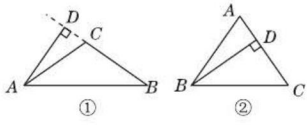


图 5-6

答案：110° 或 70°

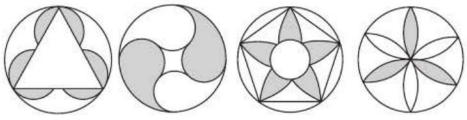
方法点拨：解与等腰三角形腰上的高有关的问题时，以顶角是锐角和顶角是钝角为标准分类，分高在三角形内部和在三角形外部两种情况进行画图计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见241页

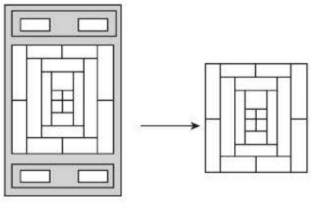
题型1：轴对称图形及性质

1.[中考·苏州]下列四个图案中，不是轴对称图案的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 我国传统建筑中，窗框(如图①)的图案玲珑剔透、千变万化，窗框的一部分如图②所示，它是一个轴对称图形，其对称轴有（　　）

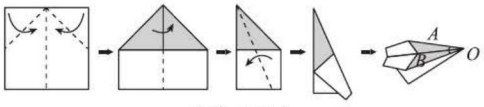


①　　②

（第2题）

A.1条　　B.2条　　C.3条　　D.4条

3.[中考·烟台]小明将一张正方形纸片按如图所示顺序折叠成纸飞机，当机翼展开在同一平面时(机翼间无缝隙)，$\angle AOB$ 等于_____.



（第3题）

题型2：等腰三角形的性质

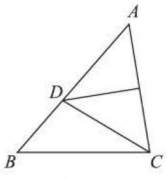
4. 若等腰三角形一条腰上的中线将其周长分为9 cm和12 cm两部分，求这个等腰三角形的底边长和腰长.

5. 已知在等腰△ABC中，$AB=AC$，D是BC边上的一点，连接AD，若△ACD和△ABD都是等腰三角形，你能求出$\angle C$的度数吗?

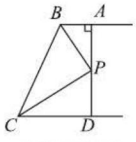
题型3：线段的垂直平分线

6. 如图所示，线段AC的垂直平分线交线段AB于点D，$\angle A=50°$，则$\angle BDC=$（　　）

A.50°　　B.100°　　C.120°　　D.130°



（第6题）



（第7题）

题型4：角的平分线

7.[中考·湖州]如图，$AB//CD$，BP和CP分别平分$\angle ABC$和$\angle DCB$，AD过点P，且与AB垂直.若$AD=8$，则点P到BC的距离是(　　)

A.8　　B.6　　C.4　　D.2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

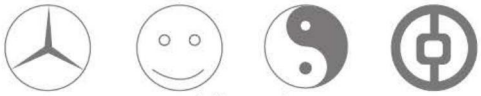
第五章测试卷

答案见242页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下列图形中，轴对称图形有（　　）



（第1题）

A.4个　　B.3个　　C.2个　　D.1个

2. 下列平面图中，有一条对称轴的是（　　）



A　　B　　C　　D

3. 下列说法中错误的是（　　）

A. 两个关于某直线对称的图形一定能够完全重合

B. 对称图形的对称点一定在对称轴的两侧

C. 成轴对称的两个图形，其对应点的连线的垂直平分线是它们的对称轴

D. 平面上两个能够完全重合的图形不一定关于某直线对称

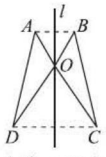
4. 如图，$\triangle AOD$ 关于直线 l 进行轴对称变换后得到 $\triangle BOC$，下列说法中不正确的是（　　）

A. $\angle DAO=\angle CBO$，$\angle ADO=\angle BCO$

B. 直线 l 垂直平分 AB，CD

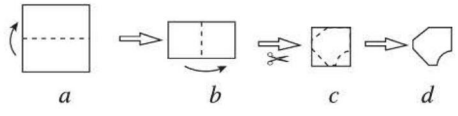
C. $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 均是等腰三角形

D. $AD=BC$，$OD=OC$



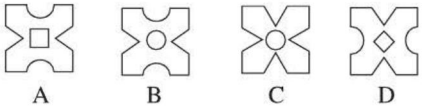
（第4题）

5. 如图，将一个正方形纸片依次按图 a，图 b 的方式对折，然后沿图 c 中的虚线裁剪，最后将图 d 中的纸片再展开铺平，所得到的图案是（　　）



a　　b　　c　　d

（第5题）

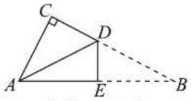


A　　B　　C　　D

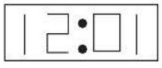
6. 如图，有一张直角三角形纸片，两直角边 $AC=5$ cm，$BC=10$ cm，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，折痕为 DE，则 $\triangle ACD$ 的周长为（　　）

A.10 cm　　B.12 cm

C.15 cm　　D.20 cm



（第6题）



（第7题）

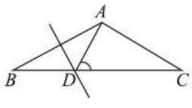
7. 如图是小明在平面镜里看到的电子钟示数，这时的实际时间是（　　）

A.12：01　　B.10：51

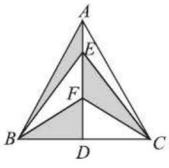
C.10：21　　D.15：10

8. 如图，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，AB 的垂直平分线交 BC 于点 D，那么 $\angle DAC$ 为（　　）

A.90°　　B. 80°　　C. 70°　　D. 60°



（第8题）



（第11题）

二、填空题（每题4分，共16分）

9. 已知等腰三角形的顶角是底角的4倍，则顶角为_____.

10. 汉字是世界上最古老的文字之一，字形结构体现人类追求均衡对称、和谐稳定的天性. 如“王、中、田”，请你再举出三个可以看成是轴对称图形的汉字_____.（笔画的粗细和书写的字体可忽略不记）

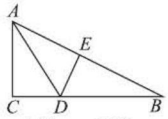
11. 如图，AD 是三角形 ABC 的对称轴，点 E，F 是 AD 上的两点，若 $BD=2$，$AD=3$，则图中阴影部分的面积是_____.

12. 从汽车的后视镜中看见某车车牌的后5位号码是 ，则该车车牌的后5位号码实际是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

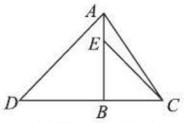
三、**解答题**（共52分）

13.（10分）如图，在△ABC中，∠C=90°，AD平分∠BAC，$DE\perp AB$于E，如果DE=5 cm，∠CAD=32°，求CD的长度及∠B的度数.



（第13题）

14.（10分）如图，已知$AB\perp CD$，△ABD，△BCE都是等腰三角形，如果CD=8 cm，BE=3 cm. 求AE的长.



（第14题）

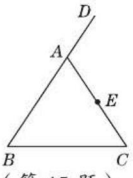
15.（10分）**[中考·山西]** 如图，在△ABC中，AB=AC，D是BA延长线上的一点，点E是AC的中点

（1）实践与操作：利用尺规按下列要求作图，并在图中标明相应字母（保留作图痕迹，不写作法）.

①作∠DAC的平分线AM；

②连接BE并延长，交AM于点F.

（2）猜想与说明：试猜想AF与BC有怎样的位置关系和数量关系，并说明理由.

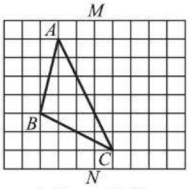


（第15题）

16.（10分）如图，在正方形网格上有一个△ABC.

（1）画△ABC关于直线MN的对称图形（不写画法）；

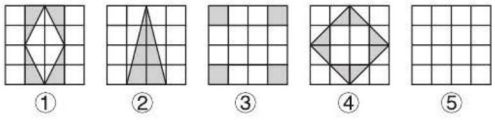
（2）若网格上的每个小正方形的边长为1，求△ABC的面积.



（第16题）

17.（12分）（1）观察图①～④中阴影部分构成的图案，请写出这四个图案都具有的两个共同特征；

（2）借助图⑤的网格，请设计一个新的图案，使该图案同时具有你在解答（1）中所写出的两个共同特征.（注意：新图案与图①～④中的图案不能重合）.



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

揭秘事件的公平性

揭秘事件的公平性











第六章 概率初步

核心考点

你将见到的

- 随机事件
- 事件的可能性
- 频率与概率
- 等可能事件的概率

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 面积法
- 公式法
- 方程思想
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 感受可能性

核心知识

- 必然事件
- 不可能事件
- 随机事件
- 事件发生的可能性

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 事件的认识

1. 事件的类型

事件的类型	定义	举例
必然事件	在一定条件下进行重复试验时，有些事情我们事先能肯定它一定发生，这些事情称为必然事件	在一个只装有红球的袋中摸球，摸出红球
不可能事件	在一定条件下进行重复试验时，有些事情我们事先能肯定它一定不会发生，这些事情称为不可能事件	在一个只装有红球的袋中摸球，摸出白球
随机事件	在一定条件下进行重复试验时，有些事情我们事先无法肯定它会不会发生，这些事情称为随机事件	在一个装有红球和白球的袋中摸球，摸出红球

2. “一定条件下”的意义


事件的判断

必然事件、不可能事件、随机事件的定义中所说的“一定条件下”是指试验在相同的条件下进行，不同的条件下可能会导致不同的事件归类. 如标准大气压下，水加热到 100℃沸腾是必然事件，但当大气压高于标准大气压时，水的沸点提高，水加热到 100℃沸腾就不是必然事件了.

提分·必记

特别提醒

1. 必然事件和不可能事件在事件发生前是可以预知结果的，即事件的发生或不发生是能确定的.
2. 随机事件在事件发生前是不能预知结果的，也称为“偶然性事件”.
3. 一般地，描述真理或者客观存在的事实的事件是必然事件；描述违背真理或者客观存在的事实的事件是不可能事件.

拔考向▸利用事件的定义识别事件的类型

例 1 指出下列事件中，哪些是必然事件？哪些是随机事件？哪些是不可能事件？

（1）掷一枚硬币，正面朝上；

（2）买一张彩票，中一百万元；

（3）$x^2+1>0$；

（4）任意买一张电影票，座位号是双号；

（5）向空中抛一枚硬币，硬币不向地面掉落.

解题秘方：判断一个事件的类型时，要看所给的事件是否可能发生以及可能发生的情况是否唯一.

解：（3）是必然事件；（5）是不可能事件；（1）（2）（4）是随机事件.

提分·秘诀

解法提醒

判断一个事件的类型的方法：要从其定义出发，同时也要联系理论及生活的相关常识来判断. 注意必然事件和不可能事件都是事先可以确定的，一定发生的是必然事件，一定不发生的是不可能事件，否则就是随机事件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ② 事件发生的可能性

1. 一般地，随机事件发生的可能性是有大小的，不同的随机事件发生的可能性的大小有可能不同.

2. 事件发生的可能性

（1）必然事件：试验中必然发生的事件，其发生的可能性为100%或1；

（2）不可能事件：试验中不可能发生的事件，其发生的可能性为0；

（3）随机事件：试验中可能发生也可能不发生的事件，其发生的可能性介于0和1之间.

3. 描述随机事件发生的可能性大小的常用语 “可能性极小”“不大可能”“可能”“很可能”“可能性极大”等.

拔考向 利用随机事件发生的可能性的意义判断事件发生的可能性的大小

例2 一个不透明的口袋中有7个红球、5个黄球、4个绿球，这些球除颜色外没有其他区别，现从中任意摸出1个球.

（1）你认为摸到哪种颜色的球的可能性最大？

（2）如果要使摸到绿球的可能性最大，那么需要在这个口袋中至少再放入多少个绿球？请简要说明理由.

解题秘方：口袋中哪种颜色的球最多，则摸到哪种颜色的球的可能性最大.

解：（1）摸到红球的可能性最大.

（2）至少再放入4个绿球.

理由：当绿球的数量最多时，摸到绿球的可能性最大，因为原来口袋中红球的数量最多，有7个，所以至少再放入4个绿球.

提分·必记

方法点拨

判断随机事件发生的可能性的大小的方法：

1. 先要准确地找出所有可能出现的结果数，
2. 分情况，看每种情况包含的结果数与所有可能出现的结果数的比例大小. 比例越大，则这种情况发生的可能性越大；比例越小，则这种情况发生的可能性越小.

提分·秘诀

警示误区

要使摸到绿球的可能性最大，应保证口袋中绿球的数量最多，所以至少再放入4个绿球，此处容易错误地认为至少再放入3个绿球，当放入3个绿球时，红球和绿球一样多，此时摸到绿球的可能性与摸到红球的可能性一样大，并不是摸到绿球的可能性最大.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 ① 利用事件可能出现的结果判断可能性的大小

例3 一个小球在如图6-1-1的地面上随意滚动，小球停在黑色方格上与停在白色方格上的可能性哪个大？（每个方格除颜色外完全一样）

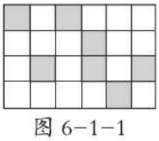


图6-1-1

解题秘方：用图中黑白方格的个数判断大小.

解：图中共有7个黑色方格，17个白色方格，故小球停在白色方格上的可能性大.

挑战·高分

解法提醒

要比较两种情况出现的可能性的大小，需明确每种情况的可能性大小. 因为图中各方格的大小相同，故哪种颜色的方格数目多，小球停在哪种颜色的方格上的可能性大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用随机事件发生的可能性设计方案

例4 甲袋内装有99颗黑棋子和1颗白棋子，乙袋内装有49颗白棋子和1颗黑棋子，如果黑、白棋子的质地、大小均相同．问：一次伸手在袋内随机摸1颗棋子，在哪个袋内摸到黑棋子的可能性大？应如何设计袋内的黑、白棋子数，才能使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大？

解题秘方：用黑棋子数与黑、白棋子的总数的比来比较可能性的大小．

解：在甲袋内摸到黑棋子的可能性大．

要使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大，只需将袋内放置的黑、白棋子数一样多．

挑战·高分

方法提醒

判断事件A发生的可能性的大小需要明确两点：

- 事件A包含的可能结果数（即事件A包含多少种可能情况）；
- 所有可能的结果数（即一共有多少种可能情况）．它们的比值大小就反映了事件A发生的可能性的大小，这个比值就是我们后面讲到的概率．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要内容是识别事件的类型及随机事件发生的可能性的大小．在中考中，认识事件的类型一般单独考查，多以选择题和填空题的形式出现，题目难度较小．随机事件发生的可能性的大小一般渗透到概率（后面将学到）中考查．

三年中考兵法

考法 利用事件的定义识别必然事件

例5 [中考·沈阳]下列事件中，是必然事件的是（　　）

A. 任意买一张电影票，座位号是2的倍数

B. 13个人中至少有2个人生肖相同

C. 车辆随机到达一个路口，遇到红灯

D. 明天一定会下雨

试题评析：本题考查了识别事件的类型，解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念，必然事件是指在一定条件下，一定发生的事件．不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件．随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件．

解：A.“任意买一张电影票，座位号是2的倍数”是随机事件，故此选项错误；

B.“13个人中至少有2个人生肖相同”是必然事件，故此选项正确；

C.“车辆随机到达一个路口，遇到红灯”是随机事件，故此选项错误；

D.“明天一定会下雨”是随机事件，故此选项错误．

答案：B

冲刺·满分

方法提醒

判断一个事件是不可能事件、必然事件还是随机事件时，一般来说，描述已被确定的真理或客观存在的事实的事件是必然事件；描述违背已被确定的真理或客观存在的事实的事件是不可能事件；其他情况均为随机事件．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见243页

1. [中考·齐齐哈尔]下列成语中，表示不可能事件的是（　　）

A. 缘木求鱼　　B. 杀鸡取卵

C. 探囊取物　　D. 日月经天，江河行地

2. 下列说法中不正确的是（　　）

A. 抛掷一枚质地均匀的硬币，硬币落地时正面朝上是随机事件

B. 把4个球放入3个抽屉中，其中1个抽屉中至少有2个球是必然事件

C. 任意打开七年级下册数学教科书，正好是97页是确定事件

D. 一个盒子中有3个白球和6个红球，每个球除了颜色外都相同，如果从中任取1个球，取得红球的可能性大

3. [模拟·环翠]不透明的袋子中装有形状、大小、质地完全相同的6个球，其中2个黑球、4个白球，从袋子中一次摸出3个球，下列事件是不可能事件的是（　　）

A. 摸出的是3个白球

B. 摸出的是3个黑球

C. 摸出的是2个白球、1个黑球

D. 摸出的是2个黑球、1个白球

4. 如图所示是一个可以自由转动的转盘，转动这个转盘后，转出可能性最小的颜色是（　　）



（第4题）

A. 红　　B. 黄　　C. 绿　　D. 不确定

5. 下列事件中哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

（1）太阳从西边落下；

（2）某人的体温是100 ℃；

（3）$a^2+b^2=-1$（其中a，b都是有理数）；

（4）通常水往低处流；

（5）三个人的性别各不相同；

（6）抛掷3枚硬币，全部正面朝上.

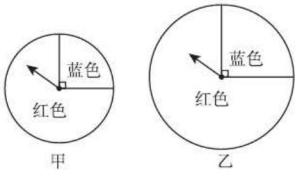
6. 一个袋子里装有20个质地、大小一样的球，其中4个白球、2个红球、3个黑球，其他都是黄球，从中任摸1个球，摸出哪种球的可能性最大？为什么？　　[导学号 7876572]

7. 用力转动如图所示的甲转盘和乙转盘的指针，规定指针落在蓝色区域为成功.

A同学说：“乙转盘大，相应的蓝色区域的面积也大，所以选择乙转盘成功的可能性比较大.”

B同学说：“转盘上只有两种颜色，指针不是停在红色区域就是停在蓝色区域，因此选择两个转盘成功的可能性都是50%.”

你同意这两名同学的说法吗？如果不同意，请你判断选择两个转盘成功的可能性各有多大.



（第7题）

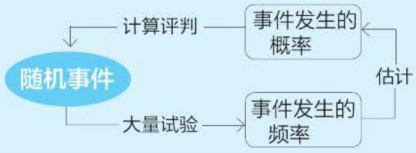
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 频率的稳定性

核心知识

- 频率及其稳定性
- 用频率估计概率

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 频率及其稳定性

1. 频率 在 n 次重复试验中，不确定事件 A 发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率.

2. 频率的稳定性 在大量重复试验的情况下，事件发生的频率都会在一个“常数”附近摆动，这就是频率的稳定性. 随着试验次数的增加，摆动的幅度将会越来越小.

注意：频率在一定程度上可以反映随机事件发生的可能性的大小，但频率本身是随机的，在试验前不能确定，无法从根本上来刻画事件发生的可能性的大小. 在大量重复试验的条件下，频率可以用来近似地反映事件发生的可能性的大小.

提分·必记

特别提醒

1. 频率是一个比值，没有单位.
2. 当试验次数逐渐增加时，频率的波动范围逐渐变小，即频率趋于稳定.

拔考向 利用频率的概念及其稳定性解决试验问题

例 1 一只不透明的袋中装有 4 个质地、大小均相同的小球，这些小球分别标有数字 3，4，5，6. 甲、乙两人每次同时从袋中各随机摸出 1 个小球，并计算摸出的这 2 个小球上的数字之和，记录后都将小球放回袋中搅匀，进行重复试验，试验数据如下表：

摸球总次数	10	20	30	60	90	120	180	240	330	450
“和为 9”出现的次数	2	10	13	24	30	37	58	82	110	150
“和为 9”出现的频率	0.20		0.43	0.40		0.31		0.34	0.33	

（1）请将表中的数据补充完整；

（2）如果试验继续进行下去，根据上表的数据，出现“和为 9”的频率将稳定在_____.

解题秘方：紧扣频率的概念以及频率的稳定性，从表格中提供的数据求出频率及稳定的频率.

答案：（1）0.50；0.33；0.32；0.33 （2）0.33 左右.

提分·秘诀

方法点拨

1. 频率的计算公式：

$$\text{频率}=\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$$

2. 频率是一个比值，一般用小数表示；在取近似值时，精确度与已知提供的频率的精确度保持一致.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 用频率估计概率

1. 概率 我们把刻画事件 A 发生的可能性大小的数值，称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

2. 用频率估计概率

（1）**用频率估计概率**：从长期实践中，人们观察到，对一般的随机事件，在做大量重复试验时，随着试验次数的增加，一个事件出现的频率，总在一个固定数的附近摆动，显示出一定的稳定性. 因此，我们可以通过做大量的重复试验，用一个随机事件发生的频率去估计它的概率.


用频率估计概率

（2）**适用对象**：当试验的所有可能结果不是有限个，或各种结果发生的可能性不相等时，可通过事件发生的频率来估计概率.

（3）**计算方法**：一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定于某个常数 p，那么估计事件 A 发生的概率 $P(A)=p$.

3. 频率与概率的关系

区别：频率是试验值或使用时的统计值，是变化的，概率是理论值，是不变的，频率是概率的一个近似值.

联系：试验次数越多，频率越趋向于概率.

4. 概率的取值范围

（1）必然事件发生的概率为 1；

（2）不可能事件发生的概率为 0；

（3）随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是 0 与 1 之间的一个常数.

提分·必记

特别提醒

1. 试验得出的频率只是概率的估计值.
2. 对一个随机事件 A，用频率估计的概率 P(A) 不可能小于 0，也不可能大于 1.
3. 概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并非在每一次试验中都发生.

技考向▶ 利用频率估计概率解决问题

题型 1：频率与概率的定义在解析频率与概率之间的关系中的应用

例 2 关于频率和概率的关系，下列说法正确的是（　　）

A. 频率等于概率

B. 当试验次数很大时，频率稳定在概率附近

C. 当试验次数很大时，概率稳定在频率附近

D. 试验得到的频率与概率不可能相等

解题秘方：紧扣频率与概率的定义解答.

解：A. 频率只能估计概率；B. 正确；C. 概率是定值；D. 可以相等，如“抛硬币试验”，可得到正面向上的频率为 0.5，与概率相同.

答案：B

提分·秘诀

要点提醒

1. 当试验次数很多时，一个事件发生的频率稳定在相应的概率附近.
2. 频率是通过试验得到的一个数据结果，因试验次数的不同而有所改变，是一个实际的具体值. 概率是一个事件发生的可能性大小的理论值，它不因试验次数的变化而变化，是一个常数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：频率与概率的关系在求概率中的应用

例 3 一粒木质中国象棋子“兵”，它的正面雕刻一个“兵”字，反面是平的，将它从一定高度下掷，落地反弹后可能是“兵”字面朝上，也可能是“兵”字面朝下，由于棋子的两面不均匀，为了估计“兵”字面朝上的概率，某试验小组做了棋子下掷的试验，试验数据如下表：

试验次数	20	40	60	80	100	120	140	160
“兵”字面朝上的次数	14		38	47	52	66	78	88
“兵”字面朝上的频率	0.70	0.45	0.63	0.59		0.55	0.56	

（1）请将上表补充完整；

（2）在图 6-2-1 中画出“兵”字面朝上的频率分布折线图；

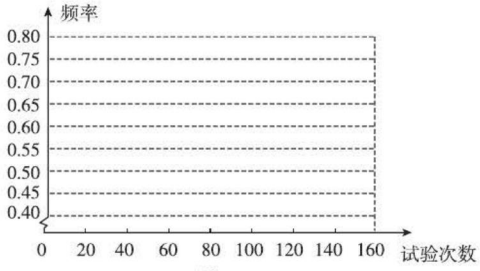


图 6-2-1

（3）如果试验继续进行下去，根据上表的数据，这个试验的频率将稳定在它的概率附近，请你估计这个概率是多少（结果保留小数点后两位）.

解题秘方：先利用频率的定义完成表格、制作频率分布折线图，再利用频率与概率的关系求概率.

解：（1）（横排）18；0.52；0.55

（2）频率分布折线图如图 6-2-2.

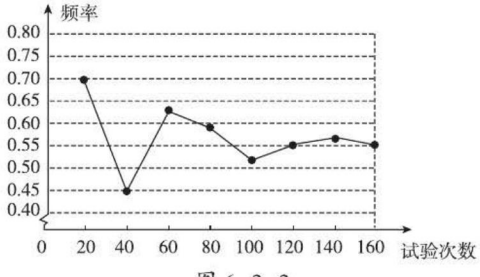


图 6-2-2

（3）随着试验次数的增加，“兵”字面朝上的频率稳定在 0.55 附近，所以估计“兵”字面朝上的概率是 0.55.

解法提醒

用频率估计概率的方法：对于一个随机事件，当试验的所有可能的结果不是有限个，或各种可能发生的结果的可能性不相等时，可以使用大量重复试验得出的频率来估计事件的概率，随着试验次数的增加，表示频率的数据集中趋势指向的那个数值就是事件的概率.

详解

“兵”字面朝上的频率=“兵”字面朝上的次数÷试验次数. 当试验次数是 40 时，“兵”字面朝上的频率是 0.45，所以“兵”字面朝上的次数是 40×0.45=18；当试验次数是 100 时，“兵”字面朝上的次数是 52，所以“兵”字面朝上的频率是 52÷100=0.52；当试验次数是 160 时，“兵”字面朝上的次数是 88，所以“兵”字面朝上的频率是 88÷160=0.55.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用频率估计试验对象的数量

例 4 4 件同型号的产品中，有 1 件不合格品和 3 件合格品．在这 4 件产品中加入 x 件合格品后，进行如下试验：随机抽取 1 件进行检测，然后放回，多次重复这个试验．通过大量重复试验后发现，抽到合格品的频率稳定在 0.95，则可以推算出 x 的值大约是多少？

解题秘方：利用频率与概率的关系，列方程求试验对象的个数．

解：由题意，得 $\frac{3+x}{4+x}\approx 0.95$，解得 $x\approx 16$.

所以 x 的值大约是 16.

解题通法：根据频率确定试验对象数量时，先用频率的稳定值估计出事件的概率，再根据概率的计算方法列出方程求解．

挑战·高分

要点提醒

解答此类题的关键是理解频率与概率的关系，明确在大量重复试验中，可以用频率估计概率．本题中通过大量重复试验发现，抽到合格品的频率稳定在 0.95，所以估计抽到合格品的概率是 0.95.

拔尖角度 2 利用频率估计概率解应用题

例 5 小红和小明在操场上做游戏，先在地上画了半径为 2 m 和 3 m 的同心圆，如图 6-2-3 ①，他们蒙上眼在一定距离外向圆内掷石子，落在阴影内小红胜，落在小圆内小明胜．

（1）你认为游戏公平吗？为什么？

（2）游戏结束后，小明边走边想："能否用频率估计概率的方法来估算非规则图形的面积呢？"他发现地上有一个不规则的封闭图形 ABC，如图 6-2-3 ②，为了知道它的面积，小明在封闭图形内画了一个半径为 1 m 的圆，在不远处向封闭圆形内掷石子，且记录如下：

掷石子的次数	50	150	300
石子落在圆内的次数 m	14	43	93
石子落在阴影部分的次数 n	29	85	186

你能帮小明估计出封闭图形的面积吗？

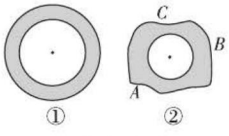


图 6-2-3

解题秘方：（1）用面积的大小说明游戏的公平性；

（2）用试验频数的比说明（估计）其面积的比．

挑战·高分

活学巧记

机会不等求概率，
要用频率去估计．
大量试验估定值，
接近常数是概率．

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解：（1）游戏不公平，理由如下：

因为 $S_{小圆}=\pi\times2^2=4\pi$（m^2），

$S_{阴影}=\pi\times3^2-\pi\times2^2=5\pi$（$m^2$），

所以 $S_{阴影}\neq S_{小圆}$.

所以游戏不公平.

（2）由统计表看出 m 与 n 的比约为 1 ∶ 2，即 m ∶ $n\approx1$ ∶ 2.

所以圆的面积与封闭图形 ABC 的面积之比约为 1 ∶ 3.

因为圆的面积为 $\pi\times1^2=\pi$（m^2），

所以封闭图形 ABC 的面积约为 $3\pi m^2$.

拔尖角度▸ 3 利用频率估计概率解综合问题

例 6 如图 6-2-4，均匀的正四面体的各面依次标有 1，2，3，4 四个数字，小明做了 60 次投掷试验，结果统计如下：

朝下数字	1	2	3	4
出现的次数	16	20	14	10

（1）计算上述试验中“4 朝下”的频率是_____；

（2）“根据试验结果，投掷一次正四面体，出现 2 朝下的概率是$\frac{1}{3}$”的说法正确吗？为什么？

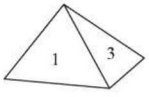


图 6-2-4

解题秘方：（1）由“频率 = 频数 ÷ 试验次数”算出频率；

（2）当试验的次数很大时，事件发生的频率才会稳定在相应的事件发生的概率附近.

解：（1）$\frac{1}{6}$ “4 朝下”的频率 $=\frac{\text{“4 朝下”的次数}}{\text{试验次数}}=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$.

（2）这种说法是错误的.

在 60 次试验中，“2 朝下”的频率为 $\frac{1}{3}$ 并不能说明“2 朝下”这一事件发生的概率为 $\frac{1}{3}$. 只有当试验的次数很大时，事件发生的频率才会稳定在相应的事件发生的概率附近.

挑战·高分

特别提醒

第（1）问中，所求的是“4 朝下”的频率，可以直接使用频率公式计算.

第（2）问中，涉及的是“2 朝下”的概率，频率不能等同于概率，即使在大量重复试验中，也只能用频率去估计概率，频率是永远不能取代概率的，进行了 60 次投掷试验，“2 朝下”20 次，所以“2 朝下”的频率是 $\frac{1}{3}$，不能误认为“2 朝下”的概率是 $\frac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考探秘 本节的主要考点是用频率估计概率，多以填空题和选择题的形式出现，难度较低.

三年中考兵法

考法 1 利用频率与概率的关系说明统计图的信息

例 7 [中考·呼和浩特]某学习小组做“用频率估计概率”的试验时，统计了某一结果出现的频率，绘制了如图 6-2-5 的折线统计图，则符合这一结果的试验最有可能是（　　）

A. 袋中装有大小和质地都相同的 3 个红球和 2 个黄球，从中随机取一个球，取到红球

B. 掷一枚质地均匀的正六面体骰子，向上的面的点数是偶数

C. 先后两次掷一枚质地均匀的硬币，两次都出现反面

D. 先后两次掷一枚质地均匀的正六面体骰子，两次向上的面的点数之和是 7 或超过 9

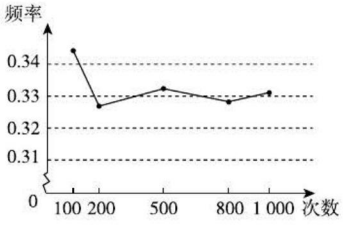


图 6-2-5

试题评析：本题考查利用频率估计概率，解答本题的关键是利用频率与概率的关系正确求出各试验的概率.

解：A. 袋中装有大小和质地都相同的 3 个红球和 2 个黄球，从中随机取一个球，取到红球的概率为$\frac{3}{5}$，不符合题意；

B. 掷一枚质地均匀的正六面体骰子，向上的面的点数是偶数的概率为$\frac{1}{2}$，不符合题意；

C. 先后两次掷一枚质地均匀的硬币，两次都出现反面的概率为$\frac{1}{4}$，不符合题意；

D. 先后两次掷一枚质地均匀的正六面体骰子，两次向上的面的点数之和是 7 或超过 9 的概率为$\frac{1}{3}$，符合题意.

答案：D

冲刺·满分

解法提醒

根据统计图可知，这一结果出现的频率在 0.33 附近波动，即其概率 $P \approx 0.33$，计算四个选项的概率，约为 0.33 的即为正确选项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用频率估计概率解实际问题

例 8 [中考·自贡]某校研究学生的课余爱好情况，采取抽样调查的方法，从阅读、运动、娱乐、上网等四个方面调查了若干名学生的兴趣爱好，并将调查结果绘制成下面两幅不完整的统计图（如图 6-2-6），请你根据图中提供的信息解答下列问题：

某校部分学生兴趣爱好情况条形统计图　　某校部分学生兴趣爱好情况扇形统计图



图 6-2-6

（1）在这次调查中，一共调查了_____名学生；

（2）补全条形统计图；

（3）若该校共有 1 500 名学生，估计爱好运动的学生有____名；

（4）在全校学生中随机选取一名学生参加演讲比赛，用频率估计概率，则选出的恰好是爱好阅读的学生的概率是_____.

试题评析：本题考查统计与概率，从两幅统计图中获取有用信息是解题的关键，属于中等题型.

解：（1）因为爱好运动的学生有 40 名，所占的百分比为 40%，

所以一共调查了 40÷40%=100（名）学生.

（2）因为爱好上网的学生所占的百分比为 10%，

所以爱好上网的学生有 100×10%=10（名），

爱好阅读的学生有 100−40−20−10=30（名），

补全条形统计图，如图 6-2-7.

某校部分学生兴趣爱好情况条形统计图

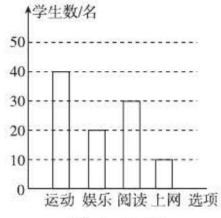


图 6-2-7

（3）因为爱好运动的学生所占的百分比为 40%，

所以估计爱好运动的学生有 1 500×40%=600（名）.

（4）易知爱好阅读的学生所占的百分比为 30%，

所以用频率估计概率，则选出的恰好是爱好阅读的学生的概率为 $\frac{3}{10}$.

答案：（1）100　（3）600　（4）$\frac{3}{10}$

解法提醒

1. 根据爱好运动的学生所占的百分比，以及爱好运动的学生数即可求出一共调查的学生数；
2. 根据两幅统计图即可求出爱好阅读的学生数以及爱好上网的学生数，从而可补全条形统计图；
3. 利用爱好运动的学生所占的百分比即可估计爱好运动的学生数；
4. 根据爱好阅读的学生所占的百分比即可估计选出的恰好是爱好阅读的学生的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

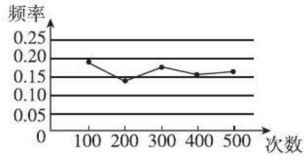
两年模拟兵法 ☞答案见243页

1. [中考·兰州]一个不透明的盒子里有 n 个除颜色外其他完全相同的小球，其中有9个黄球，任意摸出1个球记下颜色后再放回盒子（每次摸球前先将盒子里的球摇匀），通过大量重复摸球试验后发现，摸到黄球的频率稳定在30%，那么估计盒子中有（　　）个小球.

A. 20　　B. 24

C. 28　　D. 30

2. [模拟·江宁]某小组在“用频率估计概率”的试验中，统计了某种结果出现的频率，绘制了如图所示的折线图，那么符合这一结果的试验最有可能的是（　　）



（第2题）

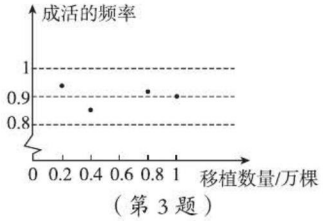
A. 在“石头、剪刀、布”的游戏中，小明随机出的是“剪刀”

B. 袋子中有1个红球和2个黄球，它们只有颜色上的区别，从中随机地取出1个球是黄球

C. 掷一枚质地均匀的硬币，落地时结果是“正面向上”

D. 掷一个质地均匀的正六面体骰子，落地时面朝上的点数是6

3. 某地区林业局要考察一种树苗移植的成活率，对该地区这种树苗移植成活情况进行调查统计，并绘制了如图所示的统计图，根据统计图提供的信息解决下列问题：



（第3题）

（1）这种树苗成活的频率稳定在_____，成活的概率估计值为_____；（结果保留小数点后一位）

（2）该地区已经移植这种树苗5万棵.

①估计这种树苗成活_____万棵；

②如果该地区计划成活18万棵这种树苗，那么还需移植这种树苗约多少万棵?

4. 小颖有20张大小相同的卡片，上面写有1~20这20个数，她把卡片放在一个盒中搅匀，从盒中随机抽出1张卡片，记下数后放回，不断重复上述过程，记录结果如下：

试验次数	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
3的倍数的频数	5	13	17	26	32	36	39	49	55	61
3的倍数的频率										

（1）请补全表格（结果保留小数点后两位）；

（2）随着试验次数的增加，频率稳定于什么值附近?（结果保留小数点后两位）

（3）从试验数据看，从盒中随机抽出1张卡片是3的倍数的概率约是多少?（结果保留小数点后两位）

（4）根据推理计算可知，从盒中随机抽出1张卡片是3的倍数的概率应该是多少?

[导学号 7876572]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 等可能事件的概率

核心知识
- 等可能事件发生的概率
- 游戏的公平性
- 几何图形的概率

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 等可能事件的概率

1. 等可能事件

设一个试验的所有可能的结果有 n 种，每次试验有且只有其中的一种结果出现．如果每种结果出现的可能性相同，那么我们就称这个试验的结果是等可能的．


概率公式

2. 概率公式

一般地，如果一个试验有 n 种等可能的结果，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

提分·必记

特别提醒

使用概率公式计算的试验需具有以下特点：

1. 每一次试验中，可能出现的结果是有限的；
2. 每一次试验中，各种结果出现的可能性相等；
3. 随机事件的概率从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小，概率是一个常数，不会受重复试验结果的影响．
4. 概率大，并不能说明事件 A 一定发生；反之概率小，并不能说明事件 A 一定不发生．
5. 同一事件，发生的概率和不发生的概率之和为 1.

拨考向 利用概率的有关概念解概率问题

题型 1：概率的定义在解释所给说法意义的应用

例 1 [中考·衡阳]已知抛一枚均匀硬币正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$，下列说法错误的是（　　）

A. 连续抛一枚均匀硬币 2 次必有 1 次正面朝上

B. 连续抛一枚均匀硬币 10 次都可能正面朝上

C. 大量反复抛一枚均匀硬币，平均每 100 次有 50 次正面朝上

D. 通过抛一枚均匀硬币确定谁先发球的比赛规则是公平的

解题秘方：紧扣概率定义进行说明．

解：A. 连续抛一枚均匀硬币 2 次，有可能 1 次正面朝上，也可能 2 次都正面朝上，还可能都反面朝上，故 A 说法错误；

B. 连续抛一枚均匀硬币 10 次都可能正面朝上，是一个随机事件，有可能发生，故 B 说法正确；

C. 大量反复抛一枚均匀硬币，平均每 100 次有 50 次正面朝上，有可能发生，故 C 说法正确；

D. 通过抛一枚均匀硬币确定谁先发球的比赛规则是公平的，概率均为 $\frac{1}{2}$，故 D 说法正确．

答案：A

提分·秘诀

特别提醒

概率是反映事件发生机会的大小的概念，只是表示发生的机会的大小，机会大也不一定发生，机会小也有可能发生．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：概率公式在求事件发生概率中的应用

例 2 ［中考·南京］甲口袋中有 2 个白球、1 个红球，乙口袋中有 1 个白球、1 个红球，这些球除颜色外无其他差别，分别从每个口袋中随机摸出 1 个球.

（1）求摸出的 2 个球都是白球的概率.

（2）下列事件中，概率最大的是（　　）

A. 摸出的 2 个球颜色相同

B. 摸出的 2 个球颜色不相同

C. 摸出的 2 个球中至少有 1 个红球

D. 摸出的 2 个球中至少有 1 个白球

解题秘方：紧扣概率公式“所求事件包含的结果数与所有可能的结果数的比”进行计算，比较求解.

解：（1）把甲口袋中的 2 个白球、1 个红球分别记为白$_1$，白$_2$，红$_1$，乙口袋中的 1 个白球、1 个红球分别记为白$_3$，红$_2$，分别从每个口袋中随机摸出 1 个球，共有 6 种等可能的结果，分别为（白$_1$，白$_3$），（白$_1$，红$_2$），（白$_2$，白$_3$），（白$_2$，红$_2$），（红$_1$，白$_3$），（红$_1$，红$_2$），其中摸出的 2 个球都是白球的结果有 2 种，

所以 P（摸出的 2 个球都是白球）$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

（2）P（摸出的 2 个球颜色相同）$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

P（摸出的 2 个球颜色不相同）$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

P（摸出的 2 个球中至少有 1 个红球）$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

P（摸出的 2 个球中至少有 1 个白球）$=\frac{5}{6}$.

答案：D

解题通法

利用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 直接计算概率需要满足两个条件：一是所有可能出现的结果是有限个；二是每种结果出现的可能性相同. 求等可能事件的概率时，首先求出所有可能的结果数 n 和所求事件 A 包含的结果数 m，再运用概率公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 计算出所求事件 A 发生的概率.

知识 2 游戏的公平性

1. 游戏公平性的含义　游戏对双方公平是指双方获胜的可能性相等，即若游戏双方获胜的概率相等，则游戏对双方公平；否则，游戏对双方不公平.

2. 在设计游戏时，必须保证游戏中各类事件的发生都具有等可能性，即试验中，如果总设计有 n 种可能的结果，且每种结果发生的可能性都相等，即机会相等，那么每种结果发生的概率均为 $\frac{1}{n}$.

提分·必记

特别提醒

游戏对双方公平，并不是指每方获胜的概率必是 $\frac{1}{2}$，而是指只要获胜的概率相等即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用计算概率判断游戏的公平性

例 3 小樱和小贝一起做游戏：在一个不透明的袋子中放有 4 个红球和 3 个蓝球（这些球除颜色外均相同），从袋子中随机摸出 1 个球，摸到红球小樱获胜，摸到蓝球小贝获胜．这个游戏对双方公平吗？为什么？

解题秘方： 判断游戏是否公平，关键是看双方在游戏中获胜的概率是否相等．

解： 不公平．理由如下：

因为袋子中放有 4 个红球和 3 个蓝球，即 7 个球，

所以 P（小樱获胜）$=\frac{4}{7}$，P（小贝获胜）$=\frac{3}{7}$．

又因为 $\frac{4}{7}\neq\frac{3}{7}$，所以游戏对双方不公平．

提分·秘诀

方法点拨

判断游戏是否公平的方法：

1. 看游戏所出现的结果的两种情况中有没有必然事件或不可能事件，若有一个为必然事件或不可能事件，则游戏是不公平的；
2. 如果两个事件都为随机事件，那么要看这两个事件发生的可能性是否相等，只有双方获胜的可能性相等，游戏才是公平的．

知识▶3 概率的应用

1. 几何图形中的概率

设某个几何图形的面积为 S，其中事件 A 发生所在区域的面积为 S'，由于对这个几何图形内的每个点，事件发生的可能性是相等的，因此我们可以得到事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{S'}{S}$．

2. 计算简单事件的概率的主要类型

（1）**个数类型：** 如摸球、掷骰子等可以表示出所有可能出现的结果；

（2）**面积类型：** 如果随机试验是向 S 区域内掷一点，那么掷在区域 S'（S' 在 S 内）内的概率 $P=\frac{S'\text{的面积}}{S\text{的面积}}$．

提分·必记

特别提醒

当 S 区域内各个区域的面积都相等时，则面积类型可转化为个数类型来进行概率计算．

考向▶利用概率的计算公式求几何问题的概率

题型 1：面积类型概率公式在求概率中的应用

例 4 ［中考·随州］正方形 $ABCD$ 的边长为 2，以各边为直径在正方形内画半圆，得到如图 6-3-1 的阴影部分，若随机向正方形 $ABCD$ 内投一粒米，则米粒落在阴影部分的概率为（　　）

A. $\frac{\pi-2}{2}$　　B. $\frac{\pi-2}{4}$

C. $\frac{\pi-2}{8}$　　D. $\frac{\pi-2}{16}$

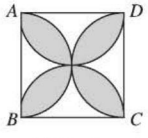


图 6-3-1

解题秘方： 紧扣各区域的面积是否完全相等选择公式类型．

解： 因为正方形 $ABCD$ 的面积为 4，阴影部分的面积为四个半圆的面积之和与正方形 $ABCD$ 的面积之差，即 $4\times\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{2}{2}\right)^2-4=2\pi-4$，所以米粒落在阴影部分的概率为 $\frac{2\pi-4}{4}=\frac{\pi-2}{2}$．

答案： A

提分·秘诀

特别提醒

当事件出现的可能结果不能用数量来表示时，往往采用 $P(A)=\frac{S'}{S}$ 来计算事件 A 发生的概率．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：个数类型概率公式在求几何问题中的应用

例 5 如图 6-3-2 的六边形广场由 6 个大小完全相同的黑色和白色正三角形组成，一只小鸟在广场上随机停留，刚好落在黑色正三角形区域的概率为_____.

解题秘方： 共有 6 个正三角形，小鸟落在每个正三角形上的可能性相等.

解： 因为小鸟落在每个正三角形上的可能性相等，共有 6 种等可能的结果，其中落在黑色正三角形区域的结果有 2 种，所以刚好落在黑色正三角形区域的概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

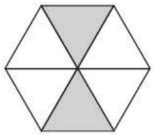


图 6-3-2

答案： $\frac{1}{3}$

解法提醒

只要事件的各种结果出现的可能性相等，且所有可能出现的结果数有限，都可用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求事件 A 的概率.

当无法用个数量化时，也可用 $P(A)=\frac{S'}{S}$ 求事件 A 的概率.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用公式法解概率问题的实际应用

挑战·高分

例 6 元旦将至，某商场为了吸引顾客，设计了可以自由转动的转盘（如图 6-3-3，转盘被等分为 20 份），并规定：顾客每购买 200 元的商品，就能获得一次转动转盘的机会，如果转盘停止后，指针正好落在红色、黄色、绿色区域（若指针恰好落在分隔线上，则表示落在分隔线右边的区域），那么顾客就可以分别获得 200 元、100 元、50 元的购物券，可以在该商场继续购物，若某顾客购物 300 元，获得一次转动转盘的机会.



图 6-3-3

（1）求他此时获得购物券的概率；

（2）他获得哪种购物券的概率最大？请说明理由.

解题秘方： （1）利用概率公式求解即可；（2）利用概率的大小说明.

解： （1）转动一次转盘，共有 20 种等可能的结果，其中能获得购物券的结果有 10 种，所以他此时获得购物券的概率是 $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

（2）他获得 50 元购物券的概率最大.

理由：因为 P（获得 200 元购物券）$=\frac{1}{20}$，

P（获得 100 元购物券）$=\frac{3}{20}$，

P（获得 50 元购物券）$=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$，因为 $\frac{3}{10}>\frac{3}{20}>\frac{1}{20}$，

所以他获得 50 元购物券的概率最大.

P（获得 200 元购物券）= P（指针落在红色区域）= 红色区域的份数 / 总份数 $=\frac{1}{20}$.

解法提醒

此类转转盘的问题，可以根据转盘被等分成 n 份得出共有 n 种等可能的结果，也可从圆心角的度数来考虑，即指针指向某种颜色的概率和这种颜色所对应的圆心角度数成正比，如图 6-3-4，指针指向阴影区域的概率是 $\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$.

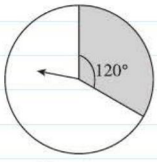


图 6-3-4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用改变概率大小法设计概率问题的游戏规则

挑战·高分

例 7 在一个不透明的袋子中，装有除颜色不同外其他都相同的 5 个红球和 3 个蓝球．从袋子中随机摸出 1 个球，如果是红球甲得 1 分，如果是蓝球乙得 1 分，得分高者胜．甲、乙两人获胜的概率相等吗？若相等，说明理由；若不相等，分别求出甲、乙获胜的概率，并设计一个使两人获胜的概率相等的游戏．

解题秘方：紧扣概率公式 $P(A)=\frac{m}{n}$，要使其概率相等，可以通过改变 m 的大小或者改变 n 的大小来实现．

解：甲、乙两人获胜的概率不相等，甲获胜的概率是 $\frac{5}{8}$，乙获胜的概率是 $\frac{3}{8}$．只要从袋子中拿出 2 个红球或向袋子中放入 2 个相同的蓝球，他们获胜的概率就相等了（答案不唯一，合理即可）．

解法提醒

设计概率的应用问题，实质是按实际要求，改变概率的大小问题，根据概率公式 $P(A)=\frac{m}{n}$，改变其大小的方法有两种：

一是改变试验的可能结果数 n；

二是改变事件 A 的可能结果数 m.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

概率与日常生活的联系非常紧密，近年的中考试题中，有关概率问题的考查逐步增多，以识别事件的类型和计算随机事件发生的概率为主，多以选择题和填空题的形式出现，难度不大．另外，概率知识常和方程、不等式、函数（以后将学到）、几何等知识综合在一起考查．

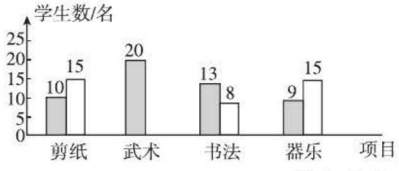
三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用概率公式解与统计的综合问题

例 8 [中考·山西]在“优秀传统文化进校园”活动中，学校计划每周二下午第三节课时间开展此项活动，拟开展活动项目为：剪纸、武术、书法、器乐，要求七年级每名学生都要参加，并且每名学生只能参加其中一项活动．教务处在该校七年级学生中随机抽取了 100 名学生进行调查，并对此进行统计，绘制了如图 6-3-5 的条形统计图和扇形统计图（均不完整）．

某校部分学生参加活动情况条形统计图



某校部分学生参加活动情况扇形统计图

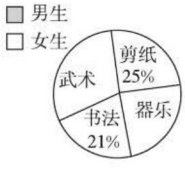


图 6-3-5

请解答下列问题：

（1）请补全条形统计图和扇形统计图；

（2）在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比是多少？

（3）若该校七年级共有 500 名学生，请估计其中参加“书法”活动项目的有多少名？

解法提醒

1. 先求出参加活动的女生数，进而求出参加“武术”的女生数，即可补全条形统计图，再分别求出参加“武术”的学生数和参加“器乐”的学生数，即可求出百分比；
2. 用参加“剪纸”中男生数除以参加“剪纸”的学生总数即可求出百分比；
3. 根据参加“书法”活动项目的百分比计算即可；
4. 利用概率公式即可得出结论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）学校教务处要从这些被调查的女生中，随机抽取一人了解具体情况，那么正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率是多少？

试题评析：此题主要考查了条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图能直接反映部分占总体的百分比大小．

解：（1）条形统计图和扇形统计图如图 6-3-6.

某校部分学生参加活动情况条形统计图　　某校部分学生参加活动情况扇形统计图

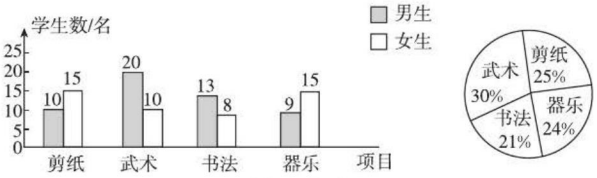


图 6-3-6

（2）在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比是 $\frac{10}{10+15}\times 100\%=40\%$.

所以在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比为 40%.

（3）$500\times 21\%=105$（名）.

所以估计其中参加“书法”活动项目的有 105 名.

（4）$\frac{15}{100-(10+20+13+9)}=\frac{5}{16}$.

所以正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率是 $\frac{5}{16}$.

详解

由条形统计图知，男生共有 10+20+13+9=52（名），女生有 100-52=48（名），所以参加“武术”活动项目的女生有 48-15-8-15=10（名），参加“武术”活动项目的学生有 20+10=30（名），所以 30÷100×100%=30%，因为参加“器乐”活动项目的学生有 9+15=24（名），所以 24÷100×100%=24%.

考法 2 利用概率公式解与方程相关的综合问题

例 9 [中考·南昌]在一个不透明的袋子中装有仅颜色不同的 10 个球，其中红球 4 个，黑球 6 个．

（1）先从袋子中取出 a（$a>1$）个红球，再从袋子中随机摸出 1 个球，将“摸出黑球”记为事件 A，请完成下列表格：

事件 A	必然事件	随机事件
a 的值	_____	_____

（2）先从袋子中取出 a 个红球，再放入 a 个一样的黑球并摇匀，随机摸出 1 个黑球的概率等于 $\frac{4}{5}$，求 a 的值．

试题评析：本题考查的是概率的求法，如果一个试验有 n 种可能结果，而且每种结果出现的可能性相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

解：（1）4；2 或 3

（2）根据题意得 $\frac{6+a}{10}=\frac{4}{5}$，解得 $a=2$，所以 a 的值为 2.

解法提醒

1. 当袋子中全部为黑球时，摸出黑球才是必然事件，否则就是随机事件；
2. 利用概率公式列出方程，求得 a 的值即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用概率公式解与几何相关的综合问题

例 10 [中考·泰安]如图 6–3–7，在方格纸中，随机选择标有序号①②③④⑤中的一个小正方形涂黑，与图中阴影部分构成轴对称图形的概率是（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

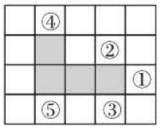


图 6–3–7

试题评析：此题考查了轴对称图形的定义以及概率公式的应用，通过观察图形的特征，运用概率 = 所求情况数与总情况数之比进行解答.

解：因为在方格纸中，随机选择标有序号①②③④⑤中的一个小正方形涂黑，共有 5 种等可能的结果，使与图中阴影部分构成轴对称图形的选择②④⑤涂黑，共 3 种情况，所以使与图中阴影部分构成轴对称图形的概率是 $3\div5=\frac{3}{5}$.

答案：C

解法提醒

由随机选择标有序号①②③④⑤中的一个小正方形涂黑，共有5种等可能的结果，使与图中阴影部分构成轴对称图形的有3种情况，直接利用概率公式求解即可求得答案.

两年模拟兵法 答案见 243 页

1. [中考·天水]下列说法正确的是（　　）

A. 不可能事件发生的概率为 0

B. 随机事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$

C. 概率很小的事件不可能发生

D. 投掷一枚质地均匀的硬币 1 000 次，一定有 500 次正面朝上

2. [中考·湖州]已知现有的 10 瓶饮料中，有 2 瓶已过了保质期，从这 10 瓶饮料中任取 1 瓶，恰好取到已过了保质期的饮料的概率是（　　）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{9}{10}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

3. [中考·温州]在同一副扑克牌中抽取 2 张“方块”，3 张“梅花”，1 张“红桃”. 将这 6 张牌背面朝上，从中任意抽取 1 张，是“红桃”的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

4. [中考·贵阳]某学校在进行防溺水安全教育活动中，将以下几点在游泳时的注意事项写在纸条上并折好，内容分别是：

①互相关心；②互相提醒；

③不要相互嬉水；

④相互比潜水深度；

⑤选择水流湍急的水域；

⑥选择有人看护的游泳池.

小颖从这 6 张纸条中随机抽出 1 张，抽到内容描述正确的纸条的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

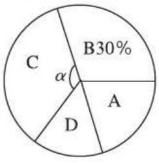
5. [模拟·山亭]在一个不透明的盒子中，装有 2 个白球和 1 个红球，这些球除颜色外其余都相同，搅匀后从中任意摸出 1 个球，要使摸出红球的概率为 $\frac{2}{3}$，应在该盒子中再添加红球（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

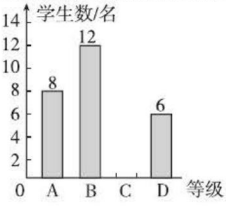
6. [**中考 · 泰安**]为了解中考体育科目训练情况，某校从九年级学生中随机抽取部分学生进行了一次中考体育科目测试（把测试结果分为 A，B，C，D 四个等级），并将测试结果绘制成了如图所示的两幅不完整统计图，根据统计图中提供的信息，结论错误的是（　　）

体育测试各等级学生数扇形统计图



①

体育测试各等级学生数条形统计图



②

（第 6 题）

A. 本次抽样测试的学生有 40 名

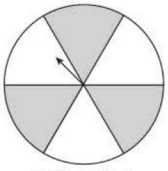
B. 在①中，$\angle\alpha$ 是 126°

C. 该校九年级有学生 500 名，估计 D 级的学生有 80 名

D. 从被测学生中随机抽取 1 名，则这名学生的成绩是 A 级的概率为 0.2

7. [**中考 · 贵阳**]一个不透明的袋子中装有 m 个红球、10 个黄球、n 个白球，每个球除颜色外都相同，任意摸出 1 个球，摸到黄球的概率与不是黄球的概率相同，那么 m 与 n 的关系是_____.

8. [**中考 · 盐城**]如图，转盘中 6 个扇形的面积都相等. 任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，指针落在阴影部分的概率为_____.



（第 8 题）

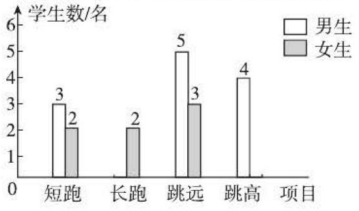
9. [**中考 · 眉山**]一个口袋中放有 290 个涂有红、黑、白三种颜色的质地相同的小球，若红球数量比黑球数量的 2 倍多 40 个，从袋中任取 1 个球是白球的概率是 $\frac{1}{29}$.

（1）求袋中红球的个数；

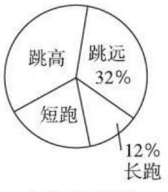
（2）求从袋中任取 1 个球是黑球的概率.

10. [**模拟 · 潮阳**]某中学需在短跑、长跑、跳远、跳高四类体育项目中各选拔一名学生参加市中学生运动会，根据平时成绩，把各项目进入复选的学生情况绘制成如图所示不完整的统计图：

各项目复选学生人数情况条形统计图



复选学生项目分布情况扇形统计图



（第 10 题）

（1）参加复选的学生有_____名，扇形统计图中短跑项目所对应的扇形圆心角为_____；

（2）补全条形统计图，并标明数据；

（3）求在跳高项目中男生被选中的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

概率思想在学科中的应用

荣老师告诉你 概率的基本试验一般有掷骰子、转转盘、摸球．随着研究越来越深入，考查的范围开始涉及学科内的其他各章与学科之间．因此在分析等可能结果时，要综合运用学科内的其他知识和学科间的知识．

应用一 ▸ 利用学科内的知识求概率

例 1 ［中考·葫芦岛］如图 1，一只蚂蚁在正方形 $ABCD$ 区域内爬行，点 O 是对角线的交点，$\angle MON=90°$，OM，ON 分别交线段 AB，BC 于 M，N 两点，求蚂蚁停留在阴影区域的概率．

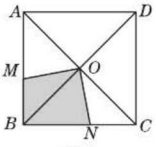


图 1

解题秘方：利用三角形全等求出阴影部分的面积与总面积之间的比值．

解：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $OB=OC$，$\angle MBO=\angle NCO=45°$，$\angle BOC=90°$．所以 $\angle BON+\angle CON=90°$．

因为 $\angle MON=90°$，

所以 $\angle BON+\angle BOM=90°$．

所以 $\angle BOM=\angle CON$．

所以 $\triangle BOM\cong\triangle CON$（ASA）．

所以 $S_{四边形 OMBN}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形 ABCD}$．

所以蚂蚁停留在阴影区域的概率为 $\frac{1}{4}$．

应用二 ▸ 利用学科间的知识求概率

1 概率与英语

例 2 在组成单词“Probability”（概率）的所有字母中任意取出一个字母，则取到字母“b”的概率是_____．

解题秘方：找出字母“b”在单词中出现的次数，利用概率的定义可求出概率．

解：在“Probability”这个英文单词中，一共有 11 个字母，其中字母“b”出现 2 次，所以取到字母“b”的概率是 $\frac{2}{11}$．

答案：$\frac{2}{11}$

2 概率与语文

例 3 田忌赛马是一个大家熟知的故事，传说战国时期，齐威王与田忌各有上、中、下等三匹马，同等级的马中，齐威王的马比田忌的马强．有一天，齐威王要与田忌赛马，双方约定比赛三局，每局各出一匹马，每匹马赛一次，赢得两局为胜．看样子田忌似乎没有什么胜的希望，但是田忌的谋士了解到主人的上、中等马分别比齐威王的中、下等马要强．

（1）如果齐威王将马按上、中、下的顺序出阵比赛，那么田忌的马如何出阵才能取胜？

（2）如果齐威王将马按上、中、下的顺序出阵，而田忌的马随机出阵比赛，田忌获胜的概率是多少？

解题秘方：紧扣故事中的比赛规则，准确地找出取胜的关键，通过列举法列出所有等可能的结果，利用概率的定义可求出概率．

解：（1）由于田忌的上、中等马分别比齐威王的中、下等马强，当齐威王的马按上、中、下的顺序出阵时，田忌的马按下、上、中的顺序出阵，田忌才能取胜．

（2）当田忌的马随机出阵时，双方的马对阵情况有（上中下，上中下），（上中下，上下中），（上中下，中上下），（上中下，中下上）（上中下，下上中）（上中下，下中上），共有 6 种等可能的结果，其中田忌获胜的结果有 1 种，所以田忌获胜的概率是 $\frac{1}{6}$．

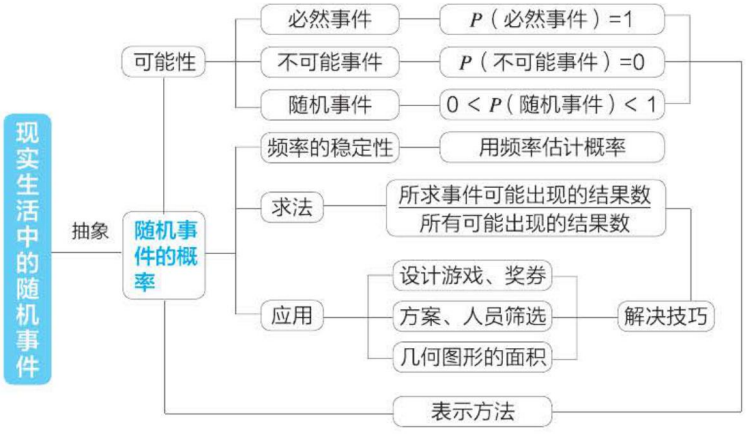
方法点拨：概率与学科间的综合题，主要是给出的事件以学科间（如语文、英语等学科）的问题作为背景，求概率的方法还是以列举法为核心．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 事件分为必然事件、不可能事件和随机事件，必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0；随机事件的概率为 0 和 1 之间的数.

2. 在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，用稳定的频率来估计事件 A 发生的概率.

3. 等可能事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

知识方法专题

知识必学

专题一 事件类型的判断

链接中考≫对事件类型的判断，主要是由事件发生的可能性的大小来判断的，考查时一般以选择题的形式出现.

例 1 下列说法中正确的是（　　）

A. “任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是随机事件

B. “任意写一个有理数，它的绝对值是非负数”是必然事件

C. “概率为 0.000 1 的事件”是不可能事件

D. 任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，一定有 5 次正面向上

解题秘方：紧扣几种类型的事件的定义进行判断.

解：因为等边三角形是轴对称图形，

所以“任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是必然事件；

因为任意有理数的绝对值都是非负数，

所以“任意写一个有理数，它的绝对值是非负数”是必然事件；

因为概率为 0 的事件才是不可能事件，所以“概率为 0.000 1 的事件”是随机事件；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为任意掷一枚质地均匀的硬币，正面向上的概率是$\frac{1}{2}$，正面向上的频率不一定是$\frac{1}{2}$，

所以任意掷一枚质地均匀的硬币10次，不一定有5次正面向上.

答案：B

方法点拨：事件类型的判断，可以先确定事件发生的概率，再利用概率的大小来判断.

专题二 用频率估计概率

链接中考» 有些事件的概率无法通过列举法求出，只能通过多次试验求出事件发生的频率，然后用频率来估计事件发生的概率. 考查时一般以填空题的形式出现.

例2 [中考·扬州]色盲是伴X染色体隐性先天遗传病，患者中男性远多于女性，从男性体检信息库中随机抽取体检表，统计结果如下表：

抽取的体检表数 n	50	100	200	400	500	800	1 000	1 200	1 500	2 000
色盲患者的频数 m	3	7	13	29	37	55	69	85	105	138
色盲患者的频率 $\frac{m}{n}$	0.060	0.070	0.065	0.073	0.074	0.069	0.069	0.071	0.070	0.069

根据上表，估计在男性中，男性患色盲的概率为_____（结果精确到0.01）.

解：观察表格，可以发现随着n的增加，色盲患者的频率越来越稳定，并且稳定在0.07附近，于是可以估计在男性中，男性患色盲的概率为0.07.

答案：0.07

专题三 等可能事件的概率计算

链接中考» 求等可能事件发生的概率，可以先列举出所有等可能的结果，再确定所求事件包含的可能结果，在列举结果时要做到不重、不漏，然后把各结果数代入概率公式进行计算，一般以选择题的形式考查.

例3 [中考·宜昌]九（1）班在参加学校4×100 m接力赛时，安排了甲、乙、丙、丁四名选手，他们的顺序由抽签随机决定，则甲跑第一棒的概率为（　　）

A.1　B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$\frac{1}{4}$

解：因为由抽签随机决定顺序，所以跑第一棒的选手共有4种等可能的结果，其中甲跑第一棒的结果只有1种，所有P（甲跑第一棒）$=\frac{1}{4}$.

答案：D

例4 [中考·辽阳]如果小球在如图6-1所示的地面上自由滚动，并随机停留在某块方砖上，每块方砖的大小、质地完全一致，那么它最终停留在黑色区域的概率是（　　）

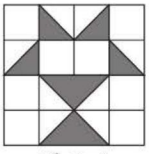


图6-1

A.$\frac{1}{3}$　B.$\frac{1}{4}$　C.$\frac{1}{5}$　D.$\frac{1}{6}$

解：由图6-1可知，共有16块方砖，黑色区域的面积等于4块方砖的面积，所以小球最终停留在黑色区域的概率是$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

答案：B

方法点拨：求等可能事件的概率可以直接利用概率公式求解. 一般地，如果一个试验有n种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件A包含其中的m种结果，那么事件A发生的概率为$P(A)=\frac{m}{n}$.

Ⅱ 方法必会

专题四 方程思想

专题解读» 在由概率估计原始条件时，经常会用到方程思想，先设出所求条件，根据已知条件列出方程求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例5 口袋里有红、绿、黄三种颜色的球，除颜色外其余都相同，其中红球4个，绿球5个，黄球若干个，任意摸出1个球是绿球的概率是$\frac{1}{3}$. 求：

（1）口袋里黄球的个数；

（2）任意摸出1个球是红球的概率.

解题秘方：根据概率公式，列方程解决问题.

解：（1）设黄球有x个.

则根据题意，得$\frac{5}{x+4+5}=\frac{1}{3}$，解得$x=6$.

所以口袋里有6个黄球.

（2）任意摸出1个球是红球的概率为$\frac{4}{15}$.

方法点拨：本题采用了方程思想，已知概率求元素的数目问题，通常是根据概率公式列方程求解.

专题五 数形结合思想

专题解读 » 数形结合思想是将数量与图形结合起来，对题目中给定的题设和结论进行代数方面和几何含义方面的分析. 在与转盘有关的概率中，由于指针落在某区域的概率大小与其面积有关，所以要用数形结合的思想来解题.

例6 小朋友玩“扎地皮”游戏，现有一个三角形区域的地ABC，如图6-2，将其分成三块：$\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle ACE$，其中D，E是BC的三等分点，你认为$\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle ACE$中，扎到哪个三角形，获胜的可能性大？

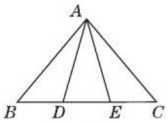


图6-2

解题秘方：求扎到哪个三角形获胜的可能性大，即计算哪个三角形被扎到的概率大，也就是比较哪个三角形的面积大.

解：因为$\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle ACE$的底边相等，高相同，所以$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ACE}$.

故扎到每个三角形的可能性都相同，均为$\frac{1}{3}$，

所以三个三角形中无论扎哪个，获胜的可能性都是$\frac{1}{3}$.

好题必解 ☞答案见243页

题型1：事件的分类

1.[中考·怀化]下列事件是必然事件的是（　　）

A. 地球绕着太阳转

B. 抛一枚硬币，正面朝上

C. 明天会下雨

D. 打开电视，正在播放新闻

题型2：频率与概率的关系

2.[中考·曲靖]一个不透明的盒子里装有除颜色外无其他差别的白珠子6颗和黑珠子若干颗，每次随机摸出1颗珠子，放回摇匀后再摸，通过多次试验发现摸到白珠子的频率稳定在0.3左右，则盒子中黑珠子可能有_____颗.

3.[中考·兰州]在一个不透明的袋中装有除颜色外其余均相同的n个小球，其中黑球有5个，从袋中随机摸出1个球，记下其颜色，之后把它放回袋中，搅匀后，再继续摸出1个球. 以下是利用计算机模拟的试验次数与摸出黑球次数的列表.

摸球试验次数	100	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
摸出黑球次数	46	487	2 506	5 008	24 996	50 007

根据列表，可以估计出n的值是_____.

题型3：概率的计算

4.[中考·六盘水]袋中有5个红球、4个白球、3个黄球，每一个球除颜色外都相同，从袋中任意摸出1个球是白球的概率为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{7}{12}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

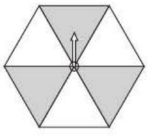
5.[中考·广州]某个密码锁的密码由三个数字组成，每个数字都是0–9这十个数字中的一个，只有当三个数字与所设的密码及顺序完全相同时，才能将锁打开，如果仅忘记了所设密码的最后那个数字，那么一次就能打开该密码锁的概率是（　　）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6.[中考·武汉]一个质地均匀的小正方体，6个面分别标有数字1，1，2，4，5，5. 若随机投掷一次小正方体，则朝上一面的数字是5的概率为_____.

题型4：几何图形概率的计算

7.[中考·南充]如图是一个可以自由转动的正六边形转盘，其中三个正三角形有阴影. 转动转盘，指针落在有阴影的区域内的概率为a；如果投掷一枚硬币，正面向上的概率为b. 关于a，b大小的正确判断是（　　）



（第7题）



（第8题）

A.$a > b$　　B.$a=b$

C.$a < b$　　D. 不能判断

8. 如图所示的圆面图案是用相同半径的圆与圆弧构成的. 若向圆面投掷飞镖，则飞镖落在黑色区域的概率为_____.

题型5：利用概率解决实际问题

9. 有一张演唱会的门票，小明和小亮都想得到这张门票，小红为他们出了一个主意，方法就是：从牌面为1，2，3，4，5，4，6，7的8张扑克牌（两个4的花色不同）中任取1张，抽到比4大的牌，小明去；否则，小亮去.

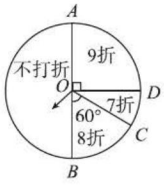
（1）求小明抽到4的概率；

（2）你认为这种方法对小明和小亮公平吗？若公平请说明理由；若不公平，请你修改游戏规则，使游戏对双方都公平.

10. 乐乐家附近的商场为了吸引顾客，设立了一个可以自由转动的转盘，如图所示，AB为转盘的直径，并规定：顾客消费50元（含50元）以上，就能获得一次转转盘的机会，如果转盘停止后，指针正好落在9折、8折、7折区域（指针落在边缘处重转），顾客就可以获得相应的优惠.

（1）某顾客消费40元，是否可以获得转转盘的机会？

（2）某顾客正好消费66元，他转一次转盘，获得三种打折优惠的概率分别是多少？



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第六章测试卷

答案见 244 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列事件中是必然发生的事件是（　　）

A. 打开电视机，正播放新闻

B. 通过长期努力学习，你会成为数学家

C. 从一副扑克牌中任意抽取一张牌，花色是红桃

D. 某校在同一年出生的有 367 名学生，则至少有 2 名学生的生日是同一天

2. 在一个布袋里装有白、红、黑三种颜色的小球，它们除颜色外没有任何区别，其中白球 2 个，红球 6 个，黑球 4 个，将布袋中的球搅匀，闭上眼睛随机从布袋中取出 1 个球是黑球的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

3. 已知一个布袋里装有 2 个红球、3 个白球和 a 个黄球，这些球除颜色外其余都相同. 若从该布袋里任意摸出 1 个球，是红球的概率为 $\frac{1}{3}$，则 a 等于（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

4. 在一个不透明的布袋中，红球、黑球、白球共有若干个，除颜色外，它们的形状、大小、质地等完全相同. 小新从布袋中随机摸出 1 个球，记下颜色后放回布袋中，摇匀后再随机摸出 1 个球，记下颜色……如此大量摸球试验后，小新发现其中摸出红球的频率稳定于 0.2，摸出黑球的频率稳定于 0.5. 对此试验，他总结出下列结论：

①若进行大量摸球试验，摸出白球的频率应稳定于 0.3；②若从布袋中任意摸出 1 个球，该球是黑球的概率最大；③若再摸球 100 次，必有 20 次摸出的是红球. 其中说法正确的是（　　）

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

5. 下列事件发生的概率为 0 的是（　　）

A. 射击运动员只射击 1 次，就命中靶心

B. 任取一个数 x，都有 $|x| \geqslant 0$

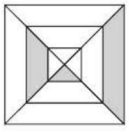
C. 画一个三角形，使其三边的长分别为 8 cm，6 cm，2 cm

D. 抛掷一枚质地均匀且 6 个面分别刻有 1 到 6 的点数的正方体骰子，朝上一面的点数为 4

6. 如图是小鹏自己制作的正方形飞镖盘，并在盘内画了两个小正方形，则小鹏在投掷飞镖时，飞镖扎在阴影部分的概率为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{3}$



（第 6 题）

7. 某学习小组做“用频率估计概率”的试验时，统计了某一结果出现的频率，绘制了如下的表格，则符合这一结果的试验最有可能的是（　　）

实验次数	100	200	300	500	800	1 000	2 000
频率	0.365	0.328	0.330	0.334	0.336	0.332	0.333

A. 一副去掉大小王的普通扑克牌洗匀后，从中任抽一张牌的花色是红桃

B. 在“石头、剪刀、布”的游戏中，小明随机出的是“剪刀”

C. 抛一个质地均匀的正六面体骰子，向上的面的点数是 5

D. 抛一枚质地均匀的硬币，出现反面朝上

8. 100 个大小相同的球，用 1 至 100 编号，任意摸出 1 个球，则摸出的是 5 的倍数编号的球的概率是（　　）

A. $\frac{1}{20}$　　B. $\frac{19}{100}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. 以上都不对

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 掷一枚 6 个面上分别标有 1，1，2，2，3，3 的小正方体，朝上一面的数字是 4，是_____事件.（填“必然”“不可能”或“随机”）

10. 如图，在两个同心圆中，四条直径把大圆分成八等份，若往圆面投掷飞镖，则飞镖落在黑色区域的概率是_____.

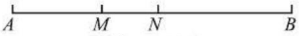


（第 10 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 小明和小斌都想去参加一项重要的活动，但只有一个名额. 于是他们决定抓阄，有两张纸条，一张写着“*yes*”，一张写着“*no*”，他们两人闭上眼睛随机各抓一张，抓住“*yes*”的就去，抓住“*no*”的就不去，这对双方公平吗？答：_____（填“公平”或“不公平”）.

12. 如图所示是一条线段，AB 的长为 10 cm，MN 的长为 2 cm，假设可以随意在这条线段上取一个点，那么这个点取在线段 MN 上的概率为____.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（10 分）杨成家的住宅面积为 90 m^2，其中大卧室为 18 m^2，客厅为 30 m^2，小卧室为 15 m^2，厨房为 14 m^2，大卫生间为 9 m^2，小卫生间为 4 m^2. 如果一只小猫在该住宅内的地面上任意跑. 求：

（1）P（在客厅捉到小猫）；

（2）P（在小卧室捉到小猫）；

（3）P（在卫生间捉到小猫）；

（4）P（不在卧室捉到小猫）.

14.（10 分）研究“掷一枚图钉，钉尖朝上”的概率，两个小组的学生用同一个图钉做试验进行比较，他们的统计数据如下：

掷图钉的次数		50	100	200	300	400
钉尖朝上的次数	第一小组	23	39	79	121	160
	第二小组	24	41	81	124	164

（1）请你估计第一小组和第二小组所得的概率分别是多少？

（2）你认为哪个小组的结果更准确？为什么？

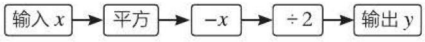
15.（10 分）有一组互不全等的三角形，它们的三边长均为整数，每个三角形有两条边的长分别为 5 和 7.

（1）请写出其中一个三角形的第三边的长；

（2）设这组三角形最多有 n 个，求 n 的值；

（3）当这组三角形的数量最多时，从中任取一个，求该三角形的周长为偶数的概率.

16.（10 分）某信息兴趣小组的学生利用电脑成功设计了一个运算程序，这个程序可用如图所示的框图表示，小明任取一个自然数 x 输入求值.



（第 16 题）

（1）试写出与输出的数有关的一个必然事件；

（2）若输入的数是 2 至 9 这八个连续正整数中的一个，求输出的数是 3 的倍数的概率.

17.（12 分）用 10 个球设计一个摸球游戏：

（1）使摸到红球的概率为 $\frac{1}{5}$；

（2）使摸到红球和白球的概率都是 $\frac{2}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第一章 整式的乘除

1 同底数幂的乘法

【两年模拟兵法】

1. C 点拨:选项A中的底数分别为x与$-x$,选项B中的底数分别为$-x$与x,选项D中的底数分别为$x-y$与$y-x$,均不相同. 故选C.

2. B

3. x^6

4. 解:(1)$a^3\cdot(-a)^4=a^3\cdot a^4=a^{3+4}=a^7$.

(2)$(-2)^9\cdot(-2)^8\cdot(-2)^3=(-2)^{20}=2^{20}$.

(3)$(2a+b)^{2n+1}\cdot(2a+b)^3\cdot(2a+b)^{m-1}$

$=(2a+b)^{2n+1+3+m-1}$

$=(2a+b)^{2n+3+m}$.

5. 解:依题意得$7.9\times10^3\times5.4\times10^3=42.66\times10^6=4.266\times10^7$(m).

答:该轨道的一周有4.266×10^7m.

6. 解:因为$a^x=5$,$a^{x+y}=a^x\cdot a^y=30$,

所以$5a^y=30$,

所以$a^y=6$,

所以$a^x+a^y=5+6=11$.

7. 解:(1)因为$a*b=2^a\times2^b$,

所以$2*3=2^2\times2^3=4\times8=32$.

(2)因为$2*(x+1)=16$,

所以$2^2\times2^{x+1}=2^4$,即$2^{2+x+1}=2^4$,

则$2+x+1=4$,

解得$x=1$.

8. 解:因为$3^{3x+1}=27\times81$可变形为$3^{3x+1}=3^3\times3^4$,即$3^{3x+1}=3^7$,所以$3x+1=7$,解得$x=2$.

9. 解:因为$a^{n+1}\cdot a^{m+n}=a^{n+1+m+n}=a^{m+2n+1}=a^6$,所以$m+2n+1=6$.

又因为$m-2n=1$,所以$m=3$,$n=1$,所以$m^n=3^1=3$.

2 幂的乘方与积的乘方

【两年模拟兵法】

1. D 2. A 3. A 4. D 5. B 6. B 7. B 8. 15

9. 解:(1)原式$=-a^3\cdot a^2\cdot a^4=-a^{3+2+4}=-a^9$.

(2)原式$=x^2\cdot x^n\cdot x\cdot(-x^5)=-x^2\cdot x^n\cdot x\cdot x^5=-x^{2+n+1+5}=-x^{8+n}$.

10. 解:$a^{2m+3n}=a^{2m}\cdot a^{3n}=(a^m)^2\cdot(a^n)^3=2^2\times3^3=4\times27=108$.

点拨:本题逆用同底数幂的乘法和幂的乘方运算法则.

11. 解:原式$=\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times(-8)^{13}\right]\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9\right]=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)\times(-8)\right]^{12}\times(-8)\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right]^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1\times(-8)\times1\times\frac{9}{25}=-\frac{72}{25}$.

点拨:逆用积的乘方法则和同底数幂的乘法法则解决问题.

12. 解:因为$2^{12}\times5^8=2^4\times(2\times5)^8=1.6\times10^9$,

所以$2^{12}\times5^8$的结果是一个十位正整数.

13. 解:因为$20^n=(2^2\times5)^n=2^{2n}\times5^n=(2^n)^2\times5^n=a^2b$,

且$20^n=c$,所以$c=a^2b$.

点拨:利用积的乘方法则和逆用幂的乘方法则,把20^n用含2^n,5^n的式子表示,从而得出c与a,b的关系.

3 同底数幂的除法

【两年模拟兵法】

1. C 2. A 3. D 4. C

5. B 点拨:本题综合考查各种整数指数幂的运算,由已知条件可得$a=0.09$,$b=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}$,$c=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=9$,$d=1$. 因为$-\frac{1}{9}<0.09<1<9$,

所以$b<a<d<c$.

6. A 点拨:由零指数幂底数不能为0,负整数指数幂底数不能为0可知,$x-3\neq0$且$3x-6\neq0$,因此$x\neq3$且$x\neq2$,所以选A.

7. -3

8. -5 点拨:此类题目可利用逆向思维求解.

因为$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$,所以$x=-5$.

9. $\frac{4}{7}$

10. 解:原式$=1-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$.

11. 解:(1)原式$=x^ny^{-n}\div x^4y^{-2n}=x^{n-4}y^{-n+2n}=x^{n-4}y^n$;

(2)原式$=x^4y^6\cdot x^2y^{-2}\div x^3y^{-6}=x^{4+2-3}y^{6-2-(-6)}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

x^3y^{10}.

12. **解**:①当 $x-2=0$ 且 $2x-1\neq0$ 时,解得 $x=2$;

②当 $2x-1=1$ 时,解得 $x=1$;

③当 $2x-1=-1$ 且 $x-2$ 为偶数时,解得 $x=0$.

综上,整数 x 的值为 2 或 1 或 0.

方法规律:本题运用分类讨论思想求解,分三种情况讨论①当指数为 0,底数不为 0 时,结果为 1;②当底数为 1 时,结果为 1;③当底数为 -1,指数为偶数时,结果为 1.

4 整式的乘法

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**: $-3a\cdot(2b)=(-3)\times2\cdot a\cdot b=-6ab$.

2. A

3. D **点拨**:$(6xy^2-4x^2y)\cdot3xy=18x^2y^3-12x^3y^2$,故选项 A 错误;$(-x)(2x+x^2-1)=-2x^2-x^3+x$,故选项 B 错误;$(-3x^2y)(-2xy+3yz-1)=6x^3y^2-9x^2y^2z+3x^2y$,故选项 C 错误;$\left(\frac{3}{4}a^{n+1}-\frac{1}{2}b\right)\cdot2ab=\frac{3}{2}a^{n+2}b-ab^2$,故选项 D 正确.

4. C **点拨**:因为 $(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$,所以 $x^2-2x-8=x^2+mx+n$,所以 $m=-2$,$n=-8$.

5. C

6. $x^{n+1}-1$ **点拨**:解答这类题应从项数和次数两个方面去找规律.

7. **解**:(1)$x(x+1)-(x+1)(x-2)$

$=(x^2+x)-(x^2-x-2)$

$=x^2+x-x^2+x+2$

$=2x+2$.

(2)$(a+3)(a-2)-a(a-1)(2a-6)$

$=(a^2+a-6)-a(2a^2-8a+6)$

$=a^2+a-6-2a^3+8a^2-6a$

$=-2a^3+9a^2-5a-6$.

8. **解**:$2(3x+1)(1-3x)+(x-2)(2+x)$

$=2(3x-9x^2+1-3x)+(2x+x^2-4-2x)$

$=2(1-9x^2)+x^2-4$

$=2-18x^2+x^2-4$

$=-17x^2-2$.

当 $x=2$ 时,

原式 $=-17x^2-2=-17\times2^2-2=-70$.

9. **解**:去括号,得 $4x^2-4x+5=4x^2+6x-2x-3$,

移项、合并同类项,得 $8x=8$,系数化为 1,得 $x=1$.

10. **解**:因为 $(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$,所以所用 A,B,C 三类卡片分别为 3 张,1 张,2 张.(图略)

5 平方差公式

【两年模拟兵法】

1. B

2. A

3. x^2-1 **点拨**:由平方差公式可得,原式 $=x^2-1$.

4. 24 **点拨**:因为 $m+n=12$,$m-n=2$,所以 $m^2-n^2=(m+n)(m-n)=12\times2=24$.

5. $\frac{3}{4}$ **点拨**:因为 $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)=a^2-\frac{1}{4}$,对照已知式,有 $-\frac{1}{3}k=-\frac{1}{4}$,所以 $k=\frac{3}{4}$.

6. **解**:(1)原式 $=(1+0.03)\times(1-0.03)=1-0.03^2=1-0.000\,9=0.999\,1$;

(2)$9\frac{7}{8}\times10\frac{1}{8}=\left(10-\frac{1}{8}\right)\left(10+\frac{1}{8}\right)=10^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2=100-\frac{1}{64}=99\frac{63}{64}$;

(3)原式 $=(2\,018-2)(2\,018+2)-(2\,018-1)(2\,018+1)=(2\,018^2-4)-(2\,018^2-1)=2\,018^2-4-2\,018^2+1=-3$.

7. **解**:$x(x+2)-(x+1)(x-1)=x^2+2x-(x^2-1)=x^2+2x-x^2+1=2x+1$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,原式 $=2x+1=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-1+1=0$.

8. **解**:李大妈吃亏了.

理由:原正方形土地的面积为 $a^2\,m^2$,改变边长后土地的面积为 $(a+6)(a-6)=(a^2-36)(m^2)$,因为 $a^2>a^2-36$,所以李大妈吃亏了.

6 完全平方公式

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** D **4.** B

5. C **点拨**:把已知的两个等式按照完全平方公式展开,然后根据等式的性质进行加法运算.

因为 $(m-n)^2=8$,所以 $m^2-2mn+n^2=8$,①

因为 $(m+n)^2=2$,所以 $m^2+2mn+n^2=2$. ②

①+②,得 $2m^2+2n^2=10$,

所以 $m^2+n^2=5$. 故选 C.

6. $(6a+15)$ **点拨**:$S_{长方形}=(a+4)^2-(a+1)^2=a^2+8a+16-a^2-2a-1=(6a+15)(cm^2)$.

7. 37 **点拨**:因为 $|x+y-7|+(xy-6)^2=0$,

所以 $x+y-7=0$,$xy-6=0$.

所以 $x+y=7$,$xy=6$.

所以 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\times6=49-12=37$.

8. ±8 **点拨**:依题意,知 $[(2a+2b)+1][(2a+2b)-1]=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

63，所以$(2a+2b)^2-1=63$.

即$(2a+2b)^2=64$，

所以$2a+2b=\pm 8$.

9. 解：(1)$39\times 41=(40-1)(40+1)$

$=40^2-1^2$

$=1599$；

(2)$\left(99\frac{2}{3}\right)^2$

$=\left(100-\frac{1}{3}\right)^2$

$=100^2-2\times 100\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=10\,000-66\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$

$=9933\frac{4}{9}$.

10. 解：(1)原式$=y^2-4-y^2-5y+y+5$

$=-4y+1$；

(2)原式$=(x^2+4xy+4y^2)-(x^2-4xy+4y^2)$

$=x^2+4xy+4y^2-x^2+4xy-4y^2$

$=8xy$；

(3)原式$=(m^2-4)^2$

$=m^4-8m^2+16$；

(4)原式$=[x-(2y-3)][x+(2y-3)]$

$=x^2-(2y-3)^2$

$=x^2-(4y^2-12y+9)$

$=x^2-4y^2+12y-9$.

点拨：对于(1)，先运用平方差公式和多项式乘多项式法则进行计算，再去括号、合并同类项；对于(2)，先运用完全平方公式展开，再去括号、合并同类项；对于(3)，先用平方差公式，再用完全平方公式计算；对于(4)，先将两个多项式变形成可用平方差公式计算的形式，再利用平方差公式计算，最后利用完全平方公式计算可得结果. 熟练掌握乘法公式是解答本题的关键，这里需要先观察式子符合什么样的乘法公式，再根据相应乘法公式进行计算；另外具体计算时括号前面是负号，注意去括号时，改变括号内各项的符号.

11. 解：原式$=a^2+6a+9-a^2+1-4a-8=2a+2$，当$a=-\frac{1}{2}$时，原式$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-1+2=1$.

12. 解：因为$x^2-y^2=12$，所以$(x+y)(x-y)=12$，

因为$x+y=3$①，所以$x-y=4$②，

①+②得，$2x=7$，

$2x^2-2xy=2x(x-y)=7\times 4=28$.

13. 解：设$2\,021-a=x$，$2\,019-a=y$，

则$x-y=2$，$xy=2\,020$，

所以$(2\,021-a)^2+(2\,019-a)^2$

$=x^2+y^2$

$=(x-y)^2+2xy$

$=2^2+2\times 2\,020$

$=4\,044$.

7 整式的除法

【两年模拟兵法】

1. D **点拨**：$2x$与$3y$不是同类项，不能合并，故选项A错误；$(-2x^2)^3=-8x^6$，故选项B错误；$3y^2\cdot(-y)=-3y^3$，故选项C错误；$6y^2\div 2y=(6\div 2)y^{2-1}=3y$，故选项D正确.

2. C **点拨**：因为$-\frac{1}{2}x^3y^3\div\frac{1}{3}xy=-\frac{3}{2}x^2y^2$，$6a^3b^6\div 2ab^3=3a^2b^3$，$x^3y^2z\div\frac{1}{2}x^2y=2xyz$，所以选项A，B，D均错误，故选C.

3. A **点拨**：因为$5a^3b^m\div\frac{2}{5}a^nb^2=\frac{25}{2}a^{3-n}b^{m-2}=\frac{25}{2}b^2$，所以$3-n=0$，$m-2=2$. 所以$n=3$，$m=4$.

4. $2a^4b^2c$ **点拨**：根据分析，式子可转换为$8a^6b^4c\div 4a^2b^2=2a^4b^2c$.

5. $y-x$ **点拨**：长方形的宽是$(xy^2-x^2y)\div xy=xy(y-x)\div xy=y-x$.

6. 解：(1)$(3a^4-6a^3+9a^2)\div\left(-\frac{1}{3}a^2\right)=-9a^2+18a-27$；

(2)$[(a+b)^2-(a-b)^2]\div(-4ab)=(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)\div(-4ab)=4ab\div(-4ab)=-1$；

(3)$(3a^{n+1}+6a^{n+2}-3a^{n-1})\div 3a^{n-1}=3a^{n+1}\div 3a^{n-1}+6a^{n+2}\div 3a^{n-1}-3a^{n-1}\div 3a^{n-1}=a^{n+1-(n-1)}+2a^{n+2-(n-1)}-1=a^2+2a^3-1$.

7. 解：水箱的底面积为$(3a^3b^6+6a^4b^5)\div a^2b^3$

$=3a^{3-2}b^{6-3}+6a^{4-2}b^{5-3}$

$=(3ab^3+6a^2b^2)(\mathrm{m}^2)$.

故水箱的占地面积为$(3ab^3+6a^2b^2)\mathrm{m}^2$.

8. 解：原式$=x^2-y^2-(2x^2-4y^2)$

$=x^2-y^2-2x^2+4y^2$

$=-x^2+3y^2$.

当$x=-1$，$y=-\frac{1}{3}$时，

原式$=-(-1)^2+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

$=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$.

点拨：先分别计算$(x+y)(x-y)$，$(4x^3y-8xy^3)\div 2xy$，再进行整式减法计算，最后代入求值.

整式混合运算的顺序：先算乘方，再算整式的乘除，最

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

后算整式的加减,整式加减的实质就是合并同类项.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)原式 $=x^2-x^8$;

(2)原式 $=5a^{12}$;

(3)原式 $=-5x^{14}$;

(4)原式 $=6a^8$.

2. 解:(1)$10^{3m+2n-p}$

$=10^{3m}\cdot10^{2n}\div10^p$

$=(10^m)^3\cdot(10^n)^2\div10^p$

$=3^3\times2^2\div4$

$=27$.

(2)因为 $a=8^{14}=(2^3)^{14}=2^{42}$,

$b=256^5=(2^8)^5=2^{40}$,

$c=64^7=(2^6)^7=2^{42}$,所以 $a=c>b$.

3. 解:(1)原式 $=-\frac{7}{5}a^4b^2c$;

(2)原式 $=x^4$;

(3)原式 $=12mn^2-\frac{7}{4}m^2n^6$;

(4)原式 $=5x^3+8x^2+12x+15$.

4. 解:(1)原式 $=\frac{7}{8}a^3b^6$. 当 $a=-\frac{1}{4}$,$b=4$ 时,

原式 $=\frac{7}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^3\times4^6=-56$.

(2)原式 $=-2ab$. 当 $a=-2$,$b=\frac{2}{3}$ 时,

原式 $=(-2)\times(-2)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

(3)原式 $=\frac{1}{9}x^3y^4$. 当 $x=-\frac{3}{2}$,$y=-2$ 时,

原式 $=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times(-2)^4=-6$.

5. 解:原式 $=-x^2+8xy$. 当 $x=-2$,$y=\frac{1}{2}$ 时,

原式 $=-(-2)^2+8\times(-2)\times\frac{1}{2}=-12$.

6. 解:(1)原式 $=200^2-2\times200\times199+199^2$

$=(200-199)^2$

$=1$;

(2)原式 $=(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+(96+95)(96-95)+\cdots+(2+1)(2-1)$

$=100+99+98+97+96+95+\cdots+2+1$

$=(100+1)\times50$

$=5\ 050$.

7. 解:(1)因为 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy=64-9=55$,

所以 $xy=\frac{55}{4}$.

(2)$(m-53)^2+(m-47)^2$

$=[(m-53)-(m-47)]^2+2(m-53)(m-47)$

$=(-6)^2+48$

$=84$.

【第一章测试卷】

一、**1.** C **2.** B **3.** D **4.** B **5.** C **6.** B **7.** B **8.** C

二、**9.** -9 **10.** 15 **11.** $\frac{25}{64}$ **12.** 512

三、**13.** 解:(1)原式 $=-60x^3y^4$;

(2)原式 $=-a-b$.

14. 解:(1)$108\times92=(100+8)\times(100-8)=100^2-8^2=10\ 000-64=9\ 936$;

(2)$79^2+79\times42+21^2=79^2+2\times79\times21+21^2=(79+21)^2=100^2=10\ 000$.

15. 解:原式 $=-\frac{1}{3}xy(xy+1+x^3y^3)$

$=-\frac{1}{3}xy[xy+1+(xy)^3]$

$=-\frac{1}{3}\times1\times(1+1+1^3)$

$=-1$.

16. 解:设花圃原来的宽为 x m,则原来的长为 $(x+2)$ m,面积为 $x(x+2)$ m^2,当花圃的长和宽分别增加 3 m 时,它的面积为 $(x+3)(x+5)$ m^2. 根据题意,得 $(x+3)(x+5)=x(x+2)+39$,解得 $x=4$. 则 $x+2=6$.

答:花圃原来的宽为 4 m,长为 6 m.

17. 解:(1)①275;572

②63;36

(2)因为等式左边两位数的十位数字为 a,个位数字为 b,所以左边的两位数是 $10a+b$,三位数是 $100b+10(a+b)+a$,右边的两位数是 $10b+a$,三位数是 $100a+10(a+b)+b$.

所以一般规律的式子为 $(10a+b)[100b+10(a+b)+a]=[100a+10(a+b)+b](10b+a)$.

理由:因为左边 $=(10a+b)(100b+10a+10b+a)$

$=(10a+b)(110b+11a)$

$=11(10a+b)(10b+a)$,

右边 $=(100a+10a+10b+b)(10b+a)$

$=(110a+11b)(10b+a)$

$=11(10a+b)(10b+a)$.

所以左边 = 右边,

所以表示"数字对称等式"的一般规律的式子为 $(10a+b)[100b+10(a+b)+a]=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$[100a+10(a+b)+b](10b+a)$.

第二章 相交线与平行线

1 两条直线的位置关系

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C

3. B **4.** A **5.** D **6.** 对顶角相等

7. **解**:(1) $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 互余.

理由:由点 A,O,E 在同一条直线上,知 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$.

由 $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 互余,知 $\angle 1+\angle 4=90°$,所以 $\angle 2+\angle 3=90°$. 所以 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 互余.

(2) $\angle 3=\angle 4$.

理由:由(1)知 $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$,因为 $\angle 1=\angle 2$,所以 $\angle 3=\angle 4$.

(3)由(2)知 $\angle 3=\angle 4$,因为 $\angle 4+\angle AOD=180°$,

所以 $\angle 3+\angle AOD=180°$.

所以 $\angle 3$ 的补角是 $\angle AOD$.

8. **解**:因为 AB,CD 相交于点 O,所以 $\angle 3=\angle 6$.

因为 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$,$\angle 1=100°$,

$\angle 2=30°$,

所以 $\angle 3=180°-100°-30°=50°$.

所以 $\angle 6=\angle 3=50°$.

因为 $\angle 3+\angle 4=\angle FOC=90°$,

所以 $\angle 4=40°$.

又因为 $\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$,

所以 $\angle 5=180°-40°-50°=90°$.

9. **解**:因为 $\angle COE+\angle EOD=180°$,$\angle COE:\angle EOD=4:5$,

所以 $\angle COE=80°$.

因为 OA 平分 $\angle COE$,

所以 $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle COE=40°$.

因为 $\angle AOC=\angle BOD$(对顶角相等),

所以 $\angle BOD=40°$.

10. **解**:(1)45°;45°

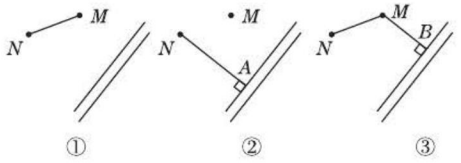
(2) $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB$. 理由如下:

设 $\angle AOB=\alpha$,$\angle BOC=\beta$,

因为 OD 平分 $\angle AOC$,OE 平分 $\angle BOC$,

所以 $\angle COD=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$,$\angle COE=\frac{1}{2}\beta$. 所以 $\angle DOE=\angle COD-\angle COE=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\beta)=\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\angle AOB$.

11. **解**:如果小丽要从 N 村到 M 村去,连接 MN,根据"两点之间,线段最短"知,小丽沿 NM 走最近,如图①.



(第11题)

如果小丽要从 N 村直接到河边去,过点 N 向河边作垂线,垂足为 A,根据"垂线段最短"知,小丽沿 NA 走最近,如图②.

如果小丽要从 N 村先到 M 村再到河边,先连接 MN,再过 M 点向河边作垂线,垂足为 B,根据"两点之间,线段最短"与"垂线段最短"知,这时小丽沿 $NM\rightarrow MB$ 走最近,如图③.

12. **解**:(1) $OE\perp OF$. 理由如下:

由邻补角的定义,可得 $\angle AOC=180°-\angle BOC=130°$.

因为 OE 平分 $\angle AOC$,OF 平分 $\angle BOC$,

所以 $\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC=65°$,

$\angle COF=\frac{1}{2}\angle BOC=25°$.

所以 $\angle EOF=\angle COE+\angle COF=90°$.

所以 $OE\perp OF$.

(2) $OE\perp OF$ 仍然成立. 理由如下:

因为 $\angle BOC=\alpha$,所以 $\angle AOC=180°-\alpha$,

因为 OE 平分 $\angle AOC$,OF 平分 $\angle BOC$,

所以 $\angle COF=\frac{1}{2}\alpha$,$\angle COE=\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°-\frac{1}{2}\alpha$.

所以 $\angle EOF=\angle COF+\angle COE=\frac{1}{2}\alpha+\left(90°-\frac{1}{2}\alpha\right)=90°$,所以 $OE\perp OF$.

由此可以发现,无论 $\angle BOC$ 的度数是多少,$\angle EOF$ 总等于90°,即互为邻补角的两个角的平分线互相垂直.

2 探索直线平行的条件

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** C **4.** B **5.** C

6. **解**:(1) $CD/\!/MN$,$AB/\!/GH/\!/PN$.

(2)略.

7. **解**:因为 $AB\perp BC$,$BC\perp CD$,

所以 $\angle ABC=\angle DCB=90°$.

因为 $\angle 1=\angle 2$,

所以 $\angle ABC-\angle 1=\angle DCB-\angle 2$.

所以 $\angle CBE=\angle BCF$.

所以 $BE/\!/CF$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 解:$c \parallel d$. 理由如下:

因为$\angle 2 + \angle 5 = 180°$,$\angle 3 + \angle 6 = 180°$,$\angle 2 = \angle 3$,

所以$\angle 5 = \angle 6$(等角的补角相等).

又因为$\angle 1 = \angle 4$,

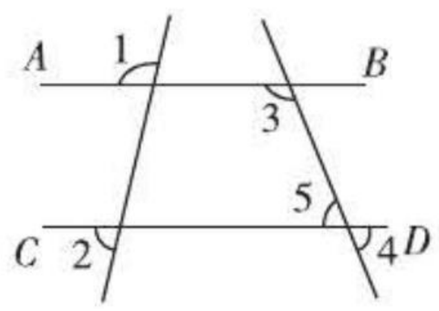
所以$\angle 1 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6$.

所以$c \parallel d$(内错角相等,两直线平行).

3 平行线的性质

【两年模拟兵法】

1. D **点拨**:如图,根据$AB \parallel CD$,可得$\angle 3 + \angle 5 = 180°$. 再根据$\angle 5 = \angle 4$,即可得出$\angle 3 + \angle 4 = 180°$.



(第1题)

2. C **3. C** **4. A**

5. C **6. 45°**

7. 解:因为$DC \parallel EF$,

所以$\angle 3 = \angle 1$(两直线平行,同位角相等),

$\angle 4 = \angle CDE$(两直线平行,内错角相等).

又因为$DE \parallel AC$,

所以$\angle CDE = \angle 2$(两直线平行,内错角相等).

所以$\angle 4 = \angle 2$(等量代换).

又因为$\angle 1 = \angle 2$,

所以$\angle 3 = \angle 4$(等量代换).

8. 解:因为$\angle A = \angle 1$,

所以$AE \parallel BF$.

所以$\angle E = \angle 2$.

因为$CE \parallel DF$,

所以$\angle F = \angle 2$.

所以$\angle E = \angle F$.

4 用尺规作角

【两年模拟兵法】

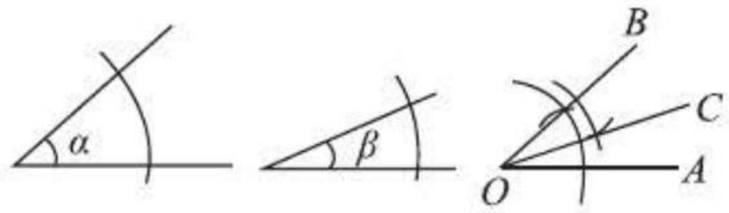
1. D **点拨**:A中,画线段$MN = 3$ cm,需要知道长度,而尺规作图中的直尺是没有刻度的,所以不是尺规作图;B中,用量角器画出$\angle AOB$的平分线,量角器不是尺规作图的工具,所以不是尺规作图;C中,用三角尺作过点A垂直于直线l的直线,三角尺不是尺规作图的工具,所以不是尺规作图;D属于尺规作图.

2. B **点拨**:A中,作一个角等于已知角的倍数是常见的尺规作图,正确;B中,作弧不仅需要圆心,还需要半径,而B中缺少半径,故错误;C正确;D中,作$\angle ABC$,使$\angle ABC = \angle \alpha + \angle \beta$,这是作一个角等于已知角的和,正确.

3. C **点拨**:作线段AB,应使$AB = a$,A错误;延长线段AB到点C,则$AC > BC$,而不可能是$AC = BC$,所以B错误;作弧必须知道圆心和半径,所以D错误,故选C.

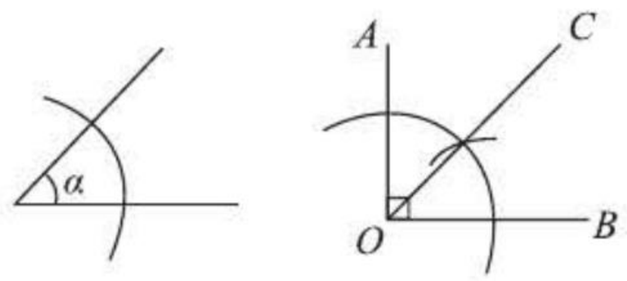
4. 解:(1)如图,作$\angle AOB = \angle \alpha$;

(2)以OB为角的一边,在OB的同侧作$\angle BOC$,使$\angle BOC = \angle \beta$. 如图可知$\angle BOC$落在$\angle AOB$的内部,所以$\angle BOC < \angle AOB$,即$\angle \alpha > \angle \beta$.



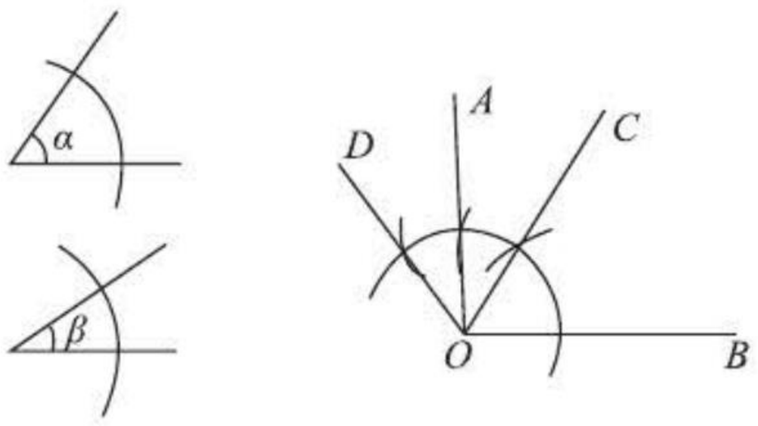
(第4题)

5. 解:如图所示,在$\angle AOB$内作$\angle BOC = \angle \alpha$,则$\angle AOC$就是所求作的角.



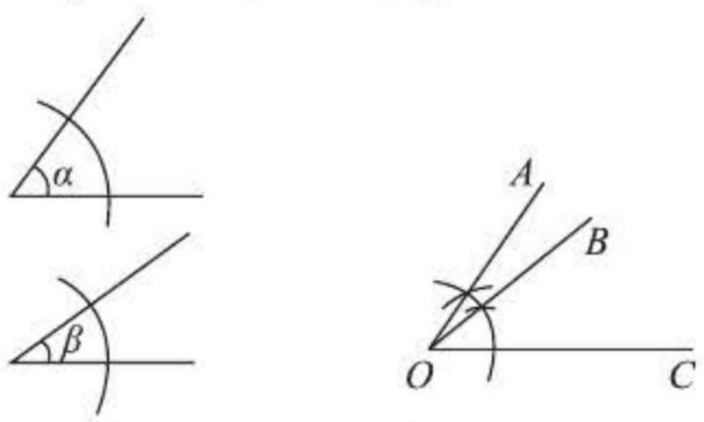
(第5题)

6. 解:(1)作法:如图①所示,①作$\angle BOC = \angle \alpha$;②以$O$为顶点,以射线$OC$为一边,在$\angle BOC$的外部作$\angle COA$,使$\angle COA = \angle \beta$;③以$O$为顶点,以射线$OA$为一边,在$\angle BOA$外部作$\angle AOD$,使$\angle AOD = \angle \beta$. $\angle BOD$就是所求作的角.



(第6题①)

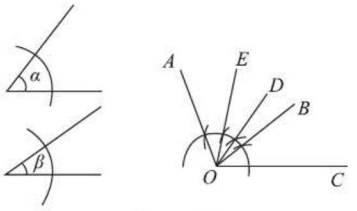
(2)作法:如图②所示,①作$\angle AOC = \angle \alpha$;②以$O$为顶点,以射线$OC$为一边,在$\angle AOC$的内部作$\angle COB$,使$\angle COB = \angle \beta$. $\angle AOB$就是所求作的角.



(第6题②)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

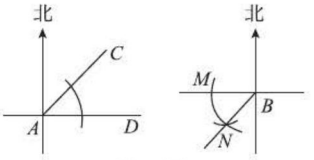
(3)作法:如图③所示,①作$\angle COD=\angle\alpha$;②以O为顶点,以射线OD为一边,在$\angle COD$的外部作$\angle DOA$,使$\angle DOA=\angle\alpha$;③以O为顶点,以射线OC为一边,在$\angle COA$的内部作$\angle COB$,使$\angle COB=\angle\beta$;④以O为顶点,以射线OB为一边,在$\angle BOA$的内部作$\angle BOE$,使$\angle BOE=\angle\beta$. $\angle AOE$就是所求作的角.



(第6题③)

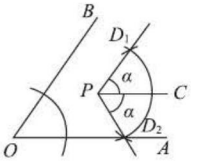
7. 解:(答案不唯一)如图,作$\angle MBN=\angle CAD$,乙船沿着航线BN航行就能与甲船的航线平行.

点拨:乙船也可沿着射线BN的反向延长线的方向航行. 本题实质是作一个角等于已知角.



(第7题)

8. 解:$\angle CPD=\angle AOB=\angle\alpha$,有两解,如图,用平移三角尺的方法可以验证$PD$不一定与$OB$平行,但$PD$与$OA$一定不平行.



(第8题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)因为OF平分$\angle AOE$,所以$\angle AOF=\angle EOF=\frac{1}{2}\angle AOE$. 又因为$\angle DOE=\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOE$,

所以$\angle DOE+\angle EOF=\frac{1}{2}(\angle BOE+\angle AOE)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$,即$\angle FOD=90°$. 所以$OF\perp OD$.

(2)设$\angle AOC=x°$,

因为$\angle AOC:\angle AOD=1:5$,所以$\angle AOD=5x°$.

因为$\angle AOC+\angle AOD=180°$,

所以$x°+5x°=180°$,解得$x°=30°$.

所以$\angle DOE=\angle BOD=\angle AOC=30°$.

又因为$\angle FOD=90°$,

所以$\angle EOF=\angle FOD-\angle DOE=90°-30°=60°$.

2. 解:因为$FG/\!/EC$,$\angle ACE=36°$,

所以$\angle CAG=\angle ACE=36°$.

因为$\angle PAG=12°$,

所以$\angle PAC=\angle CAG+\angle PAG=48°$.

因为AP平分$\angle BAC$,

所以$\angle BAP=\angle PAC=48°$.

所以$\angle BAG=\angle BAP+\angle PAG=60°$.

又因为$DB/\!/FG$,

所以$\angle ABD=\angle BAG=60°$.

3. 解:因为$AD/\!/BC$,所以$\angle B=\angle EAD$,$\angle DAC=\angle C$.

又因为$\angle B=\angle C$,所以$\angle EAD=\angle DAC$.

所以AD平分$\angle CAE$.

4. 解:因为$\angle A=\angle F$,所以$DF/\!/AC$.

所以$\angle D=\angle DBA$.

又因为$\angle C=\angle D$,所以$\angle DBA=\angle C$.

所以$BD/\!/EC$.

5. 解:(1)因为OA平分$\angle EOC$,$\angle EOC=72°$,

所以$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle EOC=36°$.

所以$\angle BOD=\angle AOC=36°$.

(2)$OE\perp OD$. 理由如下:

因为OA平分$\angle EOC$,所以$\angle EOC=2\angle AOC$.

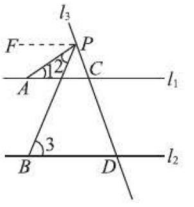
又因为$\angle DOE=2\angle AOC$,所以$\angle DOE=\angle EOC$.

因为$\angle DOE+\angle EOC=180°$,

所以$\angle DOE=\angle EOC=90°$,所以$OE\perp OD$.

6. 解:(1)$\angle 2=\angle 1+\angle 3$. 不变化.

(2)当点P在线段DC的延长线上时,$\angle 2=\angle 3-\angle 1$. 理由:



(第6题)

如图,过点P作$PF/\!/l_1$,所以$\angle FPA=\angle 1$.

因为$l_1/\!/l_2$,所以$PF/\!/l_2$,所以$\angle FPB=\angle 3$.

所以$\angle 2=\angle FPB-\angle FPA=\angle 3-\angle 1$.

同理,当点P在线段CD的延长线上时,

$\angle 2=\angle 1-\angle 3$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

【第二章测试卷】

一、**1**. B **2**. D **3**. D **4**. D

5. D **点拨**:因为 $OE \perp CD$,所以 $\angle COE = 90°$.

又因为 $\angle AOE = 52°$,

所以 $\angle AOC = \angle COE - \angle AOE = 90° - 52° = 38°$,

所以 $\angle BOD = \angle AOC = 38°$.

6. D **点拨**:由 $\angle 2 = \angle 3$,可得 $AB \parallel CD$,

所以 $\angle GPC + \angle AGP = 180°$,

所以 $\angle AGP = 180° - 80° = 100°$,

所以 $\angle BGM = 100°$.

又因为 GH 平分 $\angle BGM$,

所以 $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BGM = \frac{1}{2} \times 100° = 50°$.

7. D **8**. A

二、**9**. 垂线段最短 **10**. 45° **11**. 46°

12. 55° **点拨**:如图,过点 P 作 $PC \parallel a$.

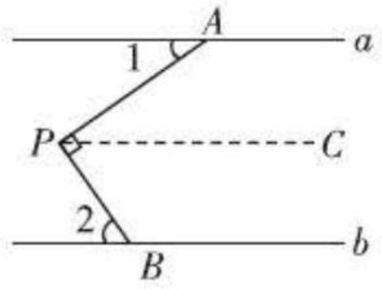
则 $\angle APC = \angle 1 = 35°$.

因为 $PA \perp PB$,所以 $\angle APB = 90°$.

所以 $\angle BPC = \angle APB - \angle APC = 90° - 35° = 55°$.

因为 $a \parallel PC$,$a \parallel b$,所以 $PC \parallel b$.

所以 $\angle 2 = \angle BPC = 55°$.

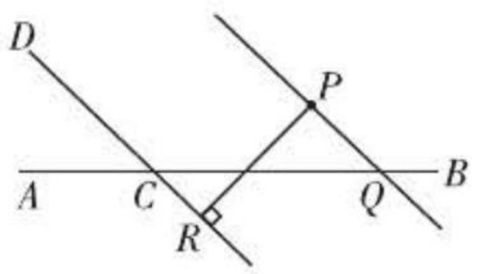


(第 12 题)

三、**13**. 已知;180°;两直线平行,同旁内角互补;

已知;$\angle EDF$;180°;两直线平行,同旁内角互补;同角的补角相等

14. **解**:(1)如图所示.



(第 14 题)

(2)如图所示.

(3)$\angle PQC = 60°$,理由如下:

因为 $PQ \parallel CD$,

所以 $\angle DCB + \angle PQC = 180°$.

因为 $\angle DCB = 120°$,

所以 $\angle PQC = 60°$.

15. **解**:因为 $GH \perp CD$,

所以 $\angle CHG = 90°$.

又因为 $\angle 2 = 30°$,所以 $\angle 3 = 60°$.

所以 $\angle 4 = 60°$.

又因为 $\angle 1 = 60°$,

所以 $\angle 1 = \angle 4$.

所以 $AB \parallel CD$(同位角相等,两直线平行).

16. **解**:如图,过点 E 作 $EF \parallel AB$.

因为 $AB \parallel CD$,

所以 $EF \parallel CD$,

所以 $\angle 4 = \angle D$.

因为 $\angle 2 = \angle D$,

所以 $\angle 4 = \angle 2$.

因为 $EF \parallel AB$,

所以 $\angle 3 = \angle B$.

因为 $\angle 1 = \angle B$,

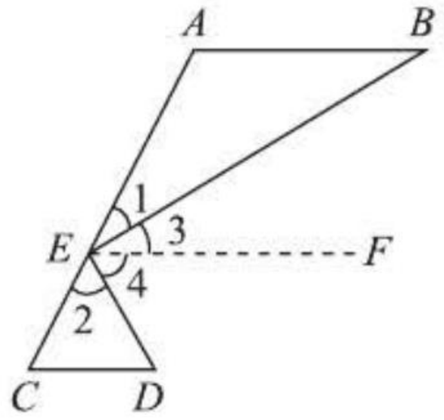
所以 $\angle 3 = \angle 1$.

因为 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$,

所以 $2(\angle 3 + \angle 4) = 180°$.

所以 $\angle 3 + \angle 4 = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$,

即 $\angle BED = 90°$. 所以 $BE \perp DE$.



(第 16 题)

点拨:这类题目通常过“拐点”(拐角处的顶点)作平行线,把一个大角分为两个小角,并分别与已知角建立联系,这种转化思想在解题时经常用到.

17. **解**:(1)$\angle DOE$ 的补角为 $\angle COE$,$\angle AOD$,$\angle BOC$.

(2)因为 OD 是 $\angle BOE$ 的平分线,$\angle BOE = 62°$,

所以 $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOE = 31°$,

$\angle AOE = 180° - \angle BOE = 118°$.

所以 $\angle AOD = 180° - \angle BOD = 149°$.

因为 OF 是 $\angle AOE$ 的平分线,

所以 $\angle EOF = \frac{1}{2}\angle AOE = 59°$.

(3)$OD \perp OF$. 理由如下:

因为 OF,OD 分别是 $\angle AOE$,$\angle BOE$ 的平分线,

所以 $\angle DOF = \angle DOE + \angle EOF$

$= \frac{1}{2}\angle BOE + \frac{1}{2}\angle EOA$

$= \frac{1}{2}(\angle BOE + \angle EOA)$

$= \frac{1}{2} \times 180°$

$= 90°$.

所以 $OD \perp OF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 变量之间的关系

1 用表格表示的变量间关系

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:常量是数值始终不变的量,变量是数值发生变化的量,单价是数值始终不变的量,而金额随着数量的变化而变化,故单价是常量.

2. C **点拨**:根据常量和变量的定义判断即可.

3. D **点拨**:从表格中的信息看,汽车油箱中原存油20 L,每分耗油 0.1 L,行驶 2 h 后剩油 8 L,这些都是正确的. 汽车 1 h 耗油 6 L,3 h 耗油 18 L,所以 D 不正确. 故选 D.

4. C **点拨**:由表格规律知,输出数据的分子是连续的整数,分母是分子的平方与 1 的和,即$\frac{n}{n^2+1}$,故输入 8 时,输出$\frac{8}{65}$. 故选 C.

5. (1)栽种以后的年数;树苗的高度

(2)8 **点拨**:根据题中表格可知,树苗栽种后每年长高 25 cm,所以当 $h=280$ 时,$n=8$,故栽种 8 年后,树苗能长到 280 cm.

6. **解**:(1)反映了温度和距离地面的高度两个变量之间的关系,距离地面的高度是自变量,温度是因变量.

(2)如果用 h 表示距离地面的高度,用 t 表示温度,那么随着 h 的增大,t 逐渐减小(或降低).

(3)距离地面 6 km 的高空的温度是 -16℃.

7. **解**:(1)销售数量(件)和销售额(元)在变化. 自变量是销售数量(件),因变量是销售额(元).

(2)设销售数量为 x 件,销售额为 y 元. 由表格可知,销售额 y 元与销售数量 x 件之间的关系为 $y=8.4x$. 当 $x=10$ 时,$y=8.4\times10=84>80$,故他所带的钱不够用. 最多可购买该商品 9 件.

点拨:解本题的关键是找出销售数量与销售额之间存在怎样的数量关系.

2 用关系式表示的变量间关系

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:余下长方形的一边长为 6 cm,另一边长为 $(8-x)$ cm,所以余下长方形的面积 $S(\text{cm}^2)$ 与 $x(\text{cm})$ 的关系式可表示为 $S=6(8-x)$.

2. B **点拨**:观察表格中的数据,可知售出数量每增加 1 m,售价增加 $(8+0.3)$ 元,由此可得 $y=(8+0.3)x$.

3. C **点拨**:当 $x=7$ 时,$y=3x+4=3\times7+4=25$. 故选 C.

4. C **点拨**:自变量分段已给出,相对应的式子有 3 个,而 $x=\frac{3}{2}$ 在 $1\leqslant x\leqslant2$ 的范围内,所以将 $x=\frac{3}{2}$ 代入 $y=-x+2$,得 $y=\frac{1}{2}$,故选 C.

5. 36 **点拨**:长方体的体积 = 底面积 × 高,高变为原来的 3 倍而底面积不变时,体积由 12 cm^3 变为 $12\times3=36(\text{cm}^3)$.

6. 14;11;2;不够

7. 6 或 -6

8. (1)$L=3n+2$ (2)35 **点拨**:(1)根据图形,分析可得,每增加 1 个梯形,周长 L 增加 3,故 L 与 n 的关系式是 $L=5+(n-1)\times3=3n+2$. (2)当 $n=11$ 时,代入所求关系式,得 $L=3\times11+2=35$.

9. **解**:(1)在这个变化过程中,边 BC 上的高 AD 是自变量,三角形 ABC 的面积是因变量.

(2)$S=\frac{1}{2}\times BC\times h=\frac{1}{2}\times10\times h=5h$,即三角形 ABC 的面积 $S(\text{cm}^2)$ 与高 $h(\text{cm})$ 之间的关系式是 $S=5h$.

(3)列表格如下:

h/cm	4	5	6	7	8	9	10
S/cm^2	20	25	30	35	40	45	50

(4)由(3)可知,h 每增加 1 cm,S 增加 5 cm^2.

3 用图象表示的变量间关系

【两年模拟兵法】

1. D **点拨**:由题图知,这一天 4 时气温达到最低,故选项 A 错误;最低气温是零下 3℃,故选项 B 错误;4 时到 14 时之间气温持续上升,故选项 C 错误;

最高气温是 8℃,故选项 D 正确.

2. D **点拨**:①一辆汽车在公路上匀速行驶(汽车行驶的路程与时间的关系),路程随时间的增大而增大,但速度保持不变,对应图象Ⅳ. ②向锥形瓶中匀速注水(水面的高度与注水时间的关系),瓶中水面的高度随注水时间的变化而变化,由于锥形瓶的直径是下大上小,故先慢后快,对应图象Ⅱ. ③将常温下的温度计插入一杯热水中(温度计的读数与时间的关系),温度计的读数随时间的增大而增大. 由于温度计的温度在放入热水前有温度,故对应图象Ⅰ. ④一杯越来越凉的水(水温与时间的关系),水温随时间的增大而减小,由于水冷却到室温后不变化,故对应图象Ⅲ. 综上所述,得到四个图象对应的情境的排序为③②④①. 故选 D.

3. A

4. D **点拨**:向玻璃杯内匀速注水,水面逐渐升高,当玻璃杯中的水满后,水开始向鱼缸内流,这时最高水位不变,当鱼缸水面高度与玻璃杯高度一样后,继续注水,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

最高水位再次升高,但升高的速度比开始慢,故符合以上内容的图象是选项 D.

5. A **点拨:**①13 岁时,男生、女生的身高增长速度相同,故①正确;②13 岁以后,20 岁以前,男生的身高增长速度比女生的身高增长速度快,故②正确;③15 岁时,只有男生的身高增长速度达到最高值,故③错误;④在 9 岁以后,13 岁以前,男生的身高增长速度比女生的身高增长速度慢,故④错误.

6. D **点拨:**从学校到甲地需要 18 min,行驶了 3 600 m,可知上坡的速度为 $3\,600 \div 18 = 200(\text{m/min})$;在甲地宣传了 8 min,然后下坡到乙地宣传了 8 min,共用时 46 min,可知从甲地到乙地需要 $46 - 18 - 8 - 8 = 12(\text{min})$;从甲地到乙地行驶了 $9\,600 - 3\,600 = 6\,000(\text{m})$,则下坡的速度为 $6\,000 \div 12 = 500(\text{m/min})$;返回时,上坡 6 000 m,下坡 3 600 m,所以返回时所用时间为 $6\,000 \div 200 + 3\,600 \div 500 + 8 = 45.2(\text{min})$.

7. (1)7;37.2℃

(2)2;36.2℃

(3)2 时到 7 时,10 时到 13 时

(4)0 时到 2 时,7 时到 9 时,19 时到 24 时

8. 解:(1)从题图可以看出,这辆摩托车从甲地到乙地共行驶了 45 km,所以共耗油 $2 \div 100 \times 45 = 0.9(\text{L})$.

(2)此人骑摩托车从甲地先以 30 km/h 的速度行驶 1 h,然后休息 0.5 h,再以同样的速度行驶 0.5 h 到达乙地.

9. 解:(1)当每户每月的用水量不超过 5 t 时,每吨交水费 $\frac{10}{5} = 2$(元). 当每户每月的用水量超过 5 t 时,超过的部分每吨交水费 $\frac{20.5 - 10}{8 - 5} = 3.5$(元).

(2)某户某月用 3.5 t 水应交水费 $3.5 \times 2 = 7$(元),某户某月交了水费 17 元,则用水 $5 + \frac{17 - 5 \times 2}{3.5} = 7(\text{t})$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. C

2. $\frac{n}{3n-1}$

3. 解:(1)随着月份 x 的增大,产量 y 逐渐增加.

(2)1 月、2 月的产量保持不变,3 ~ 5 月的产量在匀速增长,6 月份的产量最高.

(3)$(10\,000 + 10\,000 + 12\,000 + 13\,000 + 14\,000 + 18\,000) \div 6 \approx 12\,833$(台).

答:2019 年上半年平均每月的产量约是 12 833 台.

4. 解:(1)该车平均每千米的耗油量为 $(45 - 30) \div 150 = 0.1(\text{L})$,剩余油量 $Q(\text{L})$ 与行驶路程 $x(\text{km})$ 间的关系式为 $Q = 45 - 0.1x$.

(2)当 $x = 280$ 时,$Q = 45 - 0.1 \times 280 = 17(\text{L})$.

故当 $x = 280$ 时,剩余油量为 17L.

5. 解:(1)75;180

(2)$y = 40 + 35(x - 1) = 35x + 5$.

(3)不可能,理由:令 $y = 2\,018$,则 $2\,018 = 35x + 5$,解得 $x \approx 57.5$,因为 x 为正整数,所以总长度不可能为 2 018 cm.

6. B **7.** 6 **8.** 0.3

9. 解:(1)13 时港口的水位最深,深度是 7.5 m.

(2)8 时港口的水位最浅,深度是 2 m.

(3)8 ~ 13 时水深不断增加;13 ~ 15 时水深不断降低;15 ~ 20 时水深又开始增加.

【第三章测试卷】

一、**1.** C **2.** C **3.** B **4.** A **5.** C **6.** C **7.** A **8.** D

二、**9.** (1)30 (2)$h = 30 - 0.5t$ (3)60

10. $y = -7t + 150$;行驶时间;剩余油量

11. $V = 60h$;60; 600

12. ①②④

三、**13. 解:**(1)表格反映的是实验小学五年级学生的平均身高与时间之间的关系;时间是自变量,小学五年级学生的平均身高是因变量.

(2)小学五年级学生的平均身高随时间的增加而增高.

14. 解:(1)自变量是时间,因变量是速度.

(2)汽车从出发到最后停止共经过了 60 min,最高速度是 85 km/h.

(3)汽车在出发后 35 min 到 50 min 之间保持匀速行驶,速度是 85 km/h.

15. 解:(1)

气温 x/℃	0	5	10	15	20	25	30
声速 y/(m/s)	331	334	337	340	343	346	349

(2)反映了声速 y 和气温 x 两个变量之间的关系,气温 x 是自变量,声速 y 是因变量.

(3)352 m/s.

(4)$y = 331 + \frac{3}{5}x$.

16. 解:(1)$y = 9x(0 < x \leqslant 3)$; (2)27 cm^2.

17. 解:(1)汽车在 0.2 ~ 0.4 h,0.6 ~ 0.7 h,0.9 ~ 1 h 三个时间段保持匀速行驶,速度分别是 70 km/h,80 km/h和 70 km/h.

(2)汽车遇到 CD,FG 两个上坡路段,AB,DE,GH 三个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

下坡路段，在 AB 下坡路段上所花时间最长.

(3)汽车刚开始速度是 50 km/h，行驶 0.2 h 的下坡路，速度增加到 70 km/h，保持 70 km/h 行驶 0.2 h 的平路，再行驶 0.1 h 的上坡路，速度降至 40 km/h；又行驶 0.1 h 的下坡路，速度增加到 80 km/h，保持 80 km/h 行驶了 0.1 h 平路，又花了 0.1 h 上坡，速度降至 40 km/h，之后花 0.1 h 下坡，速度增加到 70 km/h，保持 70 km/h 行驶了 0.1 h 平路到达目的地.

第四章 三角形

1 认识三角形

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B **3.** C **4.** D

5. B **点拨**：根据点 D，E 分别是 BC，AD 的中点，

得 $S_{\triangle BEC}=4\ \text{cm}^2$.

因为点 F 是 CE 的中点，

所以 $S_{\text{阴影}}=2\ \text{cm}^2$.

6. C

7. **解**：分两种情况：

①当 4 cm 长的边是底边时，设腰为 x cm，则 $4+x+x=20$，解得 $x=8$. 又因为 4 cm，8 cm，8 cm 三边能组成三角形，所以腰长为 8 cm.

②当 4 cm 长的边是腰时，另一腰也是 4 cm，则底边长为 $20-4-4=12$(cm). 而 $4+4<12$，说明 4 cm，4 cm，12 cm 不能组成三角形，所以此种情况不存在.

故三角形的其他两边的长均为 8 cm.

8. **解**：因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE$，

所以 $\frac{1}{2}\times 9\times 6=\frac{1}{2}\times 8\times BE$.

所以 $BE=\frac{27}{4}$.

9. **解**：因为 $DE/\!/AC$，

所以 $\angle EDA=\angle CAD$.

又因为 $\angle EDA=\angle EAD$，

所以 $\angle CAD=\angle EAD$.

所以 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

10. **解**：(1) $\angle 1=\angle 2$，理由如下：

因为在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$CE\perp AB$ 于点 E，

所以 $\angle AEC=\angle ADC=90°$.

设 AD 与 CE 交于点 O，

则 $\angle AOE=\angle DOC$(对顶角相等)，

又因为 $\angle 1+\angle COD=\angle 2+\angle AOE=90°$，

所以 $\angle 1=\angle 2$.

(2)(1)中的结论仍然成立. 理由如下：

由题意可知 $\angle D=\angle E=90°$，

所以 $\angle 1+\angle CBE=\angle 2+\angle ABD=90°$.

又因为 $\angle ABD=\angle CBE$(对顶角相等)，

所以 $\angle 1=\angle 2$.

2 图形的全等

【两年模拟兵法】

1. B

2. C

3. A **点拨**：由题意得 $AC=DF=25$ cm，

所以 $BC=100-AC-AB=100-25-30=45$(cm).

4. 70° **点拨**：先由全等三角形的性质求出 $\angle DEF$ 和 $\angle ACB$ 的度数，再根据三角形内角和定理求 $\angle COE$ 的度数.

5. 100°；12cm

6. 6 **点拨**：由折叠得 $BE=ED$，$BC'=DC$，$C'F=FC$，所以 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和等于长方形 $ABCD$ 的周长.

7. **解**：(1) $\triangle ABC\cong\triangle DBE$，$AC$ 和 DE，AB 和 DB，BC 和 BE 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle ACB$ 和 $\angle DEB$，$\angle ABC$ 和 $\angle DBE$ 是对应角.

(2)延长 AC 交 DE 于点 F.

因为 $\angle ABC=90°$，

所以 $\angle A+\angle ACB=90°$.

因为 $\triangle ABC\cong\triangle DBE$，

所以 $\angle A=\angle D$.

又因为 $\angle ACB=\angle DCF$(对顶角相等)，

所以 $\angle D+\angle DCF=90°$.

所以 $\angle AFD=90°$.

所以 $AC\perp DE$.

8. **解**：因为 $\triangle PAB\cong\triangle AQC$，

所以 $\angle BAP=\angle CQA$.

因为 $CF\perp AB$，

所以 $\angle CQA+\angle QAF=90°$.

所以 $\angle BAP+\angle QAF=90°$，

即 $\angle QAP=90°$.

所以 $AP\perp AQ$.

9. **解**：相等.

理由如下：

因为 $\triangle ADC\cong\triangle ECD$，

所以 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ECD}$.

因为 $AD/\!/BC$，

所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 同底等高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$.

所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ECD}$.

所以 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ECD}+S_{\triangle BCD}$.

即 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

3 探索三角形全等的条件

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B **3.** C **4.** ②

5. **解**:因为 $\angle 1=\angle 2$,

所以 $\angle DAC+\angle 1=\angle 2+\angle DAC$.

所以 $\angle BAC=\angle DAE$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAE,\end{cases}$$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle ADE$(ASA).

所以 $BC=DE$.

6. **解**:因为 $FB=CE$,

所以 $BC=EF$.

又因为 $AB/\!/ED$,$AC/\!/FD$,

所以 $\angle ABC=\angle DEF$,$\angle ACB=\angle DFE$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(ASA).

所以 $AB=DE$.

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle DEO$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABO=\angle DEO,\\ \angle AOB=\angle DOE,\\ AB=DE,\end{cases}$$

所以 $\triangle ABO\cong\triangle DEO$(AAS).

所以 $AO=DO$,$BO=EO$.

所以 AD 与 BE 互相平分.

7. **解**:(1)因为 AE 和 BD 相交于点 O,

所以 $\angle AOD=\angle BOE$.

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOE$ 中,$\angle A=\angle B$,

所以 $\angle BEO=\angle 2$.

又因为 $\angle 1=\angle 2$,

所以 $\angle 1=\angle BEO$,

所以 $\angle AEC=\angle BED$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BED,\end{cases}$$

所以 $\triangle AEC\cong\triangle BED$(ASA).

(2)因为 $\triangle AEC\cong\triangle BED$,

所以 $EC=ED$,$\angle C=\angle BDE$.

在 $\triangle EDC$ 中,因为 $EC=ED$,$\angle 1=42°$,

所以 $\angle C=\angle EDC=69°$,

所以 $\angle BDE=69°$.

8. **解**:(1)因为 $AC=AD+DC$,$DF=DC+CF$,

且 $AD=CF$,所以 $AC=DF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases}AB=DE,\\ BC=EF,\\ AC=DF,\end{cases}$$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(SSS).

(2)由(1)可知,$\triangle ABC\cong\triangle DEF$,

所以 $\angle F=\angle ACB$.

因为 $\angle A=55°$,$\angle B=88°$,

所以 $\angle ACB=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(55°+88°)=37°$.

所以 $\angle F=\angle ACB=37°$.

9. **解**:由已知条件不能说明 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$. 选择添加条件①或条件③.

添加条件①时,理由:因为 $BF=CE$,所以 $BC=EF$.

又因为 $\angle ABC=\angle DEF$,$AB=DE$,

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(SAS).

添加条件③时,理由:因为 $AC/\!/DF$,

所以 $\angle C=\angle F$.

因为 $BF=CE$,所以 $BC=EF$.

又因为 $\angle ABC=\angle DEF$,

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ (ASA).

10. **解**:(1)在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中,

由于 $AB=AD$,$BC=DC$,而 $AC=AC$,

所以 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$(SSS).

所以 $\angle BAC=\angle DAC$.

所以 AC 平分 $\angle BAD$.

(2)在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADE$ 中,$AB=AD$,$\angle BAE=\angle DAE$,

$AE=AE$,

所以 $\triangle ABE\cong\triangle ADE$(ASA).

所以 $BE=DE$.

11. **解**:(1)如图①,连接 AD,因为 $DE\perp DF$,所以 $\angle EDF=90°$.

因为 D 为 BC 的中点,所以 $BD=CD$.

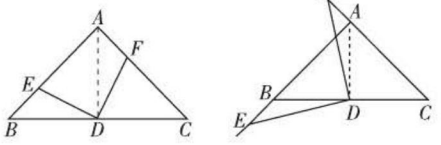
因为 $AB=AC$,$AD=AD$,

所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$(SSS).

所以 $\angle ADB=\angle ADC$,$\angle BAD=\angle CAD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为$\angle ADB+\angle ADC=180°$，
所以$\angle ADB=\angle ADC=90°$.
所以$\angle BDA=\angle EDF=90°$.
所以$\angle BDE+\angle EDA=\angle EDA+\angle ADF$.
所以$\angle BDE=\angle ADF$.
因为$\angle BAC=90°$，
所以$\angle BAD=\angle CAD=45°$.
又因为$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，
所以$\angle B=\angle BAD=\angle DAC=45°$.
因为$\angle BDA=90°$，
所以$\triangle ABD$是等腰直角三角形.
所以$BD=AD$.
所以$\triangle BDE\cong\triangle ADF$(ASA).
所以$BE=AF$.



(第11题)

(2)$BE=AF$. 理由：如图②，连接AD，
易得$\angle BDA=90°$，$\angle EDF=90°$，
所以$\angle BDA=\angle EDF$.
所以$\angle BDE+\angle BDF=\angle BDF+\angle ADF$.
所以$\angle BDE=\angle ADF$.
易得$\angle ABC=\angle BAD=\angle DAC=45°$，
所以$\angle EBD=\angle FAD=180°-45°=135°$.
因为$\angle BDA=90°$，$\angle ABC=\angle BAD=45°$，
所以$\triangle ABD$是等腰直角三角形.
所以$BD=AD$.
所以$\triangle BDE\cong\triangle ADF$(ASA).
所以$BE=AF$.

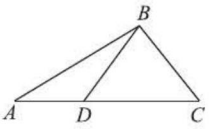
4 用尺规作三角形

【两年模拟兵法】

1. D　**点拨**：选项A，B，C分别符合全等三角形的判定“SSS”“ASA”“SAS”，故能作出唯一的三角形；选项D不符合全等三角形的判定，故可能作出两个不同的三角形.

2. C　**点拨**：根据三边作三角形用到的基本作图是作一条线段等于已知线段.

3. D　**点拨**：选项A中，因为$3+4<8$，所以不能画出三角形；

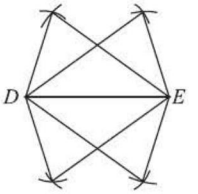


(第3题)

选项B中，根据$AB=3$，$BC=2$，$\angle A=30°$不能画出唯一的三角形，如图所示的$\triangle ABD$和$\triangle ABC$；
选项C中，根据$\angle A=30°$，$\angle B=70°$，$\angle C=80°$，不能画出唯一的三角形；
选项D中，根据$\angle A=60°$，$\angle B=30°$，$AB=4$，符合判定全等三角形的条件“ASA”，即能画出唯一的三角形，故选D.

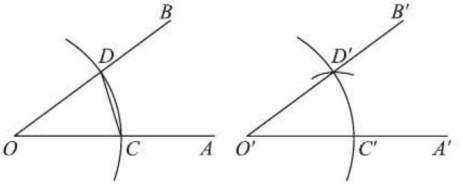
4. D　**点拨**：画草图可知这属于两角及其夹边的情形，故选D.

5. B　**点拨**：最多可以画4个，分别是：①以D为圆心，AB长为半径作弧，以E为圆心，AC长为半径作弧，两弧相交于两点(DE上下各一个点)，经过连接后可以得到两个与$\triangle ABC$全等的三角形；
②以D为圆心，AC长为半径作弧，以E为圆心，AB长为半径作弧，两弧相交于两点(DE上下各一个点)，经过连接后也可以得到两个与$\triangle ABC$全等的三角形.
如图所示，故这样的三角形最多可以画4个.



(第5题)

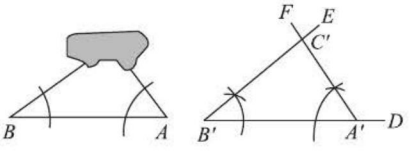
6. **解**：(1)如图所示，$\angle A'O'B'$即为所求.



(第6题)

(2)DC；SSS；全等三角形的对应角相等

7. **解**：如图所示，作法：



(第7题)

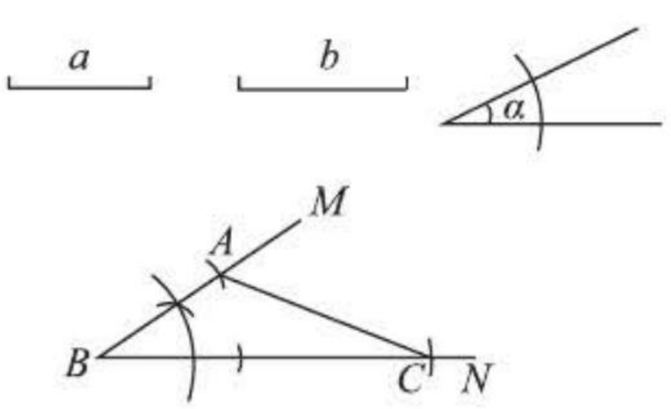
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)作射线 $B'D$,在射线 $B'D$ 上截取 $B'A'=BA$;

(2)以 B',A'为顶点,以 $B'A'$为一边,在 $B'A'$的同侧分别作$\angle A'B'E=\angle B$,$\angle B'A'F=\angle A$;

(3)$B'E$ 与 $A'F$ 的交点为 C',则$\triangle A'B'C'$就是所求作的三角形.

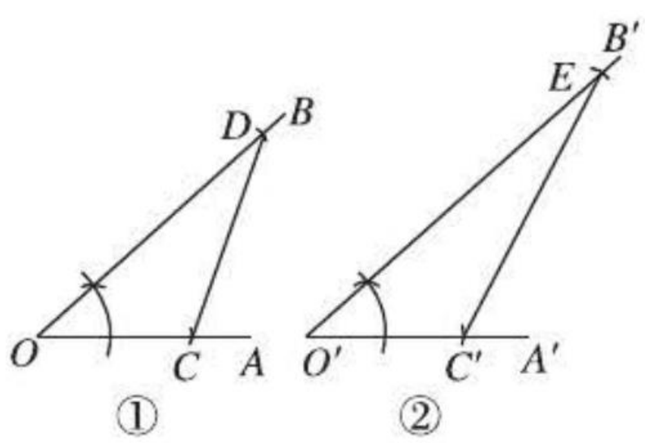
8. 解:作法:如图.(1)作$\angle MBN=\angle\alpha$;(2)在射线 BM 上截取 $AB=a$,在射线 BN 上截取 $BC=a+b$;(3)连接 AC. $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.



(第8题)

9. 解:(1)如图①,作$\angle AOB=\angle\alpha$,以 O 为圆心,a 为半径画弧,交 OA 于点 C,以 O 为圆心,b 为半径画弧,交 OB 于点 D,连接 CD,则$\triangle OCD$ 就是满足条件的一个三角形.

(2)能,如图②,作$\angle A'O'B'=\angle\alpha$,以点 O 为圆心,a 为半径画弧,交 $O'A'$于点 C',以点 C'为圆心,b 为半径画弧,交 $O'B'$于点 E,连接 $C'E$,则$\triangle O'C'E$ 即为所求.



(第9题)

5 利用三角形全等测距离

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨**:因为在说明$\triangle ABC\cong\triangle EDC$中用到的条件是$\angle ABC=\angle EDC$,$BC=DC$,$\angle ACB=\angle ECD$,所以用到的是两角及这两角的夹边分别相等即角边角这一判定方法.

3. B **点拨**:因为 $AC=DB$,$AO=DO$,所以 $AC-AO=DB-DO$,即 $OC=OB$.

在$\triangle AOB$和$\triangle DOC$中,

$$\begin{cases}AO=DO,\\ \angle AOB=\angle DOC,\\ OB=OC,\end{cases}$$

所以$\triangle AOB\cong\triangle DOC$(SAS).

所以 $AB=CD=100$ m.

4. A **点拨**:要想知道 M 与 F 之间的距离,实际上就是判断 MF 的长和题图中哪条线段的长相等,从已知条件可以说明$\triangle BME\cong\triangle CMF$,所以 $ME=MF$,即要想知道 M 与 F 之间的距离,需要测出长度的线段是 EM.

5. A **点拨**:连接 AD,由 $AC=DB$,$\angle CAD=\angle BDA$(由 $AC/\!/BD$可得),$AD=DA$,可得$\triangle ACD\cong\triangle DBA$(SAS),故选 A.

6. 12 m **点拨**:在$\triangle AOB$和$\triangle DOC$中,

$$\begin{cases}AO=DO,\\ \angle AOB=\angle DOC,\\ OB=OC,\end{cases}$$

所以$\triangle AOB\cong\triangle DOC$(SAS).

所以 $AB=CD=12$ m.

7. 解:记两树分别为树 A 与树 B,找一点 O 既可以到达树 A,又可以到达树 B,连接 AO,BO,在 AO 和 BO 的延长线上分别找出 C 和 D 两点,使 $CO=AO$,$DO=BO$,连接 CD,从而由"SAS"得$\triangle AOB\cong\triangle COD$,只需测出 CD 的长度即得 A,B 间的距离.

8. 解:能. 在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中,

$$\begin{cases}AC=DC,\\ \angle ACB=\angle DCE,\\ BC=EC,\end{cases}$$

所以$\triangle ABC\cong\triangle DEC$(SAS).

所以 $AB=DE$.

即量出 DE 的长,就是 A,B 间的距离.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 8 cm 或 2 cm

2. 解:因为$\triangle ABC$为等腰三角形,

所以 $2a+2=8$ 或 $2a+2=22$,

则 $a=3$ 或 $a=10$.

当 $a=3$ 时,$\triangle ABC$ 的三边长为 8,8,22,

因为 $8+8<22$,所以不构成三角形,舍去.

当 $a=10$ 时,$\triangle ABC$ 的三边长为 8,22,22,

满足三角形三边关系.

所以$\triangle ABC$的周长为 $22+22+8=52$.

3. 解:(1)因为 a,b,c 是三角形的三边长,

所以 $a-b-c<0$,$b-c-a<0$,$c-a-b<0$.

所以原式 $=-a+b+c-b+c+a-c+a+b=a+b+c$.

(2)当 $a=5$,$b=4$,$c=3$ 时,原式 $=a+b+c=5+4+3=12$.

4. 解:因为 $DF/\!/EC$,

所以$\angle BCE=\angle D=42°$.

因为 CE 是$\angle ACB$的平分线,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以$\angle ACB = 2\angle BCE = 84°$.

因为$\angle A = 46°$,

所以$\angle B = 180° - 84° - 46° = 50°$.

5. 解:因为DE是CA边上的高,

所以$\angle DEA = \angle DEC = 90°$.

因为$\angle A = 20°$,所以$\angle EDA = 90° - 20° = 70°$.

因为$\angle EDA = \angle CDB$,

所以$\angle CDE = 180° - 70° \times 2 = 40°$.

在Rt$\triangle CDE$中,$\angle DCE = 90° - 40° = 50°$.

因为CD是$\angle BCA$的平分线,

所以$\angle BCA = 2\angle DCE = 2 \times 50° = 100°$.

所以在$\triangle ABC$中,$\angle B = 180° - \angle BCA - \angle A = 180° - 100° - 20° = 60°$.

6. 解:因为$OA = OB$,$OE = OF$,

所以$OA - OE = OB - OF$,即$AE = BF$.

在$\triangle ACE$和$\triangle BDF$中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B, \\ \angle ACE = \angle BDF, \\ AE = BF, \end{cases}$$

所以$\triangle ACE \cong \triangle BDF$(AAS).

7. 解:因为$\angle BAC = \angle DAM$,

即$\angle BAD + \angle DAC = \angle DAC + \angle NAM$,

所以$\angle BAD = \angle NAM$.

在$\triangle BAD$和$\triangle NAM$中,

$$\begin{cases} AB = AN, \\ \angle BAD = \angle NAM, \\ AD = AM, \end{cases}$$

所以$\triangle BAD \cong \triangle NAM$(SAS).

所以$\angle B = \angle ANM$.

8. 解:因为$FC // AB$,

所以$\angle ADE = \angle CFE$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CFE$中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CFE, \\ DE = FE, \\ \angle AED = \angle CEF, \end{cases}$$

所以$\triangle ADE \cong \triangle CFE$(ASA).

所以$AE = CE$.

【第四章测试卷】

一、**1**. C **2**. C **3**. D **4**. C **5**. A **6**. B **7**. C **8**. B

二、**9**. 13或15 **10**. 130°

11. $AB = DE$(或$\angle A = \angle D$或$\angle ACB = \angle DFE$或$AC // DF$)

12. 等腰三角形;7

三、**13. 解**:小淇同学的作法正确.

理由:如图,连接OB.

因为O为AC的中点,以O为圆心,OA长为半径画弧交直线l于点B,

所以$OA = OC = OB$.

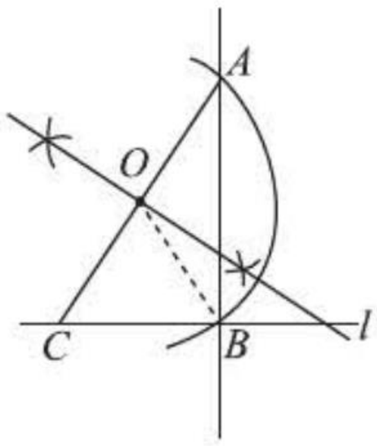
所以$\angle CAB = \angle ABO$,$\angle ACB = \angle CBO$,

又因为$\angle CAB + \angle ABO + \angle ACB + \angle CBO = 180°$,

所以$\angle ABO + \angle CBO = 90°$.

所以$\angle ABC = 90°$,

即$AB \perp l$.



(第13题)

14. 解:$\triangle ABD \cong \triangle ACD$,理由如下:

因为AD平分$\angle BAC$,所以$\angle BAD = \angle CAD$,

在$\triangle BAD$和$\triangle CAD$中,

$$\begin{cases} AD = AD, \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AB = AC, \end{cases}$$

所以$\triangle BAD \cong \triangle CAD$(SAS).

15. 解:$\angle QBO = 180° - \angle A - \angle AOC = 180° - 28° - 100° = 52°$. 即$\angle QBO$应等于52°才能确保$BQ$与$AP$在同一条直线上.

16. 解:(1)因为$\triangle ABC \cong \triangle DEC$,

所以$AC = DC$,$BC = CE$.

因为点M,N分别为线段AC,CD的中点,

所以$CM = \frac{1}{2}AC$,$CN = \frac{1}{2}DC$.

所以$CM = CN$.

在$\triangle BCN$和$\triangle ECM$中,

因为$MC = NC$,$\angle BCN = \angle ECM$,$BC = CE$,

所以$\triangle BCN \cong \triangle ECM$(SAS).

所以$ME = BN$.

(2)由(1)知$\triangle BCN \cong \triangle ECM$,

所以$\angle CBN = \angle CEM$,

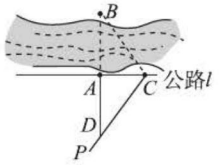
所以$ME // BN$.

17. 解:(方法不唯一)

(1)测量工具:测角仪,卷尺.

(2)测量的示意图如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第17题)

测量步骤:

①在公路 l 上选取两点 A,C,用测角仪测得 $\angle BAC=90°$,$\angle ACB=\alpha$;

②在公路 l 的草地一侧过点 C 作射线 CP,使 $\angle ACP=\angle ACB=\alpha$,$CP$ 交 BA 的延长线于点 D;

③用卷尺测出 AD 的长,记为 a m,则点 B 到公路 l 的距离即为 a m.

(3)由测量步骤可知,$\angle BAC=\angle DAC=90°$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,$\begin{cases}\angle BAC=\angle DAC=90°,\\ AC=AC,\\ \angle ACB=\angle ACD,\end{cases}$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$(ASA). 所以 $AB=AD=a$ m,即点 B 到公路 l 的距离为 a m.

第五章 生活中的轴对称

1 轴对称现象

【两年模拟兵法】

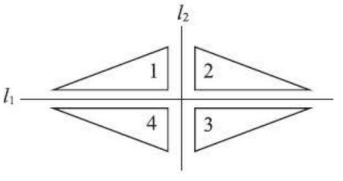
1. D **2**. C **3**. B

4. (1)(2)(10) (3)(4)(5)(6)(9) (7)

5. 3265

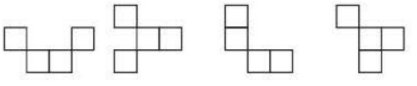
6. (1)B,C (2)略

7. **解**:题图中三角形 4 与三角形 1,3 成轴对称,如图所示,直线 l_1 是三角形 4 与三角形 1 的对称轴;直线 l_2 是三角形 4 与三角形 3 的对称轴. 整个图形是轴对称图形,它共有 2 条对称轴.



(第7题)

8. **解**:如图.



(第8题)

2 探索轴对称的性质

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:由轴对称的概念可知,选项 A,B,D 正确,选项 C 错误,故选 C.

2. D **点拨**:因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 关于直线 a 成轴对称,所以 $\angle F=\angle C=30°$,所以 $\angle E=180°-\angle D-\angle F=180°-50°-30°=100°$.

3. D **点拨**:因为 $\triangle BDE$ 由 $\triangle BDC$ 翻折而成,所以 $BE=BC$,因为 $AE+BE=AB$,所以 $AE+CB=AB$. 故选项 D 正确.

4. 呆 **5**. 8 cm^2

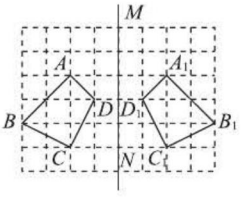
6. ①② **点拨**:由轴对称的性质可知,$\angle EAB=\angle FAC$,所以 $\angle EAB-\angle CAB=\angle FAC-\angle CAB$,即 $\angle 1=\angle 2$;由轴对称的性质可知,$\angle C=\angle B$,$AC=AB$,又因为 $\angle CAN=\angle BAM$,所以 $\triangle ANC\cong\triangle AMB$,故①②正确,而 $CD=BD$,故③不能确定.

7. JI;$\angle H$;垂直平分

8. MT7936 **点拨**:根据镜面反射的对称性可知,水中倒影与实际车牌上、下对称,故实际车牌号码是 MT7936.

9. 20°

10. **解**:先分别找出点 A,B,C,D 关于直线 MN 的对称点 A_1,B_1,C_1,D_1,再顺次连接 A_1,B_1,C_1,D_1,可得四边形 $A_1B_1C_1D_1$,如图所示.



(第10题)

3 简单的轴对称图形

【两年模拟兵法】

1. B **2**. D

3. B **点拨**:因为 DE 是 AC 的垂直平分线,

所以 $AD=CD$.

所以 $\angle A=\angle ACD=50°$,

所以 $\angle CDA=80°$.

所以 $\angle BDC=100°$. 故选 B.

4. B **点拨**:因为 DE 是 AC 的垂直平分线,

所以 $AD=DC$.

所以 $\triangle ABD$ 的周长等于 AB,BC 的长度之和.

因为 $EC=4$,所以 $AC=8$.

因为 $\triangle ABC$ 的周长为 23,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

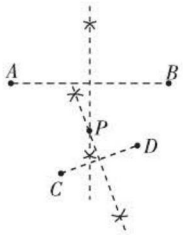
所以 $AB+BC=15$，

即 $\triangle ABD$ 的周长为 15.

5. C

6. 87　**7**. 14

8. **解**：如图，点 P 为所求的位置.



（第 8 题）

点拨：到 A，B 两点距离相等的点在线段 AB 的垂直平分线上，到 C，D 两点距离相等的点在线段 CD 的垂直平分线上，同时满足上述条件的点是两条线段垂直平分线的交点.

9. **解**：(1)因为点 P 在 AB 的垂直平分线上，

所以 $PA=PB$，

所以 $\angle PAB=\angle B$.

因为 $\angle APC=180°-\angle APB=180°-(180°-\angle PAB-\angle B)=\angle PAB+\angle B$，

所以 $\angle APC=2\angle B$.

(2)根据题意，得 $BQ=BA$，所以 $\angle BAQ=\angle BQA$，

设 $\angle B=x$，则 $\angle AQC=180°-\angle AQB=180°-(180°-\angle B-\angle BAQ)=\angle B+\angle BAQ=3x$，

所以 $\angle BAQ=\angle BQA=2x$，

在 $\triangle ABQ$ 中，$x+2x+2x=180°$，解得 $x=36°$，

所以 $\angle B=36°$.

10. **解**：(1)因为 $AB=AC$，$\angle A=40°$，

所以 $\angle B=\angle ACB=\dfrac{180°-40°}{2}=70°$.

又因为 $MN\perp AB$，

所以 $\angle NMB=90°-\angle B=90°-70°=20°$.

(2)过程同(1)可求得 $\angle NMB=35°$.

(3)规律：$\angle NMB=\dfrac{1}{2}\angle A$.

理由：因为在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，

所以 $\angle B=\angle ACB=\dfrac{180°-\angle A}{2}$.

因为 AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，交 BC 的延长线于点 M，

所以 $\angle NMB=90°-\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$.

4　利用轴对称进行设计

【两年模拟兵法】

1. D

2. C　**点拨**：由题意知，剪出的图案一定是轴对称图形，四个选项中，只有选项 C 中的图案不是轴对称图形，所以 C 不能用上述方法剪出.

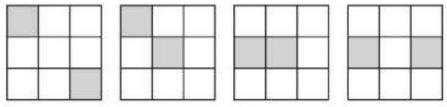
3. C

4. D　**点拨**：观察题图中的图案特征可知，该图案可由基本图形②⑤拼接而成.

5. C

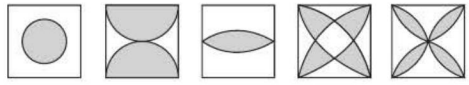
6. B

7. **解**：答案不唯一，如图所示.



（第 7 题）

8. **解**：答案不唯一，如图所示.



（第 8 题）

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B　**2**. B　**3**. 45°

4. **解**：由于条件中一条腰上的中线分其周长为两部分，并没有指明哪一部分是 9 cm、哪一部分是 12 cm，因此，应有两种情形：

设这个等腰三角形的腰长为 x cm，底边长为 y cm，

根据题意，

得 $x+\dfrac{1}{2}x=9$，解得 $x=6$，$y=12-6\times\dfrac{1}{2}=9$.

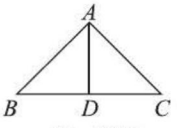
或 $x+\dfrac{1}{2}x=12$，解得 $x=8$，$y=9-8\times\dfrac{1}{2}=5$.

即 $x=6$，$y=9$ 或 $x=8$，$y=5$.

即当腰长是 6 cm 时，底边长是 9 cm；

当腰长是 8 cm 时，底边长是 5 cm.

5. **解**：①如图①所示，当 $AD=BD=CD$ 时，



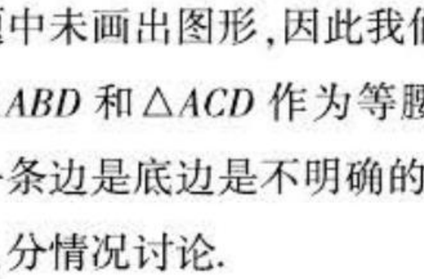
（第 5 题①）

设 $\angle C=x$，由 $AB=AC$，得 $\angle B=x$，由 $AD=BD=CD$，得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle BAD=\angle B=x$,$\angle DAC=\angle C=x$. 因为三角形的内角和是180°,所以$x+x+(x+x)=180°$,所以$x=45°$,即$\angle C=45°$.

②如图②所示,当$AD=BD$,$AC=CD$时,



(第5题②)

设$\angle C=x$,由$AB=AC$,得$\angle B=x$,由$AD=BD$,得$\angle BAD=\angle B=x$,$\angle ADC=180°-\angle ADB=180°-(180°-\angle B-\angle BAD)=2x$,由$AC=CD$,得$\angle DAC=\angle ADC=2x$. 因为三角形的内角和是180°,$x+x+x+2x=180°$,所以$x=36°$,即$\angle C=36°$,同理当$AB=BD'$,$AD'=CD'$时,如图②所示,此时$\angle C=36°$.

综上所述,$\angle C$为45°或36°.

点拨:因为原题中未画出图形,因此我们必须根据题意画出图形,但$\triangle ABD$和$\triangle ACD$作为等腰三角形时哪一条边是腰,哪一条边是底边是不明确的,因此必须通过画图加以分析,分情况讨论.

6. B **点拨**:一般地,若已知条件中具有垂直平分线这个条件,常结合等腰三角形的性质、三角形的内角和为180°求角的度数.

7. C **点拨**:由题易知$PD\perp CD$. 过点P作$PE\perp BC$于点E,根据角平分线上的点到这个角的两边的距离相等可得,$PA=PE$,$PD=PE$,则$PE=PA=PD$. 因为$AD=8$,进而求出$PE=4$.

【第五章测试卷】

一、**1**. B **2**. A **3**. B **4**. C **5**. D **6**. C **7**. B **8**. A

二、**9**. 120° **10**. 本,幸,苦(答案不唯一)

11. 3 **12**. BA629

三、**13**. **解**:因为AD平分$\angle BAC$,$DE\perp AB$,$\angle C=90°$,所以$CD=DE=5$ cm.

又因为AD平分$\angle BAC$,

所以$\angle CAB=2\angle CAD=2\times32°=64°$,

所以$\angle B=90°-64°=26°$.

14. **解**:因为$\triangle ABD$,$\triangle BCE$都是等腰三角形,所以$AB=BD$,$BC=BE$.

又因为$BD=CD-BC$,所以$AB=CD-BC=CD-BE=8-3=5$(cm),

所以$AE=AB-BE=2$ cm.

15. **解**:(1)如图.

(2)$AF/\!/BC$,$AF=BC$.

理由:因为$AB=AC$,

所以$\angle C=\angle ABC$.

又因为$\angle DAC=\angle DAF+\angle FAC=180°-\angle BAC=\angle ABC+\angle C$,$\angle DAF=\angle FAC$,

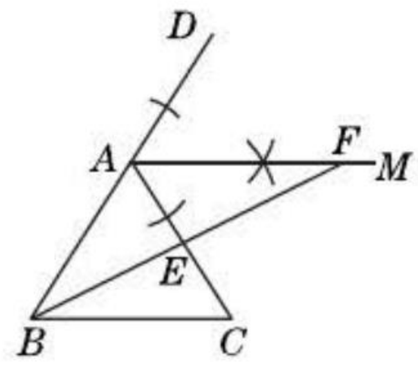
所以$\angle C=\angle FAC$. 所以$AF/\!/BC$.

因为$\angle FAC=\angle C$,$AE=EC$,$\angle AEF=\angle CEB$,

所以$\triangle AEF\cong\triangle CEB$(ASA).

所以$AF=BC$.

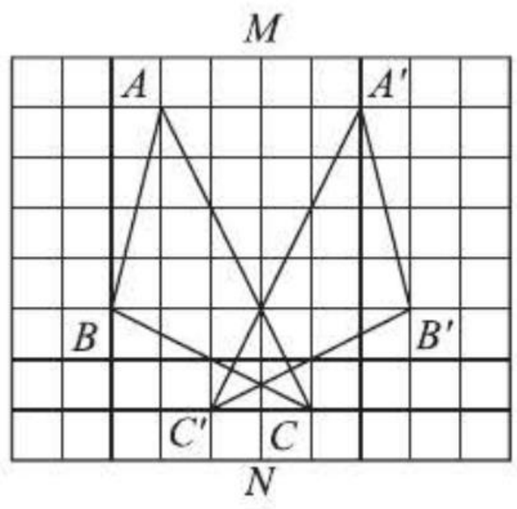
点拨:等腰三角形顶角的邻补角的平分线平行于底边.



(第15题)

16. **解**:(1)如图所示. **点拨**:利用图中格点,可以直接确定出$\triangle ABC$中各顶点的对称点的位置,从而得到$\triangle ABC$关于直线MN的对称图形$\triangle A'B'C'$.

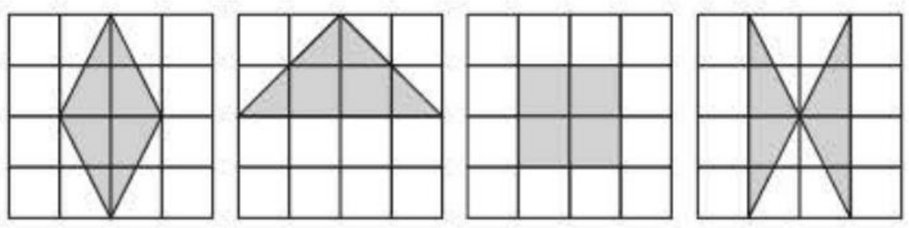
(2)$S_{\triangle ABC}=9$. **点拨**:利用和差法.



(第16题)

17. **解**:(1)都是轴对称图形;它们的面积相等.(答案不唯一)

(2)答案不唯一,举例如图所示.



(第17题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第六章 概率初步

1 感受可能性

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** B **4.** B

5. **解**:必然事件:(1)(4);

不可能事件:(2)(3)(5);

随机事件:(6).

6. **解**:摸出黄球的可能性最大.

因为黄球有 20 − 4 − 2 − 3 = 11(个),数量最多,

所以摸出黄球的可能性最大.

7. **解**:不同意这两名同学的说法. 两个转盘的面积大小不同,但是蓝色区域的面积占各自转盘的面积的比例相同,都是$\frac{1}{4}$,因此选择两个转盘成功的可能性都是 25%.

2 频率的稳定性

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D

3. **解**:(1)0.9 左右;0.9

(2)① 4.5

②设还需移植这种树苗 x 万棵,

根据题意,得$(x+5)\times 0.9\approx 18$,

解得 $x\approx 15$.

所以还需移植这种树苗约 15 万棵.

4. **解**:(1)0.25;0.33;0.28;0.33;0.32;0.30;0.28;0.31;0.31;0.31

(2)随着试验次数的增加,频率稳定于 0.31 附近.

(3)从试验数据看,从盒中随机抽出 1 张卡片是 3 的倍数的概率约是 0.31.

(4)盒中共有 20 张卡片,上面的数是 3 的倍数的有 6 张,所以从盒中随机抽出 1 张卡片是 3 的倍数的概率为 6 ÷ 20 = 0.3.

3 等可能事件的概率

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** A **4.** C **5.** B

6. C **点拨**:A. 本次抽样测试的学生有 12 ÷ 30% = 40(名),故 A 说法正确;

B. 因为$\frac{40-8-12-6}{40}\times 360^\circ = 126^\circ$,所以$\angle\alpha$是 126°,故 B 说法正确;

C. 该校九年级有学生 500 名,估计 D 级的学生有$500\times\frac{6}{40}=75$(名),故 C 说法错误;

D. 从被测学生中随机抽取 1 名,则这名学生的成绩是 A 级的概率为$\frac{8}{40}=0.2$,故 D 说法正确.

7. $m+n=10$ **8.** $\frac{1}{2}$

9. **解**:(1)$290\times\frac{1}{29}=10$(个),

290 − 10 = 280(个),

(280 − 40) ÷ (2 + 1) = 80(个),

280 − 80 = 200(个),

所以袋中有红球 200 个.

(2)$80\div 290=\frac{8}{29}$.

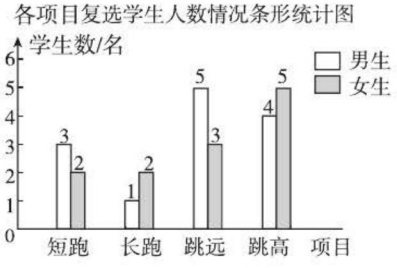
所以从袋中任取 1 个球是黑球的概率是$\frac{8}{29}$.

10. **解**:(1)25;72°;

(2)长跑项目的男生有 25 × 12% − 2 = 1(名),

跳高项目的女生有 25 − 3 − 2 − 1 − 2 − 5 − 3 − 4 = 5(名),

补全条形统计图如图:



(第 10 题)

(3)因为进入复选的学生中,跳高项目的学生有 9 名,跳高项目中的男生共有 4 名,

所以跳高项目中男生被选中的概率是$\frac{4}{9}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. A **2.** 14 **3.** 10

4. B **5.** A **6.** $\frac{1}{3}$ **7.** B **8.** $\frac{1}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)从8张扑克牌中任取1张,所有可能出现的结果一共有8种,每种结果出现的概率都相等,其中抽到4的结果有2种,所以P(抽到4)$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

所以小明抽到4的概率为$\frac{1}{4}$.

(2)不公平. 理由如下:

从8张扑克牌中任取1张,所有可能出现的结果一共有8种,每种结果出现的概率都相等,其中抽到比4大的结果有3种,所以P(抽到比4大)$=\frac{3}{8}$.

所以小明去看演唱会的概率为$\frac{3}{8}$,则小亮去看演唱会的概率为$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

因为$\frac{3}{8}<\frac{5}{8}$,

所以游戏不公平.

修改游戏规则如下:

从牌面为1,2,3,4,5,4,6,7的8张扑克牌中任取1张,抽到比4大的牌,小明去;抽到比4小的牌,小亮去;抽到4重新抽. (答案不唯一)

10. 解:(1)因为规定消费50元(含50元)以上才能获得一次转转盘的机会,且$40<50$,所以某顾客消费40元,不能获得转转盘的机会.

(2)某顾客正好消费66元,超过50元,可以获得一次转转盘的机会.

若获得9折优惠,则P(9折)$=\frac{90°}{360°}=\frac{1}{4}$;

若获得8折优惠,则P(8折)$=\frac{60°}{360°}=\frac{1}{6}$;

若获得7折优惠,则P(7折)$=\frac{90°-60°}{360°}=\frac{30°}{360°}=\frac{1}{12}$.

【第六章测试卷】

一、1. D **2.** C **3.** A **4.** B **5.** C **6.** A **7.** B **8.** C

二、9. 不可能 **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** 公平 **12.** $\frac{1}{5}$

三、13. 解:(1)P(在客厅捉到小猫)$=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$;

(2)P(在小卧室捉到小猫)$=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$;

(3)P(在卫生间捉到小猫)$=\frac{9+4}{90}=\frac{13}{90}$;

(4)P(不在卧室捉到小猫)$=\frac{90-18-15}{90}=\frac{57}{90}=\frac{19}{30}$.

14. 解:(1)根据题意,因为次数越多,就越精确,

所以选取试验次数最多的进行计算可得:第一小组所得的概率估计是$\frac{160}{400}=0.4$;

第二小组所得的概率估计是$\frac{164}{400}=0.41$.

(2)无法确定哪个小组的结果更准确. 因为试验数据可能有误差,不能准确说明.

15. 解:(1)第三边的长取3(2到12之间的任意整数均可,不包括2,12).

(2)设第三边的长为x,

则$7-5<x<7+5$,即$2<x<12$.

又因为x为整数,

所以$x=3,4,5,6,7,8,9,10,11$.

所以$n=9$.

(3)因为$5+7=12$为偶数,

所以只需第三边的长为偶数,

所以此时$x=4,6,8,10$.

所以P(三角形的周长为偶数)$=\frac{4}{9}$.

16. 解:因为图示的计算过程为:$y=\frac{x^2-x}{2}=\frac{1}{2}x(x-1)$,

且x为自然数,

所以$\frac{1}{2}x(x-1)$是整数,

所以输出的数是整数是一个必然事件;(答案不唯一)

(2)因为当输入的数是2至9这八个连续正整数中的一个时,可能的结果有:1,3,6,10,15,21,28,36,

所以输出的数是3的倍数的概率为$\frac{5}{8}$.

17. 解:(1)2个红球,8个其他颜色的球;

(2)4个红球,4个白球,2个其他颜色的球.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第一章 整式的乘除

1 同底数幂的乘法

随堂练习(教材第3页)

1. 解:(1)$5^2\times5^7=5^{2+7}=5^9$.

(2)$7\times7^3\times7^2=7^{1+3+2}=7^6$.

(3)$-x^2\cdot x^3=-x^{2+3}=-x^5$.

(4)$(-c)^3\cdot(-c)^m=(-c)^{3+m}$.

点拨:同底数幂相乘,底数不变,指数相加.

2. 解:$4\times10^9\times5\times10^2=4\times5\times10^9\times10^2=20\times10^{11}=2\times10^{12}$(次),所以它工作$5\times10^2$ s可做2×10^{12}次运算.

3. 解:$3\times10^8\times3\times10^7\times4.22=37.98\times10^{15}=3.798\times10^{16}$(m).

所以比邻星与地球的距离约为3.798×10^{16} m.

习题1.1

1. 解:(1)$c\cdot c^{11}=c^{12}$.

(2)$10^4\times10^2\times10=10^7$.

(3)$(-b)^3\cdot(-b)^2=(-b)^5=-b^5$.

(4)$-b^3\cdot b^2=-b^5$.

(5)$x^{m-1}\cdot x^{m+1}=x^{m-1+m+1}=x^{2m}$.

(6)$a\cdot a^3\cdot a^n=a^{4+n}$.

2. 解:$a^{m+n}=a^m\cdot a^n=2\times8=16$.

3. 解:(1)不正确,应改为$a^3\cdot a^2=a^5$.

(2)不正确,应改为$b^4\cdot b^4=b^8$.

(3)不正确,应改为$x^5+x^5=2x^5$.

(4)正确.

点拨:合并同类项与同底数幂的乘法并不相同,一个是只让系数相加,字母及相同字母的指数不变;一个是底数不变,指数相加.

4. 解:$1.3\times10^8\times9.6\times10^6=1.3\times9.6\times10^8\times10^6=1.248\times10^{15}$(kg).

所以一年从太阳得到的能量相当于燃烧1.248×10^{15} kg的煤所产生的能量.

点拨:用科学记数法表示一个较大数时,要注意$a\times10^n$中的a应满足$1\leqslant a<10$,n为正整数.

5. 解:(1)32个. (2)2^{t+5}个.

点拨:经过n min,1个该种细菌可分裂成2^n个.

2 幂的乘方与积的乘方

随堂练习(教材第6页)

解:(1)$(10^3)^3=10^{3\times3}=10^9$.

(2)$-(a^2)^5=-a^{2\times5}=-a^{10}$.

(3)$(x^3)^4\cdot x^2=x^{3\times4}\cdot x^2=x^{12}\cdot x^2=x^{14}$.

点拨:幂的乘方,底数不变,指数相乘.

习题1.2

1. 解:(1)$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{3\times2}=\left(\frac{1}{3}\right)^6$.

(2)$(a^4)^2=a^{4\times2}=a^8$.

(3)$-(b^5)^2=-b^{5\times2}=-b^{10}$.

(4)$(y^2)^{2n}=y^{2\times2n}=y^{4n}$.

(5)$(b^n)^3=b^{n\times3}=b^{3n}$.

(6)$(x^3)^{3n}=x^{3\times3n}=x^{9n}$.

点拨:对于第(1)题中的$\left(\frac{1}{3}\right)^6$,同学们要注意不要错写成$\frac{1^6}{3}$.

2. 解:(1)$-p\cdot(-p)^4=(-p)^5=-p^5$.

(2)$(a^2)^3\cdot(a^3)^2=a^6\cdot a^6=a^{12}$.

(3)$(t^m)^2\cdot t=t^{2m}\cdot t=t^{2m+1}$.

(4)$(x^4)^6-(x^3)^8=x^{24}-x^{24}=0$.

3. 解:(1)不正确,应改为$(x^3)^3=x^9$. (2)不正确,应改为$a^6\cdot a^4=a^{10}$.

点拨:同底数幂的乘法,底数不变,指数相加;幂的乘方底数不变,指数相乘.

随堂练习(教材第8页)

1. 解:(1)$(-3n)^3=(-3)^3\cdot n^3=-27n^3$.

(2)$(5xy)^3=5^3\cdot x^3\cdot y^3=125x^3y^3$.

(3)$-a^3+(-4a)^2a=-a^3+(-4)^2\cdot a^2\cdot a=-a^3+16a^3=15a^3$.

点拨:积的乘方等于每一个因式乘方的积.

2. 解:$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times(6\times10^3)^3=\frac{4}{3}\pi\times216\times10^9\approx9.043\,2\times10^{11}$(km^3).

所以地球的体积大约是$9.043\,2\times10^{11}$ km^3.

习题1.3

1. 解:(1)$(3b)^2=3^2\cdot b^2=9b^2$.

(2)$-(ab)^2=-a^2\cdot b^2=-a^2b^2$.

(3)$(-4a^2)^3=(-4)^3\cdot(a^2)^3=-64a^6$.

(4)$(y^2z^3)^3=(y^2)^3\cdot(z^3)^3=y^6z^9$.

点拨:在运用积的乘方的运算法则计算时,要注意符号问题.

2. 解:(1)$(xy^4)^m=x^my^{4m}$.

(2)$-(p^2q)^n=-p^{2n}q^n$.

(3)$(xy^{3n})^2+(xy^6)^n=x^2y^{6n}+x^ny^{6n}$.

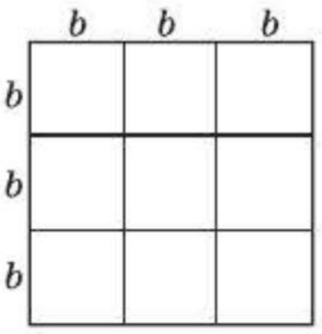
(4)$(-3x^3)^2-[(2x)^2]^3=9x^6-64x^6=-55x^6$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 解:(1)不正确,应改为$(ab^4)^4=a^4b^{16}$.

(2)不正确,应改为$(-3pq)^2=9p^2q^2$.

4. 解:如图,大正方形的边长为$3b$,其中每个小正方形的边长都为b,大正方形的面积=9个小正方形的面积之和,故$(3b)^2=9b^2$.



(第4题)

5. 解:因为太阳的半径是地球半径的10^2倍,所以太阳的体积约是地球体积的$(10^2)^3=10^6$倍,由地球的体积约为$9.043\ 2\times10^{11}\ km^3$,故太阳的体积约为$9.043\ 2\times10^{11}\times10^6=9.043\ 2\times10^{17}(km^3)$.

6. 解:$2^2\times3\times5^2=(2\times5)^2\times3=10^2\times3=300$.

$2^4\times3^2\times5^3=(2\times5)^3\times2\times9=1\ 000\times18=18\ 000$.

点拨:根据题目特点,灵活逆用积的乘方的运算法则,可使计算简便.

7. 解:$(abc)^n=a^nb^nc^n$. **点拨**:对于积的乘方的运算法则,当积中的因式超过两个时,法则仍然适用.

3 同底数幂的除法

随堂练习(教材第11页)

解:(1)$x^{12}\div x^4=x^{12-4}=x^8$.

(2)$(-y)^3\div(-y)^2=(-y)^{3-2}=-y$.

(3)$-(k^6\div k^6)=-k^{6-6}=-k^0=-1$.

(4)$(-r)^5\div r^4=-r^5\div r^4=-r$.

(5)$m\div m^0=m^{1-0}=m$或$m\div m^0=m\div1=m$.

(6)$(mn)^5\div(mn)=(mn)^{5-1}=(mn)^4=m^4n^4$.

习题1.4

1. 解:(1)$2^{13}\div2^7=2^{13-7}=2^6=64$.

(2)$\left(-\frac{3}{2}\right)^6\div\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^{6-2}$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$.

(3)$a^{11}\div a^5=a^{11-5}=a^6$.

(4)$(-x)^7\div(-x)=(-x)^{7-1}=(-x)^6=x^6$.

(5)$a^{-4}\div a^{-6}=a^{-4-(-6)}=a^2$.

(6)$6^{2m+1}\div6^m=6^{2m+1-m}=6^{m+1}$.

(7)$5^{n+1}\div5^{3n+1}=5^{n+1-3n-1}=5^{-2n}$.

(8)$9^n\div9^{n+2}=9^{n-n-2}=9^{-2}=\frac{1}{81}$.

点拨:同底数幂相除,底数不变,指数相减.

2. 解:(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$.

(2)$3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$.

(3)$1.3\times10^{-5}=1.3\times\frac{1}{10^5}=1.3\times0.000\ 01=0.000\ 013$.

(4)$5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$.

点拨:解答本题要注意$a^0=1(a\neq0)$,$a^{-p}=\frac{1}{a^p}(a\neq0,p$是正整数).

3. 解:(1)不正确,应改为$a^6\div a=a^5$.

(2)不正确,应改为$b^6\div b^3=b^3$.

(3)正确.

(4)不正确,应改为$(-bc)^4\div(-bc)^2=b^2c^2$.

点拨:当各字母的指数是1时,通常省略不写,但在运算中不能将其省略.

4. 解:1个细胞分裂1次变为2个,即2^1个;分裂2次变为4个,即2^2个;分裂3次变为8个,即2^3个……没有分裂时是1个,即$2^0=1$.

随堂练习(教材第13页)

1. 解:(1)$0.000\ 000\ 72=7.2\times10^{-7}$.

(2)$0.000\ 861=8.61\times10^{-4}$.

(3)$0.000\ 000\ 000\ 342\ 5=3.425\times10^{-10}$.

在计算器上表示略.

2. 解:$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 911=9.11\times10^{-28}$.

习题1.5

1. 解:(1)$0.007\ 398=7.398\times10^{-3}$.

(2)$0.000\ 022\ 6=2.26\times10^{-5}$.

(3)$0.000\ 000\ 000\ 054\ 2=5.42\times10^{-11}$.

(4)$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 199\ 4=1.994\times10^{-22}$.

在计算器上表示略.

2. 解:$1.293\times10^{-3}\ g/cm^3=0.001\ 293\ g/cm^3$.

3. 解:$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 092\ 88\ kg=9.288\times10^{-26}\ kg$.

4. 解:$1.56\ \mu m=1.56\times10^{-6}\ m$.

$1\div(1.56\times10^{-6})=1\div1.56\times10^6\approx0.641\times10^6=6.41\times10^5$(个).

所以1.56 μm相当于1.56×10^{-6} m.大约6.41×10^5个这样的细胞首尾连接起来能达到1 m.

4 整式的乘法

随堂练习(教材第15页)

解:(1)$5x^3\cdot2x^2y=(5\times2)\cdot(x^3\cdot x^2)\cdot y=10x^5y$.

(2)$-3ab\cdot(-4b^2)=[(-3)\times(-4)]\cdot a\cdot(b\cdot b^2)=12ab^3$.

(3)$3ab\cdot2a=(3\times2)\cdot(a\cdot a)\cdot b=6a^2b$.

(4)$yz\cdot2y^2z^2=2\cdot(y\cdot y^2)\cdot(z\cdot z^2)=2y^3z^3$.

(5)$(2x^2y)^3\cdot(-4xy^2)=8x^6y^3\cdot(-4xy^2)=-32x^7y^5$.

(6)$\frac{1}{3}a^3b\cdot6a^5b^2c\cdot(-ac^2)^2=\frac{1}{3}a^3b\cdot6a^5b^2c\cdot a^2c^4=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\cdot(a^3\cdot a^5\cdot a^2)\cdot(b\cdot b^2)\cdot(c\cdot c^4)=2a^{10}b^3c^5$.

点拨:在进行整式的乘法运算时,如有乘方运算,应先算乘方,再算乘法.

习题 1.6

1. 解:(1)$4xy\cdot(-2xy^3)=[4\times(-2)]\cdot(x\cdot x)\cdot(y\cdot y^3)=-8x^2y^4$.

(2)$a^3b\cdot ab^5c=(a^3\cdot a)\cdot(b\cdot b^5)\cdot c=a^4b^6c$.

(3)$2x^2y\cdot(-xy)^2=2x^2y\cdot x^2y^2=2(x^2\cdot x^2)\cdot(y\cdot y^2)=2x^4y^3$.

(4)$\frac{2}{5}x^2y^3\cdot\frac{5}{8}xyz=\left(\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}\right)\cdot(x^2\cdot x)\cdot(y^3\cdot y)\cdot z=\frac{1}{4}x^3y^4z$.

(5)$-xy^2z^3\cdot(-x^2y)^3=-xy^2z^3\cdot(-x^6y^3)=x^7y^5z^3$.

(6)$-ab^3\cdot 2abc^2\cdot(a^2c)^3=-ab^3\cdot 2abc^2\cdot a^6c^3=-2(a\cdot a\cdot a^6)\cdot(b^3\cdot b)\cdot(c^2\cdot c^3)=-2a^8b^4c^5$.

点拨:解答本题要灵活利用幂的各种运算法则.

2. 解:(1)$y(4x-2x-x)+x(4y-2y)+2x\cdot 4y=xy+2xy+8xy=11xy(\text{m}^2)$,所以至少需要 $11xy\ \text{m}^2$ 的地砖.

$11xy\cdot a=11xya$(元),所以购买所需地砖至少需要 $11xya$ 元.

(2)$4yh\times 2+2xh\times 2+2yh\times 2+2xh\times 2=(12yh+8xh)(\text{m}^2)$.所以至少需要$(12yh+8xh)\ \text{m}^2$ 的壁纸.

$(12yh+8xh)\cdot b=(12yhb+8xhb)$(元),所以购买所需壁纸至少需要$(12yhb+8xhb)$元.

随堂练习(教材第 17 页)

解:(1)$a(a^2m+n)=a\cdot a^2m+a\cdot n=a^3m+an$.

(2)$b^2(b+3a-a^2)=b^2\cdot b+b^2\cdot 3a-b^2\cdot a^2=b^3+3ab^2-a^2b^2$.

(3)$x^3y\left(\frac{1}{2}xy^3-1\right)=x^3y\cdot\frac{1}{2}xy^3-x^3y\cdot 1=\frac{1}{2}x^4y^4-x^3y$.

(4)$4(e+f^2d)\cdot ef^2d=4\cdot e\cdot ef^2d+4\cdot f^2d\cdot ef^2d=4e^2f^2d+4ef^4d^2$.

习题 1.7

1. 解:(1)$5x(2x^2-3x+4)=5x\cdot 2x^2+5x\cdot(-3x)+5x\cdot 4=10x^3-15x^2+20x$.

(2)$-6x(x-3y)=-6x\cdot x-6x\cdot(-3y)=-6x^2+18xy$.

(3)$-2a^2\left(\frac{1}{2}ab+b^2\right)=-2a^2\cdot\frac{1}{2}ab+(-2a^2)\cdot b^2=-a^3b-2a^2b^2$.

(4)$\left(\frac{2}{3}x^2y-6xy\right)\cdot\frac{1}{2}xy^2=\frac{2}{3}x^2y\cdot\frac{1}{2}xy^2+(-6xy)\cdot\frac{1}{2}xy^2=\frac{1}{3}x^3y^3-3x^2y^3$.

点拨:单项式与多项式时,根据分配律用单项式去乘多项式的每一项,再把所得的积相加.

2. 解:(1)$S_{\text{阴影}}=S_{\text{大半圆}}-S_{\text{小半圆}}=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{4}a\right)^2=\frac{1}{8}\pi a^2-\frac{1}{32}\pi a^2=\frac{3}{32}\pi a^2$.

(2)$S_{\text{阴影}}=at+(b-t)t=at+bt-t^2$.

3. 解:第 n 个图形中共有 $n(n+1)$ 枚棋子.

随堂练习(教材第 19 页)

解:(1)$(m+2n)(m-2n)=m\cdot m-m\cdot 2n+2n\cdot m-2n\cdot 2n=m^2-2mn+2mn-4n^2=m^2-4n^2$.

(2)$(2n+5)(n-3)=2n\cdot n-2n\cdot 3+5\cdot n+5\times(-3)=2n^2-6n+5n-15=2n^2-n-15$.

(3)$(x+2y)^2=(x+2y)(x+2y)=x\cdot x+x\cdot 2y+2y\cdot x+2y\cdot 2y=x^2+2xy+2xy+4y^2=x^2+4xy+4y^2$.

(4)$(ax+b)(cx+d)=ax\cdot cx+ax\cdot d+b\cdot cx+b\cdot d=acx^2+(ad+bc)+bd$.

点拨:多项式与多项式相乘,先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项,再把所得的积相加.

习题 1.8

1. 解:(1)$(x+y)(a+2b)=x\cdot a+x\cdot 2b+y\cdot a+y\cdot 2b=ax+2bx+ay+2by$.

(2)$(2a+3)\left(\frac{3}{2}b+5\right)=2a\cdot\frac{3}{2}b+2a\cdot 5+3\times\frac{3}{2}b+3\times 5=3ab+10a+\frac{9}{2}b+15$.

(3)$(2x+3)(-x-1)=2x\cdot(-x)+2x\cdot(-1)+3\cdot(-x)+3\times(-1)=-2x^2-2x-3x-3=-2x^2-5x-3$.

(4)$(-2m-1)(3m-2)=-2m\cdot 3m-2m\cdot(-2)-1\cdot 3m-1\times(-2)=-6m^2+4m-3m+2=-6m^2+m+2$.

(5)$(x-y)^2=(x-y)(x-y)=x\cdot x-x\cdot y-y\cdot x-y\cdot(-y)=x^2-xy-xy+y^2=x^2-2xy+y^2$.

(6)$(-2x+3)^2=(-2x+3)\cdot(-2x+3)=-2x\cdot(-2x)+(-2x)\cdot 3+3\cdot(-2x)+3\times 3=4x^2-6x-6x+9=4x^2-12x+9$.

2. 解:(1)$(10a+4)(10a+6)=100a(a+1)+24$($a$ 为自然数).

(2)$124\times 126=100\times 12\times 13+24=15\,624$.

(3)略.

※**3. 解**:$(a+b+c)(c+d+e)=ac+ad+ae+bc+bd+be+c^2+cd+ce$.

5 平方差公式

随堂练习(教材第 21 页)

解:(1)$(a+2)(a-2)=a^2-2^2=a^2-4$.

(2)$(3a+2b)(3a-2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$(-x-1)(1-x)=(-x-1)(-x+1)=(-x)^2-1^2=x^2-1$.

(4)$(-4k+3)(-4k-3)=(-4k)^2-3^2=16k^2-9$.

点拨:利用平方差公式计算即可.

习题 1.9

1. 解:(1)$(3x+7y)(3x-7y)=(3x)^2-(7y)^2=9x^2-49y^2$.

(2)$(0.2x-0.3)(0.2x+0.3)=(0.2x)^2-0.3^2=0.04x^2-0.09$.

(3)$(mn-3n)(mn+3n)=(mn)^2-(3n)^2=m^2n^2-9n^2$.

(4)$(-2x+3y)(-2x-3y)=(-2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$.

(5)$\left(-\frac{1}{4}x-2y\right)\left(-\frac{1}{4}x+2y\right)=\left(-\frac{1}{4}x\right)^2-(2y)^2=\frac{1}{16}x^2-4y^2$.

(6)$(5m-n)(-5m-n)=(-n+5m)(-n-5m)=(-n)^2-(5m)^2=n^2-25m^2$.

点拨:在运用平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$时,要注意其中的a,b既可以是数,也可以是整式;既可以是“正的”,也可以是“负的”.

2. 解:(1)$(a^n+b)(a^n-b)=(a^n)^2-b^2=a^{2n}-b^2$.

(2)$(a+1)(a-1)(a^2+1)=(a^2-1)(a^2+1)=a^4-1$.

点拨:(1)题中可将a^n看成平方差公式中的“a”,然后利用平方差公式计算即可.

随堂练习(教材第 22 页)

解:(1)$704\times696=(700+4)(700-4)=700^2-4^2=489\,984$.

(2)$(x+2y)(x-2y)+(x+1)(x-1)=x^2-4y^2+x^2-1=2x^2-4y^2-1$.

(3)$x(x-1)-\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=x^2-x-\left(x^2-\frac{1}{9}\right)=x^2-x-x^2+\frac{1}{9}=-x+\frac{1}{9}$.

习题 1.10

1. 解:(1)$(2m+3)(2m-3)=4m^2-9$.

(2)$x(x+1)+(2-x)(2+x)=x^2+x+(4-x^2)=x^2+x+4-x^2=x+4$.

(3)$(3x-y)(3x+y)+y(x+y)=9x^2-y^2+(xy+y^2)=9x^2+xy$.

(4)$\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a-\frac{1}{2}b\right)-(3a-2b)(3a+2b)=a^2-\frac{1}{4}b^2-(9a^2-4b^2)=a^2-\frac{1}{4}b^2-9a^2+4b^2=-8a^2+\frac{15}{4}b^2$.

点拨:对于(2)(3)(4)这类题目,在计算过程中要注意灵活利用平方差公式,当两个整式的积是多项式时,应给结果加括号.

2. 解:(1)$1\,007\times993=(1\,000+7)\times(1\,000-7)=1\,000^2-7^2=999\,951$.

(2)$108\times112=(110-2)(110+2)=110^2-2^2=12\,096$.

点拨:观察各式,先将其化为$(a+b)(a-b)$的形式,再利用平方差公式计算即可.

6 完全平方公式

随堂练习(教材第 24 页)

解:(1)$\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot(2y)+(2y)^2=\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$.

(2)$\left(2xy+\frac{1}{5}x\right)^2=(2xy)^2+2\cdot(2xy)\cdot\left(\frac{1}{5}x\right)+\left(\frac{1}{5}x\right)^2=4x^2y^2+\frac{4}{5}x^2y+\frac{1}{25}x^2$.

(3)$(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=2n+1$.

点拨:运用完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$进行解答,切勿把乘积项$2ab$中的 2 丢掉.

习题 1.11

1. 解:(1)$(2x+5y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(5y)+(5y)^2=4x^2+20xy+25y^2$.

(2)$\left(\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{3}m\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{3}m\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{9}m^2-\frac{1}{3}m+\frac{1}{4}$.

(3)$(-2t-1)^2=(-2t)^2-2\cdot(-2t)\cdot1+1^2=4t^2+4t+1$.

(4)$\left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}y\right)^2=\left(\frac{1}{5}x\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{5}x\right)\cdot\left(\frac{1}{10}y\right)+\left(\frac{1}{10}y\right)^2=\frac{1}{25}x^2+\frac{1}{25}xy+\frac{1}{100}y^2$.

(5)$(7ab+2)^2=(7ab)^2+2\cdot(7ab)\cdot2+2^2=49a^2b^2+28ab+4$.

(6)$\left(-cd+\frac{1}{2}\right)^2=(-cd)^2+2\cdot(-cd)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=c^2d^2-cd+\frac{1}{4}$.

点拨:解本题时,要注意根据题目特点,灵活选择公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$和$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2. 解:$\pi r^2-\pi(r-2)^2=\pi r^2-\pi(r^2-4r+4)=\pi r^2-\pi r^2+4\pi r-4\pi=(4\pi r-4\pi)(\text{cm}^2)$,所以这个圆的面积减少了$(4\pi r-4\pi)\text{cm}^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:用原来圆的面积,减去半径减少后的圆的面积,即为所求.

3. 解:末尾的两个数都是25.

理由:设个位数字是5的两位数为$10a+5$($1\leqslant a\leqslant 9$,且a为自然数),则$(10a+5)^2=(10a)^2+2\cdot(10a)\cdot 5+5^2=100a^2+100a+25$. 由此可知,个位数字是5的两位数平方后,末尾的两个数为25.

※4. 解:$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=(a^2+2ab+b^2)+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

点拨:本题只要将$(a+b+c)$中的某两项的和看做一个“整体”,就可将其化为$(m+n)^2$的形式,这样就可以利用完全平方公式来计算.

随堂练习(教材第27页)

解:(1)$96^2=(100-4)^2=100^2-2\times 100\times 4+4^2=9\,216$.

(2)$(a-b-3)(a-b+3)=(a-b)^2-3^2=a^2-2ab+b^2-9$.

点拨:根据算式特点,灵活选择平方差公式或完全平方公式来计算.

习题1.12

1. 解:(1)$(2x+y+1)(2x+y-1)=(2x+y)^2-1^2=4x^2+4xy+y^2-1$.

(2)$(x-2)(x+2)-(x+1)(x-3)=x^2-4-(x^2-3x+x-3)=x^2-4-x^2+2x+3=2x-1$.

(3)$(ab+1)^2-(ab-1)^2=[(ab+1)+(ab-1)][(ab+1)-(ab-1)]=(ab+1+ab-1)(ab+1-ab+1)=2ab\cdot 2=4ab$.

(4)$(2x-y)^2-4(x-y)(x+2y)=(4x^2-4xy+y^2)-4(x^2+2xy-xy-2y^2)=4x^2-4xy+y^2-4x^2-8xy+4xy+8y^2=9y^2-8xy$.

2. 解:$(5+a)^2\times 6-5^2\times 6=(25+10a+a^2)\times 6-25\times 6=150+60a+6a^2-150=(60a+6a^2)(\text{cm}^3)$,所以它的体积增加了$(60a+6a^2)\text{cm}^3$.

点拨:用变化后长方体的体积减去原来长方体的体积即可.

3. 解:(1)$63^2=(60+3)^2=60^2+2\times 60\times 3+3^2=3\,969$.

(2)$998^2=(1\,000-2)^2=1\,000^2-2\times 1\,000\times 2+2^2=996\,004$.

点拨:在将各数化为$(a\pm b)^2$的形式时,要注意尽量使转化后的计算简便,如998^2,将其化为$(997+1)^2$就不如化为$(1\,000-2)^2$计算简便.

4. 解:$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

点拨:将$(a+b)^3$化为$(a+b)^2(a+b)$,利用完全平方公式以及多项式与多项式相乘的法则计算出结果.

7 整式的除法

随堂练习(教材第29页)

解:(1)$2a^6b^3\div a^3b^2=2a^{6-3}b^{3-2}=2a^3b$.

(2)$\frac{1}{48}x^3y^2\div\frac{1}{16}x^2y=\left(\frac{1}{48}\div\frac{1}{16}\right)x^{3-2}y^{2-1}=\frac{1}{3}xy$.

(3)$3m^2n^3\div(mn)^2=3m^2n^3\div m^2n^2=3m^{2-2}n^{3-2}=3n$.

(4)$(2x^2y)^3\div 6x^3y^2=8x^6y^3\div 6x^3y^2=(8\div 6)x^{6-3}y^{3-2}=\frac{4}{3}x^3y$.

点拨:利用单项式除以单项式的运算法则计算即可.

习题1.13

1. 解:(1)$(-2r^2s)^2\div 4rs^2=4r^4s^2\div 4rs^2=r^3$.

(2)$(5x^2y^3)^2\div 25x^4y^5=25x^4y^6\div 25x^4y^5=y$.

(3)$(x+y)^3\div(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

(4)$7a^5b^3c^5\div 14a^2b^3c=\frac{1}{2}a^3c^4$.

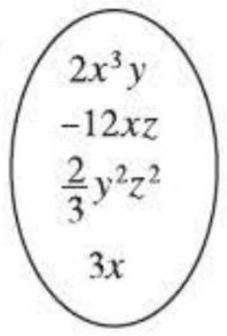
点拨:当一个算式中既有除法运算,又有乘方运算时,应先算乘方,再算除法.

2. 解:(1)$8a^4b^3c\div 2a^2b^3\cdot\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)=4a^2c\cdot\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)=-\frac{8}{3}a^5bc^3$.

(2)$(3x^2y)^2\cdot(-15xy^3)\div(-9x^4y^2)=9x^4y^2\cdot(-15xy^3)\div(-9x^4y^2)=15xy^3$.

点拨:对于整式的乘除混合运算,要注意按运算顺序进行计算.

3.



4. 解:$(3\times 10^8)\div 300=(3\times 10^8)\div(3\times 10^2)=10^6$.

所以光的传播速度是声音的10^6倍.

5. 解:设水面的高度为h,由题意得$abh=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2b$,则$h=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2b\div ab=\frac{a^2b\pi}{4}\div ab=\frac{\pi}{4}\cdot(a^2\div a)\cdot(b\div b)=\frac{\pi a}{4}$.

所以水面的高度是$\frac{\pi a}{4}$.

随堂练习(教材第31页)

解:(1)$(3xy+y)\div y=3xy\div y+y\div y=3x+1$.

(2)$(ma+mb+mc)\div m=ma\div m+mb\div m+mc\div m=a+b+c$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(3)(6c^2d-c^3d^3)\div(-2c^2d)=-6c^2d\div2c^2d+c^3d^3\div2c^2d=-3+\frac{1}{2}cd^2.$

$(4)(4x^2y+3xy^2)\div7xy=4x^2y\div7xy+3xy^2\div7xy=\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}y.$

点拨:多项式除以单项式,先把这个多项式的每一项分别除以单项式,再把所得的商相加.

习题 1.14

1. 解:$(1)(5m^3n^2-6m^2)\div3m=5m^3n^2\div3m-6m^2\div3m=\frac{5}{3}m^2n^2-2m.$

$(2)(6a^2b-5a^2c^2)\div(-3a^2)=-6a^2b\div3a^2+5a^2c^2\div3a^2=-2b+\frac{5}{3}c^2.$

$(3)(16x^4+4x^2+x)\div x=16x^4\div x+4x^2\div x+x\div x=16x^3+4x+1.$

$(4)(3a^2b-2ab+2ab^2)\div ab=3a^2b\div ab-2ab\div ab+2ab^2\div ab=3a-2+2b.$

$(5)(-4a^3+6a^2b^3+3a^3b^3)\div(-4a^2)=4a^3\div4a^2-6a^2b^3\div4a^2-3a^3b^3\div4a^2=a-\frac{3}{2}b^3-\frac{3}{4}ab^3.$

$(6)\left(\frac{2}{5}mn^3-m^2n^2+\frac{1}{6}n^4\right)\div\frac{2}{3}n^2=\frac{2}{5}mn^3\div\frac{2}{3}n^2-m^2n^2\div\frac{2}{3}n^2+\frac{1}{6}n^4\div\frac{2}{3}n^2=\frac{3}{5}mn-\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{4}n^2.$

$(7)\left(\frac{1}{10}xy^2+\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y\right)\div\frac{1}{5}y=\frac{1}{10}xy^2\div\frac{1}{5}y+\frac{1}{4}y^2\div\frac{1}{5}y-\frac{1}{2}y\div\frac{1}{5}y=\frac{1}{2}xy+\frac{5}{4}y-\frac{5}{2}.$

$(8)[(x+1)(x+2)-2]\div x=(x^2+2x+x+2-2)\div x=(x^2+3x)\div x=x+3.$

2. 解:瓶子中的水的体积为$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2h+\pi\left(\frac{2a}{2}\right)^2H=\frac{1}{4}\pi a^2h+\pi a^2H=\pi a^2\left(\frac{1}{4}h+H\right)\text{cm}^3.$

一个杯子能盛的水的体积为$\pi\left(\frac{\frac{1}{2}a}{2}\right)^2\times8=\frac{1}{2}\pi a^2\text{cm}^3$,

所以一共需要$\pi a^2\left(\frac{1}{4}h+H\right)\div\frac{1}{2}\pi a^2=\left(\frac{1}{2}h+2H\right)$个这样的杯子.

3. 解:令$m=1$,则有$(1^2+1)\div1-1=1$.

点拨:本题可列出式子$(m^2+m)\div m-1=m+1-1=m$,即输出的数与输入的数相等.

复习题

1. 解:$(1)\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^3=\left(-\frac{3}{5}\right)^5=-\frac{243}{3\ 125}.$

$(2)(a-b)^3\cdot(a-b)^4=(a-b)^7.$

$(3)(-a^5)^5=-a^{25}.$

$(4)\left(-\frac{1}{2}x\right)^7\div\left(-\frac{1}{2}x\right)=\left(-\frac{1}{2}x\right)^6=\frac{1}{64}x^6.$

$(5)(a+b)^3\div(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

$(6)(-a^2\cdot b)^3=-a^6b^3.$

$(7)(-a)^2(a^2)^2=a^2\cdot a^4=a^6.$

$(8)(y^2)^3\div y^6=y^6\div y^6=1.$

$(9)(-y)^2\cdot y^{n-1}=y^2\cdot y^{n-1}=y^{n+1}.$

$(10)a^{n+1}\cdot a^{n-1}=a^{2n}.$

$(11)a^{m+2}\div a^{m+1}=a.$

$(12)(-c^2)^{2n}=c^{4n}.$

2. 解:$(1)10^5\div10^{-1}\times10^0=10^5\div\frac{1}{10}\times1=10^5\times10=10^6.$

$(2)16\times2^{-4}=16\times\frac{1}{2^4}=16\times\frac{1}{16}=1.$

$(3)\left(\frac{1}{3}\right)^0\div\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=1\div\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=1\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$

点拨:灵活利用$a^0=1(a\neq0)$,$a^{-p}=\frac{1}{a^p}(a\neq0,p$是正整数).

3. 解:$(1)(2\times10^2\div10^3)^2\times6=0.04\times6=0.24(\text{m}^2).$

所以它的表面积是$0.24\ \text{m}^2$.

$(2)(2\times10^2\div10^3)^3=0.008(\text{m}^3).$

所以它的体积是$0.008\ \text{m}^3$.

点拨:正方体的表面积等于它的一个面的面积乘6,体积等于棱长的立方.

4. 解:$(1)(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab.$

$(2)(3x+7y)(3x-7y)=9x^2-49y^2.$

$(3)(3x+9)(6x+8)=18x^2+24x+54x+72=18x^2+78x+72.$

$(4)\left(\frac{1}{2}x^2y-2xy+y^2\right)\cdot3xy=\frac{3}{2}x^3y^2-6x^2y^2+3xy^3.$

$(5)\frac{1}{3}a^2b^3\cdot(-15a^2b^2)=-5a^4b^5.$

$(6)(4a^3b-6a^2b^2+12ab^3)\div2ab=2a^2-3ab+6b^2.$

$(7)(a^2bc)^2\div ab^2c=a^4b^2c^2\div ab^2c=a^3c.$

$(8)(3mn+1)(3mn-1)-8m^2n^2=9m^2n^2-1-8m^2n^2=m^2n^2-1.$

$(9)[(3a+b)^2-b^2]\div a=(9a^2+6ab+b^2-b^2)\div a=9a+6b.$

$(10)(x+2)^2-(x+1)(x-1)=(x^2+4x+4)-(x^2-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1) $=x^2+4x+4-x^2+1=4x+5$.

5. 解:(1)$10^7\div(10^3\div10^2)=10^7\div10=10^6$.

(2)$(x-y)^3\cdot(x-y)^2\cdot(y-x)=-(x-y)^3\cdot(x-y)^2\cdot(x-y)=-(x-y)^6$.

(3)$4\times2^n\times2^{n-1}=2^2\times2^n\times2^{n-1}=2^{2n+1}(n>1)$.

(4)$(-x)^3\cdot x^{2n-1}+x^{2n}\cdot(-x)^2=-x^3\cdot x^{2n-1}+x^{2n}\cdot x^2=-x^{2n+2}+x^{2n+2}=0$.

(5)$(y^2\cdot y^3)\div(y\cdot y^4)=y^5\div y^5=1$.

(6)$x^2\cdot x^3+x^7\div x^2=x^5+x^5=2x^5$.

(7)$m^5\div m^2\times m=m^3\times m=m^4$.

(8)$a^4+(a^2)^4-(a^2)^2=a^4+a^8-a^4=a^8$.

点拨:在整式的混合运算中,应先算乘方,再算乘除,最后算加减,如有括号,先算括号里面的.

6. 解:(1)$(2x^2)^3-6x^3(x^3+2x^2+x)=8x^6-6x^6-12x^5-6x^4=2x^6-12x^5-6x^4$.

(2)$(x+y+z)(x+y-z)=[(x+y)+z][(x+y)-z]=(x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2$.

(3)$[(x+y)^2-(x-y)^2]\div2xy=[(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)]\div2xy=(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2)\div2xy=4xy\div2xy=2$.

(4)$a^2(a+1)^2-2(a^2-2a+4)=a^2(a^2+2a+1)-2a^2+4a-8=a^4+2a^3+a^2-2a^2+4a-8=a^4+2a^3-a^2+4a-8$.

点拨:灵活利用各法则及运算律,可使计算简便.

7. 解:(1)$3x^2+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)\left(2x-\frac{2}{3}y\right)=3x^2-3x^2+xy+\frac{2}{3}xy^2-\frac{2}{9}y^3=xy+\frac{2}{3}xy^2-\frac{2}{9}y^3$. 当 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ 时,原式 $=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{2}{9}-\frac{8}{81}-\frac{16}{243}=-\frac{94}{243}$.

(2)$[(xy+2)(xy-2)-2x^2y^2+4]\div xy=(x^2y^2-4-2x^2y^2+4)\div xy=-x^2y^2\div xy=-xy$. 当 $x=10$, $y=-\frac{1}{25}$ 时,原式 $=-10\times\left(-\frac{1}{25}\right)=\frac{2}{5}$.

(3)$x(x+2y)-(x+1)^2+2x=x^2+2xy-(x^2+2x+1)+2x=x^2+2xy-x^2-2x-1+2x=2xy-1$. 当 $x=\frac{1}{25}$, $y=-25$ 时,原式 $=2\times\frac{1}{25}\times(-25)-1=-2-1=-3$.

点拨:先将各式化简,再代入求值.

8. 解:(1)$2\ 001^2=(2\ 000+1)^2=2\ 000^2+2\times2\ 000\times1+1^2=4\ 004\ 001$.

(2)$2\ 001\times1\ 999=(2\ 000+1)(2\ 000-1)=2\ 000^2-1^2=3\ 999\ 999$.

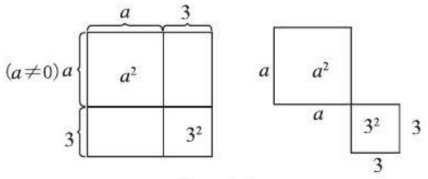
(3)$99^2-1=(99+1)(99-1)=100\times98=9\ 800$.

点拨:根据题目特点,灵活利用平方差公式或完全平方公式可使计算简便.

9. 解:(1)$899\times901+1=(900-1)(900+1)+1=900^2-1^2+1=900^2=810\ 000$.

(2)$123^2-124\times122=123^2-(123+1)(123-1)=123^2-123^2+1=1$.

10. 解:(答案不唯一)如下图所示,由图可知$(a+3)^2\neq a^2+3^2$ $(a\neq0)$.



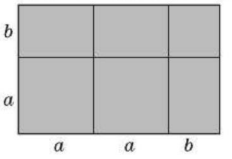
(第 10 题)

11. 解:0.000 000 000 000 000 000 000 019 93 g $=1.993\times10^{-23}$ g. $u=1.993\times10^{-23}\times\frac{1}{12}\approx1.66\times10^{-24}$(g).

12. 解:左边的图中 $S_{阴影}=(3a+2b)(2a+b)-(2b+a)(b+a)=(6a^2+3ab+4ab+2b^2)-(2b^2+2ab+ab+a^2)=6a^2+7ab+2b^2-2b^2-3ab-a^2=5a^2+4ab$.

右边的图中 $S_{阴影}=(2a+3b)(2a+b)-2a\cdot3b=4a^2+2ab+6ab+3b^2-6ab=4a^2+2ab+3b^2$.

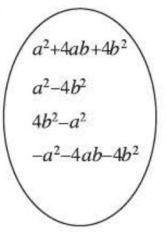
13. 解:(答案不唯一)拼成的长方形如图所示,此长方形的面积为$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$.



(第 13 题)

14. 解:题图中大正方形的面积即为$(a+3b)^2$. 有 1 个边长为 a 的正方形,有 9 个边长为 b 的正方形,有 6 个两边分别为 a 和 b 的长方形,由此可以验证$(a+3b)^2=a^2+6ab+9b^2$.

15.



点拨:本题的实质是多项式的乘法运算.

16. 解:不相等. 设这两个相邻整数为 a, $a+1$,则这两个整数的平均数的平方为$\left(\frac{a+a+1}{2}\right)^2=\frac{4a^2+4a+1}{4}$,它

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

们平方数的平均数为$\frac{a^2+(a+1)^2}{2}=\frac{2a^2+2a+1}{2}$. 因为$\frac{4a^2+4a+1}{4}\neq\frac{2a^2+2a+1}{2}$,所以两个相邻整数的平均数的平方与它们平方数的平均数不相等. $\left(\frac{a+a+1}{2}\right)^2-\frac{a^2+(a+1)^2}{2}=\frac{4a^2+4a+1}{4}-\frac{2a^2+2a+1}{2}=a^2+a+\frac{1}{4}-(a^2+a+\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$,所以两个相邻整数的平均数的平方与它们平方数的平均数相差$\frac{1}{4}$.

17. 解:太阳的施瓦氏半径

$$R=\frac{2GM}{c^2}=\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{(3\times10^8)^2}=\frac{2\times6.67\times2\times10^{19}}{9\times10^{16}}\approx2.96\times10^3(\text{m}).$$

所以太阳的施瓦氏半径约为2.96×10^3 m.

※18. 解:原式$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1=(2^4-1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1=\cdots=(2^{32}-1)(2^{32}+1)+1=2^{64}-1+1=2^{64}$. 从$2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,2^6=64,2^7=128,2^8=256,\cdots$中可看出$2^m$($m$为正整数)的个位数字以2,4,8,6为周期进行变化,因为$64=4\times16$,所以2^{64}的个位数字是6.

第二章 相交线与平行线

1 两条直线的位置关系

随堂练习(教材第39页)

解:40°,根据"对顶角相等".

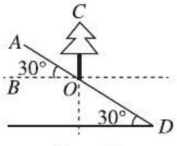
习题2.1

1. 解:因为∠1=38°,所以∠3=∠1=38°(对顶角相等). 因为∠1+∠2=180°(邻补角的定义),所以∠2=180°−∠1=142°. 所以∠4=∠2=142°(对顶角相等).

2. 解:互为补角的两个角不可以都是锐角,可以都是直角,不可以都是钝角.

3. 解:由∠2=58°,∠2=∠3,可得∠3=58°. 又因为∠1+∠3=90°,所以∠1=90°−∠3=90°−58°=32°.

4. 解:如图所示,由题意知$\angle AOB=30°$,$\angle AOB+\angle AOC=90°$,所以$\angle AOC=60°$,因为$\angle AOC+\angle COD=180°$,所以$\angle COD=180°-\angle AOC=120°$,所以树干与山坡所成的角有两个,分别为60°,120°.

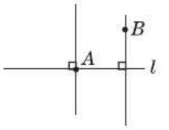


(第4题)

5. 解:∠1与∠2不是对顶角.

随堂练习(教材第43页)

1. 解:如图.



(第1题)

2. 解:(1)$AO\perp OC$,$OB\perp OD$.

(2)$DC\perp BC$,$DC\perp CE$,$DC\perp BE$,$AC\perp BC$,$AC\perp CE$,$AC\perp BE$,$DA\perp BC$,$DA\perp CE$,$DA\perp BE$.

习题2.2

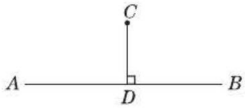
1. 略.

2. 解:互相平行的有(1)东二环、东三环、东四环两两互相平行;(2)东直门外大街、建国门外大街互相平行.

互相垂直的有:(1)东二环、东三环、东四环分别与建国门外大街互相垂直;(2)东二环、东三环、东四环分别与东直门外大街互相垂直.

3. 解:如图,过点C作$CD\perp AB$,垂足为点D,在渠岸AB的D点开沟,才能使沟最短.

理由:直线外一点与直线上各点连接的所有线段中,垂线段最短.



(第3题)

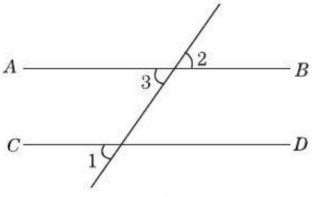
2 探索直线平行的条件

随堂练习(教材第46页)

1. 解:$AB\parallel CD$,$EF\parallel GH$.

2. 解:$AB\parallel CD$.

理由:如图,因为∠1=∠2=55°,∠3=∠2,所以∠3=∠2=55°. 所以∠1=∠3. 所以$AB\parallel CD$(同位角相等,两直线平行).



(第2题)

点拨:由图可发现∠3与∠2是对顶角,∠1与∠3是同位角,且能说明它们相等,所以$AB\parallel CD$.

3. 解:相交.

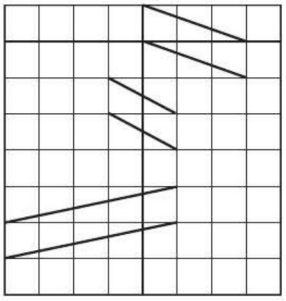
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

习题 2.3

1. 解：$m/\!/n$，$a/\!/b$.

点拨：根据“同位角相等，两直线平行”和平角的定义加以判断即可.

2. 解：能，如图.（答案不唯一）



（第 2 题）

3. 解：能.（折法略）

点拨：本题折法不唯一，只要合理即可.

4. 解：沿着两个平行的木板画两条线，其中的道理是“同位角相等，两直线平行”.

5. 解：A，B，C 三点在同一条直线上.

随堂练习（教材第 48 页）

1. (1) $\angle 4$　(2) $\angle 3$　(3) $\angle 1$

点拨：解本题时要注意把握好同位角、同旁内角、内错角的特点，同位角是在两条直线的“同侧”，第三条直线的“同旁”；同旁内角是在两条直线“之间”，第三条直线的“同旁”；内错角是在两条直线“之间”，第三条直线的“两旁”.

2. 解：(1) $a/\!/b$. (2) $m/\!/l$. (3) $l/\!/n$.

点拨：先准确判断每小题中的两个角是哪两条直线被哪条直线所截而产生的，以及它们是同位角、内错角，还是同旁内角，然后利用平行线的判定方法加以判定即可.

习题 2.4

1. 解：街道 AB 与 CD 平行.

理由：因为 $\angle ABC$ 与 $\angle BCD$ 均为 $150°$，即 $\angle ABC = \angle BCD$，且 $\angle ABC$ 与 $\angle BCD$ 是内错角，所以 $AB/\!/CD$. 故街道 AB 与 CD 平行.

点拨：观察题中图形，可发现 $\angle ABC$ 与 $\angle BCD$ 是内错角，且都等于 $150°$，故可根据“内错角相等，两直线平行”得出 $AB/\!/CD$.

2. 解：$AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$.

理由：因为 $\angle DAB + \angle CDA = 180°$，所以 $AB/\!/CD$. 因为 $\angle ABC = \angle 1$，所以 $AD/\!/BC$.

点拨：欲判断两条直线是否平行，只要看与之相关的同位角内错角是否相等或同旁内角是否互补即可.

3. 解：每幅图中的直线 a，b 都分别平行. 能.

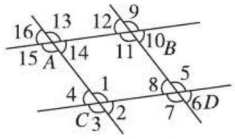
点拨：每幅图中的直线 a，b 看上去似乎都不平行，其实它们都是分别平行的，这是由于背景造成的视觉误差. 可见，有时仅仅依靠观察是不够的，需要亲自动手验证.

4. 解：同位角相等，两直线平行；或内错角相等，两直线平行；或同旁内角互补，两直线平行.

3　平行线的性质

随堂练习（教材第 51 页）

解：如图，与 $\angle 1$ 相等的角有 $\angle 3$，$\angle 5$，$\angle 7$，$\angle 9$，$\angle 11$，$\angle 13$，$\angle 15$；与 $\angle 1$ 互补的角有 $\angle 2$，$\angle 4$，$\angle 6$，$\angle 8$，$\angle 10$，$\angle 12$，$\angle 14$，$\angle 16$.



点拨：根据对顶角相等及平行线的性质来找即可.

习题 2.5

1. 解：因为 $AB/\!/CD$，$\angle \alpha = 45°$，所以 $\angle D = \angle \alpha = 45°$. 因为 $\angle D = \angle C$，所以 $\angle C = 45°$. 又因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle C + \angle B = 180°$. 所以 $\angle B = 180° - \angle C = 135°$.

点拨：利用平行线的性质解决即可.

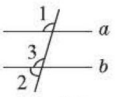
2. 解：因为 $AB/\!/CD$，$CD/\!/EF$，所以 $\angle 1 + \angle A = 180°$，$\angle 2 + \angle E = 180°$. 又因为 $\angle 1 = \angle 2 = 60°$，所以 $\angle A = 180° - \angle 1 = 120°$，$\angle E = 180° - \angle 2 = 120°$. 所以 $\angle A = \angle E = 120°$.

点拨：观察题中图形，根据“两直线平行，同旁内角互补”可分别求出 $\angle A$ 和 $\angle E$ 的度数.

3. 解：这艘船在这个灯塔的南偏东 $48°$ 的方向上.

随堂练习（教材第 53 页）

1. 解：能. 如图，因为 $\angle 2 = 75°$，所以 $\angle 3 = 180° - \angle 2 = 105°$. 因为 $\angle 1 = 105°$，所以 $\angle 1 = \angle 3$. 所以 $a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.



（第 1 题）

2. 解：因为 $AE/\!/CD$，所以 $\angle 2 = \angle 1 = 37°$（两直线平行，内错角相等），$\angle BAE = \angle D = 54°$（两直线平行，同位角相等）.

习题 2.6

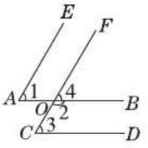
1. 解：$AE/\!/CF$，$AB/\!/CD$.

理由：如图，

因为 $\angle 2 = 120°$，所以 $\angle 4 = 180° - \angle 2 = 60°$.

因为 $\angle 1 = \angle 3 = 60°$，所以 $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 3 = \angle 4$.

所以 $AE/\!/CF$，$AB/\!/CD$（同位角相等，两直线平行）.



（第 1 题）

2. 解：$AB/\!/CD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

理由:因为 AC 平分 $\angle BAD$(已知),所以 $\angle 1 = \angle CAB$(角平分线的定义). 因为 $\angle 1 = \angle 2$(已知),所以 $\angle 2 = \angle CAB$(等量代换). 所以 $AB \parallel CD$(内错角相等,两直线平行).

3. 解:因为 $AB \parallel CD$(已知),所以 $\angle B = \angle C$(两直线平行,内错角相等). 因为 $\angle B = 50°$(已知),所以 $\angle C = 50°$(等量代换).

4. 解:因为 $AC \parallel DE$(已知),所以 $\angle BED = \angle A = 64°$(两直线平行,同位角相等).

又因为 $AB \parallel FD$(已知),所以 $\angle EDF = \angle BED = 64°$(两直线平行,内错角相等).

5. 解:平行.

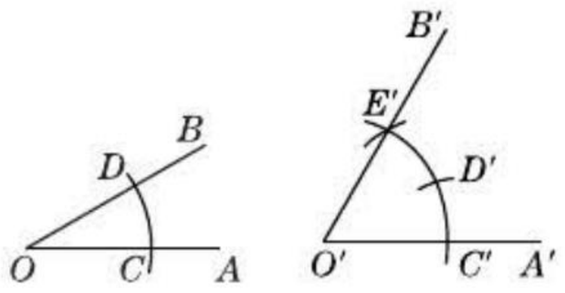
理由:因为 $\angle ABC + \angle BCD = 115° + 65° = 180°$,所以 $AB \parallel CD$(同旁内角互补,两直线平行).

6. 解:水渠从 C 村沿北偏东 65°的方向修建,可以保持与 AB 的方向一致.

4 用尺规作角

随堂练习(教材第 56 页)

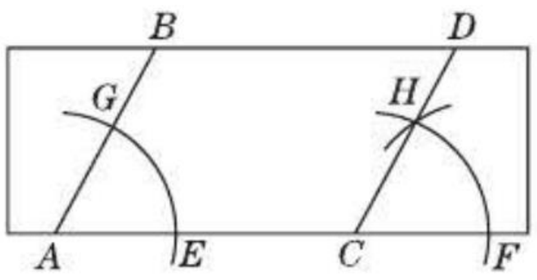
1. 解:作法:如图,(1)作射线 $O'A'$;(2)以点 O 为圆心,以任意长为半径画弧,交 OA 于点 C,交 OB 于点 D;(3)以点 O'为圆心,以 OC 长为半径画弧,交 $O'A'$于点 C';(4)以点 C'为圆心,以 CD 长为半径画弧,交前弧于点 D',再以点 D'为圆心,以 CD 长为半径画弧,交前弧于点 E';(5)过点 E'作射线 $O'B'$. $\angle A'O'B'$就是所求作的角.



(第 1 题)

点拨:作一个角等于已知角的 m(m 为正整数)倍,在截弧时,只要按某一方向顺次截取 m 次即可得出.

2. 解:如图,CD 即为所求作的另一边.

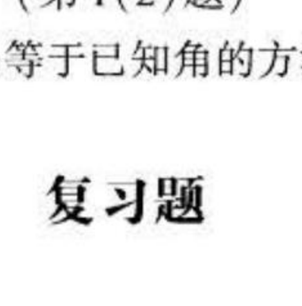


(第 2 题)

点拨:根据“同位角相等,两直线平行”,只要在 AC 上以点 C 为顶点,作一个与 $\angle BAC$ 相等的同位角,也就得到了与 AB 平行的另一条边.

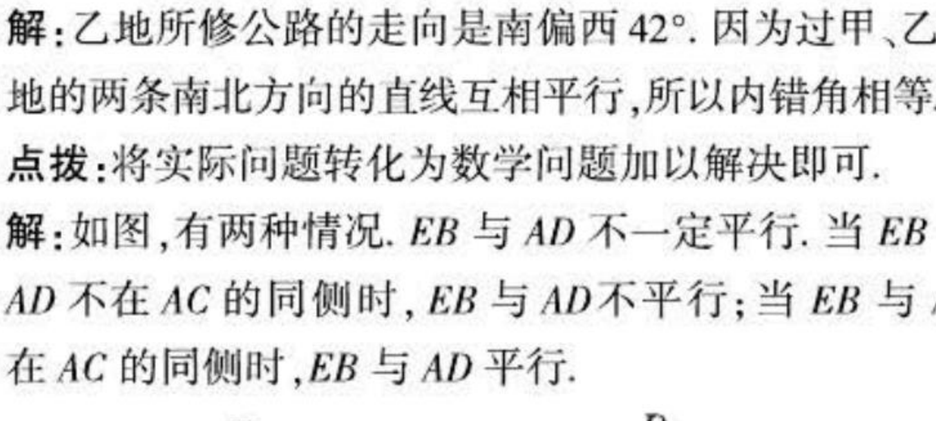
习题 2.7

1. 解:(1)作法:①以点 B 为圆心,任意长为半径画弧,交 BA 于点 E,交 BC 于点 D;②以点 E为圆心,ED 长为半径在 $\angle ABC$ 外画弧,交前弧于点 F;③作射线 BF. $\angle FBA$ 就是所求作的角. 如图.



(第 1(1)题)

(2)作法:①作 $\angle AOB = \angle\beta$;②以点 O 为顶点,OA 为一边,在 $\angle AOB$ 外作 $\angle AOE = \angle\alpha$. $\angle EOB$ 即为所求作的角. 如图.



(第 1(2)题)

点拨:利用作一个角等于已知角的方法作图即可.

2. 略.

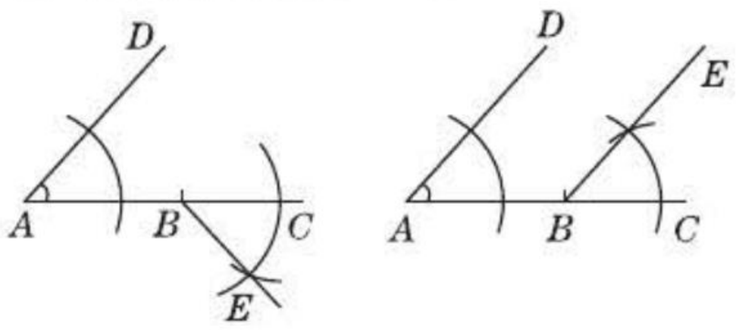
复习题

1. 略.

2. 解:乙地所修公路的走向是南偏西 42°. 因为过甲、乙两地的两条南北方向的直线互相平行,所以内错角相等.

点拨:将实际问题转化为数学问题加以解决即可.

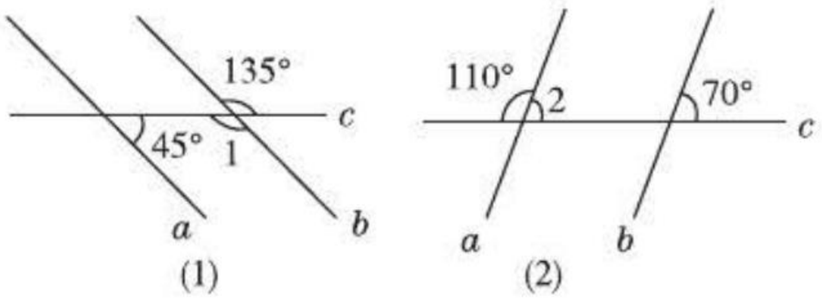
3. 解:如图,有两种情况. EB 与 AD 不一定平行. 当 EB 与 AD 不在 AC 的同侧时,EB 与 AD 不平行;当 EB 与 AD 在 AC 的同侧时,EB 与 AD 平行.



(第 3 题)

4. 解:题图(1)中 $a \parallel b$. 理由:如图(1),设 135°角的对顶角为 $\angle 1$,则 $\angle 1 = 135°$. 又因为 $\angle 1 + 45° = 135° + 45° = 180°$,所以 $a \parallel b$(同旁内角互补,两直线平行).

题图(2)中 $a \parallel b$. 理由:如图(2),设 110°角的邻补角为 $\angle 2$,则 $\angle 2 = 180° - 110° = 70°$,所以 $a \parallel b$(同位角相等,两直线平行).



(第 4 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解:题图(1)中,∠1 = 90°. 题图(2)中,∠1 = 180° − 36° = 144°. 题图(3)中,∠1 = 180° − 120° = 60°.

点拨:利用两直线平行,同位角相等、内错角相等、同旁内角互补求解.

6. 解:它与地面所成的较大的角为95°.

依据:塔与地面所成的较大的角和塔与地面所成的较小的角互补.

7. 解:如果∠B与∠C互补,那么$AB \parallel CD$. ∠A与∠B互补,可以保证$AD \parallel BC$.

8. 解:(1)∠1 = ∠2 = ∠3.

(2)∠3 = ∠5或∠4 = ∠6或∠1 = ∠5.

9. 解:第二次拐的角∠C = 140°.

点拨:本题利用"两直线平行,内错角相等"求解.

10. 解:根据"两直线平行,内错角相等"可知,∠ABC = 60° − 20° = 40°.

11. 解:因为∠2 + ∠3 = 90°,∠3 = 30°,所以∠2 = 90° − ∠3 = 60°. 所以∠1 = ∠2 = 60°. 所以∠1应等于60°,才能保证红球直接入袋.

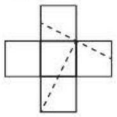
点拨:根据题中的条件先求出∠2的度数,再根据∠1 = ∠2求得∠1的度数.

12. 略.

※13. 略.

※14. 解:相信,如图.

沿虚线剪开后可拼成正方形.



(第14题)

第三章 变量之间的关系

1 用表格表示的变量间关系

随堂练习(教材第63页)

1. 解:气温随时间的变化,农作物的高度随种植时间的变化等.(答案不唯一,合理即可)

2. 解:(1)反映了氮肥的施用量和土豆的产量之间的关系. 氮肥的施用量是自变量,土豆的产量是因变量.

(2)当氮肥的施用量是101 kg/hm^{2}时,土豆的产量是32.29 t/hm^2. 如果不施氮肥,土豆的产量是15.18 t/hm^2.

(3)氮肥的施用量为336 kg/hm^{2}时比较适宜,因为此时土豆的产量最高;或者氮肥施用量为259 kg/hm^{2}比较适宜,因为此时土豆的产量与氮肥施用量为336 kg/hm^{2}时差不多,而又可以节约肥料.

(4)土豆的产量随氮肥的施用量的增加先增加,增加到一定程度后又降低.

点拨:认真观察表格,充分利用从中所发现的信息是解这类题的关键.

习题3.1

1. 解:用表格表示题目中的数据为:

时间/年	1600	1830	1930	1960	1974	1987	1999	2011
地球上的人口/亿	5	10	20	30	40	50	60	70

随着时间的推移,世界人口越来越多.

2. 解:(1)年龄和体重都在发生变化,自变量是年龄,因变量是体重.

(2)

年龄	刚出生	6个月	1周岁	2周岁	6周岁	10周岁
体重/kg	3.5	7.0	10.5	14.0	21.0	31.5

(3)儿童从出生到10周岁之间,随着年龄的增长,儿童的体重在增加.

点拨:根据自变量和因变量的定义,即可判断出本题中的自变量和因变量;在填表时,应先根据题意进行必要的计算.

3. 略.

4. 解:(1)老花镜的度数越大,镜片与光斑的距离就越近,并且度数与距离之积大约为100. (2)这副老花镜的度数大约为143度.

5. 解:(1)反映了海拔高度(m)与空气含氧量(g/m^3)之间的关系,海拔高度(m)是自变量,空气含氧量(g/m^3)是因变量.

(2)在海拔高度0 m的地方空气含氧量是299.3 g/m^3,海拔高度4 000 m的地方空气含氧量是182.08 g/m^3.

(3)估计在5 500 m海拔高度空气含氧量是150.7 g/m^3.

2 用关系式表示的变量间关系

随堂练习(教材第67页)

1. 解:用表格表示所得结果如下:

高度d/m	0	200	400	600	800	1 000
温度T/℃	10.0	8.7	7.3	6.0	4.7	3.3

2. 解:自来水使用量每增加1 t,二氧化碳排放量增加0.91 kg. 当自来水使用量从1 t增加到100 t时,二氧化碳排放量从0.91 kg增加到91 kg.

习题3.2

1. 解:当x = 2时,y = 35 × 2 + 20 = 90;当x = 3时,y = 35 × 3 + 20 = 125;当x = 5时,y = 35 × 5 + 20 = 195;当x = 7时,y = 35 × 7 + 20 = 265;当x = 10时,y = 35 × 10 + 20 = 370;当x = 13时,y = 35 × 13 + 20 = 475.

点拨:将x的各个值分别代入关系式y = 35x + 20,计算

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

求值即可.

2. 解:(1)自变量是圆锥的高,因变量是圆锥的体积.

(2)$V=\frac{4}{3}\pi h$ (3)$\frac{4}{3}\pi;\frac{40}{3}\pi$

3. 解:(1)梯形面积 y 与上底长 x 之间的关系式是 $y=4x+60$.

(2)表格如下:

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116

(3)当 x 每增加 1 时,y 相应增加 4.(理由略)

(4)当 $x=0$ 时,$y=4\times0+60=60$. 此时它表示的是三角形的面积.

点拨:梯形的面积 $=\frac{1}{2}\times$(上底 + 下底)$\times$高,利用此公式即可求出 y 与 x 之间的关系式.

4. 略.

3 用图象表示的变量间关系

随堂练习(教材第 70 页)

解:(1)大约 3 时港口的水最深,深度约是 7.5 m.

(2)大约 9 时港口的水最浅,深度约是 2.4 m.

(3)0 时到 3 时和 9 时到 12 时港口水深在增加.

(4)3 时到 9 时港口水深在减少.

(5)A 点表示6 时港口的水深大约为5 m,B 点表示 12 时港口的水深大约为 4.3 m;0 时水的深度与 A 点所表示的深度相同.

(6)0 时到 3 时水深在增加;3 时到 9 时水深在减少;9 时到 12 时水深又在增加.

点拨:认真识图,明确图象表示的是哪两个变量之间的关系及图象上的点所表示的意义是解本题的关键.

习题 3.3

1. 解:(1)(标字母略)从左至右依次表示为13 时水深约为 5.2 m;14 时水深约为6.2 m;15 时水深约为 6.7 m;16 时水深约为 7 m;17 时水深约为 6.6 m;18 时水深约为 5.6 m;19 时水深约为 4.5 m.

(2)这个港口从 13 时到 16 时水深在增加,从 16 时到 19 时水深在减少.

(3)略

2. 解:(1)2 h 后,记忆保持了大约 40%.

(2)图中 A 点表示的意义是 15 h 后,记忆保持了大约 35%. 在 0 至 2 h 内遗忘的速度最快.

(3)如不复习,一天后大约能保持 33%. 因此学习过程中应及时复习.

随堂练习(教材第 74 页)

1. 解:(3). **点拨**:柿子在下落过程中的速度应该越来越快,故正确答案是(3).

2. 解:(2). **点拨**:公共汽车加速时图象应是上升的线;匀速或静止时,图象应是水平的线;减速时,图象应是下降的线,根据其速度的变化情况,可以看出只有(2)符合.

习题 3.4

1. 0;30;30;30;0;0;22.5;45;67.5;90;90;90;0

2. 解:(3). **点拨**:由题意可知,亮亮的体温一开始在升高,吃过药后,开始下降,下午又开始上升,然后再下降,满足条件的只有(3).

3. 解:小明放学后,从学校出发加速骑了一段路程后开始匀速行驶,过了一段时间,快到家时,又开始减速,直到家停下.

点拨:先根据题图所提供的信息分析两个变量之间的关系,然后联系实际,想情境. 答案不唯一.

4. 解:(3). **点拨**:在小明等车的这段时间内,小明离家的距离始终保持不变.

复习题

1. 解:(1)图象表示的是日平均温度与日期之间的关系,其中日期是自变量,日平均温度是因变量.

(2)11 日的日平均温度最低,大约是 28 ℃;12 日的日平均温度最高,大约是 36 ℃.

(3)日平均温度相同.

(4)点 A 表示 13 日的日平均温度,大约是33 ℃.

(5)这一周日平均温度的变化大约在 28 ℃到 36 ℃之间,第一天的日平均温度最低,第二天的日平均温度升高,第三天的日平均温度稍降,第四天的日平均温度稍升,第五、六天的日平均温度与第四天相同,第七天的日平均温度又下降了一些.

点拨:认真识图,弄懂图中各点所表示的意义是解本题的关键.

2. 解:

月龄/月	1	2	3	4	5	6
体重/g	4 200	4 900	5 600	6 300	7 000	7 700

点拨:分别将 x 的各个值分别代入 $y=3\ 500+700x$ 中,计算后,再填入表格中.

3. 解:(1)反映的是年份与全世界所释放的二氧化碳量之间的关系;(2)随着年份的推移,二氧化碳的释放量越来越多.

4. 解:(1)C (2)D (3)A (4)B

5. 解:9 岁时男女生的平均身高都在 125 cm 到 130 cm 之间,同龄的男生的平均身高高于女生;大约在 10 岁到 14 岁,同龄的女生的平均身高高于男生;14 岁后,同龄的男生的平均身高明显高于女生.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)反映了速度与时间之间的关系.

(2)点 A 表示的是时间为3分时,速度是40 km/h;点 B 表示的是时间为15分时,速度是0 km/h.

(3)从开始到3分,速度从0 km/h增加到40 km/h;3分到6分,速度保持为40 km/h;6分到7.5分,速度从40 km/h增加到60 km/h;7.5分到9分,速度保持为60 km/h;9分到10.5分,速度从60 km/h下降到40 km/h;10.5分到12分,速度保持为40 km/h;12分到15分,速度从40 km/h下降到0 km/h.

(4)略.

点拨:分清横、纵轴所代表的意义,理解清楚变化趋势是解这类问题的关键.

7. 解:(1)所列表格如下:

时间/s	5	10	15	20	25	30
温度/℃	49.0	31.4	22.0	16.5	14.2	12.0

(2)(答案不唯一)大约是9.9℃.

点拨:列表时,要先确定自变量和因变量,一般第一行表示自变量,第二行表示因变量.

※8. 解:给0 ℃的水先用电热水器低功率档加热一会儿,然后改用高功率档加热.

点拨:本题为开放性问题,答案不唯一,合理即可.

9. 略.

10. 解:(1)经过1 h,甲容器中的水温较高.

(2)检测员实验时的室温可能是20 ℃.

(3)甲容器的保温性能更好些. 理由:因为甲的曲线变化迟缓,说明在相同时刻甲容器中的水温不低于乙容器中的水温,所以甲容器的保温性能更好些.

※11. 解:2 h内,该自行车的平均速度为 $\frac{30}{2}=15(\text{km/h})$;3 h内,该自行车的平均速度为 $\frac{30}{3}=10(\text{km/h})$;6 h内,该自行车的平均速度为 $\frac{80}{6}\approx13.3(\text{km/h})$.

点拨:从图象中分别找出2 h,3 h,6 h所对应的路程,再根据"平均速度 $=\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$"计算平均速度.

12. 解:(1)101.2;90.7;80.0;70.7;61.3;53.9;47.2;41.3;36.0

(2)随着海拔高度的增加,大气压强逐渐减小.

第四章 三角形

1 认识三角形

随堂练习(教材第83页)

1. 解:锐角三角形有③⑤;直角三角形有①④⑥;钝角三角形有②⑦.

点拨:三个内角都是锐角的三角形是锐角三角形;有一个内角是直角的三角形是直角三角形;有一个内角是钝角的三角形是钝角三角形.

2. 解:(1)直角三角形. (2)锐角三角形.

(3)钝角三角形.

点拨:先根据三角形三个内角的和等于180°分别求出各小题中三角形的第三个内角的度数,再根据锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的特征判断即可.

习题4.1

1. 解:根据三角形三个内角的和等于180°,可得 $x+2x+3x=180°$,解得 $x=30°$,所以 $2x=2\times30°=60°$,$3x=3\times30°=90°$,即 $\triangle ABC$ 各内角分别为30°,60°,90°.

点拨:根据三角形三个内角的和等于180°,利用方程思想来求三角形中某些内角的度数是常用的思想方法,望大家注意掌握.

2. (1)锐角 (2)直角 (3)钝角

点拨:在第(1)题中,因为三角形的三个内角都相等,所以每个内角都等于60°,所以这个三角形是锐角三角形;在第(2)题中,可求出最大内角为90°,所以这个三角形是直角三角形;在第(3)题中,因为三角形有两个内角都小于40°,所以第三个内角大于100°,所以这个三角形是钝角三角形.

3. 解:设这个锐角为 x,则另一个锐角为 $\frac{1}{2}x$. 则 $x+\frac{1}{2}x=90°$,解得 $x=60°$,所以这个锐角是60°.

点拨:直角三角形的两个锐角互余.

4. 解:(1)有三个直角三角形,分别是 $\text{Rt}\triangle ACD$,$\text{Rt}\triangle BCD$,$\text{Rt}\triangle ABC$;$\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边是 AC 和 BC,斜边是 AB;$\text{Rt}\triangle ACD$ 的直角边是 AD 和 CD,斜边是 AC;$\text{Rt}\triangle BCD$ 的直角边是 CD 和 BD,斜边是 BC.

(2)$\angle1$ 与 $\angle A$ 互余,$\angle2$ 与 $\angle A$ 相等.

点拨:只要找到三角形中的直角,就可找到直角三角形;直角三角形的两个锐角互余,故 $\angle1$ 与 $\angle A$ 互余,又 $\angle1+\angle2=90°$,故可得出 $\angle2$ 和 $\angle A$ 相等.

5. 解:过 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D. 则轮船行驶到 D 点时距离灯塔最近. 由题图可知,$\angle ABC=180°-70°=110°$,因为 $\angle ACB+\angle ABC+\angle CAB=180°$,所以 $\angle ACB=180°-110°-30°=40°$. 当轮船距离灯塔 C 最近时,$\angle ADC=90°$,则有 $\angle ACD=90°-30°=60°$.

随堂练习(教材第86页)

1. 解:不可以是8,也不可以是2. 理由:三角形任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边.

2. 解:在 $\triangle ABC$ 中,$a=4$,$b=2$,所以 $a-b<c<a+b$,即 $2<c<6$. 又因为第三边 c 的长为偶数,所以 $c=4$.

点拨:利用"三角形任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边"解题.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

习题 4.2

1. 解:(1)能. (2)不能. (3)能. (4)不能. (验证略)

点拨:根据三角形的三边关系来判断.

2. 解:第三边长 9 cm. 若第三边长 4 cm,则 4 +4 =8 <9,出现了两边之和小于第三边的情况,故第三边长不可能为 4 cm,只能为 9 cm.

3. 解:设第三根木棒的长度为 x cm. 由三角形的三边关系得 $9+3>x>9-3$,所以 $12>x>6$. 又因为第三根木棒的长度为奇数,所以 $x=7$ 或 $x=9$ 或 $x=11$.

所么第三根木棒的可以为 7 cm,9 cm,11 cm.

随堂练习(教材第 88 页)

1. (1) $\angle DAC$;$\angle BAC$ (2) EC;$\frac{1}{2}$

2. 解:在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle A=50°$,$\angle C=72°$,所以 $\angle CBA=180°-\angle A-\angle C=58°$. 因为 BD 平分 $\angle CBA$,所以 $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle CBA=29°$.

习题 4.3

1. 解:因为 $\angle BAC=60°$,AD 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线,所以 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$. 因为 $\angle B=45°$,在 $\triangle ABD$ 中,$\angle B+\angle BAD+\angle ADB=180°$,所以 $\angle ADB=180°-\angle B-\angle BAD=180°-45°-30°=105°$.

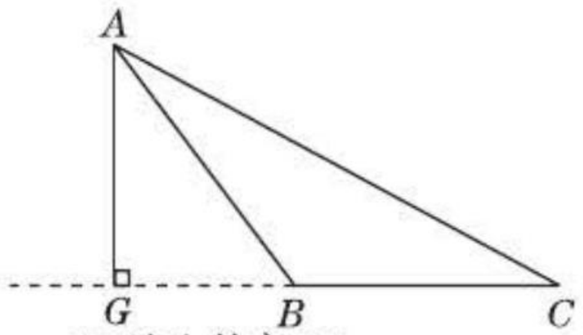
点拨:综合利用“三角形三个内角的和等于 180°”和角平分线的定义解本题.

2. 解:这两个三角形的面积相等.

3. 解:在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle A=62°$,$\angle B=74°$,所以 $\angle ACB=180°-\angle A-\angle B=180°-62°-74°=44°$. 因为 CD 平分 $\angle ACB$,所以 $\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB=22°$. 又因为 $DE\parallel BC$,所以 $\angle EDC=\angle DCB=22°$.

随堂练习(教材第 90 页)

1. 解:(1)对. (2)不对. 改正如图所示.



BC 边上的高 AG

(第 1 题)

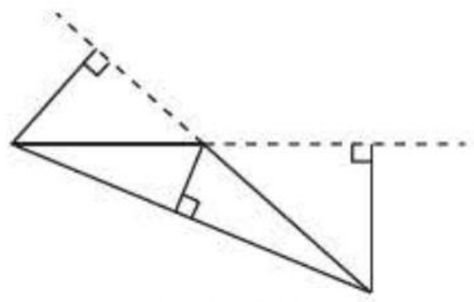
点拨:过 BC 边相对的顶点 A 作 BC 的垂线,交 CB 的延长线于点 G,即垂足为点 G.

2. 略.

习题 4.4

1. AF;CE;CE;BE;DC;AC

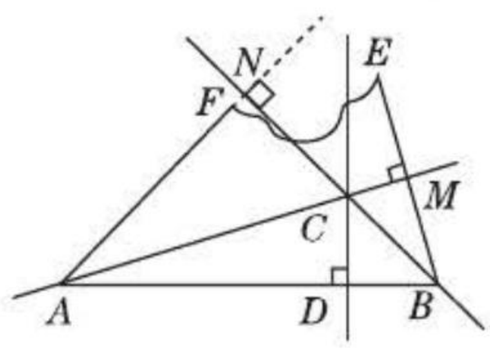
2. 解:如图.



(第 2 题)

3. 解:如图,过点 A 作 BE 的垂线 AM,过点 B 作 AF 的垂线 BN,AM 与 BN 交于点 C,过点 C 作 AB 的垂线 CD,直线 CD 即为 AB 边上的高所在的直线.

理由:三角形的三条高所在的直线交于一点.

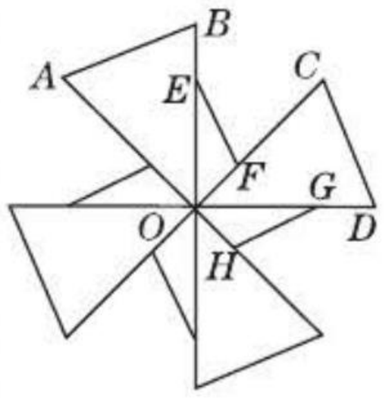


(第 3 题)

2 图形的全等

随堂练习(教材第 94 页)

1. 解:(答案不唯一)如图,在图中标注一些字母. $\triangle OAB\cong\triangle OCD$,它们的对应角是 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$,$\angle A$ 和 $\angle C$,$\angle B$ 和 $\angle D$,对应边是 OA 和 OC,OB 和 OD,AB 和 CD;$\triangle OEF\cong\triangle OGH$,它们的对应角是 $\angle EOF$ 和 $\angle GOH$,$\angle OEF$ 和 $\angle OGH$,$\angle OFE$ 和 $\angle OHG$,对应边是 OE 和 OG,OF 和 OH,EF 和 GH.



(第 1 题)

2. 解:因为 $\angle B=30°$,$\angle ACB=85°$,$\angle B+\angle ACB+\angle BAC=180°$,所以 $\angle BAC=180°-\angle B-\angle ACB=180°-30°-85°=65°$. 又因为 $\triangle ABC\cong\triangle AEC$,所以 $\angle E=\angle B=30°$,$\angle EAC=\angle BAC=65°$,$\angle ACE=\angle ACB=85°$.

点拨:先确定出 $\triangle ABC$ 各内角的度数,再利用全等三角形的对应角相等求出 $\triangle AEC$ 各内角的度数.

习题 4.5

1. 解:(1)与(8),(2)与(12),(4)与(9),(5)与(11)分别是全等的.

点拨:全等图形的形状和大小都相同,利用该特征判断即可.

2. 解:$\angle D=\angle C$,$\angle A=\angle B$,$\angle DOA=\angle COB$.

点拨:全等三角形的对应角相等.

3. 解:$\angle C'=25°$,$B'C'=6$ cm,$A'C'=4$ cm.

点拨:全等三角形的对应边相等,对应角相等.

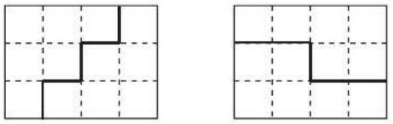
4. 解:由题意可知 $BD=7BC$. 因为 $AC=0.2$ m,$BC=2AC$,所以 $BD=7BC=14AC=14\times0.2=2.8$(m).

点拨:利用全等三角形的性质求值即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 略.

6. **解**:如图.(答案不唯一)



(第6题)

3 探索三角形全等的条件

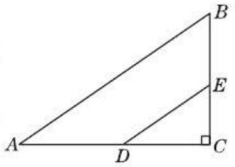
习题4.6

1. **解**:(1)不能.

(2)四边形、五边形的形状都发生了变化.

(3)三角形具有稳定性,而四边形、五边形都不具有稳定性.

2. **解**:不一定全等. 理由:如图,$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 都是直角三角形,$\angle C=90°$,$\angle A=\angle EDC$,$\angle B=\angle DEC$,很明显 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 并不全等.



(第2题)

3. **解**:第一步的理由是"三边对应相等的两个三角形全等";第二步的理由是"全等三角形的对应角相等".

习题4.7

1. **解**:题图中的两个三角形全等. 因为两个三角形有两组角分别相等,且其中一组角的对边相等,符合"角角边"的条件,所以两个三角形全等.

点拨:根据"角角边"加以判定即可.

2. **解**:有三对相等的角. 这两个三角形全等. 理由:这两个三角形的两角和它们的夹边分别相等(或两角和其中一角的对边分别相等),所以这两个三角形全等.

点拨:判定两个三角形全等的方法有时并不唯一,同学们要注意探索.

3. 略.

4. **解**:可以. 带含有两个完整角的那块碎片去合适. 因为由"角边角"可知,利用这块能配出一块与原来一样的三角形模具.

随堂练习(教材第103页)

1. **解**:(1)$\triangle ABC\cong\triangle EFD$. 理由是"SAS".

(2)$\triangle ADC\cong\triangle CBA$. 理由是"SAS".

点拨:对于第(2)题,要注意运用其中的隐含条件——公共边.

2. **解**:(标注略)小明不用测量就能知道 $EH=FH$. 因为在 $\triangle EDH$ 和 $\triangle FDH$ 中,因为 $ED=FD$,$\angle EDH=\angle FDH$,$DH=DH$,所以 $\triangle EDH\cong\triangle FDH$(SAS),所以 $EH=FH$.

点拨:本题中要确定 EH 与 FH 是否相等,可以看其所在的三角形是否全等.

习题4.8

1. **解**:$\triangle ACE\cong\triangle ADE$,$\triangle ACB\cong\triangle ADB$.

理由:在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases} AC=AD, \\ \angle CAE=\angle DAE, \\ AE=AE, \end{cases}$$

所以 $\triangle ACE\cong\triangle ADE$(SAS);

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ADB$ 中,

$$\begin{cases} AC=AD, \\ \angle CAB=\angle DAB, \\ AB=AB, \end{cases}$$

所以 $\triangle ACB\cong\triangle ADB$(SAS).

2. **解**:第一步的理由是"SAS";第二步的理由是"全等三角形的对应角相等".

3. **解**:观察题图可知,未被墨迹污染的有两条边及其夹角,故根据"SAS"可以画出一个与原来完全一样的三角形.

点拨:将实际问题转化为数学问题,借助全等三角形的判定方法加以解决即可.

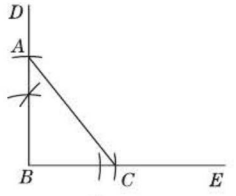
4. **解**:$\triangle EHJ\cong\triangle FIH\cong\triangle GJI$,$\triangle HIJ$ 的三边相等.

点拨:因为 $\triangle EFG$ 的三条边相等,三个内角也相等,所以 $EF=FG=GE$,$\angle E=\angle F=\angle G$. 又因为 $EH=FI=GJ$,所以 $EJ=GI=FH$. 所以 $\triangle EHJ\cong\triangle FIH\cong\triangle GJI$(SAS). 所以 $HJ=IH=JI$(全等三角形的对应边相等),即 $\triangle HIJ$ 的三边相等.

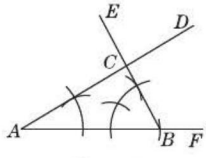
4 用尺规作三角形

习题4.9

1. **解**:能. 作法:(1)作 $\angle DBE$ 等于已知直角;(2)在射线 BE 上截取线段 $BC=a$;(3)在射线 BD 上截取线段 $BA=b$;(4)连接 AC. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形(如图).



(第1题)

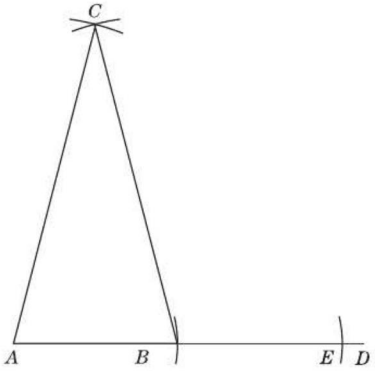


(第2题)

2. **解**:作法:(1)作 $\angle DAF=\angle\alpha$;(2)在射线 AF 上截取线段 $AB=a$;(3)以 B 为顶点,以 BA 为一边,作 $\angle ABE=2\angle\alpha$,BE 交 AD 于点 C. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形(如图).

3. **解**:作法:(1)在射线 AD 上截取 $AB=a$,$BE=a$;(2)以点 A 为圆心,以 AE 的长为半径画弧;以点 B 为圆心,以 AE 的长为半径画弧,两弧相交于点 C;(3)分别连接 AC,BC. $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形(如图).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



(第3题)

点拨:用尺规作三角形时,注意要与相应的三角形全等的判定方法相结合.

4. 略.

5 利用三角形全等测距离

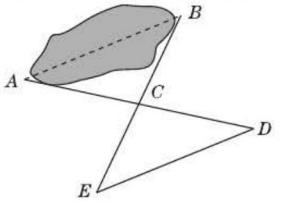
习题4.10

1. **解**:先在地上取一个可以直接到达A点和B点的点C,连接AC并延长到D,使$CD=AC$;连接BC并延长到E,使$CE=CB$,连接DE并测量出它的长度,DE的长度就是A,B间的距离(如图).理由:在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中,

$$\begin{cases} AC=DC, \\ \angle ACB=\angle DCE, \\ BC=EC, \end{cases}$$

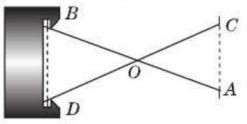
所以$\triangle ABC\cong\triangle DEC$(SAS).

所以$AB=DE$(全等三角形对应边相等).



(第1题)

2. **解**:如图,分别连接AC,BD.由题意可得$BO=AO$,$DO=CO$,$\angle BOD=\angle AOC$(对顶角相等),所以$\triangle BOD\cong\triangle AOC$(SAS),从而$BD=AC$(全等三角形对应边相等).



(第2题)

点拨:根据题中条件,利用三角形全等的知识解决即可.

3. 略.

复习题

1. **解**:一个三角形不能有两个直角.一个三角形的三个角也不能都大于70°或都小于50°.

点拨:三角形三个内角的和为180°,利用此知识判断即可.

2. **解**:直角三角形的两个锐角互余,又知这两个锐角相等,故每个锐角都等于45°.

3. **解**:(1)BD是$\angle ABE$的平分线.因为$\triangle ADB\cong\triangle EDB$,所以$\angle ABD=\angle EBD$.所以$BD$是$\angle ABE$的平分线.

(2)$DE\perp BC$.因为$\triangle BDE\cong\triangle CDE$,所以$\angle BED=\angle CED$.又因为$B$,$E$,$C$在一条直线上,所以$\angle BEC=180°$.所以$\angle BED=\angle CED=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.所以$DE\perp BC$.

(3)点E平分线段BC.因为$\triangle BDE\cong\triangle CDE$,所以$BE=CE$,即点$E$平分线段$BC$.

4. **解**:$\triangle BED\cong\triangle CFD$.因为$BE\perp AE$,$CF\perp AE$,所以$\angle BED=\angle CFD=90°$.因为$D$是$EF$的中点,所以$DE=DF$.在$\triangle BED$和$\triangle CFD$中,

因为$\begin{cases} \angle BED=\angle CFD, \\ DE=DF, \\ \angle BDE=\angle CDF, \end{cases}$ 所以$\triangle BED\cong\triangle CFD$(ASA).

5. **解**:(1)作法:①作一条射线AF,在AF上截取$AB=3a$,$BD=a$,$DE=a$;②以点A为圆心,以AE的长为半径画弧,以点B为圆心,以AD的长为半径画弧,两弧相交于点C;③分别连接AC,BC.$\triangle ABC$就是所求作的三角形(图略).

(2)作法:①作一条线段$BC=a$;②以C为顶点,以BC为一边作$\angle BCD=\angle\alpha$;③在射线CD上截取线段$AC=2a$;④连接AB.$\triangle ABC$就是所求作的三角形(图略).

6. **解**:BC与EF相等,$\triangle ABC\cong\triangle DFE$.

理由:因为$BE=FC$,所以$BE+EC=FC+CE$,即$BC=FE$.在$\triangle ABC$和$\triangle DFE$中,$\begin{cases} AB=DF, \\ AC=DE, \\ BC=FE, \end{cases}$所以$\triangle ABC\cong\triangle DFE$(SSS).

※7. **解**:$\triangle ABC\cong\triangle ADE$.因为$\angle BAE=\angle DAC$,所以$\angle BAE+\angle EAC=\angle DAC+\angle CAE$,即$\angle BAC=\angle DAE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中,$\begin{cases} AB=AD, \\ \angle BAC=\angle DAE, \\ AC=AE, \end{cases}$所以$\triangle ABC\cong\triangle ADE$(SAS).

8. **解**:不一定全等.如两个直角三角形,其中一个直角三角形的两直角边长分别为13,12,另一个直角三角形的两直角边长分别为26,6,则这两个直角三角形的面积相等,但它们不全等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. (答案不唯一) $\angle ACB = \angle DBC$

10. 解: 能组成一个三角形的三根木棒有

①3 cm,5 cm,7 cm;②3 cm,7 cm,9 cm;③5 cm,7 cm,9 cm. 共有 3 种可能的情况. (验证略)

点拨: 根据三角形的三边关系来判断.

11. 解: 由题意可得 $PD = PE$. 在 $\triangle OPE$ 和 $\triangle OPD$ 中,

$$\begin{cases} OE = OD, \\ PE = PD, \\ OP = OP, \end{cases}$$

所以 $\triangle OPE \cong \triangle OPD$(SSS). 所以 $\angle EOP = \angle DOP$(全等三角形的对应角相等). 所以 OP 平分 $\angle AOB$.

点拨: 根据题中条件推出 $\triangle OPE \cong \triangle OPD$ 是解答本题的关键.

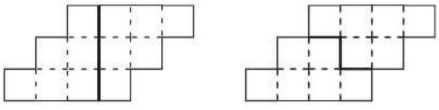
12. 略.

13. 解: 第一步的理由是"SSS";第二步的理由是"全等三角形的对应角相等".

点拨: 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解答本题的关键.

14. 解: 题图中阴影部分的面积是整个图形面积的 $\frac{3}{8}$. 设其中的一个小直角三角形的面积为 1,则 $S_{阴影} = 3$, $S_{全} = 8$,所以 $\frac{S_{阴影}}{S_{全}} = \frac{3}{8}$.

15. 解: (答案不唯一) 如图.



(第 15 题)

16. 略.

※17. 解: 此零件不合格. 连接 BD,因为 $\angle BCD = 142°$,所以 $\angle CDB + \angle CBD = 180° - \angle BCD = 38°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中,$\angle ADB + \angle ABD = 90°$,因为 $\angle ADC = 30°$, $\angle ABC = 20°$,所以 $\angle CDB + \angle CBD = 90° - (20° + 30°) = 40°$. 由上面结果不一致,所以该零件不合格.

※18. 解: 影子一样长. 因为 $AC \parallel A'C'$,所以 $\angle ACB = \angle A'C'B'$. 又由题图可得 $\angle ABC = \angle A'B'C' = 90°$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\begin{cases} \angle ACB = \angle A'C'B', \\ \angle ABC = \angle A'B'C', \\ AB = A'B', \end{cases}$ 所以 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$(AAS). 所以 $BC = B'C'$. 即影子一样长.

点拨: 将实际问题转化为数学问题,利用全等三角形的知识解决即可.

第五章 生活中的轴对称

1 轴对称现象

随堂练习(教材第 116 页)

略.

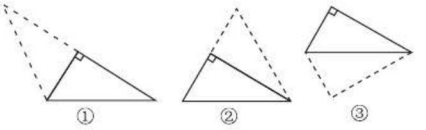
习题 5.1

1. 解: 左数第一、三、四、五、七、八个图形是轴对称图形. (图略)

2. 略.

3. 解: "草""木""中"可以看成是轴对称图形,类似的汉字有"土""十""干"等.

4. 解: 能得到图①②③.



(第 4 题)

2 探索轴对称的性质

随堂练习(教材第 119 页)

解: (1) (答案不唯一) 如图,点 A 与点 A' 是对应点,点 B 与点 B' 是对应点;线段 AB 与线段 $A'B'$ 是对应线段,线段 BC 与线段 $B'C'$ 是对应线段;$\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 是对应角,$\angle A$ 与 $\angle A'$ 是对应角.

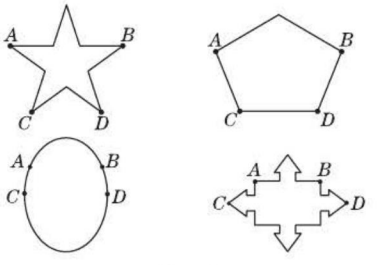
(2) 略.



点拨: (1) 关于某直线成轴对称的两个图形,沿对称轴对折后,互相重合的点是对应点,互相重合的线段是对应线段,互相重合的角是对应角.

习题 5.2

1. 解: 题图中自左向右除第四个图形不是轴对称图形外,其他四个图形都是轴对称图形. 各自的两组对应点如图中各图形中的点 A 与点 B,点 C 与点 D.



(第 1 题)

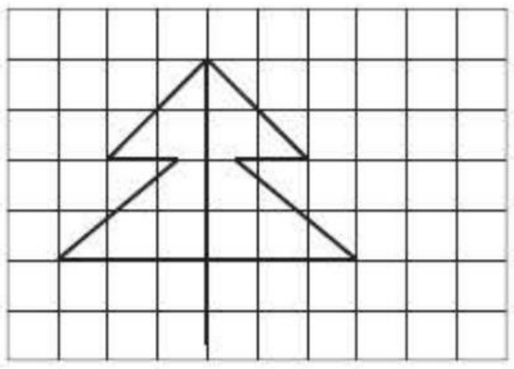
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:根据轴对称图形的定义判断即可. 另外,每个图形的对应点都很多,大家只要按对应点的定义找出两组即可,答案不唯一.

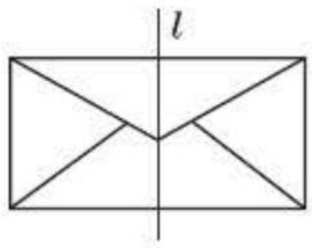
2. 略.

3. 解:如图.

点拨:作出图形中的几个关键点关于树干的对应点,再连接这些对应点即可.



(第3题)



(第4题)

4. 解:如图.

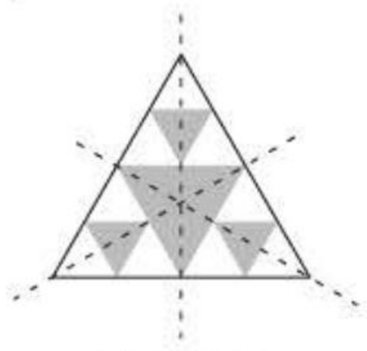
※5. 解:将镜子放在算式 $2+3=8$ 的正上方,垂直于纸面,镜子里的像就是真正的等式 $5+3=8$.

点拨:实际图形与其在镜子中的像成轴对称.

3 简单的轴对称图形

随堂练习(教材第122页)

1. 解:有3条对称轴,如图.



(第1题)

点拨:找对称轴时注意要找全.

2. 解:能. 根据等腰三角形"三线合一"的性质,等腰三角形 ABC 底边 BC 上的中线 DA 应垂直于底边 BC(即木条). 如果重锤过 A 点,说明 AD 所在的直线垂直于水平线,那么木条就是水平的. 依据"平面内过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直".

点拨:将实际问题转化为数学问题,灵活利用等腰三角形的性质加以解决即可.

3. 解:(1)$(180°-60°)\div 2=60°$;

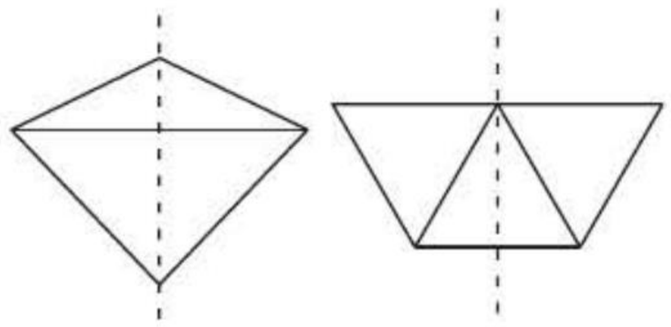
(2)$(180°-90°)\div 2=45°$;

(3)$(180°-120°)\div 2=30°$.

点拨:根据等腰三角形的两个底角相等和三角形的内角和为180°求解.

习题5.3

1. 解:如图.



(第1题)

点拨:找对称轴时,要充分联系等腰三角形和等边三角形的性质来找.

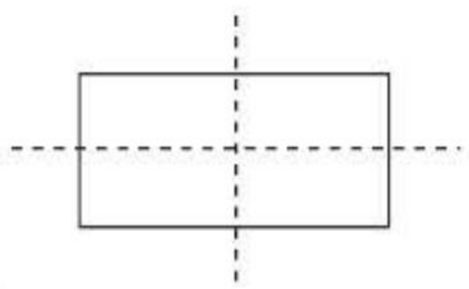
2. 解:设这个等腰三角形的顶角为 x,则两个底角均为 $2x$,则 $x+2x+2x=180°$,解得 $x=36°$. 这时 $2x=2\times 36°=72°$.

所以它的各个内角分别为36°,72°,72°.

点拨:根据三角形的内角和等于180°,借助方程的知识加以解决.

3. 解:长方形是轴对称图形.

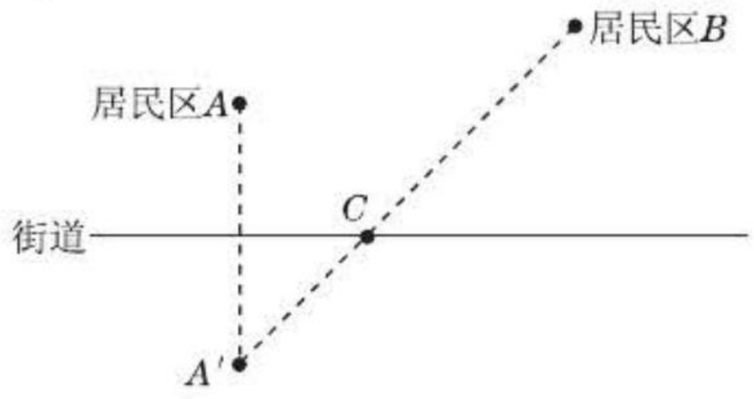
如图,它的对称轴有2条,是长方形四边的垂直平分线. 圆也是轴对称图形. 圆的对称轴有无数条,经过圆心的直线都是圆的对称轴.



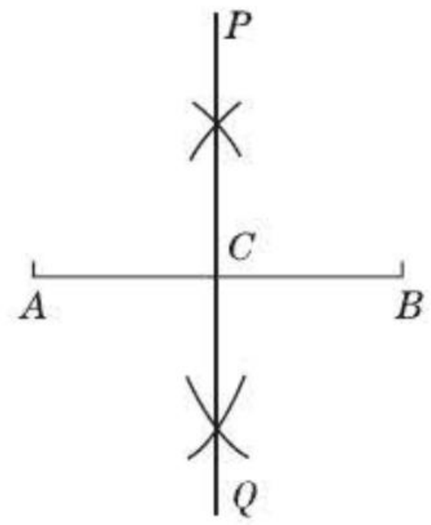
(第3题)

4. 解:扇形是轴对称图形,可以通过折叠的办法验证它的轴对称性.

※5. 解:如图,作居民区 A 关于街道所在直线的对称点 A',连接 $A'B$ 交街道于点 C,则奶站应建在点 C 处,才能使 A,B 到它的距离之和最短.



(第5题)



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

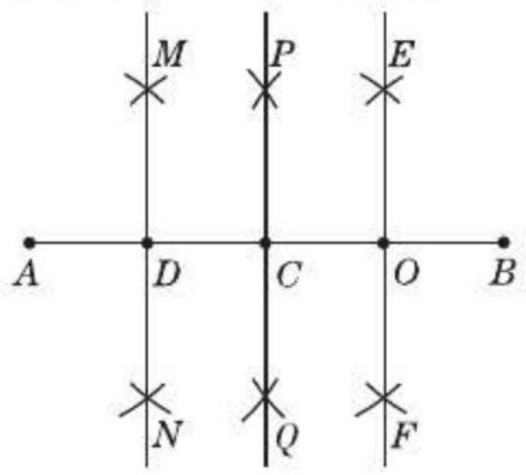
随堂练习(教材第 124 页)

解:如图. 已知:线段 AB. 求作:线段 AB 的中点 C.

作法:作线段 AB 的垂直平分线 PQ,交 AB 于点 C. 点 C 即为线段 AB 的中点.

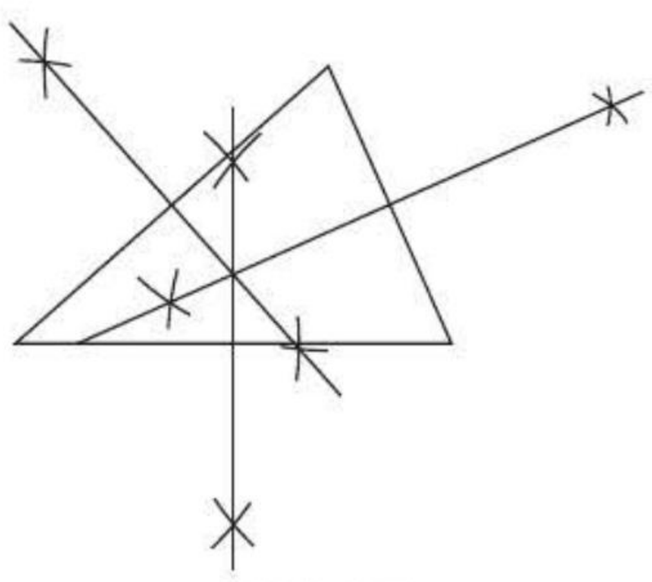
习题 5.4

1. 解:如图,作法:①作一条线段 AB,分别以点 A 和点 B 为圆心,以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧,两弧相交于点 P 和点 Q. ②连接 PQ 交 AB 于点 C,点 C 就是线段 AB 的中点. ③同理,分别求作线段 AC,CB 的中点 D,O,则点 D,C,O 即为线段 AB 的四等分点.



(第 1 题)

2. 解:三角形的三条边的垂直平分线交于一点,作法如图.



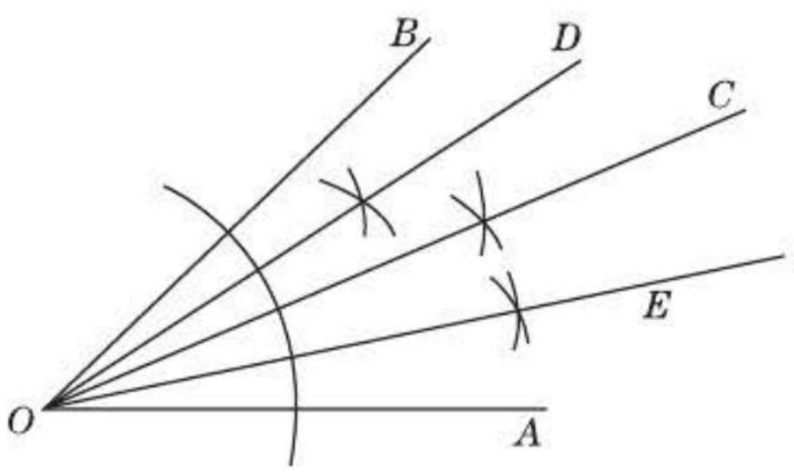
(第 2 题)

3. 解:连接 AB,CD,分别作线段 AB,CD 的垂直平分线,相交于一点,交点即为所求点 M. (图略)

随堂练习(教材第 126 页)

解:如图,射线 OD,OC,OE 将 $\angle AOB$ 四等分.

点拨:画出 $\angle AOB$. ①作 $\angle AOB$ 的平分线 OC. ②分别作 $\angle BOC$ 和 $\angle AOC$ 的平分线 OD,OE. 则 OD,OC,OE 将 $\angle AOB$ 四等分.



习题 5.5

1. 略.

2. 解:因为角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

3. 解:他根据"角平分线上的点到这个角的两边的距离相等"可得到点 P 到三面墙的距离都相等.

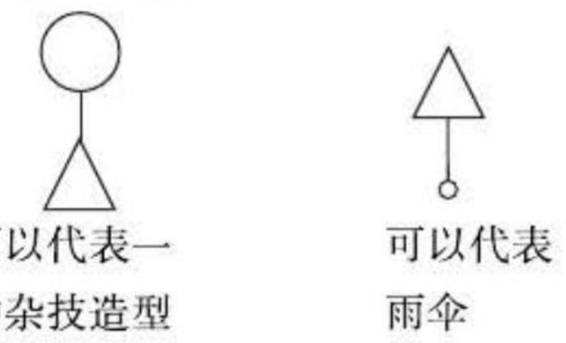
4 利用轴对称进行设计

随堂练习(教材第 129 页)

略.

习题 5.6

1. 解:(答案不唯一)如图.



可以代表一种杂技造型　　可以代表雨伞

(第 1 题)

2. 略.　**3.** 略.

复习题

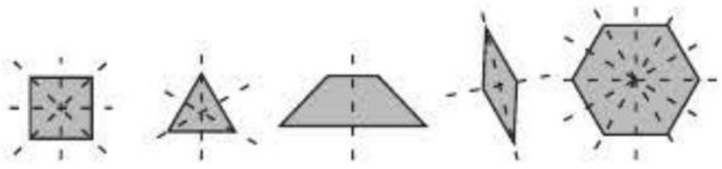
1. 解:(2)(3)(5)都是轴对称图形;(2)的对称轴是任意两个"对角"的连线所在的直线;(3)的对称轴是任意两个"对角"的连线所在的直线;(5)的对称轴是大正方形四边的垂直平分线和两条对角线所在的直线.

点拨:根据轴对称图形的定义判断即可.

2. 解:至少有两条对称轴.

3. 解:得到一条以"小花"为基本图案的花边,在这条花边中,相邻的"小花"之间成轴对称.

4. 解:如图.



(第 4 题)

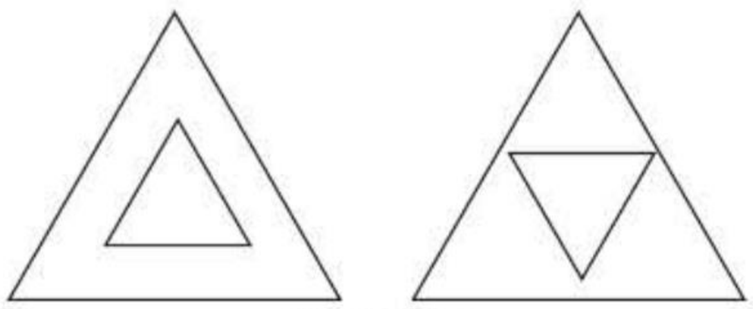
5. 略.

6. 解:$ED = EC = 7$ cm. 因为 AB 是线段 CD 的垂直平分线,由线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等,所以 $ED = EC = 7$ cm.

7. 略.

8. 略.　**9.** 略.

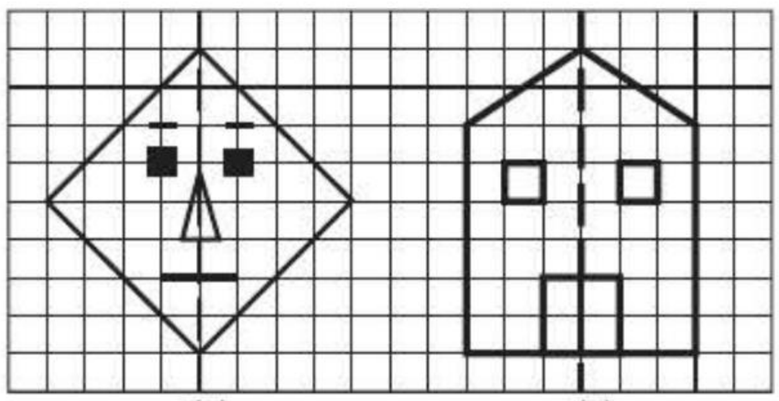
10. 解:不是. 如图. 把小三角形移动到大三角形的中间,即两个三角形的重心重合.



(第 10 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

11. 解:如图.

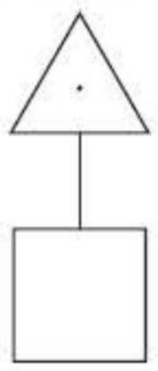


(第11题)

点拨:在已有的图案上找到关键点,以虚线为对称轴,分别描出它们的对应点,按相应方式连接对应点即可.

12. 略.

13. 解:如图,所表达的含义:目标.



(第13题)

点拨:本题为开放性问题,答案不唯一,大家要充分发挥自己的想象力.

14. 解:填表如下:

正多边形的边数	3	4	5	6	7	8
对称轴的条数	3	4	5	6	7	8

猜想:一个正 n 边形有 n 条对称轴.

点拨:解本题要注意观察、分析、探索并发现规律.

15. 略.

第六章 概率初步

1 感受可能性

随堂练习(教材第138页)

1. 解:(1)是必然事件. (2)是随机事件.

2. 解:座位号是2的倍数的可能性大.

习题6.1

1. 解:(1)是必然事件. (2)和(3)是随机事件. (4)是不可能事件.

2. 解:摸到红球的可能性大. 因为红球的个数比白球的个数多.

3. 解:指针落在白色区域的可能性大,因为在转盘中,白色区域的面积大.

4. 解:按照摸到红球的可能性由大到小排列为⑤④③②①.

5. 解:策略:转出的"大数"应放在高位,转出的"小数",应放在低位. (经验略)

2 频率的稳定性

随堂练习(教材第142页)

解:(1)0.9;0.8;0.82;0.88;0.84;0.858;0.861

(2)略.

(3)随着射击总次数的增加,击中靶心的频率越来越接近0.86,且趋于稳定(答案不唯一,合理即可).

习题6.2

1. 解:(1)0.9;0.95;0.94;0.93;0.935;0.934;0.935

(2)略.

(3)随着随机抽查的产品数的增加,合格率越来越接近0.935,且趋于稳定(答案不唯一,合理即可).

2. 略.

随堂练习(教材第145页)

1. 解:不同意. 试验次数增加到足够多时,结果会发生改变.

2. 解:不能.

习题6.3

1. 解:(1)0.94;0.955;0.946;0.954;0.953;0.949 6

(2)略.

(3)估计它能发芽的概率是0.95.

2. 解:(1)0.7;0.8;0.86;0.81;0.82;0.828;0.825

(2)它为优等品的概率大约是0.825.

(3)不一定会一样. 因为这是随机事件,所以可能会出现其他的结果.

3. 解:(1)会出现6种可能的结果,朝上的点数可能是1,2,3,4,5,6.

(2)掷出的点数为1与掷出的点数为2的可能性相同,掷出的点数为1与掷出的点数为3的可能性也相同.

(3)每种结果出现的可能性相同.

3 等可能事件的概率

随堂练习(教材第148页)

1. 解:可能摸到写有字母A、字母B、字母C、字母D、字母E的纸条,它们是等可能的.

2. 解:抽到大王的概率为$\frac{1}{54}$,抽到3的概率为$\frac{2}{27}$,抽到方块的概率为$\frac{13}{54}$. (解释略)

习题6.4

1. 解:(1)P(掷出的点数小于4)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)P(掷出的点数是奇数)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(3)P(掷出的点数是7)$=0$.

(4)P(掷出的点数小于7)$=1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解:P(答对) $=\frac{1}{4}$.

3. 解:(1)P(抽出标有数字 3 的纸签) $=\frac{1}{7}$.

(2)P(抽出标有数字 1 的纸签) $=\frac{2}{7}$.

(3)P(抽出标有数字为奇数的纸签) $=\frac{4}{7}$.

4. 略.

随堂练习(教材第 150 页)

1. $\frac{1}{3}$;$\frac{2}{9}$;$\frac{4}{9}$

2. 略.

习题 6.5

1. $\frac{5}{12}$;$\frac{1}{3}$;$\frac{1}{4}$

2. 略.

3. 略.

4. 解:(1)红球 5 个,白球 5 个. (2)红球 2 个,白球 4 个,黄球 4 个.

5. 解:(1)P(小明获胜) $=\frac{8}{51}$,

P(小颖获胜) $=\frac{40}{51}$.

(2)P(小明获胜) $=0$,

P(小颖获胜) $=\frac{48}{51}=\frac{16}{17}$.

小明已经摸到的牌面为 A,则他获胜的概率是$\frac{16}{17}$,而小颖获胜的概率为 0.

习题 6.6

1. 解:宝藏藏在“月亮”下的概率是$\frac{1}{7}$;宝藏藏在“太阳”下的概率是$\frac{1}{6}$;宝藏藏在“五角星”下的概率是$\frac{17}{42}$,宝藏藏在“花”下的概率是$\frac{2}{7}$.

2. 解:小明的第二步应踩在 A 区域外的小方格上.

3. 解:(1)题图(甲)中小球最终停留在黑色区域的概率为$\frac{3}{8}$,题图(乙)中小球最终停留在黑色区域的概率为$\frac{1}{3}$.

(2)略.

随堂练习(教材第 155 页)

1. 略. **2.** 略.

习题 6.7

1. 解:第 1 个转盘停止后,指针落在红色区域的概率是$\frac{1}{4}$. 第 2 个转盘停止后,指针落在红色区域的概率是$\frac{3}{8}$.

2. 解:P(指针落在红色区域) $=\frac{115°}{360°}=\frac{23}{72}$.

3. 解:P(开机就能看到正片) $=\frac{7}{8}$.

4. 解:(1)(答案不唯一)只要满足红色区域所对应的扇形圆心角的和为$\frac{4}{9}\times360°=160°$,白色区域所对应的扇形圆心角的和为$\frac{1}{3}\times360°=120°$,黄色区域所对应的扇形圆心角的和为$\frac{2}{9}\times360°=80°$即可.

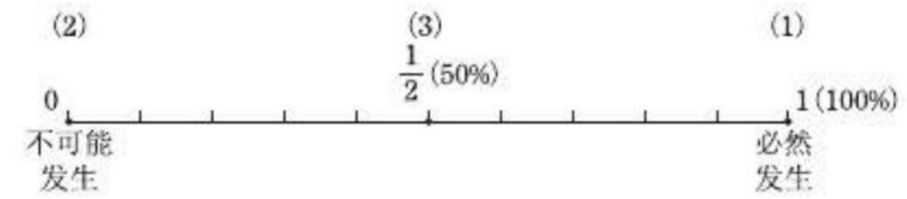
※(2)不能. 因为$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}>1$,所以无法设计.

复习题

1. 解:(2)是不可能事件. (3)是必然事件. (1)(4)是随机事件. (理由略)

2. 解:③⑤①④②.

3. 解:如图.



(第 3 题)

4. (1)$\frac{1}{9}$ (2)0 (3)$\frac{1}{3}$;$\frac{5}{9}$ (4)$\frac{5}{9}$;$\frac{4}{9}$

5. 解:(1)P(“6”朝上) $=\frac{20-(1+2+3+4+5)}{20}=\frac{1}{4}$.

(2)数字“5”“6”朝上的概率最大.

点拨:因为有 5 个面标有数字“6”,故“6”朝上的概率是$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$;标有“5”“6”的面数最多且都为 5 个,因此数字“5”“6”朝上的概率最大.

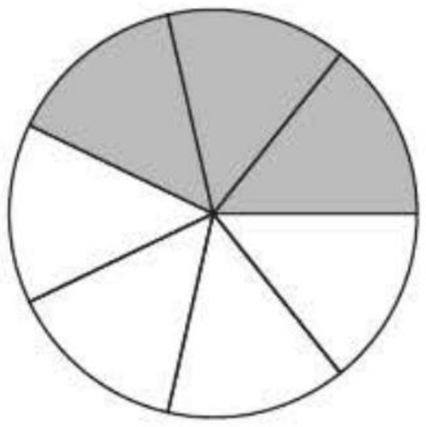
6. 解:小颖的观点不对. P(指针停在红色区域) $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,P(指针停在黄色区域) $=\frac{1}{4}$,P(指针停在蓝色区域) $=\frac{1}{4}$.

7. 解:在题图(1)中,P(昆虫停在白色方格中) $=\frac{1}{2}$;

在题图(2)中,P(昆虫停在白色方格中) $=\frac{1}{3}$.

8. 解:这个点取在阴影部分的概率是$\frac{1}{7}$. 图案设计如图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第8题)

点拨:图案设计方法不唯一. 使阴影部分的面积为图案总面积的$\frac{3}{7}$即可.

9. 解:选择第(2)中的猜数方法,且猜"不是3的倍数".

10. 解:不同意,因为硬币的质地均匀,所以再掷一次,可能正面朝上,也可能反面朝上,概率都是$\frac{1}{2}$.

11. 解:当地居民后天出门时更有可能会带伞.

12. 略.

13. 解:(1)区域2;区域2中有宝藏的概率是$\frac{1}{2}$,而区域1和3中有宝藏的概率都是$\frac{1}{4}$,因为$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$,所以选择区域2. 在这个区域不一定能找到宝藏.

(2)宝藏埋在区域1和3的可能性相同.

(3)与上述结果一样.

14. 略.

15. 略.

综合与实践 设计自己的运算程序

习题

1. 略.

2. 解:(1)$2010\times2011\times2012\times2013+1=(2010^2+3\times2010+1)^2=4\ 046\ 131^2$;

(2)$1\times2\times3\times4+1=5^2$,$2\times3\times4\times5+1=11^2$,$3\times4\times5\times6+1=19^2$,…,

(3)我发现:$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$.

3. 解:(1)因为$7\times11\times13=1\ 001$,$325\times1\ 001=325\ 325$,所以结果又回到原来输入的数.

(2)$3\ 245\times10\ 001=32\ 453\ 245$.

(3)五位数如$12\ 345\times100\ 001=1\ 234\ 512\ 345$.

综合与实践 七巧板

习题

1. 略. **2.** 略.

总复习

1. 解:$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times(6\times10^4)^3=\frac{4\pi}{3}\times6^3\times10^{12}=2.88\pi\times10^{14}\approx9.043\ 2\times10^{14}(\text{km}^3)$.

所以土星的体积约是$9.043\ 2\times10^{14}\ \text{km}^3$.

2. 解:(1)$\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$.

(2)$-(a+b)^5\cdot(a+b)^2=-(a+b)^7$.

(3)$(-2a^5)^4=16a^{20}$.

(4)$\left(-\frac{1}{2}x\right)^4\div\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{16}x^4\div\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{8}x^3$.

(5)$(-a^3b)^2=a^6b^2$.

(6)$b\cdot(-b)^2\cdot(b^2)^3=b\cdot b^2\cdot b^6=b^9$.

(7)$(-y^3)^2\div y^6=y^6\div y^6=1$.

(8)$a^{2n+1}\cdot a^{2n-1}=a^{2n+1+2n-1}=a^{4n}$.

(9)$(x^2)^{n+1}\div x^{2n}=x^{2n+2-2n}=x^2$.

(10)$10^4\times10^0\div10^{-2}=10^4\div10^{-2}=10^6$.

(11)$32\times2^{-4}=2^5\times2^{-4}=2$.

(12)$\left(\frac{1}{2}\right)^0\div\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1}=1\div(-7)=-\frac{1}{7}$.

3. 解:(1)$2a^2b\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^3=2a^2b\cdot\left(-\frac{1}{8}a^3b^6\right)=-\frac{1}{4}a^5b^7$.

(2)$-\frac{2}{5}xy^2z\cdot\left(-\frac{1}{2}y^2z^2\right)=\frac{1}{5}xy^4z^3$.

(3)$(2x)^3\cdot y^3\div16xy^2=8x^3\cdot y^3\div16xy^2=\frac{1}{2}x^2y$.

(4)$(-a^2b)^4\div\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)=-2a^7b^2$.

(5)$-2x^2y(3xy^2z-2y^2z)=-6x^3y^3z+4x^2y^3z$.

(6)$-\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{6}a$.

(7)$(x-3y)\left(x-\frac{1}{2}y\right)=x^2-\frac{7}{2}xy+\frac{3}{2}y^2$.

(8)$(-a-3b)(7a+2b)=-7a^2-23ab-6b^2$.

(9)$(9x-2y)(x+y)=9x^2+7xy-2y^2$.

(10)$\left(-\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)\left(-\frac{2}{3}p-\frac{1}{4}q\right)=\frac{2}{9}p^2-\frac{1}{4}pq-\frac{1}{8}q^2$.

(11)$\left(-\frac{1}{5}a^3x^4-\frac{9}{10}a^2x^3\right)\div\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)=-\frac{1}{5}a^3x^4\div\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)-\frac{9}{10}a^2x^3\div\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)=\frac{1}{3}a^2x^2+\frac{3}{2}ax$.

(12)$(-2mr^2h+3mrh^2)\div\left(-\frac{1}{2}mrh\right)=-2mr^2h\div\left(-\frac{1}{2}mrh\right)+3mrh^2\div\left(-\frac{1}{2}mrh\right)=4r-6h$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. 解:(1)$(-2x+3)(-2x-3)=(-2x)^2-3^2=4x^2-9$.

(2)$\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)^2=\frac{1}{4}x^2-2xy+4y^2$.

(3)$-2\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y\right)^2=-2\left(\frac{1}{9}x^2-xy+\frac{9}{4}y^2\right)=-\frac{2}{9}x^2+2xy-\frac{9}{2}y^2$.

(4)$4\left(-\frac{3}{2}x-3y\right)\left(\frac{3}{2}x-3y\right)=4\left(9y^2-\frac{9}{4}x^2\right)=36y^2-9x^2$.

(5)$\left(3mn+\frac{1}{2}\right)\left(3mn-\frac{1}{2}\right)-m^2n^2=9m^2n^2-\frac{1}{4}-m^2n^2=8m^2n^2-\frac{1}{4}$.

(6)$x^2-(x+2)(x-2)=x^2-x^2+4=4$.

(7)$(x+2y+3z)(x+2y-3z)=(x+2y)^2-9z^2=x^2+4xy+4y^2-9z^2$.

(8)$\left(\frac{x}{2}+5\right)^2-\left(\frac{x}{2}-5\right)^2=\frac{x^2}{4}+5x+25-\frac{x^2}{4}+5x-25=10x$.

5. 解:因为$\angle1=\angle2$(对顶角相等),$\angle1+\angle2=284°$,所以$\angle1=\angle2=142°$. 又因为$\angle1+\angle3=180°$,所以$\angle3=180°-\angle1=180°-142°=38°$.

6. 解:略.

7. 解:$\triangle ABE\cong\triangle DCE$,$\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

8. 解:(1)题图描述的是日照时间与一年之中的第几天之间的关系. 其中自变量是一年之中的第几天,因变量是日照时间.

(2)一年之中的第 360 天的日照时间最短,大约是 9.1 h.

(3)一年之中的第 180 天的日照时间最长,大约是 15.6 h.

(4)大约从第 1 天到第 180 天这个时间段内,日照时间在增加,在第 180 天到第 360 天这个时间段内,日照时间在减少.

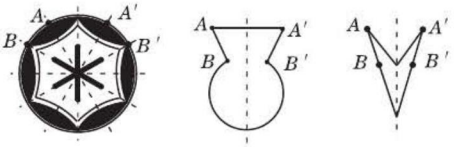
(5)该地一年中日照时间从开始到第 180 天逐渐增加,从第 180 天到第 360 天逐渐减少.

9. 解:(1)当圆柱的底面半径由小到大变化时,圆柱的体积也由小到大变化. 自变量是圆柱的底面半径,因变量是圆柱的体积.

(2)$V=5\pi r^2$

(3)5π;500π

10. 解:各图形的对称轴如图. 各图形中点 A 和点 A' 是一组对应点,点 B 和点 B' 是一组对应点(答案不唯一).



(第 10 题)

11. 解:(1)πd m. (2)$2\pi r$ m. (3)12 740π km,$2\pi r$ m. (4)一个半径为 r 的圆,当它的半径增加 m 时,其周长增加 $2\pi m$. 因为$2\pi(m+r)-2\pi r=2\pi m$,即圆的周长增加的长度与圆原来的半径无关.

12. 解:平行. 理由:同旁内角互补,两直线平行;$\angle2=\angle4$. 理由:两直线平行,同位角相等.

13. 解:可选长度为 12 cm 或 10 cm 的木棒.

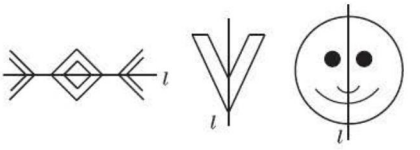
14. 解:由题意可得$\triangle ABS\cong\triangle CBD$,所以$AS=CD$.

小明先由“ASA”判定两个三角形全等,再依据全等三角形的对应边相等得出结论.

15. 解:(1)C. (2)B. (3)A.

16. 略.

17. 解:如图.



(第 17 题)

18. 解:相邻两个图案关于其中间的折痕成轴对称.

19. 略.

20. 解:只要在骰子六个面中的两个面上写上“6”,其他四个面上写上其他数字即可.

21. 解:因为$5\times10^8\ \text{km}^2=5\times10^{18}\ \text{cm}^2$,所以地球表面全部空气的质量约为$5\times10^{18}$ kg.

$6\times10^{24}\div(5\times10^{18})=1.2\times10^6$,所以地球的质量大约是地球表面全部空气质量的$1.2\times10^6$倍.

22. 解:(1)$0.125^{100}\times8^{100}=\left(\frac{1}{8}\right)^{100}\times8^{100}=1$.

(2)$201\times199=(200+1)\times(200-1)=40\,000-1=39\,999$.

(3)$999^2=(1\,000-1)^2=1\,000^2-2\times1\,000+1=998\,001$.

点拨:灵活运用公式是解本题的关键.

23. 解:正方形的面积大,正方形的面积比长方形的面积大 1.

24. 解:设其中较小的锐角为 x,则$x+3x+10°=90°$,解得$x=20°$. 则较大的锐角为$3x+10°=70°$.

所以这两个锐角分别为 20°,70°.

25. 解:因为 $AB\parallel CD$,所以$\angle C=\angle B=40°$(两直线平行,

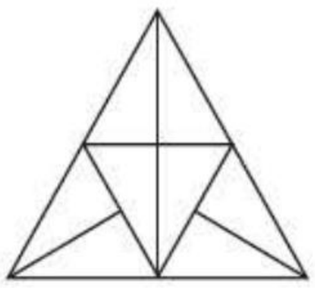
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

内错角相等). 因为 $\angle A + \angle AOB + \angle B = 180°$, 则有 $\angle A + 60° + 40° = 180°$, 所以 $\angle A = 80°$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle D = \angle A = 80°$(两直线平行, 内错角相等).

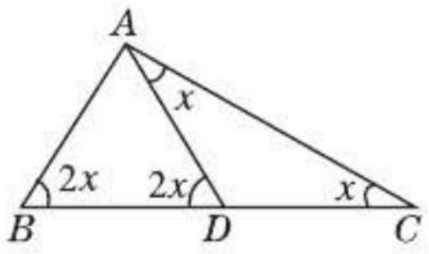
点拨: 根据两直线平行的性质解决本题.

26. 解: 用 3 根相同的牙签可以搭成 1 种三角形, 是等边三角形; 用 4 根不能搭成三角形; 用 5 根可以搭成 1 种三角形, 是等腰三角形; 用 6 根可以搭成 1 种三角形, 是等边三角形; 用 7 根可以搭成 2 种不同形状的等腰三角形.

27. 解: 能. 如图.



(第 27 题)



(第 29 题)

28. 解: 等腰(非等边)三角形只有一条对称轴, 等边三角形有三条对称轴, 等腰梯形只有一条对称轴, 长方形(非正方形)有两条对称轴, 正方形有四条对称轴.

29. 解: (答案不唯一)如图. 以 A 点为顶点, AC 为其中一边在 $\triangle ABC$ 内部作 $\angle DAC = x$, AD 交 BC 于点 D, 则 $\triangle ACD$ 为等腰三角形. 可以求得 $\angle ADB = 2x$, 所以 $\triangle ADB$ 也为等腰三角形.

30. 解: (1)因为 $AP = x$, $AB = a$, 所以 $PB = a - x$. 所以两个正方形的面积之和 $S = x^2 + (a - x)^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

(2)当 $AP = \frac{1}{3}a$ 时, $PB = \frac{2}{3}a$, $S = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} = \frac{5a^2}{9}$.

当 $AP = \frac{1}{2}a$ 时, $PB = \frac{1}{2}a$, $S = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$.

因为 $\frac{5}{9}a^2 > \frac{a^2}{2}$, 所以当 AP 为 $\frac{1}{3}a$ 时, 两个正方形的面积之和大于当 AP 为 $\frac{1}{2}a$ 时两个正方形的面积之和.

31. 解: 这个窗户被装饰布挡住的部分的面积恰好是一个半径为 $\frac{b}{4}$ 的圆的面积, 此圆的面积为 $\pi\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{16}$. 这个窗户的面积为 ab, 故这个窗户未被遮挡部分的面积为 $ab - \frac{\pi b^2}{16} = \frac{3}{2}b^2 - \frac{\pi}{16}b^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{16}\right)b^2$.

32. 解: (1)$(3.5a + 2a) \times 6a - (6a - a - 2a - a) \times 3.5a = 5.5a \times 6a - 2a \times 3.5a = 26a^2$.

(2)$\pi(a + b)^2 - \pi a^2 - \pi b^2 = 2\pi ab$.

33. 略.

34. 解: (1)$y = 2x - 4\,000$. 列表表示如下:

x	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000
y	−3 000	−2 000	−1 000	0	1 000	2 000	3 000	4 000

(2)当 $2x - 4\,000 = 0$ 时, $x = 2\,000$.

所以当每月乘客量达到 2 000 人以上(含 2 000)时, 该公交车才不会亏损.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



封面题字：沈　鹏

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn

荣德基天猫旗舰店：http://rongdej.tmall.com

客服热线：182 1039 5892

荣德基初中频道

ISBN 978-7-5450-6374-5

9 787545 063745 >

定价：39.80元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料