特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法62招·七八九年级共439招



七年级 数学 下

(HS版)

赠教材习题答案

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

七年级 数学 下 （HS版）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第6章 一元一次方程

知识点67个 必得分

		页码
1	方程	2
2	根据实际问题列方程	2
3	方程的解与解方程	3
4	等式的基本性质	7
5	一元一次方程	8
6	解一元一次方程的一般步骤	9
7	一元一次方程的实际应用	11
8	行程问题	13
9	配套问题	23
10	工程问题	24
11	销售问题	25
12	积分问题	26
13	计费问题	27

考向点67个 速提分

		页码
1	利用方程的定义识别方程	2
2	利用相等关系列方程	3
3	利用方程的解的定义辨析求值	3
4	利用等式的性质对等式（方程）进行变形	7
5	利用一元一次方程的定义解决相关问题	8
6	利用解一元一次方程的步骤解方程	10
7	建立一元一次方程模型解决实际问题	11
8	利用一元一次方程模型解行程问题	13
9	利用配套问题中的相等关系解决问题	23
10	利用一元一次方程解决工程问题	24
11	利用一元一次方程解决销售问题	25
12	利用一元一次方程解决比赛积分问题	26
13	利用一元一次方程进行方案设计与选择	27

第7章 一次方程组

1	二元一次方程	44
2	二元一次方程的解	45
3	二元一次方程组	45
4	二元一次方程组的解	46
5	代入消元法解二元一次方程组	53
6	加减消元法解二元一次方程组	54
7	三元一次方程组	62
8	解三元一次方程组	63
9	列三元一次方程组解决问题	64
10	列二元一次方程组解应用题的基本步骤	69
11	列方程组解应用题的常见题型	70
12	建立二元一次方程组的模型对实际问题进行判断或方案设计	74

1	利用二元一次方程的定义进行识别	44
2	利用二元一次方程的解的定义求字母参数的值	45
3	利用二元一次方程组的定义解决问题	45
4	利用二元一次方程组的解的定义解决问题	46
5	利用代入消元法解二元一次方程组	54
6	利用加减消元法解二元一次方程组	55
7	利用三元一次方程组的定义进行识别	62
8	利用解三元一次方程组的方法步骤解三元一次方程组	63
9	利用三元一次方程组解决问题	64
10	利用列二元一次方程组解应用题的基本步骤解应用题	69
11	常见类型应用题的解法	70
12	利用二元一次方程组进行判断或方案设计	75

第8章 一元一次不等式

1	不等式	91
2	不等式的解	92
3	用不等式表示不等关系	92
4	不等式的解集	95
5	不等式的性质	97
6	解一元一次不等式	98
7	一元一次不等式的实际应用	100
8	一元一次不等式组	109
9	一元一次不等式组的解集	110
10	解一元一次不等式组	111
11	一元一次不等式组的应用	113

1	利用不等式的定义进行识别	91
2	利用不等式的解的定义进行识别	92
3	利用不等式表示不等关系	92
4	利用不等式的解集解决问题	95
5	利用不等式的性质解决问题	97
6	利用解一元一次不等式解决问题	99
7	利用一元一次不等式解决实际问题	100
8	利用一元一次不等式组的定义进行识别	109
9	利用一元一次不等式组的解集解决问题	110
10	利用解一元一次不等式组解决问题	111
11	建立一元一次不等式组的模型解决问题	113

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点62个 得高分

		页码
1	判断一个式子是不是方程的方法	2
2	常见找相等关系的方法	2
3	判断等式的变形是否正确的方法	7
4	判断一个方程是否为一元一次方程的方法	9
5	在比例问题中设未知数的方法	12
6	巧设元解数字问题的方法	13
7	换元法	17
8	解含有绝对值符号的方程的方法	17
1	判断一个方程是不是二元一次方程的方法	44
2	已知二元一次方程的解确定字母参数的方法	45
3	定义法	46
4	利用方程组的解确定字母参数的方法	47
5	求二元一次方程的整数解的方法	48
6	类比法	48
7	代入消元法	53
8	加减消元法	54
9	整体代入法	65
10	参数法	66
11	求三元一次方程组特殊解的方法	67
12	分段法	76
13	分类讨论思想	77
1	用数轴表示解集的一般方法	95
2	识别不等式的解与解集的方法	95
3	辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法	97
4	分类讨论思想	101
5	作差法	102
6	解方案设计问题的方法	104
7	确定一元一次不等式组解集的常用方法	110
8	数轴法	110
9	口诀法	110
10	利用数轴找不等式组整数解的方法	112
11	根据不等式组的解的情况求字母的取值范围的方法	113
12	求实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法	114
13	数形结合思想	114

考法点44个 争满分

		页码
1	利用方程的解求值	5
2	实际问题中列方程	5
3	利用一元一次方程的解法解纠错问题	20
4	利用一元一次方程解实际问题	20
5	利用一元一次方程解决利润问题	32
6	利用一元一次方程解决年龄问题	32
7	利用一元一次方程解决增长率问题	32
8	利用一元一次方程解决几何图形中的行程问题	33
1	二元一次方程组的解	50
2	在实际问题中建立二元一次方程组的模型	50
3	利用二元一次方程的特殊解解决问题	51
4	解二元一次方程组	60
5	利用非负数性质建立二元一次方程组的模型	60
6	二元一次方程组的简单应用	60
7	三元一次方程组的应用	67
8	列二元一次方程组解决商品销售问题	78
9	列二元一次方程组解决工程问题	78
1	用不等式表示数量关系	94
2	用数轴表示不等式的解集	105
3	利用不等式的性质识别不等式的变形	105
4	一元一次不等式的特殊解	105
5	一元一次不等式与一元一次方程的综合	106
6	一元一次不等式与二元一次方程组的综合	106
7	一元一次不等式的应用	106
8	求不等式组的解集	116
9	一元一次不等式组的特殊解	117
10	一元一次不等式组的应用	118

第6章 一元一次方程

第7章 一次方程组

第8章 一元一次不等式

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第9章 多边形

知识点67个 必得分

		页码
1	三角形的相关元素	130
2	三角形的分类	131
3	三角形的三条重要线段	132
4	三角形内角和定理及其推论	134
5	三角形的外角和及内外角关系	136
6	三角形的三边关系	138
7	三角形的稳定性	139
8	多边形及其相关概念	146
9	多边形的内角和	147
10	多边形的外角和	148
11	用相同的正多边形铺设地面	153
12	用多种正多边形铺设地面	154

考向点67个 速提分

		页码
1	利用三角形及其相关元素的定义进行辨析	130
2	利用三角形的分类判断三角形的形状	131
3	利用三角形的三条重要线段解决问题	133
4	利用三角形内角和定理及推论解三角形内角相关问题	135
5	利用外角的性质解与三角形的角相关的问题	137
6	利用三角形的三边关系判断线段关系	138
7	利用三角形的稳定性固定物体的形状	139
8	利用多边形的有关概念进行辨析	146
9	利用多边形内角和公式求多边形的边数	147
10	利用多边形的外角和定理计算	148
11	利用一种正多边形铺设地面	153
12	利用多种正多边形铺设地面	154

第10章 轴对称、平移与旋转

		页码
1	轴对称图形	166
2	轴对称	167
3	轴对称图形与轴对称的特征	168
4	线段和角的轴对称性	168
5	画图形的对称轴	169
6	画轴对称图形	170
7	设计轴对称图案	171
8	平移的定义	176
9	平移的特征	177
10	平移作图	177
11	旋转及相关概念	183
12	旋转的特征（性质）	184
13	旋转对称图形	185
14	中心对称图形	189
15	中心对称	190
16	中心对称的性质	190
17	全等图形	195
18	全等多边形	196
19	全等三角形	197

		页码
1	利用轴对称图形的定义识别轴对称图形	166
2	利用轴对称的定义识别轴对称	167
3	利用轴对称的特征来求线段和角	168
4	利用线段的轴对称性求角的大小	168
5	利用画对称轴的步骤作图形的对称轴	169
6	利用轴对称的特征画轴对称图形	170
7	利用画轴对称图形的方法设计轴对称图案	171
8	利用平移的定义识别平移现象	176
9	利用平移的特征解决问题	177
10	利用平移作图的步骤作平移后的图形	178
11	利用旋转的意义认识旋转的“三要素”	183
12	利用旋转的特征识别旋转前后图形的关系	184
13	利用旋转作图的方法作旋转后的图形	185
14	利用中心对称图形的定义识别中心对称图形	189
15	利用中心对称的定义识别对称中心、对称点	190
16	中心对称性质的应用	191
17	利用全等图形的定义识别全等图形	195
18	利用全等三角形的性质识别相等的边、角	196
19	利用全等三角形的性质与判定求对应元素之间的关系	197

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点62个得高分

		页码
1	几何图形计数的常用方法	131
2	确定三角形分类标准的方法	131
3	找三角形某边上的高的方法	134
4	等积法	134
5	定义法	134
6	说明三角形内角和定理的思路方法	134
7	求三角形内角的度数的方法	135
8	说明两条直线垂直的方法	136
9	说明直角三角形法	136
10	确定三条线段能否组成三角形的两种方法	138
11	面积法	140
1	识别轴对称的方法	167
2	定义法	167
3	反面观察法	167
4	作轴对称图形的对称轴的两种方法	169
5	找特殊点的方法	170
6	作对称点的方法	170
7	求分散的阴影部分面积的方法	172
8	判断一个图形或图案是不是轴对称图形的方法	174
9	画平移图形的方法	178
10	平移法	179
11	确定旋转中心的方法	185
12	判断中心对称图形的方法	189
13	确定两个图形全等的方法	195
14	利用全等三角形的性质求角的度数的方法	198
15	说明线段位置关系的方法	198
16	等面积代换法	198
17	解答探究条件类题目的方法	199

考法点44个争满分

		页码
1	利用角平分线及整体思想求角的度数	143
2	利用平行线的性质及内外角的关系求角的度数	143
3	利用三角形的三边关系求三角形的边长	144
4	利用多边形的内角、外角的关系求内角和	150
5	利用正多边形的定义及外角和求边数和角	150
6	利用多边形的内角和公式和角平分线定义求角	151
7	用正多边形铺设地面	156
1	利用轴对称图形的定义识别轴对称图形	174
2	利用轴对称图形的特征确定对应边和对应角	174
3	利用网格中的平移判断移动方法	180
4	利用平移的特征解实际生活中的应用	180
5	旋转特征的应用	187
6	简单的旋转作用	187
7	利用中心对称图形的定义识别中心对称图形	193
8	利用变换图形的作法解决网格中的作图问题	193
9	利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角	200
10	利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数	200

第9章 多边形

第10章 轴对称、平移与旋转

注：“提分攻略 学霸图谱”中，所列“考向点”“方法点”为重要条目，全书不仅限于此.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法
一元一次方程的解法…… 9

看微课
等式的基本性质……7
列一元一次方程解追及问题… 13
解含字母系数的一元一次方程…… 18
列一元一次方程解工程问题… 24
列一元一次方程解销售问题… 25

学方法
代入法解方程组…… 53
加减法解方程组…… 56

看微课
用方程组解决实际问题…… 72

学方法
一元一次不等式组的解法… 111

看微课
数轴上表示解集…… 96
不等式的性质…… 97
一元一次不等式组的应用… 114

第6章 一元一次方程

6.1 从实际问题到方程 …… 2
6.2 解一元一次方程 …… 7
6.3 实践与探索 …… 23

素养提分

行动篇：丢翻图的墓志铭 ☞ P22
应用篇：设元技巧在一元一次方程中的应用 ☞ P35
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P37

第7章 一次方程组

7.1 二元一次方程组和它的解 …… 44
7.2 二元一次方程组的解法 …… 53
*7.3 三元一次方程组及其解法 …… 62
7.4 实践与探索 …… 69

素养提分

技巧篇：找特点巧消元 ☞ P81
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P83

第8章 一元一次不等式

8.1 认识不等式 …… 91
8.2 解一元一次不等式 …… 95
8.3 一元一次不等式组 …… 109

素养提分

类型篇：一元一次不等式(组)与方程(组)的巧妙结合 ☞ P120
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P122

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9章 多边形

9.1 三角形 …… 130

9.2 多边形的内角和与外角和 …… 146

9.3 用正多边形铺设地面 …… 153

素养提分

技巧篇：三角形的外角解题技巧 ☞ P158

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P159

观动画

三角形的高……132

三角形的稳定性……139

看微课

三角形的定义……130

三角形的三边关系……138

第10章 轴对称、平移与旋转

10.1 轴对称 …… 166

10.2 平移 …… 176

10.3 旋转 …… 183

10.4 中心对称 …… 189

10.5 图形的全等 …… 195

素养提分

知识篇：从图形变换的角度认识全等三角形 ☞ P202

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P203

观动画

平移制作图案……177

旋转的定义……183

看微课

轴对称图形与轴对称……167

全等三角形……197

参考答案及点拨（单独成册）



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **数形结合思想**：数形结合就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

2. **分类讨论思想**：把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

3. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

4. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

5. **建模思想**：是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题模型的一种强有力的数学手段．

6. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

7. **函数思想**：是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题的一种思想．

8. **统计思想**：所谓统计思想，就是在统计实际工作、统计学理论的应用研究中，必须遵循的基本理念和指导思想．统计思想主要包括：均值思想、估计思想等．

9. **平方法**：通过比较两个数的平方来比较两个数大小的方法，此方法通常用来比较两个二次根式的大小．

10. **演绎推理法**：就是从一般性的前提出发，通过推导即“演绎”得出具体陈述或个别结论的过程．

11. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

12. **截长补短法**：截长补短法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想．所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一段线段相等．所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长至与另一条已知的较短的线段相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系．

13. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

14. **图象法**：利用图象这种特殊且形象的数学语言工具，来表达各种现象的过程和规律，这种方法称为图象法．

15. **待定系数法**：待定系数法是求函数解析式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数解析式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数解析式的方法就叫做待定系数法．

微信公众号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

体验未知与已知的统一

体验未知与已知的统一











第6章 一元一次方程

核心考点

你将见到的

- 方程的解
- 等式的性质
- 等式与方程的关系
- 一元一次方程的解法
- 一元一次方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 建模思想
- 整体思想
- 转化思想
- 数形结合思想
- 设元法
- 找相等关系法

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.1 从实际问题到方程

核心知识

- 方程
- 在实际问题中列出方程
- 方程的解

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 方程

1. **定义**：含有未知数的等式叫做方程.

2. **方程必须具备两个条件**：

（1）是等式，等式的标志是含有“=”；

（2）含有未知数，但未知数的个数不限.

提分·必记

特别解读

1. 方程一定是等式，但等式不一定是方程.
2. 方程中的未知数可以用x表示，也可以用其他字母表示.

拨考向 利用方程的定义识别方程

例1 下列式子：①$8-7=1+0$；②$\frac{1}{2}x-y=x^2$；③$x+2$；④$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$；⑤$x=5$；⑥$x-2>1$，其中是方程的有（　　）

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

解题秘方：紧扣方程的“两个条件”进行判断.

解：①不是方程，因为它不含未知数；③不是方程，因为它不是等式；⑥不是方程，因为它不是等式；②④⑤均满足方程的“两个条件”，是方程.

答案：B

提分·秘诀

方法点拨

判断一个式子是不是方程的方法：

先看其是否是等式，再看其是否含有未知数.只要同时符合这两点就是方程.

点知识 2 根据实际问题列方程

1. **根据实际问题列方程的一般步骤**：

（1）**审题**：提取问题中的数量信息，正确理解问题中表示数量关系的关键性词语（如多、少、倍……）.

（2）**分析**：理清问题中的关系，找出相等关系.

（3）**建模**：设出未知数，并用含有未知数的代数式表示相等关系中的量，将问题转化为方程，可直接或间接设未知数.

2. **根据实际问题列方程的基本流程**：

实际问题 $\xrightarrow[\text{列方程}]{\text{设未知数}}$ 方程

提分·必记

特别解读

常见找相等关系的方法：

1. 根据周长、面积、体积公式确定相等关系；
2. 根据题目中的不变量确定相等关系；
3. 根据关键词确定相等关系.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技考向▶利用相等关系列方程

例 2 湖园中学的学生志愿服务小组在“三月学雷锋”活动中，购买了一批牛奶到敬老院慰问老人，如果送给每位老人 2 盒牛奶，那么剩下 16 盒；如果送给每位老人 3 盒牛奶，那么正好送完．求敬老院有多少位老人．（只列方程）

解题秘方：根据题中的不变量“牛奶的总盒数”确定相等关系，列方程．

解：设敬老院有 x 位老人．

根据题意，

可得 $2x+16=3x$.

提分·秘诀

解法提醒

“剩下 16 盒”的含义：

每人 2 盒，剩下 16 盒 → “总盒数”可表示为 $2x+16$

“正好送完”的含义：

每人 3 盒，正好送完 → “总盒数”可表示为 $3x$

点知识▶3 方程的解与解方程

1. 方程的解：

使方程中等号左右两边相等的未知数的值叫做方程的解．

2. 解方程：

解方程就是求出使方程中等号左右两边相等的未知数的值．

特别提醒：方程的解与解方程的关系

（1）方程的解与解方程是两个不同的概念，方程的解是一个结果，是一个具体的数值，而解方程是变形的过程；

（2）方程的解是通过解方程求得的．

提分·必记

特别解读

1. 解方程的目的是求方程的解，方程的解是解方程的结果．
2. 方程的解可能不止一个，也可能无解．如 $x=1$ 和 $x=2$ 都是方程 $x^2-3x+2=0$ 的解，而方程 $|x|=-2$ 无解．

技考向▶利用方程的解的定义辨析求值

类型 1：方程的解的定义在检验方程的解中的应用

例 3 检验下列各未知数的值是不是方程 $5x-2=7+2x$ 的解．

（1）$x=2$；　　（2）$x=3$.

解题秘方：紧扣方程的解的定义，看方程左右两边的值是否相等．

解：（1）将 $x=2$ 分别代入方程的左边和右边，

得左边 $=5\times2-2=8$，右边 $=7+2\times2=11$.

因为左边 $\neq$ 右边，

所以 $x=2$ 不是方程 $5x-2=7+2x$ 的解．

（2）将 $x=3$ 分别代入方程的左边和右边，

得左边 $=5\times3-2=13$，右边 $=7+2\times3=13$.

因为左边 = 右边，

所以 $x=3$ 是方程 $5x-2=7+2x$ 的解．

提分·秘诀

方法点拨

检验方程的解的步骤：

一代：将未知数的值分别代入方程左右两边，若方程一边不含未知数，则只代入含未知数的一边；

二求：分别求出方程左右两边式子的值；

三判断：若左右两边相等，则是方程的解，否则不是．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：方程的解的定义在求字母值中的应用

例 4 已知关于 x 的方程 $3a-x=\frac{x}{2}+3$ 的解是 $x=4$，求 a^2-2a 的值.

解题秘方：利用方程的解的定义，将已知的解代入方程中，求出待定字母的值.

解：把 $x=4$ 代入方程 $3a-x=\frac{x}{2}+3$ 中，

得 $3a-4=\frac{4}{2}+3$，解得 $a=3$.

当 $a=3$ 时，$a^2-2a=3^2-2\times3=3$.

解法提醒

若已知方程的解，则将其代入方程后可把方程转化成关于所求字母的方程，进而求出所求字母或代数式的值.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用方程解的定义求代数式的值

挑战·高分

例 5 若 $x=1$ 是关于 x 的方程 $ax+b=c$ 的解，求：

（1）$(a+b-c)^2$ 的值；（2）$\frac{c}{a+b}$ 的值；（3）$|c-a-b-1|$ 的值.

解题秘方：利用方程的解的定义，确定 a，b，c 之间的数量关系，然后分析要求的式子与 a，b，c 的数量关系之间的联系，最后求值.

解：因为 $x=1$ 是关于 x 的方程 $ax+b=c$ 的解，所以 $a+b=c$.

（1）$(a+b-c)^2=[(a+b)-c]^2=(c-c)^2=0$.

（2）$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{c}=1$.

（3）$|c-a-b-1|=|c-(a+b)-1|=|c-c-1|=1$.

解法提醒

本例中 a,b,c 的值无法求出，表面上看似无法求出相关式子的值，而运用整体思想就能达到求解的目的.

拔尖角度 2 利用方程解决规律探究性问题

挑战·高分

例 6 下面是某年 9 月的月历表，任意圈出一竖列上相邻的三个数，用方程思想来研究，可发现这三个数的和不可能是（　　）

A.51　　B.66　　C.53　　D.57

日	一	二	三	四	五	六
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

解题秘方：月历表中一竖列相邻两个数的差是 7，由此可设任意一竖列上相邻三个数中间一个是 x，则上面一个是 $x-7$，下面一个是 $x+7$，三个数的和为 $(x-7)+x+(x+7)=3x$，可知此和必能被 3 整除. 四个选项中只有 C 选项不能被 3 整除，故选 C.

答案：C

解法提醒

解决这一类型的题时要认真读表，找到表中的数量关系，根据问题所提供的情境得出所需要的数学表达式. 月历表中横行、竖列相邻两数的特征：横行相邻两数相差 1，竖列相邻两数相差 7.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查方程的解的定义以及在实际问题中建立一元一次方程的模型．考查的形式主要是选择题，难度适中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用方程的解求值

例7 [中考·永州] $x=1$ 是关于 x 的方程 $2x-a=0$ 的解，则 a 的值是（　　）

A.-2　　B.2　　C.-1　　D.1

试题评析：本题考查方程的解的定义，解题的关键是将方程的解代入方程求出 a 的值，属于送分题．

解：将 $x=1$ 代入 $2x-a=0$ 中，

得 $2-a=0$，所以 $a=2$.

答案：B

方法点拨

根据方程的解的定义，将方程的解代入方程，从而将方程转化成关于所求字母的方程，进而求出所求字母的值．

考法2 实际问题中列方程

例8 [中考·杭州] 已知甲煤场有煤518吨，乙煤场有煤106吨，为了使甲煤场存煤数是乙煤场的2倍，需要从甲煤场运煤到乙煤场，设从甲煤场运 x 吨煤到乙煤场，则可列方程为（　　）

A. $518=2(106+x)$　　B. $518-x=2\times106$

C. $518-x=2(106+x)$　　D. $518+x=2(106-x)$

试题评析：本题考查了由实际问题列方程，解答这类问题的关键是正确理解题意，找出相等关系．

解：从甲煤场运 x 吨煤到乙煤场，则甲煤场现在的存煤数是 $(518-x)$ 吨，乙煤场现在的存煤数是 $(106+x)$ 吨，因为甲煤场存煤数是乙煤场的2倍，所以 $518-x=2(106+x)$.

答案：C

考法点评

由实际问题列方程，体现数学的建模思想，关键是分析出题目中的相等关系．

两年模拟兵法

答案见209页

1. 下列各式中是方程的是（　　）

A.$4x+5=9$　　B. $3x-4<1$

C. $6x-5x$　　D. $3+5=8$

2. [中考·南平] 闽北某村原有林地120公顷，旱地60公顷，为适应产业结构调整，需把一部分旱地改造为林地，改造后，旱地面积占林地面积的20%．设把 x 公顷旱地改造为林地，则可列方程为（　　）

A. $60-x=20\%(120+x)$

B. $60+x=20\%\times120$

C. $180-x=20\%(60+x)$

D. $60-x=20\%\times120$

3. $x=-2$ 是下列方程（　　）的解．

A. $-3x+5=2x+10$　　B. $x(x-2)=-4x$

C. $\frac{1}{2}x^2-5=x$　　D. $\frac{-2x+4}{3}=1$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 已知 $x=4$ 是关于 x 的方程 $x+a=1-2ax$ 的解，则 $a=$_____.

5. 检验下列各题大括号内的值是否为相应方程的解.

（1）$2x-3=5(x-3)$；　$\{x=6,\ x=4\}$

（2）$4x+5=8x-3$.　$\{x=3,\ x=2\}$

6. 已知 $y=1$ 是关于 y 的方程 $my=y+2$ 的解，求 m^2-3m+1 的值.　【导学号：3572327】

7. 根据题意列方程：

（1）水上公园某一天共售出门票 128 张，收入 912 元，门票价格为成人每张 10 元，学生可享受六折优惠，这一天售出的成人票与学生票各多少张?

（2）一个正方形花圃的边长增加 2 m，所得新正方形花圃的周长是 28 m，则原正方形花圃的边长是多少?

8. 已知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2x-a=0$ 的解，而 a 又是关于 x 的方程 $3x+2=b$ 的解，求 $a-2b$ 的值.

9. 在一次植树活动中，甲班植树的株数比乙班多 20%，乙班植树的株数比甲班的一半多 10 株，设乙班植树 x 株.

（1）用两个不同的含 x 的式子分别表示甲班植树的株数；

（2）根据题意列出含未知数 x 的方程.

微信公众号
教辅资料站

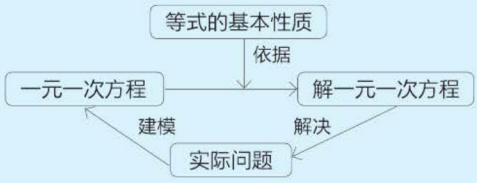
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.2 解一元一次方程

核心知识

- 等式的基本性质
- 一元一次方程的基本概念
- 一元一次方程的解法
- 应用一元一次方程解决实际问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 等式的基本性质

1. **等式的基本性质：**

等式的基本性质	文字表示	用字母表示
性质 1	等式两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得结果仍是等式	如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$
性质 2	等式两边都乘以（或都除以）同一个数（除数不能为 0），所得结果仍是等式	如果 $a=b$，那么 $ac=bc$，$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$

2. **方程的变形规则：**

（1）**变形规则 1**：方程两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，方程的解不变；

（2）**变形规则 2**：方程两边都乘以（或都除以）同一个不等于 0 的数，方程的解不变.


等式的基本性质

拨考向 利用等式的性质对等式（方程）进行变形

类型 1：等式的性质在等式变形中的应用

例 1 下列变形不正确的是（　　）

A. 若 $a=b$，则 $2a=a+b$　　B. 若 $a=b$，则 $a-b=0$

C. 若 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$，则 $a=b$　　D. 若 $ac=bc$，则 $a=b$

解题秘方：依据等式的两条性质进行辨析.

解：选项 A 的变形是利用等式的性质 1，两边同时加 a，故正确；

选项 B 的变形也是利用等式的性质 1，两边同时减 b，故正确；

选项 C 的变形是利用等式的性质 2，两边同乘以 c，故正确；

选项 D 的变形是利用等式的性质 2，两边同除以 c，当 $c=0$ 时，D 的变形是错误的.

答案：D

提分·必记

特别解读

1. 等式的性质变形中两个“同”：
一是等式两边要进行同一种运算，
二是加、减、乘或除以的一定是同一个数或式子.
2. 利用等式性质进行变形时，除以同一个数或同一个整式时，这个数或整式不能为0.

提分·秘诀

方法技巧

判断等式的变形是否正确的方法：

当对等式两边加、减或乘以同一个数（或式子）时，变形均正确；

当对等式两边除以同一个数（或式子）时，要先判断这个数（或式子）是否为 0，若确定该数（或式子）不为 0，则该变形正确，否则错误.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：等式的性质在解方程中的应用

例 2 利用等式的性质解方程.

（1）$3x-2=7$；　　（2）$\frac{1}{2}x+3=\frac{2}{3}x-1$.

解题秘方：注意等式的性质在解方程中的运用，即根据题目特点，运用等式的性质，将方程变形为 $x=a$（常数）的形式.

解：（1）$3x-2=7$，

两边同时加 2，得 $3x-2+2=7+2$，　　等式的性质 1

即 $3x=9$，

两边同时除以 3，得 $x=3$.　　等式的性质 2

（2）$\frac{1}{2}x+3=\frac{2}{3}x-1$，

两边同时减 3，得 $\frac{1}{2}x+3-3=\frac{2}{3}x-1-3$，　　等式的性质 1

即 $\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}x-4$，

两边同时减 $\frac{2}{3}x$，得 $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}x-4-\frac{2}{3}x$，　　等式的性质 1

即 $-\frac{1}{6}x=-4$，

两边同时除以 $-\frac{1}{6}$，得 $x=-4\div\left(-\frac{1}{6}\right)$，即 $x=24$.　　等式的性质 2

方法点拨

利用等式的性质解一元一次方程的一般步骤：

第一步： 利用等式的性质 1，将方程左右两边同时加（或减）同一个数（或式子），使方程逐步转化为一边只有含未知数的项，另一边只有常数项的形式；

第二步： 利用等式的性质 2，将方程左右两边同时除以未知数的系数或乘以未知数系数的倒数，即将未知数的系数化为 1，从而求出方程的解.

点知识 ▶ 2 一元一次方程

提分·必记

1. 定义： 只含有一个未知数①，并且含有未知数的式子都是整式②，未知数的次数都是 1，像这样的方程叫做一元一次方程③.

特别解读

①②③是判断一元一次方程的三个标准，其中“整式”指分母不含未知数.

一元一次方程具有如下特点：

（1）只含有一个未知数.

（2）所含未知数的项的最高次数为 1.

（3）是由整式组成的，即方程中分母不含未知数.

2. 一元一次方程的标准形式

任何一个一元一次方程变形后总可以化为 $ax+b=0$ 的形式. 其中 x 是未知数，a，b 是已知数，且 $a\neq 0$. 我们把 $ax+b=0$ 叫做一元一次方程的标准形式.

拓考向 ▶ 利用一元一次方程的定义解决相关问题

类型 1：一元一次方程的定义在识别一元一次方程中的应用

例 3 下列各式中，哪些是一元一次方程？

（1）$\frac{1}{2}x+y=1-2y$；　　（2）$7x+5=7(x-2)$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）$5x^2-\frac{1}{3}x-2=0$；　　（4）$\frac{2}{x-1}=5$；

（5）$\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$；　　（6）$2x^2+5=2(x^2-x)$.

解题秘方：利用一元一次方程的特点进行判断.

解：（1）含有两个未知数；

（2）化简后 x 的系数为 0；

（3）未知数 x 的最高次数为 2；

（4）等号左边不是整式；

（5）（6）是一元一次方程.

综上所述，（5）（6）是一元一次方程.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是否为一元一次方程的方法：

不仅要看原方程，还要看化简后的方程.

原方程必须具备：等号两边是整式；

化简后的方程必须具备：一是未知数的次数都为 1；二是只含一个未知数且未知数的系数不为 0.

类型 2：一元一次方程的定义在求待定字母的值中的应用

例 4　若 $(m+2)x^{|m|-1}=4$ 是关于 x 的一元一次方程，求 m 的值.

解题秘方：由一元一次方程的定义可知一元一次方程未知数的次数为 1，系数不为 0，据此求待定字母的值.

解：根据题意，可得 $|m|-1=1$，且 $m+2\neq 0$.

由 $|m|-1=1$，得 $|m|=2$.

根据绝对值的意义，可得 $m=\pm 2$.

由 $m+2\neq 0$，得 $m\neq -2$，

所以 $m=2$.

特别警示

解此类题时，容易只考虑未知数的次数为 1，而忽略未知数的系数不为 0 的限制条件.

知识 3　解一元一次方程的一般步骤

1. 解一元一次方程的一般步骤：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1. 通过这些步骤可以使以 x 为未知数的方程逐步向 $x=a$ 的形式转化.

2. 解一元一次方程的具体作法、变形依据、注意事项列表如下：

变形名称	具体作法	变形依据	注意事项
去分母	在方程两边同乘以各分母的最小公倍数，当分母是小数时，要利用分数的基本性质把小数化为整数	等式的性质 2	（1）不要漏乘不含分母的项 （2）分子是一个多项式时，去分母后应加上括号
去括号	一般先去小括号，再去中括号，最后去大括号	分配律，去括号法则	不要漏乘括号里面的项，不弄错符号
移项	把含有未知数的项和常数项分别移至等号的两侧	移项法则（等式的性质 1）	移项要变号，不移项不变号
合并同类项	把方程化为 $ax=b$（其中 $a\neq 0$）的形式	合并同类项法则	（1）系数相加 （2）字母及指数不变
系数化为 1	在方程两边都除以未知数的系数 a，得到方程的解为 $x=\frac{b}{a}(a\neq 0)$	等式的性质 2	（1）除数不为 0 （2）不要把分子分母颠倒

提分·必记

特别提醒

1. 去分母是为了简化运算，若不使用，则合并同类项时需进行分数运算.
2. 去括号时，一般按从小到大的顺序，但有时也可按从大到小的顺序.
3. 解一元一次方程的一般步骤不一定每步都用到，也不一定按照从上到下的顺序进行，要根据方程的特点选取适当的步骤进行求解.



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用解一元一次方程的步骤解方程

例 5 解下列一元一次方程：

（1）$\frac{1}{3}(1-2x)=\frac{2}{7}(3x+1)$；

（2）$\frac{1}{2}\left[3x-\frac{1}{5}(x+1)\right]-1=x$；

（3）$\frac{0.1x}{0.2}-\frac{0.01x-0.01}{0.06}=x-\frac{1}{3}$.

解题秘方：按照解一元一次方程的步骤解方程.

解：（1）$\frac{1}{3}(1-2x)=\frac{2}{7}(3x+1)$.

去分母，得 $7(1-2x)=6(3x+1)$.

去括号，得 $7-14x=18x+6$.

移项，得 $-14x-18x=6-7$.

合并同类项，得 $-32x=-1$.

系数化为 1，得 $x=\frac{1}{32}$.

（2）$\frac{1}{2}\left[3x-\frac{1}{5}(x+1)\right]-1=x$.

两边都乘以 2，得

$3x-\frac{1}{5}(x+1)-2=2x$.

两边都乘以 5，得

$15x-(x+1)-10=10x$.

去括号，得 $15x-x-1-10=10x$.

移项，得 $15x-x-10x=10+1$.

合并同类项，得 $4x=11$.

系数化为 1，得 $x=\frac{11}{4}$.

（3）$\frac{0.1x}{0.2}-\frac{0.01x-0.01}{0.06}=x-\frac{1}{3}$.

根据分数的基本性质，得 $\frac{x}{2}-\frac{x-1}{6}=x-\frac{1}{3}$.

去分母，得 $3x-(x-1)=6x-2$.

去括号，得 $3x-x+1=6x-2$.

移项，得 $3x-x-6x=-2-1$.

合并同类项，得 $-4x=-3$.

系数化为 1，得 $x=\frac{3}{4}$.

提分·秘诀

另解

也可以直接去括号，得 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x=\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}$，此方法在移项后合并同类项时需进行分数运算.

方法点拨

解一元一次方程的理论依据是等式的基本性质. 每一步都是在作同解变形，最后的解是否正确，可以将解代入方程左右两边，若两边求得的值相等，则解正确.

采用先去中括号，利用等式的性质 2，将中括号前面的系数变成 1.

特别警示

去分母与分数的基本性质的区别：

去分母是把方程中的每一项都乘以各分母的最小公倍数，与方程中的每一项都有关，而分数的基本性质只是对方程中的某一个分数变形，与其他项无关.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶4 一元一次方程的实际应用

1. 列一元一次方程解决实际问题的一般步骤：

（1）审题，设未知数；

（2）找相等关系，列方程；

（3）解方程；

（4）检验；

（5）写出答案.

2. 常见的两种基本相等关系：

（1）**总量与分量关系问题**：总量 = 各分量的和；

（2）**余缺问题**：表示同一个量的两个不同的式子相等.

拔考向▶建立一元一次方程模型解决实际问题

类型 1: 列一元一次方程在文字数量关系中的应用

例 6 利用方程解答下列问题：

（1）x 的 3 倍与 2 的和等于 x 的 2 倍与 1 的差，求 x 的值；

（2）已知整式 $-3x+2$ 与 $2x-1$ 的值互为相反数，求 x 的值.

解题秘方：直接根据文字中提示的相等关系列出方程，求出未知数的值.

解：（1）列方程，得 $3x+2=2x-1$.

移项，得 $3x-2x=-1-2$.

合并同类项，得 $x=-3$.

（2）根据题意，得 $-3x+2+2x-1=0$，

移项，得 $-3x+2x=-2+1$，

合并同类项，得 $-x=-1$，

系数化为 1，得 $x=1$.

类型 2: 列方程在解总量与分量关系问题中的应用

例 7 某校七年级 200 名学生分别到甲、乙两个纪念馆参观，其中到甲纪念馆参观的学生人数比到乙纪念馆参观的学生人数的 2 倍少 10 名，求到乙纪念馆参观的学生有多少名？

解题秘方：用分量的和等于总量列出方程，解决问题.

解：设到乙纪念馆参观的学生有 x 名，

则到甲纪念馆参观的学生有（$2x-10$）名.

根据题意，可得 $2x-10+x=200$.

移项，得 $2x+x=200+10$.

合并同类项，得 $3x=210$.

系数化为 1，得 $x=70$.

答：到乙纪念馆参观的学生有 70 名.

甲纪念馆参观人数 + 乙纪念馆参观人数 = 参观学生总数

提分·必记

特别提醒

列一元一次方程解决实际问题时需要注意以下几点：

1. 恰当地设未知数可以简化运算，且单位要统一；
2. 题中的相等关系不一定只有一个，要根据具体情况选择；
3. 求出方程的解后要检验，既要检验所求出的解是不是方程的解，又要检验所求出的解是否符合实际意义.

提分·秘诀

方法点拨

列方程解决文字题时，文字题已直接反映了相等关系，如文字中直接有“等于”，则可将等于两边的量用含未知数的整式表示，用等于号连接即可；也有的相等关系通过其他文字揭示，如“互为相反数”，即两个量的和为 0.

方法点拨

1. 列一元一次方程解决实际问题的关键是审题，寻找相等关系.
2. 求出方程的解后要检验（检验的过程在草稿纸上进行），既要检验所求出的解是不是方程的解，又要检验所求出的解是否符合实际意义.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3: 列方程在解余缺问题中的应用

例 8 在国庆节来临之际，七年级（1）班课外活动小组计划做一批中国结. 如果每人做 6 个，那么比计划多做 7 个；如果每人做 5 个，那么比计划少做 13 个. 该小组计划做多少个中国结？

解题秘方：不管是余与缺，总量不变是列方程的关键.

解：设该小组共有 x 名成员，

根据题意列方程，得 $6x-7=5x+13$.

移项，得 $6x-5x=13+7$.

合并同类项，得 $x=20$.

所以 $6x-7=113$.

答：该小组计划做 113 个中国结.

类型 4: 列方程在解比例问题中的应用

例 9 一个三角形的三边长之比为 2∶4∶5，周长为 22cm，求该三角形最长边的长.

解题秘方：未知的量若以比例的形式出现，则解决问题的关键是求出单位量，通过设单位量表示总量列方程.

解：依题意，设三角形的三边长分别为 $2x$ cm，$4x$ cm，$5x$ cm.

根据题意，得 $2x+4x+5x=22$，

合并同类项，得 $11x=22$.

系数化为 1，得 $x=2$.

所以 $5x=10$.

答：该三角形最长边的长是 10 cm.

类型 5: 列方程在解数字问题中的应用

例 10 一个两位数，十位上的数字是个位上的数字的 2 倍，如果把个位上的数字与十位上的数字对调，得到的数比原数小 36，求原来的两位数.

解题秘方：用各数位上的数字表示原数和新数，利用两个数之间的关系列方程.

解：设原来的两位数个位上的数字为 x，则十位上的数字为 $2x$. 根据题意，得 $10\times 2x+x-36=10x+2x$，

即 $20x+x-36=10x+2x$.

合并同类项，得 $21x-36=12x$.

移项，得 $21x-12x=36$.

合并同类项，得 $9x=36$.

系数化为 1，得 $x=4$. 所以 $2x=8$.

答：原来的两位数是 84.

解法提醒

“余”是分配中的多余情况，“缺”是分配中的缺少情况，有的题目不会出现“余”或“缺”的字样，余缺问题中，一般会给出两个条件：什么情况下会“余”，“余”多少；什么情况下会“缺”，“缺”多少.

方法点拨

在比例问题中设未知数的方法：

遇到比例问题时，一般先设每份为未知数，再用含未知数的式子表示相关的量. 如当已知 $a:b=2:3$，$b:c=4:5$ 时，可以用如下方法设 a，b，c 的值：先写成连比的形式，$a:b:c=8:12:15$，然后再设 $a=8x$，$b=12x$，$c=15x$.

知识储备

用式子表示多位数时，这个多位数 = 个位数字 × 1+ 十位数字 ×10+ 百位数字 ×100+ 千位数字 ×1 000+ 万位数字 × 10 000+…，如一个五位数，个位、十位、百位、千位、万位上的数字分别为 a，b，c，d，e，则这个数可表示为 $10\,000e+1\,000d+100c+10b+a$ 或 $10^4e+10^3d+10^2c+10b+a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教你一招：巧设元解数字问题的方法：

解决数字问题的关键在于如何巧妙地设出未知数，下面是一些数字问题设未知数的常用方法：

（1）连续数设中间；

（2）多位自然数设一位；

（3）数字换位设部分；

（4）小数点移动直接设；

（5）数字成比例设比值；

（6）特殊关系特殊设．

点知识▶5 行程问题



1. 行程问题中的基本关系式：

路程 = 速度 × 时间，时间 = 路程 ÷ 速度，

速度 = 路程 ÷ 时间．

2. 行程问题中的相等关系：

（1）**相遇问题中的相等关系：**

①若甲、乙相向而行，甲走的路程 + 乙走的路程 = 甲、乙出发点之间的路程；

②若甲、乙同时出发，甲用的时间 = 乙用的时间．

（2）**追及问题中的相等关系：**

①快者走的路程 − 慢者走的路程 = 追及路程；

②若同时出发，快者追上慢者时，快者用的时间 = 慢者用的时间．

（3）**航行问题中的相等关系：**

顺水（顺风）速度 = 静水（无风）速度 + 水（风）速度，

逆水（逆风）速度 = 静水（无风）速度 − 水（风）速度．

提分·必记

特别提醒

1. 在行程问题的三个量（路程、速度、时间）中，一个量已知，另一个量设元，则第三个量用来列方程．
2. 在相遇和追及问题中，若两者同时出发，则时间相等，利用两者路程之间的关系列方程．
3. 航行问题中涉及顺和逆的问题，只要路线相同，则路程不变．

核考向▶利用一元一次方程模型解行程问题

类型 1：一元一次方程在解直线形的相遇与追及问题中的应用

例 11 甲站和乙站相距 1 500 km，一列慢车从甲站开出，速度为 60 km/h，一列快车从乙站开出，速度为 90 km/h.

（1）若两车相向而行，慢车先开 30 min，快车开出几小时后两车相遇？

（2）若两车同时开出，相背而行，多少小时后两车相距 1800 km？

（3）若两车同时开出，快车在慢车后面同向而行，多少小时后两车相距 1 200 km（此时快车在慢车的后面）？

解题秘方：根据相遇和追及问题中路程之间的关系列出方程．

解：（1）设快车开出 x h 后两车相遇．

提分·秘诀

思路分析

(1) 设快车开出 x h 后两车相遇．列表：

	慢车	快车
路程 / km	$60\left(x+\frac{1}{2}\right)$	$90x$
速度 / (km/h)	60	90
时间 /h	$x+\frac{1}{2}$	x

相等关系：慢车行驶的路程 + 快车行驶的路程 = 1 500 km. 或画线段示意图如图 6.2-1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由题意，得 $60\times\left(x+\frac{1}{2}\right)+90x=1\,500$.

解得 $x=9.8$.

答：快车开出 9.8 h 后两车相遇.

（2）设 y h 后两车相距 1 800 km.

由题意，得 $60y+90y+1\,500=1\,800$. 解得 $y=2$.

答：2 h 后两车相距 1 800 km.

（3）设 z h 后两车相距 1 200 km（此时快车在慢车的后面）.

由题意，得 $60z+1\,500-90z=1\,200$. 解得 $z=10$.

答：10 h 后两车相距 1 200 km（此时快车在慢车的后面）.

方法点拨：（1）分析行程问题时，可借助图示、列表来分析数量关系，图示可直观地找出路程之间的关系，列表可将路程、速度、时间的关系清晰地展示出来.

（2）本例是求时间，我们可设时间为未知数，从路程找相等关系；如果要求的是路程，那么我们可设路程为未知数，从时间找相等关系，其依据是路程、速度和时间三者间的关系. 如（1）小题若将“几小时后两车相遇”改为“相遇时快车行驶了多少千米”，如果间接设未知数，原解题过程不变，将 x 求出后，再求出 $90x$ 的值即可，如果直接设未知数，解题过程改为：设相遇时快车行驶了 x km.

列表：

	路程 / km	速度 /（km / h）	时间 / h
慢车	$1\,500-x$	60	$\frac{1500-x}{60}$
快车	x	90	$\frac{x}{90}$

相等关系：慢车行驶时间 $-\frac{1}{2}$ h= 快车行驶时间.

列方程为 $\frac{1500-x}{60}-\frac{1}{2}=\frac{x}{90}$.

类型 2：一元一次方程在解环形的相遇与追及问题中的应用

例 12 小明和他的哥哥早晨起来沿长为 400 m 的环形跑道练习跑步，小明跑 2 圈用的时间和他的哥哥跑 3 圈用的时间相等，两人同时同地同向出发，结果经过 2 min 40 s 他们第一次相遇，若两人同时同地反向出发，则经过几秒他们第一次相遇？

解题秘方：可将环形的相遇或追及问题转化为直线形的相遇或追及问题.

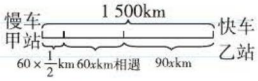


图 6.2-1

（2）设 y h 后两车相距 1 800 km. 列表：

	慢车	快车
路程 / km	$60y$	$90y$
速度 /（km/h）	60	90
时间 / h	y	y

相等关系：两车行驶的路程和 +1 500 km=1 800 km.

或画线段示意图如图 6.2-2.



图 6.2-2

（3）设 z h 后两车相距 1 200 km（此时快车在慢车的后面）.

相等关系：慢车行驶的路程 +1 500 km- 快车行驶的路程 =1 200 km.

方法点拨

1. 本例在求小明及哥哥的速度时，也可设他们两人的速度分别为 $2x$ m/s 和 $3x$ m/s.
2. **环形运动问题中的相等关系（同时同地出发）：**
   （1）**同向相遇**：第一次相遇快者跑的路程 - 第一次相遇慢者跑的路程 = 跑道一圈的长度；
   （2）**反向相遇**：第一次相遇快者跑的路程 + 第一次相遇慢者跑的路程 = 跑道一圈的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设小明的速度为 x m/s，则他的哥哥的速度为 $\frac{3}{2}x$ m/s.

由题意得 $160x=160\times\frac{3}{2}x-400$. 解得 $x=5$.

则小明的哥哥的速度为 $5\times\frac{3}{2}=7.5$（m/s）.

设经过 y s 他们第一次相遇.

由题意，得（5+7.5）$y=400$. 解得 $y=32$.

答：经过 32 s 他们第一次相遇.

类型 3：一元一次方程在解车过桥或过隧道问题中的应用

例 13 一列火车匀速行驶经过一座桥，火车完全通过桥共用了 50 s，整列火车在桥上的时间为 30 s，已知桥长 1 200 m，求火车的长度和速度.

解题秘方：理解“完全通过桥”和“整列火车在桥上”时火车的运动过程，根据火车行驶的速度不变列方程.

解：设火车的长度为 x m.

列表：

	路程 /m	速度 /(m/s)	时间 /s
完全通过桥	$1\,200+x$	$\frac{1200+x}{50}$	50
整列火车在桥上	$1\,200-x$	$\frac{1200-x}{30}$	30

相等关系：完全通过桥的速度 = 整列火车在桥上的速度.

根据题意，得

$$\frac{1200+x}{50}=\frac{1200-x}{30}.$$

解得 $x=300$.

所以火车的速度为 $\frac{1200+300}{50}=30$（m/s）.

答：火车的长度为 300 m，速度为 30 m/s.

方法归纳

1. 车过桥问题的图形表示：火车“完全通过桥”是指从火车头上桥到火车尾离桥，如图 6.2-3：

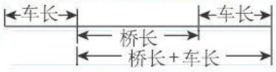


图 6.2-3

而“整列火车在桥上”是指从火车尾上桥到火车头离桥，如图 6.2-4.



图 6.2-4

2. 两列火车错车问题的相等关系：

相向：两列火车所行路程的和 = 两列火车车身长的和；

同向：两列火车所行路程的差 = 两列火车车身长的和.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用非常规法解复杂的一元一次方程

挑战·高分

题型 1：连续去括号法在解一元一次方程中的应用

例 14 解方程：$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1=-1$.

解题秘方：本题括号比较多，如何去掉括号求解方程是解决本题的关键，去括号的方法不同，解法就不同.

解法提醒

根据方程的结构特征灵活选取解一元一次方程的方法和步骤，可降低求解的难度. 观察

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：**方法一**：从里往外逐步去括号.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-1\right)-1\right]-1=-1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1\right)-1=-1,$$

$$\frac{1}{16}x-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-1,$$

$x-2-4-8-16=-16$，解得 $x=14$.

方法二：从外往里逐步去括号.

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-\frac{1}{2}-1=-1,$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-1,$$

$$\frac{1}{16}x-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-1,$$

解得 $x=14$.

方法三：利用等式的性质去括号.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}=0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1=0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]=1,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1=2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=3,$$

$$\frac{1}{2}x-1=6,$$

解得 $x=14$.

可知这个方程有三层括号，所以我们应想到去括号，而且去括号时从里往外或从外往里都可以.但括号除说明运算顺序外，还有整体的作用，因此，方程的左边可以看成两项，即 $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}$ 与 -1，而方程的右边是 -1.将方程左边的 -1 移到右边，右边就变为 0，依次类推，可以很简单地解出方程.

题型 2：通分法在解一元一次方程中的应用

例 15 $\frac{1-6x}{15}-\frac{1-x}{6}=-\frac{2x-1}{5}+\frac{2x+1}{18}$.

解题秘方：直接去分母，计算量较大，根据方程的特殊结构，可先分组通分，再去分母.

解：移项，得 $\frac{1-6x}{15}+\frac{2x-1}{5}=\frac{2x+1}{18}+\frac{1-x}{6}$.

通分，得 $\frac{(1-6x)+3(2x-1)}{15}=\frac{(2x+1)+3(1-x)}{18}$，

即 $-\frac{2}{15}=\frac{4-x}{18}$.

所以 $x=6.4$.

解法提醒

解方程时，若分母的最小公倍数很大，且有的分母之间存在倍数关系，则将分母有倍数关系的结合在一起进行通分合并化简，然后再去分母.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：换元法在解一元一次方程中的应用

例 16 $(3x-2)-\dfrac{(3x-2)-1}{2}=2-\dfrac{(3x-2)+2}{3}$.

解题秘方：观察此方程的特点，可把 $3x-2$ 看作一个整体，运用换元法解此方程较为简便.

解：设 $3x-2=y$，则原方程可化为 $y-\dfrac{y-1}{2}=2-\dfrac{y+2}{3}$.

解这个方程，得 $y=1$.

所以 $3x-2=1$，解得 $x=1$.

方法技巧

把某个式子看成一个整体，用一个未知数去代替它，从而使问题得到简化，这就叫**换元法**. 本题中用 y 代替 $3x-2$，将原来复杂的方程从形式上变简单了.

拔尖角度 2 利用分类思想解含有绝对值符号的方程

挑战·高分

例 17 解方程：$|2x+4|=3x-2$.

解题秘方：解含有绝对值符号的方程，要先去掉绝对值符号，去绝对值符号时，要讨论绝对值符号内式子的取值范围.

解：若 $2x+4\geqslant 0$，

则 $2x+4=3x-2$，

解得 $x=6$.

此时 $2x+4=2\times 6+4=16>0$.

若 $2x+4<0$，

则 $-(2x+4)=3x-2$，

解得 $x=-\dfrac{2}{5}$.

此时 $2x+4=2\times\left(-\dfrac{2}{5}\right)+4=\dfrac{16}{5}>0$，

所以 $x=-\dfrac{2}{5}$不符合题意，舍去.

所以方程的解为 $x=6$.

方法点拨

解含有绝对值符号的方程的方法：

先去掉绝对值符号将方程转化为两个一元一次方程，再解出每个一元一次方程，并检验方程的解，检验的方法可以根据条件检验，如本题，也可以根据绝对值的非负性检验，如：当 $x=-\dfrac{2}{5}$ 时，$3x-2=-\dfrac{16}{5}<0$，故不符合题意.

拔尖角度 3 利用转化思想解决一元一次方程同解问题

挑战·高分

例 18 已知关于 x 的方程 $4x+2a=3x+1$ 和关于 x 的方程 $x-3a=6$ 有相同的解，求 $a^{2n}-a^{2n-1}$（n 为正整数）的值.

解题秘方：“两个方程有相同的解”为建立关于另一个未知数的方程提供了相等关系.

解：由方程 $4x+2a=3x+1$，得 $x=1-2a$；

由方程 $x-3a=6$，得 $x=3a+6$.

由题意，得 $1-2a=3a+6$，解得 $a=-1$.

故 $a^{2n}-a^{2n-1}=(-1)^{2n}-(-1)^{2n-1}=1-(-1)=2$.

技巧点拨

解决此题主要运用“转化思想”，转化的关键是方程解之间的关系，将以 x 为未知数的方程转化为以 a 为未知数的方程，转化的方式有“方法点拨”中的两种方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：利用两个方程解的关系求待定字母值的方法：

一般先求出两个方程的解，再根据这两个方程的解的关系，建立一个以所求字母为未知数的新的方程，解这个方程即可求出待定字母的值．也可以先求出其中一个方程的解，然后根据这两个方程解的关系，求出另一个方程的解，再代入另一个方程中，建立一个以所求字母为未知数的新的方程，解这个方程即可求出待定字母的值．

拔尖角度▸ 4 利用分类列举法求方程特殊解中的字母值问题

例 19 已知关于 x 的方程 $kx-3=2x$ 的解是整数，求整数 k 的值．

解题秘方：先用含 k 的式子表示出方程的解，然后通过解的特殊性分类求出整数 k 的值．

解：移项，得 $kx-2x=3$.

合并同类项，得 $(k-2)x=3$.

因为方程有解，所以 $k-2\neq 0$.

系数化为 1，得 $x=\dfrac{3}{k-2}$.

因为该方程的解为整数且 k 为整数，所以 $k-2=\pm 1$，或 $k-2=\pm 3$.

当 $k-2=1$ 时，$k=3$；当 $k-2=-1$ 时，$k=1$；

当 $k-2=3$ 时，$k=5$；当 $k-2=-3$ 时，$k=-1$.

所以整数 k 的值为 3，1，5 或 -1.

解含字母系数的一元一次方程

挑战·高分

方法点拨

未知数的系数中含字母时，要先讨论方程中未知数的系数是否为 0，再进行变形．关于最简方程 $ax=b$ 的解的情况讨论：

1. 当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax=b$ 有唯一解 $x=\dfrac{b}{a}$；

2. 当 $a=0$ 时，若 $b=0$，则方程的解为任意数，若 $b\neq 0$，则方程无解．

上述结论反过来亦成立．

拔尖角度▸ 5 利用观察排列规律法用一元一次方程解月历问题

例 20 你对生活中常见的月历了解吗？月历中存在许多数的奥秘，你想知道吗？下表是 2018 年 3 月的月历：

2018 年 3 月

一	二	三	四	五	六	日
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

(1)观察上面的月历，横行、竖列相邻的两数之间有什么关系？

(2)如果告诉你一竖列相邻三个数的和为 72，你能知道这三天分别是几号吗？

(3)如果用一个框圈出的 2×2 个数的和为 56，你知道圈出的四天分别是几号吗？

解题秘方：观察月历中数的排列规律：横行相邻两数相差 1，即为连续整数；竖列相邻两数相差 7. 这些数最小为 1，最大为 31.

挑战·高分

技巧点拨

解决数的排列规律问题关键是分析出排列的规律．主要分析出两个规律，

一是大小规律：连续整数，相邻两数相差 1；连续奇数、偶数，相邻两数都相差 2；月历中数的排列规律满足连续整数的规律，且每一竖列相邻两个数相差 7

二是位置规律，在每一行、每一列上的数有何特征．特别是在解决存在性问题时，大小求出存在，但位置可能决定不存在．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）横行相邻两数相差 1，竖列相邻两数相差 7.

（2）设一竖列相邻三个数中中间的一个为 x，则上面的一个为 $x-7$，下面的一个为 $x+7$.

根据题意，得 $(x-7)+x+(x+7)=72$.

解这个方程，得 $x=24$.

所以 $x-7=24-7=17$，$x+7=24+7=31$.

答：这三天分别是 17 号、24 号、31 号.

（3）设圈出的四个数中，最小数为 y，则另三个数分别为 $y+1$，$y+7$，$y+8$，

根据题意，得 $y+(y+1)+(y+7)+(y+8)=56$.

解这个方程，得 $y=10$.

所以 $y+1=10+1=11$，$y+7=10+7=17$，$y+8=10+8=18$.

答：圈出的四天分别是 10 号、11 号、17 号、18 号.

拔尖角度 6 利用列表法挖掘隐含的相等关系解决行程问题

挑战·高分

例 21 王强骑电动车从甲地到乙地，陈平骑电动车从乙地到甲地，两人沿同一条公路匀速行驶，已知两人在上午 8 时同时出发，到上午 10 时，两人相距 24 千米，到上午 11 时，两人又相距 24 千米，求甲、乙两地的距离.

解题秘方：将王强和陈平两人行驶的路程和看成一个整体，利用他们两人在两个时间段的速度和不变这一隐含相等关系列方程.

解：设甲、乙两地的距离为 x 千米，

列表：

	路程和 / 千米	速度和 /（千米 / 时）	时间 / 小时
上午 8~10 时	$x-24$	$\frac{x-24}{2}$	2
上午 8~11 时	$x+24$	$\frac{x+24}{3}$	3

由他们两人在这两个时间段的速度和不变列方程.

由题意得 $\frac{x+24}{3}=\frac{x-24}{2}$.

解得 $x=120$.

答：甲、乙两地的距离为 120 千米.

解题反思

解本例的关键是将两个量的和当作一个整体，再将它分为两类过程列表，这样就将其转化为前面所熟悉的类型来解决. 本例也可理解为匀速运动中路程和时间成正比来解决.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考必考内容，本节的主要考点有一元一次方程的解法及一元一次方程的实际应用，考查的形式有选择题和解答题，考查的难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用一元一次方程的解法解纠错问题

例22 [期末·遂宁]小明解关于x的方程$\frac{2x-1}{5}+1=\frac{x+a}{2}$时，由于粗心大意，去分母时，方程左边的1没有乘以10，由此求得解为$x=4$，试求a的值，并正确地求出方程的解.

试题评析：本题考查利用去分母解一元一次方程时应注意的问题，解题的关键是找出$x=4$是哪个方程的解.

解：因为去分母时，方程左边的1没有乘以10，

所以小明去分母后的方程是$2(2x-1)+1=5(x+a)$.

把$x=4$代入，得$2\times(2\times4-1)+1=5(4+a)$.

解得$a=-1$.

所以原方程为$\frac{2x-1}{5}+1=\frac{x-1}{2}$.

去分母，得$2(2x-1)+10=5(x-1)$.

去括号，得$4x-2+10=5x-5$.

移项、合并同类项，

得$-x=-13$.

系数化为1，

得$x=13$.

考法点评

解一元一次方程的纠错问题，既警示到同学们去分母时不能漏乘不含分母的项，又考查同学们理解方程的解的意义.找出错误的解是哪个方程的解是关键所在，切忌将错解直接代入原方程中.

考法2 利用一元一次方程解实际问题

例23 [中考·徐州]4月9日上午8时，2017徐州国际马拉松赛鸣枪开跑，一名34岁的男子带着他的两个孩子一同参加了比赛，如图6.2-5是两个孩子与记者的对话：

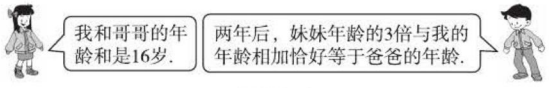


图6.2-5

根据对话内容，请你用方程的知识帮记者求出哥哥和妹妹的年龄.

试题评析：本题考查了用一元一次方程解决实际问题，解题的关键是从对话内容中分析出相等关系.

解：设妹妹的年龄为x岁，则哥哥的年龄为$(16-x)$岁，

根据题意列方程，得$3(x+2)+(16-x+2)=34+2$，

解得$x=6$.

所以$16-x=10$.

答：妹妹的年龄为6岁，哥哥的年龄为10岁.

考法点评

一元一次方程的应用题主要考查学生的建模能力，建立一元一次方程的模型的关键是设和列，“设”要抓住解决问题的核心，可直接设也可间接设；“列”要分析出题中的相等关系，若有多个相等关系，则选取具有代表性的相等关系列方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见209页

1. [中考·南充]关于x的一元一次方程$2x^{a-2}+m=4$的解为$x=1$，则$a+m$的值为（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 5　　D. 4

2. [中考·株洲]在解方程$\frac{x-1}{3}+x=\frac{3x+1}{2}$时，方程两边乘以6，去分母后，正确的是（　　）

A. $2x-1+6x=3(3x+1)$

B. $2(x-1)+6x=3(3x+1)$

C. $2(x-1)+x=3(3x+1)$

D. $(x-1)+x=3(x+1)$

3. 若关于x的方程$\frac{3}{10}a+\frac{x+4}{2}=4(x-1)$的解为$x=3$，则$a$的值为（　　）

A. 22　　B. 10

C. 15　　D. -2

4. 已知方程$|3x-2|=2-x$，那么方程的解是_____.

5. 甲、乙两人在长为300 m的环形跑道上练习跑步，甲的平均速度为6 m/s，乙的平均速度为7 m/s，如果甲、乙两人同时同向跑，乙在甲前面6 m，那么经过多少秒两人第二次相遇？若设经过x s两人第二次相遇，根据题意可列方程为_____.

6. 当x为何值时，式子$\frac{x}{3}-2$的值与式子$-\frac{x}{2}+1$的值满足下面的条件.

(1) 相等；

(2) 互为相反数；

(3) $\frac{x}{3}-2$的值比$-\frac{x}{2}+1$的值小1.

7. 解方程：

(1) $5(x-8)-5=0$；

(2) $3(x-3)-2(5x-7)=6(1-x)$；

(3) $\frac{2x+1}{3}-\frac{10x+1}{6}=1$；

(4) $\frac{x}{0.7}-\frac{0.17-0.2x}{0.03}=1$；

(5) $\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{5}-1\right)+2\right]-x=1$；

(6) $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8\right\}=1$.

8. 已知某同学解关于x的一元一次方程$\frac{2x-a}{3}=\frac{2x+1}{6}-1$，去分母时，$-1$没有乘6，得到方程的解为$x=1$，求$a$的值及正确的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知关于 x 的方程 $x+\frac{k}{3}=\frac{x-k}{2}$ 的解与 $3x=\frac{x+1}{2}+2$ 的解互为相反数，求 k 的值.

10. 一架飞机从 A 城市飞往 B 城市，顺风需要 5.5h，逆风需要 6h，风速为 24km/h，则 A，B 两城市间的航程为多少？ 【导学号：3572327】

11. 甲、乙两地的距离为 180 km，一人骑自行车从甲地出发每小时行驶 15 km，另一人骑摩托车从乙地出发，两人相向而行，已知摩托车的速度是自行车速度的 3 倍，若骑摩托车的人到达甲地后立刻沿原路返回，骑自行车的人先出发 2 h，问骑摩托车的人经过多长时间追上骑自行车的人？

素养提分 行动篇

丢番图的墓志铭

在丢番图的墓碑上，刻着这样一段墓志铭：坟中安葬着丢番图，多么令人惊讶，它忠实地记录了其所经历的道路，他的童年占六分之一，又过十二分之一，两颊长胡，再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛，五年之后天赐贵子，可怜迟到的宁馨儿，享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓. 悲伤只有用数论的研究去弥补，又过四年，他也走完了人生的旅途. 丢番图是古希腊亚历山大时期的数学家，对他的生平人们知之甚少. 上面的内容是如下一段文字：此人一生中，童年占$\frac{1}{6}$，青少年占$\frac{1}{12}$，又过$\frac{1}{7}$岁月结婚，婚后 5 年喜得贵子，但儿子先父 4 年而卒，寿为其父之半.

设丢番图的年龄为 x 岁，这段文字可以列成方程$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$，解之得 $x=84$. 丢番图活了 84 岁.

丢番图对数学有两大贡献，其一是采用缩写方式简化数学表达，人称缩写代数，推进了数学符号的使用；其二是求解不定方程，人称丢番图方程，开辟了数论研究的一个重要领域，这个领域后来被称为丢番图分析. 丢番图曾写过三部书，其中 13 卷本的《算术》最为出色，后失传. 大约在 1463 年雷琼蒙塔努斯发现了这部书的 6 卷，1560 年，帕茨发现了这部书原稿抄本，1621 年出版了《算术》的拉丁文、希腊文版本.《算术》中大部分问题是求解不定方程的，其解法非常巧妙，很少给出一般法则，即使性质相近的题，其解法也会大不相同. 著名数学家汉克尔说：“研究丢番图 100 道题后，去解第 101 道，仍然感到困难重重.”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.3 实践与探索

核心知识

- 配套问题
- 工程问题
- 销售问题
- 积分问题
- 计费问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 1 配套问题

1. 在配套问题中，配套的物品之间都具有一定的数量关系，这个数量关系可以作为列方程的依据.

2. 生产配套问题中的基本相等关系：

加工（或生产）的各种零件、配件的总数量比等于一套中各种零件、配件的数量比.

3. 调配问题中的基本相等关系：

从甲处调一些人（或物）到乙处，使之符合一定的数量关系，或从第三方调入一些人（或物）到甲、乙两处，使之符合一定的数量关系，其基本相等关系为：甲人（或物）数 + 乙人（或物）数 = 总人（或物）数.

提分·必记

知识链接

1. 列方程解应用题的一般步骤：
设→列→解→验→答.
2. 配套问题中的关键词语“刚好”与“最多”要认真区别.

拨考向▶ 利用配套问题中的相等关系解决问题

类型 1：生产配套问题

例 1 某车间有 28 名工人，生产一种螺栓和螺帽，平均每人每小时能生产螺栓 12 个或螺帽 18 个，2 个螺栓要配 3 个螺帽，应安排多少名工人生产螺栓，多少名工人生产螺帽，才能使生产的螺栓和螺帽刚好配套？

解题秘方：解题的关键是找准题目中的相等关系：生产的螺栓数 ×3= 生产的螺帽数 ×2，故可设应安排 x 名工人生产螺栓，用含 x 的式子分别表示出螺栓和螺帽的数量，再列方程求解.

解：设应安排 x 名工人生产螺栓，则安排（$28-x$）名工人生产螺帽.

根据题意得 $3\times 12x=2\times 18(28-x)$.

解得 $x=14$，

所以 $28-x=14$.

答：应安排 14 名工人生产螺栓，14 名工人生产螺帽，才能使生产的螺栓和螺帽刚好配套.

提分·秘诀

解法提醒

解决生产配套问题的关键是理解配套方式，若配套的方式以比例形式出现，则生产总量的比例等于一套的比例；若配套的方式给出数量，如 m 件 A 产品与 n 件 B 产品配套，则相等关系是“A 产品的件数 $\times n$= B 产品的件数 $\times m$”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：人员调配问题

例 2 学校组织植树活动，已知在甲处植树的有 23 人，在乙处植树的有 17 人，现调 20 人去支援，使在甲处植树的人数是在乙处植树人数的 2 倍，应调往甲、乙两处各多少人？

解题秘方：此类问题多用列表法找相等关系．设应调往甲处 x 人，列表如下：

	原有人数	增加人数	现有人数
甲处	23	x	$23+x$
乙处	17	$20-x$	$17+(20-x)$

解：设应调往甲处 x 人，则调往乙处（$20-x$）人．

根据题意可得 $\frac{1}{2}\times(23+x)=17+(20-x)$，

解得 $x=17$，则 $20-x=3$.

答：应调往甲处 17 人，调往乙处 3 人．

方法点拨

用**列表法**把调配前后的人（物）数表示出来，可以较方便地找到相等关系，也锻炼了同学们将已知条件转化成数学语言的能力，体现了数学中的转化思想．

误区警示

调配问题中，若从一处调到另一处，则一处减，另一处加，且量相同；若另外从其他地方调入，则两处都加，且两处加的总数等于调入总数．

点知识 ▸ 2 工程问题

1. 基本关系式：

工作量 = 工作效率 × 工作时间，

工作时间 = $\frac{\text{工作量}}{\text{工作效率}}$，

工作效率 = $\frac{\text{工作量}}{\text{工作时间}}$．



2. 找相等关系的方法与行程问题相类似，一般有如下规律：在工作量、工作效率、工作时间这三个量中，如果一个量已知，从另一个量设元，那么就从第三个量找相等关系列方程．

提分·必记

特别提醒

1. 当问题中总工作量未知而又不求总工作量时，通常把总工作量看作整体 1.
2. **常见的相等关系为：**总工作量 = 各部分工作量之和．

拔考向 ▸ 利用一元一次方程解决工程问题

类型 1：已知工作总量的工程问题

例 3 某市为打造引江枢纽风光带，将一段长为 1.2 千米的河道整治任务交由甲、乙两个工程队接力完成，共用时 60 天．已知甲队每天整治 24 米，乙队每天整治 16 米，求甲、乙两队分别整治河道多少米．

解题秘方：在工程问题中，工作量、工作效率、工作时间，已知一个量，设另一个量，用第三个量列方程．

解：设甲队整治河道 x 米，则乙队整治河道（$1\,200-x$）米，

根据题意列方程，得 $\frac{x}{24}+\frac{1\,200-x}{16}=60$，

去分母，得 $2x+3(1\,200-x)=2\,880$，

去括号、移项、合并同类项，得 $-x=-720$，

系数化为 1，得 $x=720$.　　$1\,200-x=480$.

答：甲队整治河道 720 米，乙队整治河道 480 米．

提分·秘诀

解法提醒

本题中的相等关系有：(1) 甲队的工作量 + 乙队的工作量 = 1 200 米，(2) 甲队的工作时间 + 乙队的工作时间 = 60 天．

本例可以用工作量设未知数，用工作时间列方程，也可以用工作时间设未知数，用工作量列方程．

设甲队整治河道 x 天，则乙队整治河道(60-x)天，根据工作量可列方程为：24x+16(60-x)=1 200.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：未知工作总量的工程问题

例 4 检查一处住宅区的自来水管，甲单独完成需 14 天，乙单独完成需 18 天，丙单独完成需 12 天，原计划前 7 天由甲、乙两人合作，但乙中途离开了一段时间，剩下的由乙、丙两人合作还用了 2 天才完成，问乙中途离开了几天？

解题秘方：工作量分三部分：甲 7 天的工作量，乙前 7 天减去离开的天数的工作量，乙、丙合作 2 天的工作量.

解：设乙中途离开了 x 天，根据题意得

$$\frac{1}{14}\times 7+\frac{1}{18}(7-x)+\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{12}\right)\times 2=1.$$

解得 $x=3$.

答：乙中途离开了 3 天.

方法点拨

1. 当总工作量未知时，一般把总工作量看作整体 1，则工作效率为单独完成总工作量的时间的倒数.
2. 若将总工作量分几部分完成，则常见的等量关系为各部分的工作量之和等于总工作量 1.

点知识 3 销售问题

1. 在现实生活中，购买商品和销售商品时，经常遇到的几个量：进价、标价、售价、折扣、利润、利润率.

2. 相关的相等关系：

（1）售价 = 标价 × $\frac{\text{折扣}}{10}$；

（2）利润 = 售价 − 进价；

（3）利润 = 进价 × 利润率；

（4）利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$.



提分·必记

知识储备

1. 利润率是相对于进价而言的，是利润占进价的百分比.
2. 在标价的基础上打折时，打几折，售价等于标价乘十分之几.
3. 利润的两种计算方式是常用到的相等关系：售价 − 进价 = 进价 × 利润率.

技考向 利用一元一次方程解决销售问题

类型 1：求折扣

例 5 商场将一件进价为 100 元的玩具提高 60% 后标价，销售时按标价打折销售，结果仍获利 20%，这件玩具销售时打几折？

解题秘方：根据“利润 = 售价 − 进价”列出方程即可求解.

解：设这件玩具销售时打 x 折.

根据题意，得 $(1+60\%)\times 100\times\frac{x}{10}-100=100\times 20\%$，

解这个方程，得 $x=7.5$.

答：这件玩具销售时打 7.5 折.

提分·秘诀

警示误区

求折扣时，若设打 x 折，则售价不能表示为标价乘以 $x\%$，也不能表示为标价乘以 x，应该是售价 = 标价 × $\frac{x}{10}$.

类型 2：定价格

例 6 [中考·泰州]某校七年级社会实践小组去商场调查商品销售情况，了解到该商场以每件 80 元的价格购进了某品牌衬衫 500 件，并以每件 120 元的价格销售了 400 件，商场准备采取促销措施，将剩下的衬衫降价销售. 请你帮商场计算一下，每件衬衫降价多少元时，销售完这批衬衫正好达到盈利 45% 的预期目标？

解题秘方：根据计算销售总额的两种方法列出方程.

知识储备

1. 涉及销售总额的销售问题中，销售总额有两种计算方法：

（1）销售总额 = 单个售价 × 销售量；

（2）销售总额 = 成本 × (1+ 盈利率).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设每件衬衫降价 x 元，根据题意，得

$120\times400+(500-400)\times(120-x)=500\times80\times(1+45\%)$.

解得 $x=20$.

答：每件衬衫降价 20 元时，销售完这批衬衫正好达到盈利 45% 的预期目标.

2. 常用的相等关系就是利用两种计算方法得出的销售总额相等.

类型 3：判断盈亏

例 7 某商店将两个进价不同的豆浆机都卖了 378 元，其中一个盈利 20%，另一个亏损 20%，那么这家商店是盈利还是亏损？盈利或亏损多少元？

解题秘方：根据进价高于售价则亏损，进价低于售价则盈利，进价等于售价则不盈不亏进行判断.

解：设盈利 20% 的豆浆机的进价为 x 元，

由题意，得 $(1+20\%)x=378$，解这个方程，得 $x=315$.

设亏损 20% 的豆浆机的进价为 y 元，

由题意，得 $(1-20\%)y=378$，解这个方程，得 $y=472.5$.

所以这两个豆浆机的进价和是 $315+472.5=787.5$（元）.

因为这两个豆浆机共卖了 $378\times2=756$（元），

且 $756-787.5=-31.5$（元），

所以这家商店是亏损的，亏损了 31.5 元.

方法点拨

当售价相同，盈利率与亏损率也相同时，其结果一定是亏损，因为盈利商品的进价一定小于售价，亏损商品的进价一定大于售价，而盈利的钱数 = 盈利商品的进价 × 盈利率，亏损的钱数 = 亏损商品的进价 × 亏损率，故亏损的钱数大于盈利的钱数.

点知识 ▶ 4 积分问题

在比赛积分问题中，基本相等关系有：

参赛场数 = 胜场数 + 负场数 + 平场数；

比赛总积分 = 胜场积分 + 负场积分 + 平场积分.

特别解读：（1）比赛中的积分与胜负场数有关，同时也与比赛积分规则有关，需先弄清“胜一场积几分，平一场积几分，负一场积几分”.

（2）在积分规则中，一般规律为：胜场积分 > 平场积分 > 负场积分，据此可粗略判断解题的结果是否正确.

（3）所谓比赛中的积分问题是指一种题目类型，其问题情境不一定是比赛.

提分·必记

知识链接

1. 并不是每种比赛都按胜、平、负情况积分，有的只按胜、平两种情况积分，所以解题时一定要认真理解比赛的积分规则.
2. 积分问题中常用比赛总场数及比赛总得分来找相等关系.

拔考向 ▶ 利用一元一次方程解决比赛积分问题

例 8 下表是 2017~2018 赛季某足球联赛第一阶段小组赛（该小组共四个队，每个队分别与其他三个队进行主客场比赛各一场，即每个队要进行 6 场比赛）积分表的一部分.

排名	球队	场次	胜场	平场	负场	进球	主场进球	客场进球	积分
1	A	6	?	?	1	13	8	5	13
2	B	6	3	2	1	8	3	5	11
3	C	6	3	1	2	9	x	5	10
4	D	6	0	0	6	1	1	0	0
备注			积分 = 胜场积分 + 平场积分 + 负场积分						

提分·秘诀

解法提醒

分析积分表要把握两点：

1. 从积分表中信息完整的入手，如 B、D 队.
2. 从胜、平、负场数特殊的入手，如 D 队负 6 场，即可分析得出负一场积 0 分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）表格中 C 队的主场进球数 x 的值为_____，本次小组赛胜一场积_____分，平一场积_____分，负一场积_____分；

（2）该足球联赛奖金分配方案为：参加第一阶段小组赛 6 场比赛的每支球队都可以获得参赛奖金 1 200 万元．另外，小组赛中每获胜一场可以获得 150 万元，平一场可以获得 50 万元．请根据表格提供的信息，求在第一阶段小组赛结束后，A 队一共能获得多少万元的奖金．

解题秘方：根据表格中提供的胜、平、负的场数及对应的积分，分析出胜场、平场及负场积分．

解：（1）4；3；1；0

（2）设 A 队胜 a 场，则平（$6-a-1$）场，

根据题意列方程，得 $3a+(6-a-1)=13$，解得 $a=4$．则 $6-a-1=1$．

所以 A 队一共能获得奖金 $1\,200+150\times4+50\times1=1\,850$（万元）．

答：在第一阶段小组赛结束后，A 队一共能获得 1 850 万元的奖金．

详解

设胜一场积 y 分．根据 D 队积分为 0 可知，负一场积 0 分；根据 B，C 两队的积分可知，平一场积 1 分；再根据 B 队积分为 11，列方程，得 $3y+2=11$，解得 $y=3$．所以胜一场积 3 分，平一场积 1 分，负一场积 0 分．

点知识▶5 计费问题

1. 常见的计费问题：

（1）通讯计费（手机、电话、上网）；

（2）水、电费计费；

（3）税费计费．

2. 要解决的问题：

（1）利用量（时间、用电量、用水量、收入）和费用之间的关系求费用或量的大小；

（2）根据计费方式设计最优、最省钱的方案．

提分·必记

知识链接

解决计费问题关键要分析两点：

1. 费用的变化主要与什么量有关．
2. 弄清计费方式，特别注意分段计费的方式．

技考向▶利用一元一次方程进行方案设计与选择

类型 1：上网计费问题

例 9 某市上网有两种收费方式，用户可任选其一：计时制——1 元/时；包月制——80 元/月，此外每种方式都附加通讯费 0.1 元/时．

（1）某用户每月上网 40 小时，选哪种方式比较合算？

（2）某用户每月有 110 元钱用于上网，选哪种方式比较合算？

（3）请你设计一个方案，使用户能合理地选择收费方式．

解题秘方：根据收费方式，即时间与费用之间的关系解决已知时间求费用或已知费用求时间的问题，并利用两种方式费用相等时的时间设计方案．

解：（1）该用户每月上网 40 小时，

计时制：$40\times(0.1+1)=44$（元）；

包月制：$80+40\times0.1=84$（元）．

因为 $44<84$，所以选计时制比较合算．

提分·秘诀

方法点拨

1. 已知时间求费用直接求，已知费用求时间，列方程解决．
2. 若要设计方案使用户能合理地选择收费方式，则需要先求出两种方式费用相同时的时间，然后根据此时间设计方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）设该用户用 110 元上网，计时制可上网 x 小时，

包月制可上网 y 小时，

则（1+0.1）x=110，解得 x=100，

80+0.1y=110，解得 y=300.

因为 100<300，所以选包月制比较合算.

（3）设用户上网 z 小时，两种方式收费一样多，

则（1+0.1）z=80+0.1z，解得 z=80.

故上网不足 80 小时，选计时制；上网超过 80 小时，选包月制；上网恰好 80 小时，两种方式都一样.

类型 2：水、电费问题

例 10 近几年我国部分地区不时出现严重干旱，使我们认识到节水的重要性. 为了加强公民的节水意识，合理利用水资源，某市对自来水收费采用阶梯价格的调控手段以达到节水的目的. 该市自来水收费价格见价目表（水费按月结算）.

价目表	
每月用水量	价格
不超出 6 m^3 的部分	2 元 /m^3
超出 6 m^3 但不超出 10 m^3 的部分	4 元 /m^3
超出 10 m^3 的部分	8 元 /m^3

（1）若某户居民 2 月份用水 10.5 m^3，应缴纳水费多少元？

（2）若该户居民 3，4 月份共用水 16 m^3（4 月份用水量超过 3 月份），共缴纳水费 44 元，则该户居民 3，4 月份各用水多少立方米？（结果精确到 0.1 m^3）

解题秘方：根据收费方式中揭示的用水量与价格之间的对应关系，先确定价格，然后再确定水费.

解：（1）由题意，得 2×6+4×（10−6）+8×（10.5−10）=32（元）. 所以应缴纳水费 32 元.

（2）设 3 月份用水 x m^3，则 4 月份用水（16−x）m^3.

①当 $x \leqslant 6$ 时，16−$x \geqslant 10$，

依题意，得 2x+2×6+4×（10−6）+8（16−x−10）=44.

整理，得 6x=32，所以 $x \approx 5.3$，

此时 16−$x \approx 10.7$，符合题意.

②当 $6 < x \leqslant 10$ 时，$6 \leqslant 16-x < 10$，

依题意，得 2×6+4×（x−6）+2×6+4（16−x−6）=44.

整理，得 40=44，故此方程无解. 所以 $6 < x \leqslant 10$ 不可能成立.

③因为 4 月份用水量超过 3 月份，所以 x 不可能超过 10.

综上所述，3 月份用水约 5.3 m^3，4 月份用水约 10.7 m^3.

方法点拨

水、电费收费问题是分段收费问题，若已知用水（电）量求水（电）费，按每段的价格进行计算；若已知水（电）费求用水（电）量，必须先分析用水（电）量所在的范围. 若不能准确确定范围，还必须分类求解.

详细说明

“（10−6）”是指超出 6m^3 但不超出 10m^3 的部分.

“（10.5−10）”是指超出 10m^3 的部分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：个人所得税问题

例 11 2018 年 10 月 1 日至 2018 年 12 月 31 日，这期间施行的个人所得税纳税办法如下：

一、以个人每月工资收入额减去 5 000 元后的余额作为其每月应纳税所得额；

二、个人所得税税率如下表所示：

纳税级数	个人每月应纳税所得额	税率
1	不超过 3 000 元的部分	3%
2	超过 3 000 元至 12 000 元的部分	10%
3	超过 12 000 元至 25 000 元的部分	20%
4	超过 25 000 元至 35 000 元的部分	25%
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30%
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35%
7	超过 80 000 元的部分	45%

（1）若甲、乙两人的每月工资收入额分别为 6 000 元和 9 000 元，请分别求出甲、乙两人每月应缴纳的个人所得税；

（2）若丙每月缴纳的个人所得税为 140 元，则丙每月的工资收入额为多少？

解题秘方：先根据个人每月应纳税所得额确定税率，然后分段求出各段的税额，再求出纳税总额.

解：（1）甲每月应纳税所得额为 6 000−5 000=1 000（元）.

因为 1 000 < 3 000，

所以甲每月应缴纳的个人所得税为 1 000×3%=30（元）.

乙每月应纳税所得额为 9 000−5 000=4 000（元）.

因为 3 000 元< 4 000 元< 12 000 元，

所以乙每月应缴纳的个人所得税为 3 000×3%+（4 000−3 000）×10%=190（元）.

答：甲每月应缴纳的个人所得税为 30 元，乙每月应缴纳的个人所得税为 190 元.

（2）若每月工资收入额为 3 000+5 000=8 000（元），则每月应缴纳的个人所得税为 3 000×3%=90（元）.

设丙每月的工资收入额为 x 元，

因为 90 元< 140 元< 190 元，

所以根据题意列方程，得 $3\,000\times3\%+(x-5\,000-3\,000)\times10\%=140$，解得 $x=8\,500$.

答：丙每月的工资收入额为 8 500 元.

特别提醒

由于个人所得税是分段计算的，当遇到应纳税所得额跨越两个纳税级数或更多纳税级数时，弄清不同级数的应纳税所得额和相应的税率是解题的关键.

方法点拨

解个人所得税问题，通常有两种情况：

一是直接根据月工资额计算应缴纳的个人所得税；

二是已知个人缴纳的所得税求月工资额.

第二种情况一般先由个人所得税判断出工资范围，再求解.

详解

由(1)可知，当工资收入额是 9 000 元时，应缴纳的个人所得税为 190 元. 因为 90 元< 140 元< 190 元，所以丙每月的工资收入额大于 8 000 元，且小于 9 000 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用“辅助元”法解销售问题

例 12 一种名牌服装被提价 10% 后，发现不好卖，就想把它恢复到原来的价格，那么要在现价的基础上降低百分之几？

解题秘方：提价、降价都与原价有关，故设原价这个辅助未知数解决问题.

解：设原价为 a 元，要在现价的基础上降低的百分率为 x.

根据题意列方程，得 $a(1+10\%)(1-x)=a$，

解得 $x \approx 0.09=9\%$.

答：大约要在现价的基础上降低 9%.

挑战·高分

解法提醒

在一些较复杂的实际问题中，当出现的未知量较多，并且有时看起来似乎缺少条件时，要考虑设辅助未知数.这些辅助未知数能帮助我们理清各数量之间的关系，为已知条件和待解问题“牵线搭桥”，从而找到相等关系列方程.

拔尖角度 2 利用代数法解几何图形问题

例 13 要用总长为 20 米的篱笆靠墙（墙足够长）围一个长方形的鸡舍，除墙这一边外，其他三边（除门外）都用篱笆围成，且长方形的长是宽的 2 倍，并要求留 2 米宽的门，求鸡舍的长和宽.

解题秘方：根据篱笆的长度与长方形的长和宽之间的关系列出方程.

解：设鸡舍的宽为 x 米，则长为 $2x$ 米.

如图 6.3−1，当鸡舍的长边靠墙时，根据题意得 $2x+x+x-2=20$，

解得 $x=5.5$，则 $2x=11$. 此时鸡舍的长为 11 米，宽为 5.5 米.

如图 6.3−2，当鸡舍的短边靠墙时，根据题意得 $2x+2x+x-2=20$，

解得 $x=4.4$，则 $2x=8.8$. 此时鸡舍的长为 8.8 米，宽为 4.4 米.

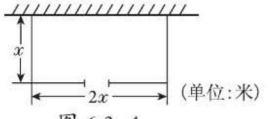


图 6.3−1

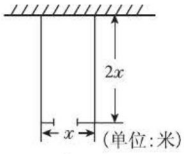


图 6.3−2

答：鸡舍的长为 11 米，宽为 5.5 米或鸡舍的长为 8.8 米，宽为 4.4 米.

挑战·高分

方法点拨

利用一元一次方程解决几何图形问题时，几何图形的周长和面积公式是常用的相等关系，利用篱笆围鸡舍，关键是要找出篱笆长与长方形的长和宽之间的关系，注意靠墙的边不用篱笆.

拔尖角度 3 利用分类法解一元一次方程中的方案问题

例 14 某商场计划拨款 9 万元从厂家购进 50 台电视机，已知该厂家生产三种不同型号的电视机，出厂价分别是：甲种电视机每台 1 500 元，乙种电视机每台 2 100 元，丙种电视机每台 2 500 元. 若商场同时购进其中两种不同型号的电视机共 50 台，恰好用去 9 万元.

（1）请你设计进货方案；

（2）若商场销售一台甲种电视机可获利 150 元，销售一台乙种电视机可获利 200 元，销售一台丙种电视机可获利 250 元，在同时

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

购进两种不同型号的电视机的方案中，为使销售获利最多，应该选择哪种进货方案？

解题秘方：抓住题中的数量关系：①两种不同型号的电视机的台数和 = 50 台；②买两种不同型号的电视机的费用 =9 万元．按购进的两种电视机的型号分别是甲、乙，乙、丙，甲、丙三种情况进行讨论．设计出合理的方案后，分别计算出各方案的利润，然后判断出获利最多的方案．

解：（1）分三种情况讨论：

①当购进甲、乙两种型号的电视机时，设购进甲种电视机 x 台，则购进乙种电视机（$50-x$）台．

根据题意列方程，得 $1\,500x+2\,100(50-x)=90\,000$，

解得 $x=25$. 则 $50-x=25$.

②当购进乙、丙两种型号的电视机时，设购进乙种电视机 y 台，则购进丙种电视机（$50-y$）台．

根据题意列方程，

得 $2\,100y+2\,500(50-y)=90\,000$，解得 $y=87.5$（不合题意，舍去）．

③当购进甲、丙两种型号的电视机时，设购进甲种电视机 z 台，则购进丙种电视机（$50-z$）台．

根据题意列方程，

得 $1\,500z+2\,500(50-z)=90\,000$，解得 $z=35$. 则 $50-z=15$.

所以有以下两种方案：

方案一：购进甲、乙两种型号的电视机各 25 台；

方案二：购进甲种电视机 35 台，丙种电视机 15 台．

（2）因为商场销售一台甲种电视机可获利 150 元，销售一台乙种电视机可获利 200 元，销售一台丙种电视机可获利 250 元，

所以方案一的利润为

$150\times25+200\times25=8\,750$（元），

总利润 = 一台甲种电视机的利润 × 甲种电视机的台数 + 一台乙种电视机的利润 × 乙种电视机的台数．

方案二的利润为

$150\times35+250\times15=9\,000$（元）．

因为 $8\,750<9\,000$，所以选择方案二获利最多．

答：为使销售获利最多，应该选择购进甲种电视机 35 台，丙种电视机 15 台的进货方案．

挑战·高分

详解

根据“购进两种不同型号的电视机共 50 台”，可知分三种情况讨论：

(1) 购进甲、乙两种型号的电视机；

(2) 购进乙、丙两种型号的电视机；

(3) 购进甲、丙两种型号的电视机．

方法点拨

利用一元一次方程设计方案时，应紧扣条件中决定方案的词语．在确定方案时，注意未知数的实际意义；在优化选择方案时，从比较利润大小去选择．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的考点主要是列方程解应用题，考查利用一元一次方程解决生产生活中的热点问题，主要有利润问题、配套问题、方案设计问题等，主要以解答题形式考查，难度适中．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用一元一次方程解决利润问题

例15 [中考·新疆]一台空调标价2 000元，若按6折销售仍可获利20%，则这台空调的进价是_____元.

试题评析：本题考查了一元一次方程在利润问题中的应用，解题的关键是根据利润问题中的相等关系列出方程.

解：设这台空调的进价为x元，根据题意，得

$x(1+20\%)=2\,000\times0.6$.

解得$x=1\,000$.

所以这台空调的进价是1 000元.

答案：1 000

考法点评

在市场经济时代，考查利润问题最典型，利润问题主要涉及进价(成本)、售价、利润三个量，每个量都可以作为相等关系列方程.

考法2 利用一元一次方程解决年龄问题

例16 [中考·荆门]已知：派派的妈妈和派派今年共36岁，再过5年，派派的妈妈的年龄比派派年龄的4倍还大1岁，当派派的妈妈40岁时，派派的年龄为_____岁.

试题评析：本题主要考查了一元一次方程在年龄问题中的应用，解决本题的关键是根据年龄之间的相等关系列出方程.

解：设今年派派的年龄为x岁，则他的妈妈的年龄是$(36-x)$岁，由题意得$(36-x)+5=4(x+5)+1$. 解得$x=4$.

今年派派的妈妈的年龄是$36-4=32$(岁).

当派派的妈妈40岁时，派派的年龄为$4+(40-32)=12$(岁).

答案：12

考法点评

解决年龄问题时，除条件中给出的相等关系外，还有隐含的相等关系：任何人的年龄都是同时增长的，即年龄差不变.

考法3 利用一元一次方程解决增长率问题

例17 [中考·威海]某农场去年计划生产玉米和小麦共200吨，采用新技术后，实际产量为225吨，其中玉米超产5%，小麦超产15%，该农场去年实际生产玉米、小麦各多少吨?

试题评析：本题主要考查的是一元一次方程在增长率问题中的应用，利用增长率及相应量之间的关系列方程是解题的关键.

解：设去年计划生产玉米x吨，则计划生产小麦$(200-x)$吨.

根据题意得$(1+5\%)x+(1+15\%)(200-x)=225$.

解得$x=50$.

则$200-x=150$.

$50\times1.05=52.5$(吨)，$150\times1.15=172.5$(吨).

答：该农场去年实际生产玉米52.5吨，小麦172.5吨.

考法点评

解决增长率问题，关键是明确增长率、原量、增长后的量之间的关系. 若原量为a，增长率为$b\%$，增长后的量为c，则$c=a(1+b\%)$，$a=\frac{c}{1+b\%}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用一元一次方程解决几何图形中的行程问题

例 18 [中考·镇江] 如图 6.3-3，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3\text{cm}$，$BC=4\text{cm}$，$AC=5\text{cm}$，点 D 在 AC 上，$AD=1\text{cm}$，点 P 从点 A 出发，沿 AB 匀速运动；点 Q 从点 C 出发，沿 $C\to B\to A\to C$ 的路径匀速运动．两点同时出发，在 B 点处首次相遇后，点 P 的运动速度每秒提高了 2cm，并沿 $B\to C\to A$ 的路径匀速运动；点 Q 保持速度不变，并继续沿原路径匀速运动，两点在 D 点处再次相遇后停止运动．设点 P 原来的速度为 x cm/s，

（1）点 Q 的速度为_____cm/s（用含 x 的式子表示）；

（2）求点 P 原来的速度．

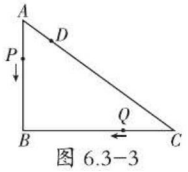


图 6.3-3

试题评析：本题主要考查了几何问题中的行程问题，解决问题的关键是理解运动路程和线段长度之间的关系．

解：（1）$\frac{4x}{3}$

（2）因为在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$ cm，$BC=4$ cm，$AC=5$ cm，$AD=1$ cm，所以 $AB+AD=4$（cm），$BC+CD=4+5-1=8$（cm）．

在 B 点处首次相遇后，两点在 D 点处再次相遇后停止运动时，P 点与 Q 点运动的时间相同，P 点运动路程是 Q 点运动路程的 2 倍，则 P 点运动速度是 Q 点运动速度的 2 倍，根据题意，得 $x+2=2\times\frac{4x}{3}$．解得 $x=1.2$．

答：点 P 原来的速度为 1.2 cm/s．

方法点拨

1. 点在几何图形上运动的行程问题，与一般的行程问题一样，分相遇和追及，且相遇和追及的相等关系同样适用，如本题紧扣相遇问题中，同时出发时，相遇时经过的时间相等．
2. 在几何图形中，点运动的路程都是以图形的边长体现出来的，故要分清点运动的方向和停止运动时点的位置．

两年模拟兵法 答案见 210 页

1. 某试卷由 20 道题组成，答对一道题得 5 分，不答或答错一道题扣 1 分，某考生的成绩为 76 分，则他答对的题数为（　　）

A. 16 道　　B. 17 道

C. 18 道　　D. 19 道

2. [中考·杭州] 已知九年级某班 30 位学生种树 72 棵，男生每人种 3 棵树，女生每人种 2 棵树，设男生有 x 人，则（　　）

A. $2x+3(72-x)=30$　　B. $3x+2(72-x)=30$

C. $2x+3(30-x)=72$　　D. $3x+2(30-x)=72$

3. [中考·荆门] 欣欣服装店某天以相同的价格 a（$a>0$）元/件卖出了两件服装，其中一件盈利 20%，另一件亏损 20%，那么该服装店卖出这两件服装的盈利情况是（　　）

A. 盈利　　B. 亏损

C. 不盈不亏　　D. 与售价 a 有关

4. [中考·南通]《九章算术》是中国传统数学最重要的著作之一．书中记载："今有人共买鸡，人出九，盈十一；人出六，不足十六．问人数几何？"意思是："有若干人共同出钱买鸡，如果每人出九钱，那么多了十一钱；如果每人出六钱，那么少了十六钱．问：共有几个人？"设共有 x 个人共同出钱买鸡，根据题意，可列一元一次方程为_____．

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. 某城市居民用水实行阶梯收费，每户每月用水量如果未超过 20 吨，按每吨 1.9 元收费；每户每月用水量如果超过 20 吨，未超过的部分仍按每吨 1.9 元收费，超过的部分则按每吨 2.8 元收费．

（1）设某户每月用水量为 x 吨，请用含 x 的式子表示出每月用水量未超过 20 吨和超过 20 吨时，该户应缴纳的水费；

（2）若该城市某户 5 月份水费平均为每吨 2.2 元，则该户 5 月份用水多少吨？

6. 红光服装厂要生产一批学生服，已知每 3 米长的布料可做上衣 2 件或裤子 3 条，1 件上衣和 1 条裤子为一套，计划用 600 米长的这种布料生产学生服，应分别用多少布料做上衣和裤子，才能恰好配套？共能生产多少套？（至少用两种解法）

7. 整理一批数据，由一人做需要 60 h 完成，现在计划先由一些人做 2 h，再增加 3 人做 4 h，完成了这项工作的 $\frac{4}{5}$．假设这些人的工作效率相同，应该先安排多少人做 2 h？

8. [**中考 · 云南**]为有效开展阳光体育活动，云洱中学利用课外活动时间进行班级篮球比赛，每场比赛都要决出胜负，每队胜一场得 2 分，负一场得 1 分，已知九年级一班在 8 场比赛中得到 13 分，问九年级一班胜、负场数分别是多少？

9. 为庆祝某商场正式营业，商场推出了两种购物方案．方案一：非会员购物所有商品价格可获九五折优惠；方案二：如缴纳 300 元会费成为该商场会员，则所有商品价格可获九折优惠．

（1）若商品价格为 x 元，分别用含有 x 的式子表示出两种购物方案中的支出金额；

（2）若某人计划在该商场购买价格为 5 880 元的电视机一台，请分析选择哪种方案更省钱；

（3）哪种情况下，两种方案支出的金额相同？

10.



（第 10 题）

试根据图中的信息，解答下列问题：

（1）购买 6 根跳绳需_____元，购买 12 根跳绳需_____元．

（2）小刚比小明多买 2 根，付款时小刚反而比小明少付 5 元．你认为有这种可能吗？若有，请求出小刚购买跳绳的根数；若没有，请说明理由．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设元技巧在一元一次方程中的应用

荣老师告诉你 应用题联系生活实际，反映实际生活中的数量关系．列方程解应用题是从具体问题中抽象归纳出所需要的数量关系，根据数量间的关系，依照题意合理选择未知数，找出隐含的相等关系，列出方程进行求解．恰当设元是列方程解应用题的关键步骤之一，设什么为元，需要根据具体问题的条件来确定．

应用一 设元的作用——不同的设元有不同的方程

应用题一般有多个未知量，因而有多种设元方法，从而有多种不同的方程．

例1 从A地到B地，先下坡然后走平路，某人骑自行车以每小时12千米的速度下坡，以每小时9千米的速度通过平路，到达B地共用55分钟．返回时以每小时8千米的速度通过平路，以每小时4千米的速度上坡，回到A地共用1.5小时，从A地到B地有多少千米？

解题秘方：根据路程相等列方程．

解：**方法一**：设坡路长为x千米，则根据往返所走的平路长度不变，得

$$9\left(\frac{55}{60}-\frac{x}{12}\right)=8\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right).$$

解得$x=3$，所以平路长为$8\times\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)=6$（千米）．

故从A地到B地有9千米．

方法二：设平路长为x千米，则根据往返所走的坡路长度不变，得

$12\left(\frac{55}{60}-\frac{x}{9}\right)=4\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{8}\right)$．解得$x=6$，所以坡路长为$4\times\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{8}\right)=3$（千米）．

故从A地到B地有9千米．

应用二 设元的方法

（1）直接设元与间接设元

一般情况下采用直接设元，即问什么设什么．

有的问题，若直接设所要求的量为未知数，求解过程繁琐，则可间接设未知数．所谓间接设未知数就是选取一个与问题有关的量为未知数，再通过这个未知数求出题目中要求的量．如：涉及连比的题目，若直接设未知数不便时，则可以设比例关系中的一份为未知数；涉及数字的题目，一般设某一位上的数字为未知数．

例2 小辉从家里骑电动车到火车站，若每小时行30千米，则比火车开车时间早到15分钟；若每小时行18千米，则比火车开车时间迟到15分钟．现要求在火车开车前10分钟到达火车站，小辉骑电动车的速度应是多少？

解题秘方：根据两种不同的速度行的路程相同列方程，速度都是已知的，而时间都与“从家出发到火车开车的时间”有关，所以本题间接设未知数．

解：设小辉从家出发到火车开车的时间为x小时，则根据路程不变得

$$30\left(x-\frac{15}{60}\right)=18\left(x+\frac{15}{60}\right),$$

解得$x=1$.

由此得路程为22.5千米，从而可得速度为

$22.5\div\frac{50}{60}=27$（千米/时）．

故小辉骑电动车的速度应是每小时27千米．

提示：此题若直接设元，设骑电动车的速度为x千米/时，则所列方程如下，甚为复杂．

$$30\left(\frac{30\times\frac{15}{60}-x\cdot\frac{10}{60}}{30-x}-\frac{15}{60}\right)=$$

$$18\left(\frac{30\times\frac{15}{60}-x\cdot\frac{10}{60}}{30-x}+\frac{15}{60}\right).$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 ☞答案见211页

2. 8位退休教师分别乘坐两辆小汽车从山区赶往飞机场，可真不巧，其中一辆小汽车在距离飞机场15千米的地方出了故障，不能行驶. 此时距飞机停止检票时间只剩下42分钟（停止检票后不让乘客上飞机）. 这时，唯一可以利用的交通工具只剩下一辆小汽车，连同司机在内一次限乘5人，这辆小汽车的平均速度为60千米/时.

（1）这辆小汽车要分两次送这8人，如果第二批人在原地等待，那么这8人都能及时到达飞机场吗？请说明理由.

（2）如果小汽车送第一批人的同时，第二批人先步行，小汽车把第一批人送到飞机场后立即返回去接步行的第二批人. 设这些人步行的速度为5千米/时，那么这8人都能及时到达飞机场吗？请说明理由.

（2）设辅助元

列方程解决实际问题有时会遇到问题中的条件比较少，或数量关系比较复杂的情况. 当无论是直接设元，还是间接设元都很难列方程时，可以增设未知量，使量与量之间的关系变得清晰、明朗，从而为列出方程提供方便，这种设未知数的方法叫做设辅助元法，也称参数法. 设此未知数的目的不是为了求出其值，而是为列方程创造条件，由于它在解题中可以被消或被约，所以一般不必求出其值，这就是设辅助元法的“设而不求”.

例3 一片草地上的青草，到处长得一样密一样快，设所有的牛每天吃的草量相同，已知在草地上放牧70头牛，则24天把草吃完，如果放牧30头牛，则60天把草吃完，那么多少头牛96天能把草地上的草吃完？

解题秘方：牛吃草的量等于原有草量加上长出的草量，已知条件中没有给出每头牛每天吃草的量和草每天长出的量，可设辅助未知数.

解：设一头牛一天吃的草量为a，草每天长出的量为b，则根据原有的草量不变可知$70\times24a-24b=30\times60a-60b$，即$b=\frac{10}{3}a$.

设x头牛96天能把草地上的草吃完，根据原有的草量不变可知，$96ax-96b=30\times60a-60b$，

将$b=\frac{10}{3}a$代入解得$x=20$.

答：20头牛96天能把草地上的草吃完.

方法点拨：本题除要求的量未知外，还有很多未知量：牛吃草的速度、草长的速度、原有的草量，这些量在列方程时都要用到，所以可以设出，但不需要求出.

同类变式 ☞答案见211页

3. 某商品月末的进货价比月初的进货价降了8%，而销售价不变，这样，利润率月末比月初高10%，问月初的利润率是多少？

（3）整体设元

在某些应用题中，直接设元、间接设元都相当困难，就是设辅助元也会感到未知数太多，已知关系太少. 如果在未知量的某一部分中存在一个整体关系，可设这一部分为一个未知数，这样就减少了设元的个数，从而容易列出方程，这种设元法称为整体设元.

例4 一个五位数最高位上的数字是5，若将这个5移至最右边的数位上，则所得的五位数比原五位数的$\frac{2}{3}$多7 001，求原五位数.

解题秘方：利用整体设元，设出后四位数，表示出五位数解决问题.

解：设原五位数去掉最高位上的数字后得到的数是x，则原数为$50\ 000+x$，新数为$10x+5$，则可得方程$10x+5-\frac{2}{3}(50\ 000+x)=7\ 001$.

解得$x=4\ 321$，即原五位数为54 321.

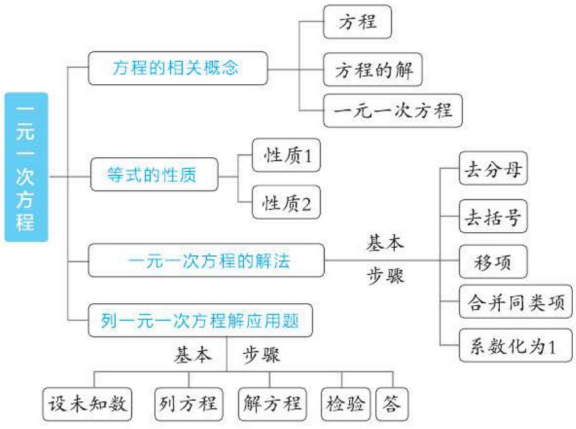
方法点拨：列方程解应用题中的设元问题是一个十分广泛、灵活而有趣的内容，没有一种万能的方法. 总之，设元的宗旨要使列方程的思路简捷，列出的方程易解. 在学习中需灵活运用，切忌生搬硬套.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 含有未知数的等式叫做方程，使方程中等号左右两边相等的未知数的值叫做方程的解．含有一个未知数，并且未知数的次数都是 1 的整式方程叫做一元一次方程．

2. **解一元一次方程的基本依据是等式的性质，解一元一次方程的基本步骤：**去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1.

3. **列一元一次方程解应用题的基本步骤：**设未知数、列方程、解方程、检验、答．

知识方法专题

知识必学

专题一 方程的解

链接中考» 方程的解是使方程中等号左右两边相等的未知数的值，考查时可正面考查利用解的定义找解，也可逆向考查，已知方程的解求方程中待定字母的值．在中考中一般以填空、选择题的形式出现，而在单元检测中，有可能以解答题的形式考查．

例 1 ［中考·甘孜州］已知关于 x 的方程 $3a-x=\frac{x}{2}+3$ 的解为 2，则式子 a^2-2a+1 的值是_____.

解题秘方：先把 $x=2$ 代入方程求出 a 的值，再把 a 的值代入式子进行计算即可．

解：因为关于 x 的方程 $3a-x=\frac{x}{2}+3$ 的解为 2，

所以 $3a-2=\frac{2}{2}+3$，解得 $a=2$，

所以原式 $=4-4+1=1$.

答案：1

方法点拨：解决此类问题需要根据方程的解的概念，将方程的解代入方程中求得待定字母的值，进而解决相关问题．

专题二 解一元一次方程

链接中考» 解一元一次方程是本章的核心，也是本章的关键，考查时，可以直接解一元一次方程，也可以根据一些数量关系列出一元一次方程，然后再解方程．在中考中以选择、填空题居多，在单元检测中为必考解答题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 2 ［中考·济南］若式子 $4x-5$ 与 $\frac{2x-1}{2}$ 的值相等，则 x 的值是（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

解题秘方：根据题中直接给出的相等关系列方程.

解：根据题意，得 $4x-5=\frac{2x-1}{2}$.

去分母，得 $8x-10=2x-1$，

移项、合并同类项，得 $6x=9$，

系数化为 1，得 $x=\frac{3}{2}$.

答案：B

方法点拨：解一元一次方程时，通常按“去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1”的步骤来做，有时根据所给方程的特点，上述有些变形步骤可能用不到，并且也不一定要按照上述顺序来做，要根据方程的形式灵活安排求解步骤. 熟练后，步骤还可以合并简化.

专题三 一元一次方程的应用

链接中考» 一元一次方程的应用是一元一次方程作用的关键体现，都是以解决生活问题为目的. 所以考查一元一次方程的应用时，问题的背景都是现实生活中的热点问题，解决问题的关键是寻找相等关系. 在中考中单独考查时一般以解答题形式出现.

例 3 ［中考·深圳］为增强居民节约用水意识，深圳市在 2011 年开始对供水范围内的居民用水实行“阶梯收费”，具体收费标准如下表：

一户居民一个月用水量记为 x 立方米	水费单价（元/立方米）
$x \leqslant 22$	a
超出 22 立方米的部分	$a+1.1$

某户居民四月份用水 10 立方米时，缴纳水费 23 元.

（1）求 a 的值；

（2）若该户居民五月份所缴纳水费为 71 元，求该户居民五月份的用水量.

解题秘方：（1）用水 10 立方米，小于 22 立方米，列方程即可求出 a；（2）先算出用水 22 立方米时的费用，把 71 元跟它比较后可列方程来解决问题.

解：（1）由题意，得 $10a=23$，解得 $a=2.3$.

（2）设该户居民五月份的用水量为 y 立方米，因为用水 22 立方米时，水费为 $22\times2.3=50.6$（元），$50.6<71$，所以 $y>22$.

所以 $22\times2.3+(y-22)\times(2.3+1.1)=71$，

解得 $y=28$.

答：该户居民五月份的用水量为 28 立方米.

方法点拨：分段收费是现实生活中常见的问题，相等关系是：每段的收费之和等于总费用.

方法必会

专题四 巧设未知数法

专题解读» 列一元一次方程解决实际问题时，必须要先设出未知数，而设未知数的方法有直接设未知数法和间接设未知数法，直接设未知数法就是求什么设什么；间接设未知数法是选取一个与问题有关的量为未知数，再通过这个未知数求出题目中要求的量，这种设未知数的方法体现技巧性，便于建立一元一次方程的模型，从而达到解决问题的目的.

例 4 张琳的妈妈买了苹果、梨、柚子、橘子四种水果共 100 个，把苹果的个数加上 4，梨的个数减去 4，柚子的个数乘 4，橘子的个数除以 4 后所得结果相等，问原来四种水果各有多少个？

解题秘方：由相等的量表示出四种水果实际的量，根据总量列方程.

解：设所得结果为 x，则苹果、梨、柚子、橘子原来的个数分别是 $x-4$，$x+4$，$\frac{x}{4}$，$4x$.

所以 $(x-4)+(x+4)+\frac{x}{4}+4x=100$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x=16$.

则原来苹果的个数：$16-4=12$，

梨的个数：$16+4=20$，

柚子的个数：$\frac{16}{4}=4$，

橘子的个数：$4\times16=64$.

答：原来苹果有 12 个，梨有 20 个，柚子有 4 个，橘子有 64 个.

方法点拨：当直接设未知数比较困难时，可以采用间接设未知数的方法，即选取一个与各未知数密切相关的量为未知数，再用这个未知数表示出其他的未知数，体现了巧设未知数法的运用.

专题五 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想是指在研究问题时，由数思形，把数与形结合起来，可以很方便地展示应用题中的数量关系. 本章在列方程解应用题时常用这种方法分析问题. 数形结合思想的应用在中考题中占的比重非常大，分值可占到 30 分.

例 5 小明、小亮两人相距 10 km，小明先出发，1 h 后小亮再出发，小明在后小亮在前，两人同向而行，小明的速度是 8 km/h，小亮的速度是 6 km/h，小明出发几小时后追上小亮？

解题秘方：设小明出发 x h 后追上小亮，可画图分析，如图 6-1.

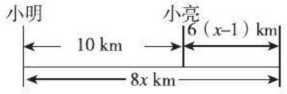


图 6-1

通过分析图 6-1，得到相等关系：小明走的路程 − 小亮走的路程 = 两人原来的距离.

解：设小明出发 x h 后追上小亮. 依题意，得 $8x-6(x-1)=10$.

解得 $x=2$.

答：小明出发 2 h 后追上小亮.

方法点拨：分析行程问题中的相等关系时，一般采用线段图法，利用线段的和差表示路程的大小关系，这充分体现了数形结合思想.

好题必解 ☞答案见 211 页

题型 1：方程的解

1. 已知 $y=3$ 是方程 $6+\frac{1}{4}(m-y)=2y$ 的解，求关于 x 的方程 $2m(x-1)=(m+1)(3x-4)$ 的解.

2. 某同学在解方程 $\frac{2x-1}{3}=\frac{x+a}{3}-2$ 去分母时，方程右边的 −2 没有乘 3，因而求得的方程的解为 $x=2$，试求 a 的值，并求出原方程正确的解.

3. 关于 x 的方程 $2(x-1)=3m-1$ 与 $3x+2=-2(m+1)$ 的解互为相反数，求 m 的值.

4. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^{n-2}-3=0$ 是一元一次方程.

（1）则 m，n 应满足的条件为 m_____，n_____；

（2）若此方程的解为整数，求整数 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：解一元一次方程

5. 解下列一元一次方程.

（1）$\frac{11}{9}x+\frac{2}{7}=\frac{2}{9}x-\frac{5}{7}$；

（2）$y-\frac{y-1}{2}=2-\frac{y+2}{5}$；

（3）$278(x-3)-463(6-2x)-888(7x-21)=0$；

（4）$\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}-1\right)-2\right]-x=2$；

（5）$x-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{3}(x-9)\right]=\frac{1}{9}(x-9)$.

题型 3：一元一次方程的应用

6. 某班学生以每小时 4 千米的速度从学校步行到校办农场劳动，走了 1.5 小时后，小王奉命回校取一件东西，他以每小时 6 千米的速度回校取了东西后立即又以同样的速度追赶队伍，结果在距农场 2 千米处追上了队伍，求学校与农场的距离.

7. 一个三位数各位上的数字的和为 15，十位上的数字与个位上的数字是由大到小排列的两个连续奇数，若去掉百位上的数字，并将十位上的数字和个位上的数字对调，所组成的两位数与去掉个位上的数字所得到的两位数之和等于 110，求这个三位数.

8. 某商场在 2019 年元旦期间搞促销活动，一次性购物不超过 2 000 元不优惠；超过 2 000 元，但不超过 5 000 元，按 9 折优惠；超过 5 000 元，超过部分按 8 折优惠，其中的 5 000 元仍按 9 折优惠. 某人两次购物分别用了 1 340 元和 4 660 元. 问：

（1）此人这两次购物，若不打折，共需多少元钱？

（2）此人两次购物共节省多少元钱？

9. 某旅行社组织一批游客外出旅游，原计划租 45 座客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租同样数量的 60 座客车，则多出一辆车，且其余客车恰好坐满. 已知 45 座客车租金为每辆 220 元，60 座客车租金为每辆 300 元，问：

（1）这批游客有多少人？原计划租多少辆45座客车？

（2）若租同一种车，要使每位游客都有座位，应该怎样租合算？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 6 章测试卷 答案见 212 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列变形中，正确的是（　　）

A. 若 $ac=bc$，则 $a=b$　B. 若 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$，则 $a=b$

C. 若 $|a|=|b|$，则 $a=b$　D. 若 $a^2=b^2$，则 $a=b$

2. 若式子 $1-3x$ 和 $x+7$ 的值互为相反数，则 x 的值为（　　）

A. 4　B. 2　C. $\frac{9}{2}$　D. $\frac{7}{2}$

3. 若方程 $2x+1=-3$ 和方程 $2-\frac{a-x}{3}=0$ 的解相同，则 a 的值是（　　）

A. 8　B. 4　C. 3　D. 5

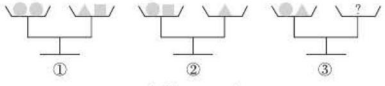
4. 定义“*”运算为“$a*b=ab+2a$”，若 $(3*x)+(x*3)=14$，则 $x=$（　　）

A. -1　B. 1　C. -2　D. 2

5. 足球比赛的规则为胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分，一个足球队踢了 14 场比赛，负了 5 场，共得 19 分，那么这个足球队胜的场数是（　　）

A. 3　B. 4　C. 5　D.6

6. 设“●■▲”分别表示三种不同的物体，如图，前两架天平保持平衡，如果要使第三架天平也平衡，那么“？”处应放“■”的个数为（　　）

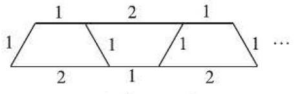


（第 6 题）

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

7. 观察图表，当图形的周长为 80 时，梯形的个数为（　　）

梯形个数	1	2	3	4	5	…
图形周长	5	8	11	14	17	…



（第 7 题）

A. 25　B. 26　C. 27　D. 28

8. 某超市推出如下优惠方案：

（1）一次性购物不超过 100 元不享受优惠；

（2）一次性购物超过 100 元，但不超过 300 元一律 9 折；

（3）一次性购物超过 300 元一律 8 折.

李明两次购物分别付款 80 元、252 元，如果李明一次性购买与这两次相同的物品，则应付款（　　）

A. 288 元　B. 332 元

C. 288 元或 316 元　D. 332 元或 363 元

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 已知关于 x 的方程 $3x-2m=4$ 的解是 $x=m$，则 m 的值是_____.

10. 若单项式 $-4x^{m-1}y^{n+1}$ 与 $\frac{2}{3}x^{2m-3}y^{3n-5}$ 是同类项，则 $m=$_____，$n=$_____.

11. 李明组织大学同学一起去观看电影，票价每张 60 元，20 张以上（不含 20 张）打八折，他们一共花了 1 200 元，他们共买了_____张电影票.

12. 自来水公司为鼓励节约用水，对水费按以下方式收取：用水不超过 10 吨，每吨按 0.80 元收费，超过 10 吨的部分按每吨 1.50 元收费. 王老师家三月份平均水费为每吨 1.00 元，则王老师家三月份用水_____吨.

三、解答题（共 52 分）

13.（12 分）解下列方程：

（1）$2(3-x)=-4(x+5)$；

（2）$\frac{x-7}{4}-\frac{5x+8}{2}=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（8分）小明在做家庭作业时发现练习册上一道解方程的题目被墨水污染了：$\frac{x+1}{2}-\frac{5x-\square}{3}=-\frac{1}{2}$，“□”里是被污染的数.他很着急，翻开书后面的答案，这道题的解是$x=2$，你能帮他补上“□”里的数吗?

15.（10分）某校分配学生宿舍，如果每间住5人，就有30人没有宿舍住；如果每间住6人，就可空出20个床位.该校有多少间宿舍?有住校学生多少人?

16.（10分）将一批工业最新动态信息输入管理储存网络，甲单独做需6小时，乙单独做需4小时，甲先做30分钟，然后甲、乙一起做，则甲、乙一起做多少小时才能完成工作?

17.（12分）[**中考·黄石**]“今有善行者行一百步，不善行者行六十步”（出自《九章算术》）意思是：同样时间段内，走路快的人能走100步，走路慢的人只能走60步，假定两者步长相等，据此回答以下问题：

（1）今不善行者先行一百步，善行者追之，不善行者再行六百步，问孰至于前，两者几何步隔之?即：走路慢的人先走100步，走路快的人开始追赶，当走路慢的人再走600步时，请问谁在前面，两人相隔多少步?

（2）今不善行者先行两百步，善行者追之，问几何步及之?即：走路慢的人先走200步，请问走路快的人走多少步才能追上走路慢的人?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

深度解密「鸡兔同笼」问题











第7章 一次方程组

核心考点

你将见到的

- 二元一次方程与二元一次方程组
- 二元一次方程组的解法
- 二元一次方程组的应用
- 三元一次方程组的解法

核心方法

我们为你提供的

- 类比法
- 代入消元法
- 加减消元法
- 枚举法
- 参数法
- 转化思想
- 分类讨论思想
- 整体思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.1 二元一次方程组和它的解

核心知识

- 二元一次方程
- 二元一次方程组
- 二元一次方程的解
- 二元一次方程组的解

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二元一次方程

1. 定义： 含有两个未知数，并且含未知数项的次数都是 1 的方程，叫做二元一次方程.

2. 二元一次方程的条件：

原方程：

（1）整式方程；

（2）只含有两个未知数.

化简后的方程：

（1）两个未知数的系数都不为 0；

（2）含有未知数的项的次数都是 1.

3. 关于 x，y 的二元一次方程的一般形式： $ax+by=c$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）.

提分·必记

特别提醒

“含未知数项的次数都是1”不可理解为两个未知数的次数都是1，例如 $2xy+1=0$，含有两个未知数，且未知数的次数都是1，但含未知数的项 $2xy$ 的次数是2，所以不是二元一次方程.

拨考向 利用二元一次方程的定义进行识别

例 1 有下列方程：① $xy=1$；② $2x=3y$；③ $x-\frac{1}{y}=2$；④ $x^2+y=3$；⑤ $\frac{x}{4}=3y-1$.

其中，二元一次方程有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方： 紧扣二元一次方程必备的条件去识别.

解： 根据二元一次方程的定义进行判断.

①含未知数的项 xy 的次数是 2；

③不是整式方程；

④含未知数的项 x^2，y 中，x^2 的次数不是 1.

②⑤满足二元一次方程的定义.

答案： B

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是不是二元一次方程的方法：

一看原方程是不是整式方程且只含有两个未知数；

二看化简整理后的方程是否具备两个未知数的系数都不为 0 且含未知数的项的次数都是 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 二元一次方程的解

1. 二元一次方程的解：

使二元一次方程的左右两边的值相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程的解.

2. 判断一对数值是不是二元一次方程的解的方法：

判断一对数值是不是二元一次方程的解，只需将这对数值分别代入方程的左右两边，

若左边 = 右边，则这对数值是这个方程的解，

若左边≠右边，则这对数值不是这个方程的解.

提分·必记

特别解读

- 二元一次方程只要给定其中一个未知数的值，就可以相应地求出另一个未知数的值，因此二元一次方程有无数个解；
- 二元一次方程的整数解有时只有有限个.

核心考向▶ 利用二元一次方程的解的定义求字母参数的值

例 2 若$\begin{cases}x=3m+1,\\y=2m-2\end{cases}$是方程 $4x-3y=10$ 的一个解，求 m 的值.

解题秘方：紧扣二元一次方程解的定义，将解代入方程中求值.

解：将$\begin{cases}x=3m+1,\\y=2m-2\end{cases}$代入方程 $4x-3y=10$，得 $4(3m+1)-3(2m-2)=10$. 解这个方程，得 $m=0$.

提分·秘诀

方法点拨

已知二元一次方程的解确定字母参数的方法：

将方程的解代入方程，得到一个关于这个字母参数的新方程，解这个方程即可求出这个字母参数的值.

点知识▶ 3 二元一次方程组

1. 定义：

把两个共含有两个未知数，并且含未知数项的次数都是 1 的方程合在一起，就组成一个二元一次方程组.

2. 二元一次方程组应满足的条件：

（1）两个方程都是整式方程；

（2）共含有两个未知数；

（3）一共有两个方程，每个方程都是一次方程.

特别解读：（1）二元一次方程组不一定都是由两个二元一次方程合在一起组成的，其中有的方程可以是一元一次方程.

（2）二元一次方程组必须一共含有两个未知数.

提分·必记

特别警示

- 判断二元一次方程组时，应先整理化简，再进行判断；
- 判断二元一次方程组时，误认为每个方程必须是二元一次方程，实际上只需满足：

(1) 共含有两个未知数；

(2) 一共有两个方程，每个方程都是一次方程.

核心考向▶ 利用二元一次方程组的定义解决问题

类型 1：利用二元一次方程组的定义进行识别

例 3 有下列方程组：

①$\begin{cases}xy=1,\\x+y=2;\end{cases}$ ②$\begin{cases}x-y=3,\\\dfrac{1}{x}+y=1;\end{cases}$ ③$\begin{cases}2x+z=0,\\3x-y=\dfrac{1}{5};\end{cases}$

④$\begin{cases}x=5,\\\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=7;\end{cases}$ ⑤$\begin{cases}x+\pi=3,\\x-y=1.\end{cases}$

提分·秘诀

知识储备

组成二元一次方程组的两个整式方程，有以下三种常见形式：

（1）两个方程都是一元一次方程，如$\begin{cases}x=1,\\y+2=5.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

其中二元一次方程组有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方：紧扣二元一次方程组应满足的条件去识别.

解：①方程组中第一个方程含未知数的项 xy 的次数不是 1；

②方程组中第二个方程不是整式方程；

③方程组中共有 3 个未知数.

只有④⑤满足二元一次方程组的定义，其中⑤中的 π 是常数.

答案：B

类型 2：利用二元一次方程组的模型分析实际问题

例 4　某中学组织七年级学生春游，原计划租用 45 座的客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租用同样数量的 60 座客车，则多出一辆车，且其余客车恰好坐满，试问七年级学生有多少人？原计划租用 45 座客车多少辆？（只列方程组）

解题秘方：分析出题中蕴含的等量关系，用未知量表示出等量关系.

解：设七年级学生有 x 人，原计划租用 45 座客车 y 辆. 根据题意，有

$$\begin{cases}45y+15=x,\\60(y-1)=x.\end{cases}$$

点知识 ▶ 4 二元一次方程组的解

1. 二元一次方程组的解：

一般地，使二元一次方程组中两个方程的左右两边的值都相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程组的解.

2. 判断一对数值是不是二元一次方程组的解的方法：

判断一对数值是不是一个二元一次方程组的解，必须将这对数值分别代入方程组中的每一个方程进行检验，若满足每一个方程，则这对数值就是这个方程组的解，只要不满足其中任何一个方程，则这对数值就不是这个方程组的解.

拔考向 ▶ 利用二元一次方程组的解的定义解决问题

类型 1：利用二元一次方程组的解的定义求解

例 5　根据下表所给出的 x 的值及关于 x，y 的二元一次方程，求出相应的 y 的值，并填入表内.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2x$										
$y=x+5$										

请你从上表中找出二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x,\\y=x+5\end{cases}$ 的解.

（2）两个方程都是二元一次方程，如 $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=5.\end{cases}$

（3）两个方程一个是一元一次方程，一个是二元一次方程，如 $\begin{cases}x=1,\\y+2x=5.\end{cases}$

解法提醒

解决这类问题的关键是建立二元一次方程组的数学模型. 建立方程组的方法是找出题目中的两个等量关系，并分别列出相应的方程.

提分·必记

特别解读

- 二元一次方程组一般都只有一个解，有时也无解.
- 方程组的解一定是方程组中每个方程的解，而方程组中某个方程的解不一定是方程组的解.

提分·秘诀

方法点拨

本题运用**定义法**，检验一组数是不是某个二元一次方程组的解，常用的方法是将这组数分别代入方程组的每个方程，只有这组数满足每个方程，才能说这组数是此方程组的解；只要发现这组数不满足其中一个方程，即可判定这组数不是此方程组的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据二元一次方程组的解的概念，找出同时满足两个二元一次方程的公共解，即为二元一次方程组的解.

解：填表如下：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=2x$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y=x+5$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

从表中可以看出$\begin{cases}x=5,\\y=10\end{cases}$既是二元一次方程 $y=2x$ 的解，也是二元一次方程 $y=x+5$ 的解，所以二元一次方程组$\begin{cases}y=2x,\\y=x+5\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=5,\\y=10.\end{cases}$

类型 2：利用二元一次方程组的解的定义确定字母的值

例 6 若关于 x，y 的方程组$\begin{cases}ax+y=0,\\2x+by=6\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$则 $a^2+b^2=$_____.

解题秘方：紧扣二元一次方程组解的定义，将解代入方程组求字母的值.

解：将$\begin{cases}x=1,\\y=-2\end{cases}$代入关于 x，y 的方程组$\begin{cases}ax+y=0,\\2x+by=6\end{cases}$中，得$\begin{cases}a-2=0,\\2-2b=6,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=2,\\b=-2.\end{cases}$所以 $a^2+b^2=4+4=8$.

答案：8

类型 3：利用二元一次方程组的解的定义解决错解问题

例 7 甲、乙两人解方程组$\begin{cases}ax+5y=15,\ ①\\4x-by=-2.\ ②\end{cases}$甲看错了方程①中的 a，得到方程组的解为$\begin{cases}x=-3,\\y=-1;\end{cases}$乙看错了方程②中的 b，得到方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=4.\end{cases}$试计算 $a^{2020}+\left(-\frac{1}{10}b\right)^{2019}$ 的值.

解题秘方：方程组的解同时满足两个方程，若看错一个方程，则满足另一个方程.

解：把$\begin{cases}x=-3,\\y=-1\end{cases}$代入②，得 $-12+b=-2$，解得 $b=10$；

把$\begin{cases}x=5,\\y=4\end{cases}$代入①，得 $5a+20=15$，解得 $a=-1$.

所以 $a^{2020}+\left(-\frac{1}{10}b\right)^{2019}=(-1)^{2020}+\left(-\frac{1}{10}\times 10\right)^{2019}=1-1=0$.

方法点拨

利用方程组的解确定字母参数的方法：

将方程组的解代入方程组的每个方程，得到**关于字母参数的新方程组**，从而求解.

特别解读

因看错一个方程而求出的方程组的错解，应是另一个没有看错的方程的解，因此可以将甲得到的解代入没有看错的方程，从而得到含有 b 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用定义法求二元一次方程中字母的取值范围

例 8 若方程 $3x+4y=my+10$ 是关于 x，y 的二元一次方程，则 m 的取值范围是_____.

解题秘方：紧扣二元一次方程必备的条件求出方程中字母的取值范围.

解：∵方程 $3x+4y=my+10$ 变形后为 $3x+(4-m)y=10$，

∴ $4-m\neq 0$，∴ $m\neq 4$.

答案：$m\neq 4$

挑战·高分

特别警示

方程有两项含有 y，需要将原方程进行化简，化简后的方程应满足含未知数的项的系数不等于 0 不能不化简，直接误认为 $m\neq 0$.

拔尖角度 2 利用列举法求二元一次方程的特殊解

例 9 求二元一次方程 $3x+2y=12$ 的非负整数解.

解题秘方：紧扣非负整数解，从 x 为非负整数入手列举判断 y 是否为非负整数.

解：原方程可化为 $y=\dfrac{12-3x}{2}$.

因为 x，y 都是非负整数，所以必须保证 $12-3x$ 能被 2 整除，

所以 x 必为偶数.

当 $x=0$ 时，$y=6$；

当 $x=2$ 时，$y=3$；

当 $x=4$ 时，$y=0$.

所以原方程的非负整数解为 $\begin{cases}x=0,\\y=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=0.\end{cases}$

挑战·高分

方法点拨

求二元一次方程的整数解的方法：

1. **变形**：把 x 看成常数，把方程变形为用 x 表示 y 的形式；
2. **划界**：根据方程的解都是整数的特点，划定 x 的取值范围；
3. **试值**：在 x 的取值范围内逐一试值；
4. **确定**：根据试值结果得到二元一次方程的整数解.

拔尖角度 3 利用类比法根据二元一次方程组的特殊结构找解

例 10 [巧解题]阅读例子：已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 求关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=3c_1,\\2a_2x+b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解.

解：方程组 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=3c_1,\\2a_2x+b_2y=3c_2\end{cases}$ 可化为 $\begin{cases}\dfrac{2}{3}a_1x+\dfrac{1}{3}b_1y=c_1,\\\dfrac{2}{3}a_2x+\dfrac{1}{3}b_2y=c_2,\end{cases}$

∵关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x=2,\\\dfrac{1}{3}y=3,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}x=3,\\y=9.\end{cases}$

挑战·高分

解法提醒

用类比法解方程组，关键是构造出与已知方程组具有相同结构特征的方程组，然后利用已知方程组的解求出待求方程组的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=3c_1,\\2a_2x+b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=3,\\y=9.\end{cases}$

通过对上面材料的认真阅读，解决问题：

已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$ 求关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+2b_1y=3c_1,\\a_2x+2b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解.

解题秘方：分析两个方程组之间的结构特征，用类比法找出两个方程组解之间的关系.

解：方程组 $\begin{cases}a_1x+2b_1y=3c_1,\\a_2x+2b_2y=3c_2\end{cases}$ 可化为 $\begin{cases}\frac{1}{3}a_1x+\frac{2}{3}b_1y=c_1,\\\frac{1}{3}a_2x+\frac{2}{3}b_2y=c_2.\end{cases}$

∵关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$

∴$\begin{cases}\frac{1}{3}x=-1,\\\frac{2}{3}y=2,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=-3,\\y=3.\end{cases}$

∴关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+2b_1y=3c_1,\\a_2x+2b_2y=3c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-3,\\y=3.\end{cases}$

技巧点拨

本题的难点在于根据题中的例子得出求解方法.对于需求解的方程组，用阅读类比法将其不含未知数的项化成和已知解的方程组不含未知数的项相同，然后让需求解方程组含未知数的项除去相同的系数后的部分等于已知方程组的解，进而求出需求解的方程组的解.

拔尖角度▶ 4 利用整体求值解实际应用问题

挑战·高分

例 11 [中考·台州]滴滴快车是一种便捷的出行工具，计价规则如下表：

计费项目	里程费	时长费	远途费
单价	1.8 元 / 公里	0.3 元 / 分钟	0.8 元 / 公里
注：车费由里程费、时长费、远途费三部分构成，其中里程费按行车的实际里程计算；时长费按行车的实际时间计算；远途费的收取方式为：行车里程在 7 公里以内（含 7 公里）不收远途费，超过 7 公里的，超出部分每公里收 0.8 元.			

小王与小张各自乘坐滴滴快车，行车里程分别为 6 公里与 8.5 公里，如果下车时两人所付车费相同，那么这两辆滴滴快车的行车时间相差（　　）

A.10 分钟　　B.13 分钟　　C.15 分钟　　D.19 分钟

解题秘方：设小王的行车时间为 x 分钟，小张的行车时间为 y 分钟，根据题意得出小王与小张各自的车费，由两者相等列出方程，通过化简求出时间差.

解：设小王的行车时间为 x 分钟，小张的行车时间为 y 分钟.

根据题意，得 $1.8\times6+0.3x=1.8\times8.5+0.3y+0.8\times(8.5-7)$.

∴ $10.8+0.3x=16.5+0.3y$，∴ $0.3(x-y)=5.7$，

∴ $x-y=19$，即这两辆滴滴快车的行车时间相差 19 分钟.

答案：D

详解

∵小王的行车里程=6公里<7公里，

∴小王的车费包括两部分：里程费和时长费.

∵小张的行车里程=8.5公里>7公里，

∴小张的车费包括三部分：里程费、时长费和远途费.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要有两个考点，一是二元一次方程（组）的解，考查的形式主要是找解和利用解求值；二是根据实际问题列二元一次方程（组），考查的形式一般都以填空、选择题为主，难度不大.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 二元一次方程组的解

例12 [中考·枣庄]若二元一次方程组$\begin{cases}x+y=3,\\3x-5y=4\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=a,\\y=b,\end{cases}$则$a-b=$（　　）

A.1　　B.3　　C.$-\frac{1}{4}$　　D.$\frac{7}{4}$

试题评析：本题考查了二元一次方程组的解和求式子的值，解题的关键是分析二元一次方程组中的方程系数特征与所求式子的关系.

解：把$\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$代入原方程组，得$\begin{cases}a+b=3,①\\3a-5b=4,②\end{cases}$

①+②，得$4a-4b=7$，

所以$4(a-b)=7$，所以$a-b=\frac{7}{4}$.

答案：D

解法提醒

建立以a、b为未知数的二元一次方程组模型后，可以利用解二元一次方程组的方法求出a、b的值（下节学），再求a-b的值；也可以观察方程组，将方程组中的两个方程相加或相减，得到要求的式子或要求式子的倍数，然后整体求值.

考法2 在实际问题中建立二元一次方程组的模型

例13 [中考·随州]小明到商店购买“五四青年节”活动奖品，购买20支铅笔和10本笔记本共需110元，但购买30支铅笔和5本笔记本只需85元. 设每支铅笔x元，每本笔记本y元，则可列方程组为（　　）

A.$\begin{cases}20x+30y=110\\10x+5y=85\end{cases}$　　B.$\begin{cases}20x+10y=110\\30x+5y=85\end{cases}$

C.$\begin{cases}20x+5y=110\\30x+10y=85\end{cases}$　　D.$\begin{cases}5x+20y=110\\10x+30y=85\end{cases}$

试题评析：本题考查了在实际问题中建立二元一次方程组模型，解题的关键是找出等量关系.

解：由题意，得$\begin{cases}20x+10y=110,\\30x+5y=85.\end{cases}$故选B.

答案：B

特别提醒

等量关系是建立二元一次方程组模型的主要依据，本题有两个等量关系：

①买20支铅笔的钱+买10本笔记本的钱=110元；

②买30支铅笔的钱+买5本笔记本的钱=85元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用二元一次方程的特殊解解决问题

例 14 [中考·龙东]为了丰富学生课外小组活动，培养学生动手操作能力，王老师让学生把 5 m 长的彩绳截成 2 m 或 1 m 长的彩绳，用来做手工编织，在不造成浪费的前提下，你有(　　)种不同的截法.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

试题评析：本题考查二元一次方程的特殊解问题，解题的关键是根据方程中两个未知数的特殊性来求方程的特殊解.

解：设截得 2 m 长的彩绳 x 根，截得 1 m 长的彩绳 y 根.

根据题意，得 $2x+y=5$，且 x，y 都是非负整数，

所以 $\begin{cases}x=0,\\y=5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

所以有 3 种不同的截法：

①截 2 m 长的彩绳 2 根，1 m 长的彩绳 1 根；

②截 2 m 长的彩绳 1 根，1 m 长的彩绳 3 根；

③截 1 m 长的彩绳 5 根.

答案：C

解法提醒

用列举法求二元一次方程的特殊解时注意两点：

- 紧扣解的特殊性，二元一次方程的解是成对出现的，即两个未知数的值都必须满足特殊的条件.
- 列举时，选定两个未知数中的一个按从小到大列举，求出对应的另一个未知数的值，直到另一个未知数不满足其特殊性为止.

两年模拟兵法

答案见 213 页

1. 有下列式子：① $3x+2y$；② $2(2-x)+3y+5=0$；③ $3x-4y=z$；④ $x+xy=1$；⑤ $4x=\dfrac{y-2}{4}$；⑥ $y^2+3y=5x$；⑦ $\dfrac{1}{x}+4y=4$，其中二元一次方程有(　　)

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

2. [中考·巴中]已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}ax-y=4,\\3x+by=4\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$ 则 $a+b$ 的值是(　　)

A.1　　B.2　　C.−1　　D.0

3. [中考·仙桃]把一根 9m 长的钢管截成 1m 长和 2m 长两种规格均有的短钢管，且没有余料，设某种截法中 1m 长的钢管有 a 根，a 的值有(　　)

A.3 种　　B.4 种　　C.5 种　　D.9 种

4. 在二元一次方程 $-\dfrac{1}{2}x+3y=2$ 中，当 $x=4$ 时，$y=$_____；当 $y=-1$ 时，$x=$_____.

5. 若关于 x，y 的方程 $2x^{3a-3}-2y^{b+1}=5$ 是二元一次方程，则 $a=$_____，$b=$_____.

6. [中考·北京]某活动小组购买了 4 个篮球和 5 个足球，一共花费了 435 元，其中篮球的单价比足球的单价多 3 元，求篮球的单价和足球的单价.设篮球的单价为 x 元，足球的单价为 y 元，依题意，可列方程组为_____.

7. [中考·湛江]请写出一个二元一次方程组_____，使它的解是 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

8. 若 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 是关于 x，y 的二元一次方程 $mx+ny=-2$ 的一个解，则 $6-2m+n$ 的值为____.

9. [中考·黔东南]已知 $\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}2x+y=6,\\x+2y=-3\end{cases}$ 的解，则 $a+b$ 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 已知方程组$\begin{cases}3x-(m-3)y^{|m-2|-2}=1,\\(m+1)x=-2\end{cases}$是二元一次方程组，求$m$的值.

11. 甲、乙二人解方程组$\begin{cases}mx+2y=-6,①\\2x-ny=-3,②\end{cases}$甲看错了方程①中的$m$，得到方程组的解为$\begin{cases}x=-3,\\y=-2;\end{cases}$乙看错了方程②中的$n$，得到方程组的解为$\begin{cases}x=-5,\\y=2.\end{cases}$试求$m^2+n^2+mn$的值.

12. 已知方程组$\begin{cases}2a-3b=13,\\3a+5b=30.9\end{cases}$的解是$\begin{cases}a=8.3,\\b=1.2,\end{cases}$求方程组$\begin{cases}2(x+2)-3(y-1)=13,\\3(x+2)+5(y-1)=30.9\end{cases}$的解.

13. [**中考·黄石**]一食堂需要购买盒子存放食物，盒子有A，B两种型号，单个盒子的容量和价格如下表，现有15升食物需要存放且要求每个盒子要装满，由于A型号盒子正做促销活动：购买三个及三个以上可一次性返现金4元，则购买盒子所需要的最少费用为多少元?

型号	A	B
单个盒子的容量/升	2	3
单价/元	5	6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 二元一次方程组的解法

核心知识
- 代入消元法
- 加减消元法
- 二元一次方程组的简单应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 代入消元法解二元一次方程组

1. 消元思想：

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为一元一次方程．先求出一个未知数，然后再求另一个未知数，这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做消元思想．


代入法解方程组

2. 代入消元法：

（1）**定义**：把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解，这种方法叫做代入消元法，简称代入法．

（2）**用代入消元法解二元一次方程组的一般步骤：**

步骤	具体做法	目的	注意事项
①变形	选取一个系数比较简单的二元一次方程变形，用含一个未知数的式子表示另一个未知数．	变形为 $y=ax+b$（或 $x=ay+b$）$(a,b$ 是常数，$a\neq 0)$ 的形式．	一般选未知数系数比较简单的方程变形．
②代入	把 $y=ax+b$（或 $x=ay+b$）代入另一个方程．	消去一个未知数，将二元一次方程组转化为一元一次方程．	变形后的方程只能代入另一个方程（或另一个方程变形后的方程）．
③求解	解消元后的一元一次方程．	求出一个未知数的值．	去括号时不能漏乘，移项时所移的项要变号．

提分·必记

特别提醒

- 将方程组中的一个二元一次方程写成用含一个未知数的式子表示另一个未知数的形式，是用代入法解二元一次方程组的前提和关键，其方法就是利用等式的性质将其变形为 $y=ax+b$（或 $x=ay+b$）的形式，其中 a，b 为常数，$a\neq 0$；
- 用含一个未知数的式子表示另一个未知数后，应代入另一个方程来解，否则只能得到一个恒等式，并不能求出方程组的解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续表

步骤	具体做法	目的	注意事项
④回代	把求得的未知数的值代入步骤①中变形后的方程.	求出另一个未知数的值.	一般代入变形后的方程.
⑤写解	把两个未知数的值用大括号联立起来.	表示为$\begin{cases}x=\cdots,\\y=\cdots\end{cases}$的形式.	用“{”将未知数的值联立起来.

考向▶利用代入消元法解二元一次方程组

例1 用代入法解下列方程组:

(1)$\begin{cases}2x+3y=-19,①\\x+5y=1;②\end{cases}$ (2)$\begin{cases}2x-3y=1,①\\\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{x+2}{3}.②\end{cases}$

解题秘方:紧扣用代入消元法解二元一次方程组的步骤解方程组.

解:(1)由②,得$x=1-5y$. ③

把③代入①,得$2(1-5y)+3y=-19$.

解这个方程,得$y=3$.

把$y=3$代入③,得$x=-14$.

所以这个方程组的解是$\begin{cases}x=-14,\\y=3.\end{cases}$

(2)将原方程组整理为$\begin{cases}2x-3y=1,③\\4x-3y=-5.④\end{cases}$

由③,得$3y=2x-1$. ⑤

把⑤代入④,得$4x-(2x-1)=-5$.

解这个方程,得$x=-3$.

把$x=-3$代入⑤,得$3y=2\times(-3)-1$.

解得$y=-\dfrac{7}{3}$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=-3,\\y=-\dfrac{7}{3}.\end{cases}$

知识▶2 加减消元法解二元一次方程组

1. 加减消元法的定义:

当二元一次方程组的两个方程中同一个未知数的系数互为相反数或相等时,把这两个方程的两边分别相加或相减,就能消去这个未知数,得到一个一元一次方程,这种方法叫做加减消元法,简称加减法.

提分·秘诀

解法提醒

1. 如果某个方程中有一个未知数的系数为±1,通常选择用这个方程的另一个未知数表示系数为±1的未知数.
2. 代入消元时,只能替换未知数,前面的系数保留,并且还要带上括号.

方法点拨

当二元一次方程组中的系数较复杂时,可先将方程组整理成标准形式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$其中$x$,$y$是未知数,其余字母为常数.

如果方程组中某一个未知数的系数成倍数关系或相同,那么可用整体代入法消去这个未知数再求解.

提分·必记

特别解读

1. 两个方程同一个未知数的系数的绝对值相等或成倍数关系时,解方程组应考虑用加减消元法;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 用加减消元法解二元一次方程组的一般步骤：

步骤	具体做法	目的	注意事项
①变形	根据绝对值较小的未知数（同一个未知数）的系数的最小公倍数，将方程的两边都乘以适当的数．	使某一个未知数在两个方程中的系数相等或互为相反数．	（1）选择消元对象：两个方程中，当某个未知数的系数相等或互为相反数或有倍数关系时，选择消去该未知数较简单； （2）把某个方程乘以一个数时，方程两边的每一项都要和这个数相乘．
②加减	两个方程中同一个未知数的系数互为相反数时，将两个方程相加，同一个未知数的系数相等时，将两个方程相减．	消去一个未知数，将二元一次方程组转化为一元一次方程．	（1）把两个方程相加（减）时，一定要把两个方程两边分别相加（减）； （2）应用减法消元时，注意符号的变化．
③求解	解消元后的一元一次方程．	求出一个未知数的值．	
④回代	把求得的未知数的值代入方程组中某个较简单的方程．	求出另一个未知数的值．	回代时选择系数较简单的方程．
⑤写解	把两个未知数的值用大括号联立起来．	表示为$\begin{cases}x=\cdots,\\y=\cdots\end{cases}$的形式．	用“{”将未知数的值联立起来．

2. 如果同一个未知数的系数的绝对值既不相等又不成倍数关系，我们应**设法将一个未知数的系数的绝对值转化为相等关系**；
3. 用加减法时，一般选择系数比较简单（同一个未知数的系数的绝对值相等或成倍数关系）的未知数作为消元对象．

核心考向▶利用加减消元法解二元一次方程组

类型1：利用加减消元法解二元一次方程组

题型1　系数相等或互为相反数

例2　用加减法解方程组：

$$\begin{cases}3x-7y=-1,①\\3x+7y=13.②\end{cases}$$

解题秘方：方程组的两个方程中，x的系数相同，y的系数互为相反数，这样可以把两个方程相加消去y，或者把两个方程相减消去x.

解：①＋②，得$6x=12$，解得$x=2$.

把$x=2$代入②，得$3\times2+7y=13$，解得$y=1$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

提分·秘诀

解法提醒

若方程组中某个未知数的系数的绝对值相等，则直接利用加减法求解．

另解

①－②，得$-14y=-14$，解得$y=1$.

把$y=1$代入①，得$3x-7\times1=-1$，解得$x=2$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　系数的绝对值成倍数关系

例 3　用加减法解方程组：

$$\begin{cases}8x+9y=73, & ①\\ 17x-3y=74. & ②\end{cases}$$

解题秘方：方程组的两个方程中，y 的系数的绝对值成倍数关系，方程②乘以 3 就可与方程①相加消去 y.

解：② × 3，得 $51x-9y=222$. ③

① + ③，得 $59x=295$，解得 $x=5$.

把 $x=5$ 代入①，得 $8\times5+9y=73$，解得 $y=\frac{11}{3}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=5,\\ y=\frac{11}{3}.\end{cases}$

加减法解方程组

解法提醒

方程组中任意一个未知数的系数的绝对值都不相等，但某个未知数的系数的绝对值成倍数关系，则其中一个方程乘以这个倍数，使这个未知数的系数的绝对值相等后再利用加减法求解.

题型 3　系数的绝对值既不相等又不成倍数关系

例 4　用加减法解方程组：

$$\begin{cases}2x+3y=3, & ①\\ 3x+2y=11. & ②\end{cases}$$

解题秘方：方程①和②中 x，y 的系数的绝对值既不相等又不成倍数关系，应取系数的绝对值的最小公倍数 6，可以先消去 x，也可以先消去 y.

解：① × 3，得 $6x+9y=9$. ③

② × 2，得 $6x+4y=22$. ④

③ − ④，得 $5y=-13$，解得 $y=-\frac{13}{5}$.

把 $y=-\frac{13}{5}$ 代入①，解得 $x=\frac{27}{5}$.

所以这个方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{27}{5},\\ y=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

解法提醒

方程组中任意一个未知数的系数的绝对值既不相等又不成倍数关系，可利用最小公倍数的知识，把两个方程都适当地乘以一个数，使某个未知数的系数的绝对值相等.

另解

① × 2，得 $4x+6y=6$. ⑤

② × 3，得 $9x+6y=33$. ⑥

⑥ − ⑤，得 $5x=27$，解得 $x=\frac{27}{5}$.

把 $x=\frac{27}{5}$ 代入①，

解得 $y=-\frac{13}{5}$.

所以这个方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{27}{5},\\ y=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

类型 2：利用加减消元法解决实际问题

例 5　[中考 · 吉林]被誉为“最美高铁”的长春至珲春城际铁路途经许多隧道和桥梁，其中隧道累计长度与桥梁累计长度之和为 342 km，隧道累计长度的 2 倍比桥梁累计长度多 36 km. 求隧道累计长度与桥梁累计长度.

解题秘方：紧扣等量关系“隧道累计长度 + 桥梁累计长度 = 342 km”和“2× 隧道累计长度 = 桥梁累计长度 +36 km”列方程组求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设隧道累计长度为 x km，桥梁累计长度为 y km.

依题意，得$\begin{cases}x+y=342,\\2x=y+36.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=126,\\y=216.\end{cases}$

答：隧道累计长度为 126 km，桥梁累计长度为 216 km.

解法提醒

解题的流程是找到题目中的等量关系，设未知数，构造二元一次方程组解决问题.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用特殊法解方程组

挑战·高分

例 6 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x-3y-2=0,①\\\dfrac{2x-3y+5}{7}+2y=9;②\end{cases}$ （2）$\begin{cases}\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2},①\\3x-2y=22.②\end{cases}$

解题秘方：（1）将 $2x-3y$ 看成一个整体，采用“整体代入”达到消元的目的；

（2）令 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=k$，将 x，y 用 k 表示，再代入另一个方程求解.

解：（1）由①得 $2x-3y=2$. ③

把③代入②，得 $\dfrac{2+5}{7}+2y=9$，解得 $y=4$.

把 $y=4$ 代入①，得 $2x-3\times4-2=0$，

解得 $x=7$.

所以这个方程组的解是$\begin{cases}x=7,\\y=4.\end{cases}$

（2）设 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{2}=k$，则 $x=5k$，$y=2k$.

将 $x=5k$，$y=2k$ 代入②，得 $15k-4k=22$，解得 $k=2$.

所以 $x=5k=10$，$y=2k=4$.

所以这个方程组的解为$\begin{cases}x=10,\\y=4.\end{cases}$

解法提醒

要注意观察两个方程中的共同部分，把它们看成一个整体，利用“整体思想”可以避繁就简地解决问题.

特别解读

当方程组中的一个方程出现如 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$（$a$，$b$ 为常数，且 $a\neq0$，$b\neq0$）或 $x:y=a:b$（a，b 为常数，且 $a\neq0$，$b\neq0$）的形式时，可以引入参数 k，用含 k 的式子分别表示 x，y，再代入另一个方程得到关于 k 的方程，解方程求出 k 的值后，即可得到方程组的解.

拔尖角度 2 利用方程组求多项式中字母系数的值

挑战·高分

例 7 在多项式 x^2+px+q 中，当 $x=-1$ 时，值为 -5；当 $x=3$ 时，值为 3，求 p，q 的值.

解题秘方：根据多项式的两对对应值列出方程组模型，求出待定字母 p，q 的值.

解：由题意，得$\begin{cases}(-1)^2-p+q=-5,\\3^2+3p+q=3.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}p=0,\\q=-6.\end{cases}$

方法点拨

本例根据多项式的值的定义，即由数值代替多项式中的字母计算所得的结果叫做多项式的值；用两组数值代入列出的方程组成方程组，求解得到所要求的字母系数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 3 利用方程组解的定义求字母系数的值

类型 1：方程组的解满足附加条件型

例 8 若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x+3y=k-3, & ①\\ x+2y=2k+1 & ②\end{cases}$ 的解互为相反数，求 k 的值.

解题秘方：把 k 看成已知数，解出方程组的解，根据方程组的解互为相反数，可以得到关于 k 的方程，解方程可求得 k 的值.

解：① − ② ×2，得 $-y=-3k-5$，

解得 $y=3k+5$.

把 $y=3k+5$ 代入①，

解得 $x=-4k-9$.

因为方程组的解互为相反数，

所以 $3k+5+(-4k-9)=0$，

解得 $k=-4$.

类型 2：二元一次方程组与二元一次方程同解型

例 9 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x+2y=3m,\\ x-y=9m\end{cases}$ 的解也是方程 $3x+2y=17$ 的解，求 m 的值.

解题秘方：将待定字母 m 看成已知数，解出方程组的解，然后将方程组的解代入二元一次方程中，转化成以 m 为未知数的一元一次方程，求出 m 的值.

解：**方法一**：$\begin{cases}x+2y=3m, & ①\\ x-y=9m. & ②\end{cases}$

① − ②，得 $3y=-6m$，即 $y=-2m$.

把 $y=-2m$ 代入①，得 $x-4m=3m$，

解得 $x=7m$.

把 $x=7m$，$y=-2m$ 代入 $3x+2y=17$，

得 $21m-4m=17$. 解得 $m=1$.

方法二：$\begin{cases}x+2y=3m, & ①\\ x-y=9m. & ②\end{cases}$

① ×3 − ②，得 $2x+7y=0$.

$2x+7y=0$ 与 $3x+2y=17$ 组成的新方程组为 $\begin{cases}2x+7y=0,\\ 3x+2y=17.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=7,\\ y=-2.\end{cases}$

把 $\begin{cases}x=7,\\ y=-2\end{cases}$ 代入①，

得 $7-4=3m$，解得 $m=1$.

挑战·高分

方法点拨

求二元一次方程组中的字母系数的一般步骤：

1. 把字母系数看成已知数并解方程组；
2. 根据方程组的解满足的条件，得到关于字母系数的方程；
3. 解方程求得字母系数的值.

技巧点拨

解方程组的消元策略很多，这主要是由解方程组时的消元策略的多样性造成的. 例如，在解此题时，可以把 m 当成已知数，首先用含 m 的整式表示 x，y，然后把 x，y 的值代入 $3x+2y=17$，得到一个关于 m 的一元一次方程，再解这个方程；也可以先在方程组中消去 m，得到一个关于 x，y 的二元一次方程，再将这个方程与方程 $3x+2y=17$ 组成一个新的方程组，解这个方程组求出 x，y 的值，最后求出 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：两个二元一次方程组同解型

例 10 已知方程组$\begin{cases}2x+5y=-6,\\ ax-by=-4\end{cases}$和方程组$\begin{cases}3x-5y=16,\\ bx+ay=-8\end{cases}$的解相同，求$(2a+b)^{2020}$的值.

解题秘方：本题的解题技巧在于对二元一次方程组的解的理解，由于题目中的四个方程有公共解，故这个公共解必然满足方程组$\begin{cases}2x+5y=-6,\\ 3x-5y=16.\end{cases}$由此即可求得两个方程组的公共解，进而求得方程组中的字母参数a，b的值.

解：依题意，得$\begin{cases}2x+5y=-6,\ ①\\ 3x-5y=16.\ ②\end{cases}$

①＋②，得$5x=10$，解得$x=2$.

把$x=2$代入①，得$2\times2+5y=-6$，解得$y=-2$.

所以$\begin{cases}x=2,\\ y=-2.\end{cases}$

又联立$ax-by=-4$，$bx+ay=-8$，得方程组$\begin{cases}ax-by=-4,\\ bx+ay=-8.\end{cases}$

将$\begin{cases}x=2,\\ y=-2\end{cases}$代入，则有$\begin{cases}2a+2b=-4,\\ -2a+2b=-8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-3.\end{cases}$

所以$(2a+b)^{2020}=(2\times1-3)^{2020}=1$.

拔尖角度▸ ④ 利用代入消元法求非整式式子的值

挑战·高分

例 11 已知$\begin{cases}a+2b=3c,\ ①\\ 2a-3b=-8c,\ ②\end{cases}$求$\dfrac{3a+4b+c}{4a-3b+2c}$的值.（$a$，$b$，$c\neq0$，且$4a-3b+2c\neq0$）

解题秘方：把方程组中a，b当成未知数，c当成已知数，将方程组视为关于a，b的二元一次方程组，用含c的式子表示a，b，再代入所求式子即可求解.

解：①$\times2-$②，得$7b=14c$，即$b=2c$.

把$b=2c$代入①，得$a+2\times2c=3c$，则$a=-c$.

把$a=-c$，$b=2c$代入所求式子，得

$$\frac{3a+4b+c}{4a-3b+2c}=\frac{3\times(-c)+4\times2c+c}{4\times(-c)-3\times2c+2c}=-\frac{3}{4}.$$

解法提醒

当几个二元一次方程有公共解或两个二元一次方程组同解时，可利用两个已知的二元一次方程组成方程组，并求出方程组的解，然后利用这个解得到关于字母参数的方程(组)，进而求得字母参数的值.

技巧点拨

如果方程组的两个方程中含有三个字母，一般把其中两个字母看成未知数，另一个字母看成已知数，把这个含有三个字母的方程组视为二元一次方程组求解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 解二元一次方程组是中考的重要考点，题型呈多样化. 解决此类问题的关键是掌握代入消元法和加减消元法的一般步骤，并能建立二元一次方程组的模型解决简单的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 解二元一次方程组

例 12 [中考·天津]方程组$\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$的解是(　　)

A. $\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$　　C. $\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$

试题评析：本题考查了二元一次方程组的解法，掌握加减消元法的步骤是解题的关键.

解：$\begin{cases}x+y=10,①\\2x+y=16.②\end{cases}$

②－①得 $x=6$,

将 $x=6$ 代入①得 $6+y=10$，解得 $y=4$.

∴方程组的解为$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$

答案：A

考法 2 利用非负数性质建立二元一次方程组的模型

例 13 [中考·绵阳]若 $|a-b-1|+(b-2a)^2=0$，求 a，b 的值.

试题评析：本题主要考查建立二元一次方程组模型解决问题，解题的关键是掌握非负数的性质.

解：因为 $|a-b-1|\geqslant 0$，$(b-2a)^2\geqslant 0$,

且 $|a-b-1|+(b-2a)^2=0$,

所以$\begin{cases}a-b-1=0,\\b-2a=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

考法 3 二元一次方程组的简单应用

例 14 在一个停车场上，停了小轿车和摩托车共 32 辆，这些车一共有 108 个轮子，小轿车和摩托车各有多少辆？试用列方程(组)解应用题的方法求出问题的解.

试题评析：本题考查了二元一次方程组的应用，解题的关键是弄清题意，找到合适的等量关系，列出方程组并熟练解方程组.

解：设摩托车有 x 辆，小轿车有 y 辆.

依题意，得$\begin{cases}x+y=32,\\2x+4y=108,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\y=22.\end{cases}$

答：小轿车有 22 辆，摩托车有 10 辆.

冲刺·满分

另解

本题由于是选择题，可以根据二元一次方程组的解的定义进行代入**验证**，如由 $x+y=10$，可直接排除 B、C 选项，再由 $2x+y=16$，很快就能确定 A 选项正确.

解法提醒

我们已经学习了两种非负数，① $|a|\geqslant 0$；② $a^2\geqslant 0$. 若出现几个非负数的和为零，则说明这几个非负数的值都等于 0，此时可得一个方程组，解方程组即可求得未知数的值.

题意解读

"32 辆"：即小轿车和摩托车共 32 辆；

"108 个轮子"：1 辆摩托车有 2 个轮子，1 辆小轿车有 4 个轮子，即摩托车的辆数×2+小轿车的辆数×4=108.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

1. 对于方程 $3x-2y-5=0$，用含 y 的式子表示 x，应是（　　）

A. $y=6x-10$　　B. $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

C. $x=\frac{1}{3}(2y+5)$　　D. $x=6y+15$

2. [中考·河北]利用加减消元法解方程组 $\begin{cases}2x+5y=-10, & ①\\ 5x-3y=6, & ②\end{cases}$ 下列做法正确的是（　　）

A. 要消去 y，可以将① $\times 5+$② $\times 2$

B. 要消去 x，可以将① $\times 3+$② $\times(-5)$

C. 要消去 y，可以将① $\times 5+$② $\times 3$

D. 要消去 x，可以将① $\times(-5)+$② $\times 2$

3. [中考·菏泽]已知 $\begin{cases}x=3,\\ y=-2\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}ax+by=2,\\ bx+ay=-3\end{cases}$ 的解，则 $a+b$ 的值是（　　）

A. -1　　B. 1　　C. -5　　D. 5

4. 若关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}4x+3y=1,\\ ax-(a-1)y=3\end{cases}$ 的解互为相反数，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知单项式 $-3x^{m-1}y^3$ 与 $\frac{5}{2}x^ny^{m+n}$ 是同类项，那么 m，n 的值分别是_____.

6. 已知 $|x-2y|+|5x-7y-2|=0$，则 $x=$_____，$y=$_____.

7. 已知式子 $ax+by$，当 $x=5$，$y=2$ 时，它的值为 7；当 $x=8$，$y=5$ 时，它的值为 4，则 $a=$_____，$b=$_____.

8. 对于有理数 x，y，定义新运算：$x*y=ax+by-1$，其中 a，b 是常数. 已知 $1*2=8$，$(-3)*3=-1$，则 $4*(-5)=$_____.

9. [中考·眉山]已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x+2y=k-1,\\ 2x+y=5k+4\end{cases}$ 的解满足 $x+y=5$，则 k 的值为_____.

【导学号：3572327】

10. 用适当的方法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=0,\\ 3x+4y=6;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y+1}{3}=1,\\ 3x+2y=10.\end{cases}$

11. 若方程组 $\begin{cases}4x-y=5,\\ ax+by=-1\end{cases}$ 与 $\begin{cases}3x+y=9,\\ 3ax-4by=18\end{cases}$ 的解相同，求 a，b 的值.

12. [中考·淮安]某公司用火车和汽车运输两批物资，具体运输情况如下表所示：

	所用火车车皮数量（节）	所用汽车数量（辆）	运输物资总量（吨）
第一批	2	5	130
第二批	4	3	218

试问每节火车车皮和每辆汽车平均各装物资多少吨?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*7.3 三元一次方程组及其解法

核心知识

- 三元一次方程组
- 三元一次方程组的解法
- 三元一次方程组的简单应用

知识链接

二元一次方程组 ← 解法 消元 — 三元一次方程组 — 应用 → 建立三元一次方程组的模型

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三元一次方程组

1. 三元一次方程： 含有三个未知数，并且含未知数项的次数都是 1，像这样的方程叫做三元一次方程．

必备条件：（1）是整式方程；（2）含三个未知数；（3）是一次方程．

2. 三元一次方程组： 含有三个未知数，每个方程中含未知数项的次数都是 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做三元一次方程组．

必备条件：（1）是整式方程；（2）含三个未知数；（3）三个方程；（4）都是一次方程．

提分·必记

特别警示

易误认为三元一次方程组中每个方程必须是三元一次方程，组成三元一次方程组中的某个方程可以是一元一次方程或二元一次方程，或三元一次方程．实际上只需方程组中共有三个未知数即可．

拨考向 利用三元一次方程组的定义进行识别

例 1 下列方程组中，是三元一次方程组的是（　　）

A. $\begin{cases} x^2-y=1 \\ y+z=0 \\ xz=2 \end{cases}$　B. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=1 \\ \dfrac{1}{y}+z=2 \\ \dfrac{1}{z}+x=6 \end{cases}$　C. $\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a-c=2 \\ b-d=3 \end{cases}$　D. $\begin{cases} m+n=18 \\ n+t=12 \\ t+m=0 \end{cases}$

解题秘方： 紧扣三元一次方程组的必备条件进行识别．

解： A 选项中，方程 $x^2-y=1$ 与 $xz=2$ 中有含未知数的项的次数为 2 的，不符合三元一次方程组的定义，故 A 选项不是；

B 选项中，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{z}$ 不是整式，故 B 选项不是；

C 选项中，方程组含有四个未知数，故 C 选项不是；

D 选项符合三元一次方程组的定义．

答案： D

提分·秘诀

方法点拨

识别三元一次方程组时，先看组成方程组的三个方程是不是整式方程，再看方程组是否含有三个未知数，最后看含未知数项的次数是否都是 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 解三元一次方程组

1. 解三元一次方程组的基本思路：

通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程，用简图表示为：

三元一次方程组 —消元→ 二元一次方程组 —消元→ 一元一次方程

2. 求解方法： 加减消元法和代入消元法.

3. 解三元一次方程组的一般步骤：

（1）**消元**：利用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，得到关于另外两个未知数的二元一次方程组；

（2）**求解**：解这个二元一次方程组，求出两个未知数的值；

（3）**回代**：将求得的两个未知数的值代入原方程组中的一个系数比较简单的方程，得到一个一元一次方程；

（4）**求解**：解这个一元一次方程，求出最后一个未知数的值；

（5）**写解**：将求得的三个未知数的值用符号“{”合写在一起.

提分·必记

特别解读

解三元一次方程组时，消去哪个“元”都是可以的，得到的结果都一样，我们应该根据方程组中各方程的特点选择最为简便的解法，灵活地确定消元步骤和消元方法，不要盲目消元.

技考向▶ 利用解三元一次方程组的方法步骤解三元一次方程组

例 2 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} x+3y+2z=2, & ① \\ 3x+2y-4z=3, & ② \\ 2x-y=7; & ③ \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 2x+3y+z=6, & ① \\ x-y+2z=-1, & ② \\ x+2y-z=5. & ③ \end{cases}$

解题秘方：（1）方程 $2x-y=7$ 是二元一次方程，可以将另外两个方程结合起来消去 z，再和 $2x-y=7$ 联立方程组求解；（2）三个方程中，x 和 z 的系数的绝对值的最小公倍数都是 2，y 的系数的绝对值的最小公倍数是 6，可以消去 x 或 z，再联立方程组求解.

解：（1）① ×2+ ②，得 $5x+8y=7$. ④

③与④组成二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-y=7, \\ 5x+8y=7. \end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

把 $x=3$，$y=-1$ 代入①，得 $3+3\times(-1)+2z=2$，所以 $z=1$.

所以这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$

（2）① + ③，得 $3x+5y=11$. ④

③ ×2+ ②，得 $3x+3y=9$，即 $x+y=3$. ⑤

④与⑤组成二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ x+y=3. \end{cases}$

提分·秘诀

另解

由③得 $y=2x-7$. ④

把④代入①，得 $7x+2z=23$. ⑤

把④代入②，得 $7x-4z=17$. ⑥

⑤与⑥组成二元一次方程组 $\begin{cases} 7x+2z=23, \\ 7x-4z=17. \end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases} x=3, \\ z=1. \end{cases}$

把 $x=3$ 代入④，得 $y=-1$.

所以这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解这个方程组，得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

把$x=2$，$y=1$代入③，得$2+2-z=5$，所以$z=-1$.

所以这个三元一次方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1.\end{cases}$

另解

①−②×2，得$5y-3z=8$.④

①−③×2，得$-y+3z=-4$.⑤

④与⑤组成二元一次方程组$\begin{cases}5y-3z=8,\\-y+3z=-4.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}y=1,\\z=-1.\end{cases}$

把$y=1$，$z=-1$代入③，得$x+2+1=5$，所以$x=2$.

所以这个三元一次方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1.\end{cases}$

技巧点拨：解三元一次方程组的技巧

（1）当方程组中有一个方程是二元一次方程时，先将另外两个方程结合起来，消去已有二元一次方程中没有的未知数，得到一个新的二元一次方程，再与原有的二元一次方程联立成二元一次方程组求解.

（2）当方程组中的方程都是三元一次方程时，选择首次消去的未知数的方法如下：①若方程组中有一个方程的某个未知数的系数是1或−1，则可选择消去此未知数；②若三个方程中同一个未知数的系数相等或互为相反数，则可选择消去此未知数；③若三个方程中同一个未知数的系数的绝对值成整数倍关系，则可选择消去此未知数.

点知识▸3 列三元一次方程组解决问题

列三元一次方程组解决实际问题的步骤：

（1）审清题意，找出能够表达应用题全部含义的三个等量关系；

（2）设出未知数；

（3）根据等量关系列出方程，建立方程组；

（4）解方程组求出未知数的值；

（5）检验所求的未知数的值是否为所列方程组的解，是否符合实际问题；

（6）写出答案.

提分·必记

特别解读

- 一般来说，设几个未知数，就应列出几个方程并组成方程组；
- “设”“答”两步都要写清单位名称，应该注意单位是否统一.

拔考向▸利用三元一次方程组解决问题

类型1：利用三元一次方程组解决整式值的问题

例3 在等式$y=ax^2+bx+c$中，当$x=-1$时，$y=2$；当$x=2$时，$y=8$；当$x=5$时，$y=158$，求a，b，c的值.

解题秘方：将三对对应值分别代入等式中，建立以a，b，c为未知数的三元一次方程组.

提分·秘诀

方法点拨

对于一个含待定系数的式子，**有几个待定的系数，就必须有几对对应值，列出几个方程**，组成一个方程组，求出待定系数的值.

解：根据题意，得$\begin{cases}a-b+c=2, & ①\\4a+2b+c=8, & ②\\25a+5b+c=158. & ③\end{cases}$

详解

$\begin{cases}2=a\times(-1)^2+b\times(-1)+c,\\8=a\times2^2+b\times2+c,\\158=a\times5^2+b\times5+c.\end{cases}$

②−①，得$3a+3b=6$，即$a+b=2$.④

③−①，得$24a+6b=156$，即$4a+b=26$.⑤

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

④与⑤组成二元一次方程组$\begin{cases}a+b=2,\\4a+b=26,\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}a=8,\\b=-6.\end{cases}$

把 $a=8$，$b=-6$ 代入①，

得 $8-(-6)+c=2$，所以 $c=-12$.

因此$\begin{cases}a=8,\\b=-6,\\c=-12,\end{cases}$ 即 a，b，c 的值分别为 8，-6，-12.

类型 2：利用三元一次方程组解决实际问题

例 4 某汽车在相距 70 km 的甲、乙两地往返行驶，行驶中有一坡度均匀的小山. 该汽车从甲地到乙地需要 2.5 h，从乙地到甲地需要 2.3 h. 假设该汽车在平路、上坡路、下坡路的行驶过程中时速分别是 30 km，20 km，40 km，则从甲地到乙地的过程中，上坡路、平路、下坡路的长度各是多少？

解题秘方：题中有三个等量关系：①上坡路长度 + 平路长度 + 下坡路长度 =70 km；②从甲地到乙地的过程中，上坡时间 + 平路时间 + 下坡时间 =2.5 h；③从乙地到甲地的过程中，上坡时间 + 平路时间 + 下坡时间 =2.3 h.

解：设从甲地到乙地的过程中，上坡路、平路、下坡路的长度分别是 x km，y km，z km.

由题意，得$\begin{cases}x+y+z=70,\\\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{40}=2.5,\\\dfrac{z}{20}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{x}{40}=2.3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=12,\\y=54,\\z=4.\end{cases}$

答：从甲地到乙地的过程中，上坡路的长度是 12 km，平路的长度是 54 km，下坡路的长度是 4 km.

详解

整理，得

$\begin{cases}x+y+z=70,①\\6x+4y+3z=300,②\\3x+4y+6z=276,③\end{cases}$

② − ① ×4 得

$2x-z=20$，④

② − ③，得 $3x-3z=24$，

即 $x-z=8$，⑤

④与⑤组成二元一次方程组$\begin{cases}2x-z=20,\\x-z=8,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=12,\\z=4.\end{cases}$

将 $x=12$，$z=4$ 代入①，得 $y=54$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=12,\\y=54,\\z=4.\end{cases}$

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用特殊法解三元一次方程组

挑战·高分

类型 1：轮换系数型三元一次方程组的解法（整体代入法）

例 5 解方程组：$\begin{cases}x+y=1,①\\y+z=6,②\\z+x=3.③\end{cases}$

解题秘方：方程组的各个方程中所含未知数的个数相等，且未知数的系数都是 1，如果将三个方程相加，那么可得 $x+y+z=5$，用 $x+y+z=5$ 分别减去每个方程，可以得到方程组的解.

技巧点拨

此题运用整体代入法得到方程组的解，这是一种比较简单的求解轮换系数型三元一次方程组的方法. 实际上此题也可以先用方程①②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：①＋②＋③，得 $2(x+y+z)=10$，即 $x+y+z=5$. ④

由④－①，得 $z=4$. 由④－②，得 $x=-1$.

由④－③，得 $y=2$.

所以这个三元一次方程组的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\\z=4.\end{cases}$

消去 y，把所得到的方程和③组成二元一次方程组求解.

类型 2：连等型三元一次方程组的解法（参数法）

例 6 解方程组：$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5},\ ①\\x-2y+3z=22.\ ②\end{cases}$

解题秘方：因为方程①是连等形式，所以可以根据其特点令其等于一个常数 k，直接将三元转化为一元求解.

技巧点拨

此题运用参数法，先将连等方程中的未知数用参数表示，再求解. 当方程组中含有连等式或连比时，通常采用设参数法达到消元的目的.

解：设 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}=k$，所以 $x=2k$，$y=3k$，$z=5k$.

把它们代入方程②，整理，得 $11k=22$，解得 $k=2$.

所以 $x=4$，$y=6$，$z=10$.

故这个方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=6,\\z=10.\end{cases}$

拔尖角度▸ 2 利用三元一次方程组解决在非负数中的求值问题

挑战·高分

例 7 若 $|x-3y+5|+|3x+y-5|+(x+y-3z)^2=0$，求 x，y，z 的值.

解题秘方：根据“如果几个非负数之和为零，那么这几个非负数都为零”可得到一个三元一次方程组，解方程组即可求得 x，y，z 的值.

方法点拨

当几个非负数的和为 0 时，则每一个非负数都为 0，这为建立方程组提供了等量关系.

解：由题意，得 $\begin{cases}x-3y+5=0,\\3x+y-5=0,\\x+y-3z=0.\end{cases}$

解这个三元一次方程组，得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=1.\end{cases}$

则 x，y，z 的值分别是 1，2，1.

拔尖角度▸ 3 利用三元一次方程组解实际生活中的求整数解问题

挑战·高分

例 8 在中国古代数学著作《张丘建算经》（约公元 5 世纪）里，有一道著名的“百鸡问题”：今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一. 凡百钱买百鸡，问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何？（三种鸡都买）

解题秘方：待求的未知数有三个，而题目中的等量关系只有两个，即“百钱”与“百鸡”. 由于鸡的只数是正整数，因此本题可利用正整数的特点求方程组的解.

译题

本题的大意是：公鸡 1 只值 5 钱，母鸡 1 只值 3 钱，3 只鸡雏值 1 钱，如果用 100 钱买 100 只鸡，公鸡、母鸡和鸡雏各买多少只？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设鸡翁、鸡母、鸡雏分别买 x 只、y 只、z 只．根据题意，得

$$\begin{cases} x+y+z=100, & ① \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100. & ② \end{cases}$$

② $\times 3-$ ①，得 $14x+8y=200$，即 $7x+4y=100$，

故 $y=\dfrac{100-7x}{4}=25-\dfrac{7}{4}x$.

因为 x，y 均为正整数，所以 x 的取值只能为 4，8，12.

若 $x=4$，则 $y=18$，$z=78$；

若 $x=8$，则 $y=11$，$z=81$；

若 $x=12$，则 $y=4$，$z=84$.

所以方程组的正整数解为 $\begin{cases} x=4, \\ y=18, \\ z=78 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=8, \\ y=11, \\ z=81 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12, \\ y=4, \\ z=84. \end{cases}$

答：鸡翁买 4 只，鸡母买 18 只，鸡雏买 78 只或鸡翁买 8 只，鸡母买 11 只，鸡雏买 81 只或鸡翁买 12 只，鸡母买 4 只，鸡雏买 84 只．

技巧点拨

求三元一次方程组特殊解的方法：

可类比求二元一次方程特殊解的方法，即在把方程组转化为用一个未知数表示另一个未知数的形式之后，利用方程组特殊解的特点，尽量缩小未知数可能值的取值范围，然后再通过具体计算得到方程组的特殊解．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容为选学内容，在中考中一般都不单独考查，但解三元一次方程组在九年级求二次函数的表达式中经常用到，故必须要掌握．考查的方式一般只有解三元一次方程组和三元一次方程组的实际应用．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 三元一次方程组的应用

例 9 [中考·六盘水]为确保信息安全，在传输时往往需加密，当发送方发出一组密码 a，b，c 时，接收方对应收到的密码为 A，B，C. 双方约定 $A=2a-b$，$B=2b$，$C=b+c$，例如当发出 1，2，3 时，收到 0，4，5.

（1）当发送方发出一组密码 2，3，5 时，接收方收到的密码是多少？

（2）当接收方收到一组密码 2，8，11 时，发送方发出的密码是多少？

试题评析：本题考查利用三元一次方程组解决实际问题，解题的关键是找出题目中的等量关系，列出方程组．

解：（1）由题意得 $A=2\times 2-3=1$，$B=2\times 3=6$，$C=3+5=8$，

答：接收方收到的密码是 1，6，8.

（2）由题意得 $\begin{cases} 2a-b=2, \\ 2b=8, \\ b+c=11. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=4, \\ c=7. \end{cases}$

答：发送方发出的密码是 3，4，7.

解法提醒

本题的等量关系就是找准对应关系；

第(1)问是已知 $a=2$，$b=3$，$c=5$，求 A，B，C 的值；

第(2)问是已知 $A=2$，$B=8$，$C=11$，求 a，b，c 的值．

两者的对应关系都是 $A=2a-b$，$B=2b$，$C=b+c$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见215页

1. 下列方程是三元一次方程的是（　　）

A.$x+3y=\frac{1}{7}z+3$　　B.$xy+z=8$

C.$y+3z=-7$　　D.$xy+xz=11$

2. 下列方程组是三元一次方程组的是（　　）

A.$\begin{cases}x+y-z=2\\4x-2yz=8\end{cases}$　　B.$\begin{cases}x+y=2\\4x-3y=8\end{cases}$

C.$\begin{cases}x+y=2\\y+z=8\\m+z=6\end{cases}$　　D.$\begin{cases}x+y-2z=2\\3x-y+z=9\\x+y-z=7\end{cases}$

3. 已知$x+2y+3z=54$，$3x+y+2z=47$，$2x+y+z=31$，那么$x+y+z$的值是（　　）

A.23　　B.24　　C.25　　D.26

4. 已知单项式$-8a^{3x+y+z}b^{12}c^{x+y+z}$与$-2a^{42}b^{2x-y}c^{4x}$是同类项，则$x=$_____，$y=$_____，$z=$_____.

5. 已知ax^2+bx+c，当$x=-1$时，其值为4；当$x=1$时，其值为8；当$x=2$时，其值为25，则当$x=3$时，其值为_____.

6. 已知$xyz\neq 0$，且x，y，z满足方程组$\begin{cases}4x-3y-6z=0,\\x+2y-7z=0,\end{cases}$则$\frac{x-y+z}{x+y+z}$的值为_____.

7. 巧解下列方程组：

(1)$\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5},\\2a+b+3c=88;\end{cases}$

(2)$\begin{cases}x+y=1,\\y+z=2,\\z+x=3.\end{cases}$

8. 某车间共有职工63人，加工一件产品需要三道工序，平均每人每天在第一道工序里能加工300件，在第二道工序里能加工500件，在第三道工序里能加工600件，为使每天能生产出最多的产品，应如何安排各工序里的人数？

9. 某学校为了教学需要，特派采购员去购买教学用具，已知购买五种教学用具A_1，A_2，A_3，A_4，A_5的件数和总钱数如下表：

	件数					总钱数（元）
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
第一次购买	1	3	4	5	6	1 992
第二次购买	1	5	7	9	11	2 984

那么，购买每种教学用具各一件共需多少元？

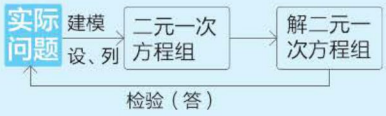
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.4 实践与探索

核心知识

- 列方程组解决实际问题的步骤
- 几种常见的应用类型
- 利用二元一次方程组进行方案设计

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 列二元一次方程组解应用题的基本步骤

1. 基本思想方法：

（1）列方程组解应用题是把“未知”转化成“已知”的过程；它的关键是把未知量与已知量联系起来，找出题目中的等量关系列方程组.

（2）一般情况下，有几个未知量就必须列出几个方程，所列方程必须满足：①方程两边表示的是同类量；②同类量的单位要统一；③方程两边的数值要相等.

2. 列二元一次方程组解应用题的一般步骤：

审→设→列→解→检→答

（1）**审**：审清题意，找出已知量、未知量及等量关系；

（2）**设**：直接或间接设出未知数；

（3）**列**：根据等量关系列出方程组；

（4）**解**：解这个方程组，求出未知数的值；

（5）**检**：检验所求的未知数的值是否为所列方程组的解，是否符合实际问题；

（6）**答**：写出答案.

提分·必记

特别解读

1. 一般设几个未知数就列几个方程；
2. 设未知数和写答案时，都要写清单位名称.

拨考向▸ 利用列二元一次方程组解应用题的基本步骤解应用题

例 1 某船的载质量为 300 吨，容积为 1 200 立方米，现有甲、乙两种货物要运，其中甲种货物每吨体积为 6 立方米，乙种货物每吨体积为 2 立方米，要充分利用这艘船的载质量和容积，甲、乙两种货物应各装多少吨？

解题秘方：分析题目中已知量和未知量，找准题目中的等量关系，列出方程组解决问题.

已知量：（1）甲种货物每吨体积为 6 立方米；（2）乙种货物每吨体积为 2 立方米；（3）船的载质量为 300 吨；（4）船的容积为 1 200 立方米.

提分·秘诀

解法提醒

- 列方程组解应用题的关键是准确地找出题中的等量关系，正确地列出方程组.
- 找等量关系的方法：
  (1) 抓住题目中的关键词，常见的关键词有：“比”“是”“等于”等；
  (2) 根据常见的数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

未知量：甲、乙两种货物应装的质量各为多少吨．若以 x，y 表示它们的吨数，则甲种货物的体积为 $6x$ 立方米，乙种货物的体积为 $2y$ 立方米．

等量关系："要充分利用这艘船的载质量和容积"的意思是"货物的总质量等于船的载质量"且"货物的总体积等于船的容积"，即：

$$\underset{\downarrow\ x}{\text{甲种货物质量}}+\underset{\downarrow\ y}{\text{乙种货物质量}}=\underset{\downarrow\ 300}{\text{船的载质量}};$$

$$\underset{\downarrow\ 6x}{\text{甲种货物的体积}}+\underset{\downarrow\ 2y}{\text{乙种货物的体积}}=\underset{\downarrow\ 1\,200}{\text{船的容积}}.$$

解：设甲种货物应装 x 吨，乙种货物应装 y 吨．

由题意，得$\begin{cases}x+y=300,\\6x+2y=1\,200,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=150,\\y=150.\end{cases}$

答：甲、乙两种货物应各装 150 吨．

量关系，如体积公式、面积公式等，找等量关系；

(3)挖掘题目中的隐含条件；

(4)借助列表格、画线段示意图等方法找等量关系．

点知识▸ 2 列方程组解应用题的常见题型

根据在实际问题中等量关系的不同类型，归纳出应用题几种常见题型：

（1）和、差、倍、分问题；

（2）数字问题；

（3）配套问题；

（4）销售问题；

（5）行程问题；

（6）百分比问题；

（7）古代算术问题；

（8）图形面积问题．

提分·必记

特别提醒

- 不同类型的问题中都有各自的代表性词语，如配套问题中的"配套"，销售问题中的"售价""标价""折扣"等等．
- 不同类型的问题中都有不同的等量关系．

拔考向▸ 常见类型应用题的解法

题型 1：和、差、倍、分问题

例 2 某中学七年级甲、乙两班共有 93 人，其中参加数学课外兴趣小组的共有 27 人，已知甲班有 $\frac{1}{4}$ 的学生、乙班有 $\frac{1}{3}$ 的学生参加数学课外兴趣小组，求这两个班各有多少人．

解题秘方：紧扣人数之间的数量关系，关键是和、差、倍、分关系，建立已知量与未知量的等量关系．

解：设甲班有 x 人，乙班有 y 人，根据题意，得$\begin{cases}x+y=93,\\\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=27,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=48,\\y=45.\end{cases}$ 答：甲班有 48 人，乙班有 45 人．

提分·秘诀

方法点拨

设未知数时，一般是求什么，设什么，并且所列方程的个数与未知数的个数相等．

解和、差、倍、分问题的应用题，要抓住题中反映数量关系的关键字或词：和、差、倍、几分之几、比、大、小、多、少、增加、减少等，明确各种反映数量关系的关键字或词的含义．

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型 2：数字问题

例 3 有一个三位数，现将最左边的数字移到最右边，则比原来的数小 45；又知原百位数字的 9 倍比原三位数去掉百位数字后的两位数小 3，求原三位数.

解题秘方：设出数位上的数字，利用数位上的数字表示出数，根据题目中的数量关系列出方程组.

解：设原百位数字为 x，原三位数去掉百位数字后的两位数为 y，

由题意得$\begin{cases}9x=y-3,\\10y+x=100x+y-45,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\y=39.\end{cases}$ 则 $4\times100+39=439$.

答：原三位数为 439.

技巧点拨：利用方程组解决数字问题时，一般不直接设这个数，而是设这个数的数位上的数字，再根据数的表示方法表示出这个数.

题型 3：配套问题

例 4 某服装厂生产一批某种款式的秋装，已知每 2 m 的某种布料可做衣身 3 个或衣袖 5 只，现计划用 132 m 这种布料生产这批秋装（不考虑布料的损耗），应分别用多少布料才能使做的衣身和衣袖恰好配套？

解题秘方：紧扣配套规则列方程，如本题衣身与衣袖的数量比是 1 ∶ 2.

解：设用 x m 布料做衣身，用 y m 布料做衣袖才能使做的衣身和衣袖恰好配套.

根据题意，得$\begin{cases}x+y=132,\\\dfrac{3}{2}x\times2=\dfrac{5}{2}y,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=60,\\y=72.\end{cases}$

答：用 60 m 布料做衣身，用 72 m 布料做衣袖才能使做的衣身和衣袖恰好配套.

题型 4：销售问题

例 5 某商场购进甲、乙两种商品后，甲商品加价 50%、乙商品加价 40% 作为标价，适逢元旦，商场举办促销活动，甲商品打八折销售，乙商品打八五折销售. 某顾客购买甲、乙商品各 1 件，共付款 538 元，已知商场共盈利 88 元，求甲、乙两种商品的进价各是多少元.

解题秘方：紧扣利润问题中，每个量的意义及各个量之间数量关系列出方程组，解决问题.

解：设甲商品的进价为 x 元，乙商品的进价为 y 元，根据题意，得

$$\begin{cases}x+y+88=538,\\x(1+50\%)\times80\%+y(1+40\%)\times85\%=538.\end{cases}$$

化简，得$\begin{cases}x+y=450,\\1.2x+1.19y=538.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=250,\\y=200.\end{cases}$

答：甲商品的进价为 250 元，乙商品的进价为 200 元.

解法提醒

- 解决这类题的关键在于正确地用式子表示一个多位数：如一个三位数的表示方法，当它的百位数字为 a，十位数字为 b，个位数字为 c 时，这个三位数可表示为 $100a+10b+c$.
- 在数字问题中，应注意：(1) 数字与数的区别，即怎样用数字表示数；(2) 根据数字的特点，求得的解应是小于 10 的非负整数（最高位上的数字不能为 0）.

技巧点拨

解决配套问题的技巧：

制作的工件由若干种零件组成，如果 a 件甲产品和 b 件乙产品配成一套，那么甲产品的件数：乙产品的件数 $=a:b$，即 $b\times$ 甲产品的件数 $=a\times$ 乙产品的件数.

方法点拨

销售问题中进价、利润、利润率、售价、标价、折扣等之间的关系：

利润 = 售价 − 进价，

售价 = 标价 × 折扣，

售价 = 进价 + 利润，

$$\text{利润率}=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 5：行程问题

1. 相遇（追及）问题

例 6 张明沿公路匀速前进，每隔 4 min 就迎面开来一辆公共汽车，每隔 6 min 就有一辆公共汽车从背后超过他．假定公共汽车的速度不变，而且迎面开来的相邻两车的距离和从背后开来的相邻两车的距离都是 1 200 m，求张明前进的速度和公共汽车的速度．

解题秘方：分析相遇与追及问题中两者运动的路程与相隔路程之间的关系，列出方程组解决问题．

解：设张明前进的速度是 x m/min，公共汽车的速度是 y m/min.

根据题意，得$\begin{cases}4x+4y=1\,200,\\6y-6x=1\,200.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=50,\\y=250.\end{cases}$

答：张明前进的速度是 50 m/min，公共汽车的速度是 250 m/min.

方法点拨

1. “**相向而遇**”时，两者所走的路程之和等于他们原来的距离；
2. “**同向追及**”时，快者所走的路程减去慢者所走的路程等于他们原来的距离．

2. 上、下坡问题

例 7 某人骑自行车从 A 地出发去 B 地，先以每小时 12 km 的速度下坡，再以每小时 9 km 的速度在平路上行驶至 B 地，共用 55 min；回来时他以每小时 8 km 的速度通过平路后，再以每小时 4 km 的速度上坡至 A 地，共用 1.5 h. 求 A，B 两地之间的路程．

解题秘方：解决有上、下坡路程的往返问题时，虽然每段路程不变，但速度发生了改变．根据时间总量列出方程组解决问题．

解：设从 A 地到 B 地的下坡路程为 x km，平路路程为 y km.

由题意，得$\begin{cases}\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{9}=\dfrac{55}{60},\\\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{8}=1.5.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\y=6.\end{cases}$



$x+y=3+6=9$.

答：A，B 两地之间的路程为 9 km.

方法点拨

解本题的关键是弄清从 A 地到 B 地的下坡路程，在从 B 地到 A 地时变为上坡路程，以时间为等量关系建立方程组．

3. 航行问题

例 8 A，B 两码头相距 140 km，一艘轮船在其间航行，顺水航行用了 7 h，逆水航行用了 10 h，求这艘轮船在静水中的速度和水流速度．

解题秘方：本题的关键是找到各速度之间的关系：顺速 = 静速 + 水速，逆速 = 静速 − 水速，再结合公式“路程 = 速度 × 时间”列方程组．

解：设这艘轮船在静水中的速度为 x km/h，水流速度为 y km/h.

由题意，得$\begin{cases}7(x+y)=140,\\10(x-y)=140.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=17,\\y=3.\end{cases}$

答：这艘轮船在静水中的速度为 17 km/h，水流速度为 3 km/h.

解法提醒

列表描述等量关系：设这艘轮船在静水中的速度为 x km/h，水流速度为 y km/h，列表如下：

	路程	速度	时间
顺流	140 km	$(x+y)$ km/h	7 h
逆流	140 km	$(x-y)$ km/h	10 h

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 行车问题

例 9 一列载客火车和一列运货火车分别在两条平行的铁轨上行驶，载客火车长 150 m，运货火车长 250 m. 若两车相向而行，从车头相遇到车尾离开共需 10 s；若载客火车从后面追赶运货火车，从车头追上运货火车到车尾完全超过运货火车共需 100 s，试求两车速度.

解题秘方：这是一道特殊的相遇与追及结合的混合应用题.

①两车相向而行是相遇问题，两车的路程总和 = 两车车长之和；

②载客火车从后面追赶运货火车是追及问题，追及时两车所走的路程差 = 两车车长之和.

解：设载客火车的速度为 x m/s，运货火车的速度为 y m/s.

由题意，得$\begin{cases}10x+10y=150+250,\\100x-100y=150+250,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=22,\\y=18.\end{cases}$

答：载客火车的速度是 22 m/s，运货火车的速度是 18 m/s.

技巧点拨

行车问题属于特殊的行程问题，它与一般的行程问题的主要区别是：一般的行程问题不考虑车本身的长，而行车问题要考虑车本身的长；与行车问题类似的还有过桥问题过隧道问题等.

题型 6：百分比问题

例 10 在当地农业技术部门的指导下，李明家增加种植菠萝的投资，使今年的菠萝喜获丰收. 如图 7.4-1 是李明和他的爸爸、妈妈的一段对话.



图 7.4-1

请你用所学过的知识帮助李明算出他家今年菠萝的收入.（收入 − 投资 = 净赚）

解题秘方：紧扣今年与去年的收入和投资之间的数量关系，其中增长率揭示了这个数量关系.

解：设李明家去年种植菠萝的收入为 x 元，投资为 y 元.

由题意，得$\begin{cases}x-y=8\,000,\\(1+35\%)\,x-(1+10\%)\,y=11\,800.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=12\,000,\\y=4\,000.\end{cases}$

所以 $(1+35\%)\,x=1.35\times 12\,000=16\,200.$

答：李明家今年菠萝的收入为 16 200 元.

方法点拨

在此类等量关系比较复杂的题目中，仅靠想象寻找等量关系或列方程组时，难免会出现顾此失彼的错误，如果能借助于表格分析，将会帮助我们理清解题思路，列出比较方便于解题的方程组.

	投资（元）	收入（元）	净赚（元）
去年	y	x	8 000
今年	$(1+10\%)\,y$	$(1+35\%)\,x$	11 800

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 7：古代算术问题

例 11 列方程组解古算题：

“巍巍古寺在山林，不知寺内几多僧．

三百六十四只碗，看看用尽不差争．

三人共食一碗饭，四人共吃一碗羹．

请问先生明算者，算来寺内几多僧？”

解题秘方：先将古算题用通俗的文字叙述，再找等量关系，列方程组解决问题．此题如果直接将僧人的人数设为 x，那么求解较复杂，因此需采用间接设元法．

解：设饭碗有 x 只，汤碗有 y 只．

由题意，得$\begin{cases}x+y=364,\\3x=4y.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=208,\\y=156.\end{cases}$

则僧人的人数为 $3\times208=624$.

答：寺庙内共有 624 位僧人．

题型 8：图形面积问题

例 12 小敏做拼图游戏时发现：8 个一样大小的小长方形恰好可以拼成一个大的长方形，如图 7.4–2 所示．小颖看见了，也来试一试，结果拼成了如图 7.4–3 所示的大正方形，不过中间留下一个空白，恰好是一个边长为 2cm 的小正方形，你能算出每个小长方形的长和宽各是多少吗？

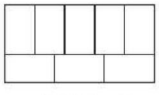


图 7.4–2

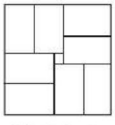


图 7.4–3

解题秘方：根据拼图方式求出小长方形的长和宽之间的数量关系．

解：设小长方形的长为 x cm，宽为 y cm.

依题意，得$\begin{cases}3x=5y,\\2x+2=x+2y.\end{cases}$ 整理，得$\begin{cases}3x-5y=0,\ ①\\x-2y=-2.\ ②\end{cases}$

① − ② × 3，得 $y=6$，将 $y=6$ 代入②得 $x=10$.

因此，这个方程组的解是$\begin{cases}x=10,\\y=6.\end{cases}$

答：每个小长方形的长为 10 cm，宽为 6 cm.

知识点 3 建立二元一次方程组的模型对实际问题进行判断或方案设计

建立二元一次方程组的模型就是为了解决实际问题．对某个问题要进行判断或设计方案时，关键之处在于：

（1）要分析解决此问题时需要解决哪几个未知量，然后根据需要设未知数；

（2）方程组的解是否符合实际问题的限制条件．

译题

题目大意是一座寺庙内不知有多少僧人，但饭碗和汤碗共有 364 只．如果 3 人共用 1 只饭碗吃饭，4 人共用 1 只汤碗喝汤，正好用完所有的碗．问：寺庙内共有多少僧人？

思路点拨

解古算题时，弄懂题意是关键，要先用通俗的文字把题目叙述出来，然后找出题中的等量关系列出方程组求解．

思路点拨

在图 7.4–2 中大长方形的长有两种表示形式，一种是 5 个小长方形的宽的和，另一种是 3 个小长方形的长的和．

在图 7.4–3 中大正方形的边长也有两种表示形式，一种是 1 个小长方形的长和 2 个小长方形的宽的和，另一种为 2 个小长方形的长和小正方形的边长的和，由此可设未知数列出方程组求解．

提分·必记

特别提醒

设计方案问题应从不同角度去考虑，先考虑多种可能的方案，最后根据结果合理地选择方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用二元一次方程组进行判断或方案设计

类型1：利用二元一次方程组的解下结论

例13 ［中考·遂宁］我市某超市举行店庆活动，对甲、乙两种商品实行打折销售．打折前，购买3件甲商品和1件乙商品需要190元；购买2件甲商品和3件乙商品需要220元．而店庆期间，购买10件甲商品和10件乙商品仅需735元，这比打折前少花多少钱？

解题秘方：分析解决问题的关键点是求甲、乙两商品的单价，采取间接设未知数解决问题．

解：设甲商品的单价为x元，乙商品的单价为y元，由题意得：

$$\begin{cases}3x+y=190,\\2x+3y=220,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=50,\\y=40,\end{cases}$$

则购买10件甲商品和10件乙商品需要$10\times(50+40)=900$（元）．

因为打折后实际花费735元，

所以这比打折前少花$900-735=165$（元）．

类型2：利用二元一次方程组进行方案设计

例14 某地生产一种绿色蔬菜，若在市场上直接销售，每吨利润为1 000元；经粗加工后销售，每吨利润可达4 500元；经精加工后销售，每吨利润涨至7 500元．当地一家公司收获这种蔬菜140吨，该公司的加工生产能力是：如果对蔬菜进行粗加工，每天可加工16吨；如果进行精加工，每天可加工6吨，但两种加工方式不能同时进行，受季节条件的限制，公司必须在15天之内将这批蔬菜全部销售或加工完毕，为此公司制定了三种加工方案：

方案一：将蔬菜全部进行粗加工；

方案二：尽可能多地对蔬菜进行精加工，并将没有来得及加工的蔬菜在市场上全部销售；

方案三：将部分蔬菜进行精加工，其余蔬菜进行粗加工，并恰好在15天内完成．

你认为哪种方案获利最多？为什么？

解题秘方：分别求出三种方案的利润，进行比较选择，求利润时，找出与利润相关的未知量去设未知数．

解：（方案一）只对蔬菜进行粗加工，易知15天内能全部加工完，获利为$4\,500\times140=630\,000$（元）．

（方案二）尽可能多地对蔬菜进行精加工，即精加工的质量为$6\times15=90$（吨）．

获利为$7\,500\times90+1\,000\times(140-90)=725\,000$（元）．

（方案三）设将x吨蔬菜进行精加工，y吨蔬菜进行粗加工．

提分·秘诀

方法点拨

对某个实际问题进行判断时，先分析解决问题的关键点，即需要设出的未知数有哪两个，然后根据题目中给出的等量关系列出二元一次方程组．

解法提醒

解决优化方案问题，首先要列举出所有可能的方案，再按题中的要求分别求出每种方案的具体结果，从中选择最优方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由题意，得$\begin{cases}x+y=140,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{16}=15.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=60,\\ y=80.\end{cases}$

所以获利为 $7\,500\times60+4\,500\times80=810\,000$（元）.

因为 $630\,000<725\,000<810\,000$，

所以方案三获利最多.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用阅读图文信息法解二元一次方程组应用问题

例 15 教师节来临之际，群群所在的班级准备向每位辛勤工作的老师献一束鲜花，每束由 4 枝鲜花包装而成，如图 7.4-4. 其中有象征母爱的康乃馨和象征尊敬的水仙花，同一种鲜花每枝的价格相同. 请你根据第一、二束鲜花提供的信息，求出第三束鲜花的价格.



第一束共计19元　第二束共计18元　第三束

图 7.4-4

解题秘方：图文中的信息揭示了等量关系，利用此等量关系列二元一次方程组解决问题.

解：设 1 枝康乃馨的价格为 x 元，1 枝水仙花的价格为 y 元.

由题意，得$\begin{cases}3x+y=19,\\ 2x+2y=18.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\ y=4.\end{cases}$

故第三束鲜花的价格为 $5+3\times4=17$（元）.

答：第三束鲜花的价格是 17 元.

挑战·高分

解法提醒

这是一道图文信息题，解决这类问题时，先读懂题意，从图中获取有用的信息，再对这些信息进行加工处理，并联系相关的数学知识找出等量关系，从而实现信息的转换，顺利地解决问题.

拔尖角度 2 利用分段法解二元一次方程组应用问题

例 16 [中考·娄底]假如娄底市的出租车是这样收费的：起步价所包含的路程为 0 ~ 1.5 千米，超过 1.5 千米的部分按每千米另收费.

小刘说："我乘出租车从市政府到娄底汽车站走了 4.5 千米，付车费 10.5 元."

小李说："我乘出租车从市政府到娄底火车站走了 6.5 千米，付车费 14.5 元."

问：（1）出租车的起步价是多少元？超过 1.5 千米后每千米收费多少元？

（2）小张乘出租车从市政府到娄底南站（高铁站）走了 5.5 千米，应付车费多少元？

挑战·高分

方法点拨

分段收费在现实生活中应用相当广泛，出租车收费、电费、水费、通讯收费等都是分段收费，这类问题最易出错的地方就是超出部分收费的计算方式，**超出部分应等于全部减去基本部分**.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解题秘方：分段收费中每段的收费方式不同，根据里程确定收费方式，再根据车费列出方程组.

解：（1）设出租车的起步价是 x 元，超过 1.5 千米后每千米收费 y 元，

则$\begin{cases}x+(4.5-1.5)y=10.5,\\x+(6.5-1.5)y=14.5.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4.5,\\y=2.\end{cases}$

答：出租车的起步价是 4.5 元，超过 1.5 千米后每千米收费 2 元.

（2）$4.5+(5.5-1.5)\times 2=12.5$（元）.

答：应付车费 12.5 元.

拔尖角度▸ 3 利用分类讨论思想解二元一次方程组应用问题

挑战·高分

例 17 某水果批发市场香蕉的价格如下表：

购买香蕉质量	不超过 20 kg	20 kg 以上但不超过 40 kg	40 kg 以上
单价（元/kg）	6	5	4

张强两次购买香蕉 50 kg，一共付款 264 元，如果第二次购买的质量多于第一次购买的质量，请问张强两次分别购买香蕉多少千克?

特别提醒

利用分类讨论思想解决问题时，要注意为什么要分类，如本题第一次购买香蕉的质量有两种情况，所以要分类，对于分类的不同情况，列出的方程组也不一样.

解题秘方：因为购买香蕉的质量不同，其单价可能不同，所以要根据购买质量分类讨论.

解：设张强第一次购买香蕉 x kg，第二次购买香蕉 y kg，则 $0<x<25$.

当 $0<x\leqslant 20$ 且 $20<y\leqslant 40$ 时，

根据题意，得$\begin{cases}x+y=50,\\6x+5y=264,\end{cases}$ 解这个方程组，得$\begin{cases}x=14,\\y=36.\end{cases}$

当 $0<x\leqslant 20$ 且 $y>40$ 时，

根据题意，得$\begin{cases}x+y=50,\\6x+4y=264,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=32,\\y=18.\end{cases}$（舍去）

当 $20<x<25$ 且 $20<y\leqslant 40$ 时，

根据题意，得$\begin{cases}x+y=50,\\5x+5y=264,\end{cases}$ 此方程组无解.

当 $20<x<25$ 且 $y>40$ 时，$x+y>50$，不合题意，舍去.

所以张强第一次购买香蕉 14 kg，第二次购买香蕉 36 kg.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘 二元一次方程组的实际应用题是中考考查的热点，常出现在选择题和解答题中，选择题中一般以列方程组为主，解答题考查较多的是行程问题和商品利润问题，难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 列二元一次方程组解决商品销售问题

例 18 [中考·长沙]随着中国传统节日“端午节”的临近，东方红商场决定开展“欢度端午，回馈顾客”的让利促销活动，对部分品牌粽子进行打折销售，其中甲品牌粽子打八折，乙品牌粽子打七五折. 已知打折前，买 6 盒甲品牌粽子和 3 盒乙品牌粽子需 600 元；打折后，买 50 盒甲品牌粽子和 40 盒乙品牌粽子需 5 200 元.

（1）打折前甲、乙两种品牌粽子每盒分别为多少元？

（2）阳光敬老院需购买甲品牌粽子 80 盒，乙品牌粽子 100 盒，问打折后购买这批粽子比不打折节省了多少钱？

试题评析：本题考查利用二元一次方程组解决商品销售问题，解题的关键是扣住销售问题中常见量之间的关系.

解：（1）设打折前甲品牌粽子每盒 x 元，乙品牌粽子每盒 y 元，根据题意得 $\begin{cases}6x+3y=600,\\50\times0.8x+40\times0.75y=5\,200,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40,\\y=120.\end{cases}$

答：打折前甲品牌粽子每盒 40 元，乙品牌粽子每盒 120 元.

（2）$80\times40+100\times120-(80\times0.8\times40+100\times0.75\times120)=3\,640$（元）.

答：打折后购买这批粽子比不打折节省了 3 640 元.

考法 2 列二元一次方程组解决工程问题

例 19 [中考·聊城改编]建设中的大外环路是我市的一项重点民生工程. 某工程公司承建的一段路基工程的施工土方量为 120 万立方，原计划由公司的甲、乙两个工程队从公路的两端同时相向施工 150 天完成. 由于特殊情况需要，公司抽调甲队外援施工. 由乙队先单独施工 40 天后甲队返回，两队又共同施工了 110 天，这时甲、乙两队共完成土方量 103.2 万立方. 问甲、乙两队原计划平均每天的施工土方量分别为多少万立方？

试题评析：本题考查利用二元一次方程组解决工程问题，解题的关键是扣住工程问题中常见量之间的关系.

解：设甲队原计划平均每天的施工土方量为 x 万立方，乙队原计划平均每天的施工土方量为 y 万立方. 根据题意，得

$$\begin{cases}150(x+y)=120,\\40y+110(x+y)=103.2,\end{cases}$$

解方程组，得 $\begin{cases}x=0.42,\\y=0.38.\end{cases}$

答：甲、乙两队原计划平均每天的施工土方量分别为 0.42 万立方和 0.38 万立方.

冲刺·满分

考题剖析

1.“打八折”即原价的 80%，若设打折前价格为 m 元，则打折后的价格为 80%m（或 0.8m）元；

2. 揭示两个等量关系：(1) 打折前：6 盒甲品牌粽子的价钱 +3 盒乙品牌粽子的价钱 =600 元；(2) 打折后：50 盒甲品牌粽子的价钱 +40 盒乙品牌粽子的价钱 = 5 200 元.

3. 节省的钱数 = 原价购买所需的钱数 − 打折后购买所需的钱数.

解法提醒

1. **工程问题中常见的等量关系：**

（1）工作效率 × 工作时间 = 工作量.

（2）工作效率之和 × 合作时间 = 合作工作量.

（3）各部分的工作量之和 = 工作总量.

2. **本题等量关系剖析：**

（1）甲、乙工作效率之和 ×150 天 =120 万立方.

（2）乙工作效率 ×40 天 + 甲、乙工作效率之和 ×110 天 =103.2 万立方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见216页

1. [中考·邵阳]某出租车起步价所包含的路程为0~2km，超过2km的部分按每千米另收费.津津乘坐这种出租车走了7km，付了16元；盼盼乘坐这种出租车走了13km，付了28元.设这种出租车的起步价为x元，超过2km后每千米收费y元，则下列方程正确的是(　　)

A. $\begin{cases}x+7y=16\\x+13y=28\end{cases}$　B. $\begin{cases}x+(7-2)y=16\\x+13y=28\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+7y=16\\x+(13-2)y=28\end{cases}$　D. $\begin{cases}x+(7-2)y=16\\x+(13-2)y=28\end{cases}$

2. 甲、乙两地相距100 km，一艘轮船往返甲、乙两地，顺流用4 h，逆流用5 h，那么这艘轮船在静水中的航速与水速分别是(　　)

A.24 km/h，8 km/h　B.22.5 km/h，2.5 km/h

C.18 km/h，24 km/h　D.12.5 km/h，1.5 km/h

3. 甲、乙两个工程队各有员工80人、100人，现在从外部调90人充实两队，调配后甲队人数是乙队人数的$\frac{2}{3}$，则甲、乙两队分别分到的人数为(　　)

A.50，40　B.36，54

C.28，62　D.20，70

4. [中考·东营]篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜1场得2分，负1场得1分，某队在10场比赛中得到16分.若设该队胜的场数为x，负的场数为y，则可列方程组为(　　)

A. $\begin{cases}x+y=10\\2x+y=16\end{cases}$　B. $\begin{cases}x+y=10\\2x-y=16\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+y=10\\x-2y=16\end{cases}$　D. $\begin{cases}x+y=10\\x+2y=16\end{cases}$

5. [中考·自贡]我国明代数学家程大位的名著《直指算法统宗》里有一道著名算题：“一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚各几丁？”意思是：有100个和尚分100个馒头，正好分完；如果大和尚1人分3个，小和尚3人分1个，试问大、小和尚各几人？设大、小和尚各有x、y人，则可列方程组为_____.

6. 一个三位数的各位数字之和等于14，个位数字与十位数字的和比百位数字大2，如果把百位数字与十位数字对调，所得的新数比原数小270，则原三位数是_____.

7. [中考·临沂]用1块A型钢板可制成4件甲种产品和1件乙种产品；用1块B型钢板可制成3件甲种产品和2件乙种产品.要生产甲种产品37件，乙种产品18件，则恰好需用A、B两种型号的钢板共_____块.

8. 甲、乙二人加工同一种零件.两个人1 h可以加工70个零件，甲做2 h、乙做3 h可以加工180个零件.求甲、乙每小时各加工多少个零件.

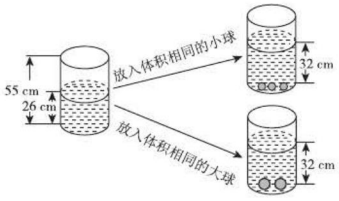
9. [中考·宿迁]某学校组织学生乘汽车去自然保护区野营，先以60 km/h的速度走平路，后又以30 km/h的速度爬坡，共用了6.5 h；原路返回时，汽车以40 km/h的速度下坡，又以50 km/h的速度走平路，共用了6 h.问平路和坡路各有多远？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 根据图中给出的信息，解答下列问题：

（1）放入 1 个小球水面升高_____cm，放入 1 个大球水面升高_____cm；

（2）现放入大球、小球共 10 个，水面上升到了 50 cm，那么放入大球、小球各多少个？



（第 10 题）

11. 某种产品是由 A 种原料和 B 种原料混合而成的，其中 A 种原料每千克 50 元，B 种原料每千克 40 元．根据最新消息，这两种原料过几天要调价，A 种原料价格上涨 10%，B 种原料价格下降 15%，经过核算，产品的成本仍不变，因而产品不需调价．已知这批产品共重 11 000 千克，问 A 种原料和 B 种原料各需多少千克？

12. [**中考 · 河池**] 在某体育用品商店，购买 30 根跳绳和 60 个毽子共用 720 元，购买 10 根跳绳和 50 个毽子共用 360 元．

（1）跳绳、毽子的单价各是多少？

（2）该店在“五 · 四”青年节期间开展促销活动，所有商品按同样的折数打折销售．节日期间购买 100 根跳绳和 100 个毽子只需 1 800 元．该店的商品按原价的几折销售？

13. [**中考 · 佛山**] 某景点的门票价格如下表：

购票人数（人）	1 ~ 50	51 ~ 100	100 以上
每人门票价（元）	12	10	8

某校七年级（1）、（2）两班计划去游览该景点，其中（1）班人数少于 50 人，（2）班人数多于 50 人且少于 100 人，如果两班都以班为单位单独购票，那么一共支付 1 118 元；如果两班联合起来作为一个团体购票，那么只需花费 816 元．

（1）两个班各有多少人？

（2）团体购票与单独购票相比较，两个班各节约了多少钱？ **【导学号：3572327】**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

找特点巧消元

荣老师告诉你 代入法和加减法是解二元一次方程组的基本方法，其基本思路是通过消元使二元一次方程组转化为一元一次方程求解．但有不少二元一次方程组，它们的系数间有着某种联系，若细致观察，抓住其特点，还可以采取更为灵活，更为巧妙的消元方法，使解题过程变得更为简捷、明快．

技巧一 其中一个未知数的系数相差 1，先相减，再代入

例 1 解方程组$\begin{cases}4x+7y=222, & ①\\ 5x+6y=217, & ②\end{cases}$

解题秘方：x 与 y 的系数都相差 1，将两个方程相减，得到的方程中 x 与 y 的系数是 1 或 -1，再代入就非常简单．

解：② − ①，

得 $x-y=-5$，

即 $x=y-5$. ③

将③代入①，

得 $4(y-5)+7y=222$.

解得 $y=22$.

把 $y=22$ 代入③，

得 $x=17$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=17,\\ y=22.\end{cases}$

方法点拨：凡方程组中有一个未知数的系数相差 1 的，都可以先用加减法，再用代入法消元，这比常规消元要简捷．

技巧二 两个未知数的系数之差分别相等

例 2 解方程组$\begin{cases}9x+3y=9, & ①\\ 7x+5y=-1. & ②\end{cases}$

解题秘方：方程组中两个未知数的系数之差都是 2，将两个方程相减，得到的方程中两个未知数的系数相等或互为相反数，两边同时除以一个数可将两个未知数的系数变为 1 或 -1.

解：① − ②，得 $2x-2y=10$.

∴ $x-y=5$. ③

③ × 5 + ②，得 $12x=24$，

解得 $x=2$.

将 $x=2$ 代入③，

得 $y=-3$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\ y=-3.\end{cases}$

方法点拨：凡方程组中两个未知数的系数之差分别相等，均可先相减，再适当变形消元．

技巧三 两个未知数的系数之和分别相等

例 3 解方程组$\begin{cases}2x+3y=7, & ①\\ 3x+2y=8. & ②\end{cases}$

解题秘方：x 与 y 的系数之和分别相等，可将两个方程相加和相减，得到系数较简单的方程组．

解：① + ②，得

$5x+5y=15$，即 $x+y=3$. ③

② − ①，得

$x-y=1$. ④

③④联立方程组，

得$\begin{cases}x+y=3,\\ x-y=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

方法点拨：凡两个未知数的系数之和分别相等，且两个方程中两个未知数系数互换，都可仿本题思路既加又减，获得一个系数较简单的方程组求解．

技巧四 两个方程的常数项相同，先消常数项，再代入

例 4 解方程组$\begin{cases}5x-y=110, & ①\\ 9y-x=110. & ②\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：先直接消去常数项，得到没有常数项的方程，然后代入消元求解.

解：②－①，

得 $10y-6x=0$，即 $y=0.6x$. ③

将③代入①

得 $4.4x=110$，

解得 $x=25$.

把 $x=25$ 代入③，

得 $y=15$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}x=25,\\y=15.\end{cases}$

方法点拨：凡常数项相同，先消去常数项，得到没有常数项的简易方程，然后通过代入消元法解方程组.

技巧五 一个未知数的系数成倍数关系，先变形，再整体代入

例5 解方程组 $\begin{cases}3m-4n=7,①\\9m-10n+25=0.②\end{cases}$

解题秘方：观察发现方程②中 m 的系数是方程①的3倍，故可直接将①变形整体代入②中消元求解.

解：由①得 $3m=4n+7$，③

将③代入②，

得 $3(4n+7)-10n+25=0$.

解得 $n=-23$.

将 $n=-23$ 代入③，

得 $m=-28\frac{1}{3}$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}m=-28\frac{1}{3},\\n=-23.\end{cases}$

方法点拨：方程组中，同一个未知数的系数，若一个方程是另一个方程的几倍，则可直接用整体代入法消元求解.

技巧六 创造条件，整体代入求解

例6 解方程组 $\begin{cases}x+1=5(y+2),①\\3(2x-5)-4(3y+4)=5.②\end{cases}$

解题秘方：观察方程①，将 $x+1$ 看成一个整体，将方程②变形使含有 $x+1$，然后再将①整体代入，可实现消元，进而求出方程组的解.

解：由②，得 $6(x+1)-4(3y+4)=26$. ③

将①代入③，得

$30(y+2)-4(3y+4)=26$.

解得 $y=-1$.

将 $y=-1$ 代入①，得 $x=4$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}$

方法点拨：从已知方程的结构和系数特点出发，通过局部变形创造条件，再将其整体代入，达到迅速消元的目的.

技巧七 有一个方程是比例式，先设参，再代入

例7 解方程组 $\begin{cases}\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2},①\\3x+4y=32.②\end{cases}$

解题秘方：方程①是一个比例式，设出比值，将 x 与 y 都用这个比值来表示，然后代入方程②求出比值，从而求出方程组的解.

解：设 $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=k$，

可得 $\begin{cases}x=5k-1,③\\y=2k+3.④\end{cases}$

将③④代入②，得

$3(5k-1)+4(2k+3)=32$.

解得 $k=1$.

将 $k=1$ 分别代入③④，

得原方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$

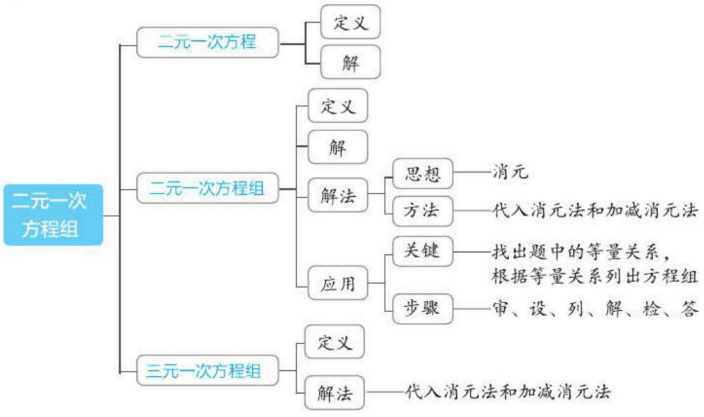
方法点拨：若有一个方程是比例式，可设出该比例式的比值，然后用这个比值表示方程组的两个未知数，通过这个比值求出方程组的解，此法又叫参数消元法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 同时使两个方程左右两边都相等的未知数的值是方程组的解.

2. 解二元一次方程组的基本思想是消元，基本方法是代入消元法与加减消元法.

（1）代入消元法：把其中一个方程的某一个未知数用含有另一个未知数的式子表示，然后代入另一个方程，就可以消去这个未知数而先求得另一个未知数的值；

（2）加减消元法：先用适当的数同乘以方程的两边，使得两个方程中的某一个未知数的系数的绝对值相等，然后把两个方程的两边相加或相减，就可以消去一个未知数而先求得另一个未知数的值.

当某一个未知数的系数较简单时（如是 ± 1），可选择代入消元法求解；当同一个未知数的系数互为相反数或相等时，采用加减消元法更简单些.

3. **列方程（组）解应用题的一般步骤：**

（1）**审**：审清题意，找出已知量、未知量及等量关系；

（2）**设**：直接或间接设出未知数；

（3）**列**：根据等量关系列方程（组）；

（4）**解**：解这个方程（组），求出未知数的值；

（5）**检**：检验所求的未知数的值是否为所列方程（组）的解，是否符合实际问题；

（6）**答**：写出答案.

知识方法专题

知识必学

专题一 二元一次方程（组）的解

链接中考» 二元一次方程的解是能使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，二元一次方程组的解是方程组中两个方程的公共解. 考查时除直接找解外，已知解求待定的系数值的逆向考查也很多.

例1 [中考·襄阳]若方程 $mx+ny=6$ 的两个解是 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ 则 m，n 的值为（　　）

A.4，2　　B.2，4

C.−4，−2　　D.−2，−4

解题秘方：将 x 与 y 的两对值代入方程计算即可求出 m 与 n 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：将$\begin{cases}x=1\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$分别代入$mx+ny=6$中，得$\begin{cases}m+n=6,①\\2m-n=6,②\end{cases}$

①＋②，得$3m=12$，即$m=4$，

将$m=4$代入①，得$n=2$，故选A.

答案：A

专题二 二元一次方程组的解法

链接中考» 解二元一次方程组的方法有代入消元法和加减消元法，不论是“代入”还是“加减”，目的都是消元，即把二元一次方程组转化为一元一次方程，再解一元一次方程，从而求出方程组的解．此类问题是近年来中考的一大热点，一般以选择题和填空题以及简单解答题为主．

例2 [中考·重庆]解方程组$\begin{cases}y=2x-4,①\\3x+y=1.②\end{cases}$

解题秘方：因为方程①是用含x的式子表示y，所以运用代入法简便．

解：把方程①代入方程②，

得$3x+2x-4=1$，

解得$x=1$.

把$x=1$代入①，

得$y=-2$，

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

专题三 建立二元一次方程组的模型解决问题

链接中考» 建立二元一次方程组的模型必须找出两个等量关系，除实际问题中的等量关系之外，还有很多等量关系，如非负数的性质，同类项的概念等等，都是中考命题的热点．

例3 若$|a+b+5|+|2a-b+1|=0$，则$(b-a)^{2\,020}=$（　　）

A.-1　　B.1　　C.$5^{2\,020}$　　D.$-5^{2\,020}$

解题秘方：一个数的绝对值为非负数，几个绝对值的和等于0，那么每个绝对值分别等于0.

解：由题意得$\begin{cases}a+b+5=0,\\2a-b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=-3.\end{cases}$

$\therefore (b-a)^{2\,020}=1$，故选B.

答案：B

规律点拨：如果出现几个非负数的和为零，则说明这几个非负数的值都等于0，此时可得一个方程组，解方程组即可求得未知数的值．

例4 [中考·巴中]若单项式$2x^2y^{a+b}$与$-\frac{1}{3}x^{a-b}y^4$是同类项，则a，b的值分别为（　　）

A.3，1　　B.-3，1

C.3，-1　　D.-3，-1

解题秘方：根据同类项的定义，列方程组并求解即可．

解：由同类项的定义，得$\begin{cases}2=a-b,\\4=a+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=1,\end{cases}$故选A.

答案：A

专题四 二元一次方程组的应用

链接中考» 列二元一次方程组解应用题，关键是找到两个等量关系，然后列出方程组求解，利用二元一次方程组解决实际问题是每年中考的热点内容，其题型常以选择题、填空题和解答题形式出现．

例5 [中考·张家界]如图7-1，小华从家里到学校的路是一段平路和一段下坡路，假设他始终保持平路每分钟走60 m，下坡路每分钟走80 m，上坡路每分钟走40 m，则他从家里到学校需10 min，从学校到家里需15 min. 问：从小华家到学校的平路和下坡路各有多远？

解题秘方：本题的两个等量关系是：去学校时，走平路的时间＋走下坡路的时间＝10 min；回家时，走上坡路的时间＋走平路的时间＝15 min，通过设元列方程组再解之即可．

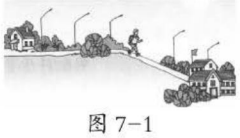


图7-1

解：设从小华家到学校的平路有x m，下坡路有y m，则$\begin{cases}\frac{x}{60}+\frac{y}{80}=10,\\\frac{x}{60}+\frac{y}{40}=15,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=300,\\y=400.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答：从小华家到学校的平路和下坡路分别为300 m，400 m.

Ⅱ 方法必会

专题五 枚举法

专题解读≫二元一次方程的解有无数组，但在限定条件下，往往可以求出其整数解；求二元一次方程的整数解，在问题不是特别复杂的情况下，可以采用枚举法，即将其中一个未知数可以取的整数一一列出来，求出对应的另一个未知数的值，并找出符合题意的整数解.

例6 [中考·龙东]为推进课改，王老师把班级里40名学生分成若干小组，每小组只能是5人或6人，则有几种分组方案（　　）

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

解题秘方：根据题意设5人一组的有x个小组，6人一组的有y个小组，根据“把班级里40名学生分成若干小组”得出等式，求解即可.

解：设5人一组的有x个小组，6人一组的有y个小组，根据题意可得

$5x+6y=40$，故$y=\dfrac{40-5x}{6}$.

若$x=0$，则$y=\dfrac{20}{3}$（不合题意）；

若$x=1$，则$y=\dfrac{35}{6}$（不合题意）；

若$x=2$，则$y=5$；

若$x=3$，则$y=\dfrac{25}{6}$（不合题意）；

若$x=4$，则$y=\dfrac{10}{3}$（不合题意）；

若$x=5$，则$y=\dfrac{5}{2}$（不合题意）；

若$x=6$，则$y=\dfrac{5}{3}$（不合题意）；

若$x=7$，则$y=\dfrac{5}{6}$（不合题意）；

若$x=8$，则$y=0$.

故有2种分组方案. 故选C.

答案：C

专题六 转化思想

专题解读≫将要研究和要解决的问题转化为已经学过的问题来处理的数学思想称为转化思想，它是一种研究和解决数学问题的基本思想，如方程组中含有多个未知数，解方程组的基本思想是“消元”，化多为少，而代入法和加减法则是落实转化思想的措施.

例7 [中考·南充]已知关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}2x+3y=k,\\x+2y=-1\end{cases}$的解互为相反数，则$k$的值是_____.

解题秘方：解方程组用k表示出x，y，根据方程组的解互为相反数，得到关于k的方程，即可求出k的值.

解：解方程组$\begin{cases}2x+3y=k,\\x+2y=-1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2k+3,\\y=-2-k,\end{cases}$

因为关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}2x+3y=k,\\x+2y=-1\end{cases}$的解互为相反数，

所以$2k+3-2-k=0$，解得$k=-1$.

答案：-1

方法点拨：求解二元一次方程组中的字母常数，一般用以下方法：通常是先求方程组的解，再根据x与y之间的关系建立关于字母常数的方程求解.

专题七 整体思想

专题解读≫在研究某些数学问题时，往往不是从问题的某个组成部分为着眼点，而是有意识地放大考查问题的视角，将要解决的问题看成一个整体，通过研究问题的整体形式或整体结构后，达到顺利而又简捷地解决问题的目的，这就是整体思想. 解方程组时，注意观察方程组的特点，灵活运用方程组变形技巧来进行处理.

例8 解方程组$\begin{cases}x+y+z=8,①\\x+y+m=12,②\\x+z+m=14,③\\y+z+m=17.④\end{cases}$

解题秘方：此方程组中，每个方程都缺少一个未知数，且所缺少的未知数又都不相同，每个未知数的系数都是1，这样的方程组若一一消元很麻烦，可考虑整体相加、整体相减的方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：①+②+③+④，并整理，

得 $x+y+z+m=17$，⑤

⑤−①，得 $m=9$，⑤−②，得 $z=5$.

⑤−③，得 $y=3$，⑤−④，得 $x=0$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=0,\\y=3,\\z=5,\\m=9.\end{cases}$

专题八 分类讨论思想

专题解读» 分类讨论思想是在解题过程中，将某一数学对象根据它本身的属性按照一定的原则或标准分成若干类，然后逐类进行讨论解决，再把这几类的结论汇总，得出问题的答案的一种思想，其作用是克服思维的片面性，防止漏解.

例 9 某旅行社拟在暑假期间面向学生推出“林州红旗渠一日游”活动，收费标准如下：

人数 m（人）	$0<m\leqslant 100$	$100<m\leqslant 200$	$m>200$
收费标准（元/人）	90	85	75

甲、乙两所学校计划组织本校学生自愿参加此项活动. 已知甲校报名参加的学生人数多于 100 人，乙校报名参加的学生人数少于 100 人. 经核算，若两校分别组团共需花费 20 800 元，若两校联合组团只需花费 18 000 元.

（1）两所学校报名参加旅游的学生人数之和超过 200 人吗？为什么？

（2）两所学校报名参加旅游的学生各有多少人？

解题秘方：设两所学校报名参加旅游的学生人数之和为 a 人.（1）由已知分两种情况讨论，即 $a>200$ 和 $100<a\leqslant 200$，得出结论；（2）根据两种情况的费用，设未知数列方程组求解，讨论得出答案.

解：（1）超过 200 人. 理由：设两所学校报名参加旅游的学生人数之和为 a 人.

若 $a>200$，则 $a=18\,000\div 75=240$.

若 $100<a\leqslant 200$，则 $a=18\,000\div 85=211\frac{13}{17}$，不合题意，舍去.

所以两所学校报名参加旅游的学生人数之和为 240 人，超过 200 人.

（2）设甲校报名参加旅游的学生有 x 人，乙校报名参加旅游的学生有 y 人.

①当 $100<x\leqslant 200$ 时，得

$\begin{cases}x+y=240,\\85x+90y=20\,800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=160,\\y=80.\end{cases}$

②当 $x>200$ 时，得 $\begin{cases}x+y=240,\\75x+90y=20\,800,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=53\frac{1}{3},\\y=186\frac{2}{3}.\end{cases}$ 不合题意，舍去.

所以甲校报名参加旅游的学生有 160 人，乙校报名参加旅游的学生有 80 人.

好题必解 答案见 216 页

题型 1：利用方程组的解解决问题

1. 方程组 $\begin{cases}2x+y=\blacksquare,\\x+y=3\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=\blacksquare,\end{cases}$ 则被遮盖的两个数分别为（　　）

A.5，1　　B.1，3　　C.2，3　　D.2，4

2. 已知 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$ 是关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}ax+cy=1,\\cx-by=2\end{cases}$ 的解，则 a，b 间的关系是（　　）

A.$4b-9a=1$　　B.$3a+2b=1$

C.$4b-9a=-1$　　D.$9a+4b=1$

3. [期末·玉林] 已知 $\begin{cases}x=1,\\y=-2\end{cases}$ 是二元一次方程 $3x-ay=9$ 的一个解，那么 a 的值是_____.

题型 2：利用解方程组解决问题

4. 若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=k,\\2x-y=8k\end{cases}$ 的解也是二元一次方程 $3x+2y=10$ 的解，则 k 的值为（　　）

A.1　　B.−2

C.2　　D.4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x+3y=k-3,\\x-2y=2k+1\end{cases}$ 的解互为相反数，则 k 的值为（　　）

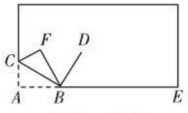
A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{8}{5}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $-\frac{8}{5}$

6. 已知方程组 $\begin{cases}5x-2y=3,\\mx+5y=4\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x-4y=-3,\\5x+ny=1\end{cases}$ 有相同的解，求 m 和 n 的值.

题型 3：建立二元一次方程组模型解决问题

7. 如果 $4x^{a+2b-5}-2y^{3a-b-3}=8$ 是二元一次方程，那么 $a-b=$_____.

8. 小东将一张长方形纸的一角折过来，该角顶点 A 落在 F 处，BC 为折痕，如图所示，若 DB 平分 $\angle FBE$，$\angle DBE$ 比 $\angle CBA$ 大 30°，设 $\angle CBA$ 和 $\angle DBE$ 分别为 $x°$，$y°$，那么可求出这两个角的度数的方程组是_____.



（第 8 题）

9. 定义运算“$*$”，规定 $x*y=ax^2+by$，其中 a，b 为常数，且 $1*2=5$，$2*1=6$，则 $2*3=$_____.

10. “一带一路”促进了中欧贸易的发展，我市某机电公司生产的 A，B 两种产品在欧洲市场热销. 今年第一季度这两种产品的销售总额为 2 060 万元，总利润为 1 020 万元（利润 = 售价 − 成本），其每件产品的成本和售价信息如下表：

	A	B
成本（单位：万元 / 件）	2	4
售价（单位：万元 / 件）	5	7

问该公司这两种产品的销售件数分别是多少?

11. [**中考 · 陇南**] 小甘到文具超市去买文具. 请你根据如图中的对话信息，求中性笔和笔记本的单价分别是多少元.



（第 11 题）

12. [**中考 · 徐州**] 小丽购买学习用品的收据如下表，因污损导致部分数据无法识别，根据下表，解决下列问题：

（1）小丽买了自动铅笔、记号笔各几支?

（2）若小丽再次购买软皮笔记本和自动铅笔两种文具，共花费 15 元，则有哪几种不同的购买方案?

商品名	单价（元）	数量	金额（元）
签字笔	3	2	6
自动铅笔	1.5		
记号笔	4		
软皮笔记本		2	9
圆规	3.5	1	
合计		8	28

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 7 章测试卷

答案见 217 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 用加减法解方程组$\begin{cases}2x-3y=5,\\3x-2y=7\end{cases}$时，下列方法错误的是（　　）

A. ① ×3− ② ×2，消去 x

B. ① ×2− ② ×3，消去 y

C. ① ×（−3）+ ② ×2，消去 x

D. ① ×2− ② ×（−3），消去 y

2. 三元一次方程组$\begin{cases}x+y=1,\\y+z=5,\\z+x=6\end{cases}$的解是（　　）

A. $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=5\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=4\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=4\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=4\\y=1\\z=0\end{cases}$

3. 已知方程 $5m-2n=1$，当 m 与 n 相等时，m 与 n 的值分别是（　　）

A. $\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$　B. $\begin{cases}m=-3\\n=-3\end{cases}$　C. $\begin{cases}m=-1\\n=-1\end{cases}$　D. $\begin{cases}m=\dfrac{1}{3}\\n=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

4. 下列说法中正确的是（　　）

A. 二元一次方程 $3x-2y=5$ 的解为有限个

B. 方程 $3x+2y=7$ 的自然数解有无数对

C. 方程组$\begin{cases}x-y=0,\\x+y=0\end{cases}$的解为 0

D. 方程组中各个方程的公共解叫做这个方程组的解

5. 由方程组$\begin{cases}2x+m=1,\\y-3=m\end{cases}$可得出 x 与 y 的关系是（　　）

A. $2x+y=4$　　B. $2x-y=4$

C. $2x+y=-4$　　D. $2x-y=-4$

6. 某校七年级（2）班 40 名同学为“希望工程”捐款，共捐款 100 元．捐款情况如下表：

捐款（元）	1	2	3	4
人数	6			7

表格中捐款 2 元和 3 元的人数不小心被墨水污染已看不清楚．若设捐款 2 元的有 x 名同学，捐款 3 元的有 y 名同学，根据题意，可列方程组为（　　）

A. $\begin{cases}x+y=27\\2x+3y=66\end{cases}$　B. $\begin{cases}x+y=27\\2x+3y=100\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+y=27\\3x+2y=66\end{cases}$　D. $\begin{cases}x+y=27\\3x+2y=100\end{cases}$

7. 对于非零的两个有理数 a，b，规定 $a\oplus b=am-bn$，若 $3\oplus(-5)=15$，$4\oplus(-7)=28$，则 $(-1)\oplus 2$ 的值为（　　）

A. -13　　B. 13　　C. 2　　D. -2

8. 有甲、乙、丙三种商品，如果购甲 3 件，乙 2 件，丙 1 件共需 315 元钱，购甲 1 件，乙 2 件，丙 3 件共需 285 元钱，那么购甲、乙、丙三种商品各 1 件共需（　　）

A. 50 元　　B. 100 元　　C. 150 元　　D. 200 元

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

9. 已知方程组$\begin{cases}2a+b=5,\\a+2b=1,\end{cases}$那么 $b-a$ 的值为_____．

10. 如果方程 $3x^{3m-2n}-2y^{m+n}+16=0$ 是关于 x，y 的二元一次方程，那么 $m-n=$_____．

11. [中考·泰安]《九章算术》是我国古代数学的经典著作，书中有一个问题：“今有黄金九枚，白银一十一枚，称之重适等，交易其一，金轻十三两，问金、银一枚各重几何？”意思是：甲袋中装有黄金 9 枚（每枚黄金重量相同），乙袋中装有白银 11 枚（每枚白银重量相同），称重两袋相等，两袋互相交换 1 枚后，甲袋比乙袋轻了 13 两（袋子重量忽略不计），问黄金、白银每枚各重多少两？设每枚黄金重 x 两，每枚白银重 y 两，根据题意可列方程组为_____．

12. 已知 $|2x-3y+4|$ 与 $(x-2y+5)^2$ 互为相反数，则 $(x-y)^{2021}=$_____．

三、解答题（共 52 分）

13.（10 分）解下列方程组：

（1）$\begin{cases}x-2y=1,\\3x-5y=8;\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+2}{3}=-2, \\ 3x+5y=-1. \end{cases}$

14. (8分) 已知$\begin{cases} x=2, \\ y=-3 \end{cases}$是关于$x$，$y$的二元一次方程$3x=y+a$的解，求$a(a-1)$的值.

15. (10分) 已知$y=x^2+px+q$，当$x=1$时，y的值为2；当$x=-2$时，y的值为2，求当$x=-3$时，y的值.

16. (12分) [**中考·百色**] 一艘轮船在相距90千米的甲、乙两地之间匀速航行，从甲地到乙地顺流航行用6小时，逆流航行比顺流航行多用4小时.

(1) 求该轮船在静水中的速度和水流速度；

(2) 若在甲、乙两地之间建立丙码头，使该轮船从甲地到丙地和从乙地到丙地所用的航行时间相同，问甲、丙两地相距多少千米?

17. (12分) 为庆祝“六一”儿童节，某市中小学统一组织文艺会演，甲、乙两所学校共92人(其中甲校人数多于乙校人数，且甲校人数不超过90人)准备统一购买服装参加演出，下面是某服装厂给出的演出服装的价格表：

购买服装的套数	1套至45套	46套至90套	91套及以上
每套服装的价格	60元	50元	40元

如果两所学校分别单独购买服装，一共应付5 000元.

(1) 如果甲、乙两校联合起来购买服装，那么比各自购买服装共可以节省多少钱?

(2) 甲、乙两校各有多少学生准备参加演出?

(3) 如果甲校有10名学生被抽调去参加书法绘画比赛不能参加演出，请为两校设计一种省钱的购买服装方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

探究倾斜天平的奥秘

探究倾斜天平的奥秘











第8章 一元一次不等式

核心考点

你将见到的

- 不等式的性质
- 解一元一次不等式
- 解一元一次不等式组
- 不等式及不等式组的应用

核心方法

我们为你提供的

- 数值验证法
- 口诀法
- 建模思想
- 作差法
- 分类讨论思想
- 转化思想
- 数轴法
- 数形结合思想

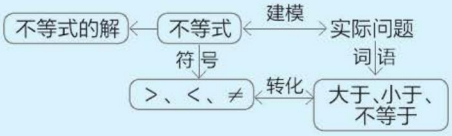
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.1 认识不等式

核心知识

- 不等式的概念
- 不等式的解
- 列不等式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 不等式

1. 不等式： 用不等号“<”或“>”表示不等关系的式子，叫做不等式.

注意：(1)判断一个式子是否为不等式，关键看所给式子是否含不等号(>、≥、<、≤或≠)，与不等式是否成立无关. 如 $3<2$ 并不成立，但它仍然是不等式.(2)不等号具有方向性，不等号两边的数一般不能随意交换. (3)不等号的“开口”所对的数较大，不等号的“尖头”所对的数较小.

2. 常用不等号的意义、读法：

名称	符号	读法	意义	例子
小于号	$<$	小于	表示左边的量比右边的量小	$x<5$
大于号	$>$	大于	表示左边的量比右边的量大	$x>2$
小于或等于号	$\leqslant$	①小于或等于；②不大于	表示左边的量“不大于”右边的量	$x\leqslant 3$
大于或等于号	$\geqslant$	①大于或等于；②不小于	表示左边的量“不小于”右边的量	$x\geqslant -1$
不等于号	$\neq$	不等于	表示左边的量“不等于”右边的量	$x\neq -3$

提分·必记

特别提醒

- 判断一个式子是否为不等式，关键是看所给式子是否含不等号；
- 不等号具有方向性，不等号两边的数(或式子)不能随意交换.

拔考向▸ 利用不等式的定义进行识别

例 1 判断下列各式哪些是等式，哪些是不等式，哪些既不是等式也不是不等式.

(1) $x+y$；　　(2) $3x>7$；

(3) $5=2x+3$；　　(4) $x^2>0$；

(5) $2x-3y=1$；　　(6) $5\div 2$；

(7) $2>7$.

解题秘方： 紧扣不等式的定义进行识别，关键是看式子是否含有不等号.

解： (3)(5)是等式，(2)(4)(7)是不等式，(1)(6)既不是等式也不是不等式.

提分·秘诀

特别警示

判断一个式子是否为不等式与不等式是否成立没有关系. 例如，本例中的“$2>7$”，虽然这个式子不成立，但它是不等式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 不等式的解

不等式的解：能使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解．

不等式的解与一元一次方程的解的区别：

（1）不等式的解是不确定的，一个不等式如果有解，一般会有无数个解，而一个一元一次方程的解，一般只有一个；

（2）不等式的解可以有多个，它是指某一特定范围内的所有的数，用它代替不等式中的未知数，不等式一定成立．

拔考向▶ 利用不等式的解的定义进行识别

例 2 判断下列说法是否正确：

（1）4 是不等式 $x+2>1$ 的解；

（2）6 不是不等式 $y-1<6$ 的解；

（3）所有小于 2 的整数都是不等式 $x+3<5$ 的解．

解题秘方：紧扣不等式的解的定义进行判断：把数值代入不等式中，看不等式是否成立．

解：（1）把 $x=4$ 代入不等式的左边，左边 $=6>1$，所以 $x=4$ 是不等式 $x+2>1$ 的解．故（1）的说法正确．

（2）把 $y=6$ 代入不等式的左边，左边 $=5<6$，所以 $y=6$ 是不等式 $y-1<6$ 的解，故（2）的说法不正确．

（3）因为所有小于 2 的整数都能使 $x+3<5$ 成立，所以（3）的说法正确．

提分·必记

特别解读

只要是能使不等式成立的未知数的值都是不等式的解．关键是使不等式成立，个数不能确定．

提分·秘诀

方法点拨

1. 判断某个数值是不是不等式的解，就是用这个数值代替不等式中的未知数，看不等式是否成立．
2. 不等式的解是一个数值，不是一个不等式，如 $x=5$ 是不等式 $x+2>1$ 的解，但不能说 $x>5$ 是不等式 $x+2>1$ 的解．

点知识▶ 3 用不等式表示不等关系

1. 列不等式：用不等式表示不等关系叫做列不等式．

2. 列不等式通常有以下两种情形：

（1）根据数量关系列不等式，其基本步骤：①根据题意中的“大于”“大于或等于”“小于”“小于或等于”等，确定不等号；②根据题意确定不等号两边的代数式．

（2）根据实际问题列不等式．

3. 列不等式的步骤：

（1）认真审题，分清题目中包含的数量间的大小关系；

（2）将题目中的不同数量用代数式表示出来；

（3）用不等号以及运算符号连接所列的代数式，列出不等式．

拔考向▶ 利用不等式表示不等关系

例 3 用不等式表示：

（1）a 的一半与 3 的和大于 5；

（2）x 的 3 倍与 1 的差小于 2；

（3）a 的 $\frac{1}{2}$ 与 1 的差是正数；

提分·必记

常见的不等式基本语言与符号表示：

不等式基本语言	符号表示
a 是正数	$a>0$
a 是负数	$a<0$
a 是非正数	$a\leqslant 0$
a 是非负数	$a\geqslant 0$
a、b 同号	$ab>0$
a、b 异号	$ab<0$

提分·秘诀

解法提醒

用不等式表示不等关系时，一定要抓住关键词语，弄清不等关系，把用文字语言描述的不等关系转化为用数学符号表示的不等式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）m 与 2 的差是负数．

解题秘方：紧扣不等关系中的关键词语列出不等式．

解：（1）$\frac{1}{2}a+3>5$．（2）$3x-1<2$．

（3）$\frac{1}{2}a-1>0$．（4）$m-2<0$．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用数轴的性质比较大小

挑战·高分

例 4 a、b 两个数在数轴上的对应点的位置如图 8.1-1 所示．

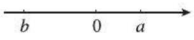


图 8.1-1

用“<”号或“>”号填空：

（1）a____b；　（2）$|a|$____$|b|$；　（3）$a+b$____0；

（4）$a-b$____0；　（5）$a+b$____$a-b$；　（6）ab____a．

解题秘方：紧扣数轴的特征，比较两个式子的大小．

解：由图 8.1-1 可知，$a>0$，$b<0$，$|a|<|b|$，所以（1）$a>b$；（2）$|a|<|b|$；（3）$a+b<0$；（4）$a-b>0$；（5）$a+b<a-b$；（6）$ab<a$．

答案：（1）>　（2）<　（3）<　（4）>　（5）<　（6）<

方法点拨

求解此类不等式与数轴的综合题：一要掌握数轴的性质；二要掌握用不等号表示不等关系．

拔尖角度 2 利用逆向思维解决开放试题

挑战·高分

例 5 对不等式“$5x+4y\leqslant 20$”，我们可以这样理解，香蕉每千克 5 元，苹果每千克 4 元，购买 x 千克香蕉与 y 千克苹果的总钱数不超过 20 元．请你结合生活实际，设计具体情境解释下列不等式．

（1）$5x-3y\geqslant 2$；　（2）$4a+3b<8$．

解题秘方：紧扣不等式的结构特征，利用逆向思维写出具体问题情境．

解：答案不唯一，比如：（1）每支钢笔 5 元，每支圆珠笔 3 元，x 支钢笔的价钱比 y 支圆珠笔的价钱至少多 2 元．

（2）原不等式可变形为 $2\cdot 2a+2\cdot\frac{3}{2}b<8$．

长为 $2a$ cm，宽为 $\frac{3}{2}b$ cm 的长方形，周长小于 8 cm．

方法点拨

根据不等式设计情境的秘诀：设计具体情境表示不等式的意义时，可以适当地把不等式变形，使之更容易找到合适的问题情境．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要内容是不等式的定义以及用不等式表示现实问题中的不等关系，在中考中主要考查列不等式，多以选择题、填空题的形式出现，有时也会出现在解答题中．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 用不等式表示数量关系

例6 [中考·柳州]如图8.1-2，身高为x cm的1号同学与身高为y cm的2号同学站在一起时，如果用一个不等式来表示他们的身高关系，则这个式子可以表示成x_____y（用“>”号或“<”号填空）.



图8.1-2

试题评析：本题主要考查了不等式的定义，仔细看图是解题的关键.

解：如果用一个不等式来表示他们的身高关系，则这个式子可以表示成$x < y$.

答案：<

冲刺·满分

解题方法

站在同一水平线上比较身高，类似于比较两条线段的长短，可以直接从“形”上判断出“量”的大小.

两年模拟兵法

☞答案见218页

1. x的值不小于3，用不等式表示为（　　）

A.$x < 3$　　B.$x > 3$

C.$x \neq 3$　　D.$x \geqslant 3$

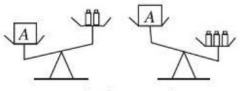
2. 在式子①$5 \geqslant -3$；②$3x+1$；③$s=vt$；④$x^2-4 \leqslant 0$；⑤$5x-3=2x+2$；⑥$a > b$；⑦$a^2+b^2 \neq c^2$中，不等式有（　　）

A.4个　B.5个　C.6个　D.7个

3. 在x的取值-4，-2.5，-1，0，3，5，10，50中，能使不等式$x-2 < 3$成立的x的值的个数为（　　）

A.8　B.7　C.6　D.5

4. 如图，天平右盘中的每个砝码的质量都是1g，则图中的物品A的质量范围是（　　）



（第4题）

A. 大于2g　　B. 小于3g

C. 大于2g且小于3g　　D. 大于2g或小于3g

5. 下列说法中，错误的是（　　）

A.0是不等式$x > -\frac{1}{4}$的一个解

B. 不等式$x < \frac{1}{2}$的整数解有无数个

C.-2是不等式$x < -2$的一个解

D.$2x < 5$的正整数解只有两个

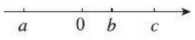
6. 用不等式表示：

（1）x的$\frac{1}{3}$与y的2倍的和是非正数：_____；

（2）a与b的差的30%不小于-6：_____；

（3）x的5倍与6的差是非负数：_____.

7. a, b, c三个数在数轴上所对应的点如图，请用“>”号或“<”号填空：



（第7题）

（1）$a+b$_____0；

（2）$-a$_____$-b$；

（3）$a-c$_____0；

（4）$|a|-|b|$_____0.

8. 你能比较$2\,019^{2\,020}$和$2\,020^{2\,019}$的大小吗？

为了解决这个问题，我们可先探索形如：n^{n+1}和$(n+1)^n$的大小关系（$n \geqslant 1$且n为自然数）.为了探索其规律可从$n=1$，2，3，4，…这些简单的情形入手，从中观察、比较、猜想、归纳并得出结论.

（1）比较下列各组中两个数的大小（填“>”号或“<”号）：

①$1^2$_____2^1，②$2^3$_____3^2，③$3^4$_____4^3，④$4^5$_____5^4，⑤$5^6$_____6^5.

（2）试归纳出n^{n+1}和$(n+1)^n$的大小关系.

（3）运用归纳的结论，试比较下列两数的大小关系：$2\,019^{2\,020}$_____$2\,020^{2\,019}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.2 解一元一次不等式

核心知识

- 不等式的解集
- 不等式的性质
- 解一元一次不等式
- 一元一次不等式的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

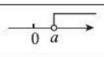
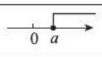
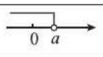
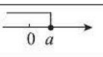
点知识▸1 不等式的解集

1. 一个不等式的所有解，组成这个不等式的解的集合，简称为这个不等式的解集.

2. 不等式的解与不等式的解集的区别与联系：

区别	不等式的解集是能使不等式成立的未知数的取值范围；不等式的解是能使不等式成立的未知数的值.
联系	不等式的解集包含不等式的解，不等式的解是不等式解集中的具体数值，不等式的所有解组成了不等式的解集.

3. 不等式的解集表示的是未知数的取值范围，所以不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来. 一般地，利用数轴表示不等式的解集通常有以下四种情况（设 $a>0$）：

不等式的解集	$x>a$	$x\geqslant a$	$x<a$	$x\leqslant a$
数轴表示				

注意：在数轴上表示不等式的解集时，大于向右画，小于向左画；有等号画实心圆点（表示包括这一点），无等号画空心圆圈（表示不包括这一点）.

拔考向▸利用不等式的解集解决问题

题型 1：利用不等式的解与解集的定义进行辨析

例 1 有下列四种说法：

① $x=\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的一个解；

② $x=\frac{5}{2}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的一个解；

③ $x>\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集；

④ $x>2$ 中的任何一个数都可以使不等式 $4x-5>0$ 成立，所以 $x>2$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集.

其中正确的有（　　）

提分·必记

特别提醒

不等式的解集必须符合两个条件：①解集中的每一个数值都能使不等式成立；②能够使不等式成立的所有数值都在该解集中.

特别提醒

用数轴表示解集的一般方法：

1. 画数轴；
2. 定界点，注意界点是实心圆点，还是空心圆圈；
3. 定方向，原则是“小于向左，大于向右”.

提分·秘诀

方法点拨

识别不等式的解与解集的方法：

代入不等式，能使不等式成立的未知数的值就是不等式的解；所有不等式的解的集合为不等式的解集. **注意如果一个范围不包括不等式所有的解或包括有使不等式不成立的数，那么这个范围就不是不等式的解集.**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方：紧扣不等式的解及解集的定义，以及它们的区别与联系进行辨析.

解：①将 $x=\frac{5}{4}$ 代入不等式左边，得左边等于 0，不等式不成立，所以 $x=\frac{5}{4}$ 不是这个不等式的解；

②将 $x=\frac{5}{2}$ 代入不等式左边，得左边等于 5，$5>0$，所以 $x=\frac{5}{2}$ 是这个不等式的一个解；

③在 $x>\frac{5}{4}$ 内所有 x 的值都满足不等式 $4x-5>0$，且不等式 $4x-5>0$ 的所有的解都在 $x>\frac{5}{4}$ 内，所以 $x>\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集；

④尽管 $x>2$ 中的任何一个数都可以使不等式 $4x-5>0$ 成立，但这个范围并不包含这个不等式所有的解，因而 $x>2$ 不是该不等式的解集. 故选 B.

答案：B

题型 2：在数轴上表示不等式的解集

例 2　在数轴上表示不等式的解集：

（1）$x>-1$；（2）$x\leqslant 1$.

解题秘方：根据在数轴上表示解集的方法，确定界点以及方向.

解：（1）如图 8.2−1.

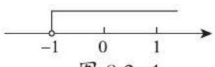


图 8.2−1

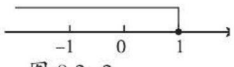


图 8.2−2

数轴上表示解集

（2）如图 8.2−2.

题型 3：利用数形结合思想求不等式的特殊解

例 3　填空：

（1）写出不等式 $x<3$ 的所有正整数解：_____；

（2）写出不等式 $x>-4$ 的所有负整数解：_____；

（3）写出不等式 $x<2$ 的所有非负整数解：_____；

（4）写出不等式 $x>-3$ 的最小整数解：_____.

解题秘方：所给出的不等式本身就是其解集，将解集表示在数轴上，结合数轴的特征找出其特殊解.

解：将这几个不等式的解集在数轴上表示出来，如图 8.2−3 所示.

（1）满足 $x<3$ 的正整数为 1，2.

（2）满足 $x>-4$ 的负整数为 −1，−2，−3.

（3）满足 $x<2$ 的非负整数（包括正整数和 0）为 0，1.

（4）大于 −3 的整数有 −2，−1，0，1，…，其中最小的整数为 −2.

特别提醒

因为 $x>-1$ 无等号，所以在表示 −1 的点上画空心圆圈.

因为 $x\leqslant 1$ 有等号，所以在表示 1 的点上画实心圆点.

方法点拨

借助数轴这个“形”表示不等式中 x 的取值范围，再在该范围内找出符合条件的特殊“数”，利用数形结合思想能很直观地求出符合条件的数.

详解

∵满足 $x<3$ 的正整数的意思是 $0<x<3$ 且 x 为整数，∴满足 $x<3$ 的正整数为 1，2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

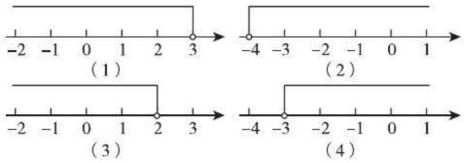


图 8.2−3

答案：（1）1，2　（2）−3，−2，−1　（3）0，1　（4）−2

点知识▶2 不等式的性质

1. 性质 1：

不等式的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变，即如果 $a > b$，那么 $a+c > b+c$，$a-c > b-c$.

2. 性质 2：

不等式的两边都乘以（或都除以）同一个正数，不等号的方向不变，即如果 $a > b$，并且 $c > 0$，那么 $ac > bc$，$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

不等式的性质

3. 性质 3：

不等式的两边都乘以（或都除以）同一个负数，不等号的方向改变，即如果 $a > b$，并且 $c < 0$，那么 $ac < bc$，$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

4. 不等式的性质与等式的性质的关系：

类别	不同点	相同点
不等式	两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向要改变.	（1）两边加（或减）同一个数（或式子），不等式和等式仍成立； （2）两边乘（或除以）同一个正数，不等式和等式仍成立.
等式	两边乘（或除以）同一个负数，等式仍然成立.	

拔考向▶利用不等式的性质解决问题

题型 1：利用不等式的性质识别不等式的变形

例 4　若 $x>y$，则下列式子中错误的是（　　）

A. $x-3>y-3$　　B. $\frac{x}{3} > \frac{y}{3}$

C. $x+3>y+3$　　D. $-3x>-3y$

解题秘方：弄清每个选项变形的方式，紧扣不等式的性质进行解答.

解：分析如下表：

提分·必记

特别解读

- 不等式的三条性质是不等式变形的依据，运用不等式的性质时，不等式的两边要同时进行相同的变形.
- 在不等式的变形中，还经常用到下列性质：
  （1）对称性：若 $a>b$，则 $b<a$；
  （2）传递性：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

提分·秘诀

方法点拨

辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法：

先判断出第二个不等式是由第一个不等式经过怎样的变形得到的，再确定出每一步变形的依据，最后确定不等号是否改变方向.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将 $x>y$ 变形	依据	结论
两边同时减 3，得 $x-3>y-3$	不等式的性质 1	A 正确
两边同时除以 3，得 $\frac{x}{3}>\frac{y}{3}$	不等式的性质 2	B 正确
两边同时加 3，得 $x+3>y+3$	不等式的性质 1	C 正确
两边同时乘 -3，得 $-3x<-3y$	不等式的性质 3	D 错误

答案：D

题型 2：利用不等式的性质解简单的不等式

例 5 利用不等式的性质解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来.

（1）$\frac{1}{4}x<-\frac{3}{4}x+2$；（2）$5x-6\leqslant 7x-4$.

解题秘方：利用不等式的性质把题中的不等式化为 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）（a 为常数）的形式，然后在数轴上表示解集.

解：（1）利用不等式的性质 1，不等式的两边加 $\frac{3}{4}x$，不等号的方向不变，

得 $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x<-\frac{3}{4}x+2+\frac{3}{4}x$，$\therefore x<2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.2−4 所示.

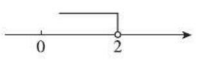


图 8.2−4

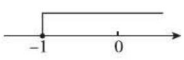


图 8.2−5

（2）利用不等式的性质 1，不等式的两边减 $7x$，不等号的方向不变，

得 $5x-6-7x\leqslant 7x-4-7x$，

$\therefore -2x-6\leqslant -4$.

利用不等式的性质 1，不等式的两边加 6，不等号的方向不变，

得 $-2x-6+6\leqslant -4+6$，

$\therefore -2x\leqslant 2$.

利用不等式的性质 3，不等式的两边除以 -2，不等号的方向改变，

得 $\frac{-2x}{-2}\geqslant\frac{2}{-2}$，

$\therefore x\geqslant -1$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.2−5 所示.

方法点拨

用不等式的性质解不等式的步骤：

（1）用不等式的性质 1 将不等式变成 $ax>b$（$ax\geqslant b$）或 $ax<b$（$ax\leqslant b$）的形式；

（2）用不等式的性质 2、3 将不等式变成 $x>\frac{b}{a}\left(x\geqslant\frac{b}{a}\right)$或 $x<\frac{b}{a}\left(x\leqslant\frac{b}{a}\right)$的形式.

提示

不等式的两边减 $7x$，使含 x 的项在不等号的左边；不等式的两边加 6，使常数项在不等号的右边.

不等式的两边除以 -2 时，切记不等号的方向要改变.

知识▸3 解一元一次不等式

1. 定义：只含有一个未知数，并且含未知数的式子都是整式，未知数的次数都是 1. 像这样的不等式叫做一元一次不等式.

一元一次不等式的“三要素”：

（1）不等式的两边都是整式；

提分·必记

特别警示

判断一个不等式是否为一元一次不等式，必须化简整理后再判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）只含有一个未知数；

（3）未知数的次数是 1.

2. 解一元一次不等式，要根据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<a$（$x\leqslant a$）或 $x>a$（$x\geqslant a$）的形式．解一元一次不等式的步骤如下：

去分母→去括号→移项→合并同类项→系数化为 1.

3. 解一元一次不等式与解一元一次方程的区别与联系：

	一元一次方程	一元一次不等式
解法步骤	①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤系数化为 1.（解不等式时，去分母、系数化为 1 时，若两边同时乘（或除以）一个负数，不等号的方向改变）	
依据	等式的性质	不等式的性质
解的个数	只有一个解	有无数多个解
解（集）的形式	$x=a$	$x<a$（$x\leqslant a$）或 $x>a$（$x\geqslant a$）

核心考向▶利用解一元一次不等式解决问题

题型 1：利用解一元一次不等式的步骤解一元一次不等式

例 6 解不等式：$x-\dfrac{3x-8}{2}+1\geqslant\dfrac{2(10-x)}{7}$，并把解集在数轴上表示出来．

解题秘方：先根据解一元一次不等式的步骤求出解集，然后在数轴上表示出解集．

解：去分母，得 $14x-7(3x-8)+14\geqslant 4(10-x)$．

去括号，得 $14x-21x+56+14\geqslant 40-4x$.

移项，得 $14x-21x+4x\geqslant 40-56-14$.

合并同类项，得 $-3x\geqslant -30$.

系数化为 1，得 $x\leqslant 10$.



图 8.2-6

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.2-6 所示．

题型 2：利用已知不等式的解集求字母的值

例 7 已知不等式 $\dfrac{1}{3}(x-m)>3-m$ 的解集为 $x>1$，则 m 的值为_____.

解题秘方：先用含 m 的式子表示出不等式的解集，再根据已知条件列出关于 m 的方程，求解即可．

解：去分母，得 $x-m>3(3-m)$．去括号，得 $x-m>9-3m$.

移项、合并同类项，得 $x>9-2m$.

∵不等式的解集为 $x>1$，

∴ $9-2m=1$，解得 $m=4$.

答案：4

只含有一个未知数，隐含着未知数的系数不为零，即化成最简形式 $ax>b$（$ax\geqslant b$），或 $ax<b$（$ax\leqslant b$）时，$a\neq 0$.

特别提醒

解一元一次不等式时，五个步骤不一定都要用到，并且不一定都要按照这个顺序求解，应根据不等式的特点灵活求解．

提分·秘诀

方法点拨

解一元一次不等式时，有两步可能会改变不等号的方向：其一，去分母；其二，系数化为 1. 为了使问题更加简便，可以在“去分母”这一步里，两边同乘一个正数，这样，使“改变不等号的方向”的问题落到“系数化为 1”这一步，由于要注意的只有这一步，这样就不容易出错了．

注意改变不等号的方向．

题意解读

已知不等式 $\dfrac{1}{3}(x-m)>3-m$ 的解集为 $x>1$，则 x 为未知数．

∵ $x>9-2m$ 与 $x>1$ 表示同一个不等式的解集，∴ $9-2m=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：构造一元一次不等式求字母的取值范围

例 8 当 x 取何正整数时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值？

解题秘方：先根据题意列出不等式，再解不等式．

解：根据题意，得 $\frac{x-2}{2} \leqslant \frac{7-x}{3}$．

去分母，得 $3(x-2) \leqslant 2(7-x)$．

去括号，得 $3x-6 \leqslant 14-2x$．

移项、合并同类项，得 $5x \leqslant 20$．

系数化为 1，得 $x \leqslant 4$，

则不等式的正整数解为 1，2，3，4．

所以当 x 取 1，2，3，4 时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值．

方法点拨

求使不等关系成立时字母的值或取值范围，关键是列出正确的不等式．

点知识 ▸ 4 一元一次不等式的实际应用

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的解．

列不等式解决实际问题的步骤：

（1）**审**：认真审题，找出已知量和未知量，并找出它们之间的关系；

（2）**设**：设出适当的未知数；

（3）**列**：根据题中的不等关系列出不等式；

（4）**解**：解不等式，求出其解集；

（5）**验**：检验所求出的不等式的解集是否符合题意；

（6）**答**：写出答案．

提分·必记

警示误区

- 设未知数时，表示不等关系的文字（如至少或最多）不能写；
- 检验时，要注意实际问题中的隐含条件，必须满足两个方面：一、是不等式的解；二、要符合实际意义．

拔考向 ▸ 利用一元一次不等式解决实际问题

题型 1：利用一元一次不等式解决实际问题

例 9 某物流公司要将 300 吨物资运往某地，现有 A，B 两种型号的车可供调用，已知 A 型车每辆可装 20 吨，B 型车每辆可装 15 吨，在每辆车不超载的条件下，把 300 吨物资装运完，问：在已确定调用 5 辆 A 型车的前提下，至少还需调用 B 型车多少辆？

解题秘方：分析题中隐含的不等关系建立不等式模型解决问题．

解：设还需调用 B 型车 x 辆．

根据题意，得 $20\times5+15x \geqslant 300$．

解得 $x \geqslant 13\frac{1}{3}$．

因为 x 为整数，所以 x 的最小值为 14．

答：至少还需调用 B 型车 14 辆．

提分·秘诀

特别提醒

- 隐含的不等关系：A、B 两种型号的汽车总共运的物资不少于 300 吨．
- 本题中由于车的辆数为整数，因此要在这个范围内取最小整数解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：方程与不等式的综合应用

例 10 某电器商场销售 A，B 两种型号计算器，A，B 两种计算器的进货价格分别为每台 30 元，40 元．商场销售 5 台 A 型号和 1 台 B 型号计算器，可获利润 76 元；销售 6 台 A 型号和 3 台 B 型号计算器，可获利润 120 元．（利润 = 销售价格 − 进货价格）

（1）商场销售 A，B 两种型号计算器的销售价格分别是每台多少元？

（2）商场准备用不多于 2 500 元的资金购进 A，B 两种型号计算器共 70 台，问最少需要购进 A 型号的计算器多少台？

解题秘方：（1）根据题中的等量关系列出方程组，求出题目中所要求的未知量．（2）根据不等关系建立不等式模型解决问题．

解：（1）设 A，B 两种型号计算器的销售价格分别是每台 x 元，y 元，

则 $\begin{cases}5(x-30)+(y-40)=76,\\6(x-30)+3(y-40)=120,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=42,\\y=56.\end{cases}$

答：A，B 两种型号计算器的销售价格分别为每台 42 元，56 元．

（2）设需要购进 A 型号的计算器 a 台，则

$30a+40(70-a)\leqslant 2\,500$，解得 $a\geqslant 30$.

答：最少需要购进 A 型号的计算器 30 台．

方法点拨

运用方程组或不等式解决实际问题时，从实际问题中发现相等关系或不等关系，通过方程组模型或不等式模型解决实际问题．列不等式解应用题时，首先审题，找出题中的未知量和所有的已知量，直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为未知数，然后用含未知数的式子表示相关的量，找出不等关系列不等式、求解、作答，即审、设、找、列、解、答．

题型 3：利用一元一次不等式解决优化方案问题

例 11 某校组织学生参加“周末郊游”．甲旅行社说：“只要一名学生按全价，那么其余学生可享受半价优惠．”乙旅行社说：“全体学生都可按 6 折优惠．”已知全价为每人 240 元．

（1）设学生有 x 人，甲旅行社收费为 $y_{甲}$ 元，乙旅行社收费为 $y_{乙}$ 元，用含 x 的式子表示出 $y_{甲}$ 与 $y_{乙}$；

（2）讨论哪一家旅行社更优惠．

解题秘方：（1）根据题意直接列式、化简即可；（2）分三种情况讨论：$y_{甲}>y_{乙}$，$y_{甲}=y_{乙}$，$y_{甲}<y_{乙}$，分别求出满足要求的学生数．

解：（1）$y_{甲}=240+(x-1)\times 120=120x+120$，

$y_{乙}=240\times 0.6x=144x$.

（2）当 $y_{甲}>y_{乙}$ 时，$120x+120>144x$，

解得 $x<5$.

∴当学生少于 5 人时，乙旅行社更优惠．

当 $y_{甲}=y_{乙}$ 时，$120x+120=144x$，

解得 $x=5$.

∴当学生正好为 5 人时，两家旅行社一样优惠．

当 $y_{甲}<y_{乙}$ 时，$120x+120<144x$，

解得 $x>5$.

∴当学生超过 5 人时，甲旅行社更优惠．

解法提醒

当一个问题有多种可能的情况时，需要分情况讨论出所有可能的结果，体现了分类讨论思想．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用作差法比较大小解生活中的方案选择问题

例 12 制作某种产品有两种用料方案，方案 1 是用 4 张 A 型钢板，8 张 B 型钢板；方案 2 是用 3 张 A 型钢板，9 张 B 型钢板，已知 A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大．从省料的角度考虑，应选择哪种方案？

解题秘方：分别表示出两种方案的用料面积，然后利用作差法比较大小．

解：设 A 型钢板和 B 型钢板的面积分别为 x 和 y，

于是两种方案用料面积分别为 $4x+8y$ 和 $3x+9y$，

则 $4x+8y-(3x+9y)=x-y$.

因为 A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大，即 $x>y$，

所以 $x-y>0$.

所以 $4x+8y>3x+9y$. 从省料的角度考虑，应选择方案 2.

挑战·高分

方法点拨

设 a，b 为任意两个数，先求出 a 与 b 的差，再根据“当 $a-b<0$ 时，$a<b$；当 $a-b=0$ 时，$a=b$；当 $a-b>0$ 时，$a>b$”来比较 a 与 b 的大小．

拔尖角度 2 利用不等式的性质解含字母常数的不等式

例 13 已知关于 x 的不等式 $2(a-b)x+a-5b>0$ 的解集为 $x<\frac{7}{10}$，求关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集．

解题秘方：根据不等式的性质与已知不等式的解集的关系，确定不等式中字母的等量关系和不等关系，用此关系再求未知不等式的解集．

解：整理 $2(a-b)x+a-5b>0$，得 $2(a-b)x>-a+5b$.

由其解集为 $x<\frac{7}{10}$，得 $2(a-b)<0$ 且 $\frac{-a+5b}{2(a-b)}=\frac{7}{10}$.

于是 $-10a+50b=14(a-b)$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{8}$.

$\because \frac{-a+5b}{2(a-b)}=\frac{7}{10}>0$，

$\therefore$ 分子与分母是同号的．

$\therefore -a+5b<0$，$\therefore 5b<a$.

又 $\because a-b<0$，即 $a<b$，

$\therefore 5b<a<b$，

$\therefore 5b<b$，$\therefore b<0$.

又 $\because a<b$，$\therefore a<0$.

由 $ax>b$（a 为负数），

得 $x<\frac{b}{a}=\frac{3}{8}$，即 $x<\frac{3}{8}$.

挑战·高分

方法点拨

解题时要充分挖掘题中的已知条件，包括隐含的条件，如确定 a 的取值范围（正负性）之后，才能正确解决本题．

详解

∵不等号改变了方向．

∴ $\frac{-a+5b}{2(a-b)}=\frac{7}{10}$ 且 $2(a-b)<0$.

∴ $-a+5b<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用两个不等式同解的定义求字母值

挑战·高分

例 14 如果关于 x 的不等式 $(2-a)x-3a<-1$ 的解集与 $2x<4$ 的解集相同，求 a 的值.

解题秘方：先把字母 a 当成常数，求出两个关于 x 的不等式的解集，再根据两个不等式的解集相同，得出关于 a 的方程，最后求出 a 的值.

解：整理 $(2-a)x-3a<-1$，得 $(2-a)x<3a-1$.

①当 $2-a>0$，即 $a<2$ 时，$x<\dfrac{3a-1}{2-a}$；

②当 $2-a=0$，即 $a=2$ 时，x 取任意数；

③当 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，$x>\dfrac{3a-1}{2-a}$.

解不等式 $2x<4$，得 $x<2$.

∵两个不等式的解集相同，

∴②③与 $x<2$ 不相符，舍去.

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{3a-1}{2-a}=2,\\ a<2,\end{cases}$$

解得 $a=1$.

解法提醒

参数也可做已知数：遇到含字母参数的不等式求解集的问题时，千万不要怕，其解题步骤和解不含字母参数的不等式的步骤基本一致，应注意去分母和系数化为1，两步中乘(或除以)的若是含字母的式子，则要对式子的取值范围进行分类讨论.

拔尖角度 4 利用不等式解与方程组综合的应用

挑战·高分

例 15 已知方程组 $\begin{cases}3x+y=k+1,\\ x+3y=k-1\end{cases}$ 的解满足 $x+y<0$，求 k 的取值范围.

解题秘方：由于方程组的解满足 $x+y<0$，故可考虑把 k 看成已知数，求出 x，y 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解：$\begin{cases}3x+y=k+1,①\\ x+3y=k-1.②\end{cases}$

①×3−②，得 $8x=2k+4$，

$\therefore x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2}$.

②×3−①，得 $8y=2k-4$，

$\therefore y=\dfrac{k}{4}-\dfrac{1}{2}$.

∵ $x+y<0$，

$\therefore \dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{4}-\dfrac{1}{2}<0$.

$\therefore k<0$，即 k 的取值范围为 $k<0$.

另解

分析：观察这个方程组，可以发现：我们只需把两个方程相加，就可以得到 $x+y$ 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解：$\begin{cases}3x+y=k+1,①\\ x+3y=k-1.②\end{cases}$

①+②，得 $4x+4y=2k$，

$\therefore x+y=\dfrac{2k}{4}=\dfrac{k}{2}$.

∵ $x+y<0$，

$\therefore \dfrac{k}{2}<0$.

$\therefore k<0$，

即 k 的取值范围为 $k<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 5 利用不等式解方案设计的实际应用

挑战·高分

解法提醒

解方案设计问题的方法：

先由题意列出不等式，解不等式，得出符合题意的解，然后对不同的情况进行讨论，从而得出其最优方案.

例16 某公司为了扩大经营，决定购进6台机器用于生产某种活塞.现有甲、乙两种机器可供选择，其中每台机器的价格和每台机器日生产活塞的数量如下表：

	甲	乙
价格/（万元/台）	7	5
每台日生产量/个	100	60

公司要求本次购买机器所耗资金不能超过34万元.

（1）按该公司要求，有哪几种购买方案？

（2）若该公司购进的6台机器的日生产量不低于380个，那么为了节约资金应选择哪种购买方案？

解题秘方：根据题目中的不等关系建立不等式模型，利用解集中的特殊解设计方案.

解：（1）设购买甲种机器x（$0 \leqslant x \leqslant 6$）台，则购买乙种机器（$6-x$）台.

依题意，得$7x+5(6-x) \leqslant 34$，解得$x \leqslant 2$.

∵x取非负整数，

∴$x=0$，1，2.

∴该公司有以下三种购买方案：

方案一：不购买甲种机器，购买乙种机器6台；

方案二：购买甲种机器1台，购买乙种机器5台；

方案三：购买甲种机器2台，购买乙种机器4台.

（2）按方案一购买机器，所耗资金为$6\times5=30$（万元），新购买的6台机器的日生产量为$6\times60=360$（个）；

按方案二购买机器，所耗资金为$1\times7+5\times5=32$（万元），新购买的6台机器的日生产量为$1\times100+5\times60=400$（个）；

按方案三购买机器，所耗资金为$2\times7+4\times5=34$（万元），新购买的6台机器的日生产量为$2\times100+4\times60=440$（个）.

∵方案二既能达到日生产量不低于380个的要求，又比方案三节约2万元资金，

∴应选择方案二.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容在中考中热门考点有很多，不等式的性质，在数轴上表示不等式的解集，解一元一次不等式，一元一次不等式的应用都是中考常考的知识点.考查的形式多样，但难度都不大，一般与方程和函数综合考查较多.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 用数轴表示不等式的解集

例 17 [中考·贵阳]关于 x 的不等式的解集在数轴上的表示如图 8.2-7 所示，则该不等式的解集为_____.

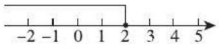


图 8.2-7

试题评析：本题考查了不等式的解集，解题的关键是掌握不等式的解集在数轴上的表示方法.

解：由图 8.2-7 知，解集表示在数轴上时方向向左且在表示 2 的点处为实心圆点，故其解集为 $x \leqslant 2$.

答案：$x \leqslant 2$

考法 2 利用不等式的性质识别不等式的变形

例 18 [中考·株洲]已知数 a，b 满足 $a+1 > b+1$，则下列选项可能错误的为（　　）

A.$a > b$　　B.$a+2 > b+2$

C.$-a < -b$　　D.$2a > 3b$

试题评析：本题考查了不等式的性质，解题的关键是不等式两边同时乘或除以一个负数不等号改变方向.

解：将原不等式的两边同时减去 1，得到 $a > b$；

将原不等式的两边同时加 1，得到 $a+2 > b+2$；

将原不等式的两边先同时减去 1，再同时乘 -1，得到 $-a < -b$；

选项 D 的变形不符合不等式的性质，故选 D.

答案：D

考法 3 一元一次不等式的特殊解

例 19 [中考·遵义]不等式 $6-4x \geqslant 3x-8$ 的非负整数解有（　　）

A.2 个　　B.3 个　　C.4 个　　D.5 个

试题评析：本题考查了求一元一次不等式的特殊解，掌握解一元一次不等式的一般步骤是解决问题的关键.

解：移项，得 $-4x-3x \geqslant -8-6$.

合并同类项，得 $-7x \geqslant -14$.

系数化为 1，得 $x \leqslant 2$.

∴非负整数解为 0，1，2.

答案：B

冲刺·满分

考法点津

已知解集在数轴上的表示，写出解集是从“形”到“数”的过程.

两者都要关注两点：一是方向，二是空心与实心.

考法点津

不等式的性质是不等式的变形以及解不等式的依据，运用不等式的性质识别不等式变形是否正确应注意两点：

一是“两同”，两边同时与同一个数；

二是不等号的变与不变.

特别提醒

- 求一元一次不等式的特殊解，先必须求出一元一次不等式的解集，然后在解集中根据特殊解的“特殊”性取解.
- 非负整数包括正整数和 0，其中“0”易被忽视.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 一元一次不等式与一元一次方程的综合

例 20 [中考·丽水]关于 x 的一元一次方程 $x-m+2=0$ 的解是负数，则 m 的取值范围是（　　）

A.$m \geqslant 2$　　B.$m > 2$　　C.$m < 2$　　D.$m \leqslant 2$

试题评析：本题主要考查了解一元一次方程以及一元一次不等式，解题的关键是对“解是负数”的理解，从而将题目转化为不等式进行求解.

解：$x-m+2=0$，

移项，得 $x=m-2$.

∵关于 x 的一元一次方程 $x-m+2=0$ 的解是负数，

∴ $x=m-2<0$，∴ $m<2$.

答案：C

考法点评

一元一次方程与一元一次不等式转化的细节是“解或解集的情况”：由一元一次方程解的情况列一元一次不等式，也可由一元一次不等式解集的情况列一元一次方程. 如：关于 x 的一元一次不等式 $x-m+2>0$ 的解集为 $x>2$，则 $m=$_____.

考法 5 一元一次不等式与二元一次方程组的综合

例 21 [中考·宜宾]若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1, \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解满足 $x+y>0$，则 m 的取值范围是_____.

试题评析：本题考查了解二元一次方程组，解一元一次不等式的综合运用，熟练掌握二元一次方程组的解法和一元一次不等式的解法是解题的关键.

解：$\begin{cases} x-y=2m+1, & ① \\ x+3y=3, & ② \end{cases}$

② − ①，得 $4y=2-2m$，即 $y=\dfrac{1-m}{2}$.

① ×3+ ②，得 $4x=6m+6$，即 $x=\dfrac{3m+3}{2}$.

∵ $x+y>0$，∴ $\dfrac{3m+3}{2}+\dfrac{1-m}{2}>0$.

解得 $m>-2$.

答案：$m>-2$

另解

将方程组中的两个方程相加，得

$2x+2y=2m+4$，

∴ $x+y=m+2$.

∵ $x+y>0$，

∴ $m+2>0$.

∴ $m>-2$.

考法 6 一元一次不等式的应用

例 22 [中考·齐齐哈尔]为有效开展“阳光体育”活动，某校计划购买篮球和足球共 50 个，购买资金不超过 3 000 元. 若每个篮球 80 元，每个足球 50 元，则篮球最多可购买（　　）

A.16 个　　B.17 个　　C.33 个　　D.34 个

试题评析：本题考查了一元一次不等式的应用——求范围的问题，解题的关键是列出不等式.

解：设篮球可购买 x 个，由题意可得 $80x+50(50-x) \leqslant 3\,000$，解得 $x \leqslant \dfrac{50}{3}$，故不等式的最大整数解为 $x=16$.

答案：A

剖题

1. 等量关系：“篮球和足球共 50 个”，用于两个未知量之间的转化，若设篮球购买 x 个，则足球购买 $(50-x)$ 个；
2. 不等关系：“购买资金不超过 3 000 元”，用于列一元一次不等式；
3. 取解时，注意未知数的实际意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·黄冈]若 $m > n$，下列不等式不一定成立的是（　　）

A. $m+3 > n+3$　　B. $-3m < -3n$

C. $\frac{m}{3} > \frac{n}{3}$　　D. $m^2 > n^2$

2. [中考·桂林]如果 $a > b$，$c < 0$，那么下列不等式成立的是（　　）

A. $a+c>b$　　B. $a+c>b-c$

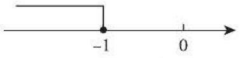
C. $ac-1>bc-1$　　D. $a(c-1) < b(c-1)$

3. 下列各式是一元一次不等式的是（　　）

A. $2x < 3y$　　B. $x^2+2x+1 > 0$

C. $4x-5 < x$　　D. $3x=4(2-x)$

4. 关于 x 的不等式 $2x-a \leqslant -1$ 的解集在数轴上的表示如图所示，则 a 的值是（　　）



（第4题）

A. 0　　B. -3

C. -2　　D. -1

5. [中考·重庆]某次知识竞赛共有20题，答对一题得10分，答错或不答扣5分，小华得分要超过120分，他至少要答对的题的个数为（　　）

A. 13　　B. 14

C. 15　　D. 16

6. 若 $a>b$，$m > 0$，$n < 0$，用“>”号或“<”号填空.

（1）$a+m$_____$b+m$；（2）$a+n$_____$b+n$；

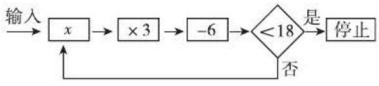
（3）$m-a$_____$m-b$；（4）an_____bn；

（5）$\frac{a}{m}$_____$\frac{b}{m}$；（6）$\frac{a}{n}$_____$\frac{b}{n}$.

7. 若 $1-\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{1+3x}{3}$ 的值，则 x 的取值范围是_____.

8. [中考·台州]商家花费760元购进某种水果80千克，销售中有5%的水果正常损耗，为了避免亏本，售价至少应定为_____元/千克.

9. [中考·烟台]运行程序如图所示，从“输入数 x”到“结果是否 < 18”为一次程序操作，若输入 x 后程序操作仅进行了一次就停止，则 x 的取值范围是_____.



（第9题）

10. [中考·舟山]小明解不等式 $\frac{1+x}{2}-\frac{2x+1}{3} \leqslant 1$ 的过程如下，请指出他解答过程中错误步骤的序号，并写出正确的解答过程.

> 解：去分母，得 $3(1+x)-2(2x+1) \leqslant 1$…①
> 去括号，得 $3+3x-4x+1 \leqslant 1$…②
> 移项，得 $3x-4x \leqslant 1-3-1$…③
> 合并同类项，得 $-x \leqslant -3$…④
> 两边都除以 -1，得 $x \leqslant 3$…⑤

11. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来.

（1）$2(x-1)-3 < 1$；

（2）[中考·巴中] $\frac{2x-1}{3}-\frac{9x+2}{6} \leqslant 1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 已知不等式 $2(x+1)-5<3(x+1)+4$ 的最小整数解是关于 x 的方程 $\frac{1}{3}x-mx=5$ 的解，求 $m^2-2m-11$ 的值.

13. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}3x+y=1+a, & ① \\ x+3y=3 & ②\end{cases}$ 的解满足 $x+y<2$，求 a 的取值范围.

14. 某市自来水公司收费标准如下：每户每月用水不超过 6 m^3 时，收费为 1.5 元/m^3；若超过 6 m^3，则超过的部分按 2 元/m^3 收取. 小超家某月水费不足 12 元（大于或等于 9 元），若设小超家该月的用水量为 x m^3.

（1）x 应满足什么关系式?

（2）小超家该月的用水量有可能是 7 m^3 或 8 m^3 吗?

15. [**中考·贵阳**]某文具店最近有 A，B 两款毕业纪念册比较畅销，近两周的销售情况是：第一周 A 款销售数量是 15 本，B 款销售数量是 10 本，销售总价是 230 元;第二周 A 款销售数量是 20 本，B 款销售数量是 10 本，销售总价是 280 元.

（1）求 A，B 两款毕业纪念册的销售单价;

（2）若某班准备用不超过 529 元购买这两种款式的毕业纪念册共 60 本，求最多能购买多少本 A 款毕业纪念册.

16. 为了保护环境，某企业决定购买 10 台污水处理设备，现有 A，B 两种型号的设备，其中每台的价格、月处理污水量如下表：

经预算，该企业购买设备的资金不高于 105 万元.

	A 型	B 型
价格/（万元/台）	12	10
月处理污水量/t	240	200

（1）该企业有哪几种购买方案?

（2）若该企业每月产生的污水量为 2 040 t，为了节约资金，应选择哪种购买方案?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.3 一元一次不等式组

核心知识

- 一元一次不等式组的定义
- 一元一次不等式组的解集
- 一元一次不等式组的解法
- 一元一次不等式组的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 一元一次不等式组

1. 定义： 把几个含有相同未知数的一元一次不等式合在一起，就组成了一个一元一次不等式组.

特别提醒：一元一次不等式组必须同时满足两个条件：

（1）组成不等式组的每个不等式都是一元一次不等式；

（2）整个不等式组中只含一个未知数.

2. 表示方式： 不等式组可以用“{”表示，也可以用形如 $a_2x+b_2<ax+b<a_1x+b_1$ 的方式表示.

提分·必记

特别解读

1. 一元一次不等式组中包含的一元一次不等式可以是两个，也可以是多个；
2. **未知数的个数必须唯一**.

拔考向▸ 利用一元一次不等式组的定义进行识别

例 1 下列各不等式组，其中是一元一次不等式组的是_____.（填序号）

① $\begin{cases} x+2<3x, \\ y>2; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+1>2x, \\ x<1; \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2(x-1)>3x, \\ x\leqslant -2; \end{cases}$

④ $-4x\leqslant x<5$; ⑤ $\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+3<0, \\ x-4>2x-1; \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x+6\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}>2. \end{cases}$

解题秘方：紧扣一元一次不等式组的定义的两个条件去识别.

解：①中含有两个未知数，不是一元一次不等式组；

②中未知数的最高次数是 2，不是一元一次不等式组；

③中含有两个一元一次不等式，且只含一个未知数，是一元一次不等式组；

④可以写成 $\begin{cases} x\geqslant -4x, \\ x<5, \end{cases}$ 是一元一次不等式组；

⑤中含有三个一元一次不等式，且只含一个未知数，是一元一次不等式组；

⑥中的 $\dfrac{1}{x}$ 不是整式，不是一元一次不等式组.

答案：③④⑤

提分·秘诀

特别提醒

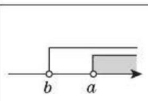
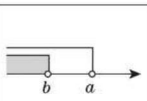
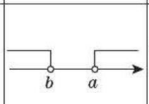
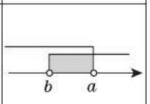
- 组成不等式组的每个不等式必须是一元一次不等式，这句话包含如下两层意思：
  (1) 每个不等式的左右两边必须是整式；
  (2) 每个不等式化简后，未知数的次数是 1，且系数不为零.
- 含有同一字母的几个一次整式连续不等的式子也是一元一次不等式组.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ ② 一元一次不等式组的解集

1. **定义**：不等式组中几个不等式的解集的公共部分，叫做这个不等式组的解集.

2. **一元一次不等式组解集的四种情况**：

不等式组（$a>b$）	$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$
不等式组的解集	$x>a$	$x<b$	无解	$b<x<a$
不等式组的解集在数轴上的表示				

提分·必记

特别解读

- “公共部分”是指同时满足不等式组中每一个不等式的解集的部分. 如果组成不等式组的各个不等式的解集没有公共部分，则这个不等式组无解.
- 不等式组的解集中的每一个解满足不等式组中的每一个不等式.

拔考向▶ 利用一元一次不等式组的解集解决问题

类型 1：利用数轴确定一元一次不等式组的解集

例 2 利用数轴求下列不等式组的解集.

（1）$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x>-1;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x<-1;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x<-1;\end{cases}$ （4）$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x>-1.\end{cases}$

解题秘方：解题时先在同一数轴上表示出不等式组中两个不等式的解集，再找出两个不等式解集的公共部分.

解：（1）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.3−1 所示.

所以这个不等式组的解集为 $x\geqslant 2$.

（2）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.3−2 所示.

所以这个不等式组的解集为 $x<-1$.

（3）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.3−3 所示.

所以这个不等式组无解.

（4）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 8.3−4 所示.

所以这个不等式组的解集为 $-1<x\leqslant 2$.

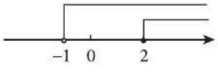


图 8.3−1

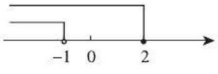


图 8.3−2

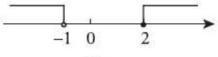


图 8.3−3

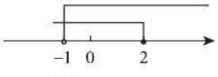


图 8.3−4

提分·秘诀

方法点拨

确定一元一次不等式组解集的常用方法：

1. **数轴法**：就是将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来，然后找出它们解集的公共部分，这个公共部分就是此不等式组的解集，如果没有公共部分，那么这个不等式组无解.
2. **口诀法**：“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找”. 数轴法找解集直观，口诀法找解集便于记忆.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用不等式组的解集确定字母的值

例 3 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > m-1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > -1$，则 $m=$ _____.

解题秘方：根据不等式组解集的确定方法得出两个不等式解集端点值之间的数量关系.

解：∵ $2 > -1$，∴ $m+2 > m-1$.

根据“同大取大”可知，关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > m-1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > m+2$，

而题中给出其解集为 $x > -1$，∴ $m+2=-1$，∴ $m=-3$.

答案：-3

方法点拨

解答这类题，一般先将字母视为常数，再逆用不等式组解集的意义，由不等式组的解集反推得出含字母的方程，最后求出字母的值.

知识点 3 解一元一次不等式组

提分·必记

1. **定义**：求不等式组的解集的过程叫做解不等式组.

2. **解一元一次不等式组的一般步骤**：

（1）分别解每一个不等式；

（2）利用数轴法或口诀法确定不等式组的解集；

（3）写出不等式组的解集.


一元一次不等式组的解法

特别提醒

解一元一次不等式组的实质就是寻找不等式组中所有不等式解集的公共部分.

核心考向 利用解一元一次不等式组解决问题

提分·秘诀

类型 1：解一元一次不等式组

例 4 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 5x-2>3(x+1), & ① \\ \dfrac{1}{2}x-1 \leqslant 7-\dfrac{3}{2}x; & ② \end{cases}$

（2）$-1<\dfrac{3x-1}{2} \leqslant 5$.

解题秘方：紧扣解一元一次不等式组的一般步骤求解.

解：（1）解不等式①，得 $x>2.5$.

解不等式②，得 $x \leqslant 4$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 8.3-5.

由数轴可知这两个不等式解集的公共部分是 $2.5<x \leqslant 4$，所以原不等式组的解集是 $2.5<x \leqslant 4$.

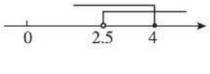


图 8.3-5



图 8.3-6

解法提醒

解不等式组的关键是要正确地求出每个不等式的解集，再利用数轴正确地表示出每个不等式的解集，从而找出不等式组的解集；熟练后，可不画数轴，直接利用“口诀法”写出不等式组的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）$-1<\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 5$ 可转化为不等式组 $\begin{cases}-1<\dfrac{3x-1}{2}, & ①\\ \dfrac{3x-1}{2}\leqslant 5. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-\dfrac{1}{3}$. 解不等式②，得 $x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 8.3-6.

由数轴可知这两个不等式解集的公共部分是 $-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$，所以原不等式组的解集为 $-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

另解

$-2<3x-1\leqslant 10$,

$-1<3x\leqslant 11$,

$-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

类型 2：利用解一元一次不等式组确定特殊解

例 5 解不等式组 $\begin{cases}3x+1<2(x+2) & ①,\\ -\dfrac{1}{3}x\leqslant\dfrac{5}{3}x+2 & ②,\end{cases}$ 并求出该不等式组的整数解.

解题秘方：先求出不等式组的解集，然后在解集中取特殊解.

解：解不等式①，得 $x<3$，解不等式②，得 $x\geqslant -1$，不等式①和②的解集在数轴上的表示如图 8.3-7 所示，所以不等式组的解集为 $-1\leqslant x<3$. 所以该不等式组的整数解为 -1，0，1，2.

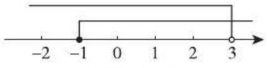


图 8.3-7

解法提醒

利用数轴找不等式组整数解的方法：

(1) 解不等式组；

(2) 将不等式组的解集在数轴上表示出来；

(3) 观察解集在数轴上的范围；

(4) 确定其整数解.

类型 3：利用不等式组的解集情况求字母的值或取值范围

例 6 不等式组 $\begin{cases}x-2>a,\\ x+2<b\end{cases}$ 的解集为 $-3<x<2$，则 $(a+b)^{2020}=$_____.

解题秘方：先解关于 x 的不等式组得到其解集，然后根据不等式组解集的意义，结合已知条件，得到关于 a，b 的二元一次方程组，求得 a，b 的值.

解：对于不等式组 $\begin{cases}x-2>a, & ①\\ x+2<b, & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>2+a$.

解不等式②，得 $x<b-2$.

∵不等式组的解集为 $-3<x<2$，

$\therefore\begin{cases}2+a=-3,\\ b-2=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-5,\\ b=4.\end{cases}$

$\therefore(a+b)^{2020}=(-5+4)^{2020}=(-1)^{2020}=1$.

答案：1

详解

$\because\begin{cases}x-2>a,\\ x+2<b\end{cases}$ 有解集，

∴由口诀“大小小大中间找”，得 $2+a<x<b-2$，

又 $-3<x<2$.

$\therefore\begin{cases}2+a=-3,\\ b-2=2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 7 若不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\1-2x>x-2\end{cases}$有解，则 a 的取值范围是_____.

解题秘方：先解不等式组中的两个不等式，再根据不等式组有解确定字母的取值范围.

解：$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\ ①\\1-2x>x-2,\ ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x\geqslant -a$. 解不等式②，得 $x<1$.

∵不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\1-2x>x-2\end{cases}$有解，

∴由“大小小大中间找”得 $-a<1$. ∴ $a>-1$.

答案：$a>-1$

方法点拨

根据不等式组的解的情况求字母的取值范围的方法：

已知不等式组的解的情况，确定这个不等式组中未知字母的取值范围，可先求出不等式组的解集，然后结合已知条件，或利用数轴直观地得到关于未知字母的关系式，即可解决问题.

知识点 4 一元一次不等式组的应用

1. 基本步骤：审→设→列→解→验→答（与列一元一次不等式解决实际问题相同）.

（1）**审**：认真审题，分清题中的已知量、未知量，并明确它们之间的不等关系；

（2）**设**：恰当地设未知数；

（3）**列**：依据题中的不等关系列出不等式组；

（4）**解**：解不等式组，求出解集；

（5）**验**：检验所求得的解集是否符合题意和实际意义；

（6）**答**：写出答案.

提分·必记

解法提醒

列一元一次不等式组的步骤和要求与列一元一次不等式一样；所不同的是题中所反映的数量关系不止一个，因此需要将所有反映数量关系的语句用不等式一一表示出来，形成一元一次不等式组.

核心考向 建立一元一次不等式组的模型解决问题

类型 1：利用不等式组解决实际问题

例 8 在保护地球爱护家园活动中，校团委把一批树苗分给八（1）班同学去栽种. 如果每人分 2 棵，还剩 42 棵；如果前面每人分 3 棵，那么最后一人分得的树苗少于 5 棵（但至少分得 1 棵）.

（1）设八（1）班有 x 名同学，则这批树苗有多少棵？（用含 x 的式子表示）

（2）八（1）班至少有多少名同学？最多有多少名同学？

解题秘方：用式子表示最后一人分得的树苗棵数并根据最后一人分得的树苗棵数的范围列不等式组.

解：（1）这批树苗有（$2x+42$）棵.

（2）根据题意，得 $1\leqslant 2x+42-3(x-1)<5$.

解这个不等式组，得 $40<x\leqslant 44$.

答：八（1）班至少有 41 名同学，最多有 44 名同学.

提分·秘诀

解读

2x 八（1）班学生数 +42= 树苗棵数.

即：树苗棵数为 2x+42.

3x（八（1）班学生数 -1）= 除最后一人分得的树苗外的树苗棵数.

即：除最后一人分得的树苗外的树苗棵数为 3(x-1).

1≤最后一人分得的树苗棵数<5，而最后一人分得的树苗棵数为 2x+42-3(x-1).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用不等式组解决实际应用中的方案设计问题

例 9 某房地产开发公司计划建A、B两种户型的住房共80套．该公司所筹资金不少于2 090万元，但不超过2 096万元，且所筹资金全部用于建房．两种户型的建房成本和售价如下表：

	A型	B型
成本/（万元/套）	25	28
售价/（万元/套）	30	34


一元一次不等式组的应用

（1）该公司有哪几种建房方案？

（2）该公司如何建房可获得最大利润？

解题秘方：根据题中揭示的不等关系列出不等式组，在解集中找出其特殊解设计方案．

解：（1）设建A型住房x套，则建B型住房$(80-x)$套．

根据题意，得$\begin{cases}25x+28(80-x)\geqslant 2\,090,\\25x+28(80-x)\leqslant 2\,096,\end{cases}$

解得$48\leqslant x\leqslant 50$.

因为x为整数，所以$x=48$，49，50．所以有三种建房方案：

方案一：A型48套，B型32套；

方案二：A型49套，B型31套；

方案三：A型50套，B型30套．

（2）方案一获利：$48\times(30-25)+32\times(34-28)=432$（万元）；

方案二获利：$49\times(30-25)+31\times(34-28)=431$（万元）；

方案三获利：$50\times(30-25)+30\times(34-28)=430$（万元）．

所以选方案一获利最大．

方法点拨

求实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法：

常通过求不等式（组）的解集，分类讨论找出答案，即先根据题意，设出未知数，列出不等式（组），求出相应的取值范围，再根据题目的条件分类讨论，写出答案．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用不等式组的特殊解的情况求字母的取值范围

挑战·高分

例 10 若关于x的不等式组$\begin{cases}x-m<0,&①\\7-2x\leqslant 1&②\end{cases}$的整数解共有4个，求$m$的取值范围．

解题秘方：先解不等式组，再根据其特殊解的情况找出界点的取值范围．

解：解不等式①，得$x<m$，

解不等式②，得$x\geqslant 3$，

所以原不等式组的解集为$3\leqslant x<m$.

因为原不等式组有4个整数解，

所以原不等式组的解集在数轴上的表示如图8.3-8所示．

方法点拨

结合不等式组解集的确定方法，灵活运用不等式组解集的意义，构造不等式（或方程）是解此类问题的关键，本题利用了**数形结合思想**．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

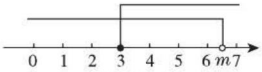


图 8.3-8

从图中可得 $6 < m < 7$.

当 $m=6$ 时，不等式组只有 3 个整数解，不符合题意.

当 $m=7$ 时，符合题意.

所以 m 的取值范围为 $6 < m \leqslant 7$.

特别警示

解题时 $m=6$ 和 $m=7$ 的情况易被忽视，做此类型题时需注意.

拔尖角度 2 利用构造不等式组法求方程组中字母的范围

挑战·高分

例 11 在关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1, & ① \\ x+2y=3m & ② \end{cases}$ 中，已知 $x > 1$，$y < 2$，求 m 的取值范围.

解题秘方：先解方程组，求出 x，y（用含 m 的式子表示），再根据 $x > 1$，$y < 2$ 得到关于 m 的不等式组，解不等式组即可.

解：② − ①，得 $3y=m-1$，

$\therefore y=\dfrac{m-1}{3}$.

把 $y=\dfrac{m-1}{3}$ 代入①，得 $x-\dfrac{m-1}{3}=2m+1$，

$\therefore x=\dfrac{7m+2}{3}$.

$\because x > 1$，$y < 2$，$\therefore \begin{cases} \dfrac{7m+2}{3} > 1, \\ \dfrac{m-1}{3} < 2, \end{cases}$

解得 $\dfrac{1}{7} < m < 7$，

$\therefore m$ 的取值范围为 $\dfrac{1}{7} < m < 7$.

方法点拨

当方程组的解满足特定要求时，先设法求出这个方程组的解，然后根据题意列出不等式组，求出所求字母的取值范围.

拔尖角度 3 利用建模法解方程和不等式组的实际问题

挑战·高分

例 12 某学校为开展“阳光体育”活动，计划拿出不超过 3 000 元的资金购买一批篮球、羽毛球拍和乒乓球拍，已知篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8 ∶ 3 ∶ 2，且其单价和为 130 元.

（1）请问篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别是多少元？

（2）若要求购买篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的总数量是 80 个（副），羽毛球拍的数量是篮球数量的 4 倍，且购买乒乓球拍的数量不超过 15 副，请问有几种购买方案？并指出哪种方案花的钱最少，最少是多少元？

解题秘方：（1）根据题中的等量关系列方程求解.

技巧点拨

1. 解决这类问题的关键是在理解题意的基础上寻找明显或隐含的等量关系或不等关系，准确列出方程（组）或不等式（组）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）根据题中的等量关系和不等关系列一元一次不等式组，利用解集中的特殊解设计方案.

解：（1）因为篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8 ∶ 3 ∶ 2，所以可设它们的单价分别为 $8x$ 元、$3x$ 元、$2x$ 元，

于是，得 $8x+3x+2x=130$，解得 $x=10$.

所以篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别为 80 元、30 元和 20 元.

（2）设购买篮球的数量为 y 个，则购买羽毛球拍的数量为 $4y$ 副，购买乒乓球拍的数量为（$80-y-4y$）副.

根据题意，得

$$\begin{cases} 80y+30\times 4y+20(80-y-4y)\leqslant 3\,000, & ① \\ 80-y-4y\leqslant 15. & ② \end{cases}$$

解不等式①，得 $y\leqslant 14$.

解不等式②，得 $y\geqslant 13$.

于是，不等式组的解集为 $13\leqslant y\leqslant 14$.

因为 y 取整数，所以 y 只能取 13 或 14.

注意题目中隐含的条件，篮球的个数只能是整数.

因此，一共有两种购买方案：

方案一：当 $y=13$ 时，篮球购买 13 个，羽毛球拍购买 52 副，乒乓球拍购买 15 副；

方案二：当 $y=14$ 时，篮球购买 14 个，羽毛球拍购买 56 副，乒乓球拍购买 10 副.

方案一：共需要 $80\times 13+52\times 30+15\times 20=2\,900$（元）；

方案二：共需要 $80\times 14+56\times 30+10\times 20=3\,000$（元）.

故方案一花的钱最少，最少为 2 900 元.

2. 求实际问题中方案的种类或最大（小）值的问题时，常通过求不等式组的解集，利用未知数的特殊性确定解集中的特殊解，分类讨论找出最优方案.

点中考·拨模拟 得满分

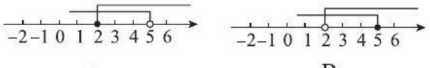
中考探秘

本节的主要考点有：（1）一元一次不等式组的解法，主要考查一元一次不等式组解集的确定，属于基础题，既有选择题、填空题，也有解答题；（2）求一元一次不等式组的特殊解；（3）应用一元一次不等式组解决实际问题，题型以解答题为主，考查学生分析问题、解决问题的能力.

三年中考兵法

考法 1 求不等式组的解集

例 13 [中考·聊城] 已知不等式组 $\dfrac{2-x}{2}\leqslant\dfrac{2x-4}{3}<\dfrac{x-1}{2}$ 的解集在数轴上（如图 8.3-9）表示正确的是（　　）



A　　B

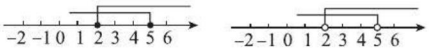
冲刺·满分

解题方法

求不等式组的解集，通常利用“分开解”“集中解”的方法.

- 分别求出不等式组中各不等式的解集；
- 利用数轴求出各不等式解集的公共部分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



C　　D

图 8.3-9

试题评析：本题考查了不等式组的解法及解集，解题的关键是掌握不等式组解集的求法.

解：由题意得$\begin{cases}\dfrac{2-x}{2}\leqslant\dfrac{2x-4}{3},\\ \dfrac{2x-4}{3}<\dfrac{x-1}{2},\end{cases}$

解不等式组得 $2\leqslant x<5$. 故选 A.

答案：A

例 14　[中考·泰安]不等式组$\begin{cases}2x+9>6x+1,\\ x-k<1\end{cases}$的解集为 $x<2$，则 k 的取值范围为（　　）

A.$k>1$　　B.$k<1$　　C.$k\geqslant 1$　　D.$k\leqslant 1$

试题评析：本题已知一元一次不等式组的解集求不等式组中字母的范围. 解题的关键是根据“同小取小”来求不等式组中字母的范围.

解：$\begin{cases}2x+9>6x+1,\ ①\\ x-k<1,\ ②\end{cases}$

由①得 $x<2$，由②得 $x<1+k$.

因为不等式组$\begin{cases}2x+9>6x+1,\\ x-k<1\end{cases}$的解集为 $x<2$，

所以 $1+k\geqslant 2$，解得 $k\geqslant 1$.

答案：C

解题方法

1. 解不等式或不等式组，含有字母的，把字母当已知数来解，这是必不可少的步骤；
2. 借助数轴，形象、准确地把握不等式组有解、无解以及有几个整数解的问题；
3. 注意端点值，这类问题一般都与端点有关，一是利用数轴来说明哪个是端点，二是检验端点是不是满足题意.

考法 2　一元一次不等式组的特殊解

例 15　[中考·枣庄]x 取哪些整数值时，不等式 $5x+2>3(x-1)$ 与 $\dfrac{1}{2}x\leqslant 2-\dfrac{3}{2}x$ 都成立？

试题评析：本题考查了求一元一次不等式组的整数解的方法，求出不等式组的解集是解决问题的关键.

解：解不等式组$\begin{cases}5x+2>3(x-1),\\ \dfrac{1}{2}x\leqslant 2-\dfrac{3}{2}x,\end{cases}$

得 $-\dfrac{5}{2}<x\leqslant 1$.

故满足条件的整数有 -2，-1，0，1.

解题方法

- 正确求出不等式组的解集；
- 根据题目中对解的限制条件求得不等式组的特殊解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 一元一次不等式组的应用

例 16 [中考·东营]为解决中小学大班额问题，东营市各县区今年将改扩建部分中小学. 某县计划对A、B两类学校进行改扩建，根据预算，改扩建2所A类学校和3所B类学校共需资金7 800万元，改扩建3所A类学校和1所B类学校共需资金5 400万元.

（1）改扩建1所A类学校和1所B类学校所需资金分别是多少万元?

（2）该县计划改扩建A、B两类学校共10所，改扩建资金由国家财政和地方财政共同承担. 若国家财政拨付资金不超过11 800万元，地方财政投入资金不少于4 000万元，其中地方财政投入到A、B两类学校的改扩建资金分别为每所300万元和500万元，请问共有哪几种改扩建方案?

试题评析：本题考查了构建二元一次方程组、一元一次不等式组解决实际问题. 解题关键是找出题中的等量关系和不等关系.

解：（1）设改扩建1所A类学校需资金x万元，改扩建1所B类学校需资金y万元，

则$\begin{cases}2x+3y=7\,800,\\3x+y=5\,400,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1\,200,\\y=1\,800.\end{cases}$

答：改扩建1所A类学校需资金1 200万元，改扩建1所B类学校需资金1 800万元.

（2）设A类学校有a所，则B类学校有$(10-a)$所.

则$\begin{cases}(1\,200-300)a+(1\,800-500)(10-a)\leqslant 11\,800,\\300a+500(10-a)\geqslant 4\,000,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a\geqslant 3,\\a\leqslant 5.\end{cases}$ $\therefore 3\leqslant a\leqslant 5$，即$a=3$或4或5.

答：有3种改扩建方案，

方案一：A类学校改扩建3所，B类学校改扩建7所；

方案二：A类学校改扩建4所，B类学校改扩建6所；

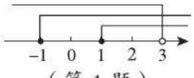
方案三：A类学校改扩建5所，B类学校改扩建5所.

解题方法

1. 寻找等量关系与不等关系，其中不等关系的常见词语有“不超过”，“不少于”等；
2. 建立方程(组)或不等式(组)的模型；
3. 求出解或解集；
4. 利用未知数的实际意义确定其特殊解；
5. 根据特殊解设计方案.

两年模拟兵法 答案见219页

1. 已知不等式①②③的解集在数轴上的表示如图所示，则它们的解集的公共部分是（　　）

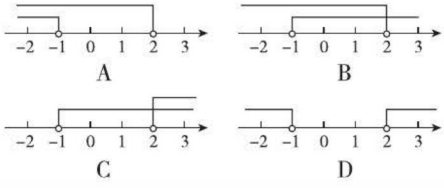


（第1题）

A. $-1\leqslant x<3$　　B. $1\leqslant x<3$

C. $-1\leqslant x<1$　　D. 无解

2. [中考·湘潭]不等式组$\begin{cases}x<2,\\x>-1\end{cases}$的解集在数轴上表示为（　　）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.[中考·鄂州]对于不等式组$\begin{cases}\frac{1}{3}x-6\leqslant 1-\frac{5}{3}x,\\3(x-1)<5x-1,\end{cases}$下列说法正确的是(　　)

A. 此不等式组的正整数解为1，2，3

B. 此不等式组的解集为$-1<x\leqslant\frac{7}{6}$

C. 此不等式组有5个整数解

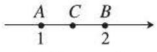
D. 此不等式组无解

4. [中考·永州]若不等式组$\begin{cases}x<1,\\x>m-1\end{cases}$恰好有两个整数解，则$m$的取值范围是(　　)

A. $-1\leqslant m<0$　　B. $-1<m\leqslant 0$

C. $-1\leqslant m\leqslant 0$　　D. $-1<m<0$

5.[中考·达州]如图所示，点C位于点A，B之间（不与A，B重合），点C表示$1-2x$，则x的取值范围为_____.



（第5题）

6. [中考·黔西南州]一元一次不等式组$\begin{cases}x-2>3x,\\x<a\end{cases}$的解集为$x<-1$，则$a$的取值范围是_____.

7. 已知关于x的不等式组$\begin{cases}3x-a\geqslant b,\\2x-a<2b+1\end{cases}$的解集为$3\leqslant x<4$，则$a-2b=$_____.

8. 解下列不等式组：

(1) $-7\leqslant\frac{2(1+3x)}{7}\leqslant 9$;

(2) $\begin{cases}3(1-x)>2(x+9),\quad①\\\frac{x-3}{0.5}-\frac{3.5x+1.4}{0.7}\leqslant -1.4.\quad②\end{cases}$

9. 若关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}3x-2y=m+2,\\2x+y=m-5\end{cases}$中，$x$的值是正数，$y$的值是负数，求$m$的取值范围.

10.[中考·武汉]某公司为奖励在趣味运动会上取得好成绩的员工，计划购买甲、乙两种奖品共20件，其中甲种奖品每件40元，乙种奖品每件30元.

(1) 如果购买甲、乙两种奖品共花费了650元，甲、乙两种奖品各购买了多少件?

(2) 如果购买乙种奖品的件数不超过甲种奖品件数的2倍，总花费不超过680元，该公司有哪几种不同的购买方案?

11. [中考·滨州]有甲、乙两种客车，2辆甲种客车与3辆乙种客车的总载客量为180人，1辆甲种客车与2辆乙种客车的总载客量为105人.

(1) 请问1辆甲种客车与1辆乙种客车的载客量分别为多少人?

(2) 某学校组织240名师生集体外出活动，拟租用甲、乙两种客车共6辆，一次将全部师生送到指定地点. 若每辆甲种客车的租金为400元，每辆乙种客车的租金为280元，请给出最节省费用的租车方案，并求出最低费用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一元一次不等式（组）与方程（组）的巧妙结合

荣老师告诉你 一元一次不等式（组）与方程（组）有很多相似的地方，解题依据——不等式的性质和等式的性质，解题步骤——去分母、去括号、移项、合并同类项等，都基本相同．所以在解题时，两者经常巧妙地结合在一起．

结合点一 利用不等式求方程的正整数解

例 1 求方程 $3x+2y=17$ 的正整数解．

解题秘方：先用含 x 的式子表示 y，然后利用方程的解为正整数，列出以 x 为未知数的不等式，求出 x 的取值范围，最后确定正整数 x 的值．

解：方程可变形为 $y=\dfrac{17-3x}{2}$．

$\because y>0$，$\therefore \dfrac{17-3x}{2}>0$．

$\therefore x<\dfrac{17}{3}$，即 $x<5\dfrac{2}{3}$．

$\because x>0$，$\therefore 0<x<5\dfrac{2}{3}$．

又 $\because y$ 为正整数（即 $\dfrac{17-3x}{2}$ 为正整数），

$\therefore 17-3x$ 为偶数．

$\therefore x$ 必为奇数．

$\therefore x=1$，3，5．

当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times1}{2}=7$；

当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times3}{2}=4$；

当 $x=5$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times5}{2}=1$．

故原方程的正整数解为 $\begin{cases}x=1,\\y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

方法点拨：（1）一般地，一个二元一次方程有无数个解，但它的特殊解有时是有限个．

（2）求不定方程的正（非负）整数解时，往往借助不等式、整数的奇偶性等相关知识进行求解．

结合点二 利用方程（组）解的情况求字母的取值范围

例 2 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$ 若 $x>y$，求 a 的取值范围．

解题秘方：解本题的关键是构建以 a 为未知数的不等式，解之即得 a 的取值范围，构建不等式的依据是 $x>y$，而解方程组即用含 a 的式子分别表示 x 和 y，进而可得不等式．

解：解方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=2a+1,\\y=a-2.\end{cases}$

$\because x>y$，

$\therefore 2a+1>a-2$，解得 $a>-3$．

故 a 的取值范围是 $a>-3$．

方法点拨：由方程（组）解的不等关系，列出不等式（组），求出方程（组）中待定字母的取值范围，关键点有两个：一是要会解含有除未知数以外的其他字母的方程（组）；二是要会根据解的不等关系列出不等式（组）．

结合点三 利用不等式组的解集建立方程组

例 3 若不等式组 $\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0\end{cases}$ 的解集是 $-1<x<1$，求 $(a+b)^{2021}$ 的值．

解题秘方：解此不等式组得 $a+2<x<\dfrac{b}{2}$，依题意，该不等式组的解集又是 $-1<x<1$，而不等式组的解集是唯一的，因此两解集的界点分别“吻合”，从而得两等式，即方程组，解之可得 a，b 的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：解不等式组$\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0,\end{cases}$

得$a+2<x<\dfrac{b}{2}$.

∵此不等式组的解集是$-1<x<1$，

$\therefore\begin{cases}a+2=-1,\\\dfrac{b}{2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore(a+b)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$.

方法点拨：若不等式组中含有除未知数以外的其他字母且不等式组的解集已知，可先求出不等式组的解集，然后对比已知的解集，列出以待定字母为未知数的方程（组）.

结合点四 利用方程组求出的数据列不等式解决实际问题

例4 商场正在销售“福娃”玩具和徽章两种奥运商品，已知购买1盒“福娃”玩具和2盒徽章共需145元；购买2盒“福娃”玩具和3盒徽章共需280元.

（1）一盒“福娃”玩具和一盒徽章的价格各是多少元？

（2）某公司准备购买这两种奥运商品共20盒送给幼儿园（要求每种商品都要购买），且购买金额不能超过450元，请你帮该公司设计购买方案.

解题秘方：本题属于方程组与不等式结合的实际应用题. 第（1）问只需依照题目所提供的两个等量关系即可列出二元一次方程组. 第（2）问由题目所给不等关系“购买金额不能超过450元”及第（1）问所求出的数据列出不等式，从而求解.

解：（1）设一盒“福娃”玩具和一盒徽章的价格分别为x元和y元.

依题意，得$\begin{cases}x+2y=145,\\2x+3y=280.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=125,\\y=10.\end{cases}$

答：一盒“福娃”玩具和一盒徽章的价格分别是125元和10元.

（2）设购买“福娃”玩具m盒，则购买徽章$(20-m)$盒.

由题意，得$125m+10(20-m)\leqslant 450$，

解得$m\leqslant\dfrac{50}{23}$.

所以m可以取1，2.

则该公司有两种购买方案：

方案一：购买“福娃”玩具1盒，徽章19盒；

方案二：购买“福娃”玩具2盒，徽章18盒.

结合点五 同时建立方程和不等式的模型解决实际问题

例5 认真阅读下面三个人的对话.

小朋友：阿姨，我买一盒饼干和一袋牛奶（递上10元钱）.

售货员：本来你用10元钱买一盒饼干还有剩余，但再买一袋牛奶就不够了. 不过今天是儿童节，我给你买的饼干打九折，两样东西请拿好，还有找你的8角钱.

旁观者：一盒饼干的标价可是整数哦！

根据对话内容，试求出饼干和牛奶的标价.

解题秘方：本题的条件隐含在对话中，应学会从对话中获取信息，“用10元钱买一盒饼干还有剩余”，说明一盒饼干的售价小于10元；“但再买一袋牛奶就不够了”，说明一盒饼干和一袋牛奶的价格之和大于10元. 对话中还隐含一个等量关系，就是用10元钱买一盒打九折的饼干和一袋牛奶剩余0.8元钱. 由一个方程和两个不等式结合可求出答案.

解：设饼干的标价为每盒x元，牛奶的标价为每袋y元.

根据题意，得$\begin{cases}x+y>10,①\\0.9x+y=10-0.8,②\\x<10,③\end{cases}$

由②，得$y=9.2-0.9x$，④

将④代入①，

得$x+9.2-0.9x>10$，

解得$x>8$.

结合③可知$8<x<10$.

又因为x为整数，所以$x=9$.

所以$y=9.2-0.9x=9.2-0.9\times9=1.1$，

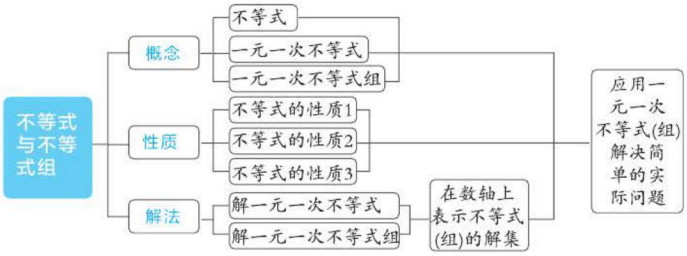
即饼干的标价为每盒9元，牛奶的标价为每袋1.1元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **在数轴上表示不等式（组）的解集时要注意“两定”：**一定界点，二定方向．在定界点时，若不等号是“≤”或“≥”，则界点为实心圆点；若不等号是“<”或“>”，则界点为空心圆圈．在定方向时，相对于界点而言，“小于向左，大于向右”．
2. **解不等式通常按以下步骤进行：**去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1. 容易出错的地方是在“系数化为 1”时，如果不等式的两边除以同一个负数，要注意不等号的方向需改变．
3. **一元一次不等式组的解法：**解组成不等式组的各个不等式，取各个不等式解集的公共部分，即为不等式组的解集，如果没有公共部分，那么这个不等式组无解；确定一元一次不等式组的解集应遵循的原则是：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找．

知识方法专题

知识必学

专题一 不等式的性质

链接中考» 不等式的性质是解不等式的理论依据，特别是性质 3 的运用很容易出错，解不等式的最后一步也经常用到．在中考中，一般都是以选择题形式直接考查不等式的性质．

例 1 [中考·怀化]下列不等式变形正确的是（　　）

A. 由 $a>b$ 得 $ac>bc$

B. 由 $a>b$ 得 $-2a>-2b$

C. 由 $a>b$ 得 $-a<-b$

D. 由 $a>b$ 得 $a-2<b-2$

解题秘方：根据不等式的性质进行选择即可．

解：当 $c\leqslant 0$ 时，选项 A 错误；根据不等式的性质 3，在不等式的两边都乘同一个负数时，不等号的方向改变，故选项 B 错误，选项 C 正确；在不等式的两边都加上或减去同一个数时，不等号的方向不变，故选项 D 错误，故选 C.

答案：C

警示误区：此类问题容易出错的地方是对不等式的性质 3 掌握不透彻，认为选项 B 也正确．

专题二 解一元一次不等式

链接中考» 解不等式是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是直接解不等式；另一种是根据解不等式求其特殊解．一般都是以填空题和选择题形式出现．在有些地区也以解答题形式出现．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例2 [中考·安徽]解不等式：

$\frac{x}{3}>1-\frac{x-3}{6}$.

解题秘方：根据解一元一次不等式的步骤求解即可.

解：去分母，得 $2x>6-(x-3)$，去括号，得 $2x>6-x+3$，

移项，合并同类项，得 $3x>9$，系数化为1，得 $x>3$.

方法点拨：解一元一次不等式的一般步骤与解一元一次方程的步骤一样，只是解不等式时，给不等式两边都乘或除以同一个负数，要改变不等号的方向.

专题三 解一元一次不等式组

链接中考» 解不等式组是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是已知不等式组求解集；另一种是已知不等式组的解集求不等式组中待定字母的值或范围.一般都是以填空题和选择题形式出现.在有些地区也以解答题形式出现.

例3 [中考·泰安]不等式组 $\begin{cases}4x-3>2x-6,\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5}\end{cases}$ 的整数解的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：分别解出每一个不等式，求出不等式组的解集，然后找出不等式组的整数解.

解：$\begin{cases}4x-3>2x-6,\ ①\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5},\ ②\end{cases}$

解不等式①得 $x>-\frac{3}{2}$，

解不等式②得 $x\leqslant 1$，

因此不等式组的解集为 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$，

所以整数解为 $-1,0,1$，所以一共有3个整数解，故本题选C.

答案：C

方法点拨：求不等式组的整数解的关键是正确地解出每个不等式，确定出未知数的取值范围，从而求出整数解.

例4 [中考·恩施州]关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3x-1>4(x-1),\\ x<m\end{cases}$ 的解集为 $x<3$，那么 m 的取值范围为（　　）

A.$m=3$　　B.$m>3$

C.$m<3$　　D.$m\geqslant 3$

解题秘方：先分别解两个不等式，然后再利用“同小取小”来求解.

解：由 $3x-1>4(x-1)$，

得 $x<3$，

而不等式组的解集为 $x<3$，

$\therefore m\geqslant 3$.

答案：D

方法点拨：解含有参数的不等式组的步骤：

（1）解不等式组，含有参数的也要解，把参数当已知数来解，这是必不可少的步骤；

（2）借助数轴，形象准确地把握不等式组有解、无解以及有几个整数解的问题；

（3）注意端点值，这类问题一般都与端点有关，一是用数轴来说明哪个是端点，二是进行检验，看端点是不是满足题意.

专题四 一元一次不等式的应用

链接中考» 不等式的应用题与方程的应用题相类似，方程是找等量关系，而不等式是找不等关系，不等关系有标志语——大于、小于、超过、不超过等等.不等式的应用题在中考中一般都是以解答题形式出现.

例5 [中考·本溪]暑期临近，本溪某旅行社准备组织“亲子一家游”活动，去我省沿海城市旅游，报名的人数共有69人，其中成人的人数比儿童人数的2倍少3人.

（1）旅游团中成人和儿童各有多少人？

（2）旅行社为了吸引游客，打算给每名游客准备一件T恤衫.购买时，每购买10件成人T恤衫赠送1件儿童T恤衫（不足10件不赠送），儿童T恤衫每件15元，旅行社购买服装的费用不超过1 200元，请问每件成人T恤衫的价格最高是多少元？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）设旅游团中儿童有 x 人，则成人有（$2x-3$）人，根据报名的人数共有 69 人，列方程求解；（2）根据题意可得能赠送 4 件儿童 T 恤衫，设每件成人 T 恤衫的价格是 m 元，根据旅行社购买服装的费用不超过 1 200 元，列不等式求解.

解：（1）设旅游团中儿童有 x 人，则成人有（$2x-3$）人.

根据题意，得 $x+(2x-3)=69$，

解得 $x=24$.

则 $2x-3=2\times24-3=45$.

答：旅游团中成人有 45 人，儿童有 24 人.

（2）$\because 45\div10=4.5$，

$\therefore$ 可赠送 4 件儿童 T 恤衫.

设每件成人 T 恤衫的价格是 m 元.

根据题意，得 $45m+15\times(24-4)\leqslant1\,200$，

解得 $m\leqslant20$.

答：每件成人 T 恤衫的价格最高是 20 元.

方法点拨：对于一元一次不等式的实际应用题，解题的关键是读懂题意，找出合适的不等关系，设未知数并列不等式求解.

方法必会

专题五 转化思想

专题解读» 在不等式（组）与方程（组）的综合应用中，常会用到转化思想，将解方程（组）的问题转化为解不等式（组）的问题.

例 6 [中考·十堰改编] 关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}5x+3y=23, & ①\\ x+y=p & ②\end{cases}$ 的解是正整数，则整数 p 的值为_____.

解题秘方：把 p 看成常数，求出方程组的解，再根据题意转化成关于 p 的不等式组，求解即可.

解：② $\times3$，得 $3x+3y=3p$，③

① $-$ ③，得 $2x=23-3p$，

则 $x=\dfrac{23-3p}{2}$，

把 $x=\dfrac{23-3p}{2}$ 代入②，

得 $y=\dfrac{5p-23}{2}$.

$\because x$，y 为正整数，

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{23-3p}{2}>0,\\ \dfrac{5p-23}{2}>0,\end{cases}$$

解得 $4\dfrac{3}{5}<p<7\dfrac{2}{3}$，

$\because p$ 是整数，

$\therefore p=5$，6，7.

把 $p=5$，$p=6$，$p=7$ 分别代入原方程组的解中，只有当 $p=5$ 或 $p=7$ 时方程组的解是正整数，故填 5 或 7.

答案：5 或 7

专题六 数形结合思想

专题解读» 不等式及不等式组的解集都可以在数轴上表示出来，特别是确定不等式组的解集时利用数轴的“形”，可以非常直观地看出不等式组的解集.

例 7 [中考·丽水] 如图 8-1，数轴上所表示的关于 x 的不等式组的解集是（　　）

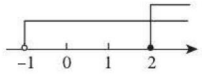


图 8-1

A. $x\geqslant2$　　B. $x>2$

C. $x>-1$　　D. $-1<x\leqslant2$

解题秘方：先从数轴上获取各个不等式的解集信息，再确定各个不等式解集的公共部分，即可确定不等式组的解集.

解：由数轴可以获取各个不等式的解集分别为 $x>-1$，$x\geqslant2$，则两个不等式解集的公共部分为 $x\geqslant2$，故选择 A.

答案：A

方法点拨：解决此类题的关键是能够将数、形结合起来，掌握在数轴上表示不等式解集的方法：大于向右画，小于向左画，有等号为实心圆点，无等号为空心圆圈. 另外，要知道不等式的解集是用“$x>a$ 或 $x<a$ 或 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant a$”等形式来表示的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见220页

题型1：解一元一次不等式及不等式组

1. 解不等式 $\frac{1}{2}x-1\leqslant\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$，并把它的解集在数轴上表示出来.

2. 解不等式组 $\begin{cases}2x-(4-x)\leqslant -1, & ①\\ \frac{x-1}{4}<\frac{2x+8}{3}, & ②\end{cases}$ 并将它的解集在数轴上表示出来.

题型2：方程与不等式的综合

3. 若不等式组 $\begin{cases}2x-a<1,\\ x-2b>3\end{cases}$ 的解集为 $-1<x<1$，则 $(a-3)(b+3)$ 的值为（　　）

A.1　　B.-1　　C.2　　D.-2

4. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases}x-1<0,\\ x-a>0\end{cases}$ 无解，则 a 的取值范围是（　　）

A.$a\geqslant 1$　　B.$a>1$

C.$a\leqslant -1$　　D.$a<-1$

5. 若不等式组 $\begin{cases}x-b<0,\\ x+a>0\end{cases}$ 的解集为 $2<x<3$，则 a，b 的值分别为（　　）

A.-2，3　　B.2，-3

C.3，-2　　D.-3，2

6. [中考·宜宾]若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x-y=2m+1,\\ x+3y=3\end{cases}$ 的解满足 $x+y>0$，则 m 的取值范围是_____.

7. 当 m 在什么范围内取值时，关于 x 的方程 $(m-2)x+2=1-m(4-x)$：

（1）有正数解；

（2）有负数解；

（3）有不大于2的解.

8. [中考·黄石]已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}5x+1>3(x-1),\\ \frac{1}{2}x\leqslant 8-\frac{3}{2}x+2a\end{cases}$ 恰有两个整数解，求 a 的取值范围.

9. [中考·遂宁]关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2x+y=4a+6,\\ 3x-y=a+4\end{cases}$ 的解满足 x 大于0，y 小于4. 求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：建立不等式的模型解决问题

10. [中考 · 聊城] 某商城的运动服装专柜，对 A，B 两种品牌的运动服分两次采购试销后，效益可观，计划继续采购进行销售，已知这两种服装过去两次的进货情况如下表：

	第一次	第二次
A 品牌运动服装数 / 件	20	30
B 品牌运动服装数 / 件	30	40
累计采购款 / 元	10 200	14 400

（1）问 A，B 两种品牌运动服的进货单价各是多少元？

（2）由于 B 品牌运动服的销量明显好于 A 品牌，商家决定采购 B 品牌的件数比 A 品牌件数的 $\frac{3}{2}$ 倍多 5 件，在采购总价不超过 21 300 元的情况下，最多能购进多少件 B 品牌运动服？

11. [中考 · 泸州] 某出租汽车公司计划购买 A 型和 B 型两种节能汽车，若购买 A 型汽车 4 辆，B 型汽车 7 辆，共需 310 万元；若购买 A 型汽车 10 辆，B 型汽车 15 辆，共需 700 万元．

（1）A 型和 B 型汽车每辆的价格分别是多少万元？

（2）该公司计划购买 A 型和 B 型两种汽车共 10 辆，费用不超过 285 万元，且 A 型汽车的数量少于 B 型汽车的数量，请你给出费用最省的方案，并求出该方案所需费用．

12. [中考 · 荆州] 为拓展学生视野，促进书本知识与生活实践的深度融合，荆州市某中学组织八年级全体学生前往松滋沮水研学基地开展研学活动．在此次活动中，若每位老师带 14 名学生，则还剩 10 名学生没老师带；若每位老师带 15 名学生，就有一名老师少带 6 名学生．现有甲、乙两种大型客车，它们的载客量和租金如下表所示：

	甲型客车	乙型客车
载客量（人 / 辆）	35	30
租金（元 / 辆）	400	320

学校计划此次研学活动的租金总费用不超过 3 000 元，为安全起见，每辆客车上至少要有 2 名老师．

（1）参加此次研学活动的老师和学生各有多少人？

（2）既要保证所有师生都有车坐，又要保证每辆车上至少要有 2 名老师，可知租车总辆数为_____辆；

（3）学校共有几种租车方案？最少租车费用是多少？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 8 章测试卷

☞答案见 221 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 不等式 $3x \leqslant 2(x-1)$ 的解集为（　　）

A.$x \leqslant -1$　　B.$x \geqslant -1$

C.$x \leqslant -2$　　D.$x \geqslant -2$

2. 若 $a > b$，则下列不等式中正确的是（　　）

A.$a-b < 0$　　B.$-5a < -5b$

C.$a+8 < b-8$　　D.$\frac{a}{4} < \frac{b}{4}$

3. 下列说法中正确的是（　　）

A.$y=3$ 是不等式 $y+4 < 5$ 的解

B.$y=3$ 是不等式 $3y < 11$ 的解集

C. 不等式 $3y < 11$ 的解集是 $y < 3$

D.$y=2$ 是不等式 $3y \geqslant 6$ 的解

4. 不等式组 $\begin{cases} 2x-1<3, \\ -\frac{x}{2} \leqslant 1 \end{cases}$ 的整数解有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

5. 若代数式 $\frac{1}{4}a$ 的值不大于 $\frac{1}{2}a+1$ 的值，则 a 应满足（　　）

A.$a \geqslant -4$　B.$a \leqslant -4$　C.$a > 4$　D.$a \leqslant 4$

6. 小丽同学准备用自己节省的零花钱购买一台售价为 1 080 元的学生平板电脑，她已存有 750 元，并计划从本月起每月节省 30 元，直到她至少存有 1 080 元，设 x 个月后小丽至少存有 1 080 元，则可列计算月数的不等式为（　　）

A.$30x+750 > 1\,080$　B.$30x-750 \geqslant 1\,080$

C.$30x-750 \leqslant 1\,080$　D.$30x+750 \geqslant 1\,080$

7. 若不等式组 $\begin{cases} 1+x>a, \\ 2x-4 \leqslant 0 \end{cases}$ 有解，则 a 的取值范围是（　　）

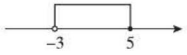
A.$a \leqslant 3$　B.$a<3$　C.$a<2$　D.$a \leqslant 2$

8. 小红读一本 500 页的书，计划 10 天内读完，前 5 天因种种原因只读了 100 页，为了按计划读完，则从第 6 天起平均每天至少要读（　　）

A.50 页　B.60 页　C.80 页　D.100 页

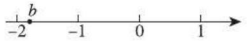
二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

9. 若关于 x 的不等式组的解集在数轴上表示如图，则其解集为_____.



（第 9 题）

10. 数轴上实数 b 的对应点的位置如图所示. 比较大小：$\frac{1}{2}b+1$_____0（用“<”或“>”填空）.



（第 10 题）

11. 在一次课外知识竞赛中，一共有 30 道判断题，答对 1 道题得 4 分，不答或答错 1 道题扣 1 分. 如果在这次竞赛中得分要超过 72 分，那么至少应答对_____道题.

12. 若关于 x 的不等式 $3x-a \leqslant 0$ 只有两个正整数解，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题（共 52 分）

13.（10 分）（1）解不等式：$5(x-2)+8 < 6(x-1)+7$；

（2）解不等式组：$\begin{cases} \frac{x+1}{3}>0, & ① \\ 2(x+5) \geqslant 6(x-1), & ② \end{cases}$

并在数轴上表示其解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（8分）已知实数 a 是不等于3的常数，解不等式组 $\begin{cases}-2x+3\geqslant -3, & ①\\ \frac{1}{2}(x-2a)+\frac{1}{2}x<0, & ②\end{cases}$ 并依据 a 的取值情况写出其解集.

15.（10分）定义新运算：对于任意实数 a，b，都有 $a\oplus b=a(a-b)+1$，等式右边是通常的加法、减法及乘法运算.

比如：$2\oplus 5=2\times(2-5)+1$

$=2\times(-3)+1$

$=-6+1$

$=-5$.

（1）求 $(-2)\oplus 3$ 的值；

（2）若 $3\oplus x$ 的值小于13，求 x 的取值范围，并在数轴上表示出来.

16.（12分）某校计划组织师生共300人参加一次大型公益活动，如果租用6辆大客车和5辆小客车恰好全部坐满，已知每辆大客车的乘客座位数比小客车多17个.

（1）求每辆大客车和每辆小客车的乘客座位数；

（2）由于最后参加活动的人数增加了30人，学校决定调整租车方案，在保持租用车辆总数不变的情况下，为将所有参加活动的师生装载完成，求租用小客车数量的最大值.

17.（12分）学校为了奖励初三优秀毕业生，计划购买一批平板电脑和一批学习机，经投标，购买1台平板电脑3 000元，购买1台学习机800元.

（1）学校根据实际情况，决定购买平板电脑和学习机共100台，要求购买的总费用不超过168 000元，则购买平板电脑最多多少台?

（2）在（1）的条件下，购买学习机的台数不超过平板电脑台数的1.7倍. 请问有哪几种购买方案? 哪种方案最省钱?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

感悟三角形的基本性质

感悟三角形的基本性质











第9章 多边形

核心考点

你将见到的

- 三角形的概念及分类
- 三角形的三条重要线段
- 三角形的内角和与外角和
- 三角形的三边关系
- 多边形的内角和与外角和

核心方法

我们为你提供的

- 按序计数法
- 等积法、面积法
- 构造法
- 化分散为集中法
- 分类讨论思想
- 转化思想

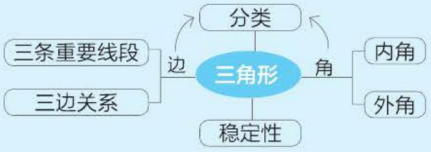
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.1 三角形

核心知识

- 三角形的概念及分类
- 三角形的三条重要线段
- 三角形边角的关系
- 三角形的稳定性

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三角形的相关元素

1. 三角形的定义： 由三条不在同一条直线上的线段首尾顺次连结所组成的平面图形叫做三角形.

三角形的表示法： 用符号“△”表示三角形，如图 9.1−1，顶点是 A，B，C 的三角形，记作“△ABC”，读作“三角形 ABC”.

字母的顺序可以自由安排

2. 三角形的相关概念：

（1）**顶点：** 三角形相邻两边的公共端点叫做三角形的顶点. 如图 9.1−1，点 A，B，C 是△ ABC 的三个顶点.

（2）**边：** 组成三角形的线段叫做三角形的边. 如图 9.1−1，线段 AB，BC，AC 是△ ABC 的三条边.

（3）**内角：** 在三角形中，相邻两边所组成的角叫做三角形的内角，简称三角形的角. 如图 9.1−1，$\angle A$，$\angle B$，$\angle ACB$ 是△ ABC 的三个角.

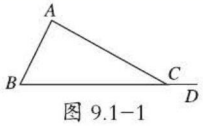


图 9.1−1

（4）外角：三角形中内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做三角形的外角，如图 9.1−1，$\angle ACD$ 是△ ABC 的一个外角.

拨考向 利用三角形及其相关元素的定义进行辨析

题型 1：三角形的定义在识别图形中的应用

例 1 如图 9.1−2 中都是由三条线段组成的图形，其中是三角形的是（　　）

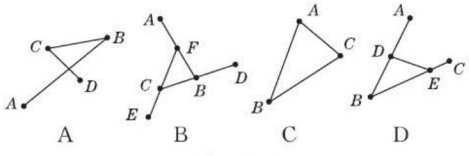


图 9.1−2

三角形的定义

解题秘方： 紧扣三角形的“三要素”进行识别.

解： 选项 A、B、C、D 都是由三条线段组成的图形，但 A、B、D 不是首尾顺次连结，因此只有 C 符合三角形的“三要素”.

答案： C

提分·必记

特别解读

1. 三角形的“三要素”：
（1）三条线段；
（2）三个顶点不在同一条直线上；
（3）三条线段首尾顺次连结.
2. 三角形的边是一条线段，既可用两个顶点的大写字母表示，也可用边所对的顶点的小写字母表示，如顶点 A 所对的边 BC 可用 a 表示.
3. 同一个顶点处的内角和外角互补.

提分·秘诀

特别提醒

图形是三角形与图形内含有三角形是两个不同的概念. 图形是三角形表示整个图形是一个三角形，图形内含有三角形表示图形局部有三角形，如选项 A，B，D 中的图形内都含有三角形，但整个图形不是三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：三角形及其元素在计数及识别中的应用

例 2 如图 9.1-3，在△ ABC 中，D，E 分别是 BC，AC 上的点，连结 BE，AD 交于点 F.

（1）图中共有多少个三角形？请把它们表示出来.

（2）△ BDF 的三个顶点是什么？三条边是什么？三个内角呢？外角有哪几个？

（3）以 AB 为边的三角形有哪些？

（4）以∠ C 为内角的三角形有哪些？

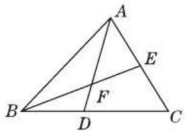


图 9.1-3

解题秘方：紧扣“三角形及其元素的定义”及几何图形计数的常用方法进行解答.

解：（1）图中共有 8 个三角形，分别是△ ABF，△ AEF，△ ABE，△ ABD，△ ACD，△ ABC，△ BDF，△ BCE.

（2）△ BDF 的三个顶点是点 B，D，F，三条边是线段 BD，DF，BF，三个内角是∠ FBD，∠ FDB，∠ BFD，外角有∠ FDC，∠ DFE，∠ BFA.

（3）以 AB 为边的三角形有△ ABF，△ ABD，△ ABE，△ ABC.

（4）以∠ C 为内角的三角形有△ ACD，△ BCE，△ ACB.

方法点拨

几何图形计数的常用方法：

1. 按序计数法；
2. 画图计数法；
3. 基本图形计数法；
4. 分类计数法.

特别提醒

三角形的三个顶点的字母的次序可以任意调换，如△ ABF 也可以写成△ BAF，△ BFA，△ FAB 等.

点知识 ▶ 2 三角形的分类

三角形的分类：等腰三角形包括等边三角形，等边三角形是特殊的等腰三角形.

（1）**按内角的大小分类**：

三角形 { 锐角三角形 / 直角三角形 / 钝角三角形

分类示意图如图 9.1-4.



图 9.1-4



图 9.1-5

（2）**按边的相等关系分类**：

三角形 { 三边都不相等的三角形 / 等腰三角形 { 底边和腰不相等的等腰三角形 / 等边三角形（正三角形）

分类示意图如图 9.1-5.

提分·必记

特别提醒

1. 三角形按内角的大小分类和按边的相等关系分类是两种不同的分类方式，各自独立，但无论按哪种标准分类，原则都是不重不漏.
2. 对于等腰直角三角形，按边的相等关系分类属于等腰三角形，按内角的大小分类属于直角三角形.

拔考向 ▶ 利用三角形的分类判断三角形的形状

例 3 根据下列所给条件，判断△ ABC 的形状（若已知的是角，则按角的分类标准去判断；若已知的是边，则按边的分类标准去判断）.

（1）∠ A=45°，∠ B=65°，∠ C=70°；（2）∠ C=120°；

（3）∠ C=90°；（4）AB=BC=4，AC=5.

解题秘方：根据三角形的分类标准进行判断.

提分·秘诀

方法技巧

确定三角形分类标准的方法：

1. 若按角分类，则看这个三角形的最大角的类型：最大角是钝角的三角形是钝角三角形；最大角是直角

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵∠A=45°，∠B=65°，∠C=70°，

∴∠A<∠B<∠C<90°，∴△ABC是锐角三角形.

（2）∵∠C=120°>90°，∴△ABC是钝角三角形.

（3）∵∠C=90°，∴△ABC是直角三角形.

（4）∵AB=BC=4，AC=5，∴△ABC是等腰三角形.

的三角形是直角三角形；最大角是锐角的三角形是锐角三角形.

2. 若按边分类，则看边是否相等.

点知识 3 三角形的三条重要线段

1. 三角形的中线：

定义：连结三角形一个顶点和它对边的中点，所得的线段叫做该三角形这条边上的中线.

几何语言：如图9.1-6，

（1）AD是△ABC中BC边上的中线；

（2）D是BC边的中点；

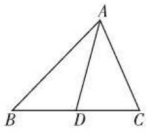


图 9.1-6

（3）BD=DC，$BD=\frac{1}{2}BC$，$DC=\frac{1}{2}BC$或BD=$DC=\frac{1}{2}BC$.

2. 三角形的角平分线：

定义：三角形一个内角的平分线与它的对边相交，顶点和交点之间的线段叫做这个三角形的角平分线.

几何语言：如图9.1-7，

（1）AD是△ABC的角平分线；

（2）AD平分∠BAC交BC于点D；

（3）$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$.

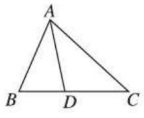
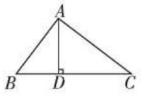


图 9.1-7

3. 三角形的高：

三角形的高的定义和性质：

定义	从△ABC的顶点A向它所对的边BC所在的直线作垂线，垂足为点D，所得线段AD叫做△ABC的边BC上的高
图形	
性质	∵AD是△ABC的边BC上的高（已知）， ∴$AD\perp BC$于点D（或∠ADB=∠ADC=90°）.
判定	∵$AD\perp BC$于点D（或∠ADB=∠ADC=90°）（已知）， ∴线段AD是△ABC的边BC上的高（高的定义）.

提分·必记

特别解读

三角形的中线把三角形分成的两个三角形的面积和周长的关系：

1. 两个三角形的面积相等；
2. 两个三角形的周长的差等于这两个三角形另两边的差.

特别提醒

- 角的平分线是一条射线，而三角形的角平分线是一条线段.
- 三角形的角平分线是其内角的平分线的一部分，故三角形的角平分线都具有角的平分线的性质.


三角形的高

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 三角形三条重要线段的区别：

	三角形的高		三角形的中线	三角形的角平分线
用途举例	（1）说明线段垂直；（2）说明角相等		（1）说明线段相等；（2）说明面积相等	说明角相等
在图中的位置	锐角三角形	三条高全在三角形内	三条中线全在三角形内	三条角平分线全在三角形内
	直角三角形	一条高位于三角形内，另两条高与两直角边重合		
	钝角三角形	一条高位于三角形内，另两条高位于三角形外		
条数	三条		三条	三条
交点位置	锐角三角形	在三角形内	在三角形内	在三角形内
	直角三角形	在直角顶点处		
	钝角三角形	在三角形外		

核心考向▶利用三角形的三条重要线段解决问题

类型1：三角形的中线在求线段长中的应用

例4 如图9.1-8，在△ABC中，AD，BE分别是△ABC，△ABD的中线.

（1）若△ABD与△ADC的周长之差为3，AB=8，求AC的长.

（2）若$S_{\triangle ABC}$=8，求$S_{\triangle ABE}$.

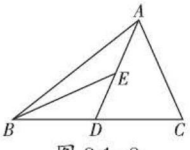


图9.1-8

解题秘方：利用中线将三角形分成的两个三角形的周长之间的关系和面积之间的关系解题.

解：（1）∵AD为BC边上的中线，

∴BD=CD.

∴△ABD与△ADC的周长之差=（AB+AD+BD）-（AC+AD+CD）=AB-AC.

∵△ABD与△ADC的周长之差为3，AB=8，

∴8-AC=3，解得AC=5.

（2）∵AD是△ABC的中线，∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$=4.

∵BE是△ABD的中线，∴$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$=2.

视野拓展

三角形中三个重要的点：

三条高所在直线的交点叫垂心，三条中线的交点叫重心，三条角平分线的交点叫内心.

提分·秘诀

详解

三角形的中线把边分成相等的两条线段，故BD=CD，且△ABD的边BD上的高与△ACD的边CD上的高相同，根据等底同高的三角形的面积相等，可得所分得的两个三角形的面积相等，即$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：三角形的高在求线段长中的应用

例 5 如图 9.1−9，$AE \perp EC$ 于点 E，$CD \perp AD$ 于点 D，AD 交 EC 于点 B.

（1）$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高为_____，边 AB 上的高为_____.

（2）若 $AB=6$，$BC=2$，$CD=\frac{9}{5}$，则 $AE=$_____.

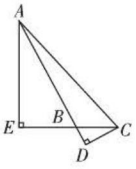


图 9.1−9

解题秘方：（1）紧扣“三角形高的定义”进行判断.

（2）分别以 BC，AB 为底边计算 $\triangle ABC$ 的面积，列式求解.

解：（1）$\triangle ABC$ 是钝角三角形，由钝角三角形高的定义和位置可知，组成钝角的两条边上的高在三角形的外部，

故边 BC 上的高为 AE，边 AB 上的高为 CD.

（2）$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\times AE=\frac{1}{2}\times 6\times \frac{9}{5}$. $\therefore AE=\frac{27}{5}$.

答案：（1）AE；CD　　（2）$\frac{27}{5}$

特别提醒

找三角形某边上的高的方法：

1. 找出该边所对的顶点；
2. 过此顶点作该边的垂线，垂线段为该边上的高.

如：作 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高→找 BC 边所对的顶点 A，过点 A 作 BC 的垂线（E 为垂足），垂线段 AE 即为 BC 边上的高.

教你一招

求三角形的面积联想三角形的高，求三角形的高联想三角形的面积是解三角形问题中常用的方法之一. 用同一个三角形不同的面积表达式建立求线段长度的等量关系是一种很重要的数学方法 —— 等积法.

类型 3：三角形的角平分线在说明角平分线中的应用

例 6 如图 9.1−10，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，EF 交 AD 于点 O.

试问：DO 是否为 $\triangle DEF$ 的角平分线？并说明理由.

解题秘方：根据三角形角平分线的定义进行说明.

解：DO 是 $\triangle DEF$ 的角平分线.

理由：$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，

$\therefore \angle 3=\angle 2$，$\angle 1=\angle 4$.

$\therefore \angle 3=\angle 4$. $\therefore DO$ 是 $\triangle DEF$ 的角平分线.

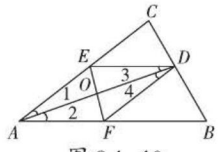


图 9.1−10

解法提醒

本例在解题过程中，先利用三角形的角平分线的定义，得出相等的角，再结合相关条件推出一组新的相等的角，最后由三角形角平分线的定义说明是三角形的角平分线. 它经历了定义→条件→定义的过程，这就是定义法.

点知识 4 三角形内角和定理及其推论

提分·必记

1. 三角形内角和定理：

定理：三角形的内角和等于 $180°$.

几何语言：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

三角形内角和定理的说明思路：

思路一：利用“两直线平行，内错角及同位角相等”将三角形的三个内角转化为一个平角. 如图 9.1−11 ①②.

思路二：利用“两直线平行，内错角相等”将三角形的三个内角转化

特别提醒

说明三角形内角和定理的思路方法：

主要是运用平行线作为桥梁，将三个内角“转移”集中到一个角或两个角，再说明这个角或这两个角的和是 $180°$ 即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为两平行线间的一组同旁内角．如图 9.1−12 ①②．

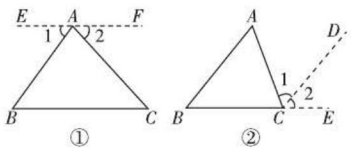


图 9.1−11

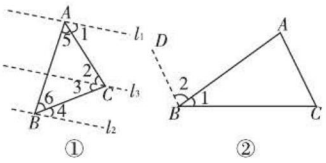


图 9.1−12

2. 三角形内角和定理的推论：

三角形内角和定理的推论：直角三角形的两个锐角互余．

根据三角形内角和定理与直角三角形中的最大角是直角可得出这个推论．

核心考向▶利用三角形内角和定理及推论解三角形内角相关问题

类型 1：三角形内角和定理在求角中的应用

例 7 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角．

（1）已知 $\angle A=40°$，$\angle B=\angle C$，求 $\angle B$，$\angle C$ 的度数；

（2）已知 $\angle A-\angle B=16°$，$\angle C=54°$，求 $\angle A$，$\angle B$ 的度数；

（3）已知 $\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数．

解题秘方：紧扣三角形内角和定理建立方程（组）求解．

解：（1）设 $\angle B=\angle C=x°$．

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore 40+x+x=180$．

解得 $x=70$，$\therefore \angle B=\angle C=70°$．

（2）设 $\angle A=x°$，$\angle B=y°$．

$\because \angle A-\angle B=16°$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle C=54°$，

$\therefore \begin{cases} x-y=16, \\ x+y+54=180, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=71, \\ y=55. \end{cases}$

$\therefore \angle A=71°$，$\angle B=55°$．

（3）$\because \angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，

$\therefore \angle B=2\angle A$，$\angle C=3\angle A$．

设 $\angle A=x°$，则 $\angle B=2x°$，$\angle C=3x°$，

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore x+2x+3x=180$．

解得 $x=30$．

$\therefore \angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$．

特别解读

1. 三角形内角和定理揭示了三角形三个内角之间的数量关系．
2. 三角形的三个内角中最多只有一个钝角或直角，或者说至少有两个锐角．

提分·秘诀

另解

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A=40°$，

$\therefore \angle B+\angle C=180°-40°=140°$．

又 $\because \angle B=\angle C$，

$\therefore \angle B=\angle C=140°\div 2=70°$．

方法点拨

求三角形内角的度数的方法：

1. 若已知两个内角的度数，求第三个内角的度数，直接利用三角形内角和定理求解．
2. 若已知一个内角的度数及另两个内角之间的等量关系；或不知道任何一个内角的度数，只知道三个内角之间的关系，一般根据“三角形内角和为 180°”这个隐含的等量关系列方程（或方程组）求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：三角形内角和定理在解实际问题中的应用

例 8 一个零件的形状如图 9.1−13 所示，按规定∠ A 应等于 90°，∠ ABD，∠ ACD 应分别是 34° 和 18°．李叔叔量得∠ BDC= 146°，请你帮李叔叔判断这个零件是否合格，并说明理由．

解题秘方：建立三角形的模型利用三角形内角和定理求出角度，再用三角形内角和进行验证．

解：这个零件不合格．理由：如图 9.1−13，连结 BC，在△ ABC 中，

∠ A+ ∠ ABC+ ∠ ACB=180°，

∵∠ A=90°，∠ ACD=18°，∠ ABD=34°，

∴∠ DCB+ ∠ DBC=38°．

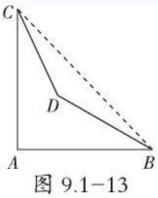


图 9.1−13

在△ DCB 中，∠ BDC+ ∠ DCB+ ∠ DBC=146° +38° =184° ≠ 180°，

∴这个零件不合格．

解法提醒

“三角形内角和等于 180°”这个定理是任何三角形都必须具备的性质．若某三角形三个内角和不等于 180°，则说明该三角形不存在．

类型 3：三角形内角和定理的推论在说明两线段垂直中的应用

例 9 如图 9.1−14，在△ ABC 中，∠ ACB=90°，∠ ACD= ∠ B，试说明：CD ⊥ AB.

解题秘方：利用三角形内角和定理的推论与三角形内角和定理求出 CD，AB 的夹角为直角．

解：∵∠ ACB=90°，

∴∠ A+ ∠ B=90°（三角形内角和定理的推论）．

∵∠ ACD= ∠ B，

∴∠ A+ ∠ ACD=90°（等量代换）．

∴∠ CDA=90°（三角形内角和定理）．

∴ CD ⊥ AB.

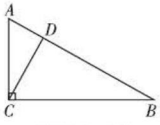


图 9.1−14

教你一招

说明两条直线垂直的方法：

1. **定义法**：推导相交的两条直线的夹角中有一个角为直角．
2. **说明直角三角形法**：在三角形中，推导出两个角的和为 90°，从而得此三角形为直角三角形．

点知识 5 三角形的外角和及内外角关系

1. 三角形外角的性质：如图 9.1−15 所示，∠ ACD、∠ BAE、∠ CBF 是△ ABC 的三个外角；∠ 1、∠ 2、∠ 3 是△ ABC 的三个内角．

性质 1：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和．如图 9.1−15 所示，∠ ACD= ∠ 1+ ∠ 2，∠ BAE= ∠ 2+ ∠ 3，∠ CBF= ∠ 1+ ∠ 3.

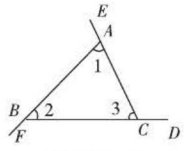


图 9.1−15

性质 2：三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角．

2. 三角形的外角和等于 360°．

注意：三角形的外角和是指从与每个内角相邻的两个外角中分别取一个相加得到的和，而不是三角形的六个外角之和．

提分·必记

特别解读

三角形外角的性质常见的应用：

（1）已知一个外角及与它不相邻的两个内角中的一个，求另一个内角；

（2）说明一个角等于另两个角的和或差；

（3）作为中间关系式说明两个角相等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用外角的性质解与三角形的角相关的问题

类型1：三角形外角的性质在求角的度数中的应用

例10 如图9.1-16，AD是$\angle CAE$的平分线，$\angle B=35°$，$\angle DAE=60°$，求$\angle ACD$的度数.

解题秘方：利用外角的性质，将$\angle ACD$转化为$\angle B+\angle BAC$进行求解.

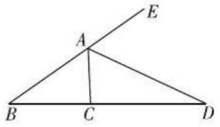


图9.1-16

解：∵AD是$\angle CAE$的平分线，

$\angle DAE=60°$，

∴$\angle CAE=2\angle DAE=2\times60°=120°$.

∴$\angle BAC=180°-\angle CAE=180°-120°=60°$.

∵$\angle ACD$是$\triangle ABC$的一个外角，

∴$\angle ACD=\angle BAC+\angle B=60°+35°=95°$.

类型2：三角形外角的性质在探究角之间的关系中的应用

例11 已知如图9.1-17①，AC与BD相交于点O，连结AB，CD.

（1）试说明：$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

（2）如图9.1-17②，AP平分$\angle BAC$，DP平分$\angle BDC$.

试说明：$2\angle P=\angle B+\angle C$.

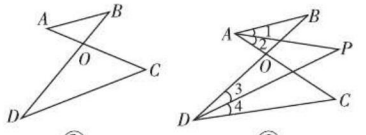


图9.1-17

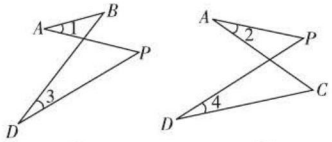


图9.1-18

解题秘方：利用基本图形法将复杂图形分解成基本图形进行探究.

解：（1）∵$\angle BOC=\angle A+\angle B$，$\angle BOC=\angle C+\angle D$，

∴$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

（2）由（1）的结论可知，$\angle 1+\angle B=\angle 3+\angle P$，

$\angle 4+\angle C=\angle 2+\angle P$.

∴$\angle 2+\angle 3+\angle P+\angle P=\angle 1+\angle 4+\angle B+\angle C$.

∵AP，DP分别是$\angle BAC$，$\angle BDC$的平分线，

∴$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

∴$2\angle P=\angle B+\angle C$.

提分·秘诀

一题多解

求三角形的某一个角的度数时，可以从三角形内角与三角形外角的角度思考.本题解法是将$\angle ACD$看成$\triangle BAC$的外角求的，也可以将$\angle ACD$看成$\triangle ACD$的内角来求.

∵$\angle DAE=60°$，

$\angle B=35°$，

∴$\angle D=60°-35°=25°$.

∵AD是$\angle CAE$的平分线，

∴$\angle CAD=\angle DAE=60°$.

∴$\angle ACD=180°-60°-25°=95°$.

解法提醒

剖图是解决几何问题的关键步骤，关键是根据图中角的关系从复杂图形中解剖出常见的基本图形.

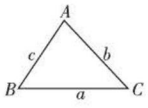
图9.1-17①中，$\angle BOC$既是$\triangle AOB$的外角又是$\triangle COD$的外角.

图9.1-17②可从解剖出两个“8字形”图形（如图9.1-18），则可得$\angle 1+\angle B=\angle 3+\angle P$，$\angle 4+\angle C=\angle 2+\angle P$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▶ 6 三角形的三边关系

1. 三角形的三边关系：

文字语言	数学语言	理论依据	图形
三角形的任意两边的和大于第三边	$a+b>c$，$b+c>a$，$a+c>b$	两点之间线段最短	
三角形的任意两边的差小于第三边	$a-b<c$，$b-c<a$，$a-c<b$（$a>b>c$）		

2. 三角形三边关系的应用：

（1）判断三条线段能否组成三角形；

（2）已知三角形的两边长，确定第三边长（或周长）的取值范围；

（3）三角形的边长用字母表示时，求字母的取值范围；

（4）说明线段的不等关系．



三角形的三边关系

拔考向 ▶ 利用三角形的三边关系判断线段关系

类型 1：三角形的三边关系在判断组成三角形的条件中的应用

例 12 下列长度的三条线段能组成三角形的是（　　）

A. 1cm，2cm，3.5cm　　B. 4cm，5cm，9cm

C. 5cm，8cm，15cm　　D. 6cm，8cm，9cm

解题秘方：紧扣“三角形的三边关系”进行判断．

解：∵ 1+2<3.5，两边的和小于第三边，∴不能组成三角形．

∵ 4+5=9，两边的和等于第三边，∴不能组成三角形．

∵ 5+8<15，两边的和小于第三边，∴不能组成三角形．

∵ 6+8>9，两条较短边的和大于最长边，∴能组成三角形．

答案：D

类型 2：三角形的三边关系在求第三边长的取值范围中的应用

例 13 如图 9.1−19 是一个直三棱柱的平面展开图，其中 $AD=10$，$CD=2$，则 AB 的长可以是（　　）

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

解题秘方：紧扣三角形三边关系将 AB 与 BC，CD 的关系转化到同一三角形的三边中去，利用三角形的三边关系求出 AB 长的取值范围．

解：由图 9.1−19 可知 $AD=AB+BC+CD$.

∵ $AD=10$，$CD=2$，∴ $AB+BC=8$.

设 $AB=x$，则 $BP=AB=x$，$BC=8-x$.

∵ $PC=CD$，∴ $x-2<8-x<x+2$.

解得 $3<x<5$. ∴ AB 的长可以是 4.

答案：B

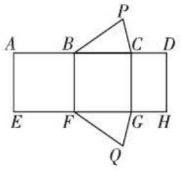


图 9.1−19

提分·必记

特别提醒

- 三角形中的“两边”指任意两边，应用时常选取两条较短的边的和与第三边作比较，选取最长边与最短边的差与第三边作比较．
- 已知三角形两边长 a，b（$a>b$），根据三角形三边关系可知，第三边长 c 的取值范围是 $a-b<c<a+b$.

提分·秘诀

技巧提醒

确定三条线段能否组成三角形的两种方法：

1. 看较短的两条线段的和是否大于最长的线段，若是，则能组成三角形；反之，则不能组成三角形．
2. 看最长的线段减去最短的线段的差是否小于第三条线段，若是，则能组成三角形；反之，则不能组成三角形．

方法点拨

已知某三条线段能围成一个三角形，则其中任意一边都小于另两边之和，大于另两边之差，据此既可以解决“已知两边长，求第三边长的取值范围”，也可以解决“用字母表示三角形边长时，求字母的取值范围”．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：三角形三边关系在说明线段的不等关系中的应用

例 14 如图 9.1−20，D 是△ ABC 内任意一点，连结 BD，DC，试说明 $AB+AC > BD+DC$.

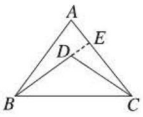


图 9.1−20

解题秘方：紧扣“三角形三边的关系”将要说明的线段转化到三角形三边中去说明.

解：如图 9.1−20，延长 BD 交 AC 于点 E，

在△ ABE 中，$AB+AE > BE$，在△ CDE 中，$DE+CE > DC$，

上述两式相加得 $AB+AE+DE+CE > BE+DC$，

$\therefore AB+AE+CE > BE-DE+DC$，

$\therefore AB+AC > BD+DC$.

解法提醒

要说明线段和的大小关系，首先要把 AB，AC，BD，DC 这些分散的线段集中，构造三角形，并运用“三角形任意两边的和大于第三边”这一关系，得出几个同向不等式，然后通过变形得出结论.

点知识 7 三角形的稳定性

提分·必记

1. 三角形的稳定性：

（1）如果三角形的三条边固定，那么三角形的形状、大小就完全确定了，三角形的这个性质叫做三角形的稳定性.

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性，在生活中也有广泛的应用.

2. 三角形稳定性的应用：

（1）稳定性是三角形特有的，在生产和生活中具有广泛的应用，有很多需要保持稳定性的物体都被制成三角形的形状，如起重机、钢架桥等.

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性，为保证其稳定性，常在图形中构造三角形. 四边形的不稳定性在生活中也有广泛的应用，如活动挂架、伸缩门等.

示图

钢架桥


图 9.1−21

窗户

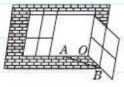


图 9.1−22

伸缩门


图 9.1−23

拔考向 利用三角形的稳定性固定物体的形状

提分·秘诀

例 15 李明家有一个由六根钢管连结而成的钢架 $ABCDEF$，如图 9.1−24，为了使这个钢架稳固，他计划用三根钢管来连结使它不变形. 请帮李明解决这个问题.

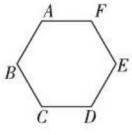
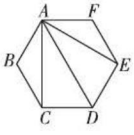
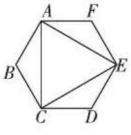


图 9.1−24



①



②

图 9.1−25


三角形的稳定性

解题秘方：根据三角形的稳定性，将钢架分割成三角形. 紧扣“三角形的稳定性”进行解答.

解：答案不唯一. 只要将图形分割成三角形即可. 供参考的两种方法如图 9.1−25 ①②.

解法提醒

- 判断一个图形是否具有稳定性要看它的基本组成部分是不是三角形. 若是，则具有稳定性；若不是，则不具有稳定性.
- 为了保证四边形及四边以上的图形稳定，最简单的方法是连对角线（不相邻两个顶点的连线）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用“面积和差关系法”说明线段的和差关系

例 16 如图 9.1−26，已知在△ ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，$BG \perp AC$ 于点 G. 试说明：$BG=DE+DF$.

解题秘方：判断三角形的高或垂线段之间的关系，可转化为用面积之间的关系解决.

解：如图 9.1−26，连结 AD. $\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BG = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$.

又 $\because AB=AC$，

$\therefore BG=DE+DF$.

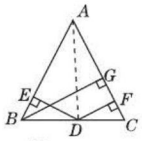


图 9.1−26

挑战·高分

方法点拨

面积法是数学中很重要的解题方法，而在涉及垂线段（或三角形的高）的关系时，常将线段的关系转化为面积的关系来解决；当几个三角形的底边相等时，面积的和差关系反映的就是高的和差关系.

拔尖角度 2 利用分类讨论思想巧求涉及中线的三角形线段的长

例 17 在△ ABC 中，$AB=AC$，AC 边上的中线 BD 把△ ABC 的周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分，求△ ABC 的各边长.

解题秘方：根据中线的定义及分类讨论思想分不同情况进行计算.

解：设 $AB=x$ cm，则 $AD=CD=\frac{1}{2}x$ cm.

由于题中条件不能确定图形形状，因此需分以下两种情况求解：

（1）如图 9.1−27 ①，

若 $AB+AD=12$ cm，则 $x+\frac{1}{2}x=12$.

解得 $x=8$，即 $AB=AC=8$ cm，

则 $CD=4$ cm.

故 $BC=15-4=11$（cm）.

此时 $AB+AC > BC$，三角形存在.

$\therefore$△ ABC 三边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm.

（2）如图 9.1−27 ②，若 $AB+AD=15$ cm，

则 $x+\frac{1}{2}x=15$.

解得 $x=10$，即 $AB=AC=10$ cm，则 $CD=5$ cm.

故 $BC=12-5=7$（cm）. 显然此时三角形存在.

$\therefore$△ ABC 三边长分别为 10 cm，10 cm，7 cm.

综上所述，△ ABC 的三边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm 或 10 cm，10 cm，7 cm.

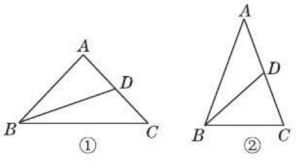


图 9.1−27

挑战·高分

解法提醒

1. 若题目中条件交代不是很清楚，如本题“周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分”，具体哪部分长 12 cm 没有指代清楚，故应分类讨论.
2. 求得的三角形边长必须用三角形三边关系进行验证.
3. 分类讨论思想是解几何图形不确定问题的一种常用思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用方程思想求三角形中角的度数

例 18 如图 9.1-28，在△ABC中，D是BC边上一点，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle BAC=63°$，求$\angle DAC$的度数.

解题秘方：设未知数，根据三角形外角的性质及题中条件，将已知角和所求角集中到同一三角形中列方程求解.

解：设$\angle 1=\angle 2=x°$，

则$\angle 3=\angle 4=\angle 1+\angle 2=2x°$.

$\because \angle BAC=63°$，

$\therefore \angle DAC=63°-x°$.

$\because \angle 3+\angle 4+\angle DAC=180°$，

$\therefore 2x+2x+63-x=180$，解得$x=39$.

$\therefore \angle DAC=63°-39°=24°$.

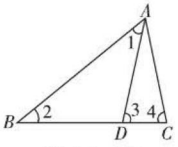


图 9.1-28

挑战·高分

方法点拨

外角性质可以把不在同一个三角形中的几个内角联系起来，它是不同三角形的内角之间相互转化的“纽带”.

拔尖角度 4 利用化分散为集中的转化思想求多个角的度数和

例 19 如图 9.1-29，在五角星$ABCDE$中，试说明$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

解题秘方：利用“化分散为集中”的思想和“三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和”将分散的角转化到一个三角形中去解.

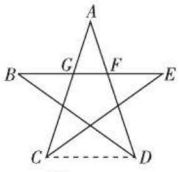


图 9.1-29

解法一：$\because \angle AGF$是△GCE的外角，

$\therefore \angle AGF=\angle C+\angle E$. 同理$\angle AFG=\angle B+\angle D$.

在△AFG中，$\angle A+\angle AFG+\angle AGF=180°$，

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

解法二：如图 9.1-29，连结CD，易知$\angle B+\angle E=\angle BDC+\angle ECD$.

$\therefore \angle A+\angle B+\angle ACE+\angle ADB+\angle E$

$=\angle A+\angle ECD+\angle ACE+\angle ADB+\angle BDC$

$=\angle A+\angle ACD+\angle ADC=180°$.

挑战·高分

特别提醒

本题两种方法充分体现了化分散为集中的转化思想，即将分散在不同三角形中的几个角运用外角的性质或例11中“8字形”图形的性质集中到同一个三角形中去，最后利用三角形的内角和定理去解决问题.

解法一是用外角性质转化的；解法二是用“8字形”图形的性质转化的.

拔尖角度 5 利用类比特殊法探究三个角之间的数量关系

例 20 如图 9.1-30，在△ABC中，AD是边BC上的高，AE是$\angle BAC$的平分线. 若$\angle B=50°$，$\angle C=70°$，求$\angle EAD$的度数. 试猜想：若$\angle B=\alpha$，$\angle C=\beta$（$\beta>\alpha$），则$\angle EAD$的度数是多少？（用含α，β的式子表示）

解题秘方：利用三角形的高和角平分线揭示角的数量关系解决问题.

解：$\because \angle B=50°$，$\angle C=70°$，

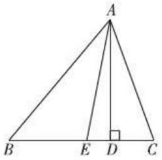


图 9.1-30

挑战·高分

详解

$\because AD$是BC边上的高，

$\therefore \angle BAD=90°-\alpha$，

$\therefore \angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-\alpha-\beta$.

$\because AE$是$\angle BAC$的平分线，

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$

$=\frac{1}{2}(180°-\alpha-\beta)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-50°-70°=60°$.

$\because AD$ 是边 BC 上的高，$\therefore \angle ADB=90°$.

$\therefore \angle BAD=90°-\angle B=90°-50°=40°$.

$\because AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$.

$\therefore \angle EAD=\angle BAD-\angle BAE=40°-30°=10°$.

猜想：$\angle EAD=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

拔尖角度▸ 6 利用三角形内角、外角关系法探究角平分线夹角的规律

例 21 在△ ABC 中，$\angle A=40°$.

（1）如图 9.1-31 ①，已知 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数；

（2）如图 9.1-31 ②，已知 $\angle ABC$ 的平分线和△ ABC 的外角 $\angle ACD$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数；

（3）如图 9.1-31 ③，已知△ ABC 的外角 $\angle CBD$ 与 $\angle BCE$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数.

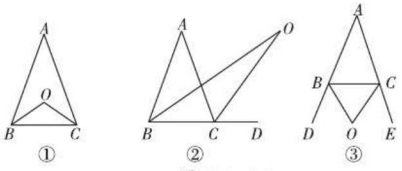


图 9.1-31

解题秘方：利用角平分线的定义、三角形内角和定理及内外角关系探究需求的角与已知角之间的关系.

解：（1）$\because \angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线交于点 O，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=110°$.

（2）$\because \angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线交于点 O，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCD=\frac{1}{2}\angle ACD$.

$\because \angle OCD$ 是△ BCO 的外角，$\angle ACD$ 是△ ABC 的外角，

$\therefore \angle OCD=\angle BOC+\angle OBC$，$\angle ACD=\angle ABC+\angle A$.

$\therefore \angle BOC=\angle OCD-\angle OBC=\frac{1}{2}(\angle ACD-\angle ABC)$

$=90°-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$.

$\therefore \angle EAD=\angle BAD-\angle BAE$

$=90°-\alpha+90°-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta)$

$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

挑战·高分

归纳总结

与三角形角平分线有关的结论：

1. 由（1）可知，三角形中任意两个内角的平分线相交所成的角（简记为内夹角）等于 90° 加上第三个角的一半. 即 $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.
2. 由（2）可知，三角形中任意一个内角的平分线和与该内角不相邻的一个外角的平分线所成的角（简记为内外夹角）等于另外一个不与此外角相邻的内角的一半. 即 $\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A$.
3. 由（3）可知，三角形中与 $\angle A$ 不相邻的两个外角平分线相交所成的角（简记为外夹角）等于 90° 减去 $\angle A$ 的一半，即 $\angle BOC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle A-\angle ABC)=\frac{1}{2}\angle A=20°$.

(3) $\because \angle CBD$, $\angle BCE$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $\therefore \angle CBD=\angle A+\angle ACB$, $\angle BCE=\angle A+\angle ABC$. $\because \angle CBD$ 与 $\angle BCE$ 的平分线交于点 O,

$\therefore \angle CBO=\frac{1}{2}\angle CBD$, $\angle BCO=\frac{1}{2}\angle BCE$.

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle CBO+\angle BCO)=180°-\frac{1}{2}\times(\angle CBD+\angle BCE)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB+\angle A+\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+180°)$

$=90°-\frac{1}{2}\angle A=70°$.

另解

根据角平分线的定义和三角形外角的性质，可得 $\angle OCD=\angle OBC+\angle BOC$, $\angle ACD=2\angle OBC+40°$, $\angle ACD=2\angle OCD$, $\therefore 2\angle OBC+40°=2\angle OBC+2\angle BOC$. $\therefore \angle BOC=20°$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容属于中考常考内容，考查的知识点主要为三角形的内角和等于 180° 、三角形的外角和等于 360° 、三角形外角的性质和三角形的三边关系，题型为选择题、填空题，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用角平分线及整体思想求角的度数

例 22 [中考·陕西] 如图 9.1-32，在 $\triangle ABC$ 中，BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线，若 $\angle A=52°$，则 $\angle 1+\angle 2$ 的度数为_____.

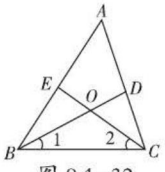


图 9.1-32

试题评析：本题考查了三角形角平分线的定义，解题关键是根据角平分线得出角的数量关系，难度适中.

解：$\because \angle A=52°$，$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-52°=128°$. $\therefore \angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times 128°=64°$.

答案：64°

考法 2 利用平行线的性质及内外角的关系求角的度数

例 23 [中考·宿迁] 如图 9.1-33，点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 的延长线上，$DE\parallel BC$，若 $\angle A=35°$，$\angle C=24°$，则 $\angle D$ 的度数是(　　)

A. 24°　　B. 59°　　C. 60°　　D. 69°

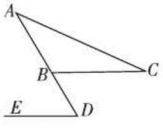


图 9.1-33

试题评析：本题考查了平行线的性质和外角的性质，掌握平行线的性质并且准确识图是解题的关键.

解：根据三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和求得 $\angle CBD=59°$，再根据两条直线平行，内错角相等知 B 正确.

答案：B

冲刺·满分

解法提醒

三角形的角平分线揭示了三角形中角的数量关系，通常与三角形内角和等于 180° 结合在一起求三角形中角的度数.

教你一招

平行线的性质中，同位角相等及内错角相等都能起到转化角的作用，通过相等角的转化建立内外角之间关系的模型.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用三角形的三边关系求三角形的边长

例 24 [中考·武威]已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，a，b 满足 $|a-7|+(b-1)^2=0$，c 为奇数，则 $c=$_____.

试题评析：本题考查了三角形的三边关系，解题的关键是先求出两边长，再确定第三边长的取值范围.

解：∵ $|a-7|+(b-1)^2=0$，

∴ $a=7$，$b=1$.

∵ a，b，c 为△ABC 的三边长，

∴ $7-1<c<7+1$.

即 $6<c<8$.

∵ c 为奇数，

∴ $c=7$.

答案：7

解法提醒

先由关系式求三角形两边的长，再根据三角形第三边的取值范围在两边的差与两边的和之间，千万不能带等号，从而求出第三边.

两年模拟兵法 ☞答案见 222 页

1. [中考·常德]已知三角形两边的长分别是 3 和 7，则此三角形第三边的长可能是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 8　　D. 11

2. [中考·贺州]一个等腰三角形的两边长分别为 4，8，则它的周长为（　　）

A. 12　　B. 16

C. 20　　D. 16 或 20

3. 已知一个等腰三角形的底边长为 5，这个等腰三角形的腰长为 x，则 x 的取值范围是（　　）

A. $0<x<\frac{5}{2}$　　B. $x\geqslant\frac{5}{2}$

C. $x>\frac{5}{2}$　　D. $0<x<10$

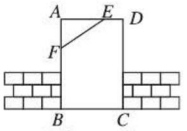
4. 如图，工人师傅砌门时，需要用木条 EF 固定长方形门框 $ABCD$，使其不变形，这样做的依据是（　　）

A. 两点之间线段最短

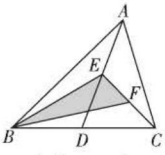
B. 两点确定一条直线

C. 三角形具有稳定性

D. 长方形的四个角都是直角



（第 4 题）



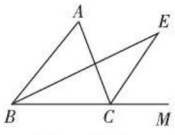
（第 5 题）

5. 如图，在△ABC 中，已知点 D，E，F 分别为 BC，AD，CE 的中点，且 $S_{\triangle ABC}=8\ \text{cm}^2$，则 $S_{\text{阴影}}$ 等于（　　）

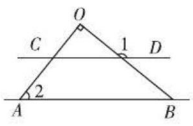
A. $4\ \text{cm}^2$　B. $2\ \text{cm}^2$　C. $1\ \text{cm}^2$　D. $\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$

6. [中考·大庆]如图，在△ABC 中，BE 是∠ABC 的平分线，CE 是外角∠ACM 的平分线，BE 与 CE 相交于点 E，若∠$A=60°$ 则∠BEC 是（　　）

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°



（第 6 题）



（第 7 题）

7. [中考·益阳]如图，直线 $AB\parallel CD$，$OA\perp OB$，若∠$1=142°$，则∠$2=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

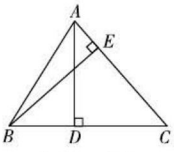
8. 已知在△ ABC 中，$AB=5$，$BC=2$.

（1）求 AC 长的取值范围.

（2）求△ ABC 的周长 l 的取值范围.

（3）若 AC 的长为奇数，求△ ABC 的周长并判断△ ABC 的形状.

9. 如图，在△ ABC 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$BE \perp AC$ 于点 E，$BC=9$，$AC=8$，$AD=6$. 求 BE 的长.

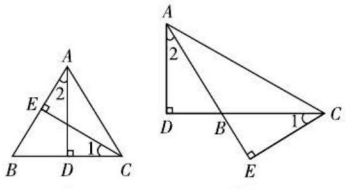


（第 9 题）

10. 如图①，在△ ABC 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$CE \perp AB$ 于点 E.

（1）猜想∠ 1 与∠ 2 的关系，并说明理由；

（2）如果∠ ABC 是钝角，如图②，（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由.

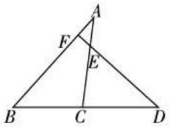


（第 10 题）

11. 如图，已知点 D 是△ ABC 的边 BC 延长线上一点，DF 交 AC 于点 E，交 AB 于点 F，∠ $A=35°$，∠ $ACD=83°$.

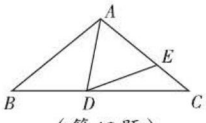
（1）求∠ B 的度数；

（2）若∠ $D=42°$，求∠ AFE 的度数.



（第 11 题）

12. 如图，在△ ABC 中，∠ $B=$ ∠ C，∠ $BAD=40°$，且∠ $ADE=$ ∠ AED. 求∠ CDE 的度数.



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.2 多边形的内角和与外角和

核心知识

- 多边形及正多边形
- 多边形的内角和
- 多边形的外角和

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 多边形及其相关概念

1. 多边形的定义： 一般地，由 n 条不在同一直线上的线段首尾顺次连结组成的平面图形称为 n 边形，也即我们认识的多边形.

（1）**表示方法：** 表示多边形时，先写出多边形的名称，后面依次写出多边形的顶点字母.

（2）**分类：** 多边形按组成它的线段的条数分为三角形、四边形、五边形……三角形是最简单的多边形. 如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形.

2. 相关概念：

（1）**内角：** 多边形相邻两边组成的角叫做多边形的内角.

（2）**外角：** 多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角.

（3）**对角线：** 连结多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线.

3. 凸多边形： 画出多边形的任何一条边所在的直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形，否则就是凹多边形，本节只讨论凸多边形.

4. 正多边形： 如果多边形的各边都相等，各内角也都相等，那么就称它为正多边形.

提分·必记

特别解读

多边形的三个必要条件：

1. 线段在“同一个平面内”；
2. 线段“不在同一直线上”且条数不少于 3；
3. 首尾顺次连结.

特别解读

正多边形必备的两个条件：

(1) 各个内角都相等；

(2) 各条边都相等.

说明：若一个多边形的各个内角都相等或各条边都相等，则它不一定是正多边形.

拔考向▸ 利用多边形的有关概念进行辨析

例 1 下列说法中，正确的有（　　）

（1）三角形是边数最少的多边形；

（2）等边三角形和长方形都是正多边形；

（3）n 边形有 n 条边，n 个顶点，n 个内角和 n 个外角；

（4）六边形从一个顶点出发可以画 3 条对角线，所有的对角线共有 9 条.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方： 利用多边形的有关概念进行辨析.

提分·秘诀

知识储备

1. 多边形有几条边就是几边形，且顶点个数、内角个数均与边数相等，外角个数等于边数的 2 倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）三角形是边数最少的多边形，正确；

（2）等边三角形是正多边形，但长方形不是正多边形，不正确；

（3）n 边形有 n 条边，n 个顶点，n 个内角，$2n$ 个外角，不正确；

（4）根据对角线的定义画出六边形的对角线可知从一个顶点出发可以画 3 条对角线，所有的对角线共有 9 条，正确.

答案：B

2. 从 n 边形的一个顶点出发，可以作（$n-3$）条对角线，它们将 n 边形分为（$n-2$）个三角形，n 边形一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线.

点知识▶ 2 多边形的内角和

1. 定理：n 边形的内角和等于（$n-2$）$\times 180°$（$n \geqslant 3$）.

2. 多边形内角和公式的常见应用：

（1）已知多边形的边数，求内角和；

（2）已知多边形的内角和，求边数；

（3）求正 n 边形每个内角的度数，其公式为 $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$；

（4）已知 n 边形每个内角的度数，且度数都相等，求边数.

提分·必记

特别解读

1. 从 n 边形的内角和公式（$n-2$）$\times 180°$ 可知 n 边形的内角和一定是 180° 的整数倍.

2. 多边形的内角和随边数的变化而变化，边数每增加 1，内角和就增加 180°.

拔考向▶ 利用多边形内角和公式求多边形的边数

题型 1：已知多边形的内角和（或角）在求边数中的应用

例 2 根据下列条件求多边形的边数：

（1）多边形的内角和是 1 620°；

（2）正多边形的每个内角均为 120°.

解题秘方：根据多边形内角和公式列出方程求解.

解：（1）设多边形的边数为 n，根据题意得，

$(n-2)\cdot 180° = 1\,620°$，

已知内角和，设出边数 n，利用内角和公式列出方程求出边数 n

解得 $n=11$. 故多边形的边数为 11.

（2）设正多边形的边数为 n，根据题意得，$(n-2)\cdot 180° = 120°\, n$，

解得 $n=6$. 故正多边形的边数为 6.

提分·秘诀

解法提醒

正多边形的内角和可以用每个内角的度数乘正多边形内角的个数（正多边形的边数来表示），结合多边形的内角和公式，构造方程求解.

题型 2：已知多边形的缺角和在求边数中的应用

例 3 已知一个多边形除一个内角外其余内角的和为 1 710°，求这个多边形的边数及这个内角的度数.

解题秘方：紧扣多边形的内角大于 0° 且小于 180°，列出关于多边形的边数 n 的不等式组求解.

解：设这个多边形的边数为 n，则其内角和为 $(n-2)\times 180°$. 根据题意，得 $1\,710° < (n-2)\times 180° < 1\,710° + 180°$，

$\therefore 11.5 < n < 12.5$.

$\because n$ 为正整数，$\therefore n=12$.

$\therefore$ 这个内角的度数为 $(12-2)\times 180° - 1\,710° = 90°$.

解法提醒

在解决多边形的内角和问题时，有两个隐含的关键条件：一是多边形的每一个内角的度数都大于 0° 且小于 180°；二是多边形的边数 n 的取值范围是 $n \geqslant 3$ 且 n 为正整数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：截角在确定多边形边数中的应用

例 4 一个多边形截去一个角后，形成的新多边形的内角和是 2 880°，则原多边形的边数是多少？

解题秘方：紧扣截去一个角所得的新多边形与原多边形相比，边数变化的规律求解.

解：设新多边形的边数为 n，根据题意，得

$(n-2)\times 180^\circ = 2\,880^\circ$，

解得 $n=18$.

∵新多边形与原多边形相比，边数可能增加 1 条，可能不变，也可能减少 1 条，

∴原多边形的边数是 17 或 18 或 19.

特别提醒

一个多边形(除三角形外)截去一个角后，按不同的截法可得到边数不同的三种多边形，即边数增加1条，边数不变，边数减少1条. 以五边形为例，如图 9.2-1.

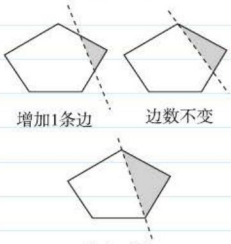


图 9.2-1

点知识 ▶ 3 多边形的外角和

1. 定理：任意多边形的外角和都等于 360°.

多边形的外角和是由多边形内、外角的关系推导出的，n 边形的外角和等于 $n\times 180^\circ-(n-2)\times 180^\circ=360^\circ$.

2. 常见应用：

(1) 已知外角度数求正多边形的边数；

(2) 已知正多边形的边数求外角度数，所用公式为 $\dfrac{360^\circ}{n}$.

提分·必记

特别解读

1. 多边形的外角和是指每个顶点处取一个外角的和.
2. 多边形的外角和恒等于 360°，与边数多少无关.

拔考向 ▶ 利用多边形的外角和定理计算

例 5 根据下列条件解决问题：

(1) 一个多边形的各内角都相等，已知其中一个外角为 72°，求该多边形的边数；

(2) 已知一个正多边形的每一个外角都等于 30°，求这个正多边形的边数.

解题秘方：根据多边形的内角与外角的关系、外角和定理计算.

解：(1) 设该多边形的边数为 n，

根据多边形的外角和为 360°.

有 $n\times 72^\circ=360^\circ$，解得 $n=5$.

∴该多边形的边数为 5.

(2) ∵多边形的外角和为 360°，

∴ $360^\circ\div 30^\circ=12$.

故这个正多边形的边数为 12.

提分·秘诀

解法提醒

多边形的各内角相等，从而外角也相等，已知其中一个外角的度数，由多边形的外角和是 360°，即可得出边数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用求多边形的边数法求多边形对角线的条数

例6 [中考·莱芜]一个多边形除一个内角外其余内角的和为1 510°，则这个多边形对角线的条数是（　　）

A. 27　　B. 35　　C. 44　　D. 54

解题秘方：先根据多边形的每一个内角都大于0°且小于180°，列出不等式组，求出边数，然后再求对角线的条数.

解：设这个内角的度数为 x，多边形的边数为 n，

则 $(n-2)\times180°-x=1\,510°$.

$\therefore x=(n-2)\times180°-1\,510°$.

$\because 0°<x<180°$，$\therefore 0°<(n-2)\times180°-1\,510°<180°$.

$\therefore \frac{151}{18}<n-2<\frac{169}{18}$.

$\because n$ 是正整数，$\therefore n-2=9$. $\therefore n=11$.

$\therefore \frac{n(n-3)}{2}=\frac{11\times8}{2}=44$.

答案：C

挑战·高分

另解

设这个多边形的边数为 n，除去的那个内角度数为 x，由题意得 $(n-2)\cdot180°-x=1\,510°$.

解得

$n=\frac{1\,510°+x}{180°}+2$

$=10+\frac{70°+x}{180°}$.

$\because n$ 为正整数，

$0°<x<180°$，

$\therefore x=110°$，$n=11$.

拔尖角度 2 利用转化凸多边形法求多边形的内角和

例7 如图9.2-2，求 $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$ 的度数.

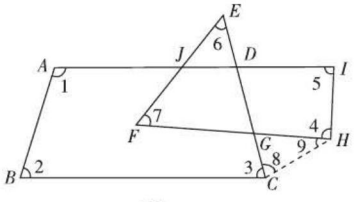


图 9.2-2

解题秘方：将不规则图形中的角转化为一个凸多边形或几个凸多边形的内角，然后利用多边形内角和公式求解.

解：如图9.2-2，连结 CH，

则 $\angle6+\angle7=\angle8+\angle9$

$\therefore \angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$

$=\angle1+\angle2+\angle3+\angle8+\angle9+\angle4+\angle5$

$=(5-2)\times180°$

$=540°$.

挑战·高分

解法提醒

- 有关"折线图"中求多个角的和的问题时，可运用数学的转化思想，通过作适当的辅助线，将其转化到同一个多边形中，利用多边形的内角和解决.
- 非凸多边形多角和求解思路：一般通过添加辅助线把图形转化为凸多边形，然后运用多边形内角和公式求解.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查多边形的内角和公式以及多边形的内、外角和与边数之间的关系．近几年主要以选择题和填空题的形式出现，以考查基础为主，题目较容易．

三年中考兵法

考法1 利用多边形的内角、外角的关系求内角和

例8 [中考·北京]若正多边形的一个外角是60°，则该正多边形的内角和为（　　）

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

试题评析：本题考查了多边形的内角、外角及内角和，解题的关键是掌握内、外角的关系和多边形的内角和公式.

解：∵正多边形的一个外角为60°，∴每个内角为120°.

设这个正多边形的边数为 n.

由题意，得 $(n-2)\cdot 180°=120°n$，

解得 $n=6$.

∴ $120°n=120°\times 6=720°$.

答案：C

考法2 利用正多边形的定义及外角和求边数和角

例9 [中考·南平]一个机器人从 O 点出发，每前进1米，就向右转体 α（$0°<\alpha<180°$），照这样走下去，机器人恰能回到 O 点，如果 $\alpha=15°$，则机器人所走过的路程为_____；若机器人所走过的路程最短，则 α 的值等于_____.

试题评析：本题主要考查正多边形的定义及正多边形的外角和，解题的关键是利用外角和等于360°求正多边形的边数.

解：根据正多边形的定义可知机器人所走过的路程恰好围成正多边形.

∵ $\alpha=15°$，

∴正多边形的每个外角都等于15°.

∴正多边形的边数为 $360°\div 15°=24$.

∵正多边形每条边长为1米，

∴机器人所走过的路程为24米.

机器人转的次数越少，所走的路程就越短，根据多边形的定义可知，边数至少为3，

故 $\alpha=360°\div 3=120°$.

答案：24米；120°

冲刺·满分

解法指导

利用多边形内角和公式构造关于边数的方程，通过解方程确定多边形的边数.

方法点拨

由于多边形的外角和是一个定值，所以正多边形每个外角的度数与边数的乘积就是个定值，边数越多，外角的度数越小，反之，边数越少外角的度数越大．边数最少的多边形是三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用多边形的内角和公式和角平分线定义求角

例 10 [中考·济宁]如图 9.2-3，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，$DP$，$CP$ 分别平分 $\angle EDC$，$\angle BCD$，则 $\angle P$ 的度数是（　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°

试题评析：本题主要考查了多边形内角和公式及角平分线的定义，解题的关键是掌握多边形内角和公式.

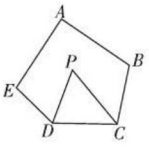


图 9.2-3

解：∵五边形 $ABCDE$ 的内角和为 $(5-2)\times 180°=540°$，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，

$\therefore \angle EDC+\angle BCD=240°$.

又∵DP，CP 分别平分 $\angle EDC$，$\angle BCD$，

$\therefore \angle PDC+\angle PCD=120°$.

$\therefore$ 在 $\triangle CDP$ 中，$\angle P=180°-(\angle PDC+\angle PCD)=180°-120°=60°$.

答案：C

思路点拨

先根据五边形内角和公式及已知条件求得 $\angle EDC+\angle BCD$，再根据角平分线定义求得 $\angle PDC+\angle PCD$，最后根据三角形内角和定理求得 $\angle P$ 的度数.

两年模拟兵法 答案见 223 页

1. [中考·武威]如图，足球图片正中的黑色正五边形的内角和是（　　）

A. 180°　　B. 360°

C. 540°　　D. 720°


（第 1 题）

2. [中考·乌鲁木齐]如果正 n 边形每一个内角等于与它相邻的外角的 2 倍，则 n 的值是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. [中考·广安]若一个正 n 边形的每个内角为 144°，则这个正 n 边形的所有对角线的条数是（　　）

A. 7　　B. 10　　C. 35　　D. 70

4. [中考·凉山州]一个多边形切去一个角后，形成的另一个多边形的内角和为 1 080°，那么原多边形的边数为（　　）

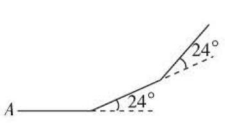
A. 7　　B. 7 或 8

C. 8 或 9　　D. 7 或 8 或 9

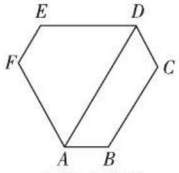
5. [中考·十堰]如图，小华从 A 点出发，沿直线前进 10 米后左转 24°，再沿直线前进 10 米，又向左转 24°，…，照这样走下去，他第一次回到出发地 A 点时，一共走的路程是（　　）

A. 140 米　　B. 150 米

C. 160 米　　D. 240 米



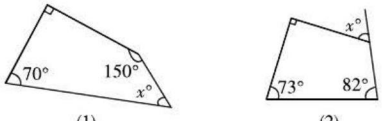
（第 5 题）



（第 6 题）

6. [中考·宜宾]如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$AD\parallel BC$，则 $\angle DAB=$_____.

7. 如图，求图形中 x 的值.



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

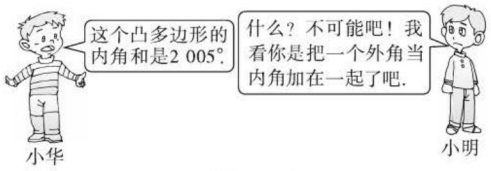
8. 一个多边形的所有内角与某一个外角的度数总和为 1 350°，求该多边形的边数.

9. [中考·河北]已知 n 边形的内角和 $\theta=(n-2)\times 180°$.

（1）甲同学说，θ 能取 360°；而乙同学说，θ 也能取 630°. 甲、乙的说法对吗？若对，求出边数 n. 若不对，说明理由.

（2）若 n 边形变为（$n+x$）边形，发现内角和增加了 360°，用列方程的方法确定 x.

10. 如图是小华与小明的对话.



（第10题）

（1）内角和是 2 005°，小明为什么说不可能？

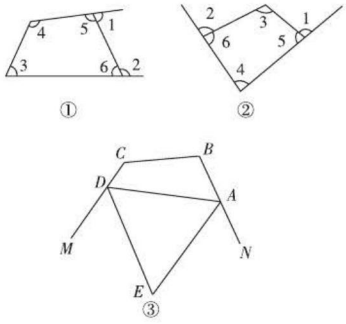
（2）小华求的是几边形的内角和？

（3）请你求出错把外角当内角的那个外角的度数.

11.（1）如图①②，试探究 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 之间的数量关系；

（2）如果我们把 $\angle 1$，$\angle 2$ 称为四边形的外角，那么请你用文字描述上述的关系；

（3）用你发现的结论解决下列问题：如图③，AE，DE 分别是四边形 $ABCD$ 的外角 $\angle NAD$，$\angle MDA$ 的平分线，$\angle B+\angle C=240°$，求 $\angle E$ 的度数.



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.3 用正多边形铺设地面

核心知识

- 用相同的正多边形铺设地面
- 用多种正多边形铺设地面

知识链接

铺设地面 —— 正多边形材料 —— 用一种正多边形 / 用多种正多边形

铺设地面 —— 关键 —— 围绕一点拼在一起的 n 个内角之和等于 360°

点知识·拨考向 速提分

点知识 ① 用相同的正多边形铺设地面

1. 使用给定的某种正多边形，当围绕一点拼在一起的几个内角加在一起恰好组成一个周角时，就可以铺满地面，如图 9.3-1 所示.

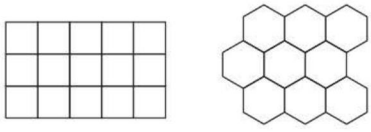


图 9.3-1

2. 用相同的正多边形地板砖铺满地面，只有正三角形、正方形、正六边形的地板砖可以用，理由如下：

正 n 边形的每个内角的度数为 $\dfrac{(n-2)\times 180°}{n}$.

设要用 k 个正 n 边形的地板砖，它们各有一个内角拼在一起，恰好组成一个周角，则 $360° = \dfrac{k(n-2)\cdot 180°}{n}$，解得 $k=\dfrac{2n}{n-2}=2+\dfrac{4}{n-2}$，

因为 k 为正整数，且 $n \geqslant 3$，所以 n 只能为 3、4、6.

拨考向 利用一种正多边形铺设地面

例 1 用哪种相同的正多边形能铺满地面？为什么？请画出它们的草图.

解题秘方：紧扣每种正多边形每个内角的度数及铺满的条件进行选择.

解：用相同的正三角形、正方形、正六边形能铺满地面.

因为正三角形的每个内角为 60°，六个 60° 恰好是一个周角；

而正方形的每个内角为 90°，四个 90° 恰好是一个周角；

同样正六边形的每个内角为 120°，三个 120° 恰好是一个周角. 它们的草图如图 9.3-2.

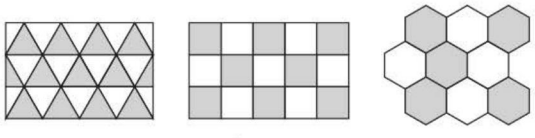


图 9.3-2

提分·必记

（1）当判断几个正多边形能否铺满地面时，主要是计算各正多边形的内角，看是否能将其拼成一个周角，而不能凭主观想象判断.

（2）任意四边形的内角和都等于 360°，所以用一批形状、大小完全相同但不规则的四边形可以铺满地面.

提分·秘诀

方法点拨

若正多边形的每个内角的整数倍等于 360°，则用这种正多边形就可以铺满地面；否则，就不能铺满地面.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识拓展

正多边形每个内角的度数与边数的关系如下表：

正多边形的边数	3	4	5	6	7	8	9	10	…	n
正多边形的内角和	180°	360°	540°	720°	900°	1 080°	1 260°	1 440°	…	$(n-2)\cdot 180°$
正多边形每个内角的度数	60°	90°	108°	120°	$\frac{900°}{7}$	135°	140°	144°	…	$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

点知识▶2 用多种正多边形铺设地面

用多种正多边形铺满地面与用相同的正多边形铺满地面的原理相同，即是否能铺满地面，主要是看几种正多边形在一个顶点处的几个内角的和是否等于 360° ，如图 9.3−3 所示．

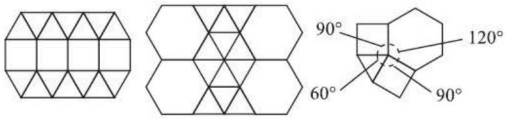


图 9.3−3

拔考向▶利用多种正多边形铺设地面

例 2 哪两种正多边形能铺满地面？为什么？（至少写出两对）

解题秘方：紧扣两种正多边形每个内角的度数以及每种正多边形的块数进行铺满．

解：答案不唯一（1）用正三角形和正方形可以铺满地面，设在一个顶点处用 m 块正三角形，n 块正方形，则有 $60°\ m+90°\ n=360°$，即 $2m+3n=12$. 因为 m，n 为正整数，所以 $m=3$，$n=2$，如图 9.3−4 所示．

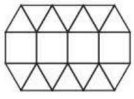


图 9.3−4

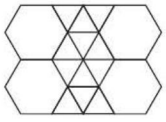


图 9.3−5

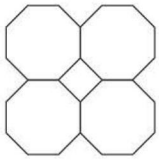


图 9.3−6

（2）用正三角形和正六边形可以铺满地面，设在一个顶点处用 a 块正三角形，b 块正六边形，则有 $60°\ a+120°\ b=360°$，即 $a+2b=6$. 因为 a，b 为正整数，所以 $a=2$，$b=2$ 或 $a=4$，$b=1$，如图 9.3−5 所示．

（3）用正方形和正八边形可以铺满地面，设在一个顶点处用 x 块正方形，y 块正八边形，则有 $90°\ x+135°\ y=360°$，即 $2x+3y=8$. 因为 x，y 为正整数，所以 $x=1$，$y=2$，如图 9.3−6 所示．

提分·必记

（1）用两种正多边形铺满地面的常见类型有：正三角形与正方形、正三角形与正六边形、正三角形与正十二边形、正方形与正八边形等．

（2）用三种正多边形铺满地面的常见类型有：正三角形、正方形与正六边形，正方形、正六边形与正十二边形等．

提分·秘诀

方法点拨

要想铺满地面必须满足围绕一点拼在一起的几种正多边形的内角和为 360° ，但是只满足“围绕一点拼在一起的几种正多边形的内角和为 360° ”这个条件不一定能铺满地面．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用铺设地面规则进行方案设计

例 3 如图 9.3–7 所示的地面全是由正三角形的材料铺设而成的.

（1）用这种形状的材料为什么能铺成平整、无缝隙的地面?

（2）像上面那样铺地面，能否全用正十边形的材料? 为什么?

（3）你能不能另外想出一种用多边形（不一定是正多边形）的材料铺地面的方案? 把你想到的方案画成草图.

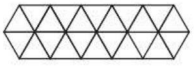


图 9.3–7

解题秘方：紧扣密铺的规则，选用不同的多边形进行方案设计.

解：（1）因为每个顶点周围有六个正三角形的内角，恰好组成一个周角.

（2）不能，因为围绕一点拼在一起的正十边形的内角不能组成 360° .

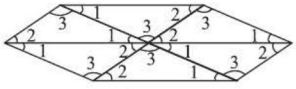


图 9.3–8

（3）能. 因为三角形三个内角和为 180° ，如图 9.3–8 所示，将三个相同的三角形不同的三个内角绕一点可围成一个平角，六个三角形用此法可围成一个周角，因此，用相同的任意三角形都能铺设地面.

挑战·高分

另解

因为任意四边形的内角和为 360° ，四个内角绕一点可围成一个周角，因此用相同的任意四边形也能铺设地面，如图9.3–9所示.

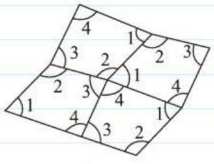


图 9.3–9

拔尖角度▸ 2 用归纳法解决图形摆放规律型问题

例 4 如图 9.3–10 是某广场地面的一部分，地面的中央是一块正六边形的地砖，周围用正三角形和正方形的大理石地砖铺设，从里向外共铺了 12 层（不包括中央的正六边形地砖），每 1 层的外边界都围成一个多边形，若中央正六边形的地砖的边长为 0.5 米，则第 12 层的外边界所围成的多边形的周长是_____米.

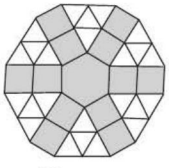


图 9.3–10

解题秘方：依据每 1 层外围多边形的构成，寻找规律求解即可.

解：第 1 层的外边界周长是 6× 正方形边长 +6× 正三角形边长，第 2 层的外边界周长是 6× 正方形边长 +6×2× 正三角形边长，……第 12 层的外边界周长是 6× 正方形边长 +6×12× 正三角形边长 =39（米）.

答案：39

挑战·高分

方法点拨

如图 9.3–11 所示，第 1 层外边界含 6 个正方形边长和 6 个正三角形边长；第 2 层外边界含 6 个正方形边长和 12 个正三角形边长.

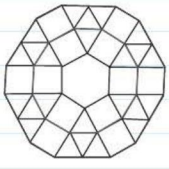


图 9.3–11

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用方程和不等式解决密铺问题

例 5 如果用正方形材料和正 n 边形（$n>4$）材料能够把地面铺得既平整又无空隙，那么 n 的值为多少？

解题秘方：紧扣密铺的规则：围绕一点的几个内角的和等于 360°，列出方程和不等式解决问题.

解：设正 n 边形内角的度数为 $x°$，由于 $n>4$，所以 $90<x<180$.

由题意，设用 m_1 块正方形，m_2 块正 n 边形拼，则有 $90m_1+m_2x=360$（其中 m_1，m_2 为正整数）.

由于 $90<x<180$，所以 $m_2x>90$，

即 $m_2x=360-90m_1>90$，

故 $m_1<3$，即 $m_1=1$ 或 2.

若 $m_1=1$，则 $m_2x=360-90=270$，则 x 为 270 的因数.

又因为 $90<x<180$，所以 $x=135$.

由 $\frac{n-2}{n}\times180=135$，可得 $n=8$.

若 $m_1=2$，则 $m_2x=360-90\times2=180$，则 x 为 180 的因数，而 $90<x<180$，故 x 无解. 综上，n 的值为 8.

挑战·高分

方法点拨

用两种正多边形密铺，既要考虑两种正多边形每个内角的度数，又要考虑每种正多边形选用的块数，而密铺的规则是列方程的依据.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 用正多边形铺设地面是新课程标准中新增的内容，中考中主要考查哪些图形能铺满地面，也会有个别方案设计题.

三年中考兵法

考法 用正多边形铺设地面

例 6 [中考·济宁]只用下列哪一种正多边形可以进行平面镶嵌（　　）

A. 正五边形　　B. 正六边形　　C. 正八边形　　D. 正十边形

试题评析：本题主要考查了用同种正多边形铺设地面，解题的关键是会计算正多边形的每个内角的度数.

解：因为正五边形的每个内角为 108°，正六边形的每个内角为 120°，正八边形的每个内角为 135°，正十边形的每个内角为 144°，只有 120° 能整除 360°，所以用一种正多边形铺地面，只有正六边形能够铺满.

答案：B

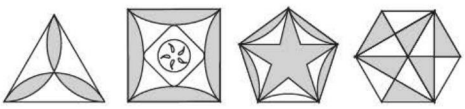
冲刺·满分

解法指导

“平面镶嵌”就是“密铺”其规则就是：围绕一点拼在一起的几个内角加在一起恰好组成一个周角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 李刚同学设计了4种正多边形的瓷砖图案，用1种瓷砖可以密铺平面的是图中的（　　）



（第1题）

A.（1）（2）（4）　　B.（2）（3）（4）

C.（1）（3）（4）　　D.（1）（2）（3）

2. 用两种正多边形镶嵌，不能与正三角形匹配的正多边形是（　　）

A. 正方形　　B. 正六边形

C. 正十二边形　　D. 正十八边形

3. 若用m个正方形和n个正八边形铺满地面，则m，n满足的关系式是（　　）

A.$2m+3n=8$　　B.$3m+2n=8$

C.$m+2n=6$　　D.$m+n=4$

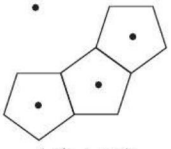
4. 如图，若干个全等的正五边形排成环状，图中所示的是前3个正五边形，要完成这一圆环还需正五边形的个数为（　　）

A.10

B.9

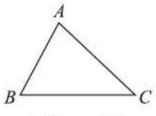
C.8

D.7



（第4题）

5. 某工厂在生产过程中留下了大量的三角形废铁料，如图，量得$\angle A=75°$，$\angle B=60°$，该厂决定利用这些废铁料焊接成各边都相等的多边形，用作广告牌，请你设计可行的焊接方案.

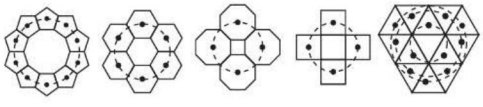


（第5题）

6. 亮亮家厨房有一块长90 cm，宽54 cm的长方形墙面准备贴上瓷砖，现在他家买了18 cm×12 cm的长方形瓷砖24块，6 cm×6 cm的正方形瓷砖3块，请你帮助亮亮设计一种铺设方案.

7. 从边长相等的正三角形、正方形、正六边形、正八边形、正十二边形中选出两种来铺设地面，求出铺满地面所用的正多边形的个数，画出草图.（要求写出三种铺设方法）

8. 如图（1）（2）（3），用一种大小相等的正多边形密铺成一个“环”，我们称之为环形密铺.但图（4）（5）不是我们所说的环形密铺，请你再写出一种可以进行环形密铺的正多边形：_____.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三角形的外角解题技巧

荣老师告诉你 三角形外角的性质：①三角形的外角与它相邻的内角互补．②三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和．③三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角．④三角形的外角和等于360°．三角形外角的性质体现了角与角之间的相等与不等关系，它是进行与角有关的计算或说明的重要依据，在求角的度数以及比较角的大小方面应用较广．

应用一 利用外角的性质求角的度数

例1 如图1，$AB \parallel CD$，$\angle B=23°$，$\angle D=42°$，则$\angle BED$的度数为（　　）

A.23°　　B.42°　　C.65°　　D.19°

解题秘方：利用平行线和外角的性质转化角求度数．

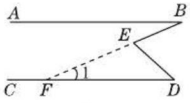


图1

解：如图1，延长BE交CD于点F，

$\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle 1=\angle B=23°$．

$\because \angle BED$是$\triangle EDF$的外角，

$\therefore \angle BED=\angle 1+\angle D=23°+42°=65°$．

答案：C

方法点拨：利用平行线的性质，转化相等的角，构造外角的模型，利用外角的性质求角的度数．

应用二 利用外角的性质说明两个角相等

例2 如图2，在$\triangle ABC$中，D，E分别在BC，AC边上，且$\angle ADE=\angle B$，试说明：$\angle BAD=\angle CDE$.

解题秘方：利用外角的性质建立角之间的关系说明．

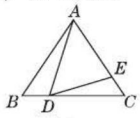


图2

解：$\because \angle ADC$是$\triangle ADB$的外角，

$\therefore \angle ADC=\angle B+\angle BAD$.

$\because \angle ADE=\angle B$，

$\angle ADC=\angle ADE+\angle CDE$，

$\therefore \angle ADE+\angle CDE=\angle ADE+\angle BAD$.

$\therefore \angle BAD=\angle CDE$.

方法点拨：外角的性质②揭示了外角和内角之间的等量关系，说明两个角相等时，若涉及内外角，此性质是常用的等量关系．

应用三 利用外角的性质说明角的不等关系

例3 如图3，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AD \perp BC$于点D，E是AD上一点．试说明：$\angle DEC>\angle ABC$.

解题秘方：寻找三角形的内、外角，利用外角的性质说明不等关系．

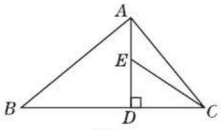


图3

解：$\because \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=90°$．

又$\because AD \perp BC$，$\therefore \angle ADB=90°$．

$\therefore \angle ABC+\angle BAD=90°$．

$\therefore \angle ABC=\angle DAC$.

又$\because \angle DEC$是$\triangle AEC$的外角，

$\therefore \angle DEC>\angle DAC$. $\therefore \angle DEC>\angle ABC$.

方法点拨：三角形的外角性质③揭示了三角形的内外角之间的不等关系，若说明两个角的不等关系，将大角作为某三角形的外角，小角作为与之不相邻的一个内角，则可转化为三角形的内外角之间的关系进行说明．

应用四 利用外角的性质求不规则图形的内角和

例4 如图4，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数．

解题秘方：利用外角的性质将需求的角转化．

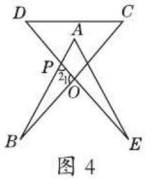


图4

解：由题意可得，$\angle 1=\angle C+\angle D$，$\angle 2=\angle A+\angle E$.

而$\angle 1+\angle 2+\angle B=180°$，

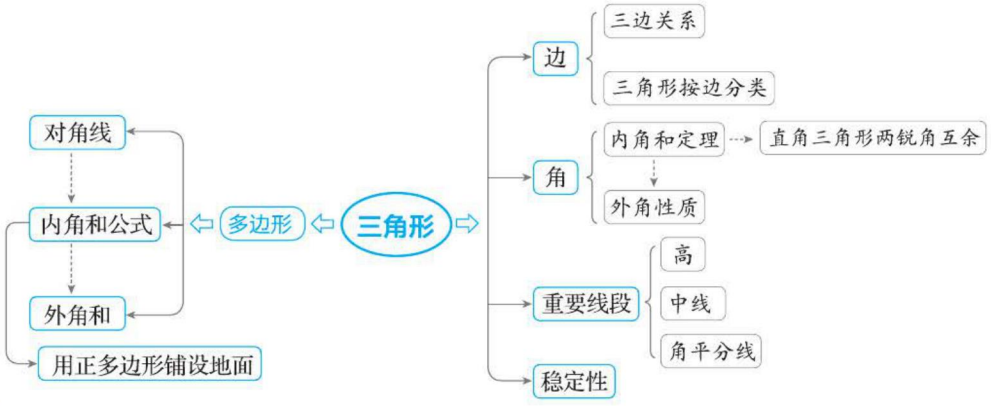
$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 三角形按边分类分为不等边三角形和等腰三角形，等腰三角形分为底边与腰不相等的等腰三角形和等边三角形.

2. **三角形三边的关系：**任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

3. **三角形三条重要线段：**高、中线、角平分线.每种都有三条，且所在直线都相交于一点.除了高线有可能在三角形的外部或边上外，中线和角平分线都在三角形的内部.

4. **三角形的角的定理：**（1）三角形内角和等于180°；（2）三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

5. **多边形的角的定理：**（1）n边形的内角和等于$(n-2)\times180°$；（2）多边形的外角和等于360°.

知识方法专题

知识必学

专题一 三角形的三条重要线段

链接中考» 三角形的三条重要线段是解决三角形问题的重要线段，它们都有非常重要的作用，中线用来求线段长或等分面积，角平分线用来求角，高用来求面积.单独考查时，高考查的频率较高，一般以选择题形式考查，其他的一般作为解答题的条件进行考查.

例1 [中考·长沙]如图9-1，过△ABC的顶点A，作BC边上的高，以下作法正确的是（　　）

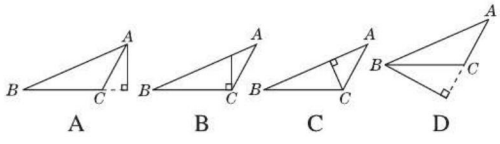


图9-1

解题秘方：利用三角形高的定义及作法进行判断.

答案：A

方法点拨：作三角形的高时，要分清是作哪边上的高，过哪个顶点作垂线都必须分清，这样才能准确作出.

专题二 三角形的角的定理

链接中考» 与三角形的角有关的定理有两个：一个是三角形的内角和定理；另一

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

个是三角形的内外角之间的关系定理．在中考中单独考查时，一般以选择题形式出现，属于送分题．

例2 ［中考·绵阳］如图9-2，在△ABC中，∠ABC，∠ACB的平分线BE，CD相交于点F，∠ABC=42°，∠A=60°，则∠BFC的度数是（　　）

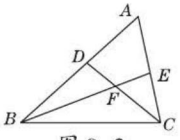


图9-2

A.118°　　B.119°　　C.120°　　D.121°

解题秘方：利用三角形内角和定理，建立要求的角与已知角之间的关系解决问题．

解：∵∠A=60°，∠ABC=42°，

∴∠ACB=180°－∠A－∠ABC=78°．

∵∠ABC，∠ACB的平分线分别为BE，CD，

∴∠FBC=$\frac{1}{2}$∠ABC=21°，∠FCB=$\frac{1}{2}$∠ACB=39°，∴∠BFC=180°－∠FBC－∠FCB=120°．

答案：C

方法点拨：运用三角形内角和定理求角的度数时，先找出所求角所在的三角形，然后结合已知条件分析要求的角与已知角之间的关系．

专题三 三角形的三边关系

链接中考» 三角形的三边关系是判断三条线段能否组成三角形的重要依据，它主要解决两个问题：(1)判断三条线段能否组成三角形；(2)已知三角形的两边长确定第三边长的取值范围．在中考中考查时，一般以填空题的形式出现，有时会以解答题的形式出现．

例3 老师让同学们用20 cm，90 cm，100 cm长的三根木条搭一个三角形，小明不小心把100 cm的木条折断了，他用折断后剩下的较长木条与另两根木条怎么搭也不能搭成三角形．

（1）你知道这是为什么吗？

（2）小明把100 cm的木条至少折去了多少厘米？

（3）如果100 cm的木条折去了40 cm，你能通过截90 cm长的木条的办法帮小明搭一个小的三角形吗？

解题秘方：判断三条线段能否组成三角形，关键是看其是否满足三角形的三边关系．

解：（1）构成三角形的三条线段必须满足任意两条线段之和大于第三条线段，任意两条线段之差小于第三条线段．小明不能搭成三角形的原因是所用的木条与20 cm，90 cm的两根木条不符合该条件．

（2）设100 cm的木条折去x cm后，与另两根木条可搭成三角形，则

$$\begin{cases}90-20<100-x<90+20,\\ x>0,\end{cases}$$

解得$0<x<30$.

∴小明把100 cm的木条至少折去了30 cm.

（3）设90 cm的木条截去a cm后，与另两根木条可以搭成一个小的三角形，

则(100−40)−20<90−a<(100−40)+20，

解得$10<a<50$.

∴90 cm的木条截去的长度应大于10 cm且小于50 cm才能搭成一个小的三角形．

方法点拨：本题根据“两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”解题，确定木条长度的取值范围是解题的关键．

专题四 多边形的内角和与外角和

链接中考» 与多边形有关的角的定理有多边形的内角和定理和外角和定理(外角和为360°)．在中考中单独考查时，一般都是选择题．考查的形式有两种：一种是已知多边形的边数求内角和；另一种是已知内角和求多边形的边数．

例4 ［中考·眉山］一个多边形的外角和是内角和的$\frac{2}{5}$，这个多边形的边数为（　　）

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

解题秘方：利用多边形的内角和公式和外角和建立方程解决．

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题五 分类讨论思想

专题解读≫本章分类讨论能解决的问题主要有：三角形形状不确定；等腰三角形腰或顶角不确定．分类讨论思想不仅可以使我们有效地解决一些问题，同时还可以培养我们的观察能力和全面思考问题的能力．

例5 已知等腰三角形ABC的两个底角相等（$\angle ABC=\angle C$），且一腰AC上的高BD与另一腰AB的夹角为40°．求$\angle ABC$，$\angle C$的度数．

解题秘方：若等腰三角形的顶角是钝角，则腰上的高在三角形的外部；若等腰三角形的顶角是锐角，则腰上的高在三角形的内部，题中没明确指出三角形的形状，要分两种情况讨论．

解：（1）如图9-3，当BD在三角形的内部时，

$\because BD\perp AC$，$\therefore\angle ADB=90°$．

$\therefore\angle A=90°-\angle ABD=90°-40°=50°$．

$\therefore\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=65°$．

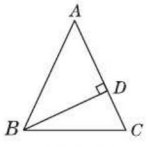


图9-3

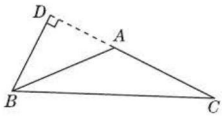


图9-4

（2）如图9-4，当BD在三角形的外部时，

$\because BD\perp AC$，$\therefore\angle ADB=90°$．

$\therefore\angle DAB=90°-\angle ABD=90°-40°=50°$．

$\because\angle DAB$是$\triangle ABC$的外角，

$\therefore\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times50°=25°$．

综上，$\angle ABC$，$\angle C$的度数都是65°或都是25°．

规律点拨：分类讨论，也称分情况讨论，当一个数学问题在一定条件下，其结论并不唯一时，就需要对这一问题进行必要的分类．根据条件分为有限的若干种情况，在每一种情况下分别求解，最后将各种情况下得到的答案进行归纳总结．它体现了化整为零和积零为整的思想与归类整理的方法．

专题六 转化思想

专题解读≫转化思想可以把不可解的问题转化为已学知识范围内可解的问题，通过转化可以把不熟悉、不规范、复杂的问题转化为熟悉、规范、简单甚至模式化的问题．转化思想在本章主要体现在多边形的多角和问题上，常通过连结两顶点或对角线转化为三角形、四边形或其他多边形来解决．

例6 如图9-5，求$\angle BAK+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F+\angle FGH+\angle H+\angle K$的度数．

解题秘方：连结AG，DG，将要求和的角转化到一个五边形内．

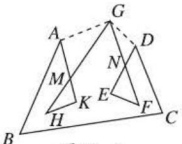


图9-5

解：如图9-5，连结AG，DG，设AK，HG的交点为M，DE，FG的交点为N，

则$\angle E+\angle F+\angle ENF=180°=\angle FGD+\angle EDG+\angle GND$，$\angle H+\angle K+\angle HMK=180°=\angle KAG+\angle HGA+\angle AMG$．

$\because\angle ENF=\angle GND$，$\angle HMK=\angle AMG$，

$\therefore\angle E+\angle F=\angle FGD+\angle EDG$，

$\angle H+\angle K=\angle KAG+\angle HGA$．

$\therefore\angle BAK+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F+\angle FGH+\angle H+\angle K$

$=\angle BAK+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle FGD+\angle EDG+\angle FGH+\angle KAG+\angle HGA$

$=(\angle BAK+\angle KAG)+\angle B+\angle C+(\angle CDE+\angle EDG)+(\angle FGD+\angle FGH+\angle HGA)$

$=\angle BAG+\angle B+\angle C+\angle CDG+\angle DGA$

$=(5-2)\times180°=540°$．

方法点拨：求复杂几何图形中相关角的度数和时，可运用转化思想，将这几个角转化到一个多边形内，然后利用多边形内角和公式求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见 224 页

题型 1：三角形的三边关系

1. 在△ ABC 中，AC=5 cm，AD 是△ ABC 的中线，它把△ ABC 的周长分为两部分，若其差为 3 cm，则 BA=_____.

2. 已知在△ ABC 中，AB=8，BC=2a+2，AC=22.

（1）求 a 的取值范围；

（2）若△ ABC 为等腰三角形，求这个三角形的周长.

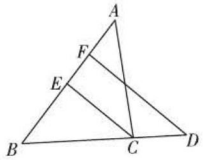
3. 已知 a，b，c 是三角形的三边长.

（1）化简：$|a-b-c|+|b-c-a|+|c-a-b|$；

（2）若 a=5，b=4，c=3，求（1）中式子的值.

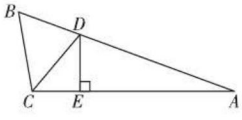
题型 2：三角形中角度的计算

4. 如图，在△ ABC 中，∠ A=46°，CE 是∠ ACB 的平分线，B，C，D 在同一条直线上，DF // EC，∠ D=42°. 求∠ B 的度数.



（第 4 题）

5. 如图，在△ ABC 中，∠ A=20°，CD 是∠ BCA 的平分线，在△ CDA 中，DE 是 CA 边上的高，又有∠ EDA=∠ CDB，求∠ B 的度数.

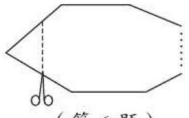


（第 5 题）

题型 3：多边形内角和的有关计算

6. 如图，一张多边形纸片按图示的剪法剪去一个内角后，得到一个内角和为 2 340° 的新多边形，则原多边形的边数为（　　）

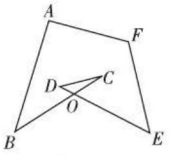
A.13　　B.14　　C.15　　D.16



（第 6 题）

7. 已知一个多边形的内角和是其外角和的$\frac{3}{2}$，则这个多边形的边数是_____.

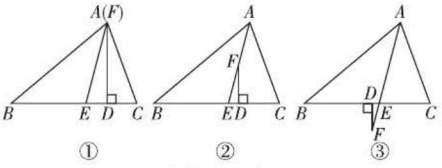
8. 如图，求∠ A+∠ B+∠ C+∠ D+∠ E+∠ F 的度数.



（第 8 题）

题型 4：与三角形角度有关的探究题

9. 如图，在△ ABC 中，AE 平分∠ BAC，∠ B=40°，∠ C=70°，F 为射线 AE 上一点（不与 E 点重合），且 FD ⊥ BC 于点 D.



（第 9 题）

（1）若点 F 与点 A 重合，如图①，求∠ EFD 的度数；

（2）若点 F 在线段 AE 上（不与点 A 重合），如图②，求∠ EFD 的度数；

（3）若点 F 在△ ABC 的外部，如图③，此时∠ EFD 的度数是多少？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 9 章测试卷 答案见 225 页

（100 分 60 分钟）

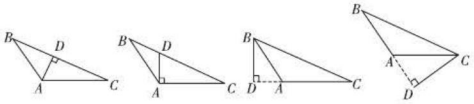
一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列各组数可能是一个三角形的三边长的是（　　）

A.1，2，4　　B.4，5，9

C.4，6，8　　D.5，5，11

2. 画△ ABC 的边 AB 上的高，下列画法中，正确的是（　　）



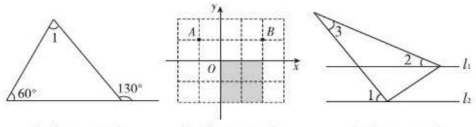
A　　B　　C　　D

3. 一个多边形的每个外角都等于 72° ，则这个多边形的边数为（　　）

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

4. 如图，∠ 1 等于（　　）

A.40°　　B.50°　　C.60°　　D.70°



（第 4 题）　（第 5 题）　（第 6 题）

5. 如图，在 5×4 的方格纸中，每个小正方形的边长为 1，点 O，A，B 在方格纸的格点（交点）上，在阴影中的格点上找一点 C，使△ ABC 的面积为 3，则这样的点 C 共有（　　）

A.2 个　　B.3 个　　C.4 个　　D.5 个

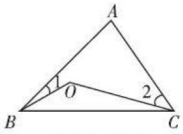
6. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，∠ 1=50 °，∠ 2=23° 20′，则∠ 3 的度数为（　　）

A.26° 40′　B.27° 20′　C.27° 40′　D.73° 20′

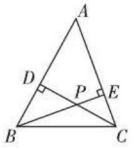
7. 如图，点 O 是△ ABC 内一点，∠ A=80 °，∠ 1=15°，∠ 2=40°，则∠ BOC 等于（　　）

A.95°　　B.120°

C.135°　　D.140°



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，在锐角△ ABC 中，CD，BE 分别是 AB，AC 边上的高，且 CD，BE 交于点 P. 若∠ A=50° ，则∠ BPC 的度数是（　　）

A.50°　　B.90°　　C.100°　　D.130°

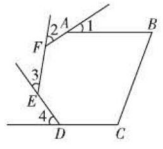
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 在起重机的起重架中间增加很多斜条，构成一些三角形，它所运用的几何原理是_____.

10. 已知在△ ABC 中，∠ A ：∠ B ：∠ C=1 ：3 ：5，则△ ABC 是_____三角形.

11. 已知等腰三角形的一边长等于 6 cm，另一边长等于 7 cm，则它的周长为_____.

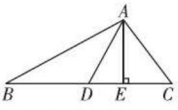
12. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB \parallel DC$，∠ 1，∠ 2，∠ 3，∠ 4 是六边形 $ABCDEF$ 的外角，则∠ 1+ ∠ 2+ ∠ 3+ ∠ 4=_____.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

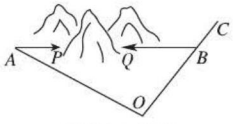
13.（8 分）如图，在△ ABC 中，AD，AE 分别是边 BC 上的中线和高，AE=3 cm，$S_{\triangle ABC}$=12 cm^2. 求 BC 和 DC 的长.



（第 13 题）

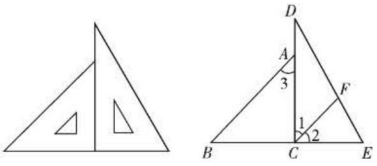
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（10分）某工程队准备开挖一条隧道，为了缩短工期，必须在山的两侧同时开挖，为了确保两侧开挖的隧道在同一条直线上，测量人员在如图的同一高度定出了两个开挖点 P 和 Q，然后在左边定出开挖的方向线 AP，为了准确定出右边开挖的方向线 BQ，测量人员取一个可以同时看到点 A，P，Q 的点 O，测得 $\angle A=28°$，$\angle AOC=100°$，那么 $\angle QBO$ 应等于多少度才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上？



（第14题）

15.（10分）将一副三角尺拼成如图的图形，过点 C 作 CF 平分 $\angle DCE$ 交 DE 于点 F.

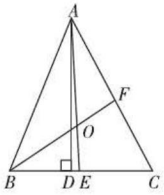


（第15题）

（1）试说明：$CF \parallel AB$；

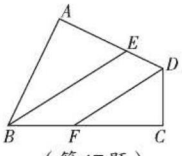
（2）求 $\angle DFC$ 的度数.

16.（12分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，AE，BF 是 $\angle BAC$，$\angle ABC$ 的平分线，它们相交于点 O，AD 是 BC 边上的高，$\angle BAC=50°$，$\angle C=62°$，求 $\angle DAC$ 和 $\angle BOA$ 的度数.



（第16题）

17.（12分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，BE 平分 $\angle ABC$，DF 平分 $\angle ADC$. 若 $BE \parallel DF$，试说明：$\triangle DCF$ 为直角三角形.



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

千姿百态的图形运动

千姿百态的图形运动











第10章 轴对称、平移与旋转

核心考点

你将见到的

- 轴对称及轴对称图形
- 平移的特征及平移作图
- 旋转的特征及旋转作图
- 中心对称及中心对称图形
- 图形的全等

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 转化思想
- 折叠法
- 平移法
- 等面积代换法
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.1 轴对称

核心知识

- 轴对称图形
- 轴对称及其性质
- 线段和角的轴对称性
- 画轴对称图形

知识链接

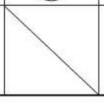


点知识·拨考向 速提分

点知识 1 轴对称图形

1. 定义： 如果把一个平面图形沿某条直线对折，对折后的两部分能完全重合，这个图形就叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴．我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称．

2. 几种常见的轴对称图形及对称轴：

名称	图形	对称轴	对称轴条数
线段		线段本身所在直线和过线段中点的垂线	2 条
角		角平分线所在的直线	1 条
等腰三角形		底边上的高所在的直线	1 条
等边三角形		各条边上的高所在的直线	3 条
长方形		经过对边中点的直线	2 条
正方形		（1）经过对边中点的直线 （2）对角线所在的直线	4 条
圆		经过圆心的任意一条直线	无数条
正 n 边形		n 为奇数：过顶点与对边中点的直线；n 为偶数：过两条对边中点的直线或过相对顶点的直线	n 条

拨考向 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形

例 1 如图 10.1-1，是轴对称图形的有（　　）



（1）　（2）　（3）　（4）

图 10.1-1

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方： 根据轴对称图形的定义识别．

答案： D

提分·必记

特别解读

轴对称图形的三个条件：

1. 一个整体图形；
2. 一条直线：对称轴；
3. 直线两旁的部分完全重合．

温馨提示

1. 轴对称图形是一个图形自身的特性，它被对称轴分成的两部分能够完全重合，其对称点在同一图形上．
2. 对称轴是一条直线，而不是射线或线段．
3. 一个轴对称图形的对称轴可以有 1 条，也可以有多条，还可以有无数条．

提分·秘诀

知识储备

1. 在中国汉字中有很多汉字是轴对称图形．
2. 在 26 个英文字母中也有很多字母是轴对称图形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：判断轴对称图形的方法：

根据图形的特征，若能找到一条直线，沿着这条直线对折，直线两边的部分能够完全重合，即可确定这个图形是轴对称图形，否则就不是轴对称图形.

点知识▶2 轴对称

提分·必记

1. 定义：

把一个图形沿着某一条直线翻折过去，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形成轴对称，这条直线就是对称轴，两个图形中的对应点（即两个图形重合时互相重合的点）叫做对称点.

特别解读

轴对称的三个条件：
1. 有两个图形；
2. 存在一条直线；
3. 一个图形沿着这条直线对折后与另一个图形重合.

轴对称的两个特性：
1. 成轴对称的两个图形全等.但全等的两个图形不一定成轴对称.
2. 轴对称是图形的一种全等变换.

2. 轴对称与轴对称图形的区别与联系：

名称		轴对称	轴对称图形
区别	对象不同	两个图形	一个图形
	意义不同	两个图形的特殊位置关系	一个具有特殊形状的图形
	对称点位置不同	对称点分别在两个图形上	对称点在同一个图形上
	对称轴位置不同	两个图形成轴对称，其对称轴可能在两个图形的外部，也可能经过两个图形的内部或它们的公共边（点）	轴对称图形的对称轴一定经过这个图形的内部
	对称轴数量不同	只有一条对称轴	有一条或多条或无数条
联系	（1）定义中都有一条直线，都要沿着这条直线对折 （2）把成轴对称的两个图形看成一个整体，它就是一个轴对称图形，把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条轴对称		



拔考向▶利用轴对称的定义识别轴对称

提分·秘诀

方法点拨

识别轴对称的方法：
1. **定义法**：紧扣定义中的“两个图形，一条直线，完全重合.”
2. **反面观察法**：从纸的反面观察图形，若观察到的和正面一样，就是轴对称.

例 2 如图 10.1-2 的 4 组图形中，成轴对称的有（　　）

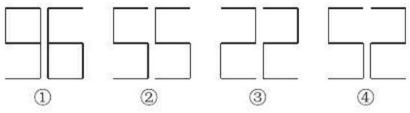


图 10.1-2

A. 4 组　　B. 3 组

C. 2 组　　D. 1 组

解题秘方：根据轴对称的定义，沿某条直线对折，直线两旁的两个图形能完全重合，即成轴对称.

解：根据轴对称的定义，可以判断只有④中的两个图形沿着某一条直线对折后，两个图形能够完全重合，所以成轴对称的只有 1 组.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 轴对称图形与轴对称的特征

轴对称图形（或成轴对称的两个图形）的对应线段（对折后重合的线段）相等，对应角（对折后重合的角）相等.

拔考向▶ 利用轴对称的特征来求线段和角

例 3 如图 10.1−3，两个图形关于某直线成轴对称，根据图中的条件，求 x，y 的值.

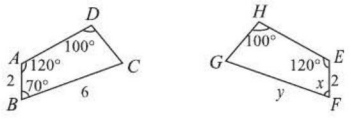


图 10.1−3

解题秘方：紧扣轴对称的特征，找出对应线段和对应角解决问题.

解：由 $AB=EF=2$，$\angle A=\angle E=120°$ 可知，A 与 E 是对称点，B 与 F 是对称点，所以 $\angle F=\angle B$，即 $x=70°$.

又由 $\angle D=\angle H=100°$ 可知，D 与 H 是对称点，所以 C 与 G 是对称点.

所以 $FG=BC$，即 $y=6$.

点知识▶ 4 线段和角的轴对称性

1. 线段的轴对称性

（1）线段的垂直平分线：垂直并且平分一条线段的直线称为这条线段的垂直平分线，又称为中垂线.

（2）线段是轴对称图形，它的垂直平分线是它的一条对称轴.

2. 角的轴对称性

角是轴对称图形，对称轴是角平分线所在的直线，且它只有一条对称轴.

注意：角平分线是一条射线，而角的对称轴是角平分线所在的直线.

拔考向▶ 利用线段的轴对称性求角的大小

例 4 如图 10.1−4，在 $\triangle ABC$ 中，DE 是 AC 的垂直平分线，且分别交 BC，AC 于点 D，E，$\angle B=60°$，$\angle C=25°$，则 $\angle BAD$ 为（　　）

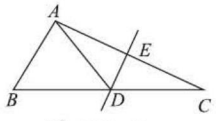


图 10.1−4

A.50°　　B.70°　　C.75°　　D.80°

解题秘方：紧扣线段的轴对称性找出对应角，求出未知角的度数.

解：∵ DE 是 AC 的垂直平分线，

∴ $\triangle ADC$ 关于直线 DE 对称，

∴ $\angle DAC=\angle C=25°$，

∵ $\angle B=60°$，$\angle C=25°$，

提分·必记

特别提醒

（1）成轴对称的两个图形，如果它们的对应线段或其延长线相交，那么交点一定在对称轴上.

（2）关于某条直线对称的两个图形能够完全重合，而能够完全重合的图形不一定成轴对称.

提分·秘诀

方法点拨

利用轴对称的特征求线段和角时，关键要扣住“对应”. 而对应的识别关键在于折叠前后的重合.

提分·必记

特别解读

1. 线段的垂直平分线必须满足两个条件：

（1）经过线段的中点；

（2）垂直于这条线段.

两者缺一不可.

2. 线段的垂直平分线的定义反过来也成立.

提分·秘诀

方法点拨

将三角形的轴对称性转化为线段的轴对称性，利用轴对称的特征找准对应关系解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAC=95°$ ，

$\therefore \angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=70°$.

答案：B

点知识▶ 5 画图形的对称轴

1. 画对称轴的依据：

如果一个图形是轴对称图形，那么连结对称点的线段的垂直平分线就是该图形的对称轴.

2. 画对称轴的步骤：

（1）**找**：找到任意一组对称点.

（2）**连**：连结这组对称点.

（3）**画**：画出对称点所连线段的垂直平分线.

这条垂直平分线就是对称轴.

拔考向▶ 利用画对称轴的步骤作图形的对称轴

类型 1：画对称轴的步骤在画轴对称图形的对称轴中的应用

例 5 画出如图 10.1−5 所示的图形的对称轴.

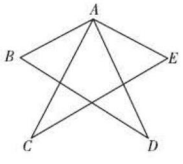


图 10.1−5

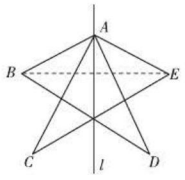


图 10.1−6

解题秘方：利用轴对称图形中任意一组对称点所连线段被对称轴垂直平分作对称轴.

解：作法：如图 10.1−6.

（1）连结 BE；

（2）作线段 BE 的垂直平分线 l，则直线 l 即为所求作的对称轴.

类型 2：画对称轴的步骤在画成轴对称的两个图形的对称轴中的应用

例 6 如图 10.1−7，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于某条直线对称，请作出这条直线.

解题秘方：利用成轴对称的两个图形中任意一组对称点所连线段被对称轴垂直平分作对称轴.

解：如图 10.1−7，

（1）连结 BB' ；

（2）作线段 BB' 的垂直平分线 DE，则 DE 即为所求作的直线.

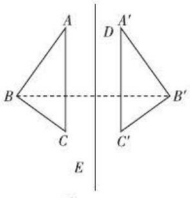


图 10.1−7

提分·必记

特别解读

- 画成轴对称的两个图形的对称轴时，任找一组对称点，作出连结它们的线段的垂直平分线即可.
- 画轴对称图形的对称轴，由于对称轴不一定只有一条，所以要注意选取不同的对称点，作出其所有的对称轴.

提分·秘诀

方法点拨

作轴对称图形的对称轴的两种方法：

一是折叠法，将轴对称图形对折，折痕所在的直线为对称轴；

二是先找到轴对称图形的一组对称点，再作连结这组对称点的线段的垂直平分线.

方法点拨

作成轴对称的两个图形的对称轴与作轴对称图形的对称轴的方法类似，关键是找对称点和作线段的垂直平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶6 画轴对称图形

1. **方法**：几何图形都可以看成由点组成．对于某些图形，只要画出图形中的一些特殊点（如线段的端点）的对称点，连结这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形．

2. **步骤**：画轴对称图形的方法可简单归纳为“一找二画三连”．

找——在原图形上找特殊点；

↓

画——画出各个特殊点关于对称轴的对称点；

↓

连——依次连结各对称点．

拔考向▶利用轴对称的特征画轴对称图形

类型 1：画轴对称图形在画关于直线成轴对称的图形中的应用

例 7 如图 10.1−8，画出下列图形关于直线 l 对称的图形．

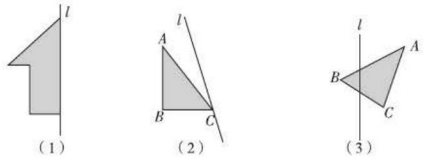


图 10.1−8

解题秘方：找全确定已知图形形状的特殊点，画出这些特殊点关于直线 l 的对称点，然后按原图顺序连结所画的对称点．

解：如图 10.1−9.

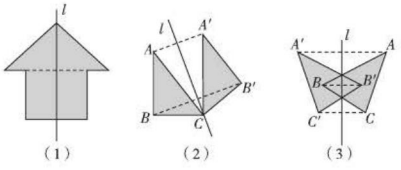


图 10.1−9

类型 2：画轴对称图形在设计轴对称图案中的应用

例 8 如图 10.1−10，在 3×3 的正方形网格中有一个格点△ ABC（顶点都在正方形网格交点上的三角形为格点三角形），请在正方形网格中画出另一个格点△ DEF，使两个三角形关于某条直线对称．

解题秘方：自主确定对称轴，作出关于该对称轴对称的图形即可．

解：如图 10.1−11.

提分·必记

特别提醒

1. 特殊点对画轴对称图形特别重要，找特殊点一定要找全，否则画出的图形不准确或不完整．
2. 常见的特殊点，除线段的端点外，还有线与线的交点、中点等．
3. 不在对称轴上的点的对称点在对称轴的另一侧，在对称轴上的点的对称点是它本身．

提分·秘诀

方法点拨

1. **找特殊点的方法**：规则图形的特殊点是图形的顶点，不规则图形的特殊点是线与线的交点．
2. **作对称点的方法**：过这个点作对称轴的垂线，并延长一倍，就得到该点的对称点．

解法提醒

本题属于开放性画轴对称图形的题目．其开放性的关键是对称轴未定，故先确定合适的对称轴再作关于对称轴对称的图形．同时要注意不是全开放，题目中要求关于对称轴对称的三角形也是格点三角形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

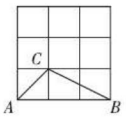


图 10.1−10

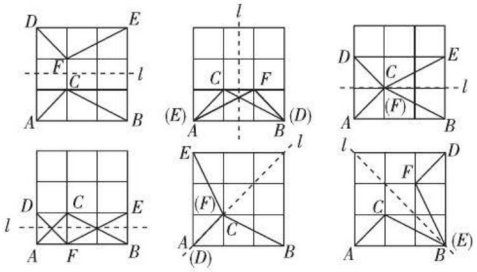


图 10.1−11

点知识▶ 7 设计轴对称图案

1. 轴对称图案的设计，实质上就是利用轴对称图形的特征设计一些轴对称图案.

2. 设计轴对称图案，形式多种多样.

轴对称图案	“花朵”	“雪”
		

拔考向▶ 利用画轴对称图形的方法设计轴对称图案

例 9 图 10.1−12 是某设计师在方格纸中设计的图案的一部分，请你帮他完成余下的工作：

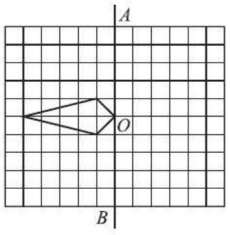


图 10.1−12

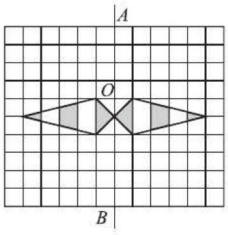


图 10.1−13

（1）作出以直线 AB 为对称轴的轴对称图案；

（2）发挥你的想象力，给得到的图案适当地涂上阴影，让图案变得更加美丽.

解题秘方：紧扣画轴对称图形的方法步骤进行图案设计.

解：（1）在图中画出图案中各顶点关于直线 AB 的对称点，顺次连结即可.

（2）适当地涂上阴影，使图案变得更加美丽，如图 10.1−13.（涂阴影不唯一）

提分·必记

特别提醒

轴对称图案设计的关键要把握两点：

1. 确定基本元素图案；
2. 设置合适的对称轴.

提分·秘诀

方法点拨

（1）具体设计轴对称图案时，可以先选一条对称轴作为基线，再根据需要继续添加对称轴，这样可以将图案设计得更加和谐、美观.

（2）在对轴对称图案进行着色时，为了获得更好的效果，我们在着色时除了要注意对称轴外，还要从各个方面综合考虑，尽量使所选色彩能突出主题，美化图案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用试验法设计轴对称图形

例 10 如图 10.1−14，在 3×3 的正方形网格中，有两个小正方形已被涂上阴影，再将图中剩余小正方形中任意一个涂上阴影，那么能使整个图案构成一个轴对称图形的涂法有（　　）

A. 5 种　　B. 4 种　　C. 3 种　　D. 2 种

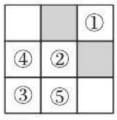


图 10.1−14

解题秘方：对图形的各种（不遗漏）情况进行涂色，并用轴对称图形的定义进行一一验证，找出使整个图案构成轴对称图形的涂法.

解：如图 10.1−14，从标有①②③④⑤的小正方形中任选一个涂上阴影，均可使整个图案构成一个轴对称图形，故涂法有 5 种.

答案：A

挑战·高分

方法点拨

解决此类问题一般有两种方法：

方法一：试验法，即将每种可能性进行试验，根据轴对称图形的定义进行筛选；

方法二：先确定对称轴，再根据对称轴的位置确定符合要求的情况.

拔尖角度 2 利用轴对称法求折叠中角的度数

例 11 如图 10.1−15，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=50°$，将其折叠，使点 A 落在边 CB 上的点 A' 处，折痕为 CD，则 $\angle A'DB=$（　　）

A. 40°　　B. 30°　　C. 20°　　D. 10°

解题秘方：紧扣折叠的特征将其看成轴对称变换，结合轴对称的性质进行计算.

解：折叠前后的两部分关于折痕所在直线成轴对称，由成轴对称的两个图形是完全重合的，得 $\angle CA'D=\angle A=50°$.

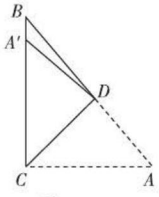


图 10.1−15

$\because \angle ACB=90°$，$\angle A=50°$，

$\therefore \angle B=90°-\angle A=90°-50°=40°$.

又 $\because \angle CA'D=\angle B+\angle A'DB$（三角形外角的性质），

$\therefore \angle A'DB=\angle CA'D-\angle B=50°-40°=10°$.

答案：D

挑战·高分

解法提醒

折叠是轴对称变换最常见的形式，折叠时，互相重合的两部分关于折痕所在直线成轴对称. 如本题中△ACD 与△A′CD 关于 CD 所在直线成轴对称，不能理解为△ACD 和△BCD 成轴对称. 利用轴对称的性质主要是利用对称轴两侧的图形完全重合的性质.

拔尖角度 3 利用轴对称变换法化分散为集中求阴影部分面积

例 12 如图 10.1−16，△ABC 是轴对称图形，且直线 AD 是△ABC 的对称轴，E，F 是 AD 上的任意两点，若△ABC 的面积为 18 cm^2，则图中阴影部分的面积为_____cm^2.

解题秘方：根据轴对称图形的性质，将阴影部分的面积集中转化为△ABD 的面积进行求解.

解：$\because$△ABC 是轴对称图形，且直线 AD 是对称轴，

$\therefore$△ABD 和△ACD 关于直线 AD 成轴对称，

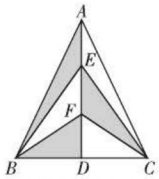


图 10.1−16

挑战·高分

技巧点拨

求分散的阴影部分面积的方法：

一般先通过观察找到阴影部分与非阴影部分的关系，再结合条件把阴影部分集中转化为一个规则图形或便于求面积的图形，从而求出阴影部分的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

$\because E$，F 是 AD 上的任意两点，

$\therefore \triangle BEF$ 与 $\triangle CEF$ 关于直线 AD 成轴对称，

$\therefore S_{\triangle CEF}=S_{\triangle BEF}$.

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CEF}+S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 18=9\ (\mathrm{cm}^2)$.

答案：9

拔尖角度▶ 4 利用轴对称变换法巧求镜子中的时间

挑战·高分

例 13 小明在镜子中看到的时钟的指针如图 10.1−17，那么此时是什么时刻？



图 10.1−17



①



②



③

图 10.1−18

解题秘方：平面镜成像的原理是轴对称变换，想知道物（或像），只要画出像（或物）关于镜面的轴对称变换的图形即可.

解：**方法一** “反看正读法”，如图 10.1−17，从纸的背面看图，再采用常规读法，即可读出此时的时刻是 11：35；

方法二 “正看逆读法”，如图 10.1−18 ①，图上的数按逆时针方向从小到大排列，可读出此时的时刻是 11：35；

方法三 “12 扣除法”，如图 10.1−18 ②，将镜子中时钟上的时刻按常规读出后，再用 12 减去这个时刻，即按常规读出的时刻是 0：25，则实际时刻是 12：00−0：25=11：35；

方法四 “对称法”，如图 10.1−18 ③，分别作出镜子中时钟的时针和分针以过 6 点和 12 点的直线为对称轴的指针，从而得出此时的时刻为 11：35.

解法提醒

镜子中成像问题有两种：

1. 当镜子在图形的左边（或右边）时，即题中情形，镜子中的像与实物左右对称，此时可采用背面读数法；

2. 当镜子在图形的正上方（或正下方）时，镜子中的像与实物上下对称.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘 简单的轴对称图形及其对称轴的识别与画法、设计轴对称图案属于常考知识点，而轴对称图形的性质是说明线段相等、角相等的重要依据，也是中考的热门考点之一，题型有选择题、填空题和作图题，难度较小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形

例14 [中考·无锡]如图10.1-19，下列图形中的五边形$ABCDE$都是正五边形，则这些图形中的轴对称图形有（　　）

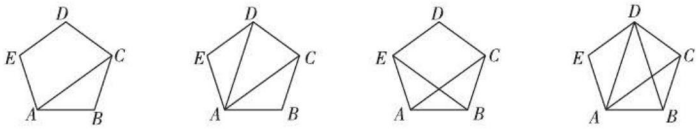


图10.1-19

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

试题评析：本题考查了轴对称图形的定义，解题的关键是寻找对称轴.

解：如图10.1-20，直线l即为各图形的对称轴.

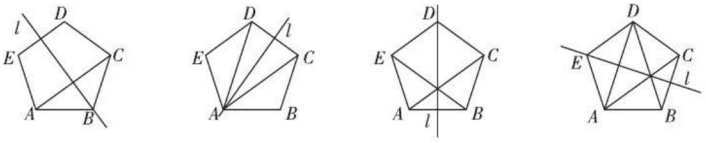


图10.1-20

答案：D

考法2 利用轴对称图形的特征确定对应边和对应角

例15 [中考·南充]如图10.1-21，直线MN是四边形$AMBN$的对称轴，点P是直线MN上的点，下列说法错误的是（　　）

A. $AM=BM$

B. $AP=BN$

C. $\angle MAP=\angle MBP$

D. $\angle ANM=\angle BNM$

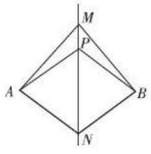


图10.1-21

试题评析：本题考查轴对称图形的特征，运用轴对称图形的特征找对应关系是解题的关键.

解：∵直线MN是四边形$AMBN$的对称轴，

∴ $AM=BM$，$AN=BN$，$\angle ANM=\angle BNM$，$\angle AMN=\angle BMN$.

∵点P是直线MN上的点，

∴ $AP=BP$，$\angle APN=\angle BPN$，

∴ $\angle APN-\angle AMN=\angle BPN-\angle BMN$，

即$\angle MAP=\angle MBP$，

∴ A，C，D正确，B错误，故选B.

答案：B

教你一招

判断一个图形或图案是不是轴对称图形的方法：

根据图形的特征，尝试找到一条直线，沿这条直线对折，看直线两旁的部分能否完全重合，要注意尝试多角度来观察图形和对折图形.

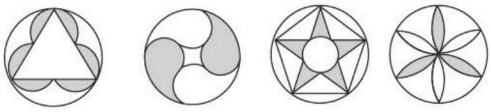
特别提醒

找轴对称图形中对称轴两旁的图形的对应关系，应紧扣重合的基本特征.找准了对应点就确定了对应边和对应角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见226页

1. [中考·苏州]下列四个图案中，不是轴对称图案的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. [中考·广州]如图的五角星是轴对称图形，它的对称轴共有（　　）



（第2题）

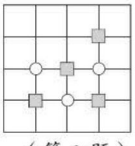
A. 1条　　B. 3条

C. 5条　　D. 无数条

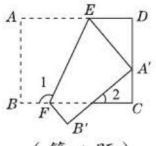
3. [中考·潍坊]小莹和小博士下棋，小莹执圆子，小博士执方子，如图，棋盘中心方子的位置用$(-1, 0)$表示，右下角方子的位置用$(0, -1)$表示，小莹将第4枚圆子放入棋盘后，所有棋子构成一个轴对称图形，她放的位置是（　　）

A. $(-2, 1)$　　B. $(-1, 1)$

C. $(1, -2)$　　D. $(-1, -2)$



（第3题）



（第4题）

4. [中考·聊城]如图，把一张长方形纸片$ABCD$沿EF折叠后，点A落在CD边上的点A'处，点B落在点B'处，若$\angle 2=40°$，则$\angle 1$的度数为（　　）

A. 115°　　B. 120°　　C. 130°　　D. 140°

5. 小明从镜子里看到镜子对面电子钟的像如图，则实际时间是（　　）

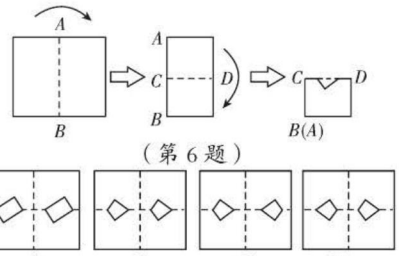


（第5题）

A. 21：10　　B. 10：21

C. 10：51　　D. 12：01

6. 如图，将长方形纸片先沿虚线AB按箭头方向向右对折，接着将对折后的纸片沿虚线CD按箭头方向向下对折，然后剪下一个小三角形，再将纸片打开，则打开后的图形是（　　）



（第6题）

A　　B　　C　　D

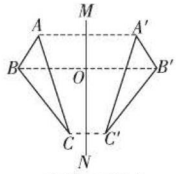
7. 如图，若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于直线MN对称，BB'交MN于点O，则下列说法中，不一定正确的是（　　）

A. $AC=A'C'$

B. $AB \parallel B'C'$

C. $AA' \perp MN$

D. $BO=B'O$



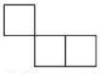
（第7题）

8. 仔细观察如图的图案，并按规律在横线上画出合适的图案.



（第8题）

9. 如图是由三个小正方形组成的图形，请你在图中补画一个小正方形，使补画后的图形为轴对称图形.

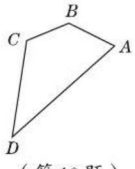


（第9题）

10. 如图，已知四边形$ABCD$，如果点D，C关于直线MN对称.

（1）画出直线MN；

（2）画出四边形$ABCD$关于直线MN对称的四边形$A'B'C'D'$.



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.2 平移

核心知识
- 平移的定义
- 平移的性质
- 平移作图

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平移的定义

1. **平移**：平面图形在它所在的平面上的平行移动，简称为平移.

2. **平移的“两要素”**：

（1）平移的方向；

（2）平移的距离.

特别提醒：平移图形中，原图形上的点到它对应点的方向就是平移的方向；任意一对对应点所连线段的长度就是平移的距离.

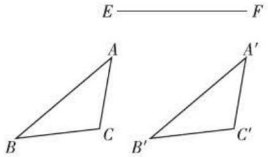


图 10.2-1

3. **平移中的对应元素**：

如图 10.2-1，把三角形 ABC 沿直线 EF 的方向平移到三角形 $A'B'C'$.

对应点：点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，点 C 与点 C'；

对应线段：AB 与 $A'B'$，AC 与 $A'C'$，BC 与 $B'C'$；

对应角：$\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$.

提分·必记

特别解读

1. 图形的平移是一种位置变换，它只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小.

2. 平移的方向可以是上下平移和左右平移，也可以是按任意指定的方向平移，只要是直线方向即可.

拨考向 利用平移的定义识别平移现象

例 1 在以下现象中：①用打气筒打气时，气筒里活塞的运动；②传送带上瓶装饮料的移动；③随风摆动的旗帜；④钟摆的摆动. 属于平移的是（　　）

A. ①　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ①②③④

解题秘方：扣住平移的定义中的关键点“直线方向”进行辨析.

解：①中打气筒里活塞的运动属于平移；

②中传送带上瓶装饮料的形状和大小均没有改变，只是改变了位置，所以属于平移；

③中随风摆动的旗帜的形状发生了改变，所以不属于平移；

④中钟摆的摆动不属于平移.

答案：B

提分·秘诀

解法提醒

判断一个运动是不是平移现象，要紧扣平移定义的特征：一变二不变，即图形的位置改变，而图形的形状和大小都不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 平移的特征

1. **平移的特征**：

（1）平移后的图形与原来图形的对应线段平行（或在同一条直线上）并且相等，对应角相等，图形的形状与大小不变；

（2）平移后对应点所连的线段平行（或在同一条直线上）并且相等.

特别警示：“连结各组对应点的线段”和“对应线段”是不同的，“连结各组对应点的线段”是原图形上的点与平移后的图形上的点连结而成的；而“对应线段”就存在于原来的图形与平移后的图形之中，是图形的一部分.

2. **示图**：

平移后，图中有平行且相等的线段、相等的角. 如图 10.2−2，三角形 ABC 平移到三角形 $A'B'C'$ 的位置，则

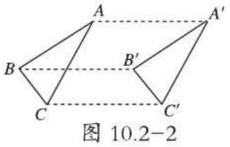


图 10.2−2

（1）$AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，$BC \parallel B'C'$，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$；

（2）$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，$AA'=BB'=CC'$；

（3）$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

技考向▶ 利用平移的特征解决问题

例 2 如图 10.2−3，将面积为 3 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移到三角形 DEF 的位置，$CE=5$，$EF=2$，$\angle B=40°$，则

（1）$BC=$_____，$\angle DEF=$_____；

（2）平移的距离是_____，三角形 DEF 的面积是_____.

解题秘方：找准对应元素，根据平移的性质求出各个未知量.

解：根据平移后的新图形与原图形的形状、大小完全相同，得到 $BC=EF=2$，三角形 DEF 的面积 = 三角形 ABC 的面积 =3，$\angle DEF=\angle B=40°$，所以平移的距离 $=BE=BC+CE=2+5=7$.

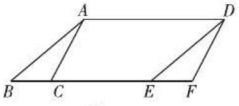


图 10.2−3

答案：（1）2；40°　（2）7；3


平移制作图案

点知识▶ 3 平移作图

平移作图的一般步骤：

平移作图是平移基本性质的应用，利用平移可以得到许多美丽的图案，在具体作图时，应抓住作图的“四部曲”——定、找、移、连.

（1）**定**：确定平移的方向和距离；

（2）**找**：找出表示图形的关键点（图形的顶点、拐点、连结点）；

（3）**移**：过关键点作平行（或在同一条直线上）且相等的线段，得到关键点的对应点；

（4）**连**：按原图顺次连结对应点.

提分·必记

特别解读

1. 连结对应点的线段的长度就是平移距离.
2. 从原图上一点到其对应点的方向即起始点到终止点的方向为平移方向.
3. 平移前后图形的对应边平行（或在同一条直线上）且相等，对应角相等.

提分·秘诀

解法提醒

图形的平移是整个图形都在移动，不是局部移动，即图形中所有点、线平移的距离都相同，所以确定一个图形平移的距离，只需确定其上一个点平移的距离即可.

提分·必记

特别解读

1. 平移的性质是平移作图的依据；
2. **确定一个图形平移后的位置需要三个条件**：
   （1）图形原来的位置；
   （2）平移的方向；
   （3）平移的距离.

这三个条件缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平移作图的步骤作平移后的图形

类型 1：利用平移的性质在非网格中作图

例 3 如图 10.2−4，四边形 $ABCD$ 的顶点 A 移动到了 A' 处，作出四边形 $ABCD$ 平移后的图形.

解题秘方：由已知的一对对应点确定平移的方向和平移的距离，然后确定其他对应点的位置，作出平移后的图形.

解：（1）连结 AA'；

（2）分别过点 B，C，D 作 $l_1 // AA'$，$l_2 // AA'$，$l_3 // AA'$；

（3）在 l_1 上沿 AA' 的方向截取 $BB'=AA'$，在 l_2，l_3 上按同样的方法截取 $CC'=AA'$，$DD'=AA'$；

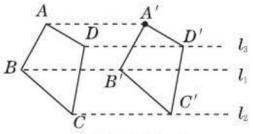


图 10.2−4

（4）顺次连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，即可得到四边形 $ABCD$ 平移后的图形 $A'B'C'D'$，如图 10.2−4.

类型 2：利用平移的性质在网格中作图

例 4 现要把图 10.2−5 中的方格纸（每个小正方形的边长均为 1 个单位长度）上的小船向右平移 6 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，请在方格纸上画出小船平移后的图形.

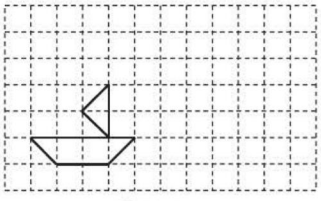


图 10.2−5

解题秘方：将图形中的关键点按照指定的方向和距离平移，再按原图形的顺序依次连结各对应点.

解：如图 10.2−6，找到小船的 7 个关键点，并依次标上字母 A，B，C，D，E，F，G. 把点 A 向右平移 6 个单位长度，到达点 A_1，然后把点 A_1 向上平移 3 个单位长度，到达点 A'，用同样的方法分别将小船的其他关键点 B，C，D，E，F，G 平移得到各对应点，顺次连结各对应点即可得到平移后的图形.

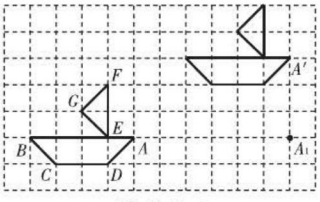


图 10.2−6

提分·秘诀

方法点拨

画平移图形的方法：

首先找出平移的方向和距离，确定构成图形的关键点，

然后根据平移的方向和距离确定每个关键点的对应点，

最后顺次连结每个关键点的对应点，并标出相应的字母，得到平移后的图形.

技巧点拨

在网格中左右（或上下）平移整数倍的格数作图，可以找到原图形的关键点，按要求在网格中平移得到其对应点，顺次连结各对应点即可得到平移后的图形. 原图形的点在格点上的，通过左右（或上下）平移整数倍的格数，它的对应点还在格点上，不会在其他位置.

另解

按要求平移点 A，得到其对应点 A'，因为平移前后对应线段是平行（或在同一条直线上）且相等的，所以以点 A' 为顶点，按原图形直接画出平移后的图形即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平移法解几何中的计算问题

例 5 如图 10.2-7，将周长为 6 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移 1 个单位长度得到三角形 DEF，则四边形 $ABFD$ 的周长为_____.

解题秘方：利用平移的性质，将求四边形 $ABFD$ 的周长转化为与三角形 ABC 的周长和平移距离相关的计算.

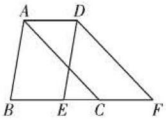


图 10.2-7

解：∵三角形 ABC 沿 BC 方向平移 1 个单位长度得到三角形 DEF，∴ $DF=AC$，$AD=CF=1$.

∵ 三角形 ABC 的周长为 6，∴ $AB+BC+AC=6$.

∴ 四边形 $ABFD$ 的周长为 $AB+BF+DF+AD=AB+BC+CF+AC+AD=6+1+1=8$.

答案：8

例 6 如图 10.2-9，将直角三角形 ABC 沿 CB 方向平移 BE 的距离后得到直角三角形 DEF，已知 $\angle ABC=90°$，$AG=2$，$BE=4$，$DE=6$，求阴影部分的面积.

解题秘方：利用平移的性质将阴影部分的面积转化为梯形 $BEDG$ 的面积.

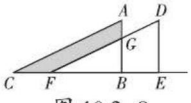


图 10.2-9

解：∵三角形 DEF 是三角形 ABC 经过平移后得到的，∴ $AB=DE=6$，三角形 DEF 的面积 = 三角形 ABC 的面积，

∴ $BG=AB-AG=6-2=4$，

三角形 ABC 的面积 − 三角形 FGB 的面积 = 三角形 DEF 的面积 − 三角形 FGB 的面积，

即阴影部分的面积 = 梯形 $BEDG$ 的面积 $=\frac{1}{2}(BG+DE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(4+6)\times4=20$.

拔尖角度 2 利用平移法解造桥中最短路线问题

例 7 如图 10.2-11，两个单位位于一条封闭式街道的两旁，分别用点 M，N 表示，现准备修建一座过街天桥，天桥建在何处时才能使点 M 到点 N 的路线最短？请说明理由.（注意：天桥必须和街道垂直）

解题秘方：将点 N 向上平移一个街道的宽度到达点 N' 处，连结 MN'，MN' 与 AB 的交点就是造桥处.

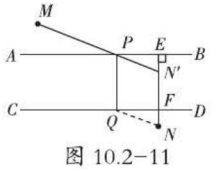


图 10.2-11

挑战·高分

图解

如图 10.2-8，根据平移前后对应线段相等，得四边形 $ABFD$ 的周长 = 三角形 ABC 的周长 $+2\times AD$.

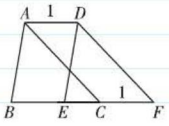


图 10.2-8

另解

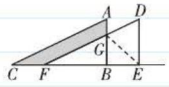


图 10.2-10

如图 10.2-10，连结 GE. 阴影部分的面积 = 四边形 $BEDG$ 的面积 = 三角形 BEG 的面积 + 三角形 DEG 的面积 $=\frac{1}{2}BG\cdot BE+\frac{1}{2}DE\cdot BE=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times6\times4=20$.

挑战·高分

技巧点拨

利用平移巧造桥：造桥问题一般是两点分布在河的两岸，要在河两岸分别寻找到一点，连结两点得到桥的位置. 那么如何确定岸边两点的位置呢？一般先将两点间的折线改为线段，这一过程要用到平移，再利用“两点之间线段最短”解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：作法如下：

（1）作 $NE \perp AB$ 于点 E，交 CD 于点 F；

（2）在 NE 上截取 $NN' = EF$；

（3）连结 MN' 交 AB 于点 P；

（4）作 $PQ \perp CD$ 于点 Q，如图 10.2−11，则 PQ 为天桥的位置．

理由如下：如图 10.2−11，连结 QN.

$\because PQ \perp CD$，$AB \parallel CD$，$NE \perp AB$，$\therefore PQ \parallel NE$.

又 $\because NN' = EF$，$EF = PQ$，

$\therefore PQ = NN'$（相当于将 PQ 平移到 NN'）．$\therefore QN = PN'$．

$\because MP + PN'$ 最短（两点之间线段最短），PQ 为定值，

$\therefore$ 天桥建在 PQ 处时，点 M 到点 N 的路线最短．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 平移在中考试题中的考查一般不会太难，常出现在选择题或填空题中，一般直接考查平移的特征，有时也与其他知识综合考查．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用网格中的平移判断移动方法

例 8 ［中考·广州］在 6×6 的方格中，将图 10.2−12 ①中的图形 N 平移后位置如图 10.2−12 ②所示，则图形 N 的平移方法中，正确的是（　　）

A. 向下移动 1 格

B. 向上移动 1 格

C. 向上移动 2 格

D. 向下移动 2 格

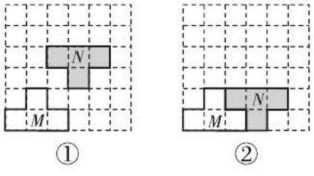


图 10.2−12

试题评析：本题考查了图形的平移，解题的关键是理解平移的定义．

解：$\because$ 将图①中的图形 N 向下平移 2 格后位置如图②所示，

$\therefore$ 图形 N 的平移方法是向下移动 2 格．

答案：D

考法 2 利用平移的特征解实际生活中的应用

例 9 如图 10.2−13 ①，在长为 50 m，宽为 22 m 的长方形地面上修筑宽度为 2 m 的小路，余下的部分种植花草，求种植花草部分的面积．

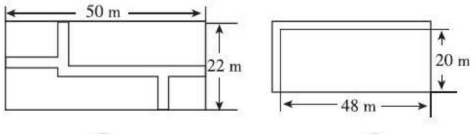


图 10.2−13

方法规律

图形的平移包含两要素：

一是平移的方向，

二是平移的距离．

判断平移的时候，只需要沿平移的“路径”进行平移便可确定两要素．

思路剖析

因种植花草部分比较分散，且有的是不规则的图形，所以直接求其面积较困难，因小路都是宽度相同的长方形，所以可想到把小路平移到一起，这样种植花草部分将汇集成一个长方形，问题便迎刃而解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：利用平移将分散的小路聚在一起，将零散的种植花草部分的聚在一起求解.

解：如图 10.2-13 ②，把几条 2 m 宽的小路分别平移到大长方形的上边缘和左边缘，则种植花草部分汇集成一个长方形. 显然，这个长方形的长是 50−2=48（m），宽是 22−2=20（m），所以种植花草部分的面积为 $48\times20=960$（m^2）.

两年模拟兵法

答案见 226 页

1. 下列现象不属于平移的是（　　）

A. 小华乘电梯从一楼至三楼

B. 钟表上时针的转动

C. 一个铁球从高处自由落下

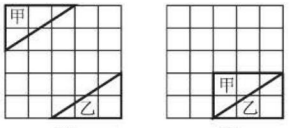
D. 小朋友坐滑梯下滑

2. 长度为 5 cm 的线段 AB 沿竖直方向平移了 10 cm 得到线段 $A'B'$，则线段 $A'B'$ 的长度为（　　）

A. 10 cm　　B. 2 cm

C. 5 cm　　D. 不确定

3. 如图，在方格纸中，将图①中的三角形甲平移到图②中所示的位置，与三角形乙拼成一个长方形，那么，下面的平移方法中，正确的是（　　）



（第 3 题）

A. 先向下平移 3 格，再向右平移 1 格

B. 先向下平移 2 格，再向右平移 1 格

C. 先向下平移 2 格，再向右平移 2 格

D. 先向下平移 3 格，再向右平移 2 格

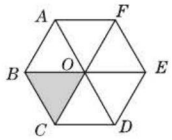
4. 如图，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的对角线的交点，下列三角形中可由三角形 OBC 平移得到的是（　　）

A. 三角形 OCD

B. 三角形 OAB

C. 三角形 OAF

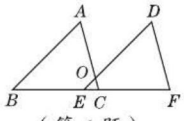
D. 三角形 OEF



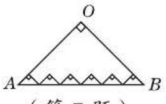
（第 4 题）

5. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8 cm，若把它向右平移 10 cm，那么点 A 移动了_____cm.

6. 如图，三角形 ABC 通过平移得到三角形 DEF，AC 与 DE 相交于 O. 已知 $\angle B=45°$，$\angle A=60°$，$\angle F=75°$，则 $\angle DEF=$_____，$\angle EOC=$_____. 若 $BC=3$ cm，$EC=0.5$ cm，则 $CF=$_____cm.



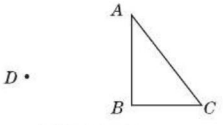
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，直角三角形 AOB 的周长为 100，在其内部有 6 个小直角三角形，则 6 个小直角三角形的周长之和为_____.

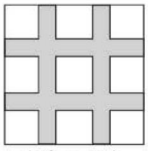
8. 如图，已知三角形 ABC 和点 A 平移后的对应点 D，请作出三角形 ABC 平移后的三角形 DEF.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [**探究题**]如图，一块边长为 8 米的正方形土地，上面修了横竖各两条道路，宽都是 1 米，空白的部分种上花草，请利用平移的知识求出种花草的面积.

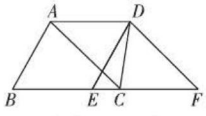


（第 9 题）

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $AD < BC$，将三角形 ABC 平移得到三角形 DEF.

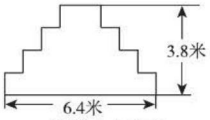
（1）指出平移的方向和平移的距离；

（2）试说明 $AD+BC=BF$.



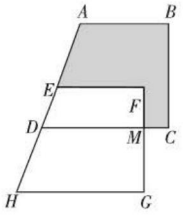
（第 10 题）

11. 某学校准备在升旗台的台阶上铺设一种红色的地毯（含台阶的最上层），已知这种地毯的批发价为每平方米 40 元，升旗台的台阶宽为 3 米，其侧面如图所示，请你帮助算一下，买地毯至少需要多少元?



（第 11 题）

12. 如图，将直角梯形 $ABCD$ 平移得到直角梯形 $EFGH$，若 $HG=10$，$MC=2$，$MG=5$，求图中阴影部分的面积. **【导学号：3572327】**



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.3 旋转

核心知识

- 旋转（旋转中心、旋转角、旋转方向）
- 旋转的性质
- 旋转作图

知识链接

旋转 — 性质、定义、作图；定义 — 三要素 — 旋转中心、旋转角、旋转方向

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 旋转及相关概念

1. 定义： 把一个平面图形绕着平面内某一点 O 转动一个角度，叫做图形的旋转．点 O 叫做旋转中心；转动的角叫做旋转角．

2. 旋转的“三要素”： 旋转中心、旋转方向和旋转角．

（1）在旋转过程中，始终保持不动的点是旋转中心，旋转中心可以在图形的内部，也可以在图形的外部，还可以是图形上的某点；

（2）旋转方向有顺时针和逆时针两种；

（3）在描述一个旋转过程时，需要指明旋转的三要素，即旋转中心、旋转方向和旋转角．

旋转的定义

3. 对应元素：

旋转得到的图形能与原图形重合，我们把能够重合的点叫对应点，能够重合的线段叫对应线段，能够重合的角叫对应角．

提分·必记

特别提醒

“把一个平面图形绕着平面内某一点 O 转动一个角度”是指图形上的每一个点都绕点 O 沿相同的方向旋转相等的角度．

确定旋转角的关键是找到旋转中心．

旋转前后对应点与旋转中心所连线段的夹角就是旋转角．

拨考向 利用旋转的意义认识旋转的“三要素”

例 1 如图 10.3-1，A，B，C 三点共线，△ ACD 和△ BCE 都是等边三角形，△ ACE 经过旋转后到达△ DCB 的位置．

（1）旋转中心是哪一点？

（2）旋转角是多少度？

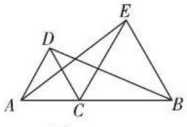


图 10.3-1

解题秘方： 紧扣“图形旋转时，固定不动的点是旋转中心，转动的角是旋转角”进行判断．

解：（1）点 C 在△ ACE 旋转过程中是不动的点，所以点 C 是旋转中心．

（2）△ ACE 旋转后到达△ DCB 的位置，AC 绕点 C 旋转到 DC，AC 转过的角即∠ ACD 就是旋转角．

因为△ ACD 是等边三角形，

所以∠ ACD=60°，即旋转角是 60°．

提分·秘诀

解法提醒

△ ACE 经过旋转后得到△ DCB：

- 在旋转过程中不动的点是旋转中心；
- 两个三角形的对应边所夹的角即为旋转角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 旋转的特征（性质）

1. 旋转的特征：

图形中每一点都绕着旋转中心按同一旋转方向旋转了同样大小的角度，对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等，图形的形状与大小不变.

2. 旋转与平移、轴对称的对比：

图形变换 / 异同点		旋转	平移	轴对称
不同点	对应线段、对应角	旋转变换前、后两个图形的任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都是旋转角	平移变换前、后两个图形的对应线段平行（或共线），对应角的两边分别平行（或共线），平移方向一致	如果成轴对称的两个图形的对应线段或其延长线相交，那么交点在对称轴上，成轴对称的两个图形的对称点所连线段被对称轴垂直平分
	作图、运动方式	作图所需要的条件不同，运动方式不同		
相同点		（1）都是在平面内进行的图形变换； （2）都只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小，即变换前、后图形的对应边相等，对应角相等； （3）都是把一个已知图形变换后得到另一个图形		

拔考向▶ 利用旋转的特征识别旋转前后图形的关系

例2 如图 10.3-2，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 上，$\angle FDE=45°$，$\triangle DEC$ 按顺时针方向旋转一个角度后到达 $\triangle DGA$ 的位置.

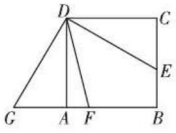


图 10.3-2

（1）图中哪一个点是旋转中心？旋转角是多少度？

（2）试指明图中旋转图形的对应线段与对应角；

（3）请写出图中除正方形的四条边、直角外的相等线段与相等角及能够完全重合的三角形；

（4）你能求出 $\angle GDF$ 的度数吗？说明你的理由.

解题秘方：紧扣旋转的特征解答相关问题.

解：（1）图中的点 D 是旋转中心，旋转角是 $90°$.

（2）图中 DE 与 DG，DC 与 DA，EC 与 GA 是对应线段；$\angle CDE$ 与 $\angle ADG$，$\angle C$ 与 $\angle DAG$，$\angle DEC$ 与 $\angle G$ 是对应角.

（3）相等线段：$DG=DE$，$GA=EC$；

相等角：$\angle G=\angle DEC$，$\angle ADG=\angle CDE$，$\angle GDF=\angle EDF$；

提分·必记

特别提醒

旋转的特征的作用：

1. 可以用来判断线段或角是否相等.
2. 可以用来计算图形的面积、线段的长度或角的大小.
3. 可以用来确定旋转中心：因为对应点到旋转中心的距离相等，所以旋转中心在对应点所连线段的垂直平分线上，因此旋转中心是两对对应点所连线段的垂直平分线的交点.

提分·秘诀

解题通法

由于旋转前后两个图形的形状、大小未发生改变，所以我们在利用旋转来解决与其相关的问题时应抓住以下三点：

1. 明确旋转中的“变”与“不变”；
2. 找准旋转前后的“对应关系”，正确判断旋转前后图形的对应点、对应角、对应线段以及旋转角，这是理解和应用旋转特征的基础；
3. 充分挖掘旋转过程中的相等关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能够完全重合的三角形：△ DEC 与△ DGA.

（4）∠ GDF=45° . 理由如下：

∵△ DEC 绕点 D 顺时针旋转 90° 到△ DGA 的位置，∴ $DG \perp DE$.

又∵∠ FDE=45° ，

∴∠ GDF=90° − ∠ FDE=90° −45° =45° .

知识点 3 旋转对称图形

1. 旋转对称图形：把一个图形旋转一定角度后能与自身重合的图形就称为旋转对称图形.

2. 旋转作图的一般步骤：

（1）确定旋转中心、旋转方向和旋转角.

（2）找出图形的关键点，一般是图形中的转折点.

（3）作旋转后的对应点，方法如下：

①连：连结图形的每个关键点与旋转中心；

②转：把连线绕旋转中心按旋转方向旋转相同的角度（作旋转角）；

③截：在作得的角的另一边截取与关键点到旋转中心的距离相等的线段，得到各个关键点的对应点.

（4）按原图形的顺序依次连结这些对应点，所得到的图形就是旋转后的图形.

（5）写出结论，说明作出的图形即为所求作的图形.

提分·必记

特别提醒

确定旋转中心的方法：

在图形的旋转过程中，判断旋转中心的位置，要看旋转中心是在图形上还是不在图形上；

若在图形上，哪一点在旋转的过程中位置没有改变，哪一点就是旋转中心；

若不在图形上，两对对应点所连线段的垂直平分线的交点就是旋转中心.

核心考向 利用旋转作图的方法作旋转后的图形

例 3 如图 10.3−3，△ ABC 绕点 O 旋转，使点 A 旋转到点 D 处，画出顺时针旋转后的三角形，并写出简要作法.

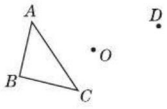


图 10.3−3

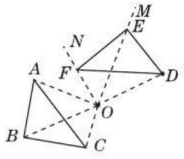


图 10.3−4

解题秘方：在旋转作图时，要紧扣以下三点：

（1）对应点到旋转中心的距离相等；

（2）旋转的角度相等；

（3）旋转的方向相同.

解：作法：（1）连结 OA，OB，OC，OD；

（2）分别以 OB，OC 为边作∠ BOM= ∠ CON= ∠ AOD；

（3）分别在 OM，ON 上截取 OE=OB，OF=OC；

（4）依次连结 DE，EF，FD，△ DEF 就是所求作的三角形，如图 10.3−4.

提分·秘诀

作图提醒

- 为了避免作图混乱，也可以先对一个关键点连、转、截，找到其对应点后再进行下一个关键点的旋转；
- 已知旋转中心和一对对应点，画旋转图形时要先将这对对应点与旋转中心相连，找出旋转方向和旋转角.由此将此类问题转化成已知旋转三要素的旋转作图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度 1 利用旋转的特征确定旋转中心

例 4 如图 10.3-5，四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转一定角度之后得到四边形 $A'B'C'D'$，请你画出四边形旋转过程中的旋转中心 O.

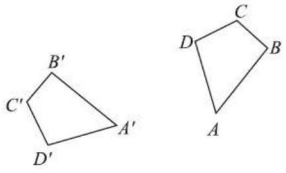


图 10.3-5

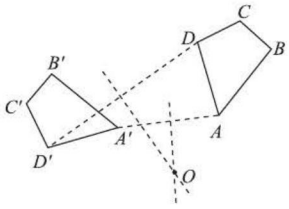


图 10.3-6

解题秘方：紧扣旋转的特征，找出两对对应点，作出两对对应点所连线段的垂直平分线.

解：如图 10.3-6，连结 AA'，DD'，分别作它们的垂直平分线，两条垂直平分线的交点就是所求作的旋转中心 O.

挑战·高分

方法点拨

利用线段的垂直平分线确定旋转中心：

因为旋转前后两个图形的对应点到旋转中心的距离相等，所以连结任意两对对应点，分别作所连线段的垂直平分线，两条垂直平分线的交点即为旋转中心.

拨尖角度 2 利用旋转不变性求阴影面积

例 5 如图 10.3-7，分别以正方形 $ABCD$ 的边 AD 和 DC 为直径画两个半圆交于点 O. 若正方形 $ABCD$ 的边长为 10 cm，求阴影部分的面积.

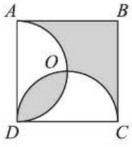


图 10.3-7

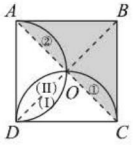


图 10.3-8

解题秘方：通过旋转，利用旋转的不变性，将不规则的阴影部分转化为规则图形求面积.

解：如图 10.3-8，连结 BD，AC. 把阴影部分（I）绕点 O 逆时针旋转 90° 至阴影部分①处，把阴影部分（II）绕点 O 顺时针旋转 90° 至阴影部分②处，使原阴影部分变为图 10.3-8 中的阴影部分，即正方形的一半，故阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}\times 10\times 10=50\ (\mathrm{cm}^2)$.

挑战·高分

方法点拨

此题运用了转化思想，主要考查正方形的性质以及旋转的特征，利用旋转前后两个图形的形状和大小不变，把不规则图形经过割补转化为一个易于计算面积的规则图形.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

旋转是中考中的重要考点，常出现在中考试卷中的知识点有根据图形计算旋转的角度、利用旋转的特征进行计算和证明. 高、中、低档题目都有出现的可能，分值在 3~12 分不等. 在这类题目中得分的关键在于分清图形的变化规律，理解变化前、后的联系，且这部分内容在今后的中考中仍是考查的热点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法1 旋转特征的应用

例6 如图 10.3−9，将直角三角形 ABC 绕直角顶点 C 顺时针旋转 $90°$，得到△$A'B'C$，连结 BB'，若∠$A'B'B=20°$，则∠A 的度数是_____.

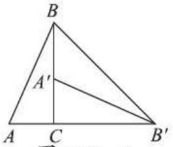


图 10.3−9

试题评析：本题考查了旋转的特征，熟记旋转的特征并准确识图是解题的关键.

解：∵直角三角形 ABC 绕直角顶点 C 顺时针旋转 $90°$ 得到三角形△$A'B'C$，

∴ $B'C=BC$，∠$BCB'=90°$，

∴△BCB' 是等腰直角三角形，

∴∠$CBB'=45°$，

∴∠$B'A'C=∠A'B'B+∠CBB'=20°+45°=65°$，

∴由旋转的特征得∠$A=∠B'A'C=65°$.

答案：$65°$

考法2 简单的旋转作图

例7 如图 10.3−10 是由边长为 1 的小正方形组成的 $8×4$ 网格，每个小正方形的顶点叫做格点，点 A，B，C，D 均在格点上，在网格中将点 D 按下列步骤移动：

第一步：点 D 绕点 A 顺时针旋转 $180°$ 得到点 D_1；

第二步：点 D_1 绕点 B 顺时针旋转 $90°$ 得到点 D_2；

第三步：点 D_2 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 得到点 D.

（1）请用圆规画出点 $D→D_1→D_2→D$ 经过的路径；

（2）所画图形是_____对称图形.

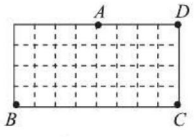


图 10.3−10

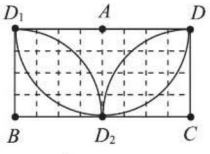


图 10.3−11

试题评析：本题考查了在网格中进行旋转作图，解题的关键是借助网格的特征运用圆规完成作图.

解：（1）点 $D→D_1→D_2→D$ 经过的路径如图 10.3−11 所示.

（2）轴

解法提醒

旋转运动中点的运动轨迹是圆弧，利用圆规完成作图更简单.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

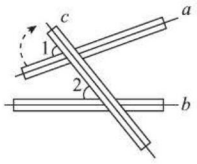
1. “飞流直下三千尺”、“坐地日行八万里（只考虑地球自转）”如果只从数学角度看，它们分别蕴含的图形变换是（　　）

A. 平移、对称　　B. 对称、旋转

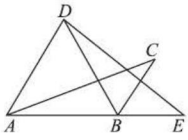
C. 平移、旋转　　D. 旋转、对称

2. 如图，将木条 a、b 与 c 钉在一起，$\angle 1=70°$，$\angle 2=50°$，要使木条 a 与 b 平行，木条 a 旋转的度数至少是（　　）

A.10°　　B.20°　　C.50°　　D.70°



（第 2 题）



（第 3 题）

3. $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DBE$，点 C 的对应点 E 恰好落在 AB 的延长线上，连结 AD. 下列结论一定正确的是（　　）

A. $\angle ABD=\angle E$　　B. $\angle CBE=\angle C$

C. $AD//BC$　　D. $AD=BC$

4. 下列四个图案中，分别以它们所在圆的圆心为旋转中心，顺时针旋转 120° 后，能与原图案完全重合的是（　　）



A　　B　　C　　D

5. 将正方体骰子（相对面上的点数分别为 1 和 6，2 和 5，3 和 4）放置于水平桌面上，如图①. 在图②中，将骰子向右翻滚 90°，然后在桌面上按逆时针方向旋转 90°，则完成①次变换. 若骰子的初始位置为如图①的状态，则按上述规则连续完成 10 次变换后，骰子朝上一面的点数是（　　）

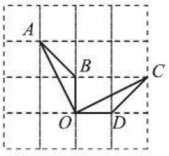


①　　②

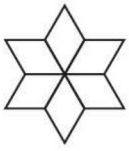
（第 5 题）

A.6　　B.5　　C.3　　D.2

6. 如图，点 A，B，C，D，O 都在方格纸的格点上，若 $\triangle COD$ 是由 $\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转而得到的，则旋转的角度为_____°.



（第 6 题）



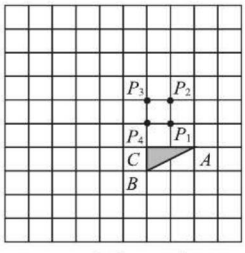
（第 7 题）

7. 如图可以看成是由小四边形通过_____次连续旋转得到的，每次旋转了_____.

8. 如图，在 10×10 的小正方形网格中，$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 在网格上，P_1，P_2，P_3，P_4 是其中一个小正方形的 4 个顶点，将 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 90°，再向下平移 2 个单位，得到 $\triangle A'B'C'$. 将 $\triangle ABC$ 按一定的规律顺次旋转，第一次将 $\triangle ABC$ 绕点 P_1 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$；第二次将 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 P_2 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_2B_2C_2$；第三次将 $\triangle A_2B_2C_2$ 绕点 P_3 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A_3B_3C_3$，依次按旋转中心为 P_1，P_2，P_3，P_4，P_1，P_2……旋转下去.

（1）在网格中画出 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$；

（2）$\triangle ABC$ 至少旋转_____次后所得的三角形刚好与 $\triangle A'B'C'$ 重合.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.4 中心对称

核心知识

- 中心对称图形
- 中心对称
- 画中心对称图形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 中心对称图形

1. 中心对称图形的概念

一个图形绕着中心旋转 180° 后能与自身重合，我们把这种图形叫做中心对称图形，这个中心叫做对称中心.

2. 中心对称图形和轴对称图形的区别与联系

	区别	联系
中心对称图形	有一个对称中心——点	如果一个轴对称图形有两条互相垂直的对称轴，它一定是中心对称图形，两对称轴的交点是它的对称中心.
	图形绕中心旋转 180° 后与自身重合	
轴对称图形	至少有一条对称轴——直线	
	图形沿对称轴对折后两部分完全重合	

3. 中心对称图形的性质：

（1）中心对称图形上对称点所连线段必经过对称中心，且被对称中心平分，即过对称中心的直线与中心对称图形所交的两点是对称点；中心对称图形上所有的点关于对称中心的对称点都在这个图形上.

（2）过对称中心的任一直线把中心对称图形分成形状相同和大小相等的两部分.

拔考向 利用中心对称图形的定义识别中心对称图形

例 1 如图 10.4-1，下列是中心对称图形的是（　　）

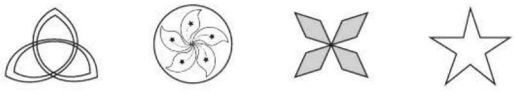


图 10.4-1

A　　B　　C　　D

解题秘方：紧扣中心对称图形的定义进行识别.

解：这些图形绕某一点旋转一定角度后都能与原图形完全重合，但根据中心对称图形的定义可知，只有选项 C 中的图形符合题意，故选 C.

答案：C

提分·必记

特别提醒

判断中心对称图形的方法：

1. 中心对称图形的“三要素”：
   (1) 对称中心；
   (2) 旋转 180°；
   (3) 与自身重合.
2. 常见的中心对称图形：线段、平行四边形、长方形、边数是偶数的正多边形、圆等.
3. 中心对称图形是旋转角度为 180° 的旋转对称图形.

提分·秘诀

方法点拨

识别复杂中心对称图形的方法，可从以下两方面入手：（1）基本图形的个数是偶数；（2）其相对的两个基本图形均在一条直线上，且每对对称点到对称中心的距离相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 中心对称

1. 定义： 在平面内，把一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称，这个点叫做对称中心. 这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的对称点.

2. 中心对称与轴对称的关系

	中心对称	轴对称
区别	有一个对称中心	有一条对称轴
	图形绕对称中心旋转 180°	图形沿对称轴对折
	旋转后与另一个图形重合	对折后与另一个图形重合
相同点	都是两个图形之间的关系，并且变换前、后的两个图形的形状和大小不变	

提分·必记

特别解读

1. 中心对称是特殊的旋转，其旋转角为 180°.
2. 中心对称是指两个图形的位置关系，必须涉及两个图形.
3. 中心对称的两个图形，只有一个对称中心. 这个对称中心可能在每个图形的外部，也可能在每个图形的内部或边上.

拔考向 利用中心对称的定义识别对称中心、对称点

例 2 如图 10.4-2，两个五角星关于某一点成中心对称，指出哪一点是对称中心，并指出图中点 A，B，C，D 的对称点.

解题秘方： 紧扣中心对称的相关定义判断.

解： 从图中易看出旋转中心为点 A，故点 A 为对称中心；点 A，B，C，D 绕点 A 旋转 180° 后的位置分别在点 A，G，H，E 处，故点 A，B，C，D 关于点 A 的对称点分别是点 A，G，H，E.

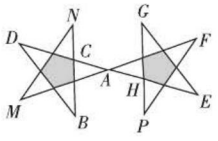


图 10.4-2

提分·秘诀

特别提醒

旋转角为 180° 时的旋转中心即为对称中心，旋转中所说的对应点就是关于对称中心对称的对称点.

点知识 3 中心对称的性质

1. 性质：

（1）在成中心对称的两个图形中，连结对称点的线段都经过对称中心，并且被对称中心平分；反之，如果两个图形的所有对应点连成的线段都经过某一点，并且都被该点平分，那么这两个图形关于这一点成中心对称.

（2）中心对称的两个图形，对应角相等，对应线段平行（或在同一直线上）且相等.

2. 确定对称中心的方法：

方法一： 连结任意一对对称点，取这条线段的中点，则该中点即为对称中心.

方法二： 任意连结两对对称点，这两条线段的交点就是对称中心.

提分·必记

特别解读

由性质可以得到如下结论：

(1) 对称中心在一对对称点的连线上；

(2) 对称中心到一对对称点的距离相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶中心对称性质的应用

类型 1: 利用中心对称的性质找对应元素

例 3 如图 10.4-3，已知四边形 $ABCD$ 的中心对称图形是四边形 $A_1B_1C_1D_1$，请回答下列问题：

（1）点 A 的对称点是点_____，点 B 的对称点是点_____，对称中心是点_____.

（2）指出图中在同一条直线上的三点.

（3）指出图中相等的线段.

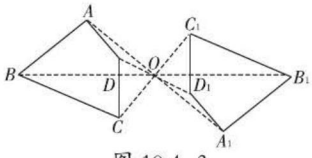


图 10.4-3

解题秘方：紧扣中心对称的性质进行判断.

解：（1）A_1；B_1；O

（2）A，O，A_1；B，O，B_1；C，O，C_1；D，O，D_1. （3）图中相等的线段有 $OA=OA_1$，$OB=OB_1$，$OC=OC_1$，$OD=OD_1$，$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$CD=C_1D_1$，$DA=D_1A_1$.

类型 2: 利用中心对称的性质作图

例 4 如图 10.4-4，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.

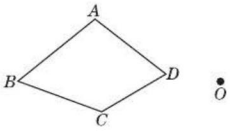


图 10.4-4

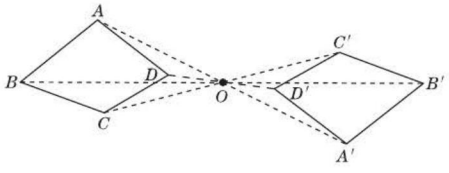


图 10.4-5

解题秘方：要作四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，只要作出点 A，B，C，D 关于点 O 的对称点，然后顺次连结即可.

解：（1）连结 AO 并延长 AO 到点 A'，使 $OA'=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对称点 A'.

（2）同样画出点 B，点 C 和点 D 关于点 O 的对称点 B'，C' 和 D'.

（3）顺次连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求作的图形. 如图 10.4-5.

提分·秘诀

解法提醒

找对称点是解决问题的关键，每一对对称点与对称中心都在同一条直线上，根据对称点来找对应线段，由中心对称的性质得到对应线段的相等关系.

作图通法

作已知图形关于某一点对称的图形的依据和步骤：

1. 作图依据：对称中心是对称点所连线段的中点；
2. 作图步骤（概括为）：
   （1）连结；
   （2）延长；
   （3）等长截取；
   （4）顺次连结各对称点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

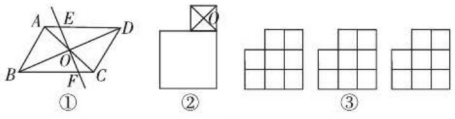
点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用过对称中心的直线等分中心对称图形法等分几何图形的面积

例5 如图 10.4-6 ①,直线 EF 经过平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC, BD 的交点 O,点 E, F 分别在 AD, BC 上,则 $S_{四边形AEFB}=S_{四边形DEFC}$.

(1) 如图 10.4-6 ②,两个正方形一边重合, O 为小正方形对角线的交点,求作过点 O 的直线 l,使 l 将整个图形分成面积相等的两部分;

(2) 8 个大小相同的正方形如图 10.4-6 ③摆放,求作直线 m,使 m 将 8 个正方形分成面积相等的两部分(用三种方法分割).



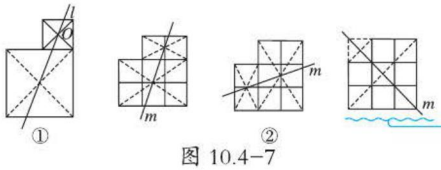
① ② ③

图 10.4-6

解题秘方:将不规则图形分割成两个中心对称图形,用过对称中心的直线等分中心对称图形法,过这两个中心对称图形的对称中心作直线即可.

解:(1) 如图 10.4-7 ①.

(2) 如图 10.4-7 ②.



① ②

图 10.4-7

挑战·高分

作图对策

在图 10.4-6 ②中,小正方形的对称中心是点 O,画出大正方形的两条对角线,它们的交点就是大正方形的对称中心,过这两个正方形的对称中心的直线就是所求作的直线 l.

另解

因为图 10.4-6 ③是轴对称图形,所以可以直接画出整个图形的对称轴,该直线就是所求作的直线 m,如图 10.4-8.

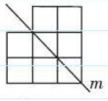


图 10.4-8

拔尖角度▸ 2 利用建立中心对称图形模型法巧解实际问题

例6 甲、乙两人轮流往一个圆形桌面上平放同样大小的硬币,每次只能放一枚,但不允许任何两枚硬币有重叠部分,规定谁放下最后一枚,并使得对方没有再放的位置,就算谁获胜.假如甲、乙两人都是内行,试问是先放者获胜,还是后放者获胜?怎样放才能稳操胜券?

解题秘方:建立中心对称图形的模型,紧扣“中心对称图形的特性:除对称中心唯一外,其余任何一处都可以找到关于对称中心的对称位置”这一性质解答.

解:先放者获胜.操作办法是:第一枚硬币要放在圆形桌面中心处,然后每次都往对方所放硬币位置关于桌面中心的对称位置处放硬币.

挑战·高分

特别提醒

此类放硬币的游戏是把游戏问题转化为中心对称图形找对称点的模型来解决,只要桌面是中心对称图形,就可适用.所以先放者占领了对称中心后,后放者每放一处,先放者总可以找到与该位置关于对称中心对称的另一处位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

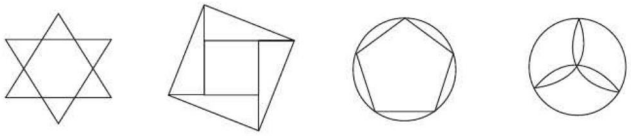
点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 中考中主要考查中心对称图形的定义以及成中心对称的图形的特征．大多数情况下中心对称（图形）与轴对称（图形）综合在一起考查．题型以选择题、填空题为主，难度不大．

三年中考兵法

考法 1 利用中心对称图形的定义识别中心对称图形

例 7 ［中考·徐州］如图 10.4–9，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）



A　　B　　C　　D

图 10.4–9

试题评析：本题考查了中心对称及轴对称的知识，解题时掌握好中心对称图形与轴对称图形的概念．轴对称图形要寻找对称轴，对称轴两旁的部分折叠后完全重合，中心对称图形要寻找对称中心，旋转 180° 后与原来的图形重合．

解：B 选项不是轴对称图形；C，D 选项不是中心对称图形．故选 A．

答案：A

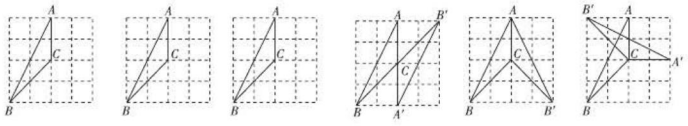
考法 2 利用变换图形的作法解决网格中的作图问题

例 8 ［中考·枣庄］如图 10.4–10，在 4×4 的方格纸中，△ ABC 的三个顶点都在格点上．

（1）在图 10.4–10 ①中，画出一个与△ ABC 成中心对称的格点三角形；

（2）在图 10.4–10 ②中，画出一个与△ ABC 成轴对称且与△ ABC 有公共边的格点三角形；

（3）在图 10.4–10 ③中，画出△ ABC 绕着点 C 按顺时针方向旋转 90° 后的三角形．



①　②　③

图 10.4–10

①　②　③

图 10.4–11

试题评析：本题考查图形变换，解题的关键是正确理解图形变换的性质，本题属于基础题型．

解：（1）如图 10.4–11 ①（画法不唯一）．（2）如图 10.4–11 ②（画法不唯一）．（3）如图 10.4–11 ③．

冲刺·满分

方法技巧

	中心对称图形	轴对称图形
区别	关于某一点对称	关于某一条直线对称
	绕某一点旋转 180° 后与原来的图形重合	沿一条直线折叠后，直线两旁的部分互相重合
联系	如果一个轴对称图形有两条相互垂直的对称轴，那么它必是中心对称图形，这两条对称轴的交点就是它的对称中心	

思路点拨

1. 以点 C 为对称中心或以 AB 的中点为对称中心，可画出三角形；
2. 以 AC 所在直线为对称轴，或以 BC 所在直线为对称轴，可画出三角形；
3. 根据旋转的特征作点 A 和点 B 绕点 C 顺时针旋转 90° 的对应点 A'，B'，连结 $A'C$，$B'C$，$A'B'$，即可画出旋转后的三角形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 如图，是中心对称图形的有（　　）



A.1个　B.2个　C.3个　D.4个

2. 下列汉字或字母中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是（　　）



A　B　C　D

3. 将一张平行四边形纸片折一次，使得折痕平分这个平行四边形，则这样的折纸方法共有（　　）

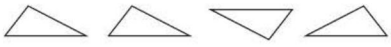
A.1种　B.2种　C.4种　D. 无数种

4. ①线段，②角，③长方形，④正方形，⑤圆，⑥等边三角形．以上图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

A. ①③④⑤　B. ③④⑥

C. ①④⑤　D. ①④⑤⑥

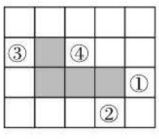
5. 如图，图（1）与图_____成轴对称，图（1）与图_____成中心对称，图（1）平移可得到图_____.



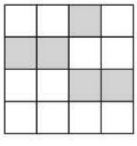
（1）　（2）　（3）　（4）

（第5题）

6. 如图，在方格纸中，选择标有序号①②③④中的一个小正方形涂黑，与图中阴影部分构成中心对称图形，该小正方形的序号是_____.



（第6题）



（第7题）

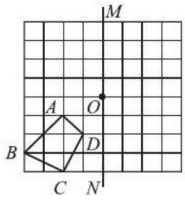
7. 如图是4×4的正方形网格，请选取其中一个白色的单位正方形并涂黑，使图中黑色部分是一个中心对称图形．

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，

（1）画出四边形 $A_1B_1C_1D_1$，使四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 关于直线 MN 成轴对称；

（2）画出四边形 $A_2B_2C_2D_2$，使四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称；

（3）四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是否对称？若对称，请在图中画出对称轴或对称中心．



（第8题）

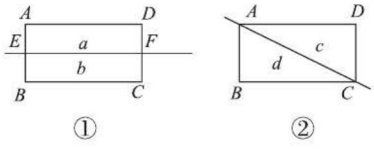
9. 阅读下面操作过程，回答后面的问题：

在一次数学实践探究活动中，如图①，小明同学过 AB，CD 的中点画直线 EF，把长方形 $ABCD$ 分割成 a，b 两部分；如图②，小刚同学过 A，C 两点画直线 AC，把长方形 $ABCD$ 分割成 c，d 两部分．

（1）a，b，c，d 的面积关系是 S_a_____S_b_____S_c_____S_d（填“>”“<”或“=”）．

（2）根据这两位同学的分割原理，你能探究出多少种分割方法？并任意画出一种．

（3）由上述的操作过程，你能发现什么规律？



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.5 图形的全等

核心知识

- 全等图形
- 全等三角形
- 全等三角形的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 全等图形

1. **定义**：能够完全重合的两个图形叫做全等图形.

全等图形的特征：两相同与两无关.

（1）两相同：

①形状相同；②大小相同.

（2）两无关：

①与位置无关；②与方向无关.

2. **全等变换的常见方式**：轴对称、平移与旋转.

提分·必记

特别解读

一个图形经过轴对称、平移和旋转等变换所得到的新图形一定与原图形全等. 反之，两个全等的图形经过上述的变换后一定能够互相重合.

拨考向 利用全等图形的定义识别全等图形

例 1 如图 10.5-1 中是全等图形的是_____.

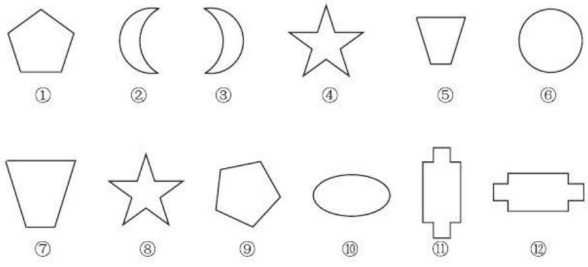


图 10.5-1

解题秘方：根据全等图形的定义和特征进行判断.

解：上述图形中，⑤和⑦形状相同，但大小不同，

⑥和⑩大小、形状都不同；

①和⑨、②和③、⑪和⑫尽管方向不同，但大小、形状完全相同，所以它们是全等图形，

④和⑧都是五角星，大小、形状都相同，是全等图形.

答案：①和⑨、②和③、④和⑧、⑪和⑫

提分·秘诀

方法点拨

确定两个图形全等的方法：

1. **条件判定法：**

（1）形状相同，

（2）大小相等.

是否是全等图形与位置无关.

2. **重合判定法：**通过平移、旋转、翻折等方法把两个图形叠合在一起，看它们能否完全重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 全等多边形

1. 全等多边形的概念：能够完全重合的两个多边形称为全等多边形．两个全等的多边形，经过变换而重合，相互重合的顶点叫做对应顶点，相互重合的边叫做对应边，相互重合的角叫做对应角．

2. 全等多边形的符号表示：四边形 $ABCD$ 全等于四边形 $A'B'C'D'$，记作四边形 $ABCD$ ≌四边形 $A'B'C'D'$（这里，符号“≌”表示全等，读作“全等于”）．

注意：用全等符号表示两个多边形全等时，要把表示对应顶点的字母写在对应的位置上．

3. 全等多边形的性质：全等多边形的对应边相等，对应角相等．

4. 全等多边形的判定方法：边、角分别对应相等的两个多边形相等．

注意：判定方法中的关键词语“分别”“对应”必不可少，意思是两个多边形中的每对对应边都要相等，每对对应角也都要相等．

拔考向▶ 利用全等三角形的性质识别相等的边、角

例 2 如图 10.5-2，五边形 $ABCDE$ ≌五边形 $A'B'C'D'E'$，指出图中相等的边和相等的角．

解题秘方：紧扣全等多边形的对应关系并找准对应点，然后识别对应线段和对应角．

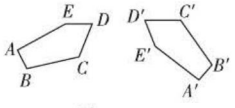


图 10.5-2

解：当用符号表示全等时，对应顶点的字母已写在了对应的位置上，因此，很容易找到对应顶点，由题意可知点 A 与点 A'，点 B 与点 B'，点 C 与点 C'，点 D 与点 D'，点 E 与点 E' 分别为对应顶点．

所以相等的边有 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$DE=D'E'$，$EA=E'A'$．

相等的角有 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$，$\angle E=\angle E'$．

提分必记 对应元素的确定方法：

（1）图形特征法：

①最长边对最长边，最短边对最短边．

②最大角对最大角，最小角对最小角．

③相等的边（角）为对应边（角）．

（2）位置关系法：

①公共角（对顶角）为对应角，公共边为对应边．

②对应角的对边为对应边，两个对应角所夹的边是对应边．

③对应边的对角为对应角，两条对应边所夹的角是对应角．

（3）字母顺序法：根据书写规范按照对应顶点确定对应边或对应角．

提分·必记

特别提醒

（1）全等多边形的定义既可以作为性质，也可以作为判定方法．在全等多边形的判定中，对应边与对应角分别相等这两个条件必须同时具备，缺一不可．例如，任意两个长方形，各个角均为直角，但不一定全等；再如任意两个边长相等的四边形，也不一定全等．

（2）全等多边形的面积一定相等，但面积相等的多边形不一定全等．

（3）若两个多边形是全等多边形，则它们的边数一定相同．

方法点拨

利用全等多边形的性质找全等多边形中相等的线段和相等的角，要先找准这两个全等图形的对应顶点、对应边、对应角，再根据全等多边形的对应边相等，对应角相等来确定相等的线段和相等的角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 全等三角形

1. 全等三角形：三角形是特殊的多边形，所以全等三角形是特殊的全等多边形，常见的三角形全等变换有（如图 10.5−3）：

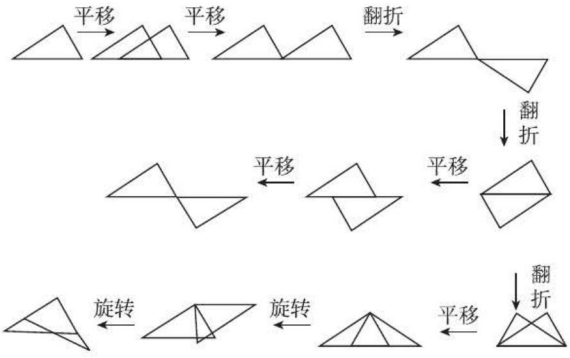


图 10.5−3

2. 全等三角形的符号表示：如图 10.5−4 所示，△ ABC 和△ DEF 全等，记作△ ABC ≌△ DEF. 其中，对应顶点为 A 与 D，B 与 E，C 与 F；对应边为 AB 与 DE，BC 与 EF，AC 与 DF；对应角为∠ A 与∠ D，∠ B 与∠ E，∠ C 与∠ F.

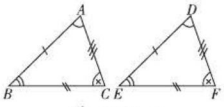


图 10.5−4

3. 全等三角形的性质：全等三角形的对应边、对应角分别相等.

4. 全等三角形的判定方法：如果两个三角形的边、角分别对应相等，那么这两个三角形全等.

提分·必记

特别解读

1. 全等三角形是全等图形中的特例.
2. 对应关系可从两个方面理解.
   （1）**从动态角度理解：**重合是找对应元素的关键.
   （2）**从静态角度理解：**从表示方法中找准对应点，然后确定对应边和对应角.
3. 应用全等三角形性质时，要先确定两个条件：
   （1）两个三角形全等；
   （2）找对应元素.
4. 全等三角形的性质是证明线段、角相等的常用方法.



全等三角形

核考向▶利用全等三角形的性质与判定求对应元素之间的关系

类型 1：图形的变换方式在找对应元素中的应用

例 3 如图 10.5−5，将△ ABC 绕其顶点 B 顺时针旋转一定角度后得到△ DBE，请说出图中△ ABC 和△ DBE 是否为全等三角形，若是，写出其对应边和对应角.

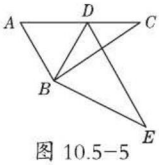


图 10.5−5

解题秘方：根据图形旋转前后的对应位置找对应关系.

解：△ ABC ≌△ DBE，AB 与 DB，AC 与 DE，BC 与 BE 是对应边，∠ A 与∠ BDE，∠ ABC 与∠ DBE，∠ C 与∠ E 是对应角.

类型 2：全等三角形的性质在说明线段关系中的应用

例 4 如图 10.5−6，已知△ ABC ≌△ EDF. 试说明：

（1）$DC=BF$；

（2）AC // EF.

解题秘方：利用全等三角形的对应边相等和对应角相等解决问题.

提分·秘诀

解法提醒

从动态的角度找对应元素，关键要抓住图形变换前后的重合元素，重合的边为对应边，重合的角为对应角.

解法提醒

全等三角形的对应边（对应角）相等，由此可得两条线段（两个角）相等，从而进一步说明线段（或角）的相等关系、和差关系以及求线段的长度（或角的大小）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵△ABC≌△EDF，

∴ $DF=BC$.

∴ $DF-CF=BC-CF$，即 $DC=BF$.

（2）∵△ABC≌△EDF，

∴∠ACB=∠EFD. ∴ AC // EF.

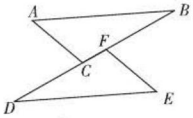


图 10.5-6

类型 3：全等三角形的性质在求角度中的应用

例 5 如图 10.5-7，在△ABC中，D，E分别是边AC，BC上的点，若△ADB≌△EDB≌△EDC，求∠C的度数.

解题秘方：利用全等三角形的对应角相等的性质，并结合三角形的内角和为 180°进行计算.

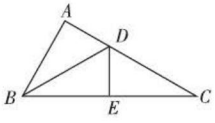


图 10.5-7

解：∵△ADB≌△EDB≌△EDC，

∴∠ABD=∠EBD=∠C，∠A=∠BED=∠CED.

又∵∠BED+∠CED=180°，∴∠BED=∠CED=90°.

∴∠A=90°. ∴∠ABD+∠DBE+∠C=180°−∠A=90°.

∴ 3∠C=90°. ∴∠C=30°.

类型 4：全等三角形的性质在判断两直线位置关系中的应用

例 6 如图 10.5-8，已知△ABC≌△CDE，∠ABC=90°，且点B，C，D在同一条直线上，试判断AC与CE的位置关系，并说明理由.

解题秘方：通过求AC，CE夹角的度数判断其位置关系.

解：AC ⊥ CE，理由如下：

∵△ABC≌△CDE，

∴∠BAC=∠DCE.

∵∠ABC=90°，∴∠BAC+∠ACB=90°，

∴∠DCE+∠ACB=90°.

∴∠ACE=180°−(∠DCE+∠ACB)=180°−90°=90°.

∴ AC ⊥ CE.

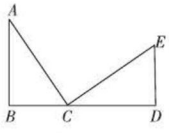


图 10.5-8

解法提醒

利用全等三角形的性质求角的度数的方法：

一般先确定两个三角形中角的对应关系，由这种关系实现已知角和未知角之间的转换，从而求出所要求的角的度数.

方法点拨

说明线段位置关系的方法：

说明线段与线段的位置关系通常考虑平行、垂直两种特殊关系，说明平行的方法是转化为说明同位角相等、内错角相等或同旁内角互补；说明垂直的方法是转化为说明它们的夹角为 90°.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等面积代换法求全等变换中图形的面积

挑战·高分

例 7 如图 10.5-9，将直角三角形ABC沿BC方向平移得到直角三角形DEF，如果AB=8 cm，BE=4 cm，DH=3 cm，那么图中阴影部分的面积为_____cm².

解题秘方：利用全等三角形的性质，将阴影部分的面积转化为梯形$ABEH$的面积来求.

平移是全等变换的一种，△ABC 平移后得到△DEF，即两个三角形全等

方法点拨

等面积代换法：

将所求图形的面积通过全等变换转化为易求（或已知）图形面积的方法，我们称之为等面积代换法，它是解面积或涉及垂直（高）等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：由题意可知△ ABC ≌△ DEF，

∴ $DE=AB=8$ cm，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$.

∵ $S_{\triangle ABC}=S_{梯形 ABEH}+S_{\triangle HEC}$，

$S_{\triangle DEF}=S_{梯形 DHCF}+S_{\triangle HEC}$，

∴ $S_{梯形 ABEH}=S_{梯形 DHCF}$.

∵ $DH+HE=DE$，∴ $HE=DE-DH=8-3=5$（cm）.

∴ $S_{梯形 ABEH}=\frac{1}{2}(AB+HE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(8+5)\times 4=26$（cm^2）.

答案：26

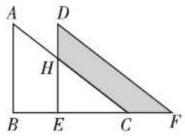


图 10.5-9

几何问题的常用方法．本题运用了**等面积代换法**，将所求阴影部分的面积转化成易求解的梯形 $ABEH$ 的面积．

拔尖角度▸ 2 利用逆向思维解决条件探索问题

例 8 如图10.5-10，A，D，E 三点在同一条直线上，且△ BAD ≌△ ACE，AB 与 CA，AD 与 CE 是对应边．

（1）试说明 $BD=DE+CE$.

（2）△ ABD 满足什么条件时，BD // CE？请说明理由．

解题秘方：根据全等三角形的性质找出相等的线段和角，然后利用要解决的问题与得出的相等的线段和角之间的关系去解决．

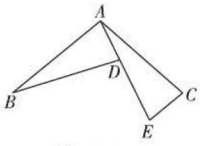


图 10.5-10

解：（1）∵ △ BAD ≌△ ACE，∴ $BD=AE$，$AD=CE$. 又∵ $AE=AD+DE$，∴ $BD=DE+CE$.

（2）当△ ABD 满足∠ $ADB=90°$ 时，BD // CE.

理由：∵ △ BAD ≌△ ACE，∴ ∠ ADB= ∠ CED.

若 ∠ $ADB=90°$，则 ∠ $CED=90°$．又∵ ∠ ADB+ ∠ $BDE=180°$，∴ ∠ $BDE=90°$，∴ ∠ BDE= ∠ CED，∴ BD // CE.

挑战·高分

方法点拨

解答探究条件类题目的方法：

1. 先猜想出条件，利用猜想出的条件推出题目的结论；
2. 将题目中的结论当作条件进行推理，这样推出的结果即为要探究的条件．

解题时常采用**逆向思维**法用方法 2 寻找条件，再用方法 1 进行说明．

拔尖角度▸ 3 利用分类讨论思想求动态问题中的速度和时间

例 9 如图 10.5-11，已知△ ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=8$，点 D 为 AB 的中点．点 P 在线段 BC 上以每秒 3 个单位长度的速度由点 B 向点 C 运动，同时点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 以每秒 a 个单位长度的速度运动，设运动时间为 t 秒．

（1）求 CP 的长；

（2）若以点 C，P，Q 为顶点的三角形和以点 B，D，P 为顶点的三角形全等，且∠ B 和∠ C 是对应角，求 a 和 t 的值．

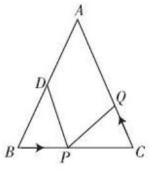


图 10.5-11

解题秘方：（1）点在线段上运动，用点运动的路程表示线段长．

（2）根据对应关系得出线段相等，求出 a，t 的值．

解：（1）由题意得 $BP=3t$. ∵ $BC=8$，∴ $CP=8-3t$.

（2）由题意知，需分两种情况讨论：

挑战·高分

解法提醒

由∠B 和∠C 是对应角可知 DP 和 PQ 是对应边，而其他两组边的对应关系不确定，因此要分 BD 与 CP 是对应边、BP 与 CP 是对应边两种情况讨论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

若△ $BDP \cong \triangle CPQ$，则 $BD=CP$，$BP=CQ$.

$\because AB=10$，点 D 为 AB 的中点，$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=5$.

$\therefore 5=8-3t$，$3t=at$，解得 $t=1$，$a=3$.

若△ $BDP \cong \triangle CQP$，则 $BP=CP$，$BD=CQ$，

$\therefore 3t=8-3t$，$5=at$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$a=\frac{15}{4}$.

综上所述，$a=3$，$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$，$t=\frac{4}{3}$.

教你一招

动态问题的求解思路：

此类动态数学问题的特点是动中有静，静中有动．解题时通常用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想，分情况对题目进行讨论，结合图形根据全等三角形的性质列出方程求解．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查全等三角形的性质，一般不单独命题，常与全等三角形的判定或全等的变换形式：平移、翻折、旋转综合考查，主要是以选择题和填空题的形式出现，难度适中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角

例 10 [中考·厦门]如图 10.5-12，点 E，F 在线段 BC 上，△ ABF 与△ DCE 全等，点 A 与点 D，点 B 与点 C 是对应顶点，AF 与 DE 交于点 M，则∠ DCE=（　　）

A. ∠ B　　B. ∠ A　　C. ∠ EMF　　D. ∠ AFB

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，熟记全等三角形的性质并找准对应关系是解题的关键．

答案：A

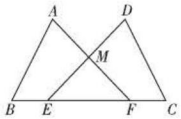


图 10.5-12

解法提醒

全等三角形中，对应角的顶点就是对应顶点，反过来，以对应点为顶点的角为对应角．

考法 2 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数

例 11 [中考·天门]如图 10.5-13，在△ ABC 中，∠ ACB=90°，点 D 在 AB 边上，将△ CBD 沿 CD 折叠，使点 B 恰好落在 AC 边上的点 E 处．若∠ A=26°，则∠ CDE=_____.

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是折叠，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数．

解：由三角形的内角和定理可知，∠ B=64°，

由折叠可知△ $BCD \cong \triangle ECD$.

$\therefore \angle BCD=\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，

∠ CED=∠ B=64°.

$\therefore \angle CDE=180°-\angle DCE-\angle CED=180°-45°-64°=71°$.

答案：71°

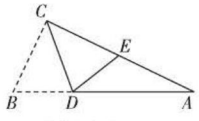


图 10.5-13

解法提醒

平移、旋转、翻折变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等的性质得到对应边相等、对应角相等，从而解决问题．

本题属于翻折变换，它隐含着折叠前后的△ CBD 与△ CED 全等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见228页

1. 下列说法中错误的有（　　）

①图形中只有两个三角形才能完全重合；

②如果两个图形全等，那么它们的形状和大小一定都相同；

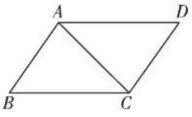
③两个正方形一定是全等图形；

④边数相同的图形一定能互相重合.

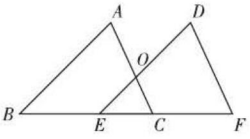
A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

2. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$\angle BAC = \angle DCA$，则$BC$的对应边是（　　）

A. CD　　B. CA　　C. DA　　D. AB



（第2题）



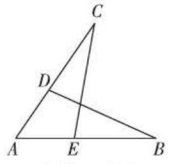
（第4题）

3. 如果$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且$\triangle ABC$的周长为100 cm，$A$，$B$分别与$D$，$E$对应，$AB$=30 cm，$DF$=25 cm，则$BC$的长为（　　）

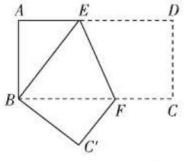
A. 45 cm　　B. 55 cm　　C.30 cm　　D. 25 cm

4. 如图，点B，E，C，F在同一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle B$=45°，$\angle F$=65°，则$\angle COE$的度数为_____.

5. 如图，$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，$\angle B$与$\angle C$是对应角. 若$AE$=5 cm，$BE$=7 cm，$\angle ADB$=100°，则$\angle AEC$=_____，$AC$=_____.



（第5题）



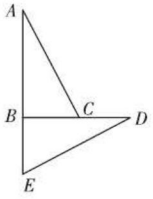
（第6题）

6. 如图，将长方形纸片$ABCD$折叠，使点D与点B重合，点C落在C'处，折痕为EF. 若AB=1，BC=2，则$\triangle ABE$和$\triangle BC'F$的周长之和为_____.

7. 如图，$\triangle ABC$绕着点B顺时针旋转90°到$\triangle DBE$的位置，$\angle ABC$=90°.

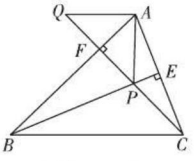
（1）$\triangle ABC$和$\triangle DBE$是否全等？若全等，指出对应边和对应角.

（2）AC和DE有怎样的位置关系？



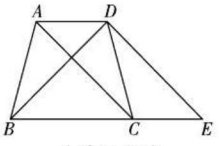
（第7题）

8. 如图，已知BE，CF是$\triangle ABC$的边AC和AB上的高，Q为CF的延长线上一点，P为BE和CF的交点，$\triangle PAB \cong \triangle AQC$. 试说明：$AP \perp AQ$.



（第8题）

9. 如图，四边形$ABCD$是梯形，$AD \parallel BC$，若DE交BC的延长线于点E，且$\triangle ADC \cong \triangle ECD$，梯形$ABCD$的面积和$\triangle BDE$的面积相等吗？并说明理由.



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

从图形变换的角度认识全等三角形

荣老师告诉你 我们知道，全等三角形是指能够完全重合的两个三角形，也就是说这两个三角形的形状、大小完全相同．对于全等三角形，在理解定义、掌握其性质和判定的基础上，还可以用运动的观点，从图形的变换（平移、翻折和旋转）的角度出发，寻找有关图形的特征．

应用一 ▸ 平移变换型全等三角形

将一个三角形按照某条直线的方向移动一定的距离，可得到与之全等的三角形，这种全等三角形称为平移变换型全等三角形．

例 1 如图 1，将△ AOD 沿 AO 的方向平移 AO 的长，得到△ OBC.

（1）若 AD=6 cm，求 OC 的长；

（2）若 ∠ ADO = 35°，求 ∠ C 和 ∠ DOC 的度数.

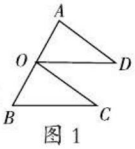


图 1

解题秘方：紧扣平移变换型全等三角形的性质，求出未知的线段和角．

解：（1）∵ △ OBC 是由△ AOD 平移得到的，

∴ △ AOD ≌△ OBC. ∴ OC=AD=6 cm.

（2）∵△AOD≌△OBC, ∴∠C =∠ADO= 35°.

易知 OD // BC，∴ ∠ DOC = ∠ C = 35°.

应用二 ▸ 翻折变换型全等三角形

以某条直线为对称轴，将一个三角形沿着该直线翻折，得到与之全等的三角形为翻折变换型全等三角形．角平分线和线段的垂直平分线问题中用到的三角形全等常常就是翻折变换型全等三角形．角平分线所在的直线和线段的垂直平分线就是对称轴．

例 2 如图 2，在△ ABC 中，AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 BC 于点 E.

（1）若∠ B=50°，∠ C=60°，求∠ EAC 的度数；

（2）若 BC = 6，AC = 5，求△ ACE 的周长．

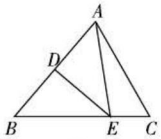


图 2

解题秘方：紧扣由线段的垂直平分线产生的翻折变换型全等三角形，利用全等三角形的性质解决问题．

解：（1）∵ DE 是 AB 的垂直平分线，

∴ △ ADE ≌△ BDE, ∴ ∠ BAE= ∠ B=50°，

∵ ∠ B+ ∠ C+ ∠ BAC=180°，

∴ ∠ BAC=70°，

∴ ∠ EAC= ∠ BAC− ∠ BAE=70° −50° =20°.

（2）∵ △ ADE ≌△ BDE, ∴ AE=BE,

∴ △ ACE 的周长 =AE+EC+AC=BE+EC+AC=BC+AC=6+5=11.

应用三 ▸ 旋转变换型全等三角形

将一个三角形绕着某一个点旋转，得到的三角形与之全等，此为旋转变换型全等三角形．旋转过程中要关注三个要素：旋转中心、旋转方向和旋转角．旋转变换型全等三角形往往有共顶点、边相等的基本特征．

例 3 如图 3，将△ ABC 绕 BC 边上的某一点旋转 180° 后，得到△ DEF.

试说明：（1）BF=CE；（2）AC // DF.

解题秘方：紧扣旋转变换型全等三角形的特征，找出相等边和角进行说明．

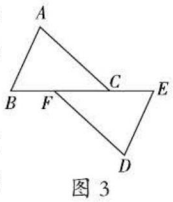


图 3

解：（1）∵ △ DEF 是由△ ABC 绕 BC 边上的某一点旋转 180° 得到的，

∴ △ ABC ≌△ DEF，∴ BC = EF，

∴ BF + FC = EC + FC，即 BF = CE.

（2）∵ △ ABC ≌△ DEF，

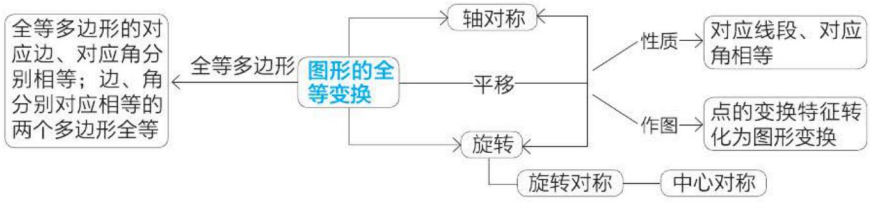
∴ ∠ ACB = ∠ DFE，∴ AC // DF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 轴对称和轴对称图形之间有区别也有联系，区别是：轴对称是两个图形的位置关系，轴对称图形是某一个图形具有轴对称这一特征．联系是：把成轴对称的两个图形看成一个图形时是轴对称图形；将轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条对称轴成轴对称．

2. 图形的平行移动简称平移，平移由平移的方向和平移的距离决定．平移前后的两个图形，对应边平行(或在同一条直线上)且相等，对应角相等．

3. 图形的旋转属于全等变换，即旋转前后的两个图形全等，也就是对应边相等和对应角相等．

旋转的性质：对应点与旋转中心所连线段的夹角为旋转角，旋转角都相等．

4. 中心对称与中心对称图形的共同特征是绕某个点旋转 180° 后完全重合，只不过中心对称是一个图形与另一个图形重合，而中心对称图形是与自身重合．

5. 全等三角形是特殊的全等图形，全等图形的对应边相等，对应角相等．

知识方法专题

知识必学

专题一 轴对称图形的识别

链接中考» 轴对称图形的识别关键要扣住轴对称图形的特征，图形的来源都是生活中的图片，主要让学生感受知识的重要性．它是中考的热门考点，考查的形式以选择题为主．

例 1 [中考·遵义]如图 10-1 的图形中，是轴对称图形的是(　　)

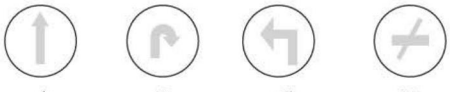


图 10-1

解题秘方：根据轴对称图形的定义想象对折后的图形，折线两旁的部分要能够完全重合．

答案：A

方法点拨：如果一个平面图形沿着一条直线对折后，直线两旁的部分能够完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．例如等腰三角形、正方形、等边三角形、等腰梯形、圆和正多边形都是轴对称图形．有的轴对称图形有不止一条对称轴．圆有无数条对称轴，圆的每条直径所在的直线都是圆的对称轴．此考点通常与中心对称图形结合进行考查．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 平移

链接中考» 平移是一种图形变换的方式，应熟练掌握平移的条件，理解平移的特征：平移前后图形的大小和形状不发生变化．平移也是近几年中考的热点，题型多以选择题、填空题或作为综合题中的一个小题形式出现．主要考查是否能判断出平移的基本图形、平移后形成的图形，能够作出平移后的图形，利用平移的特征计算角度、面积或长度．

例 2 ［中考·舟山］如图 10−2 所示，将三角形 ABC 沿 BC 方向平移 2 cm 得到三角形 DEF，若三角形 ABC 的周长为 16 cm，则四边形 $ABFD$ 的周长为（　　）

A. 16 cm　B. 18 cm　C. 20 cm　D. 22 cm

解：根据题意，将周长为 16 cm 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移 2 cm 得到三角形 DEF，

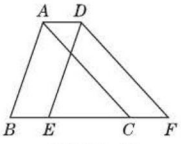


图 10−2

$\therefore AD=CF=2$ cm，$DF=AC$.

又 $\because AB+BC+AC=16$ cm，

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 的周长 $=AD+AB+BF+DF=20$ cm. 故选 C.

答案：C

专题三 轴对称图形及中心对称图形的识别

链接中考» 轴对称图形与中心对称图形的识别是中考的一个热点，可将生活中的热点图案、数学中的基本图形以及文字、字母等作为背景材料进行考查，属于简单题，考查形式以选择题为主．

例 3 ［中考·济南］如图 10−3 的图标中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）


A　　B　　C　　D

图 10−3

答案：C

技巧点拨：判断图形是否为中心对称图形时，可以用倒置观察法看图形是否保持不变．判断图形是否为轴对称图形时，可以用反面观察法看图形是否保持不变．

专题四 图形的全等

链接中考» 图形的轴对称、平移、旋转都是全等变换，其中图形全等的性质与图形变换的性质相同，关键是找准对应关系．

例 4 如图 10−4，已知 $\triangle ABD\cong\triangle CDB$，$\angle ABD=\angle CDB$. 写出其对应边和对应角．

解题秘方：根据图形的位置特征确定对应角和对应边．

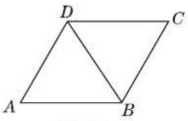


图 10−4

解：BD 与 DB，AD 与 CB，AB 与 CD 是对应边；$\angle A$ 与 $\angle C$，$\angle ABD$ 与 $\angle CDB$，$\angle ADB$ 与 $\angle CBD$ 是对应角．

方法点拨：利用图形的位置特征确定对应边和对应角时，要抓住对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边；当全等三角形的两组对应边（角）已确定时，剩下的一组边（角）就是对应边（角）．

方法必会

专题五 分类讨论思想

专题解读» 当图形的位置不确定时，往往要进行分类讨论，在本章中，分类讨论思想主要体现在对称轴不确定、平移或旋转的方向不确定、旋转中心不确定的情况．

例 5 如图 10−5，若正方形 $EFGH$ 由正方形 $ABCD$ 绕某点旋转得到，则可以作为旋转中心的是（　　）

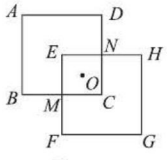


图 10−5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A.M 或 O 或 N　　B.E 或 O 或 C

C.E 或 O 或 N　　D.M 或 O 或 C

解：若以 M 为旋转中心，把正方形 $ABCD$ 按顺时针方向旋转 $90°$，A 点对应点为 H，B 点对应点为 E，C 点对应点为 F，D 点对应点为 G，则可得到正方形 $HEFG$；若以 O 为旋转中心，把正方形 $ABCD$ 旋转 $180°$，A 点对应点为 G，B 点对应点为 H，C 点对应点为 E，D 点对应点为 F，则可得到正方形 $GHEF$；若以 N 为旋转中心，把正方形 $ABCD$ 按逆时针方向旋转 $90°$，A 点对应点为 F，B 点对应点为 G，C 点对应点为 H，D 点对应点为 E，则可得到正方形 $FGHE$.

答案：A

方法点拨：对于旋转问题，旋转前后两图形全等，即对应角相等，对应线段相等；对应点与旋转中心的连线的夹角等于旋转角.

专题六 转化思想

专题解读» 本章的转化思想主要体现在用全等图形的性质说明线段或角相等，利用平移、旋转的特征解决问题.

例 6　如图 10-6 是某公园里一处长方形风景欣赏区 $ABCD$，长 AB=50 米，宽 BC=25 米，为方便游人观赏，公园特意修建了如图所示的小路（图中非阴影部分），小路的宽均为 1 米，小明沿着小路的中间，从出口 A 到出口 B 所走的路线（图中虚线）长为（　　）

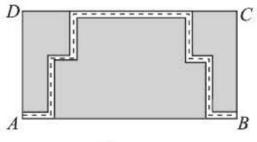


图 10-6

A.100 米　B.99 米　C.98 米　D.74 米

解：根据平移不改变线段的长度，得出路线可以从横向与纵向分析，横向距离等于 AB，纵向距离等于（AD-1）×2，所以从出口 A 到出口 B 所走的路线（图中虚线）长为 50+（25-1）×2=98（米）.

答案：C

专题七 从特殊到一般的思想

专题解读» 利用图形变换中的全等关系，通过变换把图形从一个位置变换到另一个位置，研究不同图形结构间的内在联系，将特殊图形中的结论推广到一般图形，得出具有代表性的一般结论.

例 7　如图 10-7 ①，△ ABC 和△ CDE 都是等边三角形，将等边三角形 CDE 绕点 C 按顺时针方向旋转，分别得到图 10-7 ②～⑦.

（1）在图 10-7 ① 中，AD=BE 成立吗？请说明理由.

（2）在图 10-7 ②～⑦ 中，AD=BE 成立吗？为什么？

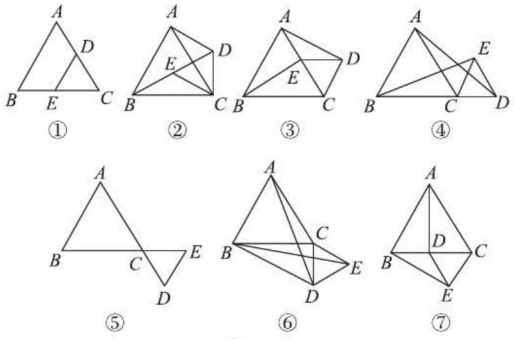


图 10-7

解：（1）成立.

理由如下：

∵△ ABC 和△ CDE 都是等边三角形，

∴ AC=BC，DC=EC.

∴ AC-DC=BC-EC，即 AD=BE.

（2）在图 10-7 ②～⑦中，AD=BE 仍成立.

理由如下：

在图 10-7 ②③④⑥⑦ 中，由旋转可知△ BCE ≌△ ACD，故 AD=BE.

在图 10-7 ⑤中，由于点 A，C，D 共线，点 B，C，E 共线，且 AC=BC，DC=EC，

故 AC+DC=BC+EC，即 AD=BE.

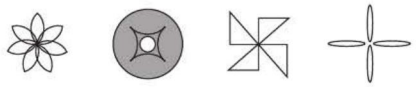
方法点拨：根据旋转的特征，三角形旋转到任何位置都与原三角形全等，在三角形旋转的过程中，准确判断两个三角形的对应关系是解题关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见 228 页

题型 1：图形的识别

1. 在学习《图形变换的简单应用》这一节时，老师要求同学们利用图形变换设计图案．下列设计的图案中，是中心对称图形但不是轴对称图形的是（　　）．

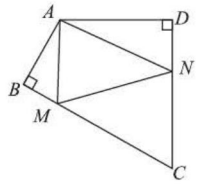


A　　B　　C　　D

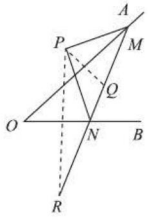
题型 2：轴对称

2. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，$\angle B=\angle D=90°$，在 BC，CD 上分别找一点 M，N，当 $\triangle AMN$ 的周长最小时，$\angle AMN+\angle ANM$ 的度数为（　　）

A.130°　　B.120°　　C.110°　　D.100



（第 2 题）



（第 3 题）

题型 3：利用图形变换特征解题

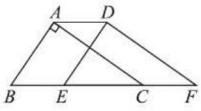
3. 如图，点 P 是 $\angle AOB$ 外的一点，点 M，N 分别是 $\angle AOB$ 两边上的点，点 P 关于 OA 的对称点 Q 恰好落在线段 MN 上，点 P 关于 OB 的对称点 R 落在 MN 的延长线上，若 $PM=2.5$ cm，$PN=3$ cm，$MN=4$ cm，则线段 QR 的长为（　　）

A.4.5 cm　　B.5.5 cm

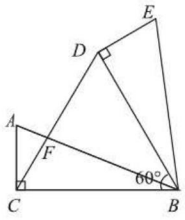
C.6.5 cm　　D.7 cm

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，将 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 向右平移 2 个单位长度得到 $\triangle DEF$，连结 AD，则下列结论 ① $AC//DF$；② $ED\perp DF$；③ 四边形 $ABFD$ 的周长是 16．其中正确的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.0



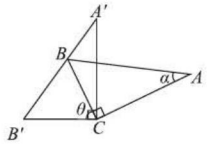
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=5$cm，$BC=12$cm，$AB=13$cm，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60°，得到 $\triangle EBD$，连结 DC 交 AB 于点 F，则 $\triangle ACF$ 与 $\triangle BDF$ 的周长之和为_____cm.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=\alpha$，以点 C 为旋转中心将 $\triangle ABC$ 旋转到 $\triangle A'B'C$ 的位置，旋转角为 θ，点 B 恰好落在 $A'B'$ 上，求旋转角 θ 的大小．（用 α 表示）．

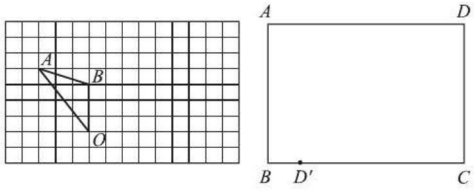


（第 6 题）

题型 4：利用图形的变换作图

7.（1）如图①，每个小方格的边长为 1 个单位长度，请将 $\triangle OAB$ 绕 O 顺时针旋转 90°，画出旋转后的 $\triangle OA'B'$．

（2）折纸：有一张长方形纸片 $ABCD$，如图②，要将点 D 沿某条直线翻转 180°，恰好落在 BC 边上的点 D' 处，请在图中作出该直线．



①　　②

（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 10 章测试卷 答案见 229 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

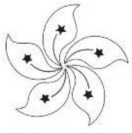
1. 下列标志中，是旋转对称图形但不是轴对称图形的有（　　）



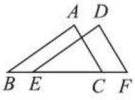
A. 2 个　B. 3 个　C. 4 个　D. 5 个

2. 如图所示的图案绕旋转中心旋转后能够与自身重合，那么它的旋转角可能是（　　）

A. 60°　B. 90°　C. 72°　D.120°



（第 2 题）



（第 4 题）

3. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

A. 等边三角形　B. 长方形

C. 等腰梯形　D. 平行四边形

4. 如图所示，△ ABC 平移后得到△ DEF，已知∠ B=35°，∠ A=85°，则∠ DFE =（　　）

A.60°　B.35°　C.120°　D.85°

5. 下列说法正确的是（　　）

A. 平移不改变图形的形状和大小，而旋转改变图形的形状和大小

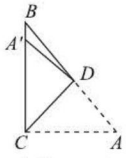
B. 平移和旋转的共同点是改变图形的位置

C. 图形可以向某方向平移一定距离，也可以向某方向旋转一定距离

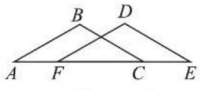
D. 由平移得到的图形也一定可由旋转得到

6. 如图，在△ ABC 中，∠ ACB=90°，∠ B=40°，将其折叠，使点 A 落在边 CB 上 A' 处，折痕为 CD，则∠ $A'DB$=（　　）

A.40　B.30°　C.20°　D.10°



（第 6 题）

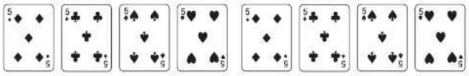


（第 7 题）

7. 如图，△ ABC ≌△ FDE，AB=FD，BC=DE，AE=20 cm，FC=10 cm，则 AF 的长是（　　）

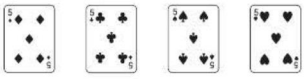
A.10 cm　B.30 cm　C.8 cm　D.5 cm

8. 已知如图①所示的四张牌，若将其中一张牌旋转 180° 后得到图②．则旋转的牌是（　　）



①　②

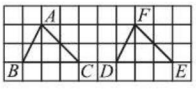
（第 8 题）



A　B　C　D

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 如图，△ FDE 是由△ ABC 平移得到的（小正方形的边长为 1），线段 CA 的对应线段是线段_____；∠ ABC 的对应角是_____；△ ABC 平移的方向是_____，平移的距离是_____.



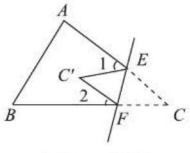
（第 9 题）



（第 10 题）

10. 小强从镜子中看到的电子表的读数如图所示，则电子表的实际读数是_____.

11. 如图，在△ ABC 中，∠ A=80°，∠ B=60°，将△ ABC 沿 EF 对折，点 C 落在 C' 处，如果∠ 1=50°，那么∠ 2=_____.



（第 11 题）

12. 若△ ABC ≌△ DEF，且∠ A = ∠ D，∠ B = ∠ E，请写出一组对应边：_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

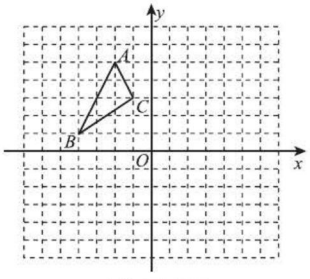
13.（10分）利用图中的网格线（最小的正方形的边长为1）画图：

（1）将△ABC向右平移5个单位长度得到△$A_1B_1C_1$；

（2）作出△ABC关于x轴对称的△$A_2B_2C_2$；

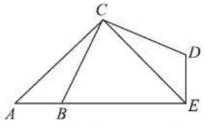
（3）作出△ABC关于原点O对称的△$A_3B_3C_3$；

（4）将△ABC绕点A顺时针旋转90°得到△AB_4C_4.



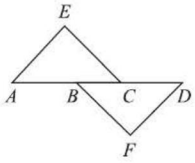
（第13题）

14.（10分）如图，已知△ACE是等腰直角三角形，∠ACE=90°，B为AE上一点，△ABC经过旋转到达△EDC的位置，问：（1）旋转中心是哪个点？旋转了多少度？（2）若已知∠ACB=20°，求∠CDE，∠DEB的度数.



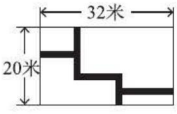
（第14题）

15.（10分）如图，已知△ACE≌△DBF，CE=BF,AE=DF,AD=8,BC=2.（1）求AC的长度；（2）试说明CE//BF.



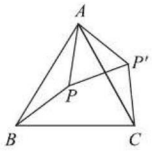
（第15题）

16.（10分）如图，某居民小区有一长方形地，居民想在长方形地内修筑同样宽的两条小路，余下部分绿化，道路的宽为2米，则绿化的面积为多少平方米？



（第16题）

17.（12分）如图，P为等边三角形ABC内的一点，将△ABP绕点A逆时针旋转60°后能与△ACP'重合，如果AP=3，试问PP'是多少？为什么？



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第6章 一元一次方程

6.1 从实际问题到方程

【两年模拟兵法】

1. A **2.** A **3.** B **4.** $-\frac{1}{3}$

5. **解**:(1)将 $x=6$ 分别代入方程的左边和右边,得

左边 $=2\times6-3=9$,右边 $=5\times(6-3)=15$,

因为左边≠右边,所以 $x=6$ 不是方程的解.

将 $x=4$ 分别代入方程的左边和右边,得

左边 $=2\times4-3=5$,右边 $=5\times(4-3)=5$,

因为左边 = 右边,所以 $x=4$ 是方程的解.

(2)将 $x=3$ 分别代入方程的左边和右边,得

左边 $=4\times3+5=17$,右边 $=8\times3-3=21$,

因为左边≠右边,所以 $x=3$ 不是方程的解.

将 $x=2$ 分别代入方程的左边和右边,得

左边 $=4\times2+5=13$,右边 $=8\times2-3=13$,

因为左边 = 右边,所以 $x=2$ 是方程的解.

6. **解**:因为 $y=1$ 是方程 $my=y+2$ 的解.

所以 $m=1+2=3$.

所以 $m^2-3m+1=3^2-3\times3+1=1$.

7. **解**:(1)设售出成人票 x 张,

则 $10x+6(128-x)=912$.

(2)设原正方形花圃的边长为 x m.

则 $4(x+2)=28$.

8. **解**:由 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2x-a=0$ 的解,得 $a=4$,

由 a 是关于 x 的方程 $3x+2=b$ 的解,得 $b=14$,

所以 $a-2b=4-2\times14=-24$.

9. **解**:(1)设甲班植树 y 株.

由甲班植树的株数比乙班多 20%,

得 $y=(1+20\%)x$.

由乙班植树的株数比甲班的一半多 10 株,得 $x=\frac{1}{2}y+10$,整理得 $y=2(x-10)$.

所以两个式子是 $(1+20\%)x$ 和 $2(x-10)$.

(2)由(1)可得 $(1+20\%)x=2(x-10)$.

6.2 解一元一次方程

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B **3.** C **4.** $x=0$ 或 $x=1$

5. $7x-6x=300\times2-6$

6. **解**:(1)$\frac{x}{3}-2=-\frac{x}{2}+1$.

去分母,得 $2x-12=-3x+6$. 移项,得 $2x+3x=6+12$.

合并同类项,得 $5x=18$. 系数化为 1,得 $x=\frac{18}{5}$.

(2)$\frac{x}{3}-2=-\left(-\frac{x}{2}+1\right)$

去括号,得 $\frac{x}{3}-2=\frac{x}{2}-1$.

去分母,得 $2x-12=3x-6$.

移项,得 $2x-3x=12-6$.

合并同类项,得 $-x=6$.

系数化为 1,得 $x=-6$.

(3)$\frac{x}{3}-2=-\frac{x}{2}+1-1$.

化简,得 $\frac{x}{3}-2=-\frac{x}{2}$.

去分母,得 $2x-12=-3x$.

移项,得 $2x+3x=12$.

合并同类项,得 $5x=12$.

系数化为 1,得 $x=\frac{12}{5}$.

7. **解**:(1)去括号、合并同类项,得 $5x-45=0$,

移项,得 $5x=45$,

系数化为 1,得 $x=9$.

(2)去括号,得 $3x-9-10x+14=6-6x$,

移项,得 $3x-10x+6x=6+9-14$,

合并同类项,得 $-x=1$.

系数化为 1,得 $x=-1$.

(3)两边乘以 6,得 $2(2x+1)-(10x+1)=6$.

去括号、移项、合并同类项,得 $-6x=5$.

系数化为 1,得 $x=-\frac{5}{6}$.

(4)根据分数的基本性质,得 $\frac{10x}{7}-\frac{17-20x}{3}=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两边乘以21,得$30x-7(17-20x)=21$,

去括号、移项、合并同类项,得$170x=140$,

系数化为1,得$x=\frac{14}{17}$.

(5)去括号,得$\frac{x}{5}-1+3-x=1$.

移项,得$\frac{x}{5}-x=1+1-3$.

合并同类项,得$-\frac{4}{5}x=-1$.

系数化为1,得$x=\frac{5}{4}$.

(6)两边乘以9,得$\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]+8=9$.

移项、合并同类项,得$\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6\right]=1$.

两边乘以7,得$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)+6=7$.

移项、合并同类项,得$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+4\right)=1$.

两边乘以5,得$\frac{x+2}{3}+4=5$.

移项、合并同类项,得$\frac{x+2}{3}=1$.

两边乘以3,得$x+2=3$.

移项、合并同类项,得$x=1$.

8. **解**:根据这个同学的做法,将$x=1$代入方程

$2(2x-a)=2x+1-1$,得$a=1$.

代入原方程,得$\frac{2x-1}{3}=\frac{2x+1}{6}-1$,

解得$x=-\frac{3}{2}$.

9. **解**:由$3x=\frac{x+1}{2}+2$,解得$x=1$.

把$x=-1$代入$x+\frac{k}{3}=\frac{x-k}{2}$中,

得$-1+\frac{k}{3}=\frac{-1-k}{2}$,解得$k=\frac{3}{5}$.

10. **解**:设无风时飞机飞行的速度为x km/h.

根据题意可得$5.5(x+24)=6(x-24)$,

解得$x=552$.

则$6\times(552-24)=3\ 168$(km).

答:A,B两城市间的航程为3 168km.

11. **解**:设骑摩托车的人经过x h追上骑自行车的人,由题意,得$15(x+2)+180=15\times3x$. 解得$x=7$.

答:骑摩托车的人经过7 h追上骑自行车的人.

6.3 实践与探索

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:设他答对了x道题,则可列方程$5x-(20-x)=76$,解得$x=16$.

2. D **3.** B

4. $9x-11=6x+16$

5. **解**:(1)每月用水量未超过20吨时,该户应缴纳的水费为$1.9x$元,超过20吨时,该户应缴纳的水费为$20\times1.9+(x-20)\times2.8=(2.8x-18)$(元).

(2)由题意可知该户5月份的用水量超过20吨,设该户5月份用水y吨,

由题意可得$2.8y-18=2.2y$,

解得$y=30$.

答:该户5月份用水30吨.

6. **解**:**方法一**:由题意可知,做1件上衣用$\frac{3}{2}$米布料,做1条裤子用1米布料.

设600米布料能做x套学生服,

则$\frac{3}{2}x+x=600$,解得$x=240$.

则$\frac{3}{2}x=360$.

答:用360米布料做上衣,240米布料做裤子,才能恰好配套. 共能生产240套.

方法二:设用x米布料做上衣,

则用$(600-x)$米布料做裤子.

根据题意,得$\frac{x}{3}\times2=\frac{600-x}{3}\times3$,

解得$x=360$.

则$600-x=240$,$\frac{x}{3}\times2=240$.

答:用360米布料做上衣,240米布料做裤子,才能恰好配套. 共能生产240套.

7. **解**:设应该先安排x人做2 h.

可列方程为$2x+4(x+3)=60\times\frac{4}{5}$,

解得$x=6$.

答:应该先安排6人做2 h.

8. **解**:设九年级一班胜了x场,则负了$(8-x)$场,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由题意可列方程为 $2x+(8-x)=13$，

解得 $x=5$. 则 $8-x=3$.

答：九年级一班胜了 5 场，负了 3 场.

9. 解：(1)方案一：$0.95x$ 元；

方案二：$(0.9x+300)$ 元.

(2)方案一：$0.95\times5\,880=5\,586$(元)；

方案二：$0.9\times5\,880+300=5\,592$(元).

因为 $5\,586<5\,592$，所以方案一更省钱.

(3)当 $0.95x=0.9x+300$ 时，两种方案支出的金额相同，此时 $x=6\,000$.

答：当购买商品的金额为 6 000 元时，两种方案支出的金额相同.

10. 解：(1)150；240

(2)有这种可能，设小刚购买跳绳 x 根，

则 $25\times80\%\,x=25(x-2)-5$，解得 $x=11$.

答：小刚购买跳绳 11 根.

素养提分应用篇

【同类变式】

2. 解：(1)不能. 理由：$\frac{15\times3}{60}\times60=45$(分钟)，

45 分钟 >42 分钟，

因此这 8 人不都能及时到达飞机场.

(2)能. 理由：

方法一：设第二批人步行 x 千米，

依题意，得 $\frac{x}{5}=\frac{15+15-x}{60}$，

化简方程，得 $13x=30$，$x=\frac{30}{13}$.

所以 $\frac{\frac{30}{13}}{5}+\frac{15-\frac{30}{13}}{60}=\frac{35}{52}$(小时)，

$\frac{35}{52}$ 小时 $=40\frac{5}{13}$ 分钟 <42 分钟，

因此这 8 人都能及时到达飞机场.

方法二：设第二批人步行 x 小时，依题意，得 $5x+60x=15\times2$，即 $65x=30$.

所以 $x=\frac{6}{13}$，

所以 $\frac{6}{13}+\frac{15-5\times\frac{6}{13}}{60}=\frac{35}{52}$(小时)，

$\frac{35}{52}$ 小时 $=40\frac{5}{13}$ 分钟 <42 分钟，

因此这 8 人都能及时到达飞机场.

方法三：设这辆小汽车把 8 人都送到飞机场共用 x 小时，依题意，得 $(60+5)\left[x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{15}{60}\right)\right]=15\times2$，

解得 $x=\frac{35}{52}$.

$\frac{35}{52}$ 小时 $=40\frac{5}{13}$ 分钟 <42 分钟，

因此这 8 人都能及时到达飞机场.

3. 解：设月初的进货价为 a 元，月初的利润率为 x，则月初的销售价为 $a(1+x)$ 元，月末的进货价为 $a(1-8\%)$ 元，销售价为 $a(1-8\%)(1+x+10\%)$ 元. 根据题意列方程得 $a(1+x)=a(1-8\%)(1+x+10\%)$.

因为 $a>0$，两边同时除以 a，得 $1+x=(1-8\%)\cdot(1+x+10\%)$，解得 $x=15\%$.

答：月初的利润率是 15%.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：将 $y=3$ 代入方程 $6+\frac{1}{4}(m-y)=2y$，

得 $6+\frac{1}{4}(m-3)=6$.

解得 $m=3$.

将 $m=3$ 代入方程 $2m(x-1)=(m+1)(3x-4)$，

得 $6(x-1)=4(3x-4)$.

解得 $x=\frac{5}{3}$.

2. 解：根据该同学的做法，去分母，

得 $2x-1=x+a-2$. 解得 $x=a-1$.

因为 $x=2$ 是方程的解，所以 $a=3$.

把 $a=3$ 代入原方程，得 $\frac{2x-1}{3}=\frac{x+3}{3}-2$，

解得 $x=-2$.

3. 解：由 $2(x-1)=3m-1$，解得 $x=\frac{3m+1}{2}$.

由 $3x+2=-2(m+1)$，解得 $x=\frac{-2m-4}{3}$.

因为两个方程的解互为相反数，

所以 $\frac{3m+1}{2}+\frac{-2m-4}{3}=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

移项,得$\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}m=-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$.

合并同类项,得$\frac{5}{6}m=\frac{5}{6}$.

系数化为1,得$m=1$.

4. **解**:(1)$\neq 1$;$=3$

(2)由(1)可知,方程为$(m-1)x-3=0$,

则$x=\frac{3}{m-1}$. 因为此方程的解为整数,所以$\frac{3}{m-1}$为整数.

因为m为整数,所以$m-1=-3,-1,1$或3.

所以$m=-2,0,2$或4.

5. **解**:(1)移项,得$\frac{11}{9}x-\frac{2}{9}x=-\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$,

合并同类项,得$x=-1$.

(2)原方程可变形为$y-0.5(y-1)=2-0.2(y+2)$,

去括号,得$y-0.5y+0.5=2-0.2y-0.4$,

移项、合并同类项,得$0.7y=1.1$,

系数化为1,得$y=\frac{11}{7}$.

(3)原方程可化为$278(x-3)+463\times 2(x-3)-888\times 7(x-3)=0$,

逆用乘法分配律,得$(278+463\times 2-888\times 7)\times(x-3)=0$,

所以$x=3$.

(4)去括号,得$\frac{x}{4}-1-3-x=2$,移项、合并同类项,得

$-\frac{3}{4}x=6$.

所以$x=-8$.

(5)将$(x-9)$看成一个整体,去括号,得$x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}(x-9)=\frac{1}{9}(x-9)$.

化简,得$\frac{2}{3}x=0$,所以$x=0$.

6. **解**:设学校与农场的距离是x千米.

由题意,得$\frac{x-2-4\times 1.5}{4}=\frac{4\times 1.5+(x-2)}{6}$.

解得$x=32$.

答:学校与农场的距离是32千米.

7. **解**:设十位上的数字是x,则个位上的数字是$x-2$,百位上的数字是$17-2x$.

依题意,得$10\times(x-2)+x+10\times(17-2x)+x=110$.

解得$x=5$.

则$x-2=5-2=3$,$17-2x=17-2\times 5=7$.

答:这个三位数是753.

8. **解**:(1)因为$2\ 000\times 90\%=1\ 800$(元)$>1\ 340$元,

所以购物用了1 340元的未优惠.

又因为$5\ 000\times 90\%=4\ 500$(元)$<4\ 660$元,

所以购物用了4 660元的有两个等级优惠.

设其售价为x元,

依题意,得$5\ 000\times 90\%+(x-5\ 000)\times 80\%=4\ 660$,

解得$x=5\ 200$.

$1\ 340+5\ 200=6\ 540$(元).

所以若不打折,共需6 540元钱.

(2)共节省$6\ 540-(1\ 340+4\ 660)=540$(元).

9. **解**:(1)设原计划租x辆45座客车.

根据题意,得$45x+15=60(x-1)$.

解得$x=5$. 则$45x+15=45\times 5+15=240$.

答:这批游客有240人,原计划租5辆45座客车.

(2)租45座客车:$240\div 45\approx 6$(辆),

所以需租6辆,租金为$220\times 6=1\ 320$(元).

租60座客车:$240\div 60=4$(辆),

所以需租4辆,租金为$300\times 4=1\ 200$(元).

$1\ 200<1\ 320$.

答:租4辆60座客车合算.

【第6章测试卷】

一、**1.** B **2.** A **3.** B

4. B **点拨**:由题意得$3x+6+3x+2x=14$,解得$x=1$.

5. C **点拨**:设这个足球队胜了x场,则平了$(14-5-x)$场,根据题意,得$3x+(14-5-x)\times 1+5\times 0=19$,解得$x=5$,故选C.

6. A **7.** B

8. C **点拨**:第一次购物显然没有超过100元,即在第一次消费80元的情况下,李明实际购物的价钱只能是80元.

第二次购物消费252元,可能有两种情况,这两种情况下的折扣不同:

①李明消费超过100元但不足300元,这时候他是按照9折付款的,设第二次实际购物的价钱为x元,依题意有$0.9x=252$,解得$x=280$;

②李明消费超过300元,这时候他是按照8折付款的,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

设第二次实际购物的价钱为 y 元，依题意有 $0.8y=252$，解得 $y=315$.

综上所述，在第二次消费 252 元的情况下，他实际购物的价钱可能是 280 元，也可能是 315 元，即李明两次购物的实际价钱为 $80+280=360$(元) 或 $80+315=395$(元). 若李明一次性购买，则应付款 $360\times0.8=288$(元) 或 $395\times0.8=316$(元)，故选 C.

二、9. 4　**10.** 2；3　**11.** 20 或 25　**12.** 14

三、13. 解：(1) 去括号，得 $6-2x=-4x-20$，

移项，得 $-2x+4x=-6-20$，

合并同类项，得 $2x=-26$，

系数化为 1，得 $x=-13$.

(2) 去分母，得 $x-7-2(5x+8)=4$，

去括号，得 $x-7-10x-16=4$，

移项，得 $x-10x=7+16+4$，

合并同类项，得 $-9x=27$，

系数化为 1，得 $x=-3$.

14. 解：设“□”里的数为 m，

因为所给方程的解是 $x=2$，所以 $\frac{2+1}{2}-\frac{5\times2-m}{3}=-\frac{1}{2}$.

解得 $m=4$.

所以“□”里的数为 4.

15. 解：设该校有 x 间宿舍.

根据题意，得 $5x+30=6x-20$.

解得 $x=50$. 则 $5x+30=280$.

答：该校有 50 间宿舍，有住校学生 280 人.

16. 解：设甲、乙一起做 x 小时才能完成工作.

根据题意，得 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)x=1$.

解得 $x=\frac{11}{5}$.

答：甲、乙一起做 $\frac{11}{5}$ 小时才能完成工作.

17. 解：(1) 设走路慢的人再走 600 步时，走路快的人走了 x 步，根据题意得

$\frac{x}{100}=\frac{600}{60}$，解得 $x=1000$，

$1000-600-100=300$(步)，

即走路快的人在前面，两人相隔 300 步.

(2) 设走路快的人走了 y 个 100 步，追上了走路慢的人，根据题意得

$(100-60)y=200$，解得 $y=5$，$100\times5=500$(步)，

即走路快的人走了 500 步才能追上走路慢的人.

第 7 章　一次方程组

7.1　二元一次方程组和它的解

【两年模拟兵法】

1. B　**2.** B　**3.** B　**4.** $\frac{4}{3}$；-10

5. $\frac{4}{3}$；0　**点拨：**根据二元一次方程的定义，可以得到两个方程：$3a-3=1$，$b+1=1$，从而解得 $a=\frac{4}{3}$，$b=0$.

6. $\begin{cases}4x+5y=435,\\x-y=3\end{cases}$

7. $\begin{cases}x+y=1,\\2x-3y=7\end{cases}$　**点拨：**先写出两个形如 $ax+by$ 的式子，注意两个式子的系数比不相等，然后将 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 代入两个式子，求出式子的值，即可得到一个二元一次方程组. 本题答案不唯一.

8. 8　**点拨：**$\because\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 是关于 x,y 的二元一次方程 $mx+ny=-2$ 的一个解，

$\therefore 2m-n=-2$，

$\therefore -2m+n=2$，

$\therefore 6-2m+n=6+2=8$.

9. 1　**点拨：**$\begin{cases}2x+y=6,①\\x+2y=-3,②\end{cases}$

① + ②得 $3x+3y=3$，

$\therefore 3(x+y)=3$，$\therefore x+y=1$，$\therefore a+b=1$.

10. 解：依题意，得 $|m-2|-2=1$，

且 $m-3\neq0$，$m+1\neq0$，

解得 $m=5$.

故 m 的值是 5.

11. 解：将 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$

代入②中得 $2\times(-3)+2n=-3$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $n=\frac{3}{2}$.

将 $\begin{cases}x=-5,\\y=2\end{cases}$

代入①中得 $-5m+4=-6$,

所以 $m=2$.

故 $m^2+n^2+mn=4+\frac{9}{4}+3=\frac{37}{4}$.

12. 解:将 $x+2$ 和 $y-1$ 分别看作 a 和 b,比较两个方程组可得 $x+2=8.3$,$y-1=1.2$,

解得 $x=6.3$,$y=2.2$.

故所求方程组的解为 $\begin{cases}x=6.3,\\y=2.2.\end{cases}$

13. 解:设购买 A 型号盒子 x 个,购买 B 型号盒子 y 个,

由题意知 $2x+3y=15$,

$\because x,y$ 是非负整数,

$\therefore \begin{cases}x=0,\\y=5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6,\\y=1,\end{cases}$

$\therefore$ 当 $\begin{cases}x=0,\\y=5\end{cases}$ 时,费用为 $0\times5+5\times6=30$(元);

当 $\begin{cases}x=3,\\y=3\end{cases}$ 时,费用为 $3\times5+3\times6-4=29$(元);

当 $\begin{cases}x=6,\\y=1\end{cases}$ 时,费用为 $6\times5+1\times6-4=32$(元).

$\because 29<30<32$,

$\therefore$ 购买盒子所需要的最少费用为 29 元.

7.2 二元一次方程组的解法

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:把 y 看成已知数,x 看成未知数,解出 x 的值即可.

2. D **3.** A

4. B **点拨**:由题意可知 $x+y=0$,

则 $4x+3y=1$ 可以变形为 $4x-3x=1$,

解得 $x=1$.

则 $y=-1$.

把 $x=1$,$y=-1$ 代入 $ax-(a-1)y=3$,

得 $a+(a-1)=3$,

解得 $a=2$. 故选 B.

5. 2,1 **点拨**:根据同类项的定义,可得 $\begin{cases}m-1=n,\\m+n=3,\end{cases}$ 解方程组即可.

6. $\frac{4}{3}$;$\frac{2}{3}$ **点拨**:由题意得 $\begin{cases}x-2y=0,\\5x-7y-2=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=\frac{2}{3}.\end{cases}$

7. 3;−4 **点拨**:由题意,得 $\begin{cases}5a+2b=7,\\8a+5b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-4.\end{cases}$

8. −4 **点拨**:根据新定义列出方程组 $\begin{cases}a+2b-1=8,\\-3a+3b-1=-1,\end{cases}$ 求出 a,b 的值,再用新定义计算即可.

9. 2

10. 解:(1) $\begin{cases}x+2y=0,\ ①\\3x+4y=6.\ ②\end{cases}$

由①,得 $x=-2y$, ③

把③代入②,得 $3\times(-2y)+4y=6$,

解得 $y=-3$.

把 $y=-3$ 代入③,得 $x=6$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=6,\\y=-3.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y+1}{3}=1,①\\3x+2y=10.②\end{cases}$

由①,得 $3x-2y=8$ ③,

② + ③,得 $6x=18$,解得 $x=3$.

把 $x=3$ 代入②,得 $3\times3+2y=10$,

解得 $y=\frac{1}{2}$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

11. 解:由题意,得方程组 $\begin{cases}4x-y=5,\\3x+y=9.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

把$\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$代入$\begin{cases}ax+by=-1,\\3ax-4by=18,\end{cases}$

得$\begin{cases}2a+3b=-1,\\6a-12b=18.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

12. 解：设每节火车车皮平均装物资 x 吨，每辆汽车平均装物资 y 吨，根据题意，得$\begin{cases}2x+5y=130,\\4x+3y=218.\end{cases}$解这个方程组，得$\begin{cases}x=50,\\y=6.\end{cases}$

答：每节火车车皮平均装物资 50 吨，每辆汽车平均装物资 6 吨.

*7.3 三元一次方程组及其解法

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** C **4.** 7；2；19

点拨：根据题意得$\begin{cases}3x+y+z=42,\\12=2x-y,\\x+y+z=4x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=7,\\y=2,\\z=19.\end{cases}$

5. 52 **点拨**：根据题意得$\begin{cases}a-b+c=4,\\a+b+c=8,\\4a+2b+c=25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=5,\\b=2,\\c=1.\end{cases}$所以该式子为 $5x^2+2x+1$.

当 $x=3$ 时，其值为 52.

6. $\frac{1}{3}$ **点拨**：由$\begin{cases}4x-3y-6z=0,\\x+2y-7z=0\end{cases}$

可得$\begin{cases}x=3z,\\y=2z.\end{cases}$

因为 $xyz\neq0$，

所以$\frac{x-y+z}{x+y+z}=\frac{3z-2z+z}{3z+2z+z}=\frac{1}{3}$.

7. 解：(1) 设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k$，

则 $a=2k,b=3k,c=5k$.

把它们代入 $2a+b+3c=88$，

得 $4k+3k+15k=88$，

解得 $k=4$.

所以 $a=8,b=12,c=20$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}a=8,\\b=12,\\c=20.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}x+y=1,①\\y+z=2,②\\z+x=3.③\end{cases}$

①+②+③，

得 $2x+2y+2z=6$，即 $x+y+z=3$. ④

④−①，得 $z=2$；

④−②，得 $x=1$；

④−③，得 $y=0$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=0,\\z=2.\end{cases}$

8. 解：设第一道工序安排 x 人，第二道工序安排 y 人，第三道工序安排 z 人.

根据题意，得$\begin{cases}x+y+z=63,\\300x=500y,\\300x=600z.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=30,\\y=18,\\z=15.\end{cases}$

答：为使每天能生产出最多的产品，第一道工序应安排 30 人，第二道工序应安排 18 人，第三道工序应安排 15 人.

9. 解：设购买教学用具 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 各一件分别需 a 元，b 元，c 元，d 元，e 元，

则$\begin{cases}a+3b+4c+5d+6e=1\,992,\\a+5b+7c+9d+11e=2\,984,\end{cases}$

整理，得

$\begin{cases}(a+b+c+d+e)+(2b+3c+4d+5e)=1\,992,\\(a+b+c+d+e)+2(2b+3c+4d+5e)=2\,984.\end{cases}$

设 $a+b+c+d+e=x,2b+3c+4d+5e=y$，

则原方程组可变形为$\begin{cases}x+y=1\,992,\\x+2y=2\,984.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}x=1\,000,\\y=992,\end{cases}$即$a+b+c+d+e=1\,000$.

答:购买每种教学用具各一件共需1 000元.

点拨:此题中分别把$a+b+c+d+e$与$2b+3c+4d+5e$用x,y代替,使形式简化,体现了换元法的应用.

7.4 实践与探索

【两年模拟兵法】

1. D

2. B **点拨**:设轮船在静水中的航速为x km/h,水速为y km/h,依题意得$\begin{cases}4(x+y)=100,\\5(x-y)=100,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=22.5,\\y=2.5.\end{cases}$

3. C **4**. A

5. $\begin{cases}x+y=100\\3x+\frac{y}{3}=100\end{cases}$

6. 635 **7**. 11

8. **解**:设甲每小时加工x个零件,乙每小时加工y个零件.

根据题意,得$\begin{cases}x+y=70,\\2x+3y=180.\end{cases}$

解这个方程组,得$\begin{cases}x=30,\\y=40.\end{cases}$

答:甲每小时加工30个零件,乙每小时加工40个零件.

9. **解**:设平路有x km,坡路有y km. 根据题意,得

$\begin{cases}\frac{x}{60}+\frac{y}{30}=6.5,\\\frac{x}{50}+\frac{y}{40}=6,\end{cases}$即$\begin{cases}x+2y=390,\\4x+5y=1\,200,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=150,\\y=120.\end{cases}$

答:平路有150 km,坡路有120 km.

点拨:设平路有x km,坡路有y km,利用$\frac{\text{路程}}{\text{速度}}=\text{时间}$,根据去时汽车在平路、上坡路用的时间和=6.5 h,回时汽车在平路、下坡路用的时间和=6 h,列方程组求解.

10. **解**:(1)2;3

(2)设放入大球m个,小球n个,由题意得$\begin{cases}m+n=10,\\3m+2n=50-26,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=4,\\n=6.\end{cases}$

答:放入大球4个,小球6个.

11. **解**:设A种原料需x千克,B种原料需y千克. 根据题意,有

$\begin{cases}x+y=11\,000,\\50x+40y=50(1+10\%)x+40(1-15\%)y,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=6\,000,\\y=5\,000.\end{cases}$

答:A种原料需6 000千克,B种原料需5 000千克.

12. **解**:(1)设跳绳的单价为x元,毽子的单价为y元,

由题意得$\begin{cases}30x+60y=720,\\10x+50y=360,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=16,\\y=4.\end{cases}$

答:跳绳的单价为16元,毽子的单价为4元.

(2)设该店的商品按原价的a折销售.

$(16+4)\times\frac{a}{10}\times100=1\,800$,解得$a=9$.

答:该店的商品按原价的9折销售.

13. **解**:(1)设七年级(1)班有x人,七年级(2)班有y人,

由题意,得$\begin{cases}12x+10y=1\,118,\\8(x+y)=816,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=49,\\y=53.\end{cases}$

答:七年级(1)班有49人,七年级(2)班有53人.

(2)七年级(1)班节约的费用为$(12-8)\times49=196$(元),

七年级(2)班节约的费用为$(10-8)\times53=106$(元).

素养提分整合篇

【好题必解】

1. A **2**. D **3**. 3 **4**. C **5**. B

6. **解**:由已知可得$\begin{cases}5x-2y=3,\\x-4y=-3.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

把$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$代入剩下的两个方程组成的方程组

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\begin{cases} mx+5y=4, \\ 5x+ny=1, \end{cases}$ 得到 $\begin{cases} m+5=4, \\ 5+n=1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=-1, \\ n=-4. \end{cases}$

7. 0

8. $\begin{cases} 2x+2y=180 \\ y-x=30 \end{cases}$

9. 10

10. 解：设 A，B 两种产品分别销售 x 件、y 件，

则 $\begin{cases} 5x+7y=2060, \\ (5-2)x+(7-4)y=1020, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=160, \\ y=180. \end{cases}$

答：A，B 两种产品分别销售 160 件、180 件.

11. 解：设中性笔和笔记本的单价分别是 x 元、y 元，根据题意可得：$\begin{cases} 12y+20x=112, \\ 12x+20y=144, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=6. \end{cases}$

答：中性笔和笔记本的单价分别是 2 元、6 元.

12. 解：(1) 圆规的总价为 $3.5\times1=3.5$(元).

设小丽买了自动铅笔 x 支，记号笔 y 支.

根据题意得

$\begin{cases} 2+x+y+2+1=8, \\ 6+1.5x+4y+9+3.5=28, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x+y=3, \\ 1.5x+4y=9.5. \end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

答：小丽买了自动铅笔 1 支，记号笔 2 支.

(2) 从表格中，容易求出软皮笔记本的单价为 $9\div2=4.5$(元)，

设小丽后来买了 m 本软皮笔记本和 n 支自动铅笔.

由题意得 $4.5m+1.5n=15$，即 $3m+n=10$，由题意容易知道 m，n 为正整数，

所以满足题意的解有 $\begin{cases} m=1, \\ n=7, \end{cases}$ $\begin{cases} m=2, \\ n=4, \end{cases}$ $\begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases}$

答：有三种购买方案：软皮笔记本 1 本，自动铅笔 7 支；软皮笔记本 2 本，自动铅笔 4 支；软皮笔记本 3 本，自动铅笔 1 支.

【第 7 章测试卷】

一、1. D **2.** A **3.** D **4.** D **5.** A **6.** A **7.** A **8.** C

二、9. -4 **10.** $\frac{1}{5}$

11. $\begin{cases} 9x=11y \\ (10y+x)-(8x+y)=13 \end{cases}$

12. 1

三、13. 解：(1) $\begin{cases} x-2y=1, ① \\ 3x-5y=8, ② \end{cases}$

② $-$ ① $\times3$，得 $y=5$.

把 $y=5$ 代入①，得 $x=11$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=11, \\ y=5. \end{cases}$

(2) 整理方程组，得 $\begin{cases} 3x-2y=-8, ① \\ 3x+5y=-1, ② \end{cases}$

② $-$ ①，得 $7y=7$，解得 $y=1$.

把 $y=1$ 代入①，得 $x=-2$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1. \end{cases}$

14. 解：$\because$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-3 \end{cases}$ 是关于 x，y 的二元一次方程 $3x=y+a$ 的解，$\therefore 3\times2=-3+a$. 解得 $a=9$.

$\therefore a(a-1)=9\times(9-1)=72$.

15. 解：根据题意，得 $\begin{cases} 1+p+q=2, \\ 4-2p+q=2, \end{cases}$

即 $\begin{cases} p+q=1, \\ -2p+q=-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=1, \\ q=0. \end{cases}$

所以 $y=x^2+x$.

当 $x=-3$ 时，$y=x^2+x=(-3)^2-3=6$.

16. 解：(1) 设该轮船在静水中的速度是 x 千米/小时，水流速度是 y 千米/小时.

依题意可得 $\begin{cases} 6(x+y)=90, \\ (6+4)(x-y)=90, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=12, \\ y=3. \end{cases}$

答：该轮船在静水中的速度是 12 千米/小时，水流速度是 3 千米/小时.

(2) 设甲、丙两地相距为 a 千米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

依题意可得$\frac{a}{12+3}=\frac{90-a}{12-3}$,解得$a=\frac{225}{4}$.

答:甲、丙两地相距$\frac{225}{4}$千米.

17. 解:(1)$5\,000-92\times40=1\,320$(元).

答:甲、乙两校联合起来购买服装,比各自购买服装共可以节省1 320元.

(2)设甲、乙两校分别有x名、y名学生准备参加演出,由题意,得$\begin{cases}x+y=92,\\50x+60y=5\,000,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=52,\\y=40.\end{cases}$

答:甲、乙两校分别有52名、40名学生准备参加演出.

(3)∵甲校有10人不能参加演出,

∴甲校参加演出的人数为$52-10=42$(人).

若两校联合起来购买服装,则需要$50\times(42+40)=4\,100$(元),

此时比各自购买服装可以节省$(42+40)\times60-4\,100=820$(元).

但如果两校联合起来购买91套服装,只需$40\times91=3\,640$(元),

此时又比两校联合起来购买服装节省$4\,100-3\,640=460$(元),

因此,最省钱的购买服装方案是两校联合起来购买91套服装(即比实际人数多购买9套).

第8章 一元一次不等式

8.1 认识不等式

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** D

4. C **5.** C

6. (1)$\frac{1}{3}x+2y\leqslant0$;

(2)$30\%(a-b)\geqslant-6$;

(3)$5x-6\geqslant0$

7. (1)<; (2)>; (3)<; (4)>

8. 解:(1)①<;②<;③>;④>;⑤>

(2)当$n=1$或2时,$n^{n+1}<(n+1)^n$;当$n\geqslant3$时,$n^{n+1}>(n+1)^n$.

(3)>

8.2 解一元一次不等式

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D **3.** C **4.** D **5.** C

6. (1)> (2)> (3)< (4)< (5)> (6)<

7. $x\geqslant\frac{10}{9}$ **8.** 10 **9.** $x<8$

10. 解:错误步骤的序号是①②⑤. 正确的解答过程如下:

去分母,得$3(1+x)-2(2x+1)\leqslant6$.

去括号,得$3+3x-4x-2\leqslant6$.

移项,得$3x-4x\leqslant6-3+2$.

合并同类项,得$-x\leqslant5$.

两边都除以-1,得$x\geqslant-5$.

11. 解:(1)去括号,得$2x-2-3<1$.

移项,得$2x<1+3+2$.

合并同类项,得$2x<6$.

系数化为1,得$x<3$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图(1)所示.

(2)去分母,得$2(2x-1)-(9x+2)\leqslant6$.

去括号,得$4x-2-9x-2\leqslant6$.

移项,得$4x-9x\leqslant6+2+2$.

合并同类项,得$-5x\leqslant10$.

系数化为1,得$x\geqslant-2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图(2)所示.



(1) (2)

(第11题)

12. 解:$2(x+1)-5<3(x+1)+4$,

去括号,得$2x+2-5<3x+3+4$.

移项,得$2x-3x<3+4+5-2$.

合并同类项,得$-x<10$.

系数化为1,得$x>-10$.

所以该不等式的最小整数解为$x=-9$.

把$x=-9$代入$\frac{1}{3}x-mx=5$,得$\frac{1}{3}\times(-9)-m\cdot(-9)=5$,解得$m=\frac{8}{9}$.

所以$m^2-2m-11=\left(\frac{8}{9}\right)^2-2\times\frac{8}{9}-11=\frac{64}{81}-\frac{16}{9}-11=-\frac{971}{81}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:此题主要考查了一元一次不等式的解法和一元一次方程的解法,根据不等式的解集求出其最小整数解,再将最小整数解代入方程中求出 m 的值,进而求出 $m^2-2m-11$ 的值.

13. 解:①+②,得 $4x+4y=4+a$,

所以 $x+y=1+\frac{a}{4}$.

因为 $x+y<2$,

所以 $1+\frac{a}{4}<2$,解得 $a<4$.

所以 a 的取值范围为 $a<4$.

14. 解:(1)根据题意,得 $x>6$ 且 $1.5\times6+2(x-6)<12$.

整理 $1.5\times6+2(x-6)<12$,得 $2x-3<12$. 故 x 应满足的关系式是 $x>6$ 且 $2x-3<12$.

(2)解不等式 $2x-3<12$,得 $x<7.5$.

∵ $7<7.5$,$8>7.5$,∴ 7 是不等式的解,而 8 不是.

∴ 小超家该月的用水量有可能是 7 m^3,不可能是 8 m^3.

15. 解:(1)设 A 款毕业纪念册的销售单价为 x 元,B 款毕业纪念册的销售单价为 y 元,根据题意可得 $\begin{cases}15x+10y=230,\\20x+10y=280,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=8.\end{cases}$

答:A 款毕业纪念册的销售单价为 10 元,B 款毕业纪念册的销售单价为 8 元;

(2)设购买 a 本 A 款毕业纪念册,则购买 B 款毕业纪念册 $(60-a)$ 本,根据题意可得 $10a+8(60-a)\leqslant529$,解得 $a\leqslant24.5$,则最多能购买 24 本 A 款毕业纪念册.

16. 解:(1)设该企业购买 A 种型号设备 x 台,则购买 B 种型号设备 $(10-x)$ 台.

由题意,得 $12x+10(10-x)\leqslant105$,

解得 $x\leqslant\frac{5}{2}$.

因为 x 取非负整数,所以 $x=1,2,0$.

所以共有 3 种购买方案,分别为:

方案一:购买 A 种型号设备 1 台,B 种型号设备 9 台;

方案二:购买 A 种型号设备 2 台,B 种型号设备 8 台;

方案三:不购买 A 种型号设备,购买 B 种型号设备 10 台.

(2)方案一:$1\times240+9\times200=2\,040$(t),

$1\times12+9\times10=102$(万元).

方案二:$2\times240+8\times200=2\,080$(t),

$2\times12+8\times10=104$(万元).

方案三:$10\times200=2\,000$(t),

$10\times10=100$(万元).

若该企业每月产生的污水量为 2 040 t,为了节约资金,应选择方案一.

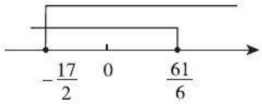
8.3 一元一次不等式组

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** A **4.** A **5.** $-\frac{1}{2}<x<0$ **6.** $a\geqslant-1$ **7.** 15

8. 解:(1)原不等式组可转化为 $\begin{cases}\frac{2(1+3x)}{7}\geqslant-7,①\\\frac{2(1+3x)}{7}\leqslant9,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\geqslant-\frac{17}{2}$,解不等式②,得 $x\leqslant\frac{61}{6}$,



(第 8(1)题)

把不等式①②的解集在数轴上表示出来,如图所示. 所以原不等式组的解集为 $-\frac{17}{2}\leqslant x\leqslant\frac{61}{6}$.

(2)解不等式①,得 $x<-3$.

解不等式②,得 $x\geqslant-2.2$.

把不等式①②的解集在数轴上表示出来,如图所示.

所以原不等式组无解.



(第 8(2)题)

点拨:(1)将连写不等式组改写成用"{"表示的不等式组来求解. (2)可根据分数的基本性质将不等式②分母中的小数化为整数后再求解.

9. 解:解方程组,得 $\begin{cases}x=\frac{3m-8}{7},\\y=\frac{m-19}{7}.\end{cases}$

因为 x 的值是正数,y 的值是负数,

所以 $\begin{cases}\frac{3m-8}{7}>0,\\\frac{m-19}{7}<0.\end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得$\frac{8}{3}<m<19$,

所以 m 的取值范围为$\frac{8}{3}<m<19$.

10. **解**:(1)设购买甲种奖品 x 件,则购买乙种奖品 $(20-x)$件,根据题意,得 $40x+30(20-x)=650$,解得$x=5$,

$\therefore 20-x=15$.

答:购买甲种奖品 5 件,乙种奖品 15 件.

(2)设购买甲种奖品 a 件,则购买乙种奖品$(20-a)$件,根据题意,得$\begin{cases}20-a\leqslant 2a,\\40a+30(20-a)\leqslant 680,\end{cases}$

解得$\frac{20}{3}\leqslant a\leqslant 8$.

$\because a$ 为整数,$\therefore a=7$ 或 $a=8$.

当 $a=7$ 时,$20-a=13$;当 $a=8$ 时,$20-a=12$.

答:该公司有两种不同的购买方案:甲种奖品 7 件,乙种奖品 13 件;甲种奖品 8 件,乙种奖品 12 件.

11. **解**:(1)设 1 辆甲种客车与 1 辆乙种客车的载客量分别为 x 人,y 人.

根据题意,得$\begin{cases}2x+3y=180,\\x+2y=105,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=45,\\y=30.\end{cases}$

答:1 辆甲种客车与 1 辆乙种客车的载客量分别为 45 人和 30 人.

(2)设租用甲种客车 a 辆.

根据题意,得$\begin{cases}45a+30(6-a)\geqslant 240,\\a<6,\end{cases}$

解得 $4\leqslant a<6$.

因为 a 取整数,所以 $a=4$ 或 5.

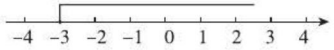
所以有两种租车方案:①租用甲种客车 4 辆,乙种客车 2 辆. 费用为 $400\times4+280\times2=2\ 160$(元);②租用甲种客车 5 辆,乙种客车 1 辆. 费用为 $400\times5+280\times1=2\ 280$(元).

故最节省费用的租车方案为租用甲种客车 4 辆,乙种客车 2 辆,最低费用为 2 160 元.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:去分母,得 $3x-6\leqslant 4x-3$. 移项,得 $3x-4x\leqslant -3+6$. 合并同类项,得 $-x\leqslant 3$. 系数化为 1,得$x\geqslant -3$. 原不等式的解集在数轴上的表示如图.



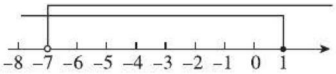
(第 1 题)

2. **解**:解不等式①,得 $x\leqslant 1$,

解不等式②,得 $x>-7$.

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-7<x\leqslant 1$.

其解集在数轴上的表示如图.



(第 2 题)

3. D **4.** A **5.** A **6.** $m>-2$

7. **解**:解方程,得 $x=\frac{4m+1}{2}$.

(1)方程有正数解,则$\frac{4m+1}{2}>0$. 解得 $m>-\frac{1}{4}$.

(2)方程有负数解,则$\frac{4m+1}{2}<0$. 解得 $m<-\frac{1}{4}$.

(3)方程有不大于 2 的解,则$\frac{4m+1}{2}\leqslant 2$. 解得$m\leqslant\frac{3}{4}$.

8. **解**:$\begin{cases}5x+1>3(x-1),①\\\frac{1}{2}x\leqslant 8-\frac{3}{2}x+2a,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>-2$,

解不等式②,得 $x\leqslant 4+a$,

$\because$ 原不等式组有解集,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-2<x\leqslant 4+a$.

$\because$ 原不等式组恰有两个整数解,

$\therefore 0\leqslant 4+a<1$,$\therefore -4\leqslant a<-3$.

9. **解**:解这个方程组得$\begin{cases}x=a+2,\\y=2a+2.\end{cases}$

$\because x$ 大于 0,y 小于 4,

$\therefore\begin{cases}a+2>0,\\2a+2<4,\end{cases}$

解这个不等式组,得 $-2<a<1$.

故 a 的取值范围为 $-2<a<1$.

10. **解**:(1)设 A,B 两种品牌运动服的进货单价分别为 x 元和 y 元. 根据题意,

得$\begin{cases}20x+30y=10\ 200,\\30x+40y=14\ 400,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}x=240,\\y=180.\end{cases}$

答:A,B两种品牌运动服的进货单价分别为240元和180元.

(2)设购进A品牌运动服m件,则购进B品牌运动服$\left(\frac{3}{2}m+5\right)$件,

根据题意,得$240m+180\left(\frac{3}{2}m+5\right)\leqslant 21\ 300$,解得$m\leqslant 40$.

$\therefore \frac{3}{2}m+5\leqslant\frac{3}{2}\times 40+5=65$.

答:最多能购进65件B品牌运动服.

11. **解**:(1)设A型汽车每辆的价格为x万元,B型汽车每辆的价格为y万元.

由题意,得$\begin{cases}4x+7y=310,\\10x+15y=700,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=25,\\y=30.\end{cases}$

答:A型汽车每辆的价格为25万元,B型汽车每辆的价格为30万元.

(2)设购买A型汽车m辆,则购买B型汽车$(10-m)$辆.

由题意,得$\begin{cases}m<10-m,\\25m+30(10-m)\leqslant 285,\end{cases}$解得$3\leqslant m<5$.

因为m是整数,所以$m=3$或4.

当$m=3$时,该方案所需费用为$25\times 3+30\times 7=285$(万元);

当$m=4$时,该方案所需费用为$25\times 4+30\times 6=280$(万元).

答:费用最省的方案是购买A型汽车4辆,购买B型汽车6辆,该方案所需费用为280万元.

12. **解**:(1)设老师有x人,根据题意得:$14x+10=15x-6$,

解得$x=16$,$14x+10=14\times 16+10=234$.

答:参加此次研学活动的老师有16人,学生有234人;

(2)8;

(3)设租甲型客车m辆,则租乙型客车$(8-m)$辆,

根据题意,得$\begin{cases}35m+30(8-m)\geqslant 234+16,\\400m+320(8-m)\leqslant 3\ 000,\end{cases}$解得$2\leqslant m\leqslant 5.5$.因为$m$为整数,所以$m=2$或3或4或5.

所以租车方案共有4种,分别是:甲型客车2辆、乙型客车6辆;甲型客车3辆、乙型客车5辆;甲型客车4辆、乙型客车4辆;甲型客车5辆、乙型客车3辆.

因为甲型客车租金比较贵,所以应该少用甲型客车多用乙型客车,即租甲型客车2辆、乙型客车6辆,

此时的租车费用是$400\times 2+320\times 6=2\ 720$(元).

【第8章测试卷】

一、**1.** C **2.** B **3.** D **4.** D **5.** A **6.** D **7.** B **8.** C

二、**9.** $-3<x\leqslant 5$ **10.** $>$ **11.** 21 **12.** $6\leqslant a<9$

三、**13.** **解**:(1)去括号,得$5x-10+8<6x-6+7$.

移项,得$5x-6x<10-8-6+7$.

合并同类项,得$-x<3$.

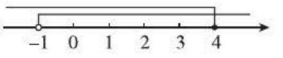
系数化为1,得$x>-3$.

(2)解不等式①,得$x>-1$.

解不等式②,得$x\leqslant 4$.

即不等式组的解集为$-1<x\leqslant 4$.

解集在数轴上的表示如图.



(第13题)

14. **解**:解不等式①,得$x\leqslant 3$.

解不等式②,得$x<a$.

$\because a$是不等于3的常数,

$\therefore$当$a>3$时,不等式组的解集为$x\leqslant 3$;

当$a<3$时,不等式组的解集为$x<a$.

15. **解**:(1)$(-2)\oplus 3=-2\times(-2-3)+1$

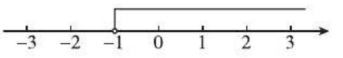
$=-2\times(-5)+1$

$=10+1$

$=11$.

(2)$\because 3\oplus x<13$,$\therefore 3(3-x)+1<13$.解得$x>-1$.

解集在数轴上的表示如图.



(第15题)

16. **解**:(1)设每辆小客车的乘客座位数是x个,每辆大客车的乘客座位数是y个.

根据题意,得$\begin{cases}y-x=17,\\6y+5x=300,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=18,\\y=35.\end{cases}$

答:每辆小客车的乘客座位数是18个,每辆大客车的

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

乘客座位数是35个.

(2)设租用a辆小客车才能将所有参加活动的师生装载完成,则$18a+35(11-a)\geqslant 300+30$,解得$a\leqslant 3\frac{4}{17}$.

符合条件的a的最大整数值为3.

答:租用小客车数量的最大值为3.

17. 解:(1)设购买平板电脑a台,则购买学习机$(100-a)$台.

由题意,得$3\,000a+800(100-a)\leqslant 168\,000$. 解得$a\leqslant 40$.

答:购买平板电脑最多40台.

(2)根据题意,得$100-a\leqslant 1.7a$. 解得$a\geqslant 37\frac{1}{27}$.

$\because a$为正整数且$a\leqslant 40$,

$\therefore a=38,39,40$,则学习机依次购买62台,61台,60台,因此该校有三种购买方案:

	平板电脑(台)	学习机(台)	总费用(元)
方案一	38	62	163 600
方案二	39	61	165 800
方案三	40	60	168 000

答:购买平板电脑38台,学习机62台最省钱.

第9章 多边形

9.1 三角形

【两年模拟兵法】

1. C

2. C 点拨:本题考查了三角形三边的关系.

3. C **4.** C

5. B 点拨:根据点D,E分别是BC,AD的中点,得$S_{\triangle BEC}=4\ \text{cm}^2$.

$\because$点F是EC的中点,

$\therefore S_{\text{阴影}}=\frac{1}{2}S_{\triangle BEC}=2\ \text{cm}^2$.

6. B **7.** 52°

8. 解:(1)根据两边之和大于第三边,两边之差小于第三边,可得$AB-BC<AC<AB+BC$,即$3<AC<7$.

(2)周长$l=AB+BC+AC=7+AC$,由(1)可知$3<AC<7$,$\therefore 10<l<14$.

(3)由(1)可知,$3<AC<7$,

又$\because AC$的长为奇数,

$\therefore AC=5$.

$\therefore \triangle ABC$的周长为$AB+BC+AC=12$.

此时$AB=AC$,$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

9. 解:$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 9\times 6=\frac{1}{2}\times 8\times BE$. $\therefore BE=\frac{27}{4}$.

10. 解:(1)$\angle 1=\angle 2$,理由如下:

$\because$在$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$于点D,$CE\perp AB$于点E,

$\therefore \angle AEC=\angle ADC=90°$.

设AD与CE交于点O,

则$\angle AOE=\angle DOC$(对顶角相等),

$\angle 1+\angle COD=\angle 2+\angle AOE=90°$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

(2)(1)中的结论仍然成立. 理由如下:

由题意可知$\angle D=\angle E=90°$,

$\therefore \angle 1+\angle CBE=\angle 2+\angle ABD=90°$.

又$\because \angle ABD=\angle CBE$(对顶角相等).

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

点拨:本题考查了直角三角形的性质.

11. 解:(1)根据三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和,可得

$\angle B=\angle ACD-\angle A=83°-35°=48°$.

(2)在$\triangle AFE$中,$\angle A+\angle AFE+\angle AEF=180°$,

在$\triangle CED$中,$\angle D+\angle ECD+\angle DEC=180°$,

$\because \angle D=42°$,$\angle ECD=83°$,

$\therefore \angle DEC=180°-\angle D-\angle ECD=55°$.

又$\because \angle DEC=\angle AEF$(对顶角相等),

$\therefore \angle AFE=180°-\angle AEF-\angle A=180°-\angle DEC-\angle A=180°-55°-35°=90°$.

12. 解:设$\angle CDE=x$,

$\because \angle ADC$是$\triangle ADB$的外角,

$\therefore \angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle B+40°$.

$\therefore \angle ADE=\angle ADC-\angle CDE=\angle B+40°-x$.

$\because \angle AED$是$\triangle CDE$的外角,

$\therefore \angle AED=\angle CDE+\angle C=x+\angle C$.

$\because \angle ADE=\angle AED$,

$\therefore \angle B+40°-x=x+\angle C$.

$\because \angle B=\angle C$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore 40° - x = x.$

解得 $x = 20°$，即 $\angle CDE = 20°$.

9.2 多边形的内角和与外角和

【两年模拟兵法】

1. C

2. C　**点拨**：正 n 边形每个内角度数为：$\frac{(n-2)\times 180°}{n}$，

正 n 边形每个外角度数为：$\frac{360°}{n}$，再由题意可得 $n = 6$，

故选 C.

3. C　**点拨**：考查多边形的对角线条数的计算方法.

4. D　**点拨**：本题可求出新多边形的边数为 8，而原多边形切去一个角形成的新多边形有 3 种情况：①增加 1 条边；②减少 1 条边；③边的条数不变，故原多边形的边数可能为 7 或 8 或 9，故选 D.

5. B　**6.** 60°

7. **解**：(1)四边形的内角和等于 360°，有三个内角分别为 70°，150°，90°，

$\therefore x = 360 - 70 - 150 - 90 = 50.$

(2)四边形的内角和等于 360°，有三个内角分别为 73°，82°，90°，则剩下的一个内角度数 $= 360° - 73° - 82° - 90° = 115°$，$\therefore x = 180 - 115 = 65.$

8. **解**：设这个外角的度数为 x，多边形边数为 n，根据题意，得 $(n-2)\times 180° + x = 1\ 350°.$

解得 $x = 1\ 710° - 180°n.$

$\because 0° < x < 180°$，$\therefore 0° < 1\ 710° - 180°n < 180°.$

解得 $8.5 < n < 9.5.$

又 $\because n$ 为正整数，$\therefore n = 9.$

即这个多边形的边数为 9.

9. **解**：(1)甲对，乙不对.

$\because \theta = 360°$，$\therefore (n-2)\times 180 = 360$，解得 $n = 4.$

$\because \theta = 630°$，$\therefore (n-2)\times 180 = 630$，解得 $n = \frac{11}{2}.$

$\because n$ 为正整数，$\therefore \theta$ 不能取 630°.

(2)依题意，得 $(n-2)\times 180 + 360 = (n + x - 2)\times 180$，

解得 $x = 2.$

10. **解**：(1)$\because$ 2 005 不是 180 的整数倍，

$\therefore$ 小明说不可能.

(2)设这个多边形的边数为 x，

由题意得

$2\ 005° - 180° < (x-2)\times 180° < 2\ 005°$，

解得 $12\frac{5}{36} < x < 13\frac{5}{36}.$

$\because x$ 是正整数，$\therefore x = 13.$

$\therefore$ 小华求的是十三边形的内角和.

(3)十三边形的内角和是 $(13-2)\times 180° = 1\ 980°$，错把外角当内角的那个外角的度数是 $2\ 005° - 1\ 980° = 25°.$

11. **解**：(1)$\because \angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$ 是四边形的四个内角，

$\therefore \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°.$

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 360° - (\angle 5 + \angle 6).$

$\because \angle 1 + \angle 5 = 180°$，

$\angle 2 + \angle 6 = 180°$，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360° - (\angle 5 + \angle 6).$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4.$

(2)四边形的任意两个外角的和等于与它们不相邻的两个内角的和.

(3)由(2)知，

$\angle B + \angle C = \angle NAD + \angle MDA.$

$\because \angle B + \angle C = 240°$，

$\therefore \angle NAD + \angle MDA = 240°.$

$\because AE$，DE 分别是 $\angle NAD$，$\angle MDA$ 的平分线，

$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2}\angle MDA$，

$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle NAD.$

$\therefore \angle ADE + \angle DAE$

$= \frac{1}{2}(\angle MDA + \angle NAD)$

$= \frac{1}{2}\times 240° = 120°.$

$\therefore \angle E = 180° - (\angle ADE + \angle DAE) = 180° - 120° = 60°.$

9.3 用正多边形铺设地面

【两年模拟兵法】

1. A

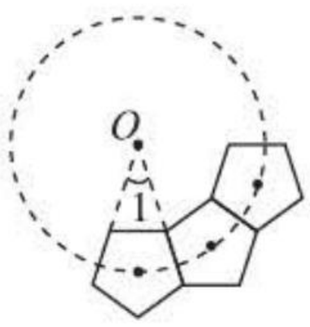
2. D　**点拨**：正三角形、正方形、正六边形、正十二边形、正十八边形的每个内角分别是 60°、90°、120°、150°、160°，因为 $360° = 60°\times 3 + 90°\times 2 = 60°\times 4 + 120°\times 1 = 60° + 150°\times 2$，所以正方形、正六边形、正十二边形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

都能与正三角形匹配进行镶嵌,只有正十八边形不能,故选 D.

3. A　**点拨**:根据密铺的条件,得 $90m+135n=360$,所以 $2m+3n=8$,故选 A.

4. D　**点拨**:∵ 正五边形的内角和为 $(5-2)\cdot 180°=540°$,∴ 正五边形的每一个内角为 $540°\div 5=108°$. 如图,延长正五边形的两边相交于点 O,则 $\angle 1=360°-108°\times 3=360°-324°=36°$,$360°\div 36°=10$(个).∵ 已经有 3 个正五边形,∴ $10-3=7$(个),即完成这一圆环还需 7 个正五边形,故选 D.



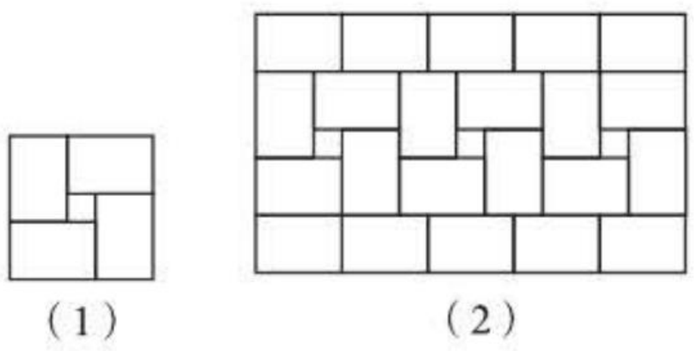
(第 4 题)

5. **解**:因为 $\angle A=75°$,$\angle B=60°$,所以 $\angle C=180°-\angle A-\angle B=45°$. 又因为 $\frac{360}{60}=6$,$\frac{360}{45}=8$,所以以点 B 和点 C 为顶点作焊接,都能满足. 因此有两种可行的焊接方案.

第一种方案:用 6 块形如 $\triangle ABC$ 的废铁料进行焊接,以点 B 为顶点依次焊接 6 块废铁料(相等的边焊接在一起).

第二种方案:用 8 块形如 $\triangle ABC$ 的废铁料进行焊接,以点 C 为顶点依次焊接 8 块废铁料(相等的边焊接在一起).

6. **解**:18 cm × 12 cm 的长方形瓷砖长、宽相差 6 cm,按如图(1)所示的那样拼,中间会出现一个边长为 6 cm 的小正方形,正好放 1 块 6 cm × 6 cm 的正方形瓷砖,即每块6 cm × 6 cm的正方形瓷砖周围需 18 cm × 12 cm 的长方形瓷砖 4 块,所以 3 块 6 cm × 6 cm 的正方形瓷砖按如图(2)所示的方法连续平铺,然后在大长方形的上、下再各平铺5 块18 cm × 12 cm 的长方形瓷砖,就能把长为 90 cm,宽为 54 cm 的长方形墙面贴满瓷砖(答案不唯一).



(1)　(2)

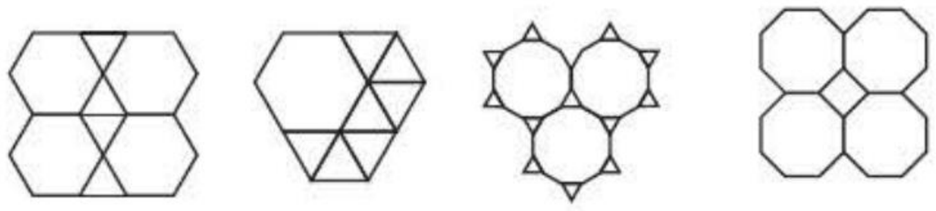
(第 6 题)

7. **解**:此题答案不唯一,以下三种铺设方法供参考.

(1)用 m 个正三角形,n 个正六边形铺设地面,则 $60°m+120°n=360°$,即 $m+2n=6$,因为 m、n 为正整数,所以 $m=2$,$n=2$ 或 $m=4$,$n=1$,即用 2 个正三角形、2 个正六边形或 4 个正三角形、1 个正六边形可铺满地面,如图(1)(2).

(2)用 a 个正三角形,b 个正十二边形铺设地面,则有 $60°a+150°b=360°$,即 $2a+5b=12$,因为 a、b 为正整数,所以 $a=1$,$b=2$,即用 1 个正三角形、2 个正十二边形可铺满地面,如图(3).

(3)用 x 个正方形,y 个正八边形铺设地面,则有 $90°x+135°y=360°$,即 $2x+3y=8$,因为 x、y 为正整数,所以 $x=1$,$y=2$,即用 1 个正方形、2 个正八边形可铺满地面,如图(4).



(1)　(2)　(3)　(4)

(第 7 题)

8. 正十二边形　**点拨**:根据题图(1)(2)(3)可知,在被围成的正多边形(正中间的多边形)的每个顶点处,被围成的正多边形的 1 个内角加上外部相邻的 2 个正多边形的相应内角之和为 360°,∵ 正十二边形的一个外角是 $360°\div 12=30°$,∴ 正十二边形的一个内角是 150°. 又 $150°\times 2=300°$,$360°-300°=60°$,∴ 被围成的正多边形是正三角形. ∴ 正十二边形可以进行环形密铺.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 8 cm 或 2 cm

2. **解**:(1)由题意得 $14<2a+2<30$,故 $6<a<14$.

(2)∵ $\triangle ABC$ 为等腰三角形,

∴ $2a+2=8$ 或 $2a+2=22$,

则 $a=3$ 或 $a=10$.

由(1)知 $6<a<14$,∴ $a=10$.

∴ $\triangle ABC$ 的周长为 $22+22+8=52$.

3. **解**:(1)∵ a,b,c 是三角形的三边长,

∴ $a-b-c<0$,$b-c-a<0$,$c-a-b<0$.

∴ 原式 $=-a+b+c-b+c+a-c+a+b=a+b+c$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)当 $a=5,b=4,c=3$ 时,原式 $=5+4+3=12$.

4. 解:$\because DF/\!/EC$,

$\therefore \angle BCE=\angle D=42°$.

$\because CE$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$\therefore \angle ACB=2\angle BCE=84°$.

$\because \angle A=46°$,

$\therefore \angle B=180°-84°-46°=50°$.

5. 解:$\because DE$ 是 CA 边上的高,

$\therefore \angle DEA=\angle DEC=90°$.

$\because \angle A=20°$,$\therefore \angle EDA=90°-20°=70°$.

$\because \angle EDA=\angle CDB$,

$\therefore \angle CDE=180°-70°\times2=40°$.

在 $\triangle CDE$ 中,$\angle DCE=90°-40°=50°$.

$\because CD$ 是 $\angle BCA$ 的平分线,

$\therefore \angle BCA=2\angle DCE=2\times50°=100°$.

在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=180°-\angle BCA-\angle A=180°-100°-20°=60°$.

6. B

7. 5　**点拨:**设这个多边形的边数是 n,由题意,得 $(n-2)\times180°=\frac{3}{2}\times360°$,解得 $n=5$.

8. 解:连结 BE.

在 $\triangle COD$ 与 $\triangle BOE$ 中,$\angle D+\angle C+\angle COD=180°$,$\angle OBE+\angle OEB+\angle BOE=180°$,

$\therefore \angle D+\angle C=180°-\angle COD$,$\angle OBE+\angle OEB=180°-\angle BOE$.

$\because \angle COD=\angle BOE$,

$\therefore \angle D+\angle C=\angle OBE+\angle OEB$.

$\therefore \angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle DEF+\angle F=\angle A+\angle ABC+\angle OBE+\angle OEB+\angle DEF+\angle F=\angle A+\angle ABE+\angle BEF+\angle F=360°$.

9. 解:(1)$\because \angle B=40°$,$\angle C=70°$,$FD\perp BC$,

$\therefore \angle BAC=70°$,$\angle CAD=20°$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=35°$.

$\therefore \angle EFD=\angle CAE-\angle CAD=35°-20°=15°$.

(2)$\because \angle CAE=35°$,$\angle C=70°$,

$\therefore \angle AEC=180°-70°-35°=75°$.

$\therefore \angle EFD=180°-90°-75°=15°$.

(3)$\because \angle DEF=\angle AEC=75°$,

$\therefore \angle EFD=180°-75°-90°=15°$.

【第9章测试卷】

一、**1.** C　**2.** D　**3.** A　**4.** D　**5.** B　**6.** A　**7.** C　**8.** D

二、**9.** 三角形具有稳定性

10. 钝角

11. 19 cm 或 20 cm

12. 180°

三、**13.** 解:$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=12\ \text{cm}^2$,$AE=3$ cm,

$\therefore BC=8$ cm.

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore DC=\frac{1}{2}BC=4$ cm.

14. 解:$\angle QBO=180°-\angle A-\angle AOC=180°-28°-100°=52°$. 即 $\angle QBO$ 应等于 52°才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上.

15. 解:(1)由题可知 $\angle D=30°$,$\angle 3=45°$,

$\angle DCE=90°$.

$\because CF$ 平分 $\angle DCE$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle DCE=45°$.

$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore CF/\!/AB$.

(2)由三角形内角和定理可得 $\angle DFC=180°-\angle 1-\angle D=180°-45°-30°=105°$.

16. 解:$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高,

$\therefore \angle ADC=90°$.

$\because \angle C=62°$,

$\therefore \angle DAC=90°-62°=28°$.

$\because \angle BAC=50°$,$\angle C=62°$,

$\therefore \angle ABC=68°$.

又$\because BF$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC=34°$,

$\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAC=25°$.

$\therefore \angle BOA=180°-\angle BAO-\angle ABO=180°-25°-34°=121°$.

17. 解:$\because$ 在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补,

$\therefore \angle ABC+\angle ADC=360°-180°=180°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ BE 平分$\angle ABC$, DF 平分$\angle ADC$,

∴ $\angle EBC+\angle FDC=90°$.

∵ $BE\parallel DF$,

∴ $\angle EBC=\angle DFC$.

∴ $\angle DFC+\angle FDC=90°$.

∴ $\triangle DCF$ 为直角三角形.

第10章 轴对称、平移与旋转

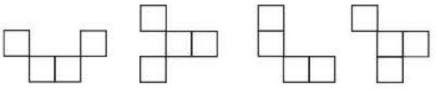
10.1 轴对称

【两年模拟兵法】

1. B **2**. C **3**. B **4**. A **5**. C **6**. D **7**. B

8. 王 **点拨**:解答此题要明确题图中均是由大写英文字母构成的轴对称图案,按字母顺序应填 E 构成的轴对称图案.

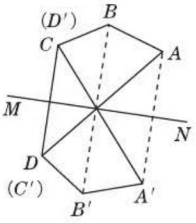
9. **解**:如图.



(第 9 题)

点拨:解答本题的技巧是先去掉一个小正方形,判断剩余的图形是不是轴对称图形,如果是,画出其对称轴,再画出去掉的小正方形关于对称轴对称的图形即可.

10. **解**:(1)(2)如图.



(第 10 题)

点拨:注意点 C,点 D 互为对称点.

10.2 平移

【两年模拟兵法】

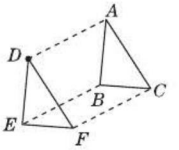
1. B

2. C **点拨**:平移不改变图形的形状和大小,因此,平移前后线段的长度不变.

3. D **4**. C **5**. 10

6. 45°;60°;2.5 **7**. 100

8. **解**:如图,三角形 DEF 即为所求作的图形.

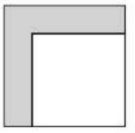


(第 8 题)

9. **解**:通过平移,可把种花草的面积看成是如图所示的边长为(8 −1 −1)米的空白部分正方形的面积.

所以种花草的面积为(8 −1 −1) ×(8 −1 −1) =36(平方米).

点拨:根据平移的知识,把横竖各两条道路平移到正方形的边上,求剩余空白部分的面积即可.



(第 9 题)

10. **解**:(1)平移的方向是点 A 到点 D 的方向,平移的距离是线段 AD 的长度.

(2)∵ 将三角形 ABC 平移得到三角形 DEF,

∴ $CF=AD$.

∵ $CF+BC=BF$, ∴ $AD+BC=BF$.

11. **解**:利用平移知识,把台阶的横竖边向上,向左右平移,构成一个长方形,长和宽分别为 6.4 米,3.8 米,

所以地毯的长度为 6.4 +3.8 +3.8 =14(米),地毯的面积为 14 ×3 =42(平方米),

所以买地毯至少需要 42 ×40 =1 680(元).

点拨:解决此题的关键是利用平移的知识,把要求的所有线段进行平移,在规则图形中进行计算.

12. **解**:∵ 阴影部分的面积既等于梯形 $ABCD$ 的面积减去梯形 $EFMD$ 的面积,也等于梯形 $EFGH$ 的面积减去梯形 $EFMD$ 的面积,

∴ 阴影部分的面积等于梯形 $DHGM$ 的面积.

∵ $HG=10$, $MC=2$, $MG=5$,

∴ $DM=8$,

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\text{梯形}DHGM}=\frac{1}{2}\times(8+10)\times5=45$.

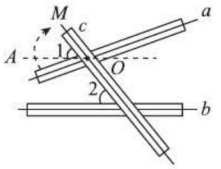
10.3 旋转

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:“飞流直下三千尺”是指水的平移运动,“坐地日行八万里”是指人绕地心旋转.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. B　**点拨**：如图，过点 O 作 $OA \parallel b$，∵ $\angle AOM = \angle 2 = 50°$ 时，$OA \parallel b$，∴ 要使木条 a 与 b 平行，木条 a 旋转的度数至少是 $70° - 50° = 20°$.



（第 2 题）

3. C　**点拨**：∵ $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle DBE$，∴ $\angle ABD = \angle CBE = 60°$，$AB = BD$，∴ $\angle BAD = \angle BDA = \angle ABD = 60°$，∴ $\angle DAB = \angle CBE$，∴ $AD \parallel BC$，故选 C.

4. A　**点拨**：A. 最小旋转角度是 $\frac{360°}{3} = 120°$；

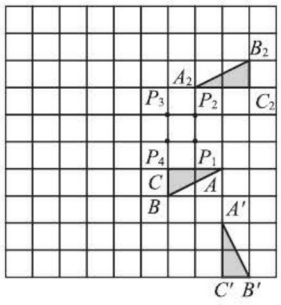
B. 最小旋转角度是 $\frac{360°}{4} = 90°$；C. 最小旋转角度是 $\frac{360°}{2} = 180°$；D. 最小旋转角度是 $\frac{360°}{5} = 72°$. 综上可得，顺时针旋转 $120°$ 后，能与原图案完全重合的是 A.

5. B　**点拨**：根据规则，骰子每次变换后朝上一面的点数的变化规律是 3（开始）→5→6→3→5→6→3→5……，每变换 3 次相同点数重复一次，而 $10 \div 3 = 3$……1，所以完成 10 次变换后，骰子朝上一面的点数是 5. 故选 B.

6. 90　**点拨**：∵ $\triangle COD$ 是由 $\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转而得到的，∴ 旋转角是 $\angle BOD$，∵ $\angle BOD = 90°$，∴ 旋转的角度为 $90°$.

7. 5；60°

8. **解**：（1）如图所示.



（第 8 题）

（2）5

10.4　中心对称

【两年模拟兵法】

1. B

2. C　**点拨**：利用轴对称图形的定义以及中心对称图形的定义分析得出符合题意的只有 C 选项，故选 C.

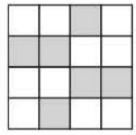
3. D　**点拨**：折痕只要经过对称中心即可，故选 D.

4. A

5. （4）；（3）；（2）　**点拨**：根据图形与原图形的位置关系，分析关键点或关键线段的变化，题图（2）与题图（1）的对应线段平行（或在同一直线上）且相等，方向一致，故是平移；题图（3）与题图（1）的各对应点的连线都经过同一点，且题图（1）绕该点旋转 $180°$ 后能与题图（3）重合，故成中心对称；题图（4）与题图（1）的对应线段的端点连线都被同一条直线垂直平分，故成轴对称.

6. ②

7. **解**：如图.

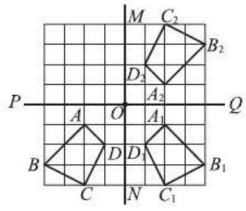


（第 7 题）

8. **解**：（1）四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 如图所示.

（2）四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 如图所示.

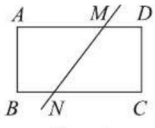
（3）如图所示，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 关于直线 PQ 成轴对称.



（第 8 题）

9. **解**：（1）=；=；=

（2）无数种，如图，$DM = BN$，直线 MN 把长方形分割成面积相等的两部分.



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)过中心对称图形的对称中心的任意一条直线,都可把图形分割成面积相等的两部分.

10.5 图形的全等

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. A **点拨:**由题意得 $AC=DF=25$ cm,

$\therefore BC=100-AC-AB=100-25-30=45$(cm).

4. 70° **点拨:**先由全等三角形的性质求出 $\angle DEF$ 和 $\angle ACB$ 的度数,再根据三角形内角和为 180° 求出 $\angle COE$ 的度数.

5. 100°;12cm

6. 6 **点拨:**由折叠得 $BE=ED, BC'=DC, C'F=FC$,$\therefore$ $\triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和等于长方形 $ABCD$ 的周长.

7. **解:**(1) $\triangle ABC\cong\triangle DBE$,$AC$ 和 DE,AB 和 DB,BC 和 BE 是对应边;$\angle A$ 和 $\angle D$,$\angle ACB$ 和 $\angle DEB$,$\angle ABC$ 和 $\angle DBE$ 是对应角.

(2)延长 AC 交 DE 于点 F.

$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle A+\angle ACB=90°$.

$\because \triangle ABC\cong\triangle DBE$,$\therefore \angle A=\angle D$.

又$\because \angle ACB=\angle DCF$(对顶角相等),

$\therefore \angle D+\angle DCF=90°$.

$\therefore \angle AFE=90°$. $\therefore AC\perp DE$.

8. **解:**$\because \triangle PAB\cong\triangle AQC$,

$\therefore \angle BAP=\angle CQA$.

$\because CF\perp AB$,$\therefore \angle CQA+\angle QAF=90°$.

$\therefore \angle BAP+\angle QAF=90°$,

即 $\angle QAP=90°$.

$\therefore AP\perp AQ$.

9. **解:**相等.

理由如下:

$\because \triangle ADC\cong\triangle ECD$,$\therefore S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ECD}$.

$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 同底等高.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ECD}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ECD}+S_{\triangle BCD}$.

即 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. C

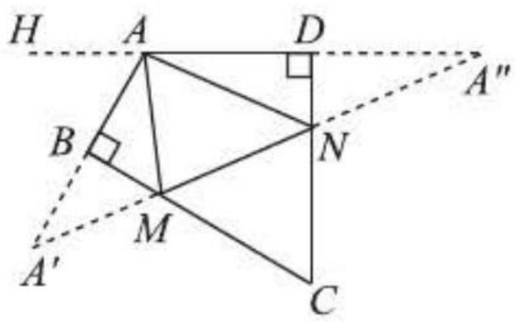
2. B **点拨:**如图所示,分别作点 A 关于 BC 和 CD 的对称点 A',A'',连结 $A'A''$,交 BC 于点 M,交 CD 于点 N,此时 $\triangle AMN$ 的周长最小.

延长 DA 至点 H,$\because \angle BAD=120°$,$\therefore \angle HAA'=60°$,

$\therefore \angle A'+\angle A''=\angle HAA'=60°$.

$\because \angle A'=\angle MAA'$,$\angle NAD=\angle A''$,且 $\angle A'+\angle MAA'=\angle AMN$,$\angle NAD+\angle A''=\angle ANM$,

$\therefore \angle AMN+\angle ANM=\angle A'+\angle MAA'+\angle NAD+\angle A''=2(\angle A'+\angle A'')=2\times60°=120°$.



(第2题)

3. A **点拨:**利用轴对称图形的性质得出 $PM=MQ$,$PN=NR$,进而利用 $MN=4$ cm,$PM=2.5$ cm,得出 NQ 的长,再根据 $PN=3$ cm,即可得出 QR 的长.

4. C **点拨:**根据平移的性质得出 $AC/\!/DF$,$\angle EDF=\angle BAC=90°$,则可对①②进行判断;根据平移的特征得到 $AD=CF=2$,$DF=AC=4$,然后计算四边形 $ABFD$ 的周长,则可对③进行判断.

5. 42 **点拨:**$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle EBD$,

$\therefore \angle CBD=60°$,$BD=BC=12$ cm.

$\therefore \angle BCD=\angle BDC=60°$.

$\therefore \angle BCD=\angle BDC=\angle CBD=60°$.

$\therefore \triangle BCD$ 为等边三角形,$\therefore CD=12$ cm.

$\therefore \triangle ACF$ 与 $\triangle BDF$ 的周长之和为 $AC+AF+CF+BF+DF+BD=AC+AB+CD+BD=5+13+12+12=42$(cm).

6. **解** $\because \triangle ABC$ 绕点 C 旋转得到 $\triangle A'B'C$,$\angle ACB=90°$,

$\therefore \angle A'CB'=\angle ACB=90°$,$\angle A'=\angle A=\alpha$.

在 $\triangle BB'C$ 中,

$\because \angle BCB'=\theta$,$BC=B'C$,

$\therefore \angle B'=\dfrac{180°-\theta}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

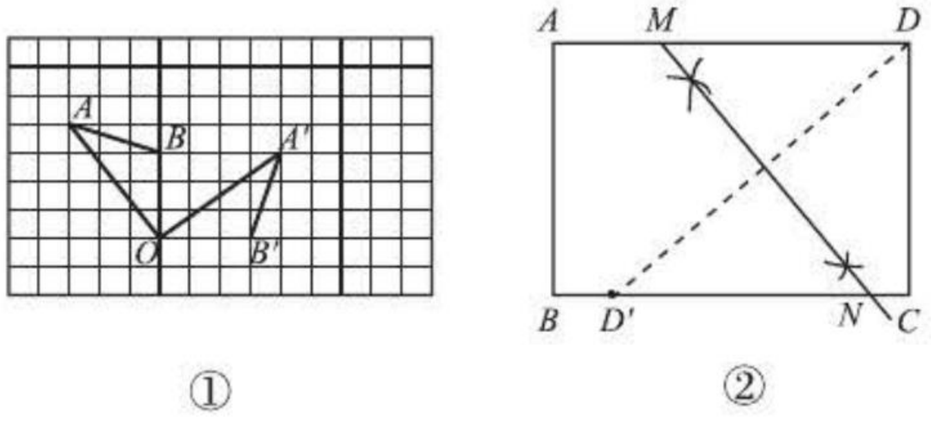
在$\triangle A'B'C$中，$\angle A' + \angle B' + \angle A'CB' = 180°$，

$\therefore \alpha + \frac{180° - \theta}{2} + 90° = 180°$，

$\therefore \theta = 2\alpha$.

7. 解：(1) 如图①所示，$\triangle OA'B'$即为所求.

(2) 如图②所示，直线 MN 即为所求.



①　　②

(第7题)

【第10章测试卷】

一、1. A　**2.** C　**3.** B　**4.** A　**5.** B　**6.** D　**7.** D　**8.** A

二、9. EF；$\angle FDE$；射线 AF；　AF

10. 10；21　**11.** 30°

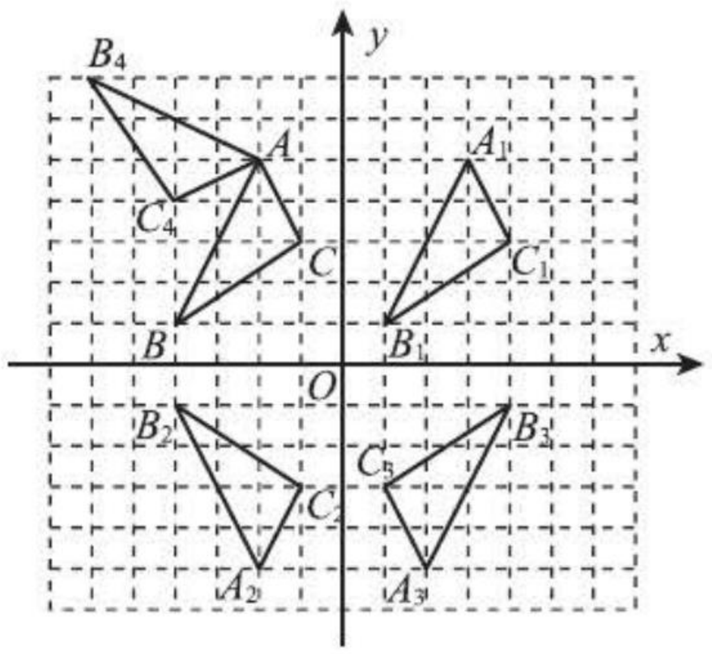
12. $BC = EF$(答案不唯一)

三、13. 解：(1) $\triangle A_1B_1C_1$，如图所示；

(2) $\triangle A_2B_2C_2$，如图所示；

(3) $\triangle A_3B_3C_3$，如图所示；

(4) $\triangle AB_4C_4$，如图所示.



(第13题)

14. 解：(1) 旋转中心是点 C，旋转了 90°.

(2) $\because \triangle ACE$ 是等腰直角三角形，$\angle ACE = 90°$，

$\therefore \angle A = \angle AEC = 45°$.

$\because \angle ACB = 20°$，

$\therefore \angle ABC = 180° - 45° - 20° = 115°$，

$\because \triangle ABC$ 经过旋转到达 $\triangle EDC$ 的位置，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC$.

$\therefore \angle CDE = \angle ABC = 115°$.

$\angle DEC = \angle A = 45°$.

$\therefore \angle DEB = \angle DEC + \angle AEC = 90°$.

15. 解：(1) $\because \triangle ACE \cong \triangle DBF$，

$\therefore AC = BD$.

$\therefore AC - BC = BD - BC$.

$\therefore AB = CD$.

$\because AD = 8$，$BC = 2$，

$\therefore AD - BC = AB + CD = 8 - 2 = 6$.

$\therefore AB = CD = 3$，

$\therefore AC = AB + BC = 3 + 2 = 5$.

(2) $\because \triangle ACE \cong \triangle DBF$，

$\therefore \angle ECA = \angle FBD$.

$\therefore CE // BF$.

16. 解：$(32 - 2) \times (20 - 2) = 540$(平方米)

答：绿化的面积为 540 平方米.

17. 解：$\because \triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60°得到 $\triangle ACP'$，

$\therefore AP' = AP$，$\angle PAP' = 60°$.

$\therefore \angle APP' = \angle AP'P = 60°$.

$\therefore \angle APP' = \angle AP'P = \angle PAP'$.

$\therefore \triangle APP'$为等边三角形.

$\therefore PP' = AP = 3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第6章 一元一次方程

6.1 从实际问题到方程

练习

1. **解**:设应从第一组调 x 人到第二组去,根据题意,列方程,得 $2(26-x)=22+x$.

点拨:调整后第一组人数的 2 倍 = 调整后第二组的人数.

2. **解**:设师徒两人还需一起工作 x 小时才能完成铺设任务,根据题意列方程,得

$18\times2+(18+12)x=186$.

点拨:本题中的等量关系是:师傅铺设的电缆 + 徒弟铺设的电缆 = 186 米.

习题 6.1

1. **解**:(1)将 $x=-\frac{3}{2}$ 分别代入方程的左边和右边,得左边 $=\frac{5\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1}{8}=\frac{-\frac{15}{2}+1}{8}=-\frac{13}{16}$,右边 $=-\frac{3}{2}-1=-\frac{5}{2}$. 因为左边 $\neq$ 右边,所以 $x=-\frac{3}{2}$ 不是方程 $\frac{5x+1}{8}=x-1$ 的解. 将 $x=3$ 分别代入方程的左边和右边,得左边 $=\frac{5\times3+1}{8}=\frac{16}{8}=2$,右边 $=3-1=2$. 因为左边 = 右边,所以 $x=3$ 是方程 $\frac{5x+1}{8}=x-1$ 的解.

(2)将 $y=-10$ 分别代入方程的左边和右边,得左边 $=2(-10-2)-9(1+10)=-123$,右边 $=3[4\times(-10)-1]=-123$. 因为左边 = 右边,所以 $y=-10$ 是方程 $2(y-2)-9(1-y)=3(4y-1)$ 的解. 将 $y=10$ 分别代入方程的左边和右边,得左边 $=2(10-2)-9(1-10)=97$,右边 $=3(4\times10-1)=117$. 因为左边 $\neq$ 右边,所以 $y=10$ 不是方程 $2(y-2)-9(1-y)=3(4y-1)$ 的解.

点拨:检验一个数是不是方程的解,是根据方程的解的定义(使方程左右两边相等的未知数的值是方程的解)来判断的,即把未知数的值分别代入方程的左边和右边,若左边 = 右边,则是方程的解;若左边 $\neq$ 右边,则不是方程的解.

2. **解**:例 1:某班的男生比女生多 20 人,全班共 40 人,请问男生有多少人?

例 2:某班的男生比女生多 20 人,且男生人数是女生人数的 2 倍,请问该班有多少女生?

点拨:此题答案不唯一,只要符合题意即可.

3. **解**:能. 设原来每本价格是 x 元,根据题意,列方程,得 $20\times80\%\,x=20x-1.60$.

点拨:本题主要考查学生对问题中等量关系的确定,这要求学生审题时要仔细,要抓住“八折”、“便宜了”等关键词.

6.2 解一元一次方程

练习

1. **解**:(1)能,根据等式的基本性质 1,在等式的两边同时减去 2 得到的.

(2)能,根据等式的基本性质 2,在等式的两边同时除以 -3 得到的.

(3)能,根据等式的基本性质 2,在等式的两边同时除以 2 得到的.

(4)能,根据等式的基本性质 2,在等式的两边同时乘以 6 得到的.

2. **解**:(1)2;根据等式的基本性质 1.

(2)$2x$;根据等式的基本性质 1.

(3)$\frac{7}{2}$;根据等式的基本性质 2.

(4)6 ;根据等式的基本性质 2.

练习

1. **解**:(1)错误. 由 $3+x=5$,得 $x=5-3$.

(2)错误. 由 $7x=-4$,得 $x=-\frac{4}{7}$.

(3)错误. 由 $\frac{1}{2}y=0$,得 $y=0$.

(4)错误. 由 $3=x-2$,得 $x=3+2$.

2. **解**:(1)$x=12$. (2)$x=-4$. (3)$x=-12$. (4)$y=2$.

点拨:通过方程的变形,把含有未知数的项归到方程的一边,把常数项归到方程的另一边,将方程化为最简形式 $ax=b$ $(a\neq0)$,再将未知数的系数化为 1,方程两边都除以未知数的系数 a,即得方程的解为 $x=\frac{b}{a}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

1. 解:(1)$3x+4=0$,移项,得$3x=-4$. 系数化为1,得$x=-\frac{4}{3}$. **点拨**:移项要变号.

(2)$7y+6=-6y$,移项,得$7y+6y=-6$. 合并同类项,得$13y=-6$. 系数化为1,得$y=-\frac{6}{13}$.

(3)$5x+2=7x+8$,移项,得$5x-7x=8-2$. 合并同类项,得$-2x=6$. 系数化为1,得$x=-3$. **点拨**:注意移项要变号.

(4)$3y-2=y+1+6y$,移项,得$3y-y-6y=1+2$. 合并同类项,得$-4y=3$. 系数化为1,得$y=-\frac{3}{4}$.

(5)$\frac{2}{5}x-8=\frac{1}{4}-0.2x$,去分母,得$8x-160=5-4x$. 移项,得$8x+4x=5+160$. 合并同类项,得$12x=165$. 系数化为1,得$x=\frac{55}{4}$.

点拨:先找出5和4的最小公倍数,再用它乘以方程中的每一项.

(6)$1-\frac{1}{2}x=x+\frac{1}{3}$,去分母,得$6-3x=6x+2$. 移项,得$-3x-6x=2-6$. 合并同类项,得$-9x=-4$. 系数化为1,得$x=\frac{4}{9}$. **点拨**:去分母是利用方程的变形规则2,方程两边同时乘以所有分母的最小公倍数,注意不能漏乘.

2. 解:$44x+64=328$,移项,得$44x=328-64$,即$44x=264$. 系数化为1,得$x=6$.

习题6.2.1

1. 解:(1)$18=5-x$,移项,得$x=5-18$,即$x=-13$.

(2)$\frac{3}{4}x+2=3-\frac{1}{4}x$,去分母,得$3x+2\times4=3\times4-x$. 移项,得$3x+x=12-8$. 合并同类项,得$4x=4$. 系数化为1,得$x=1$.

(3)$3x-7+4x=6x-2$,移项,得$3x+4x-6x=-2+7$. 合并同类项,得$x=5$.

(4)$10y+5=11y-5-2y$,移项,得$10y-11y+2y=-5-5$. 合并同类项,得$y=-10$.

(5)$x-1=5+2x$,移项,得$x-2x=5+1$. 合并同类项,得$-x=6$. 系数化为1,得$x=-6$.

(6)$0.3x+1.2-2x=1.2-2.7x$,方程两边同时乘以10,得$3x+12-20x=12-27x$. 移项,得$3x-20x+27x=12-12$. 合并同类项,得$10x=0$,即$x=0$.

2. 解:(1)$2y+3=11-6y$,移项,得$2y+6y=11-3$. 合并同类项,得$8y=8$. 系数化为1,得$y=1$.

(2)$2x-1=5x+7$,移项,得$2x-5x=7+1$. 合并同类项,得$-3x=8$. 系数化为1,得$x=-\frac{8}{3}$.

(3)$\frac{1}{3}x-1-2x=-1$,去分母,得$x-3-6x=-3$. 移项,得$x-6x=-3+3$. 合并同类项,得$-5x=0$,即$x=0$.

(4)$\frac{1}{2}x-3=5x+\frac{1}{4}$,去分母,得$2x-12=20x+1$. 移项,得$2x-20x=1+12$. 合并同类项,得$-18x=13$. 系数化为1,得$x=-\frac{13}{18}$.

点拨:①运用方程的变形规则求解;②对于比较复杂的方程,求出解后检验一下,看其是不是原方程的解,这样可避免解方程时出现错误. 在解方程的过程中,认真、细心是解题的关键.

3. 解:(1)根据题意,得$3x+2=4-x$,移项,得$3x+x=4-2$. 合并同类项,得$4x=2$. 系数化为1,得$x=\frac{1}{2}$. 所以当$x=\frac{1}{2}$时,$A=B$. (2)根据题意,得$3x+2=4-x+4$,移项,得$3x+x=4+4-2$. 合并同类项,得$4x=6$. 系数化为1,得$x=\frac{3}{2}$. 所以当$x=\frac{3}{2}$时,A比B大4.

点拨:掌握移项要变号是正确解一元一次方程的关键.

练习

1. 解:(1)$5(x+2)=2(5x-1)$,去括号,得$5x+10=10x-2$. 移项,得$5x-10x=-2-10$. 合并同类项,得$-5x=-12$. 系数化为1,得$x=\frac{12}{5}$.

(2)$(x+1)-2(x-1)=1-3x$,去括号,得$x+1-2x+2=1-3x$. 移项,得$x-2x+3x=1-1-2$. 合并同类项,得$2x=-2$. 系数化为1,得$x=-1$.

(3)$2(x-2)-(4x-1)=3(1-x)$,去括号,得$2x-4-4x+1=3-3x$. 移项,得$2x-4x+3x=3+4-1$. 合并同类项,得$x=6$.

点拨:解有括号的方程的一般步骤:①去括号时可用分配律,注意符号,勿漏乘. 先去小括号,再去中括号,最

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

后去大括号;②移项;③合并同类项;④系数化为1.

2. 解:(1)根据题意,得方程$3(2-x)=2(3+x)$. 去括号,得$6-3x=6+2x$. 移项,得$-3x-2x=6-6$. 合并同类项,得$-5x=0$,即$x=0$. 所以当$x=0$时,代数式$3(2-x)$和$2(3+x)$的值相等.

(2)根据题意,得方程$2(3y+4)=5(2y-7)+3$. 去括号,得$6y+8=10y-35+3$. 移项,得$6y-10y=-35+3-8$. 合并同类项,得$-4y=-40$. 系数化为1,得$y=10$. 所以当$y=10$时,代数式$2(3y+4)$的值比$5(2y-7)$的值大3.

3. 解:$13+x=\frac{1}{3}(45+x)$,去分母,得$39+3x=45+x$. 移项,得$3x-x=45-39$. 合并同类项,得$2x=6$. 系数化为1,得$x=3$.

点拨:方程两边都乘以所有分母的最小公倍数,方程的解不变,依据的是方程的变形规则2.

练习

1. 解:(1)去分母时,方程右边的-1没有乘以10;系数化为1时方程的两边都应除以7. 改正:$\frac{3x-1}{2}=\frac{4x+2}{5}-1$,$15x-5=8x+4-10$,$15x-8x=4-10+5$,$7x=-1$,$x=-\frac{1}{7}$.

(2)去分母时,方程左边的第4项没有变号;移项时,方程右边的末项没有变号. 改正:$\frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{4-x}{2}$,$2x-2-x-2=12-3x$,$2x-x+3x=12+2+2$,$4x=16$,$x=4$.

2. 解:(1)$\frac{5x-1}{8}=\frac{7}{4}$,去分母,得$5x-1=2\times7$. 移项,合并同类项,得$5x=15$. 系数化为1,得$x=3$.

(2)$\frac{4-x}{3}=\frac{x-3}{5}-1$,去分母,得$5(4-x)=3(x-3)-15$. 去括号,得$20-5x=3x-9-15$. 移项,得$-5x-3x=-9-15-20$. 合并同类项,得$-8x=-44$. 系数化为1,得$x=\frac{11}{2}$.

点拨:按照解一元一次方程的方法逐步去解. 去分母时,如果分子是多项式,要给多项式添加括号,去括号时要注意去括号的法则.

练习

1. 解:设小刚在冲刺阶段花了x秒,根据题意,列方程,得$6(65-x)+8x=400$. 解这个方程,得$x=5$. 经检验,符合题意.

答:小刚在冲刺阶段花了5秒.

点拨:解应用题应先设出相应的未知数,列出方程,再解方程,最后要检验解是否符合题意.

2. 略.

3. 解:设小刚在离终点x米处开始冲刺,根据题意,列方程,得$\frac{400-x}{6}+\frac{x}{8}=65$. 解这个方程,得$x=40$. 经检验,符合题意.

答:小刚在离终点40米处开始冲刺.

点拨:本题的等量关系是以6米/秒的速度跑$(400-x)$米用的时间+以8米/秒的速度跑x米用的时间=65秒.

习题6.2.2

1. 解:(1)$3=1-2(4+x)$,去括号,得$1-8-2x=3$,移项,得$-2x=3-1+8$. 合并同类项,得$-2x=10$. 系数化为1,得$x=-5$.

(2)$3(2x+5)=2(4x+3)+1$,去括号,得$6x+15=8x+6+1$. 移项,得$6x-8x=6+1-15$. 合并同类项,得$-2x=-8$. 系数化为1,得$x=4$.

点拨:去括号时,可用分配律. 注意移项要变号,勿漏乘.

2. 解:(1)$\frac{5-3x}{2}=\frac{3-5x}{3}$,去分母,得$3(5-3x)=2(3-5x)$. 去括号,得$15-9x=6-10x$. 移项,得$-9x+10x=6-15$. 合并同类项,得$x=-9$.

(2)$1-\frac{1}{2}x=3-\frac{1}{6}x$,去分母,得$6-3x=18-x$. 移项,得$-3x+x=18-6$. 合并同类项,得$-2x=12$. 系数化为1,得$x=-6$.

(3)$\frac{y+2}{4}-\frac{2y-1}{6}=1$,去分母,得$3(y+2)-2(2y-1)=12$. 去括号,得$3y+6-4y+2=12$. 移项,得$3y-4y=12-6-2$. 合并同类项,得$-y=4$. 系数化为1,得$y=-4$.

点拨:(1)中分母是2,3,而2和3的最小公倍数是6,所以方程两边都乘以6. (2)中分母是2,6,而2和6的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

最小公倍数是6,所以方程两边都乘以6.(3)中分母是4,6,而4和6的最小公倍数是12,所以方程两边都乘以12.

3. 解:(1)将 $S=279, b=7, n=18$ 代入等式 $S=\frac{n(a+b)}{2}$ 中,得 $279=\frac{18(a+7)}{2}$. 去分母,得 $558=18a+126$. 移项,得 $18a=558-126$. 合并同类项,得 $18a=432$. 系数化为1,得 $a=24$,即 a 的值为24.

(2)将 $a=3, h=5, S=20$ 代入梯形的面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 中,得 $20=\frac{1}{2}\times(3+b)\times5$. 去分母,得 $40=(3+b)\times5$. 去括号,得 $40=15+5b$. 移项,得 $5b=40-15$. 合并同类项,得 $5b=25$. 系数化为1,得 $b=5$,即下底 b 的长为5.

点拨:由于方程的形式不同,在解方程时,去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1这五个步骤不一定都用到,也可能某一步要多次用到,并且没有固定的顺序,要根据方程形式的特点灵活安排求解步骤,熟练以后,步骤可以简化.

4. 解:设白色皮块有 x 块,根据题意,列方程,得 $\left(\frac{1}{2}x+2\right)+x=32$. 去括号、移项,得 $\frac{1}{2}x+x=32-2$. 合并同类项,得 $\frac{3}{2}x=30$. 系数化为1,得 $x=20$. 经检验,符合题意. 则黑色皮块有 $\frac{1}{2}\times20+2=12$(块).

答:黑色皮块有12块,白色皮块有20块.

点拨:由题中"已知黑色皮块数比白色皮块数的一半多2",可设白色皮块有 x 块,则黑色皮块有 $\left(\frac{1}{2}x+2\right)$ 块.

5. 解:设 A、B 两地之间的路程为 x 千米,根据题意,列方程,得 $\frac{x}{4(1+50\%)}+\frac{1}{3}=\frac{x}{4}$. 整理,得 $\frac{x}{6}+\frac{1}{3}=\frac{x}{4}$. 去分母,得 $2x+4=3x$. 移项,得 $2x-3x=-4$. 合并同类项,得 $-x=-4$,即 $x=4$. 经检验,符合题意. **答**:A、B 两地之间的路程为4千米.

6.3 实践与探索

练习

1. 解:设圆柱的高是 x 厘米,根据题意,列方程,得 $4\times3\times2=3.14\times1.5\times1.5x$. 解这个方程,得 $x\approx3.4$. 经检验,符合题意.

答:圆柱的高约是3.4厘米.

点拨:认真审题,根据等量关系"圆柱的体积=长方体的体积"列方程即可.

2. 解:$\left(\frac{5}{2}\right)^2\times18\times\pi=112.5\pi$(立方厘米),$\left(\frac{6}{2}\right)^2\times10\times\pi=90\pi$(立方厘米). 因为 $112.5\pi>90\pi$,所以圆柱形玻璃杯不能完全装下圆柱形瓶内的水. 设瓶内水面的高度为 x 厘米,根据题意,列方程,得 $112.5\pi-90\pi=\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2x$. 解这个方程,得 $x=3.6$.

答:不能完全装下瓶内的水,瓶内水面还有3.6厘米高.

点拨:将圆柱形瓶内水的体积和圆柱形玻璃杯的容积进行比较,若前者大,则不能将水完全装下,若后者大,则能将水完全装下.

练习

1. (1)$(1+20\%)a$ (2)$(1+15\%)x=60$ (3)18.50

点拨:此题考查学生对题中等量关系的理解,只有准确找出等量关系,才能正确地解题.

2. 解:设活动启动前 A 型电视机销售 x 台,B 型电视机销售 $(960-x)$ 台,根据题意得

$(1+20\%)x+(1+30\%)(960-x)=1\,192$,解方程,得 $x=560$.

所以启动后第一个月,政府共补贴 $560\times(1+20\%)\times0.219\,8\times13\%+(960-560)\times(1+30\%)\times0.189\,8\times13\%\approx32.0$(万元).

答:政府共补贴了约32.0万元.

点拨:本题采用间接设法比较简单,根据启动活动后售出的台数列方程,解题时应注意单位的统一.

习题6.3.1

1. 解:设这个角的度数为 $x°$,根据题意,列方程,得 $90-x+40=\frac{1}{2}(180-x)$. 解方程,得 $x=80$.

答:这个角的度数为80°.

2. 解:设今年的住房年增长率为 x,根据题意,列方程,得 $11(1+x)=13.5$. 解方程,得 $x\approx22.7\%$.

答:今年的住房年增长率约为22.7%.

点拨:增长率 $=\frac{\text{增长的量}}{\text{原来的量}}\times100\%$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 解:设他现在可以贷款 x 万元,根据题意,列方程,得 $x+6.21\%x\times50\%\times6=1.8$. 解方程,得 $x\approx1.5$.

答:他现在大约可以贷款 1.5 万元.

点拨:利息 = 本金 × 年利率 × 年数.

4. 解:(1)设 x 小时可以完成整条管道的检修,根据题意,列方程,得 $(15+10)x=180$. 解方程,得 $x=7.2$.

答:7.2 小时可以完成整条管道的检修.

(2)设需 y 小时完成,根据题意,列方程,得 $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)y=1$. 解方程,得 $y=6$.

答:需 6 小时完成.

点拨:(1)题中的工作总量为 180 米;(2)题中的工作总量可看成整体"1".

5. 解:设每套课桌椅的成本为 x 元,根据题意,列方程,得 $60\times100-60x=72\times(100-3)-72x$. 解方程,得 $x=82$.

答:每套课桌椅的成本为 82 元.

点拨:利润同样多指卖出 60 套与卖出 72 套课桌椅所获得的利润相等,利润 = 套数 × (售价 − 成本).

习题 6.3.2

1. 解:水箱里有水若干升,原来每天用 3 升,用去 15 升后,为了节约用水,每天用水量降低为原来的一半,结果多用了 10 天,求水箱里原来有水多少升.

点拨:审题意,列方程,根据所列方程编写问题,答案不唯一.

2. 解:设该旅客的机票价为 x 元,根据题意,列方程,得 $(35-20)\times1.5\%x=1\,323-x$. 解方程,得 $x=1\,080$.

答:该旅客的机票价为 1 080 元.

3. 解:设共制作小旗 x 面,根据题意,列方程,得 $\frac{\frac{1}{3}x}{40}+\frac{\frac{2}{3}x}{80}=\frac{x}{40}-1.5$. 解方程,得 $x=180$.

答:共制作小旗 180 面.

点拨:设共制作小旗 x 面,完成了三分之一为 $\frac{1}{3}x$ 面,每天制作 40 面,则 $\frac{\frac{1}{3}x}{40}$ 是制作前三分之一的小旗所用的天数,$\frac{\frac{2}{3}x}{80}$ 为制作剩下小旗所用的天数.

4. 解:问题:普通公路和高速公路各长多少千米?

解:设普通公路长 x 千米,高速公路长 $2x$ 千米,根据题意得

$\frac{x}{60}+\frac{2x}{100}=2.2$,解方程,得 $x=60$.

所以 $2x=120$. 答:普通公路长 60 千米,高速公路长 120 千米.

点拨:答案不唯一.

复习题

A 组

1. 解:(1)$\frac{2}{3}x-1=\frac{1}{2}x+3$,去分母,得 $4x-6=3x+18$. 移项,得 $4x-3x=18+6$. 合并同类项,得 $x=24$.

(2)$5(x-5)+2(x-12)=0$,去括号,得 $5x-25+2x-24=0$. 移项,得 $5x+2x=24+25$. 合并同类项,得 $7x=49$. 系数化为 1,得 $x=7$.

(3)$4x+3=2(x-1)+1$,去括号,得 $4x+3=2x-2+1$. 移项,得 $4x-2x=-2+1-3$. 合并同类项,得 $2x=-4$. 系数化为 1,得 $x=-2$.

(4)$y+\frac{1}{2}=\frac{2-y}{3}$,去分母,得 $6y+3=2(2-y)$. 去括号,得 $6y+3=4-2y$. 移项,得 $6y+2y=4-3$. 合并同类项,得 $8y=1$. 系数化为 1,得 $y=\frac{1}{8}$.

(5)$\frac{2}{7}(3x+7)=2-\frac{3}{2}x$,去分母,得 $4(3x+7)=28-21x$. 去括号,得 $12x+28=28-21x$. 移项,得 $12x+21x=28-28$. 合并同类项,得 $33x=0$,即 $x=0$.

(6)$\frac{2x+5}{6}-\frac{3x-2}{8}=1$,去分母,得 $4(2x+5)-3(3x-2)=24$. 去括号,得 $8x+20-9x+6=24$. 移项,得 $8x-9x=24-20-6$. 合并同类项,得 $-x=-2$. 系数化为 1,得 $x=2$.

点拨:解一元一次方程的一般思路:先通过方程变形把含有未知数的项移到方程的一边,把常数项移到方程的另一边,将方程化为 $ax=b(a\neq0)$ 的形式,再根据方程的变形规则 2,方程两边都除以未知数的系数 a,即得方程的解 $x=\frac{b}{a}$.

2. 解:(1)根据题意,列方程,得 $4x-5=-(3x-6)$. 去括号,得 $4x-5=-3x+6$. 移项,得 $4x+3x=6+5$. 合并同类项,得 $7x=11$. 系数化为 1,得 $x=\frac{11}{7}$. 即 x 为 $\frac{11}{7}$ 时,代

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

数式$4x-5$与$3x-6$的值互为相反数.(2)根据题意,列方程,得$\frac{k+1}{3}+1=\frac{3k+1}{2}$. 去分母,得$2(k+1)+6=3(3k+1)$. 去括号,得$2k+2+6=9k+3$. 移项,得$2k-9k=3-2-6$. 合并同类项,得$-7k=-5$. 系数化为1,得$k=\frac{5}{7}$. 即$k$为$\frac{5}{7}$时,代数式$\frac{k+1}{3}$的值比$\frac{3k+1}{2}$的值小1.

点拨:根据两个代数式之间的关系列方程.

3. 解:设这些学生共有x人,根据题意,列方程,得$\frac{x}{8}-2=\frac{x}{12}$. 解方程,得$x=48$.

答:这些学生共有48人.

点拨:设这些学生共有x人,每组8人,则共有$\frac{x}{8}$组,重新编组后有$\frac{x}{12}$组,再根据题中的等量关系可列方程$\frac{x}{8}-2=\frac{x}{12}$.

4. 解:设原售价为x元,根据题意,列方程,得$(1-15\%)x=56.10$. 解方程,得$x=66.00$.

答:原售价为66.00元.

5. 解:设应截取h厘米的铅柱,根据题意,列方程,得$\left(\frac{12}{2}\right)^2\pi h=10\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{12}{2}\right)^3\pi$. 解方程,得$h=80$.

答:应截取80厘米的铅柱.

6. 解:设原三位数的十位数字为x,根据题意,列方程,得$100(x+1)+10x+(3x-2)+100(3x-2)+10x+(x+1)=1171$. 解方程,得$x=3$. 则百位数字为$x+1=4$,个位数字为$3x-2=7$. 故这个三位数为437. **答:**这个三位数为437.

点拨:设十位数字为x,则个位数字为$3x-2$,百位数字为$x+1$,解方程时应注意符号的转换.

7. 解:设3个班共捐了x册,根据题意,列方程,得$x-\frac{x}{3}-40\%x=152$. 解方程,得$x=570$. **答:**3个班共捐了570册.

点拨:根据题意,由3个班捐书的总数=(1)班捐书数+(2)班捐书数+(3)班捐书数列方程.

B组

8. 解:(1)$\frac{3}{2}\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\right]=5x$,去中括号,得$3\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=5x$. 去小括号,得$3x-\frac{3}{2}+1=5x$. 去分母,得$6x-3+2=10x$. 移项,得$6x-10x=3-2$. 合并同类项,得$-4x=1$. 系数化为1,得$x=-\frac{1}{4}$.

(2)$2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5}$,去分母,得$40-5(3x-7)=-4(x+17)$. 去括号,得$40-15x+35=-4x-68$. 移项,得$-15x+4x=-68-40-35$. 合并同类项,得$-11x=-143$. 系数化为1,得$x=13$.

(3)$2.4-\frac{x-4}{2}=\frac{3}{5}x$,去分母,得$24-5(x-4)=6x$. 去括号,得$24-5x+20=6x$. 移项,得$-5x-6x=-24-20$. 合并同类项,

得$-11x=-44$. 系数化为1,得$x=4$.

(4)$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-2-x=2$,去括号,得$\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}-2-x=2$. 去分母,得$x-4-6-3x=6$. 移项,得$x-3x=6+4+6$. 合并同类项,得$-2x=16$. 系数化为1,得$x=-8$. **点拨:**当方程中既有分母,又有括号时,适当选取先去分母或先去括号的方法,会使方程解起来更容易.

9. 解:将$x=\frac{2}{3}$代入方程$3\left(m-\frac{3}{4}x\right)+\frac{3}{2}x=5m$,得$3\left(m-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=5m$. 化简,得$3\left(m-\frac{1}{2}\right)+1=5m$. 去括号,得$3m-\frac{3}{2}+1=5m$. 去分母,得$6m-3+2=10m$. 移项,得$6m-10m=3-2$. 合并同类项,得$-4m=1$. 系数化为1,得$m=-\frac{1}{4}$. 即$m$的值为$-\frac{1}{4}$.

点拨:已知方程的解,求方程中所含字母的值,一般有两种途径:(1)将$x=\frac{2}{3}$代入方程,得出关于m的方程;(2)求得已知方程的解(含字母m),再将已知解代入.

10. 解:$2(2x-3)=1-2x$,去括号,得$4x-6=1-2x$. 移项,得$4x+2x=1+6$. 合并同类项,得$6x=7$. 系数化为1,得$x=\frac{7}{6}$. 将$x=\frac{7}{6}$代入方程$8-k=2(x+1)$中,得$8-k=2\left(\frac{7}{6}+1\right)$去括号,得$8-k=\frac{7}{3}+2$,即$8-k=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{13}{3}$,$k=8-\frac{13}{3}$,得 $k=\frac{11}{3}$. 即当 k 为$\frac{11}{3}$时,方程 $2(2x-3)=1-2x$ 和 $8-k=2(x+1)$ 的解相同.

点拨:根据两方程的解相同,从已知方程入手,求其解,代入含 k 的方程中,即可求出 k 的值.

11. 解:设两类树木的总数为 x 棵,根据题意,列方程,得 $\frac{x}{2}+56+\frac{x}{3}-14=x$. 解方程,得 $x=252$. 则杨树为 $\frac{252}{2}+56=182$(棵),杉树为$\frac{252}{3}-14=70$(棵).

答:杨树种了 182 棵,杉树种了 70 棵.

点拨:先设两类树木的总数为 x 棵,求得两类树木的总数,再分别求出杨树和杉树的棵数.

12. 解:设甲、乙两地之间高速公路的路程为 x 千米,根据题意,列方程,得 $4\left(\frac{x+30}{7}+30\right)=x$. 解方程,得 $x=320$. **答**:甲、乙两地之间高速公路的路程为 320 千米.

点拨:利用路程、速度和时间三者之间的关系列方程.

13. 解:(1)设小王的速度为 x 米/秒,则叔叔的速度为$\frac{3}{2}x$ 米/秒,根据题意,列方程,得 $32x+32\times\frac{3}{2}x=400$. 解方程,得 $x=5$. 则$\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}\times5=7.5$.

答:小王的速度为 5 米/秒,叔叔的速度为 7.5 米/秒.

(2)设叔叔隔 t 秒再次与他相遇,根据题意,列方程,得 $7.5t-5t=400$. 解得 $t=160$.

答:叔叔隔 160 秒再次与他相遇.

点拨:根据路程、速度、时间三者之间的关系列方程求解.

C 组

14. 解:将 $x=2$ 代入 $2x^2+(3-c)x+c=10$,得 $2\times4+(3-c)\times2+c=10$. 去括号,得 $8+6-2c+c=10$. 移项,得 $-2c+c=10-8-6$. 合并同类项,得 $-c=-4$. 系数化为 1,得 $c=4$. 将 $x=-3$,$c=4$ 代入代数式 $2x^2+(3-c)x+c$ 中,得 $2\times(-3)^2+(3-4)\times(-3)+4=2\times9+3+4=18+3+4=25$.

所以当 $x=-3$ 时这个代数式的值是 25.

点拨:先求出字母 c 的值,再将 x 与 c 的值代入代数式中求得结果.

15. 解:(1)$|x-3|=2$,$x-3=\pm2$. ①当 $x-3=2$ 时,解得 $x=5$. ②当 $x-3=-2$ 时,解得 $x=1$. (2)$|2x+1|=5$,$2x+1=\pm5$. ①当 $2x+1=5$ 时,解得 $x=2$. ②当 $2x+1=-5$ 时,解得 $x=-3$.

16. 解:设树苗总数为 x 棵,根据题意,列方程,得 $100+\frac{1}{10}(x-100)=200+\frac{1}{10}\left\{x-\left[100+\frac{1}{10}(x-100)\right]-200\right\}$. 解方程,得 $x=8\,100$. 则第一班取走的树苗数为$\frac{1}{10}(8\,100-100)+100=900$(棵). 则班级数为$\frac{8\,100}{900}=9$(个).

答:树苗总数为 8 100 棵,共有 9 个班级.

点拨:根据第一、二班取的树苗数相等来列方程.

17. 解:设第一种规格的笔记本买了 x 本,根据题意,列方程,得 $1.80x+2.60(36-x)=100-(27.60-2)$. 去括号并合并同类项,得 $93.6-0.8x=74.4$. 移项,得 $-0.8x=74.4-93.6$. 合并同类项,得 $-0.8x=-19.2$. 系数化为 1,得 $x=24$. 则第二种规格的笔记本买了 $36-24=12$(本). 若找回 27.60 元,设第一种规格的笔记本买了 a 本,则列方程为 $1.80a+2.60(36-a)=100-27.60$. 解得 $a=26.5$. 因为与生活实际不符,不可能买 0.5 本,所以不可能找回 27.60 元.

答:第一种规格的笔记本买了 24 本,第二种规格的笔记本买了 12 本,不可能找回 27.60 元.

点拨:设第一种规格的笔记本买了 x 本,则第二种规格的笔记本买了$(36-x)$本,实际找回的应是 25.60 元,列出方程即可求解.

18. 解:周一至周五每天有 6 人打扫教室,包干区周一至周四每天有 2 人打扫,周五有 6 人打扫,另外周一 2 人整理教室.

点拨:可列表分析.

第 7 章 一次方程组

7.1 二元一次方程组和它的解

习题 7.1

1. 解:(1)设甲数为 x,乙数为 y,则有 $\begin{cases}x+y=14,\\2y-\frac{1}{3}x=7.\end{cases}$

(2)设摩托车的速度为 x 千米/时,货车的速度为 y 千

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

米/时，则有$\begin{cases}x=\frac{3}{2}y,\\x+y=200.\end{cases}$

(3) 设时装的单价为 x 元，皮装的单价为 y 元，则有$\begin{cases}x=1.4y,\\5y-3x=700.\end{cases}$

点拨：解答这类题的关键是找出题中的等量关系.

2. 解：(1) 将$\begin{cases}x=-8,\\y=10\end{cases}$代入方程$\frac{1}{2}x-y=6$的左、右两边，得左边$=\frac{1}{2}\times(-8)-10=-4-10=-14$，右边$=6$. 因为左边≠右边，所以$\begin{cases}x=-8,\\y=10\end{cases}$不是方程$\frac{1}{2}x-y=6$的解. 将$\begin{cases}x=0,\\y=-6\end{cases}$代入方程$\frac{1}{2}x-y=6$的左、右两边，得左边$=\frac{1}{2}\times0-(-6)=0+6=6$，右边$=6$. 因为左边$=$右边，所以$\begin{cases}x=0,\\y=-6\end{cases}$是方程$\frac{1}{2}x-y=6$的解. 将$\begin{cases}x=10,\\y=-1\end{cases}$代入方程$\frac{1}{2}x-y=6$的左、右两边，得左边$=\frac{1}{2}\times10-(-1)=5+1=6$，右边$=6$. 因为左边$=$右边，所以$\begin{cases}x=10,\\y=-1\end{cases}$是方程$\frac{1}{2}x-y=6$的解. 即$\begin{cases}x=0,\\y=-6\end{cases}$和$\begin{cases}x=10,\\y=-1\end{cases}$两对数值能使方程$\frac{1}{2}x-y=6$左、右两边的值相等.

(2) 将$\begin{cases}x=-8,\\y=10\end{cases}$代入方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=6,\\2x+31y=-11\end{cases}$中，得

$$\begin{cases}\text{左边}=\frac{1}{2}\times(-8)-10=-4-10=-14,\\\text{右边}=6,\text{左边}\neq\text{右边}.\\\text{左边}=2\times(-8)+31\times10=-16+310=294,\\\text{右边}=-11,\text{左边}\neq\text{右边}.\end{cases}$$

所以$\begin{cases}x=-8,\\y=10\end{cases}$不是方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=6,\\2x+31y=-11\end{cases}$的解.

将$\begin{cases}x=0,\\y=-6\end{cases}$代入方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=6,\\2x+31y=-11\end{cases}$中，

得$\begin{cases}\text{左边}=\frac{1}{2}\times0-(-6)=0+6=6,\\\text{右边}=6,\text{左边}=\text{右边}.\\\text{左边}=2\times0+31\times(-6)=0-186=-186,\\\text{右边}=-11,\text{左边}\neq\text{右边}.\end{cases}$

所以$\begin{cases}x=0,\\y=-6\end{cases}$不是方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=6,\\2x+31y=-11\end{cases}$的解.

将$\begin{cases}x=10,\\y=-1\end{cases}$代入方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=6,\\2x+31y=-11\end{cases}$中，得

$$\begin{cases}\text{左边}=\frac{1}{2}\times10-(-1)=5+1=6,\\\text{右边}=6,\text{左边}=\text{右边}.\\\text{左边}=2\times10+31\times(-1)=20-31=-11,\\\text{右边}=-11,\text{左边}=\text{右边}.\end{cases}$$

所以$\begin{cases}x=10,\\y=-1\end{cases}$是方程组$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=6,\\2x+31y=-11\end{cases}$的解.

点拨：把题目中给出的几对数值分别代入每一个方程中，若方程左、右两边的值相等，则是方程的解，若方程左、右两边的值不等，则不是. 使方程组中每一个方程都成立的一对未知数的值是方程组的解.

7.2 二元一次方程组的解法

练习

1. 解：$\begin{cases}x=3y+2,&①\\x+3y=8.&②\end{cases}$将①代入②中，得$3y+2+3y=8$，即$6y=6$，解得$y=1$. ③

将③代入①中，得$x=5$，所以$\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

点拨：方程①中的 x 是用 y 来表示的，直接代入②中可变为关于 y 的一元一次方程，从而可求解.

2. 解：$\begin{cases}4x-3y=17,&①\\y=7-5x.&②\end{cases}$将②代入①中，得$4x-3(7-5x)=17$. 解得$x=2$. ③

将③代入②中，得$y=-3$. 所以$\begin{cases}x=2,\\y=-3.\end{cases}$

点拨：将②代入①中可得$4x-3(7-5x)=17$，解此一

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

元一次方程可求得 x,从而可求得原方程组的解.

3. 解: $\begin{cases} x-y=-5, & ① \\ 3x+2y=10. & ② \end{cases}$ 由①,得 $x=y-5$. ③ 将③代入②中,得 $3(y-5)+2y=10$. 解得 $y=5$. ④ 将④代入③中,得 $x=0$. 所以 $\begin{cases} x=0, \\ y=5. \end{cases}$

4. 解: $\begin{cases} 2x-7y=8, & ① \\ y-2x=-3.2. & ② \end{cases}$ 由②,得 $y=2x-3.2$. ③ 将③代入①中,得 $2x-7(2x-3.2)=8$. 解得 $x=1.2$. ④ 将④代入③中,得 $y=-0.8$. 所以 $\begin{cases} x=1.2, \\ y=-0.8. \end{cases}$

点拨: 由二元一次方程组的解的定义可知:解方程组,就是要求出同时满足方程组的两个方程的两个未知数 x 和 y 的值.

练习

1. 解: (1) $y=4x+1$ 或 $x=\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}$.

(2) $x=2y-3$ 或 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

2. 解: (1) $\begin{cases} 2x-4y=6, & ① \\ 3x+2y=17. & ② \end{cases}$ 由①得 $x=2y+3$. ③ 将③代入②,得 $3(2y+3)+2y=17$. 解得 $y=1$. ④ 将④代入③中,得 $x=5$. 所以 $\begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3y=x+4, & ① \\ 2x+5y=-19. & ② \end{cases}$

由①,得 $x=3y-4$. ③ 将③代入②中,

得 $2(3y-4)+5y=-19$. 解得 $y=-1$. ④ 将④代入③中,得 $x=-7$.

所以 $\begin{cases} x=-7, \\ y=-1. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+3y=7, & ① \\ 3x-5y=1. & ② \end{cases}$ 由①,得 $x=\frac{7-3y}{2}$. ③

将③代入②中,得 $3\left(\frac{7-3y}{2}\right)-5y=1$. 解得 $y=1$. ④

将④代入③中,得 $x=2$. 所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x+5y=5, & ① \\ 3x-4y=23. & ② \end{cases}$ 方法一:由①,得 $x=\frac{5-5y}{3}$.

③ 将③代入②中,得 $3\left(\frac{5-5y}{3}\right)-4y=23$. 解得 $y=-$

2. ④ 将④代入③中,得 $x=5$. 所以 $\begin{cases} x=5, \\ y=-2. \end{cases}$ 方法二:由①,得 $3x=5-5y$. ③

将③代入②中,得 $5-5y-4y=23$. 解得 $y=-2$. ④

将④代入③中,得 $x=5$. 所以 $\begin{cases} x=5, \\ y=-2. \end{cases}$

点拨: 用代入法解二元一次方程组,先将其中一个方程变形为用一个未知数表示另一个未知数的形式,再代入另一个方程消元,转化为一元一次方程来解.

练习

1. 解: $\begin{cases} 5x+y=7, & ① \\ 3x-y=1. & ② \end{cases}$ ① + ②,得 $8x=8$,

即 $x=1$. ③ 将③代入②中,

得 $3\times1-y=1$,即 $y=2$. 所以 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

点拨: 观察方程①,②,y 的系数互为相反数,两式相加可得关于 x 的一元一次方程,从而可求得原方程组的解.

2. 解: $\begin{cases} 4x-3y=5, & ① \\ 4x+6y=14. & ② \end{cases}$ ② - ①,得 $9y=9$,即 $y=1$. ③

将③代入①中,得 $4x-3\times1=5$. 解得 $x=2$. 所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

点拨: 因为两个方程中 x 的系数相同,所以两式相减可消去 x,先解关于 y 的一元一次方程,再求 x 的值.

3. 解: $\begin{cases} 6x+7y=5, & ① \\ 6x-7y=19. & ② \end{cases}$ ① - ②,得 $14y=-14$,即 $y=-1$. ③ 将③代入①中,得 $6x+(-7)=5$. 解得 $x=2$. 所以 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$

点拨: 当方程组中同一个未知数的系数相同或互为相反数时,用加减消元法来解较为容易.

4. 解: $\begin{cases} 0.5x-3y=-1, & ① \\ -\frac{1}{2}x+5y=3. & ② \end{cases}$ ① + ②,得 $2y=2$,即 $y=1$.

③ 将③代入①中,得 $0.5x-3=-1$,即 $x=4$. 所以 $\begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$

点拨: 本题考查的主要是加减消元法的运用. 就是通过

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将两个方程的两边分别相加(或相减)消去一个未知数,将方程组转化为一元一次方程来解.

练习

1. 解: $\begin{cases}3x-2y=6, & ①\\ 2x+3y=17. & ②\end{cases}$ ① × 3, ② × 2, 得

$\begin{cases}9x-6y=18, & ③\\ 4x+6y=34. & ④\end{cases}$ ③ + ④, 得 $13x=52$, 即 $x=4$. ⑤

将⑤代入①中, 得 $12-2y=6$, 即 $y=3$. 所以 $\begin{cases}x=4,\\ y=3.\end{cases}$

2. 解: $\begin{cases}4x-2y=14, & ①\\ 5x+y=7. & ②\end{cases}$ ② × 2 + ①, 得 $14x=28$, 即 $x=2$. ③ 把③代入②中, 得 $10+y=7$, 即 $y=-3$. 所以 $\begin{cases}x=2,\\ y=-3.\end{cases}$

点拨: 本题也可用代入法求解. 将②变形为 $y=7-5x$, 代入①中可得关于 x 的一元一次方程, 从而可解得 x 的值. 再代入 $y=7-5x$ 中可求得 y 的值.

3. 解: $\begin{cases}x-3y=-20, & ①\\ 3x+7y=100. & ②\end{cases}$ ① × 3 − ②, 得 $-16y=-160$, 即 $y=10$. ③ 把③代入①中, 得 $x-30=-20$, 即 $x=10$. 所以 $\begin{cases}x=10,\\ y=10.\end{cases}$

点拨: 若原方程组的两个方程直接相加(或相减), 不能消去任何一个未知数, 但方程②中 x 的系数是方程①中 x 的系数的 3 倍, 则只要将① × 3 再减去②即可消去 x.

4. 解: $\begin{cases}2x-3y=8, & ①\\ 5y-7x=5. & ②\end{cases}$ 将方程组整理为 $\begin{cases}2x-3y=8, & ③\\ -7x+5y=5. & ④\end{cases}$

③ × 5 + ④ × 3, 得 $-11x=55$, 即 $x=-5$. ⑤

将⑤代入③中, 得 $-10-3y=8$. 解得 $y=-6$. 所以 $\begin{cases}x=-5,\\ y=-6.\end{cases}$

点拨: 解本题常见错误: 方程两边同乘以一个不等于零的常数时, 容易出现漏乘现象; 求解不完整, 只求出一个未知数的值就以为解完了.

练习

1. 解: 设二级工有 x 名, 三级工有 y 名, 根据题意, 列方程组, 得 $\begin{cases}x+y=22,\\ 150x+200y=3\ 400.\end{cases}$

解方程组, 得 $\begin{cases}x=20,\\ y=2.\end{cases}$

答: 二级工有20 名, 三级工有 2 名.

点拨: 等量关系: (1) 二级工人数 + 三级工人数 = 22; (2) x 名二级工的工作量 + y 名三级工的工作量 = 3 400件.

2. 解: 设改变后林场的面积为 x 公顷, 牧场的面积为 y 公顷, 根据题意, 列方程组, 得 $\begin{cases}x+y=162,\\ y=20\%\,x.\end{cases}$ 解方程组, 得 $\begin{cases}x=135,\\ y=27.\end{cases}$

答: 改变后林场的面积为 135 公顷, 牧场的面积为 27 公顷.

点拨: 先根据林场和牧场的总面积为 162 公顷和牧场面积是林场面积的 20% 列出方程组, 再求解.

3. 解: 设甲种货物应装 x 吨, 乙种货物应装 y 吨, 根据题意, 列方程组, 得 $\begin{cases}8x+2y=1\ 000,\\ x+y=260.\end{cases}$ 解方程组, 得 $\begin{cases}x=80,\\ y=180.\end{cases}$

答: 甲种货物应装 80 吨, 乙种货物应装 180 吨.

习题 7.2

1. 解: (1) $\begin{cases}x-3y=2, & ①\\ 2x+y=18. & ②\end{cases}$ ② − ① × 2,

得 $7y=14$, 即 $y=2$. ③ 将③代入①中, 得 $x-6=2$, 即 $x=8$. 所以 $\begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2a+b=0, & ①\\ 4a+3b=6. & ②\end{cases}$ ① × 3 − ②, 得 $2a=-6$, 即 $a=-3$. ③ 将③代入①中, 得 $-6+b=0$, 即 $b=6$. 所以 $\begin{cases}a=-3,\\ b=6.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-2y+20=0,\\ 2x+15y-3=0.\end{cases}$

整理, 得 $\begin{cases}3x-2y=-20, & ①\\ 2x+15y=3. & ②\end{cases}$ ② × 3 − ① × 2,

得 $49y=49$, 即 $y=1$. ③

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将③代入②,得 $2x+15=3$. 解得 $x=-6$. 所以 $\begin{cases}x=-6,\\y=1.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}2y-8=-x,\\4x+3y=7.\end{cases}$ 将方程组整理,得 $\begin{cases}x+2y=8,\ ①\\4x+3y=7.\ ②\end{cases}$ ①×4−②,得 $5y=25$,即 $y=5$. ③

将③代入①中,得 $x+10=8$,即 $x=-2$. 所以 $\begin{cases}x=-2,\\y=5.\end{cases}$

点拨:方程组中当某一个未知数的系数的绝对值为1时,可考虑用代入法解方程组,当某一个相同未知数的系数成整数倍关系时,可考虑采用加减法来解.

2. 解:设第一小组同学有 x 人,铅笔有 y 支,根据题意,列方程组,得 $\begin{cases}5x+4=y,\\6(x-1)+1\times2=y.\end{cases}$ 解方程组,得 $\begin{cases}x=8,\\y=44.\end{cases}$

答:第一小组同学有8人,铅笔有44支.

点拨:在"若每人各取5支,则还剩4支"和"若有1人只取2支,则其余每人恰好各得6支"两句话中寻找等量关系.

3. 解:设甲每天加工 x 个零件,乙每天加工 y 个零件,根据题意,列方程组,得 $\begin{cases}3(x+y)=400+20,\\x+2(x+y)=400-60.\end{cases}$ 解方程组,得 $\begin{cases}x=60,\\y=80.\end{cases}$

答:甲每天加工60个零件,乙每天加工80个零件.

4. 解:设第一车间原来有 x 人,第二车间原来有 y 人,根据题意,列方程组,得 $\begin{cases}y=\frac{4}{5}x-30,\\\frac{3}{4}(x-10)=y+10.\end{cases}$ 解方程组,得 $\begin{cases}x=250,\\y=170.\end{cases}$

答:第一车间原来有250人,第二车间原来有170人.

点拨:第二车间的人数=第一车间人数的 $\frac{4}{5}$ −30,第二车间调入10人后的人数=第一车间调走10人后的人数的 $\frac{3}{4}$,根据这两个等量关系,列方程组.

*7.3 三元一次方程组及其解法

练习

1. 解:(1) $\begin{cases}x+y+z=6,①\\3x-y+2z=12,②\\x-y-3z=-4.③\end{cases}$

①+②,得 $4x+3z=18$. ④ ①+③,得 $2x-2z=2$. ⑤

④−⑤×2,得 $z=2$,把 $z=2$ 代入⑤,得 $x=3$. 把 $z=2$,$x=3$ 代入①,得 $y=1$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\\z=2.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x-2y=5,\ ①\\y-5z=-11,\ ②\\3z-4x=2.\ ③\end{cases}$ ①+②×2,得 $3x-10z=-17$,④

③×3+④×4,得 $z=2$,把 $z=2$ 代入③,得 $x=1$,把 $z=2$ 代入②,得 $y=-1$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\\z=2.\end{cases}$

点拨:解三元一次方程组的关键是消元,找一个系数较简单的未知数,通过适当的变形进行消元,使之变成一个二元一次方程组,再解.

2. 解:②×4−①,得 $10x-5y=25$, ④ ②×3+③,得 $10x-4y=22$. ⑤

⑤−④,得 $y=-3$,把 $y=-3$ 代入④,得 $x=1$. 把 $x=1$,$y=-3$ 代入②,得 $z=-2$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=-3,\\z=-2.\end{cases}$

练习

1. 解:(1) $\begin{cases}x+y-z=2,\ ①\\4x-2y+3z+8=0,\ ②\\x+3y-2z-6=0.\ ③\end{cases}$ ①×3+②,得 $7x+y=-2$, ④ ①×2−③,得 $x-y=-2$. ⑤

④+⑤,得 $x=-\frac{1}{2}$,把 $x=-\frac{1}{2}$ 代入⑤,得 $y=\frac{3}{2}$,把 $x=-\frac{1}{2}$,$y=\frac{3}{2}$ 代入①,得 $z=-1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\ y=\frac{3}{2},\\ z=-1.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}\frac{x}{3}=\frac{y}{2}, & ①\\ \frac{y}{4}=\frac{z}{5}, & ②\\ x+y+z=60. & ③\end{cases}$

由①,得$x=\frac{3}{2}y$,④　由②,得$z=\frac{5}{4}y$.⑤　把④,⑤代入③,得$y=16$.

把$y=16$分别代入④,⑤,得$x=24$,$z=20$. 所以原方程组的解是$\begin{cases}x=24,\\ y=16,\\ z=20.\end{cases}$

点拨:解三元一次方程组的关键是消元,通过对某个方程的变形,利用加减或代入的方法达到消元的目的.

2. 解:根据题意,得$\begin{cases}4a-2b+c=9,\\ c=3,\\ 4a+2b+c=5.\end{cases}$解方程组,得$\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\\ c=3.\end{cases}$

习题 7.3

1. 解:(1)$\begin{cases}x+y-z=0, & ①\\ 2x-y+3z=2, & ②\\ x-4y-2z+6=0. & ③\end{cases}$

①+②,得$3x+2z=2$.　④

①×4+③,得$5x-6z=-6$.　⑤

④×3+⑤,得$x=0$. 将$x=0$代入④,得$z=1$.

将$x=0$,$z=1$代入①,得$y=1$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=0,\\ y=1,\\ z=1.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}3x+y=6, & ①\\ x+2y-z=5, & ②\\ 5x-3y+2z=4. & ③\end{cases}$　②×2+③,得$7x+y=14$.　④

④−①,得$x=2$. 将$x=2$代入①,得$y=0$.

将$x=2$,$y=0$代入②,得$z=-3$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=2,\\ y=0,\\ z=-3.\end{cases}$

(3)$\begin{cases}x+y+z=-1, & ①\\ 4x-2y+3z=5, & ②\\ y-z=8-2x. & ③\end{cases}$　①×2+②,

得$6x+5z=3$.　④

①−③,得$-x+2z=-9$.　⑤

⑤×6+④,得$z=-3$. 将$z=-3$代入⑤,得$x=3$.

将$x=3$,$z=-3$代入①,得$y=-1$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=3,\\ y=-1,\\ z=-3.\end{cases}$

(4)$\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\ 3y-4z=3, & ②\\ 4z+5x=7. & ③\end{cases}$　①−②,

得$2x+4z=2$.　④

③−④,得$x=\frac{5}{3}$.

将$x=\frac{5}{3}$代入④,得$z=-\frac{1}{3}$. 将$x=\frac{5}{3}$代入①,得$y=\frac{5}{9}$.

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\ y=\frac{5}{9},\\ z=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

2. 解:设七年级有x人,八年级有y人,九年级有z人,根据题意,得

$\begin{cases}x+y+z=673,\\ y-25=\frac{1}{2}(x+z),\\ x-8=z.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=220,\\ y=241,\\ z=212.\end{cases}$

答:七年级有220人,八年级有241人,九年级有212人.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.4 实践与探索

习题 7.4

1. 解:设该市制定的用水标准 A 为 x,小红一家超过部分的用水是 y m^3,根据题意,列方程组,得 $\begin{cases} x+y=12, \\ 1.30x+2.90y=22. \end{cases}$

解方程组,得 $\begin{cases} x=8, \\ y=4. \end{cases}$

答:该市制定的用水标准 A 为 8,小红一家超过部分的用水是 4 m^3.

点拨:在实际应用问题中,寻找等量关系是关键.

2. 解:设七年级(1)、(2)两个班分别有 x 名,y 名学生,根据题意,列方程组,得 $\begin{cases} x+y=104, \\ 13x+11y=1\ 240. \end{cases}$ 解方程组,得 $\begin{cases} x=48, \\ y=56. \end{cases}$

答:七年级(1)班有 48 名学生,(2)班有 56 名学生.

点拨:依题意,找等量关系,列方程组,求出两班各自的人数.

复习题

A 组

1. (1) -3;6　(2) $\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

点拨:(1)将 $x=1.5$ 代入方程 $y=\frac{2}{3}x-4$ 中,得 $y=-3$;将 $y=0$ 代入方程 $y=\frac{2}{3}x-4$ 中,得 $x=6$. (2)将 $3x-2y=5$ 变形,得 $2y=3x-5$,即 $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$.

2. 解:(1) $\begin{cases} 3x-13y=-16, & ① \\ x+3y=2. & ② \end{cases}$ 由②,得 $x=2-3y$. ③

将③代入①中,得 $6-9y-13y=-16$,即 $22y=22$,得 $y=1$. ④

将④代入③中,得 $x=-1$. 所以 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y+2=0, & ① \\ 7x-4y=-41. & ② \end{cases}$ ① $\times 2$,得 $2x+4y=-4$. ③

② + ③,得 $9x=-45$,即 $x=-5$. ④ 将④代入①中,得 $y=1.5$. 所以 $\begin{cases} x=-5, \\ y=1.5. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3t-4s=14, & ① \\ 5t+4s=2. & ② \end{cases}$ ① + ②,得 $8t=16$,即 $t=2$. ③

将③代入②中,解得 $s=-2$. 所以 $\begin{cases} t=2, \\ s=-2. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x+6y=15.2, & ① \\ 3x-2y=-0.4. & ② \end{cases}$ ② $\times 3$,得 $9x-6y=-1.2$. ③ ① + ③,得 $14x=14$,即 $x=1$. ④ 将④代入②中,得 $y=1.7$. 所以 $\begin{cases} x=1, \\ y=1.7. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2m+9n=4.8, & ① \\ 3m-5n=-15. & ② \end{cases}$ ① $\times 3$,② $\times 2$,得 $\begin{cases} 6m+27n=14.4, & ③ \\ 6m-10n=-30. & ④ \end{cases}$ ③ − ④,得 $37n=44.4$,即 $n=1.2$. ⑤ 将⑤代入①中,得 $m=-3$. 所以 $\begin{cases} m=-3, \\ n=1.2. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+3y=\frac{2}{3}, & ① \\ x-\frac{3}{4}y=-\frac{29}{12}. & ② \end{cases}$ ① $\times 2$,得 $x+6y=\frac{4}{3}$. ③ ③ − ②,得 $\frac{27}{4}y=\frac{45}{12}$,即 $y=\frac{5}{9}$. ④ 将④代入③中,得 $x=-2$. 所以 $\begin{cases} x=-2, \\ y=\frac{5}{9}. \end{cases}$

点拨:解二元一次方程组时,当某一个未知数的系数的绝对值为 1 时,用代入消元法解方程组较容易;当某一个相同未知数的系数的绝对值相等或成整数倍时,用加减消元法解方程组较容易.

3. 解:(1) $\begin{cases} 3x-2y=8, & ① \\ 2y+3z=1, & ② \\ x+5y-z=-4. & ③ \end{cases}$

③ $\times 3$ + ②,得 $3x+17y=-11$. ④

④ − ①,得 $y=-1$. 将 $y=-1$ 代入①,得 $x=2$. 将 $y=-1$ 代入②,得 $z=1$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-3y-z=-4, & ① \\ x+2y+2z=6, & ② \\ 3x+2y+z=11. & ③ \end{cases}$ ① $\times 2$ + ②,得 $5x-4y=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

-2.　④

③$\times 2-$②,得$5x+2y=16$.　⑤

⑤$-$④,得$y=3$. 将$y=3$代入④,得$x=2$.

将$x=2$,$y=3$代入①,得$z=-1$. 所以原方程组的解是$\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=-1.\end{cases}$

4. 解:将$x=1$,$y=-2$;$x=-1$,$y=-4$分别代入$y=kx+b$中,得$\begin{cases}k+b=-2,\\-k+b=-4.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}k=1,\\b=-3.\end{cases}$所以$k$的值为1,$b$的值为$-3$.

点拨:将x与y的值分别代入等式中,组成方程组,解出未知数的值.

5. 解:设小明投中x个,小明爸爸投中y个,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}x+y=20,\\3x=y.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=5,\\y=15.\end{cases}$

答:小明投中5个,小明爸爸投中15个.

点拨:根据题中的等量关系列出方程组是解题的关键.

6. 解:设小李今年x岁,他爷爷今年y岁,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}x=\frac{1}{5}y,\\x+12=\frac{1}{3}(y+12).\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=12,\\y=60.\end{cases}$

答:今年小李的年龄为12岁.

点拨:题中有两个等量关系:一个是今年小李的年龄是他爷爷的$\frac{1}{5}$;另一个是12年后他的年龄变成爷爷的$\frac{1}{3}$.

7. 解:设规定时间是x天,原计划检测y台,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}30x=\frac{4}{5}y,\\40(x-1)=y+25.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=26,\\y=975.\end{cases}$

答:规定时间是26天,原计划检测975台.

点拨:在应用题的审题过程中,要特别注意题目中的关键词语,比如:计划数的$\frac{4}{5}$、多检测了25台等.

B组

8. 解:(1)$\frac{x+y}{2}=\frac{2x-y}{3}=x+2$,去分母,得$3x+3y=4x-2y=6x+12$. 化简方程组,得$\begin{cases}3x+3y=4x-2y,&①\\3x+3y=6x+12.&②\end{cases}$由②,得$y=x+4$.　③　将③代入①中,得$6x+12=2x-8$,即$x=-5$.　④　将④代入③中,得$y=-1$. 所以$\begin{cases}x=-5,\\y=-1.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}\frac{2x-1}{5}+\frac{3y-2}{4}=2,\\\frac{3x+1}{5}-\frac{3y+2}{4}=0.\end{cases}$化简方程组,得$\begin{cases}8x+15y=54,&①\\12x-15y=6.&②\end{cases}$①$+$②,得$20x=60$,即$x=3$.　③

将③代入②中,得$12\times 3-15y=6$,即$y=2$. 所以$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

点拨:当方程组较复杂时,可先将其化简整理,再考虑用什么方法求解.

9. 解:设甲的速度为x千米/时,乙的速度为y千米/时,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}3-\frac{1}{2}x=2\left(3-\frac{1}{2}y\right),\\\frac{1}{3}(x+y)=3.\end{cases}$解方程组,得$\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$

答:甲的速度为4千米/时,乙的速度为5千米/时.

10. 解:设甲原来每小时加工x件,乙原来每小时加工y件,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}3x+3y=126,\\(5-1)(x+10)-5y=10.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=20,\\y=22.\end{cases}$

答:甲原来每小时加工20件,乙原来每小时加工22件.

11. 解:设第一条边的长度为x cm,第二条边的长度为y cm,则第三条边的长度为$(18-x-y)$ cm. 根据题意,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

列方程组,得$\begin{cases}x+y=2(18-x-y),\\ x-y=\frac{1}{3}(18-x-y).\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=7,\\ y=5.\end{cases}$所以$18-x-y=18-7-5=6$.

答:这个三角形三边的长度分别为7 cm,5 cm,6 cm.

点拨:根据三边长之间的关系,列方程组.

12. 解:设去年第一块田的产量是x千克,第二块田的产量是y千克,根据题意,列方程组,得

$\begin{cases}x+y=470,\\ (1+16\%)x+(1+10\%)y=523.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=100,\\ y=370.\end{cases}$

所以$(1+16\%)x=1.16\times100=116$,$(1+10\%)y=1.1\times370=407$.

答:改用良种后,第一块田的产量是116千克,第二块田的产量是407千克.

点拨:等量关系如下:(1)去年第一块田的产量+去年第二块田的产量=470千克;(2)今年第一块田的产量+今年第二块田的产量=523千克.

13. 解:设甜果买了x个,苦果买了y个,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}x+y=1\,000,\\ \frac{11}{9}x+\frac{4}{7}y=999.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=657,\\ y=343.\end{cases}$所以$\frac{11}{9}x=\frac{11}{9}\times657=803$,

$\frac{4}{7}y=\frac{4}{7}\times343=196$.

答:甜果买了657个,共803文钱,苦果买了343个,共196文钱.

C组

14. 解:设客车的速度是x米/秒,货车的速度是y米/秒,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}21(x+y)=450+600,\\ 105(x-y)=450+600.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=30,\\ y=20.\end{cases}$

答:客车的速度是30米/秒,货车的速度是20米/秒.

点拨:①注意车身的长度;②速度单位是"米/秒",则时间单位应是"秒",路程单位应是"米";③相等关系:两车速度之和×运动时间21秒=两车车身之和;两车速度之差×运动时间1分45秒=两车车身之和.

15. 解:设这家文具店每支铅笔和每块橡皮的批发价分别为x元,y元.根据题意,列方程组,得

$\begin{cases}60(x+0.05)+30(y+0.10)=30,\\ 30(3x+2y)=40.50.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=0.25,\\ y=0.30.\end{cases}$

答:这家文具店每支铅笔和每块橡皮的批发价分别是0.25元,0.30元.

点拨:解本题的关键是弄清题意和题目中的数量关系,找出能表达应用题全部含义的等量关系.

16. 解:设用x立方米木料做桌面,y立方米木料做桌腿,根据题意,列方程组,得$\begin{cases}4\times50x=300y,\\ x+y=5.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$所以$50x=50\times3=150$.

答:用3立方米木料做桌面,2立方米木料做桌腿,能配成150张方桌.

点拨:理解恰好配成方桌的意思:1个桌面需用4条桌腿,所以用木料制得桌腿的数目是桌面的4倍.

第8章 一元一次不等式

8.1 认识不等式

练习

1. 解:(1)$3x>5$.(2)$y-2<-1$.(3)$2x>x$.(4)$\frac{1}{2}y-3<0$.(5)$a>0$.(6)$b\leqslant0$.

点拨:根据题意列不等式,关键是抓住重点词语,正确地用不等式表示句子的含义.

2. (1)> (2)> (3)> (4)<

点拨:有理数的大小比较的方法是正数大于一切负数,数轴右边的点表示的数总比左边的点表示的数大.

3. 解:将$x=-3$代入不等式$x+2>5$中,得$-3+2>5$,即$-1>5$,不成立;将$x=-2$代入不等式$x+2>5$中,得$-2+2>5$,即$0>5$,不成立;将$x=-1$代入不等式$x+2>5$中,得$-1+2>5$,即$1>5$,不成立;将$x=0$代入不等式$x+2>5$中,得$0+2>5$,即$2>5$,不成立;将$x=1.5$代入不等式$x+2>5$中,得$1.5+2>5$,即$3.5>5$,不成立;将$x=2.5$代入不等式$x+2>5$中,得$2.5+$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$2>5$,即 $4.5>5$,不成立;将 $x=3$ 代入不等式 $x+2>5$ 中,得 $3+2>5$,即 $5>5$,不成立;将 $x=3.5$ 代入不等式 $x+2>5$ 中,得 $3.5+2>5$,即 $5.5>5$,成立;将 $x=5$ 代入不等式 $x+2>5$ 中,得 $5+2>5$,即 $7>5$,成立;将 $x=7$ 代入不等式 $x+2>5$ 中,得 $7+2>5$,即 $9>5$,成立. 所以 3.5,5,7 是不等式 $x+2>5$ 的解. $-3,-2,-1,0,1.5,2.5,3$ 不是不等式 $x+2>5$ 的解.

点拨:将给出的数值依次代入不等式 $x+2>5$ 中,即可检验出哪些是不等式的解,哪些不是不等式的解.

习题 8.1

1. (1) $<$ (2) $<$ (3) $>$ (4) $>$ (5) $<$ (6) $>$ **点拨**:要注意两个负数比较大小,绝对值大的反而小.

2. 解:(1) $\frac{1}{2}x-3>2$. (2) $2x+1<0$. (3) $2a-4>0$. (4) $\frac{1}{2}b+c<0$. (5) $a-b\geqslant 0$.

(6) $|x|+1>1$.

点拨:①要注意大于、小于、不大于、不小于、超过、多、少等一些字词的正确含义;②要弄清正数、负数、非正数、非负数等概念及其表示方法;③要掌握数学意义上的和、差、积、商、倍、分等字词的含义.

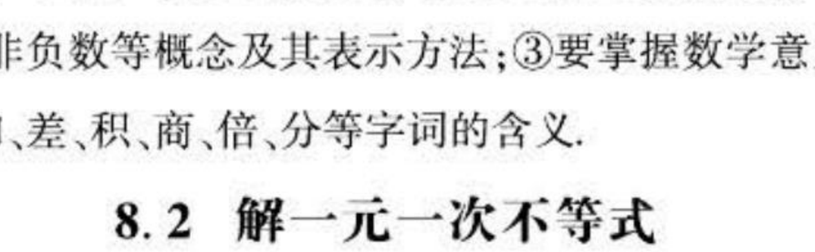
8.2 解一元一次不等式

练习

1. 解:不能. 因为 $x+3>2$ 的解也可以是 0,而 $x>0$ 不包括 0,所以不能说"不等式 $x+3>2$ 的解集是 $x>0$".

点拨:一个不等式的所有解,组成这个不等式的解的集合,简称为这个不等式的解集.

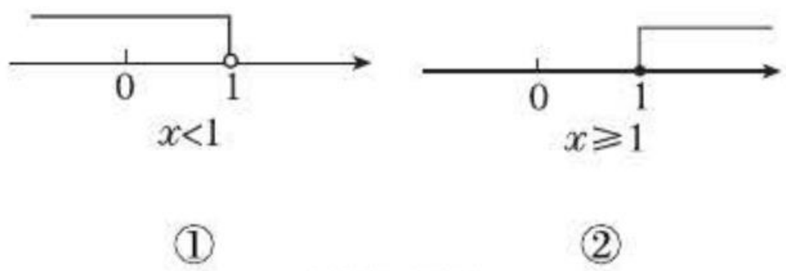
2. 解:$x<2$ 只是表示 x 小于 2,$x\leqslant 2$ 表示 x 小于或等于 2. 它们在数轴上的表示分别如图①和图②所示.



(第 2 题)

点拨:在用数轴表示不等式的解集时,要确定边界和方向:(1)边界:边界点含于解集中的用实心圆点,不含于解集中的用空心圆圈;(2)方向:大于向右画,小于向左画.

3. 解:$x<1$ 和 $x\geqslant 1$ 在数轴上的表示分别如图①和图②所示.

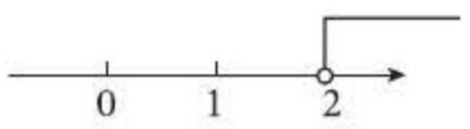


(第 3 题)

练习

1. 解:$x-2>0$. 不等式的两边都加上 2,不等号的方向不变,所以 $x-2+2>0+2$,得 $x>2$. 在数轴上表示如图所示.

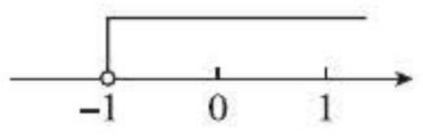
点拨:本题应用了不等式的性质 1.



(第 1 题)

2. 解:$x+1>0$. 不等式的两边都减去 1,不等号的方向不变,所以 $x+1-1>0-1$,得 $x>-1$. 在数轴上表示如图所示.

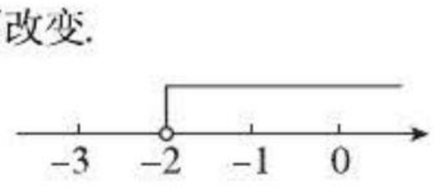
点拨:本题的不等式两边都减去 1,故不等号的方向不变.



(第 2 题)

3. 解:$-2x<4$. 不等式两边都乘以 $-\frac{1}{2}$,得 $x>-2$. 在数轴上表示如图所示.

点拨:本题应用了不等式的性质 3,不等式的两边都乘以 $-\frac{1}{2}$,故不等号的方向改变,这是一条与一元一次方程的变形原理有区别的很重要的性质,是最容易出错的地方. 解不等式时,一定要注意不等式两边都乘以(或都除以)的是正数还是负数,从而确定变形时不等号的方向改变还是不改变.

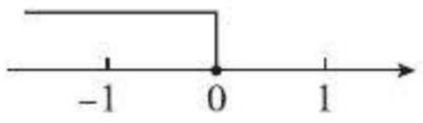


(第 3 题)

4. 解:$3x\leqslant 0$. 不等式两边同除以 3,得 $x\leqslant 0$. 在数轴上表示如图所示.

点拨:将不等式的解集在数轴上表示时,应注意:①不等号的方向;②解集不含边界数时用空心圆圈表示,含边界数时用实心圆点表示.

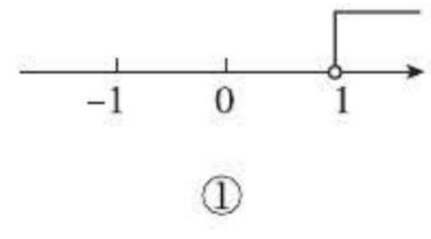
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

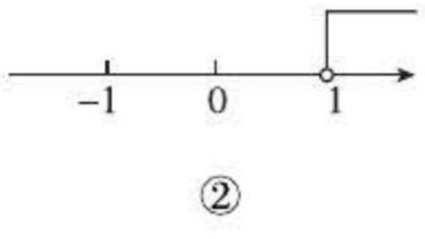


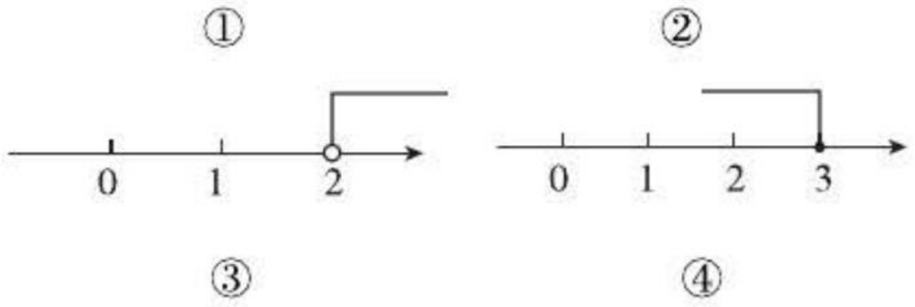
(第4题)

练习

1. 解:(1)$2x+1>3$. 移项,得 $2x>3-1$,即$2x>2$,不等式两边同除以2,得 $x>1$. 在数轴上表示如图①所示.







(第1题)

(2)$2-x<1$. 移项,得 $-x<1-2$,即 $x>1$. 在数轴上表示如图②所示.

(3)$2(x+1)<3x$. 去括号,得 $2x+2<3x$,移项,得 $2x-3x<-2$,合并同类项,得 $-x<-2$,系数化为1,得 $x>2$. 在数轴上表示如图③所示.

(4)$3(x+2)\geqslant 4(x-1)+7$. 去括号,得$3x+6\geqslant 4x-4+7$,移项,得$3x-4x\geqslant -4+7-6$,合并同类项,得 $-x\geqslant -3$,系数化为1,

得 $x\leqslant 3$. 在数轴上表示如图④所示.

点拨:解一元一次不等式的一般步骤:①去分母;②去括号;③移项;④合并同类项;⑤系数化为1.

2. 解:$\frac{2x-3}{3}>\frac{3x-2}{2}$. 去分母,得 $2(2x-3)>3(3x-2)$,去括号,得$4x-6>9x-6$,移项,得$4x-9x>-6+6$,合并同类项,得 $-5x>0$,系数化为1,得 $x<0$.

点拨:解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程的步骤类似,即去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1. 但在系数化为1时,若不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数,不等号的方向一定要改变.

3. 解:设后6天内平均每天要挖土 x m^3,根据题意,列不等式,得 $6x\geqslant 600-120$,得$6x\geqslant 480$,不等式两边同除以6,得 $x\geqslant 80$.

答:后6天内平均每天至少要挖土 80 m^3.

点拨:列不等式解应用题与列方程解应用题的步骤是一样的,简单地概括为:设、列、解、答,但如果出现了至少、至多、不超过、不大于、不小于、不多于、低于等词语,那么一般应列不等式,而不是列方程.

练习

1. 解:(1) $-4x\geqslant -12$. 不等式两边同除以 -4,得 $x\leqslant 3$. 则不等式 $-4x\geqslant -12$ 的正整数解为1,2,3. (2)$3x-11<0$. 移项,得$3x<11$,系数化为1,得 $x<\frac{11}{3}$. 则不等式$3x-11<0$ 的正整数解为1,2,3.

点拨:这类题是求不等式的特殊解,如正整数解、负整数解、自然数解、非正整数解等. 这类题的解法是先求出不等式的解集,然后在此范围内,找出所有符合条件的解,缺一不可. 若不好确定,可以借助数轴,在数轴上找出满足条件的特殊解.

2. 解:设他要答对 x 道题,总分才不会低于60分,根据题意得 $5x-2(18-x)\geqslant 60$. 解得 $x\geqslant 13\frac{5}{7}$. 因为 x 是非负整数,所以 x 最小应取14.

答:他至少要答对14道题,总分才不会低于60分.

习题 8.2

1. 解:(1)$x-5<0$. 移项,得 $x<5$.

(2)$3x\geqslant 2x-6$. 移项,得 $3x-2x\geqslant -6$,合并同类项,得 $x\geqslant -6$.

(3)$2x<-3$. 系数化为1,得 $x<-\frac{3}{2}$.

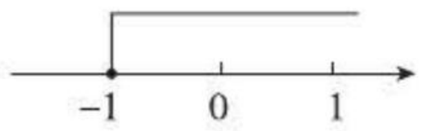
(4) $-2x>\frac{1}{3}$. 系数化为1,得 $x<-\frac{1}{6}$.

2. 解:(1)$x\geqslant -1$. (2)$x<1$. **点拨:**根据数轴写不等式的解集时,应注意数轴上给出的是实心圆点还是空心圆圈,是实心圆点解集就应该包含边界点,是空心圆圈解集就不包含边界点,方向向左应用“$<$”,方向向右应用“$>$”,还应注意空心圆圈和实心圆点在数轴上表示哪个数的位置上.

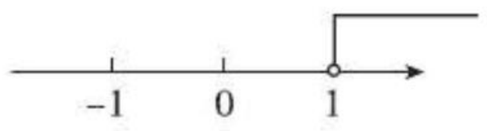
3. 解:(1)$3x\geqslant -3$. 系数化为1,得 $x\geqslant -1$. 在数轴上表示如图①所示.

(2) $-3x+3<0$. 移项,得 $-3x<-3$,系数化为1,得 $x>1$. 在数轴上表示如图②所示.

(3)$2x+2\leqslant 3x+3$. 移项,得 $2x-3x\leqslant 3-2$,合并同类项,得 $-x\leqslant 1$,即 $x\geqslant -1$. 在数轴上表示如图③所示.

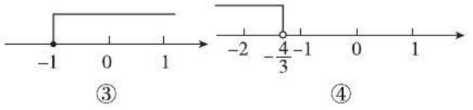


①



②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第3题）

(4)$5x-1>8x+3$. 移项，得$5x-8x>3+1$，合并同类项，得$-3x>4$，系数化为1，得$x<-\frac{4}{3}$. 在数轴上表示如图④所示.

点拨：系数化为1时，若不等式两边都除以同一个负数，不等号的方向一定要改变. 在数轴上表示不等式的解集时，要注意方向、空心圆圈和实心圆点，一定要表示正确.

4. 解：(1)由题意，列不等式，得$4a+2>1$，解得$a>-\frac{1}{4}$. 所以当$a>-\frac{1}{4}$时，代数式$4a+2$的值大于1.

(2)由题意，列方程，得$4a+2=1$，解得$a=-\frac{1}{4}$. 所以当$a=-\frac{1}{4}$时，代数式$4a+2$的值等于1. (3)由题意，列不等式，得$4a+2<1$，解得$a<-\frac{1}{4}$. 所以当$a<-\frac{1}{4}$时，代数式$4a+2$的值小于1.

5. 解：(1)$\frac{x}{2}+1>x$. 去分母，得$x+2>2x$，移项，得$x-2x>-2$，合并同类项，得$-x>-2$，系数化为1，得$x<2$.

(2)$3(x+3)<5(x-1)+7$. 去括号，得$3x+9<5x-5+7$，移项，得$3x-5x<-5+7-9$，合并同类项，得$-2x<-7$，系数化为1，得$x>\frac{7}{2}$.

(3)$\frac{1}{2}(x-3)<\frac{1}{3}-2x$. 去分母，得$3(x-3)<2-12x$，去括号，得$3x-9<2-12x$，移项，得$3x+12x<2+9$，合并同类项，得$15x<11$，系数化为1，得$x<\frac{11}{15}$.

(4)$\frac{x-1}{3}-\frac{x+4}{2}>-2$. 去分母，得$2(x-1)-3(x+4)>-12$，去括号，得$2x-2-3x-12>-12$，移项、合并同类项，得$-x>2$，系数化为1，得$x<-2$.

点拨：第(1)小题要注意1也要乘以2；第(2)小题要注意括号前的数要和括号中的每一项相乘；第(3)小题先去分母比先去括号简单；第(4)小题要注意-2也要乘以6；第(1)(2)(4)小题还要注意系数化为1时，不等号的方向要改变.

6. 解：$1-2x<6$. 移项，得$-2x<6-1$，合并同类项，得$-2x<5$，系数化为1，得$x>-\frac{5}{2}$. 因为所求的是负整数解，所以不等式$1-2x<6$的负整数解为-2，-1.

点拨：求不等式的特殊解，应先求出不等式的解集，再在这个范围内找出适合条件的解.

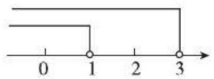
7. 解：设导火线长x厘米，根据题意，得$\frac{x}{1.2}>\frac{400}{5}$，解得$x>96$.

答：导火线必须超过96厘米，才能保证操作人员的安全.

8.3 一元一次不等式组

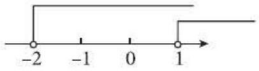
练习

1. 解：$\begin{cases}x-1<0, & ①\\ 2x-5<1. & ②\end{cases}$ 解不等式①，得$x<1$. 解不等式②，得$x<3$. 在同一数轴上表示不等式①②的解集，如图所示，可知所求不等式组的解集是$x<1$.



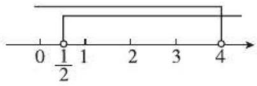
（第1题）

2. 解：$\begin{cases}5x+9>-1, & ①\\ 1-x<0. & ②\end{cases}$ 解不等式①，得$x>-2$. 解不等式②，得$x>1$. 在同一数轴上表示不等式①②的解集，如图所示，可知所求不等式组的解集是$x>1$.



（第2题）

3. 解：$\begin{cases}2x-1>0, & ①\\ 4-x>0. & ②\end{cases}$ 解不等式①，得$x>\frac{1}{2}$. 解不等式②，得$x<4$. 在同一数轴上表示不等式①②的解集，如图所示，可知所求不等式组的解集是$\frac{1}{2}<x<4$.

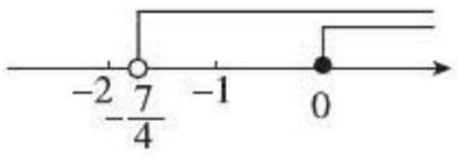


（第3题）

4. 解：$\begin{cases}-3x\leqslant 0, & ①\\ 4x+7>0. & ②\end{cases}$ 解不等式①，得$x\geqslant 0$. 解不等式②，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得 $x>-\frac{7}{4}$. 在同一数轴上表示不等式①②的解集,如图所示,可知所求不等式组的解集是 $x\geqslant 0$.

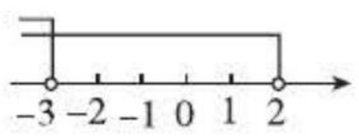
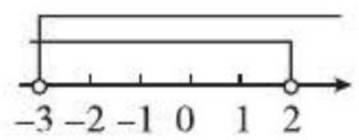
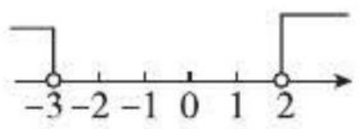
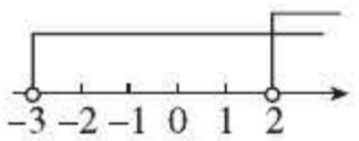


(第4题)

点拨:解不等式组时,应按三步求解:第一步:分别解出各个不等式的解集;第二步:在同一数轴上表示出所有不等式的解集,借助数轴找出其公共部分;第三步:确定不等式组的解集. 要准确地在数轴上表示出各个不等式的解集,这是找公共部分确定不等式组解集的关键一步.

练习

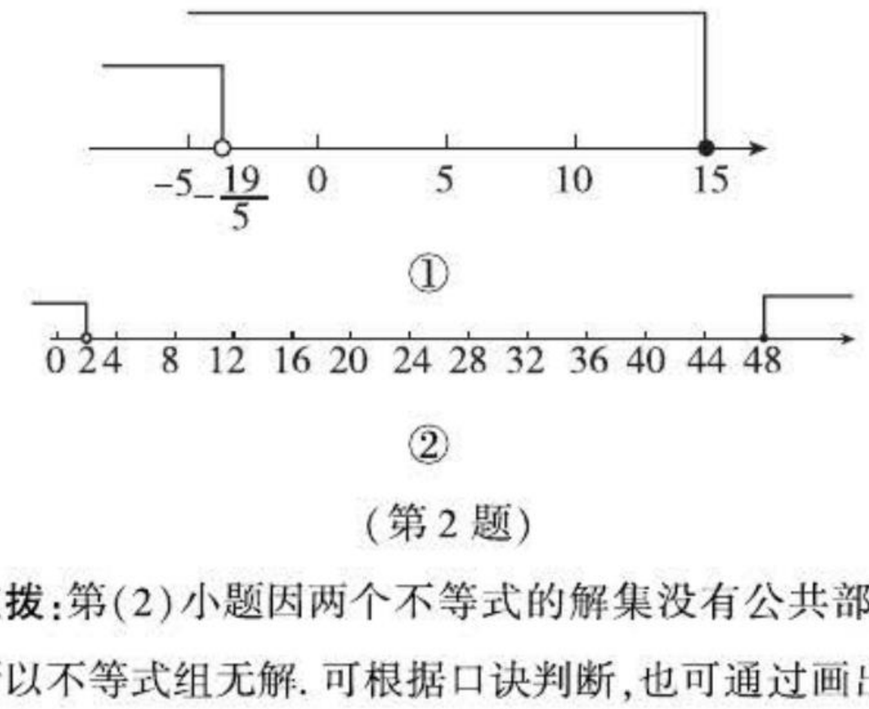
1.

不等式组	数轴表示	解集
$\begin{cases}x-2<0\\x+3<0\end{cases}$		$x<-3$
$\begin{cases}x-2<0\\x+3>0\end{cases}$		$-3<x<2$
$\begin{cases}x-2>0\\x+3<0\end{cases}$		无解
$\begin{cases}x-2>0\\x+3>0\end{cases}$		$x>2$

2. 解:(1) $\begin{cases}x-1>6(x+3), & ①\\5(x-2)-1\leqslant 4(1+x). & ②\end{cases}$ 由①,得 $x-1>6x+18$,即 $x<-\frac{19}{5}$. 由②,得 $5x-10-1\leqslant 4+4x$,即 $x\leqslant 15$. 在同一数轴上表示不等式①②的解集,如图①所示,可知所求不等式组的解集是 $x<-\frac{19}{5}$.

(2) $\begin{cases}\frac{x-2}{3}<0,\\4-\frac{1}{3}x\leqslant -\frac{1}{4}x.\end{cases}$ 原不等式组可化简为

$\begin{cases}x-2<0, & ①\\48-4x\leqslant -3x. & ②\end{cases}$ 由①,得 $x<2$. 由②,得 $-4x+3x\leqslant -48$,即 $x\geqslant 48$. 在同一数轴上表示不等式①②的解集,如图②所示,可知所求不等式组无解.



(第2题)

点拨:第(2)小题因两个不等式的解集没有公共部分,所以不等式组无解. 可根据口诀判断,也可通过画出数轴,直接判断.

3. 解:$\begin{cases}x+2>0, & ①\\x-6\leqslant 0. & ②\end{cases}$ 解①得 $x>-2$,解②,得 $x\leqslant 6$,所以不等式组的解集是 $-2<x\leqslant 6$. 所以不等式组的整数解是 $-1,0,1,2,3,4,5,6$.

点拨:解答此类问题的基本思路是先求不等式组的解集,再结合解集进行判断.

习题 8.3

1. 解:(1) $\begin{cases}4+2x>7x+3, & ①\\4x+5<3x+6. & ②\end{cases}$ 由①,得 $2x-7x>3-4$,即 $x<\frac{1}{5}$. 由②,得 $4x-3x<6-5$,即 $x<1$. 故不等式组的解集为 $x<\frac{1}{5}$.

(2) $\begin{cases}2x-5<3x-5, & ①\\6x-3<6-3x. & ②\end{cases}$ 由①,得 $2x-3x<-5+5$,即 $x>0$. 由②,得 $6x+3x<6+3$,即 $x<1$. 故不等式组的解集为 $0<x<1$.

(3) $\begin{cases}4x+50<8x+3,\\4x-7\leqslant 6x-\frac{5}{7}.\end{cases}$ 化简不等式组,得

$\begin{cases}4x+50<8x+3, & ①\\28x-49\leqslant 42x-5. & ②\end{cases}$ 由①,得 $4x-8x<3-50$,即 $x>\frac{47}{4}$. 由②,得 $28x-42x\leqslant -5+49$,即 $x\geqslant -\frac{22}{7}$. 故不等式组的解集为 $x>\frac{47}{4}$.

(4) $\begin{cases}5x+4<3(x+1),\\\frac{x-1}{2}\geqslant\frac{2x-1}{5}.\end{cases}$ 化简不等式组,得

$\begin{cases}5x+4<3x+3, & ①\\5x-5\geqslant 4x-2. & ②\end{cases}$ 由①,得 $5x-3x<3-4$,即 $x<$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-\frac{1}{2}$. 由②,得 $5x-4x\geqslant -2+5$,即 $x\geqslant 3$. 故不等式组无解.

2. 解: $2\leqslant 3x-7<8$,即 $\begin{cases}2\leqslant 3x-7, & ①\\ 3x-7<8. & ②\end{cases}$ 由①,得 $x\geqslant 3$. 由②,得 $x<5$. 则不等式组 $2\leqslant 3x-7<8$ 的解集为 $3\leqslant x<5$. 所以不等式组的整数解为 3,4.

点拨: 做这类题的方法是先求不等式组的解集,再取整数解.

复习题

A 组

1. 解: (1)对,根据方程的变形规则,方程两边都乘以(或都除以) -1,方程的解不变.

(2)不对,由 $-x>5$,得 $x<-5$.

(3)不对,由 $2x>-4$,得 $x>-2$.

(4)对,根据不等式的性质 3,不等式的两边都乘以 -2 或都除以 $-\frac{1}{2}$,不等号的方向要改变.

点拨: (2)中不等式两边除以同一个负数,不等号的方向改变;(3)中不等式两边除以同一个正数,不等号的方向不变.

2. 解: (1) $-3x<0$. 不等式两边同除以 -3,得 $x>0$. 在数轴上表示不等式的解集,如图①所示.

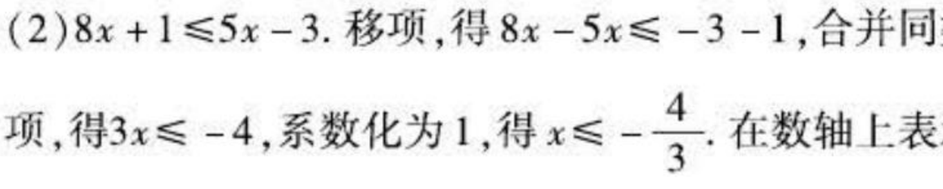
点拨: 本题中未知数的系数化为 1 时,不等号的方向要改变.

(2) $8x+1\leqslant 5x-3$. 移项,得 $8x-5x\leqslant -3-1$,合并同类项,得 $3x\leqslant -4$,系数化为 1,得 $x\leqslant -\frac{4}{3}$. 在数轴上表示不等式的解集,如图②所示.

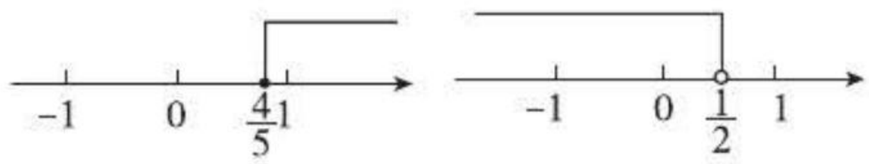
点拨: 移项注意变号.

(3) $3(x+2)-1\geqslant 5-2(x-2)$. 去括号,得 $3x+6-1\geqslant 5-2x+4$,移项,得 $3x+2x\geqslant 5+4-6+1$,合并同类项,得 $5x\geqslant 4$,系数化为 1,得 $x\geqslant \frac{4}{5}$. 在数轴上表示不等式的解集,如图③所示.

点拨: 注意不等式右边的 $-2(x-2)$,在去括号时各项要改变符号.



① ②



③ ④

(第 2 题)

(4) $\frac{1}{3}(1-2x)>\frac{3(2x-1)}{2}$. 去分母,得 $2(1-2x)>9(2x-1)$,去括号,得 $2-4x>18x-9$,移项,得 $-4x-18x>-9-2$,合并同类项,得 $-22x>-11$,系数化为 1,得 $x<\frac{1}{2}$. 在数轴上表示不等式的解集,如图④所示.

点拨: 本题先去分母,再去括号较简单,最后系数化为 1 时不等号的方向要改变.

3. 解: (1) $5-3x<0$. 移项,得 $-3x<-5$,系数化为 1,得 $x>\frac{5}{3}$. 所以当 x 大于 $\frac{5}{3}$ 时,代数式 $5-3x$ 的值是负数.

(2) $5-3x=0$. 移项,得 $-3x=-5$,系数化为 1,得 $x=\frac{5}{3}$. 所以当 x 等于 $\frac{5}{3}$ 时,代数式 $5-3x$ 的值是 0.

(3) $5-3x>0$. 移项,得 $-3x>-5$,系数化为 1,得 $x<\frac{5}{3}$. 所以当 x 小于 $\frac{5}{3}$ 时,代数式 $5-3x$ 的值是正数.

点拨: 负数是指小于 0 的数,正数是指大于 0 的数.

4. 解: (1) $\begin{cases}2(x+1)<0, & ①\\ 2x-1\leqslant 0. & ②\end{cases}$ 由①,得 $2x+2<0$,即 $x<-1$. 由②,得 $x\leqslant \frac{1}{2}$. 故不等式组的解集为 $x<-1$.

(2) $\begin{cases}2x>3x, & ①\\ x+2>4. & ②\end{cases}$ 由①,得 $2x-3x>0$,即 $x<0$. 由②,得 $x>4-2$,即 $x>2$. 故不等式组无解.

(3) $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}<1, & ①\\ 3x-7<-1. & ②\end{cases}$ 由①,得 $x+1<2$,即 $x<1$. 由②,得 $3x<-1+7$,即 $x<2$. 故不等式组的解集为 $x<1$.

(4) $\begin{cases}2x-6<3x,\\ \frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{4}\geqslant 0.\end{cases}$ 将原不等式组化简,得 $\begin{cases}2x-6<3x, & ①\\ 4(x+2)-5(x-1)\geqslant 0. & ②\end{cases}$ 由①,得 $2x-3x<6$,即

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x>-6$. 由②,得 $4x+8-5x+5\geqslant 0$,即 $x\leqslant 13$. 故不等式组的解集为 $-6<x\leqslant 13$.

点拨:解不等式组时,要先分别求出不等式组中每个不等式的解集,然后借助数轴找它们的解集的公共部分,这个公共部分就是不等式组的解集.

5. 解:$4n<10$,所以 $n<\frac{5}{2}$,所以正整数 n 的取值是 1,2.

B 组

6. 解:(1)不正确. 当 $c<0$ 时,$ac>bc$,

当 $c=0$ 时,$ac=bc$.

(2)不正确. 当 m 为负数时,$-\frac{x}{m}>-\frac{y}{m}$.

(3)不正确. 当 $z=0$ 时,$xz^2=yz^2$.

(4)正确.

点拨:正确理解不等式的性质是解决本题的关键,尤其是利用不等式的性质 2,3 进行变形时,一定要注意不等式的两边乘以(或除以)的是正数还是负数.

7. 解:设三个连续自然数分别是 $x-1,x,x+1$,根据题意,得 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\(x-1)+x+(x+1)<15,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x<5$. 因为 x 为自然数,所以 x 可以等于 1,2,3,4. 当 $x=1$ 时,$x-1=0,x+1=2$;当 $x=2$ 时,$x-1=1,x+1=3$;当 $x=3$ 时,$x-1=2,x+1=4$;当 $x=4$ 时,$x-1=3,x+1=5$. 所以满足条件的自然数组共有 4 组,它们分别是 0,1,2;1,2,3;2,3,4;3,4,5.

点拨:(1)不等式组中的第二个不等式很容易列出,而第一个不等式不易被想到而导致丢掉,因而正确理解自然数很重要. 自然数包括 0. (2)在设连续自然数、整数、奇数、偶数时,一般设中间的一个数为 x.

C 组

8. 解:解关于 x 的方程,得 $x=\frac{9+3k}{5}$,因为方程的解是非负数,所以 $\frac{9+3k}{5}\geqslant 0$,解得 $k\geqslant -3$.

9. 解:因为 $|5x-3|=3-5x$,所以 $5x-3\leqslant 0$,解得 $x\leqslant\frac{3}{5}$.

点拨:根据绝对值的性质进行解答,易列不等式 $5x-3<0$,而出现错解.

10. 解:(1)因为 $A>B,A<C$,所以 $B<A<C$.

(2)结合三个图形能够发现 $S>P,R>Q,R>S,P>Q$,所以 $R>S>P>Q$.

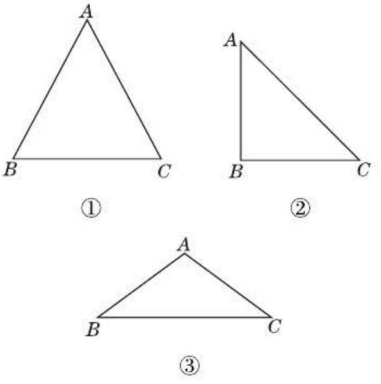
点拨:解答问题的关键是从跷跷板的不平衡中找出不等关系,从跷跷板的平衡中找出相等关系. 通过对图形的观察,培养学生的分析判断能力和读图能力,体现数形结合的数学思想.

第 9 章 多边形

9.1 三角形

练习

1. 解:(1)如图①所示,其中 $AB=AC$ 且 $\angle A,\angle B,\angle C$ 都为锐角.



(第 1 题)

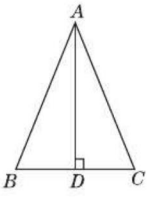
(2)如图②所示,其中 $AB=BC$ 且 $\angle ABC=90°$.

(3)如图③所示,其中 $AB=AC$ 且 $\angle A$ 为钝角. **点拨**:正确理解锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的概念,再使其为等腰三角形即可.

2. 解:可以画 5 个正三角形. **点拨**:设相邻两点间的距离为 1,则边长为 1 的正三角形有 4 个,边长为 2 的正三角形有 1 个.

练习

1. 解:如图所示,过点 A 作 $AD\perp BC$,交 BC 于点 D,则 AD 即为 BC 边上的中线和高以及 $\angle BAC$ 的平分线. 发现了“三线合一”. **点拨**:“三线合一”,即等腰三角形底边上的中线和高以及顶角的平分线是同一条线段.

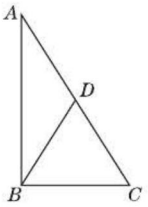


(第 1 题)

2. 解:如图所示,BD 即为直角三角形 ABC 的斜边 AC 上的中

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

线. 图中有2个等腰三角形,分别是△ABD,△BDC. 用刻度尺验证略.



(第2题)

练习

1. **解**:一个三角形中不可以有两个内角都是直角,因为两个直角的和就已经等于三角形的内角和180°. 不可以有两个内角都是钝角,因为两个钝角的和就已经超过了三角形的内角和180°. 可以有两个内角都是锐角.

点拨:三角形的内角和等于180°.

2. **解**:(1)90°;(2)95°;(3)85° **点拨**:根据三角形的内角和等于180°,已知其中两个内角的度数,可求第三个内角的度数. 则(1)中∠1 = 180° − 30° − 60° = 90°;根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和,则(2)中∠1 = 45° + 50° = 95°;(3)中∠1 = 120° − 35° = 85°.

3. **解**:(1)90°;三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和;90°;125°

(2)三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和;125°;35° 其他方法:因为∠A,∠BCD都是∠ABC的余角,所以∠A = ∠BCD = 35°. 又因为∠EBC是△ABC的一个外角,所以∠EBC = ∠A + ∠ACB = 35° + 90° = 125°.

点拨:正确理解和应用三角形的外角的性质是解题的关键.

练习

1. **解**:(1)能. (2)不能. (3)不能. (4)能.

点拨:三角形的任何两边的和大于第三边. (1)中15 + 10 > 7,10 + 7 > 15,15 + 7 > 10,所以能组成三角形;(2)中4 + 5 < 10,所以不能组成三角形;(3)中3 + 8 > 5,8 + 5 > 3,但3 + 5 = 8,所以不能组成三角形;(4)中4 + 5 > 6,5 + 6 > 4,4 + 6 > 5,所以能组成三角形.

2. **解**:设第三根木条的长为x厘米,则x应满足60 − 40 < x < 60 + 40,即20 < x < 100.

答:第三根木条的长度应大于20厘米,且小于100厘米.

3. **解**:摄像机的三脚支架、自行车三角架等等都是三角形的稳定性在实际生活中应用的例子. **点拨**:理解三角形稳定性在实际生活中的广泛应用,努力发现更多的实例. 答案不唯一.

习题9.1

1. (1)19 (2)7 **点拨**:(1)分两种情况:①若腰长为3 cm,底边长为8 cm,则3 + 3 = 6 < 8,不能组成三角形. 故此情况不存在;②若腰长为8 cm,底边长为3 cm,则8 + 8 = 16 > 3,3 + 8 = 11 > 8,此三角形存在. 故△ABC的周长是8 + 8 + 3 = 19(cm).

(2)分两种情况:①若腰长为4 cm,则底边长为18 − 4 × 2 = 10(cm),此时,4 + 4 = 8 < 10,不能组成三角形. 故此情况不存在;②若底边长为4 cm,则腰长为(18 − 4) ÷ 2 = 7(cm),此时,4 + 7 = 11 > 7,7 + 7 = 14 > 4,此三角形存在. 故腰长为7 cm.

2. 25°;118°;62° **点拨**:根据互为补角的概念求得∠1 = 180° − 155° = 25°,根据三角形的内角和等于180°,得∠2 = 180° − ∠1 − 37° = 180° − 25° − 37° = 118°,根据三角形的外角的性质,得∠3 = 37° + ∠1 = 37° + 25° = 62°.

3. **解**:因为∠BCD是△ABC的一个外角,所以∠BCD = ∠A + ∠ABC = 18° + 10° = 28°.

点拨:根据三角形的外角的性质:三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和,求得∠BCD的度数为28°.

4. 25°;三角形的内角和等于180°;25°;115°

点拨:根据三角形的内角和等于180°和角平分线的定义来解题.

9.2 多边形的内角和与外角和

练习

1. **解**:x° + x° + 150° + 80° = (4 − 2) × 180°,解得x = 65.

x° + 2x° + 160° + 90° + 110° = (5 − 2) × 180°,解得x = 60.

点拨:根据多边形内角和公式列方程求解.

2. **解**:设这个多边形的边数为x,依题意得(x − 2) · 180° = 1 440°,解得x = 10. 因此,这个多边形的边数为10.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

1. 解:因为任意多边形的外角和都为360°,且这个多边形的每个外角都是45°,所以共有$\frac{360°}{45°}=8$(个)外角,即这个多边形为八边形. 根据邻补角的定义可得这个多边形每一个内角的度数为$180°-45°=135°$.

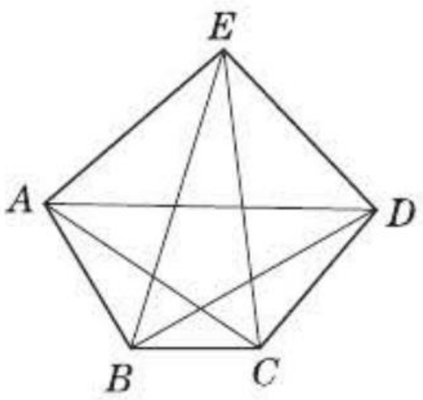
2. 解:根据多边形的外角和去判断,多边形的外角中最多可以有3个钝角,即多边形的内角中最多可以有3个是锐角.

点拨:从多边形外角和是360°考虑,易得结果.

习题9.2

1. 解:如图,它的对角线分别为线段AC,AD,BD,BE,CE,共5条.

点拨:多边形的对角线总条数的计算公式是$\frac{1}{2}n(n-3)$($n>3$,且n为正整数),所以五边形的对角线总条数是$\frac{1}{2}\times5\times(5-3)=5$.



(第1题)

2. 解:(1)$\angle E$;$\angle D$ (2)$\angle A$;180°

这个结论对任意的五角星都成立.

点拨:根据三角形的外角的性质有$\angle1=\angle C+\angle E$,$\angle2=\angle B+\angle D$,从而推出任意五角星的五个角的和都等于180°.

3. 解:设这个多边形的边数为n,根据题意,得$\frac{2}{7}(n-2)\times180°=360°$. 解得$n=9$.

因此,这个多边形的边数为9.

点拨:根据等量关系:$\frac{2}{7}\times$多边形内角和$=360°$,列出方程,求出结果.

9.3 用正多边形铺设地面

练习

解:正三角形和正方形结合能铺满地面;正三角形和正六边形结合也能铺满地面;正方形和正六边形结合不能铺满地面. 正三角形、正方形和正六边形三者结合在一起能铺满地面.

练习

1. 解:理由是这些正多边形围绕一点拼在一起的几个内角的和为360°.

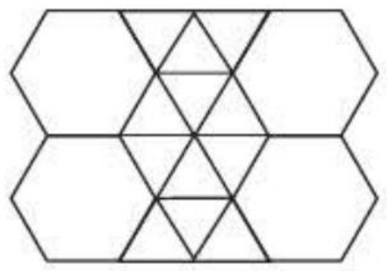
2. 解:剪拼略能.

习题9.3

1. (1)AD (2)AC

点拨:使用给定的某种正多边形或某几种正多边形,当围绕一点拼在一起的几个内角加在一起恰好组成一个周角时,就可以铺满地面.

2. 解:如图所示. 点拨:此题答案不唯一.



(第2题)

3. 解:剪拼略能.

复习题

A组

1. (1)✓ (2)× (3)✓ (4)× (5)✓

2. 解:能够与线段a,b一起组成三角形的有长度为3 cm,5 cm的2条线段.

点拨:线段a,b的长度之差为1 cm,之和为6 cm. 根据三角形的任意两边的差小于第三边,任意两边的和大于第三边. 观察所给的5条线段的长度,只有3 cm大于1 cm且小于6 cm,5 cm大于1 cm且小于6 cm. 故能够与线段a,b一起组成三角形的有长度为3 cm,5 cm的2条线段.

3. 解:不符合规定,因为这时AB,CD的延长线的夹角为$180°-32°-65°=83°$.

4. (1)三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和

(2)180°;三角形的内角和等于180°

5. 解:(1)$(5-2)\times180°=540°$

(2)$(9-2)\times180°=1\ 260°$

(3)$(12-2)\times180°=1\ 800°$

6. 解:(1)设多边形的边数为n,根据题意,得$(n-2)\cdot180°=900°$. 解得$n=7$. 即这个多边形的边数为7.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设多边形的边数为 n,根据题意,得$(n-2)\cdot 180°=1\ 980°$. 解得 $n=13$. 即这个多边形的边数为 13.

(3)设多边形的边数为 n,根据题意,得$(n-2)\cdot 180°=2\ 700°$. 解得 $n=17$. 即这个多边形的边数为 17.

7. 解:$(10-2)\times 180°-1\ 290°=8\times 180°-1\ 290°=150°$

答:这个十边形另一个内角的度数是 150°.

点拨:根据多边形的内角和公式得出十边形的内角和是$(10-2)\times 180°=1\ 440°$. 已知其中九个内角的和是 1 290°,两者之差即是所求的另一个内角的度数.

8. 解:$360°\div 8=45°$

答:正八边形的每一个外角是 45°.

点拨:任意多边形的外角和都为 360°.

9. 解:设这个正多边形有 n 条边,依题意,得 $n\cdot 24°=360°$. 解得 $n=15$.

答:这个正多边形有 15 条边.

点拨:根据任意多边形的外角和都为 360°,即可求出结果.

10. 解:设三角形的三个内角的度数分别为 $x,2x,3x$,依题意得 $x+2x+3x=180°$,解得 $x=30°$,所以 $2x=60°$,$3x=90°$. 所以这个三角形是直角三角形.

B 组

11. (1)C (2)A

12. 解:BC 的最大长度应小于 20 cm,最小长度应大于 4 cm.

点拨:三角形的第三条边的长的取值范围满足$|a-b|<c<a+b$(a,b,c 分别表示三角形的三边长).

13. 解:设这个多边形每一个内角的度数为 x,则这个多边形每一个外角的度数为 $180°-x$,根据题意,得 $x\times\frac{1}{5}=180°-x$,解得 $x=150°$.

设这个多边形的边数为 n,则$(n-2)\cdot 180°=150°\cdot n$,解得 $n=12$.

答:这个多边形每一个内角的度数为 150°,它的边数为 12.

C 组

14. 解:因为 $\angle BAC$ 是 $\triangle ACD$ 的外角,所以 $\angle BAC>\angle ACD$. 又因为 $\angle DCE$ 是 $\triangle BCD$ 的外角,所以 $\angle DCE>\angle B$. 因为 CD 是 $\angle ACE$ 的平分线,所以 $\angle ACD=\angle DCE$,所以 $\angle BAC>\angle B$.

15. 解:因为六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等,所以 $\angle BAF=\angle B=\angle C=\angle CDE=120°$. 因为在四边形 $ABCD$ 中,$\angle DAB+\angle B+\angle C+\angle ADC=360°$,$\angle DAB=60°$,所以 $\angle ADC=60°$. 所以 $\angle ADE=60°$,所以 $\angle ADE=\angle DAB$,所以 $AB/\!/DE$.

16. 解:相等. 理由:因为在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A+\angle B+\angle BCD+\angle D=360°$,又因为 $\angle B+\angle D=180°$,所以 $\angle A+\angle BCD=180°$. 因为 $\angle BCE+\angle BCD=180°$,所以 $\angle BCE=\angle A$.

第 10 章 轴对称、平移与旋转

10.1 轴对称

练习

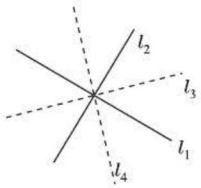
1. 略.

2. 解:(1)(3)(5)(8)(9)(11)是轴对称图形,(2)(4)(6)(7)(10)(12)不是轴对称图形.

点拨:如果一个图形沿某条直线对折,对折后的两部分能完全重合,那么这个图形叫做轴对称图形.

练习

1. 解:平面上的两条相交直线是轴对称图形. 它有两条对称轴. 如图,l_3,l_4 分别为两条相交直线 l_1 和 l_2 的两条对称轴.



(第 1 题)

点拨:两条对称轴分别是两对对顶角的平分线所在的直线.

2. 略.

3. 解:②④⑥是,①③⑤不是.

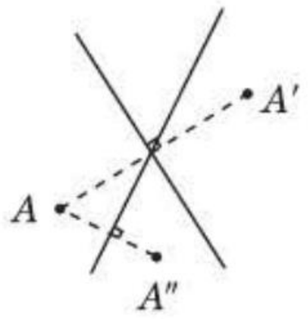
点拨:如果一个图形关于某条直线对称,那么连结对称点的线段的垂直平分线就是该图形的对称轴. 此性质是画图形的“对称轴”的依据. 用眼观察、用手折叠验证即可.

练习

1. 解:如图,A',A''即为所求.

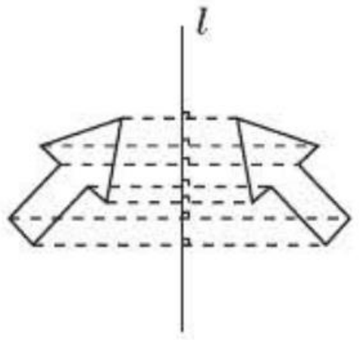
点拨:依据找对称点的方法即可画出.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第1题)

2. 解:如图所示.



(第2题)

点拨:如果图形是由直线、线段或射线组成的,那么在画出它关于某一条直线的对称图形时,只要画出图形中的特殊点(如线段的端点、角的顶点等)的对称点,然后连结对称点,就可以画出关于这条直线的对称图形.

练习

1. 略.

2. 略.

习题 10.1

1. 解:三角形4与1,3两个三角形成轴对称. 整个图形中有两条对称轴.

点拨:把一个图形沿某一条直线翻折过去,如果它能够与另一个图形重合,那么就说这两个图形成轴对称. 两个图形中的对应点叫做对称点,这条直线叫做对称轴.

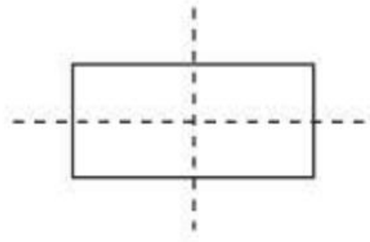
2. 解:(1)(3)(4)是轴对称图形,(2)不是轴对称图形.

点拨:判断一个图形是不是轴对称图形,关键是抓住轴对称图形的本质特征:能够沿着某条直线对折,对折后的两部分图形能够完全重合.

3. BC **点拨**:判断两个图形成轴对称,应抓住两点:(1)两个图形的形状、大小完全相同;(2)一个图形沿着某条直线对折后与另一个图形能够完全重合,这两点缺一不可.

4. 略.

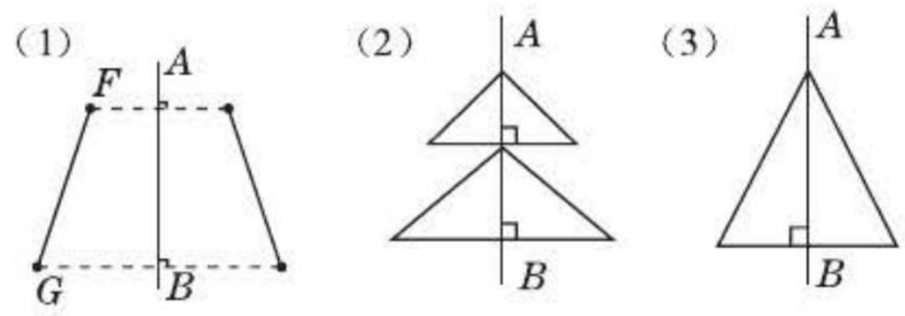
5. 解:(1)是轴对称图形,如图,其对称轴是对边中点的连线所在的直线;(2)(3)不是轴对称图形.



(第5题)

点拨:轴对称图形必须满足的条件是:至少存在一条直线(对称轴),使图形沿着这条直线折叠后,折痕两边的部分能够完全重合.

6. 解:各图形的对称图形如图所示. 由轴对称图形的性质得,图形(3)和它的轴对称图形构成等腰三角形.



(第6题)

10.2 平 移

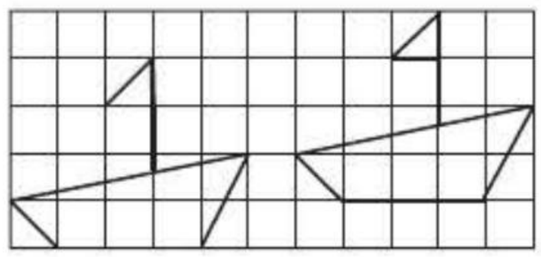
练习

1. 略.

2. 解:点 A,B,C 的对应点分别是点 D,E,F;线段 AB,BC,CA 的对应线段分别是线段 DE,EF,FD;$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对应角分别是 $\angle D,\angle E,\angle F$.

点拨:在平移过程中,平移前的点与由该点平移后得到的点称为对应点;平移前的线段与由该线段平移后得到的线段称为对应线段;平移前的角与由该角平移后得到的角称为对应角.

3. 解:小船经过平移到了新的位置,缺少了一面小旗,补充完整如图所示.



(第3题)

点拨:画平移后的图形时,应先确定各关键点的对应点,再按原图形的形状连结各点即可画出平移后的图形.

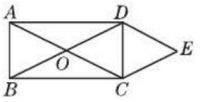
练习

1. 解:将点 A,B,O 分别沿着 AD 的方向平移到点 D,C,E,平移的距离为线段 AD 的长,连结 DE,CE,如图所示,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

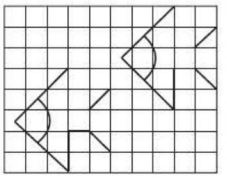
$\triangle DEC$ 就是 $\triangle AOB$ 平移后的三角形.

点拨:平移的方向和距离决定了平移后图形的位置.



(第 1 题)

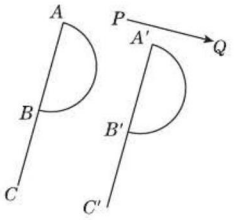
2. 解:平移后的图形如图所示.



(第 2 题)

点拨:画平移后的图形时,先找出所有关键点,再画出这些关键点的对应点,然后按原图形的形状连结各点即可画出平移后的图形. 注意平移的方向和距离.

3. 解:先找出三个关键点 A,B,C,再分别画出这三个关键点的对应点 A',B',C',连结 $A'C'$,最后以 $A'B'$ 为直径画半圆,平移后的图形如图所示.

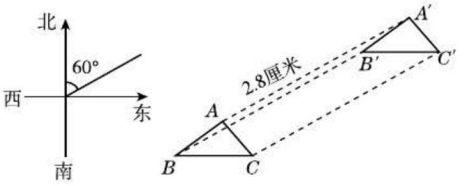


(第 3 题)

点拨:本题已知平移的方向和距离,要求画出平移后的图形,先在原图中找出关键点,再画出这些关键点的对应点,然后按原图形的形状连结各点即可画出平移后的图形.

习题 10.2

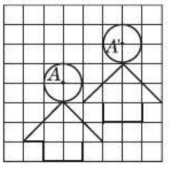
1. 解:可以按下面的步骤来画:(1)画出北偏东 60° 的方向;(2)画出 $\triangle ABC$,将点 A,B,C 分别沿着北偏东 60° 的方向平移 2.8 厘米到点 A',B',C';(3)连结 $A'B'$,$B'C'$,$A'C'$,则 $\triangle A'B'C'$ 就是平移后的三角形,如图所示.



(第 1 题)

点拨:先画出平移的方向,然后以三角形的三个顶点为关键点,画出这些关键点的对应点,连结各点即可得到平移后的三角形.

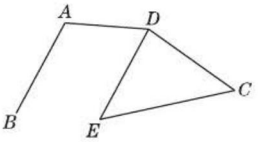
2. 解:平移后的图形如图所示.



(第 2 题)

点拨:使点 A 平移到点 A' 处,需向右平移 3 格,再向上平移 2 格(或向上平移 2 格,再向右平移 3 格),由平移的特征知其他关键点也作同样的平移,画出各关键点的对应点,按原图形的形状连结各点,画出平移后的图形. 本题已知一对对应点的位置,相当于给出了平移的方向和平移的距离.

3. 解:线段 AB 平移后的线段 DE 如图所示,$\triangle DEC$ 是等腰三角形. 理由:根据平移的特征,有 $DE = AB$,又因为 $AB = DC$,所以 $DE = DC$. 所以 $\triangle DEC$ 是等腰三角形.



(第 3 题)

点拨:经过平移,对应线段平行(或在同一条直线上)且相等.

4. 略.

10.3 旋　转

练习

1. 解:现实生活中有很多旋转的实例,如飞机和轮船的螺旋桨的转动,时钟上的分针、时针、秒针的转动等等.

点拨:要深刻理解旋转的概念,注意它和平移的区别.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:点 A 是旋转中心,旋转了约 77°.

3. 解:点 A 是旋转中心,旋转了 45°.

点拨:由旋转的概念知定点为旋转中心,任意一对对应点与旋转中心的连线所成的角就是旋转角. 所以要想确定旋转角,首先要确定旋转中心,再找一对对应点,确定旋转角.

练习

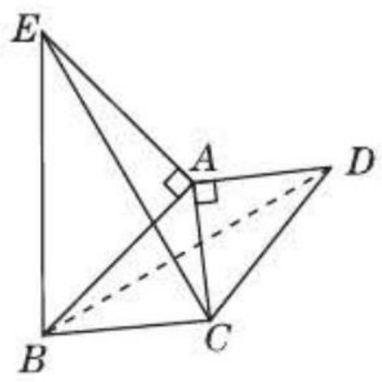
1. 解:旋转中心为圆心,本题图形由 8 个箭头组成. 图形的生成方式不唯一.

如:可以看成由 1 个箭头绕圆心旋转 7 次,每次旋转 45°而生成;也可以看成由连续的 2 个箭头绕圆心旋转 3 次,每次旋转 90°而生成.

点拨: 仔细观察图形,找出旋转中心和基本图形,再观察旋转的角度.

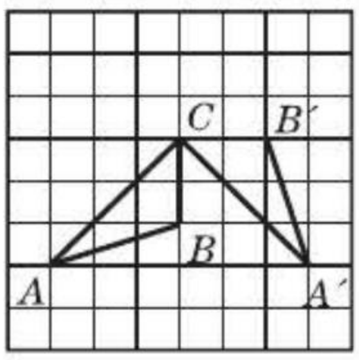
2. 解:如图,连结 BD,则 $\triangle ADB$ 就是 $\triangle ACE$ 以点 A 为旋转中心、逆时针旋转 90°后的三角形.

点拨:由题意可知,$\triangle ACE$ 绕点 A 逆时针旋转 90°后,点 E 与点 B 重合,点 C 与点 D 重合,根据旋转的概念知 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ADB$ 能互相重合.



(第 2 题)

3. 解:如图所示.



(第 3 题)

画法:(1)分别以 CA, CB 为一边,沿逆时针方向作 $\angle ACA' = \angle BCB' = 90°$;

(2)在射线 CA', CB' 上分别截取 $CA' = CA$, $CB' = CB$;

(3)连结 $B'A'$,则 $\triangle A'B'C$ 就是 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90°后的图形.

点拨:根据图形旋转的特征,先画出各点绕旋转中心旋转后的对应点,然后将所画的对应点按原来的方式连结,所画的图形就是原图形旋转后的图形. 注意:当图形上的某一点为旋转中心时,其对应点就是它本身.

练习

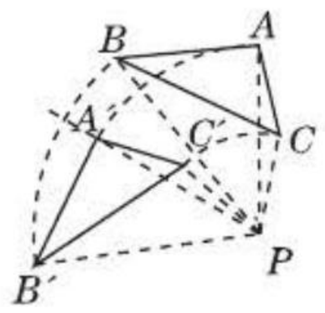
1. 略.

2. 略.

3. 解:(1)将图形绕圆心旋转 60°, 120°, 180°, 240°, 300°后均能与自身重合.

(2)将图形绕中心点旋转 90°, 180°, 270°后均能与自身重合.

4. 解:如图所示. 画法:(1)画一个 $\triangle ABC$,再画一点 P,连结 PA, PB, PC;



(第 4 题)

(2)分别以 PA, PB, PC 为一边,沿逆时针方向作 $\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC' = 60°$;

(3)分别在射线 PA', PB', PC' 上截取 $PA' = PA$, $PB' = PB$, $PC' = PC$;

(4)连结 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. 则 $\triangle A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 绕点 P 逆时针旋转 60°后的三角形.

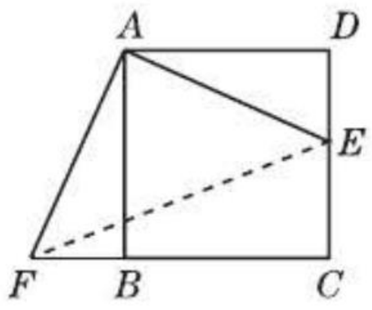
点拨:根据旋转的特征先画出三角形各顶点绕旋转中心旋转后的对应点,然后按原来的方式连结各对应点,所成的图形即为原图形旋转后的图形.

习题 10.3

1. 解:五角星绕中心点旋转 72°, 144°, 216°或 288°后均能与自身重合.

2. 解:(1)旋转中心是点 A. (2)旋转了 90°. (3)如图,$\triangle AEF$ 是等腰直角三角形.

点拨:如图,点 E 与点 F 是一对对应点,所以 $\angle EAF = 90°$,且 $AE = AF$,即 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形.



(第 2 题)

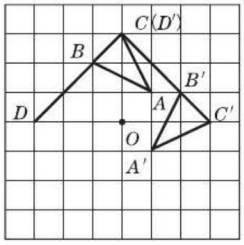
3. 解:$\triangle ABC$ 以点 O 为旋转中心,旋转 120°或 240°后能与原来的图形重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：考虑颜色，图形绕圆心旋转 40°，80°，120°，160°，200°，240°，280°，320° 后均能与自身重合. 不考虑颜色，图形绕圆心旋转 20°，40°，60°，80°，100°，120°，140°，160°，180°，200°，220°，240°，260°，280°，300°，320°，340° 后均能与自身重合.

点拨：3 题、4 题都是求旋转角的度数问题，求旋转对称图形的旋转度数时，关键是看图形中相同形状的图形的个数，再用个数来除 360°，得到的一般就是能与原图形重合的最小的旋转角的度数.

5. 解：如图所示. 画法：(1) 找出四个关键点 A,B,C,D，分别画点 A,B,C,D 绕点 O 顺时针旋转 90° 后的对应点 A',B',C',D'；(2) 连结 $A'B',A'C',C'D'$（或 CC'），所得图形即为所求图形. 旋转 4 次后可以与原图形重合.



（第 5 题）

点拨：找出关键点，画出这些点旋转后的对应点，然后将所画的对应点按原来的方式连结，所得的图形即为原图形旋转后的图形.

10.4 中心对称

练习

1. 解：只有一条对称轴：**A B C D E M T U V W Y**；有两条对称轴：**H I O X**；旋转对称：**H I N O S X Z**；中心对称：**H I N O S X Z.**

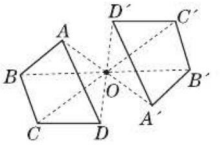
2. 解：能. 方块 4 被旋转了 180°.

点拨：只有方块 4 是中心对称图形，其他的扑克牌旋转 180° 后与原图形不完全相同，故不是中心对称图形. 只有中心对称图形旋转 180° 后才能与自身重合.

练习

1. 解：如图，四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称. 画法：(1) 连结 AO 并延长到 A'，使 $OA'=OA$，得到点 A 的对称点 A'；(2) 同样画出 B,C,D 的对称点 B',C',D'；(3) 顺次连结 $A'B',B'C',C'D',D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求的四边形.

点拨：要画多边形关于点 O 的对称图形，只要画出各顶点关于点 O 的对称点，再顺次连结各顶点即可.

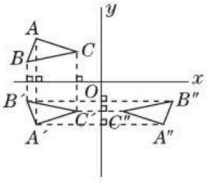


（第 1 题）

2. 解：如图，$\triangle A''B''C''$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称.

画法：(1) 画点 A,B,C 关于直线 x 的对称点 A',B',C'；(2) 画点 A',B',C' 关于直线 y 的对称点 A'',B'',C''；(3) 连结 $A'B',B'C',C'A'$ 及 $A''B'',B''C'',C''A''$. $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 关于直线 x 对称，$\triangle A''B''C''$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 y 对称. $\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$ 关于点 O 成中心对称.

点拨：画一个图形关于某条直线的轴对称图形，再以该直线的垂线为对称轴，画前面所画轴对称图形的轴对称图形，则最后的图形与原图形关于这两条直线的垂足成中心对称.



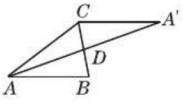
（第 2 题）

习题 10.4

1. 对称中心；对称中心；相等

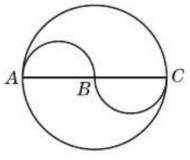
2. 解：不是轴对称图形，是中心对称图形.

3. 解：如图所示. 画法：(1) 延长 AD 到 A'，使 $DA'=DA$；(2) 连结 $A'C$. 则 $\triangle A'CD$ 就是所求的与 $\triangle ABD$ 关于点 D 成中心对称的三角形.



（第 3 题）

4. 解：如图所示.



（第 4 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

画法:(1)以 BC 为直径画出下半圆;

(2)以点 B 为圆心,以 BC 的长为半径画出下半圆.

则下面两个半圆与上面两个半圆关于点 B 成中心对称.

点拨:3 题和 4 题都是画一个与已知图形关于某点成中心对称的图形,解题的关键在于画出该已知图形上的几个关键点的对称点. 画对称点时首先要分别连结各个关键点与对称中心,然后延长所连线段,使其被对称中心平分,最后把对称点按原图形的方式连结.

5. 略.

10.5 图形的全等

练习

解:生活中全等的图形,如学生使用的英语课本封面,各个教室里统一装配的同一型号的黑板面,铺设地面时用的同一类型的瓷砖等.

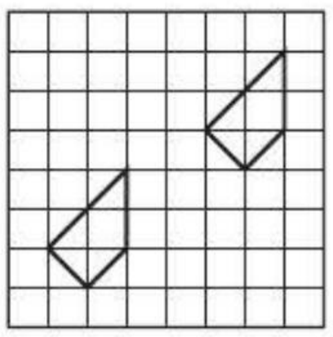
点拨:全等的图形在日常生活中处处可见,平时注意多观察,养成善于观察的好习惯.

习题 10.5

1. 解:观察图形可知:点 A 与点 G,点 C 与点 I,点 E 与点 F 分别是对应顶点;AB 与 GH,BC 与 HI,CD 与 IJ,DE 与 JF,EA 与 FG 分别是对应边;$\angle A$ 与 $\angle G$,$\angle B$ 与 $\angle H$,$\angle C$ 与 $\angle I$,$\angle D$ 与 $\angle J$,$\angle E$ 与 $\angle F$ 分别是对应角. $a=12$,$b=10$,$c=8$,$d=5$,$e=11$;$\alpha=90°$,$\beta=115°$.

点拨:能够互相重合的顶点、边、角分别是对应顶点、对应边、对应角,观察图形的形状,认准对应部分,即可得出各条边和各个角的具体数值.

2. 解:如图所示.(答案不唯一)



(第 2 题)

点拨:在方格纸中画的两个图形,只要是大小、形状相同的四边形,就符合要求. 在画图时,应充分运用图中的格点,使画图快捷方便.

3. 解: 因为 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 至 $\triangle ADE$,$\angle B=40°$,所以 $\angle D=40°$. 因为 $\angle DAC=50°$,所以 $\angle DAE=50°+30°=80°$,所以 $\angle E=180°-40°-80°=60°$.

复习题

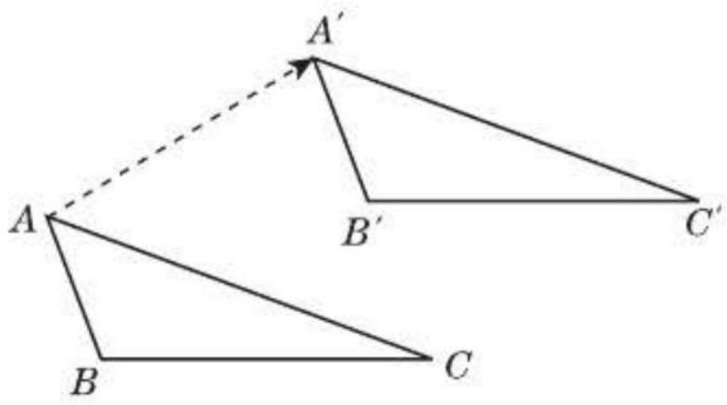
A 组

1. 略.

2. 解:轴对称图形:(3),(5)和(6);旋转对称图形:(1),(2),(3),(4)和(6);中心对称图形:(1),(3)和(6).

点拨:解决此类问题的关键是要弄清这三个概念的区别与联系. 区别:轴对称图形是把一个图形沿着某条直线折叠;旋转对称图形是把一个图形绕着某一个点旋转一定的角度(小于周角);中心对称图形是把一个图形绕着某一个点旋转 180°. 联系:都是指一个具有某种性质的图形,变换前后的图形能够完全重合. 其中,中心对称图形是旋转对称图形的特殊情况.

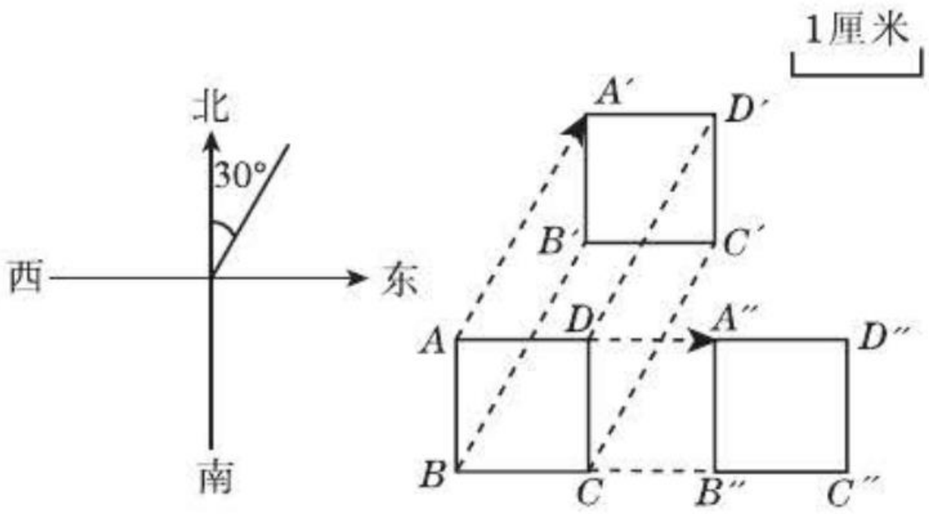
3. 解:如图,由于点 A 与点 A' 是一对对应点,因此,连结 AA',平移的方向是点 A 到点 A' 的方向,平移的距离就是线段 AA' 的长度,约为 2.1 cm.



(第 3 题)

点拨:平移的方向和距离由对应点决定,平移的方向是指以原图形的点为端点,与其对应点所在的射线的方向;平移的距离是指原图形的点和其对应点所连线段的长度.

4. 解:如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 1 厘米,将它向北偏东 30°方向平移2 厘米得到正方形 $A'B'C'D'$;将它向正东方向平移 2 厘米得到正方形 $A''B''C''D''$.



(第 4 题)

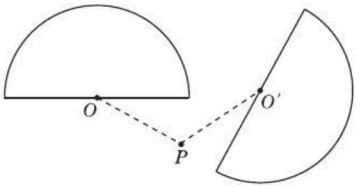
点拨:平移由平移的方向和距离所决定,平移的方向不同或平移的距离不同,平移后图形的位置就不同.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解：图中的旋转中心是点 O，旋转角度大约是 22°.

点拨：由旋转的概念来确定旋转中心和旋转角度.

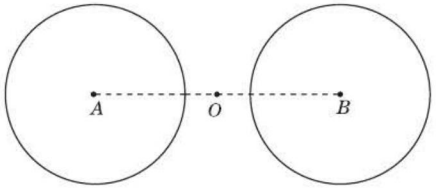
6. 解：如图，连结 OP 与 $O'P$，用量角器量得 $\angle OPO'$ 大约为 117°，故旋转角度约为 117°.



（第 6 题）

点拨：熟练掌握旋转角的概念是解决本题的关键. 旋转角即任意一对对应点与旋转中心的连线所成的角.

7. 解：如图所示. 画法：(1) 设已知圆的圆心为点 A，连结 AO 并延长至点 B，使 $OB = OA$；(2) 以点 B 为圆心，以圆 A 的半径长为半径画圆 B. 则圆 B 与圆 A 关于点 O 成中心对称.



（第 7 题）

点拨：由中心对称的特征知，连结对称点的线段被对称中心所平分，成中心对称的两图形形状和大小完全相同，故 $OB = OA$，且圆 B 的半径与圆 A 的半径相同.

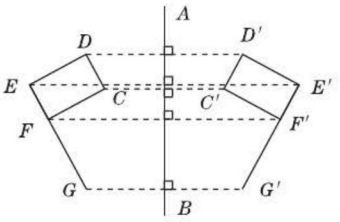
8. 解：因为 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$，所以点 A 与点 C，点 B 与点 D，点 C 与点 A 分别是对应顶点；AB 与 CD，BC 与 DA，AC 与 CA 分别是对应边；$\angle B$ 与 $\angle D$，$\angle BCA$ 与 $\angle DAC$，$\angle BAC$ 与 $\angle DCA$ 分别是对应角.

点拨：认真观察图形，找准对应顶点就很容易找出对应边和对应角.

9. 97　**点拨**：因为 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$，所以 $\angle DAC = \angle BAC = 60°$. 因为 $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180°$，所以 $\angle D = 180° - \angle DAC - \angle ACD = 180° - 60° - 23° = 97°$.

B 组

10. 解：如图所示.



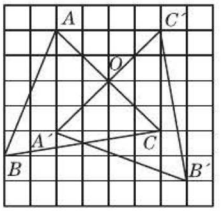
（第 10 题）

11. 解：这串数字应为 810076.

点拨：本题是“镜面对称”问题，从纸的背面看即可得出答案.

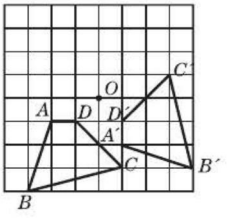
12. 解：如图，设原三角形三个顶点分别为 A，B，C.

画法：(1) 分别画点 A，B，C 绕点 O 逆时针旋转 90° 后的对应点 A'，B'，C'；(2) 连结 $A'B'$，$A'C'$，$B'C'$. 则 $\triangle A'B'C'$ 即为所求.



（第 12 题）

13. 解：如图，设原四边形的四个顶点分别为 A，B，C，D，分别找到点 A，B，C，D 绕点 O 逆时针旋转 90° 后的对应点 A'，B'，C'，D'. 连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$A'D'$，四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求作的四边形.



（第 13 题）

点拨：作某图形绕图形外一个定点旋转某一角度后的图形，关键在于要抓住“图形中每一个点都绕着旋转中心旋转了同样大小的角度，对应点到旋转中心的距离相等”这一本质特征，找出原图中关键点的对应点，再按原图形的方式顺次连结各对应点即可.

14. 解：两个图形都不是轴对称图形，但都能经过旋转与自身重合. 题图 (1) 绕中心旋转 90°，180° 或 270° 后都

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能与自身重合. 题图(2)绕中心旋转 20°,40°,60°,80°,100°,120°,140°,160°,180°,200°,220°,240°,260°,280°,300°,320°或340°后都能与自身重合.

点拨:熟练掌握轴对称图形与旋转对称图形的概念是解决本题的关键. 旋转对称图形的旋转角的大小是由基本图形的个数来决定的. 题图(1)有 4 个基本图形,$\frac{360°}{4}=90°$,则旋转角度为 90°的整数倍(小于周角);题图(2)有 18 个基本图形,$\frac{360°}{18}=20°$,则旋转角度为 20°的整数倍(小于周角).

15. 解:因为$\triangle BEC\cong\triangle DFC$,所以点 B 与点 D,点 E 与点 F,点 C 与点 C 分别是对应顶点;BC 与 DC,BE 与 DF,EC 与 FC 分别是对应边;$\angle CBE$ 与 $\angle CDF$,$\angle BCE$ 与 $\angle DCF$,$\angle E$ 与 $\angle F$ 分别是对应角. 因为 $\angle EBC=30°$,$\angle BCE=80°$,所以 $\angle E=70°$,所以 $\angle F=\angle E=70°$.

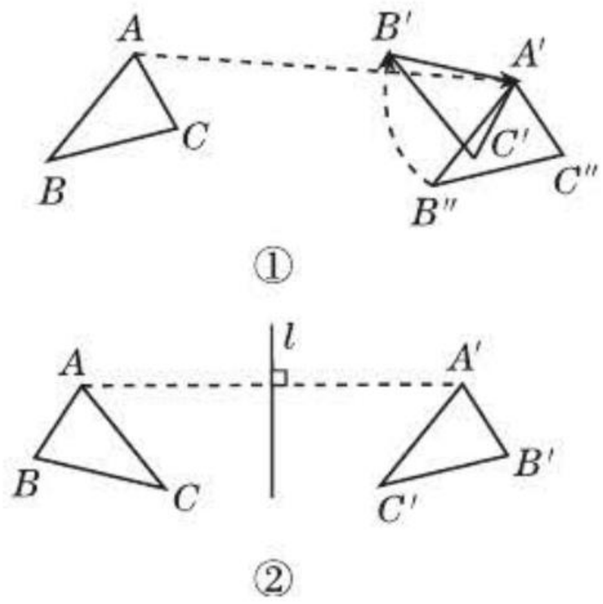
点拨:根据旋转所得图形与原图形是全等图形,再由全等三角形的性质可得出答案.

C 组

16. 略.

17. 解:(1)如图①,将 $\triangle ABC$ 沿 AA' 的方向平移,使 A 与 A' 重合,此时到了 $\triangle A'B''C''$ 的位置,再以 A' 为旋转中心沿顺时针方向旋转 $\triangle A'B''C''$,使其与 $\triangle A'B'C'$ 重合,即通过平移与旋转变换后两三角形互相重合.

(2)如图②,连结 AA',作 AA' 的垂直平分线 l,将 $\triangle ABC$ 沿直线 l 折叠后两三角形互相重合,即通过轴对称变换后两三角形互相重合.



(第 17 题)

点拨:方法不唯一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



责任编辑：朱　林
封面题字：沈　鹏
封面设计：典点瑞泰
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892
荣德基初中频道
ISBN 978-7-5383-7804-7
07
9 787538 378047
定价：39.80元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料