特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

七年级 数学 下 （HK版）

主　　编：荣德基
本册主编：叶　余
　　王　涛
　　武　树



提分一定有方法

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提分攻略

知识点 69 个 必得分

		页码
第6章 实数	1 平方根的定义及其性质	2
	2 算术平方根	4
	3 算术平方根的估算	5
	4 立方根	11
	5 立方根的性质	12
	6 用计算器求一个数的立方根	14
	7 无理数	18
	8 实数	19
	9 实数和数轴	20
	10 实数的性质	21
	11 实数的运算	23
第7章 一元一次不等式与不等式组	1 不等式	33
	2 不等式的基本性质	34
	3 一元一次不等式	39
	4 不等式的解（集）与解不等式	40
	5 不等式的解集的表示方法	41
	6 一元一次不等式的解法	41
	7 一元一次不等式的实际应用	42
	8 一元一次不等式组	49
	9 一元一次不等式组的解集	49
	10 解一元一次不等式组	51
	11 列一元一次不等式组	52
第8章 整式乘法与因式分解	1 同底数幂的乘法	65
	2 幂的乘方	66
	3 积的乘方	67
	4 同底数幂的除法	70
	5 零次幂	71
	6 负整数次幂	72
	7 科学记数法	73
	8 单项式与单项式相乘	77
	9 单项式除以单项式	78
	10 单项式与多项式相乘	79
	11 多项式除以单项式	79
	12 多项式与多项式相乘	80
	13 完全平方公式	86
	14 平方差公式	87
	15 因式分解的定义	92
	16 提公因式法因式分解	94
	17 完全平方公式法因式分解	96
	18 平方差公式法因式分解	97

考向点 77 个 速提分

	页码
1 根据平方根的表示方法进行判断	2
2 利用算术平方根的定义识别算术平方根	4
3 利用夹逼法求算术平方根	6
4 利用立方根的定义进行辨析	11
5 利用立方根的性质认识立方根	12
6 利用计算器求立方根	14
7 利用无理数的概念进行辨析	18
8 利用实数中各类数的特征进行分类	19
9 利用数轴比较实数的大小	20
10 利用实数相关概念进行辨析	21
11 利用实数的运算步骤进行实数的运算	23
1 利用不等式的定义识别不等式	33
2 利用不等式的基本性质识别变形	34
3 利用一元一次不等式的定义识别一元一次不等式	39
4 利用不等式的解的定义找解	40
5 用数轴表示不等式的解集	41
6 利用一元一次不等式的解法步骤解一元一次不等式	41
7 通过建立不等式模型解决实际问题	43
8 利用一元一次不等式组的定义识别一元一次不等式组	49
9 利用数轴求一元一次不等式组的解集	50
10 利用解不等式组的步骤解一元一次不等式组	51
11 利用不等式组解决实际问题	52
1 利用同底数幂的乘法法则进行计算	65
2 利用幂的乘方法则进行计算	66
3 利用积的乘方法则进行计算	67
4 利用同底数幂的除法法则计算	70
5 利用零次幂进行计算	71
6 利用负整数次幂进行计算	72
7 利用科学记数法表示绝对值小于 1 的数	73
8 利用单项式的乘法法则计算	77
9 利用单项式除以单项式法则计算	78
10 利用单项式与多项式的乘法法则计算	79
11 利用多项式除以单项式法则计算	80
12 利用多项式与多项式的乘法法则计算	81
13 利用完全平方公式计算	86
14 利用平方差公式计算	87
15 利用因式分解的定义识别因式分解	92
16 利用公因式的定义确定公因式	94
17 利用完全平方式的结构求字母的值	96
18 利用平方差公式分解因式	97

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点50个得高分

	页码
1 方程思想	3
2 夹逼法	6
3 作差法	6
4 确定$\sqrt{a}$的整数部分、小数部分的一般方法	9
5 整体思想	13
6 数形结合思想	21
7 数轴上两点间的距离的求法	21
8 实数大小比较的一般方法	22
9 利用绝对值的性质进行化简的方法	22
10 归纳法	25
11 特殊值法	29
1 判断不等式的方法	33
2 由一个不等式变形到另一个不等式的方法	34
3 数值验证法	35
4 作差法	36
5 数形结合思想	37
6 代入法	40
7 已知一个不等式的解集满足特定要求，求字母参数的取值范围的方法	45
8 整体思想	46
9 解方案设计问题的方法	46
10 确定一元一次不等式组解集的常用方法	50
11 数轴法	50
12 口诀法	50
13 利用数轴找不等式整数解的方法	52
14 转化思想	61
1 方程思想	67
2 整体思想	70
3 逆向运用同底数幂乘除法法则求值的方法	70
4 分类讨论思想	71
5 底倒指反法	72
6 整数次幂的计算方法	72
7 逆向思维法	74
8 代入法	74
9 错位相减法	75
10 转化思想	87
11 从特殊到一般的思想	90
12 分组分解法	98
13 补项法	99
14 拆项法	99

拔尖角度56个争满分

	页码
第6章 实数	
1 利用算术平方根的非负性解决问题	8
2 利用估算的方法确定一个数的整数部分和小数部分	8
3 利用算术平方根的性质探究规律	9
4 立方根与平方根的综合应用	15
5 立方根与算术平方根的综合应用	15
6 利用计算器探究立方根的规律	16
7 实数范围内相反数、倒数、绝对值的综合应用	24
8 利用非负数的性质求值	24
9 利用实数的性质进行探究	25
第7章 不等式与不等式组	
1 利用不等式的基本性质比较大小	36
2 利用不等式解决方案选择问题	37
3 利用一元一次不等式的解集求字母常数	44
4 不等式与方程的综合应用	45
5 不等式与方程组的综合应用	45
6 不等式与绝对值的综合应用	46
7 不等式与方案设计	46
8 利用不等式组的特殊解或解集求未知数的值或取值范围	53
9 方程组与不等式组的综合应用	54
10 利用方程和不等式组解决实际问题	54
第8章 整式乘法与因式分解	
1 逆用幂的运算法则求值	68
2 逆用幂的运算法则进行运算	68
3 利用幂的运算法则比较大小	68
4 科学记数法在实际中的运用	74
5 利用幂的运算法则求值	74
6 利用幂的运算巧解题	75
7 利用整式的乘法解方程或不等式	82
8 利用数形结合思想巧解整式的运算	82
9 利用待定系数法探究多项式整除多项式的问题	82
10 利用乘法公式说理	90
11 巧构乘法公式解决复杂计算	90
12 利用乘法公式找规律	90
13 因式分解常见的几种拓展类型	98
14 利用因式分解判断几何图形的形状	99
15 利用因式分解进行规律探究	99

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第9章 分式

知识点69个必得分

	页码
1 分式的定义	108
2 分式的基本性质	109
3 分式的约分	111
4 分式的乘除	115
5 分式的乘方	116
6 分式的通分	117
7 分式的加减	118
8 分式的混合运算	120
9 分式方程	124
10 分式方程的解法	125
11 分式方程的增根	126
12 分式方程的应用	128

考向点77个速提分

	页码
1 利用分式的定义识别分式	108
2 利用分式有意义的条件确定字母的取值范围	108
3 利用分式的基本性质确定分式变形的理由	109
4 利用分式的基本性质补全等式变式的缺项	109
5 利用约分的方法化简分子与分母都是单项式的分式	111
6 利用约分的方法化简分子与分母都是多项式的分式	111
7 利用分式乘除的法则解决分子与分母都是单项式的分式的乘除法	115
8 利用分式乘除的法则解决分式乘除混合运算	116
9 利用分式乘方的法则进行计算	117
10 分母是单项式的分式通分	118
11 利用分式加减的法则进行同分母分式的加减法计算	119
12 利用分式的运算法则进行分式的混合运算	120
13 利用分式方程的定义识别分式方程	124
14 利用解分式方程的步骤解分式方程	125
15 利用增根的定义找分式方程产生的增根	127
16 通过建立分式方程模型解决工程问题	128

第10章 相交线、平行线与平移

知识点69个必得分

	页码
1 对顶角	142
2 垂线	144
3 画垂线	145
4 点到直线的距离	146
5 平行线的定义	152
6 平行线的画法	153
7 平行线的基本事实及其推论	154
8 同位角、内错角、同旁内角	155
9 平行线的判定方法1	156
10 平行线的判定方法2	157
11 平行线的判定方法3	158
12 平行线的性质1	164
13 平行线的性质2	166
14 平行线的性质3	168
15 平移的定义	173
16 平移的特征（性质）	174
17 平移作图	175

考向点77个速提分

	页码
1 利用对顶角的定义进行识别	142
2 利用对顶角的性质求角的度数	142
3 利用垂直的定义说明两线垂直	144
4 利用垂直的性质求角的度数	144
5 利用作图工具作垂线	146
6 利用垂线的性质说明作图的合理性	146
7 利用垂线段的性质比较线段的长短	147
8 利用点到直线的距离的定义确定点到直线的距离	147
9 利用平行线的定义进行判断	152
10 利用平行线的画法作已知直线的平行线	153
11 利用平行线的基本事实及其推论进行辨析	154
12 利用同位角、内错角、同旁内角的特征进行识别	155
13 利用同位角相等找两直线平行	156
14 利用内错角相等找平行线	157
15 利用平行线的判定方法识别作图依据	158
16 利用平行线的性质1求角的度数	164
17 利用平行线的性质2求角的度数	166
18 利用平行线的性质3求角的度数	168
19 利用平移的定义认识平移现象	173
20 利用平移现象找平移中的各元素	174
21 利用平移的性质解决在非网格中的作图问题	175

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ↑ 方法 ↑ 学霸

第9章 分式

方法点50个 得高分

	页码
1 判断一个式子是否是分式的方法	108
2 将分式的分子、分母的各项系数化整的方法	110
3 整体思想	112
4 换元法	113
5 确定各分母都是单项式的分式的最简公分母的方法	118
6 确定各分母都是多项式的分式的最简公分母的方法	118
7 裂项相消法	122
8 判断一个方程是不是分式方程的方法	124
9 倒数法	134
10 特殊值法	134
11 转化思想	138

拔尖角度56个 争满分

	页码
1 利用分式的基本性质讨论分式的值为正、负的条件	112
2 利用分式的基本性质巧求分式的值	112
3 利用分式的基本性质求使分式的值为正整数的条件	113
4 利用分式的运算律进行分式混合运算	121
5 利用分式的运算法则求分式中待定字母的值	121
6 利用裂项相消法解决规律探究问题	121
7 利用无解的意义解分式方程无解的问题	129
8 利用分式方程的解法巧解复杂的分式方程	130
9 通过建立分式方程的模型进行方案设计	130
10 利用求分式方程的解探究与分式方程及其解有关的规律	131

第10章 相交线、平行线与平移

方法点50个 得高分

	页码
1 判断两个角是否互为对顶角的方法	142
2 定义法	144
3 概念辨析法	152
4 转化思想	154
5 同位角判定两直线平行的方法	156
6 内错角判定两直线平行的方法	157
7 数形结合思想	159
8 找寻说明平行的方法	160
9 性质判断法	175
10 画平移图形的方法	175
11 等积变形法	177
12 求两点间的最短路径的方法	177
13 分类讨论思想	181
14 方程思想	182

拔尖角度56个 争满分

	页码
1 利用垂直的性质求角度	148
2 巧用垂直的性质设计方案	149
3 利用从特殊到一般的思想进行角的计数	149
4 利用平行线的判定探究有关拐角问题	160
5 利用平行线的判定找寻说明平行的方法	160
6 利用平行线的判定解决实际生活中的问题	161
7 利用平行线的性质解决学具操作问题	169
8 利用平行线的性质解决折叠问题	169
9 巧添辅助线解决与平行线有关的探究问题	170
10 利用平移的性质求图形的面积	177
11 利用平移的性质求折线的长度	177
12 利用平移选桥址	177

注：“提分攻略 学霸图谱”中，所列“考向点”为重要条目，全书不仅限于此.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法

实数大小比较的方法…… 22

看微课

求平方根…… 3
求算术平方根…… 5
探究算术平方根规律……7
实数的分类…… 19

第6章 实 数

6.1 平方根、立方根 ……2
6.1.1 平方根 ……2
6.1.2 立方根 …… 11
6.2 实 数 …… 18
素养提分技巧篇 ☞ P27
中考提分专题篇 ☞ P28
数学素养提升：实数应澄清的几个问题 ☞ P22

观动画

数轴上表示解集…… 41

看微课

不等式的基本性质…… 34
一元一次不等式组的解法… 51
一元一次不等式组的应用… 53

第7章 一元一次不等式与不等式组

7.1 不等式及其基本性质 …… 33
7.2 一元一次不等式 …… 39
7.3 一元一次不等式组 …… 49
7.4 综合与实践 排队问题 …… 56
素养提分应用篇 ☞ P57
中考提分专题篇 ☞ P59
数学素养提升：实数的大小比较 ☞ P37

学方法

因式分解的方法…… 98

看微课

幂的乘方…… 66
积的乘方…… 67

第8章 整式乘法与因式分解

8.1 幂的运算 …… 65
8.1.1 同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方 …… 65
8.1.2 同底数幂的除法 …… 70
8.2 整式乘法 …… 77
8.3 完全平方公式与平方差公式 …… 86

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.4 因式分解 …… 92
8.5 综合与实践 纳米材料的奇异特性 ……100
素养提分应用篇 ☞ P101
中考提分专题篇 ☞ P102
数学素养提升：解读“恒等式” ☞ P83

看微课
单项式的乘法…… 79
利用平方差公式计算…… 87
利用完全平方公式因式分解…… 96

第9章 分 式

9.1 分式及其基本性质 ……108
9.2 分式的运算 ……115
9.3 分式方程 ……124
素养提分技巧篇 ☞ P133
中考提分专题篇 ☞ P135
数学素养提升：类比·探索 ☞ P112

学方法
巧求分式值的方法……138

看微课
分式的定义……108
分式的基本性质……109
分式方程的定义……124

第10章 相交线、平行线与平移

10.1 相交线 ……142
10.2 平行线的判定 ……152
10.3 平行线的性质 ……164
10.4 平 移 ……173
素养提分技巧篇 ☞ P179
中考提分专题篇 ☞ P180
数学素养提升：平行线间的是非曲直 ☞ P169
参考答案及点拨（单独成册）

观动画
平移制作图案……175

看微课
垂直的定义……144
三线八角识别方法……155
平移的性质……174

微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法.

2. **分类讨论思想**：把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

3. **数形结合思想**：数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法.数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

4. **定义法**：所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的.因此用定义法解题，是最直接的方法.

5. **参数法**：参数法是指在解题过程中，通过适当地引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，使问题得以解决的方法.

6. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

7. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

8. **换元法**：所谓换元法，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，使它简化，使问题易于解决.

9. **从特殊到一般的思想**：从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.

10. **特殊值法**：又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，从而通过简单的运算，得出最终答案的一种方法.这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要跟最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干中给出的等量关系是一个不可或缺的量.

11. **归纳法**：归纳法是由一些特殊事例推出一般结论的推理方法.归纳法有两种：一是完全归纳法，把研究对象一一考察到而推出结论的归纳法；二是不完全归纳法，是根据事物的部分特例得出一般结论的推理方法.

12. **逆向思维法**：逆向思维法是指为实现某一创新或解决某一用常规思路难以解决的问题，而采取反向思维寻求解决问题的方法.

13. **作差法**：通过求两个数的差来比较两数大小的方法.

14. **裂项相消法**：裂项相消法的实质是将所要求和的代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一项，最终达到求和的目的.

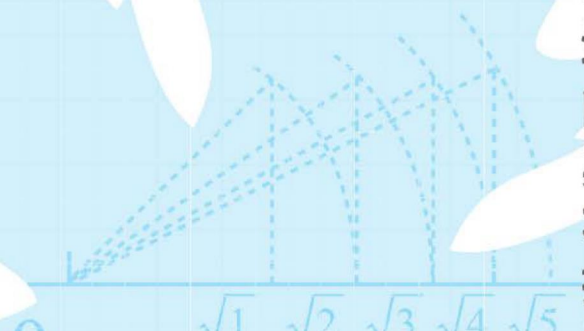
15. **拆项法**：拆项法是分组与组合思想在代数式求和中的具体应用.拆项法的实质是将代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6章 实数

数字领域的再次拓展

数学点拨



你将学到的核心考点

- 平方根与算术平方根 □
- 立方根 □
- 实数 □

我们为你提供的核心方法

- 作差法 □
- 夹逼法 □
- 整体思想 □
- 特殊值法 □
- 方程思想 □
- 数形结合思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

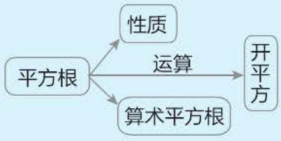
6.1 平方根、立方根

6.1.1 平方根

核心知识

- 平方根
- 平方根的性质
- 算术平方根

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平方根的定义及其性质

1 **定义：** 一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根，也叫做二次方根.

2 **性质：**

(1)一个正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数；

(2)0 的平方根是 0；

(3)负数没有平方根.

3 **书写形式：** 正数 a 有两个平方根，一个正的平方根，记作“$\sqrt{a}$”，另一个负的平方根记作“$-\sqrt{a}$”，合起来记作“$\pm\sqrt{a}$”，读作“正、负根号 a”.

4 **开平方：** 求一个数的平方根的运算叫做开平方.

要点精析///

平方与开平方是互逆运算关系，开平方与加、减、乘、除、乘方一样是一种运算，即：

运算名称：加、减、乘、除、乘方、开平方(非负数)；

运算结果：和、差、积、商、幂、平方根(互为相反数).

5 **易错警示：** 容易认为一个正数的平方根只有正的那个平方根，而忽略了负的平方根，造成求平方根时漏解.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 根据平方根的表示方法进行判断

例1 下列说法中正确的是(　　)

A. 9 的平方根是 ±3，应表示为 $9^2 = \pm 3$

B. ±3 是 9 的平方根，应表示为 $\pm\sqrt{9} = 3$

C. 9 开平方能得到 9 的平方根，即 $\sqrt{9} = \pm 3$

D. 9 开平方能得到 9 的平方根，应表示为 $\pm\sqrt{9} = \pm 3$

导引： 运用平方根的定义进行判断.

答案： D

方法点拨

必须弄清从下符号的意义，$\pm\sqrt{a}(a\geq 0)$ 表示非负数 a 的平方根，$\sqrt{a}(a\geq 0)$ 表示非负数 a 的正平方根，把非负数 a 开平方，求它的平方根可用 $\pm\sqrt{a}$ 表示.

同类变式 (答案见 185 页)

1. 下列说法：

①±5 是 25 的平方根；②49 的平方根是 −7；

③8 是 16 的正平方根；④ −3 是 9 的一个平方根.

其中正确的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平方根的定义求平方根

例2 求下列各数的平方根：

(1)16；(2)0；(3)0.49；(4)$\frac{9}{121}$；(5)-9.

导引： 根据平方根的定义即可求解.

解： (1)因为$(\pm4)^2=16$，所以16的平方根是±4.

(2)因为$0^2=0$，所以0的平方根是0.

(3)因为$(\pm0.7)^2=0.49$，所以0.49的平方根是±0.7.

(4)因为$\left(\pm\frac{3}{11}\right)^2=\frac{9}{121}$，

所以$\frac{9}{121}$的平方根是$\pm\frac{3}{11}$.



(5)因为$-9<0$，所以-9没有平方根.

考查角度3 利用平方根的性质求字母的值

例3 (1)$3+a$的一个平方根是5，求a的值；

(2)一个正数x的两个平方根分别是$-a+2$与$2a-1$，求a的值和这个正数x的值.

导引： (1)由平方根的定义知$3+a$等于5^2；(2)正数x有两个平方根，分别是$-a+2$与$2a-1$，所以$-a+2$与$2a-1$互为相反数，即$-a+2+2a-1=0$，解方程可求出a；根据$x=(-a+2)^2$，代入a的值可求出x的值.

解： (1)因为$5^2=25$，

所以25的一个平方根是5，即$3+a=25$.

所以$a=22$.

(2)因为正数x有两个平方根，分别是$-a+2$与$2a-1$，

所以$-a+2+2a-1=0$，

解得$a=-1$.

所以$x=(-a+2)^2=(1+2)^2=9$.

考查角度4 利用平方根的性质解方程

例4 求下列各式中x的值：

(1)$x^2=361$；　(2)$81x^2-49=0$；

(3)$49(x^2+1)=50$；　(4)$(3x-1)^2=(-5)^2$.

导引： 若$x^2=a(a\geqslant0)$，则$x=\pm\sqrt{a}$. 先把各题化为$x^2=a$的形式，再求x. 其中(4)题可将$3x-1$看成一个整体，先通过开平方求出这个整体的值，然后解方程求出x.

解： (1)因为$x^2=361$，所以开平方，得$x=\pm\sqrt{361}=\pm19$.

(2)整理$81x^2-49=0$，得$x^2=\frac{49}{81}$，

所以开平方，得$x=\pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.

易错警示

求平方根时的误区有两点：

(1)一个正数的平方根有两个，不能漏掉“$\pm$”号.

(2)负数没有平方根，不能无中生有.

方法点拨

本题(1)运用平方根定义中被开方数等于它的一个平方根的平方列方程；(2)运用平方根性质中两平方根的关系列方程. 通过列方程运用方程思想求相关待定字母的值是数学中常用的方法.

易错警示

利用平方根的定义进行开平方解方程，从而求出未知数的值. 一个正数的平方根有两个，它们互为相反数，开平方时，不要漏掉负平方根.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)整理 $49(x^2+1)=50$，得 $x^2=\frac{1}{49}$，所以开平方，得 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{49}}=\pm\frac{1}{7}$.

(4)因为 $(3x-1)^2=(-5)^2$，所以开平方，得 $3x-1=\pm5$.

当 $3x-1=5$ 时，$x=2$；当 $3x-1=-5$ 时，$x=-\frac{4}{3}$.

综上所述，$x=2$ 或 $x=-\frac{4}{3}$.

▲**同类变式**（答案见185页）

4. 求下列各式中 x 的值：

(1) $2x^2=18$；

(2) $(x+1)^2=121$；

(3) $(2x-1)^2=3^2$.

点知识 2 算术平方根

1 **定义：** 正数的正平方根称为算术平方根，0的算术平方根是0. 一个数 $a(a\geqslant0)$ 的算术平方根记为“$\sqrt{a}$”.

要点精析///

(1)算术平方根 $\sqrt{a}$ 具有双重非负性：

①被开方数 a 是非负数，即 $a\geqslant0$；

②算术平方根 $\sqrt{a}$ 是非负数，即 $\sqrt{a}\geqslant0$；

(2)算术平方根等于它本身的数只有0和1.

2 **性质：** (1)正数的算术平方根是一个正数；

(2)0的算术平方根是0；

(3)负数没有算术平方根；

(4)被开方数(非负数)越大，对应的算术平方根也越大.

3 平方根与算术平方根的区别与联系

	名称	平方根	算术平方根
区别	定义不同	一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根，也叫做 a 的二次方根	正数的正平方根称为算术平方根
	个数不同	一个正数有两个平方根，它们互为相反数	一个正数的算术平方根只有一个
	表示方法不同	非负数 a 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a}$	非负数 a 的算术平方根表示为 $\sqrt{a}$
	取值范围不同	正数的平方根是一正一负	正数的算术平方根一定是正数
联系	具有包含关系	平方根包含算术平方根，算术平方根是平方根中正的那个(0除外)	
	存在条件相同	平方根和算术平方根都只有非负数才有，0的平方根与算术平方根都是0	

4 **易错警示：** (1)区分清楚算术平方根是平方根中的一个；(2)开平方时不能遗漏负平方根.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用算术平方根的定义识别算术平方根

例5 下列说法正确的是(　　)

A. 3是9的算术平方根　　B. -2 是4的算术平方根

C. $(-2)^2$ 的算术平方根是 -2　　D. -9 的算术平方根是3

导引： 因为3的平方等于9，所以3是9的算术平方根；因为 -2 不是正数，所以 -2 不是4的算术平方根；因为 $(-2)^2=4$，而 $2^2=4$，所以2是 $(-2)^2$ 的算术平方根；负数没有算术平方根.

答案： A

方法点拨

辨别算术平方根的说法是否正确主要有两点：一是算术平方根是非负的；二是利用平方检验是否正确.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用求算术平方根的方法求一个数的算术平方根

例6 求下列各数的算术平方根：

(1)64；　(2)$2\frac{1}{4}$；　(3)0.36；　(4)$\sqrt{41^2-40^2}$.

导引： 根据算术平方根的定义，要求一个非负数的算术平方根，只要找到一个非负数的平方等于这个非负数即可.

解： (1)因为$8^2=64$，所以64的算术平方根是8，即$\sqrt{64}=8$.



(2)因为$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$，

所以$2\frac{1}{4}$的算术平方根是$\frac{3}{2}$，即$\sqrt{2\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.

(3)因为$0.6^2=0.36$，

所以0.36的算术平方根是0.6，即$\sqrt{0.36}=0.6$.

(4)因为$\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{81}=9$，

所以$\sqrt{41^2-40^2}$的算术平方根是3.

方法点拨

求一个数的算术平方根时，首先要弄清是求哪个数的算术平方根，分清求$\sqrt{81}$与81的算术平方根的不同意义，不要被表面现象迷惑.

求一个非负数的算术平方根常借助于平方运算，因此熟记常用平方数对求一个数的算术平方根十分有用.

考查角度3 利用算术平方根和平方根的意义求值

例7 求下列各式的值：

(1)$\sqrt{\frac{16}{81}}$；　(2)$-\sqrt{121}$；　(3)$\pm\sqrt{0.49}$.

导引： 先根据每个式子的结构分析其意义，然后根据其意义求出它们的值.

解： (1)因为$\sqrt{\frac{16}{81}}$的意义是$\frac{16}{81}$的算术平方根，

所以$\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$.

(2)因为$-\sqrt{121}$的意义是121的算术平方根的相反数，

所以$-\sqrt{121}=-11$.

(3)$\pm\sqrt{0.49}$的意义是0.49的平方根，

所以$\pm\sqrt{0.49}=\pm0.7$.

方法点拨

求一个式子的值时，先分析式子的意义，主要是看清它表示的是算术平方根还是平方根，即看清符号，最后的结果不改变它的正负性.

知识3 算术平方根的估算

求一个正数(非完全平方数)的算术平方根的近似值，一般采用夹逼法.

“夹”就是从两边确定取值范围；“逼”就是一点一点加强限制，使其所处范围越来越小，从而达到理想的精确程度.

要点精析///

会用完全平方数的算术平方根估计非完全平方数的算术平方根的大小是本章的基本要求，它利用与被开方数比较接近的完全平方数的算术平方根来估计这个数的算术平方根的大小. 例如估计$\sqrt{19}$的大小，可以取和19最接近的两个完全平方数16和25；因为$16<19<25$，所以$\sqrt{16}<\sqrt{19}<\sqrt{25}$，即$4<\sqrt{19}<5$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用夹逼法求算术平方根

例8 估算$\sqrt{3}$的近似值.(精确到0.01)

导引: 对于估算数的大小,我们根据精确度的要求,先确定整数部分,然后依次确定小数部分的每一位,进行的步数越多,估算出的值越精确.

解: 因为$1^2=1,2^2=4$,

所以$1<\sqrt{3}<2$.

因为$1.7^2=2.89,1.8^2=3.24$,

所以$1.7<\sqrt{3}<1.8$.

因为$1.73^2=2.9929,1.74^2=3.0276$,

所以$1.73<\sqrt{3}<1.74$.

因为$1.732^2=2.999\,824,1.733^2=3.003\,289$,

所以$1.732<\sqrt{3}<1.733$.

所以$\sqrt{3}\approx1.73$.

方法点拨

求解本题使用了夹逼法,它是数学估算的重要方法,所谓"夹"就是从两边确定范围,而"逼"就是一点一点加强限制,使其所处的范围越来越小,从而达到要精确的程度.

考查角度2 利用估算的数的范围求整数值

例9 已知a,b为两个连续整数,且$a<\sqrt{7}<b$,则$a+b=$_____.

导引: 本题运用夹逼法来求整数a与b的值.

因为a,b为连续整数,$a<\sqrt{7}<b$,而$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$,

所以$2<\sqrt{7}<3$,

所以$a=2,b=3$.

所以$a+b=5$.

答案: 5

▲**同类变式**(答案见185页)

9. [中考·安徽]与$1+\sqrt{5}$最接近的整数是(　　)

A.4　　B.3

C.2　　D.1

考查角度3 利用灵活方法比较两个数的大小

例10 比较下列各组数的大小:

(1)$\sqrt{12}$与4;

(2)$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$与$\frac{1}{2}$;

(3)$\frac{\sqrt{401}-5}{4}$与3.75.

导引: (1)题可用平方法比较大小;

(2)题可用作差法比较大小;

(3)题可用比较被开方数大小进行比较.

解: (1)$(\sqrt{12})^2=12,4^2=16$,

因为$12<16$,

所以$\sqrt{12}<4$.

技巧点拨

本题(1)中两数同时平方后再比较大小,(2)运用了作差法,通过相减判断得到的差的正负来比较大小;(3)被开方数大的算术平方根较大,即当$a\geqslant b\geqslant0$时,$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}\geqslant0$,反过来也成立.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$,

因为 $3<4$,

所以 $\sqrt{3}<2$.

所以 $\frac{\sqrt{3}-2}{2}<0$,即 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{1}{2}$.

(3) 因为 $\sqrt{401}>\sqrt{400}=20$,

所以 $\frac{\sqrt{401}-5}{4}>\frac{\sqrt{400}-5}{4}=\frac{20-5}{4}=3.75$.

考查角度4 利用计算器求算术平方根

例11 用计算器求下列各式的值:

(1) $\sqrt{9\,801}$; (2) $\sqrt{11}$(精确到0.01).

导引: 注意计算器的正确使用方法. 先按 $\sqrt{\ }$ 键,然后按数字键,最后按 $=$ 键,计算器显示的结果就是该数的算术平方根(或其近似值).

解: (1) 依次按键 $\sqrt{\ }$ 9 8 0 1 $=$,显示:99.

所以 $\sqrt{9\,801}=99$.

(2) 依次按键 $\sqrt{\ }$ 1 1 $=$,显示:3.316 624 79.

所以 $\sqrt{11}\approx3.32$.

考查角度5 利用计算器探究算术平方根的规律

例12 填空:已知 $\sqrt{7.16}\approx2.676$,

(1) $\sqrt{0.071\,6}\approx$_____;

$\sqrt{716}\approx$_____.

(2) 若 $\sqrt{a}\approx267.6$,则 a 的值是_____.



导引: 利用计算器探究发现:被开方数的小数点向左(或向右)移动两位,其算术平方根的小数点相应地向左(或向右)移动一位.

答案: (1) 0.267 6; 26.76 (2) 71 600

同类变式 (答案见185页)

12. 观察下列各式:

① $\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$; ② $\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$;

③ $\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$; ④ $\sqrt{5+\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$

……

用含字母 n(n 为自然数,且 $n\geqslant2$)的式子表示上述式子的规律.

▲同类变式 (答案见185页)

10. 比较大小:

(1) $\sqrt{35}$____6;

(2) $-\sqrt{5}+1$____$-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法点拨

用计算器求算术平方根注意两点:一是按顺序操作,二是按要求取结果.

规律点拨

对于此类规律探究题,要从两个方向进行比较:第一,把被开方数进行比较;第二,把它们的结果进行比较,从中发现规律.利用计算器探究发现:被开方数的小数点向右(或向左)移动两位,其算术平方根的小数点就向右(或向左)移动一位.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度6 利用估算算术平方根解决实际问题

例13 某地开辟一块长方形的荒地用于新建一个以环保为主题的公园. 已知这块荒地的长是宽的2倍,它的面积是400 000 m^2.

(1)这块荒地的宽是多少?它有1 000 m吗?

(2)如果要求结果精确到10 m,这块荒地的宽大约是多少?

(3)该公园中心有一个圆形花圃,它的面积是800 m^2,你能估计它的半径吗(结果精确到1 m)?

导引: 利用长方形和圆的面积公式及算术平方根的知识进行求解.

解: (1)设这块荒地的宽是 x m,那么长是 $2x$ m.

则根据题意,得 $2x \times x = 400\,000$,即 $x^2 = 200\,000$.

又因为 x 为荒地的宽,所以 $x > 0$,所以 $x = \sqrt{200\,000} < 1\,000$.

所以这块荒地的宽是 $\sqrt{200\,000}$ m,没有1 000 m.

(2)因为 $x = \sqrt{200\,000} \approx 447$,

所以这块荒地的宽大约是450 m.

(3)设公园中心的圆形花圃的半径为 r m,

则根据题意,得 $\pi r^2 = 800$,即 $r^2 = \dfrac{800}{\pi}$.

又因为 r 为圆形花圃的半径,

所以 $r > 0$,所以 $r = \sqrt{\dfrac{800}{\pi}} \approx 16$. 所以它的半径大约为16 m.

方法点拨

运用方程思想求出长方形的宽是解决本题的关键.



点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用算术平方根的非负性解决问题

例14 若 $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 0$,求 $x^{2\,019} + y^{2\,020}$ 的值.

导引: 非负数与非负数的和为0在当且仅当这两个非负数都为0时成立,可列方程求出 x,y 的值,从而求出含 x,y 的式子的值.

解: 因为 $\sqrt{x-1} \geqslant 0$,$\sqrt{y+1} \geqslant 0$,

$\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 0$,

所以 $x - 1 = 0$,$y + 1 = 0$,所以 $x = 1$,$y = -1$.

所以 $x^{2\,019} + y^{2\,020} = 1^{2\,019} + (-1)^{2\,020} = 2$.

技巧点拨: 算术平方根和绝对值一样,都是非负数,当几个非负数的和等于0时,其中每一个非负数都为0.

拔尖角度2 利用估算的方法确定一个数的整数部分和小数部分

例15 设 $2 + \sqrt{6}$ 的整数部分和小数部分分别是 x,y,试求出 x,y 的值.

导引: 先估算 $\sqrt{6}$ 的整数部分,再表示出其小数部分($\sqrt{6}$ − 整数部分 = 小数部分),从而可求 x,y 的值.

解: 因为 $\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$,

所以 $2 < \sqrt{6} < 3$.

所以 $\sqrt{6}$ 的整数部分是2,

则 $\sqrt{6}$ 的小数部分是 $\sqrt{6} - 2$.

所以 $2 + \sqrt{6}$ 的整数部分是4,小数部分是 $\sqrt{6} - 2$(即 $2 + \sqrt{6} - 4 = \sqrt{6} - 2$),

即 $x = 4$,$y = \sqrt{6} - 2$.

微信公众号 数辅资料站

关注微信公众号“数辅资料站”获取更多学习资料

技巧点拨： 确定$\sqrt{a}$的整数部分、小数部分的一般方法：确定整数部分的方法是：直接取与其最接近的两个连续整数中较小的那个整数；确定小数部分的方法是：先确定其整数部分，然后用这个数减去它的整数部分得出它的小数部分，即小数部分＝原数－整数部分.

拔尖角度 3 利用算术平方根的性质探究规律

例 16 规律探究：(1) 求$\sqrt{3^2}$，$\sqrt{(-2)^2}$，$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$，$\sqrt{0^2}$，$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$的值.

(2) 对于任意数a，探究$\sqrt{a^2}$等于多少？

(3) 根据(2)中的结论，则$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=$_____.

导引： (1) 先算出被开方数，然后根据算术平方根的意义求出结果.

(2) 对比(1)中的结果探究结论；

(3) 根据(2)中结论直接写出结果.

解： (1) $\sqrt{3^2}=3$，$\sqrt{(-2)^2}=2$，$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，$\sqrt{0^2}=0$，$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$.

(2) 对于任意数a，$\sqrt{a^2}=|a|$.

(3) $\sqrt{2}-1$

规律点拨： 通过具体的数探究得出，当$a>0$时，$\sqrt{a^2}=a$；当$a=0$时，$\sqrt{a^2}=0$；当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=-a$.由此得出一般规律$\sqrt{a^2}=|a|$.利用$\sqrt{a^2}=|a|$可化简式子.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 185 页)

基础巩固练

1. [期中·淮北] 1 的算术平方根是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

2. [中考·酒泉] 4 的平方根是(　　)

A. 16　　B. 2

C. ±2　　D. $\pm\sqrt{2}$

3. [期中·淮南] 下列语句写成数学式子正确的是(　　)

A. 81 的算术平方根是 9，即$\pm\sqrt{81}=9$

B. 4 的负的平方根是-2，即$\sqrt{-4}=-2$

C. 36 的平方根是±6，即$\sqrt{36}=\pm6$

D. $(-5)^2$的算术平方根是 5，即$\sqrt{(-5)^2}=5$

4. [中考·安顺] $\sqrt{4}$的算术平方根是(　　)

A. $\pm\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. ±2　　D. 2

5. $\sqrt{51}$在下列哪两个相邻的整数之间？(　　)

A. 5 到 6 之间　　B. 8 到 9 之间

C. 6 到 7 之间　　D. 7 到 8 之间

6. 下列各式中正确的是(　　)

A. $\left(\pm\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2\frac{1}{4}}=1\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{4+\frac{9}{16}}=2\frac{3}{4}$　　D. $\sqrt{13^2-7^2}=6$

7. 如果某数的一个平方根是-9，那么这个数为_____.

8. [期中·合肥长丰县] 若一个正数的两个平方根是$2a+2$和$-a-4$，则这个正数是_____.

9. 求下列各数的平方根.

(1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$；(2) -2.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

10. 一个自然数的算术平方根为$\sqrt{m}$，则与它相邻的下一个自然数的算术平方根是(　　)

A. $\sqrt{m+1}$　　B. $m+1$

C. m^2+1　　D. $\sqrt{m^2+1}$

11. $\sqrt{(-6)^2}=$_____，$-\sqrt{(-7)^2}=$_____，$\pm\sqrt{5^2}=$_____.

12. -4是a的一个平方根，则a的算术平方根是_____. 【导学号:2231921】

13. 面积为35 cm^2的正方形的边长为_____ cm.

14. 求下列各式中x的值.

(1)$9x^2-25=0$;

(2)$4(2x-1)^2=36$;

(3)$(x+1)^2-81=0$;

(4)$4(2x+3)^2=(-3)^2$.

15. 已知$x^2=225$，$\sqrt{y-3}=0$，求xy的值.

16. 已知$2a-1$的平方根是±3，$3a+b-1$的平方根是±4，求$a+2b$的平方根.

17. 在物理学中，电流做功的功率$P=I^2R$，试用含P，R的式子表示I，并求当$P=25$，$R=4$时，I的值.

思维拓展练

18. 若a，b为有理数，且$b=\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+7}+4$，$a>0$，求$a+b$的值.

我的错题笔记

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.1.2 立方根

核心知识

- 立方根
- 立方根的性质
- 用计算器求立方根

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 立方根

1 **立方根**：一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根，也叫做三次方根. 这就是说，如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根.

表示方法：一个数 a 的立方根，用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号 a”，其中 a 叫做被开方数，3 叫做根指数.

2 **开立方**：求一个数的立方根的运算叫做开立方.

要点精析

(1) 任何一个数都有立方根，但负数没有平方根；

(2) 开立方与立方互为逆运算，我们可以根据这种关系求一个数的立方根.

(3) 立方根与开立方的区别：立方根是一个数，是开立方的结果；而开立方是求一个数的立方根的过程，是一种运算.

3 **易错警示**：

立方根与平方根的区别：

(1) 被开方数：前者可为任何数，后者为非负数；

(2) 根指数：前者不能省略，后者可省略不写；

(3) 个数：立方根只有一个，平方根有两个（特殊情况 0 的平方根是 0）.

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用立方根的定义进行辨析

例1 下列说法正确的有_____.（填序号）

①因为 $5^3=125$，所以 125 的立方根是 5；

②因为 $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$，所以 $-\frac{1}{3}$ 是 $-\frac{1}{27}$ 的立方根；

③ $\sqrt[3]{-4}$ 的根指数是 3，被开方数是 -4；

④ $\sqrt{11}$ 的根指数是 0，被开方数是 11.

导引：根据立方根的定义和表示方法知①②③正确，④中 $\sqrt{11}$ 的根指数是 2，被开方数是 11.

答案：①②③

考查角度2 利用立方根的定义求立方根

例2 求下列各数的立方根：

(1) -125；(2) $-\frac{27}{64}$；(3) $2\frac{10}{27}$；(4) -0.008.

导引：根据立方根的定义知，要求上面各数的立方根，只需找到几个数的立方分别等于上面各数，那么所找的这几个数分别为上面各数的立方根.

同类变式（答案见 185 页）

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 负数没有立方根

B. 只有正数才有立方根

C. 因为 $(\sqrt[3]{-5})^3=-5$，所以 -5 的立方根是 $\sqrt[3]{-5}$

D. $(-1)^2$ 的立方根是 -1

方法点拨

如果被开方数为带分数，一般先将被开方数化为假分数，然后再求其立方根. 求一个数的立方根时要注意结果的正负.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)因为$(-5)^3=-125$，

所以-125的立方根是-5，即$\sqrt[3]{-125}=-5$.

(2)因为$\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$，

所以$-\frac{27}{64}$的立方根是$-\frac{3}{4}$，即$\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=-\frac{3}{4}$.

(3)因为$2\frac{10}{27}=\frac{64}{27}$，而$\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$，

所以$2\frac{10}{27}$的立方根是$\frac{4}{3}$，即$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\frac{4}{3}$.

(4)因为$(-0.2)^3=-0.008$，所以-0.008的立方根是-0.2，即$\sqrt[3]{-0.008}=-0.2$.

▲同类变式（答案见185页）

2. 求下列各数的立方根：

(1)64；

(2)-0.729；

(3)$-3\frac{3}{8}$.

点知识 2 立方根的性质

1 性质：

(1)正数的立方根是正数；

(2)负数的立方根是负数；

(3)0的立方根是0；

(4)$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$；

(5)$(\sqrt[3]{a})^3=a$.

要点精析

(1)互为相反数的数的立方根也互为相反数；

(2)利用$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$可以把求一个负数的立方根转化为求一个正数的立方根的相反数.

2 平方根与立方根的区别与联系：

		平方根	立方根
区别	定义	一般地，如果一个数的平方等于a，那么这个数叫做a的平方根	一般地，如果一个数的立方等于a，那么这个数叫做a的立方根
	性质	正数有两个平方根，它们互为相反数	正数有一个立方根，仍为正数
		负数没有平方根	负数有一个立方根，仍为负数
	表示法	$\pm\sqrt{a}(a\geqslant 0)$	$\sqrt[3]{a}$(a为任意数)
联系		①开平方与开立方都与相应的乘方运算互为逆运算 ②0的平方根和立方根都是0	

3 易错警示：(1)平方根等于它本身的数只有0；而立方根等于它本身的数有-1，0和1；

(2)负数也有立方根.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用立方根的性质认识立方根

例3 下列语句正确的是(　　)

A. 负数没有立方根

B. 8的立方根是± 2

C. 立方根等于它本身的数只有± 1

D. $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$

方法点拨

任何数都有唯一的立方根；而立方根等于它本身的数有0和± 1三个；一个数的立方根等于它的相反数的立方根的相反数.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 任何数都有唯一的立方根，所以选项 A 是错误的；8 的立方根只有一个 2，所以选项 B 是错误的；立方根等于它本身的数除了 ± 1，还有 0，所以选项 C 是错误的；$\sqrt[3]{-8}=-2$，$-\sqrt[3]{8}=-2$，故选项 D 是正确的.

答案： D

考查角度2 利用立方根的性质求值

例4 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{343}$；(2) $\sqrt[3]{\frac{10}{27}-5}$；

(3) $-\sqrt[3]{-8}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}$.

解： (1) $-\sqrt[3]{343}=-7$.

(2) $\sqrt[3]{\frac{10}{27}-5}=\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$.

(3) $-\sqrt[3]{-8}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}=2\div\frac{3}{2}+1=2\times\frac{2}{3}+1=\frac{7}{3}$.

方法点拨

做开平方或开立方运算时，一般都是利用它们的定义，运用平方法或立方法去掉根号；当被开方数不是单独一个数时，则需先将它们进行化简，再进行开方运算.

同类变式 （答案见 185 页）

4. 计算：(1) $\sqrt[3]{1-0.973}$；

(2) $\sqrt{3\frac{3}{8}}+\sqrt[3]{0.001}$；

(3) $\sqrt[3]{\frac{61}{125}-1}-\sqrt{-2\frac{10}{27}}$.

考查角度3 利用立方根的性质解方程

例5 解方程：

(1) $8x^3+27=0$；(2) $64(x+1)^3=27$；(3) $3(x-3)^3-24=0$.

导引： (1) 先移项，然后将 x^3 的系数化为 1，再求解；(2) 先把方程化为 $(x+1)^3=\frac{27}{64}$ 的形式，把 $x+1$ 作为一个整体求解；(3) 先移项后化简，把 $x-3$ 看成一个整体求解.

解： (1) 原方程可化为 $x^3=-\frac{27}{8}$，所以 $x=-\frac{3}{2}$.

(2) 由 $64(x+1)^3=27$，得 $(x+1)^3=\frac{27}{64}$，

所以 $x+1=\frac{3}{4}$，所以 $x=-\frac{1}{4}$.

(3) 因为 $3(x-3)^3-24=0$，

所以 $(x-3)^3=8$，

即 $x-3=2$，所以 $x=5$.

技巧点拨

求立方根的运算，常需转化为 $x^3=a$ 的简便形式；也常常将 $(x+a)^3$ 中的 $x+a$ 看成一个整体，利用整体思想解答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4 利用立方根的性质求相关式子的值

例6 已知 $\sqrt[3]{3y-1}$ 和 $\sqrt[3]{1-2x}$ 互为相反数，且 $x\neq0$，$y\neq0$，求 $\frac{x}{y}$ 的值.

导引： 已知 $\sqrt[3]{3y-1}$ 与 $\sqrt[3]{1-2x}$ 互为相反数，得出 $\sqrt[3]{3y-1}=-\sqrt[3]{1-2x}$ 的结论. 利用结论建立 x 与 y 之间的等量关系是求比值的重要途径.

解： 根据题意，得 $\sqrt[3]{3y-1}=-\sqrt[3]{1-2x}$.

因为 $\sqrt[3]{3y-1}=\sqrt[3]{-(1-3y)}=-\sqrt[3]{1-3y}$，

所以 $-\sqrt[3]{1-3y}=-\sqrt[3]{1-2x}$.

所以 $1-3y=1-2x$.

所以 $3y=2x$.

又因为 $x\neq0$，$y\neq0$，

所以 $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

方法点拨

正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0的立方根是0，只有互为相反数的两个数，它们的立方根才能互为相反数.

同类变式 （答案见186页）

6. 若 $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3y-2}$ 互为相反数且 $y\neq0$，求 $\frac{2x+1}{y}$ 的值.

知识3 用计算器求一个数的立方根

用计算器求一个数的立方根和求一个数的算术平方根的步骤相同，只是按的根指数键不同.

步骤：按键 $\sqrt[3]{\ }$ → 被开方数 → = → 根据显示结果写出立方根.

或者：按键 2ndf $\sqrt[3]{\ }$ → 被开方数 → = → 根据显示结果写出立方根.

要点精析

不同型号的计算器按键的顺序可能不同，使用计算器时，一定要按说明书操作. 在用计算器求一个负数的立方根时，可先求出它的绝对值的立方根，再在结果前加上负号.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用计算器求立方根

例7 用计算器求下列各数的立方根（精确到0.001）.

（1）7；（2）−13.27.

导引： 由计算器得到数值后，再根据精确度利用“四舍五入”法取近似值.

解： （1）依次按键 2ndf $\sqrt[3]{\ }$ 7 = ，显示：1.912 931 183，

所以 $\sqrt[3]{7}\approx1.913$.

（2）依次按键 2ndf $\sqrt[3]{\ }$ 1 3 · 2 7 =，

显示：2.367 501 744，

所以 $\sqrt[3]{13.27}\approx2.368$.

所以 $\sqrt[3]{-13.27}\approx-2.368$.

同类变式 （答案见186页）

7. 利用计算器求下列各式的值（精确到0.01）.

（1）$\sqrt[3]{117}$；

（2）$\sqrt[3]{-0.532}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 比较两个数的大小

例8 比较下列各组数的大小：

(1)$\sqrt[3]{9}$与$\sqrt{3}$；

(2)$-\sqrt[3]{42}$与-3.4；

(3)$\sqrt[3]{6}$与2.

导引： (1)找中间值2来作比较；

(2)先比较$\sqrt[3]{42}$与3.4，再根据两个负数比较大小，绝对值大的反而小来作比较；

(3)先立方，立方后大的就大.

解： (1)因为$2=\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{9}$，$2=\sqrt{4}>\sqrt{3}$，

所以$\sqrt[3]{9}>\sqrt{3}$.

(2)因为$\sqrt[3]{42}\approx3.476>3.4$，

所以$-\sqrt[3]{42}<-3.4$.

(3)因为$(\sqrt[3]{6})^3=6$，$2^3=8$，$6<8$，

所以$\sqrt[3]{6}<2$.

方法点拨

比较大小的两个数中如果有含根号的数，常常有如下比较方法：(1)先找个中间值再比较；(2)先用计算器求出含根号的数的近似值，再比较；(3)先把两数平方或立方，再比较.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 立方根与平方根的综合应用

例9 已知$x-2$的平方根是±2，$2x+y+7$的立方根是3，求x^2+y^2的算术平方根.

导引： 根据平方根、立方根的定义和已知条件可知$x-2=4$，$2x+y+7=27$，从而解出x，y，最后代入x^2+y^2求其算术平方根即可.

解： 因为$x-2$的平方根是±2，

所以$x-2=4$.

所以$x=6$.

因为$2x+y+7$的立方根是3，

所以$2x+y+7=27$.

把$x=6$代入解得$y=8$，

所以$x^2+y^2=6^2+8^2=100$.

所以x^2+y^2的算术平方根为10.

方法点拨： 本题根据平方根中被开方数等于平方根的平方，立方根中被开方数等于立方根的立方这一关系，运用方程思想列方程求出x，y的值，再根据算术平方根的定义求出x^2+y^2的算术平方根.

拔尖角度2 立方根与算术平方根的综合应用

例10 如果$\sqrt[b+4]{a-3b}$为$a-3b$的算术平方根，$\sqrt[a+2]{1-a^2}$为$1-a^2$的立方根，求$2a-3b$的立方根.

导引： 算术平方根的根指数为2，立方根的根指数为3，由此可以分别列出关于b，a的方程，得到a，b后即可求出题目要求的结果.

解： 由题意，得$b+4=2$，

$a+2=3$.

所以$b=-2$，$a=1$.

所以$2a-3b=8$，

所以$\sqrt[3]{2a-3b}=\sqrt[3]{8}=2$.

技巧点拨： 解决此题的关键是明确算术平方根和立方根的意义及其表示方法.特别提醒：求出字母的值必须满足算术平方根的被开方数为非负数，否则求出的值就无意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用计算器探究立方根的规律

例 11 观察下列式子，并解答下列问题.

(1)用计算器求最后两个式子的结果.

$\sqrt[3]{0.002}\approx 0.126\ 0$;

$\sqrt[3]{0.02}\approx 0.271\ 4$;

$\sqrt[3]{0.2}\approx 0.584\ 8$;

$\sqrt[3]{2}\approx 1.260$;

$\sqrt[3]{20}\approx 2.714$;

$\sqrt[3]{200}\approx$ _____;

$\sqrt[3]{2\ 000}\approx$ _____.

(2)通过类比，你能得出什么规律？用一句话描述出来.

导引： 开平方运算中，被开方数的小数点向左或向右移动 $2n$(n 为正整数)位时，平方根的小数点就相应地向左或向右移动 n 位，与之相比，在开立方运算中，被开方数的小数点向左或向右移动 $3n$(n 为正整数)位时，立方根的小数点就相应地向左或向右移动 n 位，再通过上面各式验证可知结论是正确的.

解： (1)5.848；12.60

(2)在开立方运算中，被开方数的小数点向左或向右移动 $3n$(n 为正整数)位时，立方根的小数点就相应地向左或向右移动 n 位.

规律点拨： 通过观察、比较、分析、归纳、猜想、验证，从而发现规律是探究这类问题的具体方法.本题中关键要理解被开方数的小数点移动对立方根小数点移动位置的影响.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 186 页)

基础巩固练

1. [期中·淮北]若 m 的立方根是 2，则 m 的值是(　　)

A. 4　　B. 8　　C. ±4　　D. ±8

2. 下列语句正确的是(　　)

A. $\sqrt{64}$ 的立方根是 2

B. −3 是 27 的负的立方根

C. $\frac{1}{8}$ 的立方根是 $\pm\frac{1}{2}$

D. $(-1)^2$ 的立方根是 −1

3. 一个正方体的体积为 64，则这个正方体的棱长的算术平方根为(　　)

A. ±4　　B. 4　　C. ±2　　D. 2

4. 若 $\sqrt{x}=8$，则 $\sqrt[3]{-x}=$ _____.

5. 比较大小：3 _____ $\sqrt[3]{28}$.

6. 解方程：

(1)$8x^3=125$；

(2)$(x-1)^3=-8$.

7. 如果 $3x+16$ 的立方根是 4，求 $2x+4$ 的平方根.

8. 求下列各数的立方根：

(1)1 000；(2)−216；

(3)$\frac{27}{125}$；(4)$-\frac{27}{125}$；

(5)$\sqrt{64}$；(6)0.001；

(7)−0.027.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$；(2) $-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$；

(3) $\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}$；(4) $\sqrt[3]{-(m+1)^3}$.

能力提升练

10. 下列说法正确的是(　　)

A. 无论 a 是何值，$-a^2$ 一定没有平方根

B. 一个数若有平方根，则它的平方根是一正、一负两个数

C. 负数没有立方根

D. $-\sqrt[3]{-10}$ 表示 -10 的立方根的相反数

11. 若 $x^2=1$，则 $\sqrt[3]{x}$ 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 不能确定

12. 若 $\sqrt[3]{1.85}\approx1.228$，$\sqrt[3]{18.5}\approx2.645$，则 $\sqrt[3]{1\,850\,000}\approx$ _____.

13. 比较 2，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{7}$ 的大小，并用“$<$”号连接起来：_____.

14. 不用计算器，研究解决下列问题：

(1) 已知 $x^3=10\,648$，则 x 的个位数字一定是_____；

因为 $8\,000=20^3<10\,648<30^3=27\,000$，所以 x 的十位数字一定是_____，所以 $x=$_____.

(2) 已知 $x^3=59\,319$，则 x 的个位数字一定是_____；

因为 $27\,000=30^3<59\,319<40^3=64\,000$，所以 x 的十位数字一定是_____，所以 $x=$_____.

(3) 已知 $x^3=148\,877$，则 x 的个位数字一定是_____；

因为 $125\,000=50^3<148\,877<60^3=216\,000$，所以 x 的十位数字一定是_____，所以 $x=$_____.

(4) 按照以上思考方法，直接写出 x 的值.

①若 $x^3=857\,375$，则 $x=$_____；

②若 $x^3=373\,248$，则 $x=$_____.

15. 我们知道当 $a+b=0$ 时，$a^3+b^3=0$ 也成立，若将 a 看成 a^3 的立方根，b 看成 b^3 的立方根，我们能否得出这样的结论：若两个数的立方根互为相反数，则这两个数也互为相反数.

(1) 试举一个例子来判断上述猜测的结论是否成立；

(2) 若 $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 互为相反数，求 $1-x$ 的值.

思维拓展练

16. [规律探究题] 如果 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如：$[3.15]=3$，$[3.7]=3$，$[3]=3$，则 $[\sqrt[3]{1\times2\times3}]+[\sqrt[3]{2\times3\times4}]+[\sqrt[3]{3\times4\times5}]+\cdots+[\sqrt[3]{2\,016\times2\,017\times2\,018}]=$(　　)

A. 2 030 000　　B. 2 033 000

C. 2 033 136　　D. 2 034 001

我的错题笔记

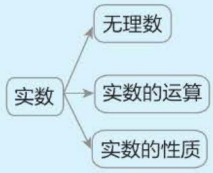
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.2 实　数

核心知识

- 无理数
- 实数
- 实数的性质

知识链接



点知识·拨考向　速提分

点知识 1 无理数

1 **定义：** 无限不循环小数叫做无理数.

判断标准：小数位数无限，小数形式为不循环.

2 **三种常见形式：**

(1)开方开不尽的数，如$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，…；

(2)含有 π 的一类数：$\frac{1}{3}\pi$，$\frac{1}{5}\pi$，$\pi+1$，…；

(3)类似 0.101 001 000 1…(每相邻两个 1 之间依次多一个 0)这样的无限不循环小数.

3 **无理数与有理数的区别：**

(1)有理数是有限小数和无限循环小数，而无理数是无限不循环小数；

(2)所有的有理数都可以写成分数的形式(整数可以看成分母为 1 的分数)，而无理数不能写成分数的形式.

4 **易错警示：**

(1)带根号的数不一定是无理数，不带根号的数也不一定是有理数；

(2)无理数都是无限小数，但无限小数不一定是无理数.

拨考向 ▸▸▸

考查角度1　利用无理数的概念进行辨析

例1　下列说法正确的是(　　)

A. 无限小数都是无理数

B. 带根号的数都是无理数

C. 无限不循环小数都是无理数

D. 无理数都是开方开不尽的数

导引： 因为无限循环小数是有理数，所以 A 错误；$\sqrt{4}$带根号，但不是无理数，所以 B 错误；$\sqrt{\pi^2}$不是开方开不尽的数，但它是无理数，所以 D 错误.

答案： C

考查角度2　利用无理数的概念识别无理数

例2　下列各数：3.141 59，$-\sqrt[3]{8}$，0.131 131 113…(每相邻两个 3 之间依次多一个 1)，$-\pi$，$\sqrt{25}$，$-\frac{1}{7}$中，无理数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

导引： 因为3.141 59 是有限小数，所以 3.141 59 是有理数.

因为 $-\sqrt[3]{8}=-2$，所以 $-\sqrt[3]{8}$是有理数.

因为 $\sqrt{25}=5$，所以 $\sqrt{25}$是有理数.

提分·秘诀

易错警示

(1)对有理数和无理数进行区分时，应先对某些数进行计算或化简，然后根据最后结果进行分类，不能仅看到用根号表示的数就认为是无理数.(2)π 是无理数，化简后含 π 的数也是无理数.

方法点拨

判断一个数是不是无理数，一是看它是不是无限小数，二是看它是不是不循环小数，只有同时满足“无限”和“不循环”这两个特征，才是无理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 $-\frac{1}{7}$ 是分数，所以 $-\frac{1}{7}$ 是有理数.

因为 0.131 131 113…(每相邻两个 3 之间依次多一个 1)，$-\pi$ 都是无限不循环小数，

所以 0.131 131 113…(每相邻两个 3 之间依次多一个 1)，$-\pi$ 是无理数，故选 B.

除此以外，熟悉三种常见无理数的形式是解决该类问题的关键.

答案： B

同类变式 (答案见 186 页)

2. [中考·天门] 下列各数中，是无理数的是(　　)

A. 3.141 5　　B. $\sqrt{4}$

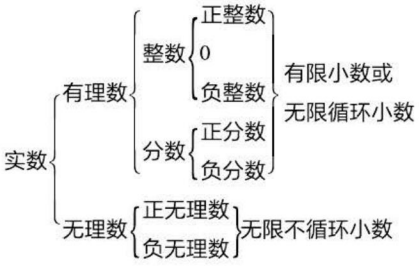
C. $\frac{22}{7}$　　D. $\sqrt{6}$

点知识 2 实数

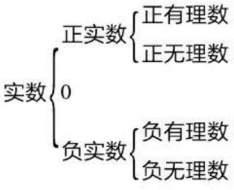
1 实数的概念： 有理数和无理数统称为实数.

2 实数的分类：

(1)按定义分类：



(2)按性质分类：





3 易错警示： 分类标准不同，分法也就不同，但不管哪种分法都要做到不重不漏；0 既不是正实数也不是负实数.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度 利用实数中各类数的特征进行分类

例 3 把下列各数填入相应的大括号内：

$-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{9}{2}, -\sqrt[3]{-8}, 0, -\pi, -\frac{119}{3}, -4.\dot{2}\dot{0}1$,

3.101 001 000 1…(每相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1).

有理数：{　　}；

无理数：{　　}；

整数：{　　}；

分数：{　　}；

正实数：{　　}；

负实数：{　　}.

导引： 根据有理数、无理数等概念进行分类时，应注意先把一些数进行化简再进行判断，如 $-\sqrt[3]{-8}=2$.

易错警示

- 整数和分数统称有理数，所以只要是分数就是有理数，不需要化成小数.
- $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 易误认为是分数，其实它是无理数，分数属于有理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： 有理数：$\left\{-\frac{1}{2},\frac{9}{2},-\sqrt[3]{-8},0,-\frac{119}{3},-4.\dot{2}0\dot{1}\right\}$；

无理数：$\left\{-\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\pi,3.101\,001\,000\,1\cdots\text{（每相邻两个1之间0的个数逐次加1）}\right\}$；

整数：$\{-\sqrt[3]{-8},0\}$；

分数：$\left\{-\frac{1}{2},\frac{9}{2},-\frac{119}{3},-4.\dot{2}0\dot{1}\right\}$；

正实数：$\left\{\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{9}{2},-\sqrt[3]{-8},3.101\,001\,000\,1\cdots\text{（每相邻两个1之间0的个数逐次加1）}\right\}$；

负实数：$\left\{-\frac{1}{2},-\sqrt{3},-\pi,-\frac{119}{3},-4.\dot{2}0\dot{1}\right\}$.

易错警示

对实数进行分类时应先对某些数进行化简，然后根据它的最后结果进行分类，不能看到用根号表示的数就认为其一定是无理数.

同类变式 （答案见186页）

3. 请将下列实数分别填入相应的大括号内：

$0,2\,019,3.1\dot{4}\dot{4},-\frac{3}{4},-\frac{\pi}{3},(-4)^3,-\sqrt{2},\sqrt[3]{-27},$

$\sqrt{0.9},5.212\,112\,111\,2\cdots$（每相邻两个2之间依次多一个1）.

有理数：{　　}；

无理数：{　　}；

正有理数：{　　}；

整数：{　　}；

分数：{　　}；

正数：{　　}；

负数：{　　}.

点知识 3 实数和数轴

1. **实数和数轴间的关系：** 实数和数轴上的点一一对应. 它包含着两层含义：（1）每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；（2）数轴上的每一个点都表示一个实数.
2. **利用数轴比较实数的大小：** 对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大.
3. 数轴上两点间的距离可用两点所表示的实数来表示.
4. **易错警示：** “一一对应”是指每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用数轴比较实数的大小

例4 用“<”连接下列各数：$-\frac{1}{2},\sqrt{3},-2\sqrt{2},2.5,0$.

导引： 比较一组实数的大小和比较一组有理数的大小一样，可先将这些数在数轴上表示出来，然后根据“在数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示的数大”求解.

方法点拨

根据“实数和数轴上的点是一一对应的”，并且“在数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：将各数的大致位置在数轴上表示出来，如图 6.2-1 所示.

由图可知，各数用“<”可以连接为：$-2\sqrt{2}<-\frac{1}{2}<0<\sqrt{3}<2.5$.

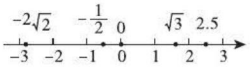
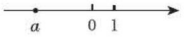


图 6.2-1

同类变式 （答案见 187 页）

4. 实数 a 在数轴上对应的点的位置如图所示，则 a，$-a$，1 的大小关系正确的是（　　）



（第 4 题图）

A. $-a<a<1$　　B. $a<-a<1$

C. $1<-a<a$　　D. $a<1<-a$

考查角度2 利用作差法求数轴上两点间的距离

例 5　点 A 在数轴上表示的数为 $3\sqrt{5}$，点 B 在数轴上表示的数为 -5，则 A，B 两点之间的距离为_____.

导引：根据数轴上两点间的距离等于右边的点表示的数减去左边的点表示的数，列式计算即可得解.

答案：$3\sqrt{5}+5$

方法点拨

数轴上两点间的距离的求法：数轴上两点间的距离等于这两点表示的数之差的绝对值.

点知识 4 实数的性质

1 在有理数范围内的一些基本概念（如相反数、倒数、绝对值）的意义在实数范围内依然适用.

(1)相反数：实数 a 的相反数为 $-a$，若 a，b 互为相反数，则 $a+b=0$；

(2)非零实数 a 的倒数为 $\frac{1}{a}$，若 a，b 互为倒数，则 $ab=1$；

(3)绝对值：$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

2 **实数的大小比较法则：**

正实数大于 0，负实数小于 0；

正实数大于一切负实数；

两个负实数比较大小，绝对值大的反而小.

技考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用实数相关概念进行辨析

例 6　下列结论：

①绝对值最小的实数不存在；

②无理数在数轴上对应的点不存在；

③与本身的平方根相等的实数不存在；

④最大的负数不存在.

其中错误结论的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

导引：①错误，绝对值最小的实数为 0；

②错误，任何一个实数（包括无理数）都能在数轴上找到对应的点；

③错误，与本身的平方根相等的实数为 0；④正确.

答案：C

方法点拨

有理数的相反数、倒数、绝对值的意义实数都具备，对实数的有关概念进行辨析时，错误的说法只需举出一个反例即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用实数的大小比较方法比较大小

例7 ［期末·合肥长丰县］在实数 $-\sqrt{5}$，π，0，-3 中，最小的实数是(　　)

A. $-\sqrt{5}$　　B. π　　C. 0　　D. -3

导引： 根据实数比较大小的方法，只需要比较负数的大小即可，因为 $\sqrt{5}$ 在 2 到 3 之间，

所以 $-\sqrt{5}$ 在 -3 到 -2 之间，

所以最小的实数是 -3.



答案： D

同类变式 (答案见 187 页)

7. 若 $x>0$，试比较 x 与 $\sqrt{x}$ 的大小.

(提示：分三种情况：$x>1$，$x=1$，$0<x<1$).

方法点拨

实数大小比较的一般方法：① 定义法：正数都大于 0，负数都小于 0，正数大于一切负数；② 绝对值法：两个负数绝对值大的反而小；③ 数轴法：在数轴上表示的数，右边的总比左边的大；④ 平方法：比较无理数的大小时，可先利用平方法估计其在哪两个有理数之间，然后再进行比较.

考查角度3 利用绝对值的性质进行化简

例8 实数 a 在数轴上对应的点的位置如图 6.2-2 所示，化简：$|a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$.

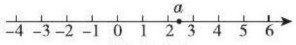


图 6.2-2

导引： 根据数轴判断 a，π，$\sqrt{2}$ 的大小，再判断 $a-\pi$ 与 $\sqrt{2}-a$ 的符号，最后根据绝对值的性质化简.

解： 由图可知 $\sqrt{2}<a<\pi$，所以 $a-\pi<0$，$\sqrt{2}-a<0$.

所以 $|a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$

$=\pi-a+a-\sqrt{2}$

$=\pi-\sqrt{2}$.

方法点拨

利用绝对值的性质进行化简的方法：首先要判断绝对值符号内实数的正负，再根据“正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数”进行化简.

数学素养提升

实数应澄清的几个问题

实数是中学数学的一个重要概念，初学者因对其理解不透彻，常会出现一些错误认识，现就几个常见的问题说明如下：

(1) 无理数都是无限小数，但反过来无限小数不都是无理数；

(2) 带根号的数未必是无理数，不带根号的数也可能是无理数；

(3) 有的同学说“$\frac{22}{7}$ 是无理数，因其不循环”，这是一种错误认识，实事上 $\frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,857\dot{}$，该数不是不循环，只不过循环节较大，事实上所有的分数都为有理数.

(4) 有理数和无理数的个数不可以比较多少，因二者都有无限个，故不能比较其个数的多少.

(5) 有的同学说“无理数也分正无理数，0 和负无理数”，这也是一个错误的认识，因为 0 属于有理数的范畴，无理数可分为正无理数和负无理数.

(6) 有些同学说“有些无理数如 π，很难在数轴上找到表示它的点，因此实数和数轴上的点之间不是一一对应的关系”. 这是对数轴上的点和实数是一一对应关系的一种误解，虽然在数轴上很难找到表示 π 的点，但是不能因为很难就否定它在数轴上的存在性.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 5 实数的运算

1 在实数范围内，进行加、减、乘、除、乘方和开方运算时，有理数的运算法则和运算律仍然适用；实数混合运算的运算顺序与有理数的混合运算顺序一样，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，同级运算按照自左向右的顺序进行，有括号先算括号里面的.

2 有理数的运算律在实数范围内仍然适用，在进行实数运算的过程中，要做到：一“看”——看算式的结构特点，能否运用运算律或公式；二“用”——运用运算律或公式；三“查”——检查过程和结果是否正确.

3 **实数的运算律**

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律：$ab=ba$；

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$；

乘法分配律：$(a+b)c=ac+bc$.

4 **运算种类：**

运算级别	第一级		第二级		第三级	
运算名称	加	减	乘	除	乘方	开方
运算结果	和	差	积	商	幂	方根

要点精析///

在实数范围内做开方运算时，要注意正实数和零既能开平方，也能开立方；负实数不能开平方.

5 **易错警示：**

(1)负实数只能开奇次方，不能开偶次方；

(2)计算结果中如果包含开方开不尽的数，则保留根号，结果要化为最简形式.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用实数的运算步骤进行实数的运算

例9 计算：

(1)$\frac{\sqrt{5}}{2}+2.34-\pi$(精确到0.1)；

(2)$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-1)$(精确到0.01)；

(3)$\left(\sqrt[3]{-216}+\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{64}\right)\times\sqrt{\frac{1}{(-0.1)^2}}$.

导引： 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

解： (1)$\frac{\sqrt{5}}{2}+2.34-\pi\approx\frac{1}{2}\times2.24+2.34-3.14\approx0.3$.

(2)$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-1)\approx(1.732+2.236)\times(1.414-1)=3.968\times0.414\approx1.64$.

(3)$\left(\sqrt[3]{-216}+\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{64}\right)\times\sqrt{\frac{1}{(-0.1)^2}}=\left(-6+\frac{3}{2}+4\right)\times10=-0.5\times10=-5$.

方法点拨

实数的运算顺序与有理数的运算顺序相同.实数运算中，无理数可选取近似值转化为有理数计算，中间结果所取的近似值要比结果要求的多一位小数.

同类变式 (答案见187页)

9. 计算：

(1)$\sqrt[3]{0.125}-\sqrt{3\frac{1}{16}}+\sqrt{\left(1-\frac{7}{8}\right)^2}-\left|-\frac{1}{2}\right|$；

(2)$-2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt[3]{-64}\div|-2|$；

(3)$\sqrt[3]{64}\div\sqrt{16}\times\frac{1}{4}\times(4+\sqrt[3]{125})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用算术平方根对实数值进行估算

例10 ［中考·淄博］与$\sqrt{37}$最接近的整数是(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

导引： 因为37不能直接开平方，所以首先找到与37相邻的两个完全平方数，再确定$\sqrt{37}$在哪两个相邻整数之间且更接近哪个整数.

解： 因为$36<37<49$，所以$\sqrt{36}<\sqrt{37}<\sqrt{49}$，即$6<\sqrt{37}<7$，因为37与36最接近，所以与$\sqrt{37}$最接近的整数是6.

答案： B

方法点拨

在估算一个正无理数的取值范围时，可以先找到与被开方数相邻的两个完全平方数，则该无理数的范围就在这两个完全平方数的算术平方根之间.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 实数范围内相反数、倒数、绝对值的综合应用

例11 若a，b互为相反数，c，d互为倒数，m的绝对值为4，求$\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|$的值.

导引： 要求$\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|$的值，需先根据条件确定$a+b$，$cd$和$m$的值. 根据题意容易得$a+b=0$，$cd=1$，$m=\pm4$，代入求值即可.

解： 因为a，b互为相反数，

所以$a+b=0$.

因为c，d互为倒数，所以$cd=1$.

因为$|m|=4$，

所以$m=\pm4$，所以$m^2=16$.

所以$\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|=\frac{0}{m}-16-|\sqrt{2}-1|=-16-\sqrt{2}+1=-15-\sqrt{2}$.

方法点拨： 当数从有理数扩充到实数后，有理数中相反数、倒数和绝对值的意义同样适用于实数；由于本例中a，b，c，d的值不确定，因此在求$a+b$，cd的值时，运用了整体思想.

拔尖角度2 利用非负数的性质求值

例12 已知实数x，y，z满足$|4x-4y+1|+\frac{1}{3}\sqrt{2y+z}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0$，求$(y+z)\cdot x^2$的值.

导引： 有限个非负数之和为零，则每个非负数都应为零. 由此可列方程，从而得出x，y，z的值，最后将x，y，z的值代入所求式子即可求解.

解： 因为$|4x-4y+1|\geqslant0$，$\sqrt{2y+z}\geqslant0$，$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$，

且$|4x-4y+1|+\frac{1}{3}\sqrt{2y+z}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0$，

所以$4x-4y+1=0$，$2y+z=0$，$z-\frac{1}{2}=0$.

所以$z=\frac{1}{2}$.

把$z=\frac{1}{2}$代入$2y+z=0$，得$y=-\frac{1}{4}$.

把$y=-\frac{1}{4}$代入$4x-4y+1=0$，得$x=-\frac{1}{2}$.

所以$(y+z)\cdot x^2$

$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{16}$.

技巧点拨： 几个非负数的和等于零的条件是当且仅当每个非负数的值都等于零，从而得到关于字母的方程，运用方程思想是求相关字母的值的常用方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用实数的性质进行探究

例 13 先阅读理解，再回答问题.

因为 $\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}$，且 $1<\sqrt{2}<2$，

所以 $\sqrt{1^2+1}$ 的整数部分是 1；

因为 $\sqrt{2^2+2}=\sqrt{6}$，且 $2<\sqrt{6}<3$，

所以 $\sqrt{2^2+2}$ 的整数部分是 2；

因为 $\sqrt{3^2+3}=\sqrt{12}$，且 $3<\sqrt{12}<4$，

所以 $\sqrt{3^2+3}$ 的整数部分是 3.

以此类推，我们会发现 $\sqrt{n^2+n}$（n 为正整数）的整数部分是_____. 请说明理由.

导引： 由 n 为正整数可知 $n^2<n^2+n<(n+1)^2$，故 $\sqrt{n^2+n}$ 的整数部分是 n.

解： n

理由：因为 n 为正整数，

所以 $n^2<n^2+n$，$n^2+n=n(n+1)<(n+1)^2$.

所以 $n^2<n^2+n<(n+1)^2$，

所以 $n<\sqrt{n^2+n}<n+1$.

所以 $\sqrt{n^2+n}$ 的整数部分是 n.

规律点拨： 解决本题的关键是从阅读材料中找到相应的规律，并根据规律得出结论.本题运用了归纳法.

练中考·练模拟 得满分 （答案见 187 页）

基础巩固练

1. [期末·南京] 下列各数中，是无理数的为（　　）

A. $\sqrt[3]{9}$　　B. 3.14　　C. $\sqrt{16}$　　D. $-\frac{1}{3}$

2. 下列说法正确的是（　　）

A. $\sqrt{2}$ 是最小的正无理数

B. 绝对值最小的实数不存在

C. 开方开不尽的数都是无理数

D. 有理数与数轴上的点一一对应

3. [中考·荆门] $-\sqrt{2}$ 的倒数的平方是（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{1}{2}$

4. 已知 a 是实数，下列说法：

①a^2 和 $|a|$ 都是正数；

②如果 $|a|=-a$，那么 a 一定是负数；

③a 的倒数是 $\frac{1}{a}$；

④a 和 $-a$ 在数轴上对应的点分别在原点的两侧，

其中正确的有（　　）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

5. 在数轴上表示 $-\sqrt{6}$ 的点到原点的距离为_____.

6. 把下列各数填入相应的大括号内：

-7，0.32，$\frac{1}{3}$，46，0，$-\sqrt{8}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{216}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，5π，$0.\dot{8}\dot{7}$，$\sqrt{16}$.

有理数：{　　}；

无理数：{　　}；

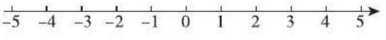
负实数：{　　}.

7. 计算：

(1) $|-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-2|$；

(2) $(\sqrt{2})^2-\sqrt{(-4)^2}+4\times\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

8. 在如图所示的数轴上近似地表示下列各数，并把这些数用“<”连接：$-1\frac{4}{5}$，$\sqrt{3}$，2，π，0.



（第 8 题图）

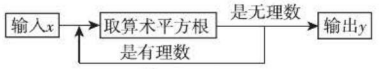
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

9. [中考·陕西] 将实数$\sqrt{5}$,π,0,-6由小到大用“<”号连起来,可表示为_____.

10. 数轴上A,B两点表示的实数分别是$\sqrt{2}$和2,若点A关于点B的对称点为C,则点C表示的实数为_____.

11. 有一个数值转换器,原理如图,当输入的x为36时,输出的y的值是_____.



(第11题图)

12. [期中·淮南] 规定用符号$[m]$表示一个实数m的整数部分,例如$\left[\frac{2}{3}\right]=0$,$[3.14]=3$. 按此规定$[-\sqrt{17}+1]=$_____.

13. (1)已知x,y互为倒数,c,d互为相反数,a的绝对值为3,z的算术平方根是5,求$4(c+d)+xy+\frac{\sqrt{z}}{a}$的值.

(2)已知实数a,b互为相反数,c,d互为倒数,x的绝对值为$\sqrt{7}$,求$x^2+(a+b+cd)x+\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{cd}$的值.

14. 写出所有符合下列条件的数:

(1)大于$-\sqrt{19}$且小于$\sqrt{10}$的所有整数;

(2)绝对值小于$\sqrt{18}$的所有整数.

思维拓展练

15. [阅读理解题] 阅读下面的文字,解答问题.

大家知道$\sqrt{2}$是无理数,而无理数是无限不循环小数,因此$\sqrt{2}$的小数部分我们不可能全部写出来,于是小明用$\sqrt{2}-1$来表示$\sqrt{2}$的小数部分.

事实上,小明的表示方法是有道理的,因为$\sqrt{2}$的整数部分是1,用这个数减去其整数部分,差就是小数部分,所以$\sqrt{2}-1$是$\sqrt{2}$的小数部分.

请解答: 【导学号:2231921】

(1)你能求出$\sqrt{5}+2$的整数部分和小数部分吗?

(2)已知$10+\sqrt{3}=x+y$,其中x是整数,且$0<y<1$,请求出$x-y$的相反数.

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

利用平方根的概念解题的几个技巧

荣老师告诉你

如果一个数的平方等于 $a(a\geqslant 0)$，那么这个数是 a 的平方根，其中正的平方根叫做算术平方根，这个概念在解题中有着重要的应用.

技巧一 巧用被开方数的非负性求值

例1 若 $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}-y=6$，求 y^x 的立方根.

导引： 观察此题可以发现被开方数为非负数，即 $2-x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 2$；$x-2\geqslant 0$，得 $x\geqslant 2$；进一步可得 $x=2$. 从而可求出 $y=-6$.

解： 因为 $2-x\geqslant 0, x-2\geqslant 0$，

所以 $x\leqslant 2, x\geqslant 2$，

所以 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$y=-6$.

$y^x=(-6)^2=36$.

所以 y^x 的立方根为 $\sqrt[3]{36}$.

方法点拨： 在$\sqrt{a}$中，$a\geqslant 0$，即 a 是非负数. 若互为相反数的两个数同时作为被开方数，则这两个被开方数都等于 0.

技巧二 巧用正数的两平方根互为相反数求值

例2 已知一个正数的两个平方根分别是 $2a-1$ 与 $2-a$，求 a 的平方的相反数的立方根.

导引： 由正数的两平方根互为相反数，列出以 a 为未知数的方程，求出 a 的值，然后再求 a 的平方的相反数的立方根.

解： 因为 $2a-1$ 与 $2-a$ 是一个正数的平方根，所以 $(2a-1)+(2-a)=0$.

所以 $a=-1$.

所以 a 的平方的相反数的立方根是 $\sqrt[3]{-1}=-1$.

方法点拨： 当 $x\geqslant 0$ 时，x 的平方根是 $\pm\sqrt{x}$，而 $(+\sqrt{x})+(-\sqrt{x})=0$，所以一个正数的平方根有两个，它们互为相反数.

技巧三 巧用算术平方根的最小值求值

例3 已知 $y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，当 a, b 取不同的值时，y 也有不同的值. 当 y 取最小值时，求 b^a 的负的平方根.

导引： $y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，要 y 最小，就是要 $\sqrt{a-2}$ 和 $\sqrt{3(b+1)}$ 最小，

而 $\sqrt{a-2}\geqslant 0$，$\sqrt{3(b+1)}\geqslant 0$，

显然是 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$，

可得 $a=2, b=-1$.

解： 因为 $\sqrt{a-2}\geqslant 0$，$\sqrt{3(b+1)}\geqslant 0$，

$y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，

所以当 $\sqrt{a-2}=0$ 且 $\sqrt{3(b+1)}=0$ 时，y 最小.

由 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$，可得 $a=2, b=-1$.

所以 $b^a=(-1)^2=1$.

1 的负的平方根是 -1，

所以 b^a 的负的平方根是 -1.

方法点拨： $\sqrt{a}\geqslant 0$，即 $a=0$ 时其值最小，换句话说$\sqrt{a}$的最小值是零.

技巧四 巧用平方根定义解方程

例4 解方程 $(x+1)^2=36$.

导引： 把 $x+1$ 看成是 36 的平方根即可.

解： 因为 $(x+1)^2=36$，

所以 $x+1=\pm 6$.

所以 $x=5$ 或 $x=-7$.

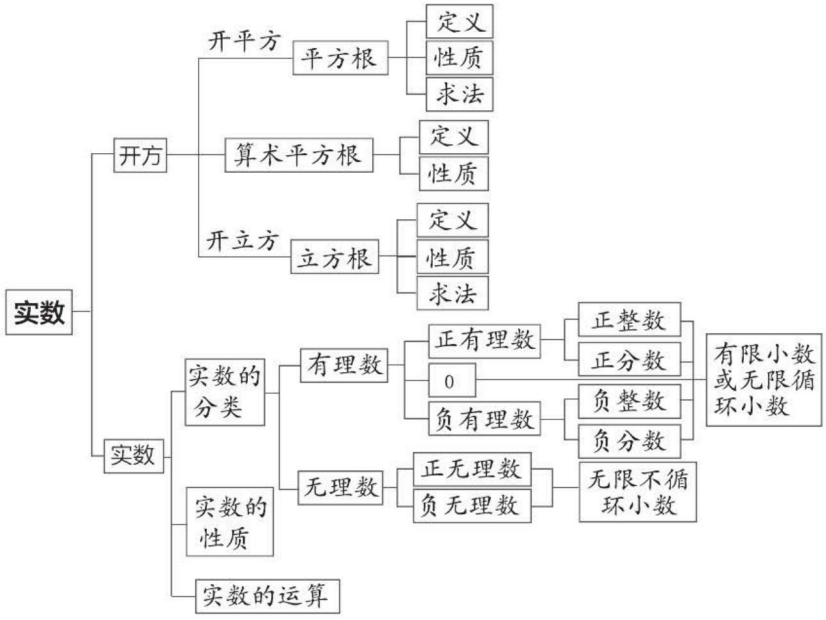
方法点拨： 如果 $x^2=a(a\geqslant 0)$，那么 x 就叫做 a 的平方根. 若从方程的角度观察，这里的 x 实际是方程 $x^2=a(a\geqslant 0)$ 的根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 乘方与开方是互逆运算，这种互逆关系是求平方根和立方根的关键所在.
2. 一个正数的平方根有两个，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根.
3. 任何数都有立方根，正数的立方根是正数；负数的立方根是负数；0 的立方根是 0.
4. 无限不循环小数是无理数，无理数和有理数统称实数.
5. 当数的范围从有理数扩充到实数后，有理数的运算性质、运算律在实数范围内仍然适用. 在实数范围内运算时，不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且可以进行开立方运算，任何非负数都可以进行开平方运算.

知识方法专题

知识必学

专题一 平方根与立方根

链接中考>>平方根与立方根的求法是本章的关键也是核心，本知识点也是中考中的必考内容，考查形式大多数都是填空题、选择题，都属于送分题.

例 1 [中考 · 随州] 4 的算术平方根是_____，9 的平方根是_____，-27 的立方根是_____.

导引： 根据算术平方根、平方根和立方根的定义求出即可. 4 的算术平方根是 $\sqrt{4}=2$，9 的平方根是 $\pm\sqrt{9}=\pm3$，-27 的立方根是 $\sqrt[3]{-27}=-3$.

答案： 2；±3；-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨： 正数 a 的平方根有两个，记为 $\pm\sqrt{a}$，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根. 正数 a 的正的平方根叫做算术平方根，记为 $\sqrt{a}$. 实数 a 的立方根只有一个，记为 $\sqrt[3]{a}$，正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，0 的立方根是 0.

专题二 无理数的辨别

链接中考>> 开方开不尽的数是无理数中的主流，对无理数的识别是对无理数这一知识点最常见的考查方式，一般都是以选择题形式出现.

例 2 下列 4 个数，$\sqrt{9}$，$\frac{22}{7}$，π，$(\sqrt{3})^2$，其中无理数是(　　)

A. $\sqrt{9}$　　B. $\frac{22}{7}$　　C. π　　D. $(\sqrt{3})^2$

导引： 根据无理数的概念逐个进行识别.

$\sqrt{9}=3$ 是整数，$\frac{22}{7}$ 是分数，$(\sqrt{3})^2=3$ 是整数，π 是无理数，故选 C.

答案： C

方法点拨： 无理数是无限不循环小数，在初中阶段常见的无理数包括三种情况：① 含有根号且开方开不尽的数；② 含有 π 的式子；③ 特殊结构的数，如 1.010 010 001…（小数点后面每两个 1 之间依次多一个 0）.

注意：$\frac{22}{7}=3.142\,857$ 是无限循环小数，有的学生会把它误判为无理数.

专题三 非负数的性质

链接中考>> 本章学习了初中阶段的第三类非负数——算术平方根，前面已经学习了两类非负数，一类是绝对值，另一类是偶次幂. 利用非负数的性质可以求含有多个字母的等式中各个字母的值. 考查可以独立考查，也可以作为其他解答题的条件进行解答.

例 3 若 $\sqrt{a+2}+|2a-b+1|=0$，则 $(b-a)^{2\,020}=$(　　)

A. -1　　B. 1　　C. $5^{2\,020}$　　D. $-5^{2\,020}$

导引： 一个数的绝对值为非负数，一个非负数的算术平方根也是非负数，如果几个非负数的和等于 0，那么它们分别等于 0.

由题意得 $a+2=0$ 且 $2a-b+1=0$，

解得 $a=-2$，$b=-3$.

所以 $(b-a)^{2\,020}=1$，

故选 B.

答案： B

规律点拨： 初中阶段已学习了三类非负数，① $|a|\geq 0$；② $a^2\geq 0$；③ $\sqrt{a}\geq 0$，如果出现几个非负数的和为 0，则说明这几个非负数的值都等于 0.

专题四 实数的大小比较

链接中考>> 实数的大小比较方法与有理数的大小比较方法相类似，在中考中也是热门考点，属送分题，考查形式都是选择题.

例 4 ［中考·济宁］下列四个实数中，最小的是(　　)

A. $-\sqrt{2}$　　B. -5

C. 1　　D. 4

导引： 首先四个数中有正数、负数，由于要求最小的数，依据“正数大于负数”，所以只需比较两个负数的大小.

因为 $-5<-\sqrt{2}$，所以最小的数是 -5.

答案： B

方法点拨： (1) 实数大小比较的一般方法：① 正数都大于 0，负数都小于 0，正数大于一切负数；② 两个负数绝对值大的反而小；③ 在数轴上表示的数，右边的总比左边的大.

(2) 比较无理数的大小时，可先利用平方法估计其在哪两个有理数之间，然后再进行比较.

Ⅱ 思想方法专题

专题五 特殊值法

专题解读>> 特殊值法，就是在限定的范围内，取某个特殊的数值来解决问题. 运用特殊值法的关键有两条：一是取的特殊值要在限定的范围之内；二是特殊值法只适宜于选择题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例5 ［中考·广元］当 $0<x<1$ 时，x，$\frac{1}{x}$，x^2 的大小顺序是(　　)

A. $\frac{1}{x}<x<x^2$　　B. $x<x^2<\frac{1}{x}$

C. $x^2<x<\frac{1}{x}$　　D. $\frac{1}{x}<x^2<x$

导引： 采取特殊值法，取 $x=\frac{1}{2}$，求出 x^2 和 $\frac{1}{x}$ 的值，再比较即可. 令 $x=\frac{1}{2}$，则 $x^2=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{x}=2$，所以 $x^2<x<\frac{1}{x}$，故选 C.

答案： C

方法点拨： 实数大小比较的方法：(1)数轴比较法：将 a,b 分别表示在数轴上，右边的数总比左边的数大；(2)差值比较法：$a-b>0$ 等价于 $a>b$；$a-b=0$ 等价于 $a=b$；$a-b<0$ 等价于 $a<b$.(3)商值比较法：设 $a,b>0$，则 $\frac{a}{b}=1$ 等价于 $a=b$；$\frac{a}{b}>1$ 等价于 $a>b$；$\frac{a}{b}<1$ 等价于 $a<b$.除此之外，还有平方法、倒数法、绝对值法等，在选择题的问题上，还可以采取特殊值法.

专题六 数形结合思想

专题解读>> 本章数形结合的载体是数轴，依靠数轴反映出数与点的对应关系，运用数形结合的思想方法思考问题，能给抽象的数量关系以形象的几何直观，也能把几何图形问题转化为数量关系问题去解决. 通过数形结合的数学思想方法来学习相反数，绝对值的定义，实数的大小比较等，可以大大减小学习这些知识的难度.

例6 已知实数 m,n 在数轴上的对应点的位置如图 6-1 所示，则下列判断正确的是(　　)

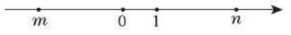


图 6-1

A. $\frac{1}{m}>0$　　B. $|-n|<0$

C. $mn<0$　　D. $m-n>0$

导引： 从数轴知 $m<0,n>0,n>m$，所以 $\frac{1}{m}<0,|-n|>0,mn<0,m-n<0$.

所以 A,B,D 均错误，C 正确.

故选 C.

答案： C

方法点拨： 本题运用了数形结合思想，根据实数 m,n 在数轴上的对应点的位置得出 m,n 的符号是解题关键.

好题必解 答案见 188 页

一、选择题

1. ［期末·芜湖无为县］$\sqrt{16}$ 的值是(　　)

A. ±4　　B. 4　　C. -4　　D. ±2

2. ［期末·淮南］在实数 $\sqrt{8}$，0.101 001 000 1，$\sqrt[3]{2}$，$\frac{\pi}{2}$ 中，无理数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 下列实数：π，$-\sqrt{3}$，0，$\sqrt[3]{-1}$，其中最小的数是(　　)

A. $-\sqrt{3}$　　B. 0

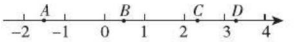
C. $\sqrt[3]{-1}$　　D. π

4. 若 $a^2=9$，$\sqrt[3]{b}=-2$，则 $a+b=$(　　)

A. -5　　B. -11

C. -5 或 -11　　D. ±5 或 ±11

5. ［中考·宜昌］如图，A,B,C,D 是数轴上的四个点，其中最适合表示无理数 π 的点是(　　)



(第 5 题图)

A. 点 A　　B. 点 B

C. 点 C　　D. 点 D

6. ［中考·泰安］如图，四个实数 m,n,p,q 在数轴上对应的点分别为 M,N,P,Q，若 $n+q=0$，则 m,n,p,q 四个实数中，绝对值最大的一个是(　　)



(第 6 题图)

A. p　　B. q　　C. m　　D. n

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

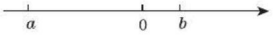
二、填空题

7. 在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 的点与原点的距离是_____，在数轴上与原点距离是 $\sqrt{7}$ 的点表示的实数是_____.

8. [中考·宁波] 请写出一个小于 4 的无理数：_____.

9. [中考·宁波] 实数 -8 的立方根是_____.

10. [中考·毕节] 实数 a,b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则 $\sqrt{a^2}-|a-b|=$_____.



（第 10 题图）

11. 满足 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$ 的整数 x 是_____.

三、解答题

12. 计算：

(1) $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{0.5^2}-\sqrt[3]{8}$；

(2) $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|2-\sqrt{3}|$.

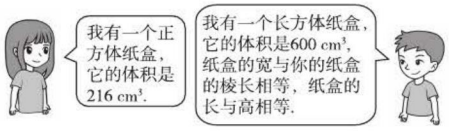
13. 求下列各式中的 x：

(1) $25(x-1)^2=49$；

(2) $64(x-2)^3-1=0$.

14. 实数 a,b 互为相反数，c,d 互为倒数，x 的绝对值为 $\sqrt{6}$. 求 $x^2+(a+b+cd)x+\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{cd}$ 的值.

15. [期中·淮南] 请根据如图所示的对话内容回答下列问题.



（第 15 题图）

(1) 求正方体纸盒的棱长；

(2) 求长方体纸盒的表面积.

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7章

一元一次不等式与不等式组

探究倾斜天平的奥秘

数学点拨

你将学到的核心考点

- 不等式的基本性质 □
- 解一元一次不等式 □
- 解一元一次不等式组 □
- 不等式及不等式组的应用 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

我们为你提供的核心方法

- 作差法 □
- 口诀法 □
- 数形结合思想 □
- 数轴法 □
- 代入法 □
- 转化思想 □

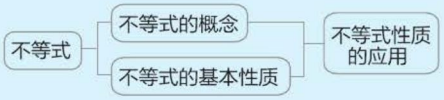
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.1 不等式及其基本性质

核心知识

- 不等式的概念
- 不等式的基本性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 不等式

1 **定义：** 用不等号（>、≥、<、≤或≠）表示不等关系的式子叫做不等式.

要点精析///

(1) 不等式是表示不等关系的式子，与方程表示的相等关系相对应；

(2) 判断一个式子是否为不等式，关键是看所给式子是否含不等号；

(3) 对于含有未知数的不等式，当未知数取某些值时，不等式的左右两边符合不等号所表示的大小关系，我们就说不等式成立，否则不等式不成立.

2 **基本的表达形式：**

(1) 常见的不等号：

符号	名称	实际意义	读法	举例
<	小于号	小于、不足	小于	$3+2<6$
>	大于号	大于、高出	大于	$3+3>5$
≤	小于或等于号	不大于、不超过、至多	小于或等于	$x\leqslant 8$
≥	大于或等于号	不小于、不低于、至少	大于或等于	$x\geqslant 5$
≠	不等于号	不相等	不等于	$4\neq 5$

(2) 常见的不等式基本语言与符号表示：

① a 是正数表示为 $a>0$，a 是负数表示为 $a<0$；

② a 是非负数表示为 $a\geqslant 0$，a 是非正数表示为 $a\leqslant 0$；

③ a，b 同号表示为 $ab>0$，a，b 异号表示为 $ab<0$.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用不等式的定义识别不等式

例1 下列式子是不等式的有(　　)

①$2x=20$；②$3>2$；③$x\neq 4-3$；④$5a+6b$；

⑤$\frac{1}{3}x>2y$；⑥$1\leqslant 3x+5y$；⑦$\frac{ab}{3}\cdot\frac{mn}{2}$；⑧$\frac{5}{x}>3$.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

导引： 判断一个式子是否为不等式的关键在于式子中是否含有“≠”“>”“<”“≥”“≤”，由此可知②③⑤⑥⑧是不等式.

答案： D

方法点拨

判断不等式的方法：一是是否含有不等号；二是是否表示不等关系，而与不等式是否成立无关.

同类变式 （答案见188页）

1. 下列式子：

①$-3<0$；②$4x+3y>0$；③$x=5$；④x^2-xy；⑤$x+2>y-7$.

其中不等式有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用不等关系列不等式

例2 列不等式：

(1) a 与 1 的和是正数：_____；

(2) a 与 3 的和小于 -3：_____；

(3) a 与 -2 的差大于 5：_____；

(4) a 的 5 倍小于 10：_____；

(5) a 的三分之一大于 -7：_____.

导引： 根据题中语言叙述体现的数量关系列出式子，然后结合体现不等关系的关键字眼列出不等式.

答案： (1) $a+1>0$ (2) $a+3<-3$

(3) $a-(-2)>5$ (4) $5a<10$

(5) $\frac{1}{3}a>-7$

方法点拨

列不等式首先写出表示数量关系的式子，然后根据表示不等关系的关键词列出不等式.

点知识 2 不等式的基本性质

1 **性质1：** 不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，不等号的方向不变. 即如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$，$a-c>b-c$.

2 **性质2：** 不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数，不等号的方向不变. 即如果 $a>b, c>0$，那么 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

3 **性质3：** 不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数，不等号的方向改变. 即如果 $a>b, c<0$，那么 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

不等式的基本性质

4 **性质4：** 如果 $a>b$，那么 $b<a$.

5 **性质5：** 如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$.

要点精析///

(1) 运用不等式的基本性质时，不等号两边是同时变形，同样变形.

(2) 运用不等式的基本性质可将不等式化为简单形式.

(3) 运用不等式的基本性质对不等式进行变形时，要特别注意性质2与性质3的区别，在乘以(或除以)同一个数时，先要分清这个数是正数还是负数，其次判断不等号方向是否要改变.

(4) 不等式的基本性质与等式的基本性质的关系：

联系： 不等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，乘以(或除以)同一个正数，不等号的方向不变；而等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，乘以(或除以)同一个正数，结果仍相等.

区别： 对于等式来说，两边乘以(或除以)同一个负数，结果仍相等；而对于不等式来说，两边乘以(或除以)同一个负数时，不等号的方向要改变.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用不等式的基本性质识别变形

例3 若 $a<b<0$，则下列式子：

①$a+1<b+2$；②$\frac{a}{b}>1$；③$a+b<ab$；④$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

其中正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

技巧点拨

(1) 由一个不等式变形到另一个不等式的方法：先判断出第二个不等式是由第一个不等式经过怎样的变形得到的，再确定出

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 因为 $a<b$，所以 $a+1<b+1$，而 $b+1<b+2$，所以 $a+1<b+2$，故①正确；因为 $a<b<0$，即 $a<b$，$b<0$，所以 $\frac{a}{b}>1$，故②正确；因为 $a<b<0$，所以 $a+b<0$，$ab>0$，所以 $a+b<ab$，故③正确；$a<b<0$，即 $a<b$，$ab>0$，$a<b$ 两边同时除以 ab，得 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，故④错误.

答案： C

同类变式 （答案见 188 页）

3. ［期中·合肥］若 $m>n$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\frac{n}{m}<1$　　B. $\frac{n}{m}>1$

C. $-m>-n$　　D. $m-n>0$

考查角度2　利用不等式的基本性质确定字母常数的范围

例4　若 $x>y$，且 $(a-3)x<(a-3)y$，则 a 的值可能是（　　）

A. 0　　B. 3　　C. 4　　D. 5

导引： 根据不等式的基本性质可得 a 的取值范围. 由不等号的方向改变，得 $a-3<0$，从而得 $a<3$. 观察选项，只有 A 符合题意. 故选 A.

答案： A

考查角度3　利用不等式的基本性质解简单不等式

例5　利用不等式的基本性质解下列不等式：

(1) $-\frac{4}{5}x>-1$；

(2) $2x+5<4x-2$.

导引： 解不等式，就是借助不等式的基本性质使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$（a 为常数）的形式.

解： (1) 根据性质 3，在不等式两边都乘以 $-\frac{5}{4}$，不等号方向改变，得 $-\frac{4}{5}x\times\left(-\frac{5}{4}\right)<-1\times\left(-\frac{5}{4}\right)$，

即 $x<\frac{5}{4}$.

(2) 根据性质 1，在不等式两边都加上 $-4x$，不等号方向不变，得 $2x+5-4x<4x-2-4x$，即 $5-2x<-2$.

根据性质 1，在不等式两边都加上 -5，不等号方向不变，得 $5-2x-5<-2-5$，即 $-2x<-7$.

根据性质 3，在不等式两边都除以 -2，不等号方向改变，得 $\frac{-2x}{-2}>\frac{-7}{-2}$，即 $x>\frac{7}{2}$.

每一步变形的依据，最后确定不等号是否改变方向.

(2) 对于判断从一个不等式变形到另一个不等式正确与否，我们可以采用数值验证法来解：取符合第一个不等式条件的数值，代入另一个不等式进行验证，看它正确与否；如本例可以取 $a=-4$，$b=-3$ 对每个式子分别进行验证.

方法点拨

判断不等式两边乘以（或除以）的同一个数的符号时，只需看不等号的方向是否改变，若不变，则这个数为正数；若改变，则这个数为负数.

同类变式 （答案见 188 页）

5. 利用不等式的基本性质解下列不等式：

(1) $3x-9>0$；

(2) $-\frac{3}{2}x+2>6$；

(3) $x-1\leqslant 10$；

(4) $2x-1>\frac{1}{2}x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4 利用不等式的基本性质解题易出错类型

类型一　应用性质3时，不改变不等号的方向

例6　已知 $m<6$，解关于 x 的不等式 $(m-6)x<m-6$.

导引： 因为 $m<6$，所以 $m-6<0$，即 $m-6$ 为负数.

解： 因为 $m<6$，所以 $m-6<0$，即 $m-6$ 为负数. 将 $(m-6)x<m-6$ 的两边同时除以 $(m-6)$，得 $x>1$.

同类变式 （答案见188页）

6. ［中考·桂林］如果 $a>b$，$c<0$，那么下列不等式成立的是（　　）

A. $a+c>b$　　B. $a+c>b-c$

C. $ac-1>bc-1$　　D. $a(c-1)<b(c-1)$

易错警示

不等式两边除以同一个负数时，不等号的方向必须改变，否则会造成错误；当除以的一个数是字母常数时，要注意先判断这个字母常数的正负性，再确定是利用性质2还是性质3进行解答.

类型二　应用性质2时，忽略式子的值为0的情况

例7　若 $a>b$，c 为实数，则 ac^2 _____ bc^2.

导引： 因为 c 为实数，所以 $c^2\geqslant 0$. 当 $c^2=0$ 时，在 $a>b$ 两边同乘以 c^2 时，有 $ac^2=bc^2$；当 $c^2>0$ 时，在 $a>b$ 两边同乘以 c^2 时，有 $ac^2>bc^2$. 综上所述，得 $ac^2\geqslant bc^2$.

答案： $\geqslant$

同类变式 （答案见188页）

7. 下列不等式变形中，错误的是（　　）

A. 若 $a\leqslant b$，则 $a+c\leqslant b+c$

B. 若 $a+c\leqslant b+c$，则 $a\leqslant b$

C. 若 $a\leqslant b$，则 $ac^2\leqslant bc^2$

D. 若 $ac^2\leqslant bc^2$，则 $a\leqslant b$

易错警示

c^2 的值应该大于或等于0，如果忽略了等于0这一特殊情况，会导致不等式变形错误，即当乘以的一个数是字母常数时，在判别它的正负性时，还要考虑它是否为0的情况.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用不等式的基本性质比较大小

类型一　作差比较大小

例8　学习有理数减法内容时，曾做过下面的题目（用“<”“=”或“>”填空）：

如果 $a-b<0$，那么 a _____ b；

如果 $a-b=0$，那么 a _____ b；

如果 $a-b>0$，那么 a _____ b.

从中你可以得到比较 a 与 b 两个数大小的方法吗？用这个方法试比较下面每题中两个数的大小：

(1) $\dfrac{\sqrt{7}-2}{5}$ 与 $\dfrac{2}{5}$；(2) $\dfrac{8}{11}$ 与 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

导引： 作差法是比较两数大小的一种常用方法，差为正数时，被减数大；差为负数时，减数大；差为0时，被减数等于减数.

解： <；=；>

我们可以通过求出两数之差来判断两数的大小关系.

(1) 因为 $\dfrac{\sqrt{7}-2}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{\sqrt{7}-4}{5}<0$，

所以 $\dfrac{\sqrt{7}-2}{5}<\dfrac{2}{5}$.

(2) 因为 $\dfrac{8}{11}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{16}{22}-\dfrac{11\sqrt{3}-11}{22}=$

$\dfrac{27-11\sqrt{3}}{22}>0$，所以 $\dfrac{8}{11}>\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

方法点拨： 要比较 a，b 两个数的大小，我们可以先求出这两个数之差，即利用作差法比较大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型二　读图比较大小

例9　[中考·绵阳]设“▲”“●”“■”分别表示三种不同的物体，现用天平称两次，情况如图7.1-1所示，那么▲，●，■这三种物体按质量从大到小排列应为(　　)



图7.1-1

A. ■，●，▲　　B. ▲，■，●

C. ■，▲，●　　D. ●，▲，■

导引： 这是一道看图识图题，设▲，●，■的质量分别为 a,b,c，由第一个天平可得 $a+c>2a$，由性质1，两边同时减去 a，得 $c>a$.

由第二个天平可得 $a+b=3b$，则 $a=2b$.

所以 $a>b$. 因此 $c>a>b$.

答案： C

方法点拨： 运用数形结合思想，根据天平平衡原理及不等式的基本性质求解.

拔尖角度2　利用不等式解决方案选择问题

例10　制作某种产品有两种用料方案，方案1是用4张 A 型钢板，8张 B 型钢板；方案2是用3张 A 型钢板，9张 B 型钢板，已知 A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大. 从省料的角度考虑，应选择哪种方案？

导引： 分别表示出两种方案的用料面积，然后利用作差法比较大小.

解： 设 A 型钢板和 B 型钢板的面积分别为 x 和 y，于是两种方案用料面积分别为 $4x+8y$ 和 $3x+9y$，则 $4x+8y-(3x+9y)=x-y$. 因为 A 型钢板的面积比 B 型钢板的面积大，即 $x>y$，所以 $x-y>0$.

所以 $4x+8y>3x+9y$.

从省料的角度考虑，应选择方案2.

方法点拨： 设 a,b 为任意两个实数，先求出 a 与 b 的差，再根据“当 $a-b<0$ 时，$a<b$；当 $a-b=0$ 时，$a=b$；当 $a-b>0$ 时，$a>b$”来比较 a 与 b 的大小.

数学素养提升

实数的大小比较

两个数量的大小可以通过它们的差来判断，如果两个实数 a 和 b 比较大小，那么

若 $a>b$，则 $a-b>0$；

若 $a=b$，则 $a-b=0$；

若 $a<b$，则 $a-b<0$.

同样，反过来也是成立的，即：

若 $a-b>0$，则 $a>b$；

若 $a-b=0$，则 $a=b$；

若 $a-b<0$，则 $a<b$.

因此，我们经常把两个要比较的对象先求出它们的差，根据差的正负性判断对象的大小. 两个实数的大小比较除上面的求差法比较外，还有下列几种方法供大家参考：

1. 求商法：设 a,b 为任意两个正实数，先求出 a 与 b 的商，再根据“当 $\frac{a}{b}<1$ 时，$a<b$；当 $\frac{a}{b}=1$ 时，$a=b$；当 $\frac{a}{b}>1$ 时，$a>b$.”来比较 a 与 b 的大小.
2. 倒数法：设 a,b 为任意两个正实数，先分别求出 a 与 b 的倒数，再根据“当 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 时，$a>b$；当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ 时，$a=b$；当 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 时，$a<b$.”来比较 a 与 b 的大小.
3. 估算法：设 a,b 为任意两个正实数，先估算出 a,b 两数或两数中某部分的取值范围，再进行比较.
4. 平方法：比较含有根号的式子的大小时，先将要比较的两个数分别平方，再根据“在 $a>0,b>0$ 时，可由 $a^2>b^2$ 得到 $a>b$”比较大小. 也就是说，两个正数比较大小时，如果一个数的平方比另一个数的平方大，则这个数大于另一个数.

两个实数的大小比较，形式多种多样，只要我们在实际操作时，有选择性地灵活运用上述方法，一定能方便快捷地取得令人满意的结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见188页）

基础巩固练

1. ［期中·运城盐湖区］如果 $x>y$，下列各式中正确的是(　　)

A. $-2\,019x>-2\,019y$

B. $2\,019x<2\,019y$

C. $2\,019-x>2\,019-y$

D. $x-2\,019>y-2\,019$

2. 根据不等式的基本性质，用“<”或“>”填空.

(1)若 $a-1>b-1$，则 a _____ b；

(2)若 $a+3>b+3$，则 a _____ b；

(3)若 $2a>2b$，则 a _____ b；

(4)若 $-2a>-2b$，则 a _____ b.

3. 若 $a>b$，$m<0$，$n>0$，用“>”或“<”填空.

(1)$a+m$ _____ $b+m$；

(2)$a+n$ _____ $b+n$；

(3)$m-a$ _____ $m-b$；

(4)an _____ bn；

(5)$\frac{a}{m}$ _____ $\frac{b}{m}$；

(6)$\frac{a}{n}$ _____ $\frac{b}{n}$.

4. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化为“$x>a$”或“$x<a$”的形式：

(1)$x-3>1$；　　(2)$-\frac{2}{3}x>-1$；

(3)$3x<1+2x$；　　(4)$2x>4$.

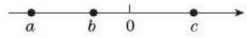
能力提升练

5. 已知 $a>b$，若 c 是任意实数，则下列不等式中总是成立的是(　　)

A. $a+c<b+c$　　B. $a-c>b-c$

C. $ac<bc$　　D. $ac>bc$

6. ［中考·枣庄］实数 a，b，c 在数轴上对应的点如图所示，下列式子中，正确的是(　　)



(第6题图)

A. $ac>bc$　　B. $|a-b|=a-b$

C. $-a<-b<-c$　　D. $-a-c>-b-c$

7. ［模拟·马鞍山］当 $x>-1$ 时，使关于 x 的不等式 $(1-m)x<m-1$ 成立，那么 m 的取值范围为(　　)

A. $m>1$　　B. $m<1$

C. $m<-1$　　D. $m>-1$

8. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}3x+y=1+a,① \\ x+3y=3　②\end{cases}$ 的解能够使不等式 $x+y<2$ 成立，求 a 的取值范围.

思维拓展练

9. ［一题多解］若 $m<n<0$，试比较 1，$1-m$，$1-n$ 的大小.

10. ［中考·南京］如图，在数轴上，点 A，B 分别表示数 1，$-2x+3$.

(1)求 x 的取值范围；

(2)数轴上表示数 $-x+2$ 的点应落在 _____.

A. 点 A 的左边　　B. 线段 AB 上

C. 点 B 的右边



(第10题图)

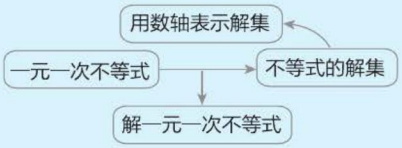
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 一元一次不等式

核心知识

- 一元一次不等式
- 不等式的解及解集
- 解不等式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元一次不等式

1 **定义：** 含有一个未知数，未知数的次数是1、且不等号两边都是整式的不等式叫做一元一次不等式.

判别条件：

(1)都是整式；(2)只含一个未知数；(3)未知数的次数是1；(4)未知数的系数不为0.

2 **一元一次不等式与一元一次方程间的关系：**

相同点：两者都只含一个未知数，未知数的次数都是1，左、右两边都是整式；

不同点：一元一次方程表示的是相等关系，而一元一次不等式表示的是不等关系.

3 **易错警示：** 判断一个不等式是否为一元一次不等式，必须化简整理后再判断，如果化简后不等号的两边都是整式且只含一个未知数，未知数的次数为1且系数不为0，那么此不等式为一元一次不等式.

拨考向

提分·秘诀

考查角度 利用一元一次不等式的定义识别一元一次不等式

例1 下列不等式中，是一元一次不等式的有(　　)

①$x^2+1>2x$；②$\frac{1}{x}+2>0$；③$x>y$；④$\frac{1-x}{2}\leqslant 1$.

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

导引： ①中未知数的最高次数是2，故不是一元一次不等式；

②中左边不是整式，故不是一元一次不等式；

③中有两个未知数，故不是一元一次不等式；

④是一元一次不等式.

答案： A

方法点拨

判断一个不等式是否为一元一次不等式的步骤：先对所给不等式进行化简整理，再看是否满足：(1)不等式的左右两边都是整式；(2)不等式中只含有一个未知数；(3)未知数的次数是1且系数不为0，当这三个条件同时满足时，才能判断该不等式是一元一次不等式.

同类变式 (答案见189页)

1. 下列不等式中，是一元一次不等式的有(　　)

①$\frac{2}{x}<3$；②$x^2+y^2>0$；

③$4a\neq 3b$；④$\frac{3}{2}x<\frac{2}{3}$；

⑤$x^2+2x+1\geqslant 0$；⑥$\frac{1}{2}x-4<x$.

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 不等式的解(集)与解不等式

1 **不等式的解：** 一般地，能够使不等式成立的未知数的值，叫做这个不等式的解.

要点精析///

判断一个数是否为不等式的解，就是将这个数代替不等式中的未知数，看不等式是否成立，若成立，则该数就是不等式的一个解，若不成立，则该数就不是不等式的解.

2 **不等式的解集：** (1)**定义**：一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解的全体称为这个不等式的解集.

(2)**不等式的解集必须符合两个条件**：

①解集中的每一个数值都能使不等式成立；

②能够使不等式成立的所有数值都在解集中.

(3)不等式的解与不等式解集的关系：解集包括解，所有的解组成解集.

3 **解不等式：** 求不等式解集的过程叫做解不等式.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用不等式的解的定义找解

例2 下列各数中，哪些是不等式 $2(2x+1)>25$ 的解？

1;2;10;12.

导引： 判断一个数是不是不等式的解，一般的方法是将该数代入不等式，验证不等式是否成立.

解： 把 $x=1$ 代入不等式 $2(2x+1)>25$，得

$2\times(2\times1+1)>25$，即 $6>25$，

所以 1 不是不等式 $2(2x+1)>25$ 的解.

同理，分别把 $x=2$，$x=10$，$x=12$ 代入不等式 $2(2x+1)>25$，可知 $x=2$ 不能使不等式成立，$x=10$ 和 $x=12$ 能使不等式成立. 所以 10 和 12 是不等式 $2(2x+1)>25$ 的解.

方法点拨

解决此类问题通常采用代入法进行验证，将未知数的值代入不等式，若不等式成立，则该值是不等式的解；若不等式不成立，则该值不是不等式的解.

同类变式 (答案见 189 页)

2. [中考·桂林] 下列数值中不是不等式 $5x\geqslant2x+9$ 的解的是(　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

考查角度2 利用不等式的解与不等式的解集的区别进行辨析

例3 下列说法中，正确的是(　　)

A. $x=-3$ 是不等式 $x+4<1$ 的解

B. $x>\frac{3}{2}$ 是不等式 $-2x>-3$ 的解集

C. 不等式 $x>-5$ 的负整数解有无数多个

D. 不等式 $x<7$ 的非正整数解有无数多个

导引： 当 $x=-3$ 时，$x+4=-3+4=1$，所以 A 错；取一个能使不等式 $x>\frac{3}{2}$ 成立的值，如 $x=2$，代入不等式 $-2x>-3$，发现不等式 $-2x>-3$ 不成立，故 $x=2$ 不是 $-2x>-3$ 的解，所以 $x>\frac{3}{2}$ 不是不等式 $-2x>-3$ 的解集，故 B 错；不等式 $x>-5$ 的负整数解只有 -1，-2，-3，-4，共 4 个，所以 C 错.

答案： D

方法点拨

判断一个数值是不是不等式的解，只需代入验证即可. 由于不等式的解集必须符合两个条件：(1)解集中的每一个数值都能使不等式成立；(2)能够使不等式成立的所有数值都在解集中，因此如果解集内有一个数能够使不等式不成立或解集外有一个数能够使不等式成立，那么这个解集就不是这个不等式的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 不等式的解集的表示方法

1 **用最简单的不等式表示：**一般地，一个含有未知数的不等式有无数个解，其解集是一个范围，这个范围可用最简单的不等式来表示. 如：不等式 $x-2<6$ 的解集为 $x<8$.

2 **用数轴表示：**可以在数轴上标出某一区间直观地表示不等式的解集，其中的点表示的数值都是不等式的解.

注意：(1)在图 7. 2-1 中，在表示 a 的点上画空心点，表示不包括这一点，若包括这一点，应在表示 a 的点上画实心点.

(2)在数轴上表示不等式的解集时，要先确定边界点，再确定方向. 确定方向的原则是“大于向右画，小于向左画”，如图 7. 2-1.

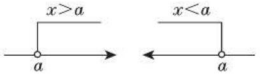


图 7. 2-1

拔考向

提分·秘诀

考查角度 用数轴表示不等式的解集

例 4 在数轴上表示下列不等式的解集：

(1) $x>-1$；

(2) $x<1$.

导引：(1) $x>-1$ 可以用数轴上表示 -1 的点的右边部分来表示. (2) $x<1$ 可以用数轴上表示 1 的点的左边部分来表示.

解：(1)如图 7. 2-2.

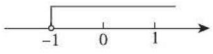


图 7. 2-2

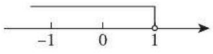


图 7. 2-3

(2)如图 7. 2-3.

方法点拨

因为 -1，1 都取不到，故用空心点表示.



点知识 4 一元一次不等式的解法

1 **解一元一次不等式的步骤：**

(1)去分母；(2)去括号；(3)移项；(4)合并同类项；(5)系数化为 1.

2 **解一元一次不等式与解一元一次方程的区别与联系：**解一元一次不等式的步骤与解一元一次方程的步骤非常相似. 不同之处主要表现在：在整个过程中，解一元一次方程用的是等式的基本性质；而解一元一次不等式用的是不等式的基本性质，即解一元一次不等式时，要特别注意负号和不等号的方向问题.

3 **易错警示：**在去分母和系数化为 1 时，如果不等式两边都乘以(或除以)同一个负数，不等号要改变方向.

拔考向

提分·秘诀

考查角度 1 利用一元一次不等式的解法步骤解一元一次不等式

例 5 解不等式：$x-\frac{3x-8}{2}+1\geqslant\frac{2(10-x)}{7}$，并把解集在数轴上表示出来.

导引：解一元一次不等式的一般步骤：去分母⟶去括号⟶移项⟶合并同类项⟶系数化为 1；

去分母时要注意每一项都要乘以最简公分母，不要漏乘不含分母的项.

用数轴表示解集时，边界点为实心点.

方法点拨

解一元一次不等式时，有两步可能会改变不等号的方向：其一，去分母；其二，系数化为 1. 为了使问题更加简便，可以在“去分母”这一步里，两边同乘以一个正数，这

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：去分母，得 $14x-7(3x-8)+14\geqslant 4(10-x)$.

去括号，得 $14x-21x+56+14\geqslant 40-4x$.

移项，得 $14x-21x+4x\geqslant 40-56-14$.

合并同类项，得 $-3x\geqslant -30$.

系数化为 1，得 $x\leqslant 10$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图7.2-4所示.



图 7.2-4

样，使“改变不等号方向”的问题落到“系数化为1”这一步，由于要注意的只有这步，这样就不容易出错了.

同类变式 （答案见189页）

5. 解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：

(1) $\frac{x-2}{5}-\frac{x+4}{2}>-3$；

(2) $\frac{2x+1}{3}+1\leqslant\frac{3(x-1)}{2}$.

考查角度2 利用解不等式求字母的值或取值范围

例6 当 x 取何正整数时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值？

导引：先根据题意列出不等式，再解不等式.

解：根据题意得 $\frac{x-2}{2}\leqslant\frac{7-x}{3}$.

去分母，得 $3x-6\leqslant 14-2x$.

移项、合并同类项，得 $5x\leqslant 20$.

系数化为 1，得 $x\leqslant 4$，

则不等式的正整数解为 1，2，3，4.

所以，当 x 取 1，2，3，4 时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值.

方法点拨

求满足一定不等关系式子成立时的字母的值或取值范围时，其关键是列出正确的不等式.

考查角度3 利用解集确定一元一次不等式的特殊解

例7 [期末·南昌] x 取哪些非负整数时，$\frac{3x-2}{5}$ 的值大于 $\frac{2x+1}{3}$ 与 1 的差.

导引：根据题意列出不等式，求出解集，再利用非负整数的定义分析得出答案.

解：由题意得 $\frac{3x-2}{5}>\frac{2x+1}{3}-1$，解得 $x<4$，

所以 x 取 0，1，2，3.

方法点拨

正确理解关键词语的含义是准确解题的关键，“非负整数”即0和正整数.

点知识 5 一元一次不等式的实际应用

列不等式解应用题的基本步骤：

与列方程解应用题的步骤类似，可概括为：“审、设、找、列、解、答”六步；其不同点是方程是找相等关系，不等式是找不等关系.

要点精析///

(1) 列不等式解应用题的关键是建立不等式的模型；列不等式时要注意不等号是否包含等号.

(2) 检验一个解是不是应用题的解时，必须满足：一是不等式的解；二要符合实际情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 通过建立不等式模型解决实际问题

例8 某种服装的进价为240元，售价为360元，由于换季，商店准备打折销售，但要保证利润率不低于20%，那么至多打(　　)

A. 6折　　B. 7折　　C. 8折　　D. 9折

导引： 售价×折扣－进价＝利润，根据利润率不低于20%，列不等式求解.

设打了x折，由题意得$360\times0.1x-240\geqslant240\times20\%$，

解得$x\geqslant8$. 所以至多打8折.

答案： C

方法点拨

解决此类问题的关键是找出题目中的不等关系，根据需要设出相应的未知数，列出不等式，从而得出结果.

同类变式 (答案见189页)

8. [中考·重庆] 某次知识竞赛共有20道题，答对一题得10分，答错或不答扣5分，小华得分要超过120分，他至少要答对的题的道数为(　　)

A. 13　　B. 14　　C. 15　　D. 16

考查角度2 利用不等式与方程组的模型解决综合应用问题

例9 [中考·资阳] 为了参加西部博览会，资阳市计划印制一批宣传册. 该宣传册每本共10张，由A，B两种彩页构成. 已知A种彩页制版费300元/张，B种彩页制版费200元/张，共计2 400元. (注：彩页制版费与印数无关)

(1) 每本宣传册A，B两种彩页各有多少张？

(2) 据了解，A种彩页印刷费2.5元/张，B种彩页印刷费1.5元/张，这批宣传册的制版费与印刷费的和不超过30 900元. 如果按到资阳展台处的参观者人手一册发放宣传册，预计最多能发给多少位参观者？

导引： (1) 设每本宣传册A，B两种彩页分别有x张、y张，根据题意列出方程组解答即可；(2) 设能发给a位参观者，根据题意列出不等式解答即可.

解： (1) 设每本宣传册A，B两种彩页分别有x张、y张，

由题意得$\begin{cases}x+y=10,\\300x+200y=2\,400,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=4,\\y=6.\end{cases}$

答：每本宣传册A，B两种彩页分别有4张和6张.

(2) 设能发给a位参观者，

由题意得$2.5\times4a+1.5\times6a+2\,400\leqslant30\,900$，

解得$a\leqslant1\,500$，

答：最多能发给1 500位参观者.

方法点拨

运用方程组或不等式解决实际问题时，从实际问题中发现相等关系或不等关系，通过方程组模型或不等式模型解决实际问题. 列不等式解应用题时：首先审题找出题中的未知量和所有的已知量，直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为x，然后用含x的式子表示相关的量，找出其间的不等关系列不等式、求解、作答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用不等式解决方案问题

例10 ［中考·南充］学校准备租用一批汽车，现有甲、乙两种大客车，甲种客车每辆载客量45人，乙种客车每辆载客量30人. 已知1辆甲种客车和3辆乙种客车共需租金1 240元，3辆甲种客车和2辆乙种客车共需租金1 760元.

(1)求1辆甲种客车和1辆乙种客车的租金分别是多少元；

(2)学校计划租用甲、乙两种客车共8辆，送330名师生集体外出活动，最节省的租车费用是多少？

导引： (1)根据等量关系：①1辆甲种客车和3辆乙种客车共需租金1 240元，②3辆甲种客车和2辆乙种客车共需租金1 760元，列出方程组求解；(2)根据题意列出不等式，求出解集，再求出最节省的租车费用.

解： (1)设1辆甲种客车和1辆乙种客车的租金分别是x元、y元，依题意得$\begin{cases}x+3y=1\,240,\\3x+2y=1\,760,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=400,\\y=280.\end{cases}$故1辆甲种客车和1辆乙种客车的租金分别是400元、280元.

(2)设租用甲种客车a辆，

依题意有$45a+30(8-a)\geqslant 330$，解得$a\geqslant 6$，

租用甲种客车6辆，租用乙种客车2辆的租车费用为$400\times 6+280\times 2=2\,960$(元)；

租用甲种客车7辆，租用乙种客车1辆的租车费用为$400\times 7+280=3\,080$(元).

租用甲种客车8辆，租用乙种客车0辆的租车费用为$400\times 8=3\,200$(元).

因为$2\,960<3\,080<3\,200$，

所以最节省的租车费用是2 960元.

▲**同类变式**（答案见189页）

10. ［中考·张家界］某社区购买甲、乙两种树苗进行绿化，已知甲种树苗每棵30元，乙种树苗每棵20元，且乙种树苗棵数比甲种树苗棵数的2倍少40棵，购买两种树苗的总金额为9 000元.

(1)求购买甲、乙两种树苗各多少棵；

(2)为保证绿化效果，社区决定再购买甲、乙两种树苗共10棵，总费用不超过230元，求可能的购买方案.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用一元一次不等式的解集求字母常数

类型一　两不等式同解集问题

例11 若关于x的不等式$2x-3a<-1$的解集与$2x<4$的解集相同，求a的值.

导引： 先把字母a当成常数，求出两个关于x的不等式的解集，再根据两个不等式的解集相同，得出关于a的方程，最后求出a的值.

解： $2x-3a<-1$，移项，得$2x<3a-1$.

系数化为1，得$x<\dfrac{3a-1}{2}$，

解不等式$2x<4$，得$x<2$.

因为两个不等式的解集相同，

所以$\dfrac{3a-1}{2}=2$，解得$a=\dfrac{5}{3}$.

方法点拨： (1)化简整理后，若未知数的系数含字母，则需分类讨论；若未知数的系数不含字母，则不需讨论，直接由两不等式解集间的关系求字母常数的值或范围. (2)若$x>a$与$x>b$解集相同，则$a=b$；若$x>a$的解是$x>b$的解，则$a\geqslant b$，不要误认为$a=b$，这里实质是$x>b$的解集包含$x>a$的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型二　已知不等式特殊解问题

例12　如果不等式 $x-m\leqslant 0$ 的正整数解有三个，那么 m 的取值范围是_____.

导引： 因为 $x-m\leqslant 0$，

所以 $x\leqslant m$.

又因为此不等式有三个正整数解，

所以其正整数解为 1，2，3.

所以 $3\leqslant m<4$.

答案： $3\leqslant m<4$

方法点拨： 已知一个不等式的解集满足特定要求，求字母参数的取值范围的方法：我们可先解出这个含字母参数的不等式的解集，然后根据题意列出一个关于字母参数的不等式，从而可求出字母参数的取值范围.

类型三　不等式解集成立问题

例13　［中考·呼和浩特］若不等式 $\frac{2x+5}{3}-1\leqslant 2-x$ 的解集中 x 的每一个值，都能使关于 x 的不等式 $3(x-1)+5>5x+2(m+x)$ 成立，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m>-\frac{3}{5}$　　B. $m<-\frac{1}{5}$

C. $m<-\frac{3}{5}$　　D. $m>-\frac{1}{5}$

导引： 解不等式 $\frac{2x+5}{3}-1\leqslant 2-x$ 得 $x\leqslant\frac{4}{5}$，解 $3(x-1)+5>5x+2(m+x)$ 得 $x<\frac{1-m}{2}$. 因为不等式 $\frac{2x+5}{3}-1\leqslant 2-x$ 的解集中 x 的每一个值，都能使关于 x 的不等式 $3(x-1)+5>5x+2(m+x)$ 成立，所以 $\frac{1-m}{2}>\frac{4}{5}$，解得 $m<-\frac{3}{5}$.

答案： C

拔尖角度 2　不等式与方程的综合应用

例14　［中考·呼和浩特］(1)解不等式：$5(x-2)+8<6(x-1)+7$；

(2)若(1)中的不等式的最小整数解是关于 x 的方程 $2x-ax=3$ 的解，求 a 的值.

导引： (1)先去括号，再移项、合并同类项，最后把系数化为 1.

(2)将(1)中的不等式的最小整数解直接代入方程，即可求出 a 的值.

解： (1)去括号，得 $5x-10+8<6x-6+7$.

移项，得 $5x-6x<-6+7-8+10$.

合并同类项，得 $-x<3$.

系数化为 1，得 $x>-3$.

(2)由(1)得不等式的最小整数解为 $x=-2$.

将 $x=-2$ 代入 $2x-ax=3$，

得 $2\times(-2)-a\times(-2)=3$，

解得 $a=\frac{7}{2}$.

技巧点拨： 关于不等式与方程的综合应用问题，一般先求出其中一个不含字母参数的解(解集)，再按它们之间的关系，求出字母参数的值或范围.

拔尖角度 3　不等式与方程组的综合应用

例15　已知方程组 $\begin{cases}3x+y=k+1,\\ x+3y=k-1\end{cases}$ 的解满足 $x+y<0$，求 k 的取值范围.

导引： 方法一：由于方程组的解满足 $x+y<0$，故可考虑把 k 看作已知数，求出 x，y 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

方法二：观察这个方程组，可以发现：我们只需把两个方程相加，就可以得到 $x+y$ 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解： 方法一：$\begin{cases}3x+y=k+1,①\\ x+3y=k-1.②\end{cases}$

①×3−②，得 $8x=2k+4$，

所以 $x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}$.

②×3−①，得 $8y=2k-4$，

所以 $y=\frac{k}{4}-\frac{1}{2}$.

因为 $x+y<0$，所以 $\frac{k}{4}+\frac{1}{2}+\frac{k}{4}-\frac{1}{2}<0$.

所以 $k<0$，即 k 的取值范围为 $k<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二：$\begin{cases}3x+y=k+1,① \\ x+3y=k-1.② \end{cases}$

①+②，得 $x+y=\frac{2k}{4}=\frac{k}{2}$.

因为 $x+y<0$，

所以 $\frac{k}{2}<0$.

所以 $k<0$，即 k 的取值范围为 $k<0$.

技巧点拨： 方法二体现的是整体思想，关键是 x 和 y 在两个方程中系数和相等，否则只能利用方法一，方法一是一般解法，方法二是特殊解法.

拔尖角度 4 不等式与绝对值的综合应用

例 16 已知 $2(1-x)<-3x$，化简：$|x+2|-|-4-2x|$.

导引： 先求出不等式的解集，再根据 x 的取值范围确定 $x+2$ 和 $-4-2x$ 的正负，最后去掉绝对值符号.

解： $2(1-x)<-3x$，$2-2x<-3x$，$x<-2$，

所以 $x+2<0$，$-4-2x>0$.

所以 $|x+2|=-(x+2)=-x-2$，

$|-4-2x|=-4-2x$.

所以 $|x+2|-|-4-2x|=-x-2-(-4-2x)=-x-2+4+2x=x+2$.

方法点拨： 去绝对值符号的关键是确定绝对值符号内的式子的正负，再根据绝对值的意义进行化简，而绝对值符号内式子的正负可先通过解不等式确定字母的范围，再判断含这个字母的式子的正负.

拔尖角度 5 不等式与方案设计

例 17 某公司为了扩大经营，决定购进 6 台机器用于生产某种活塞. 现有甲、乙两种机器可供选择，其中每台机器的价格和每台机器日生产活塞的数量如下表：

型号	甲	乙
价格/(万元/台)	7	5
每台日生产量/个	100	60

公司要求本次购买机器所耗资金不能超过 34 万元.

(1) 按该公司要求，有哪几种购买方案？

(2) 若该公司新购买的 6 台机器的日生产量不低于 380 个，那么为了节约资金应选择哪种购买方案？

导引： 在解题时，(1) 中围绕购买机器所耗资金建立不等式，要注意对所有可能情况加以讨论.

解： (1) 设购买甲种机器 $x(0\leqslant x\leqslant 6)$ 台，则购买乙种机器 $(6-x)$ 台.

依题意，得 $7x+5(6-x)\leqslant 34$，

解得 $x\leqslant 2$.

因为 x 取非负整数，所以 $x=0,1,2$.

所以该公司有以下三种购买方案：

方案一：不购买甲种机器，购买乙种机器 6 台；

方案二：购买甲种机器 1 台，购买乙种机器 5 台；

方案三：购买甲种机器 2 台，购买乙种机器 4 台.

(2) 按方案一购买机器，所耗资金为 $6\times 5=30$(万元)，新购买的 6 台机器的日生产量为 $6\times 60=360$(个)；

按方案二购买机器，所耗资金为 $1\times 7+5\times 5=32$(万元)，新购买的 6 台机器的日生产量为 $1\times 100+5\times 60=400$(个)；

按方案三购买机器，所耗资金为 $2\times 7+4\times 5=34$(万元)，新购买的 6 台机器的日生产量为 $2\times 100+4\times 60=440$(个).

因为方案二既能达到日生产量不低于 380 个的要求，又能比方案三节约 2 万元资金，

所以应选择方案二.

方法点拨： 解方案设计问题的方法：先由题意列出不等式，解不等式，得出符合题意的解，然后对不同的情况进行讨论，从而得出其最优方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见189页）

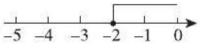
基础巩固练

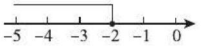
1. 下列各式是一元一次不等式的是(　　)

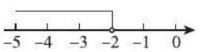
A. $2x<3y$　　B. $x^2+2x+1>0$

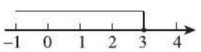
C. $4x-5<x$　　D. $3x=4(2-x)$

2. [期中·合肥瑶海区] 不等式 $3x+7\leqslant 1$ 的解集在数轴上表示正确的是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

3. 不等式 $1-x>2x-8$ 的正整数解有(　　)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 无数多个

4. 若 $1-\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{1+3x}{3}$ 的值，则 x 的取值范围是_____.

5. 小明在解不等式 $\frac{x+4}{3}-\frac{3x-1}{2}\geqslant 1$ 的过程中出现了错误，解答过程如下：

解：去分母，得 $2(x+4)-3(3x-1)\geqslant 1$（第一步）

去括号，得 $2x+8-9x-3\geqslant 1$，（第二步）

移项，得 $2x-9x\geqslant 1+8-3$，（第三步）

合并同类项，得 $-7x\geqslant 6$.（第四步）

两边都除以 -7，得 $x\geqslant -\frac{6}{7}$.（第五步）

(1) 小明的解答过程是从第_____步开始出现错误的.

(2) 请写出此题正确的解答过程.

6. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $2(x-1)-3<1$；

(2) $\frac{2x-1}{3}-\frac{9x+2}{6}\leqslant 1$.

7. [中考·聊城] 某商场的运动服装专柜，对 A，B 两种品牌的运动服分两次采购试销后，效益可观，计划继续采购进行销售. 已知这两种服装过去两次的进货情况如下表：

次数	第一次	第二次
A 品牌运动服装数/件	20	30
B 品牌运动服装数/件	30	40
累计采购款/元	10 200	14 400

(1) 问 A，B 两种品牌运动服的进货单价各是多少元？

(2) 由于 B 品牌运动服的销量明显好于 A 品牌，商家决定采购 B 品牌的件数比 A 品牌件数的 $\frac{3}{2}$ 倍多5件，在采购总价不超过21 300元的情况下，最多能购进多少件 B 品牌运动服？

能力提升练

8. 关于 x 的方程 $3x-2=2a$ 的解为负数，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a>1$　　B. $a<1$

C. $a>-1$　　D. $a<-1$

9. 某种品牌自行车的进价为400元，出售时标价为500元，商店准备打折出售，但要保持利润率不低于5%，则至多可打(　　)

A. 八折　　B. 八四折

C. 八五折　　D. 八八折

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. [中考·潍坊] 已知关于 x,y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-3y=5,\\x-2y=k\end{cases}$ 的解满足 $x>y$，求 k 的取值范围.

11. 已知不等式 $2(x+1)-5<3(x+1)+4$ 的最小整数解是关于 x 的方程 $\frac{1}{3}x-mx=5$ 的解，求代数式 $m^2-2m-11$ 的值.

12. 已知 $|2m-6|+(3m-n-5)^2=0$，且 $(3n-2m)x<-15$，化简 $|2x+5|-|2x-5|+3$.

13. [中考·赤峰] 小明同学三次到某超市购买 A,B 两种商品，其中仅有一次是有折扣的，购买数量及消费金额如下表：

类别 次数	购买 A 商品数量/件	购买 B 商品数量/件	消费金额/元
第一次	4	5	320
第二次	2	6	300
第三次	5	7	258

解答下列问题：【导学号:2231921】

(1)第_____次购买有折扣；

(2)求 A,B 两种商品的原价；

(3)若购买 A,B 两种商品的折扣数相同，求折扣数；

(4)小明同学再次购买 A,B 两种商品共 10 件，在(3)中折扣数的前提下，消费金额不超过 200 元，求至少购买 A 商品多少件.

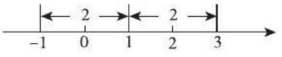
思维拓展练

14. [探究题] 阅读下面的材料并解答问题：

我们知道 $|x|$ 的几何意义是在数轴上数 x 对应的点与原点的距离，即 $|x|=|x-0|$，也就是说，$|x|$ 表示在数轴上数 x 与数 0 对应的点之间的距离.

这个结论可以推广为：$|x_1-x_2|$ 表示在数轴上 x_1,x_2 对应的点之间的距离.

例如，解不等式 $|x-1|>2$. 如图，在数轴上找出 $|x-1|=2$ 的解，即到 1 对应的点的距离为 2 的点所表示的数，为 $-1,3$，则 $|x-1|>2$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>3$.



(第 14 题图)

根据上述材料，解不等式 $|x-3|>4$.

15. 设 $S=|x-a|+|x-15|+|x-a-15|$，其中 $0<a<15$ 时，对于满足 $a\leqslant x\leqslant 15$ 的 x 来说，S 的最小值是什么？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.3 一元一次不等式组

核心知识
- 一元一次不等式组的概念
- 一元一次不等式组的解集
- 一元一次不等式组的解法

知识链接

一元一次不等式组
- 一元一次不等式组的解集
- 一元一次不等式组的解法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元一次不等式组

1 **定义：** 由几个含有同一个未知数的一元一次不等式组成的不等式组，叫做一元一次不等式组.

要点精析///

(1)这里的“几个”是指两个或两个以上；

(2)每个不等式只能是一元一次不等式；

(3)每个不等式必须含有同一个未知数.

2 **易错警示：** 判断一个不等式组是否为一元一次不等式组，常出现以下两种错误：

①不等式组中不都是一元一次不等式；

②不等式组中不是只含有一个未知数.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度 利用一元一次不等式组的定义识别一元一次不等式组

例 1 下列各不等式组，其中是一元一次不等式组的是_____.(填序号)

① $\begin{cases} x+2<3x, \\ y>2; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+1>2x, \\ x<1; \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2(x-1)>3x, \\ x\leqslant -2; \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2x-8\leqslant 7-x, \\ 7-x<5; \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+3<0, \\ x-4>2x-1; \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x+6\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}>2. \end{cases}$

导引： 紧扣一元一次不等式组的定义去识别：①中含有两个未知数；②中未知数的最高次数是2；⑥中的$\frac{1}{x}$不是整式.

答案： ③④⑤

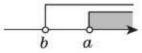
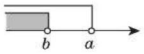
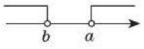
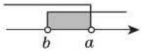
方法点拨

判断一个不等式组是否为一元一次不等式组，要从以下两个方面考虑：(1)组成不等式组的每个不等式必须是一元一次不等式；(2)这个不等式组中只含有一个未知数.

点知识 2 一元一次不等式组的解集

1 **定义：** 一般地，几个一元一次不等式解集的公共部分，叫做这个一元一次不等式组的解集.

2 **一元一次不等式组解集的四种情况：**

不等式组($a>b$)	$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$	$\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$	$\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$	$\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$
不等式组的解集	$x>a$	$x<b$	无解	$b<x<a$
不等式组的解集在数轴上的表示				
巧记口诀	同大取大	同小取小	大大小小无处找	大小小大中间找

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用数轴求一元一次不等式组的解集

例2 利用数轴求下列不等式组的解集.

(1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1. \end{cases}$

导引: 解题时先在同一数轴上表示出不等式组中两个不等式的解集,再找出两个不等式解集的公共部分.

解: (1)两个不等式的解集在数轴上的表示如图 7.3-1 所示,所以这个不等式组的解集为 $x \geqslant 2$.

(2)两个不等式的解集在数轴上的表示如图 7.3-2 所示,所以这个不等式组的解集为 $x < -1$.

(3)两个不等式的解集在数轴上的表示如图 7.3-3 所示,所以这个不等式组无解.

(4)两个不等式的解集在数轴上的表示如图 7.3-4 所示,所以这个不等式组的解集为 $-1 < x \leqslant 2$.

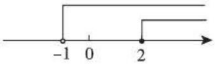


图 7.3-1

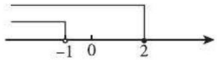


图 7.3-2

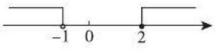


图 7.3-3

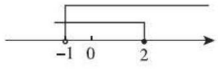


图 7.3-4

考查角度2 逆用不等式组解集的意义求字母的值

例3 若不等式组 $\begin{cases} x > 2m+1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > -1$,则 $m =$ _____.

导引: 由题意将不等式组的解集用 m 表示出来,再根据不等式组 $\begin{cases} x > 2m+1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > -1$,代入求出 m 的值.

分情况讨论:

①当 $2m+1 \geqslant m+2$,即 $m \geqslant 1$ 时,$2m+1 = -1$,

解得 $m = -1$,与 $m \geqslant 1$ 矛盾;

②当 $2m+1 < m+2$,即 $m < 1$ 时,$m+2 = -1$,

解得 $m = -3$(符合条件),所以 m 的值是 -3.

答案: -3

同类变式 (答案见 191 页)

3. 若不等式组 $\begin{cases} x+8 < 4x-1, \\ x > m \end{cases}$ 的解集是 $x > 3$,则 m 的取值范围是_____.

方法点拨

确定一元一次不等式组解集的常用方法:

(1)数轴法:就是将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来,然后找出它们的公共部分,这个公共部分就是此不等式组的解集,如果没有公共部分,那么这个不等式组无解.这种方法体现了数形结合思想,既直观又明了,易于掌握.

(2)口诀法:“同大取大”“同小取小”“大小小大中间找”“大大小小无处找”,该方法便于记忆.

技巧点拨

解答这类题,一般先将字母视为常数,再逆用不等式组解集的意义,由不等式组的解集反推出含字母的方程,最后求出字母的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 解一元一次不等式组

1 **定义：** 求一元一次不等式组解集的过程叫做解不等式组.

2 **解一元一次不等式组的一般步骤：**

(1)分别解每一个不等式；

(2)利用数轴法或口诀法确定不等式组的解集；

(3)写出不等式组的解集.



要点精析///

(1)在数轴上表示不等式组的解集时要注意两点，一是向右画还是向左画；二是用实心点还是空心点.

(2)当一个不等式组含有三个或三个以上的不等式时，也可通过数轴寻找这几个不等式的解集的公共部分.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用解不等式组的步骤解一元一次不等式组

例4 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 5x-2>3(x+1), & ① \\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x; & ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-1>2x+1, & ① \\ -2x<-8; & ② \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4-5x>-3x+8, & ① \\ 3(1-x)>13-5x. & ② \end{cases}$

导引： 根据解不等式组的一般步骤，分别解不等式组中的每一个不等式，把它们的解集在数轴上表示出来，找出解集的公共部分，从而得出不等式组的解集.

解： (1)解不等式①，得 $x>2.5$. 解不等式②，得 $x\leqslant 4$. 在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 7.3-5，这两个不等式解集的公共部分是 $2.5<x\leqslant 4$，所以不等式组的解集是 $2.5<x\leqslant 4$.

(2)解不等式①，得 $x>2$. 解不等式②，得 $x>4$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 7.3-6，

这两个不等式解集的公共部分是 $x>4$，

所以不等式组的解集是 $x>4$.

(3)解不等式①，得 $x<-2$. 解不等式②，得 $x>5$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 7.3-7，

从数轴上可以看出，这两个不等式的解集没有公共部分，所以这个不等式组无解.

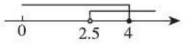


图 7.3-5

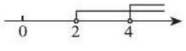


图 7.3-6

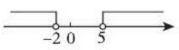
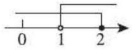


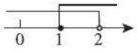
图 7.3-7

同类变式 (答案见 191 页)

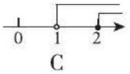
4. [中考·绥化] 不等式组 $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x+8>4x+2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是(　　)



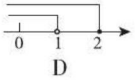
A



B



C



D

方法点拨

解不等式组的关键：一是要正确地求出每个不等式的解集，二是要利用数轴正确地表示出每个不等式的解集，并找出不等式组的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用数轴求不等式组的特殊解

例5 解不等式组$\begin{cases}3x+1<2(x+2),① \\ -\frac{1}{3}x\leqslant\frac{5}{3}x+2,②\end{cases}$并求出该不等式组的整数解.

导引: 先求不等式①和②的解集,再利用数轴法确定不等式组的解集.

解: 解不等式①,得$x<3$,

解不等式②,得$x\geqslant -1$,

不等式①和②的解集在数轴上表示如图7.3-8所示,

所以不等式组的解集为$-1\leqslant x<3$.

所以该不等式组的整数解为$-1,0,1,2$.

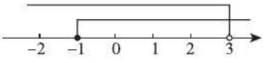


图7.3-8

方法点拨

利用数轴找不等式整数解的方法:(1)解不等式组;(2)将不等式组的解集在数轴上表示出来;(3)观察解集在数轴上的区间范围;(4)确定其整数解.

点知识 4 列一元一次不等式组

1 **基本步骤:** 审⟶设⟶找⟶列⟶解⟶答

(1)审:仔细阅读题干,分清题中的已知量、未知量;

(2)设:用字母表示未知量;

(3)找:找出题目中的不等关系;

(4)列:根据不等关系列出不等式组;

(5)解:求出不等式组的解集;

(6)答:写出符合实际意义的答案.

2 **易错警示:**

(1)设未知数时,要去掉“不少于”“不超过”之类词语,换成确定性的词语;

(2)对答案的取舍要满足两个条件:一要符合题目要求;二要符合实际意义.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用不等式组解决实际问题

例6 在“保护地球,爱护家园”活动中,校团委把一批树苗分给初三(1)班同学去栽种.如果每人分2棵,还剩42棵;如果前面每人分3棵,那么最后一人得到的树苗少于5棵(但至少分得一棵).

(1)设初三(1)班有x名同学,则这批树苗有多少棵?(用含x的式子表示)

(2)初三(1)班至少有多少名同学?最多有多少名同学?

导引: 本题中的不等关系为:如果前面每人分3棵,那么最后一人得到的树苗少于5棵(但至少分得一棵),即最后一人得到的树苗棵数大于或等于1,小于5.

解: (1)这批树苗有$(2x+42)$棵.

(2)根据题意,得$\begin{cases}2x+42-3(x-1)<5, \\ 2x+42-3(x-1)\geqslant 1,\end{cases}$

解这个不等式组,得$40<x\leqslant 44$.

答:初三(1)班至少有41名同学,最多有44名同学.

▲**同类变式** (答案见191页)

6. 学校举办环保知识竞赛活动,竞赛题共有20道,答对一题得5分,答错或不答都扣2分,小兰在竞赛中获得了二等奖(得分在80分和90分之间),请问小兰在竞赛中答对了几道题?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用不等式组解实际应用中的方案问题

例7 某房地产开发公司计划建A,B两种户型的住房共80套.该公司所筹资金不少于2 090万元,但不超过2 096万元,且所筹资金全部用于建房.两种户型的建房成本和售价如下表:

型号	A型	B型
成本/(万元/套)	25	28
售价/(万元/套)	30	34

(1)该公司有哪几种建房方案?

(2)该公司选用哪种方案可获得最大利润?

导引: 本题中的不等关系为:建房资金不少于2 090万元,不超过2 096万元,可根据它们建立不等式组,即A型住房成本+B型住房成本≥2 090万元;A型住房成本+B型住房成本≤2 096万元.

解: (1)设建A型住房x套,则建B型住房$(80-x)$套.

根据题意,得$\begin{cases}25x+28(80-x)\geqslant 2\,090,\\25x+28(80-x)\leqslant 2\,096,\end{cases}$

解得$48\leqslant x\leqslant 50$.

因为x为整数,所以x可取48,49,50.

所以有三种建房方案.

方案一:A型48套,B型32套;

方案二:A型49套,B型31套;

方案三:A型50套,B型30套.

(2)方案一获利:$48\times(30-25)+32\times(34-28)=432$(万元);

方案二获利:$49\times(30-25)+31\times(34-28)=431$(万元);

方案三获利:$50\times(30-25)+30\times(34-28)=430$(万元).

因为$432>431>430$,所以选方案一可获得最大利润.

方法点拨

求实际问题中方案的种类或最大值(最小值)问题,常通过求不等式(组)的解集,分类讨论找出答案,即先根据题意,设出未知数,列出不等式(组),求出相应的取值范围,再根据题目的条件分类讨论,写出答案.



点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用不等式组的特殊解或解集求未知数的值或取值范围

类型一 已知不等式组解集的情况

例8 已知关于x的不等式组$\begin{cases}5-2x\geqslant -1 & ①,\\x-a>0 & ②\end{cases}$无解,求$a$的取值范围.

导引: 把a看成常数,解不等式组,再根据原不等式组无解,求出a的取值范围.

解: 解不等式①,得$x\leqslant 3$,解不等式②,得$x>a$,

因为该不等式组无解,所以不等式①和②的解集在数轴上的表示如图7.3-9所示,所以$a>3$.当$a=3$时,代入不等式组,得$x\leqslant 3$,且$x>3$,此时,不等式组无解,满足题意,所以a的取值范围为$a\geqslant 3$.

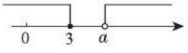


图7.3-9

方法点拨: "$a=3$"这种特殊情况易被忽视,检验等号是否满足题意在解题时必不可少.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

类型二　已知不等式组的特殊解的情况

例9　若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-m<0, & ① \\ 7-2x\leqslant 1 & ② \end{cases}$ 的整数解共有 4 个，求 m 的取值范围.

导引： 解不等式组，得 $3\leqslant x<m$，再由这个解集确定 4 个整数解，借助数轴，得到 m 的取值范围.

解： 解不等式①，得 $x<m$，

解不等式②，得 $x\geqslant 3$，

所以原不等式组的解集为 $3\leqslant x<m$.

因为原不等式组有 4 个整数解，所以原不等式组的解集在数轴上的表示如图 7.3-10 所示.

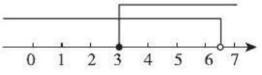


图 7.3-10

从图中可得 $6<m<7$.

当 $m=6$ 时，不等式组只有 3 个整数解，不符合题意；

当 $m=7$ 时，符合题意，

所以，m 的取值范围为 $6<m\leqslant 7$.

方法点拨： 结合不等式组解集的确定方法，灵活运用不等式组解集的意义，构造不等式（或方程）是解此类问题的关键，本题利用了数形结合思想.

易错警示：解题时 $m=6$ 和 $m=7$ 的情况易被忽视，做此类题时需注意.

拔尖角度 2　方程组与不等式组的综合应用

例10　方程组 $\begin{cases} 2a+4b=6, \\ 4a-3b=4m \end{cases}$ 的解 a，b 都是正数，求非正整数 m 的值.

导引： 先求出方程组的解，根据 a，b 都是正数得出关于 m 的不等式组，求出不等式组的解集即可得出结果.

解： 解方程组 $\begin{cases} 2a+4b=6, \\ 4a-3b=4m \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=\dfrac{8m+9}{11}, \\ b=\dfrac{12-4m}{11}. \end{cases}$

因为 a，b 都是正数，所以 $\begin{cases} 8m+9>0, \\ 12-4m>0, \end{cases}$

解得 $-\dfrac{9}{8}<m<3$，

所以非正整数 m 的值是 0，-1.

方法点拨： 当方程组的解满足特定要求时，先设法求出这个方程组的解，然后根据题意列出不等式组，求出所求字母的取值范围.

拔尖角度 3　利用方程和不等式组解决实际问题

例11　某学校为开展“阳光体育”活动，计划拿出不超过 3 000 元的资金购买一批篮球、羽毛球拍和乒乓球拍，已知篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8∶3∶2，且其单价和为 130 元.

(1) 请问篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别是多少元？

(2) 若要求购买篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的总数量是 80 个（副），羽毛球拍的数量是篮球数量的 4 倍，且购买乒乓球拍的数量不超过 15 副，请问有几种购买方案？

导引： (1) 已知篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8∶3∶2，且其单价和为 130 元，可以设它们的单价分别为 $8x$ 元、$3x$ 元、$2x$ 元，列一元一次方程来解决问题；(2) 根据购买乒乓球拍的数量不超过 15 副和用不超过 3 000 元的资金购买一批篮球、羽毛球拍和乒乓球拍这两个不等关系列不等式组，求出购买篮球数量的范围，从而确定购买方案.

解： (1) 因为篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8∶3∶2，所以，可设它们的单价分别为 $8x$ 元、$3x$ 元、$2x$ 元，于是，得 $8x+3x+2x=130$，解得 $x=10$. 所以 $8x=80$，$3x=30$，$2x=20$. 所以篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别为 80 元、30 元和 20 元.

(2) 设购买篮球的数量为 y 个，则购买羽毛球拍的数量为 $4y$ 副，购买乒乓球拍的数量为 $(80-y-4y)$ 副.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据题意，得

$$\begin{cases}80y+30\times4y+20(80-y-4y)\leqslant3\,000,①\\80-y-4y\leqslant15.②\end{cases}$$

解不等式①，得 $y\leqslant14$.

解不等式②，得 $y\geqslant13$，

所以不等式组的解集为 $13\leqslant y\leqslant14$.

因为 y 取整数，所以 y 只能取 13 或 14. 因此，一共有两种购买方案：

方案一：当 $y=13$ 时，篮球购买 13 个，羽毛球拍购买 52 副，乒乓球拍购买 15 副；

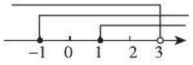
方案二：当 $y=14$ 时，篮球购买 14 个，羽毛球拍购买 56 副，乒乓球拍购买 10 副.

技巧点拨： 解决这类问题的关键是在理解题意的基础上寻找明显或隐含的等量关系或不等关系，准确列出方程(组)或不等式(组).

练中考·练模拟 得满分 (答案见 191 页)

基础巩固练

1. 已知某不等式组的解集在数轴上的表示如图所示，则它们的解集的公共部分是(　　)

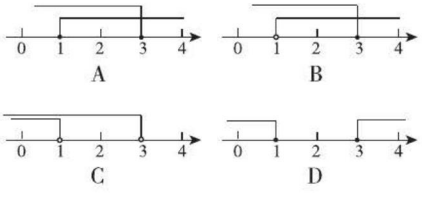


(第 1 题图)

A. $-1\leqslant x<3$　　B. $1\leqslant x<3$

C. $-1\leqslant x<1$　　D. 无解

2. 不等式组 $\begin{cases}x-1>0,\\x-3\leqslant0\end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是(　　)



3. [模拟·宣城] 不等式组 $\begin{cases}x+5>2,\\4-x\geqslant3\end{cases}$ 的最小整数解是(　　)

A. -3　　B. -2

C. 0　　D. 1

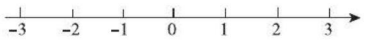
4. [中考·云南] 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}2(x-1)>2,\\a-x<0\end{cases}$ 的解集是 $x>a$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a<2$　　B. $a\leqslant2$

C. $a>2$　　D. $a\geqslant2$

5. [中考·黔西南州] 一元一次不等式组 $\begin{cases}x-2>3x,\\x<a\end{cases}$ 的解集为 $x<-1$，则 a 的取值范围是_____.

6. [模拟·合肥] 解不等式组 $\begin{cases}x-3(x-2)\leqslant8,\\5-\frac{1}{2}x>2x,\end{cases}$ 并把解集在数轴上表示出来.



(第 6 题图)

7. [期中·蚌埠] 把一些笔记本分给几名学生，如果每人分 3 本，那么余 8 本，如果每人分 5 本，那么最后一个人分到的本数不足 3 本，共有学生多少名？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

8. [中考·聊城] 若不等式组$\begin{cases}\frac{x+1}{3}<\frac{x}{2}-1,\\ x<4m\end{cases}$无解，则 m 的取值范围为(　　)

A. $m\leqslant 2$　　B. $m<2$

C. $m\geqslant 2$　　D. $m>2$

9. [中考·内江] 若关于 x 的不等式组$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}>0,\\ 3x+5a+4>4(x+1)+3a\end{cases}$恰有三个整数解，则 a 的取值范围是(　　)

A. $1\leqslant a<\frac{3}{2}$　　B. $1<a\leqslant\frac{3}{2}$

C. $1<a<\frac{3}{2}$　　D. $a\leqslant 1$ 或 $a>\frac{3}{2}$

10. [期中·合肥瑶海区] 已知不等式组$\begin{cases}x+1<2a,\\ x-b>1\end{cases}$的解集是 $2<x<3$，则关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解为(　　)

A. $x=\frac{4}{3}$　　B. $x=-\frac{4}{3}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x=-\frac{1}{2}$

11. 若关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}3x-2y=m+2,\\ 2x+y=m-5\end{cases}$中，$x$ 的值是正数，y 的值是负数，求 m 的取值范围.

12. 合肥市某商场为做好“家电下乡”的惠民服务，决定从厂家购进甲、乙、丙三种不同型号的电视机 108 台，其中甲种电视机的台数是丙种的 4 倍，购进三种电视机的总金额不超过 147 000 元. 已知甲、乙、丙三种型号的电视机的出厂价格和售出后每台的利润如下表：

型号	甲	乙	丙
出厂价/(元/台)	1 000	1 500	2 000
每台利润/(元/台)	200	200	300

(1) 求该商场至少购买丙种电视机多少台；

(2) 若要求甲种电视机的台数不超过乙种电视机的台数，且使售出后所获利润最高，请设计进货方案，并求出售出后的最高利润.

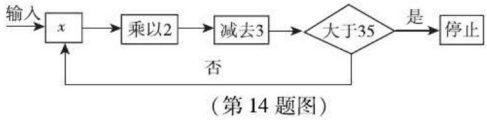
思维拓展练

13. [中考·扬州] 已知 $x=2$ 是不等式 $(x-5)(ax-3a+2)\leqslant 0$ 的解，且 $x=1$ 不是这个不等式的解，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $a>1$　　B. $a\leqslant 2$

C. $1<a\leqslant 2$　　D. $1\leqslant a\leqslant 2$

14. 如图，按下面的程序进行运算. 规定：程序运行到“判断结果是否大于 35”为一次运算. 若运算进行了 3 次才停止，则 x 的取值范围是(　　)



(第 14 题图)

A. $7<x\leqslant 11$　　B. $7\leqslant x<11$

C. $7<x<11$　　D. $7\leqslant x\leqslant 11$

7.4 综合与实践　排队问题(略)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一元一次不等式（组）与方程（组）的巧妙结合

荣老师告诉你

一元一次不等式(组)与一元一次方程(组)有很多相似的地方,解题依据——等式的基本性质和不等式的基本性质;解法步骤——去分母、去括号、移项、合并同类项等基本步骤,都基本相同. 所以在解题时,两者经常结合在一起.

结合点一 利用不等式求方程的整数解

例1 求方程 $3x+2y=17$ 的正整数解.

导引: 先用含 x 的代数式表示 y,然后利用方程的解为正整数,列出以 x 为未知数的不等式,求出 x 的取值范围,最后确定正整数 x 的值.

解: 将方程变形为 $2y=17-3x$,

则 $y=\dfrac{17-3x}{2}$.

因为 $y>0$,所以 $\dfrac{17-3x}{2}>0$.

所以 $x<\dfrac{17}{3}$,即 $x<5\dfrac{2}{3}$.

又因为 y 为正整数,即 $\dfrac{17-3x}{2}$ 为整数,

所以 $17-3x$ 为偶数.

所以 x 必为奇数. 所以 $x=1,3,5$.

当 $x=1$ 时,$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times1}{2}=7$;

当 $x=3$ 时,$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times3}{2}=4$;

当 $x=5$ 时,$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times5}{2}=1$,

故原方程的正整数解为 $\begin{cases}x=1,\\y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$

或 $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

方法点拨: (1)一般地,一个二元一次方程有无数个解,但它的特殊解有有限个,如一个二元一次方程的正整数解,非负整数解都有有限个.(2)求二元一次方程的正(非负)整数解时,往往借助不等式、整数的奇偶性等相关知识来帮助求解.

结合点二 利用方程（组）解的情况求字母的取值范围

例2 已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$ 若 $x>y$,求 a 的取值范围.

导引: 解本题的指导思想就是构建以 a 为未知数的不等式,解之即得 a 的取值范围. 构建不等式的依据是 $x>y$,而解方程组可用含 a 的代数式分别表示 x 和 y,从而可得不等式.

解: 解方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=2a+1,\\y=a-2.\end{cases}$

因为 $x>y$,所以 $2a+1>a-2$,

解得 $a>-3$. 故 a 的取值范围是 $a>-3$.

方法点拨: 由方程(组)的解的不等关系,列出不等式(组),求出方程(组)中待定字母的取值范围,关键点有两个:一是要会解带有未知数以外其他字母的方程(组);二是要会根据解的不等关系列出不等式(组).

结合点三 利用不等式组的解集建立方程组

例3 若不等式组 $\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0\end{cases}$ 的解集是 $-1<x<1$,求 $(a+b)^{2\,021}$ 的值.

导引: 解此不等式组得 $a+2<x<\dfrac{b}{2}$,而依题意,该不等式组的解集又是 $-1<x<1$,因为解集是唯一的,所以两解集的边界点分别"吻合",从而得两等式即得方程组,解之可得 a,b 的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解：解不等式组$\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0,\end{cases}$得$a+2<x<\frac{b}{2}$. 又因为此不等式组的解集是$-1<x<1$，所以有$\begin{cases}a+2=-1,\\\frac{b}{2}=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-3,\\b=2,\end{cases}$

所以$(a+b)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$.

方法点拨：若已知不等式组的解集，先解出含有除未知数外其他字母的不等式组的解集，然后对比已知的解集，列出以待定字母为未知数的方程组.

结合点四 利用方程组求出的数据列不等式解决实际问题

例4 ［中考·贵阳］某文具店最近有A，B两款毕业纪念册比较畅销，近两周的销售情况是：第一周A款销售数量是15本，B款销售数量是10本，销售总价是230元；第二周A款销售数量是20本，B款销售数量是10本，销售总价是280元.

(1)求A，B两款毕业纪念册的销售单价；

(2)若某班准备用不超过529元购买这两种款式的毕业纪念册共60本，求最多能购买多少本A款毕业纪念册.

导引：(1)根据题意列出方程组即可得解；(2)利用不超过529元购买这两种款式的毕业纪念册共60本，得出不等式求出答案.

解：(1)设A款毕业纪念册的销售单价为x元，B款毕业纪念册的销售单价为y元，根据题意可得$\begin{cases}15x+10y=230,\\20x+10y=280,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\y=8.\end{cases}$

答：A款毕业纪念册的销售单价为10元，B款毕业纪念册的销售单价为8元.

(2)设能购买a本A款毕业纪念册，则购买B款毕业纪念册$(60-a)$本，

根据题意可得$10a+8(60-a)\leqslant 529$，

解得$a\leqslant 24.5$，

则最多能购买24本A款毕业纪念册.

结合点五 同时建立方程和不等式的模型解决实际问题

例5 认真阅读下面三个人的对话.

小朋友：阿姨，我买一盒饼干和一袋牛奶(递上10元钱).

售货员：本来你用10元钱买一盒饼干是有剩余的，但再买一袋牛奶就不够了. 不过今天是儿童节，我给你买的饼干打九折，两样东西请拿好，还有找你的8角钱.

旁观者：一盒饼干的标价可是整数哦！

根据对话内容，试求出饼干和牛奶的标价各是多少.

导引：本题的条件蕴藏在对话中，应学会从对话中获取信息. “用10元钱买一盒饼干是有剩余的”，说明一盒饼干的售价小于10元，此不等关系之一；“但再买一袋牛奶就不够了”，说明一盒饼干和一袋牛奶的价格之和大于10元，此不等关系之二. 对话中还包含一个等量关系，就是用10元钱买上述两样东西剩余0.8元钱，即一袋牛奶与打折后一盒饼干的价格之和等于10元减去0.8元，由一个方程和两个不等式结合最终可求出答案.

解：设饼干的标价为每盒x元，牛奶的标价为每袋y元. 根据题意，得

$\begin{cases}x+y>10,①\\0.9x+y=10-0.8,②\\x<10,③\end{cases}$

由②，得$y=9.2-0.9x$，

将其代入①，得$x+9.2-0.9x>10$，

解得$x>8$.

综合③可知$8<x<10$.

因为x为整数，所以$x=9$，

所以$y=9.2-0.9x=1.1$，

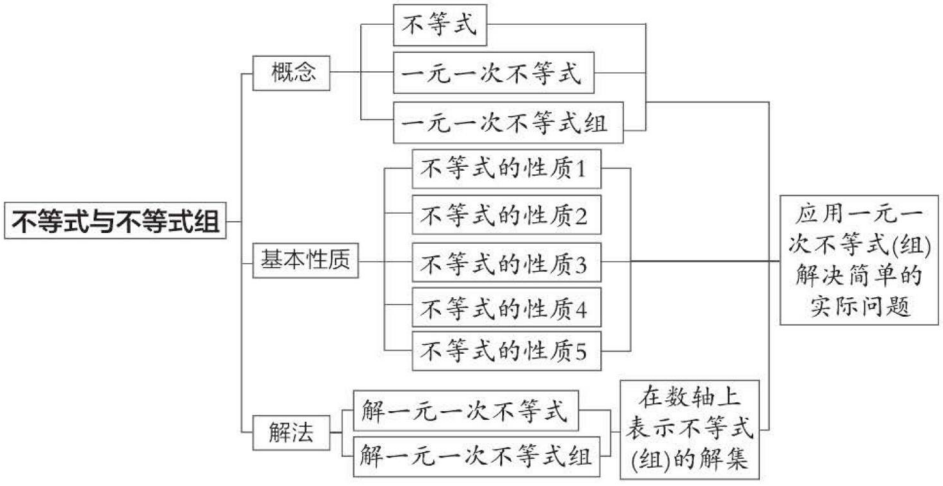
即饼干的标价为每盒9元，牛奶的标价为每袋1.1元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 在数轴上表示不等式(组)的解集时要注意“两定”:一定边界点,二定方向. 在定边界点时,若不等号是“≤”或“≥”,边界点为实心点;若不等号是“<”或“>”,边界点为空心点. 二定方向,相对于边界点而言,“小于向左,大于向右”.
2. 解不等式通常按以下步骤进行:去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1. 注意:在“系数化为1”时,若不等式的两边除以同一个负数,不等号的方向需改变.
3. 一元一次不等式组的解法是:对组成不等式组的不等式分别求解,取各个不等式解集的公共部分,即为不等式组的解集;确定一元一次不等式组解集应遵循的原则是:同大取大,同小取小,小大大小中间找,大大小小无处找.

知识方法专题

知识必学

专题一 不等式的基本性质

链接中考>>不等式的基本性质是解不等式的理论依据,特别是性质3的运用很容易出错,在解不等式的最后一步也经常用到. 在中考中,一般都是以选择题形式直接考查不等式的基本性质.

例1 [中考·广安]若 $m>n$,下列不等式不一定成立的是(　　)

A. $m+3>n+3$　　B. $-3m<-3n$

C. $\frac{m}{3}>\frac{n}{3}$　　D. $m^2>n^2$

导引: 根据不等式的基本性质进行判断. 不等式的两边都加3,不等号的方向不变,故A正确;不等式的两边都乘以-3,不等号的方向改变,故B正确;不等式的两边都除以3,不等号的方向不变,故C正确;当$m=2$,$n=-3$时,$m>n$,$m^2<n^2$,故D错误. 故选D.

答案: D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 解一元一次不等式

链接中考>>解不等式是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是直接解不等式；另一种是根据解不等式求其特殊解. 一般都是以填空题或选择题形式出现，在有些地区也以解答题形式考查.

例2 ［中考·安徽］解不等式：$\frac{x}{3}>1-\frac{x-3}{6}$.

导引： 根据一元一次不等式的解题步骤求解即可.

解： 去分母，得 $2x>6-(x-3)$，

去括号，得 $2x>6-x+3$，

移项，得 $2x+x>6+3$，

合并同类项，得 $3x>9$，

系数化为 1，得 $x>3$.

方法点拨： 解一元一次不等式的一般步骤与解一元一次方程的步骤一样，只是解不等式时，把不等式两边乘以或除以同一个负数，要改变不等号的方向.

专题三 解一元一次不等式组

链接中考>>解不等式组是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是已知不等式组求解集；另一种是已知不等式组的解集求不等式组中待定字母的值或范围. 一般都是以填空题或选择题形式出现. 在有些地区也以解答题形式考查.

例3 ［中考·泰安］不等式组 $\begin{cases}4x-3>2x-6,\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5}\end{cases}$ 的整数解的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

导引： 分别解出每一个不等式，确定未知数的取值范围，然后找出不等式组的整数解.

$\begin{cases}4x-3>2x-6,①\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5},②\end{cases}$

解不等式①得 $x>-\frac{3}{2}$，

解不等式②得 $x\leqslant 1$，

因此不等式组的解集为 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$，

所以整数解为 $-1,0,1$，

一共有 3 个，故选 C.

答案： C

方法点拨： 求不等式组的整数解的关键是正确地解出每个不等式，确定出未知数的取值范围，从而求出整数解.

例4 ［中考·恩施州］关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3x-1>4(x-1),\\ x<m\end{cases}$ 的解集为 $x<3$，那么 m 的取值范围为(　　)

A. $m=3$　B. $m>3$　C. $m<3$　D. $m\geqslant 3$

导引： 先分别解两个不等式，然后再利用“同小取小”来求解.

由 $3x-1>4(x-1)$，得 $x<3$，而不等式组的解集为 $x<3$，所以 $m\geqslant 3$，故选 D.

答案： D

方法点拨： 解含有参数的不等式组的步骤：

(1) 解不等式组，含有参数的把参数当已知数来解，这是必不可少的步骤；

(2) 借助数轴，清晰准确地把握不等式组有解、无解以及有几个整数解的问题.

(3) 注意端点值，这类问题一般都与端点有关，可以利用数轴来说明哪个是端点，然后进行检验，看有无端点及是不是满足题意.

专题四 一元一次不等式的应用

链接中考>>不等式的应用题与方程的应用题类似，方程是找等量关系，而不等式是找不等关系，不等关系有标志语——大于、小于、超过、不超过等等. 不等式的应用题在中考中一般都是以解答题形式出现.

例5 ［中考·本溪］暑期临近，本溪某旅行社准备组织“亲子一家游”活动，去我省沿海城市旅游，报名的人数共有 69 人，其中成人的人数比儿童人数的 2 倍少 3 人.

(1) 旅游团中成人和儿童各有多少人？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)旅行社为了吸引游客,打算给每名游客准备一件T恤衫.购买时,成人T恤衫每购买10件赠送1件儿童T恤衫(不足10件不赠送),儿童T恤衫每件15元,旅行社购买服装的费用不超过1 200元,请问每件成人T恤衫的价格最高是多少元?

导引: (1)设旅游团中儿童有x人,则成人有$(2x-3)$人,根据报名的人数共有69人,列方程求解;(2)根据题意可得能赠送4件儿童T恤衫,设每件成人T恤衫的价格是m元,根据旅行社购买服装的费用不超过1 200元,列不等式求解.

解: (1)设旅游团中儿童有x人,则成人有$(2x-3)$人,

根据题意得$x+(2x-3)=69$,

解得$x=24$,

则$2x-3=2\times24-3=45$.

答:旅游团中成人有45人,儿童有24人.

(2)因为$45\div10=4.5$,所以可赠送4件儿童T恤衫,

设每件成人T恤衫的价格是m元,

根据题意可得$45m+15\times(24-4)\leqslant1\,200$,解得$m\leqslant20$.

答:每件成人T恤衫的价格最高是20元.

方法点拨: 对于一元一次不等式的应用,解题的关键是读懂题意,找出合适的不等关系,设未知数并列不等式求解.

Ⅱ 思想方法专题

专题五 转化思想

专题解读>>在不等式(组)与方程(组)的综合应用中,常会用到转化思想,将解方程(组)的问题转化为解不等式(组)的问题.

例6 关于x,y的二元一次方程组$\begin{cases}5x+3y=23, & ①\\ x+y=p & ②\end{cases}$的解是正整数,则整数$p$的值为_____.

导引: 把p看成常数,求出方程组的解,再根据题意转化成关于p的不等式组,求解即可.

②×3,得$3x+3y=3p$,③

①−③,得$2x=23-3p$,则$x=\dfrac{23-3p}{2}$,

把$x=\dfrac{23-3p}{2}$代入②,得$y=\dfrac{5p-23}{2}$.

因为x,y为正整数,所以$\begin{cases}\dfrac{23-3p}{2}>0,\\ \dfrac{5p-23}{2}>0,\end{cases}$

解得$4\dfrac{3}{5}<p<7\dfrac{2}{3}$,因为$p$是整数,所以$p$可取5,6,7.把$p=5$,$p=6$,$p=7$分别代入原方程组的解中,只有当$p=5$或$p=7$时方程组的解是正整数,故填5或7.

答案: 5或7

专题六 数形结合思想

专题解读>>不等式及不等式组的解集都可以在数轴上表示出来,特别是确定不等式组的解集时利用数轴的"形",可以非常直观地看出不等式组的解集.

例7 [中考·镇江]如图7-1所示的数轴上表示的x的取值范围可以是不等式组$\begin{cases}x+2>a,\\ (2a-1)x-6<0\end{cases}$的解集的是(　　)

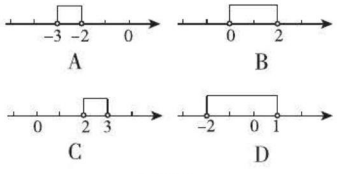


图7-1

导引: 由$x+2>a$得$x>a-2$.A.由数轴知$x>-3$,则$a=-1$,所以$-3x-6<0$,解得$x>-2$,与数轴不符;B.由数轴知$x>0$,则$a=2$,所以$3x-6<0$,解得$x<2$,与数轴相符合;C.由数轴知$x>2$,则$a=4$,所以$7x-6<0$,解得$x<\dfrac{6}{7}$,与数轴不符;D.由数轴知$x>-2$,则$a=0$,所以$-x-6<0$,解得$x>-6$,与数轴不符.故选B.

答案: B

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

好题必解 答案见191页

一、选择题

1. 下列各式中，是一元一次不等式的是(　　)

A. $x+y<6$　　B. $5+a^2>0$

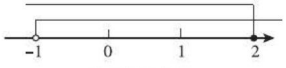
C. $\frac{x-2}{x+7}<0$　　D. $\frac{1}{2}(x-3)\leqslant -5$

2. [中考·舟山]已知四个实数 a,b,c,d，若 $a>b,c>d$，则(　　)

A. $a+c>b+d$　　B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

3. [模拟·温州]下列不等式组的解，在数轴上表示为如图所示的是(　　)



(第3题图)

A. $x>-1$　　B. $-1<x\leqslant 2$

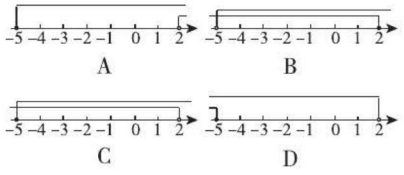
C. $-1\leqslant x<2$　　D. $x>-1$ 或 $x\leqslant 2$

4. 如果不等式 $2x-m<0$ 有三个正整数解，那么 m 的取值范围是(　　)

A. $m<8$　　B. $m\geqslant 6$

C. $6<m\leqslant 8$　　D. $6\leqslant m<8$

5. [模拟·安徽]不等式组 $\begin{cases}3+x\geqslant -2,\\ \frac{4-x}{2}>1\end{cases}$ 的解集在数轴上表示为(　　)



6. 若关于 x 的不等式 $(a-1)x<3(a-1)$ 的解集能使不等式 $x<5-a$ 成立，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a<1$ 或 $a\geqslant 2$　　B. $a\leqslant 2$

C. $1<a\leqslant 2$　　D. $a=2$

7. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x-a>0,\\ \frac{3x-1}{5}<1\end{cases}$ 无解，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a>2$　B. $a\geqslant 2$　C. $1<a\leqslant 2$　D. $1\leqslant a<2$

二、填空题

8. 用不等式表示：

a 与 6 的和小于 5：_____；

a 与 2 的差不小于 -1：_____；

a 的一半不大于 -2：_____；

a 的 2 倍与 7 的差大于 3：_____.

9. [中考·温州]不等式组 $\begin{cases}x+2>3,\\ \frac{x-1}{2}\leqslant 4\end{cases}$ 的解集为_____.

10. [期末·东阳]不等式 $-4x-k\leqslant 0$ 的负整数解是 -1，-2，那么 k 的取值范围是_____.

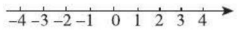
11. [模拟·武汉]关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}3x-y=2m,\\ x+y=m+1\end{cases}$ 的解满足 $x>y$，则 m 的取值范围是_____.

12. 已知一个球队共打了 14 场球，其中赢的场数比平的场数和输的场数都要少，那么这个球队最多赢_____场.

三、解答题

13. (1)求不等式 $x-2>\frac{6x+2}{4}$ 的解集；

(2)解不等式 $\frac{2-x}{4}\geqslant\frac{1-x}{3}$，并把它的解集在如图所示的数轴上表示出来.



(第13题图)

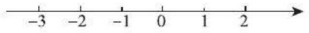
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. [中考·天津] 解不等式组$\begin{cases}x+1\geqslant -1,① \\ 2x-1\leqslant 1.② \end{cases}$请结合题意填空,完成本题的解答.

(1)解不等式①,得_____;

(2)解不等式②,得_____;

(3)把不等式①和②的解集在如图所示的数轴上表示出来:



(第14题图)

(4)原不等式组的解集是_____.

15. [中考·黄石] 已知关于x的不等式组$\begin{cases}5x+1>3(x-1), \\ \frac{1}{2}x\leqslant 8-\frac{3}{2}x+2a \end{cases}$恰有两个整数解,求实数$a$的取值范围. 【导学号:2231921】

16. [中考·遂宁] 关于x,y的方程组$\begin{cases}2x+y=4a+6, \\ 3x-y=a+4 \end{cases}$的解满足$x$大于0,$y$小于4. 求$a$的取值范围.

17. [中考·辽宁] 为了进一步丰富校园活动,学校准备购买一批足球和篮球,已知购买7个足球和5个篮球的费用相同;购买40个足球和20个篮球共需3 400元.

(1)求每个足球和篮球各多少元;

(2)如果学校计划购买足球和篮球共80个,总费用不超过4 800元,那么最多能买多少个篮球?

18. 为了扶贫户学生好读书,读好书,某实验学校校友会在今年开学初,到新华书店采购文学名著和自然科学两类图书. 经了解,购买30本文学名著和50本自然科学书共需2 350元,20本文学名著比20本自然科学书贵500元. (注:所采购的文学名著价格都一样,所采购的自然科学书价格都一样)

(1)求文学名著和自然科学书的单价;

(2)若该校校友会要求购买自然科学书比文学名著多30本,自然科学书和文学名著的总数不低于80本,总费用不超过2 400元,请求出所有符合条件的购书方案.

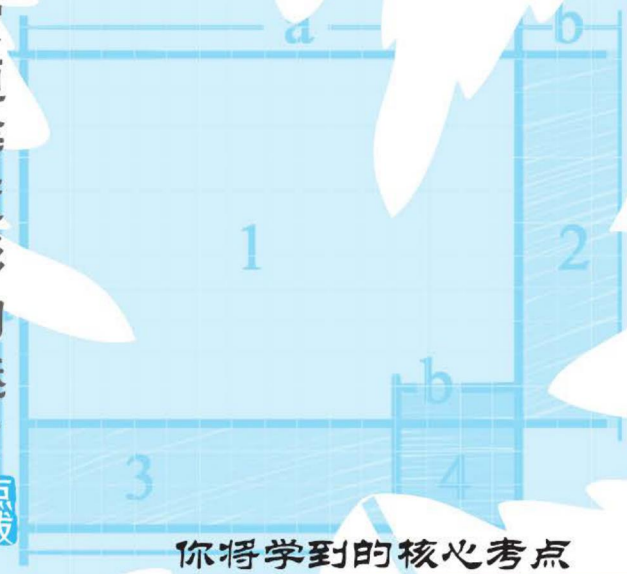
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第8章

整式乘法与因式分解

品赏恒等变形的魅力

数学点拨



你将学到的核心考点

幂的运算 □
(1)同底数幂的乘除法
(2)幂的乘方
(3)积的乘方
整式的乘除法 □
乘法公式 □
因式分解 □

我们为你提供的核心方法

转化思想 □
逆向思维法 □
整体思想 □
补项法 □
分类讨论思想 □
错位相减法 □
分组分解法 □
拆项法 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

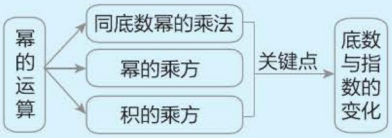
8.1 幂的运算

8.1.1 同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方

核心知识

- 同底数幂的乘法
- 幂的乘方
- 积的乘方

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同底数幂的乘法

1 幂的运算性质1(同底数幂的乘法法则):

同底数幂相乘,底数不变,指数相加.

即: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 都是正整数).

要点精析///

(1)同底数幂的乘法法则只有在底数相同时才能使用,并且底数不变,指数相加,而不是指数相乘.

(2)不同底数要先化成相同底数.

(3)单个字母或数可以看作指数为1的幂,参与同底数幂的运算时,不能忽略了幂指数1.

2 拓展:

(1)同底数幂的乘法法则对于三个同底数幂相乘同样适用. 即: $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$ (m, n, p 都是正整数).

(2)同底数幂的乘法法则可逆用,即 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ (m, n 都是正整数).

(3)底数可以是一个单项式,也可以是一个多项式;在幂的运算中常用到下面两种变形:

①$(-a)^n = \begin{cases} a^n (n\text{为偶数}), \\ -a^n (n\text{为奇数}); \end{cases}$

②$(a-b)^n = \begin{cases} (b-a)^n (n\text{为偶数}), \\ -(b-a)^n (n\text{为奇数}). \end{cases}$

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用同底数幂的乘法法则进行计算

例1 计算:

(1)$a^2 \cdot a^3 \cdot a \cdot a^5$;

(2)$-a^3 \cdot a^4$;

(3)$a^2 \cdot (-a)^5$;

(4)$(x-y)^2 \cdot (x-y) \cdot (x-y)^5$;

(5)$(x-y)^3 \cdot (y-x)^5$.

导引: 紧扣同底数幂的乘法法则,先看是否符合同底数的幂相乘,再按法则计算.

解: (1)$a^2 \cdot a^3 \cdot a \cdot a^5 = a^{2+3+1+5} = a^{11}$.

(2)$-a^3 \cdot a^4 = -a^{3+4} = -a^7$.

(3)$a^2 \cdot (-a)^5 = a^2 \cdot (-a^5) = -a^{2+5} = -a^7$.

(4)$(x-y)^2 \cdot (x-y) \cdot (x-y)^5 = (x-y)^{2+1+5} = (x-y)^8$.

(5)$(x-y)^3 \cdot (y-x)^5 = (x-y)^3 \cdot [-(x-y)^5] = -(x-y)^{3+5} = -(x-y)^8$.

方法点拨

运用同底数幂的乘法法则计算时应注意以下几点:(1)底数既可以是单项式也可以是多项式,当底数是多项式时,应将多项式看成一个整体进行计算.(2)底数互为相反数时,可以利用幂的确定符号的方法先将其转化为同底数幂,再按法则进行计算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 利用同底数幂的乘法法则解决科学记数法的计算

例2 光的速度大约是 3.0×10^5 km/s. 如果一束光线从地球上向火星发射，大约需要 20 min 才能到达火星，求火星距离地球大约多少千米.

导引： 根据“路程＝速度×时间”计算.

解： $3.0\times10^5\times20\times60$

$=3\ 600\times10^5$

$=3.6\times10^3\times10^5$

$=3.6\times10^8$(km).

答：火星距离地球大约 3.6×10^8 km.

技巧点拨

用科学记数法表示的两个数相乘时，常把 10^n 看作底数相同的幂参与运算，而把其他部分看作常数参与运算，然后把两者相乘或直接表示为科学记数法的形式.

点知识 2 幂的乘方

1 幂的运算性质 2（幂的乘方法则）：

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

即：$(a^m)^n=a^{mn}$(m，n 都是正整数).

要点精析

(1) 幂的乘方法则在推导过程中运用了乘方的意义和同底数幂的乘法法则.

(2) 运用此法则时要明白，底数 a 可以是一个单项式，也可以是一个多项式.

(3) 幂的乘方法则可以逆用，即 $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$.



(4) 幂的乘方与同底数幂的乘法都是底数不变，但容易出现指数相乘与相加混淆的错误.

2 幂的乘方与同底数幂的乘法的区别和联系：

区别：幂的乘方是几个相同的幂相乘的积，其结果是底数不变，指数相乘；同底数幂的乘法的结果是底数不变，指数相加.

联系：(1) 幂的乘方可以转化为同底数幂相乘，如 $(a^3)^2=a^3\cdot a^3$；

(2) 当指数相同的两个同底数幂相乘时，可以转化为幂的乘方，如 $a^3\cdot a^3=(a^3)^2$.

3 拓展： 幂的乘方运算法则的推广：$[(a^m)^n]^p=a^{mnp}$(m，n，p 都是正整数).

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用幂的乘方法则进行计算

例3 计算：

(1) $2^{10}\times4^{10}$；

(2) $(m^4)^2+m^5\cdot m^3$；

(3) $[-(2a-b)^4]^2$；

(4) $(a^2)^3-a^4\cdot a^2-(a^3)^2$.

导引： 利用幂的乘方法则进行计算.

解： (1) $2^{10}\times4^{10}=2^{10}\times(2^2)^{10}=2^{10}\times2^{20}=2^{30}$.

(2) $(m^4)^2+m^5\cdot m^3=m^8+m^8=2m^8$.

(3) $[-(2a-b)^4]^2=(2a-b)^8$.

(4) $(a^2)^3-a^4\cdot a^2-(a^3)^2=a^6-a^6-a^6=-a^6$.

同类变式 (答案见 192 页)

3. 计算：(1) $(y^2)^3\cdot(y^2)^5$；

(2) $[(a+b)^2]^3\cdot[(a+b)^4]^2$；

(3) $(x^3)^4+(x^2)^6-(x^6)^2-x^2\cdot(x^2)^5$.

方法点拨

在幂的运算中，如果遇到混合运算，则应按照实数的混合运算顺序进行运算；如果底数不同，就要把底数统一成相同的，再进行运算.注意：计算时不要混淆幂的乘方与同底数幂的乘法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用幂的乘方法则与同底数幂的乘法法则求待定字母的值

例4 若 $a^m=a^n$（$a>0$ 且 $a\neq1$，m，n 是正整数），则 $m=n$. 利用这个结论解决下面的问题.

（1）如果 $2\times8^x\times16^x=2^{22}$，求 x 的值；

（2）如果 $(27^x)^2=3^{12}$，求 x 的值.

导引： 首先分析结论的使用条件，即只要有 $a^m=a^n$（$a>0$ 且 $a\neq1$，m，n 是正整数），则可知 $m=n$，即指数相等，然后在解题中应用即可.

解：（1）因为 $2\times8^x\times16^x=2\times(2^3)^x\times(2^4)^x=2\times2^{3x}\times2^{4x}=2^{1+3x+4x}=2^{22}$，

所以 $1+3x+4x=22$，解得 $x=3$.

（2）因为 $(27^x)^2=[(3^3)^x]^2=3^{6x}=3^{12}$，

所以 $6x=12$，解得 $x=2$.

方法点拨

综合运用幂的乘方法则和同底数幂的乘法法则将等式进行转化，运用方程思想确定待定字母的值是解决这类问题的常用方法.

知识3 积的乘方

1 幂的运算性质3（积的乘方法则）：

积的乘方等于各因式乘方的积.

即 $(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）.



要点精析

（1）底数是乘积的形式，底数中 a，b 可以是单项式，也可以是多项式.

（2）积的乘方法则可以逆用，即 $a^nb^n=(ab)^n$（n 是正整数）.

2 拓展： $(abc)^n=a^nb^nc^n$（n 是正整数）.

3 易错警示： 底数为积的形式，和的形式不能用，即 $(a+b)^n\neq a^n+b^n$.

核心考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用积的乘方法则进行计算

例5 计算：

（1）$(2x)^3$；（2）$(-2ab)^5$；（3）$(-3x^3y)^4$.

导引： 利用积的乘方法则进行计算，计算顺序为先算积的乘方，再算幂的乘方.

解：（1）$(2x)^3=2^3\cdot x^3=8x^3$；

（2）$(-2ab)^5=(-2)^5\cdot a^5\cdot b^5=-32a^5b^5$；

（3）$(-3x^3y)^4=(-3)^4\cdot(x^3)^4\cdot y^4=81x^{12}y^4$.

易错警示

运用积的乘方法则时，每个因式都要乘方，不能漏掉任何一个因式，系数连同它的符号一起乘方，系数为 -1 时不能忽略.

考查角度2 幂的运算法则的综合运用

例6 计算：（1）$(xy^2)^3$；　（2）$(a^nb^{3n})^2+(a^2b^6)^n$；（3）$[(a^2)^3+(2a^3)^2]^2$.

导引： 利用幂的相关运算法则时按先算乘方，再算乘法，最后算加减，有括号的先算括号里面的顺序进行计算；有同类项的要合并同类项，使结果最简.

解：（1）原式 $=x^3y^6$；

（2）原式 $=a^{2n}b^{6n}+a^{2n}b^{6n}=2a^{2n}b^{6n}$；

（3）原式 $=(a^6+4a^6)^2=(5a^6)^2=25a^{12}$.

同类变式（答案见192页）

6. 计算：

（1）$(-8x^3)^2-[(3x)^2]^3$；

（2）$[3(m+n)^2]^3[-2(m+n)^3]^2$；

（3）$-2x^6+(-3x^3)^2-[-(-2x)^2]^3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 逆用幂的运算法则求值

例 7 已知 $10^a=5,10^b=6$,求 10^{2a+3b} 的值.

导引: 10^{2a+3b} 可转化为 $10^{2a}\cdot 10^{3b}$,进而转化为 $(10^a)^2\cdot(10^b)^3$.

解: $10^{2a+3b}=10^{2a}\cdot 10^{3b}=(10^a)^2\cdot(10^b)^3=5^2\times 6^3=25\times 216=5\ 400$.

方法点拨: 同底数幂的乘法及幂的乘方的运算法则都可以逆用,逆用时注意指数的变化情况.

拔尖角度 2 逆用幂的运算法则进行运算

例 8 用简便方法计算:

(1) $\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times 0.25^4\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\times(-4)^4$;

(2) $0.125^{2\,019}\times(-8^{2\,020})$.

导引: 本例题如果按照常规方法进行运算,(1)题比较麻烦,(2)题无法算出结果,因此需采用非常规方法进行计算.(1)观察该式的特点可知,需利用乘法的交换律和结合律,并逆用积的乘方法则计算;(2) $8^{2\,020}=8^{2\,019}\times 8$,故该式应逆用同底数幂的乘法和积的乘方法则计算.

解: (1)原式 $=\left[\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\right]\times[0.25^4\times(-4)^4]$

$=\left(\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}\right)^6\times(0.25\times 4)^4$

$=1\times 1$

$=1$.

(2)原式 $=-0.125^{2\,019}\times 8^{2\,020}$

$=-0.125^{2\,019}\times 8^{2\,019}\times 8$

$=-(0.125\times 8)^{2\,019}\times 8$

$=-1^{2\,019}\times 8$

$=-8$.

技巧点拨: 底数互为倒数的两个幂相乘时,先通过逆用同底数幂的乘法法则化为幂指数相同的幂,然后逆用积的乘方法则计算,从而大大简化运算.

拔尖角度 3 利用幂的运算法则比较大小

例 9 阅读下列材料:

材料一:比较 3^{22} 和 4^{11} 的大小.

解:因为 $4^{11}=(2^2)^{11}=2^{22}$,且 $3>2$,

所以 $3^{22}>2^{22}$,即 $3^{22}>4^{11}$.

材料二:比较 2^8 和 8^2 的大小.

解:因为 $8^2=(2^3)^2=2^6$,且 $8>6$,

所以 $2^8>2^6$,即 $2^8>8^2$.

根据上面的方法,解决下列问题:

(1)比较 $3^{44},4^{33},5^{22}$ 的大小;

(2)比较 $81^{31},27^{41},9^{61}$ 的大小;

(3)已知 $a^2=2,b^3=3$,比较 a,b 的大小;

(4)比较 $3^{12}\times 5^{10}$ 与 $3^{10}\times 5^{12}$ 的大小.

导引: 底数和指数都不同,可将指数(或底数)统一成相同的,来比较底数(或指数)的大小.

解: (1)因为 $3^{44}=(3^4)^{11}=81^{11},4^{33}=(4^3)^{11}=64^{11},5^{22}=(5^2)^{11}=25^{11}$,且 $81>64>25$,所以 $81^{11}>64^{11}>25^{11}$,

即 $3^{44}>4^{33}>5^{22}$.

(2)因为 $81^{31}=(3^4)^{31}=3^{124},27^{41}=(3^3)^{41}=3^{123},9^{61}=(3^2)^{61}=3^{122}$,

且 $124>123>122$,

所以 $3^{124}>3^{123}>3^{122}$,

即 $81^{31}>27^{41}>9^{61}$.

(3)因为 $a^2=2,b^3=3$,

所以 $a^6=8,b^6=9$,且 $b>0$.

因为 $8<9$,所以 $a^6<b^6$.当 $a>0,b>0$ 时,由 $a^6<b^6$ 得 $a<b$,当 $a<0,b>0$ 时,显然 $a<b$,综上可知,$a<b$.

(4)因为 $3^{12}\times 5^{10}=(3\times 5)^{10}\times 3^2,3^{10}\times 5^{12}=(3\times 5)^{10}\times 5^2$,且 $3^2<5^2$,

所以 $3^{12}\times 5^{10}<3^{10}\times 5^{12}$.

方法点拨: 两个幂比较大小,指数相同的情况下,通过比较底数的大小来确定两个幂的大小;底数相同的情况下,通过比较指数的大小来确定两个幂的大小.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见193页）

基础巩固练

1. ［中考·安徽］计算 $a^3\cdot(-a)$ 的结果是(　　)

A. a^2　　B. $-a^2$　　C. a^4　　D. $-a^4$

2. ［中考·深圳］下列运算正确的是(　　)

A. $a^2+a^2=a^4$　　B. $a^3\cdot a^4=a^{12}$

C. $(a^3)^4=a^{12}$　　D. $(ab)^2=ab^2$

3. 计算 $(-4\times10^3)^2\times(-2\times10^3)^3$ 的结果为(　　)

A. 1.28×10^{17}　　B. -1.28×10^{17}

C. 4.8×10^{16}　　D. -2.4×10^{16}

4. ［中考·天津］计算 $x^5\cdot x$ 的结果是_____.

5. ［中考·乐山］若 $3^m=9^n=2$，则 $3^{m+2n}=$_____.

6. 计算：

(1) $x\cdot(-x)^2\cdot(-x)^4$；

(2) $4(a^3)^5+7(-a^5)^3$；

(3)［中考·武汉］$(2x^2)^3-x^2\cdot x^4$.

7. 运用简便方法计算：

(1) $2^{10}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$；

(2) $(-2)^{2\,019}\times(-5)^{2\,019}$.

能力提升练

8. 已知 $x-y=m$，则 $(2x-2y)^3$ 的值为(　　)

A. $2m^3$　　B. $4m^3$　　C. $8m^3$　　D. $16m^3$

9. ［中考·绵阳］已知 $4^m=a$，$8^n=b$，其中 m，n 为正整数，则 $2^{2m+6n}=$(　　)

A. ab^2　　B. $a+b^2$　　C. a^2b^3　　D. a^2+b^3

10. 若 $2^n=4$，$3^n=9$，则 $36^n=$_____.

11. 计算：

$(-0.125)^{12}\times\left(-1\frac{2}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9$.

12. 试判断 $2^{12}\times5^8$ 的结果是一个几位正整数.

13. 某养鸡场需定制一批棱长为 3×10^2 毫米的正方体鸡蛋包装箱(包装箱的厚度忽略不计)，求一个这样的包装箱的容积.(结果用科学记数法表示)

14. 已知 $2^n=a$，$5^n=b$，$20^n=c$，探究 a，b，c 之间有什么关系.

思维拓展练

15. 我们规定：$a\otimes b=10^a\times10^b$，例如 $3\otimes4=10^3\times10^4=10^7$，请解决以下问题：

(1)试求 $7\otimes8$ 的值；

(2)想一想 $(a+b)\otimes c$ 与 $a\otimes(b+c)$ 相等吗？请明理由.

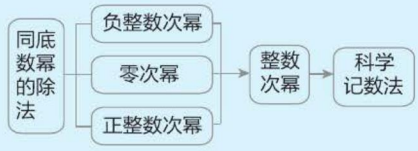
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.1.2 同底数幂的除法

核心知识

- 同底数幂的除法
- 负整数次幂
- 科学记数法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同底数幂的除法

1 幂的运算性质4（同底数幂的除法法则）：

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

即 $a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m，n 都是正整数，且 $m > n$）.

要点精析///

(1) 同底数幂除法与同底数幂乘法是互逆运算.

(2) 运用此性质时，必须明确底数是什么，指数是什么.

(3) 在运算时注意运算顺序，即有多个同底数幂相除时，先算前两个，然后依次往后算.

(4) 同底数幂相除，底数不变，指数相减，而不是相除.

2 拓展： 本法则也适用于多个同底数幂连除；底数可以是一个数，也可以是一个单项式或多项式.

3 易错警示：

(1) 底数不同时运用同底数幂的除法法则计算出现错误.

(2) 在多个同底数幂乘除混合运算时，没按顺序进行计算出现错误.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用同底数幂的除法法则计算

例1 计算：(1) $(-x)^6 \div (-x)^3$；

(2) $(x-y)^5 \div (y-x)^2$.

导引： 相同底数的幂直接利用同底数幂的除法法则计算；不同底数的幂要先化成相同底数幂，再利用同底数幂的除法法则计算.

解： (1) 原式 $= (-x)^{6-3} = (-x)^3 = -x^3$.

(2) 原式 $= (x-y)^5 \div (x-y)^2 = (x-y)^3$.

方法点拨

本题运用整体思想解题.从整体来看各题都为同底数幂或可化为同底数幂的运算，在运算时要注意结构和符号.

考查角度2 逆向运用同底数幂的除法法则求值

例2 已知 $x^m = 9$，$x^n = 27$，求 x^{3m-2n} 的值.

导引： $x^{3m-2n} = x^{3m} \div x^{2n} = (x^m)^3 \div (x^n)^2$，把已知条件代入可求值.

解： 原式 $= x^{3m} \div x^{2n}$

$= (x^m)^3 \div (x^n)^2$

$= 9^3 \div 27^2$

$= 1$.

方法点拨

逆向运用同底数幂乘除法法则求值的方法：当幂的指数是含有字母的加法时，通常转化为同底数幂的乘法；当幂的指数是含有字母的减法时，通常转化为同底数幂的除法，然后逆用幂的乘方法则并整体代入求值.

同类变式 （答案见193页）

2. 已知 $3^m = 4$，$3^n = 5$，3^{3m-2n} 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 同底数幂除法法则的综合应用

例3 计算：(1)$[(a^2)^5\cdot(-a^2)^3]\div(-a^4)^3$；

(2)$(a-b)^3\div(b-a)^2+(-a-b)^5\div(a+b)^4$.

导引： 有同底数幂的乘除和乘方时，按顺序先乘方再乘除；若底数不同时，要先化为相同底数，再按运算顺序进行计算.

解： (1)原式$=[a^{10}\cdot(-a^6)]\div(-a^{12})=-a^{16}\div(-a^{12})=a^{16-12}=a^4$.

(2)原式$=(a-b)^3\div(a-b)^2-(a+b)^5\div(a+b)^4=(a-b)-(a+b)=a-b-a-b=-2b$.

方法点拨

从结构上看，这是两个混合运算，只要注意其结构特征，并按运算顺序和法则去计算即可.注意在运算过程中，一定要先确定符号.

同类变式 (答案见193页)

3. 计算：

(1)$(2x^3y)^2\cdot(-2xy)+(-2x^3y)^3\div2x^2$；

(2)$(x^3-y)^5\div(y-x^3)^2+(y-x^3)^7\div(x^3-y)^4$.

点知识 2 零次幂

1 任何一个不等于零的数的零次幂都等于1，即$a^0=1(a\neq0)$.

要点精析///

(1)零次幂在同底数幂除法中，是除式与被除式的指数相同时的特殊情况.

(2)指数为0，但底数不能为0，因为底数为0，除法无意义.

2 **拓展：** 零次幂中的底数可以是一个不为0的数，也可以是一个不为0的单项式或多项式.

3 **易错警示：** 指数为0时忽视底数不为0的条件，而出现错误，即0^0没有意义.

核考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用零次幂进行计算

例4 计算：$\sqrt[3]{8}-(\pi-3)^0+(-1)^{2019}$.

导引： 分别利用立方根的定义、零次幂、乘方的意义计算各自的值，从而可求出结果.

解： 原式$=2-1-1=0$.

方法点拨

对于零次幂的运算，不需要计算底数为多少，只需要判断底数不为零即可，结果都是1.

考查角度2 利用零次幂有意义的条件求字母取值范围

例5 代数式$y=\sqrt{x-1}+(x-1)^0$中自变量x的取值范围是(　　)

A. $x>1$　　B. $x\geqslant1$　　C. $x\leqslant1$　　D. $x\neq1$

导引： 由被开方数不小于0，且零次幂底数不为0确定自变量的范围.

因为$x-1\geqslant0$且$x-1\neq0$，解得$x\geqslant1$且$x\neq1$，因此$x>1$.

答案： A

方法点拨

此题求代数式有意义的条件时，既要考虑根式的被开方数为非负数，又要考虑零次幂底数不为0.

考查角度3 利用零次幂有意义的条件求字母的取值

例6 已知$(x-5)^x=1$，试探究x的可能取值.

导引： 按指数为0和底数为1或-1三种情况求解.

解： 分三种情况：

方法点拨

本题运用分类讨论思想解题.本例的解法紧扣幂为1时，底数为±1，指数为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)当指数为0,即$x=0$时,$(x-5)^x=(0-5)^0=1$;

(2)当底数$x-5=1$,即$x=6$时,$(x-5)^x=(6-5)^6=1$;

(3)当底数$x-5=-1$,即$x=4$时,$(x-5)^x=(4-5)^4=1$.

因此x的可能取值为0,6,4.

0的三种情况进行分类,不要只注意到指数为0的情形,而忽视底数为1或-1的情形导致漏解.

同类变式 (答案见193页)

6. 若$(a-2)^{a+1}=1$,则$a=$_____.

点知识3 负整数次幂

1 负整数次幂法则: 任何一个不等于零的数的$-p$(p是正整数)次幂,等于这个数的p次幂的倒数.

用式子表示为$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$($a\neq0$,p是正整数).

在引进了零次幂和负整数次幂后,指数的范围已经扩充到了全体整数,幂的运算性质仍然成立,即有:

(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;(2)$(a^m)^n=a^{mn}$;

(3)$(ab)^n=a^nb^n$;(4)$a^m\div a^n=a^{m-n}$;

(5)$a^0=1$,$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$.

(这里m,n,p都为正整数,$a\neq0,b\neq0$)

要点精析///

(1)a^{-p}与a^p互为倒数,即$a^{-p}\cdot a^p=1$.

(2)在幂的混合运算中,先计算乘方,再计算乘除,最后计算加减.

(3)最后结果要化成正整数次幂.

(4)$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$可变形为$a^{-p}\cdot a^p=1$或$\frac{1}{a^{-p}}=a^p$.

2 易错警示: 容易出现$a^{-p}=-a^p$的错误.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用负整数次幂进行计算

例7 [中考·攀枝花]计算:$\sqrt{9}+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$_____.

导引: 根据实数的各个运算法则的意义进行计算.$\sqrt{9}+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=3+4+1-2=6$.

答案: 6

方法点拨

对于底数是分数的负整数次幂,我们可采用底倒指反法,将其转化为这个数的倒数的正整数次幂,$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

考查角度2 利用幂的运算法则进行整数次幂的计算

例8 计算:

(1)$6x^{-2}\cdot(2x^{-2}y^{-1})^{-3}$;

(2)$(-2a^{-2})^3b^2\div2a^{-8}b^{-3}$;

(3)$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^{-3}\div\left(-\frac{y}{x}\right)^{-4}$.

导引: 对于(1),先计算乘方,再计算乘法;对于(2),先计算乘方,再计算除法;对于(3),先计算乘方,同时把"分数"形式化成整数次幂形式,再进行幂的乘除法计算.

解: (1)原式$=6x^{-2}\cdot2^{-3}x^6y^3=\frac{6}{8}x^4y^3=\frac{3}{4}x^4y^3$.

(2)原式$=-2^3a^{-6}b^2\div2a^{-8}b^{-3}=-4a^2b^5$.

(3)原式$=x^{-4}y^2\cdot x^3y^{-6}\div x^4y^{-4}=x^{-5}y^0=x^{-5}=\frac{1}{x^5}$.

方法点拨

整数次幂的计算方法:可以直接运用整数次幂的性质计算,到最后一步再都写成正整数次幂的形式,如本例的解法;也可以先利用负整数次幂的定义,把负整数次幂都转化为正整数次幂,然后再计算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3 利用零次幂与负整数次幂有意义的条件求字母的取值

例9 ［易错题］当x取什么值时，$(x+2)^0-3(2x-6)^{-1}$有意义？

导引： 零次幂和负整数次幂有意义的条件是底数不为0.

解： 根据题意，得$\begin{cases}x+2\neq0,\\2x-6\neq0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x\neq-2,\\x\neq3.\end{cases}$

所以当$x\neq-2$且$x\neq3$时，$(x+2)^0-3(2x-6)^{-1}$有意义.

易错警示

零次幂和负整数次幂都必须要满足底数不能等于零这一条件.

考查角度4 利用负整数次幂的意义求字母的值

例10 已知$\left(\frac{4}{3}\right)^{2n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$，则$n$的值是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 不存在

导引： 观察发现所给的两个幂的底数互为倒数且不相等，而由两个幂的结果相等想到$\left(\frac{n}{m}\right)^{-p}=\left(\frac{m}{n}\right)^{p}$($m\neq0,n\neq0,p$为正整数)，说明这两个幂的指数互为相反数. 根据互为相反数的两个数的和等于0可得$2n+n-3=0$，解得$n=1$. 故选B.

答案： B

方法点拨

当遇到底数互为倒数的两个幂相等时，指数可分三种情况进行讨论：当底数不为1时，则两个幂的指数互为相反数(包括两个幂的指数同时为0)；当底数为1时，指数可以为任意有意义的数；底数为-1时，两指数同奇偶即可.

点知识4 科学记数法

1 科学记数法：

(1)如果一个数的绝对值不小于10，那么可将这个数写成$a\times10^n$($1\leqslant|a|<10$，n是正整数)的形式；

(2)如果一个数的绝对值小于1，可将这个数写成$a\times10^{-n}$(其中n是正整数，$1\leqslant|a|<10$)的形式.

上述记数方法叫做科学记数法.

2 用科学记数法表示数的方法： 用科学记数法表示一个数，就是把一个数写成$a\times10^n$($1\leqslant|a|<10$，n是非零整数)的形式，其方法是：①确定a，a是只有一位整数的数；②确定n，当原数的绝对值大于或等于10时，n为正整数，n等于原数的整数位数减去1；当原数的绝对值小于1时，n为负整数，n的绝对值等于原数中左起第一个非零数字前面零的个数(含整数数位上的零).

3 易错警示：

(1)负数用科学记数法表示时结果为负数，不要忘记符号“$-$”.

(2)绝对值小于1的数用科学记数法表示时，10的指数是负数，不要忘记符号“$-$”.

拔考向 ▶▶▶　　提分·秘诀

考查角度1 利用科学记数法表示绝对值小于1的数

例11 ［中考·镇江］氢原子的半径约为0.000 000 000 05 m，用科学记数法把0.000 000 000 05表示为_____.

导引： 本题考查了科学记数法，解题的关键是确定a和n的值. 0.000 000 000 05中左起第一个不为0的数字为5，其左边共有11个0，故$0.000\,000\,000\,05=5\times10^{-11}$.

答案： 5×10^{-11}

方法点拨

绝对值小于1的数用科学记数法表示为$a\times10^{-n}$($1\leqslant|a|<10$，n为正整数)，与绝对值大于1的数的科学记数法的表示不同的是前者的指数是负

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 （答案见193页）

11. 某种细胞的直径是0.000 067 cm，将0.000 067用科学记数法表示为_____.

考查角度2 利用科学记数法的意义把科学记数法形式的数还原成原数

例12 ［中考·莱芜］将2.03×10^{-3}化为小数是(　　)

A. 0.203　　B. 0.020 3　　C. 0.002 03　　D. 0.000 203

导引： 科学记数法的标准形式为$a\times10^{n}$($1\leqslant|a|<10$，n为整数). 本题把数据"2.03×10^{-3}"中2.03的小数点向左移动3位即可. 把数据"2.03×10^{-3}"中2.03的小数点向左移动3位得到0.002 03，即$2.03\times10^{-3}=0.002\ 03$.

答案： C

考查角度3 利用数的运算法则进行用科学记数法表示的数的计算

例13 计算：

(1)$(3\times10^{-5})\times(5\times10^{-3})$；

(2)$(-1.8\times10^{-10})\div(9\times10^{-5})$；

(3)$(2\times10^{-3})^{-2}\times(-1.6\times10^{-6})$.

导引： 用科学记数法表示的数的计算与单项式的计算相同，有乘方的先计算乘方，再计算乘除.

解： (1)原式$=(3\times5)\times(10^{-5}\times10^{-3})=1.5\times10^{-7}$.

(2)原式$=(-1.8\div9)\times(10^{-10}\div10^{-5})=-2\times10^{-6}$.

(3)原式$=\frac{1}{4}\times10^{6}\times(-1.6)\times10^{-6}=-0.4=-4\times10^{-1}$.

数，n的值等于原数左边起第一个不为0的数字前面的0的个数(含整数数位上的0).

方法点拨

将科学记数法$a\times10^{n}$($1\leqslant|a|<10$，n为整数)"还原"成原数，当$n>0$时，就是把a的小数点向右移动n位得到原数；当$n<0$时，就是把a的小数点向左移动$|n|$位得到原数.

同类变式 （答案见193页）

13. 计算：

(1)$(-3.5\times10^{-13})\times(-2\times10^{-7})$；

(2)$(5.2\times10^{-9})\div(-4\times10^{-3})$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 科学记数法在实际中的运用

例14 月球体积约为2.2×10^{10}立方千米，月球体积约是地球体积的2×10^{-2}倍，求地球的体积约为多少立方千米.

导引： 地球的体积＝月球体积÷月球体积是地球体积的倍数.

解： $(2.2\times10^{10})\div(2\times10^{-2})$

$=1.1\times10^{12}$(立方千米).

答：地球的体积约为1.1×10^{12}立方千米.

方法点拨： 用科学记数法表示的实际应用问题，与用实数解决实际问题相同，关键是列出算式，有乘方的先计算乘方，再计算乘除法.

拔尖角度2 利用幂的运算法则求值

例15 已知$10^{m}=a$，$10^{n}=b$，试求10^{2m-n}的值.

导引： 逆用幂的乘方及同底数幂的除法法则，进行运算即可.

解： $10^{2m-n}=(10^{m})^{2}\div10^{n}=a^{2}\div b=\frac{a^{2}}{b}$.

规律点拨： 本题应用逆向思维法和代入法解答. 先逆用幂的乘方和同底数幂的除法法则，将所求代数式转化为关于10^{m}和10^{n}的运算，再将10^{m}和10^{n}的值代入计算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

例 16 若 $3^3\times9^{m+4}\div27^{2m-1}$ 的值为 729，求 m 的值.

导引： 利用幂的乘方运算法则、同底数幂的乘除运算法则将原式变形，得到关于 m 的方程，从而得出答案.

解： 因为 $3^3\times9^{m+4}\div27^{2m-1}$ 的值为 729，

所以 $3^3\times(3^2)^{m+4}\div(3^3)^{2m-1}=3^6$，

所以 $3^3\times3^{2m+8}\div3^{6m-3}=3^6$，

所以 $3+2m+8-(6m-3)=6$，

解得 $m=2$.

方法点拨： 本题应用方程思想解答. 先把底数不同的幂转化为底数相同，再根据幂的运算法则得到方程，解方程即可.

拔尖角度 3 利用幂的运算巧解题

例 17 计算 $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-2\,019}$.

解： 设 $S=2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-2\,019}$①，

则 $2S=2\times2^{-1}+2\times2^{-2}+2\times2^{-3}+\cdots+2\times2^{-2\,019}=2^0+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-2\,018}=1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-2\,018}$，即 $2S=1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-2\,018}$②，由②－①得 $S=1-2^{-2\,019}$，即 $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-2\,019}=1-2^{-2\,019}=1-\frac{1}{2^{2\,019}}$.

方法点拨： 本题直接计算相当繁杂，又易出错，运用错位相减法，可简便解决问题.

练中考·练模拟 得满分 （答案见 193 页）

基础巩固练

1. 计算：$2^0\cdot2^{-3}=$（　　）

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. 0　　D. 8

2. ［中考·镇江］下列计算正确的是（　　）

A. $a^2\cdot a^3=a^6$　　B. $a^7\div a^3=a^4$

C. $(a^3)^5=a^8$　　D. $(ab)^2=ab^2$

3. 若 $a=0.3^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$，$d=\left(-\frac{1}{3}\right)^0$，则 a,b,c,d 的大小关系是（　　）

A. $a<b<c<d$　　B. $b<a<d<c$

C. $a<d<c<b$　　D. $c<a<d<b$

4. ［中考·河南］成人每天维生素 D 的摄入量约为 0.000 004 6 克. 数据“0.000 004 6”用科学记数法表示为（　　）

A. 46×10^{-7}　　B. 4.6×10^{-7}

C. 4.6×10^{-6}　　D. 0.46×10^{-5}

5. ［中考·烟台］某种计算机完成一次基本运算的时间约为 1 纳秒(ns)，已知 1 纳秒 = 0.000 000 001 秒，该计算机完成 15 次基本运算，所用时间用科学记数法表示为（　　）

A. 1.5×10^{-9}秒　　B. 15×10^{-9}秒

C. 1.5×10^{-8}秒　　D. 15×10^{-8}秒

6. ［中考·绥化］计算：$(-m^3)^2\div m^4=$_____.

7. 若 $(2a+6)^0$ 无意义，则 a 的值为_____.

8. 已知 $2^x=\frac{1}{32}$，则 $x=$_____.

9. 计算：

(1) $(a^8)^2\div a^8$；

(2) $(-m^3)^2\cdot(m^2)^3\div(m^4)^2$；

(3) $(a-b)^2\cdot(b-a)^{2n}\div(a-b)^{2n-1}$（$n$ 是正整数）；

(4) $(a^6\div a^2)^2+a^9\div a^3\cdot a^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^5$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} + (-1)^0$；

(3) $\left(\frac{1}{4}-\pi\right)^0 - 2^{-3} + (-3)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

11. 我们知道纳米(nm)是非常小的长度单位，1 nm = 10^{-9} m，用边长为 1 nm 的小正方形去铺成一个边长为 1 cm 的大正方形，求需要的小正方形的个数.

能力提升练

12. 若 $0 < x < 1$，则 x^{-1}，x，x^2 的大小关系是(　　)

A. $x^{-1} < x < x^2$　　B. $x < x^2 < x^{-1}$

C. $x^2 < x < x^{-1}$　　D. $x^2 < x^{-1} < x$

13. 若 $a^{2x} = 9$，则 a^{-x} 等于(　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\pm\frac{1}{3}$　　D. 3

14. 若 $a^{2m-2n} \cdot a^{3n} \div a^{2m} = a^2$，则 $n =$ _____.

15. [中考 · 达州] 已知 $a^m = 3$，$a^n = 2$，则 a^{2m-n} 的值为_____.

16. 已知 $5x - 3y - 2 = 0$，求 $10^{10x} \div 10^{6y}$ 的值.

思维拓展练

17. [中考 · 自贡] 阅读以下材料：

对数的创始人是苏格兰数学家纳皮尔，纳皮尔发明对数是在指数书写方式之前，直到 18 世纪瑞士数学家欧拉才发现指数与对数之间的联系.

对数的定义：一般地，若 $a^x = N(a > 0, a \neq 1)$，那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作：$x = \log_a N$. 比如指数式 $2^4 = 16$ 可以转化为 $4 = \log_2 16$，对数式 $2 = \log_5 25$ 可以转化为 $5^2 = 25$.

我们根据对数的定义可得到对数的一个性质：$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N(a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$；理由如下：

设 $\log_a M = m$，$\log_a N = n$，则 $M = a^m$，$N = a^n$.

所以 $M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，由对数的定义得 $m + n = \log_a(M \cdot N)$.

又因为 $m + n = \log_a M + \log_a N$，

所以 $\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

解决以下问题：

(1) 将指数式 $4^3 = 64$ 转化为对数式为_____；

(2) 试说明：$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N(a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0)$；

(3) 拓展运用：计算 $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4$ = _____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.2 整式乘法

核心知识

- 单项式与单项式乘除
- 多项式与单项式乘除
- 多项式乘以多项式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 单项式与单项式相乘

1 单项式的乘法法则：

单项式相乘，把系数、同底数幂分别相乘，作为积的因式；对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

要点精析///

(1)单项式的乘法法则的实质是乘法的交换律、结合律和同底数幂的乘法法则的综合运用.

(2)单项式与单项式相乘的步骤：

①确定积的系数，注意符号问题；

②同底数幂相乘；

③单独出现的字母连同它的指数作为积的一个因式保留.

(3)有乘方运算的先算乘方，再进行乘法运算.

(4)运算的结果仍为单项式.

2 拓展：单项式的乘法法则对于三个或三个以上的单项式相乘同样适用.

3 易错警示：只在一个单项式里含有的字母，在计算中容易遗漏.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用单项式的乘法法则计算

例1 计算：(1)$(-2x^2)(-3x^2y^2)^2$；

(2)$-6x^2y\cdot(a-b)^3\cdot\frac{3}{2}xy^2\cdot(b-a)^2$.

导引：(1)先算乘方，再算单项式与单项式的乘法；(2)把$a-b$看作一个整体，一般选择偶数次幂改变底数简单一些.

解：(1)原式$=-2x^2\cdot9x^4y^4$

$=-18x^6y^4$.

(2)原式$=-6x^2y\cdot\frac{3}{2}xy^2\cdot(a-b)^3\cdot(a-b)^2$

$=-9x^3y^3(a-b)^5$.

方法点拨

单项式与单项式相乘，要依据其法则把系数、同底数幂、独立的字母因式依次运算；要注意积的符号，不要漏掉只在一个单项式里含有的字母.

考查角度2 利用单项式的乘法法则进行单项式乘法与加减的混合运算

例2 计算：$0.5x^2y\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2-(-2x)^3\cdot xy^3$.

导引：先算乘方，再算乘法，最后合并同类项.

解：原式$=\frac{1}{2}x^2y\cdot\frac{1}{4}x^2y^2-(-8x^3)\cdot xy^3$

$=\frac{1}{8}x^4y^3+8x^4y^3=\frac{65}{8}x^4y^3$.

方法点拨

在单项式乘法与加减的混合运算中，实数的运算顺序同样适用；如果单项式的系数既有小数又有分数，通常把小数化为分数，再进行计算；计算结

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 （答案见194页）

2. 计算：

$(-8ab^3)\cdot\left(-\frac{1}{4}ab\right)-\left(\frac{1}{2}ab^2\right)^2$.

果有同类项的要进行合并，如果系数是带分数，要写成假分数形式.

点知识 2 单项式除以单项式

1 单项式除以单项式法则：

单项式相除，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式；对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

要点精析///

(1) 单项式除以单项式可从三个方面入手：

①系数相除；

②同底数幂相除；

③被除式里独有的字母连同指数写下来.

(2) 单项式除以单项式实质上就是利用法则把它转化成同底数幂相除.

(3) 单项式除以单项式的结果还是单项式(这里指的是被除式能被除式整除的情况).

2 易错警示：

(1) 只在被除式里含有的字母及其指数是商的一个因式，容易漏掉；

(2) 不注意运算顺序而产生错误.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用单项式除以单项式法则计算

例3 计算：

(1) $-12x^5y^3z\div3x^4y$；

(2) $\left(-\frac{2}{5}a^3b^4\right)\div\left(-\frac{1}{4}ab^2\right)$.

导引： 解题的依据是单项式除以单项式法则. 计算时，要弄清两个单项式的系数各是什么，哪些是同底数幂，哪些是只在被除式里含有的字母，此外，还要特别注意系数的符号.

解： (1) 原式 $=(-12\div3)x^{5-4}y^{3-1}z=-4xy^2z$.

(2) 原式 $=\left[-\frac{2}{5}\div\left(-\frac{1}{4}\right)\right]a^{3-1}b^{4-2}=\frac{8}{5}a^2b^2$.

方法点拨

单项式除以单项式时，尽量按字母的顺序去写，并依据法则将其转化为同底数幂相除来完成；计算时要特别注意符号的变化，不要漏掉只在被除式中含有的因式.

考查角度2 单项式除以单项式法则的综合运用

例4 已知 $(-3x^4y^3)^3\div\left(-\frac{3}{2}x^ny^2\right)=mx^8y^7$，求 $n-m$ 的值.

导引： 先利用单项式除以单项式法则计算等号左边的式子，再与等号右边的式子进行比较求解.

解： 因为 $(-3x^4y^3)^3\div\left(-\frac{3}{2}x^ny^2\right)=(-27x^{12}y^9)\div\left(-\frac{3}{2}x^ny^2\right)=18x^{12-n}y^7$，

所以 $18x^{12-n}y^7=mx^8y^7$，所以 $m=18$，$12-n=8$，

所以 $n=4$，所以 $n-m=4-18=-14$.

方法点拨

本题运用了方程思想求解. 通过单项式除以单项式法则把条件中的等式的左边化简成一个单项式，再通过单项式的特征对比构造方程是解题的关键.

同类变式 （答案见194页）

4. 已知 $2(a^mb^3)^2\div\left(-\frac{1}{2}a^2b^n\right)=ka^6b^4$，求 $\frac{1}{m^n}+\frac{1}{k}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 单项式与多项式相乘

1 单项式与多项式的乘法法则：

单项式与多项式相乘，用单项式和多项式的每一项分别相乘，再把所得的积相加.

用字母表示为 $n(a+b+c)=na+nb+nc$.

要点精析///

(1)单项式与多项式相乘，实质上是利用乘法分配律将其转化为单项式与单项式相乘的积的和.

(2)单项式与多项式相乘，结果是一个多项式，其项数与因式中多项式的项数相同.

(3)计算过程中要注意符号，单项式与多项式的每一项相乘时，要包括它前面的符号，同时还要注意单项式的符号.

(4)对于混合运算，应注意运算顺序；最后有同类项时，必须合并同类项从而得到最简结果.



2 易错警示：

(1)法则中的每一项，是指含符号的每一项，容易出现符号错误.

(2)运用乘法分配律计算单项式乘以多项式时不要漏乘项，特别是常数项.

核考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用单项式与多项式的乘法法则计算

例5 计算：

(1)$(-5x)(2x^2-3x+1)$；

(2)$x^2(3-x)-x(-x^2-2x+1)$.

导引： 直接根据单项式与多项式的乘法法则进行计算，把“单×多”转化为“单×单”.

解： (1)原式$=(-5x)\cdot 2x^2+(-5x)\cdot(-3x)+(-5x)\cdot 1$

$=-10x^3+15x^2-5x$.

(2)原式$=3x^2-x^3+x^3+2x^2-x$

$=5x^2-x$.

方法点拨

单项式与多项式相乘时，依据法则将其转化为单项式与单项式相乘的积的和，每两项相乘的积用“+”相连，然后按单项式的乘法法则逐个计算，注意符号不要出错.

考查角度2 利用单项式与多项式的乘法法则进行化简求值

例6 先化简，再求值：$x^2(3-x)+x(x^2-2x)+1$，其中$x=-3$.

导引： 先根据单项式与多项式的乘法法则计算，再合并同类项，将结果化为最简形式，最后将数值代入化简后的式子求值.

解： 原式$=3x^2-x^3+x^3-2x^2+1$

$=x^2+1$.

当$x=-3$时，原式$=(-3)^2+1=10$.

方法点拨

化简求值的题目，先化简再求值，化简的过程包括整式的乘法与加减法运算，求值的过程就是直接代入求值.

点知识 4 多项式除以单项式

1 多项式除以单项式法则：

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

要点精析///

(1)多项式除以单项式一般分两步进行：

①多项式的每一项除以单项式；

②把每一项除得的商相加.

(2)多项式除以单项式的实质就是转化为单项式除以单项式.

(3)商式的项数与多项式的项数相同.

(4)用多项式的每一项除以单项式时，包括每一项的符号.

2 易错警示：

(1)多项式除以单项式时注意不要漏项；

(2)多项式除以单项式时符号易出错.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用多项式除以单项式法则计算

例7 计算:(1)$(9a^3-21a^2+6a)\div(-3a)$;

(2)$\left(\frac{2}{3}a^5b^8-2a^2b^6\right)\div\left(\frac{1}{3}ab^3\right)^2$.

导引: (1)直接利用多项式除以单项式法则计算;

(2)应先算乘方,再利用多项式除以单项式法则计算.

解: (1)原式$=9a^3\div(-3a)+(-21a^2)\div(-3a)+6a\div(-3a)$

$=-3a^2+7a-2$.

(2)原式$=\left(\frac{2}{3}a^5b^8-2a^2b^6\right)\div\frac{1}{9}a^2b^6=\frac{2}{3}a^5b^8\div\frac{1}{9}a^2b^6+(-2a^2b^6)\div\frac{1}{9}a^2b^6$

$=6a^3b^2-18$.

方法点拨

多项式除以单项式实质是转化为单项式除以单项式的商的和,计算时应注意逐项相除,不要漏项,并且要注意符号的变化,最后的结果通常要按某一字母升幂或降幂的顺序排列.

同类变式 (答案见194页)

7. 计算:

(1)$(12a^3-6a^2+3a)\div3a$;

(2)$(21x^4y^3-35x^3y^2+7x^2y^2)\div(-7x^2y)$.

考查角度2 利用整式的除法法则化简求值

例8 已知$2a-b=6$,求代数式$[a^2+b^2+2b(a-b)-(a^2-2ab+b^2)]\div4b$的值.

导引: 先将原式化简,再将$2a-b$视为一个整体代入,求出代数式的值.

解: 原式$=(a^2+b^2+2ab-2b^2-a^2+2ab-b^2)\div4b$

$=(-2b^2+4ab)\div4b$

$=-\frac{1}{2}b+a$

$=\frac{1}{2}(2a-b)$

$=\frac{1}{2}\times6$

$=3$.

技巧点拨

本题运用整体思想求解,这里只需将所得结果转化成含$2a-b$的式子便可得解.

点知识 5 多项式与多项式相乘

1 多项式与多项式的乘法法则:

多项式与多项式相乘,先用一个多项式的每一项与另一个多项式的每一项相乘,再把所得的积相加.用字母表示为$(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn$.

要点精析///

(1)该法则的本质是将多项式与多项式相乘最终转化为几个单项式乘积的和的形式.

(2)多项式与多项式相乘,结果仍为多项式,但通常有同类项合并,在合并同类项之前,积的项数应等于两个多项式的项数之积.

2 拓展: 本法则也适用于多个多项式相乘,按顺序先将前两个多项式相乘,再把乘积和第三个多项式相乘,依此类推.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度1 利用多项式与多项式的乘法法则计算

例9 计算：

(1)$\left(-3x+\frac{3}{4}\right)\left(2x-\frac{1}{4}\right)$；

(2)$(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

导引： 先利用多项式与多项式的乘法法则将多项式与多项式相乘转化为单项式与单项式相乘，再进行计算，在转化过程中要做到不重不漏.

解： (1)$\left(-3x+\frac{3}{4}\right)\left(2x-\frac{1}{4}\right)$

$=-3x\cdot 2x+(-3x)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}\times 2x+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-6x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}x-\frac{3}{16}$

$=-6x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{16}$.

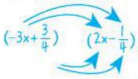
(2)$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a\cdot a^2+a\cdot ab+a\cdot b^2+(-b)\cdot a^2+(-b)\cdot ab+(-b)\cdot b^2$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$.

方法点拨

多项式与多项式相乘，为了做到不重不漏，可以用“箭头法”标注求解.如计算$\left(-3x+\frac{3}{4}\right)\left(2x-\frac{1}{4}\right)$时，可在草稿纸上进行如下标注：，再根据箭头指示计算即可.

同类变式 （答案见194页）

9. 计算：

(1)$(x+y-2)(x-y)$.

(2)$(x+3)(x-7)-x(x-\frac{1}{2})$.

考查角度2 利用多项式乘以多项式的积中项的特征求待定字母的值

例10 若$(x+4)(x-6)=x^2+ax+b$，求a^2+ab的值.

导引： 先将等式左边计算出来，再与等式右边各项对比，从而得出结果.

解： 因为$(x+4)(x-6)=x^2-6x+4x-24=x^2-2x-24$，

所以$x^2-2x-24=x^2+ax+b$，

所以$a=-2,b=-24$.

所以$a^2+ab=(-2)^2+(-2)\times(-24)=4+48=52$.

方法点拨

解答本题的关键是利用多项式与多项式的乘法法则计算等式左边的式子，然后根据等式左右两边相等时“对应项的系数相等”来确定出待定字母的值，进而求解.

同类变式 （答案见194页）

10. $\left(\frac{1}{2}x^2-ax-b\right)(x+2)$的结果中不含$x$的二次项和一次项，则$b^a=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用整式的乘法解方程或不等式

例 11 解方程或不等式：

(1)$(3x-2)(2x-3)=(x-1)(6x+5)$；

(2)$(x^2+2x+3)(2x-5)>x^2(2x-1)+1$.

导引： 利用整式乘法去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 后，即可求出方程的解和不等式的解集.

解： (1)去括号，得$6x^2-9x-4x+6=6x^2+5x-6x-5$，移项、合并同类项，得$-12x=-11$，系数化为 1，得$x=\frac{11}{12}$.

(2)去括号，得$2x^3-5x^2+4x^2-10x+6x-15>2x^3-x^2+1$，移项、合并同类项，得$-4x>16$，系数化为 1，得$x<-4$.

方法点拨： 利用整式的乘法解方程、不等式的关键是利用整式乘法的运算法则将方程、不等式化简，然后利用解方程、不等式的步骤进行解答.

拔尖角度 2 利用数形结合思想巧解整式的运算

例 12 7 张如图8. 2-1①所示的长为 a，宽为 b $(a>b)$的小长方形纸片，按图 8. 2-1②的方式不重叠地放在长方形 $ABCD$ 内，未被覆盖的部分(两个长方形)用阴影表示. 设左上角与右下角的阴影部分的面积的差为 S，当 BC 的长度变化时，按照同样的放置方式，S 始终保持不变，则 a，b 满足的关系式为_____.

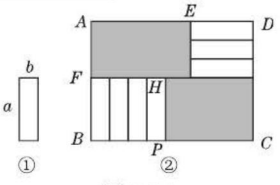


图 8. 2-1

导引： 用代数式表示出左上角与右下角阴影部分的面积，求出它们的差，根据面积差与 BC 无关即可求出 a 与 b 的关系式. 具体过程如下：

如图 8. 2-1②，左上角阴影部分的长为 AE，宽为 $AF=3b$，右下角阴影部分的长为 PC，宽为 $PH=a$.

因为 $AD=BC$，且 $AD=AE+ED=AE+a$，$BC=BP+PC=4b+PC$，

所以 $AE+a=4b+PC$，

即 $AE=PC+4b-a$.

所以 $S=AE\cdot AF-PC\cdot PH=3b\cdot AE-a\cdot PC=3b(PC+4b-a)-a\cdot PC=(3b-a)\cdot PC+12b^2-3ab$.

易得 $3b-a=0$，所以 $a=3b$.

答案： $a=3b$

拔尖角度 3 利用待定系数法探究多项式整除多项式的问题

例 13 已知多项式x^3+ax^2+bx-4能被多项式x^2+3x-4整除，求 a，b 的值.

导引： 由被除式与除式次数最高的项，可知商式次数最高的项为 x，所以商式可以设为 $x+m$，将x^2+3x-4与 $x+m$ 相乘可以得到与x^3+ax^2+bx-4相等的多项式，对比系数即可得解.

解： 设$x^3+ax^2+bx-4=(x^2+3x-4)(x+m)$，整理得$x^3+ax^2+bx-4=x^3+(m+3)x^2+(3m-4)x-4m$，

对比两边的系数得$\begin{cases}a=m+3,\\b=3m-4,\\-4=-4m.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=4,\\b=-1,\\m=1.\end{cases}$

故 a，b 的值分别为 4，-1.

规律点拨： 根据乘、除法之间是互逆运算，将多项式与多项式的除法运算转化为多项式与多项式的乘法运算.设出商式，列出整式乘法的式子，然后利用恒等性求出待定系数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

解读“恒等式”

一、等式分为三类

(1)条件等式：在一定条件下成立的等式叫做条件等式. 如：一元一次方程就是条件等式.

(2)恒等式：等式中的字母无论取何值，等式都成立，这样的等式叫做恒等式. 如：下节将要讲的乘法公式是恒等式.

(3)矛盾等式：等式中的字母无论取何值，等式都不能成立，这样的等式叫做矛盾等式.

二、方程 $ax=b$ 解的情况与等式类别的对比

①当 $a\neq0$ 时，方程有唯一解，此等式为条件等式；

②当 $a=0,b=0$ 时，方程有无数个解，此等式为恒等式；

③当 $a=0,b\neq0$ 时，方程无解，此等式为矛盾等式.

三、恒等式性质的应用

应用一：若等式 $ax=b$ 是恒等式，则 $a=0$，$b=0$.

【例1】甲、乙二人共同计算一道整式乘法题：$(2x+a)(3x+b)$，甲抄错了第一个多项式中 a 的符号，得到的结果为 $6x^2+11x-10$，乙漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果为 $2x^2-9x+10$. 求 a,b 的值.

解：根据题意，得 $(2x-a)(3x+b)=6x^2+11x-10$；$(2x+a)(x+b)=2x^2-9x+10$.

所以 $6x^2+(2b-3a)x-ab=6x^2+11x-10$，

$2x^2+(2b+a)x+ab=2x^2-9x+10$.

所以 $(2b-3a-11)x=ab-10$，$(a+2b+9)x=10-ab$，

所以 $2b-3a-11=0$，$ab-10=0$，$a+2b+9=0$，$10-ab=0$，所以 $a=-5$，$b=-2$.

应用二：利用恒等式的定义解题

【例2】已知二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式 $(x+3)$，求另一个因式及 m 的值.

解：设另一个因式为 $(x+n)$，则 $(x+3)(x+n)=x^2-4x+m$.

根据整式乘法是恒等变形，将 $x=-3$ 代入左右两边得 $0=9+12+m$，

所以 $m=-21$.

所以 $x^2-4x-21=(x+3)(x+n)$，

所以 $n=-7$，所以另一个因式为 $(x-7)$.

规律点拨： 若某个等式是恒等式，则等式中的字母为任何值时等式都成立.

练中考·练模拟 得满分 (答案见194页)

基础巩固练

1. [中考·邵阳] 以下计算正确的是(　　)

A. $(-2ab^2)^3=8a^3b^6$

B. $3ab+2b=5ab$

C. $(-x^2)\cdot(-2x)^3=-8x^5$

D. $2m(mn^2-3m^2)=2m^2n^2-6m^3$

2. 计算 $(2x-3)(3x+4)$ 的结果，与下列哪一个式子相同？(　　)

A. $-7x+4$　　B. $-7x-12$

C. $6x^2-12$　　D. $6x^2-x-12$

3. [中考·河北] 小明总结了以下结论：

①$a(b+c)=ab+ac$；

②$a(b-c)=ab-ac$；

③$(b-c)\div a=b\div a-c\div a(a\neq0)$；

④$a\div(b+c)=a\div b+a\div c(a\neq0)$.

其中一定成立的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 如果 $(x^2+px+q)(x^2-3x+2)$ 的计算结果中不含 x^2 项和 x 项，那么(　　)

A. $p=0,q=0$　　B. $p=-3,q=9$

C. $p=\frac{6}{7},q=\frac{4}{7}$　　D. $p=-3,q=1$

5. 一个多项式与 $-x^3y$ 的积为 $x^6y^2-3x^4y-x^3y^4z$，那么这个多项式为_____.

6. [中考·玉林] 已知 $ab=a+b+1$，则 $(a-1)(b-1)=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 已知代数式 $2x-y$ 的值为 3.

(1)代数式 $4x-2y-3$ 的值为_____;

(2)代数式 $3-x+\frac{y}{2}$ 的值为_____.

8. 计算:

(1)$\left(\frac{2}{3}a^2b^3\right)^3\div\left(\frac{1}{3}ab^2\right)^2\cdot\frac{3}{4}a^3b^2$;

(2)$[(2x^2y)^2(-2xy)^3-xy^2(-4xy^2)^2]\div 8x^2y^3$;

(3)$(2x+3)(3x-2)-(2x-3)(x-2)$;

(4)$(x-2y+3)(x+2y+1)$.

9. 已知 $x^2+x-1=0$,求 x^3+2x^2+3 的值.

10. 先化简,再求值:

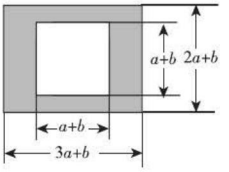
(1)$(x+2y)(2x+y)-(3x-y)(x+2y)$,其中 $x=9,y=\frac{1}{2}$;

(2)$\left(3x^3y-x^2y^2+\frac{1}{2}x^2y\right)\div\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$,其中 $x=-2,y=3$.

11. 如图,某市有一块长为 $(3a+b)$ 米、宽为 $(2a+b)$ 米的长方形地,中间是边长为 $(a+b)$ 米的正方形,规划部门计划在中间的正方形处修建一座雕像,四周的阴影部分进行绿化.

(1)绿化面积是多少平方米(用含字母 a,b 的式子表示)?

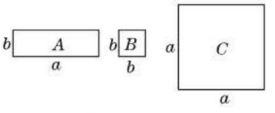
(2)求出当 $a=10,b=12$ 时的绿化面积.



(第 11 题图)

能力提升练

12. 小思同学用如图所示的 A,B,C 三类卡片若干张,拼出了一个长为 $2a+b$、宽为 $a+b$ 的长方形. 请你通过计算求出小思同学拼这个长方形所用 A,B,C 三类卡片各几张(要求:所拼图形中,卡片之间不能重叠,不能有空隙),并画出他的拼图示意图.



(第 12 题图)

13. 解方程:$(x-1)(2x+1)=(2x-1)(x+2)$.

【导学号:2231921】

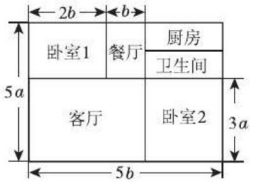
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

14. 已知一个多项式与单项式 $-7x^5y^4$ 的积为 $21x^5y^7-28x^6y^5+7y(2x^3y^2)^3$，求这个多项式.

15. 甲、乙两人共同计算一道整式乘法题：$(2x+a)(3x+b)$. 甲由于把第一个多项式中的“$+a$”看成了“$-a$”，得到的结果为 $6x^2-19x+5$；乙由于漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果为 $2x^2+x+5$.
(1)求 a,b 的值；
(2)计算这道题的正确结果.

16. 已知 $6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a=(2x-3y+b)(3x+y+c)$，求 a,b,c 的值.

17. 小宁家买了一套新房，其结构如图所示(单位：m). 施工方已经把卫生间和厨房根据合同约定铺上了地板砖，小宁打算把卧室1铺上地毯，其余的铺上地板砖. 问：
(1)小宁至少需要买多少平方米的地板砖？
(2)如果这种地板砖每平方米 m 元，那么至少要花多少元？



(第17题图)

思维拓展练

18. 探索规律：$(x-1)(x+1)=x^2-1$，
$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$，
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1\cdots\cdots$
(1)试求 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ 的值；
(2)试求 $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ 的值；
(3)试猜想 $3^{2\,019}+3^{2\,018}+3^{2\,017}+\cdots+3^2+3+1$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.3 完全平方公式与平方差公式

核心知识
- 完全平方公式
- 平方差公式

知识链接

乘法公式 → 完全平方公式、平方差公式

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 完全平方公式

1 完全平方公式：

两个数的和(或差)的平方，等于这两个数的平方和加(或减)这两个数乘积的2倍.

用式子表示为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

要点精析///

(1)弄清公式的特征

公式的左边是一个二项式的完全平方，公式的右边是一个三项式，其中两项是左边二项式的各项的平方，另一项是左边两项的乘积的两倍.

(2)理解字母a，b的意义

公式中的字母a，b可以表示具体的数，也可以表示含字母的单项式或多项式.

(3)学会用口诀加深记忆

对于公式$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$，可以用下面简单的口诀来记忆：头平方和尾平方，头(乘)尾两倍在中央，中间符号照原样.

2 拓展： 利用完全平方公式，可得到$a+b$，ab，$a-b$，a^2+b^2有下列重要关系：

①$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$；

②$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

3 易错警示：

不要出现形如$(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$的错误. 为了防止出现类似错误，要明确以下三点：

(1)意义不同：$(a\pm b)^2$表示数a与数b和(或差)的平方；$a^2\pm b^2$表示数a的平方与数b的平方的和(或差).

(2)读法不同：$(a\pm b)^2$读作a，b两数和(或差)的平方；$a^2\pm b^2$读作a，b两数平方的和(或差).

(3)运算顺序不同：$(a\pm b)^2$是先算a，b两数的和(或差)，后算和(或差)的平方；$a^2\pm b^2$是先算a^2与b^2，后算a^2与b^2的和(或差).

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用完全平方公式计算

例1 运用完全平方公式计算：

(1)$(-2x+5)^2$；(2)$(-m-2n)^2$；

(3)$(3x-2y)^2$.

导引： 先将算式利用$(-a+b)^2=(a-b)^2$，$(-a-b)^2=(a+b)^2$进行适当变形，再利用完全平方公式计算.

解： (1)原式$=(2x-5)^2=(2x)^2-2\times2x\cdot5+5^2=4x^2-20x+25$.

(2)原式$=(m+2n)^2=m^2+2\cdot m\cdot2n+(2n)^2=m^2+4mn+4n^2$.

(3)原式$=(3x)^2-2\times3x\cdot2y+(2y)^2=9x^2-12xy+4y^2$.

方法点拨

在应用公式$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$时关键是弄清题目中哪一个相当于公式中的a，哪一个相当于公式中的b，同时还要确定用两数和的完全平方公式还是两数差的完全平方公式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用完全平方公式求值

例2 已知 $a^2+b^2=13, ab=6$，求 $(a+b)^2, (a-b)^2$ 的值.

导引： 利用完全平方公式展开，得到含两数的平方和与这两数积的两倍的式子，再将条件代入求解.

解： 因为 $a^2+b^2=13, ab=6$，

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=13+2\times6=25$，$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=13-2\times6=1$.

同类变式 （答案见195页）

2. 已知 $a+b=5, ab=-6$，求下列各式的值.

(1) a^2+b^2；(2) $(a-b)^2$.

技巧点拨

运用完全平方公式求代数式的值时，经常会用到以下几种变形：① $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$；② $(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$；③ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$；④ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

知识 2 平方差公式

1 平方差公式：

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差.

用式子表示为 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

要点精析///

(1) 公式特点：公式左边是两个二项式相乘，这两项中有一项相同，另一项互为相反数；等号的右边是乘式中两项的平方差（相同项的平方减去相反项的平方）.

(2) 在运用公式时，要分清哪个数相当于公式中的 a，哪个数相当于公式中的 b，不要混淆.

(3) 公式中的 a 与 b 可以是具体的数，也可以是含字母的单项式或多项式.

(4) 平方差公式可以逆用，即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

2 拓展：

平方差公式可以连续使用，只要符合公式的特点即可.

3 易错警示：

(1) 公式中的 a 与 b 不是单个数字或字母时，运用公式忘加括号.

(2) 在运用公式时，没有对号入座.

核心考向

提分·秘诀

考查角度1 利用平方差公式计算

例3 计算：(1) $(3x+2)(3x-2)$；

(2) $(b+2a)(2a-b)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}xy-3m\right)(-3m-0.5xy)$.

导引： 符合平方差公式特点的，紧扣公式特征，找出公式中的“a”“b”，用平方差公式直接进行计算；而对于一些不符合平方差公式特点的式子，要先将式子化为两个数的和与这两个数的差的积的形式，再运用平方差公式计算.

解： (1) 原式 $=(3x)^2-2^2=9x^2-4$.

(2) 原式 $=(2a+b)(2a-b)=(2a)^2-b^2=4a^2-b^2$.

(3) 原式 $=-\left(\frac{1}{2}xy-3m\right)\left(\frac{1}{2}xy+3m\right)$

$=-\left[\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-(3m)^2\right]=9m^2-\frac{1}{4}x^2y^2$.



方法点拨

本题运用转化思想求解，将不符合平方差公式形式的式子化为符合平方差公式形式的式子，常见的转化方法有位置变化、符号变化、系数变化、指数变化等.

易错警示

运用平方差公式时，当 a，b 表示的式子不是单个数字或字母时，要用括号括起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平方差公式化简求值

例4 [中考·南宁]先化简,再求值:$(1+x)(1-x)+x(x+2)-1$,其中$x=\frac{1}{2}$.

导引: 利用平方差公式、单项式与多项式的乘法法则,将代数式进行化简,然后把$x=\frac{1}{2}$代入到化简后的代数式求值.

解: $(1+x)(1-x)+x(x+2)-1$

$=1-x^2+x^2+2x-1$

$=2x$,

当$x=\frac{1}{2}$时,原式$=2\times\frac{1}{2}=1$.

方法点拨

解答本类题的关键是先利用平方差公式将原式化简,同时有同类项的要合并同类项,再将字母的值代入即可得解.

同类变式 (答案见196页)

4. 先化简,再求值:

(1)[中考·株洲]$(x-1)(x+1)-x(x-3)$,其中$x=3$;

(2)$(5a+3b)(3b-5a)-(3a-b)(-b-3a)+(2b-3a)(-2b-3a)$,其中$a=\frac{1}{7}$,$b=-\frac{1}{2}$.

考查角度3 利用乘法公式简化运算

例5 利用乘法公式计算:

(1)199.5×200.5;

(2)$2\,018\times2\,020-2\,019^2$;

(3)$2\,002^2$;

(4)$2\,020^2-4\,040\times2\,019+2\,019^2$.

导引: 解题的关键是将各式化为平方差公式或者完全平方公式进行运算,从而得出结果.

解: (1)原式$=(200-0.5)(200+0.5)$

$=200^2-0.5^2$

$=40\,000-0.25$

$=39\,999.75$.

(2)原式$=(2\,019-1)(2\,019+1)-2\,019^2$

$=2\,019^2-1-2\,019^2$

$=-1$.

(3)原式$=(2\,000+2)^2$

$=2\,000^2+2\times2\times2\,000+2^2$

$=4\,000\,000+8\,000+4$

$=4\,008\,004$.

(4)原式$=2\,020^2-2\times2\,020\times2\,019+2\,019^2$

$=(2\,020-2\,019)^2$

$=1^2$

$=1$.

方法点拨

运用平方差公式计算两数的乘积问题,关键是找到这两个数的平均数,再将原来的两个数与这个平均数进行比较,变形成两数的和与这两数的差的积的形式,进而利用平方差公式求解.运用完全平方公式解决计算问题时,若是单独的一个数的平方,可以将其变成两个数的和或差的平方的形式,再利用完全平方公式展开即可.若是多个数的运算,则需要观察其形式是否符合"首平方、尾平方、首尾之积的2倍在中间"的形式,若符合则可逆用完全平方公式进行运算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4 利用乘法公式进行计算

例6 计算：

(1) $(2x-1)^2-(3x+1)^2$；

(2) $(a-b)^2\cdot(a+b)^2$；

(3) $(x+y)(-x+y)(x^2-y^2)$.

导引： 对于(1)，可分别利用完全平方公式计算，再合并同类项；对于(2)，可以把底数 $a-b$，$a+b$ 分别看作一个整体，然后逆用积的乘方法则，再利用平方差公式和完全平方公式进行计算；对于(3)，先利用平方差公式计算前两个因式的积，再利用完全平方公式进行计算.

解： (1) 原式 $=4x^2-4x+1-(9x^2+6x+1)$

$=4x^2-4x+1-9x^2-6x-1$

$=-5x^2-10x$.

(2) 原式 $=[(a-b)(a+b)]^2$

$=(a^2-b^2)^2$

$=a^4-2a^2b^2+b^4$.

(3) 原式 $=-(x+y)(x-y)(x^2-y^2)$

$=-(x^2-y^2)(x^2-y^2)$

$=-(x^2-y^2)^2$

$=-(x^4-2x^2y^2+y^4)$

$=-x^4+2x^2y^2-y^4$.

技巧点拨

在解答与乘法公式有关的比较复杂的整式计算问题时，要注意观察题目中给出的算式的结构特征，灵活运用平方差公式和完全平方公式求解；在同时能用平方差公式和完全平方公式时，尽量先用平方差公式.

考查角度5 利用添括号结合乘法公式进行计算

例7 计算：

(1) $(a-m+2n)^2$；

(2) $(2x-y-3)(2x-y+3)$.

导引： 对于(1)，括号内有三项，可将其中的两项添括号视为一个整体，再运用完全平方公式求解；对于(2)，是两个三项式相乘，可将符号相同的项添括号当作平方差公式中的 a，符号相反的项当作平方差公式中的 b，运用平方差公式计算后再利用完全平方公式计算可获解.

解： (1) 原式 $=[(a-m)+2n]^2$

$=(a-m)^2+4n(a-m)+4n^2$

$=a^2-2am+m^2+4an-4mn+4n^2$.

(2) 原式 $=[(2x-y)-3][(2x-y)+3]$

$=(2x-y)^2-3^2$

$=4x^2-4xy+y^2-9$.

技巧点拨

本题运用了整体思想求解.对于平方式中底数是三项的，可通过添括号将其中任意两项视为一个整体，就符合完全平方公式特点了；对于两个多项式的乘积中各项均为三项或四项的，可将符号相同的项及符号相反的项分别添括号视为一个整体，化成符合平方差公式的形式，通过平方差公式展开再利用完全平方公式展开，最后合并同类项得出结果.

同类变式 (答案见196页)

7. 计算：

(1) $(x+2y-z)^2$；

(2) $(a-2b+c)(a+2b-c)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用乘法公式说理

例 8 试说明$\left(\frac{1}{4}m^3+2n\right)\left(\frac{1}{4}m^3-2n\right)+(2n-4)(4+2n)$的值与 n 的取值无关.

导引: 前后两项都符合平方差公式的形式,故先运用平方差公式展开,再合并同类项.

解: $\left(\frac{1}{4}m^3+2n\right)\left(\frac{1}{4}m^3-2n\right)+(2n-4)(4+2n)$

$=\left(\frac{1}{4}m^3\right)^2-(2n)^2+(2n)^2-4^2$

$=\frac{1}{16}m^6-4n^2+4n^2-16$

$=\frac{1}{16}m^6-16.$

所以原式的值与 n 的取值无关.

方法点拨: 如果一个多项式化简后某一字母项的系数为 0,就说明这个多项式的值与这个字母的取值无关;反过来,如果一个多项式的值与某一字母的取值无关,那么化简后该字母项的系数为 0.

拔尖角度 2 巧构乘法公式解决复杂计算

例 9 计算$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$. ($n$ 为正整数)

导引: 本题主要考查平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 要计算本题,一般先计算每一个括号内的式子,然后再求它们的积,这样计算是复杂的,也是不必要的,我们不妨考虑用平方差公式来解决,即在原式上乘以$(2-1)$,同时再除以$(2-1)$即可.

解: $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$

$=\frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)}{2-1}$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$

$\cdots$

$=(2^{2^n})^2-1$

$=2^{2^{n+1}}-1.$

技巧点拨: 本题中的因式全是和的形式,在算式的前面乘以$(2-1)$,然后连续运用平方差公式可达到简便计算的目的.

拔尖角度 3 利用乘法公式找规律

例 10 [规律探索题] 观察下列各式:

$1^2+(1\times2)^2+2^2=(1\times2+1)^2$;

$2^2+(2\times3)^2+3^2=(2\times3+1)^2$;

$3^2+(3\times4)^2+4^2=(3\times4+1)^2$;

……

请你根据以上规律,写出第 n 个式子,并验证其正确性. (n 为正整数)

导引: 通过观察可以发现:各式等号左边是两个连续自然数的平方与这两个数乘积的平方的和;各式等号右边是这两个自然数的乘积与 1 的和的平方.

解: $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

验证如下:

因为 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2$

$=n^2+(n^2+n)^2+n^2+2n+1$

$=n^2+n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$,

$[n(n+1)+1]^2$

$=[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1$

$=(n^2+n)^2+2n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+n^2+2n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$,

所以 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

规律点拨: 解答本类问题,一般先从题目所给的几个等式出发找到存在的共同规律,再根据这个规律得到一般性的结论,有时还需要验证其正确性. 本题体现了从特殊到一般的思想.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见196页）

基础巩固练

1. ［中考·眉山］下列运算正确的是(　　)

A. $2x^2y+3xy=5x^3y^2$

B. $(-2ab^2)^3=-6a^3b^6$

C. $(3a+b)^2=9a^2+b^2$

D. $(3a+b)(3a-b)=9a^2-b^2$

2. ［中考·贵阳］选择计算$(-4xy^2+3x^2y)\cdot(4xy^2+3x^2y)$的最佳方法是(　　)

A. 运用多项式与多项式的乘法法则

B. 运用平方差公式

C. 运用单项式与多项式的乘法法则

D. 运用完全平方公式

3. ［中考·河北］将9.5^2变形正确的是(　　)

A. $9.5^2=9^2+0.5^2$

B. $9.5^2=(10+0.5)(10-0.5)$

C. $9.5^2=10^2-2\times10\times0.5+0.5^2$

D. $9.5^2=9^2+9\times0.5+0.5^2$

4. ［期中·合肥蜀山区］若$x^2+mxy+\frac{25}{4}y^2$是完全平方式，则常数m的值为(　　)

A. 5　　B. -5　　C. ±5　　D. $\pm\frac{25}{2}$

5. ［中考·无锡］计算：$(a+3)^2=$_____.

6. ［中考·宁夏］已知$m+n=12$，$m-n=2$，则$m^2-n^2=$_____.

7. ［中考·枣庄］若$m-\frac{1}{m}=3$，则$m^2+\frac{1}{m^2}=$_____.

8. 计算：

(1)$(x+1)^2-(x+2)(x-2)$；

(2)$(x+2y)^2-(x-2y)^2$；

(3)$(m+2)(m-2)(m^2-4)$；

(4)$(x-2y+3)(x+2y-3)$.

9. ［中考·宁波］先化简，再求值：

$(2+x)(2-x)+(x-1)(x+5)$，其中$x=\frac{3}{2}$.

能力提升练

10. ［中考·乐山］已知实数a，b满足$a+b=2$，$ab=\frac{3}{4}$，则$a-b=$(　　)

A. 1　　B. $-\frac{5}{2}$　　C. ±1　　D. $\pm\frac{5}{2}$

11. ［中考·南昌］已知$(m-n)^2=8$，$(m+n)^2=2$，则m^2+n^2等于(　　)

A. 10　　B. 6　　C. 5　　D. 3

12. 解不等式：

$(2x-1)^2-(1-3x)^2<5(1-x)(x+1)$.

13. 如果一个正整数能够表示为两个连续奇数的平方差，那么称这个正整数为“奇特数”，如：

①$8=3^2-1^2$，②$16=5^2-3^2$，

③$24=7^2-5^2$……

因此8，16，24都是奇特数.

(1)写出第④个等式；

(2)设两个连续奇数为$2n-1$和$2n+1$(n为正整数)，那么由这两个连续奇数构造的奇特数是8的倍数吗？为什么？

思维拓展练

14. (1)［中考·百色］观察下列各式的规律：

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$，

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$，

$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$，

……

可得到$(a-b)(a^{2\,019}+a^{2\,018}b+\cdots+ab^{2\,018}+b^{2\,019})=$_____.

(2)猜想：

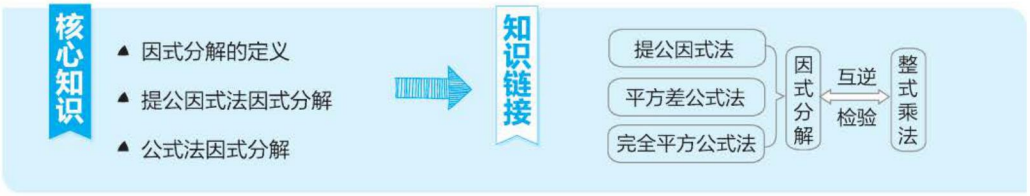
$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=$_____(其中$n$为正整数，且$n\geqslant2$).

(3)利用(2)猜想的结论计算：

$2^9-2^8+2^7-\cdots+2^3-2^2+2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.4 因式分解



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 因式分解的定义

1 因式分解的定义：

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

要点精析///

(1) 研究的对象是多项式，结果是整式的积.

(2) 因式分解是恒等变形，形式改变但值不改变.

(3) 因式分解必须分解到每个多项式的因式不能再分解为止.

(4) 因式分解是有范围的，若无特殊说明，一般在有理数范围内分解，有时也要求在实数范围内分解.

(5) **整式乘法与因式分解的关系**：整式乘法与因式分解一个是积化和差，另一个是和差化积，是两种互逆的变形.

即多项式 $\xrightarrow[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}}$ 整式乘积.

2 易错警示：

(1) 因式分解的结果不是整式的积的形式.

(2) 分解不彻底.

(3) 因式分解走回头路.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用因式分解的定义识别因式分解

例1 下列各式从左到右的变形属于因式分解的是(　　)

A. $a^2+1=a\left(a+\frac{1}{a}\right)$

B. $(x+1)(x-1)=x^2-1$

C. $a^2+a-5=(a-2)(a+3)+1$

D. $x^2y+xy^2=xy(x+y)$

导引： 紧扣因式分解的定义进行判断.

因为 $\frac{1}{a}$ 不是整式，所以 $a^2+1=a\left(a+\frac{1}{a}\right)$ 不是因式分解，故A错误；

因为 $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 不是和差化积，而是积化和差，因此不是因式分解，而是整式乘法，故B错误；

因为 $a^2+a-5=(a-2)(a+3)+1$，结果不是整式的积的形式，因此不是因式分解，故C错误；

D符合因式分解的定义，故D正确.

答案： D

方法点拨

识别某个等式的变形是因式分解的方法，关键抓住两点：一是等式的左边是多项式；二是等式的右边是整式的积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用因式分解与整式乘法之间的关系判断因式分解的正确性

例2 ［中考·株洲］下列各选项中因式分解正确的是(　　)

A. $x^2-1=(x-1)^2$

B. $a^3-2a^2+a=a^2(a-2)$

C. $-2y^2+4y=-2y(y+2)$

D. $m^2n-2mn+n=n(m-1)^2$

导引： 根据因式分解与整式乘法的关系逆向判断. 利用整式的乘法法则将各选项等式的右边展开，与等式的左边相比较，左右两边相同的只有 D.

答案： D

方法点拨

因式分解与整式乘法是互逆变形，可以通过逆向变形检验因式分解的正确性.

考查角度3 利用因式分解与整式乘法之间的关系求字母的值

例3 仔细阅读下面例题，解答问题：

例题：已知二次三项式 x^2-4x+m 分解因式后有一个因式是 $x+3$，求其另一个因式及 m 的值.

解：设另一个因式为 $x+n$，则 $x^2-4x+m=(x+3)(x+n)$，则 $x^2-4x+m=x^2+(n+3)x+3n$.

所以 $\begin{cases}n+3=-4,\\m=3n.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-7,\\m=-21,\end{cases}$

所以另一个因式为 $x-7$，m 的值为 -21.

问题：

(1) 若二次三项式 x^2-5x+6 可分解为 $(x-2)(x+a)$，则 $a=$_____.

(2) 若二次三项式 $2x^2+bx-5$ 可分解为 $(2x-1)(x+5)$，则 $b=$_____.

(3) 已知二次三项式 $2x^2+5x-k$ 分解因式后有一个因式为 $2x-3$，求其另一个因式及 k 的值.

导引： (1) 将 $(x-2)(x+a)$ 展开，根据所给出的二次三项式即可求出 a 的值. (2) 将 $(2x-1)(x+5)$ 展开可得出一次项的系数 b 的值. (3) 设另一个因式为 $x+n$，则可得 $2x^2+5x-k=(2x-3)(x+n)=2x^2+(2n-3)x-3n$，可知 $2n-3=5$，$k=3n$，进而求出 n 和 k 的值及另一个因式.

解： (1) -3　(2) 9

(3) 设另一个因式为 $x+n$，

则 $2x^2+5x-k=(2x-3)(x+n)=2x^2+(2n-3)x-3n$，

则 $\begin{cases}2n-3=5,\\k=3n.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=4,\\k=12.\end{cases}$

故另一个因式为 $x+4$，k 的值为 12.

同类变式 (答案见 196 页)

3. 仔细阅读下面的例题，再解答问题：

例题：已知多项式 $2x^3-x^2+m$ 有一个因式是 $2x+1$，求 m 的值.

解：设 $2x^3-x^2+m=A\cdot(2x+1)$ (A 为整式).

令 $x=-\frac{1}{2}$，则 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+m=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

问题：

已知多项式 $x^4+mx^3+nx-16$ 有因式 $x-1$ 和 $x-2$，求 m，n 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 提公因式法因式分解

1 公因式的定义： 多项式中各项都含有的公共的因式，叫做多项式各项的公因式.

要点精析///

(1)公因式必须是多项式中每一项都含有的因式.

(2)某个或某些项中含有而其他项中没有的因数或因式不能成为公因式的一部分.

2 提公因式法： 如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种因式分解的方法叫做提公因式法.

用字母表示为 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

要点精析///

(1)提公因式法就是把公因式提到括号外面，与剩下的多项式写成积的形式.

(2)提公因式法实质上是逆用乘法的分配律.

(3)提公因式法就是把一个多项式分解成两个因式的积的形式，其中的一个因式是各项的公因式，另一个因式是多项式除以这个公因式所得的商.

(4)提公因式法的一般步骤：第一步找出公因式；第二步确定另一个因式；第三步写成积的形式.

3 易错警示：

(1)找底数互为相反数的幂的公因式时符号出错.

(2)提取公因式后，漏掉另一个因式中商是 1 或 −1 的项.

(3)提取公因式后，多项式中各项还含有公因式.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用公因式的定义确定公因式

例 4 指出下列多项式中各项的公因式：

(1)$3a^2y-3ya+6y$；

(2)$\frac{4}{9}xy^3-\frac{8}{27}x^3y^2$；

(3)$a(x-y)^3+b(x-y)^2+(x-y)^3$；

(4)$-27a^2b^3+36a^3b^2+9a^2b$.

解： (1)3,6 的最大公约数是 3，所以公因式的系数是 3；各项有相同字母 y，并且 y 的最低次数是 1，所以公因式是 $3y$.

(2)多项式各项的系数是分数，分母的最小公倍数是 27，系数通分后，分子的最大公约数是 4，所以公因式的系数是 $\frac{4}{27}$；两项都有 x,y，且 x 的最低次数是 1，y 的最低次数是 2，所以公因式是 $\frac{4}{27}xy^2$.

(3)观察发现三项都含有 $x-y$，且 $x-y$ 的最低次数是 2，所以公因式是 $(x-y)^2$.

(4)此多项式的第一项有“−”号，应将“−”提取变为 $-(27a^2b^3-36a^3b^2-9a^2b)$.

多项式 $27a^2b^3-36a^3b^2-9a^2b$ 各项系数的最大公约数是 9；各项都有 a,b，且 a 的最低次数是 2，b 的最低次数是 1，所以这个多项式各项的公因式是 $-9a^2b$.

方法点拨

找准公因式要“五看”，一看系数：若各项系数都是整数，应提取各项系数的最大公约数；二看字母：公因式的字母是各项相同的字母；三看字母的指数：各相同字母的指数取次数最低的；四看整体：如果多项式的各项中含有相同的多项式，应将其看作整体，不要拆开；五看首项符号，若多项式中首项有“−”号，一般情况下公因式符号为负.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用提公因式法分解因式

例5 用提公因式法将下列各式分解因式：

(1) $4x^2y^3+8x^2y^2z-12xy^2z$；

(2) $-a^2b^3c+2ab^2c^3-ab^2c$；

(3) $5x(x-2y)^3-20y(2y-x)^3$.

导引： 用提公因式法分解因式的第一步是确定公因式，公因式可以是单项式，也可以是多项式；第二步是提取公因式. 其中(2)题应先提出“－”号，(3)题可把 $(2y-x)^3$ 化为 $-(x-2y)^3$.

解： (1) 原式 $=4xy^2(xy+2xz-3z)$.

(2) 原式 $=-(a^2b^3c-2ab^2c^3+ab^2c)=-ab^2c(ab-2c^2+1)$.

(3) 原式 $=5x(x-2y)^3+20y(x-2y)^3$

$=5(x-2y)^3(x+4y)$.

同类变式 (答案见196页)

5. 分解因式：

(1) $2x^2-4xy+x$；

(2) $-4m^3+8m^2-24m$；

(3) $4a(x-y)-2b(y-x)$.

方法点拨

准确地找出公因式是分解因式的关键，(3)题将 $(x-2y)^3$ 和 $(2y-x)^3$ 化成同底数幂时，要注意符号的变化.

考查角度3 利用提公因式法判别分解因式的常见错误

例6 ［易错题］下面用提公因式法分解因式的结果是否正确？并说明理由，若不正确，请写出正确的结果.

(1) $3x^2y-9xy^2=3x(xy-3y^2)$；

(2) $4x^2y-6xy^2+2xy=2xy(2x-3y)$；

(3) $x(a-b)^3(a+b)-y(b-a)^3=(a-b)^3[x(a+b)-y]$.

导引： (1)中括号内的多项式还有公因式，没有分解完；(2)中漏掉了商是“1”的项；(3)中 $(a-b)^3$ 与 $(b-a)^3$ 是不同的，符号相反，另外中括号内没有化简.

解： (1) 不正确，

理由：公因式没有提完全.

正确的是 $3x^2y-9xy^2=3xy(x-3y)$.

(2) 不正确，

理由：提取公因式后剩下的因式中有常数项“1”.

正确的是 $4x^2y-6xy^2+2xy=2xy(2x-3y+1)$.

(3) 不正确，

理由：$(a-b)^3$ 与 $(b-a)^3$ 不一样，应先统一，且因式是多项式时要最简.

正确的是 $x(a-b)^3(a+b)-y(b-a)^3=x(a-b)^3(a+b)+(a-b)^3y=(a-b)^3[x(a+b)+y]=(a-b)^3(ax+bx+y)$.

易错警示

用提公因式法分解因式，要注意分解彻底；当某项恰好是公因式时，提取公因式后要用“1”把它；出现形如 $(b-a)^3$，$(b-a)^2$ 等形式的式子，可化成 $-(a-b)^3$，$(a-b)^2$ 的形式，即指数是奇数时要改变符号，指数是偶数时不改变符号，简言之：奇变偶不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 完全平方公式法因式分解

1 **完全平方式：** 形如 $a^2 \pm 2ab + b^2$ 的式子叫做完全平方式.

即表示两个数的平方和加上(或减去)这两个数的积的2倍的式子是完全平方式.

要点精析///



完全平方式的条件：

(1) 多项式是二次三项式.

(2) 首末两项是两个数(或式子)的平方且符号相同，中间项是这两个数(或式子)的积的2倍，符号可以是“+”也可以是“−”.

2 **完全平方公式法：** 两个数的平方和加上(或减去)这两个数的积的2倍，等于这两个数的和(或差)的平方. 即 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

要点精析///

(1) 完全平方公式的结构：等式的左边是一个完全平方式，右边是两个数的和(或差)的平方.

(2) 它是整式乘法中完全平方公式的逆用的形式. 在整式乘法中能写成两个数的和(或差)的平方，结果一定是完全平方式，而在因式分解中，每一个完全平方式都能因式分解.

(3) 结果是加还是减由乘积项的符号确定，即乘积项的符号可以是“+”也可以是“−”，而两个平方项的符号相同，否则就不是完全平方式，即也不能用完全平方公式进行因式分解.

(4) 用完全平方公式分解因式时，若多项式各项有公因式，要先提取公因式，再用完全平方公式分解因式.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用完全平方式的结构求字母的值

例7 [中考·安顺] 若 $x^2 + 2(m-3)x + 16$ 是关于 x 的完全平方式，则 $m =$ _____.

导引： 根据完全平方式的结构特征，一次项系数与二次项系数和常数项之间的关系求 m 的值. 因为 $x^2 + 2(m-3)x + 16 = x^2 + 2(m-3)x + 4^2$ 是关于 x 的完全平方式，所以 $2(m-3)x = \pm 2 \times 4x$，所以 $m - 3 = \pm 4$，解得 $m = -1$ 或 7.

答案： −1或7

易错警示

在求与完全平方式有关的字母取值时，要注意中间项的符号有“+”“−”两种情况，否则容易产生漏解.

考查角度2 利用完全平方公式分解因式

例8 分解因式：(1) $a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$；

(2) $-2x^3y + 4x^2y - 2xy$；

(3) $(a-b)^2 - 6(b-a) + 9$.

导引： 对于(1)可直接利用完全平方公式分解因式；对于(2)先提取公因式 $-2xy$，再利用完全平方公式分解因式；对于(3)可先将 $(b-a)$ 化为 $-(a-b)$，再利用完全平方公式分解因式.

解： (1) 原式 $= a^2 + 2 \times a \times \frac{1}{2}b + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$.

(2) 原式 $= -2xy(x^2 - 2x + 1) = -2xy(x-1)^2$.

(3) 原式 $= (a-b)^2 + 6(a-b) + 9 = (a-b)^2 + 2(a-b) \times 3 + 3^2 = (a-b+3)^2$.

▲**同类变式** (答案见197页)

8. 把下列各式分解因式：

(1) $9x^2 - 6x + 1$；

(2) $(x+y)^2 + 4(x+y) + 4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 平方差公式法因式分解

1 平方差公式法：

两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积. 即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

要点精析///

(1) 公式特点：公式的左边是一个二项式，都能写成平方形式且符号相反；公式的右边是两个二项式的积，其中一个二项式是两个数的和，另一个二项式是这两个数的差.

(2) 它是整式乘法中平方差公式逆用的形式.

(3) 整式乘法中平方差公式指的是符合两数和与两数差的积的条件后，结果写成平方差；而因式分解中的平方差公式指的是能写成平方差形式的多项式，可以分解. 这在今后的学习中要加以区分，不能混淆.

即 $a^2-b^2 \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} (a+b)(a-b)$.

(4) 用平方差公式分解因式时，若多项式各项有公因式，要先提取公因式，再用平方差公式分解因式.

2 拓展： 平方差公式中的字母 a，b 可以是一个单项式，也可以是一个多项式.

3 易错警示：

(1) 运用平方差公式分解因式不彻底.

(2) 不符合平方差公式形式的多项式，也乱用平方差公式分解因式.

核考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用平方差公式分解因式

例9 分解因式：

(1) $9a^2-4b^2$；(2) x^2y-4y；

(3) $(a+1)^2-1$；(4) x^4-1；

(5) $(x+y+z)^2-(x-y+z)^2$.

导引： (1) 可先化成平方差形式，再直接利用平方差公式分解因式；(2) 可先提取公因式，再利用平方差公式分解因式；(3) 将 $(a+1)$ 视为一个整体，运用平方差公式分解因式；(4) 要注意分解彻底；(5) 分别将 $(x+y+z)$ 与 $(x-y+z)$ 视为整体，运用平方差公式分解因式.

解： (1) 原式 $=(3a)^2-(2b)^2=(3a+2b)(3a-2b)$.

(2) 原式 $=y(x^2-4)=y(x+2)(x-2)$.

(3) 原式 $=(a+1+1)(a+1-1)=a(a+2)$.

(4) 原式 $=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

(5) 原式 $=[(x+y+z)+(x-y+z)][(x+y+z)-(x-y+z)]=(x+y+z+x-y+z)(x+y+z-x+y-z)=2y(2x+2z)=4y(x+z)$.

方法点拨

运用平方差公式分解因式的关键是确定公式中的 a 和 b，再运用公式进行因式分解；对于有公因式的多项式，需要先提取公因式再用平方差公式分解因式，同时分解因式要进行到每一个因式都不能再分解为止.

注意：运用平方差公式分解因式，最后的结果除了不能再分解因式外，还要注意使每个因式最简.

同类变式 （答案见197页）

9. 分解因式：

(1) $a^2-\frac{1}{25}b^2$；(2) $-(x+2)^2+16(x-1)^2$；

(3) $m^4(m-2)+81(2-m)$；

(4) $-a^4+16$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平方差公式分解因式化简求值

例10 [中考·苏州] 若 $a+b=4, a-b=1$，则 $(a+1)^2-(b-1)^2$ 的值为_____.

导引: 对所求代数式运用平方差公式进行因式分解，然后运用整体思想将 $a+b$ 与 $a-b$ 的值代入即可.

因为 $a+b=4, a-b=1$,

所以 $(a+1)^2-(b-1)^2=(a+1+b-1)(a+1-b+1)=(a+b)(a-b+2)=4\times(1+2)=12$.

答案: 12

考查角度3 利用提公因式法和公式法分解因式



例11 分解因式:

(1) [中考·天门] $x^4-4x^2=$_____;

(2) [中考·鄂州] $4ax^2-4ax+a=$_____;

(3) [中考·株洲] $a^2(a-b)-4(a-b)=$_____.

导引: 有公因式的先提取公因式，再利用公式法分解因式.

(1) 原式 $=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2)$.

(2) 原式 $=a(4x^2-4x+1)=a(2x-1)^2$.

(3) 原式 $=(a-b)(a^2-4)=(a-b)(a-2)(a+2)$.

答案: (1) $x^2(x+2)(x-2)$ (2) $a(2x-1)^2$

(3) $(a-b)(a-2)(a+2)$

▲同类变式 (答案见197页)

10. 设 n 为整数，试说明：$(2n+1)^2-25$ 能被4整除.

方法点拨

因式分解的一般步骤：一提二套三检查. 一提指的是提取公因式，二套指的是提取公因式后观察括号里是否符合完全平方式、平方差的形式，若符合就可以使用公式法进行因式分解，三检查指的是检查每个因式是否分解到不能再分解为止.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 因式分解常见的几种拓展类型

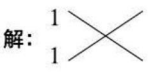
类型一: $x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解

例12 分解因式: $x^2-3x-10$.

导引: $-10=-5\times2, -3=-5+2$,

即 $x^2-3x-10=x^2+(-5+2)x+(-5\times2)$.

解:



$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$.

类型二: 利用分组分解法分解因式

例13 把下列各式分解因式:

(1) $ad+bd-ax-ay-bx-by$;

(2) $4xy+1-4x^2-y^2$.

导引: 分组一般应遵循分组后能利用公式法继续分解，或分组后可提公因式分解因式的原则，因而在分组时可作适当尝试，直到找出解题思路为止.

解: (1) $ad+bd-ax-ay-bx-by$

$=(ad-ax-ay)+(bd-bx-by)$

$=a(d-x-y)+b(d-x-y)$

$=(a+b)(d-x-y)$;

或 $ad+bd-ax-ay-bx-by$

$=(ad+bd)-(ax+bx)-(ay+by)$

$=d(a+b)-x(a+b)-y(a+b)$

$=(a+b)(d-x-y)$.

(2) $4xy+1-4x^2-y^2$

$=1-(4x^2-4xy+y^2)$

$=1-(2x-y)^2$

$=(1+2x-y)(1-2x+y)$.

方法点拨: 把一个多项式按“先部分，后整体”的思路，先分组，分别变形，再进行因式分解，这种因式分解的方法称为分组分解法. 分组分解法适用于三项以上的多项式的因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型三：利用补项法和拆项法分解因式

例 14 分解因式：

(1)x^4+4；

(2)$3y^3-4y+1$.

导引：(1)中的多项式只有两项，既没有公因式又不能运用公式法分解因式. 但它是两个数的平方和的形式，这时若能添加一项，使之与原两项运用完全平方公式分解，再与添加的项的相反数继续分解，可达到目的；(2)中可把$-4y$拆成$-3y-y$，再分别与$3y^3$和1分组后，可分解因式.

解：(1)原式$=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

(2)原式$=3y^3-3y-y+1=(3y^3-3y)-(y-1)=3y(y^2-1)-(y-1)=3y(y+1)(y-1)-(y-1)=(y-1)[3y(y+1)-1]=(y-1)(3y^2+3y-1)$.

方法点拨：根据多项式的特点，有时可添加两个互为相反数的项，使其中一个能与原多项式中某些项结合后，进行因式分解，达到解决问题的目的；有时还可以把多项式中某些项拆成两项或多项，再与多项式中其他的项分组后能进行因式分解.

拔尖角度 2 利用因式分解判断几何图形的形状

例 15 已知三角形ABC的三边长为a,b,c，并且$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，试说明：此三角形为等边三角形.

导引：先将等式变形并且各项都同时乘以2，把多项式按完全平方公式特点分成三组分别进行因式分解，再结合非负数的性质得出三边关系.

解：因为$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，

所以$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，

所以$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，

所以$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$.

将每个括号内的多项式分解因式，得$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，

由非负数的性质，得$a-b=0,b-c=0,c-a=0$，所以$a=b,b=c,c=a$，

因此$a=b=c$.

故此三角形为等边三角形.

技巧点拨：涉及的多项式不止三项时，通常要对多项式进行分组，将每一组分解因式化为平方式是解答此类问题的常用方法.

拔尖角度 3 利用因式分解进行规律探究

例 16 老师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$，王华接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22$.

(1)请你再写出两个具有上述规律的算式（不同于上面算式）；

(2)用文字写出上述算式反映的规律；

(3)说明这个规律的正确性.

导引：(1)通过题目中所给出的算式，不难看出这些算式的左边是两个奇数的平方差，右边是8的倍数；(2)可用含有字母的代数式表示其规律，再用平方差公式来说明问题.

解：(1)(答案不唯一)$7^2-3^2=8\times5$，$11^2-7^2=8\times9$.

(2)任意两个奇数的平方差是8的倍数.

(3)设m,n为整数$(m>n)$，两个奇数可表示为$2m+1$，$2n+1$，则$(2m+1)^2-(2n+1)^2=[(2m+1)+(2n+1)]\cdot[(2m+1)-(2n+1)]=(2m+2n+2)(2m-2n)=2(m+n+1)\cdot2(m-n)=4(m-n)(m+n+1)$.

当m,n同是奇数或偶数时，$m-n$一定是偶数，所以$4(m-n)$一定是8的倍数；当m,n一奇一偶时，$m+n+1$一定是偶数，所以$4(m+n+1)$一定是8的倍数.

所以任意两个奇数的平方差是8的倍数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见197页）

基础巩固练

1. ［中考·绥化］下列分解因式正确的是(　　)

A. $x^2-x=x(x+1)$

B. $a^2-3a-4=(a+4)(a-1)$

C. $a^2+2ab-b^2=(a-b)^2$

D. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

2. 把多项式 $6a^3b^2-3a^2b^3-9a^2b^2$ 分解因式时，应提取公因式(　　)

A. $3a^2b$　B. $3ab^2$　C. $3a^2b^3$　D. $3a^2b^2$

3. ［中考·潍坊］将下列多项式分解因式，结果中不含有因式 $a+1$ 的是(　　)

A. a^2-1

B. a^2+a

C. a^2+a-2

D. $(a+2)^2-2(a+2)+1$

4. ［中考·安顺］若代数式 $x^2+kx+25$ 是一个完全平方式，则 $k=$_____.

5. ［中考·咸宁］若整式 x^2+my^2（m 为常数，且 $m\neq0$）能在有理数范围内分解因式，则 m 的值可以是_____（写一个即可）.

6. ［中考·东营］分解因式：$x(x-3)-x+3=$_____.

7. 把下列各式分解因式：

(1) $8ab^2-16a^3b^3$；

(2) $-3a^3m-6a^2m^2+3am$；

(3) $(x^2-y^2)^2-4x^2y^2$；

(4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)$；

(5) $(x-2)(x-8)+9$；

(6) $(m-n)^2-9(m+n)^2$.

能力提升练

8. ［中考·凉山州］多项式 $3x^2y-6y$ 在实数范围内分解因式正确的是(　　)

A. $3y(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

B. $3y(x^2-2)$

C. $y(3x^2-6)$

D. $-3y(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

9. ［中考·常德］若 $x^2+x=1$，则 $3x^4+3x^3+3x+1$ 的值为_____.

10. ［中考·成都］已知 $x+y=0.2$，$x+3y=1$，则代数式 $x^2+4xy+4y^2$ 的值为_____.

11. 分解因式：

$(a+b)^2+4(a-b)^2-4(a^2-b^2)$.

12. 已知 a,b,c 是三角形 ABC 的三边长，且满足 $a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$，试判断三角形 ABC 的形状，并说明理由. 【导学号:2231921】

思维拓展练

13. 已知 a,b,c 为互不相等的实数，且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+8a-14$，$bc=a^2+3a-5$，求实数 a 的取值范围.

8.5 综合与实践　纳米材料的奇异特性（略）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

恒等变形在整式的运算和因式分解中的应用

荣老师告诉你 把一个代数式变换成另一个和它恒等的代数式，叫做代数式的恒等变形. 整式恒等变形的主要依据有：整式的各种运算性质和法则，各种公式的正、逆应用等.

应用一 运用面积法验证整式的恒等变形

例1 [中考·北京] 如图 8-1 中的四边形均为长方形，根据图形，写出一个正确的等式：_____.

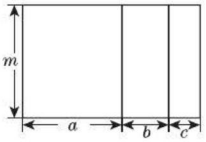


图 8-1

导引： 解题的关键是能从图形的结构特征入手，找到一个面积之间的相等关系.

①观察图形，找到面积方面的相等关系；②用字母表示各部分的面积；③写出相等关系.

最大长方形的长为 $(a+b+c)$，宽为 m，所以它的面积为 $m(a+b+c)$.

最大长方形的面积为三个小长方形面积之和，三个小长方形的面积分别为 am，bm，cm，

所以 $am+bm+cm=m(a+b+c)$.

答案： $am+bm+cm=m(a+b+c)$

方法点拨： 整式的乘除法运算是整式的恒等变形，所以用面积法写恒等式，就是用两种不同的方式表示图形面积，并写成恒等式.

应用二 运用恒等变形求等式中待定字母的值

例2 [中考·吉林] 若 $x^2-4x+5=(x-2)^2+m$，则 $m=$_____.

导引： (方法一) 因为 $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$，所以 $m=1$.

(方法二) 因为 $(x-2)^2+m=x^2-4x+4+m$，所以 $4+m=5$，所以 $m=1$.

方法三 将 $x=2$ 代入等式中，得 $4-8+5=m$，所以 $m=1$.

答案： 1

方法点拨： 三种方法都体现了整式的恒等变形，整式的恒等变形，既可以从等式的左边推到右边，也可以从右边推到左边，还可以让非待求字母取具体数值，等式都成立.

应用三 运用恒等变形求代数式的值

例3 已知 $(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=16$，求 xy 的值.

解： 根据乘法公式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，

可知 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$，

所以 $4xy=25-16=9$，所以 $xy=\frac{9}{4}$.

方法点拨： 乘法公式本身就是整式的恒等变形，乘法公式常见的变形：

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$；

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$；

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

应用四 运用恒等变形进行说理

例4 在三角形 ABC 中，三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2-4a-4b+8=0$，试说明：三角形 ABC 为等腰三角形.

解： 已知等式可变形为 $a^2-4a+4+b^2-4b+4=0$，所以 $(a-2)^2+(b-2)^2=0$，

所以 $a=b=2$.

所以三角形 ABC 为等腰三角形.

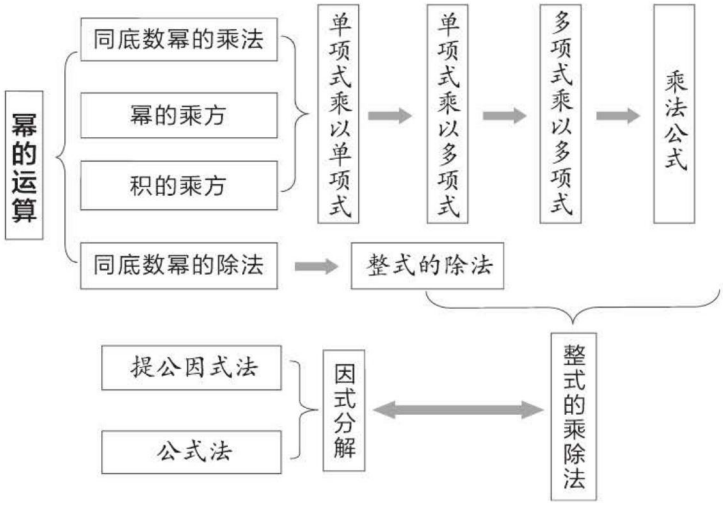
方法点拨： 运用因式分解来进行整式的恒等变形，是一种常用的解题方法. 当题目有平方项且要求判断三角形的形状时，一般将所给等式的一边分解因式，再利用完全平方的非负性求得三角形三边的长或三边的关系，从此来判断三角形的形状.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 幂的运算的法则：①$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；②$(a^m)^n = a^{mn}$（m,n 为正整数）；③$(ab)^n = a^n b^n$（n 为正整数）；④$a^m \div a^n = a^{m-n}$（$a \neq 0$，m,n 为正整数，且 $m > n$）；⑤$a^0 = 1$（$a \neq 0$）；⑥$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$（$a \neq 0$，p 是正整数）.
2. 整式的乘除法的关键是单项式的乘除法. 单项式的乘除法，系数与系数、同底数幂分别相乘除. 整式的其他运算通过转化思想将其转化为单项式的乘除法.
3. 完全平方公式：$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$；平方差公式：$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
4. 因式分解的方法有两种：一是提公因式法；二是公式法，完全平方公式：$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$，$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$；平方差公式：$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

知识方法专题

知识必学

专题一 幂的运算

链接中考>>幂的运算是整式乘除法的基石，主要包括同底数幂的乘除法、幂的乘方和积的乘方运算，中考中往往把几种运算放在一起考查，以选择题形式出现.

例1 ［中考·广元］下列运算中正确的是(　　)

A. $a^5 + a^5 = a^{10}$　　B. $a^7 \div a = a^6$

C. $a^3 \cdot a^2 = a^6$　　D. $(-a^3)^2 = -a^6$

导引： 因为 $a^5 + a^5 = 2a^5$，所以 A 错误；

因为 $a^7 \div a = a^6$，所以 B 正确；

因为 $a^3 \cdot a^2 = a^5$，所以 C 错误；

因为 $(-a^3)^2 = a^6$，所以 D 错误.

故选 B.

答案： B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨： 幂的运算主要抓住两点：一是底数都不变，二是指数的数量关系.

专题二 整式的乘除法运算

链接中考>>整式的乘除法混合运算关键是扣住运算顺序和运算法则，在中考中是热门考点，考查形式是化简求值题，难度适中.

例2 ［中考·随州］先化简，再求值：$(2+a)(2-a)+a(a-5b)+3a^5b^3\div(-a^2b)^2$，其中 $ab=-\frac{1}{2}$.

解： 原式 $=(2+a)(2-a)+a(a-5b)+3a^5b^3\div a^4b^2=4-a^2+a^2-5ab+3ab=4-2ab$. 把 $ab=-\frac{1}{2}$ 代入，得原式 $=4-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=5$.

方法点拨： 整式运算的顺序是先做整式的乘除，再做整式的加减.整式加减的实质就是合并同类项.熟练掌握乘法公式可以提高解题速度.初中数学中的乘法公式有：平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

专题三 科学记数法

链接中考>>负整数次幂的科学记数法就是将一个很小的数用科学记数法的形式表示出来，一般这个数据都是生活中出现的数据，体现了数学应用于生活，考查时一般以选择题的形式出现，在中考中也是考查的热点.

例3 ［中考·天水］自然界中的数学不胜枚举，如蜜蜂建造的蜂房既坚固又省料，其厚度为 0.000 073 米，将 0.000 073 用科学记数法表示为(　　)

A. 73×10^{-6}　　B. 0.73×10^{-4}

C. 7.3×10^{-4}　　D. 7.3×10^{-5}

导引： 绝对值小于1的数用科学记数法表示为 $a\times10^{-n}(1\leqslant|a|<10,n$ 为正整数)，$n=$ 原数中第一个不为0的数字前面的0的个数，所以 $0.000\,073=7.3\times10^{-5}$.

答案： D

方法点拨： 把一个数写成 $a\times10^n$ 的形式($1\leqslant|a|<10$，n 为非零整数)，这种记数法称为科学记数法，其方法是

(1) 确定 a，a 是整数数位只有一位的数；

(2) 确定 n. 当原数的绝对值 $\geqslant10$ 时，n 为正整数，n 等于原数的整数位数减1；当原数的绝对值 <1 时，n 为负整数，n 的绝对值等于原数中第一个非零数前面的零的个数(含整数数位上的零).

专题四 乘法公式

链接中考>>运用乘法公式计算能提高运算速度及准确率，考查的形式也是化简求值，考查的难度适中，也是中考的热门考点.

例4 ［中考·河池］先化简，再求值：$(3-x)(3+x)+(x+1)^2$，其中 $x=2$.

导引： 先利用平方差公式与完全平方公式进行运算，再合并同类项进行化简，最后代入数值求解.

解： 原式 $=9-x^2+x^2+2x+1=2x+10$，当 $x=2$ 时，原式 $=2\times2+10=14$.

方法点拨： 熟练掌握乘法公式与整式的运算法则是解决此题的关键.初中数学中的乘法公式有：平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$，应牢固地掌握.

专题五 因式分解

链接中考>>因式分解与整式乘法是互逆的两种变形，因式分解的主要步骤有：一提二套三检查，是中考的热门考点，考查的形式主要是填空题.

例5 分解因式：

(1) ［中考·黄冈］$3x^2-27y^2=$_____；

(2) ［中考·威海］$2x^2-2x+\frac{1}{2}=$_____；

(3) ［中考·毕节］$x^4-16=$_____.

导引： 先提取公因式，再用公式法分解因式.

(1) 原式 $=3(x^2-9y^2)=3(x+3y)(x-3y)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)原式 $=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

(3)原式 $=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

答案: (1)$3(x+3y)(x-3y)$

(2)$2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

(3)$(x^2+4)(x+2)(x-2)$

方法点拨: 因式分解的一般思路:若有公因式,应先提取公因式,然后再考虑用公式法或其他方法分解.提取公因式的具体方法是当各项系数都是整数时,公因式的系数应取各项系数的最大公约数;字母取各项的相同的字母,且各字母的指数取次数最低的;相同的多项式,取多项式的次数最低的.套公式时可根据需分解的多项式的项数进行选择,如果是两项,可考虑平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;如果是三项,可考虑完全平方公式:$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.如果是四项及以上的则需要考虑分组分解法.每个因式都要分解到不能再分解为止.

Ⅱ思想方法专题

专题六 整体思想

专题解读>>有些数学问题直接求解很困难,甚至不能解出,可把要解决的问题看成一个整体,通过研究问题的整体形式、整体结构或做种种整体处理以后,达到顺利而又简捷解决问题的目的.整体思想作为重要的思想方法之一,解题时经常使用.整体思想运用得当,能提高解题效率,减少不必要的计算,从而直奔主题,因而在处理数与式的运算、方程、几何计算方面有着广泛的应用.比如求代数式的值时,一般情况下,先对代数式进行化简,再将字母的数值代入.如果题目中所给的是两个代数式的某一部分(或全部),各字母的项的系数对应成比例,就可以把这一部分看成一个整体,把要求值的代数式变形后整体代入,这种求代数式值的方法称为整体代入法.

例6 [中考·十堰]当 $x=1$ 时,$ax+b+1$ 的值为 -2,则 $(a+b-1)(1-a-b)$ 的值为(　　)

A. -16　　B. -8　　C. 8　　D. 16

导引: 把 $x=1$ 代入 $ax+b+1=-2$,可得 $a+b=-3$.

所以原式 $=(a+b-1)[1-(a+b)]$

$=(-3-1)\times[1-(-3)]$

$=-16$.

答案: A

方法点拨: 本题属于已知方程的一个根求某些字母的值,然后对待求式子进行求值的题型,根据方程的解的定义,只需把这个解代入原方程,然后求出字母的值,最后观察待求式子的结构特点,选取最佳解题策略,大多是用整体思想.

专题七 分类讨论思想

专题解读>>所谓分类讨论思想,就是当要解决的问题包含两种或两种以上的可能情况时,需要按不同的情况通过分类讨论来解决问题的一种思想方法.在运用分类讨论思想解题时,需要认真审题,全面考虑,做到分类标准统一,不重不漏,才能获得完整的解答.

例7 若 $4x^2+(a-1)xy+9y^2$ 是完全平方式,则 a 的值是(　　)

A. 7 或 -5　　B. 13 或 -11

C. -13 或 14　　D. -7 或 -5

导引: 此题需要分两种情况讨论.

因为 $4x^2+(a-1)xy+9y^2=(2x)^2+(a-1)xy+(3y)^2$,所以 $(a-1)xy=2\times 2x\times 3y$ 或 $(a-1)xy=-2\times 2x\times 3y$,

所以 $a-1=12$ 或 $a-1=-12$,

解得 $a=13$ 或 $a=-11$.

答案: B

方法点拨: 本题运用了分类讨论思想求解.这是由完全平方公式出现两数和或差的平方所决定的,所以中间项的符号有"+""-"两种情况,因此要分类讨论.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

好题必解 答案见197页

一、选择题

1. [中考·连云港]计算下列代数式,结果为x^5的是(　　)

A. x^2+x^3　　B. $x\cdot x^5$

C. x^6-x　　D. $2x^5-x^5$

2. [中考·南宁]下列运算正确的是(　　)

A. $a(a+1)=a^2+1$

B. $(a^2)^3=a^5$

C. $3a^2+a=4a^3$

D. $a^5\div a^2=a^3$

3. [中考·梧州]研究发现,银原子的半径约是0.000 15微米,把0.000 15这个数用科学记数法表示应是(　　)

A. 1.5×10^{-4}　　B. 1.5×10^{-5}

C. 15×10^{-5}　　D. 15×10^{-6}

4. [中考·泸州]把$2a^2-8$分解因式,结果正确的是(　　)

A. $2(a^2-4)$

B. $2(a-2)^2$

C. $2(a+2)(a-2)$

D. $2(a+2)^2$

5. 已知$a=2\,020x+2\,019$,$b=2\,020x+2\,020$,$c=2\,020x+2\,021$,则多项式$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$的值为(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

6. 将多项式$[(17x^2-3x+4)-(ax^2+bx+c)]$除以$(5x+6)$后,得商式为$(2x+1)$,则$a-b-c$的值为(　　)

A. 3　　B. 23

C. 25　　D. 29

7. 若多项式$(x+m)(x-n)$中不含x的一次项,则m,n一定(　　)

A. 互为倒数　　B. 互为相反数

C. 相等　　D. 满足$mn=0$

8. 化简$(a-1)(a+1)(a^2+1)-(a^4-1)$的结果为(　　)

A. 0　　B. 2

C. -2　　D. $2a^4$

二、填空题

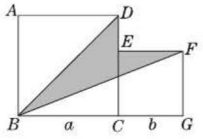
9. [中考·泰州]计算:$\frac{1}{2}x\cdot(-2x^2)^3=$_____.

10. 计算:$|-3|+(\pi-1)^0-\sqrt{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$_____.

11. [中考·广安]分解因式:$3a^4-3b^4=$_____.

12. [中考·河北]若$7^{-2}\times7^{-1}\times7^0=7^p$,则$p$的值为_____.

13. 如图,两个正方形边长分别为a,b,如果$a+b=20$,$ab=18$,则阴影部分的面积为_____.



(第13题图)

14. 如果多项式$16x^2+1$加上一个单项式后成为一个整式的完全平方的形式,则这个单项式是_____.

三、解答题

15. 计算:

(1)$x^3\cdot x^5-(2x^4)^2+x^{10}\div x^2$;

(2)$(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a-b)^2$;

(3)$(2x-3y)^2+2(y+3x)(3x-y)$;

(4)$(a-2b+3)(a+2b+3)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

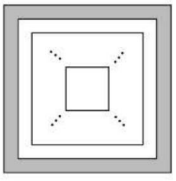
16. [中考·大庆]已知 $x^2-y^2=12$,$x+y=3$,求 $2x^2-2xy$ 的值.

17. (1)已知 $2\times8^x\times16=2^{23}$,求 x 的值;
(2)已知 $a^m=3$,$a^n=5$,求:
①a^{m+n}的值;
②a^{3m-2n}的值.

18. 先化简,再求值:
(1)[中考·长沙]$(x+y)(x-y)-x(x+y)+2xy$,其中 $x=(3-\pi)^0$,$y=2$;
(2)$(x-1)^2+(x+3)(x-3)+(x-3)(x-1)$,其中 $x^2-2x=2$.

19. [中考·湘潭]由整式乘法:$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,将该式从右到左使用,即可得到用"十字相乘法"进行因式分解的公式:
$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.
示例:分解因式:$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.
(1)尝试:分解因式:
$x^2+6x+8=(x+____)(x+____)$;
(2)应用:请用上述方法解方程:$x^2-3x-4=0$.

20. 如图,2 018 个正方形由小到大套在一起,从外向里相间画上阴影,最外面一层画阴影,最外面的正方形的边长为2 018 cm,向里依次为 2 017 cm,2 016 cm,…,1 cm,那么在这个图形中,所有阴影部分的面积和是多少?



(第 20 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第9章 分式

再次领略数式的飞跃

数学点拨



你将学到的核心考点

- 分式的基本性质 □
- 分式的运算 □
- 分式方程的解法 □
- 分式方程的应用 □

我们为你提供的核心方法

整体思想	□	转化思想	□
换元法	□	倒数法	□
裂项相消法	□	特殊值法	□

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.1 分式及其基本性质

核心知识

- 分式的定义
- 分式的基本性质
- 约分

知识链接

分式有意义的条件、分式的值为零的条件 → 分式的定义 ⇔ 分式的基本性质 → 约分

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的定义

1 **定义：** 一般地，如果 a，b 表示两个整式，并且 b 中含有字母，那么式子 $\frac{a}{b}$ 叫做分式，其中 a 叫做分式的分子，b 叫做分式的分母.

要点精析///

(1) 分式与分数的相同点：形式相同，都有分子和分母；不同点：分式的分母含有字母.

(2) 分式与整式的不同点：整式的分母不含有字母；分式的分母含有字母.



2 **有理式：** 整式和分式统称为有理式，即有理式 $\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式}\end{cases}$.

3 在分式中，当分母的值不为 0 时，分式有意义；当分母的值为 0 时，分式无意义.

要点精析///

(1) 分母不为 0，并不是说分母中的字母不能为 0，而是表示分母的整式的值不能为 0.

(2) 分式是否有意义，只与分式的分母的值是否为 0 有关，而与分式的分子的值是否为 0 无关.

4 **分式的值为零的条件：** 分子为零，分母不为零.

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用分式的定义识别分式

例1 下列各式：$-3a^2$，$\frac{x+2}{2}$，$\frac{2x}{x}$，$\frac{a+2b}{\pi+2}$，3，$\frac{2x}{x+y}$ 中，哪些是分式？哪些是整式？

导引： 按分式的定义知分母中含有字母的式子是分式，分母中不含有字母的式子是整式.

解： 分式有 $\frac{2x}{x}$，$\frac{2x}{x+y}$；

整式有 $-3a^2$，$\frac{x+2}{2}$，$\frac{a+2b}{\pi+2}$，3.

方法点拨

判断一个式子是否是分式的方法：首先要具有 $\frac{a}{b}$ 的形式，其次 a，b 是整式，最后看分母是不是含有字母.分式只注重形式而不注重结果，分母含有字母是判断分式的关键条件.

考查角度2 利用分式有意义的条件确定字母的取值范围

例2 ［中考·衡阳］如果分式 $\frac{1}{x+1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x\neq -1$　　B. $x>-1$　　C. 全体实数　　D. $x=-1$

导引： 根据分式有意义的条件即可求出答案，由分式的分母不为零可知 $x+1\neq 0$，所以 $x\neq -1$，故选 A.

答案： A

方法点拨

求分式有意义时字母的取值范围，一般是根据分母不等于零来列不等式，从而求出字母的取值范围，分式有无意义与分子的值无关.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用分式的值为零的条件确定分式中字母的值

例3 [中考·聊城] 如果分式$\frac{|x|-1}{x+1}$的值为0,那么x的值为(　　)

A. -1　　B. 1　　C. -1或1　　D. 1或0

导引: 根据分式的值为零的条件"分子为零,分母不为零",可知$|x|-1=0$且$x+1\neq0$,解得$x=1$.

答案: B

同类变式 (答案见198页)

3. 若分式$\frac{x^2-2x}{x}$的值为0,则x的值为_____.

易错警示

分式的值为零必须满足两个条件:分子为零且分母不为零,两个条件要同时满足,缺一不可.

知识2 分式的基本性质

1 **分式的基本性质:** 分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变.

即$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a\div m}{b\div m}$($a,b,m$都是整式,且$m\neq0$).

分式的基本性质

要点精析///

(1)理解"同一个"和"不等于零"的意义.

(2)运用这个性质对分式进行变形,虽然分式的值不变,但分式中字母的取值范围可能有所改变.

2 **分式的符号准则:** 将分式、分子、分母的符号改变其中的任意两个,其结果不变.

即$\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}=\frac{-a}{-b}$.

核心考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用分式的基本性质确定分式变形的理由

例4 下列等式的右边是怎样从左边得到的?

(1)$\frac{a}{2b}=\frac{ac}{2bc}$($c\neq0$);

(2)$\frac{x^2}{xy}=\frac{x}{y}$.

导引: (1)等号左边的分式中分子、分母没有出现c,右边有c,说明分式的分子、分母同时乘以c;而(2)等号左边的分式中分子、分母都含x,题中隐含$x\neq0$,而右边分母不含x,说明分式的分子、分母同时除以x.

解: (1)分子、分母同时乘以c.

(2)分子、分母同时除以x.

方法点拨

应用分式的基本性质时,一定要确定分式在有意义的情况下才能应用.应用时要注意是否符合两个"同":一是要同时进行"乘法"或"除法"运算;二是"乘以(或除以)"的对象必须是同一个不等于0的整式.

考查角度2 利用分式的基本性质补全等式变式的缺项

例5 利用分式的基本性质填写下列各式中未知的分子或分母:

(1)$\frac{a}{a(x+y)}=\frac{1}{(\quad)}$;(2)$\frac{x^2-2x}{2xy}=\frac{x-2}{(\quad)}$;

(3)$\frac{a+b}{ab}=\frac{(\quad)}{2a^2b}$;(4)$\frac{x-1}{3x}=\frac{(\quad)}{3xy^2}$($y\neq0$).

技巧点拨

在做此类问题时,先观察等式左、右两边已给出的分子或分母,找出不同之处,然后填空.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引： 要求未知的分子或分母，必须从已知的分子或分母入手，分析变化过程，再应用分式的基本性质即可求解.

(1) $\frac{a}{a(x+y)}=\frac{1}{x+y}$；(2) $\frac{x^2-2x}{2xy}=\frac{x-2}{2y}$；

(3) $\frac{a+b}{ab}=\frac{2a^2+2ab}{2a^2b}$；(4) $\frac{x-1}{3x}=\frac{xy^2-y^2}{3xy^2}$.

答案： (1) $x+y$　(2) $2y$　(3) $2a^2+2ab$　(4) xy^2-y^2



同类变式 （答案见198页）

5. 填空：

(1) $\frac{x}{x^2-2x}=\frac{(\quad)}{x-2}$；

(2) $\frac{3x^2+3xy}{6x}=\frac{x+y}{(\quad)}$.

考查角度3 利用分式的基本性质改变分式的符号而不改变分式的值

例6 不改变分式 $\frac{-x+y}{-x-y}$ 的值，使分子、分母的第一项系数不含“－”号.

导引： 分子、分母的第一项系数都是负的，有几种思路可解决. 思路一：分子、分母同时乘以 -1；思路二：分子、分母提“－”号；思路三：将分子两项换位，分母的负号提到分数线的前面.

解： $\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{-(x-y)}{-(x+y)}=\frac{x-y}{x+y}$.

方法点拨

当分式的分子、分母是多项式时，若分子、分母的首项系数是负数，应先提取“－”号并添加括号，再利用分式的基本性质解决；变形时要注意不要把分子、分母的第一项的符号误认为是分子、分母的符号.

考查角度4 利用分式的基本性质改变分式中分子与分母的系数特征而不改变分式的值

例7 不改变分式的值，把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数：

(1) $\frac{0.5x-\frac{1}{3}y}{0.25x-0.2y}$；　(2) $\frac{\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}y}{\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y}$.

解： (1) 根据分式的基本性质，将 $\frac{0.5x-\frac{1}{3}y}{0.25x-0.2y}$ 的分子与分母同乘以 60，得 $\frac{30x-20y}{15x-12y}$.

(2) 根据分式的基本性质，将 $\frac{\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}y}{\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y}$ 的分子与分母同乘以 12，得 $\frac{15x+8y}{9x-4y}$.

方法点拨

将分式的分子、分母的各项系数化整的方法：第一步：找出分子、分母中各项的系数，确定使系数能化成整数的最小正整数；第二步：分子、分母同时乘以这个最小正整数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 分式的约分

1 根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母的公因式约去叫做分式的约分.

2 约分的方法：分式的分子、分母同除以它们的公因式.

(1)约分的关键是找出分子、分母的公因式.

(2)找公因式的方法：①当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公约数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式；②当分子、分母都是多项式时，先把多项式分解因式，再按①中的方法找公因式.

(3)分子、分母都是单项式的分式的约分：约去分子、分母中相同字母(或含字母的式子)的最低次幂，并约去系数的最大公约数.

(4)分子、分母都是多项式的分式的约分：先把分子、分母分解因式，将其转化为因式乘积的形式，然后进行约分.

(5)约分后的结果是最简分式或整式.

(6)约分的依据是分式的基本性质中的$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$(其中 m 是不等于 0 的整式).

3 **最简分式的条件：**(1)分子、分母必须都是整式；(2)分子、分母没有除 1 以外的公因式.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用约分的方法化简分子与分母都是单项式的分式

例 8 约分：(1)$\frac{12ab}{36a^4b^5}$；(2)$\frac{-3abc}{6a^2b}$.

导引：要先判断分式的符号并找出公因式，然后约分.

解：(1)$\frac{12ab}{36a^4b^5}=\frac{12ab}{12ab\cdot 3a^3b^4}=\frac{1}{3a^3b^4}$.

(2)$\frac{-3abc}{6a^2b}=-\frac{c\cdot 3ab}{2a\cdot 3ab}=-\frac{c}{2a}$.

方法点拨

当分式的分子、分母都是单项式时，约去分子、分母中相同字母(或含字母的式子)的最低次幂，并约去系数的最大公约数.

考查角度2 利用约分的方法化简分子与分母都是多项式的分式

例 9 约分：(1)$\frac{a^2-b^2}{a+b}$；(2)$\frac{4y^2-x^2}{-x^2+4xy-4y^2}$.

导引：先将分式的分子、分母分解因式，再约分.

解：(1)$\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$.

(2)$\frac{4y^2-x^2}{-x^2+4xy-4y^2}=\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x-2y)^2}=\frac{x+2y}{x-2y}$.

方法点拨

当分式的分子与分母都是多项式时，先将分子和分母都分解因式，然后再约去公因式.

考查角度3 利用最简分式的定义识别最简分式

例 10 下列分式：$\frac{-6xy}{3x}$，$\frac{y^2-x^2}{x-y}$，$\frac{x^2+y^2}{x+y}$，$\frac{xy+x}{2x+4x^2y}$，$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$，其中最简分式有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

导引：根据最简分式的定义分别对每个分式进行分析即可.

$\frac{-6xy}{3x}=-2y$，$\frac{y^2-x^2}{x-y}=-x-y$，$\frac{xy+x}{2x+4x^2y}=\frac{y+1}{2+4xy}$，$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{x-1}{x+1}$，都不是最简分式，$\frac{x^2+y^2}{x+y}$是最简分式，故选 A.

答案：A

方法点拨

最简分式是约分后的分式，所以判断最简分式的唯一标准就是分式的分子与分母没有除 1 以外的公因式，所以要对分式的分子、分母进行因式分解，再观察是否有除 1 以外的公因式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

类比 · 探索

学习一元一次不等式的解法，是与解一元一次方程对比进行的. 两者标准形式类似（$ax+b=0$ 与 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$）；解的依据是类似的基本性质. 因此，在学过一元一次方程的解法后，很容易通过类比，去研究一元一次不等式的解法.

分式与分数分别是整式与整数相除的表述形式，当分式中分子与分母以数值代替字母时，它就是分数. 这样可以通过与分数类比，来学习分式的性质与运算.

两类事物具有相同的结构、特征，当我们已经了解其中一类事物的某些属性后，往往可去认识、猜想另一类事物是否也具有类似的属性，这种思考问题的方法称为类比.

类比和归纳一样，也是科学研究中常用的方法，比如在人类对太空的探求中，发射探测器登陆火星，任务之一是了解火星上是否曾经有水的存在. 因为火星与地球是同在太阳系中的行星，地球上有生物，火星上是否也有呢？ 而从地球上知道水是生命之源，如果火星上有过水，可推测火星上可能存在过生物.

类比可启发我们去猜想、去思考，因此，我们要学会用类比的思想方法去发现新问题、探索新规律.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的基本性质讨论分式的值为正、负的条件

例 11 ［期末 · 合肥］如果分式$\frac{2x-4}{x-1}$的值为正数，则 x 的取值范围是_____.

导引： 由分式的值为正数得出分子、分母同为正数或同为负数，据此列出关于 x 的不等式组，解之可得.

因为分式$\frac{2x-4}{x-1}$的值为正数，所以$\begin{cases}2x-4>0,\\x-1>0\end{cases}$或$\begin{cases}2x-4<0,\\x-1<0,\end{cases}$解得 $x>2$ 或 $x<1$.

答案： $x>2$或$x<1$

方法点拨： 由分式的值为正数可得分式的分子、分母同号（同正或同负），分式的值为负数可得分式的分子、分母异号（一正一负）.

拔尖角度 2 利用分式的基本性质巧求分式的值

类型一：直接用分式的基本性质巧求值

例 12 已知$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，求分式$\frac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2}$的值.

导引： 由条件可知 $y\neq0$，因此 $y^2\neq0$，根据分式的基本性质将分式的分子和分母同时除以 y^2 转化为含$\frac{x}{y}$的式子，再将条件代入即可求值.

解： 由条件可知 $y\neq0$，因此 $y^2\neq0$，原式 $=\frac{(x^2-3xy+2y^2)\div y^2}{(2x^2-3xy+y^2)\div y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\times\frac{x}{y}+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+1}=-4.$

技巧点拨： 本题运用了整体思想求值关键是将所求分式利用分式的基本性质化为含条件中的式子的形式，再将条件中的式子整体代入求值注：本题也可以将 y 看作已知量，把 $x=\frac{2}{3}y$ 代入所求分式中求值.

类型二：利用设比值巧求分式的值

例 13 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$（其中 $x\neq0$），求分式$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}$的值.

导引： 因为条件是以比值相等的形式出现，所以可考虑设比值为 k，把待求式转化为关于 k 的式子求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： 设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k(k\neq0)$，

则$x=2k,y=3k,z=4k$，

因此$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}=\frac{4k+9k-12k}{4k-9k+12k}=\frac{k}{7k}=\frac{1}{7}$.

技巧点拨： 本题运用了换元法求值.当数学问题中出现或隐含比值相等的条件时，设比值为一个新字母，把问题转化为新字母的问题求解，往往可得到意想不到的效果.

拔尖角度3 利用分式的基本性质求使分式的值为正整数的条件

例14 已知分式$\frac{4a+8}{4-a^2}$的值为正整数，求整数a的值.

导引： 本题综合考查分式的化简、分式的意义以及整除的知识.

解： $\frac{4a+8}{4-a^2}=\frac{4(a+2)}{(2+a)(2-a)}=\frac{4}{2-a}$.

要使分式的值为正整数，

则$2-a=1$或$2-a=2$或$2-a=4$.

所以$a=1$或$a=0$或$a=-2$，

又因为$a=-2$时，分式无意义，

所以$a=-2$舍去.

因此a的值为1或0.

规律点拨： 求使分式的值为整数的字母取值时，一般都是先化简，然后再根据化简后式子的特点，确定出使化简式子值为整数的分子或分母的几种取值情况，进而得出所求字母的值.但所求得的值还需代入原分式中进行检验，舍去使分式无意义的取值.

练中考·练模拟 得满分 （答案见198页）

基础巩固练

1. 在代数式$-\frac{3}{2}x,\frac{4x}{x-y},\frac{x+y}{\pi},-\frac{7}{8},\frac{1}{ab}$中，分式的个数是(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2. [中考·扬州]分式$\frac{1}{3-x}$可变形为(　　)

A.$\frac{1}{3+x}$　　B.$-\frac{1}{3+x}$　　C.$\frac{1}{x-3}$　　D.$-\frac{1}{x-3}$

3. [中考·宁波]若分式$\frac{1}{x-2}$有意义，则x的取值范围是(　　)

A.$x>2$　　B.$x\neq2$　　C.$x\neq0$　　D.$x\neq-2$

4. [中考·陇南]若分式$\frac{x^2-4}{x}$的值为0，则x的值是(　　)

A.2或-2　　B.2　　C.-2　　D.0

5. 下列各式中，从左到右变形正确的是(　　)

A.$\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$　　B.$\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2}$

C.$\frac{2a}{2a+b}=\frac{b}{a+b}$　　D.$\frac{1}{-a+b}=-\frac{1}{a-b}$

6. [中考·滨州]下列分式中，最简分式是(　　)

A.$\frac{x^2-1}{x^2+1}$　　B.$\frac{x+1}{x^2-1}$

C.$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy}$　　D.$\frac{x^2-36}{2x+12}$

7. [中考·莱芜]若x,y的值均扩大为原来的3倍，则下列分式的值保持不变的是(　　)

A.$\frac{2+x}{x-y}$　　B.$\frac{2y}{x^2}$

C.$\frac{2y^3}{3x^2}$　　D.$\frac{2y^2}{(x-y)^2}$

8. 把x千克橘子糖、y千克椰子糖、z千克奶糖混合成什锦糖.已知橘子糖的单价为每千克28元，椰子糖的单价为每千克32元，奶糖的单价为每千克48元，则这种什锦糖的单价为每千克(　　)

A.36元　　B.$\frac{100}{x+y+z}$元

C.$\frac{x+y+z}{108}$元　　D.$\frac{28x+32y+48z}{x+y+z}$元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{8}{x-1}$；(2) $\frac{2}{x^2-9}$；(3) $\frac{x-2}{x^2-4}$.

10. 当 x 取何值时，下列分式的值是零？

(1) $\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$；(2) $\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$.

11. 约分：(1) $\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}$；(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

能力提升练

12. [中考 · 宜昌] 计算 $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$ 的结果为(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 0

13. 若 $x^2-9=0$，则 $\frac{x^2-6x+9}{2x-6}$ 的值为(　　)

A. 0　　B. -3　　C. 0 或 -3　　D. 1

14. 下列式子：① $\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}$；② $\frac{b-a}{c-a}=\frac{a-b}{a-c}$；③ $\frac{|b-a|}{a-b}=-1$；④ $\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{x-y}{x+y}$，其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

15. [中考 · 益阳] 代数式 $\frac{\sqrt{3-2x}}{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

16. 若 $|x-y+1|+(2x-3)^2=0$，则分式 $\frac{1}{4x-2y}$ 的值为_____.

17. (1) 分式 $\frac{-x^2}{1-5x}$ 的值为负，求 x 的取值范围；

(2) 当 x 满足什么条件时，分式 $\frac{x+1}{2x+4}$ 的值为正？

18. 已知 a,b,c 均不为 0，且 $\frac{a+2b}{5}=\frac{3b-c}{3}=\frac{2c-a}{7}$，求 $\frac{c-2b}{2b+3a}$ 的值.

19. 已知 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求分式 $\frac{2x-3xy-2y}{x+2xy-y}$ 的值.

思维拓展练

20. [探究题] 学校用一笔钱买奖品，若以 1 支钢笔和 2 本日记本为一份奖品，则可买 60 份奖品；若以 1 支钢笔和 3 本日记本为一份奖品，则可买 50 份奖品. 问：这笔钱全部用来买钢笔或日记本，可分别买多少？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.2 分式的运算

核心知识

- 分式的乘除
- 分式的乘方
- 分式的加减
- 分式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的乘除

1 分式乘除的法则：

(1)两个分式相乘，用分子的积作积的分子，用分母的积作积的分母.

用字母表示为$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

(2)两个分式相除，将除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

用字母表示为$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

要点精析///

(1)分式与分式相乘，如果分子、分母都是单项式，可先将分子、分母分别相乘，然后约去公因式化为最简分式或整式；如果分子、分母中有多项式，则应先分解因式，看能否约分，然后再相乘.

(2)整式和分式相乘，可以直接把整式和分式的分子相乘作分子，分母不变；当整式是多项式时，要先分解因式.

(3)分式的除法可以转化为乘法，即颠倒除式的分子、分母的位置，再与被除式相乘.

(4)分式的乘除的计算结果，要通过约分化为最简分式或整式.

2 易错警示：

当分式中的分子和分母出现互为相反数的因式时，容易出现看成是相等的两个因式而约分成1的错误.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用分式乘除的法则解决分子与分母都是单项式的分式的乘除法

例1 计算：

(1)$\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}$；

(2)$\frac{ab^2}{2c^2}\div\frac{-3a^2b^2}{4cd}$.

导引： 当分式的分子和分母都是单项式时，若是分式乘法，则可以直接运用乘法法则进行计算；若是分式除法，则先转化为乘法，再进行计算.

解： (1)原式$=\frac{4x\cdot y}{3y\cdot 2x^3}=\frac{4xy}{6x^3y}=\frac{2}{3x^2}$.

(2)原式$=\frac{ab^2}{2c^2}\cdot\frac{4cd}{-3a^2b^2}=-\frac{ab^2\cdot 4cd}{2c^2\cdot 3a^2b^2}=-\frac{2d}{3ac}$.

技巧点拨

若分式的分子和分母都是单项式，分式相乘时直接按乘法法则进行计算；分式相除时，要做到“一变一倒”，即“变”除法为乘法，颠倒除式的分子、分母，再按分式乘法法则进行计算.分式的乘除，结果都必须是最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用分式乘除的法则解决分子与分母都是多项式的分式的乘除法

例2 计算：(1)$\frac{x+2}{x-3}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}$；(2)$\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}\div\frac{a^2-a}{a+1}$.

导引： 对于(1)，分子、分母都是多项式，先分解因式，再按分式乘法的法则计算并约分；对于(2)，先将分式的分子、分母进行因式分解，再将除式的分子、分母颠倒位置后转化为分式乘法进行计算.

解： (1)原式$=\frac{x+2}{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{(x+2)(x-3)^2}{(x-3)(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x-3}{x-2}$.

(2)原式$=\frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2}\div\frac{a(a-1)}{a+1}$

$=\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{a(a-1)}$

$=\frac{1}{a}$.

方法点拨

分式除法的一般步骤：(1)如果分式的分子、分母都为多项式，先要进行因式分解；(2)利用除法法则，将除法运算转化为乘法运算；(3)运用分式乘法的法则计算；(4)约分化简，结果必须化为最简分式或整式.

考查角度3 利用分式乘除的法则解决分式乘除混合运算

例3 计算：(1)$\frac{3ab^2}{2x^3y}\cdot\left(-\frac{8xy}{9a^2b}\right)\div\frac{3x}{-4b}$；

(2)$\frac{2x+6}{x^2+2x}\div(x+3)\cdot\frac{x^2-2x}{2-x}$.

导引： 先将分式乘除混合运算统一转化成乘法运算，能分解因式的先分解因式，再约分化简.

解： (1)原式$=\frac{3ab^2}{2x^3y}\cdot\left(-\frac{8xy}{9a^2b}\right)\cdot\frac{-4b}{3x}=\frac{3ab^2\cdot8xy\cdot4b}{2x^3y\cdot9a^2b\cdot3x}=\frac{16b^2}{9ax^3}$.

(2)原式$=\frac{2(x+3)}{x(x+2)}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{x(x-2)}{-(x-2)}=-\frac{2}{x+2}$.

方法点拨

在分式的乘除混合运算中，先将除法运算转化为乘法运算，再按分式的乘法法则进行计算.其中注意两点：(1)整式因式看成分母是1的形式；(2)最后结果是最简分式或整式.

知识2 分式的乘方

1 **分式乘方的法则：** 分式乘方就是把分子、分母分别乘方.

用字母表示为$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$($n$是正整数).

要点精析///

(1)分式乘方时，要把分式的分子、分母分别乘方.

(2)分式本身的符号也要同时乘方.

(3)分式的分子和分母是多项式时，分子、分母要分别看成一个整体进行乘方.

(4)分式的乘除、乘方混合运算顺序与分数的乘除、乘方混合运算顺序相同，有括号的先计算括号内的；无括号时，先计算乘方，再计算乘除，同级运算则按从左到右的顺序进行计算.

2 **易错警示：**

(1)乘方时没有将分子和分母分别乘方.

(2)在分式的乘除、乘方混合运算中出现运算顺序的错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用分式乘方的法则进行计算

例4 计算：

(1) $\left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2$；

(2) $\left(\frac{-3x^4y^2}{2z}\right)^3$.

导引： 对于本题，分式乘方时分子、分母都要加上括号，分式本身的符号也要乘方.

解： (1) 原式 $=\frac{(-2a^2b)^2}{(3c)^2}=\frac{4a^4b^2}{9c^2}$.

(2) 原式 $=\frac{(-3x^4y^2)^3}{(2z)^3}=-\frac{27x^{12}y^6}{8z^3}$.

方法点拨

分式的乘方是分式乘法的特殊情形，计算时，应先判断乘方结果的符号，再分别把分子、分母乘方.

考查角度2 利用分式运算法则进行分式的乘方、乘除混合运算

例5 计算：

(1) $\left(\frac{b}{2a}\right)^2\div\left(\frac{-b}{a}\right)\cdot\left(-\frac{3b}{4a}\right)^3$；

(2) $\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\div(x+y)^2\cdot\left(\frac{x}{x-y}\right)^3$.

导引： 本类题是分式的乘除与乘方的混合运算题，应先进行乘方运算，再进行分式的乘除运算.

解： (1) 原式 $=\frac{b^2}{4a^2}\cdot\left(\frac{a}{-b}\right)\cdot\left(-\frac{27b^3}{64a^3}\right)$

$=\frac{27b^4}{256a^4}$.

(2) 原式 $=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{x}{xy^2-y^3}$.

方法点拨

在分式的乘方、乘除混合运算中，先算乘方，再算乘除；乘、除是同级运算，应按从左到右的运算顺序进行计算；当分式中的分子、分母是多项式且能分解因式时，还要分解因式，从便达到约分的目的.

点知识 3 分式的通分

1 分式的通分：

化异分母分式为同分母分式的过程，叫做分式的通分.

要点精析///

(1) 通分的依据是分式的基本性质.

(2) 通分的关键是确定几个分式的最简公分母.

(3) 分式 $\xrightarrow{\text{同除}}$ 约分；分式 $\xrightarrow{\text{同乘}}$ 通分.

即 $\frac{a\div m}{b\div m}\xleftarrow{\text{约分}}\frac{a}{b}\xrightarrow{\text{通分}}\frac{a\cdot m}{b\cdot m}(m\neq0)$.

2 最简公分母： 取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母，这样的公分母叫做最简公分母.

3 确定最简公分母的一般方法：

(1) 如果各分母都是单项式，那么最简公分母就由①各分母系数(都是整数)的最小公倍数；②各分母相同字母的最高次幂；③各分母所有不同字母及其指数的乘积这三部分组成；

(2) 如果各分母中有多项式，就先把分母是多项式的分解因式，再按照分母都是单项式时求最简公分母的方法，从系数、相同因式、不同因式三个方面去确定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 分母是单项式的分式通分

例6 通分：$\frac{3}{4a^2b}$与$\frac{5}{2ab^2c}$.

导引： 先确定各分式的最简公分母，再利用分式的基本性质通分.

解： 因为最简公分母是$4a^2b^2c$，所以$\frac{3}{4a^2b}=\frac{3\cdot bc}{4a^2b\cdot bc}=\frac{3bc}{4a^2b^2c}$，

$\frac{5}{2ab^2c}=\frac{5\times 2a}{2ab^2c\cdot 2a}=\frac{10a}{4a^2b^2c}$.

同类变式 （答案见199页）

6. 通分：$\frac{4a}{5b^2c}$，$\frac{3c}{10a^2b}$，$\frac{5b}{-2ac^2}$.

方法点拨

确定各分母都是单项式的分式的最简公分母的方法：(1)系数取各分母系数（都是整数）的最小公倍数；(2)同底数幂取次数最高的作为最简公分母的一个因式；(3)单独出现的字母连同它的指数作为最简公分母的一个因式.

考查角度2 分母是多项式的分式通分

例7 通分：$\frac{1}{x^2-4}$与$\frac{x}{4-2x}$.

导引： 由于分母都是多项式，因此先分解因式，再确定最简公分母，然后利用分式的基本性质通分.

解： 因为最简公分母是$2(x+2)(x-2)$，

所以$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1\times 2}{(x+2)(x-2)\cdot 2}=\frac{2}{2(x+2)(x-2)}$，$\frac{x}{4-2x}=$

$\frac{x\cdot(x+2)}{-2(x-2)\cdot(x+2)}=-\frac{x(x+2)}{2(x+2)(x-2)}$.

同类变式 （答案见199页）

7. 通分：$\frac{1}{x^2-6x+9}$，$\frac{2}{x^2-9}$，$\frac{1}{3x-9}$.

方法点拨

确定各分母都是多项式的分式的最简公分母的方法：(1)将各个分母进行因式分解；(2)找出每个分母中出现的因式的最高次幂，它们的积为最简公分母的因式；(3)若分母有系数且都是整数，则所有分母系数的最小公倍数是最简公分母的系数.

点知识 4 分式的加减

1 分式加减的法则：

(1)同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减. 用字母表示为$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$；

(2)异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式后再加减.

用字母表示为$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

要点精析///

(1)“把分子相加减”就是把各个分式的“分子整体”相加减，各分子都应加括号，特别是分式相减，分子是多项式时要注意加括号.

(2)异分母分式相加减，先利用通分化成同分母的分式相加减，再按同分母分式加减的法则进行计算.

(3)异分母分式加减的运算步骤：

①通分：将异分母分式化成同分母分式；

②写成“分母不变，分子相加减”的形式；

③分子化简：分子去括号、合并同类项；

④约分：结果化为最简分式或整式.

2 易错警示：

同分母分式相减时，分子相减要加括号，否则当减式的分子是多项式时，容易出现符号错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用分式加减的法则进行同分母分式的加减法计算

例8 计算：

(1) $\frac{x^2-y^2}{4xy}-\frac{x^2+y^2}{4xy}$；

(2) $\frac{7x-3y}{x^2-y^2}-\frac{4x}{x^2-y^2}$；

(3) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}+1$.

导引： 先看各分式是否是同分母分式，是同分母分式则分母不变，把分子相加减；若表面看不是同分母，而是互为相反数时，要先化为同分母分式，再进行计算.

解： (1) 原式 $=\frac{(x^2-y^2)-(x^2+y^2)}{4xy}=\frac{x^2-y^2-x^2-y^2}{4xy}=$

$\frac{-2y^2}{4xy}=-\frac{y}{2x}$.

(2) 原式 $=\frac{7x-3y-4x}{x^2-y^2}=\frac{3x-3y}{x^2-y^2}=\frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{3}{x+y}$.

(3) 原式 $=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}+1=\frac{a-b}{a-b}+1=1+1=2$.

技巧点拨

分母相同，而分子是多项式，分子相加减时要把分子看成一个整体，先用括号括起来，再进行加减，能分解因式的要分解因式，最后结果要进行约分化简；两个分式的分母互为相反数时，可通过添加负号把两个分式变为同分母的分式，再按照同分母分式加减的法则进行计算.

考查角度2 利用分式加减的法则进行异分母分式的加减法计算

例9 计算：(1) $\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}$；

(2) $\frac{1}{x-3}+\frac{1-x}{6+2x}-\frac{6}{x^2-9}$.

导引： 异分母分式相加减，先通分化为同分母分式相加减，再按同分母分式加减的法则进行计算.

解： (1) 原式 $=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{2x-(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{1}{x+2}$.

(2) 原式 $=\frac{1}{x-3}+\frac{1-x}{2(x+3)}-\frac{6}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{2(x+3)+(1-x)(x-3)-12}{2(x+3)(x-3)}$

$=\frac{-(x^2-6x+9)}{2(x+3)(x-3)}=\frac{-(x-3)^2}{2(x+3)(x-3)}$

$=-\frac{x-3}{2x+6}$.

方法点拨

异分母分式相加减，先用通分的方法化异分母为同分母，然后按同分母分式加减的法则计算；当分子、分母是多项式时，首先要进行因式分解；如果计算结果不是最简的，一定要进行约分将其化为最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用分式与整式的特征进行分式与整式的加减法

例10 [易错题] 计算：$\frac{x^3}{x-1}-x^2-x-1$.

导引： 将 $-x^2-x-1$ 看成分母为 1 的分式，然后先通分，再计算.

解： 原式 $=\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2+x+1}{1}=\frac{x^3}{x-1}-\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$.

易错警示

分数线除了具有除号的作用外，还具有括号的作用，注意 $-x^2-x-1$ 应该写成 $-\frac{x^2+x+1}{1}$ 的形式，而不是 $-\frac{x^2-x-1}{1}$.

点知识 5 分式的混合运算

1 分式的混合运算：

分式的混合运算顺序是先乘方，再乘除，后加减；如果有括号，先算括号里面的；同级运算按从左到右的顺序进行计算.

要点精析///

(1) 注意运算顺序和解题步骤，把好符号关.

(2) 进行分式混合运算时，可以根据需要合理地运用运算律来简化运算，此时先将分式的乘除法统一成乘法，分式的加减法统一成加法，才能使用乘法运算律、加法运算律简化运算.

(3) 运算过程中及时约分化简，有时可使解题过程简单.

(4) 运算结果是最简分式或整式.

2 易错警示：

在分式除法运算中套用乘法分配律而出现错误.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用分式的运算法则进行分式的混合运算

例11 计算：

(1) $\frac{x^2+2x+1}{x+2}\div\frac{x^2-1}{x-1}-\frac{x}{x+2}$;

(2) $\frac{a^2+3a}{a^2-3a}-\frac{a-3}{a}\cdot\left(\frac{2a}{a-3}\right)^2$;

(3) $\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+4}\right)\div\frac{2}{x^2-16}$.

导引： 对于(1)先计算除法，再计算减法；对于(2)先计算乘方，再计算乘法，最后计算减法；对于(3)把除法转化为乘法后，可运用分配律计算，也可以先将括号内的分式通分，再把分式除法转化为乘法进行计算.

解： (1) 原式 $=\frac{(x+1)^2}{x+2}\cdot\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x+2}=\frac{x+1-x}{x+2}=\frac{1}{x+2}$.

(2) 原式 $=\frac{a(a+3)}{a(a-3)}-\frac{a-3}{a}\cdot\frac{4a^2}{(a-3)^2}=\frac{a+3}{a-3}-\frac{4a}{a-3}=\frac{3-3a}{a-3}$.

(3) 原式 $=\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+4}\right)\cdot\frac{(x+4)(x-4)}{2}=\frac{x+4}{2}+\frac{x-4}{2}=x$.

方法点拨

在进行分式的混合运算时，应先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里面的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用化简求值法求分式的值

例 12 [中考·乌鲁木齐] 先化简，再求值：$\left(\frac{a+2}{a^2-2a}+\frac{1-a}{a^2-4a+4}\right)\div\frac{a-4}{a}$，其中 a 满足 $a^2-4a-1=0$.

导引： 根据分式的运算法则，先完成分式的化简，再将 $a^2-4a-1=0$ 变形为 $(a-2)^2=5$，代入化简之后的式子即可求解.

解： 原式 $=\frac{(a+2)(a-2)+a(1-a)}{a(a-2)^2}\cdot\frac{a}{a-4}=\frac{1}{(a-2)^2}$.

由 $a^2-4a-1=0$，得 $(a-2)^2=5$，代入上式，得原式 $=\frac{1}{5}$.

方法点拨

分式的化简求值，分两步完成，第一步是化简，利用分式的运算法则进行化简；第二步就是求值，有直接代入求值还有整体代入求值.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的运算律进行分式混合运算

例 13 计算：$\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{3x}-\frac{x+y}{y}\right)\right]\div\frac{x-y}{x}$.

导引： 如果先算小括号里面的，过程就比较复杂，而用分配律进行计算就简单了.

解： 原式 $=\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{3x}+\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{y}\right)\cdot\frac{x}{x-y}=\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{3x}+\frac{2}{y}\right)\cdot\frac{x}{x-y}=\frac{2x}{y(x-y)}$.

方法点拨： 分式的混合运算中，一般按照运算顺序和法则进行，但有些题目可以巧妙借用运算律，使运算更简便.

拔尖角度 2 利用分式的运算法则求分式中待定字母的值

例 14 已知 $\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$，则 $A=$_____，$B=$_____.

导引： 由分式加法的法则，得 $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$，进而可得方程组 $\begin{cases}A+B=2,\\2A-B=1,\end{cases}$ 解得 $A=1$，$B=1$.

答案： 1；1

方法点拨： 解这类题首先等式两边要进行通分，并各自进行加减运算，发现通分后左、右两边的分母相同，所以左、右两边的分子相等，从而得到对应项的系数相等构建方程（组）来确定待定字母的取值；解这类题也可以利用恒等式的定义，任取 x 的两个值（使分式有意义），列出方程组，求出 A，B 的值.

拔尖角度 3 利用裂项相消法解决规律探究问题

例 15 因为 $\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$，…，$\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$，

所以 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{9}{19}$.

(1) 在式子 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots$ 中，第 7 项为_____，第 n 项为_____（n 为整数）；

(2) 计算：$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)$\frac{1}{13\times15}$；$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}$

$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}$

$=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}$

$=\frac{3}{(x-1)(x-4)}$.

方法点拨：本题直接通分计算比较麻烦，通过裂项相消法$\left(即\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)$进行计算更简便.

练中考·练模拟 得满分 （答案见199页）

基础巩固练

1. [中考·江西]计算$\frac{1}{a}\div\left(-\frac{1}{a^2}\right)$的结果为(　　)

A. a　　B. $-a$　　C. $-\frac{1}{a^3}$　　D. $\frac{1}{a^3}$

2. 下列计算结果正确的是(　　)

A. $-\left(\frac{y}{2x}\right)^2=\frac{y^2}{4x^2}$

B. $\left(\frac{3m}{4n}\right)^2=\frac{3m^2}{4n^2}$

C. $\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2=\frac{4a^2}{a^2-b^2}$

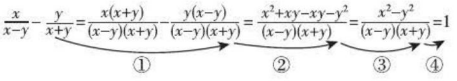
D. $\left(-\frac{a^3}{2b}\right)^3=-\frac{a^9}{8b^3}$

3. [中考·攀枝花]化简$\frac{m^2}{m-n}+\frac{n^2}{n-m}$的结果是(　　)

A. $m+n$　　B. $n-m$

C. $m-n$　　D. $-m-n$

4. [中考·陇南]如图所示的计算过程中，从哪一步开始出现错误？(　　)



(第4题图)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

5. 化简$\left(1+\frac{4}{a-2}\right)\div\frac{a}{a-2}$的结果是(　　)

A. $\frac{a+2}{a}$　　B. $\frac{a}{a+2}$　　C. $\frac{a-2}{a}$　　D. $\frac{a}{a-2}$

6. 若$\left(\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}\right)\div M$的化简结果是$-\frac{1}{a+b}$，那么分式$M$为(　　)

A. $\frac{a}{a+b}$　　B. $\frac{b}{b-a}$

C. $\frac{a}{a-b}$　　D. $-\frac{b}{a+b}$

7. 某单位全体员工计划在植树节义务植树240棵，原计划每小时植树a棵，实际每小时植树的棵数是原计划的1.2倍，那么实际比原计划提前了_____小时完成任务(用含a的代数式表示).

8. 若$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$，则$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$的值为_____.

9. [中考·资阳]化简求值：$\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)\div\frac{1}{x^2+x}$，其中$x=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 有这样一道题："计算$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}$的值，其中$x=2\ 019$". 甲同学把"$x=2\ 019$"错抄成"$x=2\ 091$"，但他的计算结果也正确，你说这是怎么回事？

11. [中考·威海] 先化简：$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\left(\frac{x-1}{x+1}-x+1\right)$，然后从$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$的范围内选取一个合适的整数作为$x$的值代入求值.

能力提升练

12. [中考·北京] 如果$a-b=2\sqrt{3}$，那么代数式$\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-b\right)\cdot\frac{a}{a-b}$的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{3}$　C. $3\sqrt{3}$　D. $4\sqrt{3}$

13. [中考·昆明] 若$m+\frac{1}{m}=3$，则$m^2+\frac{1}{m^2}=$_____.

14. 若代数式$\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}$有意义，则$x$的取值范围是_____.

15. [中考·河南] 先化简，再求值：$\left(\frac{a+4}{a+1}-\frac{a+1}{a}\right)\div\frac{4a-2}{a^2-1}$，然后从$-2<a\leqslant 2$的范围内选取一个合适的整数作为$a$的值代入求值. 【导学号:2231921】

16. 已知$M=\frac{2xy}{x^2-y^2}$，$N=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$，用"+"或"−"连接$M$，$N$，有三种不同的形式：$M+N$，$M-N$，$N-M$，请你任选其中一种进行计算，并化简求值，其中$x:y=5:2$.

17. 先化简，再求值：$\frac{a-2}{a^2-1}\div\left(a-1-\frac{2a-1}{a+1}\right)$，其中$a$是方程$x^2-x=6$的根.

思维拓展练

18. 已知$abc\neq 0$，且$a+b+c=0$，求$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$的值.

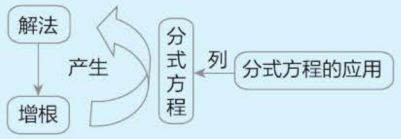
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9.3 分式方程

核心知识

- 分式方程
- 分式方程的解法
- 增根
- 分式方程的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式方程

1 **分式方程：** 分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

要点精析

(1) 分式方程的两个特点：

①方程中含有分母；

②分母中含有未知数.



(2) 分母中是否含有未知数是分式方程与整式方程的根本区别，是区分分式方程和整式方程的依据.

(3) 整式方程和分式方程统称为有理方程.

2 **易错警示：** 分式方程中的分母含有未知数，而不是一般的字母参数.

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用分式方程的定义识别分式方程

例1 下列方程是分式方程的有(　　)

①$\frac{2x+3}{2}=8$；　②$\frac{3}{4-x}=\frac{4}{x+2}$；

③$\frac{x^2}{x}=1$；　④$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{y-3}$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

导引： 根据分式方程的定义进行判断.

①不是分式方程，因为分母中不含有未知数.

②是分式方程，因为分母中含有未知数.

③是分式方程，因为分母中含有未知数.

④是分式方程，因为分母中含有未知数.

答案： C

方法点拨

判断一个方程是不是分式方程的方法：根据分式方程定义中的条件，判断方程中分母是否含有未知数，如果含有未知数，那么这个方程就是分式方程，否则就不是分式方程.

警示：识别分式方程时，不能对方程进行约分、通分变形，更不能用等式性质变形.

同类变式 (答案见 201 页)

1. 下列关于 x 的式子是分式方程的有(　　)

①$\frac{1}{x-1}=2$；②$\frac{x-1}{5}-\frac{4}{x}$；

③$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$($a$，$b$ 为已知数)；

④$\frac{x+2}{x-1}=\frac{x}{x-3}$.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 在实际问题中建立分式方程的模型

例2 ［中考·济宁］世界文化遗产“三孔”景区已经完成5G基站布设，“孔夫子家”自此有了5G网络. 5G网络峰值速率为4G网络峰值速率的10倍，在峰值速率下传输500兆数据，5G网络比4G网络快45秒，求这两种网络的峰值速率. 设4G网络的峰值速率为每秒传输x兆数据，依题意，可列方程是(　　)

A. $\frac{500}{x}-\frac{500}{10x}=45$　　B. $\frac{500}{10x}-\frac{500}{x}=45$

C. $\frac{5\,000}{x}-\frac{500}{x}=45$　　D. $\frac{500}{x}-\frac{5\,000}{x}=45$

导引： 利用5G网络比4G网络快45秒这个数量关系列出方程即可.

答案： A

技巧点拨

在实际问题中建立分式方程的模型关键是要明确题目中的等量关系，根据这些等量关系列出方程.

知识2 分式方程的解法

1 **解分式方程：** 解分式方程的思路是先去分母，把分式方程转化为整式方程.

2 **解分式方程的一般步骤：**

①去分母：把方程两边都乘以各分式的最简公分母，约去分母，化为整式方程；

②解这个整式方程，得到整式方程的根；

③验根：把整式方程的根代入最简公分母，使最简公分母不等于零的根是原分式方程的根，使最简公分母等于零的根不是原分式方程的根；

④写出分式方程的根.

3 解分式方程的关键一步是去分母，化分式方程为整式方程，如果分母是多项式，首先要分解因式，然后确定最简公分母.

4 **分式方程无解有两种情形：**

①分式方程化为整式方程后，所得的整式方程无解，则原分式方程无解；②分式方程化为整式方程后，整式方程有解，但经检验不是原分式方程的解，此时原分式方程无解.

5 **易错警示：**

(1)去分母时容易漏乘不含分母的项；

(2)当分子是多项式时没有用括号括起来；

(3)没有检验.

核心考向

提分·秘诀

考查角度1 利用解分式方程的步骤解分式方程

例3 解方程：(1)$\frac{x}{2x-3}+\frac{5}{3-2x}=4$；(2)$\frac{3}{x^2-9}+\frac{x}{x-3}=1$.

导引： 解分式方程，先把方程的两边同时乘以最简公分母，化成整式方程后，解整式方程，得到整式方程的根，代入原分式方程的最简公分母进行检验，若不为零，则整式方程的根就是分式方程的根，否则就不是分式方程的根.

解： (1)方程两边同乘以$(2x-3)$，得$x-5=4(2x-3)$，

去括号，得$x-5=8x-12$，

移项、合并同类项，得$-7x=-7$，

系数化为1，得$x=1$.

经检验，$x=1$是原分式方程的解.

所以分式方程的解为$x=1$.

易错警示

在去分母时，方程两边同时乘以最简公分母，必须每一项都要乘，不能认为有分母的就要乘，没有分母的就不用乘，而是有几项就要乘几项，不能漏乘.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)方程两边同乘以$(x+3)(x-3)$,得$3+x(x+3)=(x+3)(x-3)$,

去括号,得$3+x^2+3x=x^2-9$,

移项、合并同类项,得$3x=-12$,

系数化为1,得$x=-4$.

经检验,$x=-4$是原分式方程的解.

所以分式方程的解为$x=-4$.

考查角度2 利用分式方程的解的定义求分式方程中待定字母的值

例4 [中考·遵义]若$x=3$是分式方程$\frac{a-2}{x}-\frac{1}{x-2}=0$的根,则$a$的值是(　　)

A.5　　B.-5　　C.3　　D.-3

导引: 把$x=3$代入分式方程,得到关于a的一元一次方程,求a的值. 因为$x=3$是分式方程$\frac{a-2}{x}-\frac{1}{x-2}=0$的根,所以$\frac{a-2}{3}-\frac{1}{3-2}=0$,解得$a=5$.

答案: A

方法点拨

已知方程的解求分式方程中待定字母的值时,注意区别方程的未知数和待定字母. 将方程的解代入方程即替换方程中的未知数,如例4中将方程的解$x=3$代入方程中替换x,从而得到关于待定字母a的方程,进而求出待定字母a的值.

同类变式 (答案见201页)

4. [中考·甘孜州]若$x=4$是分式方程$\frac{a-2}{x}=\frac{1}{x-3}$的根,则$a$的值为(　　)

A.6　　B.-6　　C.4　　D.-4

知识3 分式方程的增根

1 增根:

(1)定义:在解分式方程的过程中,为了化分式方程为整式方程,需要用分式方程中各分式的最简公分母去乘方程的两边,若所得的解恰好使最简公分母的值为零,则这个解就是增根;反之,若分式方程有增根,则必是使最简公分母为零时未知数的值.

(2)关于增根:

①因为在将分式方程变形为整式方程时,扩大了未知数的取值范围,所以转化后的整式方程的根有可能不适合原分式方程,即产生了增根.

②在什么情况下会出现增根呢? 在将分式方程转化为整式方程时,方程的两边乘以同一个含未知数的整式,而这个含有未知数的整式有可能等于零,因而就有可能产生增根.

③验根:验根的方法有两种,一种是把从整式方程中所得的根代入最简公分母,若值为零,则所得的根为增根;另一种是把从整式方程中所得的根代入原方程,若左、右两边的值相等,说明是原方程的根,否则是原方程的增根.

2 分式方程无解有两种可能:

(1)将分式方程通过“去分母”变成整式方程后,整式方程是$ax=b(a=0,b\neq0)$的形式,即整式方程无解.

(2)整式方程求得的根,使得原分式方程的最简公分母等于0,即求得的根为增根,原方程无解.

3 易错警示:

(1)在求分式方程中字母的取值时,容易漏掉使分母的值不为零的隐含条件.

(2)增根虽不是分式方程的根,但它却是分式方程化成的整式方程的根,有时利用增根这个“小怪物”解题可以大显身手.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用增根的定义找分式方程产生的增根

例5 ［中考·巴中］若分式方程$\frac{3x-a}{x^2-2x}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x}$有增根，则实数$a$的取值是(　　)

A. 0或2　　B. 4　　C. 8　　D. 4或8

导引： 方程两边同乘以$x(x-2)$，得$3x-a+x=2(x-2)$，

由题意得，分式方程的增根为0或2，

当$x=0$时，$-a=-4$，解得$a=4$；

当$x=2$时，$6-a+2=0$，解得$a=8$.

故a的值为4或8.

答案： D

方法点拨

分式方程的增根，就是使分式方程的最简公分母的值为零的，且满足化成的整式方程的未知数的值.

考查角度2 利用已知分式方程的增根情况求字母参数的值

例6 已知关于x的分式方程$\frac{x-a}{x-1}-\frac{3}{x}=1$.

(1)若有增根$x=1$，求a的值；

(2)若有增根，求a的值.

导引： 先将分式方程化成整式方程，然后将增根代入整式方程，求出待定的字母a的值.

解： (1)去分母并整理，得$(a+2)x=3$.

因为$x=1$是原方程的增根，

所以$(a+2)\times1=3$，

所以$a=1$.

(2)因为分式方程有增根，

所以$x(x-1)=0$，所以$x=0$或$x=1$.

又因为整式方程$(a+2)x=3$有根，

所以$x=1$. 因此分式方程的增根为$x=1$.

所以$(a+2)\times1=3$，所以$a=1$.

技巧点拨

方程有增根，一定存在使最简公分母等于0的未知数的值，解这类题的一般步骤为①把分式方程化为整式方程；②令最简公分母为0，求出未知数的值，这里要注意：必须验证未知数的值是否是整式方程的根，如本题中$x=0$就不是整式方程的根；③把未知数的值代入整式方程，从而求出待定字母的值.

考查角度3 利用分式方程解的情况求字母参数的取值范围

例7 ［中考·荆州］若关于x的分式方程$\frac{m-1}{x-1}=2$的解为非负数，则m的取值范围是(　　)

A. $m>-1$　　B. $m\geqslant-1$

C. $m>-1$且$m\neq1$　　D. $m\geqslant-1$且$m\neq1$

导引： 原方程两边都乘以$(x-1)$，得$m-1=2(x-1)$，

所以$x=\frac{m+1}{2}$. 因为x为非负数，所以$\frac{m+1}{2}\geqslant0$，

解得$m\geqslant-1$. 又因为$x-1\neq0$，即$\frac{m+1}{2}\neq1$，所以$m\neq1$.

答案： D

易错警示

已知分式方程根的情况，则说明分式方程有根，所以在确定字母参数的取值范围时，不能忽视增根的情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 分式方程的应用

1 列分式方程解应用题的一般步骤：

(1)审：即审题，根据题意找出已知量和未知量，并找出等量关系.

(2)设：即设未知数，设未知数的方法有直接设和间接设，注意单位要统一，选择一个未知量用未知数表示，并用含未知数的代数式表示相关量.

(3)列：即列方程，根据等量关系列出分式方程.

(4)解：即解所列的分式方程，求出未知数的值.

(5)验：即验根，要检验所求的未知数的值是否适合分式方程，还要检验此解是否符合实际意义.

(6)答：即写出答案，注意单位和答案要完整.

2 分式方程的应用题主要涉及的类型：

(1)利润问题：利润 = 售价 − 进价，

$$\text{利润率} = \frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\%.$$

(2)工程问题：工作量 = 工作效率 ×工作时间.

(3)行程问题：路程 = 速度 ×时间.

3 易错警示：

列分式方程时单位不统一.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 通过建立分式方程模型解决工程问题

例 8 甲、乙两位同学同时为校文化艺术节制作彩旗. 已知甲每小时比乙多做 5 面彩旗，甲做 60 面彩旗与乙做 50 面彩旗所用时间相等，求甲、乙每小时各做多少面彩旗.

导引： 根据等量关系“甲做 60 面彩旗与乙做 50 面彩旗所用时间相等”列方程求解.

解： 设乙每小时做 x 面彩旗，则甲每小时做 $(x+5)$ 面彩旗.

根据题意，得 $\frac{60}{x+5}=\frac{50}{x}$. 解得 $x=25$.

经检验，$x=25$ 是所列方程的根. 此时 $x+5=30$.

答：甲每小时做 30 面彩旗，乙每小时做 25 面彩旗.

方法点拨

解决工程问题的应用题，关键是抓住工程问题中三个量之间的关系列出分式方程解决问题. 特别注意基本步骤中“检验”这一步不能少.

考查角度2 通过建立分式方程模型解决行程问题

例 9 ［中考·菏泽］德上高速公路巨野至单县段正在加速建设，预计 2019 年 8 月竣工. 届时，如果汽车行驶在高速公路上的平均速度比在普通公路上的平均速度提高 80%，那么行驶 81 千米的高速公路比行驶同等长度的普通公路所用时间将会缩短 36 分钟，求该汽车行驶在高速公路上的平均速度.

导引： 用代数式分别表示汽车行驶在普通公路上和行驶在高速公路上的平均速度，再根据“行驶 81 千米的高速公路比行驶同等长度的普通公路所用时间将会缩短 36 分钟”列出方程并解答.

解： 设汽车行驶在普通公路上的平均速度是 x 千米/时，则汽车行驶在高速公路上的平均速度是 $1.8x$ 千米/时，

由题意得 $\frac{81}{1.8x}+\frac{36}{60}=\frac{81}{x}$，解得 $x=60$.

经检验，$x=60$ 是所列方程的根. 此时 $1.8x=108$.

答：该汽车行驶在高速公路上的平均速度是 108 千米/时.

方法点拨

解决行程问题的应用题，关键是抓住行程问题中三个量之间的关系，列方程时特别要注意单位需统一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 通过建立分式方程的模型解决销售问题

例10 ［中考·遂宁］仙桃是遂宁市某地的特色时令水果. 仙桃一上市，水果店的老板用2 400元购进一批仙桃，很快售完；老板又用3 700元购进第二批仙桃，所购件数是第一批的$\frac{3}{2}$倍，但进价比第一批每件多了5元.

(1)第一批仙桃每件进价是多少元？

(2)老板以每件225元的价格销售第二批仙桃，售出80%后，为了尽快售完，剩下的决定打折促销. 要使得第二批仙桃的销售利润不少于440元，剩余的仙桃每件售价至少打几折？（利润=售价-进价）

导引： (1)根据“第二批仙桃所购件数是第一批的$\frac{3}{2}$倍”列方程解答；(2)由利润=售价-进价，根据“第二批仙桃的销售利润不少于440元”列不等式求解.

解： (1)设第一批仙桃每件进价是x元，则第二批仙桃每件进价是$(x+5)$元.

由题意得$\frac{2\,400}{x}\times\frac{3}{2}=\frac{3\,700}{x+5}$，解得$x=180$.

经检验，$x=180$是原方程的根.

答：第一批仙桃每件进价是180元.

(2)设剩余的仙桃每件售价打y折，

由题意得$\frac{3\,700}{180+5}\times225\times80\%+\frac{3\,700}{180+5}\times225\times(1-80\%)\times0.1y-3\,700\geqslant440$，解得$y\geqslant6$.

答：剩余的仙桃每件售价至少打六折.

方法点拨

由实际问题抽象出分式方程，重点在于准确地找出等量关系，找等量关系的方法：应用题中一般有三个量，明显有一个量是已知量，设一个量，根据另一个量来找等量关系列方程.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用无解的意义解分式方程无解的问题

例11 ［中考·达州］若关于x的分式方程$\frac{x}{x-3}+\frac{3a}{3-x}=2a$无解，则$a$的值为_____.

导引： 先去分母，再根据分式方程无解的条件逐步分析计算即可.

去分母，得$x-3a=2a(x-3)$，

整理，得$(1-2a)x=-3a$，

当$1-2a=0$时，方程无解，此时$a=\frac{1}{2}$；

当$1-2a\neq0$，$x=\frac{-3a}{1-2a}=3$时，分式方程无解，此时$a=1$.

故a的值为1或$\frac{1}{2}$.

答案： 1或$\frac{1}{2}$

方法点拨： 分式方程无解的情况有两种：(1)分式方程化成的整式方程无解，则分式方程也无解；(2)化成的整式方程的解都是原分式方程的增根，均被舍掉，则分式方程无解. 本题包含了两种情况，需要两者兼顾，不能遗漏.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用分式方程的解法巧解复杂的分式方程

例 12 解方程：$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.

导引： 若在方程两边直接乘以$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$，计算比较麻烦，故将方程先化简，再去分母.

解：（方法一）方程两边分别通分后相加，

得$\frac{(x+7)+(x+4)}{(x+4)(x+7)}=\frac{(x+6)+(x+5)}{(x+5)(x+6)}$，

即$\frac{2x+11}{(x+4)(x+7)}=\frac{2x+11}{(x+5)(x+6)}$.

方程两边同时乘以$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$，得$(2x+11)(x+5)(x+6)=(2x+11)(x+4)(x+7)$，

$(2x+11)(x+5)(x+6)-(2x+11)(x+4)(x+7)=0$，

$(2x+11)[(x+5)(x+6)-(x+4)(x+7)]=0$，

$(2x+11)\times 2=0$，

所以$2x+11=0$，所以$x=-\frac{11}{2}$.

检验：当$x=-\frac{11}{2}$时，

$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

所以$x=-\frac{11}{2}$是原分式方程的根.

（方法二）移项，得$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$，两边分别通分后相减，得$\frac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}=\frac{(x+7)-(x+6)}{(x+6)(x+7)}$，

即$\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

因为两个分式的分子相同，分式值相同，所以分式的分母相同.

所以$(x+4)(x+5)=(x+6)(x+7)$，

$x^2+9x+20=x^2+13x+42$，

$x^2+9x+20-x^2-13x-42=0$，

$-4x-22=0$，所以$x=-\frac{11}{2}$.

检验：当$x=-\frac{11}{2}$时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

所以$x=-\frac{11}{2}$是原分式方程的根.

技巧点拨： 比较本题的两种解法，可发现此类题目的解题技巧，即找出恰当的两项先通分，再去分母.

拔尖角度 3 通过建立分式方程的模型进行方案设计

例 13 为了迎接“十·一”小长假的购物高峰，某运动品牌专卖店准备购进甲、乙两种运动鞋. 其中甲、乙两种运动鞋的进价和售价如下表：

运动鞋 / 价格	甲	乙
进价/(元/双)	m	$m-20$
售价/(元/双)	240	160

已知用3 000元购进甲种运动鞋的数量与用2 400元购进乙种运动鞋的数量相同.

(1)求m的值；

(2)要使购进的甲、乙两种运动鞋共200双的总利润(利润=售价-进价)不少于21 700元，且不超过22 300元，问该专卖店有几种进货方案？

导引：(1)根据等量关系“用3 000元购进甲种运动鞋的数量=用2 400元购进乙种运动鞋的数量”列分式方程求解；(2)根据不等关系“21 700元≤两种运动鞋的利润和≤22 300元”列不等式组，求出正整数解的个数即可确定进货方案的种数.

解：(1)依题意得$\frac{3\,000}{m}=\frac{2\,400}{m-20}$，

解得$m=100$.

经检验，$m=100$是原分式方程的根，

所以$m=100$.

(2)设购进甲种运动鞋x双，则购进乙种运动鞋$(200-x)$双.

根据题意得$21\,700\leqslant(240-100)x+[160-(100-20)](200-x)\leqslant 22\,300$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $95 \leqslant x \leqslant 105$.

因为 x 是正整数，

所以共有 11 种进货方案.

方法点拨： 方案设计问题一般是通过列一元一次不等式(组)或二元一次方程，利用正整数解来确定具体的方案.

拔尖角度 4 利用求分式方程的解探究与分式方程及其解有关的规律

例 14 观察分析下列方程.

①$x+\frac{2}{x}=3$；②$x+\frac{6}{x}=5$；③$x+\frac{12}{x}=7$.

请利用它们所蕴含的规律，求关于 x 的方程 $x+\frac{n^2+n}{x-3}=2n+4$（n 为正整数）的根，你的答案是_____.

导引： 由 $x+\frac{1\times 2}{x}=1+2$，

得 $x=1$ 或 $x=2$；

由 $x+\frac{2\times 3}{x}=2+3$，得 $x=2$ 或 $x=3$；

由 $x+\frac{3\times 4}{x}=3+4$，得 $x=3$ 或 $x=4$.

因为 $x+\frac{n^2+n}{x-3}=2n+4$ 可变形为 $(x-3)+\frac{n(n+1)}{x-3}=n+(n+1)$，

所以由 $(x-3)+\frac{n(n+1)}{x-3}=n+(n+1)$，

得 $x-3=n$ 或 $x-3=n+1$，

所以 $x=n+3$ 或 $x=n+4$.

答案： $x=n+3$ 或 $x=n+4$

练中考·练模拟 得满分 （答案见 201 页）

基础巩固练

1. 下列方程不是分式方程的是(　　)

A. $\frac{1}{x}+x=1$　　B. $\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1+x}=2$　　D. $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-7}$

2. [中考·淄博] 解分式方程 $\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$ 时，去分母变形正确的是(　　)

A. $-1+x=-1-2(x-2)$

B. $1-x=1-2(x-2)$

C. $-1+x=1+2(2-x)$

D. $1-x=-1-2(x-2)$

3. [中考·成都] 分式方程 $\frac{x-5}{x-1}+\frac{2}{x}=1$ 的解为(　　)

A. $x=-1$　　B. $x=1$

C. $x=2$　　D. $x=-2$

4. [中考·淄博] “绿水青山就是金山银山”. 某工程队承接了 60 万平方米的荒山绿化任务，为了迎接雨季的到来，实际工作时每天的工作效率比原计划提高了 25%，结果提前 30 天完成了这一任务. 设实际工作时每天绿化的面积为 x 万平方米，则下面所列方程中正确的是(　　)

A. $\frac{60}{x}-\frac{60}{(1+25\%)x}=30$

B. $\frac{60}{(1+25\%)x}-\frac{60}{x}=30$

C. $\frac{60\times(1+25\%)}{x}-\frac{60}{x}=30$

D. $\frac{60}{x}-\frac{60\times(1+25\%)}{x}=30$

5. 对于两个非零实数 a，b，规定：$a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，若 $2\oplus(2x-1)=1$，则 x 的值为_____.

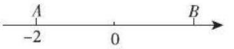
6. 解方程：

(1) [中考·大庆] $\frac{x}{x+3}-\frac{1}{x}=1$；

(2) [中考·广安] $\frac{x}{x-2}-1=\frac{4}{x^2-4x+4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·乐山] 如图，点 A，B 在数轴上，它们对应的数分别为 -2，$\frac{x}{x+1}$，且点 A，B 到原点的距离相等. 求 x 的值.



（第 7 题图）

8. [中考·云南] 为进一步营造扫黑除恶专项斗争的浓厚宣传氛围，推进平安校园建设，甲、乙两所学校各租用一辆大巴车组织部分师生，分别从距目的地 240 千米和 270 千米的两地同时出发，前往“研学教育”基地开展扫黑除恶教育活动. 已知乙校师生所乘大巴车的平均速度是甲校师生所乘大巴车的平均速度的 1.5 倍，甲校师生比乙校师生晚 1 小时到达目的地，分别求甲、乙两所学校师生所乘大巴车的平均速度.

能力提升练

9. 关于 x 的方程 $\frac{2ax+3}{a-x}=\frac{3}{4}$ 的根为 $x=1$，则 a 的值为(　　)

A. 1　　B. 3　　C. -1　　D. -3

10. [中考·凉山州] 关于 x 的方程 $\frac{3x-2}{x+1}=2+\frac{m}{x+1}$ 无解，则 m 的值为(　　)

A. -5　　B. -8　　C. -2　　D. 5

11. [中考·贺州] 若关于 x 的分式方程 $\frac{2x-a}{x-2}=\frac{1}{2}$ 的解为非负数，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a\geqslant 1$　　B. $a>1$

C. $a\geqslant 1$ 且 $a\neq 4$　　D. $a>1$ 且 $a\neq 4$

12. 方程 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$ 的解为 $x=1$；方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$ 的解为 $x=2$；方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}$ 的解为 $x=3$；…，按此规律，解为 $x=6$ 的方程应为 _____.

13. [中考·贵阳] 某青春党支部在精准扶贫活动中，给结对帮扶的贫困家庭赠送甲、乙两种树苗让其栽种. 已知乙种树苗的价格比甲种树苗贵 10 元，用 480 元购买乙种树苗的棵数恰好与用 360 元购买甲种树苗的棵数相同.

(1) 求甲、乙两种树苗每棵的价格各是多少元；

(2) 在实际帮扶中，他们决定再次购买甲、乙两种树苗共 50 棵，此时，甲种树苗的价格比第一次购买时降低了 10%，乙种树苗的价格不变，如果再次购买两种树苗的总费用不超过 1 500 元，那么他们最多可购买多少棵乙种树苗？

14. [中考·衡阳] 某商店购进 A，B 两种商品，购买 1 个 A 商品比购买 1 个 B 商品多花 10 元，并且花费 300 元购买 A 商品和花费 100 元购买 B 商品的数量相等.

(1) 求购买一个 A 商品和一个 B 商品各需要多少元；

(2) 商店准备购买 A，B 两种商品共 80 个，若 A 商品的数量不少于 B 商品数量的 4 倍，并且购买 A，B 商品的总费用不低于 1 000 元且不高于 1 050 元，那么商店有哪几种购买方案？

思维拓展练

15. 已知关于 x 的方程 $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$ 的解是正数，求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分式运算中的常用技巧与方法

荣老师告诉你 在分式的运算中，若能认真观察题目的结构特征，灵活运用解题技巧，选择恰当的运算方法，常常会得到事半功倍的效果.

技巧一 整体通分法

例1 化简：$\frac{a^2}{a-1}-a-1$.

导引： 将后两项看作一个整体，则可以整体通分，简便求解.

解： 原式 $=\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}$

$=\frac{a^2-(a^2-1)}{a-1}$

$=\frac{1}{a-1}$.

易错警示： 整体通分法计算时，看成一个整体的部分要加括号，运用添括号法则时如果前面是减号，注意要变号.

技巧二 逐项通分法

例2 计算：$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$.

导引： 若全部通分，最简公分母好确定，但分子的计算量太大，观察分母发现，从前到后逐项通分时，分母都构成平方差公式.

解： 原式 $=\frac{(a+b)-(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b(a^2+b^2)-2b(a^2-b^2)}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{4b^3}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=0$.

方法点拨： 逐项通分与一起通分最简公分母是相同的，其目的是为了在逐步通分的过程中简化分子的运算.

技巧三 先约分，后通分

例3 计算：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2}{a^2+4a+4}$.

导引： 先不要盲目通分，发现每个分式都可以约分，所以先将分子、分母分解因式，约分后再通分计算.

解： 原式 $=\frac{a(a+6)}{a(a+2)}-\frac{a^2}{(a+2)^2}=\frac{a+6}{a+2}-\frac{a^2}{(a+2)^2}=\frac{(a+6)(a+2)}{(a+2)^2}-\frac{a^2}{(a+2)^2}=\frac{4(2a+3)}{(a+2)^2}$.

方法点拨： 先约分的目的是为了简化最简公分母，使运算过程中分子的计算量减少.

技巧四 整体代入法

例4 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，求 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}$ 的值.

导引： 一个条件无法求出两个未知数的值，所以只能考虑整体代入求值.

解： 方法一：因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，所以 $xy\neq 0$. 所以

$\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{\frac{2}{y}-5+\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}+2+\frac{1}{x}}=\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-5}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2}$

$=\frac{2\times 5-5}{5+2}=\frac{5}{7}$.

方法二：因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，

所以 $\frac{x+y}{xy}=5$，所以 $x+y=5xy$.

所以 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2(x+y)-5xy}{(x+y)+2xy}=\frac{2\times 5xy-5xy}{5xy+2xy}=\frac{5xy}{7xy}=\frac{5}{7}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨： 用整体代入法求分式的值是最常用的方法，原因是分式可以约分，当不能求出分式中各个字母的值时，可以考虑利用整体代入法，虽然分子和分母中都含有字母，但通过约分可以求出其值.

技巧五 运用公式变形法

例5 已知 $a^2-5a+1=0$，计算：$a^4+\frac{1}{a^4}$.

解： 由已知条件可得 $a\neq 0$，所以 $a+\frac{1}{a}=5$.

所以 $a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2=(5^2-2)^2-2=527$.

方法点拨： 运用乘法公式变形求分式的值，避免了求出分式中字母的值.其中互为倒数的两个式子的和在运用完全平方公式时，积的2倍等于2.

技巧六 设辅助参数法

例6 已知 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$，计算：$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

解： 设 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则 $b+c=ak$，

$a+c=bk$，$a+b=ck$.

把这3个等式相加得 $2(a+b+c)=(a+b+c)k$，若 $a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，

则 $k=-1$；

若 $a+b+c\neq 0$，则 $k=2$.

$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{ck\cdot ak\cdot bk}{abc}=k^3$.

当 $k=-1$ 时，原式 $=-1$.

当 $k=2$ 时，原式 $=8$.

方法点拨： 设辅助参数，利用整体代入法将要求的分式转化为以辅助参数为字母的分式，利用约分可求出其值.

技巧七 应用倒数法

例7 已知 $\frac{a}{a^2-a+1}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$ 的值.

解： 由条件知 $a\neq 0$，

所以 $\frac{a^2-a+1}{a}=7$，即 $a+\frac{1}{a}=8$，

所以 $\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1=63$，所以 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}=\frac{1}{63}$.

方法点拨： 本题将分式的分子和分母颠倒，然后转化为用技巧五中的公式变形法求值.注意对于要求的分式的值要倒过来还原.

技巧八 把未知数当成已知数法

例8 已知 $3a-4b-c=0$，$2a+b-8c=0$（$c\neq 0$），计算：$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$.

解： 把 c 当作已知数，用 c 表示 a 和 b，得 $a=3c$，$b=2c$.

所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}=\frac{14c^2}{11c^2}=\frac{14}{11}$.

方法点拨： 求分式的值可以含有一个字母，故在解决三个字母两个等式的问题时，可以将其中的一个字母当成已知数，用解二元一次方程组的方法用这个已知数表示另外两个未知数.

技巧九 特殊值法

例9 已知 $abc=1$，则 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 3　　C. -1　　D. -3

导引： 由已知条件无法求出 a，b，c 的值，可根据已知条件取字母的一些特殊值，然后代入求值. 令 $a=1$，$b=1$，$c=1$，则

原式 $=\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}=1$.

答案： A

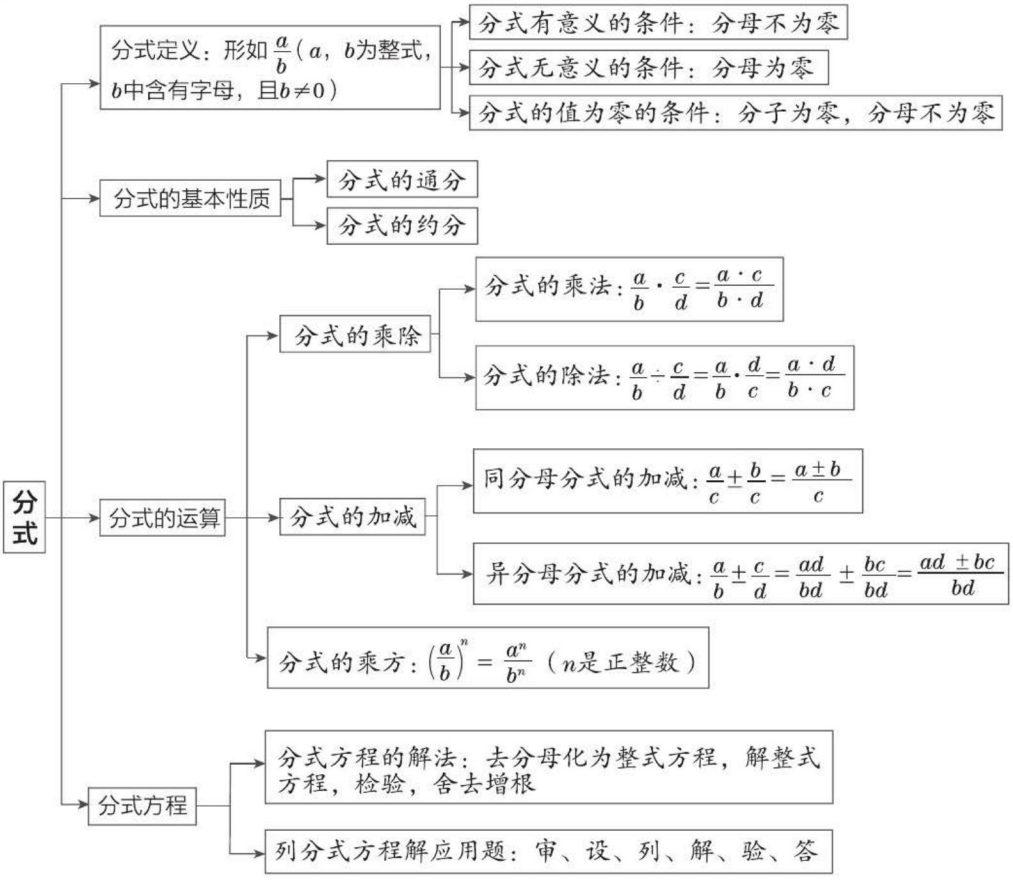
方法点拨： 特殊值法要求所取的特殊值必须符合题目中给出的已知条件，运用特殊值法可准确、迅速地求出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 形如$\frac{a}{b}$(a,b为整式,b中含有字母,且$b\neq0$)的式子叫做分式,$b\neq0$是分式有意义的条件;$a=0$,$b\neq0$是分式的值为零的条件.
2. 分式的基本性质:分式的分子和分母同时乘以或除以同一个不为0的数或整式,分式的值不变.根据分式的基本性质可以将分式进行通分或者约分.
3. 分式的运算包括乘方、乘除和加减这几则运算,乘除法运算关键是约分,加减法运算关键是通分,运算的最后结果一定要是最简分式或整式.
4. 解分式方程关键就是利用等式的性质将方程的两边同乘以最简公分母,将分式方程转化成整式方程,然后解整式方程.解完整式方程后一定要注意检验.若使最简公分母的值为零,则该根为增根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识方法专题

知识必学

专题一 分式的相关概念

链接中考>>在分式的相关概念中，分式有意义的条件及分式的值为0的条件最为重要，也是中考中热门的考点，一般都是以填空题、选择题的形式出现.

例1 (1)[中考·武汉]若分式$\frac{1}{x+2}$在实数范围内有意义，则实数x的取值范围是(　　)

A. $x>-2$　　B. $x<-2$

C. $x=-2$　　D. $x\neq-2$

(2)[中考·葫芦岛]若分式$\frac{x^2-1}{x+1}$的值为0，则x的值为(　　)

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. ±1

导引: (1)根据分式有意义的条件可知$x+2\neq0$，解得$x\neq-2$. (2)根据分式的值为0的条件可知$\begin{cases}x^2-1=0,\\x+1\neq0,\end{cases}$解得$x=1$.

答案: (1)D　(2)B

方法点拨: 分式的值为0需要同时具备两个条件：一是分子等于0，二是分母不等于0，二者缺一不可.

专题二 分式的运算

链接中考>>分式的运算是本章的重点，关键扣住分式的运算顺序以及分式的运算法则，中考中考查的形式主要是化简求值，属中档题目.

例2 [中考·达州]先化简:$\left(\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{x-1}{x^2+4x+4}\right)\div\frac{4-x}{x}$，再选取一个适当的$x$的值代入求值.

导引: 先对括号里的分式进行整理，再将除法变成乘法进行化简，然后代入适当的值即可.

解: $\left(\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{x-1}{x^2+4x+4}\right)\div\frac{4-x}{x}$

$=\left[\frac{x-2}{x(x+2)}-\frac{x-1}{(x+2)^2}\right]\div\frac{4-x}{x}$

$=\left[\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)^2}-\frac{x(x-1)}{x(x+2)^2}\right]\times\frac{x}{4-x}$

$=\frac{x^2-4-x^2+x}{x(x+2)^2}\times\frac{x}{4-x}$

$=\frac{-4+x}{x(x+2)^2}\times\frac{x}{4-x}$

$=-\frac{1}{(x+2)^2}$.

取$x=1$，

得原式$=-\frac{1}{(1+2)^2}=-\frac{1}{9}$.

方法点拨: 对于分式化简求值问题没有捷径，需要掌握因式分解和代入求值的方法等知识，分式问题中还需要注意分式有意义的条件，如分母不等于零，除式不等于零. 本题代入x的值必须使原式有意义，不能是0，-2，4.

专题三 解分式方程

链接中考>>解分式方程关键就是将分式方程转化为整式方程来解决，解分式方程一定要注意检验. 解方程是中考中的热门考点，一般都是直接考查解分式方程.

例3 解方程:$\frac{x}{3x-1}=2-\frac{1}{1-3x}$.

解: 去分母，得$x=2(3x-1)+1$，

去括号，得$x=6x-2+1$，

移项，得$x-6x=-2+1$，

合并同类项，得$-5x=-1$，

系数化为1，得$x=\frac{1}{5}$，

经检验，$x=\frac{1}{5}$是分式方程的解.

所以分式方程的根是$x=\frac{1}{5}$.

方法点拨: 分式方程$\xrightarrow[\text{转化为}]{\text{去分母}}$整式方程$\longrightarrow$解整式方程$\longrightarrow$检验根$\longrightarrow$确定原方程的根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题四 分式方程的增根

链接中考>>增根产生的原因：对原分式方程的根来说，它必须使分式方程中各个分式的分母的值不为0，如果所得的整式方程的解使原分式方程中至少一个分式的分母为0（这个分母实际上是去分母时最简公分母的一个因式），那么最简公分母的值为0，即相当于在分式方程两边都乘了0，不符合等式性质的要求，所以这个整式方程的解不适合原分式方程，它就是增根. 分式方程的增根问题是中考中的热门考点，一般都是以填空题、选择题的形式出现.

例4 当 m 为何值时，方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{mx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ 会产生增根？

导引： 本题主要考查分式方程产生增根的问题. 这个方程若产生增根，则使分母为零，即 $x=2$ 或 $x=-2$.

解： 方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$，得 $2(x+2)+mx=3(x-2)$，

当 $m\neq1$ 时，解关于 x 的整式方程，得 $x=\frac{10}{1-m}$.

方程的增根是 $x=2$ 或 $x=-2$，

当 $x=\frac{10}{1-m}=2$ 时，$m=-4$；

当 $x=\frac{10}{1-m}=-2$ 时，$m=6$.

所以当 m 的值为 -4 或 6 时，

原方程会产生增根.

方法点拨： 解决增根问题，需先把分式方程转化成整式方程.

专题五 分式方程的应用

链接中考>>分式方程的应用是分式方程作用的关键体现，都是以解决生活问题为目的. 所以考查分式方程的应用题时，问题的背景都是现实生活中的热点问题，解决问题的关键是寻找等量关系. 在中考中单独考查时一般以解答题形式出现.

例5 ［中考·青岛］甲、乙两人加工同一种零件，甲每天加工的数量是乙每天加工数量的1.5倍，两人各加工600个这种零件，甲比乙少用5天.

(1) 求甲、乙两人每天各加工多少个这种零件；

(2) 已知甲、乙两人加工这种零件每天的加工费分别是150元和120元，现有3 000个这种零件的加工任务，甲单独加工一段时间后另有安排，剩余任务由乙单独完成. 如果总加工费不超过7 800元，那么甲至少加工了多少天？

导引： (1) 用未知数分别表示甲、乙两人每天各加工的零件个数，再根据“甲比乙少用5天”列分式方程求解；(2) 根据“有3 000个这种零件的加工任务”列出方程；根据“总加工费不超过7 800元”列出不等式，然后综合考虑求解即可.

解： (1) 设乙每天加工 x 个零件，则甲每天加工 $1.5x$ 个零件，

由题意得 $\frac{600}{x}=\frac{600}{1.5x}+5$，

解得 $x=40$.

经检验 $x=40$ 是原方程的根.

此时 $1.5x=60$

答：甲每天加工60个零件，乙每天加工40个零件.

(2) 设甲加工了 a 天，乙加工了 b 天，

由题意得 $\begin{cases}60a+40b=3\,000,①\\150a+120b\leqslant7\,800,②\end{cases}$

由①得 $b=75-1.5a$，③

将③代入②，得 $150a+120(75-1.5a)\leqslant7\,800$，

解得 $a\geqslant40$，

答：甲至少加工了40天.

方法点拨： 运用方程（组）、不等式（组）解决实际问题时，要根据题目中关键信息判断是列方程还是列不等式，由相等关系、不等关系列式解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

思想方法专题

专题六 整体思想

专题解读>>解决某些数学问题时，把一组数或一个代数式看成一个整体进行处理，不仅可以简化解题过程，而且还能拓宽思路，培养创新意识，这体现了数学中的一种重要思想——整体思想. 这一思想在整式乘法的运算中体现明显，在解题中应用较多，要引起重视.

例6 ［中考·北京］如果 $m+n=1$，那么代数式 $\left(\frac{2m+n}{m^2-mn}+\frac{1}{m}\right)\cdot(m^2-n^2)$ 的值为(　　)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

导引：将原式化简后，约分得到最简结果，把已知等式代入计算即可.

$$\left(\frac{2m+n}{m^2-mn}+\frac{1}{m}\right)\cdot(m^2-n^2)$$

$$=\frac{2m+n+m-n}{m(m-n)}\cdot(m+n)(m-n)$$

$$=\frac{3m}{m(m-n)}\cdot(m+n)(m-n)$$

$$=3(m+n),$$

当 $m+n=1$ 时，原式 $=3$.

答案：D

专题七 倒数法

专题解读>>当有些分式求值问题直接求解困难时，可考虑求它的倒数，将问题转化为方便求解的问题，这类问题中分式的形式通常是分子是单项式，分母是多项式，此时将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的加减法，结合题目条件就方便求解了.

例7 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

导引：颠倒所求分式的分子和分母位置可得 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$，利用分式的基本性质得 $x^2+1+\frac{1}{x^2}$，再将条件等式两边平方即可求解.

解：$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}$，

又因为 $x+\frac{1}{x}=3$，

所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$，

所以 $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$，

所以 $x^2+1+\frac{1}{x^2}=8$，

所以 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=8$，

因此 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{8}$.



方法点拨：倒数法是处理分式问题的常用方法，对于分式求值问题，要仔细研究式子的特征，灵活运用倒数法.

专题八 裂项相消法

专题解读>>裂项相消法，可使出现多个分式的加减或相关的分式方程问题，通过变形将一部分项相互抵消，转化为常见的分式加减或常见的相关的分式方程，变复杂为简单，变难为易，不失为一种巧妙的解题方法.

例8 解方程：$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$.

导引：观察可以发现等号左边每个分式的分母中的两个因式相差1，因此可逆向运用异分母分式的加减法法则进行裂项，相消后化为常见的分式方程求解.

解：原方程变形为 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+3}$，

整理，得 $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+3}=0$，

去分母，得 $x+3-2x=0$，

解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的根.

所以分式方程的根为 $x=3$.

方法点拨：当涉及的分式方程有多个分式且分母与分子有某种规律时，常常通过裂项相消法把方程化为熟悉的分式方程求解，体现了转化思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见202页

一、选择题

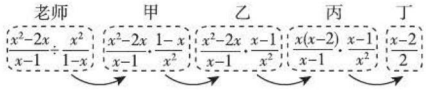
1. [中考·金华] 若分式$\frac{x-3}{x+3}$的值为0,则x的值为(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 3或-3　　D. 0

2. [中考·眉山] 化简$\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\div\frac{a-b}{a}$的结果是(　　)

A. $a-b$　　B. $a+b$　　C. $\frac{1}{a-b}$　　D. $\frac{1}{a+b}$

3. [中考·河北] 老师设计了接力游戏,用合作的方式完成分式化简,规则是每人只能看到前一人给的式子,并进一步计算,再将结果传递给下一人,最后完成化简. 过程如图所示:



(第3题图)

接力中,自己负责的一步出现错误的是(　　)

A. 只有乙　　B. 甲和丁

C. 乙和丙　　D. 乙和丁

4. [中考·株洲] 关于x的分式方程$\frac{2}{x}-\frac{5}{x-3}=0$的解为(　　)

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

5. [中考·临沂] 新能源汽车环保节能,越来越受到消费者的喜爱. 各种品牌相继投放市场. 一汽贸公司经销某品牌新能源汽车. 去年销售总额为5 000万元,今年1~5月份,每辆车的销售价格比去年降低1万元. 销售数量与去年一整年的相同. 销售总额比去年一整年的少20%,今年1~5月份每辆车的销售价格是多少万元? 设今年1~5月份每辆车的销售价格为x万元. 根据题意,列方程正确的是(　　)

A. $\frac{5\,000}{x+1}=\frac{5\,000(1-20\%)}{x}$

B. $\frac{5\,000}{x+1}=\frac{5\,000(1+20\%)}{x}$

C. $\frac{5\,000}{x-1}=\frac{5\,000(1-20\%)}{x}$

D. $\frac{5\,000}{x-1}=\frac{5\,000(1+20\%)}{x}$

6. [中考·荆州] 已知关于x的分式方程$\frac{x}{x-1}-2=\frac{k}{1-x}$的解为正数,则$k$的取值范围为(　　)

A. $-2<k<0$　　B. $k>-2$且$k\neq-1$

C. $k>-2$　　D. $k<-2$且$k\neq1$

二、填空题

7. [中考·绥化] 若分式$\frac{\sqrt{3}}{x-4}$有意义,则x的取值范围是_____.

8. [中考·甘孜州] 已知$m+n=3mn$,则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的值为_____.

9. [中考·巴中] 若关于x的分式方程$\frac{x}{x-2}+\frac{2m}{2-x}=2m$有增根,则$m$的值为_____.

10. 当x分别取$10,\frac{1}{10},9,\frac{1}{9},8,\frac{1}{8},\cdots,2,\frac{1}{2},1,0$时,计算分式$\frac{x^2-1}{x^2+1}$的值,再将所得结果相加,其和等于_____.

三、解答题

11. [中考·杭州] 化简:$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1$.

圆圆的解答如下:

$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1=4x-2(x+2)-(x^2-4)=-x^2+2x$

圆圆的解答正确吗? 如果不正确,写出正确的答案.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. 解分式方程：$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=1$.

13. ［中考·遂宁］先化简，再求值：$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}\div\frac{a^2-ab}{a}-\frac{2}{a+b}$，其中 a,b 满足 $(a-2)^2+\sqrt{b+1}=0$.

14. ［中考·鄂州］先化简 $\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-2x}-\frac{x^2}{x-2}$，再从 $-3,-2,0,2$ 中选一个合适的数作为 x 的值代入求值.

15. 已知 $y=3xy+x$，求代数式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值. 【导学号：2231921】

16. 观察下列等式：$2\times\frac{2}{1}=2+\frac{2}{1}$，$3\times\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}$，$4\times\frac{4}{3}=4+\frac{4}{3}$……

(1) 按此规律写出第 5 个等式；

(2) 猜想第 n 个等式，并说明等式成立的理由.

17. ［中考·泰安］端午节是我国的传统节日，人们素有吃粽子的习俗. 某商场在端午节来临之际用 3 000 元购进 A,B 两种粽子 1 100 个，购买 A 种粽子与购买 B 种粽子的费用相同. 已知 A 种粽子的单价是 B 种粽子单价的 1.2 倍.

(1) 求 A,B 两种粽子的单价各是多少；

(2) 若计划用不超过 7 000 元的资金再次购进 A,B 两种粽子共 2 600 个，已知 A,B 两种粽子的进价不变. 求 A 种粽子最多能购进多少个？

18. 阅读下面的材料，并解决问题.

定义：在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”，如 $\frac{4}{x+1}$，$\frac{x+1}{x^2}$ 这样的分式就是真分式；当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”，如 $\frac{x+2}{x-1}$，$\frac{x^2-1}{2x+1}$ 这样的分式就是假分式，假分式也可以化为带分式（即整式与真分式的和的形式），如 $\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}$.

(1) 分式 $\frac{x^2}{2x}$ 是_____（填“真分式”或“假分式”）；

(2) 将假分式 $\frac{3x+1}{x-1}$，$\frac{x^2+3}{x+2}$ 分别化为带分式；

(3) 如果分式 $\frac{2x^2+3x-6}{x+3}$ 的值为整数，求所有符合条件的整数 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第10章

相交线、平行线与平移

探秘直线位置关系

数学点拨

你将学到的核心考点

- 对顶角 □
- 垂线与平行线的基本事实 □
- 平行线的判定 □
- 平行线的性质 □
- 平移 □

我们为你提供的核心方法

- 概念辨析法 □
- 等积变形法 □
- 方程思想 □
- 性质判断法 □
- 数形结合思想 □
- 转化思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

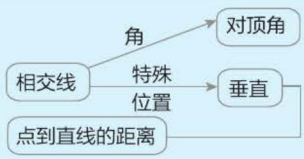
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.1 相交线

核心知识

- 对顶角
- 垂线
- 画垂线
- 点到直线的距离

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 对顶角

1 **定义：** 两个角有一个公共顶点，并且它们的两边分别互为反向延长线，这样的两个角叫做对顶角.

要点精析///

(1) 对顶角都是成对出现的，当两个角互为对顶角时，其中一个角叫做另一个角的对顶角.

(2) 对顶角的两边互为反向延长线，即在同一直线上，其实质是对顶角是两直线相交所成的没有公共边的两个角.

(3) 对顶角的条件：①有公共顶点；②两边互为反向延长线.

2 **性质：** 对顶角相等.

3 **易错警示：**

互为对顶角的两个角相等，但相等的两个角不一定互为对顶角.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用对顶角的定义进行识别

例1 [中考·铜仁] 如图 10.1-1，∠1 与 ∠2 是对顶角的是(　　)

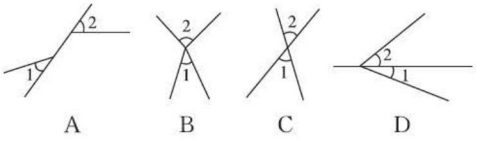


图 10.1-1

导引： 判断两个角是不是对顶角，要紧扣对顶角的定义. A 中 ∠1 和 ∠2 的顶点不同；B 中 ∠1 和 ∠2 的两边都不互为反向延长线；C 中的 ∠1 和 ∠2 符合定义；D 中 ∠1 和 ∠2 有一条公共边.

答案： C

方法点拨

判断两个角是否互为对顶角的方法：一看它们有没有公共顶点；二看这两个角的两边是否互为反向延长线，实质就是看这两个角是否是两条直线相交所成的没有公共边的两个角.

考查角度2 利用对顶角的性质求角的度数

例2 如图 10.1-2，已知直线 AB，CD，EF 相交于点 O，$\angle DOE = 90°$，$\angle AOE = 36°$，求 $\angle BOC$ 的度数.

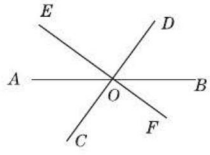


图 10.1-2

导引： 因为 $\angle BOC = \angle AOD$ 或 $\angle BOC = \angle BOF + \angle COF$，所以有两种途径可以求出 $\angle BOC$ 的度数.

方法点拨

在进行计算和推理时，“对顶角相等”这个结论常常被用来将要求的角和特征相同的角转化成与已知条件相关的角来求解，即对顶角构建了一个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（方法一）因为直线 AB，CD 相交于点 O，

所以 $\angle BOC = \angle AOD$（对顶角相等）.

因为 $\angle DOE = 90°$，$\angle AOE = 36°$，

所以 $\angle AOD = \angle DOE + \angle AOE = 90° + 36° = 126°$.

所以 $\angle BOC = \angle AOD = 126°$.

（方法二）因为直线 AB，CD，EF 相交于点 O，

所以 $\angle COF = \angle DOE$，$\angle BOF = \angle AOE$（对顶角相等）.

因为 $\angle DOE = 90°$，$\angle AOE = 36°$，

所以 $\angle COF = 90°$，$\angle BOF = 36°$.

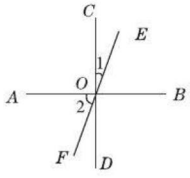
所以 $\angle BOC = \angle COF + \angle BOF = 126°$.

已知条件和待求结论之间的“桥梁”.



同类变式 （答案见 203 页）

2. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O，$\angle 1 = 20°$，$\angle BOC = 90°$，求 $\angle 2$ 的度数.



（第 2 题图）

考查角度3 利用对顶角的性质求角的度数

例 3 如图 10.1-3，OC 平分 $\angle AOB$，反向延长 OC 至 D，反向延长 OA 至 E，$\angle 3 = 25°$，求 $\angle BOE$ 的度数.

导引：因为 $\angle BOE + \angle AOB = 180°$，所以要求 $\angle BOE$ 的度数，只需求出 $\angle AOB$ 的度数即可. 因为 OC 平分 $\angle AOB$，所以 $\angle AOB = 2\angle 2$，所以只需求出 $\angle 2$ 的度数即可.

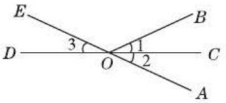


图 10.1-3

解：由对顶角相等，得 $\angle 2 = \angle 3 = 25°$.

因为 OC 平分 $\angle AOB$，

所以 $\angle AOB = 2\angle 2 = 2 \times 25° = 50°$.

又因为 $\angle BOE$ 与 $\angle AOB$ 互为补角，

所以 $\angle BOE = 180° - \angle AOB = 180° - 50° = 130°$.

方法点拨

本例把两直线相交所成的角与角平分线有机地结合在一起，通过补角及对顶角反映不同位置上的角之间的关系，弄清相关角之间的关系常常是解决几何问题的关键.

同类变式 （答案见 203 页）

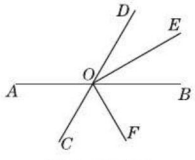
3. ［期末 · 蚌埠］如图，直线 AB 交 CD 于点 O，OE 平分 $\angle BOD$，OF 平分 $\angle COB$，$\angle AOD$：$\angle BOE = 4:1$，则 $\angle AOF$ 等于（　　）

A. 130°

B. 120°

C. 110°

D. 100°



（第 3 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 垂线

1 **定义：** 在两条直线 AB 和 CD 相交所成的 4 个角中，如果有一个角是直角，就说这两条直线互相垂直，记作“$AB \perp CD$”，读作“AB 垂直于 CD”，其中一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点 O 叫做垂足. 如图 10.1-4.

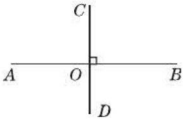


图 10.1-4

要点精析///

(1) 在两条直线相交所成的 4 个角中，只要其中有一个角是直角，就可由平角的定义与对顶角的性质，得到另外 3 个角也是直角.

(2) 垂直定义具有双重作用，已知直角得线垂直，已知线垂直得直角.

(3) 垂线是直线，当遇到线段与射线的垂直问题时，都是指它们所在的直线互相垂直.

2 **推理格式：**

如图 10.1-4，因为 $\angle AOC = 90°$（已知）

所以 $AB \perp CD$（垂直定义）.

反过来：因为 $AB \perp CD$（已知），

所以 $\angle AOC = 90°$（垂直定义）.



拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用垂直的定义说明两线垂直

例 4 如图 10.1-5，直线 AB，CD 相交于点 O，下列条件中，不能说明 $AB \perp CD$ 的是(　　)

A. $\angle AOD = 90°$　　B. $\angle AOC = \angle BOC$

C. $\angle BOC + \angle BOD = 180°$　　D. $\angle AOC + \angle BOD = 180°$

导引： 两条直线相交成四个角，如果有一个角是直角（或 90° 角），那么称这两条直线互相垂直，故 A 正确；由 $\angle AOC = \angle BOC$ 且 $\angle AOC + \angle BOC = 180°$，得 $\angle AOC = 90°$（或 $\angle BOC = 90°$），由垂直的定义得 B 正确；$\angle BOC + \angle BOD = 180°$，即 $\angle BOC$ 与 $\angle BOD$ 互补，C 不正确；

根据对顶角相等得 $\angle AOC = \angle BOD$，

又 $\angle AOC + \angle BOD = 180°$，

所以 $\angle AOC = 90°$（或 $\angle BOD = 90°$），

由垂直的定义得 D 正确. 故选 C.

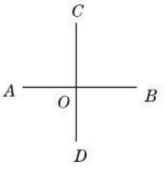


图 10.1-5

答案： C

方法点拨

本题应用定义法. 根据垂直的定义对选项逐一判断. 垂直的定义告诉我们，要说明 AB⊥CD，只需说明有一个角是直角即可.

考查角度2 利用垂直的性质求角的度数

例 5 如图 10.1-6，三条直线相交于点 O. 若 $CO \perp AB$，$\angle 1 = 56°$，则 $\angle 2$ 等于(　　)

A. 30°　　B. 34°　　C. 45°　　D. 56°

导引： 由图 10.1-6 可知 $\angle 2$ 的对顶角是 $\angle 1$ 的余角，根据 $\angle 1$ 的度数可求出 $\angle 2$ 的度数为 34°.

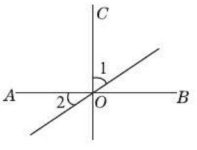


图 10.1-6

答案： B

方法点拨

根据垂直的定义可知，若两条直线垂直，则两条直线所成的四个角都是直角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用垂直的定义判断角的关系

例6 如图10.1-7,点 O 是直线 AB 上的一点,$CO \perp AB$ 于点 O,$DO \perp EO$ 于点 O.

(1)图中互为余角的角有几对?各是哪些?

(2)图中互为补角的角有几对?各是哪些?

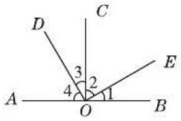


图10.1-7

导引: 找图中互为余角的角,其实质是找出图中所有和为90°的两个角;找图中互为补角的角,其实质是找出图中所有和为180°的两个角.

解: (1)因为 $CO \perp AB$,$DO \perp EO$,

所以 $\angle AOC = \angle BOC = \angle DOE = 90°$.

所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$,$\angle 3 + \angle 4 = 90°$,$\angle 2 + \angle 3 = 90°$,$\angle 1 + \angle 4 = 90°$.

所以图中互为余角的角有4对,分别是 $\angle 1$ 与 $\angle 2$,$\angle 3$ 与 $\angle 4$,$\angle 2$ 与 $\angle 3$,$\angle 1$ 与 $\angle 4$.

(2)由(1)易知 $\angle 1 = \angle 3$,$\angle 2 = \angle 4$.

因为 $\angle AOB = 180°$,$\angle AOC = \angle BOC = \angle DOE = 90°$,

所以 $\angle 1 + \angle AOE = 180°$,$\angle AOC + \angle BOC = 180°$,

$\angle 4 + \angle BOD = 180°$,$\angle 2 + \angle BOD = 180°$,

$\angle 3 + \angle AOE = 180°$,$\angle AOC + \angle DOE = 180°$,

$\angle BOC + \angle DOE = 180°$.

所以图中互为补角的角有7对,分别是 $\angle 1$ 与 $\angle AOE$,$\angle AOC$ 与 $\angle BOC$,$\angle 4$ 与 $\angle BOD$,$\angle 2$ 与 $\angle BOD$,$\angle 3$ 与 $\angle AOE$,$\angle AOC$ 与 $\angle DOE$,$\angle BOC$ 与 $\angle DOE$.

方法点拨

根据垂直的定义可知,若两直线垂直,则夹角为90°,因此每一个夹角分成的两个角互余,结合互余的角的性质,还可以判断很多相等的角,如本题中的 $\angle 1 = \angle 3$,$\angle 2 = \angle 4$ 等.

点知识3 画垂线

1 垂线的画法

经过一点 P,画已知直线 l 的垂线,步骤如下:

(1)靠线:让直角三角板的一条直角边落在已知直线 l 上;

(2)过点:沿直线 l 移动,使直角三角板的另一条直角边经过已知点 P;

(3)画线:沿另一条直角边画线,则这条直线就是经过点 P 的已知直线 l 的垂线.如图10.1-8.

要点精析///

(1)过一点画射线或线段的垂线是指画它们所在直线的垂线,垂足有时在射线的反向延长线或线段的延长线上,如图10.1-9.

(2)画垂线时是实线,此时如需延长线段或反向延长射线,要用虚线延长或反向延长.

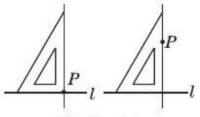


图10.1-8

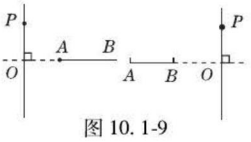


图10.1-9

2 垂线的性质:

在同一平面内,过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度1 利用作图工具作垂线

例7 如图 10.1-10，M 是三角形 ABC 中 BC 边上的任意一点，请你按照下列要求画图.

(1) 过 M 点画直线 AB 的垂线 m；

(2) 过 M 点画直线 BC 的垂线 n；

(3) 过 M 点画直线 AC 的垂线 p.

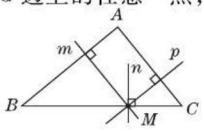


图 10.1-10

导引： (1)(3) 属于过直线外一点画已知直线的垂线，(2) 属于过直线上一点画已知直线的垂线，按照“一靠、二过、三画”的方法画图即可.

解： 画出的垂线 m，n，p 如图 10.1-10 所示.

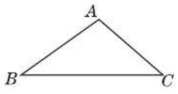
同类变式 （答案见 203 页）

7. 如图，$\angle BAC$ 为钝角.

(1) 过点 C 画 AB 的垂线；

(2) 过点 A 画 BC 的垂线；

(3) 过点 B 画 AC 的垂线.



（第 7 题图）

方法点拨

作已知直线的垂线，能画出无数条，但是过一点作已知直线的垂线，有且只有一条.

作一条线段或射线的垂线，实质上就是作它们所在直线的垂线，垂足不一定在这条线段或射线上，可能在线段的延长线或射线的反向延长线上.

考查角度2 利用垂线的性质说明作图的合理性

例8 [中考·厦门] 已知直线 AB，CB，l 在同一平面内，若 $AB\perp l$，垂足为 B，$CB\perp l$，垂足也为 B，则符合题意的图形可以是如图 10.1-11 中的(　　)

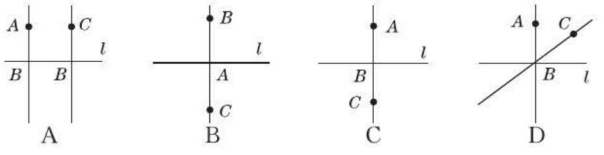


图 10.1-11

导引： 根据题意可知，过点 B 有 AB，CB 都与直线 l 垂直，由垂线的性质可知，在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，所以 A，B，C 三点在一条直线上.

答案： C

方法点拨

根据垂线的性质：在同一平面内，过一点有且只有一条直线垂直于已知直线知，在同一平面内，若过一点有两条直线与已知直线垂直，则说明这两条直线重合.

点知识 4 点到直线的距离

1 **垂线段的性质：** 在连接直线外一点与直线上各点的线段中，垂线段（连接直线外一点与垂足形成的线段）最短. 简单说成：垂线段最短.

2 **垂线、垂直与垂线段的关系：**

(1) 区别：垂线是一条与已知直线垂直的直线；垂直是两条直线之间的位置关系；垂线段是一条与已知直线垂直的线段.

(2) 联系：垂线段所在的直线是已知直线的垂线；垂线段所在的直线与已知直线垂直.

3 **点到直线的距离：** 直线外一点到这条直线的垂线段的长度叫做点到直线的距离.

要点精析///

(1) 因为在直线外的某点到已知直线的垂线段只有一条，所以点到直线的距离是唯一的.

(2) 当这个点在已知直线上时，可看成点到直线的距离为 0.

4 **易错警示：** 点到直线的距离是指垂线段的长度，而不是垂线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用垂线段的性质比较线段的长短

例9 如图10.1-12,在三角形ABC中,$\angle C=90°$,那么边AB和AC哪条较长?边AB和BC呢?

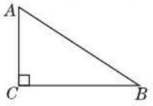


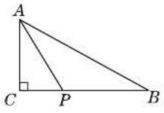
图10.1-12

导引: 因为$\angle C=90°$,所以$AC\perp BC$,所以线段AC是点A到BC的垂线段,线段BC是点B到AC的垂线段,因此$AB>AC$,$AB>BC$.

解: 边AB和AC相比边AB较长;边AB和BC相比边AB较长.

同类变式 (答案见203页)

9. 如图,在三角形ABC中,$\angle C=90°$,$AC=3$,点P是边BC上的动点,则AP的长不可能是(　　)



(第9题图)

A. 2.5　　B. 3　　C. 4　　D. 5

方法点拨

利用"垂线段最短"可以说明在直角三角形中斜边最长.

考查角度2 利用点到直线的距离的定义确定点到直线的距离

例10 P为直线m外一点,A,B,C为直线m上三点,$PA=4$ cm,$PB=5$ cm,$PC=2$ cm,则点P到直线m的距离(　　)

A. 等于4 cm　　B. 等于2 cm

C. 小于2 cm　　D. 不大于2 cm

导引: 点到直线的距离是该点到这条直线的垂线段的长度,而垂线段是该点与直线上各点的连线中最短的.从条件看,PC是三条线段中最短的,但不一定是所有连线中最短的,所以点P到直线m的距离应该不大于2 cm.

答案: D

易错警示

点到直线的距离是垂线段的长度,而垂线段又是点与直线上各点的连线中最短的那条,不能从局部确定最短,而应该是全部的最短.

考查角度3 利用点到直线的距离的定义求点到直线的距离

例11 如图10.1-13,在三角形ABC中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$,垂足为D.$AC=4$ cm,$BC=3$ cm,$AB=5$ cm,则点A到直线BC的距离为_____cm,点B到直线AC的距离为_____cm,点C到直线AB的距离为_____cm.

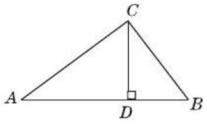


图10.1-13

导引: 根据点到直线的距离的定义可知,点A到直线BC的距离是线段AC的长,点B到直线AC的距离是线段BC的长,点C到直线AB的距离是线段CD的长.因为三角形ABC的面积$=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$,所以$AC\cdot BC=AB\cdot CD$,进而可得$CD=2.4$ cm.

答案: 4;3;2.4

方法点拨

解决此类问题应注意:(1)点到直线的距离是点到直线的垂线段的长度,即点与垂足之间的距离,而不是垂线,也不是垂线段;(2)距离表示线段的长度,是一个数量,与线段不能等同.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4 利用垂线段的性质解决距离最短问题

例12 如图10.1-14,修一条路将村庄A,B与公路MN连接起来,怎样修才能使所修的路最短?

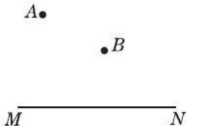


图10.1-14

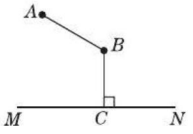


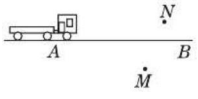
图10.1-15

导引: 先连接AB,再作出点B到MN的垂线段即可得解.

解: 如图10.1-15,先连接AB,再过点B作$BC\perp MN$于点C,$A\to B\to C$即是符合题意的路线.

同类变式 (答案见203页)

12. 如图,一辆卡车在直线公路AB上由A向B行驶,M,N分别是位于公路两侧的村庄.



(第12题图)

(1)设卡车行驶到公路AB上的点P位置时,距村庄M最近,行驶到点Q时,距村庄N最近,请在图中分别画出点P,Q(保留作图痕迹);

(2)当卡车从A出发向B行驶时,在公路AB上的哪一段路上,离M,N两村庄越来越近?在哪一段路上,离村庄N越来越近,而离村庄M越来越远(用文字说明,不必说明理由).

方法点拨

A,B两点之间,线段AB最短;在连接点B与直线MN上各点的线段中,点B到直线MN的垂线段BC最短.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用垂直的性质求角度

例13 如图10.1-16,直线AB,CD相交于点O,过O点画射线OE,OF,使$OE\perp CD$,OD平分$\angle BOF$.如果$\angle BOE=50°$,求$\angle AOC$,$\angle EOF$和$\angle AOF$的度数.

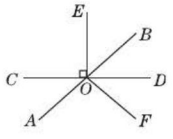


图10.1-16

导引: 根据$\angle AOC$与$\angle BOD$是对顶角,且$\angle BOD$与$\angle BOE$互余,即可求出$\angle AOC$的度数;根据OD平分$\angle BOF$,$\angle EOF=\angle BOE+\angle BOF$即可求出$\angle EOF$的度数;根据$\angle AOF$与$\angle BOF$互补可求得$\angle AOF$的度数.

解: 因为$OE\perp CD$,

所以$\angle DOE=90°$.

因为$\angle BOE=50°$,

所以$\angle AOC=\angle BOD=\angle DOE-\angle BOE=90°-50°=40°$.

因为OD平分$\angle BOF$,

所以$\angle BOF=2\angle BOD=80°$.

所以$\angle EOF=\angle BOF+\angle BOE=80°+50°=130°$,

$\angle AOF=\angle AOB-\angle BOF=180°-80°=100°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

方法点拨： (1)本题解题思路可概括为“顺藤摸瓜”，即由已知条件 $OE\perp CD$ 入手，根据对顶角、平角、角平分线的有关知识，逐步深入求得各角的度数.(2)已知两条直线垂直或已知一条直线的垂线时，能直接得到 $90°$ 的角，利用这个条件，并与角平分线、余角、平角、对顶角等知识相结合，可求出图中其他未知各角的度数.

拔尖角度 2 巧用垂直的性质设计方案

例 14 如图 10.1-17，AB 是一条河流，要铺设管道将河水引到 C，D 两个用水点，现有两种铺设管道的方案.

方案一：分别过点 C，D 作 AB 的垂线，垂足分别为点 E，F，沿 CE，DF 铺设管道；

方案二：连接 CD 交 AB 于点 P，沿 PC，PD 铺设管道.

这两种铺设管道的方案哪一种更节省材料？为什么？（忽略河流的宽度）

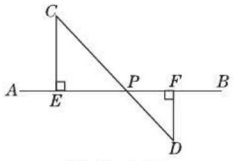


图 10.1-17

导引： 要尽可能节省材料，也就是让管道的总长度最短.

解： 按方案一铺设管道更节省材料.

理由如下：

因为 $CE\perp AB$，$DF\perp AB$，CD 不垂直于 AB，所以根据“垂线段最短”可知，$CE<PC$，$DF<DP$，

所以 $CE+DF<PC+DP$.

所以沿 CE，DF 铺设管道更节省材料，即方案一更节省材料.

方法点拨： 本例主要利用“垂线段最短”来解决实际问题，解这类求最短距离问题时，要注意“垂线段最短”与“两点之间，线段最短”的区别，辨明这两条性质的应用条件，正确运用解题方法.

拔尖角度 3 利用从特殊到一般的思想进行角的计数

例 15 如图 10.1-18①，两条直线相交于一点所成的角中，互为对顶角的角有 2 对，$\angle AOD$ 和 $\angle COB$，$\angle AOC$ 和 $\angle BOD$.

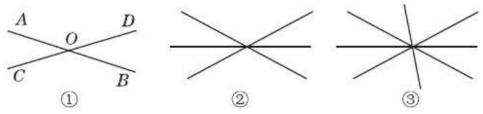


图 10.1-18

(1)如图 10.1-18②，三条直线相交于同一点所成的角中，互为对顶角的角有_____对；

(2)如图 10.1-18③，四条直线相交于同一点所成的角中，互为对顶角的角有_____对；

(3)$n(n\geqslant 2,n$ 为正整数$)$条直线相交于同一点所成的角中，互为对顶角的角有_____对.

导引： 找对顶角的对数其实质就是找有多少对不同的相交直线.

(1)三条直线相交于一点，形成了 3 对相交直线，即 $\frac{3\times(3-1)}{2}$ 个“叉”，每个“叉”中有 2 对对顶角，所以互为对顶角的角有 6 对；

(2)四条直线相交于一点，有 $\frac{4\times(4-1)}{2}$ 个“叉”，所以互为对顶角的角有 12 对；

(3)n 条直线相交于一点，有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个“叉”，所以互为对顶角的角有 $n(n-1)$ 对.

答案： (1)6

(2)12

(3)$n(n-1)$

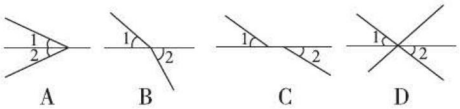
规律点拨： 本题的解法是探究发现规律的一种方法，即从简单图形入手，发现其中的规律特征，再类比归纳，推出一般结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

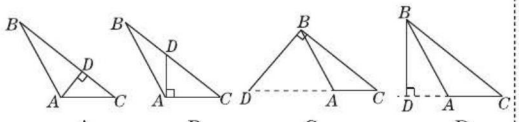
练中考·练模拟 得满分 （答案见 204 页）

基础巩固练

1. 下列选项中∠1 和∠2 是对顶角的是(　　)



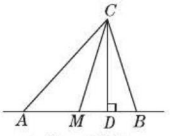
2. 过点 B 画线段 AC 所在直线的垂线段，其中正确的是(　　)



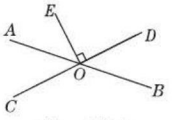
3. 如图，在三角形 ABC 中，CD 是 AB 边上的高，M 是 AB 边上的中点，点 C 到边 AB 所在直线的距离是(　　)

A. 线段 CA 的长度　　B. 线段 CM 的长度

C. 线段 CD 的长度　　D. 线段 CB 的长度



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. [中考·益阳] 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO \perp CD$，下列说法错误的是(　　)

A. $\angle AOD = \angle BOC$

B. $\angle AOE + \angle BOD = 90°$

C. $\angle AOC = \angle AOE$

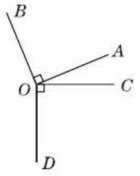
D. $\angle AOD + \angle BOD = 180°$

5. 到直线 l 的距离等于 2 cm 的点有(　　)

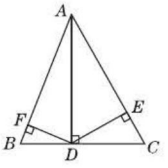
A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无数个

6. 如图，$AO \perp BO$，$CO \perp DO$，$\angle AOC : \angle BOC = 1:5$，则 $\angle BOD =$ (　　)

A. 105°　　B. 112.5°　　C. 135°　　D. 157.5°



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 如图，$AD \perp BC$ 于点 D，$DE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp AB$ 于点 F，则 A 点到 BC，D 点到 AC，AB 的距离分别是(　　)

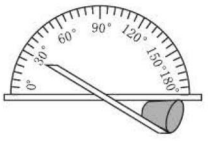
A. BD，CD，AD

B. AD，DE，DF

C. 线段 BD，CD，AD 的长度

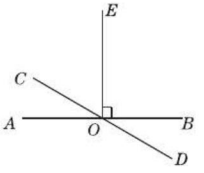
D. 线段 AD，DE，DF 的长度

8. [中考·吉林] 如图是对顶角量角器，用它测量角的原理是_____.



（第 8 题图）

9. [中考·南通] 如图，直线 AB 与 CD 相交于点 O，$OE \perp AB$，$\angle COE = 60°$，则 $\angle BOD$ 等于_____度.



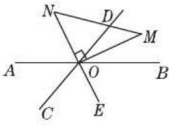
（第 9 题图）

10. 如图，直线 AB，CD，NE 相交于点 O，OM 平分 $\angle BOD$，$\angle MON = 90°$，$\angle AOC = 50°$.

(1) 线段_____的长度表示点 M 到 NE 的距离；

(2) 比较 MN 与 MO 的大小(用“<”连接)：_____，理由是：_____；

(3) 求 $\angle AON$ 的度数.



（第 10 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

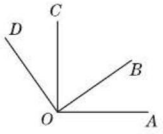
能力提升练

11. 点 P 为直线 m 外一点，点 A，B，C 为直线 m 上三点，$PA=7$ cm，$PB=8$ cm，$PC=5$ cm，则点 P 到直线 m 的距离(　　)

A. 等于 7 cm　　B. 等于 5 cm

C. 小于 5 cm　　D. 不大于 5 cm

12. 如图，$OA\perp OC$，$OB\perp OD$，$\angle AOD=125°$，则 $\angle BOC$ 的度数是_____.

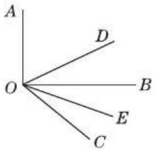


(第 12 题图)

13. 如图，OD 平分 $\angle AOC$，OE 平分 $\angle BOC$.

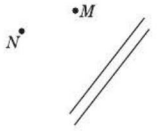
(1) 若 $OA\perp OB$，则当 $\angle BOC=30°$ 时，$\angle DOE=$_____；当 $\angle BOC=60°$ 时，$\angle DOE=$_____.

(2) 通过上面的计算，猜想 $\angle DOE$ 与 $\angle AOB$ 有什么数量关系，并说明理由.



(第 13 题图)

14. 如图，小河同侧有 M，N 两个村庄. 如果小丽要从 N 村到 M 村去，怎样走最近？如果小丽要从 N 村直接到河边去，怎样走最近？如果小丽从 N 村出发先到 M 村再到河边，怎样走最近？分别就上述情况画出路线图，并说明理由.

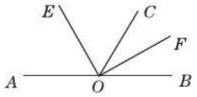


(第 14 题图)

15. 如图，点 O 为直线 AB 上一点，OC 为一条射线，OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$.

(1) 若 $\angle BOC=50°$，试探究 OE 与 OF 的位置关系，并说明理由.

(2) 若 $\angle BOC$ 为任意角 $\angle\alpha$($0°<\angle\alpha<180°$)，(1)中 OE 与 OF 的位置关系是否仍然成立？请说明理由. 由此你发现了什么规律？



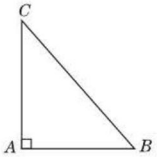
(第 15 题图)

思维拓展练

16. 在如图所示的直角三角形 ABC 中，斜边为 BC，两直角边分别为 AB，AC，设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$.

(1) 试用所学知识说明斜边 BC 是最长的边；

(2) 试化简 $|a-b|+|c-a|+|b+c-a|$.



(第 16 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.2 平行线的判定

核心知识

- 平行线及画法
- 平行线的基本事实及其推论
- 平行线的判定方法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线的定义

1 **定义：** 在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线.

表示方法：用“$//$”表示平行，如图 10.2-1，两条直线 AB 和 CD 平行，记作“$AB // CD$”或“$CD // AB$”，读作“AB 平行于 CD”或“CD 平行于 AB”.

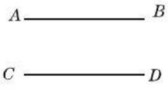


图 10.2-1

要点精析///

(1) 平行线的定义包含缺一不可的三个条件：①在同一平面内；②不相交；③都是直线.

(2) 两条线段或射线平行是指这两条线段或射线所在直线互相平行.

2 在同一平面内，不重合的两直线的位置关系：①相交；②平行.

3 **易错警示：**

(1) 平行线的定义要特别注意“在同一平面内”这一条件；

(2) 重合的直线只视为一条直线，不属于相交与平行中任何一种位置关系；

(3) 平行线的定义可以作为判定两直线平行的依据.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的定义进行判断

例 1 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1) 不相交的两条直线是平行线；

(2) 在同一平面内，两条不相交的线段是平行线.

导引： 根据平行线的定义进行判断.

解： (1) 不正确.

理由：根据定义可知，它缺少了“在同一平面内”这一条件.

(2) 不正确.

理由：定义中是两条不相交的“直线”，而不是“线段”.

方法点拨

平行线的定义有三个特征：一是在同一平面内；二是不相交；三是都是直线.三者缺一不可.

考查角度2 利用平行线的定义识别空间平行

例 2 如图 10.2-2，在长方体中，与棱 AD 平行的棱有哪些？与棱 $D'C'$ 平行的棱呢？用符号把它们表示出来.

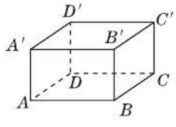


图 10.2-2

导引： 根据平行线的定义，结合生活常识，观察图形可解此题.

方法点拨

本题运用概念辨析法和定义法，发挥空间想象能力，根据平行线的定义解答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：与棱 AD 平行的棱有 $A'D'$，$B'C'$，BC，记作 $AD \parallel A'D'$，$AD \parallel B'C'$，$AD \parallel BC$.

与棱 $D'C'$ 平行的棱有 DC，AB，$A'B'$，记作 $D'C' \parallel DC$，$D'C' \parallel AB$，$D'C' \parallel A'B'$.

知识 2 平行线的画法

1 过直线外一点画已知直线的平行线的步骤：

一落：把三角尺的一边落在已知直线上；

二靠：紧靠三角尺的另一边放一直尺；

三移：把三角尺沿着直尺移动使其经过已知点；

四画：沿三角尺的一边画直线. 此直线即为已知直线的平行线.

2 易错警示：

(1) 经过直线上一点不可以作已知直线的平行线.

(2) 画线段或射线的平行线是画它们所在直线的平行线.

(3) 借助三角尺画平行线时，必须保持紧靠，否则画出的直线不平行.

考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的画法作已知直线的平行线

例 3 如图 10.2-3，过 P 点作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于 Q，作 $PM \parallel AC$ 交 AB 于 M.

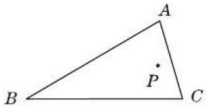


图 10.2-3

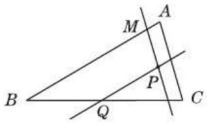


图 10.2-4

导引：过直线外一点画已知直线的平行线，要按“一落、二靠、三移、四画”的步骤进行.

解：如图 10.2-4.

方法点拨

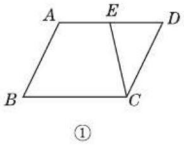
注意三角尺移动时经过已知点的边是三角尺落在已知直线上的那一边，而不是任意一边，利用直尺和三角尺过直线外一点画已知直线的平行线是几何画图的基本技能之一.

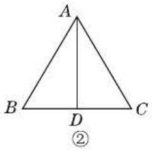
同类变式 （答案见 204 页）

3. 按要求作图.

(1) 如图①，过 A 点画 $AF \parallel CE$ 交 BC 于 F；

(2) 如图②，过 C 点画 $CE \parallel AD$ 交 BA 的延长线于 E.





（第 3 题图）

考查角度2 利用网格的特征作已知直线的平行线

例 4 如图 10.2-5，在下面的方格纸中经过点 C 画与线段 AB 平行的直线 l_1，再经过点 B 画一条与线段 AB 垂直的直线 l_2.

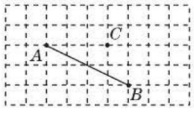


图 10.2-5

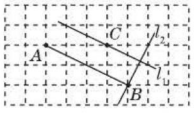


图 10.2-6

方法点拨

在网格中作直线的平行线或垂线时，直接根据格点的性质作图即可.

解：如图 10.2-6.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 根据语句中的要求画图

例5 读下列语句，并画出图形.

直线 AB，CD 是两条直线，P 是直线 AB，CD 外一点，直线 EF 经过点 P 与 AB 平行，直线 MN 经过点 P 与 CD 垂直.

导引： 在同一平面内，不重合的两条直线的位置关系有平行和相交两种，分别按照两种位置关系的画法画出图形.

解： 如图10.2-7.

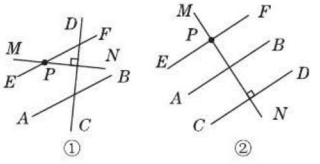


图 10.2-7

方法点拨

根据语句要求画图时，要注意画出的图形符合语句的要求，若语句中没有写清楚的，要考虑各种情况，如本题中 AB，CD 之间没有指明位置关系，所以画图时可以平行也可以相交.

点知识 3 平行线的基本事实及其推论

1 平行线的基本事实： 经过直线外一点，有且只有一条直线平行于这条直线.

要点精析///

(1)“有且只有”强调直线的存在性和唯一性.

(2)前提条件“经过直线外一点”，若点在直线上，不可能有平行线.

2 平行线的基本事实的推论：

如果两条直线和第三条直线平行，那么这两条直线平行.

表达方式：如果 $a\parallel c$，$b\parallel c$，那么 $a\parallel b$.

要点精析///

平行线的基本事实的推论可用来判定两直线平行.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的基本事实及其推论进行辨析

例6 下列说法：①过一点有且只有一条直线与已知直线平行；②一条直线的平行线只有一条；③过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行. 其中正确的有(　　)

A. 3个　　B. 2个　　C. 1个　　D. 0个

导引： 过直线外一点可以画一条直线与已知直线平行，而过直线上一点画不出与该直线平行的直线；一条直线的平行线有无数条. 故只有③正确.

答案： C

方法点拨

对于基本事实辨析题，要正确解答，必须要抓住基本事实的内容，特别是关键字词及其重要特征，对于许多类似的基本事实，要在比较中理解，再在理解的基础上进行记忆.

考查角度2 利用平行线的基本事实及其推论进行说理

例7 如图 10.2-8，P 是三角形 ABC 内部的任意一点.

(1)过 P 点向左画射线 $PM\parallel BC$ 交 AB 于点 M，过 P 点向右画射线 $PN\parallel BC$ 交 AC 于点 N；

(2)在第(1)问画出的图形中，$\angle MPN$ 的度数一定等于 $180°$，请说明其中的道理.

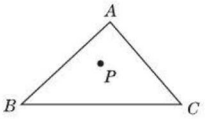


图 10.2-8

方法点拨

本题运用转化思想，把说明 $\angle MPN=180°$ 转化为说明点 M，P，N 在同一条直线上，进而把问题转化为利用平行线的基本事实说明直线 PM 与直线 PN 是同一条直线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：(1)按照过直线外一点画已知直线的平行线的方法画图即可.(2)要说明$\angle MPN=180°$,可转化为说明点M,P,N在同一条直线上.

解：(1)射线PM,PN如图10.2-9所示.

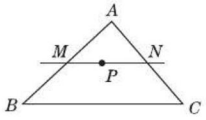


图10.2-9



(2)因为射线$PM/\!/BC$,射线$PN/\!/BC$,

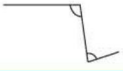
所以直线$PM/\!/BC$,直线$PN/\!/BC$.

根据平行线的基本事实可知,直线PM与直线PN是同一条直线(经过直线外一点,有且只有一条直线与这条直线平行),即点M,P,N在同一条直线上.

所以$\angle MPN=180°$.

点知识4 同位角、内错角、同旁内角

1 同位角、内错角、同旁内角的特征：

角的名称	位置特征	基本图形	图形结构特征
同位角	在两条被截线同一方，在截线同侧	去掉多余的线显现基本图形 	形如字母“F”(或倒置或反置)
内错角	在两条被截线之间，在截线两侧(交错)	去掉多余的线显现基本图形 	形如字母“Z”(或反置)
同旁内角	在两条被截线之间，在截线同侧	去掉多余的线显现基本图形 	形如字母“U”

2 识别同位角、内错角和同旁内角的方法：

(1)定义法：一看三线、二找截线、三查位置来分辨.这三种角的共同特征：一对边共线，不共顶点，另一对边分别在两条直线上,再根据位置关系确定是哪种角；

(2)分离图形法：区分这三类角的较准确、较快捷的方法是通过分离图形，把每一对角从图形中分离出来，观察分离出的这三类角的形状结构特征，找出规律加以区分；

(3)粗描相关线条法：把相关的一对角用粗线条描出，两角关系便极易识别；

(4)特征法：把相关的一对角用彩色描出，看其是否符合“F”“Z”“U”形特征；

(5)方位法：同位角：同左、同上，同左、同下，同右、同上，同右、同下；内错角：同内、异侧；同旁内角：同内、同侧.

核考向

提分·秘诀

考查角度1 利用同位角、内错角、同旁内角的特征进行识别

例8 如图10.2-10,下列说法错误的是(　　)

A. $\angle C$与$\angle 1$是内错角

B. $\angle 2$与$\angle 3$是内错角

C. $\angle A$与$\angle B$是同旁内角

D. $\angle A$与$\angle 3$是同位角

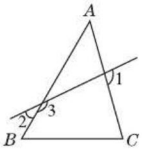


图10.2-10

导引：选项A,C,D分别符合内错角、同旁内角、同位角的定义,而$\angle 2$与$\angle 3$是一对补角.

答案：B

方法点拨

识别同位角、内错角、同旁内角的关键是看两个角所涉及直线是否只有三条，并且有没有一对边在同一直线(截线)上，如果没有，就不是；如果有，再根据角的位置特征判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用同位角、内错角、同旁内角反推“三线”

例9 如图10.2-11，∠1与∠2，∠3与∠4是两对内错角，它们分别是由哪两条直线被哪一条直线所截得到的？

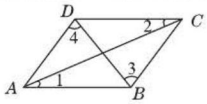


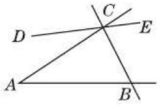
图10.2-11

导引： 利用同位角、内错角、同旁内角反推三线时，先要根据已知角的位置情况，从复杂的图形中分离出三线八角的基本图形，然后再判断得出结论.

解： ∠1与∠2是直线AB与DC被直线AC所截得到的，∠3与∠4是直线AD与BC被直线BD所截得到的.

同类变式 （答案见204页）

9. 如图，∠DCB和∠ABC是直线_____和_____被直线_____所截而成的_____角.



（第9题图）

方法点拨

三线八角由三条直线构成，其中两个角（同位角、内错角或同旁内角）共线的一对边所在的直线是截线，两个角的另一对边所在的两条直线是被截直线.

点知识 5 平行线的判定方法1

1 方法1： 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简单地说，同位角相等，两直线平行.

表达方式：如图10.2-12，

因为∠1 = ∠2（已知），

所以$a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

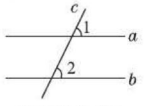


图10.2-12

要点精析

（1）“同位角相等，两直线平行”是通过两个同位角的大小关系（相等）推导出两直线的位置关系（平行）的. 它是构建起角的大小关系与直线的位置关系的桥梁.

（2）“同位角相等”是判定“两直线平行”的一个定量标准.

2 判定两直线平行的方法：

（1）同一平面内不相交的两直线（平行线的定义）

（2）同时平行于第三条直线的两条直线（平行线的基本事实的推论）

（3）同位角相等（判定方法1）

⇒ 两直线平行

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用同位角相等找两直线平行

例10 如图10.2-13，已知∠1 = ∠2，则下列结论正确的是（　　）

A. $AD \parallel BC$　　B. $AB \parallel CD$

C. $AD \parallel EF$　　D. $EF \parallel BC$

导引： 要判定哪两条直线平行，就是要确定∠1，∠2是哪两条直线被第三条直线所截得到的同位角，即找出∠1，∠2除公共边外的另两边.

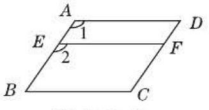


图10.2-13

答案： C

方法点拨

同位角判定两直线平行的方法：首先要找出这对同位角是哪两条直线被第三条直线所截形成的，再根据“同位角相等，两直线平行”推导出这两条直线平行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平行线的判定方法1说明两直线平行

例11 如图10.2-14，已知直线AB，CD被直线EF所截，$\angle 1+\angle 2=180°$，AB与CD平行吗？请说明理由.

导引： 要说明AB与CD平行，需找出AB，CD被第三条直线所截形成的一对同位角相等，即要说明$\angle 1=\angle 3$；要说明$\angle 1=\angle 3$，由于已知$\angle 1+\angle 2=180°$，因此只需说明$\angle 2+\angle 3=180°$即可，这可由平角的定义得出.

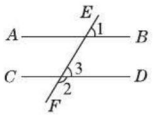


图10.2-14

解： $AB\parallel CD$.

理由如下：因为$\angle 1+\angle 2=180°$（已知），

$\angle 2+\angle 3=180°$（平角的定义），

所以$\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）.

所以$AB\parallel CD$（同位角相等，两直线平行）.

方法点拨

判断两条直线是否平行，可以找出这两条直线被第三条直线所截得到的一对同位角，并利用相关角的条件判断其是否相等，如果相等，那么这两条直线平行.

知识6 平行线的判定方法2

1 **方法2：** 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单地说，内错角相等，两直线平行.

表达方式：如图10.2-15，

因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

所以$a\parallel b$（内错角相等，两直线平行）.

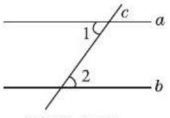


图10.2-15

要点精析

（1）“内错角相等，两直线平行”是利用“对顶角相等”和“同位角相等，两直线平行”推导得出的.

（2）利用“内错角相等”来确定“两直线平行”的关键是先弄清这对内错角是由哪两条直线被第三条直线所截得到的，再说明这两条直线平行.

（3）说明两直线平行，只需一对内错角相等即可.

2 **易错警示：**

易找错说明两直线平行的内错角.

考向

提分·秘诀

考查角度1 利用内错角相等找平行线

例12 如图10.2-16，若$\angle AEF=\angle EFC$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $AD\parallel BC$

B. $AB\parallel CD$

C. $AD\parallel EF$

D. $EF\parallel BC$

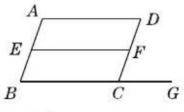


图10.2-16

导引： $\angle AEF$和$\angle EFC$是直线AB，CD被直线EF所截得到的内错角，根据“内错角相等，两直线平行”可知$AB\parallel CD$.

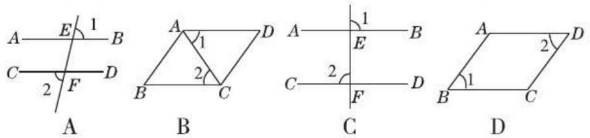
答案： B

方法点拨

内错角判定两直线平行的方法：（1）看两角是不是两直线被第三条直线截得的角；（2）看两角是不是由上述直线形成的内错角，若是，看其是否相等，若相等，则两条直线平行.

同类变式 （答案见204页）

12. 在下列图形中，由$\angle 1=\angle 2$能得到$AB\parallel CD$的是（　　）



A　　B　　C　　D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平行线的判定方法2进行推理

例13 如图10.2-17，已知$\angle ADE=60°$，DF平分$\angle ADE$，$\angle 1=30°$，试说明$DF\parallel BE$.

导引： 要想说明$DF\parallel BE$，可通过说明$\angle 1=\angle EDF$来实现，由于$\angle 1=30°$，所以只需求出$\angle EDF=30°$，而这个结论可通过DF平分$\angle ADE$求得.

解： 因为DF平分$\angle ADE$(已知)，

所以$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADE$(角平分线的定义). 又因为$\angle ADE=60°$(已知)，

所以$\angle EDF=30°$.

又因为$\angle 1=30°$(已知)，所以$\angle EDF=\angle 1$，

所以$DF\parallel BE$(内错角相等，两直线平行).

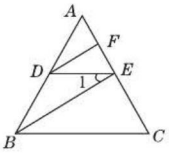


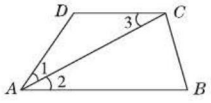
图10.2-17

方法点拨

要判定两直线平行可以通过说明同位角相等或内错角相等来实现，至于到底选用同位角还是选用内错角，要看具体的题目，要尽可能与已知条件联系.

同类变式 (答案见204页)

13. 如图，已知$\angle 3=\angle 1$，AC平分$\angle BAD$，试说明：$AB\parallel CD$.



(第13题图)

点知识 7 平行线的判定方法3

方法3： 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

简单地说，同旁内角互补，两直线平行.

表达方式：如图10.2-18，因为$\angle 1+\angle 2=180°$(已知)，所以$a\parallel b$(同旁内角互补，两直线平行).

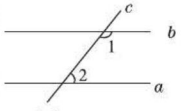


图10.2-18

要点精析

(1) 利用同旁内角说明两直线平行时，同旁内角之间的关系是互补，不是相等.

(2) 在“三线八角”中，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补，只要其中一个结论成立，则利用对顶角、平角等相关知识，可得到另两个结论也成立.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的判定方法识别作图依据

例14 图10.2-19给出了过直线AB外一点C，作已知直线AB的平行线的方法，其依据是(　　)

A. 同位角相等，两直线平行

B. 内错角相等，两直线平行

C. 同旁内角互补，两直线平行

D. 以上都正确

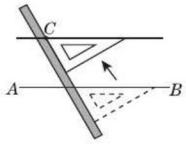


图10.2-19

导引： 由图10.2-19知，平移前、后的三角尺只在位置上发生了变化，角的度数并没有发生改变，且平移前、后的两个60°角是同位角. 故选A.

答案： A

方法点拨

本题应用转化思想，根据平行线的判定“同位角相等，两直线平行”把说明两条直线平行的问题，转化为说明两个角相等的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平行线的判定方法3 判定两直线平行

例15 如图10.2-20，直线AE，CD相交于点O，如果$\angle A=110°$，$\angle 1=70°$，就可以说明$AB\parallel CD$，这是为什么？

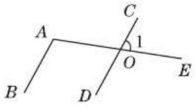


图10.2-20

导引： 由题意可知$\angle 1=\angle AOD=70°$. 又因为$\angle A=110°$，所以$\angle A+\angle AOD=180°$，所以$AB\parallel CD$.

解： 因为$\angle 1=\angle AOD$（对顶角相等），$\angle 1=70°$，

所以$\angle AOD=70°$.

又因为$\angle A=110°$，所以$\angle A+\angle AOD=180°$（等式的性质）.

所以$AB\parallel CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

方法点拨

本题运用数形结合思想.平行线的判定是由角之间的数量关系到“形”的判定.

考查角度3 灵活利用平行线的判定方法说明两直线平行

例16 如图10.2-21，$\angle 1=65°$，$\angle 2=65°$，$\angle 3=115°$，试说明：(1)$DE\parallel BC$；(2)$DF\parallel AB$. 根据图形，完成下列推理：

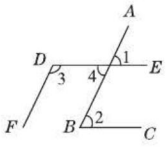


图10.2-21

(1)因为$\angle 1=65°$，$\angle 2=65°$，

所以$\angle 1=\angle 2$.

所以_____$\parallel$_____（　　）.

(2)因为AB，DE相交，所以$\angle 1=\angle 4$（　　）.

所以$\angle 4=65°$.

因为$\angle 3=115°$，所以$\angle 3+\angle 4=180°$.

所以_____$\parallel$_____（　　）.

导引： $\angle 1$与$\angle 2$是直线DE，BC被直线AB所截得到的同位角，所以$DE\parallel BC$，理由是“同位角相等，两直线平行”. $\angle 1$与$\angle 4$是两条直线AB与DE相交得到的对顶角，所以$\angle 1=\angle 4$，理由是“对顶角相等”. $\angle 3$与$\angle 4$是直线DF，AB被直线DE所截得到的同旁内角，所以$DF\parallel AB$，理由是“同旁内角互补，两直线平行”.

答案： (1)DE；BC；同位角相等，两直线平行

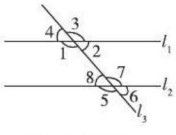
(2)对顶角相等；DF；AB；同旁内角互补，两直线平行

方法点拨

- 由两角相等或互补关系，判定两条直线平行，其关键是找出两个角是哪两条直线被哪一条直线所截而成的角.
- 是选用两角相等，还是选用两角互补关系来说明两直线平行，应根据图形，灵活运用其中一种方法说明即可.

同类变式 （答案见204页）

16. 如图，直线l_1，l_2被l_3所截，若$\angle 1+\angle 8=180°$. 试说明：$l_1\parallel l_2$.（用三种方法说明）



（第16题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平行线的判定探究有关拐角问题

例 17 如图 10.2-22 是一块弯曲的角铁，其中拐角 $\angle ABD = 130°$，现从点 C 处作第二次弯曲，使弯曲后的方向与 AB 的方向平行，求第二次拐角的度数.

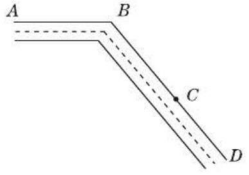


图 10.2-22

导引： 由于第二次弯曲后的方向与 AB 的方向平行，故可根据平行线的判定方法，确定第二次拐角与第一次拐角之间的关系.

解： 当在点 C 处向左弯曲时，如图 10.2-23① 所示，要使 AB 与 CD 平行，则 $\angle ABC + \angle BCD = 180°$.

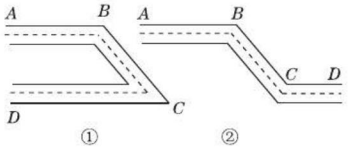


图 10.2-23

因为 $\angle ABC = 130°$，

所以第二次拐角 $\angle BCD = 50°$；

当在点 C 处向右弯曲时，

如图 10.2-23② 所示，

要使 AB 与 CD 平行，

则 $\angle ABC = \angle BCD$.

因为 $\angle ABC = 130°$，

所以第二次拐角 $\angle BCD = 130°$.

易错警示： 解决拐角问题，关键是紧扣弯曲后的方向与哪个方向平行.当拐角的方向不明时，要注意分类考虑拐角的方向.

拔尖角度 2 利用平行线的判定找寻说明平行的方法

例 18 如图 10.2-24，$\angle B = \angle D$，$\angle CEF = \angle A$，试问 CD 与 EF 平行吗？为什么？

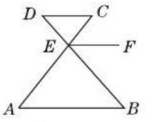


图 10.2-24

导引： 方法一：要说明 $CD // EF$，我们无法找出相等的同位角、内错角，也无法说明其同旁内角互补，因此需找第三条直线与它们平行（即 $AB // CD$，$AB // EF$）即可，这都能由已知 $\angle B = \angle D$，$\angle CEF = \angle A$ 说明.

方法二：由已知 $\angle B = \angle D$，$\angle CEF = \angle A$ 很容易就能得出 $AB // CD$ 及 $EF // AB$，再由平行线的基本事实的推论就可得到 $CD // EF$.

解： $CD // EF$. 理由如下：

因为 $\angle B = \angle D$，

所以 $AB // CD$（内错角相等，两直线平行）.

因为 $\angle CEF = \angle A$，

所以 $EF // AB$（同位角相等，两直线平行）.

所以 $CD // EF$（平行于同一条直线的两条直线平行）.

方法点拨： 找寻说明平行的方法：

(1) 分析法：由结论往前推，要说明这个结论成立需要什么样的条件，一直追推到已知条件为止（如导引方法一）；

(2) 综合法：由已知条件一步一步往后推理，看这个已知条件能推出什么结论，一直推导出要说明的结论为止（如导引方法二）；

(3) 两头凑：当遇到复杂问题的时候，我们常常将分析法和综合法同时进行，即由两头向中间推，寻找到中间的结合点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3　利用平行线的判定解决实际生活中的问题

例 19　光线从空气射入水中时，传播方向会发生改变，这种现象叫做光的折射现象. 同样，光线从水中射入空气中时，也会发生折射现象，一束光线从空气射入水中再从水中射入空气中时，光线的传播方向如图 10.2-25所示，其中，直线 a，b 都表示空气与水的分界面. 已知 $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 3$，请你判断光线 c 与 d 是否平行，为什么？

导引： 设光线在水中的部分为 e，e 与直线 a 所成的钝角为 $\angle 5$，e 与直线 b 所成的钝角为 $\angle 6$，只要能说明 $\angle 1 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6$，则根据“内错角相等，两直线平行”即可判定 $c // d$.

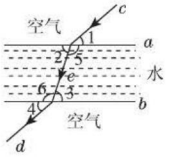


图 10.2-25

解： $c // d$. 理由如下：如图 10.2-25，设光线在水中的部分为 e. 因为 $\angle 2 + \angle 5 = 180°$，$\angle 3 + \angle 6 = 180°$，$\angle 2 = \angle 3$，所以 $\angle 5 = \angle 6$（等角的补角相等）. 又因为 $\angle 1 = \angle 4$，所以 $\angle 1 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6$.

所以 $c // d$（内错角相等，两直线平行）.

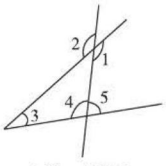
方法点拨： 判断光线 c 与 d 是否平行，应首先解决两个关键问题，一是把实物图抽象为“三线八角”的基本图形；二是把直线 c，d 看成被直线 e 所截的两条直线. 把问题转化为说明 $\angle 1 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6$.

练中考·练模拟 得满分 （答案见 205 页）

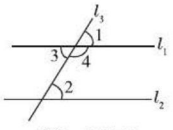
基础巩固练

1. 如图，与 $\angle 4$ 是内错角的是（　　）

A. $\angle 1$　　B. $\angle 2$　　C. $\angle 3$　　D. $\angle 5$



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2. ［中考·邵阳］如图，已知两直线 l_1 与 l_2 被第三条直线 l_3 所截，下列等式一定成立的是（　　）

A. $\angle 1 = \angle 2$　　B. $\angle 2 = \angle 3$

C. $\angle 2 + \angle 4 = 180°$　　D. $\angle 1 + \angle 4 = 180°$

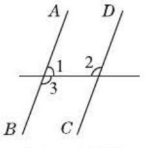
3. 如图，已知 $\angle 1 = 70°$，要使 $AB // CD$，则需具备另一个条件是（　　）

A. $\angle 3 = 110°$

B. $\angle 2 = 70°$

C. $\angle 2 = 110°$

D. $\angle 3 = 70°$

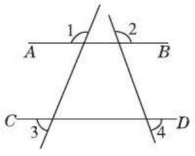


（第 3 题图）

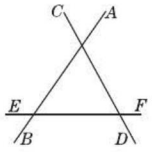
4. ［期末·芜湖］如图，能判断直线 $AB // CD$ 的条件是（　　）

A. $\angle 1 = \angle 2$　　B. $\angle 3 = \angle 4$

C. $\angle 1 + \angle 3 = 180°$　　D. $\angle 3 + \angle 4 = 180°$



（第 4 题图）

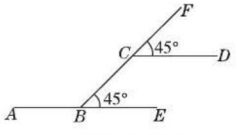


（第 5 题图）

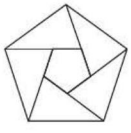
5. 如图，直线 AB，CD，EF 两两相交，则图中为同旁内角的角共有（　　）

A. 3 对　　B. 4 对　　C. 5 对　　D. 6 对

6. 如图，一辆汽车在笔直的公路 AE 上行驶，到达 B 处时向左拐 45°，然后在笔直的公路 BF 上行驶，到达 C 处时向右拐 45°，那么这辆汽车现在行驶的方向和原来的方向_____.（填“相同”或“不相同”）



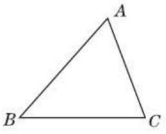
（第 6 题图）


（第 7 题图）

7. 如图是由五个形状、大小完全相同的三角形组成的图案，三角形的三个角分别为 36°，72°，72°，则图中共有_____对平行线.

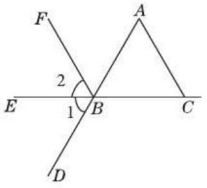
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 按要求作图(保留作图痕迹,不写作法).
如图. (1)过 C 点作 $CD \perp AB$,垂足为 D;
(2)过 D 点作 $DE // BC$,交 AC 于 E;
(3)取 BC 的中点 G,作 $GF \perp AB$,垂足为 F.



(第 8 题图)

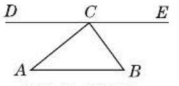
9. 如图,已知 E, B, C 三点共线, BE 平分 $\angle DBF$, $\angle 1 = \angle ACB$. 试说明: $BF // AC$.



(第 9 题图)

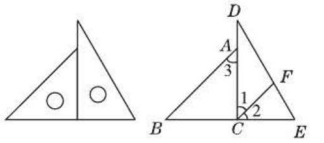
解:因为 BE 平分 $\angle DBF$(_____),
所以_____ = _____(_____).
又因为 $\angle 1 = \angle ACB$(_____),
所以 $\angle 2 = \angle ACB$(_____),
所以 $BF // AC$(_____).

10. 如图,如果 $CD // AB$, $CE // AB$,那么 C, D, E 三点是否共线?请说明理由.



(第 10 题图)

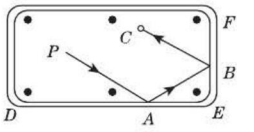
11. [中考·邵阳]将一副三角尺拼成如图所示的图形,过点 C 作 CF 平分 $\angle DCE$ 交 DE 于点 F.
(1)试说明 $CF // AB$;
(2)求 $\angle DFC$ 的度数.



(第 11 题图)

能力提升练

12. 如图,台球运动中,如果母球 P 击中桌边 DE 上的点 A,经桌边反弹后击中桌边 EF 上的点 B,再次反弹后击中点 C,那么母球 P 经过的路线 BC 与 PA 一定平行. 请说明理由.



(第 12 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

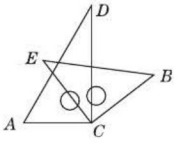
13. [探究题] 将一副三角尺按如图所示的方式叠放在一起(其中$\angle A=60°$,$\angle D=30°$,$\angle E=\angle B=45°$).

(1)①若$\angle DCE=45°$,则$\angle ACB$的度数为_____;

②若$\angle ACB=140°$,则$\angle DCE$的度数为_____.

(2)由(1)猜想$\angle ACB$与$\angle DCE$的数量关系,并说明理由.

(3)若将三角尺ECB绕点C旋转,当$\angle ACE<180°$且点E在直线AC的上方时,这两块三角尺是否存在一组边互相平行?若存在,请直接写出$\angle ACE$所有可能的度数(不必说明理由);若不存在,请说明理由.



(第13题图)

15. 如图是一个跳棋棋盘,其游戏规则是一个棋子从某一个起始角开始,经过若干步跳动以后,到达终点角.跳动时,每一步只能跳到它的同位角或内错角或同旁内角的位置上,例如:从起始角$\angle 1$跳到终点角$\angle 3$的所有路径中的两种不同路径如下.

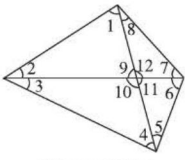
路径1:$\angle 1 \xrightarrow{\text{同旁内角}} \angle 9 \xrightarrow{\text{内错角}} \angle 3$.

路径2:$\angle 1 \xrightarrow{\text{内错角}} \angle 12 \xrightarrow{\text{内错角}} \angle 6 \xrightarrow{\text{同位角}} \angle 10 \xrightarrow{\text{同旁内角}} \angle 3$.

试一试: 【导学号:2231921】

(1)请写出一种从起始角$\angle 1$跳到终点角$\angle 8$的路径.

(2)从起始角$\angle 1$依次按同位角、内错角、同旁内角的顺序跳,能否跳到终点角$\angle 8$?

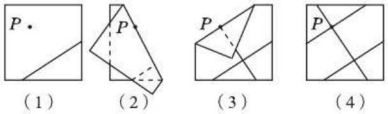


(第15题图)

思维拓展练

14. [操作题] 学习了平行线的判定后,小敏想出了过已知直线外一点画这条直线的平行线的新方法,她是通过折一张半透明的纸得到的,如图(1)~(4),从图中可知,小敏画平行线的依据有(　　)

①同位角互补,两直线平行;②内错角互补,两直线平行;③同位角相等,两直线平行;④内错角相等,两直线平行.



(第14题图)

A. ①②　B. ②③　C. ③④　D. ①④

我的错题笔记

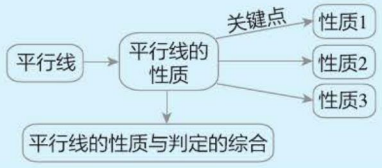
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10.3 平行线的性质

核心知识

- 平行线的性质1
- 平行线的性质2
- 平行线的性质3

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线的性质 1

1 **性质1：** 两条平行线被第三条直线所截，同位角相等. 简单地说，两直线平行，同位角相等.

表达方式：如图 10.3-1，

因为 $a // b$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

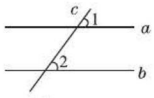


图 10.3-1

要点精析

(1) 两直线平行是前提，只有在这个前提下才有同位角相等.

(2) 平行线的判定与平行线的性质的区别：①平行线的判定是根据两角的数量关系得到两条直线的位置关系，而平行线的性质是根据两条直线的位置关系得到两角的数量关系；②平行线的判定的条件是平行线的性质的结论，而平行线的判定的结论是平行线的性质的条件.

2 **易错警示：** 误认为非平行线的同位角也相等.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的性质 1 求角的度数

例 1 如图 10.3-2，直线 $a // b$，直线 c 与 a，b 相交，$\angle 1 = 50°$，则 $\angle 2$ 的大小是（　　）

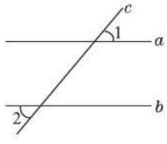


图 10.3-2

A. 40°　　B. 50°　　C. 80°　　D. 130°

导引： 观察图形可知，可以把求 $\angle 2$ 转化为求 $\angle 2$ 的对顶角来解，因为 $\angle 2$ 的对顶角与 $\angle 1$ 是同位角，而直线 $a // b$，所以 $\angle 2 = \angle 1 = 50°$.

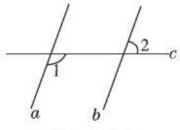
答案： B

方法点拨

利用平行线的性质 1 求角度时，主要看要求的角与已知角之间是否是已知的平行线被第三条直线所截的同位角，若是，可直接求出；若不是，还需要通过中间角（如对顶角）进行转化.

同类变式 （答案见 205 页）

1. [中考·临沂] 如图，$a // b$，若 $\angle 1 = 110°$，则 $\angle 2$ 的度数是（　　）



（第 1 题图）

A. 110°　　B. 80°　　C. 70°　　D. 60°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平行线的性质1说明角相等

例2 如图10.3-3是大众汽车的标志图案，其中蕴涵着许多几何知识. 根据下面的条件完成说明.

已知：如图10.3-4，$BC // AD$，$BE // AF$.

试说明$\angle A = \angle B$.



图10.3-3

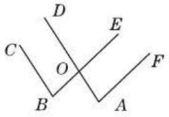


图10.3-4

导引： 由两直线平行可推出同位角相等，而$\angle A$和$\angle B$都是$\angle DOE$的同位角，进而可说明$\angle A = \angle B$.

解： 因为$BC // AD$，所以$\angle B = \angle DOE$.

又因为$BE // AF$，

所以$\angle DOE = \angle A$，所以$\angle A = \angle B$.

方法点拨

利用平行线的性质1说明两角相等是说明两角相等常用的方法.

考查角度3 利用平行线的性质1判定两直线平行

例3 如图10.3-5，若$AB // CD$，且$\angle 1 = \angle 2$，试判断AM与CN的位置关系，并说明理由.

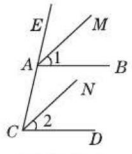


图10.3-5

导引： AM与CN的位置关系很显然是平行的，要说明$AM // CN$，可考虑说明$\angle MAE = \angle NCA$. 又因为$\angle 1 = \angle 2$，所以只需说明$\angle BAE = \angle ACD$即可，由于“两直线平行，同位角相等”，所以根据$AB // CD$即可得出$\angle BAE = \angle ACD$.

解： $AM // CN$.

理由如下：因为$AB // CD$（已知），

所以$\angle BAE = \angle ACD$（两直线平行，同位角相等）.

又因为$\angle 1 = \angle 2$（已知），

所以$\angle MAE = \angle NCA$（等式的性质）.

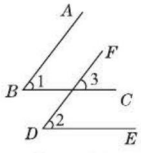
所以$AM // CN$（同位角相等，两直线平行）.

方法点拨

平行线和角的大小关系是紧密联系在一起的，由平行线可以得到相等的角，反过来又可以由相等的角得到新的一组平行线，这种角的大小关系与直线的位置关系的相互转化在解题中会经常涉及.

同类变式 （答案见205页）

3. 如图，已知$AB // DF$，$\angle 1 = \angle 2$，试判断BC与DE的位置关系，并说明理由.



（第3题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 平行线的性质 2

1 **性质 2**：两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

简单地说，两直线平行，内错角相等.

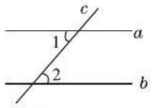


图 10.3-6

表达方式：如图 10.3-6，因为 $a // b$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

要点精析///

两直线平行是前提，只有在这个前提下才有内错角相等.

2 **易错警示**：找准平行线的内错角.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的性质 2 求角的度数

例 4 如图 10.3-7，$AB // CD$，直线 EF 分别交 AB，CD 于点 E，F，EG 平分 $\angle AEF$，交 CD 于 G，$\angle 1 = 40°$，求 $\angle 2$ 的度数.

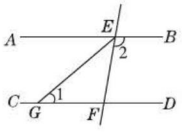


图 10.3-7

导引：先根据平行线的性质2得到 $\angle 1 = \angle AEG$，再利用角平分线的定义推出 $\angle AEF = 2\angle 1$，最后根据 $\angle AEF + \angle 2 = 180°$ 即可求出 $\angle 2$ 的度数.

解：因为 $AB // CD$，所以 $\angle 1 = \angle AEG$.

因为 EG 平分 $\angle AEF$，所以 $\angle AEF = 2\angle 1$.

又因为 $\angle AEF + \angle 2 = 180°$，

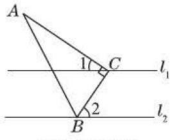
所以 $\angle 2 = 180° - 2\angle 1 = 180° - 2 \times 40° = 100°$.

方法点拨

解答此类问题的关键是从复杂图形中辨认出应用平行线性质的基本图形，从而利用平行线的性质和已知条件计算.

同类变式 （答案见 205 页）

4. ［中考·随州］如图，直线 $l_1 // l_2$，直角三角板的直角顶点 C 在直线 l_1 上，一锐角顶点 B 在直线 l_2 上，若 $\angle 1 = 35°$，则 $\angle 2$ 的度数是（　　）



（第 4 题图）

A. 65°　　B. 55°　　C. 45°　　D. 35°

考查角度2 利用平行线的性质 2 进行推理说明

例 5 如图 10.3-8，已知 $\angle B = \angle C$，$AE // BC$，试说明 AE 平分 $\angle CAD$.

导引：要说明 AE 平分 $\angle CAD$，即说明 $\angle DAE = \angle CAE$. 由于 $AE // BC$，根据两直线平行，同位角相等和两直线平行，内错角相等可知 $\angle DAE = \angle B$，$\angle EAC = \angle C$，这就将说明 $\angle DAE = \angle CAE$ 转化为说明 $\angle B = \angle C$ 了.

方法点拨

本题同时运用了“两直线平行，同位角相等”和“两直线平行，内错角相等”，这提供了一种说明两个角相等的新思路.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：因为 $AE // BC$（已知），所以 $\angle DAE = \angle B$（两直线平行，同位角相等），$\angle EAC = \angle C$（两直线平行，内错角相等）. 因为 $\angle B = \angle C$（已知），所以 $\angle DAE = \angle EAC$（等量代换）. 所以 AE 平分 $\angle CAD$（角平分线的定义）.

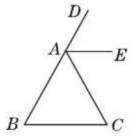
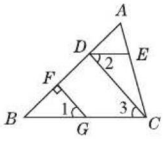


图 10.3-8



同类变式 （答案见 206 页）

5. 如图，已知 $DE // BC$，$GF \perp AB$ 于 F，$\angle 1 = \angle 2$，判断 CD 与 AB 的位置关系，并说明理由.



（第 5 题图）

考查角度3 利用平行线的性质 2 解决实际问题

例 6 如图 10.3-9，MN，EF 表示两面互相平行的镜面，一束光线 AB 照射到镜面 MN 上，反射光线为 BC，此时 $\angle 1 = \angle 2$，光线 BC 经过镜面 EF 反射后的光线为 CD，此时 $\angle 3 = \angle 4$，试判断 AB 与 CD 的位置关系，并说明理由.

导引：要判断 AB 与 CD 的位置关系，应从两直线的位置关系的特殊情况入手，如平行或垂直方面思考问题，观察图 10.3-9 可知，AB 与 CD 没有交点，所以可猜想 $AB // CD$，要说明 $AB // CD$，只要说明 $\angle ABC = \angle BCD$ 即可.

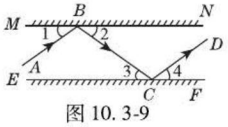


图 10.3-9

解：$AB // CD$.

理由如下：因为 $MN // EF$，

所以 $\angle 2 = \angle 3$（两直线平行，内错角相等）.

又因为 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，

所以 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$.

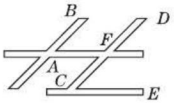
因为 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 180°$，$\angle 3 + \angle BCD + \angle 4 = 180°$，

所以 $\angle ABC = \angle BCD$.

所以 $AB // CD$（内错角相等，两直线平行）.

同类变式 （答案见 206 页）

6. 某城市几条道路的位置关系如图，道路 AB 与道路 CD 平行，道路 AB 与道路 AF 的夹角 $\angle BAF$ 为 $45°$，城市规划部门计划新修一条道路 CE，要使道路 CE 与道路 AF 平行，则 $\angle DCE$ 应为多少度？



（第 6 题图）

方法点拨

- 利用平行线的性质解决实际问题时，其关键是根据实际问题建立数学模型，从而利用平行线的性质解决实际问题.
- 说明两直线的位置关系时，一般都从两直线平行或垂直这两种特殊情况去思考.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 平行线的性质 3

1 **性质 3**：两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补.

简单地说，两直线平行，同旁内角互补.

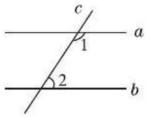


图 10.3-10

表达方式：如图 10.3-10，因为 $a \parallel b$（已知），所以 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

2 **易错警示**：平行线的同旁内角是互补不是相等.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用平行线的性质 3 求角的度数

例 7 如图 10.3-11，已知 $AB \parallel CF$，$CF \parallel DE$，$\angle 1 = 120°$，$\angle 2 = 105°$，求 $\angle 3$ 的度数.

导引：先由两直线平行，同旁内角互补求得 $\angle ACF$，$\angle DCF$ 的度数，再由平角的定义求得 $\angle 3$ 的度数.

解：因为 $AB \parallel CF$，$\angle 1 = 120°$（已知），

所以 $\angle ACF = 180° - 120° = 60°$（两直线平行，同旁内角互补）.

因为 $CF \parallel DE$，$\angle 2 = 105°$（已知），

所以 $\angle DCF = 180° - 105° = 75°$（两直线平行，同旁内角互补）.

所以 $\angle 3 = 180° - \angle ACF - \angle DCF = 180° - 60° - 75° = 45°$.

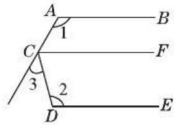


图 10.3-11

方法点拨

解决与平行线性质有关的计算题时，要熟悉图形及其性质，还要能结合其他角（如对顶角、平角等）的相关知识，把待求的角与已知角逐步联系起来.

考查角度2 利用平行线的性质 3 进行推理说明

例 8 如图 10.3-12，已知 $DA \perp AB$，DE 平分 $\angle ADC$，CE 平分 $\angle BCD$，且 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，试说明 $BC \perp AB$.

导引：要说明 $BC \perp AB$，即说明 $\angle B = 90°$. 因为 $DA \perp AB$，所以若能说明 $AD \parallel CB$，则 $BC \perp AB$. 由 DE 平分 $\angle ADC$，CE 平分 $\angle BCD$，且 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，可说明 $\angle ADC + \angle BCD = 180°$，从而说明 $AD \parallel BC$.

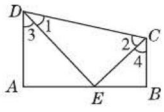


图 10.3-12

解：因为 DE 平分 $\angle ADC$，CE 平分 $\angle BCD$（已知），

所以 $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$（角平分线的定义）.

因为 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$，

即 $\angle ADC + \angle BCD = 180°$.

所以 $AD \parallel BC$（同旁内角互补，两直线平行），

所以 $\angle A + \angle B = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

因为 $DA \perp AB$，所以 $\angle A = 90°$（垂直的定义）.

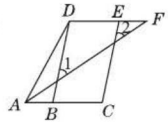
所以 $\angle B = 90°$，即 $BC \perp AB$（垂直的定义）.

方法点拨

平行线和角的大小关系、直线的位置关系等是紧密联系在一起的，通过一对同位角相等或内错角相等或同旁内角互补可以判断两直线平行，反过来可以根据两直线平行判断同位角相等、内错角相等或同旁内角互补，再利用这些相等、互补关系说明其他结论，因此两直线平行好似一座桥梁，将原本没有关系的数学问题联系在一起.

同类变式 （答案见 206 页）

8. 如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle FAC = \angle F$，请根据这些条件判断 $\angle C$ 与 $\angle FDB$ 的关系.



（第 8 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

平行线间的是非曲直

平行线的性质与判定都与平行线被第三条直线所截的位置角(同位角、内错角、同旁内角)有关系，平行线的性质是揭示这些位置角的数量关系，为后面说明三角形全等或相似提供了角相等的依据，也为求角的度数提供思路，但人们永远不甘于平淡，近几年中考中有关平行线的试题也是五花八门，抓住截线不放.

类型1:将截线折断后任意拉伸探究位置角关系

(1)如图 10. 3-13②,在平行线内部将截线折断，有两个重要的结论:

①$\angle 1+\angle 2=\angle A$; ②$\angle 3+\angle A+\angle 4=360°$.

其实这两个结论与截线是直的时的结论是一样的，如图10. 3-13①,$\angle A=180°$,$\angle 1+\angle 2=180°$,$\angle 3+\angle 4=180°$,所以$\angle 1+\angle 2=\angle A$,$\angle 3+\angle A+\angle 4=360°$.

将截线折断拉伸，$\angle A$ 的度数在变化，同时$\angle 1$,$\angle 2$,$\angle 3$,$\angle 4$ 的度数也随之在改变，但它们之间的数量关系还是不变.

(2)若将截线的折点拉至两条平行线的外部，如图 10. 3-13③,易知$\angle 1+(180°-\angle 2)+\angle A=180°$,所以$\angle A=\angle 2-\angle 1$. 由此不管将折点拉伸至何处，其根本的平行线的性质永远保持不变.

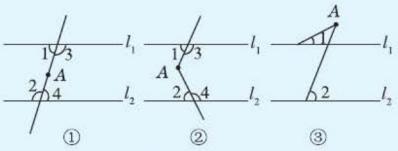


图 10. 3-13

类型2：夹在两条平行线之间的图形面积的探究

如图 10. 3-14①,平行四边形的面积为 S,若将两条截线以同样的方式折断拉伸一次，如图 10. 3-14②,则$S_{阴影}=S$. 若将两条截线以同样的方式折断拉伸两次，如图 10. 3-14③,则$S_{阴影}=S$. …. 依次类推，若将两条截线以同样的方式，在平行线内部折断拉伸无数次，则$S_{阴影}=S$.

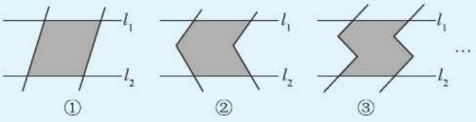


图 10. 3-14

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平行线的性质解决学具操作问题

例9 [模拟·铜陵]一副直角三角板按如图 10. 3-15 所示的方式摆放,其中点 C 在 FD 的延长线上,且 $AB\parallel FC$,则$\angle CBD$ 的度数为(　　)

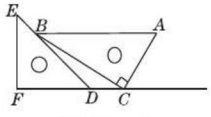


图 10. 3-15

A. 15°　　B. 20°　　C. 25°　　D. 30°

导引: 因为 $AB\parallel CD$,所以$\angle ABD=\angle EDF=45°$,

所以$\angle CBD=\angle ABD-\angle ABC=45°-30°=15°$.

答案: A

方法点拨: 解决学具操作题，关键是要掌握学具作为几何图形具有的性质特征,以及学具中特殊内角的度数.

拔尖角度 2 利用平行线的性质解决折叠问题

例10 如图 10. 3-16,将一张长方形的纸片沿 EF 折叠后,点 D,C 分别落在 D',C' 位置上,ED' 与 BC 的交点为点 G,若$\angle EFG=50°$,求$\angle EGB$ 的度数.

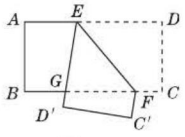


图 10. 3-16

导引: 本题易知长方形的对边是平行的,先利用平行线的性质:两直线平行,内错角相等,求得$\angle DEF=50°$,再根据折叠前后的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对应角相等求得$\angle D'EF=50°$，然后根据平角的定义得$\angle AEG=80°$，最后根据两直线平行，同旁内角互补求得$\angle EGB=100°$.

解： 因为四边形$ABCD$是长方形（已知），

所以$\angle A=\angle B=90°$（长方形的定义）.

所以$\angle A+\angle B=180°$，

所以$AD/\!/BC$（同旁内角互补，两直线平行）.

所以$\angle DEF=\angle EFG$（两直线平行，内错角相等）.

因为$\angle EFG=50°$，所以$\angle DEF=50°$.

因为$\angle DEF=\angle D'EF$（折叠的性质），

所以$\angle D'EF=50°$（等量代换）.

所以$\angle AEG=180°-\angle DEF-\angle D'EF=80°$（平角的定义）.

又因为$AD/\!/BC$，

所以$\angle AEG+\angle EGB=180°$（两直线平行，同旁内角互补），所以$\angle EGB=180°-\angle AEG=180°-80°=100°$.

技巧点拨： 解决折叠问题中求角的度数的方法：找到折叠前后相等的角，然后熟练利用平行线的性质来求角的度数.

拔尖角度 3 巧添辅助线解决与平行线有关的探究问题

例11 ［探究题］如图10.3-17，$DE/\!/BC$，试说明$\angle AED=\angle A+\angle B$.

导引： 因为$DE/\!/BC$，但DE，BC没有被第三条直线所截，无法应用平行线的性质，所以考虑延长AE交BC于点F（如图10.3-17），

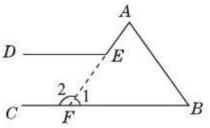


图10.3-17

由此得出$\angle 2=\angle AED$，

然后根据三角形内角和为180°，

即可得解.

解： 如图10.3-17，延长AE交BC于点F.

因为$\angle A+\angle B+\angle 1=180°$，$\angle 2+\angle 1=180°$，

所以$\angle 2=\angle A+\angle B$（等式的性质）.

又因为$DE/\!/BC$（已知），

所以$\angle 2=\angle AED$（两直线平行，同位角相等），

所以$\angle AED=\angle A+\angle B$（等量代换）.

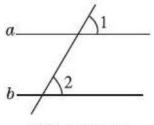
技巧点拨： (1)当题中所给的已知条件和要求说明的结论之间的逻辑关系不甚明朗，甚至“彼此孤立”时，可作延长线或连接有关的点，从构成新的“媒介”，从而得到新的等量关系.(2)辅助线实际是为一些已知与未知的关系“牵线搭桥”的.

练中考·练模拟 得满分 （答案见206页）

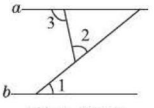
基础巩固练

1. ［中考·贺州］如图，已知直线$a/\!/b$，$\angle 1=60°$，则$\angle 2$的度数是（　　）

A. 45°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 120°



（第1题图）



（第2题图）

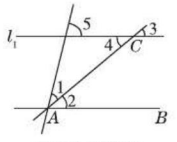
2. ［模拟·安徽］如图，已知$a/\!/b$，$\angle 1=40°$，$\angle 2=60°$，则$\angle 3$的度数是（　　）

A. 100°　　B. 105°　　C. 110°　　D. 115°

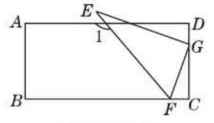
3. ［中考·深圳］如图，已知$l_1/\!/AB$，AC为角平分线，下列说法错误的是（　　）

A. $\angle 1=\angle 4$　　B. $\angle 1=\angle 5$

C. $\angle 2=\angle 3$　　D. $\angle 1=\angle 3$



（第3题图）



（第4题图）

4. ［中考·辽阳］将三角尺按如图所示放置在一张长方形纸片上，$\angle EGF=90°$，$\angle FEG=30°$，$\angle 1=130°$，则$\angle BFG$的度数为（　　）

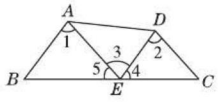
A. 130°　　B. 120°　　C. 110°　　D. 100°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

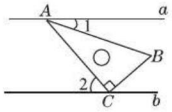
5. 如图，完成下列推理.

(1) 若 $AB \parallel DE$，则 $\angle 1 =$ _____，根据是 _____；若 $AE \parallel DC$，则 _____ $= \angle 2$，根据是 _____.

(2) 若 $\angle 4 = \angle B$，则 _____ $\parallel$ _____，根据是 _____；若 $\angle AEC + \angle C = 180°$，则 _____ $\parallel$ _____，根据是 _____.



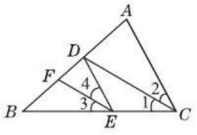
(第 5 题图)



(第 6 题图)

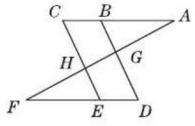
6. [中考·张家界] 已知直线 $a \parallel b$，将一块含 $30°$ 角的直角三角板 ABC 按如图所示方式放置($\angle BAC = 30°$)，并且顶点 A，C 分别落在直线 a，b 上，若 $\angle 1 = 18°$，则 $\angle 2$ 的度数是 _____.

7. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$，$DC \parallel EF$，$DE \parallel AC$，试说明：$\angle 3 = \angle 4$.



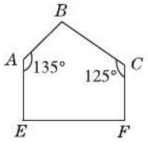
(第 7 题图)

8. 如图，已知点 E 在直线 DF 上，点 B 在直线 AC 上，且 $\angle AGB = \angle EHF$，$\angle C = \angle D$，试说明：$\angle A = \angle F$.



(第 8 题图)

9. 小芳给自己家的小狗乐乐做了一个小木屋，其侧面如图所示，$AE \parallel CF$，若她已测出 $\angle A = 135°$，$\angle C = 125°$，但 $\angle B$ 的度数无法测出，哥哥看到后说，不用测量，他也能算出 $\angle B$ 的度数，你知道小芳的哥哥是怎样计算的吗？试着计算出 $\angle B$ 的度数.



(第 9 题图)

能力提升练

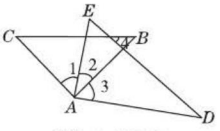
10. 将一副三角板按如图所示放置，下列结论中不正确的是(　　)

A. 若 $\angle 2 = 30°$，则 $AC \parallel DE$

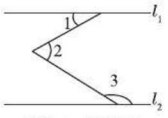
B. $\angle 2 + \angle CAD = 180°$

C. 若 $BC \parallel AD$，则 $\angle 2 = 30°$

D. 若 $\angle CAD = 150°$，则 $\angle 4 = \angle C$



(第 10 题图)



(第 11 题图)

11. [中考·泰安] 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，$\angle 1 = 30°$，则 $\angle 2 + \angle 3 =$ (　　)

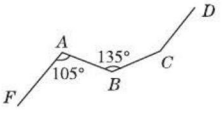
A. $150°$　　B. $180°$

C. $210°$　　D. $240°$

12. 已知 $\angle ABC = 70°$，点 D 为 BC 边上一点，过点 D 作 $DP \parallel AB$，若 $\angle PBD = \frac{1}{2}\angle ABC$，则 $\angle DPB =$ _____.

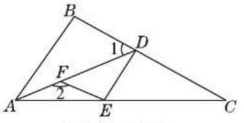
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 如图，一条铁路修到一个村子时，需拐弯绕道而过，如果第一次的拐角 $\angle A$ 是 $105°$，第二次的拐角 $\angle B$ 是 $135°$，第三次的拐角是 $\angle C$，这时的道路恰好和第一次拐弯之前的道路平行，那么 $\angle C$ 应为多少度？



（第 13 题图）

14. 如图，$\angle 1 + \angle 2 = 180°$，$\angle B = \angle DEF$，$\angle BAC = 55°$，求 $\angle DEC$ 的度数.



（第 14 题图）

思维拓展练

15. (1) 如图①，$AB // CD$，$\angle A = 130°$，$\angle C = 120°$，求 $\angle APC$ 的度数.

请补全下面的推理依据.

如图②，过点 P 作 $PE // AB$.

因为 $AB // CD$，

所以 $PE // AB // CD$（_____）.

所以 $\angle A + \angle APE = 180°$，$\angle C + \angle CPE = 180°$（_____）.

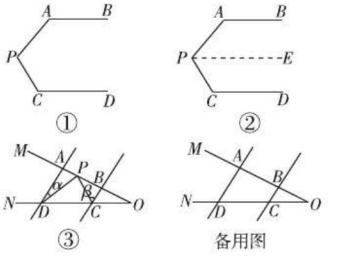
因为 $\angle A = 130°$，$\angle C = 120°$，

所以 $\angle APE = 50°$，$\angle CPE = 60°$.

所以 $\angle APC = \angle APE + \angle CPE = 110°$（_____）.

(2) 如图③，已知 $AD // BC$，点 P 在射线 OM 上运动，且 $\angle ADP = \angle \alpha$，$\angle BCP = \angle \beta$.

①当点 P 在 A，B 两点之间运动时（点 P 与点 A，B 不重合），$\angle CPD$ 与 $\angle \alpha$，$\angle \beta$ 之间有何数量关系？请说明理由.



（第 15 题图）

②当点 P 在 A，B 两点外侧运动时（点 P 与点 A，B，O 不重合），$\angle CPD$ 与 $\angle \alpha$，$\angle \beta$ 之间有何数量关系？

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.4 平　移

核心知识

- 平移的定义
- 平移的性质
- 平移作图

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平移的定义

1 **定义：** 在平面内，一个图形沿某个方向移动一定的距离，这种图形的变换叫做平移.

要点精析

(1) 平移的两个要素：平移的方向(直线方向)和平移距离.

(2) 平移只改变图形的位置，不改变图形的形状、大小、方向.

(3) 平移的方向可以是上下平移和左右平移，也可以是按任意指定的方向平移，只要是直线方向即可.

2 **易错警示：** 易丢图形按直线方向移动这一条件.

拨考向

提分·秘诀

考查角度 利用平移的定义认识平移现象

例1 在以下现象中：

①用打气筒打气时，打气筒里活塞的运动；②传送带上瓶装饮料的移动；③随风摆动的旗帜；④钟摆的摆动.

属于平移的是(　　)

A. ①　　B. ①②

C. ①②③　　D. ①②③④

导引： ①中打气筒里活塞的运动属于平移；②中传送带上瓶装饮料的形状、大小和方向均没有改变，只是改变了位置，所以属于平移；③中随风摆动的旗帜的形状发生了改变，所以不属于平移；④中钟摆的摆动属于旋转. 故应该选 B.

答案： B

方法点拨

判断一项运动是不是平移现象，要紧扣平移定义的特征：一变三不变，即图形的位置改变，而图形的形状、大小、方向都不变.

同类变式 (答案见 207 页)

1. [中考·乐山] 下列图形中，可以由如图所示的图形通过平移得到的是(　　)



(第 1 题图)


A


B


C


D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 平移的特征(性质)

1 一个图形和它经过平移后所得的图形中，连接各组对应点的线段互相平行(或在同一条直线上)且相等.

2 平移只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小.


平移的性质

要点精析///

(1)连接对应点的线段的长度就是平移距离.

(2)从原图上一点到其对应点的方向即起始点到终止点的方向为平移方向.

(3)平移前后图形的对应边平行(或在同一条直线上)且相等，对应角相等.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用平移现象找平移中的各元素

例2 如图 10.4-1，将四边形 $ABCD$ 平移到四边形 $A'B'C'D'$ 的位置，请指出图中的对应点、对应线段和对应角.

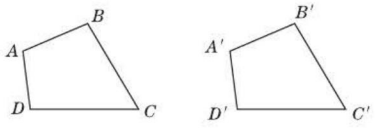


图 10.4-1

导引：根据平移的概念可知，图形上每一点都沿同一方向移动了相同的距离. 观察图形可知，点 A 与点 A' 是对应点，点 B 与点 B' 是对应点，点 C 与点 C' 是对应点，点 D 与点 D' 是对应点. 找到对应点即可确定对应线段、对应角.

解：对应点：$A\to A'$，$B\to B'$，$C\to C'$，$D\to D'$；

对应线段：$AB\to A'B'$，$BC\to B'C'$，$CD\to C'D'$，$DA\to D'A'$；

对应角：$\angle A\to\angle A'$，$\angle B\to\angle B'$，$\angle C\to\angle C'$，$\angle D\to\angle D'$.

方法点拨

认识平移中的元素，先从对应点开始，因为对应点是关键，确定了对应点，相应的对应线段和对应角就确定了.

考查角度2 利用平移的性质求线段长

例3 [中考·莆田]如图 10.4-2，三角形 $A'B'C'$ 是由三角形 ABC 沿射线 AC 方向平移 2 cm 得到的，若 $AC=3$ cm，则 $A'C=$ _____ cm.

导引：因为将三角形 ABC 沿射线 AC 方向平移2 cm 得到三角形 $A'B'C'$，所以 $AA'=2$ cm. 又因为 $AC=3$ cm，所以 $A'C=AC-AA'=3-2=1$(cm).

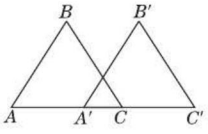


图 10.4-2

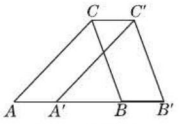
答案：1

方法点拨

求解与平移有关的计算问题，首先分别找出平移前、后的两个图形，找出对应边、对应角，其次灵活应用平移的性质：(1)平移不改变图形的形状和大小；(2)连接各组对应点的线段平行(或在同一条直线上)且相等；(3)对应线段平行(或在同一条直线上)且相等，对应角相等.

同类变式 (答案见 207 页)

3. 如图，三角形 ABC 的周长为22 cm，现将三角形 ABC 沿 AB 方向平移 2 cm 至三角形 $A'B'C'$ 的位置，连接 CC'，则四边形 $AB'C'C$ 的周长是_____.



(第 3 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用平移的性质确定平移的距离

例4 如图10.4-3,右边的小房子是由左边的小房子平移得到的,写出平移的距离.(每个小正方形的边长为1个单位长度)

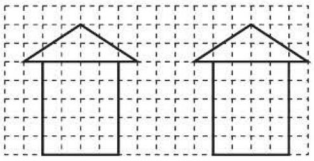


图10.4-3

导引: 确定平移的距离主要分两步:第一步找对应点,第二步确定对应点之间的距离,每一对对应点之间的距离都是平移的距离.

解: 平移的距离是9个单位长度.

考查角度4 利用平移的性质求角的度数

例5 [中考·贵阳]如图10.4-4,将直线 l_1 沿着 AB 的方向平移得到直线 l_2,若 $\angle 1=50°$,则 $\angle 2$ 的度数是(　　)

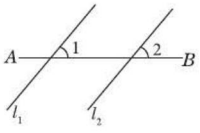


图10.4-4

A. 40°　　B. 50°　　C. 90°　　D. 130°

导引: 因为将直线 l_1 沿着 AB 的方向平移得到直线 l_2,

所以 $l_1 // l_2$.

因为 $\angle 1=50°$,

所以 $\angle 2=50°$.

答案: B

点知识3 平移作图

平移作图的一般步骤:

平移作图是平移基本性质的应用,利用平移可以得到许多美丽的图案,在具体作图时,应抓住作图的"四部曲"——定、找、移、连.

(1)定:确定平移的方向和距离;

(2)找:找出构成图形的关键点(图形的顶点、拐点、连接点);

(3)移:过关键点作平行且相等的线段,得到关键点的对应点;

(4)连:按原图顺次连接对应点.



拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用平移的性质解决在非网格中的作图问题

例6 如图10.4-5,四边形 $ABCD$ 的顶点 A 移动到了 A' 处,作出四边形 $ABCD$ 平移后的图形.

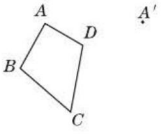
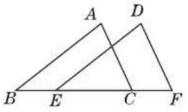


图10.4-5

导引: 因为点 A 移动到了 A' 处,所以平移的方向就是 AA' 方向,平移的距离就是线段

同类变式 (答案见207页)

4. 如图,三角形 DEF 是由三角形 ABC 经过平移得到的,则平移的距离是(　　)



(第4题图)

A. 线段 BE 的长度

B. 线段 EC 的长度

C. 线段 BC 的长度

D. 线段 EF 的长度

方法点拨

本题应用性质判断法.先根据平移的性质得出 $l_1 // l_2$,再根据平行线的性质得出 $\angle 2$ 的度数.

方法点拨

画平移图形的方法:首先找出平移的方向和距离,再确定构成图形的关键点,然后根据平移方向和距离平移每个关键点,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

AA'的长度，要作出平移后的图形，需要先作出点B,C,D的对应点B',C',D'，由“对应点所连的线段平行且相等”可知，$BB'\parallel CC'\parallel DD'\parallel AA'$，$BB'=CC'=DD'=AA'$，据此可作出点$B',C',D'$，再顺次连接$A'B',B'C',C'D',D'A'$即可.

解：(1)连接AA'；

(2)分别过点B,C,D作$l_1\parallel AA'$，$l_2\parallel AA'$，$l_3\parallel AA'$；

(3)在l_1上沿射线AA'的方向截取$BB'=AA'$，在l_2,l_3上按同样的方法截取$CC'=AA'$，$DD'=AA'$；

(4)顺次连接$A'B',B'C',C'D',D'A'$，即得到四边形$ABCD$平移后的图形$A'B'C'D'$，如图10.4-6.

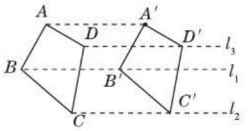


图 10.4-6

最后顺次连接每个关键点的对应点，并标出相应的字母，得出平移后的图形.

考查角度2 利用平移的性质在网格中作图

例7 已知如图10.4-7所示的图案及图案上的点A，把图案平移后，A点的对应点为A'点，请你利用两种不同的方法画出平移后的图形.

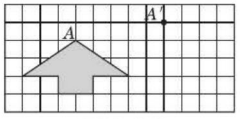


图 10.4-7

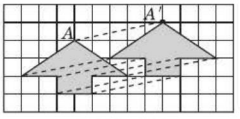


图 10.4-8

导引：画图的关键是画出图上各关键点平移后的对应点，其方法可由数方格的方法得到，也可以根据“连接对应点的线段平行且相等”得到，还可以通过分析图形上某个特殊点的平移情况，从而得到图形整体的平移情况.

解：画法一：(1)连接AA'，过图案的各个顶点分别作AA'的平行线，并截取其长度等于线段AA'的长度，得到各顶点的对应点；(2)顺次连接各对应点，所得的图案即为所要求画出的图案，如图10.4-8.

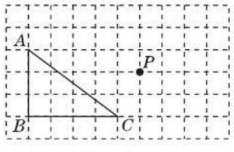
画法二：(1)把图案的各个顶点分别先向上平移1个格，再向右平移5个格，得到各顶点的对应点；(2)顺次连接各对应点，所得的图案即为所要求画出的图案，如图10.4-8.

方法点拨

画图形经过平移后得到的图形，其基本思路是根据平移方向和平移距离，得到图形上的关键点平移后的对应点.由于题目中告诉了A点的对应点为A'，相当于告诉了平移的方向和平移的距离，因此可以利用平移的特征“连接对应点的线段平行且相等”来画图，也可利用网格的特点，通过数方格的方法来画图.

同类变式 （答案见207页）

7. 如图，在方格纸中，三角形ABC的三个顶点和点P都在格点上，将三角形ABC平移，使点P落在平移后的三角形内部，并且平移后的三角形各顶点都在格点上，在图中画出示意图.



（第7题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平移的性质求图形的面积

例 8 如图 10.4-9，在长方形的草坪上有两条等宽且互相垂直的长方形小路，为求草坪面积，我们进行了如图 10.4-10 所示的平移变换，请你求出草坪的面积.（单位：m）

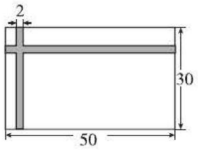


图 10.4-9



图 10.4-10

导引： 草坪的面积就是图 10.4-10 中空白部分的面积，表示出空白部分的长和宽即可计算出面积.

解： 经过平移后草坪的面积就是图 10.4-10 中空白部分的面积.

所以草坪的面积为 $(50-2)(30-2)=1\,344(m^2)$.

方法点拨： 解答本题运用了等积变形法，通过平移将不规则图形转化为规则图形，从而利用规则的几何图形的面积公式求解.解答本题体现了转化思想.

拔尖角度 2 利用平移的性质求折线的长度

例 9 如图 10.4-11，甲、乙两只蚂蚁觅食后，都想早点回去向蚁王汇报成绩，它们同时经过 A 处向洞口 O 处走，甲走的路线为过点 A,B,C,D,E,F,G,H,O 的折线，乙走的路线为折线 AMO，其中 AB,CD,EF,GH 都与 OM 平行，BC,DE,FG,HO 都与 AM 平行. 如果它们爬行的速度相同，那么请你判断甲、乙两只蚂蚁谁先回到洞中.

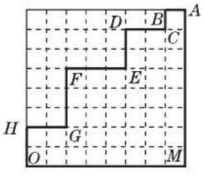


图 10.4-11

导引： 甲走的水平路程的和等于 OM 的长，竖直路程的和等于 AM 的长，那么两只蚂蚁走的路线长度相等.

解： 经过平移后，甲所走的总路程就是折线 AMO 的长度，所以甲、乙两只蚂蚁所走的路程相同.

又因为它们爬行的速度相同，所以两只蚂蚁同时回到洞中.

方法点拨： 解答本题的关键是利用平移的性质得到甲走的路程与乙走的路程的关系.

拔尖角度 3 利用平移选桥址

例 10 如图 10.4-12，M,N 两个单位分别位于一条封闭式街道的两旁，现准备合作修建一座过街天桥，桥建在何处时才能使由 M 到 N 的路线最短？并说明理由（注意：桥必须和街道垂直）.

导引： 将点 N 向上平移街道的宽度到达点 N' 处，连接 MN'，MN' 与 AB 的交点就是造桥处.

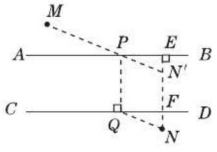


图 10.4-12

解： 作法如下：(1) 作 $NE\perp AB$ 于点 E，交 CD 于点 F；

(2) 在 NE 上截取 $NN'=EF$；

(3) 连接 MN' 交 AB 于点 P；

(4) 作 $PQ\perp CD$ 于点 Q，如图 10.4-12，则 PQ 为要建的天桥.

理由如下：如图 10.4-12，连接 QN.

由 $PQ\perp CD,NE\perp AB,AB/\!/CD$，

易知 $PQ/\!/NE$.

因为 $NN'=EF,EF=PQ$，

所以 $PQ=NN'$（相当于将 PQ 平移到 NN' 的位置）. 所以 $QN=PN'$.

所以 $MP+PN'$ 最短（两点之间，线段最短）.

又 PQ 为定值. 所以桥建在 PQ 处时才能使由 M 到 N 的路线最短.

技巧点拨： 求两点间的最短路径的方法：一般先将两点间的折线问题改为两点间的线段问题，再用“两点之间，线段最短”解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 207 页）

基础巩固练

1. 下列现象是平移的是(　　)

A. 直升电梯从底楼升到顶楼

B. 卫星围绕地球运动

C. 荡秋千

D. 随风飘动的树叶在空中的运动

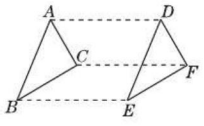
2. 如图，三角形 ABC 经过平移后得到三角形 DEF，下列说法：

①$AB \parallel DE$；②$AD = BE$；

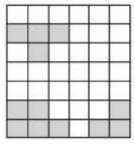
③$\angle ACB = \angle DFE$；④$BC = DE$.

其中正确的有(　　)

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. ［期末 · 安庆宿松县］如图，共有 3 个方格块，现在要把上面的方格块与下面的两个方格块合成一个长方形，则应将上面的方格块(　　)

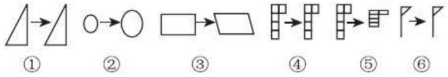
A. 向右平移 1 格，向下平移 3 格

B. 向右平移 1 格，向下平移 4 格

C. 向右平移 2 格，向下平移 4 格

D. 向右平移 2 格，向下平移 3 格

4. 如图所示的图形变换属于平移变换的有(　　)

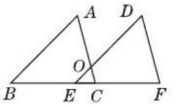


（第 4 题图）

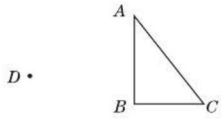
A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

5. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8 cm，若把它向右平移 10 cm，那么点 A 移动了_____ cm.

6. 如图，三角形 ABC 通过平移得到三角形 DEF. 已知 $\angle B = 45°$，$\angle A = 60°$，$\angle F = 75°$，则 $\angle DEF =$ _____，$\angle EOC =$ _____. 若 $BC = 3$ cm，$EC = 0.5$ cm，则 $CF =$ _____ cm.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

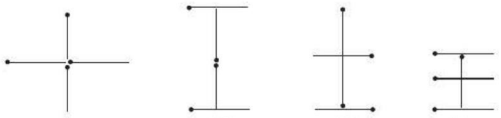
7. 如图，已知三角形 ABC 和点 A 平移后的对应点 D，请作出三角形 ABC 平移后的图形.

能力提升练

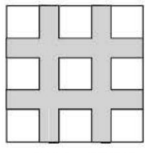
8. 4 根火柴棒如图所示摆放，只通过平移火柴棒可以得到(　　)



（第 8 题）

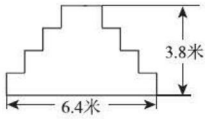


9. ［探究题］如图，一块边长为 8 米的正方形土地，上面修了横竖各两条道路，宽都是 1 米，空白的部分种上花草，请利用平移的知识求出种花草的面积.



（第 9 题图）

10. 某学校准备在升旗台的台阶上铺设一种红色的地毯(含台阶的最上层)，已知这种地毯的批发价为每平方米 40 元，升旗台的台阶宽为3 米，其侧面如图所示，请你帮忙算一下，买地毯至少需要多少元?



（第 10 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

相交线与平行线中角的运用技巧

荣老师告诉你

角是平面几何图形中最活跃的元素，前面我们已学习过特殊角、数量关系角等角的知识. 两条直线相交或分别与第三条直线相交，就产生了对顶角、同位角、内错角、同旁内角等位置关系角，进一步丰富了角的知识，它们在角的计算中有广泛的应用.

技巧一 由角定角

例1 ［中考·重庆］如图10-1，$AB\parallel CD$，点E是CD上一点，$\angle AEC=42°$，EF平分$\angle AED$交AB于点F，求$\angle AFE$的度数.

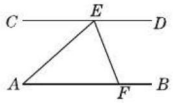


图10-1

导引： 先由$\angle AEC=42°$，计算出$\angle AED$的度数，再由EF平分$\angle AED$求出$\angle FED$的度数，最后利用“两直线平行，内错角相等”，计算$\angle AFE$的度数.

解： 因为$\angle AEC=42°$，$\angle AEC+\angle AED=180°$，所以$\angle AED=180°-42°=138°$. 因为$EF$平分$\angle AED$，所以$\angle FED=\frac{1}{2}\angle AED=69°$. 又因为$AB\parallel CD$，所以$\angle AFE=\angle FED=69°$.

方法点拨： 由已知角的度数求未知角的度数时，常利用平行线的性质建立已知角与未知角之间的关系.

技巧二 缺角补角

例2 ［中考·枣庄］如图10-2，将一副三角尺和一张对边平行的纸条按图示摆放，两个三角尺的一直角边重合，含30°角的直角三角尺的斜边与纸条一边重合，含45°角的三角尺的一个顶点在纸条的另一边上，则$\angle 1$的度数是(　　)

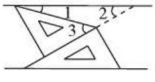


图10-2

A. 15°　　B. 22.5°

C. 30°　　D. 45°

导引： 如图10-2，延长两三角尺重合的边与纸条的边相交. 先根据两直线平行，内错角相等求出$\angle 2=30°$，再求出$\angle 3$的补角的度数为135°，最后利用三角形内角和为180°求出$\angle 1=180°-135°-30°=15°$. 故选A.

答案： A

方法点拨： 图10-2虽然具备了“三线”，但“八角”没有完全显露出来，为了使解题思路流畅自然，应利用延长线段的方法，将“八角”补齐.

例3 ［中考·南充］如图10-3，直线$a\parallel b$，将一个直角三角尺按如图所示的位置摆放，若$\angle 1=58°$，则$\angle 2$的度数为(　　)

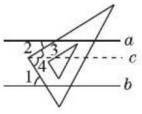


图10-3

A. 30°　　B. 32°

C. 42°　　D. 58°

导引： 如图10-3，过直角顶点作$c\parallel a$.

因为$a\parallel b$，所以$c\parallel b$.

易知$\angle 3=\angle 2$，$\angle 4=\angle 1$.

所以$\angle 2+\angle 1=\angle 3+\angle 4=90°$.

因为$\angle 1=58°$，

所以$\angle 2=90°-\angle 1=32°$.

故选B.

答案： B

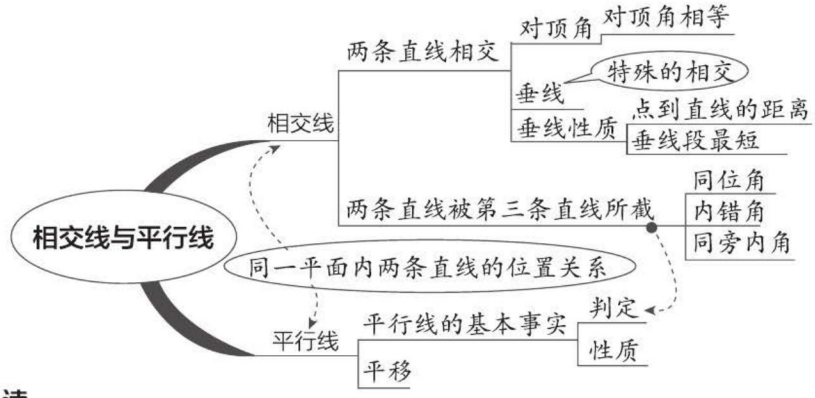
方法点拨： 若图形中“三线”尚不齐全，则首要的任务是添线，通常是作平行线，构造“三线八角”，产生同位角、内错角或同旁内角的模型.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两直线相交，形成两对对顶角，其中对顶角相等.
2. 两直线相交，当有一个角是直角时，两直线互相垂直，其中一条直线叫做另一条直线的垂线. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.
3. 在同一平面内，两条不相交的直线互相平行. 过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行. 平行于同一直线的两条直线平行.
4. 平行线的判定方法：同位角相等，两直线平行；内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行.
5. 平行线的性质：两直线平行，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补.
6. 图形的平行移动简称平移，平移由平移的方向和平移的距离决定. 平移前后的两个图形，对应边平行(或在同一条直线上)且相等，对应角相等.

知识方法专题

知识必学

专题一 垂线的性质

链接中考>>在同一平面内，两条直线的位置关系有相交和平行两种，其中垂直是两直线相交的一种特殊情况，垂直经常与对顶角、平行线等知识综合考查，题型以填空题和选择题为主.

例1 [中考·荆门] 如图10-1，$m/\!/n$，直线 l 分别交 m，n 于点 A，点 B，$AC\perp AB$，AC 交直线 n 于点 C，若 $\angle 1=35°$，则 $\angle 2$ 等于(　　)

A. 35°　　B. 45°　　C. 55°　　D. 65°

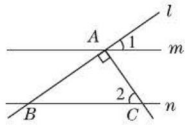


图10-1

导引： 首先根据平行线的性质得到 $\angle ABC$ 的度数，然后根据三角形内角和为 180° 即可求得 $\angle 2$ 的度数. 具体解题过程如下：

因为 $m/\!/n$，所以 $\angle ABC=\angle 1=35°$.

因为 $AC\perp AB$，所以 $\angle BAC=90°$.

又因为 $\angle BAC+\angle ABC+\angle 2=180°$，

所以 $\angle 2=180°-\angle BAC-\angle ABC=180°-90°-35°=55°$.

答案： C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 平行线的性质与判定

链接中考>>平行线的性质与判定是学习推理说明问题的开始，是进一步学习几何知识的基础，其中平行线的判定是根据角的相等或互补关系得出平行线，而平行线的性质则是根据直线的平行关系得出角的相等或互补的关系. 综合运用平行线的性质与判定可以解决很多问题，所以是中考命题的热点. 常见的考查形式有选择题、填空题及解答题.

例2 ［中考·莱芜］如图 10-2，$AB \parallel CD$，EF 平分 $\angle AEG$，若 $\angle FGE = 40°$，则 $\angle EFG$ 的度数为(　　)

A. 35°　　B. 40°　　C. 70°　　D. 140°

导引： 先看清楚 $\angle FGE$ 与 $\angle AEG$ 是同旁内角关系，从而确定互补关系，再根据角平分线的定义求 $\angle AEF$，由 $AB \parallel CD$，得 $\angle EFG = \angle AEF$，问题即可获得解决. 具体解题过程如下：因为 $AB \parallel CD$，$\angle FGE = 40°$，所以 $\angle AEG = 180° - 40° = 140°$. 因为 EF 平分 $\angle AEG$，所以 $\angle AEF = \frac{1}{2}\angle AEG = 70°$.

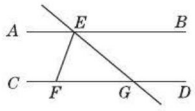


图 10-2

因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle EFG = \angle AEF = 70°$.

答案： C

专题三 平移

链接中考>>平移是一种图形变换的方式，应熟练掌握平移的条件，理解平移的特征：平移前后图形的大小和形状不发生变化. 平移也是近几年中考的热点，题型多以选择题、填空题或作为综合题中的一个小题形式出现. 主要考查是否能判断出平移的基本图形及平移后形成的图形，能够作出平移后的图形，利用平移的性质计算角度、面积或长度.

例3 ［中考·舟山］如图 10-3，将三角形 ABC 沿 BC 方向平移 2 cm 得到三角形 DEF，若三角形 ABC 的周长为 16 cm，则四边形 $ABFD$ 的周长为(　　)

A. 16 cm　　B. 18 cm

C. 20 cm　　D. 22 cm

导引： 因为将周长为16 cm 的三角形 ABC 沿 BC 方向平移2 cm得到三角形 DEF，所以 $AD = CF = 2$ cm，$DF = AC$. 又因为 $AB + BC + AC = 16$ cm，所以四边形 $ABFD$ 的周长 $= AD + AB + BF + DF = AD + AB + BC + CF + AC = 2 + 2 + 16 = 20$ (cm).

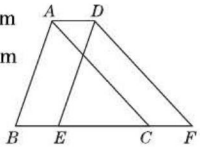


图 10-3

答案： C

Ⅱ 思想方法专题

专题四 分类讨论思想

专题解读>>当被研究对象包含多种可能情况，导致我们不能对它们一概而论时，必须对出现的所有情况进行分类讨论，得出各种情况下相应的结论，这种解决问题的思想方法称为分类讨论思想.

例4 已知 $OA \perp OC$ 于点 O，且 $\angle AOB : \angle AOC = 2:3$，求 $\angle BOC$ 的度数.

导引： 根据垂直关系知 $\angle AOC = 90°$，由 $\angle AOB : \angle AOC = 2:3$ 可求出 $\angle AOB$ 的度数，然后根据 $\angle AOB$ 与 $\angle AOC$ 的位置关系分类求解.

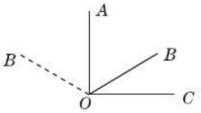


图 10-4

解： 因为 $OA \perp OC$，所以 $\angle AOC = 90°$.

因为 $\angle AOB : \angle AOC = 2:3$，

所以 $\angle AOB = 60°$. $\angle AOB$ 的位置有两种可能：一种是在 $\angle AOC$ 内，一种是在 $\angle AOC$ 外，如图 10-4 所示. 当在 $\angle AOC$ 内时，$\angle BOC = 90° - 60° = 30°$；当在 $\angle AOC$ 外时，$\angle BOC = 90° + 60° = 150°$.

所以 $\angle BOC$ 的度数为 30°或 150°.

专题五 数形结合思想

专题解读>>数形结合思想就是把一些抽象的数学运算利用相关的几何图形形象地展示出来，并结合该几何图形得到运算结果，它是我们解答数学题时常用的思想方法. 如同位角、内错角、同旁内角的概念、平行线的性质和判定、平移的特征都要放到图形中，结合图形来理解.

例5 把一把直尺与一块三角板按如图 10-5 所示的方式放置，若 $\angle 1 = 45°$，则 $\angle 2$ 的度数为(　　)

A. 115°　　B. 120°

C. 145°　　D. 135°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 在直角三角形 ABC 中，$\angle A = 90°$.

因为 $\angle 1 = 45°$，

所以 $\angle 3 = 180° - \angle A - \angle 1 = 45°$，

所以 $\angle 4 = 180° - \angle 3 = 135°$.

由题意知 $EF // MN$，

所以 $\angle 2 = \angle 4 = 135°$.

故选 D.

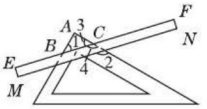


图 10-5

答案： D

专题六 转化思想

专题解读>>转化思想作为一种思维方法主要是把未知的转化为已知的，把陌生的转化为熟悉的，从而达到解题的目的. 转化是一种重要的数学解题技巧. 在运用平行线的性质和判定解题时，可以通过添加辅助线来构造平行线，这是转化思想在本章的一个重要应用.

例 6 如图 10-6，若 $\angle BCD = \angle B + \angle D$，试说明 AB 与 DE 的位置关系.

导引： 欲得出 AB 与 DE 的位置关系，从已知条件中无法直接得出结论，需作辅助线将 $\angle DCB$ 分成两个角，然后可利用平行线的判定方法和“平行于同一条直线的两条直线互相平行”达到目的.

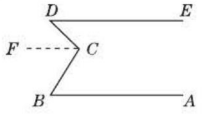


图 10-6

解： 在 $\angle DCB$ 内部作 $\angle DCF = \angle D$，如图 10-6 所示.

因为 $\angle DCB = \angle D + \angle B$，

所以 $\angle FCB = \angle B$，

易知 $DE // FC$，$FC // BA$（内错角相等，两直线平行），

所以 $AB // DE$（平行于同一条直线的两条直线互相平行）.

专题七 方程思想

专题解读>>方程思想就是通过设未知数建立方程来求解问题的思想方法. 比如求角的大小，对要求的角列式计算很复杂时，即可采用列方程来解决.

例 7 如图 10-7，已知 $FC // AB // DE$，$\angle\alpha : \angle D : \angle B = 2 : 3 : 4$，求 $\angle\alpha$，$\angle D$，$\angle B$ 的大小.

导引： 先由 $\angle\alpha : \angle D : \angle B = 2 : 3 : 4$，可以分别设 $\angle\alpha$，$\angle D$，$\angle B$ 为 $2x°$，$3x°$，$4x°$，再利用已知条件列出方程进行求解.

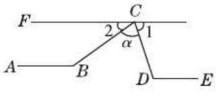


图 10-7

解： 设 $\angle\alpha = 2x°$，则 $\angle D = 3x°$，$\angle B = 4x°$.

因为 $FC // AB // DE$，

所以 $\angle 2 + \angle B = 180°$，$\angle 1 + \angle D = 180°$.

所以 $\angle 2 = 180° - \angle B = 180° - 4x°$，$\angle 1 = 180° - \angle D = 180° - 3x°$.

由题意知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle\alpha = 180°$，

所以 $(180° - 3x°) + (180° - 4x°) + 2x° = 180°$，

解得 $x = 36$.

所以 $\angle\alpha = 2x° = 72°$，$\angle D = 3x° = 108°$，$\angle B = 4x° = 144°$.

好题必解 答案见 208 页

一、选择题

1. 下列语句中，正确的有（　　）

①一条直线的垂线只有一条；

②同位角相等；

③垂线段最短；

④互相垂直的两条直线形成的四个角一定都是直角.

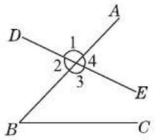
A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

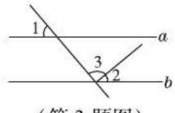
2. [中考 · 金华] 如图，$\angle B$ 的同位角可以是（　　）

A. $\angle 1$　　B. $\angle 2$

C. $\angle 3$　　D. $\angle 4$



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. [中考 · 湘西州] 如图，直线 $a // b$，$\angle 1 = 50°$，$\angle 2 = 40°$，则 $\angle 3$ 的度数为（　　）

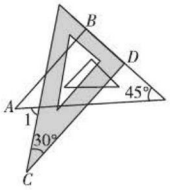
A. 40°　　B. 90°

C. 50°　　D. 100°

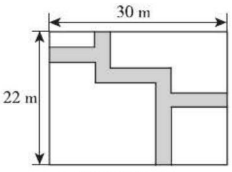
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [模拟·安徽] 一副三角板如图放置,若 $AB\parallel CD$,则$\angle 1$的度数为(　　)

A. 75°　　B. 70°　　C. 65°　　D. 60°



(第4题图)



(第5题图)

5. [期末·滁州] 如图,某住宅小区内有一长方形地块,想在长方形地块内修筑同样宽的两条小路(图中阴影部分),余下部分绿化,小路的宽为 2 m,则两条小路的总面积是(　　)

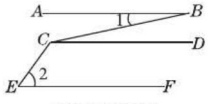
A. 108 m^2　　B. 104 m^2

C. 100 m^2　　D. 98 m^2

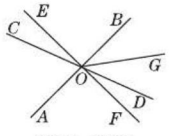
6. [模拟·六安霍邱县] 如图,如果 $AB\parallel CD\parallel EF$,那么$\angle BCE$等于(　　)

A. $\angle 1+\angle 2$　　B. $\angle 2-\angle 1$

C. $180°-\angle 2+\angle 1$　　D. $180°-\angle 1+\angle 2$



(第6题图)

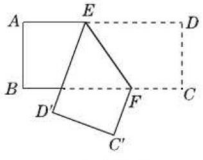


(第7题图)

7. [期末·铜陵义安区] 如图,已知 AB,CD,EF 三条直线交于点 O,且 $OE\perp AB$,$\angle COE=20°$,OG 平分$\angle BOD$,则$\angle BOG$的度数是(　　)

A. 35°　　B. 30°　　C. 25°　　D. 20°

8. [期末·宿州埇桥区] 如图,长方形$ABCD$沿 EF 折叠,点 C,D 分别落在 C',D'处,若$\angle BFE=55°$,则$\angle AED'$为(　　)



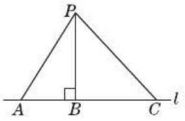
(第8题图)

A. 55°　　B. 70°

C. 75°　　D. 62.5°

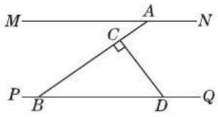
二、填空题

9. [中考·广州] 如图,点 A,B,C 在直线 l 上,$PB\perp l$,$PA=6$ cm,$PB=5$ cm,$PC=7$ cm,则点 P 到直线 l 的距离是_____ cm.



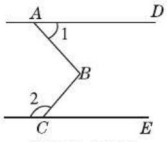
(第9题图)

10. [中考·长春] 如图,直线 $MN\parallel PQ$,点 A,B 分别在 MN,PQ 上,$\angle MAB=33°$. 过线段 AB 上的点 C 作 $CD\perp AB$ 交 PQ 于点 D,则$\angle CDB$为_____度.

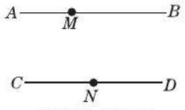


(第10题图)

11. [中考·菏泽] 如图,$AD\parallel CE$,$\angle ABC=100°$,则$\angle 2-\angle 1$的度数是_____.



(第11题图)



(第12题图)

12. [期末·合肥蜀山区] 如图,点 M,N 分别在直线 AB,CD 上,且 $AB\parallel CD$,若在同一平面内存在一点 O,使 $\angle OMB=20°$,$\angle OND=50°$,则$\angle MON=$_____.

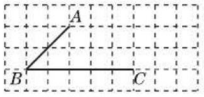
三、解答题

13. 如图,所有小正方形的边长都为 1,A,B,C 都在格点上.

(1) 过点 C 画直线 AB 的平行线(不写作法,下同);

(2) 过点 A 画直线 BC 的垂线,垂足为点 G,过点 A 画直线 AB 的垂线,交 BC 于点 H;

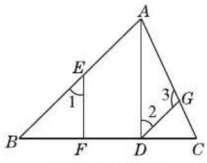
(3) 线段_____的长度是点 A 到直线 BC 的距离,线段 AH 的长度是点 H 到直线_____的距离.



(第13题图)

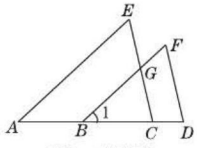
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

14. [期末·安庆] 如图,已知 $AD \perp BC$, $EF \perp BC$,垂足分别是 D, F, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 110°$,试求 $\angle BAC$ 的度数.



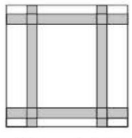
(第 14 题图)

15. [中考·武汉] 如图,点 A, B, C, D 在一条直线上, CE 与 BF 交于点 G, $\angle A = \angle 1$, $CE /\!/ DF$,试说明: $\angle E = \angle F$.



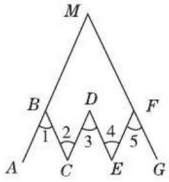
(第 15 题图)

16. 如图,一块正方形地板,边长为60 cm,上面横竖各有两条宽为 5 cm 的长方形花纹(图中阴影部分),那么空白部分的面积是多少?


(第 16 题图)

17. 如图,在折线 $ABCDEFG$ 中,已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$,延长 AB, GF 交于点 M,试探索 $\angle M$ 与 $\angle 3$ 的关系,并说明理由.

【导学号:2231921】



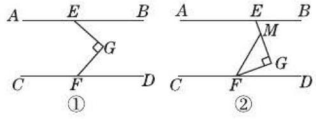
(第 17 题图)

18. [期末·合肥庐阳区] 如图①,点 E 在直线 AB 上,点 F 在直线 CD 上, $EG \perp FG$.

(1) 若 $\angle BEG + \angle DFG = 90°$,请判断 AB 与 CD 的位置关系,并说明理由;

(2) 如图②,若 $AB /\!/ CD$,且 EG 上有一点 M,使 $\angle MFG = 2\angle DFG$,则 $\angle BEG$ 与 $\angle MFD$ 存在怎样的数量关系?并说明理由;

(3) 若 $AB /\!/ CD$,且 EG 上有一点 M,使 $\angle MFG = n\angle DFG$,请直接写出 $\angle BEG$ 与 $\angle MFD$ 的数量关系.



(第 18 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

参考答案及点拨

第6章 实 数

6.1 平方根、立方根

6.1.1 平方根

同类变式

1. B

4. 解：(1)因为 $2x^2=18$，所以 $x^2=9$，
所以 $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$.
(2)因为 $(x+1)^2=121$，所以 $x+1=\pm\sqrt{121}=\pm11$，所以 $x=10$ 或 $x=-12$.
(3)因为 $(2x-1)^2=3^2$，所以 $2x-1=\pm3$，所以 $x=2$ 或 $x=-1$.

9. B

10. (1) < (2) <

12. 解：用含字母 n(n 为自然数，且 $n\geqslant2$)的式子表示这一规律为 $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$.
点拨：通过观察，不难发现：等号左边的式子中，被开方数的第二个加数的分子与第一个加数相同，分母为分子的平方减1；等号右边的式子中，根号外的数与等号左边的被开方数的第一个加数相同，根号内的数与等号左边的被开方数的第二个加数相同，据此可写出这一规律.

练中考·练模拟 得满分

1. B 2. C 3. D 4. B 5. D 6. B 7. 81

8. 36 点拨：由题意可得 $2a+2-a-4=0$，解得 $a=2$，所以 $2a+2=6$，所以这个正数是36.

9. 解：(1)因为 $\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，$\left(\pm\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，
所以 $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 的平方根是 $\pm\frac{1}{3}$，
即 $\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\frac{1}{3}$.
(2)因为 $-2<0$，所以 -2 没有平方根.

10. A 11. 6；-7；±5 12. 4 13. $\sqrt{35}$

14. 解：(1)因为 $9x^2-25=0$，所以 $x^2=\frac{25}{9}$，
所以 $x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$.
(2)因为 $4(2x-1)^2=36$，所以 $(2x-1)^2=9$，所以 $2x-1=\pm3$，所以 $x=2$ 或 -1.
(3)因为 $(x+1)^2-81=0$，所以 $(x+1)^2=81$，所以 $x+1=\pm9$，所以 $x=8$ 或 -10.
(4)因为 $4(2x+3)^2=(-3)^2$，
所以 $(2x+3)^2=\frac{9}{4}$，所以 $2x+3=\pm\frac{3}{2}$，
所以 $x=-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{9}{4}$.

15. 解：因为 $x^2=225$，所以 $x=\pm15$.
又因为 $\sqrt{y-3}=0$，所以 $y-3=0$，即 $y=3$. 所以 $xy=\pm45$.

16. 解：依题意得 $2a-1=9$ 且 $3a+b-1=16$，所以 $a=5$，$b=2$，所以 $a+2b=5+4=9$，所以 $a+2b$ 的平方根为 ±3，
即 $\pm\sqrt{a+2b}=\pm3$.

17. 解：由 $P=I^2R$ 得 $I^2=\frac{P}{R}$，
因为 $I>0$，所以 $I=\sqrt{\frac{P}{R}}$.
当 $P=25$，$R=4$ 时，$I=\sqrt{\frac{P}{R}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

18. 解：由题意知，$a^2-1\geqslant0$ 且 $1-a^2\geqslant0$，所以 $a^2=1$. 又因为 $a>0$，所以 $a=1$，所以 $b=4$，所以 $a+b=1+4=5$.

6.1.2 立方根

同类变式

1. C

2. 解：(1)因为 $4^3=64$，所以64的立方根是4，即 $\sqrt[3]{64}=4$.
(2)因为 $(-0.9)^3=-0.729$，所以 -0.729 的立方根是 -0.9，即 $\sqrt[3]{-0.729}=-0.9$.
(3)因为 $-3\frac{3}{8}=-\frac{27}{8}=\left(-\frac{3}{2}\right)^3$，所以 $-3\frac{3}{8}$ 的立方根是 $-\frac{3}{2}$，即 $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\frac{3}{2}$.

4. 解：(1) $\sqrt[3]{1-0.973}=\sqrt[3]{0.027}=0.3$.
(2) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[3]{0.001}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+\sqrt[3]{0.001}=\frac{3}{2}+0.1=1.5+0.1=1.6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3) $\sqrt[3]{\frac{61}{125}-1}-\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{5}+\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$.

6. 解:由题意,得 $\sqrt[3]{1-2x}=-\sqrt[3]{3y-2}$.
又因为 $-\sqrt[3]{3y-2}=\sqrt[3]{2-3y}$,
所以 $\sqrt[3]{1-2x}=\sqrt[3]{2-3y}$,
所以 $1-2x=2-3y$,即 $2x+1=3y$.
又因为 $y\neq0$,所以 $\frac{2x+1}{y}=3$.

7. 解:(1) $\sqrt[3]{117}\approx4.89$(按键过程略).
(2) $\sqrt[3]{-0.532}\approx-0.81$(按键过程略).

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** A

3. D **点拨**: $\sqrt[3]{64}=4$,4 的算术平方根为 $\sqrt{4}=2$.

4. -4 **点拨**:因为 $\sqrt{x}=8$,所以 $x=64$,所以 $\sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{-64}=-4$.

5. <

6. 解:(1)因为 $8x^3=125$,所以 $x^3=\frac{125}{8}$,所以 $x=\frac{5}{2}$;
(2)因为 $(x-1)^3=-8$,所以 $x-1=-2$,所以 $x=-1$.

7. 解:因为 $\sqrt[3]{3x+16}=4$,所以 $3x+16=64$,所以 $x=16$,所以 $2x+4=2\times16+4=36$,所以 $2x+4$ 的平方根是 ±6.

8. 解:(1)因为 $10^3=1\,000$,所以 1 000 的立方根是 10.
(2)因为 $(-6)^3=-216$,所以 -216 的立方根是 -6.
(3)因为 $\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$,所以 $\frac{27}{125}$ 的立方根是 $\frac{3}{5}$.
(4)因为 $\left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{27}{125}$,所以 $-\frac{27}{125}$ 的立方根是 $-\frac{3}{5}$.
(5) $\sqrt{64}=8$,因为 $2^3=8$,所以 $\sqrt{64}$ 的立方根是 2.
(6)因为 $0.1^3=0.001$,所以 0.001 的立方根是 0.1.
(7)因为 $(-0.3)^3=-0.027$,
所以 -0.027 的立方根是 -0.3.

9. 解:(1) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2}$.
(2)方法一: $-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$.
方法二: $-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}$.
(3) $\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}=\sqrt[3]{\frac{343}{512}}=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^3}=\frac{7}{8}$.
(4) $\sqrt[3]{-(m+1)^3}=-\sqrt[3]{(m+1)^3}=-(m+1)=-m-1$.

10. D **11.** C **12.** 122.8

13. $\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$ **点拨**:因为 $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$,$\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}=2$,所以 $\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$.

14. (1)2;2;22 (2)9;3;39 (3)3;5;53 (4)①95 ②72

15. 解:(1)2 与 -2 互为相反数,$2=\sqrt[3]{8}$,$-2=\sqrt[3]{-8}$,8 与 -8 也互为相反数. 所以上述猜测的结论成立.
(2)因为 $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 互为相反数,所以 $(1-2x)+(3x-5)=0$,所以 $x=4$,所以 $1-x=1-4=-3$.

16. C **点拨**:此题运用了归纳法. 因为 $[\sqrt[3]{1\times2\times3}]=1$,$[\sqrt[3]{2\times3\times4}]=2$,…,$[\sqrt[3]{2\,016\times2\,017\times2\,018}]=2\,016$,所以所求式子的结果为 $1+2+3+\cdots+2\,016=(1+2\,016)\times2\,016\div2=2\,033\,136$.

6.2 实 数

同类变式

2. D

3. 解:有理数: $\left\{0,2\,019,3.1\dot{4},-\frac{3}{4},(-4)^3,\sqrt[3]{-27}\right\}$;
无理数: $\left\{-\frac{\pi}{3},-\sqrt{2},\sqrt{0.9},5.212\,112\,111\,2\cdots\text{(每相邻两个 2 之间依次多一个 1)}\right\}$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正有理数：$\left\{2\,019, 3.\dot{1}4\dot{4}\right\}$；

整数：$\{0, 2\,019, (-4)^3, \sqrt[3]{-27}\}$；

分数：$\left\{3.\dot{1}4\dot{4}, -\frac{3}{4}\right\}$；

正数：$\{2\,019, 3.\dot{1}4\dot{4}, \sqrt{0.9}, 5.212\,112\,111\,2\cdots$（每相邻两个2之间依次多一个1）$\}$；

负数：$\left\{-\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{3}, (-4)^3, -\sqrt{2}, \sqrt[3]{-27}\right\}$.

4. D

7. **解**：当 $0<x<1$ 时，$x<\sqrt{x}$，如 $\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{1}{2}}$；

当 $x=1$ 时，$x=\sqrt{x}=1$；

当 $x>1$ 时，$x>\sqrt{x}$，如 $2>\sqrt{2}$.

9. **解**：(1)原式 $=0.5-\sqrt{\frac{49}{16}}+\sqrt[3]{\frac{1}{64}}-\frac{1}{2}$

$=0.5-\frac{7}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$=-\frac{3}{2}$.

(2)原式 $=-4\times\frac{1}{4}+(-4)\div 2$

$=-1-2$

$=-3$.

(3)原式 $=4\div 4\times\frac{1}{4}\times(4+5)$

$=\frac{1}{4}\times 9$

$=\frac{9}{4}$.

练中考·练模拟 得满分

1. A **2.** C **3.** B **4.** A **5.** $\sqrt{6}$

6. **解**：有理数：$\left\{-7, 0.32, \frac{1}{3}, 46, 0, \sqrt[3]{216}, 0.\dot{8}\dot{7}, \sqrt{16}\right\}$；

无理数：$\left\{-\sqrt{8}, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 5\pi\right\}$；

负实数：$\left\{-7, -\sqrt{8}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

7. **解**：(1)原式 $=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2$.

(2)原式 $=2-4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2-4+(-2)=-4$.

8. **解**：在数轴上表示略.

$-1\frac{4}{5}<0<\sqrt{3}<2<\pi$.

9. $-6<0<\sqrt{5}<\pi$

10. $4-\sqrt{2}$ **点拨**：设数轴原点为 O. 因为 A, C 关于点 B 对称，所以 $BC=AB=2-\sqrt{2}$，所以 $OC=OB+BC=2+2-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$，所以点 C 表示的实数为 $4-\sqrt{2}$.

11. $\sqrt{6}$ **12.** -3

13. **解**：(1)根据题意，得

$xy=1, c+d=0, a=\pm 3, \sqrt{z}=5$.

当 $a=3$ 时，原式 $=4\times 0+1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$；

当 $a=-3$ 时，原式 $=4\times 0+1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$.

(2)根据题意，得 $a+b=0, cd=1, |x|=\sqrt{7}$，即 $x=\pm\sqrt{7}$.

当 $x=\sqrt{7}$ 时，原式 $=(\sqrt{7})^2+(0+1)\times\sqrt{7}+0+1=7+\sqrt{7}+1=8+\sqrt{7}$；

当 $x=-\sqrt{7}$ 时，原式 $=(-\sqrt{7})^2+(0+1)\times(-\sqrt{7})+0+1=7-\sqrt{7}+1=8-\sqrt{7}$.

14. **解**：(1)因为 $-5<-\sqrt{19}<-4, 3<\sqrt{10}<4$，

所以大于 $-\sqrt{19}$ 且小于 $\sqrt{10}$ 的所有整数为 $-4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

(2)因为 $4<\sqrt{18}<5$.

所以绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数为 $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

15. **解**：(1)因为 $2<\sqrt{5}<3$，所以 $\sqrt{5}$ 的整数部分是2，小数部分是 $\sqrt{5}-2$.

所以 $\sqrt{5}+2$ 的整数部分是 $2+2=4$，小数部分是 $\sqrt{5}+2-4$ 即 $\sqrt{5}-2$.

(2)因为 $\sqrt{3}$ 的整数部分是1，小数部分是 $\sqrt{3}-1$，

所以 $10+\sqrt{3}$ 的整数部分是 $10+1=11$，小数部分是 $\sqrt{3}-1$，

即 $x=11, y=\sqrt{3}-1$. 所以 $x-y$ 的相反数为 $y-x=\sqrt{3}-12$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:(1)易求得$\sqrt{5}$的整数部分是2,然后再去求其小数部分,从而解决问题;(2)先找出$10+\sqrt{3}$的整数部分与小数部分,从而可知x,y的值,再求$x-y$的相反数$y-x$.

中考提分专题篇

好题必解

一、**1**. B **2**. C **3**. A **4**. C **5**. D **6**. A

二、**7**. $\sqrt{3}$;$\pm\sqrt{7}$

8. $\sqrt{2}$(答案不唯一)

9. -2 **10**. $-b$ **11**. -1,0,1

三、**12**. **解**:(1)原式$=\frac{1}{2}+0.5-2=-1$.

(2)原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$.

13. **解**:(1)由$25(x-1)^2=49$,

得$(x-1)^2=\frac{49}{25}$,所以$x-1=\pm\frac{7}{5}$,

所以$x=\frac{12}{5}$或$x=-\frac{2}{5}$.

(2)由$64(x-2)^3-1=0$,得$(x-2)^3=\frac{1}{64}$,

所以$x-2=\frac{1}{4}$,所以$x=\frac{9}{4}$.

14. **解**:由题意得$a+b=0$,$cd=1$,$x=\pm\sqrt{6}$.

所以当$x=\sqrt{6}$时,原式$=6+\sqrt{6}+0+1=7+\sqrt{6}$.

当$x=-\sqrt{6}$时,原式$=6-\sqrt{6}+0+1=7-\sqrt{6}$.

15. **解**:(1)设正方体纸盒的棱长为x cm,可得$x^3=216$,解得$x=6$.

答:正方体纸盒的棱长为6 cm.

(2)设长方体纸盒的长为y cm,

由题意得$6y^2=600$,

所以$y^2=100$,所以$y=10$.

$10\times10\times2+10\times6\times4=440(\text{cm}^2)$.

答:长方体纸盒的表面积为440 cm^2.

第7章 一元一次不等式与不等式组

7.1 不等式及其基本性质

同类变式

1. C **3**. D

5. **解**:(1)根据不等式的性质1,两边同时加9,不等号方向不变,所以$3x-9+9>0+9$,即$3x>9$. 根据不等式的性质2,两边同时乘以$\frac{1}{3}$,不等号方向不变,所以$3x\times\frac{1}{3}>9\times\frac{1}{3}$,即$x>3$.

(2)根据不等式的性质1,两边同时减去2,不等号方向不变,所以$-\frac{3}{2}x+2-2>6-2$,即$-\frac{3}{2}x>4$. 根据不等式的性质3,两边同时乘以$-\frac{2}{3}$,不等号方向改变,所以$-\frac{3}{2}x\times\left(-\frac{2}{3}\right)<4\times\left(-\frac{2}{3}\right)$,即$x<-\frac{8}{3}$.

(3)根据不等式的性质1,两边同时加1,不等号方向不变,所以$x-1+1\leqslant10+1$,即$x\leqslant11$.

(4)根据不等式的性质1,两边同时加$\left(1-\frac{1}{2}x\right)$,不等号方向不变,所以$2x-1+\left(1-\frac{1}{2}x\right)>\frac{1}{2}x+\left(1-\frac{1}{2}x\right)$,即$\frac{3}{2}x>1$.

根据不等式的性质2,两边同时乘以$\frac{2}{3}$,不等号方向不变,所以$\frac{3}{2}x\times\frac{2}{3}>1\times\frac{2}{3}$,即$x>\frac{2}{3}$.

6. D **7**. D

练中考·练模拟 得满分

1. D

2. (1)> (2)> (3)> (4)<

3. (1)> (2)> (3)< (4)> (5)< (6)>

4. **解**:(1)$x>4$. (2)$x<\frac{3}{2}$. (3)$x<1$. (4)$x>2$.

5. B **6**. D **7**. A

8. **解**:①+②,得$4x+4y=4+a$,所以$x+y=1+\frac{a}{4}$.

因为$x+y<2$,所以$1+\frac{a}{4}<2$,利用不等式的基本性质可得$a<4$. 所以a的取值范围为$a<4$.

9. **解**:方法一:因为$m<n<0$,所以$-m>-n>0$,所以$1-m>1-n>1$.

方法二:由$m<n<0$可知$n-m>0$,$-n>0$,所以$1-m-(1-n)=1-m-1+n=n-m>0$,所以$1-m>1-n$;$1-n-1=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-n>0$，所以 $1-n>1$. 因此 $1-m>1-n>1$.

点拨：方法一巧用了不等式的性质 3 和性质 1. 将已知条件 $m<n<0$，进行两步转化后变成了我们所要比较的数的大小结果. 方法二用到了作差法.

10. 解：(1) 由数轴上的点表示的数右边的总比左边的大，得 $-2x+3>1$，由不等式的性质 1 得 $-2x+3-3>1-3$，即：$-2x>-2$，由不等式的性质 3 得 $x<1$.

(2) B　**点拨**：由 $x<1$，得 $-x>-1$.

$-x+2>-1+2$，所以 $-x+2>1$.

数轴上表示数 $-x+2$ 的点在点 A 的右边；

作差，得 $-2x+3-(-x+2)=-x+1$，

由 $x<1$，得 $-x>-1$，

所以 $-x+1>0$，

所以 $-2x+3-(-x+2)>0$，

所以 $-2x+3>-x+2$，

所以数轴上表示数 $-x+2$ 的点在点 B 的左边.

7.2　一元一次不等式

同类变式

1. B　**2.** D

5. 解：(1) 去分母，得 $2(x-2)-5(x+4)>-30$，

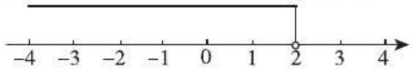
去括号，得 $2x-4-5x-20>-30$，

移项，得 $2x-5x>-30+4+20$，

合并同类项，得 $-3x>-6$，

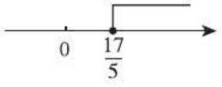
系数化为 1，得 $x<2$，

将不等式的解集表示在数轴上如图.



[第 5(1) 题图]

(2) 去分母，得 $2(2x+1)+6\leqslant 9(x-1)$. 去括号，得 $4x+2+6\leqslant 9x-9$. 移项，得 $4x-9x\leqslant -9-6-2$. 合并同类项，得 $-5x\leqslant -17$. 系数化为 1，得 $x\geqslant \frac{17}{5}$. 不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 5(2) 题图]

点拨：(1) 去分母时，不要漏乘不含分母的项；(2) 移项时，注意改变所移项的符号，但不等号的方向不变；(3) 系数化为 1 时，要注意不等号方向是否需要改变.

8. C　**点拨**：设要答对 x 道.

根据题意得 $10x+(-5)\times(20-x)>120$，

解得 $x>\frac{44}{3}$，因为 x 必须为整数，所以 x 取最小整数 15，即小华得分要超过 120 分，他至少要答对 15 道题.

10. 解：(1) 设购买甲种树苗 x 棵，购买乙种树苗 $(2x-40)$ 棵，

由题意可得 $30x+20(2x-40)=9\,000$，

解得 $x=140$.

$2x-40=2\times 140-40=240$.

故购买甲种树苗 140 棵，乙种树苗 240 棵.

(2) 设购买甲种树苗 y 棵，乙种树苗 $(10-y)$ 棵，

根据题意可得，$30y+20(10-y)\leqslant 230$，

解得 $y\leqslant 3$.

购买方案 1：购买甲种树苗 3 棵，乙种树苗 7 棵；

购买方案 2：购买甲种树苗 2 棵，乙种树苗 8 棵；

购买方案 3：购买甲种树苗 1 棵，乙种树苗 9 棵；

购买方案 4：购买甲种树苗 0 棵，乙种树苗 10 棵

练中考·练模拟　得满分

1. C　**2.** B　**3.** B　**4.** $x\geqslant \frac{10}{9}$

5. 解：(1) —

(2) 去分母，得 $2(x+4)-3(3x-1)\geqslant 6$，

去括号，得 $2x+8-9x+3\geqslant 6$，

移项，得 $2x-9x\geqslant 6-8-3$，

合并同类项，得 $-7x\geqslant -5$.

系数化为 1，得 $x\leqslant \frac{5}{7}$.

6. 解：(1) 去括号，得 $2x-2-3<1$.

移项，得 $2x<1+3+2$.

合并同类项，得 $2x<6$.

系数化为 1，得 $x<3$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 6(1) 题图]

(2) 去分母，得 $2(2x-1)-(9x+2)\leqslant 6$.

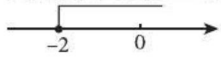
去括号，得 $4x-2-9x-2\leqslant 6$.

移项，得 $4x-9x\leqslant 6+2+2$.

合并同类项，得 $-5x\leqslant 10$.

系数化为 1，得 $x\geqslant -2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 6(2) 题图]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:(1)设 A,B 两种品牌运动服的进货单价分别是 x 元和 y 元,

根据题意可得 $\begin{cases}20x+30y=10\ 200,\\30x+40y=14\ 400,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=240,\\y=180.\end{cases}$

答:A,B 两种品牌运动服的进货单价分别是 240 元和 180 元.

(2)设购进 A 品牌运动服 m 件,则购进 B 品牌运动服 $\left(\frac{3}{2}m+5\right)$ 件,

则 $240m+180\left(\frac{3}{2}m+5\right)\leqslant 2\ 1300$,

解得 $m\leqslant 40$,

所以 $\frac{3}{2}m+5\leqslant\frac{3}{2}\times 40+5=65$.

答:最多能购进 65 件 B 品牌运动服.

8. D **9.** B

10. 解:$\begin{cases}2x-3y=5①,\\x-2y=k②,\end{cases}$

① − ②得 $x-y=5-k$,

因为 $x>y$,所以 $x-y>0$.

所以 $5-k>0$. 解得 $k<5$.

11. 解:$2(x+1)-5<3(x+1)+4$,

去括号,得 $2x+2-5<3x+3+4$.

移项,得 $2x-3x<3+4+5-2$.

合并同类项,得 $-x<10$.

系数化为 1,得 $x>-10$.

所以该不等式的最小整数解为 $x=-9$,

把 $x=-9$ 代入 $\frac{1}{3}x-mx=5$,得 $\frac{1}{3}\times(-9)-m\cdot(-9)=5$,解得 $m=\frac{8}{9}$.

所以 $m^2-2m-11=\left(\frac{8}{9}\right)^2-2\times\frac{8}{9}-11=\frac{64}{81}-\frac{16}{9}-11=-\frac{971}{81}$.

点拨:此题主要考查了不等式的解法和一元一次方程的解法,根据不等式的解集求出其最小整数解,再将最小整数解代入方程中求出 m 的值,进而求出 $m^2-2m-11$ 的值.

12. 解:因为 $|2m-6|+(3m-n-5)^2=0$,

$|2m-6|\geqslant 0$,$(3m-n-5)^2\geqslant 0$,

所以 $|2m-6|=0$,$(3m-n-5)^2=0$,

所以 $\begin{cases}2m-6=0,\\3m-n-5=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=4.\end{cases}$

把 $m=3$,$n=4$ 代入 $(3n-2m)x<-15$,得 $6x<-15$,$x<-\frac{5}{2}$.

所以 $2x+5<0$,$2x-5<0$.

所以 $|2x+5|-|2x-5|+3$

$=-(2x+5)-[-(2x-5)]+3$

$=-2x-5+2x-5+3=-7$.

点拨:先由非负数的性质列出关于 m,n 的二元一次方程组 $\begin{cases}2m-6=0,\\3m-n-5=0.\end{cases}$

解出 m,n 的值,

代入不等式 $(3n-2m)x<-15$,

可求出 x 的取值范围,

进而得 $2x+5<0$,$2x-5<0$,

从而可以去掉绝对值符号.

13. 解:(1)三

(2)设 A 商品的原价为 x 元/件,B 商品的原价为 y 元/件,

根据题意得 $\begin{cases}4x+5y=320,\\2x+6y=300,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=30,\\y=40.\end{cases}$

答:A 商品的原价为 30 元/件,B 商品的原价为 40 元/件.

(3)设折扣数为 z,根据题意得 $5\times 30\times\frac{z}{10}+7\times 40\times\frac{z}{10}=258$,解得 $z=6$.

答:折扣数为 6.

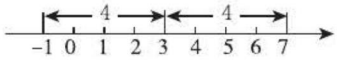
(4)设购买 A 商品 m 件,则购买 B 商品 $(10-m)$ 件,

根据题意得 $30\times\frac{6}{10}m+40\times\frac{6}{10}(10-m)\leqslant 200$,解得 $m\geqslant\frac{20}{3}$,

因为 m 为整数,所以 m 的最小值为 7.

答:至少购买 A 商品 7 件.

14. 解:如图.



(第 14 题图)

$|x-3|=4$ 的解为 $x=-1$ 或 $x=7$,

所以 $|x-3|>4$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>7$.

点拨:解本题的关键是要理解绝对值的几何意义,本题巧在将含绝对值的不等式转化为含绝对值的方程,以方程的解为界点,得出不等式的解集. 一般情况下含绝对值的不等式的解集包含的范围是由不等号决定的,不等号为“ > ”时,解集范围以界点两边取;不等号为“ < ”时,解集范围以界点中间取.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 解：因为 $0<a<15$，且 $a\leqslant x\leqslant 15$，所以 $x-a\geqslant 0$，$x-15\leqslant 0$，$x-a-15<0$. 所以 $S=(x-a)+(15-x)+(a+15-x)=30-x$. 因为 $a\leqslant x\leqslant 15$，上式中当 x 取最大值时，S 最小，所以当 $x=15$ 时，$S=30-15=15$. 故 S 的最小值为 15.

点拨：此题巧在根据字母 a 和 x 的取值范围，先去掉绝对值符号，将式子化简后，再根据 x 的范围求出最值.

7.3 一元一次不等式组

同类变式

3. $m\leqslant 3$ **4.** B

6. 解：设小兰在竞赛中答对了 x 道题，则答错或不答 $(20-x)$ 道题，

依题意，得 $\begin{cases}5x-2(20-x)>80,\\5x-2(20-x)<90,\end{cases}$

解得 $\frac{120}{7}<x<\frac{130}{7}$.

因为 x 为正整数，所以 $x=18$.

答：小兰在竞赛中答对了 18 道题.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** B **3.** B **4.** D **5.** $a\geqslant -1$

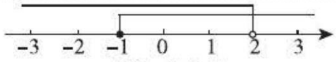
6. 解：$\begin{cases}x-3(x-2)\leqslant 8,①\\5-\frac{1}{2}x>2x,②\end{cases}$

解不等式①，得 $x\geqslant -1$，

解不等式②，得 $x<2$，

所以不等式组的解集为 $-1\leqslant x<2$.

在数轴上表示不等式组的解集如图.



（第 6 题图）

7. 解：设共有学生 x 名，则笔记本有 $(3x+8)$ 本，

根据题意得 $0\leqslant(3x+8)-5(x-1)<3$，

解得 $5<x\leqslant 6\frac{1}{2}$，

因为 x 为正整数，所以 $x=6$，即共有学生 6 名.

8. A

9. B **点拨**：解不等式 $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}>0$，得 $x>-\frac{2}{5}$，解不等式 $3x+5a+4>4(x+1)+3a$，得 $x<2a$.

因为不等式组恰有三个整数解，

所以这三个整数解为 0，1，2，

所以 $2<2a\leqslant 3$，解得 $1<a\leqslant\frac{3}{2}$.

10. D

11. 解：解方程组，得 $\begin{cases}x=\frac{3m-8}{7},\\y=\frac{m-19}{7}.\end{cases}$

因为 x 的值是正数，y 的值是负数，

所以 $\begin{cases}\frac{3m-8}{7}>0,\\\frac{m-19}{7}<0,\end{cases}$

解得 $\frac{8}{3}<m<19$，

所以 m 的取值范围为 $\frac{8}{3}<m<19$.

12. 解：设购买丙种电视机 x 台，则购买甲种电视机 $4x$ 台，购买乙种电视机 $(108-5x)$ 台.

(1) 根据题意，得 $1\ 000\times 4x+1\ 500\times(108-5x)+2\ 000x\leqslant 147\ 000$，

解得 $x\geqslant 10$，

所以至少购买丙种电视机 10 台.

(2) 根据题意，得 $4x\leqslant 108-5x$，

解得 $x\leqslant 12$.

因为每台甲、乙电视机的利润相同，且丙种电视机的利润最高，所以 x 越大时，总利润越大，所以当进货方案为甲种电视机 48 台，乙种电视机 48 台，丙种电视机 12 台时，总利润最高.

最高利润为 $(48+48)\times 200+12\times 300=22\ 800$（元）.

13. C

14. A **点拨**：依题意，得

$\begin{cases}2x-3\leqslant 35,\\2(2x-3)-3\leqslant 35,\\2[2(2x-3)-3]-3>35,\end{cases}$

解得 $7<x\leqslant 11$.

7.4 综合与实践 排队问题（略）

中考提分专题篇

好题必解

一、1. D **2.** A **3.** B **4.** C **5.** C

6. C **点拨**：因为关于 x 的不等式 $(a-1)x<3(a-1)$ 的解集能使不等式 $x<5-a$ 成立，所以 $a-1>0$，即 $a>1$. 解不等式 $(a-1)x<3(a-1)$，得 $x<3$，则有 $5-a\geqslant 3$，解得 $a\leqslant 2$，则 a 的取值范围是 $1<a\leqslant 2$.

7. B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、**8.** $a+6<5$；$a-2\geqslant -1$；$\frac{1}{2}a\leqslant -2$；$2a-7>3$

9. $1<x\leqslant 9$

10. $8\leqslant k<12$　**点拨**：因为 $-4x-k\leqslant 0$，所以 $x\geqslant -\frac{k}{4}$.

因为不等式的负整数解是 -1，-2，所以 $-3<-\frac{k}{4}\leqslant -2$，解得 $8\leqslant k<12$.

11. $m>1$　**12.** 4

三、**13. 解**：(1) 去分母，得 $4x-8>6x+2$，

移项、合并同类项，得 $-2x>10$，

系数化为 1，得 $x<-5$.

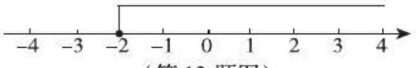
(2) 去分母，得 $3(2-x)\geqslant 4(1-x)$，

去括号，得 $6-3x\geqslant 4-4x$，

移项，得 $4x-3x\geqslant 4-6$，

合并同类项，得 $x\geqslant -2$，

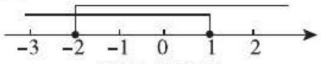
不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



(第 13 题图)

14. 解：(1) $x\geqslant -2$　(2) $x\leqslant 1$

(3) 如图.



(第 14 题图)

(4) $-2\leqslant x\leqslant 1$

15. 解：$\begin{cases}5x+1>3(x-1),①\\ \frac{1}{2}x\leqslant 8-\frac{3}{2}x+2a,②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-2$，

解不等式②，得 $x\leqslant 4+a$.

因为原不等式组有解集，

所以不等式组的解集为 $-2<x\leqslant 4+a$.

因为原不等式组恰有两个整数解，

所以 $0\leqslant 4+a<1$，

所以实数 a 的取值范围为 $-4\leqslant a<-3$.

16. 解：解这个方程组得 $\begin{cases}x=a+2,\\ y=2a+2.\end{cases}$

因为 x 大于 0，y 小于 4，

所以 $\begin{cases}a+2>0,\\ 2a+2<4,\end{cases}$ 解这个不等式组，得 $-2<a<1$. 故 a 的取值范围为：$-2<a<1$.

17. 解：(1) 设每个足球为 x 元，每个篮球为 y 元，

根据题意得 $\begin{cases}7x=5y,\\ 40x+20y=3\ 400,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=50,\\ y=70.\end{cases}$

答：每个足球为 50 元，每个篮球为 70 元.

(2) 设买篮球 m 个，则买足球 $(80-m)$ 个，根据题意得 $70m+50(80-m)\leqslant 4\ 800$，解得 $m\leqslant 40$.

因为 m 为整数，所以 m 最大取 40.

答：最多能买 40 个篮球.

18. 解：(1) 设文学名著的单价为 x 元，自然科学书的单价为 y 元，

由题意得 $\begin{cases}30x+50y=2\ 350,\\ 20x-20y=500,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=45,\\ y=20.\end{cases}$

答：文学名著的单价为 45 元，自然科学书的单价为 20 元.

(2) 设购买文学名著 z 本，则购买自然科学书 $(z+30)$ 本，

根据题意可得 $\begin{cases}z+z+30\geqslant 80,\\ 45z+20(z+30)\leqslant 2\ 400,\end{cases}$

解得 $25\leqslant z\leqslant \frac{360}{13}$，

因为 z 取整数，所以 z 可取 25，26，27.

所以符合条件的购书方案有以下三种.

方案一：文学名著 25 本，自然科学书 55 本；

方案二：文学名著 26 本，自然科学书 56 本；

方案三：文学名著 27 本，自然科学书 57 本.

第8章 整式乘法与因式分解

8.1 幂的运算

8.1.1 同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方

同类变式

3. 解：(1) 原式 $=y^{2\times 3}\cdot y^{2\times 5}=y^6\cdot y^{10}=y^{6+10}=y^{16}$.

(2) 原式 $=(a+b)^{2\times 3}\cdot(a+b)^{4\times 2}=(a+b)^6\cdot(a+b)^8=(a+b)^{6+8}=(a+b)^{14}$.

(3) 原式 $=x^{3\times 4}+x^{2\times 6}-x^{6\times 2}-x^2\cdot x^{2\times 5}$

$=x^{12}+x^{12}-x^{12}-x^2\cdot x^{10}$

$=x^{12}+x^{12}-x^{12}-x^{12}$

$=0$.

6. 解：(1) 原式 $=64x^6-(9x^2)^3=64x^6-729x^6=-665x^6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)原式 $=27(m+n)^6\cdot 4(m+n)^6=108(m+n)^{12}$.

(3)原式 $=-2x^6+9x^6-(-4x^2)^3=-2x^6+9x^6+64x^6=71x^6$.

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** C **3.** B **4.** x^6 **5.** 4

6. **解**:(1)原式 $=x\cdot x^2\cdot x^4=x^7$.

(2)原式 $=4a^{15}-7a^{15}=-3a^{15}$.

(3)原式 $=8x^6-x^6=7x^6$.

7. **解**:(1) $2^{10}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=(2^2)^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=\left(4\times\frac{1}{4}\right)^5=1^5=1$.

(2) $(-2)^{2\,019}\times(-5)^{2\,019}=[(-2)\times(-5)]^{2\,019}=10^{2\,019}$.

8. C **点拨**:利用整体思想把 $2x-2y$ 用含 $x-y$ 的式子表示,即 $(2x-2y)^3=[2(x-y)]^3=2^3(x-y)^3=8m^3$.

9. A **点拨**:因为 $4^m=a,8^n=b$,

所以 $2^{2m+6n}=2^{2m}\cdot 2^{6n}$

$=(2^2)^m\cdot(2^3)^{2n}$

$=4^m\cdot 8^{2n}$

$=4^m\cdot(8^n)^2$

$=ab^2$.

10. 1 296 **点拨**:$36^n=(6^2)^n=(6^n)^2=[(2\times3)^n]^2=(2^n\times3^n)^2=(4\times9)^2=36^2=1\,296$.

11. **解**:原式 $=\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times(-8)^{13}\right]\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9\right]=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)\times(-8)\right]^{12}\times(-8)\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right]^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1\times(-8)\times1\times\frac{9}{25}=-\frac{72}{25}$.

点拨:逆用积的乘方法则和同底数幂的乘法法则,使问题获解.

12. **解**:因为 $2^{12}\times5^8=2^4\times(2\times5)^8=1.6\times10^9$,所以 $2^{12}\times5^8$ 的结果是一个十位正整数.

13. **解**:$(3\times10^2)^3=3^3\times(10^2)^3=27\times10^6=2.7\times10^7$(立方毫米).

答:一个这样的包装箱的容积是 2.7×10^7 立方毫米.

14. **解**:因为 $20^n=(2^2\times5)^n=2^{2n}\times5^n=(2^n)^2\times5^n=a^2b$,且 $20^n=c$,

所以 $c=a^2b$.

点拨:利用积的乘方法则,把 20^n 用含 2^n,5^n 的式子表示,从而得出 c 与 a,b 的关系.

15. **解**:(1) $7\otimes8=10^7\times10^8=10^{15}$.

(2)因为 $(a+b)\otimes c=10^{a+b}\times10^c=10^{a+b+c}$,

$a\otimes(b+c)=10^a\times10^{b+c}=10^{a+b+c}$,

所以 $(a+b)\otimes c$ 与 $a\otimes(b+c)$ 相等.

8.1.2 同底数幂的除法

同类变式

2. $\frac{64}{25}$

3. **解**:(1)原式 $=4x^6y^2\cdot(-2xy)+(-8x^9y^3)\div2x^2=-8x^7y^3-4x^7y^3=-12x^7y^3$.

(2)原式 $=(x^3-y)^5\div(x^3-y)^2-(x^3-y)^7\div(x^3-y)^4=(x^3-y)^3-(x^3-y)^3=0$.

6. ±1 或 3 **点拨**:①当 $a-2=1$ 时,$a=3$;②当 $a+1=0$ 且 $a-2\neq0$ 时,$a=-1$;③当 $a-2=-1$ 时,$a=1$,$(a-2)^{a+1}=(-1)^{1+1}=1$. 所以 $a=\pm1$ 或 3. 根据①1的任何次幂都为 1,②任何一个不为零的数的零次幂为 1,③ -1 的偶次幂为 1,进行分类讨论,分别算出 a 的值即可.

11. 6.7×10^{-5}

13. **解**:(1)原式 $=[-3.5\times(-2)]\times(10^{-13}\times10^{-7})=7\times10^{-20}$.

(2)原式 $=[5.2\div(-4)]\times(10^{-9}\div10^{-3})=-1.3\times10^{-6}$.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** B

3. B **点拨**:本题综合考查各种整数次幂的运算,由已知条件可得 $a=0.09$,$b=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}$,$c=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=9$,$d=1$.

因为 $-\frac{1}{9}<0.09<1<9$,

所以 $b<a<d<c$.

4. C **5.** C **6.** m^2 **7.** -3

8. -5 **点拨**:因为 $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$,

所以 $x=-5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)原式 $=a^{16}\div a^{8}=a^{8}$.

(2)原式 $=m^{6}\cdot m^{6}\div m^{8}=m^{6+6-8}=m^{4}$.

(3)原式 $=(a-b)^{2}\cdot(a-b)^{2n}\div(a-b)^{2n-1}=(a-b)^{2+2n-(2n-1)}=(a-b)^{3}$.

(4)原式 $=(a^{4})^{2}+a^{6}\cdot a^{2}=a^{8}+a^{8}=2a^{8}$.

10. 解:(1)原式 $=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

(2)原式 $=(-2)^{3}+(-3)^{2}-(-5)+1=-8+9+5+1=7$.

(3)原式 $=1-\frac{1}{2^{3}}+9-4=1-\frac{1}{8}+9-4=\frac{47}{8}$.

11. 解:大正方形的面积为 $(10^{-2})^{2}=10^{-4}$ (m^{2}),小正方形的面积为 $(10^{-9})^{2}=10^{-18}(\mathrm{m}^{2})$,则铺满一个边长为 1 cm 的正方形需要小正方形的个数为 $10^{-4}\div 10^{-18}=10^{14}$(个).

12. C 点拨:解此类题目可采用特殊值法,本题可将 $x=\frac{1}{2}$ 分别代入 x^{-1},x,x^{2},求出相应的值后,再进行比较.

13. C 点拨:由已知可得 $(a^{x})^{2}=9$,所以 $a^{x}=\pm 3$,所以 $a^{-x}=\frac{1}{a^{x}}=\pm\frac{1}{3}$.

14. 2 **15.** 4.5

16. 解:由 $5x-3y-2=0$,

得 $5x-3y=2$.

所以 $10^{10x}\div 10^{6y}=10^{10x-6y}=10^{2(5x-3y)}=10^{2\times 2}=10^{4}$.

17. (1)$3=\log_{4}64$

(2)解:设 $\log_{a}M=m,\log_{a}N=n$,则 $M=a^{m},N=a^{n}$,所以 $\frac{M}{N}=\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$.

由对数的定义得 $m-n=\log_{a}\frac{M}{N}$,

又因为 $m-n=\log_{a}M-\log_{a}N$,

所以 $\log_{a}\frac{M}{N}=\log_{a}M-\log_{a}N(a>0,a\neq 1,M>0,N>0)$.

(3)1 点拨:$\log_{3}2+\log_{3}6-\log_{3}4=\log_{3}(2\times 6\div 4)=\log_{3}3=1$.

8.2 整式乘法

同类变式

2. 解:原式 $=2a^{2}b^{4}-\frac{1}{4}a^{2}b^{4}=\frac{7}{4}a^{2}b^{4}$.

4. 解:因为 $2(a^{m}b^{3})^{2}\div\left(-\frac{1}{2}a^{2}b^{n}\right)=2a^{2m}b^{6}\div\left(-\frac{1}{2}a^{2}b^{n}\right)=-4a^{2m-2}b^{6-n}$,

所以 $-4a^{2m-2}b^{6-n}=ka^{6}b^{4}$,所以 $k=-4,2m-2=6,6-n=4$,所以 $k=-4,m=4,n=2$,

所以 $\frac{1}{m^{n}}+\frac{1}{k}=\frac{1}{4^{2}}+\frac{1}{-4}=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{16}$.

7. 解:(1)原式 $=12a^{3}\div 3a+(-6a^{2})\div 3a+3a\div 3a=4a^{2}-2a+1$.

(2)原式 $=21x^{4}y^{3}\div(-7x^{2}y)+(-35x^{3}y^{2})\div(-7x^{2}y)+7x^{2}y^{2}\div(-7x^{2}y)=-3x^{2}y^{2}+5xy-y$.

9. 解:(1)原式 $=x^{2}-xy+xy-y^{2}-2x+2y=x^{2}-y^{2}-2x+2y$.

(2)原式 $=x^{2}-7x+3x-21-x^{2}+\frac{1}{2}x=-\frac{7}{2}x-21$.

10. -2

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** D **3.** C

4. C 点拨:本题运用了方程思想.原式 $=x^{4}-3x^{3}+2x^{2}+px^{3}-3px^{2}+2px+qx^{2}-3qx+2q=x^{4}+(p-3)x^{3}+(2-3p+q)x^{2}+(2p-3q)x+2q$.

由题意得 $\begin{cases}2-3p+q=0,\\2p-3q=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=\frac{6}{7},\\q=\frac{4}{7}.\end{cases}$

5. $-x^{3}y+3x+y^{3}z$

6. 2 **7.** (1)3 (2)$\frac{3}{2}$

8. 解:(1)原式 $=\frac{8}{27}a^{6}b^{9}\div\frac{1}{9}a^{2}b^{4}\cdot\frac{3}{4}a^{3}b^{2}=\left(\frac{8}{27}\div\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}\right)a^{6-2+3}b^{9-4+2}=2a^{7}b^{7}$.

(2)原式 $=[4x^{4}y^{2}\cdot(-8x^{3}y^{3})-xy^{2}\cdot 16x^{2}y^{4}]\div 8x^{2}y^{3}=(-32x^{7}y^{5}-16x^{3}y^{6})\div 8x^{2}y^{3}=(-32x^{7}y^{5})\div 8x^{2}y^{3}-16x^{3}y^{6}\div 8x^{2}y^{3}=-4x^{5}y^{2}-2xy^{3}$.

(3)原式 $=6x^{2}+5x-6-(2x^{2}-7x+6)=6x^{2}+5x-6-2x^{2}+7x-6=4x^{2}+12x-12$.

(4)原式 $=x^{2}+2xy+x-2xy-4y^{2}-2y+3x+6y+3=x^{2}-4y^{2}+4x+4y+3$.

9. 解:方法一:因为 $x^{2}+x-1=0$,

所以 $x^{2}+x=1$,因此 $x(x^{2}+x)=x$,即 $x^{3}+x^{2}=x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $x^3+2x^2+3=x^2+x+3=1+3=4$.

方法二:因为 $x^2+x-1=0$,所以 $x^2+x=1$.

所以 $x^3+2x^2+3=x^3+x^2+x^2+3=x(x^2+x)+x^2+3=x+x^2+3=1+3=4$.

点拨:方法一将条件变形,利用整式乘法使问题得到解决,而方法二同时将条件和待求式变形,逆向运用整式乘法使问题得到解决.

10. 解:(1)$(x+2y)(2x+y)-(3x-y)(x+2y)$

$=2x^2+4xy+xy+2y^2-(3x^2+6xy-xy-2y^2)$

$=2x^2+5xy+2y^2-3x^2-5xy+2y^2$

$=-x^2+4y^2$.

当 $x=9$,$y=\frac{1}{2}$ 时,原式 $=-9^2+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=-80$.

(2)$\left(3x^3y-x^2y^2+\frac{1}{2}x^2y\right)\div\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$

$=3x^3y\div\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)-x^2y^2\div\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)+\frac{1}{2}x^2y\div\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$

$=-6x+2y-1$.

当 $x=-2$,$y=3$ 时,原式 $=-6\times(-2)+2\times3-1=17$.

11. 解:(1)依题意得 $(3a+b)(2a+b)-(a+b)(a+b)$

$=6a^2+3ab+2ab+b^2-a^2-ab-ab-b^2$

$=5a^2+3ab$(平方米).

答:绿化面积是 $(5a^2+3ab)$ 平方米.

(2)当 $a=10$,$b=12$ 时,$5a^2+3ab=860$.

答:当 $a=10$,$b=12$ 时的绿化面积是 860 平方米.

12. 解:因为 $(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$,所以所用 A,B,C 三类卡片分别为 3 张,1 张,2 张,图略(图不唯一).

13. 解:去括号,得 $2x^2+x-2x-1=2x^2+4x-x-2$,移项、合并同类项,得 $-4x=-1$,系数化为 1,得 $x=\frac{1}{4}$.

14. 解:$[21x^5y^7-28x^6y^5+7y(2x^3y^2)^3]\div(-7x^5y^4)$

$=(21x^5y^7-28x^6y^5+56x^9y^7)\div(-7x^5y^4)$

$=-3y^3+4xy-8x^4y^3$.

所以所求多项式为 $-3y^3+4xy-8x^4y^3$.

15. 解:(1)由题意知 $(2x-a)(3x+b)$

$=6x^2+2bx-3ax-ab$

$=6x^2+(2b-3a)x-ab$

$=6x^2-19x+5$,

$(2x+a)(x+b)$

$=2x^2+2bx+ax+ab$

$=2x^2+(2b+a)x+ab$

$=2x^2+x+5$.

所以 $\begin{cases}2b-3a=-19,\\2b+a=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=5,\\b=-2.\end{cases}$

(2)$(2x+5)(3x-2)$

$=6x^2-4x+15x-10$

$=6x^2+11x-10$.

16. 解:将等式的右边展开,整理得 $6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a=6x^2-7xy-3y^2+(3b+2c)x+(b-3c)y+bc$,

对比等式左右两边的系数可得

$\begin{cases}3b+2c=14,\\b-3c=1,\\bc=a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=4,\\c=1.\end{cases}$

故 a,b,c 的值分别为 4,4,1.

点拨:利用多项式相等,则对应项的系数相等解题.

17. 解:(1)$5a\cdot5b-(5a-3a)(5b-3b)-(5a-3a)\cdot2b=25ab-4ab-4ab=17ab(m^2)$.

小宁至少需要买 $17ab\ m^2$ 的地板砖.

(2)$17ab\cdot m=17abm$(元).

所以至少要花 $17abm$ 元.

点拨:所铺地板砖的面积 = 总面积 − 厨房和卫生间的面积 − 卧室 1 的面积.

18. 解:(1)$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$.

(2)因为 $(2-1)(2^5+2^4+2^3+2^2+2+1)=2^6-1$,

所以 $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1=2^6-1$.

(3)因为 $(3-1)(3^{2\,019}+3^{2\,018}+3^{2\,017}+\cdots+3^2+3+1)=3^{2\,020}-1$,所以 $3^{2\,019}+3^{2\,018}+3^{2\,017}+\cdots+3^2+3+1=\frac{3^{2\,020}-1}{2}$.

8.3 完全平方公式与平方差公式

同类变式

2. 解:(1)$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

因为 $a+b=5$,$ab=-6$.

所以原式 $=5^2-2\times(-6)=37$.

(2)$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 $a+b=5, ab=-6$.

所以原式 $=5^2-4\times(-6)=49$.

4. **解**:(1)原式 $=x^2-1-x^2+3x=3x-1$.

当 $x=3$ 时,原式 $=9-1=8$.

(2)原式 $=(3b+5a)(3b-5a)+(3a-b)(3a+b)+(-3a+2b)(-3a-2b)=(3b)^2-(5a)^2+(3a)^2-b^2+(-3a)^2-(2b)^2=9b^2-25a^2+9a^2-b^2+9a^2-4b^2=-7a^2+4b^2$.

当 $a=\frac{1}{7}, b=-\frac{1}{2}$ 时,原式 $=-7\times\left(\frac{1}{7}\right)^2+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{7}+1=\frac{6}{7}$.

7. **解**:(1)原式 $=[(x+2y)-z]^2$

$=(x+2y)^2-2z(x+2y)+z^2$

$=x^2+4xy+4y^2-2xz-4yz+z^2$.

(2)原式 $=[a-(2b-c)][a+(2b-c)]$

$=a^2-(2b-c)^2$

$=a^2-(4b^2-4bc+c^2)$

$=a^2-4b^2+4bc-c^2$.

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** B **3.** C **4.** C

5. a^2+6a+9 **6.** 24 **7.** 11

8. **解**:(1)原式 $=x^2+2x+1-(x^2-4)=x^2+2x+1-x^2+4=2x+5$.

(2)原式 $=(x^2+4xy+4y^2)-(x^2-4xy+4y^2)=x^2+4xy+4y^2-x^2+4xy-4y^2=8xy$.

(3)原式 $=(m^2-4)^2=m^4-8m^2+16$.

(4)原式 $=[x-(2y-3)][x+(2y-3)]=x^2-(2y-3)^2=x^2-(4y^2-12y+9)=x^2-4y^2+12y-9$.

点拨:对于(1),分别运用完全平方公式和平方差公式计算,再去括号、合并同类项;对于(2),先运用完全平方公式展开,再去括号、合并同类项;对于(3),先用平方差公式,再用完全平方公式计算;对于(4),先将两个多项式变形成可用平方差公式计算的形式,再利用平方差公式计算,最后利用完全平方公式计算可得结果. 熟练掌握乘法公式是解答本题的关键,这里需要先观察式子符合什么样的乘法公式,再根据相应乘法公式进行计算;另外具体计算时括号前面是减号,注意去括号时,改变括号内各项的符号.

9. **解**:$(2+x)(2-x)+(x-1)(x+5)$

$=4-x^2+x^2+5x-x-5$

$=4x-1$,

将 $x=\frac{3}{2}$ 代入可得,原式 $=4\times\frac{3}{2}-1=5$.

10. C

11. C **点拨**:把已知的两个等式按照完全平方公式展开,然后根据等式的性质进行加法运算.

因为 $(m-n)^2=8$,

所以 $m^2-2mn+n^2=8$,①

又 $(m+n)^2=2$,

所以 $m^2+2mn+n^2=2$. ②

①+②,得 $2m^2+2n^2=10$,

所以 $m^2+n^2=5$. 故选 C.

12. **解**:原不等式变形为 $4x^2-4x+1-1+6x-9x^2<5-5x^2$,即 $2x<5$,

解得 $x<\frac{5}{2}$.

13. **解**:(1)第④个等式为 $32=9^2-7^2$.

(2)由这两个连续奇数构造的奇特数是 8 的倍数.

理由:$(2n+1)^2-(2n-1)^2=(2n+1+2n-1)(2n+1-2n+1)=8n$,则由这两个连续奇数构造的奇特数是 8 的倍数.

14. **解**:(1)$a^{2\,020}-b^{2\,020}$

(2)a^n-b^n

(3)$2^9-2^8+2^7-\cdots+2^3-2^2+2=\frac{1}{3}[2-(-1)][2^9+2^8\times(-1)+2^7\times(-1)^2+\cdots+2^1\times(-1)^8+(-1)^9+1]=\frac{1}{3}[2-(-1)][2^9+2^8\times(-1)+2^7\times(-1)^2+\cdots+2^1\times(-1)^8+(-1)^9]+1=\frac{1}{3}(2^{10}-1)+1=342$.

8.4 因式分解

同类变式

3. **解**:设 $x^4+mx^3+nx-16=A(x-1)(x-2)$ (A 为整式).

取 $x=1$,得 $1+m+n-16=0$,①

取 $x=2$,得 $16+8m+2n-16=0$,②

由①②可得 $m=-5, n=20$.

5. **解**:(1)原式 $=x(2x-4y+1)$.

(2)原式 $=-4m(m^2-2m+6)$.

(3)原式 $=4a(x-y)+2b(x-y)=2(x-y)(2a+b)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:(1)原式 $=(3x-1)^2$.

(2)原式 $=(x+y)^2+4(x+y)+2^2$

$=(x+y+2)^2$.

9. 解:(1)原式 $=a^2-\left(\frac{1}{5}b\right)^2$

$=\left(a+\frac{1}{5}b\right)\left(a-\frac{1}{5}b\right)$.

(2)原式 $=(4x-4)^2-(x+2)^2$

$=[(4x-4)+(x+2)][(4x-4)-(x+2)]$

$=(4x-4+x+2)(4x-4-x-2)$

$=(5x-2)(3x-6)$

$=3(5x-2)(x-2)$.

(3)原式 $=m^4(m-2)-81(m-2)$

$=(m-2)(m^4-81)$

$=(m-2)(m^2+9)(m^2-9)$

$=(m-2)(m^2+9)(m-3)(m+3)$.

(4)原式 $=16-a^4=4^2-(a^2)^2$

$=(4+a^2)(4-a^2)$

$=(4+a^2)(2+a)(2-a)$.

10. 解:因为 $(2n+1)^2-25$

$=(2n+1)^2-5^2$

$=(2n+1+5)(2n+1-5)$

$=(2n+6)(2n-4)$

$=4(n+3)(n-2)$,

且 n 为整数,

所以 $(2n+1)^2-25$ 能被 4 整除.

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** D **3.** C **4.** 10 或 -10

5. -1(答案不唯一)

6. $(x-1)(x-3)$

7. 解:(1)原式 $=8ab^2\cdot 1-8ab^2\cdot 2a^2b$

$=8ab^2(1-2a^2b)$.

(2)原式 $=-(3a^3m+6a^2m^2-3am)$

$=-3am(a^2+2am-1)$.

(3)原式 $=(x^2-y^2+2xy)(x^2-y^2-2xy)$.

(4)原式 $=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)^2(x+y)$.

(5)原式 $=x^2-10x+25=(x-5)^2$.

(6)原式 $=[(m-n)+3(m+n)][(m-n)-3(m+n)]$

$=(m-n+3m+3n)(m-n-3m-3n)$

$=(4m+2n)(-2m-4n)$

$=-4(2m+n)(m+2n)$.

8. A

9. 4 **点拨**:原式 $=3x^2(x^2+x)+3x+1=3x^2+3x+1=3(x^2+x)+1=3+1=4$.

10. 0.36 **点拨**:因为 $x+y=0.2$, $x+3y=1$, 所以 $2x+4y=1.2$, 即 $x+2y=0.6$, 则原式 $=(x+2y)^2=0.36$.

11. 解:原式 $=(a+b)^2-4(a^2-b^2)+4(a-b)^2$

$=(a+b)^2-4(a+b)(a-b)+4(a-b)^2$

$=[(a+b)-2(a-b)]^2$

$=(a+b-2a+2b)^2$

$=(a-3b)^2$.

点拨:本题运用了整体思想分解因式. 先利用平方差公式将 a^2-b^2 分解因式,把问题转化为可利用完全平方公式分解因式的形式,要注意的是最后的因式形式要最简,有同类项时要合并同类项.

12. 解:三角形 ABC 是等腰三角形.

理由:因为 $a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$,所以 $a^4-b^4+a^2c^2-b^2c^2=0$,所以 $(a^2+b^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)c^2=0$, 所以 $(a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)=0$. 因为 a,b,c 是三角形 ABC 的三边长,所以 $a^2+b^2+c^2>0$,所以 $a^2-b^2=0$, 因此 $a=b$. 所以三角形 ABC 是等腰三角形.

点拨:先分组分解因式,再提取公因式分解因式,将等式的一边化为乘积形式,另一边为 0,从而利用两边相等的关系来确定三角形的形状.

13. 解:因为 $bc=a^2+3a-5$,

所以 $2bc=2a^2+6a-10$,①

又 $b^2+c^2=2a^2+8a-14$,②

②$-$①得 $b^2-2bc+c^2=2a^2+8a-14-(2a^2+6a-10)=2a^2+8a-14-2a^2-6a+10=2a-4$,

即 $(b-c)^2=2a-4$.

因为 $(b-c)^2>0$,

所以 $2a-4>0$,解得 $a>2$.

点拨:本题运用整体思想求解. 条件等式中的字母较多,通过变形利用完全平方公式分解因式,结合非负数的性质转化为不等式求解是解题的关键.

8.5 综合与实践 纳米材料的奇异特性(略)

中考提分专题篇

好题必解

一、**1.** D **2.** D **3.** A **4.** C **5.** D **6.** D **7.** C **8.** A

二、**9.** $-4x^7$ **10.** 6

11. $3(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. -3

13. 173　**点拨**：因为 $a+b=20$，$ab=18$，

所以 $S_{阴影}=a^2+b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b(a+b)$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2-ab)$

$=\frac{1}{2}[(a+b)^2-3ab]$

$=\frac{1}{2}\times(400-54)$

$=173$

14. $64x^4$ 或 $8x$ 或 $-8x$ 或 -1 或 $-16x^2$

三、15. **解**：(1)原式 $=x^8-4x^8+x^8$

$=-2x^8$.

(2)原式 $=a^2-2ab-b^2-a^2+2ab-b^2$

$=-2b^2$.

(3)原式 $=(2x-3y)^2+2(3x+y)(3x-y)$

$=(2x-3y)^2+2(9x^2-y^2)$

$=4x^2-12xy+9y^2+18x^2-2y^2$

$=22x^2-12xy+7y^2$.

(4)原式 $=(a+3-2b)(a+3+2b)$

$=(a+3)^2-(2b)^2$

$=a^2+6a+9-4b^2$.

16. **解**：因为 $x^2-y^2=12$，

所以 $(x+y)(x-y)=12$.

因为 $x+y=3$，①

所以 $x-y=4$，②

①+②，得 $2x=7$，

所以 $2x^2-2xy=2x(x-y)=7\times4=28$.

17. **解**：(1)因为 $2\times8^x\times16=2^{23}$，

所以 $2\times(2^3)^x\times2^4=2^{23}$，

所以 $2\times2^{3x}\times2^4=2^{23}$，

所以 $1+3x+4=23$，

解得 $x=6$.

(2)①$a^{m+n}=a^m\cdot a^n=3\times5=15$.

②$a^{3m-2n}=a^{3m}\div a^{2n}=(a^m)^3\div(a^n)^2=3^3\div5^2=\frac{27}{25}$.

18. **解**：(1)原式 $=x^2-y^2-x^2-xy+2xy$

$=-y^2+xy$，

当 $x=(3-\pi)^0=1$，$y=2$ 时，

原式 $=-2^2+1\times2$

$=-4+2$

$=-2$.

(2)原式 $=x^2-2x+1+x^2-9+x^2-4x+3$

$=3x^2-6x-5$，

当 $x^2-2x=2$ 时，

原式 $=3(x^2-2x)-5$

$=3\times2-5$

$=1$.

19. **解**：(1)2；4(或4；2)

(2)$x^2-3x-4=0$，

$(x-4)(x+1)=0$，

$x-4=0$ 或 $x+1=0$，

$x_1=4$，$x_2=-1$.

20. **解**：每一块阴影部分的面积都可以表示成相邻正方形的面积的差. 而正方形的面积是其边长的平方，这样就可以逆用平方差公式计算了.

于是 $S_{阴影}=(2\ 018^2-2\ 017^2)+(2\ 016^2-2\ 015^2)+\cdots+(2^2-1^2)=2\ 018+2\ 017+2\ 016+2\ 015+\cdots+2+1=2\ 037\ 171$ (cm^2).

答：所有阴影部分的面积和是2 037 171 cm^2.

第9章 分　式

9.1　分式及其基本性质

同类变式

3. 2　5. (1)1　(2)2

练中考·练模拟 得满分

1. B　2. D　3. B　4. A　5. D　6. A　7. D

8. D

9. **解**：(1)由分母 $x-1\neq0$，得 $x\neq1$，所以当 $x\neq1$ 时，分式 $\frac{8}{x-1}$ 有意义.

(2)由分母 $x^2-9\neq0$，得 $x\neq\pm3$. 所以当 $x\neq\pm3$ 时，分式 $\frac{2}{x^2-9}$ 有意义.

(3)由分母 $x^2-4\neq0$，得 $x\neq\pm2$，所以当 $x\neq\pm2$ 时，分式 $\frac{x-2}{x^2-4}$ 有意义.

10. **解**：(1)由题意可得 $|x|-1=0$，所以 $x=\pm1$. 把 $x=1$ 代入 x^2+2x-3，得 $1+2-3=0$. 不合题意，舍去. 把 $x=-1$ 代入 x^2+2x-3，得 $(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$，所以当 $x=-1$ 时，$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$ 的值为零.

(2)由题意得 $x-2=0$ 或 $x-1=0$，

所以 $x=2$ 或 $x=1$，

因为 $|x|-1\neq0$，所以 $x\neq\pm1$，

所以 x 的取值为 2 时，$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$ 的值为零.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解：(1) $\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$.

(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

12. A

13. B　**点拨**：分式有意义的条件是 $x\neq3$，若将分子、分母的公因式约去，就会扩大了字母的取值范围，所以约分求分式的值时，一定要保证原分式有意义. 由 $x^2-9=0$，得 $x=3$ 或 $x=-3$，又 $2x-6\neq0$，所以 $x=-3$，所以 $\frac{x^2-6x+9}{2x-6}=-3$，故选 B.

14. C　**点拨**：①中分式的分子、分母同时约去 $(x-y)$，正确；②中分式的分子、分母同时除以 -1，正确；③中因为 $b-a$ 的正负不确定，当 $b-a>0$ 时，结果为 -1，当 $b-a<0$ 时，结果为 1，错误；④中分式的分子、分母同时除以 -1，正确.

15. $x\leqslant\frac{3}{2}$　**16.** 1

17. 解：(1) 因为 $\frac{-x^2}{1-5x}$ 的值为负，所以 $\begin{cases}-x^2<0,\\1-5x>0,\end{cases}$ 所以 $x<\frac{1}{5}$ 且 $x\neq0$.

(2) 当 $\begin{cases}x+1>0,\\2x+4>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1<0,\\2x+4<0\end{cases}$ 时，分式 $\frac{x+1}{2x+4}$ 的值为正.

解这两个不等式组，得 $x>-1$ 或 $x<-2$. 所以当 $x>-1$ 或 $x<-2$ 时，原分式的值为正.

点拨：(2)题中根据同号相除得正的法则易知，当分式的分子、分母的值同时为正或同时为负时，分式的值为正，要考虑两种情况.

18. 解：设 $\frac{a+2b}{5}=\frac{3b-c}{3}=\frac{2c-a}{7}=k\ (k\neq0)$，则

$\begin{cases}a+2b=5k,①\\3b-c=3k,②\\2c-a=7k,③\end{cases}$

由①+③，得 $2b+2c=12k$，

所以 $b+c=6k$，④

由②+④，得 $4b=9k$，

所以 $b=\frac{9}{4}k$，分别代入①④，得 $a=\frac{1}{2}k$，$c=\frac{15}{4}k$，

所以 $\frac{c-2b}{2b+3a}=\frac{\frac{15}{4}k-\frac{9}{2}k}{\frac{9}{2}k+\frac{3}{2}k}=\frac{-\frac{3}{4}k}{6k}=-\frac{1}{8}$.

19. 解：由已知条件可知，$xy\neq0$.

原式 $=\frac{(2x-3xy-2y)\div(-xy)}{(x+2xy-y)\div(-xy)}=\frac{2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+3}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-2}$，

因为 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，所以原式 $=\frac{2\times3+3}{3-2}=9$.

20. 解：设钢笔每支 x 元，日记本每本 y 元. 依题意有 $60(x+2y)=50(x+3y)$，得 $x=3y$.

所以这笔钱全部用来买钢笔，可买 $\frac{60(x+2y)}{x}=100$(支)，这笔钱全部用来买日记本，可买 $\frac{60(x+2y)}{y}=300$(本).

9.2　分式的运算

同类变式

6. 解：最简公分母是 $10a^2b^2c^2$，$\frac{4a}{5b^2c}=\frac{8a^3c}{10a^2b^2c^2}$，

$\frac{3c}{10a^2b}=\frac{3bc^3}{10a^2b^2c^2}$，$\frac{5b}{-2ac^2}=-\frac{25ab^3}{10a^2b^2c^2}$.

7. 解：最简公分母是 $3(x-3)^2(x+3)$，

$\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3x+9}{3(x-3)^2(x+3)}$，

$\frac{2}{x^2-9}=\frac{6x-18}{3(x-3)^2(x+3)}$，

$\frac{1}{3x-9}=\frac{x^2-9}{3(x-3)^2(x+3)}$.

练中考·练模拟　得满分

1. B　**2.** D　**3.** A　**4.** B　**5.** A　**6.** B

7. $\frac{40}{a}$　**点拨**：$\frac{240}{a}-\frac{240}{1.2a}=\frac{240}{a}-\frac{200}{a}=\frac{40}{a}$(小时).

8. 5　**点拨**：先将条件等式两边同时乘以 $(m+n)$，再通过分拆得到结果.

$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$，两边同时乘以 $(m+n)$ 得 $\frac{m+n}{m}+\frac{m+n}{n}=7$，所以 $1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+1=7$，

因此 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对于此类问题,往往需要对条件式进行变形,当待求式含有两个字母时,还要注意利用整体思想去求解.

9. **解**: 原式 $=\left[\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2-1}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot x(x+1)$

$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}\cdot x(x+1)$

$=\frac{x}{x-1}$,

当 $x=2$ 时,原式 $=\frac{2}{2-1}=2$.

10. **解**: $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$,因此,不管 x 取何值,这个代数式的值都是 $\frac{1}{2}$.

点拨:解答本题的关键是对原式化简,通过化简结果是否与 x 有关来说明是怎么回事就容易多了.

11. **解**: 原式 $=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}\div\left[\frac{x-1}{x+1}-\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}\right]$

$=\frac{x-1}{x+1}\div\frac{x-x^2}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x(1-x)}$

$=-\frac{1}{x}$.

当 $x=2$ 时,原式 $=-\frac{1}{2}$.

点拨: x 的取值不唯一,但 x 不能取 0,±1.

12. A

13. 7 **点拨**:把 $m+\frac{1}{m}=3$ 两边平方得 $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2=m^2+\frac{1}{m^2}+2=9$,则 $m^2+\frac{1}{m^2}=7$.

14. $x\neq-2$ 且 $x\neq-3$ 且 $x\neq-4$

点拨:因为 $\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}=\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+4}{x+3}$,所以要使原代数式有意义,则必须 $x+2\neq0$ 且 $x+3\neq0$ 且 $x+4\neq0$,因此 $x\neq-2$ 且 $x\neq-3$ 且 $x\neq-4$. 分式的分母不能为 0,同时含有除法运算时,除式不能为 0.

15. **解**:原式 $=\frac{2a-1}{a(a+1)}\cdot\frac{a^2-1}{2(2a-1)}=\frac{a-1}{2a}$,

由题意可知 $a\neq\pm1$ 且 $a\neq0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$,

当 $a=2$ 时,原式 $=\frac{1}{4}$.

16. **解**:选择一:$M+N=\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$,

当 $x:y=5:2$ 时,$x=\frac{5}{2}y$,

原式 $=\frac{\frac{5}{2}y+y}{\frac{5}{2}y-y}=\frac{7}{3}$.

选择二:$M-N=\frac{2xy}{x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{y-x}{x+y}$,

当 $x:y=5:2$ 时,$x=\frac{5}{2}y$,

原式 $=\frac{y-\frac{5}{2}y}{\frac{5}{2}y+y}=-\frac{3}{7}$.

选择三:$N-M=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x+y}$,

当 $x:y=5:2$ 时,$x=\frac{5}{2}y$,

原式 $=\frac{\frac{5}{2}y-y}{\frac{5}{2}y+y}=\frac{3}{7}$.

点拨:本题综合了分式加减法和变形技巧,使所需要求值的代数式最终化为只含有一个字母的形式,从而达到约分的目的.

17. **解**:原式 $=\frac{a-2}{a^2-1}\div\frac{(a+1)(a-1)-(2a-1)}{a+1}$

$=\frac{a-2}{a^2-1}\div\frac{a^2-2a}{a+1}$

$=\frac{a-2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a+1}{a(a-2)}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=\frac{1}{a^2-a}$.

因为 a 是方程 $x^2-x=6$ 的根，

所以 $a^2-a=6$，所以原式 $=\frac{1}{6}$.

点拨：先将原式进行化简，再把 a 代入方程 $x^2-x=6$ 得到 a^2-a 的值，最后代入化简后的式子即可.

18. 解：由 $a+b+c=0$，得 $a+b=-c$，$b+c=-a$，$a+c=-b$，

所以 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=-3$.

9.3 分式方程

同类变式

1. B　**4.** A

练中考·练模拟 得满分

1. B　**点拨**：分母含有未知数的方程是分式方程，而分母不含未知数的方程不是分式方程.

2. D　**3.** A　**4.** C

5. $\frac{5}{6}$　**点拨**：根据新定义把 $2\oplus(2x-1)$ 用含 x 的代数式表示出来，列出方程后求解.

因为 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，所以 $2\oplus(2x-1)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}$，故有 $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}=1$，所以 $\frac{1}{2x-1}=\frac{3}{2}$，解得 $x=\frac{5}{6}$. 经检验，$x=\frac{5}{6}$ 是原方程的根.

6. 解：(1)方程两边都乘以 $x(x+3)$，得 $x^2-(x+3)=x(x+3)$，

解得 $x=-\frac{3}{4}$，

检验：当 $x=-\frac{3}{4}$ 时，$x(x+3)\neq0$.

所以原方程的根为 $x=-\frac{3}{4}$.

(2)方程两边都乘以 $(x-2)^2$，得 $x(x-2)-(x-2)^2=4$，

解得 $x=4$，

检验：当 $x=4$ 时，$(x-2)^2\neq0$.

所以原方程的根为 $x=4$.

7. 解：根据题意得 $\frac{x}{x+1}=2$，

去分母，得 $x=2(x+1)$，

去括号，得 $x=2x+2$，

解得 $x=-2$.

检验：当 $x=-2$ 时，$x+1\neq0$.

所以原方程的根为 $x=-2$.

所以 x 的值为 -2.

8. 解：设甲校师生所乘大巴车的平均速度为 x 千米/时，则乙校师生所乘大巴车的平均速度为 $1.5x$ 千米/时，

由题意得 $\frac{240}{x}-\frac{270}{1.5x}=1$，

解得 $x=60$，

经检验 $x=60$ 是所列方程的根，

此时 $1.5x=90$.

答：甲、乙两所学校师生所乘大巴车的平均速度分别为 60 千米/时、90 千米/时.

9. D　**点拨**：因为关于 x 的方程 $\frac{2ax+3}{a-x}=\frac{3}{4}$ 的根为 $x=1$，所以 $\frac{2a+3}{a-1}=\frac{3}{4}$，去分母，得 $4(2a+3)=3(a-1)$，解得 $a=-3$. 经检验，$a=-3$ 是方程 $\frac{2a+3}{a-1}=\frac{3}{4}$ 的解. 故选 D.

10. A　**点拨**：分式方程去分母转化为整式方程，得 $3x-2=2x+2+m$，由分式方程无解得到 $x+1=0$，求出 $x=-1$，代入整式方程求出 $m=-5$. 注意：分式方程无解的条件是去分母后所得整式方程无解，或这个整式方程的解使原方程的最简公分母等于 0.

11. C

12. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$　**点拨**：观察已知的分式方程可知，分式方程的左右两边都有两个分式，且分子都是 1；左边两个分式的分母依次小 1，右边第一个分式的分母比左边第二个分式的分母小 2，右边第二个分式的分母比右边第一个分式的分母小 1；又左边第一个分式的分母与对应方程的解的和为 $x+2$，从而可得解为 $x=6$ 的分式方程左边的第一个分式的分母应为 $x-4$，因此对应的方程应为 $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$. 解答本题的关

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

键是根据题目中已有的方程去找到相应的规律,然后运用这个规律来解决相应的问题.

13. 解:(1)设甲种树苗每棵的价格是 x 元,则乙种树苗每棵的价格是($x+10$)元,依题意有 $\frac{480}{x+10}=\frac{360}{x}$,

解得 $x=30$. 经检验 $x=30$ 是原方程的解,且符合题意,

此时 $x+10=30+10=40$.

答:甲种树苗每棵的价格是 30 元,乙种树苗每棵的价格是 40 元.

(2)设他们可购买 y 棵乙种树苗,依题意有 $30\times(1-10\%)(50-y)+40y\leqslant 1\ 500$,解得 $y\leqslant 11\frac{7}{13}$,

因为 y 为整数,所以 y 最大为 11.

答:他们最多可购买 11 棵乙种树苗.

14. 解:(1)设购买一个 B 商品需要 x 元,则购买一个 A 商品需要($x+10$)元,

依题意,得 $\frac{300}{x+10}=\frac{100}{x}$,

解得 $x=5$,

经检验 $x=5$ 是原方程的根,且符合题意,

此时 $x+10=15$.

答:购买一个 A 商品需要 15 元,购买一个 B 商品需要 5 元.

(2)设购买 B 商品 m 个,则购买 A 商品($80-m$)个,

依题意,得 $\begin{cases}80-m\geqslant 4m,\\15(80-m)+5m\geqslant 1\ 000,\\15(80-m)+5m\leqslant 1\ 050,\end{cases}$

解得 $15\leqslant m\leqslant 16$.

因为 m 为整数,所以 $m=15$ 或 $m=16$.

所以商店有 2 种购买方案,

方案①:购进 A 商品 65 个,B 商品 15 个;

方案②:购进 A 商品 64 个,B 商品 16 个.

15. 解:由 $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$ 得 $x(x-2)-(x-1)(x+1)=a$,所以 $x=\frac{1-a}{2}$. 因为原方程有增根时 $x=-1$ 或 $x=2$,当 $x=-1$ 时,$a=3$;当 $x=2$ 时,$a=-3$,所以当 $a\neq\pm 3$ 时,$x=\frac{1-a}{2}$ 才是原方程的解. 又因为 $x>0$,所以 $\frac{1-a}{2}>0$,解得 $a<1$. 所以 a 的取值范围为 $a<1$ 且 $a\neq -3$.

点拨:在求分式方程中字母参数的取值范围时,通常把分式方程去分母后求出方程的解,再列出不等式求出范围,同时要注意排除产生增根的字母参数的取值.

中考提分专题篇

好题必解

一、**1.** A **2.** B **3.** D **4.** B **5.** A

6. B **点拨**:去分母,得 $x+k=2(x-1)$,

解得 $x=2+k$.

因为方程有解,所以 $2+k\neq 1$,

解得 $k\neq -1$,

因为方程的解是正数,

所以 $2+k>0$,解得 $k>-2$,

故 $k>-2$ 且 $k\neq -1$.

二、**7.** $x\neq 4$ **8.** 3 **9.** 1 **10** -1

三、**11. 解**:圆圆的解答错误.

正确解法:$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1$

$=\frac{4x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{4x-2x-4-x^2+4}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{2x-x^2}{(x-2)(x+2)}$

$=-\frac{x}{x+2}$.

12. 解:$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=1$,

去分母,得 $2+x(x+2)=x^2-4$,

解得 $x=-3$,

检验:当 $x=-3$ 时,$(x+2)(x-2)\neq 0$,

故 $x=-3$ 是原方程的根.

13. 解:原式 $=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{a}{a(a-b)}-\frac{2}{a+b}$

$=\frac{1}{a+b}-\frac{2}{a+b}$

$=-\frac{1}{a+b}$,

因为 a,b 满足 $(a-2)^2+\sqrt{b+1}=0$,

所以 $a-2=0,b+1=0$,

解得 $a=2,b=-1$,

所以原式 $=-\frac{1}{2-1}=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解：$\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-2x}-\frac{x^2}{x-2}$

$=\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}-\frac{x^2}{x-2}$

$=\frac{x(x-3)}{x-2}-\frac{x^2}{x-2}$

$=\frac{x^2-3x-x^2}{x-2}$

$=-\frac{3x}{x-2}$，

当 $x=-2$ 时，原式 $=-\frac{3\times(-2)}{-2-2}=-\frac{3}{2}$.

15. 解：因为 $y=3xy+x$，所以 $x-y=-3xy$，

当 $x-y=-3xy$ 时，$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{2(-3xy)+3xy}{-3xy-2xy}=\frac{3}{5}$.

16. 解：(1)$6\times\frac{6}{5}=6+\frac{6}{5}$.

(2)猜想：$(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}=(n+1)+\frac{n+1}{n}$($n$ 是正整数).

理由：左边 $=(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{(n+1)^2}{n}$，

右边 $=(n+1)+\frac{n+1}{n}=\frac{n(n+1)+(n+1)}{n}=\frac{(n+1)^2}{n}$，

因为左边 = 右边，

所以 $(n+1)\cdot\frac{n+1}{n}=(n+1)+\frac{n+1}{n}$.

17. 解：(1)设 B 种粽子单价为 x 元，则 A 种粽子单价为 $1.2x$ 元，

根据题意，得 $\frac{1\,500}{x}+\frac{1\,500}{1.2x}=1\,100$，

解得 $x=2.5$，

经检验 $x=2.5$ 是原方程的解，且符合题意，此时 $1.2x=3$.

答：A 种粽子单价为 3 元，B 种粽子单价为 2.5 元.

(2)设购进 A 种粽子 m 个，则购进 B 种粽子 $(2\,600-m)$ 个，依题意，得 $3m+2.5(2\,600-m)\leqslant 7\,000$，解得 $m\leqslant 1\,000$.

答：A 种粽子最多能购进 1 000 个.

18. 解：(1)假分式

(2)$\frac{3x+1}{x-1}=\frac{3(x-1)+4}{x-1}=3+\frac{4}{x-1}$，

$\frac{x^2+3}{x+2}=\frac{x^2-4+7}{x+2}=x-2+\frac{7}{x+2}$.

(3)$\frac{2x^2+3x-6}{x+3}=\frac{(2x-3)(x+3)+3}{x+3}=2x-3+\frac{3}{x+3}$，

所以当 $x=-6,-4,-2,0$ 时，

分式 $\frac{2x^2+3x-6}{x+3}$ 的值为整数.

第10章 相交线、平行线与平移

10.1 相交线

同类变式

2. 解：因为 $\angle 1=20°$，$\angle BOC=90°$，

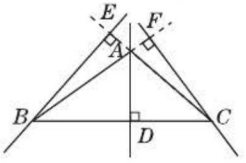
所以 $\angle BOE=\angle BOC-\angle 1=90°-20°=70°$. 所以 $\angle 2=\angle BOE=70°$.

3. B

7. 解：(1)如图，直线 CF 即为所求.

(2)如图，直线 AD 即为所求.

(3)如图，直线 BE 即为所求.

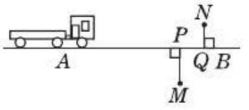


(第7题图)

点拨：①过点 C 画 AB 的垂线，垂足在 BA 的延长线上；过点 B 画 AC 的垂线，垂足在 CA 的延长线上；②要利用三角尺上的直角正确画出垂线；③注意画垂线时，要在垂足处标上直角符号.

9. A **点拨：**在三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，根据垂线段最短，可知 AP 的长不可能小于 3.

12. 解：(1)如图，过点 M 向 AB 作垂线，垂足就是所求的 P 点，过点 N 向 AB 作垂线，垂足就是所求的 Q 点.



(第12题图)

(2)当卡车从 A 向 B 行驶时，在 AP 这段路上，离 M，N 两村庄越来越近；在 PQ 这段路上，离村庄 N 越来越近，而离村庄 M 越来越远.

点拨：根据垂线段最短作图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** D **3.** C **4.** C **5.** D

6. D **点拨**：设 $\angle AOC = x°$，则 $\angle BOC = 5x°$. 因为 $\angle BOC - \angle AOC = 90°$，所以 $5x - x = 90$，解得 $x = 22.5$，所以 $\angle BOC = 112.5°$. 因为 $CO \perp DO$，所以 $\angle COD = 90°$，所以 $\angle BOD = 360° - \angle BOC - \angle COD = 157.5°$.

7. D **点拨**：点到直线的距离是线段的长度，是一个数量，不要错选 B.

8. 对顶角相等 **9.** 30

10. **解**：(1) MO (2) $MO < MN$；垂线段最短

(3) 因为 $\angle BOD = \angle AOC = 50°$，$OM$ 平分 $\angle BOD$，所以 $\angle BOM = 25°$，

所以 $\angle AON = 180° - \angle BOM - \angle MON = 180° - 25° - 90° = 65°$.

11. D

12. 55° **点拨**：因为 $OA \perp OC$，$OB \perp OD$，所以 $\angle AOC = \angle DOB = 90°$，所以 $\angle BOC = \angle AOC + \angle DOB - \angle AOD = 90° + 90° - 125° = 55°$.

13. **解**：(1) 45°；45°

(2) $\angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOB$. 理由如下：

设 $\angle AOB = \alpha$，$\angle BOC = \beta$.

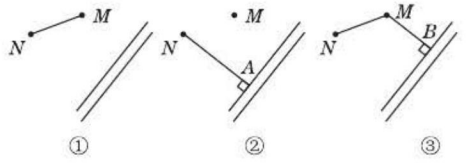
因为 OD 平分 $\angle AOC$，OE 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle COD = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$，$\angle COE = \frac{1}{2}\beta$，

所以 $\angle DOE = \angle COD - \angle COE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \beta) = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\angle AOB$.

14. **解**：如果小丽要从 N 村到 M 村去，那么连接线段 MN，根据“两点之间，线段最短”知小丽沿 NM 走最近，如图①.

如果小丽要从 N 村直接到河边去，那么过点 N 向河岸作垂线，垂足为 A，根据“垂线段最短”知小丽沿 NA 走到河边最近，如图②.



(第 14 题图)

如果小丽从 N 村出发先到 M 村再到河边，那么先连接 MN，再过 M 点向河岸作垂线，垂足为 B，根据“两点之间，线段最短”和“垂线段最短”知小丽沿 $NM \to MB$ 走到河边最近，如图③.

15. **解**：(1) $OE \perp OF$. 理由如下：

由平角的定义，可得 $\angle AOC = 180° - \angle BOC = 130°$. 因为 OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$，所以 $\angle COE = \frac{1}{2}\angle AOC = 65°$，$\angle COF = \frac{1}{2}\angle BOC = 25°$.

所以 $\angle EOF = \angle COE + \angle COF = 90°$，

所以 $OE \perp OF$.

(2) $OE \perp OF$ 仍然成立. 理由如下：

因为 $\angle BOC = \angle\alpha$，

所以 $\angle AOC = 180° - \angle\alpha$.

因为 OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle COF = \frac{1}{2}\angle\alpha$，$\angle COE = \frac{1}{2}(180° - \angle\alpha) = 90° - \frac{1}{2}\angle\alpha$，

所以 $\angle EOF = \angle COF + \angle COE = \frac{1}{2}\angle\alpha + \left(90° - \frac{1}{2}\angle\alpha\right) = 90°$，所以 $OE \perp OF$.

规律：无论 $\angle BOC$ 的度数是多少，$\angle EOF$ 总等于 90°.

16. **解**：(1) 因为点 C 到直线 AB 上的点 A，B 的距离中，$AC < BC$，点 B 到直线 AC 上的点 A，C 的距离中，$AB < BC$，所以在 AB，AC，BC 中，斜边 BC 最长.

(2) 因为 $BC > AC$，$AB < BC$，$AC + AB > BC$，

所以原式 $= a - b - (c - a) + b + c - a = a$.

10.2 平行线的判定

同类变式

3. 略. **9.** DE；AB；BC；同旁内

12. A

13. **解**：因为 AC 平分 $\angle BAD$，所以 $\angle 1 = \angle 2$.

又因为 $\angle 1 = \angle 3$，所以 $\angle 2 = \angle 3$.

所以 $AB // CD$(内错角相等，两直线平行).

16. **解**：方法一：因为 $\angle 1 + \angle 8 = 180°$，

所以 $l_1 // l_2$(同旁内角互补，两直线平行).

方法二：因为 $\angle 1 + \angle 8 = 180°$，$\angle 1 + \angle 4 = 180°$，所以 $\angle 4 = \angle 8$，

所以 $l_1 // l_2$(同位角相等，两直线平行).

方法三：因为 $\angle 1 + \angle 8 = 180°$，$\angle 1 + \angle 2 = 180°$，所以 $\angle 2 = \angle 8$，

所以 $l_1 // l_2$(内错角相等，两直线平行).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分

1. A　**2.** D

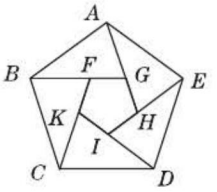
3. C　**点拨**：本题可根据“同旁内角互补，两直线平行”补充条件.

4. C

5. D　**点拨**：直线 AB，CD 被直线 EF 所截得到 2 对同旁内角，直线 AB，EF 被直线 CD 所截得到 2 对同旁内角，直线 CD，EF 被直线 AB 所截得到 2 对同旁内角，因此共有 6 对同旁内角.

6. 相同

7. 5　**点拨**：如图，因为 $\angle BAG=\angle AHE=72°$，所以 $AB\parallel EI$.
因为 $\angle BFC=\angle FCD=72°$，所以 $BG\parallel CD$.
因为 $\angle CBF=\angle BGA=72°$，所以 $BC\parallel AH$.
因为 $\angle EDI=\angle CKD=72°$，所以 $DE\parallel CF$.
因为 $\angle AEH=\angle EID=72°$，所以 $AE\parallel DK$.
故共有 5 对平行线.



（第 7 题图）

8. 略.

9. 已知；$\angle 1$；$\angle 2$；角平分线的定义；已知；等量代换；同位角相等，两直线平行

10. **解**：C，D，E 三点共线.
理由：因为 $CD\parallel AB$，$CE\parallel AB$，
所以根据平行线的基本事实：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行，知 CD 与 CE 是同一条直线.
所以 C，D，E 三点共线.

11. **解**：(1)因为 CF 平分 $\angle DCE$，
所以 $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle DCE$.
因为 $\angle DCE=90°$，
所以 $\angle 1=45°$.
因为 $\angle 3=45°$，
所以 $\angle 1=\angle 3$，
所以 $CF\parallel AB$.
(2)因为 $\angle D=30°$，$\angle 1=45°$，
所以 $\angle DFC=180°-\angle D-\angle 1=105°$.
点拨：(1)首先根据角平分线的定义可得 $\angle 1=45°$，再由 $\angle 3=45°$，根据“内错角相等，两直线平行”可判定 $CF\parallel AB$；(2)利用三角形内角和为 180°进行计算即可.

12. **解**：因为 $\angle PAD=\angle BAE$，$\angle PAB=180°-\angle PAD-\angle BAE$，
所以 $\angle PAB=180°-2\angle BAE$.
同理，$\angle ABC=180°-2\angle ABE$.
因为 $\angle BAE+\angle ABE=90°$，
所以 $\angle PAB+\angle ABC=360°-2(\angle BAE+\angle ABE)=180°$，
所以 $BC\parallel PA$.
点拨：本题类似于光线的反射问题，可通过计算同旁内角互补，得出两直线平行的结论.

13. **解**：(1)①135°　②40°
(2) $\angle ACB+\angle DCE=180°$.
理由如下：
因为 $\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=90°+\angle DCB$，
所以 $\angle ACB+\angle DCE=90°+\angle DCB+\angle DCE=90°+90°=180°$.
(3)存在. $\angle ACE$ 的度数可能为 30°，45°，120°，135°，165°.
点拨：解本题的关键是理清题图中角的和差关系. (1)①首先计算出 $\angle DCB$ 的度数，再用 $\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB$ 即可求出 $\angle ACB$ 的度数；②首先计算出 $\angle DCB$ 的度数，再计算出 $\angle DCE$ 的度数即可；(2)先根据(1)中的计算结果可猜想 $\angle ACB+\angle DCE=180°$，再根据题图中角的和差关系进行推理即可；(3)根据平行线的判定方法可得.

14. C

15. **解**：(1)路径为 $\angle 1\xrightarrow{\text{内错角}}\angle 12\xrightarrow{\text{同旁内角}}\angle 8$.
(2)路径为 $\angle 1\xrightarrow{\text{同位角}}\angle 10\xrightarrow{\text{内错角}}\angle 5\xrightarrow{\text{同旁内角}}\angle 8$，所以从起始角 $\angle 1$ 依次按同位角、内错角、同旁内角的顺序跳，能跳到终点角 $\angle 8$.
点拨：(1)题答案不唯一.

10.3　平行线的性质

同类变式

1. C

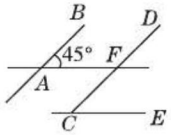
3. **解**：$BC\parallel DE$.
理由：因为 $AB\parallel DF$，
所以 $\angle 1=\angle 3$. 又因为 $\angle 1=\angle 2$，
所以 $\angle 2=\angle 3$，
所以 $BC\parallel DE$(同位角相等，两直线平行).

4. B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解：$CD \perp AB$. 理由如下：
因为 $DE // BC$，所以 $\angle 2 = \angle 3$（两直线平行，内错角相等）.
因为 $\angle 1 = \angle 2$，所以 $\angle 1 = \angle 3$（等量代换）.
所以 $FG // CD$（同位角相等，两直线平行），
又因为 $GF \perp AB$，所以 $CD \perp AB$.

6. 解：如图，由于 $AB // CD$，根据“两直线平行，内错角相等”可知，$\angle AFC = \angle BAF = 45°$.
因为 $CE // AF$，所以 $\angle DCE = \angle AFC = 45°$.



（第6题图）

8. 解：因为 $\angle 1 = \angle 2$，所以 $DB // CE$，
所以 $\angle C + \angle DBC = 180°$.
因为 $\angle FAC = \angle F$，所以 $AC // DF$，
所以 $\angle FDB + \angle DBC = 180°$，
所以 $\angle C = \angle FDB$.

练中考·练模拟 得满分

1. C **2.** A **3.** B **4.** C

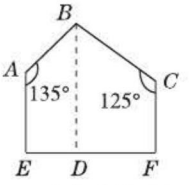
5. (1) $\angle 3$；两直线平行，内错角相等；
$\angle 3$；两直线平行，内错角相等
(2) AB；DE；同位角相等，两直线平行；
AE；CD；同旁内角互补，两直线平行

6. 48°

7. 解：因为 $DC // EF$，
所以 $\angle 3 = \angle 1$（两直线平行，同位角相等），$\angle 4 = \angle CDE$（两直线平行，内错角相等）.
又因为 $DE // AC$，
所以 $\angle CDE = \angle 2$（两直线平行，内错角相等），
所以 $\angle 4 = \angle 2$（等量代换）.
又因为 $\angle 1 = \angle 2$，
所以 $\angle 3 = \angle 4$（等量代换）.

8. 解：因为 $\angle AHC = \angle EHF$（对顶角相等），$\angle AGB = \angle EHF$，
所以 $\angle AHC = \angle AGB$（等量代换）.
所以 $BD // CE$（同位角相等，两直线平行）.
所以 $\angle C = \angle ABD$（两直线平行，同位角相等）.
又因为 $\angle C = \angle D$，
所以 $\angle D = \angle ABD$（等量代换）.
所以 $AC // DF$（内错角相等，两直线平行）.
所以 $\angle A = \angle F$（两直线平行，内错角相等）.

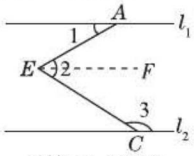
9. 解：如图，过点 B 作 $BD // AE$ 交 EF 于点 D，则 $AE // BD // CF$.
因为 $\angle A = 135°$，$\angle C = 125°$，
所以 $\angle ABD = 180° - \angle A = 45°$，$\angle CBD = 180° - \angle C = 55°$，
所以 $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 45° + 55° = 100°$.



（第9题图）

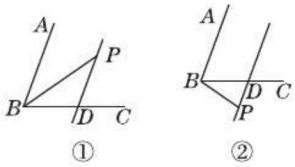
10. C **点拨**：因为 $\angle 2 = 30°$，
所以 $\angle 1 = 60°$. 又因为 $\angle E = 60°$，
所以 $\angle 1 = \angle E$，
所以 $AC // DE$. 故 A 正确；
因为 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，$\angle 2 + \angle 3 = 90°$，
所以 $\angle BAE + \angle CAD = \angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 3 = 90° + 90° = 180°$.
故 B 正确；
因为 $BC // AD$，
所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle C = 180°$.
因为 $\angle C = 45°$，$\angle 1 + \angle 2 = 90°$，
所以 $\angle 3 = 45°$，
所以 $\angle 2 = 90° - 45° = 45°$.
故 C 不正确；
因为 $\angle D = 30°$，$\angle CAD = 150°$，
所以 $\angle D + \angle CAD = 180°$，
所以 $AC // DE$，
所以 $\angle 4 = \angle C$. 故 D 正确. 故选 C.

11. C **点拨**：如图，过点 E 作 $EF // l_1$.
因为 $l_1 // l_2$，$EF // l_1$，所以 $EF // l_1 // l_2$，
所以 $\angle 1 = \angle AEF = 30°$，$\angle FEC + \angle 3 = 180°$，所以 $\angle 2 + \angle 3 = \angle AEF + \angle FEC + \angle 3 = 30° + 180° = 210°$.



（第11题图）

12. 35°或75° **点拨**：因为 $\angle PBD = \frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ABC = 70°$，所以 $\angle PBD = 35°$.
当点 P 在 $\angle ABC$ 内部时，如图①.

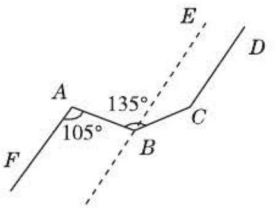


（第12题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 $PD \parallel AB$，
所以 $\angle BDP = 180° - \angle ABC = 110°$.
所以 $\angle DPB = 180° - 35° - 110° = 35°$；
当点 P 在 $\angle ABC$ 外部时，如图②.
因为 $PD \parallel AB$，
所以 $\angle PDB = \angle ABC = 70°$，
所以 $\angle DPB = 180° - 35° - 70° = 75°$.
综上所述，$\angle DPB = 35°$ 或 $75°$.

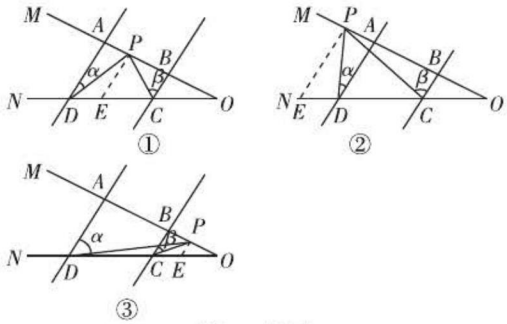
13. 解：如图，过点 B 作直线 $BE \parallel CD$.
因为 $CD \parallel AF$，
所以 $BE \parallel CD \parallel AF$，
所以 $\angle ABE = \angle A = 105°$，
所以 $\angle CBE = \angle ABC - \angle ABE = 30°$.
又因为 $BE \parallel CD$，
所以 $\angle CBE + \angle C = 180°$，
所以 $\angle C = 150°$.
点拨：本题运用转化思想. 此题是一道实际生活问题，根据题目信息，转化为关于平行线性质的数学问题，过点 B 作直线 $BE \parallel CD$，利用“两直线平行，内错角相等”和“两直线平行，同旁内角互补”解答.



（第 13 题图）

14. 解：因为 $\angle 2 + \angle DFE = 180°$，
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$，所以 $\angle 1 = \angle DFE$，
所以 $BD \parallel EF$，
所以 $\angle DEF + \angle BDE = 180°$.
因为 $\angle B = \angle DEF$，
所以 $\angle B + \angle BDE = 180°$，
所以 $AB \parallel DE$，
所以 $\angle DEC = \angle BAC = 55°$.

15. 解：(1) 平行于同一条直线的两条直线平行；两直线平行，同旁内角互补；等量代换
(2)① $\angle CPD = \angle \alpha + \angle \beta$.
理由：如图①，过 P 作 $PE \parallel AD$ 交 CD 于点 E.
因为 $AD \parallel BC$，所以 $AD \parallel PE \parallel BC$，
所以 $\angle \alpha = \angle DPE$，$\angle \beta = \angle CPE$，
所以 $\angle CPD = \angle DPE + \angle CPE = \angle \alpha + \angle \beta$.
②如图②，当 P 在 BA 的延长线上时，过 P 作 $PE \parallel AD$ 交 ON 于点 E，
所以 $AD \parallel PE \parallel BC$，



（第 15 题图）

所以 $\angle \alpha = \angle DPE$，$\angle \beta = \angle CPE$，
所以 $\angle CPD = \angle \beta - \angle \alpha$；
如图③，当 P 在线段 OB 上时，
过 P 作 $PE \parallel AD$ 交 ON 于点 E，
所以 $AD \parallel PE \parallel BC$，
所以 $\angle \alpha = \angle DPE$，$\angle \beta = \angle CPE$，
所以 $\angle CPD = \angle \alpha - \angle \beta$.

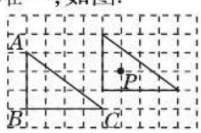
10.4 平 移

同类变式

1. D　**点拨**：平移只改变图形的位置，不改变图形的大小、形状和方向. 故选 D.

3. 26 cm　**4.** A

7. 解：答案不唯一，如图.



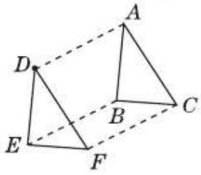
（第 7 题图）

练中考·练模拟 得满分

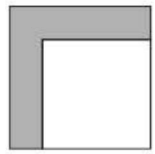
1. A　**2.** C　**3.** C　**4.** C　**5.** 10

6. 45°；60°；2. 5

7. 解：如图，三角形 DEF 即为所求作的图形.



（第 7 题图）



（第 9 题图）

8. B

9. 解：由平移可知，可把种花草的面积看成是如图所示边长为 $(8-1-1)$ 米的正方形的面积.
所以种花草的面积为 $(8-1-1) \times (8-1-1) = 36$（平方米）.
点拨：根据平移的知识，把横竖各两条道路平移到正方形的边上，求剩余空白部分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的面积即可.

10. 解:利用平移知识,把台阶的横竖边分别向上,向左右平移,构成一个长方形,长、宽分别为 6.4 米,3.8 米,所以地毯的长度为6.4 + 3.8 + 3.8 = 14(米),所以地毯的面积为 14 × 3 = 42(平方米),

所以买地毯至少需要 42 × 40 = 1 680(元).

中考提分专题篇

好题必解

一、**1.** C **2.** D **3.** B **4.** A **5.** C **6.** C **7.** A **8.** B

二、**9.** 5 **10.** 57

11. 80° **点拨**:如图,过点 B 作 $BF // AD$.

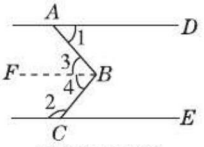
因为 $AD // CE$,所以 $AD // BF // EC$,

所以 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 4 + \angle 2 = 180°$.

因为 $\angle ABC = 100°$,所以 $\angle 3 + \angle 4 = 100°$,

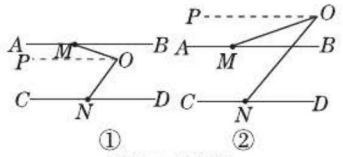
所以 $\angle 1 + \angle 4 = 100°$,

所以 $\angle 2 - \angle 1 = (\angle 4 + \angle 2) - (\angle 1 + \angle 4) = 80°$.



(第 11 题图)

12. 70°或 30° **点拨**:分两种情况:如图①,当点 O 在 AB, CD 之间时,过 O 作 $OP // AB$,则 $OP // CD$,



(第 12 题图)

所以 $\angle POM = \angle OMB = 20°$,

$\angle PON = \angle OND = 50°$,

所以 $\angle MON = \angle POM + \angle PON = 20° + 50° = 70°$;

如图②,当点 O 在 AB 上方时,

过 O 作$OP // AB$,则 $OP // CD$,

所以 $\angle POM = \angle OMB = 20°$,

$\angle PON = \angle OND = 50°$,

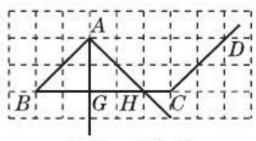
所以 $\angle MON = \angle PON - \angle POM = 50° - 20° = 30°$.

综上所述,$\angle MON = 70°$或 30°.

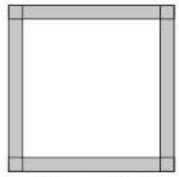
三、**13. 解**:(1)如图,直线 CD 即为所求.

(2)如图,直线 AG,直线 AH 即为所求.

(3)AG;AB



(第 13 题图)



(第 16 题图)

14. 解:因为 $AD \perp BC$, $EF \perp BC$,

所以易知 $AD // EF$,所以 $\angle 1 = \angle BAD$.

因为 $\angle 1 = \angle 2$,所以 $\angle 2 = \angle BAD$,

所以 $AB // DG$,所以 $\angle BAC + \angle 3 = 180°$.

因为 $\angle 3 = 110°$,所以 $\angle BAC = 70°$.

15. 解:因为 $\angle A = \angle 1$,所以 $AE // BF$,

所以 $\angle E = \angle BGC$.

因为 $CE // DF$,所以 $\angle BGC = \angle F$,

所以 $\angle E = \angle F$.

16. 解:如图,根据平移的性质,把四条花纹分别向上、下、左、右平移,不难求出空白部分的正方形面积.

空白部分的面积为 $(60 - 5 \times 2)^2 = 2\,500(cm^2)$.

17. 解:$\angle M = \angle 3$. 理由如下:

因为 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$,

所以 $AB // CD // EF$,所以 $\angle 5 = \angle M$.

又因为 $\angle 3 = \angle 5$,所以 $\angle M = \angle 3$.

18. 解:(1)$AB // CD$.

理由:如图①,延长 EG 交 CD 于 H,

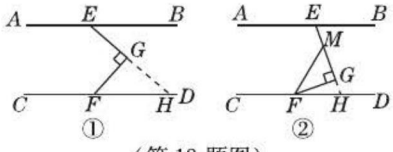
所以 $\angle HGF = \angle EGF = 90°$,

所以 $\angle GHF + \angle HFG = 180° - 90° = 90°$.

因为 $\angle BEG + \angle DFG = 90°$,

所以 $\angle BEG = \angle GHF$,

所以 $AB // CD$.



(第 18 题图)

(2) $\angle BEG + \frac{1}{3}\angle MFD = 90°$.

理由:如图②,延长 EG 交 CD 于 H.

因为 $AB // CD$,所以 $\angle BEG = \angle GHF$.

因为 $EG \perp FG$,所以 $\angle FGH = 90°$.

所以 $\angle GHF + \angle HFG = 180° - 90° = 90°$.

因为 $\angle MFG = 2\angle DFG$,所以 $\angle DFG = \frac{1}{3}\angle MFD$. 所以 $\angle BEG + \frac{1}{3}\angle MFD = 90°$.

(3) $\angle BEG + \frac{1}{n+1}\angle MFD = 90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第6章 实 数

6.1 平方根、立方根

练习

1. (1)互为相反数 (2)0;0 (3)负

2. (1)√ (2)√ (3)× (4)√

3. 解:(1) $-\sqrt{3}$有意义,理由:3有负的平方根.

(2) $\sqrt{-3}$无意义,理由:负数没有算术平方根.

(3) $\sqrt{(-3)^2}$有意义,理由:$(-3)^2=9$,9有算术平方根.

(4)$\sqrt{0}$有意义,理由:0的算术平方根是0.

4. 解:(1)49的平方根是 $\pm\sqrt{49}=\pm7$,49的算术平方根是 $\sqrt{49}=7$.

(2)25的平方根是 $\pm\sqrt{25}=\pm5$,25的算术平方根是 $\sqrt{25}=5$.

5. 解:(1)在计算器上依次键入:√ 1 2 7 =,显示结果为11.269 427 67,精确到0.01,得 $\sqrt{127}\approx11.27$.

(2)在计算器上依次键入:√ 0 · 6 3 5 =,显示结果为0.796 868 872,精确到0.01,得 $\sqrt{0.635}\approx0.80$.

(3)在计算器上依次键入:√ (1 ÷ 1 7 9) =,显示结果为0.074 743 509,精确到0.01,得 $\sqrt{\frac{1}{179}}\approx0.07$.

(4)在计算器上依次键入:− √ (1 ÷ 3) =,显示结果为−0.577 350 269,精确到0.01,得 $-\sqrt{\frac{1}{3}}\approx-0.58$.

练习

1. (1)× (2)× (3)√

2.

a	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000
$\sqrt[3]{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3. 解:(1)1的立方根是 $\sqrt[3]{1}=1$.

(2)−1的立方根是 $\sqrt[3]{-1}=-1$.

(3)8的立方根是 $\sqrt[3]{8}=2$.

(4)−8的立方根是 $\sqrt[3]{-8}=-2$.

4. 解:(1) $\sqrt[3]{28}\approx3.0$. (2) $\sqrt[3]{0.345}\approx0.7$.

(3) $\sqrt[3]{-17.6}\approx-2.6$. (4) $\sqrt[3]{\frac{1}{48}}\approx0.3$.

习题6.1

1. 解:(1)×;$\sqrt{4}=2$. (2)×;$\sqrt{(-6)^2}=6$.

(3)√. (4)×;$\sqrt{-9}$无意义.

点拨:一个正数的算术平方根只有一个,而平方根有两个,不要将两者混淆.

2. 解:(1)$(-4)^2=16$. 因为$(\pm4)^2=16$,所以16的平方根是±4,也就是$(-4)^2$的平方根是±4;$(-4)^2$的算术平方根是4.

(2)$10^2=100$,因为$(\pm10)^2=100$,所以100的平方根是±10,也就是10^2的平方根是±10;10^2的算术平方根是10.

3. 解:(1)在计算器上依次按键:√ 1 3 =,显示结果为3.605 551 275,精确到0.01,得 $\pm\sqrt{13}\approx\pm3.61$.

(2)在计算器上依次按键:√ 0 · 0 9 6 =,显示结果为0.309 838 667,精确到0.01,得 $\pm\sqrt{0.096}\approx\pm0.31$.

(3)在计算器上依次按键:√ (5 ÷ 1 3) =,显示结果为0.620 173 672,精确到0.01,得 $\pm\sqrt{\frac{5}{13}}\approx\pm0.62$.

(4)在计算器上依次按键:√ π =,显示结果为1.772 453 851,精确到0.01,得 $\pm\sqrt{\pi}\approx\pm1.77$.

4. 解:(1)在计算器上依次按键:√ 2 8 =,显示结果为5.291 502 622,精确到0.01,得 $\sqrt{28}\approx5.29$.

(2)在计算器上依次按键:√ 0 · 4 6 2 =,显示结果为0.679 705 818,精确到0.01,得 $\sqrt{0.462}\approx0.68$.

(3)在计算器上依次按键:− √ 6 5 =,显示结果为−8.062 257 748,精确到0.01,得 $-\sqrt{65}\approx-8.06$.

(4)在计算器上依次按键:√ 1 8 · 2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

=,显示结果为 4.266 145 802,精确到 0.01,得 $\pm\sqrt{18.2}\approx\pm4.27$.

5. 解:它的边长是原来的 3 倍.

6. 解:因为 $64<72<81$,所以 $\sqrt{64}<\sqrt{72}<\sqrt{81}$,即 $8<\sqrt{72}<9$,所以 $\sqrt{72}$ 在 8 和 9 之间.

7. 解:(1)$(-2)^3$ 的立方根是 $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$.

(2)$(-8)^2$ 的立方根是 $\sqrt[3]{(-8)^2}=4$.

8. 解:(1)在计算器上依次按键:2ndf $\sqrt[3]{\ }$ 3 8 7 =,显示结果为 7.287 361 631,精确到 0.01,得 $\sqrt[3]{387}\approx7.29$.

(2)在计算器上依次按键:2ndf $\sqrt[3]{\ }$ − 1 8 =,显示结果为 −2.620 741 394,精确到 0.01,得 $\sqrt[3]{-18}\approx-2.62$.

(3)在计算器上依次按键:− 2ndf $\sqrt[3]{\ }$ (8 ÷ 2 5) =,显示结果为 −0.683 990 378,精确到 0.01,得 $-\sqrt[3]{\frac{8}{25}}\approx-0.68$.

(4)在计算器上依次按键:2ndf $\sqrt[3]{\ }$ 2 4 0 2 =,显示结果为 13.392 377 04,精确到 0.01,得 $\pm\sqrt[3]{2\,402}\approx\pm13.39$.

9. 解:它的棱长变为原来的 3 倍.

10. 解:因为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,$V=115\ \mathrm{m}^3$,所以 $r^3=\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}=\frac{115}{\frac{4}{3}\pi}=\frac{345}{4\pi}$. 所以 $r=\sqrt[3]{\frac{345}{4\pi}}\approx3.0(\mathrm{m})$.

答:这个球形储气罐的半径约为 3.0 m.

6.2 实 数

练习

1. 解:有理数:0,1,3,−1,−2,$-\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,0.4,−0.25,3.14,$\sqrt{64}$,$-\sqrt[3]{8}$.

无理数:π,$\sqrt{3}$,$\sqrt[3]{2}$,$-\sqrt{10}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 解:$1.5=\frac{3}{2}$;$-5=-\frac{5}{1}$;$0.\dot{7}=\frac{7}{9}$;

$0.\dot{2}\dot{1}\dot{3}=\frac{211}{990}$;$0.3\dot{1}\dot{2}\dot{6}=\frac{619}{1\,980}$;

$0.7\dot{2}\dot{1}\dot{3}=\frac{1\,201}{1\,665}$.

3. (1)× (2)√ (3)× (4)×

练习

1. 解:有理数有 3.141 592 6,$\sqrt{4}$,$-\sqrt[3]{8}$,$0.\dot{3}$,$\frac{22}{7}$;

无理数有 $-\pi$,$\sqrt{8}$,$\sqrt[3]{9}$,0.181 881 888 1…(两个 1 之间依次增加一个 8).

点拨:注意带根号的数不一定是无理数.

2. 解:(1)$\sqrt{7}+\sqrt{5}\approx2.646+2.236=4.882\approx4.88$.

(2)$\frac{1}{4}\times\sqrt{6}-2\sqrt{3}\approx\frac{1}{4}\times2.449-2\times1.732=-2.851\,75\approx-2.85$.

3. 解:(1)$-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$. (2)$\sqrt{\pi}>\sqrt{3}$.

(3)$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{1}{2}$.

4. $\sqrt{12}$,$\sqrt{13}$

习题 6.2

1. (1)B (2)D

2. 解:$\sqrt{17}$,$\sqrt{19}$.(答案不唯一)

3. 解:$-\sqrt{5}$ 的相反数是 $\sqrt{5}$,绝对值是 $\sqrt{5}$;$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的相反数是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$,绝对值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sqrt[3]{-1}$ 的相反数是 1,绝对值是 1;$\pi-3.14$ 的相反数是 $3.14-\pi$,绝对值是 $\pi-3.14$;$\sqrt{5}-\sqrt{7}$ 的相反数是 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$,绝对值是 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$;$\sqrt{3}-1.73$ 的相反数是 $1.73-\sqrt{3}$,绝对值是 $\sqrt{3}-1.73$.

4. 解:(1)$-3.1<-3.1$.

(2)$-\frac{1}{10}>-\pi$.

(3)$\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(4)$\sqrt{29}>5.3$.

5. 解:(1)$\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{7}\approx1.732+2.236-2\times2.646=-1.324\approx-1.32$.

(2)$2\pi(\sqrt{3}+\sqrt{2})\approx2\pi(1.732+1.414)=2\pi\times3.146\approx2\times3.142\times3.146=19.769\,464\approx19.77$.

复习题

A 组

1. 解:−1,0,1,2 所表示的点介于 A,B 之间.

2. 解:(1)$\sqrt{3}-\sqrt{2}>-\frac{\sqrt{2}}{3}$. (2)$\sqrt{12}>3.4$.

3. 解:(1)$-\sqrt{84.3}\approx-9.182$.

(2)$\pm\sqrt{55.5}\approx\pm7.450$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3) $\sqrt[3]{0.45}\approx 0.766$.

(4) $\sqrt[3]{-34\,012}\approx -32.400$.

4. 解：r 是无理数.

5. 解：(1) $\pm\sqrt{139.5}\approx\pm 11.81$.

(2) $\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\approx\pm 0.87$.

(3) $\pm\sqrt{0.003\,2}\approx\pm 0.06$.

(4) $\pm\sqrt{3\times 10^4}\approx\pm 173.21$.

6. 解：(1) $\sqrt[3]{1.21}\approx 1.07$.

(2) $\sqrt[3]{580\,000}\approx 83.40$.

(3) $\sqrt[3]{-978}\approx -9.93$.

(4) $\sqrt[3]{-\frac{73}{89}}\approx -0.94$.

7. 解：设该正方体的棱长为 x m，由题意得 $6x^2=294$，解得 $x=7$. 所以它的体积为 $7^3=343(\mathrm{m}^3)$.

8. 解：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{3}{5}$.

9. 解：扩大后正方形的边长是原来边长的 2 倍；若面积扩大为原来面积的 n 倍，则扩大后正方形的边长是原来边长的 $\sqrt{n}$ 倍.

10. 解：(1) $|\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}+2\sqrt{2}\approx 3.30$.

(2) $\sqrt[3]{6}\times\pi\div\sqrt{5}\approx 1.817\times 3.142\div 2.236\approx 2.55$.

11. 解：设这个大铅球的半径是 r. 由题意，得

$$\frac{4}{3}\pi\times 3^3+\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

所以 $r^3=3^3+5^3$，

所以 $r=\sqrt[3]{27+125}\approx 5.3$.

答：这个大铅球的半径约是 5.3.

B 组

1. (1)√ (2)× (3)× (4)× (5)×

2. (1)C (2)D

3. 解：$\sqrt[3]{\pi\times 10^2\times 3}\approx 9.8(\mathrm{cm})$.

答：正方体铁块的棱长约是 9.8 cm.

4. 解：所作的正方体的体积为 $4^3\times 8=512(\mathrm{cm}^3)$.

所作的正方体的棱长为 $\sqrt[3]{512}=8(\mathrm{cm})$.

故所作的正方体与原正方体的表面积之比为 $(6\times 8^2):(6\times 4^2)=4:1$.

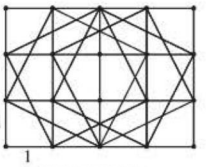
5. 解：$\pi\times 1=\pi$. 所以点 O' 表示无理数 π.

点拨：点 O' 与原点 O 的距离等于圆的周长.

C 组

1. 解：$\sqrt{2}+\frac{1}{16}$.（答案不唯一）

2. 解：能，因为面积为 5 的格点正方形的边长为 $\sqrt{5}$，而相邻的两个正方形可以形成端点为格点，且长为 $\sqrt{5}$ 的线段. 可以画 4 个，如图所示.



（第 2 题图）

3. 解：(1) 0.055；0.173；0.548；1.732；5.477；17.321；54.772

(2) 略.

4. 略. **5.** 略.

第 7 章 一元一次不等式与不等式组

7.1 不等式及其基本性质

练习

1. 解：$-1\leqslant t$ 且 $t\leqslant 5$.

2. 解：$t\geqslant\frac{1}{2}$.

练习

1. (1)< (2)< (3)< (4)>

2. (1)× (2)× (3)× (4)√

3. (1)≤ (2)≥ (3)≥ (4)≤

4. 解：药品 A 的质量大于 2 g 且小于 3 g.

习题 7.1

1. 解：(1) $a>0$. (2) $a<0$. (3) $a+5>0$.

(4) $b-5<0$. (5) $3x\geqslant 9$. (6) $\frac{1}{2}y<3$.

2. (1)√ (2)√ (3)× (4)×

3. (1)< (2)> (3)> (4)< (5)>

点拨：解决此问题要分两步：一是搞清从条件不等式如何变形为“a ____ b”；二是根据不等式的基本性质确定不等号的方向.

4. 解：(1) $x<4$. (2) $x<-2$.

(3) $x<15$. (4) $x<-\frac{3}{4}$.

5. (1)> (2)< (3)< (4)>

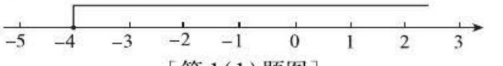
6. 解：(1) $\sqrt[3]{-27}<-\sqrt{(-2)^2}$.

(2) $\sqrt{8}<\sqrt[3]{28}$.

7.2 一元一次不等式

练习

1. 解：(1) $2x\geqslant -8$，$x\geqslant -4$，把解集表示在数轴上如图所示.

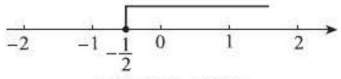


[第 1(1) 题图]

(2) $-4x\leqslant 2$，$x\geqslant -\frac{1}{2}$，把解集表示在数轴

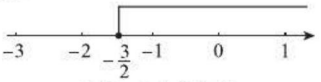
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

上如图所示.



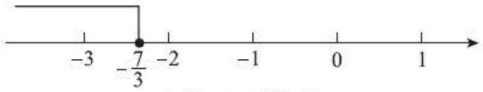
[第1(2)题图]

(3) $5x-4\leqslant 7x-1$, $5x-7x\leqslant -1+4$, $-2x\leqslant 3$, $x\geqslant -\frac{3}{2}$, 把解集表示在数轴上如图所示.



[第1(3)题图]

(4) $2x-5\geqslant 2+5x$, $2x-5x\geqslant 2+5$, $-3x\geqslant 7$, $x\leqslant -\frac{7}{3}$, 把解集表示在数轴上如图所示.



[第1(4)题图]

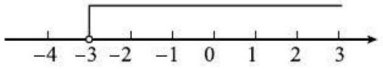
2. 解: (1) $3(1-x)\leqslant x+8$, $3-3x\leqslant x+8$, $-3x-x\leqslant 8-3$, $-4x\leqslant 5$, $x\geqslant -\frac{5}{4}$.

(2) $12-2x\geqslant 3(2x-3)$, $12-2x\geqslant 6x-9$, $-2x-6x\geqslant -9-12$, $-8x\geqslant -21$, $x\leqslant \frac{21}{8}$.

3. 解: $200+1.8x>245$, $1.8x>45$, $x>25$.

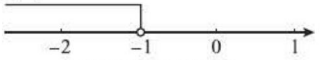
练习

1. 解: (1) $x+5>2$, $x>-3$, 把解集表示在数轴上如图所示.



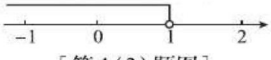
[第1(1)题图]

(2) $2x<-2$, $x<-1$, 把解集表示在数轴上如图所示.



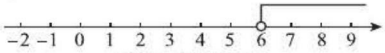
[第1(2)题图]

(3) $15-7x>3x+5$, $15-5>3x+7x$, $10>10x$, $x<1$, 把解集表示在数轴上如图所示.



[第1(3)题图]

(4) $4x-7>2x+5$, $4x-2x>5+7$, $2x>12$, $x>6$, 把解集表示在数轴上如图所示.



[第1(4)题图]

2. 解: (1) $\frac{3x+7}{5}>x-1$, $3x+7>5(x-1)$, $3x+7>5x-5$, $3x-5x>-5-7$, $-2x>-12$, $x<6$.

(2) $\frac{2x+1}{-15}>\frac{x-3}{3}$, $-(2x+1)>5(x-3)$, $-2x-1>5x-15$, $-2x-5x>-15+1$, $-7x>-14$, $x<2$.

3. 解: (1) 由题意, 得 $4x-1>7$, $4x>8$, $x>2$. 所以当 $x>2$ 时, 代数式 $4x-1$ 的值大于7.

(2) 由题意, 得 $4x-1<-2x+5$, $4x+2x<5+1$, $6x<6$, $x<1$. 所以当 $x<1$ 时, 代数式 $4x-1$ 的值小于 $-2x+5$ 的值.

4. D **点拨**: 由第一次称量可知"■"比"●"重, 由第二次称量可知一个"▲"的质量等于一个"■"和一个"●"的质量之和. 故选 D.

练习

1. 解: 设还能买辞典 x 本, 根据题意, 得 $65\times 20+40x\leqslant 2\,000$, 解得 $x\leqslant 17.5$. 因为 x 为整数, 所以 $x\leqslant 17$.

答: 最多还能买辞典17本.

2. 解: 设可以给每位学生准备用于买水果和点心的费用为 x 元, 根据题意, 得 $50x+500\leqslant 750$. 解得 $x\leqslant 5$.

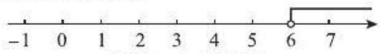
答: 最多可以给每位学生准备用于买水果和点心的费用为5元.

3. 解: 设导火绳要 x cm 长, 根据题意, 得 $\frac{x}{0.8}\geqslant \frac{120}{6}$, 解得 $x\geqslant 16$.

答: 导火绳至少要16 cm长.

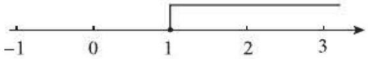
习题 7.2

1. 解: (1) $-\frac{2}{3}x<-4$, $x>6$. 把解集表示在数轴上如图所示.



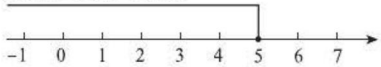
[第1(1)题图]

(2) $14-7x\leqslant 9-2x$, $-7x+2x\leqslant 9-14$, $-5x\leqslant -5$, $x\geqslant 1$. 把解集表示在数轴上如图所示.



[第1(2)题图]

(3) $4(x-3)\leqslant 2(x-1)$, $4x-12\leqslant 2x-2$, $4x-2x\leqslant -2+12$, $2x\leqslant 10$, $x\leqslant 5$. 把解集表示在数轴上如图所示.

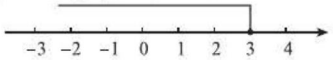


[第1(3)题图]

(4) $11-3x\geqslant 2(x-2)$, $11-3x\geqslant 2x-4$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$-3x-2x\geqslant -4-11$，$-5x\geqslant -15$，$x\leqslant 3$，把解集表示在数轴上如图所示.



［第1(4)题图］

2. 解：由题意，得 $3(1-2x)\leqslant -2$，$3-6x\leqslant -2$，$-6x\leqslant -5$，$x\geqslant \frac{5}{6}$，所以 x 的取值范围为 $x\geqslant \frac{5}{6}$.

3. 解：(1) $2x-4>\frac{6x+1}{2}$，$2(2x-4)>6x+1$，$4x-8>6x+1$，$4x-6x>1+8$，$-2x>9$，$x<-\frac{9}{2}$.

(2) $x-\frac{1}{2}(4x-1)<\frac{3}{2}$，$2x-(4x-1)<3$，$2x-4x+1<3$，$-2x<2$，$x>-1$.

(3) $\frac{4+x}{2}+1\geqslant\frac{4(x+1)}{3}$，$3(4+x)+6\geqslant 8(x+1)$，$12+3x+6\geqslant 8x+8$，$3x-8x\geqslant 8-12-6$，$-5x\geqslant -10$，$x\leqslant 2$.

(4) $\frac{2x-5}{6}>3x-\frac{x+2}{4}$，$2(2x-5)>36x-3(x+2)$，$4x-10>36x-3x-6$，$4x-33x>-6+10$，$-29x>4$，$x<-\frac{4}{29}$.

4. 解：(1) $x+1>2$. (2) $-2x\geqslant 4$.

点拨：本题属于开放型题目，答案不唯一.

5. 解：$3(x-2)<12$，$3x-6<12$，$3x<12+6$，$3x<18$，$x<6$，所以它的正整数解有 1，2，3，4，5.

点拨：解答此题目时，先正确地求出不等式的解集，然后再找出符合条件的解.

6. 解：设乙需要 x h 才能赶上甲，由题意，得 $6x\geqslant 5x+5\times\frac{30}{60}$，$6x-5x\geqslant\frac{5}{2}$，$x\geqslant\frac{5}{2}$.

答：乙至少需要 $\frac{5}{2}$ h 才能赶上甲.

7. 解：设李老师家到学校的距离是 x km. 由题意，得 $\frac{6}{30}+\frac{x-6}{50}\leqslant 0.5$，$5\times 6+3\times(x-6)\leqslant 75$，$30+3x-18\leqslant 75$，$3x\leqslant 63$，$x\leqslant 21$.

答：李老师家到学校的距离最远是 21 km.

8. 解：设共购进 a 千克苹果，该水果商把售价定为每千克 x 元. 由题意，得 $(1-20\%)ax\geqslant 4a$，解得 $x\geqslant 5$.

答：该水果商把售价定为每千克 5 元时可以避免亏本.

9. 解：设他答对 x 个题. 由题意，得 $5x-3(20-x)\geqslant 80$，$5x-60+3x\geqslant 80$，$8x\geqslant 140$，$x\geqslant 17.5$.

答：他至少应答对 18 个题.

10. 略.

7.3 一元一次不等式组

练习

1. 解：(1) $x>0$. (2) $x<-5$.

(3) $2<x<7$. (4) 无解.

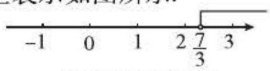
点拨：两大取较大，两小取较小，大小小大中间找，大大小小无处找.

2. 解：(1) $\begin{cases}2x-1\geqslant x+1,①\\ x+8<4x+1.②\end{cases}$

由①，得 $x\geqslant 2$. 由②，得 $x>\frac{7}{3}$.

所以原不等式组的解集为 $x>\frac{7}{3}$.

在数轴上表示如图所示.



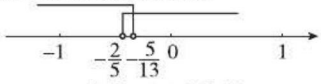
［第2(1)题图］

(2) $\begin{cases}5x+6>4,①\\ 15+9x<10-4x.②\end{cases}$

由①，得 $x>-\frac{2}{5}$. 由②，得 $x<-\frac{5}{13}$.

所以原不等式组的解集为 $-\frac{2}{5}<x<-\frac{5}{13}$.

在数轴上表示如图所示.



［第2(2)题图］

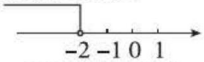
练习

1. 解：(1) $\begin{cases}2x+5>5x+2,①\\ 2(x-1)>3x.②\end{cases}$

由①，得 $x<1$. 由②，得 $x<-2$.

所以原不等式组的解集为 $x<-2$，

在数轴上表示如图所示.



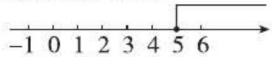
［第1(1)题图］

(2) $\begin{cases}\frac{x-2}{3}\geqslant 1,①\\ 3x+2\geqslant 11.②\end{cases}$

由①，得 $x\geqslant 5$. 由②，得 $x\geqslant 3$.

所以原不等式组的解集为 $x\geqslant 5$，

在数轴上表示如图所示.



［第1(2)题图］

(3) $\begin{cases}5x-2>3(x+1),①\\ -\frac{7}{2}x-1\geqslant 7-\frac{3}{2}x.②\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由①,得 $x>\frac{5}{2}$. 由②,得$x\leqslant -4$.

所以原不等式组无解.

2. 解:(1) $\begin{cases}5x>5,①\\4x<5.②\end{cases}$

由①,得 $x>1$. 由②,得$x<\frac{5}{4}$.

所以原不等式组的解集是 $1<x<\frac{5}{4}$.

(2) $\begin{cases}8x\geqslant 94\ 800\times(1+2\%),①\\8x\leqslant 94\ 800\times(1+4\%),②\end{cases}$

由①,得$x\geqslant 12\ 087$. 由②,得 $x\leqslant 12\ 324$,

所以原不等式组的解集是 $12\ 087\leqslant x\leqslant 12\ 324$.

习题 7.3

1. 解:(1) $\begin{cases}2x-3>x-4,①\\5x+1<3x+3.②\end{cases}$

由①,得 $x>-1$. 由②,得 $x<1$.

所以原不等式组的解集为 $-1<x<1$.

(2) $\begin{cases}2x+1<7,①\\7\geqslant 3x+4.②\end{cases}$

由①,得 $x<3$. 由②,得 $x\leqslant 1$.

所以原不等式组的解集为 $x\leqslant 1$.

2. 解:(1) $\begin{cases}3x<6+5x,①\\4x<2(x-1).②\end{cases}$

由①,得 $x>-3$. 由②,得 $x<-1$.

所以原不等式组的解集为 $-3<x<-1$.

(2) $\begin{cases}\frac{x-4}{5}\geqslant 1,①\\2(x+1)\geqslant 10.②\end{cases}$

由①,得 $x\geqslant 9$. 由②,得 $x\geqslant 4$.

所以原不等式组的解集为$x\geqslant 9$.

(3) $\begin{cases}x-4\geqslant 3(x-2),①\\\frac{1+2x}{3}>x-1.②\end{cases}$

由①,得 $x\leqslant 1$. 由②,得 $x<4$.

所以原不等式组的解集为$x\leqslant 1$.

(4)原不等式组可化为 $\begin{cases}1-2x>11,①\\1-2x<21.②\end{cases}$

由①,得 $x<-5$. 由②,得 $x>-10$.

所以原不等式组的解集为 $-10<x<-5$.

3. 解:因为 $35\leqslant t\leqslant 38$,且 $34\leqslant t\leqslant 36$,所以 $35\leqslant t\leqslant 36$,即恒温箱的温度 t ℃应该设定在 35 ~ 36 ℃范围内.

7.4 综合与实践 排队问题(略)

复习题

A 组

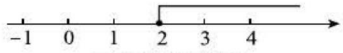
1. (1) $\frac{1}{3}x-x>0$ (2) $18\leqslant x\leqslant 22$

(3) $40\%\leqslant n\leqslant 49\%$ (4) > (5) <

2. (1)不等式的性质 1 (2)不等式的性质 3

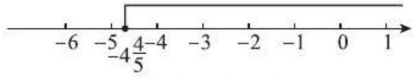
(3)不等式的性质 1 (4)不等式的性质 2

3. 解:(1) $7-2(x-3)\leqslant 5x-1$, $7-2x+6\leqslant 5x-1$, $-2x-5x\leqslant -1-6-7$, $-7x\leqslant -14$, $x\geqslant 2$. 把解集表示在数轴上如图所示.



[第3(1)题图]

(2) $1-\frac{x}{3}\leqslant\frac{x+10}{2}$, $6-2x\leqslant 3(x+10)$, $6-2x\leqslant 3x+30$, $-2x-3x\leqslant 30-6$, $-5x\leqslant 24$, $x\geqslant -4\frac{4}{5}$. 把解集表示在数轴上如图所示.



[第3(2)题图]

4. 解:(1) $\begin{cases}2x-3>x-1,①\\2x+9<4x-1.②\end{cases}$

由①,得 $x>2$. 由②,得 $x>5$.

所以原不等式组的解集为$x>5$.

(2) $\begin{cases}\frac{3x-5}{2}\leqslant x-2,①\\3(x-1)<4(x-1).②\end{cases}$

由①,得 $x\leqslant 1$. 由②,得 $x>1$.

所以原不等式组无解.

(3)原不等式组可化为 $\begin{cases}4x-3>1,①\\4x-3<5.②\end{cases}$

由①,得$x>1$. 由②,得 $x<2$.

所以原不等式组的解集为$1<x<2$.

(4) $\begin{cases}x-1<0,①\\1-x\geqslant 3.②\end{cases}$

由①,得 $x<1$. 由②,得 $x\leqslant -2$.

所以原不等式组的解集为 $x\leqslant -2$.

5. 解:设需要 x min 才能将积水排完,由题意,得 $\begin{cases}20\times 5x\geqslant 1.5\times 10^5,①\\20\times 5x\leqslant 1.8\times 10^5.②\end{cases}$

由①,得 $x\geqslant 1.5\times 10^3$. 由②,得 $x\leqslant 1.8\times 10^3$. 所以 $1.5\times 10^3\leqslant x\leqslant 1.8\times 10^3$.

答:大约需要 1.5×10^3 min ~ 1.8×10^3 min 才能将积水排完.

B 组

1. (1)D (2)D

(3)A **点拨**:将 $mx+n<0$ 的两边同时减去 n,得 $mx<-n$. 因为 $m<0$,所以两边同时除以 m,得 $x>-\frac{n}{m}$. 故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：由 $-2\leqslant\frac{1+2x}{3}$，得 $x\geqslant-\frac{7}{2}$.

由 $\frac{1+2x}{3}\leqslant 2$，得 $x\leqslant\frac{5}{2}$.

所以不等式组 $-2\leqslant\frac{1+2x}{3}\leqslant 2$ 的整数解为 $-3,-2,-1,0,1,2$.

3. 解：设其中最小的自然数为 x，由题意，得 $x+(x+1)+(x+2)<16$，解得 $x<\frac{13}{3}$. 这样的自然数组共有 5 组，它们分别是 0,1,2;1,2,3;2,3,4;3,4,5;4,5,6.

4. 解：$\begin{cases}\frac{4}{3}x>x-2,①\\ \frac{3x+2}{4}\geqslant 2x+1.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-6$.

解不等式②，得 $x\leqslant-\frac{2}{5}$.

所以原不等式组的解集为 $-6<x\leqslant-\frac{2}{5}$.

满足原不等式组的整数 x 的最大值为 -1，最小值为 -5.

5. 解：由题意，得 $1-m<0$，解得 $m>1$.

6. (1) < (2) < (3) > (4) <

C 组

1. 解：根据题意，得 $a-1<0$，所以 $a<1$.

2. 解：不等式组 $\begin{cases}-x+2<x-6,①\\ x>a,②\end{cases}$

由①，得 $x>4$. 由②，知 $x>a$，又因为不等式组的解集是 $x>4$，所以 $a\leqslant 4$.

3. 解：由 $\begin{cases}3x+7y=k,\\ 2x+5y=20,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5k-140,\\ y=60-2k.\end{cases}$

因为 x,y 都是正数，所以 $\begin{cases}5k-140>0,\\ 60-2k>0.\end{cases}$

所以 $28<k<30$. 所以整数 k 为 29.

第 8 章 整式乘法与因式分解

8.1 幂的运算

练习

1. (1) 不对，应改为 $x^3+x^3=2x^3$

(2) 不对，应改为 $x^3\cdot x^3=x^6$

(3) 不对，应改为 $c\cdot c^3=c^4$

(4) 不对，c 与 c^3 指数不同，不能进行合并

2. 解：(1) $10^5\times10^3=10^8$.

(2) $-a^2\cdot a^5=-a^7$.

(3) $-x^3\cdot(-x)^5=-x^3\cdot(-x^5)=x^8$.

(4) $y^8\cdot(-y)=-y^9$.

(5) $(-x)^2\cdot x^3\cdot(-x)^3=x^2\cdot x^3\cdot(-x^3)=-x^8$.

(6) $(-y)^2\cdot(-y)^3\cdot(-y)=(-y)^6=y^6$.

练习

1. 解：(1) $(10^6)^3=10^{18}$.

(2) $(-a^3)^4=a^{12}$.

(3) $-(x^3)^5=-x^{15}$.

(4) $(-y^3)^2=y^6$.

(5) $(-a^3)^2\cdot(a^4)^3=a^6\cdot a^{12}=a^{18}$.

(6) $-x^3\cdot(-x^2)^3=-x^3\cdot(-x^6)=x^9$.

2. (1) 不对，应改为 $(x^3)^2=x^6$

(2) 不对，应改为 $x^3\cdot x^2=x^5$

(3) 不对，应改为 $x^2\cdot x^2\cdot x^2=x^{3\times2}=x^6$

(4) 不对，应改为 $x^3\cdot x^2=x^{3+2}=x^5$

练习

1. 解：(1) $(2\times10^3)^3=8\times10^9$.

(2) $(-3\times10^4)^2=9\times10^8$.

2. 解：(1) $(3m)^2=9m^2$.

(2) $(-2a^3b^2c)^2=4a^6b^4c^2$.

3. (1) 不对，应改为 $(a^3b)^3=a^9b^3$

(2) 不对，应改为 $(6xy)^2=36x^2y^2$

(3) 不对，应改为 $-(3x^3)^2=-9x^6$

(4) 不对，应改为 $(-2ax^2)^2=4a^2x^4$

4. 解：$S_{地球}=4\pi\times(6.4\times10^3)^2=4\pi\times6.4^2\times10^6\approx5.14\times10^8(\text{km}^2)$.

因而，地球的表面积约为 $5.14\times10^8\ \text{km}^2$.

练习

1. 解：(1) $a^{10}\div a^5=a^5$.

(2) $(-xy)^3\div(-xy)=(-xy)^2=x^2y^2$.

(3) $(a-b)^5\div(b-a)^4=(a-b)^5\div(a-b)^4=a-b$.

(4) $(y^m)^2\div y^m=y^{2m}\div y^m=y^m$.

2. (1) 不对，应改为 $a^{10}\div a^2=a^8$

(2) 正确

(3) 不对，应改为 $a^3\div a=a^2$

(4) 不对，应改为 $(-b)^4\div(-b)^2=(-b)^2=b^2$

(5) 不对，应改为 $(-x)^6\div(-x)=(-x)^5=-x^5$

(6) 不对，应改为 $(-y)^3\div y^2=-y^3\div y^2=-y$

练习

1. 解：(1) $3^9\div3^7=3^2=9$.

(2) $\left(\frac{3}{8}\right)^4\div\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{3}{8}$.

(3) $\left(-\frac{2}{5}\right)^5\div\left(-\frac{2}{5}\right)^6=\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}=-\frac{5}{2}$.

2. 解：(1) $(-x)^{10}\div(-x)^7=(-x)^3=-x^3$.

(2) $(-m)^5\div(-m)^9=(-m)^{-4}=\frac{1}{(-m)^4}=\frac{1}{m^4}$.

(3) $4^{m+2}\div4^{m-2}=4^4=256$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4) $(xy)^5 \div (-xy)^2 = (xy)^5 \div (xy)^2 = (xy)^3 = x^3y^3$.
(5) $(-2xy)^5 \div (-2xy)^5 = (-2xy)^0 = 1$.

3. 解: (1) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

(2) $2.1 \times 10^{-4} = 0.000\ 21$.

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$.

(4) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$.

练习

1. 解: $0.060\ 2 = 6.02 \times 10^{-2}$.
$-0.006\ 02 = -6.02 \times 10^{-3}$.
$0.000\ 060\ 2 = 6.02 \times 10^{-5}$.
$153.8 = 1.538 \times 10^2$.
$-34\ 000 = -3.4 \times 10^4$.

2. 解: 因为 $2.657 \times 10^{-26} = 26.57 \times 10^{-27} > 1.674 \times 10^{-27}$,
所以 1 个氧原子的质量比 1 个氢原子的质量大.

3. 解: $\frac{1}{2} \times (3 \times 10^5) \times (12.6 \times 10^{-6}) = 1.89$(km).
答: 飞机与雷达站的距离是 1.89 km.

习题 8.1

1. 解: (1) $a^3 \cdot a = a^4$.
(2) $-b \cdot (-b)^2 = (-b)^3 = -b^3$.
(3) $3 \times 3^3 - 3 \times 9 = 81 - 27 = 54$.
(4) $b \cdot b^2 \cdot b^3 = b^6$.

2. 解: (1) $(a^5)^3 = a^{15}$.
(2) $-(a^2)^4 = -a^8$.
(3) $(-a^3)^3 = -a^9$.
(4) $(a^2)^3 \cdot a^4 = a^6 \cdot a^4 = a^{10}$.
(5) $-x \cdot (x^2)^3 = -x \cdot x^6 = -x^7$.
(6) $(x^3)^4 + (x^4)^3 = x^{12} + x^{12} = 2x^{12}$.

3. 解: (1) $(5a^2)^2 = 25a^4$.
(2) $(-4a^3)^2 = 16a^6$.
(3) $(-2x^2y)^5 = -32x^{10}y^5$.
(4) $(-3x^2)^3 + (2x^3)^2 = -27x^6 + 4x^6 = -23x^6$.

4. (1) a^4 (2) a^2b^2 (3) $-\frac{1}{8}$ (4) a^8b^{11}

5. (1) B (2) A

6. (1) A (2) C

7. 解: (1) $(a^3)^2 \div a^4 \cdot a = a^6 \div a^4 \cdot a = a^2 \cdot a = a^3$.
(2) $x^6 \div (x^4 \div x^2) = x^6 \div x^2 = x^4$.
(3) $2a^3 + a^6 \div (-a)^3 = 2a^3 - a^3 = a^3$.
(4) $(-5a^3)^2 + (-3a^2)^2 \cdot (-a^2) = 25a^6 + 9a^4 \cdot (-a^2) = 25a^6 - 9a^6 = 16a^6$.

8. 解: (1) $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 \times 10^{-2} = 1 \times \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$.

(2) $\left(\frac{1}{8}\right)^0 \times 4^{-2} \times 2^4 = 1 \times \frac{1}{4^2} \times 16 = 1$.

(3) $2^{2\,010} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,010} = 2^{2\,010} \times 2^{-2\,010} = 2^0 = 1$.

(4) $2^{22} \times 25^{11} = 2^{22} \times (5^2)^{11} = 2^{22} \times 5^{22} = (2 \times 5)^{22} = 10^{22}$.

9. 解: $50\ 000 \times 10^{-9} = 5 \times 10^{-5}$(m).
答: 合 5×10^{-5} m.

8.2 整式乘法

练习

1. 解: (1) $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^5$.

(2) $\frac{2}{5}a^2b^3 \cdot \frac{5}{6}abc = \frac{1}{3}a^3b^4c$.

(3) $(-2.5x^2) \cdot (-4x)^2 = -40x^4$.

(4) $(-4x^2y)(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}y^3\right) = 2x^4y^6$.

2. 解: (1) $(4 \times 10^5) \times (5 \times 10^6) \times (3 \times 10^4) = 60 \times 10^{15} = 6 \times 10^{16}$.
(2) $2a^2 \cdot (-2a)^2 + (2a^3) \cdot 5a = 2a^2 \cdot 4a^2 + 2a^3 \cdot 5a = 8a^4 + 10a^4 = 18a^4$.

3. 解: $2.57 \times 10^{15} \times 3.6 \times 10^3 = 2.57 \times 3.6 \times 10^{15} \times 10^3 = 9.252 \times 10^{18}$(次).
答: 它工作 1 h 可进行 9.252×10^{18} 次运算.

4. 解: $11.2 \times 6 \times 30 \times 24 \times 60 \times 60 = 174\ 182\ 400 \approx 1.74 \times 10^8$(km).
答: 它约飞行了 1.74×10^8 km.

练习

解: (1) $15ab^3 \div (-5ab) = -3b^2$.

(2) $-10a^2b^3 \div 6ab^2 = -\frac{5}{3}ab$.

(3) $6a^2b \div 3ab = 2a$.

(4) $(9 \times 10^8) \div (3 \times 10^5) = 3 \times 10^3$.

练习

1. 解: (1) $5x \cdot (3x + 4) = 15x^2 + 20x$.

(2) $\left(5a^2 - \frac{4}{3}a + 1\right)(-3a) = -15a^3 + 4a^2 - 3a$.

2. 解: (1) $x(x^2 + 3) + x^2(x - 3) - 3x(x^2 - x - 1) = x^3 + 3x + x^3 - 3x^2 - 3x^3 + 3x^2 + 3x = -x^3 + 6x$.

(2) $(-a) \cdot (-2ab) + 3a \cdot \left(ab - \frac{1}{3}b - 1\right) = 2a^2b + 3a^2b - ab - 3a = 5a^2b - ab - 3a$.

3. 解: $3 \cdot a \cdot (a + 1) = 3a^2 + 3a$.
答: 这个长方体的体积是 $3a^2 + 3a$.

练习

解: (1) $(6a^2b + 3a) \div a = 6ab + 3$.

(2) $(4x^3y^2 - x^2y^2) \div (-2x^2y) = -2xy + \frac{1}{2}y$.

(3) $(20m^4n^3 - 12m^3n^2 + 3m^2n) \div (-4m^2n) = -5m^2n^2 + 3mn - \frac{3}{4}$.

(4) $[15(a + b)^3 - 9(a + b)^2] \div 3(a +$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$b)^2=5(a+b)-3=5a+5b-3$.

练习

1. 解:(1)$(2n+6)(n-3)=2n^2-6n+6n-18=2n^2-18$.

(2)$(3x-y)(3x+y)=9x^2+3xy-3xy-y^2=9x^2-y^2$.

2. 解:(1)$(3a-2)(a-1)+(a+1)(a+2)=3a^2-3a-2a+2+a^2+2a+a+2=4a^2-2a+4$.

(2)$(3a+2)(3a-2)-9a(a-1)=9a^2-6a+6a-4-9a^2+9a=9a-4$.

3. 解:(1)$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3=x^3-y^3$.

(2)$(x+1)(x^2-2x+3)=x^3-2x^2+3x+x^2-2x+3=x^3-x^2+x+3$.

习题 8.2

1. 解:(1)$(-5a^2b)(2ab^2c)=-10a^3b^3c$.

(2)$\left(-\frac{3}{4}ax\right)\left(-\frac{2}{3}bx^3\right)=\frac{1}{2}abx^4$.

(3)$(2\times10^4)(6\times10^5)=12\times10^9=1.2\times10^{10}$.

(4)$\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot2x^3\cdot(-3x^2)=-3x^6$.

2. 解:(1)$(mn)^2(-m^2n)=m^2n^2\cdot(-m^2n)=-m^4n^3$.

(2)$(2m)^3\left(-\frac{1}{4}m\right)^2=8m^3\cdot\frac{1}{16}m^2=\frac{1}{2}m^5$.

(3)$x^2y^3-2x(4xy^3)=x^2y^3-8x^2y^3=-7x^2y^3$.

(4)$(3m^2n)\cdot\left(\frac{2}{3}m^2n^2\right)-(-10m)\cdot m^3n^3=2m^4n^3+10m^4n^3=12m^4n^3$.

3. 解:$9.6\times10^6\times1.3\times10^5=12.48\times10^{11}=1.248\times10^{12}$(kg).

答:我国陆地一年内得到的太阳能相当于燃烧 1.248×10^{12} kg 煤所产生的能量.

4. 解:(1)$(3y-6)(-y)=-3y^2+6y$.

(2)$(-3x)\left(4x^2-\frac{4}{3}x+1\right)=-12x^3+4x^2-3x$.

(3)$(-xy)(2x-5y-1)=-2x^2y+5xy^2+xy$.

(4)$(4y-1)(y-5)=4y^2-20y-y+5=4y^2-21y+5$.

(5)$(2x+3)(4x+1)=8x^2+2x+12x+3=8x^2+14x+3$.

(6)$\left(\frac{3}{4}x+1\right)\left(\frac{2}{3}x-3\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{2}x^2-\frac{19}{12}x-3$.

5. 解:(1)$5x(2x+4)+x(x-1)=10x^2+20x+x^2-x=11x^2+19x$.

(2)$2a(a^2+3a-2)-2(a^3+2a^2-a+1)=2a^3+6a^2-4a-2a^3-4a^2+2a-2=2a^2-2a-2$.

6. 解:(1)$12a^3b^2\div(-4a^2)=-3ab^2$.

(2)$(-3x^2y)^2\div3x^4y^2=9x^4y^2\div3x^4y^2=3$.

7. 解:(1)$(16m^2-24mn)\div8m=2m-3n$.

(2)$(9x^2y-6xy^2)\div(-3xy)=-3x+2y$.

8. 解:(1)$(25x^2-10xy+15x)\div5x=5x-2y+3$.

(2)$(4a^3-12a^2b-2ab^2)\div(-4a)=-a^2+3ab+\frac{1}{2}b^2$.

9. 解:(1)$(450\times10^8)\div(1.66\times10^6)\approx2.71\times10^4$(双)

答:1 m^3 木材大约能生产 2.71×10^4 双一次性筷子.

(2)$(1.66\times10^6)\div1=1.66\times10^6$(棵)

答:我国每年消费一次性筷子所消耗的木材要砍伐 1.66×10^6 棵生长了 20 年的大树.

10. 解:(1)$a(b-c)-b(c-a)+c(a-b)=ab-ac-bc+ba+ac-bc=2ab-2bc$.

当 $a=\frac{1}{2},b=-1,c=-2$ 时,原式 $=2\times\frac{1}{2}\times(-1)-2\times(-1)\times(-2)=-1-4=-5$.

(2)$(x-y)(x-2y)-(3x-2y)(x-3y)=x^2-2xy-xy+2y^2-3x^2+9xy+2xy-6y^2=-2x^2+8xy-4y^2$.

当 $x=4,y=-1$ 时,

原式 $=-2\times4^2+8\times4\times(-1)-4\times(-1)^2=-68$.

11. 解:(1)$(x-3)(x-2)+18=(x+9)(x+1)$,$x^2-2x-3x+6+18=x^2+x+9x+9$,$-5x-10x=9-6-18$,$-15x=-15$,$x=1$.

(2)$(x-6)(x^2+x+1)-x(x+1)(x-1)=x(2-5x)$,$x^3+x^2+x-6x^2-6x-6-(x^2+x)(x-1)=2x-5x^2$,$x^3+x^2+x-6x^2-6x-6-x^3+x^2-x^2+x=2x-5x^2$,$-6x-6=0$,$x=-1$.

12. 解:(1)$(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1$.

(2)$(3x+1)(x^2-2x+3)=3x^3-6x^2+9x+x^2-2x+3=3x^3-5x^2+7x+3$.

13. 略.

8.3 完全平方公式与平方差公式

练习

1. 解:(1)$(3x+1)^2=(3x)^2+2\cdot3x\cdot1+1^2=9x^2+6x+1$.

(2)$(a-3b)^2=a^2-2\cdot a\cdot3b+(3b)^2=a^2-6ab+9b^2$.

(3)$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot\frac{y}{2}+\left(\frac{y}{2}\right)^2=4x^2+2xy+\frac{y^2}{4}$.

(4)$(-2x+3y)^2=(-2x)^2+2\cdot(-2x)\cdot3y+(3y)^2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=4x^2-12xy+9y^2$.

2. 解:设原正方形的边长为 x cm,由题意,得 $x^2-(x-2\times3)^2=84$,$x^2-(x-6)^2=84$,$x^2-x^2+12x-36=84$,$12x=120$,$x=10$.

答:原正方形的边长为 10 cm.

练习

1. 解:(1)$(2a+5b)(2a-5b)=(2a)^2-(5b)^2=4a^2-25b^2$.

(2)$\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x+3\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-3^2=\frac{1}{4}x^2-9$.

(3)$(y-2x)(-2x-y)=(-2x+y)(-2x-y)=(-2x)^2-y^2=4x^2-y^2$.

(4)$(xy+1)(xy-1)=(xy)^2-1^2=x^2y^2-1$.

2. 解:(1)$598\times602=(600-2)\times(600+2)=600^2-2^2=360\,000-4=359\,996$.

(2)$999^2=(1\,000-1)^2=1\,000^2-2\times1\,000\times1+1=998\,001$.

练习

1. 解:(1)$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

(2)$(x-5)^3=(x-5)^2(x-5)=(x^2-10x+25)(x-5)=x^3-5x^2-10x^2+50x+25x-125=x^3-15x^2+75x-125$.

2. 解:$(a-b-c)^2=[(a-b)-c]^2=(a-b)^2-2(a-b)c+c^2=a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2$.

习题 8.3

1. 解:(1)$\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2=16x^2+4x+\frac{1}{4}$.

(2)$\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2=\frac{1}{16}m^2-mn+4n^2$.

2. 解:(1)$(2m+3n)(2m-3n)=4m^2-9n^2$.

(2)$\left(-3a-\frac{1}{2}b\right)\left(-3a+\frac{1}{2}b\right)=9a^2-\frac{1}{4}b^2$.

(3)$(-4x+y)(y+4x)=y^2-16x^2$.

(4)$(x+y)(x-y)+(y-z)(y+z)-(x+z)(x-z)=x^2-y^2+y^2-z^2-x^2+z^2=0$.

3. 解:(1)$(y+3)^2(3-y)^2=[(y+3)(3-y)]^2=(9-y^2)^2=81-18y^2+y^4$.

(2)$(2a+b+1)(2a+b-1)=[(2a+b)+1][(2a+b)-1]=(2a+b)^2-1=4a^2+4ab+b^2-1$.

(3)$(a-2b-3)(a+2b+3)=[a-(2b+3)][a+(2b+3)]=a^2-(2b+3)^2=a^2-4b^2-12b-9$.

4. 解:$(5y+1)(5y-1)-(5y+25y^2)=25y^2-1-5y-25y^2=-5y-1$. 当 $y=\frac{2}{5}$ 时,原式$=-5\times\frac{2}{5}-1=-2-1=-3$.

5. 解:(1)$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$,$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-x^2+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$,$\frac{1}{2}x=\frac{1}{8}$,$x=\frac{1}{4}$.

(2)$(x+1)(x-1)-(x+2)^2=7$,$x^2-1-x^2-4x-4=7$,$-4x=12$,$x=-3$.

6. 解:$2(x+4)(x-4)<(x-2)(2x+5)$,$2(x^2-16)<2x^2+5x-4x-10$,$2x^2-32<2x^2+x-10$,$x>-22$.

7. (1)$2x$;$3y$;$12xy$ (2)2;3;$5x$ (3)$\frac{9}{4}$;$\frac{3}{2}$

点拨:本题中第(1)(2)小题答案都不唯一.

8. 解:这个单项式是 $4x^4$.(答案不唯一)

9. 解:(1)$(2x+3)^3=(2x+3)^2(2x+3)=(4x^2+12x+9)(2x+3)=8x^3+12x^2+24x^2+36x+18x+27=8x^3+36x^2+54x+27$.

(2)$(2a-b-3c)^2=[2a-(b+3c)]^2=(2a)^2-2\cdot2a\cdot(b+3c)+(b+3c)^2=4a^2-4ab-12ac+b^2+6bc+9c^2=4a^2+b^2+9c^2-4ab-12ac+6bc$.

10. 解:因为 $a+b+c=5$,所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=25$.

又因为 $a^2+b^2+c^2=3$,所以 $2ab+2bc+2ca=22$,即 $ab+bc+ca=11$.

11. 解:$\pi r^2-\pi(r-2)^2=\pi r^2-\pi r^2+4\pi r-4\pi=4\pi r-4\pi(\text{cm}^2)$.

答:这个圆的面积减少$(4\pi r-4\pi)\text{cm}^2$.

8.4 因式分解

练习

1. (1)$6x^2$ (2)$a-3$

2. 解:(1)$np-nq=n(p-q)$.

(2)$-x^3y-x^2y^2+xy=-xy(x^2+xy-1)$.

3. 解:(1)$3(a+b)^2+6(a+b)=3(a+b)(a+b+2)$.

(2)$m(a-b)-n(a-b)=(a-b)(m-n)$.

(3)$6(x-y)^3-3y(y-x)^2=6(x-y)^3-3y(x-y)^2=3(x-y)^2[2(x-y)-y]=3(x-y)^2(2x-3y)$.

(4)$mn(m-n)-m(n-m)^2=mn(m-n)-m(m-n)^2=m(m-n)(n-m+n)=m(m-n)(2n-m)$.

练习

1. (1)$0.9x$ (2)$\frac{4}{5}mn^2$ (3)$y-4$ (4)$x+\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：(1)$x^2+2x+1=(x+1)^2$.
(2)$y^2-4=(y+2)(y-2)$.
(3)$1-6y+9y^2=(1-3y)^2$.
(4)$1-36n^2=(1+6n)(1-6n)$.
(5)$9n^2+64m^2-48mn=(3n-8m)^2$.
(6)$-16+a^2b^2=a^2b^2-16=(ab+4)(ab-4)$.

练习

解：(1)$2x^3-32x=2x(x^2-16)=2x(x+4)(x-4)$.
(2)$9a^3b^3-ab=ab(9a^2b^2-1)=ab(3ab+1)(3ab-1)$.
(3)$mx^2-8mx+16m=m(x^2-8x+16)=m(x-4)^2$.
(4)$-x^4+256=256-x^4=(16+x^2)(16-x^2)=(16+x^2)(4+x)(4-x)$.
(5)$-a+2a^2-a^3=-a(a^2-2a+1)=-a(a-1)^2$.
(6)$27x^2y^2-18x^2y+3x^2=3x^2(9y^2-6y+1)=3x^2(3y-1)^2$.

练习

解：(1)$4a^2-b^2+4a-2b=(2a+b)(2a-b)+2(2a-b)=(2a-b)(2a+b+2)$.
(2)$x^2-2xy+y^2-1=(x-y)^2-1=(x-y+1)(x-y-1)$.
(3)$9x^2+6x+2y-y^2=9x^2+6x+1-1+2y-y^2=(3x+1)^2-(y-1)^2=(3x+1+y-1)(3x+1-y+1)=(3x+y)(3x-y+2)$.
(4)$x^2-y^2+a^2-b^2+2ax+2by=(x^2+2ax+a^2)-(y^2-2by+b^2)=(x+a)^2-(y-b)^2=(x+a+y-b)(x+a-y+b)$.

习题 8.4

1. 解：(1)$ax-ay+az=a(x-y+z)$.
(2)$6a^2b-15ab^2+30a^2b^2=3ab(2a-5b+10ab)$.
(3)$10a(x-y)^2-5b(y-x)=10a(x-y)^2+5b(x-y)=5(x-y)[2a(x-y)+b]=5(x-y)(2ax-2ay+b)$.
(4)$x(a-x)(a-y)-y(x-a)(y-a)=x(a-x)(a-y)-y(a-x)(a-y)=(a-x)(a-y)(x-y)$.

2. 解：(1)$3.14\times7.5+3.14\times2.5=3.14\times(7.5+2.5)=31.4$.
(2)$4.298\times3.256-3.256\times3.298=3.256\times(4.298-3.298)=3.256$.
(3)$1\ 004\times996=(1\ 000+4)(1\ 000-4)=1\ 000^2-4^2=999\ 984$.
(4)$65^2+2\times35\times65+35^2=(65+35)^2=100^2=10\ 000$.

3. 解：$U=IR_1+IR_2+IR_3=I(R_1+R_2+R_3)$.
当$I=1.25$，$R_1=21.3$，$R_2=42.5$，$R_3=16.2$时，原式$=1.25\times(21.3+42.5+16.2)=1.25\times80=100$.

4. 解：(1)$x^2-6ax+9a^2=(x-3a)^2$.
(2)$4x^2-100=4(x^2-25)=4(x+5)(x-5)$.
(3)$25m^2-80m+64=(5m-8)^2$.
(4)$0.49x^2-144y^2=(0.7x)^2-(12y)^2=(0.7x+12y)(0.7x-12y)$.

5. 解：(1)$y^4-y^2=y^2(y^2-1)=y^2(y+1)(y-1)$.
(2)$3ax^2-3ay^2=3a(x^2-y^2)=3a(x+y)(x-y)$.
(3)$4x^3-8x^2+4x=4x(x^2-2x+1)=4x(x-1)^2$.
(4)$a^2-2a(b+c)+(b+c)^2=[a-(b+c)]^2=(a-b-c)^2$.

8.5 综合与实践　纳米材料的奇异特性(略)

复习题

A 组

1. (1)$24a^2b^2cd$　(2)$-8m^6n^9$
(3)$2a^2b-ab^2$　(4)$2x^3-x^2+8x$
(5)x^2+4x+3

2. 解：(1)$(2a-1)(a-4)-(a+3)(a-1)=2a^2-8a-a+4-(a^2-a+3a-3)=2a^2-9a+4-a^2-2a+3=a^2-11a+7$.
(2)$t^2-(t+1)(t-5)=t^2-(t^2-5t+t-5)=t^2-t^2+4t+5=4t+5$.
(3)$(x+1)(x^2+x+1)=x^3+x^2+x+x^2+x+1=x^3+2x^2+2x+1$.
(4)$(2x+3)(x^2-x+1)=2x^3-2x^2+2x+3x^2-3x+3=2x^3+x^2-x+3$.

3. 解：(1)$\left(\frac{1}{3}x-y\right)^2+\left(\frac{1}{3}x+y\right)^2=\frac{1}{9}x^2+y^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}x^2+y^2+\frac{2}{3}xy=\frac{2}{9}x^2+2y^2$.

(2)$\left(x+2y-\frac{1}{2}\right)\left(x-2y+\frac{1}{2}\right)=\left[x+\left(2y-\frac{1}{2}\right)\right]\left[x-\left(2y-\frac{1}{2}\right)\right]=x^2-\left(2y-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-4y^2+2y-\frac{1}{4}$.

(3)$(a+1)^2(a-1)^2-(a+2)^2(a-2)^2=[(a+1)(a-1)]^2-[(a+2)(a-2)]^2=(a^2-1)^2-(a^2-4)^2=(a^2-1+a^2-4)(a^2-1-a^2+4)=6a^2-15$.

(4)$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)=\left(x^2-\frac{1}{9}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)=x^4-\frac{1}{81}$.

4. 解：(1)$8x^2y^2z\div(-4xy^2z)=-2x$.
(2)$(2xy)^3\div(4x^2y)\left(\frac{1}{4}xy\right)=8x^3y^3\div$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(4x^2y)\left(\frac{1}{4}xy\right)=2xy^2\cdot\frac{1}{4}xy=\frac{1}{2}x^2y^3$.

(3) $(4x^2-xy)\div\left(-\frac{1}{2}x\right)=4x^2\div\left(-\frac{1}{2}x\right)-xy\div\left(-\frac{1}{2}x\right)=-8x+2y$.

(4) $[y(x-y)+x(x+y)-x^2]\div(-y)=(xy-y^2+x^2+xy-x^2)\div(-y)=(2xy-y^2)\div(-y)=-2x+y$.

5. 解:(1) $2x(x^2-x+1)-x(2x^2+2x-3)=2x^3-2x^2+2x-2x^3-2x^2+3x=5x-4x^2$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,原式 $=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{5}{2}-1=-3\frac{1}{2}$.

(2) $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)\left(2x+\frac{1}{2}y\right)-\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2=4x^2-\frac{1}{4}y^2-\left(4x^2-2xy+\frac{1}{4}y^2\right)=4x^2-\frac{1}{4}y^2-4x^2+2xy-\frac{1}{4}y^2=2xy-\frac{1}{2}y^2$. 当 $x=\frac{1}{4}$, $y=-1$ 时,原式 $=2\times\frac{1}{4}\times(-1)-\frac{1}{2}\times(-1)^2=-1$.

6. 解:(1) $3x(x+2)+(x+1)(x-1)=4(x^2+8)$, $3x^2+6x+x^2-1=4x^2+32$, $6x=33$, $x=5\frac{1}{2}$.

(2) $\begin{cases}x(y-5)-y(x-2)=12,\\2x(6y-1)+4y(2-2x)=4(xy+3).\end{cases}$

原方程组可化为 $\begin{cases}5x-2y=-12,\\x-4y=-6.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$

7. 解:$(3x+4)(3x-4)>9(x-2)(x+3)$, $9x^2-16>9(x^2+x-6)$, $9x^2-16>9x^2+9x-54$, $-9x>-38$, $x<4\frac{2}{9}$. 其中正整数解有 1,2,3,4.

8. 解:$1\times10^7\times3.75\times10^5=3.75\times10^{12}$(t).

答:相当于 3.75×10^{12} t 煤燃烧的热量.

9. 解:$S=(2.5a+1.5a)(a+2a+2a+2a+a)-2\cdot2a\cdot2.5a=4a\cdot8a-10a^2=32a^2-10a^2=22a^2$(cm^2). 当 $a=10$ cm 时,$S=22\times10^2=2\,200$(cm^2).

10. 略.

11. (1) $25c^2$;$5c$ (2) $\frac{1}{9}n^2$;$\frac{1}{3}n$

12. 解:(1) $x^2+6ax+9a^2=(x+3a)^2$.

(2) $(x-2a)^2-a(2a-x)=(x-2a)^2+a(x-2a)=(x-2a)(x-2a+a)=(x-2a)(x-a)$.

13. 解:因为 $4x^2+mx+36$ 是一个完全平方式,所以 $4x^2+mx+36=(2x\pm6)^2$,所以 $m=\pm24$.

B 组

1. (1)3;9 (2) -1;-3

(3)16 或 -16 或 8 或 -8

(4)18;2 (5)6;$\frac{1}{2}$ (6)1

点拨:原式 $=2\,000^2-(2\,000+1)\times(2\,000-1)=2\,000^2-2\,000^2+1=1$.

2. 解:这幅摄影作品(带相框)的面积为 $(a+2+2)\left(\frac{3}{4}a+2+2\right)=(a+4)\left(\frac{3}{4}a+4\right)=\frac{3}{4}a^2+4a+3a+16=\frac{3}{4}a^2+7a+16$(cm^2).

3. 解:因为 $2^{100}=2^{25\times4}=(2^4)^{25}=16^{25}$, $3^{75}=3^{25\times3}=(3^3)^{25}=27^{25}$, $27^{25}>16^{25}$,

所以 $2^{100}<3^{75}$.

4. 解:因为 $x+y=3$, $xy=1$,

所以 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times1=9-2=7$.

5. 解:(1) $(2-3y)(9y^2+6y+4)=18y^2+12y+8-27y^3-18y^2-12y=8-27y^3$.

(2) $(x+2)^3-(x-2)^3=(x+2)^2(x+2)-(x-2)^2(x-2)=(x^2+4x+4)(x+2)-(x^2-4x+4)(x-2)=x^3+2x^2+4x^2+8x+4x+8-(x^3-2x^2-4x^2+8x+4x-8)=x^3+6x^2+12x+8-x^3+6x^2-12x+8=12x^2+16$.

C 组

1. 解:(1) $\frac{1}{2}x^4-8=\frac{1}{2}(x^4-16)=\frac{1}{2}(x^2+4)(x^2-4)=\frac{1}{2}(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

(2) $x^4+7x^2-8=(x^2+8)(x^2-1)=(x^2+8)(x+1)(x-1)$.

2. 解:(1) $a^4-a^3+a^2-a=a^3(a-1)+a(a-1)=a(a-1)(a^2+1)$.

(2) $4a^2-9b^2+c^2-4ac=(4a^2-4ac+c^2)-9b^2=(2a-c)^2-9b^2=(2a-c+3b)(2a-c-3b)$.

(3) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2=(a^2x^2+b^2x^2)+(b^2y^2+a^2y^2)=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

3. 解:$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc+a^2c+b^2c+c^3-abc-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$bc^2-ac^2=a^3+b^3+c^3-3abc$.

4. 解：因为$(n+7)^2-(n-5)^2=[(n+7)-(n-5)][(n+7)+(n-5)]=12(2n+2)=24(n+1)$，
所以$(n+7)^2-(n-5)^2$（n是整数）能被24整除.

5. 解：(1)a^2-1；a^3-1；a^4-1　(2)$a^{100}-1$
(3)$2^{199}+2^{198}+\cdots+2^2+2+1=1\times(2^{199}+2^{198}+\cdots+2^2+2+1)=(2-1)(2^{199}+2^{198}+\cdots+2^2+2+1)=2^{200}-1$.

第9章 分　式

9.1 分式及其基本性质

练习

1. 解：分式：$\frac{1}{x+y}$，$\frac{a+b}{ab}$，$\frac{x+2}{x-2}$. 整式：$\frac{1}{2}$，$\frac{a}{3}$，$-\frac{x}{2}$，$\frac{3}{\pi}$.

2. 解：由$x-3=0$，解得$x=3$. 因而当$x\neq3$时，分式$\frac{x+2}{x-3}$有意义.

3. 解：(1)每千克苹果的售价为$\frac{a}{m-n}$元.

(2)船从甲地顺江而下到乙地需$\frac{s}{a+b}$h，从乙地返回甲地需$\frac{s}{a-b}$ h.

练习

1. (1)a^2-ab　(2)$a+3$　(3)$5mn$　(4)$x-1$
点拨：先观察等号左边的分子或分母是如何变成等号右边的分子或分母的，再让分母或分子进行相应的变形即可.

2. 解：(1)分子与分母同时乘以c.
(2)分子与分母同时除以$x-y$.

练习

1. 解：(1)$\frac{5xy}{20x^2}=\frac{5x\cdot y}{5x\cdot4x}=\frac{y}{4x}$.

(2)$\frac{-3mn}{6mn^2}=-\frac{3mn\cdot1}{3mn\cdot2n}=-\frac{1}{2n}$.

(3)$\frac{(a-b)^2}{(b-a)^3}=\frac{(b-a)^2}{(b-a)^3}=\frac{1}{b-a}$.

(4)$\frac{6a(b-1)}{8ac(1-b)}=-\frac{2a(b-1)\cdot3}{2a(b-1)\cdot4c}=-\frac{3}{4c}$.

点拨：约分要约到分子、分母只有公因式1为止.

2. 解：(1)$\frac{x^2-9}{(x-3)^2}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}$.

(2)$\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}=\frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{xy}{x-y}$.

点拨：当分子、分母是多项式时，应先分解因式，再进行约分.

3. 解：(1)不对，改正为$\frac{-a+b}{a-b}=-\frac{a-b}{a-b}=-1$.

(2)对.

(3)不对，改正为$\frac{m^2-n^2}{m-n}=\frac{(m+n)(m-n)}{m-n}=m+n$.

习题9.1

1. 解：(1)设该边上的高为h m，则$S=\frac{1}{2}a\cdot h$，所以$h=\frac{2S}{a}$，即该边上的高为$\frac{2S}{a}$ m.

(2)设这个圆柱的高为h m，则$\pi\cdot r^2\cdot h=a^3$，所以$h=\frac{a^3}{\pi r^2}$，即这个圆柱的高为$\frac{a^3}{\pi r^2}$ m.

(3)设应买x箱，则$a\cdot x=b$，所以$x=\frac{b}{a}$，即应买$\frac{b}{a}$箱.

(4)设一台插秧机插完n hm^{2}的水稻需要x h，则$x\cdot a\cdot m=n$，所以$x=\frac{n}{am}$，即一台插秧机插完n hm^{2}的水稻需要$\frac{n}{am}$ h.

2. 解：(1)由$2x-3=0$，解得$x=\frac{3}{2}$，
所以当$x=\frac{3}{2}$时，分式$\frac{x}{2x-3}$无意义.
(2)由$5x+10=0$，解得$x=-2$，
所以当$x=-2$时，分式$\frac{x-1}{5x+10}$无意义.

3. (1)y^2　(2)$x+2$　(3)$4a^2x$　(4)$ab+b^2$

4. 解：(1)$\frac{0.1x-0.2y}{0.5x+0.3y}=\frac{(0.1x-0.2y)\times10}{(0.5x+0.3y)\times10}=\frac{x-2y}{5x+3y}$.

(2)$\frac{\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}}=\frac{\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}\right)\times12}{\left(\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}\right)\times12}=\frac{6a-4}{3b+4}$.

5. 解：(1)$\frac{3a^2-1}{1-a}=-\frac{3a^2-1}{a-1}$.

(2)$\frac{x-x^2}{1+2x^2}=-\frac{x^2-x}{2x^2+1}$.

(3)$\frac{-1+2x-x^2}{-2x+1}=\frac{x^2-2x+1}{2x-1}$.

(4)$\frac{-a^2+a-1}{1-a-a^2}=\frac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$.

6. 解：(1)$\frac{-15x}{20x^2}=-\frac{5x\cdot3}{5x\cdot4x}=-\frac{3}{4x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\frac{-2ac^2}{-14a^2bc}=\frac{2ac\cdot c}{2ac\cdot 7ab}=\frac{c}{7ab}$.

(3) $\frac{x-y}{(y-x)^3}=\frac{-(y-x)}{(y-x)^3}=-\frac{1}{(y-x)^2}$.

(4) $\frac{x^2-9}{6-2x}=\frac{(x+3)(x-3)}{-2(x-3)}=-\frac{x+3}{2}$.

(5) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$.

(6) $\frac{x^2-1}{x-x^2}=-\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}=-\frac{x+1}{x}$.

点拨:约分时,要注意分子和分母要同时进行同一种运算,且除以的是同一个整式.

7. 解:(1) $\frac{x^2-5x}{x^2-10x+25}=\frac{x(x-5)}{(x-5)^2}=\frac{x}{x-5}$.

当 $x=2.5$ 时,原式 $=\frac{2.5}{2.5-5}=-1$.

(2) $\frac{a^2-9b^2}{ab+3b^2}=\frac{(a+3b)(a-3b)}{b(a+3b)}=\frac{a-3b}{b}$.

当 $a=-4,b=2$ 时,

原式 $=\frac{-4-3\times 2}{2}=\frac{-10}{2}=-5$.

9.2 分式的运算

练习

1. 解:(1) $\frac{-a^2}{5b^3}\cdot\frac{10b^2}{7ac}=-\frac{a^2\cdot 10b^2}{5b^3\cdot 7ac}=-\frac{2a}{7bc}$.

(2) $\frac{3ab}{4xy}\div\frac{21a^2b}{10x^2y}=\frac{3ab}{4xy}\cdot\frac{10x^2y}{21a^2b}=\frac{5x}{14a}$.

(3) $-3xy^2\cdot\frac{2x}{(3y)^2}=-3xy^2\cdot\frac{2x}{9y^2}=-\frac{2x^2}{3}$.

(4) $\frac{12xy}{5}\div 4(xy)^2=\frac{12xy}{5}\cdot\frac{1}{4x^2y^2}=\frac{3}{5xy}$.

2. 解:(1) $\frac{2x+2}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x-2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x+1}=2(x+2)=2x+4$.

(2) $\frac{x-y}{x+y}\div(x^2-2xy+y^2)=\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{1}{(x+y)(x-y)}=\frac{1}{x^2-y^2}$.

3. 解:(1) $\left(\frac{b^2}{ac}\right)^3\div(-b^6c)=\frac{b^6}{a^3c^3}\cdot\left(-\frac{1}{b^6c}\right)=-\frac{1}{a^3c^4}$.

(2) $\left(-\frac{x}{y}\right)^2\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^3\div(xy)^4=\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^6}{x^3}\cdot\frac{1}{x^4y^4}=\frac{1}{x^5}$.

4. 解:$\frac{b}{a}\div\frac{n}{m}=\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}=\frac{bm}{an}$,所以李明投篮的命中率是王亮的 $\frac{bm}{an}$ 倍.

练习

1. 解:(1) 公分母为 $12ab$,通分后分别为 $\frac{a}{2b}=\frac{6a^2}{12ab},\frac{b}{3a}=\frac{4b^2}{12ab},\frac{c}{4ab}=\frac{3c}{12ab}$.

(2) 公分母为 $6x^2y^2$,通分后分别为 $\frac{3}{2x^2y}=\frac{9y}{6x^2y^2},\frac{5}{3xy^2}=\frac{10x}{6x^2y^2}$.

2. 解:(1) 因为 $x^2+2x+1=(x+1)^2$,所以公分母为 $(x-1)\cdot(x+1)^2$,通分后分别为 $\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$,

$\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2}$,

$\frac{1}{x-1}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2}$.

(2) 因为 $x^2-1=(x+1)(x-1),x^2+x=x(x+1)$,所以公分母为 $x(x+1)(x-1)$,通分后分别为 $\frac{1}{x-1}=\frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)},\frac{1}{x^2-1}=\frac{x}{x(x+1)(x-1)},\frac{1}{x^2+x}=\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$.

练习

1. 解:(1) $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{6}{2x}-\frac{1}{2x}=\frac{5}{2x}$.

(2) $\frac{2y}{1-x}-\frac{y}{x-1}=\frac{2y}{1-x}+\frac{y}{1-x}=\frac{3y}{1-x}$.

2. 解:(1) $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{bc}{ab}+\frac{ac}{ab}=\frac{ac+bc}{ab}$.

(2) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}=-\frac{2}{x^2-1}$.

(3) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{ab}=\frac{-2b^2}{ab}=-\frac{2b}{a}$.

(4) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}-\frac{x+2y}{6xy}=\frac{2y+3x}{6xy}-\frac{x+2y}{6xy}=\frac{2y+3x-x-2y}{6xy}=\frac{2x}{6xy}=\frac{1}{3y}$.

3. 解:(1) $\frac{2}{3x^2}-\frac{5}{6x}=\frac{4}{6x^2}-\frac{5x}{6x^2}=\frac{4-5x}{6x^2}$.

(2) $\frac{2a}{a^2-4b^2}-\frac{1}{a-2b}=\frac{2a}{a^2-4b^2}-\frac{a+2b}{a^2-4b^2}=\frac{a-2b}{a^2-4b^2}=\frac{1}{a+2b}$.

点拨:分式相加减时,其运算结果必须化为最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：七年级(2)班全班清除全部杂草需要 $\frac{m}{an}$ 时，$\frac{m}{an}-\frac{m}{an+bk}=\frac{m(an+bk)}{an(an+bk)}-\frac{an\cdot m}{an(an+bk)}=\frac{amn+bmk-amn}{an(an+bk)}=\frac{bmk}{a^2n^2+abnk}$，所以两班合作要比七年级(2)班单独完成提前$\frac{bmk}{a^2n^2+abnk}$时.

练习

解：(1)$(a+b)\cdot\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{b-a}=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}=\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b.$

(2)$\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}-1\right)\div\frac{1}{m^2-1}=\frac{(m+1)-(m-1)-(m+1)(m-1)}{(m+1)(m-1)}\cdot(m+1)\cdot(m-1)=(m+1)-(m-1)-(m+1)(m-1)=3-m^2.$

(3)$a-1+\frac{1}{1-a}=\frac{(a-1)^2}{a-1}-\frac{1}{a-1}=\frac{(a-1)^2-1}{a-1}=\frac{a^2-2a}{a-1}.$

(4)$\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}=\frac{4}{x^2-4}+\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{0}{x^2-4}=0.$

点拨：进行分式的混合运算时，应先算乘除，再算加减. 如果有括号，先进行括号里的运算.

习题 9.2

1. 解：(1)$\frac{3a}{4b}\cdot\frac{8b}{9a^2}=\frac{3a\cdot8b}{4b\cdot9a^2}=\frac{2}{3a}.$

(2)$\frac{xy^3}{8c^2d}\div\frac{xy}{2cd^2}=\frac{xy^3}{8c^2d}\cdot\frac{2cd^2}{xy}=\frac{y^2d}{4c}.$

(3)$\frac{a-b}{b}\cdot\frac{ab}{2a-2b}=\frac{a-b}{b}\cdot\frac{ab}{2(a-b)}=\frac{a}{2}.$

(4)$\frac{xy}{2x-3y}\cdot\frac{6x-9y}{2x^2y^2}=\frac{xy}{2x-3y}\cdot\frac{3(2x-3y)}{2x^2y^2}=\frac{3}{2xy}.$

2. 解：(1)$\frac{x^2-1}{x-x^2}\cdot\frac{xy-x}{1-y}=-\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}\cdot\frac{x(y-1)}{1-y}=x+1.$

(2)$\frac{1}{(y-x)^2}\cdot\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x^2-y^2}.$

(3)$(xy-x^2)\div\frac{x-y}{xy}=x(y-x)\cdot\frac{xy}{x-y}=-x^2y.$

(4)$\frac{x-3}{x^2+x}\div(x^2-6x+9)=\frac{x-3}{x(x+1)}\div(x-3)^2=\frac{x-3}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{1}{x(x+1)(x-3)}.$

点拨：在进行分式的乘除运算时，若分子、分母是多项式，则应先将其分解因式，再进行计算.

3. 解：(1)$\left(-\frac{xy}{a}\right)\div\left(-\frac{x}{a}\right)^2=-\frac{xy}{a}\cdot\frac{a^2}{x^2}=-\frac{ay}{x}.$

(2)$\frac{(3x^{-1}y^{-2})^2\cdot(x^2y^2)^3}{(3xy^3)^{-2}}=\frac{9x^{-2}y^{-4}\cdot x^6y^6}{3^{-2}x^{-2}y^{-6}}=81x^6y^8.$

(3)$(-a^2)\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)^3\div\left(-\frac{a}{b}\right)^4=(-a^2)\cdot\left(-\frac{a^3}{b^3}\right)\cdot\frac{b^4}{a^4}=ab.$

点拨：分式的乘除、乘方混合运算，应先算乘方，再算乘除.

4. 解：(1)$\left(\frac{b}{2a^2}\right)^3\div\left(\frac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}=\frac{b^3}{8a^6}\div1\times\left(-\frac{a^3}{b^3}\right)=-\frac{b^3}{8a^6}\times\frac{a^3}{b^3}=-\frac{1}{8a^3}.$

(2)$(xy-x^2)\div\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}\cdot\frac{x-y}{x^2}=x(y-x)\cdot\frac{xy}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{x^2}=-y.$

5. 解：(1)$\frac{2x+7}{3x+1}-\frac{x+3}{3x+1}=\frac{2x+7-x-3}{3x+1}=\frac{x+4}{3x+1}.$

(2)$\frac{3c}{c-d}-\frac{3d+c}{d-c}=\frac{3c}{c-d}+\frac{3d+c}{c-d}=\frac{4c+3d}{c-d}.$

6. 解：(1)$\frac{3x+1}{3x}-\frac{2y-1}{2y}=\frac{2y(3x+1)}{6xy}-\frac{3x(2y-1)}{6xy}=\frac{6xy+2y-6xy+3x}{6xy}=\frac{3x+2y}{6xy}.$

(2)$a+b+\frac{2b^2}{a-b}=\frac{a^2-b^2+2b^2}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a-b}.$

(3)$\frac{a-1}{a^2-1}+\frac{a}{a+1}=\frac{a-1+a(a-1)}{a^2-1}=\frac{a-1+a^2-a}{a^2-1}=\frac{a^2-1}{a^2-1}=1.$

(4)$\frac{1}{m^2-m}+\frac{m-3}{m^2-1}=\frac{1}{m(m-1)}+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{m-3}{(m+1)(m-1)}=\frac{m+1+m(m-3)}{m(m+1)(m-1)}=\frac{(m-1)^2}{m(m+1)(m-1)}=\frac{m-1}{m(m+1)}$.

7. 解:(1)$\left(x-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x}=x\cdot\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x}=x-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=x-1$.

(2)$\frac{3-a}{2a-4}\div\left(a+2-\frac{5}{a-2}\right)=\frac{3-a}{2(a-2)}\div\frac{a^2-4-5}{a-2}=\frac{3-a}{2(a-2)}\div\frac{a^2-9}{a-2}=-\frac{a-3}{2(a-2)}\cdot\frac{a-2}{(a+3)(a-3)}=-\frac{1}{2a+6}$.

8. 解:(1)$\left(\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}-\frac{1}{a-2}\right)\div\frac{a+1}{a+2}=\left[\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}-\frac{1}{a-2}\right]\cdot\frac{a+2}{a+1}=\left(\frac{a+2}{a-2}-\frac{1}{a-2}\right)\cdot\frac{a+2}{a+1}=\frac{a+1}{a-2}\cdot\frac{a+2}{a+1}=\frac{a+2}{a-2}$.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,原式 $=\frac{\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}-2}=-\frac{5}{3}$.

(2)$\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$

$=\frac{(x-y)^2+4xy}{x-y}\cdot\frac{(x+y)^2-4xy}{x+y}$

$=\frac{(x+y)^2\cdot(x-y)^2}{(x+y)\cdot(x-y)}=x^2-y^2$.

当 $x=100$,$y=99$ 时,

原式 $=100^2-99^2=(100+99)\times(100-99)=199$.

9. 解:$\frac{s}{a}\div\frac{ms}{b}=\frac{s}{a}\cdot\frac{b}{ms}=\frac{b}{am}$,

所以飞机速度是火车速度的 $\frac{b}{am}$ 倍.

9.3 分式方程

练习

1. 解:(1)$\frac{5}{x}=\frac{3}{x-2}$.

方程两边同乘以 $x(x-2)$,

得 $5(x-2)=3x$.

解这个整式方程,得 $x=5$.

检验:当 $x=5$ 时,$x(x-2)\neq0$.

所以原方程的根是 $x=5$.

(2)$1-\frac{1}{x-4}=\frac{3-x}{x-4}$.

方程两边同乘以 $x-4$,

得 $(x-4)-1=3-x$.

解这个整式方程,得 $x=4$.

检验:当 $x=4$ 时,$x-4=0$.

所以原方程无解.

2. 解:设摩托车的速度是 x km/h,则汽车的速度为 1.5x km/h,根据题意,得 $\frac{30}{1.5x}+\frac{15}{60}=\frac{30}{x}$.

解这个方程,得 $x=40$.

经检验,$x=40$ 是所列方程的根.

当 $x=40$ 时,$1.5x=40\times1.5=60$.

所以摩托车的速度是 40 km/h,汽车的速度是 60 km/h.

练习

1. 解:公式两边同乘以 V_1V_2,

得 $p_1V_1=p_2V_2$.

因为 $p_2\neq0$,

所以 $V_2=\frac{p_1V_1}{p_2}$.

2. 解:设小华每分输入 x 个汉字,则姐姐每分输入 $3x$ 个汉字,根据题意,得 $\frac{1\,500}{x}-\frac{1\,500}{3x}=20$. 解这个方程,得 $x=50$. 经检验,$x=50$ 是所列方程的根. 当 $x=50$ 时,$3x=3\times50=150$. 所以小华每分输入 50 个汉字,姐姐每分输入 150 个汉字.

3. 解:设乙每时生产 x 个零件,则甲每时生产 $(x+8)$ 个零件,根据题意,得 $\frac{168}{x+8}=\frac{144}{x}$. 解这个方程,得 $x=48$. 经检验,$x=48$ 是所列方程的根. 当 $x=48$ 时,$x+8=48+8=56$.

所以甲每时生产 56 个零件,乙每时生产 48 个零件.

点拨:本题中的相等关系是甲生产 168 个零件所用的时间 = 乙生产 144 个零件所用的时间.

习题 9.3

1. 解:$\frac{1}{x}(1+12\%)(x-3)=1$.

2. 解:$\frac{66}{x+3}=\frac{48}{x-3}$.

3. 解:(1)$\frac{6}{x+4}-\frac{3}{x-1}=0$.

方程两边同乘以 $(x+4)(x-1)$,

得 $6(x-1)-3(x+4)=0$.

解这个整式方程,得 $x=6$.

检验:当 $x=6$ 时,$(x+4)(x-1)\neq0$.

所以原方程的根是 $x=6$.

(2)$\frac{x}{2x-5}-\frac{5}{5-2x}=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方程两边同乘以$(2x-5)$，得$x+5=2x-5$. 解这个整式方程，得$x=10$.

检验：当$x=10$时，$2x-5\neq0$.

所以原方程的根是$x=10$.

(3)$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x-4}$.

方程两边同乘以$(x-2)(x-4)$，

得$(x+1)(x-4)=(x-3)(x-2)$.

解这个方程，得$x=5$.

检验：当$x=5$时，$(x-2)(x-4)\neq0$.

所以原方程的根是$x=5$.

(4)$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$.

方程两边同乘以$(x+1)(x-1)$，

得$2(x-1)+3(x+1)=6$.

解这个整式方程，得$x=1$.

检验：当$x=1$时，$(x+1)(x-1)=0$，

所以原方程无解.

点拨：去分母时，要注意是在方程两边同时乘以最简公分母，不要漏乘.

4. 解：(1)等式两边同乘以n，得$Rn+r=sn$，所以$sn-Rn=r$，因为$s\neq R$，所以$s-R\neq0$，所以$n=\frac{r}{s-R}$.

(2)等式两边同乘以$(m+a)$，得$e(m+a)=m-a$，所以$ea+a=m-em$，因为$e\neq-1$，所以$e+1\neq0$，所以$a=\frac{m-em}{e+1}$.

5. 解：设采用新工艺前每时加工x个零件，则采用新工艺后每时加工$1.5x$个零件，根据题意，得$\frac{1\,200}{x}-\frac{1\,200}{1.5x}=10$. 解这个方程，得$x=40$. 经检验，$x=40$是所列方程的根.

当$x=40$时，$1.5x=1.5\times40=60$. 所以采用新工艺前每时加工40个零件，采用新工艺后每时加工60个零件.

点拨：本题中的相等关系是采用新工艺前加工1 200个零件所用的时间－采用新工艺后加工1 200个零件所用的时间＝10 h.

6. 解：设“青年突击队”原计划每时清除x t垃圾，根据题意，得$\frac{100}{x}-\frac{100}{2x}=4$. 解这个方程，得$x=12.5$. 经检验，$x=12.5$是所列方程的根. 所以“青年突击队”原计划每时清除12.5 t垃圾.

复习题

A组

1. (1)$\frac{mx}{m-n}$　(2)$\neq-1$　(3)$=0$　(4)<-3

点拨：一个分式，当分母的值等于零时，分式无意义，当分母的值不等于零时，分式有意义；当分子的值等于零，分母的值不等于零时，分式的值等于零；当分子、分母异号时，分式的值为负；当分子、分母同号时，分式的值为正.

2. 解：(1)$\frac{a^2b+ab^2}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a-b}{ab+b^2}=\frac{ab(a+b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{a-b}{b(a+b)}=\frac{a}{a-b}$.

(2)$\frac{1}{x-2}\div\frac{4}{4-x^2}=\frac{1}{x-2}\cdot\frac{(2+x)(2-x)}{4}=\frac{-x-2}{4}=-\frac{x+2}{4}$.

(3)$\left(1-\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=\frac{1-x-1}{1-x}\cdot\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{-x}{1-x}\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=-\frac{1+x}{x}$.

3. 解：(1)$\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$.

(2)$\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}=\frac{ac-bc}{abc}+\frac{ab-ac}{abc}+\frac{bc-ab}{abc}=\frac{ac-bc+ab-ac+bc-ab}{abc}=0$.

(3)$\frac{2x}{x+3}-x+1=\frac{2x}{x+3}+\frac{(-x+1)(x+3)}{x+3}=\frac{2x-x^2-2x+3}{x+3}=\frac{-x^2+3}{x+3}$.

(4)$\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-1}{6+2x}=\frac{2(x+3)}{2(x^2-9)}-\frac{12}{2(x^2-9)}-\frac{(x-1)(x-3)}{2(x^2-9)}=\frac{2x+6-12-x^2+4x-3}{2(x^2-9)}=\frac{-(x-3)^2}{2(x^2-9)}=-\frac{x-3}{2(x+3)}$.

4. 解：$\frac{2x+6}{x^2-4x+4}\div(x+3)\cdot\frac{x-2}{x+3}=\frac{2(x+3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{x-2}{x+3}=\frac{2}{(x-2)(x+3)}$,

当$x=3$时，原式$=\frac{2}{(3-2)\times(3+3)}=\frac{1}{3}$.

5. 解：(1)$\frac{3x-1}{x+2}=\frac{2}{3}$，方程两边同乘以$3(x+2)$，整理得$3(3x-1)=2(x+2)$. 解这个方程，得$x=1$. 检验：当$x=1$时，$3(x+2)\neq0$，所以原方程的根是$x=1$.

(2)$\frac{x-6}{x-3}+\frac{x-4}{x-5}=2$，方程两边同乘以$(x-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3)(x-5),得(x-6)(x-5)+(x-4)(x-3)=2(x-3)(x-5).解这个方程,得x=6.检验:当x=6时,(x-3)(x-5)≠0,所以原方程的根是x=6.

6. **解**:(1)等式两边同乘以xy,得ay+bx=xy,故xy-bx=ay,因为b≠y,所以y-b≠0,所以$x=\frac{ay}{y-b}$.

(2)等式两边同乘以(x-m),得k(x-m)=y-n,故kx=y-n+km,因为k≠0,所以$x=\frac{y-n+km}{k}$.

点拨:求谁,就可以将等式看成是关于谁的方程来求解.

7. **解**:设甲单独输入完这份书稿需用x h,则乙单独输入完这份书稿需用$\frac{6}{4}x=1.5x$(h),根据题意,得$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}\right)+\frac{5}{1.5x}=1$.解这个方程,得x=10.经检验,x=10是所列方程的根.当x=10时,1.5x=1.5×10=15.所以甲单独输入完这份书稿需用10 h,乙单独输入完这份书稿需用15 h.

8. **解**:设骑自行车的速度是x km/h,则乘客车的速度是3x km/h,根据题意,得$\frac{25}{x}-\frac{25}{3x}=\frac{80}{60}$.解这个方程,得x=12.5.经检验,x=12.5是所列方程的根.当x=12.5时,3x=3×12.5=37.5.所以骑自行车的速度为12.5 km/h,乘客车的速度为37.5 km/h.

9. **解**:设工程队原计划每天建x hm^2大棚,根据题意,得$\frac{80}{x}-\frac{80}{(1+1.5)x}=20$.解这个方程,得x=2.4.经检验,x=2.4是所列方程的根.所以工程队原计划每天建2.4 hm^2大棚.

B组

1. (1)$\frac{1}{3}$ (2)1 **点拨**:先根据所提供的条件,找出x与y的关系,用y来表示x(或用x来表示y),再代入所求分式计算即可.

2. **解**:(1)$\frac{(2ab^2)^{-2}(a^2b)^2}{(3a^3b)^2(ab^3)^{-2}}=\frac{2^{-2}a^{-2}b^{-4}\cdot(a^4b^2)}{(9a^6b^2)\cdot(a^{-2}b^{-6})}=\frac{b^2}{36a^2}$.

(2)$\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2-2xz}=\frac{(x+y)^2-z^2}{(x-z)^2-y^2}=\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+y-z)(x-y-z)}=\frac{x+y+z}{x-y-z}$.

3. **解**:(1)$\left(\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}\right)\div\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)=\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\div\frac{2x}{(x+1)(x-1)}=\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{2x}=\frac{x+1}{2x(x-1)}-\frac{x-1}{2x(x+1)}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{4x}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x^2-1}$.

(2)$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$

$=\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$.

(3)$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{x+4-x}{x(x+4)}=\frac{4}{x(x+4)}$.

4. **解**:设第一年每间店面房的租金为x元,则第二年每间店面房的租金为(x+1 000)元,根据题意,得$\frac{60\,000}{x}=\frac{72\,000}{x+1\,000}$.解这个方程,得x=5 000.经检验,x=5 000是所列方程的根.当x=5 000时,x+1 000=6 000.所以第一年每间店面房的租金为5 000元,第二年每间店面房的租金为6 000元.

5. **解**:设超过5 m^3的部分每立方米收x元,根据题意,得

$\frac{17.50-5\times1.50}{x}+5=\frac{2}{3}\left(\frac{27.50-5\times1.50}{x}+5\right)$.

解这个方程,得x=2.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

经检验，$x=2$ 是所列方程的根.

所以超过 5 m^3 的部分每立方米加收 0.5 元.

点拨：本题中的相等关系为小华家的用水量 = 小莉家的用水量 $\times\frac{2}{3}$.

6. 解：(1)设甲队单独完成此项工程需 x 天，则乙队单独完成此项工程需 $\frac{1}{\frac{1}{24}-\frac{1}{x}}$ 天，即 $\frac{24x}{x-24}$ 天，根据题意，得 $20\left(\frac{1}{x}+\frac{x-24}{24x}\right)+20\times\frac{x-24}{24x}=1$.

解这个方程，得 $x=30$.

经检验，$x=30$ 是所列方程的根. 当 $x=30$ 时，$\frac{24x}{x-24}=\frac{24\times30}{30-24}=120$.

所以甲队单独完成此项工程需 30 天，乙队单独完成此项工程需 120 天.

(2)设甲队单独完成此项工程需费用 y 万元，则乙队单独完成此项工程需费用 $\left(120-\frac{24}{30}y\right)\cdot\frac{120}{24}$ 万元. 依题意列方程，得 $\frac{y}{30}\times20+\left(120-\frac{24}{30}y\right)\cdot\frac{40}{24}=110$，解得 $y=135$，所以 $\left(120-\frac{24}{30}y\right)\cdot\frac{120}{24}=60$. 所以甲队单独完成此项工程需费用 135 万元，乙队单独完成此项工程需费用 60 万元.

C 组

解：(1)$\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=10,①\\ \frac{9}{x}-\frac{7}{y}=-5,②\end{cases}$

① $\times7$ + ② $\times3$ 化简整理，得 $x=1$，把 $x=1$ 代入 ①，得 $y=\frac{1}{2}$，即原方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(2)$\begin{cases}\frac{4}{x+y}+\frac{6}{x-y}=3,①\\ \frac{9}{x-y}-\frac{1}{x+y}=1,②\end{cases}$

① + ② $\times4$ 化简整理，得 $x-y=6$ ③，把③代入 ① 得，$x+y=2$ ④，③ ④ 联立解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=-2.\end{cases}$

第 10 章 相交线、平行线与平移

10.1 相交线

练习

1. 解：(1)，(2)，(3)，(4)，(6) 中的 $\angle1$ 与 $\angle2$ 不是对顶角，(5) 中的 $\angle1$ 与 $\angle2$ 是对顶角. 理由：因为对顶角是两直线相交，有公共顶点且它们的两边分别互为反向延长线的两个角，很明显，只有 (5) 中的 $\angle1$ 与 $\angle2$ 符合条件.

2. 解：因为 $\angle1=35°$，$\angle1$ 与 $\angle2$ 是对顶角，

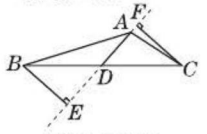
所以 $\angle2=\angle1=35°$.

又因为 $\angle1+\angle3=180°$，

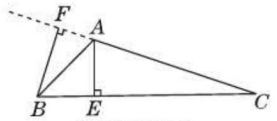
所以 $\angle3=180°-\angle1=145°$.

练习

1. 解：如图.



(第 1 题图)

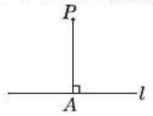


(第 2 题图)

2. 解：(1)如图，点 A 到直线 BC 的垂线段为 AE.

(2)如图，点 B 到直线 AC 的垂线段为 BF.

3. 解：如图，过点 P 作 $PA\perp l$，垂足为 A，沿线段 PA 修道路即可使道路最短.



(第 3 题图)

习题 10.1

1. 解：$\angle1$ 与 $\angle2$ 互为邻补角.

$\angle1$ 与 $\angle3$ 是对顶角.

$\angle1=\angle3$，$\angle2=\angle4$，因为对顶角相等.

2. 解：$\angle3=180°-\angle1-\angle2=180°-40°-50°=90°$.

点拨：$\angle3$ 的对顶角与 $\angle1$，$\angle2$ 构成一个平角.

3. 解：因为 $\angle AOC=35°$，

所以 $\angle DOB=\angle AOC=35°$.

又因为 $EO\perp CD$，所以 $\angle DOE=90°$，

所以 $\angle BOE=90°-\angle DOB=90°-35°=55°$.

4. 解：点 M 到边 OA，OB 所在直线的距离相等. **点拨**：实际量一量，即可得出结论.

10.2 平行线的判定

练习

1. 解：同位角：$\angle4$ 与 $\angle8$，$\angle2$ 与 $\angle6$，$\angle3$ 与 $\angle7$；内错角：$\angle4$ 与 $\angle6$；同旁内角：$\angle3$ 与 $\angle6$.

2. $\angle3$；$\angle BEC$；$\angle5$；$\angle AED$

3. 解：$\angle1$ 与 $\angle D$ 是直线 AB，CD 被直线 AD

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所截而成的内错角；∠1 与 ∠B 是直线 AD，BC 被直线 AB 所截而成的同位角；∠3 与 ∠4 是直线 AB，CD 被直线 AC 所截而成的内错角；∠B 与 ∠BCD 是直线 AB，CD 被直线 BC 所截而成的同旁内角；∠2 与 ∠4 是直线 AD，CD 被直线 AC 所截而成的同旁内角.

练习

1. 解：能. 同位角相等，两直线平行.

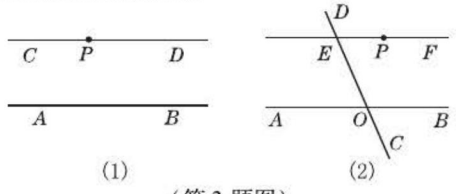
点拨：由题图可看出 ∠DCB = ∠FEB，而这两角是同位角，故可推出 CD // EF.

2. 解：它们不会有相撞的危险. 因为由同位角相等，两直线平行，可得出它们航行的路线是互相平行的.

点拨：要看是否有相撞的危险，只要看它们的航线是否平行即可.

3. 解：(1) 如图(1)所示.

(2) 如图(2)所示.



(1) (2)

(第 3 题图)

练习

1. 解：由 ∠1 = 47°，∠2 = 47°，可判定 DE // BC，判定的依据：内错角相等，两直线平行；由 ∠2 = 47°，∠3 = 47°，可判定 AB // EF，判定的依据：同位角相等，两直线平行.

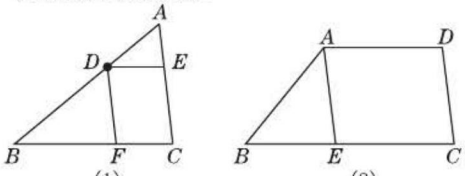
2. 解：由 ∠A = 62°，∠B = 118°，可得出 ∠A + ∠B = 180°，可以判定 AD // BC，判定的依据：同旁内角互补，两直线平行.

3. ∠BAC；∠BAC；CD

习题 10.2

1. 解：(1) 如图(1)所示.

(2) 如图(2)所示.



(1) (2)

(第 1 题图)

2. (1) AD；BC；内错角相等，两直线平行

(2) DC；AB；内错角相等，两直线平行

(3) AD；BC；同位角相等，两直线平行

(4) ∠ABC；同旁内角互补，两直线平行

(5) ∠ADC；∠DAB；同旁内角互补，两直线平行

点拨：(5) 题前两空答案不唯一.

3. 解：AB // CD. 理由：因为 AB ⊥ BD，CD ⊥ BD，所以 ∠ABD = ∠CDB = 90°，所以 ∠ABD + ∠CDB = 180°，所以 AB // CD. 结论：在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行.

4. 解：因为 ∠1 与 ∠E 互补，所以 ∠1 + ∠E = 180°，所以 AB // EF.

理由：同旁内角互补，两直线平行.

因为 ∠1 = ∠B，所以 DE // BC.

理由：同位角相等，两直线平行.

10.3 平行线的性质

练习

1. (1) ∠B；两直线平行，同位角相等

(2) ∠EDF；两直线平行，内错角相等

(3) ∠DEC；两直线平行，同旁内角互补

(4) ∠EDF；两直线平行，内错角相等

(5) ∠BFD；两直线平行，同位角相等

2. 解：因为 AB // CD，∠AEF = 90°，所以 ∠DFE = ∠AEF = 90°，所以 EF ⊥ CD.

点拨：由直线 AB // CD，∠AEF = 90°，推出 ∠DFE 的度数，直线 EF 与直线 CD 的位置关系就明确了.

3. 解：因为 AD // BC，所以 ∠D + ∠C = 180°.

又因为 ∠C = 71°，所以 ∠D = 180° − ∠C = 180° − 71° = 109°.

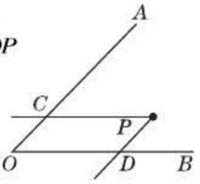
习题 10.3

1. (1) AB；CD；内错角相等，两直线平行；AB；CD；两直线平行，内错角相等

(2) ∠BOC；两直线平行，同位角相等(或 ∠AOD；两直线平行，内错角相等)

2. 解：(1)(2) 如图所示.

(3) ∠O 与 ∠OCP，∠ODP 分别互补；∠OCP 与 ∠ACP，∠CPD，∠BDP 分别互补；∠ODP 与 ∠ACP，∠CPD，∠BDP 分别互补.



(第 2 题图)

(4) ∠ODP = ∠OCP，∠O = ∠ACP = ∠PDB = ∠CPD.

3. 解：因为 DE // BC，所以 ∠B + ∠BDE = 180°，∠BCD = ∠EDC，所以 ∠BDE = 180° − ∠B = 180° − 70° = 110°.

因为 CD 是 ∠ACB 的平分线，∠ACB = 50°，

所以 $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 25°$，

所以 ∠EDC = ∠BCD = 25°，

所以 ∠BDC = ∠BDE − ∠EDC = 110° − 25° = 85°.

4. 解：因为 AB // EC，所以 ∠B + ∠C = 180°.

因为 ∠B = 60°，所以 ∠C = 180° − ∠B = 120°.

因为 AD // BC，所以 ∠ADE = ∠C = 120°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨：两次应用平行线的性质，先求出 $\angle C$ 的度数，再求出 $\angle ADE$ 的度数.

10.4 平　移

习题 10.4

1. C　**2.** 略.　**3.** 略.

复习题

A 组

1. 解：(1) $\angle EOD$ 的对顶角为 $\angle COF$，$\angle EOC$ 的对顶角为 $\angle DOF$.

(2) 因为 $\angle AOE = 30°$，$\angle BOD = 60°$，

所以 $\angle EOD = 180° - \angle AOE - \angle BOD = 180° - 30° - 60° = 90°$，

所以 $\angle COF = \angle EOD = 90°$.

又因为 $\angle BOD = 60°$，$\angle COD$ 是一个平角，

所以 $\angle COB = 180° - \angle BOD = 180° - 60° = 120°$.

2. 解：(1) $\angle 1$ 的同位角是 $\angle 3$.

(2) $\angle 2$ 的内错角是 $\angle 6$，$\angle 1$.

(3) $\angle 3$ 的同旁内角是 $\angle 5$，$\angle 4$ 和 $\angle A$.

3. 解：(1) $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 7 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 6$，$\angle 3 + \angle 5 = 180°$，$\angle 2 + \angle 4 = 180°$，$\angle 4 + \angle 6 = 180°$，$\angle 1 + \angle 5 = 180°$，$\angle 2 + \angle 7 = 180°$，$\angle 6 + \angle 7 = 180°$.

(2) $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 7 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 6$，$\angle 3 + \angle 5 = 180°$，$\angle 2 + \angle 4 = 180°$，$\angle 6 + \angle 7 = 180°$.

4. 解：不平行. $\angle 1 + \angle 2 = 135° + 60° = 195° \neq 180°$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的对顶角是同旁内角，但 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的对顶角的度数和不等于 $180°$，所以直线 a 与 b 不平行.

5. 解：因为 $\angle APE = \angle CQE$，所以 $AB \parallel CD$，

所以 $\angle APQ + \angle CQE = 180°$.

又因为 $\angle APQ = 2\angle CQE$，

所以 $2\angle CQE + \angle CQE = 180°$，

所以 $\angle CQE = 60°$，

所以 $\angle APQ = 2\angle CQE = 120°$，

$\angle BPF = \angle CQE = 60°$.

6. (1) 正确　(2) 正确　(3) 正确

7. 解：因为 $AB \perp BC$，$CD \perp BC$，

所以 $\angle ABC = \angle BCD = 90°$，所以 $AB \parallel CD$.

又因为 $\angle 1 = \angle 2$，

所以 $\angle ABC - \angle 1 = \angle BCD - \angle 2$，

即 $\angle 3 = \angle 4$. 所以 $BE \parallel CF$.

8. 解：因为 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$，

$\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 2 : 3 : 4$，

所以 $\angle 2 = 180° \times \dfrac{3}{2+3+4} = 60°$.

因为 $\angle AFE = \angle 2 = 60°$，所以 $AB \parallel DE$.

依据：内错角相等，两直线平行.

因为 $\angle 2 + \angle BDE = 60° + 120° = 180°$，

所以 $EF \parallel BC$.

依据：同旁内角互补，两直线平行.

B 组

1. 解：(1) 因为点 C 在点 B 的北偏西 $60°$ 的方向上，

所以点 B 在点 C 的南偏东 $60°$ 的方向上.

又点 C 在点 A 的北偏西 $30°$ 的方向上，

所以点 A 在点 C 的南偏东 $30°$ 的方向上，

所以 $\angle C = 60° - 30° = 30°$.

(2) 因为 $AB \perp BC$，所以 $\angle ABC = 90°$，

所以 AB 与南北方向夹角与 BC 与南北方向夹角的度数和为 $180° - 90° = 90°$，

又因为点 C 在点 B 的北偏西 $60°$ 的方向上，通过计算可知点 A 在点 B 的南偏西 $30°$ 的方向上.

2. 解：因为 AE 平分 $\angle CAB$，CE 平分 $\angle ACD$，

所以 $\angle CAB = 2\angle 1$，$\angle ACD = 2\angle 2$.

又因为 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，所以 $\angle CAB + \angle ACD = 2\angle 1 + 2\angle 2 = 2(\angle 1 + \angle 2) = 180°$，

所以 $AB \parallel CD$.

3. 解：$CF \parallel BD$.

理由：因为 $BD \perp BE$，所以 $\angle DBE = 90°$，

所以 $\angle ABD + \angle EBC = 90°$.

因为 $\angle EBC + \angle C = 90°$，所以 $\angle ABD = \angle C$，

所以 $CF \parallel BD$.

4. 解：因为 $AB \parallel CD$，$\angle EFG = 72°$，

所以 $\angle BEF = 180° - \angle EFG = 108°$.

又因为 EG 平分 $\angle BEF$，

所以 $\angle BEG = \dfrac{1}{2}\angle BEF = 54°$.

因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle EGF = \angle BEG = 54°$.

C 组

1. 解：AD 平分 $\angle BAC$.

理由：因为 $AD \perp BC$，$EG \perp BC$，

所以 $\angle ADC = \angle EGD = 90°$，

所以 $EG \parallel AD$，

所以 $\angle 3 = \angle 2$，$\angle GEC = \angle 1$.

又因为 $\angle GEC = \angle 3$，所以 $\angle 1 = \angle 2$.

所以 AD 平分 $\angle BAC$.

2. 解：$\angle ADG = \angle C$.

理由：因为 $BD \perp AC$，$EF \perp AC$，

所以 $\angle BDC = \angle EFC = 90°$，

所以 $BD \parallel EF$，

所以 $\angle 2 = \angle CBD$.

又因为 $\angle 1 = \angle 2$，

所以 $\angle 1 = \angle CBD$，

所以 $DG \parallel BC$，

所以 $\angle ADG = \angle C$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料