教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法69招·七八九年级共392招



八年级
数学（上）
荣德基 主编
（R版）
赠教材习题答案

吉林教育出版社

高级教师
点拨
八年级数学（上）（R版）
荣德基主编
吉林教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

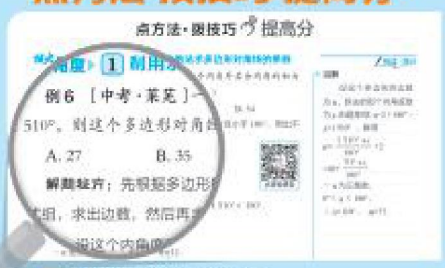
简约的知识梳理总结　　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

方法提高分

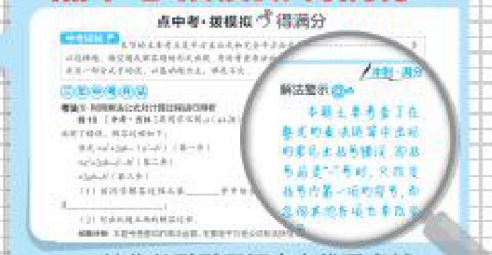
点方法 拨技巧 提高分



» 为你提供解题秘方

考法得满分

点中考 拨模拟 得满分



» 让你从默默无闻走向优秀卓越

第1步　第2步　第3步

三个维度打造极致



基础速提分

点知识 拨考向 速提分



» 给你一把打开数学之门的钥匙

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 上 （R版）

荣德基 主编

本册主编：范志刚



老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点 69 个 得高分

第十一章 三角形

		页码
1	几何图形计数的常用方法	3
2	确定三角形分类标准的方法	4
3	确定三条线段能否组成三角形的两种方法	4
4	数三角形个数的方法	5
5	找三角形某边上的高的方法	9
6	面积法	12
7	证明三角形内角和定理的思路方法	17
8	求三角形内角的度数的方法	18
9	直角三角形的判定方法	19
10	证明两条直线垂直的方法	19
11	分类讨论思想	36

第十二章 全等三角形

		页码
1	确定两个图形全等的方法	41
2	利用全等三角形的性质求角的度数的方法	44
3	证明线段位置关系的方法	44
4	等面积法	44
5	解答探究条件类题目的方法	45
6	证明三角形全等找条件的方法	51
7	证明线段或角相等的方法	52
8	证明一条线段等于两条线段的和的方法	54
9	证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法	55
10	证明角平分线的方法思路	65
11	构造三角形全等的几种方法	73

第十三章 轴对称

		页码
1	判断轴对称图形的方法	82
2	识别轴对称的方法	82
3	求分散的阴影部分面积的方法	85
4	判断一个图形或图案是轴对称图形的方法	86
5	判断线段垂直平分线的两种方法	89
6	作轴对称图形的对称轴的两种方法	90
7	证明两条线段相等常用方法	91
8	利用方程思想解关于坐标系中对称点的思路	98
9	等腰三角形中几种常见的作辅助线的方法	108
10	倍长线段法	108
11	等边三角形的判定方法	114
12	截长补短法	118
13	在出现 60° 角的图形中构造等边三角形的方法	119
14	解决“一线两点”型最短路径问题的方法	123
15	解决“两线一点”型最短路径问题的方法	124
16	解决“两线两点”型最短路径问题的方法	124
17	分类讨论思想	129

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 69 个 得高分

第十四章 整式的乘法与因式分解

		页码
1	逆用幂的乘方法则求式子值的方法	141
2	求指数相同的几个幂相乘的方法	142
3	底数互为倒数（或负倒数）的两个幂相乘的常用方法	143
4	底数比较法	144
5	指数比较法	144
6	逆向运用同底数幂的乘除法法则求值的方法	150
7	多项式除以单项式的方法	152
8	求解与整式乘法有关的不等式（组）的方法	153
9	求多项式中不含某项时未知字母系数的值的方法	154
10	求解多项式整除问题的思路	154
11	求解几何图形问题的方法	162
12	从特殊到一般的思想	163
13	分组分解法	175

第十五章 分式

		页码
1	判断一个式子是否是分式的方法	188
2	求分式值为 0 的字母值的方法	190
3	利用分式的基本性质化系数为整数的方法	192
4	约分的方法	193
5	确定最简公分母的一般方法	194
6	求解当分式的值为负数时字母取值范围的思路	195
7	换元法	196
8	拆项法	212
9	从特殊到一般的思想	212
10	底倒指反法	215
11	用科学记数法表示绝对值小于 1 的数的思路	216
12	把用科学记数法表示的数还原的思路	217
13	判断一个方程是不是分式方程的方法	220
14	根据分式方程的解的范围求字母取值范围的思路	226
15	利用整体思想求分式的值	235
16	倒数法求分式的值	236
17	裂项相消法解分式方程	236

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

看微课

三角形的定义…… 2

三角形的三边关系…… 4

观动画

三角形的高…… 9

三角形的稳定性…… 12

看微课

全等三角形…… 42

全等三角形的性质…… 43

探索三角形全等的条件…… 48

观动画

全等变换方式…… 41

学方法

等边三角形的判定方法…… 114

看微课

轴对称图形与轴对称…… 82

等腰三角形的性质……104

等腰三角形的判定……106

第十一章 三角形

11.1 与三角形有关的线段 …… 2

11.1.1 三角形的边 …… 2

11.1.2 三角形的高、中线与角平分线 …… 9

11.1.3 三角形的稳定性 …… 9

11.2 与三角形有关的角 …… 17

11.3 多边形及其内角和 …… 26

素养提分

行动篇：运用铅垂法找重心 ☞ P16

技巧篇：三角形的外角解题技巧 ☞ P33

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P34

第十二章 全等三角形

12.1 全等三角形 …… 41

12.2 三角形全等的判定 …… 48

12.3 角的平分线的性质 …… 61

素养提分

行动篇：倒过来想 ☞ P69

应用篇：分析综合法在三角形全等中的应用 ☞ P70

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P72

第十三章 轴对称

13.1 轴对称 …… 81

13.1.1 轴对称 …… 81

13.1.2 线段的垂直平分线的性质 …… 88

13.2 画轴对称图形 …… 96

13.3 等腰三角形 …… 103

13.3.1 等腰三角形 …… 103

13.3.2 等边三角形 …… 113

13.4 课题学习 最短路径问题 …… 123

素养提分

应用篇：分类讨论思想在等腰三角形中的应用 ☞ P129

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P131

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十四章 整式的乘法与因式分解

14.1 整式的乘法 …… 140
14.1（一） 幂的运算 …… 140
14.1（二） 整式的乘除法 …… 147
14.2 乘法公式 …… 158
14.3 因式分解 …… 166
14.3.1 提公因式法 …… 166
14.3.2 公式法 …… 172

素养提分

行动篇：解读“恒等式” ☞ P156
应用篇：恒等变形在整式的运算和因式分解中的应用 ☞ P180
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P181

学方法
因式分解的方法……173

看微课
幂的乘方……141
积的乘方……142
单项式乘多项式……148
平方差公式……159

第十五章 分式

15.1 分式 …… 188
15.2 分式的运算 …… 200
15.2.1 分式的乘除 …… 200
15.2.2 分式的加减 …… 208
15.2.3 整数指数幂 …… 215
15.3 分式方程 …… 220

素养提分

行动篇：类比·探索 ☞ P199
技巧篇：分式运算中的常用技巧与方法 ☞ P231
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P233

学方法
巧求分式值的方法…… 236

看微课
分式的定义……188
分式的基本性质…… 191
整数指数幂……215
分式方程的定义…… 220

参考答案及点拨（单独成册）



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

01. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

02. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

03. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.它的特点：特殊→一般.

04. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

05. **类比思想：**类比思想是根据两个对象之间在某些方面的相同或相似，从而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种思想.因此，类比是从特殊到特殊的推理.通过类比，可以发现新旧知识的相同点，利用已有的旧知识，来认识新知识.

06. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

07. **面积法：**运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法.

08. **综合法：**综合法是指从已知条件出发，借助其性质和有关定理，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证结论或需求问题，其特点和思路是“由因导果”，即从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”.

09. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于某些用常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简捷.其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法.主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

10. **分析法：**分析法就是指从命题的结论出发，步步寻找使结论成立的条件，直到得到一个已知条件，从而判定原命题的结论成立的一种解题方法，分析法也称“执果索因”法，即执结论，步步索条件.

11. **截长补短法：**是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想.所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一条线段相等.所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长与另一条已知的较短的线段长度相等的一段，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系.

12. **倍长中线法：**延长底边的中线，使所延长部分与中线相等，然后往往需要连接相应的顶点，则对应角对应边都对应相等.此法常用于构造全等三角形，利用中线的性质进行证明对应边之间的关系.

13. **换元法：**所谓换元法，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，使它简化，使问题易于解决.

14. **裂项相消法：**裂项相消法的实质是将所要求和的代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

感悟三角形的基本性质

感悟三角形的基本性质











第十一章 三角形

核心考点

你将见到的

- 三角形的三边关系
- 三角形的重要线段
- 三角形的稳定性
- 三角形内角和定理
- 三角形内、外角之间的关系
- 多边形及其内角和

核心方法

我们为你提供的

- 按序计数法
- 等积法、面积法
- 构造法
- 化分散为集中法
- 分类讨论思想
- 转化思想

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.1 与三角形有关的线段

11.1.1 三角形的边

核心知识

- 三角形的定义
- 三角形的分类（按边分类）
- 三角形的三边关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 1 三角形的相关元素

1. 三角形的定义 由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形.

三角形的表示法： 用符号“△”表示三角形，如图 11.1−1，顶点是 A，B，C 的三角形，记作△ABC，读作“三角形 ABC”.

字母的顺序可以自由安排.

2. 三角形的“三元素”

（1）**顶点：** 三角形相邻两边的公共端点叫做三角形的顶点. 如图 11.1−1，点 A，B，C 是△ABC 的三个顶点.

（2）**边：** 组成三角形的线段叫做三角形的边. 如图 11.1−1，线段 AB，BC，AC 是△ABC 的三条边.

（3）**内角：** 在三角形中，相邻两边所组成的角叫做三角形的内角，简称三角形的角. 如图 11.1−1，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是△ABC 的三个角.

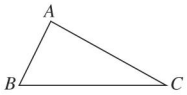


图 11.1−1

提分·必记

特别解读

1. 三角形的“三要素”：
（1）三条线段；
（2）三个顶点不在同一条直线上；
（3）三条线段首尾顺次相接.
2. 三角形的边是线段，既可用两个顶点的大写字母表示，也可用边所对的顶点的小写字母表示，如顶点 A 所对的边 BC 可用 a 表示.

拔考向▶ 利用三角形及相关元素的定义进行辨析

题型 1：三角形的定义在识别图形中的应用

例 1 如图 11.1−2 中都是由三条线段组成的图形，其中是三角形的是（　　）

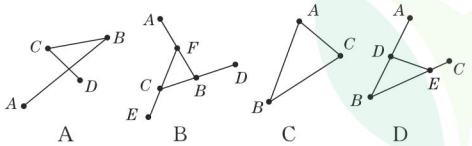


图 11.1−2



解题秘方： 紧扣三角形的“三要素”进行识别.

解： 选项 A，B，C，D 都是由三条线段组成的图形，但 A，B，D 不是首尾顺次相接，只有 C 符合三角形的“三要素”.

答案： C

提分·秘诀

特别提醒

图形是三角形与图形内含有三角形是两个不同的概念.

图形是三角形表示整个图形是一个三角形，图形内含有三角形表示图形局部有三角形，如选项 A，B，D 中的图形内都含有三角形，但整个图形不是三角形.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：三角形及其元素在计数及识别中的应用

例 2 如图 11.1−3，在△ ABC 中，D，E 分别是 BC，AC 上的点，连接 BE，AD 交于点 F.

（1）图中共有多少个三角形？请把它们表示出来.

（2）请写出△ BDF 的三个顶点，三条边及三个内角.

（3）以 AB 为边的三角形有哪些？

（4）以∠ C 为内角的三角形有哪些？

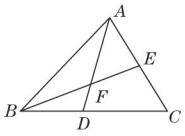


图 11.1−3

解题秘方：紧扣“三角形及其元素的定义”及几何图形计数的常用方法进行解答.

解：（1）图中共有 8 个三角形，分别是△ ABF，△ AEF，△ ABE，△ ABD，△ ACD，△ ABC，△ BDF，△ BCE.

（2）△ BDF 的三个顶点是点 B，D，F，三条边是线段 BD，DF，BF，三个内角是∠ FBD，∠ FDB，∠ BFD.

（3）以 AB 为边的三角形有△ ABF，△ ABD，△ ABE，△ ABC.

（4）以∠ C 为内角的三角形有△ ACD，△ BCE，△ ACB.

方法点拨

几何图形计数的常用方法：

1. 按序计数法；
2. 画图计数法；
3. 基本图形计数法；
4. 分类计数法.

特别提醒

三角形三个顶点的字母的次序可以任意调换，如△ ABF 也可以写成△ BAF，△ BFA，△ FAB 等.

知识点 2 三角形的分类

提分·必记

1. 等腰三角形

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形，其中相等的两边都叫做腰，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做顶角，腰与底边的夹角叫做底角.（如图 11.1−4）

特别地：三边都相等的三角形叫做等边三角形，即底边与腰相等的等腰三角形叫做等边三角形.

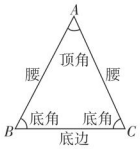


图 11.1−4

2. 三角形的分类

等腰三角形包括等边三角形，等边三角形是特殊的等腰三角形.

（1）**按边的相等关系分类：**

三角形 { 三边都不相等的三角形；等腰三角形 { 底边和腰不相等的等腰三角形；等边三角形 }

分类示意图如图 11.1−5 所示.

（2）**按内角的大小分类：**

三角形 { 锐角三角形；直角三角形；钝角三角形 }

分类示意图如图 11.1−6 所示.



图 11.1−5



图 11.1−6

特别提醒

1. 三角形按内角的大小分类和按边的相等关系分类是两种不同的分类方式，各自独立，但无论按哪种标准分类，原则都是不重不漏.
2. 对于等腰直角三角形，按边的相等关系分类属于等腰三角形，按内角的大小分类属于直角三角形.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用三角形的分类判断三角形的形状

例 3 根据下列所给条件，判断△ABC的形状（若已知的是角，则按角的分类标准去判断；若已知的是边，则按边的分类标准去判断）：

（1）$\angle A=45°$，$\angle B=65°$，$\angle C=70°$；（2）$\angle C=120°$；

（3）$\angle C=90°$；（4）$AB=BC=4$，$AC=5$.

解题秘方：根据三角形的分类标准进行判断.

解：（1）$\because \angle A=45°$，$\angle B=65°$，$\angle C=70°$，

$\therefore \angle A<\angle B<\angle C<90°$，$\therefore$△$ABC$是锐角三角形.

（2）$\because \angle C=120°>90°$，$\therefore$△$ABC$是钝角三角形.

（3）$\because \angle C=90°$，$\therefore$△ABC是直角三角形.

（4）$\because AB=BC=4$，$AC=5$，$\therefore$△ABC是等腰三角形.

提分·秘诀

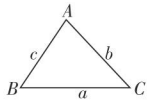
方法技巧

确定三角形分类标准的方法：

1. 若按角分类，则看这个三角形的最大角的类型：最大角是钝角的三角形是钝角三角形；最大角是直角的三角形是直角三角形；最大角是锐角的三角形是锐角三角形.
2. 若按边分类，则看边是否相等.

知识▶3 三角形的三边关系

1. 三角形的三边关系

文字语言	数学语言	理论依据	图形
三角形两边的和大于第三边	$a+b>c$，$b+c>a$，$a+c>b$	两点之间线段最短	
三角形两边的差小于第三边	$a-b<c$，$b-c<a$，$a-c<b$（$a>b>c$）		

2. 三角形三边关系的应用

（1）判断三条线段能否组成三角形；

（2）已知三角形的两边长，确定第三边长（或周长）的取值范围；

（3）三角形的边长用字母表示时，求字母的取值范围；

（4）证明线段的不等关系.


三角形的三边关系

提分·必记

特别提醒

三角形中的“两边”指任意两边，应用时常选取两条较小的边的和与第三边作比较，选取最大边与最小边的差与第三边作比较.

已知三角形两边长a，b（$a>b$），根据三角形的三边关系可知，第三边长c的取值范围是$a-b<c<a+b$.

考向▶利用三角形的三边关系判断线段关系

题型 1：三角形的三边关系在判断组成三角形的条件中的应用

例 4 下列长度的三条线段能组成三角形的是（　　）

A.1cm，2cm，3.5cm　　B.4cm，5cm，9cm

C.5cm，8cm，15cm　　D.6cm，8cm，9cm

解题秘方：紧扣“三角形的三边关系”进行判断.

解：$\because$ 1+2<3.5，即两边的和小于第三边，$\therefore$不能组成三角形.

$\because$ 4+5=9，即两边的和等于第三边，$\therefore$不能组成三角形.

$\because$ 5+8<15，即两边的和小于第三边，$\therefore$不能组成三角形.

$\because$ 6+8>9，即两条较短边的和大于最长边，$\therefore$能组成三角形.

答案：D

提分·秘诀

技巧提醒

确定三条线段能否组成三角形的两种方法：

1. 看较短的两条线段的和是否大于最长的线段，若是，则能组成三角形；反之，则不能组成三角形.
2. 看最长的线段减去最短的线段的差是否小于第三条线段，若是，则能组成三角形；反之，则不能组成三角形.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：三角形的三边关系在求第三边长的取值范围中的应用

例 5 如图 11.1−7 是一个直三棱柱的平面展开图，其中 $AD=10$，$CD=2$，则 AB 的长可以是（　　）

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

解题秘方：紧扣“三角形的三边关系”，将 AB 与 BC，CD 的关系转化到同一个三角形的三边中，利用三角形的三边关系求出 AB 长的取值范围.

解：由图 11.1−7 可知 $AD=AB+BC+CD$.

$\because AD=10$，$CD=2$，$\therefore AB+BC=8$.

设 $AB=x$，则 $BP=AB=x$，$BC=8-x$.

$\because PC=CD$，$\therefore x-2<8-x<x+2$.

解得 $3<x<5$. $\therefore AB$ 的长可以是 4.

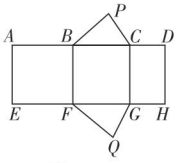


图 11.1−7

答案：B

方法点拨

已知某三条线段能围成一个三角形，则其中任何一边都小于另两边之和，大于另两边之差，据此既可以解决“已知两边长，求第三边长的取值范围”，也可以解决“用字母表示三角形边长时字母的取值范围”.

题型 3：三角形的三边关系在证明线段的不等关系中的应用

例 6 如图 11.1−8，D 是△ ABC 内任意一点，连接 BD，DC. 求证：$AB+AC>BD+CD$.

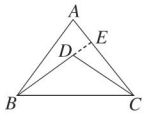


图 11.1−8

解题秘方：紧扣“三角形的三边关系”，将相关线段转化到三角形三边中去证明.

证明：如图 11.1−8，延长 BD 交 AC 于点 E.

在△ ABE 中，$AB+AE>BE$；在△ CDE 中，$DE+CE>CD$，

上述两式相加得 $AB+AE+DE+CE>BE+CD$，

$\therefore AB+AE+CE>BE-DE+CD$，$\therefore AB+AC>BD+CD$.

解法提醒

要证明线段和的大小关系，首先要把 AB，AC，BD，CD 这些分散的线段集中，构造三角形，并运用“三角形任意两边的和大于第三边”这一关系，得出两个同向不等式，然后通过变形得出结论.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用按序计数法探究三角形的个数

挑战·高分

例 7 如图 11.1−9，第 1 个图形是一个三角形，分别连接这个三角形三条边的中点得到第 2 个图形，再分别连接第 2 个图形中间的小三角形三条边的中点得到第 3 个图形……按此方法继续下去，请你根据每个图中三角形的个数的规律，完成下列问题：



第 1 个　　第 2 个　　第 3 个

图 11.1−9

（1）将下表填写完整：

图形序号	1	2	3	4	5	…
三角形的个数	1	5	9			…

（2）第 n 个图形中有_____个三角形（用含 n 的式子表示）.

方法点拨

数三角形个数的方法：

1. 按图形形成的过程去数（即重新画一遍图形，按照三角形形成的先后顺序去数）.
2. 按三角形面积的大小顺序去数.
3. 从图中的某一条边开始沿着一定方向去数.
4. 先固定一个顶点，然后按照一定顺序不断变换另外两个顶点去数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“每个图形中三角形的个数与图形序号之间的关系”，找出一般规律进行解答.

解：分析图形，知第2个图形在第1个图形的基础上增加4个三角形，第3个图形在第2个图形的基础上又增加4个三角形，以此类推，每操作一次，增加4个三角形，因此第4个图形比第3个图形多4个三角形，即9+4=13(个)；第5个图形比第4个图形多4个三角形，即13+4=17（个），则第n个图形比第1个图形多4（$n-1$）个三角形，即第n个图形中有4（$n-1$）+1=$4n-3$（个）三角形.

答案：（1）13；17　（2）（$4n-3$）

另解

也可以直接从表格中给出的已知数据1，5，9发现相邻的两个数据之间相差4，即第2个比第1个多4，第3个比第2个多4，比第1个多2个4，故第4个比第1个多3个4，第5个比第1个多4个4，…，第n个比第1个多（$n-1$）个4.

拔尖角度▶2 利用数形结合思想化简三角形三边关系的绝对值

例8 已知△ABC的三条边的长分别为a，b，c，化简$|a+b-c|-|a-b-c|$.

解题秘方：利用“形”的关系确定“数”$a+b-c$，$a-b-c$的符号，结合绝对值的意义去绝对值符号进行化简.

解：∵△ABC的三条边的长分别为a，b，c，

∴ $a+b>c$，$a-b<c$，∴ $a+b-c>0$，$a-b-c<0$.

∴ $|a+b-c|-|a-b-c|$

$=(a+b-c)-[-(a-b-c)]$

$=a+b-c+a-b-c$

$=2a-2c$.

挑战·高分

解法提醒

化简涉及三角形三边的绝对值时，要先运用三角形的三边关系判断绝对值符号内的式子的正负，然后利用$|a|=\begin{cases}a(a\geq 0),\\-a(a<0)\end{cases}$去掉绝对值符号，再合并化简.

拔尖角度▶3 利用列举法由三边关系确定组成三角形的个数

例9 某同学从长为10cm，6cm，5cm，4cm的四根木棒中，任选三根组成三角形，则组成三角形的个数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：用列举法列出各种选取情况，紧扣“三角形的三边关系”进行解答.

解：从四根木棒中任取三根，取法有四种：

（1）选择长度分别为10cm，6cm，5cm的三根木棒，

∵ 5+6>10，∴能组成三角形；

（2）选择长度分别为10cm，6cm，4cm的三根木棒，

∵ 4+6=10，∴不能组成三角形；

（3）选择长度分别为10cm，5cm，4cm的三根木棒，

∵ 4+5<10，∴不能组成三角形；

（4）选择长度分别为6cm，5cm，4cm的三根木棒，

∵ 4+5>6，∴能组成三角形. 故组成三角形的个数是2.

答案：B

挑战·高分

解法提醒

从四根木棒中任取三根，可利用逆向思维进行列举，即从四根木棒中任意去掉一根，共有四种情况.

解法提醒

直接将每种取法中两个较小的数之和与最大的数相比较，若两个较小的数之和大于最大的数，则能组成三角形；若两个较小的数之和不大于最大的数，则不能组成三角形.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用分类讨论思想求等腰三角形的存在情况

挑战·高分

例 10 用一条长为 21cm 的细绳围成一个三角形，能围成一个有一边长是 5cm 的等腰三角形吗？

解题秘方：紧扣“5cm 长的边的可能性（腰或底边）”进行分类解答.

解：当 5 cm 长的边是底边时，

设腰长为 x cm，

则 $5+2x=21$，解得 $x=8$.

易知符合三角形的三边关系.

当 5 cm 长的边是腰时，

设底边长为 y cm，

则 $2\times5+y=21$，解得 $y=11$.

$\because 5+5<11$，不符合三角形的三边关系，

$\therefore$ 不能围成腰长为 5 cm 的等腰三角形.

综上可知，能围成底边长为 5 cm 的等腰三角形.

点拨微课堂

特别提醒

本题运用分类讨论思想，在考虑腰长为 5 cm 和底边长为 5 cm 两种情况的同时，要注意隐含的条件：任意两边之和大于第三边. 解答这类题时，出现两种结果的情况较多，应高度重视.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中的主要考点是三角形的三边关系，单独考查时，判断给出的三条线段能否围成三角形；综合三角形其他知识考查时，主要是求得三角形边长时起检验的作用.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 利用三角形的三边关系求三角形的边长

例 11 [中考·武威]已知 a，b，c 是三角形的三边长，a，b 满足 $|a-7|+(b-1)^2=0$，c 为奇数，则 $c=$_____.

试题评析：本题考查了三角形的三边关系，解题的关键是求出两边长，确定第三边长的取值范围.

解：$\because |a-7|+(b-1)^2=0$，

$\therefore a=7$，$b=1$.

$\because a$，b，c 是三角形的三边长，

$\therefore 7-1<c<7+1$，

即 $6<c<8$.

又$\because c$ 为奇数，

$\therefore c=7$.

答案：7

解法提醒

先由关系式求三角形两边的长，再根据三角形第三边的取值在已知两边的差与两边的和之间，从而求出第三边.

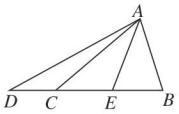
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

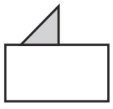
两年模拟兵法 ☞答案见242页

1. [月考·长沙] 如图，以∠B为内角的三角形有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第1题）



（第4题）

2. [中考·常德] 已知三角形两边的长分别是3和7，则此三角形第三边的长可能是（　　）

A. 1　　B.2　　C. 8　　D. 11

3. [中考·贺州] 一个等腰三角形的两边长分别为4，8，则它的周长为（　　）

A. 12　　B. 16

C. 20　　D. 16或20

4. 如图的三角形被木板遮住了一部分，这个三角形是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 以上都有可能

5. 下列说法正确的是（　　）

A. 所有的等腰三角形都是锐角三角形

B. 等边三角形属于等腰三角形

C. 不存在既是钝角三角形又是等腰三角形的三角形

D. 一个三角形中有两个锐角，则它一定是锐角三角形

6. [中考·扬州] 已知n是正整数，若一个三角形的三边长分别是$n+2$，$n+8$，$3n$，则满足条件的n的值有（　　）

A.4个　　B.5个　　C.6个　　D.7个

7. 已知一个等腰三角形的底边长为5，这个等腰三角形的腰长为x，则x的取值范围是（　　）

A. $0<x<\frac{5}{2}$　　B. $x\geqslant\frac{5}{2}$

C. $x>\frac{5}{2}$　　D. $0<x<10$

8. 已知等腰三角形的周长为14，一边长为6，则另外两边的长分别为_____.

9. 已知a，b，c为△ABC的三边长，b，c满足$(b-2)^2+|c-3|=0$，且a为方程$|x-4|=2$的解，则△ABC的形状为_____，周长为_____.

10. 已知在△ABC中，$AB=5$，$BC=2$.

（1）求AC长的取值范围.

（2）求△ABC的周长l的取值范围.

（3）若AC的长为奇数，求△ABC的周长并判断△ABC的形状.

11. [月考·渭南] a，b，c为△ABC的三边，化简：$|a+b+c|-|a-b-c|+|c-a+b|$.

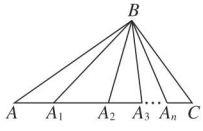
12. 如图，△ABC中，A_1，A_2，A_3，…，A_n为AC边上不同的n个点，首先连接BA_1，图中共有3个三角形，再连接BA_2，图中共有6个三角形……

（1）完成下表：

连线条数	1	2	3	4	5	6
三角形个数						

（2）若有45个三角形，则共连了多少条线?

（3）若一直连接到A_n，则图中共有_____个三角形.　　【导学号：2798126】



（第12题）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.1.2 三角形的高、中线与角平分线
11.1.3 三角形的稳定性

核心知识
- 三角形的高
- 三角形的中线
- 三角形的角平分线
- 三角形的稳定性

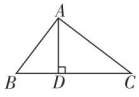
知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 三角形的高

1. 三角形的高的定义和性质

定义	从△ ABC 的顶点 A 向它所对的边 BC 所在直线画垂线，垂足为 D，所得线段 AD 叫做△ ABC 的边 BC 上的高
图形	
性质	∵ AD 是△ ABC 的边 BC 上的高（已知）， ∴ $AD \perp BC$ 于点 D（或∠ ADB= ∠ ADC=90° ）
判定	∵ $AD \perp BC$ 于点 D（或∠ ADB= ∠ ADC=90° ）（已知）， ∴线段 AD 是△ ABC 的边 BC 上的高（三角形的高的定义）

2. 三角形三条高的位置

	高的位置	交点位置	交点名称
锐角三角形	三条高都在三角形内部	三角形内一点	垂心
直角三角形	其中两条高恰好是直角边	直角顶点	
钝角三角形	其中两条高在三角形外部	三角形外一点	

提分·必记

示图

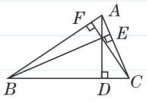


图 11.1−10

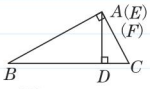


图 11.1−11

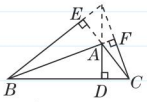


图 11.1−12


三角形的高

拨考向▸ 利用三角形高的定义识别三角形的高

例 1 如图 11.1−13，$AE \perp EC$ 于点 E，$CD \perp AD$ 于点 D，AD 交 EC 于点 B.

（1）△ ABC 的边 BC 上的高为_____，边 AB 上的高为_____；

（2）若 AB=5，BC=2，$CD=\frac{9}{5}$，则 AE=_____.

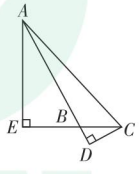


图 11.1−13

解题秘方：（1）紧扣“三角形高的定义”进行判断.

（2）分别以 BC，AB 为底边计算△ ABC 的面积，列式求解.

提分·秘诀

特别提醒

找三角形某边上的高的方法：

1. 找出该边所对的顶点；
2. 过此顶点作该边的垂线，垂线段为该边上的高.

如：作△ABC 中 BC 边上的高→找 BC 边所对的顶点 A，过 A 作 BC 的垂线（E 为垂足），垂线段 AE 即为 BC 边上的高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）△ ABC 是钝角三角形，由钝角三角形高的定义和位置可知，组成钝角的两条边上的高在三角形的外部，

故边 BC 上的高为 AE，边 AB 上的高为 CD.

（2）∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

∴ $\frac{1}{2}\times 2\times AE=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{9}{5}$，∴ $AE=\frac{9}{2}$.

答案：（1）AE；CD　　（2）$\frac{9}{2}$

教你一招

求三角形的面积联想三角形的高，求三角形的高联想三角形的面积是解三角形问题中常用的方法之一. 用同一个三角形不同的面积表达式建立求线段长度的等量关系是一种很重要的数学方法——等积法.

点知识▶ 2 三角形的中线

1. 定义　连接三角形一个顶点和它对边的中点，所得的线段叫做该三角形这条边上的中线.

几何语言：如图 11.1−14，

（1）AD 是 △ ABC 中 BC 边上的中线；

（2）D 是 BC 边的中点；

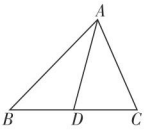


图 11.1−14

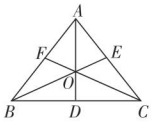


图 11.1−15

（3）$BD=DC$，$BD=\frac{1}{2}BC$，$DC=\frac{1}{2}BC$ 或 $BD=DC=\frac{1}{2}BC$.

2. 三角形的重心　三角形的三条中线相交于一点. 三角形三条中线的交点叫做三角形的重心（如图 11.1−15 中的点 O），重心在三角形内部.

提分·必记

特别解读

三角形的中线把三角形分成的两个三角形的面积和周长的关系：

1. 两个三角形的面积相等；
2. 两个三角形的周长的差等于这两个三角形另两边的差.

拔考向▶ 利用三角形中线的性质进行相关计算

例 2　如图 11.1−16，在 △ ABC 中，AD，BE 分别是 △ ABC，△ ABD 的中线.

（1）若△ ABD 与△ ADC 的周长之差为 3，AB=8，求 AC 的长；

（2）若 $S_{\triangle ABC}$=8，求 $S_{\triangle ABE}$.

解题秘方：利用中线将三角形分成的两个三角形的周长之间的关系和面积之间的关系解题.

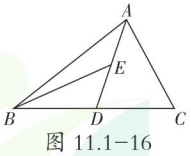


图 11.1−16

解：（1）∵ AD 为 BC 边上的中线，

∴ $BD=CD$.

∴△ ABD 与△ ADC 的周长之差 =（$AB+AD+BD$）−（$AC+AD+CD$）= $AB-AC$.

∵△ ABD 与△ ADC 的周长之差为 3，AB=8，

∴ $8-AC=3$，解得 $AC=5$.

（2）∵ AD 是△ ABC 的中线，∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=4$.

∵ BE 是△ ABD 的中线，∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=2$.

提分·秘诀

详解

三角形的中线把边分成相等的两条线段，故 BD=CD，且△ ABD 的边 BD 上的高与△ ACD 的边 CD 上的高相同，根据等底同高的三角形的面积相等，可得所分得的两个三角形的面积相等，即 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▸3 三角形的角平分线

1. 定义 三角形一个内角的平分线与它的对边相交，顶点和交点之间的线段叫做这个三角形的角平分线.

几何语言：如图 11.1−17，

（1）AD 是△ ABC 的角平分线；

（2）AD 平分∠ BAC 交 BC 于点 D；

（3）∠ BAD= ∠ CAD= $\frac{1}{2}$∠ BAC.

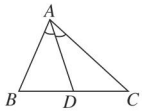


图 11.1−17

2. 三角形三种重要线段的区别

	三角形的高		三角形的中线	三角形的角平分线
用途举例	（1）证线段垂直； （2）证角相等		（1）证线段相等； （2）证面积相等	证角相等
在图中的位置	锐角三角形	三条高全在三角形内	三条中线全在三角形内	三条角平分线全在三角形内
	直角三角形	一条高位于三角形内，另两条高与两直角边重合		
	钝角三角形	一条高位于三角形内，另两条高位于三角形外		
条数	三条		三条	三条
交点位置	锐角三角形	在三角形内	在三角形内	在三角形内
	直角三角形	在直角顶点处		
	钝角三角形	在三角形外		

核心考向▸利用角平分线的定义说明三角形的角平分线

例 3 如图 11.1−18，AD 是△ ABC 的角平分线，DE // AB 交 AC 于点 E，DF // AC 交 AB 于点 F，EF 交 AD 于点 O.

试问：DO 是否为△ DEF 的角平分线？并说明理由.

解题秘方： 根据三角形角平分线的定义进行说明.

解： DO 是△ DEF 的角平分线. 理由如下：

∵ AD 是△ ABC 的角平分线，

∴ ∠ 1= ∠ 2.

∵ DE // AB，DF // AC，

∴ ∠ 3= ∠ 2，∠ 4= ∠ 1.

∴ ∠ 3= ∠ 4.

∴ DO 是△ DEF 的角平分线.

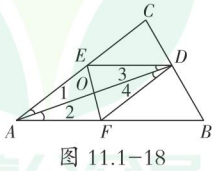


图 11.1−18

提分·必记

特别提醒

角的平分线是一条射线，而三角形的角平分线是一条线段.

三角形的角平分线是其内角的平分线的一部分，故角的平分线的性质三角形的角平分线都具有.

视野拓展

三角形中三个重要的点：

三条高所在直线的交点叫垂心，三条中线的交点叫重心，三条角平分线的交点叫内心.

提分·秘诀

解法提醒

本例在解题过程中，先利用三角形的角平分线的定义，得出相等的角，再结合相关条件推出一组新的相等的角，最后由三角形角平分线的定义说明是三角形的角平分线. 它经历了定义→条件→定义的过程，这就是定义法.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 4 三角形的稳定性

1. 三角形的稳定性

（1）如果三角形的三边长确定，这个三角形的形状、大小就确定了，这就是三角形的稳定性.


三角形的稳定性

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性，在生活中也有广泛的应用.

2. 三角形稳定性的应用

（1）稳定性是三角形特有的，在生产和生活中具有广泛的应用，有很多需要保持稳定性的物体都被制成三角形的形状，如起重机、钢架桥等.

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性，为保证其稳定性，常在图形中构造三角形.四边形的不稳定性在生活中也有广泛的应用,如活动挂架、伸缩门等.

提分·必记

示图

钢架桥 →


图 11.1−19

窗户 →

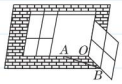


图 11.1−20

伸缩门 →


图 11.1−21

拔考向▸ 利用三角形的稳定性固定物体的形状

例 4 李明家有一个由六根钢管连接而成的钢架 $ABCDEF$，如图 11.1−22，为了使这个钢架稳固，他计划用三根钢管来连接使它不变形.请帮李明解决这个问题.

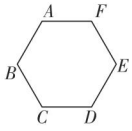
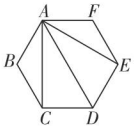
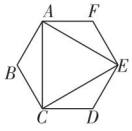


图 11.1−22



①



②

图 11.1−23

解题秘方： 根据三角形的稳定性，将钢架分割成三角形.紧扣“三角形的稳定性”进行解答.

解： 答案不唯一，只要将图形分割成三角形即可.供参考的两种方法如图 11.1−23 ①②.

提分·秘诀

解法提醒

- 判断一个图形是否具有稳定性，要看它的基本组成部分是不是三角形.若是，则具有稳定性；若不是，则不具有稳定性.
- 为了保证四边形及四边以上的图形稳定，最简单的方法是连接对角线（不相邻两个顶点的连线）.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“面积和差关系法”证明线段的和差关系

例 5 如图 11.1−24，已知在△ ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，$DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F，$BG \perp AC$ 于 G. 求证 $BG=DE+DF$.

解题秘方： 判断三角形的高或垂线之间的关系，可转化为用面积之间的关系解决.

证明： 如图 11.1−24，连接 AD. $\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BG = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$.

又 $\because AB=AC$，$\therefore BG=DE+DF$.

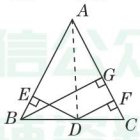


图 11.1−24


点拨微课堂

挑战·高分

方法点拨

面积法是数学中很重要的解题方法，而在涉及垂线段（或三角形的高）的关系时，常将线段的关系转化为面积的关系来解决；当几个三角形的底边相等时，面积的和差关系反映的就是高的和差关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想巧求涉及中线的三角形线段的长

例 6 在△ABC中，$AB=AC$，AC边上的中线BD把△ABC的周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分，求△ABC的各边长.

解题秘方：根据中线的定义及分类讨论思想分不同情况进行计算.

解：设$AB=x$ cm，则$AD=CD=\frac{1}{2}x$ cm.

由于题中条件不能确定图形形状，因此需分以下两种情况求解：

（1）如图 11.1−25 ①，

若$AB+AD=12$ cm，则$x+\frac{1}{2}x=12$.

解得$x=8$，即$AB=AC=8$ cm，

则$CD=4$ cm. 故$BC=15-4=11$(cm).

此时$AB+AC>BC$，三角形存在.

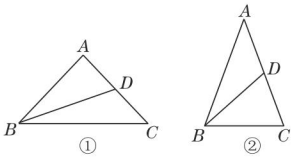


图 11.1−25

∴三边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm.

（2）如图 11.1−25 ②，若$AB+AD=15$ cm，则$x+\frac{1}{2}x=15$.

解得$x=10$，即$AB=AC=10$ cm，则$CD=5$ cm.

故$BC=12-5=7$（cm）. 显然此时三角形存在.

∴三边长分别为 10 cm，10 cm，7 cm.

综上所述，△ABC的三边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm 或 10 cm，10 cm，7 cm.

挑战·高分

解法提醒

1. 若题目中条件交代不是很清楚，如本题“周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分”，具体哪部分长 12 cm 没有指代清楚，故应分类讨论.
2. 求得的三角形边长必须用三角形三边关系进行验证.
3. 分类讨论思想是解几何图形不确定问题的一种常用思想.

拔尖角度▸ 3 利用中线等分面积法分割三角形

例 7 如图 11.1−26 是一块三角形菜地.

（1）要把这块菜地分成面积相等的四块，应该怎么分？

（2）现要求把这块菜地分成面积比为 2 ∶ 3 ∶ 4 的三块，且图中的A处是水源，应该怎么分？

解题秘方：利用高相等时，面积与底边的关系进行分割.

解：（1）有多种分法，如图 11.1−27 的三种分法供参考.

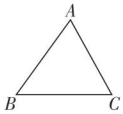
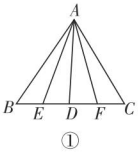
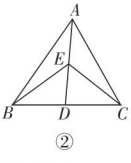


图 11.1−26





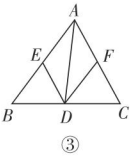


图 11.1−27

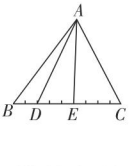


图 11.1−28

（2）可量出BC的长度，把BC九等分，从左到右分别取点D，E，使BD ∶ DE ∶ $EC=2$ ∶ 3 ∶ 4，连接AD，AE，则分成的三个三角形的面积之比为 2 ∶ 3 ∶ 4，如图 11.1−28.（分法不唯一）

挑战·高分

技巧点拨

把三角形面积n等分，关键是根据等底等高的三角形面积相等的性质，转化为把线段（三角形的边）n等分，也可用三角形的**中线**把三角形分成两个面积相等的三角形后再进行等分.

把不是面积等分的问题转化为面积等分问题，先根据比例确定是几等分，再按要求的面积比进行分割.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要知识是三角形的三条重要线段，三条重要线段在中考中一般都是在几何题中起辅助作用，单独考查时，主要考查高的画法或利用角平分线求角的度数，都是基础题，一般都是以选择、填空题形式考查.

三年中考兵法

考法1 利用三角形中线的定义找三角形的中线

例8 [中考·贵阳]如图 11.1-29，在△ ABC 中有四条线段 DE，BE，EF，FG，其中有一条线段是△ ABC 的中线，则该线段是（　　）

A. 线段 DE　　B. 线段 BE　　C. 线段 EF　　D. 线段 FG

试题评析： 本题主要考查三角形的中线，解题的关键是掌握三角形一边的中点与此边所对顶点的连线叫做三角形的中线.

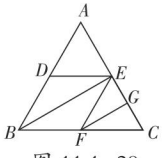
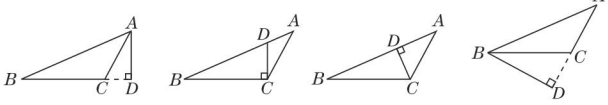


图 11.1-29

答案： B

考法2 利用高的定义判断高

例9 [中考·长沙]如图 11.1-30，过△ ABC 的顶点 A，作 BC 边上的高，以下作法正确的是（　　）



A　　B　　C　　D

图 11.1-30

试题评析： 本题考查了钝角三角形高的作法，解题的关键是正确地理解三角形的高的定义，属于基础送分题.

答案： A

考法3 利用角平分线及整体思想求角的度数

例10 [中考·陕西]如图 11.1-31，△ ABC 中，BD 和 CE 是△ ABC 的两条角平分线，若∠ A=52°，则∠ 1+∠ 2 的度数为_____.

试题评析： 本题考查了三角形角平分线的定义，解题关键是根据角平分线得出角的数量关系，难度适中.

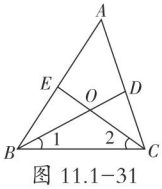


图 11.1-31

解： ∵ ∠ A=52°，∴ ∠ ABC+∠ ACB=180°−52°=128°. ∴∠ 1+∠ 2=$\frac{1}{2}$(∠ ABC+∠ ACB)=$\frac{1}{2}$×128°=64°.

答案： 64°

冲刺·满分

解法提醒

紧扣三角形的中线是三角形"一顶点与其对边中点之间的线段"这一特征进行识别.

方法指导

判断所给的线段是不是三角形的高要抓住高线的两个端点，一个端点是三角形的顶点，另一个端点（垂足）要在三角形这个顶点的对边所在直线上.

解法提醒

三角形的角平分线揭示三角形中角的数量关系，通常与三角形内角和等于180°结合在一起求三角形中角的度数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

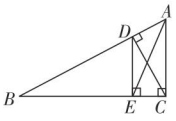
1. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，$DE\perp BC$，垂足分别为D，E. 下面四个结论：①DE是△BCD的高；②DE是△ABE的高；③CD是△ABC的高；④AC是△ABE的高. 其中正确的结论是（　　）

A. ①③

B. ②③

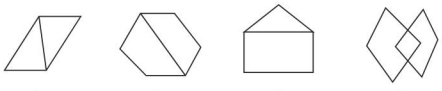
C. ①②③

D. ①③④



（第1题）

2. 下列图形中，具有稳定性的是（　　）


A　　B　　C　　D

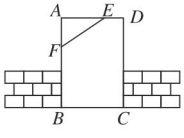
3. 如图，工人师傅砌门时，需要用木条EF固定长方形门框$ABCD$，使其不变形，这样做的依据是（　　）

A. 两点之间线段最短

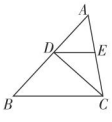
B. 两点确定一条直线

C. 三角形具有稳定性

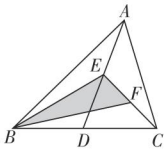
D. 长方形的四个角都是直角



（第3题）



（第4题）



（第5题）

4. [中考·长春]如图，在△ABC中，CD平分$\angle ACB$交AB于点D，过点D作$DE\parallel BC$交AC于点E. 若$\angle A=54°$，$\angle B=48°$，则$\angle CDE$的大小为（　　）

A. 44°　　B. 40°

C. 39°　　D. 38°

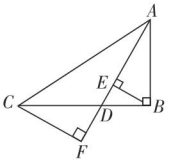
5. 如图，在△ABC中，已知点D，E，F分别为BC，AD，CE的中点，且$S_{\triangle ABC}=8\ \text{cm}^2$，则$S_{\text{阴影}}$等于（　　）

A. $4\ \text{cm}^2$　B. $2\ \text{cm}^2$　C. $1\ \text{cm}^2$　D. $\frac{1}{2}\ \text{cm}^2$

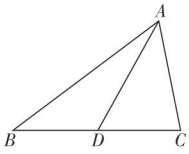
6. [月考·娄底]如图，已知在△ABC中，$\angle ABC=90°$，点D沿BC自B向C运动（点D与点B，C不重合），作$BE\perp AD$于点E，$CF\perp AD$于点F，则$BE+CF$的值（　　）

A. 不变　　B. 变大

C. 变小　　D. 先变大再变小



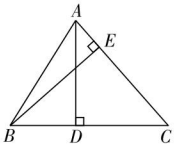
（第6题）



（第7题）

7. 如图，已知AD是△ABC的中线，且$AB=5\ \text{cm}$，$AC=3\ \text{cm}$，则△ABD与△ACD的周长之差是_____.

8. 如图，在△ABC中，$AD\perp BC$于点D，$BE\perp AC$于点E，$BC=9$，$AC=8$，$AD=6$. 求BE的长.

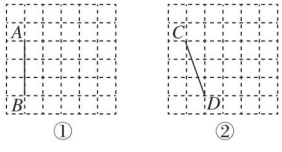


（第8题）

9. 图①、图②均为6×6的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点. 小正方形的边长为1，点A，B，C，D均在格点上，在图①、图②中，只用无刻度的直尺，在给定的网格中按要求画图，所画图形的顶点均在格点上，不要求写画法.

（1）在图①中以线段AB为边画一个△ABM，使其面积为6；

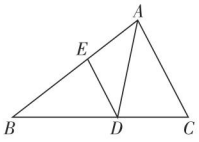
（2）在图②中以线段CD为边画一个△CDN，使其面积为6.



（第9题）

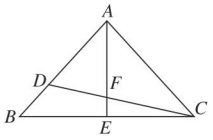
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图，D 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上一点，$DE \parallel AC$ 交 AB 于点 E. 若 $\angle EDA = \angle EAD$，求证：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.



（第 10 题）

11. [中考·济南] 如图，D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC 上的点，$AD=2BD$，$BE=CE$. 设 $\triangle ADF$ 的面积为 S_1，$\triangle CEF$ 的面积为 S_2，若 $S_{\triangle ABC}=6$，求 S_1-S_2 的值.



（第 11 题）

素养提分 行动篇

运用铅垂法找重心

[阅读材料] 我们知道，三角形的三条中线的交点称为三角形的重心.

重心是一个物理名词，从效果上看，我们可以认为物体各个部分所受重力的合力集中于一点，这一点就叫做该物体的重心. 在生活中，我们常常用手指来支撑一个物体，不断变化手指的位置，物体越来越稳定，此时手指的位置就越来越接近重心.

把一根均匀的木棒悬挂在一根细绳上，不断调整悬挂点的位置，直至木棒处于水平状态，记下悬挂点的位置，用刻度尺测量该点在木棒上的位置，刚好处在木棒的正中间. 在数学上，我们可以把一根均匀的木棒抽象地看成一条线段，一条线段的重心就是这条线段的中点.

取一块均匀的三角形纸板，画出它的两条中线，用一根细绳在两条中线的交点处将三角形纸板悬挂起来，纸板处于水平状态.

[探究实验] 我们把上面这种找重心的办法叫做铅垂法，可以自己试着用铅垂法找出平行四边形、长方形、正方形的重心.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.2 与三角形有关的角

核心知识
- 三角形内角和定理
- 直角三角形的性质与判定
- 三角形的外角
- 三角形外角的性质

知识链接

三角形的角
- 内角 → 内角和定理 → 直角三角形的性质与判定
- 外角 → 外角等于不相邻两内角的和
- 外角 → 外角大于不相邻的任何一个内角

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三角形内角和定理

1. 定理 三角形三个内角的和等于 $180°$.

几何语言：在△ ABC 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

2. 三角形内角和定理的证明思路

思路一：利用“两直线平行，内错角及同位角相等”将三角形的三个内角转化为一个平角，如图 11.2−1 ①②所示.

思路二：利用“两直线平行，内错角相等”将三角形的三个内角转化为两平行线间的一组同旁内角，如图 11.2−2 ①②所示.

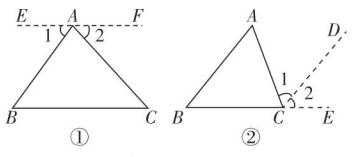


图 11.2−1

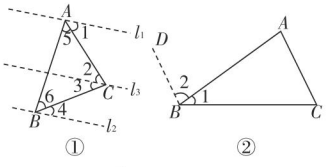


图 11.2−2

拨考向 利用三角形内角和定理解与三角形内角相关的问题

题型 1：三角形内角和定理在求角中的应用

例 1 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是△ ABC 的三个内角.

（1）已知 $\angle A=40°$，$\angle B=\angle C$，求 $\angle B$，$\angle C$ 的度数；

（2）已知 $\angle A-\angle B=16°$，$\angle C=54°$，求 $\angle A$，$\angle B$ 的度数；

（3）已知 $\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，求 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数.

解题秘方： 紧扣三角形内角和定理建立方程（组）求解.

解：（1）设 $\angle B=\angle C=x°$.

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\therefore 40+x+x=180$，

解得 $x=70$. $\therefore \angle B=\angle C=70°$.

（2）设 $\angle A=x°$，$\angle B=y°$.

$\because \angle A-\angle B=16°$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle C=54°$，

提分·必记

特别解读

1. 三角形内角和定理揭示了三角形三个内角之间的数量关系.
2. 三角形的三个内角中最多只有一个钝角或直角，或者说至少有两个锐角.

特别提醒

证明三角形内角和定理的思路方法：主要是从平行线作为桥梁，将三个内角“转移”集中成一个角或两个角，再证明这个角或两个角的和是 180° 即可.

提分·秘诀

另解

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A=40°$，

$\therefore \angle B+\angle C=180°-40°=140°$.

又 $\because \angle B=\angle C$，

$\therefore \angle B=\angle C=140°\div 2=70°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases} x-y=16, \\ x+y+54=180, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=71, \\ y=55. \end{cases}$

$\therefore \angle A=71°$，$\angle B=55°$.

（3）$\because \angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$,

$\therefore \angle B=2\angle A$，$\angle C=3\angle A$.

设$\angle A=x°$，则$\angle B=2x°$，$\angle C=3x°$.

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore x+2x+3x=180$. $\therefore x=30$.

$\therefore \angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$.

教你一招：三角形中求角的度数问题一般用方程思想求解. 当角之间存在数量关系时，一般根据三角形内角和为 180° 列方程（组）求解.

题型 2：三角形内角和定理在解实际问题中的应用

例 2 一个零件的形状如图 11.2-3，按规定$\angle A$应等于 90°，$\angle ABD$，$\angle ACD$应分别是 34° 和 18°. 李叔叔量得$\angle BDC=146°$，请你帮李叔叔判断这个零件是否合格，并说明理由.

解题秘方：建立三角形的模型利用三角形内角和求出角度，再用三角形内角和进行验证.

解：这个零件不合格. 理由如下：

如图 11.2-3，连接 BC.

在△ABC中，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，

$\because \angle A=90°$，$\angle ACD=18°$，$\angle ABD=34°$，

$\therefore \angle DCB+\angle DBC=38°$.

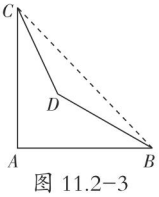


图 11.2-3

在△DCB中，$\angle BDC+\angle DCB+\angle DBC=146°+38°=184°\neq 180°$，

∴这个零件不合格.

点知识 2 直角三角形的性质与判定

1. 直角三角形的性质 直角三角形的两个锐角互余.

几何语言：在△ABC中，$\because \angle C=90°$，$\therefore \angle A+\angle B=90°$.

2. 直角三角形的表示 直角三角形可以用符号“Rt △”表示，直角三角形ABC可以写成 Rt △ABC.

注意：“Rt △”后必须紧跟表示直角三角形的三个顶点的大写字母，不能单独使用. 如“直角三角形的边”不能写成“Rt △的边”.

3. 直角三角形的判定 有两个角互余的三角形是直角三角形.

几何语言：在△ABC中，$\because \angle A+\angle B=90°$，

$\therefore \angle C=90°$.

即△ABC为直角三角形.

方法点拨

求三角形内角的度数的方法：

1. 若已知两个角的度数，求第三个角的度数，直接利用三角形内角和定理求解.
2. 若已知一个角的度数及另两个角之间的等量关系，或不知道任何一个角的度数，只知道三个角之间的数量关系，一般根据“三角形内角和为 180°”这个隐含的等量关系列方程（或方程组）求解.

解法提醒

“三角形内角和等于 180°”这个定理是任何三角形都必须具备的性质. 若某三角形三个内角的和不等于 180°，则说明该三角形不存在.

提分·必记

特别解读

1. 直角三角形的性质和判定的理论依据是三角形内角和定理.
2. 在直角三角形中，若已知两个锐角之间的数量关系，可结合两个锐角互余求出每个锐角的大小，不需要再利用三角形内角和定理求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用直角三角形的性质与判定解与直角三角形相关的问题

题型1：直角三角形的性质在求角的度数中的应用

例3 如图11.2-4，AB，CD相交于点O，$AC \perp CD$于点C，若$\angle BOD=35°$，则$\angle A=$_____.

解题秘方：根据直角三角形中两锐角之间的数量关系求出角的度数.

解：$\because \angle BOD=35°$，

$\therefore \angle AOC=35°$.

又$\because AC \perp CD$，$\therefore \angle ACD=90°$.

$\therefore \angle A=90° - \angle AOC=90° - 35° = 55°$.

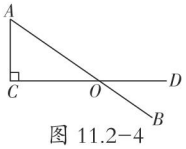


图11.2-4

答案：55°

题型2：直角三角形的判定在证明直角三角形中的应用

例4 如图11.2-5，$AB \parallel CD$，直线EF分别交AB，CD于点E，F，$\angle BEF$的平分线与$\angle DFE$的平分线相交于点P.

求证：$\triangle EFP$是直角三角形.

解题秘方：三角形中有两个角的和等于90°（互余）就可证明该三角形为直角三角形.

证明：$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle BEF+\angle DFE=180°$.

又$\because EP$平分$\angle BEF$，FP平分$\angle DFE$，

$\therefore \angle PEF=\frac{1}{2}\angle BEF$，$\angle PFE=\frac{1}{2}\angle DFE$.

$\therefore \angle PEF+\angle PFE=\frac{1}{2}(\angle BEF+\angle DFE)=\frac{1}{2}\times 180° =90°$.

$\therefore \triangle EFP$是直角三角形.

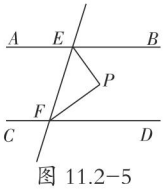


图11.2-5

题型3：直角三角形的性质与判定在证明两线垂直中的应用

例5 如图11.2-6，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle ACD=\angle B$.求证$CD \perp AB$.

解题秘方：利用直角三角形的性质与判定求出CD，AB的夹角为直角.

证明：$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle A+\angle B=90°$（直角三角形的性质）.

$\because \angle ACD=\angle B$，

$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$（等量代换）.

$\therefore \angle CDA=90°$（直角三角形的判定）.

$\therefore CD \perp AB$.

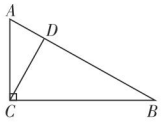


图11.2-6

提分·秘诀

解法提醒

求某一个锐角的度数时，若这个锐角在一个直角三角形中，则可从先求该直角三角形中另一个锐角的度数，然后利用直角三角形中锐角之间的互余关系求出该锐角的度数.

特别提醒

直角三角形的判定方法：

1. 证明三角形中有一个内角为90°（或证明三角形的两条边互相垂直）.
2. 证明三角形中有两个内角互余.
3. 证明三角形中有一个内角与已知的直角相等.

教你一招

证明两条直线垂直的方法：

1. **定义法：**推导相交的两直线的夹角中有一个角为直角.
2. **证明直角三形法：**在三角形中，推导出两个角的和为90°，从而得此三角形为直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 3 三角形的外角

1. 定义 三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的外角.

2. 外角性质（三角形内角和定理的推论） 三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

常见应用：

（1）已知一个外角及与它不相邻的两个内角中的一个，可求另一个内角；

（2）证明一个角等于另两个角的和或差；

（3）作为中间关系式证明两个角相等.

3. 拓展性质

（1）三角形的一个外角大于与它不相邻的任一内角.

（2）三角形的外角和等于 360° .

提分·必记

特别解读

1. 位置：在三角形的外部.
2. 与相邻内角是邻补角.
3. 三角形每一个顶点处都有两个外角，它们是对顶角，因此三角形共有六个外角，通常每一个顶点处取一个外角.

拔考向 ▸ 利用三角形外角的性质解与角相关的问题

题型 1：三角形外角的性质在求角的度数中的应用

例 6 如图 11.2-7，AD 是 $\angle CAE$ 的平分线，$\angle B=35°$，$\angle DAE=60°$，求 $\angle ACD$ 的度数.

解题秘方： 利用三角形外角的性质，将 $\angle ACD$ 转化为 $\angle B+\angle BAC$ 进行求解.

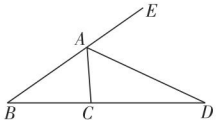


图 11.2-7

解： $\because AD$ 是 $\angle CAE$ 的平分线，$\angle DAE=60°$，

$\therefore \angle CAE=2\angle DAE=2\times 60°=120°$.

$\therefore \angle BAC=180°-\angle CAE=180°-120°=60°$.

$\because \angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角，

$\therefore \angle ACD=\angle BAC+\angle B=60°+35°=95°$.

提分·秘诀

一题多解

求三角形的某一个角的度数时，可以从三角形内角和与三角形的外角的角度思考. 本题解法是将 $\angle ACD$ 看成 $\triangle ABC$ 的外角求的，也可以将 $\angle ACD$ 看成 $\triangle ACD$ 的内角来求.

$\because \angle DAE=60°$，$\angle B=35°$，

$\therefore \angle D=60°-35°=25°$.

$\because AD$ 是 $\angle CAE$ 的平分线，

$\therefore \angle CAD=\angle DAE=60°$.

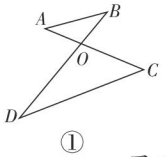
$\therefore \angle ACD=180°-60°-25°=95°$.

题型 2：三角形外角的性质在探究角之间的关系中的应用

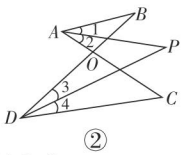
例 7 已知：如图 11.2-8 ①，AC 与 BD 相交于点 O，连接 AB，CD.

（1）求证：$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$；

（2）如图 11.2-8 ②，AP 平分 $\angle BAC$，DP 平分 $\angle BDC$，求证 $2\angle P=\angle B+\angle C$.

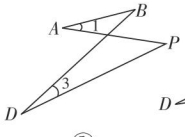


①

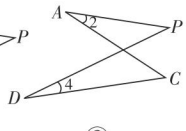


②

图 11.2-8



①



②

图 11.2-9

解题秘方： 利用基本图形法将复杂图形分解成基本图形进行探究.

解法提醒

剖图是解决几何问题的关键步骤，关键是根据图中角的关系从复杂图形中解剖出常见的基本图形.

图 11.2-8 ① 中，$\angle BOC$ 既是 $\triangle AOB$ 的外角又是 $\triangle COD$ 的外角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：（1）∵∠BOC=∠A+∠B，∠BOC=∠C+∠D，

∴∠A+∠B=∠C+∠D.

（2）由（1）的结论可知，∠1+∠B=∠3+∠P，

∠4+∠C=∠2+∠P.

∴∠2+∠3+∠P+∠P=∠1+∠4+∠B+∠C.

∵AP，DP分别是∠BAC，∠BDC的平分线，

∴∠1=∠2，∠3=∠4.

∴2∠P=∠B+∠C.

图11.2-8②可以解剖出两个“8字形”图形（如图11.2-9），则可得∠1+∠B=∠3+∠P，∠4+∠C=∠2+∠P.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用方程思想求三角形中角的度数

例8 如图11.2-10，在△ABC中，D是BC边上一点，∠1=∠2，∠3=∠4，∠BAC=63°，求∠DAC的度数.

解题秘方：设未知数，根据三角形外角的性质及题中条件，将已知角和所求角集中到同一三角形中列方程求解.

解：设∠1=∠2=x°，

则∠3=∠4=∠1+∠2=2x°.

∵∠BAC=63°，

∴∠DAC=63°−x°.

∵∠3+∠4+∠DAC=180°，

∴2x+2x+63−x=180，解得x=39.

∴∠DAC=63°−39°=24°.

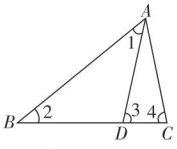


图11.2-10

挑战·高分

方法点拨

三角形外角的性质可以把不在同一个三角形中的几个内角联系起来，它是不同三角形的内角之间相互转化的“纽带”.

拔尖角度▶ 2 利用化分散为集中的转化思想求多个角的度数和

例9 如图11.2-11，在五角星$ABCDE$中，求∠A+∠B+∠C+∠D+∠E.

解题秘方：利用“化分散为集中”的思想和“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”，将分散的角转化到一个三角形中求解.

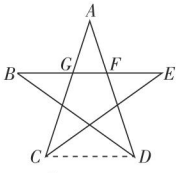


图11.2-11

解法一：∵∠AGF是△GCE的外角，

∴∠AGF=∠C+∠E. 同理，∠AFG=∠B+∠D.

在△AFG中，∠A+∠AFG+∠AGF=180°，

∴∠A+∠B+∠C+∠D+∠E=180°.

解法二：如图11.2-11，连接CD，易知∠B+∠E=∠BDC+∠ECD.

∴∠A+∠B+∠ACE+∠ADB+∠E

=∠A+∠ECD+∠ACE+∠ADB+∠BDC

=∠A+∠ACD+∠ADC=180°.

挑战·高分

特别提醒

本题两种解法充分体现了化分散为集中的转化思想，即将分散在不同三角形中的几个角运用三角形外角的性质或例7中“8字形”图形的性质集中到同一个三角形中去，最后利用三角形内角和定理解决问题.

解法一是用三角形外角的性质转化的；解法二是用“8字形”图形的性质转化的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用类比特殊法探究三个角间的数量关系

例 10 如图 11.2-12，在△ ABC 中，AD 是边 BC 上的高，AE 是∠ BAC 的平分线．若∠ B=50°，∠ C=70°，求∠ EAD 的度数．试猜想：若∠ $B=\alpha$，∠ $C=\beta$（$\beta>\alpha$），则∠ EAD 的度数是多少？（用含 α，β 的式子表示）

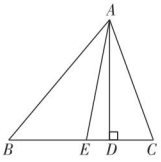


图 11.2-12

解题秘方： 利用三角形的高线和角平分线揭示角的数量关系解决问题．

解： ∵∠ B=50°，∠ C=70°，

∴ ∠ BAC=180° − ∠ B− ∠ C=180° − 50° − 70° =60°．

∵ AD 是边 BC 上的高，∴∠ ADB=90°．

∴∠ BAD=90° − ∠ B=90° − 50° =40°．

∵ AE 是∠ BAC 的平分线，∴ $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$．

∴∠ EAD= ∠ BAD− ∠ BAE=40° −30° =10°．

猜想：$\angle EAD=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$．

挑战·高分

详解

∵AD 是 BC 边上的高，

∴∠ BAD=90° − α，

∠ BAC=180° − ∠ B− ∠ C

=180° − α− β.

∵AE 是∠ BAC 的平分线，

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$

$=\frac{1}{2}(180°-\alpha-\beta)$

$=90°-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta.$

∴∠ EAD= ∠ BAD− ∠ BAE

$=90°-\alpha-(90°-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta)$

$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha).$

拔尖角度▸ 4 利用三角形内角、外角关系法探究角平分线夹角的规律

例 11 在△ ABC 中，∠ A=40°．

（1）如图 11.2-13①，已知∠ ABC 和∠ ACB 的平分线交于点 O，求∠ BOC 的度数；

（2）如图 11.2-13②，已知∠ ABC 的平分线和△ ABC 的外角∠ ACD 的平分线交于点 O，求∠ BOC 的度数；

（3）如图 11.2-13③，已知△ ABC 的外角∠ CBD 与∠ BCE 的平分线交于点 O，求∠ BOC 的度数．

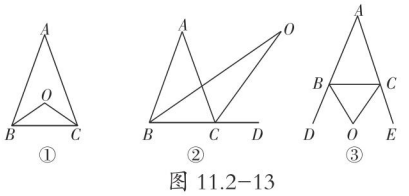




图 11.2-13

解题秘方： 利用角平分线的定义、三角形内角和定理及三角形外角的性质探究需求角与已知角之间的关系．

解：（1）∵∠ ABC，∠ ACB 的平分线交于点 O，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

挑战·高分

归纳总结

与三角形角平分线有关结论：

1. 由（1）可知，三角形中任意两个内角的平分线相交所成的角（简记为内夹角）等于 90°加上第三个角的一半，即 $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.
2. 由（2）可知，三角形中任意一个内角的平分线和与该内角不相邻的一个外角的平分线所成的角（简记为内外夹角）等于另外一个不与此外角相邻的内角的一半，即 $\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A$.
3. 由（3）可知，三角形中与∠ A 不相邻的两个外角平分线相交所成的角（简记为外夹角）等于

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A=110°$.

（2）$\because \angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线交于点 O，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCD=\frac{1}{2}\angle ACD$.

$\because \angle OCD$ 是 $\triangle BCO$ 的外角，$\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，

$\therefore \angle OCD=\angle BOC+\angle OBC$，$\angle ACD=\angle ABC+\angle A$.

$\therefore \angle BOC=\angle OCD-\angle OBC=\frac{1}{2}(\angle ACD-\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle A-\angle ABC)=\frac{1}{2}\angle A=20°$.

（3）$\because \angle CBD$ 与 $\angle BCE$ 的平分线交于点 O，

$\therefore \angle CBO=\frac{1}{2}\angle CBD$，$\angle BCO=\frac{1}{2}\angle BCE$.

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle CBO+\angle BCO)=180°-\frac{1}{2}\times(\angle CBD+\angle BCE)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB+\angle A+\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+180°)=90°-\frac{1}{2}\angle A=70°$.

90°减去∠A的一半，即 $\angle BOC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

另解

根据角平分线的定义和三角形外角的性质，可得

$\angle OCD=\angle OBC+\angle BOC$，

$\angle ACD=2\angle OBC+40°$，

$\angle ACD=2\angle OCD$，

$\therefore 2\angle OBC+40°=2\angle OBC+2\angle BOC$.

$\therefore \angle BOC=20°$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点为三角形内角和定理和三角形外角的性质．在中考中，对三角形内角和定理的考查主要利用此定理求角的度数，多以选择题和填空题形式考查，难度较小；三角形外角的性质常常与三角形内角和定理及平行线、角平分线相结合考查，是近几年中考的命题热点，多以填空题、选择题形式考查．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用三角形内角和定理判断三角形的形状

例12 [中考·长沙]一个三角形三个内角的度数之比为1∶2∶3，则这个三角形一定是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

试题评析：本题主要考查三角形内角和定理、三角形按角如何分类等知识，解决本题的关键是掌握三角形内角和定理，以及三角形按角如何分类．

解：设三角形三个内角的度数分别为 $x°$，$2x°$，$3x°$，根据三角形内角和定理可得 $x+2x+3x=180$，解得 $x=30$，因此三角形三个内角的度数分别为 30°，60°，90°．故该三角形为直角三角形．

答案：B

解法提醒

在一个三角形中，若有一个内角的度数等于另两个内角的度数之和，则这个三角形为直角三角形，表现形式可以是数量关系，如∠A=∠B+∠C，也可以是比例关系，如本题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用平行线的性质及三角形内、外角的关系求角的度数

例 13 [中考·宿迁]如图 11.2-14，点 D 在△ ABC 的边 AB 的延长线上，$DE \parallel BC$，若∠ $A=35°$，∠ $C=24°$，则∠ D 的度数是（　　）

A. 24°　　B. 59°　　C. 60°　　D. 69°

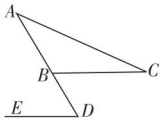


图 11.2-14

试题评析：本题考查了平行线的性质和三角形外角的性质，掌握平行线的性质并且准确识图是解题的关键.

解：根据“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”求得∠ $CBD=59°$，再根据“两直线平行，内错角相等”得∠ $D=$ ∠ $CBD=59°$.

答案：B

考法 3 利用角平分线及三角形外角的性质求角的度数

例 14 [中考·宜昌]如图 11.2-15，在 Rt△ ABC 中，∠ $ACB=90°$，∠ $A=40°$，△ ABC 的外角∠ CBD 的平分线 BE 交 AC 的延长线于点 E.

（1）求∠ CBE 的度数；

（2）过点 D 作 $DF \parallel BE$，交 AC 的延长线于点 F，求∠ F 的度数.

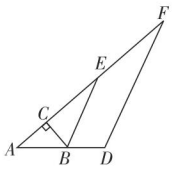


图 11.2-15

试题评析：本题考查了直角三角形的性质、三角形外角的性质、平行线的性质、邻补角的定义、角平分线的定义，掌握各定义与性质是解题的关键.

解：（1）∵在 Rt△ ABC 中，∠ $ACB=90°$，∠ $A=40°$，

∴∠ $ABC=90°-$ ∠ $A=50°$.

∴∠ $CBD=130°$.

∵ BE 是∠ CBD 的平分线，

∴∠ $CBE=\frac{1}{2}$∠ $CBD=65°$.

（2）∵∠ $ACB=90°$，∠ $CBE=65°$，

∴∠ $CEB=90°-65°=25°$.

∵ $DF \parallel BE$，∴∠ $F=$ ∠ $CEB=25°$.

教你一招

平行线的性质中，同位角相等及内错角相等都能起到转化角的作用，通过相等角的转化建立三角形内、外角之间关系的模型.

思路点拨

第(1)题先根据直角三角形的两个锐角互余，求出∠ ABC=90°-∠ A=50°，由邻补角的定义得出∠ CBD=130°，再根据角平分线的定义即可求出∠ CBE=$\frac{1}{2}$∠ CBD=65°；

第(2)题先根据三角形外角的性质求出∠ CEB=90°-65°=25°，再根据平行线的性质即可得出∠ F=∠ CEB=25°.

两年模拟兵法 ☞答案见 243 页

1. [中考·杭州]在△ ABC 中，若一个内角等于另外两个内角的差，则（　　）

A. 必有一个内角等于 30°

B. 必有一个内角等于 45°

C. 必有一个内角等于 60°

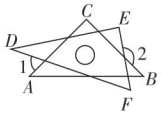
D. 必有一个内角等于 90°

2. [中考·青海]小桐把一副直角三角尺按如图的方式摆放在一起，其中∠ $E=90°$，∠ $C=90°$，∠ $A=45°$，∠ $D=30°$，则∠ 1+∠ 2 等于（　　）

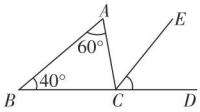
A. 150°　　B. 180°

C. 210°　　D. 270°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 2 题）



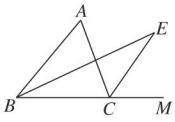
（第 3 题）

3. [中考·广西]如图，∠ *ACD* 是△ *ABC* 的外角，*CE* 平分∠ *ACD*，若∠ *A*=60°，∠ *B*=40°，则∠ *ECD* 等于（　　）

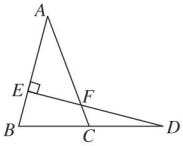
A. 40°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 55°

4. [中考·大庆]如图，在△ *ABC* 中，*BE* 是∠ *ABC* 的平分线，*CE* 是外角∠ *ACM* 的平分线，*BE* 与 *CE* 相交于点 *E*，若∠ *A*=60°，则∠ *BEC* 是（　　）

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°



（第 4 题）



（第 5 题）

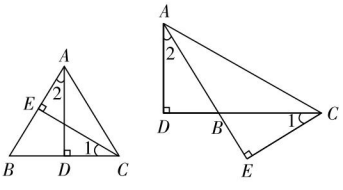
5. [中考·赤峰]如图，点 *D* 在 *BC* 的延长线上，*DE* ⊥ *AB* 于点 *E*，交 *AC* 于点 *F*. 若∠ *A* = 35°，∠ *D* = 15°，则∠ *ACB* 的度数为（　　）

A.65°　　B.70°　　C.75°　　D.85°

6. 如图①，在△ *ABC* 中，*AD* ⊥ *BC* 于点 *D*，*CE* ⊥ *AB* 于点 *E*.

（1）猜想∠ 1 与∠ 2 的数量关系，并说明理由.

（2）如果∠ *ABC* 是钝角，如图②，（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由.

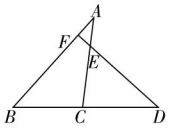


（第 6 题）

7. 如图，已知 *D* 是△ *ABC* 的边 *BC* 延长线上的一点，*DF* 交 *AC* 于点 *E*，∠ *A*=35°，∠ *ACD*=83°.

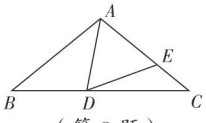
（1）求∠ *B* 的度数；

（2）若∠ *D*=42°，求∠ *AFE* 的度数.



（第 7 题）

8. 如图，在△ *ABC* 中，∠ *B*= ∠ *C*, ∠ *BAD*=40°，且∠ *ADE*= ∠ *AED*. 求∠ *CDE* 的度数.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.3 多边形及其内角和

核心知识

- 多边形及正多边形
- 多边形的内角和
- 多边形的外角和

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 多边形及其相关概念

1. 多边形的定义 在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫做多边形.

（1）**表示方法：**表示多边形时，先写出多边形的名称，后面依次写出多边形的顶点字母.

（2）**分类：**多边形按组成它的线段的条数分成三角形、四边形、五边形……三角形是最简单的多边形. 如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫做 n 边形.

2. 相关概念

（1）**内角：**多边形相邻两边组成的角叫做它的内角.

（2）**外角：**多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的外角.

（3）**对角线：**连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的对角线.

3. 凸多边形 画出多边形的任何一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形，否则就是凹多边形. 本节只讨论凸多边形.

4. 正多边形 各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做正多边形.

提分·必记

特别解读

多边形的三个必要条件：

1. 线段在“同一平面内”；
2. 线段“不在同一直线上”且条数不少于 3；
3. 首尾顺次相接.

特别解读

正多边形必备的两个条件：

(1) 各个角都相等；

(2) 各条边都相等.

说明：若一个多边形的各个角都相等或各条边都相等，则它不一定是正多边形.

拔考向▸利用多边形的有关概念进行辨析

例 1 下列说法中，正确的有（　　）

①三角形是边数最少的多边形；

②等边三角形和长方形都是正多边形；

③n 边形有 n 条边、n 个顶点、n 个内角和 n 个外角；

④六边形从一个顶点出发可以画 3 条对角线，所有的对角线共有 9 条.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方：利用多边形的有关概念进行辨析.

提分·秘诀

知识储备

1. 多边形有几条边就是几边形，且顶点个数、内角个数均与边数相等，外角个数等于边数的 2 倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：①三角形是边数最少的多边形，正确；

②等边三角形是正多边形，但长方形不是正多边形，不正确；

③n 边形有 n 条边、n 个顶点、n 个内角和 $2n$ 个外角，不正确；

④根据对角线的定义画出六边形的对角线可知，从一个顶点出发可以画 3 条对角线，所有的对角线共有 9 条，正确．

答案：B

2. 从n边形的一个顶点出发，可以作（$n-3$）条对角线，它们将n边形分为（$n-2$）个三角形，n 边形一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线．

点知识▶ 2 多边形的内角和

1. 定理 n 边形内角和等于（$n-2$）$\times 180°$ （$n \geqslant 3$）．

2. 多边形内角和公式的常见应用

（1）已知多边形的边数，求内角和；

（2）已知多边形的内角和，求边数；

（3）求正 n 边形每个内角的度数，其公式为 $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$；

（4）已知 n 边形每个内角的度数，且度数都相等，求边数．

提分·必记

特别解读

1. 从 n 边形的内角和公式（$n-2$）$\times 180°$ 可知 n 边形的内角和一定是 $180°$ 的整数倍．

2. 多边形的内角和随边数的变化而变化，边数每增加 1，内角和就增加 $180°$．

拔考向▶ 利用多边形内角和公式求多边形的角度或边数

题型 1：多边形的内角和公式在求角度中的应用

例 2 如图 11.3-1，正五边形 $ABCDE$ 中，对角线 AC 与边 DE 平行，求 $\angle BCA$ 的度数．

解题秘方：紧扣多边形的内角和公式及平行线的性质求出相关角的度数．

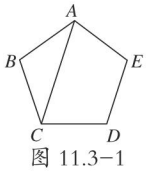


图 11.3-1

解：∵五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

$\therefore \angle BCD=\angle D=\frac{180°\times(5-2)}{5}=108°$．

∵ $AC \parallel DE$，$\therefore \angle ACD+\angle D=180°$．

$\therefore \angle ACD=180°-108°=72°$．

$\therefore \angle BCA=\angle BCD-\angle ACD=108°-72°=36°$．

提分·秘诀

解法提醒

运用多边形的内角和公式可以求出任何一个多边形的内角和，根据正多边形的每个内角相等，就可以求出正多边形每个内角的度数．

题型 2：已知多边形的内角和（或角）在求边数中的应用

例 3 根据下列条件求多边形的边数：

（1）多边形的内角和是 $1\,620°$；

（2）正多边形的每个内角均为 $120°$．

解题秘方：根据多边形内角和公式列出方程求解．

解：设多边形的边数为 n，根据题意得：

（1）$(n-2)\cdot 180=1\,620$，

已知内角和，设出边数n，利用内角和公式列出方程求边数n

解得 $n=11$．故多边形的边数为 11．

（2）$(n-2)\cdot 180=120n$，

解得 $n=6$．故正多边形的边数为 6．

解法提醒

在解决多边形的内角和问题时，有两个隐含的关键条件：一是多边形的每一个内角的度数都大于 $0°$ 小于 $180°$；二是多边形的边数 n 的取值范围是 $n \geqslant 3$ 且 n 为整数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：截角在确定多边形边数中的应用

例 4 一个多边形截去一个角后，形成的新多边形的内角和是 2 880°，则原多边形的边数是多少？

解题秘方：紧扣截去一个角所得的多边形与原多边形相比，边数变化的规律求解.

解：设新多边形的边数为 n，根据题意，得

$(n-2)\times 180^\circ = 2\,880^\circ$，

解得 $n=18$.

∵新多边形与原多边形相比，边数可能增加一条，可能不变，也可能减少一条，

∴原多边形的边数是 17 或 18 或 19.

特别提醒

一个多边形(除三角形外)截去一个角后，按不同的截法可得到边数不同的三种多边形，即边数增加1，边数不变，边数减少1. 以五边形为例，如图 11.3-2 所示.

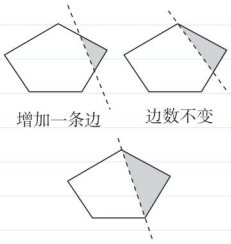


图 11.3-2

点知识 3 多边形的外角和

1. 定理 多边形的外角和等于 360°.

多边形的外角和是由多边形内、外角的关系推导出的，n 边形的外角和等于 $n\times 180^\circ-(n-2)\times 180^\circ=360^\circ$.

2. 常见应用

(1) 已知外角度数求正多边形的边数；

(2) 已知正多边形的边数求外角度数，所用公式为 $\dfrac{360^\circ}{n}$.

提分·必记

特别解读

1. 多边形的外角和是指每个顶点处取一个外角的和.
2. 多边形的外角和恒等于 360°，与边数多少无关.

拔考向 利用多边形的外角和定理计算

例 5 根据下列条件解决问题：

(1) 一个多边形的各内角都相等，已知其中一个外角为 72°，求该多边形的边数；

(2) 已知一个正多边形的每一个外角等于 30°，求这个正多边形的边数.

解题秘方：根据多边形的内角与外角的关系及外角和定理计算.

解：(1) 设该多边形的边数为 n.

根据多边形的外角和为 360°，

得 $n\times 72^\circ=360^\circ$，解得 $n=5$.

∴该多边形的边数为 5.

(2) ∵多边形的外角和为 360°，

∴ $360^\circ\div 30^\circ=12$.

故这个正多边形的边数为 12.

提分·秘诀

解法提醒

多边形的各内角相等，从而外角也相等，已知其中一个外角的度数，由多边形的外角和是 360°，即可得出边数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用求多边形的边数法求多边形对角线的条数

例6 [中考·莱芜]一个多边形除一个内角外其余内角的和为1 510°，则这个多边形对角线的条数是（　　）

A. 27　　B. 35　　C. 44　　D. 54

解题秘方： 先根据多边形的每一个内角都大于0°且小于180°，列出不等式组，求出边数，然后再求对角线的条数.



解： 设这个内角度数为 x，多边形的边数为 n，

则 $(n-2)\times180°-x=1\,510°$.

$\therefore x=(n-2)\times180°-1\,510°$.

$\because 0°<x<180°$，$\therefore 0°<(n-2)\times180°-1\,510°<180°$.

$\therefore \frac{151}{18}<n-2<\frac{169}{18}$.

$\because n$ 是正整数，$\therefore n-2=9$. $\therefore n=11$.

$\therefore \frac{n(n-3)}{2}=\frac{11\times8}{2}=44$.

答案： C

挑战·高分

另解

设这个多边形的边数为 n，除去的那个内角度数为 x. 由题意得 $(n-2)\cdot180°-x=1\,510°$，解得

$n=\frac{1\,510°+x}{180°}+2$

$=10+\frac{70°+x}{180°}$.

$\because n$ 为正整数，

$0°<x<180°$，

$\therefore x=110°$，$n=11$.

拔尖角度 2 利用转化凸多边形法求多边形的内角和

例7 如图11.3-3，求∠1+∠2+∠3+∠4+∠5+∠6+∠7的度数.

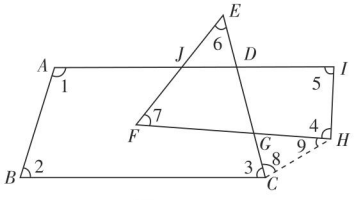


图 11.3-3

解题秘方： 将不规则图形中的角转化为一个凸多边形或几个凸多边形的内角，然后利用多边形内角和公式求解.

解： 如图11.3-3，连接 CH，

则∠6+∠7=∠8+∠9.

$\therefore$∠1+∠2+∠3+∠4+∠5+∠6+∠7

=∠1+∠2+∠3+∠8+∠9+∠4+∠5

$=(5-2)\times180°$

$=540°$.

挑战·高分

解法提醒

- 有关"折线图"中求多个角和的问题，可运用数学的转化思想，通过作适当的辅助线，将其转化到同一个多边形中，利用多边形的内角和解决.
- 非凸多边形多角和求解思路：一般通过添加辅助线把图形转化为凸多边形，然后运用多边形内角和公式求解.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查多边形的内角和公式以及多边形的内、外角和与边数之间的关系，近几年主要以选择题和填空题形式出现，以考查基础为主，题目较容易.

三年中考兵法

考法1 利用多边形的内、外角的关系求内角和

例8 [中考·北京]若正多边形的一个外角是60°，则该正多边形的内角和为（　　）

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

试题评析： 本题考查了多边形的内角、外角及内角和，解题的关键是掌握内、外角的关系和多边形的内角和公式.

解： ∵正多边形的一个外角为60°，∴每个内角为120°.

设这个正多边形的边数为n.

由题意，得$(n-2)\cdot 180°=120°\cdot n$，

解得$n=6$.

∴$120°\cdot n=120°\times 6=720°$.

答案： C

考法2 利用正多边形的定义及外角和求边数和角

例9 [中考·南平]一个机器人从O点出发，每前进1米，就向右转体α（$0°<\alpha<180°$），照这样走下去，机器人恰能回到O点，如果$\alpha=15°$，则机器人所走过的路程为_____；若机器人所走过的路程最短，则α的值等于_____.

试题评析： 本题主要考查正多边形的定义及正多边形的外角和，解题的关键是利用外角和等于360°求正多边形的边数.

解： 根据正多边形的定义可知机器人走的路线恰好围成正多边形.

∵$\alpha=15°$，

∴正多边形的每个外角等于15°，

∴正多边形的边数为$360°\div 15°=24$.

∵正多边形每条边长为1米，

∴机器人所走过的路程为24米.

机器人转的次数越少，所走的路程就越短，根据多边形的定义可知，边数至少为3，

故$\alpha=360°\div 3=120°$.

答案： 24米；120°

冲刺·满分

解法指导

利用多边形内角和公式构造关于边数的方程，通过解方程确定多边形的边数.

方法点拨

因为多边形的外角和是一个定值，所以正多边形每个外角的度数与边数的乘积就是个定值，每个外角的度数越大，边数就越小. 边数最小的多边形是三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用多边形的内角和公式和角平分线的定义求角

例 10 [中考·济宁]如图 11.3-4，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，$DP$，$CP$ 分别平分 $\angle EDC$，$\angle BCD$，则 $\angle P$ 的度数是（　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°

试题评析：本题主要考查了多边形内角和公式及角平分线的定义，解题的关键是掌握多边形内角和公式.

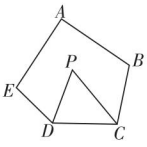


图 11.3-4

解：∵五边形 $ABCDE$ 的内角和为 $(5-2)\times 180°=540°$，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，

∴$\angle EDC+\angle BCD=240°$.

又∵DP，CP 分别平分 $\angle EDC$，$\angle BCD$，

∴$\angle PDC+\angle PCD=120°$.

∴在 $\triangle CDP$ 中，$\angle P=180°-(\angle PDC+\angle PCD)=180°-120°=60°$.

答案：C

思路点拨

先根据五边形内角和公式及已知条件求得∠EDC+∠BCD，再根据角平分线的定义求得∠PDC+∠PCD，最后根据三角形内角和定理求得∠P的度数.

两年模拟兵法 答案见 243 页

1. 若从一个多边形的某个顶点出发，最多可以引 10 条对角线，则它是（　　）

A. 十三边形　　B. 十二边形

C. 十一边形　　D. 十边形

2. [中考·乌鲁木齐]如果正 n 边形每一个内角等于与它相邻的外角的 2 倍，则 n 的值是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. [期中·广安]若一个正 n 边形的每个内角为 144°，则这个正 n 边形的所有对角线的条数是（　　）

A. 7　　B. 10　　C. 35　　D. 70

4. [月考·凉山州]一个多边形切去一个角后，形成的新多边形的内角和为 1 080°，那么原多边形的边数为（　　）

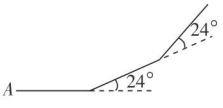
A. 7　　B. 7 或 8

C. 8 或 9　　D. 7 或 8 或 9

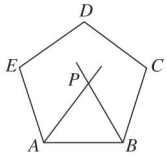
5. [中考·十堰]如图，小华从 A 点出发，沿直线前进 10 米后左转 24°，再沿直线前进 10 米，又向左转 24°，…，照这样走下去，她第一次回到出发地 A 点时，一共走的路程是（　　）

A. 140 米　　B. 150 米

C. 160 米　　D. 240 米



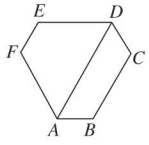
（第 5 题）



（第 6 题）

6. [中考·株洲]如图，过正五边形 $ABCDE$ 的顶点 B 作一条射线与其内角 $\angle EAB$ 的平分线相交于点 P，且 $\angle ABP=60°$，则 $\angle APB=$_____度.

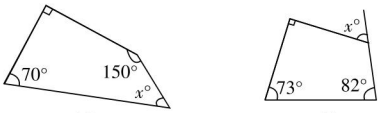
7. [中考·宜宾]如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$AD\parallel BC$，则 $\angle DAB=$_____.



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，求图形中 x 的值．



(1)　　(2)

（第 8 题）

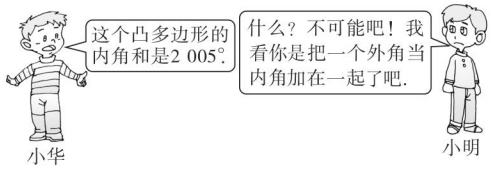
9. 一个多边形的所有内角与某一个外角的度数总和为 1 350°，求该多边形的边数．

10. [模拟 · 河北] 已知 n 边形的内角和 $\theta=(n-2)\times 180°$．

（1）甲同学说，θ 能取 360°；而乙同学说，θ 也能取 630°．甲、乙的说法对吗？若对，求出边数 n；若不对，说明理由．

（2）若 n 边形变为（$n+x$）边形，发现内角和增加了 360°，用列方程的方法确定 x.

11. 如图是小华与小明的对话．



（第 11 题）

（1）内角和是 2 005°，小明为什么说不可能?

（2）小华求的是几边形的内角和?

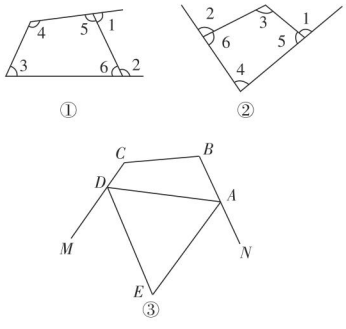
（3）请你求出错把外角当内角的那个外角的度数．

12. （1）如图①②，试探究 $\angle 1$，$\angle 2$ 与 $\angle 3$，$\angle 4$ 之间的数量关系；

（2）如果我们把 $\angle 1$，$\angle 2$ 称为四边形的外角，那么请你用文字描述上述的关系；

（3）用你发现的结论解决下列问题：如图③，AE，DE 分别是四边形 $ABCD$ 的外角 $\angle NAD$，$\angle MDA$ 的平分线，$\angle B+\angle C=240°$，求 $\angle E$ 的度数．

【导学号：2798126】



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三角形的外角解题技巧

荣老师告诉你 三角形外角的性质：①三角形的外角和与它相邻的内角互补；②三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和；③三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角；④三角形的外角和等于360°．三角形外角的性质体现了角与角之间相等与不等的关系，它是进行与角有关的计算或证明的重要依据，在求角的度数以及比较角的大小方面应用较广．

应用一 ▶ 利用三角形外角的性质求角的度数

例1 如图1，$AB \parallel CD$，$\angle B=23°$，$\angle D=42°$，则$\angle BED$的度数为（　　）

A.23°　　B.42°　　C.65°　　D.19°

解题秘方： 利用平行线和三角形外角的性质转化角求度数．

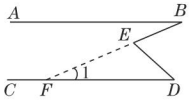


图1

解： 如图1，延长BE交CD于点F.

$\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle 1=\angle B=23°$．

$\because \angle BED$是$\triangle EDF$的外角，

$\therefore \angle BED=\angle 1+\angle D=23°+42°=65°$．

答案： C

方法点拨： 利用平行线的性质，转化相等的角，构造外角的模型，利用三角形外角的性质求角的度数．

应用二 ▶ 利用三角形外角的性质证明两个角相等

例2 如图2，在$\triangle ABC$中，D，E分别在BC，AC边上，且$\angle ADE=\angle B$.

求证$\angle BAD=\angle CDE$.

解题秘方： 利用三角形外角的性质建立角之间的关系证明．

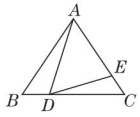


图2

证明： $\because \angle ADC$是$\triangle ADB$的外角，

$\therefore \angle ADC=\angle B+\angle BAD$.

而$\angle ADE=\angle B$，

$\angle ADC=\angle ADE+\angle CDE$，

$\therefore \angle ADE+\angle CDE=\angle ADE+\angle BAD$.

$\therefore \angle BAD=\angle CDE$.

方法点拨： 三角形外角的性质②揭示了外角和内角之间的等量关系，证明两个角相等时，若涉及内、外角，此性质是常用的等量关系．

应用三 ▶ 利用三角形外角的性质证明角的不等关系

例3 如图3，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AD \perp BC$于点D，E是AD上一点．

求证$\angle DEC>\angle ABC$.

解题秘方： 寻找三角形的内、外角，利用三角形外角的性质证明不等关系．

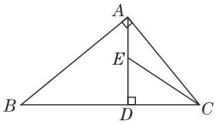


图3

证明： $\because \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=90°$．

又$\because AD \perp BC$，$\therefore \angle ADB=90°$.

$\therefore \angle ABC+\angle BAD=90°$.

$\therefore \angle ABC=\angle DAC$.

又$\because \angle DEC$是$\triangle AEC$的外角，

$\therefore \angle DEC>\angle DAC$. $\therefore \angle DEC>\angle ABC$.

方法点拨： 三角形外角的性质③揭示了三角形的内、外角之间的不等关系，若证明两个角的不等关系，将大角作为某三角形的外角，小角作为与之不相邻的一个内角，则可转化为三角形的内、外角之间的关系进行证明．

应用四 ▶ 利用三角形外角的性质求不规则图形的内角和

例4 如图4，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数．

解题秘方： 利用三角形外角的性质将需求的角转化．

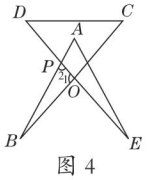


图4

解： 由题意可得$\angle 1=\angle C+\angle D$，$\angle 2=\angle A+\angle E$.

而$\angle 1+\angle 2+\angle B=180°$，

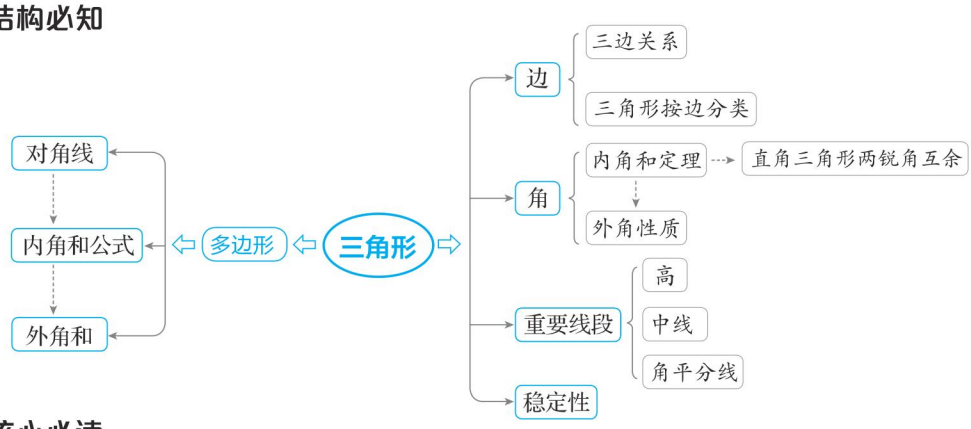
$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 三角形按边分类分为不等边三角形和等腰三角形，等腰三角形分为底边与腰不相等的等腰三角形和等边三角形.

2. **三角形的三边关系**：三角形两边的和大于第三边，三角形两边的差小于第三边.

3. **三角形的重要线段**：高、中线、角平分线.每种都有三条，且所在直线都相交于一点.除了高线有可能在三角形的外部或边上外，中线和角平分线都在三角形的内部.

4. **三角形的角的定理**：（1）三角形三个内角的和等于 $180°$；（2）三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

5. **多边形的角的定理**：（1）n 边形内角和等于 $(n-2)\times180°$；（2）多边形的外角和等于 $360°$.

知识方法专题

知识必学

专题一 三角形的三边关系

链接中考≫ 三角形的三边关系是判断三条线段能否组成三角形的重要依据，它主要解决两个问题：(1)判断三条线段能否组成三角形；(2)已知三角形的两边长，确定第三边长的取值范围.在中考中考查时，一般以选择题、填空题形式出现，有时会以解答题形式出现.

例 1 老师让同学们用长分别为 20 cm，90 cm，100 cm 的三根木条搭一个三角形，小明不小心把 100 cm 的木条折断了，他用折断后剩下的较长木条与另两根木条怎么搭也不能搭成三角形.

（1）你知道这是为什么吗?

（2）小明把 100 cm 的木条至少折去了多少厘米?

（3）如果 100 cm 的木条折去了 40 cm，你能通过截 90 cm 的木条的办法帮小明搭一个小的三角形吗?

解题秘方：判断三条线段能否组成三角形，关键是看其是否满足三角形的三边关系.

解：（1）构成三角形的三条线段必须满足任意两条线段之和大于第三条线段，任意两条线段之差小于第三条线段.小明不能搭成三角形的原因是所用的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

木条与 20 cm，90 cm 的两根木条不符合该条件．

（2）设 100 cm 的木条折去 x cm 后，与另两根木条可搭成三角形，则

$$\begin{cases}90-20<100-x<90+20,\\ x>0,\end{cases}$$

解得 $0<x<30$.

∴小明把 100 cm 的木条至少折去了 30 cm.

（3）设 90 cm 的木条截去 a cm 后，与另两根木条可以搭成三角形，

则 $(100-40)-20<90-a<(100-40)+20$,

解得 $10<a<50$.

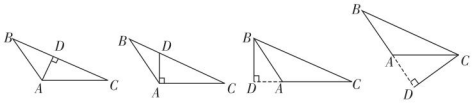
∴ 90 cm 的木条截去的长度应大于 10 cm 且小于 50 cm 才能搭成三角形．

方法点拨：本题根据“三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”解题，确定木条长度的取值范围是解题的关键．

专题二 三角形的重要线段

链接中考» 三角形的重要线段是解决三角形问题的关键所在，它们都有非常重要的作用，中线用来求线段长或等分面积，角平分线用来求角，高用来求面积．单独考查时，高考查的频率较高，一般以选择题形式考查，其他的一般作为解答题的条件进行考查．

例 2 如图 11−1，画△ABC 的边 AB 上的高，下列画法中，正确的是（　　）



A　　B　　C　　D

图 11−1

解题秘方：利用三角形高的定义及作法进行判断．

答案：D

方法点拨：作三角形的高时，要分清是作哪边上的高，应过哪个顶点作垂线，弄清以上两点才能准确作出．

专题三 三角形的角的定理

链接中考» 与三角形的角有关的定理有两个：一个是三角形内角和定理，另一个是三角形内、外角之间的关系定理．在中考中单独考查时，一般以选择题形式出现，属于送分题．

例 3 如图 11−2，在△ABC 中，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，BE，CD 相交于 F，$\angle A=70°$，$\angle ACD=20°$，$\angle ABE=28°$，则 $\angle CFE$ 的度数为（　　）

A.62°　　B.68°　　C.78°　　D.90°

解题秘方：先利用三角形外角时性质求出 $\angle CDB$ 的度数，再利用三角形内角和定理求出 $\angle BFD$ 的度数，最后根据对顶角相等求得 $\angle CFE$ 的度数．

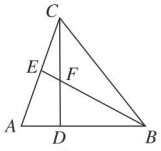


图 11−2

解：∵ $\angle A=70°$，$\angle ACD=20°$，

∴ $\angle CDB=\angle A+\angle ACD=70°+20°=90°$.

∵ $\angle ABE=28°$，

∴ $\angle BFD=180°-\angle CDB-\angle ABE=180°-90°-28°=62°$.

∴ $\angle CFE=\angle BFD=62°$.

答案：A

方法点拨：求角的度数时，先找所求角所在的三角形，然后结合已知条件分析需求角与已知角之间的关系．

专题四 多边形的角的定理

链接中考» 与多边形有关的角的定理有多边形的内角和定理与外角和定理（外角和为 360°）．在中考中单独考查时，一般都是选择题．考查的形式有两种：一种是已知多边形的边数求内角和，另一种是已知内角和求多边形的边数．

例 4 ［中考·眉山］一个多边形的外角和是内角和的$\frac{2}{5}$，这个多边形的边数为（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解题秘方：利用多边形的内角和公式和外角和建立方程解决．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： 设这个多边形的边数为 n. 由题意得 $(n-2)\cdot 180°\times\frac{2}{5}=360°$，解得 $n=7$.

答案： C

方法必会

专题五 分类讨论思想

专题解读》 本章分类讨论能解决的问题主要有：三角形形状不确定；等腰三角形腰或顶角不确定. 分类讨论思想不仅可以使我们有效地解决一些问题，同时还可以培养我们的观察能力和全面思考问题的能力.

例 5 已知等腰三角形 ABC 的两个底角相等（$\angle ABC=\angle C$），且一腰 AC 上的高 BD 与另一腰 AB 的夹角为 $40°$. 求 $\angle ABC$，$\angle C$ 的度数.

解题秘方： 若等腰三角形的顶角是钝角，则腰上的高在三角形外部；若等腰三角形的顶角是锐角，则腰上的高在三角形的内部. 题中没明确指出三角形的形状，要分两种情况讨论.

解：（1）如图 11−3，当 BD 在三角形内部时，

$\because BD\perp AC$，$\therefore\angle ADB=90°$.

$\therefore\angle A=90°-\angle ABD=90°-40°=50°$.

$\therefore\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=65°$.

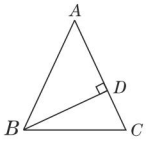


图 11−3

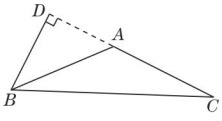


图 11−4

（2）如图 11−4，当 BD 在三角形外部时，

$\because BD\perp AC$，$\therefore\angle ADB=90°$.

$\therefore\angle DAB=90°-\angle ABD=90°-40°=50°$.

$\because\angle DAB$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，

$\therefore\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}\angle DAB=25°$.

综上，$\angle ABC$，$\angle C$ 的度数都是 $65°$ 或都是 $25°$.

规律点拨： 分类讨论思想，也称分情况讨论，当一个数学问题在一定条件下，其结论并不唯一时，就需要对这一问题进行必要的分类. 根据条件分为有限的若干种情况，在每一种情况下分别求解，最后将各种情况下得到的答案进行归纳总结. 它体现了化整为零和积零为整的思想与归类整理的方法.

专题六 转化思想

专题解读》 转化思想可以把不可解的问题转化为已学知识范围内可解的问题，通过转化可以把不熟悉、不规范、复杂的问题转化为熟悉、规范、简单甚至模式化的问题. 转化思想在本章主要体现在多边形的多角和问题，常通过连接两顶点或对角线转化为三角形、四边形或其他多边形来解决.

例 6 如图 11−5，求 $\angle BAK+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F+\angle FGH+\angle H+\angle K$ 的度数.

解题秘方： 连接 AG，DG，将要求和的角转化到一个五边形内.

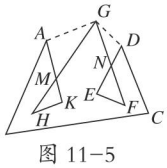


图 11−5

解： 如图 11−5，连接 AG，DG，设 AK，HG 的交点为 M，DE，FG 的交点为 N，

则 $\angle E+\angle F+\angle ENF=180°=\angle FGD+\angle EDG+\angle GND$，$\angle H+\angle K+\angle HMK=180°=\angle KAG+\angle HGA+\angle AMG$.

$\because\angle ENF=\angle GND$，$\angle HMK=\angle AMG$，

$\therefore\angle E+\angle F=\angle FGD+\angle EDG$，

$\angle H+\angle K=\angle KAG+\angle HGA$.

$\therefore\angle BAK+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F+\angle FGH+\angle H+\angle K$

$=\angle BAK+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle FGD+\angle EDG+\angle FGH+\angle KAG+\angle HGA$

$=(\angle BAK+\angle KAG)+\angle B+\angle C+(\angle CDE+\angle EDG)+(\angle FGD+\angle FGH+\angle HGA)$

$=\angle BAG+\angle B+\angle C+\angle CDG+\angle DGA$

$=(5-2)\times 180°=540°$.

方法点拨： 求复杂几何图形中相关角的度数和，可运用转化思想，将这几个角转化到一个多边形内，然后利用多边形内角和公式求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见244页

类型1：三角形的边及三边关系

1. 在△ABC中，AC=5 cm，AD是△ABC的中线，把△ABC的周长分为两部分，若其差为3 cm，则AB=_____.

2. 已知在△ABC中，AB=8，BC=2a+2，AC=22.

（1）求a的取值范围；

（2）若△ABC为等腰三角形，求这个三角形的周长.

3. 已知a，b，c是三角形的三边长.

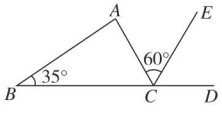
（1）化简：$|a-b-c|+|b-c-a|+|c-a-b|$；

（2）若a=5，b=4，c=3，求（1）中式子的值.

类型2：三角形中角度的计算

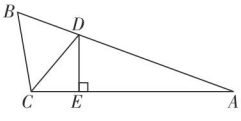
4. 如图，CE是△ABC的外角∠ACD的平分线，若∠B=35°，∠ACE=60°，则∠A=（　　）

A.35°　　B.95°　　C.85°　　D.75°



（第4题）

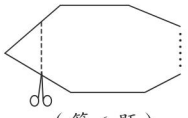
5. 如图，在△ABC中，∠A=20°，CD是∠BCA的平分线；在△CDA中，DE是CA边上的高，且∠EDA=∠CDB. 求∠B的度数.



（第5题）

类型3：多边形内角和的有关计算

6. 如图，一张多边形纸片按图示的剪法剪去一个内角后，得到一个内角和为2 340°的新多边形，则原多边形的边数为（　　）

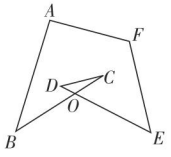


（第6题）

A.13　　B.14　　C.15　　D.16

7. 已知一个多边形的内角和是其外角和的$\frac{3}{2}$，则这个多边形的边数是_____.

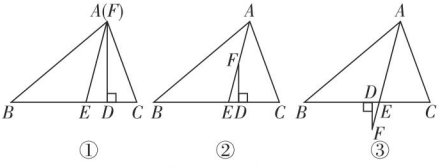
8. 如图，求∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F的度数.



（第8题）

类型4：与三角形角度有关的探究题

9. 在△ABC中，AE平分∠BAC，∠B=40°，∠C=70°，F为射线AE上一点（不与点E重合），且FD⊥BC于点D.



（第9题）

（1）若点F与点A重合，如图①，求∠EFD的度数；

（2）若点F在线段AE上（不与点A重合），如图②，求∠EFD的度数；

（3）若点F在△ABC外部，如图③，此时∠EFD的度数是多少?

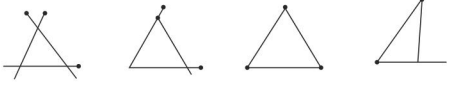
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十一章测试卷 ☞答案见244页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下面是小强用三根火柴组成的图形，其中符合三角形定义的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 下列各组数可能是一个三角形的三边长的是（　　）

A.1，2，4　　B.4，5，9

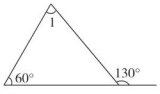
C.4，6，8　　D.5，5，11

3. 一个多边形的每个外角都等于72°，则这个多边形的边数为（　　）

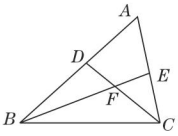
A.5　　B.6　　C.7　　D.8

4. 如图，∠1等于（　　）

A.40°　　B.50°　　C.60°　　D.70°



（第4题）



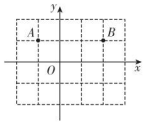
（第5题）

5. 如图，在△ABC中，∠ABC，∠ACB的平分线BE，CD相交于点F，∠ABC=42°，∠A=60°，则∠BFC的度数是（　　）

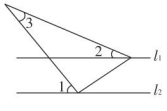
A.118°　　B.119°　　C.120°　　D.121°

6. 如图，在5×4的方格纸中，每个小正方形的边长为1，点O，A，B在方格纸的格点（交点）上，在第四象限内的格点上找一点C，使△ABC的面积为3，则这样的点C共有（　　）

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个



（第6题）



（第7题）

7. 如图，直线l_1∥l_2，∠1=50°，∠2=23° 20′，则∠3的度数为（　　）

A.26° 40′　B.27° 20′　C.27° 40′　D.73° 20′

8. 已知△ABC的三边长a，b，c满足（$a-b$）（$b-c$）=0，则△ABC一定是（　　）

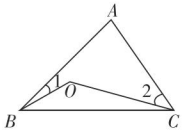
A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等边三角形　　D. 以上都不对

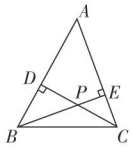
9. 如图，点O是△ABC内一点，∠A=80°，∠1=15°，∠2=40°，则∠BOC等于（　　）

A.95°　　B.120°

C.135°　　D. 无法确定



（第9题）



（第10题）

10. 如图，在锐角△ABC中，CD，BE分别是AB，AC边上的高，且CD，BE交于点P. 若∠A=50°，则∠BPC的度数是（　　）

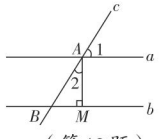
A.50°　　B.90°　　C.100°　　D.130°

二、填空题（每题3分，共18分）

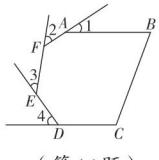
11. 在起重机的起重架中间增加很多斜条，构成一些三角形，它所运用的几何原理是_____.

12. 已知△ABC中，∠A：∠B：∠C=1：3：5，则△ABC是_____三角形.

13. 如图，直线a∥b，直线c与直线a，b分别相交于点A，B，AM⊥直线b，垂足为点M. 若∠1=58°，则∠2=_____.



（第13题）



（第16题）

14. 一个正多边形的每一个内角都等于140°，则这

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

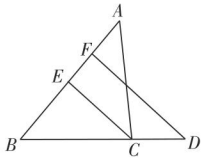
个正多边形的边数为_____.

15. 已知等腰三角形的一边长等于 6 cm，另一边长等于 7 cm，则它的周长为_____.

16. 如图，六边形 $ABCDEF$ 中，$AB \parallel DC$，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 是六边形 $ABCDEF$ 的外角，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=$_____.

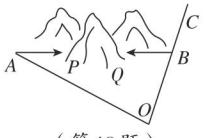
三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）如图，在△ ABC 中，$\angle A=46°$，CE 是 $\angle ACB$ 的平分线，B，C，D 在同一条直线上，$DF \parallel CE$，$\angle D=42°$. 求 $\angle B$ 的度数.



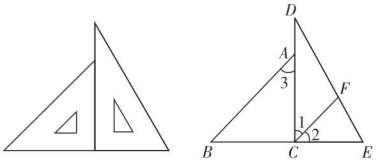
（第 17 题）

18.（10 分）某工程队准备开挖一条隧道，为了缩短工期，必须在山的两侧同时开挖. 为了确保两侧开挖的隧道在同一条直线上，测量人员在如图的同一高度定出了两个开挖点 P 和 Q，然后在左边定出开挖的方向线 AP，为了准确定出右边开挖的方向线 BQ，测量人员取一个可以同时看到点 A，P，Q 的点 O，测得 $\angle A=28°$，$\angle O=100°$，那么 $\angle QBO$ 应等于多少度才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上?



（第 18 题）

19.（10 分）将一副三角尺拼成如图的图形，过点 C 作 CF 平分 $\angle DCE$ 交 DE 于点 F.



（第 19 题）

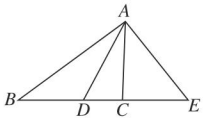
（1）求证 $CF \parallel AB$；

（2）求 $\angle DFC$ 的度数.

20.（12 分）如图，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle EAD=\angle EDA$.

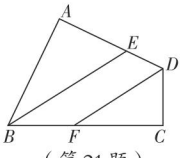
（1）求证 $\angle EAC=\angle B$；

（2）若 $\angle B=50°$，$\angle CAD : \angle E=1 : 3$，求 $\angle E$ 的度数.



（第 20 题）

21.（12 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，BE 平分 $\angle ABC$，DF 平分 $\angle ADC$. 若 $BE \parallel DF$，求证：△ DCF 为直角三角形.



（第 21 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

品赏图形全等的魅力

品赏图形全等的魅力



第十二章 全等三角形









核心考点

你将见到的

- 全等形
- 全等三角形的性质
- 全等三角形的判定——SSS，SAS，ASA，AAS，HL
- 角的平分线的性质
- 角的平分线的判定

核心方法

我们为你提供的

- 等面积法
- 综合法
- 分析法
- 截长补短法
- 倍长中线法
- 构造法

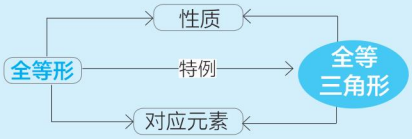
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.1 全等三角形

核心知识

- 全等形
- 全等三角形
- 全等三角形的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 全等形

1. 定义 能够完全重合的两个图形叫做全等形.

全等形的特征： 两相同与两无关.

（1）两相同：

①形状相同；②大小相同.

（2）两无关：

①与位置无关；②与方向无关.

全等变换方式

2. 全等变换的常见方式 平移、翻折、旋转.

提分·必记

特别解读

- 完全重合说明两个图形的周长和面积相等；
- 周长或面积相等的两个图形不一定是全等的.

拨考向▸利用全等形的定义识别全等形

例 1 如图 12.1-1 中是全等形的是_____.

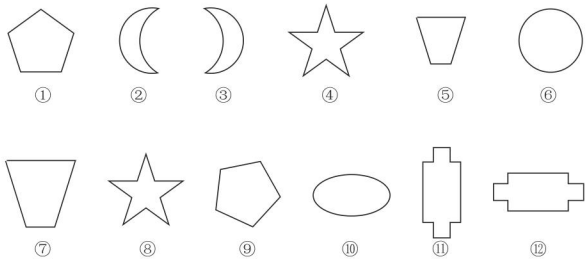


图 12.1-1

解题秘方： 根据全等形的定义和特征进行判断.

解： 上述图形中，⑤和⑦形状相同，但大小不同；

⑥和⑩大小、形状都不同.

①和⑨、②和③、⑪和⑫尽管方向不同，但大小、形状完全相同，所以它们是全等形；

④和⑧都是五角星，大小、形状都相同，是全等形.

答案： ①和⑨、②和③、④和⑧、⑪和⑫

提分·秘诀

方法点拨

确定两个图形全等的方法：

1. **条件判定法：**

（1）形状相同；

（2）大小相等，是不是全等形与位置无关.

2. **重合判定法：** 通过平移、翻折、旋转等方法把两个图形叠合在一起，看它们能否完全重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 全等三角形

1. 全等三角形的相关概念

（1）**全等三角形的定义：**能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.

（2）**全等三角形的对应元素：**

①**对应顶点：**全等三角形中，能够重合的顶点；

②**对应边：**全等三角形中，能够重合的边；

③**对应角：**全等三角形中，能够重合的角.

2. 全等三角形的表示方法

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”.记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

3. 常见三角形的全等变换

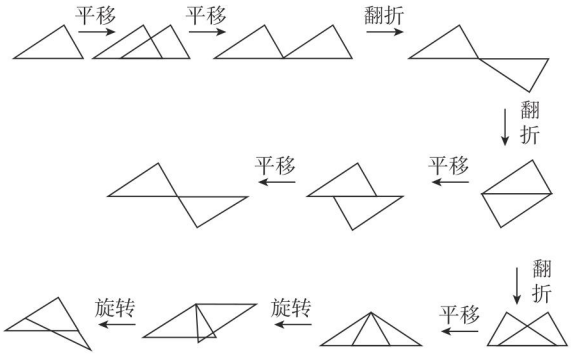


图 12.1-3

4. 对应元素的确定方法

（1）**图形特征法：**

①最长边对最长边，最短边对最短边；

②最大角对最大角，最小角对最小角；

③相等的边（角）为对应边（角）.


全等三角形

（2）**位置关系法：**

①公共角（对顶角）为对应角，公共边为对应边；

②对应角的对边为对应边，两个对应角所夹的边是对应边；

③对应边的对角为对应角，两条对应边所夹的角是对应角.

（3）**字母顺序法：**

根据书写规范按照对应顶点确定对应边或对应角.

提分·必记

特别解读

对应边或对应角与对边或对角的区别：

对应边、对应角是两个全等三角形中对应的两条边之间或对应的两个角之间的关系；对边、对角是同一个三角形中边和角之间的关系，“对边”是指三角形中某个角所对的边，“对角”是指三角形中某条边所对的角.

示图

如图 12.1-2 中的△ABC 和△DEF 全等，记作△ABC≌△DEF，读作“△ABC 全等于△DEF”，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点；AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边；∠A 和∠D，∠B 和∠E，∠C 和∠F 是对应角.

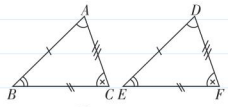


图 12.1-2

特别解读

1. 全等三角形是全等形中的特例.
2. 对应关系可从两个方面理解.

（1）**从动态角度理解：**重合是找对应元素的关键；

（2）**从静态角度理解：**从表示方法中找准对应点，然后确定对应边和对应角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用全等三角形的对应关系确定对应元素

题型1：图形的位置特征在找对应元素中的应用

例2 如图12.1-4，已知△ABD≌△CDB，∠ABD=∠CDB. 写出其对应边和对应角.

解题秘方： 根据图形的位置特征确定对应角和对应边.

解： BD和DB，AD和CB，AB和CD是对应边；∠A和∠C，∠ABD和∠CDB，∠ADB和∠CBD是对应角.

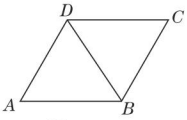


图12.1-4

题型2：图形的变换方式在找对应元素中的应用

例3 如图12.1-5，将△ABC绕其顶点B顺时针旋转一定角度后得到△DBE，请判断图中△ABC和△DBE是否为全等三角形. 若是，写出其对应边和对应角.

解题秘方： 根据图形旋转前后的对应位置找对应关系.

解： △ABC≌△DBE.AB和DB，AC和DE，BC和BE是对应边；∠A和∠BDE，∠ABC和∠DBE，∠C和∠E是对应角.

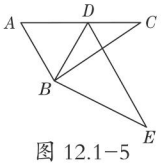


图12.1-5

提分·秘诀

解法提醒

利用图形的位置特征确定对应边和对应角时，要抓住对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边；当全等三角形的两组对应边（角）已确定时，剩下的一组边（角）就是对应边（角）.

解法提醒

从动态的角度找对应元素，关键抓住图形变换前后的重合元素，重合的边为对应边，重合的角为对应角.

知识▶3 全等三角形的性质

1. 性质 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

几何语言：∵△ABC≌△DEF，

$$\therefore\begin{cases}AB=DE,\ BC=EF,\ AC=DF,\\ \angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F.\end{cases}$$



2. 拓展 全等三角形的对应元素相等.

全等三角形中的对应元素包括对应边、对应角、对应边上的中线、对应边上的高、对应角的平分线、周长、面积等.

提分·必记

要点提醒

1. 应用全等三角形的性质时，要先确定两个条件：（1）两个三角形全等；（2）找对应元素.
2. 全等三角形的性质是证明线段、角相等的常用方法.

考向▶利用全等三角形的性质求对应元素间的关系

题型1：全等三角形的性质在证明线段关系中的应用

例4 如图12.1-6，已知△ABC≌△EDF.

（1）求证$DC=BF$；

（2）求证AC∥EF.

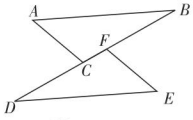


图12.1-6

解题秘方： 利用全等三角形的对应边相等和对应角相等解决问题.

证明：（1）∵△ABC≌△EDF，

∴$DF=BC$.

∴$DF-CF=BC-CF$，即$DC=BF$.

（2）∵△ABC≌△EDF，

∴∠ACB=∠EFD. ∴AC∥EF.

提分·秘诀

解法提醒

全等三角形的对应边（对应角）相等，由此可得两条线段（两个角）相等，从而进一步证明线段（角）的相等关系、和差关系或求线段的长度、角的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：全等三角形的性质在求角度中的应用

例 5 如图 12.1-7，在△ABC中，D，E分别是边AC，BC上的点，若△ADB≌△EDB≌△EDC，求∠C的度数.

解题秘方： 利用全等三角形的对应角相等的性质，并结合三角形的内角和为 180°进行计算.

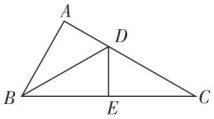


图 12.1-7

解： ∵△ADB≌△EDB≌△EDC，

∴∠ABD=∠EBD=∠C，∠A=∠BED=∠CED.

又∵∠BED+∠CED=180°，∴∠BED=∠CED=90°.

∴∠A=90°. ∴∠ABD+∠EBD+∠C=180°−∠A=90°.

∴ 3∠C=90°. ∴∠C=30°.

题型 3：全等三角形的性质在判断两线段位置关系中的应用

例 6 如图 12.1-8，已知 Rt△ABC≌Rt△CDE，且点B，C，D在同一条直线上，试判断AC与CE的位置关系，并给予证明.

解题秘方： 通过求AC，CE夹角的度数判断其位置关系.

解： $AC \perp CE$. 证明如下：

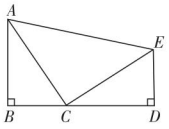


图 12.1-8

∵ Rt△ABC≌Rt△CDE，

∴∠BAC=∠DCE.

易知∠BAC+∠ACB=90°，

∴∠DCE+∠ACB=90°.

∴∠ACE=180°−(∠DCE+∠ACB)=180°−90°=90°.

∴ $AC \perp CE$.

解法提醒

利用全等三角形的性质求角的度数的方法：一般先确定两个三角形中角的对应关系，由这种关系实现已知角和未知角之间的转换，从而求出所要求的角的度数.

方法点拨

证明线段位置关系的方法：

证明两条线段的位置关系，通常考虑平行、垂直两种特殊关系，证明平行的方法是转化为证明同位角相等、内错角相等或同旁内角互补；证明垂直的方法是转化为证明它们的夹角为 90°或三角形的两内角互余.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等面积法求全等变换中图形的面积

挑战·高分

例 7 如图 12.1-9，将 Rt△ABC沿BC方向平移得到△DEF，如果AB=8 cm，BE=4 cm，DH=3 cm，那么图中阴影部分的面积为_____cm².

平移是全等变换的一种，△ABC 平移后得到△DEF，即两个三角形全等

解题秘方： 利用全等三角形的性质，将阴影部分的面积转化为梯形$ABEH$的面积来求.

解： 由题意可知△ABC≌△DEF，

∴ $DE=AB=8$ cm，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$.

∵ $S_{\triangle ABC}=S_{梯形 ABEH}+S_{\triangle HEC}$，

$S_{\triangle DEF}=S_{阴影}+S_{\triangle HEC}$，∴ $S_{阴影}=S_{梯形 ABEH}$.

∵ $DH+HE=DE$，∴ $HE=DE-DH=8-3=5$(cm).

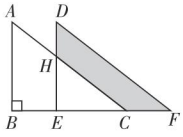


图 12.1-9

∴ $S_{梯形 ABEH}=\frac{1}{2}(AB+HE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(8+5)\times 4=26$(cm²).

答案： 26

方法点拨

等面积法：

将所求图形面积通过全等变换转化为易求(或已知)图形面积的方法，我们称之为**等面积法**，它是解面积或涉及垂直(高)等几何问题的常用方法. 本题运用**等面积法**将所求阴影部分的面积转化成易求解的梯形$ABEH$的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸2 利用逆向思维法解决条件探索问题

例8 如图 12.1−10，A，D，E 三点在同一条直线上，且△ BAD ≌△ ACE，AB 与 CA，AD 与 CE 是对应边．

（1）求证 $BD=DE+CE$.

（2）当△ ABD 满足什么条件时，$BD \parallel CE$？请说明理由．

解题秘方：根据全等三角形的性质找出相等的线段和角，然后利用要解决的问题与得出的相等的线段和角之间的关系去解决．

解：（1）∵△ BAD ≌△ ACE，

∴ $BD=AE$，$AD=CE$.

又∵ $AE=AD+DE$，∴ $BD=DE+CE$.

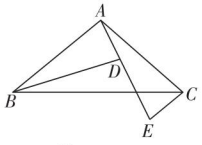


图 12.1−10

（2）当△ ABD 满足 ∠ ADB=90° 时，$BD \parallel CE$.

理由：∵△ BAD ≌△ ACE，∴∠ ADB=∠ CED.

若∠ ADB=90°，则∠ CED=90°．

又∵∠ ADB+∠ BDE=180°，∴∠ BDE=90°．

∴∠ BDE=∠ CED. ∴ $BD \parallel CE$.

挑战·高分

方法点拨

解答探究条件类题目的方法：

1. 先猜想出条件，利用猜想出的条件推出题目的结论；
2. 将题目中的结论当作条件进行推理，这样推出的结果即为要探究的条件．

解题时常采用**逆向思维法**用方法 2 寻找条件，再用方法 1 进行证明．

拔尖角度▸3 利用分类讨论思想求动态问题中的速度、时间

例9 如图 12.1−11，已知△ ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=8$，点 D 为 AB 的中点．点 P 在线段 BC 上以每秒 3 个单位长度的速度由点 B 向点 C 运动，同时点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 以每秒 a 个单位长度的速度运动，设运动时间为 t 秒．

（1）求 CP 的长；

（2）若以点 C，P，Q 为顶点的三角形和以点 B，D，P 为顶点的三角形全等，且∠ B 和∠ C 是对应角，求 a 和 t 的值．

解题秘方：（1）点在线段上运动，用点运动的路程表示线段长．

（2）根据对应关系得出线段相等，求出 a，t 的值．

解：（1）由题意得 $BP=3t$. ∵ $BC=8$，∴ $CP=8-3t$.

（2）由题意知，需分两种情况讨论：

若△ BDP ≌△ CPQ，则 $BD=CP$，$BP=CQ$.

∵ $AB=10$，点 D 为 AB 的中点，∴ $BD=\frac{1}{2}AB=5$.

∴ $5=8-3t$，$3t=at$，解得 $t=1$，$a=3$.

若△ BDP ≌△ CQP，则 $BP=CP$，$BD=CQ$，

∴ $3t=8-3t$，$5=at$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$a=\frac{15}{4}$.

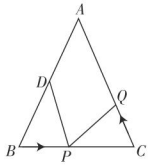


图 12.1−11

由 $8-3t>0$，得 $t<\frac{8}{3}$. 综上所述，$a=3$，$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$，$t=\frac{4}{3}$.

挑战·高分

解法提醒

由∠B 和∠C 是对应角可知 DP 和 PQ 是对应边，而其他两组边的对应关系不确定，因此要分 BD 与 CP 是对应边、BP 与 CP 是对应边两种情况讨论．

教你一招

动态问题的求解思路：

此类动态数学问题的特点是动中有静，静中有动．解题时通常用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想，分情况对题目进行讨论，结合图形根据全等三角形的性质列出方程求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查全等三角形的性质，一般不单独命题，常与全等三角形的判定或全等的变换形式：平移、翻折、旋转综合考查，主要是以选择题和填空题的形式出现，难度适中.

三年中考兵法

考法1 利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角

例10 [中考·厦门]如图12.1-12，点E，F在线段BC上，$\triangle ABF$与$\triangle DCE$全等，点A与点D，点B与点C是对应顶点，AF与DE交于点M，则$\angle DCE=$(　　)

A. $\angle B$　　B. $\angle A$　　C. $\angle EMF$　　D. $\angle AFB$

试题评析： 本题考查了全等三角形的性质，熟记全等三角形的性质找准对应关系是解题的关键.

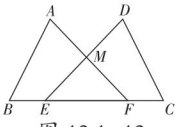


图12.1-12

答案： A

考法2 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数

例11 [中考·天门]如图12.1-13，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，点D在AB边上，将$\triangle CBD$沿CD折叠，使点B恰好落在AC边上的点E处. 若$\angle A=26°$，则$\angle CDE=$_____.

试题评析： 本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是折叠，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数.

解： 由三角形内角和定理可知$\angle B=64°$，

由折叠可知$\triangle BCD\cong\triangle ECD$.

$\therefore\ \angle BCD=\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，

$\angle CED=\angle B=64°$.

$\therefore\angle CDE=180°-\angle DCE-\angle CED=180°-45°-64°=71°$.

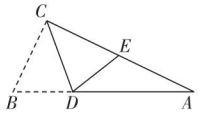


图12.1-13

答案： 71°

考法3 利用全等三角形的性质确定点的坐标

例12 [月考·南京]如图12.1-14，Rt$\triangle AOB\cong$Rt$\triangle CDA$，且$A(-1,0)$，$B(0,2)$，则点C的坐标是_____.

试题评析： 本题主要考查全等三角形的性质，解题的关键是找准全等三角形的对应边.

解： $\because$ Rt$\triangle AOB\cong$Rt$\triangle CDA$，

$\therefore CD=OA$，$AD=OB$.

$\because A(-1,0)$，$B(0,2)$，$\therefore OA=1$，$OB=2$.

$\therefore CD=1$，$AD=2$，$\therefore OD=AD+OA=3$. $\therefore C(-3,1)$.

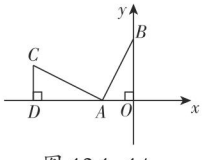


图12.1-14

答案： $(-3,1)$

冲刺·满分

解法提醒

全等三角形中，对应角的顶点就是对应顶点，反过来，以对应顶点为顶点的角为对应角.

解法提醒

平移、旋转、翻折变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等的性质得到对应边相等、对应角相等，从而解决问题.

本题属于翻折变换，它隐含着折叠前后的$\triangle CBD$与$\triangle CED$全等.

考法点评

在平面直角坐标系中求点的坐标就是求该点到两坐标轴的距离，从而转化为求线段长，而全等三角形的对应边相等，为求线段长提供了重要的依据.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见245页

1. 下列说法中错误的有（　　）

①图形中只有两个三角形才能完全重合；

②如果两个图形全等，那么它们的形状和大小一定都相同；

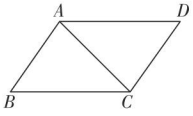
③两个正方形一定是全等图形；

④边数相同的图形一定能互相重合.

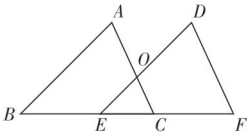
A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

2. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$\angle BAC = \angle DCA$，则$BC$的对应边是（　　）

A. CD　　B. CA　　C. DA　　D. AB



（第2题）



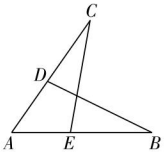
（第4题）

3. 若$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且$\triangle ABC$的周长为100 cm，点$A$，$B$分别与点$D$，$E$对应，$AB$=30 cm，$DF$=25 cm，则$BC$的长为（　　）

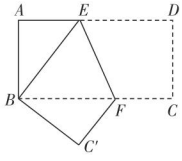
A. 45 cm　　B. 55 cm　　C.30 cm　　D. 25 cm

4. 如图，点B，E，C，F在同一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle B$=45°，$\angle F$=65°，则$\angle COE$的度数为_____.

5. 如图，$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，$\angle B$与$\angle C$是对应角. 若$AE$ = 5 cm，BE = 7 cm，$\angle ADB$=100°，则$\angle AEC$=_____，AC=_____.



（第5题）



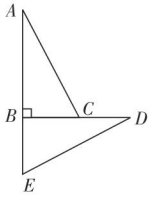
（第6题）

6. 如图，将长方形纸片$ABCD$折叠，使点D与点B重合，点C落在C'处，折痕为EF. 若AB=1，BC=2，则$\triangle ABE$和$\triangle BC'F$的周长之和为_____.

7. 如图，$\triangle ABC$绕着点B顺时针旋转90°到$\triangle DBE$的位置，$\angle ABC$=90°.

（1）$\triangle ABC$和$\triangle DBE$是否全等？若全等，指出对应边和对应角.

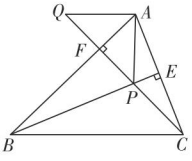
（2）直线AC和DE有怎样的位置关系？



（第7题）

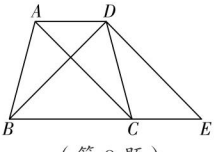
8. 如图，已知BE，CF是$\triangle ABC$的边AC和AB上的高，Q为CF的延长线上一点，P为BE和CF的交点，$\triangle PAB \cong \triangle AQC$.

求证$AP \perp AQ$.　　【导学号：2798126】



（第8题）

9. 如图，四边形$ABCD$是梯形，$AD \parallel BC$，若DE交BC的延长线于点E，且$\triangle ADC \cong \triangle ECD$，梯形$ABCD$的面积和$\triangle BDE$的面积相等吗？并说明理由.



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.2 三角形全等的判定

核心知识

- 三角形全等的判定方法——SSS
- 三角形全等的判定方法——SAS
- 三角形全等的判定方法——ASA 或 AAS
- 直角三角形全等的判定方法 HL

知识链接

三角形全等的判定方法：三边（SSS）；两边及夹角（SAS）；两角一边（ASA 或 AAS）；斜边、直角边（HL）→ 直角三角形全等的判定方法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 基本事实“边边边”或“SSS”

1. 基本事实 三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

2. 书写格式 如图 12.2−1，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \\ AC=A'C', \end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（SSS）.

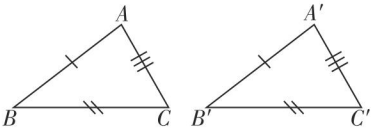


图 12.2−1

探索三角形全等的条件

拨考向 利用“SSS”判定两个三角形全等

例 1 如图 12.2−2，已知点 A，D，B，F 在一条直线上，$AC=FE$，$BC=DE$，$AD=FB$.

求证△ ABC ≌△ FDE.

解题秘方： 紧扣“SSS”找出两个三角形中三边对应相等的条件来判定两个三角形全等.

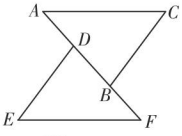


图 12.2−2

证明： $\because AD=FB$，

$\therefore AD+DB=FB+DB$，即 $AB=FD$.

在△ ABC 和△ FDE 中，$\begin{cases} AC=FE, \\ AB=FD, \\ BC=DE, \end{cases}$

$\therefore$ △ ABC ≌△ FDE（SSS）.

提分·必记

知识链接

这个基本事实告诉我们：当三角形的三边确定后，其形状、大小也随之确定，这也是三角形具有稳定性的原因.

特别提醒

在列举两个三角形全等的条件时，应把三个条件按顺序排列（一般是把同一个三角形的三个条件放在等号的同一侧），并用大括号将其括起来.

提分·秘诀

方法点拨

运用“SSS”证明两个三角形全等主要就是找边相等，边相等除了题目中已知的边相等以外，还有些相等的边隐含在题设或图形中. 常见的隐含的等边有：

①公共边相等；

②等边加（或减）等边，其和（或差）仍相等；

③由中线的定义得出线段相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 用尺规作一个角等于已知角

作一个角等于已知角

已知∠AOB（如图12.2-3①），求作∠$A'O'B'$，使∠$A'O'B'$ = ∠AOB.

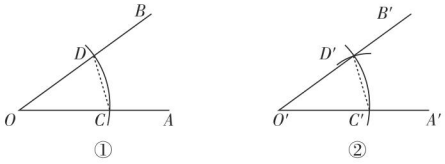


图 12.2-3

作法：（1）以点O为圆心，任意长为半径画弧，分别交OA，OB于点C，D；

（2）画一条射线$O'A'$，以点O'为圆心，OC长为半径画弧，交$O'A'$于点C'；

（3）以点C'为圆心，CD长为半径画弧，与（2）中所画的弧相交于点D'；

（4）过点D'画射线$O'B'$，则∠$A'O'B'$即为所求作的角（如图12.2-3②）.

核心考向 利用作一个角等于已知角作平行线

例2 如图12.2-4①，过点C作直线DE，使$DE \parallel AB$.

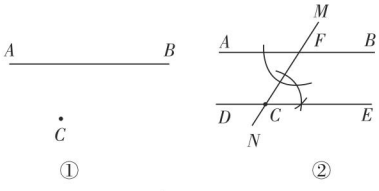


图 12.2-4

解题秘方：通过作一对内错角相等来作已知直线的平行线.

解：作法如下：

（1）过点C作直线MN与AB相交，交点为F；

（2）在直线MN的右侧作∠FCE，使∠FCE= ∠AFC；

（3）反向延长CE，则直线DE即为所求（如图12.2-4②）.

知识点 3 基本事实“边角边”或“SAS”

1. 基本事实 两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）.

2. 书写格式 如图12.2-5，

在△ABC和△$A'B'C'$中，$\begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$

∴△ABC≌△$A'B'C'$（SAS）.

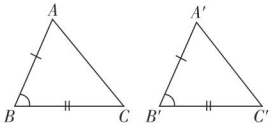


图 12.2-5

提分·必记

特别解读

作一个角等于已知角，是利用尺规作一个三角形与已知三角形全等，利用的判定方法是“SSS”，然后利用全等三角形的性质——对应角相等，说明作出的角等于已知角.

提分·秘诀

解法提醒

由平行线的判定知内错角相等，两直线平行，故可先以这条直线为一边，另一边过这一点构造一个角，然后作出这个角的内错角等于这个角.

注：也可以采用作同位角法作平行线.

提分·必记

要点提醒

1. **相等的元素：**两边及这两边的夹角.
2. **书写顺序：**边→角→边.

特别解读

两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形**不一定全等**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用“SAS”判定两个三角形全等

例 3 如图 12.2−6，点 C 是 AB 的中点，$AD=CE$，且 $AD \parallel CE$. 求证△ $ACD \cong$△ CBE.

解题秘方： 根据条件找出两个三角形中的两条边及其夹角对应相等，根据“SAS”判定两个三角形全等.

证明： ∵点 C 是 AB 的中点，∴ $AC=CB$.

∵ $AD \parallel CE$，

∴∠ $CAD=$∠ BCE.

在△ ACD 和△ CBE 中，

$$\begin{cases} AC=CB, \\ \angle CAD=\angle BCE, \\ AD=CE, \end{cases}$$

∴△ $ACD \cong$△ CBE（SAS）.

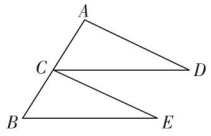


图 12.2−6

提分·秘诀

方法点拨

常见的隐含等角的情况：①公共角相等；②对顶角相等；③等角加（或减）等角，其和（或差）仍相等；④同角或等角的余（或补）角相等；⑤由角平分线的定义得出角相等；⑥由垂直的定义得出角相等；⑦由平行线得到同位角或内错角相等. 另外，一些自然规律如“太阳光线可以看成是平行的”“光的反射角等于入射角”等也是常见的隐含条件.

点知识▶4 基本事实“角边角”或“ASA”

1. 基本事实 两角和它们的夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

2. 书写格式 如图 12.2−7，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \\ \angle C=\angle C', \end{cases}$$

∴△ $ABC \cong$△ $A'B'C'$（ASA）.

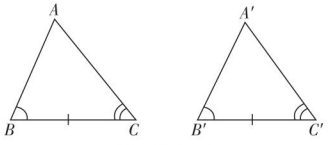


图 12.2−7

提分·必记

特别解读

1. 相等的元素：两角及两角的夹边.
2. 书写顺序：角→边→角.
3. 夹边即两个角的公共边.

拔考向▶利用“ASA”判定两个三角形全等

例 4 如图 12.2−8，已知 $AB \parallel DF$，$AC \parallel DE$，$BC=FE$，且点 B，E，C，F 在一条直线上. 求证△ $ABC \cong$△ DFE.

解题秘方： 解题的关键是由两组平行线得出两组角对应相等，构造两角及其夹边对应相等.

证明： ∵ $AB \parallel DF$ 且点 B，E，C，F 在一条直线上，

∴∠ $B=$∠ F.

∵ $AC \parallel DE$，∴∠ $ACB=$∠ DEF.

在△ ABC 和△ DFE 中，$\begin{cases} \angle B=\angle F, \\ BC=FE, \\ \angle ACB=\angle DEF, \end{cases}$

∴△ $ABC \cong$△ DFE（ASA）.

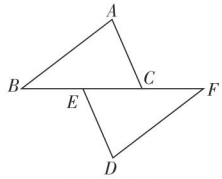


图 12.2−8

提分·秘诀

方法点拨

运用“ASA”判定两个三角形全等，既找边相等，又找角相等，除已知条件外，看缺什么条件，去找什么条件，找边或角相等的方式与例 1 和例 3 相同.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶5 “角角边”或“AAS”

1. 定理 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

2. 书写格式

如图 12.2−9，在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle A',\\ \angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\end{cases}$

$\therefore$ △ $ABC\cong$△ $A'B'C'$（AAS）.

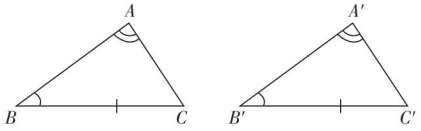


图 12.2−9

3.“ASA”和“AAS”的区别与联系

	“S”的意义	书写格式	联系
ASA	“S”是两角的夹边	把夹边相等写在两角相等的中间	由三角形内角和定理可知，“AAS”可由“ASA”推导得出
AAS	“S”是其中一角的对边	把两角相等写在一起，边相等放在最后	

技考向▶利用“AAS”判定两个三角形全等

例 5 如图 12.2−10，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，求证△ $BOD\cong$△ COE.

解题秘方：找出两个三角形中两个角及其中一角的对边对应相等，利用“AAS”判定两个三角形全等.

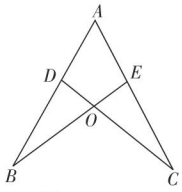


图 12.2−10

证明：在△ ABE 和△ ACD 中，

$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle A=\angle A,\\ AE=AD,\end{cases}$ 公共角可直接写出，对顶角也可直接写出

$\therefore$ △ $ABE\cong$△ ACD（SAS）.

$\therefore\angle B=\angle C$.

$\because AB=AC$，$AD=AE$，

$\therefore BD=CE$.

在△ BOD 和△ COE 中，

$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ \angle BOD=\angle COE,\\ BD=CE,\end{cases}$

$\therefore$ △ $BOD\cong$△ COE（AAS）.

提分·必记

特别解读

1. 判定两个三角形全等的三个条件中，“边”是必不可少的.
2. 在两个三角形的六个元素（三条边和三个角）中，由已知的三个元素可判定两个三角形全等的组合有4个：“SSS”“SAS”“ASA”和“AAS”，不能判定两个三角形全等的组合是“AAA”和“SSA”（“ASS”）.
3. 由于“角角边”和“角边角”是可以互相转化的，故能用“角角边”证明的问题，一般也可以用“角边角”证明.

提分·秘诀

教你一招

证明三角形全等找条件的方法：

证明三角形全等时，有些条件是已知的，有些条件是隐含在题设或图形中的，比如对顶角、公共角、公共边等，还有些条件是通过证明三角形全等，利用全等三角形的性质得到的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶6 “斜边、直角边”或“HL”

1. 定理 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

2. 书写格式 如图 12.2−11，

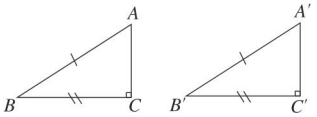


图 12.2−11

在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \end{cases}$$

∴ Rt△ABC ≌ Rt△$A'B'C'$（HL）.


点拨微课堂

3. 判定两个三角形全等常用的思路方法如下表

	已知对应相等的元素	可选择的判定方法	需寻找的条件
锐角三角形或钝角三角形	两边（SS）	SSS 或 SAS	可证第三边对应相等或证两边的夹角对应相等
	一边及其邻角（SA）	SAS 或 ASA 或 AAS	可证已知角的另一边对应相等或证已知边的另一邻角对应相等或证已知边的对角对应相等
	一边及其对角（SA）	AAS	可证另一角对应相等
	两角（AA）	ASA 或 AAS	可证两角的夹边对应相等或证一相等角的对边对应相等
直角三角形	一锐角（A）	ASA 或 AAS	可证直角与已知锐角的夹边对应相等或证已知锐角（或直角）的对边对应相等
	斜边（H）	HL 或 AAS	可证一条直角边对应相等或证一锐角对应相等
	一直角边（L）	HL 或 ASA 或 AAS 或 SAS	可证斜边对应相等或证与已知边相邻的锐角对应相等或证已知边所对的锐角对应相等或证另一直角边对应相等

拔考向▶利用判定直角三角形全等的方法解决问题

例 6 如图 12.2−12，$AC \perp BC$，$AD \perp BD$，$AD=BC$，$CE \perp AB$，$DF \perp AB$，垂足分别是 E，F. 求证 $CE=DF$.

解题秘方： 利用“HL”证明两个直角三角形全等，为证明两条线段相等创造条件.

证明： ∵ $AC \perp BC$，$AD \perp BD$，

∴ ∠ACB= ∠BDA=90°.

在 Rt△ABC 和 Rt△BAD 中，$\begin{cases} AB=BA, \\ BC=AD, \end{cases}$

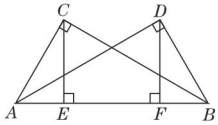


图 12.2−12

∴ Rt△ABC ≌ Rt△BAD（HL）.

∴ ∠CBE= ∠DAF.

∵ $CE \perp AB$，$DF \perp AB$，∴ ∠CEB=90°，∠DFA=90°.

在△BCE 和△ADF 中，$\begin{cases} \angle CEB=\angle DFA=90°, \\ \angle CBE=\angle DAF, \\ BC=AD, \end{cases}$

∴ △BCE ≌ △ADF（AAS）. ∴ $CE=DF$.

提分·必记

特别提醒

1. 应用“HL”判定两个直角三角形全等，在书写时两个三角形符号前一定要加上“Rt”.
2. 判定两个直角三角形全等的特殊方法（“HL”），只适用于直角三角形全等的判定，对于一般三角形不适用.
3. 判定一般三角形全等的所有方法对判定两个直角三角形全等同样适用.
4. 在用一般方法证明直角三角形全等时，因为两个直角三角形中已具备一对直角相等的条件，故只需找另外两个条件即可.

提分·秘诀

方法点拨

证明线段或角相等的方法：

1. 观察要证明的线段或角（或通过等量代换得到的线段或角）在哪两个可能全等的三角形中，当待证线段或角不分布在两个全等的三角形中时，常需添加辅助线构造全等三角形；
2. 分析需要证明全等的两个三角形，确定已知条件（包含图形中的隐含条件）是什么，还缺什么条件；
3. 设法推导出所缺的条件；
4. 整理书写证明过程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度▸ 1 利用建立三角形全等的模型解实际应用问题

挑战·高分

例 7 某校八年级学生到野外活动，为测量一池塘两端 A，B 的距离，甲、乙、丙三位同学分别设计出如图 12.2-13 的三种方案.

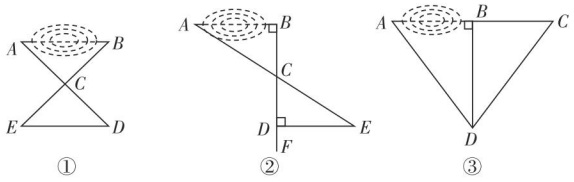


图 12.2-13

甲：如图 12.2-13①，先在平地取一个可直接到达 A，B 的点 C，再连接 AC，BC，并延长 AC 至点 D，延长 BC 至点 E，使 $DC=AC$，$EC=BC$，最后测出 DE 的长（即 A，B 的距离）.

乙：如图 12.2-13②，先过点 B 作 AB 的垂线 BF，再在 BF 上取 C，D 两点，使 $CD=BC$，接着过点 D 作 BD 的垂线 DE，交 AC 的延长线于点 E，最后测出 DE 的长（即 A，B 的距离）.

丙：如图 12.2-13③，过点 B 作 $BD\perp AB$，连接 AD，在 AB 的延长线上取一点 C，使 $\angle BDC=\angle BDA$，测出 BC 的长（即 A，B 的距离）.

（1）以上三位同学所设计的方案中，可行的有_____；

（2）请你选择其中一种可行的方案，说明它可行的理由.

解题秘方：根据方案中给出的条件，判定两个三角形全等，将无法测量的线段转化为可以测量的线段.（2）中任选一种可行的方案说明即可.

解：（1）甲、乙、丙

（2）选甲：在△ABC 和△DEC 中，$\begin{cases}AC=DC,\\ \angle ACB=\angle DCE,\\ BC=EC,\end{cases}$

$\therefore$△$ABC\cong$△DEC（SAS）. $\therefore AB=DE$.

选乙：$\because AB\perp BD$，$DE\perp BD$，$\therefore\angle B=\angle CDE=90°$.

在△ABC 和△EDC 中，$\begin{cases}\angle B=\angle CDE,\\ CB=CD,\\ \angle ACB=\angle ECD,\end{cases}$

$\therefore$△$ABC\cong$△EDC（ASA）. $\therefore AB=ED$.

选丙：$\because BD\perp AB$，$\therefore\angle ABD=\angle CBD=90°$.

在△ABD 和△CBD 中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle CBD,\\ BD=BD,\\ \angle BDA=\angle BDC,\end{cases}$

$\therefore$△$ABD\cong$△CBD（ASA）. $\therefore AB=CB$.

解法指导

建立三角形全等的模型解决实际问题时，需把握以下步骤：

1. 根据实际问题抽象出几何图形.
2. 根据图形结合题意，建立三角形全等的模型.
3. 分析问题，寻找推理途径.
4. 写出推理论证过程，解决问题.

教你一招

构造全等三角形测距离的求解思路：

1. 当两点间的距离不能直接测量时，可以把要测量的两点间的线段作为三角形的一边构造全等三角形，把待测量的线段转化为可直接测量的线段来求解.
2. 构造全等三角形时，要充分利用地形及已知条件，根据全等三角形的判定条件设计出最简单的测量方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶[2] 利用构造全等三角形法用全等三角形的性质解边角问题

技巧1：连公共边在构造全等三角形中的应用

例8 [中考·十堰]如图12.2-14，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$CB=CD$. 求证$\angle B=\angle D$.

解题秘方：紧扣“SSS”的条件构造全等三角形，巧连AC即可.

证明：如图12.2-14，连接AC.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$(SSS). $\therefore\angle B=\angle D$.

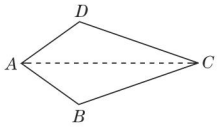


图12.2-14

技巧2：“截长补短法”在构造全等三角形中的应用

例9 如图12.2-15，已知$AB\parallel CD$，CE，BE分别平分$\angle BCD$和$\angle CBA$，点E在AD上. 求证$BC=AB+CD$.

解题秘方：紧扣“截长补短法”的特征构造全等三角形.

证明：如图12.2-15，在BC上取一点F，使$BF=BA$，连接EF.

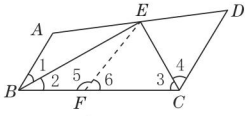


图12.2-15

$\because CE$，BE分别平分$\angle BCD$和$\angle CBA$，

$\therefore\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$.

在$\triangle ABE$和$\triangle FBE$中，$\begin{cases}BA=BF,\\\angle 1=\angle 2,\\BE=BE,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle FBE$(SAS). $\therefore\angle A=\angle 5$.

$\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle A+\angle D=180^\circ$.

又$\because\angle 5+\angle 6=180^\circ$，$\therefore\angle 6=\angle D$.

在$\triangle EFC$和$\triangle EDC$中，$\begin{cases}\angle 6=\angle D,\\\angle 3=\angle 4,\\EC=EC,\end{cases}$

$\therefore\triangle EFC\cong\triangle EDC$(AAS).

$\therefore CF=CD$. $\therefore BC=BF+CF=AB+CD$.

点拨微课堂

技巧3：“加倍折半法”在构造全等三角形中的应用

例10 如图12.2-16，已知CE，CB分别是$\triangle ABC$，$\triangle ADC$的中线，且$AB=AC$. 求证$CD=2CE$.

解题秘方：CE是$\triangle ABC$中AB边上的中线，将CE延长一倍至点F，可构造$\triangle BFE$和$\triangle ACE$全等，即出现了$2CE$这条线段，因此再证明$\triangle CBD$和$\triangle CBF$全等即可.

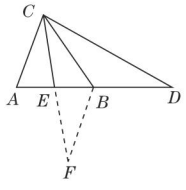


图12.2-16

挑战·高分

解法提醒

公共边是相等线段的一种形式，若已知有两组边对应相等，而第三边是公共边，则连接公共边，可构造两个三角形全等.

方法提示

运用“截长补短法”构造全等三角形有两个标志：

一是条件中有角平分线，截长补短是在角平分线所在角的两边上进行.

二是条件或结论中出现一条线段等于另外两条线段的和或差，截长补短也是在相关的线段中进行.

技巧点拨

证明一条线段等于两条线段的和的方法：

1. “**截长法**”的基本思路是在长线段上取一段，使之等于其中一短线段，然后证明剩下的线段等于另一短线段；
2. “**补短法**”的基本思路是延长短线段，使延长部分等于另一短线段，再证明延长后的线段等于长线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：如图 12.2−16，延长 CE 到点 F，使 $EF=CE$，连接 FB，则 $CF=2CE$.

$\because$ CE 是△ ABC 的中线，$\therefore$ $AE=BE$.

在△ BEF 和△ AEC 中，$\begin{cases} BE=AE, \\ \angle BEF=\angle AEC, \\ EF=EC, \end{cases}$

$\therefore$ △ BEF ≌△ AEC（SAS）. $\therefore$ $\angle EBF=\angle A$，$BF=AC$.

$\because$ $AB=AC$，$\therefore$ $\angle ACB=\angle ABC$.

$\therefore$ $\angle CBD=\angle A+\angle ACB=\angle EBF+\angle ABC=\angle CBF$.

$\because$ CB 是△ ADC 的中线，$\therefore$ $AB=BD$.

又 $\because$ $AB=AC$，$AC=BF$，$\therefore$ $BD=BF$.

在△ CBD 和△ CBF 中，$\begin{cases} CB=CB, \\ \angle CBD=\angle CBF, \\ BD=BF, \end{cases}$

$\therefore$ △ CBD ≌△ CBF（SAS）. $\therefore$ $CD=CF$. $\therefore$ $CD=2CE$.

技巧 4：基础三角形法在构造一个与它全等的三角形中的应用

例 11 如图 12.2−17，已知 $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，M 为 AC 边的中点，$AD\perp BM$ 于点 E，交 BC 于点 D，连接 DM.

求证 $\angle AMB=\angle CMD$.

解题秘方：由于 $\angle AMB$ 与 $\angle CMD$ 所在的两个三角形不全等，因此可以 $\angle CMD$ 所在的△ CMD 为基础三角形，在△ ABM 中构造一个含 $\angle AMB$ 的三角形与△ CMD 全等.

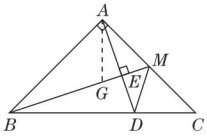


图 12.2−17

证明：作 $\angle BAC$ 的平分线 AG 交 BM 于点 G，如图 12.2−17 所示.

所作的辅助线必须满足：(1) 不能破坏图形中的已知条件；(2) 能够作为证明的一个已知条件

$\because$ $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB=45°$，$\angle MAG=\angle BAG=45°$.

$\because$ $AE\perp BM$，$\therefore$ $\angle MAE+\angle AMB=90°$.

又 $\because$ $\angle ABM+\angle AMB=90°$，

$\therefore$ $\angle ABM=\angle MAE$.

在△ ABG 和△ CAD 中，$\begin{cases} \angle BAG=\angle ACD=45°, \\ AB=CA, \\ \angle ABG=\angle CAD, \end{cases}$

$\therefore$ △ ABG ≌△ CAD（ASA）. $\therefore$ $AG=CD$.

$\because$ M 为 AC 边的中点，$\therefore$ $AM=CM$.

在△ AMG 和△ CMD 中，$\begin{cases} AG=CD, \\ \angle MAG=\angle MCD=45°, \\ AM=CM, \end{cases}$

$\therefore$ △ AMG ≌△ CMD（SAS）. $\therefore$ $\angle AMB=\angle CMD$.

技巧点拨

证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法：

“加倍法”或“折半法”.“加倍法”的基本思路是延长短线段，使延长后的线段等于原来的 2 倍，再证明它等于另一线段；“折半法”的基本思路是取长线段的中点，证明其中一部分等于短线段. 本例采用的是“加倍法”，待学过三角形中位线定理后我们还可以用“折半法”来证明.

解法提醒

- 当要证明的两个角所在的三角形明显不全等时，可借助与这两个角相关的边和角添加辅助线构造三角形全等.
- 基础三角形法是构造全等三角形的一种常用方法，它是从要证的边（角）关系中一边（角）所在的三角形为基础三角形，再从要证的另一边（角）为一边（角）作一个与基础三角形全等的三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 3 利用类比法探究全等变换中的动态应用的结论

例 12 [规律探索题]如图 12.2-18，在△ ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，AE 是过点 A 的一条直线，且 B，C 在 AE 的异侧，$BD\perp AE$ 于 D，$CE\perp AE$ 于 E.

（1）求证 $BD=DE+CE$.

（2）若直线 AE 绕 A 点旋转到如图 12.2-19 ①的位置（$BD<CE$）时，其余条件不变，则 BD 与 DE，CE 的关系如何？请予以证明.

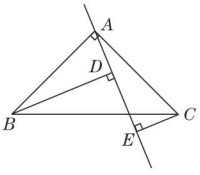


图 12.2-18

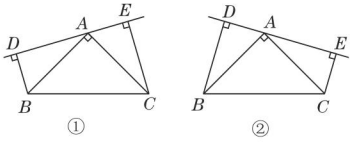


图 12.2-19

（3）若直线 AE 绕 A 点旋转到如图 12.2-19 ②的位置（$BD>CE$）时，其余条件不变，则 BD 与 DE，CE 的关系怎样？请直接写出结果，不需证明.

（4）根据以上的讨论，请用简洁的语言描述 BD 与 DE，CE 的关系.

解题秘方：根据条件易证△ ABD 与△ CAE 全等，从而将 BD 转化为 AE，CE 转化为 AD，从一条直线上线段的和差关系易证明结论. 而图 12.2-19 ①和②只是直线的位置改变，其他条件都不变，故探索得到结论的思路都相同，用类比法求解.

（1）**证明：**∵ $BD\perp AE$ 于 D，$CE\perp AE$ 于 E，

∴ $\angle ADB=\angle AEC=90°$.

∵ $\angle BAC=90°$，$\angle ADB=90°$，

∴ $\angle ABD+\angle BAD=\angle CAE+\angle BAD=90°$，

∴ $\angle ABD=\angle CAE$.

在△ ABD 和△ CAE 中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEA,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$

∴ △ ABD ≌△ CAE（AAS）. ∴ $BD=AE$，$AD=CE$.

∵ $AE=AD+DE$，∴ $BD=DE+CE$.

（2）**解：**$BD=DE-CE$. 证明如下：

∵ $BD\perp AE$ 于 D，$CE\perp AE$ 于 E，∴ $\angle ADB=\angle AEC=90°$.

∵ $\angle BAC=90°$，$\angle ADB=90°$，

∴ $\angle ABD+\angle BAD=\angle CAE+\angle BAD=90°$，

∴ $\angle ABD=\angle CAE$.

挑战·高分

名师导析

在(1)中，观察图形易得 AE=DE+AD，而要求证的结论是 BD=DE+CE，则需证 BD=AE，AD=CE. 故证明△ ABD ≌△ CAE 即可.

(2)(3)完全可根据(1)的思路，借助图形，得出结论.

在(4)中用语言描述 BD 与 DE，CE 的关系时，应注意 B，C 与直线 AE 的位置关系，分情况予以说明.

教你一招

解决图形变换问题需要抓住三个特点：

1. 变化前的结论及说理过程对变化后的结论起到重要的作用；

2. 在图形变化前后，明确哪些关系发生变化，哪些关系没有发生变化，变化前的等角、等线段在变化后是否还存在；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ABD和△CAE中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEA,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$

∴△ABD≌△CAE（AAS）.

∴ $BD=AE$，$AD=CE$，∴ $BD=AE=DE-AD=DE-CE$.

（3）**解**：$BD=DE-CE$.

（4）**解**：归纳（1）（2）（3）可知，结论描述为：当B，C在直线AE同侧时，$BD=DE-CE$；当B，C在直线AE异侧时，若$BD>CE$，则$BD=DE+CE$，若$BD<CE$，则$BD=CE-DE$.

3. 几种变化图形之间，说理思路存在内在联系，变化后的说理思路可模仿与借鉴变化前的结论与过程．变化后的结论有时发生变化，有时不发生变化．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

全等三角形的判定是中考的必考内容，主要考查添加条件或选用适当的方法证明三角形全等．常与全等三角形的性质一起考查，近几年的中考题以填空题、选择题和解答题的形式出现，题目以中、低档为主，有时也与其他知识综合考查，难度较大，主要出现在解答题中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用全等三角形的判定补充三角形全等的条件

例13 [中考·成都]如图12.2-20，已知$\angle ABC=\angle DCB$，添加以下条件，不能判定△ABC≌△DCB的是（　　）

A. $\angle A=\angle D$　　B. $\angle ACB=\angle DBC$

C. $AC=DB$　　D. $AB=DC$

试题评析：本题考查的是全等三角形的判定和性质，解答本题的关键是掌握全等三角形的判定定理及进行推理的方法．

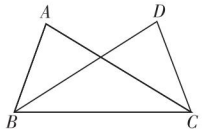


图12.2-20

解：A. $\angle A=\angle D$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，符合AAS，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项不符合题意；

B. $\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，$\angle ACB=\angle DBC$，符合ASA，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项不符合题意；

C. $\angle ABC=\angle DCB$，$AC=BD$，$BC=CB$，不符合全等三角形的判定定理，即不能推出△ABC≌△DCB，故本选项符合题意；

D. $AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，符合SAS，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项不符合题意．

答案：C

方法点拨

证明两个三角形全等，若条件不够需要补充时，有以下几种情况：

1. 已知两边
   - 找第三边，
   - 找两边的夹角；
2. 已知两角
   - 找其中任意一角的对边，
   - 找两角的夹边；
3. 已知一角及其邻边
   - 找任意一角，
   - 找夹该已知角的另一边；
4. 已知一边及其对角，找余下的任一角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用全等三角形的判定和性质判断两条线段的关系

例 14 [中考·菏泽]如图 12.2-21，$AB \parallel CD$，$AB=CD$，$CE=BF$. 请写出 DF 与 AE 的关系，并证明你的结论.

试题评析：本题主要考查全等三角形的判定与性质，解题的关键是识别两条线段所在的两个三角形全等.

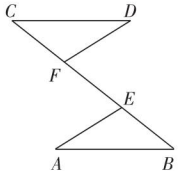


图 12.2-21

解：$DF \parallel AE$ 且 $DF=AE$.

证明：$\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle C=\angle B$.

$\because CE=BF$，$\therefore CF=BE$.

又 $\because CD=AB$，$\therefore \triangle DCF \cong \triangle ABE$（SAS）.

$\therefore DF=AE$，$\angle DFC=\angle AEB$.

$\therefore \angle DFE=\angle AEF$.

$\therefore DF \parallel AE$.

即 DF 与 AE 的关系是平行且相等.

考法点评

两条线段的关系包括数量关系和位置关系，数量关系有相等、倍分等，位置关系有平行和垂直.

线段的这些关系都可以通过这两条线段所在的三角形全等得到.

考法 3 利用全等三角形的判定和性质求图形的面积

例 15 [中考·黑龙江]如图 12.2-22，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$AC=5$，$\angle DAB=\angle DCB=90°$，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

A. 15　　B. 12.5　　C. 14.5　　D. 17

试题评析：本题主要考查了全等三角形的判定与性质，全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件，在应用全等三角形的判定时，要注意三角形的公共边和公共角，必要时添加适当的辅助线构造三角形.

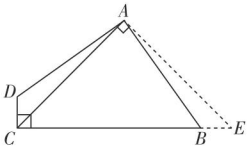


图 12.2-22

解：如图 12.2-22，过点 A 作 $AE \perp AC$，交 CB 的延长线于点 E.

$\because \angle DAB=\angle DCB=90°$，

$\therefore \angle D+\angle ABC=180°=\angle ABE+\angle ABC$，

$\therefore \angle D=\angle ABE$.

$\because \angle DAB=\angle CAE=90°$，

$\therefore \angle CAD=\angle EAB$.

又 $\because AD=AB$，$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB$（ASA）.

$\therefore AC=AE$，四边形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle ACE$ 的面积相等.

$\because S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 5\times 5=12.5$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 12.5.

答案：B

解法提醒

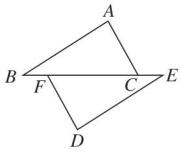
“化不规则图形为规则图形”是求面积问题的一种常用解题方法，本例是利用全等三角形进行割补转化. 即：过点 A 作 AE ⊥ AC，交 CB 的延长线于点 E，判定 △ ACD ≌ △ AEB，即可得到 AC=AE，四边形 ABCD 的面积与△ ACE 的面积相等，根据 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times5\times5=12.5$，即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

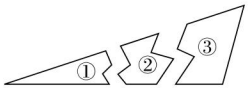
1. [中考·安顺]如图，点B，F，C，E在一条直线上，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，那么添加下列一个条件后，仍无法判定$\triangle ABC \cong \triangle DEF$的是（　　）

A. $\angle A = \angle D$　　B. $AC=DF$

C. $AB=ED$　　D. $BF=EC$



（第1题）



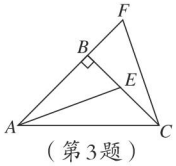
（第2题）

2. 如图，某同学把一块三角形的玻璃打碎成了3块，现在要去玻璃店配一块完全一样的玻璃，其中最省事的办法是（　　）

A. 带①去　　B. 带②去

C. 带③去　　D. 带①和②去

3. [中考·南通]如图，在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，F为AB延长线上一点，点E在BC上，且$AE=CF$. 若$\angle BAE=25°$，则$\angle ACF=$_____度.

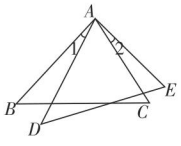


（第3题）

4. 已知在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，若$AB=10$，$AC=4$，则AD的取值范围是_____.

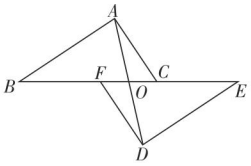
5. [中考·昆明]如图，在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D$，$\angle 1=\angle 2$.

求证$BC=DE$.



（第5题）

6. [中考·恩施州]如图，点B，F，C，E在一条直线上，$FB=CE$，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，AD交BE于点O. 求证：AD与BE互相平分.

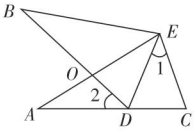


（第6题）

7. [中考·苏州]如图，$\angle A=\angle B$，$AE=BE$，点D在AC边上，$\angle 1=\angle 2$，AE和BD相交于点O.

（1）求证$\triangle AEC \cong \triangle BED$；

（2）若$\angle 1=42°$，求$\angle BDE$的度数.



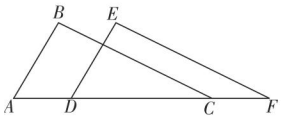
（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.[中考·桂林]如图，点A，D，C，F在同一条直线上，$AD=CF$，$AB=DE$，$BC=EF$.

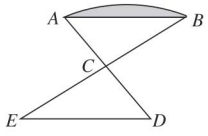
（1）求证△ABC≌△DEF；

（2）若∠$A=55°$，∠$B=88°$，求∠F的度数.



（第8题）

9.[中考·南通]如图，有一池塘，要测池塘两端A，B的距离，可先在平地上取一个点C，从点C不经过池塘可以直接到达点A和B. 连接AC并延长到点D，使$CD=CA$. 连接BC并延长到点E，使$CE=CB$. 连接DE，那么量出DE的长就是A，B的距离，为什么?

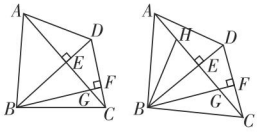


（第9题）

10.[中考·哈尔滨]已知：在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点E，且$AC\perp BD$，作$BF\perp CD$，垂足为点F，BF与AC交于点G，∠BGE=∠ADE.

（1）如图①，求证$AD=CD$；

（2）如图②，BH是△ABE的中线，若$AE=2DE$，$DE=GE$，在不添加任何辅助线的情况下，请写出图②中四个三角形，使写出的每个三角形的面积都等于△ADE面积的2倍.



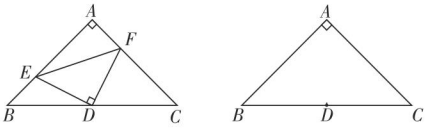
①　②

（第10题）

11.[中考·滨州]已知：在△ABC中，∠$A=90°$，$AB=AC$，点D为BC的中点.

（1）如图①，若点E，F分别为AB，AC上的点，且$DE\perp DF$，求证$BE=AF$；

（2）若点E，F分别为AB，CA延长线上的点，且$DE\perp DF$，那么$BE=AF$吗？请利用图②说明理由. **【导学号：2798126】**



①　②

（第11题）

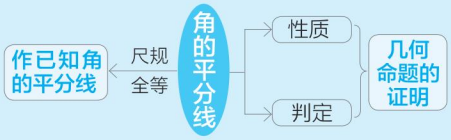
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.3 角的平分线的性质

核心知识

- 作已知角的平分线
- 角平分线的性质
- 角平分线的判定
- 命题的证明

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 作已知角的平分线

1. 角的平分线的作法

（1）**折叠法**：将已知角折叠，使角的两边重合，折痕就是角的平分线所在的直线.

（2）**度量法**：用量角器度量已知角的度数，并除以 2，再用量角器画出这个角的平分线.

（3）**尺规作图法**：保留作图痕迹，并指出结论.

2. 尺规作图步骤与图示

已知$\angle AOB$. 求作：$\angle AOB$ 的平分线.

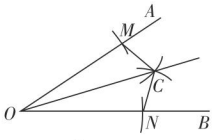


图 12.3−1

作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.

（2）分别以点 M，N 为圆心，大于$\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在$\angle AOB$ 的内部相交于点 C.

（3）画射线 OC. 射线 OC 即为所求（如图 12.3−1）.

拔考向▸利用作已知角的平分线等分角

例 1 如图 12.3−2，已知$\angle AOB$，求作：$\angle AOM=\frac{1}{4}\angle AOB$.

解题秘方：利用尺规作图作两次角平分线即可.

解：作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 E，交 OB 于点 F；

（2）分别以点 E，F 为圆心，大于$\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧在$\angle AOB$ 的内部交于点 C；

（3）画射线 OC；

（4）同理，作$\angle AOC$ 的平分线 OM.

$\angle AOM$ 即为所求作的角（如图 12.3−2）.

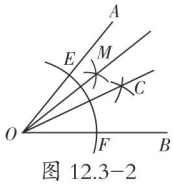


图 12.3−2

提分·必记

特别解读

1.“适当长为半径画弧”的目的是方便作图，不能太长也不要太短；

2.“大于$\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧”是因为若以小于$\frac{1}{2}MN$ 的长为半径，则画出的两弧不能相交；

3.“画射线 OC”不能叙述为“连接 OC”，因为角平分线是射线而不是线段；

4. 依据作图可知△OMC≌△ONC（SSS），所以 OC 平分∠AOB.

提分·秘诀

方法点拨

将一个角四等分，可先作这个角的平分线，将这个角二等分，再作两个半角的平分线，可将原角四等分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 角的平分线的性质

1. **性质定理** 角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

角的平分线的性质的两个必要条件：

（1）点在角平分线上；

（2）这个点到角两边的距离即点到角的两边的垂线段的长度.

两者缺一不可.

2. **几何语言** 如图 12.3−3，

∵ OP 平分∠ AOB，

$PD \perp OA$ 于点 D，

$PE \perp OB$ 于点 E，

∴ $PD=PE$.

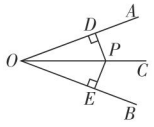


图 12.3−3



拔考向▶ 利用角的平分线的性质解与垂线段相关的应用

类型 1：角的平分线的性质在证明线段相等中的应用

例 2 如图 12.3−4，OD 平分∠ EOF，在 OE，OF 上分别取点 A，B，使 $OA=OB$，P 为 OD 上一点，$PM \perp BD$，$PN \perp AD$，垂足分别为 M，N.

求证：$PM=PN$.

解题秘方： 在图中找出符合角平分线性质的模型，利用角的平分线的性质证线段相等.

证明： ∵ OD 平分∠ EOF，

∴∠ BOD= ∠ AOD.

在△ BOD 和△ AOD 中，

$$\begin{cases} OB=OA, \\ \angle BOD=\angle AOD, \\ OD=OD, \end{cases}$$

∴△ BOD ≌△ AOD（SAS）.

∴∠ BDO= ∠ ADO，即 DO 平分∠ BDA.

又 P 为 DO 上一点，且 $PM \perp BD$，$PN \perp AD$，

∴ $PM=PN$.

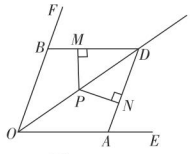


图 12.3−4

类型 2：角的平分线的性质在求线段长的和差关系中的应用

例 3 如图 12.3−5，在△ ABC 中，∠ C=90° ，$AC=BC$，AD 平分∠ CAB，交 BC 于点 D，$DE \perp AB$，垂足为 E，若 AB=8 cm，求△ DEB 的周长.

解题秘方： 运用角的平分线的性质及全等三角形的性质，将△ DEB 的周长转化为线段 AB 的长.

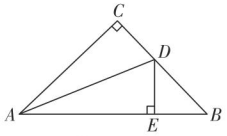


图 12.3−5

提分·必记

特别提醒

角的平分线的性质是由两个条件（角平分线，垂线）得到一个结论（线段相等）.

利用角的平分线的性质证明线段相等时，证明的线段是“垂直于角两边的线段”而不是“垂直于角平分线的线段”.

提分·秘诀

方法点拨

1. **在证明两条线段相等时**，若两条线段分别在两个三角形中，可考虑使用三角形全等或角的平分线的性质，若条件中有垂直和角平分线，则优先考虑使用角的平分线的性质.
2. **运用角的平分线的性质证明线段相等时**，不需要利用三角形全等.

解法提醒

求三角形的周长时，若三角形各边的长不易求解，可考虑找出题中的相等线段进行等量替换，而角的平分线的性

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：在△ ABC 中，∠ C=90°，

∴ $DC \perp AC$.

又∵ $DE \perp AB$，AD 平分∠ CAB，

∴ $DC=DE$.

在 Rt △ ACD 和 Rt △ AED 中，$\begin{cases} AD=AD, \\ DC=DE, \end{cases}$

∴ Rt △ ACD ≌ Rt △ AED（HL）.

∴ $AC=AE$.

∵ $AC=BC$，∴ $AE=BC$.

∴ △ DEB 的周长 $=DE+DB+EB=DC+DB+EB=BC+EB=AE+EB=AB=8$ cm.

质能起到等量替换的作用，使三角形的周长等于一条线段长，从而整体求出.

类型 3　角的平分线的性质在求涉及面积问题的线段长中的应用

例 4　如图 12.3−6，BD 是△ ABC 的角平分线，$DE \perp AB$ 于 E，$S_{\triangle ABC}=90\ \text{cm}^2$，$AB=18$ cm，$BC=12$ cm，求 DE 的长.

解题秘方：紧扣总面积等于各部分面积的和求解.

解：过点 D 作 $DF \perp BC$，垂足为 F，如图 12.3−6.

∵ BD 是∠ ABC 的平分线，$DE \perp AB$，

∴ $DE=DF$.

又 ∵ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times 18\times DE+\frac{1}{2}\times 12\times DF=90\ \text{cm}^2$，

∴ $DE=6$ cm，即 DE 的长为 6 cm.

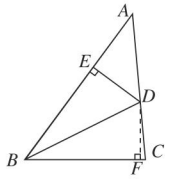


图 12.3−6

方法点拨

运用角的平分线的性质解决问题时，条件中必须有角平分线性质的模型（即两个必要条件），若缺少某个部分，则通过作辅助线补充完整，才能运用此性质解决问题.

知识 3　证明几何文字命题的一般步骤

1. 证明一个几何文字命题的一般步骤

（1）明确命题中的已知和求证；

（2）根据题意，画出图形，并用符号表示已知和求证；

（3）经过分析，找出由已知推出要证的结论的途径，写出证明过程.

2. 推理证明中常见的分析方法

（1）**综合法**：从已知条件入手，根据已学过的定义、定理、全等的判定方法等，逐步推出要证的结论.

（2）**分析法**：从要证明的结论出发，根据已学过的定义、定理、全等的判定方法等，寻找使结论成立所需的条件，这样一步步地逆推，一直追溯到结论成立的条件与已知条件吻合.

（3）**“两头凑”的方法**：分别从已知条件和结论入手，当从已知条件推导出的结论与从结论倒推出所需的条件相吻合时，问题可得证. 这种分析问题的方法叫“两头凑”的方法.

提分·必记

特别提醒

- 证明一个命题的步骤不是固定不变的，要根据题目的情况而定，但是总体必须是完整的，并且证明的过程必须“步步有据”.
- 证明几何命题所画图形应符合题意，并具有一般性和代表性. 在画图时，要考虑是否存在不同的情形，若存在，则要分别画出图形，再分别进行证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用证明几何命题的步骤证明几何命题

例 5 求证：两角和其中一角的平分线对应相等的两个三角形全等.

解题秘方：紧扣证明几何命题的一般步骤进行解答.

解：已知：如图 12.3−7，在△ABC和△$A'B'C'$中，AD，$A'D'$分别为∠BAC，∠$B'A'C'$的平分线，且∠B=∠B'，∠BAC=∠$B'A'C'$，AD=$A'D'$.

求证：△ABC≌△$A'B'C'$.

证明：∵AD，$A'D'$分别平分∠BAC，∠$B'A'C'$，

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle B'A'C'$.

∵∠BAC=∠$B'A'C'$，∴∠1=∠2.

在△ABD和△$A'B'D'$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B',\\ \angle 1=\angle 2,\\ AD=A'D',\end{cases}$$

∴△ABD≌△$A'B'D'$（AAS）.

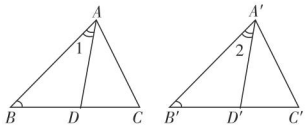


图 12.3−7

∴AB=$A'B'$.

在△ABC和△$A'B'C'$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B',\\ AB=A'B',\\ \angle BAC=\angle B'A'C',\end{cases}$$

∴△ABC≌△$A'B'C'$（ASA）.

提分·秘诀

特别提醒

为了便于分清命题中的已知和求证，可以将命题改写成“如果……，那么……”或“若……，则……”的形式.

点知识▶4 角的平分线的判定

1. **判定定理** 角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

2. **几何语言** 如图 12.3−8，

∵点P为∠AOB内一点，PD⊥OA，PE⊥OB，垂足分别为D，E，且PD=PE，

∴点P在∠AOB的平分线OC上.

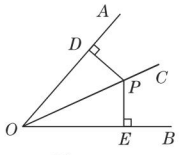


图 12.3−8

3. **角平分线的判定定理与性质定理的关系**

（1）如图 12.3−8，都与距离有关：即条件PD⊥OA，PE⊥OB都具备；

（2）点在角的平分线上$\underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}}$（角的内部的）点到角两边的距离相等.

提分·必记

特别提醒

1. 使用该判定定理的前提是这个点必须在角的内部.
2. 角的平分线的判定是由两个条件（垂线，线段相等）得到一个结论（角平分线）.
3. 角的平分线的判定定理是证明两角相等的重要依据，它比利用三角形全等证两角相等更方便快捷.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用角平分线的判定证明角平分线

例6 如图 12.3−9，$BE=CF$，$BF\perp AC$ 于点 F，$CE\perp AB$ 于点 E，BF 和 CE 交于点 D. 求证：AD 平分 $\angle BAC$.

解题秘方： 利用角平分线的判定定理证明角平分线时，紧扣点在角的内部且点到角两边的距离相等进行证明.

证明： $\because BF\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90^\circ$.

在$\triangle BDE$和$\triangle CDF$中，

$$\begin{cases}\angle BDE=\angle CDF,\\ \angle DEB=\angle DFC,\\ BE=CF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$（AAS）. $\therefore DE=DF$.

又$\because BF\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.

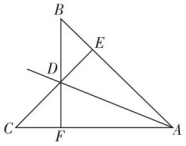


图 12.3−9

提分·秘诀

方法点拨

证明角平分线的方法思路：

1. 从数量上证明被角平分线分成的两个角相等.
2. 从形上证明角的内部的点到角两边的距离相等，即只需从要证的线上的某一点向角的两边作垂线段，再证明垂线段相等即可. 这样把证“某线是角的平分线”的问题转化为证“垂线段相等”的问题，体现了**转化思想**.

知识▶5 三角形的角平分线的性质（拓展点）

1. 性质定理 三角形的三条角平分线交于一点，并且这一点到三条边的距离相等. 这一点叫三角形的内心.

2. 几何语言

如图 12.3−10，在$\triangle ABC$中，AD，BM，CN分别是$\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线，AD，BM，CN交于一点O，且点O到三边BC，AB，AC的距离（OE，OG，OF的长）相等，即 $OE=OG=OF$.

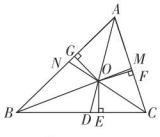


图 12.3−10

提分·必记

要点解读

三角形的三条角平分线相交于三角形内一点，且该点到三角形三边的距离相等. 反之，三角形内部到三边距离相等的点是三角形三条角平分线的交点.

考向▶利用角平分线的判定和性质判定三角形的角平分线

例7 如图 12.3−11，$\angle MAC$和$\angle NCA$是$\triangle ABC$的外角，$\angle ABC$的平分线 BD 与$\angle MAC$的平分线 AD 交于点 D.

求证：CD 平分 $\angle ACN$.

解题秘方： 紧扣“到 CA，CN 的距离相等的点在 $\angle ACN$ 的平分线上进行证明.

证明： 如图 12.3−11，作 $DE\perp BM$ 于点 E，$DF\perp BN$ 于点 F，$DG\perp AC$ 于点 G.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore DE=DF$.

$\because AD$ 平分 $\angle MAC$，

$\therefore DE=DG$.

$\therefore DG=DF$，

$\therefore CD$ 平分 $\angle ACN$.

由此例的结论可知，三角形的一条内角平分线与两条外角平分线也相交于一点.

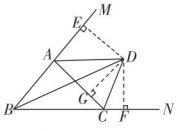


图 12.3−11

提分·秘诀

方法点拨

角平分线的性质与判定都离不开“点到角两边的距离”，所以过点作角两边的垂线是运用角平分线性质或判定最常见的辅助线. 因此常将证角平分线转化为证垂线段相等；反之也常将证垂线段相等转化为证角平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用转化思想证明含角平分线中的角的和差关系

例 8 如图 12.3−12，$\angle 1=\angle 2$，P 为 BN 上一点，且 $PD\perp BC$ 于 D，$AB+BC=2BD$，求证：$\angle BAP+\angle BCP=180°$.

解题秘方： 要证明两个角的和是 180°，可把它们转化到一起，利用三角形全等的性质证它们可以拼成一个平角.

证明： 如图 12.3−12. 过点 P 作 $PE\perp BA$ 于 E.

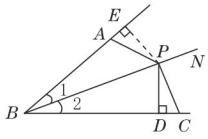


图 12.3−12

$\because PD\perp BC$，$PE\perp BA$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore PE=PD$.

在 Rt△BPE 和 Rt△BPD 中，$\begin{cases}BP=BP,\\PE=PD,\end{cases}$

$\therefore$ Rt△$BPE\cong$ Rt△BPD（HL）.

$\therefore BE=BD$.

$\because AB+BC=2BD$，$BC=CD+BD$，$AB=BE-AE$，

$\therefore AE=CD$.

$\because PE\perp BE$，$PD\perp BC$，$\therefore\angle PEA=\angle PDC=90°$.

在△PEA 和△PDC 中，$\begin{cases}PE=PD,\\\angle PEA=\angle PDC,\\AE=CD,\end{cases}$

$\therefore\triangle PEA\cong\triangle PDC$（SAS），$\therefore\angle EAP=\angle BCP$.

$\because\angle BAP+\angle EAP=180°$，$\therefore\angle BAP+\angle BCP=180°$.

挑战·高分

解法提醒

本题运用转化思想进行证明. 当遇到证明两角的和是 180° 的问题时，往往将其转化为证明平角或三角形内角和的问题.

本题根据角平分线的性质想到从点 P 向 ∠ABC 的两边中无垂线的一边作垂线，构造直角三角形，证明两直角三角形全等，从而将两个角的和转化为一个平角，进而得出结论.

拔尖角度 2 利用等面积法求三角形中的距离

例 9 如图 12.3−13，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$，$BC=3$，$AC=4$. 点 P 是 $\angle BAC$，$\angle ABC$ 的平分线的交点，试求点 P 到 AB 边的距离.

解题秘方： 运用等面积法求点到三角形各边的距离.

解： 如图 12.3−13，连接 PC.

$\because$ 点 P 是 $\angle BAC$，$\angle ABC$ 的平分线的交点，

$\therefore$ 点 P 到△ABC 的三边的距离相等.

设点 P 到△ABC 的三边的距离为 h，

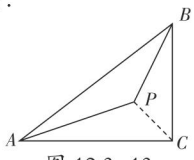


图 12.3−13

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AC\cdot h+\frac{1}{2}BC\cdot h+\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}BC\cdot AC$，即 $\frac{1}{2}\times(4+3+5)\times h=\frac{1}{2}\times 3\times 4$.

$\therefore h=1$，即点 P 到 AB 边的距离为 1.

挑战·高分

方法点拨

等面积法求三角形的角平分线的交点到三边的距离的方法：

三角形角平分线的交点与三角形三个顶点的连线把原三角形分割成了三个小三角形，利用三个小三角形的面积之和等于原三角形的面积列式是求角平分线的交点到三边距离的常用方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用等线段证角平分线法判定角平分线

例 10 如图 12.3−14，在△ ABC 的外部，分别以 AB，AC 为边作等边三角形 ABD 和等边三角形 ACE，CD，BE 相交于点 O，求证：OA 平分∠ DOE.

解题秘方： 证明某角的平分线，可转化为证明该线上的点到角两边的距离相等.

证明： 如图 12.3−14，过点 A 作 $AM \perp CD$，$AN \perp BE$，垂足分别为 M，N.

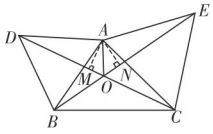


图 12.3−14

∵△ ABD 和△ ACE 为等边三角形，

∴ $AB=AD$，∠ BAD= ∠ $EAC=60°$，$AE=AC$.

∴∠ BAE= ∠ DAC. ∴△ ABE ≌△ ADC（SAS）.

∴ $BE=CD$，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADC}$. ∴ $AM=AN$.

又∵ $AM \perp DO$，$AN \perp EO$，∴ OA 平分∠ DOE.

挑战·高分

方法点拨

等线段证角平分线法：

等线段证角平分线法就是利用角的内部到角两边的距离相等的点在角的平分线上这一性质，通过证明点到角的两边距离相等从而得到点在角的平分线上，即距离相等→角平分线.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

角的平分线的性质与判定，在中考中一般不单独命题，常与线段的垂直平分线、三角形全等以及圆等其他几何知识综合考查，主要以填空题、解答题等形式出现，属于低、中档题目. 对尺规作角平分线及证明的考查，近几年中考主要以选择题、填空题或解答题的形式出现，以考查应用角平分线的性质求距离或考查基本画图为主，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用角平分线的判定和性质求角的度数

例 11 [中考·大庆]如图 12.3−15，∠ B= ∠ $C=90°$，M 是 BC 的中点，DM 平分∠ ADC，且∠ $ADC=110°$，则∠ MAB=（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°

试题评析： 本题主要考查的是角平分线的性质和判定，利用角平分线上的点到角的两边的距离相等构造角平分线的基本模型是解题的关键.

解： 如图 12.3−15，过点 M 作 $MN \perp AD$ 于点 N，

∵∠ B= ∠ $C=90°$，∴∠ B+ ∠ $C=180°$.

∴ $AB \parallel CD$. ∴∠ $DAB=180°$ − ∠ $ADC=70°$.

∵ DM 平分∠ ADC，$MN \perp AD$，$MC \perp CD$，

∴ $MN=MC$.

∵ M 是 BC 的中点，∴ $MC=MB$. ∴ $MN=MB$.

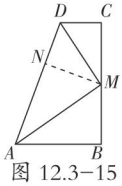


图 12.3−15

又 $MN \perp AD$，$MB \perp AB$，∴∠ $MAB=\frac{1}{2}$∠ $DAB=35°$.

答案： B

冲刺·满分

解法提醒

角平分线的判定和性质运用的基本模型，一有角平分线，二有过角平分线上的点作角两边的垂线. 运用此判定和性质解决问题时，若基本模型不齐全，可通过作辅助线构造出基本模型.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用尺规作图及角平分线的性质求三角形的面积

例 12 [中考·枣庄]如图 12.3-16，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，以顶点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，AB 于点 M，N，再分别以 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 BC 于点 D，若 CD=4，AB=15，则△ABD 的面积为(　　)

A.15　　B.30　　C.45　　D.60

试题评析：本题考查了角平分线上的点到角的两边距离相等的性质以及角平分线的画法，熟记性质是解题的关键.

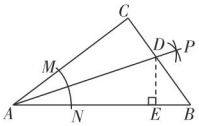


图 12.3-16

解：由题意得 AP 是∠BAC 的平分线，过点 D 作 DE⊥AB 于 E，如图 12.3-16.

∵∠C=90°，∴ DE=CD=4，

∴△ABD 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\times 15\times 4=30$.

答案：B

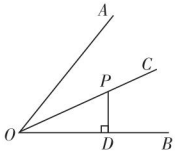
考法点评

角平分线的性质揭示了两条线段之间的相等关系，而这两条线段都是垂线段，所以考查时，一是用来求线段长，二是用来解决三角形的面积问题.

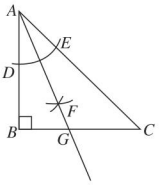
两年模拟兵法 ☞答案见 247 页

1. [中考·台州]如图，点 P 是∠AOB 的平分线 OC 上一点，PD⊥OB，垂足为 D. 若 PD=2，则点 P 到边 OA 的距离是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 4



(第 1 题)



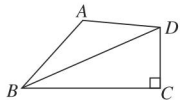
(第 2 题)

2. [中考·包头]如图，在 Rt△ABC 中，∠B=90°，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB，AC 于点 D，E，再分别以点 D，E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径画弧，两弧交于点 F，作射线 AF 交边 BC 于点 G，若 BG=1，AC=4，则△ACG 的面积是(　　)

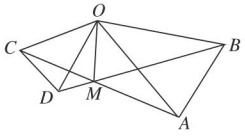
A.1　　B. $\frac{3}{2}$　　C.2　　D. $\frac{5}{2}$

3. [中考·湖州]如图，已知在四边形 $ABCD$ 中，∠BCD=90°，BD 平分∠ABC，AB=6，BC=9，CD=4，则四边形 $ABCD$ 的面积是(　　)

A. 24　　B.30　　C.36　　D.42



(第 3 题)

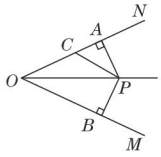


(第 4 题)

4. [中考·滨州]如图，在△OAB 和△OCD 中，OA=OB，OC=OD，OA>OC，∠AOB=∠COD=40°，连接 AC，BD 交于点 M，连接 OM，下列结论：① AC=BD；② ∠AMB=40°；③ OM 平分∠BOC；④ MO 平分∠BMC. 其中正确的个数为(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. 如图，已知 PA⊥ON 于 A，PB⊥OM 于 B，且 PA=PB，∠MON=50°，∠OPC=30°，求∠PCA 的大小.



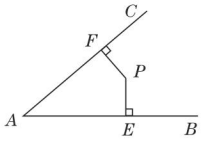
(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.[中考·怀化]如图，P是$\angle BAC$内的一点，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别为点E，F，$AE=AF$.

求证：（1）$PE=PF$；

（2）点P在$\angle BAC$的平分线上.



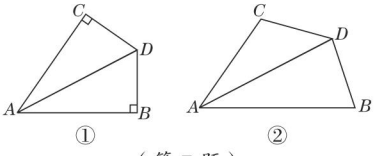
（第6题）

7.[中考·长春]感知：如图①，AD平分$\angle BAC$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle B=90°$.

易知：$DB=DC$.

探究：如图②，AD平分$\angle BAC$，$\angle ABD+\angle ACD=180°$，$\angle ABD<90°$.

求证：$DB=DC$. 【导学号：2798126】

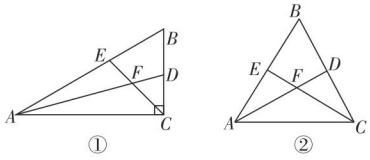


（第7题）

8. 如图①，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=60°$，AD，CE分别是$\angle BAC$，$\angle BCA$的平分线，AD，CE相交于点F.

（1）请你判断并写出FE与FD之间的数量关系，并证明你的结论；

（2）如图②，如果$\angle ACB$不是直角，其他条件不变，（1）中所得结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由.



（第8题）

素养提分 行动篇

倒过来想

宋朝有位历史学家叫司马光，他不仅因编著《资治通鉴》而流芳百世，而且他在小时候砸缸救人的故事至今仍广为流传.

司马光有一次跟一群小伙伴玩耍，其中一个小孩儿不小心跌入储满水的大缸里，由于缸太高，同伴们无法救出这个孩子，大家都慌了神，这时司马光把缸砸破，这样人便得救了.

在“让人离开水”有困难时，司马光设法“让水离开人”，这就是司马光的聪明所在.

倒过来想，就是逆向思考，这是数学中一种常用的思维方式，比如本章中对“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”进行逆向思考，经过证明就得到角平分线的判定定理：“角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”.类似的例子还有很多，如以后将要学到的“线段垂直平分线的性质定理”与“线段垂直平分线的判定定理”；又如本书第十四章中对整式乘法法则和乘法公式进行逆向思考，就得到了多项式因式分解的方法；再如，探求证明的途径时，如果不能顺利地从条件出发推出结论，不妨逆向思考，即从结论出发，寻找使结论成立的条件，往往能找到证明的途径.

学会“倒过来想”有助于同学们不断地提高自己提出问题和解决问题的能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分析综合法在三角形全等中的应用

荣老师告诉你 分析法指从要证的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直到推出一个正确的条件（如已知、定理、性质等）为止，即从未知看需知，逐渐靠拢已知，从而达到证明目的. 证明一道几何题，不是一拿到题，就凭感觉开始证明，而是要首先运用分析法缜密分析，而后运用综合法来进行综合证明. 综合法是指在推理的过程中，从已知开始，一环扣一环，最后使所要证明的结论成立，即从已知看可知，逐渐靠拢未知的一种证明方法. 分析法和综合法不是彼此孤立的，证明题中，我们往往是用分析法探路，用综合法证题.

应用一 ▶ 利用分析综合法证三角形全等

例 1 [中考·泉州]如图 12-1，△ABC，△CDE均是等腰直角三角形，∠ACB=∠DCE=90°，点E在AB上.

求证：△CDA≌△CEB.

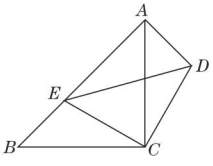




图 12-1

解题秘方： 由等腰三角形的性质可知BC=AC，EC=DC. 由∠ACB=∠DCE=90°，利用等式的基本性质，可得∠ECB=∠DCA，从而利用SAS证两个三角形全等.

证明： ∵∠ACB=∠DCE=90°，

∴∠ACB−∠ACE=∠DCE−∠ACE，

即∠ECB=∠DCA.

又∵△ABC，△CDE均是等腰直角三角形，

∴BC=AC，EC=DC.

∴△CDA≌△CEB（SAS）.

方法点拨： 用分析法证明三角形全等，先找出两个三角形中已知的相等量，然后结合判定方法分析出要找的相等量，结合已知中其他条件分析出解决问题的方案.

应用二 ▶ 利用分析综合法证线段相等

例 2 [中考·恩施州]如图 12-2，BE⊥AC，CD⊥AB，垂足分别为E，D，BE=CD. 求证：AB=AC.

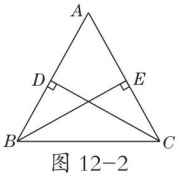


图 12-2

解题秘方： 分析法：欲证AB=AC，观察图形知AB，AC分别在△ABE，△ACD中，只需证△ABE≌△ACD，问题即可得证. 分析条件可知，∠A是公共角，∠AEB=∠ADC，BE=CD，可证明△ABE≌△ACD. 或者在Rt△BCE，Rt△CBD中，由BC=CB，BE=CD证明Rt△BCE≌Rt△CBD，可得∠CBD=∠BCE，∠BCD=∠CBE，这样可得∠ABE=∠ACD，再结合上面的条件可得△ABE≌△ACD.

证明： **方法一** ∵BE⊥AC，CD⊥AB，

∴∠ADC=∠AEB=90°.

又∵∠A=∠A，BE=CD，

∴△ABE≌△ACD（AAS）. ∴AB=AC.

方法二 ∵BE⊥AC，CD⊥AB，

BC=CB，BE=CD，

∴Rt△BCE≌Rt△CBD（HL）.

∴∠CBD=∠BCE，∠BCD=∠CBE，

∴∠ABE=∠ACD.

又∵∠A=∠A，BE=CD，

∴△ABE≌△ACD（AAS）.

∴AB=AC.

方法点拨： 证明两条线段相等的基本思路：若两条线段在两个三角形中，则证明这两条线段所在的两个三角形全等；若两条线段在同一个三角形中，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则可利用“等角对等边”（以后将学），转化为证明角相等.

应用三 ▶ 利用分析综合法证角相等

例 3 [中考·福州]一个平分角的仪器如图 12-3，其中 $AB=AD$，$BC=DC$.

求证：$\angle BAC=\angle DAC$.

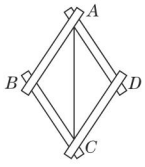


图 12-3

解题秘方： 在△ ABC 和△ ADC 中，由三组边分别相等可通过全等三角形的判定定理（SSS）证得△ ABC ≌△ ADC，再由全等三角形的性质即可得出结论.

证明： 在△ ABC 和△ ADC 中，

$$\begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ ADC（SSS）.

$\therefore \angle BAC=\angle DAC$.

方法点拨： 证明两个角相等的基本思路：若两个角在两个三角形中，则证明这两个角所在的两个三角形全等；若两个角在同一个三角形中，则可利用“等边对等角”（以后将学），转化为证明线段相等.

例 4 如图 12-4，$AB=DC$，$\angle A=\angle D$. 求证：$\angle ABC=\angle DCB$.

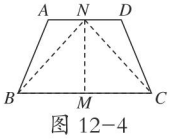


图 12-4

解题秘方： 直接证明∠ $ABC=\angle DCB$ 难度较大，不妨设想分别把∠ ABC，∠ DCB 分成两个角，证明∠ ABC 分成的两部分与∠ DCB 分成的两部分分别相等即可.

证明： 如图 12-4，分别取 AD，BC 的中点 N，M，连接 BN，CN，MN，则有 $AN=ND$，$BM=MC$.

在△ ABN 和△ DCN 中，$\begin{cases} AN=DN, \\ \angle A=\angle D, \\ AB=DC, \end{cases}$

$\therefore$ △ ABN ≌△ DCN（SAS）.

$\therefore \angle ABN=\angle DCN$，$NB=NC$.

在△ NBM 和△ NCM 中，$\begin{cases} NB=NC, \\ BM=CM, \\ NM=NM, \end{cases}$

$\therefore$ △ NBM ≌△ NCM（SSS）.

$\therefore \angle NBC=\angle NCB$.

$\therefore \angle NBC+\angle ABN=\angle NCB+\angle DCN$，

即∠ $ABC=\angle DCB$.

方法点拨： 证明三角形全等时常需添加适当的辅助线，辅助线的添加以能创造已知条件为上策，如本题取 AD，BC 的中点就是把中点作为已知条件. 分散证明也是几何证明中的一种常用技巧.

应用四 ▶ 利用分析综合法证线段的位置关系

例 5 [中考·武汉]如图 12-5，点 B，E，C，F 在同一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证：$AB \parallel DE$.

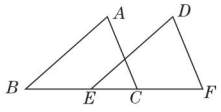


图 12-5

解题秘方： 分析法：要证 $AB \parallel DE$，只需证∠ $ABC=\angle DEF$，故需证它们所在的三角形全等，而在这两个三角形中根据已知有两组边对应相等，只需证出第三组边相等，即可利用 SSS 证它们全等.

证明： $\because BE=CF$，$\therefore BC=EF$.

在△ ABC 和△ DEF 中，

$\because BC=EF$，$AB=DE$，$AC=DF$，

$\therefore$ △ ABC ≌△ DEF（SSS）.

$\therefore \angle ABC=\angle DEF$. $\therefore AB \parallel DE$.

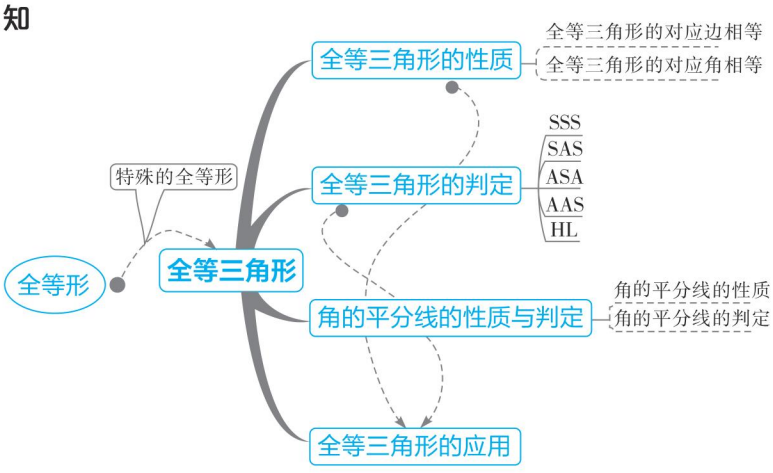
方法点拨： 证明两条线段平行的基本思路：先找一对位置角（如同位角、内错角），然后证明这对位置角所在的三角形全等，最后找判定三角形全等的条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 全等三角形是特殊的全等形，全等三角形的对应边相等、对应角相等.

2. 全等三角形的判定——SSS、SAS、ASA、AAS，对于直角三角形，有特殊的判定方法——HL.

3. 角平分线的性质与判定是互逆的，它们的证明利用了三角形全等.

知识方法专题

知识必学

专题一 全等三角形的性质与判定

链接中考» 三角形全等的判定是几何中常见的证明，全等三角形的性质是解决线段相等或角相等的基本思路，是中考的热门考点，单独考查时，形式多种多样，填空题、选择题、解答题都有.但三角形全等往往成为其他综合证明题的一个工具.

类型 1：利用三角形全等证明线段的关系

例 1 [中考·武汉]如图 12-1，点 B，C，E，F 在同一直线上，$BC=EF$，$AC\perp BC$ 于点 C，$DF\perp EF$ 于点 F，$AC=DF$.

求证：(1) $\triangle ABC\cong\triangle DEF$；

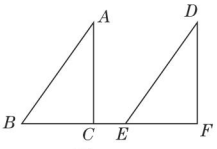


图 12-1

(2) $AB\parallel DE$.

解题秘方： (1) 这两个三角形中，根据已知有两组边对应相等，且夹角对应相等，故用 SAS 可证它们全等；(2) 要证 $AB\parallel DE$，只需证 $\angle ABC=\angle DEF$，而这可由 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 得到.

证明： (1) $\because AC\perp BC$ 于点 C，

$DF\perp EF$ 于点 F，

$\therefore\angle ACB=\angle DFE=90^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$\because BC=EF$，

$\angle ACB=\angle DFE$，$AC=DF$，

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DEF$ (SAS).

(2) $\because\triangle ABC\cong\triangle DEF$，

$\therefore\angle ABC=\angle DEF$，

$\therefore AB\parallel DE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用三角形全等证明角的关系

例 2 ［中考·宜宾］如图 12–2，$AC=DC$，$BC=EC$，$\angle ACD=\angle BCE$.

求证：$\angle A=\angle D$.

解题秘方：先找出要证的两个角所在的三角形，然后结合已知条件，证明两个三角形全等.

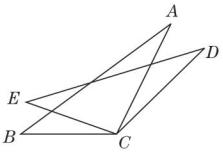


图 12–2

证明：$\because \angle ACD=\angle BCE$，

$\therefore \angle ACD+\angle ACE=\angle BCE+\angle ACE$，

$\therefore \angle DCE=\angle ACB$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，

$\because AC=DC$，$\angle ACB=\angle DCE$，$BC=EC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEC$（SAS）.

$\therefore \angle A=\angle D$.

方法点拨：全等三角形的性质：“对应边相等，对应角相等”，为证明线段或角相等提供了思路，其思路主要分两步，第一步：找要证的线段或角所在的三角形；第二步：证这两个三角形全等.

专题二 角平分线的性质与判定

链接中考» 角平分线的性质与判定都与点到直线的距离有关，也就是图中出现垂线，或者说图中出现高线，运用角平分线的性质就能证明两条线段相等.在中考中单独考查时，一般都是以填空题、选择题的形式出现的.

例 3 ［中考·来宾］如图 12–3，在$\triangle ABC$中，CD平分$\angle ACB$交AB于点D，$DE\perp AC$于点E，$DF\perp BC$于点F，且$BC=4$，$DE=2$，则$\triangle BCD$的面积是_____.

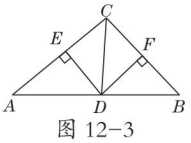


图 12–3

解题秘方：先利用角平分线的性质求出DF的长度，再根据三角形的面积公式即可求出$\triangle BCD$的面积.

解：$\because CD$平分$\angle ACB$，$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，$DE=2$，$\therefore DF=2$.

$\therefore \triangle BCD$的面积为$2\times4\div2=4$.

答案：4

方法必会

专题三 利用分析法进行推理

专题解读» 几何证明的基本方法是分析法，也称为逆推法.例如要证明三角形全等，首先观察条件中哪些是直接条件，哪些是间接条件，在此基础上加以分析，完成解答.

例 4 ［中考·孝感］我们把两组邻边分别相等的四边形叫做“箏形”.如图 12–4，四边形$ABCD$是一个箏形，其中$AB=CB$，$AD=CD$.对角线AC，BD相交于点O，$OE\perp AB$，$OF\perp CB$，垂足分别是E，F.求证：$OE=OF$.

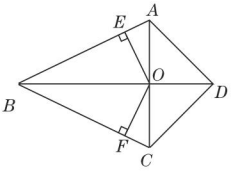


图 12–4

解题秘方：利用角平分线性质的模型进行证明.

证明：在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，

$$\begin{cases} AB=CB, \\ AD=CD, \\ BD=BD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$（SSS）.

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$.

$\therefore BD$平分$\angle ABC$.

又$\because OE\perp AB$，$OF\perp CB$，

$\therefore OE=OF$.

方法点拨：证明线段相等的方法主要有：（1）中点定义；（2）等式的性质；（3）全等三角形的对应边相等；（4）角平分线上的点到角两边的距离相等.在解决问题时，选择合适的方法可提高解题的效率.

专题四 构造三角形全等的几种方法

专题解读» 在某些图形中，解决问题时要证明三角形全等，而图形中没有全等的三角形，可通过作辅助线来构造全等三角形，常见的构造方法有“截长补短法”“倍长中线法”“作高法”等等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 1：与角平分线有关的“截长补短法”

例 5 如图 12−5 ①，在△ ABC 中，AD 平分∠ BAC，∠ C=2∠ B，试判断 AB，AC，CD 三者之间的数量关系，并说明理由．

解题秘方： 借助角平分线构造全等三角形解决问题．

解： $AB=AC+CD$.

理由如下：**方法一** 如图 12−5 ②，在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE.

易证得△ AED ≌△ ACD（SAS）．

∴ $ED=CD$，∠ AED=∠ C.

∵∠ AED=∠ B+∠ EDB，

∴∠ C=∠ AED=∠ B+∠ EDB.

又∵∠ C=2∠ B，∴∠ B=∠ EDB.

∴ $BE=DE$.

∴ $AB=AE+BE=AC+DE=AC+CD$.

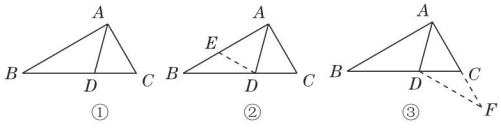


图 12−5

方法二 如图 12−5 ③，延长 AC 到点 F，使 $CF=CD$，连接 DF，

∵ $CF=CD$，∴∠ CDF=∠ F.

∵ ∠ ACB=∠ CDF+∠ F，∴∠ ACB=2∠ F，

又∵∠ ACB=2∠ B，∴∠ B=∠ F.

∵ AD 平分∠ BAC，∴∠ BAD=∠ FAD.

又∵ $AD=AD$，∴△ ABD ≌△ AFD（AAS）．

∴ $AB=AF$.

∴ $AB=AF=AC+CF=AC+CD$.

方法点拨： 运用截长补短法构造三角形全等有两个标志：一是有“角平分线”；二是出现“一条线段等于两条线段的和或者差”，目的是借助角平分线构造全等三角形．

类型 2：与角平分线有关的作垂线的方法

例 6 如图 12−6，AD // BC，CD ⊥ AD，AE 平分∠ BAD，E 是 DC 的中点，问：AD，BC，AB 之间有何关系？并说明理由．

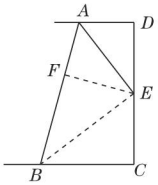


图 12−6

解题秘方： 借助角平分线作垂线，构造角平分线性质的模型解决问题．

解： $AB=AD+BC$.

理由：如图 12−6，

过点 E 作 EF ⊥ AB 于 F，连接 BE.

∵ AE 平分∠ BAD，

CD ⊥ AD，EF ⊥ AB，∴ $EF=ED$.

又∵ $ED=EC$，∴ $EF=EC$.

∵ AD // BC，CD ⊥ AD，∴ DC ⊥ BC.

又∵ $BE=BE$，∴ Rt△ BFE ≌ Rt△ BCE（HL）．

∴ $BF=BC$. 同理可证 $AF=AD$，

∴ $AD+BC=AF+BF=AB$，即 $AB=AD+BC$.

类型 3：“倍长中线法”

例 7 如图 12−7，已知在△ ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，求证：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

解题秘方： 借助中线，将其延长一倍构造全等三角形解决问题．

证 明： 如图 12−7，延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 CE，则 $AE=2AD$.

∵ 在△ ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，

∴ $BD=CD$.

在△ ADB 和△ EDC 中，

$$\begin{cases} AD=ED, \\ \angle ADB=\angle EDC, \\ BD=CD, \end{cases}$$

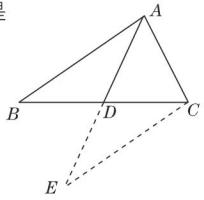


图 12−7

∴△ ADB ≌△ EDC（SAS）．∴ $AB=EC$.

∵在△ ACE 中，$AC+CE>AE$，

∴ $AC+AB>2AD$，即 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

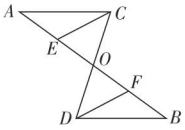
规律点拨： 涉及三角形中线问题时，常采用延长中线一倍的办法，可以将分居中线两旁的两条边集中于同一个三角形中，以利于问题的解决．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见248页

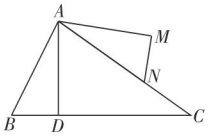
题型1：全等三角形的性质与判定

1. 已知：如图，AB，CD交于点O，E，F为AB上两点，$OA=OB$，$OE=OF$，$\angle A=\angle B$，$\angle ACE=\angle BDF$. 求证：$\triangle ACE\cong\triangle BDF$.



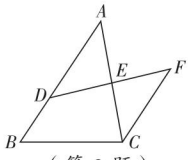
（第1题）

2. 已知：如图，$\angle BAC=\angle DAM$，$AB=AN$，$AD=AM$，求证：$\angle B=\angle ANM$.



（第2题）

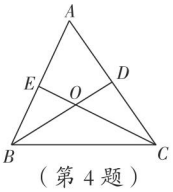
3. 已知：如图，D是$\triangle ABC$的边AB上一点，DF交AC于点E，$DE=FE$，$FC\parallel AB$. 求证：$AE=CE$.



（第3题）

题型2：构造全等三角形解决问题

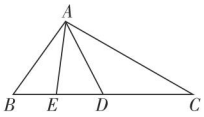
4.（截长补短构造）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，BD，CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$，BD，CE交于点O，试判断BE，CD，BC的数量关系，并加以证明.



（第4题）

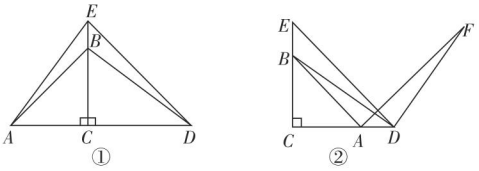
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 如图，AD，AE分别是△ABC和△ABD的中线，且$BA=BD$. 求证：$AE=\frac{1}{2}AC$.



（第 5 题）

7. [**中考 · 莱芜**] 已知△ABC与△DEC是两个大小不同的等腰直角三角形.



（第 7 题）

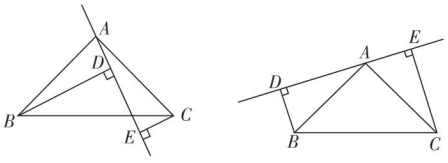
（1）如图①，连接AE，DB，试判断线段AE和DB的数量和位置关系，并说明理由；

（2）如图②，连接DB，将线段DB绕点D顺时针旋转 90° 到DF，连接AF，试判断线段DE和AF的数量和位置关系，并说明理由.

题型 3：动态中的全等三角形

6. （1）如图①，在△ABC中，∠BAC=90°，$AB=AC$，AE是过A点的一条直线，且B，C在AE的异侧，$BD\perp AE$于D，$CE\perp AE$于E，求证：$BD=DE+CE$；

（2）若直线AE绕点A旋转到图②的位置时（$BD<CE$），其余条件不变，问BD与DE，CE的关系如何？请予以证明.



（第 6 题）

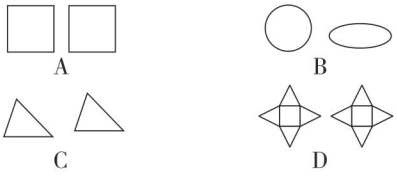
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十二章测试卷 ☞答案见250页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题3分，共30分）

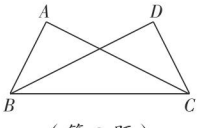
1. 下列各组图形中不是全等形的是（　　）



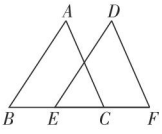
2. 如图，$\triangle ABC \fallingdotseq \triangle DCB$，点$A$与点$D$，点$B$与点$C$对应，如果$AC$=6 cm，$AB$=3 cm，那么$DC$的长为（　　）

A.3 cm　　B.5 cm

C.6 cm　　D. 无法确定



（第2题）



（第3题）

3. 如图，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$AB=DE$，$\angle B=\angle DEF$，添加下列哪一个条件无法证明$\triangle ABC \fallingdotseq \triangle DEF$？（　　）

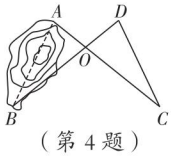
A. $AC \parallel DF$　　B. $\angle A=\angle D$

C. $AC=DF$　　D. $\angle ACB=\angle F$

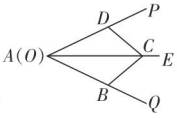
4. 如图，已知$AC=DB$，$AO=DO$，CD=100 m，则A，B两点间的距离（　　）

A. 大于100 m　　B. 等于100 m

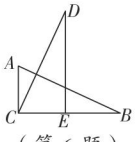
C. 小于100 m　　D. 无法确定



（第4题）



（第5题）



（第6题）

5. 如图，有一个简易平分角的仪器（四边形$ABCD$），其中$AB=AD$，$BC=DC$，将点A放在角的顶点O处，AB和AD沿着角的两边OQ，OP张开，沿对角线AC画射线AE，AE就是$\angle POQ$的平分线．这个平分角的仪器的制作原理是（　　）

A. 角平分线的性质　　B.AAS

C.SSS　　D.SAS

6. 如图，在$\triangle ABC$和$\triangle CDE$中，若$\angle ACB=\angle CED=90°$，$AB=CD$，$BC=DE$，则下列结论中不正确的是（　　）

A. $\triangle ABC \fallingdotseq \triangle CDE$　　B.$CE=AC$

C.$AB \perp CD$　　D.E为BC的中点

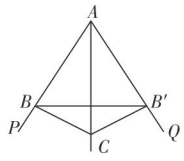
7. 如图，已知AC平分$\angle PAQ$，点B，B'分别在边AP，AQ上，如果添加一个条件，即可推出$AB=AB'$，那么该条件不可以是（　　）

A.$BB' \perp AC$

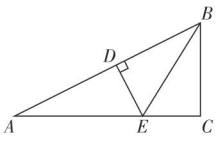
B.$BC=B'C$

C. $\angle ACB=\angle ACB'$

D. $\angle ABC=\angle AB'C$



（第7题）



（第8题）

8. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$ED \perp AB$于点D，$BD=BC$，若AC=6 cm，则$AE+DE$等于（　　）

A. 4 cm　　B. 5 cm　　C. 6 cm　　D. 7 cm

9. 如图，点O是$\triangle ABC$的两外角平分线的交点，下列结论：

① $OB=OC$；

②点O到AB，AC所在直线的距离相等；

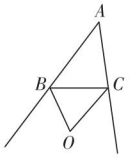
③点O到$\triangle ABC$的三边所在直线的距离相等；

④点O在$\angle A$的平分线上．

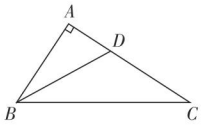
其中结论正确的个数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，已知 $\angle A=90°$，BD 平分 $\angle ABC$，$AD=1$ cm，$BC=3.4$ cm，则 $\triangle BDC$ 的面积为（　　）

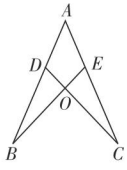
A. 1 cm^2　　B. 3.4 cm^2

C. 1.7 cm^2　　D. 6.8 cm^2

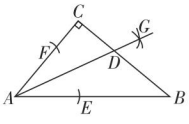
二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle A=60°$，$\angle F=50°$，点 B 的对应点是点 E，则 $\angle B$ 的度数是_____.

12. 如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，CD 与 BE 相交于点 O，且 $AD=AE$，$AB=AC$，若 $\angle B=20°$，则 $\angle C$=_____.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle CAB=50°$，按以下步骤作图：

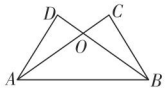
①以点 A 为圆心，小于 AC 的长为半径画弧，分别交 AB，AC 于点 E，F；

②分别以点 E，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 G；

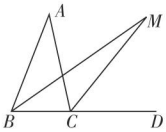
③作射线 AG 交 BC 边于点 D.

则 $\angle CDA$ 的度数为_____.

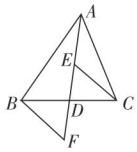
14. 如图，已知 $\angle C=\angle D$，$\angle ABC=\angle BAD$，AC 与 BD 相交于点 O，请写出图中一组相等的线段：_____.



（第 14 题）



（第 15 题）



（第 16 题）

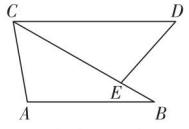
15. 如图，$\angle ABC$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 M，那么点 M 到 $\triangle ABC$ 三边所在直线的垂线段的长度相等的理由是_____.

16. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，E，F 分别是 AD 和 AD 延长线上的点，且 $DE=DF$，连接 BF，CE. 下列说法：① $CE=BF$；②$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积相等；③ $BF \parallel CE$；④$\triangle BDF \cong \triangle CDE$. 其中正确的有_____.（填写正确的序号）

三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）已知：如图，E 是 BC 上一点，$AB=EC$，$AB \parallel CD$，$BC=CD$.

求证：$AC=ED$.

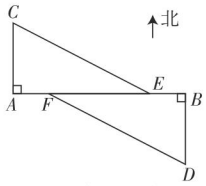


（第 17 题）

18.（10 分）如图，C，D 分别位于路段 AB 上 A，B 两地的正北方向与正南方向，现有两车分别从 E，F 两处出发，以相同的速度沿直线行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地，休整一段时间后又

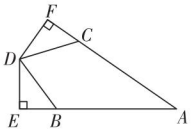
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同时以原来的速度沿直线行驶最终同时到达 A，B 两地，那么 CE 与 DF 平行吗？为什么？



（第 18 题）

19.（10 分）已知，如图，$AB=AC$，$BD=CD$，$DE \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E，$DF \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 F，求证：$DE=DF$.

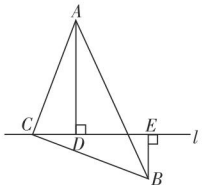


（第 19 题）

20.（12 分）如图，Rt $\triangle ABC$ 的直角顶点 C 置于直线 l 上，$AC=BC$，现过 A，B 两点分别作直线 l 的垂线，垂足分别为点 D，E.

（1）请你在图中找出一对全等三角形，并写出证明过程；

（2）若 $BE=3$，$DE=5$，求 AD 的长.

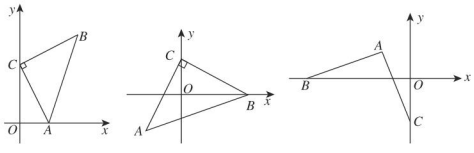


（第 20 题）

21.（12 分）（1）如图①，已知 $A(3, 0)$，$C(0, 6)$，$AC \perp BC$，且 $AC = BC$，求点 B 的坐标；

（2）如图②，已知 $B(4, 0)$，$C(0, 2)$，$AC \perp BC$，且 $AC = BC$，求点 A 的坐标；

（3）如图③，$AB = AC$，且 $AB \perp AC$，若 $A(-1, 1)$，$B(-4, 0)$，求点 C 的坐标.



（第 21 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第十一章 三角形

11.1 与三角形有关的线段

11.1.1 三角形的边

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** C **4.** D **5.** B **6.** D **7.** C

8. 2,6 或 4,4

9. 等腰三角形;7

点拨: $\because (b-2)^2 \geqslant 0, |c-3| \geqslant 0$,且 $(b-2)^2 + |c-3| = 0$,$\therefore b-2=0, c-3=0$. $\therefore b=2, c=3$. $\because a$ 为方程 $|x-4|=2$ 的解,$\therefore a=2$ 或 6. 当 $a=6, b=2, c=3$ 时,$2+3<6$,不满足三角形的三边关系,故舍去. 当 $a=2, b=2, c=3$ 时,$2+2>3$,满足三角形的三边关系. $\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形,周长为 $2+2+3=7$.

10. 解: (1)根据两边之和大于第三边,两边之差小于第三边,可得 $AB-BC<AC<AB+BC$,即 $3<AC<7$.

(2)周长 $l=AB+BC+AC=7+AC$,由(1)可知 $3<AC<7$,$\therefore 10<l<14$.

(3)由(1)可知 $3<AC<7$,

又$\because AC$ 的长是奇数,

$\therefore AC=5$.

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=12$.

此时 $AB=AC$,$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

11. 解: $\because a, b, c$ 为 $\triangle ABC$ 的三边,

$\therefore a+b+c>0, a<b+c, c+b>a$,

即 $a-b-c<0, c-a+b>0$.

原式 $=a+b+c+a-b-c+c-a+b=a+b+c$.

12. 解: (1)

连线条数	1	2	3	4	5	6
三角形个数	3	6	10	15	21	28

(2)8 条.

(3)$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

11.1.2 三角形的高、中线与角平分线

11.1.3 三角形的稳定性

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** C **4.** C

5. B **点拨:** 根据点 D, E 分别是 BC, AD 的中点,得 $S_{\triangle BEC}=4\ \text{cm}^2$.

$\because$ 点 F 是 CE 的中点,

$\therefore S_{\text{阴影}}=\frac{1}{2}S_{\triangle BEC}=2\ \text{cm}^2$.

6. C **点拨:** 由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$,得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BE+\frac{1}{2}AD\cdot CF=\frac{1}{2}AD\cdot(BE+CF)$.

显然 $\triangle ABC$ 的面积不变,点 D 由点 B 运动到点 C,AD 的长度变大,故 $BE+CF$ 的值变小.

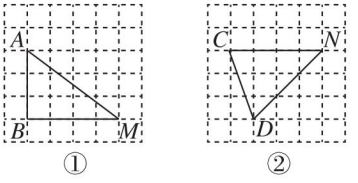
7. 2 cm

8. 解: $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 9\times 6=\frac{1}{2}\times 8\times BE$.

$\therefore BE=\frac{27}{4}$.

9. 解: (1)如图①所示. (答案不唯一)



① ②

(第9题)

(2)如图②所示. (答案不唯一)

10. 证明: $\because DE \parallel AC$,

$\therefore \angle EDA=\angle CAD$.

又$\because \angle EDA=\angle EAD$,

$\therefore \angle CAD=\angle EAD$.

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

11. 解: $\because S_{\triangle ABC}=6, AD=2BD, BE=CE$,

$\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{3}\times 6=2$,

$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times 6=3$.

$\therefore S_1-S_2=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle BDC}=3-2=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.2 与三角形有关的角

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** C **4.** B **5.** B

6. **解**:(1)∠1 = ∠2. 理由如下:

∵ 在△ABC 中,$AD \perp BC$ 于点 D,$CE \perp AB$ 于点 E,

∴ ∠AEC = ∠ADC = 90°.

设 AD 与 CE 交于点 O,

则∠AOE = ∠COD,

∠1 + ∠COD = ∠2 + ∠AOE = 90°.

∴ ∠1 = ∠2.

(2)(1)中的结论仍然成立. 理由如下:

由题意可知∠D = ∠E = 90°,

∴ ∠1 + ∠CBE = ∠2 + ∠ABD = 90°.

又∵ ∠ABD = ∠CBE,

∴ ∠1 = ∠2.

7. **解**:(1)根据三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和,可得 ∠B = ∠ACD − ∠A = 83° − 35° = 48°.

(2)在△AFE 中,∠A + ∠AFE + ∠AEF = 180°.

在△CED 中,∠D + ∠ECD + ∠DEC = 180°.

∵ ∠D = 42°,∠ECD = 83°,

∴ ∠DEC = 180° − ∠D − ∠ECD = 55°.

又∵ ∠DEC = ∠AEF,

∴ ∠AFE = 180° − ∠AEF − ∠A = 180° − ∠DEC − ∠A = 180° − 55° − 35° = 90°.

8. **解**:设∠CDE = x.

∵ ∠ADC 是△ADB 的外角,

∴ ∠ADC = ∠B + ∠BAD = ∠B + 40°.

∴ ∠ADE = ∠ADC − ∠CDE = ∠B + 40° − x.

∵ ∠AED 是△CDE 的外角,

∴ ∠AED = ∠CDE + ∠C = x + ∠C.

∵ ∠ADE = ∠AED,

∴ ∠B + 40° − x = x + ∠C.

∵ ∠B = ∠C,

∴ 40° − x = x.

解得 x = 20°,即∠CDE = 20°.

11.3 多边形及其内角和

【两年模拟兵法】

1. A

2. C **点拨**:正 n 边形每个内角度数为 $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$,每个外角度数为 $\frac{360°}{n}$,再由题意可得 n = 6.

3. C

4. D **点拨**:本题可求出新多边形的边数为 8,而原多边形切去一个角形成的新多边形有 3 种情况:①增加一条边;②减少一条边;③边的条数不变,故原多边形的边数可能为 7,8,9.

5. B **6.** 66 **7.** 60°

8. **解**:(1)四边形的内角和等于 360°,有三个内角分别为 70°,150°,90°,

∴ x = 360 − 70 − 150 − 90 = 50.

(2)四边形的内角和等于 360°,有三个内角分别为 73°,82°,90°,则剩下的一个内角度数为 360° − 73° − 82° − 90° = 115°,

∴ x = 180 − 115 = 65.

9. **解**:设这个外角的度数为 x,多边形的边数为 n.

根据题意,得(n − 2) × 180° + x = 1 350°.

解得 x = 1 710° − 180°n.

∵ 0° < x < 180°,

∴ 0° < 1 710° − 180°n < 180°,

解得 8.5 < n < 9.5.

又∵ n 为正整数,

∴ n = 9.

即该多边形的边数是 9.

10. **解**:(1)甲对,乙不对.

若 θ = 360°,

则(n − 2) × 180 = 360,解得 n = 4.

若 θ = 630°,

则(n − 2) × 180 = 630,解得 $n = \frac{11}{2}$.

∵ n 为正整数,

∴ θ 不能取 630°.

(2)依题意,得(n − 2) × 180 + 360 = (n + x − 2) × 180,解得 x = 2.

11. **解**:(1)∵ 2 005 不是 180 的整数倍,

∴ 小明说不可能.

(2)设这个多边形的边数为 x.

由题意得

2 005° − 180° < (x − 2) × 180° < 2 005°,

解得 $12\frac{5}{36} < x < 13\frac{5}{36}$.

∵ x 是正整数,∴ x = 13.

∴ 小华求的是十三边形的内角和.

(3)十三边形的内角和是(13 − 2) × 180° = 1 980°,错把外角当内角的那个外角的度数是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2\,005° - 1\,980° = 25°$.

12. 解:(1)∵ ∠3,∠4,∠5,∠6 是四边形的四个内角,

∴ ∠3 + ∠4 + ∠5 + ∠6 = 360°,

∴ ∠3 + ∠4 = 360° − (∠5 + ∠6).

∵ ∠1 + ∠5 = 180°,∠2 + ∠6 = 180°,

∴ ∠1 + ∠2 = 360° − (∠5 + ∠6).

∴ ∠1 + ∠2 = ∠3 + ∠4.

(2)四边形的任意两个外角的和等于与它们不相邻的两个内角的和.

(3)由(2)知∠B + ∠C = ∠NAD + ∠MDA.

∵ ∠B + ∠C = 240°,

∴ ∠NAD + ∠MDA = 240°.

∵ AE,DE 分别是∠NAD,∠MDA 的平分线,

$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2}\angle MDA$,

$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle NAD$.

$\therefore \angle ADE + \angle DAE$

$= \frac{1}{2}(\angle MDA + \angle NAD)$

$= \frac{1}{2} \times 240° = 120°$.

∴ ∠E = 180° − (∠ADE + ∠DAE) = 180° − 120° = 60°.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 8 cm 或 2 cm

2. 解:(1)由题意得 14 < 2a + 2 < 30,故 6 < a < 14.

(2)∵ △ABC 为等腰三角形,

∴ 2a + 2 = 8 或 2a + 2 = 22,

则 a = 3 或 a = 10.

∵ 6 < a < 14,∴ a = 10.

∴ △ABC 的周长为 22 + 22 + 8 = 52.

3. 解:(1)∵ a,b,c 是三角形的三边长,

∴ a − b − c < 0,b − c − a < 0,c − a − b < 0.

∴ 原式 = −a + b + c − b + c + a − c + a + b = a + b + c.

(2)当 a = 5,b = 4,c = 3 时,原式 = 5 + 4 + 3 = 12.

4. C

5. 解:∵ DE 是 CA 边上的高,

∴ ∠DEA = ∠DEC = 90°.

∵ ∠A = 20°,∴ ∠EDA = 90° − 20° = 70°.

∵ ∠EDA = ∠CDB,

∴ ∠CDE = 180° − 70° × 2 = 40°.

在 Rt△CDE 中,∠DCE = 90° − 40° = 50°.

∵ CD 是∠BCA 的平分线,

∴ ∠BCA = 2∠DCE = 2 × 50° = 100°.

在△ABC 中,∠B = 180° − ∠BCA − ∠A = 180° − 100° − 20° = 60°.

6. B

7. 5 **点拨:**设这个多边形的边数为 n. 由题意得 $(n-2)\times 180° = \frac{3}{2}\times 360°$,解得 n = 5.

8. 解:连接 BE.

在△COD 与△BOE 中,∠D + ∠C + ∠COD = 180°,∠OBE + ∠OEB + ∠BOE = 180°,

∴ ∠D + ∠C = 180° − ∠COD,∠OBE + ∠OEB = 180° − ∠BOE.

∵ ∠COD = ∠BOE,

∴ ∠D + ∠C = ∠OBE + ∠OEB.

∴ ∠A + ∠ABC + ∠C + ∠D + ∠DEF + ∠F = ∠A + ∠ABC + ∠OBE + ∠OEB + ∠DEF + ∠F = ∠A + ∠ABE + ∠BEF + ∠F = 360°.

9. 解:(1)∵ ∠B = 40°,∠C = 70°,FD ⊥ BC,

∴ ∠BAC = 70°,∠CAD = 20°.

∵ AE 平分∠BAC,

$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC = 35°$.

∴ ∠EFD = ∠CAE − ∠CAD = 35° − 20° = 15°.

(2)∵ ∠CAE = 35°,∠C = 70°,

∴ ∠AEC = 180° − 70° − 35° = 75°.

∴ ∠EFD = 90° − 75° = 15°.

(3)∵ ∠DEF = ∠AEC = 75°,

∴ ∠EFD = 90° − 75° = 15°.

【第十一章测试卷】

一、1. C **2.** C **3.** A **4.** D **5.** C **6.** B **7.** A **8.** B **9.** C **10.** D

二、11. 三角形具有稳定性 **12.** 钝角

13. 32° **14.** 40

15. 19 cm 或 20 cm **16.** 180°

三、17. 解:∵ DF // CE,

∴ ∠BCE = ∠D = 42°.

∵ CE 是∠ACB 的平分线,

∴ ∠ACB = 2∠BCE = 84°.

∵ ∠A = 46°,

∴ ∠B = 180° − 84° − 46° = 50°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 解：$\angle QBO = 180° - \angle A - \angle O = 180° - 28° - 100° = 52°$. 即 $\angle QBO$ 应等于 52°才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上.

19. (1)证明：由题可知 $\angle D = 30°$，$\angle 3 = 45°$，$\angle DCE = 90°$.

$\because CF$ 平分 $\angle DCE$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle DCE = 45°$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore CF // AB$.

(2)解：由题可知 $\angle E = 60°$，

$\therefore \angle DFC = \angle 2 + \angle E = 45° + 60° = 105°$.

20. (1)证明：$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

又$\because \angle EAD = \angle EDA$，

$\therefore \angle EAC = \angle EAD - \angle CAD = \angle EDA - \angle BAD = \angle B$.

(2)解：设 $\angle CAD = x$，则 $\angle E = 3x$.

由(1)知 $\angle EAC = \angle B = 50°$，

$\therefore \angle EAD = \angle EDA = x + 50°$.

在 $\triangle EAD$ 中，

$\because \angle E + \angle EAD + \angle EDA = 180°$，

$\therefore 3x + 2(x + 50°) = 180°$，

解得 $x = 16°$.

$\therefore 3x = 48°$，即 $\angle E = 48°$.

21. 证明：$\because$ 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 360° - 180° = 180°$.

又$\because BE$ 平分 $\angle ABC$，DF 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle EBC + \angle FDC = 90°$.

$\because BE // DF$，$\therefore \angle EBC = \angle DFC$.

$\therefore \angle DFC + \angle FDC = 90°$.

$\therefore \triangle DCF$ 为直角三角形.

第十二章 全等三角形

12.1 全等三角形

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. A 点拨：由题意得 $AC = DF = 25$ cm，

$\therefore BC = 100 - AC - AB = 100 - 25 - 30 = 45$(cm).

4. 70° 点拨：先由全等三角形的性质求出 $\angle DEF$ 和 $\angle ACB$ 的度数，再根据三角形内角和定理求 $\angle COE$ 的度数.

5. 100°；12cm

6. 6 点拨：由折叠得 $BE = DE$，$BC' = DC$，$C'F = CF$，$\therefore \triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和等于长方形 $ABCD$ 的周长.

7. 解：(1) $\triangle ABC \cong \triangle DBE$. AC 和 DE，AB 和 DB，BC 和 BE 是对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle ACB$ 和 $\angle E$，$\angle ABC$ 和 $\angle DBE$ 是对应角.

(2)延长 AC 交 DE 于点 F.

$\because \angle ABC = 90°$，

$\therefore \angle A + \angle ACB = 90°$.

$\because \triangle ABC \cong \triangle DBE$，

$\therefore \angle A = \angle D$.

又$\because \angle ACB = \angle DCF$，

$\therefore \angle D + \angle DCF = 90°$.

$\therefore \angle AFD = 90°$.

$\therefore AC \perp DE$.

8. 证明：$\because \triangle PAB \cong \triangle AQC$，

$\therefore \angle BAP = \angle CQA$.

$\because CF \perp AB$，

$\therefore \angle CQA + \angle QAF = 90°$.

$\therefore \angle BAP + \angle QAF = 90°$，

即 $\angle QAP = 90°$.

$\therefore AP \perp AQ$.

9. 解：相等. 理由如下：

$\because \triangle ADC \cong \triangle ECD$，

$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ECD}$.

$\because AD // BC$，

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 同底等高.

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$.

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ECD}$.

$\therefore S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ECD} + S_{\triangle BCD}$，

即 $S_{梯形ABCD} = S_{\triangle BDE}$.

12.2 三角形全等的判定

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** 70

4. $3 < AD < 7$ 点拨：延长 AD 到 E，使 $DE = AD$，连接 CE，则 $AE = 2AD$. 易证 $\triangle ECD \cong \triangle ABD$，可得 $CE = AB = 10$.

再由三角形三边关系可得 $CE - AC < AE < CE + AC$，即 $10 - 4 < 2AD < 10 + 4$，即 $3 < AD < 7$.

5. 证明：$\because \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle 1 + \angle DAC = \angle 2 + \angle DAC$，

即 $\angle BAC = \angle DAE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ABC和△ADE中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAE,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△ADE(ASA).

∴ $BC=DE$.

6. **证明:**∵ $FB=CE$,

∴ $BC=EF$.

又∵ $AB\parallel ED$,$AC\parallel FD$,

∴ $\angle B=\angle E$,$\angle ACB=\angle DFE$.

在△ABC和△DEF中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△DEF(ASA).

∴ $AB=DE$.

在△ABO和△DEO中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ \angle AOB=\angle DOE,\\ AB=DE,\end{cases}$$

∴ △ABO≌△DEO(AAS).

∴ $AO=DO$,$BO=EO$,

即AD与BE互相平分.

7. (1)**证明:**∵ AE和BD相交于点O,

∴ $\angle AOD=\angle BOE$.

在△AOD和△BOE中,$\angle A=\angle B$,

∴ $\angle 2=\angle BEO$.

又∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle 1=\angle BEO$.

∴ $\angle AEC=\angle BED$.

在△AEC和△BED中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BED,\end{cases}$$

∴ △AEC≌△BED(ASA).

(2)**解:**∵ △AEC≌△BED,

∴ $EC=ED$,$\angle C=\angle BDE$.

在△EDC中,∵ $EC=ED$,$\angle 1=42°$,

∴ $\angle C=\angle EDC=69°$.

∴ $\angle BDE=69°$.

8. (1)**证明:**∵ $AC=AD+DC$,$DF=CF+DC$,

且$AD=CF$,∴ $AC=DF$.

在△ABC和△DEF中,

$$\begin{cases}AB=DE,\\ BC=EF,\\ AC=DF,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△DEF(SSS).

(2)**解:**由(1)可知△ABC≌△DEF,

∴ $\angle F=\angle ACB$.

∵ $\angle A=55°$,$\angle B=88°$,

∴ $\angle ACB=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(55°+88°)=37°$.

∴ $\angle F=\angle ACB=37°$.

9. **解:**在△ABC和△DEC中,

$$\begin{cases}CA=CD,\\ \angle ACB=\angle DCE,\\ CB=CE,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△DEC(SAS).

∴ $AB=DE$,

即量出DE的长就是A,B的距离.

10. (1)**证明:**∵ $\angle BGE=\angle ADE$,$\angle BGE=\angle CGF$,

∴ $\angle ADE=\angle CGF$.

∵ $AC\perp BD$,$BF\perp CD$,

∴ $\angle ADE+\angle DAE=\angle CGF+\angle GCF=90°$,

$\angle AED=\angle CED=90°$.

∴ $\angle DAE=\angle GCF$.

又∵ $DE=DE$,∴ △ADE≌△CDE(AAS).

∴ $AD=CD$.

(2)**解:**设$DE=a$,

则$AE=2DE=2a$,$EG=DE=a$,

∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2$.

∵ BH是△ABE的中线,

∴ $AH=HE=a$.

∵ △ADE≌△CDE,

∴ $CE=AE=2a$,

则 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot(2a+2a)\cdot a=2a^2=2S_{\triangle ADE}$.

在△ADE和△BGE中,

$$\begin{cases}\angle AED=\angle BEG,\\ DE=GE,\\ \angle ADE=\angle BGE,\end{cases}$$

∴ △ADE≌△BGE(ASA).

∴ $BE=AE=2a$.

∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}CE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BHG}=\frac{1}{2}HG\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot(a+a)\cdot 2a=2a^2$.

综上,面积等于$\triangle ADE$面积的2倍的三角形有$\triangle ADC$,$\triangle ABE$,$\triangle BCE$,$\triangle BHG$.

11. (1)**证明:**如图①,连接AD.

$\because D$为BC的中点,$\therefore BD=CD$.

又$\because AB=AC$,$AD=AD$,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$(SSS).

$\therefore \angle ADB=\angle ADC$,$\angle BAD=\angle CAD$.

又$\because \angle ADB+\angle ADC=180°$,

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$.

$\because DE\perp DF$,

$\therefore \angle BDA=\angle EDF=90°$.

$\therefore \angle BDE+\angle EDA=\angle EDA+\angle ADF$.

$\therefore \angle BDE=\angle ADF$.

$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD=45°$.

又$\because \triangle ABC$是等腰直角三角形,

$\therefore \angle B=\angle BAD=\angle DAC=45°$.

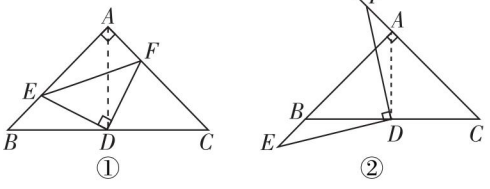
$\because \angle BDA=90°$,

$\therefore \triangle ABD$是等腰直角三角形,

$\therefore BD=AD$.

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle ADF$(ASA).

$\therefore BE=AF$.



(第11题)

(2)**解:**$BE=AF$. 如图②,连接AD.

由(1)知$\angle BDA=90°$.

$\because DE\perp DF$,

$\therefore \angle BDA=\angle EDF=90°$.

$\therefore \angle BDE+\angle BDF=\angle BDF+\angle ADF$.

$\therefore \angle BDE=\angle ADF$.

$\because \angle ABC=\angle DAC=45°$,

$\therefore \angle EBD=\angle FAD=180°-45°=135°$.

又$\because BD=AD$,$\therefore \triangle BDE\cong\triangle ADF$(ASA).

$\therefore BE=AF$.

12.3 角的平分线的性质

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** B **4.** B

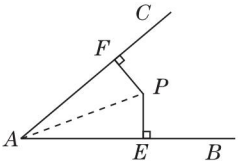
5. 解:$\because PA\perp ON$,$PB\perp OM$,$PA=PB$,$\angle MON=50°$,

$\therefore \angle AOP=\frac{1}{2}\angle MON=25°$.

又$\because \angle OPC=30°$,

$\therefore \angle PCA=\angle AOP+\angle OPC=55°$.

6. 证明:(1)如图,连接AP,$\because PE\perp AB$,$PF\perp AC$,



(第6题)

$\therefore \angle AEP=\angle AFP=90°$.

又$\because AE=AF$,$AP=AP$,

$\therefore$ Rt$\triangle AEP\cong$Rt$\triangle AFP$.

$\therefore PE=PF$.

(2)$\because PE=PF$,$PE\perp AB$,$PF\perp AC$,

$\therefore$点P在$\angle BAC$的平分线上.

7. 证明:如图,过点D分别作$DE\perp AB$于E,$DF\perp AC$,交AC的延长线于F.

$\because AD$平分$\angle BAC$,

$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

$\therefore DE=DF$,$\angle F=\angle DEB=90°$.

$\because \angle B+\angle ACD=180°$,

$\angle ACD+\angle FCD=180°$,

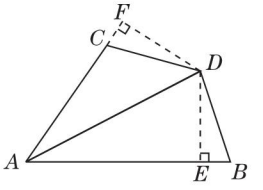
$\therefore \angle B=\angle FCD$.

在$\triangle DFC$和$\triangle DEB$中,

$$\begin{cases}\angle F=\angle DEB=90°,\\ \angle FCD=\angle B,\\ DF=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DFC\cong\triangle DEB$.

$\therefore DB=DC$.



(第7题)

8. 解:(1)$FE=FD$. 证明如下:

如图①,过点F分别作$FM\perp BC$,$FN\perp AB$,垂足

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分别为 M,N,连接 BF.

则 $\angle DMF=\angle ENF=90°$.

∵ F 是角平分线的交点,

∴ BF 也是角平分线.

∴ $MF=NF$,

在 Rt△ABC 中,∵ $\angle ACB=90°$, $\angle ABC=60°$,

∴ $\angle BAC=30°$,

∴ $\angle BAD=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=15°$.

∴ $\angle CDA=90°-\angle DAC=75°$.

∵ CE 是 $\angle ACB$ 的平分线, $\angle ACB=90°$,

∴ $\angle ACE=45°$.

∴ $\angle AFE=\angle DAC+\angle ACE=60°$.

∵ $\angle NEF=\angle BAD+\angle AFE$,

∴ $\angle NEF=75°=\angle MDF$.

在△DMF 和△ENF 中,

$$\begin{cases}\angle DMF=\angle ENF,\\ \angle MDF=\angle NEF,\\ MF=NF,\end{cases}$$

∴ △DMF≌△ENF(AAS).

∴ $FE=FD$.

(2)成立,证明如下:

如图②,过点 F 分别作 $FM\perp BC$, $FN\perp AB$,垂足分别为 M,N,连接 BF,

则 $\angle BNF=\angle DMF=\angle ENF=90°$.

∵ F 是角平分线的交点,

∴ BF 也是角平分线,

∴ $MF=NF$,

∵ $\angle ABC=60°$,

∴ $\angle MFN=180°-\angle ABC=180°-60°=120°$.

∵ $\angle CFA=180°-(\angle FAC+\angle FCA)=180°-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}\times(180°-60°)=120°$,

∴ $\angle DFE=\angle CFA=120°$.

∵ $\angle MFN=120°$,

∴ $\angle DFE=\angle MFN$.

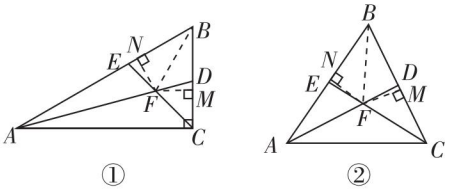
又 $\angle MFN=\angle MFD+\angle DFN$, $\angle DFE=\angle NFE+\angle DFN$,∴ $\angle MFD=\angle NFE$.

在△DMF 和△ENF 中,

$$\begin{cases}\angle DMF=\angle ENF,\\ MF=NF,\\ \angle MFD=\angle NFE,\end{cases}$$

∴ △DMF≌△ENF(ASA).

∴ $FE=FD$.



(第8题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **证明:**∵ $OA=OB$, $OE=OF$,

∴ $OA-OE=OB-OF$,即 $AE=BF$.

在△ACE 和△BDF 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ \angle ACE=\angle BDF,\\ AE=BF,\end{cases}$$

∴ △ACE≌△BDF(AAS).

2. **证明:**∵ $\angle BAC=\angle DAM$,

即 $\angle BAD+\angle DAC=\angle DAC+\angle NAM$,

∴ $\angle BAD=\angle NAM$.

在△BAD 和△NAM 中,

$$\begin{cases}AB=AN,\\ \angle BAD=\angle NAM,\\ AD=AM,\end{cases}$$

∴ △BAD≌△NAM(SAS).

∴ $\angle B=\angle ANM$.

3. **证明:**∵ $FC/\!/AB$,

∴ $\angle ADE=\angle CFE$.

在△ADE 和△CFE 中,

$$\begin{cases}\angle ADE=\angle CFE,\\ DE=FE,\\ \angle AED=\angle CEF,\end{cases}$$

∴ △ADE≌△CFE(ASA).

∴ $AE=CE$.

4. **解:**$BC=BE+CD$.

证明:在 BC 上取一点 G,使 $CG=CD$,连接 OG.

∵ BD, CE 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$,

∴ $\angle ABD=\angle CBD$, $\angle ACE=\angle BCE$.

∵ $\angle A=60°$,

∴ $\angle ABC+\angle ACB=120°$.

∴ $\angle OBC+\angle OCB=60°$.

∴ $\angle BOE=\angle COD=\angle OBC+\angle OCB=60°$.

∵ $CD=CG$, $\angle OCD=\angle OCG$, $OC=OC$,

∴ △CDO≌△CGO,

∴ $\angle COD=\angle COG=60°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BOG = 180° - \angle BOE - \angle COG = 60°$.

$\therefore \angle EOB = \angle GOB$.

又$\because \angle EBO = \angle GBO, BO = BO$,

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle BOG$.

$\therefore BE = BG$.

$\therefore BC = BG + CG = BE + CD$.

5. **证明:** 延长 AE 至 F,使 $EF = AE$,连接 DF.

$\because AE$ 是$\triangle ABD$ 的中线,

$\therefore BE = DE$.

又$\because \angle AEB = \angle FED$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FDE$.

$\therefore \angle B = \angle BDF, AB = DF$.

$\because BA = BD$,

$\therefore \angle BAD = \angle BDA, BD = DF$.

$\because \angle ADF = \angle BDA + \angle BDF$,

$\angle ADC = \angle BAD + \angle B$,

$\therefore \angle ADF = \angle ADC$.

$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore BD = CD$.

$\therefore DF = CD$.

又$\because AD = AD$,$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADC$(SAS).

$\therefore AC = AF = 2AE$,

即 $AE = \frac{1}{2}AC$.

6. (1) **证明:** $\because BD \perp AE, CE \perp AE$,

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90°$,

$\therefore \angle ABD + \angle BAE = 90°$.

$\because \angle CAE + \angle BAE = \angle BAC = 90°$,

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CAE$ 中,$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC, \\ \angle ABD = \angle CAE, \\ AB = CA, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$(AAS).

$\therefore BD = AE, AD = CE$.

$\because AE = AD + DE$,

$\therefore BD = DE + CE$.

(2) **解:** $BD = DE - CE$.

证明:$\because BD \perp AE, CE \perp AE$,

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90°$.

$\because \angle BAC = 90°$,

$\therefore \angle ABD + \angle DAB = \angle DAB + \angle CAE = 90°$,

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$,

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CAE$ 中,$\begin{cases} \angle BDA = \angle AEC, \\ \angle ABD = \angle CAE, \\ AB = CA, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$(AAS).

$\therefore BD = AE, AD = CE$,

$\therefore DE = AD + AE = BD + CE$,

$\therefore BD = DE - CE$.

7. **解:** (1) $AE = DB, AE \perp DB$.

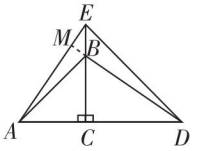
理由:由题意可知,$CA = CB, CE = CD$,

$\angle ACE = \angle BCD = 90°$,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$.

$\therefore AE = DB$.

如图,延长 DB 交 AE 于点 M,



[第7(1)题]

$\because \triangle ACE \cong \triangle BCD$,

$\therefore \angle AEC = \angle BDC$.

又$\because \angle AEC + \angle EAC = 90°$,

$\therefore \angle BDC + \angle EAC = 90°$,

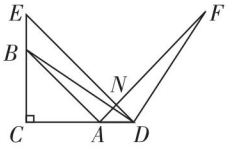
$\therefore$ 在$\triangle AMD$ 中,$\angle AMD = 180° - 90° = 90°$,

$\therefore AE \perp DB$.

(2) $DE = AF, DE \perp AF$.

理由:如图,设 ED 与 AF 相交于点 N,由题意可知,

$BE = AD$.



[第7(2)题]

$\because \angle EBD = \angle C + \angle BDC = 90° + \angle BDC$,

$\angle ADF = \angle BDF + \angle BDC = 90° + \angle BDC$,

$\therefore \angle EBD = \angle ADF$,

又$\because DB = FD$.

$\therefore \triangle EBD \cong \triangle ADF$.

$\therefore DE = AF, \angle E = \angle FAD$.

易知 $\angle E = 45°$,

$\therefore \angle FAD = 45°$.

易知 $\angle EDC = 45°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AND = 90°$,

$\therefore DE \perp AF$.

【第十二章测试卷】

一、**1**. B **2**. A **3**. C **4**. B **5**. C **6**. D **7**. B **8**. C **9**. C **10**. C

二、**11**. 70° **12**. 20° **13**. 65°

14. $AC = BD$(答案不唯一)

15. 角平分线上的点到角的两边的距离相等

16. ①②③④

三、**17**. **证明**:$\because AB \parallel CD$,$\therefore \angle B = \angle DCE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle ECD$中,$\begin{cases} AB = EC, \\ \angle B = \angle DCE, \\ BC = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ECD$(SAS).

$\therefore AC = ED$.

18. **解**:$CE \parallel DF$. 理由如下:由题意可得$CE = DF$,$AC = BD$,$\angle A = \angle B = 90°$,

$\therefore$ Rt$\triangle ACE \cong$ Rt$\triangle BDF$(HL).

$\therefore \angle CEA = \angle DFB$.

$\therefore CE \parallel DF$.

19. **证明**:连接AD.

在$\triangle ACD$和$\triangle ABD$中,$\begin{cases} AC = AB, \\ CD = BD, \\ AD = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD$(SSS).

$\therefore \angle FAD = \angle EAD$,即$AD$平分$\angle EAF$.

又$\because DE \perp AE$,$DF \perp AF$,

$\therefore DE = DF$.

20. **解**:(1)$\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

证明:$\because \angle ACB = 90°$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90°$.

又$\because AD \perp l$,

$\therefore \angle ADC = 90°$,

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$.

$\therefore \angle BCE = \angle CAD$.

$\because BE \perp l$,

$\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90°$.

在$\triangle ACD$与$\triangle CBE$中,$\begin{cases} \angle CAD = \angle BCE, \\ \angle ADC = \angle CEB, \\ AC = CB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$(AAS).

(2)由(1)可知$\triangle ACD \cong \triangle CBE$,

$\therefore AD = CE$,$CD = BE$.

$\therefore AD = CE = CD + DE = BE + DE = 3 + 5 = 8$.

21. **解**:(1)如图①,作$BD \perp y$轴于点D,

$\because A(3,0)$,$C(0,6)$,$\therefore OC = 6$,$OA = 3$.

$\because BC \perp AC$,$\therefore \angle ACB = 90°$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

$\because$ 在Rt$\triangle BDC$中,$\angle 1 + \angle 3 = 90°$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.

在$\triangle BDC$和$\triangle COA$中,

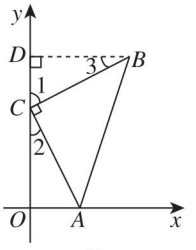
$\begin{cases} \angle 3 = \angle 2, \\ \angle BDC = \angle COA = 90°, \\ BC = CA, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle COA$(AAS),

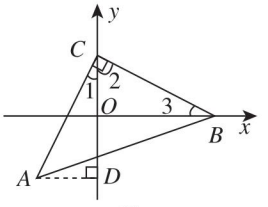
$\therefore BD = CO = 6$,$CD = AO = 3$,

$\therefore OD = 9$,

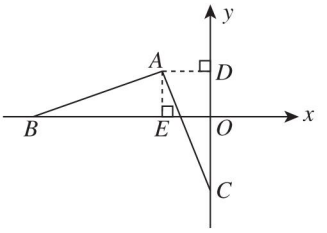
$\therefore B(6,9)$.



①



②



③

(第21题)

(2)如图②,作$A\ D \perp y$轴于点D.

$\because B(4,0)$,$C(0,2)$,

$\therefore OB = 4$,$OC = 2$.

$\because AC \perp BC$,$\therefore \angle ACB = 90°$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

$\because$ 在Rt $\triangle COB$中,$\angle 2 + \angle 3 = 90°$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

在$\triangle ACD$和$\triangle CBO$中,

$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3, \\ \angle CDA = \angle BOC = 90°, \\ AC = CB, \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBO$(AAS).

$\therefore AD = CO = 2, CD = BO = 4.$

$\therefore OD = CD - CO = 2.$

$\therefore A(-2, -2).$

(3)如图③,作 $AE \perp x$ 轴于点 E, $AD \perp y$ 轴于点 D,

$\because A(-1,1), B(-4,0),$

$\therefore AD = OD = OE = AE = 1, OB = 4.$

$\because AB \perp AC, \therefore \angle BAC = 90°.$

在 Rt$\triangle BAE$ 和 Rt$\triangle CAD$ 中,

$\begin{cases} AB = AC, \\ AE = AD, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BAE \cong$ Rt$\triangle CAD$(HL).

$\therefore CD = BE.$

又$\because BO = 4, OE = 1,$

$\therefore CD = BE = 3.$

又$\because OD = 1, \therefore OC = 2.$

$\therefore C(0, -2).$

第十三章 轴对称

13.1 轴对称

13.1.1 轴对称

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** D **4.** A **5.** C **6.** D **7.** B

8. (1)**证明:**$\because \triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 关于直线 AC 对称,

$\therefore \triangle ACB \cong \triangle ACD.$

$\therefore \angle ACB = \angle ACD.$

$\therefore \angle BCM = \angle DCM,$

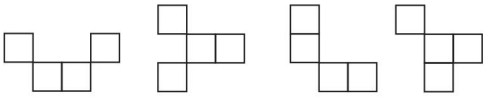
$\therefore$ 直线 AC 平分$\angle BCD.$

(2)**解:**由(1)知$\angle BCP = \angle DCP,$

易证$\triangle BCP \cong \triangle DCP$(SAS),

$\therefore PB = PD.$

9. **解:**如图.



(第9题)

点拨:解答本题的技巧是先去掉一个小正方形,判断剩余的图形是不是轴对称图形,如果是,画出其对称轴,再画出去掉的小正方形关于对称轴对称的图形即可.

10. (1)**证明:**由折叠知$\angle G = \angle D = 90°$, $\angle A = \angle ECG = 90°, AD = GC,$

$\therefore \angle GCF + \angle FCE = 90°,$

又$\because \angle FCE + \angle BCE = 90°,$

$\therefore \angle GCF = \angle BCE.$

$\because \angle B = 90°,$

$\therefore \angle G = \angle B.$

$\because AD = BC,$

$\therefore GC = BC,$

$\therefore \triangle FGC \cong \triangle EBC.$

(2)**解:**由$\triangle FGC \cong \triangle EBC$ 知 $FG = BE.$

由折叠知 $DF = FG,$

$\therefore DF = BE,$

$\therefore$ 四边形 $ECGF$ 的面积 = 四边形 $AEFD$ 的面积

$= \dfrac{(AE + DF) \times AD}{2} = \dfrac{(AE + BE) \times AD}{2} = \dfrac{8 \times 4}{2}$

$= 16.$

13.1.2 线段的垂直平分线的性质

【两年模拟兵法】

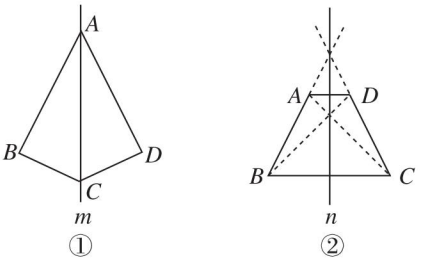
1. A **点拨:**$\because AC = AD, BC = BD, \therefore A, B$ 两点均在线段 CD 的垂直平分线上,根据两点确定一条直线,可知直线 AB 垂直平分 $CD.$

2. B **3.** B **4.** D **5.** C **6.** 87

7. 13 **8.** 12 cm

9. **解:**(1)如图①;

(2)如图②.



(第9题)

10. **证明:**$\because EF$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore AF = BF.$

$\because AC \perp CD, BD \perp CD,$

$\therefore \angle ACF = \angle FDB = 90°.$

在 Rt$\triangle ACF$ 和 Rt$\triangle FDB$ 中,$\begin{cases} AC = FD, \\ AF = FB, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ACF \cong$ Rt$\triangle FDB.$

$\therefore \angle AFC = \angle FBD.$

又$\because \angle FBD + \angle BFD = 90°,$

$\therefore \angle AFC + \angle BFD = 90°.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AFB = 90°$.

又$\because AF = BF$,

$\therefore \triangle ABF$ 是等腰直角三角形.

11. 解:(1)同意.

理由:$\because AB = AD$,$\therefore$ 点 A 在线段 BD 的垂直平分线上.

$\because CB = CD$,$\therefore$ 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上.

$\therefore$ 线段 AC 所在的直线为 BD 的垂直平分线,

$\therefore BE = DE$,$AC \perp BD$.

(2)由(1)得 $AC \perp BD$,

$$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{\triangle CBD} + S_{\triangle ABD}$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot CE + \frac{1}{2}BD \cdot AE$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot (CE + AE) = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$$

$$= \frac{1}{2}ab.$$

13.2 画轴对称图形

【两年模拟兵法】

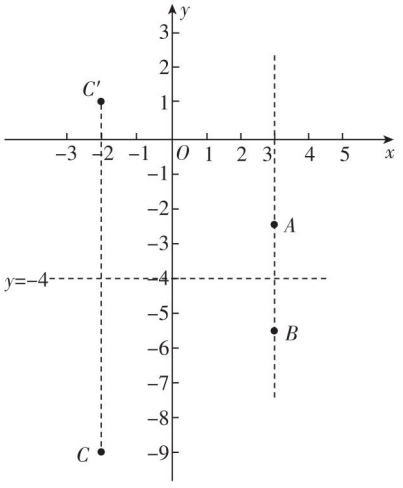
1. B 点拨:关于 y 轴对称的点的纵坐标相同,横坐标互为相反数.

2. B 点拨:$a = 4$,$b = 3$.

3. D

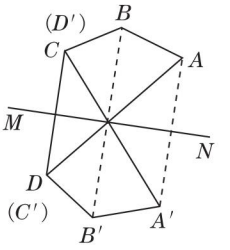
4. C

5. A 点拨:如图,A,B 两点关于直线 $y = -4$ 对称,即该图形的对称轴为直线 $y = -4$,由此可得 $C(-2,-9)$ 关于直线 $y = -4$ 的对称点为 $C'(-2,1)$.



(第5题)

6. 解:(1)(2)如图.



(第6题)

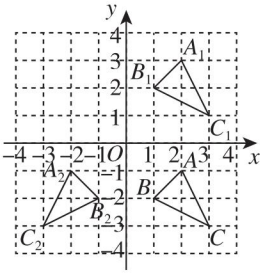
点拨:注意点 C,点 D 互为对称点.

7. 解:直线 OA 为 y 轴,故 $B'(-2,0)$,

$$S_{\triangle ABB'} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6.$$

8. 解:(1)如图所示:$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;

(2)如图所示:$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求;



(第8题)

(3)$A_1(2,3)$,$A_2(-2,-1)$.

13.3 等腰三角形

13.3.1 等腰三角形

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** D **4.** C **5.** D **6.** D

7. 证明:$\because \angle ABC = \angle ACB$,$\therefore AB = AC$.

又$\because D$,E 分别为边 AB,AC 的中点,

$\therefore AD = AE$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEB$ 中,$\begin{cases} AD = AE, \\ \angle A = \angle A, \\ AC = AB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB$.

$\therefore BE = CD$.

8. 证明:(1)$\because AB = AE$,

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰三角形,

又$\because D$ 为线段 BE 的中点,

$\therefore AD \perp BC$,

$\therefore \angle C + \angle DAC = 90°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle BAC=90°$,

∴ $\angle BAD+\angle DAC=90°$,

∴ $\angle C=\angle BAD$.

(2)∵ $AF/\!/BC$,∴ $\angle EAF=\angle AEB$,

∵ $AB=AE$,

∴ $\angle ABE=\angle AEB$,∴ $\angle EAF=\angle ABC$.

又∵ $\angle BAC=\angle AEF=90°$,$AB=AE$,

∴ $\triangle BAC\cong\triangle AEF$,∴ $AC=EF$.

9. **证明:**∵ $DG/\!/AC$,

∴ $\angle DGB=\angle ACB$,$\angle DGF=\angle ECF$.

又∵ $\angle DFG=\angle EFC$,$DF=EF$,

∴ $\triangle GDF\cong\triangle CEF$,∴ $DG=EC$.

∵ $BD=CE$,∴ $BD=DG$,

∴ $\angle DGB=\angle B$.

∵ $\angle DGB=\angle ACB$,

∴ $\angle B=\angle ACB$,

∴ $AC=AB$,即$\triangle ABC$是等腰三角形.

10. (1)**证明:**∵ 点 P 在 AB 的垂直平分线上,

∴ $PA=PB$,

∴ $\angle PAB=\angle B$.

∵ $\angle APC=\angle PAB+\angle B$,

∴ $\angle APC=2\angle B$.

(2) **解:**根据题意,得 $BQ=BA$,∴ $\angle BAQ=\angle BQA$,

设$\angle B=x$,则$\angle AQC=\angle B+\angle BAQ=3x$,

∴ $\angle BAQ=\angle BQA=2x$,

在$\triangle ABQ$中,$x+2x+2x=180°$,解得 $x=36°$,

∴ $\angle B=36°$.

13.3.2 等边三角形

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**由题易知$\triangle APQ$为等边三角形,$\angle QAC=\angle C=30°$.∴ $\angle PAC=\angle PAQ+\angle QAC=90°$.

2. D **点拨:**由题意知 $AB=2AC=6$,故 $3\leqslant AP\leqslant 6$.

3. B

4. D **点拨:**当顶角为30°或150°时,此高等于腰长的一半;当顶角为120°时,此高等于底边长的一半.

5. B **点拨:**∵ $MN/\!/BC$,MN 平分 $\angle AMC$,CM 平分$\angle ACB$,

∴ $\angle B=\angle AMN=\angle NMC=\angle NCM=\angle BCM$.

又∵ $\angle A=90°$,∴ $\angle AMN=\angle B=30°$.

∴ $MN=2AN=2=NC$.

∴ $AC=AN+CN=1+2=3$.

∴ $BC=2AC=6$.

6. 6

7. **解:**∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

∴ $\angle ACB=60°$.

∴ $\angle ACD=120°$.

∵ $CG=CD$,

∴ $\angle CDG=\angle CGD=30°$.

∴ $\angle FDE=150°$.

∵ $DF=DE$,

∴ $\angle E=\angle DFE=15°$.

8. **解:**$AE/\!/BC$.

理由如下:∵ $\triangle ABC$ 与$\triangle CDE$ 都为等边三角形,

∴ $BC=AC$,$CD=CE$,

$\angle B=\angle ACB=\angle DCE=60°$,

∴ $\angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$,

即$\angle BCD=\angle ACE$,

∴ $\triangle BCD\cong\triangle ACE$,∴ $\angle B=\angle EAC$.

∴ $\angle EAC=\angle ACB$,∴ $AE/\!/BC$.

9. **证明:**∵ $AB=AC$,

∴ $\angle B=\angle C$.

∵ $DE\perp AB$,$DF\perp BC$,

∴ $\angle DEA=\angle DFC=90°$.

∵ D 为 AC 的中点,

∴ $DA=DC$.

又∵ $DE=DF$,

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle CDF(\mathrm{HL})$.

∴ $\angle A=\angle C$.

∴ $\angle A=\angle B=\angle C$.

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

10. **解:**(1)$AN+MN=CN$

(2)成立.

证明:过点 M 作 $MH/\!/BC$ 交 CN 于点 H.

∵ $\triangle NCB$ 为等边三角形,

∴ $\angle NCB=\angle CNB=60°$,$\triangle NHM$ 为等边三角形.

∴ $\angle NHM=\angle NMH=60°$,$MN=MH=HN$.

∵ $AN/\!/BC$,∴ $\angle ANC=\angle NCB=60°$.

∴ $\angle ANM=\angle ANC+\angle CNB=120°$.

∵ $\angle MHC=180°-\angle NHM=120°$,∴ $\angle ANM=\angle MHC$.

∵ $\angle AMC=\angle NMH=60°$,

∴ $\angle NMA=\angle HMC$.

在$\triangle ANM$和$\triangle CHM$中,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle ANM=\angle CHM$, $NM=HM$, $\angle NMA=\angle HMC$,

$\therefore \triangle ANM\cong\triangle CHM$(ASA).

$\therefore CH=AN$.

$\because CN=CH+HN$,

$\therefore AN+MN=CN$.

11. (1)**证明**:连接 AN.

$\because AM=MN$, $\angle AMN=60°$,

$\therefore \triangle AMN$ 为等边三角形.

$\therefore \angle MAN=60°$, $AM=AN$.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB=AC$, $\angle BAC=\angle B=\angle ACB=60°$.

$\because \angle BAM=\angle BAC-\angle MAC=60°-\angle MAC$,

$\angle CAN=\angle MAN-\angle MAC=60°-\angle MAC$,

$\therefore \angle BAM=\angle CAN$.

又$\because AB=AC$, $AM=AN$,

$\therefore \triangle BAM\cong\triangle CAN$(SAS).

$\therefore \angle B=\angle ACN=60°$.

又$\because \angle ACB=60°$,

$\therefore \angle NCD=60°$.

$\therefore \angle ACN=\angle DCN=60°$.

$\therefore CN$ 平分 $\angle ACD$.

(2)**证明**:延长 NC 至点 H,使 $CH=CM$,连接 MH.

易证 $\triangle CMH$ 为等边三角形,

$\therefore CM=MH$, $\angle HMC=\angle CHM=60°$.

$\therefore \angle AMN=\angle HMC=60°$.

$\therefore \angle AMC=\angle NMH$.

在 $\triangle MAC$ 和 $\triangle MNH$ 中,

$\angle ACM=\angle NHM=60°$, $\angle AMC=\angle NMH$,

$MC=MH$,

$\therefore \triangle MAC\cong\triangle MNH$(ASA).

$\therefore AM=MN$.

(3)**证明**:作 $MP\perp AC$ 于 P, $MQ\perp CN$ 交 NC 的延长线于 Q.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore \angle ACB=60°$.

$\therefore \angle ACD=120°$. $\because CN$ 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ACN=\angle NCD=60°$. $\therefore \angle MCQ=60°$.

$\therefore \angle ACB=\angle MCQ$.

又$\because MP\perp AC$, $MQ\perp NC$, $\therefore MP=MQ$.

又$\because AM=MN$, $\therefore$ Rt$\triangle APM\cong$Rt$\triangle NQM$(HL).

$\therefore \angle MAP=\angle MNQ$.

$\therefore \angle AMN=\angle ACN=60°$.

(4)**解**:成立. 证明:延长 AC 至点 H,使 $CH=CM$,连接 MH.

易知 $\angle MCH=\angle ACB=60°$,

$\therefore \triangle CMH$ 为等边三角形.

$\therefore MH=CM$, $\angle MHC=60°$.

易知 $\angle ACN=\angle NCD=60°$.

$\because \angle NMA=\angle ACN=60°$,

$\therefore \angle CAM=\angle CNM$.

在 $\triangle HAM$ 和 $\triangle CNM$ 中,

$\angle HAM=\angle CNM$, $\angle AHM=\angle NCM=60°$, $HM=CM$,

$\therefore \triangle HAM\cong\triangle CNM$(AAS).

$\therefore AM=MN$.

13.4 课题学习 最短路径问题

【两年模拟兵法】

1. C

2. 10 **点拨**:连接 PC,根据等边三角形的轴对称性,可得 $PC=PB$,

$\therefore PD+PB$ 要取最小值,应使 D, P, C 三点共线.

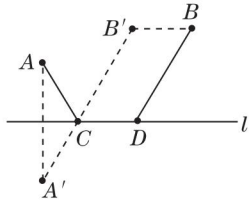
$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, D 为 AB 的中点,

高 $AH=10$ cm,

$\therefore PD+PB$ 的最小值为 10 cm.

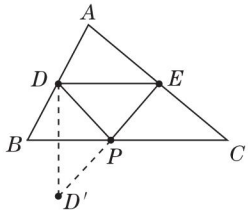
3. 45°

4. **解**:如图. **点拨**:先把点 B 向左平移 7 mm 到点 B',作点 A 关于 l 的对称点 A',连接 $A'B'$ 交 l 于点 C,再向右在 l 上截取 $CD=7$ mm. 则点 C, D 就是所求作的点.



(第4题)

5. **解**:如图.



(第5题)

6. **解**:如图,分别作点 A 关于直线 BC 和 CD 的对称点 A', A'',连接 $A'A''$,交 BC 于 M,交 CD 于 N,连接 AM, AN,则 $A'A''$ 的长即为 $\triangle AMN$ 的周长的最小

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

值. 作 DA 的延长线 AH,

$\because \angle DAB = 120°$,

$\therefore \angle HAA' = 60°$,

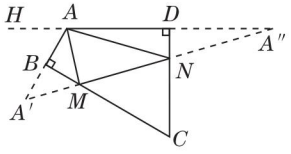
$\therefore \angle A' + \angle A'' = \angle HAA' = 60°$.

$\because \angle A' = \angle MAA', \angle NAD = \angle A''$,

且 $\angle A' + \angle MAA' = \angle AMN$,

$\angle NAD + \angle A'' = \angle ANM$,

$\therefore \angle AMN + \angle ANM = \angle A' + \angle MAA' + \angle NAD + \angle A'' = 2(\angle A' + \angle A'') = 2 \times 60° = 120°$.



(第 6 题)

7. 解: 如图,设 $\angle POA = \theta$,则 $\angle POB = 30° - \theta$,作 $PM \perp OA$,与 OA 相交于 M,并将 PM 延长到 E,使 $ME = PM$,连接 OE. 作 $PN \perp OB$,与 OB 相交于 N,并将 PN 延长到 F,使 $NF = PN$,连接 OF. 连接 EF,与 OA 相交于 Q,与 OB 相交于 R,连接 PQ,PR,则此时 $\triangle PQR$ 的周长最小.

易知 OA 垂直平分 PE,

$\therefore EQ = QP, OE = OP$.

易知 OB 垂直平分 PF,

$\therefore FR = RP, OP = OF$,

$\therefore \triangle PQR$ 的周长 $= EF$.

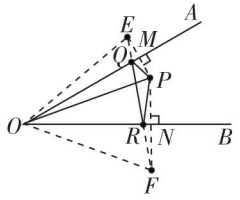
$\because OE = OF = OP = 10$,

且易知 $\angle EOF = \angle EOP + \angle POF = 2\theta + 2(30° - \theta) = 60°$,

$\therefore \triangle EOF$ 是等边三角形,

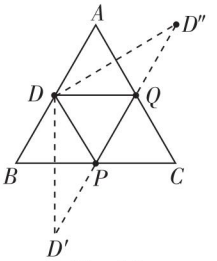
$\therefore EF = 10$.

$\therefore$ 当 $\triangle PQR$ 的周长最小时,它的周长是 10.



(第 7 题)

8. 解: 如图,分别作点 D 关于直线 BC,AC 的对称点 D',D'',连接 $D'D''$,分别交 BC,AC 于点 P,Q,连接 DP,DQ,易知 P,Q 分别为 BC,AC 的中点,此时 $\triangle DPQ$ 的周长最小.



(第 8 题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解: (1)$\because$ 点 M,N 关于 x 轴对称,

$$\therefore \begin{cases} 2a - b = 2b - 1, \\ 5 + a - a + b = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -8, \\ b = -5. \end{cases}$$

(2)$\because$ 点 M,N 关于 y 轴对称,

$$\therefore \begin{cases} 2a - b + 2b - 1 = 0, \\ 5 + a = -a + b. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = 3, \end{cases}$$

$\therefore (4a + b)^{2\,021} = (-1)^{2\,021} = -1$.

2. 解: (1)图略.

(2)$A_1(5,5)$,$B_1(5,0)$,$C_1(8,3)$.

(3)$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 7.5.

3. 证明: 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D,$OE \perp AC$ 于 E,则 $\triangle BOD$ 和 $\triangle COE$ 都是直角三角形.

$\because AO$ 平分 $\angle BAC$,$OD \perp AB$,$OE \perp AC$,

$\therefore OD = OE$.

$\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore OB = OC$.

$\therefore \text{Rt}\triangle BOD \cong \text{Rt}\triangle COE$.

$\therefore \angle ABO = \angle ACO$.

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$.

$\therefore AB = AC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

4. (1)**证明:**$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形,

$\therefore BC = AC, CE = CD, \angle ACB = \angle ECD = 60°$.

$\therefore \angle BCE = \angle ACD$.

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$.

(2)**证明:**$\because \triangle BCE \cong \triangle ACD$,

$\therefore \angle FBC = \angle HAC$.

$\because \angle ACH = 180° - \angle ACB - \angle ECD = 60°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ACB = \angle ACH$. 又$\because BC = AC$,

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle ACH$. $\therefore CF = CH$.

(3)**解**:$\triangle CFH$ 是等边三角形.

理由:$\because CF = CH$, $\angle FCH = 60°$,

$\therefore \triangle CFH$ 是等边三角形.

5. **解**:①若已知的这个角为顶角,则底角的度数为$(180° - 52°) \div 2 = 64°$,故一条腰上的高与底边的夹角为26°;②若已知的这个角为底角,则一条腰上的高与底边的夹角为38°. 故它的一条腰上的高与底边的夹角为26°或38°.

6. **解**:由于条件中中线分周长为两部分,并没有指明哪一部分是9 cm、哪一部分是12 cm,因此,应有两种情形:

若设这个等腰三角形的腰长为x cm,底边长为y cm,

于是根据题意,

得$\begin{cases} x + \frac{1}{2}x = 9, \\ \frac{1}{2}x + y = 12, \end{cases}$ 或$\begin{cases} x + \frac{1}{2}x = 12, \\ \frac{1}{2}x + y = 9. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x = 6, \\ y = 9, \end{cases}$ 或$\begin{cases} x = 8, \\ y = 5. \end{cases}$

即当腰长是6 cm时,底边长是9 cm;

当腰长是8 cm时,底边长是5 cm.

7. **解**:8个,分别以A,B为圆心,以AB长为半径画圆,与两坐标轴有6个交点(不含A,B);

作AB的垂直平分线与两坐标轴有2个交点,共有8个交点. 图略.

8. **解**:(1)①$\triangle BPD$与$\triangle CQP$全等.

理由如下:

易知$BP = CQ = 3 \times 1 = 3$ (cm).

$\because AB = 10$ cm,点D为AB的中点,

$\therefore BD = 5$ cm.

又$\because PC = BC - BP$, $BC = 8$ cm,

$\therefore PC = 8 - 3 = 5$(cm),

$\therefore PC = BD$.

又$\because AB = AC$, $\therefore \angle B = \angle C$,

$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CQP$.

②$\because v_P \neq v_Q$, $\therefore BP \neq CQ$.

又$\because \triangle BPD$与$\triangle CQP$全等, $\angle B = \angle C$,

则$BP = PC = 4$ cm, $CQ = BD = 5$ cm,

$\therefore$ 点P,点Q运动的时间为$\frac{BP}{3} = \frac{4}{3}$s,

$\therefore v_Q = \frac{CQ}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{4}$(cm/s).

$\therefore$ 当点Q的运动速度为$\frac{15}{4}$ cm/s时,能够使$\triangle BPD$与$\triangle CQP$全等.

(2)设经过x s后点P与点Q第一次相遇,

由题意,得$\frac{15}{4}x = 3x + 2 \times 10$,解得$x = \frac{80}{3}$.

$\therefore$ 点P共运动了$\frac{80}{3} \times 3 = 80$(cm).

$\triangle ABC$的周长为$10 + 10 + 8 = 28$(cm), $28 \times 3 = 84$(cm), $84 - 80 = 4$(cm) < 10 cm,

$\therefore$ 点P、点Q在AB边上相遇,

$\therefore$ 经过$\frac{80}{3}$s点P与点Q第一次在$\triangle ABC$的边AB上相遇.

【第十三章测试卷】

一、1. B **2**. B **3**. C **4**. A **5**. D **6**. B **7**. B **8**. C **9**. C **10**. B

二、11. 3 cm **12**. 40°

13. 50°或80° **14**. 3

15. 4 **16**. ①②④

三、17. **解**:$\because ED$垂直平分AB,

$\therefore AE = EB$. $\therefore \angle EAB = \angle B$.

$\therefore \angle AEC = \angle EAB + \angle B = 2\angle B$.

$\because$ 在$\triangle ACE$中, $\angle C = 90°$,

$\therefore \angle CAE + \angle AEC = 90°$.

$\because \angle CAE = \angle B + 30°$,

$\therefore \angle B + 30° + 2\angle B = 90°$. $\therefore \angle B = 20°$.

$\therefore \angle AEC = 2\angle B = 40°$.

18. 略.

19. **解**:已知:①③.

求证:$\triangle AED$是等腰三角形.

证明:在$\triangle ABE$和$\triangle DCE$中,$\begin{cases} \angle B = \angle C, \\ \angle AEB = \angle DEC, \\ AB = DC, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE$.

$\therefore AE = DE$,即$\triangle AED$是等腰三角形.

点拨:答案不唯一.

20. (1)**解**:$\triangle PCE$是等边三角形. 理由如下:

$\because \triangle ABC$与$\triangle DEF$是全等的等边三角形,

$\therefore \angle DEC = \angle ACE = 60°$.

$\therefore \angle EPC = 180° - \angle DEC - \angle ACE = 180° - 60° -$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$60°=60°$.

$\therefore \triangle PCE$ 是等边三角形.

(2)**证明**:$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

$\therefore AC=DE, \angle ACB=\angle DEF=60°, BC=EF.$

$\therefore \angle ACF=\angle DEB=120°, FC=BE.$

在 $\triangle AFC$ 和 $\triangle DBE$ 中, $\begin{cases} AC=DE, \\ \angle ACF=\angle DEB, \\ FC=BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AFC \cong \triangle DBE. \therefore AF=BD.$

21. (1)**证明**:$\because AB=AC,$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB.$

又$\because \angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 $O,$

$\therefore \angle ABC=2\angle OBC, \angle ACB=2\angle OCB,$

$\therefore \angle OBC=\angle OCB.$

$\therefore OB=OC.$

$\therefore \triangle BOC$ 是等腰三角形.

(2)**解**:$BM=CN.$ 理由如下:

$\because MN/\!/BC,$

$\therefore \angle AMN=\angle ABC, \angle ANM=\angle ACB.$

又$\because \angle ABC=\angle ACB,$

$\therefore \angle AMN=\angle ANM.$

$\therefore AM=AN.$

$\therefore AB-AM=AC-AN,$ 即 $BM=CN.$

(3)**证明**:$\because AB=AC, BO=CO, AO=AO,$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO.$

$\therefore \angle BAO=\angle CAO.$

又$\because AM=AN,$

$\therefore AO \perp MN.$

第十四章 整式的乘法与因式分解

14.1 整式的乘法

14.1(一) 幂的运算

【两年模拟兵法】

1. A **2**. A **3**. A **4**. D **5**. B **6**. B **7**. B

8. **解**:(1)原式 $=-a^3\cdot a^2\cdot a^4=-a^{3+2+4}=-a^9.$

(2)原式 $=x^2\cdot x^n\cdot x\cdot(-x^5)=-x^2\cdot x^n\cdot x\cdot x^5=-x^{2+n+1+5}=-x^{8+n}.$

9. **解**:$a^{2m+3n}=a^{2m}\cdot a^{3n}=(a^m)^2\cdot(a^n)^3=2^2\times3^3=4\times27=108.$

点拨:本题可逆用同底数幂的乘法和幂的乘方运算法则解决.

10. **解**:原式 $=\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times(-8)^{13}\right]\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9\right]=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)\times(-8)\right]^{12}\times(-8)\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right]^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

$=1\times(-8)\times1\times\frac{9}{25}$

$=-\frac{72}{25}.$

点拨:逆用积的乘方法则和同底数幂的乘法法则,使问题获解.

11. **解**:$\because 2^{12}\times5^8=2^4\times(2\times5)^8=1.6\times10^9,$

$\therefore 2^{12}\times5^8$ 的结果是一个十位正整数.

12. **解**:$\because 20^n=(2^2\times5)^n=2^{2n}\times5^n=(2^n)^2\times5^n=a^2b,$ 且 $20^n=c, \therefore c=a^2b.$

点拨:利用积的乘方法则和逆用幂的乘方法则,把 20^n 用含 $2^n, 5^n$ 的式子表示,从而得出 c 与 a, b 之间的关系.

14.1(二) 整式的乘除法

【两年模拟兵法】

1. C **2**. A **3**. B

4. C **点拨**:本题运用了方程思想. 原式 $=x^4-3x^3+2x^2+px^3-3px^2+2px+qx^2-3qx+2q=x^4+(p-3)x^3+(2-3p+q)x^2+(2p-3q)x+2q.$

由题意得 $\begin{cases} 2-3p+q=0, \\ 2p-3q=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} p=\frac{6}{7}, \\ q=\frac{4}{7}. \end{cases}$

5. $\frac{4}{7}$

6. $x^{n+1}-1$ **点拨**:解答这类题应从项数和次数两个方面去找规律.

7. **解**:(1)$x(x+1)-(x+1)(x-2)$

$=(x^2+x)-(x^2-x-2)$

$=x^2+x-x^2+x+2$

$=2x+2.$

(2)$(a+3)(a-2)-a(a-1)(2a-6)$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=(a^2+a-6)-a(2a^2-8a+6)$

$=a^2+a-6-2a^3+8a^2-6a$

$=-2a^3+9a^2-5a-6.$

8. 解:$2(3x+1)(1-3x)+(x-2)(2+x)$

$=2(1-9x^2)+x^2-4$

$=2-18x^2+x^2-4$

$=-17x^2-2.$

当 $x=2$ 时,

原式 $=-17\times2^2-2=-70.$

9. 解:(1)原方程可化为 $4x^2-4x+5=4x^2+6x-2x-3$,即 $8x=8$,故 $x=1$.

(2)原不等式可化为$(6x^2-11x+3)-(6x^2-29x+20)>0$,即 $18x>17$,得 $x>\frac{17}{18}$.

10. 解:$\because(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$,$\therefore$ 所用 A,B,C 三类卡片分别为3张,1张,2张,图略.

14.2 乘法公式

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** B

4. C **点拨:**把已知的两个等式按照完全平方公式展开,然后根据等式的性质进行加法运算.

$\because(m-n)^2=8$,$\therefore m^2-2mn+n^2=8$,①

$\because(m+n)^2=2$,$\therefore m^2+2mn+n^2=2$. ②

①+②,得 $2m^2+2n^2=10$,

$\therefore m^2+n^2=5$. 故选 C.

5. $(6a+15)$ **点拨:**$S_{长方形}=(a+4)^2-(a+1)^2=a^2+8a+16-a^2-2a-1=(6a+15)(cm^2)$.

6. 37 **点拨:**$\because|x+y-7|+(xy-6)^2=0$,

$\therefore x+y-7=0$,$xy-6=0$.

$\therefore x+y=7$,$xy=6$.

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\times6=49-12=37$.

7. ±8 **点拨:**依题意,知$[(2a+2b)+1][(2a+2b)-1]=63$,$\therefore(2a+2b)^2-1=63$,

即$(2a+2b)^2=64$,

$\therefore 2a+2b=\pm8$.

8. 解:(1)$39\times41=(40-1)(40+1)$

$=40^2-1^2$

$=1\ 599.$

(2)$\left(99\frac{2}{3}\right)^2$

$=\left(100-\frac{1}{3}\right)^2$

$=100^2-2\times100\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=10\ 000-66\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$

$=9933\frac{4}{9}.$

9. 解:(1)原式 $=y^2-4-y^2-5y+y+5$

$=-4y+1.$

(2)原式 $=(x^2+4xy+4y^2)-(x^2-4xy+4y^2)$

$=x^2+4xy+4y^2-x^2+4xy-4y^2$

$=8xy.$

(3)原式 $=(m^2-4)^2$

$=m^4-8m^2+16.$

(4)原式 $=[x-(2y-3)][x+(2y-3)]$

$=x^2-(2y-3)^2$

$=x^2-(4y^2-12y+9)$

$=x^2-4y^2+12y-9.$

点拨:对于(1),先运用平方差公式和整式乘法计算,再去括号、合并同类项;对于(2),先运用完全平方公式展开,再去括号、合并同类项;对于(3),先运用平方差公式,再运用完全平方公式计算;对于(4),先将两个多项式变形成可用平方差公式计算的形式,再利用平方差公式计算,最后利用完全平方公式计算可得结果. 熟练掌握乘法公式是解答本题的关键,这里需要先观察式子符合什么样的乘法公式,再根据相应的乘法公式进行计算;另外具体计算时括号前面是负号,注意去括号时,改变括号内各项的符号.

10. 解:原式 $=x^2-y^2-(2x^2-4y^2)$

$=x^2-y^2-2x^2+4y^2$

$=-x^2+3y^2.$

当 $x=-1$,$y=-\frac{1}{3}$ 时,

原式 $=-(-1)^2+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

$=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}.$

点拨:先分别计算$(x+y)(x-y)$,$(4x^3y-8xy^3)\div2xy$,再进行整式减法计算,最后代入求值. 整式混合运算的顺序是:先算乘方,再算整式的乘除,最后算整式的加减,整式加减的实质就是合并同类项. 对于化简求值题,应先化简,再求值.

11. 解:设 $AD=a$ cm,$AB=b$ cm,则 $2(a+b)=20$,

$\therefore a+b=10.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $S_{正方形ABEF}+S_{正方形ADGH}=68\ cm^2$,

∴ $a^2+b^2=68$.

又∵ $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab=32$,

∴ $ab=16$,∴ $S_{长方形ABCD}=16\ cm^2$.

12. 解:设 $2\ 021-a=x$,$2\ 019-a=y$,

则 $x-y=2$,$xy=2\ 020$,

∴ $(2\ 021-a)^2+(2\ 019-a)^2$

$=x^2+y^2$

$=(x-y)^2+2xy$

$=2^2+2\times2\ 020$

$=4\ 044$.

14.3 因式分解

14.3.1 提公因式法

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** D **4.** A **5.** C **6.** B

7. 解:原方程可化为 $(21x-13)[(3x+7)-(3x-9)]=0$,即 $16(21x-13)=0$,

∴ $21x-13=0$,∴ $x=\frac{13}{21}$.

8. 解:∵ $x^2-xy=1\ 040$,

∴ $x(x-y)=1\ 040$.

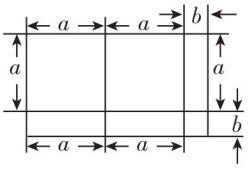
又∵ $x-y=26$,

∴ $26x=1\ 040$.

∴ $x=40$. ∴ $y=14$.

∴ 父亲今年 40 岁,儿子今年 14 岁.

9. 解:图形如图.



(第 9 题)

这个长方形的面积为 $2a^2+3ab+b^2$,又等于 $(a+b)(2a+b)$,

故可将多项式 $2a^2+3ab+b^2$ 分解因式为 $(a+b)(2a+b)$.

10. 解:(1)提公因式,2;

(2)$2\ 018$,$(1+x)^{2\ 019}$;

(3)原式 $=(1+x)[1+x+x(1+x)+\cdots+x(1+x)^{n-1}]$

$=(1+x)^2[1+x+x(1+x)+\cdots+x(1+x)^{n-2}]$

$=(1+x)^{n+1}$.

14.3.2 公式法

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** D

4. B 点拨:$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$,故 $a=-2$,$b=-3$.

5. $(x-2)(x+1)$

6. $m(m+n)(m-n)$

点拨:$m^3-mn^2=m(m^2-n^2)=m(m+n)(m-n)$.

7. 10 或 −10

点拨:设 $x^2+kx+25=(x+m)^2$,则 $m^2=25$,故 $m=\pm5$,∴ $k=2m=\pm10$.

8. 3

9. $x(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

10. 解:(1)原式 $=8ab^2(1-2a^2b)$.

(2)原式 $=-5x(3y+x)$.

(3)原式 $=ab(a^2b^2+ab-1)$.

(4)原式 $=-3am(a^2+2am-1)$.

点拨:当某一项与公因式相同时,提取后为“1”而不是“0”,不要漏掉;首项带负号的多项式,提公因式时,公因式要带负号,括号内的各项要改变符号.(4)题易因不改变括号内各项的符号而出错.

11. 解:(1)原式 $=(11a)^2-b^2=(11a+b)(11a-b)$.

(2)原式 $=[(a+3)+(a+b)][(a+3)-(a+b)]=(2a+b+3)(3-b)$.

(3)原式 $=(3x)^2-2\cdot3x\cdot4+4^2=(3x-4)^2$.

(4)原式 $=[(x-1)-3]^2=(x-4)^2$.

12. 解:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

理由:∵ $a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$,

∴ $a^4-b^4+a^2c^2-b^2c^2=0$,

∴ $(a^2+b^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)c^2=0$,

∴ $(a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)=0$,

∴ $(a+b)(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$.

∵ a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,

∴ $a^2+b^2+c^2>0$,$a+b>0$,

∴ $a-b=0$,即 $a=b$.

∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

点拨:先分组分解因式后,再提取公因式分解因式,将等式的一边化为乘积形式,另一边化为 0,从而利用两边相等的关系来确定三角形的形状.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解:∵ $bc=a^2+3a-5$,

∴ $2bc=2a^2+6a-10$,①

又 $b^2+c^2=2a^2+8a-14$,②

②-①得 $b^2-2bc+c^2=2a^2+8a-14-(2a^2+6a-10)=2a^2+8a-14-2a^2-6a+10=2a-4$,

即 $(b-c)^2=2a-4$.

∵ $(b-c)^2>0$,

∴ $2a-4>0$,解得 $a>2$.

点拨: 本题运用整体思想求解. 由于条件等式中的未知数较多,通过变形利用完全平方公式分解因式,结合非负数的性质转化为不等式求解是解题的关键.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)原式 $=x^2-x^8$.

(2)原式 $=5a^{12}$.

(3)原式 $=-5x^{14}$.

(4)原式 $=6a^8$.

2. 解:(1)$10^{3m+2n-p}$

$=10^{3m}\cdot10^{2n}\div10^p$

$=(10^m)^3\cdot(10^n)^2\div10^p$

$=3^3\times2^2\div4$

$=27$.

(2)∵ $a=8^{14}=(2^3)^{14}=2^{42}$,

$b=256^5=(2^8)^5=2^{40}$,

$c=64^7=(2^6)^7=2^{42}$,∴ $a=c>b$.

3. 解:(1)原式 $=-\frac{7}{5}a^4b^2c$.

(2)原式 $=x^4$.

(3)原式 $=12mn^2-\frac{7}{4}m^2n^6$.

(4)原式 $=5x^3+8x^2+12x+15$.

4. 解:(1)原式 $=\frac{7}{8}a^3b^6$. 当 $a=-\frac{1}{4}$,$b=4$ 时,

原式 $=\frac{7}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^3\times4^6=-56$.

(2)原式 $=-2ab$. 当 $a=-2$,$b=\frac{2}{3}$ 时,

原式 $=(-2)\times(-2)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

(3)原式 $=\frac{1}{9}x^3y^4$. 当 $x=-\frac{3}{2}$,$y=-2$ 时,

原式 $=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times(-2)^4=-6$.

5. 解:原式 $=-x^2+8xy$. 当 $x=-2$,$y=\frac{1}{2}$ 时,

原式 $=-(-2)^2+8\times(-2)\times\frac{1}{2}=-12$.

6. 解:(1)原式 $=200^2-2\times200\times199+199^2$

$=(200-199)^2$

$=1$.

(2)原式 $=(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+(96+95)(96-95)+\cdots+(2+1)(2-1)$

$=100+99+98+97+96+95+\cdots+2+1$

$=(100+1)\times50$

$=5\,050$.

7. 解:(1)∵ $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy=64-9=55$,

∴ $xy=\frac{55}{4}$.

(2)$(m-53)^2+(m-47)^2$

$=[(m-53)-(m-47)]^2+2(m-53)(m-47)$

$=(-6)^2+48$

$=84$.

8. 解:(1)原式 $=y(x+3)(x-3)$.

(2)原式 $=ax(x+y)(x-y)$.

(3)原式 $=3x(x-y)^2$.

(4)原式 $=(x-2)^2$.

(5)原式 $=(x+y-2)^2$.

(6)原式 $=(x+2y)^2$.

(7)原式 $=(x+2)(x+3)$.

(8)原式 $=(x+1)(x-4)$.

【第十四章测试卷】

一、**1.** C **2.** A **3.** D **4.** A **5.** C **6.** B **7.** C **8.** B **9.** B **10.** D

二、**11.** $2m+1$ **12.** 2 **13.** -9 **14.** 15 **15.** $\frac{25}{64}$ **16.** ab

三、**17.** 解:(1)原式 $=-60x^3y^4$.

(2)原式 $=-a-b$.

18. 解:(1)原式 $=a(x^2+8x+16)=a(x+4)^2$.

(2)原式 $=x^2(x^2-81y^2)=x^2(x+9y)(x-9y)$.

19. 解:∵ $xy=1$,

∴ 原式 $=-\frac{1}{3}xy(xy+1+x^3y^3)$

$=-\frac{1}{3}xy[xy+1+(xy)^3]$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=-\frac{1}{3}\times1\times(1+1+1^3)$

$=-1.$

20. **解**:设花圃原来的宽为 x m,则原来的长为$(x+2)$ m,面积为$x(x+2)$m^2,当花圃的长和宽分别增加 3 m 时,它的面积为$(x+3)(x+5)$m^2. 根据题意,得$(x+3)(x+5)=x(x+2)+39$,解得 $x=4$. 则 $x+2=6$.

答:花圃原来的宽为 4 m,长为 6 m.

21. **解**:(1)①275;572

②63;36

(2)∵ 等式左边两位数的十位数字为 a,个位数字为 b,

∴ 左边的两位数是 $10a+b$,三位数是 $100b+10(a+b)+a$,右边的两位数是 $10b+a$,三位数是 $100a+10(a+b)+b$.

∴ 一般规律的式子为$(10a+b)[100b+10(a+b)+a]=[100a+10(a+b)+b](10b+a)$.

证明:∵ 左边$=(10a+b)(100b+10a+10b+a)$

$=(10a+b)(110b+11a)$

$=11(10a+b)(10b+a)$,

右边$=(100a+10a+10b+b)(10b+a)$

$=(110a+11b)(10b+a)$

$=11(10a+b)(10b+a)$.

∴ 左边 = 右边,

∴ 表示“数字对称等式”的一般规律的式子为

$(10a+b)[100b+10(a+b)+a]=$

$[100a+10(a+b)+b](10b+a)$.

第十五章 分式

15.1 分式

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A

3. D **点拨**:由题意可得$\frac{3x}{3x+3y}=\frac{3x}{3(x+y)}=\frac{x}{x+y}$,因此分式的值不改变,应选 D. 解答本题的关键是根据题意列出满足条件的分式,再利用分式的基本性质化简,将化简结果与原分式进行对比来确定正确选项.

4. D

5. C **点拨**:①中分子、分母同时约去 $x-y$,正确;②中分式的分子、分母同时除以 -1,正确;③中因为 $b-a$ 的正负不确定,当 $b-a>0$ 时,结果为 -1,当$b-a<0$ 时,结果为 1,错误;④正确.

6. C

7. $m<0$

8. **解**:(1)由题意,可得$|x|-1=0$,

∴ $x=\pm1$.

把 $x=1$ 代入 x^2+2x-3,得 $1+2-3=0$. 不合题意,舍去.

把 $x=-1$代入 x^2+2x-3,得$(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$,∴ 当 $x=-1$ 时,$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$的值为零.

(2)由题意,得 $x-2=0$ 或 $x-1=0$,

∴ $x=2$ 或 $x=1$,

∵ $|x|-1\neq0$,∴ $x\neq\pm1$,

∴ 当 $x=2$ 时,$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$的值为零.

9. **解**:(1)$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$.

(2)$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$

$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}$

$=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

10. **解**:(1)最简公分母是 $12a^2b^2c^2$. $\frac{3}{4a^2b}=\frac{9bc^2}{12a^2b^2c^2}$,$-\frac{5}{6b^2c}=-\frac{10a^2c}{12a^2b^2c^2}$,$\frac{1}{2ac^2}=\frac{6ab^2}{12a^2b^2c^2}$.

(2)最简公分母是$4(x+1)(x-2)$.

$\frac{x+2}{2x+2}=\frac{2(x+2)(x-2)}{4(x+1)(x-2)}$,

$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{4x}{4(x+1)(x-2)}$,

$\frac{3}{8-4x}=\frac{-3(x+1)}{4(x+1)(x-2)}$.

(3)$a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$,$a^2+2a+1=(a+1)^2$,$3a+6=3(a+2)$,可知三个分式的最简公分母为$3(a+1)^2(a+2)$.

∴ $\frac{a}{a^2+3a+2}=\frac{a}{(a+1)(a+2)}$

$=\frac{3a(a+1)}{3(a+1)^2(a+2)}$,

$\frac{2}{a^2+2a+1}=\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{6(a+2)}{3(a+1)^2(a+2)}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$-\frac{1}{3a+6}=-\frac{1}{3(a+2)}=-\frac{(a+1)^2}{3(a+1)^2(a+2)}.$$

11. 解:(1)$\because$ $\frac{-x^2}{1-5x}$的值为负,

$\therefore$ $\begin{cases}-x^2<0,\\1-5x>0,\end{cases}$

$\therefore x<\frac{1}{5}$且$x\neq0$.

(2)当$\begin{cases}x+1>0,\\2x+4>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1<0,\\2x+4<0\end{cases}$时,分式$\frac{x+1}{2x+4}$的值为正.

解这两个不等式组,得$x>-1$或$x<-2$.

$\therefore$ 当$x>-1$或$x<-2$时,原分式的值为正.

点拨:(2)题中根据同号相除得正的法则易知,当分式的分子、分母的值同时为正或同时为负时,分式的值都为正,要考虑两种情况.

12. 解:设每个车间原有的成品数量为x,第一车间每天生产的产品数量为y,甲组检验员的人数为m,乙组检验员的人数为n.

因为甲组用了6天时间将第一、二、三车间所有成品同时检验完,所以甲组检验员的速度为$\frac{3x+3\times6y}{6m}$. 乙组先用2天时间将第四、五车间的所有成品同时检验完,此时乙组检验员的速度为$\frac{2x+2y+2\times\frac{3}{4}y}{2n}$.

又因为乙组再用了4天时间检验完第六车间的所有成品,此时乙组检验员的速度为$\frac{x+6\times\frac{8}{3}y}{4n}$.

因为每个检验员的检验速度一样,所以

$$\frac{3x+3\times6y}{6m}=\frac{2x+2y+2\times\frac{3}{4}y}{2n}=\frac{x+6\times\frac{8}{3}y}{4n}.$$

由$\frac{3x+3\times6y}{6m}=\frac{2x+2y+2\times\frac{3}{4}y}{2n}$,

得$\frac{m}{n}=\frac{2x+12y}{4x+7y}$.

由$\frac{2x+2y+2\times\frac{3}{4}y}{2n}=\frac{x+6\times\frac{8}{3}y}{4n}$,

得$4x+7y=x+16y$,即$x=3y$.

将$x=3y$代入$\frac{m}{n}=\frac{2x+12y}{4x+7y}$中,得$\frac{m}{n}=\frac{18}{19}$.

即甲、乙两组检验员的人数之比是18∶19.

13. 解:设$\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=m$,

则$\begin{cases}y+z=mx,①\\x+z=my,②\\x+y=mz,③\end{cases}$

由①+②+③,得$2x+2y+2z=m(x+y+z)$.

$\because x+y+z\neq0$,$\therefore m=2$,$\therefore \frac{x+y}{z}=2$,

$\therefore x+y=2z$,$\therefore$ 原式$=\frac{2z-z}{2z+z}=\frac{z}{3z}=\frac{1}{3}$.

15.2 分式的运算

15.2.1 分式的乘除

【两年模拟兵法】

1. A **2.** A **3.** C

4. $x\neq-2$且$x\neq-3$且$x\neq-4$

点拨:$\because \frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}=\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+4}{x+3}$,$\therefore$ 要使原式有意义,则必须$x+2\neq0$且$x+3\neq0$且$x+4\neq0$,因此$x\neq-2$且$x\neq-3$且$x\neq-4$. 分式的分母不能为0,同时含有除法运算时,除式不能为0.

5. $\frac{y-x}{x(x+y)}$

6. 解:(1)原式$=\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{5xm}{6yn}\cdot\frac{3n}{5xym}$

$=\frac{1}{2y^2}$.

(2)原式$=\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a-1}{(a+2)^2}\cdot(a+2)$

$=\frac{1}{(a+1)(a+2)}\cdot(a+2)=\frac{1}{a+1}$.

(3)原式$=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{(x+2)^2}$.

7. 解:(1)原式$=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b^3}{a^6}\right)\div\left(-\frac{1}{a^3b^3}\right)$

$=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{a^6}{b^3}\right)\cdot(-a^3b^3)$

$=\frac{a^5}{2b}\cdot(-a^3b^3)$

$=-\frac{a^8b^2}{2}$.

(2)原式$=\frac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}\cdot\frac{(n-m)^2}{m^2n^2}\cdot\frac{m}{m+n}$

$=\frac{m-n}{mn^2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)原式 $=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{x}{y^2(x-y)}$

$=\frac{x}{xy^2-y^3}$.

8. 解: 由题意可知甲工程队修 900 米所用时间为 $\frac{900}{a^2-4}$ 天,乙工程队修 600 米所用时间为 $\frac{600}{(a-2)^2}$ 天.

$\frac{900}{a^2-4}\div\frac{600}{(a-2)^2}=\frac{900}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a-2)^2}{600}=\frac{3(a-2)}{2(a+2)}=\frac{3a-6}{2a+4}$.

答: 甲工程队修 900 米所用时间是乙工程队修 600 米所用时间的 $\frac{3a-6}{2a+4}$.

9. 解: $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$,因此不管 x 取何值,这个式子的值都是 $\frac{1}{2}$.

点拨: 解答本题的关键是对原式化简,通过化简结果是否与 x 有关来说明是怎么回事就容易多了.

10. 解: 由 $a^2+b^2-4a+6b+13=0$,

得 $(a-2)^2+(b+3)^2=0$. 根据非负数的性质,可得 $a=2,b=-3$.

原式 $=\frac{(a-3)^2}{-(b+2)(b-2)}\cdot\frac{b+2}{-(a-3)}\cdot\frac{a^2}{3(a-3)}$

$=\frac{a^2}{3(b-2)}=\frac{a^2}{3b-6}$.

当 $a=2,b=-3$ 时,

原式 $=\frac{2^2}{3\times(-3)-6}=-\frac{4}{15}$.

11. 解: $\begin{cases}x+2<1,①\\2(x-1)>-6,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<-1$,

解不等式②,得 $x>-2$.

∴ 原不等式组的解集是 $-2<x<-1$.

∴ $x+1<0,x+2>0$.

∴ $\frac{x^2-1}{x^2+2x}\div\frac{x-1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x+1}{x+2}<0$,即该式的符号为负.

12. 解: (1)∵ $-\frac{x^5}{y^2}\div\frac{x^3}{y}=\frac{x^7}{y^3}\div\left(-\frac{x^5}{y^2}\right)=-\frac{x^9}{y^4}\div\frac{x^7}{y^3}=\cdots=-\frac{x^2}{y}$,

∴ 从第 2 个分式开始,用任意 1 个分式除以紧邻它的前面的那个分式的结果恒等于 $-\frac{x^2}{y}$.

(2)由已知的一列分式可知分式的分母的指数依次增加 1,分子的指数是分母指数的 2 倍加 1,并且分母的指数是偶数的分式带有“-”号,所以第 7 个分式应该是 $\frac{x^{15}}{y^7}$.

15.2.2 分式的加减

【两年模拟兵法】

1. A

2. B **点拨:** $\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}=\frac{2x}{(x+3)(x-3)}-\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-x-3}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+3}$.

3. A **点拨:** 原式 $=\left(\frac{a-2}{a-2}+\frac{4}{a-2}\right)\cdot\frac{a-2}{a}=\frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{a-2}{a}=\frac{a+2}{a}$. 故选 A. 分式混合运算,先算乘方,再算乘除,最后算加减,有括号的先算括号里面的. 当异分母分式相加减时,要先通分,转化为同分母分式相加减;而对于分式的除法运算,都是转化为乘法后再计算.

4. B **点拨:** $\frac{3-2x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-2x}{x-1}=\frac{2(1-x)}{x-1}=-2$.

5. B **点拨:** 原式 $=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot ab=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(b+a)(b-a)}\cdot ab=\frac{a^2b^2}{b-a}$. 故选 B.

6. D **点拨:** 原式 $=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$,

∵ $a+b+c=0$,

∴ $a+b=-c,a+c=-b,b+c=-a$,

∴ 原式 $=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-1-1-1=-3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

故选 D. 先对原式利用乘法的分配律展开,再把分母相同的式子相加,将条件按相加后的形式进行变形,代入化简即可求值. 本题运用了整体思想求值. 解题的关键是对条件和原式变形,使变形后的条件与变形后的式子产生直接联系,再利用整体代入的方法求值.

7. D **8.** D

9. 5 **点拨:** 先将条件等式两边同时乘$(m+n)$,再通过拆分得到结果. ∵ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$,两边同时乘$(m+n)$,得$\frac{m+n}{m}+\frac{m+n}{n}=7$,∴ $1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+1=7$,∴ $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=5$. 故答案为 5. 对于此类问题,往往需要对条件式进行变形,当待求式含有两个字母时,还要注意利用整体思想去求解.

10. 3 **点拨:** ∵ $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$,

∴ $\frac{1+b-(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$,

∴ $\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$,

∴ $(1+a)(1+b)=(b-a)^2$,

∴ $a^2+b^2=1+a+b+3ab$.

∴ $\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}=\frac{(1+b)^2+(1+a)^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{1+2b+b^2+1+2a+a^2}{1+a+b+ab}=\frac{3+3a+3b+3ab}{1+a+b+ab}=3$.

11. **解:** 原式 $=\frac{(a+2)(a-2)-(3a-4)}{a-2}\cdot\frac{a-2}{(a-3)^2}=\frac{a^2-3a}{a-2}\cdot\frac{a-2}{(a-3)^2}=\frac{a}{a-3}$.

12. **解:** $\frac{1}{1-x}\div\frac{x^2+2x}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{(x-1)^2}{x(x+2)}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1-x}{x(x+2)}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1-x+x}{x(x+2)}$

$=\frac{1}{x(x+2)}$.

解不等式 $5-2x\geqslant 1$,得 $x\leqslant 2$,

解不等式 $x+3>0$,得 $x>-3$,

∴ 不等式组的解集为 $-3<x\leqslant 2$,

∴ 不等式组的整数解为 $-2,-1,0,1,2$.

由$\frac{1}{1-x}\div\frac{x^2+2x}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x+2}$得$\begin{cases}x^2+2x\neq 0,\\1-x\neq 0,\end{cases}$

解得 $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$ 且 $x\neq 1$,

∴ $x=-1$ 或 2.

取 $x=2$,则原式 $=\frac{1}{2(2+2)}=\frac{1}{8}$.

点拨: x 的取值不唯一.

15.2.3 整数指数幂

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C

3. C **点拨:** $3x^2+4x^2=7x^2$,故 A 不正确,$2x^3\cdot 3x^3=6x^6$,故 B 不正确,$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{8}a^6b^3$,故 D 不正确.

4. B **点拨:** 本题综合考查各种整数指数幂的运算,由已知条件可得 $a=0.09$,$b=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}$,$c=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=9$,$d=1$. ∵ $-\frac{1}{9}<0.09<1<9$,

∴ $b<a<d<c$.

5. D **点拨:** 由条件可得 $x-3\neq 0$ 且 $3x-6\neq 0$ 且 $x\neq 0$,因此 $x\neq 3$ 且 $x\neq 2$ 且 $x\neq 0$,因此选 D. 零指数幂的底数不能为 0,负整数指数幂的底数不能为 0,分式的分母不能为 0.

6. 0.000 031 8

7. -5 **点拨:** 此类题目可利用逆向思维求解.

∵ $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$,∴ $x=-5$.

8. **解:** 原式 $=1-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$.

9. **解:** (1) 原式 $=x^ny^{-n}\div x^4y^{-2n}=x^{n-4}y^{-n+2n}=x^{n-4}y^n$;

(2) 原式 $=x^{-4}y^6\cdot x^2y^{-2}\div x^3y^{-6}=x^{-4+2-3}y^{6-2-(-6)}=x^{-5}y^{10}=\frac{y^{10}}{x^5}$.

10. **解:** $\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x+2}{x-1}$.

当 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+1=3+1=4$ 时,

原式 $=\frac{4+2}{4-1}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:负整数指数幂的运算按“底倒指反”的法则进行.

11. 解:①当 $x-2=0$ 且 $2x-1\neq 0$ 时,解得 $x=2$;

②当 $2x-1=1$ 时,解得 $x=1$;

③当 $2x-1=-1$ 且 $x-2$ 为偶数时,解得 $x=0$.

综上,整数 x 的值为 2 或 1 或 0.

点拨:本题运用分类讨论思想求解,注意考虑问题要全面. 本题分三种情况讨论:①指数为 0,底数不为 0;②底数为 1;③底数为 -1,指数为偶数.

15.3 分式方程

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C **4.** A

5. D **点拨**:由 $\frac{m}{x-2}-\frac{2x}{2-x}=\frac{m}{x-2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{2x+m}{x-2}=1$,可得 $x=-2-m$. ∵ 原分式方程出现增根时 $x=2$,∴ $-2-m=2$,∴ $m=-4$.

6. B

7. -8 **点拨**:本题可根据两分式的值相等列分式方程求解. 由题意,得 $\frac{4}{x-4}=\frac{3}{x-1}$,去分母,得 $4(x-1)=3(x-4)$,去括号,得 $4x-4=3x-12$,移项、合并同类项,得 $x=-8$. 经检验,$x=-8$ 是原分式方程的解. 本题运用了方程思想求值. 当题中出现值相等,和、差是多少等关键语句时,往往可以构造方程求解.

8. $\frac{5}{6}$ **点拨**:根据新定义把 $2\oplus(2x-1)$ 用含 x 的式子表示出来,列出方程后求解.

∵ $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,

∴ $2\oplus(2x-1)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}$,

故有 $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}=1$,

∴ $\frac{1}{2x-1}=\frac{3}{2}$,解之得 $x=\frac{5}{6}$.

经检验,$x=\frac{5}{6}$ 是原方程的解.

9. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$ **点拨**:观察已知的分式方程可知,分式方程中的左右两边都有两个分式,且分子都是 1;左边两个分式的分母依次小 1,右边第一个分式的分母比左边第二个分式的分母小 2,右边第二个分式的分母比右边第一个分式的分母小 1;左边第一个分式的分母与对应分式方程的解的和为 $x+2$,从而可得解为 $x=6$ 的分式方程的左边第一个分式的分母应为 $x-4$,因此对应的方程应为 $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$.

10. 解:(1)方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,得 $2(x-1)=x+1$,解这个一元一次方程,得 $x=3$,经检验,$x=3$ 是原分式方程的解,所以原分式方程的解是 $x=3$.

(2)去分母得 $(x-2)^2-16=(x+2)^2$,去括号得 $x^2-4x+4-16=x^2+4x+4$,解得 $x=-2$. 经检验,$x=-2$ 是增根,所以原分式方程无解.

11. 解:设科普类图书平均每本的价格为 x 元,则文学类图书平均每本的价格为 $(x-5)$ 元,由题意得 $\frac{12\,000}{x}=\frac{9\,000}{x-5}$,解得 $x=20$.

经检验,$x=20$ 是所列方程的解,且符合题意.

则 $x-5=15$.

答:学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格各是 20 元,15 元.

12. 解:(1)甲队每天修路的长度;甲队修路 400 米所用的时间或乙队修路 600 米所用的时间

(2)冰冰用的等量关系是:甲队修路 400 米所用的时间 = 乙队修路600米所用的时间;

庆庆用的等量关系是:乙队每天修路的长度 − 甲队每天修路的长度 = 20 米(选择一个即可).

(3)选冰冰的方程:$\frac{400}{x}=\frac{600}{x+20}$,

去分母,得 $400x+8\,000=600x$,

解得 $x=40$,

检验:当 $x=40$ 时,x 与 $x+20$ 均不为零,

∴ $x=40$ 是原方程的解.

答:甲队每天修路的长度为 40 米.

选庆庆的方程:$\frac{600}{y}-\frac{400}{y}=20$,

去分母,得 $600-400=20y$,

解得 $y=10$,

检验:当 $y=10$ 时,分母 y 不为 0,

∴ $y=10$ 是原方程的解,

∴ $\frac{400}{y}=40$.

答:甲队每天修路的长度为 40 米.

13. 解:由 $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$ 得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x(x-2)-(x-1)(x+1)=a$,

$\therefore x=\frac{1-a}{2}$.

∵ 原方程有增根时$x=-1$或$x=2$,

当$x=-1$时,$a=3$;

当$x=2$时,$a=-3$,

∴ 当$a\neq\pm3$时,$x=\frac{1-a}{2}$才是原方程的解.

又∵$x>0$,

∴$\frac{1-a}{2}>0$,解得$a<1$.

∴a的取值范围为$a<1$且$a\neq-3$.

点拨:在求分式方程中字母参数的取值范围时,通常是把分式方程去分母后求出整式方程的解,再列出不等式(组)求出字母参数的取值范围,同时要注意排除产生增根的字母参数的取值.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:显然$xy\neq0$. 将待求分式的分子、分母同时除以xy,得$\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}=\frac{-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+5}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-3}$

$=\frac{-3\times5+5}{5-3}=-5$.

2. 解:令$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq0)$,则$a=2k,b=3k$,$c=4k$,代入原式,得原式$=\frac{3\times2k-2\times3k+5\times4k}{2k+3k+4k}=\frac{20k}{9k}=\frac{20}{9}$.

3. 解:原式$=\left[\frac{6x+6}{(x+1)(x-1)}+\frac{4}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{x-1}{3x+2}$

$=\frac{6x+10}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{3x+2}$

$=\frac{6x+10}{(x+1)(3x+2)}$.

当$x=2$时,原式$=\frac{12+10}{24}=\frac{11}{12}$.

4. 解:∵$|x-2|+(2x-y-3)^2=0$,

∴$\begin{cases}x-2=0,\\2x-y-3=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

∴ 原式$=\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{2x-y}$

$=\frac{2x}{2x-y}$.

当$x=2,y=1$时,原式$=\frac{4}{3}$.

5. 解:原式$=\frac{x-1}{x+2}\div\frac{x-1}{x(x+2)}-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=x-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x^2}{x+1}$.

∵$x^2-x-1=0$,

∴$x^2=x+1$.

∴ 原式$=1$.

6. 解:原式$=\frac{(x-2)^2}{2x}\cdot\frac{x^2}{x(x-2)}+1$

$=\frac{x-2}{2}+1=\frac{x}{2}$.

当$x=1$时,原式$=\frac{1}{2}$.(注意:x不能取0和2)

7. 解:方程两边同乘$3(x+1)$,得$3x=2x+3(x+1)$,

解得$x=-\frac{3}{2}$.

检验:当$x=-\frac{3}{2}$时,$3(x+1)\neq0$,

∴$x=-\frac{3}{2}$是原方程的解.

8. 解:原方程可化为$\frac{x+2}{x-2}-\frac{16}{x^2-4}=1$.

方程两边同乘$(x+2)(x-2)$,

得$(x+2)^2-16=(x+2)(x-2)$.

整理,得$4x=8$,解得$x=2$.

检验:当$x=2$时,$(x+2)(x-2)=0$,

∴$x=2$是原方程的增根,∴ 原方程无解.

9. 解:两边分别通分后相减得:

$\frac{(x-5)-(x-4)}{(x-4)(x-5)}=\frac{(x-8)-(x-7)}{(x-7)(x-8)}$,

即$\frac{-1}{x^2-9x+20}=\frac{-1}{x^2-15x+56}$,

∴$x^2-9x+20=x^2-15x+56$,

解得$x=6$.

经检验,$x=6$是原分式方程的解.

10. 解:原方程去分母并整理得$(m-2)x=5+m$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

假设产生增根 $x=1$，则有 $m-2=m+5$，方程无解，

∴ 不存在 m 的值，使原方程产生增根 $x=1$；

假设产生增根 $x=-1$，则有 $2-m=5+m$，

解得 $m=-\frac{3}{2}$.

∴ 当 $m=-\frac{3}{2}$ 时，关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ 会产生增根.

11. 解：∵ $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$，

∴ $(x-1)(x+1)-(x+2+a)=(x-1)(x+2)$，

∴ $x^2-1-x-2-a=x^2+x-2$.

解得 $x=-\frac{a+1}{2}$.

∵ 方程的解小于 3 且 $x=-\frac{a+1}{2}$ 不能为增根，

∴ $-\frac{a+1}{2}<3$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq 1$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq -2$.

解得 $a>-7$ 且 $a\neq \pm 3$.

12. 解：设特快列车的平均速度为 x km/h，

根据题意可列出方程为 $\frac{1\,800}{x}=\frac{860}{2.5x}+16$，

解得 $x=91$.

检验：当 $x=91$ 时，$2.5x\neq 0$.

∴ $x=91$ 是方程的解，且符合题意.

答：特快列车的平均速度为 91 km/h.

13. 解：(1) 设购买 1 个 A 品牌足球需 x 元，

则购买 1 个 B 品牌足球需 $(x+30)$ 元，

根据题意得 $\frac{2\,500}{x}=\frac{2\,000}{x+30}\times 2$，解得 $x=50$.

经检验，$x=50$ 是原方程的解，且符合题意.

∴ $x+30=80$.

答：购买 1 个 A 品牌足球需 50 元，购买 1 个 B 品牌足球需 80 元.

(2) 设此次购买 a 个 B 品牌足球，则购买 A 品牌足球 $(50-a)$ 个，

根据题意得 $50\times(1+8\%)(50-a)+80\times 0.9a\leqslant 3\,260$，解得 $a\leqslant 31\frac{1}{9}$.

∵ a 取正整数，

∴ a 的最大值为 31.

答：华昌中学此次最多可购买 31 个 B 品牌足球.

【第十五章测试卷】

一、**1.** D **2.** D **3.** D **4.** B **5.** D **6.** A **7.** D **8.** D **9.** B **10.** C

二、**11.** -1 **12.** $-\frac{y^3}{8x^3}$ **13.** $x=\frac{2}{7}$ **14.** 1 **15.** $\frac{3}{2}$ **16.** 10

三、**17.** 解：原式 $=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{a-2}$

$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-1)}{a+1}$

$=\frac{2}{a+1}$.

18. 解：原式 $=\frac{x-1-1}{x-1}\div\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x+1}{x-2}$.

当 $x=3$ 时，原式 $=\frac{3+1}{3-2}=4$.

19. 解：(1) 方程两边乘 $(x+2)(x-2)$，

得 $3x(x-2)+2(x+2)=3(x+2)(x-2)$.

化简得 $-4x=-16$，解得 $x=4$.

经检验，$x=4$ 是原方程的解.

∴ 原方程的解是 $x=4$.

(2) 方程两边乘 $(x+1)(x-1)$，

得 $4-(x+1)(x+2)=-(x+1)(x-1)$.

解得 $x=\frac{1}{3}$.

经检验，$x=\frac{1}{3}$ 是原方程的解.

∴ 原方程的解是 $x=\frac{1}{3}$.

20. 解：原式 $=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\div\frac{x-3-1}{x-3}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-4)}$.

不等式 $2x-3<7$ 的解集为 $x<5$，其正整数解为 1，2，3，4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ x 不能取 3 和 4,

∴ 当 $x=1$ 时,原式 $=\frac{1}{4}$(或当 $x=2$ 时,原式 $=0$).

21. **解:**(1)设乙队单独做需要 m 天才能完成任务.

由题意得 $\frac{30}{m}+\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{m}\right)\times 20=1$,

解得 $m=100$.

经检验,$m=100$ 是原方程的解,且符合题意.

答:乙队单独做需要 100 天才能完成任务.

(2)由题意得 $\frac{x}{40}+\frac{y}{100}=1$,$x<15$,$y<70$,

且 x,y 为正整数,

则 $y=100-\frac{5}{2}x<70$,

则 $x>12$.

∴ $x=13$ 或 14.

当 $x=13$ 时,$y=100-\frac{5}{2}x$ 不是整数,应舍去;

当 $x=14$ 时,$y=100-\frac{5}{2}x=65$,符合条件.

∴ 甲队做了 14 天,乙队做了 65 天.

答:甲、乙两队实际各做了 14 天和 65 天.

22. **解:**(1)设第一批杨梅每件进价为 x 元.

则 $\frac{1\,200}{x}\times 2=\frac{2\,500}{x+5}$.

解得 $x=120$.

经检验,$x=120$ 是原分式方程的解.

答:第一批杨梅每件进价为 120 元.

(2)设剩余的杨梅每件售价打 y 折.

则 $\frac{2\,500}{125}\times 150\times 80\%+\frac{2\,500}{125}\times 150\times(1-80\%)\times 0.1y-2\,500\geqslant 320$.

解得 $y\geqslant 7$.

答:剩余的杨梅每件售价至少打 7 折.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第十一章 三角形

11.1 与三角形有关的线段

练习：

1. 解：图中有 5 个三角形，分别是 $\triangle ABE$，$\triangle ABC$，$\triangle BEC$，$\triangle BCD$，$\triangle CDE$.

点拨：按一定的顺序数，做到不重复、不遗漏.

2. 解：(1)不能组成三角形. 理由：$3+4<8$，不满足三角形的三边关系.

(2)不能组成三角形. 理由：$5+6=11$，不满足三角形的三边关系.

(3)能组成三角形. 理由：$5+6>10$，满足三角形的三边关系.

点拨：利用三角形的三边关系来判断三条线段能否组成三角形.

练习：

1. 解：(1)中的 $\angle B$ 是锐角，高 AD 在 $\triangle ABC$ 的内部；

(2)中的 $\angle B$ 是直角，高 AD 与边 AB 重合；

(3)中的 $\angle ABC$ 是钝角，高 AD 的垂足在 CB 的延长线上，即高 AD 在 $\triangle ABC$ 的外部.

规律：当 $\angle C$ 是锐角时，若 $\angle B$ 是锐角，则高 AD 在 $\triangle ABC$ 的内部；若 $\angle B$ 是直角，则高 AD 与边 AB 重合；若 $\angle ABC$ 是钝角，则高 AD 的垂足在 CB 的延长线上，即高 AD 在 $\triangle ABC$ 的外部.

2. (1)AF(或 BF)；CD；AC

(2)$\angle 2$；$\angle ABC$；$\angle 4$(或 $\angle ACF$)

点拨：本题考查了三角形的中线和角平分线的定义.

练习：

解：图形(1)(4)(6)具有稳定性.

点拨：易出现图形(3)具有稳定性的错误. 实际上它不具有稳定性，因为图形下面是四边形，而四边形不具有稳定性.

习题 11.1

1. 解：图中有 6 个三角形，分别是 $\triangle ABD$，$\triangle ABE$，$\triangle ABC$，$\triangle ADE$，$\triangle ADC$，$\triangle AEC$.

2. 解：有 2 种选法，所选三根木条的长度分别为 10，7，5 或 7，5，3. 理由：只有这两种情况满足三角形的三边关系“三角形两边的和大于第三边”.

点拨：要先列举出从四根木条中选出三根的四种情况：10，7，5；10，7，3；10，5，3；7，5，3，再分别判断它们能否组成三角形.

3. 略.

4. (1)CE；BC　(2)$\angle CAD$；$\angle BAC$

(3)$\angle AFC$　(4)$\frac{1}{2}BC\cdot AF$

点拨：利用三角形的中线、高和角平分线的定义来解答.

5. C　点拨：正方形、长方形和平行四边形都是四边形，不具有稳定性，只有直角三角形具有稳定性，故选 C.

6. 解：若腰长为 6 cm，则底边长为 $20-6\times 2=8$(cm)；若底边长为 6 cm，则腰长为 $(20-6)\times\frac{1}{2}=7$(cm).

故其他两边的长分别为 6 cm，8 cm 或 7 cm，7 cm.

点拨：长 6 cm 的边可能是腰，也可能是底.

7. 解：(1)若腰长为 5，则周长为 $5+5+6=16$；

若腰长为 6，则周长为 $6+6+5=17$.

(2)若腰长为 4，由于 $4+4<9$，不能组成三角形，因此腰长不能为 4；

若腰长为 9，则周长为 $9+9+4=22$.

8. 解：由三角形的面积公式，得 $\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot CE$，即 $BC\cdot AD=AB\cdot CE$. $\because AB=2$，$BC=4$，

$\therefore 4AD=2CE$，$\therefore AD:CE=1:2$.

点拨：利用三角形的面积公式列出等式，从而求出 AD 与 CE 的比.

9. 解：$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等.

$\because DE\parallel AC$，$\therefore \angle 1=\angle CAD$.

$\because DF\parallel AB$，$\therefore \angle 2=\angle BAD$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

点拨：本题综合运用了平行线的性质与角平分线的定义，注意推理的合理性.

10. 解：要使四边形木架不变形，至少要再钉上 1 根木条. 要使五边形木架不变形，至少要再钉上 2 根木条. 要使六边形木架不变形，至少要再钉上 3 根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

木条.

点拨:利用从特殊到一般的思想,可知要使 n ($n\geqslant 4$)边形木架不变形,至少要再钉上($n-3$)根木条.

11.2 与三角形有关的角

练习:

1. 解:在△ACD 中,∵ $\angle CAD=30°$,$\angle D=90°$,

∴ $\angle ACD=180°-90°-30°=60°$.

在△BCD 中,∵ $\angle CBD=45°$,$\angle D=90°$,

∴ $\angle BCD=180°-90°-45°=45°$.

∴ $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD=60°-45°=15°$.

答:从 C 处观测 A,B 两处的视角 $\angle ACB$ 是 15°.

点拨:利用了三角形内角和定理.

2. 解:$\angle C=180°\times 2-(40°+40°+150°)=130°$.

练习:

1. 解:$\angle ACD=\angle B$. 理由如下:

∵ $\angle ACB=90°$,

∴ $\angle ACD+\angle BCD=90°$.

∵ $CD\perp AB$,

∴ $\angle BCD+\angle B=90°$.

∴ $\angle ACD=\angle B$.

2. 解:△ADE 是直角三角形. 理由如下:

∵ $\angle C=90°$,

∴ $\angle A+\angle 2=90°$.

∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle A+\angle 1=90°$.

∴ $\angle ADE=180°-(\angle A+\angle 1)=90°$.

∴ △ADE 是直角三角形.

练习:

解:(1) $\angle 1=40°$,$\angle 2=140°$;

(2) $\angle 1=110°$,$\angle 2=70°$;

(3) $\angle 1=50°$,$\angle 2=140°$;

(4) $\angle 1=55°$,$\angle 2=70°$;

(5) $\angle 1=80°$,$\angle 2=40°$;

(6) $\angle 1=60°$,$\angle 2=30°$.

习题 11.2

1. 解:(1)由三角形内角和定理,得 $x+39+108=180$,解得 $x=33$.

(2)由三角形内角和定理,得 $x+x+x=180$,解得 $x=60$.

(3)由三角形内角和定理,得 $x+x+72=180$,解得 $x=54$.

(4)由三角形内角和定理,得 $x+(x+36)+(x-36)=180$,解得 $x=60$.

点拨:本题考查了三角形内角和定理的应用.

2. 解:(1)一个三角形最多有一个直角. 理由:如果一个三角形有两个或三个角是直角,那么三角形的内角和大于180°,这个结果与三角形内角和定理相矛盾,故一个三角形最多有一个直角.

(2)一个三角形最多有一个钝角. 理由:如果一个三角形有两个或三个角是钝角,那么三角形的内角和大于180°,这个结果与三角形内角和定理相矛盾,故一个三角形最多有一个钝角.

(3)直角三角形的外角不可以是锐角. 理由:如果有一个外角是锐角,那么与它相邻的内角是钝角,这时直角三角形的内角和大于180°,这个结果与三角形内角和定理相矛盾,故直角三角形的外角不可以是锐角.

点拨:解决这类问题,掌握三角形内角和定理是关键.

3. 解:把 $\angle B=\angle A+10°$ 代入 $\angle C=\angle B+10°$,

得 $\angle C=\angle A+10°+10°=\angle A+20°$.

∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

∴ $\angle A+(\angle A+10°)+(\angle A+20°)=180°$,

解得 $\angle A=50°$.

∴ $\angle B=60°$,$\angle C=70°$.

点拨:用含 $\angle A$ 的式子来表示 $\angle B$,$\angle C$,列出关于 $\angle A$ 的方程是解决本题的关键.

4. 解:由 $AD\perp BC$,可得 $\angle ADB=90°$,

∴ $\angle 1+\angle 2=180°-\angle ADB=180°-90°=90°$.

又∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle 2=45°$.

由 $\angle BAC+\angle 2+\angle C=180°$,

可得 $\angle BAC=180°-\angle 2-\angle C=180°-45°-65°=70°$.

点拨:本题利用三角形内角和定理来解答,要注意从图形中获取信息.

5. 解:由 $AB/\!/CD$,可得 $\angle 1=\angle A=40°$,

∴ $\angle 2=\angle 1+\angle D=40°+45°=85°$.

点拨:利用平行线的性质及三角形外角的性质去解题.

6. 解:∵ $AB/\!/CD$,$\angle A=45°$,

∴ $\angle DOE=45°$.

∴ $\angle C+\angle E=45°$.

∵ $\angle C=\angle E$,

∴ $\angle C=22.5°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:由题意知 $\angle BAC = 45° + 15° = 60°$, $\angle ABC = 80° - 45° = 35°$.

由三角形内角和定理,得 $\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 60° - 35° = 85°$.

8. 解: $\angle BDC = \angle A + \angle ACD = 62° + 35° = 97°$, $\angle BFD = 180° - \angle BDF - \angle ABE = 180° - 97° - 20° = 63°$.

点拨:本题考查了三角形内角和定理及外角的性质.

9. 解:由三角形内角和定理,

得 $100° + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$.

$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore 100° + 2(\angle 2 + \angle 4) = 180°$.

$\therefore \angle 2 + \angle 4 = 40°$.

由三角形内角和定理,得 $\angle 2 + \angle 4 + x° = 180°$,

$\therefore x° = 140°$,即 $x = 140$.

10. 180°;90°;90°　**点拨**:本题考查了平行线的性质和三角形内角和定理.

11. 证明:$\because \angle BAC$ 是 $\triangle ACE$ 的外角,

$\therefore \angle BAC = \angle E + \angle ECA$.

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ECA = \angle ECD$.

$\therefore \angle BAC = \angle E + \angle ECD$.

$\because \angle ECD$ 是 $\triangle BCE$ 的外角,

$\therefore \angle ECD = \angle B + \angle E$.

$\therefore \angle BAC = \angle E + \angle B + \angle E = \angle B + 2\angle E$.

点拨:利用三角形外角的性质和角平分线的定义来证明.

11.3 多边形及其内角和

练习:

1. 略.

2. 解:两个三角形;两条对角线;将五边形分成三个三角形.

点拨:同学们可以通过画图自己验证一下.

练习:

1. 解:(1)由多边形内角和公式,得 $x + x + 140 + 90 = (4 - 2) \times 180$,解得 $x = 65$.

(2)由多边形内角和公式,得 $90 + 120 + 150 + 2x + x = (5 - 2) \times 180$,解得 $x = 60$.

(3)由多边形内角和公式,得 $75 + 120 + 80 + (180 - x) = (4 - 2) \times 180$,解得 $x = 95$.

点拨:掌握多边形内角和公式是解决此类问题的关键.

2. 解:设这个多边形的边数为 n,则 $(n - 2) \times 180° = n \times 120°$,解得 $n = 6$. 故它是六边形.

点拨:注意 n 边形有 n 个内角.

3. 解:设这个多边形的边数为 n,则 $(n - 2) \times 180° = 360°$,解得 $n = 4$. 故它是四边形.

点拨:根据多边形内角和公式和外角和定理列出方程是解决本题的关键.

习题 11.3

1. 略.

2. 解:(1) $4x + 60 = (5 - 2) \times 180$,解得 $x = 120$.

(2) $3x + 3x + 4x + 2x = (4 - 2) \times 180$,

解得 $x = 30$.

(3)$\because AB // CD, \therefore \angle B = 180° - \angle C = 180° - 60° = 120°$. 由多边形内角和公式,得 $150 + 60 + 120 + 135 + x = (5 - 2) \times 180$,解得 $x = 75$.

点拨:根据多边形内角和公式列出关于 x 的方程,解方程求 x 的值.

3. 解:填表如下:

多边形的边数	3	4	5	6	8	12
内角和	180°	360°	540°	720°	1 080°	1 800°
外角和	360°	360°	360°	360°	360°	360°

点拨:多边形的边数每增加 1,内角和增加 180°.

4. 解:正五边形的内角和为 $(5 - 2) \times 180° = 540°$,

正五边形的每个内角都是 $540° \div 5 = 108°$.

正十边形的内角和为 $(10 - 2) \times 180° = 1\,440°$,

正十边形的每个内角都是 $1\,440° \div 10 = 144°$.

5. 解:设这个多边形的边数为 n,则 $(n - 2) \times 180° = 1\,260°$,解得 $n = 9$. 故它是九边形.

点拨:解决此类问题关键是要记住 n 边形内角和公式.

6. 解:(1)设这个多边形的边数为 n,由题意知 $(n - 2) \times 180° = \frac{1}{2} \times 360°$,解得 $n = 3$. 故它是三角形.

(2)设这个多边形的边数为 n,由题意知 $(n - 2) \times 180° = 2 \times 360°$,解得 $n = 6$. 故它是六边形.

点拨:设多边形的边数为 n,列出关于 n 的方程,解方程求出 n 的值.

7. 解:$AB // CD, BC // AD$.

理由:$\because \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle A+\angle D=\frac{1}{2}\times 360°=180°$, $\angle A+\angle B=\frac{1}{2}\times 360°=180°$.

$\therefore AB/\!/CD, BC/\!/AD$.

点拨:本题利用了四边形的内角和等于360°这个结论.

8. 解:(1)CO是$\triangle BCD$的高.

理由:由$BC\perp CD$,得$\angle BCD=90°$,

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$.

$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=45°$.

又$\because \angle 1=\angle 2=\angle 3$,$\therefore \angle 3=45°$.

在$\triangle CDO$中,$\angle COD=180°-\angle 1-\angle 3=90°$,

即$CO\perp BD$,$\therefore CO$是$\triangle BCD$的高.

(2)$\because \angle COD=90°$,$\angle 4=60°$,

$\therefore \angle 5=90°-\angle 4=90°-60°=30°$.

(3)$\angle BCD=90°$,$\angle ADC=\angle 1+\angle 4=45°+60°=105°$. 由(2)知$\angle 5=30°$,$\because \angle 5=\angle 6$,

$\therefore \angle DAB=\angle 5+\angle 6=30°+30°=60°$.

在$\triangle ABD$中,$\angle ABD=180°-60°-60°=60°$,

$\therefore \angle ABC=\angle ABD+\angle 2=60°+45°=105°$.

9. 解:五边形的内角和为$(5-2)\times 180°=540°$,

由五边形$ABCDE$的内角都相等,

得$\angle CDE=\angle E=\angle C=\frac{540°}{5}=108°$.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle E=180°$,$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=36°$.

同理,$\angle 3=\angle 4=36°$.

$\therefore \angle ADB=\angle CDE-\angle 1-\angle 3=108°-36°-36°=36°$.

$\therefore x=36$.

点拨:由五边形的内角和公式及已知条件求出五边形$ABCDE$的每一个内角,再由角的关系求出x的值.

10. 解:$AB/\!/DE$,$BC/\!/EF$.

由题意得六边形$ABCDEF$的每一个内角都为$\frac{(6-2)\times 180°}{6}=120°$,

$\therefore \angle FAD=\angle FAB-\angle DAB=120°-60°=60°$.

在四边形$AFED$中,$\angle EDA=360°-(\angle F+\angle E+\angle FAD)=360°-(120°+120°+60°)=60°$,

$\therefore \angle EDA=\angle DAB=60°$.

$\therefore AB/\!/DE$.

$\because \angle DAB+\angle B=180°$,

$\therefore AD/\!/BC$.

同理可得$AD/\!/EF$,

$\therefore BC/\!/EF$(平行于同一条直线的两条直线平行).

复习题11

1. 解:$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AE$,

$\therefore BD=\frac{2S_{\triangle ABD}}{AE}=\frac{2\times 1.5}{2}=1.5(\text{cm})$.

$\because AD$是边BC上的中线,

$\therefore DC=BD=1.5$ cm.

$\therefore BC=BD+DC=1.5+1.5=3(\text{cm})$.

2. 解:(1)$x+90+50=180$,解得$x=40$.

(2)$x+x+40=180$,解得$x=70$.

(3)$x+70=x+x+10$,解得$x=60$.

(4)$x+x+10+60+90=360$,解得$x=100$.

(5)$70+x+20+x+x-10+x=(5-2)\times 180$,

解得$x=115$.

3. 解:填表如下:

多边形的边数	7	17	20	25
内角和	$5\times 180°$	$15\times 180°$	$18\times 180°$	$23\times 180°$
外角和	360°	360°	360°	360°

4. 解:从八边形的一个顶点出发,可以作5条对角线,它们将八边形分成6个三角形,这些三角形的内角和与八边形的内角和相等.

点拨:过$n(n\geqslant 4)$边形的一个顶点可以引$(n-3)$条对角线,它们把n边形分成$(n-2)$个三角形.

5. 解:设这个多边形的边数为n,

由题意得$(n-2)\times 180°=360°+540°$.

解这个方程,得$n=7$.

$\because$这个多边形的各内角都相等,

$\therefore$这个多边形的每个内角等于$\left(\frac{900}{7}\right)^{\circ}$.

点拨:依据n边形内角和公式列出方程求得n的值是关键.

6. 证明:由三角形内角和定理,得$\angle A+\angle 1+42°=180°$. 又$\because \angle A+10°=\angle 1$,

$\therefore \angle A+(\angle A+10°)+42°=180°$,解得$\angle A=64°$.

又$\because \angle ACD=64°$,

$\therefore \angle A=\angle ACD$.

$\therefore AB/\!/CD$(内错角相等,两直线平行).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

7. 解:由三角形内角和定理,得$\angle A+\angle ABC+\angle C=180°$. $\because \angle C=\angle ABC=2\angle A$,

$\therefore \angle A+2\angle A+2\angle A=180°$,解得$\angle A=36°$.

$\therefore \angle C=2\times36°=72°$.

又$\because BD$是边AC上的高,$\therefore \angle BDC=90°$.

$\therefore$由三角形内角和定理,得$\angle DBC=180°-90°-72°=18°$.

点拨:根据已知的三个角的关系及三角形内角和定理,列出关于$\angle A$的方程求出$\angle A$,从而求出$\angle C$,然后在Rt$\triangle BCD$中求出$\angle DBC$.

8. 解:$\because$在$\triangle ABC$中,AD是高,

$\therefore \angle ADC=90°$.

又$\because \angle C=70°$,

$\therefore \angle DAC=90°-70°=20°$.

$\because AE,BF$是角平分线,

$\therefore \angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAC,\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore \angle BOA=180°-(\angle BAO+\angle ABO)=180°-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}\times(180°-\angle C)=180°-\frac{1}{2}\times(180°-70°)=125°$.

9. $BD;PC;BD+PC;BP+PC$

10. 解:$\because$五边形$ABCDE$的内角和为$(5-2)\times180°=540°$且内角都相等,$\therefore \angle B=\angle C=\frac{540°}{5}=108°$. 由四边形内角和为360°,得$\angle B+\angle C+\angle CDF+\angle BFD=360°$.

$\because DF\perp AB,\therefore \angle BFD=90°$.

$\therefore \angle CDF=360°-\angle B-\angle C-\angle BFD=360°-108°-108°-90°=54°$.

11. 证明:(1)$\because BE,CF$分别是$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线,$\therefore \angle GBC=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle GCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\because \angle BGC+\angle GBC+\angle GCB=180°$,

$\therefore \angle BGC=180°-(\angle GBC+\angle GCB)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$.

(2)$\because \angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A$,

$\therefore \angle BGC=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

12. 证明:$\because$四边形$ABCD$的内角和为360°,$\angle A=\angle C=90°$,

$\therefore \angle ABC+\angle ADC=180°$.

$\because BE$平分$\angle ABC,DF$平分$\angle ADC$,

$\therefore \angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle CDF=\frac{1}{2}\angle ADC$.

$\therefore \angle CBE+\angle CDF=90°$.

$\because \angle C=90°,\therefore \angle CDF+\angle CFD=90°$.

$\therefore \angle CBE=\angle CFD.\therefore BE/\!/DF$.

第十二章 全等三角形

12.1 全等三角形

练习:

1. 解:在教材图12.1-2(2)中,AB和DB,BC和BC,AC和DC是对应边;$\angle A$和$\angle D$,$\angle ABC$和$\angle DBC$,$\angle ACB$和$\angle DCB$是对应角.

在教材图12.1-2(3)中,AB和AD,BC和DE,AC和AE是对应边;$\angle BAC$和$\angle DAE$,$\angle B$和$\angle D$,$\angle C$和$\angle E$是对应角.

点拨:按照对应顶点找对应边和对应角.

2. 解:相等的边:$AC=DB,OA=OD,OC=OB$;相等的角:$\angle A=\angle D,\angle C=\angle B,\angle AOC=\angle DOB$.

点拨:根据全等三角形的对应边相等,对应角相等解题.

习题12.1

1. 解:AC和CA是对应边;$\angle B$和$\angle D$,$\angle BAC$和$\angle DCA$,$\angle BCA$和$\angle DAC$是对应角.

2. 解:AN和AM,BN和CM是对应边;$\angle BAN$和$\angle CAM$,$\angle ANB$和$\angle AMC$是对应角.

点拨:本题考查学生在较复杂的图形中,通过观察图形得到对应边和对应角的能力.

3. 解:由题图可知,$\angle 1$在左边三角形中的对应角是边b和c的夹角,所以$\angle 1=180°-54°-60°=66°$.

4. 解:(1)对应边:EF和NM,FG和MH,EG和NH;其他对应角:$\angle E$和$\angle N$,$\angle FGE$和$\angle MHN$.

(2)$\because \triangle EFG\cong\triangle NMH$,

$\therefore EF=NM=2.1$ cm,$EG=NH=3.3$ cm.

$\therefore HG=EG-EH=3.3-1.1=2.2$(cm).

$\therefore$线段NM的长度是2.1 cm,线段HG的长度是2.2 cm.

5. 解:$\angle ACD$和$\angle BCE$相等.

理由:$\because \triangle ABC\cong\triangle DEC$,

$\therefore \angle ACB=\angle DCE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle ACB=\angle ACE+\angle BCE$,

$\angle DCE=\angle ACD+\angle ACE$,

∴ $\angle ACD=\angle BCE$.

点拨:利用三角形全等得到对应角相等.

6. 解:(1)对应边:AE 和 AD,AC 和 AB,EC 和 DB;对应角:$\angle A$ 和 $\angle A$,$\angle AEC$ 和 $\angle ADB$,$\angle ACE$ 和 $\angle ABD$.

(2)∵ $\triangle AEC\cong\triangle ADB$,

∴ $\angle ACE=\angle ABD$.

又∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle ACE+\angle 2=\angle ABD+\angle 1$,

即 $\angle ACB=\angle ABC$.

∴ $\angle ABC=\frac{1}{2}\times(180°-\angle A)=65°$.

∴ $\angle 1=\angle ABC-\angle ABD=65°-39°=26°$.

12.2 三角形全等的判定

练习:

1. 证明:∵ C 是 AB 的中点,

∴ $AC=CB$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中,$\begin{cases}AC=CB,\\AD=CE,\\CD=BE,\end{cases}$

∴ $\triangle ACD\cong\triangle CBE$(SSS).

2. 解:在 $\triangle OMC$ 和 $\triangle ONC$ 中,

$\begin{cases}OM=ON,\\OC=OC(\text{公共边}),\\MC=NC,\end{cases}$

∴ $\triangle OMC\cong\triangle ONC$(SSS).

∴ $\angle MOC=\angle NOC$,

即射线 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线.

点拨:本题是全等知识在生活中的应用,说明数学知识与我们的生活联系密切.

练习:

1. 解:相等. 理由如下:

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle CAB$ 中,

$\begin{cases}AB=AB(\text{公共边}),\\\angle BAD=\angle BAC=90°,\\AD=AC,\end{cases}$

∴ $\triangle DAB\cong\triangle CAB$(SAS).

∴ $DB=CB$. ∴ C,D 到 B 的距离相等.

2. 证明:∵ $BE=CF$,

∴ $BE+EF=CF+EF$,即 $BF=CE$.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DCE$ 中,$\begin{cases}AB=DC,\\\angle B=\angle C,\\BF=CE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABF\cong\triangle DCE$(SAS).

∴ $\angle A=\angle D$(全等三角形的对应角相等).

点拨:证明线段相等或角相等,往往先证明它们所在的两个三角形全等,再由全等三角形的性质得到.

练习:

1. 证明:∵ $AB\perp BC$,$AD\perp DC$,

∴ $\angle B=\angle D=90°$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\\angle 1=\angle 2,\\AC=AC(\text{公共边}),\end{cases}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$(AAS).

∴ $AB=AD$(全等三角形的对应边相等).

点拨:先证明三角形全等,再利用全等三角形的性质证明两条线段相等.

2. 解:∵ A,C,E 在一条直线上,

∴ $\angle ACB=\angle ECD$.

又∵ $AB\perp BF$,$DE\perp BF$,

∴ $\angle ABC=\angle EDC=90°$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$\begin{cases}\angle ABC=\angle EDC,\\BC=DC,\\\angle ACB=\angle ECD,\end{cases}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle EDC$(ASA).

∴ $AB=ED$(全等三角形的对应边相等),

即 DE 的长就是 AB 的长.

练习:

1. 解:相等.

理由:∵ C 是 AB 的中点,

∴ $AC=BC$.

∵ 两人从 C 同时出发,以相同的速度分别沿两条直线行走,并同时到达 D,E 两地,

∴ $CD=CE$.

∵ $DA\perp AB$,$EB\perp AB$,

∴ $\angle A=\angle B=90°$.

在Rt$\triangle ACD$ 和Rt$\triangle BCE$ 中,

$\begin{cases}CD=CE,\\AC=BC,\end{cases}$

∴ Rt$\triangle ACD\cong$Rt$\triangle BCE$(HL).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AD=BE$(全等三角形的对应边相等),

即 D,E 到路段 AB 的距离相等.

2. 证明: $\because AE\perp BC,DF\perp BC$,

$\therefore \angle AEB=\angle DFC=90°$.

$\because BF=CE$,

$\therefore BF-EF=CE-EF$,

即 $BE=CF$.

在Rt$\triangle ABE$和 Rt$\triangle DCF$ 中,$\begin{cases}AB=DC,\\BE=CF,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle DCF$(HL).

$\therefore AE=DF$(全等三角形的对应边相等).

习题 12.2

1. 解: 全等. 理由:在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 中,

$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$(SSS).

2. 证明: 在$\triangle ABE$ 和$\triangle ACD$ 中,

$\begin{cases}AB=AC,\\\angle A=\angle A(\text{公共角}),\\AE=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$(SAS).

$\therefore \angle B=\angle C$(全等三角形的对应角相等).

3. 解: 连接 $A'B'$,要测量工件内槽宽 AB,只要测量 $A'B'$的长度. 理由如下:

在$\triangle AOB$ 和$\triangle A'OB'$中,

$\begin{cases}AO=A'O,\\\angle AOB=\angle A'OB',\\BO=B'O,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle A'OB'$(SAS).

$\therefore AB=A'B'$.

点拨: 在实际生活中,常利用三角形全等的原理,把不能直接测量的物体“移”到可以直接测量的位置来测量.

4. 证明: $\because \angle 3=\angle 4,\angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 1+\angle D$,

$\angle 4=\angle 2+\angle C,\therefore \angle D=\angle C$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$ 中,

$\begin{cases}\angle C=\angle D,\\\angle 2=\angle 1,\\AB=AB(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ABD$(AAS).

$\therefore AC=AD$.

点拨: 利用$\angle 3$,$\angle 4$ 是三角形的外角,证明$\angle D=\angle C$,再证三角形全等.

5. 证明: 在$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 中,

$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\\angle 1=\angle 2,\\AC=CA,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CDA$(AAS).

$\therefore AB=CD$.

6. 解: 相等. 理由:$\because AD\perp BC,BE\perp AC$,

$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90°$.

在$\triangle CDA$ 和$\triangle CEB$ 中,$\begin{cases}\angle ADC=\angle BEC,\\\angle C=\angle C(\text{公共角}),\\CA=CB,\end{cases}$

$\therefore \triangle CDA\cong\triangle CEB$(AAS).

$\therefore AD=BE$,即 A 地到路段 BC 的距离 AD 与 B 地到路段 AC 的距离 BE 相等.

点拨: 先证$\triangle CDA\cong\triangle CEB$,再由全等三角形的性质可得 $AD=BE$.

7. 证明: (1)$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的高,

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$.

在 Rt$\triangle ADB$ 和 Rt$\triangle ADC$ 中,

$\begin{cases}AB=AC,\\AD=AD(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ADB\cong$Rt$\triangle ADC$(HL).

$\therefore BD=CD$.

(2)由(1)知 Rt$\triangle ADB\cong$Rt$\triangle ADC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

点拨: 需证明$\triangle ADB\cong\triangle ADC$,再由全等三角形的性质可使问题得证.

8. 证明: $\because AC\perp CB,DB\perp CB$,

$\therefore \angle ACB=\angle DBC=90°$.

在 Rt$\triangle ACB$ 和Rt$\triangle DBC$中,

$\begin{cases}AB=DC,\\CB=BC(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ACB\cong$Rt$\triangle DBC$(HL).

$\therefore \angle ABC=\angle DCB$.

$\therefore \angle DBC-\angle ABC=\angle ACB-\angle DCB$,

即$\angle ABD=\angle ACD$.

9. 证明: $\because BE=CF$,

$\therefore BE+EC=EC+CF$,即 $BC=EF$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中,$\begin{cases}AB=DE,\\AC=DF,\\BC=EF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$(SSS).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ ∠A = ∠D(全等三角形的对应角相等).

点拨:先证△ABC≌△DEF,再利用全等三角形的性质可得∠A = ∠D.

10. 证明:在△AOB 和△COD 中,

$$\begin{cases} AO = CO, \\ \angle AOB = \angle COD, \\ BO = DO, \end{cases}$$

∴ △AOB≌△COD(SAS).

∴ ∠C = ∠A(全等三角形的对应角相等).

∴ DC∥AB(内错角相等,两直线平行).

点拨:先证△AOB≌△COD,得出对应角相等,再利用内错角相等,证明两直线平行.

11. 证明:∵ AB∥ED,AC∥FD,

∴ ∠B = ∠E,∠ACB = ∠DFE.

∵ BF = CE,

∴ BF + FC = FC + CE,即 BC = EF.

在△ABC 和△DEF 中,$\begin{cases} \angle B = \angle E, \\ BC = EF, \\ \angle ACB = \angle DFE, \end{cases}$

∴ △ABC≌△DEF(ASA).

∴ AB = DE,AC = DF.

点拨:先利用平行线的性质证明两组角分别相等,再由全等三角形的判定定理证明两三角形全等,然后由全等三角形的性质得到两组对应边分别相等.

12. 解:AE = CE. 证明如下:

∵ FC∥AB,

∴ ∠CFE = ∠ADE.

在△AED 和△CEF 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CFE, \\ DE = FE, \\ \angle AED = \angle CEF, \end{cases}$$

∴ △AED≌△CEF(ASA).

∴ AE = CE.

点拨:先利用平行线的性质证明两角相等,再由全等三角形的判定定理证明两三角形全等,然后根据全等三角形的性质可得 AE = CE.

13. 解:△ABD≌△ACD,

△ABE≌△ACE,

△BDE≌△CDE.

证明:在△ABD 和△ACD 中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ BD = CD, \\ AD = AD(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △ABD≌△ACD(SSS).

由△ABD≌△ACD 可得∠BAD = ∠CAD,

∠ADB = ∠ADC.

在△ABE 和△ACE 中,$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAE = \angle CAE, \\ AE = AE, \end{cases}$

∴ △ABE≌△ACE(SAS).

在△BDE 和△CDE 中,

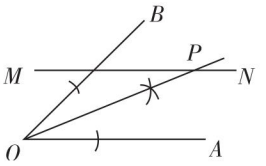
$$\begin{cases} BD = CD, \\ \angle BDE = \angle CDE, \\ DE = DE(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △BDE≌△CDE(SAS).

12.3 角的平分线的性质

练习:

1. 解:如图,作∠AOB 的平分线,与直线 MN 交于点 P,点 P 即为所求作的点.



(第 1 题)

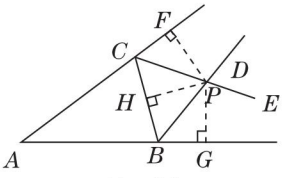
2. 证明:如图,过点 P 分别作 PF,PG,PH 垂直于直线 AC,AB,BC,垂足分别为点 F,G,H.

∵ BD 是△ABC 的∠ABC 的外角的平分线,点 P 在 BD 上,

∴ PG = PH(角的平分线上的点到角的两边的距离相等).

同理 PF = PH,∴ PG = PH = PF,

即点 P 到三边 AB,BC,CA 所在直线的距离相等.



(第 2 题)

习题 12.3

1. 解:∵ PM⊥OA 于点 M,PN⊥OB 于点 N,

∴ ∠PMO = ∠PNO = 90°.

在 Rt△OPM 和 Rt△OPN 中,$\begin{cases} OP = OP, \\ OM = ON, \end{cases}$

∴ Rt△OPM≌Rt△OPN(HL).

∴ ∠MOP = ∠NOP,即 OP 平分∠AOB.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:通过证明三角形全等,得出$\angle MOP=\angle NOP$.题中所给方法是作角平分线的又一种方法.

2. 证明:$\because AD$平分$\angle BAC$,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

$\therefore DE=DF$.

在Rt$\triangle BDE$和Rt$\triangle CDF$中,$\begin{cases}BD=CD,\\DE=DF,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BDE\cong$Rt$\triangle CDF$(HL).

$\therefore EB=FC$.

点拨:注意尽量不要先证明$\triangle AED\cong\triangle AFD$,应用角的平分线的性质最简便.

3. 证明:$\because CD\perp AB$,$BE\perp AC$,

$\therefore \angle BDO=\angle CEO=90°$.

在$\triangle BDO$和$\triangle CEO$中,$\begin{cases}\angle BDO=\angle CEO,\\\angle BOD=\angle COE,\\OB=OC,\end{cases}$

$\therefore \triangle BDO\cong\triangle CEO$(AAS). $\therefore OD=OE$.

又$\because OD\perp AB$,$OE\perp AC$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

点拨:先证$\triangle BDO\cong\triangle CEO$,由全等三角形的性质得到$OD=OE$,再由$OD\perp AB$,$OE\perp AC$及角的平分线的判定定理可得$\angle 1=\angle 2$.

4. 证明:$\because AD$平分$\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\because PE/\!/AB$,$PF/\!/AC$,

$\therefore \angle EPD=\angle BAD$,$\angle FPD=\angle CAD$.

$\therefore \angle EPD=\angle FPD$. $\therefore PD$平分$\angle EPF$.

$\therefore$点D到PE和PF的距离相等.

点拨:本题考查平行线的性质和角的平分线的性质.

5. 证明:$\because OP$平分$\angle AOB$,$PD\perp OA$,$PE\perp OB$,

$\therefore PD=PE$,$\angle AOC=\angle BOC$,

$\angle ODP=\angle OEP=90°$.

$\therefore \angle FPD=90°+\angle AOC$,$\angle FPE=90°+\angle BOC$.

$\therefore \angle FPD=\angle FPE$. 在$\triangle DPF$和$\triangle EPF$中,

$\begin{cases}PD=PE,\\\angle FPD=\angle FPE,\\PF=PF(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore \triangle DPF\cong\triangle EPF$(SAS).

$\therefore DF=EF$.

点拨:先证明$PD=PE$,再证明$\angle FPD=\angle FPE$,然后证明$\triangle DPF\cong\triangle EPF$,根据全等三角形的性质可得$DF=EF$.

6. 解:AD与EF垂直.

证明如下:$\because AD$平分$\angle BAC$,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

$\therefore \angle EAG=\angle FAG$,$\angle AED=\angle AFD=90°$.

易得$\triangle AED\cong\triangle AFD$,$\therefore AE=AF$.

在$\triangle AEG$和$\triangle AFG$中,

$\begin{cases}AE=AF,\\\angle EAG=\angle FAG,\\AG=AG(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore \triangle AEG\cong\triangle AFG$(SAS).

$\therefore \angle AGE=\angle AGF$.

又$\because \angle AGE+\angle AGF=180°$,

$\therefore \angle AGE=90°$,即$AD\perp EF$.

7. 证明:过点E作$EF\perp AD$,垂足为F.

$\because DE$平分$\angle ADC$,$\angle C=90°$,

$\therefore EC=EF$.

$\because E$是BC的中点,$\therefore EC=EB$. $\therefore EF=EB$.

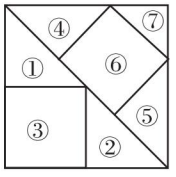
又$\because \angle B=90°$,

$\therefore AE$是$\angle DAB$的平分线.

点拨:熟悉角平分线的性质和"角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上"是证明本题的关键,另外,本题还可以利用三角形全等进行证明.

复习题 12

1. 解:如图,①和②,④和⑤,①+②+③和④+⑤+⑥+⑦分别全等.



(第1题)

点拨:根据全等三角形的概念判断.

2. 解:(1)有. $\triangle ABD$和$\triangle CDB$全等.

(2)有. 如$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle AFD}$,$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle DBF}$,$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DFE}$等.

点拨:同底等高的三角形面积相等.

3. 证明:$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1+\angle ACE=\angle 2+\angle ACE$.

$\therefore \angle BCA=\angle ECD$.

在$\triangle ACB$和$\triangle DCE$中,

$\begin{cases}CA=CD,\\\angle BCA=\angle ECD,\\BC=EC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ACB\cong\triangle DCE$(SAS).

$\therefore AB=DE$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:利用相等的角加上同一个角仍相等可得$\angle BCA=\angle ECD$,再证明$\triangle ACB\cong\triangle DCE$,然后由全等三角形的性质可得$AB=DE$.

4. 解:由题意知$\angle CAB=\angle DBA=90°$,$\angle CAD=\angle CBD$,$\therefore\angle CBA=\angle DAB$.

在$\triangle CAB$和$\triangle DBA$中,$\begin{cases}\angle CBA=\angle DAB,\\ AB=BA(\text{公共边}),\\ \angle CAB=\angle DBA,\end{cases}$

$\therefore\triangle CAB\cong\triangle DBA(\text{ASA})$.

$\therefore CA=DB$.

$\therefore$海岛C,D到观测点A,B所在海岸的距离CA,DB相等.

点拨:将实际问题转化为数学问题来解决.

5. 证明:$\because DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

$\therefore\angle BED=\angle CFD=90°$.

$\because D$是BC的中点,

$\therefore BD=CD$.

在$\text{Rt}\triangle BED$和$\text{Rt}\triangle CFD$中,$\begin{cases}BD=CD,\\ BE=CF,\end{cases}$

$\therefore\text{Rt}\triangle BED\cong\text{Rt}\triangle CFD(\text{HL})$.

$\therefore DE=DF$.

$\therefore AD$是$\triangle ABC$的角平分线(角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上).

点拨:先证$\triangle BED\cong\triangle CFD$,再利用角的平分线的判定方法即可证明$AD$是$\triangle ABC$的角平分线.

6. 解:应建在三角形平地三条内角平分线的交点处.

点拨:$\because$题中已经确定在三角形平地上修建度假村,

$\therefore$不考虑三角形外角平分线的交点的情况.

7. 解:相等.$\because AC/\!/BD$,

$\therefore\angle A=\angle B$.

$\because DF\perp AB$,$CE\perp AB$,$\therefore\angle CEA=\angle DFB=90°$.

由题意可知$AC=BD$,

在$\triangle CAE$和$\triangle DBF$中,$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ \angle CEA=\angle DFB,\\ AC=BD,\end{cases}$

$\therefore\triangle CAE\cong\triangle DBF(\text{AAS})$.

$\therefore CE=DF$,即C,D两地到路段AB的距离相等.

点拨:把已知条件转化为相等的线段、相等的角,证明$\triangle CAE\cong\triangle DBF$.

8. 证明:$\because BE=CF$,

$\therefore BE+EC=CF+EC$,即$BC=EF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,$\begin{cases}AB=DE,\\ BC=EF,\\ AC=DF,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DEF(\text{SSS})$.

$\therefore\angle ABC=\angle DEF$,$\angle ACB=\angle DFE$.

$\therefore AB/\!/DE$,$AC/\!/DF$(同位角相等,两直线平行).

点拨:本题考查全等三角形的判定和性质以及平行线的判定.

9. 解:$\because\angle ACB=90°$,$\therefore\angle BCE+\angle ECA=90°$.

$\because AD\perp CE$,$\therefore\angle ECA+\angle CAD=90°$,

$\therefore\angle BCE=\angle CAD$.

又$\because BE\perp CE$,$AD\perp CE$,$\therefore\angle BEC=\angle CDA=90°$.

在$\triangle BCE$和$\triangle CAD$中,$\begin{cases}\angle BEC=\angle CDA,\\ \angle BCE=\angle CAD,\\ BC=CA,\end{cases}$

$\therefore\triangle BCE\cong\triangle CAD(\text{AAS})$.

$\therefore BE=CD$,$CE=AD=2.5\ \text{cm}$.

$\therefore BE=CD=CE-DE=2.5-1.7=0.8(\text{cm})$.

10. 解:由折叠过程可知,$DE=DC$,$BE=BC$.

$\therefore AE=AB-BE=AB-BC=8-6=2(\text{cm})$,

$\therefore\triangle AED$的周长为$AE+DE+AD=AE+DC+AD=AE+AC=2+5=7(\text{cm})$.

11. 解:$AD=A'D'$.

证明如下:$\because\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,

$\therefore AB=A'B'$,$BC=B'C'$,$\angle B=\angle B'$.

又$\because AD$,$A'D'$分别是BC,$B'C'$上的中线,

$\therefore BD=\frac{1}{2}BC$,$B'D'=\frac{1}{2}B'C'$.

$\therefore BD=B'D'$.

在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中,$\begin{cases}AB=A'B',\\ \angle B=\angle B',\\ BD=B'D',\end{cases}$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'(\text{SAS})$.

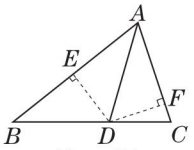
$\therefore AD=A'D'$.

点拨:熟练应用全等三角形的判定和性质是解本题的关键.

12. 证明:如图,过点D作$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,垂足分别为点E,F.$\because AD$平分$\angle BAC$.$\therefore DE=DF$.

$\therefore S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=\left(\frac{1}{2}AB\cdot DE\right):\left(\frac{1}{2}AC\cdot DF\right)=AB:AC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 12 题）

点拨：本题考查了角的平分线的性质以及三角形的面积公式.

13. 解：已知：如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$AB = A'B'$，$AC = A'C'$，BD，$B'D'$ 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 的中线，且 $BD = B'D'$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明：∵ BD 和 $B'D'$ 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中线，且 $AC = A'C'$，∴ $AD = A'D'$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 中，

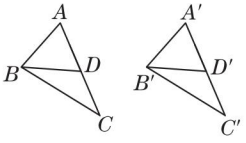
$$\begin{cases} AB = A'B', \\ BD = B'D', \\ AD = A'D', \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$（SSS）. ∴ $\angle A = \angle A'$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\begin{cases} AB = A'B', \\ \angle A = \angle A', \\ AC = A'C', \end{cases}$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（SAS）.

点拨：熟练应用全等三角形的判定和性质是解答本题的关键.



（第 13 题）

第十三章 轴对称

13.1 轴对称

练习：

1. 解：(1)(2)(3)(5)是轴对称图形，(4)不是轴对称图形；指出对称轴略.

点拨：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，则这个图形是轴对称图形，否则不是轴对称图形.

2. 解：(1)(3)是；(2)不是. 指出对称轴和找对称点略.

练习：

1. 解：∵ $AD \perp BC$，$BD = DC$，

∴ AD 是线段 BC 的垂直平分线.

∴ $AB = AC$.

∵ 点 C 在 AE 的垂直平分线上，

∴ $AC = CE$. ∴ $AB = AC = CE$.

∴ $AB + BD = CE + CD$，

∴ $AB + BD = DE$.

点拨：此题是线段垂直平分线的判定和性质的综合应用.

2. 解：∵ $AB = AC$，

∴ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上.

∵ $MB = MC$，

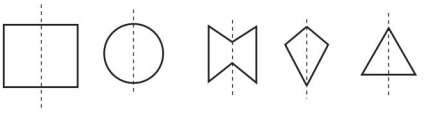
∴ 点 M 在线段 BC 的垂直平分线上.

∴ 直线 AM 是线段 BC 的垂直平分线.

点拨：与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

练习：

1. 解：如图. 和同学比较略.


（第 1 题）

点拨：和同学比较会发现，作出的对称轴可能不一样，因为这些图形中有的不止一条对称轴.

2. 解：角是轴对称图形，它的对称轴是角的平分线所在的直线.

3. 解：与图形 A 成轴对称的是图形 B，作出对称轴略.

习题 13.1

1. 略. **点拨**：用轴对称图形的定义去判断.

2. 解：除第 2 个图形外，均是轴对称图形. 画出对称轴略.

点拨：后三个图形的对称轴不唯一.

3. 解：图中有阴影的三角形与三角形 1，3 成轴对称，整个图形是轴对称图形，它共有两条对称轴.

点拨：轴对称图形指的是一个图形，而图形成轴对称指两个图形.

4. 解：∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，

∴ $\angle ABC = \angle A'B'C'$，$AB = A'B'$.

∵ $\angle ABC = 90°$，

∴ $\angle A'B'C' = 90°$.

∵ $A'B' = 6$ cm，∴ $AB = 6$ cm.

点拨：成轴对称的两个图形沿对称轴折叠后互相重合，所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是全等的.

5. 解：这两个三角形全等. 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全等,那么它们不一定关于某条直线对称.

点拨:“轴对称”不但要求两个图形的形状、大小完全一样,而且要求这两个图形的位置有一定的特殊性,特殊性体现在沿某条直线对折后这两个图形能够完全重合.

6. 解:∵ DE 垂直平分 AC,∴ $AE=EC$,$AD=DC$.

∵ $AB+BD+AD=13$ cm,

∴ $AB+BC=AB+BD+DC=13$ cm.

∵ $AC=2AE$,∴ $AC=6$ cm.

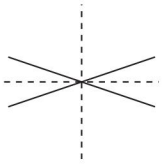
∴ $AB+AC+BC=19$ cm,

即△ABC 的周长为 19 cm.

点拨:由线段垂直平分线的性质得线段相等($AD=DC$)是解答本题的关键.

7. 解:是轴对称图形,它有两条对称轴,如图.

点拨:平面内不垂直的两条相交直线是轴对称图形,每组对顶角的平分线所在的直线是一条对称轴.



(第 7 题)

8. 解:直线 d 是图形的对称轴.

9. 证明:在△AOB 和△COD 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle C,\\ OA=OC,\\ \angle AOB=\angle COD,\end{cases}$$

∴ △AOB≌△COD(ASA).

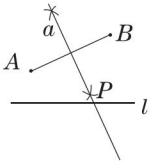
∴ $OB=OD$.

∴ 点 O 在 BD 的垂直平分线上.

∵ $BE=DE$,∴ 点 E 在 BD 的垂直平分线上.

∴ OE 垂直平分 BD.

10. 解:连接 AB,作线段 AB 的垂直平分线 a,a 与公路 l 的交点 P 即为公共汽车站的位置,如图.

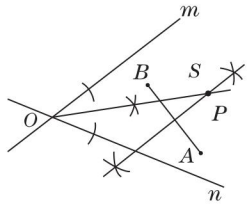


(第 10 题)

11. 解:AB 和 $A'B'$所在的直线相交,交点在对称轴 l 上;BC 和 $B'C'$所在的直线相交,交点在对称轴 l 上;AC 和$A'C'$所在的直线不相交,它们所在的直线与对称轴 l 平行. 成轴对称的图形,若对应线段所在的直线相交,则交点一定在对称轴上,但并不是所有对应线段所在的直线都相交,因为有的对应线段所在的直线与对称轴是平行的.

12. 解:如图,点 P 即是发射塔的位置.

点拨:要使发射塔到两个城镇 A,B 的距离相等,则发射塔 P 应在线段 AB 的垂直平分线上. 又 P 到两条高速公路 m 和 n 的距离相等,则 P 应在高速公路 m 和 n 的夹角的平分线上,故 P 为线段 AB 的垂直平分线和高速公路 m,n 夹角的平分线的交点.



(第 12 题)

13. (1)**证明:**∵ 边 AB,BC 的垂直平分线交于点 P,

∴ $PA=PB$,$PB=PC$,

∴ $PA=PB=PC$.

(2)**解:**∵ $PA=PC$,

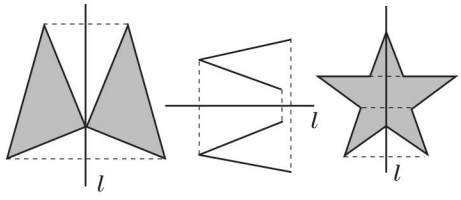
∴ 点 P 在边 AC 的垂直平分线上. 结论:三角形三边的垂直平分线交于一点,并且交点到三个顶点的距离相等.

13.2 画轴对称图形

练习:

1. 解:如图.

点拨:画轴对称图形时,关键是找决定图形形状、图形大小的点关于某直线对称的点,然后依次连接这些点即可.



(第 1 题)

2. 解:沿它一边的中线对折,这边所对的顶点重合,其他部分不一定重合;沿它一边的高对折,这边所在直线重合,这边所对的顶点重合,其他部分不一定重合;沿它的角平分线对折,这个角的顶点及两边所在直线重合,其他部分不一定重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

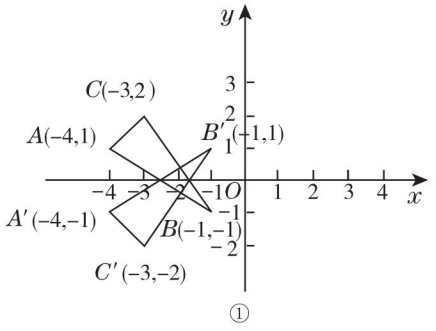
练习：

1. 解：(−2,6)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(−2,−6),(2,6);(1,−2)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(1,2),(−1,−2);(−1,3)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(−1,−3),(1,3);(−4,−2)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(−4,2),(4,−2);(1,0)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(1,0),(−1,0).

点拨：点(x,y)关于x轴对称的点的坐标为$(x,-y)$,关于y轴对称的点的坐标为$(-x,y)$.

2. 解：点B的坐标为(1,2). **点拨：**关于x轴对称的两点横坐标相同,纵坐标互为相反数.

3. 解：如图①,$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于x轴对称. 如图②,$\triangle A''B''C''$与$\triangle ABC$关于y轴对称.



(第3题)

点拨：$A(-4,1)$,$B(-1,-1)$,$C(-3,2)$关于x轴的对称点分别为$A'(-4,-1)$,$B'(-1,1)$,$C'(-3,-2)$,关于y轴的对称点分别为$A''(4,1)$,$B''(1,-1)$,$C''(3,2)$.

习题13.2

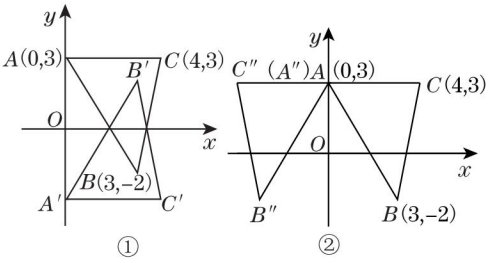
1. 略. **点拨：**解此题的关键是找决定图形形状、大小的点关于对称轴对称的点,然后依次连接起来.

2. 解：(3,6)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(3,−6),(−3,6);(−7,9)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(−7,−9),(7,9);(6,−1)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(6,1),(−6,−1);(−3,−5)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(−3,5),(3,−5);(0,10)关于x轴和y轴对称的点的坐标分别为(0,−10),(0,10).

点拨：点(x,y)关于x轴对称的点的坐标为$(x,-y)$,关于y轴对称的点的坐标为$(-x,y)$.

3. 解：点B,C,D的坐标分别为(1,−1),(−1,−1),(−1,1).

4. 解：如图①②中的$\triangle A'B'C'$和$\triangle A''B''C''$分别为$\triangle ABC$关于x轴和y轴对称的图形.



(第4题)

点拨：$A(0,3)$,$B(3,-2)$,$C(4,3)$关于x轴对称的点的坐标分别是$A'(0,-3)$,$B'(3,2)$,$C'(4,-3)$,关于y轴对称的点的坐标分别是$A''(0,3)$,$B''(-3,-2)$,$C''(-4,3)$.

5. 解：(1)作关于x轴对称的点;

(2)向上平移5个单位长度;

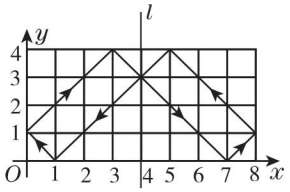
(3)作关于y轴对称的点;

(4)先作关于y轴对称的点(2,3),再作(2,3)关于x轴对称的点(2,−3).

点拨：(4)中也可先作关于x轴对称的点(−2,−3),再作(−2,−3)关于y轴对称的点(2,−3).

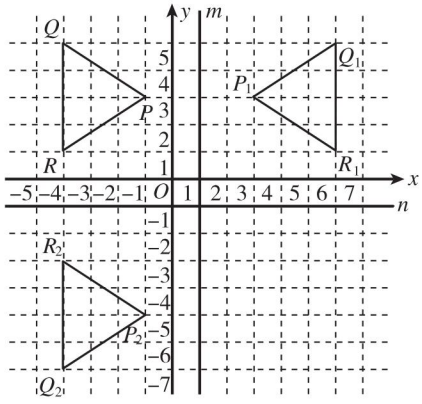
6. 解：用坐标描述这个运动为:(3,0)→(0,3)→(1,4)→(5,0)→(8,3)→(7,4)→(3,0);关于直线l对称的点有(3,0)和(5,0),(0,3)和(8,3),(1,4)和(7,4),(4,1)和(4,1). 小球运动的轨迹如图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第6题)

7. **解**:如图. $\triangle PQR$ 关于直线 m 对称的图形是 $\triangle P_1Q_1R_1$,$\triangle PQR$ 关于直线 n 对称的图形是 $\triangle P_2Q_2R_2$. $\triangle PQR$ 与 $\triangle P_1Q_1R_1$ 的对应点的坐标之间的关系是:横坐标之和的一半为1,纵坐标相等. $\triangle PQR$ 与 $\triangle P_2Q_2R_2$ 的对应点的坐标之间的关系是:横坐标相等,纵坐标之和的一半为 -1.



(第7题)

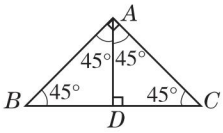
点拨:若点 (x_0,y_0) 关于直线 $x=m$ 对称的点为 (x_1,y_1),则 $\frac{x_0+x_1}{2}=m$,$y_0=y_1$;若点 (x_0,y_0) 关于直线 $y=n$ 对称的点为 (x_2,y_2),则 $x_0=x_2$,$\frac{y_0+y_2}{2}=n$.

13.3 等腰三角形

练习:

1. **解**:(1)底角的度数为 $(180°-36°)\div2=72°$;
(2)底角的度数为 $(180°-120°)\div2=30°$.

2. **解**:如图. 相等的线段有:$AB=AC$,$BD=AD=DC$.
点拨:等腰直角三角形是特殊的等腰三角形.



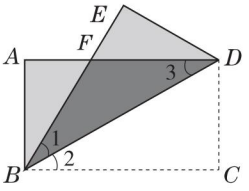
(第2题)

3. **解**:$\because AB=AD$,
$\therefore \angle B=\angle BDA$.
又$\because \angle BAD=26°$,
$\therefore \angle B=\angle BDA=(180°-26°)\div2=77°$.
$\because AD=DC$,$\therefore \angle C=\angle DAC$,
$\therefore \angle C=\frac{1}{2}\angle BDA=38.5°$.
点拨:在分析时应注意观察图形的结构特征,学会从复杂图形中分离出简单图形.

练习:

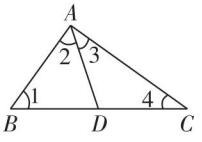
1. **解**:$\because \angle C=72°$,$\angle DBC=36°$.
$\therefore \angle 1=180°-72°-36°=72°$.
$\because \angle 1=\angle A+\angle 2$,$\angle A=36°$,
$\therefore \angle 2=36°$,
$\therefore$ 易得 $\triangle ABD$,$\triangle BDC$,$\triangle ABC$ 均为等腰三角形.
点拨:运用等腰三角形的判定定理:等角对等边进行判定.

2. **解**:是. 如图,$\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle 2=\angle 3$. $\because \triangle BED$ 和 $\triangle BCD$ 关于直线 BD 对称,$\therefore \angle 1=\angle 2$,$\therefore \angle 1=\angle 3$,$\therefore BF=DF$. $\therefore \triangle BDF$ 是等腰三角形.
点拨:将一个图形沿某条直线翻折后,图形的大小和形状不变.



(第2题)

3. **解**:已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的中线,且 $AD=\frac{1}{2}BC$.
求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.
证明:由题意可知,$AD=BD=DC$.
由 $AD=DB$ 可得,$\angle 1=\angle 2$.
由 $AD=DC$ 可得,$\angle 3=\angle 4$.
在 $\triangle ABC$ 中,$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$,
$\therefore \angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}\times180°=90°$,
即 $\angle BAC=90°$,$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.



(第3题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. 证明: $\because OA=OB$,$\therefore \angle A=\angle B$.

$\because AB/\!/CD$,$\therefore \angle C=\angle A$,$\angle D=\angle B$,

$\therefore \angle C=\angle D$,$\therefore OC=OD$.

点拨: 综合运用等边对等角、等角对等边和两直线平行,内错角相等证明.

练习:

1. 解: 画等边三角形的三条对称轴略. 可以发现:等边三角形的三条对称轴分别是三角形三边的高所在的直线,且这三条直线交于一点.

2. 解: BE,ED,CD,DF,FC,AF,AE 都与 BD 相等.

练习:

解: $\because \angle C=90°$,$\angle B=2\angle A$,$\therefore 2\angle A+\angle A=90°$,

$\therefore \angle A=30°$,$\therefore \angle B=60°$,$AB=2BC$.

点拨: 根据直角三角形两个锐角互余,得 $\angle A=30°$. 在直角三角形中,如果一个锐角等于 30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

习题 13.3

1. 解: (1)若顶角为 110°,

则底角的度数为 $\frac{1}{2}\times(180°-110°)=35°$,

故另外两个角分别为 35°,35°;若 110° 的角为底角,

$\because 110°+110°>180°$,

$\therefore$ 110°的角不能为底角.

(2)若顶角为 80°,

则底角为 $\frac{1}{2}\times(180°-80°)=50°$,故另外两个角分别为 50°,50°;

若底角为 80°,

则顶角为 $180°-2\times80°=20°$,故另外两个角分别是 80°,20°.

点拨: 在等腰三角形中,钝角只能是顶角,不能是底角. 等腰三角形的底角应小于90°,注意多解的情况.

2. 证明: $\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle ADB=\angle DBC$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,$\therefore \angle ABD=\angle DBC$,

$\therefore \angle ABD=\angle ADB$,

$\therefore AB=AD$(等角对等边).

点拨: 要证 $AB=AD$,需证 $\angle ABD=\angle ADB$.

3. 解: $\angle AMB=180°-(180°-36°)\div2=108°$.

4. 解: $\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle BAC=120°$,

$\therefore \angle B=\angle C=30°$.

$\because AD\perp BC$,$AB=AC$,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$,$\therefore \angle BAD=\angle CAD=60°$.

点拨: 等腰三角形底边上的高和顶角的平分线互相重合.

5. 证明: $\because AD/\!/EC$,$\therefore \angle A=\angle CEB$.

$\because \angle A=\angle B$,

$\therefore \angle CEB=\angle B$,

$\therefore CE=CB$(等角对等边),

$\therefore \triangle CEB$ 为等腰三角形.

点拨: 要证 $\triangle CEB$ 为等腰三角形,需证 $\angle CEB=\angle B$.

6. 证明: $\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because AD=AE$,$\therefore \angle ADE=\angle AED$.

$\because \angle ADE=\angle B+\angle BAD$,$\angle AED=\angle C+\angle CAE$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ DA=EA, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS),$\therefore BD=CE$.

点拨: 要证 $BD=CE$,需证 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

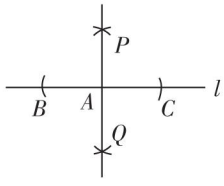
7. 解: $\because AB=AC$,$\therefore \angle C=\angle ABC$.

$\because \angle A=40°$,$\therefore \angle ABC=70°$.

$\because MN$ 垂直平分 AB,$\therefore AD=DB$,

$\therefore \angle ABD=\angle A=40°$,$\therefore \angle DBC=30°$.

8. 解: 如图. 作法:(1)在直线 l 上点 A 的两侧截取 $AB=AC$;(2)作线段 BC 的垂直平分线 PQ. PQ 即为所求作的直线.



(第 8 题)

9. 解: 他们的判断是对的. $\because$ 等腰三角形底边上的中线与底边上的高线、顶角平分线互相重合,线绳经过底边中点又经过三角尺的直角顶点,$\therefore$ 线绳垂直于房梁. 又$\because$ 线绳因重力作用垂直于地面,故房梁与地面是平行的,$\therefore$ 房梁是水平的.

点拨: 根据等腰三角形的“三线合一”判断.

10. 证明: $\because BO$ 平分 $\angle ABC$,$\therefore \angle ABO=\angle OBC$.

$\because MN/\!/BC$,$\therefore \angle BOM=\angle OBC$,

$\therefore \angle ABO=\angle BOM$,$\therefore MO=MB$.

同理可证 $NO=NC$.

$\therefore \triangle AMN$ 的周长为 $AM+AN+MN=AM+AN+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$MO+NO=(AM+MB)+(AN+NC)=AB+AC$.

11. 解:$\because \angle CBN=\angle NAC+\angle C$,$\angle CBN=84°$,$\angle NAC=42°$,$\therefore \angle C=42°=\angle NAC$. $\therefore BC=AB$.

$\because AB=15\times2=30$(n mile),

$\therefore BC=30$ n mile,

即从海岛 B 到灯塔 C 的距离是30 n mile.

点拨:三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

12. 证明:$\because \triangle ABD$,$\triangle AEC$ 都是等边三角形,

$\therefore AD=AB$,$AC=AE$,$\angle DAB=60°$,$\angle EAC=60°$,

$\therefore \angle DAB+\angle BAC=\angle EAC+\angle BAC$,

$\therefore \angle DAC=\angle BAE$.

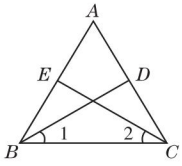
在$\triangle BAE$和$\triangle DAC$中,$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle BAE=\angle DAC,\\ AE=AC,\end{cases}$

$\therefore \triangle BAE\cong\triangle DAC$(SAS),$\therefore BE=DC$.

点拨:要证 $BE=DC$,需证$\triangle BAE\cong\triangle DAC$.

13. 解:等腰三角形两底角的平分线,两腰上的中线,两腰上的高都分别相等.

已知:如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,BD,CE 分别是$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线. 求证:$CE=BD$.



(第13题)

证明:$\because AB=AC$,$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\because BD$,CE 分别平分$\angle ABC$,$\angle ACB$,

$\therefore \angle1=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle2=\frac{1}{2}\angle ACB$,

$\therefore \angle1=\angle2$.

在$\triangle BEC$和$\triangle CDB$中,$\begin{cases}\angle2=\angle1,\\ BC=CB,\\ \angle EBC=\angle DCB,\end{cases}$

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle CDB$(ASA),

$\therefore CE=BD$.

点拨:此题也可选择其他两个结论中的一个进行证明. 解此题需根据命题画出图形,写出已知、求证、证明.

14. 解:$\because PQ=AP=AQ$,$\therefore \triangle APQ$是等边三角形.

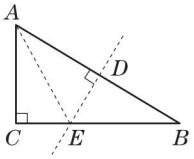
$\therefore \angle APQ=60°$. $\therefore \angle APB=120°$.

又$\because BP=AP$,

$\therefore \angle B=\frac{1}{2}\times(180°-\angle APB)=\frac{1}{2}\times(180°-120°)=30°$. 同理可得$\angle C=30°$.

$\therefore \angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-30°-30°=120°$.

15. 解:作 AE 平分$\angle CAB$交 BC 于点 E,过点 E 作 $ED\perp AB$ 于点 D,则 AE,DE 将三角形的土地分成大小、形状都相同的三块,如图.



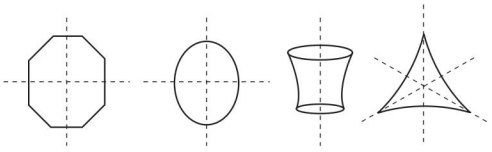
(第15题)

13.4 课题学习 最短路径问题(无)

复习题13

1. 解:从左至右依次为:是;是;不是;是;是;是. 找对称轴略.

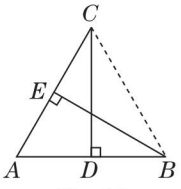
2. 解:如图.



(第2题)

3. 证明:如图,连接 BC,$\because AD=DB$,$CD\perp AB$,$\therefore AC=BC$. $\because AE=CE$,$BE\perp AC$,$\therefore AB=CB$.

$\therefore AC=AB$.



(第3题)

4. 解:点 A,B 关于 x 轴对称;点 B,E 关于 y 轴对称;点 C 和点 E 不关于 x 轴对称,$\because$ 点 C 到 x 轴的距离为3,点 E 到 x 轴的距离为2,$\therefore$ 点 C 和点 E 不关于 x 轴对称.

5. 解:$\because BA=DB$,$\therefore \angle D=\angle DAB$,

又$\because \angle ABC=\angle D+\angle DAB=50°$,

$\therefore \angle D=25°$.

$\because AC=EC$,$\therefore \angle E=\angle CAE$,

又$\because \angle ACB=\angle E+\angle CAE=80°$,

$\therefore \angle E=40°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle DAE = 180° - 25° - 40° = 115°$.

6. 证明: $\because AD = BC, BD = AC, AB = BA$,

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA$. $\therefore \angle DBA = \angle CAB$.

$\therefore AE = BE$,即$\triangle EAB$是等腰三角形.

7. 证明: $\because \angle ACB = 90°, \angle A = 30°, \therefore BC = \frac{1}{2}AB$.

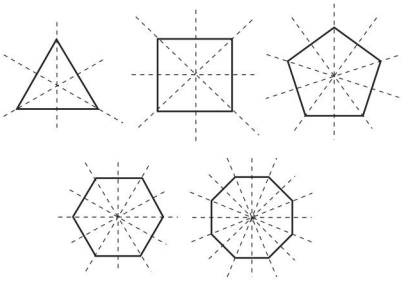
$\because \angle B = 90° - \angle A = 60°, CD \perp BA$,

$\therefore \angle BCD = 30°$.

$\therefore BD = \frac{1}{2}BC$. $\therefore BD = \frac{1}{4}AB$.

点拨: 在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

8. 解: 从左到右各正多边形的对称轴的条数依次为3,4,5,6,8,如图. 一般地,正n边形有n条对称轴.



(第8题)

点拨: 当n为奇数时,从正n边形的各顶点作对边的中垂线即是一条对称轴,$\because$有n个顶点,故可作n条对称轴;当n为偶数时,过对边中点的直线有$\frac{n}{2}$条,另外有$\frac{n}{2}$条对角线所在直线也都是正n边形的对称轴,

$\therefore$共有n条对称轴.

9. 解: (1)轴对称;y轴是对称轴.

(2)平移;将Ⅰ先向左平移5个单位长度,再向下平移3个单位长度.(平移的方法不唯一)

(3)平移;将Ⅰ先向下平移3个单位长度,再向右平移5个单位长度.(平移的方法不唯一)

(4)轴对称;x轴是对称轴.

点拨: 平移即平行移动,轴对称需翻折180°,二者的含义不一样.

10. 证明: $\because AD$平分$\angle BAC, \therefore \angle BAD = \angle CAD$.

$\because DE \perp AB, DF \perp AC$,

$\therefore \angle AED = \angle AFD = 90°, DE = DF$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AED \cong \mathrm{Rt}\triangle AFD, \therefore AE = AF$.

$\therefore$点D, A都在线段EF的垂直平分线上,

$\therefore AD$垂直平分EF.

11. 证明: $\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore AB = AC = BC, \angle B = \angle A = \angle C = 60°$.

$\because AD = CF = BE$,

$\therefore BD = AF = EC$,

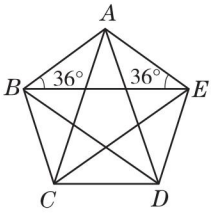
$\therefore \triangle DBE \cong \triangle FAD \cong \triangle ECF$.

$\therefore DE = FD = EF$.

$\therefore \triangle DEF$是等边三角形.

12. 解: 这5个点为正五边形的5个顶点. 如图,正五边形的每一个内角为108°,以A, B两点为例,$\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ABE$都是等腰三角形. 同理,其他任意三点组成的三角形也都是等腰三角形.

点拨: 由正五边形的各边都相等,各角都为108°,各对角线都相等可联想到本题结论,本题答案不唯一.



(第12题)

13. 证明: $\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore AB = BC, \angle BCA = \angle ABC = 60°$.

$\because BD$是中线,$AB = BC$,

$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$.

$\because DC = EC, \therefore \angle E = \angle CDE$.

$\because \angle BCD = \angle E + \angle CDE, \therefore \angle E = 30°$,

$\therefore \angle DBC = \angle E$. $\therefore DB = DE$.

14. 证明: $\because AC = BC, \therefore \angle CAB = \angle CBA$.

$\because \triangle BDC$和$\triangle ACE$分别为等边三角形,

$\therefore \angle CAE = \angle CBD = 60°$,

$\therefore \angle CAB - \angle CAE = \angle CBA - \angle CBD$,

即$\angle EAB = \angle DBA$. $\therefore AF = BF$.

在$\triangle ACF$和$\triangle BCF$中,

$$\begin{cases} AC = BC, \\ \angle CAF = \angle CBF, \\ AF = BF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCF$.

$\therefore \angle ACF = \angle BCF$.

又$\because \triangle ABC$为等腰三角形,$AC = BC$,

$\therefore G$为AB的中点.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

15. 解:作点 A 关于草地边 MN 对称的点 A',点 B 关于河边 l 对称的点 B',连接 $A'B'$,与草地边 MN 交于点 P,与河边 l 交于点 Q,则 $AP\to PQ\to QB$ 为最短路径. 画图略.

第十四章 整式的乘法与因式分解

14.1 整式的乘法

练习:

解:(1)原式 $=b^{5+1}=b^6$.

(2)原式 $=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1+2+3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$.

(3)原式 $=a^{2+6}=a^8$.

(4)原式 $=y^{2n+n+1}=y^{3n+1}$.

点拨:同底数幂相乘,底数不变,指数相加.

练习:

解:(1)原式 $=10^{3\times3}=10^9$.

(2)原式 $=x^{3\times2}=x^6$.

(3)原式 $=-x^{5m}$.

(4)原式 $=a^{2\times3}\cdot a^5=a^6\cdot a^5=a^{6+5}=a^{11}$.

点拨:幂的乘方,底数不变,指数相乘.

练习:

解:(1)原式 $=a^4b^4$.

(2)原式 $=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot x^3\cdot y^3=-\frac{1}{8}x^3y^3$.

(3)原式 $=(-3)^3\times(10^2)^3$

$=-27\times10^6=-2.7\times10^7$.

(4) 原式 $=2^3\cdot a^3\cdot(b^2)^3=8a^3b^6$.

点拨:此题可按积的乘方法则进行计算,即 $(ab)^n=a^nb^n$(n 为正整数).

练习:

1. 解:(1)原式 $=(3\times5)(x^2\cdot x^3)=15x^5$.

(2)原式 $=[4\times(-2)](y\cdot xy^2)=-8xy^3$.

(3)原式 $=9x^2\cdot4x^2=36x^4$.

(4)原式 $=-8a^3\cdot9a^2=-72a^5$.

点拨:单项式乘单项式,系数相乘作为积的系数,相同的字母相乘,按同底数幂相乘,底数不变,指数相加进行运算;如果有乘方,先算乘方,后算乘法.

2. 解:(1)不对,应改为 $6a^5$.

(2)对.

(3)不对,应改为 $12x^4$.

(4)不对,应改为 $15y^8$.

点拨:此题按同底数幂的乘法法则计算,即同底数幂相乘,底数不变,指数相加.

练习:

1. 解:(1)原式 $=3a\cdot5a-3a\cdot2b=15a^2-6ab$;

(2)原式 $=x\cdot(-6x)-3y\cdot(-6x)=-6x^2+18xy$.

点拨:单项式与多项式相乘,就是用单项式去乘多项式的每一项,再把所得的积相加.

2. 解:原式 $=x^2-x+2x^2+2x-(6x^2-15x)=x^2-x+2x^2+2x-6x^2+15x=-3x^2+16x$.

点拨:本题是一道有关整式的混合运算的题目. 注意不要漏乘,括号前是“-”号时,去括号时括号里面的各项都要改变符号.

练习:

1. 解:(1)原式 $=2x^2+6x+x+3=2x^2+7x+3$.

(2)原式 $=3mn-m^2+6n^2-2mn$

$=-m^2+mn+6n^2$.

(3)原式 $=(a-1)(a-1)$

$=a^2-a-a+1$

$=a^2-2a+1$.

(4)原式 $=a^2-3ab+3ab-9b^2=a^2-9b^2$.

(5)原式 $=2x^3-8x^2-x+4$.

(6)原式 $=2x^3-5x^2+4x^2-10x+6x-15$

$=2x^3-x^2-4x-15$.

点拨:运用多项式乘多项式的法则进行计算,展开后,有同类项的要合并同类项.

2. 解:(1)原式 $=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$.

(2)原式 $=x^2+x-4x-4=x^2-3x-4$.

(3)原式 $=y^2-2y+4y-8=y^2+2y-8$.

(4)原式 $=y^2-3y-5y+15=y^2-8y+15$.

由上面计算的结果找到的规律为 $(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$.

点拨:长方形的面积 $=x^2+px+qx+pq=x^2+(p+q)x+pq$,$\therefore(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$.

练习:

1. 解:(1)原式 $=x^{7-5}=x^2$.

(2)原式 $=m^{8-8}=m^0=1$.

(3)原式 $=(-a)^{10-7}=(-a)^3=-a^3$.

(4)原式 $=(xy)^{5-3}=(xy)^2=x^2y^2$.

点拨:根据同底数幂相除,底数不变,指数相减进行计算.

2. 解:(1)原式 $=[10\div(-5)]\cdot a^{1-1}b^{3-1}=-2b^2$.

(2)原式 $=(-8\div6)a^{2-1}b^{3-2}=-\frac{4}{3}ab$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)原式=[(-21)÷(-3)]$x^{2-2}y^{4-3}$=7y.

(4)原式=(6÷3)×10^{8-5}=2×10^3.

3. 解:(1)原式=6ab÷a+5a÷a=6b+5.

(2)原式=15x^2y÷5xy-10xy^2÷5xy=3x-2y.

点拨:多项式除以单项式,先把这个多项式的每一项除以这个单项式,再把所得的商相加.

习题 14.1

1. 解:(1)不对,$b^3\cdot b^3=b^6$.

(2)不对,$x^4\cdot x^4=x^8$.

(3)不对,$(a^5)^2=a^{10}$.

(4)不对,$(a^3)^2\cdot a^4=a^{10}$.

(5)不对,$(ab^2)^3=a^3b^6$.

(6)不对,$(-2a)^2=4a^2$.

点拨:本题可以根据同底数幂的乘法、幂的乘方及积的乘方法则进行判断,另外,当乘方与乘法同时出现时,应先算乘方,再算乘法.

2. 解:(1)$x\cdot x^3+x^2\cdot x^2=x^4+x^4=2x^4$.

(2)$(-pq)^3=(-p)^3\cdot q^3=-p^3q^3$.

(3)$-(-2a^2b)^4=-(-2)^4\cdot(a^2)^4\cdot b^4=-16a^8b^4$.

(4)$a^3\cdot a^4\cdot a+(a^2)^4+(-2a^4)^2$

$=a^8+a^8+(-2)^2\cdot(a^4)^2$

$=a^8+a^8+4a^8$

$=6a^8$.

点拨:根据同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方法则进行计算,能合并同类项的要合并同类项,从而得到最简结果.

3. 解:(1)原式=(6×3)·($x^2\cdot x$)·y=18x^3y.

(2)原式=[2×(-3)]·(a·a)·($b^2\cdot b$)=-6a^2b^3.

(3)原式=4x^2y·(-x^3y^6)

=-4($x^2\cdot x^3$)·(y·y^6)=-4x^5y^7.

(4)原式=(1.3×3.8)×($10^5\times10^3$)

=4.94×10^8.

点拨:根据单项式乘单项式的法则进行计算,如果有乘方,要先算乘方,再算乘法.

4. 解:(1)原式=4a·(-2b)-b^2·(-2b)

=-8ab+2b^3.

(2)原式=2$x^2\cdot x-2x^2\cdot\frac{1}{2}=2x^3-x^2$.

(3)原式=5ab·2a-5ab·b+5ab×0.2

=10a^2b-5ab^2+ab.

(4)原式=2a^2·(-9a)-$\frac{2}{3}$a·(-9a)-$\frac{4}{9}$·(-9a)=-18a^3+6a^2+4a.

点拨:根据单项式乘多项式的法则进行计算,要注意把单项式分别与多项式的每一项相乘,然后将所得的积相加.

5. 解:(1)原式=$x^2-3x-6x+18=x^2-9x+18$.

(2)原式=$x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}$

=$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

(3)原式=3x^2+6x+2x+4=3x^2+8x+4.

(4)原式=20y-4y^2-5+y=-4y^2+21y-5.

(5)原式=x^3+4x-2x^2-8=x^3-2x^2+4x-8.

(6)原式=$x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3$

=x^3-y^3.

点拨:此题可根据多项式乘多项式的法则进行运算,在运算过程中注意不要出现漏乘现象.

6. 解:(1)原式=$a^6\div a^6=1$.

(2)原式=$a^3b^6\div a^2b^2=ab^4$.

(3)原式=[24÷(-6)]$x^{2-1}y^{1-1}$=-4x.

(4)原式=7m·16m^4p^2÷7m^2=(7×16÷7)$m^{1+4-2}p^2$=16m^3p^2.

(5)原式=6x^4÷(-2x^2)-8x^3÷(-2x^2)=-3x^2+4x.

(6)原式=0.25a^2b÷(-0.5a^2b)-$\frac{1}{2}$$a^3b^2$÷(-0.5$a^2b$)-$\frac{1}{6}$$a^4b^3$÷(-0.5$a^2b$)=-$\frac{1}{2}$+ab+$\frac{1}{3}$$a^2b^2$.

点拨:正确运用多项式除以单项式的法则进行计算,注意确定商的符号.

7. 解:原式=$x^3-x^2-(x^3+x^2-x)$

=$x^3-x^2-x^3-x^2+x$

=-2x^2+x.

当x=$\frac{1}{2}$时,

原式=$-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

点拨:解此题应先化简,再代入求值.

8. 解:(1)原式=$x^2-3x-3x+9-6x^2-6x+6$

=-5x^2-12x+15.

(2)原式=(2x+1)(2x+1)-(x+3)(x+3)-(x-1)(x-1)+1

=4x^2+2x+2x+1-(x^2+3x+3x+9)-(x^2-x-

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x+1)+1$

$=4x^2+4x+1-x^2-6x-9-x^2+2x-1+1$

$=2x^2-8.$

点拨:对于整式的混合运算要细心,注意:若括号前是负号,去括号时括号里面的各项都要改变符号.

9. 解:$8\text{GB}=(2^3\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10})\text{B}=2^{33}\text{B}$.

答:其容量有2^{33}B(字节).

10. 解:$7.9\times10^3\times2\times10^2$

$=(7.9\times2)\times(10^3\times10^2)$

$=15.8\times10^5$

$=1.58\times10^6(\text{m})$.

答:卫星绕地球运行2×10^2 s走过的路程为1.58×10^6 m.

点拨:本题可根据公式:路程=速度×时间来解答,注意最后结果写成科学记数法的形式.

11. 解:$(1.5a+2.5a)(a+2a+2a+2a+a)-2.5a\times2a\times2=4a\times8a-10a^2=32a^2-10a^2=22a^2(\text{m}^2)$,

∴绿地的面积为$22a^2$ m^2.

点拨:本题存在等量关系,即大长方形的面积减去两个小长方形的面积等于绿地的面积.

12. 解:底面长方形的另一边长为$4a^2b\div ab=4a$,

∴长方形纸板的长为$4a+2a=6a$,宽为$b+2a$.

13. 解:$2^{3m+10n}=2^{3m}\cdot2^{10n}=(2^m)^3\cdot(32^n)^2$.

当$2^m=a$,$32^n=b$时,原式$=a^3b^2$.

点拨:解此题的关键是变形,要有整体代入的思想.

14. 解:(1)原方程可化为$x^2-5x+6+18=x^2+10x+9$,即$x^2-5x+6+18-x^2-10x-9=0$.合并同类项,得$-15x+15=0$,∴$-15x=-15$,

解得$x=1$.

(2)原不等式可化为$9x^2-12x+12x-16<9(x^2+3x-2x-6)$,即$9x^2-16<9x^2+9x-54$.移项,得$9x^2-9x^2-9x<-54+16$,合并同类项,得$-9x<-38$,∴$x>\frac{38}{9}$.

点拨:本题是整式与方程,整式与不等式的综合题,需运用多项式乘多项式的法则进行展开、化简求解.

15. 解:(1)∵$(x+4)(x+9)$

$=x^2+13x+36$

$=x^2+mx+36$,

∴$m=13$.

(2)∵$(x-2)(x-18)$

$=x^2-20x+36$

$=x^2+mx+36$,

∴$m=-20$.

(3)∵$(x+3)(x+p)$

$=x^2+(3+p)x+3p$

$=x^2+mx+36$,

∴$3p=36$,∴$p=12$.

∴$m=3+p=15$.

(4)∵$(x-6)(x-p)$

$=x^2-(6+p)x+6p$

$=x^2+mx+36$,∴$6p=36$,∴$p=6$.

∴$m=-(6+p)$

$=-12$.

(5)∵$(x+p)(x+q)$

$=x^2+(p+q)x+pq$

$=x^2+mx+36$,

∴$pq=36$.

∵p,q为正整数,且$36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6$,

∴$p+q=1+36$,或$p+q=2+18$,或$p+q=3+12$,或$p+q=4+9$,或$p+q=6+6$.又$m=p+q$,

∴$m=37$,或$m=20$,或$m=15$,或$m=13$,或$m=12$.

14.2 乘法公式

练习:

1. 解:(1)不对,应改为x^2-4;

(2)不对,应改为$4-9a^2$.

点拨:(1)题是平方差公式运用错误,正确算式应为$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$.(2)题可先变为平方差公式的形式,再进行计算.

2. 解:(1)$(a+3b)(a-3b)=a^2-(3b)^2=a^2-9b^2$.

(2)$(3+2a)(-3+2a)$

$=(2a+3)(2a-3)$

$=(2a)^2-3^2$

$=4a^2-9$.

(3)51×49

$=(50+1)\times(50-1)$

$=50^2-1^2$

$=2\,500-1=2\,499$.

(4)$(3x+4)(3x-4)-(2x+3)(3x-2)$

$=(3x)^2-4^2-(6x^2-4x+9x-6)$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=9x^2-16-6x^2+4x-9x+6$

$=3x^2-5x-10.$

点拨:(2)(3)题通过变形可转化为平方差的形式,然后利用平方差公式计算.

练习:

1. 解:(1)原式 $=x^2+2\cdot x\cdot 6+6^2=x^2+12x+36.$

(2)原式 $=y^2-2\cdot y\cdot 5+5^2=y^2-10y+25.$

(3)原式 $=(-2x)^2+2\cdot(-2x)\cdot 5+5^2$

$=4x^2-20x+25.$

(4)原式 $=\left(\frac{3}{4}x\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}x\cdot\frac{2}{3}y+\left(\frac{2}{3}y\right)^2$

$=\frac{9}{16}x^2-xy+\frac{4}{9}y^2.$

2. 解:(1)错在结果少了 $2ab$ 项,结果应改为:$a^2+2ab+b^2$.

(2)错在 a 与 b 的乘积项,结果应改为 $a^2-2ab+b^2$.

点拨:注意利用完全平方公式展开后得到的是一个二次三项式.

练习:

1. (1)$b-c$ (2)$b-c$

(3)$-b+c$ (4)$-b-c$ 检验略.

点拨:依据添括号法则,即括号前面是正号,括到括号里的各项都不变符号;括号前面是负号,括到括号里的各项都改变符号.

2. 解:(1)原式 $=[(a+2b)-1]^2$

$=(a+2b)^2-2\times(a+2b)\times 1+1^2$

$=a^2+4ab+4b^2-2a-4b+1.$

(2)原式 $=[2x+(y+z)][2x-(y+z)]$

$=(2x)^2-(y+z)^2$

$=4x^2-(y^2+2yz+z^2)$

$=4x^2-y^2-2yz-z^2.$

点拨:本题通过变形后运用乘法公式进行计算.

习题 14.2

1. 解:(1)原式 $=\left(\frac{2}{3}x\right)^2-y^2=\frac{4}{9}x^2-y^2.$

(2)原式 $=(xy)^2-1^2=x^2y^2-1.$

(3)原式 $=(2a-3b)(2a+3b)$

$=(2a)^2-(3b)^2$

$=4a^2-9b^2.$

(4)原式 $=(-5-2b)(-5+2b)$

$=(-5)^2-(2b)^2$

$=25-4b^2.$

(5)原式 $=(2\,000+1)\times(2\,000-1)$

$=2\,000^2-1^2$

$=4\,000\,000-1$

$=3\,999\,999.$

(6)原式 $=(1\,000-2)\times(1\,000+2)$

$=1\,000^2-2^2$

$=1\,000\,000-4$

$=999\,996.$

点拨:解(3)(4)(5)(6)题的关键是变形,先把各因式变形为平方差的标准形式,然后再进行计算.

2. 解:(1)原式 $=4a^2+20ab+25b^2.$

(2)原式 $=16x^2-24xy+9y^2.$

(3)原式 $=4m^2+4m+1.$

(4)原式 $=\frac{9}{4}a^2-2ab+\frac{4}{9}b^2.$

(5)原式 $=(60+3)^2=3\,600+360+9=3\,969.$

(6)原式 $=(100-2)^2=10\,000-400+4=9\,604.$

3. 解:(1)原式 $=(9x^2-30x+25)-(4x^2+28x+49)$

$=9x^2-30x+25-4x^2-28x-49$

$=5x^2-58x-24.$

(2)原式 $=[(x+y)+1][(x+y)-1]$

$=(x+y)^2-1^2$

$=x^2+2xy+y^2-1.$

(3)原式 $=[(2x-y)-3]^2=(2x-y)^2-6(2x-y)+9$

$=4x^2-4xy+y^2-12x+6y+9.$

(4)原式 $=(x^2-4)^2$

$=(x^2)^2-8x^2+4^2$

$=x^4-8x^2+16.$

点拨:(2)(3)题先通过变形,转化为乘法公式的形式,再进行计算;另外,在解题过程中要注意整体思想的运用.

4. 解:原式 $=4x^2+12xy+9y^2-4x^2+y^2$

$=12xy+10y^2.$

当 $x=\frac{1}{3}$,$y=-\frac{1}{2}$ 时,原式 $=12\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+10\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}.$

点拨:先正确运用完全平方公式、平方差公式将原式展开,合并同类项后,再将 x,y 的值代入求值.

5. 解:设这个正方形的边长是 x cm,则 $(x+3)^2=x^2+39$,$x^2+6x+9=x^2+39$,解得 $x=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 这个正方形的边长是5 cm.

点拨:正方形的面积=边长的平方,先根据等量关系列出关系式,再运用完全平方公式展开,转化为一元一次方程,再求解.

6. 解: $\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)=\frac{ab}{2}\pi.$

∴ 剩下的钢板的面积为$\frac{ab}{2}\pi$.

点拨:圆的面积公式为$S=\pi R^2$,运用完全平方公式展开、化简即可.

7. 解:$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,

当$a+b=5$,$ab=3$时,原式$=5^2-2\times3=25-6=19$.

点拨:将公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$变形,得$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,然后将已知条件代入即可求解.

8. 解:原不等式可化为:$4x^2-20x+25+9x^2+6x+1>13x^2-130$,$13x^2-14x-13x^2>-130-1-25$,$-14x>-156$.

$\therefore x<\frac{78}{7}$.

9. 解:原方程组可化为$\begin{cases}4x+6y=5, & ①\\ x-3y=2. & ②\end{cases}$

由①+②×2,解得$x=\frac{3}{2}$,$\therefore y=-\frac{1}{6}$.

$\therefore$ 原方程组的解为$\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=-\frac{1}{6}.\end{cases}$

点拨:运用完全平方公式、平方差公式将原方程组展开,并化简,然后用加减消元法解方程组.

14.3 因式分解

练习:

1. 解:(1)原式$=a(x+y)$.

(2)原式$=3m(x-2y)$.

(3)原式$=2mn(4m+1)$.

(4)原式$=3xy(4z-3xy)$.

(5)原式$=2a(y-z)+3b(y-z)=(y-z)(2a+3b)$.

(6)原式$=(a^2+b^2)(p-q)$.

点拨:解题的关键是找准多项式各项的公因式.

2. 解:原式$=(x+7)(4a^2-3)$.

当$a=-5$,$x=3$时,

原式$=(3+7)\times[4\times(-5)^2-3]$

$=10\times(4\times25-3)$

$=10\times(100-3)$

$=10\times97=970$.

3. 解:原式$=5\times3^4+4\times3^4+1\times3^4=3^4\times(5+4+1)=3^4\times10=810$.

点拨:各项的公因数为3^4,用因式分解法解比直接计算简便.

练习:

1. 解:(1)不能用平方差公式分解因式,$\because x^2+y^2$表示x,y的平方和;

(2)能用平方差公式分解因式,$\because x^2-y^2$表示x,y的平方差;

(3)能用平方差公式分解因式,

$\because -x^2+y^2=y^2-x^2$,表示$y$,$x$的平方差;

(4)不能用平方差公式分解因式,$\because -x^2-y^2=-(x^2+y^2)$,表示$x$,$y$的平方和的相反数.

2. 解:(1)原式$=a^2-\left(\frac{1}{5}b\right)^2$

$=\left(a+\frac{1}{5}b\right)\left(a-\frac{1}{5}b\right)$.

(2)原式$=(3a)^2-(2b)^2=(3a+2b)(3a-2b)$.

(3)原式$=y(x^2-4)=y(x+2)(x-2)$.

(4)原式$=-(a^4-16)$

$=-[(a^2)^2-4^2]$

$=-(a^2+4)(a^2-4)$

$=-(a^2+4)(a+2)(a-2)$.

点拨:解答本题的关键是变形,然后运用平方差公式分解因式.

练习:

1. 解:(1)是,$\because a^2-4a+4=a^2-2\times2\cdot a+2^2$.

(2)不是,$\because$ 完全平方式是三项式,而$1+4a^2$是二项式.

(3)不是,$\because 4b^2+4b-1=(2b)^2+4b-1^2$,

$(2b)^2-1^2$是$2b$与1的平方差,不是平方和.

(4)不是,$\because$ 中间项不是a,b乘积的2倍.

2. 解:(1)原式$=x^2+12x+6^2=(x+6)^2$.

(2)原式$=-(2xy+x^2+y^2)$

$=-(x^2+2xy+y^2)$

$=-(x+y)^2$.

(3)原式$=a^2+2a+1^2=(a+1)^2$.

(4)原式$=(2x)^2-4x+1^2=(2x-1)^2$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(5)原式 $=a(x^2+2ax+a^2)=a(x+a)^2$.

(6)原式 $=-3(x^2-2xy+y^2)=-3(x-y)^2$.

点拨:(1)(3)(4)题具备完全平方式的形式,∴直接运用完全平方公式进行因式分解即可;(2)(5)(6)题先变形,提出负号或公因式使其具备完全平方式的形式,然后再运用完全平方公式进行因式分解.

习题 14.3

1. 解:(1)原式 $=5a^2(3a+2)$.

(2)原式 $=3bc(4a-c)$.

(3)原式 $=2(p+q)(3p-2q)$.

(4)原式 $=m(a-3)-2(a-3)$

$=(a-3)(m-2)$.

点拨:(1)(2)(3)题可以直接提公因式,注意提公因式时不要丢掉系数;(4)题先改变符号,然后再提公因式.

2. 解:(1)原式 $=1-(6b)^2=(1+6b)(1-6b)$.

(2)原式 $=3(4x^2-y^2)=3[(2x)^2-y^2]=3(2x+y)(2x-y)$.

(3)原式 $=(0.7p)^2-12^2$

$=(0.7p+12)(0.7p-12)$.

(4)原式 $=[(2x+y)+(x+2y)][(2x+y)-(x+2y)]$

$=(2x+y+x+2y)(2x+y-x-2y)$

$=(3x+3y)(x-y)$

$=3(x+y)(x-y)$.

点拨:运用平方差公式分解因式时,有公因式的,先提公因式,然后变形为两数(或两式)的平方差的形式,最后用平方差公式分解因式.

3. 解:(1)原式 $=1^2+2\times1\cdot5t+(5t)^2=(1+5t)^2$.

(2)原式 $=m^2-2\cdot m\cdot7+7^2=(m-7)^2$.

(3)原式 $=y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=y^2+2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$.

(4)原式 $=(m+n)^2-2\times2m(m+n)+(2m)^2$

$=[(m+n)-2m]^2$

$=(m+n-2m)^2$

$=(n-m)^2$.

(5)原式 $=(5a)^2-2\cdot5a\cdot8+8^2=(5a-8)^2$.

(6)原式 $=[a+(b+c)]^2=(a+b+c)^2$.

点拨:(1)(2)(3)(5)题可以直接用完全平方公式分解因式;(6)题可以把 $b+c$ 看成一个整体,然后用完全平方公式分解因式;(4)题把 $m+n$ 看成一个整体,用完全平方公式分解因式后,看是否有同类项,有同类项时要合并同类项.

4. 解:(1)原式 $=3.14\times(21+62+17)$

$=3.14\times100=314$.

(2)原式 $=(758+258)\times(758-258)$

$=1\ 016\times500$

$=508\ 000$.

点拨:(1)题用因式分解法,先提取公因数 3.14,再进行计算;(2)题运用平方差公式分解因式,其中 $a=758$, $b=258$.

5. 解:(1)原式 $=a^2-2ab+b^2+4ab$

$=a^2+2ab+b^2$

$=(a+b)^2$.

(2)原式 $=p^2-3p-4+3p$

$=p^2-4$

$=(p+2)(p-2)$.

(3)原式 $=-y(-4xy+4x^2+y^2)$

$=-y(4x^2-4xy+y^2)$

$=-y(2x-y)^2$.

(4)原式 $=3a(x^2-y^2)=3a(x+y)(x-y)$.

点拨:(1)(2)题先展开,合并同类项,再用完全平方公式或平方差公式分解因式;(3)(4)题先提公因式,再用完全平方公式或平方差公式分解因式.

6. 解:$U=IR_1+IR_2+IR_3=I(R_1+R_2+R_3)$.

当 $R_1=19.7$, $R_2=32.4$, $R_3=35.9$, $I=2.5$ 时,

原式 $=I(R_1+R_2+R_3)=2.5\times(19.7+32.4+35.9)=2.5\times88=220$,

∴ $U=220$.

点拨:用因式分解法比直接计算简便.

7. 解:$S_{剩}=\pi R^2-4\pi r^2=\pi(R^2-4r^2)=\pi(R+2r)(R-2r)$.

∵ π 取 3.14, $R=7.8$ cm, $r=1.1$ cm,

∴ $S_{剩}=\pi(R+2r)(R-2r)\approx3.14\times(7.8+2\times1.1)\times(7.8-2\times1.1)=3.14\times10\times5.6=175.84(\text{cm}^2)$.

∴ 剩余部分的面积约是 175.84 cm^2.

点拨:剩余部分的面积 = 大圆的面积 − 4 个小圆的面积,在计算时,先提取公因数 π,再用平方差公式分解因式,然后代入求值.

8. 解:三种. 方法一:$x\times2\times2-2^2=4x-4$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二:$x^2-(x-2)^2=(x+x-2)(x-x+2)=(2x-2)\times2=4x-4$;

方法三:$2x+(x-2)\times2=2x+2x-4=4x-4$. ∴甬道所占的面积为$(4x-4)\,m^2$.

9. 解:∵ $4y^2+my+9=(2y)^2+my+3^2$ 是完全平方式,

∴ $my=\pm2\cdot2y\cdot3=\pm12y$, ∴ $m=\pm12$.

10. 解:根据已知等式得出的结论为$2n(2n+2)+1=(2n+1)^2$(其中 n 为正整数).

证明:$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$.

点拨:证明时运用了完全平方公式.

11. 解:(1)原式$=x^2-(\sqrt{2})^2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2)原式$=(\sqrt{5}x)^2-(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5}x+\sqrt{3})(\sqrt{5}x-\sqrt{3})$.

点拨:根据平方根的意义,运用平方差公式分解因式.

复习题 14

1. 解:(1)原式$=(-2)^2(x^2)^2(y^3)^2\cdot x^3y^3$

$=4x^4y^6\cdot x^3y^3=4x^7y^9$.

(2)原式$=4a^2-2ab+6ab-3b^2$

$=4a^2+4ab-3b^2$.

(3)原式$=5x^2(x^2-1)=5x^4-5x^2$.

(4)原式$=(2x+y)^2-2(2x+y)+1$

$=4x^2+4xy+y^2-4x-2y+1$.

(5)原式$=(60-0.2)\times(60+0.2)=60^2-0.2^2$

$=3\,599.96$.

(6)原式$=(200-2)^2=200^2-4\times200+4=39\,204$.

点拨:解此题时注意运算顺序,应先算乘方,再算乘法,最后算加减.

2. 解:(1)原式$=8a^3b^4\div12a^3b^2$

$=(8\div12)a^{3-3}b^{4-2}$

$=\frac{2}{3}b^2$.

(2)原式$=\left(-\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}\right)a^{7-2}b^{5-5}=-\frac{4}{9}a^5$.

(3)原式$=\frac{6}{5}a^3x^4\div\frac{3}{5}ax^3-0.9ax^3\div\frac{3}{5}ax^3=2a^2x-\frac{3}{2}$.

(4)原式$=7x^2y^3\div8x^2y^2-8x^3y^2z\div8x^2y^2$

$=\frac{7}{8}y-xz$.

3. 解:(1)原式$=(5x)^2-(4y)^2$

$=(5x+4y)(5x-4y)$.

(2)原式$=(a-b)(x-y)+(a-b)(x+y)$

$=(a-b)(x-y+x+y)$

$=(a-b)\cdot2x$

$=2x(a-b)$.

(3)原式$=a^2-4ab+(2b)^2=(a-2b)^2$.

(4)原式$=2^2+2\times2\times3(x-y)+[3(x-y)]^2$

$=[2+3(x-y)]^2$

$=(2+3x-3y)^2$.

点拨:(1)题用平方差公式分解因式;(2)题用提公因式法分解因式,注意符号变化;(3)(4)题用完全平方公式分解因式.

4. 解:$(9.6\times10^6)\times(1.3\times10^5)$

$=(9.6\times1.3)\times(10^6\times10^5)$

$=12.48\times10^{11}=1.248\times10^{12}$(t).

答:在我国陆地上,一年内从太阳得到的能量约相当于燃烧 1.248×10^{12} t 煤所产生的能量.

点拨:此题按同底数幂的乘法法则进行计算,结果用科学记数法表示.

5. 解:$2\pi(0.5+1)-2\pi\times0.5=2\pi\approx6.28$(m).

∴ 这条绳长比地球仪的赤道的周长大约多 6.28 m.

如果在地球赤道表面也同样做,那么$2\pi(6.37\times10^6+1)-2\pi\times6.37\times10^6=2\pi\approx6.28$(m),还是大约多 6.28 m.

6. 解:(1)原式$=4(x^2+2x+1)-(4x^2-25)$

$=4x^2+8x+4-4x^2+25=8x+29$.

(2)原式$=x^3-2x-x^3-2x=-4x$.

(3)原式$=3(y^2-2yz+z^2)-(4y^2-z^2)$

$=3y^2-6yz+3z^2-4y^2+z^2$

$=-y^2-6yz+4z^2$.

(4)原式$=(x^3y^2-x^2y-yx^2+x^3y^2)\div3x^2y$

$=(2x^3y^2-2x^2y)\div3x^2y$

$=2x^3y^2\div3x^2y-2x^2y\div3x^2y$

$=\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}$.

点拨:此题是整式的混合运算,应注意运算顺序.

7. 解:(1)原式$=x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)$.

(2)原式$=(4x^2)^2-1=(4x^2+1)(4x^2-1)$

$=(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$.

(3)原式$=-y(9x^2-6xy+y^2)=-y(3x-y)^2$.

(4)原式$=4a^2-4ab+b^2+8ab=4a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2$.

点拨:选择恰当的方法进行因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解: $\because (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 25$,①

$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 = 9$,②

①−②,得 $4xy = 16$,$\therefore xy = 4$.

①+②,得 $2(x^2+y^2) = 34$,$\therefore x^2+y^2 = 17$.

9. 解: 4 根立柱的总质量为:$4\times\left[\pi\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2-\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\cdot h\times 7.8 = 4\times 7.8h\cdot\pi\left(\frac{D}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right) = 7.8h\cdot\pi(D+d)(D-d)$.

当 $D=1$ m,$d=0.4$ m,$h=18$ m时,原式 $\approx 7.8\times 18\times 3.14\times(1+0.4)\times(1-0.4) = 370.319\,04 \approx 370.3$(t).

$\therefore$ 4 根立柱的总质量约为 370.3 t.

点拨: 此题先用提公因式法和平方差公式分解因式,再代入数值进行计算.

10. 解: (1)$3\times 9-2\times 10 = 7$,$21\times 27-20\times 28 = 7$,符合这个规律.(答案不唯一)

(2)略.

(3)证明:设最小的日期为 n,则其余 3 个日期分别为 $n+1$,$n+7$,$n+8$,则 $(n+1)(n+7)-n(n+8) = n^2+8n+7-n^2-8n = 7$.

11. 证明: $(2n+1)^2-(2n-1)^2$

$=[(2n+1)+(2n-1)][(2n+1)-(2n-1)]$

$=(2n+1+2n-1)(2n+1-2n+1)$

$=4n\times 2 = 8n$.

$\because n$ 为整数,

$\therefore 8n$ 是 8 的倍数.

$\therefore (2n+1)^2-(2n-1)^2$ 是 8 的倍数.

点拨: 此题证明时,运用平方差公式分解因式.

12. 解: 可设该产品原价为 1,经过两次提价后,三种方案的价格分别是 w_1,w_2,w_3. 依题意,得 $w_1 = (1+p\%)(1+q\%)$,$w_2 = (1+q\%)(1+p\%)$,$w_3 = \left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right) = \left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2$.

$\because w_1 = (1+p\%)(1+q\%) = \frac{(100+p)(100+q)}{10\,000}$,$w_3 = \left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2 = \left(\frac{200+p+q}{200}\right)^2$,

$\therefore w_3-w_1 = [(p^2+q^2+40\,000+400p+400q+2pq)-(4pq+400p+400q+40\,000)]\div 40\,000 = (p^2+q^2-2pq)\div 40\,000 = (p-q)^2\div 40\,000$.

$\because p\neq q$,$\therefore (p-q)^2>0$,

$\therefore w_3>w_1$,又$\because w_1 = w_2$,

$\therefore w_3>w_1 = w_2$,

$\therefore$ 方案(3)提价最多.

点拨: 此题计算 w_3-w_1 的过程中运用多项式乘多项式法则,把 $(100+p)(100+q)$ 展开,运用完全平方公式把 $(200+p+q)^2$ 展开,然后合并同类项,由完全平方公式得 $p^2+q^2-2pq = (p-q)^2$.

$\because p\neq q$,$\therefore (p-q)^2>0$,

$\therefore w_3-w_1>0$,即 $w_3>w_1$.

第十五章 分式

15.1 分式

练习:

1. (1)$\frac{40}{n}$ (2)$\frac{2S}{a}$ (3)$\frac{a}{b}$;$\frac{a}{b-1}$

2. 解: 分式有:$\frac{1}{x}$,$\frac{4}{3b^3+5}$,$\frac{x}{x^2-y^2}$,$\frac{m-n}{m+n}$,$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$,$\frac{c}{3(a-b)}$;整式有:$\frac{x}{3}$,$\frac{2a-5}{3}$. 两类式子的区别为:分式的分母中含有字母,整式的分母中不含有字母.

点拨: 此题考查分式与整式的区别.

3. 解: (1)当 $a\neq 0$ 时,分式有意义.

(2)当 $x-1\neq 0$,即 $x\neq 1$ 时,分式有意义.

(3)当 $3m+2\neq 0$,即 $m\neq -\frac{2}{3}$ 时,分式有意义.

(4)当 $x-y\neq 0$,即 $x\neq y$ 时,分式有意义.

(5)当 $3a-b\neq 0$,即 $a\neq\frac{b}{3}$ 时,分式有意义.

(6)当 $x^2-1\neq 0$,即 $x\neq\pm 1$ 时,分式有意义.

点拨: 当分式的分母不为 0 时,分式才有意义.

练习:

1. 解: (1)$\frac{2bc}{ac} = \frac{2b}{a}$.

(2)$\frac{(x+y)y}{xy^2} = \frac{x+y}{xy}$.

(3)$\frac{x^2+xy}{(x+y)^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}$.

(4)$\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$.

点拨: 此题关键是找出分式中分子、分母的公因式,进行约分. 当分子、分母是多项式时,若能分解因式,先分解因式,然后再找公因式约分.

2. 解: (1)$\frac{x}{ab}$ 与 $\frac{y}{bc}$ 的最简公分母为 abc,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 通分得$\frac{cx}{abc}$,$\frac{ay}{abc}$.

(2)$\frac{2c}{bd}$与$\frac{3ac}{4b^2}$的最简公分母为$4b^2d$,

∴ 通分得$\frac{8bc}{4b^2d}$,$\frac{3acd}{4b^2d}$.

(3)$\frac{x}{a(x+2)}$与$\frac{y}{b(x+2)}$的最简公分母为$ab(x+2)$,

∴ 通分得$\frac{bx}{ab(x+2)}$,$\frac{ay}{ab(x+2)}$.

(4)$\frac{2xy}{(x+y)^2}$与$\frac{x}{x^2-y^2}$的最简公分母为$(x+y)^2(x-y)$,

∴ 通分得$\frac{2x^2y-2xy^2}{(x+y)^2(x-y)}$,$\frac{x^2+xy}{(x+y)^2(x-y)}$.

点拨:通分的关键是寻找最简公分母.

习题 15.1

1. (1)$\frac{120}{m+n}$万字;是分式

(2)$\frac{10}{x-0.2}$km/h;是分式

(3)$\frac{1}{t-1}$;是分式

点拨:此题考查分式的概念及实际应用.

2. 解:整式有:$x-1$,$\frac{b}{3}$,$\frac{3}{4}(x+y)$,$\frac{x^2+2x+1}{5}$;分式有:$\frac{1}{a}$,$\frac{3}{m}$,$\frac{c}{a-b}$,$\frac{a+6}{2b}$,$\frac{m+n}{m-n}$.

点拨:此题考查分式与整式的区别.

3. 解:(1)当$3x\neq0$,即$x\neq0$时,分式有意义.

(2)当$3-x\neq0$,即$x\neq3$时,分式有意义.

(3)当$3x+5\neq0$,即$x\neq-\frac{5}{3}$时,分式有意义.

(4)当$x^2-16\neq0$,即$x\neq\pm4$时,分式有意义.

点拨:当分式的分母不为零时,分式有意义.

4. 解:(1)$\frac{2x}{y}$与$\frac{4xy}{2y^2}$相等.∵$\frac{4xy}{2y^2}=\frac{2x\cdot2y}{y\cdot2y}=\frac{2x}{y}$,

∴ 两个分式相等.

(2)$\frac{6ac}{9a^2b}$与$\frac{2c}{3ab}$相等.∵$\frac{6ac}{9a^2b}=\frac{2c\cdot3a}{3ab\cdot3a}=\frac{2c}{3ab}$,

∴ 两个分式相等.

点拨:此题考查分式的约分.

5. 解:(1)$\frac{-5y}{-x^2}=\frac{5y}{x^2}$.

(2)$\frac{-a}{2b}=-\frac{a}{2b}$.

(3)$\frac{4m}{-3n}=-\frac{4m}{3n}$.

(4)$-\frac{-x}{2y}=\frac{x}{2y}$.

点拨:此题考查分式的基本性质.

6. 解:(1)$\frac{5x}{25x^2}=\frac{1}{5x}$.

(2)$\frac{9ab^2+6abc}{3a^2b}=\frac{3b+2c}{a}$.

(3)$\frac{9a^2+6ab+b^2}{3a+b}=\frac{(3a+b)^2}{3a+b}=3a+b$.

(4)$\frac{x^2-36}{2x+12}=\frac{(x+6)(x-6)}{2(x+6)}=\frac{x-6}{2}$.

点拨:约分的关键是先找出分子和分母的公因式,然后再进行约分.

7. 解:(1)$\frac{x}{3y}$与$\frac{3x}{2y^2}$的最简公分母为$6y^2$,

∴ 通分得$\frac{2xy}{6y^2}$,$\frac{9x}{6y^2}$.

(2)$\frac{6c}{a^2b}$与$\frac{c}{3ab^2}$的最简公分母为$3a^2b^2$,

∴ 通分得$\frac{18bc}{3a^2b^2}$,$\frac{ac}{3a^2b^2}$.

(3)$\frac{x-y}{2x+2y}$与$\frac{xy}{(x+y)^2}$的最简公分母为$2(x+y)^2$,

∴ 通分得$\frac{x^2-y^2}{2(x+y)^2}$,$\frac{2xy}{2(x+y)^2}$.

(4)$\frac{2mn}{4m^2-9}$与$\frac{2m-3}{2m+3}$的最简公分母为$4m^2-9$,

∴ 通分得$\frac{2mn}{4m^2-9}$,$\frac{(2m-3)^2}{4m^2-9}$.

点拨:考查分式的基本性质及通分,注意正确寻找最简公分母.

8. 解:(1)当$x(x-1)\neq0$,即$x\neq0$且$x\neq1$时,分式有意义.

(2)当$x^2+1\neq0$时,分式有意义.∵$x^2\geqslant0$,∴$x^2+1>0$,∴x取任何实数时,分式都有意义.

点拨:当分式的分母不为零时,分式有意义.

9. 解:根据题意,可知$(12\ 000-120w)$字为小李第二天打字的数量,∴ 第二天她打字用的时间为$\frac{12\ 000-120w}{w+10}$ min.

答:第二天她打字用了$\frac{12\ 000-120w}{w+10}$ min.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解:玉米的单位面积产量为$\frac{n}{m}$ kg/hm^2,水稻的单位面积产量为$\frac{2n+q}{m+p}$ kg/hm^2.

11. 解:根据题意,得四块小场地中两块正方形场地的面积之和为(a^2+b^2) m^2,两块长方形场地的面积之和为$2ab$m^2,∴ 另一块大长方形场地的面积为(a^2+b^2+2ab)m^2. 又∵ 它的长为$2(a+b)$m,∴ 大长方形的宽可表示为$\frac{a^2+b^2+2ab}{2(a+b)}=\frac{a+b}{2}$(m).

点拨:本题考查了分式的基本性质.

12. 解:(1)对.

(2)不对,$\frac{xy-x^2}{(x-y)^2}=\frac{x(y-x)}{(x-y)^2}=\frac{x(y-x)}{(y-x)^2}=\frac{x}{y-x}$.

点拨:本题考查了分式的基本性质.

13. 解:(1)∵ $x\neq0$,∴ 当分式的值为0时,$x-1=0$,解得$x=1$. ∴ 当$x=1$时,此分式的值为0.

(2)∵ $a+b\neq0$,∴ $a\neq-b$. ∴ 当分式的值为0时,$5a-b=0$,∴ $a=\frac{b}{5}$,∴ 当$a=\frac{b}{5}$,且$b\neq0$时,此分式的值为0.

15.2 分式的运算

练习:

1. 解:问题1:$\frac{V}{ab}\cdot\frac{m}{n}=\frac{Vm}{abn}$.

问题2:$\frac{a}{m}\div\frac{b}{n}=\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}=\frac{na}{mb}$.

点拨:本题考查分式的乘除法的计算.

2. 解:(1)$\frac{3a}{4b}\cdot\frac{16b}{9a^2}=\frac{3a\cdot16b}{4b\cdot9a^2}=\frac{4}{3a}$.

(2)$\frac{12xy}{5a}\div8x^2y=\frac{12xy}{5a}\cdot\frac{1}{8x^2y}=\frac{3}{5a\cdot2x}=\frac{3}{10ax}$.

(3)$(-3xy)\div\frac{2y^2}{3x}=-3xy\cdot\frac{3x}{2y^2}=-\frac{9x^2}{2y}$.

(4)$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{y-x}{x+y}=-\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}=-1$.

3. 解:(1)$\frac{3a-3b}{10ab}\cdot\frac{25a^2b^3}{a^2-b^2}$

$=\frac{3(a-b)\cdot25a^2b^3}{10ab\cdot(a+b)(a-b)}$

$=\frac{15ab^2}{2(a+b)}$.

(2)$\frac{4y^2-x^2}{x^2+2xy+y^2}\div\frac{x-2y}{2x^2+2xy}$

$=-\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+y)^2}\cdot\frac{2x(x+y)}{x-2y}$

$=-\frac{2x(x+2y)}{x+y}$.

练习:

1. 解:(1)$\frac{2m^2n}{3pq^2}\cdot\frac{5p^2q}{4mn^2}\div\frac{5mnp}{3q}$

$=\frac{2m^2n}{3pq^2}\cdot\frac{5p^2q}{4mn^2}\cdot\frac{3q}{5mnp}$

$=\frac{1}{2n^2}$.

(2)$\frac{16-a^2}{a^2+8a+16}\div\frac{a-4}{2a+8}\cdot\frac{a-2}{a+2}$

$=\frac{(4-a)(4+a)}{(a+4)^2}\cdot\frac{2(a+4)}{-(4-a)}\cdot\frac{a-2}{a+2}$

$=-\frac{2(a-2)}{a+2}$.

点拨:在进行分式的乘除法运算中,当分子、分母为多项式时,若能分解因式,先分解因式,然后再根据分式的乘除法法则进行运算.

2. 解:(1)$\left(\frac{-2x^4y^2}{3z}\right)^3=-\frac{8x^{12}y^6}{27z^3}$.

(2)$\left(\frac{2ab^3}{-c^2d}\right)^2\div\frac{6a^4}{b^3}\cdot\left(\frac{-3c}{b^2}\right)^3$

$=\frac{4a^2b^6}{c^4d^2}\div\frac{6a^4}{b^3}\cdot\left(-\frac{27c^3}{b^6}\right)$

$=-\frac{4a^2b^6}{c^4d^2}\cdot\frac{b^3}{6a^4}\cdot\frac{27c^3}{b^6}$

$=-\frac{18b^3}{cd^2a^2}$.

点拨:本题考查的是分式乘除和乘方的混合运算. 当分式中有负号出现时,应先确定整个式子的符号,然后再进行计算.

练习:

1. 解:(1)$\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x+1-1}{x}=\frac{x}{x}=1$.

(2)$\frac{a}{b+1}+\frac{2a}{b+1}-\frac{3a}{b+1}=\frac{a+2a-3a}{b+1}=0$.

点拨:此题考查同分母分式的加减法法则.

2. 解:(1)$\frac{1}{2c^2d}+\frac{1}{3cd^2}=\frac{3d}{6c^2d^2}+\frac{2c}{6c^2d^2}=\frac{3d+2c}{6c^2d^2}$.

(2)$\frac{3}{2m-n}-\frac{2m-n}{(2m-n)^2}$

$=\frac{3(2m-n)}{(2m-n)^2}-\frac{2m-n}{(2m-n)^2}$

$=\frac{3(2m-n)-(2m-n)}{(2m-n)^2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{2(2m-n)}{(2m-n)^2}=\frac{2}{2m-n}$.

(3) $\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}$

$=\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a^2-b^2}$

$=\frac{a-a+b}{a^2-b^2}$

$=\frac{b}{a^2-b^2}$.

(4) $\frac{a^2}{a-1}-a-1$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{a^2-1}{a-1}$

$=\frac{a^2-a^2+1}{a-1}$

$=\frac{1}{a-1}$.

点拨:异分母分式相加减,先通分,再根据同分母分式的加减法法则进行运算.

练习:

1. 解:问题3:$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}$

$=\frac{n+3}{n(n+3)}+\frac{n}{n(n+3)}$

$=\frac{n+3+n}{n(n+3)}$

$=\frac{2n+3}{n(n+3)}$.

问题4:$\frac{S_3-S_2}{S_2}-\frac{S_2-S_1}{S_1}$

$=\frac{S_1(S_3-S_2)}{S_1S_2}-\frac{S_2(S_2-S_1)}{S_1S_2}$

$=\frac{S_1(S_3-S_2)-S_2(S_2-S_1)}{S_1S_2}$

$=\frac{S_1S_3-S_2^2}{S_1S_2}$.

2. 解:(1) $\left(\frac{x}{2y}\right)^2\cdot\frac{y}{2x}-\frac{x}{y^2}\div\frac{2y^2}{x}$

$=\frac{x^2}{4y^2}\cdot\frac{y}{2x}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{x}{2y^2}$

$=\frac{x}{8y}-\frac{x^2}{2y^4}$

$=\frac{xy^3-4x^2}{8y^4}$.

(2) $\frac{x+1}{x}\cdot\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$

$=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{4x^2}{(x+1)^2}-\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{4x}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}$

$=\frac{4x(x-1)-2}{x^2-1}$

$=\frac{4x^2-4x-2}{x^2-1}$.

点拨:本题考查分式的加减乘除以及乘方的混合运算,注意计算时要细心.

练习:

1. (1)1;$\frac{1}{9}$ (2)1;$\frac{1}{9}$ (3)1;$\frac{1}{b^2}$

2. 解:(1) $x^2y^{-3}(x^{-1}y)^3=x^2y^{-3}\cdot x^{-3}y^3=$

$x^{-1}=\frac{1}{x}$.

(2) $(2ab^2c^{-3})^{-2}\div(a^{-2}b)^3$

$=\frac{1}{4}a^{-2}b^{-4}c^6\div a^{-6}b^3$

$=\frac{1}{4}a^{-2-(-6)}b^{-4-3}c^6$

$=\frac{1}{4}a^4b^{-7}c^6=\frac{a^4c^6}{4b^7}$.

练习:

1. 解:$0.000\,000\,001=10^{-9}$;

$0.001\,2=1.2\times10^{-3}$;

$0.000\,000\,345=3.45\times10^{-7}$;

$0.000\,000\,010\,8=1.08\times10^{-8}$.

2. 解:(1) $(2\times10^{-6})\times(3.2\times10^3)$

$=2\times3.2\times10^{-6}\times10^3$

$=6.4\times10^{-3}$.

(2) $(2\times10^{-6})^2\div(10^{-4})^3$

$=4\times10^{-12}\times10^{12}=4\times10^0$

$=4\times1=4$.

习题15.2

1. 解:(1) $\frac{6ab}{5c^2}\cdot\frac{10c}{3b}=\frac{4a}{c}$.

(2) $\frac{-7x}{3yz}\cdot\left(-\frac{9y^2}{x^2}\right)=\frac{7x}{3yz}\cdot\frac{9y^2}{x^2}=\frac{21y}{xz}$.

(3) $\frac{2m}{5n}\div\frac{4m^2}{10n^3}=\frac{2m}{5n}\cdot\frac{10n^3}{4m^2}=\frac{n^2}{m}$.

(4) $\frac{x}{5y}\div\left(-\frac{4x^2}{5y^2}\right)=-\frac{x}{5y}\cdot\frac{5y^2}{4x^2}=-\frac{y}{4x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:本题考查分式的乘除法法则,注意灵活运用.

2. 解:(1)$\frac{4a+4b}{5ab}\cdot\frac{15a^2b}{a^2-b^2}$

$=\frac{4(a+b)}{5ab}\cdot\frac{15a^2b}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{12a}{a-b}$.

(2)$\frac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4}\cdot\frac{x+2}{3x^2+6xy}$

$=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+2)^2}\cdot\frac{x+2}{3x(x+2y)}$

$=\frac{x-2y}{3x(x+2)}$.

(3)$\frac{x^2+1}{x-6}\cdot\frac{x^2-36}{x^3+x}=\frac{x^2+1}{x-6}\cdot\frac{(x+6)(x-6)}{x(x^2+1)}$

$=\frac{x+6}{x}$.

(4)$\frac{y^2-x^2}{5x^2-4xy}\div\frac{x+y}{5x-4y}$

$=\frac{(y+x)(y-x)}{x(5x-4y)}\cdot\frac{5x-4y}{x+y}$

$=\frac{y-x}{x}$.

点拨:本题考查分式的乘除法法则,当分式的分子、分母中有多项式时,若能分解因式,则应先分解因式,再进行运算.

3. 解:(1)$\frac{4a^2b}{3cd^2}\cdot\frac{5c^2d}{4ab^2}\div\frac{2abc}{3d}=\frac{4a^2b}{3cd^2}\cdot\frac{5c^2d}{4ab^2}\cdot\frac{3d}{2abc}$

$=\frac{5}{2b^2}$.

(2)$\frac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\frac{a-9}{2a+6}\cdot\frac{a+3}{a+9}$

$=\frac{(9+a)(9-a)}{(a+3)^2}\cdot\frac{2(a+3)}{a-9}\cdot\frac{a+3}{a+9}$

$=-2$.

(3)$\left(\frac{-3x^3y}{3z^2}\right)^2=\frac{x^6y^2}{z^4}$.

(4)$\left(\frac{-a}{b}\right)^2\div\left(\frac{2a^2}{5b}\right)^2\cdot\frac{a}{5b}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{25b^2}{4a^4}\cdot\frac{a}{5b}$

$=\frac{5}{4ab}$.

点拨:本题考查分式的乘除法法则以及整数指数幂的运算.

4. 解:(1)$\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{a+1}{a+1}=1$.

(2)$\frac{3}{x+1}-\frac{3x}{x+1}=\frac{3-3x}{x+1}$.

(3)$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^2}=\frac{a+1}{(a+1)^2}=\frac{1}{a+1}$.

(4)$\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{3x}{(x-1)^2}=\frac{3-3x}{(x-1)^2}=\frac{3(1-x)}{(1-x)^2}$

$=\frac{3}{1-x}$.

点拨:本题考查同分母分式的加减法法则,注意分式的符号.

5. 解:(1)$\frac{2a}{5a^2b}+\frac{3b}{10ab^2}=\frac{4ab}{10a^2b^2}+\frac{3ab}{10a^2b^2}=\frac{7ab}{10a^2b^2}$

$=\frac{7}{10ab}$.

(2)$\frac{2m}{5n^2p}-\frac{3n}{4mp^2}=\frac{8m^2p}{20n^2mp^2}-\frac{15n^3}{20n^2mp^2}$

$=\frac{8m^2p-15n^3}{20n^2mp^2}$.

(3)$\frac{3y}{2x+2y}+\frac{2xy}{x^2+xy}$

$=\frac{3y}{2(x+y)}+\frac{2xy}{x(x+y)}$

$=\frac{3y}{2(x+y)}+\frac{2y}{x+y}$

$=\frac{3y+4y}{2(x+y)}=\frac{7y}{2(x+y)}$.

(4)$\frac{2x}{x^2-64y^2}-\frac{1}{x-8y}$

$=\frac{2x}{(x+8y)(x-8y)}-\frac{1}{x-8y}$

$=\frac{2x-x-8y}{(x+8y)(x-8y)}$

$=\frac{x-8y}{(x+8y)(x-8y)}$

$=\frac{1}{x+8y}$.

点拨:本题考查异分母分式的加减法运算,注意寻找最简公分母的方法.

6. 解:(1)$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\div\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$

$=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\div\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$

$=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(b+a)(b-a)}$

$=\frac{a+b}{b-a}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\left(\frac{3x^2}{4y}\right)^2 \cdot \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{2y^2} \div \frac{2y^2}{x}$

$= \frac{9x^4}{16y^2} \cdot \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{2y^2} \cdot \frac{x}{2y^2}$

$= \frac{3x^3}{8y} + \frac{x^3}{4y^4}$

$= \frac{3x^3y^3 + 2x^3}{8y^4}$.

(3) $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+y}\right) \cdot \frac{xy}{x+2y} \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

$= \frac{x+2y}{x+y} \cdot \frac{xy}{x+2y} \div \frac{x+y}{xy}$

$= \frac{xy}{x+y} \cdot \frac{xy}{x+y}$

$= \frac{x^2y^2}{(x+y)^2}$.

(4) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \frac{2a-2b}{3a+3b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \div \frac{a}{b}$

$= \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{2(a-b)}{3(a+b)} - \frac{a^2}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{b}{a}$

$= \frac{2(a+b)}{3(a-b)} - \frac{ab}{(a+b)(a-b)}$

$= \frac{2(a+b)^2 - 3ab}{3(a+b)(a-b)}$.

点拨:此题考查分式的混合运算,注意运算顺序,先乘方,再乘除,然后加减.

7. 解:(1) $3a^{-2}b \cdot 2ab^{-2} = 6a^{-1}b^{-1} = \frac{6}{ab}$.

(2) $4xy^2z \div (-2x^{-2}yz^{-1})$

$= 4xy^2z \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^{-1}z\right)$

$= -2x^3yz^2$;

(3) $(-3ab^{-1})^3 = -27a^3b^{-3} = -\frac{27a^3}{b^3}$.

(4) $(2m^2n^{-2})^2 \cdot 3m^{-3}n^3$

$= 4m^4n^{-4} \cdot 3m^{-3}n^3 = 12mn^{-1}$

$= \frac{12m}{n}$.

8. 解:$0.000\,01 = 1 \times 10^{-5}$;$0.000\,02 = 2 \times 10^{-5}$;

$0.000\,000\,567 = 5.67 \times 10^{-7}$;

$0.000\,000\,301 = 3.01 \times 10^{-7}$.

9. 解:(1) $(2 \times 10^{-3}) \times (5 \times 10^{-3})$

$= 10 \times 10^{-6}$

$= 10^{-5}$.

(2) $(3 \times 10^{-5})^2 \div (3 \times 10^{-1})^2$

$= (9 \times 10^{-10}) \div (9 \times 10^{-2})$

$= 10^{-8}$.

点拨:本题考查整数指数幂的基本运算.

10. 解:由题意可知,逆流航速为 $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{np}{mq}$ (km/h),∴ 这艘船逆流航行 t h走的路程为 $\frac{np}{mq} \cdot t = \frac{npt}{mq}$(km).

点拨:本题是分式乘法的实际应用.

11. 解:10个人插秧的工作效率为 $\frac{a}{m}$ hm^2/天,一个人插秧的工作效率为 $\frac{a}{10m}$ hm^2/天,一台插秧机的工作效率为 $\frac{a}{m-3}$ hm^2/天,∴ 一台插秧机的工作效率是一个人工作效率的 $\frac{a}{m-3} \div \frac{a}{10m} = \frac{10m}{m-3}$ 倍. **点拨**:本题考查分式除法的实际应用,注意分式除法的运算法则.

12. 解:漫灌时每天用水 $\frac{m}{a}$ t,喷灌时每天用水 $\frac{m}{a+3}$ t,∴ 现在比原来每天节约用水 $\frac{m}{a} - \frac{m}{a+3} = \frac{ma+3m-ma}{a(a+3)} = \frac{3m}{a(a+3)}$(t).

点拨:本题考查分式减法的实际应用,注意异分母分式减法法则.

13. 解:火车提速前的速度为 $\frac{n}{t}$ km/h,提速后的速度为 $\frac{n}{t-0.5}$ km/h,∴ 提速后火车的速度比原来速度快了 $\frac{n}{t-0.5} - \frac{n}{t} = \frac{nt-nt+0.5n}{t(t-0.5)} = \frac{n}{t(2t-1)}$ (km/h).

点拨:本题考查分式减法的实际应用,注意时间(t)、速度(v)、路程(s)之间的关系为 $s = vt$.

14. 解:甲的工作效率为 $\frac{m}{n}$ hm^2/h,乙的工作效率为 $\frac{m}{n-0.5}$ hm^2/h,∴ 甲、乙两人一起收割完这块麦田需要的时间为 $\frac{m}{\frac{m}{n} + \frac{m}{n-0.5}} = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{2}{2n-1}} = \frac{1}{\frac{2n-1+2n}{n(2n-1)}} = \frac{n(2n-1)}{4n-1}$(h).

点拨:本题考查了分式在实际问题中的应用以及

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

分式的运算.

15. 解:(1)$\frac{p}{mn}+\frac{m}{np}+\frac{n}{pm}=\frac{p^2+m^2+n^2}{mnp}$.

(2) $\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}=\frac{(c-a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

规律:略.

16. 解:(1)由题意可知,长方体盒子的高为$\frac{V}{a^2}$,

∴这个盒子的表面积为 $a^2+4a\cdot\frac{V}{a^2}=a^2+\frac{4V}{a}=\frac{a^3+4V}{a}$.

(2)由题意可知,长方体盒子的高为$\frac{V}{b\cdot c}=\frac{V}{bc}$,

∴这个盒子的表面积为 $bc+2b\cdot\frac{V}{bc}+2c\cdot\frac{V}{bc}=bc+\frac{2V}{c}+\frac{2V}{b}=\frac{b^2c^2+2bV+2cV}{bc}$.

(3)由题意可知,$a^2=bc$,∴这两种盒子的表面积的差为

$$\left|\frac{a^3+4V}{a}-\frac{b^2c^2+2bV+2cV}{bc}\right|$$

$$=\left|\frac{bc(a^3+4V)-a(b^2c^2+2bV+2cV)}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{a^3bc+4bcV-ab^2c^2-2abV-2acV}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{abc(a^2-bc)+2V(2bc-ab-ac)}{abc}\right|$$

$$=\left|(a^2-bc)+\frac{2V(2bc-ab-ac)}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{2V(2a^2-ab-ac)}{a^3}\right|$$

$$=\left|\frac{2V(2a-b-c)}{a^2}\right|.$$

点拨:本题考查了分式的实际应用.

15.3 分式方程

练习:

解:(1)$\frac{5}{x}=\frac{7}{x-2}$,方程两边乘$x(x-2)$,

得$5(x-2)=7x$.

解得$x=-5$.

经检验,$x=-5$是原分式方程的解.

(2)$\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-1}$,方程两边乘$(x+3)(x-1)$,

得$2(x-1)=x+3$.

解得$x=5$.

经检验,$x=5$是原分式方程的解.

练习:

解:(1)$\frac{1}{2x}=\frac{2}{x+3}$,方程两边乘$2x(x+3)$,得$x+3=4x$. 解得$x=1$. 经检验,$x=1$是原分式方程的解.

(2)$\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{3x+3}+1$,原方程可变形为$\frac{x}{x+1}=\frac{5x+3}{3x+3}$,方程两边乘$3(x+1)$,得$3x=5x+3$. 解得$x=-\frac{3}{2}$. 经检验,$x=-\frac{3}{2}$是原分式方程的解.

(3)$\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x^2-1}$,方程两边乘$x^2-1$,得$2(x+1)=4$. 解得$x=1$. 检验:当$x=1$时,$x^2-1=0$,因此$x=1$不是原分式方程的解,∴原分式方程无解.

(4)$\frac{5}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-x}=0$,原方程可变形为$\frac{5}{x^2+x}=\frac{1}{x^2-x}$,方程两边乘$x(x^2-1)$,得$5(x-1)=x+1$.

解得$x=\frac{3}{2}$. 经检验,$x=\frac{3}{2}$是原分式方程的解.

点拨:解分式方程时,应先将分式方程转化为整式方程,再求解,注意最后应对根进行检验.

练习:

1. 解:设骑车学生的速度为x km/min,则汽车的速度为$2x$ km/min. 根据题意,得$\frac{10}{x}=\frac{10}{2x}+20$. 解得$x=\frac{1}{4}$. 经检验,$x=\frac{1}{4}$是原分式方程的解.

答:骑车学生的速度为$\frac{1}{4}$km/min.

点拨:注意列方程的一般步骤.

2. 解:设甲每小时做零件x个,则乙每小时做零件$(x-6)$个. 由题意,得$\frac{90}{x}=\frac{60}{x-6}$. 解得$x=18$. 经检验,$x=18$是原分式方程的解. $18-6=12$(个),∴乙每小时做零件12个.

答:甲、乙每小时分别做零件18个,12个.

习题 15.3

1. 解:(1)$\frac{1}{x}=\frac{5}{x+3}$,方程两边乘$x(x+3)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得 $x+3=5x$. 解得 $x=\frac{3}{4}$.

经检验,$x=\frac{3}{4}$是原分式方程的解.

(2)$\frac{x}{x-1}=\frac{3}{2x-2}-2$,方程两边乘$2(x-1)$,得$2x=3-4(x-1)$. 解得$x=\frac{7}{6}$. 经检验,$x=\frac{7}{6}$是原分式方程的解.

(3)$\frac{2}{2x-1}=\frac{4}{4x^2-1}$,原方程可变形为$\frac{1}{2x-1}=\frac{2}{4x^2-1}$,方程两边乘$(2x+1)(2x-1)$,得$2x+1=2$. 解得 $x=\frac{1}{2}$. 检验:当$x=\frac{1}{2}$时,$(2x+1)(2x-1)=0$,因此$x=\frac{1}{2}$不是原分式方程的解,∴ 原分式方程无解.

(4)$\frac{3}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2-2x}=0$,原方程可变形为$\frac{3}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$,方程两边乘$x(x+2)(x-2)$,得$3(x-2)=x+2$. 解得 $x=4$. 经检验,$x=4$ 是原分式方程的解.

(5)$\frac{x}{x-3}=\frac{x+1}{x-1}$,方程两边乘$(x-3)(x-1)$,得$x(x-1)=(x-3)(x+1)$. 解得 $x=-3$. 经检验,$x=-3$ 是原分式方程的解.

(6)$\frac{x-3}{x-2}+1=\frac{3}{2-x}$,原方程可变形为$\frac{2x-5}{x-2}=\frac{3}{2-x}$,方程两边乘$x-2$,得$2x-5=-3$. 解得$x=1$. 经检验,$x=1$ 是原分式方程的解.

(7)$\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{5}{6x+6}$,方程两边乘$6x(x+1)$,得$6(2x+1)=5x$. 解得$x=-\frac{6}{7}$. 经检验,$x=-\frac{6}{7}$是原分式方程的解.

(8)$\frac{3}{2}-\frac{1}{3x-1}=\frac{5}{6x-2}$,原方程可变形为$\frac{9x-5}{2(3x-1)}=\frac{5}{2(3x-1)}$,方程两边乘$2(3x-1)$,得$9x-5=5$. 解得 $x=\frac{10}{9}$. 经检验,$x=\frac{10}{9}$是原分式方程的解.

点拨:解分式方程的关键是将其转化为整式方程,注意验根.

2. 解:(1)$\frac{1}{x-1}+a=1(a\neq1)$,原方程可变形为$\frac{1}{x-1}=1-a$,方程两边乘$x-1$,得$1=(1-a)(x-1)$. 解得 $x=\frac{2-a}{1-a}$.

经检验,$x=\frac{2-a}{1-a}$是原分式方程的解.

(2)$\frac{m}{x}-\frac{1}{x+1}=0(m\neq0$,且$m\neq1)$,方程两边乘$x(x+1)$,得$m(x+1)-x=0$. 解得 $x=\frac{m}{1-m}$. 经检验,$x=\frac{m}{1-m}$是原分式方程的解.

3. 解:设甲的速度为 x km/min,则乙的速度为$\frac{4}{3}x$ km/min.

根据题意,得$\frac{10}{\frac{4}{3}x}-\frac{6}{x}=20$. 解得 $x=\frac{3}{40}$.

经检验,$x=\frac{3}{40}$是原分式方程的解.

$\frac{4}{3}x=\frac{4}{3}\times\frac{3}{40}=\frac{1}{10}$.

答:甲的速度为 $\frac{3}{40}$ km/min,乙的速度为 $\frac{1}{10}$ km/min.

4. 解:设 A 型机器人每小时搬运化工原料x kg,则B型机器人每小时搬运化工原料$(x-30)$ kg.

根据题意,得$\frac{900}{x}=\frac{600}{x-30}$. 整理,

得 $900x-27\ 000=600x$. 解得 $x=90$.

经检验,$x=90$ 是原分式方程的解.

$x-30=60$.

答:A 型机器人每小时搬运化工原料90 kg,B 型机器人每小时搬运化工原料 60 kg.

点拨:抓住题中的等量关系,列分式方程,并正确求解,是解决此类问题的关键.

5. 解:设李强单独清点这批图书需要 x h.

根据题意,得$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{x}}=1.2$.

解得 $x=4$. 经检验,$x=4$ 是原分式方程的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答:如果李强单独清点这批图书需要 4 h.

6. 解:设小水管的注水速度为 x m^3/min,则大水管的注水速度为 $4x$ m^3/min. 根据题意,得 $\frac{\frac{V}{2}}{x}+\frac{\frac{V}{2}}{4x}=t$. 解关于 x 的分式方程,得 $x=\frac{5V}{8t}$. 经检验,$x=\frac{5V}{8t}$ 是原分式方程的解. $4x=\frac{5V}{2t}$.

答:大、小两根水管的注水速度分别为 $\frac{5V}{2t}$ m^3/min,$\frac{5V}{8t}$ m^3/min.

点拨:本题的等量关系为:用小水管注水的时间 + 用大水管注水的时间 = t min,利用此等量关系列分式方程,并求解即可.

7. 解:设原来玉米平均每公顷的产量为 x t,则现在玉米平均每公顷的产量为 $(x+a)$ t. 根据题意,得 $(x+a)\cdot\frac{m}{x}-m=20$. 解得 $x=\frac{am}{20}$. 经检验,$x=\frac{am}{20}$ 是原分式方程的解. $x+a=\frac{am}{20}+a=\frac{a(m+20)}{20}$,

∴ 现在玉米平均每公顷的产量为 $\frac{a(m+20)}{20}$ t.

答:原来玉米平均每公顷的产量为 $\frac{am}{20}$ t,现在玉米平均每公顷的产量为 $\frac{a(m+20)}{20}$ t.

点拨:注意解题过程中的未知数的设法.

8. 解:设第一组的攀登速度为 x m/min,则第二组的攀登速度为 $\frac{x}{1.2}$ m/min. 根据题意,得 $\frac{450}{\frac{x}{1.2}}-\frac{450}{x}=15$. 解得 $x=6$. 经检验,$x=6$ 是原分式方程的解.

$\frac{x}{1.2}=5$,∴ 第二组的攀登速度为 5 m/min.

答:第一组的攀登速度为 6 m/min,第二组的攀登速度为5 m/min.

设第一组的攀登速度为 y m/min,则第二组的攀登速度为 $\frac{y}{a}$ m/min. 根据题意,得 $\frac{h}{\frac{y}{a}}-\frac{h}{y}=t$.

解得 $y=\frac{h(a-1)}{t}$.

经检验,$y=\frac{h(a-1)}{t}$ 是原分式方程的解.

$\frac{y}{a}=\frac{h(a-1)}{at}$,

∴ 第二组的攀登速度为 $\frac{h(a-1)}{at}$ m/min.

答:第一组的攀登速度为 $\frac{h(a-1)}{t}$ m/min,第二组的攀登速度为 $\frac{h(a-1)}{at}$ m/min.

9. 解:已知甲的工作效率是乙的 2 倍. 某项工作先由甲完成 $\frac{2}{3}$,再由乙完成剩下的部分,这样完成这项工作所用的时间比甲、乙两人共同完成这项工作所用的时间多 4 天,问甲、乙单独完成这项工作各需要多少天?

解:设乙的工作效率是 x,则甲的工作效率为 $2x$,由题意,可得 $\left(\frac{\frac{2}{3}}{2x}+\frac{\frac{1}{3}}{x}\right)-\frac{1}{x+2x}=4$. 整理,得 $\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x}=4$. 解得 $x=\frac{1}{12}$. 经检验,$x=\frac{1}{12}$ 是原分式方程的解. $\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1}{12}}=12$,$\frac{1}{2x}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$,∴ 乙单独完成这项工作需要 12 天,甲单独完成这项工作需要 6 天.

答:甲、乙单独完成这项工作分别需要 6 天,12 天.

点拨:应用题的编写合理,解答正确即可. 答案不唯一.

复习题 15

1. 解:整式有:$\frac{x}{3}$,$\frac{a+b}{15}$;分式有:$\frac{1}{n}$,$\frac{1}{a+5}$,$\frac{z}{x^2y}$,$\frac{2ab}{(a+b)^2}$.

点拨:分式与整式的根本区别是:分式的分母中含有字母.

2. 解:(1) $\frac{s-2t}{3s}\cdot\frac{6s^2}{s+2t}=\frac{2s(s-2t)}{s+2t}$.

(2) $\frac{x-y}{x+y}\div(x-y)^2=\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{1}{x^2-y^2}$.

(3) $\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a+1}=\frac{2(a+1)}{a+1}=2$.

(4) $\frac{u-2v}{u+2v}-\frac{2}{u^2-4v^2}$

$=\frac{(u-2v)^2}{(u+2v)(u-2v)}-\frac{2}{(u+2v)(u-2v)}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{(u-2v)^2-2}{(u+2v)(u-2v)}$.

(5)$(x^{-2}y^3)^{-3}=x^6y^{-9}=\frac{x^6}{y^9}$.

(6)$\left(\frac{-3x}{y^3z}\right)^2=\frac{9x^2}{y^6z^2}$.

点拨:本题考查分式的加减乘除以及整数指数幂的运算.

3. 解:(1)$\frac{2m}{3n}\cdot\left(\frac{3n}{p}\right)^2\div\frac{mn}{p^2}=\frac{2m}{3n}\cdot\frac{9n^2}{p^2}\cdot\frac{p^2}{mn}=6$.

(2)$a^2b^3\cdot(ab^2)^{-2}=a^2b^3\cdot a^{-2}b^{-4}=b^{-1}=\frac{1}{b}$.

(3)$\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}+\frac{x}{x-4}$

$=\frac{(x-4)(x+4)}{(x+4)^2}+\frac{x}{x-4}$

$=\frac{x-4}{x+4}+\frac{x}{x-4}$

$=\frac{(x-4)(x-4)+x(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{2x^2-4x+16}{(x+4)(x-4)}$.

(4)$\left(\frac{pq}{2r}\right)^3\div\frac{2p}{r^2}+\frac{1}{2q}$

$=\frac{p^3q^3}{8r^3}\cdot\frac{r^2}{2p}+\frac{1}{2q}$

$=\frac{p^2q^3}{16r}+\frac{1}{2q}$

$=\frac{p^2q^4+8r}{16rq}$.

(5)$1\div\left(2x+\frac{1-x^2}{x}\right)$

$=\frac{1}{2x+\frac{1-x^2}{x}}=\frac{1}{\frac{2x^2+1-x^2}{x}}$

$=\frac{x}{x^2+1}$.

(6)$\frac{a-b}{a}\div\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)$

$=\frac{a-b}{a}\div\frac{a^2-2ab+b^2}{a}$

$=\frac{a-b}{a}\cdot\frac{a}{(a-b)^2}$

$=\frac{1}{a-b}$.

(7)$1-\frac{a-b}{a+2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$

$=1-\frac{a-b}{a+2b}\cdot\frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a-b)}$

$=1-\frac{a+2b}{a+b}=\frac{a+b-a-2b}{a+b}$

$=-\frac{b}{a+b}$.

(8)$\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$

$=\frac{(x-y)^2+4xy}{x-y}\cdot\frac{(x+y)^2-4xy}{x+y}$

$=\frac{(x+y)^2}{x-y}\cdot\frac{(x-y)^2}{x+y}=x^2-y^2$.

点拨:本题考查分式的运算,注意分式的通分和约分.

4. 解:(1)$\frac{5x+2}{x^2+x}=\frac{3}{x+1}$,原方程可变形为$\frac{5x+2}{x(x+1)}=\frac{3}{x+1}$,方程两边乘$x(x+1)$,得$5x+2=3x$,$2x=-2$. 解得$x=-1$. 检验:当$x=-1$时,$x(x+1)=0$,因此$x=-1$不是原分式方程的解,∴ 原分式方程无解.

(2)$\frac{2x}{2x-5}-\frac{2}{2x+5}=1$,方程两边乘$(2x-5)(2x+5)$,得$2x(2x+5)-2(2x-5)=(2x+5)(2x-5)$. 整理,得$6x=-35$. 解得$x=-\frac{35}{6}$. 经检验,$x=-\frac{35}{6}$是原分式方程的解.

5. 解:(1)当$\begin{cases}2x+1\neq0,\\x-2\neq0\end{cases}$时,分式有意义,解得$x\neq-\frac{1}{2}$且$x\neq2$,∴ 当$x\neq-\frac{1}{2}$且$x\neq2$时,分式有意义.

(2)当$\begin{cases}x+2\neq0,\\x-2\neq0,\\2x-3\neq0\end{cases}$时,分式有意义,解得$x\neq-2$且$x\neq2$且$x\neq\frac{3}{2}$,∴ 当$x\neq-2$且$x\neq2$且$x\neq\frac{3}{2}$时,分式有意义.

6. (1)2 (2)大于$-\frac{1}{2}$的实数 (3)小于2的实数

点拨:分式的值为0、为正、为负,无论是哪种情况分母都不能为0.

7. 解:由题意,得$2(x+1)^{-1}=3(x-2)^{-1}$,即$\frac{2}{x+1}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{3}{x-2}$. 解得 $x=-7$. 经检验，$x=-7$ 是所列分式方程的解. ∴ 当 $x=-7$ 时，$2(x+1)^{-1}$ 与 $3(x-2)^{-1}$ 的值相等.

8. 解：设原计划平均每天生产 x 台机器，则现在平均每天生产 $(x+50)$ 台机器.

根据题意，得 $\frac{600}{x+50}=\frac{450}{x}$.

解得 $x=150$.

经检验，$x=150$ 是原分式方程的解.

$x+50=200$，

∴ 现在平均每天生产 200 台机器.

答：现在平均每天生产 200 台机器.

点拨：列分式方程解应用题时，注意题中的等量关系.

9. 解：设一个农民的工作效率为 x hm^2/h，则一台收割机的工作效率为 $150x$ hm^2/h.

由题意，得 $\frac{10}{100x}-\frac{10}{150x}=1$.

解得 $x=\frac{1}{30}$.

经检验，$x=\frac{1}{30}$ 是原分式方程的解.

$150x=150\times\frac{1}{30}=5$，

∴ 一台收割机的工作效率为 5 hm^2/h.

答：这台收割机每小时收割 5 hm^2 小麦.

10. 解：设前一小时的行驶速度为 x km/h，则提速后的速度为 $1.5x$ km/h.

根据题意，得 $\frac{180-x}{1.5x}+1+\frac{40}{60}=\frac{180}{x}$. 解得 $x=60$.

经检验，$x=60$ 是原分式方程的解.

答：前一小时的行驶速度为 60 km/h.

点拨：此题是常见的行程问题，注意解题步骤.

11. 解：(1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1-x}{1+x}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-x}{1+x}$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，原式 $=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$.

(2) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\div\frac{x-2}{x^2+2x}+3$

$=\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x(x+2)}{x-2}+3$

$=x+3$.

当 $x=-3.2$ 时，原式 $=-3.2+3=-0.2$.

12. 解：由题意，得 $S=2a(R-r)+\pi(R^2-r^2)$，

整理，得 $a=\frac{S-\pi(R^2-r^2)}{2(R-r)}$.

∴ 直跑道的长 $a=\frac{S-\pi(R^2-r^2)}{2(R-r)}$.

13. 解：(1) 不能为 0.

理由：假设 $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}=0$，

则 $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=0$，

∴ $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=0,\\ abc\neq0.\end{cases}$

又∵ $a^2\geqslant0$，$b^2\geqslant0$，$c^2\geqslant0$，

∴ $a^2+b^2+c^2\geqslant0$.

当 $a^2+b^2+c^2=0$ 时，有 $a=b=c=0$.

又∵ $abc\neq0$，

∴ 假设不成立.

∴ $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$ 的值不能为 0.

(2) 不能为 0.

理由：假设 $\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b-c}{(a-b)(c-a)}+\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}=0$，

则 $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$，

∴ $\begin{cases}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,\\ (a-b)(b-c)(c-a)\neq0.\end{cases}$

又∵ $(a-b)^2\geqslant0$，$(b-c)^2\geqslant0$，$(c-a)^2\geqslant0$，

∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant0$.

当 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 时，

有 $a-b=b-c=c-a=0$.

又∵ $(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$，

∴ 假设不成立.

故 $\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b-c}{(a-b)(c-a)}+\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}$ 的值不能为 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记

点拨®

荣德基初中频道

特高
教

点拨

八年级

数学

上

(R版)

荣德基 主编

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料