教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

中国品牌创新发展工程　推荐品牌



本书解题方法94招·七八九年级共276招

八年级
数学（上）
荣德基 主编
（JJ版）
赠教材习题答案

陕西新华出版传媒集团　陕西人民教育出版社

扫码后，您将享受10项专属服务

海量资源
一码搞定

教师专享服务

1. 配套授课课件
2. 其他相关教学资源包
3. 单元测试卷电子版

学生专享服务

4. 重难点点拨微课堂 直通车
5. 物理动态实验演示视频
6. 化学动态实验演示视频
7. 线上答疑解惑服务

惊喜活动

8. 尖子生凭成绩单免费领取《点拨》
9. 教师免费领取样书试用大礼包
10. 优秀教师有机会加入中国品牌创新发展工程推荐品牌《点拨》丛书编委会

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

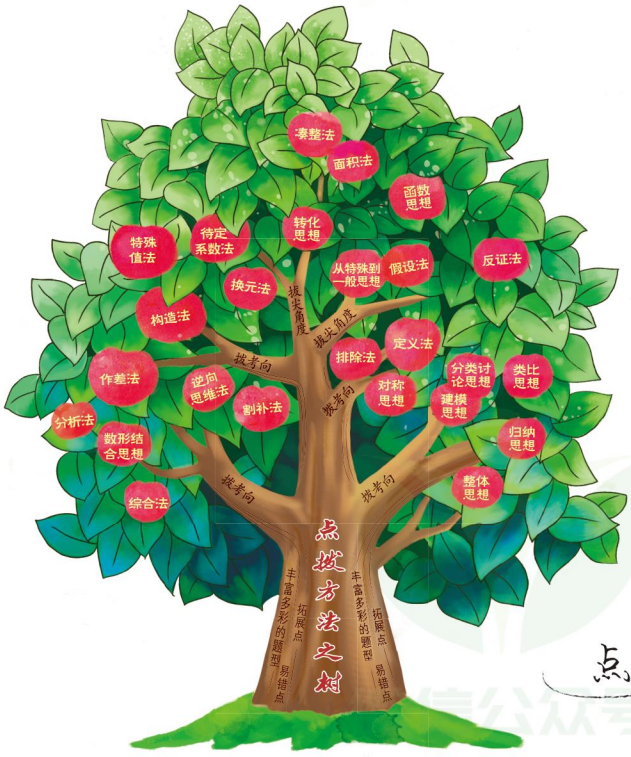
点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 上 （JJ 版）

荣德基 主编

本册主编：范志刚



老师指点方法
点拨只为高分

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨

批注式学习的践行者

老师批注方法
点拨只为高分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

买书？看完点拨再做决定！

中考压轴题的抢分绝招
培优拔尖题的破解策略
实用的方法技巧揭秘
精准的重难疑惑点拨
简约的知识梳理总结

冲满分

三个维度 打造极致

第1步

基础速提分

给你一把打开数学之门的钥匙

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的乘法

1. 分式的乘法法则

分式与分式相乘，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母．

用字母表示为 $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$．

2. 法则的运用方法

（1）若分子、分母都是单项式，可直接利用分式的乘法法则运算后再约分；

（2）若分子、分母中有多项式，可先对分子、分母因式分解，约分后，再进行乘法运算；

（3）若分式乘整式，可把整式看成分母为 1 的分式参与运算．

（4）运算的结果应为最简分式或整式．

特别解读

分式乘法运算的基本步骤：

第一步：确定积的符号，写在积中分式的前面．

第二步：运用法则，将分子与分母分别相乘，多项式要用括号．

第三步：约分，将结果化成最简分式或整式．

第2步

方法提高分

为你提供解题秘方

点方法·拨技巧 提高分

技巧角度 3 利用补形构造“三线合一”基本图形证明线段的倍分关系

例 13 如图 17-1-16，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$\angle 1=\angle 2$，$CE\perp BE$，求证：$BD=2CE$．

解题秘方：由角平分线与高线重合，构造等腰三角形，利用等腰三角形“三线合一”证明线段的倍分关系．

证明：延长 CE 交 BA 的延长线于点 F，如图 17-1-16 所示．

$\because CE\perp BE$，$\therefore\angle BEC=\angle BEF=90°$．

$\because\angle 1=\angle 2$，$\therefore\angle F=\angle BCE$．

$\therefore BC=BF$．

$\therefore CE=FE=\frac{1}{2}CF$，即 $CF=2CE$．

$\because\angle F+\angle 2=180°-90°=90°$，$\angle F+\angle ACF=180°-90°=90°$，

$\therefore\angle 2=\angle ACF$．

又 $\because AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAF=90°$，

图 17-1-16

方法点拨

1. 等腰三角形构造法：

等腰三角形是个轴对称图形，“三线”所在的直线是对称轴，它将等腰三角形一分为二，若在图中出现其中一半，则可通过补形，构造出“三线合一”的基本图形．

2. 倍长线段法：

证明一条线段等于另外一条线段的两倍，可以延长较短线段，并使其延长部分与较短线段相等，即作一条线段等于较短线段的两倍，

第3步

考法得满分

让你从默默无闻走向优秀卓越

点中考·拨模拟 得满分

三年中考两法

考法 2 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数

例 10 【中考·大门】如图 13-2-10，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 在 AB 边上，将△CBD 沿 CD 折叠，使点 B 恰好落在 AC 边上的点 E 处．若 $\angle A=26°$，则 $\angle CDE=$_____．

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是折叠，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数．

解：由三角形内角和定理可知 $\angle B=64°$，

由折叠可知△$BCD\cong$△ECD．

$\therefore\angle BCD=\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，

$\angle CED=\angle B=64°$．

$\therefore\angle CDE=180°-\angle DCE-\angle CED=180°-45°-64°=71°$．

答案：71°

图 13-2-10

解法指导

平移、旋转、翻折变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等三角形的性质得到对应线相等，对应角相等，从而解决问题．

本题属于翻折变换，它是看折叠前后的△CBD 与△CED 全等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点 94 个 得高分

第十二章 分式和分式方程

		页码
1	判断一个式子是否是分式的方法	2
2	求分式有意义时字母的取值范围的方法	3
3	求分式值为 0 的字母值的方法	4
4	利用分式的基本性质化系数为整数的方法	6
5	约分的方法	7
6	求解当分式的值为负数时字母的取值范围的方法	8
7	整体思想	9
8	换元法	9
9	分式乘方的方法	13
10	转化思想	14
11	确定最简公分母的一般方法	20
12	作差法	23
13	倒数法	24
14	利用倒数法求分式值的方法	24
15	拆项法	24
16	从特殊到一般的思想	24
17	整体代入法	25
18	判断一个方程是不是分式方程的方法	27
19	检验方程解的方法	28
20	分组通分法	30
21	分类讨论思想	30
22	根据分式方程的解的范围求字母取值范围的方法	31
23	整体通分法	41
24	逐项通分法	41
25	特殊值法	42
26	裂项相消法	46

第十三章 全等三角形

1	综合法	53
2	分析法	53
3	建模思想	53
4	确定两个图形全等的方法	56
5	利用全等三角形的性质求角的度数的方法	58
6	证明线段位置关系的方法	58
7	等面积法	58
8	逆向思维法	59
9	解答探究条件类题目的方法	59
10	分类讨论思想	59
11	方程思想	59
12	数形结合思想	59
13	证明三角形全等找条件的方法	65
14	构造法	66
15	截长补短法	66
16	加倍折半法	66
17	证明一条线段等于两条线段的和的方法	66
18	证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法	67
19	类比法	68
20	列举法	76
21	倍长中线法	82

第十四章 实数

1	求一个正数的平方根的方法	87
2	定义法	90
3	解决条件式中被开方数互为相反数问题的方法	90
4	方程思想	93
5	平方法	94
6	分类讨论思想	95
7	数形结合思想	101
8	估算法	102
9	夹逼法	102
10	作差法	102
11	整体思想	103
12	利用绝对值的性质进行化简的方法	103
13	确定$\sqrt{a}$的整数部分、小数部分的一般方法	104
14	判断近似数的精确度的方法	107
15	把较大的数精确到十位、百位、千位的方法	108
16	由近似数确定准确数的范围的方法	108
17	特殊值法	117
18	比较实数大小的方法	117
19	作商法	117

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 94 个 得高分

第十五章 二次根式

	页码
1 利用商的算术平方根的性质化简二次根式的方法	126
2 定义法	128
3 求使代数式有意义的条件的方法	129
4 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a \geqslant 0$，$b>0$）的运算方法	133
5 二次根式乘除混合运算的方法	135
6 比较两个二次根式的大小的方法	135
7 平方法	135
8 整体思想	140
9 用整体思想求代数式的值的方法	140
10 数形结合思想	140
11 倒数法	144
12 “根号外的非负因数（式）移到根号内”的方法	149
13 作商法	153
14 作差法	153
15 换元法	153
16 配方法	153

第十六章 轴对称和中心对称

	页码
1 识别轴对称图形的方法	158
2 识别两个图形成轴对称的方法	158
3 定义法	158
4 反面观察法	158
5 利用成轴对称图形的性质求线段的长度或角的度数的方法	159
6 求分散的阴影部分面积的方法	161
7 判定线段垂直平分线的两种方法	165
8 作出到三点距离相等的点的方法	166
9 对称法	166
10 转化思想	172
11 等面积法	175
12 利用等面积法求三角形的角平分线的交点到三边的距离的方法	175
13 识别中心对称图形的方法	178
14 折叠法	178
15 旋转法	178
16 分割法	188
17 数形结合思想	193
18 开放思想	194

第十七章 特殊三角形

	页码
1 证明一个三角形是等边三角形的方法	204
2 构造法	205
3 证明线段相等的方法	205
4 倍长线段法	206
5 补形法	206
6 截长补短法	206
7 判定直角三角形的方法	211
8 求与直角三角形有关的角的度数的方法	213
9 分类讨论思想	219
10 拼图法	219
11 确定勾股数的方法	223
12 化斜为直法	223
13 化不规则为规则法	224
14 分割法	224
15 转化思想	224
16 数形结合思想	225
17 直角三角形全等的判定方法	232
18 反证法	234
19 方程思想	237
20 整体思想	238

注：“老师批注方法　点拨只为高分”中，方法点为重要条目，全书不仅限于此．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录

索引

学方法
确定最简公分母的方法…… 20
分式方程的解法…… 28

看微课
分式的概念…… 2
分式的基本性质…… 5
分式方程…… 27

观动画
全等变换方式…… 56
三角形的稳定性…… 63

看微课
全等三角形的性质…… 57

看微课
求平方根…… 87
求算术平方根…… 89
实数的分类…… 99

第十二章 分式和分式方程

12.1 分　式 …… 2
12.2 分式的乘除 …… 12
12.3 分式的加减 …… 19
12.4 分式方程 …… 27
12.5 分式方程的应用 …… 34

素养提分 技巧篇：分式运算中的常用技巧与方法 ☞ P41
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P43

点拨微课堂 ☞P9 ☞P22 ☞P30

第十三章 全等三角形

13.1 命题与证明 …… 51
13.2 全等图形 …… 56
13.3 全等三角形的判定 …… 62
13.4 三角形的尺规作图 …… 72

素养提分 应用篇：分析综合法在三角形全等中的应用 ☞ P77
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P79

点拨微课堂 ☞P66 ☞P77

第十四章 实　数

14.1 平方根 …… 87
14.2 立方根 …… 93
14.3 实　数 …… 98
14.4 近似数 …… 107
14.5 用计算器求平方根与立方根 …… 110

素养提分 行动篇：实数应澄清的几个问题 ☞ P106
技巧篇：用平方根概念解题的几个技巧 ☞ P114

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P115

点拨微课堂 ☞P98 ☞P104 ☞P114

第十五章 二次根式

15.1 二次根式 ……122
15.2 二次根式的乘除运算 ……132
15.3 二次根式的加减运算 ……138
15.4 二次根式的混合运算 ……142

素养提分 行动篇：解密“非负数”的意义及性质 ☞ P131

技巧篇：二次根式运算的技巧 ☞ P148

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P149

点拨微课堂 ☞P123 ☞P142 ☞P143

看微课
二次根式的定义…… 122
二次根式的化简…… 126

第十六章 轴对称和中心对称

16.1 轴对称 ……157
16.2 线段的垂直平分线 ……164
16.3 角的平分线 ……171
16.4 中心对称图形 ……178
16.5 利用图形的平移、旋转和轴对称设计图案 ……185

素养提分 应用篇：轴对称与旋转的应用 ☞ P190

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P191

点拨微课堂 ☞P161 ☞P164

观动画
作已知角的平分线…… 173
中心对称作图…… 180

第十七章 特殊三角形

17.1 等腰三角形 ……199
17.2 直角三角形 ……210
17.3 勾股定理 ……218
17.4 直角三角形全等的判定 ……229
17.5 反证法 ……234

素养提分 思想篇：勾股定理中的数学思想方法 ☞ P237

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P239

点拨微课堂 ☞P213 ☞P225

学方法
等边三角形的判定方法… 203

观动画
勾股定理的证明…… 219

看微课
勾股定理 …… 218
斜边、直角边 (HL) …… 229

参考答案及点拨（单独成册）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

2. **换元法：**换元法就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的字母去代替原式的一个部分或改造原来的式子（即换元），使它简化，从而使问题易于解决．

3. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

4. **逆向思维法：**逆向思维法是指为实现某一创新或解决某一用常规思路难以解决的问题，而采取反向思维寻求解决问题的方法．

5. **分类讨论思想：**把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

6. **特殊值法：**又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，从而通过简单的运算，得出最终答案的一种方法．这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要和最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干给出的等量关系中是一个不可或缺的量．

7. **裂项相消法：**裂项相消法的实质是将所要求和的代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一项，最终达到求和的目的．

8. **建模思想：**建模思想是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段．使用数学语言描述的事物就称为数学模型．

9. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，得出一般的结论．

10. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法．

11. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

12. **定义法：**定义法就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的．因此用定义法解题是最直接的方法．

13. **割补法：**割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则图形转化为规则图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

14. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法，主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

再次领略数式的飞跃



第十二章 分式和分式方程









核心考点

你将见到的

- 分式的基本性质
- 分式的运算
- 分式方程的解法
- 分式方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 换元法
- 倒数法
- 拆项法
- 作差法
- 特殊值法
- 裂项相消法
- 整体思想
- 转化思想
- 分类讨论思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.1 分 式

核心知识
- 分式的概念
- 分式的基本性质
- 约分

知识链接

分式有意义的条件、分式的值为零的条件 → 分式 → 分式的基本性质 → 约分

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的概念

1. 定义 一般地，我们把形如$\frac{A}{B}$的代数式叫做分式，其中，A，B都是整式，且B含有字母．A叫做分式的分子，B叫做分式的分母．

分式的三要素：

（1）形如$\frac{A}{B}$的代数式；

（2）A，B都为整式；

（3）分母B含有字母．


分式的概念

2. 分式与分数、整式的关系

（1）分式的分母含有字母．由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性；分数是分式中字母取特定值时的特殊情况．

（2）分式与整式的根本区别就是分式的分母含有字母．

3. 整式和分式统称为有理式．

拨考向 利用分式的概念识别分式

例 1 下列各式中，哪些是分式？哪些是整式？

$\frac{4}{m}$，$-2x^2$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{\sqrt{x}}{2x^3+3}$，$\frac{3a+b}{2\pi}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$．

解题秘方： 利用分式的三要素进行判断即可．

解： 分式有$\frac{4}{m}$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$；

整式有$-2x^2$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{3a+b}{2\pi}$．

π是常数，不能当字母看

方法点拨：判断一个式子是否是分式的方法

首先要具有$\frac{A}{B}$的形式，其次A，B是整式，最后看分母中是否含有字母．分式只注重形式而不注重结果，分母中含有字母是判断分式的必要条件．

提分·必记

特别解读

1. 分式可看成是两个整式的商，它的分子是被除式，分母是除式，分数线相当于除号，分数线还具有括号作用和整体作用．
2. 判断一个式子是否是分式，不能将原式子进行变形后再判断，而必须按照本来的“面目”进行判断．如：$\frac{3a^2}{a}$是分式．

提分·秘诀

特别警示

由于$\frac{P^2}{P}$约分后为P，所以容易误认为其是整式．

$\frac{\sqrt{x}}{2x^3+3}$中，尽管分母中含有字母x，但分子$\sqrt{x}$不是整式，所以它既不是整式，也不是分式．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶2 分式有意义和无意义的条件

1. 分式有意义的条件

分式的分母表示除数，由于除数不能为 0，所以分式的分母不能为 0，即当 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义.

2. 分式无意义的条件

分式的分母为 0，即当 $B=0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 无意义.

考向▶利用分式有意义和无意义的条件确定字母的值或取值范围

类型 1：分式有意义的条件在求字母取值范围中的应用

例 2 x 满足什么条件时下列分式有意义？

（1）$\frac{2x+1}{5x-3}$；　（2）$\frac{2}{|x|-1}$；

（3）$\frac{x+1}{x^2+3}$；　（4）$\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$.

解题秘方： 分母的值不等于 0 时，分式有意义.

解：（1）当 $5x-3 \neq 0$，即 $x \neq \frac{3}{5}$ 时，分式 $\frac{2x+1}{5x-3}$ 有意义.

（2）当 $|x|-1 \neq 0$，即 $x \neq \pm 1$ 时，分式 $\frac{2}{|x|-1}$ 有意义.

（3）因为不论 x 取什么值，都有 $x^2+3>0$，

因为 $x^2 \geqslant 0$，所以 $x^2+3>0$

所以 x 取任何数，分式 $\frac{x+1}{x^2+3}$ 都有意义.

（4）当 $(x-2)(x+4) \neq 0$，即 $x \neq 2$ 且 $x \neq -4$ 时，分式 $\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$ 有意义.

类型 2：分式无意义的条件在求字母值中的应用

例 3 分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 中的 x 满足什么条件时分式无意义？

解题秘方： 分母的值等于 0 时，分式无意义.

解： 要使分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 无意义，

则分母 $x^2-16=0$，

即 $x^2=16$，

解得 $x=\pm 4$.

所以当 $x=\pm 4$ 时，分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 无意义.

提分·必记

特别提醒

- 分母不为 0，并不是说分母中的字母不能为 0，而是表示分母的整式的值不能为 0.
- 分式是否有意义，只与分式的分母是否为 0 有关，而与分式的分子是否为 0 无关.

提分·秘诀

方法点拨

求分式有意义时字母的取值范围的方法：

根据“分式有意义的条件：分式的分母不等于 0”列不等式求解，得分式有意义时字母的取值范围.

警示误区

只能对原分母进行讨论，不能先约分化简，否则会使取值范围扩大. 如此题中，若约去 $x-2$，易错得当 $x \neq -4$ 时，分式有意义.

方法点拨

当分式无意义时，利用分母等于 0 的条件构造出方程求解即可.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▶ 3 分式的值为 0 的条件

1. 分式的值为 0 的条件

当分式的分子等于 0 且分母不等于 0 时，分式的值为 0.

即对于分式 $\frac{A}{B}$，当 $A=0$ 且 $B\neq 0$ 时，$\frac{A}{B}=0$.

2. 对常见的几种特殊分式值的情况讨论

（1）若 $\frac{A}{B}$ 的值为正数，则 $\begin{cases}A>0,\\B>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A<0,\\B<0;\end{cases}$

（2）若 $\frac{A}{B}$ 的值为负数，则 $\begin{cases}A>0,\\B<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A<0,\\B>0;\end{cases}$

（3）若 $\frac{A}{B}$ 的值为 1，则 $A=B$，且 $B\neq 0$；

（4）若 $\frac{A}{B}$ 的值为 -1，则 $A=-B$，且 $B\neq 0$.

提分·必记

特别提醒

- 分式的值是在分式有意义的前提下才考虑的. 所以分式 $\frac{A}{B}$ 的值为 0 的条件：$A=0$ 且 $B\neq 0$，二者缺一不可.
- 对分式的几种特殊值的讨论既要考虑分子，又要考虑分母.

拔考向 ▶ 利用分式的值为 0 的条件求字母的值

例 4 当 x 取何值时，下列分式的值为 0？

（1）$\frac{x+2}{2x-3}$；　（2）$\frac{|x|-2}{x+2}$；

（3）$\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$；　（4）$\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$.

解题秘方： 分式的值为 0 的条件是分子为 0，分母不为 0.

解：（1）由 $\begin{cases}x+2=0,\\2x-3\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-2$，

所以当 $x=-2$ 时，分式 $\frac{x+2}{2x-3}$ 的值为 0.

（2）由 $\begin{cases}|x|-2=0,\\x+2\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=2$，

所以当 $x=2$ 时，分式 $\frac{|x|-2}{x+2}$ 的值为 0.

（3）由 $\begin{cases}3-|x|=0,\\(x-3)(x+1)\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-3$，

若 $AB\neq 0$，则 $A\neq 0$ 且 $B\neq 0$

所以当 $x=-3$ 时，分式 $\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$ 的值为 0.

（4）由 $\begin{cases}(x-1)(x-3)=0,\\x^2-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=3$，

若 $AB=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$

所以当 $x=3$ 时，分式 $\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$ 的值为 0.

提分·秘诀

教你一招

求分式值为 0 的字母值的方法：

解题时可以先求出使分子为 0 的字母的值，再检验这个值是否使分母的值为 0，当分母的值不为 0 时，这个值就是所要求的字母的值. 切记使分母为 0 的值必须舍去. 若有多个值使分式的值为 0，则这几个值之间用“或”连接.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 4 分式的基本性质

1. 分式的基本性质

分式的分子和分母同乘（或除以）一个不等于 0 的整式，分式的值不变.

用字母表示为 $\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$. 其中，$M$ 是不等于 0 的整式. 分式的基本性质是分式变形的理论依据.

2. 分式的符号法则

分式的分子、分母与分式本身的符号，同时改变其中两个，分式的值不变.

用字母表示为

（1）$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$；

（2）$-\frac{A}{B}=-\frac{-A}{-B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$.


分式的基本性质

提分·必记

特别解读

1. $B\neq 0$ 是已知中隐含的条件，$M\neq 0$ 是在解题过程中另外附加的条件，在运用此性质时，必须重点强调 $M\neq 0$ 这个前提.
2. 应用性质时，要理解“同”的含义：一是要同时进行“乘法”（或“除法”）运算；二是“乘”（或“除以”）的对象必须是同一个不等于 0 的整式.
3. 运用分式的基本性质进行分式的变形是恒等变形，它不改变分式值的大小，只改变其形式.

核心考向 利用分式的基本性质对分式进行变形

类型 1：分式的基本性质在分式变形中的应用

例 5 写出下列等式中未知的分子或分母：

（1）$\frac{15x^2y}{25xy^2}=\frac{3x}{(\quad)}$；

（2）$\frac{a+2b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^2}$；

（3）$\frac{3x}{x^2-xy}=\frac{3}{(\quad)}$；

（4）$\frac{1}{y-x}=\frac{(\quad)}{x^2-y^2}$.

解题秘方： 观察等号两边已知的分子或分母发生了什么样的变化，再根据分式的基本性质用相同的变化确定所要填的式子.

解：（1）中，右边的分子 $3x$ 是由左边的分子 $15x^2y$ 除以 $5xy$ 得到的，所以右边的分母可以由左边的分母 $25xy^2$ 除以 $5xy$ 得到，因此结果是 $5y$.

（2）中，右边的分母 a^2b^2 是由左边的分母 ab^2 乘 a 得到的，所以右边的分子可以由左边的分子 $a+2b$ 乘 a 得到，因此结果是 a^2+2ab.

（3）中，右边的分子 3 是由左边的分子 $3x$ 除以 x 得到的，所以右边的分母可以由左边的分母 x^2-xy 除以 x 得到，因此结果是 $x-y$.

（4）中，右边的分母 x^2-y^2 是由左边的分母 $y-x$ 乘 $-x-y$ 得到的，所以右边的分子可以由左边的分子 1 乘 $-x-y$ 得到，因此结果是 $-x-y$.

答案：（1）$5y$　（2）a^2+2ab　（3）$x-y$　（4）$-x-y$

提分·秘诀

解法提醒

解决与分式的恒等变形有关的填空题时，一般从分子或分母的已知部分入手，先观察等号两边的分子或分母发生了怎样的变化，再通过对分母或分子进行相同的变化得到未知项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：分式的基本性质在改变分式的符号中的应用

例 6 不改变分式的值，使下列各分式的分子与分母都不含“−”号.

（1）$\frac{-4x}{-7y}$；（2）$\frac{-3n}{8m}$；（3）$\frac{c}{-a-b}$；（4）$-\frac{-x+y}{xy}$.

解题秘方： 分式的分子、分母及分式本身这三处的正负号，同时改变两处，分式的值不变.

解：（1）$\frac{-4x}{-7y}=\frac{4x}{7y}$.（2）$\frac{-3n}{8m}=-\frac{3n}{8m}$.

（3）$\frac{c}{-a-b}=-\frac{c}{a+b}$.（4）$-\frac{-x+y}{xy}=\frac{x-y}{xy}$.

类型 3：分式的基本性质在分式中字母的取值变化对分式值的影响中的应用

例 7 把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$（$n\neq 0$）中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的 2 倍　　B. 不变

C. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$　　D. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$

解题秘方： 将分式中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，再代入原分式，利用分式的基本性质变形.

解： 把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，

可将分式变为$\frac{2\cdot 2n}{3(2m)^2-(2n)^2}=\frac{4n}{4(3m^2-n^2)}=\frac{n}{3m^2-n^2}$，

因此分式的值缩小为原来的$\frac{1}{2}$.

答案： C

类型 4：分式的基本性质在化系数为整数中的应用

例 8 不改变分式的值，把下列各式的分子和分母中的各项系数都化为整数.

（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}$；（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}$.

解题秘方： 利用分式的基本性质将分子、分母同时乘同一个数，使系数都化为整数.

解：（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}=\frac{(0.01a-0.5b)\times 100}{(0.3a-0.04b)\times 100}=\frac{a-50b}{30a-4b}$.

（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\times 12}{\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y\right)\times 12}=\frac{6x+4y}{3x-4y}$.

警示误区

当分子、分母是多项式时，应将其看成一个整体，若分子或分母的首项系数是负数，应先提取“−”号并添加括号，注意此时多项式中的每一项都要变号.

方法点拨

解答此类问题，应先求出变化后的分式，再运用分式的基本性质化简，然后与原分式进行比较即可.

教你一招

利用分式的基本性质化系数为整数的方法：

若各项系数都是小数，则分子、分母同乘 10 的正整数倍；

若各项系数都是分数，则分子、分母同乘分子和分母中所含分数的分母的最小公倍数；

若各项系数既有小数又有分数，则要先统一成小数或者分数，然后化为整数. 注意将系数化为整数的过程中不要漏项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶5 约分和最简分式

1. 分式的约分

把分式中分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分.

2. 找公因式的方法

（1）当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公因数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式；

（2）当分子、分母都是多项式时，先把多项式分解因式，再按（1）中的方法找公因式.

3. 约分的方法

（1）若分式的分子、分母都是单项式，就直接约去分子、分母的公因式；

（2）若分子或分母含有多项式，应先分解因式，再确定公因式并约去.

4. 最简分式 分子和分母没有公因式的分式叫做最简分式.

提分·必记

特别解读

1. 约分的依据是分式的基本性质，关键是确定分子和分母的公因式.
2. 约分是针对分式的分子和分母整体进行的，而不是针对其中的某些项，因此约分前一定要确认分子和分母都是乘积的形式.
3. 约分一定要彻底，其结果必须是最简分式或整式.

核考向▶利用约分的方法对分式约分

提分·秘诀

特别提醒

约分时需要注意的问题：

(1) 注意发现分式的分子和分母的一些隐含的公因式（如互为相反数的式子）.

(2) 当分式的分子或分母的系数是负数时，可利用分式的基本性质，把负号提到分式的前面.

类型1：分式的约分在化简中的应用

例9 约分：

（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}$；（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}$；（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}$.

解题秘方：（1）中的分子、分母都是单项式，可以直接约分；（3）中的分子、分母都是多项式，先将分子、分母分解因式，再进行约分.

解：（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}=-\frac{7a^2b^5\cdot 3ac}{7a^2b^5\cdot 8b^5d}=-\frac{3ac}{8b^5d}$.

（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}=\frac{(x-y)\cdot 1}{(x-y)(x-y)^2}=\frac{1}{(x-y)^2}$.

（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}=\frac{a(a-5)}{(5+a)(5-a)}=\frac{a(a-5)}{-(5+a)(a-5)}=-\frac{a}{5+a}$.

类型2：最简分式的定义在识别最简分式中的应用

例10 下列各式中，最简分式有_____.

$\frac{y}{2x}$，$\frac{m+n}{m^2-n^2}$，$\frac{9x+y}{45xy^2}$，$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$

解题秘方：根据最简分式的定义识别.

解：$\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{(m+n)(m-n)}=\frac{1}{m-n}$；

$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}$. 所以最简分式有$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$.

答案：$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$

知识储备

最简分式是约分后的形式，所以判断最简分式的唯一标准就是分式的分子与分母没有公因式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的特殊值求分式中字母的值或取值范围

挑战·高分

类型 1：分式的值为 1 或 −1 在求字母值中的应用

例 11 （1）当 $x=$_____时，分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 1；

（2）当 $x=$_____时，分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 −1.

解题秘方：根据分式的值为 ±1 的条件列出方程，求出字母的值.

解：（1）因为分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 1，所以 $x-3=3-2x$，解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$3-2x=3-4=-1\neq 0$.

（2）因为分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 −1，

所以 $(x-3)+(3-2x)=0$，解得 $x=0$.

当 $x=0$ 时，$3-2x=3-0=3\neq 0$.

答案：（1）2　（2）0

方法点拨

分式的值为 1 或 −1 满足的条件是分子和分母相等或互为相反数，由此可列出方程，求出分式中字母的值，同时要注意分母不为 0 这一隐含条件.

类型 2：分式的值为正或负在求字母的取值范围中的应用

例 12 当 x 为何值时，分式$\frac{x+2}{x-3}$的值为负数？

解题秘方：若要使分式的值为负数，则分子、分母异号.

解：由分式的值为负数，得$\begin{cases}x+2>0,\\x-3<0\end{cases}$①或$\begin{cases}x+2<0,\\x-3>0\end{cases}$②.

解不等式组①，得 $-2<x<3$.

解不等式组②，无解.

所以当 $-2<x<3$ 时，分式$\frac{x+2}{x-3}$的值为负数.

思路点拨

求解当分式的值为负数时字母的取值范围的方法：

当分式的值为负数时，分式的分子和分母异号，也就是分子为正、分母为负或分子为负、分母为正，利用这两种情况分别列不等式组，解不等式组确定字母的取值范围.

类型 3：分式的值为整数在求字母值中的应用

例 13 若分式$\frac{4x-8}{x^2-4}$的值为整数，求整数 x 的值.

解题秘方：先化简分式，再由分子能被分母整除求出整数 x 的值.

解：$\frac{4x-8}{x^2-4}=\frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x+2}$.

因为分式的值为整数，x 为整数，

所以 $x+2$ 可取整数 −4，−2，−1，1，2，4.

所以 x 可取整数 −6，−4，−3，−1，0，2.

又因为 $x^2-4\neq 0$，所以 $x\neq\pm 2$.

所以整数 x 可取的值为 −6，−4，−3，−1，0.

方法点拨

若使分式的值为整数，则分式的分子是分母的整数倍.化简后形如$\frac{n}{x+a}$（n 为非零整数，x，a 为整数）的分式的值为整数，$x+a$ 为 n 的因数.求得 x 的值要代入原分式检验，保证原分式有意义.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用分式的基本性质求分式的值

类型 1：分式的基本性质在巧求分式值中的应用

例 14 已知$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，求分式$\frac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2}$的值.

解题秘方： 由条件可知 $y\neq 0$，根据分式的基本性质将分式的分子和分母同时除以 y^2 转化为含$\frac{x}{y}$的式子，再代入即可求值.

点拨微课堂

解： 由条件可知 $y\neq 0$，因此 $y^2\neq 0$，

$$\text{原式}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+1}=-4.$$

挑战·高分

技巧点拨

本题运用了整体思想求值. 解题的关键是将所求分式利用分式的基本性质化为含条件式的式子，再整体代入求值.

类型 2：设比值在巧求分式值中的应用

例 15 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$（其中 $x\neq 0$），求分式 $\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}$ 的值.

解题秘方： 因为条件是以比值相等的形式出现的，所以可考虑设比值为 k，把待求式子转化为关于 k 的式子求值.

解： 设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$（$k\neq 0$），

则$\frac{x}{2}=k$，$\frac{y}{3}=k$，$\frac{z}{4}=k$，

所以 $x=2k$，$y=3k$，$z=4k$，

所以 $\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}=\frac{4k+9k-12k}{4k-9k+12k}=\frac{k}{7k}=\frac{1}{7}$.

解法提醒

本题运用了换元法求值. 当数学问题中出现或隐含比值相等的条件时，设比值为一个新字母，把问题转化为新字母的问题求解，往往可得到意想不到的效果.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是分式有意义或无意义的条件、分式的值为 0 的条件、分式的基本性质，这也是近年中考的热点. 题目难度较小，多以选择题、填空题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用分式有意义的条件求字母的取值范围

例 16 [中考·武汉]若分式$\frac{1}{x+2}$有意义，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x>-2$　　B. $x<-2$　　C. $x=-2$　　D. $x\neq -2$

试题评析： 本题考查了分式有意义的条件，解题的关键是理解分式的分母不等于零.

解： 由题意可得 $x+2\neq 0$，所以 $x\neq -2$.

答案： D

冲刺·满分

考法点评

分式有意义的条件是分母不等于0，利用解分母不等于0的不等式求字母的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 分式的值为 0 的条件

例 17 [中考·新疆]已知分式$\frac{x-1}{x+1}$的值是 0，则 x 的值是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

试题评析： 分式的值为 0，则分子等于 0，同时分母不为 0，求出 x 的值即可.

解： 要使分式的值为 0，则 $x-1=0$，解得 $x=1$. 当 $x=1$ 时，分母 $x+1\neq0$，所以 x 的值为 1.

答案： C

考法点评

掌握分式的值为 0 的条件，须把握两点：一是解分子为 0 的方程；二是验证分母不为 0.

考法 3 分式的基本性质

例 18 [中考·金华]若$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则$\frac{a+b}{b}=$_____.

试题评析： 本题考查分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键.

思路点拨

分式的基本性质是分式约分的依据，求分式的值时，若无法求出分式中字母的值，也可利用换元法，将分子、分母换一个字母，利用分式的基本性质求解.

解： 因为$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

所以$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$.

设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=k\ (k\neq0)$，

则 $a=2k$，$b=3k$，

所以$\frac{a+b}{b}=\frac{2k+3k}{3k}=\frac{5}{3}$.

利用分式的基本性质，分子、分母同时除以 k

答案： $\frac{5}{3}$

考法 4 约分

例 19 [中考·孝感]如图 12-1-1，图①是一个边长为 a 的正方形剪去一个边长为 1 的小正方形，图②是一个边长为 $(a-1)$ 的正方形，记图①，图②中阴影部分的面积分别为 S_1，S_2，则$\frac{S_1}{S_2}$可化简为_____.

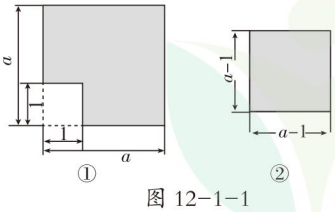


图 12-1-1

考法点评

化简分式的关键是约分，而约分的关键是找公因式，确定公因式的关键是对分子、分母进行因式分解.

试题评析： 本题主要考查分式的化简，依据题意列出式子是解题的关键.

解： 由题意可得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2-1}{(a-1)^2}=\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}$.

答案： $\frac{a+1}{a-1}$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 在式子$\frac{2}{x}$，$\frac{x+y}{5}$，$\frac{1}{2-a}$，$\frac{x}{\pi+1}$，$1+\frac{1}{m}$中，是分式的有（　　）

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

2. [中考·金华]分式$\frac{x+5}{x-2}$的值是0，则x的值为（　　）

A.2　　B.5　　C.-2　　D.-5

3. [中考·滨州]下列分式中，是最简分式的是(　　)

A. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$　　B. $\frac{x+1}{x^2-1}$

C. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy}$　　D. $\frac{x^2-36}{2x+12}$

4. [中考·贵阳]当$x=1$时，下列分式没有意义的是（　　）

A. $\frac{x+1}{x}$　　B. $\frac{x}{x-1}$　　C. $\frac{x-1}{x}$　　D. $\frac{x}{x+1}$

5. [中考·莱芜]若x，y的值均扩大为原来的3倍，则下列分式的值保持不变的是（　　）

A. $\frac{2+x}{x-y}$　　B. $\frac{2y}{x^2}$　　C. $\frac{2y^3}{3x^2}$　　D. $\frac{2y^2}{(x-y)^2}$

6. [中考·河北]若$a\neq b$，则下列分式化简正确的是（　　）

A. $\frac{a+2}{b+2}=\frac{a}{b}$　　B. $\frac{a-2}{b-2}=\frac{a}{b}$

C. $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}$　　D. $\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b}=\frac{a}{b}$

7. 已知分式$\frac{x+1}{2-x}$，当x取a时，该分式的值为0；当x取b时，分式无意义，则a^b的值等于(　　)

A. -2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

8. 若分式$\frac{1}{x^2-m}$不论x取何数总有意义，则m的取值范围是_____.

9. 有一捆粗细均匀的电线，现要确定它的长度.从中先取出1 m长的电线，称出它的质量为a，再称出其余电线的总质量为b，则这捆电线的总长度是_____.

10. 当x取何值时，下列分式的值是0？

(1) $\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$；(2) $\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$.

11. 约分：

(1) $\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}$；(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

12. (1)分式$\frac{-x^2}{1-5x}$的值为负数，求x的取值范围；

(2)当x满足什么条件时，分式$\frac{x+1}{2x+4}$的值为正数?

13. 阅读下列解题过程，然后解题.

已知$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$($a$，$b$，$c$互不相等)，求$x+y+z$的值.

解：设$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$，

则$x=k(a-b)$，$y=k(b-c)$，$z=k(c-a)$，

所以$x+y+z=k(a-b+b-c+c-a)=k\cdot 0=0$，

所以$x+y+z=0$.

依照上述方法解答下列问题：

已知$\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}$，其中$x+y+z\neq 0$，求$\frac{x+y-z}{x+y+z}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.2 分式的乘除

核心知识

- 分式的乘除
- 分式的乘方
- 分式乘除、乘方混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的乘法

1. 分式的乘法法则

分式与分式相乘，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母．

用字母表示为 $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$.

2. 法则的运用方法

（1）若分子、分母都是单项式，可直接利用分式的乘法法则运算后再约分；

（2）若分子、分母中有多项式，可先对分子、分母因式分解，约分后，再进行乘法运算；

（3）若分式乘整式，可把整式看成分母为 1 的分式参与运算．

（4）运算的结果应为最简分式或整式．

拨考向 利用分式的乘法法则进行分式的乘法计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}$；

（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)$；

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}$.

解题秘方：利用分式的乘法法则进行计算．

解：（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}=\frac{15x^2y^2}{12x^3y}=\frac{5y}{4x}$.

（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)=-\frac{6x^2}{5y}\cdot4xy^2=-\frac{24x^3y}{5}$.

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{(a+b)(a-b)}=\frac{3a}{2(a-b)}$.

提分·必记

特别解读

分式乘法运算的基本步骤：

第一步：确定积的符号，写在积中分式的前面．

第二步：运用法则，将分子与分母分别相乘，多项式要带括号．

第三步：约分，将结果化成最简分式或整式．

提分·秘诀

解法指导

对于分式运算的结果，要注意以下两点：

（1）结果必须是最简分式或整式．

（2）不能把 $\frac{A}{-B}$ 作为结果，要运用分式的符号法则写成 $-\frac{A}{B}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▸2 分式的乘方

1. 分式的乘方法则

分式乘方就是把分子、分母分别乘方.

用字母表示为$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$（$n$为正整数）.

2. 分式乘方的方法

（1）分式乘方时，确定乘方结果符号的方法与有理数乘方确定结果符号的方法相同；

（2）分式乘方时，一定要将分子、分母分别乘方，不能将$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$错写成$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B}$；

（3）分式乘方时，若分子与分母是多项式，应把分子、分母分别看成一个整体乘方，避免出现$\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^n=\frac{A^n-B^n}{A^n+B^n}$的错误.

提分·必记

特别解读

1. 分式乘方是分式乘法中因式相同时的一种特殊情况，因此分式乘方都可转化为分式乘法进行计算.
2. 学习了分式乘方法则后，可直接用法则进行计算，在计算时先确定结果的符号，再把分子、分母分别乘方.

核心考向▸利用分式的乘方法则进行分式的乘方运算

例2 计算：

（1）$\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4$；（2）$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3$；（3）$\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3$；（4）$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$.

解题秘方： 先运用分式乘方的法则将分子、分母分别乘方，再运用幂的乘方和积的乘方的性质计算.

解：（1）$\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4=\frac{(2x^2y)^4}{(-z^2)^4}=\frac{16x^8y^4}{z^8}$.

（2）$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}=-\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$.

（3）$\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3=\frac{(xy)^3}{(x-y)^3}=\frac{x^3y^3}{(x-y)^3}$.

（4）$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2=\frac{[(a+b)(a-b)]^2}{(ab)^2}=\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2b^2}$.

提分·秘诀

特别警示

在进行分式的乘方运算时，必须将分子、分母整体分别乘方，当分式中含有“-”号时，要特别注意符号问题.

误答1：$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{-3c^2}=-\frac{a^{12}b^6}{3c^2}$. 忘记将分母乘方

误答2：$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}=\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$.

负数的奇次方为负，结果应为负

知识▸3 分式的除法

1. 分式的除法法则

分式除以分式，把除式的分子与分母颠倒位置后，与被除式相乘.

用字母表示为$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$.

2. 法则的运用方法

（1）分式的除法需转化成乘法，再利用分式乘法法则计算；

（2）当除式是整式时，可以将整式看成分母是1的分式进行运算.

提分·必记

特别解读

分式除法运算的基本步骤：

第一步：将分子、分母是多项式的进行因式分解，并约分；

第二步：将除法转化成乘法；

第三步：利用分式的乘法法则计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用分式的除法法则进行分式的除法计算

例 3 计算：

（1）$\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}$；

（2）$\frac{2x^2}{3y}\div(-2xy^2)$；

（3）$(a^2-ab)\div\frac{b-a}{ab}$；

（4）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2}\div\frac{a^2-1}{a^2+2a}$.

解题秘方：利用分式的除法法则将分式的除法运算转化为分式的乘法运算.

解：（1）$\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}=\frac{ab^3}{2c^2}\cdot\frac{4cd}{-5a^2b^2}=\frac{2bd}{-5ac}=-\frac{2bd}{5ac}$.

（2）$\frac{2x^2}{3y}\div(-2xy^2)=\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{1}{-2xy^2}=-\frac{2x^2}{6xy^3}=-\frac{x}{3y^3}$.

（3）$(a^2-ab)\div\frac{b-a}{ab}=a(a-b)\div\frac{-(a-b)}{ab}=a(a-b)\cdot\frac{ab}{-(a-b)}=-a^2b$.

（4）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2}\div\frac{a^2-1}{a^2+2a}=\frac{-(a-1)^2}{a+2}\cdot\frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-a(a-1)}{a+1}=-\frac{a^2-a}{a+1}$.

提分·秘诀

特别提醒

1. 分式的除法与分数的除法类似，可类比分数的除法学习.
2. 分式的除法法则是数学转化思想的具体体现，即把除法运算转化为乘法运算.
3. 运算的结果应为最简分式或整式.

点知识▶4 分式的乘方、乘除混合运算

1. 分式的乘除混合运算

在运算时，乘、除是同一级运算，若没有其他附加条件（如括号等），则应按照从左到右的顺序进行计算，若有括号，则先算括号里面的.一般地，乘除混合运算可以统一为乘法运算.

2. 分式的乘除、乘方混合运算

分式的乘除、乘方混合运算顺序与分数的乘除、乘方混合运算顺序相同，即先算乘方，再算乘除，有括号的先算括号里面的.

提分·必记

知识链接

1. 分式的乘除、乘方混合运算关键有两点：一是正确选择运算顺序；二是正确运用运算法则.
2. 运算的结果应化为最简分式或整式.

拔考向▶利用分式的乘除及乘方运算法则进行分式的混合运算

类型 1：分式的乘除法法则在分式乘除混合运算中的应用

例 4 计算：

（1）$\frac{8xy}{9a^2b}\div\frac{2x}{3b}\cdot\frac{3ab^2}{2x^3y}$；

（2）$\frac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\frac{x^2-1}{4-x}$.

提分·秘诀

技巧提醒

分式的乘除混合运算的解题步骤：

在分式的乘除混合运算中，一定要先将乘除混合运算统一成乘法运算，再按分式乘法法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：将分式乘除混合运算统一为分式乘法运算．

解：（1）$\frac{8xy}{9a^2b}\div\frac{2x}{3b}\cdot\frac{3ab^2}{2x^3y}$

$=\frac{8xy}{9a^2b}\cdot\frac{3b}{2x}\cdot\frac{3ab^2}{2x^3y}$

$=\frac{2b^2}{ax^3}$．

（2）$\frac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\frac{x^2-1}{4-x}$

$=\frac{3x-12}{1-2x+x^2}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\left(-\frac{x^2-1}{x-4}\right)$

$=-\frac{3(x-4)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-4)}$

$=-\frac{3}{x-1}$．

则进行计算，能分解因式的，要分解因式，这样便于约分，计算结果应是最简分式或整式．

类型 2：分式的乘除、乘方运算法则在分式乘除、乘方混合运算中的应用

例 5 计算：

（1）$\left(\frac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2\div\left(\frac{1}{ab}\right)^3\cdot\left(-\frac{3c}{2a}\right)^3$；

（2）$\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\cdot\frac{xy}{(y-x)^2}\div\left(\frac{x+y}{x}\right)^3$．

解法提醒

分式乘除、乘方混合运算的解题步骤：

(1) 在分式乘除、乘方混合运算中，先计算乘方，再计算乘除．

(2) 乘除是同一级运算，要按照从左到右的运算顺序计算．

(3) 当分式中的分子、分母是多项式且能分解因式时，要分解因式，从达到约分的目的．

解题秘方：先算乘方，再算乘除，有括号的先算括号里面的．

解：（1）$\left(\frac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2\div\left(\frac{1}{ab}\right)^3\cdot\left(-\frac{3c}{2a}\right)^3$

$=\frac{4c^6}{9a^2b^4}\div\frac{1}{a^3b^3}\cdot\left(-\frac{27c^3}{8a^3}\right)$

$=\frac{4c^6}{9a^2b^4}\cdot a^3b^3\cdot\left(-\frac{27c^3}{8a^3}\right)$

$=-\frac{3c^9}{2a^2b}$．

（2）$\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\cdot\frac{xy}{(y-x)^2}\div\left(\frac{x+y}{x}\right)^3$

$=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{xy}{(y-x)^2}\div\frac{(x+y)^3}{x^3}$

$=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{xy}{(y-x)^2}\cdot\frac{x^3}{(x+y)^3}$

$=\frac{x^2}{xy+y^2}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式有意义的条件选取分式化简求值中字母的值

例 6 先化简，再求值：$\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$，选一个合适的数作为 a 的值代入求值.

解题秘方： 利用分式的乘除法法则进行化简，再取一个使原式有意义的值代入.

解： $\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$

$=\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a}$

$=2a+2.$

取 $a=3$，原式 $=2\times3+2=8.$（a 的取值不唯一）

a 不能取 $-2,-1,0,1,2.$

挑战·高分

特别警示

对于字母开放性取值，不能只关注化简结果的式子有意义，还应该关注原式有意义，在原式中，要注意既不能使各个分式的分母为 0，也不能使除式 $\frac{a}{a^2-1}$ 的值为 0.

拔尖角度 2 利用建立分式的模型对实际问题进行说理

例 7 为了美化环境，需要在某块空地上种植 m 棵树. 若甲队单独植树，需要 n（$n>1$）天才能完成；若乙队单独植树，则乙队完成这项工作的时间比甲队的 2 倍多 1 天. 甲队每天植树的数量是乙队的 3 倍吗？请说明理由.

解题秘方： 利用分式表示甲、乙两队每天植树的数量，再用除法求出甲队每天植树的数量是乙队的几倍，然后进行判断.

解： 甲队每天植树的数量不是乙队的 3 倍. 理由如下：

由题意可知，甲队每天植树 $\frac{m}{n}$ 棵，乙队每天植树 $\frac{m}{2n+1}$ 棵，则 $\frac{m}{n}\div\frac{m}{2n+1}=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n+1}{m}=\frac{2n+1}{n}$.

因为 $n>1$，所以 $2n+1<3n$，所以 $\frac{2n+1}{n}<\frac{3n}{n}$，即 $\frac{2n+1}{n}<3.$

挑战·高分

方法点拨

若实际问题中的某些量都是用分式表示的，则这些量之间的倍数关系应用分式的除法结果来揭示.

详解

因为 $n>1$，所以 $1+2n<n+2n$，即 $1+2n<3n.$

拔尖角度 3 利用分式的乘方、乘除混合运算说明字母取值对分式值的影响

例 8 在解答题目“已知 $x=2\,023$，求 $\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 的值”时，小明误将 $x=2\,023$ 看成了 $x=2\,022$，但算出的结果仍然正确，你能解释原因吗？

解题秘方： 先化简，然后观察化简结果.

解： $\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\cdot\frac{2x^3}{x(x+3)}\cdot\frac{1}{x^2}=2.$

因为原式化简后的结果是常数 2，与 x 的值无关，因此小明误将 $x=2\,023$ 看成了 $x=2\,022$，其结果仍然是正确的.

挑战·高分

方法点拨

一般情况下，分式的值与分式中字母的取值有关，若字母取不同的值，分式的值仍然相同，则化简的式子中不含字母. 若字母取的值互为相反数，分式的值仍然相同，则化简的结果可能有两种情况：一是含字母的幂是偶次幂，二是不含字母.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查分式的乘除、乘方混合运算．在中考中，题目主要有分式的计算和分式的化简求值两种，简单的分式计算以选择题的形式考查，化简求值以解答题的形式考查．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用整式、分式的运算法则进行辨析

例9 [中考·山西]下列运算正确的是（　　）

A. $(-a^3)^2=-a^6$　　B. $2a^2+3a^2=6a^2$

C. $2a^2\cdot a^3=2a^6$　　D. $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3=-\frac{b^6}{8a^3}$

思路点拨

整式与分式的运算有很多类似的地方，考查时经常在一起考查，解决问题的关键都是运算法则的正确应用．

试题评析：本题主要考查整式与分式的运算，解题的关键是掌握幂的乘方、合并同类项法则、同底数幂的乘法及分式的乘方的运算法则．

解：A. $(-a^3)^2=a^6$，此选项错误；

B. $2a^2+3a^2=5a^2$，此选项错误；

C. $2a^2\cdot a^3=2a^5$，此选项错误；

D. $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3=-\frac{b^6}{8a^3}$，此选项正确．

故选D.

答案：D

考法2 利用分式的乘除法法则解游戏问题

例10 [中考·河北]老师设计了一个接力游戏：用合作的方式完成分式化简．游戏规则是：每人只能看到前一人给的式子，并进行一步计算，再将结果传递给下一人，最后完成化简．过程如图12-2-1.

思路点拨

根据分式的乘除运算步骤和运算法则逐一计算即可判断．

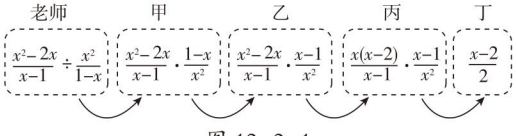


图12-2-1

接力中，自己负责的一步出现错误的是（　　）

A. 只有乙　　B. 甲和丁　　C. 乙和丙　　D. 乙和丁

试题评析：本题主要考查分式的乘除法，解题的关键是掌握分式的乘除法法则．

解：因为$\frac{x^2-2x}{x-1}\div\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x^2}=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x^2}$，

$\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x(x-2)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-2}{x}$，

所以出现错误的是乙和丁．

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见249页

1. [中考·江西]计算$(-a)^2\cdot\frac{b}{a^2}$的结果为(　　)

A. b　　B. $-b$　　C. ab　　D. $\frac{b}{a}$

2. [中考·济南]化简$\frac{2}{x^2-1}\div\frac{1}{x-1}$的结果是(　　)

A. $\frac{2}{x+1}$　　B. $\frac{2}{x}$

C. $\frac{2}{x-1}$　　D. $2(x+1)$

3. 若式子$\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}$有意义，则$x$的取值范围是_____.

4. 已知分式$\frac{x^2-y^2}{x}$乘一个分式后结果为$-\frac{(x-y)^2}{x^2}$，则所乘分式为_____.

5. 计算：

(1) $\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\div\frac{5xym}{3n}$;

(2) $\frac{a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a-1}{a^2+4a+4}\div\frac{1}{a+2}$;

(3) $\frac{1}{x-1}\div(x+2)\cdot\frac{x-1}{x+2}$;

(4) $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{1}{ab}\right)^3$;

(5) $\frac{m^2-n^2}{(m-n)^2}\cdot\left(\frac{n-m}{mn}\right)^2\div\frac{m+n}{m}$;

(6) $\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\div(x+y)^2\cdot\left(\frac{x}{x-y}\right)^3$.

6. 甲、乙两个工程队合修一条公路，已知甲工程队每天修(a^2-4)米，乙工程队每天修$(a-2)^2$米，则甲工程队修900米所用时间是乙工程队修600米所用时间的几分之几？(其中$a>2$)

7. 有这样一道题："计算$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}$的值，其中$x=2\,023$."甲同学把$x=2\,023$错抄成$x=2\,032$，但他的计算结果仍然正确.你知道这是怎么回事吗？

8. 已知$a^2+b^2-4a+6b+13=0$，求$\frac{a^2-6a+9}{4-b^2}\div\frac{3-a}{2+b}\cdot\frac{a^2}{3a-9}$的值.

9. 已知一列分式：

$\frac{x^3}{y}$，$-\frac{x^5}{y^2}$，$\frac{x^7}{y^3}$，$-\frac{x^9}{y^4}$，…，其中$xy\neq0$.

(1) 从第2个分式开始，用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式，你发现了什么规律？

(2) 根据你发现的规律，试写出第7个分式.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12.3 分式的加减

核心知识

- 通分
- 分式的加减法
- 分式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同分母的分式加减法

1. 同分母的分式加减法法则

同分母的两个分式相加（减），分母不变，把分子相加（减）.

用字母表示为 $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{B}=\frac{A\pm C}{B}$.

2. 同分母的分式相加减的一般步骤

（1）分母不变，把分子相加减.

（2）分子相加减时，应先去括号，再合并同类项；

（3）结果应化成最简分式或整式.

提分·必记

特别解读

“分子相加减”就是把各个分式的分子整体相加减. 在计算时，各分子都应用括号括起来，若分子是系数为正的单项式，括号可以省略；若分子是多项式，且分子相减时，括号不能省略，否则容易出现符号错误.

拨考向 利用同分母的分式加减法法则计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}$；

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}$；

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}$.

解题秘方： 按照同分母的分式加减法法则进行计算即可，结果要化为最简分式或整式.

解：（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}=\frac{(x-y)-(x+y)}{2xy^2}=\frac{-2y}{2xy^2}=-\frac{1}{xy}$.

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{4x-4y}{x^2-y^2}=\frac{4(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{4}{x+y}$.

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}=\frac{a+2b}{b-a}-\frac{b}{b-a}-\frac{2a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$.

提分·秘诀

警示误区

同分母的分式相加减的三大易错点：

（1）当分母是相反数时，不能直接相加减. 将这样的分母变成同分母时，中间的运算符号随之改变.“+”变“−”，“−”变“+”.

（2）若分子是多项式，对分子进行加减时，要带括号，然后进行去括号运算.

（3）加减运算后，对运算的结果要化简，最后的结果应是最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 2 通分

1. 分式的通分

把几个异分母分式分别化为与它们相等的同分母分式，叫做分式的通分，这个相同的分母叫做这几个分式的公分母.

2. 最简公分母

通分时，一般取各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积作为公分母，这样的公分母叫做最简公分母.

3. 通分的一般步骤

（1）确定最简公分母；

（2）用最简公分母分别除以各分母求商；

（3）用所得的商分别乘各分式的分子、分母得出同分母分式.


确定最简公分母的方法

拔考向 ▸ 利用通分的步骤对分式进行通分

例 2 把下列各组分式通分：

（1）$\frac{5}{6x^2yz^3}$和$\frac{3}{4x^3y^2z}$；

（2）$\frac{1}{x+1}$和$\frac{1}{x-1}$；

（3）$\frac{a}{x-y}$，$\frac{b}{3y-3x}$，$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}$.

解题秘方：先确定最简公分母，然后再通分.

解：（1）最简公分母是$12x^3y^2z^3$，

$$\frac{5}{6x^2yz^3}=\frac{5\cdot 2xy}{6x^2yz^3\cdot 2xy}=\frac{10xy}{12x^3y^2z^3},$$

$$\frac{3}{4x^3y^2z}=\frac{3\cdot 3z^2}{4x^3y^2z\cdot 3z^2}=\frac{9z^2}{12x^3y^2z^3}.$$

（2）最简公分母是$(x+1)(x-1)$，

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1},$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x^2-1}.$$

（3）最简公分母是$3(x-y)^2$，

$$\frac{a}{x-y}=\frac{a\cdot 3(x-y)}{(x-y)\cdot 3(x-y)}=\frac{3a(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{b}{3y-3x}=-\frac{b}{3(x-y)}=-\frac{b\cdot(x-y)}{3(x-y)\cdot(x-y)}=-\frac{b(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}=\frac{c}{(x-y)^2}=\frac{c\cdot 3}{(x-y)^2\cdot 3}=\frac{3c}{3(x-y)^2}.$$

提分·必记

特别解读

约分与通分的联系与区别：

（1）约分与通分都是对分式进行恒等变形，即变形之后每个分式的值都不变.

（2）约分是针对一个分式来说的，约分可使分式得以简化，而通分是针对两个或两个以上的分式来说的，通分可使异分母的分式化为同分母的分式.

提分·秘诀

方法点拨

确定最简公分母的一般方法：

（1）如果各分母都是单项式，那么最简公分母就是由①各分母系数的最小公倍数；②各分母相同字母的最高次幂；③各分母所有不同字母及其指数的乘积这三部分组成；

（2）如果各分母中有多项式，就先把分母是多项式的分解因式，再按照分母都是单项式时求最简公分母的方法，从系数、相同因式、不同因式三个方面去确定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 异分母的分式加减法

1. 异分母的分式加减法法则

异分母的两个分式相加(减),先通分,化为同分母的分式,再相加(减).

用字母表示为$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{BC}{BD}=\frac{AD\pm BC}{BD}$.

2. 异分母的分式相加减的一般步骤

(1)通分:将异分母的分式转化为同分母的分式;

(2)**加减**:按照同分母的分式加减运算的一般步骤进行计算.

注意异分母的分式加减运算的关键是通分.

提分·必记

特别解读

通分的关键是确定最简公分母,分式与分式相加减时的最简公分母是各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积.

技考向▶ 利用异分母的分式加减法法则计算

例 3 计算:

(1)$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$;　　(2)$a+2-\frac{a^2}{a-2}$.

解题秘方:异分母的分式相加减,先找最简公分母,进行通分,变为同分母的分式,再按照同分母的分式加减法法则进行计算.

解:(1)$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3}{x-4}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{24-3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3x+12}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3(x-4)}{(x+4)(x-4)}$

$=-\frac{3}{x+4}$.

(2)$a+2-\frac{a^2}{a-2}$

在通分时,把整式看成分母是1,分式是该整式的分式,若是多项式,则看成一个整体,通分时要带上括号

$=\frac{(a+2)(a-2)}{a-2}-\frac{a^2}{a-2}$

$=\frac{a^2-4}{a-2}-\frac{a^2}{a-2}$

$=\frac{a^2-4-a^2}{a-2}$

$=-\frac{4}{a-2}$.

提分·秘诀

特别提醒

1. 通分时,若要改变某个因式的符号,可利用分式符号的变化规律对分子、分母及分式前面的运算符号进行变换,如(1),将分母"4-x"变为"x-4",提出的"-"放在分式的前面,使本来的"+"变为"-".
2. 类似同分母的分式相加减,分子是多项式的注意带上括号.
3. 最后运算的结果应是最简分式或整式.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点知识▶ 4 分式的混合运算

1. 分式的混合运算顺序

分式与分数的混合运算有相同的运算顺序，即先算乘方，再算乘除，最后算加减．有括号时，先做括号内的运算，按照小括号、中括号、大括号的顺序进行，对于同级运算，按从左到右的顺序进行．

2. 分式混合运算的方法

（1）进行分式混合运算时，可以根据需要合理地运用运算律来简化运算，此时须先将分式的乘除法统一成乘法，分式的加减法统一成加法，才能使用乘法运算律、加法运算律简化运算．

（2）运算过程中及时约分化简，有时可使解题过程简单．

（3）运算结果是最简分式或整式．



拔考向▶ 利用分式的混合运算顺序进行计算

例 4 计算：

（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$；

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$．

解题秘方： 在进行分式的混合运算时，应先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里面的．

解：（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$

$=\dfrac{a(a+2)}{(a+2)(a-2)}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\dfrac{4a^2}{(a-2)^2}$

$=\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{4a}{a-2}$

$=-\dfrac{3a}{a-2}$．

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\left[\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}\right]$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\dfrac{9b^2-a^2}{a-2b}$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\cdot\dfrac{a-2b}{(3b-a)(3b+a)}$

$=-\dfrac{a-3b}{a^2+3ab}$．

提分·必记

特别提醒

- 分式混合运算要注意运算顺序和解题步骤，把好符号关．
- 分式除法只有转化为乘法后才能运用乘法分配律进行计算．

提分·秘诀

方法点拨

1. 有理数的运算顺序及运算律对分式运算同样适用．
2. 当某一项是整式时，可将此项看成是分母为 1 的式子．
3. 分式的混合运算中要注意各分式中分子、分母符号的处理，结果中分子或分母的系数是负数的，要把“−”提到分式的前面．
4. 所有的分式运算，结果必须达到最简．

详解剖析

- 若将 a 与 2b 单独通分，则形式为 $\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{a(a-2b)}{a-2b}-\dfrac{2b(a-2b)}{a-2b}$．
- 若将 a 与 2b 的运算看成一个整体进行通分，则形式为 $\dfrac{5b^2}{a-2b}-(a+2b)=\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用对应项系数相等巧求分式中待定字母的值

例 5 已知$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$，则 $A=$_____，$B=$_____，$C=$_____.

解题秘方： 先利用分式的加减法运算进行恒等变形，再求待定字母的值.

解： $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}=\frac{4}{x(x^2+4)}$. 因为等号左右两边恒等且分母相同，所以分子也应恒等，即 $(A+B)x^2+Cx+4A=4$，所以$\begin{cases}A+B=0,\\C=0,\\4A=4.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=0.\end{cases}$

答案： 1；−1；0

挑战·高分

方法点拨

1. 解这类题时首先将等号左右两边通分，并各自进行加减运算，发现通分后等号左右两边的分母相同，所以分子相等，通过构造方程或方程组来确定待定字母的值；
2. 解这类题时也可利用恒等式的定义，任取 x 的三个值（使分式有意义），列出方程组，求出 A，B，C 的值.

拔尖角度 2 利用作差法解决实际问题

例 6 甲、乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料. 两次购买饲料的价格略有变化，两位采购员的购货方式也不同，其中，甲每次购买 1 000 千克，而乙每次用去 800 元，不管购买多少饲料. 设两次购买饲料的价格分别为 m 元/千克和 n 元/千克（m，n 是正数，且 $m\neq n$），那么甲、乙两位采购员两次购买饲料的平均价格各是多少？哪一个较低？

解题秘方： 分别求出甲、乙两次购买饲料的平均价格，作差进行比较.

解： 因为甲每次购买 1 000 千克，两次购买饲料的价格分别为 m 元/千克和 n 元/千克，

所以甲两次购买饲料的平均价格为$\frac{1\,000m+1\,000n}{2\,000}=\frac{m+n}{2}$（元/千克）.

而乙每次用去 800 元，两次购买饲料的价格分别为 m 元/千克和 n 元/千克，

所以乙两次购买饲料的平均价格为$\frac{1\,600}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$（元/千克）.

所以$\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m+n)^2-4mn}{2(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$.

因为 m，n 是正数，且 $m\neq n$，所以$\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$，所以$\frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$.

答： 甲两次购买饲料的平均价格是 $\frac{m+n}{2}$ 元/千克，乙两次购买饲料的平均价格是 $\frac{2mn}{m+n}$ 元/千克，乙两次购买饲料的平均价格较低.

挑战·高分

知识储备

作差法是比较两个数或两个式子的大小的常用方法.

当 $a-b>0$ 时，$a>b$；

当 $a-b=0$ 时，$a=b$；

当 $a-b<0$ 时，$a<b$.

详解

由题意可知，甲两次购买饲料一共用去（1 000m+1 000n）元，购买饲料的总质量为 1 000×2=2 000（千克），故平均价格为$\frac{1\,000m+1\,000n}{2\,000}$元/千克.

详解

由题意可知，乙两次购买饲料一共用去 800×2=1 600（元），购买饲料的总质量为$\left(\frac{800}{m}+\frac{800}{n}\right)$千克，故平均价格为$\frac{1\,600}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}$元/千克.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用倒数法巧求分式的值

挑战·高分

例 7 已知 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$，$\frac{ac}{c+a}=\frac{1}{5}$，求 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值.

解题秘方： 先对三个等式分别取倒数，相加后通分，再取倒数即得结果.

解： 因为 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，

所以 a，b 均不为 0，且 $\frac{a+b}{ab}=3$.

所以 $\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=3$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$ ①.

同理可得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=4$ ②，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=5$ ③.

① + ② + ③，得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=12$.

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$，即 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=6$.

所以 $\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{6}$.

技巧点拨

利用倒数法求分式值的方法：

涉及分式的分子是单项式，分母是多项式的求值问题时，直接求解往往有困难，可考虑求它的倒数，将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的加减法，综合题目中的条件求解.

拔尖角度 4 利用拆项法巧求分式的值

挑战·高分

例 8 （1）由 $\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$，$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$，…，你能总结出 $\frac{1}{n(n+2)}$（n 为正整数）的结果吗？

（2）化简：$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\cdots+\frac{1}{(x+18)(x+20)}$.

解题秘方： 从数的运算猜想到式的规律，利用规律和分式的加减法进行运算.

解： （1）能. $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

（2）原式 $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+18}-\frac{1}{x+20}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}+\cdots+\frac{1}{x+18}-\frac{1}{x+20}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+20}\right)=\frac{10}{x^2+20x}$.

解法提醒

本题体现了从特殊到一般的思想，注意猜想的结果要用所学的知识论证，本题总结的结论：$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节重点考查分式的加减法及分式的混合运算．在中考中，主要有分式的计算和分式的化简求值两种题型，其中分式的化简求值是中考的热点，多以解答题的形式出现．

三年中考兵法

考法1 利用分式的加减法法则进行分式的加减运算

例9 [中考·吉林]某学生化简分式$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}$出现了错误，解答过程如下：

$$\text{原式}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第一步})$$

$$=\frac{1+2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第二步})$$

$$=\frac{3}{x^2-1}.\ (\text{第三步})$$

（1）该学生解答过程是从第_____步开始出错的，其错误原因是_____；

（2）请写出此题正确的解答过程．

试题评析：本题主要考查了分式的加减运算，正确掌握分式的加减法法则是解题的关键．

解：（1）一；分式的基本性质用错

（2）原式$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$．

考法2 利用分式的混合运算求值

例10 [中考·济宁]已知$m+n=-3$，则分式$\frac{m+n}{m}\div\left(\frac{-m^2-n^2}{m}-2n\right)$的值是_____．

试题评析：本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则．

解：原式$=\frac{m+n}{m}\div\frac{-(m^2+2mn+n^2)}{m}=\frac{m+n}{m}\cdot\frac{m}{-(m+n)^2}=-\frac{1}{m+n}$，

当$m+n=-3$时，原式$=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$．

答案：$\frac{1}{3}$

冲刺·满分

考法点评

考查分式的加减法．先分清是同分母分式还是异分母分式相加减，其中分母互为相反数可变为同分母分式，若是异分母分式，必须先通分，然后运用同分母分式加减法的运算法则进行化简．

解法提醒

分式的化简求值一般是先化简再求值．化简的过程就是分式的混合运算的过程，求值的过程就是求式子值的过程．若已知的是字母关系式的值时，则可考虑用整体代入法求值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·天津]计算 $\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{1}{x+1}$　　B. $\frac{1}{(x+1)^2}$

C.1　　D. $x+1$

2. [中考·威海]化简 $\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{1}{x-3}$　　B. $\frac{1}{x+3}$

C. $\frac{1}{3-x}$　　D. $\frac{3x+3}{x^2-9}$

3. 化简 $\left(1+\frac{4}{a-2}\right)\div\frac{a}{a-2}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{a+2}{a}$　　B. $\frac{a}{a+2}$

C. $\frac{a-2}{a}$　　D. $\frac{a}{a-2}$

4. [中考·河北]若 $\frac{3-2x}{x-1}=(\quad)+\frac{1}{x-1}$，则括号中的数是(　　)

A. -1　　B. -2

C. -3　　D. 任意数

5. [中考·包头]化简：$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cdot ab$，其结果是(　　)

A. $\frac{a^2b^2}{a-b}$　　B. $\frac{a^2b^2}{b-a}$

C. $\frac{1}{a-b}$　　D. $\frac{1}{b-a}$

6. 已知 $a+b+c=0$，那么 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 的值为(　　)

A.0　　B.-1

C.1　　D.-3

7. [中考·北京]如果 $m+n=1$，那么代数式 $\left(\frac{2m+n}{m^2-mn}+\frac{1}{m}\right)\cdot(m^2-n^2)$ 的值为(　　)

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 3

8. [中考·南充]已知 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则式子 $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y}$ 的值是(　　)

A. $-\frac{7}{2}$　　B. $-\frac{11}{2}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

9. 若 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$，则 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ 的值为_____.

10. 已知 $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$，则 $\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}$ 的值是_____.

11. [中考·乐山]已知 $y=\frac{2}{x}$，且 $x\neq y$，求 $\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\div\frac{x^2y}{x^2-y^2}$ 的值.

12. [中考·通辽]先化简，再求值：$\frac{1}{1-x}\div\frac{x^2+2x}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x+2}$. 请从不等式组 $\begin{cases}5-2x\geqslant 1,\\ x+3>0\end{cases}$ 的整数解中选择一个你喜欢的求值.

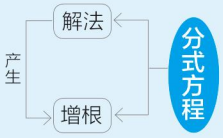
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.4 分式方程

核心知识

- 分式方程
- 分式方程的解法
- 增根

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式方程的概念

1. 分式方程

分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

2. 判断一个方程是分式方程的条件

(1) 是方程;

(2) 含有分母;

(3) 分母中含有未知数.

以上三者缺一不可.


分式方程

提分·必记

特别解读

1. 方程的分母中是否含有未知数是区分分式方程和整式方程的依据.
2. 识别分式方程时,不能对方程进行约分或通分变形,更不能用等式的性质变形.

拨考向 利用分式方程的概念识别分式方程

例 1 判断下列方程是不是分式方程,并说明理由.

(1) $\frac{2x+3}{2}=8$;

(2) $\frac{3}{4-x}=\frac{4}{x+2}$;

(3) $\frac{x^2}{x}=1$;

(4) $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{y-3}$;

(5) $\frac{x}{a}-2=x$ (a 为非零常数).

解题秘方: 利用判别分式方程的依据——分母中含有未知数进行识别.

解: (1) 不是分式方程,因为分母中不含未知数.

(2) 是分式方程,因为分母中含有未知数.

(3) 是分式方程,因为分母中含有未知数.

(4) 是分式方程,因为分母中含有未知数.

(5) 不是分式方程,因为分母虽然含有字母 a,但 a 为非零常数,不是未知数.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是不是分式方程的方法:

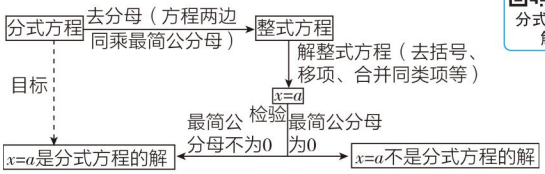
根据分式方程定义中的条件,判断方程中分母是否含有未知数(注意仅仅是字母不行,必须是表示未知数的字母),如果含有未知数,那么这个方程就是分式方程,否则就不是分式方程.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式方程的解法

1. 分式方程的解 使得分式方程等号两端相等的未知数的值叫做分式方程的解（也叫做分式方程的根）.

2. 解分式方程的一般步骤



分式方程的解法

3. 检验方程解的方法

一般地，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为 0，因此应进行如下检验：

（1）将整式方程的解代入最简公分母，若最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

（2）也可以将整式方程的解代入原分式方程，这种方法不仅能检验出该解是否适合原分式方程，还能检验所得的解是否正确.

4. 增根 在解分式方程时，首先是通过去分母将分式方程转化为整式方程，并解这个整式方程，然后要将整式方程的根代入分式方程（或公分母）中检验. 当分母的值不等于 0 时，这个整式方程的根就是分式方程的根；当分母的值为 0 时，分式方程无解，我们把这样的根叫做分式方程的增根.

提分·必记

特别解读

1. 解分式方程的关键是去分母. 去分母时不要漏乘不含分母的项，当分子是多项式时要用括号括起来.
2. 解分式方程一定要检验，对于增根必须舍去.
3. 对增根的理解：
（1）增根一定是分式方程化为整式方程的解；
（2）若分式方程有增根，则必是使最简公分母为 0 时未知数的值.

拔考向▶ 利用解分式方程的步骤解分式方程

例 2 解下列方程：

（1）$\frac{x}{x-4}=\frac{x+2}{x-6}$；　（2）$\frac{2-x}{x-3}=\frac{1}{3-x}-2$；

（3）$\frac{4x+6}{3x-3}-\frac{5x-4}{x-1}=1$；　（4）$\frac{4}{x^2+2x}+\frac{7}{x^2-4}=\frac{6}{x^2-2x}$.

解题秘方： 将分式方程转化为整式方程，通过求整式方程的解并检验，从而得到分式方程的解.

解：（1）方程两边同乘 $(x-4)(x-6)$，

得 $x(x-6)=(x+2)(x-4)$，解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$(x-4)(x-6)\neq 0$.

所以原分式方程的解为 $x=2$.

（2）方程两边同乘 $(x-3)$，得 $2-x=-1-2(x-3)$，解得 $x=3$.

当 $x=3$ 时，$x-3=0$，

所以 $x=3$ 不是原分式方程的解.

所以原分式方程无解.

提分·秘诀

特别警示

解分式方程时易错点归纳：
去分母时常见三种典型错误：
(1) 分母与最简公分母中的因式是相反数时，去分母后注意改变符号，如例2(2)最简公分母是(x-3)，而 $\frac{1}{3-x}$ 的分母是(3-x)，去分母后是-1而不是1.
(2) 分子是多项式的，去分母后要带上括号，如例2(3)中 $\frac{5x-4}{x-1}$，去分母后为3(5x-4).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）方程两边同乘 $3(x-1)$，

得 $4x+6-3(5x-4)=3(x-1)$，

解得 $x=\frac{3}{2}$.

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$3(x-1)\neq 0$.

所以原分式方程的解为 $x=\frac{3}{2}$.

（4）原方程可化为 $\frac{4}{x(x+2)}+\frac{7}{(x+2)(x-2)}=\frac{6}{x(x-2)}$.

方程两边同乘 $x(x+2)(x-2)$，

得 $4(x-2)+7x=6(x+2)$，

解得 $x=4$.

当 $x=4$ 时，$x(x+2)(x-2)\neq 0$.

所以原分式方程的解为 $x=4$.

(3)不含分母的项易漏乘最简公分母，且最简公分母是多项式的也要带上括号.

验根是必不可少的步骤.

知识▶3 含字母的分式方程的解法

1. 含字母的分式方程

若分式方程中除了含有表示未知数的字母外，还含有表示已知数的字母，则该方程是含字母的分式方程.

2. 含字母的分式方程的解法

与一般分式方程的解法相同，含字母的分式方程求解时也是去分母、解整式方程、检验这三个步骤. 需要注意的是，要找准哪个字母表示未知数，哪个字母表示已知数，同时还要注意题目中所给的限制条件.

提分·必记

知识链接

含有字母的分式方程一般都指出了未知数. 如：“关于 x 的分式方程”表示只有 x 是未知数，其他字母都是已知数.

技考向▶利用去分母法解含字母的分式方程

例 3 解关于 x 的方程：$\frac{1}{a}-\frac{a}{x}=\frac{1}{b}-\frac{b}{x}$（$a\neq b$，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）.

解题秘方： 此题已明确 x 为未知数，a，b 均为已知数，先找出最简公分母，然后去分母，化成整式方程求解.

解： 方程两边同乘 abx，得 $bx-a^2b=ax-ab^2$.

整理得 $(a-b)x=-ab(a-b)$.

因为 $a\neq b$，所以 $a-b\neq 0$.

方程两边同除以 $(a-b)$，得 $x=-ab$.

检验：当 $x=-ab$ 时，最简公分母 $abx=-a^2b^2\neq 0$.

所以 $x=-ab$ 是原分式方程的解.

提分·秘诀

特别警示

方程两边同除以 $(a-b)$ 前，要注意讨论 $(a-b)$ 是否等于 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分组通分法巧解复杂的分式方程

例 4 解方程：$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.

解题秘方：分析四个分式中分母之间的数量关系，利用分组通分的方法解方程.

解：方法一 方程两边分别通分后相加，

得$\frac{2x+11}{(x+4)(x+7)}=\frac{2x+11}{(x+5)(x+6)}$.

$(x+4)(x+7)=x^2+11x+28$，$(x+5)(x+6)=x^2+11x+30$，

因为无论 x 为何值，两个分母都不可能相等，

所以要使两个分式的值相等，则分子相等，且都为 0.

所以 $2x+11=0$，所以 $x=-\frac{11}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{11}{2}$时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

所以 $x=-\frac{11}{2}$是原分式方程的解.

方法二 移项得$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$，

方程两边分别通分后相减，得$\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

因为两个分式的分子相同，分式值相等，所以分式的分母相等.

所以 $(x+4)(x+5)=(x+6)(x+7)$，所以 $-4x-22=0$，所以 $x=-\frac{11}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{11}{2}$时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

所以 $x=-\frac{11}{2}$ 是原分式方程的解.

挑战·高分

技巧点拨

一个复杂的分式方程，直接去分母时，计算相当麻烦，观察分式的结构特征可采取分组通分法，达到以下两种结果：

(1) 左右两边分子相同，分母一定不相等，则只有分子的值为0时，分式方程才成立.

(2) 左右两边分子是一个相等的非零常数，则只有分母相等时，分式方程才成立.

拔尖角度 2 利用分类讨论思想求分式方程无解时字母的值

例 5 若关于 x 的分式方程 $2-\frac{1-kx}{x-2}=\frac{1}{2-x}$无解，求 k 的值.

解题秘方：根据分式方程无解的两种情况：（1）求出的整式方程的解使最简公分母为 0；（2）分式方程所化成的整式方程无解进行分类讨论，确定字母的值.

解：方程两边同乘最简公分母 $(x-2)$，得

$2(x-2)-(1-kx)=-1$，即 $(2+k)x=4$ ①.

分两种情况讨论：

（1）当 $2+k\neq 0$，即 $k\neq -2$ 时，$x=\frac{4}{2+k}$.

因为原分式方程无解，所以 $x-2=0$，即 $x=2$.

点拨微课堂

挑战·高分

方法点拨

导致分式方程无解的情况有两种：

（1）由于整式方程无解导致分式方程无解：将分式方程通过去分母变成整式方程后，整式方程是 $ax=b$（$a=0$，$b\neq 0$）的形式；

（2）由于增根导致分式方程无解：求得的分式方程化成的整式方程的根是原分式方程的增根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）当 $2+k=0$，即 $k=-2$ 时，方程①无解，

则原分式方程也无解．

综上，k 的值为 0 或 -2.

拔尖角度▸ 3 利用分式方程的解的范围列不等式求字母的取值范围

挑战·高分

特别提示

若“解是正数”即 $x-3$ 可能为 0，则可能产生增根 $x=3$.

若“解是负数”即 $x-3$ 不可能为 0，则不可能产生增根.

例 6 关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-3}=1$ 的解是正数，求 a 的取值范围．

解题秘方： 先将分式方程化为整式方程，再用含待定字母的式子表示方程的解，然后根据解的情况，确定待定字母的取值范围．

解： 方程两边同乘（$x-3$），得 $2x+a=x-3$.

解得 $x=-3-a$.

因为原方程的解是正数，

所以 $-3-a>0$，所以 $a<-3$.

又因为 $x-3\neq 0$，所以 $-3-a-3\neq 0$，

解得 $a\neq -6$. 所以 $a<-3$ 且 $a\neq -6$.

方法点拨：根据分式方程的解的范围求字母取值范围的方法

先把分式方程去分母后求出整式方程的解，再列出不等式（组）求出字母的取值范围，最后判断在字母的取值范围内是否可能产生增根，若可能，排除产生增根时字母的值．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是解分式方程．解分式方程是中考考查的热点，考查形式有选择题、填空题和解答题，难度一般不大．

三年中考兵法

冲刺·满分

思路点拨

先利用方程的解的定义，把 $x=4$ 代入原分式方程，就得到一个关于 a 的新分式方程，解这个新分式方程，求出 a 的值并检验．

考法 1 利用分式方程的解的定义求字母的值

例 7 ［中考·株洲］关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$ 的解为 $x=4$，则常数 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 10

试题评析： 本题考查分式方程解的概念及分式方程的解法，解答本题的关键是明确分式方程的解是使方程两边相等的未知数的值．

解： 把 $x=4$ 代入方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$，得 $\frac{2}{4}+\frac{3}{4-a}=0$，

解得 $a=10$. 经检验，当 $a=10$ 时，$x=4$ 是原分式方程的解．

答案： D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分式方程的解满足的条件求字母的值

例 8 [中考·重庆]若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{1+x}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$ 有且只有四个整数解，且使关于 y 的方程 $\dfrac{y+a}{y-1}+\dfrac{2a}{1-y}=2$ 的解为非负数，则符合条件的所有整数 a 的和为（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

试题评析：此题考查解分式方程，以及解一元一次不等式组，熟练掌握解法是解题的关键.

解：将不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{1+x}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}x<5,\\ x\geqslant\dfrac{a+2}{4}.\end{cases}$

由不等式组有且只有四个整数解，得到 $0<\dfrac{a+2}{4}\leqslant 1$，

解得 $-2<a\leqslant 2$，

即整数 $a=-1$，0，1 或 2.

将分式方程 $\dfrac{y+a}{y-1}+\dfrac{2a}{1-y}=2$，去分母得 $y+a-2a=2(y-1)$，

解得 $y=2-a$，

由分式方程的解为非负数以及分式有意义的条件，得到 $a\leqslant 2$ 且 $a\neq 1$.

综上，整数 a 为 -1，0 或 2，

故符合条件的所有整数 a 的和为 1.

答案：C

解法提醒

表示出不等式组的解集，由不等式组有且只有四个整数解确定出整数 a 的值，再由分式方程的解为非负数以及分式有意义的条件求出满足题意的整数 a 的值，进而求出其和.

考法 3 利用分式方程增根的定义求字母的值

例 9 [中考·巴中]若分式方程 $\dfrac{3x-a}{x^2-2x}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x}$ 有增根，则 a 的取值是（　　）

A. 0 或 2　　B. 4　　C. 8　　D. 4 或 8

试题评析：本题考查分式方程的增根. 增根的定义：在分式方程变形时，有可能产生不适合原分式方程的根，即能满足去掉分母后的整式方程，但代入原分式方程则无意义，我们把这样的根叫做原分式方程的增根.

解：方程两边同乘 $x(x-2)$，得 $3x-a+x=2(x-2)$，

由题意得，分式方程的增根为 $x=0$ 或 $x=2$，

当 $x=0$ 时，$-a=-4$，

解得 $a=4$；

当 $x=2$ 时，$6-a+2=0$，

解得 $a=8$.

答案：D

知识储备

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的解使最简公分母的值为 0，则这个解叫做原分式方程的增根；反之，若分式方程有增根，则必是使最简公分母为 0 时未知数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见251页

1. 下列方程不是分式方程的是（　　）

A. $\frac{1}{x}+x=2$　　B. $\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1+x}=2$　　D. $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-7}$

2. 解分式方程 $\frac{1}{x-2}-3=\frac{4}{2-x}$ 时，去分母可得（　　）

A. $1-3(x-2)=4$　　B. $1-3(x-2)=-4$

C. $1-3(2-x)=-4$　　D. $1-3(2-x)=4$

3. [中考·成都] 已知 $x=2$ 是分式方程 $\frac{k}{x}+\frac{x-3}{x-1}=1$ 的解，那么 k 的值为（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

4. [中考·齐齐哈尔] 若关于 x 的分式方程 $\frac{3x}{x-2}=\frac{m}{2-x}+5$ 的解为正数，则 m 的取值范围为（　　）

A. $m<-10$

B. $m\leqslant -10$

C. $m\geqslant -10$ 且 $m\neq -6$

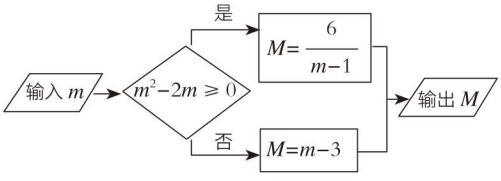
D. $m>-10$ 且 $m\neq -6$

5. [中考·遂宁] 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2}-\frac{3}{2-x}=1$ 有增根，则 m 的值为（　　）

A.2　　B.1

C.3　　D.−3

6. [中考·广元] 按照如图所示的流程，若输出的 $M=-6$，则输入的 m 为（　　）



（第6题）

A.3　　B.1

C.0　　D.−1

7. 当 $x=$_____ 时，分式 $\frac{4}{x-4}$ 与 $\frac{3}{x-1}$ 的值相等.

8. 对于非零的两个数 a,b，规定 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，若 $2\oplus(2x-1)=1$，则 x 的值为_____.

9. 方程 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$ 的解为 $x=1$；方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$ 的解为 $x=2$；方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}$ 的解为 $x=3$；…；按此规律，解为 $x=6$ 的方程应表示为_____.

10. 解分式方程：

（1）[中考·金华] $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$；

（2）$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$.

11. 已知关于 x 的方程 $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$ 的解是正数，求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.5 分式方程的应用

核心知识

- 分式方程的应用
- 分式方程应用的常见类型

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 分式方程的应用

1. 列分式方程常用的等量关系

（1）**行程问题**：速度 × 时间 = 路程.

（2）**利润问题**：利润 = 售价 − 进价；利润率 = 利润 ÷ 进价 × 100%.

（3）**工程问题**：工作量 = 工作时间 × 工作效率；总工作量 = 各个分工作量之和.

（4）**储蓄问题**：本息和 = 本金 + 利息.

2. 列分式方程解应用题的一般步骤

（1）**审**：即审题，根据题意找出已知量和未知量，并找出等量关系.

（2）**设**：即设未知数，设未知数的方法有直接设和间接设，注意单位要统一，选择一个未知量用未知数表示，并用含未知数的式子表示相关量.

（3）**列**：即列方程，根据等量关系列出分式方程.

（4）**解**：即解所列的分式方程，求出未知数的值.

（5）**验**：即验根，既要检验所求的未知数的值是否适合分式方程，又要检验此解是否符合实际意义.

（6）**答**：即写出答案，注意单位和答案要完整.

提分·必记

特别解读

1. 审题时，先寻找题目中的关键词，然后借助列表、画图等方法准确找出等量关系. 当题目中包含多个等量关系时，要选择一个能够体现全部（或大部分）数量的等量关系列方程.
2. 设未知数时，一般题中问什么就设什么，即设直接未知数；若设直接未知数难以列方程，则可设另一个相关量为未知数，即设间接未知数；有时设一个未知数无法表示出等量关系，可设多个未知数，即设辅助未知数.
3. 应用题中解分式方程同样要验根.

拨考向▸ 利用建立分式方程的模型解决实际问题

类型 1：行程问题

例 1 为加快城市群的建设与发展，要在 A，B 两城市间新建一条城际铁路，建成后，铁路运行里程由现在的 120 km 缩短至 114 km，城际铁路的设计平均时速要比现行的平均时速快 110 km，运行时间仅是现行时间的$\frac{2}{5}$，求建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间.

提分·秘诀

另解

本题也可以采用设间接未知数的方法进行求解.

设城际铁路的现行平均速度是 y km/h，则城

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据题意中的两个等量关系，一个用来设未知数，一个用来列方程解决问题.

解：设建成后的城际铁路在A，B两城市间的运行时间为x h，则现行的运行时间为$\frac{5}{2}x$ h.

根据题意，得$\frac{114}{x}-\frac{120}{\frac{5}{2}x}=110$. 解得$x=0.6$.

当$x=0.6$时，$\frac{5}{2}x\neq 0$，且符合题意.

所以原分式方程的解为$x=0.6$.

答：建成后的城际铁路在A，B两城市间的运行时间为0.6 h.

际铁路的设计平均速度是$(y+110)$ km/h.

根据题意，得

$\frac{120}{y}\times\frac{2}{5}=\frac{114}{y+110}$.

解得$y=80$.

经检验，$y=80$是原分式方程的解，且符合题意.

所以$\frac{120}{80}\times\frac{2}{5}=0.6$(h).

答：建成后的城际铁路在A,B两城市间的运行时间为0.6 h.

类型2：工程问题

例2 [中考·德阳]为配合“一带一路”国家倡议，某铁路货运集装箱物流园区正式启动了二期扩建工程. 一项地基基础加固处理工程由A，B两个工程公司承担建设，已知A工程公司单独建设完成此项工程需要180天，A工程公司单独施工45天后，B工程公司参与合作，两工程公司又共同施工54天后完成了此项工程.

（1）求B工程公司单独建设完成此项工程需要多少天.

（2）由于受工程建设工期的限制，物流园区管委会决定将此项工程划分成两部分，要求两工程公司同时开工，A工程公司建设其中一部分用了m天完成，B工程公司建设另一部分用了n天完成，其中m，n均为正整数，且$m<46$，$n<92$. 求A，B两个工程公司各施工建设了多少天.

解题秘方：利用一项工程分几部分完成，各部分工作量之和等于工作总量“1”，列出方程解决问题.

解法提醒

（1）将工作总量看成“1”时，完成任务的天数与工作效率互为倒数.

（2）在工程问题中，无论工作过程是怎样的，等量关系都是：甲完成的工作量+乙完成的工作量+…=总工作量. 当总工作量没有给出时，一般记为整体“1”.

解：（1）设B工程公司单独建设完成此项工程需要x天，

根据题意，得$45\times\frac{1}{180}+54\times\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{x}\right)=1$，解得$x=120$，

经检验，$x=120$是原分式方程的解，且符合题意.

答：B工程公司单独建设完成此项工程需要120天.

（2）根据题意，得$m\times\frac{1}{180}+n\times\frac{1}{120}=1$，整理得$n=120-\frac{2}{3}m$，

因为$m<46$，$n<92$，所以$120-\frac{2}{3}m<92$，解得$42<m<46$.

因为m为正整数，所以$m=43$，44或45.

又因为$n=120-\frac{2}{3}m$为正整数，所以$m=45$，$n=90$.

答：A工程公司施工建设了45天，B工程公司施工建设了90天.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：销售问题

例 3 某超市用 3 000 元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨 9 000 元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了 20%，购进干果的质量比第一次的质量的 2 倍还多 300 千克．若超市按每千克 9 元的价格出售，当大部分干果售出后，余下的 600 千克按售价的 8 折售完．

（1）该种干果第一次的进价是多少元／千克？

（2）超市销售这种干果共盈利多少元？

解题秘方：（1）根据等量关系“第二次购进干果的质量 =2× 第一次购进干果的质量 +300 千克”列方程进行求解；（2）根据“盈利 = 销售额 − 成本”列式进行计算．

解：（1）设该种干果第一次的进价是 x 元／千克，则第二次的进价为（1+20%）x 元／千克．

根据题意，得 $\frac{9\,000}{(1+20\%)x}=2\times\frac{3\,000}{x}+300$．解得 $x=5$．

当 $x=5$ 时，$(1+20\%)x\neq 0$ 且符合题意．

所以原分式方程的解为 $x=5$．

答：该种干果第一次的进价是 5 元／千克．

（2）根据题意，盈利为 $\left[\frac{3\,000}{5}+\frac{9\,000}{5\times(1+20\%)}-600\right]\times 9+600\times 9\times 80\%-(3\,000+9\,000)=(600+1\,500-600)\times 9+4\,320-12\,000=5\,820$（元）．

答：超市销售这种干果共盈利 5 820 元．

知识储备

利润问题的相关公式及基本数量关系：

（1）相关公式：

售价 = 进价 ×（1+ 利润率）；

售价 = 标价 × 折扣；

利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$．

（2）基本数量关系：

利润 = 售价 − 进价；

利润 = 进价 × 利润率；

销售额 = 销售量 × 销售单价；

进价 ×（1+ 利润率）= 标价 × 折扣．

详解

由题意可知，按每千克 9 元的价格出售的干果的质量等于两次购进的干果的总质量减去 600 千克．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 建立分式方程模型进行方案设计

挑战·高分

例 4 [中考·绥化] 为了迎接“十一”小长假的购物高峰，某运动品牌专卖店准备购进甲、乙两种运动鞋．其中甲、乙两种运动鞋的进价和售价如下表所示：

价格 \ 运动鞋	甲	乙
进价（元／双）	m	$m-20$
售价（元／双）	240	160

已知用 3 000 元购进甲运动鞋的数量与用 2 400 元购进乙运动鞋的数量相同．（等量关系）

（1）求 m 的值．

（2）要使购进的甲、乙两种运动鞋共 200 双的总利润（利润 = 售价 − 进价）不少于 21 700 元，且不超过 22 300 元，该专卖店有几种进货方案？（不等关系）

方法点拨

建立方程和不等式的模型关键是寻找题目中的等量关系和不等关系．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣题干中等量关系和不等关系，建立分式方程和不等式（组）的模型解决问题.

解：（1）依题意，得 $\frac{3\,000}{m}=\frac{2\,400}{m-20}$.

整理，得 $600m=60\,000$，

解得 $m=100$.

经检验，$m=100$ 是原分式方程的解，且符合题意.

答：m 的值为 100.

（2）设购进甲运动鞋 x 双，则购进乙运动鞋（$200-x$）双.

由（1）知，甲运动鞋的进价为 100 元/双，乙运动鞋的进价为 $100-20=80$（元/双）. 根据题意，得

$21\,700\leqslant(240-100)x+(160-80)\times(200-x)\leqslant 22\,300$，

解得 $95\leqslant x\leqslant 105$.

因为 x 是正整数，

所以共有 11 种进货方案.

答：该专卖店有 11 种进货方案.

方法点拨

方案设计的关键是求出未知量的取值范围，再根据未知量的实际意义取特殊值进行方案设计.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是列分式方程解应用题. 常考查行程问题、工程问题和销售问题等，难度中等，有时与不等式的应用一起综合考查.

三年中考兵法

考法 1 建立分式方程模型解决行程问题

例 5 [中考·泰州]近年来，我市大力发展城市快速交通，小王开车从家到单位有两条路线可选择，路线 A 为全程 25 km 的普通道路，路线 B 包含快速通道，全程 30 km. 走路线 B 比走路线 A 平均速度提高 50%，时间节省 6 min. 求走路线 B 的平均速度.

试题评析：本题主要考查建立分式方程模型解决行程问题，紧扣速度和时间之间的等量关系是解决问题的关键.

解：设走路线 A 的平均速度为 x km/h，则走路线 B 的平均速度为（1+50%）x km/h.

依题意，得 $\frac{25}{x}-\frac{30}{(1+50\%)x}=\frac{6}{60}$，

解得 $x=50$.

经检验，$x=50$ 是原分式方程的解，且符合题意，

所以（1+50%）$x=75$.

答：走路线 B 的平均速度为 75 km/h.

冲刺·满分

问题剖析

设走路线A的平均速度为x km/h，则走路线B的平均速度为(1+50%)x km/h，根据时间=路程÷速度，结合走路线B比走路线A少用6 min，即可得出关于x的分式方程，解之并检验后即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 建立分式方程模型解决工程问题

例 6 [中考·湖州]某企业承接了 27 000 件产品的生产任务，计划安排甲、乙两个车间的共 50 名工人合作生产 20 天完成．已知甲、乙两个车间利用现有设备，工人的工作效率为：甲车间每人每天生产 25 件，乙车间每人每天生产 30 件．

（1）求甲、乙两个车间各有多少名工人参与生产．

（2）为了提前完成生产任务，该企业设计了两种方案：

方案一　甲车间租用先进生产设备，工人的工作效率可提高 20%，乙车间维持不变．

方案二　乙车间再临时招聘若干名工人（工作效率与原工人相同），甲车间维持不变．

设计的这两种方案，企业完成生产任务的时间相同．

①求乙车间需临时招聘的工人数；

②若甲车间租用设备的租金每天 900 元，租用期间另需一次性支付运输等费用 1 500 元；乙车间需支付临时招聘的工人每人每天 200 元，问：从新增加的费用考虑，选择哪种方案更节省开支？请说明理由．

试题评析：本题主要考查建立分式方程模型解决工程问题，关键是找出题目中蕴含的等量关系．

解：（1）设甲车间有 x 名工人参与生产，乙车间有 y 名工人参与生产，

由题意，得 $\begin{cases} x+y=50, \\ 20(25x+30y)=27\,000, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=30, \\ y=20. \end{cases}$

所以甲车间有 30 名工人参与生产，乙车间有 20 名工人参与生产．

（2）①设方案二中乙车间需临时招聘 m 名工人，由题意，得

$$\frac{27\,000}{30\times25\times(1+20\%)+20\times30}=\frac{27\,000}{30\times25+(20+m)\times30},$$

解得 $m=5$.

经检验，$m=5$ 是原分式方程的解，且符合题意．

所以乙车间需临时招聘 5 名工人．

②选择方案一更节省开支．理由如下：企业完成生产任务所需的时间为

$$\frac{27\,000}{30\times25\times(1+20\%)+20\times30}=18\text{（天）}.$$

选择方案一需增加的费用为 $900\times18+1\,500=17\,700$（元）．

选择方案二需增加的费用为 $18\times200\times5=18\,000$（元）．

因为 $17\,700<18\,000$，

所以选择方案一更节省开支．

问题剖析

(1)设甲车间有x名工人参与生产，乙车间有y名工人参与生产，由题意得关于x和y的方程组，求解即可．

(2)①设方案二中乙车间需临时招聘m名工人，由企业完成生产任务的时间相同，列出关于m的分式方程，求解并检验即可；②用生产任务数量27 000除以方案一中甲和乙一天完成的生产任务之和可得企业完成生产任务的时间，然后分别按方案一和方案二计算增加的费用并比较大小即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·淄博]“绿水青山就是金山银山.”某工程队承接了60万平方米的荒山绿化任务，为了迎接雨季的到来，实际工作时每天的工作效率比原计划提高了25%，结果提前30天完成了这一任务.设实际工作时每天绿化的面积为x万平方米，则下面所列方程中正确的是（　　）

A. $\frac{60}{x}-\frac{60}{(1+25\%)x}=30$

B. $\frac{60}{(1+25\%)x}-\frac{60}{x}=30$

C. $\frac{60\times(1+25\%)}{x}-\frac{60}{x}=30$

D. $\frac{60}{x}-\frac{60\times(1+25\%)}{x}=30$

2. [中考·内江]甲、乙两人同时分别从A，B两地沿同一条公路骑自行车到C地.已知A，C两地间的距离为110 km，B，C两地间的距离为100 km.甲骑自行车的平均速度比乙快2 km/h，结果两人同时到达C地，求两人的平均速度.为解决此问题，设乙骑自行车的平均速度为x km/h.由题意列出方程，其中正确的是（　　）

A. $\frac{110}{x+2}=\frac{100}{x}$　　B. $\frac{110}{x}=\frac{100}{x+2}$

C. $\frac{110}{x-2}=\frac{100}{x}$　　D. $\frac{110}{x}=\frac{100}{x-2}$

3. 国家实施了中央财政补贴条例，支持高效节能电器的推广使用，某款空调在条例实施后，每购买一台，客户可获财政补贴200元.若同样用11万元所购买的此款空调的数量，条例实施后比条例实施前多10%，则条例实施前此款空调的售价为每台_____元.

4. 在汛期，某沿江村庄因洪水而沦为孤岛.当时洪水流速为10 km/h，张师傅奉命用冲锋舟救援，他发现以最大航速顺流航行2 km所用时间，与以最大航速逆流航行1.2 km所用时间相等.则该冲锋舟在静水中的最大航速为_____km/h.

5. 在某年春运期间，由于冰雪灾害，导致某地断电.该地供电局组织电工进行抢修，供电局距离抢修工地15 km，抢修车装载着所需材料先从供电局出发，15 min后，电工乘吉普车从供电局出发，结果两种车同时到达抢修工地.已知吉普车速度是抢修车速度的1.5倍，求这两种车的速度.

6. 某超市用5 000元购进一批新品种苹果进行试销，由于销售状况良好，超市又调拨11 000元资金购进该品种苹果，但这次的进价比试销时每千克多了0.5元，购进苹果质量是试销时的2倍.

（1）试销时该品种苹果的进价是每千克多少元?

（2）如果超市将该品种苹果按每千克7元的定价出售，当大部分苹果售出后，余下的400千克按定价的七折（即定价的70%）售完，那么超市在这两次苹果销售中共盈利多少元?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·贵阳]某青春党支部在精准扶贫活动中，给结对帮扶的贫困家庭赠送甲、乙两种树苗让其栽种，已知乙树苗的价格比甲树苗贵 10 元，用 480 元购买乙树苗的数量恰好与用 360 元购买甲树苗的数量相同.

（1）求甲、乙两种树苗每棵的价格各是多少元.

（2）在实际帮扶中，他们决定再次购买甲、乙两种树苗共 50 棵，此时，甲树苗的售价比第一次购买时降低了 10%，乙树苗的售价不变，如果再次购买两种树苗的总费用不超过 1 500 元，那么他们最多可购买多少棵乙树苗?

8. [中考·抚顺]为落实“美丽抚顺”的工作部署，市政府计划对城区道路进行改造，现安排甲、乙两个工程队完成，已知甲工程队的工作效率是乙工程队工作效率的$\frac{3}{2}$倍，甲工程队改造 360 米的道路比乙工程队改造同样长的道路少用 3 天.

（1）甲、乙两工程队每天能改造道路的长度分别是多少米?

（2）若甲工程队工作一天需付费用 7 万元，乙工程队工作一天需付费用 5 万元，需改造的道路全长 1 200 米，改造总费用不超过 145 万元，则至少安排甲工程队工作多少天?

9. 某电脑公司经销甲品牌电脑，受经济危机影响，电脑价格不断下降. 今年三月份电脑售价比去年同期每台降价 1 000 元，若卖出相同数量的电脑，去年销售额为 10 万元，今年销售额只有 8 万元.

（1）今年三月份甲品牌电脑每台售价多少元?

（2）为了增加收入，电脑公司决定再经销乙品牌电脑，已知甲品牌电脑每台进价为 3 500 元，乙品牌电脑每台进价为 3 000 元，公司预计用不多于 5 万元且不少于 4.8 万元的资金购进这两种电脑共 15 台，有几种进货方案?

（3）如果乙品牌电脑每台售价为 3 800 元，为打开乙品牌电脑的销路，公司决定每售出一台乙品牌电脑，返还顾客现金 a 元，要使（2）中所有方案获利相同，a 值应是多少? 此时，哪种方案对公司最有利?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分式运算中的常用技巧与方法

荣老师告诉你 在分式的运算中，若能认真观察式子的结构特征，灵活运用解题技巧，选择恰当的运算方法，常常会得到事半功倍的效果.

技巧一 整体通分法

例 1 化简：$\frac{a^2}{a-1}-a-1$.

解题秘方： 将后两项看成一个整体，则可以整体通分，简便求解.

解： $\frac{a^2}{a-1}-a-1=\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}=\frac{a^2-(a^2-1)}{a-1}$

$=\frac{1}{a-1}$.

方法点拨： 运用整体通分法计算时，看成一个整体的部分要用括号括起来，运用添括号法则时，如果前面是“−”，注意括号里要变号.

技巧二 逐项通分法

例 2 计算：

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}.$$

解题秘方： 若全部通分，最简公分母好确定，但分子的计算量太大，观察分母发现，从前到后逐项通分时，分母都构成平方差公式.

解： $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{(a+b)-(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b(a^2+b^2)-2b(a^2-b^2)}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{4b^3}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=0$.

技巧三 先约分，后通分

例 3 计算：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$.

解题秘方： 先不要盲目通分，观察后发现每个分式都可以约分，所以先将分子、分母分解因式，约分后再通分计算.

解： 原式 $=\frac{a(a+6)}{a(a+2)}-\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}$

$=\frac{a+6}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}$

$=\frac{a^2-2a+6a-12}{a^2-4}-\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}$

$=\frac{-16}{a^2-4}$

$=-\frac{16}{a^2-4}$.

技巧四 整体代入法

例 4 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，求 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}$ 的值.

解题秘方： 一个条件无法求出两个未知数的值，所以只能考虑整体代入求值.

解： **方法一** 因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，所以 $xy\neq 0$.

所以 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{\frac{2}{y}-5+\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}+2+\frac{1}{x}}=$

$\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-5}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2}=\frac{2\times 5-5}{5+2}=\frac{5}{7}$.

方法二 因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，

所以 $\frac{x+y}{xy}=5$，所以 $x+y=5xy$ 且 $xy\neq 0$.

所以 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2(x+y)-5xy}{(x+y)+2xy}$

$=\frac{2\times 5xy-5xy}{5xy+2xy}=\frac{5xy}{7xy}=\frac{5}{7}$.

方法点拨： 当不能求出分式中各个字母的值时，可以考虑利用整体代入法，虽然分子和分母中都含有字母，但通过约分可以求出其值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧五 运用公式变形

例 5 已知 $a^2-5a+1=0$，计算：$a^4+\frac{1}{a^4}$.

解题秘方： 运用整式的乘法公式解决分式的求值问题，关键是找准公式的基本模型.

解： 由已知条件可得 $a\neq 0$，

所以 $a+\frac{1}{a}=5$.

所以 $a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$

$=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2$

$=(5^2-2)^2-2$

$=527$.

方法点拨： 运用乘法公式变形求分式的值，避免了求出分式中字母的值. 其中互为倒数的两个式子的和在运用完全平方公式时，积的 2 倍等于 2.

技巧六 设辅助参数法

例 6 已知 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$，计算：$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

解题秘方： 利用设参数进行转化，从而求出式子的值.

解： 设 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则 $b+c=ak$，$a+c=bk$，$a+b=ck$.

把这三个等式相加得 $2(a+b+c)=(a+b+c)k$，

若 $a+b+c=0$，即 $a+b=-c$，则 $k=-1$.

若 $a+b+c\neq 0$，则 $k=2$.

$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{ck\cdot ak\cdot bk}{abc}=k^3$.

当 $k=-1$ 时，原式 $=-1$.

当 $k=2$ 时，原式 $=8$.

方法点拨： 设辅助参数，利用整体代入法将要求的分式转化为以辅助参数为字母的式子，进而求出其值.

技巧七 倒数法

例 7 已知 $\frac{a}{a^2-a+1}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$ 的值.

解题秘方： 将已知的分式和要求的分式的分子和分母都颠倒，对比其结构求值.

解： 由条件知 $a\neq 0$，

所以 $\frac{a^2-a+1}{a}=7$，即 $a+\frac{1}{a}=8$，

所以 $\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+1=63$，所以 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}=\frac{1}{63}$.

方法点拨： 本题将分式的分子和分母颠倒，然后转化为用技巧五中的公式变形法求值. 注意对于要求的分式的值要倒过来还原.

技巧八 把未知数当成已知数

例 8 已知 $3a-4b-c=0$，$2a+b-8c=0$，$c\neq 0$. 计算：$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$.

解题秘方： 确定一个字母为已知数，利用解二元一次方程组求出方程组的解，再代入待求式子求值.

解： 把 c 当成已知数，用 c 表示 a 和 b，得 $a=3c$，$b=2c$.

又因为 $c\neq 0$，

所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}=\frac{14c^2}{11c^2}=\frac{14}{11}$.

技巧九 特殊值法

例 9 已知 $abc=1$，则 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=$_____.

解题秘方： 由已知条件无法求出 a,b,c 的值，可根据已知条件取字母的一些特殊值，然后代入求值.

解： 令 $a=1$，$b=1$，$c=1$，

则原式 $=\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}=1$.

答案： 1

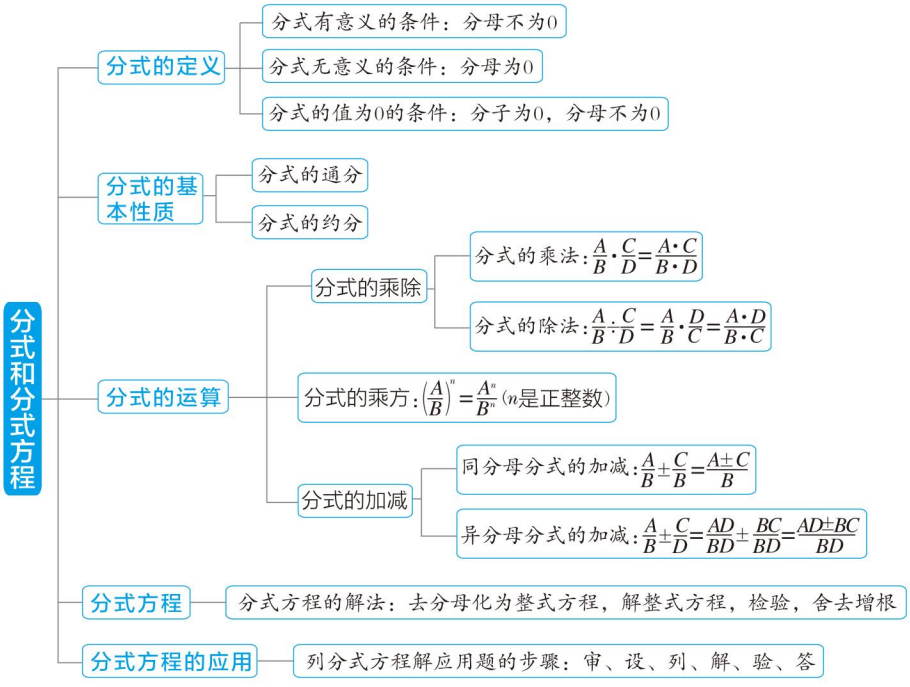
方法点拨： 特殊值法要求所取的特殊值必须符合题目中给出的已知条件，运用特殊值法可准确、迅速地求出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一般地，我们把形如$\frac{A}{B}$的代数式叫做分式，其中，A，B都是整式，且B含有字母．$B\neq0$是分式有意义的条件；$A=0$，$B\neq0$是分式的值为0的条件．

2. **分式的基本性质：**分式的分子和分母同乘（或除以）一个不等于0的整式，分式的值不变．根据分式的基本性质可以将分式进行通分或者约分．

3. 分式的运算包括乘方、乘除和加减运算，乘除运算关键是约分，加减运算关键是通分，运算的最后结果一定要化为最简分式或整式．

4. 解分式方程的关键是利用等式的性质给方程的两边同乘最简公分母，将分式方程转化成整式方程，然后解整式方程．解完整式方程后一定要注意检验．若使最简公分母的值为0，则该根为增根．

5. 列分式方程解应用题时，应先分析题意，准确找出题中的等量关系，然后设出恰当的未知数，列出分式方程．解方程，最后一定要检验，既要检验是否为所列分式方程的解，又要检验是否符合题意．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 分式的相关概念

链接中考» 在分式的相关概念中，分式有意义的条件及分式值为0的条件最为重要，也是中考中的热门考点，一般以填空题或选择题的形式出现.

例1 （1）[中考·常州]要使分式$\frac{3}{x-2}$有意义，则x的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x\neq -2$　　D. $x\neq 2$

（2）[中考·衡阳]若分式$\frac{x-2}{x+1}$的值为0，则x的值为（　　）

A. 2或-1　　B. 0

C. 2　　D. -1

解题秘方： 利用分式有意义及分式的值为0的条件解决问题.

解：（1）根据分式有意义的条件可知$x-2\neq 0$，所以$x\neq 2$.

（2）由题意可知$x-2=0$，得$x=2$. 由$x+1\neq 0$，得$x\neq -1$，所以$x=2$.

答案：（1）D　　（2）C

方法点拨： 分式的值为0需要同时具备两个条件，一是分子等于0，二是分母不等于0，二者缺一不可.

专题二 分式的运算

链接中考» 分式的运算是本章的重点，关键是掌握分式的运算顺序及运算法则，中考考查的形式主要是化简求值，属中等难度的题目.

例2 先化简：$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2}{x^2+2x+1}$，再代入一个合适的$x$的值求值.

解题秘方： 利用分式的运算法则进行化简，选择一个使原式有意义的x的值代入求值.

解： 原式$=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^2}$

$=\frac{(x+1)^2}{x^2}-\frac{x+1}{x^2}$

$=\frac{x^2+x}{x^2}$

$=\frac{x+1}{x}$.

取$x=2$，则原式$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$.（所取$x$的值不唯一）

方法点拨： 解分式化简求值问题没有捷径，需要掌握因式分解和代入求值的方法等知识，分式问题中还需注意分式有意义的条件. 如本题代入x的值必须使原式有意义，不能是0和-1.

专题三 解分式方程

链接中考» 解分式方程关键就是将分式方程转化为整式方程，解分式方程一定要注意检验. 解方程是中考中的热门考点，一般都是直接考查解分式方程.

例3 解方程：$\frac{x}{3x-1}=2-\frac{1}{1-3x}$.

解题秘方： 利用解分式方程的步骤解分式方程，注意验根.

解： 去分母，得$x=2(3x-1)+1$，

去括号，得$x=6x-2+1$，

移项、合并同类项，得$-5x=-1$，

系数化为1，得$x=\frac{1}{5}$，

经检验，$x=\frac{1}{5}$是分式方程的解.

方法点拨： 分式方程$\xrightarrow[\text{转化为}]{\text{去分母}}$整式方程$\longrightarrow$解整式方程$\longrightarrow$检验根$\longrightarrow$确定原分式方程的根.

专题四 分式方程的应用

链接中考» 分式方程的应用是分式方程作用的重要体现，是以解决生活问题为目的的，所以考查分式方程的应用时，问题的背景都是现实生活中的热点问题，解决问题的关键是寻找等量关系. 在中考中单独考查时一般以解答题的形式出现.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例4 某县突降暴雨，造成山体滑坡，桥梁垮塌，房屋大面积受损，该省民政厅急需将一批帐篷送往灾区．现有甲、乙两种货车，已知甲货车比乙货车每辆车多装20顶帐篷，且甲货车装运1 000顶帐篷与乙货车装运800顶帐篷所用车辆数相等．

（1）求甲、乙两种货车每辆车分别可装多少顶帐篷；

（2）如果这批帐篷有1 490顶，用甲、乙两种货车共16辆装运，甲货车刚好装满，乙货车最后一辆只装了50顶，其他装满．求甲、乙两种货车各有多少辆．

解题秘方： 找出题目中的等量关系列出方程（组）解决问题．

解：（1）设甲货车每辆车可装x顶帐篷，则乙货车每辆车可装（$x-20$）顶帐篷，

由题意，得$\frac{1\,000}{x}=\frac{800}{x-20}$，解得$x=100$.

经检验，$x=100$是原分式方程的解，且符合题意．

$x-20=80$.

答：甲货车每辆车可装100顶帐篷，乙货车每辆车可装80顶帐篷．

（2）设甲货车有m辆，乙货车有n辆，由题意，得$\begin{cases}m+n=16,\\100m+80(n-1)+50=1\,490,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=12,\\n=4.\end{cases}$

答：甲货车有12辆，乙货车有4辆．

方法必会

专题五 整体思想

专题解读» 解决某些数学问题时，把一个式子看成一个整体进行处理，不仅可以简化解题过程，而且还能拓宽思路，培养创新意识，体现了数学中的一种重要思想——整体思想．这一思想在整式的乘法运算中体现明显．

例5 ［中考·河北］若$a=2b\neq 0$，则$\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$的值为_____.

解题秘方： 将分式的分子、分母用同一个字母表示，再利用分式的基本性质求值．

解：
$$\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=\frac{a+b}{a}=\frac{2b+b}{2b}=\frac{3}{2}.$$

答案： $\frac{3}{2}$

方法点拨： 本题运用了整体思想求值．整体思想就是在研究和解决有关数学问题时，利用问题的整体形式、整体结构、整体特征等，对问题整体处理的解题方法．整体思想的表现形式有整体代入、整体加减、整体补形、整体变换等．

专题六 倒数法

专题解读» 有些分式求值问题直接求解困难时，可考虑求它的倒数，将问题转化为方便求解的问题．这类问题中分式的形式通常是分子是单项式，分母是多项式，此时将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的基本性质，结合题目条件就方便求解了．

例6 已知$x+\frac{1}{x}=3$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值．

解题秘方： 颠倒所求分式的分子和分母的位置可得$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$，利用分式的基本性质可得$x^2+1+\frac{1}{x^2}$，再将条件等式两边平方即可获解．

解： 由题可知$x\neq 0$，$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的倒数是$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 $x+\frac{1}{x}=3$，

所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$，

所以 $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$，

所以 $x^2+1+\frac{1}{x^2}=8$，

即 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=8$，

因此 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{8}$.

方法点拨：倒数法是处理分式问题的常用方法，对于分式求值问题，要仔细研究式子的特征，灵活运用倒数法.

专题七 裂项相消法

专题解读》裂项相消法可使多个分式的加减或相关的分式方程问题，通过变形将一部分项相互抵消，转化为常见的分式加减或常见的相关的分式方程，变复杂为简单，变难为易，不失为一种巧妙的解题方法.

例 7 解方程：$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$.

解题秘方：观察可以发现等号左边每个分式的分母中的两个因式相差 1，因此可逆向运用异分母分式的加减法法则进行裂项，相消后化为常见的分式方程求解.

解：原方程变形为 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+3}$，

整理，得 $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+3}=0$，

去分母，得 $x+3-2x=0$，

解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的解.

方法点拨：当涉及的分式方程有多个分式且分母与分子有某种规律时，常常通过裂项相消的方法把方程化为熟悉的分式方程求解，体现了转化思想.

好题必解 ☞答案见 252 页

类型 1：利用分式的性质求值

1. 已知 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$，求 $\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}$ 的值.

2. 已知 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\neq 0$，求 $\frac{3a-2b+5c}{a+b+c}$ 的值.

类型 2：分式的化简求值

3. 先化简，再求值：$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}$，其中 $x=2$.

4. 先化简，再求值：$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\div\frac{2x-y}{x^2-y^2}$，其中 x，y 满足 $|x-2|+(2x-y-3)^2=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\div\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{x}{x+1}$，其中 x 满足 $x^2-x-1=0$.

6. 先化简，再求值：$\frac{x^2-4x+4}{2x}\div\frac{x^2-2x}{x^2}+1$，在 0，1，2 三个数中选一个合适的数代入求值.

类型 3：分式方程的解法

7. 解方程：$\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{3x+3}+1$.

8. 解方程：$\frac{2+x}{2-x}+\frac{16}{x^2-4}=-1$.

类型 4：分式方程解的情况

9. 当 m 为何值时，关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ 会产生增根?

10. 已知关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$ 的解小于 3，求 a 的取值范围.

类型 5：分式方程的应用

11. 华昌中学开学初在金利源商场购进 A，B 两种品牌的足球，购买 A 品牌足球花费了 2 500 元，购买 B 品牌足球花费了 2 000 元，且购买 A 品牌足球数量是购买 B 品牌足球数量的 2 倍，已知购买 1 个 B 品牌足球比购买 1 个 A 品牌足球多花 30 元.

（1）求购买 1 个 A 品牌、1 个 B 品牌足球各需多少元；

（2）华昌中学为响应“足球进校园”的号召，决定再次购进 A，B 两种品牌足球共 50 个. 恰逢金利源商场对两种品牌足球的售价进行调整，A 品牌足球售价比第一次购买时提高了 8%，B 品牌足球按第一次购买时售价的 9 折出售. 如果这所中学此次购买 A，B 两种品牌足球的总费用不超过 3 260 元，那么华昌中学此次最多可购买多少个 B 品牌足球?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十二章测试卷

☞答案见 253 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 若分式$\frac{x}{x-4}$有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x>4$　　B. $x<4$

C. $x=4$　　D. $x\neq 4$

2. 分式 $\frac{2}{3x}$，$-\frac{x+1}{2x^2}$，$\frac{2x-1}{4x^3}$ 的最简公分母是（　　）

A. $24x^3$　　B. $24x^6$　　C. $12x^6$　　D. $12x^3$

3. 下列变形正确的是（　　）

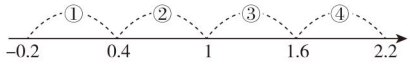
A. $\frac{b+1}{a+1}=\frac{b}{a}$　　B. $\frac{a+b}{a+b}=0$

C. $\frac{0.1a-0.3b}{0.2a+b}=\frac{a-3b}{2a+b}$　　D. $\frac{-a+b}{a-b}=-1$

4. 计算$\frac{a-1}{a}\div\left(a-\frac{1}{a}\right)$的结果是（　　）

A. $\frac{1}{a+1}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{a-1}$　　D. -1

5. 如图，若 x 为正整数，则表示 $\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x+1}$ 的值的点落在（　　）



（第 5 题）

A. 段①　　B. 段②　　C. 段③　　D. 段④

6. 分式方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$ 的解是（　　）

A. $x=0$　　B. $x=-1$

C. $x=\pm 1$　　D. 无解

7. 甲污水处理器处理 25 吨污水与乙污水处理器处理 35 吨污水所用时间相同，已知乙污水处理器每小时比甲污水处理器多处理 20 吨污水，求两种污水处理器的污水处理效率．设甲污水处理器的污水处理效率为每小时 x 吨，依题意，列方程正确的是（　　）

A. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x-20}$　　B. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x+20}$

C. $\frac{25}{x-20}=\frac{35}{x}$　　D. $\frac{25}{x+20}=\frac{35}{x}$

8. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2}=3$ 的解是正数，则 m 的取值范围为（　　）

A. $m<-6$　　B. $m>-6$

C. $m>-6$ 且 $m\neq -4$　　D. $m\neq -4$

二、填空题（每题 3 分，共 12 分）

9. 如果分式 $\frac{x+1}{x-1}$的值为 0，那么 x 的值为_____.

10. 分式 $\frac{3-x}{2-x}$ 的值比分式 $\frac{3}{x-2}$ 的值大 5，则 x 的值为_____.

11. 若 $(x-y-2)^2+|xy-3|=0$，则 $\left(\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{x-y}\right)\div\frac{1}{y}$ 的值是_____.

12. 某中学图书馆添置图书，用 240 元购进一种科普书，同时用 200 元购进一种文学书．由于科普书的单价比文学书的单价高出一半，因此学校所购买的文学书比科普书多 4 本，则这种文学书的单价为_____元.

三、解答题（共 64 分）

13.（5 分）化简：$\frac{2a}{a+1}-\frac{2a-4}{a^2-1}\div\frac{a-2}{a^2-2a+1}$.

14.（5 分）先化简，再求值：$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$，其中 $x=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.（10 分）解方程：

（1）$\frac{3x}{x+2}+\frac{2}{x-2}=3$；

（2）$\frac{4}{x^2-1}+\frac{x+2}{1-x}=-1$.

16.（10 分）关于 x 的分式方程 $\frac{2x-a}{x-1}-\frac{1}{1-x}=3$ 的解为非负数，求 a 的取值范围.

17.（10 分）先化简 $\frac{x^2-4}{x^2-9}\div\left(1-\frac{1}{x-3}\right)$，再从不等式 $2x-3<7$ 的正整数解中选一个使原式有意义的数代入求值.

18.（12 分）一项工程，甲队单独做需要 40 天完成，若乙队先做 30 天后，甲、乙两队一起合做 20 天恰好完成任务，请问：

（1）乙队单独做需要多少天才能完成任务?

（2）现将该工程分成两部分，甲队做其中一部分用了 x 天，乙队做另一部分用了 y 天，若 x，y 都是正整数，且甲队做的时间不到 15 天，乙队做的时间不到 70 天，则甲、乙两队实际各做了多少天?

19.（12 分）中国是世界上最早发现并利用茶树的国家，形成了具有独特魅力的茶文化. 2020 年 5 月 21 日，以“茶和世界，共品共享”为主题的第一届国际茶日在中国召开. 某茶店用 4 000 元购进 A 茶叶若干盒，用 8 400 元购进 B 茶叶若干盒，所购 B 茶叶比 A 茶叶多 10 盒，且 B 茶叶每盒进价是 A 茶叶每盒进价的 1.4 倍.

（1）A，B 两种茶叶每盒进价分别为多少元?

（2）第一次所购茶叶全部售完后，第二次购进 A，B 两种茶叶共 100 盒（进价不变），A 茶叶的售价是每盒 300 元，B 茶叶的售价是每盒 400 元. 两种茶叶各售出一半后，为庆祝国际茶日，两种茶叶均打七折销售，全部售出后，第二次所购茶叶的利润为 5 800 元(不考虑其他因素). 求本次购进 A，B 两种茶叶各多少盒.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

欣赏图形全等的魅力



欣赏图形全等的魅力

第十三章 全等三角形









核心考点

你将见到的

- 命题与证明
- 全等图形
- 全等三角形的性质
- 全等三角形的判定——SSS，SAS，ASA，AAS
- 三角形的尺规作图

核心方法

我们为你提供的

- 等面积法
- 方程思想
- 数形结合思想
- 截长补短法
- 倍长中线法
- 构造法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.1 命题与证明

核心知识

- 逆命题
- 证明
- 逆定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 逆命题

1. 互逆命题 一个命题的条件和结论分别为另一个命题的结论和条件的两个命题，称为互逆命题.

2. 逆命题 在两个互逆的命题中，如果我们将其中一个命题称为原命题，那么另一个命题就是这个原命题的逆命题.

注意： 原命题和逆命题是相对的，可以把条件和结论互换之后的两个命题中的任何一个作为原命题，另一个则是它的逆命题.

提分·必记

特别提醒

原命题是真命题时，它的逆命题不一定是真命题；反之，逆命题是真命题时，它的原命题不一定是真命题.

拨考向▸利用互逆命题的关系写逆命题

例1 写出下列命题的逆命题：

（1）如果 $a=b$，那么 $a^2=b^2$；

（2）如果两个数互为相反数，那么它们的和为 0；

（3）如果 $|a|=1$，那么 $a=1$.

解题秘方： 紧扣互逆的两个命题之间的关系写出原命题的逆命题.

解： （1）如果 $a^2=b^2$，那么 $a=b$.

（2）如果两个数的和为 0，那么它们互为相反数.

（3）如果 $a=1$，那么 $|a|=1$.

提分·秘诀

方法点拨

若原命题的条件和结论不明确，可以先将其改写为“如果……，那么……”的形式，再写出它的逆命题.

点知识▸2 证明

1. 证明 要说明一个命题是真命题，则要从命题的条件出发，根据已学过的基本事实、定义、性质和定理等，进行有理有据的推理. 这种推理的过程叫做证明.

2. 证明与图形有关的命题是真命题的一般步骤

（1）根据题意画出图形；

（2）根据命题的条件和结论，结合图形写出已知和求证；

（3）分析因果关系，找出证明途径，写出证明过程.

提分·必记

特别提醒

- 证明一个命题是真命题的依据可以是已知条件，也可以是已学过的定义、基本事实、定理等.
- 证明一个命题是假命题，只要举出一个反例即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用已学过的基本事实或定理进行证明

例 2 如图 13-1-1，已知 AC，BD 相交于点 O，DF 平分 $\angle CDO$ 与 AC 相交于点 F，BE 平分 $\angle ABO$ 与 AC 相交于点 E，$\angle A=\angle C$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.（写出推理依据）

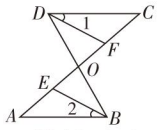


图 13-1-1

解题秘方：通过分析命题的条件和结论，找出证明的途径.

证明：$\because \angle A=\angle C$（已知），

$\therefore AB \parallel CD$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle ABO=\angle CDO$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\because DF$ 平分 $\angle CDO$，BE 平分 $\angle ABO$（已知），

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle CDO$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABO$（角平分线的定义）.

$\therefore \angle 1=\angle 2$（等量代换）.

提分·秘诀

方法点拨

证明是从条件出发，经过一步一步推理，最后得出结论的过程. 证明的每一步推理都要有依据，不能“想当然”，这些依据可以是已知条件，也可以是定义、基本事实、已学过的定理. 在初学证明时要把依据写在每一步推理后面的括号里，如本例中的“已知”“等量代换”等.

知识▶3 逆定理

逆定理

如果一个定理的逆命题是真命题，那么这个逆命题也可以称为原定理的逆定理. 一个定理和它的逆定理是互逆定理.

注意：

（1）命题有真有假，而定理都是真命题；

（2）每个命题都有逆命题，但不是所有的定理都有逆定理；

（3）互逆的两个命题不一定同真或同假，互逆的两个定理都是真命题.

提分·必记

特别提醒

互逆定理是互逆命题，但互逆命题不一定是互逆定理.

考向▶利用逆定理的定义识别逆定理

例 3 写出下列定理的逆命题，并判断定理是否有逆定理.

（1）对顶角相等；

（2）两直线平行，同位角相等.

解题秘方：紧扣逆命题和逆定理的定义，对逆命题真假的判断是解题关键.

解：（1）逆命题为相等的角为对顶角，这个命题是假命题，所以定理“对顶角相等”没有逆定理.

（2）逆命题为同位角相等，两直线平行，这个命题是真命题，所以定理“两直线平行，同位角相等”有逆定理.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个定理是否有逆定理，关键是判断逆命题是否为真命题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用综合法或分析法进行推理证明

例 4 如图 13−1−2，已知 $DE \perp AC$ 于点 E，$BC \perp AC$ 于点 C，$FG \perp AB$ 于点 G，$\angle 1 = \angle 2$. 求证：$CD \perp AB$.

解题秘方： 可由条件进行分析得到结论，也可由结论逆推符合条件.

证明： $\because DE \perp AC$，$BC \perp AC$（已知），

$\therefore \angle 5 = \angle ACB = 90°$（垂直的定义）.

$\therefore DE /\!/ BC$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle 2 = \angle 3$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\because \angle 1 = \angle 2$（已知），

$\therefore \angle 1 = \angle 3$（等量代换）.

$\therefore GF /\!/ CD$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle 4 = \angle 6$（两直线平行，同位角相等）.

$\because FG \perp AB$（已知），

$\therefore \angle 6 = 90°$（垂直的定义）.

$\therefore \angle 4 = 90°$（等量代换）.

$\therefore CD \perp AB$（垂直的定义）.

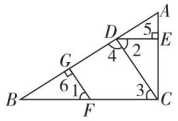


图 13−1−2

挑战·高分

解法思路展示

分析法（由果索因）

$CD \perp AB$，$FG \perp AB \Rightarrow$

$FG /\!/ CD \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$

$\angle 1 = \angle 2$

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow DE /\!/ BC$

$\Rightarrow DE \perp AC$，$BC \perp AC$

拔尖角度 2 利用建模思想对文字命题进行证明

例 5 求证：两条平行线被第三条直线所截，内错角的角平分线互相平行.

解题秘方： 分析命题的条件和结论，结合图形写出已知和求证，最后写出证明过程.

解： 已知：如图 13−1−3，$AB /\!/ CD$，GP 平分 $\angle AGH$，HQ 平分 $\angle EHD$.

求证：$GP /\!/ HQ$.

证明：$\because AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore \angle AGH = \angle GHD$（两直线平行，内错角相等）.

$\because GP$ 平分 $\angle AGH$（已知），

$\therefore \angle HGP = \frac{1}{2} \angle AGH$（角平分线的定义）.

$\because HQ$ 平分 $\angle GHD$（已知），

$\therefore \angle GHQ = \frac{1}{2} \angle GHD$（角平分线的定义）.

$\therefore \angle HGP = \angle GHQ$（等量代换）.

$\therefore GP /\!/ HQ$（内错角相等，两直线平行）.

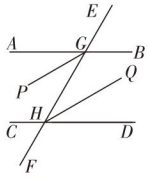


图 13−1−3

挑战·高分

方法点拨

证明一个命题的一般步骤：

第一步：分清命题的条件和结论，如果与图形有关，首先根据题意，画出图形，并在图形上标出有关字母与符号；

第二步：根据条件、结论，结合图形，写出已知、求证；

第三步：经过分析，找出由已知推出结论的途径，有条理地写出证明过程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 命题、定理和证明是学习几何的基础．本节常考的知识点有逆命题的书写以及简单命题的证明，一般都比较简单，常出现在选择题和填空题中．

三年中考兵法

考法1 逆命题

例6 ［中考·包头改编］已知下列命题：

①若$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$；　②若$a+b=0$，则$|a|=|b|$；

③若$a>1$，则$(a-1)^0=1$．

其中原命题与其逆命题均为真命题的个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

试题评析： 本题主要考查了原命题及其逆命题的真假性，解题的关键是正确写出逆命题．

解： ①原命题为假命题；②原命题为真命题，逆命题为若$|a|=|b|$，则$a+b=0$，是假命题；③原命题为真命题，逆命题为若$(a-1)^0=1$，则$a>1$，是假命题．故选A.

答案： A

考法2 证明

例7 ［中考·宜昌］能说明“锐角α，锐角β的和是锐角”是假命题的例证图是图13-1-4中的（　　）

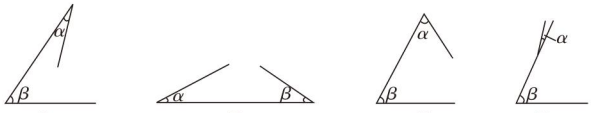


图13-1-4

试题评析： 本题主要考查假命题的证明，举反例是证明假命题的关键．

解： 两个锐角的和是锐角的反例是两个锐角的和大于等于90°，选项C中，分别延长$\angle\alpha$与$\angle\beta$的一边，如图13-1-5，因为三角形外角等于与它不相邻的两个内角之和，所以$\angle 1=\angle\alpha+\angle\beta$．又因为$\angle 1$为钝角，所以$\angle\alpha+\angle\beta>90°$，故选C.

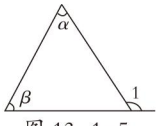


图13-1-5

答案： C

冲刺·满分

温馨提示

逆命题的真假并不取决于原命题的真假．判断逆命题的真假，必须先正确写出逆命题，再进行判断．

方法点拨

证假命题的例证即反例，需要满足题设，不满足结论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见254页

1. 下列命题的逆命题是假命题的是（　　）

A. 如果 $a=b$，那么 $a^3=b^3$

B. 若两个数的绝对值相等，则这两个数相等

C. 如果 $a=0$，$b=0$，那么 $ab=0$

D. 若 $ax=ay$，则 $ax-1=ay-1$

2. 有下列命题：

①若 $a\leqslant 0$，则 $|a|=-a$；

②若 $ma^2>na^2$，则 $m>n$；

③若 $|x|=3$，则 $x=3$.

其中原命题与其逆命题均为真命题的命题个数是（　　）

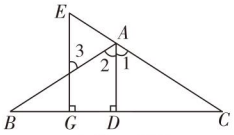
A.0　　B.1　　C.2　　D.3

3. 命题“直角三角形两个锐角互余”的逆命题是

_____.

4. 证明“在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行”.

5. 如图，$AD\perp BC$ 于点 D，$EG\perp BC$ 于点 G，$\angle E=\angle 3$，AD 平分 $\angle BAC$ 吗？为什么？



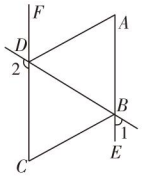
（第5题）

6. 如图，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle A=\angle C$，DA 平分 $\angle BDF$.

（1）AE 与 FC 平行吗？说明理由.

（2）AD 与 BC 的位置关系如何？为什么？

（3）BC 平分 $\angle DBE$ 吗？为什么？



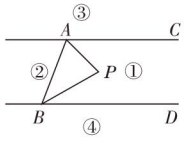
（第6题）

7. 如图，直线 $AC\parallel BD$，连接 AB，直线 AC，BD 及线段 AB 把平面分成①②③④四个部分，规定线上各点不属于任何部分. 当动点 P 落在某个部分时，连接 PA，PB，构成 $\angle PAC$，$\angle PBD$，$\angle APB$ 三个角.（提示：有公共端点的两条重合的射线所组成的角是 $0°$ 角）

（1）当动点 P 落在第①部分时，求证：$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$；

（2）当动点 P 落在第②部分时，$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$ 是否成立？（直接回答成立或不成立）

（3）当动点 P 落在第③部分时，全面探究 $\angle PAC$，$\angle PBD$，$\angle APB$ 之间的关系，并写出动点 P 的具体位置和相应的结论，选择一种结论加以证明.



（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.2 全等图形

核心知识
- 全等图形
- 全等三角形
- 全等三角形的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 全等图形

1. 全等图形 我们把能够完全重合的两个图形叫做全等图形.

全等图形的特征：两“相同”与两“无关”.

（1）两“相同”：

①形状相同；②大小相同.

（2）两“无关”：

①与位置无关；②与方向无关.



2. 对应点、对应边、对应角 当两个全等的图形重合时，互相重合的点叫做对应点，互相重合的边叫做对应边，互相重合的角叫做对应角.

拨考向 利用全等图形的定义识别全等图形

例 1 如图 13-2-1 中是全等图形的有_____.

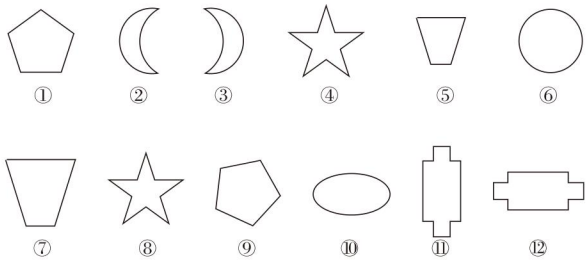


图 13-2-1

解题秘方：根据全等图形的定义和特征进行判断.

解：上面图形中，⑤和⑦形状相同，但大小不同；

⑥和⑩大小、形状都不同；

①和⑨、②和③、⑪和⑫尽管方向不同，但大小、形状完全相同，所以它们是全等图形；

④和⑧都是五角星，大小、形状都相同，是全等图形.

答案：①和⑨、②和③、④和⑧、⑪和⑫

提分·必记

特别解读

1. 完全重合说明两个图形的周长和面积相等.
2. 周长或面积相等的两个图形不一定是全等的.
3. 全等变换的常见方式有平移、翻折、旋转.

提分·秘诀

方法点拨

确定两个图形全等的方法：

（1）条件判定法：

①形状相同；

②大小相等.

（2）重合判定法：通过平移、翻折、旋转等方法把两个图形叠在一起，看它们能否完全重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 全等三角形

1. 全等三角形 能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.

2. 全等三角形的表示方法 全等用符号“≌”表示，读作“全等于”. 记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

3. 对应边或对应角与对边或对角的区别

对应边、对应角是两个全等三角形中对应的两条边之间或对应的两个角之间的关系；对边、对角是同一个三角形中边和角之间的关系，“对边”是指三角形中某个角所对的边，“对角”是指三角形中某条边所对的角.

核考向▶ 利用全等三角形的对应关系确定对应元素

例 2 如图 13-2-2，已知△ ABD ≌△ CDB，写出其对应边和对应角.

解题秘方： 根据图形的位置特征确定对应角和对应边.

解： BD 和 DB，AD 和 CB，AB 和 CD 是对应边；∠ A 和∠ C，∠ ABD 和∠ CDB，∠ ADB 和∠ CBD 是对应角.

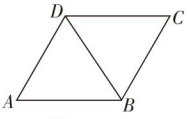


图 13-2-2

点知识▶ 3 全等三角形的性质

1. 性质 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

几何语言：∵△ ABC ≌△ DEF，

∴ $\begin{cases} AB=DE,\ BC=EF,\ AC=DF, \\ \angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F. \end{cases}$



2. 拓展 全等三角形的对应元素相等.

全等三角形中的对应元素包括对应边、对应角、对应边上的中线、对应边上的高、对应角的平分线、周长、面积等.

核考向▶ 利用全等三角形的性质证明对应元素间的关系

题型 1：全等三角形的性质在证明线段关系中的应用

例 3 如图 13-2-3，已知△ ABC ≌△ EDF.

（1）求证：$DC=BF$；

（2）求证：AC // EF.

解题秘方： 利用全等三角形的对应边相等和对应角相等解决问题.

证明：（1）∵△ ABC ≌△ EDF，∴ $BC=DF$.

∴ $BC-CF=DF-CF$，

∴ $BF=DC$，即 $DC=BF$.

（2）∵△ ABC ≌△ EDF，

∴∠ ACB =∠ EFD. ∴ AC // EF.

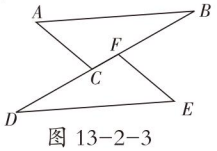


图 13-2-3

提分·必记

易错警示

表示两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上，字母顺序不能随意颠倒.

提分·秘诀

解法指导

利用图形的位置特征确定对应边和对应角时，要抓住对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边. 当全等三角形的两组对应边（角）已确定时，剩下的一组边（角）就是对应边（角）.

提分·必记

要点提醒

1. 应用全等三角形的性质时，要先确定两个条件：
（1）两个三角形全等；
（2）找对应元素.
2. 全等三角形的性质是证明线段、角相等的常用依据.

提分·秘诀

解法指导

全等三角形的对应边（对应角）相等，由此可得两条线段（两个角）相等，从而进一步证明线段（角）的相等关系、和差关系或求线段的长度、角的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：全等三角形的性质在求角度中的应用

例 4 如图 13−2−4，在△ ABC 中，D，E 分别是边 AC，BC 上的点，若△ ADB ≌△ EDB ≌△ EDC，求∠ C 的度数．

解题秘方： 利用全等三角形的对应角相等的性质，并结合三角形的内角和为 180°进行计算．

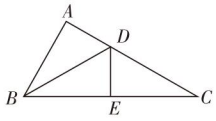


图 13−2−4

解： ∵△ ADB ≌△ EDB ≌△ EDC，

∴∠ ABD= ∠ EBD= ∠ C，∠ A= ∠ BED= ∠ CED.

又∵∠ BED+ ∠ CED=180°，∴∠ BED= ∠ CED=90°．

∴∠ A=90°．∴∠ ABD+ ∠ EBD+ ∠ C=180° − ∠ A=90°．

∴ 3 ∠ C=90°．∴∠ C=30°．

方法点拨

利用全等三角形的性质求角的度数的方法：

一般先确定两个三角形中角的对应关系，由这种关系实现已知角和未知角之间的转换，从而求出所要求的角的度数．

题型 3：全等三角形的性质在判断两线段位置关系中的应用

例 5 如图 13−2−5，已知△ ABC ≌△ CDE，∠ B= ∠ D=90°，且点 B，C，D 在同一条直线上，试判断 AC 与 CE 的位置关系．

解题秘方： 通过求 AC 与 CE 夹角的度数判断其位置关系．

解： ∵△ ABC ≌△ CDE，

∴∠ BAC= ∠ DCE.

由题易得∠ BAC+ ∠ ACB=90°，

∴∠ DCE+ ∠ ACB=90°．

∴∠ ACE=180° −（∠ DCE+ ∠ ACB）=180° −90° =90°．

∴ AC ⊥ CE.

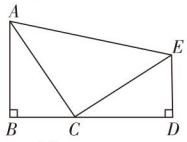


图 13−2−5

方法点拨

证明线段位置关系的方法：

证明两条线段的位置关系，通常考虑平行、垂直两种特殊关系，证明平行的方法是转化为证明同位角相等、内错角相等或同旁内角互补；证明垂直的方法是转化为证明它们的夹角为 90°或三角形的两内角互余．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等面积法求全等变换中图形的面积

挑战·高分

例 6 如图 13−2−6，已知△ ABC 为直角三角形，∠ B=90°，将△ ABC 沿 BC 方向平移得到△ DEF. 如果 AB=8 cm，BE=4 cm，DH=3 cm，那么图中阴影部分的面积为_____cm².

解题秘方： 利用全等三角形的性质，将阴影部分的面积转化为梯形 $ABEH$ 的面积来求．

平移是全等变换的一种，△ ABC 平移后得到△ DEF，即两个三角形全等

解： 由题意可知△ ABC ≌△ DEF，

∴ DE=AB=8 cm，$S_{△ABC}$=$S_{△DEF}$.

∵ $S_{△ABC}$=$S_{梯形ABEH}$+$S_{△HEC}$，

$S_{△DEF}$=$S_{阴影}$+$S_{△HEC}$，∴ $S_{阴影}$=$S_{梯形ABEH}$.

∵ DH+HE=DE，∴ HE=DE−DH=8−3=5（cm）．

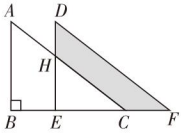


图 13−2−6

∴ $S_{梯形ABEH}$= $\frac{1}{2}$（AB+HE）· BE= $\frac{1}{2}$ ×（8+5）×4=26（cm²）．

答案： 26

方法点拨

将所求图形面积通过全等变换转化为易求（或已知）图形面积的方法，我们称之为等面积法，它是解面积或涉及垂直（高）等几何问题的常用方法．本题运用等面积法将所求阴影部分的面积转化成易求解的梯形 ABEH 的面积．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用逆向思维法解决条件探索问题

挑战·高分

例7 如图 13-2-7，A，D，E 三点在同一条直线上，且△ BAD ≌△ ACE，AB 与 CA，AD 与 CE 是对应边．

（1）求证：$BD=DE+CE$；

（2）当△ ABD 满足什么条件时，BD // CE？请说明理由．

解题秘方：根据全等三角形的性质找出相等的线段和角，然后利用要解决的问题与得出的相等的线段和角之间的关系去解决．

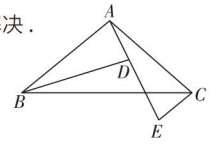


图 13-2-7

（1）**证明：**∵△ BAD ≌△ ACE，

∴ $BD=AE$，$AD=CE$.

又∵ $AE=AD+DE$，∴ $BD=DE+CE$.

（2）**解：**当△ ABD 满足∠ $ADB=90°$时，BD // CE.

理由：∵△ BAD ≌△ ACE，∴∠ ADB= ∠ CED.

若∠ $ADB=90°$，则∠ $CED=90°$．

又∵∠ ADB+ ∠ $BDE=180°$，∴∠ $BDE=90°$．

∴∠ BDE= ∠ CED. ∴ BD // CE.

方法点拨

解答探究条件类题目的方法：

方法一：先猜想出条件，利用猜想出的条件推出题目的结论；

方法二：将题目中的结论当成条件进行推理，这样推出的结果即为要探究的条件．

解题时常采用逆向思维法用方法二寻找条件，再用方法一进行证明．

拔尖角度▸ 3 利用分类讨论思想求动态问题中的速度、时间

挑战·高分

例8 如图 13-2-8，已知在△ ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=8$，点 D 为 AB 的中点．点 P 在线段 BC 上以每秒 3 个单位长度的速度由点 B 向点 C 运动，同时点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 以每秒 a 个单位长度的速度运动，设运动时间为 t 秒．

（1）求 CP 的长；

（2）若以点 C，P，Q 为顶点的三角形和以点 B，D，P 为顶点的三角形全等，且∠ B 和∠ C 是对应角，求 a 和 t 的值．

解题秘方：（1）点在线段上运动，用点运动的路程表示线段长；

（2）根据对应关系得出线段相等，求出 a，t 的值．

解：（1）由题意得 $BP=3t$. ∵ $BC=8$，∴ $CP=8-3t$.

（2）由题意知，需分两种情况讨论：

若△ BDP ≌△ CPQ，则 $BD=CP$，$BP=CQ$.

∵ $AB=10$，点 D 为 AB 的中点，∴ $BD=\frac{1}{2}AB=5$.

∴ $5=8-3t$，$3t=at$，解得 $t=1$，$a=3$.

若△ BDP ≌△ CQP，则 $BP=CP$，$BD=CQ$，

∴ $3t=8-3t$，$5=at$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$a=\frac{15}{4}$.

由 $8-3t>0$，得 $t<\frac{8}{3}$. ∴ $t=\frac{4}{3}$ 符合题意．

综上所述，$a=3$，$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$，$t=\frac{4}{3}$.

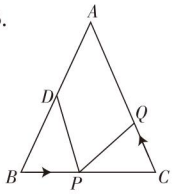


图 13-2-8

教你一招

动态问题的求解思路：

此类动态数学问题的特点是动中有静，静中有动．解题时通常用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想，分情况对题目进行讨论，结合图形根据全等三角形的性质列出方程求解．

解法指导

由∠B和∠C是对应角可知DP和PQ是对应边，而其他两组边的对应关系不确定，因此要分BD与CP是对应边、BP与CP是对应边两种情况讨论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查全等三角形的性质，一般不单独命题，常与全等三角形的判定（下节会学到）或全等的变换形式：平移、翻折、旋转综合考查，主要以选择题和填空题的形式出现，难度适中．

三年中考兵法

考法 1 利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角

例 9 [中考·厦门]如图 13-2-9，点 E，F 在线段 BC 上，$\triangle ABF$ 与 $\triangle DCE$ 全等，点 A 与点 D，点 B 与点 C 是对应顶点，AF 与 DE 交于点 M，则 $\angle DCE=$（　　）

A. $\angle B$　　B. $\angle A$　　C. $\angle EMF$　　D. $\angle AFB$

试题评析： 本题考查了全等三角形的性质，熟记全等三角形的性质找准对应关系是解题的关键．

答案： A

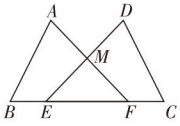


图 13-2-9

考法 2 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数

例 10 [中考·天门]如图 13-2-10，在直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 在 AB 边上，将 $\triangle CBD$ 沿 CD 折叠，使点 B 恰好落在 AC 边上的点 E 处．若 $\angle A=26°$，则 $\angle CDE=$_____．

试题评析： 本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是折叠，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数．

解： 由三角形内角和定理可知 $\angle B=64°$，

由折叠可知 $\triangle BCD \cong \triangle ECD$．

$\therefore \angle BCD=\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，

$\angle CED=\angle B=64°$．

$\therefore \angle CDE=180°-\angle DCE-\angle CED=180°-45°-64°=71°$．

答案： 71°

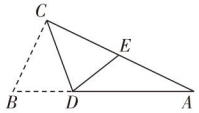


图 13-2-10

冲刺·满分

解法指导

全等三角形中，对应角的顶点就是对应顶点，反过来，以对应顶点为顶点的角为对应角．

解法指导

平移、旋转、翻折变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等三角形的性质得到对应边相等、对应角相等，从而解决问题．

本题属于翻折变换，它隐含着折叠前后的 $\triangle CBD$ 与 $\triangle CED$ 全等．

两年模拟兵法

☞答案见 255 页

1. 下列说法中错误的有（　　）

①图形中只有两个三角形才能完全重合；

②如果两个图形全等，那么它们的形状和大小一定都相同；

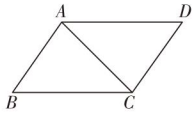
③两个正方形一定是全等图形；

④边数相同的图形一定能互相重合．

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

2. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$\angle BAC=\angle DCA$，则 BC 的对应边是（　　）



（第 2 题）

A. CD　　B. CA

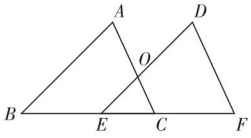
C. DA　　D. AB

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

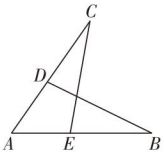
3. 若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且 $\triangle ABC$ 的周长为 100 cm，点 A，B 分别与点 D，E 对应，AB=30 cm，DF=25 cm，则 BC 的长为（　　）

A. 45 cm　　B. 55 cm　　C.30 cm　　D. 25 cm

4. 如图，点 B，E，C，F 在同一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle B$=45°，$\angle F$=65°，则 $\angle COE$ 的度数为_____.



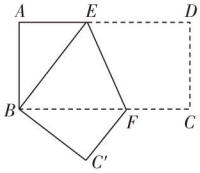
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，$\angle B$ 与 $\angle C$ 是对应角. 若 AE = 5 cm，BE = 7 cm，$\angle ADB$=100°，则 $\angle AEC$=_____，AC=_____.

6. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 D 与点 B 重合，点 C 落在 C' 处，折痕为 EF. 若 AB=1，BC=2，则 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和为_____.

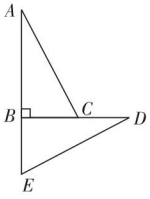


（第 6 题）

7. 如图，$\triangle ABC$ 绕着点 B 顺时针旋转 90° 到 $\triangle DBE$ 的位置，$\angle ABC$=90°.

（1）$\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 是否全等？若全等，指出对应边和对应角.

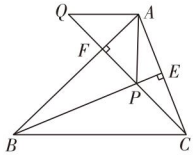
（2）直线 AC 和 DE 有怎样的位置关系？



（第 7 题）

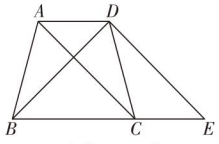
8. 如图，已知 BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 AB 上的高，Q 为 CF 的延长线上一点，P 为 BE 和 CF 的交点，$\triangle PAB \cong \triangle AQC$.

求证：$AP \perp AQ$.



（第 8 题）

9. 如图，四边形 $ABCD$ 是梯形，$AD \parallel BC$，若 DE 交 BC 的延长线于点 E，且 $\triangle ADC \cong \triangle ECD$，梯形 $ABCD$ 的面积和 $\triangle BDE$ 的面积相等吗？请说明理由.



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.3 全等三角形的判定

核心知识

- 三角形全等的判定方法——SSS
- 三角形全等的判定方法——SAS
- 三角形全等的判定方法——ASA 或 AAS
- 三角形的稳定性

知识链接

三角形全等的判定方法

- 三边（SSS）
- 两边及夹角（SAS）
- 两角一边（ASA 或 AAS）

三角形的稳定性

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 基本事实一“边边边”或“SSS”

1. 基本事实一

如果两个三角形的三边对应相等，那么这两个三角形全等（可简记为“边边边”或“SSS”）.

2. 书写格式 如图 13-3-1，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \\ AC=A'C', \end{cases}$$

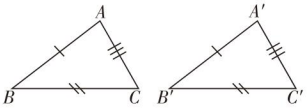


图 13-3-1

$\therefore$ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（SSS）.

提分·必记

特别提醒

在列举两个三角形全等的条件时，应把三个条件按顺序排列（一般是把同一个三角形的三个条件放在等号的同一侧），并用大括号将其括起来.

拨考向 利用“SSS”判定两个三角形全等

例 1 如图 13-3-2，已知点 A，D，B，F 在一条直线上，$AC=FE$，$BC=DE$，$AD=FB$.

求证：△ ABC ≌△ FDE.

解题秘方： 紧扣“SSS”找出两个三角形中三边对应相等的条件来判定两个三角形全等.

证明： $\because AD=FB$，

$\therefore AD+DB=FB+DB$，（DB 为公共边）

即 $AB=FD$.

在△ ABC 和△ FDE 中，

$$\begin{cases} AC=FE, \\ AB=FD, \\ BC=DE, \end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ FDE（SSS）.

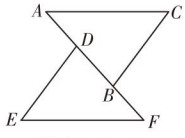


图 13-3-2

提分·秘诀

方法点拨

运用“SSS”证明两个三角形全等主要就是找边相等，边相等除了题目中已知的边相等以外，还有些相等的边隐含在题设或图形中. 常见的隐含的等边有：

（1）公共边相等；

（2）等边加（或减）等边，其和（或差）仍相等；

（3）由中线的定义得出线段相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸2 三角形的稳定性

1. 三角形的稳定性

（1）只要三角形的三边确定，它的形状和大小就完全确定了，这就是三角形的稳定性.

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性.

2. 三角形稳定性的应用

（1）稳定性是三角形特有的，在生产和生活中具有广泛的应用，有很多需要保持稳定性的物体都被制成三角形的形状，如起重机、钢架桥等.

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性，为保证其稳定性，常在图形中构造三角形. 四边形的不稳定性在生活中也有广泛的应用，如活动挂架、伸缩门等.

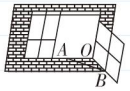
提分·必记

示图

钢架桥 →



窗户 →



伸缩门 →



拔考向▸利用三角形的稳定性固定物体的形状

例2 李明家有一个由六根钢管连接而成的钢架 $ABCDEF$，如图 13−3−3，为了使这个钢架稳固，他计划用三根钢管来连接使它不变形. 请帮李明解决这个问题.

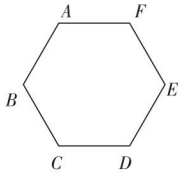
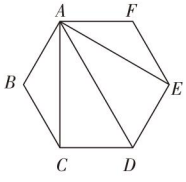
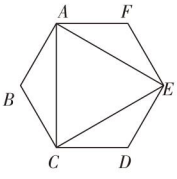


图 13−3−3



①



②

图 13−3−4

解题秘方： 根据三角形的稳定性，将钢架分割成三角形. 紧扣“三角形的稳定性”进行解答.

三角形的稳定性

解： 供参考的两种方法如图 13−3−4①②.（答案不唯一，只要将图形分割成三角形即可）

提分·秘诀

解法指导

- 判断一个图形是否具有稳定性，要看它的基本组成部分是不是三角形. 若是，则具有稳定性；若不是，则不具有稳定性.
- 为了保证四边形及四边以上的图形稳定，最简单的方法是连接对角线（不相邻两个顶点的连线）.

点知识▸3 基本事实二“边角边”或“SAS”

1. 基本事实二 如果两个三角形的两边和它们的夹角对应相等，那么这两个三角形全等（可简记为“边角边”或“SAS”）.

2. 书写格式 如图 13−3−5，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（SAS）.

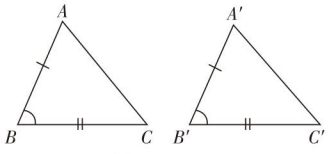


图 13−3−5

提分·必记

要点提醒

- 相等的元素：两边及这两边的夹角.
- 书写顺序：边→角→边.

特别提醒

两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用“SAS”判定两个三角形全等

例3 如图 13-3-6，点 C 是 AB 的中点，$AD=CE$，且 $AD \parallel CE$. 求证：$\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

解题秘方： 根据条件找出两个三角形中的两条边及其夹角对应相等，根据“SAS”判定两个三角形全等.

证明： $\because$ 点 C 是 AB 的中点，$\therefore AC=CB$.

$\because AD \parallel CE$，$\therefore \angle CAD=\angle BCE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases} AC=CB, \\ \angle CAD=\angle BCE, \\ AD=CE, \end{cases}$$

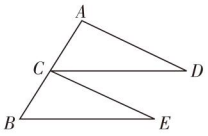


图 13-3-6

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$（SAS）.

提分·秘决

方法点拨

常见的隐含等角的情况：①公共角相等；②对顶角相等；③等角加（或减）等角，其和（或差）仍相等；④同角或等角的余（或补）角相等；⑤由角平分线的定义得出角相等；⑥由垂直的定义得出角相等；⑦由平行线得到同位角或内错角相等. 另外，一些自然规律如“太阳光线可以看成是平行的”“光的反射角等于入射角”等也是常见的隐含条件.

点知识▶4 基本事实三“角边角”或“ASA”

1. 基本事实三 如果两个角和它们的夹边对应相等，那么这两个三角形全等（可简记为“角边角”或“ASA”）.

2. 书写格式 如图 13-3-7，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \\ \angle C=\angle C', \end{cases}$$

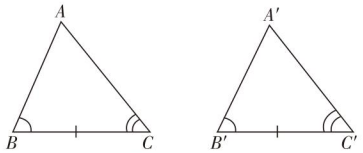


图 13-3-7

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（ASA）.

提分·必记

特别解读

1. 相等的元素：两角及两角的夹边.
2. 书写顺序：角→边→角.
3. 夹边即两个角的公共边.

拔考向▶利用“ASA”判定两个三角形全等

例4 如图 13-3-8，已知 $AB \parallel DF$，$AC \parallel DE$，$BC=FE$，且点 B，E，C，F 在一条直线上.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

解题秘方： 解题的关键是由两组平行线得出两组角对应相等，构造两角及其夹边对应相等.

证明： $\because AB \parallel DF$ 且点 B，E，C，F 在一条直线上，

$\therefore \angle B=\angle F$.

$\because AC \parallel DE$，

$\therefore \angle ACB=\angle DEF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，$\begin{cases} \angle B=\angle F, \\ BC=FE, \\ \angle ACB=\angle DEF, \end{cases}$

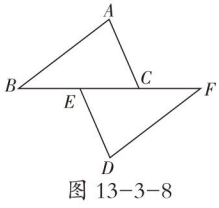


图 13-3-8

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE$（ASA）.

提分·秘诀

方法点拨

运用“ASA”判定两个三角形全等，既找边相等，又找角相等，除已知条件外，看缺什么条件，就去找什么条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶5 “角角边”或“AAS”

1. 全等三角形的判定定理

如果两个三角形的两角及其中一个角的对边对应相等，那么这两个三角形全等（可简记为“角角边”或“AAS”）.

2. 书写格式 如图 13-3-9，

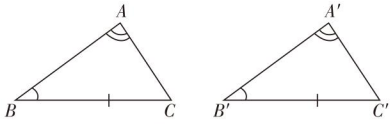


图 13-3-9

在△ABC和△$A'B'C'$中，$\begin{cases}\angle A=\angle A',\\ \angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\end{cases}$

$\therefore$△ABC≌△$A'B'C'$（AAS）.

3. “ASA”和“AAS”的区别与联系

	“S”的意义	书写格式	联系
ASA	“S”是两角的夹边	把夹边相等写在两角相等的中间	由三角形内角和定理可知，“AAS”可由“ASA”推导得出
AAS	“S”是其中一个角的对边	把两角相等写在一起，边相等放在最后	

拔考向▶利用“AAS”判定两个三角形全等

例 5 如图 13-3-10，已知$AB=AC$，$AD=AE$，求证：△BOD≌△COE.

解题秘方： 找出两个三角形中两个角及其中一角的对边对应相等，利用“AAS”判定两个三角形全等.

证明： 在△ABE和△ACD中，

$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle A=\angle A,\\ AE=AD,\end{cases}$ 公共角可直接写出

$\therefore$△ABE≌△ACD（SAS）.

$\therefore\angle B=\angle C$.

$\because AB=AC$，$AD=AE$，

$\therefore AB-AD=AC-AE$，

即$BD=CE$.

在△BOD和△COE中，$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ \angle BOD=\angle COE,\\ BD=CE,\end{cases}$ 对顶角也可直接写出

$\therefore$△BOD≌△COE（AAS）.

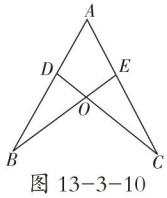


图 13-3-10

提分·必记

特别解读

1. 判定两个三角形全等的三个条件中，“边”是必不可少的.
2. 在两个三角形的六个元素（三条边和三个角）中，由已知的三个元素可判定两个三角形全等的组合有4个：“SSS”“SAS”“ASA”和“AAS”，不能判定两个三角形全等的组合是“AAA”和“SSA”（“ASS”）.
3. 由于“角角边”和“角边角”是可以互相转化的，故能用“角角边”证明的问题，一般也可以用“角边角”证明.

提分·秘诀

教你一招

证明三角形全等找条件的方法：

证明三角形全等时，有些条件是已知的，有些条件是隐含在题设或图形中的，比如对顶角、公共角、公共边等，还有些条件是通过证明三角形全等，利用全等三角形的性质得到的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用构造法用全等三角形的性质解边角问题

挑战·高分

技巧1：连公共边在构造全等三角形中的应用

例6 [中考·十堰]如图13-3-11，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$CB=CD$. 求证：$\angle B=\angle D$.

解题秘方：紧扣“SSS”的条件构造全等三角形，巧连AC即可.

证明：如图13-3-11，连接AC.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$(SSS).

$\therefore\angle B=\angle D$.

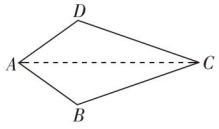


图13-3-11

解法指导

公共边是相等线段的一种形式，若已知有两组边对应相等，而第三边是公共边，则连接公共边，可构造两个全等三角形.

技巧2：“截长补短法”在构造全等三角形中的应用

例7 如图13-3-12，已知$AB\parallel CD$，CE，BE分别平分$\angle BCD$和$\angle CBA$，点E在AD上. 求证：$BC=AB+CD$.

解题秘方：紧扣“截长补短法”的特征构造全等三角形.

证明：如图13-3-12，在BC上取一点F，使$BF=BA$，连接EF.

$\because CE$，BE分别平分$\angle BCD$和$\angle CBA$，$\therefore\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$.

在$\triangle ABE$和$\triangle FBE$中，$\begin{cases}BA=BF,\\\angle 1=\angle 2,\\BE=BE,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle FBE$(SAS). $\therefore\angle A=\angle 5$.

$\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle A+\angle D=180^\circ$.

又$\because\angle 5+\angle 6=180^\circ$，$\therefore\angle 6=\angle D$.

在$\triangle EFC$和$\triangle EDC$中，$\begin{cases}\angle 6=\angle D,\\\angle 3=\angle 4,\\EC=EC,\end{cases}$

$\therefore\triangle EFC\cong\triangle EDC$(AAS).

$\therefore CF=CD$. $\therefore BC=BF+CF=AB+CD$.

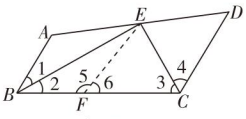


图13-3-12

点拨微课堂

方法点拨

运用“截长补短法”构造全等三角形有两个标志：

一是条件中有角平分线，截长补短是在角平分线所在角的两边上进行.

二是条件或结论中出现一条线段等于另外两条线段的和或差，截长补短也是在相关的线段中进行.

技巧3：“加倍折半法”在构造全等三角形中的应用

例8 如图13-3-13，已知CE，CB分别是$\triangle ABC$，$\triangle ADC$的中线，且$AB=AC$. 求证：$CD=2CE$.

解题秘方：CE是$\triangle ABC$中AB边上的中线，将CE延长一倍至点F，可构造$\triangle BEF$和$\triangle AEC$全等，即出现了$2CE$这条线段，因此再证明$\triangle CBD$和$\triangle CBF$全等即可.

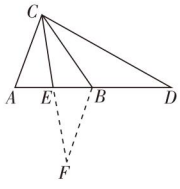


图13-3-13

技巧点拨

证明一条线段等于两条线段的和的方法：

(1)“截长法”的基本思路是在长线段上取一段，使之等于其中一短线段，然后证明剩下的线段等于另一短线段；

(2)“补短法”的基本思路是延长短线段，使延长部分等于另一短线段，再证明延长后的线段等于长线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：如图 13−3−13，延长 CE 到点 F，使 $EF=CE$，连接 FB，则 $CF=2CE$. ∵ CE 是△ ABC 的中线，∴ $AE=BE$.

在△ BEF 和△ AEC 中，$\begin{cases} BE=AE, \\ \angle BEF=\angle AEC, \\ EF=EC, \end{cases}$

∴△ BEF ≌△ AEC（SAS）.

∴∠ $EBF=\angle A$，$BF=AC$.

∵ $AB=AC$，∴∠ $ACB=\angle ABC$.

∴∠ $CBD=\angle A+\angle ACB=\angle EBF+\angle ABC=\angle CBF$.

∵ CB 是△ ADC 的中线，∴ $AB=BD$.

又∵ $AB=AC$，$AC=BF$，∴ $BD=BF$.

在△ CBD 和△ CBF 中，$\begin{cases} CB=CB, \\ \angle CBD=\angle CBF, \\ BD=BF, \end{cases}$

∴△ CBD ≌△ CBF（SAS）.

∴ $CD=CF$. ∴ $CD=2CE$.

技巧 4：基础三角形法在构造一个与基础三角形全等的三角形中的应用

例 9 如图 13−3−14，已知∠ $BAC=90°$，$AB=AC$，M 为 AC 边的中点，$AD\perp BM$ 于点 E，交 BC 于点 D，连接 DM.

求证：∠ $AMB=\angle CMD$.

解题秘方：由于∠ AMB 与∠ CMD 所在的两个三角形不全等，因此可以以∠ CMD 所在的△ CMD 为基础三角形，在△ ABM 中构造一个含∠ AMB 的三角形与△ CMD 全等.

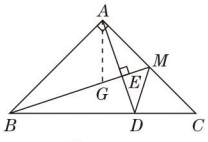


图 13−3−14

证明：作∠ BAC 的平分线 AG 交 BM 于点 G，如图 13−3−14 所示.

∵∠ $BAC=90°$，$AB=AC$，

∴∠ $ABC=\angle ACB=45°$，∠ $MAG=\angle BAG=45°$.

∵ $AE\perp BM$，∴∠ $MAE+\angle AMB=90°$.

又∵∠ $ABM+\angle AMB=90°$，

∴∠ $ABM=\angle MAE$.

所作的辅助线必须满足：(1) 不能破坏图形中的已知条件；(2) 能够作为证明的一个已知条件

在△ ABG 和△ CAD 中，$\begin{cases} \angle BAG=\angle ACD=45°, \\ AB=CA, \\ \angle ABG=\angle CAD, \end{cases}$

∴△ ABG ≌△ CAD（ASA）. ∴ $AG=CD$.

∵ M 为 AC 边的中点，∴ $AM=CM$.

在△ AMG 和△ CMD 中，$\begin{cases} AG=CD, \\ \angle MAG=\angle MCD=45°, \\ AM=CM, \end{cases}$

∴△ AMG ≌△ CMD（SAS）. ∴∠ $AMB=\angle CMD$.

方法点拨

证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法：

“加倍法”或“折半法”.“加倍法”的基本思路是延长短线段，使延长后的线段等于原来的 2 倍，再证明它等于另一线段；“折半法”的基本思路是取长线段的中点，证明其中一部分等于短线段 . 本例采用的是“加倍法”，待学过三角形中位线定理后我们还可以用“折半法”来证明 .

解法指导

- 当要证明的两个角所在的三角形明显不全等时，可借助与这两个角相关的边和角添加辅助线构造全等三角形.
- 基础三角形法是构造全等三角形的一种常用方法，它是从要证的边（角）关系中一边（角）所在的三角形为基础三角形，再从要证的另一边（角）为一边（角）作一个与基础三角形全等的三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用类比法探究全等变换中的动态应用问题

挑战·高分

例 10 [规律探索题]如图 13-3-15，在△ ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，AE 是过点 A 的一条直线，且 B，C 在 AE 的异侧，$BD\perp AE$ 于点 D，$CE\perp AE$ 于点 E.

（1）求证：$BD=DE+CE$.

（2）若直线 AE 绕 A 点旋转到如图 13-3-16 ①的位置（$BD<CE$）时，其余条件不变，则 BD 与 DE，CE 的关系如何？请予以证明.

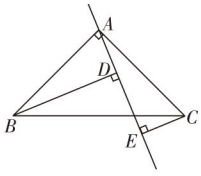


图 13-3-15

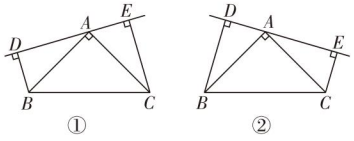


图 13-3-16

（3）若直线 AE 绕 A 点旋转到如图 13-3-16 ②的位置（$BD>CE$）时，其余条件不变，则 BD 与 DE，CE 的关系怎样？请直接写出结果，不需证明.

解题秘方：根据条件易证△ ABD 与△ CAE 全等，从而将 BD 转化为 AE，CE 转化为 AD，从一条直线上线段的和差关系易证明结论. 而图 13-3-16 ①和②只是直线的位置改变，其他条件都不变，故探索结论的思路都相同，用类比法求解.

（1）**证明：**$\because BD\perp AE$，$CE\perp AE$，$\therefore\angle ADB=\angle CEA=90°$.

$\because\angle BAC=90°$，$\angle ADB=90°$，

$\therefore\angle ABD+\angle BAD=\angle CAE+\angle BAD=90°$，$\therefore\angle ABD=\angle CAE$.

在△ ABD 和△ CAE 中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEA,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$

$\therefore$△ $ABD\cong$△ CAE（AAS）. $\therefore BD=AE$，$AD=CE$.

$\because AE=AD+DE$，$\therefore BD=DE+CE$.

（2）**解：**$BD=DE-CE$.

证明：$\because BD\perp AE$，$CE\perp AE$，$\therefore\angle ADB=\angle AEC=90°$.

$\because\angle BAC=90°$，$\angle ADB=90°$，

$\therefore\angle ABD+\angle BAD=\angle CAE+\angle BAD=90°$，$\therefore\angle ABD=\angle CAE$.

在△ ABD 和△ CAE 中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEA,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$

$\therefore$△ $ABD\cong$△ CAE（AAS）. $\therefore BD=AE$，$AD=CE$.

$\therefore BD=AE=DE-AD=DE-CE$.

（3）**解：**$BD=DE-CE$.

名师导析

在(1)中，观察图形易得 AE=DE+AD，而要求证的结论是 BD=DE+CE，则需证 BD=AE，AD=CE. 故证明△ ABD ≌△ CAE 即可.

(2)(3)完全可根据(1)的思路，借助图形，得出结论.

教你一招

解决图形变换问题需要抓住三个特点：

(1)变换前的结论及证明过程对变换后的结论起到重要的作用；

(2)在图形变换前后，明确哪些关系发生变化，哪些关系没有发生变化，变换前的等角、等线段在变换后是否还存在；

(3)几种变换图形之间，说理思路存在内在联系，变换后的说理思路可模仿与借鉴变换前的结论与过程. 变换后的结论有时发生变化，有时不发生变化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

全等三角形的判定是中考的必考内容，主要考查添加条件或选用适当的方法证明三角形全等．常与全等三角形的性质一起考查，在近几年的中考题中主要以填空题、选择题和解答题的形式出现，题目以中、低难度为主，有时与其他知识综合考查，难度较大，主要出现在解答题中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用全等三角形的判定补充三角形全等的条件

例 11 [中考·成都]如图 13-3-17，已知∠ABC=∠DCB，添加以下条件，不能判定△ABC≌△DCB的是（　　）

A. ∠A=∠D　　B. ∠ACB=∠DBC

C. AC=DB　　D. AB=DC

试题评析：本题考查的是全等三角形的判定，解答本题的关键是掌握全等三角形的判定定理及进行推理的方法．

解：A. ∠A=∠D，∠ABC=∠DCB，BC=CB，符合“AAS”，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项不符合题意；

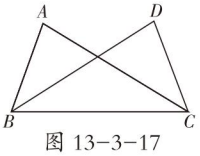


图 13-3-17

B. ∠ABC=∠DCB，BC=CB，∠ACB=∠DBC，符合“ASA”，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项不符合题意；

C. ∠ABC=∠DCB，AC=DB，BC=CB，不符合全等三角形的判定定理，即不能推出△ABC≌△DCB，故本选项符合题意；

D. AB=DC，∠ABC=∠DCB，BC=CB，符合“SAS”，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项不符合题意．

答案：C

方法点拨

证明两个三角形全等，当条件不够需要补充时，有以下几种情况：

（1）已知两边对应相等
- 找第三边对应相等，
- 找两边的夹角对应相等；

（2）已知两角对应相等
- 找其中任意一角的对边对应相等，
- 找两角的夹边对应相等；

（3）已知一角及其邻边对应相等
- 找任意一角对应相等，
- 找夹该已知角的另一边对应相等；

（4）已知一边及其对角对应相等，找余下的任意一角对应相等．

考法 2 利用全等三角形的判定和性质判断两条线段的关系

例 12 [中考·菏泽]如图 13-3-18，AB // CD，AB=CD，CE=BF．请写出DF与AE的关系，并证明你的结论．

试题评析：本题主要考查全等三角形的判定与性质，解题的关键是识别两条线段所在的两个三角形全等．

解：DF // AE且DF=AE．

证明：∵ AB // CD，∴∠C=∠B．

∵ CE=BF，∴ CF=BE．

又∵ CD=BA，∴△DCF≌△ABE（SAS）．

∴ DF=AE，∠DFC=∠AEB．

∴∠DFE=∠AEF．∴ DF // AE．

即DF与AE的关系是平行且相等．

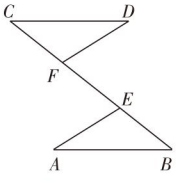


图 13-3-18

考法点评

两条线段的关系包括数量关系和位置关系，数量关系有相等、倍分等，位置关系有平行和垂直．

线段的这些关系都可以通过这两条线段所在的三角形全等得到．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用全等三角形的判定和性质求图形的面积

例 13 [中考·黑龙江]如图 13-3-19，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$AC=5$，$\angle DAB=\angle DCB=90°$，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

A. 15　　B. 12.5　　C. 14.5　　D. 17

试题评析： 本题主要考查全等三角形的判定与性质，全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具．在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件，在应用全等三角形的判定时，要注意三角形的公共边和公共角，必要时添加适当的辅助线构造三角形．

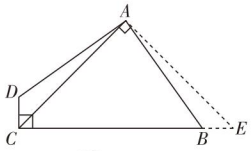


图 13-3-19

解： 如图 13-3-19，过点 A 作 $AE\perp AC$，交 CB 的延长线于点 E.

$\because \angle DAB=\angle DCB=90°$，

$\therefore \angle D+\angle ABC=180°=\angle ABE+\angle ABC$，

$\therefore \angle D=\angle ABE$.

$\because \angle DAB=\angle CAE=90°$，$\therefore \angle CAD=\angle EAB$.

又 $\because AD=AB$，$\therefore \triangle ACD\cong\triangle AEB$（ASA）.

$\therefore AC=AE$，$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACE}$.

$\because S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times5\times5=12.5$，

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AEB}+S_{\triangle ABC}$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 12.5.

答案： B

解法指导

“化不规则图形为规则图形”是求面积问题的一种常用的解题方法．本例是利用全等三角形进行割补转化．即：过点 A 作 AE ⊥ AC，交 CB 的延长线于点 E，判定 △ ACD ≌ △ AEB，即可得到 AC=AE，四边形 ABCD 的面积与△ ACE 的面积相等，根据 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times5\times5=12.5$，即可得出结论．

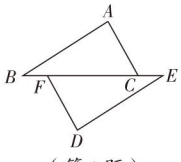
两年模拟兵法

答案见 255 页

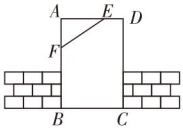
1. [中考·安顺]如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$AB\parallel ED$，$AC\parallel FD$，那么添加下列一个条件后，仍无法判定 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 的是（　　）

A. $\angle A=\angle D$　　B. $AC=DF$

C. $AB=DE$　　D. $BF=EC$



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，工人师傅砌门时，需要用木条 EF 固定长方形门框 $ABCD$，使其不变形，这样做的依据是（　　）

A. 两点之间线段最短

B. 两点确定一条直线

C. 三角形具有稳定性

D. 长方形的四个角都是直角

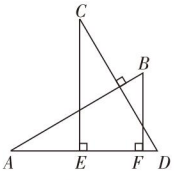
3. [中考·南京]如图，$AB\perp CD$，且 $AB=CD$. E，F 是 AD 上两点，$CE\perp AD$，$BF\perp AD$. 若 $CE=a$，$BF=b$，$EF=c$，则 AD 的长为（　　）

A. $a+c$

B. $b+c$

C. $a-b+c$

D. $a+b-c$

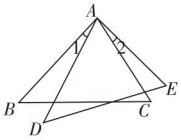


（第 3 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

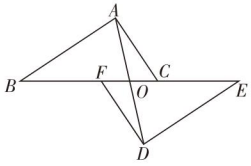
4.[中考·昆明]如图，在△ABC和△ADE中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$BC=DE$.



（第4题）

5.[中考·恩施州]如图，点B，F，C，E在一条直线上，$FB=CE$，$AB\parallel ED$，$AC\parallel FD$，AD交BE于点O. 求证：AD与BE互相平分.

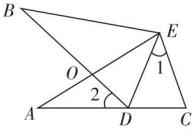


（第5题）

6.[中考·苏州]如图，$\angle A=\angle B$，$AE=BE$，点D在AC边上，$\angle 1=\angle 2$，AE和BD相交于点O.

（1）求证：△$AEC\cong$△BED；

（2）若$\angle 1=42°$，求$\angle BDE$的度数.

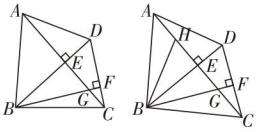


（第6题）

7.[中考·哈尔滨]在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点E，且$AC\perp BD$，作$BF\perp CD$，垂足为点F，BF与AC交于点G，$\angle BGE=\angle ADE$.

（1）如图①，求证：$AD=CD$；

（2）如图②，BH是△ABE的中线，若$AE=2DE$，$DE=GE$，在不添加任何辅助线的情况下，请写出图②中四个三角形，使写出的每个三角形的面积都等于△ADE面积的2倍.



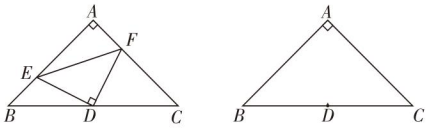
①　②

（第7题）

8.[中考·滨州]在△ABC中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，点D为BC的中点.

（1）如图①，若点E，F分别为AB，AC上的点，且$DE\perp DF$，求证：$BE=AF$；

（2）若点E，F分别为AB，CA延长线上的点，且$DE\perp DF$，那么$BE=AF$吗？请利用图②说明理由.



①　②

（第8题）

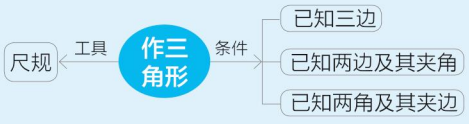
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.4 三角形的尺规作图

核心知识

- 已知三边作三角形
- 已知两边及其夹角作三角形
- 已知两角及其夹边作三角形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 已知三边作三角形

1. 尺规作图

只用直尺（没有刻度）和圆规画出一些图形，这种画图的方法被称为尺规作图.

2. 已知三角形的三边求作三角形，具体作图的方法及图形如下

已知线段 a，b，c，如图 13−4−1. 求作△ ABC，使 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

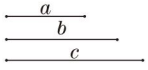
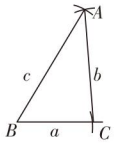


图 13−4−1

作法与图示如下：

作法	图示
①作线段 $BC=a$	
②以点 C 为圆心，以 b 为半径画弧，再以点 B 为圆心，以 c 为半径画弧，两弧相交于点 A	
③连接 AB 和 AC，则△ ABC 为所求作的三角形	

拔考向 利用已知三边作三角形的方法画三角形

例 1 如图 13−4−2，已知线段 a，求作△ ABC，使 $BC=2a$，$AB=3a$，$AC=4a$.



图 13−4−2

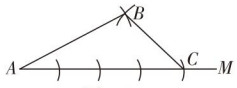


图 13−4−3

解题秘方: 紧扣已知三边作三角形的方法作三角形，关键是找准对应关系.

解： 如图 13−4−3，

（1）作射线 AM，在 AM 上截取 $AC=4a$；

（2）以点 A 为圆心，$3a$ 为半径画弧，以点 C 为圆心，$2a$ 为半径画弧，两弧相交于点 B；

（3）连接 AB，BC，则△ ABC 即为所求作的三角形.

提分·必记

特别解读

1. **作图依据：** 全等三角形的判定方法“SSS”.
2. **作图思路：** 三次运用“作一条线段等于已知线段”这一基本作图方法.

提分·秘诀

解法指导

本题用到的基本作图是作一条线段等于已知线段. 注意尺规作图时要保留作图痕迹，最后要指出哪个图形是所求作的图形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 已知两边及其夹角作三角形

已知三角形的两边及其夹角，求作三角形的具体作图的方法及图形如下：

已知∠ α 和线段 a，c，如图 13−4−4. 求作△ ABC，使∠ B= ∠ α，$BC=a$，$BA=c$.

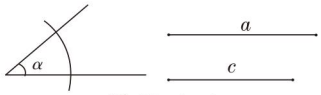
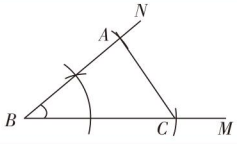


图 13−4−4

作法与图示如下：

作法	图示
①作∠ MBN= ∠ α	
②在射线 BM，BN 上分别截取 $BC=a$，$BA=c$	
③连接 AC，则△ ABC 为所求作的三角形	

提分·必记

特别解读

1. **作图依据：** 全等三角形的判定方法“SAS”.
2. **作图思路：** 依次运用“作一个角等于已知角”“作一条线段等于已知线段”这两个基本作图方法.

拔考向▶ 利用已知两边及其夹角作三角形的方法作三角形

例 2 如图 13−4−5，已知线段 a 和∠ α. 求作△ ABC，使 $AB=a$，$AC=2a$，∠ A= ∠ α.

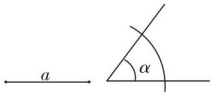


图 13−4−5

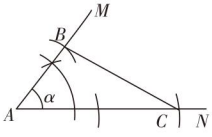


图 13−4−6

解： 如图 13−4−6，（1）作∠ MAN= ∠ α；

（2）分别在射线 AM，AN 上截取 $AB=a$，$AC=2a$；

（3）连接 BC，则△ ABC 就是所求作的三角形.

提分·秘诀

方法点拨

用尺规作图的一般步骤：

第一步：分析已知，确定求作类型.

第二步：确定作图思路.

第三步：依次叙述作图过程并作图.

第四步：下结论.

点知识▶ 3 已知两角及其夹边作三角形

已知三角形的两角及其夹边，求作三角形的具体作图的方法及图形如下：

如图 13−4−7，已知∠ α，∠ β 和线段 a. 求作△ ABC，使∠ ABC= ∠ α，∠ ACB= ∠ β，$BC=a$.

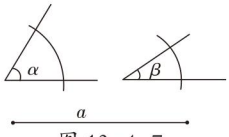
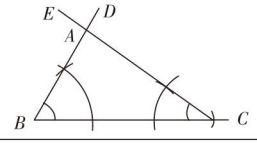


图 13−4−7

作法与图示如下：

作法	图示
①作线段 $BC=a$；	
②在 BC 的同侧，作∠ DBC= ∠ α，∠ ECB= ∠ β，BD 与 CE 相交于点 A，则△ ABC 为所求作的三角形	

提分·必记

特别解读

1. **作图依据：** 全等三角形的判定方法“ASA”.
2. 已知两个角和其中一个角的对边不能直接作三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用已知两角及其夹边作三角形的方法作三角形

例 3 如图 13-4-8，已知∠ α 和线段 a，求作△ ABC，使 $BC=a$，∠ ABC=∠ ACB=∠ α.

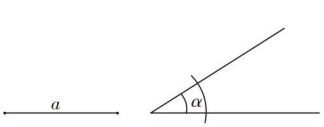


图 13-4-8

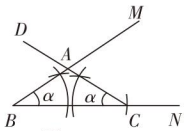


图 13-4-9

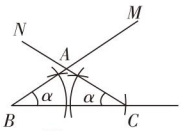


图 13-4-10

解题秘方： 紧扣已知两角及其夹边作三角形的方法将作三角形分解成作几个基本图形解决问题.

解：方法一 如图 13-4-9，（1）作∠ MBN=∠ α；

（2）在射线 BN 上截取 $BC=a$；

（3）以 C 为顶点，以 CB 为一边，作∠ DCB=∠ α，CD 与 BM 相交于点 A，则△ ABC 为所求作的三角形.

方法二 如图 13-4-10，（1）作线段 $BC=a$；

（2）在线段 BC 的同侧，作∠ CBM=∠ α，∠ BCN=∠ α；

（3）BM 和 CN 相交于点 A，则△ ABC 为所求作的三角形.

提分·秘诀

方法点拨

明确作图的依据，按照尺规作图中作线段等于已知线段、作角等于已知角的方法来作即可.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 已知两角及其中一角的对边作三角形

例 4 已知：∠ α，∠ β，线段 a，如图 13-4-11. 求作：△ ABC，使∠ A=∠ α，∠ B=∠ β，$BC=a$.

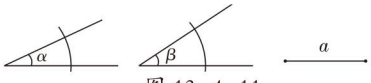


图 13-4-11

解题秘方： 本题所给条件是两角及其中一角的对边，可利用三角形内角和定理求出∠ C，再利用两角夹边作图.

解： 作法：（1）作∠ γ=180°−∠ α−∠ β，如图 13-4-12①；

（2）作线段 $BC=a$；

（3）分别以 B，C 为顶点，以 BC，CB 为一边在 BC 的同侧作∠ CBM=∠ β，∠ BCN=∠ γ，射线 BM，CN 交于点 A，△ ABC 就是所求作的三角形（如图 13-4-12②）.

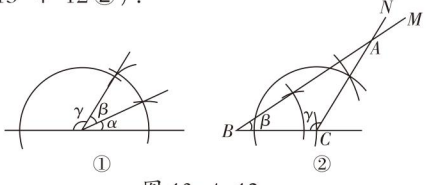


图 13-4-12

挑战·高分

方法总结

- 做此类题时，不妨先画个草图，对草图进行分析，从确定作图的思路与顺序；
- 当已知两角及其中一角的对边作图时，不能直接作三角形，往往借助于三角形内角和等于 180° 求出第三个角，再利用两角及其夹边来作图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用尺规作全等三角形

挑战·高分

例5 如图13-4-13，在△ABC中，三边各不相等，$DE=BC$，以D，E为两个顶点作位置不同的三角形，使所作三角形与△ABC全等，这样的三角形最多可以画出_____个.

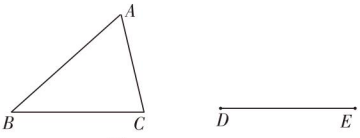


图13-4-13

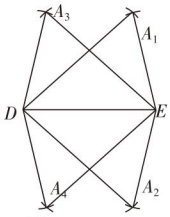


图13-4-14

解题秘方： 利用三角形全等的判定方法和尺规作图的基本步骤作图即可.

解：（1）分别以点D为圆心，以线段AB的长为半径画弧，以点E为圆心，以线段AC的长为半径画弧，两弧相交于两点A_1，A_2（线段DE上下各一个），经过连接后得到两个三角形（△A_1DE和△A_2DE）；

（2）分别以点D为圆心，以线段AC的长为半径画弧，以点E为圆心，以线段AB的长为半径画弧，两弧相交于两点A_3，A_4（线段DE上下各一个），经过连接后也得到两个三角形（△A_3ED和△A_4ED）. 如图13-4-14所示.

答案： 4

方法点拨

已知三边作三角形的注意点：

（1）先作出一条边（即先确定三角形的两个顶点），再用两条弧的交点确定第三个顶点.

（2）作出的符合要求的三角形，形状相同，位置可能不同.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 用尺规作三角形在中考中的考点较少，大多是与其他知识综合起来考查，有时也以选择题、填空题的形式出现.

三年中考兵法

考法 利用尺规作三角形

冲刺·满分

例6 [中考·杭州]“综合与实践”学习活动准备制作一组三角形，记这些三角形的三边分别为a，b，c，并且这些三角形三边的长度为大于1且小于5的整数个单位长度（如图13-4-15）.



图13-4-15

（1）用记号（a，b，c）（$a\leqslant b\leqslant c$）表示一个满足条件的三角形，如（2，3，3）表示边长分别为2，3，3个单位长度的一个三角形，请列举出所有满足条件的三角形；

（2）用直尺和圆规作出三边满足$a<b<c$的三角形（用给定的单位长度，不写作法，保留作图痕迹）.

知识储备

三角形任意两边的和大于第三边.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了已知三边作三角形及三角形的三边关系.

解:(1)(2, 2, 2),(2, 2, 3),(2, 3, 3),(2, 3, 4),(2, 4, 4),(3, 3, 3),(3, 3, 4),(3, 4, 4),(4, 4, 4).

(2)由(1)可知，只有(2, 3, 4)，即 $a=2$，$b=3$，$c=4$ 满足 $a<b<c$. 如图 13−4−16 所示的△ ABC 即为满足条件的三角形.

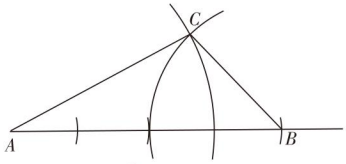


图 13−4−16

方法点拨

(1)根据题意，三角形的三边长可以是 2 或 3 或 4，用列举法，根据三角形的三边关系列举出所有满足条件的三角形.

(2)首先判断满足条件的三角形只有一个，再作图.

两年模拟兵法

☞答案见 256 页

1. 尺规作图的画图工具是(　　)

A. 刻度尺和量角器

B. 三角尺和圆规

C. 没有刻度的直尺和量角器

D. 没有刻度的直尺和圆规

2. 已知 $\angle\alpha$ 和线段 a，用尺规作△ ABC，使 $\angle A=2\angle\alpha$，$\angle C=3\angle\alpha$，$AC=2a$，则全班同学用尺规作出的△ ABC 都是全等的，那么判定三角形全等的依据是(　　)

A. SSS　　B. SAS　　C. AAS　　D. ASA

3. 依据下列条件，能画出唯一的△ ABC 的是(　　)

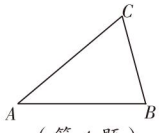
A. $AB=3$，$BC=4$，$\angle C=50°$

B. $AB=4$，$BC=3$，$\angle A=30°$

C. $\angle C=90°$，$AB=6$

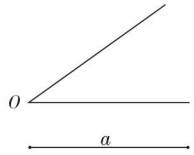
D. $\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$AB=4$

4. [中考·贵港]尺规作图(只保留作图痕迹，不要求写出作法)：如图，已知△ ABC，请根据“SAS”基本事实作出△ DEF，使△ $DEF\cong$△ ABC.



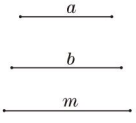
(第 4 题)

5. [中考·鞍山]如图，已知线段 a 及 $\angle O$，只用直尺(没有刻度)和圆规，求作△ ABC，使 $BC=a$，$\angle B=\angle O$，$\angle C=2\angle B$.(保留作图痕迹，不写作法)



(第 5 题)

6. 如图，已知线段 a，b，m，求作△ ABC，使 $BC=2a$，$AC=b$，且 BC 边上的中线 $AD=m$.



(第 6 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分析综合法在三角形全等中的应用

荣老师告诉你 分析法指从要证的结论出发，逐步寻求使它成立的条件，直到推出一个正确的条件（如已知、定理、性质等）为止，即从未知看需知，逐渐靠拢已知，从而达到证明目的．证明一道几何题，不是一拿到题，就凭感觉开始证明，而是要首先运用分析法缜密分析，而后运用综合法来进行综合证明．综合法是指在推理的过程中，从已知开始，一环扣一环，最后使所要证明的结论成立，即从已知看可知，逐渐靠拢未知的一种证明方法．分析法和综合法不是彼此孤立的，在证明题中，我们往往是用分析法探路，用综合法证题．

应用一 ▶ 利用分析综合法证三角形全等

例 1 ［中考·泉州］如图 1，$\triangle ABC$，$\triangle CDE$ 均是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle DCE=90°$，点 E 在 AB 上．

求证：$\triangle CDA\cong\triangle CEB$.

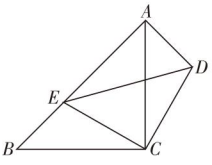


图 1



解题秘方： 由等腰三角形的性质可知 $BC=AC$，$EC=DC$. 由 $\angle ACB=\angle DCE=90°$，利用等式的基本性质，可得 $\angle ECB=\angle DCA$，从而利用“SAS”证两个三角形全等．

证明： $\because\angle ACB=\angle DCE=90°$，

$\therefore\angle ACB-\angle ACE=\angle DCE-\angle ACE$，

即 $\angle ECB=\angle DCA$.

$\because\triangle ABC$，$\triangle CDE$ 均是等腰直角三角形，

$\therefore BC=AC$，$EC=DC$.

在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases}CD=CE,\\ \angle DCA=\angle ECB,\\ AC=BC,\end{cases}$$

$\therefore\triangle CDA\cong\triangle CEB$（SAS）.

方法点拨： 用分析法证明三角形全等，先找出两个三角形中已知的相等量，然后结合判定方法分析出要找的相等量，结合已知中其他条件分析出解决问题的方案．

应用二 ▶ 利用分析综合法证线段相等

例 2 ［中考·恩施州］如图 2，$BE\perp AC$，$CD\perp AB$，垂足分别为 E，D，$BE=CD$.

求证：$AB=AC$.

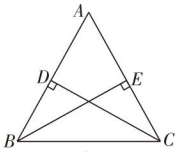


图 2

解题秘方： 欲证 $AB=AC$，观察图形知 AB，AC 分别在 $\triangle ABE$，$\triangle ACD$ 中，只需证 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，问题即可得证．分析条件可知，$\angle A$ 是公共角，$\angle AEB=\angle ADC$，$BE=CD$，可证明 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$.

证明： $\because BE\perp AC$，$CD\perp AB$，

$\therefore\angle ADC=\angle AEB=90°$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A,\\ \angle AEB=\angle ADC,\\ BE=CD,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACD$（AAS）.

$\therefore AB=AC$.

方法点拨：证明两条线段相等的基本思路

若两条线段在两个三角形中，则证明这两条线段所在的两个三角形全等；若两条线段在同一个三角形中，则可利用“等角对等边”（以后将学），转化为证明角相等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用三 ▶ 利用分析综合法证角相等

例 3 ［中考·福州］一个平分角的仪器如图 3，其中 $AB=AD$，$BC=DC$.

求证：$\angle BAC=\angle DAC$.

解题秘方： 在△ ABC 和△ ADC 中，由三组边分别相等可通过“SSS”证得△ $ABC\cong$△ ADC，再由全等三角形的性质即可得出结论.

证明： 在△ ABC 和△ ADC 中，

$$\begin{cases}AB=AD,\\BC=DC,\\AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore$△ $ABC\cong$△ ADC（SSS）.

$\therefore\angle BAC=\angle DAC$.

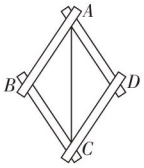


图 3

方法点拨：证明两个角相等的基本思路

若两个角在两个三角形中，则证明这两个角所在的两个三角形全等；若两个角在同一个三角形中，则可利用“等边对等角”（以后将学），转化为证明线段相等.

例 4 如图 4，$AB=DC$，$\angle A=\angle D$.

求证：$\angle ABC=\angle DCB$.

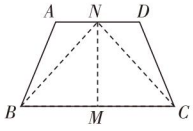


图 4

解题秘方： 直接证明$\angle ABC=\angle DCB$难度较大，不妨设想分别把$\angle ABC$，$\angle DCB$分成两个角，证明$\angle ABC$分成的两部分与$\angle DCB$分成的两部分分别相等即可.

证明： 如图 4，分别取 AD，BC 的中点 N，M，连接 BN，CN，MN，则有 $AN=DN$，$BM=CM$.

在△ ABN 和△ DCN 中，$\begin{cases}AN=DN,\\\angle A=\angle D,\\AB=DC,\end{cases}$

$\therefore$△ $ABN\cong$△ DCN（SAS）.

$\therefore\angle ABN=\angle DCN$，$NB=NC$.

在△ NBM 和△ NCM 中，$\begin{cases}NB=NC,\\BM=CM,\\NM=NM,\end{cases}$

$\therefore$△ $NBM\cong$△ NCM（SSS）.

$\therefore\angle NBC=\angle NCB$.

$\therefore\angle NBC+\angle ABN=\angle NCB+\angle DCN$，

即$\angle ABC=\angle DCB$.

方法点拨： 证明三角形全等时常需添加适当的辅助线，辅助线的添加以能创造已知条件为上策，如本题取 AD，BC 的中点就是把中点作为已知条件. 分散证明也是几何证明中的一种常用技巧.

应用四 ▶ 利用分析综合法证线段的位置关系

例 5 ［中考·武汉］如图 5，点 B，E，C，F 在同一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证：$AB\parallel DE$.

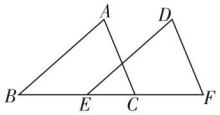


图 5

解题秘方： 要证 $AB\parallel DE$，只需证$\angle ABC=\angle DEF$，故需证它们所在的三角形全等，而在这两个三角形中根据已知有两组边对应相等，只需证出第三组边相等，即可利用“SSS”证它们全等.

证明： $\because BE=CF$，

$\therefore BC=EF$.

在△ ABC 和△ DEF 中，

$$\begin{cases}BC=EF,\\AB=DE,\\AC=DF,\end{cases}$$

$\therefore$△ $ABC\cong$△ DEF（SSS）.

$\therefore\angle ABC=\angle DEF$.

$\therefore AB\parallel DE$.

方法点拨：证明两条线段平行的基本思路

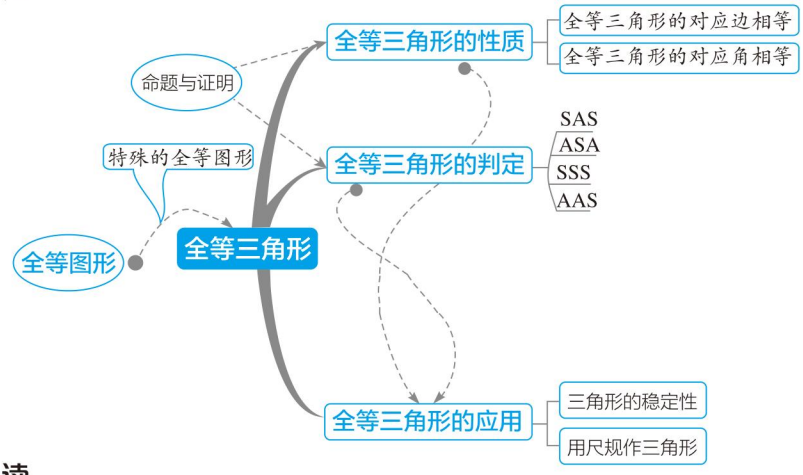
先找一对位置角（如同位角、内错角），然后证明这对位置角所在的三角形全等，最后找判定三角形全等的条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一个命题的条件和结论分别为另一个命题的结论和条件的两个命题，称为互逆命题.
2. 如果一个定理的逆命题是真命题，那么这个逆命题也可以称为原定理的逆定理.
3. 全等三角形是特殊的全等图形，全等三角形的对应边相等、对应角相等.
4. 全等三角形的判定——“SAS”“ASA”“SSS”“AAS”，利用全等三角形的判定可以得到三角形具有稳定性，并且可以用尺规作三角形.

知识方法专题

知识必学

专题一 命题与证明

链接中考» 在两个互逆的命题中，如果我们将其中一个命题称为原命题，那么另一个命题就是这个原命题的逆命题.逆命题是常考点，证明是中考的必考点.

例1 [中考·河北]下面是投影屏上出示的抢答题，需要回答横线上符号代表的内容.

已知：如图13-1，$\angle BEC=\angle B+\angle C$.

求证：$AB/\!/CD$.

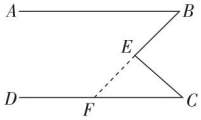


图13-1

证明：如图13-1，延长BE交__※__于点F，则$\angle BEC=$__◎__$+\angle C$（三角形的外角等于与它不相邻两个内角之和）.

又因为$\angle BEC=\angle B+\angle C$，所以$\angle B=$__▲__，

故$AB/\!/CD$（__@__相等，两直线平行）.

下面回答正确的是（　　）

A. ◎代表$\angle FEC$　B. @代表同位角

C. ▲代表$\angle EFC$　D. ※代表AB

解：延长BE交CD于点F，则$\angle BEC=\angle EFC+\angle C$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角之和）.又因为$\angle BEC=\angle B+\angle C$，所以$\angle B=\angle EFC$，故$AB/\!/CD$（内错角相等，两直线平行）.故选项A，B，D都不正确，只有选项C正确.

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 全等三角形的性质与判定

链接中考» 三角形全等的判定是几何中常见的证明，全等三角形的性质是解决线段相等或角相等的基本依据，是中考的热门考点，单独考查时，形式多种多样，填空题、选择题、解答题都有．但三角形全等往往成为其他综合证明题的一个工具．

类型 1：利用三角形全等证明线段的关系

例 2 ［中考·武汉］如图 13-2，点 B，C，E，F 在同一直线上，$BC=EF$，$AC\perp BC$ 于点 C，$DF\perp EF$ 于点 F，$AC=DF$.

求证：（1）$\triangle ABC\cong\triangle DEF$；

（2）$AB\parallel DE$.

解题秘方：（1）这两个三角形中，根据已知有两组边对应相等，且夹角对应相等，故用“SAS”可证它们全等；（2）要证 $AB\parallel DE$，只需证 $\angle ABC=\angle DEF$，而这可由 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 得到．

证明：（1）$\because AC\perp BC$ 于点 C，$DF\perp EF$ 于点 F，

$\therefore\angle ACB=\angle DFE=90^\circ$．

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases}BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\\ AC=DF,\end{cases}$$

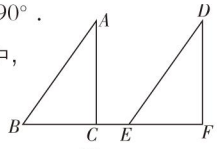


图 13-2

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DEF$（SAS）．

（2）$\because\triangle ABC\cong\triangle DEF$，

$\therefore\angle ABC=\angle DEF$，

$\therefore AB\parallel DE$.

类型 2：利用三角形全等证明角的关系

例 3 ［中考·宜宾］如图 13-3，$AC=DC$，$BC=EC$，$\angle ACD=\angle BCE$.

求证：$\angle A=\angle D$.

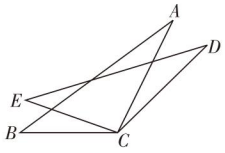


图 13-3

解题秘方：先找出要证的两个角所在的三角形，然后结合已知条件，证明两个三角形全等．

证明：$\because\angle ACD=\angle BCE$，

$\therefore\angle ACD+\angle ACE=\angle BCE+\angle ACE$，

即 $\angle DCE=\angle ACB$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases}AC=DC,\\ \angle ACB=\angle DCE,\\ BC=EC,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DEC$（SAS）．

$\therefore\angle A=\angle D$.

方法点拨：全等三角形的性质——对应边相等，对应角相等，为证明线段或角相等提供了思路，其思路主要分两步，（1）找要证的线段或角所在的三角形；（2）证这两个三角形全等．

专题三 三角形全等的模型

链接中考» 全等，看似变化莫测，实则很多题都可以抽象出基本模型．基本模型可以使解题思路更清晰，模型也是学习平面几何不可或缺的一部分．抓住模型，就能抓住本质，方能以不变应万变．以下列举的是“手拉手”模型，它多以解答题的形式出现．

例 4 如图 13-4，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=\alpha$．连接 BD，CE，求证：$\triangle BAD\cong\triangle CAE$.

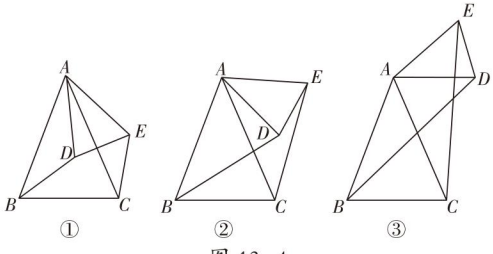


图 13-4

证明：如图 13-4①，

$\because\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC$，

$\angle CAE=\angle DAE-\angle DAC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle BAC=\angle DAE=\alpha$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAE$.

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中，

$$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$$

$\therefore\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）.

图13−4②、图13−4③同理可证.

方法点拨：（1）这个图形由两个有一公共顶点且顶角相等的等腰三角形构成，在相对位置变化的同时，始终存在一对全等三角形.

（2）如果把小等腰三角形的腰长看成小手，大等腰三角形的腰长看成大手，两个等腰三角形有公共顶点，类似大手拉着小手，所以把这个模型称为“手拉手”模型.

专题四 三角形的尺规作图

链接中考≫ 这部分内容是在基本作图的基础上考查作三角形.常考查已知两边及其夹角、两角及其夹边、两角及其中一角的对边或三边作三角形，作图时要保留作图痕迹.一般为中、低难度题目.

例5 [中考·青岛]如图13−5，已知：线段a，$\angle\alpha$.求作：$\triangle ABC$，使$AB=AC=a$，$\angle B=\angle\alpha$.

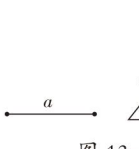


图13−5

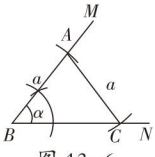


图13−6

解题秘方：首先作$\angle MBN=\angle\alpha$，进而以点B为圆心，以a为半径画弧，即可得出点A的位置，再以点A为圆心，以a为半径画弧，即可得出点C的位置.

解：如图13−6，$\triangle ABC$即为所求作的三角形.

方法点拨：作三角形可先在草稿纸上画出三角形的草图，标上已知线段和角，并经过分析确定作图顺序.

方法必会

专题五 利用分析法进行推理

专题解读≫ 几何证明的基本方法是分析法，也称为逆推法.例如要证明三角形全等，首先观察条件中哪些是直接条件，哪些是间接条件，在此基础上加以分析，完成解答.

例6 [中考·孝感]我们把两组邻边分别相等的四边形叫做“箏形”.如图13−7，四边形$ABCD$是一个箏形，其中$AB=CB$，$AD=CD$.对角线AC，BD相交于点O，$OE\perp AB$，$OF\perp CB$，垂足分别是E，F.求证：$OE=OF$.

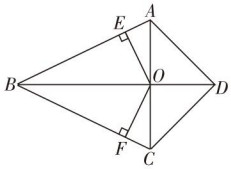


图13−7

证明：在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，

$$\begin{cases}AB=CB,\\ AD=CD,\\ BD=BD,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CBD$（SSS）.

$\therefore\angle ABD=\angle CBD$.

$\because OE\perp AB$，$OF\perp CB$，

$\therefore\angle OEB=\angle OFB=90°$.

又$\because OB=OB$，

$\therefore\triangle OEB\cong\triangle OFB$（AAS）.$\therefore OE=OF$.

方法点拨：证明线段相等的方法

（1）中点定义；（2）等式的性质；（3）全等三角形的对应边相等；（4）角平分线上的点到角两边的距离相等（以后将学）.在解决问题时，选择合适的方法可提高解题的效率.

专题六 构造全等三角形的几种方法

专题解读≫ 在某些图形中，解决问题时要证明三角形全等，而图形中没有全等的三角形，可通过作辅助线来构造全等三角形，常见的构造方法有截长补短法、倍长中线法、作高法等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 1：截长补短法

例 7 如图 13−8，在△ ABC 中，AD 平分 ∠ BAC，∠ C=2 ∠ B，试判断 AB，AC，CD 三者之间的数量关系，并说明理由.

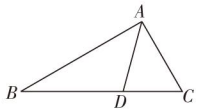


图 13−8

解题秘方： 借助角平分线构造全等三角形解决问题.

解： AB=AC+CD.

理由：**方法一** 如图 13−9 ①，在 AB 上截取 AE=AC，连接 DE.

∵ AD 平分∠ BAC，∴∠ EAD=∠ CAD.

在△ AED 和△ ACD 中，

$$\begin{cases} AE=AC, \\ \angle EAD=\angle CAD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

∴△ AED ≌△ ACD（SAS）.

∴ ED=CD，∠ AED=∠ C.

∵∠ AED=∠ B+∠ EDB，

∴∠ C=∠ AED=∠ B+∠ EDB.

又∵∠ C=2 ∠ B，

∴∠ B=∠ EDB. ∴ BE=DE.

∴ AB=AE+BE=AC+DE=AC+CD.

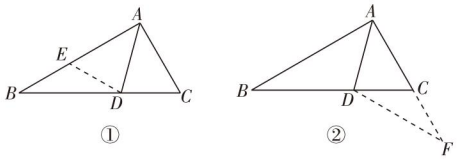


图 13−9

方法二 如图 13−9 ②，延长 AC 到点 F，使 CF=CD，连接 DF.

∵ CF=CD，∴∠ CDF=∠ F.

∵∠ ACB=∠ CDF+∠ F，

∴∠ ACB=2 ∠ F.

又∵∠ ACB=2 ∠ B，∴∠ B=∠ F.

∵ AD 平分∠ BAC，∴∠ BAD=∠ FAD.

又∵ AD=AD，

∴△ ABD ≌△ AFD（AAS）.

∴ AB=AF.

∴ AB=AF=AC+CF=AC+CD.

方法点拨： 运用截长补短法构造全等三角形有两个标志，一是有“角平分线”，二是出现“一条线段等于两条线段的和或者差”，目的是构造全等三角形.

类型 2：倍长中线法

例 8 如图 13−10，已知在△ ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，求证：AD<$\frac{1}{2}$（AB+AC）.

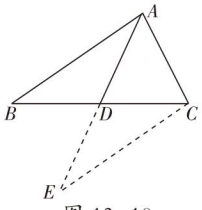


图 13−10

解题秘方： 借助中线，将其延长一倍构造全等三角形解决问题.

证明： 如图 13−10，延长 AD 至 E，使 DE=AD，连接 CE，则 AE=2AD.

∵在△ ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，

∴ BD=CD.

在△ ADB 和△ EDC 中，

$$\begin{cases} AD=ED, \\ \angle ADB=\angle EDC, \\ BD=CD, \end{cases}$$

∴△ ADB ≌△ EDC（SAS）.

∴ AB=EC.

∵在△ ACE 中，AC+CE>AE，

∴ AC+AB>2AD，

即 AD<$\frac{1}{2}$（AB+AC）.

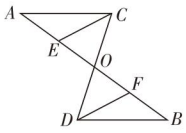
规律点拨： 涉及三角形中线问题时，常采用延长中线一倍的办法，可以将分居中线两旁的两条边集中于同一个三角形中，以利于问题的解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见256页

题型1：全等三角形的性质与判定

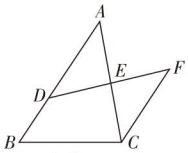
1. 如图，AB，CD交于点O，E，F为AB上两点，$OA=OB$，$OE=OF$，$\angle A=\angle B$，$\angle ACE=\angle BDF$. 求证：$\triangle ACE\cong\triangle BDF$.



（第1题）

2. 如图，D是$\triangle ABC$的边AB上一点，DF交AC于点E，$DE=FE$，$FC\parallel AB$.

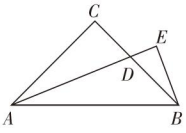
求证：$AE=CE$.



（第2题）

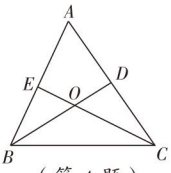
题型2：构造全等三角形解决问题

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BCA=90°$，$AC=BC$，AE平分$\angle BAC$交BC于点D，$BE\perp AE$，求证：$BE=\frac{1}{2}AD$.



（第3题）

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，BD，CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$，BD，CE交于点O，试判断BE，CD，BC的数量关系，并加以证明.



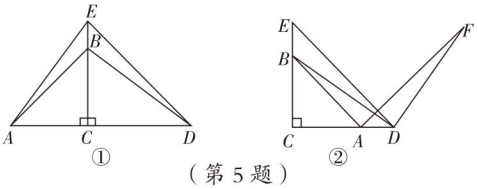
（第4题）

题型3：动态中的全等三角形

5. [中考·莱芜]已知$\triangle ABC$与$\triangle DEC$是两个大小不同的等腰直角三角形.

（1）如图①，连接AE，DB，试判断线段AE和DB的数量和位置关系，并说明理由；

（2）如图②，连接DB，将线段DB绕点D顺时针旋转$90°$到DF，连接AF，试判断线段DE和AF的数量和位置关系，并说明理由.



（第5题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

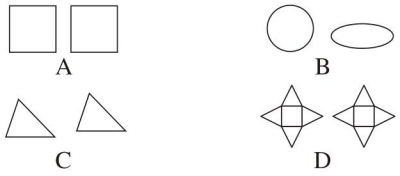
第十三章测试卷

☞答案见257页

（100分　60分钟）

一、选择题（每题3分，共24分）

1. 下列各组图形中不是全等图形的是（　　）



2. 下列命题的逆命题是假命题的是（　　）

A. 全等三角形的对应边相等，对应角相等

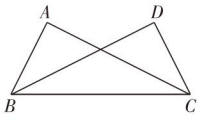
B. 面积相等的两个三角形全等

C. 全等三角形的周长相等

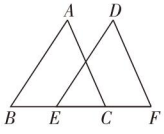
D. 被5整除的数一定能被10整除

3. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，点$A$与点$D$，点$B$与点$C$对应，如果$AC$=6 cm，$AB$=3 cm，那么$DC$的长为（　　）

A.3 cm　　B.5 cm　　C.6 cm　　D. 无法确定



（第3题）



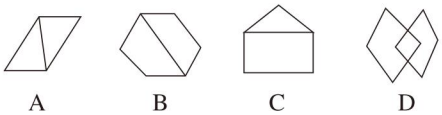
（第4题）

4. 如图，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，AB=DE，$\angle B$=$\angle DEF$，添加下列哪一个条件无法证明$\triangle ABC \cong \triangle DEF$？（　　）

A. $AC \parallel DF$　　B. $\angle A$=$\angle D$

C. AC=DF　　D. $\angle ACB$=$\angle F$

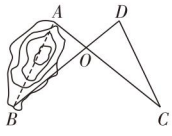
5. 下列图形中，具有稳定性的是（　　）



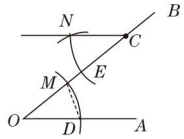
6. 如图，已知AC=DB，AO=DO，CD=100 m，则A，B两点间的距离（　　）

A. 大于100 m　　B. 等于100 m

C. 小于100 m　　D. 无法确定



（第6题）



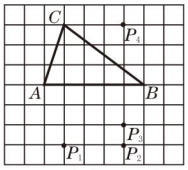
（第7题）

7. 如图，用尺规作图，“过点C作$CN \parallel OA$”的实质就是作$\angle NCE$=$\angle DOM$，其作图依据是（　　）

A. SAS　　B. SSS　　C. ASA　　D. AAS

8. 如图，在方格纸中，以AB为一边作$\triangle ABP$，使之与$\triangle ABC$全等，从P_1，P_2，P_3，P_4四个点中找出符合条件的点P，则点P有（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个



（第8题）



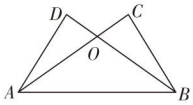
（第10题）

二、填空题（每题3分，共12分）

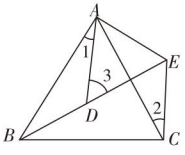
9. 已知$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle A$=60°，$\angle F$=50°，则$\angle B$的度数是_____.

10. 如图，点D在AB上，点E在AC上，CD与BE相交于点O，且AD=AE，AB=AC，若$\angle B$=20°，则$\angle C$=_____.

11. 如图，已知$\angle C$=$\angle D$，$\angle ABC$=$\angle BAD$，AC与BD相交于点O，请写出图中一组相等的线段：_____.



（第11题）



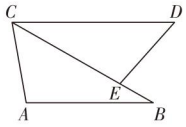
（第12题）

12. 如图，AB=AC，AD=AE，$\angle BAC$=$\angle DAE$，$\angle 1$=25°，$\angle 2$=30°，则$\angle 3$=_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

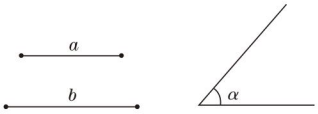
三、解答题（共64分）

13.（10分）如图，E是BC上一点，$AB=EC$，$AB\parallel CD$，$BC=CD$. 求证：$AC=ED$.



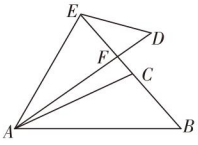
（第13题）

14.（12分）已知线段a，b和$\angle\alpha$，如图，求作$\triangle ABC$，使其一个内角等于$\angle\alpha$，且$\angle\alpha$的对边等于a，其中一条邻边等于b.



（第14题）

15.（12分）如图，已知$\triangle ABC\cong\triangle ADE$，$BC$的延长线过点$E$，交$AD$于点$F$，$\angle ACB=105°$，求$\angle DEF$的度数.

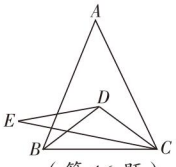


（第15题）

16.（14分）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=50°$，D为$\triangle ABC$内一点，连接BD，CD，E为$\triangle ABC$外一点，连接CE，DE，已知$BD=CD$，$CE=AB$，CD平分$\angle ECA$.

（1）试判断点D是否在$\angle A$的平分线上，并说明理由；

（2）求$\angle E$的度数.



（第16题）

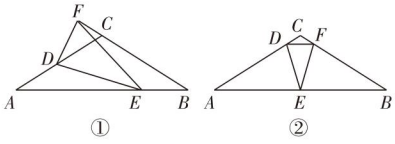
17.（16分）如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，D，E，F分别是直线AC，AB，BC上的点，且$AD=BE$，$AE=BF$.

（1）如图①，若$\angle DEF=30°$，求$\angle ACB$的度数；

（2）当E为AB的中点时，如图②.

①求证：$DF\parallel AB$；

②若DF与AB之间的距离为8，$AC=16$，求$\triangle ABC$的面积.



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



荣德基 主编

荣德基

参考答案及点拨

（249页~275页）

另赠送 教材习题参考答案及点拨

（276页~309页）

八年级 数学 上

（JJ版）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第十二章 分式和分式方程

12.1 分 式

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** A **4.** B **5.** D **6.** D **7.** C

8. $m<0$

9. $\left(\frac{b}{a}+1\right)$ m **点拨:** ∵ 1 m 长的电线的质量为 a, 其余电线的总质量为 b, ∴ 其余电线的长为 $\frac{b}{a}$ m, ∴ 电线的总长度为 $\left(\frac{b}{a}+1\right)$ m.

10. **解:** (1) 由题意, 可得 $|x|-1=0$, 所以 $x=\pm1$.

把 $x=1$ 代入 x^2+2x-3, 得 $1+2-3=0$. 不合题意, 舍去.

把 $x=-1$ 代入 x^2+2x-3, 得 $(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$,

所以当 $x=-1$ 时, $\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$ 的值为 0.

(2) 由题意, 得 $x-2=0$ 或 $x-1=0$,

所以 $x=2$ 或 $x=1$,

因为 $|x|-1\neq0$, 所以 $x\neq\pm1$,

所以当 $x=2$ 时, $\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$ 的值为 0.

11. **解:** (1) $\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$.

(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

12. **解:** (1) 因为 $\frac{-x^2}{1-5x}$ 的值为负数,

所以 $\begin{cases}-x^2<0,\\1-5x>0,\end{cases}$ 所以 $x<\frac{1}{5}$ 且 $x\neq0$.

(2) 当 $\begin{cases}x+1>0,\\2x+4>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1<0,\\2x+4<0\end{cases}$ 时, 分式 $\frac{x+1}{2x+4}$ 的值为正数.

解这两个不等式组, 得 $x>-1$ 或 $x<-2$.

所以当 $x>-1$ 或 $x<-2$ 时, 原分式的值为正数.

点拨: (2) 题中根据同号相除得正易知, 当分式的分子、分母的值同时为正数或同时为负数时, 分式的值都为正数, 要考虑两种情况.

13. **解:** 设 $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=m$,

则 $y+z=mx$①, $z+x=my$②, $x+y=mz$③,

由①+②+③, 得 $2x+2y+2z=m(x+y+z)$.

因为 $x+y+z\neq0$, 所以 $m=2$, 所以 $\frac{x+y}{z}=2$,

所以 $x+y=2z$, 所以原式 $=\frac{2z-z}{2z+z}=\frac{z}{3z}=\frac{1}{3}$.

12.2 分式的乘除

【两年模拟兵法】

1. A **2.** A **3.** $x\neq-2$ 且 $x\neq-3$ 且 $x\neq-4$

4. $\frac{y-x}{x^2+xy}$

5. **解:** (1) 原式 $=\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{5xm}{6yn}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{1}{2y^2}$.

(2) 原式 $=\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a-1}{(a+2)^2}\cdot(a+2)=\frac{1}{(a+1)(a+2)}\cdot(a+2)=\frac{1}{a+1}$.

(3) 原式 $=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{(x+2)^2}$.

(4) 原式 $=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b^3}{a^6}\right)\div\left(-\frac{1}{a^3b^3}\right)=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{a^6}{b^3}\right)\cdot(-a^3b^3)=\frac{a^5}{2b}\cdot(-a^3b^3)=-\frac{a^8b^2}{2}$.

(5) 原式 $=\frac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}\cdot\frac{(n-m)^2}{m^2n^2}\cdot\frac{m}{m+n}=\frac{m-n}{mn^2}$.

(6) 原式 $=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}=\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}=\frac{x}{y^2(x-y)}=\frac{x}{xy^2-y^3}$.

6. **解:** 由题意可知, 甲工程队修 900 米所用时间为 $\frac{900}{a^2-4}$ 天, 乙工程队修 600 米所用时间为 $\frac{600}{(a-2)^2}$ 天.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{900}{a^2-4}\div\frac{600}{(a-2)^2}=\frac{900}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a-2)^2}{600}=\frac{3(a-2)}{2(a+2)}=\frac{3a-6}{2a+4}$.

答:甲工程队修900米所用时间是乙工程队修600米所用时间的$\frac{3a-6}{2a+4}$.

7. 解:$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$,因此不管$x$取何值,这个式子的值都是$\frac{1}{2}$.

8. 解:由$a^2+b^2-4a+6b+13=0$,

得$(a-2)^2+(b+3)^2=0$. 根据非负数的性质,可得$a=2,b=-3$.

原式$=\frac{(a-3)^2}{-(b+2)(b-2)}\cdot\frac{b+2}{-(a-3)}\cdot\frac{a^2}{3(a-3)}=\frac{a^2}{3(b-2)}=\frac{a^2}{3b-6}$.

当$a=2,b=-3$时,

原式$=\frac{2^2}{3\times(-3)-6}=-\frac{4}{15}$.

9. 解:(1)因为$-\frac{x^5}{y^2}\div\frac{x^3}{y}=\frac{x^7}{y^3}\div\left(-\frac{x^5}{y^2}\right)=-\frac{x^9}{y^4}\div\frac{x^7}{y^3}=\cdots=-\frac{x^2}{y}$,

所以从第2个分式开始,用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式的结果恒等于$-\frac{x^2}{y}$.

(2)第7个分式是$\frac{x^{15}}{y^7}$.

12.3 分式的加减

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B **3.** A **4.** B

5. B **点拨:**原式$=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot ab=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(b+a)(b-a)}\cdot ab=\frac{a^2b^2}{b-a}$.

6. D **点拨:**原式$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$,

因为$a+b+c=0$,

所以$a+b=-c,a+c=-b,b+c=-a$,

所以原式$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-1-1-1=-3$.

先对原式利用乘法的分配律展开,再把分母相同的式子相加,将条件按相加后的形式进行变形,代入化简即可求值. 本题运用了整体思想求值. 解题的关键是对条件和原式变形,使变形后的条件与变形后的式子产生直接联系,再利用整体代入的方法求值.

7. D **8.** D

9. 5 **点拨:**先将条件等式两边同时乘$(m+n)$,再通过拆分得到结果. 因为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$,两边同时乘$(m+n)$,得$\frac{m+n}{m}+\frac{m+n}{n}=7$,所以$1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+1=7$,所以$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=5$.

对于此类问题,往往需要对条件式进行变形,当待求式含有两个字母时,还要注意利用整体思想去求解.

10. 3 **点拨:**因为$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$,

所以$\frac{1+b-(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$,

所以$\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$,

所以$(1+a)(1+b)=(b-a)^2$,

所以$a^2+b^2=1+a+b+3ab$.

所以$\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}=\frac{(1+b)^2+(1+a)^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{1+2b+b^2+1+2a+a^2}{1+a+b+ab}=\frac{3+3a+3b+3ab}{1+a+b+ab}=3$.

11. 解:原式$=\frac{2x}{(x+y)(x-y)}\div\frac{x^2y}{x^2-y^2}$

$=\frac{2x}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2y}$

$=\frac{2}{xy}$,

因为$y=\frac{2}{x}$,所以$xy=2$,所以原式$=1$.

12. 解:$\frac{1}{1-x}\div\frac{x^2+2x}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{(x-1)^2}{x(x+2)}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1-x}{x(x+2)}+\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1-x+x}{x(x+2)}$

$=\frac{1}{x(x+2)}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解不等式 $5-2x\geqslant 1$，得 $x\leqslant 2$，

解不等式 $x+3>0$，得 $x>-3$，

所以不等式组的解集为 $-3<x\leqslant 2$，

则不等式组的整数解为 $-2,-1,0,1,2$.

由题意得 $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$ 且 $x\neq 1$，

所以 $x=-1$ 或 2.

取 $x=2$，则原式 $=\dfrac{1}{2\times(2+2)}=\dfrac{1}{8}$.

点拨：x 的取值不唯一.

12.4 分式方程

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** B **4.** D **5.** D

6. C **点拨：**当 $m^2-2m\geqslant 0$ 时，$\dfrac{6}{m-1}=-6$，解得 $m=0$，经检验，$m=0$ 是原方程的解，并且满足 $m^2-2m\geqslant 0$. 当 $m^2-2m<0$ 时，$m-3=-6$，解得 $m=-3$，不满足 $m^2-2m<0$，舍去，故输入的 m 为 0.

7. -8

8. $\dfrac{5}{6}$ **点拨：**因为 $a\oplus b=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$，

所以 $2\oplus(2x-1)=\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}$，

故有 $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}=1$，

所以 $\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{3}{2}$，解得 $x=\dfrac{5}{6}$.

经检验，$x=\dfrac{5}{6}$ 是原方程的解.

9. $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-8}$

10. 解：(1)方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$，得 $2(x-1)=x+1$，解这个一元一次方程，得 $x=3$. 经检验，$x=3$ 是原分式方程的解，所以原分式方程的解是 $x=3$.

(2)去分母，得 $(x-2)^2-16=(x+2)^2$，去括号，得 $x^2-4x+4-16=x^2+4x+4$，解得 $x=-2$. 经检验，$x=-2$ 是增根，所以原分式方程无解.

11. 解：由 $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{a}{(x+1)(x-2)}$ 得

$x(x-2)-(x-1)(x+1)=a$，所以 $x=\dfrac{1-a}{2}$.

因为原方程有增根时 $x=-1$ 或 $x=2$，

当 $x=-1$ 时，$a=3$；当 $x=2$ 时，$a=-3$，

所以当 $a\neq\pm 3$ 时，$x=\dfrac{1-a}{2}$ 才是原方程的解.

又因为 $x>0$，所以 $\dfrac{1-a}{2}>0$，解得 $a<1$.

所以 a 的取值范围为 $a<1$ 且 $a\neq -3$.

12.5 分式方程的应用

【两年模拟兵法】

1. C **2.** A **3.** 2 200 **4.** 40

5. 解：设抢修车的速度为 x km/h，则吉普车的速度为 $1.5x$ km/h，

由题意，得 $\dfrac{15}{x}-\dfrac{15}{1.5x}=\dfrac{15}{60}$，解得 $x=20$.

经检验，$x=20$ 是所列分式方程的解，并且 $x=20$，$1.5x=30$ 都符合题意.

答：抢修车的速度为 20 km/h，吉普车的速度为 30 km/h.

6. 解：(1)设试销时该品种苹果的进价是每千克 x 元. 依题意，得 $\dfrac{11\,000}{x+0.5}=\dfrac{5\,000}{x}\times 2$，解得 $x=5$.

经检验，$x=5$ 是所列分式方程的解，且符合题意.

答：试销时该品种苹果的进价是每千克 5 元.

(2)试销时购进苹果的质量为 $\dfrac{5\,000}{5}=1\,000$(千克).

第二次购进苹果的质量为 $2\times 1\,000=2\,000$(千克).

两次共盈利 $(1\,000+2\,000-400)\times 7+400\times 7\times 70\%-5\,000-11\,000=4\,160$(元).

答：超市在这两次苹果销售中共盈利 4 160 元.

7. 解：(1)设甲树苗每棵的价格是 x 元，则乙树苗每棵的价格是 $(x+10)$ 元，

依题意，得 $\dfrac{480}{x+10}=\dfrac{360}{x}$，

解得 $x=30$.

经检验，$x=30$ 是原分式方程的解，且符合题意.

$x+10=30+10=40$.

答：甲树苗每棵的价格是 30 元，乙树苗每棵的价格是 40 元.

(2)设他们可购买 y 棵乙树苗. 由(1)知，甲树苗原售价 30 元/棵，乙树苗原售价 40 元/棵，

依题意，得 $30\times(1-10\%)(50-y)+40y\leqslant 1\,500$，

解得 $y\leqslant 11\dfrac{7}{13}$.

因为 y 为整数，所以 y 最大为 11.

答：他们最多可购买 11 棵乙树苗.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解：(1)设乙工程队每天能改造道路的长度是x米，则甲工程队每天能改造道路的长度是$\frac{3}{2}x$米，

根据题意，得$\frac{360}{x}-\frac{360}{\frac{3}{2}x}=3$，解得$x=40$.

经检验，$x=40$是原分式方程的解，且符合题意，

所以$\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}\times40=60$.

答：乙工程队每天能改造道路的长度是40米，甲工程队每天能改造道路的长度是60米.

(2)设安排甲工程队工作m天，则安排乙工程队工作$\frac{1\,200-60m}{40}$天，根据题意，得$7m+5\times\frac{1\,200-60m}{40}\leqslant145$，解得$m\geqslant10$.

答：至少安排甲工程队工作10天.

9. 解：(1)设今年三月份甲品牌电脑每台售价m元.

由题意，得$\frac{100\,000}{m+1\,000}=\frac{80\,000}{m}$，解得$m=4\,000$. 经检验，$m=4\,000$是原分式方程的解，且符合题意.

答：今年三月份甲品牌电脑每台售价4 000元.

(2)设购进甲品牌电脑x台. 由题意，得$48\,000\leqslant3\,500x+3\,000(15-x)\leqslant50\,000$，解得$6\leqslant x\leqslant10$.

由题意可知x为正整数，所以x可取6，7，8，9，10，因此共有5种进货方案.

答：有5种进货方案.

(3)由题意得，总获利为$(4\,000-3\,500)x+(3\,800-3\,000-a)(15-x)=(a-300)x+12\,000-15a$.

当$a=300$时，(2)中所有方案获利相同. 此时，购买甲品牌电脑6台，乙品牌电脑9台对公司最有利.

答：a值应是300；此时，购买甲品牌电脑6台，乙品牌电脑9台对公司最有利.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：显然$xy\neq0$. 将待求分式的分子、分母同时除以xy，得$\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}=\frac{-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+5}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-3}=\frac{-3\times5+5}{5-3}=-5$.

2. 解：令$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq0)$，则$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$，代入$\frac{3a-2b+5c}{a+b+c}$，得$\frac{3a-2b+5c}{a+b+c}=\frac{3\times2k-2\times3k+5\times4k}{2k+3k+4k}=\frac{20k}{9k}=\frac{20}{9}$.

3. 解：原式$=\left[\frac{6x+6}{(x+1)(x-1)}+\frac{4}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{x-1}{3x+2}$

$=\frac{6x+10}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{3x+2}$

$=\frac{6x+10}{(x+1)(3x+2)}$.

当$x=2$时，原式$=\frac{6\times2+10}{(2+1)\times(3\times2+2)}=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}$.

4. 解：因为$|x-2|+(2x-y-3)^2=0$，

所以$\begin{cases}x-2=0,\\2x-y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

原式$=\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{2x-y}=\frac{2x}{2x-y}$.

当$x=2$，$y=1$时，原式$=\frac{4}{3}$.

5. 解：原式$=\frac{x-1}{x+2}\div\frac{x-1}{x(x+2)}-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=x-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x^2}{x+1}$.

因为$x^2-x-1=0$，所以$x^2=x+1$.

所以原式$=1$.

6. 解：原式$=\frac{(x-2)^2}{2x}\cdot\frac{x^2}{x(x-2)}+1=\frac{x-2}{2}+1=\frac{x}{2}$.

当$x=1$时，原式$=\frac{1}{2}$.（注意：x不能取0和2）

7. 解：方程两边同乘$3(x+1)$，

得$3x=2x+3(x+1)$，解得$x=-\frac{3}{2}$.

当$x=-\frac{3}{2}$时，$3(x+1)\neq0$，

所以$x=-\frac{3}{2}$是原方程的解.

8. 解：原方程可化为$\frac{x+2}{x-2}-\frac{16}{x^2-4}=1$.

方程两边同乘$(x+2)(x-2)$，

得$(x+2)^2-16=(x+2)(x-2)$.

整理，得$4x=8$，解得$x=2$.

当$x=2$时，$(x+2)(x-2)=0$，

所以$x=2$是原方程的增根，所以原方程无解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:原方程去分母并整理得$(m-2)x=5+m$,

假设产生增根 $x=1$,则有 $m-2=m+5$,方程无解,

所以不存在 m 的值,使原方程产生增根 $x=1$;

假设产生增根 $x=-1$,则有 $2-m=5+m$,

解得 $m=-\frac{3}{2}$.

所以当 $m=-\frac{3}{2}$时,关于 x 的分式方程$\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$会产生增根.

10. 解:因为$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$,

所以$(x-1)(x+1)-(x+2+a)=(x-1)(x+2)$,

所以 $x^2-1-x-2-a=x^2+x-2$.

解得 $x=-\frac{a+1}{2}$.

因为方程的解小于 3 且 $x=-\frac{a+1}{2}$不能为增根,

所以 $-\frac{a+1}{2}<3$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq 1$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq -2$.

解得 $a>-7$ 且 $a\neq \pm 3$.

11. 解:(1)设购买 1 个 A 品牌足球需 x 元,

则购买 1 个 B 品牌足球需$(x+30)$元,

根据题意,得$\frac{2\,500}{x}=\frac{2\,000}{x+30}\times 2$,解得$x=50$.

经检验,$x=50$ 是原方程的解,且符合题意.

$x+30=80$.

答:购买 1 个 A 品牌足球需 50 元,购买1 个B 品牌足球需 80 元.

(2)设此次购买 a 个 B 品牌足球,则购买 A 品牌足球$(50-a)$个,

根据题意,得$50\times(1+8\%)(50-a)+80\times 0.9a\leqslant 3\,260$,解得 $a\leqslant 31\frac{1}{9}$.

因为 a 取正整数,

所以 a 的最大值为 31.

答:华昌中学此次最多可购买 31 个 B 品牌足球.

【第十二章测试卷】

一、**1.** D **2.** D **3.** D **4.** A **5.** B **6.** D **7.** B **8.** C

二、**9.** -1 **10.** 1 **11.** $\frac{3}{2}$ **12.** 10

三、**13. 解:**原式$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{a-2}$

$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-1)}{a+1}$

$=\frac{2}{a+1}$.

14. 解:原式$=\frac{x-1-1}{x-1}\div\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x+1}{x-2}$.

当 $x=3$ 时,原式$=\frac{3+1}{3-2}=4$.

15. 解:(1)方程两边同乘$(x+2)(x-2)$,

得$3x(x-2)+2(x+2)=3(x+2)(x-2)$.

化简得 $-4x=-16$,解得 $x=4$.

经检验,$x=4$ 是原方程的解.

所以原方程的解是 $x=4$.

(2)方程两边同乘$(x+1)(x-1)$,

得$4-(x+1)(x+2)=-(x+1)(x-1)$.

解得 $x=\frac{1}{3}$.

经检验,$x=\frac{1}{3}$是原方程的解.

所以原方程的解是 $x=\frac{1}{3}$.

16. 解:由$\frac{2x-a}{x-1}-\frac{1}{1-x}=3$,得$2x-a+1=3(x-1)$,

解得 $x=4-a$,

因为关于 x 的分式方程的解为非负数,

所以 $x\geqslant 0$,且 $x-1\neq 0$,

所以 $4-a\geqslant 0$,且 $4-a-1\neq 0$,

解得 $a\leqslant 4$ 且 $a\neq 3$.

17. 解:原式$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\div\frac{x-3-1}{x-3}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-4)}$.

因为不等式 $2x-3<7$ 的解集为 $x<5$,

所以其正整数解为 1,2,3,4.

因为 x 不能取 3 和 4,

所以当 $x=1$ 时,原式$=\frac{1}{4}$(或当 $x=2$ 时,原式$=0$).

18. 解:(1)设乙队单独做需要 m 天才能完成任务.

由题意,得$\frac{30}{m}+\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{m}\right)\times 20=1$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $m=100$.

经检验,$m=100$ 是原方程的解,且符合题意.

答:乙队单独做需要 100 天才能完成任务.

(2)由题意,得$\frac{x}{40}+\frac{y}{100}=1$,$x<15$,$y<70$,且 x,y 都为正整数,则 $y=100-\frac{5}{2}x<70$,则 $x>12$.

所以 $x=13$ 或 14.

当 $x=13$ 时,$y=100-\frac{5}{2}x$ 不是整数,应舍去;

当 $x=14$ 时,$y=100-\frac{5}{2}x=65$,符合条件.

答:甲队实际做了 14 天,乙队实际做了 65 天.

19. **解:**(1)设 A 茶叶每盒进价为 x 元,则 B 茶叶每盒进价为 $1.4x$ 元.

依题意,得$\frac{8\,400}{1.4x}-\frac{4\,000}{x}=10$,解得 $x=200$.

经检验,$x=200$ 是原方程的解,且符合题意.

$1.4x=280$.

答:A 茶叶每盒进价为 200 元,B 茶叶每盒进价为 280 元.

(2)设第二次购进 A 茶叶 m 盒,则购进 B 茶叶 $(100-m)$ 盒.

依题意,得 $(300-200)\times\frac{m}{2}+(300\times0.7-200)\times\frac{m}{2}+(400-280)\times\frac{100-m}{2}+(400\times0.7-280)\times\frac{100-m}{2}=5\,800$,

解得 $m=40$,所以 $100-m=60$.

答:第二次购进 A 茶叶 40 盒,B 茶叶 60 盒.

第十三章 全等三角形

13.1 命题与证明

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B

3. 有两个锐角互余的三角形是直角三角形

4. **解:**已知:如图,在直线 a,b,c 中,$a\perp c$,$b\perp c$.

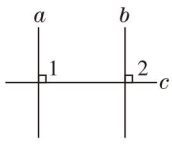
求证:$a\parallel b$.

证明:$\because a\perp c$(已知),

$\therefore\angle1=90°$(垂直的定义).

$\because b\perp c$(已知),

$\therefore\angle2=90°$(垂直的定义).



(第 4 题)

$\therefore\angle1=\angle2$(等量代换).

$\therefore a\parallel b$(同位角相等,两直线平行).

5. **解:**AD 平分 $\angle BAC$,理由如下.

$\because AD\perp BC$,$EG\perp BC$,$\therefore AD\parallel EG$.

$\therefore\angle2=\angle3$,$\angle1=\angle E$.

又$\because\angle E=\angle3$,$\therefore\angle1=\angle2$,

即 AD 平分 $\angle BAC$.

6. **解:**(1)平行. 理由如下.

$\because\angle1+\angle2=180°$,$\angle2+\angle CDB=180°$,

$\therefore\angle1=\angle CDB$.

$\therefore AE\parallel FC$(同位角相等,两直线平行).

(2)平行. 理由如下.

由(1)知 $AE\parallel CF$,

$\therefore\angle C=\angle CBE$(两直线平行,内错角相等).

又$\because\angle A=\angle C$,$\therefore\angle A=\angle CBE$.

$\therefore AD\parallel BC$(同位角相等,两直线平行).

(3)BC 平分 $\angle DBE$. 理由如下.

$\because DA$ 平分 $\angle BDF$,$\therefore\angle FDA=\angle ADB$.

$\because AE\parallel CF$,$AD\parallel BC$,

$\therefore\angle FDA=\angle A=\angle CBE$,$\angle ADB=\angle CBD$.

$\therefore\angle CBE=\angle CBD$.

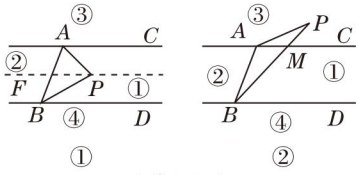
$\therefore BC$ 平分 $\angle DBE$.

7. (1)**证明:**如图①,过点 P 作 $FP\parallel AC$.

则 $\angle PAC=\angle APF$.

$\because AC\parallel BD$,$\therefore FP\parallel BD$. $\therefore\angle FPB=\angle PBD$.

$\therefore\angle APB=\angle APF+\angle FPB=\angle PAC+\angle PBD$.



(第 7 题)

(2)**解:**不成立.

(3)**解:**(a)当动点 P 在射线 BA 的右侧时,结论是 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

(b)当动点 P 在射线 BA 上时,结论是 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$ 或 $\angle PAC=\angle PBD+\angle APB$ 或 $\angle APB=0°$,$\angle PAC=\angle PBD$.(任写一个即可)

(c)当动点 P 在射线 BA 的左侧时,

结论是 $\angle PAC=\angle APB+\angle PBD$.

选择(a)证明:

如图②,设 PB 交 AC 于点 M.

$\because AC\parallel BD$,$\therefore\angle PMC=\angle PBD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle PMC=\angle PAM+\angle APM$,

∴ $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

13.2 全等图形

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** A

4. 70° **点拨:**先由全等三角形的性质求出$\angle DEF$和$\angle ACB$的度数,再根据三角形内角和定理求$\angle COE$的度数.

5. 100°;12 cm **6.** 6

7. **解:**(1) $\triangle ABC\cong\triangle DBE$. AC和DE,AB和DB,BC和BE是对应边;$\angle A$和$\angle D$,$\angle ACB$和$\angle E$,$\angle ABC$和$\angle DBE$是对应角.

(2)延长AC交DE于点F.

∵ $\angle ABC=90°$,∴ $\angle A+\angle ACB=180°-90°=90°$.

∵ $\triangle ABC\cong\triangle DBE$,∴ $\angle A=\angle D$.

又∵ $\angle ACB=\angle DCF$,∴ $\angle D+\angle DCF=90°$.

∴ $\angle AFD=90°$. ∴ $AC\perp DE$.

8. **证明:**∵ $\triangle PAB\cong\triangle AQC$,

∴ $\angle BAP=\angle CQA$.

∵ $CF\perp AB$,∴ $\angle AFQ=90°$.

∴ $\angle CQA+\angle QAF=180°-90°=90°$.

∴ $\angle BAP+\angle QAF=90°$,

即$\angle QAP=90°$. ∴ $AP\perp AQ$.

9. **解:**相等. 理由如下.

∵ $\triangle ADC\cong\triangle ECD$,∴ $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ECD}$.

∵ $AD/\!/BC$,∴ $\triangle ABD$与$\triangle ADC$同底等高.

∴ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$. ∴ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ECD}$.

∴ $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ECD}+S_{\triangle BCD}$,

即 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

13.3 全等三角形的判定

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** D

4. **证明:**∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle 1+\angle DAC=\angle 2+\angle DAC$,

即$\angle BAC=\angle DAE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中,$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADE$(ASA). ∴ $BC=DE$.

5. **证明:**∵ $FB=CE$,∴ $BC=EF$.

∵ $AB/\!/ED$,$AC/\!/FD$,

∴ $\angle B=\angle E$,$\angle ACB=\angle DFE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(ASA). ∴ $AB=DE$.

在$\triangle ABO$和$\triangle DEO$中,$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ \angle AOB=\angle DOE,\\ AB=DE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABO\cong\triangle DEO$(AAS).

∴ $AO=DO$,$BO=EO$,即AD与BE互相平分.

6. (1)**证明:**∵ AE和BD相交于点O,

∴ $\angle AOD=\angle BOE$.

在$\triangle AOD$和$\triangle BOE$中,$\angle A=\angle B$,

∴ $\angle 2=\angle BEO$.

又∵ $\angle 1=\angle 2$,∴ $\angle 1=\angle BEO$.

∴ $\angle AEC=\angle BED$.

在$\triangle AEC$和$\triangle BED$中,$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BED,\end{cases}$

∴ $\triangle AEC\cong\triangle BED$(ASA).

(2)**解:**∵ $\triangle AEC\cong\triangle BED$,

∴ $EC=ED$,$\angle C=\angle BDE$.

在$\triangle EDC$中,∵ $EC=ED$,$\angle 1=42°$,

∴ $\angle C=\angle EDC=69°$.

∴ $\angle BDE=69°$.

7. (1)**证明:**∵ $\angle BGE=\angle ADE$,$\angle BGE=\angle CGF$,

∴ $\angle ADE=\angle CGF$.

∵ $AC\perp BD$,$BF\perp CD$,

∴ $\angle ADE+\angle DAE=\angle CGF+\angle GCF=90°$,

$\angle AED=\angle CED=90°$.

∴ $\angle DAE=\angle GCF$.

又∵ $DE=DE$,∴ $\triangle ADE\cong\triangle CDE$(AAS).

∴ $AD=CD$.

(2)**解:**设$DE=a$,

则 $AE=2DE=2a$,$GE=DE=a$,

∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2$.

∵ BH是$\triangle ABE$的中线,

∴ $AH=HE=a$.

∵ $\triangle ADE\cong\triangle CDE$,

∴ $CE=AE=2a$,

则 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot(2a+2a)\cdot a=2a^2=2S_{\triangle ADE}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ADE和△BGE中，$\begin{cases}\angle AED=\angle BEG,\\ DE=GE,\\ \angle ADE=\angle BGE,\end{cases}$

∴ △ADE≌△BGE(ASA). ∴ $BE=AE=2a$.

∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}CE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BHG}=\frac{1}{2}HG\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot(a+a)\cdot 2a=2a^2$.

综上，面积等于△ADE面积的2倍的三角形有△ADC，△ABE，△BCE，△BHG.

8. (1)**证明：**如图①，连接AD.

∵ D为BC的中点，∴ $BD=CD$.

又∵ $AB=AC$，$AD=AD$，∴ △ABD≌△ACD(SSS).

∴ $\angle ADB=\angle ADC$，$\angle BAD=\angle CAD$.

又∵ $\angle ADB+\angle ADC=180°$，

∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$.

∵ $DE\perp DF$，∴ $\angle BDA=\angle EDF=90°$.

∴ $\angle BDE+\angle EDA=\angle EDA+\angle ADF$.

∴ $\angle BDE=\angle ADF$.

∵ $\angle BAC=90°$，∴ $\angle BAD=\angle CAD=45°$.

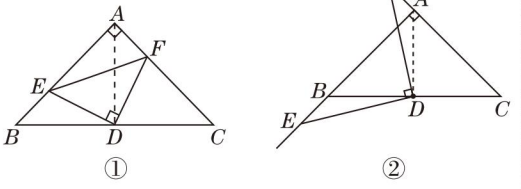
又∵ △ABC是等腰直角三角形，

∴ $\angle B=\angle BAD=\angle DAC=45°$.

∵ $\angle BDA=90°$，

∴ △ABD是等腰直角三角形，∴ $BD=AD$.

∴ △BDE≌△ADF(ASA). ∴ $BE=AF$.



(第8题)

(2)**解：**$BE=AF$. 如图②，连接AD.

由(1)知$\angle BDA=90°$.

∵ $DE\perp DF$，∴ $\angle EDF=\angle BDA=90°$.

∴ $\angle BDE+\angle BDF=\angle BDF+\angle ADF$.

∴ $\angle BDE=\angle ADF$.

∵ $\angle ABC=\angle DAC=45°$，

∴ $\angle EBD=\angle FAD=180°-45°=135°$.

又∵ $BD=AD$，∴ △BDE≌△ADF(ASA).

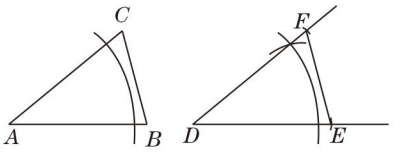
∴ $BE=AF$.

13.4 三角形的尺规作图

【两年模拟兵法】

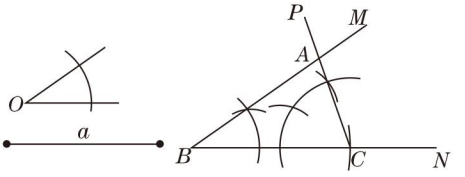
1. D **2.** D **3.** D

4. 解：如图，△DEF即为所求.



(第4题)

5. 解：如图，△ABC就是所求作的三角形.

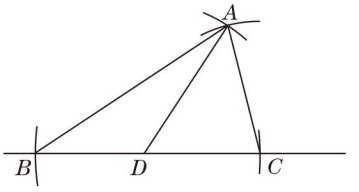


(第5题)

6. 解：(1)作△ADC，使$DC=a$，$AC=b$，$AD=m$；

(2)在射线DC的反向延长线上截取$BD=a$；

(3)连接AB. 则△ABC即为所求作的三角形，如图所示.



(第6题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 证明：∵ $OA=OB$，$OE=OF$，

∴ $OA-OE=OB-OF$，即$AE=BF$.

在△ACE和△BDF中，$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ \angle ACE=\angle BDF,\\ AE=BF,\end{cases}$

∴ △ACE≌△BDF(AAS).

2. 证明：∵ $FC/\!/AB$，∴ $\angle ADE=\angle CFE$.

在△ADE和△CFE中，$\begin{cases}\angle ADE=\angle CFE,\\ DE=FE,\\ \angle AED=\angle CEF,\end{cases}$

∴ △ADE≌△CFE(ASA). ∴ $AE=CE$.

3. 证明：延长AC，BE交于点F.

∵ $\angle ACB=90°$，$BE\perp AE$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle CAD+\angle CDA=90°$, $\angle EDB+\angle EBD=90°$.

$\because \angle CDA=\angle EDB$,

$\therefore \angle CAD=\angle EBD$,

即 $\angle CAD=\angle CBF$.

在$\triangle ADC$和$\triangle BFC$中,$\begin{cases}\angle CAD=\angle CBF,\\ AC=BC,\\ \angle ACD=\angle BCF=90°,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle BFC$(ASA).

$\therefore AD=BF$.

$\because AD$平分$\angle BAC$, $\therefore \angle FAE=\angle BAE$.

在$\triangle AEF$和$\triangle AEB$中,$\begin{cases}\angle FAE=\angle BAE,\\ AE=AE,\\ \angle AEF=\angle AEB=90°,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle AEB$(ASA).

$\therefore BE=EF$,即 $BE=\frac{1}{2}BF$. $\therefore BE=\frac{1}{2}AD$.

4. **解:** $BC=BE+CD$.

证明:在BC上取一点G,使$CG=CD$,连接OG.

$\because BD$,CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$,

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$, $\angle ACE=\angle BCE$.

$\because \angle A=60°$, $\therefore \angle ABC+\angle ACB=120°$.

$\therefore \angle OBC+\angle OCB=60°$.

$\therefore \angle BOE=\angle COD=\angle OBC+\angle OCB=60°$.

$\because CD=CG$, $\angle OCD=\angle OCG$, $OC=OC$,

$\therefore \triangle CDO\cong\triangle CGO$(SAS),

$\therefore \angle COD=\angle COG=60°$,

$\therefore \angle BOG=180°-\angle BOE-\angle COG=60°$.

$\therefore \angle EOB=\angle GOB$.

又$\because \angle EBO=\angle GBO$, $BO=BO$,

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle BOG$(ASA). $\therefore BE=BG$.

$\therefore BC=BG+CG=BE+CD$.

5. **解:** (1) $AE=DB$, $AE\perp DB$.

理由:由题意可知,$CA=CB$, $CE=CD$,

$\angle ACE=\angle BCD=90°$,

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD$(SAS).

$\therefore AE=DB$.

如图①,延长DB交AE于点M.

$\because \triangle ACE\cong\triangle BCD$,

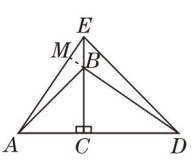
$\therefore \angle AEC=\angle BDC$.

又$\because \angle AEC+\angle EAC=90°$,

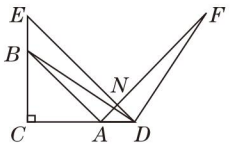
$\therefore \angle BDC+\angle EAC=90°$,

$\therefore$ 在$\triangle AMD$中, $\angle AMD=180°-90°=90°$,

$\therefore AE\perp DB$.



①



②

(第5题)

(2) $DE=AF$, $DE\perp AF$.

理由:如图②,设ED与AF相交于点N,由题意可知,$BE=AD$.

$\because \angle EBD=\angle C+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

$\angle ADF=\angle BDF+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

$\therefore \angle EBD=\angle ADF$.

又$\because DB=FD$. $\therefore \triangle EBD\cong\triangle ADF$(SAS).

$\therefore DE=AF$, $\angle E=\angle FAD$.

易知$\angle E=\angle EDC=45°$, $\therefore \angle FAD=45°$,

$\therefore \angle AND=90°$, $\therefore DE\perp AF$.

【第十三章测试卷】

一、1. B **2.** C **3.** A **4.** C **5.** A **6.** B **7.** B **8.** C

二、9. 70° **10.** 20°

11. $AC=BD$(答案不唯一) **12.** 55°

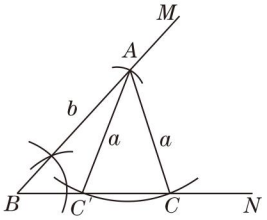
三、13. **证明:** 因为$AB\parallel CD$,所以$\angle B=\angle DCE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle ECD$中,$\begin{cases}AB=EC,\\ \angle B=\angle DCE,\\ BC=CD,\end{cases}$

所以$\triangle ABC\cong\triangle ECD$(SAS).

所以$AC=ED$.

14. **解:** 如图. (1)作$\angle MBN=\angle\alpha$; (2)在边BM上截取$BA=b$; (3)以点A为圆心,以a为半径画弧,交BN于点C和C'; (4)连接AC和AC'. 则$\triangle ABC$或$\triangle ABC'$就是所求作的三角形.



(第14题)

点拨: 注意本题中满足题意的三角形有两个.

15. **解:** $\because \triangle ABC\cong\triangle ADE$,

$\therefore \angle AED=\angle ACB=105°$, $AE=AC$.

$\therefore \angle AEC=\angle ACE=180°-\angle ACB=180°-$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$105°=75°$.

$\therefore \angle DEF=\angle AED-\angle AEC=105°-75°=30°$.

16. **解：**(1)点 D 在 $\angle A$ 的平分线上.

理由：连接 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\AD=AD,\\BD=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD(SSS)$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$,

$\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

(2)$\because$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=25°$.

$\because CE=AB, AB=AC, \therefore CE=AC$.

$\because CD$ 平分 $\angle ECA, \therefore \angle ECD=\angle ACD$.

在 $\triangle ECD$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\begin{cases}EC=AC,\\\angle ECD=\angle ACD,\\CD=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ECD\cong\triangle ACD(SAS), \therefore \angle E=\angle CAD=25°$.

17. (1)**解：**$\because AC=BC, \therefore \angle A=\angle B$.

又$\because AD=BE, AE=BF$,

$\therefore \triangle DAE\cong\triangle EBF(SAS), \therefore \angle ADE=\angle BEF$.

$\because \angle ADE+\angle AED+\angle A=180°, \angle BEF+\angle DEF+\angle AED=180°$,

$\therefore \angle A=\angle DEF=30°$,

$\therefore \angle A=\angle B=30°$,

$\therefore \angle ACB=180°-30°-30°=120°$.

(2)①**证明：**$\because AE=BF$，E 为 AB 的中点，

$\therefore AE=BE=BF$.

又$\because AD=BE, \therefore AD=BF$.

$\because AC=BC, \therefore CD=CF$,

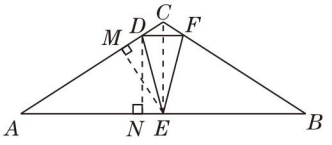
$\therefore \angle CDF=\angle CFD$.

$\because 2\angle CDF+\angle C=180°, 2\angle A+\angle C=180°$,

$\therefore \angle CDF=\angle A$,

$\therefore DF/\!/AB$.

②**解：**如图，连接 EC，作 $EM\perp AC$ 于点 M，$DN\perp AB$ 于点 N.



（第 17 题）

由(2)①知，$AD=AE$.

$\because \frac{1}{2}\cdot AD\cdot EM=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot DN$,

$\therefore EM=DN=8$.

$\because AE=BE$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ACE}=2\times\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EM=128$.

第十四章 实 数

14.1 平方根

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B **3.** B **4.** ±2 **5.** $\frac{49}{4}$ **6.** ±10

7. $\frac{\sqrt{10}}{99}$

8. **解：**(1)因为$\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，$\left(\pm\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

所以$\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 的平方根是 $\pm\frac{1}{3}$，

即 $\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\frac{1}{3}$.

(2)因为 $0^2=0$，所以 0 的平方根是 0.

(3)因为 $-2<0$，所以 -2 没有平方根.

9. **解：**(1)因为 $9x^2-64=0$，

所以 $x^2=\frac{64}{9}$.

所以 $x=\pm\sqrt{\frac{64}{9}}=\pm\frac{8}{3}$.

(2)因为 $4(2x-1)^2=36$，

所以 $(2x-1)^2=9$.

所以 $2x-1=\pm3$.

所以 $x=2$ 或 $x=-1$.

(3)因为 $(x+1)^2-81=0$，

所以 $(x+1)^2=81$.

所以 $x+1=\pm9$，

所以 $x=8$ 或 $x=-10$.

(4)因为 $4(2x+3)^2=(-3)^2$，

所以 $(2x+3)^2=\frac{9}{4}$.

所以 $2x+3=\pm\frac{3}{2}$.

所以 $x=-\frac{3}{4}$ 或 $x=-\frac{9}{4}$.

10. **解：**依题意，得 $2a-1=9$ 且 $3a+b-1=16$，

所以 $a=5, b=2$. 所以 $a+2b=5+4=9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第十二章 分式和分式方程

12.1 分 式

练习(教材第3页)

1. 解:(1)欲使分式$\frac{1}{x-1}$有意义,则必有$x-1\neq0$,

所以$x\neq1$. 所以当$x\neq1$时,分式$\frac{1}{x-1}$有意义.

(2)欲使分式$\frac{2x-3}{2x+3}$有意义,则必有$2x+3\neq0$,

所以$x\neq-\frac{3}{2}$.

所以当$x\neq-\frac{3}{2}$时,分式$\frac{2x-3}{2x+3}$有意义.

2. 解:(1)正确. 因为$\frac{1}{x}$是$\frac{2}{2x}$的分子、分母同时除以2得到的,所以$\frac{1}{x}=\frac{2}{2x}$.

(2)不正确. 因为分子、分母乘了不相等的数,所以$\frac{5}{a}\neq\frac{5\times5}{a\cdot a}$.

(3)正确. 因为$\frac{4}{6a}$是$\frac{2}{3a}$的分子、分母同时乘2得到的,所以$\frac{4}{6a}=\frac{2}{3a}$.

(4)正确. 因为$\frac{xy}{x^2}$是$\frac{y}{x}$的分子、分母同时乘x得到的,所以$\frac{xy}{x^2}=\frac{y}{x}$.

习题(教材第4页)

1. 解:当$v=20$ m/s,$d=10$米/辆时,$\frac{v}{d}=\frac{20}{10}=2$(辆/秒).

2. 解:要使分式$\frac{x}{x+1}$有意义,则必有$x+1\neq0$,所以$x\neq-1$. 所以当$x\neq-1$时,分式$\frac{x}{x+1}$有意义. 要使分式$\frac{x}{x+1}$的值为0,则必有$\begin{cases}x=0,\\x+1\neq0,\end{cases}$所以当$x=0$时,分式$\frac{x}{x+1}$的值为0.

3. 解:(1)是分子、分母同时乘x^2得到的.

(2)是分子、分母同时除以x得到的.

(3)是分子、分母同时乘5得到的.

(4)是分子、分母同时除以$x-2$得到的.

4. 解:$\frac{2x}{x^3}$和$\frac{4}{2x^2}$. (答案不唯一)

练习(教材第6页)

1. 解:(1)正确.

(2)不正确. 改正:$\frac{a^2}{2a}=\frac{a\cdot a}{2\cdot a}=\frac{a}{2}$.

(3)不正确. 改正:$\frac{mn}{mn^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$.

(4)正确.

2. 解:(1)$\frac{6ab^2}{8b^3}=\frac{3a\cdot2b^2}{4b\cdot2b^2}=\frac{3a}{4b}$.

(2)$\frac{x^2-2xy}{x^2-4xy+4y^2}=\frac{x(x-2y)}{(x-2y)^2}=\frac{x}{x-2y}$.

(3)$\frac{a^2+2a+1}{a^2+a}=\frac{(a+1)^2}{a(a+1)}=\frac{a+1}{a}$.

习题(教材第6页)

1. 解:(1)原式$=\frac{5mx\cdot m}{5mx\cdot2x}=\frac{m}{2x}$.

(2)原式$=\frac{a\cdot(-2)}{a(3+a)}=-\frac{2}{3+a}$.

(3)原式$=\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=x-3$.

(4)原式$=\frac{ab(1+b)}{(1+b)(1-b)}=\frac{ab}{1-b}$.

(5)原式$=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$.

(6)原式$=\frac{a(a^2-4b^2)}{-a(a^2+4ab+4b^2)}=-\frac{(a+2b)(a-2b)}{(a+2b)^2}=-\frac{a-2b}{a+2b}$.

2. 解:$\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x}{x+y}$,

当$x=2$,$y=3$时,原式$=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$.

3. 解:因为$\left(\frac{1}{2}\times3a\cdot2b\right):\left(\frac{1}{2}\times4a\cdot3b\right)=(3ab):(6ab)=\frac{3ab}{6ab}=\frac{1}{2}=1:2$,

所以小三角形与大三角形的面积比为1:2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.2 分式的乘除

练习(教材第8页)

1. 解:(1)$\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^2}{x}=\frac{x^3\cdot y^2}{y^3\cdot x}=\frac{x^2}{y}$.

(2)$\frac{2a^2}{3b^2}\cdot\frac{9b^2}{a^3}=\frac{2a^2}{a^3}\cdot\frac{9b^2}{3b^2}=\frac{6}{a}$.

2. 解:(1)$\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)\cdot 2a^2b^2}{(a-b)(a+b)\cdot ab}=\frac{2ab}{a+b}$.

(2)$\frac{a+1}{a^2-9}\cdot\frac{a-3}{a+1}=\frac{(a+1)(a-3)}{(a+1)(a-3)(a+3)}=\frac{1}{a+3}$.

习题(教材第8页)

A组

1. 解:(1)$\frac{a}{bc}\cdot\frac{c^2}{a^2}=\frac{c}{ab}$.

(2)$\frac{3y}{4x}\cdot\frac{20x}{9y^2}=\frac{60xy}{36xy^2}=\frac{5}{3y}$.

(3)$8a^2b^2\cdot\frac{a}{12b^2}=\frac{8a^2b^2\cdot a}{12b^2}=\frac{2}{3}a^3$.

(4)$(xy-x^2)\cdot\frac{xy}{x-y}=\frac{(xy-x^2)\cdot xy}{x-y}=\frac{xy\cdot x(y-x)}{-(y-x)}=-x^2y$.

2. 解:(1)原式$=\frac{(x+y)^2\cdot y}{xy(x+y)(x+y)}=\frac{1}{x}$.

(2)原式$=\frac{(x+y)(x-y)\cdot x^2}{x\cdot(x+y)^2}=\frac{x(x-y)}{x+y}=\frac{x^2-xy}{x+y}$.

(3)原式$=\frac{(x-2y)(x+2y)}{(x+2y)^2\cdot x(x-2y)}=\frac{1}{x(x+2y)}=\frac{1}{x^2+2xy}$.

(4)原式$=\frac{(a+b)(a-b)\cdot(2a-b)}{(2a-b)^2\cdot a(a+b)}=\frac{a-b}{a(2a-b)}=\frac{a-b}{2a^2-ab}$.

B组

1. 解:(1)$\frac{12bc}{a^2}\cdot\frac{5ac}{2b^2}\cdot\frac{7ab}{15c^2}=\frac{420a^2b^2c^2}{30a^2b^2c^2}=14$.

(2)$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+6xy+9y^2}\cdot\frac{x^2-9y^2}{3x^2y}\cdot\frac{2x(x+3y)}{x-y}$

$=\frac{(x-y)^2}{(x+3y)^2}\cdot\frac{(x+3y)(x-3y)}{3x^2y}\cdot\frac{2x(x+3y)}{x-y}$

$=\frac{2x(x-y)^2(x+3y)^2(x-3y)}{3x^2y(x-y)(x+3y)^2}$

$=\frac{2(x-y)(x-3y)}{3xy}$.

2. 解:(1)$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2}$.

(2)$\left(\frac{b}{a}\right)^4=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^4}{a^4}$.

(3)$\left(\frac{b}{a}\right)^n=\underbrace{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\cdots\cdot\frac{b}{a}}_{n\text{个}\frac{b}{a}}=\frac{b^n}{a^n}$($n$为正整数).

练习(教材第10页)

解:(1)$\frac{2a}{3m^2n}\div\frac{a}{6m}=\frac{2a}{3m^2n}\cdot\frac{6m}{a}=\frac{4}{mn}$.

(2)$\frac{2-x}{x+1}\div(2x-x^2)=\frac{2-x}{x+1}\cdot\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2-x}{x+1}\cdot\frac{1}{x(2-x)}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x^2+x}$.

(3)$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab}\div\frac{(a+b)^2}{a+2b}=\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab}\cdot\frac{a+2b}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)(a-b)(a+2b)}{a(a+2b)(a+b)^2}=\frac{a-b}{a(a+b)}=\frac{a-b}{a^2+ab}$.

习题(教材第11页)

A组

1. 解:(1)原式$=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2b}{a^2}=\frac{2}{b}$.

(2)原式$=\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{1}{x-y}=\frac{1}{xy}$.

(3)原式$=(x-2)\cdot\frac{x+2}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}$.

(4)原式$=\frac{a-2}{a^2+8a+16}\cdot\frac{a+4}{a^2-4}=\frac{(a-2)(a+4)}{(a+4)^2(a+2)(a-2)}=\frac{1}{(a+4)(a+2)}$.

2. 解:(1)设高扩大后的圆锥的体积为V_1,则$V_1=\frac{1}{3}Sah$,$\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}Sah}{\frac{1}{3}Sh}=a$. 所以当圆锥的高扩大为原来的$a$倍而底面积不变时,变化后的圆锥的体积是原来的$a$倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设底面积扩大后的圆锥的高是 h_1,由 $V=\frac{1}{3}Sh$ 得 $h=\frac{3V}{S}$,所以 $\frac{h_1}{h}=\frac{\frac{3V}{aS}}{\frac{3V}{S}}=\frac{3V}{aS}\cdot\frac{S}{3V}=\frac{1}{a}$.

所以当圆锥的底面积扩大为原来的 a 倍而体积不变时,变化后的圆锥的高是原来的 $\frac{1}{a}$.

B 组

1. 解:(1)原式 $=\frac{(a+1)(a-1)}{(a+2)^2}\cdot\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)(a+2)}{a-1}=\frac{(a+1)^2(a-1)(a+2)}{(a+1)(a-1)(a+2)^2}=\frac{a+1}{a+2}$.

(2)原式 $=-x(x-y)\cdot\frac{xy}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{x^2}=-\frac{x^2y(x-y)^2}{x^2(x-y)^2}=-y$.

2. 解:原式 $=\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)^2}\cdot(a+1)(a-1)=\frac{(a+2)(a-1)^2(a+1)(a-2)}{(a+2)(a-1)^2}=(a+1)(a-2)=a^2-a-2$.

因为 $a^2-a=0$,

所以 $a^2-a-2=0-2=-2$,

即当 $a^2-a=0$ 时,$\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\frac{1}{a^2-1}$ 的值为 -2.

12.3 分式的加减

练习(教材第 14 页)

1. 解:(1)$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$.

(2)$\frac{2}{1-a}-\frac{1}{a-1}=\frac{2}{1-a}-\frac{1}{-(1-a)}=\frac{2}{1-a}+\frac{1}{1-a}=\frac{2+1}{1-a}=\frac{3}{1-a}$.

2. 解:(1)不正确. 改正:$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$.

(2)不正确. 改正:$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$.

3. 解:(1)$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{xb}{ab}-\frac{ay}{ab}=\frac{xb-ay}{ab}$.

(2)$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}=\frac{a+c}{abc}$.

习题(教材第 14 页)

1. 解:(1)$\frac{x}{x-y}-\frac{2y}{x-y}=\frac{x-2y}{x-y}$.

(2)$\frac{a+1}{a-b}-\frac{b+1}{a-b}=\frac{a+1-(b+1)}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$.

(3)$\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+(x-1)}{x+1}=\frac{2x-1}{x+1}$.

(4)$\frac{9}{2x-3}-\frac{3-4x}{3-2x}=\frac{9}{2x-3}+\frac{3-4x}{2x-3}=\frac{9+3-4x}{2x-3}=\frac{12-4x}{2x-3}$.

2. 解:(1)原式 $=\frac{y}{xy}-\frac{x}{xy}=\frac{y-x}{xy}$.

(2)原式 $=\frac{2(a+1)}{(a-1)(a+1)}-\frac{a-1}{(a-1)(a+1)}=\frac{2(a+1)-(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a+3}{(a-1)(a+1)}=\frac{a+3}{a^2-1}$.

(3)原式 $=\frac{2(x-y)}{(x-y)^2}-\frac{x+y}{(x-y)^2}=\frac{2(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x-3y}{(x-y)^2}$.

(4)原式 $=\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x^2-1}$.

(5)原式 $=\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}-\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2-(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

(6)原式 $=\frac{2a^2}{a-2b}-\frac{4a^2b}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{2a^2(a+2b)}{(a+2b)(a-2b)}-\frac{4a^2b}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{2a^3+4a^2b-4a^2b}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{2a^3}{a^2-4b^2}$.

3. 解:$\frac{500}{p-2}-\frac{500}{p}=\frac{500p}{p(p-2)}-\frac{500(p-2)}{p(p-2)}=\frac{500p-500p+1\,000}{p(p-2)}=\frac{1\,000}{p^2-2p}$(盒).

答:现在比原来可多买 $\frac{1\,000}{p^2-2p}$ 盒.

4. 解:(1)小明在计算机上平均每小时打 $\frac{m}{a}$ 千字,小华在计算机上平均每小时打 $\frac{n}{b}$ 千字.

(2)$\frac{m}{a}\cdot2+\frac{n}{b}\cdot3=\frac{2m}{a}+\frac{3n}{b}=\frac{2mb+3na}{ab}$(千字),所以他们共打文稿 $\frac{2mb+3na}{ab}$ 千字.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$\frac{m}{a}-\frac{n}{b}=\frac{mb-na}{ab}$(千字),所以小明比小华平均每小时多打$\frac{mb-na}{ab}$千字.

练习(教材第16页)

1. 解:(1)原式$=\frac{c}{abc}+\frac{2b}{abc}+\frac{3}{abc}=\frac{c+2b+3}{abc}$.

(2)原式$=\frac{1}{a-b}-\frac{a+b}{(a-b)^2}=\frac{a-b}{(a-b)^2}-\frac{a+b}{(a-b)^2}=\frac{a-b-(a+b)}{(a-b)^2}=-\frac{2b}{(a-b)^2}$.

(3)原式$=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}$.

(4)原式$=\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+1)}=x-1$.

2. 解:$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x}{2x^2-2}=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{2(x+1)(x-1)}{x}=\frac{4(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{4}{x}$.

当$x=\frac{1}{2}$时,原式$=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$.

习题(教材第17页)

A组

1. 解:(1)原式$=\left(\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x-y}\right)\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{xy}{x-y}$.

(2)原式$=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$.

(3)原式$=\left(1-\frac{1}{x}\right)\div\frac{(x-1)^2}{x}=\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}$.

(4)原式$=\left[\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}\right]\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{xy}$

$=\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{xy}$

$=\frac{2y}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{xy}$

$=\frac{2}{x}$.

(5)原式$=\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a+1}{a+1}\right)\div\left(1+\frac{3a^2}{a^2-1}\right)$

$=\frac{2a+1}{a+1}\div\frac{a^2-1+3a^2}{a^2-1}$

$=\frac{2a+1}{a+1}\div\frac{4a^2-1}{a^2-1}$

$=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{(2a+1)(2a-1)}$

$=\frac{a-1}{2a-1}$.

(6)原式$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\left[\frac{x+y}{2x}-(x+y)\right]$

$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x+y-2x(x+y)}{2x}$

$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\frac{(x+y)(1-2x)}{2x}$

$=\frac{1}{2x}-\frac{1-2x}{2x}$

$=1$.

2. 解:(1)原式$=1+\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}\cdot a=1+a+b$.

当$a=-3,b=-5$时,原式$=1+(-3)+(-5)=-7$.

(2)原式$=\left(\frac{x^2-xy}{x-y}+\frac{xy}{x-y}\right)\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{x^3}-\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x-y}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{x^3}-\frac{1}{x}=\frac{x+y}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x+y-1}{x}$.

当$x=-3,y=2$时,原式$=\frac{-3+2-1}{-3}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$.

B组

1. 解:(1)原式$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}-\frac{b}{(a-b)(b-c)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$

$=\frac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{b(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}+\frac{c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$=\frac{(ab-ac)-(ab-bc)+(ac-bc)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$=0$.

(2)原式$=\frac{(b+c)(a^2-bc)}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{(a+c)(b^2-ac)}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{(a+b)(c^2-ab)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$=\frac{a^2b-b^2c+a^2c-bc^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{ab^2-a^2c+b^2c-ac^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{ac^2-a^2b+bc^2-ab^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{a^2b-b^2c+a^2c-bc^2+ab^2-a^2c}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{b^2c-ac^2+ac^2-a^2b+bc^2-ab^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$=0$.

2. 解: (1)原式 $=\frac{xy^2}{(x+y)(x-y)}-\frac{x^4y}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2}$

$$=\frac{xy^2}{(x+y)(x-y)}-\frac{x^2y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{xy^2-x^2y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{xy(y-x)}{(x+y)(x-y)}$$

$$=-\frac{xy}{x+y}.$$

(2)原式 $=\left[\left(1-\frac{1}{a-b}\right)+\left(1+\frac{1}{a-b}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\frac{1}{a-b}\right)-\left(1+\frac{1}{a-b}\right)\right]=\left(1-\frac{1}{a-b}+1+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a-b}-1-\frac{1}{a-b}\right)=2\cdot\left(-\frac{2}{a-b}\right)=-\frac{4}{a-b}$.

12.4 分式方程

练习(教材第 20 页)

1. 解: (1)方程两边同乘 $x(x-3)$,得 $x-3=4x$. 解这个方程,得 $x=-1$. 经检验,$x=-1$是原分式方程的解.

(2)方程两边同乘 $x-3$,得 $x=2(x-3)+3$,解这个方程,得 $x=3$. 经检验,$x=3$ 是增根,原方程无解.

2. 解: 设 BC 的长为 x cm,则 EF 的长为 $(x+3)$ cm. 因为 $l_1 // l_2$,所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 等高,所以 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}=BC:EF=1:2$.

所以 $\frac{x}{x+3}=\frac{1}{2}$,原分式方程可化为 $2x=x+3$,解这个整式方程,得 $x=3$. 经检验,$x=3$ 是原分式方程的根.

所以 $BC=3$ cm,$EF=3+3=6$(cm),即 BC 的长为 3 cm,EF 的长为 6 cm.

习题(教材第 20 页)

A 组

1. 解: (1)方程两边同乘 $(x+1)(x+2)$,得 $x+2=2(x+1)$,解这个方程,得 $x=0$. 检验:当 $x=0$ 时,$(x+1)(x+2)\neq 0$. 所以 $x=0$ 是原方程的根.

(2)方程两边同乘 $2x$,得 $15\times 2-25=x$,解得 $x=5$. 检验:当 $x=5$ 时,$2x\neq 0$. 所以 $x=5$ 是原方程的根.

(3)方程两边同乘 $x-7$,得 $x-8+1=8(x-7)$,解这个方程,得 $x=7$. 检验:当 $x=7$ 时,$x-7=0$. 所以 $x=7$ 是增根,原方程无解.

(4)方程两边同乘 $(x+1)(x-4)$,得 $x-4-2(x+1)=0$,解这个方程,得 $x=-6$. 检验:当 $x=-6$ 时,$(x+1)(x-4)\neq 0$,所以 $x=-6$ 是原方程的根.

2. 解: 设一车间平均每天生产 x 件,则二车间平均每天生产$(550-x)$件. 根据题意,得 $\frac{2\,400}{x}\cdot(550-x)+400=2\,400$,$\frac{2\,400}{x}\cdot(550-x)=2\,000$,$2\,400(550-x)=2\,000x$.

解这个整式方程,得 $x=300$.

经检验,$x=300$ 是原分式方程的根.

则 $550-x=550-300=250$.

答:一车间平均每天生产 300 件,二车间平均每天生产 250 件.

B 组

解: (1)方程两边同乘 $x(x-1)(x-2)$,得

$x(x-2)+x(x-1)=2(x-1)(x-2)$,

$x^2-2x+x^2-x=2x^2-6x+4$,$-3x=-6x+4$,

解这个整式方程,得 $x=\frac{4}{3}$.

经检验,$x=\frac{4}{3}$是原分式方程的解.

(2)原分式方程可变形为 $\frac{5}{x(x+1)}-\frac{1}{x(x-1)}=0$.

方程两边同乘 $x(x+1)(x-1)$,得 $5(x-1)-(x+1)=0$. 解这个整式方程,得 $x=\frac{3}{2}$.

经检验,$x=\frac{3}{2}$是原分式方程的解.

12.5 分式方程的应用

练习(教材第 23 页)

解: 设小明每分钟跳 x 下,则小亮每分钟跳$(x+20)$下. 根据题意,得 $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+20}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解这个方程，得 $x=120$. 经检验，$x=120$ 是原分式方程的根. 则 $x+20=120+20=140$.

答：小明每分钟跳 120 下，小亮每分钟跳 140 下.

习题（教材第 23 页）

A 组

1. 解：设甲单独完成这项工作需 x 天，则乙单独完成这项工作需 $2x$ 天. 根据题意，得 $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\right)+\frac{1}{2x}=1$，解得 $x=5$. 经检验，$x=5$ 是原方程的根.

则 $2x=10$.

答：甲单独完成这项工作需 5 天，乙单独完成这项工作需 10 天.

2. 解：设（一）班的同学每小时修整 x 盆花，则（二）班的同学每小时修整 $(x-2)$ 盆花.

根据题意，得 $\frac{66}{x}=\frac{60}{x-2}$，解得 $x=22$.

经检验，$x=22$ 是原方程的根. 则 $x-2=20$.

答：（一）班的同学每小时修整 22 盆花，（二）班的同学每小时修整 20 盆花.

B 组

1. 解：设水流的速度为 x km/h，则顺水航行的速度为 $(x+21)$ km/h，逆水航行的速度为 $(21-x)$ km/h.

根据题意，得 $\frac{80}{21+x}\cdot(21-x)=60$. 解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的根.

答：水流的速度是 3 km/h.

2. 解：设采用新技术完成这项工程用了 x 天.

根据题意，得 $\frac{1}{40x}=\frac{1}{52(x+6)}\times(1+50\%)$，

解得 $x=39$.

经检验，$x=39$ 是原方程的根.

答：采用新技术完成这项工程用了 39 天.

练习（教材第 24 页）

1. 解：设较小的那个偶数是 x，则另一个偶数是 $x+2$，根据题意，得 $\frac{x}{x+2}=\frac{24}{25}$，解得 $x=48$. 经检验，$x=48$ 是原方程的根. 则 $x+2=50$. 所以相邻的两个偶数为 48，50，在这两个偶数之间的奇数是 49.

答：这两个偶数之间的奇数是 49.

2. 解：设自行车的速度是 x km/h，则汽车的速度是 $3x$ km/h.

根据题意，得 $\frac{15}{x}-\frac{2}{3}=\frac{15}{3x}$，解得 $x=15$.

经检验，$x=15$ 是原方程的根.

则 $3x=45$.

答：自行车的速度是 15 km/h，汽车的速度是 45 km/h.

习题（教材第 24 页）

A 组

1. 解：设这家超市销售这种饮料的原价是每瓶 x 元. 根据题意，得 $\frac{36}{x}+2=\frac{36}{0.9x}$，

解得 $x=2$.

经检验，$x=2$ 是原分式方程的根.

答：这家超市销售这种饮料的原价是每瓶 2 元.

2. 解：设这所希望学校有 x 个教学班.

根据题意，得 $\frac{65+3}{x}=\frac{65-14}{x}+1$，解得 $x=17$.

经检验，$x=17$ 是原方程的根.

答：这所希望学校有 17 个教学班.

B 组

1. 解：设乙船的速度是 x km/h，则甲船的速度为 $\frac{6}{5}x$ km/h.

根据题意，得 $\frac{540}{x}=3\times2+\frac{540}{\frac{6}{5}x}$. 解得 $x=15$.

经检验，$x=15$ 是原分式方程的根，

则 $\frac{6}{5}x=\frac{6}{5}\times15=18$.

答：甲船的速度为 18 km/h，乙船的速度为 15 km/h.

2. 解：设杂拌糖的单价是 x 元/千克，则奶糖的单价是 $(x+4)$ 元/千克，水果糖的单价是 $(x-6)$ 元/千克.

根据题意，得 $\frac{1\,800+900}{x}=\frac{1\,800}{x+4}+\frac{900}{x-6}$，

解得 $x=36$.

经检验，$x=36$ 是原方程的根.

答：杂拌糖的单价是 36 元/千克.

复习题（教材第 28 页）

A 组

1. 解：（1）要使分式 $\frac{1}{2x+5}$ 有意义，则必有 $2x+5\neq0$，所以 $x\neq-\frac{5}{2}$. 所以当 $x\neq-\frac{5}{2}$ 时，分式 $\frac{1}{2x+5}$ 有意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)要使分式$\frac{2x+1}{x-1}$有意义,则必有$x-1\neq0$,

所以$x\neq1$. 所以当$x\neq1$时,分式$\frac{2x+1}{x-1}$有意义.

(3)要使分式$\frac{3-2x}{(x-2)^2}$有意义,则必有$(x-2)^2\neq0$,所以$x\neq2$. 所以当$x\neq2$时,分式$\frac{3-2x}{(x-2)^2}$有意义.

2. 解:(1)原式$=\frac{a^2c^2}{acb^2}=\frac{ac}{b^2}$.

(2)原式$=\frac{30a^2b^2c^2}{2a^3b^3c}=\frac{15c}{ab}$.

(3)原式$=\frac{1}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{(x-1)^2}$.

(4)原式$=\frac{xy-y^2}{x}\cdot\frac{1}{x-y}=\frac{y(x-y)}{x(x-y)}=\frac{y}{x}$.

(5)原式$=\frac{(a+1)^2\cdot a(a+3)}{(a+3)(a-3)(a+1)}=\frac{a(a+1)}{a-3}=\frac{a^2+a}{a-3}$.

(6)原式$=\frac{a^2-8a+16}{a^2+4a+4}\cdot\frac{a+2}{a^2-4a}=\frac{(a-4)^2\cdot(a+2)}{(a+2)^2\cdot a(a-4)}=\frac{a-4}{a(a+2)}=\frac{a-4}{a^2+2a}$.

3. 解:(1)原式$=\frac{3x+4x-(x+2)}{2a}=\frac{7x-x-2}{2a}=\frac{6x-2}{2a}=\frac{3x-1}{a}$.

(2)原式$=\frac{x^2+y^2-2xy}{x-y}=\frac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$.

(3)原式$=\frac{x+y-(x+z)}{(x-y)(y-z)}=\frac{y-z}{(x-y)(y-z)}=\frac{1}{x-y}$.

(4)原式$=\frac{c(a-b)}{abc}+\frac{a(b-c)}{abc}+\frac{b(c-a)}{abc}$

$=\frac{c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)}{abc}$

$=\frac{ac-bc+ab-ac+bc-ab}{abc}$

$=0$.

(5)原式$=\frac{a(2-a)}{2-a}-\frac{4}{2-a}+\frac{2(2-a)}{2-a}=\frac{a(2-a)-4+2(2-a)}{2-a}=\frac{-a^2}{2-a}=\frac{a^2}{a-2}$.

(6)原式$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\left[\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}-\frac{x(x-1)}{x(x-2)^2}\right]\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{x^2-4-x^2+x}{(x-2)^2(x-4)}$

$=\frac{x-4}{(x-2)^2(x-4)}$

$=\frac{1}{(x-2)^2}$.

4. 解:(1)$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}$.

当$x=5,y=-10$时,原式$=\frac{5-10}{5+10}=\frac{-5}{15}=-\frac{1}{3}$.

(2)$\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1+x}=\frac{x(1+x)}{(1-x)(1+x)}+\frac{x(1-x)}{(1+x)(1-x)}=\frac{x(1+x)+x(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{x+x^2+x-x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{2x}{(1-x)(1+x)}=\frac{2x}{1-x^2}$.

当$x=-3$时,

原式$=\frac{2\times(-3)}{1-(-3)^2}=\frac{-6}{1-9}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$.

5. 解:(1)方程两边同乘$(x+3)(x-1)$,得$2(x-1)=x+3$,解这个方程,得$x=5$.

经检验,$x=5$是原方程的根.

(2)方程两边同乘$(x+1)(2-x)$,得$2-x+3(x+1)=0$,解这个方程,得$x=-\frac{5}{2}$.

经检验,$x=-\frac{5}{2}$是原方程的根.

(3)方程两边同乘$2(x+3)$,得$2\times2+3(x+3)=7$,解这个方程,得$x=-2$.

经检验,$x=-2$是原方程的根.

(4)方程两边同乘$(2x-1)(x-2)$,得$2x(x-2)+x(2x-1)=2(2x-1)(x-2)$,解这个方程,得$x=\frac{4}{5}$. 经检验,$x=\frac{4}{5}$是原方程的根.

6. 解:$\frac{30}{a}-\frac{30}{a+2}=\frac{30(a+2)-30a}{a(a+2)}=\frac{60}{a^2+2a}$(年).

答:杏花村实际可比原计划提前$\frac{60}{a^2+2a}$年使全部沙漠得到治理.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解: $\frac{50}{a-8}-\frac{50}{a+8}=\frac{50(a+8)-50(a-8)}{(a-8)(a+8)}=\frac{800}{a^2-64}$(h).

答:顺流航行比逆流航行少用$\frac{800}{a^2-64}$ h.

8. 解: 设这个分数的分子是 x,则分母是 $4x-1$.

根据题意,得$\frac{x+1}{4x-1}=\frac{2}{3}$,解得 $x=1$.

经检验,$x=1$ 是原方程的根. 所以 $4x-1=3$.

答:这个分数是$\frac{1}{3}$.

9. 解: 设甲的速度是 x km/h,则乙的速度是 $2.5x$ km/h. 根据题意,得$\frac{25}{x}=\frac{25}{2.5x}+1$,解得$x=15$. 经检验,$x=15$ 是原方程的根.

则$2.5x=37.5$.

答:甲的速度为 15 km/h,乙的速度为 37.5 km/h.

10. 解: 设乙组每小时加工 x 个零件,则甲组每小时加工$(1+20\%)x=1.2x$(个)零件. 根据题意,得$\frac{210}{1.2x}=\frac{200}{x}-\frac{1}{2}$,解得 $x=50$. 经检验,$x=50$ 是原方程的根. 所以 $1.2x=60$.

答:甲组每小时加工 60 个零件,乙组每小时加工 50 个零件.

B 组

1. 解: $\frac{ab+a}{b^2-1}=\frac{a(b+1)}{(b+1)(b-1)}=\frac{a}{b-1}$.

因为$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqslant 0$,

并且已知 $a^2-2ab+b^2+|a-2b+3|=0$,

所以$\begin{cases}a^2-2ab+b^2=0,\\ a-2b+3=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}a-b=0,\\ a-2b+3=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=3,\\ b=3.\end{cases}$

所以原式$=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$.

2. 解: (1)$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{a+1}{a(a+1)}-\frac{a}{a(a+1)}=\frac{a+1-a}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a^2+a}$.

(2)由$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}$,得$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$,

所以原式$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+10}=\frac{10}{a^2+10a}$.

3. 解: 设这个哨卡共有 x 名战士.

根据题意,得$\frac{60-5}{x}=\frac{60+6}{x}-1$,解得 $x=11$.

经检验,$x=11$ 是原方程的根.

答:这个哨卡共有 11 名战士.

4. 解: 设这艘轮船在本航线上的常规速度是 x 海里/时. 根据题意,得$\frac{3}{5x}=\frac{2}{5(x-10)}$,解得 $x=30$.

经检验,$x=30$ 是原方程的根.

答:这艘轮船在本航线上的常规速度是 30 海里/时.

5. 解: 设第一批衬衫的进价是每件 x 元. 根据题意,得$\frac{80\,000}{x}\cdot 2(x+4)=176\,000$,解得 $x=40$. 经检验,$x=40$ 是原方程的根. 则售完第一批衬衫后,商场可盈利$\frac{80\,000}{40}\times(58-40)=36\,000$(元).

售完第二批衬衫后,商场可盈利$\left(\frac{80\,000}{40}\times 2-150\right)\times(58-44)+150\times(58\times 0.8-44)=54\,260$(元),所以售完这两批衬衫,商场共盈利$36\,000+54\,260=90\,260$(元).

答:售完这两批衬衫,商场共盈利90 260 元.

C 组

1. 解: 因为$\frac{x}{y}=2$,所以 $x=2y$.

$\frac{2x(x+y)-y(x+y)}{4x^2-4xy+y^2}=\frac{(x+y)(2x-y)}{(2x-y)^2}=\frac{x+y}{2x-y}$,

当 $x=2y$ 时,原式$=\frac{2y+y}{2\times 2y-y}=\frac{3y}{3y}=1$.

2. 解: 因为$\frac{m+a}{n+a}-\frac{m}{n}=\frac{n(m+a)}{n(n+a)}-\frac{m(n+a)}{n(n+a)}=\frac{na-ma}{n(n+a)}=\frac{a(n-m)}{n(n+a)}>0$,所以面积增加后,窗户的面积与地面面积的比值增大了,所以能达到目的.

3. 解: (1)设该船按水流速度由 A 港漂流到 B 港需要 x h,由题意,得$\frac{1}{6}-\frac{1}{x}=\frac{1}{8}+\frac{1}{x}$,解得$x=48$. 经检验,$x=48$ 是原方程的根.

答:该船按水流速度由 A 港漂流到 B 港需要 48 h.

(2)设救生圈掉入水中 t h 后该船到达 B 港并发

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

现掉落,由题意,得$\frac{1}{6}\cdot t=\frac{1}{48}\cdot(t+1)+\frac{1}{8}\times 1$,解得$t=1$.

$6-1=5(\text{h}),6+5=11(\text{h})$.

答:救生圈是上午11时掉入水中的.

第十三章 全等三角形

13.1 命题与证明

练习(教材第34页)

1. 解:(1)如果两个角相等,那么这两个角是直角.这是假命题,例如:两个45°的角相等,但它们不是直角.(举例不唯一)

(2)已知两个角,如果它们的和是平角,那么一个是锐角,另一个是钝角.这是假命题,例如:两个90°的角,它们的和是平角,但它们都是直角.

(3)余角相等的两个角是同角(或等角).这是真命题,证明略.

(4)补角相等的两个角是同角(或等角).这是真命题,证明略.

(5)和等于0的两个非0数,互为相反数.这是真命题,证明略.

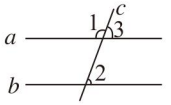
(6)能被2整除的数一定是偶数.这是真命题,因为这是偶数的定义.

2. 证明:如图,

$\because\angle1+\angle3=180°$(平角的定义),$\angle1+\angle2=180°$(已知),

$\therefore\angle2=\angle3$(等量代换).

$\therefore a/\!/b$(同位角相等,两直线平行).



(第2题)

习题(教材第34页)

1. 证明:$\because$点C是线段AD的中点,点D是线段CB的中点(已知),

$\therefore AC=CD,CD=DB$(线段中点的定义).

$\therefore AC=DB$(等量代换).

$\therefore AD=CB$(等式的性质).

2. 证明:$\because\angle AOB=\angle A'O'B',\angle1=\angle3$(已知),

$\therefore\angle AOB-\angle1=\angle A'O'B'-\angle3$(等式的性质).

$\therefore\angle2=\angle4$.

3. 解:$\because DE/\!/BC,\angle ADE=50°$(已知),

$\therefore\angle B=\angle ADE=50°$(两直线平行,同位角相等),$\angle DEC+\angle C=180°$(两直线平行,同旁内角互补).

又$\because\angle C=70°$,

$\therefore\angle DEC=180°-70°=110°$.

13.2 全等图形

练习(教材第36页)

1. 解:(1)AB和ED,BC和DF,AC和EF分别是对应边;$\angle A$和$\angle E$,$\angle B$和$\angle D$,$\angle C$和$\angle F$分别是对应角.

(2)AB和HG,BC和GE,CD和EF,AD和HF分别是对应边;$\angle A$和$\angle H$,$\angle B$和$\angle G$,$\angle C$和$\angle E$,$\angle D$和$\angle F$分别是对应角.

2. 解:$AB=AC,BM=CM$.

习题(教材第37页)

A组

1. 解:房屋脊架示意图中全等的图形:$\triangle ACD\cong\triangle BCD$,$\triangle CDE\cong\triangle CDF$,四边形$BDEC\cong$四边形$ADFC$;窗户示意图中全等的图形:长方形$AMHE\cong$长方形$BMHF$,长方形$AMGD\cong$长方形$BMGC$,长方形$EHGD\cong$长方形$FHGC$.

点拨:房屋脊架示意图中还有$\triangle ADE\cong\triangle BDF$.

2. 解:AO和BO,OC和OD,AC和BD分别是对应边;$\angle A$和$\angle B$,$\angle AOC$和$\angle BOD$,$\angle C$和$\angle D$分别是对应角.

B组

1. 解:$\because\triangle ABC\cong\triangle DCB$,$\therefore\angle ACB=\angle DBC,\angle ABC=\angle DCB$,$\therefore\angle DCB-\angle ACB=\angle ABC-\angle DBC$,即$\angle ACD=\angle DBA$.

2. 略.

13.3 全等三角形的判定

练习(教材第40页)

1. 证明:在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中,$\because\begin{cases}AB=CB(\text{已知}),\\AD=CD(\text{已知}),\\BD=BD(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CBD(\text{SSS})$.

2. 解:在门框上钉上两个斜拉的木条,构造出两个三角形,利用三角形的稳定性,可以防止门框变形.

习题(教材第40页)

A组

1. 证明:在$\triangle ABC$和$\triangle DBC$中,$\because\begin{cases}AB=DB(\text{已知}),\\AC=DC(\text{已知}),\\BC=BC(\text{公共边}),\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DBC(\text{SSS})$.

2. 证明:$\because BF=CD$(已知),$\therefore BC=FD$(等式的性质).

在$\triangle ABC$和$\triangle EFD$中,$\because\begin{cases}AB=EF(\text{已知}),\\BC=FD(\text{已证}),\\AC=ED(\text{已知}),\end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ △ABC≌△EFD(SSS).

∴ ∠A = ∠E(全等三角形的对应角相等).

3. 解:相等.

证明:在△ABD 和△ACD 中,

$$\because \begin{cases} AB = AC(\text{已知}), \\ BD = CD(\text{已知}), \\ AD = AD(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △ABD≌△ACD(SSS).

∴ ∠B = ∠C(全等三角形的对应角相等).

B 组

1. 证明:在△ABC 和△ADE 中,

$$\because \begin{cases} AB = AD(\text{已知}), \\ AC = AE(\text{已知}), \\ BC = DE(\text{已知}), \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE(\text{SSS}).$$

∴ ∠BAC = ∠DAE(全等三角形的对应角相等).

∴ ∠BAD = ∠CAE(等式的性质).

2. 证明:在△ABD 和△CDB 中,

$$\because \begin{cases} AB = CD(\text{已知}), \\ AD = CB(\text{已知}), \\ BD = DB(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △ABD≌△CDB(SSS).

∴ ∠ABD = ∠CDB(全等三角形的对应角相等).

∴ AB // CD(内错角相等,两直线平行).

练习(教材第 43 页)

1. 证明:在△ABC 和△DCB 中,

$$\because \begin{cases} AC = DB(\text{已知}), \\ \angle ACB = \angle DBC(\text{已知}), \\ BC = CB(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △ABC≌△DCB(SAS).

2. 证明:在△AOB 和△COD 中,

$$\because \begin{cases} AO = CO(\text{已知}), \\ \angle AOB = \angle COD(\text{对顶角相等}), \\ BO = DO(\text{已知}), \end{cases}$$

∴ △AOB≌△COD(SAS).

∴ AB = CD(全等三角形的对应边相等).

3. 证明:∵ BD = FC(已知),

∴ BC = FD(等式的性质). ∵ AC // DE(已知),

∴ ∠ACB = ∠EDF(两直线平行,内错角相等).

在△ACB 和△EDF 中,

$$\because \begin{cases} AC = ED(\text{已知}), \\ \angle ACB = \angle EDF(\text{已证}), \\ BC = FD(\text{已证}), \end{cases}$$

∴ △ACB≌△EDF(SAS).

∴ ∠B = ∠F(全等三角形的对应角相等).

∴ AB // FE(内错角相等,两直线平行).

习题(教材第 43 页)

A 组

1. 解:(1)全等;理由略. (2)全等;理由略.

(3)全等;理由略.

2. 证明:在△ABD 和△ACE 中,

$$\because \begin{cases} AB = AC(\text{已知}), \\ \angle A = \angle A(\text{公共角}), \\ AD = AE(\text{已知}), \end{cases}$$

∴ △ABD≌△ACE(SAS).

∴ ∠B = ∠C(全等三角形的对应角相等).

3. 证明:∵ ∠BAD = ∠CAE(已知),

∴ ∠BAC = ∠DAE(等式的性质).

在△ABC 和△ADE 中,

$$\because \begin{cases} AB = AD(\text{已知}), \\ \angle BAC = \angle DAE(\text{已证}), \\ AC = AE(\text{已知}), \end{cases}$$

∴ △ABC≌△ADE(SAS).

∴ ∠B = ∠D(全等三角形的对应角相等).

B 组

1. 证明:在△ABE 和△ACE 中,

$$\because \begin{cases} AB = AC(\text{已知}), \\ EB = EC(\text{已知}), \\ AE = AE(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △ABE≌△ACE(SSS).

∴ ∠BAE = ∠CAE(全等三角形的对应角相等).

在△ABD 和△ACD 中,

$$\because \begin{cases} AB = AC(\text{已知}), \\ \angle BAD = \angle CAD(\text{已证}), \\ AD = AD(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ △ABD≌△ACD(SAS).

∴ BD = CD(全等三角形的对应边相等).

2. (1)略.

(2)**证明**:在△ECD 和△BCA 中,

$$\because \begin{cases} CD = CA(\text{已知}), \\ \angle ECD = \angle BCA(\text{对顶角相等}), \\ CE = CB(\text{已知}), \end{cases}$$

∴ △ECD≌△BCA(SAS).

∴ DE = AB(全等三角形的对应边相等).

练习(教材第 46 页)

1. 解:这个条件可以是①OC = OB;②∠A = ∠D;③∠C = ∠B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 证明：在△AEC和△BED中，

$$\because \begin{cases} \angle AEC = \angle BED(\text{对顶角相等}), \\ EC = ED(\text{已知}), \\ \angle C = \angle D(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ △AEC≌△BED(ASA).

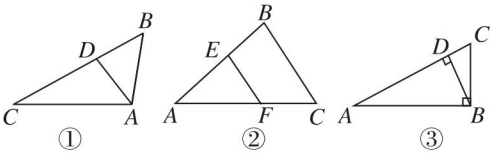
习题（教材第47页）

A组

1. 解：(1)举反例如图①，在△ABC和△ADC中，$\angle B = \angle DAC$，$AC = AC$，$\angle C = \angle C$，但△ABC与△ADC不全等.

(2)举反例如图②，在△ABC中，$EF \parallel BC$，则有$\angle AEF = \angle B$，$\angle AFE = \angle C$，且$\angle A = \angle A$，但△ABC与△AEF不全等.

(3)举反例如图③，在直角三角形ABC与直角三角形ADB中，$AB = AB$，$\angle A = \angle A$，但直角三角形ABC与直角三角形ADB不全等.



（第1题）

2. 证明：$\because l_1 \parallel l_2$(已知)，

$\therefore \angle MAB = \angle NCB$(两直线平行，内错角相等).

在△MAB和△NCB中，

$$\because \begin{cases} \angle MAB = \angle NCB(\text{已证}), \\ AB = CB(\text{已知}), \\ \angle MBA = \angle NBC(\text{对顶角相等}), \end{cases}$$

$\therefore$ △MAB≌△NCB(ASA).

$\therefore MB = NB$(全等三角形的对应边相等).

3. 证明：$\because AB \perp AD$，$AC \perp AE$(已知)，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 90°$(垂直的定义).

$\therefore \angle BAC = \angle DAE$(等式的性质).

在△ABC和△ADE中，

$$\because \begin{cases} \angle BAC = \angle DAE(\text{已证}), \\ AB = AD(\text{已知}), \\ \angle B = \angle D(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ △ABC≌△ADE(ASA).

$\therefore BC = DE$(全等三角形的对应边相等).

B组

1. 证明：在△ABC和△DEF中，

$$\because \begin{cases} AB = DE(\text{已知}), \\ BC = EF(\text{已知}), \\ AC = DF(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ △ABC≌△DEF(SSS). $\therefore \angle ABC = \angle DEF$，$\angle A = \angle D$(全等三角形的对应角相等).

又$\because \angle ABM = \angle CBM$，$\angle DEN = \angle FEN$(已知)，

$$\therefore \angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle DEN = \frac{1}{2}\angle DEF$$

(等量代换). $\therefore \angle ABM = \angle DEN$(等量代换).

在△ABM和△DEN中，$\because \begin{cases} \angle ABM = \angle DEN, \\ AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \end{cases}$

$\therefore$ △ABM≌△DEN(ASA).

$\therefore BM = EN$(全等三角形的对应边相等).

2. 解：是.

证明：$\because BE \perp AD$，$CF \perp AD$(已知)，

$\therefore \angle E = 90°$，$\angle CFD = 90°$(垂直的定义).

$\therefore \angle E = \angle CFD$(等量代换).

在△BED和△CFD中，

$$\because \begin{cases} \angle E = \angle CFD(\text{已证}), \\ \angle BDE = \angle CDF(\text{对顶角相等}), \\ BE = CF(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ △BED≌△CFD(AAS).

$\therefore BD = CD$(全等三角形的对应边相等).

$\therefore AD$是△ABC的中线(三角形中线的定义).

练习（教材第49页）

1. 证明：$\because AC = EF$(已知)，

$\therefore AE = CF$(等式的性质).

$\because AB \parallel CD$(已知)，

$\therefore \angle A = \angle FCD$(两直线平行，同位角相等).

在△EAB和△FCD中，

$$\because \begin{cases} AE = CF, \\ \angle A = \angle FCD, \\ AB = CD(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ △EAB≌△FCD(SAS).

$\therefore \angle AEB = \angle F$(全等三角形的对应角相等).

$\therefore BE \parallel DF$(同位角相等，两直线平行).

2. 证明：$\because \angle ACD = \angle BCE$(已知)，

$\therefore \angle ACE = \angle DCB$(等式的性质).

在△ACE和△DCB中，

$$\because \begin{cases} AC = DC(\text{已知}), \\ \angle ACE = \angle DCB, \\ EC = BC(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ △ACE≌△DCB(SAS).

$\therefore \angle 1 = \angle 2$(全等三角形的对应角相等).

3. 证明：$\because AD \perp CM$，$BE \perp CM$(已知)，

$\therefore \angle ADC = 90°$，$\angle CEB = 90°$(垂直的定义).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ADC = \angle CEB$(等量代换),$\angle ECB + \angle CBE = 180° - \angle CEB = 90°$(三角形内角和定理).

又$\because \angle ACB = 90°$(已知),

$\therefore \angle ACD + \angle ECB = 90°$.

$\therefore \angle ACD = \angle CBE$(等量代换).

在$\triangle ACD$和$\triangle CBE$中,

$$\because \begin{cases} \angle ADC = \angle CEB(\text{已证}), \\ \angle ACD = \angle CBE(\text{已证}), \\ AC = CB(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$(AAS).

$\therefore CD = BE$(全等三角形的对应边相等).

习题(教材第50页)

A组

1. 证明:在$\triangle ADE$和$\triangle CBE$中,

$$\because \begin{cases} \angle D = \angle B(\text{已知}), \\ \angle AED = \angle CEB(\text{对顶角相等}), \\ AD = CB(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBE$(AAS).

$\therefore AE = CE, ED = EB$(全等三角形的对应边相等).

$\therefore EA + EB = EC + ED$(等量代换),即$AB = CD$.

2. 证明:在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中,

$$\because \begin{cases} AB = AC(\text{已知}), \\ AD = AE(\text{已知}), \\ BD = CE(\text{已知}), \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE(\text{SSS}).$$

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$(全等三角形的对应角相等).

$\therefore \angle BAC = \angle DAE$(等式的性质).

3. 解:(1)相等.

证明:$\because \angle QAP = \angle BAC$(已知),$\therefore \angle QAP - \angle BAP = \angle BAC - \angle BAP$(等式的性质).即$\angle QAB = \angle PAC$.

在$\triangle ABQ$和$\triangle ACP$中,$\because \begin{cases} AQ = AP(\text{旋转的性质}), \\ \angle QAB = \angle PAC, \\ AB = AC(\text{已知}), \end{cases}$

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle ACP$(SAS).

$\therefore BQ = CP$(全等三角形的对应边相等).

(2)相等.证明:$\because \angle QAP = \angle BAC$(已知),

$\therefore \angle QAP + \angle PAB = \angle BAC + \angle BAP$(等式的性质).即$\angle QAB = \angle PAC$,其余同(1).

B组

1. 解:$BE = AC, DE = DC$.

证明:$\because \angle BED$为$\triangle AEB$的一个外角,

$\therefore \angle BED = \angle BAD + \angle ABE$.

$\because AD \perp BC$(已知),

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90°$(垂直的定义).

$\therefore \angle BAD = 180° - \angle ADB - \angle ABD = 180° - 90° - 45° = 45°$(三角形内角和定理).

同理,$\angle ECD = 45°$.

$\therefore \angle BED = 45° + \angle ABE$(等量代换).

又$\because \angle ACD = \angle ECD + \angle ACE$,

$\therefore \angle ACD = 45° + \angle ACE$.

$\because \angle ABE = \angle ACE$(已知),

$\therefore \angle BED = \angle ACD$(等量代换).

在$\triangle BED$和$\triangle ACD$中,

$$\because \begin{cases} \angle BED = \angle ACD(\text{已证}), \\ \angle BDE = \angle ADC(\text{已证}), \\ BD = AD(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle BED \cong \triangle ACD$(AAS).

$\therefore BE = AC, DE = DC$(全等三角形的对应边相等).

2. 解:$AB = AC, AD = AE, BD = CE, BE = CD, EF = FD, BF = CF$.

证明:$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE$(已知),

$\therefore AB = AC, AD = AE, BD = CE, \angle BAD = \angle CAE$(全等三角形的对应边相等,对应角相等).

$\therefore \angle BAE = \angle CAD$(等式的性质).

在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中,

$$\because \begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AE = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$(SAS).

$\therefore BE = CD$(全等三角形的对应边相等).

$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE, \triangle ABE \cong \triangle ACD$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACE, \angle ABE = \angle ACD, \angle ADB = \angle AEC, \angle AEB = \angle ADC$,

$\therefore \angle EBF = \angle DCF$.

$\because \angle AEB + \angle AEC + \angle BEF = 360°, \angle ADC + \angle ADB + \angle CDF = 360°$,

$\therefore \angle BEF = \angle CDF$. $\therefore \triangle BEF \cong \triangle CDF$(ASA),

$\therefore EF = FD, BF = CF$.

13.4 三角形的尺规作图

练习(教材第53页)

1. 解:(1)作线段$AB = a$;

(2)以点A为圆心,以a为半径画弧;

(3)以点B为圆心,以a为半径画弧,两弧交于点C;

(4)连接AC, BC. $\triangle ABC$即为所求.(图略)

2. 解:(1)作$\angle PAQ = \angle \alpha$;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（2）以点 A 为圆心，以 a 为半径画弧，分别交射线 AP，AQ 于点 B，C；

（3）连接 BC. $\triangle ABC$ 即为所求.（图略）

习题（教材第 53 页）

A 组

1. 解：（1）作线段 $BC=b$；

（2）分别以点 B，C 为圆心，以 a 为半径画弧，两弧交于点 A；

（3）连接 AB，AC.

$\triangle ABC$ 即为所求.（图略）

2. 解：（1）作 $\angle PCQ=\angle\alpha$；

（2）以点 C 为圆心，以 a 为半径画弧，交射线 CP 于点 B；

（3）以点 C 为圆心，以 b 为半径画弧，交射线 CQ 于点 A；

（4）连接 AB.

$\triangle ABC$ 即为所求.（图略）

B 组

1. 解：（1）作 $\angle PCQ=\angle\alpha$；

（2）以点 C 为圆心，以 a 为半径画弧，交射线 CQ 于点 B；

（3）在 $\angle BCP$ 内作 $\angle BCH=\angle\beta$；

（4）在 BC 的同侧作 $\angle CBG=\angle PCH$，射线 BG 交射线 CP 于点 A，$\triangle ABC$ 即为所求.（图略）

2. 解：有 3 种作法.

复习题（教材第 56 页）

A 组

1. 解：应添加的条件有①$AB=FE$，$BC=ED$；

②$\angle A=\angle F$，$AB=FE$；③$\angle ACB=\angle FDE$，$BC=ED$；

④$\angle A=\angle F$，$\angle ACB=\angle FDE$.（答案不唯一）

2. 证明：在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\because\begin{cases}\angle A=\angle C\text{（已知）},\\ \angle D=\angle E\text{（已知）},\\ BA=BC\text{（已知）},\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CBE$（AAS）.

$\therefore\angle ABD=\angle CBE$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore\angle ABF=\angle CBG$（等式的性质）.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CBG$ 中，$\because\begin{cases}\angle ABF=\angle CBG,\\ BA=BC,\\ \angle A=\angle C,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABF\cong\triangle CBG$（ASA）.

$\therefore AF=CG$（全等三角形的对应边相等）.

3. 解：正确.

理由：因为在小明的方法中，保证了 $CB=CD$，同时有 $\angle ABC=\angle EDC=90°$ 以及 $\angle ACB=\angle ECD$（对顶角相等）. 根据两个三角形全等的条件“ASA”可知，$\triangle ACB\cong\triangle ECD$，所以 $AB=ED$（全等三角形的对应边相等）.

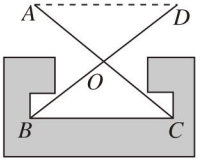
4. 解：选用碎块 1 就能复原出这个三角形工件.

理由：碎块 1 中包含原三角形工件的两个角及其夹边，根据“ASA”可知，由碎块 1 得到的三角形是唯一的，即可复原这个三角形工件.

5. 解：根据两个三角形全等的条件，可以设计一个“X”型的工具，测出工件内槽的宽度. 例如：如图，用两根长木棒 AC，BD，并截取 $BO=DO$，$AO=CO$，将两根木棒在 O 点处用钉子固定并使其能旋转. 这时测得的 AD 的长就是工件内槽的宽度. $\because\begin{cases}BO=DO,\\ \angle BOC=\angle DOA,\\ CO=AO,\end{cases}$

$\therefore\triangle BOC\cong\triangle DOA$（SAS），

$\therefore BC=DA$（全等三角形的对应边相等）.



（第 5 题）

B 组

1. 解：相等.

证明：$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线（已知），

$\therefore\angle BAC=2\angle BAD$（角平分线的定义）.

又 $\because\angle BAC=2\angle B$（已知），

$\therefore\angle BAD=\angle B$（等量代换）.

$\because DE\perp AB$（已知），

$\therefore\angle AED=\angle BED=90°$（垂直的定义）.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BED$ 中，$\because\begin{cases}\angle AED=\angle BED,\\ \angle EAD=\angle B,\\ ED=ED\text{（公共边）},\end{cases}$

$\therefore\triangle AED\cong\triangle BED$（AAS）.

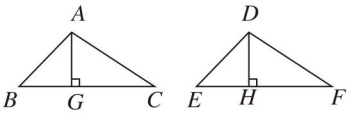
$\therefore AE=BE$（全等三角形的对应边相等）.

2. 解：相等.

已知：如图，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$AG$，$DH$ 分别是边 BC，EF 上的高.

求证：$AG=DH$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 2 题）

证明：∵ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（已知），

∴ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF}$，$BC = EF$（全等三角形的对应边相等）.

∵ AG，DH 分别是边 BC，EF 上的高（已知），

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AG$，$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot DH$（三角形的面积公式）. ∴ $AG = DH$.

3. **解：**（1）垂直.

证明：由画法知，$\angle MDA = 90°$，∴ $MN \perp AB$（垂直的定义）.

（2）相等. 证明：由画法知，$\angle A = \angle B$，$\angle CDA = \angle CDB = 90°$. 在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CDB$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle CDA = \angle CDB, \\ \angle A = \angle B, \\ CD = CD（公共边）, \end{cases}$$

∴ $\triangle CDA \cong \triangle CDB$（AAS）.

∴ $AD = BD$（全等三角形的对应边相等）.

4. **解：**（1）作 $\angle MGN = \beta = 90°$；

（2）分别在 $\angle MGN$ 的内部和外部作 $\angle NGF = \angle PBQ = \alpha$；

（3）以点 B 为圆心，a 为半径画弧交射线 BP 于点 A；

（4）过点 A 在 $\angle ABQ$ 内部作 $\angle BAD = \angle MGF$，射线 AD 与射线 BQ 交于点 C，则 $\angle B + \angle BAC = \angle NGF + \angle MGF = \angle MGN = \beta = 90°$，∴ $\angle ACB = 180° - (\angle B + \angle BAC) = 180° - 90° = 90°$（三角形内角和定理）. 即 $\triangle ABC$ 为所求作的直角三角形.（图略）

C 组

1. （1）**证明：**在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\because \begin{cases} AB = AC（已知）, \\ \angle BAE = \angle CAD（公共角）, \\ AE = AD（已知）, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ACD$（SAS）.

∴ $\angle B = \angle C$（全等三角形的对应角相等）.

∵ $AB = AC$，$AD = AE$，

∴ $AB - AD = AC - AE$（等式的性质），

即 $BD = CE$.

在 $\triangle PCE$ 和 $\triangle PBD$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle C = \angle B, \\ \angle CPE = \angle BPD（对顶角相等）, \\ CE = BD, \end{cases}$$

∴ $\triangle PCE \cong \triangle PBD$（AAS）.

∴ $PC = PB$（全等三角形的对应边相等）.

（2）**证明：**在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ABP$ 中，

$$\because \begin{cases} AC = AB, \\ \angle C = \angle B, \\ PC = PB, \end{cases}$$

∴ $\triangle ACP \cong \triangle ABP$（SAS）.

∴ $\angle CAP = \angle BAP$（全等三角形的对应角相等）.

（3）**解：**已知 $\angle BAC$，求作 $\angle BAC$ 的平分线 AP.

作法：①以点 A 为圆心，以某一长度 a 为半径画弧，分别交射线 AB，AC 于点 D，E；②以点 A 为圆心，以不等于 a 的另一长度 b 为半径画弧，分别交射线 AB，AC 于点 M，N；③连接 ME，ND，两线段交于点 Q；④过点 Q 作射线 AP，射线 AP 即为所求.（图略）

2. 略.

第十四章 实 数

14.1 平方根

练习（教材第 62 页）

1. ± 6；± 7；± 11；± 0.4；± 0.08；$\pm 10^4$

2. **解：**（1）因为 $(\pm 5)^2 = 25$，

所以 25 的平方根为 ± 5.

（2）因为 $(\pm 12)^2 = 144$，

所以 144 的平方根为 ± 12.

（3）因为 $(\pm 0.7)^2 = 0.49$，

所以 0.49 的平方根为 ± 0.7.

（4）因为 $(\pm 0.9)^2 = 0.81$，

所以 0.81 的平方根为 ± 0.9.

（5）因为 $\left(\pm \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$，

所以 $\frac{9}{64}$ 的平方根为 $\pm \frac{3}{8}$.

（6）因为 $\left(\pm \frac{13}{11}\right)^2 = \frac{169}{121}$，

所以 $\frac{169}{121}$ 的平方根为 $\pm \frac{13}{11}$.

3. **解：**（1）12 是 144 的平方根.

（2）169 的负的平方根是 -13.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基教育微官网

关注荣德基教育微官网，获取海量学习资源。
荣德基教育微官网：http://www.rongdeji.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记

点拨®

荣德基初中频道

特高
教
点拨
八年级
数学
(J版)
荣德基 主编
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料