教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

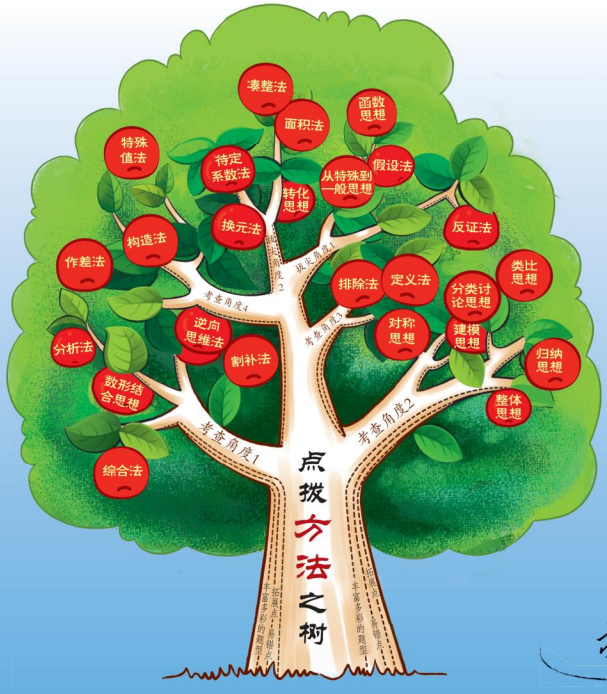
特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

数学（HS版）　八年级（上）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
　　范志刚



提分一定有方法

吉林教育出版社

提分攻略

知识点 68 个 必得分

		页码
第11章 数的开方	01 平方根	2
	02 平方根的性质	3
	03 算术平方根	4
	04 算术平方根的估算	6
	05 立方根	11
	06 立方根的性质	12
	07 用计算器求一个数的立方根	13
	08 无理数	18
	09 实数	19
	10 实数与数轴	20
	11 实数的性质	21
	12 实数的运算	21
第12章 整式的乘除	01 同底数幂的乘法	34
	02 幂的乘方	35
	03 积的乘方	36
	04 同底数幂的除法	37
	05 单项式与单项式相乘	42
	06 单项式与多项式相乘	43
	07 多项式与多项式相乘	43
	08 两数和乘以这两数的差	48
	09 两数和（差）的平方公式	49
	10 单项式除以单项式	55
	11 多项式除以单项式	55
	12 因式分解	59
	13 公因式	61
	14 提公因式法	61
	15 用平方差公式分解因式	62
	16 用完全平方公式分解因式	63
第13章 全等三角形	01 命题	79
	02 定理	80
	03 命题证明的一般步骤	81
	04 全等三角形	85
	05 全等三角形的性质	86
	06 全等三角形的判定条件	87
	07 边角边	92
	08 角边角	93
	09 角角边	93
	10 边边边	94

考向点 83 个 速提分

	页码
01 利用平方根的定义求一个正数的平方根	2
02 利用平方根的性质解决问题	3
03 利用算术平方根的定义解决问题	4
04 利用估算解决算术平方根问题	6
05 利用估算法确定一个数的整数部分和小数部分	8
06 利用立方根的定义解题	11
07 利用立方根的性质解题	13
08 利用无理数的定义识别无理数	18
09 利用实数中各类数的特征进行分类	19
10 利用数轴比较实数的大小	20
11 利用实数的性质解决实数的问题	21
12 利用无理数的相等性质求无理数中字母的值	22
13 利用相反数、倒数、绝对值的性质求值	22
14 利用实数与数轴的关系化简绝对值	23
01 利用同底数幂的乘法法则进行幂的计算	34
02 利用幂的乘方法则进行乘方计算	35
03 利用积的乘方法则进行积的乘方计算	36
04 利用同底数幂的除法法则进行幂的除法计算	37
05 利用方程思想巧求幂的运算式子中的字母值	39
06 利用幂的转化法比较幂的大小	39
07 利用单项式与单项式相乘的法则进行单项式计算	42
08 利用单项式乘多项式法则进行单项式与多项式的计算	43
09 利用多项式乘多项式法则进行多项式计算	44
10 利用待定系数法求多项式未知字母的值	45
11 利用平方差公式进行乘法计算	48
12 利用两数和（差）的平方公式进行乘方计算	50
13 利用单项式除以单项式的运算法则计算	55
14 利用多项式除以单项式的运算法则进行计算	56
15 利用因式分解的定义解整式变形问题的应用	59
16 利用公因式的定义确定多项式的公因式	61
17 利用提公因式法将多项式分解因式	62
18 利用平方差公式进行因式分解	62
19 利用完全平方公式解整式变形问题	63
20 利用建因式分解模型法判断几何图形的形状	67
01 利用命题相关概念解决问题	79
02 利用基本事实和定理的定义进行判断	80
03 利用已学过的基本事实或定理填写推理的依据	81
04 利用全等三角形的对应关系确定对应元素	86
05 利用全等三角形的性质求对应元素间的关系	86
06 利用全等三角形的判定条件判断两个三角形是否全等	88
07 利用判定直角三角形全等的方法解决问题	95
08 利用等腰三角形的定义求边角的大小	105
09 利用等腰三角形的性质解决问题	107
10 利用等边三角形的性质解边角关系问题	108

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分←方法←学霸

方法点58个 得高分

	页码
01 求一个正数的平方根的方法	2
02 确定$\sqrt{a}$的整数部分、小数部分的方法	6
03 平方法	6
04 作差法	6
05 解决条件式中被开方数互为相反数问题的方法	7
06 观察法	15
07 利用绝对值的性质进行化简的方法	23
08 实数大小比较的方法	29
01 逆用幂的乘方求式子值的方法	35
02 求指数相同的几个幂相乘的方法	36
03 逆向运用同底数幂乘除法法则求值的方法	37
04 底数互为倒数（负倒数）的两个幂相乘的常用方法	38
05 底数比较法	39
06 指数比较法	39
07 求解几何图形问题的方法	51
08 多项式除以单项式的方法	56
09 待定系数法	57
10 求与完全平方式有关的字母取值的方法	63
11 分组分解法	66
12 补项法	66
13 拆项法	66
01 命题改写的方法	79
02 利用全等三角形的性质求角的度数的方法	87
03 证线段位置关系的方法	87
04 解答探究条件类题目的方法	88
05 动态问题的求解思路	89
06 证明三角形全等找条件的方法	94
07 证明线段或角相等的方法	95
08 构造全等三角形测距离的求解思路	96
09 截长补短法	97
10 证明一条线段等于两条线段的和的方法	97

考法点46个 争满分

	页码
第11章 数的开方	
01 利用估算法在数轴上表示平方根问题	8
02 利用找规律法解新定义问题	9
03 求一个数的立方根	15
04 立方根的规律探究	16
05 利用实数与数轴的对应关系比较式子的大小	23
06 利用实数的运算求新定义中式子的值	24
第12章 整式的乘除	
01 利用幂的运算法则进行辨析	40
02 利用幂的运算法则求字母的值	40
03 利用多项式乘以多项式的法则计算	46
04 利用整式的乘法运算进行整式的化简求值	46
05 利用乘法公式对计算过程进行辨析	52
06 利用乘法公式的变形式子求值	53
07 利用几何图形面积验证两数和（差）的平方公式	53
08 整式除法的实际应用	57
09 整式混合运算的化简求值	58
10 利用因式分解的方法判断分解因式	69
11 利用公式法因式分解求值	69
第13章 全等三角形	
01 命题真假的辨析	83
02 利用全等三角形的性质用图形的位置法找对应角	89
03 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数	90
04 利用全等三角形的性质用求线段长法确定点的坐标	90
05 利用全等三角形的判定补充三角形全等的条件	101
06 利用全等三角形的性质判断两线段间的关系	101
07 利用全等三角形的判定和性质求图形的面积	102

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 68 个 必得分

		页码
第13章 全等三角形	11 斜边直角边	95
	12 等腰三角形的定义	105
	13 等腰三角形的性质	106
	14 等边三角形的定义及性质	108
	15 等腰三角形的判定	116
	16 等边三角形的判定	117
	17 尺规作图	124
	18 作一条线段等于已知线段	125
	19 作一个角等于已知角	125
	20 作已知角的平分线	126
	21 经过一已知点作已知直线的垂线	127
	22 作已知线段的垂直平分线	128
	23 互逆命题	132
	24 互逆定理	133
	25 线段垂直平分线的性质	136
	26 线段垂直平分线的判定	136
	27 角平分线的性质	142
	28 角平分线的判定	143
	29 三角形的角平分线的性质	144
第14章 勾股定理	01 勾股定理	164
	02 勾股定理的证明	165
	03 勾股定理的逆定理	171
	04 勾股数	172
	05 反证法	173
	06 确定几何体表面上两点间的最短路线长	180
	07 勾股定理的应用	181
第15章 数据的收集与表示	01 数据的收集	199
	02 频数和频率	200
	03 扇形统计图	205
	04 利用统计图表传递信息	206

考向点 83 个 速提分

	页码
11 利用设元列方程法求等腰三角形中角的度数	109
12 利用面积法证明等边三角形中的有关问题	111
13 利用等腰三角形的判定方法判定等腰三角形	116
14 利用等边三角形的判定方法判定等边三角形	117
15 利用归一法证明等腰三角形中的线段之间的和差关系	118
16 利用尺规作图定义辨析	124
17 利用作一条线段等于已知线段作线段的和或差	125
18 利用作一个角等于已知角作平行线	126
19 利用作已知角的平分线等分角	127
20 利用过一点作已知直线的垂线作三角形的高	128
21 利用作已知线段的垂直平分线进行作图	128
22 利用组合作图法作三角形	129
23 利用互逆命题的定义改写判断命题	132
24 利用互逆定理的定义进行辨别	133
25 利用推理证明已知命题的逆命题是真命题	133
26 利用线段垂直平分线的性质求线段长	136
27 利用线段的垂直平分线的判定证明两直线的位置关系	137
28 利用角平分线的性质解与垂线段相关的应用	142
29 利用角平分线的判定和性质判定角平分线	144
30 利用等面积法求三角形中的距离	145
31 利用建模思想用尺规作角平分线及线段的垂直平分线选址	146
01 利用勾股定理求直角三角形的边长	164
02 利用拼图法验证勾股定理	166
03 利用化斜为直法证平方关系	167
04 利用勾股数的定义识别勾股数	173
05 利用反证法进行推理论证	173
06 利用计算比较法判断三角形的形状	174
07 利用割补法求不规则图形的面积	176
08 利用勾股定理解决最短路线问题	180
09 利用勾股定理解应用问题	181
10 利用对称法求平面上最短距离	183
01 利用数据的收集与整理方法收集整理数据	199
02 利用频数和频率的定义解决问题	200
03 利用数据的收集解决调查的目的	201
04 利用频数和频率的统计表解决调查的目的	202
05 利用扇形统计图的特点及绘制步骤表示数据	205
06 利用统计图表传递信息	207
07 不规范统计图的误导	209
08 补全统计图并从统计图中获取正确的信息	210

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点 58 个 得高分

	页码
11 证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法	98
12 面积法	111
13 等边三角形的判定方法	117
14 等腰三角形构造法	119
15 倍长线段法	119
16 作与已知三角形全等的三角形的方法	130
17 判断一个定理是否有逆定理的方法	133
18 判断线段垂直平分线的两种方法	137
19 用等面积法求三角形的角平分线的交点到三边的距离的方法	145
20 等线段证角平分线法	146
21 分类讨论思想	150
22 分析法	155
23 构造三角形全等的几种方法	156
01 化整为零法	166
02 割补法	167
03 证明线段的平方关系的方法	167
04 折叠法	168
05 判定直角三角形的方法	171
06 确定勾股数的方法	173
07 倍长中线法	174
08 寻找与大于 1 的奇数组成的勾股数的一种方法	177
09 求直线同侧的两点到直线上一点的最短路径长的方法	183
01 收集数据常用的方法	199
02 定义法	205
03 制作扇形统计图的一般步骤	206
04 从扇形统计图中获取信息的方法	208
05 数形结合思想	219

考法点 46 个 争满分

	页码
08 利用等腰三角形的性质求角的度数	112
09 根据等腰三角形的定义画等腰三角形	112
10 利用等边三角形性质进行证明	113
11 利用等腰三角形的判定证明等腰三角形	121
12 利用等边三角形的性质与判定探究动态运动中两直线的位置关系	121
13 尺规作图的依据	130
14 利用列举法判断命题的真假	134
15 利用线段垂直平分线的性质求角度	139
16 利用线段垂直平分线的性质求线段长	139
17 利用作线段的垂直平分线解决实际问题	140
18 利用角平分线的判定和性质求角的度数	147
19 利用尺规作图及角平分线的性质求三角形的面积	147
20 利用线段垂直平分线和角平分线的性质解题	148
01 利用勾股定理解求面积问题	168
02 利用勾股定理解探究规律问题	169
03 利用勾股定理的逆定理判定三角形的形状	177
04 利用勾股数通解公式求三角形的边长	178
05 利用勾股定理解古算术中的求线段长问题	185
06 利用勾股定理解实际中应用问题	186
01 频数与频率的计算	203
02 利用统计图的特征传递信息	211
03 利用统计图之间的关系揭示数据反映的信息	211

第13章 全等三角形

第14章 勾股定理

第15章 数据的收集与表示

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法
实数大小比较的方法…… 29

看微课
求平方根…… 2
求算术平方根…… 4
实数的分类…… 19

学方法
因式分解的方法…… 63

看微课
幂的乘方…… 35
积的乘方…… 36
单项式的乘法…… 42
单项式乘多项式…… 43
平方差公式…… 49
完全平方公式…… 49

观动画
全等变换方式…… 85
角平分线的尺规作图……126

学方法
等边三角形的判定方法…… 117

第 11 章 数的开方

11.1 平方根与立方根 …… 2
11.1.1 平方根 …… 2
11.1.2 立方根 …… 11
11.2 实数 …… 18

素养提分
行动篇：实数应澄清的几个问题☞ P25
技巧篇：平方根概念解题的几个技巧☞ P26
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P27

第 12 章 整式的乘除

12.1 幂的运算 …… 34
12.2 整式的乘法 …… 42
12.3 乘法公式 …… 48
12.4 整式的除法 …… 55
12.5 因式分解 …… 59

素养提分
行动篇：解读“恒等式” ☞ P47
应用篇：恒等变形在整式的运算和因式分解中的应用 ☞ P71
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P72

第 13 章 全等三角形

13.1 命题、定理与证明 …… 79
13.2 三角形全等的判定 …… 85
13.2.1 全等三角形的判定条件 …… 85
13.2.2 三角形全等的判定 …… 92
13.3 等腰三角形 …… 105
13.3.1 等腰三角形的性质 …… 105
13.3.2 等腰三角形的判定 …… 116
13.4 尺规作图 …… 124

微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.5 逆命题与逆定理 …… 132
13.5.1 互逆命题与互逆定理 …… 132
13.5.2 线段垂直平分线 …… 136
13.5.3 角平分线 …… 142
素养提分
行动篇：倒过来想 ☞ P149
应用篇：分类讨论思想在等腰三角形中的应用 ☞ P150
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P152

看微课
全等三角形…… 85
全等三角形的性质…… 86
斜边直角边…… 95
等腰三角形的性质……107
等腰三角形的判定…… 116

第 14 章 勾股定理

14.1 勾股定理 …… 164
14.1.1 直角三角形三边的关系 …… 164
14.1.2 直角三角形的判定、反证法 …… 171
14.2 勾股定理的应用 …… 180
素养提分
行动篇：“面积法”的思考与延伸 ☞ P187
思维篇：勾股定理中的数学思想方法 ☞ P189
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P191

观动画
勾股定理的证明……165

学方法
反证法……173

看微课
探究勾股定理……164
勾股定理的逆定理…… 171
勾股定理的应用…… 181

第 15 章 数据的收集与表示

15.1 数据的收集 …… 199
15.2 数据的表示 …… 205
素养提分
应用篇：三种常见统计图的特点及综合应用 ☞ P215
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P217
参考答案及点拨（单独成册）

看微课
数据的收集与整理……199
频数和频率…… 200
从统计图中获取信息……212

微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

01. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

02. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

03. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.它的特点：特殊→一般.

04. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

05. **类比思想：**类比思想是根据两个对象之间在某些方面的相同或相似，从而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种思想.因此，类比是从特殊到特殊的推理.通过类比，可以发现新旧知识的相同点，利用已有的旧知识，来认识新知识.

06. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

07. **面积法：**运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法.

08. **定义法：**所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的.因此，用定义法解题，是最直接的方法.

09. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于某些用常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简捷.其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法.主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

10. **分析法：**分析法就是指从命题的结论出发，步步寻找使结论成立的条件，直到得到一个已知条件，从而判定原命题的结论成立的一种解题方法，分析法也称“执果索因”法，即执结论，步步索条件.

11. **等积法：**运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程，通过推理、演算以达到求解线段长度或得到线段之间数量关系的目的的一种方法.

12. **截长补短法：**截长补短法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想.所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一条线段相等.所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长与另一条已知的较短的线段长度相等的一段，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系.

13. **倍长中线法：**延长底边的中线，使所延长部分与中线相等，然后往往需要连接相应的顶点，则对应角、对应边都对应相等.此法常用于构造全等三角形，利用中线的性质进行证明对应边之间的关系.

14. **建模思想：**建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

15. **统计思想：**所谓统计思想，就是在统计实际工作、统计学理论的应用研究中，必须遵循的基本理念和指导思想.统计思想主要包括：均值思想、估计思想等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数字领域的再次拓展

数字领域的再次拓展











第11章 数的开方

核心考点

你将见到的

- 平方根与算术平方根
- 立方根
- 实数

核心方法

我们为你提供的

- 作差法
- 估算法
- 特殊值法
- 分类讨论思想
- 数形结合思想
- 整体思想

微信公众号
教辅资料站

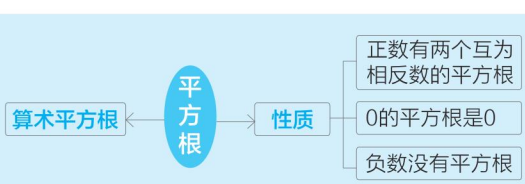
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.1 平方根与立方根

11.1.1 平方根

核心知识
- 平方根
- 算术平方根
- 平方根的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平方根

1. 平方根： 如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根.

2. 平方根的表示： 若 $x^2=a\ (a\geqslant 0)$，则 x 叫做 a 的平方根，记作 $\pm\sqrt[2]{a}$，其中 2 为根指数，通常省略不写，即记作 $\pm\sqrt{a}$. $\sqrt{a}$ 读作“根号 a”，其中 a 称为被开方数.

提分·必记

特别解读

平方根的定义中 a 是非负数，即 $a\geqslant 0$.

拨考向 利用平方根的定义求一个正数的平方根

例 1： 求下列各数的平方根：

（1）121；（2）$2\frac{7}{9}$；（3）$(-13)^2$；

（4）0.004 9；（5）$-(-4)^3$.

解题秘方： 先根据平方运算找出平方等于这个数的数，然后根据平方根的定义确定.

解：（1）$\because(\pm 11)^2=121$，

$\therefore$ 121 的平方根是 ± 11.

（2）$2\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$，$\because\left(\pm\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，

$\therefore 2\frac{7}{9}$ 的平方根是 $\pm\frac{5}{3}$.

（3）$(-13)^2=169$，$\because(\pm 13)^2=169$，

$\therefore(-13)^2$ 的平方根是 ± 13.

（4）$\because(\pm 0.07)^2=0.004\,9$，

$\therefore$ 0.004 9 的平方根是 ± 0.07.

（5）$-(-4)^3=64$，$\because(\pm 8)^2=64$，

$\therefore-(-4)^3$ 的平方根是 ± 8.

求平方根

提分·秘诀

方法点拨

求一个正数的平方根的方法：

先找出平方等于这个正数的数，这样的数有两个，它们互为相反数，因而这两个数均为这个正数的平方根.

如果一个数为带分数，一般先将其化为假分数，再求平方根；如果有平方运算，那么先用平方运算求出结果，针对结果再求平方根；如果这个正数 a 不能写成有理数的平方的形式，那么可以将 a 的平方根表示成 $\pm\sqrt{a}$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 平方根的性质

平方根的性质：

（1）正数有两个平方根，它们互为相反数；

（2）0的平方根是0；

（3）负数没有平方根.

提分·必记

特别解读

判断一个数是否有平方根，要先判断这个数是正数、负数还是0，负数没有平方根.

拔考向▶ 利用平方根的性质解决问题

类型1：利用平方根的性质解方程

例2： 求下列各式中 x 的值：

（1）$x^2=361$；（2）$81x^2-49=0$；（3）$(3x-1)^2=(-5)^2$.

解题秘方： 若 $x^2=a$（$a\geqslant 0$），则 $x=\pm\sqrt{a}$. 先把各题化为 $x^2=a$ 的形式，再求 x 的值.

解：（1）$\because x^2=361$，$\therefore x=\pm\sqrt{361}=\pm 19$.

（2）整理 $81x^2-49=0$，得 $x^2=\frac{49}{81}$，$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.

（3）$\because (3x-1)^2=(-5)^2$，$\therefore 3x-1=\pm 5$.

当 $3x-1=5$ 时，$x=2$；当 $3x-1=-5$ 时，$x=-\frac{4}{3}$.

综上所述，$x=2$ 或 $x=-\frac{4}{3}$.

提分·秘诀

解法提醒

利用平方根的性质解方程的一般步骤：

1. 移项，使含未知数的项在等号的一边，常数项在等号的另一边；
2. 系数化为1，将方程化为“$x^2=a$”的形式；
3. 根据平方根的性质求出未知数 x 的值.

类型2：利用平方根的性质求字母的值

例3：（1）一个正数的平方根是 $3a-5$ 和 $a-3$，则这个正数是多少？

（2）已知 $2a-1$ 与 $-a+2$ 是 m 的平方根，求 m 的值.

解题秘方： 根据平方根的性质，找出两个平方根之间的关系列方程求值.

解：（1）根据题意，得 $(3a-5)+(a-3)=0$，

解得 $a=2$，

$\therefore$ 这个正数为 $(3a-5)^2=(3\times 2-5)^2=1$.

（2）根据题意，分以下两种情况：

当 $2a-1=-a+2$ 时，$a=1$，

$\therefore m=(2a-1)^2=(2\times 1-1)^2=1$；

当 $(2a-1)+(-a+2)=0$ 时，$a=-1$，

$\therefore m=(2a-1)^2=[2\times(-1)-1]^2=(-3)^2=9$.

故 m 的值为1或9.

已知 a，b 是 m 的平方根，则有 $a=b$ 或 $a+b=0$

解法提醒

正数有两个平方根，它们互为相反数，列方程先求出 a，再根据平方根的定义求这个正数的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 算术平方根

1. 定义： 正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根．规定：0 的算术平方根是 0.

表示方法： a 的算术平方根记为$\sqrt{a}$，读作“根号 a”，a 叫做被开方数．

特别解读：（1）算术平方根$\sqrt{a}$具有双重非负性：

①被开方数 a 是非负数，即 $a \geqslant 0$；

②算术平方根$\sqrt{a}$是非负数，即$\sqrt{a} \geqslant 0$.

（2）算术平方根是它本身的数只有 0 和 1.

2. 开平方： 求一个非负数的平方根的运算，叫做开平方．

3. 平方根与算术平方根的区别与联系：

关系 \ 名称		算术平方根	平方根
区别	定义不同	正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根	如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根
	个数不同	一个正数的算术平方根只有一个	一个正数的平方根有两个，它们互为相反数
	表示方法不同	非负数 a 的算术平方根表示为$\sqrt{a}$	非负数 a 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a}$
	取值范围不同	正数的算术平方根一定是正数	正数的平方根是一正一负
联系	具有包含关系	平方根包含算术平方根，算术平方根是平方根中正的那个（0 除外）	
	存在条件相同	平方根和算术平方根都只有非负数才有，0 的平方根与算术平方根都是 0	

拔考向▶ 利用算术平方根的定义解决问题

类型 1：求一个数的算术平方根

例 4： 求下列各数的算术平方根．

（1）64；（2）$2\frac{1}{4}$；（3）0.36；（4）5^2；（5）$(-5)^2$；

（6）0；（7）$\sqrt{81}$；（8）7；（9）-16.

解题秘方： 先根据平方运算找出平方等于这个数的非负数，然后根据算术平方根的定义求出算术平方根．

解：（1）$\because 8^2=64$，

$\therefore$ 64 的算术平方根是 8，即$\sqrt{64}=8$.

（2）$\because \left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$，

$\therefore 2\frac{1}{4}$的算术平方根是$\frac{3}{2}$，即$\sqrt{2\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.



提分·必记

特别提醒

1. 任何一个数的平方都是非负数，所以求算术平方根时，被开方数必须是非负数，它的算术平方根也一定是非负数.
2. 平方与开平方是互逆运算，平方的结果叫做幂，而开平方的结果叫做平方根.
3. 两个重要公式：

(1) $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

4. 比较$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$的关系：

项目 \ 式子		$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a^2}$
区别	运算顺序	先开方再求平方	先求平方再开方
	a 的取值范围	$a\geqslant 0$	全体数
联系		当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$	

提分·秘诀

知识储备

1. **求带分数的算术平方根，**先将带分数化成假分数，再求算术平方根．
2. **求一个数的算术平方根必须明确两点：**
   （1）这个数是非负数；
   （2）求出的算术平方根（结果）必须是非负数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）∵ $0.6^2=0.36$，∴ 0.36 的算术平方根是 0.6，即 $\sqrt{0.36}=0.6$.

（4）∵ $5^2=5^2$，∴ 5^2 的算术平方根是 5，即 $\sqrt{5^2}=5$.

（5）∵ $5^2=(-5)^2$，∴ $(-5)^2$ 的算术平方根是 5，即 $\sqrt{(-5)^2}=5$.

（6）0 的算术平方根是 0.

（7）∵ $\sqrt{81}=9$，9 的算术平方根是 3，∴ $\sqrt{81}$ 的算术平方根是 3.

（8）7 的算术平方根是 $\sqrt{7}$.

（9）−16 没有算术平方根.

开方开不尽的数，算术平方根不能化简

特别警示

不要误认为是求 81 的算术平方根.

类型 2：已知算术平方根求被开方数

例 5： 已知 a 的算术平方根是 3，b 的算术平方根是 4，求 $a+b$ 的算术平方根.

解题秘方： 根据算术平方根与被开方数的关系求出 a，b 的值，然后求 $a+b$ 的算术平方根.

解： ∵ a 的算术平方根是 3，∴ $a=3^2=9$.

∵ b 的算术平方根是 4，∴ $b=4^2=16$.

∴ $a+b=9+16=25$.

∵ $5^2=25$，∴ 25 的算术平方根是 5，即 $a+b$ 的算术平方根是 5.

方法点拨

本题运用了**定义法**. **首先**根据算术平方根的定义求出 a，b 的值，**再**根据有理数的加法法则求出 $a+b$ 的值，**最后**根据算术平方根的定义得出结果.

类型 3：利用平方根和算术平方根的性质求值

例 6： 求下列各式的值：

（1）$\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}$；（2）$\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}$；（3）$\sqrt{41^2-40^2}$.

解题秘方： 首先观察式子的结构特点，弄清式子所表示的意义，即要明确是求算术平方根还是求平方根，然后根据算术平方根或平方根的定义求解.

解： （1）$\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}$ 表示 $1\frac{9}{16}$ 的平方根，

∵ $\left(\pm\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1\frac{9}{16}$，

∴ $1\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm\frac{5}{4}$，

∴ $\pm\sqrt{1\frac{9}{16}}=\pm\frac{5}{4}$.

特别警示

求 $1\frac{9}{16}$ 的平方根时易误将 $1\frac{9}{16}$ 的整数部分 1 和分数部分 $\frac{9}{16}$ 分别求平方根，导致错解.

（2）$\sqrt{0.81}$ 表示 0.81 的算术平方根，$\sqrt{0.04}$ 表示 0.04 的算术平方根，

∵ $0.9^2=0.81$，$0.2^2=0.04$，∴ $\sqrt{0.81}=0.9$，$\sqrt{0.04}=0.2$，

∴ $\sqrt{0.81}-\sqrt{0.04}=0.9-0.2=0.7$.

特别警示

$\sqrt{0.81}$ 表示 0.81 的算术平方根，而 0.81 的算术平方根只有 0.9. 本题容易误认为 $\sqrt{0.81}$ 表示 0.81 的平方根，导致错误.

（3）∵ $\sqrt{41^2-40^2}$ 表示 41^2-40^2 的算术平方根，

又 $41^2-40^2=81$，$9^2=81$，∴ $\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{81}=9$.

提示

要注意被开方数 41^2-40^2 是一个整体，首先要将 41^2-40^2 化简，再去计算它的算术平方根.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 算术平方根的估算

1. 求一个正数（非平方数）的算术平方根的近似值，一般采用夹逼法.

“夹”就是从两边确定取值范围；“逼”就是一点一点加强限制，使其所处范围越来越小，从而达到理想的精确程度.

2. 大多数计算器都有 $\sqrt{\blacksquare}$ 键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）. 按键顺序：先按 $\sqrt{\blacksquare}$ 键，再输入被开方数，最后按 = 键. 计算器上就会显示这个数的算术平方根（或其近似值）.

拔考向▶ 利用估算解决算术平方根问题

类型 1：利用估算法求算术平方根的范围

例 7： 已知 a，b 为两个连续整数，且 $a<\sqrt{7}<b$，则 $a+b=$_____.

解题秘方： 找出与 7 接近的两个平方数，确定 7 的算术平方根的范围.

解： 本题运用夹逼法来求整数 a 与 b 的值.

$\because a$，b 为连续整数，$a<\sqrt{7}<b$，而 $2^2<7<3^2$，

$\therefore 2<\sqrt{7}<3$，$\therefore a=2$，$b=3$.

$\therefore a+b=5$.

答案： 5

类型 2：利用估算法比较两个数的大小

例 8： 比较下列各组数的大小：

（1）$\sqrt{12}$ 与 4；　（2）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 与 $\frac{1}{2}$；　（3）$\frac{\sqrt{401}-5}{4}$ 与 3.75.

解题秘方：（1）题可用平方法比较大小；（2）题可用作差法比较大小；（3）题可用比较被开方数大小进行比较.

解：（1）$(\sqrt{12})^2=12$，$4^2=16$，

$\because 12<16$，$\therefore \sqrt{12}<4$.

（2）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$，

$\because 3<4$，$\therefore \sqrt{3}<2$.

$\therefore \frac{\sqrt{3}-2}{2}<0$，即 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{1}{2}$.

（3）$\because \sqrt{401}>\sqrt{400}=20$，

$\therefore \frac{\sqrt{401}-5}{4}>\frac{\sqrt{400}-5}{4}=\frac{20-5}{4}=3.75$.

提分·必记

特别解读

1. 求一个正数（非平方数）的算术平方根的近似值，通常有三种方法：
   一是用计算器；
   二是查平方根表；
   三是估算.
2. 计算器里显示的数值中，许多都是近似值.

提分·秘诀

技巧点拨

确定 $\sqrt{a}$ 的整数部分、小数部分的方法：

首先确定 $\sqrt{a}$ 的整数部分，根据算术平方根的定义，有 $m^2<a<n^2$，其中 m，n 是连续的非负整数，则 $m<\sqrt{a}<n$，所以 $\sqrt{a}$ 的整数部分为 m；然后进一步可得 $\sqrt{a}$ 的小数部分为 $\sqrt{a}-m$.

方法点拨

1. 两数同时平方后再比较大小；
2. 运用了作差法，通过相减判断得到的差的正负来比较大小；
3. 被开方数大的算术平方根较大，即当 $a\geqslant b\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}\geqslant 0$，反过来也成立.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：利用计算器探究算术平方根的规律

例 9： 已知$\sqrt{7.16}\approx 2.676$，$\sqrt{71.6}\approx 8.462$.

（1）$\sqrt{0.071\,6}\approx$_____，$\sqrt{71\,600}\approx$_____.

（2）$\sqrt{0.007\,16}\approx$_____，$\sqrt{7\,160}\approx$_____.

（3）若$\sqrt{a}\approx 26.76$，则 a 的值约是_____.

解题秘方： 利用计算器求出各个算术平方根，对照被开方数和算术平方根寻找小数点移动的规律.

解： 利用计算器探究发现：被开方数的小数点向左（或向右）移动两位，其算术平方根的小数点相应地向左（或向右）移动一位.

答案：（1）0.267 6；267.6

（2）0.084 62；84.62

（3）716

规律点拨

对于此类规律探究题，要从两个方向进行比较：

第一，把被开方数进行比较；

第二，把它们的结果进行比较，从中发现规律.

利用计算器探究发现：被开方数的小数点向右（或向左）移动两位，其算术平方根的小数点就向右（或向左）移动一位.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用定义法求算术平方根中字母的值

例 10： 已知$y=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}+5$，求 $x+y$ 的值.

解题秘方： 因为只有非负数才有算术平方根，由此我们可以得知$x-8\geqslant 0$且$8-x\geqslant 0$，而同时满足条件的只有 $x=8$，进而便可求出 y 的值，$x+y$ 的值也就随即可知了.

解： 由题意可得$x-8\geqslant 0$且$8-x\geqslant 0$，

即$x\geqslant 8$且$x\leqslant 8$.

$\therefore x=8$.

当$x=8$时，$y=5$.

$\therefore x+y=8+5=13$.

挑战·高分

方法点拨

解决条件式中被开方数互为相反数问题的方法：

在一个条件式子中同时含有类似$\sqrt{a}$与$\sqrt{-a}$的式子，即条件式子中被开方数互为相反数，只有它们都等于0时，这两个式子才都有意义.

拔尖角度 2 利用性质法求算术平方根中字母的值

例 11： 若$\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=0$，求 $x^{2\,019}+y^{2\,020}$ 的值.

解题秘方： 非负数与非负数的和为 0，当且仅当这两个非负数都为 0 时成立，可列方程求出 x，y 的值，从而求出含 x，y 的式子的值.

解： $\because \sqrt{x-1}\geqslant 0$，$\sqrt{y+1}\geqslant 0$，$\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=0$，

$\therefore x-1=0$，$y+1=0$，

$\therefore x=1$，$y=-1$.

$\therefore x^{2\,019}+y^{2\,020}=1^{2\,019}+(-1)^{2\,020}=2$.

挑战·高分

技巧点拨

算术平方根和绝对值一样，都是非负数，**当几个非负数的和等于 0 时，其中每一个非负数都为 0.**

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用估算法确定一个数的整数部分和小数部分

挑战·高分

例 12: 设 $2+\sqrt{6}$ 的整数部分和小数部分分别是 x，y，试求出 x，y 的值.

解题秘方: 先估算 $\sqrt{6}$ 的整数部分，再表示出其小数部分（$\sqrt{6}-$整数部分 = 小数部分），从而可求出 x，y 的值.

解: $\because \sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$，

$\therefore 2<\sqrt{6}<3$.

$\therefore \sqrt{6}$ 的整数部分是 2，则 $\sqrt{6}$ 的小数部分是 $\sqrt{6}-2$.

$\therefore 2+\sqrt{6}$ 的整数部分是 4，小数部分是 $\sqrt{6}-2$，

即 $x=4$，$y=\sqrt{6}-2$.

$2+\sqrt{6}-4=\sqrt{6}-2$

技巧点拨

确定 $\sqrt{a}$ 的整数部分、小数部分的一般方法:

1. **确定整数部分的方法**: 直接取与其最接近的两个连续整数中较小的那个整数;
2. **确定小数部分的方法**: 先确定其整数部分，然后用这个数减去它的整数部分得出它的小数部分，即小数部分 = 原数 − 整数部分.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要内容是算术平方根和平方根的概念和性质，中考中以考查算术平方根、平方根的概念及估算为主，多以选择题和填空题的形式出现，属中考中的送分题.

三年中考兵法

考法 1 利用估算法在数轴上表示平方根问题

冲刺·满分

例 13: [中考·潍坊] 用教材中的计算器依次按键如图 11.1-1①，显示的结果在数轴上(如图 11.1-1②)对应点的位置介于(　　)



①　　②

图 11.1-1

A. B 与 C 之间　　B. C 与 D 之间

C. E 与 F 之间　　D. A 与 B 之间

试题评析: 本题考查了平方根与数轴以及计算器的使用，解题的关键是先判断出要求的数.

解: 由按键顺序可知该数为 $-\sqrt{2}$，

$\because (-\sqrt{2})^2=2$，而 $1<2<4$，

故可知 $-2<-\sqrt{2}<-1$，

$\therefore$ 该对应点位于点 B 和点 C 之间，

故答案选 A.

答案: A

思路点拨

先从按键的顺序中确定所要求的数为 $-\sqrt{2}$；

再用估算法确定 $-\sqrt{2}$ 在哪两个连续整数之间；

最后确定它对应的点在数轴上的位置.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用找规律法解新定义问题

例 14：[中考·贺州改编]将一组数$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，…，$\sqrt{40}$，按下列方式进行排列：

$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$；

$\sqrt{12}$，$\sqrt{14}$，4，$\sqrt{18}$，$\sqrt{20}$；

…

若 2 的位置记为（1，2），$\sqrt{12}$的位置记为（2，1），则$\sqrt{38}$这个数的位置记为（　　）

A.（5，4）　B.（4，4）　C.（4，5）　D.（3，5）

试题评析：本题主要考查的是数的变化规律，找出其中的规律是解题的关键.

解：这组数据可表示为：

$\sqrt{2}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$；

$\sqrt{12}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{16}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{20}$；

…

∵ $19\times2=38$，

∴$\sqrt{38}$为第 4 行，第 4 个数. 故选 B.

答案：B

思路点拨

先读懂记位置的(a, b)的意义，第1个数a表示行数，第2个数b表示列数，

再分析被开方数的变化规律，确定$\sqrt{38}$是第几个数；

最后根据每行5个数这一排列规律确定$\sqrt{38}$的行列数求出a, b的值.

两年模拟兵法

答案见 225 页

1. [中考·武汉]计算$\sqrt{36}$的结果为（　　）

A.6　B.−6　C.18　D.−18

2. 下列说法正确的是（　　）

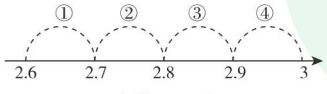
A.−5 是 −25 的平方根

B.3 是 $(-3)^2$ 的算术平方根

C. $(-2)^2$ 的平方根是 2

D.8 的平方根是 ±4

3. [中考·河北]在数轴上标注了四段范围，如图，则表示$\sqrt{8}$的点落在（　　）



（第 3 题）

A. 段①　B. 段②　C. 段③　D. 段④

4. [中考·南京]若$\sqrt{3}<a<\sqrt{10}$，则下列结论中正确的是（　　）

A.$1<a<3$　B.$1<a<4$　C.$2<a<3$　D.$2<a<4$

5. 已知甲、乙、丙三个数，甲 $=5+\sqrt{15}$，乙 $=3+\sqrt{17}$，丙 $=1+\sqrt{19}$，则甲、乙、丙的大小关系是（　　）

A. 丙＜乙＜甲　B. 乙＜甲＜丙

C. 甲＜乙＜丙　D. 甲 = 乙 = 丙

6. $\sqrt{(-6)^2}=$_____，$-\sqrt{(-7)^2}=$_____，$\pm\sqrt{5^2}=$_____.

7. 已知一个正数的平方根是 $3x-2$ 和 $5x+6$，则这个正数是_____.

8. 求下列各数的平方根.

（1）$\left(-\frac{1}{3}\right)^2$；（2）0；（3）−2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 求下列各式中 x 的值.

（1）$9x^2-25=0$；

（2）$4(2x-1)^2=36$；

（3）$(x+1)^2-81=0$；

（4）$4(2x+3)^2=(-3)^2$.

10. 已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3，$3a+b-1$ 的平方根是 ± 4，求 $a+2b$ 的平方根.

11. 已知 $\sqrt{7}+7$ 的小数部分是 a，$7-\sqrt{7}$ 的小数部分是 b，求 $a+b$ 的值.

12. 若 a，b 为有理数，且 $b=\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+7}+4$，$a>0$，求 $a+b$ 的值.

13. 某公路规定汽车速度不得超过 80 km/h，当发生交通事故时，交通警察通常根据刹车后车轮滑过的距离估计车辆行驶的速度，所用的经验公式是 $v=16\sqrt{df}$，其中 v 表示车速（单位：km/h），d 表示刹车后车轮滑过的距离（单位：m），f 表示摩擦系数. 在一次交通事故中，已知 $d=16$ m，$f=1.69$，请你判断一下，肇事汽车当时的速度是否超过了规定的速度？ **【导学号：6994214】**

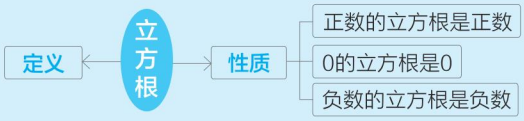
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.1.2 立方根

核心知识
- 立方根
- 立方根的性质
- 用计算器求立方根

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 立方根

1. 定义： 如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根.

表示方法： 一个数 a 的立方根，用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号 a”，其中 a 是被开方数，3 是根指数.

特别警示： $\sqrt[3]{a}$ 中的根指数 3 不能省略. 若省略了 3，$\sqrt{a}$ 表示非负数 a 的算术平方根而非 a 的立方根.

2. 开立方： 求一个数的立方根的运算，叫做开立方.

特别解读： 立方根与开立方的关系：立方根是一个数，是开立方的结果；而开立方是求一个数的立方根的运算.

提分·必记

特别提醒

立方根与平方根的区别：
1. 被开方数：前者可为任何数，后者为非负数；
2. 根指数：前者不能省略，后者可省略不写；
3. 个数：立方根只有一个，平方根有两个（特殊情况：0的平方根是0）.

拨考向▸利用立方根的定义解题

类型 1：利用立方根的定义求立方根

例 1： 求下列各数的立方根：

（1）-125；（2）$2\frac{10}{27}$；（3）-1.

解题秘方： 根据立方根的定义用立方法求解.

解： （1）$\because (-5)^3=-125$，

$\therefore -125$ 的立方根是 -5，即 $\sqrt[3]{-125}=-5$.

（2）$\because 2\frac{10}{27}=\frac{64}{27}$，而 $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$，

$\therefore 2\frac{10}{27}$ 的立方根是 $\frac{4}{3}$，

即 $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\frac{4}{3}$.

（3）$\because (-1)^3=-1$，

$\therefore -1$ 的立方根是 -1，即 $\sqrt[3]{-1}=-1$.

提分·秘诀

解法提醒

如果被开方数为带分数，一般先将带分数化为假分数，然后再求其立方根. 求一个数的立方根时要注意结果的正负.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用立方根的定义求值

例 2： 已知 $x-2$ 的平方根是 ± 2，$2x+y+7$ 的立方根是 3，求 x^2+y^2 的算术平方根.

解题秘方： 一个数等于它平方根的平方，等于它立方根的立方.

解： ∵ $x-2$ 的平方根是 ± 2，

∴ $x-2=4$.

∴ $x=6$.

∵ $2x+y+7$ 的立方根是 3，

∴ $2x+y+7=27$.

把 $x=6$ 代入 $2x+y+7=27$，解得 $y=8$，

∴ $x^2+y^2=6^2+8^2=100$.

∴ x^2+y^2 的算术平方根为 10.

方法点拨

本题根据平方根中**被开方数等于平方根的平方，立方根中被开方数等于立方根的立方**这一关系，运用方程思想列方程求出 x，y 的值，再根据算术平方根的定义求出 x^2+y^2 的算术平方根.

知识点 2 立方根的性质

1. **性质：**

（1）正数的立方根是正数；

（2）负数的立方根是负数；

（3）0 的立方根是 0；

（4）$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$；

（5）$(\sqrt[3]{a})^3=a$.

2. **平方根与立方根的比较：**

关系 \ 名称		平方根	立方根
区别	定义	如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根	如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根
	性质	正数有两个平方根，它们互为相反数	正数有一个立方根，仍为正数
		负数没有平方根	负数有一个立方根，仍为负数
	表示法	$\pm\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）	$\sqrt[3]{a}$（a 为任意数）
联系		①开平方与开立方都与相应的乘方运算互为逆运算 ②0 的平方根和立方根都是 0	

提分·必记

特别提醒

1. 立方根是它本身的数只有 0 和 ±1.
2. 互为相反数的两个数，它们的立方根也互为相反数，即 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$. 利用“$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$”可以把求一个负数的立方根转化为求一个正数的立方根的相反数.
3. $(\sqrt[3]{a})^3=\sqrt[3]{a^3}=a$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用立方根的性质解题

类型1：利用立方根的性质计算

例3： 求下列各式的值：

（1）$-\sqrt[3]{343}$；（2）$\sqrt[3]{\frac{10}{27}-5}$；

（3）$-\sqrt[3]{-8}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}$.

解题秘方： 根据立方根和平方根的性质进行化简计算.

解： （1）$-\sqrt[3]{343}=-7$.

（2）$\sqrt[3]{\frac{10}{27}-5}=\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$.

（3）$-\sqrt[3]{-8}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(-1)^{100}}=2\div\frac{3}{2}+1=2\times\frac{2}{3}+1=\frac{7}{3}$.

类型2：利用立方根的性质求值

例4： 已知$\sqrt[3]{3y-1}$和$\sqrt[3]{1-2x}$互为相反数，且$x\neq0$，$y\neq0$，求$\frac{x}{y}$的值.

解题秘方： 根据立方根互为相反数，则被开方数互为相反数，建立x与y之间的等量关系求解.

解： ∵$\sqrt[3]{3y-1}$和$\sqrt[3]{1-2x}$互为相反数，

∴ $3y-1$和$1-2x$互为相反数，

即$(3y-1)+(1-2x)=0$.

∴ $3y=2x$.

又∵ $x\neq0$，$y\neq0$，

∴ $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

知识点▶3 用计算器求一个数的立方根

用计算器求一个数的立方根和求一个数的算术平方根的步骤相同，只是按的根指数键不同.

步骤： 按键$\sqrt[3]{\blacksquare}$→被开方数→[=]→根据显示结果写出立方根.

或者： 按键[SHIFT] $\sqrt{\blacksquare}$→被开方数→[=]→根据显示结果写出立方根.

提分·秘诀

解法提醒

做开平方或开立方运算时，一般都是利用它们的定义，运用平方法或立方法去掉根号；当被开方数不是单独一个数时，则需先将它们进行化简，再进行开方运算.

知识储备

正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0的立方根是0，因此只有互为相反数的两个数，它们的立方根才能互为相反数，即互为相反数的两个数的立方根互为相反数.

提分·必记

特别警示

不同型号的计算器按键的顺序可能不同，使用计算器时，一定要按说明书操作.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用计算器求立方根

类型1：利用计算器求立方根

例5： 用计算器求下列各数的立方根：

（1）64；（2）100（精确到0.01）；（3）−13.27（精确到0.001）.

解题秘方： 根据计算器求立方根的步骤进行按键操作.

解：（1）依次按键 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 6 4 =，显示：4.

$\therefore \sqrt[3]{64}=4$.

（2）依次按键 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 1 0 0 =，显示：4.641 588 834.

$\therefore \sqrt[3]{100}\approx 4.64$.

（3）依次按键 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 1 3 · 2 7 =，显示：2.367 501 744.

$\therefore \sqrt[3]{13.27}\approx 2.368$，$\therefore \sqrt[3]{-13.27}\approx -2.368$.

类型2：利用计算器比较大小

例6： 比较下列各组数的大小：

（1）$\sqrt[3]{9}$与$\sqrt{3}$；（2）$-\sqrt[3]{42}$与−3.4；（3）$\sqrt[3]{6}$与2.

解题秘方： 可以用计算器求出各个数的近似数进行比较，也可以借助中间值进行比较.

解：（1）**用中间值法：** $\because 2=\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{9}$，$2=\sqrt{4}>\sqrt{3}$，$\therefore \sqrt[3]{9}>\sqrt{3}$.

（2）**用计算器求值法：** $\because \sqrt[3]{42}\approx 3.476>3.4$，$\therefore -\sqrt[3]{42}<-3.4$.

（3）**用立方法：** $\because (\sqrt[3]{6})^3=6$，$2^3=8$，$6<8$，$\therefore \sqrt[3]{6}<2$.

另解

$|-\sqrt[3]{42}|=\sqrt[3]{42}$，

$|-3.4|=3.4$.

$\because (\sqrt[3]{42})^3=42$，

$3.4^3=39.304$，

$42>39.304$，

$\therefore \sqrt[3]{42}>3.4$.

$\therefore |-\sqrt[3]{42}|>|-3.4|$，

$\therefore -\sqrt[3]{42}<-3.4$.

提分·秘诀

解法提醒

利用互为相反数的两个数的立方根互为相反数这一关系，要求一个负数的立方根，可用计算器先求这个负数的绝对值的立方根，再在这个负数的绝对值的立方根前面加负号，即得这个负数的立方根.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用定义法求字母式子的立方根

例7： 如果$\sqrt[b+4]{a-3b}$为$a-3b$的算术平方根，$\sqrt[a+2]{1-a^2}$为$1-a^2$的立方根，求$2a-3b$的立方根.

解题秘方： 算术平方根的根指数为2，立方根的根指数为3，由此可以分别列出关于a，b的方程，得到a，b后即可求出题目要求的结果.

解： 由题意，得$b+4=2$，$a+2=3$.

$\therefore b=-2$，$a=1$.

$\therefore a-3b=7>0$.

$\therefore 2a-3b=8$，

$\therefore \sqrt[3]{2a-3b}=\sqrt[3]{8}=2$.

a，b的值必须满足算术平方根的被开方数为非负数，否则就无意义

挑战·高分

技巧点拨

解决此题的关键是根据根指数的意义列方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想求立方根中字母的值

例 8： 已知$\sqrt[3]{1-a^2}=1-a^2$，求 a 的值．

解题秘方： $\sqrt[3]{1-a^2}=1-a^2$ 表示 $1-a^2$ 的立方根是它本身，由立方根的性质和立方根等于它本身的数有 0，±1，分情况列方程求解即可．

解： 立方根等于它本身的数有 −1，0，1．当 $1-a^2=-1$ 时，$a=\pm\sqrt{2}$；当 $1-a^2=0$ 时，$a=\pm1$；当 $1-a^2=1$ 时，$a=0$．

故 a 的值为 0，±1，$\pm\sqrt{2}$．

挑战·高分

解法提醒

解决本题用到了**分类讨论**的数学思想，即要根据立方根等于它本身的数有 0，1，−1 进行分类讨论．

拔尖角度▸ 3 利用观察法探究立方根的变化规律

例 9： 观察下列式子，并解决问题：

$\sqrt[3]{0.2}\approx0.584\,8$，$\sqrt[3]{2}\approx1.26$，$\sqrt[3]{20}\approx2.714$，$\sqrt[3]{200}\approx5.848$，$\sqrt[3]{2\,000}\approx12.6$．

（1）你能发现什么规律？用一句话描述出来．

（2）求$\sqrt[3]{0.002}$和$\sqrt[3]{200\,000}$的近似值．

（3）若$\sqrt[3]{x}\approx12.6$，求 x 的值．

解题秘方： 依据被开方数的小数点与立方根的小数点的移动规律求解即可．

解：（1）在开立方运算时，被开方数的小数点每向左（或向右）移动 3 位，立方根的小数点就相应地向左（或向右）移动 1 位．

（2）$\sqrt[3]{0.002}\approx0.126$，$\sqrt[3]{200\,000}\approx58.48$．

（3）$\because\sqrt[3]{x}\approx12.6\approx\sqrt[3]{2\,000}$，$\therefore x\approx2\,000$．

挑战·高分

详解

将$\sqrt[3]{2}$中被开方数的小数点向左移动 3 位，可得$\sqrt[3]{0.002}$，则 1.26 的小数点向左移动 1 位可得$\sqrt[3]{0.002}$的近似值；将$\sqrt[3]{200}$中被开方数的小数点向右移动 3 位，可得$\sqrt[3]{200\,000}$，则 5.848 的小数点向右移动 1 位可得$\sqrt[3]{200\,000}$的近似值．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的重要考点就是立方根，直接考查求立方根是中考的主要考查方式，以选择题的形式为主．立方根的规律探究也是今后考查的一个趋势．

三年中考兵法

考法 1 求一个数的立方根

例 10：［中考·济宁］$\sqrt[3]{-1}$的值是（　　）

A. 1　　B. −1　　C. 3　　D. −3

试题评析： 本题考查了立方根的定义，掌握立方根的定义是解题的关键．

解： $\because\sqrt[3]{-1}$表示的是 −1 的立方根，

又 $(-1)^3=-1$，$\therefore\sqrt[3]{-1}=-1$．

答案： B

冲刺·满分

另解

$\because\sqrt[3]{-1}$表示 −1 的立方根，由立方根的性质知立方根等于本身的数有 ±1，0，

$\therefore\sqrt[3]{-1}=-1$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 立方根的规律探究

例 11：[模拟·潜江]观察下列各式：

①$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$；

②$\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$；

③$\sqrt[3]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$；

④$\sqrt[3]{5\frac{5}{124}}=5\sqrt[3]{\frac{5}{124}}$；…

你能发现其中包含的规律吗？试用含 n（n 为大于 1 的整数）的式子表示出你所发现的规律.

试题评析：本题考查了立方根的规律探究，分析被开方数的变化规律是解题的关键.

解：1. 观察①②③④四个等式左边根号内分数的特点，在四个带分数中，

（1）整数部分与分数部分的分子相等；即 2=2，3=3，4=4，5=5；

（2）整数部分与分数部分的分母有下列关系：$7=2^3-1$，$26=3^3-1$，$63=4^3-1$，$124=5^3-1$；

2. 观察①②③④四个等式右边的“$\sqrt[3]{\ }$”前的倍数正好是被开方数的分子，被开方数是等式左边被开方数的带分数减去带分数的整数部分后的数，所以其中的规律可以表示为：$\sqrt[3]{n+\frac{n}{n^3-1}}=n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$（$n$ 为大于 1 的整数）.

思路点拨

找本题规律分两步：

- 分析左边被开方数的特点：
  1. 整数部分与分子的关系；
  2. 整数部分与分母的关系.
- 分析等式左、右两边的关系，找出等式共同具有的规律.

两年模拟兵法 ☞答案见 225 页

1. [中考·聊城] 64 的立方根是（　　）

A. 4　　B. 8　　C. ±4　　D. ±8

2. 下列说法正确的是（　　）

A. 无论 a 是何值，$-a^2$ 一定没有平方根

B. 一个数若有平方根，则它的平方根是一正、一负两个数

C. 负数没有立方根

D. $-\sqrt[3]{-10}$ 表示 −10 的立方根的相反数

3. 估计 58 的立方根的大小在（　　）

A. 2 与 3 之间　　B. 3 与 4 之间

C. 4 与 5 之间　　D. 5 与 6 之间

4. 一个正方体的体积为 64，则这个正方体的棱长的算术平方根为（　　）

A. ±4　　B. 4

C. ±2　　D. 2

5. 若 $\sqrt{x}=8$，则 $\sqrt[3]{-x}=$_____.

6. 已知 $\sqrt[3]{68.8}\approx4.098$，且 $\sqrt[3]{-x}\approx40.98$，则 $x\approx$_____.

7. 比较 2，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{7}$ 的大小，并用“<”号连接起来：_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 求下列各数的立方根：

（1）1 000；（2）-8；（3）$\frac{27}{125}$；

（4）$-\frac{27}{125}$；（5）$\sqrt{64}$；（6）0.001；

（7）-0.027；（8）1；（9）-1；（10）0.

9. 求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$；（2）$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$；

（3）$\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}$；（4）$\sqrt[3]{-(m+1)^3}$.

10. 求下列各式中 x 的值.

（1）$(x+2)^3+1=0$；

（2）$\frac{1}{4}(2x+3)^3=54$.

11. [模拟 · 重庆] 已知 $A=\sqrt[4a-b-3]{a+2}$ 是 $a+2$ 的算术平方根，$B=\sqrt[3a+2b-9]{2-b}$ 是 $2-b$ 的立方根，求 $A+B$ 的立方根.

12. 求满足 $\sqrt[3]{x+1}-1=x$ 的 x 的值.

13. 小明家楼房的顶层上有一个正方体储水箱坏了，工人师傅打算用铁皮焊制一个新的密封的正方体储水箱，使其最多容纳 1.728 m^3 的水，至少需要多大面积的铁皮?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.2 实数

核心知识
- 无理数
- 实数
- 实数的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 无理数

1. 定义： 无限不循环小数叫做无理数.

判断标准： 小数位数无限，小数形式为不循环.

2. 三种常见形式：

（1）开方开不尽的数，如$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，…；

（2）含有 π 的一类数，如$\frac{1}{3}$π，$\frac{1}{5}$π，π+1，…；

（3）以无限不循环小数的形式出现的特定结构的数，如 0.101 001 000 1…（每相邻两个 1 之间依次多一个 0）.

3. 无理数与有理数的区别：

（1）有限小数和无限循环小数是有理数，而无理数是无限不循环小数；

（2）所有的有理数都可以写成分数的形式（整数可以看成分母为 1 的分数），而无理数不能写成分数的形式.

提分·必记

特别提醒

1. 无理数都是无限小数，但无限小数不一定是无理数，只有无限不循环小数才是无理数. 例如：$0.\dot{3}$是无限小数，但不是无理数.
2. 某些数的平方根或立方根是无理数，但带根号的数不一定都是无理数. 例如$\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{27}$就不是无理数.

拔考向 利用无理数的定义识别无理数

例 1： 下列各数：3.141 59，$-\sqrt[3]{8}$，0.131 131 113…（每相邻两个 3 之间依次多一个 1），π−5，$\sqrt{2}$+1，$-\frac{22}{7}$中，无理数有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方： 根据无理数的三种形式去辨析.

解： ∵ 3.141 59 是有限小数，∴ 3.141 59 是有理数.

∵ $-\sqrt[3]{8}=-2$，∴ $-\sqrt[3]{8}$是有理数.

∵ 0.131 131 113…（每相邻两个 3 之间依次多一个 1）是无限不循环小数，

∴ 0.131 131 113…（每相邻两个 3 之间依次多一个 1）是无理数.

∵ π 是无理数，∴ π−5 是无理数.

∵ $\sqrt{2}$是无理数，∴ $\sqrt{2}$+1 是无理数.

∵ $-\frac{22}{7}$是分数，∴ $-\frac{22}{7}$是有理数. 故选 C.

答案： C

提分·秘诀

特别警示

对有理数和无理数进行区分时，应先对某些数进行计算或化简，然后根据最后结果进行分类，不能仅看到用根号表示的数就认为是无理数.

π 是无理数，化简后含 π 的数也是无理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 实数

1. 定义： 有理数和无理数统称实数.

特别解读：（1）在实数范围内，一个数不是有理数，那么它一定是无理数，反之亦成立.

（2）引入无理数后，数的范围由原来的有理数扩充到实数，今后我们研究问题计算时，若没有特殊说明，就应在实数范围内进行.

2. 分类：

（1）**按定义分类：**

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 0
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数


实数的分类

（2）**按性质分类：**

- 实数
  - 正实数
    - 正有理数
    - 正无理数
  - 0
  - 负实数
    - 负有理数
    - 负无理数

拔考向▶利用实数中各类数的特征进行分类

例 2： 把下列各数填入相应的集合内：

$-\frac{1}{2}$，$-\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\frac{9}{2}$，$-\sqrt[3]{-8}$，0，$-\pi$，$-\frac{119}{3}$，$-4.\dot{2}0\dot{1}$，3.101 001 000 1…（每相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1）.

有理数集合：{ …};

无理数集合：{ …};

整数集合：{ …};

分数集合：{ …};

正实数集合：{ …};

负实数集合：{ …}.

解题秘方： 根据有理数、无理数等概念进行分类时，应注意先把一些数进行化简再进行判断，如 $-\sqrt[3]{-8}=2$.

提分·必记

特别提醒

1. 实数的分类有不同的方法，但不论用哪一种分类的方法，都要按**同一标准**，做到**不重复不遗漏**；
2. 0 既不是正实数也不是负实数.
3. 对实数进行分类时，某些数应先进行计算或化简，然后根据最后结果进行分类. 不能看到带根号的数，就认为是无理数，也不能看到有分数线的数，就认为是有理数.

提分·秘诀

特别警示

判断一个实数的属性（如有理数、无理数）应遵循：一化简，二辨析，三判断.

要注意将“3.101 001 000 1”与“3.101 001 000 1…（每相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1）”区别开. 前者是有限小数，是有理数；后者是无限不循环小数，是无理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：有理数集合：$\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ -\sqrt[3]{-8},\ 0,\ -\frac{119}{3},\ -4.\dot{2}0\dot{1},\ \cdots\right\}$；

无理数集合：$\left\{-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3},\ -\pi,\ 3.101\ 001\ 000\ 1\cdots\text{（每相邻两个1之间0的个数逐次加1）},\ \cdots\right\}$；

整数集合：$\{-\sqrt[3]{-8},\ 0,\ \cdots\}$；

分数集合：$\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ -\frac{119}{3},\ -4.\dot{2}0\dot{1},\ \cdots\right\}$；

正实数集合：$\left\{\frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{9}{2},\ -\sqrt[3]{-8},\ 3.101\ 001\ 000\ 1\cdots\text{（每相邻两个1之间0的个数逐次加1）},\ \cdots\right\}$；

负实数集合：$\left\{-\frac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ -\pi,\ -\frac{119}{3},\ -4.\dot{2}0\dot{1},\ \cdots\right\}$.

判断时要看结果，不要看表面形式，如$-\sqrt[3]{-8}=2$是有理数，而不是无理数.

点知识 3 实数与数轴

1. 实数与数轴间的关系：实数与数轴上的点是一一对应的.

（1）“一一对应”包含着两层含义：

①每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；

②数轴上的每一个点都表示一个实数.

（2）数轴上两点间的距离可用两点所表示的实数来表示，即点A，点B在数轴上表示的数分别为x_1，x_2，则$AB=|x_1-x_2|$.

2. 利用数轴比较实数的大小：对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大.

提分·必记

特别提醒

1. 在数轴上表示无理数时，一般只能通过估算标出其近似位置；
2. 借助数轴上的点可以把实数直观地表示出来，数轴上的任意一点表示的数，不是有理数就是无理数.

拔考向 利用数轴比较实数的大小

例3：用“<”号连接下列各数：

$-\frac{1}{2}$，$\sqrt{3}$，$-2\sqrt{2}$，2.5，0.

解题秘方：比较一组实数的大小和比较一组有理数的大小一样，可先将这些数在数轴上表示出来，然后根据“在数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示的数大”求解.

提分·秘诀

方法点拨

根据“实数与数轴上的点是一一对应的”，并且“在数轴上右边的点表示的数总比左边的点表示的数大”，我们可以利用数形结合思想比较实数的大小.

解：将各数的大致位置在数轴上表示出来，如图11.2-1.

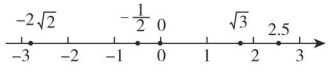


图11.2-1

由图可知，$-2\sqrt{2}<-\frac{1}{2}<0<\sqrt{3}<2.5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶4 实数的性质

1. 相关概念：

（1）**相反数**：实数 a 的相反数为 $-a$，若 a，b 互为相反数，则 $a+b=0$；

（2）**倒数**：非零实数 a 的倒数为 $\frac{1}{a}$，若 a，b 互为倒数，则 $ab=1$；

（3）**绝对值**：$|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0).\end{cases}$

2. 法则法比较实数的大小：

（1）**定义法**：正数大于 0，0 大于一切负数．

（2）**性质法**：两个正数，绝对值大的数大；两个负数，绝对值大的数反而小．

提分·必记

特别提醒

1. 在有理数范围内的一些基本概念（如相反数、倒数、绝对值）在实数范围内依然适用．
2. 对实数的有关概念进行辨析时，错误的说法只需举一个反例即可．

拔考向▶利用实数的性质解决实数的问题

例 4：求下列各数的相反数、倒数和绝对值．

（1）$\sqrt{2}$；（2）$-\sqrt{5}$；（3）$\sqrt{\frac{9}{64}}$；（4）$2-\sqrt{3}$．

解题秘方：利用实数的性质求相反数、倒数、绝对值．

解：（1）$\sqrt{2}$ 的相反数是 $-\sqrt{2}$，倒数是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，绝对值是 $\sqrt{2}$．

（2）$-\sqrt{5}$ 的相反数是 $\sqrt{5}$，倒数是 $-\frac{1}{\sqrt{5}}$，绝对值是 $\sqrt{5}$．

（3）$\sqrt{\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}$，则它的相反数是 $-\frac{3}{8}$，倒数是 $\frac{8}{3}$，绝对值是 $\frac{3}{8}$．

（4）$2-\sqrt{3}$ 的相反数是 $\sqrt{3}-2$，倒数是 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，绝对值是 $2-\sqrt{3}$．

提分·秘诀

方法点拨

- 求一个数的相反数，就是在这个数前面添上“-”号．
- 求一个数的绝对值时，首先要判断所求数的符号，然后根据“正数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数，0的绝对值等于0”写出这个数的绝对值．

点知识▶5 实数的运算

1. 在实数范围内，进行加、减、乘、除、乘方和开方运算时，有理数的运算法则和运算律仍然适用；实数混合运算的运算顺序与有理数的混合运算顺序一样，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，同级运算按照自左向右的顺序进行，有括号的先算括号里面的．

2. 实数的运算律：

加法交换律：$a+b=b+a$；**加法结合律**：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律：$ab=ba$；　**乘法结合律**：$(ab)c=a(bc)$；

乘法分配律：$(a+b)c=ac+bc$.

3. 运算种类：

运算级别	第一级		第二级		第三级	
运算名称	加	减	乘	除	乘方	开方
运算结果	和	差	积	商	幂	方根

提分·必记

特别提醒

1. **有理数的运算律在实数范围内仍然适用，在进行实数运算的过程中，要做到：**

一“看”——看算式的结构特点，能否运用运算律或公式；

二“用”——运用运算律或公式；

三“查”——检查过程和结果是否正确．

2. 计算结果中如果包含开方开不尽的数，则保留根号，结果要化为最简形式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用实数的运算步骤进行计算

例5： 计算：

（1）$\frac{\sqrt{5}}{2}+2.34-\pi$（精确到0.1）；

（2）$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-1)$（精确到0.01）；

（3）$\left(\sqrt[3]{-216}+\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{64}\right)\times\sqrt{\frac{1}{(-0.1)^2}}$.

解题秘方： 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

解： （1）$\frac{\sqrt{5}}{2}+2.34-\pi\approx\frac{1}{2}\times2.24+2.34-3.14\approx0.3$.

（2）$(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-1)\approx(1.732+2.236)\times(1.414-1)=3.968\times0.414\approx1.64$.

（3）$\left(\sqrt[3]{-216}+\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{64}\right)\times\sqrt{\frac{1}{(-0.1)^2}}=\left(-6+\frac{3}{2}+4\right)\times10=-0.5\times10=-5$.

提分·秘诀

方法点拨

实数的运算顺序同有理数的运算顺序.实数运算中，无理数可选取近似值转化为有理数计算，中间结果所取的近似值要比结果要求的近似值多一位小数.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用无理数的相等性质求无理数中字母的值

例6： 若有理数a，b满足$a+\sqrt{2}=3+b\sqrt{2}$，则$a=$_____，$b=$_____.

解题秘方： 根据无理数的结构分析有理数部分和无理数部分，求出字母的值.

解： ∵ a，b为有理数，且满足$a+\sqrt{2}=3+b\sqrt{2}$，∴ $b\sqrt{2}$为无理数.由等号两边的有理数部分和无理数部分要分别对应相等，得$a=3$，$b=1$.

答案： 3；1

挑战·高分

技巧点拨

两个实数相等，可分成两个部分对应相等：有理数部分和有理数部分对应相等，无理数部分和无理数部分对应相等.

拔尖角度▶ 2 利用相反数、倒数、绝对值的性质求值

例7： 若a，b互为相反数，c，d互为倒数，m的绝对值为4，求$\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|$的值.

解题秘方： 根据实数的性质求出各字母的值，然后代入求值.

解： ∵ a，b互为相反数，∴ $a+b=0$.

∵ c，d互为倒数，∴ $cd=1$.

∵ $|m|=4$，∴ $m=\pm4$，∴ $m^2=16$.

∴ $\frac{a+b}{m}-m^2-|\sqrt{2}-cd|=\frac{0}{m}-16-|\sqrt{2}-1|=-16-\sqrt{2}+1=-15-\sqrt{2}$.

挑战·高分

方法点拨

当数从有理数扩充到实数后，有理数中相反数、倒数和绝对值的意义同样适用于实数；由于本例中a，b，c，d的值不确定，因此在求$a+b$，cd的值时，运用了整体思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用实数与数轴的关系化简绝对值

挑战·高分

例 8： 实数 a 在数轴上对应的点的位置如图 11.2-2，化简：$|a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$.

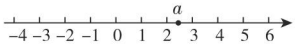


图 11.2-2

解题秘方： 根据数轴判断 a，π，$\sqrt{2}$ 的大小，再判断 $a-\pi$ 与 $\sqrt{2}-a$ 的符号，最后根据绝对值的性质化简.

方法点拨

利用绝对值的性质进行化简的方法：

首先要判断绝对值符号内实数的正负，

再根据“正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数”进行化简.

解： 由图可知 $\sqrt{2}<a<\pi$，

$\therefore a-\pi<0$，$\sqrt{2}-a<0$.

$\therefore |a-\pi|+|\sqrt{2}-a|$

$=\pi-a+a-\sqrt{2}$

$=\pi-\sqrt{2}$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

实数的相关知识是中考的必考内容，这部分概念性的知识点较多，通常以选择题或填空题的形式出现，近几年中考命题集中在有理数、无理数的辨析，实数与数轴上的点的对应关系及运用，进行简单的实数运算等方面.

三年中考兵法

考法 1 利用实数与数轴的对应关系比较式子的大小

例 9： [中考·枣庄] 实数 a，b，c，d 在数轴上的位置如图 11.2-3，下列关系式不正确的是（　　）

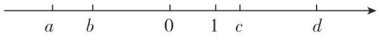


图 11.2-3

A. $|a|>|b|$　　B. $|ac|=ac$　　C. $b<d$　　D. $c+d>0$

冲刺·满分

试题评析： 本题主要考查了数轴的知识，理解相关概念的意义及实数的大小比较方法是解题的关键.

详解

解： 由 a，b，c，d 在数轴上的位置可知，$a<b<0$，$d>c>0$；

A. $|a|>|b|$，故选项正确；

∵ $a<b<0$，

∴ $|a|>|b|$（两个负数，绝对值大的反而小）.

B. a，c 异号，则 $|ac|=-ac$，故选项错误；

C. $b<d$，故选项正确；

D. $d>c>0$，则 $c+d>0$，故选项正确.

由加法法则，同号取原来的符号得出

答案： B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用实数的运算求新定义中式子的值

例 10：[中考·张家界]阅读理解题：

定义：如果一个数的平方等于 -1，记 $i^2=-1$，这个数 i 叫做虚数单位，把形如 $a+bi$（a，b 为实数）的数叫做复数，其中 a 叫做这个复数的实部，b 叫做这个复数的虚部．它的加，减，乘法运算与整式的加，减，乘法运算类似．

例如计算：$(2-i)+(5+3i)=(2+5)+(-1+3)i=7+2i$；

$(1+i)\times(2-i)=1\times(2-i)+i(2-i)=1\times2-i+2\times i-i^2=2+(-1+2)i+1=3+i$.

根据以上信息，完成下列问题：

（1）填空：$i^3=$_____，$i^4=$_____；

（2）计算：$(1+i)\times(3-4i)$；

（3）计算：$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,017}$.

试题评析：本题考查了整式的混合运算，复数的定义，能读懂题意是解此题的关键，主要考查了学生的理解能力和计算能力，难度适中.

解：（1）$-i$；1

（2）$(1+i)\times(3-4i)$

$=1\times(3-4i)+i(3-4i)$

$=3-4i+3i-4i^2$

$=3-i+4$

$=7-i$.

（3）$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,017}=i-1-i+1+\cdots+i=i$.

思路点拨

1. 把 $i^2=-1$ 代入求出即可；
2. 把其中一个多项式看成一个整体，用另一个多项式的每一项去乘，再把所得的积相加，最后把 $i^2=-1$ 代入求出即可；
3. 先根据复数的定义计算，再合并即可求解.

两年模拟兵法 ☞答案见 226 页

1. [中考·长沙]下列实数中，为有理数的是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. π　　C. $\sqrt[3]{2}$　　D. 1

2. [中考·重庆]估计 $5\sqrt{6}-\sqrt{24}$ 的值应在（　　）

A. 5 和 6 之间　　B. 6 和 7 之间

C. 7 和 8 之间　　D. 8 和 9 之间

3. [中考·烟台]用我们数学课本上采用的科学计算器进行计算，其按键顺序如下：

SHIFT	$\sqrt{\blacksquare}$	6	4	+	(	(−)
3	)	x^2	a b/c	2	=	

则输出结果为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{13}{2}$　　C. $\frac{17}{2}$　　D. $\frac{25}{2}$

4. [中考·泰安]下列四个数：-3，$-\sqrt{3}$，$-\pi$，-1，其中最小的数是（　　）

A. $-\pi$　　B. -3

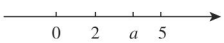
C. -1　　D. $-\sqrt{3}$

5. [中考·邵阳]$3-\pi$ 的绝对值是（　　）

A. $3-\pi$　　B. $\pi-3$

C. 3　　D. π

6. [中考·乐山]在数轴上表示实数 a 的点如图，化简 $\sqrt{(a-5)^2}+|a-2|$ 的结果为_____.



（第 6 题）

7. [中考·陕西]将实数 $\sqrt{5}$，π，0，-6 由小到大用“<”号连接起来，可表示为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 数轴上 A，B 两点对应的实数分别是 $\sqrt{2}$ 和 2，若点 A 关于点 B 的对称点为 C，则点 C 所对应的实数为_____.

9. 把下列各数填入相应的集合内：

-7，0.32，$\frac{1}{3}$，46，0，$-\sqrt{8}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{216}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，5π，$0.\dot{8}\dot{7}$，$\sqrt{16}$.

有理数集合：{ …};

无理数集合：{ …};

负实数集合：{ …}.

10. 计算：

（1）$|-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-2|$；

（2）$(\sqrt{2})^2-\sqrt{(-4)^2}+4\times\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

11. 写出所有符合下列条件的数：

（1）大于 $-\sqrt{19}$ 且小于 $\sqrt{10}$ 的所有整数；

（2）绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数.

12.［**阅读理解题**］阅读下面的文字，解答问题.

大家知道 $\sqrt{2}$ 是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此 $\sqrt{2}$ 的小数部分我们不可能全部写出来，事实上，$\sqrt{2}$ 的整数部分是 1，用 $\sqrt{2}$ 减去其整数部分，差就是小数部分，所以 $\sqrt{2}-1$ 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分.

请解答：

（1）你能求出 $\sqrt{5}+2$ 的整数部分和小数部分吗?

（2）已知 $10+\sqrt{3}=x+y$，其中 x 是整数，且 $0<y<1$，请求出 $x-y$ 的相反数.

素养提分 行动篇

实数应澄清的几个问题

实数是中学数学的一个重要概念，初学者因对其理解不透彻，常会出现一些错误认识，现就几个常见的问题说明如下：

1. 无理数都是无限小数，但反过来无限小数不都是无理数.

2. 带根号的数未必是无理数，不带根号的数也可能是无理数.

3. 有的同学说“$\frac{22}{7}$ 是无理数，因其不循环”，这是一种错误认识，事实上 $\frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,857\dot{}$，该数不是不循环，而是循环节较大，事实上所有的分数都为有理数.

4. 有理数和无理数的个数不可以比较多少，因二者都有无限个，故不能比较其个数的多少.

5. 有的同学说“无理数也分正无理数，0 和负无理数”，这也是一种错误认识，因为 0 属于有理数的范畴，无理数可分为正无理数和负无理数.

6. 有些同学说“有些无理数如 π，很难在数轴上找到表示它的点，因此实数和数轴上的点之间不是一一对应的关系”. 这是对数轴上的点和实数是一一对应关系的一种误解，虽然在数轴上很难找到表示 π 的点，但是不能因为很难就否定它在数轴上的存在性.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平方根概念解题的几个技巧

荣老师告诉你 如果一个数的平方等于 a（$a \geqslant 0$），那么这个数是 a 的平方根，其中正的平方根叫做算术平方根，这个概念在解题中有着重要的应用，同学们想必已经知道．今天要告诉同学们的是它的几个巧妙应用．希望对大家的学习有所帮助．

技巧一 ▶ 巧用被开方数的非负性求值

例 1： 若 $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}-y=6$，求 y^x 的立方根．

解题秘方： 认真观察此题可以发现被开方数为非负数，即 $2-x \geqslant 0$，得 $x \leqslant 2$；$x-2 \geqslant 0$，得 $x \geqslant 2$；进一步可得 $x=2$. 从而可求出 $y=-6$.

解： 由题意得 $2-x \geqslant 0$ 且 $x-2 \geqslant 0$，

$\therefore x \leqslant 2$ 且 $x \geqslant 2$，

即 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$y=-6$.

$\therefore y^x=(-6)^2=36$.

$\therefore y^x$ 的立方根为 $\sqrt[3]{36}$．

方法点拨： 若互为相反数的两个数同时作为根指数为 2 的被开方数，则这两个被开方数都等于 0.

技巧二 ▶ 巧用正数的两个平方根互为相反数求值

例 2： 已知：一个正数的平方根是 $2a-1$ 与 $2-a$，求 a 的平方的相反数的立方根．

解题秘方： 由正数的两个平方根互为相反数，列出以 a 为未知数的方程，求出 a 的值，然后再求 a 的平方的相反数的立方根．

解： ∵一个正数的平方根是 $2a-1$ 与 $2-a$，

$\therefore (2a-1)+(2-a)=0$.

$\therefore a=-1$.

$\therefore a$ 的平方的相反数的立方根是 $\sqrt[3]{-1}=-1$.

方法点拨： 当 $a \geqslant 0$ 时，a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$，而 $(+\sqrt{a})+(-\sqrt{a})=0$，所以一个正数的平方根有两个，它们互为相反数．

技巧三 ▶ 巧用算术平方根的最小值求值

例 3： 已知：$y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，当 a，b 取不同的值时，y 也有不同的值．当 y 最小时，求 b^a 的算术平方根．

解题秘方： $y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，要使 y 最小，就是要使 $\sqrt{a-2}$ 和 $\sqrt{3(b+1)}$ 最小，而 $\sqrt{a-2} \geqslant 0$，$\sqrt{3(b+1)} \geqslant 0$，显然当 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$ 时，y 最小，可得 $a=2$，$b=-1$.

解： ∵$\sqrt{a-2} \geqslant 0$，$\sqrt{3(b+1)} \geqslant 0$，

$y=\sqrt{a-2}+\sqrt{3(b+1)}$，

$\therefore$ 当 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$ 时，y 最小．

由 $\sqrt{a-2}=0$ 和 $\sqrt{3(b+1)}=0$，可得 $a=2$，$b=-1$.

$\therefore b^a$ 的算术平方根是 $\sqrt{(-1)^2}=1$.

方法点拨： $\sqrt{a} \geqslant 0$，即 $a=0$ 时其值最小，换句话说 $\sqrt{a}$ 的最小值是 0.

技巧四 ▶ 巧用平方根定义解方程

例 4： 解方程 $(x+1)^2=36$.

解题秘方： 把 $x+1$ 看成是 36 的平方根即可．

解： ∵$(x+1)^2=36$，

$\therefore x+1$ 是 36 的平方根．

$\therefore x+1=\pm 6$.

$\therefore x=5$ 或 $x=-7$.

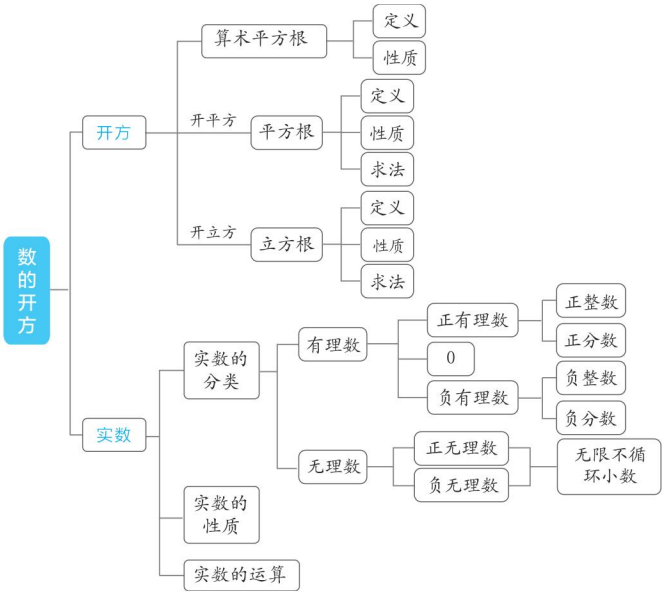
方法点拨： 如果 $x^2=a$（$a \geqslant 0$），那么 x 就是 a 的平方根．若从方程的角度观察，这里的 x 实际是方程 $x^2=a$（$a \geqslant 0$）的根．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 乘方与开方是互逆运算，这种互逆关系是求平方根和立方根的关键所在.
2. 一个正数的平方根有两个，它们互为相反数；0的平方根是0；负数没有平方根.
3. 任何数都有立方根，正数的立方根是正数；负数的立方根是负数；0的立方根是0.
4. 无限不循环小数是无理数，无理数和有理数统称实数.
5. 当数的范围从有理数扩充到实数后，有理数的运算性质、运算律在实数范围内仍然适用.在实数范围内运算时，不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且可以进行开立方运算，任何非负数都可以进行开平方运算.

知识方法专题

知识必学

专题一 平方根与立方根

链接中考» 平方根与立方根的求法是本章的关键也是核心，本知识点也是中考中的常客，考查形式大多数都是填空、选择题，都属于送分题.

例1：[中考·随州] 4的算术平方根是_____，9的平方根是_____，-27的立方根是_____.

解题秘方：根据算术平方根、平方根和立方根的定义求出即可.

解：4的算术平方根是$\sqrt{4}=2$，9的平方根是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\pm\sqrt{9}=\pm3$，-27 的立方根是 $\sqrt[3]{-27}=-3$.

答案： 2；±3；-3

方法点拨： 正数 a 的平方根有两个，记为 $\pm\sqrt{a}$，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根. 正数 a 的正的平方根叫做算术平方根，记为 $\sqrt{a}$. 实数 a 的立方根只有一个，记为 $\sqrt[3]{a}$，正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，0 的立方根是 0.

专题二 无理数的辨别

链接中考》 开方开不尽的数是无理数中的主流，对无理数的识别是对无理数这一知识点最常见的考查方式，一般都是以选择题的形式出现.

例 2： [中考·泰州] 下列 4 个数中，$\sqrt{9}$，$\frac{22}{7}$，π，$(\sqrt{3})^0$，其中无理数是（　　）

A. $\sqrt{9}$　　B. $\frac{22}{7}$　　C. π　　D. $(\sqrt{3})^0$

解题秘方： 根据无理数的概念逐个进行识别.

解： $\sqrt{9}=3$ 是整数，$\frac{22}{7}$ 是分数，$(\sqrt{3})^0=1$（提示：当 $a\neq0$ 时，$a^0=1$）是整数，π 是无理数，故选 C.

答案： C

方法点拨： 无理数是无限不循环小数，在初中阶段常见的无理数包括三种情况：①含有根号且开方开不尽的数；②含有 π 的式子；③特殊结构的数，如 1.010 010 001…（每相邻两个 1 之间依次多一个 0）.

易错点津： 此类问题容易出错的地方：$\frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,857\dot{1}$ 是无限循环小数，有的学生会把它误判为无理数.

专题三 非负数的性质

链接中考》 本章学习了初中阶段的第三类非负数——算术平方根，前面已经学习了两类非负数，一类是绝对值，另一类是偶次幂. 利用非负数的性质可以求含有多个字母的等式中各个字母的值. 可以独立考查，也可以作为其他解答题的条件进行考查.

例 3： 若 $\sqrt{a+2}+|2a-b+1|=0$，则 $(b-a)^{2018}=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 5^{2018}　　D. -5^{2018}

解题秘方： 一个数的绝对值为非负数，一个非负数的算术平方根也是非负数，如果几个非负数的和等于 0，那么它们都等于 0.

解： 由题意得 $a+2=0$ 且 $2a-b+1=0$，解得 $a=-2$，$b=-3$. $\therefore(b-a)^{2018}=1$，故选 B.

答案： B

方法点拨： 初中阶段已学习了三类非负数，①$|a|\geqslant0$；②$a^2\geqslant0$；③$\sqrt{a}\geqslant0$. 如果出现几个非负数的和为 0，那么说明这几个非负数都等于 0.

专题四 实数的大小比较

链接中考》 实数的大小比较方法与有理数的大小比较方法相类似，在中考中也是热门考点，属送分题，考查形式都是选择题.

例 4： [中考·衢州] 在 $\sqrt{2}$，-1，-3，0 这四个实数中，最小的是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. -1　　C. -3　　D. 0

解题秘方： 紧扣实数大小比较的方法进行比较.

解： 首先 4 个数中有正数、负数和 0，由于要求最小的数，依据“正数大于 0”，“0 大于负数”，所以只需比较两个负数的大小. 因为 $-3<-1$，所以最小的数是 -3，故选 C.

答案： C

方法点拨： （1）实数大小比较的一般方法：①定义法：正数都大于 0，负数都小于 0，正数大于一切负数；②两个负数比较大小，绝对值大的反而小；③在数轴上表示的数，右边的数总比左边的数大.

（2）比较无理数的大小时，可先利用平方法估计其在哪两个有理数之间，然后再进行比较.

方法必会

专题五 特殊值法

专题解读》 特殊值法，就是在限定的范围内，取某个特殊的数值来解决问题. 运用特殊值法的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

关键有两条:一是取的特殊值要在限定的范围之内;二是特殊值法只适宜于选择题.

例5:[中考·广元]当 $0<x<1$ 时,x,$\frac{1}{x}$,x^2 的大小顺序是(　　)

A. $\frac{1}{x}<x<x^2$　　B. $x<x^2<\frac{1}{x}$

C. $x^2<x<\frac{1}{x}$　　D. $\frac{1}{x}<x^2<x$

解题秘方:采用特殊值法,取 $x=\frac{1}{2}$,求出 x^2 和 $\frac{1}{x}$ 的值,再比较即可.

解:令 $x=\frac{1}{2}$,则 $x^2=\frac{1}{4}$,$\frac{1}{x}=2$,所以 $x^2<x<\frac{1}{x}$,故答案选 C.

答案:C

方法点拨:实数大小比较的方法:



(1)**数轴比较法:**将 a,b 分别表示在数轴上,右边的数总比左边的数大;

(2)**差值比较法:**$a-b>0$ 等价于 $a>b$;$a-b=0$ 等价于 $a=b$;$a-b<0$ 等价于 $a<b$.

(3)**商值比较法:**设 a,$b>0$,则 $\frac{a}{b}=1$ 等价于 $a=b$;$\frac{a}{b}>1$ 等价于 $a>b$;$\frac{a}{b}<1$ 等价于 $a<b$.

除此之外,还有平方法、倒数法、绝对值法等,在选择题的问题上,还可以采取特殊值法.

专题六 数形结合思想

专题解读»本章数形结合的载体是数轴,依靠数轴反映出数与点的对应关系,运用数形结合的思想方法思考问题,能把抽象的数量关系从形象的几何呈现,也能把几何图形问题转化为数量关系问题去解决.通过数形结合的数学思想方法来学习相反数,绝对值的定义,实数的大小比较等,可以大大减小学习这些知识的难度.

例6:已知实数 m,n 在数轴上的对应点的位置如图 11-1,则下列判断正确的是(　　)

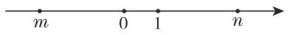


图 11-1

A. $\frac{1}{m}>0$　　B. $|-n|<0$

C. $mn<0$　　D. $m-n>0$

解题秘方:紧扣实数与数轴之间的关系进行逐项辨析.

解:由数轴知 $m<0$,$n>0$,$n>m$,

$\therefore \frac{1}{m}<0$,$|-n|>0$,$mn<0$,$m-n<0$.

$\therefore$ A,B,D 均错误,C 正确.

答案:C

方法点拨:本题运用了数形结合思想,根据实数 m,n 在数轴上的对应点的位置得出 m,n 的符号是解题的关键.

好题必解 ☞答案见 227 页

题型 1:利用实数的相关概念解决问题

1. 实数 -7.5,$\sqrt{15}$,4,$\sqrt[3]{8}$,$-\pi$,$0.\dot{1}\dot{5}$,$\frac{2}{3}$ 中,有理数的个数为 a,无理数的个数为 b,则 $a-b$ 的值为(　　)

A.2　　B.3

C.4　　D.5

2.[中考·东营]$\sqrt{81}$ 的平方根是(　　)

A. ±3　　B.3

C. ±9　　D.9

3. 若 $\sqrt{x+2}=3$,则 $2x+5$ 的平方根是_____.

4. 已知:$M=\sqrt[a-b]{a+b+3}$ 是 $a+b+3$ 的算术平方根,$N=\sqrt[a-2b+2]{a+6b}$ 是 $a+6b$ 的算术平方根,求 $M\cdot N$ 的值.

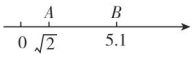
题型 2:利用实数的相关性质解决问题

5. 已知实数 x,y 满足 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$,则 $x-y$ 等于(　　)

A.3　　B.-3　　C.1　　D.-1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. 如图，数轴上A，B两点表示的数分别为$\sqrt{2}$和5.1，则A，B两点之间表示整数的点共有（　　）



（第6题）

A.6个　　B.5个　　C.4个　　D.3个

7. （1）一个非负数的平方根是$2a-1$和$a-5$，这个非负数是多少？

（2）已知$a-1$和$5-2a$都是m的平方根，求a与m的值.

8. 计算：

（1）$\sqrt{0.25}-\sqrt[3]{-27}+\sqrt{(-7)^2}$；

（2）$|\sqrt{3}-\sqrt{2}|+|\sqrt{3}-2|+\sqrt{(-2)^2}$；

（3）$|\sqrt{3}-2|+\sqrt[3]{-8}+\sqrt{(-2)^2}-|-2|$.

9. 求下列各式中x的值：

（1）$25(x-1)^2=49$；

（2）$64(x-2)^3-1=0$.

题型3：利用实数的大小估算解决问题

10. 若$\sqrt[3]{0.367}\approx 0.716$，$\sqrt[3]{3.67}\approx 1.542$，则$\sqrt[3]{367}\approx$_____.

11. 由下列等式$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$，…，所提示的规律，可得出一般性的结论是_____（用含n的式子表示）.

12. 已知a为$\sqrt{250}$的整数部分，$b-1$是400的算术平方根，求$\sqrt{a+b}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 11 章测试卷 ☞答案见 228 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. $\frac{1}{4}$的平方根是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\pm\frac{1}{2}$　　D. $\pm\frac{1}{4}$

2. 下列实数是无理数的是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\sqrt{14}$

C. 0　　D. $-1.010\,101$

3. 下列运算中，正确的是（　　）

A. $\sqrt{25^2-1}=24$　　B. $\sqrt{9\frac{1}{4}}=3\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{81}=\pm9$　　D. $-\sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2}=-\frac{4}{15}$

4. 下列四个数：-3，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，-1，其中最小的数是（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. -3　　C. -1　　D. $-\sqrt{3}$

5. 若一个数的平方根与立方根都是它本身，则这个数是（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. ±1，0

6. 如图，数轴上点 A 表示的数可能是（　　）



（第 6 题）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

7. 关于$\sqrt{8}$的叙述，正确的是（　　）

A. 在数轴上不存在表示$\sqrt{8}$的点

B. $\sqrt{8}=2$

C. $\sqrt{8}$表示 8 的平方根

D. 与$\sqrt{8}$最接近的整数是 3

8. 已知 $\sqrt{a-1}+|b+2|=0$，则 $\sqrt{(a+b)^2}$ 的值为（　　）

A. 0　　B. 2　　C. -1　　D. 1

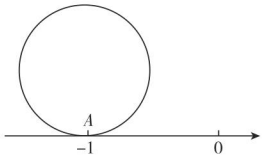
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. $\sqrt{3}-2$ 的相反数是_____，绝对值是_____.

10. 比较大小：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$_____0.5.（填“>”或“<”）

11. 一个正数 x 的平方根是 $3a-4$ 和 $1-6a$，则 $a=$_____，$x=$_____.

12. 如图，已知直径为 1 个单位长度的圆形纸片上的点 A 与数轴上表示 -1 的点重合．若将该圆形纸片沿数轴正方向滚动一周（无滑动）后点 A 与数轴上的点 A' 重合，则点 A' 表示的数为_____.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（12 分）计算：

（1）$|-2|+(-3)^2-\sqrt{4}$；

（2）$\sqrt{6}\times\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}\right)$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）$\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|$.

14.（10 分）求下列各式中 x 的值.

（1）$4x^2-9=0$;

（2）$8(x-1)^3=-\frac{125}{8}$.

15.（10 分）已知一个正方体的体积是 1 000 cm^3，现在要在它的 8 个角上分别截去 8 个大小相同的小正方体，使得截去后余下的体积是 488 cm^3，问截去的每个小正方体的棱长是多少?

16.（10 分）已知 a 是 $\sqrt{10}$ 的整数部分，b 是它的小数部分，求 $(-a)^3+(b+3)^2$ 的值.

17.（10 分）借助于计算器计算下列各题：

（1）$\sqrt{11-2}$;

（2）$\sqrt{1\,111-22}$;

（3）$\sqrt{111\,111-222}$;

（4）$\sqrt{11\,111\,111-2\,222}$.

仔细观察上面几道题及其计算结果，你能发现什么规律? 并用发现的这一规律直接写出下面的结果：$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2\,018\text{ 个 }1}-\underbrace{22\cdots2}_{1\,009\text{ 个 }2}}=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

品赏恒等变形的魅力

品赏恒等变形的魅力











第12章 整式的乘除

核心考点

你将见到的

- 幂的运算
  - （1）同底数幂的乘除法
  - （2）幂的乘方
  - （3）积的乘方
- 整式的乘除法
- 乘法公式
- 因式分解

核心方法

我们为你提供的

- 底数比较法
- 指数比较法
- 待定系数法
- 分组分解法
- 整体思想
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.1 幂的运算

核心知识
- 同底数幂的乘法
- 幂的乘方
- 积的乘方
- 同底数幂的除法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 1 同底数幂的乘法

1. 同底数幂的乘法法则： 同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

即：用字母表示为 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 为正整数）.

示例：

指数相加

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 为正整数）

底数不变

2. 法则的拓展运用：

（1）同底数幂的乘法法则对于三个及三个以上同底数幂相乘同样适用，即：$a^m \cdot a^n \cdot \cdots \cdot a^p = a^{m+n+\cdots+p}$（$m$，$n$，…，$p$ 为正整数）.

（2）同底数幂的乘法法则既可正用也可逆用，即：$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$（m，n 为正整数）.

提分·必记

特别解读

1. 运用此法则有两个关键条件：一是底数相同；二是指数相加. 两者缺一不可.
2. 指数相加的和作为积中幂的指数，即运算结果仍然是幂的形式.
3. 单个字母或数字可以看成指数为1的幂，运算时易漏掉.

拔考向▶ 利用同底数幂的乘法法则进行幂的计算

题型1：同底数幂的乘法法则在计算中的应用

例1： 计算：

（1）$10^8 \times 10^2$；（2）$x^7 \cdot x$；（3）$a^{n+2} \cdot a^{n-1}$；

（4）$-x^2 \cdot (-x)^8$；（5）$(x+3y)^3 \cdot (x+3y)^2 \cdot (x+3y)$；

（6）$(x-y)^3 \cdot (y-x)^4$.

解题秘方： 紧扣同底数幂的乘法法则的特征进行计算.

解： （1）$10^8 \times 10^2 = 10^{8+2} = 10^{10}$.（2）$x^7 \cdot x = x^{7+1} = x^8$.

（3）$a^{n+2} \cdot a^{n-1} = a^{n+2+n-1} = a^{2n+1}$.（4）$-x^2 \cdot (-x)^8 = -x^2 \cdot x^8 = -x^{10}$.

（5）$(x+3y)^3 \cdot (x+3y)^2 \cdot (x+3y) = (x+3y)^{3+2+1} = (x+3y)^6$.

（6）$(x-y)^3 \cdot (y-x)^4 = (x-y)^3 \cdot (x-y)^4 = (x-y)^7$.

特别提醒： 运用同底数幂的乘法法则计算时应注意以下几点：

1. 底数既可以是单项式也可以是多项式，当底数是多项式时，应将多项式看成一个整体进行计算.

2. 底数不同时，若能化成相同底数，则先转化为同底数幂，再按法则计算.

提分·秘诀

解法提醒

化不同底数为同底数常用到的两种变形：

1. $(-a)^n = \begin{cases} a^n (n\text{为正偶数}), \\ -a^n (n\text{为正奇数}); \end{cases}$

2. $(a-b)^n = \begin{cases} (b-a)^n (n\text{为正偶数}), \\ -(b-a)^n (n\text{为正奇数}). \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：同底数幂的乘法法则在求整式值中的逆用

例 2：（1）若 $a^m=2$，$a^n=8$，求 a^{m+n} 的值．

（2）已知 $2^x=3$，求 2^{x+3} 的值．

解题秘方：逆用同底数幂的乘法法则，即 $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$.

解：（1）$\because a^m=2$，$a^n=8$，$\therefore a^{m+n}=a^m\cdot a^n=2\times 8=16$.

（2）$\because 2^x=3$，$\therefore 2^{x+3}=2^x\cdot 2^3=3\times 8=24$.

解法提醒

此题逆用同底数幂的乘法法则，将幂 a^{m+n}，2^{x+3} 转化为同底数幂的乘法，然后把已知条件整体代入求值，体现了整体思想的应用．

点知识 ▶ 2 幂的乘方

1. 幂的乘方法则：幂的乘方，底数不变，指数相乘．

即：用字母表示为 $(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 为正整数）．

示例：

指数相乘

$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 为正整数）

底数不变



提分·必记

特别解读

1. “底数不变”是指幂的底数 a 不变，“指数相乘”是指幂的指数 m 与乘方的指数 n 相乘．
2. 底数可以是一个单项式，也可以是一个多项式．

2. 法则的拓展运用：

（1）幂的乘方运算法则的推广：$[(a^m)^n]^p=a^{mnp}$（m，n，p 为正整数）；

（2）幂的乘方法则既可以正用，也可以逆用，逆用时 $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$（m，n 为正整数）．

拔考向 ▶ 利用幂的乘方法则进行乘方计算

类型 1：幂的乘方法则在计算中的应用

例 3：计算：

（1）$[(-x)^3]^4$；　　（2）$[(x-2y)^3]^4$；

（3）$(-a^2)^3$；　　（4）$x^2\cdot x^4+(x^2)^3$.

解题秘方：紧扣幂的乘方法则的特征进行计算．

解：（1）$[(-x)^3]^4=(-x)^{3\times 4}=(-x)^{12}=x^{12}$.

（2）$[(x-2y)^3]^4=(x-2y)^{3\times 4}=(x-2y)^{12}$.

（3）$(-a^2)^3=-a^{2\times 3}=-a^6$.

（4）$x^2\cdot x^4+(x^2)^3=x^6+x^6=2x^6$.

若出现混合运算时，先算乘方，再算乘法，最后算加减

提分·秘诀

解法提醒

用幂的乘方法则计算时，不要把幂的乘方与同底数幂的乘法混淆，其相同点都是底数不变，不同点是同底数幂的乘法为指数相加，而幂的乘方为指数相乘．

类型 2：幂的乘方法则在求整式值中的逆用

例 4：已知 $a^{2n}=3$，求 $a^{4n}-a^{6n}$ 的值．

解题秘方：此题已知 $a^{2n}=3$，需逆用幂的乘方法则把 $a^{4n}-a^{6n}$ 用 a^{2n} 表示，再把 $a^{2n}=3$ 整体代入求值．

解：$a^{4n}-a^{6n}=(a^{2n})^2-(a^{2n})^3=3^2-3^3=9-27=-18$.

方法点拨

逆用幂的乘方求式子值的方法：

把指数是积的形式的幂写成幂的乘方，如 $a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$（m，n 都是正整数），然后整体代入，求代数式的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 积的乘方

1. 积的乘方法则： 积的乘方，把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

即：用字母表示为 $(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数）.

示例：

$(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数）

分别乘方



2. 法则的拓展运用：

（1）积的乘方法则的推广：$(abc)^n=a^nb^nc^n$（n 为正整数）；

（2）积的乘方法则既可以正用，也可以逆用，逆用时 $a^nb^n=(ab)^n$（n 为正整数）.

拔考向▶ 利用积的乘方法则进行积的乘方计算

类型 1：积的乘方法则在计算中的应用

例 5： 计算：

（1）$(x\cdot y^3)^2$；　　（2）$(-3\times10^2)^3$；

（3）$\left[\left(-\frac{1}{3}a^3\right)^2\right]^2$；　　（4）$(-a^2b^3)^3$.

解题秘方： 运用积的乘方、幂的乘方的运算法则进行计算.

解：（1）$(x\cdot y^3)^2=x^2\cdot(y^3)^2=x^2y^6$.

（2）$(-3\times10^2)^3=(-3)^3\times(10^2)^3=-27\times10^6=-2.7\times10^7$.

（3）$\left[\left(-\frac{1}{3}a^3\right)^2\right]^2=\left(\frac{1}{9}a^6\right)^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2\cdot(a^6)^2=\frac{1}{81}a^{12}$.

（4）$(-a^2b^3)^3=(-1)^3\cdot(a^2)^3\cdot(b^3)^3=-a^6b^9$.

类型 2：积的乘方法则在计算中的逆用

例 6： 计算：（1）$4^8\times0.25^8$；

（2）$\left(-\frac{3}{4}\right)^{2\,020}\times\left(1\frac{1}{3}\right)^{2\,020}$.

解题秘方： 紧扣两底数互为倒数（或负倒数），而指数又是相同的这一特征，逆用积的乘方进行计算.

解：（1）$4^8\times0.25^8=(4\times0.25)^8=1^8=1$.

（2）$\left(-\frac{3}{4}\right)^{2\,020}\times\left(1\frac{1}{3}\right)^{2\,020}$

$=\left(-\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)^{2\,020}$

$=(-1)^{2\,020}=1$.

提分·必记

特别提醒

1. 积的乘方的前提是底数是乘积的形式，每个因式可以是单项式，也可以是多项式.
2. 在进行积的乘方时，要把底数中的每个因式分别乘方，不要漏掉任何一项.
3. 积的乘方的底数为乘积的形式，若底数为和的形式不能用，即 $(a+b)^n=a^n+b^n$ 不一定成立.

提分·秘诀

解法提醒

1. 利用积的乘方法则计算时，要先确定积中的因式，然后将每个因式都乘方，最后求出所有幂的积.
2. 系数乘方时，要带前面符号，特别是系数为 -1 时，不要漏掉.
3. 科学记数法形式的数乘方最后的结果应该用科学记数法形式表示.

方法点拨

求指数相同的几个幂相乘的方法：

当指数相同的两个或几个幂相乘时，如果底数的积容易求出，利用 $a^nb^n=(ab)^n$ 可先把底数相乘再进行乘方运算，从而使运算简便.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶4 同底数幂的除法

1. 同底数幂的除法法则：

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

即：用字母表示为 $a^m \div a^n = a^{m-n}$（m，n 为正整数，且 $m>n$，$a \neq 0$）.

2. 法则的拓展运用：

（1）法则的推广：适用于三个及三个以上的同底数幂相除，即 $a^m \div a^n \div a^p = a^{m-n-p}$（$m$，$n$，$p$ 都是正整数，且 $m>n+p$，$a \neq 0$）；

（2）同底数幂的除法法则既可以正用，也可以逆用，逆用时 $a^{m-n} = a^m \div a^n$（m，n 都是正整数，且 $m>n$，$a \neq 0$）.

技考向▶利用同底数幂的除法法则进行幂的除法计算

类型 1：同底数幂的除法法则在计算中的应用

例 7： 计算：

（1）$(-x)^8 \div (-x)^4$；

（2）$(x-y)^7 \div (y-x)^5$.

解题秘方： 同底数幂相除，底数不变，指数相减.

解：（1）$(-x)^8 \div (-x)^4$

$= (-x)^{8-4}$

$= (-x)^4$

$= x^4$.

（2）$(x-y)^7 \div (y-x)^5$

$= (x-y)^7 \div [-(x-y)^5]$

$= -(x-y)^{7-5}$

$= -(x-y)^2$.

类型 2：逆用同底数幂的除法法则在求整式的值中的应用

例 8： 已知 $x^m=9$，$x^n=27$，求 x^{3m-2n} 的值.

解题秘方： 逆用同底数幂的除法法则，即 $a^{m-n} = a^m \div a^n$（$a \neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$），进行变形求值.

解： $x^{3m-2n} = x^{3m} \div x^{2n}$

$= (x^m)^3 \div (x^n)^2$

$= 9^3 \div 27^2$

$= 1$.

方法点拨： 逆向运用同底数幂乘除法法则求值的方法：

当幂的指数是含有字母的加法时，通常转化为同底数幂的乘法；当幂的指数是含有字母的减法时，通常转化为同底数幂的除法；当幂的指数是含有字母的乘法时，通常转化为幂的乘方，然后逆用法则并整体代入求值.

提分·必记

特别解读

1. 运用法则的关键有两个：一是底数相同，二是除法运算，二者缺一不可.
2. 底数 a 可以是单项式，也可以是多项式，但底数 a 不能为 0.
3. 同底数幂相除，底数不变，指数相减，而不是相除.

提分·秘诀

知识储备

1. 底数互为相反数的偶次幂相等，奇次幂仍然互为相反数，即：
$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$，
$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}$.
2. 同底数幂的除法直接运用法则计算，底数互为相反数的幂相除，先化为同底数幂，然后再利用法则计算.

解法提醒

- 观察 x^{3m-2n} 的特征可以发现，其指数里含减号，可逆用同底数幂的除法法则解题.
- $9^3 \div 27^2$
$= (3^2)^3 \div (3^3)^2$
$= 3^6 \div 3^6 = 1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用运算顺序法进行幂的运算

挑战·高分

例 9： 计算：

（1）$(2\times10^2)^3\times(-10^3)^4$；

（2）$[(a^2)^3+(2a^3)^2]^2$；

（3）$(-2a)^6-(-3a^3)^2+[-(2a)^2]^3$.

解题秘方： 在幂的混合运算中，先计算积的乘方，再计算幂的乘方，同底数幂的乘法，最后计算加减.

解：（1）$(2\times10^2)^3\times(-10^3)^4=8\times10^6\times10^{12}=8\times10^{18}$.

（2）$[(a^2)^3+(2a^3)^2]^2=(a^6+4a^6)^2=(5a^6)^2=25a^{12}$.

（3）$(-2a)^6-(-3a^3)^2+[-(2a)^2]^3=64a^6-9a^6-64a^6=-9a^6$.

方法点拨

综合应用幂的运算法则时，既要把握各种幂的运算法则，又要注意各种运算之间的顺序.

拔尖角度 2 利用逆向计算法解幂的运算中的计算求值应用

挑战·高分

类型 1：逆用幂的运算法则求值

例 10： 已知 $10^a=5$，$10^b=6$，求 10^{2a+3b} 的值.

解题秘方： 将要求的式子逆用幂的各种运算法则，变形成已知的幂的形式，整体代入求值.

解： $10^{2a+3b}=10^{2a}\cdot10^{3b}=(10^a)^2\cdot(10^b)^3=5^2\times6^3=25\times216=5\,400$.

解法提醒

同底数幂的乘法及幂的乘方的运算法则都可以逆用，逆用时注意指数的变化情况.

类型 2：逆用幂的运算法则巧算

例 11： 用简便方法计算：

（1）$\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times0.25^4\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\times(-4)^4$；

（2）$0.125^{2\,019}\times(-8^{2\,020})$.

解题秘方： 本例题如果按照常规方法进行运算，（1）题比较麻烦，（2）题无法算出结果，因此需采用非常规方法进行计算.（1）观察该式的特点可知，需利用乘法的交换律和结合律，并逆用积的乘方法则计算；（2）$8^{2\,020}=8^{2\,019}\times8$，故该式应逆用同底数幂的乘法和积的乘方法则计算.

解：（1）$\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times0.25^4\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\times(-4)^4$

$=\left[\left(-1\frac{2}{5}\right)^6\times\left(\frac{5}{7}\right)^6\right]\times[0.25^4\times(-4)^4]$

$=\left(-\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}\right)^6\times(-0.25\times4)^4=1\times1=1$.

（2）$0.125^{2\,019}\times(-8^{2\,020})=-0.125^{2\,019}\times8^{2\,020}$

$=-0.125^{2\,019}\times8^{2\,019}\times8=-(0.125\times8)^{2\,019}\times8$

$=-1^{2\,019}\times8=-8$.

技巧点拨

底数互为倒数（负倒数）的两个幂相乘的常用方法：

先通过逆用同底数幂的乘法法则化为指数相同的幂，然后逆用积的乘方法则计算，从而大大简化运算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用方程思想巧求幂的运算式子中的字母值

挑战·高分

例 12： 已知 $16^m=4\times2^{2n-2}$，$27^n=9\times3^{m+3}$，求 m，n 的值．

解题秘方： 利用幂的运算性质对已知式子进行变形，再构造方程组求解．

解： ∵ $16^m=4\times2^{2n-2}$，∴ $(2^4)^m=2^2\times2^{2n-2}$．

∴ $2^{4m}=2^{2n}$．∴ $4m=2n$，即 $2m=n$．

∵ $27^n=9\times3^{m+3}$，

∴ $(3^3)^n=3^2\times3^{m+3}$．

∴ $3^{3n}=3^{m+5}$．∴ $3n=m+5$．

∴ $\begin{cases}2m=n,\\3n=m+5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2.\end{cases}$

解法提醒

由幂的乘方、同底数幂相乘的法则将等式两边的幂进行变形，得到同底数的幂相等，再根据指数相等列方程求解．

拔尖角度▸ 4 利用幂的转化法比较幂的大小

类型 1：底数比较法在比较大小中的应用

挑战·高分

例 13： 比较大小：3^{555}，4^{444}，5^{333}．

解题秘方： 这三个数的底数不同，指数也不同，不能直接比较．通过观察发现三个数的指数都是 111 的倍数，故可考虑逆用幂的乘方法则进行变形．

解： $3^{555}=(3^5)^{111}=243^{111}$，

$4^{444}=(4^4)^{111}=256^{111}$，

$5^{333}=(5^3)^{111}=125^{111}$．

∵ $125<243<256$，

∴ $125^{111}<243^{111}<256^{111}$，

即 $5^{333}<3^{555}<4^{444}$．

方法点拨

对于底数、指数均为正整数的幂的大小比较，一般有两种方法：

1. **底数比较法**：当幂的指数相同时，底数大幂就大；
2. **指数比较法**：当幂的底数相同且都大于 1 时，指数大的幂就大．

类型 2：指数比较法在比较大小中的应用

例 14： 已知 $a=16^6$，$b=8^9$，$c=4^{13}$，试比较 a，b，c 的大小．

解题秘方： 将这三个数化成同底数幂，比较指数的大小即可．

解： $a=16^6=(2^4)^6=2^{24}$，$b=8^9=(2^3)^9=2^{27}$，$c=4^{13}=(2^2)^{13}=2^{26}$．

∵ $24<26<27$，

∴ $2^{24}<2^{26}<2^{27}$，即 $a<c<b$．

解法提醒

这三个数的指数不同，底数 16，8，4 都可以化为 2 的乘方的形式，故可将这三个数化成以 2 为底的幂的形式，比较指数的大小，当指数、底数均大于 1 时，底数相同，指数越大，幂越大．

拔尖角度▸ 5 利用幂的运算性质说明整除问题

挑战·高分

例 15： 如果 3^n+m 能被 13 整除，那么试说明 $3^{n+3}+m$ 也能被 13 整除．

解题秘方： 只要说明 13 是 $3^{n+3}+m$ 的一个因式即可．

解： $3^{n+3}+m=3^n\times3^3+m=27\times3^n+m=26\times3^n+(3^n+m)$．

∵ 26×3^n 和 3^n+m 都能被 13 整除，

∴ $26\times3^n+(3^n+m)$ 能被 13 整除，即 $3^{n+3}+m$ 能被 13 整除．

方法点拨

判断一个式子能否被一个数整除，只要把这个式子写成含有这个数的乘积的形式即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 同底数幂的乘法、幂的乘方和积的乘方是中考的常考内容，多以选择题、填空题的形式出现.幂的运算既可以单独命题，也可以渗透在其他知识中，综合考查学生的运算能力.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用幂的运算法则进行辨析

例16：[中考·无锡] 下列运算正确的是（　　）

A. $a^2+a^3=a^5$　　B. $(a^2)^3=a^5$

C. $a^4-a^3=a$　　D. $a^4\div a^3=a$

试题评析： 此题主要考查了幂的乘方运算、同底数幂的除法运算以及合并同类项，正确掌握相关运算法则是解题的关键.

解： 由幂的运算法则与合并同类项法则可知：∵ a^2 与 a^3 不是同类项，不能合并，∴ A选项错误；∵ $(a^2)^3=a^6$，∴ B选项错误；∵ a^4 与 $-a^3$ 不是同类项，不能合并，∴ C选项错误；∵ $a^4\div a^3=a^{4-3}=a$，∴ D选项正确.

答案： D

解法提醒

幂的运算在中考中一般都是直接考查，关键是把握好运算法则，不可相互混淆，特别是指数的运算何时加，何时乘都必须明确.

考法2 利用幂的运算法则求字母的值

例17：[中考·河北] 若 $2^n+2^n+2^n+2^n=2$，则 $n=$（　　）

A. -1　　B. -2　　C. 0　　D. $\frac{1}{4}$

试题评析： 本题考查了合并同类项、同底数幂的乘法，熟练掌握运算法则是解题的关键.

解： ∵ $2^n+2^n+2^n+2^n=2$，∴ $4\cdot 2^n=2$，

∴ $2^2\cdot 2^n=2$，∴ $2^{2+n}=2$，

∴ $2+n=1$，∴ $n=-1$.

答案： A

思路点拨

利用乘法的意义得到 $4\cdot 2^n=2$，$2^2\cdot 2^n=2$，根据同底数幂的乘法得到 $2^{2+n}=2$，即 $2+n=1$，从而解关于 n 的方程即可.

两年模拟兵法

☞答案见228页

1. [中考·黄石] 下列计算中，结果是 a^7 的是（　　）

A. a^3-a^4　　B. $a^3\cdot a^4$

C. a^3+a^4　　D. $a^3\div a^4$

2. [期末·邢台] 下面是芳芳同学计算 $(a\cdot a^2)^3$ 的过程：

解：$(a\cdot a^2)^3=a^3\cdot(a^2)^3$…①

$=a^3\cdot a^6$…②

$=a^9$…③

则步骤①②③依据的运算性质分别是（　　）

A. 积的乘方，幂的乘方，同底数幂的乘法

B. 幂的乘方，积的乘方，同底数幂的乘法

C. 同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方

D. 幂的乘方，同底数幂的乘法，积的乘方

3. 若 $x^m=3$，$x^n=9$，则 x^{m+n} 的值为（　　）

A. 12　　B. 27

C. 9^3　　D. -3^9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.[中考·株洲]下列等式错误的是(　　)

A. $(2mn)^2=4m^2n^2$　　B. $(-2mn)^2=4m^2n^2$

C. $(2m^2n^2)^3=8m^6n^6$　　D. $(-2m^2n^2)^3=-8m^5n^5$

5.[中考·苏州]若 $3\times9^m\times27^m=3^{21}$，则 m 的值为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

6.计算 $(-4\times10^3)^2\times(-2\times10^3)^3$ 的结果为(　　)

A. 1.28×10^{17}　　B. -1.28×10^{17}

C. 4.8×10^{16}　　D. -2.4×10^{16}

7.[期末·岱岳区]已知 $2x+5y-3=0$，则 $4^x\cdot32^y$ 的值为(　　)

A. 4　　B.8　　C.32　　D.128

8.计算：

(1) $(-a)^3\cdot(-a)^2\cdot a^4$；

(2) $(-x)^2\cdot x^n\cdot x\cdot(-x)^5$；

(3) $[(a^4)^3\cdot(a^4)^3]\div(a^6)^2\div(-a^3)^2$.

9.已知 $a^m=2$，$a^n=3$，求 a^{2m+3n} 的值.

10.计算：

$$(-0.125)^{12}\times\left(-1\frac{2}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9.$$

11.试判断 $2^{12}\times5^8$ 的结果是一个几位正整数.

12.已知 $2^n=a$，$5^n=b$，$20^n=c$，探究 a，b，c 之间有什么关系.　　【导学号：6994214】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.2 整式的乘法

核心知识
- 单项式与单项式相乘
- 单项式与多项式相乘
- 多项式与多项式相乘

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 单项式与单项式相乘

1. 单项式乘法法则：单项式与单项式相乘，只要将它们的系数、相同字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式中出现的字母，连同它的指数一起作为积的一个因式.

2. 单项式与单项式相乘的步骤：

（1）确定积的系数，积的系数等于各项系数的积；

（2）同底数幂相乘，底数不变，指数相加；

（3）只在一个单项式里出现的字母，要连同它的指数写在积里.



3. 单项式乘法法则的实质是乘法交换律、乘法结合律和同底数幂的乘法的性质的综合运用.

提分·必记

特别提醒

1. 单项式与单项式相乘的结果仍为单项式；
2. 只在一个单项式里含有的字母，写积时不要遗漏；
3. 单项式乘法法则对于三个及三个以上的单项式相乘同样适用.

拔考向 利用单项式与单项式相乘的法则进行单项式计算

例 1：计算：

（1）$4xy^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)$；

（2）$(0.3x^3y^4)^2\cdot(-0.2x^4y^3)^2$；

（3）$5x\cdot\left(\frac{1}{3}ax\right)\cdot(-2.25axy)\cdot(-3x^2y^2)$；

（4）$5a^3b\cdot(-3b)^2+(-6ab)^2\cdot(-ab)-ab^3\cdot(-4a)^2$.

解题秘方：紧扣单项式乘单项式的法则，并按步骤进行计算.

解：（1）$4xy^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)=\left[4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot x^{1+2}y^{2+1}z=-2x^3y^3z$.

（2）$(0.3x^3y^4)^2\cdot(-0.2x^4y^3)^2=0.09x^6y^8\cdot0.04x^8y^6$

$=(0.09\times0.04)x^{6+8}y^{8+6}=0.003\,6x^{14}y^{14}$.

（3）$5x\cdot\left(\frac{1}{3}ax\right)\cdot(-2.25axy)\cdot(-3x^2y^2)$

$=\left[5\times\frac{1}{3}\times(-2.25)\times(-3)\right]a^{1+1}x^{1+1+1+2}y^{1+2}=\frac{45}{4}a^2x^5y^3$.

（4）$5a^3b\cdot(-3b)^2+(-6ab)^2\cdot(-ab)-ab^3\cdot(-4a)^2$

$=5a^3b\cdot9b^2+36a^2b^2\cdot(-ab)-ab^3\cdot16a^2$

$=45a^3b^3-36a^3b^3-16a^3b^3=-7a^3b^3$.

提分·秘诀

解法提醒

(1)(3)两题可按单项式与单项式相乘的法则直接进行计算，即把系数与同底数的幂分别相乘，(2)(4)两题是混合运算，要注意运算顺序，应先算乘方，再算乘法，最后算加减.

单项式与单项式相乘时，要依据其法则依次运算，特别要注意积的符号，凡是在单项式里出现过的字母，在其结果里也应全都有，不能漏掉.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 单项式与多项式相乘

1. 单项式乘多项式法则：

单项式与多项式相乘，将单项式分别乘以多项式的每一项，再将所得的积相加.

即：用字母表示为 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$.

2. 单项式与多项式相乘的几何解释：

如图 12.2−1，大长方形的面积可以表示为 $p(a+b+c)$，也可以视为三个小长方形的面积之和，所以大长方形的面积也可以表示为 $pa+pb+pc$. 所以 $p(a+b+c)=pa+pb+pc$.

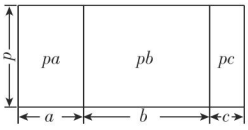


图 12.2−1



技考向▶利用单项式乘多项式法则进行单项式与多项式的计算

例 2： 计算：

$(1)(-3x)(-2x^2+1)$；$(2)(3xy^2-6xy-1)\cdot\frac{1}{3}xy$.

解题秘方： 用单项式乘多项式的法则进行计算.

解： $(1)(-3x)(-2x^2+1)$

$=(-3x)\cdot(-2x^2)+(-3x)\times 1=6x^3-3x$.

$(2)(3xy^2-6xy-1)\cdot\frac{1}{3}xy$

$=3xy^2\cdot\frac{1}{3}xy+(-6xy)\cdot\frac{1}{3}xy+(-1)\cdot\frac{1}{3}xy$

$=x^2y^3-2x^2y^2-\frac{1}{3}xy$.

点知识▶3 多项式与多项式相乘

1. 多项式乘多项式法则：

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

即：用字母表示为 $(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn$.

2. 多项式与多项式相乘的几何解释：

如图 12.2−2，大长方形的面积可以表示为 $(a+b)(p+q)$，也可以将大长方形的面积看作 4 个小长方形的面积之和，即 $ap+aq+bp+bq$. 所以 $(a+b)(p+q)=ap+aq+bp+bq$.

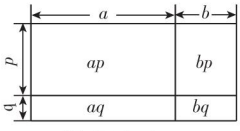


图 12.2−2

提分·必记

特别提醒

1. 单项式与多项式相乘，**实质上是利用乘法分配律将其转化为单项式与单项式相乘**.
2. 单项式与多项式相乘的结果是一个多项式，其项数与因式中多项式的项数相同.
3. 单项式与多项式相乘时，要把单项式和多项式里的每一项都相乘，不要漏乘、多乘.

提分·秘诀

特别警示

- 单项式乘多项式，当多项式的某项为1时，千万不能出现漏乘的情况.
- 多项式的各项都包括它前面的符号，这个多项式的项有 $3xy^2$，$-6xy$，-1，计算时要将这三项分别与 $\frac{1}{3}xy$ 相乘.

提分·必记

特别解读

1. 多项式乘多项式法则的实质是将多项式与多项式相乘转化为几个单项式相乘的和的形式.
2. 多项式与多项式相乘的结果仍为多项式，在合并同类项之前，积的项数应该是两个多项式的项数之积.
3. 计算结果中一定要注意合并同类项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用多项式乘多项式法则进行多项式计算

例 3： 计算：

（1）$(3x+2)(2x-3)$；（2）$(x+2)(x^2-2x+4)$.

解题秘方： 紧扣多项式乘法法则，用“箭头法”进行计算.

解：（1）$(3x+2)(2x-3)$

$=3x\cdot 2x+3x\times(-3)+2\times 2x+2\times(-3)$

$=6x^2-5x-6.$

（2）$(x+2)(x^2-2x+4)$

$=x\cdot x^2+x\cdot(-2x)+x\times 4+2\cdot x^2+2\times(-2x)+2\times 4$

$=x^3+8.$

教你一招： 用“箭头法”解多项式乘多项式的问题：

多项式与多项式相乘，为了做到不重不漏，可以用“箭头法”标注求解，如计算$(x-2y)(5a-3b)$时，可进行标注：$(x-2y)(5a-3b)$，根据箭头指示，即可得到$x\cdot 5a$，$x\cdot(-3b)$，$(-2y)\cdot 5a$，$(-2y)\cdot(-3b)$，把各项相加，继续求解即可.

提分·秘诀

特别警示

此处切忌犯如下错误：

$(3x+2)(2x-3)$

$=3x\cdot 2x+2\times(-3)$

$=6x^2-6.$

另解

可以将x^2-2x+4看成一个整体，利用分配律计算：

$(x+2)(x^2-2x+4)$

$=x(x^2-2x+4)+2(x^2-2x+4)$

$=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$

$=x^3+8.$

点方法·拔技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用整式的乘除法解方程或不等式

挑战·高分

类型 1：整式乘法在解方程中的应用

例 4： 解方程：$(4x+5)(x-1)=2x(2x-3)-12.$

解题秘方： 利用整式的乘法法则，将原方程化为一元一次方程求解.

解： 去括号，得$4x^2-4x+5x-5=4x^2-6x-12$，

移项、合并同类项，得$7x=-7.$

系数化为 1，得$x=-1.$

方法点拨

涉及整式乘法的方程（组）的求解思路：

解涉及整式乘法的方程（组）的题目时，一般先利用整式的乘法法则，将原方程（组）化为一元一次方程（二元一次方程组），然后求解.

类型 2：整式乘法在解不等式中的应用

例 5： 解不等式：$(x-3)(3x+1)+5<3(x+2)(x-1)$.

解题秘方： 利用整式的乘法法则，将原不等式化为一元一次不等式求解.

解： 去括号，得$3x^2+x-9x-3+5<3x^2+3x-6.$

移项、合并同类项，得$-11x<-8.$

系数化为 1，得$x>\frac{8}{11}$.

方法点拨

求解与整式乘法有关的不等式（组）的方法：

解与整式乘法有关的不等式（组）时，一般先利用整式的乘法法则，将原不等式（组）化为一元一次不等式（组），然后求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用对比法确定多项式中未知字母的值

挑战·高分

例6: 若多项式$(x^2+mx+n)(x^2-3x+4)$展开后不含x^3项和x^2项，试求m，n的值.

解题秘方: 利用多项式中不含某项，即该项的系数为零的原则确定待定字母的值.

解: $(x^2+mx+n)(x^2-3x+4)$

$=x^4+(m-3)x^3+(n-3m+4)x^2+(4m-3n)x+4n.$

$\because$展开后不含x^3项和x^2项，

$\therefore m-3=0$且$n-3m+4=0$，

解得$m=3$，$n=5$.

技巧点拨

求多项式中不含某项时未知字母系数的值的方法:

若确定多项式的乘积中不含某项，则先运用法则计算，计算时将待定的字母看作系数，然后根据运算的结果中某项的系数为零，确定待定的字母系数的值.

拔尖角度▸ 3 利用待定系数法求多项式未知字母的值

挑战·高分

例7: 小青和小红分别计算同一道整式乘法题:$(2x+a)(3x+b)$，由于小青抄错了第一个多项式中a的符号，得到的结果为$6x^2-13x+6$;由于小红抄错了第二个多项式中x的系数，得到的结果为$2x^2-x-6$.

(1) 你能知道式子中a，b的值各是多少吗?

(2) 请你计算出这道整式乘法的正确结果.

解题秘方: 紧扣小青抄错了第一个多项式中a的符号，小红抄错了第二个多项式中x的系数分别列式用待定系数法求值.

解: (1) 由题意知，小青做的整式乘法的式子为$(2x-a)(3x+b)$，小红做的整式乘法的式子为$(2x+a)(x+b)$.

$(2x-a)(3x+b)$

$=6x^2-(3a-2b)x-ab$

$=6x^2-13x+6.$

$(2x+a)(x+b)$

$=2x^2+(a+2b)x+ab$

$=2x^2-x-6.$

$\therefore \begin{cases} 3a-2b=13, \\ a+2b=-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases}$

(2) 原式$=(2x+3)(3x-2)=6x^2+5x-6.$

解法提醒

小青抄错了第一个多项式中a的符号，其实质是将a抄成了-a，因此小青抄的算式为$(2x-a)(3x+b)$；小红抄错了第二个多项式中x的系数，结合小红得到计算结果的二次项为$2x^2$，因此小红抄的算式为$(2x+a)(x+b)$.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

整式的乘法在中考中占有较大比重，常见的题型有选择题、填空题、计算题.在选择题中通常与之前学习的合并同类项、同底数幂的乘除法、幂的乘方、积的乘方综合考查.在计算题中通常以化简求值的形式出现，考查整式的混合运算.整式的乘法也常渗透在解方程(组)、不等式(组)的题目中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用多项式乘以多项式的法则计算

例 8: [中考·宜昌]计算 $(x+1)(x+2)$ 的结果为(　　)

A.x^2+2　　B.x^2+3x+2　　C.x^2+3x+3　　D.x^2+2x+2

试题评析: 本题考查了整式乘法中的多项式乘多项式,正确掌握整式乘法的运算法则是解题的关键.

解: $(x+1)(x+2)=x\cdot(x+2)+(x+2)=x^2+3x+2$.

答案: B

冲刺·满分

解法提醒

两个一次项系数为1的二项式相乘,可利用 $(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$ 的形式直接写出结果.

考法 2 利用整式的乘法运算进行整式的化简求值

例 9: [中考·咸宁]先化简,再求值:$(a+3)(a-2)-a(a-1)$,其中 $a=-2\,019$.

试题评析: 本题考查了整式的乘法和加减法运算,正确掌握整式的化简求值的方法步骤是解题的关键.

解: 原式 $=a^2-2a+3a-6-a^2+a=2a-6$.

当 $a=-2\,019$ 时,原式 $=2\times(-2\,019)-6=-4\,044$.

解法提醒

整式的化简求值主要分两步:第一步是化简,主要利用整式的乘法以及加减法的法则;第二步是求值,将已知字母的值代入化简的结果中,利用有理数的运算进行计算.

两年模拟兵法

☞答案见 229 页

1. [中考·柳州]计算:$(2a)\cdot(ab)=$(　　)

A.$2ab$　　B.$2a^2b$　　C.$3ab$　　D.$3a^2b$

2. [中考·武汉]计算 $(a-2)(a+3)$ 的结果是(　　)

A.a^2-6　　B.a^2+a-6

C.a^2+6　　D.a^2-a+6

3. [中考·恩施]下列计算正确的是(　　)

A.$a^4+a^5=a^9$

B.$(2a^2b^3)^2=4a^4b^6$

C.$-2a(a+3)=-2a^2+6a$

D.$(2a-b)^2=4a^2-b^2$

4. 如果 $(x^2+px+q)(x^2-3x+2)$ 的计算结果中不含 x^2 项和 x 项,那么(　　)

A. $p=0$,$q=0$　　B. $p=-3$,$q=9$

C. $p=\frac{6}{7}$,$q=\frac{4}{7}$　　D. $p=-3$,$q=1$

5. [中考·玉林]已知 $ab=a+b+1$,则 $(a-1)(b-1)=$_____.

6. 观察下列各式:$(x-1)(x+1)=x^2-1$,$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$,$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$,…….

请你猜想:$(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1)=$_____.($n$ 为正整数)

7. 化简:(1)[中考·镇江]$x(x+1)-(x+1)\cdot(x-2)$.

(2)[中考·咸宁]$(a+3)(a-2)-a(a-1)(2a-6)$.

8. 先化简,再求值:

$2(3x+1)(1-3x)+(x-2)(2+x)$,其中 $x=2$.

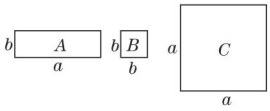
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. （1）解方程：$4x(x-1)+5=(2x-1)(2x+3)$.

（2）解不等式：

$(3x-1)(2x-3)-(6x-5)(x-4)>0$.

10. 小思同学用如图的 A，B，C 三类卡片若干张，拼出了一个长为 $2a+b$、宽为 $a+b$ 的长方形．请你通过计算求出小思同学拼这个长方形所用 A，B，C 三类卡片各几张（要求：所拼图形中，卡片之间不能重叠，不能有空隙），并画出他的拼图示意图．



（第 10 题）

素养提分 行动篇

解读“恒等式”

一、等式分为三类

1. 条件等式：在一定条件下成立的等式叫做条件等式．

2. 恒等式：等式中的字母无论取何值，等式都成立，这样的等式叫做恒等式．

3. 矛盾等式：等式中的字母无论取何值，等式都不能成立，这样的等式叫做矛盾等式．

二、方程 $ax=b$ 的解的情况与等式类别的对比

1. 当 $a\neq 0$ 时，方程有唯一解，此等式为条件等式；

2. 当 $a=0$，$b=0$ 时，方程有无数个解，此等式为恒等式；

3. 当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，方程无解，此等式为矛盾等式．

三、恒等式性质的应用

应用一：若等式 $ax=b$ 是恒等式，则 $a=0$，$b=0$.

例 1： 甲、乙二人共同计算一道整式乘法题：$(2x+a)(3x+b)$，由于甲抄错了第一个多项式中 a 的符号，得到的结果为 $6x^2+11x-10$，由于乙漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果为 $2x^2-9x+10$. 求 a，b 的值．

解：根据题意，得 $(2x-a)(3x+b)=6x^2+11x-10$，$(2x+a)(x+b)=2x^2-9x+10$.

$\therefore 6x^2+(2b-3a)x-ab=6x^2+11x-10$，$2x^2+(2b+a)x+ab=2x^2-9x+10$.

$\therefore (2b-3a-11)x=ab-10$，

$(a+2b+9)x=10-ab$，

$\therefore 2b-3a-11=0$，$ab-10=0$，$a+2b+9=0$，$10-ab=0$，

$\therefore a=-5$，$b=-2$.

应用二：利用恒等式的定义解题．

例 2： 已知二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式是 $x-1$，求其另一个因式及 m 的值．

解：设另一个因式为 $x+n$，则 $(x-1)(x+n)=x^2-4x+m$.

根据整式的乘法是恒等变形，将 $x=1$ 代入左右两边得：$0=1-4+m$，$\therefore m=3$.

又 $\because (x-1)(x+n)=x^2+(n-1)x-n$，

$\therefore -n=3$，$\therefore n=-3$，$\therefore$ 另一个因式为 $x-3$.

【方法规律】若某个等式是恒等式，则等式中的字母为任何值时等式都成立．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.3 乘法公式

核心知识
- 平方差公式
- 两数和（差）的平方公式

知识链接

乘法公式 → 平方差公式；两数和（差）的平方公式

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 两数和乘以这两数的差

1. 平方差公式：

两数和与这两数差的积，等于这两数的平方差，这个公式叫做两数和与这两数差的乘法公式，有时也简称为平方差公式.

即：用字母表示为 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

2. 平方差公式的几种常见变化及应用：

变化形式	应用举例
（1）位置变化	$(b+a)(-b+a)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
（2）符号变化	$(-a-b)(a-b)=(-b-a)(-b+a)=(-b)^2-a^2=b^2-a^2$
（3）系数变化	$(3a+2b)(3a-2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$
（4）指数变化	$(a^3+b^2)(a^3-b^2)=(a^3)^2-(b^2)^2=a^6-b^4$
（5）增项变化	$(a-b+c)(a-b-c)=(a-b)^2-c^2$
（6）连用公式	$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=a^4-b^4$

提分·必记

特别解读

公式的特征：

1. 等号左边是两个二项式相乘，这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数.
2. 等号右边是乘式中两项的平方差，即相同项的平方减去相反项的平方.
3. 理解字母 a,b 的意义，平方差公式中的 a,b 既可代表一个单项式，也可代表一个多项式.

拨考向 利用平方差公式进行乘法计算

类型 1：平方差公式在整式运算中的应用

例 1： 计算：

（1）$(5m-3n)(5m+3n)$；（2）$(-2a^2+5b)(-2a^2-5b)$；

（3）$\left(\frac{1}{4}x+y\right)\left(-\frac{1}{4}x+y\right)$；（4）$(-3y-4x)(3y-4x)$.

解题秘方： 先确定公式中的“a”和“b”，然后根据平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 进行计算.

解：（1）$(5m-3n)(5m+3n)$

$=(5m)^2-(3n)^2$

$=25m^2-9n^2$.

（2）$(-2a^2+5b)(-2a^2-5b)$

$=(-2a^2)^2-(5b)^2$

$=4a^4-25b^2$.

提分·秘诀

方法点拨

运用平方差公式计算的关键步骤：

第1步：利用加法的交换律调整两个二次式中项的位置，使之与公式左边相对应，已对应的就不需调整，如(3)(4)就需要调整.

第2步：找准公式中的 a,b 分别代表哪个单项式或多项式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(3)\left(\frac{1}{4}x+y\right)\left(-\frac{1}{4}x+y\right)$

$=\left(y+\frac{1}{4}x\right)\left(y-\frac{1}{4}x\right)$

$=y^2-\left(\frac{1}{4}x\right)^2$

$=y^2-\frac{1}{16}x^2$.

$(4)\ (-3y-4x)(3y-4x)$

$=(-4x-3y)(-4x+3y)$

$=(-4x)^2-(3y)^2$

$=16x^2-9y^2$.


平方差公式

第3步：套用公式计算，注意将底数带上括号．如(1)中$(5m)^2$不能写成$5m^2$.

类型2：平方差公式在数的巧算中的应用

例2： 计算：

$(1)\ 10.3\times9.7$；$(2)\ 2\,018\times2\,020-2\,019^2$.

解题秘方： 找出平方差公式的模型，利用平方差公式进行计算．

解： $(1)\ 10.3\times9.7$

$=(10+0.3)(10-0.3)=10^2-0.3^2$

$=100-0.09$

$=99.91$.

$(2)\ 2\,018\times2\,020-2\,019^2$

$=(2\,019-1)(2\,019+1)-2\,019^2$

$=2\,019^2-1-2\,019^2=-1$.

方法点拨

运用平方差公式计算两数乘积时，关键是找到这两个数的平均数，再将原数与这个平均数进行比较，变成两数的和与差的积的形式．

知识点2 两数和（差）的平方公式

1. 两数和（差）的平方公式（也称完全平方公式）：

两数和(差)的平方，等于这两数的平方和加上(减去)它们的积的2倍．

即：用字母表示为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2. 两数和（差）的平方公式的几种常见变形公式：

$(1)\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$;

$(2)\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$;

$(3)\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$;

$(4)\ (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;

$(5)\ (a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;

$(6)\ ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$;

$(7)\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

$(8)\ a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2]$.


完全平方公式

提分·必记

特别解读

1. 弄清公式的特征：公式的左边是一个二项式的完全平方，公式的右边是一个三项式，包括左边二项式的各项的平方和，另一项是这两项的乘积的2倍．
2. 理解字母a,b的意义：公式中的字母a,b可以表示具体的数，也可以表示含字母的单项式或多项式．
3. 口诀记忆：头平方和尾平方，头(乘)尾两倍在中央，中间符号照原样．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用两数和（差）的平方公式进行乘方计算

类型1：两数和（差）的平方公式在整式运算中的应用

例3： 计算：

（1）$(x+7y)^2$；　　（2）$(-4a+5b)^2$；

（3）$(-2m-n)^2$；　　（4）$(2x+3y)(-2x-3y)$.

解题秘方： 确定公式中的“a”和“b”，利用两数和（差）的平方公式进行计算.

解：（1）$(x+7y)^2=x^2+2\cdot x\cdot(7y)+(7y)^2$

$=x^2+14xy+49y^2$.

（2）$(-4a+5b)^2=(5b-4a)^2$

$=(5b)^2-2\cdot(5b)\cdot(4a)+(4a)^2$

$=25b^2-40ab+16a^2$.

（3）$(-2m-n)^2=(2m+n)^2$

$=(2m)^2+2\cdot(2m)\cdot n+n^2$

$=4m^2+4mn+n^2$.

（4）$(2x+3y)(-2x-3y)$

$=-(2x+3y)^2$

$=-[(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2]$

$=-(4x^2+12xy+9y^2)$

$=-4x^2-12xy-9y^2$.

两个二项式相乘，若有一项相同，另一项相反，则用平方差公式计算；若两项都相同或都相反，则用两数和(差)的平方公式计算

类型2：两数和（差）的平方公式在数的巧算中的应用

例4： 计算：（1）999^2；（2）$\left(30\frac{1}{3}\right)^2$.

解题秘方： 将原数转化成符合两数和（差）的平方公式的形式，再利用两数和（差）的平方公式展开计算即可.

解：（1）999^2

$=(1\,000-1)^2$

$=1\,000^2-2\times1\,000\times1+1^2$

$=1\,000\,000-2\,000+1$

$=998\,001$.

（2）$\left(30\frac{1}{3}\right)^2=\left(30+\frac{1}{3}\right)^2$

$=30^2+2\times30\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=900+20+\frac{1}{9}$

$=920\frac{1}{9}$.

提分·秘诀

方法点拨

1. 利用两数和（差）的平方公式进行整式运算的基本步骤：

（1）确定公式中的a，b；

（2）确定和差关系；

（3）选择公式；

（4）计算结果.

2. 两个易错点：

（1）套用公式时千万不能漏掉“$2ab$”项；

（2）两个平方项的底数要带上括号.

解法提醒

利用两数和(差)的平方公式进行数值运算时，主要是将底数拆成两个数的和或差，拆分时主要有两种形式：

一是接近整十、整百或整千的数，与整十、整百或整千接近的数拆分成整十、整百或整千的数与相差的数的和或差；

二是带分数.带分数拆分成整数部分与真分数的和或差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用乘法公式的变形公式法求整式的值

例 5： 设 $m+n=10$，$mn=24$，求 m^2+n^2 和 $(m-n)^2$ 的值.

解题秘方： 紧扣两数和（差）的平方公式的变形公式进行计算.

解： $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$，$(m-n)^2=(m+n)^2-4mn$.

将 $m+n=10$，$mn=24$ 分别代入上面两式，得

$m^2+n^2=10^2-2\times24=52$，$(m-n)^2=10^2-4\times24=4$.

挑战·高分

解法提醒

求形如 a+b，a-b 与 a^2-b^2，$(a\pm b)^2$，a^2+b^2，2ab 等式子的值，均可利用乘法公式的变形求值.

拔尖角度 2 利用构造公式法进行乘法巧算

例 6： 计算：$3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$.

解题秘方： 构造出平方差公式的模型，利用平方差公式进行逐步计算.

解： $3(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)+1$

$=2^{32}-1+1$

$=2^{32}$.

挑战·高分

技巧点拨

当出现多个因式相乘时，要仔细观察式子的特点，看是否符合平方差公式的结构特征或根据题意“凑”出符合平方差公式结构的形式，然后依次运用公式，一直到不能用为止.

拔尖角度 3 利用数形思想巧借乘法公式解决实际问题

例 7： 将某个正方形的一组对边分别增加 2 cm，另一组对边分别减少 4 cm，所得到的长方形的面积与将这个正方形的每条边均减少 2 cm 所得到的正方形的面积相等，求得到的长方形的长和宽.

解题秘方： 根据该正方形经过两种变形后得到的图形的面积相等建立等量关系，列出方程，然后利用乘法公式及整式乘法解方程即可.

解： 设原正方形的边长为 x cm，

则所得长方形的长为 $(x+2)$ cm，宽为 $(x-4)$ cm.

根据题意，得 $(x+2)(x-4)=(x-2)^2$.

整理，得 $x^2-2x-8=x^2-4x+4$，即 $2x=12$. 解得 $x=6$.

$\therefore x+2=6+2=8$，$x-4=6-4=2$.

$\therefore$ 得到的长方形的长为 8 cm，宽为 2 cm.

方法点拨： 求解几何图形问题的方法：

求解涉及几何图形的应用题，要灵活运用方程思想和数形结合思想，一般先画出满足题意的图形，并标出相应的数据，然后根据题意找到等量关系，列出反映这个等量关系的方程，再求解.

挑战·高分

图解

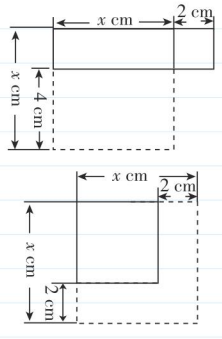


图 12.3-1

可先画出图形（如图 12.3-1），根据题意结合图形列出方程，然后利用乘法公式及整式乘法解方程即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用从特殊到一般思想运用乘法公式探究验证规律等式的一般式子

例 8： 观察下列各式：

$1^2+(1\times2)^2+2^2=(1\times2+1)^2$；

$2^2+(2\times3)^2+3^2=(2\times3+1)^2$；

$3^2+(3\times4)^2+4^2=(3\times4+1)^2$；

……

请你根据以上规律，写出第 n（n 为正整数）个式子，并验证其正确性.

解题秘方： 观察等式左右两边随等式个数的变化规律，写出一般规律的式子，并用乘法公式计算左右两边是否相等.

解： 第 n 个式子为 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

验证：$\because n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=n^2+(n^2+n)^2+n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$，

$[n(n+1)+1]^2=[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1$

$=(n^2+n)^2+2n^2+2n+1=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$，

$\therefore n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

挑战·高分

教你一招

1. 求解式子规律问题的思路：

第 1 步：找式子中变化部分和不变部分，如本题基本模式：$(__)^2+(__\times__)^2+(__)^2=(__\times__+1)^2$.

第 2 步：找出变化部分与式子个数之间的关系，如第 1 项的底数与个数相同，第 2 项的底数中，前一个因数与个数相同，后一个因数比个数大 1，依此全部分析出与个数之间的关系，

第 3 步：个数是 n 时，用含 n 的式子表示出规律.

2. 验证规律的方法：

（1）可将等式一边变形，与另一边相同；

（2）可将等式两边同时计算，结果相同.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是平方差公式和两数和（差）的平方公式，二者通常结合在一起考查，多以选择题、填空题或解答题的形式出现. 有时考查乘法公式的变形，已知公式中部分式子的值，求另一部分式子的值，以基础题为主，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用乘法公式对计算过程进行辨析

例 9： [中考·吉林] 某同学化简 $a(a+2b)-(a+b)(a-b)$ 出现了错误，解答过程如下：

原式 $=a^2+2ab-(a^2-b^2)$（第一步）

$=a^2+2ab-a^2-b^2$（第二步）

$=2ab-b^2$.（第三步）

（1）该同学解答过程从第___步开始出错，错误原因是_____；

（2）写出此题正确的解答过程.

试题评析： 本题考查整式的乘法运算，主要是平方差公式和去括号法则，解题的关键是掌握它们的运算法则.

解：（1）二；去括号时没有变号

（2）原式 $=a^2+2ab-(a^2-b^2)=a^2+2ab-a^2+b^2=2ab+b^2$.

冲刺·满分

解法警示

本题主要考查在整式的乘法运算（包括平方差公式和去括号法则）中出现的常见去括号错误. 即括号前是“-”号时，只改变括号内第一项的符号，而忽视其他各项也要改变符号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用乘法公式的变形式子求值

例 10：［中考·乐山］已知实数 a，b 满足 $a+b=2$，$ab=\frac{3}{4}$，则 $a-b=$（　　）

A.1　　B.$-\frac{5}{2}$　　C.±1　　D.$\pm\frac{5}{2}$

试题评析：本题考查了两数和（差）的平方公式的运用，熟记公式结构是解题的关键.

解：∵ $a+b=2$，$ab=\frac{3}{4}$，

∴ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=4$，

∴ $a^2+b^2=\frac{5}{2}$，

∴ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=1$，

∴ $a-b=\pm1$.

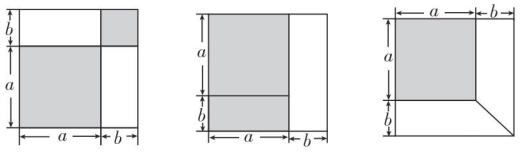
答案：C

考法点评

用乘法公式的变形求值，关键是对乘法公式的变形式子的结构要相当熟悉，而且明白公式中各部分之间的数量关系.

考法 3 利用几何图形面积验证两数和（差）的平方公式

例 11：［中考·衢州］有一张边长为 a 厘米的正方形桌面，因为实际需要，需将正方形边长增加 b 厘米，木工师傅设计了如图 12.3-2 的三种方案（单位：厘米）：



方案一　　方案二　　方案三

图 12.3-2

小明发现这三种方案都能验证公式：$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

对于方案一，小明是这样验证的：

$a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

请你根据方案二、方案三写出公式的验证过程.

方案二：

方案三：

试题评析：本题考查两数和（差）的平方公式的几何背景，解答本题的关键是明确题意，写出相应的推导过程.

解：由题意可得，

方案二：$a^2+ab+(a+b)b=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

方案三：$a^2+\frac{[a+(a+b)]b}{2}+\frac{[a+(a+b)]b}{2}=a^2+ab+\frac{1}{2}b^2+ab+\frac{1}{2}b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

解法提醒

借助几何背景验证两数和（差）的平方公式的思路是将几何图形面积分割成几个图形的面积和（或差）后面积不变进行验证.

方案二是两个长方形的面积与一个小正方形的面积的和等于大正方形的面积；

方案三是两个梯形的面积与一个小正方形的面积的和等于大正方形的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·连云港]下列运算正确的是(　　)

A. $x-2x=-x$　　B. $2x-y=-xy$

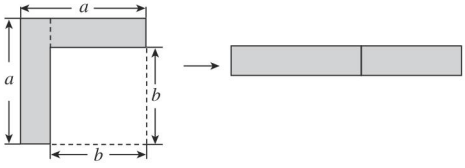
C. $x^2+x^2=x^4$　　D. $(x-1)^2=x^2-1$

2.[中考·怀化]下列计算正确的是(　　)

A. $(x+y)^2=x^2+y^2$　　B. $(x-y)^2=x^2-2xy-y^2$

C. $(x+1)(x-1)=x^2-1$　　D. $(x-1)^2=x^2-1$

3.[中考·宁夏]如图,从边长为a的大正方形中剪掉一个边长为b的小正方形,将阴影部分沿虚线剪开,拼成右边的长方形.根据图形的变化过程写出的一个正确的等式是(　　)



(第3题)

A. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

B. $a(a-b)=a^2-ab$

C. $(a-b)^2=a^2-b^2$

D. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

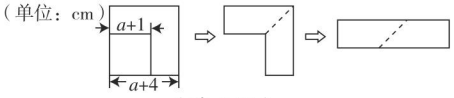
4.[中考·淄博]若$a+b=3$,$a^2+b^2=7$,则ab等于(　　)

A. 2　　B. 1　　C. -2　　D. -1

5.[中考·南昌]已知$(m-n)^2=8$,$(m+n)^2=2$,则m^2+n^2等于(　　)

A. 10　　B. 6　　C. 5　　D. 3

6. 如图,从边长为$(a+4)$ cm的正方形纸片中剪去一个边长为$(a+1)$ cm的正方形($a>0$),剩余部分沿虚线剪开后拼成一个长方形(不重叠、无缝隙),则长方形的面积为_____cm^2.



(第6题)

7. 若$|x+y-7|+(xy-6)^2=0$,则$x^2+y^2=$_____.

8. 若$(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$,则$2a+2b=$_____.

9. 运用乘法公式计算:

(1) 39×41;

(2) $\left(99\frac{2}{3}\right)^2$.

10. 计算:

(1)[中考·济宁]$(y+2)(y-2)-(y-1)\cdot(y+5)$;

(2) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$;

(3) $(m+2)(m-2)(m^2-4)$;

(4) $(x-2y+3)(x+2y-3)$.

11.[中考·大庆]已知$x^2-y^2=12$,$x+y=3$,求$2x^2-2xy$的值.　　【导学号:6994214】

12. 已知$(2\,021-a)(2\,019-a)=2\,020$,求$(2\,021-a)^2+(2\,019-a)^2$的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12.4 整式的除法

核心知识
- 单项式除以单项式
- 多项式除以单项式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶1 单项式除以单项式

1. 单项式除以单项式法则：

单项式相除，把系数、同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数一起作为商的一个因式.

2. 步骤：

（1）把系数相除，所得结果作为商的系数.

（2）把同底数幂分别相除，所得的结果作为商的因式.

（3）把只在被除式里出现的字母，连同它的指数一起作为商的一个因式.

提分·必记

特别解读

1. 单项式除以单项式最终转化为同底数幂相除；
2. 单项式除以单项式的结果还是单项式；
3. 根据乘除互逆的原则，可用单项式乘法来验证结果.

拨考向▶利用单项式除以单项式的运算法则计算

例 1： 计算：

（1）$-3a^7b^4c\div 9a^4b^2$；

（2）$4a^{3m+1}b\div(-8a^{2m+1})$；

（3）$(6.4\times10^5)\div(2\times10^2)$.

解题秘方： 根据单项式除法法则解答.

解：（1）原式 $=[(-3)\div9]\,a^{7-4}b^{4-2}c=-\frac{1}{3}a^3b^2c.$

（2）原式 $=[4\div(-8)]\,a^{(3m+1)-(2m+1)}b=-\frac{1}{2}a^mb.$

（3）原式 $=(6.4\div2)\times(10^5\div10^2)=3.2\times10^3.$

提分·秘诀

方法点拨

1. 系数相除运用有理数的除法法则；
2. 字母部分相除，按同底数幂的除法法则进行，尽量按顺序进行，这样可以防止未除的字母漏写；
3. 最后结果还是单项式的形式.

点知识▶2 多项式除以单项式

1. 多项式除以单项式法则：

多项式除以单项式，先用这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

即：用字母表示为 $(am+bm)\div m=am\div m+bm\div m=a+b.$

2. 步骤：

（1）用多项式的每一项除以单项式；

（2）把每一项除得的商相加.

提分·必记

特别解读

1. 多项式除以单项式的实质就是转化为单项式除以单项式；
2. 商的项数与多项式的项数相同；
3. 用多项式的每一项除以单项式时，包括每一项的符号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用多项式除以单项式的运算法则进行计算

提分·秘诀

特别警示

多项式除以单项式的方法：多项式里的每一项与单项式相除时，要逐项相除，不能漏项，并且要注意符号的变化.

例 2： 计算：

（1）$(8a^3-2a^2+6a)\div(-2a)$；

（2）$\left(\frac{2}{3}a^5b^8-2a^2b^6\right)\div\frac{1}{3}ab^3$.

解题秘方： 先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

解：（1）$(8a^3-2a^2+6a)\div(-2a)$

$=8a^3\div(-2a)+(-2a^2)\div(-2a)+6a\div(-2a)$

$=-4a^2+a-3$.

（2）$\left(\frac{2}{3}a^5b^8-2a^2b^6\right)\div\frac{1}{3}ab^3$

$=\frac{2}{3}a^5b^8\div\frac{1}{3}ab^3-2a^2b^6\div\frac{1}{3}ab^3$

$=2a^4b^5-6ab^3$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用化简求值法进行整式的乘除运算

挑战·高分

方法点拨

整式的化简求值主要分两步：

第一步： 化简，利用整式的加、减、乘、除以及乘方的运算法则进行化简；

第二步： 求值，将已知字母或已知整体的取值代入化简的结果中计算. 若字母或整体取值未知，需要先利用已知条件求出来，然后再代入求值.

类型 1：整体代入在化简求值中的应用

例 3： 已知 $2a-b=6$，求 $[(a^2+b^2)+2b(a-b)-(a-b)^2]\div4b$ 的值.

解题秘方： 先将待求式子化简为含 $2a-b$ 的形式，再将 $2a-b$ 看成一个整体代入求值.

解： $[(a^2+b^2)+2b(a-b)-(a-b)^2]\div4b$

$=(a^2+b^2+2ab-2b^2-a^2+ab+ab-b^2)\div4b$

$=(-2b^2+4ab)\div4b$

$=-\frac{1}{2}b+a=\frac{1}{2}(2a-b)$.

当 $2a-b=6$ 时，原式 $=\frac{1}{2}\times6=3$.

类型 2：挖掘条件代入在化简求值中的应用

例 4： 已知 $(a-1)^2+|b+1|=0$，先化简，再求值：$(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a-2b)(b-2a)$.

解题秘方： 先根据“若两个非负数的和为 0，则这两个非负数同时为 0”求出 a，b 的值，再化简后代入求值.

解： $\because(a-1)^2+|b+1|=0$，$\therefore a-1=0$，$b+1=0$，

解得 $a=1$，$b=-1$.

$(a^2b-2ab^2-b^3)\div b-(a-2b)(b-2a)$

$=a^2-2ab-b^2-(ab-2a^2-2b^2+4ab)=3a^2-7ab+b^2$.

当 $a=1$，$b=-1$ 时，原式 $=3\times1^2-7\times1\times(-1)+(-1)^2=11$.

详解

$\because(a-1)^2\geqslant0$，$|b+1|\geqslant0$，$(a-1)^2+|b+1|=0$，$\therefore(a-1)^2=0$，$|b+1|=0$，$\therefore a-1=0$，$b+1=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用待定系数法解关于多项式整除问题

挑战·高分

例5： 已知多项式 x^3+mx^2+nx-2 能被多项式 x^2+3x-2 整除，求 m，n 的值.

解题秘方： 由被除式与除式次数最高的项，得商式中次数最高的项，设出商式，根据“被除式 = 除式 × 商式”列式，通过计算对比系数得解.

解： 设 $x^3+mx^2+nx-2=(x^2+3x-2)(x+a)$.

等号右边展开，整理得 $x^3+mx^2+nx-2=x^3+(a+3)x^2+(3a-2)x-2a$,

$$\therefore \begin{cases} m=a+3, \\ n=3a-2, \\ -2=-2a, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=4, \\ n=1, \\ a=1. \end{cases} \quad \text{故 } m=4,\ n=1.$$

教你一招： 求解多项式整除问题的思路：

求解此类问题，可先根据整除的意义设出商式，然后将除式与商式相乘并展开，根据多项式对应项的系数相等建立方程（组）求解.

解法提醒

被除式中次数最高的项是 x^3，除式中次数最高的项是 x^2，所以商式中次数最高的项是 x，故可设商式为 $x+a$.

详解

$(x^2+3x-2)(x+a)$
$=x^2\cdot x+x^2\cdot a+3x\cdot x+3x\cdot a-2x-2a$
$=x^3+ax^2+3x^2+3ax-2x-2a$
$=x^3+(a+3)x^2+(3a-2)x-2a.$

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

整式的除法这一节主要学习单项式除以单项式、多项式除以单项式，中考中多与整式的加法、减法、乘法、乘方等综合考查，以填空题或选择题的形式出现，有时也会与代数式的运算相结合，预计在今后几年，各地中考命题方向仍是如此.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 整式除法的实际应用

例6： [期中·安徽] 月球与地球之间的距离 $s=3.84\times10^5$ km，地球的半径 $R=6.37\times10^3$ km，则：

（1）s 大约是 R 的多少倍？（保留整数）

（2）太阳的半径是地球半径的 10^2 倍，则太阳的体积是地球体积的多少倍？（球的体积的计算公式为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，r 为半径）

试题评析： 本题主要考查单项式除以单项式的实际应用，解题的关键是根据实际问题建立单项式除以单项式的模型.

解： （1）$s\div R=(3.84\times10^5)\div(6.37\times10^3)=(3.84\div6.37)\times10^2\approx60$,

即 s 大约是 R 的 60 倍.

（2）$V_{太阳}\div V_{地球}=[\frac{4}{3}\pi(R_{太阳})^3]\div[\frac{4}{3}\pi(R_{地球})^3]=(R_{太阳})^3\div(R_{地球})^3=(R_{太阳}\div R_{地球})^3=(10^2)^3=10^6$,

即太阳的体积是地球体积的 10^6 倍.

方法点拨

利用整式的除法解决实际问题的策略：

整式的除法在实际问题中应用非常广泛，解答此类问题的关键是先从实际问题中抽象出数学模型，然后按照以下步骤进行：

1. 厘清各个量之间的关系；
2. 根据常用公式列出算式；
3. 利用整式的除法法则计算得出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 整式混合运算的化简求值

例 7：[中考·娄底]先化简，再求值：$(x+y)(x-y)-(4x^3y-8xy^3)\div 2xy$，其中 $x=-1$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

试题评析：本题考查了整式的运算，解答本题的关键是掌握整式乘法公式、多项式除以单项式和整式加减的运算法则.

解：原式 $=x^2-y^2-2x^2+4y^2=-x^2+3y^2$.

当 $x=-1$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$-x^2+3y^2=-(-1)^2+3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=-1+1=0$.

解法提醒

整式运算的顺序是：先乘除，再加减.整式加减的实质就是合并同类项.对于化简求值题，常常先化简再求值.

两年模拟兵法

☞答案见 230 页

1. 计算：$(0.14m^4n^3-0.8m^3n^3)\div 0.2m^2n^2$ 等于(　　)

A.$0.7m^2n^2-0.4mn$　　B.$0.28m^2n-0.16n$

C.$0.7m^2n-4mn$　　D.$0.7m^2n-4n$

2. 当 $a=\frac{3}{4}$ 时，代数式 $(28a^3-28a^2+7a)\div 7a$ 的值是(　　)

A.6.25　　B.0.25　　C.−2.25　　D.−4

3. 计算：$(-2a)^2\div a=$_____.

4. 计算：$-2x^3y^2z\div\frac{1}{2}xy=$_____.

5. 计算：$(24a^2b-16ab^2+8ab)\div 4ab=24a^2b\div 4ab-16ab^2\div$_____$+8ab\div 4ab=$_____.

6. 长方形的面积为 $4a^2-6ab+2a$，若它的一条边长为 $2a$，则它的周长是_____.

7. 计算：

(1) $6a^3b^3c^2\div(-2a^2bc)$；

(2) $\left(-\frac{2}{5}a^2b^4\right)\div\left(-\frac{1}{4}ab^2\right)\div(-10ab)$；

(3) $-32a^4b^5c\div(-2ab)^3\cdot\left(-\frac{3}{4}ac\right)$；

(4) $\left(\frac{2}{3}n^3-7mn^2+\frac{2}{3}n^5\right)\div\frac{2}{3}n^2$；

(5) $(12x^4y^6-8x^2y^4-16x^3y^5)\div 4x^2y^3$.

8. 小明同学在计算机上设计了一个计算程序：



林军用了几个数试了一试，列出如下表格：

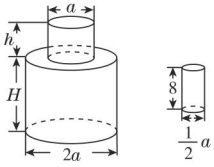
x	−2	$-\frac{1}{3}$	−1	1	$\frac{1}{3}$	2	2 017
答案	1	1					

(1) 请将表格填写完整.

(2) 试用一个算式表示这个程序.

(3) 结合(1)(2)，你发现了什么结论?

9. 如图①的容器中盛满水，如果将这个容器中的水全部倒入如图②的杯子中，那么你知道一共需要多少这样的杯子吗?(单位：cm)



(第 9 题)

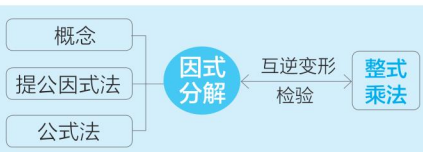
10. 某天数学课上，老师讲了整式的除法运算.放学后，王华回到家拿出课堂笔记，认真地复习课上老师讲的内容.他突然发现一道整式除法运算题：$(21x^4y^3-\blacksquare+7x^2y^2)\div(-7x^2y)=\blacksquare+5xy-y$，被除式的第二项被钢笔水弄污了，商的第一项也被钢笔水弄污了.请通过计算确定这两处被弄污的内容.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.5 因式分解

核心知识
- 因式分解的定义
- 提公因式法分解因式
- 公式法分解因式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶1 因式分解

1. 定义： 把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

2. 整式乘法与因式分解的关系：

（1）整式乘法与因式分解一个是积化和差，另一个是和差化积，是互逆的变形.

即：多项式 $\xrightarrow[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}}$ 整式乘积.

（2）可以利用整式乘法检验因式分解的结果的正确性.

拨考向▶利用因式分解的定义解整式变形问题的应用

类型 1：因式分解的定义在识别因式分解中的应用

例 1： 下列变形中属于因式分解的有（　　）

① $8xy^3=2xy\cdot 4y^2$；

② $x^2+1=x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$；

③ $(x+5)(x-5)=x^2-25$；

④ $x^2+2x-3=x(x+2)-3$；

⑤ $x^2y+xy^2=xy(x+y)$.

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

解题秘方： 紧扣因式分解的定义进行识别.

解： ∵①中等号的左边不是多项式，∴①不是因式分解；

∵②中$\dfrac{1}{x}$不是整式，∴ $x^2+1=x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$不是因式分解；

③是整式的乘法，不是因式分解；

∵④中等号右边不是积的形式，∴④不是因式分解；

⑤符合因式分解的定义，是因式分解.

答案： D

提分·必记

特别解读

1. 因式分解的对象是多项式，结果是整式的积.
2. 因式分解是恒等变形，形式改变但值不改变.
3. 因式分解必须分解到每个多项式的因式不能再分解为止.

提分·秘诀

解法提醒

识别因式分解的两个关键词：

1.“多项式”说明等式的左边是多项式，即分解的对象是多项式.

2.“整式的积”说明右边的结果是整式的积.

一句话：因式分解是整式的和差化积的变化过程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：因式分解与整式乘法之间的关系在判断因式分解中的应用

例 2：[中考·毕节]下列因式分解正确的是（　　）

A. $x^3y-2x^2y+xy=xy(x^2-2x)$　　B. $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

C. $x^2-2x+4=(x-2)^2$　　D. $4x^2-y^2=(4x+y)(4x-y)$

解题秘方：根据因式分解与整式乘法之间的关系进行判断.

解：利用整式的乘法法则将各选项中等式的右边展开，与等式的左边相比较，左右两边相同的只有选项 B.

答案：B

解法提醒

还没有学习因式分解的方法，要判断因式分解的正确性，可以通过逆向变形（整式乘法）来检验因式分解是否正确.

类型 3：因式分解与整式乘法之间的关系在求字母的值中的应用

例 3：仔细阅读下面例题，解答问题：

例题：已知二次三项式 x^2-4x+m 分解因式后有一个因式是 $x+3$，求其另一个因式及 m 的值.

解：设另一个因式为 $x+n$，则 $x^2-4x+m=(x+3)(x+n)$，即 $x^2-4x+m=x^2+(n+3)x+3n$.

$\therefore \begin{cases} n+3=-4, \\ m=3n. \end{cases}$　解得 $\begin{cases} n=-7, \\ m=-21, \end{cases}$

$\therefore$ 另一个因式为 $x-7$，m 的值为 -21.

问题：

（1）若二次三项式 x^2-5x+6 可分解为 $(x-2)(x+a)$，则 $a=$_____；

（2）若二次三项式 $2x^2+bx-5$ 可分解为 $(2x-1)(x+5)$，则 $b=$_____；

（3）仿照以上方法解答下面问题：已知二次三项式 $2x^2+5x-k$ 分解因式后有一个因式为 $2x-3$，求其另一个因式及 k 的值.

解题秘方：利用因式分解与整式乘法是互逆变形，可以将因式分解的结果利用整式乘法算出多项式，并与已知多项式比较解决问题.

解：（1）-3　（2）9

（3）设另一个因式为 $x+c$，则 $2x^2+5x-k=(2x-3)(x+c)$，即 $2x^2+5x-k=2x^2+(2c-3)x-3c$,

$\therefore \begin{cases} 2c-3=5, \\ k=3c. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} c=4, \\ k=12. \end{cases}$

$\therefore$ 另一个因式为 $x+4$，k 的值为 12.

教你一招：因式分解与整式乘法是过程相反的恒等变形，将因式分解的结果利用整式乘法算出多项式，与已知多项式相比较，对应项的系数分别相等，列出方程（组）即可求出未知数的值.

一题多解

因式分解是恒等变形，利用恒等式的性质还有另一种技巧解法：

恒等式的性质：等式中的字母无论取何值时等式都成立.

如：$x^2-4x+m=(x+3)\cdot(x+n)$，

将 $x=-3$ 代入左右两边得

$9+12+m=0$，

解得 $m=-21$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 公因式

1. 定义：

多项式 $ma+mb+mc$ 中的每一项都含有一个相同的因式 m，我们称之为公因式.

2. 公因式的确定：

（1）**确定公因式的系数：**若多项式中各项系数都是整数，则取各项系数的最大公因数.

（2）**确定字母及字母的指数：**取各项都含有的相同字母作为公因式中的字母，各相同字母的指数取其中指数最低的.

（3）若多项式各项中含有相同的多项式因式，则应将其看成一个整体，不要拆开，作为公因式中的因式. 如 $3x(x-y)+x^2(x-y)$ 的公因式是 $x(x-y)$.

提分·必记

特别解读

1. 公因式必须是多项式中每一项都含有的因式. 只在某个或某些项中含有而其他项中没有的因式不能成为公因式的一部分.
2. 公因式可以是数，也可以是单项式或多项式.
3. 若多项式各项中含有互为相反数的因式，则可将互为相反数的因式统一成相同的因式.

拔考向▶利用公因式的定义确定多项式的公因式

例 4：指出下列多项式各项的公因式：

（1）$3a^2y-3ay+6y$；

（2）$\frac{4}{9}xy^3-\frac{8}{27}x^3y^2$；

（3）$a(x-y)^3+b(x-y)^2+(x-y)^3$；

（4）$-27a^2b^3+36a^3b^2+9a^2b$.

解题秘方：紧扣公因式的定义求解.

解：（1）中各项的公因式为 $3y$.

（2）中各项的公因式为 $\frac{4}{27}xy^2$.

（3）中各项的公因式为 $(x-y)^2$.

（4）中各项的公因式为 $-9a^2b$.

提分·秘诀

解法提醒

找准公因式的“四看”：一看系数：若各项系数都是整数，应取各项系数的最大公因数；若多项式中首项的符号是“-”，则公因式的符号一般为负. 二看字母：公因式的字母是各项都含有的相同的字母. 三看字母的指数：各相同字母的指数取指数最低的. 四看整体：如果多项式中含有相同的多项式，应将其看成整体，不要拆开.

点知识▶3 提公因式法

1. 定义：

把公因式提出来，多项式 $ma+mb+mc$ 就可以分解成两个因式 m 和 $(a+b+c)$ 的乘积了，像这种因式分解的方法，叫做提公因式法.

即：用字母表示为 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

2. 提公因式法的一般步骤：

（1）找出公因式，就是找出各项都含有的公共因式.

（2）确定另一个因式，另一个因式即多项式除以公因式所得的商.

（3）写成积的形式.

提分·必记

特别解读

1. 提公因式法实质上是逆用乘法的分配律.
2. 提公因式法就是把一个多项式分解成两个因式的积的形式，其中的一个因式是各项的公因式，另一个因式是多项式除以这个公因式所得的商.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用提公因式法将多项式分解因式

例5： 将下列各式分解因式：

（1）$6x^3y^2-8xy^3z$；　　（2）$-4a^3b^2+12a^2b-4ab$.

解题秘方： 紧扣提公因式法的步骤分解因式.

解：（1）$6x^3y^2-8xy^3z$

$=2xy^2\cdot 3x^2-2xy^2\cdot 4yz$

$=2xy^2(3x^2-4yz)$.

（2）$-4a^3b^2+12a^2b-4ab$

$=-(4a^3b^2-12a^2b+4ab)$

$=-(4ab\cdot a^2b-4ab\cdot 3a+4ab)$

$=-4ab(a^2b-3a+1)$.

提分·秘诀

解法提醒

- 当多项式首项系数是负数时，一般应先提出“-”，但要注意，此时括号内各项都要改变符号.
- $4ab$ 与公因式相同，提取公因式后，此项剩余项为“1”，此时容易漏掉“1”这一项而导致错误.

知识▶4 用平方差公式分解因式

1. 平方差公式：

两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积.

即：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

2. 平方差公式的特点：

（1）等号的左边是一个二项式，各项都是平方的形式且符号相反；

（2）等号的右边是两个二项式的积，其中一个二项式是两个数的和，另一个二项式是这两个数的差.

3. 运用平方差公式分解因式的步骤：

一判： 根据平方差公式的特点，判断是否为平方差，若负平方项在前面，利用加法的交换律把负平方项交换放在后面.

二定： 确定公式中的 a 和 b，除 a 和 b 是单独一个数或字母外，其余不管是单项式还是多项式都必须用括号括起来，表示一个整体.

三套： 套用平方差公式进行分解.

四整理： 将每个因式去括号，合并同类项化成最简的.

提分·必记

特别解读

1. 因式分解中的平方差公式是乘法公式中的平方差公式逆用的形式.
2. 乘法公式中的平方差指的是符合两数和与两数差的积的条件后，结果写成平方差；而因式分解中的平方差公式指的是能写成平方差形式的多项式，可以分解成两个数的和乘以这两个数的差.

考向▶利用平方差公式进行因式分解

例6： 分解因式：

（1）$4x^2-25y^2$；　　（2）$(a+2)^2-1$；

（3）$-\frac{1}{81}+x^4$；　　（4）$16(a-b)^2-25(a+b)^2$.

解题秘方： 先确定平方差公式中的“a”“b”，再运用平方差公式分解因式.

解：（1）$4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x+5y)(2x-5y)$.

（2）$(a+2)^2-1=(a+2+1)(a+2-1)=(a+3)(a+1)$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 确定公式中的“a”“b”时，不能只看表面，如 $4x^2=(2x)^2$，“a”指的是 $2x$；$16(a-b)^2=[4(a-b)]^2$，“a”指的是 $4(a-b)$.
2. 平方差公式可以连续运用.如(3)题，必须

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$(3)-\frac{1}{81}+x^4=x^4-\frac{1}{81}=\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x^2-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right).$$
$$(4)\ 16(a-b)^2-25(a+b)^2$$
$$=[4(a-b)+5(a+b)][4(a-b)-5(a+b)]$$
$$=(4a-4b+5a+5b)(4a-4b-5a-5b)$$
$$=(9a+b)(-a-9b)$$
$$=-(9a+b)(a+9b).$$

做到每个因式不能再分解为止.

3. 运用平方差公式分解因式时，若a、b都是多项式，先要添加括号，然后再去括号，化简最后结果.

知识▶ 5 用完全平方公式分解因式

1. 完全平方式： 形如 $a^2\pm2ab+b^2$ 这样的式子叫做完全平方式.

完全平方式的条件：

（1）多项式是二次三项式.

（2）首末两项是两个数（或式子）的平方且符号相同，中间项是这两个数（或式子）的积的2倍，符号可以是“+”，也可以是“−”.

2. 完全平方公式： 两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的2倍，等于这两个数的和（或差）的平方.

即：$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

3. 完全平方公式的特点： 等号左边是一个完全平方式，右边是这两个数的和（或差）的平方.

4. 因式分解的一般步骤：


因式分解的方法

（1）当多项式有公因式时，先提取公因式；当多项式没有公因式时（或提取公因式后），若符合平方差公式或完全平方公式，就利用公式法分解因式；

（2）当不能直接提取公因式或不能用公式法分解因式时，可根据多项式的特点，把其变形为能提取公因式或能用公式法的形式，再分解因式；

（3）当乘积中每一个因式都不能再分解时，因式分解就结束了.

提分·必记

特别解读

1. 因式分解中的完全平方公式是整式乘法中的完全平方公式的逆用.
2. 结果是和的平方还是差的平方由乘积项的符号确定，乘积项的符号可以是“+”，也可以是“−”，而两个平方项的符号必须相同，否则就不是完全平方式，因此也不能用完全平方公式进行因式分解.
3. 用完全平方公式分解因式时，若多项式各项有公因式，要先提取公因式，再用完全平方公式分解因式.

拔考向▶ 利用完全平方公式解整式变形问题

类型1：完全平方式在求值中的应用

例7： 已知 $9a^2+ka+16$ 是一个完全平方式，则 k 的值是_____.

解题秘方： 根据平方项确定乘积项，进而确定字母的值.

解： ∵ $9a^2=(3a)^2$，$16=4^2$，

$9a^2+ka+16$ 是一个完全平方式，

∴ $ka=\pm2\times3a\times4=\pm24a$. ∴ $k=\pm24$.

答案： ±24

提分·秘诀

方法点拨

求与完全平方式有关的字母取值的方法：

可根据首项、尾项和中间项三者之间的关系，由其中两项求出字母的值，要注意中间项的符号有“±”两种情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：完全平方公式在因式分解中的应用

例 8： 分解因式：

（1）$x^2-14x+49$；　　（2）$-6ab-9a^2-b^2$；

（3）$\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{2}ab+b^2$；　　（4）$(x^2+6x)^2+18(x^2+6x)+81$.

解题秘方： 先确定完全平方公式中的“a”“b”，再运用完全平方公式分解因式.

解：（1）$x^2-14x+49=x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2=(x-7)^2$.

（2）$-6ab-9a^2-b^2$

$=-(9a^2+6ab+b^2)$

$=-[(3a)^2+2\cdot 3a\cdot b+b^2]$

$=-(3a+b)^2$.

（3）$\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{2}ab+b^2$

$=\left(\frac{1}{4}a\right)^2-2\cdot\frac{1}{4}a\cdot b+b^2$

$=\left(\frac{1}{4}a-b\right)^2$.

（4）$(x^2+6x)^2+18(x^2+6x)+81$

$=(x^2+6x)^2+2\cdot(x^2+6x)\cdot 9+9^2$

$=(x^2+6x+9)^2$

$=(x+3)^4$.

完全平方公式也可以连续使用，因式分解的结果要彻底

类型 3：选择适当的方法在因式分解中的应用

例 9： 分解因式：

（1）$-3a^3b+48ab^3$；　　（2）x^4-8x^2+16；

（3）$25x^2(a-b)+36y^2(b-a)$.

解题秘方： 先观察是否有公因式，若有，先提取公因式，然后通过观察项数确定能用哪个公式分解因式.

解：（1）$-3a^3b+48ab^3$

$=-3ab(a^2-16b^2)$

$=-3ab(a+4b)(a-4b)$.

（2）x^4-8x^2+16

$=(x^2-4)^2$

$=(x+2)^2(x-2)^2$.

（3）$25x^2(a-b)+36y^2(b-a)$

$=25x^2(a-b)-36y^2(a-b)$

$=(a-b)(25x^2-36y^2)$

$=(a-b)(5x+6y)(5x-6y)$.

解法提醒

运用完全平方公式分解因式的关键是判断每个多项式是否符合完全平方式的结构特点，若符合，进一步确定公式中的“a”“b”. 注意当首项系数为负数时，一般要先提出负号，括号内多项式的各项都要变号.

方法点拨

“一提、二套、三查”是分解因式的步骤：

即有公因式的先提取公因式，然后套用公式，若多项式是两项，则考虑用平方差公式，若多项式是三项，则考虑用完全平方公式，最后检查乘积中每一个因式是否能继续分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用整体思想将多项式分解因式

挑战·高分

例 10： 将下列各式分解因式：

（1）$3a(a-2b)+6b(2b-a)$；

（2）$5m(y-x)^2-10(x-y)^3$.

解题秘方： 根据 $(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$，$(a-b)^{2n+1}=-(b-a)^{2n+1}$ 进行变形后再分解.

解：（1）$3a(a-2b)+6b(2b-a)$

$=3a(a-2b)-6b(a-2b)$

$=3(a-2b)(a-2b)$

$=3(a-2b)^2$.

（2）$5m(y-x)^2-10(x-y)^3$

$=5m(x-y)^2-10(x-y)^3$

$=5(x-y)^2[m-2(x-y)]$

$=5(x-y)^2(m-2x+2y)$.

解法提醒

- 各项含有相同项或相反项的多项式，把它作为一个整体看成公因式中的因式，相同的直接提，相反的变成相同的再提.
- 因式分解的最终结果中，每个因式都必须是最简因式，故每个因式内部都不能含有括号，有同类项的一定要合并同类项.

拔尖角度▸ 2 利用辅助法对多项式进行因式分解

挑战·高分

类型 1：$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子在因式分解中的应用

例 11： 阅读下列材料.

（1）形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的二次三项式，有以下特点：①二次项系数是 1；②常数项是两个数之积；③一次项系数是常数项的两个因数之和，把这个二次三项式进行分解因式，可以这样来解：

$x^2+(p+q)x+pq=x^2+px+qx+pq=(x^2+px)+(qx+pq)=x(x+p)+q(x+p)=(x+p)(x+q)$.

因此，可以得到 $x^2+(p+q)x+pq=$_____.

利用上面的结论，可以直接将某些二次项系数为 1 的二次三项式分解因式.

（2）利用（1）的结论分解因式：

① $m^2+7m-18$；② $x^2-2x-15$.

解题秘方： 根据辅助材料，用类比法确定 p，q 的值求解.

解：（1）$(x+p)(x+q)$

（2）① $m^2+7m-18=m^2+(9-2)m+9\times(-2)=(m+9)(m-2)$.

② $x^2-2x-15=x^2+(-5+3)x+(-5)\times3=(x-5)(x+3)$.

方法点拨

对于二次三项式 $x^2+(p+q)x+pq$ 因式分解时，先将常数项分解成两个数的积，但有时情况不止一种，只有当这两个数的和为一次项的系数时，才可确定两个因式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：分组分解法在分解因式中的应用

例 12： 把下列各式分解因式：

（1）$ad+bd-ax-ay-bx-by$；（2）$4xy+1-4x^2-y^2$.

解题秘方： 分组一般应遵循分组后能运用公式法继续分解，或分组后可用提公因式法分解因式的原则，因而在分组时可进行适当尝试，直到找出解题思路为止.

解：（1）$ad+bd-ax-ay-bx-by$

$=(ad-ax-ay)+(bd-bx-by)$

$=a(d-x-y)+b(d-x-y)$

$=(a+b)(d-x-y)$.

（2）$4xy+1-4x^2-y^2$

$=1-(4x^2-4xy+y^2)$

$=1-(2x-y)^2$

$=(1+2x-y)(1-2x+y)$.

方法点拨

把一个多项式按“先部分，后整体”的思路，先分组，分别变形，再进行分解因式，这种因式分解的方法称为**分组分解法**. 分组分解法适用于三项以上的多项式的因式分解.

类型 3：补项法和拆项法在分解因式中的应用

例 13： 分解因式：

（1）x^4+4；　　（2）$3y^3-4y+1$.

解题秘方：（1）中的多项式只有两项，既没有公因式又不能运用公式法分解因式，但它是两个数的平方和的形式，这时若能添加一项，使之与原来的两项运用完全平方公式分解，再与添加的项的相反项继续分解，可达到目的；（2）中可把 $-4y$ 拆成 $-3y$ 和 $-y$，再分别与 $3y^3$ 和 1 分组后，可分解因式.

解：（1）x^4+4

$=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

（2）$3y^3-4y+1$

$=3y^3-3y-y+1$

$=(3y^3-3y)-(y-1)$

$=3y(y^2-1)-(y-1)$

$=(y-1)[3y(y+1)-1]$

$=(y-1)(3y^2+3y-1)$.

解法提醒

根据多项式的特点，有时可添加两个互为相反数的项，使其中一个与原多项式中某些项结合后，能进行因式分解，达到解决问题的目的；有时还可以把多项式中某些项拆成两项或多项，再与多项式中其他的项分组后，能进行因式分解.

挑战·高分

拔尖角度 3 利用因式分解法进行有理数的巧算

例 14： 用简便方法计算下列各式：

（1）$204^2+204\times192+96^2$；

（2）$50\times9.5^2-100\times9.5\times7.5+50\times7.5^2$；

方法点拨

利用因式分解进行计算可使计算简便，但需要考虑所计算的式子的形式是否符合因式分解的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2\,021^2}\right)$.

解题秘方：（1）先将 204×192 化为 $2\times204\times96$，再利用完全平方公式计算；（2）先提取公因式，再利用完全平方公式计算；（3）每个括号中都利用平方差公式计算，然后逐项相乘约分即可.

解：（1）$204^2+204\times192+96^2$

$=204^2+2\times204\times96+96^2$

$=(204+96)^2$

$=300^2$

$=90\,000$.

（2）$50\times9.5^2-100\times9.5\times7.5+50\times7.5^2$

$=50\times(9.5^2-2\times9.5\times7.5+7.5^2)$

$=50\times(9.5-7.5)^2$

$=50\times2^2$

$=200$.

（3）$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2\,021^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots$

$\left(1-\frac{1}{2\,021}\right)\left(1+\frac{1}{2\,021}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2\,020}{2\,021}\times\frac{2\,022}{2\,021}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\,022}{2\,021}$

$=\frac{1\,011}{2\,021}$.

详解

仔细观察前几项：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$，用平方差公式展开并化简得，$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}$，约分后只剩第一项和最后一项，故 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2\,020}{2\,021}\times\frac{2\,022}{2\,021}$ 约分后也只剩第一项和最后一项.

特点，有时需要进行适当的变形才能进行因式分解，从而达到简化计算的目的.

拔尖角度▸ 4 利用建因式分解模型法判断几何图形的形状

挑战·高分

例 15： 已知△ABC 的三边长分别为 a，b，c，并且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，求证：此三角形为等边三角形.

解题秘方：先将等式变形并且各项都同时乘以 2，把多项式按完全平方公式的特点分成三组分别进行因式分解，结合非负数的性质得出三边关系.

证明：$\because a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，

$\therefore(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$.

将每个括号内的多项式分解因式，

得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，由非负数的性质，

得 $a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$，$\therefore a=b$，$b=c$，$c=a$，

因此 $a=b=c$. 故此三角形为等边三角形.

技巧点拨

涉及的多项式不止三项时，通常要对多项式进行分组，将每一组分解因式化为完全平方式是解答此类问题的常用方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 5 利用从特殊到一般思想进行因式分解探究算式的变化规律

挑战·高分

例16: 老师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$，王华接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22$.

（1）请你再写出两个具有上述规律的算式（不同于上面算式）；

（2）用文字写出反映上述算式的规律；

（3）证明这个规律的正确性.

解题秘方：（1）通过题目中所给出的算式，不难看出这些算式的左边是两个奇数的平方差，右边是8的倍数；（3）可用含有字母的式子表示其规律，再逆用平方差公式来证明问题.

（1）**解：**（答案不唯一）$7^2-3^2=8\times5$，$11^2-7^2=8\times9$.

（2）**解：**规律：任意两个奇数的平方差是8的倍数.

（3）**证明：**设m，n为整数（$m>n$），

两个奇数可分别表示为$2m+1$，$2n+1$，

则$(2m+1)^2-(2n+1)^2$

$=[(2m+1)+(2n+1)][(2m+1)-(2n+1)]$

$=(2m+2n+2)(2m-2n)$

$=2(m+n+1)\cdot2(m-n)$

$=4(m-n)(m+n+1)$.

当m，n同是奇数或偶数时，$m-n$一定是偶数，

$\therefore 4(m-n)(m+n+1)$一定是8的倍数；

当m，n是一奇一偶时，$m+n+1$一定是偶数，

$\therefore 4(m-n)(m+n+1)$一定是8的倍数.

$\therefore$任意两个奇数的平方差是8的倍数.

规律点拨

对于规律探索题，一般先从特殊情况入手发现规律，再用文字或含有字母的关系式表示这个规律.本题体现了从特殊到一般的思想.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘▶ 本节考查运用平方差公式、完全平方公式进行因式分解，在中考中，有时单独考查，有时与提公因式法综合在一起对某些多项式进行因式分解，也有利用因式分解的知识进行化简求值，也有探索与创新题. 根据多项式的特点，灵活地选择合适的方法分解因式是解题的关键. 题型主要以选择题、填空题的形式出现，有时也以解答题的形式出现，难度不大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用因式分解的方法判断分解因式

例17：[中考·济宁]多项式 $4a-a^3$ 分解因式的结果是（　　）

A. $a(4-a^2)$　　B. $a(2-a)(2+a)$

C. $a(a-2)(a+2)$　　D. $a(2-a)^2$

试题评析：此题主要考查了用提公因式法以及公式法分解因式，正确运用公式是解题关键.

解： $4a-a^3=a(4-a^2)=a(2-a)(2+a)$.

答案：B

解法提醒

因式分解是中考必考的内容之一，一提二套的思路是主要考查形式，分解因式一定要彻底.

考法2 利用公式法因式分解求值

例18：[中考·大庆]已知 $a+b=3$，$ab=2$，求代数式 $a^3b+2a^2b^2+ab^3$ 的值.

试题评析：本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

解： $a^3b+2a^2b^2+ab^3=ab(a^2+2ab+b^2)=ab(a+b)^2$,

将 $a+b=3$，$ab=2$ 代入得，$ab(a+b)^2=2\times3^2=18$.

故代数式 $a^3b+2a^2b^2+ab^3$ 的值是 18.

方法点拨

本题运用**整体思想**求值，利用因式分解，将分解结果中的因式的值整体代入求得结果.

两年模拟兵法

☞答案见230页

1.[中考·安徽]下列分解因式正确的是（　　）

A. $-x^2+4x=-x(x+4)$

B. $x^2+xy+x=x(x+y)$

C. $x(x-y)+y(y-x)=(x-y)^2$

D. $x^2-4x+4=(x+2)(x-2)$

2.[中考·贺州]下列各式分解因式正确的是（　　）

A. $x^2+6xy+9y^2=(x+3y)^2$

B. $2x^2-4xy+9y^2=(2x-3y)^2$

C. $2x^2-8y^2=2(x+4y)(x-4y)$

D. $x(x-y)+y(y-x)=(x-y)(x+y)$

3. 已知 $a^2+ma+\frac{1}{9}$ 是一个完全平方式，则 m 的值等于（　　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\pm\frac{2}{3}$

4.[中考·滨州]把多项式 x^2+ax+b 分解因式，得 $(x+1)(x-3)$，则 a，b 的值是（　　）

A. $a=2$，$b=3$　　B. $a=-2$，$b=-3$

C. $a=-2$，$b=3$　　D. $a=2$，$b=-3$

5.[中考·潍坊]因式分解：$x^2-2x+(x-2)=$_____.

6.[中考·株洲]因式分解：$m^3-mn^2=$_____.

7.[中考·安顺]若式子 $x^2+kx+25$ 是一个完全平方式，则 $k=$_____.

8.[中考·衡阳]已知 $a+b=2$，$ab=1$，则 a^2b+ab^2 的值为_____.

9.[中考·贵州]在实数范围内因式分解：$x^5-4x=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 把下列各式分解因式：

（1）$8ab^2-16a^3b^3$；

（2）$-15xy-5x^2$；

（3）$a^3b^3+a^2b^2-ab$；

（4）$-3a^3m-6a^2m^2+3am$.

11. 分解因式：

（1）$121a^2-b^2$；

（2）$(a+3)^2-(a+b)^2$；

（3）$9x^2-24x+16$；

（4）$(x-1)^2-6(x-1)+9$.

12. 已知 a，b，c 是△ ABC 的三边长，且满足 $a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$. 试判断△ ABC 的形状，并说明理由.

13. 已知 a，b，c 为互不相等的实数，且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+8a-14$，$bc=a^2+3a-5$，求实数 a 的取值范围. **【导学号：6994214】**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

恒等变形在整式的运算和因式分解中的应用

荣老师告诉你 把一个式子变换成另一个和它恒等的式子，叫做式子的恒等变形．整式的恒等变形主要的依据有：整式的各种运算性质和法则，各种公式的正、逆应用等．

应用一 运用面积法验证整式的恒等变形

例 1：［中考·北京］如图 12-1 中的四边形均为长方形，根据图形，写出一个正确的等式：_____.

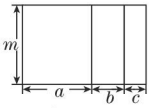


图 12-1

解题秘方：从图形的结构特征入手，找到一个面积之间的相等关系．

解：∵最大的长方形的长为 $a+b+c$，宽为 m，∴它的面积为 $m(a+b+c)$．又∵最大的长方形的面积为三个小长方形的面积之和，三个小长方形的面积分别为 am，bm，cm，

∴ $m(a+b+c)=am+bm+cm$.

答案： $m(a+b+c)=am+bm+cm$

方法点拨：整式的乘法运算是整式的恒等变形，所以用面积法写恒等式，即用两种不同的方式表示图形面积的方法写恒等式．

应用二 运用恒等变形求等式中待定字母的值

例 2：［中考·吉林］若 $x^2-4x+5=(x-2)^2+m$，则 $m=$_____.

解题秘方：运用恒等式左右两边恒等的性质解决．

解：方法一： $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$，∴ $m=1$.

方法二： $(x-2)^2+m=x^2-4x+4+m$，

∴ $4+m=5$. ∴ $m=1$.

方法三：将 $x=2$ 代入等式中得，$4-8+5=m$，

∴ $m=1$.

答案： 1

方法点拨：三种方法都体现了整式的恒等变形．整式的恒等变形，既可以从等式的左边推到右边，也可以从右边推到左边，还可以直接代入任何值，等式都成立．

应用三 运用恒等变形求式子的值

例 3：已知 $(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=16$，求 xy 的值．

解题秘方：运用完全平方公式的结构特征解题．

解：根据乘法公式知 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，

∴ $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

∴ $4xy=25-16=9$.

∴ $xy=\frac{9}{4}$.

方法点拨：乘法公式本身就是整式的恒等变形，乘法公式常见的变形如下：

（1）$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$；

（2）$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$；

（3）$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

应用四 运用恒等变形进行证明

例 4：在 $\triangle ABC$ 中，两边长 a，b 满足 $a^2+b^2-4a-4b+8=0$，求证：$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

解题秘方：运用完全平方公式进行因式分解解决问题．

证明：已知等式可变形为 $a^2-4a+4+b^2-4b+4=0$，

∴ $(a-2)^2+(b-2)^2=0$，

∴ $a=b=2$.

∴ $\triangle ABC$ 为等腰三角形．

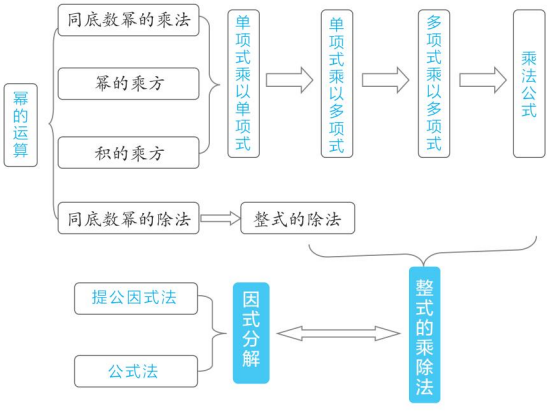
方法点拨：应用因式分解来进行整式的恒等变形是一种常用的解题方法．当题目有平方项且要求判断三角形的形状时，一般将所给的等式分解因式，再利用平方的非负性求得三角形三边的长或三边的关系，以此来判断三角形的形状．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **幂的运算法则：**（1）$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$（m，n 都是正整数）；（2）$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 都是正整数）；（3）$(ab)^n=a^nb^n$（n 为正整数）；（4）$a^m \div a^n=a^{m-n}$（$a \neq 0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$）.
2. 整式的乘除法的关键是单项式的乘除法．整式的其他运算可以通过转化思想将其转化为单项式的乘除法．
3. **平方差公式：**$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；**完全平方公式：**$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
4. **因式分解的方法有两种：**一是提公因式法；二是公式法：平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，完全平方公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

知识方法专题

知识必学

专题一 幂的运算

链接中考» 幂的运算是整式乘除法的基石，主要包括同底数幂的乘除法、幂的乘方和积的乘方运算，中考中往往把几种运算放在一起考查，以选择题的形式出现．

例1：[中考·梅州]下列计算正确的是(　　)

A. $x+x^2=x^3$　　B. $x^2 \cdot x^3=x^6$

C. $(x^3)^2=x^6$　　D. $x^9 \div x^3=x^3$

解题秘方：利用幂的各种运算法则计算．

解：∵ x 与 x^2 不是同类项，不能合并，

∴选项 A 是错误的；

∵ $x^2 \cdot x^3=x^5$，

∴选项 B 是错误的；

∵ $(x^3)^2=x^6$，

∴选项 C 是正确的；

∵ $x^9 \div x^3=x^6$，

∴选项 D 是错误的．

答案：C

方法点拨：幂的运算主要扣住两点：一是底数都不变，二是指数的数量关系．

专题二 整式的乘除法运算

链接中考» 整式的乘除法混合运算的关键是扣住运算顺序和运算法则，在中考中是热门考点，考查形式多以化简求值题呈现，难度适中．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例2：[中考·随州]先化简，再求值：$(2+a)(2-a)+a(a-5b)+3a^5b^3\div(-a^2b)^2$，其中 $ab=-\frac{1}{2}$.

解题秘方：利用整式的乘除法运算法则进行计算.

解：原式 $=(2+a)(2-a)+a(a-5b)+3a^5b^3\div a^4b^2$

$=4-a^2+a^2-5ab+3ab$

$=4-2ab.$

把 $ab=-\frac{1}{2}$ 代入得，原式 $=4+1=5.$

方法点拨：整式运算的顺序是：先乘除，再加减.整式加减的实质就是合并同类项.熟练掌握整式的乘除法运算法则可以提高解题速度.

专题三 乘法公式

链接中考» 运用乘法公式计算能提高运算速度及准确率，考查的形式也是化简求值，考查的难度适中，也是中考的热门考点.

例3：[中考·河池]先化简，再求值：$(3-x)(3+x)+(x+1)^2$，其中 $x=2$.

解题秘方：先利用平方差公式与完全平方公式进行运算，再合并同类项进行化简，最后代入数值求解.

解：原式 $=9-x^2+x^2+2x+1=2x+10$，

当 $x=2$ 时，原式 $=2\times2+10=14.$

方法点拨：熟练掌握乘法公式与整式的运算法则是解决此题的关键.初中数学中的乘法公式有：平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$，应牢固掌握.

专题四 因式分解

链接中考» 因式分解与整式乘法是方向相反的变形，因式分解主要步骤有：一提、二套、三查.因式分解是中考的热门考点，考查的形式主要是填空题.

例4：（1）[中考·梅州]分解因式：$m^3-m=$_____.

（2）[中考·武威]分解因式：$x^3y-2x^2y+xy=$_____.

（3）[中考·金华]已知 $a+b=3$，$a-b=5$，则式子 a^2-b^2 的值是_____.

解题秘方：利用因式分解的方法进行分解.

答案：（1）$m(m+1)(m-1)$

（2）$xy(x-1)^2$

（3）15

方法必会

专题五 整体思想

专题解读 » 有些数学问题直接求解很困难，甚至不能解出，可把要解决的问题看成一个整体，通过研究问题的整体形式、整体结构或进行种种整体处理以后，达到解决问题的目的.整体思想作为重要的思想方法之一，在我们的解题过程中，经常使用.整体思想运用得当，能提高解题效率和能力，减少不必要的计算，从而直奔主题，因而在处理数与式的运算、方程、几何计算方面有着广泛的应用.

例5：[中考·十堰]当 $x=1$ 时，$ax+b+1$ 的值为 -2，则 $(a+b-1)(1-a-b)$ 的值为（　　）

A. -16　　B. -8　　C. 8　　D. 16

解题秘方：通过观察可以发现，把 $x=1$ 代入 $ax+b+1=-2$，可以得到 $a+b$ 的值，然后运用整体思想即可求解.

解：把 $x=1$ 代入 $ax+b+1=-2$，

可得 $a+b=-3.$

$\therefore(a+b-1)(1-a-b)$

$=(-3-1)[1-(a+b)]$

$=-4\times[1-(-3)]$

$=-16.$

答案：A

专题六 分类讨论思想

专题解读 » 所谓分类讨论思想，就是当要解决的问题包含两种或两种以上的可能情况时，则

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

需要按不同的情况通过分类讨论来解决问题的一种思想方法.在运用分类讨论思想解题时,需要认真审题,全面考虑,做到分类标准统一,不重不漏,才能获得完整的解答.

例6: 二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式,求 k 的值.

解题秘方: 在二次三项式 x^2-kx+9 中,x^2 和 9 分别是 x 和 3 的平方,由二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式可知,$-k$ 可能是正的,也可能是负的,故需要分两种情况讨论.

解: ∵二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式, ∴ $-kx=2x\times3$ 或 $-kx=-2x\times3$,解得 $k=-6$ 或 $k=6$.

方法点拨: 本题运用了分类讨论思想,这是由完全平方公式出现两数和或差的平方所决定的,因此要分两种情况讨论,否则容易出现漏解现象.

好题必解 ☞答案见231页

题型1:幂的运算

1. (直接运用幂的运算法则)计算:

(1) $x\cdot x^7+x\cdot x+x^2\cdot x^6-3x^4\cdot x^4$;

(2) $2(-a^3)^4+3(-a^2)^6$;

(3) $-2^2(x^3)^2\cdot(x^2)^4-(x^2)^5\cdot(x^2)^2$;

(4) $a\cdot a^3\cdot a^4+(-a^2)^4+(-2a^4)^2$.

2. (逆用幂的各种运算法则)计算:

(1) 已知 $10^m=3$,$10^n=2$,$10^p=4$,求 $10^{3m+2n-p}$ 的值.

(2) 已知 $a=8^{14}$,$b=256^5$,$c=64^7$,试比较 a,b,c 的大小.

题型2:整式的乘除法运算

3. 计算:

(1) $\left(-\frac{7}{6}a^3b\right)\cdot\frac{6}{5}abc$;

(2) $(-x)^9\div(-x)^2\div(-x)^3$;

(3) $6mn^2\cdot\left(2-\frac{1}{3}mn^4\right)+\left(-\frac{1}{2}mn^3\right)^2$;

(4) $5x(x^2+2x+1)-(2x+3)(x-5)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. 先化简，再求值：

（1）$\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2b^4\right)-(-a^3b^2)\cdot(-b^2)^2$，其中 $a=-\frac{1}{4}$，$b=4$；

（2）$(a+b)(a-2b)-(a+2b)(a-b)$，其中 $a=-2$，$b=\frac{2}{3}$；

（3）$\left(-\frac{1}{3}xy\right)^2\cdot[xy(2x-y)-2x(xy-y^2)]$，其中 $x=-\frac{3}{2}$，$y=-2$.

题型 3：乘法公式

5.（**运用公式求值**）先化简，再求值：

$(x+2y)^2-(x-2y)^2-(x+2y)(x-2y)-4y^2$，其中 $x=-2$，$y=\frac{1}{2}$.

6.（**运用公式计算**）计算：

（1）$200^2-400\times199+199^2$；

（2）$100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1$.

7.（**运用公式变形求值**）计算求值：

（1）已知 $(x+y)^2=64$，$(x-y)^2=9$，求 xy 的值；

（2）已知 $(m-53)(m-47)=24$，求 $(m-53)^2+(m-47)^2$ 的值.

题型 4：因式分解

8. 将下列多项式分解因式：

（1）x^2y-9y；

（2）ax^3-axy^2；

（3）$3x^3-6x^2y+3xy^2$；

（4）$x(x-1)-3x+4$；

（5）$(x+y)^2-4(x+y-1)$；

（6）$(x-2y)^2+8xy$；

（7）x^2+5x+6；

（8）x^2-3x-4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 12 章测试卷 ☞答案见 232 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列运算正确的是（　　）

A. $a^3+a^3=a^6$　　B. $2(a+1)=2a+1$

C. $(ab)^2=a^2b^2$　　D. $a^6\div a^3=a^2$

2. 下列从左到右的变形，是分解因式的是（　　）

A. $xy^2(x-1)=x^2y^2-xy^2$

B. $x^2+x-5=(x-2)(x+3)+1$

C. $(a+3)(a-3)=a^2-9$

D. $2a^2+4a=2a(a+2)$

3. 下列因式分解正确的是（　　）

A. $2x^2-2=2(x+1)(x-1)$

B. $x^2+2x-1=(x-1)^2$

C. $x^2+1=(x+1)^2$

D. $x^2-x+2=x(x-1)+2$

4. 已知 $x^2-2=y$，则 $x(x-3y)+y(3x-1)-2$ 的值是（　　）

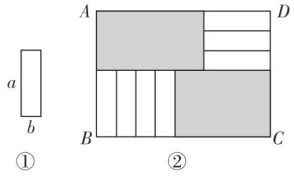
A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

5. 若 $(a+b)^2=(a-b)^2+A$，则 A 为（　　）

A. $2ab$　　B. $-2ab$

C. $4ab$　　D. $-4ab$

6. 7 张如图①的长为 a，宽为 b（$a>b$）的小长方形纸片，按图②的方式不重叠地放在长方形 $ABCD$ 内，未被覆盖的部分（两个长方形）用阴影表示，设左上角与右下角的阴影部分的面积的差为 S，当 BC 的长度变化时，按照同样的放置方式，S 始终保持不变，则 a，b 满足（　　）



（第 6 题）

A. $a=\frac{5}{2}b$　　B. $a=3b$

C. $a=\frac{7}{2}b$　　D. $a=4b$

7. 若 $(x^2+3x+2)(x+a)$ 的结果中不含常数项，则 a 的值为（　　）

A. -2　　B. 0　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 计算 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2017}\times(-1.5)^{2018}\times(-1)^{2019}$ 的结果是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{3}{2}$

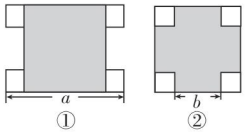
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 已知 $x=y+4$，则式子 $x^2-2xy+y^2-25$ 的值为_____.

10. 若 $ab=3$，$a-2b=5$，则 a^2b-2ab^2 的值是_____.

11. 若 $6^a=5$，$6^b=8$，则 $36^{a-b}=$_____.

12. 一个大正方形和四个全等的小正方形按图①、图②两种方式摆放，则图②的大正方形中未被小正方形覆盖部分的面积是_____（用含 a，b 的式子表示）.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（10 分）计算：

（1）$5x^2y\div\left(-\frac{1}{3}xy\right)\cdot(2xy^2)^2$；

（2）$[(a-2b)^2+(a-2b)(2b+a)-2a(2a-b)]\div 2a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（10分）把下列各式因式分解：

（1）$ax^2+8ax+16a$；

（2）$x^4-81x^2y^2$.

15.（10分）已知$xy=1$，求式子$-\frac{1}{3}x(xy^2+y+x^3y^4)$的值.

16.（10分）每个周末，冬冬都要到城郊爷爷家的花圃里去玩.有一次，爷爷给冬冬出了一道数学题，爷爷家的花圃呈长方形，长比宽多2 m，如果花圃的长和宽分别增加3 m，那么这个花圃的面积将增加39 m^2，你能算出花圃原来的长和宽各是多少米吗?

17.（12分）观察下列等式：

$12\times231=132\times21$，

$13\times341=143\times31$，

$23\times352=253\times32$，

$34\times473=374\times43$，

$62\times286=682\times26$，

……

以上每个等式中两边数字分别是对称的，且每个等式中组成两位数与三位数的数字之间具有相同规律，我们称这类等式为“数字对称等式”.

（1）根据上述各式反映的规律填空，使式子成为“数字对称等式”：

① $52\times$_____=_____$\times25$；

②_____$\times396=693\times$_____.

（2）设这类等式左边两位数的十位数字为a，个位数字为b，且$2\leqslant a+b\leqslant9$，写出表示“数字对称等式”的一般规律的式子（含a，b），并证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第11章 数的开方

11.1 平方根与立方根

11.1.1 平方根

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B

3. C **点拨:** $2.6^2=6.76$, $2.7^2=7.29$, $2.8^2=7.84$, $2.9^2=8.41$, $3^2=9$, $\because 7.84<8<8.41$, $\therefore 2.8<\sqrt{8}<2.9$, $\therefore$ 表示$\sqrt{8}$的点落在段③.

4. B **5.** A

6. $6;-7;\pm5$ **7.** $\frac{49}{4}$

8. 解:(1)$\because \left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, $\left(\pm\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,

$\therefore \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 的平方根是 $\pm\frac{1}{3}$,

即 $\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\frac{1}{3}$.

(2)$\because 0^2=0$, $\therefore 0$ 的平方根是 0.

(3)$\because -2<0$, $\therefore -2$ 没有平方根.

9. 解:(1)$\because 9x^2-25=0$,

$\therefore x^2=\frac{25}{9}$,

$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$.

(2)$\because 4(2x-1)^2=36$,

$\therefore (2x-1)^2=9$,

$\therefore 2x-1=\pm3$,

$\therefore x=2$ 或 $x=-1$.

(3)$\because (x+1)^2-81=0$,

$\therefore (x+1)^2=81$,

$\therefore x+1=\pm9$,

$\therefore x=8$ 或 $x=-10$.

(4)$\because 4(2x+3)^2=(-3)^2$,

$\therefore (2x+3)^2=\frac{9}{4}$,

$\therefore 2x+3=\pm\frac{3}{2}$,

$\therefore x=-\frac{3}{4}$ 或 $x=-\frac{9}{4}$.

10. 解:依题意,得 $2a-1=9$ 且 $3a+b-1=16$,

$\therefore a=5, b=2$,

$\therefore a+2b=5+4=9$,

$\therefore a+2b$ 的平方根为 ±3,

即 $\pm\sqrt{a+2b}=\pm3$.

11. 解:$\because 2<\sqrt{7}<3$,

$\therefore \sqrt{7}$的整数部分是2,小数部分是$\sqrt{7}-2$.

$\therefore \sqrt{7}+7$ 的小数部分是$\sqrt{7}-2$,即 $a=\sqrt{7}-2$.

$\because 7-\sqrt{7}$的整数部分是4,

$\therefore 7-\sqrt{7}$的小数部分是 $7-\sqrt{7}-4=3-\sqrt{7}$,

即 $b=3-\sqrt{7}$.

$\therefore a+b=(\sqrt{7}-2)+(3-\sqrt{7})=1$.

点拨: 先估算$\sqrt{7}$的整数部分,根据它的整数部分,算出它的小数部分,再根据它参与的算式确定算式结果的整数部分和小数部分.

12. 解:由题意知,$a^2-1\geqslant0$ 且 $1-a^2\geqslant0$,

$\therefore a^2=1$.

又$\because a>0$, $\therefore a=1$, $\therefore b=4$,

$\therefore a+b=1+4=5$.

13. 解:根据题意,得 $v=16\times\sqrt{16\times1.69}=16\times5.2=83.2$(km/h),

又 83.2 km/h > 80 km/h,

故肇事汽车当时的速度超过了规定的速度.

11.1.2 立方根

【两年模拟兵法】

1. A

2. D **点拨:** 对于 a^2,无论 a 为何值时,都有 $a^2\geqslant0$,所以 $-a^2\leqslant0$,当 $-a^2=0$ 时,$-a^2$ 的平方根是 0,所以 A 错误;0 有平方根,但它的平方根只有 0,所以 B 错误;由立方根的性质可知 C 错误;由立

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

方根的概念可知 D 正确. 故选 D.

3. B　**点拨:** $\because 3^3=27, 4^3=64$, $\therefore 3<\sqrt[3]{58}<4$. 故选 B.

4. D　**点拨:** $\sqrt[3]{64}=4$, 4 的算术平方根为 $\sqrt{4}=2$.

5. -4　**点拨:** $\because \sqrt{x}=8$, $\therefore x=64$,

$\therefore \sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{-64}=-4$.

6. $-68\,800$

7. $\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$　**点拨:** $\because \sqrt{5}>\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}=2$,

$\therefore \sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$.

8. **解:** (1) $\because 10^3=1\,000$,

$\therefore 1\,000$ 的立方根是 10.

(2) $\because (-2)^3=-8$,

$\therefore -8$ 的立方根是 -2.

(3) $\because \left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$,

$\therefore \frac{27}{125}$ 的立方根是 $\frac{3}{5}$.

(4) $\because \left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{27}{125}$,

$\therefore -\frac{27}{125}$ 的立方根是 $-\frac{3}{5}$.

(5) $\sqrt{64}=8$, $\because 2^3=8$,

$\therefore \sqrt{64}$ 的立方根是 2.

(6) $\because 0.1^3=0.001$,

$\therefore 0.001$ 的立方根是 0.1.

(7) $\because (-0.3)^3=-0.027$,

$\therefore -0.027$ 的立方根是 -0.3.

(8) $\because 1^3=1$,

$\therefore 1$ 的立方根是 1.

(9) $\because (-1)^3=-1$,

$\therefore -1$ 的立方根是 -1.

(10) $\because 0^3=0$,

$\therefore 0$ 的立方根是 0.

9. **解:** (1) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2}$.

(2) 方法一: $-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

方法二: $-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}$.

(3) $\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}=\sqrt[3]{\frac{343}{512}}=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^3}=\frac{7}{8}$.

(4) $\sqrt[3]{-(m+1)^3}=-\sqrt[3]{(m+1)^3}=-(m+1)=-m-1$.

点拨: 本题根据 $\sqrt[3]{a^3}=a$ 进行求解.

10. **解:** (1) $(x+2)^3=-1$,

$x+2=-1$,

$x=-3$.

(2) $(2x+3)^3=216$,

$2x+3=6$,

$2x=3$,

$x=\frac{3}{2}$.

11. **解:** 由题意, 得 $4a-b-3=2$, $3a+2b-9=3$,

$\therefore a=2, b=3$.

$\therefore A=\sqrt{4}=2$, $B=\sqrt[3]{-1}=-1$.

$\therefore A+B$ 的立方根即 $2-1=1$ 的立方根, 为 1.

12. **解:** $\because \sqrt[3]{x+1}-1=x$,

$\therefore \sqrt[3]{x+1}=x+1$,

$\therefore x+1=0$ 或 -1 或 1.

$\therefore x=-1$ 或 -2 或 0.

13. **解:** 设正方体的棱长为 x m,

根据题意, 得 $x^3=1.728$,

$\therefore x=1.2$.

$\therefore$ 正方体的表面积是 $6\times1.2^2=6\times1.44=8.64(\text{m}^2)$.

故至少需要 8.64 m^2 的铁皮.

11.2 实数

【两年模拟兵法】

1. D

2. C　**点拨:** 解决本题的关键是估算出无理数的大小.

3. C　**4.** A　**5.** B

6. 3　**点拨:** 由数轴可知, $2<a<5$, 所以 $a-2>0$, $a-5<0$, 所以 $\sqrt{(a-5)^2}+|a-2|=5-a+a-2=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. $-6<0<\sqrt{5}<\pi$

8. $4-\sqrt{2}$　**点拨：**设数轴上的原点为 O，∵ 点 A，C 关于点 B 对称，∴ $BC=AB=2-\sqrt{2}$，∴ $OC=OB+BC=2+2-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$，∴ 点 C 所对应的实数为 $4-\sqrt{2}$.

9. **解：**有理数集合：$\{-7,0.32,\frac{1}{3},46,0,\sqrt[3]{216},0.\dot{8}\dot{7},\sqrt{16},\cdots\}$；

无理数集合：$\{-\sqrt{8},\sqrt{\frac{1}{2}},-\frac{\sqrt{2}}{2},5\pi,\cdots\}$；

负实数集合：$\{-7,-\sqrt{8},-\frac{\sqrt{2}}{2},\cdots\}$.

10. **解：**(1)原式 $=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2$.

(2)原式 $=2-4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=2-4+(-2)$

$=-4$.

11. **解：**(1)∵ $-5<-\sqrt{19}<-4$，

$3<\sqrt{10}<4$.

∴ 大于 $-\sqrt{19}$ 且小于 $\sqrt{10}$ 的所有整数为 -4，±3，±2，±1，0.

(2)∵ $4<\sqrt{18}<5$.

∴ 绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数为 ±4，±3，±2，±1，0.

点拨：此题主要考查了无理数的估算.

12. **解：**(1)∵ $2<\sqrt{5}<3$，

∴ $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2，小数部分是 $\sqrt{5}-2$.

∴ $\sqrt{5}+2$ 的整数部分是 $2+2=4$，

小数部分是 $\sqrt{5}+2-4$ 即 $\sqrt{5}-2$.

(2)∵ $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1，小数部分是 $\sqrt{3}-1$，

∴ $10+\sqrt{3}$ 的整数部分是 $10+1=11$，小数部分是 $\sqrt{3}-1$，即 $x=11$，$y=\sqrt{3}-1$.

∴ $x-y$ 的相反数为 $y-x=\sqrt{3}-12$.

点拨：(1)易求得 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2，然后再去求其小数部分，从而解决问题；(2)先找出 $10+\sqrt{3}$ 的整数部分与小数部分，从而可知 x，y 的值，再求 $x-y$ 的相反数 $y-x$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B　**2.** A

3. $\pm\sqrt{19}$　**点拨：**∵ $\sqrt{x+2}=3$，

∴ $x+2=9$，即 $x=7$.

∴ $\pm\sqrt{2x+5}=\pm\sqrt{19}$.

4. **解：**由题意，得 $a-b=2$，$a-2b+2=2$.

∴ $a=4$，$b=2$.

∴ $M=\sqrt{a+b+3}=\sqrt{4+2+3}=\sqrt{9}=3$，

$N=\sqrt{a+6b}=\sqrt{4+6\times2}=\sqrt{16}=4$.

∴ $M\cdot N=3\times4=12$.

5. A　**6.** C

7. **解：**(1)根据题意，得 $(2a-1)+(a-5)=0$.

解得 $a=2$.

∴ 这个非负数是 $(2a-1)^2=(2\times2-1)^2=9$.

(2)根据题意，分以下两种情况：

①$a-1=5-2a$. 解得 $a=2$.

此时，$m=1^2=1$；

②$a-1+5-2a=0$. 解得 $a=4$.

此时，$m=3^2=9$.

8. **解：**(1)原式 $=0.5+3+7=10.5$.

(2)原式 $=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+2=4-\sqrt{2}$.

(3)原式 $=2-\sqrt{3}+(-2)+2-2=-\sqrt{3}$.

9. **解：**(1)化简，得 $(x-1)^2=\frac{49}{25}$.

∴ $x-1=\pm\frac{7}{5}$.

∴ $x=\frac{12}{5}$ 或 $x=-\frac{2}{5}$.

(2)化简，得 $(x-2)^3=\frac{1}{64}$，

∴ $x-2=\frac{1}{4}$.

∴ $x=\frac{9}{4}$.

10. 7. 16

11. $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$（$n$ 为大于或等于 2 的自

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

然数)

12. 解:$\because 15^2<250<16^2$,

$\therefore 15<\sqrt{250}<16$.

$\therefore \sqrt{250}$的整数部分是15,即$a=15$.

$\because b-1=\sqrt{400}=20$,

$\therefore b=21$.

$\therefore \sqrt{a+b}=\sqrt{15+21}=\sqrt{36}=6$.

【第11章测试卷】

一、**1.** C **2.** B **3.** D **4.** B **5.** C **6.** C **7.** D **8.** D

二、**9.** $2-\sqrt{3}$;$2-\sqrt{3}$ **10.** >

11. -1;49 **12.** $\pi-1$

三、**13.** 解:(1)原式$=2+9-2=9$.

(2)原式$=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{6}}-(\sqrt{6})^2=1-6=-5$.

(3)原式$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$.

14. 解:(1)$4x^2=9$.

$x^2=\frac{9}{4}$.

$x=\pm\frac{3}{2}$.

(2)$(x-1)^3=-\frac{125}{64}$.

$x-1=-\frac{5}{4}$.

$x=-\frac{1}{4}$.

15. 解:设截去的每个小正方体的棱长为x cm. 依题意,得

$1\,000-8x^3=488$.

$\therefore 8x^3=512$.

$\therefore x=4$.

答:截去的每个小正方体的棱长是4 cm.

16. 解:根据题意,得$a=3$,$b=\sqrt{10}-3$,

$\therefore (-a)^3+(b+3)^2$

$=(-3)^3+(\sqrt{10}-3+3)^2$

$=-27+10$

$=-17$.

17. 解:(1)$\sqrt{11-2}=3$.

(2)$\sqrt{1\,111-22}=33$.

(3)$\sqrt{111\,111-222}=333$.

(4)$\sqrt{11\,111\,111-2\,222}=3\,333$.

规律为$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$($n$为正整数).

$\underbrace{33\cdots3}_{1\,009个3}$

第12章 整式的乘除

12.1 幂的运算

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** B **4.** D **5.** B **6.** B **7.** B

8. 解:(1)原式$=-a^3\cdot a^2\cdot a^4=-a^{3+2+4}=-a^9$.

(2)原式$=x^2\cdot x^n\cdot x\cdot(-x^5)=-x^2\cdot x^n\cdot x\cdot x^5=-x^{2+n+1+5}=-x^{8+n}$.

(3)原式$=a^{24}\div a^{12}\div a^6=a^6$.

9. 解:$a^{2m+3n}=a^{2m}\cdot a^{3n}=(a^m)^2\cdot(a^n)^3=2^2\times3^3=4\times27=108$.

点拨:本题可逆用同底数幂的乘法和幂的乘方运算法则解决.

10. 解:原式$=\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times(-8)^{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9$

$=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)^{12}\times(-8)^{13}\right]\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^9\right]$

$=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)\times(-8)\right]^{12}\times(-8)\times\left[\left(-\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right]^7\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

$=1\times(-8)\times1\times\frac{9}{25}$

$=-\frac{72}{25}$.

点拨:逆用积的乘方法则和同底数幂的乘法法则,使问题获解.

11. 解:$\because 2^{12}\times5^8=2^4\times(2\times5)^8=1.6\times10^9$,

$\therefore 2^{12}\times5^8$的结果是一个十位正整数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. 解:∵ $20^n=(2^2\times5)^n=2^{2n}\times5^n=(2^n)^2\times5^n=a^2b$,且 $20^n=c$,∴ $c=a^2b$.

点拨:利用积的乘方法则和逆用幂的乘方法则,把 20^n 用含 2^n,5^n 的式子表示,从而得出 c 与 a,b 的关系.

12.2 整式的乘法

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** B

4. C 点拨:本题运用了方程思想. 原式 $=x^4-3x^3+2x^2+px^3-3px^2+2px+qx^2-3qx+2q=x^4+(p-3)x^3+(2-3p+q)x^2+(2p-3q)x+2q$.

由题意得 $\begin{cases}2-3p+q=0,\\2p-3q=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=\dfrac{6}{7},\\q=\dfrac{4}{7}.\end{cases}$

5. 2

6. $x^{n+1}-1$ 点拨:解答这类题应从项数和次数两个方面去找规律.

7. 解:(1)$x(x+1)-(x+1)(x-2)$
$=(x^2+x)-(x^2-x-2)$
$=x^2+x-x^2+x+2$
$=2x+2$.
(2)$(a+3)(a-2)-a(a-1)(2a-6)$
$=(a^2+a-6)-a(2a^2-8a+6)$
$=a^2+a-6-2a^3+8a^2-6a$
$=-2a^3+9a^2-5a-6$.

8. 解:$2(3x+1)(1-3x)+(x-2)(2+x)$
$=2(1-9x^2)+x^2-4$
$=2-18x^2+x^2-4$
$=-17x^2-2$.
当 $x=2$ 时,
原式 $=-17x^2-2=-17\times2^2-2=-70$.

9. 解:(1)原方程可化为
$4x^2-4x+5=4x^2+6x-2x-3$,
即 $8x=8$,故 $x=1$.
(2)原不等式可化为
$(6x^2-11x+3)-(6x^2-29x+20)>0$,
即 $18x>17$,故 $x>\dfrac{17}{18}$.

10. 解:∵ $(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$,
∴ 所用 A,B,C 三类卡片分别为 3 张,1 张,2 张,图略(图不唯一).

12.3 乘法公式

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** D **4.** B

5. C 点拨:把已知的两个等式按照完全平方公式展开,然后根据等式的性质进行加法运算.
∵ $(m-n)^2=8$,
∴ $m^2-2mn+n^2=8$,①
∵ $(m+n)^2=2$,
∴ $m^2+2mn+n^2=2$. ②
① + ②,得 $2m^2+2n^2=10$,
∴ $m^2+n^2=5$. 故选 C.

6. $(6a+15)$ 点拨:$S_{长方形}=(a+4)^2-(a+1)^2=a^2+8a+16-a^2-2a-1=6a+15(cm^2)$.

7. 37 点拨:∵ $|x+y-7|+(xy-6)^2=0$,
∴ $x+y-7=0$,$xy-6=0$.
∴ $x+y=7$,$xy=6$.
∴ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\times6=49-12=37$.

8. ±8 点拨:依题意,知$[(2a+2b)+1][(2a+2b)-1]=63$,∴ $(2a+2b)^2-1=63$,即 $(2a+2b)^2=64$,∴ $2a+2b=\pm8$.

9. 解:(1)原式 $=(40-1)(40+1)$
$=40^2-1^2$
$=1\ 599$.
(2)$\left(99\dfrac{2}{3}\right)^2$
$=\left(100-\dfrac{1}{3}\right)^2$
$=100^2-2\times100\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$
$=10\ 000-66\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{9}$
$=9933\dfrac{4}{9}$.

10. 解:(1)原式 $=y^2-4-y^2-5y+y+5$
$=-4y+1$.
(2)原式 $=(x^2+4xy+4y^2)-(x^2-4xy+4y^2)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=x^2+4xy+4y^2-x^2+4xy-4y^2$

$=8xy$.

(3)原式$=(m^2-4)^2$

$=m^4-8m^2+16$.

(4)原式$=[x-(2y-3)][x+(2y-3)]$

$=x^2-(2y-3)^2$

$=x^2-(4y^2-12y+9)$

$=x^2-4y^2+12y-9$.

点拨:对于(1),运用平方差公式及整式乘法计算,再去括号、合并同类项;对于(2),先运用完全平方公式展开,再去括号、合并同类项;对于(3),先用平方差公式,再用完全平方公式计算;对于(4),先将两个多项式变形成可用平方差公式计算的形式,再利用平方差公式计算,最后利用完全平方公式计算可得结果. 熟练掌握乘法公式是解答本题的关键,这里需要先观察式子符合什么样的乘法公式,再根据相应乘法公式进行计算;另外具体计算时括号前面是负号,注意去括号时,改变括号内各项的符号.

11. **解**:$\because x^2-y^2=12$,

$\therefore (x+y)(x-y)=12$,

$\because x+y=3$①,$\therefore x-y=4$②,

①+②得,$2x=7$,

$\therefore 2x^2-2xy=2x(x-y)=7\times4=28$.

12. **解**:设$2\,021-a=x$,$2\,019-a=y$,

则$x-y=2$,$xy=2\,020$,

$\therefore (2\,021-a)^2+(2\,019-a)^2$

$=x^2+y^2$

$=(x-y)^2+2xy$

$=2^2+2\times2\,020$

$=4\,044$.

12.4 整式的除法

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B **3.** $4a$ **4.** $-4x^2yz$ **5.** $4ab$;$6a-4b+2$

6. $8a-6b+2$

7. **解**:(1)原式$=-3ab^2c$.

(2)原式$=-\frac{4}{25}b$.

(3)原式$=-3a^2b^2c^2$.

(4)原式$=n-\frac{21}{2}m+n^3$.

(5)原式$=3x^2y^3-2y-4xy^2$.

8. **解**:(1)1;1;1;1 (2)$(x^2+x)\div x-x$.

(3)可以发现结论:当$x\neq0$时,$(x^2+x)\div x-x=1$.

9. **解**:$\left[\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2h+\pi\left(\frac{1}{2}\times2a\right)^2H\right]\div\left[\pi\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\right)^2\times8\right]$

$=\left(\frac{1}{4}\pi a^2h+\pi a^2H\right)\div\left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)$

$=\left(\frac{1}{2}h+2H\right)$(个).

所以需要$\left(\frac{1}{2}h+2H\right)$个这样的杯子.

10. **解**:$\because 21x^4y^3\div(-7x^2y)=-3x^2y^2$,而商中未被弄污的部分没有这一项,

$\therefore$ 商中被弄污的内容就是$-3x^2y^2$.

$\because (5xy-y)\cdot(-7x^2y)=-35x^3y^2+7x^2y^2$,

$\therefore$ 被除式中被弄污的内容为$35x^3y^2$.

12.5 因式分解

【两年模拟兵法】

1. C **2.** A **3.** D

4. B **点拨**:$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$,故$a=-2$,$b=-3$.

5. $(x-2)(x+1)$

6. $m(m+n)(m-n)$ **点拨**:$m^3-mn^2=m(m^2-n^2)=m(m+n)(m-n)$.

7. 10或-10 **点拨**:设$x^2+kx+25=(x+m)^2$,则$m^2=25$,故$m=\pm5$,$\therefore k=2m=\pm10$.

8. 2 **点拨**:$a^2b+ab^2=ab(a+b)=1\times2=2$.

方法规律:本题运用整体思想求解,先将原式分解因式,再将条件整体代入求值.

9. $x(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

10. **解**:(1)原式$=8ab^2(1-2a^2b)$.

(2)原式$=-5x(3y+x)$.

(3)原式$=ab(a^2b^2+ab-1)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)原式 $=-3am(a^2+2am-1)$.

点拨:当某一项与公因式相同时,提取后为"1"而不是"0",不要漏掉;首项带负号的多项式,提公因式时,公因式带负号,括号内的各项要改变符号.(4)题易因不改变括号内各项的符号而出错.

11. 解:(1)原式 $=(11a)^2-b^2=(11a+b)(11a-b)$.

(2)原式 $=[(a+3)+(a+b)][(a+3)-(a+b)]=(2a+b+3)(3-b)$.

(3)原式 $=(3x)^2-2\cdot3x\cdot4+4^2=(3x-4)^2$.

(4)原式 $=[(x-1)-3]^2=(x-4)^2$.

12. 解:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

理由:$\because a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$,

$\therefore a^4-b^4+a^2c^2-b^2c^2=0$,

$\therefore (a^2+b^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)c^2=0$,

$\therefore (a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)=0$,

$\therefore (a+b)(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$.

$\because a,b,c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边长,

$\therefore a^2+b^2+c^2>0, a+b>0$,

$\therefore a-b=0$,即 $a=b$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

点拨:先分组分解因式后,再用提取公因式法分解因式,将等式的一边化为乘积形式,另一边化为0,从而利用两边相等的关系来确定三角形的形状.

13. 解:$\because bc=a^2+3a-5$,

$\therefore 2bc=2a^2+6a-10$,①

又 $b^2+c^2=2a^2+8a-14$,②

②-①得 $b^2-2bc+c^2=2a^2+8a-14-(2a^2+6a-10)=2a^2+8a-14-2a^2-6a+10=2a-4$,即 $(b-c)^2=2a-4$.

$\because b,c$ 为互不相等的实数,

$\therefore (b-c)^2>0$,$\therefore 2a-4>0$,解得 $a>2$.

点拨:本题运用整体思想求解.由于条件等式中的未知数较多,通过变形利用完全平方公式分解因式,结合非负数的性质转化为不等式求解是解题的关键.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)原式 $=x^2-x^8$.

(2)原式 $=5a^{12}$.

(3)原式 $=-5x^{14}$.

(4)原式 $=6a^8$.

2. 解:(1)$10^{3m+2n-p}$

$=10^{3m}\cdot10^{2n}\div10^p$

$=(10^m)^3\cdot(10^n)^2\div10^p$

$=3^3\times2^2\div4=27$.

(2)$\because a=8^{14}=(2^3)^{14}=2^{42}$,

$b=256^5=(2^8)^5=2^{40}$,

$c=64^7=(2^6)^7=2^{42}$,

$\therefore a=c>b$.

3. 解:(1)原式 $=-\frac{7}{5}a^4b^2c$.

(2)原式 $=x^4$.

(3)原式 $=12mn^2-\frac{7}{4}m^2n^6$.

(4)原式 $=5x^3+8x^2+12x+15$.

4. 解:(1)原式 $=\frac{7}{8}a^3b^6$.当 $a=-\frac{1}{4}, b=4$ 时,

原式 $=\frac{7}{8}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^3\times4^6=-56$.

(2)原式 $=-2ab$.当 $a=-2, b=\frac{2}{3}$ 时,

原式 $=(-2)\times(-2)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

(3)原式 $=\frac{1}{9}x^3y^4$.当 $x=-\frac{3}{2}, y=-2$ 时,

原式 $=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times(-2)^4=-6$.

5. 解:原式 $=-x^2+8xy$.当 $x=-2, y=\frac{1}{2}$ 时,

原式 $=-(-2)^2+8\times(-2)\times\frac{1}{2}=-12$.

6. 解:(1)原式 $=200^2-2\times200\times199+199^2$

$=(200-199)^2=1$.

(2)原式 $=(100+99)(100-99)+(98+97)\times(98-97)+(96+95)(96-95)+\cdots+(2+1)\times(2-1)$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=100+99+98+97+96+95+\cdots+2+1$

$=(100+1)\times 50$

$=5\,050.$

7. 解:(1)$\because (x+y)^2-(x-y)^2=4xy=64-9=55$,

$\therefore xy=\frac{55}{4}$.

(2)$(m-53)^2+(m-47)^2=[(m-53)-(m-47)]^2+2(m-53)(m-47)=(-6)^2+48=84$.

8. 解:(1)原式$=y(x+3)(x-3)$.

(2)原式$=ax(x+y)(x-y)$.

(3)原式$=3x(x-y)^2$.

(4)原式$=(x-2)^2$.

(5)原式$=(x+y-2)^2$.

(6)原式$=(x+2y)^2$.

(7)原式$=(x+2)(x+3)$.

(8)原式$=(x+1)(x-4)$.

【第12章测试卷】

一、**1.** C **2.** D **3.** A **4.** B **5.** C **6.** B **7.** B **8.** D

二、**9.** -9 **10.** 15 **11.** $\frac{25}{64}$ **12.** ab

三、**13.** 解:(1)原式$=-60x^3y^4$.

(2)原式$=-a-b$.

14. 解:(1)原式$=a(x^2+8x+16)=a(x+4)^2$.

(2)原式$=x^2(x^2-81y^2)=x^2(x+9y)(x-9y)$.

15. 解:原式$=-\frac{1}{3}xy(xy+1+x^3y^3)$

$=-\frac{1}{3}xy[xy+1+(xy)^3]$

$=-\frac{1}{3}\times 1\times(1+1+1^3)$

$=-1$.

16. 解:设花圃原来的宽为x m,

则原来的长为$(x+2)$m,面积为$x(x+2)$m^2,

当花圃的长和宽分别增加3 m时,

它的面积为$(x+3)(x+5)$m^2. 根据题意,得

$(x+3)(x+5)=x(x+2)+39$,

解得$x=4$. 所以花圃原来的长为$4+2=6$(m).

答:花圃原来的宽为4 m,长为6 m.

17. 解:(1)①275;572

②63;36

(2)$\because$ 等式左边两位数的十位数字为a,个位数字为b,

$\therefore$ 左边的两位数是$10a+b$,三位数是$100b+10(a+b)+a$,右边的两位数是$10b+a$,三位数是$100a+10(a+b)+b$.

$\therefore$ 一般规律的式子为$(10a+b)\times[100b+10(a+b)+a]$

$=[100a+10(a+b)+b]\times(10b+a)$.

证明:左边$=(10a+b)(100b+10a+10b+a)$

$=(10a+b)(110b+11a)$

$=11(10a+b)(10b+a)$,

右边$=(100a+10a+10b+b)(10b+a)$

$=(110a+11b)(10b+a)$

$=11(10a+b)(10b+a)$.

$\because$ 左边$=$右边,

$\therefore$ 表示"数字对称等式"的一般规律的式子为

$(10a+b)\times[100b+10(a+b)+a]=[100a+10(a+b)+b]\times(10b+a)$.

第13章 全等三角形

13.1 命题、定理与证明

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B **3.** B

4. 1;2;-1(答案不唯一)

5. ②③④

6. 解:(1)条件:两个角的和等于90°;结论:这两个角互为余角.

(2)条件:几个角是锐角;结论:这几个角相等.

7. 解:(1)假命题. 反例:钝角的补角是锐角. (反例不唯一)

(2)假命题. 反例:互补的两个角可以都是直角.

8. 解:AD平分$\angle BAC$,理由如下:

$\because AD\perp BC$于点D,$EG\perp BC$于点G,

$\therefore AD/\!/EG$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$,$\angle 1=\angle E$.

$\because \angle E=\angle 3$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

即 AD 平分 $\angle BAC$.

9. **解**:(1)平行. 理由如下:

$\because \angle 1+\angle 2=180°$, $\angle 2+\angle CDB=180°$(邻补角的定义),

$\therefore \angle 1=\angle CDB$,

$\therefore AE/\!/FC$(同位角相等,两直线平行).

(2)平行. 理由如下:

$\because AE/\!/CF$,

$\therefore \angle C=\angle CBE$(两直线平行,内错角相等).

又$\because \angle A=\angle C$,

$\therefore \angle A=\angle CBE$.

$\therefore AD/\!/BC$(同位角相等,两直线平行).

(3)BC 平分 $\angle DBE$. 理由如下:

$\because DA$ 平分 $\angle BDF$,

$\therefore \angle FDA=\angle ADB$.

$\because AE/\!/CF$, $AD/\!/BC$,

$\therefore \angle FDA=\angle A=\angle CBE$, $\angle ADB=\angle CBD$.

$\therefore \angle CBE=\angle CBD$.

$\therefore BC$ 平分 $\angle DBE$.

10. (1)**证明**:如图(1),过点 P 作 $FP/\!/AC$.

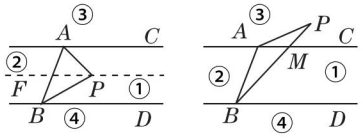
则 $\angle PAC=\angle APF$.

$\because AC/\!/BD$,

$\therefore FP/\!/BD$.

$\therefore \angle FPB=\angle PBD$.

$\therefore \angle APB=\angle APF+\angle FPB=\angle PAC+\angle PBD$.



(第 10 题)

(2)**解**:不成立.

(3)**解**:(a)当动点 P 在射线 BA 的右侧时,结论是 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

(b)当动点 P 在射线 BA 上时,结论是 $\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$ 或 $\angle PAC=\angle PBD+\angle APB$ 或 $\angle APB=0°$, $\angle PAC=\angle PBD$. (任写一个即可)

(c)当动点 P 在射线 BA 的左侧时,结论是 $\angle PAC=\angle APB+\angle PBD$.

选择(a)证明:

如图(2),设 PB 交 AC 于点 M.

$\because AC/\!/BD$,

$\therefore \angle PMC=\angle PBD$.

又$\because \angle APM+\angle PAM+\angle AMP=180°$, $\angle AMP+\angle PMC=180°$,

$\therefore \angle PMC=\angle PAM+\angle APM$,

$\therefore \angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

13.2 三角形全等的判定

13.2.1 全等三角形的判定条件

【两年模拟兵法】

1. B　**2.** C

3. A　**点拨**:由题意得 $AC=DF=25$ cm,

$\therefore BC=100-AC-AB=100-25-30=45$(cm).

4. A

5. 70°　**点拨**:先由全等三角形的性质求出 $\angle DEF$ 和 $\angle ACB$ 的度数,再根据三角形内角和定理求出 $\angle COE$ 的度数.

6. 100°;12cm

7. 6　**点拨**:$\because$ 将长方形纸片 $ABCD$ 折叠,使点 D 与点 B 重合,点 C 落在 C' 处,$\therefore BE=ED$, $BC'=DC$, $C'F=FC$, $\therefore$ $\triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和等于长方形 $ABCD$ 的周长.

8. **解**:(1)由题意可得 $\triangle ABC\cong\triangle DBE$, AC 和 DE, AB 和 DB, BC 和 BE 是对应边; $\angle A$ 和 $\angle D$, $\angle ACB$ 和 $\angle DEB$, $\angle ABC$ 和 $\angle DBE$ 是对应角.

(2)$AC\perp DE$. 理由:延长 AC 交 DE 于点 F.

$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle A+\angle ACB=90°$.

$\because \triangle ABC\cong\triangle DBE$,

$\therefore \angle A=\angle D$.

又$\because \angle ACB=\angle DCF$(对顶角相等),

$\therefore \angle D+\angle DCF=90°$.

$\therefore \angle AFD=90°$.

$\therefore AC\perp DE$.

9. **证明**:$\because \triangle PAB\cong\triangle AQC$,

$\therefore \angle BAP=\angle CQA$.

$\because CF\perp AB$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle CQA+\angle QAF=90°$.

$\therefore \angle BAP+\angle QAF=90°$,

即$\angle QAP=90°$.

$\therefore AP\perp AQ$.

10. 解:相等.

理由如下:$\because \triangle ADC\cong\triangle ECD$,

$\therefore S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ECD}$.

$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \triangle ABD$与$\triangle ADC$同底等高.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ECD}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ECD}+S_{\triangle BCD}$.

即$S_{梯形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

13.2.2 三角形全等的判定

【两年模拟兵法】

1. A

2. C 点拨:本题考查了学生对全等三角形的判定方法的灵活运用.

3. B 点拨:$\because AD\perp CE,BE\perp CE$,

$\therefore \angle ADC=\angle CEB=90°$,

$\therefore \angle DAC+\angle DCA=90°$.

$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle ECB+\angle DCA=90°$,

$\therefore \angle DAC=\angle ECB$.

$\because AC=CB$,

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$,

$\therefore AD=CE=3,CD=BE=1$,

$\therefore DE=CE-CD=3-1=2$.

4. $3<AD<7$ 点拨:延长AD到E,使$DE=AD$,连结CE,则$AE=2AD$.另证$\triangle ECD\cong\triangle ABD$,$\therefore CE=AB=10$.再由三角形的三边关系可得$CE-AC<AE<AC+CE$,即$10-4<2AD<10+4$.即$3<AD<7$.

5. 证明:$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle DAC+\angle 1=\angle 2+\angle DAC$,

$\therefore \angle BAC=DAE$,

在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADE$(A.S.A.).

$\therefore BC=DE$.

6. 证明:$\because FB=CE$,

$\therefore BC=EF$,

又$\because AB/\!/ED,AC/\!/FD$,

$\therefore \angle ABC=\angle DEF,\angle ACB=\angle DFE$,

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$(A.S.A.),

$\therefore AB=DE$,

在$\triangle ABO$和$\triangle DEO$中,

$$\begin{cases}\angle ABO=\angle DEO,\\ \angle AOB=\angle DOE,\\ AB=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle DEO$(A.A.S.),

$\therefore AO=DO,BO=EO$.

$\therefore AD$与BE互相平分.

7. (1)证明:$\because AE$和BD相交于点O,

$\therefore \angle AOD=\angle BOE$.

在$\triangle AOD$和$\triangle BOE$中,$\angle A=\angle B$,

$\therefore \angle BEO=\angle 2$,

又$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1=\angle BEO$,

$\therefore \angle AEC=\angle BED$.

在$\triangle AEC$和$\triangle BED$中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BED,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BED$(A.S.A.).

(2)解:$\because \triangle AEC\cong\triangle BED$,

$\therefore EC=ED,\angle C=\angle BDE$.

在$\triangle EDC$中,$\because EC=ED,\angle 1=42°$,

$\therefore \angle C=\angle EDC=69°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BDE = 69°$.

8. (1)**证明:** $\because AC = AD + DC, DF = DC + CF$,

且 $AD = CF$,

$\therefore AC = DF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中, $\begin{cases} AB = DE, \\ BC = EF, \\ AC = DF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$(S. S. S.)

(2)**解:** 由(1)可知, $\angle F = \angle ACB$.

$\because \angle A = 55°, \angle B = 88°$,

$\therefore \angle ACB = 180° - (\angle A + \angle B)$

$= 180° - (55° + 88°)$

$= 37°$.

$\therefore \angle F = \angle ACB = 37°$.

9. 解: 由前面的已知条件不能证明$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

选择添加条件①.

证明: $\because BF = CE$,

$\therefore BC = EF$.

又$\because \angle ABC = \angle DEF, AB = DE$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$(S. A. S.).

点拨: 添加条件③时,

证明: $\because AC /\!/ DF$,

$\therefore \angle C = \angle F$.

$\because BF = CE$,

$\therefore BC = EF$.

又$\because \angle ABC = \angle DEF$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (A. S. A.).

添加条件②$AC = DF$,此时不能证明两三角形全等.

10. (1)**证明:** $\because \angle BGE = \angle ADE$,

$\angle BGE = CGF = 90°$,

$\therefore \angle ADE = \angle CGF$,

$\because AC \perp BD, BF \perp CD$,

$\therefore \angle ADE + \angle DAE = \angle CGF + \angle GCF = 90°$.

$\therefore \angle DAE = \angle GCF$.

$\because AC \perp BD$,

$\therefore \angle AED = \angle CED = 90°$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CDE$中,

$\begin{cases} \angle DAE = \angle DCE, \\ \angle AED = \angle CED, \\ DE = DE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$.

$\therefore AD = CD$.

(2)**解:** 面积等于$\triangle ADE$面积的2倍的三角形有$\triangle ACD, \triangle ABE, \triangle BCE, \triangle BHG$.

13.3 等腰三角形

13.3.1 等腰三角形的性质

【两年模拟兵法】

1. B

2. D **方法规律:** 本题运用了分类讨论思想,分顶角是70°和底角是70°两种情况.

3. D **4.** C **5.** A **6.** 30°

7. 20° **点拨:** 如图,过点A作$AD /\!/ l_1$,

则$\angle BAD = \angle \beta$,

$\because l_1 /\!/ l_2$,

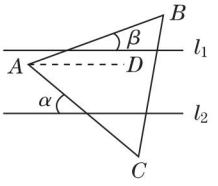
$\therefore AD /\!/ l_2$,

$\therefore \angle DAC = \angle \alpha = 40°$,

$\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore \angle BAC = 60°$,

$\therefore \angle \beta = \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 60° - 40° = 20°$,故答案为20°.



(第7题)

8. 36°

9. 解: $\because AB = AC, \angle B = 30°$,

$\therefore \angle C = \angle B = 30°$.

$\because \angle C + \angle BAC + \angle B = 180°$,

$\therefore \angle BAC = 180° - 30° - 30° = 120°$.

$\because \angle DAB = 45°$,

$\therefore \angle DAC = \angle BAC - \angle DAB = 120° - 45° = 75°$.

10. 证明: $\because DG /\!/ AC$,

$\therefore \angle DGB = \angle ACB, \angle DGF = \angle ECF$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∵ ∠DFG = ∠EFC, DF = EF,

∴ △GDF≌△CEF, ∴ DG = EC.

∵ BD = CE, ∴ BD = DG,

∴ ∠DGB = ∠B.

∵ ∠DGB = ∠ACB,

∴ ∠B = ∠ACB.

11. (1)**证明:**∵ △ABC 是等边三角形,

∴ ∠BAC = ∠B = 60°, AB = AC.

又∵ AE = BD,

∴ △AEC≌△BDA. ∴ AD = CE.

(2)**解:**由(1)知△AEC≌△BDA,

∴ ∠ACE = ∠BAD.

∴ ∠DFC = ∠FAC + ∠ACE = ∠FAC + ∠BAD = ∠BAC = 60°.

12. (1)**证明:**如图①,连结 AD,

∵ AB = AC,点 D 为 BC 的中点, ∴ ∠BDA = 90°,

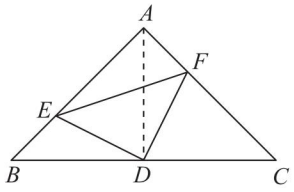
又∵ ∠EDF = 90°,

∴ ∠BDE + ∠EDA = ∠EDA + ∠ADF = 90°.

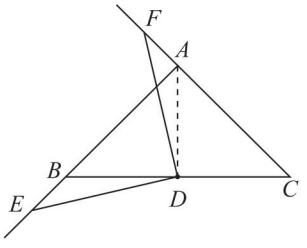
∴ ∠BDE = ∠ADF.

又∵ D 为 BC 的中点, △ABC 是等腰直角三角形, ∴ BD = AD, ∠B = ∠DAC = 45°.

∴ △BDE≌△ADF(A. S. A.). ∴ BE = AF.



①



②

(第 12 题)

(2)**解:**BE = AF. 理由:如图②,连结 AD, ∵ AB = AC,点 D 为 BC 的中点,

∴ ∠BDA = 90°.

又∵ ∠EDF = 90°,

∴ ∠BDE + ∠BDF = ∠BDF + ∠ADF = 90°.

∴ ∠BDE = ∠ADF.

又∵ D 为 BC 的中点, △ABC 是等腰直角三角形,

∴ BD = AD, ∠ABC = ∠DAC = 45°.

∴ ∠EBD = ∠FAD = 180° − 45° = 135°.

∴ △BDE≌△ADF(A. S. A.).

∴ BE = AF.

13. **解:**(1)若∠A 为顶角,

则∠B = (180° − ∠A) ÷ 2 = 50°;

若∠A 为底角,∠B 为顶角,

则∠B = 180° − 2 × 80° = 20°;

若∠A 为底角,∠B 为底角,则∠B = 80°;

故∠B = 50°或 20°或 80°;

(2)分两种情况:

①当 90 ≤ x < 180 时,∠A 只能为顶角,

∴ ∠B 的度数只有一个;

②当 0 < x < 90 时,

若∠A 为顶角,则 $\angle B = \left(\frac{180 - x}{2}\right)°$;

若∠A 为底角,∠B 为顶角,则∠B = (180 − 2x)°;

若∠A 为底角,∠B 为底角,则∠B = x°.

当 $\frac{180 - x}{2} \neq 180 - 2x$ 且 $180 - 2x \neq x$ 且 $\frac{180 - x}{2} \neq x$,

即 x ≠ 60 时,∠B 有三个不同的度数.

综上所述,可知当 0 < x < 90 且 x ≠ 60 时,∠B 有三个不同的度数.

14. **解:**如图,在 AC 上截取 AE = AB,连结 DE.

∵ AC = AB + BD, AC = AE + CE,

∴ CE = BD.

在△ABD 和△AED 中,

$$\begin{cases} AB = AE, \\ \angle BAD = \angle EAD, \\ AD = AD, \end{cases}$$

∴ △ABD≌△AED,

∴ BD = DE, ∠B = ∠AED,

∴ CE = DE,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

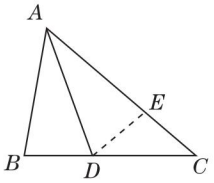
$\therefore \angle C = \angle EDC$,

$\therefore \angle AED = 2\angle C$,

$\therefore \angle B = 2\angle C$.

$\because \angle B + \angle C = 180° - \angle BAC = 180° - 60° = 120°$,$\therefore \angle B = 80°$.

点拨:本题运用了截长补短法,通过截取线段构造出全等三角形,实现了线段和角的转化.



(第 14 题)

15. 解:$\because \triangle BDC$ 是等腰三角形,且 $\angle BDC = 120°$,

$\therefore DB = DC$,$\angle BCD = \angle DBC = 30°$,

$\because \triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形,

$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60°$,

$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90°$.

延长 AB 至 F,使 $BF = CN$,连结 DF.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDN$ 中,

$BF = CN$,$\angle DBF = \angle DCN = 90°$,$DB = DC$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDF \cong \mathrm{Rt}\triangle CDN$,

$\therefore \angle BDF = \angle CDN$,$DF = DN$.

$\because \angle MDN = 60°$,

$\therefore \angle BDM + \angle CDN = \angle BDC - \angle MDN = 60°$.

$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60°$,

$\therefore \angle MDF = 60° = \angle MDN$.

在 $\triangle DMF$ 和 $\triangle DMN$ 中,

$DF = DN$,$\angle MDF = \angle MDN$,$DM = DM$,

$\therefore \triangle DMF \cong \triangle DMN$.

$\therefore MF = MN$.

$\therefore \triangle AMN$ 的周长是 $AM + MN + AN = AM + MF + AN = AM + MB + BF + AN = AM + MB + CN + AN = AB + AC = 6$.

13.3.2 等腰三角形的判定

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**:连结 AC,由题意得 $\angle ABC = 60°$,$AB = BC$,$\therefore \triangle ABC$是等边三角形,$\therefore AC = AB = 40$ 海里.

$\therefore$ 选 B.

2. C **3.** D **4.** D

5. 证明:$\because AB = AC$.

$\therefore \angle B = \angle C$.

$\because DE \perp AB$,$DF \perp BC$.

$\therefore \angle DEA = \angle DFC = 90°$.

$\because D$ 为 AC 的中点.

$\therefore DA = DC$.

又$\because DE = DF$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADE \cong \mathrm{Rt}\triangle CDF$(H. L.).

$\therefore \angle A = \angle C$.

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

6. (1)**证明**:$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\because BD$,CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高线,

$\therefore \angle BDC = \angle BEC = 90°$,即 $\angle DBC + \angle DCB = \angle ECB + \angle CBE = 90°$,

$\therefore \angle DBC = \angle ECB$,$\therefore OB = OC$.

(2)**解**:$\because \angle ABC = 50°$,$AB = AC$,

$\therefore \angle A = 180° - 2 \times 50° = 80°$,

$\therefore \angle BOC = \angle EOD = 360° - 90° - 90° - 80° = 100°$.

7. (1)**证明**:过 D 点作 BC 的平行线交 AC 于点 F.

$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形,$\angle A = 60°$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.$\therefore \angle ABC = 60°$.

$\because DF /\!/ BC$,

$\therefore \angle ADF = \angle ABC = 60°$,$\angle FDC = \angle DCE$.

$\therefore \triangle ADF$ 是等边三角形.

$\therefore AD = DF$,$\angle AFD = 60°$.

$\therefore \angle DFC = 180° - 60° = 120°$,

$\because \angle DBE = 180° - 60° = 120°$,

$\therefore \angle DBE = \angle DFC$.

又$\because \angle FDC = \angle DCE$,$\angle DCE = \angle DEC$,

$\therefore \angle DEC = \angle FDC$,$ED = CD$.

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle CFD$(A. A. S.),

$\therefore BE = DF$,

$\therefore BE = AD$.

(2)**解**:$BE = AD$ 成立. 理由如下:

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

过 D 点作 BC 的平行线交 AC 的延长线于点 F.

同(1)可证△ADF 是等边三角形,

$\therefore AD=DF$, $\angle AFD=60°$.

$\because \angle DBE=\angle ABC=60°$,

$\therefore \angle DBE=\angle CFD$,

$\because DF/\!/EC$,

$\therefore \angle CDF=\angle DCE$,

又$\because \angle DEC=\angle DCE$,

$\therefore \angle DEB=\angle CDF$, $ED=DC$.

$\therefore$ △DEB≌△CDF(A. A. S.).

$\therefore EB=DF=AD$.

8. (1)**证明:**$\because BD\perp$直线 m, $CE\perp$直线 m,

$\therefore \angle BDA=\angle CEA=90°$.

$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore \angle BAD+\angle CAE=90°$.

$\because \angle BAD+\angle ABD=90°$,

$\therefore \angle CAE=\angle ABD$.

又 $AB=AC$.

$\therefore$ △ADB≌△CEA,

$\therefore BD=AE$, $AD=CE$,

$\therefore DE=AE+AD=BD+CE$.

(2)**解:**成立.

证明:$\because \angle BDA=\angle BAC=\alpha$,

$\therefore \angle DBA+\angle BAD=\angle BAD+\angle CAE=180°-\alpha$,

$\therefore \angle DBA=\angle CAE$.

$\because \angle BDA=\angle AEC=\alpha$,

$AB=AC$,

$\therefore$ △ADB≌△CEA,

$\therefore BD=AE$, $AD=CE$,

$\therefore DE=AE+AD=BD+CE$.

(3)**解:**由(2)知 $BD=AE$, $\angle DBA=\angle CAE$.

$\because$ △ABF 和△ACF 均为等边三角形,

$\therefore \angle BFA=\angle ABF=\angle CAF=60°$, $BF=AF$.

$\therefore \angle DBA+\angle ABF=\angle CAE+\angle CAF$,

$\therefore \angle DBF=\angle FAE$.

又$\because BF=AF$, $BD=AE$,

$\therefore$ △DBF≌△EAF.

$\therefore DF=EF$, $\angle BFD=\angle AFE$,

$\therefore \angle DFE=\angle DFA+\angle AFE=\angle DFA+\angle BFD=60°$.

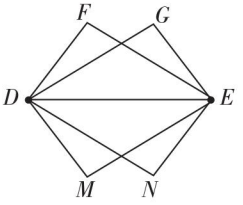
$\therefore$ △DEF 为等边三角形.

13.4 尺规作图

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D

3. 4 **点拨:**如图. △FDE, △GED, △MDE, △NED 分别与△ABC 全等,故共可以作出 4 个.



(第 3 题)

4. **解:**如图.

作 AB 边上的高的作法:(1)反向延长 AB;

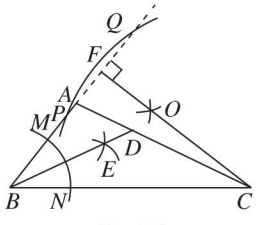
(2)以 C 为圆心,以适当长为半径作弧交射线 BA 于 P, Q;(3)分别以 P, Q 为圆心,以大于$\frac{1}{2}PQ$ 的长度为半径作弧,两弧交于 O,连结 CO 并延长交 BA 的延长线于 F,则 CF 为 AB 边上的高.

作△ABC 的角平分线 BD 的作法:

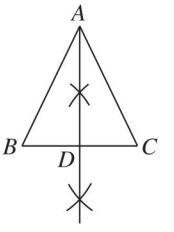
(1)以点 B 为圆心,任意长为半径作弧,分别交 AB, BC 于点 M, N;

(2)分别以点 M, N 为圆心,大于$\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径作弧,两弧在∠ABC 内部交于点 E;

(3)作射线 BE,交 AC 于 D,则线段 BD 为△ABC 的角平分线.



(第 4 题)

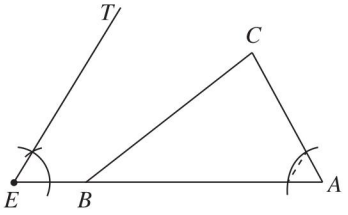


(第 5 题)

5. **解:**如图.

6. **解:**如图.

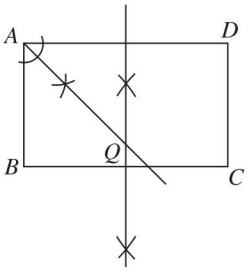
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第6题）

点拨：根据作一个角等于已知角的作法作图即可.

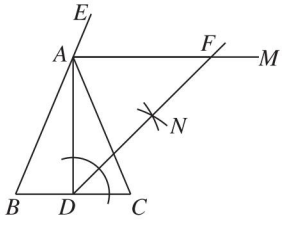
7. 解：如图.



（第7题）

点拨：根据角平分线的作法以及线段垂直平分线的作法得出 Q 点的位置.

8. (1) **解**：如图.



（第8题）

(2) **证明**：如图，$\because AB=AC, AD\perp BC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC.$

$\because AF$ 平分 $\angle EAC$，

$\therefore \angle EAF=\angle FAC=\frac{1}{2}\angle EAC.$

$\because \angle FAD=\angle FAC+\angle CAD=\frac{1}{2}\angle EAC+\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(\angle EAC+\angle BAC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

$\therefore AD\perp AF.$

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle ACB$（等边对等角）.

$\because \angle EAC=2\angle EAF=\angle B+\angle ACB$，

$\therefore \angle EAF=\angle B$，

$\therefore AF\parallel BC$，

$\therefore \angle AFD=\angle FDC.$

$\because DF$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADF=\angle FDC=\angle AFD$，

$\therefore AD=AF$（等角对等边）.

13.5 逆命题与逆定理

13.5.1 互逆命题与互逆定理

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A

3. 内错角相等，两直线平行

4. ①②④

5. 解：(1) 逆命题：如果两条平行直线被第三条直线所截，那么所截得的同位角相等.

(2) 逆命题：在角的内部，到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

(3) 逆命题：如果 r 是 a 的平方根，那么 $r^2=a$.

(4) 逆命题：如果 $\sqrt{a^2}=a$，那么 $a\geqslant 0$.

6. 解：(1) 由于③的条件是 $a+b>0$，而⑤的结论是 $ab>0$，故⑤不是由③交换命题的条件和结论得到的，所以③和⑤不是互逆命题.

(2) ③的逆命题是：如果 $a>0, b>0$，那么 $a+b>0$. ⑤的逆命题是：如果 $ab>0$，那么 $a>0, b>0$.

(3) ①与④，②与⑥分别是互逆的命题.

7. 解：逆定理：等边三角形的三个角都相等.

已知：$\triangle ABC$ 是等边三角形，

求证：$\angle A=\angle B=\angle C.$

证明：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB=BC=AC$；

由 $AB=BC$，得 $\angle A=\angle C$；

由 $BC=AC$，得 $\angle A=\angle B$，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C.$

8. 解：逆命题为：若 $|a|=|b|$，则 $a=b$. 它是假命题，

反例：$|-2|=|2|$，但 $-2\neq 2$.

9. (1) **证明**：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C, AB=AC=BC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AD=BE=CF$,

∴ $AB-AD=BC-BE=AC-CF$,

即 $BD=CE=AF$.

∴ $\triangle ADF\cong\triangle BED\cong\triangle CFE$.

∴ $DE=EF=DF$,

∴ $\triangle DEF$ 是等边三角形.

(2)**解**:(1)的逆命题为:$\triangle ABC$ 是等边三角形,如果分别在边 AB,BC,AC 上取点 D,E,F,且 $\triangle DEF$ 是等边三角形,那么 $AD=BE=CF$. 该逆命题成立. 证明过程略.

13.5.2 线段垂直平分线

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:∵ $AC=AD$,$BC=BD$,∴ A,B 两点均在线段 CD 的垂直平分线上,根据两点确定一条直线,可知直线 AB 垂直平分 CD.

2. B **点拨**:∵ DE 是 AC 的垂直平分线,

∴ $AD=CD$.

∴ $\angle A=\angle ACD=50°$,

∴ $\angle CDA=80°$,∴ $\angle BDC=100°$,故选 B.

3. B **点拨**:∵ DE 是 AC 的垂直平分线,

∴ $AD=DC$.

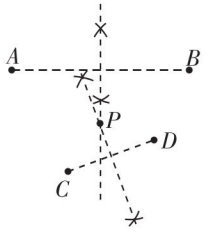
∴ $\triangle ABD$ 的周长等于 AB,BC 的长度之和.

4. D **5**. D

6. 87 **7**. $2a+3b$ **8**. 12 cm

9. **解**:如图,点 P 为所求的位置.

点拨:到 A,B 两点距离相等的点在线段 AB 的垂直平分线上,到 C,D 两点距离相等的点在线段 CD 的垂直平分线上,同时满足上述条件的点是两条线段垂直平分线的交点.



(第9题)

10. **证明**:∵ $AC\perp CD$,$BD\perp CD$,

∴ $\angle C=\angle D=90°$.

∵ EF 是 AB 的垂直平分线,

∴ $AF=BF$.

在 Rt$\triangle ACF$ 和 Rt$\triangle FDB$ 中,$\begin{cases}AC=FD,\\AF=FB,\end{cases}$

∴ Rt$\triangle ACF\cong$Rt$\triangle FDB$.

∴ $\angle AFC=\angle FBD$.

又∵ $\angle FBD+\angle BFD=90°$,

∴ $\angle AFC+\angle BFD=90°$.

∴ $\angle AFB=90°$.

∴ $\triangle ABF$ 是等腰直角三角形.

11. **解**:(1)∵ $AB=AC$,$\angle A=40°$,

∴ $\angle B=\angle ACB=\dfrac{180°-40°}{2}=70°$.

又∵ $MN\perp AB$,

∴ $\angle NMB=90°-\angle B=90°-70°=20°$.

(2)过程同(1)可求得 $\angle NMB=35°$.

(3)规律:$\angle NMB=\dfrac{1}{2}\angle A$.

理由:∵ 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,

∴ $\angle B=\angle ACB=\dfrac{180°-\angle A}{2}$.

∵ AB 的垂直平分线交 AB 于点 N,交 BC 的延长线于点 M,

∴ $\angle NMB=90°-\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$.

13.5.3 角平分线

【两年模拟兵法】

1. B **2**. B **3**. C

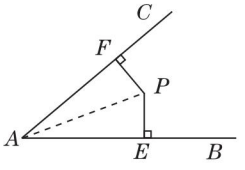
4. **解**:∵ $PA\perp ON$,$PB\perp OM$,$PA=PB$,$\angle MON=50°$,

∴ $\angle AOP=\dfrac{1}{2}\angle MON=25°$.

又∵ $\angle OPC=30°$,

∴ $\angle PCA=\angle AOP+\angle OPC=55°$.

5. **证明**:(1)如图,连结 AP,∵ $PE\perp AB$,$PF\perp AC$,



(第5题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AEP=\angle AFP=90°$.

又$\because AE=AF, AP=AP$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEP\cong\mathrm{Rt}\triangle AFP$.

$\therefore PE=PF$.

(2)$\because PE=PF, PE\perp AB, PF\perp AC$,

$\therefore$ 点 P 在$\angle BAC$ 的平分线上.

6. 证明: $\because CD\perp AB, BE\perp AC$,

$\therefore \angle BDO=\angle CEO=90°$.

在$\triangle BDO$ 和$\triangle CEO$ 中,$\begin{cases}\angle BDO=\angle CEO,\\ \angle DOB=\angle EOC,\\ OB=OC,\end{cases}$

$\therefore \triangle BDO\cong\triangle CEO$.

$\therefore DO=EO$.

又$\because CD\perp AB, BE\perp AC$,

$\therefore AO$ 平分$\angle BAC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

7. 证明: 如图,过点 D 分别作 $DE\perp AB$ 于 E, $DF\perp AC$,交 AC 的延长线于 F,

$\because AD$ 平分$\angle BAC$,

$DE\perp AB, DF\perp AC$,

$\therefore DE=DF$.

$\because \angle B+\angle ACD=180°$,

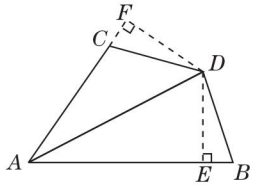
$\angle ACD+\angle FCD=180°$,

$\therefore \angle B=\angle FCD$.

在$\triangle DFC$ 和$\triangle DEB$ 中,$\begin{cases}\angle F=\angle DEB=90°,\\ \angle FCD=\angle B,\\ DF=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle DFC\cong\triangle DEB$.

$\therefore DB=DC$.



(第 7 题)

8. 解: (1)$FD=FE$.

理由如下:如图①,过点 F 分别作 $FM\perp BC, FN\perp AB$,垂足分别为 M, N,则$\angle DMF=\angle ENF=90°$.

连结 BF.

$\because F$ 是三角形角平分线的交点,

$\therefore BF$ 是$\angle ABC$ 的平分线.

$\therefore MF=NF$.

在$\triangle ABC$ 中,$\because \angle ACB=90°$, $\angle ABC=60°$,

$\therefore \angle BAC=30°$,

$\therefore \angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=15°$.

$\therefore \angle CDA=90°-\angle DAC=75°$.

$\because \angle ACB=90°, CE$ 平分$\angle ACB$,

$\therefore \angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$.

$\therefore \angle MFC=45°$,又$\because \angle MFN=360°-\angle FNB-\angle FMD-\angle ABC=360°-90°-90°-60°=120°$,

$\therefore \angle NFE=180°-\angle MFC-\angle MFN=180°-45°-120°=15°$.

$\therefore \angle NEF=90°-\angle NFE=90°-15°=75°=\angle MDF$.

在$\triangle DMF$ 和$\triangle ENF$ 中,$\begin{cases}\angle DMF=\angle ENF,\\ \angle MDF=\angle NEF,\\ MF=NF,\end{cases}$

$\therefore \triangle DMF\cong\triangle ENF$(A. A. S.)

$\therefore FD=FE$.

(2)成立,证明如下:

如图②,过点 F 分别作 $FM\perp BC, FN\perp AB$,垂足分别为 M, N,则$\angle DMF=\angle ENF=90°$. 连结 BF,

$\because F$ 是三角形角平分线的交点,

$\therefore BF$ 是$\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore MF=NF$.

$\because \angle ABC=60°$,

$\therefore \angle MFN=360°-\angle BNF-\angle BMF-\angle ABC=360°-90°-90°-60°=120°$.

$\because \angle CFA=180°-(\angle FAC+\angle FCA)$

$=180°-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)$

$=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle ABC)$

$=180°-\frac{1}{2}\times(180°-60°)$

$=120°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle DFE = \angle CFA = \angle MFN = 120°$.

又$\angle MFN = \angle MFD + \angle DFN$,

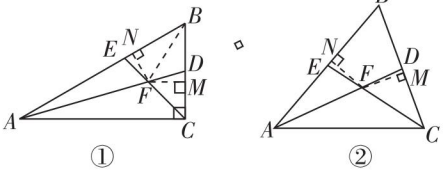
$\angle DFE = \angle NFE + \angle DFN$,

$\therefore \angle MFD = \angle NFE$.

在$\triangle DMF$和$\triangle ENF$中,$\begin{cases}\angle DMF = \angle ENF,\\ MF = NF,\\ \angle MFD = \angle NFE,\end{cases}$

$\therefore \triangle DMF \cong \triangle ENF$(A. S. A.),

$\therefore FD = FE$.



(第8题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 证明:$\because \angle BAC = \angle DAM$,

即$\angle BAD + \angle DAC = \angle DAC + \angle NAM$,

$\therefore \angle BAD = \angle NAM$.

在$\triangle BAD$和$\triangle NAM$中,$\begin{cases}AB = AN,\\ \angle BAD = \angle NAM,\\ AD = AM,\end{cases}$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle NAM$(S. A. S.).

$\therefore \angle B = \angle ANM$.

2. 证明:$\because FC // AB$,

$\therefore \angle ADE = \angle CFE$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CFE$中,$\begin{cases}\angle ADE = \angle CFE,\\ DE = FE,\\ \angle AED = \angle CEF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE$(A. S. A.).

$\therefore AE = CE$.

3. 证明:延长AC,BE交于点F,

$\because \angle ACB = 90°$,$BE \perp AE$,

$\therefore \angle CAD + \angle CDA = 90°$,

$\angle EDB + \angle EBD = 90°$.

$\because \angle CDA = \angle EDB$,

$\therefore \angle CAD = \angle EBD$,即$\angle CAD = \angle CBF$.

在$\triangle ADC$和$\triangle BFC$中,$\begin{cases}\angle CAD = \angle CBF,\\ AC = BC,\\ \angle ACD = \angle BCF = 90°,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BFC$.

$\therefore AD = BF$.

$\because AE$平分$\angle BAC$,

$\therefore \angle FAE = \angle BAE$.

在$\triangle AEF$和$\triangle AEB$中,$\begin{cases}\angle FAE = \angle BAE,\\ AE = AE,\\ \angle AEF = \angle AEB = 90°,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEB$.

$\therefore BE = EF$,即$BE = \frac{1}{2}BF$.

$\therefore BE = \frac{1}{2}AD$.

4. 解:$BC = BE + CD$.

证明:在BC上取一点G,使$CG = CD$,连结OG.

$\because BD$,CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$,$\angle ACE = \angle BCE$.

$\because \angle A = 60°$,

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 120°$.

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 60°$.

$\therefore \angle BOE = \angle COD = \angle OBC + \angle OCB = 60°$.

$\because CD = CG$,$\angle OCD = \angle OCG$,$OC = OC$,

$\therefore \triangle CDO \cong \triangle CGO$,

$\therefore \angle COD = \angle COG = 60°$,

$\therefore \angle BOG = 180° - \angle BOE - \angle COG = 60°$.

$\therefore \angle EOB = \angle GOB$.

又$\because \angle EBO = \angle GBO$,$BO = BO$,

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle BOG$.

$\therefore BE = BG$.

$\therefore BC = BG + CG = BE + CD$.

5. 证明:延长AE至F,使$EF = AE$,连结DF.

$\because AE$是$\triangle ABD$的中线,

$\therefore BE = DE$.

$\because \angle AEB = \angle FED$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FDE$.

$\therefore \angle B = \angle BDF$,$AB = DF$.

又$\because BA = BD$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAD = \angle BDA, BD = DF.$

$\because \angle ADF = \angle BDA + \angle BDF,$

$\angle ADC = \angle BAD + \angle B,$

$\therefore \angle ADF = \angle ADC.$

$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore BD = CD.$

$\therefore DF = CD.$

又$\because AD = AD,$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADC.$

$\therefore AC = AF = 2AE$,即 $AE = \frac{1}{2}AC.$

6. 证明:过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D, $OE \perp AC$ 于 E,

则$\triangle BOD$ 和$\triangle COE$ 都是直角三角形.

$\because OA$ 平分$\angle BAC$, $OD \perp AB$, $OE \perp AC$,

$\therefore OD = OE.$

$\because \angle 1 = \angle 2,$

$\therefore OB = OC.$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BOD \cong \mathrm{Rt}\triangle COE.$

$\therefore \angle ABO = \angle ACO.$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$

$\therefore AB = AC.$ $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

7. (1)**证明:**$\because \triangle ABC$ 和$\triangle CDE$ 都是等边三角形,

$\therefore BC = AC, CE = CD, \angle ACB = \angle ECD = 60°.$

$\therefore \angle BCE = \angle ACD.$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD.$

(2)**证明:**$\because \triangle BCE \cong \triangle ACD,$

$\therefore \angle FBC = \angle HAC.$

$\because \angle ACH = 180° - \angle ACB - \angle ECD = 60°,$

$\therefore \angle ACB = \angle ACH.$

又$\because BC = AC,$

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle ACH.$

$\therefore CF = CH.$

(3)**解:**$\triangle CFH$ 是等边三角形.

理由:$\because CF = CH, \angle FCH = 60°,$

$\therefore \triangle CFH$ 是等边三角形.

8. 解:①若已知的这个角为顶角,则底角的度数为 $(180° - 52°) \div 2 = 64°$,故一条腰上的高与底边的夹角为26°;②若已知的这个角为底角,则一条腰上的高与底边的夹角为38°. 故它的一条腰上的高与底边的夹角为26°或38°.

9. 解:(1)①$\triangle BPD \cong \triangle CQP$. 理由如下:$\because t = 1\mathrm{s},$

$\therefore BP = CQ = 3 \times 1 = 3(\mathrm{cm}).$

$\because AB = 10$ cm,点 D 为 AB 的中点,

$\therefore BD = 5$ cm.

又$\because PC = BC - BP, BC = 8$ cm,

$\therefore PC = 8 - 3 = 5(\mathrm{cm}),$

$\therefore PC = BD.$

又$\because AB = AC,$ $\therefore \angle B = \angle C,$

$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CQP,$

②$\because v_P \neq v_Q,$ $\therefore BP \neq CQ,$

又$\because \triangle BPD$ 与$\triangle CQP$ 全等, $\angle B = \angle C,$

$\therefore BP = PC = 4$ cm, $CQ = BD = 5$ cm,

$\therefore$ 点 P,点 Q 运动的时间 $t = \frac{BP}{3} = \frac{4}{3}\mathrm{s},$

$\therefore v_Q = \frac{CQ}{t} = \frac{5}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{4}(\mathrm{cm/s}).$

$\therefore$ 当点 Q 的运动速度为 $\frac{15}{4}$ cm/s 时,能够使$\triangle BPD$ 与$\triangle CQP$ 全等.

(2)设经过 x s 后点 P 与点 Q 第一次相遇,

由题意,得 $\frac{15}{4}x = 3x + 2 \times 10$,解得 $x = \frac{80}{3}.$

$\therefore$ 点 P 共运动了 $\frac{80}{3} \times 3 = 80(\mathrm{cm}).$

$\because \triangle ABC$ 的周长 $= 8 + 10 + 10 = 28(\mathrm{cm}),$

$28 \times 3 = 84(\mathrm{cm}), 84 - 80 = 4(\mathrm{cm}) < 10\mathrm{cm},$

$\therefore$ 点 P、点 Q 在 AB 边上相遇,

$\therefore$ 经过 $\frac{80}{3}$s 点 P 与点 Q 第一次在$\triangle ABC$ 的边 AB 上相遇.

【第13章测试卷】

一、1. A **2.** C **3.** B **4.** C **5.** A **6.** D **7.** C **8.** C

二、9. 50°或80° **10.** 20° **11.** 65°

12. ①②③④

三、13. 证明:$\because AB \parallel CD,$

$\therefore \angle B = \angle DCE.$

在$\triangle ABC$ 和$\triangle ECD$ 中, $\begin{cases} AB = EC, \\ \angle B = \angle DCE, \\ BC = CD, \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ECD$.

$\therefore AC = ED$.

14. (1)**解:** $\triangle PCE$ 是等边三角形. 理由如下:

$\because \triangle ABC, \triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

$\therefore \angle DEC = \angle ACE = 60°$.

$\therefore \angle EPC = 180° - \angle DEC - \angle ACE = 180° - 60° - 60° = 60°$.

$\therefore \triangle PCE$ 是等边三角形.

(2)**证明:** $\because \triangle ACB, \triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

$\therefore AC = DE, \angle ACB = \angle DEF = 60°, BC = EF$.

$\therefore \angle ACF = \angle DEB = 120°, FC = BE$.

在 $\triangle AFC$ 和 $\triangle DBE$ 中, $\begin{cases} AC = DE, \\ \angle ACF = \angle DEB, \\ FC = BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AFC \cong \triangle DBE$. $\therefore AF = BD$.

15. **证明:** 连结 AD. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 中, $\begin{cases} AC = AB, \\ CD = BD, \\ AD = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD$.

$\therefore \angle FAD = \angle EAD$, 即 AD 平分 $\angle EAF$.

又$\because DE \perp AE, DF \perp AF$,

$\therefore DE = DF$.

16. **解:** (1) $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

证明: $\because \angle ACB = 90°$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90°$.

又$\because AD \perp l$, $\therefore \angle ADC = 90°$,

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$.

$\therefore \angle BCE = \angle CAD$.

$\because BE \perp l$,

$\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90°$.

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBE$ 中, $\begin{cases} \angle CAD = \angle BCE, \\ \angle ADC = \angle CEB, \\ AC = CB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$.

(2)由(1)可知 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$,

$\therefore AD = CE, CD = BE$.

$\therefore AD = CE = CD + DE = BE + DE = 3 + 5 = 8$.

17. (1)**证明:** $\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$.

又$\because \angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O,

$\therefore \angle ABC = 2\angle OBC, \angle ACB = 2\angle OCB$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$.

$\therefore OB = OC$.

$\therefore \triangle BOC$ 是等腰三角形.

(2)**解:** $BM = CN$. 理由如下:

$\because MN /\!/ BC$,

$\therefore \angle AMN = \angle ABC, \angle ANM = \angle ACB$.

又$\because \angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore \angle AMN = \angle ANM$.

$\therefore AM = AN$.

$\therefore AB - AM = AC - AN$, 即 $BM = CN$.

(3)**证明:** $\because AB = AC, BO = CO, AO = AO$,

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO$.

$\therefore \angle BAO = \angle CAO$.

又$\because AM = AN$, $\therefore AO \perp MN$.

第14章 勾股定理

14.1 勾股定理

14.1.1 直角三角形三边的关系

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D **3.** C

4. D **点拨:** 由题图可知, $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, 则 $x^2 - 10 = 2 - 10 = -8$, -8 的立方根为 -2.

5. A

6. **解:** $\because \triangle BDC'$ 是由 $\triangle BDC$ 折叠得到的,

$\therefore \triangle BDC'$ 与 $\triangle BDC$ 全等,

$\therefore \angle DBC = \angle DBE$.

$\because AD /\!/ BC$,

$\therefore \angle DBC = \angle BDE$,

$\therefore \angle DBE = \angle BDE$,

$\therefore BE = DE$.

设 $AE = x$, 则 $DE = AD - AE = 8 - x$, 则 $BE = 8 - x$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AE^2+AB^2=BE^2$,

$\therefore x^2+6^2=(8-x)^2$,解得 $x=1.75$,

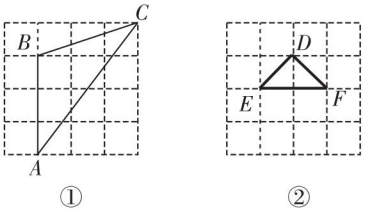
即 AE 的长为 1.75.

7. 解:(1)画法不唯一. 如图①,$\triangle ABC$ 即为所求,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$.

(2)答案不唯一.

如图②,$\triangle DEF$ 即为所求,$EF=2$.



(第 7 题)

8. 证明:如图,延长 ED 至点 G,使 $DG=ED$,连结 BG,FG.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BDG$ 中,$AD=DB$,$\angle1=\angle2$,

$ED=DG$,

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle BDG$(S. A. S.).

$\therefore AE=BG$,$\angle4=\angle3$.

又$\because\angle4+\angle5=90°$,

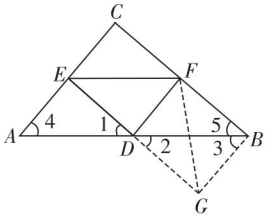
$\therefore\angle3+\angle5=90°$.

又$\because DF\perp EG$,$DE=DG$,

$\therefore FG=EF$.

在 Rt$\triangle FBG$ 中,$BG^2+BF^2=FG^2$,即 $AE^2+BF^2=EF^2$.

点拨:欲证 $AE^2+BF^2=EF^2$,应联想到勾股定理,把 AE,BF 和 EF 转化为直角三角形的三边.



(第 8 题)

14.1.2 直角三角形的判定、反证法

【两年模拟兵法】

1. C

2. C **点拨**:$\because\angle A=\angle B-\angle C$,$\angle A+\angle B+\angle C=180°$,$\therefore\angle B=90°$,

$\therefore$ ①能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

$\because\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$,$\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore\angle A=45°$,$\angle B=60°$,$\angle C=75°$,

$\therefore$ ②不能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

$\because a^2=(b+c)(b-c)$,

$\therefore a^2+c^2=b^2$,

$\therefore$ ③能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

$\because a:b:c=5:12:13$,

$\therefore a^2+b^2=c^2$,

$\therefore$ ④能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

$\therefore$ 能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形的有 3 个.

3. A **4.** A

5. D

6. 解:如图,连结 AC,

$\because AD=4$ m,$CD=3$ m,

$AD\perp DC$,$\therefore AC=5$ m.

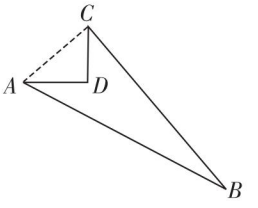
又$\because BC=12$ m,$AB=13$ m,

$\therefore AC^2+BC^2=5^2+12^2=169=13^2=AB^2$,

$\therefore\triangle ACB$ 是直角三角形.

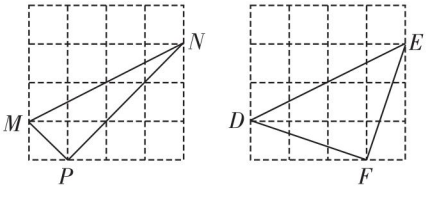
$\therefore S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times5\times12-\frac{1}{2}\times3\times4=24(\text{m}^2)$.

$\therefore$ 这块地的面积为 24 m^2.



(第 6 题)

7. 解:答案不唯一,如图.



(第 7 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解: $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形. 理由如下:

$\because \triangle ACE \cong \triangle BCD$,

$\therefore \angle EAC = \angle DBC, AE = BD, AC = BC$.

又$\because AD^2 + BD^2 = DE^2$,

$\therefore AD^2 + AE^2 = DE^2$,

$\therefore \triangle AED$ 为直角三角形,且$\angle EAD = 90°$.

又$\because \angle EAD = \angle EAC + \angle CAD = \angle DBC + \angle CAD$,

$\therefore \angle ACB = 180° - \angle DBC - \angle CAD = 180° - (\angle DBC + \angle CAD) = 180° - \angle EAD = 180° - 90° = 90°$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

又$\because AC = BC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

9. (1) **解:** 正方形、长方形. (答案不唯一)

(2) **证明:** ①$\because \triangle ABC \cong \triangle DBE$,

$\therefore BC = BE$.

$\because \angle CBE = 60°$,

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形.

②$\because \triangle ABC \cong \triangle DBE$,

$\therefore AC = ED$.

又$\because \triangle BCE$ 为等边三角形,

$\therefore BC = CE, \angle BCE = 60°$.

$\because \angle DCB = 30°$,

$\therefore \angle DCE = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中,$DC^2 + CE^2 = DE^2$,

$\therefore DC^2 + BC^2 = AC^2$,即四边形 $ABCD$ 是勾股四边形.

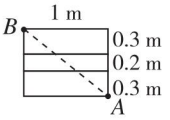
14.2 勾股定理的应用

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:** 根据勾股定理可求出木筷在杯子中的部分的长度为 $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$(cm). 故木筷露在杯子外面的部分的长度为 $20 - 17 = 3$(cm).

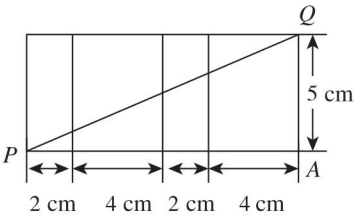
2. B **3.** C

4. 1.3 **点拨:** 本题通过将立体图形展成平面图形来求解,如图,连结 AB,则 $AB = \sqrt{1^2 + (0.3 + 0.2 + 0.3)^2} \approx 1.3$(m),即蜘蛛爬行的最短路径的长约为1.3 m.



(第4题)

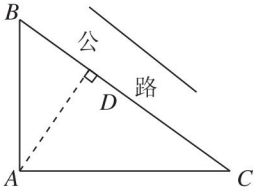
5. 13 **方法规律:** 本题利用长方体的侧面展开图,运用构造法构造直角三角形,利用勾股定理解答. 如图,蚂蚁爬行的最短路径是 PQ. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAQ$ 中,$PA = 2 + 4 + 2 + 4 = 12$(cm),$AQ = 5$cm,根据勾股定理得:$PQ = \sqrt{PA^2 + AQ^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$(cm).



(第5题)

6. 10

7. 解: 如图,过点 A 作 $AD \perp BC$,垂足为 D,线段 AD 就是要修的公路.



(第7题)

在 $\triangle ABC$ 中,$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,且$\angle BAC = 90°$.

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AD \cdot BC$,

$\therefore AB \cdot AC = AD \cdot BC$,

即 $6 \times 8 = AD \times 10$,

$\therefore AD = 4.8$ 千米,即所修公路的长为4.8千米.

8. 解: (1) 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,如图①,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$AB = 15, AD = 12$,根据勾股定理得 $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$AC = 13, AD = 12$,

根据勾股定理得 $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} =$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\sqrt{13^2-12^2}=5$,

$\therefore AB+BD+CD+AC=15+9+5+13=42$,即$\triangle ABC$的周长为42.

(2)当$\triangle ABC$为钝角三角形时,如图②. 在Rt$\triangle ABD$中,$AB=15$,$AD=12$,

根据勾股定理得$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$,

在Rt$\triangle ACD$中,$AC=13$,$AD=12$.

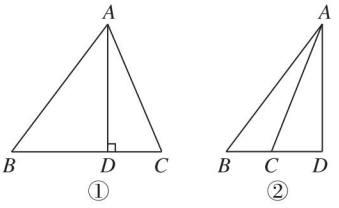
根据勾股定理得$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$,

$\therefore BC=BD-CD=9-5=4$,

$\therefore AB+AC+BC=15+13+4=32$,

即$\triangle ABC$的周长为32.

综上所述,$\triangle ABC$的周长为42或32.



(第8题)

方法规律:本题运用分类讨论思想解题,分$\triangle ABC$为锐角三角形和钝角三角形两种情况,运用勾股定理求解.

9. 解:如图,连结AC,由勾股定理,得$AC^2=AB^2+BC^2=20^2+15^2=400+225=625=25^2$,

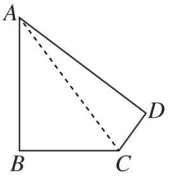
$\therefore AC=25$ m.

又$\because AD^2+CD^2=24^2+7^2=576+49=625=AC^2$,

$\therefore \angle ADC=90°$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times20\times15+\frac{1}{2}\times7\times24=234(m^2)$.

$\therefore$共需$120\times234=28\,080$(元).



(第9题)

10. 解:(1)不相等.

在Rt$\triangle AOB$中,$OA^2=AB^2-OB^2=2.5^2-0.7^2=5.76$,解得$OA=2.4$米,

$\therefore OA'=OA-AA'=2.4-0.4=2$(米).

在Rt$\triangle A'OB'$中,

$OB'^2=A'B'^2-OA'^2=2.5^2-2^2=2.25$,

解得$OB'=1.5$米,

$\therefore BB'=OB'-OB=1.5-0.7=0.8$(米).

$\because AA'=0.4$米,$\therefore AA'\neq BB'$.

(2)存在. 设$AA'=BB'=x$米,

则$OA'=OA-AA'=(2.4-x)$米,

$OB'=OB+BB'=(0.7+x)$米.

在Rt$\triangle A'OB'$中,根据勾股定理,得

$OA'^2+OB'^2=A'B'^2$,

即$(2.4-x)^2+(x+0.7)^2=2.5^2$,

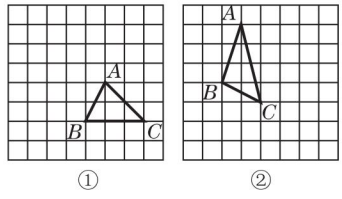
整理,得$x^2-1.7x=0$. $\because x\neq0$,$\therefore x=1.7$.

即$AA'=1.7$米时,$AA'=BB'$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)如图①中的$\triangle ABC$为所求的三角形.



(第1题)

(2)如图②中的$\triangle ABC$的三边长分别为$\sqrt{10}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{17}$,三角形的周长为$\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{17}$.

方法总结:在网格中画长为$\sqrt{n}$的线段的步骤:(1)设法将n表示成两个整数的平方和;(2)构造直角三角形,使直角三角形的两条直角边长等于第一步得出的两个整数,斜边即为长为$\sqrt{n}$的线段.

2. 解:$\because$四边形$ABCD$是长方形,

$\therefore \angle D=\angle A=\angle C=90°$,$AD=BC=6$,$CD=AB=8$.

根据题意得$\triangle ABP\cong\triangle EBP$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore EP=AP,\angle E=\angle A=90°,BE=AB=8.$

在$\triangle ODP$和$\triangle OEG$中,$\begin{cases}\angle D=\angle E=90°,\\ OD=OE,\\ \angle DOP=\angle EOG,\end{cases}$

$\therefore \triangle ODP\cong\triangle OEG.$

$\therefore OP=OG,PD=GE.$

$\therefore DG=EP.$

设$AP=EP=x$,则$GE=PD=6-x,DG=x$,

$\therefore CG=8-x,BG=8-(6-x)=2+x.$

根据勾股定理得$BC^2+CG^2=BG^2$.

即$6^2+(8-x)^2=(x+2)^2$,

解得$x=4.8$,

$\therefore AP=4.8.$

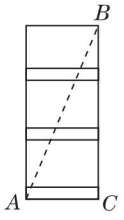
3. C **点拨:**将台阶面展开,连结AB,如图,线段AB即为壁虎所爬的最短路线.

在Rt$\triangle ABC$中,$BC=30\times3+10\times3=120$(cm),

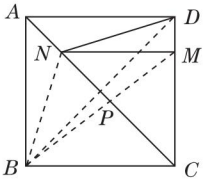
$AC=50$ cm,

根据勾股定理,得$AB^2=AC^2+BC^2=16\,900$,

$\therefore AB=130$ cm. $\therefore$ 壁虎至少需爬130 cm.



(第3题)



(第4题)

4. 解:如图,连结BN,BD,

$\because$ 正方形是轴对称图形,点B与点D关于直线AC对称,

$\therefore$ 直线AC为BD的垂直平分线,

$\therefore BN=ND.$

$\therefore DN+MN=BN+MN.$

连结BM交AC于点P,

由三角形两边之和大于第三边,知当点N运动到点P时,$BN+MN$的值最小.

此时$BN+MN=BP+PM=BM$,

$\therefore DN+MN$的最小值为BM的长度.

$\because$ 四边形$ABCD$为正方形,

$\therefore BC=CD=8,CM=8-2=6,$

$\angle BCM=90°,$

$\therefore BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10.$

即$DN+MN$的最小值为10.

5. 解:分为三种情况:

(1)如图①,连结EC,

在Rt$\triangle EBC$中,$EB=12+8=20$(cm),$BC=\frac{1}{2}\times30=15$(cm).

由勾股定理,得$EC=\sqrt{20^2+15^2}=25$(cm).

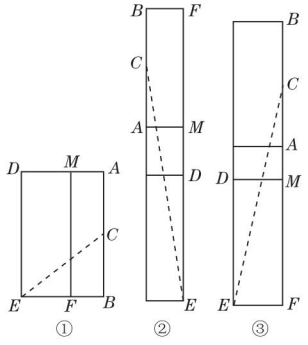
(2)如图②,连结EC.

根据勾股定理可求出$CE=\sqrt{8^2+(30+12+15)^2}=\sqrt{3\,313}(cm)>25$ cm.

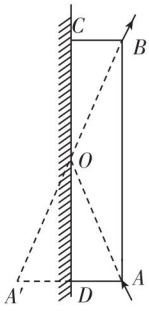
(3)如图③,连结EC.

根据勾股定理可求出$CE=\sqrt{12^2+(30+8+15)^2}=\sqrt{2\,953}(cm)>25$ cm.

综上可知,小虫爬行的最短路程是25 cm.



(第5题)



(第6题)

6. 解:如图,作点A关于CD的对称点A',连结$A'B$,交CD于点O,则点O是光的反射点,连结OA.由对称性可知,$A'D=AD,OA=OA'$,

$\therefore OA+OB=OA'+OB=A'B,$

$AA'=2AD=20$ cm.

在Rt$\triangle BAA'$中,

$\because A'B^2=AA'^2+AB^2=20^2+48^2=2\,704.$

$\therefore A'B=52$ cm.

$\therefore$ 光线在纸片上通过的轨迹的长度为52 cm.

点拨:先利用入射光线与反射光线的性质构造出直角三角形,再利用勾股定理计算求解.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

【第 14 章测试卷】

一、1. C　2. C　3. B　4. C　5. D　6. C　7. C　8. B

二、9. 如果 $3a=3b$，那么 $a=b$

10. $\frac{3}{2}$　11. 18　12. 10

三、13. 解：设 $CD=x$. 在 Rt△ACD 中，

由 $AD^2=AC^2-CD^2$，得 $AD^2=10^2-x^2$.

在 Rt△ABD 中，由 $AD^2=AB^2-BD^2$，

得 $AD^2=17^2-(x+9)^2$，

$\therefore 10^2-x^2=17^2-(x+9)^2$，

解得 $x=6$.

$\therefore CD=6$.

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

14. 解：(1)$\because AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$，$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore AB+AC+BC=\sqrt{5}+\sqrt{20}+5$.

$\therefore$ △ABC 的周长为 $\sqrt{5}+\sqrt{20}+5$.

(2)$\because AB^2+AC^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{20})^2=25$，

$BC^2=5^2=25$，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$.

$\therefore$ △ABC 是直角三角形.

15. (1)证明：$\because CD=1$，$BC=\sqrt{5}$，$BD=2$，

$\therefore CD^2+BD^2=BC^2$.

$\therefore$ △BCD 是直角三角形.

(2)解：设 $AB=AC=x$.

在 Rt△ADB 中，

$AB^2=AD^2+BD^2$，

$\therefore x^2=(x-1)^2+2^2$.

解得 $x=\frac{5}{2}$.

$\therefore AC=\frac{5}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times2=\frac{5}{2}$.

16. 解：(1)$\because (a-3)^2+\sqrt{b-4}+|c-5|=0$，

$(a-3)^2\geqslant0$，$\sqrt{b-4}\geqslant0$，$|c-5|\geqslant0$，

$\therefore a-3=0$，$b-4=0$，$c-5=0$.

$\therefore a=3$，$b=4$，$c=5$.

(2)$\because 3^2+4^2=5^2$，

$\therefore$ 以 a，b，c 为边的三角形是直角三角形.

$\therefore$ 以 a，b，c 为边能构成三角形，且它的周长为 $3+4+5=12$.

17. 解：在 Rt△ABC 中，$AB=4$ m，设 $BC=x$ m，

则 $AC=(8-x)$ m.

由勾股定理，得 $BC^2=AC^2+AB^2$，

即 $x^2=(8-x)^2+4^2$，解得 $x=5$.

如果下次旗杆从 D 处刮断，设顶部的着地点为 E，

则 $DE=BC+CD=5+1.25=6.25$(m)，

$AD=AC-CD=3-1.25=1.75$(m).

在 Rt△ADE 中，由勾股定理，得

$AE^2=DE^2-AD^2=6.25^2-1.75^2=36$，

$\therefore AE=6$ m.

$\therefore$ 杆脚周围 6 m 范围内有被砸伤的危险.

18. 解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形，

$\therefore AB=CD$，$\angle B=\angle D=90°$.

由折叠可知，$\angle D=\angle D'$，$CD=CD'$.

$\therefore \angle B=\angle D'$，$AB=CD'$.

又 $\angle AEB=\angle CED'$，

$\therefore$ △$ABE\cong$△$CD'E$. $\therefore AE=CE$.

设 $BE=x$，则 $AE=CE=4-x$.

$\therefore 3^2+x^2=(4-x)^2$.

解得 $x=\frac{7}{8}$. $\therefore BE=\frac{7}{8}$.

第 15 章　数据的收集与表示

15.1　数据的收集

【两年模拟兵法】

1. D　2. B

3. 你最想去哪玩　**点拨**：答案不唯一.

4. 长；宽；高

5. 解：因为 0 出现的频数是 19，3 出现的频数是 14，这一长串数字由 33 个数字组成，所以 0 出现的频率为 $19\div33\approx57.6\%$，3 出现的频率为 $14\div33\approx42.4\%$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法规律:解答本题运用了定义法,即先根据频数的定义分别得出0和3出现的频数,再数出这一长串数字的数字总数,最后根据频率的定义计算即可.

6. 解:补全统计表如下:

上学方式	步行	骑车	乘公交车
记录	正正正	正丌	正正正一
频数	15	9	16
频率	37.5%	22.5%	40%

7. 解:不同意,理由:从得票数来看,小明的少些,但受欢迎的程度并不取决于得票多少,而是取决于得票的频率的大小. 由于各班的总人数不知道,因此无法准确地计算出他们得票的频率,即无法比较他们受欢迎的程度.

8. 解:第(3)个问题不恰当,可改为"你是否经常躺着看书?".

点拨:问题的改正答案不唯一.

9. 解:(1)

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
记录	一	丅	正	正丅	下	丌	下	丅	正	丌
频数	1	2	5	7	3	4	3	2	5	4

(2)数字"3"出现的频率为$\frac{7}{36}\approx0.19$;

数字"6"出现的频率为$\frac{3}{36}\approx0.08$;

数字"9"出现的频率为$\frac{4}{36}\approx0.11$.

10. 解:(1)设计统计表如下:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
人数	1	4	5	3	3	1	1	3	3	5	3	8

(2)10月份出生的学生的频数是5,频率为$\frac{5}{40}=0.125$.

(3)2月份有4位同学过生日,因此应该准备4份礼物.

11. 解:统计表如下:

鸟名	喜鹊	丹顶鹤	绿孔雀	鸳鸯
营巢环境	高大乔木的中上层	环水的浅滩或深草丛	灌木丛、竹丛间的地面	树洞
体长	40~50cm	120~160cm	180~230cm	38~45cm
每次产卵枚数	5~8	2	4~8	7~12

发现:

(1)丹顶鹤和其他三种鸟相比,它的营巢环境要求比较高,而产卵数量比较少,这些可能是丹顶鹤被列为国家一级保护动物的部分原因;

(2)鸟类的体长与产卵数量没有明显的关系.

点拨:发现不唯一,合理即可.

12. 解:(1)小亮摸到红球的频率为$45\div100=0.45$,甲摸到红球的频率为$110\div200=0.55$,乙摸到红球的频率为$149\div300\approx0.50$,丙摸到红球的频率为$199\div400\approx0.50$,丁摸到红球的频率为$252\div500\approx0.50$,李龙摸到红球的频率为$301\div600\approx0.50$.

(2)根据这6个人试验的结果可以猜想:当摸球的次数足够多时,摸到红球的频率稳定在0.5附近.

15.2 数据的表示

【两年模拟兵法】

1. D 点拨:最喜欢篮球的人数所占的百分比最大,故该班同学最喜欢的球类项目是篮球. 应选D.

2. A

3. C 方法规律:解答本题运用了数形结合思想.

A. ∵喜欢"其他"类的人数为30,扇形统计图中"其他"所占的百分比为10%,∴抽取的总人数为$30\div10\%=300$,∴喜欢"科普常识"的学生有$300\times30\%=90$(人),故此选项不符合题意;

B. 通过观察扇形统计图可知,喜欢"小说"的学生人数最多,故此选项不符合题意;C. 喜欢"小说"的人数为$300-90-60-30=120$,故此选项

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

错误，符合题意；D. “漫画”所在扇形的圆心角为 $\frac{60}{300}\times360°=72°$，故此选项不符合题意. 故选 C.

4. 3%；1 530；216；条形

5. 从 10 月到 12 月，随着气温的降低，用电量逐渐增多

方法规律：解答本题运用了数形结合思想. 折线统计图表现的是变化情况，条形统计图易于直观地反映出数据特征，并易于比较各组数据之间的差别. 答案不唯一.

6. **解**：(1) 填表如下：

鞋号	记录	人数	百分比
33	一	1	2.63%
34	丅	4	10.53%
35	正正	10	26.32%
36	正正	10	26.32%
37	正丅	9	23.68%
38	丅	2	5.26%
39	一	1	2.63%
40	一	1	2.63%
合计		38	100%

(2) 由统计表可知：穿 35 号、36 号、37 号鞋的同学约占 76.3%，因此建议学校可多购买 35 号、36 号、37 号的运动鞋. (答案不唯一)

点拨：根据所给数据进行分析、计算，注意在数数据的个数时，一定要认真、仔细，不要漏掉任何一个.

7. **解**：(1) $20\div\frac{72°}{360°}=100$(人).

∴ 该企业共有 100 人.

(2) 补充完整的统计表如下：

档次	工资(元)	频数	频率
A	3 000	20	0.20
B	2 800	30	0.30
C	2 200	40	0.40
D	2 000	10	0.10

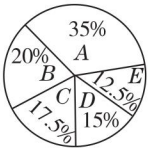
(3) 144

方法规律：解答本题运用了数形结合思想，正确掌握扇形圆心角的计算方法以及频率 $=\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$ 是解题关键.

8. **解**：(1) 绘制统计表如下：

笔的品牌	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
频数	14	8	7	6	5
频率	35%	20%	17.5%	15%	12.5%

绘制扇形统计图如图.



(第 8 题)

(2) 从扇形统计图中可以看出，最畅销的笔的品牌是 *A*，其次是 *B*，故这两种品牌的笔应多进；销量不是很好的品牌是 *D*，*E*，故这两种应少进. (答案不唯一)

9. **解**：(1) ∵ 初中生有 150 人，高中生有 200 人，教师有 50 人，∴ 调查的总人数为 150 + 200 + 50 = 400.

效果“很好”的频率为 240 ÷ 400 = 60%；

效果“一般”的频数为 400 × 8% = 32；

效果“不好”的频率为 8 ÷ 400 = 2%；

效果“较好”的频数为 400 − 240 − 32 − 8 = 120；

效果“较好”的频率为 120 ÷ 400 = 30%.

∴ 补充完整的统计表如下：

“青少年心理干预”讲座效果统计表

效果	很好	较好	一般	不好
频数	240	120	32	8
频率	60%	30%	8%	2%

(2) 效果“很好”对应的扇形圆心角为 360° × 60% = 216°，

效果“较好”对应的扇形圆心角为 360° × 30% =

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

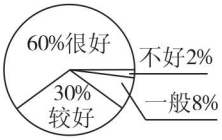
108°,

效果“一般”对应的扇形圆心角为 360° × 8% = 28.8°,

效果“不好”对应的扇形圆心角为 360° × 2% = 7.2°.

扇形统计图如图.

“青少年心理干预”讲座效果统计图

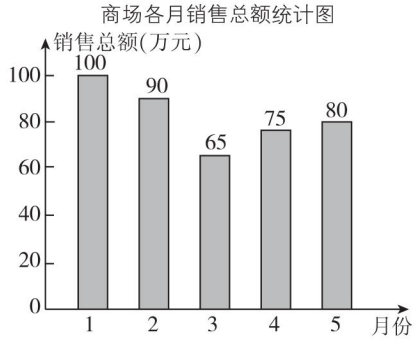


(第 9 题)

(3)“青少年心理干预”讲座的效果大部分人认为很好.(此题答案不唯一,只要符合题意即可)

点拨:统计表可以将大量数据的分类结果清晰地表达出来,扇形统计图能反映部分占总体的百分比大小.

10. 解:(1)410 − (100 + 90 + 65 + 80) = 410 − 335 = 75(万元),补充完整的统计图如图.



(第 10 题)

(2)商场服装部 5 月份的销售额是 80 × 16% = 12.8(万元).

(3)不同意. 理由如下:商场 4 月份的销售总额是 75 万元,

服装部销售额占 17%,则 4 月份服装部的销售额为 75 × 17% = 12.75(万元),5 月份服装部的销售额为 12.8 万元,12.75 < 12.8,故小刚的说法是错误的.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. D **2.** D

3. C **点拨**:全校教师人数为 20 + 30 + 70 = 120,其中一级教师有 70 人,故其频率为 $\frac{70}{120}=\frac{7}{12}$.

故选 C.

4. 90

5. B **点拨**:总人数为 50,最喜爱打篮球的人数为 20,所以最喜爱打篮球的人数的扇形区域的圆心角度数为 $\frac{20}{50}\times360°=144°$. 故选 B.

6. 解:(1)所调查的总人数为:20 ÷ 40% = 50,最喜欢乒乓球的人数为 50 − 8 − 20 − 6 − 2 = 14,最喜欢乒乓球的学生所占的百分比为 14 ÷ 50 = 28%.

补全条形统计图略.

(2)估计全校 500 名学生中最喜欢“排球”项目的有:500 × 12% = 60(名).

(3)“篮球”部分所对应的圆心角是 360° × 40% = 144°.

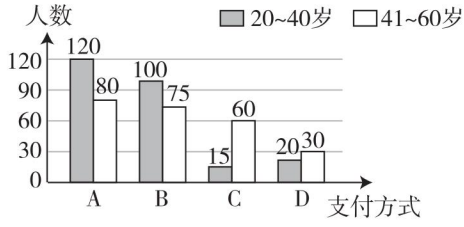
7. 解:(1)∵ (120 + 80) ÷ 40% = 500.

∴ 参与问卷调查的总人数为 500.

(2)500 × 15% − 15 = 60.

补全条形统计图如图.

各种支付方式中不同年龄段人数条形统计图



(第 7 题)

(3)∵ 8 000 × (1 − 40% − 10% − 15%) = 2 800.

∴ 这些人中最喜欢微信支付方式的人数约为 2 800.

【第 15 章测试卷】

一、**1.** D **点拨**:频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$.

2. B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. A　**点拨**：$50\times\frac{90°}{360°}=12.5$（万人）. 故选 A.

4. D　**点拨**：扇形圆心角的度数占 360°的百分比即为该扇形表示的部分占总体的百分比，此题中丁的圆心角度数为 $360°-60°-60°-150°=90°$，而 $\frac{90°}{360°}\times100\%=25\%$.

故选 D.

5. A

6. A　**点拨**：数据总数是 6，其中负数有 4 个，所以负数出现的频率是 $\frac{4}{6}\times100\%\approx66.7\%$. 故选 A.

7. D　**点拨**：由题图知 5 月 1 日的温差为 12 ℃，5 月2 日的温差为 12 ℃，5 月 3 日的温差为 11 ℃. 5 月 4 日的温差约为 12 ℃，5 月 5 日的温差为 13 ℃，5 月 6 日的温差为 12 ℃，5 月7 日的温差约为 12 ℃. 故选 D.

8. A　**点拨**：由条形统计图知 VCD 碟片的数量由小到大的顺序为影视、相声小品、歌曲，故①表示影视，②表示相声小品，③表示歌曲，故选 A.

二、9. 20%　**点拨**：参加体育兴趣小组的有 10 人，总人数为 50，故参加体育兴趣小组的人数所占的百分比为 20%.

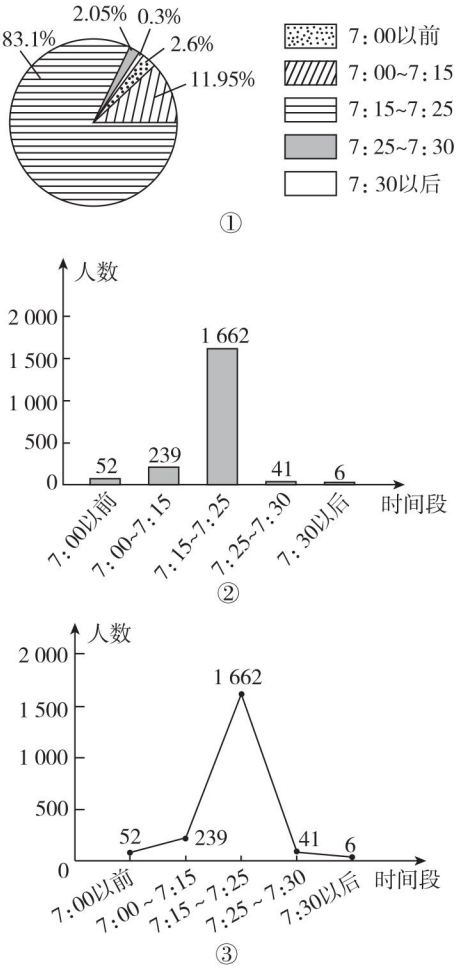
10. 0.1；40

11. 0.5　**点拨**：出现正面的频数是 5，总次数是 10，所以频率为 $\frac{5}{10}=0.5$.

12. 22

三、13. **思路导引**：（1）画扇形统计图前，需计算各时间段到校人数占总人数的百分比，分别为 2.6%，11.95%，83.1%，2.05%，0.3%，进而计算出对应扇形的圆心角的度数分别为 9.36°，43.02°，299.16°，7.38°，1.08°；（2）画条形统计图和折线统计图时，数据标示要准确.

解：扇形统计图如图①. 条形统计图如图②. 折线统计图如图③.



（第 13 题）

14. **解**：（1）一年中各季度的销售额：

第一季度为 1～3 月，销售额为 1 000＋1 200＋1 600＝3 800（元）.

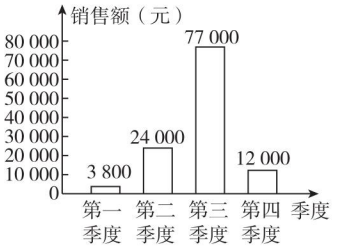
第二季度为 4～6 月，销售额为 4 000＋8 000＋12 000＝24 000（元）.

第三季度为 7～9 月，销售额为 27 000＋30 000＋20 000＝77 000（元）.

第四季度为 10～12 月，销售额为 9 000＋2 000＋1 000＝12 000（元）.

选用条形统计图表示各季度的具体销售额的情况，如图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

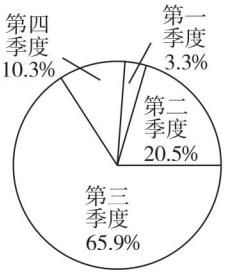


[第14(1)题]

(2)各季度的销售额占全年销售额的百分比如下表:

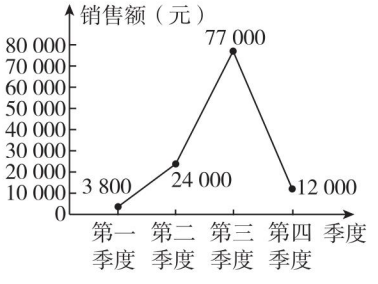
季度	第一季度	第二季度	第三季度	第四季度
销售额(元)	3 800	24 000	77 000	12 000
百分比	3.3%	20.5%	65.9%	10.3%
圆心角	12°	74°	237°	37°

选用扇形统计图表示各季度销售额占全年销售额的百分比情况,如图.



[第14(2)题]

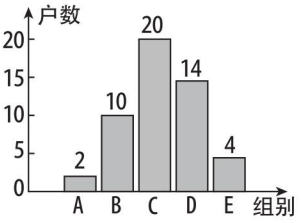
(3)用折线统计图表示,如图.



[第14(3)题]

(4)答案不唯一,如第一、二、三季度销量逐渐上升,第三季度销量最大,第四季度销量下降.对日后的决策的帮助:进货要注意季节性等.

15. **解:**(1)2;50 (2)补全的条形统计图如图.



(第15题)

(3)∵ 1 500×(28% +8%)=540,

∴ 估计月信息消费不少于300元的户数是540.

16. **解:**(1)10%

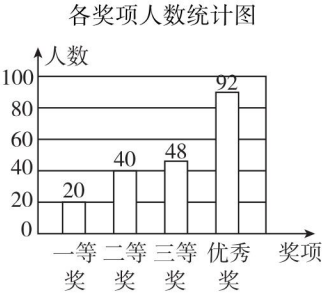
(2)∵ 20÷10% =200,

∴ 此次比赛一共收到200份参赛作品.

(3)200×20% =40(人),

200×24% =48(人),200×46% =92(人),

即此次比赛中一等奖获奖学生有20人,二等奖获奖学生有40人,三等奖获奖学生有48人,优秀奖获奖学生有92人.补充完整的条形统计图如图.



(第16题)

17. **解:**(1)1 500×26% ×6.6=2 574(本).故高一年级学生暑假期间共读课外书2 574本.

(2)七年级:1 500×28% ×5.6=2 352(本),

八年级:1 500×24% ×6.4=2 304(本),

高二年级:1 500×22% ×7.3=2 409(本),

2 304<2 352<2 409<2 574,

故暑假期间读课外书总量最小的是八年级学生,共读课外书2 304本.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第11章 数的开方

11.1 平方根与立方根

练习：

1. 解：

被开方数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
算术平方根	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
平方根	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10

2. 解：(1)$\because 80^2=6\,400$，

$\therefore \sqrt{6\,400}=80$，

$\therefore$ 6 400的平方根是$\pm\sqrt{6\,400}=\pm 80$.

(2)$\because 0.5^2=0.25$，

$\therefore \sqrt{0.25}=0.5$，

$\therefore$ 0.25的平方根是$\pm\sqrt{0.25}=\pm 0.5$.

(3)$\because \left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$，

$\therefore \sqrt{\frac{49}{81}}=\frac{7}{9}$，

$\therefore \frac{49}{81}$的平方根是$\pm\sqrt{\frac{49}{81}}=\pm\frac{7}{9}$.

3. 解：(1)在计算器上依次键入 $\sqrt{\blacksquare}$ 6 7 6 =，显示结果为26，所以676的算术平方根为$\sqrt{676}=26$.

(2)在计算器上依次键入 $\sqrt{\blacksquare}$ 2 7 · 8 7 8 4 =，显示结果为5.28，所以27.878 4的算术平方根为$\sqrt{27.878\,4}=5.28$.

(3)在计算器上依次键入 $\sqrt{\blacksquare}$ 4 · 2 2 5 =，显示结果为2.055 480 479，要求精确到0.01，可得$\sqrt{4.225}\approx 2.06$.

4. 解：(1)不正确，因为一个正数的平方根有两个. 正确说法是16的平方根是± 4.

(2)不正确，因为一个正数的算术平方根恒为正. 正确说法是$\sqrt{25}=5$.

点拨：掌握平方根以及算术平方根的概念是解本题的关键，一个正数的平方根有两个，且它们互为相反数，正的平方根就是其算术平方根.

练习：

1. 解：

被开方数	−64	−27	−8	−1	0	1	8	27	64
立方根	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

2. 解：(1)$\because 8^3=512$，

$\therefore \sqrt[3]{512}=8$.

(2)$\because (-0.3)^3=-0.027$，

$\therefore \sqrt[3]{-0.027}=-0.3$.

(3)$\because \left(-\frac{4}{5}\right)^3=-\frac{64}{125}$，

$\therefore \sqrt[3]{-\frac{64}{125}}=-\frac{4}{5}$.

点拨：利用立方根的概念直接解题，但应注意：任何一个数的立方根都只有一个，这是立方根与平方根的主要区别.

3. 解：(1)在计算器上依次键入 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 6 8 5 9 =，显示结果为19，所以$\sqrt[3]{6\,859}=19$.

(2)在计算器上依次键入 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 1 7 · 5 7 6 =，显示结果为2.6，所以$\sqrt[3]{17.576}=2.6$.

(3)在计算器上依次键入 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 5 · 6 9 1 =，显示结果为1.785 375 326，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

要求精确到0.01,所以 $\sqrt[3]{5.691}\approx1.79$.

习题 11.1

1. 解:(1)不正确,因为一个正数的平方根有两个.

(2)不正确,因为一个正数的算术平方根恒为正.

(3)不正确,因为任何数的立方根必定存在.

(4)不正确,因为任何数的立方根必定只有一个.

2. 解:(1)$\because \left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{16}{81}$,

$\therefore \sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$,

$\therefore \frac{16}{81}$的平方根是$\pm\frac{4}{9}$;

(2)$\because 0.6^2=0.36$,

$\therefore \sqrt{0.36}=0.6$,

$\therefore 0.36$ 的平方根是 ±0.6;

(3)$\because 18^2=324$,

$\therefore \sqrt{324}=18$,

$\therefore 324$ 的平方根是 ±18.

3. 解:(1)$\because 0.5^3=0.125$,

$\therefore \sqrt[3]{0.125}=0.5$;

(2)$\because \left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$,

$\therefore \sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=-\frac{3}{4}$;

(3)$\because 9^3=729$,

$\therefore \sqrt[3]{729}=9$.

点拨:利用立方根的概念直接求解. 但应注意:每个数的立方根有且只有一个,在计算过程中不要与平方根相混淆.

4. 解:(1)在计算器上依次键入 $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$,显示结果为4.109 744 518,要求精确到0.01,可得 $\sqrt{16.89}\approx4.11$.

(2)在计算器上依次键入 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$,显示结果为19.030 422 18,要求精确到0.01,可得 $\sqrt[3]{6\,892}\approx19.03$.

5. 解:(1)$\because \sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$,

而$\sqrt{9}=3$,$\sqrt{16}=4$,$\therefore \sqrt{10}$在整数3和4之间.

(2)正确. $\because 3.1^2=9.61$,$3.2^2=10.24$,

而$9.61<10<10.24$,$\therefore \sqrt{9.61}<\sqrt{10}<\sqrt{10.24}$,

即$3.1<\sqrt{10}<3.2$.

(3)B

点拨:(1)要确定一个数的算术平方根所在的范围,我们可以先确定它在哪两个相邻整数的平方数之间,如10在9和16之间,则$\sqrt{10}$就在$\sqrt{9}$与$\sqrt{16}$之间,即$\sqrt{10}$在3和4之间.(2)(3)两题均可借助计算器进行计算、分析.

6. 解:设烧杯内部的底面半径为 x cm. 依题意,得

$\pi x^2\times0.62=40.5$,

解得 $x\approx\pm4.6$(负值不合题意,舍去),

故 $x\approx4.6$.

设正方体铁块的棱长为y cm,则 $y^3=40.5$,

解得 $y=\sqrt[3]{40.5}\approx3.4$.

答:烧杯内部的底面半径约为4.6 cm,正方体铁块的棱长约为3.4 cm.

点拨:(1)通过设未知数列方程,使实际问题转化为求平方根与立方根的问题.(2)在同一题中设两个未知数,需用不同的字母来表示.

11.2 实数

练习:

1. 解:(1)不正确,因为无理数是无限不循环小数,如果无限小数是循环小数,也不是无理数,如$\frac{1}{3}$,$\frac{5}{6}$,$\frac{4}{7}$等.

(2)正确,因为无理数不是正数就是负数,不能为0,所以无论是正数还是负数,其绝对值都是正数.

2. 解:用计算器求得 $2\sqrt{6}+3\sqrt{7}\approx12.836\,233\,42\approx12.84$.

3. 解:(1)$\because 2\sqrt{3}\approx3.46$,$3\sqrt{2}\approx4.24$,

而$3.46<4.24$,

$\therefore 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

(2)$\because \frac{\sqrt{7}}{2}\approx1.323$,$\frac{\pi}{3}\approx1.047$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

而 $1.323 > 1.047$，

$\therefore -1.323 < -1.047$，因此 $-\frac{\sqrt{7}}{2} < -\frac{\pi}{3}$.

点拨：比较无理数的大小时，可以先把无理数化成近似小数，再通过比较其近似值的大小来比较它们的大小. 当两个数是负数时，绝对值大的数反而小.

习题 11.2

1. 解：

实数	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$
相反数	$-\pi$	$-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$
绝对值	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

2. 解：(1)$\because \sqrt{2} \approx 1.414$，$\sqrt[3]{3} \approx 1.442$，

而 $1.414 < 1.442$，

$\therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

(2)$\because -\sqrt[3]{4} \approx -1.587$，$-\sqrt[3]{3} \approx -1.442$，

而 $-1.587 < -1.442$，

$\therefore -\sqrt[3]{4} < -\sqrt[3]{3}$.

3. 解：用计算器求得 $2\sqrt{5}-5\sqrt{2} \approx -2.598\,931\,857$，

于是 $|2\sqrt{5}-5\sqrt{2}| \approx 2.598\,931\,857$，

$4\sqrt{2}-3\sqrt{3} \approx 0.460\,701\,826$，

于是 $|4\sqrt{2}-3\sqrt{3}| \approx 0.460\,701\,826$，

$\therefore |2\sqrt{5}-5\sqrt{2}| + |4\sqrt{2}-3\sqrt{3}| \approx 3.06$.

点拨：要求含有无理数绝对值的和，可以先求出每个绝对值的近似值，再相加得结果.

4. 解：(1)$\because \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$，

而 $\sqrt{4}=2$，$\sqrt{9}=3$，

$\therefore \sqrt{7}$ 在数轴上位于整数 2 和 3 之间.

(2)$\because$ 用计算器求得 $\sqrt{7} \approx 2.645\,751\,311$，

$\therefore$ 可以取 $a=2.645$，$b=2.646$，且 $b-a=0.001$.

复习题

A 组

1. 解：(1)不正确，因为一个正数的平方根有两个.

(2)正确.

(3)不正确，因为 40 的算术平方根是 $\sqrt{40} \neq \sqrt{400}=20$.

(4)不正确，因为任何数的立方根必定存在，所以负数有立方根.

(5)不正确，因为任何数的立方根必定只有一个.

(6)不正确，因为 0 的平方根是 0.

2. 解：填表如下：

被开方数	1	4	0	27	-64
平方根	± 1	± 2	0	$\pm\sqrt{27}$	不存在
算术平方根	1	2	0	$\sqrt{27}$	不存在
立方根	1	$\sqrt[3]{4}$	0	3	-4

3. (1)± 4；-3　(2)0；0 和 ± 1　(3)$\sqrt{3}$；3

4. 解：$\because -\frac{\pi}{2} \approx -1.57$，$2\sqrt{2} \approx 2.83$，$\sqrt{5} \approx 2.24$，

$\therefore$ 将这些数按从小到大的顺序排列为：

$-1.6 < -\frac{\pi}{2} < 0 < \sqrt{5} < 2\sqrt{2}$.

点拨：首先可借助计算器对各数进行近似计算，再按其大小顺序排列，从而得到结果.

B 组

5. 解：$\because$ 每一小方格的边长为 1，$\therefore$ 其面积为 1.(1)(2)(3)(4)(5)(6)的面积均为 5. 因此拼成正方形的面积为 5，边长为 $\sqrt{5}$，这些正方形一样大.

6. 解：这个大正方体铁块的棱长是 $\sqrt[3]{2.15^3+3.24^3} \approx 3.5$(cm).

答：这个大正方体铁块的棱长约是 3.5 cm.

点拨：正方体的体积是棱长的立方，反之，棱长是体积的立方根，而且大正方体的体积恰好是两个小正方体的体积之和.

C 组

7. 解：(1)5；55；555；5 555

(2)发现规律：$\sqrt{\underbrace{33\cdots3}_{n个}{}^2 + \underbrace{44\cdots4}_{n个}{}^2} = \underbrace{55\cdots5}_{n个}$($n$ 为正整数).

(3)55 555

点拨：这是一道探索题，通过探索发现规律，然后由规律来解决新问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第12章 整式的乘除

12.1 幂的运算

练习:

1. 解:(1)不正确. 理由是:同底数幂相乘,底数不变,指数相加,结果为 a^3.

(2)不正确. 理由是:这里是单项式的加法的计算,不能"混用"同底数幂的乘法法则.

(3)不正确. 理由是:同底数幂相乘,指数应相加而不是相乘,所以结果应为 a^6.

(4)不正确. 理由是:这里是单项式的加法计算,应合并同类项,结果应为 $2a^3$.

点拨:(1)与(3)是同底数幂的乘法,(2)与(4)是单项式的加法,两者有本质上的区别,应注意区分.

2. 解:(1)$10^2\times10^5=10^{2+5}=10^7$.

(2)$a^3\cdot a^7=a^{3+7}=a^{10}$.

(3)$x\cdot x^5\cdot x^7=x^{1+5+7}=x^{13}$.

点拨:解此类问题要灵活运用同底数幂的乘法法则,特别当指数是1时不能"漏加".

练习:

1. 解:(1)不正确. 理由是:幂的乘方,指数应相乘,而不是相加,正确的结果是 a^{15}.

(2)不正确. 理由是:这里是同底数幂的乘法,指数应相加,正确的结果是 a^8.

(3)不正确. 理由是:这里是幂的乘方和同底数幂的乘法的混合运算,要先算幂的乘方,正确的计算过程为:$(a^2)^3\cdot a^4=a^6\cdot a^4=a^{10}$.

2. 解:(1)$(2^2)^2=2^{2\times2}=2^4=16$.

(2)$(y^2)^5=y^{2\times5}=y^{10}$.

(3)$(x^4)^3=x^{4\times3}=x^{12}$.

(4)$(y^3)^2\cdot(y^2)^3=y^6\cdot y^6=y^{12}$.

点拨:解此类问题,注意不要将幂的乘方与同底数幂的乘法混淆.

练习:

1. 解:(1)不正确. 理由是:积的乘方,把积的每一个因式分别乘方,再把所得的幂相乘,结果应为 x^2y^6.

(2)不正确. 理由是:积中的系数也要乘方,正确的结果是 $-8x^3$.

2. 解:(1)$(3a)^2=3^2\cdot a^2=9a^2$.

(2)$(-3a)^3=(-3)^3\cdot a^3=-27a^3$.

(3)$(ab^2)^2=a^2\cdot(b^2)^2=a^2b^4$.

(4)$(-2\times10^3)^3=(-2)^3\times(10^3)^3=-8\times10^9$.

点拨:解决此类问题时要注意系数也要乘方,并且要正确确定系数的正负号.

练习:

1. (1)a^4 (2)$-b^5$ (3)x^5 (4)y^{10}

2. 解:(1)$a^{10}\div a^2=a^{10-2}=a^8$.

(2)$(-x)^9\div(-x)^3=(-x)^{9-3}=(-x)^6=x^6$.

(3)$m^8\div m^2\cdot m^3=m^{8-2+3}=m^9$.

(4)$(a^3)^2\div a^6=a^6\div a^6=1$.

习题 12.1

1. 解:(1)$9^3\times9^5=9^{3+5}=9^8$.

(2)$3^5\times27=3^5\times3^3=3^{5+3}=3^8$.

(3)$a^7\cdot a^8=a^{7+8}=a^{15}$.

(4)$x^2\cdot x^3\cdot x^4=x^{2+3+4}=x^9$.

2. 解:(1)$(10^3)^3=10^{3\times3}=10^9$.

(2)$(a^3)^7=a^{3\times7}=a^{21}$.

(3)$(x^2)^4=x^{2\times4}=x^8$.

(4)$(a^2)^3\cdot a^5=a^6\cdot a^5=a^{11}$.

点拨:(1)(2)(3)直接运用幂的乘方的法则计算. (4)要注意:这里含有幂的乘方和同底数幂的乘法两种运算,要先计算乘方.

3. 解:(1)不正确. 理由是同底数幂相乘,底数不变,指数相加,正确的结果是 a^4.

(2)不正确. 理由是:两个因式的平方的积,应等于这两个因式的积的平方,这里是积的乘方的逆运算,正确的结果是 $(ab)^2$.

(3)不正确. 理由是:前两个等号正确,而第三个等号是错误的,因为 $(a^5)^7=a^{5\times7}=a^{35}\neq a^{12}$.

点拨:(2)是积的乘方的逆运算,(3)考查对幂的乘方的运算法则的理解程度.

4. 解:(1)$(3\times10^5)^2=3^2\times(10^5)^2=9\times10^{10}$.

(2)$(2x)^2=2^2\cdot x^2=4x^2$.

(3)$(-2x)^3=(-2)^3\cdot x^3=-8x^3$.

(4)$a^2\cdot(ab)^3=a^2\cdot a^3b^3=a^5b^3$.

(5)$(ab)^3\cdot(ac)^4=a^3b^3\cdot a^4c^4=a^7b^3c^4$.

5. 解:(1)$x^{12}\div x^4=x^{12-4}=x^8$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)$(-a)^6 \div (-a)^4 = (-a)^{6-4} = (-a)^2 = a^2$.

(3)$(p^3)^2 \div p^5 = p^6 \div p^5 = p^{6-5} = p$.

(4)$a^{10} \div (-a^2)^3 = a^{10} \div (-a^6) = -a^4$.

点拨:本题考查同底数幂的除法法则.

6. 解:(1)不正确. $(a^2b)^2 = a^4b^2$.

(2)不正确. $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$.

(3)不正确. $(3xy^2)^2 = 3^2 \cdot x^2 \cdot (y^2)^2 = 9x^2y^4$.

(4)不正确. $(-m)^7 \div (-m)^2 = (-m)^{7-2} = (-m)^5 = -m^5$.

7. 解:(1)$(a^3)^3 \div (a^4)^2 = a^9 \div a^8 = a$.

(2)$(x^2y)^5 \div (x^2y)^3 = x^{10}y^5 \div x^6y^3 = x^4y^2$.

(3)$x^2 \cdot (x^2)^3 \div x^5 = x^2 \cdot x^6 \div x^5 = x^8 \div x^5 = x^3$.

(4)$(y^3)^3 \div y^3 \div (-y^2)^2 = y^9 \div y^3 \div y^4 = y^{9-3-4} = y^2$.

点拨:计算时要先算乘方,然后按照同底数幂的乘法与除法法则依次计算.

8. 解:可以用4张,9张或16张这样的卡片分别拼成一个新正方形,

此时正方形的边长分别为$2a$,$3a$,$4a$,面积分别为$(2a)^2$,$(3a)^2$,$(4a)^2$.

∵每张卡片的面积为a^2,

则4张卡片的面积为$4a^2$,9张卡片的面积为$9a^2$,16张卡片的面积为$16a^2$,

∴可以得到$(2a)^2 = 4a^2$,$(3a)^2 = 9a^2$,$(4a)^2 = 16a^2$.

一般地,用k^2($k>1$,k为正整数)张卡片拼正方形时,可以得到$(ka)^2 = k^2a^2$,正好验证了积的乘方的运算法则.

点拨:本题是一个探索性问题,解决此类问题时,要结合几何图形的直观性,根据面积的不同表示方法发现规律.

12.2 整式的乘法

练习:

1. 解:(1)$3a^2 \cdot 2a^3 = (3\times2) \cdot a^2 \cdot a^3 = 6a^5$.

(2)$(-9a^2b^3) \cdot 8ab^2$

$= [(-9)\times8] \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b^3 \cdot b^2)$

$= -72a^3b^5$.

(3)$(-3a^2)^3 \cdot (-2a^3)^2$

$= -27a^6 \cdot 4a^6$

$= -108a^{12}$.

(4)$-3xy^2z \cdot (x^2y)^2$

$= -3xy^2z \cdot x^4y^2$

$= -3x^5y^4z$.

点拨:解决此类问题时要注意在含有乘方的运算中要先算乘方.

2. 解:$3\times10^8 \times 5\times10^2 = 15\times10^{10} = 1.5\times10^{11}$(米).

答:地球与太阳的距离约是1.5×10^{11}米.

3. 解:由题意得,这间屋子长$15a$厘米,宽$14a$厘米,则有:$14a\times15a = 210a^2$(平方厘米).

答:这间屋子的面积是$210a^2$平方厘米.

练习:

1. 解:(1)$3x^3y \cdot (2xy^2 - 3xy)$

$= 3x^3y \cdot 2xy^2 - 3x^3y \cdot 3xy$

$= 6x^4y^3 - 9x^4y^2$.

(2)$2x \cdot (3x^2 - xy + y^2)$

$= 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot xy + 2x \cdot y^2$

$= 6x^3 - 2x^2y + 2xy^2$.

点拨:解决此类问题要结合去括号法则,正确确定各项的符号.

2. 解:$x(x^2-1) + 2x^2(x+1) - 3x(2x-5)$

$= x^3 - x + 2x^3 + 2x^2 - 6x^2 + 15x$

$= 3x^3 - 4x^2 + 14x$.

点拨:解决此类问题首先要去括号,然后合并同类项.

练习:

1. 解:$(x+5)(x-7)$

$= x^2 - 7x + 5x - 35$

$= x^2 - 2x - 35$.

2. 解:$(x+5y)(x-7y)$

$= x^2 - 7xy + 5xy - 35y^2$

$= x^2 - 2xy - 35y^2$.

3. 解:$(2m+3n)(2m-3n)$

$= 4m^2 - 6mn + 6mn - 9n^2$

$= 4m^2 - 9n^2$.

4. 解:$(2a+3b)^2$

$= 4a^2 + 6ab + 6ab + 9b^2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=4a^2+12ab+9b^2$.

习题 12.2

1. 解:(1)$5a^3\cdot 8a^2=40a^5$.

(2)$11a^{12}\cdot(-12a^{11})=-132a^{23}$.

(3)$2x^2\cdot(-3x)^4=2x^2\cdot 81x^4=162x^6$.

(4)$(-8xy^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$

$=(-8xy^2)\cdot\left(-\frac{1}{8}x^3\right)$

$=x^4y^2$.

2. 解:$2.5\times10^3\times2.3\times10^6=5.75\times10^9$(千克),

答:胡夫金字塔总重约为5.75×10^9千克.

点拨:此类问题的计算结果要用科学记数法表示.

3. 解:(1)$-3x\cdot(2x^2-x+4)$

$=-3x\cdot2x^2+3x\cdot x-3x\cdot4$

$=-6x^3+3x^2-12x$.

(2)$\frac{5}{2}xy\cdot\left(-x^3y^2+\frac{4}{5}x^2y^3\right)$

$=-\frac{5}{2}xy\cdot x^3y^2+\frac{5}{2}xy\cdot\frac{4}{5}x^2y^3$

$=-\frac{5}{2}x^4y^3+2x^3y^4$.

点拨:解此类问题要注意结合去括号法则,正确确定各项的符号.

4. 解:(1)$x\left(\frac{1}{2}x+1\right)-3x\left(\frac{3}{2}x-2\right)$

$=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}x^2+6x$

$=-4x^2+7x$.

(2)$y^2(y-1)+2y(y^2-2y+3)$

$=y^3-y^2+2y^3-4y^2+6y$

$=3y^3-5y^2+6y$.

点拨:此类问题含有整式的加法和乘法两种运算,要先进行乘法计算,然后进行加法计算,乘法最终转化为单项式乘以单项式的计算,整式的加法就是合并同类项,要注意合并同类项时,只把系数相加,字母和字母的指数不变.

5. 解:(1)$(x+5)(x-6)$

$=x^2-6x+5x-30$

$=x^2-x-30$.

(2)$(2x+1)(2x+3)$

$=4x^2+6x+2x+3$

$=4x^2+8x+3$.

(3)$(3x+4)(3x-4)$

$=9x^2-12x+12x-16$

$=9x^2-16$.

(4)$(9x+4y)^2$

$=81x^2+36xy+36xy+16y^2$

$=81x^2+72xy+16y^2$.

6. 解:(1)$(3x-1)(2x^2+3x-4)$

$=6x^3+9x^2-12x-2x^2-3x+4$

$=6x^3+7x^2-15x+4$.

(2)$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

$=x^3-2x^2y+4xy^2+2x^2y-4xy^2+8y^3$

$=x^3+8y^3$.

点拨:本题是多项式乘以多项式的计算,解此类问题首先按法则进行乘法计算,然后能合并同类项的要合并合类项.

12.3 乘法公式

练习:

1. 解:(1)$\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

$=(2x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=4x^2-\frac{1}{4}$.

(2)$(-x+2)(-x-2)$

$=[(-x)+2]\cdot[(-x)-2]$

$=(-x)^2-2^2$

$=x^2-4$.

(3)$(-2x+y)(2x+y)$

$=(y-2x)(y+2x)$

$=y^2-(2x)^2$

$=y^2-4x^2$.

(4)$(y-x)(-x-y)$

$=[(-x)+y]\cdot[(-x)-y]$

$=(-x)^2-y^2$

$=x^2-y^2$.

2. 解:(1)498×502

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=(500-2)\times(500+2)$

$=500^2-2^2$

$=249\ 996.$

$(2)999\times1\ 001$

$=(1\ 000-1)\times(1\ 000+1)$

$=1\ 000^2-1^2$

$=999\ 999.$

点拨:本题是利用两数和与这两数差的乘法公式进行的简便计算,解此类问题的根本指导思想是化复杂为简单.

3. 解:小明是正确的. 因为篱笆的长度是一定的,设为$4a(a>0)$,若围成正方形,则其边长为a,面积为a^2;若围成一般的长方形,设其长为$a+b(b\neq0)$,则宽必为$a-b$,即面积为$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,且$a^2-b^2<a^2$,因此围成一个正方形区域可使面积最大,所以小明是正确的.

点拨:解本题的关键是要明确篱笆的长度是一定的.

练习:

1. 解:$(1)(x+3)^2$

$=x^2+2\cdot x\cdot3+3^2$

$=x^2+6x+9.$

$(2)(2x+y)^2$

$=(2x)^2+2\cdot2x\cdot y+y^2$

$=4x^2+4xy+y^2.$

点拨:本题是直接利用两数和的平方公式进行计算的.

2. 解:$(1)(x-3)^2$

$=x^2-2\cdot x\cdot3+3^2$

$=x^2-6x+9.$

$(2)(2m-3n)^2$

$=(2m)^2-2\cdot2m\cdot3n+(3n)^2$

$=4m^2-12mn+9n^2.$

点拨:本题是直接利用两数差的平方公式进行计算的.

3. 解法一:$(1)(-2m+n)^2$

$=[(-2m)+n]^2$

$=(-2m)^2+2\cdot(-2m)\cdot n+n^2$

$=4m^2-4mn+n^2.$

$(2)(-2m-n)^2$

$=[(-2m)+(-n)]^2$

$=(-2m)^2+2\cdot(-2m)\cdot(-n)+(-n)^2$

$=4m^2+4mn+n^2.$

解法二:$(1)(-2m+n)^2$

$=(n-2m)^2$

$=n^2-2\cdot n\cdot2m+(2m)^2$

$=n^2-4mn+4m^2.$

$(2)(-2m-n)^2$

$=[-(2m+n)]^2$

$=(2m+n)^2$

$=(2m)^2+2\cdot2m\cdot n+n^2$

$=4m^2+4mn+n^2.$

习题 12.3

1. 解:$(1)(a+2b)(a-2b)$

$=a^2-(2b)^2$

$=a^2-4b^2.$

$(2)(2a+5b)(2a-5b)$

$=(2a)^2-(5b)^2$

$=4a^2-25b^2.$

$(3)(x^2-1)(1+x^2)$

$=(x^2-1)(x^2+1)$

$=(x^2)^2-1^2=x^4-1.$

$(4)\left(-\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\right)\left(\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}t\right)$

$=\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{3}s\right)\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}s\right)$

$=\left(\frac{1}{2}t\right)^2-\left(\frac{1}{3}s\right)^2$

$=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{9}s^2.$

点拨:本题是直接利用两数和与这两数差的乘法公式进行计算的,解决此类问题的关键是确定代数式中哪些项相当于公式中的"a",哪些项相当于公式中的"b",然后利用公式进行计算.

2. 解:$(1)(3a+b)^2$

$=(3a)^2+2\cdot3a\cdot b+b^2$

$=9a^2+6ab+b^2.$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2) $\left(2a+\frac{1}{3}b\right)^2$

$=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot\frac{1}{3}b+\left(\frac{1}{3}b\right)^2$

$=4a^2+\frac{4}{3}ab+\frac{1}{9}b^2.$

(3) $(2a-4b)^2$

$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 4b+(4b)^2$

$=4a^2-16ab+16b^2.$

(4) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^2$

$=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}b+\left(\frac{1}{3}b\right)^2$

$=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2.$

点拨:本题主要考查利用两数和(差)的平方公式解题.

3. **解**:(1) $(-m^2-2m)^2$

$=[-(m^2+2m)]^2$

$=(m^2+2m)^2$

$=(m^2)^2+2\cdot m^2\cdot 2m+(2m)^2$

$=m^4+4m^3+4m^2.$

(2) $(-2x+y)(-2x-y)$

$=(2x-y)(2x+y)$

$=(2x)^2-y^2=4x^2-y^2.$

(3) $(2a+1)(-2a-1)$

$=-(2a+1)^2$

$=-[(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 1+1^2]$

$=-(4a^2+4a+1)$

$=-4a^2-4a-1.$

点拨:本题考查两数和与这两数差的乘法公式和两数和(差)的平方公式. 计算时,要通过符号的变化,把原代数式转化为两数和乘这两数差的积的形式或两数和的平方的形式.

4. (1)9;3　(2)25;5

(3)$2ab$　(4)$4xy$

点拨:(1)(2)利用两数和(差)的平方公式的特征来解,(3)(4)可利用乘法公式展开,根据等式的性质来解.

12.4 整式的除法

练习:

解:填表如下:

被除式	$6x^3y^3$	$-42x^3y^3$	$-42x^3y^3$
除式	$2xy$	$-6y^3$	$-6x^2y^2$
商	$3x^2y^2$	$7x^3$	$7xy$

练习:

1. **解**:(1) $(3ab-2a)\div a$

$=3ab\div a-2a\div a$

$=3b-2.$

(2) $(5ax^2+15x)\div 5x$

$=5ax^2\div 5x+15x\div 5x$

$=ax+3.$

(3) $(12m^2n+15mn^2)\div 6mn$

$=12m^2n\div 6mn+15mn^2\div 6mn$

$=2m+\frac{5}{2}n.$

(4) $(x^3-2x^2y)\div(-x^2)$

$=x^3\div(-x^2)-2x^2y\div(-x^2)$

$=-x+2y.$

点拨:去括号时注意符号的变化.

2. **解**:(1) $(4a^3b^3-6a^2b^3c-2ab^5)\div(-2ab^2)$

$=4a^3b^3\div(-2ab^2)-6a^2b^3c\div(-2ab^2)-2ab^5\div(-2ab^2)$

$=-2a^2b+3abc+b^3.$

(2) $\left(x^2y^3-\frac{1}{2}x^3y^2+2x^2y^2\right)\div\frac{1}{2}xy^2$

$=x^2y^3\div\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{2}x^3y^2\div\frac{1}{2}xy^2+2x^2y^2\div\frac{1}{2}xy^2$

$=2xy-x^2+4x.$

点拨:本题考查多项式除以单项式的法则.

习题 12.4

1. **解**:(1) $-21a^2b^3\div 7a^2b$

$=(-21\div 7)a^{2-2}b^{3-1}$

$=-3b^2.$

(2) $7a^5b^2c^3\div(-3a^3b)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=-\frac{7}{3}a^{5-3}b^{2-1}c^3$

$=-\frac{7}{3}a^2bc^3$.

(3) $\left(-\frac{1}{2}a^4x^4\right)\div\left(-\frac{1}{6}a^3x^2\right)$

$=\left[-\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{6}\right)\right]a^{4-3}x^{4-2}$

$=3ax^2$.

(4) $(16x^3-8x^2+4x)\div(-2x)$

$=16x^3\div(-2x)-8x^2\div(-2x)+4x\div(-2x)$

$=-8x^2+4x-2$.

2. 解: (1) $(6a^3b-9a^2c)\div3a^2$

$=6a^3b\div3a^2-9a^2c\div3a^2$

$=2ab-3c$.

(2) $(4a^3-6a^2+9a)\div(-2a)$

$=4a^3\div(-2a)-6a^2\div(-2a)+9a\div(-2a)$

$=-2a^2+3a-\frac{9}{2}$.

(3) $(-4m^4+20m^3n-m^2n^2)\div(-4m^2)$

$=-4m^4\div(-4m^2)+20m^3n\div(-4m^2)-m^2n^2\div(-4m^2)$

$=m^2-5mn+\frac{1}{4}n^2$.

(4) $\left(x^2y-\frac{1}{2}xy^2-2xy\right)\div\frac{1}{2}xy$

$=x^2y\div\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}xy^2\div\frac{1}{2}xy-2xy\div\frac{1}{2}xy$

$=2x-y-4$.

点拨: 多项式除以单项式,先用这个多项式的每一项除以这个单项式,再把所得的商相加. 同时要注意去括号时各项符号的变化.

3. 解: (1) $(12p^3q^4+20p^3q^2r-6p^4q^3)\div(-2pq)^2$

$=(12p^3q^4+20p^3q^2r-6p^4q^3)\div4p^2q^2$

$=12p^3q^4\div4p^2q^2+20p^3q^2r\div4p^2q^2-6p^4q^3\div4p^2q^2$

$=3pq^2+5pr-\frac{3}{2}p^2q$.

(2) $[4y(2x-y)-2x(2x-y)]\div(2x-y)$

$=4y(2x-y)\div(2x-y)-2x(2x-y)\div(2x-y)$

$=4y-2x$.

点拨: (1) 应先计算除式,再按照多项式除以单项式的法则计算;(2) 应把 $(2x-y)$ 看成一个整体来计算.

4. 解: 不妨设这个数为 $n(n\neq0)$,由题意,有

$(n^2+n)\div n-n$

$=n^2\div n+n\div n-n$

$=n+1-n$

$=1$.

点拨: 本题是整式的混合运算. 先算乘除,再算加减.

12.5 因式分解

练习:

1. 解: (1) 不正确. 理由是:因式分解要求把多项式化为几个整式的乘积形式,但这里最终的结果不是积的形式,正确答案是 $(2a-1)^2$.

(2) 不正确. 理由是:两数的平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 中的"a^2"和"b^2"分别表示一个数的平方,所以原式的左边应化为 $x^2-(2y)^2$ 才能运用两数的平方差公式分解因式,正确答案是 $(x+2y)(x-2y)$.

点拨: 本题所用的方法实际上是整式乘法的逆运算.

2. 解: (1) $a^2+a=a(a+1)$.

(2) $4ab-2a^2b=2ab(2-a)$.

(3) $9m^2-n^2=(3m)^2-n^2=(3m+n)(3m-n)$.

(4) $2am^2-8a=2a(m^2-2^2)=2a(m+2)(m-2)$.

(5) $2a^2+4ab+2b^2$

$=2(a^2+2ab+b^2)$

$=2(a+b)^2$.

习题 12.5

1. 解: (1) $3x+3y=3(x+y)$.

(2) $-24m^2x-16n^2x=-8x(3m^2+2n^2)$.

(3) $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

(4) $(xy)^2-1=(xy+1)(xy-1)$.

(5) $a^4x^2-a^4y^2=a^4(x^2-y^2)=a^4(x+y)(x-y)$.

(6) $3x^2+6xy+3y^2=3(x^2+2xy+y^2)=3(x+y)^2$.

(7) $(x-y)^2+4xy$

$=x^2-2xy+y^2+4xy$

$=x^2+2xy+y^2$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=(x+y)^2$.

点拨:解本题要先将$(x-y)^2$展开,合并同类项后,再反过来用两数和的平方公式来分解.

(8)$4a^2-3b(4a-3b)$

$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2$

$=(2a-3b)^2$.

2. 解:$2x(a-2)-y(2-a)$

$=2x(a-2)+y(a-2)$

$=(a-2)(2x+y)$.

将$a=0.5$,$x=1.5$,$y=-2$代入上式,得原式$=(0.5-2)\times(2\times 1.5-2)=-1.5$.

3. 解:由题意可知,草坪的面积是边长为a米的正方形的面积减去四个边长为b米的小正方形的面积,即$a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)=(6.6+2\times 1.7)\times(6.6-2\times 1.7)=10\times 3.2=32$(平方米).

答:草坪的面积有32平方米大.

点拨:在计算过程中运用因式分解可以使计算更为简便.

复习题

A组

1. 解:(1)$a^{10}\cdot a^8=a^{10+8}=a^{18}$.

点拨:本题是同底数幂的乘法,直接利用同底数幂的乘法法则"底数不变,指数相加"进行计算.

(2)方法一:$(xy)^2\cdot(xy)^3=x^2\cdot y^2\cdot x^3\cdot y^3=(x^2\cdot x^3)\cdot(y^2\cdot y^3)=x^5y^5$.

方法二:$(xy)^2\cdot(xy)^3=(xy)^{2+3}=(xy)^5=x^5y^5$.

点拨:本题有两种不同的方法,但在一般的计算中要先计算乘方.

(3)$[(-x)^3]^2=(-x^3)^2=x^6$.

(4)$[(-x)^2]^3=(x^2)^3=x^6$.

点拨:以上两题是幂的乘方的计算,先计算小括号里面的,并注意确定符号,最后得出结果.

(5)$(-2mn^2)^3=(-2)^3\cdot m^3\cdot(n^2)^3=-8m^3n^6$.

点拨:本题是积的乘方的计算,解此类问题要把积中的每个因式分别乘方,特别注意前面的系数也要乘方,这是大家容易忽略的问题.

(6)$(y^3)^2\cdot(y^2)^4$

$=y^{3\times 2}\cdot y^{2\times 4}$

$=y^6\cdot y^8=y^{6+8}$

$=y^{14}$.

点拨:本题是一个含有幂的乘方和同底数幂的乘法的计算,要先计算幂的乘方,再计算同底数幂的乘法.

2. 解:(1)$2a\cdot 3a^2=6a^3$.

(2)$(-3xy)\cdot(-4yz)=12xy^2z$.

(3)$(-2a^2)^2\cdot(-5a^3)=4a^4\cdot(-5a^3)=-20a^7$.

点拨:这三道小题都是单项式乘单项式的计算,但(3)中含有积的乘方的计算,要先计算乘方,再按单项式乘单项式的运算法则计算.

(4)$(-3x)\cdot(2x^2-x-1)$

$=(-3x)\cdot 2x^2-(-3x)\cdot x-(-3x)\cdot 1$

$=-6x^3+3x^2+3x$.

点拨:本题是单项式乘多项式的计算,计算时要特别注意单项式系数的符号,要结合去括号法则进行计算.

(5)$(x-2)(x-6)$

$=x^2-6x-2x+12$

$=x^2-8x+12$.

(6)$(2x-1)(3x+2)$

$=6x^2+4x-3x-2$

$=6x^2+x-2$.

(7)$(y-2)(y^2-6y-9)$

$=y^3-6y^2-9y-2y^2+12y+18$

$=y^3-8y^2+3y+18$.

(8)$(p-6q)(p^2+pq+q^2)$

$=p^3+p^2q+pq^2-6p^2q-6pq^2-6q^3$

$=p^3-5p^2q-5pq^2-6q^3$.

点拨:这四道小题都是多项式乘以多项式的计算,去括号后要注意合并同类项.

3. 解:(1)$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$.

(2)$(m+n)(m-n)=m^2-n^2$.

(3)$(-m-n)(-m+n)$

$=[(-m)-n]\cdot[(-m)+n]$

$=(-m)^2-n^2$

$=m^2-n^2$.

点拨:这三道小题都是利用两数和与这两数差的

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

乘法公式来计算的. 只是在计算(3)时要注意原式中“$-m$”相当于公式中的“a”,“n”相当于公式中的“b”.

$(4)(-m-n)(m+n)$

$=-(m+n)^2$

$=-(m^2+2mn+n^2)$

$=-m^2-2mn-n^2$.

$(5)(-m+n)(m-n)$

$=-(m-n)^2$

$=-(m^2-2mn+n^2)$

$=-m^2+2mn-n^2$.

$(6)\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y\right)^2$

$=\left(\frac{2}{3}x\right)^2+2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{3}{4}y+\left(\frac{3}{4}y\right)^2$

$=\frac{4}{9}x^2+xy+\frac{9}{16}y^2$.

4. 解: $(1)2\,013^2-2\,014\times2\,012$

$=2\,013^2-(2\,013+1)\times(2\,013-1)$

$=2\,013^2-(2\,013^2-1^2)$

$=2\,013^2-2\,013^2+1$

$=1$.

点拨: 本题运用了平方差公式来简化计算.

$(2)(4\times10^4)\times(2\times10^3)-(6.5\times10^3)\times(6\times10^3)$

$=(4\times2)\times(10^4\times10^3)-(6.5\times6)\times(10^3\times10^3)$

$=8\times10^7-39\times10^6$

$=8\times10^7-3.9\times10^7$

$=(8-3.9)\times10^7$

$=4.1\times10^7$.

(3)方法一:$(2x+5)^2-(2x-5)^2$

$=(4x^2+20x+25)-(4x^2-20x+25)$

$=4x^2+20x+25-4x^2+20x-25$

$=40x$.

方法二:$(2x+5)^2-(2x-5)^2$

$=(2x+5+2x-5)(2x+5-2x+5)$

$=4x\times10$

$=40x$.

点拨: 方法一是利用乘法公式进行计算的,要注意去括号后合并同类项,方法二是利用因式分解进行计算的.

$(4)2x\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)-3x\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$

$=x^2-2x-x^2-2x$

$=-4x$.

$(5)(-2x^2)\cdot(-y)+3xy\cdot\left(1-\frac{1}{3}x\right)$

$=2x^2y+3xy-x^2y$

$=x^2y+3xy$.

$(6)(-6x^2)^2+(-3x)^3\cdot x=36x^4-27x^4=9x^4$.

点拨: 这三道小题是含有整式的加减法和乘法的混合运算. 解此类问题时,要注意运算的顺序:先乘方,再乘法,最后加减.

5. 解: $(1)a\cdot a^4\div a^3=a^{1+4-3}=a^2$.

$(2)(-x)^6\div(-x)^2\cdot(-x)^3$

$=(-x)^{6-2+3}$

$=(-x)^7$

$=-x^7$.

$(3)27x^8\div3x^4=9x^{8-4}=9x^4$.

$(4)-12m^3n^3\div4m^2n^3=-3m^{3-2}n^{3-3}=-3m$.

$(5)(6x^2y^3z^2)^2\div4x^3y^4=36x^4y^6z^4\div4x^3y^4=9xy^2z^4$.

$(6)(-6a^2b^5c)\div(-2ab^2)^2$

$=-6a^2b^5c\div4a^2b^4$

$=-\frac{3}{2}a^{2-2}b^{5-4}c$

$=-\frac{3}{2}bc$.

6. 解: $(1)(6a^4-4a^3-2a^2)\div(-2a^2)$

$=6a^4\div(-2a^2)-4a^3\div(-2a^2)-2a^2\div(-2a^2)$

$=-3a^2+2a+1$.

$(2)(4x^3y+6x^2y^2-xy^3)\div2xy$

$=4x^3y\div2xy+6x^2y^2\div2xy-xy^3\div2xy$

$=2x^2+3xy-\frac{1}{2}y^2$.

$(3)\left(x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\div\left(-\frac{1}{2}x\right)^2$

$=\left(x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\div\frac{1}{4}x^2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=x^4\div\frac{1}{4}x^2+2x^3\div\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2\div\frac{1}{4}x^2$

$=4x^2+8x-2.$

$(4)(2ab^2-b^3)^2\div 2b^3$

$=(4a^2b^4-4ab^5+b^6)\div 2b^3$

$=4a^2b^4\div 2b^3-4ab^5\div 2b^3+b^6\div 2b^3$

$=2a^2b-2ab^2+\frac{1}{2}b^3.$

点拨:本题主要考查了多项式除以单项式的运算法则.

7. 解:原式$=(x^2-4xy+4y^2+x^2-4y^2-4x^2+2xy)\div 2x$

$=(-2x^2-2xy)\div 2x$

$=-2x^2\div 2x-2xy\div 2x$

$=-x-y.$

点拨:先利用乘法公式和单项式乘多项式的运算法则将各项展开,合并同类项后,再利用多项式除以单项式的运算法则计算.

8. 解:$(1)x^2-25x=x(x-25).$

$(2)2x^2y^2-4y^3z=2y^2(x^2-2yz).$

$(3)am-an+ap=a(m-n+p).$

$(4)x^3-25x=x(x^2-5^2)=x(x+5)(x-5).$

$(5)1-4x^2=1-(2x)^2=(1+2x)(1-2x).$

$(6)25x^2+20xy+4y^2$

$=(5x)^2+2\cdot 5x\cdot 2y+(2y)^2$

$=(5x+2y)^2.$

$(7)x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)=x(x-2)^2.$

点拨:解此类问题,首先分析能否提取公因式,如果能,要先提取公因式,提取公因式后,一定要观察余下的部分,看能否用公式法分解,如果能,就考虑用公式法进行因式分解.

9. 解:$(1)3a(2a^2-4a+3)-2a^2(3a+4)$

$=6a^3-12a^2+9a-6a^3-8a^2$

$=-20a^2+9a.$

当$a=-2$时,原式$=-20\times(-2)^2+9\times(-2)=-98.$

$(2)(a-3b)^2+(3a+b)^2-(a+5b)^2+(a-5b)^2$

$=a^2-6ab+9b^2+9a^2+6ab+b^2-a^2-10ab-25b^2+a^2-10ab+25b^2$

$=10a^2-20ab+10b^2$

$=10(a-b)^2.$

当$a=-8,b=-6$时,原式$=10\times(-8+6)^2=10\times 4=40.$

点拨:此类问题是整式的乘法与加减法的混合运算,要先计算乘法,后计算加减法,再代入求值,解此类问题要把原式化为求值的最简形式.

B组

10. 解:$(1)(3x^4-2x^3)\div(-x)-(x-x^2)\cdot 3x$

$=3x^4\div(-x)-2x^3\div(-x)-x\cdot 3x+x^2\cdot 3x$

$=-3x^3+2x^2-3x^2+3x^3$

$=-x^2.$

当$x=-\frac{1}{2}$时,原式$=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$

$(2)[(ab+1)(ab-2)-2a^2b^2+2]\div(-ab)$

$=(a^2b^2-2ab+ab-2-2a^2b^2+2)\div(-ab)$

$=(-a^2b^2-ab)\div(-ab)$

$=a^2b^2\div ab+ab\div ab$

$=ab+1.$

当$a=\frac{3}{2},b=-\frac{4}{3}$时,原式$=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)+1$

$=-2+1=-1.$

11. 解:$\because (x+y)^2=1$,即$x^2+2xy+y^2=1$ ①,

$(x-y)^2=49$,即$x^2-2xy+y^2=49$ ②,

$\therefore$ ①+②,得$2x^2+2y^2=50$,即$x^2+y^2=25$;

①−②,得$4xy=-48$,即$xy=-12.$

点拨:本题可以让大家进一步理解和认识两数和(差)的平方公式,即$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$

12. 解:$\because a+b=3,ab=2,$

$\therefore a^2+b^2$

$=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2\times 2$

$=9-4$

$=5.$

点拨:本题考查大家灵活运用两数和的平方公式来解决问题的能力.

13. 解:$\because a-b=1,a^2+b^2=25,$

而$a^2+b^2-(a-b)^2$

$=a^2+b^2-a^2+2ab-b^2$

$=2ab,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore ab=\frac{1}{2}[(a^2+b^2)-(a-b)^2]$

$=\frac{1}{2}\times(25-1)$

$=12.$

14. 解:(1)$x(x+y)-y(x+y)=(x+y)(x-y)$.

(2)$(a+b)^2+2(a+b)+1=(a+b+1)^2$.

(3)$4x^4+4x^3+x^2=x^2(4x^2+4x+1)=x^2(2x+1)^2$.

(4)$x^2-16ax+64a^2=(x-8a)^2$.

(5)$(x-1)(x-3)+1$

$=x^2-4x+3+1$

$=x^2-4x+4$

$=(x-2)^2$.

(6)$(ab+a)+(b+1)$

$=a(b+1)+(b+1)$

$=(b+1)(a+1)$.

点拨:本题提公因式时公因式可以是单项式,也可以是多项式. 用公式法分解因式时,公式中的 a,b 既可以是单项式,也可以是多项式.

15. 解:(1)设原来这个正方形的边长为 x cm,则其面积为 x^2 cm^2.

根据题意,得$(x+3)^2=x^2+45$,解得 $x=6$.

答:原来这个正方形的边长是6 cm.

(2)设原来这个正方形的边长是 y cm,则其面积为 y^2 cm^2.

根据题意,得$(y-3)^2=y^2-45$,

解得 $y=9$.

答:原来这个正方形的边长是9 cm. 它和题(1)的答案不同.

C 组

16. 解:设这个长方形的长与宽分别为a cm和 b cm.

根据题意,

得$\begin{cases}(a+4)(b-1)=ab,\\(a-2)(b+1)=ab.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=8,\\b=3.\end{cases}$

所以 $ab=8\times3=24(\text{cm}^2)$.

答:这个长方形的面积为24 cm^2.

17. 解:$\because 4x^2+M+1$ 是一个多项式的平方,

$\therefore 4x^2+M+1=(2x+1)^2$ 或$4x^2+M+1=(2x-1)^2$.

若$4x^2+M+1=(2x+1)^2$,

则$M=(2x+1)^2-(4x^2+1)=(4x^2+4x+1)-(4x^2+1)=4x$;

若$4x^2+M+1=(2x-1)^2$,

则$M=(2x-1)^2-(4x^2+1)=(4x^2-4x+1)-(4x^2+1)=-4x$.

所以 $M=4x$ 或 $-4x$.

18. 解:(1)正确. 理由如下:

设两个连续的整数分别为 $x,x+1$,则它们的平方差可以表示为$(x+1)^2-x^2=2x+1$,当 x 为整数时,$2x+1$ 总是奇数.

(2)正确. 理由如下:

因为$a^3-a=a(a^2-1)=a(a+1)(a-1)$,当 a 为整数时,$a-1,a,a+1$ 恰好为三个连续的整数,而这三个连续的整数中,必有一个数能被3整除,且至少有一个数是偶数,能被2整除,故这三个连续整数的积必能被6整除,即若 a 为整数,则 a^3-a 能被6整除.

第13章 全等三角形

13.1 命题、定理与证明

练习:

1. 解:(1)如果两个三角形全等,那么它们的对应边相等. 条件:两个三角形全等;结论:它们的对应边相等.

(2)如果在同一平面内,两条直线垂直于同一条直线,那么这两条直线互相平行. 条件:在同一平面内,两条直线垂直于同一条直线;结论:这两条直线互相平行.

点拨:用"如果"开始的部分是条件,而用"那么"开始的部分是结论.

2. 解:(2)是假命题;(1)(3)(4)是真命题.

练习:

1. 解:(1)两条直线被第三条直线所截,如果同旁内角互补,那么这两条直线平行.

条件:同旁内角互补;结论:两直线平行. 已知:如图,直线 AB,CD 被 EF 所截,且$\angle1+\angle2=180°$.

求证:$AB\parallel CD$.

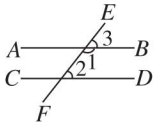
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

证明:∵ ∠1 + ∠3 = 180°(∠1 和∠3 互为邻补角),∠1 + ∠2 = 180°(已知),

∴ ∠3 = ∠2(等量代换),

∴ $AB \parallel CD$(同位角相等,两直线平行).

(2)如果三个角都是一个三角形的互不相邻的外角,那么它们的和等于360°. 条件:三个角都是一个三角形的互不相邻的外角;结论:它们的和等于360°.



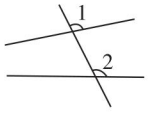
(第1题)

2. 解:是假命题. 理由:当被第三条直线所截的两条直线不平行时,内错角就不相等.

习题 13.1

1. 解:(1)假命题. 反例:若∠1 = 25°,∠2 = 45°,则∠1 + ∠2 = 70° ≠ 90°. 即这两个锐角的和不等于直角. (举例不唯一)

(2)假命题. 反例:如图,∠1 和∠2 是同位角,但∠1 ≠ ∠2.



(第1题)

点拨:(1)两个锐角的和可以为锐角,也可以为直角,还可以为钝角. (2)两条直线和两条平行线是有区别的,后者是具有特殊位置关系的两条直线,只有两条直线是平行的,被第三条直线所截得的同位角才相等.

2. 解:(1)如果两个三角形全等,那么它们的对应角相等.

(2)在等腰三角形中,如果有一个角等于60°,那么这个三角形是等边三角形.

点拨:解决本题的关键是先找出命题的条件和结论,然后再用"如果……,那么……"的形式表述出来.

3. ∴ ∠AST = ∠STD(两直线平行,内错角相等).

13.2 三角形全等的判定

练习:

1. COD;CO;OD;DC;∠COD;∠ODC;∠DCO

点拨:根据旋转的角度,先确定对应点的位置,然后按对应的顺序写出全等三角形,这样找对应边、对应角就容易了.

2. △DCF;90 **点拨:**平移后能重合的两个三角形全等.

3. △ACE;AE;CE

练习:

1. 解:(1)能判断两个三角形全等.

(2)能判断两个三角形全等.

2. 证明:在△ADC 和△AEB 中,

∵ AD = AE(已知),∠A = ∠A(公共角),AC = AB(已知),

∴ △ADC≌△AEB(S. A. S.).

3. 解:卡钳各部分的尺寸应满足 OA = OC,

OB = OD.

理由:连结 CD,

在△AOB 和△COD 中,∵ OA = OC,∠AOB = ∠COD,OB = OD,

∴ △AOB≌△COD(S. A. S.),

∴ AB = CD,

∴ 当卡钳各部分的尺寸满足 OA = OC,OB = OD 时,测出的 DC 长度恰好为内径 AB 的长度.

练习:

1. 解:△CAD 和△CBE 全等,CD 和 CE 相等. 理由:在△CAD 和△CBE 中,

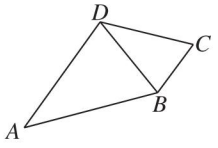
∵ ∠C = ∠C(公共角),CA = CB(已知),∠A = ∠B(已知),

∴ △CAD≌△CBE(A. S. A.),

∴ CD = CE(全等三角形的对应边相等).

2. 解:这两个三角形不一定全等. 如图,已知∠ABD = ∠C,∠ADB = ∠DBC,但不知道两个三角形中边的关系,所以这两个三角形不一定全等. 若边 AD 和 DB,AB 和 DC,BD 和 BC 中有一组相等,则△ABD 和△DCB 全等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第2题）

3. 解：如图，直线 BF 为操场的地面，线段 AB，DE 分别为小明和小聪，BC，EF 分别为他们在地面上的影子.

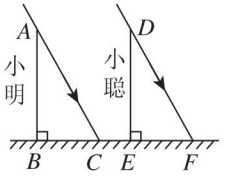
∵ 太阳光线是平行的，即 $AC \parallel DF$，

∴ $\angle ACB = \angle DFE$.

又∵ $BC = EF$，$\angle ABC = \angle DEF = 90°$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（A. S. A.），

∴ $AB = DE$（全等三角形的对应边相等），即小明和小聪一样高.



（第3题）

练习：

1. 证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，

∵ $\angle C = \angle D$（已知），$\angle 1 = \angle 2$（已知），$AB = AB$（公共边），

∴ $\triangle ABC \cong \triangle ABD$（A. A. S.），

∴ $AC = AD$（全等三角形的对应边相等）.

2. 解：其他的相等关系有：$\angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$，$\angle AEB = \angle CFD$，$\angle AED = \angle CFB$，$AB = CD$，$AE = CF$，$BE = DF$.

证明：∵ $AB \parallel CD$（已知），$AE \parallel CF$（已知），

∴ $\angle B = \angle D$，$\angle AEB = \angle CFD$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $BF = DE$（已知），

∴ $BF + FE = DE + FE$，即 $BE = DF$，

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$（A. S. A.），

∴ $\angle A = \angle C$（全等三角形的对应角相等），$AB = CD$，$AE = CF$（全等三角形的对应边相等）.

∵ $\angle AEB = \angle CFD$，

∴ $180° - \angle AEB = 180° - \angle CFD$，

即 $\angle AED = \angle CFB$.

练习：

1. 解：（1）能判定 $\triangle ABO$ 与 $\triangle DCO$ 全等.

（2）能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 全等.

（3）不能判定 $\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 全等.

（4）能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$ 全等.

2. 证明：∵ $BE = CF$，

∴ $BE + EC = CF + EC$，即 $BC = EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

∵ $AB = DE$，$AC = DF$，$BC = EF$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（S. S. S.），

∴ $\angle A = \angle D$.

题图中相互平行的线段有：AB 和 DE，AC 和 DF.

理由：∵ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，

∴ $\angle B = \angle DEF$，$\angle ACB = \angle F$，

∴ $AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$.

练习：

1. 证明：∵ $DE \perp AB$，$DF \perp AC$，

∴ $\triangle BED$ 和 $\triangle CFD$ 都是直角三角形.

在 Rt$\triangle BED$ 和 Rt$\triangle CFD$ 中，

∵ $BD = CD$，$DE = DF$，

∴ Rt$\triangle BED \cong$ Rt$\triangle CFD$（H. L.）.

点拨：题目中已经给出 $BD = CD$，$DE = DF$，只要再根据已知条件得到 $\triangle BED$ 和 $\triangle CFD$ 都是直角三角形，应用“H. L.”证明即可.

2. 证明：∵ $\angle C = \angle D = 90°$，

∴ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 都是直角三角形.

在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle ABD$ 中，

∵ $AC = AD$，$AB = AB$，

∴ Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle ABD$（H. L.），

∴ $BC = BD$.

点拨：注意隐含条件 $AB = AB$.

3. 解：两个滑梯的倾斜角满足 $\angle B + \angle F = 90°$.

理由：在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle DEF$ 中，

∵ $BC = EF$，$AC = DF$，

∴ Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle DEF$（H. L.），

∴ $\angle B = \angle DEF$.

∵ $\angle DEF + \angle F = 90°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $\angle B+\angle F=90°$.

习题 13.2

1. 证明: 在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中,

∵ $AB=DC$, $AC=DB$, $BC=CB$,

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DCB$(S.S.S.).

2. 证明: 在$\triangle AOP$和$\triangle BOP$中,

∵ $OP=OP$, $\angle 1=\angle 2$, $AO=BO$,

∴ $\triangle AOP\cong\triangle BOP$(S.A.S.).

3. 解: (1)增加条件$AB=DF$或$BC=FE$或$AC=DE$,都可使$\triangle ABC\cong\triangle DFE$.

(2)增加条件$\angle B=\angle E$或$AC=DF$或$\angle C=\angle F$,都可使$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

点拨: 要熟悉三角形全等的判定方法,注意(2)中不可增加条件$BC=EF$.

4. 证明: 在$\triangle AOC$和$\triangle DOB$中,

∵ $\angle A=\angle D$, $\angle AOC=\angle DOB$, $CO=BO$,

∴ $\triangle AOC\cong\triangle DOB$(A.A.S.).

5. 证明: ∵ $\angle 3=\angle 4$,

∴ $180°-\angle 3=180°-\angle 4$,即$\angle ADB=\angle ADC$.

又∵ $\angle 2=\angle 1$, $AD=AD$,

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$(A.S.A.),

∴ $AB=AC$.

6. 证明: (1)∵ AD是边BC上的高,

∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$,

∴ $\triangle ABD$和$\triangle ACD$都是直角三角形.

在Rt$\triangle ABD$和Rt$\triangle ACD$中,

∵ $AB=AC$, $AD=AD$,

∴ Rt$\triangle ABD\cong$Rt$\triangle ACD$(H.L.),

∴ $BD=DC$.

(2)由(1)得Rt$\triangle ABD\cong\triangle$Rt$\triangle ACD$,

∴ $\angle BAD=\angle CAD$.

7. 解: 可以,他该带右边那块去. 因为根据右边那块模具上完整的两个角和它们的夹边,可以得到一块与原来一样的三角形模具,而左边那块只剩下一个角,不能得到与原来一样的三角形模具.

13.3 等腰三角形

练习:

1. (1)50°;80° (2)50°

2. 证明: 在$\triangle ABE$中,

∵ $AB=AE$,

∴ $\angle B=\angle AEB$.

∵ $AE/\!/DC$,

∴ $\angle AEB=\angle C$,

∴ $\angle B=\angle C$.

点拨: 根据等腰三角形的性质证明$\angle B=\angle AEB$,再根据平行线的性质证明$\angle AEB=\angle C$即可.

3. 证明: 在$\triangle ABC$中,

∵ $AB=AC$,

∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

∵ $BD\perp AC$, $CE\perp AB$,

∴ $\angle BDC=\angle CEB=90°$.

又∵ $\angle BCD=\angle CBE$, $BC=CB$,

∴ $\triangle BCD\cong\triangle CBE$(A.A.S.),

∴ $BD=CE$.

4. 证明: 在$\triangle ABC$中,

∵ $AB=AC$,

∴ $\angle C=\angle B=40°$,

∴ $\angle ADB=\angle DAC+\angle C=50°+40°=90°$,

即$AD\perp BC$,

∴ $BD=CD$(等腰三角形的“三线合一”).

练习:

1. 解: $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle BCD$是等腰三角形.

理由:∵ $\angle A=72°$, $\angle B=36°$,

∴ $\angle ACB=180°-72°-36°=72°=\angle A$,

∴ $AB=BC$.

∴ $\triangle ABC$是等腰三角形.

∵ CD平分$\angle ACB$,

∴ $\angle BCD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times 72°=36°$,

∴ $\angle BCD=\angle B$,

∴ $BD=DC$.

∴ $\triangle BCD$是等腰三角形.

∵ $\angle ADC=180°-\angle A-\angle ACD=180°-72°-36°=72°=\angle A$,

∴ $AC=DC$.

∴ $\triangle ADC$是等腰三角形.

2. 证明: 在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AB=DC, \angle ABC=\angle DCB, BC=CB,$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB,$

$\therefore \angle ACB=\angle DBC,$

$\therefore EB=EC.$

3. 证明: $\because CE /\!/ DA,$

$\therefore \angle A=\angle CEB.$

$\because \angle A=\angle B,$

$\therefore \angle CEB=\angle B,$

$\therefore CE=CB.$ 需再增加条件 $\angle BCE=60°$,可使 $\triangle BCE$ 成为等边三角形.

点拨: 所增加条件不唯一,合理即可.

习题 13.3

1. 解: 若长为 6 的边是底边,

则腰长为 $(16-6)\div 2=5$;

若长为 6 的边是腰,

则底边长为 $16-6\times 2=4.$

均满足三角形三边关系,所以另两条边的长为 5,5 或 6,4.

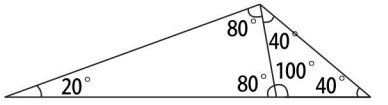
2. 解: 设顶角为 $x°$,则底角为 $(x+15)°$. 由三角形的内角和定理得 $x°+(x+15)°\times 2=180°.$

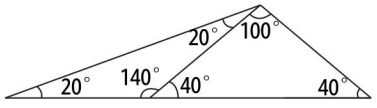
解得 $x=50$,则 $x+15=50+15=65.$

所以等腰三角形各个角的大小为 50°,65°,65°.

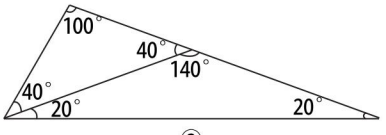
3. 解: 把三个角分别为 20°,40°,120°的三角形分成两个等腰三角形,如图①.

把三个角分别为 20°,60°,100°的三角形分成两个等腰三角形,如图②.





①



②

(第 3 题)

4. 证明: 在 $\triangle ABC$ 中,$\because AB=AC,$

$\therefore \angle B=\angle C.$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$\because AB=AC, \angle B=\angle C, BD=CE,$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$(S. A. S.),

$\therefore AD=AE,$

$\therefore \angle ADE=\angle AED.$

点拨: 利用三角形全等的判定和等腰三角形的性质证明即可.

5. 证明: $\because AC /\!/ BD,$

$\therefore \angle A=\angle B, \angle C=\angle D.$

$\because EA=EC,$

$\therefore \angle A=\angle C,$

$\therefore \angle B=\angle D,$

$\therefore EB=ED.$

6. 证明: 由题意可知,$\angle ABC=\angle ACB.$

$\because BE, CD$ 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线,

$\therefore \angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB,$

$\therefore \angle EBC=\angle DCB.$

$\therefore OB=OC.$ 在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$\because \angle DBC=\angle ECB, BC=CB, \angle DCB=\angle EBC,$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle CBE,$

$\therefore CD=BE,$

$\therefore CD-OC=BE-OB,$

即 $OD=OE.$

7. 证明: $\because DE \perp AB, DF \perp AC,$

$\therefore \triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 都是直角三角形.

$\because D$ 为 BC 的中点,$\therefore BD=CD.$

在 Rt$\triangle BDE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中,

$\because BD=CD, BE=CF,$

$\therefore$ Rt$\triangle BDE \cong$ Rt$\triangle CDF$(H. L.),

$\therefore \angle B=\angle C.$

$\because \angle BDE=30°,$

$\therefore \angle B=\angle C=90°-\angle BDE=60°.$

$\therefore \angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-60°-60°=60°,$

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°,$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

8. 解: 此时 BC 正好处于水平位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

理由:∵ $AB=AC$,

∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形,

∵ D 是 BC 的中点,

∴ $AD\perp BC$(等腰三角形的“三线合一”).

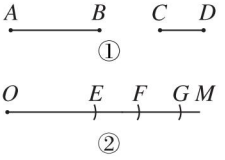
∵ 点 A,D 在重锤线上,

∴ BC 正好处于水平位置.

13.4 尺规作图

练习:

1. 解:已知:线段 AB,CD(如图①).



(第 1 题)

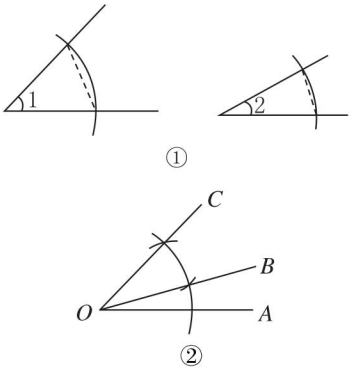
求作一条线段,使它等于 $AB+2CD$.

作法:①作射线 OM;②在射线 OM 上顺次截取 $OE=AB$,$EF=FG=CD$,则 $OG=OE+EF+FG=AB+2CD$,

所以 OG 就是所要作的线段(如图②).

2. 解:已知:$\angle 1$ 和 $\angle 2$(如图①).

求作 $\angle AOB$,使 $\angle AOB=\angle 1-\angle 2$.



(第 2 题)

作法:①作 $\angle AOC=\angle 1$;

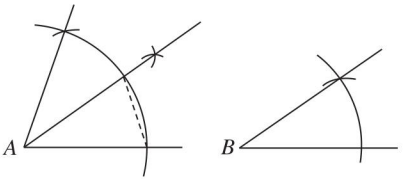
②以 OC 为始边在 $\angle AOC$ 内作 $\angle COB=\angle 2$,

则 $\angle AOB=\angle AOC-\angle COB=\angle 1-\angle 2$,

∴ $\angle AOB$ 就是所要作的角(如图②).

练习:

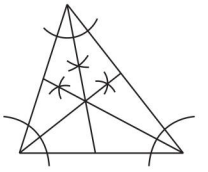
1. 解:如图.



(第 1 题)

2. 解:如图.

点拨:作图时,应时刻注意,既要保留作图痕迹,又要使其清晰可见.



(第 2 题)

练习:

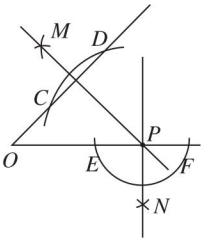
1. 解:作法:①以点 P 为圆心,作能与 $\angle O$ 的一边相交于 C、D 两点的弧,作能与 $\angle O$ 的另一边相交于 E、F 两点的弧;

②分别以点 C、D 为圆心,大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧,两弧交于点 M;

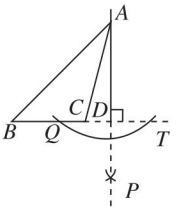
③分别以点 E、F 为圆心,大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径作弧,两弧交于点 N;

④过点 P、M 作直线 PM,过点 P、N 作直线 PN.

则直线 PM、PN 就是所要作的垂线(如图).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解:作法:①延长 BC,以点 A 为圆心,作能与直线 BC 相交于 Q、T 两点的弧;

②分别以点 Q、T 为圆心,大于 $\frac{1}{2}QT$ 的长为半径作弧,两弧交于点 P;

③过点 A、P 作直线 AP,交 BT 于点 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则线段 AD 就是所要作的 BC 边上的高(如图).

点拨:作图的每一步都要准确、清晰.

练习:

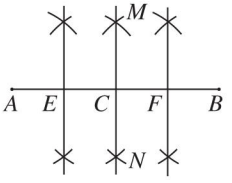
1. 解:已知:线段 AB(如图).

求作:线段 AB 上的四等分点.

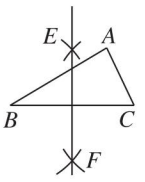
作法:①分别以点 A、B 为圆心,大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧,两弧交于点 M、N;

②过点 M、N 作直线 MN 交 AB 于点 C;

③同上作法,分别作出线段 AC、BC 的中点 E、F,则点 E、C、F 就是所要作的线段 AB 上的四等分点(如图).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解:作法:①分别以点 B、C 为圆心,大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧,两弧交于点 E、F;

②过点 E、F 作直线 EF.

则直线 EF 就是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的垂直平分线(如图).

习题 13.4

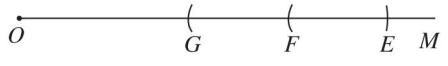
1. 解:作法:①作射线 OM;

②在射线 OM 上截取 $OE = AB$;

③以点 E 为端点,在 EO 上顺次截取 $EF = FG = CD$,

则 $OG = OE - EF - FG = AB - 2CD$,

所以线段 OG 就是所要作的线段(如图).



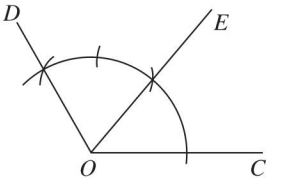
(第 1 题)

2. 解:作法:①作 $\angle COD = \angle A$;

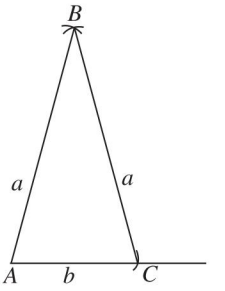
②以 OD 为始边,作 $\angle DOE = 2\angle B$,

则 $\angle COE = \angle COD - \angle DOE = \angle A - 2\angle B$,

所以 $\angle COE$ 就是所要作的角(如图).



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 解:作法:①作线段 $AC = b$;

②分别以点 A、C 为圆心,线段 a 的长为半径作弧,两弧交于点 B;

③连结 AB、CB,则 $AB = CB = a$,

所以 $\triangle ABC$ 就是所要作的等腰三角形(如图).

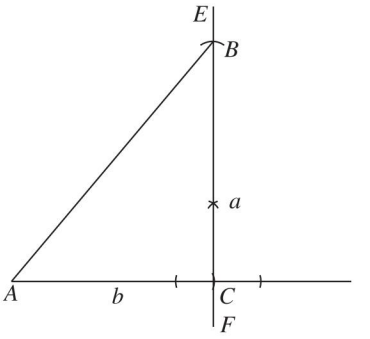
4. 解:作法:①作线段 $AC = b$;

②过点 C 作线段 AC 的垂线 EF;

③以点 C 为端点在 EF 上取一点 B,使 $CB = a$;

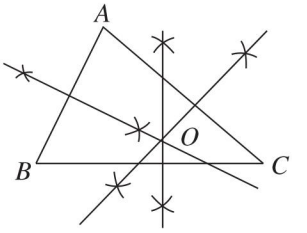
④连结 AB.

则 $\triangle ABC$ 即为所要作的直角三角形(如图).



(第 4 题)

5. 解:如图. 我发现:$\triangle ABC$ 三边的垂直平分线交于一点 O,且点 O 到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等.



(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.5 逆命题与逆定理

练习:

1. 解:(1)条件:一个三角形是直角三角形;结论:它的两个锐角互余.

逆命题:如果一个三角形的两个角互余,那么它是直角三角形. 逆命题是真命题.

(2)条件:一个三角形是等边三角形;

结论:这个三角形的每个角都等于60°.

逆命题:每个角都等于60°的三角形是等边三角形. 逆命题是真命题.

(3)条件:两个三角形是全等三角形;

结论:它们的对应角相等.

逆命题:两个三角形的对应角相等,那么这两个三角形全等. 逆命题是假命题.

(4)条件:$a=b$;结论:$a^3=b^3$.

逆命题:如果$a^3=b^3$,那么$a=b$. 逆命题为真命题.

2. 解:(1)逆命题:如果一个整数能被5整除,那么这个整数的个位数字是5.

举例:10能被5整除,但个位数字是0,而不是5,所以逆命题是假命题.

(2)逆命题:如果两个角相等,那么这两个角都是直角.

举例:两个角都等于40°,它们虽然相等,但都不是直角,所以逆命题是假命题.

点拨:判断一个命题是假命题时,只需举出一个反例就可以了.

3. 解:有. 如:①原命题:两直线平行,同旁内角互补;逆命题:同旁内角互补,两直线平行. ②原命题:能被2整除的整数,它的个位数字一定是偶数;逆命题:个位数字是偶数的整数,它一定能被2整除. ③原命题:若$a=b$,则$a+c=b+c$;逆命题:若$a+c=b+c$,则$a=b$.

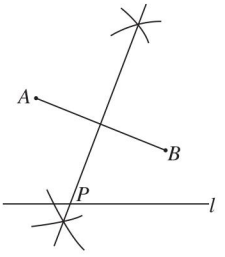
点拨:答案不唯一.

练习:

1. 解:作法:①连结AB;

②作AB的垂直平分线交l于点P,点P就是所要作的点(如图).

点拨:根据"线段垂直平分线上的点到这条线段的两个端点的距离相等"来作图. 要使P点在直线l上且$PA=PB$,则点P为线段AB的垂直平分线与直线l的交点.



(第1题)

2. 证明:$\because AE=CE, BD\perp AC$,

$\therefore BD$垂直平分AC.

$\therefore AB=BC, CD=AD$(线段垂直平分线上的点到这条线段的两个端点的距离相等),

$\therefore AB+CD=AD+BC$.

点拨:通过已知条件,只要说明直线BD为线段AC的垂直平分线,即可解决问题.

3. 证明:$\because BD+AD=BC, BD+DC=BC$,

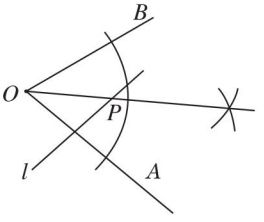
$\therefore AD=DC$,

$\therefore$点D在AC的垂直平分线上.

点拨:要证点D在线段AC的垂直平分线上,只需证D点到线段AC的两个端点A, C的距离相等即可.

练习:

1. 解:作法:作$\angle AOB$的平分线,交直线l于点P. 点P就是所要找的点(如图).



(第1题)

点拨:点P在直线l上,且到角两边的距离相等,那么作出$\angle AOB$的平分线与直线l相交,所得交点就是所要找的点.

2. 证明:过点F分别作$FM\perp AD, FN\perp AE, FH\perp BC$,垂足分别为点$M, N, H$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∵点 F 既是 $\angle CBD$ 平分线上的点，又是 $\angle BCE$ 平分线上的点，

∴ $FM = FH = FN$，

∴点 F 也在 $\angle DAE$ 的平分线上（在角的内部到角的两边的距离相等的点在这个角的平分线上）.

点拨：要证点 F 在 $\angle DAE$ 的平分线上，只需证点 F 到 $\angle DAE$ 的两边的距离相等.

习题 13.5

1. 解：(1)逆命题：如果 $x^2 = y^2$，那么 $x = y$. 设 $x = 2$，$y = -2$，则 $x^2 = 4$，$y^2 = 4$，说明 $x^2 = y^2$，但 $x \neq y$. 所以这个逆命题是假命题.

(2)逆命题：如果一个三角形有两个角是锐角，那么它的另一个角是钝角. 设一个三角形是直角三角形，此时满足有两个角是锐角的条件，但它的另一个角是直角，不是钝角. 所以这个逆命题是假命题.

点拨：判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

2. 解：∵ $AB = AC$，且 $\angle A = 50°$，

∴ $\angle ABC = \angle C = 65°$.

又∵ DE 垂直平分 AB，

∴ $DA = DB$，

∴ $\angle A = \angle DBA = 50°$.

∴ $\angle DBC = \angle ABC - \angle DBA = 65° - 50° = 15°$.

3. 证明：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，

∴ $\angle ABC = 60°$.

∵ BD 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ABD = 30°$.

∴在 $\triangle ABD$ 中，$\angle A = \angle ABD = 30°$，

∴ $AD = BD$，

∴点 D 在 AB 的垂直平分线上（到一条线段的两个端点的距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上）.

点拨：(1)从结论想，要用线段垂直平分线性质定理的逆定理；(2)运用这个定理应具备什么条件，已知或图形中是否有，若没有，怎样证出来，明确这两点是解本题的关键.

4. 证明：∵ OE 平分 $\angle AOB$，且 $EC \perp OA$，$ED \perp OB$，

∴ $EC = ED$，

∴ $\triangle DEC$ 是等腰三角形，

∴ $\angle ECD = \angle EDC$.

5. 证明：∵ $BD \perp AC$，$CE \perp AB$，

∴ $\angle CDF = \angle BEF = 90°$.

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle BEF$ 中，$\begin{cases} \angle CDF = \angle BEF, \\ \angle CFD = \angle BFE, \\ CF = BF, \end{cases}$

∴ $\triangle CDF \cong \triangle BEF$（A. A. S.）.

∴ $FD = FE$，

∴点 F 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

复习题

A 组

1. 解：(1)真命题.

(2)真命题.

(3)假命题. 如对顶角相等，但它们不是内错角.

(4)假命题. 若在一个三角形中，有一个角是 60°，一个角是 50°，则另一个角是 70°，这个三角形不是等边三角形.

2. (1)√　(2)×　(3)×　(4)×

点拨：(1)命题是表示判断的语句，任何一个命题都有逆命题. (2)定理和逆定理都是真命题，定理有逆命题，但它不一定是真命题，比如对顶角相等，它的逆命题：相等的两个角是对顶角，是假命题，所以定理不一定都有逆定理. (3)真命题的逆命题不一定是真命题. (4)假命题的逆命题也不一定是假命题.

3. 证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

∵ $AC \parallel DF$，

$BC \parallel EF$，

∴ $\angle A = \angle FDE$，$\angle ABC = \angle E$.

又∵ $AB = DE$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（A. S. A.）.

4. 证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

∵ $BC \parallel EF$，

∴ $\angle ABC = \angle DEF$.

∵ $AE = DB$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $AE+EB=DB+EB$,即 $AB=DE$.

又∵ $BC=EF$,

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(S. A. S.).

5. 证明:在$\triangle ABC$和$\triangle BAD$中,

∵ $AC=BD$,$BC=AD$,$AB=BA$,

∴ $\triangle ABC\cong\triangle BAD$(S. S. S.).

6. 证明:在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中,

∵ $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle ACB=\angle ACD$.

又∵ $\angle B=\angle D$,$AC=AC$,

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$(A. A. S.).

7. 证明:在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中,

$AD=AD$,$AB=AC$,$DB=DC$,

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$(S. S. S.),

∴ $\angle BAE=\angle CAE$(全等三角形的对应角相等).

8. 证明:在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中,

∵ $\angle A=\angle A$,$AD=AE$,$\angle BDA=\angle CEA$,

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$(A. S. A.).

∴ $AB=AC$.

9. 证明:∵ $AC=AD$,

∴ $\angle ACD=\angle ADC$,

又∵ $\angle ACB=90°$,$DE\perp AB$,

∴ $\angle ACD+\angle ECD=\angle ADC+\angle EDC=90°$,

∴ $\angle ECD=\angle EDC$.

10. 解:∵ 在$\triangle ABC$和$\triangle EDC$中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle EDC=90°,\\ BC=DC,\\ \angle BCA=\angle DCE,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle EDC$(A. S. A.).

∴ $AB=DE$,即DE的长就是AB的长.

B组

11. 证明:∵ $\angle A=120°$,$AB=AC$,

∴ $\angle B=\angle C=30°$.

又∵ $DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

∴ $\angle DEB=\angle DFC=90°$,

∴ $\angle BDE=\angle CDF=60°$.

∴ $\angle EDF=60°$.

∵ D是BC边的中点,

∴ $DB=DC$.

在$\triangle DEB$和$\triangle DFC$中,

$$\begin{cases}\angle EDB=\angle FDC,\\ DB=DC,\\ \angle B=\angle C,\end{cases}$$

∴ $\triangle DEB\cong\triangle DFC$(A. S. A.).

∴ $DE=DF$. ∴ $\triangle DEF$是等边三角形.

12. 证明:在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\angle A=36°$,

∴ $\angle ABC=54°$.

∵ DE垂直平分AB,

∴ $AE=BE$,

∴ $\angle ABE=\angle A=36°$,

∴ $\angle EBC=\angle ABC-\angle ABE=54°-36°=18°$.

点拨:利用直角三角形三个内角的度数关系和线段AB的垂直平分线及其性质,推导得出$\angle EBC=18°$.

13. 证明:在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中,

∵ $\angle BAE=\angle DAC$,

∴ $\angle BAE+\angle EAC=\angle DAC+\angle EAC$,

即$\angle BAC=\angle DAE$.

又∵ $AB=AD$,$AC=AE$,

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADE$(S. A. S.).

∴ $\angle C=\angle E$.

点拨:首先根据已知条件来推导$\triangle ABC\cong\triangle ADE$,进而可得$\angle C=\angle E$.

14. 证明:在$\triangle BDE$和$\triangle CDF$中,

∵ $CE\perp AB$,$BF\perp AC$,

∴ $\angle BED=\angle CFD=90°$.

又∵ $\angle BDE=\angle CDF$,$BE=CF$,

∴ $\triangle BDE\cong\triangle CDF$(A. A. S.),

∴ $DE=DF$.

又∵ $CE\perp AB$,$BF\perp AC$,即$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

∴ 点D在$\angle BAC$的平分线上,即AD平分$\angle BAC$.

点拨:要证AD平分$\angle BAC$,∵ $CE\perp AB$,$BF\perp AC$,∴ 只需证得$DE=DF$. 而DE和DF又分别是Rt$\triangle BDE$和Rt$\triangle CDF$的两直角边,故又需证两直角三角形全等,而此处可由已知条件证出,问题得解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 证明：在△ADC 和△BCD 中，

∵ $AD=BC$，$\angle ADC=\angle BCD$，$DC=CD$，

∴ △ADC≌△BCD(S. A. S.)，

∴ $AC=BD$.

在△ABD 和△BAC 中，

∵ $AB=BA$，$AD=BC$，$BD=AC$，

∴ △ABD≌△BAC(S. S. S.)，

∴ $\angle BAC=\angle ABD$.

点拨：由已知条件可证得△ADC≌△BCD，题中要证的$\angle BAC$ 和$\angle ABD$ 分别在△BAC 和△ABD 中，那么，只要证出△BAC≌△ABD 就可以了，而证出 $AC=BD$ 是联系两对全等三角形的桥梁.

16. 略.

C 组

17. 解：①两个锐角及斜边对应相等的两个直角三角形全等. 用 A. S. A. 证即可；

②两个锐角及任一直角边对应相等的两个直角三角形全等. 用 A. A. S. 证即可；

③一个锐角及它的对边对应相等的两个直角三角形全等. 用 A. A. S. 证即可；

④一个锐角及与它相邻的直角边对应相等的两个三角形全等. A. S. A. 证即可；

⑤一个锐角及斜边对应相等的两个直角三角形全等. 用 A. A. S. 证即可.

点拨：(1)两个锐角确定后，已知的一条边有两种情况，即它们的夹边或邻边；(2)一个锐角确定(直角隐含其中了)后，已知的一条边有三种情况，即它的对边、它的邻直角边或斜边.

18. (1)**解**：△ADC≌△ABE，△CDF≌△EBF.

(2)**证明**：∵ Rt△ABC≌Rt△ADE，

∴ $\angle CAB=\angle EAD$，$AC=AE$，$AB=AD$，$\angle ACB=\angle AED$.

∴ $\angle CAD=\angle CAB-\angle BAD=\angle EAD-\angle BAD=\angle EAB$.

∴ 在△ADC 和△ABE 中，$\begin{cases}AD=AB,\\ \angle DAC=\angle BAE,\\ AC=AE,\end{cases}$

∴ △ADC≌△ABE(S. A. S.).

∴ $DC=BE$，$\angle ACD=\angle AEB$.

又∵ $\angle ACB=\angle AED$，

∴ $\angle DCF=\angle BEF$.

∴ 在△DFC 和△BFE 中，$\begin{cases}\angle DFC=\angle BFE,\\ \angle DCF=\angle BEF,\\ DC=BE,\end{cases}$

∴ △DFC≌△BFE(A. A. S.).

∴ $CF=EF$.

19. 解：$\angle CAO=\angle DBO$

证明：∵ $\angle CAO=\angle DBO$，且$\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle CAB=\angle DBA$.

在△CAB 和△DBA 中，$\begin{cases}\angle CAB=\angle DBA,\\ AB=BA,\\ \angle 2=\angle 1,\end{cases}$

∴ △CAB≌△DBA(A. S. A.).

∴ $AC=BD$.(答案不唯一)

第 14 章 勾股定理

14.1 勾股定理

练习：

1. 解：由题意知 c 为斜边长，a，b 为直角边长.

(1)$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

(2)$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25^2-24^2}=7$.

点拨：解本题的关键是确定 c 为斜边长.

2. 解：应分两种情况讨论.

(1)若这两条边长为直角边长，则斜边长为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$(厘米)，此时周长为 3 + 4 + 5 = 12(厘米).

(2)若斜边长为 4 厘米，一条直角边长为3 厘米，则另一条直角边长为 $\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\approx 2.6$(厘米)，此时周长约为 3 + 4 + 2.6 = 9.6(厘米).

点拨：题目中没有明确这两条边长哪条是直角边长，哪条是斜边长，这时就需要分情况讨论.

练习：

1. 解：由题图可得 $AB=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$，

$BC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$CD=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$,

$AD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

∴ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{18}+\sqrt{20}\approx 14.6$.

∵ $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 5\times 3=7.5$,

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=12.5$.

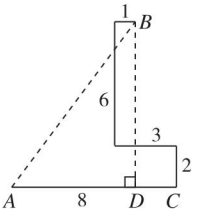
点拨:观察题图中四边形可知它由 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 组合而成.

2. 解:如图,过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D,易知 $BD=6+2=8$(千米), $AD=8-3+1=6$(千米).

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$(千米).

答:登陆点 A 到宝藏埋藏点 B 的直线距离是 10 千米.

点拨:求出 AD, BD 的长,利用勾股定理求解即可.



(第 2 题)

练习:

1. 解:(1)∵ $20^2=12^2+16^2$,

∴ 以这组数为三边长的三角形是直角三角形. 边长为 20 的边所对的角是直角.

(2)∵ $2.5^2=1.5^2+2^2$,

∴ 以这组数为三边长的三角形是直角三角形,边长为2.5的边所对的角是直角.

点拨:本题主要考查勾股定理的逆定理.

2. 解:∵ $a^2=c^2-b^2$,

∴ $a^2+b^2=c^2$,

∴ 这个三角形是直角三角形.

点拨:本题主要考查勾股定理的逆定理.

3. 解:两种,(1)有一个内角是 90°的三角形是直角三角形;(2)勾股定理的逆定理.

练习:

1. 解:已知:在 $\triangle ABC$ 中, $AB\neq AC$.

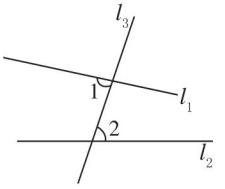
求证: $\angle B\neq\angle C$.

证明:假设在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C$,则由等角对等边可得 $AB=AC$,这与已知条件 $AB\neq AC$ 矛盾,所以假设不成立,因此在一个三角形中,如果两条边不相等,那么它们所对的角也不相等.

2. 解:已知:如图,两条直线 l_1 与 l_2 被直线 l_3 所截, $\angle 1\neq\angle 2$.

求证: l_1 与 l_2 不平行.

证明:假设 $l_1\parallel l_2$,则由两直线平行,内错角相等得 $\angle 1=\angle 2$,与已知条件 $\angle 1\neq\angle 2$ 矛盾,所以假设不成立,因此两条直线被第三条直线所截,如果内错角不相等,那么这两条直线不平行.



(第 2 题)

习题 14.1

1. 证明:由题图易知, $\triangle BCE$ 是等腰直角三角形.

设梯形 $ABCD$ 的面积为 S,

则有 $S=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$,

即 $\frac{1}{2}(a+b)^2=ab+\frac{1}{2}c^2$,

将左边展开,有 $\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2=ab+\frac{1}{2}c^2$,

所以 $a^2+b^2=c^2$,

即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

点拨:题图中梯形的面积等于三个直角三角形的面积之和.

2. 解: $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$(cm).

点拨:在 $Rt\triangle ABC$ 中,利用勾股定理求解即可.

3. 解:设直角三角形的三边长为 a, b, c($a<b<c$),则 $a^2+b^2=c^2$.

以 $\frac{1}{2}a$ 为半径的圆的面积 $S_1=\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{1}{4}\pi a^2$.

以$\frac{1}{2}b$为半径的圆的面积$S_2=\pi\left(\frac{1}{2}b\right)^2=\frac{1}{4}\pi b^2$,

以$\frac{1}{2}c$为半径的圆的面积$S_3=\pi\left(\frac{1}{2}c\right)^2=\frac{1}{4}\pi c^2$.

$\because a^2+b^2=c^2$,

$\therefore \frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{4}\pi b^2=\frac{1}{4}\pi c^2$,

即$S_1+S_2=S_3$.

点拨:利用勾股定理去探究三个圆的面积之间的关系.

4. 解:$S_{着色}=S_{\triangle ABC}+S_{半圆形AC}+S_{半圆形BC}-S_{半圆形AB}=\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{1}{2}\pi\times 3^2+\frac{1}{2}\pi\times 4^2-\frac{1}{2}\pi\times 5^2=24$.

点拨:通过本题的计算,可得结论:题图中着色部分的面积等于$\triangle ABC$的面积.

5. 解:(1)$\because 25^2=20^2+15^2$,

$\therefore$以a,b,c为三边长的三角形是直角三角形,边长为a的边所对的角是直角.

(2)$\because 2^2=1^2+(\sqrt{3})^2$,

$\therefore$以a,b,c为三边长的三角形是直角三角形,边长为b的边所对的角是直角.

(3)很显然以a,b,c为三边长的三角形不是直角三角形.

(4)不妨设$a=5x,b=12x,c=13x(x>0)$,

$\because (13x)^2=(5x)^2+(12x)^2$,

$\therefore$以a,b,c为三边长的三角形是直角三角形,边长为c的边所对的角是直角.

6. 解:已知:在$\triangle ABC$中,$\angle B\neq\angle C$.

求证:$AB\neq AC$.

证明:假设$AB=AC$,则由等边对等角得$\angle B=\angle C$,与已知$\angle B\neq\angle C$矛盾,所以假设不成立,因此,在一个三角形中,如果两个角不相等,那么它们所对的边也不相等.

7. 略.

14.2 勾股定理的应用

练习:

1. 解:由题意根据勾股定理,得$AB=\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{24}\approx 4.9$(米).

答:钢缆在地面上的固定点A到电线杆底部B的距离约为4.9米.

点拨:解本题的关键是知道电线杆垂直于地面.

2. 解:由题意得,一个半小时后,$OA=16\times 1.5=24$(海里),$OB=12\times 1.5=18$(海里),且$OA\perp OB$,所以此时$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{24^2+18^2}=30$(海里).

答:A,B两船离开港口O一个半小时后的距离为30海里.

练习:

1. 解:当x米为直角边的长时,有$2^2+x^2=4^2$,

$\therefore x^2=12$,$\therefore x=\sqrt{12}\approx 3.46$;

当x米为斜边长时,有$x^2=2^2+4^2=20$,

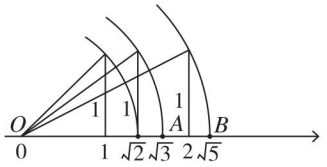
$\therefore x=\sqrt{20}\approx 4.47$.

故x的值约为3.46或4.47.

点拨:应分x米为直角边的长和斜边长两种情况计算.

2. 解:如图,$OA=\sqrt{3}$厘米,$OB=\sqrt{5}$厘米.

点拨:结合数轴,利用勾股定理作图.



(第2题)

习题14.2

1. 解:如图,$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,$BC=2$cm,$AD\perp BC$于点D,

利用勾股定理得,$AB^2+AC^2=BC^2$,即$2AB^2=4$,得$AB^2=2$,

$\therefore AB=\sqrt{2}$cm≈ 1.4cm.

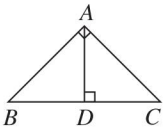
$\because$在Rt$\triangle ABD$中,$AB=\sqrt{2}$ cm,$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 2=1$(cm),

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{2-1}=1(\text{cm})$.

$\therefore$ 直角边约为 1.4 cm,斜边上的高为 1 cm.

点拨:首先画出示意图,根据勾股定理解答即可.



(第 1 题)

2. 解:直角三角形①的斜边长为 $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}(\text{cm})$,

直角三角形②的斜边长为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2(\text{cm})$,直角三角形③的斜边长为 $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}(\text{cm})$,

故直角三角形④的斜边长为 $\sqrt{(\sqrt{8})^2+(\sqrt{8})^2}=\sqrt{16}=4(\text{cm})$.

3. 解:由题意知,木条与大门的高和宽构成直角三角形,利用勾股定理可得木条的长度为 $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\approx3.6$(米).

答:木条的长度约为 3.6 米.

点拨:利用勾股定理解决实际问题的关键是从题中找出直角三角形以及各边的长度.

4. 解:由题意得 $(n+3)^2=(n+1)^2+(n+2)^2$,

解得 $n=2$ 或 $n=-2$,

当 $n=-2$ 时与题意不符,故应舍去.

所以当 n 为 2 时,该三角形是一个直角三角形.

5. 解:$\because AD\perp CD$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在 $\triangle ABC$ 中,$AB^2=13^2=169$,

$AC^2+BC^2=5^2+12^2=169$,

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$,

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形且 $\angle ACB=90°$,

故 $\angle B=180°-\angle ACB-\angle CAB=180°-90°-\alpha=90°-\alpha$.

复习题

A 组

1. 解:(1)正方形的边长为 $\sqrt{13^2-12^2}=5(\text{cm})$,故着色部分的面积为 $5\times5=25(\text{cm}^2)$.

(2)长方形的长为 $\sqrt{15^2+8^2}=17(\text{cm})$,故着色部分的面积为 $17\times3=51(\text{cm}^2)$.

(3)半圆的直径为 $\sqrt{10^2-6^2}=8(\text{cm})$,故着色部分的面积为 $\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{8}{2}\right)^2=8\pi(\text{cm}^2)$.

点拨:本题是勾股定理在求图形着色部分面积中的应用.

2. 解:设以 a 为斜边长的等腰直角三角形的直角边长为 x_1,面积为 S_1,以 b 为斜边长的等腰直角三角形的直角边长为 x_2,面积为 S_2,以 c 为斜边长的等腰直角三角形的直角边长为 x_3,面积为 S_3,

则 $x_1^2+x_1^2=a^2$,

得 $x_1^2=\frac{1}{2}a^2$,同理 $x_2^2=\frac{1}{2}b^2$,$x_3^2=\frac{1}{2}c^2$,

$\therefore S_1=\frac{1}{2}x_1\cdot x_1=\frac{1}{2}x_1^2=\frac{1}{4}a^2$,

$S_2=\frac{1}{2}x_2\cdot x_2=\frac{1}{2}x_2^2=\frac{1}{4}b^2$,

$S_3=\frac{1}{2}x_3\cdot x_3=\frac{1}{2}x_3^2=\frac{1}{4}c^2$.

又$\because a^2+b^2=c^2$,

$\therefore S_1+S_2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{4}c^2=S_3$,

即 $S_3=S_1+S_2$.

点拨:先用 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边长分别表示三个等腰直角三角形的面积,再利用勾股定理解题即可.

3. 解:(1)$(m^2+n^2)^2=m^4+2m^2n^2+n^4$,

$(mn)^2+(m^2-n^2)^2=m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4=m^4-m^2n^2+n^4$,

故 $(m^2+n^2)^2\neq(mn)^2+(m^2-n^2)^2$,

$\therefore$ 该三角形不是直角三角形.

(2)设三边长分别为 $x,x,\sqrt{2}x(x>0)$,

$\because(\sqrt{2}x)^2=2x^2=x^2+x^2$,

$\therefore$ 该三角形是直角三角形.

点拨:勾股定理的逆定理在判定直角三角形方面有着重要的作用.

4. 解:如图,$AB=2.5$ 米,$BC=0.7$ 米,$AD=0.4$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{2.5^2-0.7^2}=2.4$(米).

$\because AD=0.4$ 米,

$\therefore CD=AC-AD=2.4-0.4=2$(米).

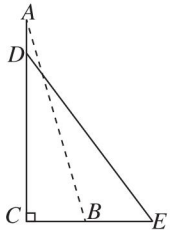
又$\because DE=AB=2.5$ 米,

$\therefore$ 在 Rt $\triangle CDE$ 中, $CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$(米),

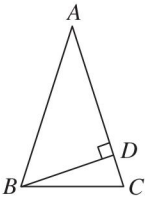
故$BE=CE-BC=1.5-0.7=0.8$(米).

答:梯子的底部向外滑出 0.8 米.

点拨:正确画出示意图,灵活运用勾股定理是解题的关键.



(第 4 题)



(第 6 题)

5. 解:$S_A+S_B=S_E$, $S_C+S_D=S_F$, $S_E+S_F=S_G$,

故$S_A+S_B+S_C+S_D=S_E+S_F=S_G$.

由题图可知,正方形 G 最大,

故 $S_A+S_B+S_C+S_D=S_G=7\times7=49(\text{cm}^2)$.

B 组

6. 解:如图, $AD=AC-DC=10-2=8$, 在 Rt$\triangle ABD$ 中, $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

点拨:解此类问题时,最好画出示意图,这样思路会更清晰.

7. 解:连结 AC. $\because \angle B=90°$, $AB=4$ m, $BC=3$ m,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$(m).

又$\because CD=12$ m, $DA=13$ m,

$\therefore AC^2+CD^2=5^2+12^2=13^2=DA^2$,

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形且$\angle ACD=90°$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot BC+\frac{1}{2}AC\cdot CD$

$=\frac{1}{2}\times(4\times3+5\times12)$

$=36(\text{m}^2)$.

答:该四边形地的面积是 36 m^2.

点拨:作出辅助线将原图形一分为二,利用勾股定理以及勾股定理的逆定理解题.

8. 解:5, 12, 13; 8, 15, 17; 12, 16, 20; 7, 24, 25; 18, 24, 30. (答案不唯一)

9. 解:已知:五边形 $ABCDE$.

求证:$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ 中不可能有 4 个为锐角.

证明:假设$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ 中有 4 个为锐角,不妨设 $\angle A<90°$, $\angle B<90°$, $\angle C<90°$, $\angle D<90°$.

$\because$ 五边形的内角和为 $180°\times(5-2)=540°$,

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=540°$.

又$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle D<90°+90°+90°+90°=360°$,

$\therefore \angle E>540°-360°=180°$,这与五边形的任一内角小于 180°矛盾,

$\therefore$ 一个五边形不可能有 4 个内角为锐角.

C 组

10. 解:$\because a^4-b^4+b^2c^2-a^2c^2=0$,

$\therefore (a^2+b^2)(a^2-b^2)+c^2(b^2-a^2)=0$,

$\therefore (a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$,

$\therefore a^2-b^2=0$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$.

若 $a^2-b^2=0$,则 $a=b$,

则$\triangle ABC$ 为等腰三角形;

若 $a^2+b^2-c^2=0$,

则 $a^2+b^2=c^2$,

则$\triangle ABC$ 为直角三角形.

点拨:先利用所给等式化简得出 a, b, c 之间的关系,再根据三角形的分类分情况讨论.

11. 解:连结 AC,

$\because \angle B=90°$, $AB=BC=2$,

$\therefore \angle BAC=45°$,

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$.

在$\triangle ACD$ 中, $CD=3$, $DA=1$,

$\therefore CD^2=AC^2+DA^2$,

$\therefore \triangle ACD$ 为直角三角形且$\angle DAC=90°$.

又$\because \angle BAC=45°$,

$\therefore \angle DAB=\angle DAC+\angle BAC=135°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:综合运用勾股定理以及勾股定理的逆定理是解题的关键.

12. 解:∵ $\triangle ACD$ 与 $\triangle AED$ 关于 AD 所在的直线成轴对称,

∴ $\triangle AED \cong \triangle ACD$,∴ $AE = AC$.

∵ $\angle B = 90°$,$AB = 5\text{cm}$,

$\triangle ABC$ 的面积是30 cm^2,

∴ $\frac{1}{2} \times 5 \times BC = 30$,解得 $BC = 12$ cm.

∴ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm})$.

∴ $AE = 13$ cm.

点拨:由轴对称的性质可知 $AE = AC$,先利用直角三角形的面积公式求出 BC 的长,再利用勾股定理求出 AE 的长.

13. 解:如图,$BD = 10$ 尺,$BC = 3$ 尺,$AD = AC$,

$\angle B = 90°$.

设 AB 的长为 x 尺,

则 AC 的长为 $(10 - x)$ 尺,

由勾股定理得,$x^2 + 3^2 = (10 - x)^2$,

解得 $x = 4.55$.

答:原处还有 4.55 尺高的竹子.

点拨:注意单位换算:1 丈 = 10 尺.



(第 13 题)

第 15 章 数据的收集与表示

15.1 数据的收集

习题 15.1

1 ~ 3. 略.

4. 解:列表为:

数字	0	1
频数	26	24
频率	0.52	0.48

点拨:数字 0 出现的频数就是数字 0 出现的次数. 数字 0 出现的频率就是数字 0 出现的次数与数字 0 和 1 出现的总次数的比值.

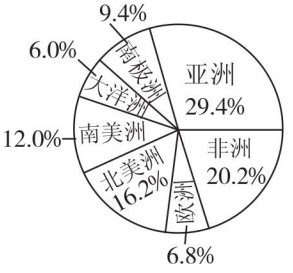
5. 略.

15.2 数据的表示

练习:

1. 解:如图.

七大洲土地面积扇形统计图



(第 1 题)

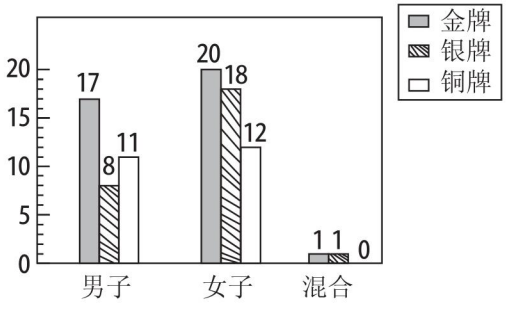
2. 解:(1)1.5% 的被调查者认为目前的医疗服务价格偏低,29.6% 的被调查者认为目前的医疗服务价格合适,66.8% 的被调查者认为目前的医疗服务价格偏高,2% 的被调查者未回答.

(2)这幅图上各数据的和不为 1.

练习:

1. 解:如图.

第 30 届奥运会中国奖牌数条形统计图



(第 1 题)

发现略.

2. 略.

习题 15.2

1. 解:(1)统计表如下:

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

空气质量	天数	频率(精确到0.1%)
重度污染	0	0
中度污染	0	0
轻度污染	1	3.6%
轻微污染	1	3.6%
良	17	60.7%
优	9	32.1%

(2)略.

(3)从统计图表中能发现以下结论:上海2011年2月中约有32.1%的天数空气质量为“优”,60.7%的天数空气质量为“良”,3.6%的天数空气质量为“轻微污染”,3.6%的天数空气质量为“轻度污染”,说明上海该月的空气质量总体上是良好的;从污染指数和对应的空气质量描述来看,猜测污染指数在100~150的为“轻微污染”,污染指数在50~100的为“良”,污染指数等于或低于50的为“优”;空气质量是逐渐变化的,在该月中,没有出现从“优”直接落到“轻微污染”的情况,也没有出现从“轻微污染”直接跳到“优”的情况(答案不唯一).

(4)略.

2. 解:(1)4;80%

(2)5 006;50.1%;4 993;49.9%

(3)可能不会一模一样,因为每次游戏的结果都是不确定的.

(4)是的,在50%附近摆动.

3. 解:(1)$a+b+c=d$

(2)$a;\frac{a}{d}$

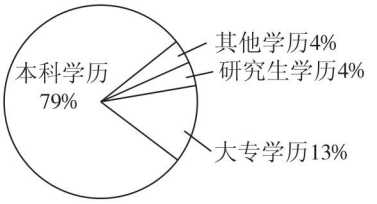
(3)$b;\frac{b}{d}$

(4)“弃权票”出现的频率为:$1-\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$.

4. 解:谷物部分圆心角约为326.6°,豆类部分圆心角约为13.1°,薯类部分圆心角约为20.3°.

5. 解:如图.

人员的学历分布情况扇形统计图



(第5题)

6. 解:(1)非常满意的人数占$\frac{2\,000}{4\,000}=50\%$;

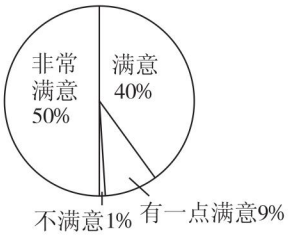
满意的人数占$\frac{1\,600}{4\,000}=40\%$;

有一点满意的人数占$\frac{360}{4\,000}=9\%$;

不满意的人数占$\frac{40}{4\,000}=1\%$.

(2)如图.

对中国女排的看法情况的扇形统计图



(第6题)

(3)从统计图中可知,有90%的被调查者对中国女排是满意和非常满意的,有9%的被调查者对中国女排有一点满意,有1%的被调查者对中国女排不满意.

7. 解:(1)统计表列出了拉萨、北京、广州、贵阳四个城市2009年中,每月及全年的日照时数.

(2)“187”表示广州2009年8月份的日照时数为187小时;“2 511.8”表示北京2009年的日照时数总和为2 511.8小时.

(3)2009年10月份拉萨的日照时数最多,贵阳的日照时数最少.2009年中北京在5月份的日照时数最多.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

复习题

A 组

1. 解:可以对全班同学进行调查,然后把调查数据进行整理、分析,再把自己的情况与同学们的情况进行比较.

2. 解:

上学方式	步行	骑车	乘车
“正字法”记录	正正正	正丅	正正 正一
频数	15	9	16
频率	37.5%	22.5%	40%

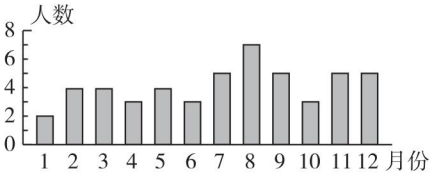
3. 解:统计表如下:

50 名同班同学出生月份统计表

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
人数	2	4	4	3	4	3	5	7	5	3	5	5

4. 解:如图. 体会略.

50 名同班同学出生月份统计图



(第 4 题)

B 组

5. 略.

6. 略.

7. 解:(1)A 品牌;24.86;89

(2)最小的扇形表示 G 品牌手机占我国智能手机市场份额的 6.19%. (答案不唯一)

8. 解:掷得偶数的次数是 40 − 15 = 25. 在这 40 次试验中,他掷得偶数的频率高. 如果再掷 40 次,此结论有可能会改变.

C 组

9. 解:(1)8 × 10% = 0.8(万元),

8 × 5% = 0.4(万元),

所以 2011 年管理费支出的金额是 0.8 万元,保险费支出的金额是 0.4 万元.

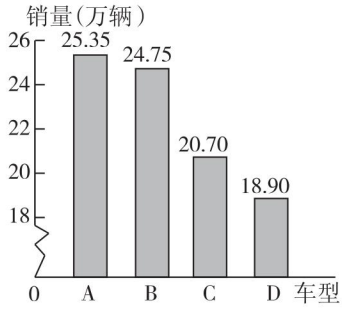
(2)8 − 6 = 2(万元),$\frac{2}{6}\approx 33.3\%$,

所以 2011 年的总支出比 2010 年增加 2 万元,约增加 33.3%.

10. 解:(1)如图.

2011 年我国汽车市场上四种轿车的销量情况

条形统计图



(第 10 题)

(2)不同意. 因为除了这四种品牌的汽车以外,市场上还有很多其他品牌,所以,我们可以用条形统计图形象地对这四种轿车的销售情况加以比较,但是不能用这四种轿车的总销量代替所有品牌汽车的总销量来计算各种车型的市场占有率.

11. 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料