教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法96招·七八九年级共281招



八年级
数学(上)
荣德基 主编
(HK版)
赠教材习题答案

吉林教育出版社

特高级教师
点拨
八年级数学(上)(HK版)
荣德基主编
吉林教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

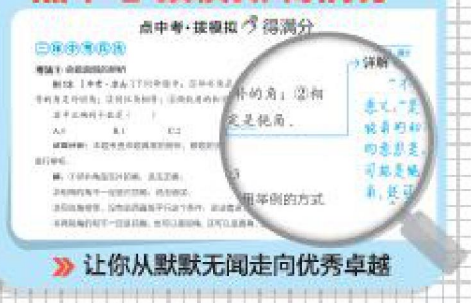
简约的知识梳理总结　　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

考法得满分

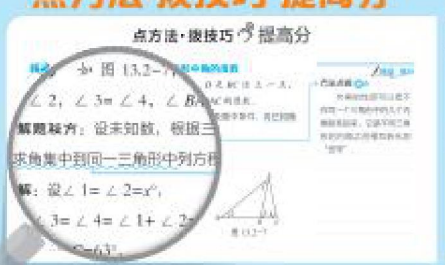
点中考 拨模拟 得满分



» 让你从默默无闻走向优秀卓越

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分



» 为你提供解题秘方

第3步　第2步　第1步

三个维度打造极致



基础速提分

点知识 拨考向 速提分



» 给你一把打开数学之门的钥匙

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

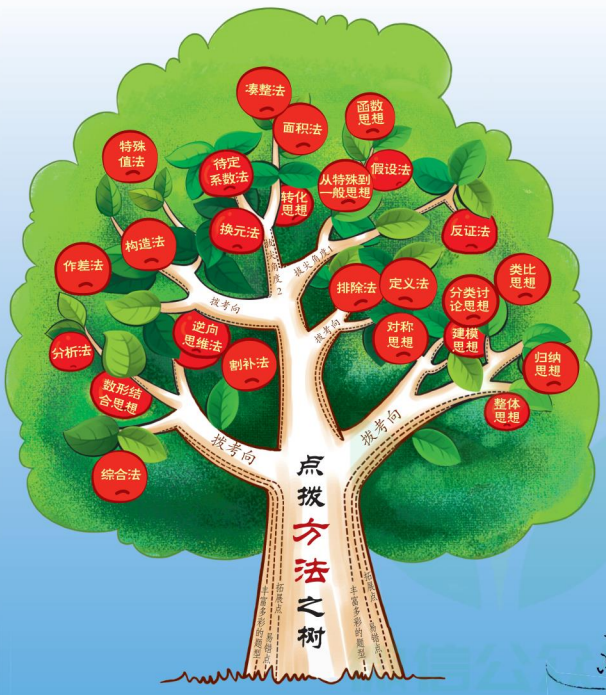
点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 上 （HK版）

荣德基 主编

本册主编：范志刚



老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点 96 个 得高分

第11章 平面直角坐标系

	页码
1 确定点的坐标的方法	3
2 根据点的坐标描点的方法	3
3 等积法	7
4 割补法	7
5 找规律法	8
6 利用点的坐标的变化规律求点的坐标的方法	9
7 点的平移与点的坐标变化规律	12
8 平移法	14

第12章 一次函数

	页码
1 判断一个关系是否是函数关系的方法	27
2 列表法	27
3 解析法	27
4 图象法	29
5 数形结合法	31
6 作差法	31
7 图象信息法	32
8 表格信息法	33
9 情境信息法	33
10 定义法	34
11 判断函数是否为一次函数的方法	38
12 正比例函数中比较函数值大小的方法	40
13 一次函数图象的画法	40
14 两点法	40
15 平移法	40
16 直角坐标系中图形面积的计算方法	41
17 待定系数法	43
18 一次函数的图象与坐标轴交点的坐标求法	48
19 排除法	49
20 分类法	50
21 已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积，求直线对应的函数表达式的方法	50
22 比较法	51
23 建模法	52
24 用图象法解二元一次方程组的基本方法	60
25 解一次函数与方程、不等式的综合实际应用问题的方法	70
26 利用方程（组）、不等式（组）求解方案类问题的策略	75

第13章 三角形中的边角关系、命题与证明

	页码
1 几何图形计数的常用方法	91
2 按序计数法	91
3 画图计数法	91
4 基本图形计数法	91
5 分类计数法	91
6 确定三条线段能否组成三角形的两种方法	92
7 数三角形个数的方法	93
8 列举法	94
9 说明三角形的内角和定理的思路方法	98
10 求三角形内角的度数的方法	98
11 找三角形某边上的高的方法	104
12 等积法	104
13 面积和差关系法	105
14 命题改写的方法	110
15 直角三角形的判定方法	113
16 证明两条直线垂直的方法	113
17 定义法	113
18 证明直角三角形法	113

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 96 个 得高分

第14章 全角三角形

		页码
1	确定两个图形全等的方法	128
2	条件判定法	128
3	重合判定法	128
4	全等三角形的表示方法	129
5	对应元素的确定方法	129
6	利用全等三角形的性质求角的度数的方法	131
7	证线段位置关系的方法	131
8	等面积代换法	131
9	解答探究条件类题目的方法	132
10	证明三角形全等找条件的方法	139
11	判定两个三角形全等常用的思路方法	140
12	证明线段或角相等的方法	140
13	构造全等三角形测距离的求解思路	141
14	截长补短法	142
15	证明一条线段等于两条线段的和的方法	142
16	证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法	143
17	类比法	144
18	分析综合法	150
19	倍长中线法	155

第15章 轴对称图形与等腰三角形

1	判断轴对称图形的方法	163
2	识别轴对称的方法	163
3	定义法	163
4	反面观察法	163
5	利用轴对称的性质求线段的长度或角的度数的方法	165
6	找特殊点的方法	165
7	作对称点的方法	165
8	在坐标系中作成轴对称的图形的思路	167
9	求分散的阴影部分面积的方法	168
10	判断一个图形或图案是轴对称图形的方法	170
11	作线段的垂直平分线的常用方法	173
12	作轴对称图形的对称轴的两种方法	173
13	判断线段垂直平分线的两种方法	175
14	证明两条线段相等的常用方法	176
15	等边三角形的判定方法	185
16	证明一条线段等于两条线段和的方法	188
17	等腰三角形构造法	188
18	证明线段相等的方法	188
19	等腰三角形中几种常见的作辅助线的方法	189
20	倍长线段法	189
21	在出现 60° 角的图形中构造等边三角形的方法	191
22	角的平分线的作法	198
23	证明角平分线的方法思路	201
24	等面积法求三角形的角平分线的交点到三边的距离的方法	202
25	等线段证角平分线法	203

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

看微课
点的坐标特征…… 4
特殊位置的点的坐标…… 5
图形的平移…… 13

学方法
一次函数图象的画法…… 41
待定系数法…… 44

学方法
证明与图形有关的问题…… 112

看微课
三角形的定义…… 90
三角形的三边关系…… 92

观动画
三角形的高……103

第 11 章 平面直角坐标系

11.1 平面内点的坐标 …… 2

11.2 图形在坐标系中的平移 …… 12

素养提分

类型篇：平面直角坐标系中求几何图形面积 ☞ P17

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P19

第 12 章 一次函数

12.1 函数 …… 26

12.2 一次函数 …… 38

12.3 一次函数与二元一次方程 …… 59

12.4 综合与实践 一次函数模型的应用 …… 68

素养提分

行动篇：“待定系数法”的解读与延伸 ☞ P56

类型篇：一次函数表达式的常见题型 ☞ P78

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P80

第 13 章 三角形中的边角关系、命题与证明

13.1 三角形中的边角关系 …… 90

13.1.1 三角形中边的关系 …… 90

13.1.2 三角形中角的关系 …… 97

13.1.3 三角形中几条重要线段 …… 102

13.2 命题与证明 …… 110

素养提分

行动篇：运用铅垂法找重心 ☞ P109

技巧篇：三角形的外角解题技巧 ☞ P120

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P121

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 章 全等三角形

14.1 全等三角形 …… 128

14.2 三角形全等的判定 …… 136

素养提分

应用篇：分析综合法在三角形全等中的应用 ☞ P150

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P152

第 15 章 轴对称图形与等腰三角形

15.1 轴对称图形 …… 162

15.2 线段的垂直平分线 …… 173

15.3 等腰三角形 …… 181

15.4 角的平分线 …… 198

素养提分

行动篇：倒过来想 ☞ P205

应用篇：分类讨论思想在等腰三角形中的应用 ☞ P206

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P208

参考答案及点拨（单独成册）

看微课

全等三角形……129

全等三角形的性质……130

探索三角形全等的条件……136

观动画

全等变换方式……128

学方法

等边三角形的判定方法……185

看微课

轴对称图形与轴对称……163

等腰三角形的判定……184



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **割补法：**割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则图形转化为规则图形、复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

2. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

3. **分类讨论思想：**把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

4. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

5. **待定系数法：**待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求待定系数的值，从而确定函数表达式，这种方法叫做待定系数法．

6. **代入法：**代入法是解平面几何题比较常用的一种特殊方法．说它特殊是因为它不是纯粹的几何方法，而是将几何元素代数化，并采用代数方法解决问题．其基本做法就是用字母代表线段、角，找到已知量和未知量之间的关系，采用列方程、方程组、不等式、函数式等方法进行几何题的证明或求解．

7. **建模思想：**建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段．使用数学语言描述的事物就称为数学模型．

8. **面积法：**运用图形的面积关系建立一个或几个方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法．

9. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法．

10. **分析法：**分析法就是指从命题的结论出发，步步寻找使结论成立的条件，直到得到一个已知条件，从而判定原命题的结论成立的一种解题方法，分析法也称“执果索因”法，即执结论，步步索条件．

11. **截长补短法：**是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想．所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一条线段相等．所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长与另一条已知的较短的长度相等的一段，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系．

微信公众号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

飞跃一维到二维

飞跃一维到二维

第11章 平面直角坐标系









核心考点

你将见到的

- 有序实数对
- 平面直角坐标系
- 用坐标表示地理位置
- 用坐标表示平移

核心方法

我们为你提供的

- 确定点的坐标法
- 根据坐标描点法
- 割补法
- 分类讨论思想
- 转化思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.1 平面内点的坐标

核心知识
- 平面直角坐标系
- 点的坐标
- 特殊位置的点的坐标的特征

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 平面直角坐标系

1. **坐标**：数轴上每一个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标.

2. **平面直角坐标系**：

（1）**定义**：在平面内画两条互相垂直并且原点重合的数轴，组成平面直角坐标系.

（2）**相关概念**：水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；垂直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两轴交点 O 为原点.

如图 11.1−1：

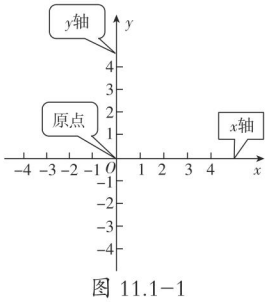


图 11.1−1

提分·必记

特别解读

- 平面直角坐标系的两条数轴共原点，且互相垂直；
- 一般情况下两坐标轴的单位长度是一致的，在有些实际问题中，两坐标轴的单位长度可以不同，但在同一坐标轴上的单位长度必须相同.

拨考向▸利用平面直角坐标系的定义识别

例 1 如图 11.1−2 所示的图形中，平面直角坐标系的画法正确的是（　　）

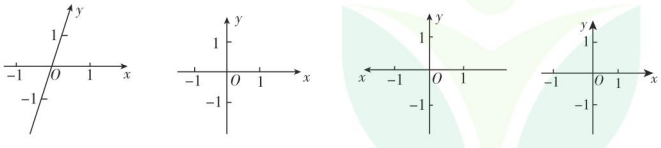


图 11.1−2

解题秘方：根据平面直角坐标系的定义去识别.

解：A 中两条坐标轴不是互相垂直的；C 中的横轴的正方向画反了，应取向右为正方向；D 中横轴的单位长度不一致. 故选 B.

答案：B

提分·秘诀

特别提醒

辨识平面直角坐标系的“三要素”：
1. 两条数轴；
2. 共原点；
3. 互相垂直.

注意：一般取向右、向上为正方向.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 点的坐标

1. 定义：

若平面直角坐标系中有一点 A，过点 A 作横轴的垂线，垂足在横轴上表示的数为 a，过点 A 作纵轴的垂线，垂足在纵轴上表示的数为 b，则有序实数对（a，b）叫做点 A 的坐标，其中 a 叫横坐标，b 叫纵坐标.

特别提醒：（1）在写点的坐标时，必须先写横坐标，再写纵坐标，中间用逗号隔开，最后用小括号把它们括起来；

（2）点的坐标是有序实数对，（a，b）和（b，a）（$a \neq b$）虽然数字相同，但由于顺序不同，表示的位置就不同. 即当 $a \neq b$ 时，这两个坐标表示的是两个不同的点.

2. 平面直角坐标系内的点与有序实数对的一一对应关系：

（1）坐标平面内的任意一点，都有唯一的一个有序实数对（点的坐标）与它对应.

（2）任意一个有序实数对（点的坐标）在坐标平面内都有唯一的一个点和它对应.

提分·必记

特别解读

- 点的坐标是有序实数对，有序要求：横坐标在前，纵坐标在后.
- 根据点的坐标的定义，已知点的位置可以读出点的坐标，反之已知点的坐标可以在平面直角坐标系中标出点的位置.

技考向▶ 利用点的坐标的定义解决问题

类型 1：利用点的坐标的定义读点的坐标

例 2 如图 11.1−3，写出点 A，B，C，D，E，F，G，O 的坐标.

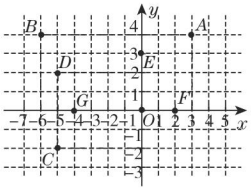


图 11.1−3

解题秘方：紧扣点的坐标的定义，利用过点向两坐标轴作垂线，用读垂足表示的数的方法求点的坐标.

解：由图 11.1−3 可知 A（3，4），B（−6，4），C（−5，−2），D（−5，2），E（0，3），F（2，0），G（−4，0），O（0，0）.

提分·秘诀

方法点拨

确定点的坐标的方法：

首先确定横坐标，方法是从该点向 x 轴作垂线，垂足在 x 轴上表示的数为该点的横坐标；

再从该点向 y 轴作垂线，垂足在 y 轴上表示的数为该点的纵坐标；

最后用有序实数对将它表示出来.

类型 2：已知点的坐标在平面直角坐标系中描点

例 3 请你在如图 11.1−4 所示的平面直角坐标系中，描出以下各点：A（3，2），B（0，3），C（−1，−2），D（2，−1）.

解题秘方：紧扣点的坐标的意义，过数轴上表示点的坐标的数对应的点作垂线，两垂线的交点即为所求点.

解：描出的点 A，B，C，D 如图 11.1−4 所示.

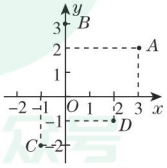


图 11.1−4

方法点拨

根据点的坐标描点的方法：

假设点 P 的坐标为（a，b），先在 x 轴上找到表示的数为 a 的点 A，在 y 轴上找到表示的数为 b 的点 B，再过点 A 作 x 轴的垂线，过点 B 作 y 轴的垂线，两垂线的交点就是所要描出的点 P.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：利用点到坐标轴的距离确定点的坐标

例 4 已知点 P 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 1. 如果过点 P 作两坐标轴的垂线，垂足分别在 x 轴的正半轴上和 y 轴的负半轴上，那么点 P 的坐标是（　　）

A.（2，−1）　　B.（1，−2）　　C.（−2，−1）　　D.（1，2）

解题秘方：紧扣点的坐标与点到两坐标轴的距离的意义之间的关系解答.

解：由点 P 到 x 轴的距离为 2，可知点 P 的纵坐标的绝对值为 2，由点 P 到 y 轴的距离为 1，可知点 P 的横坐标的绝对值为 1，

又因为垂足分别在 x 轴的正半轴上和 y 轴的负半轴上，

所以横坐标为 1，纵坐标为 −2.

故点 P 的坐标是（1，−2）.

答案：B

特别警示

本例的易错点有三处：

1. 混淆距离与坐标之间的区别；
2. 不知道“点 P 到 x 轴的距离”对应的是纵坐标的绝对值，“点 P 到 y 轴的距离”对应的是横坐标的绝对值；
3. 忽略坐标的符号.

知识▸3 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征

提分·必记

1. 象限的划分：

如图 11.1−5，建立了平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分，每个部分称为象限，分别叫第一象限、第二象限、第三象限和第四象限，坐标轴上的点不属于任何象限.

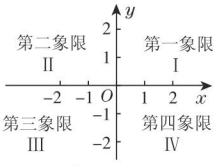


图 11.1−5



特别提醒

- 象限的划分是从“右上”开始的，按“逆时针”方向依次排列为第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 各象限的名称是一种规定，不能随意更改.
- 坐标原点既在 x 轴上，又在 y 轴上，它是两条坐标轴唯一的公共点.

2. 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征：

点 $M(x, y)$ 所处的位置		坐标特征
象限内的点	点 M 在第一象限	M（正，正）
	点 M 在第二象限	M（负，正）
	点 M 在第三象限	M（负，负）
	点 M 在第四象限	M（正，负）
坐标轴上的点	点 M 在 x 轴上	在 x 轴正半轴上：M（正，0）
		在 x 轴负半轴上：M（负，0）
	点 M 在 y 轴上	在 y 轴正半轴上：M（0，正）
		在 y 轴负半轴上：M（0，负）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用点的位置特征求字母的值（取值范围）

例 5 已知点 P 的坐标为 $(a+3,\ b-1)$.

（1）若点 P 在 x 轴上，则 $b=$_____；

（2）若点 P 在 y 轴上，则 $a=$_____；

（3）若点 P 在第三象限，则 a 的取值范围为_____，b 的取值范围为_____.

（4）若点 P 在第四象限，则 a 的取值范围为_____，b 的取值范围为_____.

解题秘方：紧扣 x 轴、y 轴上及象限内点的坐标特征解答.

解：（1）因为点 P 在 x 轴上，

所以 $b-1=0$，解得 $b=1$.

（2）因为点 P 在 y 轴上，

所以 $a+3=0$，解得 $a=-3$.

（3）因为点 P 在第三象限，

所以 $a+3<0$，$b-1<0$，所以 $a<-3$，$b<1$.

（4）因为点 P 在第四象限，

所以 $a+3>0$，$b-1<0$，所以 $a>-3$，$b<1$.

答案：（1）1　（2）-3　（3）$a<-3$；$b<1$

（4）$a>-3$；$b<1$

提分·秘诀

解法提醒

x 轴上的点的纵坐标是 0，y 轴上的点的横坐标是 0，第三象限内点的横、纵坐标都是负数，第四象限内点的横坐标为正数，纵坐标为负数.

知识▶4 特殊位置的点的坐标特征

1. 两坐标轴夹角平分线上的点的坐标特征：

（1）第一、三象限的角平分线上的点的横、纵坐标相等；

（2）第二、四象限的角平分线上的点的横、纵坐标互为相反数.

2. 平行于 x 轴、y 轴的直线上的点的坐标特征：

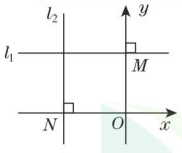


图 11.1−6

特殊位置的点的坐标

如图 11.1−6 所示，直线 $l_1 \parallel x$ 轴，直线 $l_2 \parallel y$ 轴，因为由 l_1 上的任意一点向 y 轴作垂线，垂足都是同一个点 M（不与原点重合），所以 l_1 上的所有点的纵坐标都相等且不为 0；因为由 l_2 上的任意一点向 x 轴作垂线，垂足都是同一个点 N（不与原点重合），所以 l_2 上的所有点的横坐标都相等且为不 0.

3. 若两个点的横坐标相等，则这两个点之间的距离为纵坐标差的绝对值；若两个点的纵坐标相等，则这两个点之间的距离为横坐标差的绝对值.

提分·必记

特别解读

1. 若 $AB \parallel x$ 轴，则 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 的横坐标不相等，纵坐标相等且不为 0，即 $x_1 \neq x_2$，$y_1=y_2 \neq 0$；反之，若 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且 $x_1 \neq x_2$，$y_1=y_2 \neq 0$，则 $AB \parallel x$ 轴.

2. 若 $CD \parallel y$ 轴，则 $C(m_1, n_1)$，$D(m_2, n_2)$ 的横坐标相等且不为 0，纵坐标不相等，即 $m_1=m_2 \neq 0$，$n_1 \neq n_2$；反之，若 $C(m_1, n_1)$，$D(m_2, n_2)$，且 $m_1=m_2 \neq 0$，$n_1 \neq n_2$，则 $CD \parallel y$ 轴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用特殊位置点的坐标特征解决问题

类型1：利用特殊位置点的坐标特征求值

例6 已知平面直角坐标系内的不同两点$A(3, a-1)$，$B(b+1, -2)$，

（1）若点A在第一、三象限的角平分线上，求a的值；

（2）若点B在第二、四象限的角平分线上，求b的值；

（3）若直线AB平行于x轴，求a，b的值或取值范围；

（4）若直线AB平行于y轴，且$AB=5$，求a，b的值.

解题秘方：分别根据特殊位置点的坐标特征列出以a或b为未知数的方程，求出a或b的值.

解：（1）因为点A在第一、三象限的角平分线上，所以$a-1=3$，所以$a=4$.

（2）因为点B在第二、四象限的角平分线上，所以$b+1=2$，所以$b=1$.

（3）因为直线AB平行于x轴，所以$a-1=-2$，$b+1 \neq 3$.

所以$a=-1$，$b \neq 2$.

（4）因为直线AB平行于y轴，且$AB=5$，

所以$b+1=3$，$|(a-1)-(-2)|=5$.

所以$b=2$，$a=4$或-6.

类型2：利用建立适当的坐标系解决求几何图形的顶点坐标问题

例7 如图11.1-7，长方形$ABCD$的长$AB=5$，宽$BC=3$，请建立适当的平面直角坐标系，写出长方形的顶点A，B，C，D的坐标.

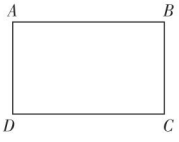


图11.1-7

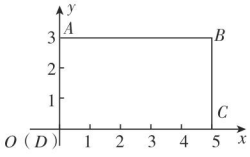


图11.1-8

解题秘方：建立适当的平面直角坐标系，然后根据长方形的长$AB=5$，宽$BC=3$，写出四个顶点的坐标.

解：建立平面直角坐标系如图11.1-8所示（建系方法不唯一），$A(0, 3)$，$B(5, 3)$，$C(5, 0)$，$D(0, 0)$.

方法点拨：几何图形中建立适当的平面直角坐标系的方法

（1）使图形中尽量多的点在坐标轴上；

（2）以某些特殊线段所在的直线为x轴或y轴；

（3）若图形被一条直线分得的两部分形状、大小相同，则可以将此直线作为x轴或y轴；

（4）以某已知点为原点，使它的坐标为$(0, 0)$.

提分·秘诀

特别警示

- 两点确定的直线平行于坐标轴，既要考虑一个坐标相等，又要考虑另一个坐标不能相等，否则两个点重合不能确定一条直线；
- 已知两点之间的距离求点的坐标时，要带上绝对值，即求出的点的坐标不止一个.

另解1

建立平面直角坐标系如图11.1-9所示，$A(-5, 3)$，$B(0, 3)$，$C(0, 0)$，$D(-5, 0)$.

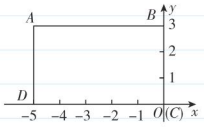


图11.1-9

另解2

建立平面直角坐标系如图11.1-10所示，$A(-2.5, 3)$，$B(2.5, 3)$，$C(2.5, 0)$，$D(-2.5, 0)$.

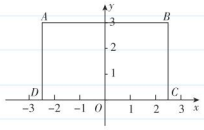


图11.1-10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等积法求平面直角坐标系中点的坐标

例 8 已知：三角形 ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(2,3)$.

（1）在图 11.1-11 所给的平面直角坐标系中画出三角形 ABC，并求三角形 ABC 的面积；

（2）若点 P 在 y 轴上，且三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积，求点 P 的坐标.

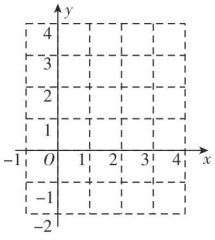


图 11.1-11

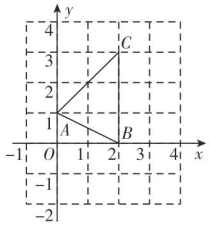


图 11.1-12

解题秘方： 利用点的坐标表示三角形的一边长及此边上的高，结合三角形的面积公式计算.

解：（1）在平面直角坐标系中画出三角形 ABC 如图 11.1-12 所示，三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$.

（2）设点 P 的坐标为 $(0,y)$.

由三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积可得 $\frac{1}{2}|y-1|\times 2=3$，

即 $|y-1|=3$，所以 $y-1=3$ 或 $y-1=-3$，

解得 $y=4$ 或 $y=-2$.

所以点 P 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-2)$.

挑战·高分

图解

点 P 的位置如图 11.1-13 所示.

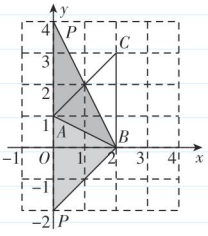


图 11.1-13

当点 P 的坐标为（0，4）时，三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积；

当点 P 的坐标为（0，-2）时，三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积.

拔尖角度 2 利用割补法求平面直角坐标系中不规则图形的面积

例 9 如图 11.1-14，在平面直角坐标系中，$A(1,2)$，$B(5,4)$，$C(6,0)$，$O(0,0)$，求四边形 $ABCO$ 的面积.

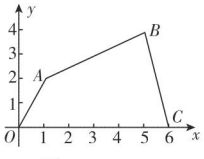


图 11.1-14

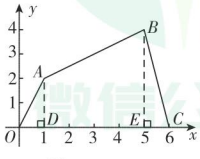


图 11.1-15



点拨微课堂

挑战·高分

另解 1

如图 11.1-16，过点 B 作 $BG\perp y$ 轴于点 G，连接 AG，过点 A 作 $AF\perp y$ 轴于点 F，$AH\perp BG$ 于点 H，则 $OG=4$，$BG=5$，$OC=6$，$AF=1$，$AH=2$. 所以 $S_{四边形ABCO}=S_{梯形BGOC}-S_{三角形AOG}-S_{三角形ABG}=\frac{1}{2}\times(5+6)\times 4-\frac{1}{2}\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：将四边形进行分割，结合点的坐标表示图形的边长，求出各部分的面积.

解：如图 11.1−15，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D，过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E，则 $AD=2$，$OD=1$，$DE=4$，$CE=1$，$BE=4$.

所以 $S_{四边形ABCO}=S_{三角形AOD}+S_{梯形ABED}+S_{三角形BEC}$

$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times(2+4)\times4+\frac{1}{2}\times1\times4$

$=1+12+2$

$=15$.

即四边形 $ABCO$ 的面积为 15.

解题通法：求平面直角坐标系中几何图形面积的方法

求平面直角坐标系中几何图形的面积，常见的图形是三角形或四边形.（1）当三角形有一条边平行于坐标轴或落在坐标轴上时，直接应用三角形的面积公式进行计算；（2）当三角形没有一条边平行于坐标轴或落在坐标轴上时，要用割补法，将三角形的面积转化为其他图形面积的和或差；（3）求不规则多边形的面积时，一般采用割补法，将不规则的多边形割补为规则图形，进而求出其面积.解答这类问题时，应结合图形灵活选用方法，首先将点的坐标转化为线段的长度.

拔尖角度▸ 3 利用找规律法求运动中的点的坐标

例 10 如图 11.1−18，动点 P 在平面直角坐标系中按箭头所示方向运动，第 1 次从原点运动到点（1，1），第 2 次接着运动到点（2，0），第 3 次接着运动到点（3，2）……按这样的运动规律，经过第 2 021 次运动后，动点 P 的坐标是_____.

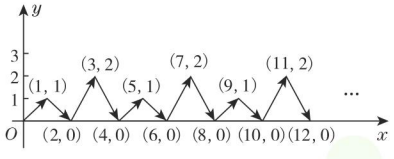


图 11.1−18

解题秘方：分析点的坐标的变化规律，根据规律确定 P 点运动后的坐标.

解：根据如图 11.1−18 所示的点 P 的坐标变化规律，可以看出：①点 P 的横坐标依次为 1，2，3，4，…，即点 P 的横坐标等于运动的次数，所以第 2 021 次运动后，点 P 的横坐标是 2 021；②点 P 的纵坐标依次是 1，0，2，0，1，0，2，0，…，即每运动 4 次一个循环，因为 $2\,021\div4=505\cdots\cdots1$，所以第 2 021 次运动后，点 P 的纵坐标与第 1 次运动后的纵坐标相同，所以经过第 2 021 次运动后，点 P 的坐标为（2 021，1）.

答案：（2 021，1）

$4\times1-\frac{1}{2}\times5\times2=22-2-5=15$.

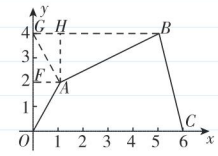


图 11.1−16

另解 2

如图 11.1−17，过点 B 作 $BN \perp y$ 轴于点 N，过点 C 作 $CM \perp x$ 轴，交 NB 的延长线于点 M，连接 AN，过点 A 作 $AQ \perp y$ 轴于点 Q，$AP \perp BN$ 于点 P，则 $ON=4$，$BN=5$，$MN=OC=6$，$BM=1$，$CM=4$，$AQ=1$，$AP=2$.

所以 $S_{四边形ABCO}=S_{长方形MNOC}-S_{三角形AON}-S_{三角形ABN}-S_{三角形BMC}=6\times4-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times5\times2-\frac{1}{2}\times4\times1=24-2-5-2=15$.

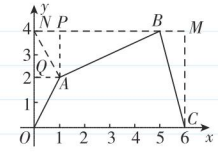


图 11.1−17

挑战·高分

规律点拨

本题的解题规律在于观察图中点的坐标的变化情况，因为点 P 的横、纵坐标变化情况不相同，所以应对点 P 的横、纵坐标变化情况分别分析，其中能找到点 P 的纵坐标按照一定的周期循环是解题的关键.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考点就是平面直角坐标系中点的坐标，内容虽然简单，但是它是后面学习函数的基础．主要考查的方式就是利用点的坐标解决问题．探究点的坐标的变化规律也是常见的考查方式．

三年中考兵法

考法1 利用各象限内点的坐标符号特征确定点的位置

例11 [中考·贵港]在平面直角坐标系中，点$P(m-3,4-2m)$不可能在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

试题评析： 本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解题的关键．

解： ①当$m-3>0$，即$m>3$时，$-2m<-6$，$4-2m<-2$，

所以点$P(m-3,4-2m)$在第四象限；

②当$m-3<0$，即$m<3$时，$-2m>-6$，$4-2m>-2$，

所以点$P(m-3,4-2m)$可能在第二或第三象限，

综上所述，点P不可能在第一象限．

答案： A

考法2 利用点的坐标的变化规律求点的坐标

例12 [中考·岳阳]如图11.1-19，在平面直角坐标系中，每个最小方格的边长均为1个单位，P_1，P_2，P_3，…均在格点上，其顺序按图中“→”方向排列，如：$P_1(0,0)$，$P_2(0,1)$，$P_3(1,1)$，$P_4(1,-1)$，$P_5(-1,-1)$，$P_6(-1,2)$，…，根据这个规律，点P_{2016}的坐标为_____.

试题评析： 本题考查平面直角坐标系中点的坐标的变化规律，解题的关键是分析点在平面直角坐标系中的特殊位置及其变化规律．

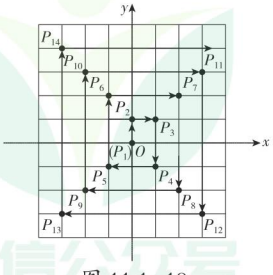


图11.1-19

解： 观察图可得，点P_{2016}在第四象限的角平分线上，且横、纵坐标的绝对值$=2016\div4=504$，再根据第四象限内点的坐标的符号特征即可得点$P_{2016}(504,-504)$．

答案： $(504,-504)$

冲刺·满分

另解

分点P的纵坐标是正数和负数两种情况讨论求解．

(1)当$4-2m>0$时，$m<2$.

所以$m-3<-1$.

所以点$P(m-3,4-2m)$在第二象限．

(2)当$4-2m<0$时，

$m>2$.

所以$m-3>-1$.

所以点$P(m-3,4-2m)$可能在第三或第四象限．

综上可知，点P不可能在第一象限．

解法提醒

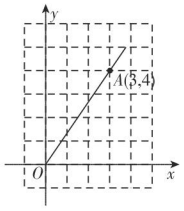
利用点的坐标的变化规律求点的坐标的方法：先利用已知点的坐标规律分析出待求坐标的点所在的象限，以及该点横、纵坐标的绝对值，再根据象限内点的坐标的符号特征求出该点的坐标．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见217页

1. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为（3，4），那么点 A 到 x 轴的距离为（　　）



（第 1 题）

A.3　　B.4　　C.5　　D. $\frac{4}{3}$

2. 过 A（4，−2）和 B（−2，−2）两点的直线一定（　　）

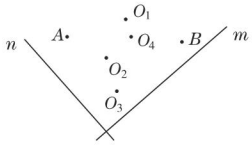
A. 垂直于 x 轴

B. 与 y 轴相交但不平行于 x 轴

C. 平行于 x 轴

D. 经过原点

3. [**中考·北京**]如图，直线 $m \perp n$，在某平面直角坐标系中，x 轴 $/\!/ m$，y 轴 $/\!/ n$，点 A 的坐标为（−4，2），点 B 的坐标为（2，−4），则坐标原点为（　　）



（第 3 题）

A.O_1　　B.O_2　　C.O_3　　D.O_4

4. 若点 P（x，y）的坐标满足 $xy=0$，则点 P 的位置（　　）

A. 在 x 轴上

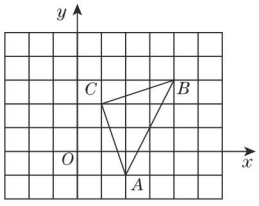
B. 在 y 轴上

C. 在坐标原点

D. 在坐标轴上

5. 在平面直角坐标系中，点 P（m^2+2，−4）一定在第_____象限．　　**【导学号：7769929】**

6. 在如图所示的平面直角坐标系中，三角形 ABC 的顶点都在网格格点上，其中 A 点的坐标为（2，−1），C 点的坐标为（1，2），则三角形 ABC 的面积为_____．



（第 6 题）

7. 已知点 M（$3a-9$，$a-1$），

（1）若点 M 在 y 轴上，求点 M 的坐标；

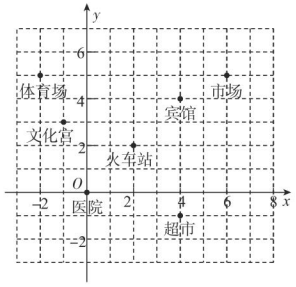
（2）若点 M 到两坐标轴的距离相等，求点 M 的坐标；

（3）若点 N 的坐标为（3，−6），且直线 $MN /\!/ x$ 轴，求点 M 的坐标．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 小明建立了如图所示的平面直角坐标系，使医院的坐标为（0，0），火车站的坐标为（2，2）.



（第 8 题）

（1）写出体育场、文化宫、超市、宾馆、市场的坐标；

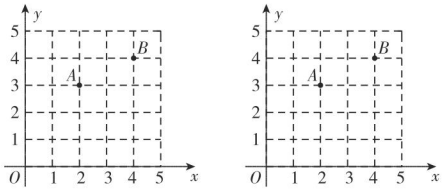
（2）请指出（1）中的场所分别在第几象限；

（3）小丽针对这幅图也建立了一个平面直角坐标系，可是她得到的同一场所的坐标和小明的不一样，是小丽做错了吗？

9. [**中考 · 温州**]在直角坐标系中，我们把横、纵坐标都为整数的点称为整点，记顶点都是整点的三角形为整点三角形. 如图，已知整点 A（2，3），B（4，4），请在所给网格区域（含边界）上按要求画整点三角形.

（1）在图①中画一个三角形 PAB，使点 P 的横、纵坐标之和等于点 A 的横坐标；

（2）在图②中画一个三角形 PAB，使点 P，B 横坐标的平方和等于它们纵坐标和的 4 倍.



（第 9 题）

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.2 图形在坐标系中的平移

核心知识
- 用坐标表示平移
- 图形的平移变换

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 用坐标表示点的平移

1. 点在坐标系中的平移：

在平面直角坐标系中，某个点经过平移后，其位置发生了变化，其坐标也发生了变化.

2. 点的平移与坐标变化的关系：

根据点的平移情况可以得到平移后点的坐标变化情况；反过来，根据点的坐标变化情况可以得到点的平移情况，即：

(x, y) ⟷（向右平移 a 个单位 / 向左平移 a 个单位）$(x+a, y)$

(x, y) ⟷（向上平移 b 个单位 / 向下平移 b 个单位）$(x, y+b)$



拨考向▸ 根据平移求点的坐标

例 1 在平面直角坐标系中，将点 $A(x, y)$ 向右平移 5 个单位，再向上平移 3 个单位后与点 $B(-3, 2)$ 重合，则点 A 的坐标是（　　）

A. $(2, 5)$　　B. $(-8, 5)$

C. $(-8, -1)$　　D. $(2, -1)$

解题秘方： 根据平移的方向和平移的距离及平移后点的坐标确定平移前点的坐标.

解： 点 A 向右平移 5 个单位，再向上平移 3 个单位后与点 $B(-3, 2)$ 重合，则将点 B 向左平移 5 个单位，再向下平移 3 个单位后得到点 A. 点 $B(-3, 2)$ 向左平移 5 个单位后对应的点的坐标为 $(-8, 2)$，再向下平移 3 个单位后对应的点的坐标为 $(-8, -1)$，即点 A 的坐标为 $(-8, -1)$.

答案： C

解题通法： 已知平移方式，确定点的坐标的方法

1. 已知平移前的点的坐标和平移方式，确定平移后的点的坐标时，按点的平移与坐标变化的关系求点的坐标.

2. 已知平移后的点的坐标和平移方式，确定平移前的点的坐标时，只需将平移后的点按照相反的方向平移即可.

提分·必记

知识储备

平移的“两要素”：方向和距离.

特别解读

点的平移与点的坐标变化规律：

将点左右平移，纵坐标不变；上下平移，横坐标不变；即右加左减纵不变；上加下减横不变.

提分·秘诀

另解

因为点 A 向右平移 5 个单位，再向上平移 3 个单位后的坐标是 $(-3, 2)$，设点 A 的坐标为 (x, y)，则 $x+5=-3$，$y+3=2$.

解得 $x=-8$，$y=-1$.

所以点 A 的坐标为 $(-8, -1)$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 用点的坐标表示图形的平移

1. 图形在坐标平面中的平移： 是指在坐标系中，在保持坐标轴不动的情况下，图形的整体移动．

图形在坐标平面中平移变换的实质：

（1）图形的位置及表示位置的坐标发生变化；

（2）图形的形状、大小、方向不变．


图形的平移

2. 图形的平移与图形上各点的坐标变化的关系：

（1）因为图形的平移是图形的整体平移，所以已知图形的平移情况，即可得到图形上各点坐标的变化情况；

（2）平移时，因为图形上各点的变化情况相同，所以已知图形上某点的坐标变化情况，即可知道图形的平移情况．

提分·必记

特别解读

- 图形的平移首先应转化为图形顶点的平移，再按照点的平移规律进行平移；
- 一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到．

核考向▶ 利用坐标的变化表示图形的平移

例 2 在平面直角坐标系中，三角形 ABC 的三个顶点的位置如图 11.2−1 所示，点 A' 的坐标是（−2，2），现将三角形 ABC 平移，使点 A 变换为点 A'，点 B'，C' 分别是 B，C 的对应点．

（1）请画出平移后的三角形 $A'B'C'$，并写出点 B'，C' 的坐标；

（2）试说明三角形 ABC 经过怎样的平移得到三角形 $A'B'C'$；

（3）若三角形 ABC 内部一点 P 的坐标为（a，b），则点 P 的对应点 P' 的坐标是_____．

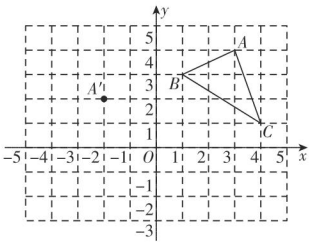


图 11.2−1

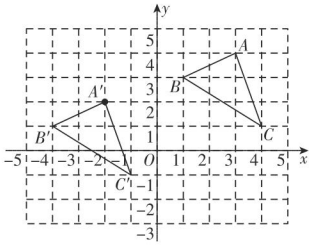


图 11.2−2

提分·秘诀

详解

观察点 A 和 A′ 的位置可知，将三角形 ABC 向左平移 5 个单位，再向下平移 2 个单位得到三角形 A′B′C′，据此即可描出点 B′，C′ 的位置．

解题秘方： 根据一对对应点的坐标可确定平移的方向和平移的距离，图形边上的点和图形内部的点平移方式相同．

解：（1）三角形 $A'B'C'$ 如图 11.2−2 所示．$B'(-4,1)$，$C'(-1,-1)$．

（2）将三角形 ABC 先向左平移 5 个单位，再向下平移 2 个单位得到三角形 $A'B'C'$（或将三角形 ABC 先向下平移 2 个单位，再向左平移 5 个单位得到三角形 $A'B'C'$）．

（3）$(a-5,\ b-2)$

详解

由图可知点 A(3,4)，又点 A 平移后得到 A′(−2,2)，即：平移后各点的横坐标减 5，纵坐标减 2，根据平移后图形上所有点都进行了相同方式的平移，可知 P′(a−5,b−2)．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用平移法确定点的位置

例 3 如图 11.2-3 所示，若在中国象棋盘上建立平面直角坐标系，使“将”位于点（1，-2），“象”位于点（3，-2），则“炮”位于点（　　）

A.（1，3）　　B.（-2，0）　　C.（-1，2）　　D.（0，-2）

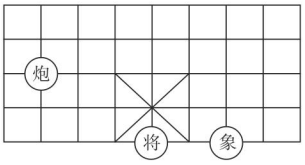


图 11.2-3

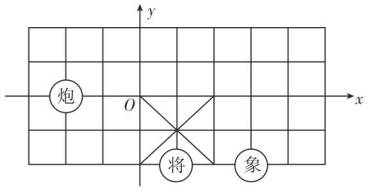


图 11.2-4

解题秘方： 根据“将”和“象”所在点的坐标确定平面直角坐标系，即可得到“炮”所在点的坐标.

解：方法一 “将”位于点（1，-2），“象”位于点（3，-2），所以建立的平面直角坐标系如图 11.2-4 所示，则“炮”所在点的坐标为（-2，0）.

方法二 由“将”和“象”所在点的坐标，可知在平面直角坐标系中，每个小方格的边长表示 1 个单位. 由“炮”和“将”的位置可知，将“将”先向上平移 2 个单位，再向左平移 3 个单位得到“炮”，故“炮”所在点的坐标为（1-3，-2+2），即（-2，0），故选 B.

答案： B

挑战·高分

图解

如图 11.2-5，根据“将”和“象”所在点的坐标，可知在平面直角坐标系中，每个小方格的边长表示 1 个单位，将“将”向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，可以得到原点的位置.

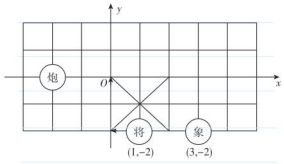


图 11.2-5

拔尖角度▸ 2 利用图形平移的定义求点的坐标

例 4 如图 11.2-6，在平面直角坐标系中，A（1，4），B（3，2），点 C 在第四象限，$OC=AB$，$OC \parallel AB$.

（1）试用平移的知识求点 C 的坐标；

（2）求四边形 $ABCO$ 的面积.

解题秘方： （1）利用图形的平移与点的坐标的变化关系即可求解；（2）利用割补法求图形的面积.

解：（1）将 AB 平移可以得到 OC，

因为将点 A（1，4）平移到点 O（0，0），点 A 的横坐标减少 1，纵坐标减少 4，

所以将点 B（3，2）的横坐标减少 1，纵坐标减少 4，即可得到点 C 的坐标.

所以点 C 的坐标为（2，-2）.

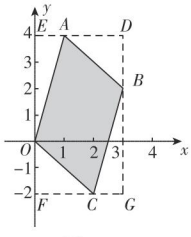


图 11.2-6

（2）过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于点 E，过点 C 作 $CF \perp y$ 轴于点 F，过点 B 作 y 轴的平行线，交 EA 的延长线于点 D，交 FC 的延长线于点 G，

挑战·高分

技巧点拨

一条线段平移前后平行且相等，根据 $OC=AB$，$OC \parallel AB$，可知线段 OC 可以看作是由线段 AB 平移得到的，利用图形平移前后坐标的变化规律，即可求出点 C 的坐标.

另解

本题第（2）问也可借助网格求四边形 $ABCO$ 的面积，如图 11.2-7：

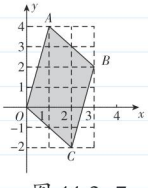


图 11.2-7

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如图 11.2-6 所示.

则 $S_{长方形DEFG}=3\times6=18$，$S_{三角形AOE}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，$S_{三角形ABD}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，$S_{三角形BCG}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，$S_{三角形OCF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

所以 $S_{四边形ABCO}=S_{长方形DEFG}-S_{三角形AOE}-S_{三角形ABD}-S_{三角形BCG}-S_{三角形OCF}=18-2-2-2-2=10$.

利用网格将四边形 $ABCO$ 分割后，观察并计算可知四边形 $ABCO$ 的面积为 10.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点是用坐标表示平移，主要考查图形的平移与点的坐标变化之间的规律，考查的题型主要都是填空、选择题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用点的平移与坐标的变化规律求坐标

例 5 [中考·黔东南州]在平面直角坐标系中有一点 $A(-2,1)$，将点 A 先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位，则平移后点 A 的坐标为_____.

试题评析： 本题考查的是利用图形变化确定点的坐标，解答本题的关键是掌握其变化规律.

解： 因为点 $A(-2,1)$ 先向右平移 3 个单位，所以此时点 A 的坐标为 $(1,1)$.

因为点 $(1,1)$ 又向下平移 2 个单位，所以此时点 A 的坐标为 $(1,-1)$.

答案： $(1,-1)$

解法提醒

根据点平移的方向和距离，可以得出点的坐标的变化情况；反过来，根据点的横、纵坐标的变化情况，可以判断出点平移的方向和距离.

考法 2 利用图形的平移与点的坐标变化规律求坐标

例 6 [中考·邵阳]如图 11.2-8 所示，三架飞机 P，Q，R 保持编队飞行，某时刻在坐标系中的坐标分别为 $(-1,1)$，$(-3,1)$，$(-1,-1)$. 30 秒后，飞机 P 飞到 $P'(4,3)$ 的位置，则飞机 Q，R 的位置 Q'，R' 的坐标分别为（　　）

A. $Q'(2,3)$，$R'(4,1)$

B. $Q'(2,3)$，$R'(2,1)$

C. $Q'(2,2)$，$R'(4,1)$

D. $Q'(3,3)$，$R'(3,1)$

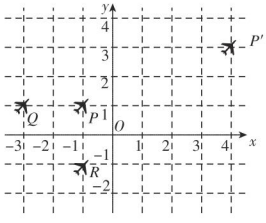


图 11.2-8

试题评析： 本题考查了图形平移中点的坐标变化规律，熟练掌握图形平移时图形中各点的平移方式均相同这一特征是解答本题的关键.

答案： A

详解

P、P′ 的位置如图 11.2-8 所示，点 P 的坐标为 $(-1,1)$，P′ 的坐标为 $(4,3)$，所以飞机 P 向右飞行 5 个单位，向上飞行 2 个单位，由图形的平移的性质知，飞机 Q，R 也都是向右飞行 5 个单位，向上飞行 2 个单位，所以分别将点 Q $(-3,1)$，R $(-1,-1)$ 的横坐标加 5，纵坐标加 2 得，点 Q′ $(2,3)$，R′ $(4,1)$. 故选 A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

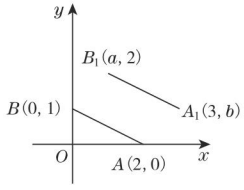
1. 将点$A(2,1)$向下平移2个单位得到点A'，则点A'的坐标是（　　）

A.（2，3）　　B.（2，−1）

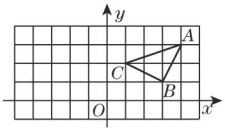
C.（4，1）　　D.（0，1）

2. 如图，A，B的坐标分别为（2，0），（0，1），若将线段AB平移至A_1B_1，则$a+b$的值为（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5



（第2题）



（第3题）

3. 如图，在平面直角坐标系中，三角形ABC位于第一象限，点A的坐标是（4，3），把三角形ABC向左平移6个单位，得到三角形$A_1B_1C_1$，则点B的对应点B_1的坐标是（　　）

A.（−2，3）　　B.（3，−1）

C.（−3，1）　　D.（−5，2）

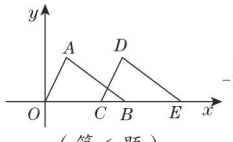
4. 在平面直角坐标系中，线段CF是由线段AB平移得到的，点A（−1，4）的对应点为C（4，1），则点B（a，b）的对应点F的坐标为（　　）

A.（a+3，b+5）　　B.（a+5，b+3）

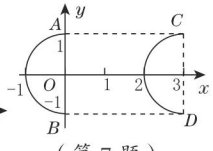
C.（a−5，b+3）　　D.（a+5，b−3）

5. 将点$P(m-2,n+1)$沿x轴负方向平移3个单位，得到点$P_1(1-m,2)$，则点P的坐标为_____.

6. 如图，三角形OAB的顶点B的坐标为（4，0），把三角形OAB沿x轴向右平移得到三角形CDE. 如果$CB=1$，那么点E的坐标是_____.



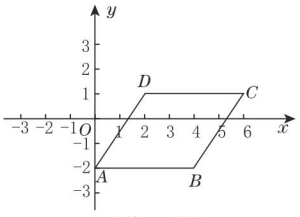
（第6题）



（第7题）

7. 如图，半圆AB平移到半圆CD的位置时所扫过的面积为_____.

8. 如图，已知$A(0,-2)$，$B(4,-2)$，$C(6,1)$，$D(2,1)$，连接AB，BC，CD，AD，得到一个四边形，把这个四边形向x轴负方向平移3个单位，点A，B，C，D相应地平移到点A'，B'，C'，D'，写出A'，B'，C'，D'这四点的坐标.



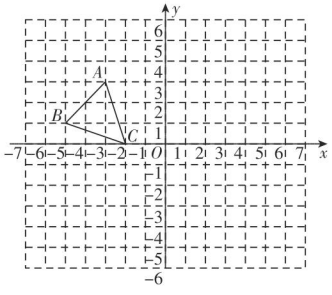
（第8题）

9. 如图，平面直角坐标系中，已知点A（−3，3），B（−5，1），C（−2，0），P（a，b）是三角形ABC的边AC上任意一点，三角形ABC经过平移后得到三角形$A_1B_1C_1$，点P的对应点为P_1（a+6，b−2）.（点A，B，C的对应点分别为A_1，B_1，C_1）

（1）写出点A_1，B_1，C_1的坐标.

（2）在图中画出三角形$A_1B_1C_1$.

（3）连接OA，OA_1，AA_1，求三角形AOA_1的面积.



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平面直角坐标系中求几何图形面积

荣老师告诉你 在平面直角坐标系中，点 $P(a, b)$ 到 x 轴的距离等于 $|b|$，到 y 轴的距离等于 $|a|$，若 $P(a, b)$，$Q(a, c)$，$M(d, b)$（$a\neq 0$，$b\neq 0$，$b\neq c$，$a\neq d$），则 $PM\parallel x$ 轴，$PQ\parallel y$ 轴，PM 的长为 $|a-d|$，PQ 的长为 $|b-c|$. 利用这些知识点可以求在平面直角坐标系中几何图形的面积.

类型一 ▶ 求三角形的面积

题型 1：有一边在坐标轴上

例 1 如图 1，在平面直角坐标系中，三角形 ABC 的顶点坐标分别为 $A(-3, 0)$，$B(0, 3)$，$C(0, -1)$，你能求出三角形 ABC 的面积吗？

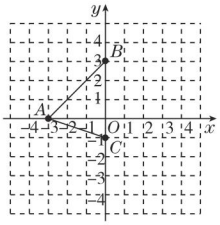


图 1

解题秘方： 根据三个顶点的坐标特征可以看出，三角形 ABC 的边 BC 在 y 轴上，由图形可得 $BC=4$，点 A 到 BC 边的距离就是 A 点到 y 轴的距离，也就是 A 点横坐标的绝对值 3，然后根据三角形的面积公式求解.

解： 因为 $B(0, 3)$，$C(0, -1)$，所以 $BC=3-(-1)=4$. 因为 $A(-3, 0)$，所以 A 点到 y 轴的距离，即 BC 边上的高为 3，所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot OA=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6.$$

题型 2：有一边与坐标轴平行

例 2 如图 2，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(4, 1)$，$B(4, 5)$，$C(-1, 2)$，求三角形 ABC 的面积.

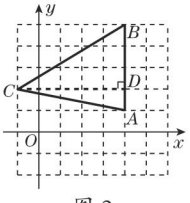


图 2

解题秘方： 由 $A(4, 1)$，$B(4, 5)$ 两点的横坐标相同且不为 0，可知边 AB 与 y 轴平行，因而 AB 的长度易求. 作 AB 边上的高 CD，则 D 点的横坐标与 A 点的横坐标相同，也是 4，这样就可求得线段 CD 的长，进而可求得三角形 ABC 的面积.

解： 因为 A，B 两点的横坐标相同且不为 0，

所以边 $AB\parallel y$ 轴，

所以 $AB=5-1=4$.

如图 2，作 AB 边上的高 CD，

则 D 点的横坐标为 4，

所以 $CD=4-(-1)=5$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$.

方法点拨： 求三角形面积的关键是确定某条边的长及这条边上的高，如果在坐标系中，某个三角形中有一条边在坐标轴上或平行于坐标轴，则根据这条边的两个顶点的坐标易求出这条边的长，根据这条边的相对的顶点的坐标可求出这条边上的高.

题型 3：三边均不与坐标轴平行且三边均不在坐标轴上

例 3 如图 3，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-3, -1)$，$B(1, 3)$，$C(2, -3)$，你能求出三角形 ABC 的面积吗？

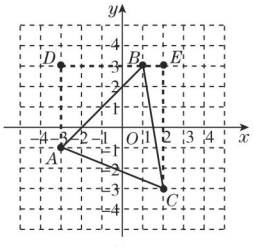


图 3

解题秘方： 利用过三角形的三个顶点作坐标轴的平行线，将三角形放在长方形或梯形中求面积.

解： 如图 3，过点 A，C 分别作平行于 y 轴的直线，

过点 B 作平行于 x 轴的直线，交前面的两条直线于点 D，E，

则四边形 $ADEC$ 为梯形.

因为 $A(-3, -1)$，$B(1, 3)$，$C(2, -3)$，

所以 $AD=4$，$CE=6$，$DB=4$，$BE=1$，$DE=5$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(AD+CE)\times DE-\frac{1}{2}AD\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$DB-\frac{1}{2}CE\times BE=\frac{1}{2}\times(4+6)\times5-\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times6\times1=14.$

方法点拨：若在平面直角坐标系中，三角形无边在坐标轴上且无边平行于坐标轴，则需将图形通过添加辅助线转化为有边与坐标轴平行或在坐标轴上的图形再进行计算.

类型二 ▶ 求四边形的面积

题型1：有一边平行于坐标轴（或在坐标轴上）

例4 如图4，已知四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-4,5)$，$B(2,3)$，$C(4,-2)$，$D(-4,-5)$. 求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：因为A，D的横坐标相同且不为0，所以$AD\parallel y$轴，分别过点B，C作$BE\perp AD$，$CF\perp AD$，垂足分别为E，F，则四边形$ABCD$的面积就可转化为两个有两边平行于坐标轴的三角形和一个两底平行于坐标轴的梯形的面积之和.

解：如图4，分别过点B，C作$BE\perp AD$，$CF\perp AD$，垂足分别为E，F，则$S_{四边形ABCD}=S_{三角形AEB}+S_{三角形CFD}+S_{梯形BEFC}=\frac{1}{2}\times2\times6+\frac{1}{2}\times3\times8+\frac{1}{2}\times(6+8)\times5=53.$

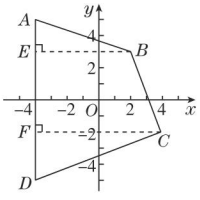


图4

方法点拨：当四边形只有一边平行于坐标轴时，要求四边形的面积，可过平行于坐标轴的一边所对边的两个端点向平行于坐标轴的一边作垂线，将四边形的面积转化为两个三角形和一个梯形的面积之和再求解.

题型2：有两边平行于坐标轴（或在坐标轴上）

例5 如图5，已知四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-4,5)$，$B(1,5)$，$C(4,-2)$，$D(-4,-5)$. 求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：因为点A，B的纵坐标相同且不为0，A，D的横坐标相同且不为0，所以$AB\parallel x$轴，$AD\parallel y$轴，连接AC，则四边形$ABCD$的面积就可转化为两个有一边平行于坐标轴的三角形的面积之和.

解：如图5，连接AC.

则$S_{四边形ABCD}=S_{三角形ADC}+S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}\times10\times8+\frac{1}{2}\times5\times7=57.5.$

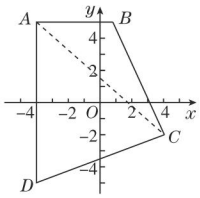


图5

方法点拨：当四边形相邻两边平行于坐标轴时，要求四边形的面积，可连接过直角顶点的一条对角线，将四边形的面积转化为两个有一边平行于坐标轴的三角形的面积之和后再计算.

题型3：四边都不平行于坐标轴且都不在坐标轴上

例6 如图6，已知四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-5,2)$，$B(1,5)$，$C(5,-2)$，$D(-4,-5)$. 求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：过A，B，C，D四个点分别作坐标轴的平行线，将四边形置于正方形之中求面积.

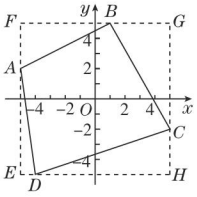


图6

解：如图6，分别过点B，D作$FG\parallel x$轴、$EH\parallel x$轴，过点A作$EF\parallel y$轴与EH，FG分别交于E，F，过点C作$GH\parallel y$轴与FG，EH分别交于G，H.

则$S_{四边形ABCD}=S_{正方形EFGH}-S_{三角形AFB}-S_{三角形BGC}-S_{三角形CHD}-S_{三角形DEA}=10\times10-\frac{1}{2}\times3\times6-\frac{1}{2}\times4\times7-\frac{1}{2}\times3\times9-\frac{1}{2}\times1\times7=60.$

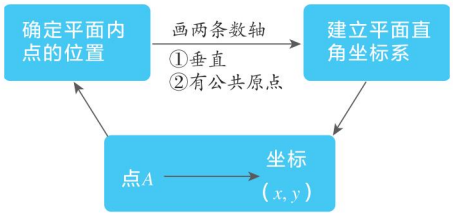
方法点拨：当四边形的四边都不平行于坐标轴且都不在坐标轴上，四个顶点都不在坐标轴上时，分别过四个点中纵坐标最大和最小的点作x轴的平行线；再分别过四个点中横坐标最大和最小的点作y轴的平行线，四线构成长方形，那么求四边形的面积就可以转化成一个长方形的面积与几个三角形的面积之差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 由两条共原点且互相垂直的数轴构成平面直角坐标系，在坐标系中，每一个点的坐标都是一个有序实数对.

2. **平面直角坐标系内点（m，n）的坐标特征为：**第一象限（+，+），即 $m>0$，$n>0$；第二象限（−，+），即 $m<0$，$n>0$；第三象限（−，−），即 $m<0$，$n<0$；第四象限（+，−），即 $m>0$，$n<0$；x 轴正半轴上的点，$m>0$，$n=0$；x 轴负半轴上的点，$m<0$，$n=0$；y 轴正半轴上的点，$m=0$，$n>0$；y 轴负半轴上的点，$m=0$，$n<0$；反之亦成立.

3. **点的平移与其坐标变化的规律是：**上加下减，右加左减. 即向上平移 a 个单位，纵坐标加 a，向下平移 a 个单位，纵坐标减 a；向右平移 a 个单位，横坐标加 a，向左平移 a 个单位，横坐标减 a.

知识方法专题

知识必学

专题一 平面直角坐标系与点的坐标

链接中考» 在平面直角坐标系中，点的坐标是核心，在特殊位置的点的坐标的特征是中考考查的热点，一般都是以选择题形式出现.

例 1 [中考·威海]若点 $A(a+1, b-2)$ 在第二象限，则点 $B(-a, b+1)$ 在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题秘方：依题意，点 A 在第二象限，则有 $a+1<0$，$b-2>0$，从而有 $-a>0$，$b+1>0$，于是可以确定点 B 所在的象限.

解：因为点 $A(a+1, b-2)$ 在第二象限，所以 $a+1<0$，$b-2>0$，解得 $a<-1$，$b>2$，所以 $-a>0$，$b+1>0$，即点 $B(-a, b+1)$ 在第一象限，故应选 A.

答案：A

方法点拨：对于点 $P(a, b)$ 来说，点的位置与坐标的特征的关系：

点的位置		坐标特征
象限内的点	点 P 在第一象限	$a>0$，$b>0$
	点 P 在第二象限	$a<0$，$b>0$
	点 P 在第三象限	$a<0$，$b<0$
	点 P 在第四象限	$a>0$，$b<0$
坐标轴上的点	点 P 在 x 轴正半轴上	$a>0$，$b=0$
	点 P 在 x 轴负半轴上	$a<0$，$b=0$
	点 P 在 y 轴正半轴上	$a=0$，$b>0$
	点 P 在 y 轴负半轴上	$a=0$，$b<0$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续表

点的位置		坐标特征
两坐标轴夹角平分线上的点	点 P 在第一、三象限角平分线上	$a=b$
	点 P 在第二、四象限角平分线上	$a+b=0$

专题二 用坐标表示地理位置

链接中考» 学习坐标的目的就是表示地理位置，这是中考命题的宗旨——运用知识解决实际问题．这一考点考查的形式也简单，主要都是以选择题形式出现．

例 2 ［中考·北京］如图 11−1 是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建筑分布图，若这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，表示太和门的点的坐标为（0，−1），表示九龙壁的点的坐标为（4，1），则表示下列宫殿的点的坐标正确的是（　　）

A. 景仁宫（4，2）　B. 养心殿（−2，3）

C. 保和殿（1，0）　D. 武英殿（−3.5，−4）

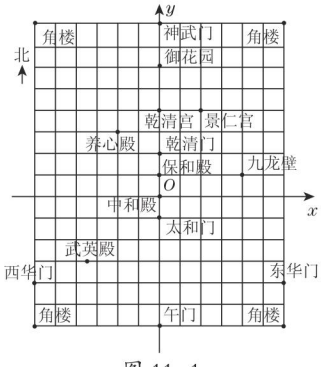


图 11−1

解题秘方： 先根据两个已知点的坐标建立平面直角坐标系如图 11−1，再找出四个选项中宫殿所在位置的坐标即可．

解： 因为表示太和门的点的坐标为（0，−1），表示九龙壁的点的坐标为（4，1），所以建立平面直角坐标系如图 11−1 所示．由图可知，表示景仁宫的点的坐标为（2，4），表示养心殿的点的坐标为（−2，3），表示保和殿的点的坐标为（0，1），表示武英殿的点的坐标为（−3.5，−3），四个选项中只有 B 正确，故选 B.

答案： B

方法点拨： 利用坐标表示某区域内有关建筑物（地点）的地理位置，即把建筑物（地点）看成一个点，确定它在坐标系中的位置，根据坐标系中的位置确定出它的坐标．

专题三 点的坐标的变化规律

链接中考» 点的坐标的变化规律是图形变化规律的关键，图形的变化主要有平移、对称和旋转几种，每种变化的坐标变化都有规律，在中考中是热门考点，一般都是以选择题形式出现．

例 3 ［中考·梧州］点 P（2，−3）先向左平移 4 个单位，再向上平移 1 个单位，得到点 P'，则点 P' 的坐标为_____.

解： 向左平移，给横坐标减；向上平移，给纵坐标加．所以 P' 的坐标为（2−4，−3+1），即（−2，−2），故答案为（−2，−2）．

答案： （−2，−2）

规律点拨： 坐标系中的点（x，y）向左（或右）平移 a 个单位，横坐标减去（或加上）a；坐标系中的点（x，y）向上（或下）平移 b 个单位，纵坐标加上（或减去）b.

Ⅱ 方法必会

专题四 分类讨论思想

专题解读» 分类讨论思想是在解决问题中出现不确定性时的有效方法．因为不确定，所以需要我们正确地运用分类讨论思想解决问题．分类讨论思想不仅可以有效地解决一些问题，同时还可以培养同学们的观察能力和全面思考问题的能力．

例 4 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=4$，$BC=6$，若将该长方形放在平面直角坐标系中，使点 A 的坐标为（−1，2）且 $AB \parallel x$ 轴，试求点 C 的坐标．

解题秘方： 点 C 的坐标由长方形 $ABCD$ 的具体位置来确定，应分四种情况来讨论．

解： 如图 11−2，长方形 $AB_1C_1D_1$、长方形 $AB_1C_2D_2$、长方形 $AB_2C_3D_1$、长方形 $AB_2C_4D_2$ 均符合题意，所以点 C 的坐标为（3，−4）或（3，8）或（−5，−4）或（−5，8）．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

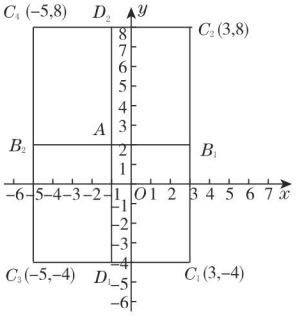


图 11−2

规律点拨：已知两点（这两点确定的直线与 x 轴（或 y 轴）平行或重合）之间的距离和其中一个点的坐标求另一个点的坐标时，分未知点在已知点的左右两侧（或上下两边）两种情况.

专题五 割补法、转化思想

专题解读≫不规则图形的面积求解策略：利用“分割”或“补形”将不规则图形的面积转化为规则图形的面积的和或差的形式，把所要解决的问题转化为另一个较容易解决的问题来解决.这种求不规则图形面积的方法叫割补法；指导思想是化不规则为规则、化难为易的转化思想.

例 5 如图 11−3 所示的平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(0,0)$，$B(9,0)$，$C(7,5)$，$D(2,7)$，试求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方：由于该图形不是规则图形，因此可以考虑把它分割成三角形和梯形来解决.

解：如图 11−3，分别过点 D，C 向 x 轴作垂线，垂足分别是 E，F，则四边形 $ABCD$ 被分割为三角形 AED、梯形 $EFCD$、三角形 CFB.

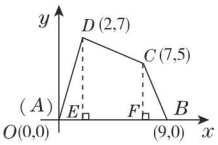


图 11−3

由各点的坐标可得 $AE=2$，$DE=7$，

$FB=2$，$CF=5$，$EF=5$.

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{三角形AED}+S_{梯形EFCD}+S_{三角形CFB}=\frac{1}{2}\times AE\times DE+\frac{1}{2}\times(CF+DE)\times EF+\frac{1}{2}\times CF\times FB=\frac{1}{2}\times2\times7+\frac{1}{2}\times(5+7)\times5+\frac{1}{2}\times5\times2=42$.

规律点拨：在平面直角坐标系中求不规则图形的面积，一般采用割补法，将不规则图形割补为规则且易求面积的图形，从而求出整个图形的面积.

好题必解 ☞答案见 218 页

类型 1：利用平面直角坐标系的特征解决问题

1. 如果 $P(a+b,ab)$ 在第二象限，那么点 $Q(a,-b)$ 在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若 y 轴上的点 P 到 x 轴的距离为 3，则点 P 的坐标是（　　）

A. $(3,0)$

B. $(0,3)$

C. $(3,0)$ 或 $(-3,0)$

D. $(0,3)$ 或 $(0,-3)$

3. 点 $P(a-1,a^2-9)$ 在 x 轴负半轴上，则 P 点的坐标是_____.

4. 已知点 $P(2m+4,m-1)$. 试分别根据下列条件，求出点 P 的坐标.

（1）点 P 的纵坐标比横坐标大 3；

（2）点 P 在过点 $A(2,-3)$，且与 x 轴平行的直线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用坐标表示地理位置

5. “健步走”越来越受到人们的喜爱，某个“健步走”小组将自己的活动场地定在奥林匹克公园，所走路线为：森林公园——玲珑塔——国家体育场——水立方．如图，设在奥林匹克公园设计图上玲珑塔的坐标为（−1，0），森林公园的坐标为（−2，2），那么水立方的坐标为（　　）

A.（−2，−4）

B.（−1，−4）

C.（−2，4）

D.（−4，−1）



（第 5 题）

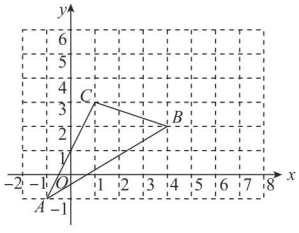
类型 3：利用平移的特征求点的坐标

6. 如图，三角形 ABC 在平面直角坐标系中．

（1）请写出三角形 ABC 各顶点的坐标；

（2）求三角形 ABC 的面积；

（3）若将三角形 ABC 向上平移 3 个单位，再向右平移 2 个单位后得到三角形 $A'B'C'$，在图中画出变化后的三角形 $A'B'C'$，并直接写出三角形 ABC 内的点 $M(a, b)$ 平移后的对应点 M' 的坐标．（点 A，B，C 的对应点分别为 A'，B'，C'）



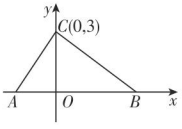
（第 6 题）

类型 4：利用点的坐标求平面直角坐标系中图形的面积

7. 如图所示，在平面直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别是 $A(a, 0)$，$B(b, 0)$，且 a，b 满足 $|a+2|+(b-4)^2=0$，点 C 的坐标为 $(0, 3)$．

（1）求 a，b 的值及 $S_{三角形ABC}$；

（2）若点 M 在 x 轴上，且 $S_{三角形ACM}=\frac{1}{3}S_{三角形ABC}$，试求点 M 的坐标．



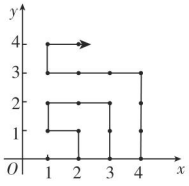
（第 7 题）

类型 5：探究平面直角坐标系中点的坐标变化规律

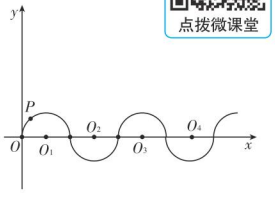
8. 如图，在平面直角坐标系中，有若干个横、纵坐标分别为整数的点，其顺序为（1，0），（2，0），（2，1），（1，1），（1，2），（2，2）…，根据这个规律，第 2 020 个点的坐标为（　　）

A.（45，13）　　B.（45，9）

C.（45，22）　　D.（45，5）



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图所示，在平面直角坐标系中，半径均为 1 个单位的半圆 O_1、O_2、O_3…组成一条平滑的曲线，点 P 从原点 O 出发，沿这条曲线向右运动，速度为每秒 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，则第 2 020 秒时，点 P 的坐标是（　　）

A.（2 019，0）

B.（2 020，1）

C.（2 020，−1）

D.（2 020，0）

点拨微课堂

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 11 章测试卷 ☞答案见 218 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 在平面直角坐标系中，点（−5，1）在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 下列数据不能确定物体位置的是（　　）

A. 北偏东 30°　　B. 祥云花园 4 号楼

C. 希望路 25 号　　D. 东经 118°，北纬 40°

3. 已知点 $P(x+5, x-4)$ 在 y 轴上，则 x 的值为（　　）

A.5　　B.−5　　C.−4　　D.4

4. 在平面直角坐标系中，若一图形各点的纵坐标不变，横坐标分别减 5，则图形与原图形相比，（　　）

A. 向右平移了 5 个单位

B. 向左平移了 5 个单位

C. 向上平移了 5 个单位

D. 向下平移了 5 个单位

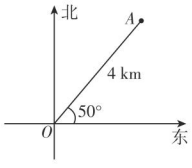
5. 点 A 的位置如图所示，则关于点 A 的位置下列说法中正确的是（　　）

A. 距点 O 4 km 处

B. 北偏东 40° 方向上 4 km 处

C. 在点 O 北偏东 50° 方向上 4 km 处

D. 在点 O 北偏东 40° 方向上 4 km 处



（第 5 题）

6. 已知点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(1, 2)$，将线段 AB 平移至 $A'B'$，点 A' 与点 A 对应．若点 A' 的坐标为（1，−3），则点 B' 的坐标为（　　）

A.（3，0）　　B.（3，−3）

C.（3，−1）　　D.（−1，3）

7. 已知点 $A(-1, 0)$，点 $B(2, 0)$，在 y 轴上存在一点 C，使三角形 ABC 的面积为 6，则点 C 的坐标为（　　）

A.（0，4）　　B.（0，2）

C.（0，2）或（0，−2）　　D.（0，4）或（0，−4）

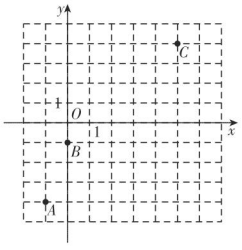
8. 定义：平面内的直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于该平面内任意一点 M，点 M 到直线 l_1，l_2 的距离分别为 a，b，则称有序非负实数对（a，b）是点 M 的“距离坐标”，根据上述定义，“距离坐标”为（2，3）的点的个数是（　　）

A.2　　B.1

C. 4　　D.3

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

9. A，B，C 三点在平面直角坐标系内的位置如图所示．若 A，B，C 的横坐标的数字总和为 a，纵坐标的数字总和为 b，则 $a-b$ 的值为_____.

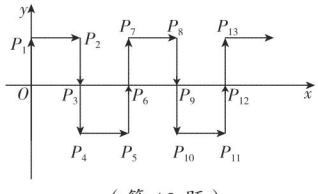


（第 9 题）

10. 在平面直角坐标系中，第四象限的点 M 到横轴的距离为 28，到纵轴的距离为 6，则点 M 的坐标为_____.

11. 已知 $AB \parallel x$ 轴，A 点的坐标为（−3，2），并且 $AB=4$，则 B 点的坐标为_____.

12. 如图，在平面直角坐标系中，一动点从原点 O 出发，沿着箭头所示方向，每次移动 1 个单位，依次得到点 $P_1(0, 1)$，$P_2(1, 1)$，$P_3(1, 0)$，$P_4(1, -1)$，$P_5(2, -1)$，$P_6(2, 0)$，…，则点 $P_{2\,020}$ 的坐标是_____.



（第 12 题）

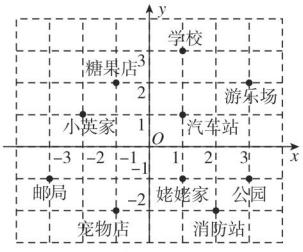
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共60分）

13.（10分）图中标明了小英家附近的一些地方.

（1）写出汽车站和消防站的坐标；

（2）某星期日早晨，小英同学从家里出发，沿（3，2），（3，−1），（1，−1）（−1，−2），（−3，−1）的路线转了一圈，又回到了家里，写出她路上经过的地方.

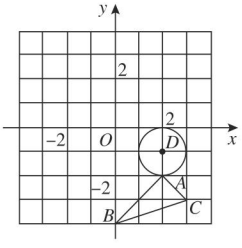


（第13题）

14.（10分）（1）在平面直角坐标系中描出下列各点：$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(-1,3)$，$D(2,4)$，$E(-2,-1)$，$F(4,-2)$.

（2）顺次连接点A，D，F，E，求四边形$ADFE$的面积.

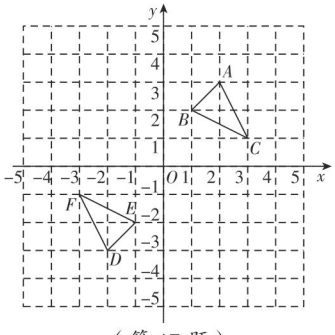
15.（12分）如图所示，将方格中的图形向上平移2个单位，再向左平移3个单位，写出平移后A，B，C，D分别对应的各点A'，B'，C'，D'的坐标.



（第15题）

16.（12分）已知点$A(0,0)$，$B(3,0)$，点C在y轴上，且三角形ABC的面积是5，求点C的坐标.

17.（16分）如图，三角形DEF是由三角形ABC经过某种变换得到的图形，点A与点D，点B与点E，点C与点F分别是对应点，观察点与对应点的坐标之间的关系，解答下列问题：



（第17题）

（1）分别写出点A与点D，点B与点E，点C与点F的坐标，并说说对应点的坐标有哪些特征；

（2）若点$P(a+3,4-b)$与点$Q(2a,2b-3)$也是通过上述变换得到的对应点，求a，b的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

赏析数形结合体

赏析数形结合体











第12章 一次函数

核心考点

你将见到的

- 函数的三种表示方法
- 正比例函数的图象与性质
- 一次函数的图象与性质
- 一次函数与方程、不等式之间的关系
- 一次函数的应用

核心方法

我们为你提供的

- 待定系数法
- 数形结合思想
- 定义法
- 分类讨论思想
- 方程思想
- 建模思想

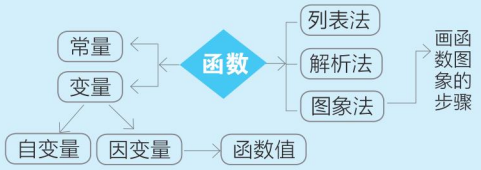
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.1 函数

核心知识

- 常量与变量
- 函数及相关概念
- 函数的表示方法
- 函数图象

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 常量与变量

1. 定义： 在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为变量，数值始终不变的量为常量.

说明：（1）“常量”是已知数，是指在整个变化过程中保持不变的量；但“常量”不等于“常数”，它可以是数值不变的字母. 如在匀速运动中的速度 v 就是一个常量.

（2）变量与常量是相对的，前提是“在一个变化过程中”，一个量在某一变化过程中是常量，而在另一个变化过程中，它可能是变量. 如在 $s=vt$ 中，当 s 一定时，v，t 为变量，s 为常量；当 t 一定时，s，v 为变量，t 为常量.

2. 判断一个量是常量还是变量的方法：

看这个量在某一变化过程中的值是否发生改变（或者说是否会取不同的数值），若在变化过程中此量的数值不变，则此量是常量，若此量可以取不同的数值，则此量是变量.

注意：（1）常量与变量只与在某一个变化过程中的数值是否发生改变有关，与个数没有关系.

（2）变量、常量与字母的指数没有关系，如 $y=100-2x^2$ 中，x，y 是变量，而不能说 x^2 是变量.

拨考向 利用常量与变量的定义进行辨识

例 1 分别指出下列关系中的变量和常量：

（1）圆面积公式 $S=\pi r^2$（S 表示面积，r 表示半径）；

（2）若等腰三角形底角度数值为 x，则顶角度数值 y 与 x 的关系式是 $y=-2x+180$；

（3）在三角形 ABC 中，它的底边长 a 一定，底边上的高是 h，则三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ah$.

解题秘方： 紧扣“常量与变量”的定义进行辨识.

解：（1）r，S 是变量，π 是常量；（2）x，y 是变量，-2，180 是常量；（3）S，h 是变量，$\frac{1}{2}$，a 是常量.

提分·必记

特别提醒

判断一个量是常量还是变量，应先看它是否在一个变化过程中，若在，则看它在这个变化过程中数值是否发生改变.

提分·秘诀

特别警示

常量与变量是从某一变化过程中该量的值是否发生改变，即该量是否会取不同的数值作为识别标准的. 不要误认为常量为常数，表示不变量的字母，也可以作为常量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 函数

1. 函数的定义：

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数.

说明：（1）在函数中定义的两个变量 x，y 是有主次之分的，变量 x 的变化是主动的，称之为自变量，而变量 y 是随 x 的变化而变化的，是被动的，称之为因变量（即自变量的函数）.

（2）函数不是数，函数的实质是两个变量的对应关系.

2. 判断一个关系是否是函数关系的方法：

一看是否在一个变化过程中；

二看是否存在两个变量；

三看对于变量每取一个确定的值，另一个变量是否都有唯一确定的值与其对应，以上三者（简称“三要素”）缺一不可.

3. 函数值：

定义：如果在自变量取值范围内给定一个数值 a，函数对应的值为 b，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值.

拔考向▶利用函数的定义判定两变量的函数关系

例 2 判断下列各式中 y 是否是 x 的函数，并说明理由.

（1）$y=\pm x$；　（2）$y=x^3$；　（3）$2x^2+y^2=10$；　（4）$y=|x|$.

解题秘方：紧扣函数定义的特征进行解答.

解：（1）y 不是 x 的函数，因为 x 每取一个值时，y 有两个对应值，不满足唯一确定；

（2）y 是 x 的函数，因为每一个 x 的值都有唯一的 y 值与之对应；

（3）y 不是 x 的函数，例如当 $x=1$ 时，y 有两个对应值，不满足唯一确定；

（4）y 是 x 的函数，因为每一个 x 的值都有唯一的 y 值与之对应.

点知识▶3 列表法和解析法

1. 列表法与解析法

表示方法	定义	优点	缺点
列表法	通过列出自变量的值与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做列表法	一目了然，由表格中已有自变量的每一个值，可直接查出与它对应的函数值	列出的对应值是有限的，而且在表格中也不容易看出自变量与函数的变化规律
解析法	用数学式子表示函数关系的方法叫做解析法.其中的等式叫做函数表达式（或函数解析式）	能准确地反映整个变化过程中自变量与函数的对应关系	求对应的函数值时，往往要经过比较复杂的计算，而且有些函数不能用解析法表示出来

提分·必记

特别提醒

函数的定义中包括了对应值的存在性和唯一性两重意思，即对自变量的每一个确定的值，函数有且只有一个值与之对应，对自变量 x 的不同值，y 的值可以相同，如：函数 $y=x^2$，当 x=1 和 x=-1 时，y 的值都是 1.

特别提醒

1. 函数与函数值的区别：函数表示的是两个变量之间的一种对应关系，而函数值是一个数值.
2. 一个函数的函数值是随着自变量的变化而变化的，故在求函数值时，一定要指明自变量为多少时的函数值.

提分·秘诀

特别提醒

判断两个变量是否具有函数关系，只需看它是否符合定义中“三要素”即可，但要注意两点：

1. 对于自变量 x 取不同的数值，与之对应的 y 的值不一定不同；只要有唯一值与之对应即可.
2. 不能只看是否有关系式存在，有些函数关系是没有关系式的（如心电图中的时间与生物电流的关系）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 自变量的取值范围：

（1）**定义：**使函数有意义的自变量取值的全体实数叫做自变量的取值范围．

（2）**确定自变量取值范围的方法：**其一，要使函数关系式有意义；其二，对实际问题中的函数关系，还应该使得实际问题有意义．

注意：自变量的取值范围可以是无限的，也可以是有限的，甚至可以是几个数或单独一个数．

3. 求函数值及自变量值的方法：

①当已知的是函数关系式时，求函数值实质就是利用代入法求代数式的值．

②当自变量的值确定时，函数值是唯一确定的；当函数值确定时，求相应的自变量的值，就是解方程，对应的自变量的值可以不止一个，如 $y=x^2-1$ 中，当 $y=0$ 时，$x=\pm 1$．

提分·必记

对于实际问题中的函数关系，函数值与自变量的值都要使实际问题有意义．



拔考向▶利用函数表达式解决函数问题

题型 1：函数表达式在求自变量取值范围中的应用

例 3 求下列函数中自变量 x 的取值范围．

（1）$y=3x+7$；　　（2）$y=\sqrt{x-4}$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$；　　（4）$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$．

解题秘方：紧扣“确定自变量取值范围的方法”求解．

解：（1）函数式右边是整式，

所以 x 的取值范围为全体实数；

（2）由 $x-4\geqslant 0$，得 $x\geqslant 4$，所以 x 的取值范围是 $x\geqslant 4$；

（3）由 $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}$

得 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$，所以 x 的取值范围是 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$；

（4）由 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 1-2x\geqslant 0\end{cases}$

得 $x=\dfrac{1}{2}$，所以 x 的取值范围是 $x=\dfrac{1}{2}$．

提分·秘诀

解法提醒

常见函数自变量取值范围的确定

类型	取值范围
整式型	全体实数
分式型	使分母不为 0 的实数
偶次根式型	使根号下的式子的值大于或等于 0 的实数
零次型	使幂的底数不为 0 的实数
综合型	使各部分都有意义的实数的公共部分

题型 2：函数表达式在求变量值中的应用

例 4 已知函数 $y=13-4x$．

（1）当 $x=3$ 时，对应的函数值是多少？

（2）当 x 为何值时，函数值为 2？

解题秘方：紧扣“求函数值及自变量值的方法”求解．

解：（1）当 $x=3$ 时，$y=13-4\times 3=1$．

（2）当 $y=2$ 时，$2=13-4x$，解得 $x=\dfrac{11}{4}$．

解法提醒

求函数值的一般步骤：

1. 明确自变量的取值；
2. 将自变量的取值代入函数表达式；
3. 按照函数表达式指明的运算顺序进行计算．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：建立函数表达式在几何问题中的应用

例 5 等腰三角形 ABC 的周长为 10 cm，底边 BC 的长为 y cm，腰 AB 的长为 x cm.

（1）写出 y 关于 x 的函数表达式；

（2）求 x 的取值范围.

解题秘方：紧扣“函数表达式的特点”结合几何相关性质求解.

解：（1）由题意可得 $2x+y=10$，所以 y 关于 x 的函数表达式为 $y=10-2x$.

（2）由 x，y 均为线段长，可得 $x>0$，$y>0$，即 $10-2x>0$.

再由三角形三边关系，得 $2x>y$，即 $2x>10-2x$，所以自变量 x 应满足 $\begin{cases} x>0, \\ 10-2x>0, \\ 2x>10-2x, \end{cases}$ 解这个不等式组，得 $\frac{5}{2}<x<5$. 所以 x 的取值范围为 $\frac{5}{2}<x<5$.

提分·秘诀

方法点拨

1. 求几何问题的函数表达式，实质上是建立几何中两个变量之间的数量关系，要熟悉一些常用的几何关系式. 如：圆的周长与半径的关系式，立方体的体积与棱长的关系式等.
2. 确定自变量的取值范围时，一方面要考虑使函数表达式有意义，另一方面还要注意使几何问题有意义.

知识点 4 图象法

1. 定义：一般地，对于一个函数，如果把自变量 x 与函数 y 的每对对应值分别作为点的横坐标与纵坐标，在坐标平面内描出相应的点，这些点所组成的图形，就是这个函数的图象.

2. 函数图象的画法步骤：

（1）**列表：**列表给出自变量和函数的一些对应值.

（2）**描点：**以表中各组对应值为坐标，在坐标平面内描出相应的点.

（3）**连线：**按照自变量由小到大的顺序，把所描各点用平滑曲线依次连接起来.

注意：（1）函数的图象是由一些点组成的，在描点的时候应尽可能地多选几个点，使图象更准确；

（2）在画图象时，应考虑自变量的取值范围.

3. 图象法：

表示方法	定义	优点	缺点
图象法	用图象来表示两个变量间的函数关系的方法叫做图象法	直观、形象地反映出函数关系变化的趋势和某些性质	从自变量的值常常难以找到对应的函数的准确值

提分·必记

特别提醒

1. 函数图象上的任意点 P（x，y）中的 x，y 都满足函数表达式.
2. 满足函数表达式的任意一个有序实数对（x，y）所对应的点一定在函数的图象上.
3. 函数图象上的所有点的坐标满足函数表达式. 它们是函数中的两个变量间的关系的两种不同（一种是“形”，一种是“数”）的呈现方式.

核心考向 利用函数图象法解决函数问题

题型 1：函数的图象上点的坐标与函数表达式间的关系在求字母值中的应用

例 6 已知函数 $y=2x-1$.

（1）试判断点 A（-1，3）和点 $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$是否在此函数的

提分·秘诀

特别提醒

函数图象上点的坐标与函数表达式中两个变量的对应值的一一对应关系：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图象上；

（2）已知点 $C(a, a+1)$ 在此函数的图象上，求 a 的值.

解题秘方：紧扣函数图象上的所有点的坐标满足函数表达式进行解答.

解：（1）因为当 $x=-1$ 时，$y=2\times(-1)-1=-3\neq 3$，

所以点 A 不在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

因为当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$，所以点 B 在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

（2）因为点 $C(a, a+1)$ 在函数 $y=2x-1$ 的图象上，

所以把 $x=a$，$y=a+1$ 代入 $y=2x-1$，得 $a+1=2a-1$.

解得 $a=2$.

题型 2：函数的图象上的点的坐标与函数表达式中两个变量的对应值的一一对应关系在作图中的应用

例 7 （1）画出函数 $y=2x-1$ 的图象；

（2）判断点（5，9），（7，15）是否在此函数的图象上.

解题秘方：紧扣“画函数图象的画法步骤”进行作图.

解：（1）列表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−7	−5	−3	−1	1	3	5	…

描点、连线就得到函数 $y=2x-1$ 的图象（如图 12.1−1）.

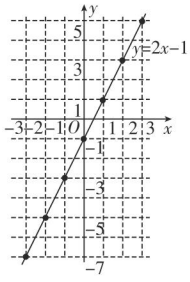


图 12.1−1

（2）当 $x=5$ 时，$y=2\times5-1=9$，所以点（5,9）在此函数的图象上.

当 $x=7$ 时，$y=2\times7-1=13\neq15$，所以点（7,15）不在此函数的图象上.

题型 3：函数的三种表示方法之间的转化

例 8 一水箱中有水 500 L，现在往外放水，每分钟放水 50L，请用三种不同的方法表示水箱中剩余水量 y（L）与放水时间 t（min）之间的函数关系.

解题秘方：紧扣“等量关系：剩余水量 = 原水量 − 放出水量”用三种方法表示函数关系.

1. 横轴所表示的量是自变量，纵轴所表示的量是自变量的函数.
2. 函数图象上每一点的横坐标、纵坐标一定是这个函数的自变量和函数的一组对应值.
3. 从自变量的一个值和函数的对应值为坐标的点必在这个函数的图象上.

作法提醒

1. 列表时要根据自变量的取值范围取值，从小到大或自中间向两边取值，取值要有代表性，使画出的函数图象能反映出函数的全貌.
2. 描点体现了“数”与“形”的联系，是数形结合思想的体现，描点是要从表中每对对应值为坐标，点描得越多，图象就越精确.
3. 连线时要用平滑的曲线将所描的点依次连接.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）**解析法：**表达式为 $y=500-50t\ (0\leqslant t\leqslant 10)$.

（2）**列表法：**表格如下.

t/min	0	1	2	3	4	…	7	8	9	10
y/L	500	450	400	350	300	…	150	100	50	0

（3）**图象法：**图象如图 12.1−2 所示.

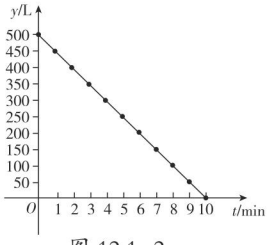


图 12.1−2

特别提醒

本题中纵轴和横轴表示的是不同意义的量，因此两轴可以取**不同的**单位长度. 不论用哪种表示方法都要注意自变量的取值要符合实际意义.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用数形结合法用函数解几何问题

挑战·高分

例 9 如图 12.1−3，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E 为 CD 的中点，P 为正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的动点，动点 P 从点 B 向点 C 运动. 设 BP 的长度为 x，阴影部分三角形 APE 的面积为 y.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）当点 P 运动的路程为多少时，三角形 APE 的面积为 0.25？

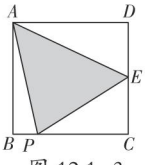


图 12.1−3

解题秘方：用“作差法”求出阴影部分的面积.

解：（1）因为正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E 为 CD 的中点.

所以 $AB=BC=CD=AD=1$，$CE=DE=\frac{1}{2}$.

因为 BP 的长度为 x，所以 $CP=1-x$.

所以 $S_{\triangle APE}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CPE}-S_{\triangle ADE}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(1-x)\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1$,

即 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

此处 $BP\geqslant 0, PC\geqslant 0$，即 $x\geqslant 0, 1-x\geqslant 0$，所以自变量 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant 1$.

（2）因为三角形 APE 的面积为 0.25，

所以 $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=0.25$. 解得 $x=1$.

也就是当点 P 与点 C 重合，点 P 运动的路程为 1 时，三角形 APE 的面积为 0.25.

解法提醒

对于点运动所构成的图形的周长或面积相关问题的求解思路：

一般**先根据**图形的形状来确定函数表达式（随着点运动范围不同，有时需要分类讨论，建立不同的函数表达式），**再结合**函数表达式进行相关计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用建模思想用函数表达式解生活问题

例 10 某实验中学组织学生到距学校 6 km 的光明科技馆去参观，学生王琳因有事没能乘上学校的校车，于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆．出租车的收费标准如下：

路程	费用 / 元
3 km 以下（含 3 km）	8.00
3 km 以上，每增加 1 km	1.80

（1）写出乘出租车的费用 y（元）与出租车行驶的路程 x（km）之间的函数表达式；

（2）王琳身上仅有 14 元，乘出租车到光明科技馆的车费够不够？

解题秘方： 用“分类思想”列出不同路程的函数表达式．

解：（1）当 $0 < x \leqslant 3$ 时，$y=8$；

当 $x > 3$ 时，$y=1.8(x-3)+8=1.8x+2.6$.

即 $y=\begin{cases}8\ (0 < x \leqslant 3),\\ 1.8x+2.6\ (x > 3).\end{cases}$

（2）当 $x=6$ 时，$y=1.8x+2.6=1.8\times 6+2.6=13.4 < 14$.

所以车费够了．

挑战·高分

解法提醒

分段计费在生活中比较常见，对于具体的数学问题的解决，既需要相关的生活经验，还需要**分类讨论**的思想，至于函数求值，只需要选择正确的表达式和已知变量的值，代入之后通过解方程即可．

详解

求此函数表达式利用的等量关系：

乘出租车费用 = 起步价（3 km 以内）+ 单价 × 超过 3 km 部分的里程，即 $y=8+1.8(x-3)$.

拔尖角度▸ 3 利用图象信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用题

例 11 某仓库调拨一批物资，调进物资共用 8 小时，调进物资 4 小时后同时开始调出物资（调进与调出物资的速度均保持不变），该仓库库存物资 w（吨）与时间 t（小时）之间的函数关系如图 12.1−4 所示，则这批物资从开始调进到全部调出所需要的时间是（　　）

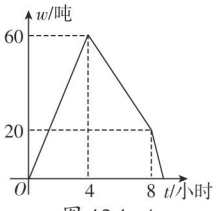


图 12.1−4

A. 8.4 小时　　B. 8.6 小时

C. 8.8 小时　　D. 9 小时

解题秘方： 紧扣“图象上特殊点的坐标表示的两变量的数据”信息，进行相关计算．

解： 由图 12.1−4 可知 4 小时调进物资共 60 吨，平均每小时调进 15 吨，所以 8 小时共调进物资 120 吨；而 4 小时 ~8 小时时间段内共调出物资 120−20=100（吨），平均每小时调出 25 吨，从而调出剩余的 20 吨物资还需要 $20\div 25=0.8$（小时），故这批物资从开始调进到全部调出所需要的时间是 8.8 小时．

答案： C

挑战·高分

解法提醒

本题需要先读懂题意，结合图象从两点的坐标中找出两个等量关系：4 小时一共调进物资 60 吨，8 小时后调进物资共 120 吨且在 4 小时~8 小时时间段内调出物资 120−20=100（吨），然后通过算出调进与调出物资的速度，即可轻松地解决问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 4 利用表格信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用题

例 12 [期中·胶州]我们知道，在弹性限度内，弹簧挂上重物后会伸长，已知一根弹簧的长度（cm）与所挂重物的质量（kg）之间的关系如下表，则下列说法错误的是（　　）

重物的质量 /kg	0	1	2	3	4	5
弹簧的长度 /cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5

A. 在这一变化过程中，重物的质量是自变量，弹簧的长度是函数

B. 当所挂重物的质量是 4 kg 时，弹簧的长度是 14 cm

C. 在弹性限度内，当所挂重物的质量是 6kg 时，弹簧的长度是 16cm

D. 当不挂重物时，弹簧的长度为 12 cm

解题秘方：紧扣“表格中两变量的数据”信息，找出两变量的变化规律.

解：由表格的数据可得：在这一变化过程中，重物的质量是自变量，弹簧的长度是自变量的函数，故选项 A 正确，不合题意；由表中数据知 B、D 正确，不合题意；用排除法，选 C.

答案： C

挑战·高分

解法提醒

解表格反映的两变量的函数关系的应用题，可先从表格中获取自变量的值与它对应的函数值的信息，观察各组对应数值之间的关系，确定函数的变化规律，再判断表外数据是否符合这一规律进行解答.

详解

弹簧的长度(cm)=12+重物的质量(kg)×0.5.

拔尖角度▶ 5 利用情境信息法获取两个变量的函数关系确定其图象

例 13 如图 12.1–5 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，P 为正方形边上一动点，沿 $A\to D\to C\to B\to A$ 的路线匀速移动，设 P 点经过的路线长为 x，三角形 APD 的面积为 y，则能大致反映 y 与 x 的函数关系的是图 12.1–6 中的（　　）

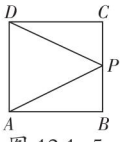


图 12.1–5

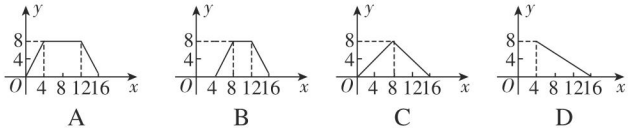


图 12.1–6

解题秘方：紧扣动点 P 运动路线长 x 与三角形 APD 的面积 y 的变化规律信息，结合各选项的图象进行辨识.

解：当动点 P 从点 A 向 D 运动时，点 A，D，P 在一条直线上，即 $y=0$；当点 P 在 DC 上运动时，三角形 ADP 的底 AD 不变，y 随着 x 的增大而增大；当点 P 在 CB 上运动时，根据“同底等高的三角形面积相等”，知 y 不变；当点 P 在 BA 上运动时，三角形 ADP 的底 AD 不变，y 随着 x 的增大而减小，据此应选 B.

答案： B

挑战·高分

技巧点拨

判断函数图象时应从以下几方面分析：

1. 看图象的升降趋势，当函数随着自变量的增加而增加时，图象呈上升趋势，反之，呈下降趋势；
2. 看图象的曲直，函数随着自变量的变化而均匀变化的，图象是直线，函数随着自变量的变化而不均匀变化的，图象是曲线；
3. 表示函数不随自变量的变化而变化时，函数图象与横轴平行（或在横轴上）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

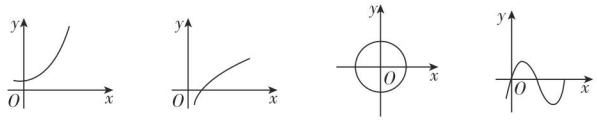
点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考点有：常量、变量与对函数的认识，求函数表达式及确定函数表达式中自变量的取值范围，试题多以选择题、填空题的形式出现，难度适中.

三年中考兵法

考法1 利用函数的定义在平面直角坐标系中辨别函数

例14 [中考·泸州]下列曲线（如图12.1-7）不能表示y是x的函数的是（　　）



A　　B　　C　　D

图12.1-7

试题评析： 考查了函数的概念，理解函数的定义是解决本题的关键.

解： 当给x一个值时，y有唯一的值与其对应，就说y是x的函数，x是自变量. 选项C中的曲线，不满足对于自变量的每一个确定的值，函数值有且只有一个与之对应，即单对应，故C中曲线不能表示y是x的函数. 故选C.

答案： C

考法2 利用定义法求自变量的取值范围

例15 [中考·恩施州]函数$y=\frac{1}{x-3}+\sqrt{x-1}$的自变量$x$的取值范围是（　　）

A.$x\geqslant 1$　　B.$x\geqslant 1$且$x\neq 3$

C.$x\neq 3$　　D.$1\leqslant x\leqslant 3$

试题评析： 本题考查了函数自变量的取值范围，掌握被开方数是非负数，分母不能为零是解题的关键.

解： 由题意，得$x-1\geqslant 0$且$x-3\neq 0$,

解得$x\geqslant 1$且$x\neq 3$.

答案： B

考法3 利用函数图象确定函数表达的实际意义

例16 [中考·丽水]在同一条道路上，甲车从A地到B地，乙车从B地到A地，乙车先出发，图12.1-8中的折线段表示甲、乙两车之间的距离y（千米）与行驶时间x（小时）的函数关系的图象，下列说法错误的是（　　）

冲刺·满分

思路点拨

理解函数的定义，在直角坐标系中，对于自变量在允许取值范围内每确定一个数，在曲线上表示y的点是否有唯一值与之对应；若对应的y值只有一个，则该曲线表示y是x的函数，否则就不是.

解法提醒

求自变量取值范围的过程，其实就是解不等式（组）的过程，当函数表达式中含有分式或二次根式时，要注意分母不为零或被开方数为非负数.

技巧点拨

1. 从函数图象中获取信息时要做到：

（1）看清横、纵坐标各表示哪个量，这一变化过程属于哪种变化；

（2）从左向右，分析每段图象上，自变量和函

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. 乙车先出发的时间为 0.5 小时

B. 甲车的速度是 80 千米/时

C. 甲车出发 0.5 小时后两车相遇

D. 甲车到 B 地比乙车到 A 地早$\frac{1}{12}$小时

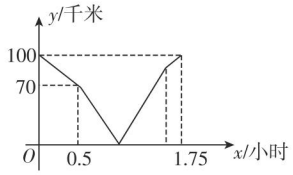


图 12.1−8

试题评析：本题考查了利用函数的图象解决实际问题，解决本题的关键是正确理解函数图象横、纵坐标表示的意义，理解问题的过程，就能够通过图象解决相应的问题.

解：A. 由图象横坐标可得，乙车先出发的时间为 0.5 小时，故 A 选项正确；

B. 因为乙车先出发 0.5 小时，行驶路程为（100−70）千米，所以乙车的速度为 60 千米/时，故乙车行驶全程所用时间为$\frac{100}{60}=1\frac{2}{3}$（小时），由最后时间为 1.75 小时，可得乙车先到达 A 地，故甲车整个过程所用时间为 1.75−0.5=1.25（小时），故甲车的速度为$\frac{100}{1.25}=80$（千米/时），故 B 选项正确；

C. 由以上所求可得，甲车出发 0.5 小时后行驶距离为 40 千米，乙车行驶的距离为 60 千米，40+60=100（千米），此时两车相遇，故 C 选项正确；

D. 由以上所求可得，乙车到 A 地比甲车到 B 地早$1.75-1\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$（小时），故 D 选项错误.

答案：D

考法 4 利用函数图象确定函数表达的几何意义

例17 [中考·绍兴]均匀地向一个容器内注水，最后把容器注满，在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图 12.1−9 所示（图中 $OABC$ 为折线），这个容器的形状可以是图 12.1−10 中的（　　）

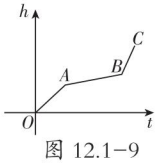


图 12.1−9



图 12.1−10

试题评析：此题考查函数图象的应用，需注意容器粗细和水面高度变化的关联.

解：注水速度一定，函数图象的走势是稍陡、平、陡，那么水面升高的速度就相应地变化，跟所给容器的粗细有关，则容器相应的排列顺序就为 D.

答案：D

数值如何变化；

（3）了解平行于横轴的线段，自变量在变，函数值不变.

2. 从函数图象中获取信息时应注意三点：

其一是函数的最大值或最小值；

其二是随着自变量的值逐渐增加时，函数值是增加了还是减少了，还是不变（变化趋势）；

其三是观察图象是否是几种变化情况的组合，以便分情况讨论变化规律.

思路点拨

认识图象的信息要明确：

1. 匀速对应的是直线；
2. 变速对应的是曲线；
3. 由快变慢曲线上升幅度逐渐平缓，由慢变快曲线上升幅度逐渐陡峭.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [模拟·长乐]在三角形ABC中，它的底边长是a，底边上的高是h，则三角形面积$S=\frac{1}{2}ah$，当a为定长时，在此式中（　　）

A.S，h是变量，$\frac{1}{2}$，a是常量

B.S，h，a是变量，$\frac{1}{2}$是常量

C.a，h是变量，$\frac{1}{2}$，S是常量

D.S是变量，$\frac{1}{2}$，a，h是常量

2. [期末·慈溪]在国内投寄平信应付邮资如下表：

信件质量p/克	$0<p\leqslant 20$	$20<p\leqslant 40$	$40<x\leqslant 60$
邮资q/元	1.20	2.40	3.60

下列表述：

①若信件质量为27克，则邮资为2.40元；

②若邮资为2.40元，则信件质量为35克；

③p是q的函数；

④q是p的函数．其中正确的是（　　）

A. ①④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②③④

3. [中考·赤峰]能使式子$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}$成立的x的取值范围是（　　）

A.$x\geqslant 1$　　B.$x\geqslant 2$

C.$1\leqslant x\leqslant 2$　　D.$x\leqslant 2$

4. [月考·荣昌]以等腰三角形底角的度数x（单位：度）为自变量，顶角的度数y（单位：度）为因变量的函数关系式为（　　）

A.$y=180-2x$（$0<x<90$）

B.$y=180-2x$（$0<x\leqslant 90$）

C.$y=180-2x$（$0\leqslant x<90$）

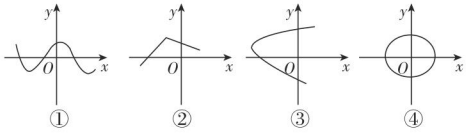
D.$y=180-2x$（$0\leqslant x\leqslant 90$）

5. 若函数$y=\begin{cases}x^2+2, & x\leqslant 2,\\ 2x, & x>2,\end{cases}$则当函数值$y=8$时，自变量$x$的值是（　　）

A.$\pm\sqrt{6}$　　B.4

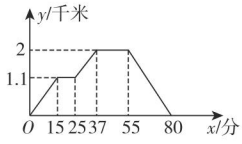
C.$\pm\sqrt{6}$或4　　D.4或$-\sqrt{6}$

6. 下列图象中，表示y是x的函数的个数是（　　）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. [中考·邵阳]如图所示的函数图象反映的过程是：小徐从家去菜地浇水，又去玉米地除草，然后回家．其中x表示时间，y表示小徐离开他家的距离，读图可知菜地离小徐家的距离为（　　）

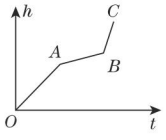


（第7题）

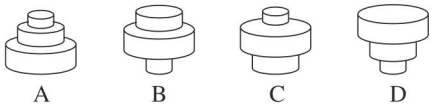
A.1.1千米　　B.2千米

C.15千米　　D.37千米

8. [中考·济宁]匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满．在注水过程中，水面高度h随时间t的变化规律如图所示（图中$OABC$为一折线）．这个容器的形状可以是（　　）【导学号：7769929】



（第8题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，长方形的长是 16，宽为 x，周长为 y，面积为 S.

（1）写出 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）写出 S 与 x 之间的函数表达式；

（3）当 $S=160$ 时，x 等于多少？ y 等于多少？

（4）当 x 增加 2 时，y 增加多少？ S 增加多少？



（第 9 题）

10. 已知函数 $y=3x+1$.

（1）试判断点 $A(-1, 2)$ 和 $B\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ 是否在此函数的图象上.

（2）已知点 $(-a, a-1)$ 在此函数图象上，求 a 的值.

11. 一个小球由静止开始从一个斜坡上向下滚动，滚动的距离 s（m）与时间 t（s）之间的函数表达式为 $s=2t^2$（$t \geqslant 0$）. 通过仪器观察得到小球滚动的距离 s（m）与时间 t（s）的数据如下表：

时间 t/s	0	1	2	3	…
距离 s/m					…

（1）根据表达式完成上表，并画出函数图象；

（2）当小球滚动 6.5 s 时，其滚动的距离是多少？

（3）经过多少秒时，小球滚动 128 m？

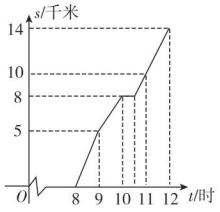
12. 一名旅行者在早晨 8 时从城市出发去乡村，刚开始 1 小时走了 5 千米，然后他上坡，1 小时走了 3 千米，之后休息了 30 分钟，休息后平均每小时走 4 千米，在中午 12 时到达乡村，他离开城市的距离 s（千米）与时间 t（时）之间的函数关系如图所示，根据图象回答：

（1）该旅行者 9 时、10 时 30 分、11 时离开城市的距离分别是多少千米？

（2）他停下来休息时，离开城市的距离是多少千米？

（3）乡村离城市有多少千米的路程？

（4）求旅行者离开城市 6 千米时的时间.



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.2 一次函数

核心知识

- 一次函数的定义
- 一次函数的图象及性质
- 待定系数法求一次函数表达式
- 一次函数与方程或不等式的关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 一次函数的定义

1. 定义： 一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的函数，叫做一次函数．其中，当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 就成为 $y=kx$（k 为常数，且 $k\neq0$），形如 $y=kx$（k 为常数，且 $k\neq0$）的函数叫做正比例函数．

2. 一次函数与正比例函数的关系：

（1）正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）是一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）中 $b=0$ 的特例，即正比例函数都是一次函数，但一次函数不一定是正比例函数．

（2）若已知 y 与 x 成正比例，则可设函数表达式为 $y=kx$（$k\neq0$）；若已知 y 是 x 的一次函数，则可设函数表达式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）．

提分·必记

特别提醒

1. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的结构特征：
(1) $k\neq0$；
(2) 自变量 x 的次数是 1；
(3) 常数项 b 可以是任意实数．
2. 函数是一次函数⇔函数表达式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）．

拔考向▸利用一次函数定义解涉及一次函数的应用

题型 1：一次函数的定义在辨识中的应用

例 1 下列函数中，哪些是一次函数，哪些又是正比例函数？

（1）$y=-2x^2$；（2）$y=\dfrac{x+1}{2}$；（3）$y=3x^2-x(3x-2)$；

（4）$y=1-x^2$；（5）$y=-\dfrac{3}{x}$．

解题秘方： 紧扣一次函数和正比例函数的定义的结构特征进行识别．

解：（1）因为 x 的次数是 2，所以 $y=-2x^2$ 不是一次函数．

（2）因为 $y=\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$，

所以 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 是一次函数，但不是正比例函数．

（3）因为 $y=3x^2-x(3x-2)=2x$，$k=2$，$b=0$，

所以它是一次函数，也是正比例函数．

（4）因为 x 的次数是 2，所以 $y=1-x^2$ 不是一次函数．

（5）因为 $y=-\dfrac{3}{x}$ 中 $-\dfrac{3}{x}$ 不是整式，不符合 $y=kx+b$ 的形式，所以它不是一次函数．

综上所述，（2）（3）是一次函数，（3）是正比例函数．

提分·秘诀

技巧点拨

判断函数是否为一次函数的方法：

先看函数表达式是否是整式的形式，再将函数表达式进行恒等变形，然后看它是否符合一次函数表达式 $y=kx+b$ 的结构特征：

（1）$k\neq0$；

（2）自变量 x 的次数为 1；

（3）常数项 b 可以为任意实数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：一次函数的定义在求字母值中的应用

例 2 ［原创易错题］已知函数 $y=(n^2-4)x^2+(2n-4)x^{m-2}-(m+n-8)$.

（1）当 m，n 为何值时，函数是一次函数？

（2）如果函数是一次函数，计算当 $x=1$ 时的函数值.

解题秘方：紧扣一次函数定义的三个特征及函数值的求法进行求解.

解：（1）由题意，得 $\begin{cases} n^2-4=0, \\ m-2=1, \\ 2n-4\neq 0. \end{cases}$ 所以 $m=3$，$n=-2$.

所以当 $m=3$，$n=-2$ 时，函数是一次函数.

（2）由（1）得此一次函数表达式为 $y=-8x+7$.

当 $x=1$ 时，$y=-8\times 1+7=-1$.


点拨微课堂

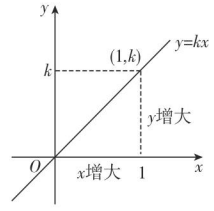
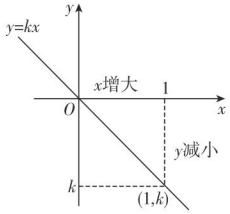
特别提醒

根据一次函数定义求待定字母的值时，要注意：

1. 函数表达式是自变量的一次式，若含有一次以上的项，则其系数必为 0；
2. 注意隐含条件：一次项的系数不为 0.

知识▶ 2 正比例函数的图象及性质

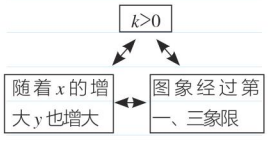
正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象及性质如下表：

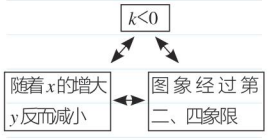
	$k>0$	$k<0$
图象		
图象形状	过原点，从左向右是上升的直线（↗）	过原点，从左向右是下降的直线（↘）
经过的象限	第一、三象限	第二、四象限
增减性	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小

提分·必记

特别提醒

对于正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$），k 的符号、图象所经过的象限、函数的增减性这三者，知其一则知其二，即





技考向▶ 正比例函数的图象及性质的应用

题型 1：利用正比例函数图象的特征画正比例函数的图象

例 3 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=5x$，$y=x$ 的图象.

解题秘方：按“两点法：（0,0）和（1，k）”作图.

解：列表：

x	0	1
$y=5x$	0	5
$y=x$	0	1

描点、连线，如图 12.2-1 所示.

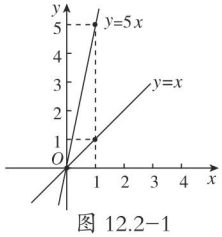


图 12.2-1

提分·秘诀

解法提醒

1. 画正比例函数图象时，要视具体情况尽量选取“整数点”，不一定必须选取点（1，k）.
2. 一般情况下，画正比例函数图象时要体现直线是向两方无限延伸的，不要画成线段或射线，若自变量有范围限制，则要依据端点情况进行适当调整.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：利用正比例函数的图象与性质比较函数值的大小

例 4 [中考·珠海]已知函数 $y=3x$ 的图象经过点 $A(-1, y_1)$，点 $B(-2, y_2)$，则 y_1_____y_2（填“>”“<”或“=”）.

解：方法一：把点 A、点 B 的坐标分别代入 $y=3x$，

当 $x=-1$ 时，$y_1=3\times(-1)=-3$；

当 $x=-2$ 时，$y_2=3\times(-2)=-6$.

因为 $-3>-6$，所以 $y_1 > y_2$.

方法二：画出正比例函数 $y=3x$ 的图象，在函数图象上标出点 A、点 B，如图 12.2-2，观察图象，

因为 y_1 在 y_2 的上方，所以 $y_1 > y_2$.

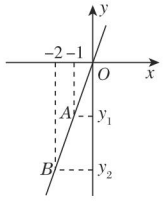


图 12.2-2

方法三：根据正比例函数的增减性来比较函数值的大小. 根据正比例函数的性质，当 $k > 0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

因为 $-1>-2$，所以 $y_1 > y_2$.

答案：>

方法点拨

正比例函数中比较函数值大小的方法：

方法一：求值比较法；

方法二：数形结合思想，用“形”上的点的位置来比较“数”的大小；

方法三：利用函数的增减性来比较大小.

点知识 3 一次函数的图象

1. 一次函数的图象：

一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$.

2. 一次函数的图象与正比例函数的图象的关系：

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象可以由直线 $y=kx$（$k\neq 0$）沿 y 轴向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位长度而得到.

3. 一次函数图象的画法：

（1）**两点法**：由于两点确定一条直线，所以一般选取直线 $y=kx+b$ 与两坐标轴的交点，即 $(0, b)$ 与 $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ 画直线.

（2）**平移法**：一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象，是由直线 $y=kx$ 沿 y 轴向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位长度而得到，反之，直线 $y=kx$ 也可以通过沿 y 轴平移直线 $y=kx+b$ 而得到.

提分·必记

特别提醒

1. $|k|$ 的大小决定直线 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的倾斜程度：$|k|$ 越大，直线与 x 轴相交所成的锐角越大，直线越陡；$|k|$ 越小，直线与 x 轴相交所成的锐角越小，直线越缓.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 截距：直线 $y=kx+b$ 与 y 轴相交于点（0，b），b 叫做直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距，简称截距，如图 12.2−3 所示．

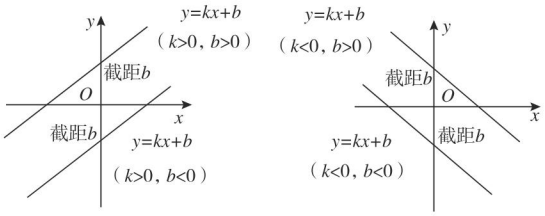


图 12.2−3

2. 截距不是距离，不一定是非负数，也可以是负数．

提分·秘诀

解法提醒

画一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象，若 $b\neq0$，通常选取该直线与 y 轴的交点（横坐标为 0 的点）和与 x 轴的交点（纵坐标为 0 的点），由两点确定一条直线得一次函数的图象．

核心考向▶利用一次函数图象及作法解直线问题

题型 1：“两点法”在画一次函数图象中的应用

例 5 在同一平面直角坐标系中，作出下列函数的图象：

（1）$y_1=2x-1$；（2）$y_2=2x$；（3）$y_3=2x+2$.

然后观察图象，你能得到什么结论？

解题秘方：按“两点法”的作图步骤作图．

解：列表如下：

x	0	1
y_1	−1	1

x	0	1
y_2	0	2

x	0	1
y_3	2	4

描点、连线，即可得到它们的图象，如图 12.2−4.

从图象中我们可以看出：它们是一组互相平行的直线，原因是这组函数的表达式中 k 的值都是 2.

结论：一次函数中的 k 值相等（b 值不相等）时，其图象是一组互相平行的直线．它们可以通过互相平移得到．

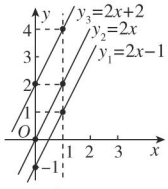


图 12.2−4

一次函数图象的画法

题型 2：一次函数的图象在求面积中的应用

例 6 设直线 $y=-\frac{x}{2}-3$ 与 x 轴的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，画出函数图象并求 $S_{\text{三角形}AOB}$.

解题秘方：紧扣直线与两坐标轴的交点进行解答．

解：当 $x=0$ 时，$y=-3$，

所以点 B 的坐标为（0，−3）；

当 $y=0$ 时，$x=-6$，

所以点 A 的坐标为（−6，0）．

画出函数图象如图 12.2−5.

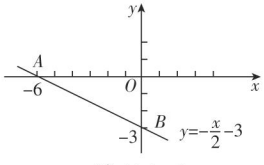


图 12.2−5

由图象可知，$OA=|-6|=6$，$OB=|-3|=3$，

所以 $S_{\text{三角形}AOB}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$.

方法提醒

直角坐标系中图形面积的计算方法：

计算直角坐标系中图形面积的方法是先利用点的坐标求出线段的长，然后根据面积公式求图形的面积．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：一次函数图象的平移规律在求函数表达式中的应用

例 7 ［模拟·陕西］在平面直角坐标系中，将直线 l_1：$y=-3x-2$ 向左平移 1 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度得到直线 l_2，则直线 l_2 的表达式为（　　）

A. $y=-3x-9$　　B. $y=-3x-2$

C. $y=-3x+2$　　D. $y=-3x+9$

解题秘方：紧扣“平移规律：上加下减、左加右减”进行求解.

解：将直线 $y=-3x-2$ 向左平移 1 个单位长度得

直线 $y=-3(x+1)-2$，即 $y=-3x-5$，

再向上平移 3 个单位长度，即将直线 $y=-3x-5$ 向上平移 3 个单位长度，得直线 $y=-3x-5+3$，即 $y=-3x-2$.

答案：B

注：上述两次平移可合写一步为：$y=-3(x+1)-2+3$，即 $y=-3x-2$.

特别警示：“上加下减（只改变 b），左加右减（只改变 x）”这种平移规律，是函数表达式的变化规律，不要将其与点的平移与坐标的变化规律相混淆，点的平移与坐标的变化规律是：上加下减，左减右加.

提分·秘诀

详解

“左加右减（只改变 x）”即向左平移 1 个单位长度，只需将 x 变成 (x+1)，其余都不变.

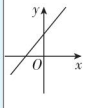
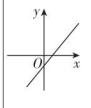
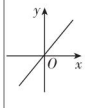
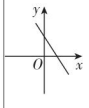
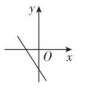
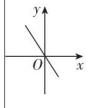
点拨微课堂

详解

“上加下减（只改变 b）”即向上平移 3 个单位长度，只需将 b 加 3，题中的 (−5+3)，其余都不变.

点知识 4 一次函数的性质

一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，且 $k\neq 0$）的性质和 k，b 的符号的关系：

一次函数	$y=kx+b$（$k\neq 0$）					
k，b 的符号	$k>0$			$k<0$		
	$b>0$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$b<0$	$b=0$
图象的位置						
增减性	y 随 x 的增大而增大			y 随 x 的增大而减小		
与 y 轴交点的位置	正半轴	负半轴	原点	正半轴	负半轴	原点

提分·必记

特别提醒

1. 由 k，b 的符号可以确定直线 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）所经过的象限；反之，由直线 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）所经过的象限也可以确定 k，b 的符号.
2. k 决定一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的增减性，b 决定函数图象与 y 轴的交点位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用一次函数的图象与性质解相关问题

题型1：一次函数的增减性在比较函数值大小中的应用

例8 已知直线 l_1 和直线 l_2 在同一平面直角坐标系中的位置如图 12.2-6，点 $P_1(x_1, y_1)$ 在直线 l_1 上，点 $P_3(x_3, y_3)$ 在直线 l_2 上，点 $P_2(x_2, y_2)$ 为直线 l_1，l_2 的交点，其中 $x_2<x_1$，$x_2<x_3$，则（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$　　C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

解题秘方： 紧扣函数的增减性求解.

解： 观察直线 l_1，知 y 随 x 的增大而减小.

因为 $x_2<x_1$，所以 $y_2>y_1$.

观察直线 l_2，知 y 随 x 的增大而增大.

因为 $x_2<x_3$，所以 $y_2<y_3$，所以 $y_1<y_2<y_3$.

答案： A

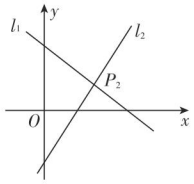


图 12.2-6

提分·秘诀

解法提醒

对于一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 来说：

k 的符号，函数图象的上升或下降趋势，函数的增减性这三者有如影随形的关系，知其一，便可知其他两种特性. 即：

$k>0$（$k<0$）⇔ 直线趋势上升（下降）

⇘　⇙

y 随 x 增大而增大（减小）

题型2：一次函数的增减性及图象与 y 轴的交点位置在求字母范围中的应用

例9 已知一次函数 $y=(6+3m)x+(m-4)$，y 随 x 的增大而增大，函数的图象与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上，求 m 的取值范围.

解题秘方： 紧扣“k，b 的符号与函数的增减性及图象的位置关系”解答.

解： 根据题意，得 $\begin{cases}6+3m>0,\\ m-4<0.\end{cases}$ 解得 $-2<m<4$.

所以 m 的取值范围是 $-2<m<4$.

详解

由 y 随 x 的增大而增大可得 $k>0$，即 $6+3m>0$.

由函数的图象与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知 $b<0$，即 $m-4<0$.

注意：以上情况，反之亦成立.

知识点▶5 用待定系数法确定一次函数表达式

1. 定义：

先设出待求的函数表达式，再根据条件确定表达式中未知的系数，从而得出函数表达式的方法，叫做待定系数法.

2. 一般步骤：

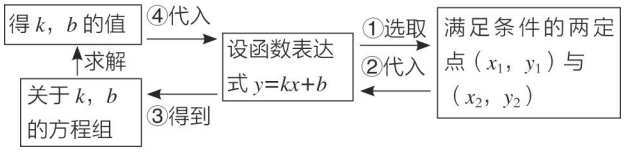
（1）**设：** 设出含有待定系数的函数表达式；

（2）**代：** 把已知条件中的自变量与函数的对应值代入函数表达式，列出关于待定系数的方程（组）；

（3）**解：** 解方程（组），求出待定的系数；

（4）**回代：** 将求得的待定系数的值代回所设的表达式.

上面的步骤可表示如下：



提分·必记

特别提醒

1. 用待定系数法求函数表达式时，要先判断函数是哪一类函数，然后才能设出所求函数的表达式.
2. 在正比例函数 $y=kx$ 中，只有一个待定系数 k，只需要一个除（0，0）外的条件即可求出 k 的值；在一次函数 $y=kx+b$ 中，有两个待定系数 k，b，因而需要两个条件才能求出 k 和 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶待定系数法在求一次函数表达式中的应用

例 10 ［中考·陕西］根据下表中一次函数的自变量 x 与函数 y 的对应值，可得 p 的值为（　　）

x	-2	0	1
y	3	p	0

A.1　　B.-1　　C.3　　D.-3



解题秘方：紧扣待定系数法求函数表达式的步骤求解．

解：设一次函数表达式为 $y=kx+b$，由表中对应值可知，当 $x=-2$ 时，$y=3$，当 $x=1$ 时，$y=0$，

由此得到$\begin{cases}-2k+b=3,\\k+b=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

所以一次函数表达式为 $y=-x+1$.

当 $x=0$ 时，$y=(-1)\times0+1=1$，即 p 的值为 1.

答案：A

提分·秘诀

解法提醒

确定一次函数的表达式除了用**待定系数法**（点的坐标与表达式的关系法）外，还可以通过**平移法**（两直线的位置关系法）求解，即通过平移，说明 k 相等，及平移规律确定 k，b 的值．

点知识▶6 建立一次函数模型解实际应用题

利用一次函数解决实际问题，关键是找到题目中的两个变量之间的数量关系，把实际问题抽象、升华为一次函数模型，即建模，再利用一次函数的相关性质解决实际问题，常见类型如下：

（1）题目中已知一次函数的表达式，可直接运用一次函数的性质求解．

（2）题目中没有给出一次函数的表达式，而是通过语言、表格或图象给出一次函数的情境，这时需要先根据题目给出的信息求出一次函数的表达式，再利用一次函数的性质解决实际问题．

提分·必记

特别提醒

应用一次函数解决实际问题的关键是建立一次函数模型，同时注意实际问题中自变量的取值范围要使实际问题有意义．

拔考向▶利用建立一次函数模型解生活中的实际应用题

题型 1：建立一次函数模型在表格情境中的应用

例 11　世界上大部分国家都使用摄氏温度（℃）计量法，但美、英等国的天气预报仍然使用华氏温度（℉）计量法，两种计量法之间有如下的对应关系：

摄氏温度 x/℃	0	10	20	30	40	50
华氏温度 y/℉	32	50	68	86	104	122

（1）猜想 y 与 x 之间的函数关系．

（2）确定 y 与 x 之间的函数表达式，并加以检验．

（3）0℉ 时的温度对应多少摄氏度？

（4）华氏温度的值与对应的摄氏温度的值有相等的可能吗？如果没有相等的可能，请说明理由，如果有相等的可能，请写出此时的值．

解题秘方：紧扣一次函数的性质及待定系数法求表达式的方法求解．

提分·秘诀

解法提醒

在利用一次函数解决实际问题时，要先判断问题中的两个变量之间是不是一次函数关系，若是一次函数关系，再根据表格中提供的信息确定出函数表达式，并解决问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）观察表格中的对应数据的特征可知：摄氏温度每增加10℃，华氏温度就增加18°F，因此猜想 y 与 x 之间是一次函数关系．

（2）设 $y=kx+b$（$k\neq0$），把 $x=0$，$y=32$ 和 $x=10$，$y=50$ 代入，得 $\begin{cases}b=32,\\10k+b=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{9}{5},\\b=32,\end{cases}$ 所以 $y=\dfrac{9}{5}x+32$. 经检验，$x=20$，$y=68$；$x=30$，$y=86$；$x=40$，$y=104$；$x=50$，$y=122$ 均能满足上述表达式，所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\dfrac{9}{5}x+32$.

（3）当 $y=0$ 时，$\dfrac{9}{5}x+32=0$，解得 $x=-\dfrac{160}{9}$，

所以 0°F 时的温度对应 $-\dfrac{160}{9}$℃．

（4）有．当 $y=x$ 时，$x=\dfrac{9}{5}x+32$，得 $x=-40$.

所以当华氏温度为 −40°F 时，摄氏温度为 −40℃．

题型 2：建立一次函数模型在语言情境中的应用

例 12 在正常情况下，一个人在运动时所能承受的每分钟心跳的最高次数 s（次）是这个人年龄 n（岁）的一次函数．

（1）根据图 12.2-8 ①中所提供的信息，求在正常情况下，s 关于 n 的函数表达式．

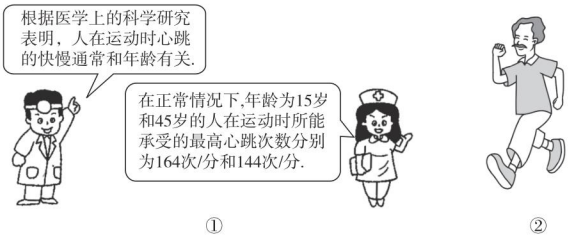


图 12.2-8

（2）如图 12.2-8 ②所示，若一位 63 岁的老人在跑步，医生在途中给他测得 10 秒钟的心跳为 26 次，问：他此时是否有危险？为什么？

解题秘方：紧扣待定系数法求函数表达式的方法及自变量值与函数值的关系求解．

解：（1）设 s 关于 n 的函数表达式为 $s=kn+b$（$k\neq0$）．

由题意，得 $\begin{cases}15k+b=164,\\45k+b=144,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{2}{3},\\b=174.\end{cases}$

所以 s 关于 n 的函数表达式为 $s=-\dfrac{2}{3}n+174$.

（2）有危险，理由如下：当 $n=63$ 时，$s=-\dfrac{2}{3}\times63+174=132$. 而现在这位老人每分钟的心跳是 $26\div10\times60=156$（次）>132 次．因此，他此时有危险．

另解

先根据表中的数据特点建立适当的平面直角坐标系．

如图 12.2-7 所示，以表中对应值为坐标的点大致分布在一条直线上，据此，可猜想 y 与 x 之间的函数关系为一次函数关系．

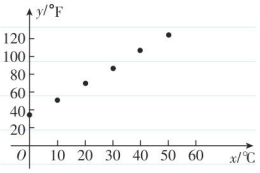


图 12.2-7

解法提醒

1. 根据图中的信息，利用待定系数法确定函数表达式，当已知自变量的取值时，利用函数表达式便可求出相对应的函数值．
2. 将实际问题抽象成数学问题，用数学知识解决身边的实际问题，体现了学以致用的理念．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：建立一次函数模型在图象情境中的应用

例 13 在一条直线上依次有 A，B，C 三个海岛，某海巡船从 A 岛出发沿直线匀速经 B 岛驶向 C 岛，执行海巡任务，最终到达 C 岛，设该海巡船行驶 x（h）后，与 B 岛的距离为 y（km），y 与 x 的函数关系如图 12.2–8 所示.

（1）A，C 两岛间的距离为_____km，a=_____；

（2）求 y 与 x 的函数关系式，并解释图中点 P 的坐标所表示的实际意义；

（3）在 B 岛有一不间断发射信号的信号发射台，发射的信号覆盖半径为 15 km，求该海巡船能接收到该信号的时间有多长.

解题秘方： 结合图象信息用待定系数法求函数的关系式.

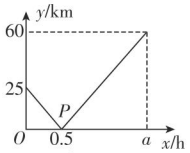


图 12.2–9

（1）**解：** 由图 12.2–9 可知，A，B 两岛间的距离为 25 km，B，C 两岛间的距离为 60 km，

所以 A，C 两岛间的距离为 25+60=85（km），

海巡船的速度为 25÷0.5=50（km/h），

所以 a=85÷50=1.7.

答案： 85；1.7

（2）**解：** 当 $0 \leqslant x \leqslant 0.5$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

因为函数图象经过点（0，25），（0.5，0），

所以 $\begin{cases} b=25, \\ 0.5k+b=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-50, \\ b=25, \end{cases}$

所以 $y=-50x+25$；

当 $0.5<x \leqslant 1.7$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=mx+n$，

因为函数图象经过点（0.5，0），（1.7，60），

所以 $\begin{cases} 0.5m+n=0, \\ 1.7m+n=60, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=50, \\ n=-25, \end{cases}$

所以 $y=50x-25$；

综上，$y=\begin{cases} -50x+25\ (0 \leqslant x \leqslant 0.5), \\ 50x-25\ (0.5<x \leqslant 1.7). \end{cases}$

点 P 的坐标所表示的实际意义为经过 0.5 h 海巡船到达 B 岛.

（3）**解：** 由 $-50x+25=15$，解得 $x=0.2$.

由 $50x-25=15$，解得 $x=0.8$.

0.8−0.2=0.6（h）.

所以该海巡船能接收到该信号的时间为 0.6 h.

技巧点拨

对于有关一次函数图象的应用问题，信息量比较大，因此要从图象中提取出合理信息，过滤掉没用的信息，从中找到求关系式所用的条件，一般采用待定系数法求出一次函数的关系式.

特别警示

在不同自变量取值范围内求出函数关系式后，不要忘了综合在一起.

特别提醒

注意正确理解题意，所求时间应为(0.8−0.2)h，而不是 0.8h.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 7 一次函数与一元一次方程

1. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）与一元一次方程 $kx+b=0$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）的关系：

数： 函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y=0$ 时自变量 x 的值是方程 $kx+b=0$ 的解.

形： 函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标是方程 $kx+b=0$ 的解.

2. 一次函数图象法解一元一次方程的步骤：

（1）**转化：** 将一元一次方程转化为一次函数；

（2）**画图象：** 画出一次函数的图象；

（3）**找交点：** 找出一次函数图象与 x 轴的交点，交点的横坐标即为一元一次方程的解.

拔考向▶ 利用一次函数与一元一次方程的关系解与方程的解相关问题

题型 1：一次函数的图象在解一元一次方程中的应用

例 14 利用函数图象解方程 $3x-2=x+4$.

解题秘方： 紧扣“一次函数图象法解一元一次方程的步骤”求解.

解： 由 $3x-2=x+4$ 得 $2x-6=0$，

令 $y=2x-6$，画函数 $y=2x-6$ 的图象，如图 12.2-10 所示，

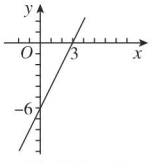


图 12.2-10

由图 12.2-10 可知，直线 $y=2x-6$ 与 x 轴的交点坐标为（3，0），所以 $x=3$.

题型 2：解一元一次方程在确定一次函数图象与坐标轴交点坐标中的应用

例 15 如图 12.2-11，一次函数 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$ 的图象过直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A，试确定 b 的值，并计算两条直线与 y 轴的交点 B，C 和点 A 构成的三角形的面积.

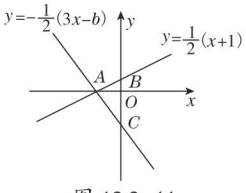


图 12.2-11

提分·必记

特别提醒

1. 求一次函数图象与 x 轴交点的横坐标的实质就是解一元一次方程；也就是说，“数”题可用“形”解，“形”题也可用“数”解.

2. 对于一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$，k，b 为常数），已知 x 的值求 y 的值，或已知 y 的值求 x 的值时，就是把问题转化为关于 y 或 x 的一元一次方程来求解.

提分·秘诀

解法提醒

利用函数图象解一元一次方程时，一般需将方程变形为 $kx+b=0$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）的形式，然后令 $y=kx+b$ 并画出其图象，通过观察直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点的横坐标确定方程的解，此种求解方法对作图的准确性要求较高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“一元一次方程和一次函数间的关系”求解.

解：对于 $y=\frac{1}{2}(x+1)$，设 $y=0$，则 $\frac{1}{2}(x+1)=0$，解得 $x=-1$.

因此直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A 的坐标是 $(-1,0)$.

把 $(-1,0)$ 代入函数表达式 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$，

则 $-\frac{1}{2}\times[3\times(-1)-b]=0$. 解得 $b=-3$.

所以 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)=-\frac{1}{2}(3x+3)$.

直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 y 轴的交点 B 的坐标是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

直线 $y=-\frac{1}{2}(3x+3)$ 与 y 轴的交点 C 的坐标是 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$,

因此 BC 的长度是 $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$.

又易知 $OA=1$，所以三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

解法提醒

1. 一次函数的图象与坐标轴交点的坐标求法：令 $y=0$，解方程即得与 x 轴的交点的横坐标；令 $x=0$，解方程即得与 y 轴的交点的纵坐标.
2. 同一坐标轴上两点间的距离即是横坐标或者纵坐标差的绝对值.

点知识 8 一次函数与一元一次不等式

1. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）与一元一次不等式 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$）（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的关系：

数：函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y>0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集；函数值 $y<0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

形：函数 $y=kx+b$ 的图象中，位于 x 轴上方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集；位于 x 轴下方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

2. 拓展：直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与直线 $y_2=k_2x+b_2$ 的交点的横坐标即为方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$（或 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$）的解集就是直线 $y_1=k_1x+b_1$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2$ 上（或下）方部分对应的 x 的取值范围.

示例：如图 12.2-12 所示，方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解为 $x=a$；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$ 的解集为 $x>a$；不等式 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$ 的解集为 $x<a$.

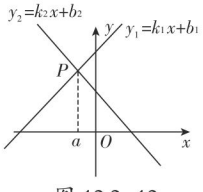


图 12.2-12

提分·必记

特别提醒

利用图象法解一元一次不等式的一般步骤：

1. 将不等式转化为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$（$a\neq0$）的形式；
2. 画出函数 $y=ax+b$（$a\neq0$）的图象并确定函数图象与 x 轴的交点的横坐标；
3. 根据函数图象确定对应不等式的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用一次函数图象法解一元一次不等式

例 16 用画函数图象的方法解不等式 $3x+2>2x-1$.

解题秘方：紧扣“用图象法解一元一次不等式的步骤”求解.

解：方法一：原不等式可化为 $x+3>0$.

画出函数 $y=x+3$ 的图象（如图 12.2-13 所示）.

由图象可以看出，当 $x>-3$ 时，这条直线上的点在 x 轴上方，即此时 $y=x+3>0$.

所以不等式 $3x+2>2x-1$ 的解集为 $x>-3$.

方法二：在同一坐标系中分别画出函数 $y=3x+2$ 与函数 $y=2x-1$ 的图象（如图 12.2-14 所示），可以看出，它们交点的横坐标为 -3.

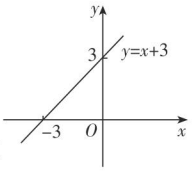


图 12.2-13

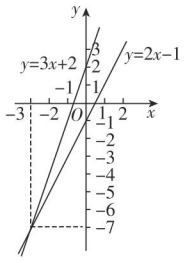


图 12.2-14

当 $x>-3$ 时，对于同一个 x 的值，直线 $y=3x+2$ 上的点在直线 $y=2x-1$ 上相应点的上方，这时 $3x+2>2x-1$，即不等式的解集为 $x>-3$.

提分·秘诀

解法提醒

将不等式转化为函数表达式，画出此函数的图象，观察图象即可求出不等式的解集.

方法点拨

一元一次不等式的图象解法就是把解不等式转化为比较直线上点的位置的高低，能直观地看到怎样用图象来表示不等式的解集，体现了数形结合和转化思想的应用.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用排除法确定一次函数的图象

例 17 两个一次函数 $y_1=ax+b$（$a\neq0$）与 $y_2=bx+a$（$b\neq0$），它们在同一平面直角坐标系中的图象可能是图 12.2-15 中的（　　）

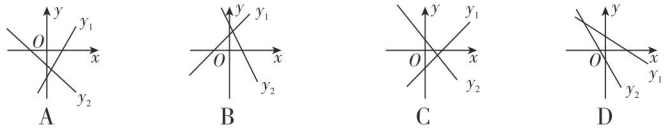


图 12.2-15

解题秘方：紧扣“定义中 k，b 的符号与一次函数图象的关系”求解.

解：选项 A 中，根据 y_1 的图象可知 $a>0$，$b<0$，因此 y_2 的图象应过第一、二、四象限，故选项 A 错误；

选项 B 中，根据 y_1 的图象可知 $a>0$，$b>0$，因此 y_2 的图象应过第一、二、三象限，故选项 B 错误；

选项 D 中，根据 y_1 的图象可知 $a<0$，$b>0$，因此 y_2 的图象应过第一、三、四象限，故选项 D 错误，所以选 C.

点拨微课堂

答案： C

挑战·高分

另解

事实上，对于一次函数 $y_1=ax+b$ 和 $y_2=bx+a$，当 $a>0$，$b>0$ 时，两函数图象均不经过第四象限，选项 A,B,C,D 中的图象均不符合；

当 $a<0$，$b<0$ 时，两函数图象均不经过第一象限，选项 A，B，C，D 中的图象均不符合；

当 $a<0$，$b>0$ 时，两函数图象如图 12.2-16 所示，选项 A，B，C，D 中的图象均不符合；

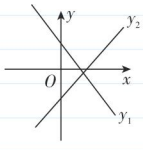


图 12.2-16

当 $a>0$，$b<0$ 时，两函数图象如选项 C 中图象所示. 故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用分类法求涉及三角形面积的一次函数表达式

挑战·高分

例 18 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(3,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，O 为坐标原点，若三角形 AOB 的面积为 6，试求这个一次函数的表达式.

解题秘方： 紧扣点 B 的位置的不确定（在 y 轴正半轴还是负半轴不确定）性进行分类求解.

解： 因为 $A(3,0)$，所以 $OA=3$.

因为直线 $y=kx+b$ 与 y 轴交于点 $B(0,b)$，所以 $OB=|b|$，

所以 $S_{\text{三角形}AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times 3\cdot|b|=6$，所以 $b=\pm 4$.

所以点 B 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$.

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,4)$ 时，

得直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$；

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,-4)$ 时，

得直线 AB 对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{3}x-4$.

综上可知，符合条件的一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 或 $y=\frac{4}{3}x-4$.

技巧点拨

已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积，求直线对应的函数表达式的方法：

先设出直线对应的函数表达式；

再用待定字母表示出直线与两坐标轴的交点坐标，进而求出三角形的底和高（注：这步中要考虑直线与 x 轴、y 轴相交时的位置的不同情况）；

然后利用已知三角形的面积求出待定字母的值；

最后代回所设函数表达式即可.

拔尖角度▶ 3 利用分类法求涉及函数增减性的一次函数的表达式

挑战·高分

例 19 [中考·自贡] 一次函数 $y=kx+b$，当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，则 $\frac{b}{k}$ 的值是_____.

解题秘方： 紧扣“一次函数的增减性”进行分类求解.

解： 由于 k 的符号不能确定，故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行解答.

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

因为当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，

所以当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=4$ 时，$y=6$，

所以 $\begin{cases}k+b=3,\\4k+b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$ 所以 $\frac{b}{k}=2$.

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

因为当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，

所以当 $x=1$ 时，$y=6$；当 $x=4$ 时，$y=3$，

所以 $\begin{cases}k+b=6,\\4k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=7.\end{cases}$ 所以 $\frac{b}{k}=-7$.

答案： 2 或 -7

特别警示

一次函数的增减性与 k 的正负性有关，若 k 的正负性无法确定，则必须分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况讨论，不要漏解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用比较法解一次函数实际应用题

例 20 甲、乙两个商场出售相同的某种商品，每件售价均为 3 000 元，并且多买都有一定的优惠，甲商场的优惠条件是：第一件按原售价收费，其余每件优惠 30%；乙商场的优惠条件是：每件优惠 25%. 设所买商品为 x 件时，甲商场收费为 y_1 元，乙商场收费为 y_2 元.

（1）分别求出 y_1，y_2 与 x 之间的关系式；

（2）当甲、乙两个商场的收费相同时，所买的商品为多少件？

（3）当所买商品为 5 件时，应选择哪个商场更优惠？请说明理由.

解题秘方： 紧扣等量关系求出双函数，用比较函数值法解答相关问题.

解：（1）$y_1=3\,000\times(1-30\%)(x-1)+3\,000=2\,100x+900$（$x$ 为正整数）；

$y_2=3\,000\times(1-25\%)x=2\,250x$（$x$ 为正整数）.

（2）当 $y_1=y_2$ 时，即 $2\,100x+900=2\,250x$，

解得 $x=6$.

所以当甲、乙两个商场的收费相同时，所买的商品为 6 件.

（3）选择乙商场更优惠，理由如下：

当 $x=5$ 时，$y_1=2\,100\times5+900=11\,400$，

$y_2=2\,250\times5=11\,250$，$11\,250<11\,400$，

所以当所买商品为 5 件时，应选择乙商场更优惠.

挑战·高分

详解

本题求解一次函数关系式的等量关系是商场收费 = 商品价格 × 所买商品的件数.

对于甲商场，商品价格为第一件 3 000 元，其余每件 3 000×(1−30%) 元，则收费 $y_1=3\,000\times(1-30\%)(x-1)+3\,000=2\,100x+900$；

对于乙商场，商品价格为每件 3 000×(1−25%) 元，则收费 $y_2=3\,000\times(1-25\%)x=2\,250x$.

特别警示

本题容易出错的地方是求 y_1 时，易忽视 x 减去 1 或者加上 3 000，导致整个解题过程错误.

拔尖角度▸ 5 利用图象信息法解双图象问题的实际应用题

例 21 某单位准备印制一批证书，现有两个印刷厂可供选择，甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，乙厂直接按印刷数量收取印刷费，甲、乙两厂的收费 y（千元）与证书数量 x（千个）的函数关系图象分别如图 12.2−17 中的甲、乙.

（1）请你直接写出甲厂的制版费及 $y_{甲}$ 与 x 的函数表达式，并求出其证书印刷单价.

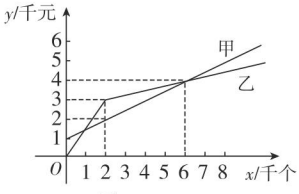


图 12.2−17

（2）当印刷证书 8 千个时，选择哪个印刷厂更节省费用，节省费用多少元？

（3）如果甲厂想让 8 千个证书的印制费用不大于乙厂，在不降低制版费的前提下，每个证书的印刷费最少降低多少元？

解题秘方： 紧扣图象的基本信息结合待定系数法求解.

解：（1）甲厂的制版费为 1 千元，$y_{甲}=\frac{1}{2}x+1$（$x\geqslant0$），

证书印刷单价为 0.5 元.

挑战·高分

详解

如何求甲厂的制版费？

答：甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，当印刷证书数 $x=0$ 时，印刷费为 0，所以甲厂制版费等于印刷证书数 $x=0$ 时 $y_{甲}$ 的值，观察图象可知，当 $x=0$ 时，$y_{甲}=1$，所以甲厂的制版费为 1 千元.

详解

如何求证书印刷单价？

答：观察图象可知，当 $x=2$ 时，$y_{甲}=2$，而甲厂的制版费为 1 千元，所以印 2 千个证书的印刷费为 1 千元，所以证书的印刷单价为 $\frac{1}{2}=0.5$（元）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）当 $x \geqslant 2$ 时，由图象可设 $y_{乙}$ 与 x 的函数表达式为 $y_{乙}=kx+b$（k，b 是常数，$k \neq 0$），将（2，3），（6，4）两点的坐标代入 $y_{乙}=kx+b$，得 $\begin{cases}2k+b=3,\\6k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{4},\\b=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

所以 $y_{乙}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}$.

当 $x=8$ 时，$y_{甲}=\dfrac{1}{2}\times 8+1=5$，

$y_{乙}=\dfrac{1}{4}\times 8+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$，$5-\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}$（千元）$=500$ 元.

故当印刷证书 8 千个时，选择乙厂更节省费用，节省费用 500 元.

（3）设甲厂每个证书的印刷费最少降低 a 元，

由题意，得 $8\,000a=500$. 所以 $a=0.062\,5$.

故每个证书的印刷费最少降低 0.062 5 元.

解法提醒

用一次函数解决实际问题的策略：

一要利用好图表中的信息；

二要采用待定系数法求出函数表达式；

三要注意分段函数的应用；

四要注意自变量在不同阶段的取值范围.

拔尖角度▸ 6 利用建模法解实际应用问题

挑战·高分

例 22 某家电集团公司生产某种型号的新家电，前期投资 200 万元，每生产一台这种新家电，后期还需其他投资 0.3 万元，已知每台新家电可实现产值 0.5 万元.

（1）分别求总投资额 y_1（万元）和总利润 y_2（万元）关于新家电的总产量 x（台）的函数表达式；

（2）当新家电的总产量为 900 台时，该公司的盈亏情况如何？

（3）请你利用（1）中 y_2 与 x 的函数表达式，分析该公司的盈亏情况.

知识储备

总投资 = 前期投资 + 后期其他投资，

总利润 = 总产值 − 总投资.

解题秘方： 紧扣题中的数量关系列出函数表达式，再结合方程、不等式求解.

解：（1）根据题意，得 $y_1=0.3x+200$（$x \geqslant 0$），

$y_2=0.5x-(0.3x+200)=0.2x-200$（$x \geqslant 0$）.

（2）把 $x=900$ 代入 $y_2=0.2x-200$，

可得 $y_2=0.2\times 900-200=-20<0$，

所以当总产量为 900 台时，公司会亏损，亏损额为 20 万元.

（3）根据题意，当 $0.2x-200<0$ 时，解得 $x<1\,000$.

又因为 $x \geqslant 0$，所以 $0 \leqslant x < 1\,000$.

说明总产量大于或等于 0 台且小于 1 000 台时，公司会亏损；

当 $0.2x-200>0$ 时，解得 $x>1\,000$，

说明总产量大于 1 000 台时，公司会盈利；

当 $0.2x-200=0$ 时，解得 $x=1\,000$，

说明总产量等于 1 000 台时，公司既不亏损也不盈利.

图解

如图 12.2-18 所示是 y_2 与 x 的函数图象，由函数图象可直接得到：

当 $0 \leqslant x<1\,000$ 时，$y_2<0$；

当 $x>1\,000$ 时，$y_2>0$；

当 $x=1\,000$ 时，$y_2=0$.

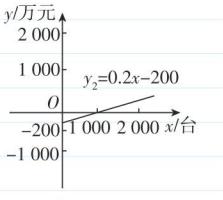


图 12.2-18

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的考点主要有：（1）一次函数的图象及性质，主要考查根据函数图象判断系数的取值范围或根据系数确定函数图象，题型有选择题、填空题和解答题；（2）确定函数的表达式，主要考查待定系数法求一次函数的表达式，题型有选择题、填空题和解答题；（3）一次函数的实际应用，主要考查综合运用一次函数的图象和性质解决实际问题，题型以解答题为主.

三年中考兵法

考法 1 利用代数式的相关概念解一次函数图象的位置问题

例 23 [中考·雅安]若式子$\sqrt{k-1}+(k-1)^0$有意义，则一次函数 $y=(1-k)x+k-1$ 的图象可能是图 12.2-19 中的（　　）

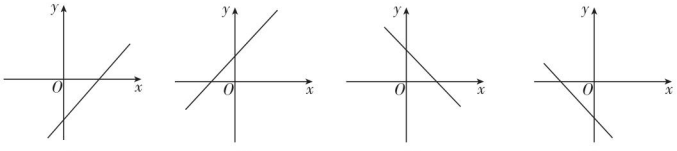


图 12.2-19

试题评析：本题考查的是一次函数的图象，熟知一次函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

解：因为式子$\sqrt{k-1}+(k-1)^0$有意义，

所以$\begin{cases}k-1\geqslant 0,\\ k-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $k>1$.

所以 $1-k<0$，$k-1>0$.

所以一次函数 $y=(1-k)x+k-1$ 的图象过第一、二、四象限.

答案：C

冲刺·满分

解法提醒

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象的位置是由 k，b 的符号决定的，因此本题先求出 k 的取值范围，再判断出 $1-k$ 及 $k-1$ 的符号，进而可得出结论.

考法 2 利用一次函数的图象和性质求含绝对值的函数的性质

例 24 [中考·咸宁]小慧根据学习函数的经验，对函数 $y=|x-1|$ 的图象与性质进行了探究，下面是小慧的探究过程，请补充完成：

（1）函数 $y=|x-1|$ 的自变量 x 的取值范围是_____；

（2）列表，找出 y 与 x 的几组对应值.

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	b	1	0	1	2	…

其中，b=_____；

（3）在平面直角坐标系 xOy 中（如图 12.2-20），描出以上表中各对对应值为坐标的点，并画出该函数的图象；

解法提醒

解答本题也可以根据绝对值的意义，将函数 $y=|x-1|$ 转化为 $y=\begin{cases}x-1(x\geqslant 1),\\ -x+1(x<1)\end{cases}$ 这样的**分段函数**来解答，即将含绝对值的函数的问题转化为一次函数问题来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）写出该函数的一条性质：_____.

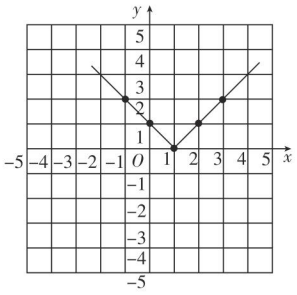


图 12.2−20

试题评析：本题考查的是含绝对值的函数的性质，画函数的图象，利用数形结合求解是解此题的关键.

（1）**解：**因为 x 无论为何值，函数均有意义，所以 x 为任意实数.

答案：任意实数

（2）**解：**因为当 $x=-1$ 时，$y=|-1-1|=2$，所以 $b=2$.

答案：2

（3）**解：**如图 12.2−20 所示.

（4）**解：**由函数图象可知，函数的最小值为 0.

答案：函数的最小值为 0（答案不唯一）

另解

当 $x<1$ 时，y 值随 x 的增大而减小；

当 $x\geq 1$ 时，y 值随 x 的增大而增大.

考法 3 利用一次函数的图象的特征解点的坐标问题

例 25 ［中考·泰州］平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为 $(m+1,\ m-1)$.

（1）试判断点 P 是否在一次函数 $y=x-2$ 的图象上，并说明理由；

（2）如图 12.2−21，一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图象与 x 轴，y 轴分别相交于点 A，B，若点 P 在三角形 AOB 的内部（不包括边界上），求 m 的取值范围.

试题评析：本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，一次函数的性质，解答本题的关键是弄清点的坐标、函数的表达式、函数的图象三者的关系.

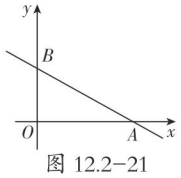


图 12.2−21

解：（1）因为当 $x=m+1$ 时，$y=m+1-2=m-1$，

所以点 $P(m+1,\ m-1)$ 在函数 $y=x-2$ 的图象上.

（2）因为函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$，所以 $A(6,\ 0)$，$B(0,\ 3)$.

因为点 P 在三角形 AOB 的内部（不包括边界上），

所以 $0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$.

所以 $1<m<\frac{7}{3}$.

思路点拨

1. 要判断点 $(m+1,\ m-1)$ 是否在函数图象上，只要把这个点的坐标代入函数表达式，观察等式是否成立即可.
2. 根据题意得出 $0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$，解这些不等式（组）即可求得.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用一次函数的模型解实际应用问题

例 26 [中考·永州]永州市是一个降水丰富的地区，今年 4 月初，某地连续降雨导致该地某水库水位持续上涨，下表是该水库 4 月 1 日～4 月 4 日的水位变化情况：

日期 x	1	2	3	4
水位 y/ 米	20.00	20.50	21.00	21.50

（1）请建立该水库水位 y 与日期 x 之间的函数模型；

（2）请用求出的函数表达式预测该水库今年 4 月 6 日的水位；

（3）你能用求出的函数表达式预测该水库今年 12 月 1 日的水位吗？

试题评析： 本题考查了一次函数的应用，能够求出一次函数的表达式是解题的关键.

解：（1）水库的水位 y 随日期 x 的变化是均匀的，所以 y 与 x 之间的函数为一次函数，设 $y=kx+b$，

把 $x=1$，$y=20$ 和 $x=2$，$y=20.5$ 代入得 $\begin{cases}k+b=20,\\2k+b=20.5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=0.5,\\b=19.5.\end{cases}$

所以 $y=0.5x+19.5$.

（2）当 $x=6$ 时，$y=0.5\times6+19.5=22.5$.

所以今年 4 月 6 日的水位为 22.5 米.

（3）不能，理由如下：

因为 12 月远远超过了 4 月，

所以所建立的函数模型远离已知数据作预测是不可靠的.

思路点拨

1. 由给出的表可知水库水位 y 与日期 x 之间的函数关系为一次函数关系，设 $y=kx+b$，把 $(1, 20)$ 和 $(2, 20.5)$ 代入求出 k、b 的值即可.
2. 把 $x=6$ 代入(1)中的函数表达式即可得到今年 4 月 6 日的水位.
3. 不能，因为所建立的函数模型远离已知数据作预测是不可靠的.

考法 5 利用一次函数的性质解实际应用问题

例 27 [中考·天津]用 A4 纸复印文件，在甲复印店不管一次复印多少页，每页收费 0.1 元，在乙复印店复印同样的文件，一次复印页数不超过 20 时，每页收费 0.12 元；一次复印页数超过 20 时，超过部分每页收费 0.09 元.

设在同一家复印店一次复印文件的页数为 x（x 为非负整数）.

（1）根据题意，填写下表：

一次复印页数	5	10	20	30	…
甲复印店收费 / 元	0.5	____	2	____	…
乙复印店收费 / 元	0.6	____	2.4	____	…

（2）设在甲复印店复印收费 y_1 元，在乙复印店复印收费 y_2 元，分别写出 y_1，y_2 关于 x 的函数关系式；

思路点拨

1. 根据收费标准，列代数式求得即可；
2. 根据收费等于每页收费乘页数即可求得 $y_1=0.1x$（$x\geqslant0$）；当一次复印页数不超过 20 时，根据收费等于每页收费乘页数即可求得 $y_2=0.12x$，当一次复印页数超过 20 时，根据题意求得 $y_2=0.09x+0.6$；
3. 设 $y=y_1-y_2$，得到 y 与 x 的函数关系式，根据 y 与 x 的函数关系式即可作出判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）当 $x>70$ 时，顾客在哪家复印店复印花费少？请说明理由．

试题评析：本题考查了一次函数的应用，读懂题目信息，列出函数关系式是解题的关键．

（1）**解：**当 $x=10$ 时，

甲复印店收费为 $0.1\times10=1$（元），

乙复印店收费为 $0.12\times10=1.2$（元）；

当 $x=30$ 时，甲复印店收费为 $0.1\times30=3$（元）；

乙复印店收费为 $0.12\times20+0.09\times10=3.3$（元）．

答案：1；3；1.2；3.3

（2）**解：**$y_1=0.1x$（$x\geqslant0$ 且 x 为整数）；

$$y_2=\begin{cases}0.12x\ (0\leqslant x\leqslant20\text{ 且 }x\text{ 为整数}),\\0.09x+0.6\ (x>20\text{ 且 }x\text{ 为整数}).\end{cases}$$

（3）**解：**顾客在乙复印店复印花费少．

当 $x>70$ 时，$y_1=0.1x$，$y_2=0.09x+0.6$，

所以 $y_1-y_2=0.1x-(0.09x+0.6)=0.01x-0.6$．

设 $y=0.01x-0.6$，由 $0.01>0$，知 y 随 x 的增大而增大，

当 $x=70$ 时，$y=0.1$，所以当 $x>70$ 时，$y>0.1$，所以 $y_1>y_2$，

所以当 $x>70$ 时，顾客在乙复印店复印花费少．

方法点拨

利用一次函数的性质解决实际问题时，首先要求出一次函数的关系式，然后再运用一次函数中函数值随自变量值的增减变化情况进行分析并解决问题．

素养提分 行动篇

“待定系数法”的解读与延伸

我们在求一次函数的表达式时，第一次接触待定系数法，此后在学习二次函数时，更经常地应用这个数学方法．但是，待定系数法的应用不仅仅局限于求函数的表达式．

如果一个多项式的系数和常数项不全已知，但这个多项式满足若干条件，那么我们便用字母表示这些未知的系数，根据这个多项式所满足的条件，把问题化归为解方程或方程组，方程中的未知数就是待定系数．因此，独立的条件的个数应与待定系数的个数相同．应用待定系数法构建已知与未知的关系，可用于解决许多其他问题．

（1）**多项式恒等的条件：**两个一元多项式，当且仅当同次项的系数对应相等时恒等．恒等就是多项式中字母取任何实数时，它们的值都相等．

例如：若代数式 $(2x^2+ax-y+b)-(2bx^2+3x+5y+1)$ 的值与字母 x 的取值无关，求字母 a，b 的值．

整式的运算，因式分解，分式的运算，方程的解等知识都涉及恒等式．

（2）**若 p 是有理数，a 是无理数，则 $p+a$ 是无理数．**

这也容易证明：若 $p+a$ 是有理数，记作 q，则 $p+a=q$，$a=q-p$，这个等式右边是有理数，不可能与无理数相等．

由此可知，当 $\sqrt{a}$ 是无理数时，若有理数 p，q，m，n 能使 $p+q\sqrt{a}=m+n\sqrt{a}$ 成立，那么 $p=m$，$q=n$．

例如：已知 m，n 是有理数，且 $(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，求 m，n 的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [模拟·长安]下列函数中，是一次函数的有（　　）

（1）$y=\pi x$；（2）$y=2x-1$；（3）$y=\frac{1}{x}$；（4）$y=2-3x$；（5）$y=x^2-1$.

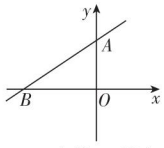
A.4个　　B.3个

C.2个　　D.1个

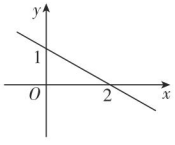
2. [中考·桂林]如图，直线$y=ax+b$过点$A(0,2)$和点$B(-3,0)$，则方程$ax+b=0$的解是（　　）

A.$x=2$　　B.$x=0$

C.$x=-1$　　D.$x=-3$



（第2题）



（第3题）

3. [中考·乌鲁木齐]一次函数$y=kx+b$(k,b是常数，$k\neq 0$)的图象如图所示，则不等式$kx+b>0$的解集是（　　）

A. $x<2$　　B. $x<0$

C. $x>0$　　D. $x>2$

4. [中考·营口]若一次函数$y=ax+b$的图象经过第一、二、四象限，则下列不等式一定成立的是（　　）

A.$a+b<0$　　B.$a-b>0$

C.$ab>0$　　D. $\frac{b}{a}<0$

5. [中考·泰安]已知一次函数$y=kx-m-2x$的图象与y轴的负半轴相交，且函数值y随自变量x的增大而减小，则下列结论正确的是（　　）

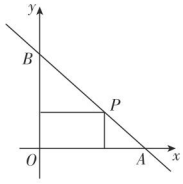
A.$k<2$，$m>0$　　B.$k<2$，$m<0$

C.$k>2$，$m>0$　　D.$k<0$，$m<0$

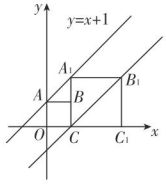
6. [中考·温州]如图，一直线与两坐标轴的正半轴分别交于A，B两点，P是线段AB上任意一点（不包括端点），过P分别作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的长方形的周长为10，则该直线的函数表达式是（　　）

A.$y=x+5$　　B.$y=x+10$

C.$y=-x+5$　　D.$y=-x+10$



（第6题）



（第7题）

7. [模拟·碑林]将正方形$AOCB$和$A_1CC_1B_1$按如图所示方式放置，点$A(0,1)$和点A_1在直线$y=x+1$上，点C和C_1在x轴上，若平移直线$y=x+1$至经过点B_1，则直线$y=x+1$向右平移的距离为（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

8. 已知一次函数$y=(m+2)x+(3-n)$，求：

（1）m，n为何值时，y随x的增大而减小？

（2）m，n为何值时，函数的图象经过原点？

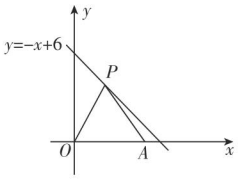
（3）若函数图象经过第二、三、四象限，求m，n的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [期中·汝州]如图，在平面直角坐标系中，点 $P(m, n)$ 在第一象限，且在直线 $y=-x+6$ 上，点 A 的坐标为 $(5, 0)$，O 是坐标原点，三角形 PAO 的面积是 S.

(1) 求 S 与 m 的函数关系式，并画出函数的图象;

(2) 小杰认为三角形 PAO 的面积可以为 15，你认为呢?



(第 9 题)

10. [期末·邢台]已知一次函数的图象经过点 $(-2, -2)$ 和点 $(2, 4)$.

(1) 求这个函数的表达式;

(2) 判断点 $P(1, 1)$ 是否在此函数图象上，并说明理由.

(3) 求这个函数的图象与坐标轴围成的三角形的面积.

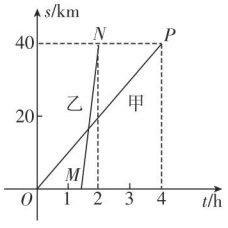
11. A，B 两地相距 40km，甲、乙两人沿同一路线从 A 地到 B 地，甲骑自行车先出发，1.5 h 后乙乘坐公共汽车出发，两人匀速行驶的路程 s(km)与时间 t(h)的关系如图所示.

(1) 求甲、乙两人的速度;

(2) 若乙到达 B 地后，立即以原速返回 A 地.

①画出乙返程中与 A 地的距离 y(km)与时间 t(h)的函数图象，并求出此时 y 关于 t 的函数表达式;

②求甲在离 B 地多远处与返程中的乙相遇?



(第 11 题)

12. 已知直线 $y=-x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A 和点 B，另一直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 经过点 $C(1, 0)$，且把三角形 AOB 分成两部分.

(1) 若三角形 AOB 被分成的两部分面积相等，求 k 和 b 的值;

(2) 若三角形 AOB 被分成的两部分面积之比为 1 ∶ 5，求 k 和 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.3 一次函数与二元一次方程

核心知识

- 一次函数与二元一次方程
- 一次函数与二元一次方程组

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数与二元一次方程

1. 一次函数与二元一次方程的联系：

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图象上任意一点的坐标都是关于 x，y 的二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的解；以二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的解为坐标的点都在一次函数 $y=kx+b$ 的图象上，即

（1）二元一次方程 $\overset{\text{转化}}{\Leftrightarrow}$ 一次函数 $\overset{\text{转化}}{\Leftrightarrow}$ 一条直线；

（2）二元一次方程的解 $\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$ 一次函数两变量的值 $\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$ 直线上的点的坐标.

2. 二元一次方程与一次函数的区别：

（1）二元一次方程有两个未知数，而一次函数有两个变量；

（2）二元一次方程是用一个等式表示两个未知数的关系，而一次函数既可以用一个等式表示两个变量的关系，又可以用列表法或图象法表示两个变量的关系.

拨考向 利用一次函数图象上的点的坐标与二元一次方程的解的关系确定图象

例 1 如图 12.3-1 所示的四条直线，其中直线上每个点的坐标都是二元一次方程 $x-2y=2$ 的解组成的图象是（　　）

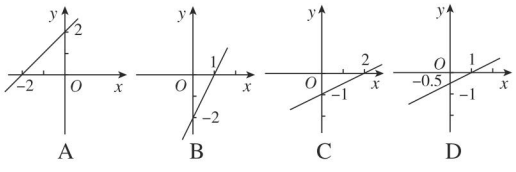


图 12.3-1

解题秘方： 紧扣“一次函数与二元一次方程的联系”求解.

提分·必记

特别提醒

1. 因为二元一次方程的解与一次函数图象上点的坐标之间的关系是一一对应的，所以可以实现方程与函数之间的相互转化，这体现了**数形结合的思想**.
2. 以二元一次方程的解为坐标的点所组成的图形与其对应的一次函数的图象完全重合（是一条直线）.

提分·秘诀

解法提醒

直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点的横坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中，当 $y=0$ 时 x 的值；直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点的纵坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中，当 $x=0$ 时 y 的值.

这类题的解法，体现了数形结合思想和转化思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：因为二元一次方程 $x-2y=2$，

有解$\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}$ 与$\begin{cases}x=2,\\y=0,\end{cases}$

故直线 $x-2y=2$ 与两坐标轴的交点坐标是（0，−1），（2，0），对照四个选项中直线的位置，可知选 C.

答案：C

点知识▶2 一次函数与二元一次方程组

1. 一次函数与二元一次方程组的对应关系：

二元一次方程组$\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$两个一次函数$\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$两条直线；

二元一次方程组的解$\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$两个一次函数值相等时的自变量值及函数值$\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$两条直线的交点坐标.

2. 两直线交点个数与二元一次方程组解的个数的关系：

两条直线有交点（相交）⇔方程组只有一组解；

两条直线无交点（平行）⇔方程组无解；

两条直线是同一直线（重合）⇔方程组有无数组解.

3. 用图象法求二元一次方程组的解的一般步骤：

（1）**变函数**：把方程组$\begin{cases}k_1x-y+b_1=0,\\k_2x-y+b_2=0\end{cases}$ 化为一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$；

（2）**画图象**：建立平面直角坐标系，画出两个一次函数的图象；

（3）**找交点**：由图象确定两直线交点的坐标；

（4）**写结论**：依据点的坐标写出方程组的解.

拔考向▶利用一次函数与二元一次方程组的关系解相关应用

题型 1：图象法在解二元一次方程组中的应用

例 2 利用图象法解二元一次方程组：$\begin{cases}3x-y=2,\\x+y=2.\end{cases}$

解题秘方：紧扣“用图象法求二元一次方程组的解的步骤”求解.

解：原方程组可转化为$\begin{cases}y=3x-2,\\y=2-x.\end{cases}$

如图 12.3−2，在同一平面直角坐标系中分别画出函数 $y=3x-2$ 和函数 $y=2-x$ 的图象，

由图象知，两条直线交点的坐标为（1，1），

所以方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

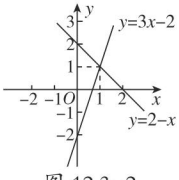


图 12.3−2

学习札记

提分·必记

特别提醒

1. 用图象法求出的二元一次方程组的解往往是**近似值**，而用解方程组的方法求出的解是**准确值**.
2. 用图象法求出的二元一次方程组的解是否准确，**取决于所画的图象是否准确**，判断图象法求方程组所得到的解是否准确，**可以将得到的解代入方程组中进行检验**，如果方程组中的两个方程同时成立，则得到的解是准确的.

提分·秘诀

技巧点拨

用图象法解二元一次方程组的基本方法：

1. 将方程组中的两个方程转化成一次函数 $y=kx+b$ 的形式；
2. 在同一平面直角坐标系中画出两函数的图象；
3. 利用图象的直观性确定交点坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：交点坐标的意义在求函数表达式中的应用

例 3 已知一次函数 $y=ax+2$ 与 $y=kx+b$ 的图象如图 12.3−3，两直线的交点为 A，且方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 点 B 为直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点，点 B 的坐标为（0，−1），请你确定这两个一次函数的表达式.

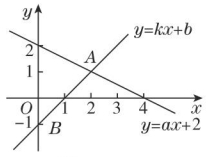


图 12.3−3

解题秘方： 紧扣“交点坐标的意义”求解.

解： 因为方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

所以交点 A 的坐标为（2，1），所以 $2a+2=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

又因为函数 $y=kx+b$ 的图象过交点 A（2，1）和点 B（0，−1），

所以 $\begin{cases}2k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$

所以这两个一次函数的表达式分别为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，$y=x-1$.

解法提醒

此类问题的解题规律是明确方程组的解就是两条相应直线的交点坐标，再利用待定系数法求解. 本题中确定这两个函数的表达式的关键是确定 a，k，b 的值.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用直线位置关系法说明方程组解的情况

挑战·高分

例 4 利用图象法解下列方程组：

（1）$\begin{cases}x+y=5,\\2x+y=8;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x=y+1,\\3x-3y=6;\end{cases}$ （3）$\begin{cases}y=3x-2,\\6x-2y=4.\end{cases}$

解题秘方： 紧扣平面内两直线的位置关系结合图象法解方程组的方法求解.

解：（1）由 $x+y=5$，得 $y=-x+5$；

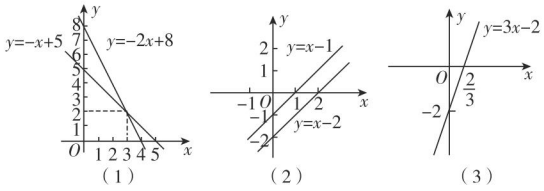
由 $2x+y=8$，得 $y=-2x+8$.

在同一平面直角坐标系中画出一次函数 $y=-x+5$ 和 $y=-2x+8$ 的图象，如图 12.3−4（1）所示，由图象可知两直线的交点坐标为（3，2），所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

知识储备

二元一次方程组中两个方程化为一次函数后的图象，可能是两条相交直线、两条平行直线或两条重合直线，与之对应的方程组的解的情况是：**有唯一解、无解或有无数组解**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（1）　（2）　（3）

图 12.3−4

（2）由 $x=y+1$，得 $y=x-1$；由 $3x-3y=6$，得 $y=x-2$.

在同一平面直角坐标系中画出一次函数 $y=x-1$ 和 $y=x-2$ 的图象，如图 12.3−4（2）所示，由于两直线平行，没有交点，所以原方程组无解.

（3）由 $6x-2y=4$，得 $y=3x-2$.

在同一平面直角坐标系中画出一次函数 $y=3x-2$ 和 $y=3x-2$ 的图象，如图 12.3−4（3）所示，两条直线重合，所以原方程组有无数组解.

拔尖角度▶ 2 利用图象法解含绝对值的二元一次方程组

例 5　已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$.

（1）求直线 AB 对应的函数表达式；

（2）在平面直角坐标系中，画出函数 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图象，并根据图象写出方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

解题秘方：紧扣用图象法解二元一次方程组的步骤求解.

解：（1）因为一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$，

所以 $\begin{cases}-k+b=2,\\3k+b=0,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

所以直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

（2）作 $y=|x|$，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ 的图象，如图 12.3−5 所示，

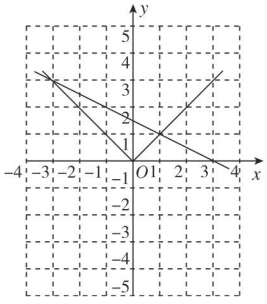


图 12.3−5

根据图象可得方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\end{cases}$

的解是 $\begin{cases}x=-3,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

提示

二元一次方程组还可按下列方法求解.

（2）中对应的两个一次函数分别为 $y=x-1$ 和 $y=x-2$，比较两个一次函数中 k，b 的值，得 $1=1$，$-1\neq-2$，所以这两个一次函数对应的直线平行，故方程组 $\begin{cases}x=y+1,\\3x-3y=6\end{cases}$ 无解.

（3）中对应的两个一次函数分别为 $y=3x-2$ 和 $y=3x-2$，比较两个一次函数中 k，b 的值得 $3=3$，$-2=-2$，所以这两个一次函数对应的直线重合，故方程组 $\begin{cases}y=3x-2,\\6x-2y=4\end{cases}$ 有无数组解.

挑战·高分

解法提醒

利用图象法解二元一次方程组相关问题的关键：

一是根据相关条件求出一次函数表达式；

二是结合所作的一次函数图象与二元一次方程组间的关系求解相关问题.

特别提醒

$y=|x|$ 的图象是一条折线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 3 利用数形结合法解函数、方程、几何的综合问题

挑战·高分

例6 如图 12.3−6，直线 $y=kx-1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B，C 两点，且 $3OB-\frac{1}{2}OC=1$.

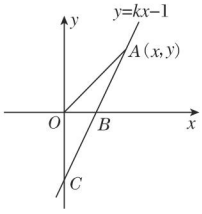


图 12.3−6

（1）求点 B 的坐标及 k 的值.

（2）若点 $A(x,\ y)$ 是直线 $y=kx-1$ 在第一象限内的一个动点. 在点 A 的运动过程中，试写出三角形 AOB 的面积 S 与 x 之间的函数表达式.

（3）探索：

当点 A 运动到什么位置时，三角形 AOB 的面积是 $\frac{1}{4}$？

思路点拨

1. 确定一次函数 $y=kx-1$ 的图象与 y 轴交点的坐标，根据线段 OB，OC 的长度关系，确定直线 $y=kx-1$ 与 x 轴交点的坐标，进而求出 k 的值；
2. 运用三角形面积计算方法建立函数关系.

解题秘方： 紧扣题中的数量关系结合直角坐标系中图形位置情况，用数形结合法求解.

特别提醒

如果没有点 A 在第一象限这个条件，那么(3)中 A 点就不止一个.

解：（1）因为直线 $y=kx-1$ 与 y 轴相交于点 C，

所以点 C 的坐标是 $(0,\ -1)$，所以 $OC=1$.

因为 $3OB-\frac{1}{2}OC=1$，所以 $OB=\frac{1}{2}$，所以点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

把点 B 的坐标 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ 代入 $y=kx-1$，得 $k=2$.

（2）因为 $S=\frac{1}{2}OB\cdot y$，$y=2x-1$，

所以 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(2x-1)$，所以 $S=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

（3）当 $S=\frac{1}{4}$ 时，$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，解得 $x=1$.

所以 $y=2x-1=1$. 所以当点 A 的坐标为（1，1）时，三角形 AOB 的面积是 $\frac{1}{4}$.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘▶ 本节的考点主要是利用一次函数的图象解方程（组）或不等式，它体现了用函数的观点看待方程（组）或不等式的思想，对该思想的考查近年来在中考中有所加强，尤其是实际应用问题，背景新颖，主要考查利用一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式的关系解决实际问题，难度中等偏上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用一次函数的交点坐标解不等式

例7 [中考·菏泽]如图12.3-7，函数$y_1=-2x$与$y_2=ax+3$的图象相交于点$A(m,2)$，则关于x的不等式$-2x>ax+3$的解集是(　　)

A.$x>2$

B.$x<2$

C.$x>-1$

D.$x<-1$

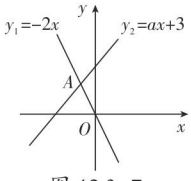


图12.3-7

试题评析：此题主要考查了一次函数与一元一次不等式，关键是求出A点的坐标.

解：因为函数$y_1=-2x$的图象过点$A(m,2)$，

所以$-2m=2$，解得$m=-1$. 所以$A(-1,2)$.

所以不等式$-2x>ax+3$的解集为$x<-1$.

答案：D

思路点拨

首先利用待定系数法求出A点的坐标，再以交点为分界，结合图象写出不等式$-2x>ax+3$的解集即可.

考法2 利用解二元一次方程组解两直线的交点坐标问题

例8 [中考·陕西]如图12.3-8，已知直线l_1：$y=-2x+4$与直线l_2：$y=kx+b$($k\neq0$)在第一象限交于点M，若直线l_2与x轴的交点为$A(-2,0)$，则k的取值范围是(　　)

A.$-2<k<2$

B.$-2<k<0$

C.$0<k<4$

D.$0<k<2$

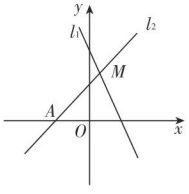


图12.3-8

试题评析：此题主要考查了两条直线的相交问题，以及一次函数图象的点的特征，要熟练掌握.

解：因为直线l_2与x轴的交点为$A(-2,0)$，

所以$-2k+b=0$. 所以$b=2k$.

由$\begin{cases}y=-2x+4,\\y=kx+2k,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{4-2k}{k+2},\\y=\dfrac{8k}{k+2}.\end{cases}$

因为直线l_1：$y=-2x+4$与直线l_2：$y=kx+b$($k\neq0$)的交点在第一象限，

所以$\begin{cases}\dfrac{4-2k}{k+2}>0,\\\dfrac{8k}{k+2}>0,\end{cases}$解得$0<k<2$.

答案：D

思路点拨

首先根据直线l_2与x轴的交点为$A(-2,0)$，求出k、b的关系；然后求出直线l_1、直线l_2的交点坐标，根据直线l_1、直线l_2的交点的横坐标、纵坐标都大于0，求出k的取值范围即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用解方程解一次函数的实际应用

例 9 [中考·衡阳]为响应绿色出行号召，越来越多市民选择租用共享单车出行，已知某共享单车公司为市民提供了手机支付和会员卡支付两种方式，如图 12.3-9 描述了两种方式应支付金额 y(元)与骑行时间 x(小时)之间的函数关系，根据图象回答下列问题：

(1)求手机支付金额 y(元)与骑行时间 x(小时)的函数表达式；

(2)李老师经常骑行共享单车，请根据不同骑行时间帮他确定选择哪种支付方式比较合算.

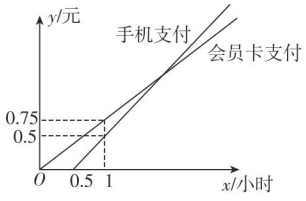


图 12.3-9

试题评析：本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，求出相应的函数表达式，利用数形结合的思想和一次函数的性质解答，这是一道典型的方案选择问题.

解：(1)当 $0 \leqslant x<0.5$ 时，$y=0$，

当 $x \geqslant 0.5$ 时，设手机支付金额 y(元)与骑行时间 x(小时)的函数表达式是 $y=kx+b$($k \neq 0$)，

由图象可得$\begin{cases}0.5k+b=0,\\1\times k+b=0.5,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\b=-0.5.\end{cases}$

即当 $x \geqslant 0.5$ 时，手机支付金额 y(元)与骑行时间 x(小时)的函数表达式是 $y=x-0.5$.

由上可得，手机支付金额 y(元)与骑行时间 x(小时)的函数表达式是 $y=\begin{cases}0\ (0 \leqslant x<0.5),\\x-0.5\ (x \geqslant 0.5).\end{cases}$

(2)设会员卡支付对应的函数表达式为 $y=ax$，

则 $0.75=a\times 1$，解得 $a=0.75$，

即会员卡支付对应的函数表达式为 $y=0.75x$.

令 $0.75x=x-0.5$，解得 $x=2$.

由图象可知，当 $0 \leqslant x<2$ 时，李老师选择手机支付方式比较合算，

当 $x=2$ 时，李老师选择两种支付方式一样，

当 $x>2$ 时，李老师选择会员卡支付方式比较合算.

解法提醒

求解一次函数应用于最优方案问题，一般先利用条件求出函数的表达式，再根据条件借助不等式或图象分类讨论.

技巧点拨

结合图象求解实际最优方案问题时，求出两函数图象交点是常用的技巧，也是分析很多问题的桥梁.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 直线 l 是以二元一次方程 $8x-4y=5$ 的解为坐标所构成的，则该直线不经过的象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

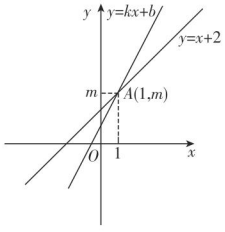
C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若直线 l_1 经过点（0,4），l_2 经过点（3,2），且 l_1 与 l_2 关于 x 轴对称，则 l_1 与 l_2 的交点坐标为（　　）

A.（−2,0）　　B.（2,0）

C.（−6,0）　　D.（6,0）

3. [期末·宝丰县]用图象法解关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} kx-y+b=0, \\ x-y+2=0 \end{cases}$ 时，小英所画图象如图所示，则方程组的解为（　　）



（第3题）

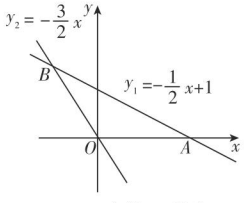
A. $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$　B. $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$　C. $\begin{cases} x=1, \\ y=2.5 \end{cases}$　D. $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$

4. 已知直线 $y=-3x-2$ 与直线 $y=2x+8$ 相交于一点，则交点的坐标为_____，两直线与 x 轴所围成的三角形的面积为_____.

5. [中考·曲靖]如图，已知直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与 x 轴交于点 A，与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B.

（1）求三角形 AOB 的面积；

（2）求 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围.

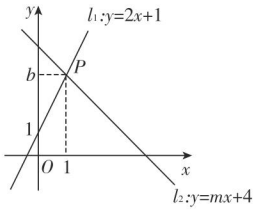


（第5题）

6. [中考·台州]如图，直线 l_1：$y=2x+1$ 与直线 l_2：$y=mx+4$ 相交于点 P（1，b）.

（1）求 b，m 的值；

（2）垂直于 x 轴的直线 $x=a$ 与直线 l_1，l_2 分别交于点 C，D，若线段 CD 长为2，求 a 的值.



（第6题）

7. 已知在平面直角坐标系中，直线 l_1 对应的函数表达式为 $y=2x-1$，直线 l_2 过原点且与直线 l_1 交于点 P（−2，a）.

（1）试求 a 的值.

（2）点 P（−2，a）的横、纵坐标可以看成是哪个二元一次方程组的解?

（3）设直线 l_1 与 x 轴交于点 A，你能求出三角形 APO 的面积吗? 试试看.

（4）在直线 l_1 上是否存在点 M，使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等? 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考·莱芜]某网店销售甲、乙两种防雾霾口罩，已知甲种口罩每袋的售价比乙种口罩多5元，小丽从该网店网购2袋甲种口罩和3袋乙种口罩共花费110元.

（1）该网店甲、乙两种口罩每袋的售价各多少元?

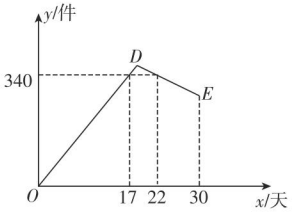
（2）根据消费者需求，网店决定用不超过10 000元购进甲、乙两种口罩共500袋，且甲种口罩的数量大于乙种口罩的$\frac{4}{5}$，已知甲种口罩每袋的进价为22.4元，乙种口罩每袋的进价为18元，请你帮助网店计算有几种进货方案? 若使网店获利最大，应该购进甲、乙两种口罩各多少袋，最大获利为多少元?

9. [中考·咸宁]某公司开发出一款新的节能产品，该产品的成本价为6元/件，该产品在正式投放市场前通过代销点进行了为期一个月（30天）的试销售，售价为8元/件，工作人员对销售情况进行了跟踪记录，并将记录情况绘成图象，图中的折线ODE表示日销售量y（件）与销售时间x（天）之间的函数关系，已知线段DE表示的函数关系中，时间每增加1天，日销售量减少5件.

（1）第24天的日销售量是_____件，日销售利润是_____元.

（2）求y与x之间的函数表达式，并写出x的取值范围;

（3）日销售利润不低于640元的天数共有多少天? 试销售期间，日销售最大利润是多少元?



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.4 综合与实践 一次函数模型的应用

核心知识

- 用一次函数解决问题
- 用一次函数图象解决问题
- 用一次函数的性质解决问题

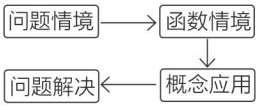
知识链接

用一次函数解决问题 → 用函数图象解决问题；用函数性质解决问题

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数模型的应用

1. 利用函数解决实际问题的基本模式：



2. 建立函数模型的一般步骤：

（1）获取数据；（2）列表、描点；（3）观察、猜想；（4）求出函数表达式；（5）检验；并给出答案.

提分·必记

1. 若题目中明确给出两变量的函数关系，则可用待定系数法求出函数表达式.
2. 若题目中明确给出两变量变化关系的图象，则由图象分辨出其函数类型，进而用待定系数法求出函数表达式.

拔考向 建立一次函数模型解决实际问题

题型 1：由已给实验数据探求函数模型解决实际问题

例 1 为提醒人们节约用水，及时修好漏水的水龙头，小王做了一个水龙头漏水实验，他用于接水的量筒最大容量为 100 毫升.

下表是小王同学在做实验时，每隔 10 秒观察量筒中水的体积记录下的数据（漏出的水量精确到 1 毫升）：

时间 t/秒	10	20	30	40	50	60	70
漏出的水量 V/毫升	2	5	8	11	14	17	20

（1）在平面直角坐标系中描出上表中数据对应的点；

（2）如果小王同学继续做实验，试探求多少秒后量筒中的水会满而溢出（精确到 1 秒）；

（3）按此漏水速度，1 小时会漏水多少升（精确到 0.1 升）？

解题秘方： 紧扣建立函数模型的一般步骤，建立一次函数模型解决问题.

解：（1）描点，如图 12.4-1 所示.

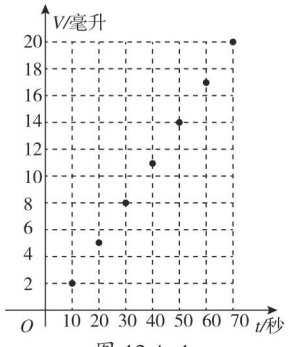


图 12.4-1

（2）由图 12.4-1 知 V 与 t 之间是一次函数的关系，设 $V=kt+b$（$k\neq 0$），

提分·秘诀

技巧点拨

观察图象可知所描各点大致在一条直线上，因此可认为两变量之间存在一次函数关系. **注意**借助其中两点的坐标求出函数表达式后需利用其余各点的坐标进行验证.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据表中数据知，当 $t=10$ 时，$V=2$；当 $t=20$ 时，$V=5$.

所以 $\begin{cases}2=10k+b,\\5=20k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{10},\\b=-1.\end{cases}$

所以 $V=\dfrac{3}{10}t-1$，经检验可知该函数关系满足题意.

令 $\dfrac{3}{10}t-1=100$，得 $t=\dfrac{1\,010}{3}\approx 337$（秒）.

所以约 337 秒后量筒中的水会满而溢出.

（3）1 小时 =3600 秒，

将 $t=3\,600$ 代入 $V=\dfrac{3}{10}t-1$，得 $V=1\,079$（毫升）≈ 1.1 升，

即按此漏水速度，1 小时大约会漏水 1.1 升.

题型 2：利用一次函数对邻近数据作预测

例2 小明练习 100 m 短跑，训练时间与 100 m 短跑成绩记录如下：

时间 / 月	1	2	3	4
成绩 /s	15.6	15.4	15.2	15

（1）请你为小明的 100 m 短跑成绩 y（s）与训练时间 x（月）的关系建立函数模型；

（2）用所求出的函数表达式预测小明训练 6 个月的 100 m 短跑成绩；

（3）能用所求出的函数表达式预测小明训练 3 年的 100 m 短跑成绩吗？为什么？

解题秘方： 根据表中的数据建立一次函数模型，再利用一次函数对数据作预测.

解：（1）由表中数据可知，y 随 x 均匀变化，

所以设 $y=kx+b$.

任取表中两对值代入，得 $\begin{cases}15.6=k+b,\\15.4=2k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-0.2,\\b=15.8.\end{cases}$

所以 $y=-0.2x+15.8$.

（2）当 $x=6$ 时，$y=-0.2\times 6+15.8=14.6$.

故预测小明训练 6 个月的 100 m 短跑成绩为 14.6 s.

（3）不能. 理由：因为短跑的成绩在短时间内可能呈某种趋势，但在较长的时间内，受自身的发展极限的限制，不会永远如此快地提高.（理由合理即可）

学习札记

方法点拨

给定部分因变量随自变量均匀变化的数据信息，可以建立一次函数模型，利用求得的一次函数表达式，可以对数据的邻近区域进行预测. 但是预测只能在数据的邻近区域，远离已知数据作预测是不可靠的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 选择方案

1. 选择方案：

选择方案是指某一问题中，符合条件的方案有多种，一般要利用数学知识经过分析、猜想、判断，筛选出最佳方案，常涉及的问题类型有利润最大、路程最短、运费最少、效率最高等，常建立函数模型，运用方程（组）或不等式的知识进行求解.



2. 用一次函数选择方案的一般步骤：

（1）“析”：分析题意，弄清数量关系.

（2）“列”：列出函数表达式、不等式或方程.

（3）“求”：求出自变量在不同值对应的函数值的大小，或函数的最大（最小）值.

（4）“选”：结合实际需要选择最佳方案.

注意：在选择方案时，要考虑实际问题中自变量的取值范围，尤其要看它是不是某些特殊解（如正整数解）.

提分·必记

特别提醒

1. 解决含多个变量的问题时，注意分析这些变量之间的关系，从中选取一个取值能影响其他变量的值的变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数，以此作为解决问题的数学模型.
2. 选择最佳方案实际上是在比较的基础上完成的，它往往是将全部方案一一列举出来，然后根据题意选择一个最优的方案.

拔考向▶利用选择方案的方法解生活中的实际应用问题

题型1：省钱方案

例3 [中考·襄阳]某社区活动中心为鼓励居民加强体育锻炼，准备购买10副某种品牌的羽毛球拍，每副球拍配$x(x\geqslant 2)$个羽毛球，供社区居民免费借用.该社区附近A，B两家超市都有这种品牌的羽毛球拍和羽毛球出售，且每副球拍的标价均为30元，每个羽毛球的标价均为3元，目前两家超市同时在做促销活动：

A超市：所有商品均打九折（按标价的90%）销售；

B超市：买1副羽毛球拍送2个羽毛球.

设在A超市购买羽毛球拍和羽毛球的费用为y_A元，在B超市购买羽毛球拍和羽毛球的费用为y_B元.请解答下列问题：

（1）分别写出y_A和y_B与x之间的函数表达式.

（2）若该活动中心只在一家超市购买，你认为在哪家超市购买更划算？

（3）若每副球拍配15个羽毛球，请你帮助该活动中心设计出最省钱的购买方案.

解题秘方：紧扣标价与折扣间的数量关系建立一次函数表达式的模型，用方程、不等式进行分类讨论.

解：（1）由题意得$y_A=(10\times 30+10\times 3x)\times 0.9=27x+270\ (x\geqslant 2)$，

$y_B=10\times 30+10\times 3(x-2)=30x+240\ (x\geqslant 2)$.

（2）当$y_A=y_B$时，$27x+270=30x+240$，得$x=10$；

提分·秘诀

技巧点拨

解一次函数与方程、不等式的综合实际应用问题的方法：

先读懂题意，理解题干的条件和各个问题的关系，并利用题目中的信息建立函数模型，根据函数值的大小关系，建立方程、不等式模型；

再分类讨论，确定不同情况下自变量的取值范围及对应的函数值范围，从而得出不同范围内的方案.

本题的解答运用了分类讨论思想，解答的关键是建立函数模型.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $y_A > y_B$ 时，$27x+270 > 30x+240$，得 $x < 10$；

当 $y_A < y_B$ 时，$27x+270 < 30x+240$，得 $x > 10$.

所以当 $2 \leqslant x < 10$ 时，在 B 超市购买更划算；

当 $x=10$ 时，在两家超市购买费用一样；

当 $x > 10$ 时，在 A 超市购买更划算.

（3）由题意，若“只在一家超市购买”，由于 $x=15 > 10$，则到 A 超市购买较省钱，此时 $y_A=27x+270=27\times15+270=675$.

注意本问中没有限制条件“只在一家超市购买”，因此先在 B 超市购买 10 副羽毛球拍，送 20 个羽毛球，然后在 A 超市购买剩下的羽毛球，需 $(10\times15-20)\times3\times0.9=351$（元），共需费用 $10\times30+351=651$（元）.

因为 $651 < 675$，所以最省钱的方案是先在 B 超市购买 10 副羽毛球拍，送 20 个羽毛球，然后在 A 超市购买 130 个羽毛球.

思路点拨

方案最优问题，往往是将所有的方案一一列举，作出比较. 本题选出花费最少的方案为最优方案.

题型 2：生产方案

例 4 ［中考·佳木斯］为了推动“龙江经济带”建设，我省某蔬菜企业决定通过加大种植面积、增加种植种类，促进经济发展. 2017 年春，预计种植西红柿、马铃薯、青椒共 100 公顷（三种蔬菜的种植面积均为整数），青椒的种植面积是西红柿种植面积的 2 倍，经预算，种植西红柿的利润可达 1 万元/公顷，青椒 1.5 万元/公顷，马铃薯 2 万元/公顷，设种植西红柿 x 公顷，总利润是 y 万元.

（1）求总利润 y（万元）与种植西红柿的面积 x（公顷）之间的关系式.

（2）若预计总利润不低于 180 万元，西红柿的种植面积不低于 8 公顷，有多少种种植方案？

（3）在（2）的前提下，该企业决定投资不超过获得最大利润的 $\frac{1}{8}$ 在冬季同时建造 A，B 两种类型的温室大棚，开辟新的经济增长点，经测算，投资 A 种类型的大棚 5 万元/个，B 种类型的大棚 8 万元/个，请直接写出有哪几种建造方案？

解题秘方：紧扣总利润与各部分利润之间的关系列函数表达式，结合方程、不等式求解.

解：（1）由题意得 $y=x+1.5\times2x+2(100-3x)=-2x+200$.

（2）由题意得 $-2x+200 \geqslant 180$，解得 $x \leqslant 10$.

又因为 $x \geqslant 8$，所以 $8 \leqslant x \leqslant 10$.

因为 x 为整数，所以 x 可取 8，9，10.

所以有三种种植方案.

方案一：种植西红柿 8 公顷、马铃薯 76 公顷、青椒 16 公顷.

特别提醒

本题涉及函数表达式与不等式（组）的关系，解决这类问题，先要把实际问题转化为一次函数问题，然后利用一次函数的增减性及自变量的取值范围来解决. 当所列不等式是二元一次不等式时，可以通过对其中一个未知数取一个满足题意的自然数值代入不等式中，再解关于另一个未知数的一元一次不等式，并求出它的满足题意的自然数值. 按照这个方法，将所有满足这个二元一次不等式中的自然数对求出，从而获得相应的方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方案二：种植西红柿 9 公顷、马铃薯 73 公顷、青椒 18 公顷.

方案三：种植西红柿 10 公顷、马铃薯 70 公顷、青椒 20 公顷.

（3）因为 $y=-2x+200$，$-2<0$，

所以 y 随 x 的增大而减小.

所以当 $x=8$ 时，利润最大，最大利润为 184 万元.

设投资 A 种类型的大棚 a 个，B 种类型的大棚 b 个，

由题意得 $5a+8b \leqslant \frac{1}{8} \times 184$,

所以 $5a+8b \leqslant 23$,

所以 $a=1$，$b=1$ 或 2；$a=2$，$b=1$；$a=3$，$b=1$.

所以可以投资 A 种类型的大棚 1 个，B 种类型的大棚 1 个；

或投资 A 种类型的大棚 1 个，B 种类型的大棚 2 个；

或投资 A 种类型的大棚 2 个，B 种类型的大棚 1 个；

或投资 A 种类型的大棚 3 个，B 种类型的大棚 1 个.

特别警示

解答本题时，容易忽视“同时建造 A，B 两种类型的温室大棚”而产生不符合题意的建造方案：

$a=0$，$b=0$ 或 1 或 2；

$a=1$，$b=0$；

$a=2$，$b=0$；

$a=3$，$b=0$；

$a=4$，$b=0$.

题型 3：调运方案

例 5 某县区大力发展猕猴桃产业，预计今年 A 地将采摘 200 吨，B 地将采摘 300 吨. 若要将这些猕猴桃运到甲、乙两个冷藏仓库，已知甲仓库可储存 240 吨，乙仓库可储存 260 吨，从 A 地运往甲、乙两仓库的费用分别为每吨 20 元和 25 元，从 B 地运往甲、乙两仓库的费用分别为每吨 15 元和 18 元. 设从 A 地运往甲仓库的猕猴桃为 x 吨，A，B 两地运往两仓库的猕猴桃运输费用分别为 y_A 元和 y_B 元.

（1）分别求出 y_A，y_B 与 x 之间的函数表达式；

（2）试讨论 A，B 两地的运费哪个较少；

（3）考虑 B 地的经济承受能力，B 地的猕猴桃运费不得超过 4 830 元，在这种情况下，请问怎样调运才能使两地运费之和最少？求出最少运费.

解题秘方：紧扣“调运过程中费用间的关系”列出一次函数表达式，用比较法求解.

解：（1）由题意得，从 A 地运往乙仓库的猕猴桃为（$200-x$）吨，从 B 地运往甲仓库的猕猴桃为（$240-x$）吨，从 B 地运往乙仓库的猕猴桃为（$60+x$）吨. 则 $y_A=20x+25(200-x)=-5x+5\,000$，$y_B=15(240-x)+18(60+x)=3x+4\,680$.

（2）因为 $y_A-y_B=(-5x+5\,000)-(3x+4\,680)=-8x+320$，

所以当 $-8x+320>0$，即 $x<40$ 时，B 地的运费较少；

当 $-8x+320=0$，即 $x=40$ 时，两地的运费一样多；

当 $-8x+320<0$，即 $x>40$ 时，A 地的运费较少.

解法提醒

当调运方案中涉及两个函数表达式时，要比较费用的大小，一般要分三种情况利用不等式或方程讨论求解；而要求得最省钱的调运方案时，一般先根据数量之间的关系建立函数，然后利用一次函数的增减性确定出符合要求的最佳方案.

技巧点拨

求解调运方案问题，常借助表格来分析问题，如本题，调运情况如下表.

运地 \ 猕猴桃数量/吨 \ 收货	甲	乙	总计
A	x	$200-x$	200
B	$240-x$	$60+x$	300
总计	240	260	500

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）设两地运费之和为 W 元，

则 $W=y_A+y_B=(-5x+5\ 000)+(3x+4\ 680)=-2x+9\ 680$，由 $3x+4\ 680\leqslant 4\ 830$，解得 $x\leqslant 50$，所以 W 的最小值为 $-2\times 50+9\ 680=9\ 580$. 故当 A 地运往甲、乙两仓库的猕猴桃分别为 50 吨、150 吨，B 地运往甲、乙两仓库的猕猴桃分别为 190 吨、110 吨时，才能使两地运费之和最少，最少运费是 9 580 元.

特别警示

由 $W=-2x+9\ 680$ 可知，W 随 x 的增大而减小，切忌忽略第(3)问对 x 取值范围的限制，认为 $x=200$ 时满足题意.

题型 4：支付方案

例 6 某公司推销一种产品，设 x（件）是推销产品的数量，y（元）是付给推销员的推销费，如图 12.4-2 表示公司每月付给推销员的推销费的两种方案，根据图象解答下列问题.

（1）分别求 y_1，y_2 关于 x 的函数表达式.

（2）解释图中表示的两种方案是如何付推销费的.

（3）如果你是推销员，应如何选择付费方案？

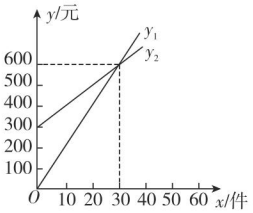


图 12.4-2

解题秘方： 从图象中获取求函数表达式的信息并通过图象信息选择支付方案.

思路点拨

1. 由待定系数法结合特殊点求解即可；
2. 根据两直线与 y 轴的交点，结合实际进行分析；
3. 根据业务能力，结合(2)中两种方案的付费方式进行解答.

解：（1）设这两个函数的表达式分别为 $y_1=k_1x$（$k_1\neq 0$），$y_2=k_2x+b$（$k_2\neq 0$）.

由 y_1 关于 x 的函数图象经过点（30，600），得 $600=30k_1$，解得 $k_1=20$，所以 y_1 关于 x 的函数表达式为 $y_1=20x$（$x\geqslant 0$）.

由 y_2 关于 x 的函数图象经过点（0，300），点（30，600），得 $b=300$，$600=30k_2+b$，解得 $k_2=10$，所以 y_2 关于 x 的函数表达式为 $y_2=10x+300$（$x\geqslant 0$）.

（2）y_1 的付费方案是不推销产品没有推销费，每推销 1 件产品得推销费 20 元；y_2 的付费方案是保底工资 300 元，另外每推销 1 件产品再得推销费 10 元.

（3）如果业务能力强，平均每月能保证推销多于 30 件产品，那么选择 y_1 的付费方案，否则，选择 y_2 的付费方案.

题型 5：销售方案

例 7 某商店销售 10 台 A 型电脑和 20 台 B 型电脑的利润为 4 000 元，销售 20 台 A 型电脑和 10 台 B 型电脑的利润为 3 500 元.

（1）求每台 A 型电脑和 B 型电脑的销售利润；

（2）该商店计划一次购进两种型号的电脑共 100 台，其中 B 型电脑的进货量不超过 A 型电脑的 2 倍. 设购进 A 型电脑 x 台，这 100 台电脑的销售总利润为 y 元.

①求 y 关于 x 的函数表达式；

解法提醒

在商品经营活动中，经常会遇到求最大利润、最大销量等问题，解此类问题的关键是通过题意，确定出函数的表达式，然后根据函数的增减性确定其最大值，且要注意自变量的取值范围和问题的实际意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②该商店购进A型、B型电脑各多少台，才能使销售总利润最大？

③实际进货时，厂家对A型电脑出厂价下调m（$0<m<100$）元，且限定商店最多购进A型电脑70台．若商店保持两种电脑的售价不变，请你根据以上信息及（2）中的条件，设计出使这100台电脑销售总利润最大的进货方案．

解题秘方：从列方程组求方程组解中获取求一次函数表达式的数据，并根据一次函数的信息求方案．

解：（1）设每台A型电脑的销售利润为a元，每台B型电脑的销售利润为b元，则有$\begin{cases}10a+20b=4\,000,\\20a+10b=3\,500,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=100,\\b=150.\end{cases}$

即每台A型电脑的销售利润为100元，每台B型电脑的销售利润为150元．

（2）①根据题意得$y=100x+150(100-x)$，即$y=-50x+15\,000$.

②根据题意得$100-x\leqslant 2x$，解得$x\geqslant 33\frac{1}{3}$．

因为$y=-50x+15\,000$中，$-50<0$，所以y随x的增大而减小．

因为x为正整数，所以当$x=34$时，y取得最大值，此时$100-x=66$.

即该商店购进A型电脑34台，B型电脑66台，才能使销售总利润最大．

③根据题意得$y=(100+m)x+150(100-x)$．

即$y=(m-50)x+15\,000$（$33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 70$）．

当$0<m<50$时，$m-50<0$，y随x的增大而减小．

所以当$x=34$时，y取得最大值．

即商店购进34台A型电脑和66台B型电脑才能获得最大总利润；

当$m=50$时，$m-50=0$，$y=15\,000$.

即商店购进A型电脑数量满足$33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 70$的整数时，获得总利润都相同；

当$50<m<100$时，$m-50>0$，y随x的增大而增大．

所以当$x=70$时，y取得最大值．

即商店购进70台A型电脑和30台B型电脑才能获得最大总利润．

详解

根据“销售10台A型电脑和20台B型电脑的利润为4 000元”可得$10a+20b=4\,000$；“销售20台A型电脑和10台B型电脑的利润为3 500元”可得$20a+10b=3\,500$.

特别警示

本题③中，容易忽视一次函数随m值变化，其增减性也发生变化，不会利用分类讨论求解而产生错误．

详解

$y=(100+m)x+150(100-x)$

$=(100+m)x+15\,000-150x$

$=(100+m-150)x+15\,000$

$=(m-50)x+15\,000$.

题型6：利润方案

例8 [中考·郴州]某工厂有甲种原料130kg，乙种原料144kg，现用两种原料生产出A，B两种产品共30件，已知生产每件A产品需甲种原料5kg，乙种原料4kg，且每件A产品可获利700元；生产每件B产品需甲种原料3kg，乙种原料6kg，且每件B产品可获利900元，设生产A产品x件（产品件数为整数），根据以上信息解答下列问题：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）生产A，B两种产品的方案有几种？

（2）设生产这30件产品可获利y元，写出y关于x的函数表达式，写出（1）中利润最大的方案，并求出最大利润．

解题秘方：从列不等式组求其解集中获取数据制定方案；由函数的增减性确定利润最大的方案．

解：（1）由30件产品中有x件A产品，知B产品有$(30-x)$件，

由题意可得$\begin{cases}5x+3(30-x)\leqslant 130,\\4x+6(30-x)\leqslant 144,\end{cases}$解得$\begin{cases}x\leqslant 20,\\x\geqslant 18,\end{cases}$

所以$18\leqslant x\leqslant 20$.

因为产品件数为整数，所以x取整数解，所以$x=18$或$x=19$或$x=20$，

所以生产A，B两种产品的方案有如下三种：

方案一：A产品18件，B产品12件；

方案二：A产品19件，B产品11件；

方案三：A产品20件，B产品10件．

（2）由题意可得$y=700x+900(30-x)=-200x+27\,000$，

因为$-200<0$，所以y随x的增大而减小，

又因为$18\leqslant x\leqslant 20$，所以当$x=18$时有最大利润，

最大利润$y=-200\times 18+27\,000=23\,400$.

答：（1）中利润最大的是方案一，即：A产品18件，B产品12件，最大利润为23 400元．

解法提醒

利用方程(组)、不等式(组)求解方案类问题的策略：

求解方案类问题时，应先正确建立函数模型，确定自变量的取值范围，然后可利用函数的性质求最大(小)值；或计算出各种方案的值进行大小比较，注意自变量的整数取值问题．

两年模拟兵法

☞答案见222页

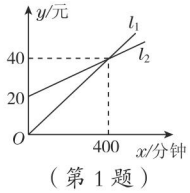
1. [中考·贵阳]一个电信公司提供两种手机的月通话收费方式供用户选择，其中一种有月租费，另一种无月租费，这两种收费方式的通话费用y(元)与通话时间x(分钟)之间的函数关系如图所示，小红根据图象得出下列结论：

①l_1描述的是无月租费的收费方式；

②l_2描述的是有月租费的收费方式；

③当每月的通话时间为500分钟时，选择有月租费的收费方式省钱．

其中，正确结论的个数是（　　）



（第1题）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

2. 如图是甲、乙两家商店销售同一种产品的销售额y(元)与销售量x(件)之间的函数图象，下列说法：

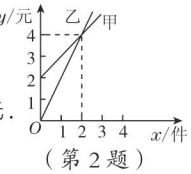
①售2件时，甲、乙两家的销售额一样；

②买1件时，买乙家的合算；

③买3件时，买甲家的合算；

④买1件乙家的产品需付3元．

其中正确的是（　　）



（第2题）

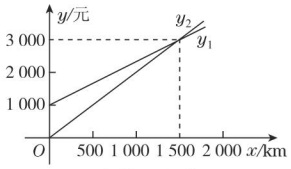
A. ①②　　B. ②③

C. ①②③　　D. ②③④

3. 某单位急需用车，但又不准备买车，所以他们准备和一个体车主或一国营出租车公司中的一家签订月租车合同．设汽车每月行驶x km，应付给个体车主的月费用是y_1元，应付给国营出租车公司的月费用是y_2元，y_1，y_2分别

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

与 x 之间的函数关系图象(两条射线)如图所示. 下列说法:



(第 3 题)

①每月行驶的路程大于 1 500 km 时,租国营出租车公司的车合算;

②每月行驶的路程等于 1 500 km 时,租两家车的费用相同;

③如果这个单位估计每月行驶的路程为 2 300 km,那么这个单位租个体车主的车合算.

其中正确的是(　　)

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ①②③

4. 某移动通信公司开设了两种通信业务:"全球通"使用者先缴 20 元月租费,然后每通话 1 min,再付话费 0.1 元;"神州行"不缴月租费,每通话 1 min 付费 0.2 元. 若一个月内通话 x min,两种方式的费用分别为 y_1 元和 y_2 元.

(1) 分别写出 y_1, y_2 与 x 之间的函数表达式.

(2) 一个月内通话多少分钟,两种通信业务费用相同?

(3) 某人估计一个月内通话 300 min,选择哪种通信业务合算些?

5. [**中考·广安**]为了贯彻落实市委市政府提出的"精准扶贫"精神,某校特制定了一系列关于帮扶 A,B 两贫困村的计划,现决定从某地运送 152 箱鱼苗到 A,B 两村养殖,若用大、小货车共 15 辆,则恰好能一次性运完这批鱼苗. 已知这两种大、小货车的载货能力分别为 12 箱/辆和 8 箱/辆,其运往 A,B 两村的运费如下表:

目的地 / 车型	A 村 /(元/辆)	B 村 /(元/辆)
大货车	800	900
小货车	400	600

(1) 求这 15 辆车中大、小货车各有多少辆.

(2) 现安排其中的 10 辆货车前往 A 村,其余货车前往 B 村,设前往 A 村的大货车为 x 辆,运往 A,B 两村的总运费为 y 元,试求出 y 与 x 的函数表达式.

(3) 在(2)的条件下,若运往 A 村的鱼苗不少于 100 箱,请你写出使总运费最少的货车调配方案,并求出最少总运费.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. [**中考·甘孜州**]一水果经销商购进了A，B两种水果各10箱，分配给他的甲、乙两个零售店(分别简称甲店、乙店)销售，预计每箱水果的盈利情况如下表：

	A种水果	B种水果
甲店	11元	17元
乙店	9元	13元

(1)如果甲、乙两店各配货10箱，其中A种水果两店各5箱，B种水果两店各5箱，请你计算出经销商能盈利多少元?

(2)在甲、乙两店各配货10箱(按整箱配送)，且保证乙店盈利不少于100元的条件下，请你设计出使水果经销商盈利最大的配货方案，并求出最大盈利为多少.

7. [**中考·黄石**]某年5月，我国南方某省A，B两市遭受严重洪涝灾害，1.5万人被迫转移，邻近县市C，D获知A，B两市分别急需救灾物资200吨和300吨的消息后，决定调运物资支援灾区.已知C市有救灾物资240吨，D市有救灾物资260吨，现将这些救灾物资全部调往A，B两市.已知从C市运往A，B两市的费用分别为每吨20元和25元，从D市运往A，B两市的费用分别为每吨15元和30元，设从D市运往B市的救灾物资为x吨.

(1)请填写下表.

	A/吨	B/吨	合计/吨
C			240
D		x	260
总计/吨	200	300	500

(2)设总运费为w元，求w与x之间的函数表达式，并写出自变量x的取值范围;

(3)经过抢修，从D市到B市的路况得到了改善，缩短了运输时间，运费每吨减少m元($m>0$)，其余路线运费不变.若总运费的最小值不小于10 320元，求m的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一次函数表达式的常见题型

荣老师告诉你 表达式是函数三种表示方法中最常用的方法，求函数表达式也是函数问题中的重要问题，下面将求一次函数的表达式几种常见题型归纳如下.

题型一 定义型

例 1 已知函数 $y=(m-3)x^{m^2-8}+3$ 是一次函数，求其表达式.

解题秘方： 根据一次函数的定义，自变量的指数为 1，系数不等于 0，求出待定字母的值.

解： 由一次函数的定义知 $\begin{cases}m^2-8=1,\\ m-3\neq 0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}m=\pm 3,\\ m\neq 3.\end{cases}$

所以 $m=-3$.

故其表达式为 $y=-6x+3$.

方法点拨： 利用一次函数的定义中自变量的指数要求可以求出待定字母的值，当系数也含有待定字母时，要考虑系数不能为零.

题型二 点斜型

例 2 已知一次函数 $y=kx-3$ 的图象过点 $(2,-1)$，求这个函数的表达式.

解题秘方： 直接将 $x=2$，$y=-1$ 代入表达式中求出待定字母 k 的值即可.

解： 因为一次函数 $y=kx-3$ 的图象过点 $(2,-1)$，

所以 $-1=2k-3$，即 $k=1$.

故这个函数的表达式为 $y=x-3$.

题型三 两点型

例 3 已知某个一次函数的图象与 x 轴、y 轴的交点坐标分别是 $(-2,0)$，$(0,4)$，求这个函数的表达式.

解题秘方： 先用待定系数法设出一次函数的表达式，然后将两个点的坐标代入即可.

解： 设一次函数的表达式为 $y=kx+b$，

由题意得 $\begin{cases}0=-2k+b,\\ b=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=2,\\ b=4.\end{cases}$

故这个函数的表达式为 $y=2x+4$.

题型四 图象型

例 4 已知某个一次函数的图象如图 1 所示，求这个函数的表达式.

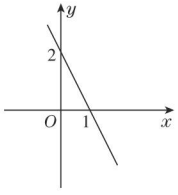


图 1

解题秘方： 点的坐标是通过图象标出的，直接观察图象可知，图象上两个点的坐标为 $(1,0)$ 和 $(0,2)$，然后利用例 3 的方法步骤解决.

解： 设一次函数的表达式为 $y=kx+b$，

由图 1 可知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(1,0)$，$(0,2)$，

所以 $\begin{cases}0=k+b,\\ 2=0+b,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}k=-2,\\ b=2.\end{cases}$

故这个函数的表达式为 $y=-2x+2$.

题型五 斜截型

例 5 已知直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，且在 y 轴上的截距为 2，求直线的函数表达式.

解题秘方： 先根据与直线 $y=-2x$ 平行确定 k 的值，再根据截距的大小确定 b 的值.

解： 因为直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，所以 $k=-2$.

又因为直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距为 2，所以 $b=2$.

故直线的函数表达式为 $y=-2x+2$.

方法点拨： 两条直线 l_1：$y=k_1x+b_1$；l_2：$y=k_2x+b_2$. 当 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$ 时，$l_1\parallel l_2$. 直线在 y 轴上的截距就是函数表达式中 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型六 ▶ 平移型

例 6 把直线 $y=2x+1$ 先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度得到的图象对应的函数表达式为_____.

解题秘方： 直线左右平移时，图象上所有点的横坐标发生变化，但纵坐标不变；直线上下平移时，图象上所有点的横坐标不变，但纵坐标发生变化.

解： 先将直线 $y=2x+1$ 向右平移 2 个单位长度，则所有点的横坐标都增加 2，纵坐标不变，即表达式为 $y=2(x-2)+1$；再将直线向下平移 2 个单位长度，则所有点的横坐标都不变，纵坐标都减小 2，即表达式为 $y=2(x-2)+1-2$，所以表达式为 $y=2x-5$.

答案： $y=2x-5$

题型七 ▶ 实际应用型

例 7 某油箱中存油 20 升，油从管道中匀速流出，流速为 0.2 升/分，则油箱中剩油量 Q（升）与流出时间 t（分）的函数表达式为_____.

解： 由题意得 $Q=20-0.2t$，即 $Q=-0.2t+20$.

因为 $Q\geqslant 0$，所以 $t\leqslant 100$.

故所求的函数表达式为 $Q=-0.2t+20$ $(0\leqslant t\leqslant 100)$.

答案： $Q=-0.2t+20$ $(0\leqslant t\leqslant 100)$

方法点拨： 在实际问题中列函数表达式，关键就是抓住两个变量之间的等量关系. 求实际应用型问题的函数表达式要写出自变量的取值范围.

题型八 ▶ 面积型

例 8 已知直线 $y=kx-4$ 与两坐标轴所围成的三角形面积等于 4，则直线的函数表达式为_____.

解： 易求得直线与 x 轴交点坐标为 $\left(\frac{4}{k},0\right)$，与 y 轴交点坐标为 $(0,-4)$，所以 $4=\frac{4}{|k|}\times 4\times\frac{1}{2}$，所以 $|k|=2$，即 $k=\pm 2$，故直线的函数表达式为 $y=2x-4$ 或 $y=-2x-4$.

答案： $y=2x-4$ 或 $y=-2x-4$

方法点拨： 直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,b)$，但表示线段长时，若不知 k，b 的正负性，则必须带上绝对值，以保证线段的长度为正.

题型九 ▶ 对称型

例 9 若直线 l 与直线 $y=2x-1$ 关于 y 轴对称，则直线 l 的函数表达式为_____.

解题秘方： 先在直线 $y=2x-1$ 上任意取两个点的坐标，然后求出这两个点关于 y 轴的对称点的坐标，然后利用“两点型”求表达式.

解： 直线 $y=2x-1$ 经过 $(1,1)$ 和 $(0,-1)$ 这两个点，这两个点关于 y 轴的对称点为 $(-1,1)$ 和 $(0,-1)$，

设直线 l 的函数表达式为 $y=kx+b$，

易知直线 l 过点 $(-1,1)$ 和点 $(0,-1)$，

所以 $\begin{cases}-k+b=1,\\ b=-1,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}k=-2,\\ b=-1.\end{cases}$

所以直线 l 的函数表达式为 $y=-2x-1$.

答案： $y=-2x-1$

方法点拨： 若直线 l 与直线 $y=kx+b$ 关于

（1）x 轴对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=-kx-b$；

（2）y 轴对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=-kx+b$；

（3）直线 $y=x$ 对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}$；

（4）直线 $y=-x$ 对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=\frac{1}{k}x+\frac{b}{k}$；

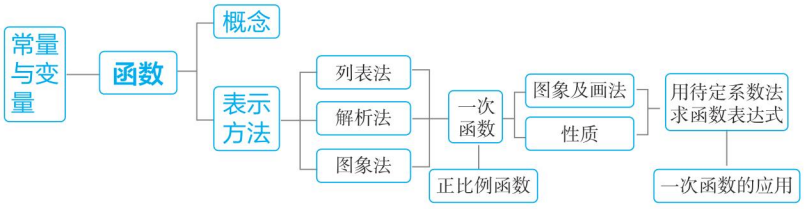
（5）原点对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=kx-b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两个变量 x，y，当 x 取一个值时，y 有唯一值与它对应，x 是自变量，y 是 x 的函数.

2. **函数有三种表示方法：**

（1）**列表法：**列出有限的对应值；

（2）**解析法：**将两个变量之间的数量关系用一个式子表示出来.

（3）**图象法：**将每对对应值作为一个点的坐标在平面直角坐标系中标出；

3. **一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象是一条直线.** 当 $b=0$ 时，一次函数为正比例函数，当 $k>0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小；当 $b>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的上方，当 $b<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的下方.

4. 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）从“数”的角度看是二元一次方程；从“形”的角度看是直线. 一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式之间的关系都是数形结合思想的体现.

知识方法专题

知识必学

专题一 函数图象

链接中考≫ 理解函数图象的意义是解决函数问题的根本，利用函数图象解决几何图形中的动点问题或者解决生活实际问题，都离不开对关键点的意义的理解. 其根本就是在于函数图象是数形相结合的产物. 对函数图象的考查是中考的热门考点，常见的考查形式是选择题.

例 1 [中考·聊城]小亮家与姥姥家相距 24 km. 小亮 8：00 从家出发，骑自行车去姥姥家，妈妈 8：30 从家出发，乘车沿相同路线去姥姥家. 在同一直角坐标系中，小亮和妈妈的行进路程 s（km）与北京时间 t（时）的函数图象如图 12-1 所示. 根据图象得到下列结论，其中错误的是（　　）

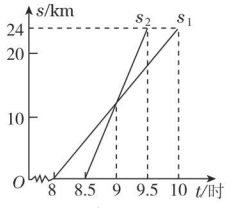


图 12-1

A. 小亮骑自行车的平均速度是 12 km/h

B. 妈妈比小亮提前 0.5 h 到达姥姥家

C. 妈妈在距家 12 km 处追上小亮

D. 9：30 妈妈追上小亮

解题秘方： 明确 s_1 是小亮行进路程与时间的函

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数图象，s_2 是妈妈行进路程与时间的函数图象．图象 s_1 与 s_2 的交点的横坐标表示妈妈追上小亮的时刻，可以利用待定系数法求出各自的函数表达式．

解： 从图象 s_1 可以看出，小亮走 24 km 用了 2 h，所以平均速度为 12 km/h，故 A 正确；从图象可以看出，小亮 10：00 到达姥姥家，妈妈 9：30 到达姥姥家，则妈妈提前 0.5 h 到达，故 B 正确；设 $s_1=k_1x+b_1$，把点（8，0）和点（10，24）的坐标分别代入 $s_1=k_1x+b_1$，得$\begin{cases}0=8k_1+b_1,\\24=10k_1+b_1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=12,\\b_1=-96,\end{cases}$

所以 $s_1=12x-96$，

同理 $s_2=24x-204$，

联立可得方程组$\begin{cases}s=12x-96,\\s=24x-204,\end{cases}$

解得$\begin{cases}s=12,\\x=9,\end{cases}$

即妈妈在 9：00，距家 12 km 处追上小亮，故 C 正确，D 错误．

答案： D

方法点拨： 利用函数图象解决实际问题，其关键在于正确理解函数图象横、纵坐标表示的意义，理解问题的发展过程．解答此类问题一般需要用待定系数法确定函数图象对应的表达式，计算函数图象的交点坐标，或已知某点的一个坐标计算另一个坐标，从而获取实际问题答案．一般解题过程为将实际问题抽象为数学问题，解这个数学问题，回归解答实际问题．

专题二 函数自变量的取值范围

链接中考≫ 函数自变量的取值范围表面形式是考查函数知识，其实是考查自变量出现的形式—整式、分式等知识．关键是几种形式组合时，要综合考查几个方面．考查的形式也都是选择题．

例 2 ［中考·黔南州］函数 $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x-4}$ 的自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x\leqslant 3$　　B. $x\neq 4$

C. $x\geqslant 3$ 且 $x\neq 4$　　D. $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 4$

解题秘方： 先分别求出使 $\sqrt{3-x}$ 与 $\dfrac{1}{x-4}$ 有意义的条件，再合并求公共部分．

解： 要使函数有意义，必须满足$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\x-4\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 3$.

答案： A

方法点拨： 确定自变量的取值范围，应注意以下几种情况：（1）如果函数的表达式中含自变量的部分是整式，那么自变量的取值范围是全体实数；（2）如果函数的表达式中含自变量的部分是分式，那么自变量的取值范围是使分母不为零的实数；（3）在实际问题中，函数自变量的取值必须使实际问题有意义．

专题三 一次函数的图象

链接中考≫ 一次函数的图象是一条直线，它在平面直角坐标系中的位置是由函数表达式中的 k 和 b 决定的．对这个知识点的考查在中考中出现的频率较高．一般都是以填空题、选择题的形式出现．

例 3 ［中考·枣庄］已知直线 $y=kx+b$，若 $k+b=-5$，$kb=6$，则此直线不经过的象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题秘方： 先根据已知判断出 k，b 的符号，再根据 k，b 的符号确定直线经过的象限，从而解决问题．

解： 因为 $kb=6>0$，

所以 k，b 同号．

又因为 $k+b=-5$，

所以 $k<0$，$b<0$.

所以一次函数的图象经过第二、三、四象限，因此直线不经过第一象限．

答案： A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨： 一次函数 $y=kx+b$ 中，k 决定了直线的走向，b 决定了直线与 y 轴的交点，因此由 k 和 b 的值可以确定出直线经过的象限，具体为：①当 $k>0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、三象限；②当 $k>0$，$b<0$ 时，函数图象经过第一、三、四象限；③当 $k<0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、四象限；④当 $k<0$，$b<0$ 时，函数图象经过第二、三、四象限；⑤当 $k>0$，$b=0$ 时，函数图象经过第一、三象限；⑥当 $k<0$，$b=0$ 时，函数图象经过第二、四象限.

专题四 一次函数与方程（组）或不等式之间的关系

链接中考≫ 一次函数与二元一次方程（组）或一元一次不等式之间的关系关键体现的是几个交点：(1) 函数图象与两坐标轴的交点；(2) 两个函数图象的交点. 函数图象与方程或不等式之间的关系就是数形结合的体现. 中考考查的形式多样化，填空题、选择题和解答题都有涉及.

例 4 [中考·济南] 如图 12-2，一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图象交于点 $P(1,3)$，则关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集是（　　）

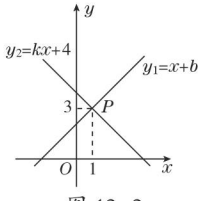


图 12-2

A. $x>-2$　　B. $x>0$

C. $x>1$　　D. $x<1$

解： 由点 P 的横坐标为 1，可得关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集为 $x>1$.

答案： C

方法点拨： 求解此类问题时，一是要明确一次函数与一元一次不等式的关系；二是要能发挥数形结合的作用.

专题五 一次函数的应用

链接中考≫ 一次函数的应用主要有两种形式：一是根据实际问题建立函数模型；二是利用函数的性质确定最佳方案. 这两种形式的纽带是函数自变量的取值范围. 它是中考的热门考点，一般都是以解答题的形式出现.

例 5 [中考·威海] 为绿化校园，某校计划购进 A，B 两种树苗，共 21 棵. 已知 A 种树苗每棵 90 元，B 种树苗每棵 70 元. 设购买 B 种树苗 x 棵，购买两种树苗所需费用为 y 元.

(1) y 与 x 的函数表达式为_____；

(2) 若购买 B 种树苗的数量少于 A 种树苗的数量，请给出一种费用最省的方案，并求出该方案所需费用.

解题秘方： 根据所需费用 = 购进 A，B 两种树苗的费用和，列出函数表达式，进而利用函数的性质求解.

解： (1) $y=-20x+1\,890$

(2) 由题意，得 $x<21-x$，解得 $x<10.5$.

又因为 $x\geqslant 1$ 且 x 为整数，

所以 $1\leqslant x<10.5$ 且 x 为整数.

由 (1) 中一次函数 $y=-20x+1\,890$ 的性质，

得当 $x=10$ 时，y 有最小值为 $-20\times 10+1\,890=1\,690$，

所以费用最省的方案是购买 B 种树苗 10 棵，A 种树苗 11 棵，所需费用为 1 690 元.

方法点拨： 此类问题一般先根据数量之间的关系确定函数表达式，然后根据题意转化为不等式求出自变量的取值范围，最后利用一次函数的性质得出答案.

Ⅱ 方法必会

专题六 待定系数法

专题解读≫ 先设出函数表达式，再根据条件确定表达式中未知的系数，从而得出函数表达式的方法叫做待定系数法. 运用待定系数法的关键就是找对应值或函数图象上点的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 6 小聪和小明沿同一条路同时从学校出发到图书馆查阅资料，学校与图书馆的路程是 4 千米，小聪骑自行车，小明步行，当小聪从原路回到学校时，小明刚好到达图书馆，图 12-3 中折线 O—A—B—C 和线段 OD 分别表示两人离学校的路程 s（千米）与所经过的时间 t（分钟）之间的函数关系，请根据图象回答下列问题：

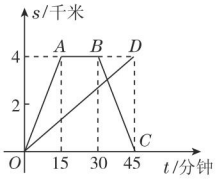


图 12-3

（1）小聪在图书馆查阅资料的时间为_____分钟，小聪返回学校的速度为_____千米/分；

（2）请你求出小明离学校的路程 s（千米）与所经过的时间 t（分钟）之间的函数表达式；

（3）当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是多少千米？

解题秘方：（1）图象所示 AB 段为小聪查阅资料时间．线段 BC 表示小聪返回学校时的图象．（2）s 是 t 的正比例函数，可设 $s=kt$，将点（45，4）的坐标代入求出 k 即可．（3）先求出直线 BC 对应的函数表达式，再求出 BC 与 OD 的交点．

解：（1）15；$\frac{4}{15}$

（2）根据图象设所求的函数表达式为 $s=kt$（$k\neq0$）．将点（45，4）的坐标代入，得 $4=45k$．解得 $k=\frac{4}{45}$．

所以所求函数表达式为 $s=\frac{4}{45}t$（$0\leqslant t\leqslant45$）．

（3）由图象可知，小聪在 $30\leqslant t\leqslant45$ 的时段内与小明迎面相遇．

设直线 BC 对应的函数表达式为 $s=mt+n$（$m\neq0$），将点（30，4），（45，0）的坐标代入，得 $\begin{cases}30m+n=4,\\45m+n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{4}{15},\\n=12.\end{cases}$

所以 $s=-\frac{4}{15}t+12$（$30\leqslant t\leqslant45$），令 $-\frac{4}{15}t+12=\frac{4}{45}t$，解得 $t=\frac{135}{4}$．

当 $t=\frac{135}{4}$ 时，$s=\frac{4}{45}\times\frac{135}{4}=3$．

答：当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是 3 千米．

方法点拨：本题主要考查函数图象的识别与一次函数表达式的求法，求函数表达式的一般方法是待定系数法，函数是中考的必考知识点，应引起足够重视．

专题七 分类讨论思想

专题解读≫ 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的性质由 k 的正负性决定，若条件中无法确定 k 的正负性，而又要运用其性质解决方案优化问题，则必须对 k 的正负进行分类讨论，使所有问题做到不遗漏．

例 7 ［中考·济宁］小明到服装店参加社会实践活动，服装店经理让小明帮助解决以下问题：

服装店准备购进甲、乙两种服装，甲种服装每件进价 80 元，售价 120 元；乙种服装每件进价 60 元，售价 90 元．计划购进两种服装共 100 件，其中甲种服装不少于 65 件．

（1）若购进这 100 件服装的费用不得超过 7 500 元，则甲种服装最多购进多少件？

（2）在（1）的条件下，该服装店对甲种服装以每件优惠 a（$0<a<20$）元的价格进行促销活动，乙种服装价格不变，那么该服装店应如何调整进货方案才能获得最大利润？

解题秘方：（1）设购进甲种服装 x 件，根据“购进服装的费用不得超过 7 500 元”列出不等式求解；（2）设总利润为 w 元，根据“总利润 = 甲种服装的利润 + 乙种服装的利润”求得函数表达式，再根据 a 的取值以及 x 的范围讨论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设购进甲种服装 x 件，由题意可知 $80x+60(100-x)\leqslant 7\,500$，解得 $x\leqslant 75$.

因为甲种服装不少于 65 件，即 $x\geqslant 65$.

所以 $65\leqslant x\leqslant 75$，

所以甲种服装最多购进 75 件.

（2）设总利润为 w 元，由（1）知 $65\leqslant x\leqslant 75$，

所以 $w=(40-a)x+30(100-x)=(10-a)x+3\,000$.

当 $0<a<10$ 时，$10-a>0$，w 随 x 的增大而增大，

所以当 $x=75$ 时，w 有最大值，则购进甲种服装 75 件，乙种服装 25 件才能获得最大利润；

当 $a=10$ 时，$w=3\,000$.

所以购进甲种服装件数满足 $65\leqslant x\leqslant 75$ 的整数时，获得利润都相同；

当 $10<a<20$ 时，$10-a<0$，w 随 x 的增大而减小，

所以当 $x=65$ 时，w 有最大值，则购进甲种服装 65 件，乙种服装 35 件才能获得最大利润.

方法点拨：解此类题的关键是理清各种数量关系，会利用等量关系列出函数表达式，能利用不等关系列不等式（组），会利用不等式（组）的整数解设计可行的方案，会利用函数的性质求最值.

好题必解 ☞答案见 223 页

类型 1　巧用一次函数的图象与性质求字母的取值范围

1. 已知函数 $y=(2m+1)x+m-3$.

（1）若这个函数是一次函数，且 y 随 x 的增大而减小，求 m 的取值范围；

（2）若这个函数是一次函数，且图象过第一、二、三象限，求 m 的取值范围.

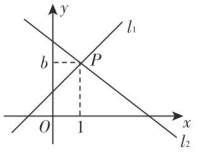
类型 2　巧用一次函数的图象解方程、不等式的有关问题

2. 如图，直线 l_1：$y=x+1$ 与直线 l_2：$y=mx+n$ 相交于点 $P(1,b)$.

（1）求 b 的值.

（2）不解关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=mx+n,\end{cases}$ 请你直接写出它的解.

（3）直线 l_3：$y=nx+m$ 是否也经过点 P？请说明理由.



（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

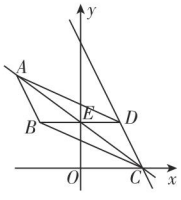
3. 试用图象法解不等式组$\begin{cases}2x+3<5,\\ \dfrac{1}{2}x-8>-6.\end{cases}$

类型 3　巧用一次函数的图象特点求解面积问题

4. 如图，O 为原点，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，C 为 x 轴上的一点．点 E 为对角线 AC 与 BD 的交点，且在 y 轴上．另外，BD 与 x 轴平行，直线 AC 的表达式为 $y=ax+3$（a 为常数），直线 DC 的表达式为 $y=-2x+8$.

（1）求 a 的值；

（2）求三角形 EOC 的面积是三角形 CDE 的面积的多少倍．



（第 4 题）

类型 4　巧用一次函数的增减性解方案设计问题

5. 某商场分两次购进 A，B 两种商品进行销售，两次购进同一种商品的进价相同，具体情况如下表所示：

	购进数量 / 件		购进所需费用 / 元
	A	B	
第一次	30	40	3 800
第二次	40	30	3 200

（1）求 A，B 两种商品每件的进价分别是多少元．

（2）商场决定 A 种商品以每件 30 元出售，B 种商品以每件 100 元出售，为满足市场需求，需购进 A，B 两种商品共 1 000 件，且 A 种商品的数量不少于 B 种商品数量的 4 倍，请你求出销售利润最大的进货方案，并确定最大利润．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 12 章测试卷 ☞答案见 223 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 下列函数：① $y=x$；② $y=2x-1$；③ $y=\frac{1}{x}$；④ $y=x^2-1$ 中，是一次函数的有（　　）

A.4 个　　B.3 个　　C.2 个　　D.1 个

2. 直线 $y=2x-4$ 与 y 轴的交点坐标是（　　）

A.（4，0）　　B.（0，4）

C.（−4，0）　　D.（0，−4）

3. 一次函数 $y=-2x+3$ 的图象不经过的象限是（　　）

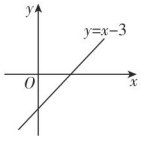
A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

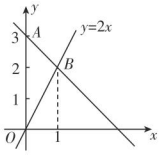
4. 如图是一次函数 $y=x-3$ 的图象，点 P（2，m）在该直线的上方，则 m 的取值范围是（　　）

A.$m>-3$　　B.$m>-1$

C.$m>0$　　D.$m<3$



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，过 A 点的一次函数的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象相交于点 B，则这个一次函数的表达式是（　　）

A.$y=2x+3$　　B.$y=x-3$

C.$y=2x-3$　　D.$y=-x+3$

6. 在平面直角坐标系中，将直线 l_1：$y=-2x-2$ 平移后，得到直线 l_2：$y=-2x+4$，则下列平移作法正确的是（　　）

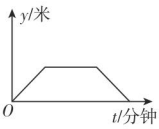
A. 将 l_1 向右平移 3 个单位长度

B. 将 l_1 向右平移 6 个单位长度

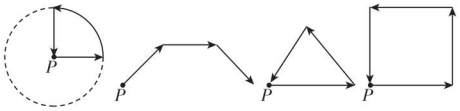
C. 将 l_1 向上平移 2 个单位长度

D. 将 l_1 向上平移 4 个单位长度

7. 李阿姨每天早晨从家慢跑到小区公园，锻炼一阵后，再慢跑回家．表示李阿姨离开家的距离 y（单位：米）与时间 t（单位：分钟）的函数关系的图象大致如图所示，则李阿姨跑步的路线可能是（用 P 点表示李阿姨家的位置）（　　）



（第 7 题）



A　　B　　C　　D

8. 某通信公司提供了两种移动电话收费方式：方式一，收月基本费 20 元，再以每分钟 0.1 元的价格按通话时间计费；方式二，收月基本费 20 元，送 80 分钟通话时间，超过 80 分钟的部分，以每分钟 0.15 元的价格计费．

下列结论：

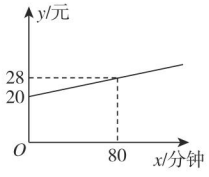
①如图描述的是方式一的收费方式；

②若月通话时间少于 240 分钟，选择方式二省钱；

③若月通信费为 50 元，则方式一比方式二的通话时间多；

④若方式一比方式二的通信费多 10 元，则方式一比方式二的通话时间多 100 分钟．

其中正确的是（　　）



（第 8 题）

A. 只有①②　　B. 只有③④

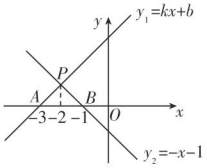
C. 只有①②③　　D. ①②③④

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

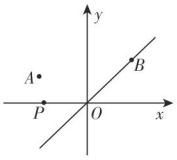
9. 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象经过 A（1，0）和 B（0，2）两点，则它的图象不经过第_____象限．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图，直线 $y_1=kx+b$ 与 $y_2=-x-1$ 交于点 P，它们分别与 x 轴交于点 A，B，且 B，P，A 三点的横坐标分别为 -1，-2，-3，则满足 $y_1<y_2$ 的 x 的取值范围是_____.



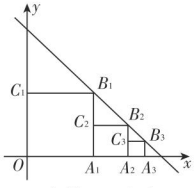
（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，定点 $A(-2,\ 1)$，点 B 在直线 $y=x$ 上，且横坐标为 2，动点 P 在 x 轴上运动，当线段 $PA+PB$ 最短时，点 P 的坐标为_____.

12. 正方形 $OA_1B_1C_1$，$A_1A_2B_2C_2$，$A_2A_3B_3C_3$，按如图所示放置，其中点 A_1，A_2，A_3 在 x 轴的正半轴上，点 B_1，B_2，B_3 在直线 $y=-x+2$ 上，则点 A_3 的坐标为_____.



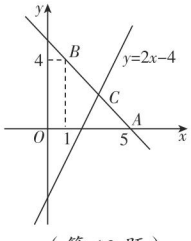
（第 12 题）

三、解答题（共 60 分）

13.（10 分）如图，直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(5,\ 0)$，$B(1,\ 4)$.

（1）求直线 AB 的表达式；

（2）若直线 $y=2x-4$ 与直线 AB 相交于点 C，求点 C 的坐标.

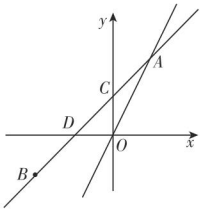


（第 13 题）

14.（10 分）如图，正比例函数 $y=2x$ 的图象与一次函数 $y=kx+b$ 的图象交于点 $A(m,\ 2)$，一次函数的图象经过点 $B(-2,\ -1)$，与 y 轴交点为 C，与 x 轴交点为 D.

（1）求一次函数的表达式；

（2）求三角形 AOD 的面积.



（第 14 题）

15.（12 分）[中考·南京] 已知一次函数 $y_1=kx+2$（k 为常数，$k\neq 0$）和 $y_2=x-3$.

（1）当 $k=-2$ 时，若 $y_1>y_2$，求 x 的取值范围.

（2）当 $x<1$ 时，$y_1>y_2$. 结合图象，直接写出 k 的取值范用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.（12 分）随着信息技术的快速发展，“互联网 +”渗透到我们日常生活的各个领域，网上在线学习交流已不再是梦．现有某教学网站策划了 A，B 两种上网学习的月收费方式：

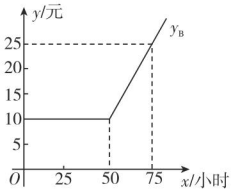
收费方式	月使用费 / 元	包时上网时间 / 小时	超时费 /（元 / 分钟）
A	7	25	0.01
B	m	n	0.01

设每月上网学习时间为 x 小时，A，B 两种方式的收费金额分别为 y_A 元，y_B 元．

（1）如图是 y_B 与 x 之间函数关系的图象，请根据图象填空：m=_____，n=_____；

（2）写出 y_A 与 x 之间的函数表达式；

（3）选择哪种方式上网学习合算，为什么？



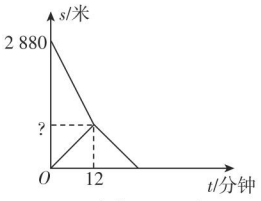
（第 16 题）

17.（16 分）五一假期过后，小明到校后发现忘记带数学课本．一看手表，离上课还有 20 分钟，他立刻步行返回家中取书，同时，他的父亲也发现小明忘记带数学课本，带上课本立刻以小明步行速度的 2 倍骑车赶往学校；父子在途中相遇，小明拿到课本后马上按原速步行返回学校，到校后发现迟到了 4 分钟．如图是父子俩离学校的路程 s（米）与所用时间 t（分钟）之间的函数关系，请结合图象，回答下列问题：

（1）两人相遇处离学校的距离是多少米？

（2）试求小明的父亲在赶往学校的过程中，路程 s 与时间 t 之间的函数表达式．

（3）假如小明父子相遇拿到课本后，改由他的父亲骑车搭他到学校，他会迟到吗？如果会，迟到几分钟？如果不会，能提前几分钟到校？



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第11章 平面直角坐标系

11.1 平面内点的坐标

【两年模拟兵法】

1. B

2. C　**点拨**：A，B 两点的纵坐标相等且不为 0，横坐标不相等，所以过 A，B 两点的直线一定平行于 x 轴. 故选 C.

3. A

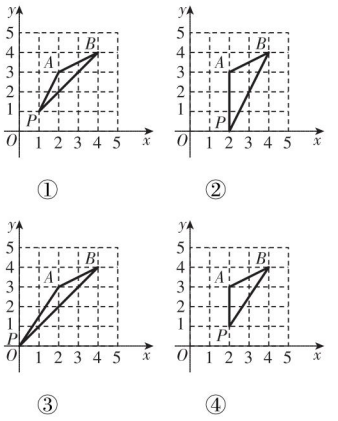
4. D

5. 四　6. 5

7. **解**：(1)因为点 M 在 y 轴上，
所以 $3a-9=0$，解得 $a=3$.
所以 $a-1=2$.
所以点 M 的坐标为(0,2).
(2)由题意可知点 M 不可能是原点. 当点 M 在坐标轴上(不包括原点)时显然不满足题意，下面分两种情况讨论：
①当点 M 位于第一或第三象限时，$3a-9=a-1$，解得 $a=4$.
所以 $3a-9=3$，$a-1=3$.
所以点 M 的坐标为(3,3).
②当点 M 位于第二或第四象限时，
$3a-9+a-1=0$，
解得 $a=2.5$.
所以 $3a-9=-1.5$，$a-1=1.5$.
所以点 M 的坐标为$(-1.5,1.5)$.
综上可知，点 M 的坐标为(3,3)或$(-1.5,1.5)$.
(3)因为点 N 的坐标为$(3,-6)$，且直线 $MN\parallel x$ 轴，
所以 $a-1=-6$，解得 $a=-5$.
所以 $3a-9=-24$.
所以点 M 的坐标为$(-24,-6)$.

8. **解**：(1)根据题图中的平面直角坐标系可知，体育场的坐标为$(-2,5)$，文化宫的坐标为$(-1,3)$，超市的坐标为$(4,-1)$，宾馆的坐标为(4,4)，市场的坐标为(6,5).
(2)体育场、文化宫在第二象限，市场、宾馆在第一象限，超市在第四象限.
(3)不是，因为对于同一幅图，建立的平面直角坐标系不同，得到的点的坐标也就不同.

9. **解**：(1)如图①或②；(2)如图③或④.



(第9题)

11.2 图形在坐标系中的平移

【两年模拟兵法】

1. B　2. A　3. C

4. D　**点拨**：因为线段 CF 是由线段 AB 平移得到的，点 $A(-1,4)$ 的对应点为 $C(4,1)$，所以点的坐标变化规律是横坐标加上 5，纵坐标减去 3，所以点 $B(a,b)$ 的对应点 F 的坐标为$(a+5,b-3)$.

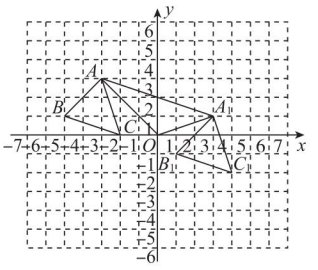
5. (1,2)

6. (7,0)　**点拨**：由 $B(4,0)$ 知 $OB=4$，又 $CB=1$，所以 $OC=3$，即三角形 OAB 沿 x 轴向右平移了 3 个单位，所以 $E(7,0)$.

7. 6

8. **解**：$A'(-3,-2)$，$B'(1,-2)$，$C'(3,1)$，$D'(-1,1)$.

9. **解**：(1)因为点 $P(a,b)$ 的对应点为 $P_1(a+6,b-2)$，所以平移规律为向右平移 6 个单位，向下平移 2 个单位.
所以 $A(-3,3)$，$B(-5,1)$，$C(-2,0)$ 的对应点的坐标分别为 $A_1(3,1)$，$B_1(1,-1)$，$C_1(4,-2)$.
(2)三角形 $A_1B_1C_1$ 如图所示.



(第9题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)如图,借助网格可知三角形 AOA_1 的面积 $=6\times3-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times6\times2=18-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-6=6$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B **2**. D **3**. $(-4,0)$

4. **解**:(1)因为点 $P(2m+4,m-1)$,点 P 的纵坐标比横坐标大 3,

所以 $m-1-(2m+4)=3$,解得 $m=-8$.

所以 $2m+4=-12$,$m-1=-9$.

所以点 $P(-12,-9)$.

(2)因为点 P 在过点 $A(2,-3)$,且与 x 轴平行的直线上,

所以 $m-1=-3$,解得 $m=-2$.

所以 $2m+4=0$.

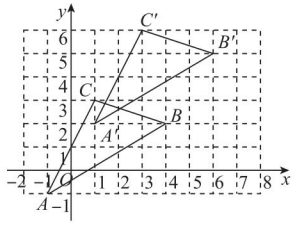
所以 $P(0,-3)$.

5. A

6. **解**:(1)$A(-1,-1)$,$B(4,2)$,$C(1,3)$.

(2)$S_{三角形ABC}=4\times5-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times5\times3-\frac{1}{2}\times1\times3=20-4-\frac{15}{2}-\frac{3}{2}=7$.

(3)如图. 点 M' 的坐标为 $(a+2,b+3)$.



(第 6 题)

7. **解**:(1)因为 $|a+2|+(b-4)^2=0$,

所以 $a+2=0$,$b-4=0$.

所以 $a=-2$,$b=4$.

所以点 $A(-2,0)$,点 $B(4,0)$.

又因为点 $C(0,3)$,

所以 $AB=|-2-4|=6$,$CO=3$.

所以 $S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CO=\frac{1}{2}\times6\times3=9$.

(2)设点 M 的坐标为 $(x,0)$,

则 $AM=|x-(-2)|=|x+2|$.

又因为 $S_{三角形ACM}=\frac{1}{3}S_{三角形ABC}$,

所以 $\frac{1}{2}AM\cdot OC=\frac{1}{3}\times9$.

所以 $\frac{1}{2}|x+2|\times3=3$.

所以 $|x+2|=2$. 即 $x+2=\pm2$.

解得 $x=0$ 或 -4,

故点 M 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(-4,0)$.

8. D **9**. D

【第 11 章测试卷】

一、**1**. B **2**. A **3**. B **4**. B **5**. D

6. C **7**. D **8**. C

二、**9**. 5

10. $(6,-28)$ **11**. $(1,2)$ 或 $(-7,2)$

12. $(673,-1)$

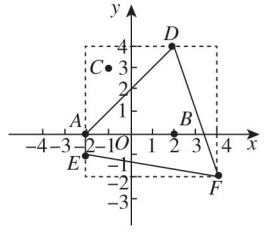
三、**13**. **解**:(1)汽车站 $(1,1)$,消防站 $(2,-2)$.

(2)游乐场,公园,姥姥家,宠物店,邮局.

14. **解**:(1)如图所示.

(2)如图,把四边形 $ADFE$ 补成一个正方形,则

$S_{四边形ADFE}=6\times6-\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times2\times6-\frac{1}{2}\times1\times6=36-8-6-3=19$.



(第 14 题)

15. **解**:$A(2,-2)$,$B(0,-4)$,$C(3,-3)$,$D(2,-1)$,分别向上平移 2 个单位,再向左平移 3 个单位得 $A'(2-3,-2+2)$,$B'(0-3,-4+2)$,$C'(3-3,-3+2)$,$D'(2-3,-1+2)$,即 $A'(-1,0)$,$B'(-3,-2)$,$C'(0,-1)$,$D'(-1,1)$.

16. **解**:设点 C 的坐标为 $(0,y)$. 因为 $CA\perp AB$,

所以 $S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times(3-0)\times|0-y|$,

即 $\frac{1}{2}\times3\times|y|=5$. 所以 $|y|=\frac{10}{3}$,$y=\pm\frac{10}{3}$.

所以点 C 的坐标为 $\left(0,\frac{10}{3}\right)$ 或 $\left(0,-\frac{10}{3}\right)$

17. **解**:(1)$A(2,3)$ 与 $D(-2,-3)$;$B(1,2)$ 与 $E(-1,-2)$;$C(3,1)$ 与 $F(-3,-1)$. 对应点的坐标的特征:横坐标互为相反数,纵坐标互为相反数.

(2)由(1)可得 $a+3=-2a$,$4-b=-(2b-3)$. 解得 $a=-1$,$b=-1$.

第12章 一次函数

12.1 函数

【两年模拟兵法】

1. A

2. A **点拨**:①因为信件质量为 27 克,在 $20<p\leqslant40$ 范

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

围内，所以邮资为2.40元，故①正确；②若邮资为2.40元，则信件质量在$20 < p \leqslant 40$范围内均可，故②错误；由题意得q是p的函数，故③错误，④正确. 故选A.

3. C　**4**. A　**5**. D

6. B　**点拨**：由函数的定义可知，图①②对可取范围内任意一个x值，y都有唯一确定的值与之对应，所以图①②表示y是x的函数；而图③④不满足对可取范围内任意一个x值，y都有唯一确定的值与之对应，所以图③④不能表示y是x的函数. 所以表示y是x的函数的个数是2.

7. A

8. C　**点拨**：根据每一段函数图象的倾斜程度，判断水面上升速度的快慢，再观察容器的粗细，作出判断. 注水速度一定，函数图象的走势是稍陡，平，陡，那么水面升高的速度就相应地变化，跟所给容器的粗细有关. 则从下往上容器的粗细相应的排列顺序就为稍大、大、小，故选择C.

9. **解**：(1)由长方形的周长公式，得

$y = 2(x + 16)$，即$y = 2x + 32$.

(2)由长方形的面积公式，得$S = 16x$.

(3)当$S = 160$时，$x = 10$，$y = 52$.

(4)因为$y = 2x + 32$，所以当x增加2时，y增加4；因为$S = 16x$，所以当x增加2时，S增加32.

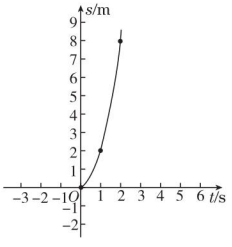
点拨：解决该题的关键是根据长方形的周长公式和面积公式写出y与x，S与x之间的函数表达式.

10. **解**：(1)当$x = -1$时，$y = 3 \times (-1) + 1 = -2 \neq 2$，所以点$A$不在此函数的图象上；

当$x = \frac{1}{3}$时，$y = 3 \times \frac{1}{3} + 1 = 2$，所以点$B$在此函数的图象上.

(2)因为点$(-a, a-1)$在此函数图象上，所以$a - 1 = -3a + 1$，解得$a = \frac{1}{2}$.

11. **解**：(1)依次填：0，2，8，18，图象如图所示.



(第11题)

(2)当$t = 6.5$时，$s = 2 \times 6.5^2 = 84.5$，即当小球滚动6.5 s时，其滚动的距离是84.5 m.

(3)当$s = 128$时，$t = 8$(负值舍去)，即经过8 s时，小球滚动128 m.

12. **解**：(1)距离分别为5千米、8千米、10千米.

(2)他停下来休息时，离开城市的距离是8千米.

(3)乡村离城市有14千米的路程.

(4)观察图象可知9时到10时所走的路程为$8 - 5 = 3$(千米)，所以旅行者在9时到10时的速度为$3 \div 1 = 3$(千米/时)，当旅行者离开城市6千米时，上坡路走了$6 - 5 = 1$(千米)，此时走上坡路所用的时间为$1 \div 3 \times 60 = 20$(分)，所以旅行者离开城市6千米的时间为9时20分.

12.2　一次函数

【两年模拟兵法】

1. B　**点拨**：(1)$y = \pi x$是一次函数；

(2)$y = 2x - 1$是一次函数；

(3)$y = \frac{1}{x}$不是一次函数；

(4)$y = 2 - 3x$是一次函数；

(5)$y = x^2 - 1$不是一次函数.

是一次函数的有3个. 故选B.

2. D　**3**. A　**4**. D　**5**. A　**6**. C

7. C　**点拨**：根据正方形的性质、一次函数图象上点的坐标特征结合点A的坐标可得出点A_1、B_1的坐标，进而即可得出直线平移的距离.

8. **解**：(1)由题意得：$m + 2 < 0$，所以$m < -2$.

所以当$m < -2$且n为任意实数时，y随x的增大而减小.

(2)由题意得：$m + 2 \neq 0$且$3 - n = 0$，

所以当$m \neq -2$且$n = 3$时，函数的图象经过原点.

(3)由题意可得$\begin{cases} m + 2 < 0, \\ 3 - n < 0, \end{cases}$解得$\begin{cases} m < -2, \\ n > 3. \end{cases}$

所以当$m < -2$且$n > 3$时，函数的图象经过第二、三、四象限.

9. **解**：(1)因为$P(m, n)$在直线$y = -x + 6$上，且在第一象限，

所以$n = -m + 6$，点P到x轴的距离为$-m + 6$.

因为点A的坐标为$(5, 0)$，所以$OA = 5$.

所以$S = \frac{1}{2} \times 5 \times (-m + 6) = -\frac{5}{2}m + 15$.

画图略.

(2)若$S = 15$，即$-\frac{5}{2}m + 15 = 15$，解得$m = 0$.

此时点P的坐标为$(0, 6)$，

与点P在第一象限矛盾，

所以三角形PAO的面积不可以为15.

10. **解**：(1)设一次函数的表达式为$y = kx + b$ $(k \neq 0)$，

将点$(-2, -2)$、$(2, 4)$的坐标代入$y = kx + b$中，

得$\begin{cases} -2 = -2k + b, \\ 4 = 2k + b, \end{cases}$解得$\begin{cases} k = \frac{3}{2}, \\ b = 1. \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以这个函数的表达式为 $y=\frac{3}{2}x+1$.

(2)当 $x=1$ 时,$y=\frac{3}{2}\times1+1=\frac{5}{2}$,

因为$\frac{5}{2}\neq1$,所以点 $P(1,1)$ 不在此函数图象上.

(3)当 $x=0$ 时,$y=1$,

所以该函数图象与 y 轴交点坐标为$(0,1)$;

当 $y=0$ 时,$\frac{3}{2}x+1=0$,解得 $x=-\frac{2}{3}$.

所以该函数图象与 x 轴交点坐标为$\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

所以这个函数的图象与坐标轴围成的三角形的面积

$S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

11. 解:(1)由题图可知,甲 4 h 行驶了 40 km,则甲行驶的速度为 $40\div4=10$(km/h);乙 0.5 h 行驶了 40 km,则乙行驶的速度为 $40\div0.5=80$(km/h). 即甲、乙两人的速度分别是 10 km/h,80 km/h.

(2)①乙返程中与 A 地的距离 y(km)与时间 t(h)的函数图象如图所示.

设乙返程中与 A 地的距离 y(km)关于时间 t(h)的函数表达式为 $y=kt+b(k\neq0)$,

因为点$(2,40)$,$(2.5,0)$在此函数的图象上,

所以$\begin{cases}2k+b=40,\\2.5k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-80,\\b=200.\end{cases}$

即乙返程中与 A 地的距离 y(km)关于时间 t(h)的函数表达式是 $y=-80t+200(2\leqslant t\leqslant2.5)$

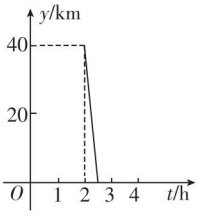
②设甲行驶的路程 s_1 关于时间 t 的函数表达式为 $s_1=mt$,则由 $40=4m$,得 $m=10$. 令 $10t=-80t+200$,

解得 $t=\frac{20}{9}$,

所以 $10\times\frac{20}{9}=\frac{200}{9}$(km),

所以 $40-\frac{200}{9}=\frac{160}{9}$(km),

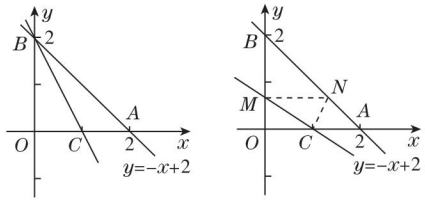
即甲在离 B 地$\frac{160}{9}$ km 处与返程中的乙相遇.



(第 11 题)

12. 解:(1)如图①所示,依题意,得 $A(2,0)$,$B(0,2)$.

因为三角形 AOB 被分成的两部分面积相等,且易知 C 为 OA 的中点,



①　　②

(第 12 题)

所以直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 过点 B.

由直线 $y=kx+b$ 过点 $C(1,0)$和点 $B(0,2)$,

易得 $k=-2$,$b=2$.

(2)设直线 $y=kx+b$ 与 OB 交于点 $M(0,h)$,此时分三角形 AOB 的面积之比为 1:5,如图②所示.

易得 $S_{三角形OMC}=\frac{1}{6}S_{三角形AOB}$,即 $\frac{1}{2}\times1\times h=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times2\times2$,所以 $h=\frac{2}{3}$. 所以$M\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

过点 M 作直线 $MN\parallel OA$,交 AB 于点$N\left(a,\frac{2}{3}\right)$,连接 CN,则$S_{三角形OMC}=S_{三角形CAN}$.

因为点$N\left(a,\frac{2}{3}\right)$在直线 $y=-x+2$ 上,

所以 $a=\frac{4}{3}$.

所以点$N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

所以直线 $y=kx+b$ 经过 $M\left(0,\frac{2}{3}\right)$,$C(1,0)$或 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$,$C(1,0)$.

所以$\begin{cases}b=\frac{2}{3},\\k+b=0\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{4}{3}k+b=\frac{2}{3},\\k+b=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}k=2,\\b=-2.\end{cases}$

12.3 一次函数与二元一次方程

【两年模拟兵法】

1. B　点拨:方程 $8x-4y=5$ 可化为 $y=2x-\frac{5}{4}$,由直线 l 是以二元一次方程 $8x-4y=5$ 的解为坐标所构成的,知直线 l 的表达式为 $y=2x-\frac{5}{4}$,所以直线 l 不经过第二象限.

2. B　点拨:设直线 l_2 的表达式为 $y=kx+b$,因为直线 l_1 与直线 l_2 关于 x 轴对称且直线 l_1 经过点$(0,4)$,所以

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

直线 l_2 经过点(0,-4). 又因为直线 l_2 经过点(3,2),

所以 $\begin{cases}3k+b=2,\\ b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-4,\end{cases}$

所以直线 l_2 的表达式为 $y=2x-4$. 令 $y=0$,解得 $x=2$,

所以直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为(2,0).

3. D

4. $(-2,4)$;$\frac{20}{3}$　**点拨:** 解方程组 $\begin{cases}y=-3x-2,\\ y=2x+8,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=4,\end{cases}$ 故交点坐标为 $(-2,4)$. 直线 $y=-3x-2$ 与 x 轴交于点 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. 直线 $y=2x+8$ 与 x 轴交于点 $(-4,0)$. 两直线与 x 轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\left|-4-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|\times4=\frac{20}{3}$.

5. 解: (1)由 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$,

可知当 $y_1=0$ 时,$x=2$,所以点 A 的坐标是(2,0),

所以 $AO=2$,

因为直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B,

所以点 B 的坐标是 $(-1,1.5)$,

所以三角形 AOB 的面积 $=\frac{1}{2}\times2\times1.5=1.5$.

(2)由(1)可知交点 B 的坐标是 $(-1,1.5)$,

由函数图象可知 $y_1>y_2$ 时 $x>-1$.

6. 解: (1)因为点 $P(1,b)$ 在直线 $l_1:y=2x+1$ 上,

所以 $b=2\times1+1=3$.

因为点 $P(1,3)$ 在直线 $l_2:y=mx+4$ 上,

所以 $3=m+4$,所以 $m=-1$.

(2)当 $x=a$ 时,$y_C=2a+1$;

当 $x=a$ 时,$y_D=4-a$.

因为 $CD=2$,所以 $|2a+1-(4-a)|=2$,

解得 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{5}{3}$.

所以 a 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$.

7. 解: (1)把点 $(-2,a)$ 的坐标代入 $y=2x-1$,得 $-4-1=a$,

解得 $a=-5$.

(2)由(1)知点 $P(-2,-5)$,

则直线 l_2 对应的函数表达式是 $y=\frac{5}{2}x$,

因此点 $P(-2,a)$ 的横、纵坐标可以看成是二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\ y=\frac{5}{2}x\end{cases}$ 的解.

(3)易知直线 l_1 与 x 轴交于点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$,

所以 $S_{三角形APO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{4}$.

(4)存在点 M,使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等. 设点 M 的坐标为 (m,b).

①当 $m=b$ 时,点 M 的坐标为 (m,m),代入 $y=2x-1$ 得 $2m-1=m$,解得 $m=1$,即点 M 的坐标为 $(1,1)$;

②当 $m=-b$ 时,点 M 的坐标为 $(m,-m)$,代入 $y=2x-1$ 得 $2m-1=-m$,解得 $m=\frac{1}{3}$,即点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

综上所述,存在符合条件的点 M,其坐标为 $(1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

8. 解: (1)设该网店甲种口罩每袋的售价为 x 元,乙种口罩每袋的售价为 y 元,

根据题意得 $\begin{cases}x-y=5,\\ 2x+3y=110,\end{cases}$

解这个方程组得 $\begin{cases}x=25,\\ y=20.\end{cases}$

故该网店甲种口罩每袋的售价为 25 元,乙种口罩每袋的售价为 20 元.

(2)设该网店购进甲种口罩 m 袋,则购进乙种口罩 $(500-m)$ 袋,

根据题意,得 $\begin{cases}m>\frac{4}{5}(500-m),\\ 22.4m+18(500-m)\leqslant10\,000,\end{cases}$

解这个不等式组得 $222\frac{2}{9}<m\leqslant227\frac{3}{11}$.

因为 m 为整数,所以有 5 种进货方案,分别是:

购进甲种口罩 223 袋,乙种口罩 277 袋;

购进甲种口罩 224 袋,乙种口罩 276 袋;

购进甲种口罩 225 袋,乙种口罩 275 袋;

购进甲种口罩 226 袋,乙种口罩 274 袋;

购进甲种口罩 227 袋,乙种口罩 273 袋;

设网店获利 w 元,则有 $w=(25-22.4)m+(20-18)\cdot(500-m)=0.6m+1\,000$,

故当 $m=227$ 时,w 最大,

$w_{最大}=0.6\times227+1\,000=1\,136.2$.

故该网店购进甲种口罩 227 袋,购进乙种口罩 273 袋,获利最大,最大获利为 1 136.2 元.

9. 解: (1)330;660

(2)设线段 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx$,将点(17,340)的坐标代入 $y=kx$ 中,

得 $340=17k$,解得 $k=20$.

所以线段 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数表达式

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为$y=20x$.

根据题意得,线段DE所表示的y与x之间的函数表达式为$y=340-5(x-22)=-5x+450$.

联立两线段所表示的函数表达式成方程组,

得$\begin{cases}y=20x,\\y=-5x+450,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=18,\\y=360.\end{cases}$

所以交点D的坐标为(18,360),

所以y与x之间的函数表达式为

$y=\begin{cases}20x(0\leqslant x\leqslant 18),\\-5x+450(18<x\leqslant 30).\end{cases}$

(3)当$0\leqslant x\leqslant 18$时,

根据题意得$(8-6)\times 20x\geqslant 640$,

解得$x\geqslant 16$.

当$18<x\leqslant 30$时,

根据题意得$(8-6)\times(-5x+450)\geqslant 640$,

解得$x\leqslant 26$.

所以$16\leqslant x\leqslant 26$.

$26-16+1=11$(天),

所以日销售利润不低于640元的天数共有11天,

因为点D的坐标为(18,360),

所以日最大销售量为360件.

因为$360\times 2=720$(元),

所以试销售期间,日销售最大利润是720元.

12.4 综合与实践 一次函数模型的应用

【两年模拟兵法】

1. D **2**. C **3**. B

4. **解**:(1)$y_1=20+0.1x$;$y_2=0.2x$.

(2)令$y_1=y_2$,即$20+0.1x=0.2x$,

解得$x=200$,

所以一个月内通话200 min,两种通信业务费用相同.

(3)当$x=300$时,$y_1=20+0.1\times 300=50$,$y_2=0.2\times 300=60$,

因为$y_1<y_2$,

所以选择“全球通”合算些.

点拨:(1)根据两种通信业务的收费方式可得$y_1=20+0.1x$,$y_2=0.2x$;(2)令$y_1=y_2$,解方程即可;(3)当$x=300$时,分别求出y_1,y_2的值,再比较即可.

5. **解**:(1)设大货车有m辆,则小货车有$(15-m)$辆,

根据题意,得$12m+8(15-m)=152$.

解得$m=8$. 则$15-m=7$.

答:大货车有8辆,小货车有7辆.

(2)$y=800x+900(8-x)+400(10-x)+600[7-(10-x)]=100x+9\,400(3\leqslant x\leqslant 8$且$x$为整数).

(3)由题意得$12x+8(10-x)\geqslant 100$,解得$x\geqslant 5$.

又因为$3\leqslant x\leqslant 8$,

所以$5\leqslant x\leqslant 8$.

因为$y=100x+9\,400$中,$k=100>0$,

所以y随x的增大而增大,

所以当$x=5$时,y有最小值为$100\times 5+9\,400=9\,900$.

答:使总运费最少的货车调配方案为派往A村5辆大货车,5辆小货车,派往B村3辆大货车,2辆小货车,最少总运费为9 900元.

6. **解**:(1)经销商能盈利$5\times 11+5\times 17+5\times 9+5\times 13=5\times 50=250$(元).

(2)设甲店配A种水果x箱,水果经销商盈利w元,则甲店配B种水果$(10-x)$箱,

乙店配A种水果$(10-x)$箱,乙店配B种水果$10-(10-x)=x$(箱).

因为$9\times(10-x)+13x\geqslant 100$,且$x$为整数,

所以$x\geqslant 2\frac{1}{2}$,且x为整数.

$w=11x+17(10-x)+9(10-x)+13x=-2x+260$.

因为$-2<0$,

所以w随x的增大而减小,

所以当$x=3$时,w最大.

即甲店配A种水果3箱,B种水果7箱,乙店配A种水果7箱,B种水果3箱,经销商盈利最大.

最大盈利为$-2\times 3+260=254$(元).

7. **解**:(1)

	A/吨	B/吨	合计/吨
C	$x-60$	$300-x$	240
D	$260-x$	x	260
总计/吨	200	300	500

(2)由题意得$w=20(x-60)+25(300-x)+15(260-x)+30x=10x+10\,200(60\leqslant x\leqslant 260)$.

(3)因为从D市到B市的运费每吨减少m元,

所以$w=(10-m)x+10\,200$.

①若$0<m<10$,则$x=60$时,总运费最少.

所以$(10-m)\times 60+10\,200\geqslant 10\,320$,

解得$0<m\leqslant 8$.

②若$m>10$,则$x=260$时,总运费最少.

所以$(10-m)\times 260+10\,200\geqslant 10\,320$,

解得$m\leqslant\frac{124}{13}<10$.

显然不合题意,应舍去.

③若$m=10$,则$w=10\,200$.

显然不合题意,应舍去.

综上所述,m的取值范围为$0<m\leqslant 8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)因为 $y=(2m+1)x+m-3$ 是一次函数,且 y 随 x 的增大而减小,

所以 $2m+1<0$,

解得 $m<-\frac{1}{2}$.

(2)因为图象过第一、二、三象限,

所以 $\begin{cases}2m+1>0,\\ m-3>0,\end{cases}$

解得 $m>3$.

2. 解:(1)因为点 $P(1,b)$ 在直线 $y=x+1$ 上,

所以当 $x=1$ 时,$b=1+1=2$.

(2)方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$

(3)直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P. 理由如下:将点(1,2)的坐标代入 $y=mx+n$,得 $m+n=2$. 将 $x=1$ 代入 $y=nx+m$,得 $y=2$.

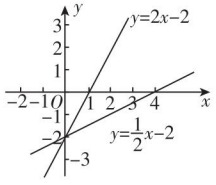
所以直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P.

3. 解:原不等式组可化为 $\begin{cases}2x-2<0,\\ \frac{1}{2}x-2>0.\end{cases}$

在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=2x-2$ 和 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图象如图所示.

因为 $x<1$ 时,$2x-2<0$,$x>4$ 时,$\frac{1}{2}x-2>0$,

所以原不等式组无解.



(第3题)

点拨:先将不等式转化为大于或小于0的形式,再画出所对应的函数图象,最后通过函数图象找出不等式组的解集.

4. 解:(1)因为直线 DC 的表达式为 $y=-2x+8$,

令 $y=0$,得 $x=4$,即点 C 的坐标为(4,0).

把点 C 的坐标(4,0)代入 $y=ax+3$,

得 $0=4a+3$,

所以 $a=-\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

令 $x=0$,得 $y=3$,

所以点 E 的坐标为(0,3).

因为 BD 与 x 轴平行,

所以 $y_B=y_D=y_E$,即点 D 的纵坐标为3,

令 $3=-2x+8$,得 $x=\frac{5}{2}$.

所以 $DE=\frac{5}{2}$.

三角形 CDE 的面积 $=\frac{1}{2}\times DE\times OE=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 3=\frac{15}{4}$,

又因为三角形 EOC 的面积 $=\frac{1}{2}\times OC\times OE=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$,

所以三角形 EOC 的面积是三角形 CDE 的面积的 $\frac{8}{5}$ 倍.

5. 解:(1)设A种商品每件的进价为 x 元,B种商品每件的进价为 y 元,

根据题意,得 $\begin{cases}30x+40y=3\,800,\\ 40x+30y=3\,200,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=20,\\ y=80.\end{cases}$

所以A种商品每件的进价为20元,B种商品每件的进价为80元.

(2)设购进B种商品 m 件,获得的利润为 ω 元,则购进A种商品 $(1\,000-m)$ 件,

根据题意,得 $\omega=(30-20)(1\,000-m)+(100-80)m=10m+10\,000$.

因为A种商品的数量不少于B种商品数量的4倍,

所以 $1\,000-m\geqslant 4m$,解得 $m\leqslant 200$.

因为在 $\omega=10m+10\,000$ 中,$k=10>0$,

所以 ω 随 m 的增大而增大,

所以当 $m=200$ 时,ω 取最大值,最大值为 $10\times 200+10\,000=12\,000$,

所以当购进A种商品800件、B种商品200件时,销售利润最大,最大利润为12 000元.

【第12章测试卷】

一、**1**. C **2**. D **3**. C **4**. B **5**. D **6**. A **7**. A **8**. C

二、**9**. 三 **10**. $x<-2$ **11**. $(-\frac{2}{3},0)$ **12**. $(\frac{7}{4},0)$

三、**13. 解**:(1)因为直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(5,0)$,$B(1,4)$,

所以 $\begin{cases}5k+b=0,\\ k+b=4.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=5.\end{cases}$

所以直线 AB 的表达式为 $y=-x+5$.

(2)联立 $\begin{cases}y=-x+5,\\ y=2x-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

所以点 C 的坐标为(3,2).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解:(1)因为正比例函数 $y=2x$ 的图象经过点 $A(m,2)$,

所以 $2=2m$,所以 $m=1$.

因为一次函数的图象经过点 $A(1,2)$,$B(-2,-1)$,

所以 $\begin{cases}k+b=2,\\-2k+b=-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

所以一次函数的表达式为 $y=x+1$.

(2)当 $y=0$ 时,$x+1=0$,得 $x=-1$,

所以 $D(-1,0)$. 所以 $OD=1$.

所以 $S_{三角形AOD}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

15. 解:(1)当 $k=-2$ 时,$y_1=-2x+2$.

根据题意,得 $-2x+2>x-3$,解得 $x<\frac{5}{3}$.

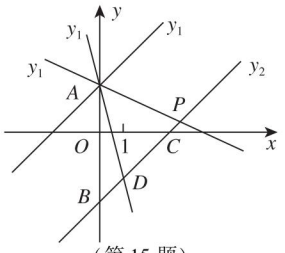
(2) $-4\leqslant k\leqslant1$ 且 $k\neq0$.

点拨:如答图,直线 $y_2=x-3$ 上横坐标是 1 的点 D 的纵坐标是 -2.

①当直线 $y_1=kx+2$ 经过点 $D(1,-2)$ 时,$k=-4$. 此时符合题意;

②当直线 $y_1=kx+2$ 与直线 $y_2=x-3$ 平行时,$k=1$. 此时符合题意;

③当直线 $y_1=kx+2$ 与直线 $y_2=x-3$ 的交点 P 在射线 DC 上(不与点 D 重合)时,符合题意,此时 k 的取值范围是 $-4<k<1$ 且 $k\neq0$.



(第 15 题)

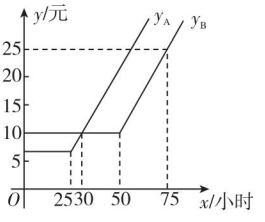
综上所述,k 的取值范围是 $-4\leqslant k\leqslant1$ 且 $k\neq0$.

16. 解:(1)10;50

(2) $y_A=\begin{cases}7(0\leqslant x\leqslant25),\\0.6x-8(x>25).\end{cases}$

(3)当 $y_A=10$ 时,$0.6x-8=10$,解得 $x=30$.

所以 y_A 的函数图象如图所示.



(第 16 题)

根据图象可知,

当 $0\leqslant x<30$ 时,选 A 方式合算;

当 $x=30$ 时,选 A 方式,B 方式收费一样;

当 $x>30$ 时,选 B 方式合算.

17. 解:(1)在图象中可以看出,从出发到父子俩相遇花费了 12 分钟.

设小明步行的速度为 x 米/分,则小明父亲骑车的速度为 $2x$ 米/分,根据题意,得

$12x+12\times2x=2\,880$. 解得 $x=80$.

所以两人相遇处离学校的距离是 $80\times12=960$(米).

(2)设小明的父亲在赶往学校的过程中,路程 s 与时间 t 之间的函数表达式为 $s=kt+b$.

把点(0,2 880)和点(12,960)的坐标分别代入,得

$\begin{cases}2\,880=b,\\960=12k+b.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-160,\\b=2\,880.\end{cases}$

所以 $s=-160t+2\,880$.

(3)在 $s=-160t+2\,880$ 中,

令 $s=0$,得 $0=-160t+2\,880$.

解得 $t=18$. 所以 $20-18=2$(分钟).

答:如果改由他的父亲骑车搭他到学校,他不会迟到,能提前 2 分钟到校.

第13章 三角形中的边角关系、命题与证明

13.1 三角形中的边角关系

13.1.1 三角形中边的关系

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C

3. C **点拨**:本题考查了三角形的三边关系.

4. B

5. B **点拨**:本题考查三角形的三边关系,设三角形的第三条边的长为 x cm,则 x 的取值范围为 $5-3<x<5+3$,即 $2<x<8$.

因为三角形的周长是偶数,

所以 $x+3+5=x+8$ 为偶数,所以 x 也是偶数,

因为在 2 到 8 之间的整数有 3,4,5,6,7,

所以 x 的值只能是 4 或 6,

所以三角形的第三条边的长为 4 cm 或 6 cm,故选 B.

6. C **7.** 2,6 或 4,4

8. 等腰三角形;7

点拨:因为 $(b-2)^2\geqslant0$,$|c-3|\geqslant0$,且 $(b-2)^2+|c-3|=0$,所以 $b-2=0$,$c-3=0$. 所以 $b=2$,$c=3$.

因为 a 为方程 $|x-4|=2$ 的解,所以 $a=2$ 或 6. 当 $a=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6，$b=2$，$c=3$ 时，$2+3<6$，不满足三角形的三边关系，故舍去. 当 $a=2$，$b=2$，$c=3$ 时，$2+2>3$，满足三角形的三边关系. 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，周长为 $2+2+3=7$.

9. 解：(1)根据两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，可得 $AB-BC<AC<AB+BC$，即 $3<AC<7$.

(2)周长 $l=AB+BC+AC=7+AC$，由(1)可知 $3<AC<7$，所以 $10<l<14$.

(3)由(1)可知，$3<AC<7$，

又因为 AC 的长为奇数，

所以 $AC=5$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=12$.

此时 $AB=AC$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

10. 解：设三角形的三条边长分别为 a，b，c，依题意知 $a+b+c=24$. ①

由三角形的三边关系得

$a+b>c$，② $b+c>a$，③ $a+c>b$，④

将②③④分别代入①，得 $c<12$，$a<12$，$b<12$.

再考虑到 a，b，c 均为整数，可得三角形的三条边长可能是 11，11，2；10，10，4；10，7，7；9，9，6；11，10，3； 10，9，5； 11，9，4； 10，8，6； 11，8，5； 9，8，7； 11，7，6； 8，8，8. 共有 12 个.

11. 解：(1)

连线条数	1	2	3	4	5	6
三角形个数	3	6	10	15	21	28

(2)8

(3)$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

点拨：$1+2+3+\cdots+(n+1)$

$=\frac{1}{2}[1+2+3+\cdots+(n+1)+1+2+3+\cdots+(n+1)]$

$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

故答案为 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

13.1.2 三角形中角的关系

【两年模拟兵法】

1. C

2. D **点拨：**利用方程思想来解答，由题意可设三角形的三个内角的度数分别为 $2x°$，$3x°$，$7x°$，则 $2x+3x+7x=180$. 解得 $x=15$. 所以最大角的度数为 $7\times15°=105°$. 所以这个三角形一定是钝角三角形.

3. D **点拨：**先由对顶角相等求出 $\angle CEF$ 的度数，再由三角形的内角和等于 180°求出 $\angle CFE$ 的度数，最后根据两直线平行，同位角相等可得 $\angle B$ 的度数.

4. A

5. D **点拨：**根据三角形的内角和等于 180°，以及有两个角互余的三角形是直角三角形进行判断.

6. A

7. 55°，35° **点拨：**根据直角三角形的两个锐角互余及已知条件列方程(组)求解.

8. 直角三角形 **9.** 59°

10. 解：设 $\angle A=x°$，则 $\angle C=\angle ABC=2x°$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle ABC+\angle C=180°$，所以 $x+2x+2x=180$. 所以 $x=36$.

所以 $\angle C=72°$. 因为 $BD\perp AC$，

所以 $\angle BDC=90°$. 所以 $\angle C+\angle DBC=90°$. 所以 $\angle DBC=90°-72°=18°$.

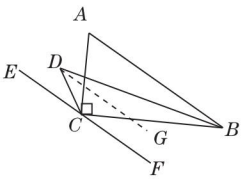
11. 解：(1) $\angle D=45°$. 因为 $EF/\!/AB$，

所以 $\angle ACE=\angle A=60°$.

因为 $\angle ACB=90°$，

所以 $\angle ABC=30°$.

如图，过 D 点作 $DG/\!/AB$，



(第 11 题)

因为 $EF/\!/AB$，所以 $DG/\!/AB/\!/EF$.

所以 $\angle BDG=\angle ABD$，$\angle CDG=\angle DCE$.

所以 $\angle BDG+\angle CDG=\angle ABD+\angle DCE$，

即 $\angle BDC=\angle ABD+\angle DCE$.

又因为 CD，BD 分别平分 $\angle ACE$ 和 $\angle ABC$.

所以 $\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACE=30°$，$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=15°$.

所以 $\angle BDC=\angle ABD+\angle DCE=45°$.

(2)60° (3)$\frac{1}{2}(180°-\alpha)$

13.1.3 三角形中几条重要线段

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D

3. B **点拨：**根据点 D，E 分别是 BC，AD 的中点，得 $S_{\triangle BEC}=4\ \text{cm}^2$.

因为点 F 是 EC 的中点，

所以 $S_{阴影}=S_{\triangle BEF}=2\ \text{cm}^2$.

4. C **点拨：**由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}$，得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot CF+\frac{1}{2}AD\cdot BE=\frac{1}{2}AD(CF+BE)$，显然 $\triangle ABC$ 的面

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

积不变,点 D 由点 B 运动到点 C,AD 的长度增大,故 $BE+CF$ 的值减小,故选 C.

5. 3 cm

6. **解**:因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE$,

所以 $\frac{1}{2}\times 9\times 6=\frac{1}{2}\times 8\times BE$.

所以 $BE=\frac{27}{4}$.

7. **解**:因为 $DE/\!/AC$,

所以 $\angle EDA=\angle CAD$.

又因为 $\angle EDA=\angle EAD$,

所以 $\angle CAD=\angle EAD$.

所以 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

8. **解**:因为 $S_{\triangle ABC}=6$,$AD=2BD$,$BE=CE$,

所以 $S_{\triangle BDC}=6\times\frac{1}{3}=2$,

$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times 6=3$.

所以 $S_1-S_2=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CBD}=3-2=1$.

9. **解**:当点 P 在 $\triangle ABC$ 内部时,结论 $h_1+h_2+h_3=h$ 仍然成立,

理由:连接 AP,BP,CP,则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}$.

所以 $\frac{1}{2}BC\cdot AM=\frac{1}{2}AB\cdot PD+\frac{1}{2}BC\cdot PF+\frac{1}{2}AC\cdot PE$,即 $\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot h_1+\frac{1}{2}AC\cdot h_2+\frac{1}{2}BC\cdot h_3$.

又因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,

所以 $BC=AB=AC$.

所以 $h=h_1+h_2+h_3$.

当点 P 在 $\triangle ABC$ 外部时,结论 $h=h_1+h_2+h_3$ 不成立,此时 h_1,h_2,h_3 与 h 之间的关系是 $h_1+h_2-h_3=h$.

理由如下:

连接 PB,PC,PA.

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}-S_{\triangle PBC}$,

所以 $\frac{1}{2}BC\cdot AM=\frac{1}{2}AB\cdot PD+\frac{1}{2}AC\cdot PE-\frac{1}{2}BC\cdot PF$,即 $\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot h_1+\frac{1}{2}AC\cdot h_2-\frac{1}{2}BC\cdot h_3$.

因为 $AB=BC=AC$,

所以 $h_1+h_2-h_3=h$.

点拨:本题利用三角形的面积巧妙地考查了等边三角形的性质.

13.2 命题与证明

【两年模拟兵法】

1. D **2**. B **3**. C **4**. A

5. ①③⑤⑦

6. **解**:(1)$\angle 1=\angle 2$,理由如下:

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$AD\perp BC$ 于点 D,$CE\perp AB$ 于点 E.

$\therefore\angle AEC=\angle ADC=90^\circ$.

设 AD 与 CE 交于点 O,

则 $\angle AOE=\angle DOC$(对顶角相等),

$\angle 1+\angle COD=\angle 2+\angle AOE=90^\circ$.

$\therefore\angle 1=\angle 2$.

(2)(1)中的结论仍然成立. 理由如下:

由题意可知 $\angle D=\angle E=90^\circ$,

$\therefore\angle 1+\angle CBE=\angle 2+\angle ABD=90^\circ$.

又$\because\angle ABD=\angle CBE$(对顶角相等).

$\therefore\angle 1=\angle 2$.

点拨:本题考查了直角三角形的性质.

7. **解**:(1)根据三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和,可得

$\angle B=\angle ACD-\angle A=83^\circ-35^\circ=48^\circ$.

(2)在 $\triangle AFE$ 中,$\angle A+\angle AFE+\angle AEF=180^\circ$,

在 $\triangle CED$ 中,$\angle D+\angle ECD+\angle DEC=180^\circ$,

$\because\angle D=42^\circ$,$\angle ECD=83^\circ$,

$\therefore\angle DEC=180^\circ-\angle D-\angle ECD=55^\circ$.

又$\because\angle DEC=\angle AEF$(对顶角相等),

$\therefore\angle AFE=180^\circ-\angle AEF-\angle A=180^\circ-\angle DEC-\angle A=180^\circ-55^\circ-35^\circ=90^\circ$.

8. **解**:设 $\angle CDE=x$,

$\because\angle ADC$ 是 $\triangle ADB$ 的外角,

$\therefore\angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle B+40^\circ$.

$\therefore\angle ADE=\angle ADC-\angle CDE=\angle B+40^\circ-x$.

$\because\angle AED$ 是 $\triangle CDE$ 的外角,

$\therefore\angle AED=\angle CDE+\angle C=x+\angle C$.

$\because\angle ADE=\angle AED$,

$\therefore\angle B+40^\circ-x=x+\angle C$.

$\because\angle B=\angle C$,

$\therefore 40^\circ-x=x$.

解得 $x=20^\circ$,即 $\angle CDE=20^\circ$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 8 cm 或 2 cm

2. **解**:(1)由题意得 $14<2a+2<30$,故 $6<a<14$.

(2)$\because\triangle ABC$ 为等腰三角形,

$\therefore 2a+2=8$ 或 $2a+2=22$,

则 $a=3$ 或 $a=10$.

$\because 6<a<14$,$\therefore a=10$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ △ABC 的周长为 $22+22+8=52$.

3. 解：(1)∵ a,b,c 是三角形的三边长，

∴ $a-b-c<0, b-c-a<0, c-a-b<0$.

∴ 原式 $=-a+b+c-b+c+a-c+a+b=a+b+c$.

(2)当 $a=5, b=4, c=3$ 时，原式 $=5+4+3=12$.

4. 解：∵ $DF \parallel EC$，

∴ $\angle BCE=\angle D=42°$.

∵ CE 是 $\angle ACB$ 的平分线，

∴ $\angle ACB=2\angle BCE=84°$.

又∵ $\angle A=46°$，

∴ $\angle B=180°-84°-46°=50°$.

5. 解：∵ DE 是 CA 边上的高，

∴ $\angle DEA=\angle DEC=90°$.

又∵ $\angle A=20°$，∴ $\angle EDA=90°-20°=70°$.

∵ $\angle EDA=\angle CDB$，

∴ $\angle CDE=180°-70°\times 2=40°$.

在 Rt△CDE 中，$\angle DCE=90°-40°=50°$.

∵ CD 是 $\angle BCA$ 的平分线，

∴ $\angle BCA=2\angle DCE=2\times 50°=100°$.

在△ABC 中，$\angle B=180°-\angle BCA-\angle A=180°-100°-20°=60°$.

6. 解：(1)∵ $\angle B=40°$，$\angle C=70°$，$FD\perp BC$，

∴ $\angle BAC=70°$，$\angle CAD=20°$.

∵ AE 平分 $\angle BAC$，

∴ $\angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=35°$.

∴ $\angle EFD=\angle CAE-\angle CAD=35°-20°=15°$.

(2)由(1)知 $\angle CAE=35°$，$\angle C=70°$，

∴ $\angle AEC=180°-70°-35°=75°$.

∴ $\angle EFD=180°-90°-75°=15°$.

(3)∵ $\angle DEF=\angle AEC=75°$，

∴ $\angle EFD=180°-75°-90°=15°$.

【第 13 章测试卷】

一、1. C **2.** C **3.** D **4.** A **5.** D **6.** B **7.** C **8.** D

二、9. 假；如果一个三角形中有一个内角为钝角，那么另外两个内角为锐角；真

10. 钝角

11. 32° **12.** 19 cm 或 20 cm

三、13. 解：∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=12\ \text{cm}^2$，$AE=3$ cm，

∴ $BC=8$ cm.

∵ AD 是 BC 边上的中线，

∴ $DC=\frac{1}{2}BC=4$ cm.

14. 解：$\angle QBO=180°-\angle A-\angle O=180°-28°-80°=72°$. 故 $\angle QBO$ 应等于 72°才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上.

15. 解：已知：$\angle B=\angle D$，$\angle A=\angle C$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明：∵ $\angle A=\angle C$，∴ $AB \parallel CD$.

∴ $\angle B=\angle BFC$.

又∵ $\angle B=\angle D$，∴ $\angle BFC=\angle D$，

∴ $DE \parallel BF$. ∴ $\angle DMN=\angle BNM$.

∵ $\angle 1=\angle DMN$，$\angle 2=\angle BNM$，

∴ $\angle 1=\angle 2$.

点拨：答案不唯一.

16. 证明：∵ 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，

∴ $\angle ABC+\angle ADC=360°-180°=180°$.

又∵ BE 平分 $\angle ABC$，DF 平分 $\angle ADC$，

∴ $\angle EBC+\angle FDC=90°$.

∵ $BE \parallel DF$，∴ $\angle EBC=\angle DFC$.

∴ $\angle DFC+\angle FDC=90°$.

∴ △DCF 为直角三角形.

17. 解：(1) $\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$. 理由：连接 AD，并延长至点 F，

∵ $\angle BDF=\angle BAD+\angle B$，

$\angle CDF=\angle C+\angle CAD$，

$\angle BDC=\angle BDF+\angle CDF$，$\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD$，

∴ $\angle BDC=\angle BAC+\angle B+\angle C$.

(2)① 40°

②由(1)的结论易得 $\angle DBE=\angle A+\angle ADB+\angle AEB$，

∴ $\angle ADB+\angle AEB=130°-50°=80°$.

易得 $\angle DCE=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle AEB)+\angle A$，

∴ $\angle DCE=\frac{1}{2}\times 80°+50°=90°$.

③ 易得 $\angle BC_1C=\frac{1}{10}(\angle ABD+\angle ACD)+\angle A$，

$\angle ABD+\angle ACD=\angle BDC-\angle A$.

设 $\angle A$ 为 $x°$，则 $\frac{1}{10}(140-x)+x=77$，

∴ $x=70$. ∴ $\angle A$ 的度数为 70°.

第14章 全等三角形

14.1 全等三角形

【两年模拟兵法】

1. B

2. C

3. A **点拨：**由题意得 $AC=DF=25$ cm，

∴ $BC=100-AC-AB=100-25-30=45$(cm).

4. 70° **点拨：**先由全等三角形的性质求出 $\angle DEF$ 和 $\angle ACB$ 的度数，再根据三角形内角和定理求 $\angle COE$ 的度数.

5. 100°；12cm

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 6　**点拨:**由折叠得 $BE=ED, BC'=DC, C'F=FC$,

$\therefore$ $\triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和等于长方形 $ABCD$ 的周长.

7. 解:(1) $\triangle ABC\cong\triangle DBE$, AC 和 DE, AB 和 DB, BC 和 BE 是对应边; $\angle A$ 和 $\angle D$, $\angle ACB$ 和 $\angle DEB$, $\angle ABC$ 和 $\angle DBE$ 是对应角.

(2)延长 AC 交 DE 于点 F.

$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle A+\angle ACB=90°$.

$\because \triangle ABC\cong\triangle DBE$,

$\therefore \angle A=\angle D$.

又$\because \angle ACB=\angle DCF$(对顶角相等),

$\therefore \angle D+\angle DCF=90°$.

$\therefore \angle AFE=90°$.

$\therefore AC\perp DE$.

8. 证明:$\because \triangle PAB\cong\triangle AQC$,

$\therefore \angle BAP=\angle CQA$.

$\because CF\perp AB$,

$\therefore \angle CQA+\angle QAF=90°$.

$\therefore \angle BAP+\angle QAF=90°$,

即$\angle QAP=90°$.

$\therefore AP\perp AQ$.

9. 解:相等.

理由如下:

$\because \triangle ADC\cong\triangle ECD$,

$\therefore S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ECD}$.

$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 同底等高.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ECD}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ECD}+S_{\triangle BCD}$,

即 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

14.2　三角形全等的判定

【两年模拟兵法】

1. A

2. C　**点拨:**本题考查了学生对全等三角形的判定方法的灵活运用.

3. C

4. B　**点拨:**$\because AD\perp CE, BE\perp CE$,

$\therefore \angle ADC=\angle CEB=90°$,

$\angle DAC+\angle DCA=90°$.

$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle ECB+\angle DCA=90°$,

$\therefore \angle DAC=\angle ECB$.

又$\because AC=CB$,

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$,

$\therefore AD=CE=3, CD=BE=1$,

$\therefore DE=CE-CD=3-1=2$.

5. $3<AD<7$

点拨:延长 AD 到 E,使 $DE=AD$,连接 CE,则 $AE=2AD$.

易证$\triangle ECD\cong\triangle ABD$,可得 $CE=AB=10$.

再由三角形三边关系可得 $CE-AC<AE<AC+CE$,

即 $10-4<2AD<10+4$,即 $3<AD<7$.

6. 证明:$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle DAC+\angle 1=\angle 2+\angle DAC$,

$\therefore \angle BAC=\angle DAE$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADE(ASA)$.

$\therefore BC=DE$.

7. 证明:$\because FB=CE$,

$\therefore BC=EF$.

又$\because AB/\!/ED, AC/\!/FD$,

$\therefore \angle ABC=\angle DEF, \angle ACB=\angle DFE$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF(ASA)$,

$\therefore AB=DE$.

在$\triangle ABO$ 和$\triangle DEO$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle DEF,\\ \angle AOB=\angle DOE,\\ AB=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle DEO(AAS)$,

$\therefore AO=DO, BO=EO$.

$\therefore AD$ 与 BE 互相平分.

8. (1)**证明:**$\because AE$ 和 BD 相交于点 O,

$\therefore \angle AOD=\angle BOE$.

在$\triangle AOD$ 和$\triangle BOE$ 中, $\angle A=\angle B$,

$\therefore \angle BEO=\angle 2$.

又$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1=\angle BEO$,

$\therefore \angle AEC=\angle BED$.

在$\triangle AEC$ 和$\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BED,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BED(ASA)$.

(2)**解:**$\because \triangle AEC\cong\triangle BED$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore EC=ED,\angle C=\angle BDE.$

在$\triangle EDC$中,$\because EC=ED,\angle 1=42°$,

$\therefore \angle C=\angle EDC=69°$,

$\therefore \angle BDE=69°$.

9. (1)**证明:**$\because AC=AD+DC,DF=DC+CF$,

且$AD=CF$,$\therefore AC=DF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,

$$\begin{cases}AB=DE,\\BC=EF,\\AC=DF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF(SSS)$.

(2)**解:**由(1)可知,$\triangle ABC\cong\triangle DEF$,

$\therefore \angle F=\angle ACB$.

$\because \angle A=55°,\angle B=88°$,

$\therefore \angle ACB=180°-(\angle A+\angle B)=180°-(55°+88°)=37°$.

$\therefore \angle F=\angle ACB=37°$.

10. **解:**由已知条件不能证明$\triangle ABC\cong\triangle DEF$. 选择添加条件①.

证明:$\because BF=CE,\therefore BC=EF$.

又$\because \angle ABC=\angle DEF,AB=DE$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF(SAS)$.

点拨:添加条件③时,证明:$\because AC/\!/DF$,

$\therefore \angle C=\angle F$.

$\because BF=CE,\therefore BC=EF$. 又$\because \angle ABC=\angle DEF$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF(ASA)$. 添加条件②$AC=DF$,此时不能证明两三角形全等.

11. (1)**证明:**$\because \angle BGE=\angle ADE,\ \angle BGE=\angle CGF$,

$\therefore \angle ADE=\angle CGF$.

$\because AC\perp BD,BF\perp CD$,

$\therefore \angle ADE+\angle DAE=\angle CGF+\angle GCF=90°,\angle AED=\angle CED=90°$,

$\therefore \angle DAE=\angle GCF$.

又$\because DE=DE,\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDE$,

$\therefore AD=CD$.

(2)**解:**设$DE=a$,

则$AE=2DE=2a,EG=DE=a$,

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2$.

$\because BH$是$\triangle ABE$的中线,

$\therefore AH=HE=a$.

$\because \triangle ADE\cong\triangle CDE$,

$\therefore CE=AE=2a$,

则$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot(2a+2a)\cdot a=2a^2=2S_{\triangle ADE}$;

在$\triangle ADE$和$\triangle BGE$中,

$$\begin{cases}\angle AED=\angle BEG,\\DE=GE,\\\angle ADE=\angle BGE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle BGE$,

$\therefore BE=AE=2a$,

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}CE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BHG}=\frac{1}{2}HG\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot(a+a)\cdot 2a=2a^2$.

综上,面积等于$\triangle ADE$面积的2倍的三角形有$\triangle ACD,\triangle ABE,\triangle BCE,\triangle BHG$.

12. (1)**证明:**如图①,连接AD,$\because D$为BC的中点,

$\therefore BD=CD$.

又$\because AB=AC,AD=AD$,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$,

$\therefore \angle ADB=\angle ADC,\angle BAD=\angle CAD$.

又$\because \angle ADB+\angle ADC=180°$,

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$,

$\therefore \angle BDA=\angle EDF=90°$,

$\therefore \angle BDE+\angle EDA=\angle EDA+\angle ADF$.

$\therefore \angle BDE=\angle ADF$.

$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD=45°$.

又$\because \triangle ABC$是等腰直角三角形,

$\therefore \angle B=\angle BAD=\angle DAC=45°$.

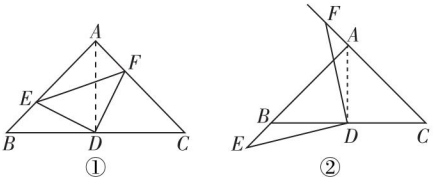
$\because \angle BDA=90°$,

$\therefore \triangle ABD$是等腰直角三角形,

$\therefore BD=AD$.

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle ADF(ASA)$.

$\therefore BE=AF$.



(第12题)

(2)**解:**$BE=AF$. 如图②,连接AD,

$\because \angle BDA=90°,\therefore \angle BDA=\angle EDF=90°$,

$\therefore \angle BDE+\angle BDF=\angle BDF+\angle ADF$.

$\therefore \angle BDE=\angle ADF$.

$\because \angle ABC=\angle DAC=45°$,

$\therefore \angle EBD=\angle FAD=180°-45°=135°$.

又$\because BD=AD,\therefore \triangle BDE\cong\triangle ADF(ASA)$.

$\therefore BE=AF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 证明:∵ $OA=OB$,$OE=OF$,

∴ $OA-OE=OB-OF$,即 $AE=BF$.

在△ACE 和△BDF 中,$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ \angle ACE=\angle BDF,\\ AE=BF,\end{cases}$

∴ △ACE≌△BDF(AAS).

2. 证明:∵ $\angle BAC=\angle DAM$,

即$\angle BAD+\angle DAC=\angle DAC+\angle NAM$,

∴ $\angle BAD=\angle NAM$.

在△BAD 和△NAM 中,

$\begin{cases}AB=AN,\\ \angle BAD=\angle NAM,\\ AD=AM,\end{cases}$

∴ △BAD≌△NAM(SAS).

∴ $\angle B=\angle ANM$.

3. 证明:∵ $FC/\!/AB$,

∴ $\angle ADE=\angle CFE$.

在△ADE 和△CFE 中,$\begin{cases}\angle ADE=\angle CFE,\\ DE=FE,\\ \angle AED=\angle CEF,\end{cases}$

∴ △ADE≌△CFE(ASA).

∴ $AE=CE$.

4. 证明:延长 AC,BE 交于点 F.

∵ $\angle ACB=90°$,$BE\perp AE$,

∴ $\angle CAD+\angle CDA=90°$,$\angle EDB+\angle EBD=90°$.

∵ $\angle CDA=\angle EDB$,

∴ $\angle CAD=\angle EBD$,

即$\angle CAD=\angle CBF$.

在△ADC 和△BFC 中,$\begin{cases}\angle CAD=\angle CBF,\\ AC=BC,\\ \angle ACD=\angle BCF=90°,\end{cases}$

∴ △ADC≌△BFC.

∴ $AD=BF$.

∵ AD 平分$\angle BAC$,

∴ $\angle FAE=\angle BAE$.

在△AEF 和△AEB 中,$\begin{cases}\angle FAE=\angle BAE,\\ AE=AE,\\ \angle AEF=\angle AEB=90°,\end{cases}$

∴ △AEF≌△AEB.

∴ $BE=EF$,即 $BE=\frac{1}{2}BF$.

∴ $BE=\frac{1}{2}AD$.

5. 解:$BC=BE+CD$.

证明:在 BC 上取一点 G,使 $CG=CD$,连接 OG.

∵ BD,CE 分别平分$\angle ABC$ 和$\angle ACB$,

∴ $\angle ABD=\angle CBD$,$\angle ACE=\angle BCE$.

∵ $\angle A=60°$,

∴ $\angle ABC+\angle ACB=120°$.

∴ $\angle OBC+\angle OCB=60°$.

∴ $\angle BOE=\angle COD=\angle OBC+\angle OCB=60°$.

∵ $CD=CG$,$\angle OCD=\angle OCG$,$OC=OC$,

∴ △CDO≌△CGO,

∴ $\angle COD=\angle COG=60°$,

∴ $\angle BOG=180°-\angle BOE-\angle COG=60°$.

∴ $\angle EOB=\angle GOB$.

又∵ $\angle EBO=\angle GBO$,$BO=BO$,

∴ △BOE≌△BOG.

∴ $BE=BG$.

∴ $BC=BG+CG=BE+CD$.

6. 解:(1)$AE=DB$,$AE\perp DB$.

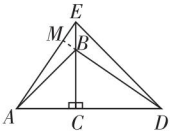
理由:由题意可知,$CA=CB$,$CE=CD$,

$\angle ACE=\angle BCD=90°$,

∴ △ACE≌△BCD.

∴ $AE=DB$.

如图,延长 DB 交 AE 于点 M,



[第6(1)题]

∵ △ACE≌△BCD,

∴ $\angle AEC=\angle BDC$.

又∵ $\angle AEC+\angle EAC=90°$,

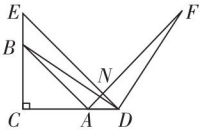
∴ $\angle BDC+\angle EAC=90°$,

∴ 在△AMD 中,$\angle AMD=180°-90°=90°$,

∴ $AE\perp DB$.

(2)$DE=AF$,$DE\perp AF$.

理由:如图,设 ED 与 AF 相交于点 N,由题意可知,$BE=AD$.



[第6(2)题]

∵ $\angle EBD=\angle C+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

$\angle ADF=\angle BDF+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

∴ $\angle EBD=\angle ADF$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $DB = FD$.

∴ $\triangle EBD \cong \triangle ADF$.

∴ $DE = AF$, $\angle E = \angle FAD$.

易知 $\angle E = 45°$,

∴ $\angle FAD = 45°$.

易知 $\angle EDC = 45°$,

∴ $\angle AND = 90°$,

∴ $DE \perp AF$.

【第 14 章测试卷】

一、1. B　2. A　3. C　4. A　5. B　6. C　7. B　8. C

二、9. 70°　10. 20°

11. $AC = BD$(答案不唯一)

12. ①②③④

三、13. 证明:在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD, \\ CB = CD, \\ AC = AC, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle ADC(SSS)$,

∴ $\angle B = \angle D$.

14. 解:在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中, $\begin{cases} CA = CD, \\ \angle ACB = \angle DCE, \\ CB = CE, \end{cases}$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DEC(SAS)$, ∴ $AB = DE$,

即量出 DE 的长就是 A, B 的距离.

15. 解:$CE \parallel DF$. 理由如下:由题意可得 $CE = DF$, $AC = BD$, $\angle A = \angle B = 90°$,

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ACE \cong \mathrm{Rt}\triangle BDF(HL)$.

∴ $\angle CEA = \angle DFB$.

∴ $CE \parallel DF$.

16. 解:(1) $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

证明:∵ $\angle ACB = 90°$,

∴ $\angle ACD + \angle BCE = 90°$.

又∵ $AD \perp l$,

∴ $\angle ADC = 90°$,

∴ $\angle CAD + \angle ACD = 90°$.

∴ $\angle BCE = \angle CAD$.

∵ $BE \perp l$,

∴ $\angle CEB = 90°$.

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBE$ 中, $\begin{cases} \angle CAD = \angle BCE, \\ \angle ADC = \angle CEB, \\ AC = CB, \end{cases}$

∴ $\triangle ACD \cong \triangle CBE(AAS)$.

(2)由(1)可知 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$,

∴ $AD = CE$, $CD = BE$.

∴ $AD = CE = CD + DE = BE + DE = 3 + 5 = 8$.

17. (1)解:∵ $AC = BC$,

∴ $\angle A = \angle B$.

又∵ $AD = BE$, $AE = BF$,

∴ $\triangle DAE \cong \triangle EBF$,

∴ $\angle ADE = \angle BEF$.

∵ $\angle ADE + \angle AED + \angle A = 180°$, $\angle BEF + \angle DEF + \angle AED = 180°$,

∴ $\angle A = \angle DEF = 30°$,

∴ $\angle A = \angle B = 30°$,

∴ $\angle ACB = 180° - 30° - 30° = 120°$.

(2)①证明:∵ $AE = BF$, E 为 AB 的中点,

∴ $AE = BE = BF$,

又∵ $AD = BE$,

∴ $AD = BF$.

∵ $CA = CB$,

∴ $CD = CF$,

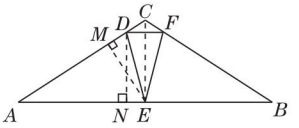
∴ $\angle CDF = \angle CFD$.

∵ $2\angle CDF + \angle C = 180°$,

$2\angle A + \angle C = 180°$,

∴ $\angle CDF = \angle A$, ∴ $DF \parallel AB$.

②解:如图,连接 EC,作 $EM \perp AC$ 于 M, $DN \perp AB$ 于 N.



(第 17 题)

由(2)①知, $AD = AE$,

∵ $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DN$,

∴ $EM = DN = 8$.

∵ $AE = BE$,

∴ $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACE} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot AC \cdot EM = 128$.

第15章 轴对称图形与等腰三角形

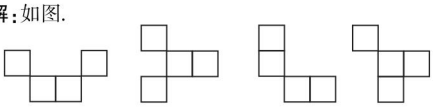
15.1 轴对称图形

【两年模拟兵法】

1. B　2. C　3. B　4. A　5. B　6. D　7. C　8. D　9. B

10. 王　点拨:解答此题要明确题图中均是由大写英文字母构成的轴对称图形,按字母顺序应填 E 构成的轴对称图形.

11. 解:如图.

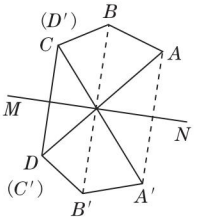


(第 11 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:解答本题的技巧是先去掉一个小正方形,判断剩余的图形是不是轴对称图形,如果是,画出其对称轴,再画出去掉的小正方形关于对称轴对称的图形即可.

12. 解:(1)(2)如图.



(第12题)

点拨:注意点 C,点 D 互为对称点.

13. 解:(1)$A_1(2,3)$;

(2)$A'(4,3)$,$B'(8,0)$,$C'(3,0)$.

14. (1)**证明**:由折叠知 $\angle G=\angle D=90°$,$\angle A=\angle ECG=90°$,$AD=GC$,

$\therefore \angle GCF+\angle FCE=90°$,

又$\because \angle FCE+\angle BCE=90°$,

$\therefore \angle GCF=\angle BCE$.

$\because \angle B=90°$,

$\therefore \angle G=\angle B$.

$\because AD=BC$,

$\therefore GC=BC$,

$\therefore \triangle FGC\cong\triangle EBC$.

(2)**解**:由 $\triangle FGC\cong\triangle EBC$ 知 $FG=BE$.

由折叠知 $DF=FG$,

$\therefore DF=BE$,

$\therefore$ 四边形 $ECGF$ 的面积 = 四边形 $AEFD$ 的面积 = $\dfrac{(AE+DF)\times AD}{2}=\dfrac{(AE+BE)\times AD}{2}=\dfrac{8\times4}{2}=16$.

15.2 线段的垂直平分线

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:$\because AC=AD$,$BC=BD$,$\therefore A$,B 两点均在线段 CD 的垂直平分线上,根据两点确定一条直线,可知直线 AB 垂直平分 CD.

2. B **3.** B

4. D

5. D **点拨**:D 选项中作的是 AB 的垂直平分线,

$\therefore PA=PB$,

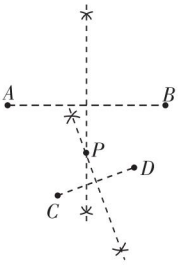
$\because PA+PC=PB+PC=BC$,

$\therefore$ 选 D.

6. 87

7. 12 cm

8. 解:如图,点 P 为所求的位置.



(第8题)

点拨:到 A,B 两点距离相等的点在线段 AB 的垂直平分线上,到 C,D 两点距离相等的点在线段 CD 的垂直平分线上,同时满足上述条件的点是两条线段垂直平分线的交点.

9. 证明:$\because EF$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore AF=BF$.

$\because AC\perp CD$,$BD\perp CD$,

$\therefore \angle ACF=\angle FDB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle FDB$ 中,$\begin{cases}AC=FD,\\AF=FB,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACF\cong\mathrm{Rt}\triangle FDB$.

$\therefore \angle AFC=\angle FBD$.

又$\because \angle FBD+\angle BFD=90°$,

$\therefore \angle AFC+\angle BFD=90°$.

$\therefore \angle AFB=90°$.

又$\because AF=BF$,

$\therefore \triangle ABF$ 是等腰直角三角形.

10. 解:(1)如图,连接 $B'B''$,作线段 $B'B''$ 的垂直平分线 EF,则直线 EF 是 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$ 的对称轴.

(2)如图,描出点 O,连接 BO,$B'O$,$B''O$.

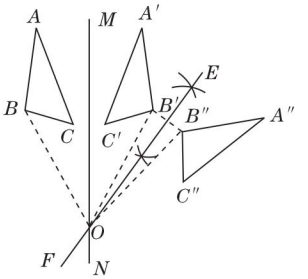
$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称,

$\therefore \angle BOM=\angle B'OM$.

$\because \triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$ 关于直线 EF 对称,

$\therefore \angle B'OE=\angle B''OE$.

$\therefore \angle BOB''=\angle BOM+\angle B'OM+\angle B'OE+\angle B''OE=2(\angle B'OM+\angle B'OE)=2\alpha$,即 $\angle BOB''=2\alpha$.



(第10题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.3 等腰三角形

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D

3. C **点拨:** 由题易知△APQ为等边三角形,$\angle QAC=\angle C=30°$. $\therefore \angle PAC=\angle PAQ+\angle QAC=90°$.

4. D **点拨:** 由题意知$AB=2AC=6$,故$3\leqslant AP\leqslant 6$.

5. B

6. D **点拨:** 当顶角为30°或150°时,此高等于腰长的一半;当顶角为120°时,此高等于底边长的一半.

7. 12° **点拨:** 设$\angle A$的度数是x,根据"等边对等角"的性质和三角形外角的性质可得$\angle AP_7P_8=\angle AP_8P_7=7x$,

$\therefore x+7x+7x=180°$.

$\therefore x=12°$.

8. 6

9. **证明:** $\because \angle ABC=\angle ACB$, $\therefore AB=AC$.

又$\because D,E$分别为边AB,AC的中点,

$\therefore AD=AE$.

在△ADC和△AEB中,$\begin{cases}AD=AE,\\ \angle A=\angle A,\\ AC=AB,\end{cases}$

$\therefore$ △$ADC\cong$△AEB.

$\therefore BE=CD$.

10. **解:** $\because$ △ABC是等边三角形,

$\therefore \angle ACB=60°$.

$\therefore \angle ACD=120°$.

$\because CG=CD$,

$\therefore \angle CDG=\angle CGD=30°$.

$\therefore \angle FDE=150°$.

$\because DF=DE$,

$\therefore \angle E=\angle DFE=15°$.

11. **证明:** $\because DG/\!/AC$,

$\therefore \angle DGB=\angle ACB, \angle DGF=\angle ECF$.

$\because \angle DFG=\angle EFC, DF=EF$,

$\therefore$ △$GDF\cong$△CEF, $\therefore DG=EC$.

$\because BD=CE, \therefore BD=DG$,

$\therefore \angle DGB=\angle B$.

$\because \angle DGB=\angle ACB$,

$\therefore \angle B=\angle ACB$,

$\therefore AC=AB$,即△ABC是等腰三角形.

12. **解:** $AE/\!/BC$.

理由如下:$\because$ △ABC与△CDE都为等边三角形,

$\therefore BC=AC, CD=CE$,

$\angle B=\angle ACB=\angle DCE=60°$,

$\therefore \angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$,

即$\angle BCD=\angle ACE$,

$\therefore$ △$BCD\cong$△ACE, $\therefore \angle B=\angle EAC$.

$\therefore \angle EAC=\angle ACB, \therefore AE/\!/BC$.

13. **证明:** $\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because DE\perp AB, DF\perp BC$,

$\therefore \angle DEA=\angle DFC=90°$.

$\because D$为AC的中点,

$\therefore DA=DC$.

又$\because DE=DF$,

$\therefore$ Rt△$ADE\cong$Rt△$CDF(HL)$.

$\therefore \angle A=\angle C$.

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C$.

$\therefore$ △ABC是等边三角形.

14. (1) =

(2) **证明:** 在等边三角形ABC中,$\angle ABC=\angle ACB=\angle A=60°$,

$\because EF/\!/BC$,

$\therefore \angle AEF=\angle ABC=60°, \angle AFE=\angle ACB=60°$,

$\therefore \angle AEF=\angle AFE=\angle A=60°$,

$\therefore$ △AEF是等边三角形,

$\therefore AE=EF=AF$.

$\because \angle ABC=\angle ACB=\angle AFE=60°$,

$\therefore \angle DBE=\angle EFC=120°$,

$\angle D+\angle BED=\angle FCE+\angle ECD=60°$.

$\because DE=EC$,

$\therefore \angle D=\angle ECD$.

$\therefore \angle BED=\angle FCE$.

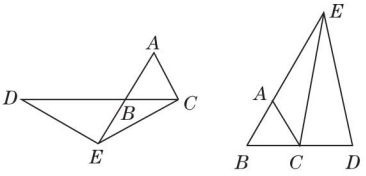
又$\because ED=EC$,

$\therefore$ △$DEB\cong$△ECF.

$\therefore BD=FE=AE$,即$AE=DB$.

(3)1或3

方法规律: 本题运用了从特殊到一般的思想和分类讨论思想,(3)题中注意分两种情况讨论,如图.



(第14题)

15.4 角的平分线

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C

4. **解:** $\because PA\perp ON, PB\perp OM, PA=PB, \angle MON=50°$,

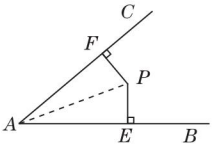
$\therefore \angle AOP=\frac{1}{2}\angle MON=25°$.

又$\because \angle OPC=30°$,

$\therefore \angle PCA=\angle AOP+\angle OPC=55°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. 证明:(1)如图,连接 AP,∵ $PE\perp AB$,$PF\perp AC$,



(第5题)

∴ $\angle AEP=\angle AFP=90°$.

又∵ $AE=AF$,$AP=AP$,

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AEP\cong\mathrm{Rt}\triangle AFP$.

∴ $PE=PF$.

(2)∵ $PE=PF$,$PE\perp AB$,$PF\perp AC$,

∴ 点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

6. 证明:如图,过点 D 分别作 $DE\perp AB$ 于 E,$DF\perp AC$,交 AC 的延长线于 F.

∵ AD 平分 $\angle BAC$,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,

∴ $DE=DF$,$\angle F=\angle DEB=90°$.

∵ $\angle B+\angle ACD=180°$,

$\angle ACD+\angle FCD=180°$,

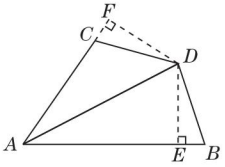
∴ $\angle B=\angle FCD$.

在 $\triangle DFC$ 和 $\triangle DEB$ 中,

$$\begin{cases}\angle F=\angle DEB=90°,\\ \angle FCD=\angle B,\\ DF=DE,\end{cases}$$

∴ $\triangle DFC\cong\triangle DEB$.

∴ $DB=DC$.



(第6题)

7. 解:(1)$FE=FD$. 证明如下:

如图①,过点 F 分别作 $FM\perp BC$,$FN\perp AB$,垂足分别为 M,N,连接 BF.

则 $\angle DMF=\angle ENF=90°$.

∵ F 是角平分线的交点,

∴ BF 也是角平分线.

∴ $MF=NF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,∵ $\angle ACB=90°$,$\angle ABC=60°$,

∴ $\angle BAC=30°$,

∴ $\angle BAD=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=15°$.

∴ $\angle CDA=90°-\angle DAC=75°$.

∵ CE 是 $\angle ACB$ 的平分线,$\angle ACB=90°$,

∴ $\angle ACE=45°$.

∴ $\angle AFE=\angle DAC+\angle ACE=60°$.

∵ $\angle NEF=\angle BAD+\angle AFE$,

∴ $\angle NEF=75°=\angle MDF$.

在 $\triangle DMF$ 和 $\triangle ENF$ 中,

$$\begin{cases}\angle DMF=\angle ENF,\\ \angle MDF=\angle NEF,\\ MF=NF,\end{cases}$$

∴ $\triangle DMF\cong\triangle ENF(AAS)$.

∴ $FD=FE$.

(2)成立,证明如下:

如图②,过点 F 分别作 $FM\perp BC$,$FN\perp AB$,垂足分别为 M,N,连接 BF,

则 $\angle BNF=\angle DMF=\angle ENF=90°$.

∵ F 是角平分线的交点,

∴ BF 也是角平分线.

∴ $MF=NF$.

∵ $\angle ABC=60°$,

∴ $\angle MFN=180°-\angle ABC=180°-60°=120°$.

∵ $\angle CFA=180°-(\angle FAC+\angle FCA)=180°-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}\times(180°-60°)=120°$,

∴ $\angle DFE=\angle CFA=120°$.

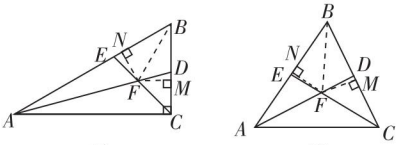
∵ $\angle MFN=120°$,∴ $\angle DFE=\angle MFN$.

又 $\angle MFN=\angle MFD+\angle DFN$,$\angle DFE=\angle NFE+\angle DFN$,∴ $\angle MFD=\angle NFE$.

在 $\triangle DMF$ 和 $\triangle ENF$ 中,$\begin{cases}\angle DMF=\angle ENF,\\ MF=NF,\\ \angle MFD=\angle NFE,\end{cases}$

∴ $\triangle DMF\cong\triangle ENF(ASA)$.

∴ $FD=FE$.



(第7题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)图略.

(2)$A_1(5,5)$,$B_1(5,0)$,$C_1(8,3)$.

(3)$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times5\times|8-5|=7.5$.

2. 证明:过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D,$OE\perp AC$ 于 E,

则 $\triangle BOD$ 和 $\triangle COE$ 都是直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ AO 平分$\angle BAC$，$OD\perp AB$，$OE\perp AC$，

∴ $OD=OE$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $OB=OC$.

∴ Rt$\triangle BOD\cong$Rt$\triangle COE$.

∴ $\angle ABO=\angle ACO$.

∴ $\angle ABC=\angle ACB$. ∴ $AB=AC$.

∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

3. (1)**证明**：∵ $\triangle ABC$ 和$\triangle CDE$ 都是等边三角形，

∴ $BC=AC$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle ECD=60°$.

∴ $\angle BCE=\angle ACD$.

∴ $\triangle BCE\cong\triangle ACD$.

(2)**证明**：∵ $\triangle BCE\cong\triangle ACD$，

∴ $\angle FBC=\angle HAC$.

∵ $\angle ACH=180°-\angle ACB-\angle ECD=60°$，

∴ $\angle ACB=\angle ACH$. 又∵ $BC=AC$，

∴ $\triangle BCF\cong\triangle ACH$. ∴ $CF=CH$.

(3)**解**：$\triangle CFH$ 是等边三角形.

理由：∵ $CF=CH$，$\angle FCH=60°$，

∴ $\triangle CFH$ 是等边三角形.

4. **解**：①若已知的这个角为顶角，则底角的度数为$(180°-52°)\div 2=64°$，故一条腰上的高与底边的夹角为26°；②若已知的这个角为底角，则一条腰上的高与底边的夹角为38°. 故它的一条腰上的高与底边的夹角为26°或38°.

5. **解**：由于条件中中线分周长为两部分，并没有指明哪一部分是9 cm，哪一部分是12 cm，因此，应有两种情形：

若设这个等腰三角形的腰长为 x cm，底边长为 y cm，

于是根据题意，

得$\begin{cases}x+\frac{1}{2}x=9,\\ \frac{1}{2}x+y=12,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x+\frac{1}{2}x=12,\\ \frac{1}{2}x+y=9.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=6,\\ y=9,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=8,\\ y=5.\end{cases}$

即当腰长是6 cm时，底边长是9 cm；

当腰长是8 cm时，底边长是5 cm.

6. **解**：8个，分别以 A，B 为圆心，以 AB 长为半径画圆，与两坐标轴有6个交点(不含 A，B)；

作 AB 的垂直平分线与两坐标轴有2个交点，共有8个交点. 图略.

7. **解**：(1)①$\triangle BPD$ 与$\triangle CQP$ 全等.

理由如下：

易知 $BP=CQ=3\times 1=3$ (cm).

∵ $AB=10$ cm，点 D 为 AB 的中点，

∴ $BD=5$ cm.

又∵ $PC=BC-BP$，$BC=8$ cm，

∴ $PC=8-3=5$(cm)，∴ $PC=BD$.

又∵ $AB=AC$，∴ $\angle B=\angle C$，

∴ $\triangle BPD\cong\triangle CQP$.

②∵ $v_P\neq v_Q$，∴ $BP\neq CQ$.

又∵ $\triangle BPD$ 与$\triangle CQP$ 全等，$\angle B=\angle C$，

则 $BP=PC=4$ cm，$CQ=BD=5$ cm，

∴ 点 P，点 Q 运动的时间为$\frac{BP}{3}=\frac{4}{3}$s，

∴ $v_Q=\frac{CQ}{\frac{4}{3}}=\frac{5}{\frac{4}{3}}=\frac{15}{4}$(cm/s).

∴ 当点 Q 的运动速度为$\frac{15}{4}$cm/s时，能够使$\triangle BPD$ 与$\triangle CQP$ 全等.

(2)设经过 x s后点 P 与点 Q 第一次相遇，

由题意，得$\frac{15}{4}x=3x+2\times 10$，解得 $x=\frac{80}{3}$.

∴ 点 P 共运动了$\frac{80}{3}\times 3=80$(cm).

$\triangle ABC$ 的周长为 $10+10+8=28$(cm)，$28\times 3=84$(cm)，$84-80=4$(cm)<10 cm，

∴ 点 P、点 Q 在 AB 边上相遇，

∴ 经过$\frac{80}{3}$s 点 P 与点 Q 第一次在$\triangle ABC$ 的边 AB 上相遇.

【第15章测试卷】

一、**1.** B **2.** B **3.** C **4.** A **5.** A **6.** C **7.** C **8.** B

二、**9.** 3 cm **10.** (2，−3)

11. 角平分线上的点到角的两边的距离相等.

12. ①②④

三、**13.** **解**：∵ ED 垂直平分 AB，

∴ $AE=EB$. ∴ $\angle EAB=\angle B$.

∴ $\angle AEC=\angle EAB+\angle B=2\angle B$.

∵ 在$\triangle ACE$ 中，$\angle C=90°$，

∴ $\angle CAE+\angle AEC=90°$.

∵ $\angle CAE=\angle B+30°$，

∴ $\angle B+30°+2\angle B=90°$. ∴ $\angle B=20°$.

∴ $\angle AEC=2\angle B=40°$.

14. 略.

15. **解**：(1)∵ $AB=AC$，$AD\perp BC$ 于点 D，

∴ $\angle B=\angle C$，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$.

又$\angle C=42°$，∴ $\angle BAC=180°-2\angle C=96°$.

∴ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=48°$.

(2)由(1)可知，$\angle FAC=\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，

∵ $EF/\!/AC$，

∴ $\angle AFE=\angle FAC$，

∴ $\angle AFE=\angle BAD$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AE = FE.$

16. (1)**解:** $\triangle PCE$ 是等边三角形. 理由如下:

$\because \triangle ABC, \triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

$\therefore \angle DEC = \angle ACE = 60°.$

$\therefore \angle EPC = 180° - \angle DEC - \angle ACE = 180° - 60° - 60° = 60°.$

$\therefore \triangle PCE$ 是等边三角形.

(2)**证明:** $\because \triangle ACB, \triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

$\therefore AC = DE, \angle ACB = \angle DEF = 60°, BC = EF.$

$\therefore \angle ACF = \angle DEB = 120°, FC = BE.$

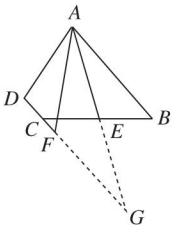
在$\triangle AFC$和$\triangle DBE$中, $\begin{cases} AC = DE, \\ \angle ACF = \angle DEB, \\ FC = BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AFC \cong \triangle DBE. \therefore AF = BD.$

17. **解:** (1) $AD = AB + DC.$

(2) $AB = AF + CF.$

证明:如图,延长 AE 交 DF 的延长线于点 $G.$



(第17题)

$\because E$ 是 BC 的中点, $\therefore CE = BE.$

$\because AB \parallel DC, \therefore \angle BAE = \angle G.$

在$\triangle AEB$和$\triangle GEC$中, $\begin{cases} \angle BAE = \angle G, \\ \angle AEB = \angle GEC, \\ BE = CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle GEC, \therefore AB = GC.$

$\because AE$ 是 $\angle BAF$ 的平分线, $\therefore \angle BAG = \angle FAG.$

$\because \angle BAG = \angle G, \therefore \angle FAG = \angle G,$

$\therefore FA = FG.$

$\because CG = CF + FG, \therefore AB = AF + CF.$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第11章 平面直角坐标系

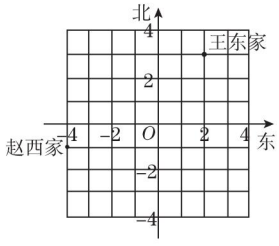
11.1 平面内点的坐标

练习：

1. 解：描点略. $A(-5,-3)$在第三象限，$B(4,-6)$在第四象限，$C(0,-1)$在y轴上，$D(-5,3)$在第二象限，$E(3.5,0)$在x轴上，$F(-3.5,0)$在x轴上.

点拨：由点的坐标特征知，第一象限的点的横坐标、纵坐标都大于0；第二象限的点的横坐标小于0，纵坐标大于0；第三象限的点的横坐标、纵坐标都小于0；第四象限的点的横坐标大于0，纵坐标小于0；x轴上的点，纵坐标为0；y轴上的点，横坐标为0.

2. 解：王东、赵西同学家的位置如图. 王东同学家和赵西同学家的位置用坐标分别表示为$(2,3)$，$(-4,-1)$.



（第2题）

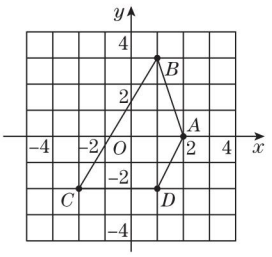
3.

符号 / 坐标 / 点的位置		横坐标	纵坐标
第一象限		+	+
第二象限		−	+
第三象限		−	−
第四象限		+	−
x轴上	正半轴	+	0
	负半轴	−	0
y轴上	正半轴	0	+
	负半轴	0	−
原点		0	0

点拨：本题考查了各象限内点的坐标的特点、坐标轴上点的坐标的特点以及原点的坐标.

练习：

1. 解：(1)平面直角坐标系中各点的位置如图所示.



（第1题）

(2)如图，得到的是四边形.

(3)$S_{四边形ABCD}=S_{三角形BCD}+S_{三角形ABD}=\frac{1}{2}\times3\times5+\frac{1}{2}\times5\times1=10$.

点拨：在平面直角坐标系中，求不规则图形的面积时，常用割补法，将其转化成容易求面积的图形，从而可求出待求图形的面积.

2. 解：在平面直角坐标系中描出下列各点：$A(-3,0)$，$B(-2,-1)$，$C(3,-1)$，$D(4,0)$，$E(2,0)$，$F(0,4)$，$G(0,2)$，$H(-2,0)$，并按顺序$A\to B\to C\to D\to E\to F\to G\to H\to A$将所描出的点用线段连接起来，即可画出“小船”图案.

习题11.1：

1. C　**点拨：**解答本题的关键是由点的坐标确定平面直角坐标系. 由“将”和“象”的坐标可知，它们均位于平面直角坐标系中的第四象限，x轴是棋盘上从上往下数第三条格线所在直线，y轴是棋盘上从左数第四条格线所在直线，交点为原点，那么“炮”位于点$(-2,1)$.

2. 解：点E的坐标为$(2,-1)$.

点拨：建立平面直角坐标系，准确描出A,B,C,D四点，可知四边形$ABCD$是正方形，对角线的交点即为点E，易求得点E的坐标为$(2,-1)$.

3. 解：描点、连线略. 得到的图形是一个等腰梯形.

4. 解：以左下角的方格顶点为坐标原点，以方格最下边的横线、最左边的纵线所在直线分别为x轴、y轴，以向右、向上分别为x轴、y轴的正方向，建立平面直角坐标系，则各点的位置分别表示为：电视台$(1,5)$，立交桥$(2,3)$，国际饭店$(4,9)$，大剧院$(4,6)$，新天地$(5,0)$，人民广场$(6,5)$，大世界$(8,4)$，书城$(10,8)$.

点拨：本题的答案不唯一，所建立的平面直角坐标系的位置不同，则各点的坐标也不同.

5. 解：因为$a<b$，所以$a-b<0$. 又因为$b<0$，所以$-b>0$，所以点$P(a-b,-b)$在第二象限.　**点拨：**第一、二、三、四象限的点的坐标符号分别为$(+,+)$，$(-,+)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(-,-),(+,-).

6. 解:过点A,B的直线与x轴平行或重合,与y轴垂直.

11.2 图形在坐标系中的平移

练习:

1. 解:题图(1)中,图①向下平移5个单位得到图②;题图(2)中,图①先向右平移5个单位,再向下平移6个单位得到图②(或图①先向下平移6个单位,再向右平移5个单位得到图②).各顶点的坐标略.

点拨:题图(1)的长方形平移后的各顶点,横坐标不变,纵坐标分别减去5.题图(2)的三角形平移后的各顶点,横坐标分别加上5,纵坐标分别减去6.

2. 解:(1)$A(2,1)$,$B(1,-1)$,$C(5,-2)$.(2)$A(-3,6)$,$B(-4,4)$,$C(0,3)$.

点拨:左或右移$a(a>0)$个单位,横坐标减去或加上正数a;上或下移$b(b>0)$个单位,纵坐标加上或减去正数b.按此规律,很容易求得平移后图形的各顶点的坐标.

3. 解:(1)$P_1(5,7)$,右移1个单位,再上移2个单位(或上移2个单位,再右移1个单位).(2)$P_1(1,4)$,左移3个单位,再下移1个单位(或下移1个单位,再左移3个单位).(3)$P_1(4,6)$,上移1个单位.(4)$P_1(3,5)$,左移1个单位.

习题11.2:

1. 解:移动后各顶点坐标如下:$A(-1,3)$,$B(2,-2)$,$C(6,-2)$,$D(3,3)$.

点拨:图形向右平移5个单位,各顶点的纵坐标不变,横坐标都加上5.

2. 解:先向右平移10个单位,再向下平移4个单位(或先向下平移4个单位,再向右平移10个单位).

点拨:先找出变化前后图形中各特殊点对应的坐标,然后比较它们横坐标、纵坐标的变化即可.

3. 解:点B的新坐标为$(-2,2)$.

数学园地:

解:(1)先向右平移3个单位,再向上平移4个单位(或先向上平移4个单位,再向右平移3个单位).(2)先向右平移4个单位,再向上平移1个单位(或先向上平移1个单位,再向右平移4个单位).(3)先向右平移7个单位,再向上平移5个单位(或先向上平移5个单位,再向右平移7个单位).发现:(3)中向右平移的距离是(1)、(2)向右平移的距离之和,(3)中向上平移的距离是(1)、(2)向上平移的距离之和.

点拨:观察图形上的点的坐标变化,可知平移方向和平移的长度.

A组 复习题:

1. 解:$A(-3,4)$,$B(4,4)$,$C(0,2)$,$D(-4,0)$,$E(4,-2)$,$F(-2,-3)$.各点到x轴、y轴的距离略.

点拨:过点(指不在坐标轴上的点)分别向x轴、y轴作垂线,垂足所对应的数分别是该点的横坐标和纵坐标.

2. 解:(1)略.(2)过F点作x轴的平行线,然后分别过G,E作此线的垂线,即把图形补成直角梯形,然后用直角梯形的面积减去两个直角三角形的面积,得"碗"的面积为$\frac{1}{2}\times(3+4)\times6-\frac{1}{2}\times1\times4-\frac{1}{2}\times2\times3=16$.

(3)$A(-2,11)$,$B(2,11)$,$C(4,9)$,$D(7,7)$,$E(7,4)$,$F(11,3)$,$G(13,6)$.

点拨:本题考查了描点、连线、割补图形求面积以及平移后点的坐标变化.解此类题的难点在于求图形面积,要注意图形的形状,割补成便于求面积的几种几何图形,再求解.

3. (1)$(-3,2)$ (2)$-3<a<3$ (3)三 (4)$(-3,2)$

4. 解:以左下角的方格顶点为坐标原点,以方格最下边的横线、最左边的纵线所在直线为x轴、y轴,以向右、向上分别为x轴、y轴的正方向,建立平面直角坐标系,则平移前$A(3,4)$,$B(3,2)$,$C(1,3)$,移动后$A'(9,5)$,$B'(9,3)$,$C'(7,4)$,平移方式为先向右平移6个单位,再向上平移1个单位(或先向上平移1个单位,再向右平移6个单位).

点拨:本题顶点坐标答案不唯一,所建立的平面直角坐标系的位置不同,点的坐标就不同.

5. 解:(1)整个图案向下平移3个单位.

(2)整个图案向右平移2个单位.

点拨:横坐标不变,纵坐标都加上(或减去)一个正数a,图形向上(或向下)平移a个单位;纵坐标不变,横坐标都加上(或减去)一个正数b,图形向右(或向左)平移b个单位.

B组 复习题:

1. 解:由题意知$|2-a|=|3a+6|$,当$a<-2$时,有$2-a=-3a-6$,解得$a=-4$,此时点P的坐标为$(6,-6)$;当$-2\leqslant a<2$时,有$2-a=3a+6$,解得$a=-1$,此时点P的坐标为$(3,3)$;当$a\geqslant2$时,有$a-2=3a+6$,解得$a=-4$,与$a\geqslant2$矛盾,所以此种情况不存在.综上所述,点P的具体位置是在点$(6,-6)$处或点$(3,3)$处.

2. 解:先向右平移3个单位,再向下平移2个单位(或先向下平移2个单位,再向右平移3个单位);将点$(1,-1)$变换成点$(4,-3)$.

点拨:横坐标由3增加到6,说明点向右平移了3个单位;纵坐标由4减小到2,说明点向下平移了2个单位.按此平移方式可将点$(1,-1)$变换成点$(4,-3)$.

3. 解:(1)第一次为向下平移5个单位,第二次为向左平移3个单位.(2)先向左平移3个单位,再向下平移5个单位(或先向下平移5个单位,再向左平移3个单

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

位).

点拨:由点(2,3)变换成点(2,-2)知,横坐标不变,纵坐标减去5,故将点(2,3)向下平移5个单位.由点(2,-2)变换成点(-1,-2)知,纵坐标不变,横坐标减去3,故将点(2,-2)向左平移3个单位.由点(2,3)变换成点(-1,-2)正好是上述两步平移的综合.

4. 解:作图略.(1)①右移4个单位,再下移1个单位;②左移1个单位,再下移3个单位;③左移2个单位,再上移1个单位;④右移2个单位,再上移4个单位.(2)右移3个单位,再上移1个单位.(3)题(2)中的一次平移相当于题(1)中的连续4次平移.

5. 解:$A'(3,6)$,$B'(1,2)$,$C'(7,3)$.

点拨:由 $P(x_0,y_0)$ 平移后为 $P'(x_0+5,y_0+3)$,可知图形的平移方式是向右平移5个单位,向上平移3个单位,由此可求得点 A',B',C' 的坐标.

第12章 一次函数

12.1 函 数

练习:

1. 解:(1)在关系式 $S=4\pi R^2$ 中,4 π 是常量,S 和 R 是变量.

(2)在关系式 $l=0.002t+200$ 中,0.002 和 200 是常量,l 和 t 是变量.

点拨:分清常量和变量.

2. 解:关系式为 $y=2n$,其中2是常量,y 与 n 均是变量,且 n 是自变量,y 是因变量.

点拨:在实际问题中,要会列关系式,并能分清自变量与因变量.

练习:

1. 解:(1)x 为全体实数.

(2)$x\neq 4$.

(3)$x\geqslant 5$.

(4)x 为全体实数.

点拨:x 的取值范围,即使函数表达式有意义的 x 的值.

2. 解:(1)当 $x=9$ 时,$y=-\sqrt{9-5}=-\sqrt{4}=-2$;当 $x=10$ 时,$y=-\sqrt{10-5}=-\sqrt{5}$.

(2)当 $x=9$ 时,$y=\dfrac{1}{2\times 9^2+1}=\dfrac{1}{163}$;当 $x=10$ 时,$y=\dfrac{1}{2\times 10^2+1}=\dfrac{1}{201}$.

点拨:将 x 的值代入计算 y 的值即可.

3. 解:(1)函数表达式为 $s=80t$.(2)当 $t=10$ 时,$s=800$.

4. 解:函数表达式为 $h=1\ 800+30t$.

5. 解:函数表达式为 $y=x^2$,自变量 x 的取值范围为 $x>0$.

练习:

1. 略.

2. 解:(1)略.

(2)点 A,B,C 在函数 $y=-x$ 的图象上.

3. 解:题图中(1)(2)两图的曲线可以用来表示 y 是 x 的函数.理由:函数应满足"对于 x 在它允许取值范围内的每一个值,y 都有唯一确定的值与它对应".

点拨:本题考查了函数的定义,要求学生认真观察图象,读懂图象的内涵,真正理解函数图象.

练习:

1. 解:(1)变量是时间 t 和水深 h,其中自变量是时间 t,因变量是水深 h.

(2)大约在3时和15时水最深,深度约为13 m.

(3)大约在9时和21时水最浅,深度约为7 m.

(4)观察题图知,港口水位在7 m~13 m范围内来回波动.

点拨:本题考查了学生的识图能力,要通过图象的关键信息来解题,进一步理解函数的意义.(4)题答案不唯一.

2. 解:从题图可以看出,1998年~2008年,这一时间段内世界人口年平均增速最快.

习题12.1:

1. 解:(1)自变量是 x,因变量是 y.(2)自变量是 V,因变量是 m.(3)自变量是 r,因变量是 V.

2. 解:函数表达式为 $y=4x$.

3. 解:(1)x 为全体实数.

(2)x 为全体实数.

(3)$x\neq 1$.(4)$x\leqslant 4$.

点拨:函数自变量的取值范围要使函数表达式有意义,若是实际问题,还要使实际问题有意义.

4. 解:(1)当 $x=-2$ 时,$y=\dfrac{-2+4}{-2-2}=-\dfrac{1}{2}$;当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,

$$y=\frac{\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{2}-2}=-3.$$

(2)当 $x=-2$ 时,$y=\sqrt{4\times(-2)+15}=\sqrt{7}$;当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,

$$y=\sqrt{4\times\frac{1}{2}+15}=\sqrt{17}.$$

5. 略. **6.** 略.

7. C **点拨**:本题可直接根据题意判断图象.

8. 解:(1)自变量是温度 t,因变量是质量 m.

(2)在0 ℃~4 ℃内,水的质量随温度的升高而增大;在4 ℃~10℃内,水的质量随温度的升高而减小.

(3)在4 ℃时,水的质量最大.

点拨:本题直接根据 1cm^3 水的质量 m 随温度 t 的变化图象得出结论.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. 解:(1)$230-200=30(m^3)$,$63\div30=2.1$(元). 所以天然气费的单价是2.1元.

(2)$y=2.1(x-a)$.

(3)当$x=443$,$a=412$时,$y=2.1\times(443-412)=65.1$,所以他家7月份应缴的天然气费总金额是65.1元.

点拨:本题是与现实生活联系很强的实际问题. 在给出函数表达式后,就能求出当自变量取定一个值时,相应的因变量的值.

12.2 一次函数

练习:

1. 略.

2. 解:(1)当$k>0$时,y随x的增大而增大,图象过第一、三象限和原点,且是自左向右上升的直线. 当$k<0$时,y随x的增大而减小,图象过第二、四象限和原点,且是自左向右下降的直线.

(2)$|k|$越大,$y=kx$的图象越靠近y轴. $|k|$越小,$y=kx$的图象越靠近x轴.

练习:

1. 解:(1)与(4)是一次函数,(1)是正比例函数.

点拨:根据一次函数和正比例函数的定义来判断.

2. (1)0;0;1;4 (2)$y=x+2$ (3)下;3

点拨:(1)题答案不唯一.

3. 略.

练习:

1. (1)增大 (2)减小

点拨:本题根据一次函数$y=kx+b(k,b$为常数,且$k\neq0)$,当$k>0$时,y随x的增大而增大,当$k<0$时,y随x的增大而减小的性质解题.

2. 解:因为y随x的增大而增大,所以$2m+1>0$,得$m>-\frac{1}{2}$.

点拨:对于一次函数$y=kx+b(k,b$为常数,且$k\neq0)$,若y随x的增大而增大,则$k>0$.

3. 解:因为A,B两点的坐标满足所给一次函数表达式,且$-2<0$,所以y随x的增大而减小,所以当$x_1>x_2$时,$y_1<y_2$,即y_2大.

点拨:对于一次函数$y=kx+b(k,b$为常数,且$k\neq0)$,当$k<0$时,y随x的增大而减小.

4. 解:因为$y=(m-1)x+m^2-1$为一次函数,所以$m-1\neq0$,即$m\neq1$. 又因为$y=(m-1)x+m^2-1$的图象经过原点,所以当$x=0$时,$y=0$,即$0=m^2-1$,解得$m=\pm1$,所以$m=-1$.

点拨:本题要注意一次函数表达式$y=kx+b$中$k\neq0$的条件.

5. 解:当$b>0$时,$y=x+b$的图象经过第一、二、三象限;当$b<0$时,$y=x+b$的图象经过第一、三、四象限.

练习:

1. 解:由题意,得$\begin{cases}-2a+b=2,\\2a+b=6,\end{cases}$解方程组,得$\begin{cases}a=1,\\b=4.\end{cases}$

2. 解:设此一次函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$. 由题图,得$\begin{cases}-2k+b=0,\\b=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=-1,\end{cases}$所以此一次函数表达式为$y=-\frac{1}{2}x-1$.

3. 解:由题意可知,$k=3$.

4. 解:设这个函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$,由题意可知,$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\-2k+b=3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=2.\end{cases}$

所以这个函数表达式为$y=-\frac{1}{2}x+2$.

练习:

1. 解:(1)因为$40<47<60$,所以需贴邮票$1.2+1.2+1.2=3.6$(元).

(2)当$100<x\leqslant200$时,需贴8元邮票,所以该信函的质量大于100 g,且小于或等于200 g,故可能是120 g(答案不唯一).

2. 解:当$0\leqslant x\leqslant50$时,设$y=kx(k\neq0)$,

由题图,得$50k=25$,解得$k=\frac{1}{2}$,

所以$y=\frac{1}{2}x$;

当$x>50$时,设$y=k'x+b(k'\neq0)$,

由题图,得$\begin{cases}50k'+b=25,\\100k'+b=75.\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}k'=1,\\b=-25.\end{cases}$

所以$y=x-25$.

综上所述,y与x之间的函数表达式为:

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant50),\\x-25(x>50).\end{cases}$$

3. 解:(1)设y与x之间的函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$,

由题图,得$\begin{cases}60k+b=6,\\80k+b=10,\end{cases}$

解方程组,得$\begin{cases}k=\frac{1}{5},\\b=-6.\end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{1}{5}x-6$.

(2)令 $y=0$,则 $0=\frac{1}{5}x-6$,解得 $x=30$,

所以旅客最多可免费携带行李的质量是 30 kg.

点拨:解本题的关键是利用待定系数法求一次函数表达式. 做题时要注意审题、读图,找准关键点.

练习:

1. 解:由题意知:$10x-(5x+40\ 000)\geqslant 0$,解得 $x\geqslant 8\ 000$,所以该厂至少应日产手套8 000副才能不亏本.

2. 解:由题图可知:(1)每月行驶的里程在 $0<x<1\ 500$ 的范围内时,租乙公司的车合算.

(2)每月行驶的里程等于 1 500 km 时,租两家公司车的费用相同.

(3)当每月行驶的里程为 2 300 km 时,租甲公司的车合算.

点拨:本题是利用函数图象解决实际应用问题,解此类题要认真分析图象,找准图象的交点坐标,然后再分类比较.

练习:

1. 解:图象略.

(1) $=-3$

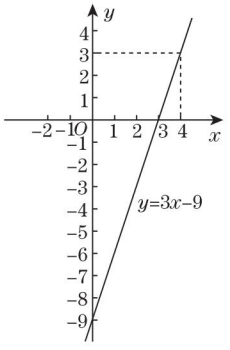
(2) <-3

(3) >-3

(4) <-6

点拨:本题考查学生画图和识图的能力.

2. 解:图象如图所示.



(第 2 题)

(1)方程 $3x-9=0$ 的解就是函数 $y=3x-9$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标,由函数图象可知 $x=3$.

(2)由图象可知不等式 $3x-9\leqslant 0$ 的解集为 $x\leqslant 3$.

(3)由图象可知当 $y=3$ 时,$x=4$.

(4)由图象可知当 $y>3$ 时,$x>4$.

点拨:取关键点,正确作出函数图象是解题的关键.

习题 12.2:

1. 解:$h=725t(t>0)$.

点拨:根据题意,直接列出函数表达式.

2. 解:函数表达式为 $Q=60-5t(0\leqslant t\leqslant 12)$. 画图象略.

3. 解:$A(-3,16)$,$C\left(-\frac{3}{5},4\right)$在直线 $y=-5x+1$ 上.

点拨:判断一个点是否在直线上,主要是验证这个点的横坐标、纵坐标是否满足直线对应的函数表达式.

4. 略.

5. (1)3 (2)减小

(3)2;(2,0);(0,−4)

(4)第一、三

点拨:(1)令 $-x+3=0$,得 $x=3$. (2)因为 $-7<0$,所以函数 $y=-7x+1$ 中,y 随 x 的增大而减小. (3)把 $(-2,-8)$ 代入 $y=mx-4$,得 $m=2$. 令 $y=0$,则 $2x-4=0$,解得 $x=2$,所以它的图象与 x 轴的交点坐标是 $(2,0)$. 令 $x=0$,则 $y=-4$,所以它的图象与 y 轴的交点坐标是 $(0,-4)$. (4)$k^2+1>0$ 恒成立,所以 $y=(k^2+1)x$ 的图象经过第一、三象限.

6. 解:由 $y=kx-k=k(x-1)$ 知,函数图象经过点 $(1,0)$. 又因为 y 随 x 的增大而减小,所以 $k<0$. 所以这个函数图象经过第一、二、四象限.

7. 解:设每周有游客 y 人,票价为 x 元,一次函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,因为函数图象过点 $(10,7\ 000)$ 和 $(15,4\ 500)$,

所以 $\begin{cases}7\ 000=10k+b,\\4\ 500=15k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\ 000,\end{cases}$

所以一次函数表达式为 $y=-500x+12\ 000\ (5\leqslant x\leqslant 20)$. 因为 $k=-500<0$,所以 y 随 x 的增大而减小. 所以当 $x=5$ 时,每周的游客人数最多,此时 $y=-500\times 5+12\ 000=9\ 500$. 所以每周游客人数最多可能是9 500 人.

点拨:本题为图象信息题,抓住函数图象的关键点来求一次函数表达式,再利用一次函数表达式来解决实际问题.

8. 解:(1)设一次函数表达式为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$,

则 $\begin{cases}1=k+b,\\4=2k+b.\end{cases}$

解方程组,得 $\begin{cases}k=3,\\b=-2,\end{cases}$

所以一次函数表达式为 $y=3x-2$.

(2)当 $x=0$ 时,$y=3\times 0-2=-2$.

(3)当 $y=10$ 时,$10=3x-2$,解得 $x=4$.

点拨:本题利用待定系数法求一次函数表达式.

9. 解:(1)由题意得 $k=-2$,$b=-3$.

(2)由题意,得 $\begin{cases}9=-4k+b,\\0=5k+b.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解方程组,得$\begin{cases}k=-1,\\b=5.\end{cases}$

画图略.

10. **解:**设函数表达式为$y=k(x-1)(k\neq0)$,因为当$x=2$时,$y=3$,所以$3=k\cdot(2-1)$,即$k=3$,所以函数表达式为$y=3(x-1)=3x-3$.

11. **解:**$y=-x+1$. **点拨:**本题答案不唯一,可设一次函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$,因为函数y的值随x的增大而减小,所以可令$k=-1$,则$y=-x+b$. 又因为一次函数的图象过点$(-1,2)$,即$2=-(-1)+b$,解得$b=1$. 所以符合条件的函数表达式可以是$y=-x+1$.

12. **解:**$y=2x$. **点拨:**此题答案不唯一. 函数图象不经过第二象限,则可能过第一、三象限及原点,也可能过第一、三、四象限,只要一次函数$y=kx+b$满足$k>0,b\leqslant0$即可.

13. C

14. **解:**(1)由题意知点$P(1,m)$在正比例函数$y=2x$的图象上,

所以$m=2\times1=2$,

所以点P的坐标为$(1,2)$.

又因为点P在一次函数$y=-3x+k$的图象上,所以$2=-3\times1+k$,解得$k=5$.

(2)两直线的交点为$P(1,2)$,且一次函数$y=-3x+5$的图象与x轴的交点为$\left(\frac{5}{3},0\right)$,

所以可得两直线与x轴围成的三角形面积$S=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times2=\frac{5}{3}$.

点拨:(1)利用待定系数法可求得k的值. (2)根据题意,结合图形可求得三角形的面积.

15. **解:**该地区次日0时至8时期间气温在0℃以下的时间有3小时. 在3时和6时气温是0℃.

16. **解:**(1)设y与x之间的函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$,

由表格知$\begin{cases}331=b,\\334=5k+b,\end{cases}$

所以$k=0.6,b=331$.

所以函数表达式为$y=0.6x+331$.

画函数图象略.

(2)当$x=22$时,$y=0.6\times22+331=344.2$,$344.2\times5=1\,721$(m),所以此人与燃烧的烟花所在地相距1 721m.

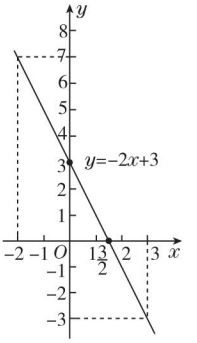
点拨:此题属于表格信息题,(1)题利用表格提供的信息,求一次函数表达式,相当于把表格中的每组数据看作点的坐标,再利用待定系数法来求解.

17. (1)<0;取值范围

(2)$(-1,0)$ **点拨:**$kx+b<0(k,b$为常数,$k\neq0)$的解集可看成是一次函数$y=kx+b$取$y<0$时,x的取值范围;$kx+b>0(k,b$为常数,$k\neq0)$的解集可看成是一次函数$y=kx+b$取$y>0$时,x的取值范围. $kx+b=0(k,b$为常数,$k\neq0)$的解就是一次函数$y=kx+b$的图象与x轴交点的横坐标.

18. 略.

19. **解:**取点$(0,3)$,$\left(\frac{3}{2},0\right)$,在平面直角坐标系内描点,连线,可得函数图象如图所示.



(第19题)

(1)由图象,得$-2x+3=0$的解是$x=\frac{3}{2}$.

(2)由图象,得$-2x+3<0$的解集是$x>\frac{3}{2}$.

(3)由图象,得$-3\leqslant-2x+3\leqslant7$的解集是$-2\leqslant x\leqslant3$.

20. **解:**(1)由题意,得$\begin{cases}3m-8<0,\\1-m<0,\end{cases}$

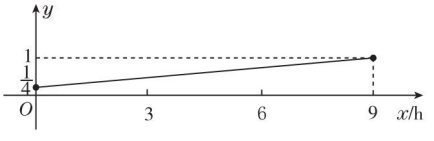
解得$1<m<\frac{8}{3}$,又因为m为整数,

所以$m=2$.

(2)由(1)可得该一次函数为$y=-2x-1$. 因为$0<y<4$,即$0<-2x-1<4$,解得$-\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}$,所以当$-\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}$时,$0<y<4$.

21. **解:**(1)由题意知:y与x的函数表达式为$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}x$$(0\leqslant x\leqslant9)$.

(2)取点$\left(0,\frac{1}{4}\right)$,$(9,1)$,在平面直角坐标系内描点,连线即可得所求函数图象(如图所示).



(第21题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)令 $y=\frac{1}{2}$,则 $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}x$,解得 $x=3$,所以泳池从有 $\frac{1}{4}$ 池水到有 $\frac{1}{2}$ 池水时两闸开放的时间为 3 h.

点拨:在解题过程中,要注意使实际问题有意义的自变量的取值范围.

12.3 一次函数与二元一次方程

练习:

1. 解:先把二元一次方程转化成一次函数的形式,再列表、描点、连线即可得二元一次方程所对应的直线,画图略.

(1)$y=x$. (2)$y=-x$.

点拨:二元一次方程可以看成是一个一次函数的表达式,因而任何一个二元一次方程在平面直角坐标系中的图象都是一条直线.

2. 解:(1)A,B,C,F 这几个有序数对是所给二元一次方程的解. (2)略.

3. 解:有 5 种不同的取法.

练习:

解:(1)有唯一解. (2)有无穷多组解.

(3)无解. (4)有唯一解.

点拨:将二元一次方程组化为标准形式:$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}(a_2\cdot b_2\cdot c_2\neq 0)$①当 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 时,有唯一解;②当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 时,有无穷多组解;③当 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ 时,无解.

习题 12.3:

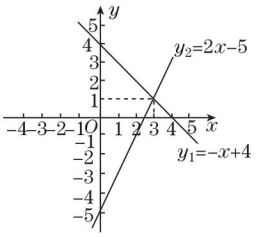
1. 解:$x+4y=16$,即 $y=4-\frac{1}{4}x$,所以二元一次方程 $x+4y=16$ 的正整数解有 $\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=8,\\y=2,\end{cases}\begin{cases}x=12,\\y=1.\end{cases}$

2. 解:把每一个二元一次方程组看成两个一次函数,在同一平面直角坐标系内画出两个一次函数的图象,两图象的交点坐标即为方程组的解,画图略.

(1)$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$ (2)有无穷多组解.

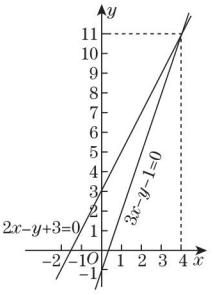
(3)无解. (4)$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

3. 解:作图如图所示. 由图象得,(1)两条直线的交点坐标为(3,1);(2)当 $x=3$ 时,$y_1=y_2$;当 $x<3$ 时,$y_1>y_2$;当 $x>3$ 时,$y_1<y_2$.



(第 3 题)

4. 解:画出方程 $3x-y-1=0$ 和 $2x-y+3=0$ 所对应的一次函数的图象如图所示.



(第 4 题)

(1)由图象可知,两方程所对应的一次函数的图象的交点坐标为(4,11). 所以可知 $\begin{cases}3x-y-1=0,\\2x-y+3=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=11.\end{cases}$

(2)令 $y_1=3x-1$,$y_2=2x+3$. 由图象可知当 $x>4$ 时,一次函数 $y_1=3x-1$ 的图象在 $y_2=2x+3$ 的图象的上方. 所以不等式 $3x-1>2x+3$ 的解集为 $x>4$.

点拨:将方程转化为一次函数,利用图象直接来解题.

12.4 综合与实践 一次函数模型的应用

A 组 复习题:

1. 解:(1)x 取全体实数. (2)x 取全体实数. (3)$x+1\neq 0$,即 $x\neq -1$. (4)x 取全体实数.

2. 解:(1)10:00 时,他离家 10 km 远,13:00 时,他离家 30 km远.

(2)他 12:00 到达离家最远的地方,离家 30 km 远.

(3)30 − 17 = 13(km),所以 11:00 到 12:00 他行驶了 13 km.

(4)他可能在12:00 ~ 13:00时休息,并吃午餐.

(5)$\frac{30}{15-13}=15$(km/h),所以他由离家最远的地方返回到家过程中的平均速度是 15 km/h.

点拨:解答此类图象信息题,关键是读懂图象,利用图象所提供的信息解决实际问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解:**(1)由题意,得 $m-2<0$,即 $m<2$ 时,y 随 x 的增大而减小. (2)由题意,得 $3-m=0$,即 $m=3$ 时,函数的图象经过原点. (3)由题意,得 $\begin{cases}m-2<0,\\3-m\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $m<2$ 时,函数的图象不经过第三象限.

4. **解:**$y=-3x+6$. **点拨:**此题为开放性题目,只要所写函数表达式满足题中的要求即可. 答案不唯一.

5. **解:**(1)根据题意,得 $s=3+90t(t\geqslant 0)$.

(2)

t/h	0	1	2	3	4	6	8
s/km	3	93	183	273	363	543	723

(3)画图略.

(4)根据题意,得 $633=3+90t$. 解得 $t=7$. 所以火车行驶了 7 h.

6. **解:**(1)设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,则 $\begin{cases}75.0=40.0k+b,\\70.2=37.0k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1.6,\\b=11.0.\end{cases}$ 所以 $y=1.6x+11.0$.

(2)配套. 理由:当 $x=42.0$ 时,$y=1.6\times 42.0+11.0=78.2$,所以配套.

点拨:本题重点考查用待定系数法求函数表达式. 利用表格提供的数据求得函数表达式,再验证是否配套.

7. (1)B

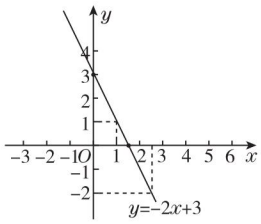
(2)B **点拨:**因为 $k=-\frac{1}{2}<0$,所以 y 随 x 的增大而减小. 因为 $-5<-2$,所以 $y_1>y_2$.

(3)D **点拨:**可解方程组 $\begin{cases}y=-x,\\y=2x-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\y=-\frac{1}{3}.\end{cases}$ 所以两函数图象的交点为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,位于第四象限.

(4)B **点拨:**本题是物理学科中一次函数的应用,根据题意直接列出函数表达式即可.

8. **解:**取点(0,3)和 $\left(\frac{3}{2},0\right)$,在平面直角坐标系内描点,并连线得函数图象,如图所示. 由图象得:(1) $-2x+3>0$ 的解集为 $x<\frac{3}{2}$,$-2x+3\leqslant -2$ 的解集为 $x\geqslant\frac{5}{2}$.

(2)$y\leqslant 1$.

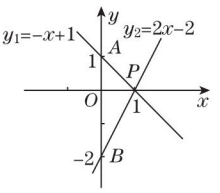


(第 8 题)

点拨:用一次函数的图象解不等式比较简单,它能体现一次函数与一元一次不等式之间的联系,能直观地用形表示数,以数得形.

9. (1)3;6 (2) $-3\leqslant x\leqslant -1$ (3) -14

10. **解:**(1)画出图象如图所示.



(第 10 题)

(2)由图知,当 $x<1$ 时,$y_1>y_2$;当 $x=1$ 时,$y_1=y_2$;当 $x>1$ 时,$y_1<y_2$.

(3)$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$.

11. **解:**(1)乙骑摩托车的速度是 $\frac{40}{4-3}=40$(km/h).

(2)甲骑自行车的速度是 $\frac{60}{6}=10$(km/h).

(3)两人在距出发点 40 km 处相遇,故距 B 地还有 $60-40=20$(km)远.

(4)由题图可知,乙比甲晚 3 h 出发,又早到 $6-\frac{60}{40}=1.5$(h).

点拨:本题考查学生从图象中读取信息的能力.

12. **解:**(1)这月他个人应缴养老保险金 487.73 元.

(2)这月他个人应缴养老保险金162.58元.

(3)设当 $3\,387\leqslant x\leqslant 10\,161$ 时,y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$.

将点(3 387,162.58),(10 161,487.73)的坐标分别代入,得 $\begin{cases}3\,387k+b=162.58,\\10\,161k+b=487.73.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k\approx 0.048,\\b=0.004.\end{cases}$ 所以 $y=0.048x+0.004$. 当 $y=240$ 时,可求得 $x\approx 4\,999.92$.

所以他 10 月份的工资约是 4 999.92 元.

B 组 复习题:

1. **解:**把 $3x-y-2=0$ 和 $2x-y+3=0$ 转化成一次函数,再在同一平面直角坐标系内画出其函数图象(图略). 由图象,得

(1)$x=5$. (2) $\begin{cases}x=5,\\y=13.\end{cases}$ (3)$x>5$.

点拨:用图象解题,图象一定要作得准确,若稍有误差,则其结果会相差很大.

2. **解:**由 $\begin{cases}x-2y=-k+6,\\x+3y=4k+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=k+4,\\y=k-1.\end{cases}$ 所以两直线的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

交点坐标为$(k+4,k-1)$.

又因为该点在第四象限内,

所以$\begin{cases}k+4>0,\\k-1<0.\end{cases}$解得$-4<k<1$.

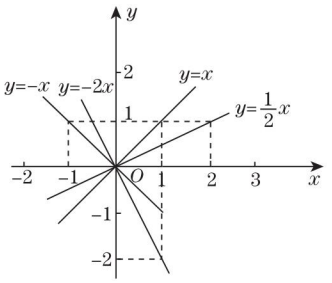
3. 解:要使直线l_1与l_2相交,则方程组$\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2\end{cases}$有唯一解,故$k_1-k_2\neq0$. 因此,当$k_1\neq k_2$时,直线$l_1$与$l_2$相交;

要使直线l_1与l_2平行,则方程组$\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2\end{cases}$无解.

故$k_1-k_2=0$,且$b_1-b_2\neq0$. 因此,当$k_1=k_2$,且$b_1\neq b_2$时,直线l_1与l_2平行;

要使直线l_1与l_2重合,则方程组$\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2\end{cases}$有无穷多组解,故$k_1-k_2=0$,且$b_1-b_2=0$. 因此,当$k_1=k_2$,且$b_1=b_2$时,直线$l_1$与$l_2$重合.

4. 解:如图所示.



(第4题)

(1)观察图象容易看出,$y=x$这条直线与$y=-x$这条直线互相垂直.

(2)观察图象容易看出,$y=\frac{1}{2}x$这条直线与$y=-2x$这条直线也互相垂直.

5. 解:设直线l的函数表达式为$y=kx+b$($k\neq0$).

因为直线l通过点$(-3,2)$,所以$2=-3k+b$. 又因为直线l与$y=x$垂直,由第4题$y=-x$这条直线与$y=x$这条直线垂直知,$k=-1$. 所以$2=-3\times(-1)+b$. 解得$b=-1$. 所以直线l的函数表达式为$y=-x-1$.

6. 解:根据题意,得$q_1=q_2$. 所以$\begin{cases}p-4q_1-5=0,\\p+q_1-25=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}p=21,\\q_1=4.\end{cases}$所以达到市场的供需平衡点时的该产品的市场价格为21万元.

7. 解:(1)由题意,得车间每天安排x名工人制造甲种零件,则制造乙种零件的工人有$(20-x)$名. 所以此车间每天所获利润$y=150\times6x+260\times5(20-x)=-400x+26\,000(0\leqslant x\leqslant20$,且$x$为整数).

(2)如果要车间每天所获利润不低于24 000元,则有$-400x+26\,000\geqslant24\,000$,解得$x\leqslant5$. 所以$20-x\geqslant15$,即至少应派15名工人去制造乙种零件.

点拨:(1)认真理解题意,列出函数表达式. (2)结合实际问题,解一元一次不等式可求解.

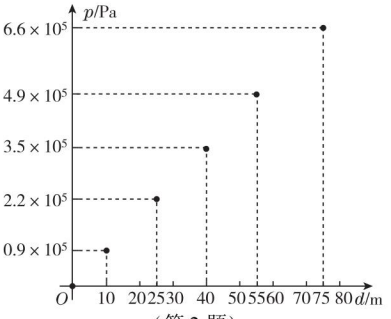
C组 复习题:

1. 解:(1)设喂A,B两种饲料的日利润分别为y_1元,y_2元,则喂A种饲料的日利润$y_1=1.0x-2.5\times2.8=x-7(10\leqslant x\leqslant15)$,喂B种饲料的日利润$y_2=0.9x-2.5\times2.3=0.9x-5.75(10\leqslant x\leqslant15)$.

(2)当$y_1=y_2$时,有$x-7=0.9x-5.75$,解得$x=12.5$. 当$y_1>y_2$时,有$x-7>0.9x-5.75$,解得$x>12.5$. 当$y_1<y_2$时,有$x-7<0.9x-5.75$,解得$x<12.5$. 所以当收购生猪每千克单价为12.5元时,选用A,B两种饲料的日利润相同;当$12.5<x\leqslant15$时,选用A种饲料合算;当$10\leqslant x<12.5$时,选用B种饲料合算.

点拨:(1)由提示"日利润=日收益-日饲料成本"可列函数表达式. (2)可分情况来比较选用哪种饲料合算.

2. 解:(1)如图所示.



(第2题)

(2)这些点近似地在一条过原点的直线上,所以可用一次函数关系去模拟. 由图易知,这些点近似地在点$(0,0)$与点$(75,6.6\times10^5)$的连线上. 所以可得水压p关于水深d的函数表达式为$p=\frac{6.6\times10^5}{75}d=8\,800d(d\geqslant0)$.

(3)把$d=90$代入(2)中的函数表达式,得$p=8\,800\times90=792\,000=7.92\times10^5$. 因为$7.92\times10^5\ \text{Pa}>7.8\times10^5\ \text{Pa}$,所以他不能在水下90 m处作业.

点拨:解答此类题的关键是理解题意,结合图象去解决所提出的各个问题.

3. 解:(1)画图略. 用一次函数关系模拟.

(2)设$y=kx+b(k\neq0)$.

将点$(20,15)$与点$(42,26)$的坐标分别代入,

得$\begin{cases}15=20k+b,\\26=42k+b.\end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得$\begin{cases}k=0.5,\\b=5.\end{cases}$

所以$y=0.5x+5(x>0)$.

(3)根据题意,得$24.5=0.5x+5$. 解得$x=39$. 所以他穿39码的鞋.

4. 解:(1)有一个容积为4 m^3的空水池,它有一个进水口和一个排水口. 首先打开进水口向水池内匀速注水,2 min后注满. 注满后,关闭进水口,打开排水口放水,把水放完,用时3 min.

(2)设线段AB所对应的函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$. 把点(2,4),(5,0)的坐标分别代入$y=kx+b$中,

得$\begin{cases}2k+b=4,\\5k+b=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\dfrac{4}{3},\\b=\dfrac{20}{3}.\end{cases}$

所以$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{20}{3}(2<x\leqslant5)$. 设线段$OA$所对应的函数表达式为$y=k_0x(k_0\neq0)$. 把点(2,4)的坐标代入,得$4=2k_0$,即$k_0=2$. 所以$y=2x(0\leqslant x\leqslant2)$. 综上所述,图象的函数表达式为

$$y=\begin{cases}2x(0\leqslant x\leqslant2),\\-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{20}{3}(2<x\leqslant5).\end{cases}$$

图象中的x轴表示时间,y轴表示水池中水的体积.

点拨:此题为开放性问题,可由图象编写不同情境的问题. (1)(2)题答案不唯一.

第13章 三角形中的边角关系、命题与证明

13.1 三角形中的边角关系

练习:

1. 解:题图中有3个三角形. $\triangle ABC$,$\triangle ABD$,$\triangle ADC$

点拨:依据三角形的定义观察可得.

2. 解:(1)不能. (2)能.

(3)能. (4)能.

点拨:依据三角形的三边关系,若三条线段中较短的两条线段的长度之和大于第三条线段的长度,即能组成一个三角形,小于或等于则不能.

3. 解:腰长要大于2 cm.

练习:

1. (1)30°

(2)75° **点拨**:依据"三角形的内角和等于180°"来求,可以用方程思想解决问题.

2. 解:(1)$\angle ACB=\angle CDB=\angle CDA$,$\angle A=\angle BCD$,$\angle B=\angle ACD$.

(2)直角三角形有$\triangle ACB$,$\triangle ADC$,$\triangle BDC$,它们的斜边分别是AB,AC和BC.

3. 解:在Rt$\triangle ADB$中,$\angle B=70°$,那么$\angle BAD=20°$. 所以$\angle CAD=\angle BAC-\angle BAD=46°-20°=26°$.

4. 解:假设一个三角形中有不止一个直角或钝角,那么这个三角形的三个内角的和肯定大于180°,这与三角形的内角和等于180°矛盾. 所以在一个三角形中,最多只可能有一个直角或钝角.

点拨:用假设的方法来进行推理,最后得出与已知事实矛盾的结论,从而说明问题.

练习:

1. (1)90°

(2)CBE;ABC

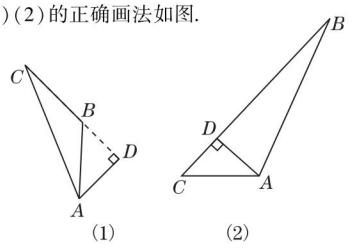
(3) =

点拨:本题考查对三角形的高线、角平分线和中线定义的掌握情况.

2. 解:画图略,这三条线段重合.

3. 解:(1)不是;(2)不是;(3)是.

题图(1)(2)的正确画法如图.



(1) (2)

(第3题)

点拨:画哪边上的高,就要过这边所对的角的顶点向这边所在的直线引垂线.

4. 略.

习题13.1:

1. (1)13 cm或11 **点拨**:三边长分两种情况①3 cm,3 cm,5 cm;②3 cm,5 cm,5 cm来讨论. ①②都符合三角形的三边关系,故都正确.

(2)12 **点拨**:三边长也分两种情况①2 cm,2 cm,5 cm;②2 cm,5 cm,5 cm来讨论. 第①种情况$2+2<5$,不符合三角形的三边关系,故舍去.

2. 解:(1)锐角三角形.

(2)直角三角形.

(3)钝角三角形.

(4)直角三角形.

3. (1)60°;20° (2)72°

4. 解:因为BD为$\triangle ABC$的中线,所以$AD=CD$. 所以$\triangle ABD$与$\triangle CBD$的周长的差是$(AB+BD+AD)-(BC+BD+CD)=AB-BC=5-3=2$(cm).

5. 解:设$\angle B=x°$,那么$\angle A=x°+10°$,$\angle C=(x°+10°)$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$+10°=x°+20°$. 依据“三角形的内角和等于180°”,得 $\angle B+\angle A+\angle C=3x°+30°=180°$. 解得 $x=50$. 故 $\angle B=50°$, $\angle A=60°$, $\angle C=70°$.

点拨:根据题意列方程求解即可.

6. 解:因为 $\angle A$ 的平分线交 BC 于点 D,所以 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times(180°-\angle B-\angle C)=\frac{1}{2}\times(180°-65°-50°)=32.5°$. 所以 $\angle ADB=180°-\angle B-\angle BAD=180°-65°-32.5°=82.5°$. **点拨**:本题依据“三角形的内角和等于180°”来解决问题.

7. 解:由三角形的三边关系,得 $12-5<2a+1<12+5$. 解得 $3<a<8$.

13.2 命题与证明

练习:

1. 解:(1)如果两条直线相交,那么它们只有一个交点. (2)如果直线 $AB\perp$ 直线 CD,交点为 O,那么 $\angle AOC=90°$. (3)如果两平行直线被第三条直线所截,那么形成的同位角相等. (4)如果两个角相等,那么这两个角的补角相等.

点拨:对于该题的解答,主要是分清各个命题的条件和结论,再加上必要的修饰词语.

2. 解:(1)假命题. 反例:$|-2|=|2|$,而 $-2\neq2$. (2)假命题. 反例:$(-2)\times(-3)>0$,而 -2, -3都是负数. (3)真命题. (4)假命题. 反例:若这两条直线不是平行线,则同位角不相等.

点拨:说明一个命题是假命题,只需举出一个反例即可.

3. 解:(1)逆命题:如果 $a^2=b^2$,那么 $a=b$. 逆命题是假命题. (2)逆命题:两直线平行,同位角相等. 逆命题是真命题.

练习:

1. 已知;同位角相等,两直线平行;两直线平行,内错角相等 **点拨**:本题考查了平行线的性质及判定,在推理时,要养成步步有据的习惯.

2. 已知;对顶角相等;等量代换;同位角相等,两直线平行

练习:

1. 已知;两直线平行,同旁内角互补;已知;两直线平行,同旁内角互补;等量代换;等式性质

点拨:牢固掌握平行线的性质是解决本题的关键.

2. 已知;两直线平行,内错角相等;已知;已知;CDB;角平分线的定义;ABD;角平分线的定义;等量代换 **点拨**:从本题可以看出推理时必须步步有据.

练习:

1. $\angle B$;两直线平行,内错角相等;$\angle C$;两直线平行,内错角相等;180°;$\angle DAB$;$\angle BAC$;$\angle EAC$;等量代换;平角的定义

点拨:本题是三角形的内角和等于180°的典型证法,注意辅助线的作法,过点 A 作 $DE\parallel BC$,从而使 $\triangle ABC$ 的三个内角拼成一个平角.

2. 解:证明补充如下:$\because\angle A=\angle4$, $\angle B=\angle3$(两直线平行,同位角相等). $\because DF\parallel AC$(所作),$\therefore\angle1=\angle C$(两直线平行,同位角相等),$\angle2=\angle4$(两直线平行,内错角相等). $\therefore\angle A=\angle2$(等量代换),$\therefore\angle A+\angle B+\angle C=\angle2+\angle3+\angle1=180°$(平角的定义).

点拨:过三角形的一边上的点(异于顶点)分别作三角形另两边的平行线,这是证明三角形内角和定理的又一方法. 总之,把三角形的三个内角拼成一个平角,是证明三角形内角和定理的常用方法.

练习:

1. (1)50°;130° (2)90° **点拨**:三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和,应用这一推论可以很方便地将三角形的内角与外角联系起来.

2. 解:$\angle1>\angle2>\angle A$. 理由如下:由 $\angle1$ 是 $\triangle PDC$ 的一个外角,可得 $\angle1>\angle2$. 由 $\angle2$ 是 $\triangle DAB$ 的一个外角,可得 $\angle2>\angle A$,所以 $\angle1>\angle2>\angle A$.

习题13.2:

1. 解:(1)条件:两条平行线被第三条直线所截. 结论:内错角相等. (2)条件:一个三角形是直角三角形. 结论:这个三角形的两个锐角互余. (3)条件:两条直线相交. 结论:这两条直线只有一个交点. (4)条件:两条直线都垂直于同一条直线. 结论:这两条直线平行.

点拨:分清一个命题的条件和结论是一个难点,如果直接指出有困难,那么可先把命题改写成“如果……那么……”的形式,“如果”后面的内容是条件,“那么”后面的内容是结论.

2. 解:(1)假命题. 反例:若都乘以同一个负数,则不等号的方向需要改变. (2)假命题. 反例:若两个角分别为60°和120°,且共顶点及一条边,但不是邻补角,则它们的角平分线不互相垂直. (3)真命题. (4)假命题. 反例:若 $a=3$, $b=2$,符合 $a>b$,但 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

点拨:本题要抓住反例的定义,找出符合命题的条件但不符合命题结论的例子,以此来说明命题为假命题.

3. 解:(1)逆命题:如果两个数的和为零,那么它们互为相反数. 逆命题是真命题. (2)逆命题:若两个角互为补角,则这两个角的和等于平角. 逆命题是真命题.

4. 解:要证明一个命题是假命题,可以举反例. 举例略.

点拨:学会用举反例的方法来说明一个命题是假命题.

5. 证明:(1)$\because\angle A+\angle B=180°$(已知),$\therefore AD\parallel BC$(同旁内角互补,两直线平行). $\therefore\angle C+\angle D=180°$(两直线平行,同旁内角互补).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵ $AB \perp CD$(已知),∴ $\angle 1 = 90°$,$\angle 2 = 90°$(垂直的定义).∴ $\angle 1 = \angle 2$(等量代换).

点拨:证明的每一步都要有理有据.

6. 证明:∵ $AB \parallel DC$(已知),∴ $\angle D + \angle BAD = 180°$(两直线平行,同旁内角互补).又∵ $\angle BAD = \angle BCD$(已知),∴ $\angle D + \angle BCD = 180°$(等量代换).∴ $AD \parallel BC$(同旁内角互补,两直线平行).

7. 证明:∵ $AB \parallel A'B'$(已知),∴ $\angle B = \angle A'DC$(两直线平行,同位角相等).又∵ $BC \parallel B'C'$(已知),∴ $\angle A'DC = \angle B'$(两直线平行,同位角相等).∴ $\angle B = \angle B'$(等量代换).

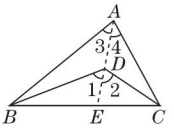
8. 证明:∵ $AB \parallel A'B'$(已知),

∴ $\angle ADC' = \angle B'$(两直线平行,同位角相等).又∵ $BC \parallel B'C'$(已知),

∴ $\angle B + \angle BDB' = 180°$(两直线平行,同旁内角互补).又∵ $\angle ADC' = \angle BDB'$(对顶角相等),∴ $\angle B' = \angle BDB'$(等量代换).

∴ $\angle B + \angle B' = 180°$(等量代换).

9. 证明:如图,连接 AD 并延长,交 BC 于点 E,则对 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 而言,有 $\angle 1 > \angle 3$,$\angle 2 > \angle 4$(三角形的一个外角大于与它不相邻的任何一个内角),所以 $\angle 1 + \angle 2 > \angle 3 + \angle 4$(不等式性质),即 $\angle BDC > \angle BAC$(等量代换).



(第9题)

点拨:本题作出辅助线是关键,注意构造三角形,利用三角形内角和定理的推论来证明角之间的关系.

A组 复习题:

1. (1)假命题 (2)真命题 **点拨**:(1)例如:直角三角形的三条高相交于直角顶点处,故(1)是假命题;(2)若三角形的三个内角中只有一个是锐角,则另两个角可能是直角或钝角,与三角形的内角和等于180°不符.故三角形三个内角中至少有两个是锐角,故(2)是真命题.

2. 解:(1)逆命题:相等的角是对顶角,原命题是真命题,逆命题是假命题.

(2)逆命题:一个数能被2整除,这个数也能被4整除,原命题是真命题,逆命题是假命题.

点拨:写一个命题的逆命题的关键是分清原命题的条件和结论.

3. (1)3 **点拨**:三角形的三边长可分别为3 cm,7 cm,9 cm或3 cm,9 cm,11 cm或7 cm,9 cm,11 cm.故共可作3个不同的三角形.

(2)20 **点拨**:由已知得另一边长可能为4 cm或8 cm,若另一边长为4 cm,则三边长为4 cm,4 cm,8 cm,不能构成三角形,故另一边长只能为8 cm,即这个三角形的周长是8 + 8 + 4 = 20(cm).

(3)40°或100° **点拨**:分两种情况:①当140°是与$\angle A$相邻的外角时,$\angle A = 40°$;②当140°是与$\angle B$或$\angle C$相邻的外角时,$\angle A = 100°$.

4. 解:设三角形第三边长为 x.由三角形三边关系,可得 $5 - 4 < x < 5 + 4$,即 $1 < x < 9$,且 x 为正整数.故 x 的值可能为2,3,4,5,6,7或8,即此三角形第三边长可能为2,3,4,5,6,7或8.

点拨:本题考查三角形三边之间的关系.

5. 解:(1)因为 $\triangle ABC$ 的两个外角平分线 BP,CP 交于点 P,所以 $\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB) + \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle ABC + \angle A) = \frac{1}{2}(180° + \angle A) = \frac{1}{2} \times (180° + 64°) = 122°$.所以 $\angle P = 180° - (\angle PBC + \angle PCB) = 180° - 122° = 58°$.

(2)因为 BP,CP 分别是 $\angle B$,$\angle C$ 两内角平分线,所以 $\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2}(180° - \angle A)$.所以 $\angle P = 180° - (\angle PBC + \angle PCB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 180° - \frac{1}{2} \times (180° - 64°) = 122°$.

(3)①若 BP 是内角平分线,CP 是外角平分线,则 $\angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle PCA = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle A)$.所以 $\angle P = 180° - \angle PBC - \angle ACB - \angle PCA = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC - \angle ACB - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle A) = 180° - \angle ABC - \angle ACB - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle A = 32°$;②若 BP 是外角平分线,CP 是内角平分线,同理可得 $\angle P = 32°$.

6. 解:因为 $\angle ABC = 66°$,$\angle ACB = 54°$,所以由三角形内角和定理,可得 $\angle A = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 66° - 54° = 60°$.在 Rt$\triangle ABE$ 中,$\angle ABE = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.同理,在 Rt$\triangle ACF$ 中,$\angle ACF = 30°$.因为 $\angle BHC$ 是 $\triangle BFH$ 的外角,所以 $\angle BHC = \angle BFH + \angle FBH = 90° + 30° = 120°$.

点拨:本题综合运用三角形内角和定理及其推论求解.

7. 解:在 $\triangle ABD$ 中,$\angle ADB = 180° - \angle A - \angle ABD = 180° - 33° - \angle ABD = 147° - \angle ABD$.在 $\triangle BDC$ 中,$\angle BDC = 180° - \angle C - \angle CBD = 180° - 30° - \angle CBD = 150° - \angle CBD$.因为 $\angle ADC + \angle BDC + \angle ADB = 360°$,所以 $\angle ADC = 360° - (\angle ADB + \angle BDC) = 360° - (147° - \angle ABD + 150° - \angle CBD) = 360° - [297° - (\angle ABD + \angle CBD)] = 360° - (297° - \angle ABC) = 360° - (297° - 83°) = 146°$.

8. 证明:∵ $\angle 1 = \angle C$,$\angle 2 = \angle D$(已知),又∵ $\angle 1 = \angle 2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(对顶角相等),∴ $\angle C=\angle D$(等量代换). ∴ $AC\parallel DB$(内错角相等,两直线平行).

点拨:利用平行线的判定定理来证明.

9. 解:因为 $\angle B=38°$, $\angle C=70°$,所以 $\angle BAC=180°-38°-70°=72°$. 又因为 AD 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=36°$.

因为 $AE\perp BC$,所以 $\angle EAC+\angle C=90°$.

所以 $\angle EAC=90°-70°=20°$. 故 $\angle DAE=\angle CAD-\angle EAC=36°-20°=16°$.

10. 解:因为 $\angle A=50°$, $\angle C=60°$,

所以 $\angle ABC=180°-50°-60°=70°$.

又因为 BD 平分 $\angle ABC$,

所以 $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=35°$.

又因为 $DE\parallel BC$,

所以 $\angle BDE=\angle DBC=35°$,

$\angle ADE=\angle C=60°$.

所以 $\angle CDE=180°-60°=120°$.

所以 $\angle BDC=120°-35°=85°$.

11. 证明:∵ $\angle ACB=90°$(已知),∴ $\angle EBC+\angle CEF=90°$(直角三角形的两锐角互余). 又∵ BE 平分 $\angle ABC$(已知),∴ $\angle ABE=\angle EBC$(角平分线的定义). ∴ $\angle ABE+\angle CEF=90°$(等量代换).

∵ CD 为 AB 边上的高(已知),

∴ $\angle DFB+\angle ABE=90°$(直角三角形的两锐角互余).

∴ $\angle DFB=\angle CEF$(同角的余角相等).

又∵ $\angle CFE=\angle DFB$(对顶角相等),

∴ $\angle CFE=\angle CEF$(等量代换).

12. 证明:∵ AD 平分 $\angle EAC$(已知),

∴ $\angle EAD=\frac{1}{2}\angle EAC$(角平分线的定义).

∵ $\angle EAC=\angle B+\angle C$(三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和),

又∵ $\angle B=\angle C$(已知),

∴ $\angle EAC=2\angle B$(等量代换).

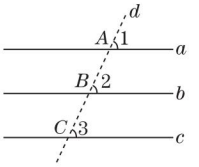
∴ $\angle EAD=\angle B$(等量代换).

∴ $AD\parallel BC$(同位角相等,两直线平行).

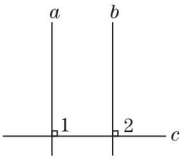
B 组 复习题:

1. 证明:如图,作一条直线 d 分别与直线 a, b, c 交于点 A, B, C. 因为 $a\parallel c$(已知),所以 $\angle 1=\angle 3$(两直线平行,同位角相等). 因为 $b\parallel c$(已知),所以 $\angle 2=\angle 3$(两直线平行,同位角相等). 所以 $\angle 1=\angle 2$(等量代换). 所以 $a\parallel b$(同位角相等,两直线平行).

点拨:本题是平行线的性质和判定的综合应用.



(第 1 题)

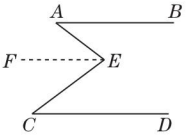


(第 2 题)

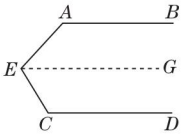
2. 证明:如图,因为 $a\perp c$, $b\perp c$(已知),所以 $\angle 1=90°$, $\angle 2=90°$(垂直的定义). 所以 $\angle 1=\angle 2$(等量代换). 所以 $a\parallel b$(同位角相等,两直线平行).

点拨:本题考查平行线的判定及垂直的定义.

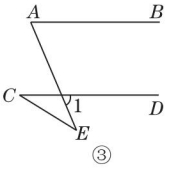
3. 解:(1)如图①,过 E 作 $EF\parallel AB$. 因为 $AB\parallel CD$,所以 $EF\parallel CD$(平行于同一条直线的两条直线平行). 由 $EF\parallel AB$ 可知, $\angle A=\angle AEF$(两直线平行,内错角相等). 由 $EF\parallel CD$ 可知, $\angle C=\angle CEF$(两直线平行,内错角相等). 所以 $\angle AEC=\angle AEF+\angle CEF=\angle A+\angle C$(等量代换).



①



②



③

(第 3 题)

(2)如图②,过 E 作 $EG\parallel AB$,因为 $AB\parallel CD$,所以 $CD\parallel EG$(平行于同一条直线的两条直线平行). 由 $EG\parallel AB$ 可知, $\angle A+\angle AEG=180°$(两直线平行,同旁内角互补). 由 $EG\parallel CD$ 可知, $\angle C+\angle CEG=180°$(两直线平行,同旁内角互补). 所以 $\angle AEC=\angle AEG+\angle CEG=180°-\angle A+180°-\angle C=360°-(\angle A+\angle C)$(等量代换).

(3)如图③,因为 $AB\parallel CD$,所以 $\angle 1=\angle A$(两直线平行,同位角相等). 又因为 $\angle 1=\angle C+\angle E$(三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和),所以 $\angle E=\angle 1-\angle C=\angle A-\angle C$(等量代换).

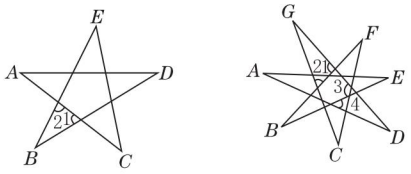
点拨:推理过程要有理有据. 另外,正确作出辅助线也很关键.

4. 解:(1)如图①,因为 $\angle 1=\angle A+\angle D$, $\angle 2=\angle E+\angle C$,所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=(\angle A+\angle D)+(\angle E+\angle C)+\angle B=\angle 1+\angle 2+\angle B=180°$.

(2)如图②,因为 $\angle 1=\angle B+\angle 3$, $\angle 3=\angle D+\angle 4$, $\angle 4=\angle A+\angle E$,所以 $\angle 1=\angle B+\angle D+\angle A+\angle E$. 又因为 $\angle 2=\angle C+\angle F$,所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle F+\angle G=\angle G+(\angle B+\angle D+\angle A+\angle E)+(\angle C+\angle F)=\angle G+\angle 1+\angle 2=180°$.



(第4题)

第14章 全等三角形

14.1 全等三角形

练习:

1. 解: 对应角:$\angle A$ 和 $\angle DCE$,$\angle BCA$ 和 $\angle D$. 对应边:AB 和 CE,AC 和 CD.

点拨: 在全等三角形中能正确地找出对应角和对应边是下一节学习判定两个三角形全等的基础,要引起重视.

2. 解: $\triangle ABC\cong\triangle CDA$. 对应边:$AB$ 和 CD,AC 和 CA,BC 和 DA. 对应角:$\angle B$ 和 $\angle D$,$\angle BAC$ 和 $\angle DCA$,$\angle ACB$ 和 $\angle CAD$.

点拨: 只要按对应顶点的对应顺序正确写出表示两个三角形全等的式子,从式子中按字母顺序便可顺利写出对应边和对应角.

习题14.1:

1. 解: (1)能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.

(2)全等三角形的对应边相等,全等三角形的对应角相等.

点拨: 牢记全等三角形的定义和性质.

2. 解: 因为 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$,且 $\angle B=\angle C$,所以其他的对应角为 $\angle A$ 与 $\angle A$,$\angle ADB$ 与 $\angle AEC$;对应边为 AB 与 AC,BD 与 CE,AD 与 AE. 因为 $\triangle OBE\cong\triangle OCD$,所以对应角为 $\angle BOE$ 与 $\angle COD$,$\angle B$ 与 $\angle C$,$\angle BEO$ 与 $\angle CDO$,对应边为 OB 与 OC,OE 与 OD,BE 与 CD.

3. 解: 因为 $\triangle ABC\cong\triangle BAD$,且 $BC=AD$,所以其他的对应边为 AB 与 BA,AC 与 BD;对应角为 $\angle C$ 与 $\angle D$,$\angle CAB$ 与 $\angle DBA$,$\angle CBA$ 与 $\angle DAB$. 因为 $\triangle OAC\cong\triangle OBD$,所以对应边为 OA 与 OB,OC 与 OD,AC 与 BD,对应角为 $\angle C$ 与 $\angle D$,$\angle COA$ 与 $\angle DOB$,$\angle CAO$ 与 $\angle DBO$.

点拨: 找准全等三角形的对应边及对应角是以后解决有关全等三角形问题的基础.

4. ED;CBD **点拨:** 由 $\triangle ABC\cong\triangle EBD$,可得 $\angle ABC=\angle EBD$,故可得 $\angle ABC-\angle EBC=\angle EBD-\angle EBC$,故 $\angle ABE=\angle CBD$.

14.2 三角形全等的判定

练习:

1. 证明: 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle A=\angle A,\\ AE=AD,\end{cases}$

所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACD(SAS)$.

点拨: 利用"SAS"判定方法证明两个三角形全等.

2. 证明: 在 $\triangle DOC$ 和 $\triangle BOA$ 中,

$\begin{cases}OD=OB,\\ \angle DOC=\angle BOA,\\ OC=OA,\end{cases}$

所以 $\triangle DOC\cong\triangle BOA(SAS)$.

所以 $\angle D=\angle B$(全等三角形的对应角相等). 所以 $DC\parallel AB$(内错角相等,两直线平行).

3. 证明: 因为 $\angle 1=\angle 2$,所以 $\angle 1+\angle DBC=\angle 2+\angle DBC$,即 $\angle ABC=\angle DBE$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 中,

$\begin{cases}AB=DB,\\ \angle ABC=\angle DBE,\\ CB=EB,\end{cases}$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DBE(SAS)$.

所以 $\angle A=\angle D$.

练习:

1. 证明: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中,

$\begin{cases}\angle 2=\angle 1,\\ BC=CB,\\ \angle ABC=\angle DCB,\end{cases}$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle DCB(ASA)$.

点拨: 利用"ASA"判定方法证明两个三角形全等.

2. 证明: 因为 $AD\perp BC$,

所以 $\angle ADB=\angle ADC=90°$(垂直的定义).

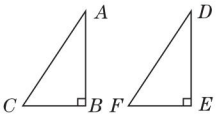
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,$\begin{cases}\angle ADB=\angle ADC,\\ AD=AD,\\ \angle BAD=\angle CAD,\end{cases}$

所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACD(ASA)$.

点拨: 利用垂直的定义可得一对相等的角,进而在两个三角形中利用"ASA"判定方法来证明两个三角形全等.

3. 解: 已知:如图,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$\angle B=\angle E=90°$,$\angle A=\angle D$,$AC=DF$.



(第3题)

求证:$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

证明:因为 $\angle B=\angle E=90°$,$\angle A=\angle D$,所以 $\angle C$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=\angle F$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ AC=DF,\\ \angle C=\angle F,\end{cases}$

所以$\triangle ABC\cong\triangle DEF(ASA)$.

练习：

1. 解：全等三角形有(1)与(10)，(2)与(6)，(3)与(5)，(4)与(8)，(7)与(9).

点拨：(1)与(10)应用“*SSS*”判定方法，(2)与(6)应用“*ASA*”判定方法，(3)与(5)应用“*SAS*”判定方法，(4)与(8)应用“*ASA*”判定方法，(7)与(9)应用“*SAS*”判定方法.

2. 略.

3. 证明：因为$BE=CD$，所以$BE-DE=CD-DE$，即$BD=CE$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$\begin{cases}AB=AC,\\ AD=AE,\\ BD=CE,\end{cases}$

所以$\triangle ABD\cong\triangle ACE(SSS)$.

点拨：利用“*SSS*”判定方法证明两个三角形全等.

练习：

1. 解：(1)$\triangle ABC\cong\triangle CDE$. 依据：在$\triangle ABC$和$\triangle CDE$中，$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle 1=\angle E,\\ AB=CD,\end{cases}$

所以$\triangle ABC\cong\triangle CDE(AAS)$.

(2)$\triangle ABC\cong\triangle DBE$.

依据：在$\triangle ABC$和$\triangle DBE$中，

$\begin{cases}AB=DB,\\ \angle ABC=\angle DBE,\\ BC=BE,\end{cases}$

所以$\triangle ABC\cong\triangle DBE(SAS)$.

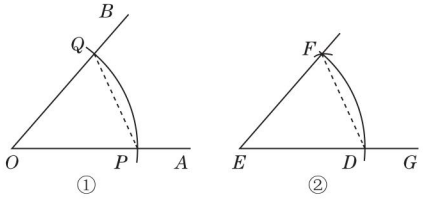
2. 解：(1)$BC=EF$或$\angle A=\angle D$或$\angle C=\angle F$.

(2)$AC=DF$或$AB=DE$或$BC=EF$.

3. 解：已知：$\angle AOB$(如图①).

求作：$\angle DEF$，使$\angle DEF=\angle AOB$.

作法如下：(1)在$\angle AOB$上以O为圆心，任意长为半径画弧，分别交OA，OB于点P，Q；



(第3题)

(2)作射线EG；

(3)以点E为圆心，OP长为半径画弧，交EG于点D；

(4)以点D为圆心，PQ长为半径画弧，交第(3)步中所画弧于点F；

(5)作射线EF，如图②.

$\angle DEF$即为所求作的角.

证明如下：连接PQ，DF，如图①②，由作法可知，$OP=OQ=EF=ED$，$DF=PQ$.

在$\triangle EDF$和$\triangle OPQ$中，$\begin{cases}ED=OP,\\ EF=OQ,\\ DF=PQ,\end{cases}$

所以$\triangle EDF\cong\triangle OPQ(SSS)$. 所以$\angle DEF=\angle POQ$，即$\angle DEF=\angle AOB$.

练习：

1. 证明：因为$AC\perp BD$于点O，所以$\angle AOB=\angle COD=90°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$和$\mathrm{Rt}\triangle COD$中，$\begin{cases}AB=CD,\\ OA=OC,\end{cases}$

所以$\mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle COD(HL)$.

所以$\angle A=\angle C$. 所以$AB\parallel DC$.

2. 解：$\angle AOP=\angle BOP$. 理由：因为$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，所以$\angle ODP=\angle OEP=90°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DOP$和$\mathrm{Rt}\triangle EOP$中，$\begin{cases}OP=OP,\\ PD=PE,\end{cases}$

所以$\mathrm{Rt}\triangle DOP\cong\mathrm{Rt}\triangle EOP(HL)$.

所以$\angle DOP=\angle EOP$，即$\angle AOP=\angle BOP$.

点拨：已知条件中有垂直关系，可考虑利用直角三角形全等的判定方法来判定两直角三角形全等，再利用全等三角形的性质即可得两角相等.

3. 解：当$BH=AC$且$DH=DC$时，$\mathrm{Rt}\triangle BDH\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$.

点拨：由直角三角形全等的判定方法可知，只要一组直角边和斜边对应相等，两直角三角形就全等. 还可以利用一般三角形全等的判定方法来判定，本题答案不唯一.

练习：

1. 证明：因为$AB\parallel CD$，所以$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$. 又因为$AB=DC$，所以$\triangle AOB\cong\triangle DOC(ASA)$. 所以$OA=OD$. 又因为$AB\parallel CD$，所以$\angle AEO=\angle DFO$. 所以$\triangle AEO\cong\triangle DFO(AAS)$. 所以$OE=OF$.

点拨：利用两次三角形全等来证明.

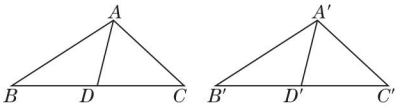
2. (1)**证明：**因为$\angle BAE=\angle DAC$，所以$\angle BAE+\angle CAE=\angle DAC+\angle CAE$，即$\angle BAC=\angle DAE$. 又因为$AB=AD$，$AC=AE$，所以$\triangle ABC\cong\triangle ADE(SAS)$.

(2)**解：**成立. 理由：由$\triangle ABC\cong\triangle ADE$可得$\angle B=\angle D$. 又因为$AB=AD$，$\angle BAM=\angle DAN$，所以$\triangle BAM\cong\triangle DAN(ASA)$. 所以$BM=DN$.

点拨：综合运用三角形全等的判定与性质解答本题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:已知:如图,$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,$AD$,$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的中线.求证:$AD = A'D'$.

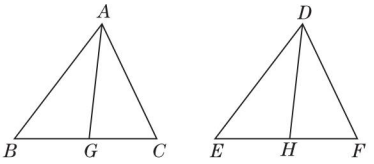


(第3题)

证明:因为$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,所以$AB = A'B'$,$\angle B = \angle B'$,$BC = B'C'$.因为$AD$,$A'D'$分别是$\triangle ABC$,$\triangle A'B'C'$的中线,所以$BD = \frac{1}{2}BC$,$B'D' = \frac{1}{2}B'C'$.所以$BD = B'D'$.所以$\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'(SAS)$.所以$AD = A'D'$.

点拨:解答文字证明题的步骤:①根据题意,画出图形;②根据条件,写出已知;③根据结论,写出求证;④进行证明.

4. 解:已知:如图,$\triangle ABC \cong \triangle DEF$,$AG$,$DH$分别是$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的角平分线.求证:$AG = DH$.



(第4题)

证明:因为$\triangle ABC \cong \triangle DEF$,所以$AB = DE$,$\angle B = \angle E$,$\angle BAC = \angle EDF$.又因为$AG$,$DH$分别是$\triangle ABC$,$\triangle DEF$的角平分线,所以$\angle BAG = \frac{1}{2}\angle BAC$,$\angle EDH = \frac{1}{2}\angle EDF$.所以$\angle BAG = \angle EDH$.

所以$\triangle BAG \cong \triangle EDH(ASA)$.

所以$AG = DH$.

习题14.2:

1. 解:(1)因为$\triangle ABE \cong \triangle ACF$,所以$AE = AF$.因为$AE = 2$,所以$AF = 2$.又因为$AB = 5$,所以$BF = AB - AF = 5 - 2 = 3$.

(2)因为$\triangle ABO \cong \triangle CDO$,所以$\angle ABO = \angle CDO$.又因为$\angle ABO = 180° - \angle BAO - \angle AOB = 35°$,所以$\angle CDO = 35°$.

2. 证明:因为点C是AB的中点,所以$AC = CB$.又因为$CD \parallel BE$,所以$\angle ACD = \angle B$.又因为$CD = BE$,所以$\triangle ACD \cong \triangle CBE(SAS)$.

3. 证明:因为E是AC的中点,所以$CE = AE$.在$\triangle CFE$和$\triangle ADE$中,

$$\begin{cases} FE = DE, \\ \angle CEF = \angle AED, \\ CE = AE, \end{cases}$$

所以$\triangle CFE \cong \triangle ADE(SAS)$.所以$CF = AD$,$\angle FCE = \angle A$.所以$CF \parallel AD$.

4. 证明:因为$AB \parallel CD$,所以$\angle CAB = \angle DCE$.又因为$AB = CE$,$AC = CD$,所以$\triangle CAB \cong \triangle DCE(SAS)$.所以$BC = ED$.

5. 证明:在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ \angle C = \angle D, \\ AB = AB, \end{cases}$$

所以$\triangle ABC \cong \triangle ABD(AAS)$.所以$AC = AD$.

6. 解:只需带②去.因为已知一个三角形的两角和它们的夹边可以确定这个三角形的形状和大小.

7. 证明:因为$BE \parallel DF$,所以$\angle ABE = \angle D$.又因为$AB = FD$,$\angle A = \angle F$,所以$\triangle ABE \cong \triangle FDC(ASA)$.所以$AE = FC$.

8. 解:根据题意可知$OM = ON$,$PM = PN$,$OP = OP$,所以$\triangle MOP \cong \triangle NOP(SSS)$.所以$\angle AOP = \angle BOP$,即过角尺顶点$P$的射线$OP$便是$\angle AOB$的平分线.

9. 解:还要具备的条件为$\angle BAD = \angle CAD$或$BD = CD$或$\angle B = \angle C$,就能使$\triangle ADB$与$\triangle ADC$全等.

10. 证明:(1)因为$BF \perp AC$,$DE \perp AC$,所以$\angle BFA = \angle DEC = 90°$.在$\mathrm{Rt}\triangle BFA$和$\mathrm{Rt}\triangle DEC$中,

$$\begin{cases} AB = CD, \\ BF = DE, \end{cases}$$

所以$\mathrm{Rt}\triangle BFA \cong \mathrm{Rt}\triangle DEC(HL)$.

所以$FA = EC$.

所以$FA - EF = EC - EF$.所以$AE = CF$.

(2)因为$\triangle BFA \cong \triangle DEC$,所以$\angle A = \angle C$,所以$AB \parallel DC$.

11. 证明:在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中,

$$\begin{cases} AB = DC, \\ AC = DB, \\ BC = CB, \end{cases}$$

所以$\triangle ABC \cong \triangle DCB(SSS)$.

所以$\angle A = \angle D$.

在$\triangle ABO$和$\triangle DCO$中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle AOB = \angle DOC, \\ AB = DC, \end{cases}$$

所以$\triangle ABO \cong \triangle DCO(AAS)$.

所以$OA = OD$.

12. 证明:因为$AC \parallel DB$,所以$\angle ACO = \angle BDO$.又因为$OC = OD$,$\angle COA = \angle DOB$,所以$\triangle AOC \cong \triangle BOD(ASA)$.所以$AO = BO$.又因为$AE = BF$,所以$EO = FO$.又因为$\angle COE = \angle DOF$,$OC = OD$,所以$\triangle EOC \cong \triangle FOD(SAS)$.

所以$CE = DF$.

A组 复习题:

1. (1)× (2)× (3)√ **点拨**:(1)犯了利用"SSA"证明两个三角形全等的错误;(2)缺乏"对应"这一限制,故说法错误.

2. 证明:因为BD平分$\angle ABC$,CE平分$\angle ACB$,$\angle ABC =$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle ACB$，所以$\angle DBC = \angle ECB$. 又因为$\angle DCB = \angle EBC$，$BC = CB$，所以$\triangle DCB \cong \triangle EBC(ASA)$. 所以$BD = CE$.

点拨：要证 $BD = CE$，需证$\triangle DCB \cong \triangle EBC$，经观察发现，两个条件是已知的，第三个条件通过角平分线的定义可得.

3. 证明：在$\triangle ADB$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases} AB = AC, \\ DB = DC, \\ AD = AD, \end{cases}$

所以$\triangle ADB \cong \triangle ADC(SSS)$.

所以$\angle BAD = \angle CAD$.

在$\triangle ABF$和$\triangle ACF$中，$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAF = \angle CAF, \\ AF = AF, \end{cases}$

所以$\triangle ABF \cong \triangle ACF(SAS)$.

所以$\angle BFA = \angle CFA$.

点拨：运用“SSS”证出$\triangle ADB \cong \triangle ADC$，得出$\angle BAD = \angle CAD$，再加上已知条件，可证得$\triangle ABF \cong \triangle ACF$，从而得证.

4. 证明：因为$BE \perp AC$，$ED \perp BD$，所以$\angle EBC + \angle BCA = 90°$，$\angle EBC + \angle E = \angle D = 90°$.

所以$\angle BCA = \angle E$. 又因为$\angle ABC = 90°$，所以$\angle ABC = \angle D$. 又因为$AB = BD$，所以$\triangle ABC \cong \triangle BDE(AAS)$.

5. 解：因为$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，$EF \perp AC$，所以$\angle ACB = \angle FEC = 90°$，$\angle A + \angle B = \angle A + \angle ECF = 90°$. 所以$\angle B = \angle ECF$. 又因为 $BC = CE$，所以 $\triangle ABC \cong \triangle FCE(ASA)$. 所以 $AC = EF$. 因为 $EF = 5$ cm，$EC = BC = 2$ cm，所以 $AE = AC - EC = EF - EC = 5 - 2 = 3$(cm).

6. 证明：在$\triangle CBG$和$\triangle ABF$中，

$\begin{cases} \angle CGB = \angle AFB, \\ \angle CBG = \angle ABF, \\ CB = AB, \end{cases}$

所以 $\triangle CBG \cong \triangle ABF(AAS)$. 所以 $\angle C = \angle A$. 因为 $\angle CBD + \angle DBE = \angle ABE + \angle DBE$，所以 $\angle CBE = \angle ABD$. 又因为 $CB = AB$，所以$\triangle CBE \cong \triangle ABD(ASA)$. 所以$AD = CE$.

7. 证明：连接 AC. 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases} AB = AD, \\ CB = CD, \\ AC = AC, \end{cases}$

所以$\triangle ABC \cong \triangle ADC(SSS)$.

所以$\angle B = \angle D$.

8. 证明：(1)连接 AC. 在$\triangle CBA$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases} AB = CD, \\ BC = DA, \\ AC = CA, \end{cases}$

所以$\triangle CBA \cong \triangle ADC(SSS)$.

所以$\angle BAC = \angle DCA$，$\angle BCA = \angle DAC$，

所以 $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$.

(2)由(1)知$\triangle CBA \cong \triangle ADC$，所以$\angle B = \angle D$. 因为$\angle BAC = \angle DCA$，$\angle BCA = \angle DAC$，所以$\angle BAC + \angle DAC = \angle DCA + \angle BCA$，即$\angle DAB = \angle DCB$.

9. 解：相等. 理由：因为 $AB = AC$，$AE = \frac{1}{3}AB$，$AF = \frac{1}{3}AC$，所以 $AE = AF$. 又因为 $OE = OF$，$AO = AO$，所以$\triangle AOE \cong \triangle AOF(SSS)$. 所以$\angle EAO = \angle FAO$，即$\angle BAD = \angle CAD$.

点拨：利用“SSS”判定方法说明两个三角形全等.

10. 证明：因为 AD 为$\triangle ABC$的中线，所以$BD = CD$. 因为$BE \perp AD$，$CF \perp AD$，所以$\angle BED = \angle CFD = 90°$. 又因为$\angle BDE = \angle CDF$，所以$\triangle BDE \cong \triangle CDF(AAS)$.

所以 $BE = CF$.

11. 解：$AD \perp AE$. 证明如下：因为 $AB = AC$，$AD = AE$，$BD = CE$，所以$\triangle ABD \cong \triangle ACE(SSS)$. 所以$\angle BAD = \angle CAE$. 所以 $\angle BAD - \angle DAC = \angle CAE - \angle DAC$，即 $\angle BAC = \angle DAE$. 因为 $AB \perp AC$，所以$\angle BAC = 90°$.

所以$\angle DAE = 90°$. 所以$AD \perp AE$.

12. 解：$BD + CE = DE$. 证明如下：因为$\angle BAC = 90°$，所以$\angle BAD + \angle EAC = 90°$. 因为$BD \perp MN$ 于 D，所以$\angle BAD + \angle DBA = 90°$. 所以$\angle DBA = \angle EAC$. 在$\triangle ABD$和$\triangle CAE$中，

$\begin{cases} \angle ADB = \angle CEA = 90°, \\ \angle DBA = \angle EAC, \\ AB = CA, \end{cases}$

所以$\triangle ABD \cong \triangle CAE(AAS)$. 所以 $BD = AE$，$AD = CE$. 所以 $BD + CE = AE + AD = DE$.

13. (1)**证明**：因为 $AB = AC$，$\angle BAD = \angle CAE$，$AD = AE$，所以$\triangle ABD \cong \triangle ACE(SAS)$. 所以$\angle B = \angle C$. 因为 $AB - AE = AC - AD$，所以 $BE = CD$. 又因为$\angle EOB = \angle DOC$，所以$\triangle EOB \cong \triangle DOC(AAS)$. 所以 $OD = OE$.

(2)**解**：AO 平分$\angle BAC$.

理由：在$\triangle AEO$和$\triangle ADO$中，$\begin{cases} OE = OD, \\ AO = AO, \\ AE = AD, \end{cases}$

所以 $\triangle AEO \cong \triangle ADO(SSS)$. 所以 $\angle EAO = \angle DAO$，即 AO 平分$\angle BAC$.

B 组 复习题：

1. 解：可以增加 $AE = DF$ 或$\angle E = \angle F$ 或$\angle ACE = \angle DBF$.

若增加 $AE = DF$. 理由：因为 $AB = CD$，所以 $AB + BC = CD + BC$，即 $AC = DB$. 又因为$\angle A = \angle D$，$AE = DF$，所以$\triangle AEC \cong \triangle DFB(SAS)$.

若增加$\angle E = \angle F$. 理由：因为 $AB = CD$，所以 $AB + BC = CD + BC$，即 $AC = DB$. 又因为$\angle A = \angle D$，$\angle E = \angle F$，所以$\triangle AEC \cong \triangle DFB(AAS)$.

若增加$\angle ACE = \angle DBF$. 理由：因为 $AB = CD$，所以 $AB + BC = CD + BC$，即 $AC = DB$. 又因为$\angle A = \angle D$，$\angle ACE = \angle DBF$，所以$\triangle AEC \cong \triangle DFB(ASA)$.

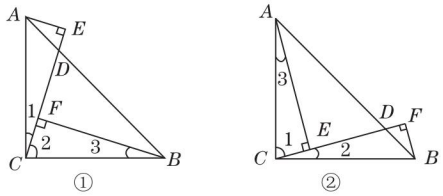
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:增加一个条件并说明理由即可. 注意不能犯"*SSA*"这样的错误.

2. 证明:(1)如图①所示,因为 $AE \perp CD$ 于 E,$BF \perp CD$ 于 F,所以 $\angle AEC = \angle CFB = 90°$. 因为 $\angle ACB = 90°$,所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. 又因为 $\angle 2 + \angle 3 = 90°$,所以 $\angle 1 = \angle 3$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle CFB$ 中,$\begin{cases} \angle AEC = \angle CFB, \\ \angle 1 = \angle 3, \\ AC = CB, \end{cases}$

所以 $\triangle AEC \cong \triangle CFB(AAS)$. 所以 $AE = CF$,$CE = BF$. 所以 $EF = CE - CF = BF - AE$.



(第2题)

(2)如图②所示,因为 $AE \perp CD$ 于 E,$BF \perp CD$ 于 F,所以 $\angle AEC = \angle CFB = 90°$. 因为 $\angle ACB = 90°$,所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. 又因为 $\angle 1 + \angle 3 = 90°$,所以 $\angle 3 = \angle 2$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle CFB$ 中,$\begin{cases} \angle AEC = \angle CFB, \\ \angle 3 = \angle 2, \\ AC = CB, \end{cases}$

所以 $\triangle AEC \cong \triangle CFB(AAS)$. 所以 $CE = BF$,$AE = CF$. 所以 $EF = CF - CE = AE - BF$.

综上所述,$EF = |AE - BF|$.

第15章 轴对称图形与等腰三角形

15.1 轴对称图形

练习:

1. 解:

图形代号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
对称轴条数	2	2	4	6	2	3	4

画对称轴略.

点拨:紧扣轴对称图形的定义来解题,必须清楚:(1)对称轴是一条直线,它不一定是竖直的,它也可能是倾斜的或水平的. (2)一个图形可能有多条对称轴.

2. 解:是. 画图及剪纸略.

点拨:通过轴对称图形的展示,帮助我们发现生活中的对称美,并利用这些知识来创造美.

练习:

1. 略.

2. 解:A 和 A',B 和 B' 均关于直线 l 对称.

3. 解:分别画出点 A,B,C 关于直线 l 的对称点 A',B',C',再顺次连接起来即可,画图略.

4. 解:找准关键的几个点,分别作出这些点关于直线 l 的对称点,再按原图形的顺序,顺次连接起来即可,画图略.

点拨:解答此类题目的关键是:①找出原图形的关键点;②分别作出这些点关于已知直线的对称点;③连接.

练习:

1. 解:各点关于 x 轴对称的点的坐标分别为 $(-2,0)$,$(2,3)$,$(-4,2)$,$(-3,-2)$,$(0,1)$,$(2,-3)$;各点关于 y 轴对称的点的坐标分别为 $(2,0)$,$(-2,-3)$,$(4,-2)$,$(3,2)$,$(0,-1)$,$(-2,3)$.

点拨:一个点有横坐标和纵坐标,它关于 x 轴对称的点的横坐标不变,纵坐标变为原来的相反数. 同理,它关于 y 轴对称的点的纵坐标不变,横坐标变为原来的相反数.

2. 解:作 A 点关于 x 轴对称的点 $(1,-4)$,B 点关于 x 轴对称的点 $(2,-2)$,C 点关于 x 轴对称的点 $(1,0)$,D 点关于 x 轴对称的点 $(5,-2)$,然后依次连接,画图略.

作 A 点关于 y 轴对称的点 $(-1,4)$,B 点关于 y 轴对称的点 $(-2,2)$,C 点关于 y 轴对称的点 $(-1,0)$,D 点关于 y 轴对称的点 $(-5,2)$,然后依次连接,画图略.

点拨:依次作每个点关于 x 轴、y 轴对称的点,然后顺次连接各点.

习题15.1:

1. 解:(1)(2)(3)都不关于给定的直线对称. 因为它们如果沿各自给定的直线折叠,直线两旁的部分均不能完全重合.

点拨:理解两个图形关于某直线对称的特点,即能判断.

2. 解:(1)(3)(4)是轴对称图形. 画图略.

3. 略.

4. 解:(1)四边形 $ABCD$ 的4个顶点 A,B,C,D 的坐标分别为 $(-2,4)$,$(-3,3)$,$(-4,1)$,$(-1,2)$.

(2)画图略.

(3)A_1 的坐标是 $(2,4)$,B_1 的坐标是 $(3,3)$,C_1 的坐标是 $(4,1)$,D_1 的坐标是 $(1,2)$.

点拨:把 x 轴、y 轴作为对称轴来作一个点的对称点,要把握好原来点的横坐标、纵坐标,以及关于 x 轴、y 轴对称的点的横坐标、纵坐标的特点.

5. 解:(1)画图略. A_1 的坐标是 $(2,-2)$,B_1 的坐标是 $(6,-2)$,C_1 的坐标是 $(6,-4)$,D_1 的坐标是 $(2,-4)$.

(2)画图略. A_2 的坐标是 $(2,-4)$,B_2 的坐标是 $(6,-4)$,C_2 的坐标是 $(6,-2)$,D_2 的坐标是 $(2,-2)$.

(3)变换所得的结果不一样.

理由:变换后的两个长方形虽然能够完全重合,但是对应点的坐标不同,故结果不一样.

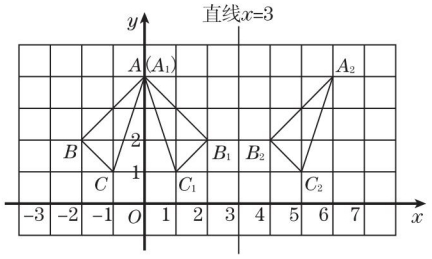
6. 解:(1)作出的 $\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示,$\triangle A_1B_1C_1$ 的三个

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

顶点 A_1,B_1,C_1 的坐标分别为(0,4),(2,2),(1,1).

(2)作出的 $\triangle A_2B_2C_2$ 如图所示,$\triangle A_2B_2C_2$ 的三个顶点 A_2,B_2,C_2 的坐标分别为(6,4),(4,2),(5,1).

(3)由图可知 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 关于直线 $x=3$ 对称,画出的对称轴如图所示.



(第 6 题)

点拨:利用对称和平移变换中点的坐标规律来画图及求点的坐标.

数学园地:

1. 解:合在一起看,(1)是一头大象的图形,(2)是一头猪的图形.

点拨:这是实际操作题,加强同学们对轴对称图形的认识和理解.

2. 略.

15.2 线段的垂直平分线

练习:

1. 解:作线段 AB 的垂直平分线,交直线 l 于点 C,则点 C 为所确定的停靠站的位置.

点拨:线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等,本题可利用这一性质解决.

2. 证明:(1)因为 C,D 是直线 l 上任意两点,由线段的垂直平分线的性质,得 $CA=CB$,$DA=DB$. 所以 $\triangle ABC$,$\triangle ABD$ 是等腰三角形.

(2)设直线 l 与 AB 交于点 O.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中,$\begin{cases} CA=CB, \\ CO=CO, \end{cases}$

所以 $\mathrm{Rt}\triangle AOC\cong\mathrm{Rt}\triangle BOC(HL)$.

所以 $\angle CAO=\angle CBO$. 同理可得 $\angle DAO=\angle DBO$. 所以 $|\angle DAO-\angle CAO|=|\angle DBO-\angle CBO|$(或 $\angle DAO+\angle CAO=\angle DBO+\angle CBO$),即 $\angle CAD=\angle CBD$.

3. 证明:因为 $CA=CB$,所以点 C 在线段 AB 的垂直平分线上,同理,由 $DA=DB$ 知,点 D 也在线段 AB 的垂直平分线上,所以直线 CD 垂直平分线段 AB.

习题 15.2:

1. 解:根据题意可知,点 B 与点 C 关于 y 轴对称. (1)因为点 C 的坐标为(3,0),所以点 B 的坐标是(−3,0).

(2)因为点 B 的坐标为(m,0),所以点 C 的坐标是(−m,0).

点拨:从题意可知,$\triangle AOB$ 和 $\triangle AOC$ 关于 y 轴对称,那么点 B 和点 C 关于 y 轴对称,故它们的横坐标互为相反数,纵坐标相同.

2. 解:因为 DE 是线段 AB 的垂直平分线,所以 $EB=EA$. 因为 $AC=8$,$BC=5$,所以 $\triangle BEC$ 的周长为 $EC+BC+EB=EC+BC+EA=AC+BC=8+5=13$.

3. 证明:连接 CD. 因为 DE 垂直平分线段 BC,所以 $CD=BD$. 又因为 $DA+CD>AC$,所以 $DA+BD>AC$,即 $AB>AC$.

4. 证明:连接 EA,EC. 因为线段 AC 的垂直平分线与线段 BD 的垂直平分线相交于点 E,所以 $EA=EC$,$EB=ED$.

又因为 $AB=CD$,

所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDE(SSS)$.

所以 $\angle ABE=\angle CDE$.

15.3 等腰三角形

练习:

1. (1)45°　**点拨**:顶角是 90°的等腰三角形,两个锐角分别为 45°,45°.

(2)100°

(3)20°或 50°　**点拨**:分两种情况:①当 80°是顶角度数时,则两底角都是 50°;

②当 80°是一底角度数时,则顶角是 20°.

2. 解:因为 AD 是等腰三角形 ABC 底边上的中线,所以 $AD\perp BC$. 若铅垂线通过记号 D,则铅垂线垂直于 BC,即屋梁水平.

点拨:利用等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线和底边上的高"三线合一"可得.

3. (1)BAD;CAD;BD;DC;顶角平分线;底边上的中线

(2)AD;BC;BAD;CAD;底边上的高;顶角平分线

(3)AD;BC;BD;DC;底边上的高;底边上的中线

点拨:本题是对等腰三角形"三线合一"的考查.

练习:

1. 解:因为 $AD=DC=BD=AB$,所以 $\angle C=\angle DAC$,$\triangle ABD$ 为等边三角形. 所以 $\angle B=\angle ADB=\angle BAD=60°$. 又因为 $\angle ADB$ 是 $\triangle ADC$ 的一个外角,所以 $\angle ADB=\angle C+\angle DAC$. 所以 $\angle C=30°$,$\angle DAC=30°$. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$,$\angle C=30°$,所以 $\angle BAC=90°$.

点拨:本题综合考查了等边三角形、等腰三角形、三角形外角的性质和三角形内角和定理.

2. 证明:因为 $AD=AE$,所以 $\angle ADE=\angle AED$,所以 $180°-\angle ADE=180°-\angle AED$,即 $\angle ADB=\angle AEC$. 因为 $AB=AC$,所以 $\angle B=\angle C$. 又因为 $AD=AE$,所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACE(AAS)$. 所以 $BD=CE$.

点拨:本题考查了等腰三角形的性质,三角形全等的判定定理等.

3. 解:因为 $OA=AB$,所以 $\angle ABO=\angle AOB=15°$,所以

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle BAC = \angle AOB + \angle ABO = 15° + 15° = 30°$. 因为 $AB = BC$,所以$\angle ACB = \angle BAC = 30°$,所以 $\angle CBD = \angle AOB + \angle ACB = 15° + 30° = 45°$. 因为 $BC = CD$,所以 $\angle CDB = \angle CBD = 45°$. 所以 $\angle 1 = \angle AOB + \angle CDB = 15° + 45° = 60°$.

4. 解:因为 $AB = AC$, $\angle A = 40°$,所以 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2} \times (180° - 40°) = 70°$. 又因为 ED 垂直平分 AB,所以 $AD = BD$. 所以 $\angle ABD = \angle A = 40°$. 所以 $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 70° - 40° = 30°$.

点拨:要求 $\angle DBC$ 的度数,只要求得 $\angle ABC$ 和 $\angle ABD$ 的度数即可.

练习:

1. 证明:因为 $\angle CPB = 138°$, $\angle B = 69°$,所以 $\angle D = 138° - 69° = 69°$. 所以 $\angle D = \angle B$. 所以 $PB = PD$. 因为 $\angle CPB = 138°$,所以 $\angle CPA = 42°$. 所以 $\angle CPA = \angle A$. 所以 $AC = CP$. 又因为 $CP = PD$,所以 $AC = PB$.

点拨:利用等腰三角形两腰相等来对线段进行等量代换,从而可得到结论.

2. 解:因为 $AB = AC$, AD 平分 $\angle BAC$,所以 $AD \perp BC$, $BD = \frac{1}{2}BC = 5$ cm. 又因为 $\angle B = 45°$,

所以 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形. 所以 $AD = BD = 5$ cm.

点拨:利用等腰三角形"三线合一"来解题.

3. 证明:因为 $\angle A = 30°$, $\angle ACB = 90°$,所以 $\angle B = 60°$. 因为 $CD \perp AB$,所以 $\angle CDB = 90°$. 所以 $\angle DCB = 30°$. 所以在 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 中, $BD = \frac{1}{2}BC$. 同理,在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中,因为 $\angle A = 30°$,所以 $BC = \frac{1}{2}AB$. 所以 $BD = \frac{1}{4}AB$.

点拨:在直角三角形中,特别要注意含 30°角的直角三角形,它可以把角度与直角三角形的边长联系起来,即30°角所对的直角边等于斜边的一半.

习题 15.3:

1. 解:因为 $BP = PQ = QC = AP = AQ$,所以 $\angle B = \angle BAP$, $\angle C = \angle CAQ$, $\triangle APQ$ 为等边三角形. 所以 $\angle APQ = \angle AQP = \angle PAQ = 60°$. 又因为 $\angle APQ = \angle B + \angle BAP = 60°$, $\angle AQP = \angle C + \angle CAQ = 60°$,所以 $\angle BAP = 30°$, $\angle CAQ = 30°$. 所以 $\angle BAC = \angle BAP + \angle PAQ + \angle CAQ = 30° + 60° + 30° = 120°$.

2. 证明:因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形,

所以 $\angle A = \angle B = \angle C$, $AB = BC = CA$.

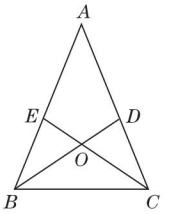
又因为 $AF = BD = CE$,所以 $BF = CD = AE$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BFD$ 中,因为 $\begin{cases} AE = BF, \\ \angle A = \angle B, \\ AF = BD, \end{cases}$

所以 $\triangle AEF \cong \triangle BFD$. 所以 $EF = FD$. 同理可得 $\triangle BFD \cong \triangle CDE$,所以 $FD = DE$. 所以 $EF = FD = DE$,即 $\triangle DEF$ 是等边三角形.

点拨:通过三角形全等来说明三条线段相等,难点在于说明三角形全等的过程要利用等边三角形的性质,即三条边相等、三个角相等. 本题是等边三角形性质和判定的综合运用.

3. 解:已知:如图所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BD, CE 分别是 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线,且 BD, CE 相交于点 O,求证:$OB = OC$.



(第 3 题)

证明:因为 $AB = AC$,所以 $\angle ABC = \angle ACB$.

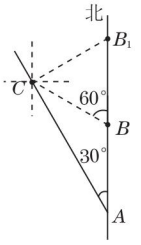
因为 $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB$,

所以 $\angle OBC = \angle OCB$.

所以 $OB = OC$.

点拨:利用等腰三角形的性质可得 $\angle ABC = \angle ACB$,又根据角平分线的定义和等腰三角形的判定定理可说明 $OB = OC$.

4. 解:(1)因为 C 在 B_1 的南偏西 60°的方向上,所以 B_1 在 C 的北偏东 60°的方向上. 如图,以 C 为顶点,向北偏东 60°作角,交直线 AB 于点 B_1,则 B_1 为此时船的位置.



(第 4 题)

(2)根据题意,可知 $\angle BB_1C = 60°$,又因为 $\angle B_1BC = 60°$,所以 $\angle BCB_1 = 60°$. 所以 $\triangle BB_1C$ 是等边三角形. 所以 $B_1C = BC = 20$ n mile,即从 B_1 处到礁石 C 的距离是20 n mile.

5. 证明:(1)在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中,

$\begin{cases} AC = DB, \\ \angle 2 = \angle 1, \\ BC = CB, \end{cases}$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCB(SAS)$. 所以 $AB = DC$.

(2)因为 $\angle 1 = \angle 2$,所以 $OB = OC$. 又因为 $AC = DB$,所以 $AC - OC = DB - OB$,即 $OA = OD$.

点拨:(1)在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中有一组边和一组角对应相等,又有一组公共边,可利用"SAS"的判定方法证明两个三角形全等. (2)利用"等角对等边"可得 $OB = OC$,进而可知 $OA = OD$.

6. 证明:因为 $AE \parallel DC$,所以 $\angle CAE = \angle ACD$, $\angle BCD = \angle E$.

因为 CD 平分 $\angle ACB$,所以 $\angle ACD = \angle BCD$. 所以 $\angle CAE = \angle E$. 所以 $AC = CE$. 所以 $\triangle ACE$ 是等腰三角形.

7. 解:因为 $AB = AC$,所以 $\angle B = \angle C$. 因为 $\angle ADC = \angle B +$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle BAD$，所以$\angle ADC = \angle C + \angle BAD$. 因为$AD = AE$，所以$\angle ADE = \angle AED$. 又因为$\angle AED = \angle EDC + \angle C$，所以$\angle ADE = \angle EDC + \angle C$. 因为$\angle ADC = \angle ADE + \angle EDC$，所以$\angle C + \angle BAD = \angle EDC + \angle C + \angle EDC$.

所以$\angle BAD = 2\angle EDC$.

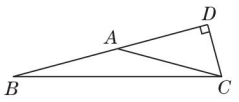
又因为$\angle BAD = 30°$，所以$\angle EDC = 15°$.

8. 证明：因为AD是$\triangle ABC$的中线，所以$BD = CD$. 因为$\angle 1 = 2\angle 2$，且$\angle 1 + \angle 2 = 180°$，所以$\angle 2 = 60°$，$\angle 1 = 120°$. 所以$\angle BDF = 60°$. 因为$BF \perp AF$，所以$\angle BFD = 90°$. 所以$\angle DBF = 30°$. 在Rt$\triangle BDF$中，$BD = 2DF$，在Rt$\triangle CED$中，$\angle DCE = 90° - \angle 2 = 30°$，所以$CD = 2DE$. 所以$DF = DE$. 所以$BD = 2DF = DF + DE = EF$.

点拨：本题考查定理“在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半”.

9. 解：如图，已知$\triangle ABC$为等腰三角形，$AB = AC = 2a$，$\angle ABC = 15°$，CD为腰BA上的高，交BA的延长线于点D.

因为$AB = AC$，所以$\angle ACB = \angle ABC = 15°$. 所以$\angle DAC = \angle BCA + \angle ABC = 15° + 15° = 30°$. 所以在Rt$\triangle ADC$中，$CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2a = a$.



（第9题）

10. 解：因为三角形ABC为等边三角形，

所以$AB = BC = AC$，

$\angle BAC = \angle ABC = \angle C = 60°$.

又因为$BE = CF$，所以$BC - BE = AC - CF$，即$EC = FA$.

在$\triangle AEC$和$\triangle BFA$中，$\begin{cases} AC = BA, \\ \angle C = \angle BAF, \\ EC = FA, \end{cases}$

所以$\triangle AEC \cong \triangle BFA$.

所以$\angle EAC = \angle FBA$.

所以$\angle AGF = \angle GBA + \angle BAG = \angle FAG + \angle BAG = \angle BAC = 60°$.

11. 证明：连接AC，AD. 在$\triangle ABC$和$\triangle AED$中，$\begin{cases} AB = AE, \\ \angle B = \angle E, \\ BC = ED, \end{cases}$

所以$\triangle ABC \cong \triangle AED(SAS)$. 所以$AC = AD$. 又因为$F$是$CD$的中点，所以$AF$是等腰三角形$ACD$的中线. 所以$AF \perp CD$.

点拨：本题作出辅助线是关键，再运用等腰三角形“三线合一”即可得证.

12. 证明：(1)因为$\triangle ACM$，$\triangle CBN$是等边三角形，所以$AC = MC$，$CN = CB$，$\angle ACM = \angle NCB = 60°$. 所以$\angle ACM + \angle MCN = \angle NCB + \angle MCN$，即$\angle ACN = \angle MCB$. 所以$\triangle ACN \cong \triangle MCB(SAS)$. 所以$\angle ANC = \angle MBC$. 因为$\angle ACM = \angle NCB = 60°$，所以$\angle ECF = 60°$. 所以$\angle ECN = \angle FCB$. 又因为$CN = CB$，$\angle ENC = \angle FBC$，所以$\triangle NEC \cong \triangle BFC(ASA)$. 所以$CE = CF$.

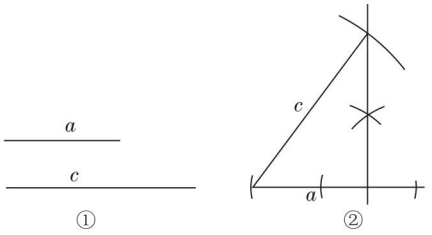
(2)由(1)可知$CE = CF$，$\angle ECF = 60°$，所以$\angle CEF = \angle CFE = 60°$. 所以$\angle CFE = \angle FCB$. 所以$EF /\!/ AB$.

点拨：本题通过两次证明三角形全等说明$CE = CF$.

15.4 角的平分线

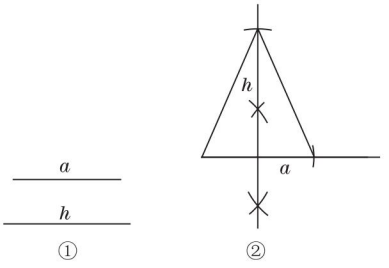
练习：

1. 解：已知线段a，c分别为一直角三角形的直角边和斜边(如图①所示). 求作此直角三角形. 所作直角三角形如图②所示.



（第1题）

2. 解：已知线段a，h分别为一等腰三角形的底边和底边上的高(如图①所示). 求作此等腰三角形. 所作等腰三角形如图②所示.



（第2题）

练习：

1. (1)√　(2)√　(3)√　(4)√

点拨：由角平分线的性质定理可得(1)(3)正确，由等腰三角形性质可得(2)正确，由线段的垂直平分线性质可得(4)正确.

2. 证明：因为AF为$\angle BAC$的平分线，且$\angle ACB = 90°$，$FG \perp AB$，所以$CF = FG$. 又因为$\angle CAE = \angle BAF$，$\angle CFE = 90° - \angle CAE$，$\angle CEF = \angle AED = 90° - \angle BAF$，

所以$\angle CFE = \angle CEF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $CE=CF$. 所以 $CE=FG$.

点拨:本题主要考查角平分线的性质定理及直角三角形的两锐角互余.

练习:

1. **解**:作公路边与河沿所成的角的平分线(西南方),然后根据比例尺计算出图上距离为 1 cm,然后从 A 点沿角平分线截取1 cm 长的线段 AB,所得的 B 点就是学校的位置.(画图略)

依据的原理是角平分线上的点到角两边的距离相等.

2. **证明**:因为 AD 平分 $\angle BAC$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$,所以 $DE=DF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CFD$ 中, $\begin{cases}BD=CD,\\DE=DF,\end{cases}$

所以 $\mathrm{Rt}\triangle BED\cong\mathrm{Rt}\triangle CFD(HL)$.

所以 $\angle B=\angle C$.

点拨:充分利用角平分线的性质定理来帮助我们证明两个三角形全等.

习题 15.4:

1. **证明**:因为 CO 是 $\angle AOB$ 的平分线, $CE\perp OA$, $CF\perp OB$,所以 $CE=CF$, $\angle AOC=\angle BOC$, $\angle CEO=\angle CFO=90°$.

因为 $\angle ECO=180°-\angle CEO-\angle COE$, $\angle FCO=180°-\angle CFO-\angle COF$,

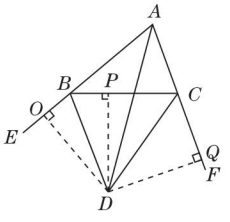
所以 $\angle ECO=\angle FCO$.

在 $\triangle ECD$ 和 $\triangle FCD$ 中,

$\begin{cases}CE=CF,\\\angle ECD=\angle FCD,\\CD=CD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ECD\cong\triangle FCD$. 所以 $\angle CDE=\angle CDF$.

2. **证明**:因为 BD 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle ABD=\angle CBD$. 又因为 $AB=CB$, $BD=BD$,所以 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$. 所以 $\angle ADB=\angle CDB$. 又因为 $PM\perp AD$, $PN\perp CD$,所以 $PM=PN$.

3. **证明**:过点 D 作 DO, DP, DQ 分别垂直于 AB, BC, AC,垂足分别是 O, P, Q,如图.



(第 3 题)

因为 BD 平分 $\angle CBE$,所以 $DO=DP$. 同理 $DP=DQ$,所以 $DO=DQ$.

所以点 D 在 $\angle OAQ$ 的平分线上. 所以 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线.

点拨:通过作辅助线,利用角平分线的性质定理得到 $DO=DQ$,再利用角平分线的判定定理来证明.

4. **解**:4 个. 方法略.

5. **解**:过点 P 作 $PE\perp OB$ 于点 E,因为 OP 平分 $\angle AOB$, $PD\perp OA$,所以 $PE=PD$. 因为 $PC/\!/OA$,所以 $\angle BCP=\angle AOB=30°$. 所以 $PE=\frac{1}{2}PC=2$. 所以 $PD=PE=2$.

A 组 复习题:

1. **解**:(1)如果点 A, B 关于 y 轴对称,那么 a, b, c, d 应满足的条件是 $a=-c$, $b=d$.

(2)如果点 A, B 关于 x 轴对称,那么 a, b, c, d 应满足的条件是 $a=c$, $b=-d$.

2. **解**:直线 l 所表示的函数表达式为 $y=-2x$.

3. **解**:$BE=EC$.

证明:因为 $AC=2AB$,点 D 是 AC 的中点,所以 $AB=\frac{1}{2}AC$, $DC=\frac{1}{2}AC$. 所以 $AB=DC$. 又因为 $\triangle EAD$ 为等腰直角三角形,所以 $\angle EAD=\angle EDA=45°$, $EA=ED$. 因为 $\angle EAB=\angle BAD+\angle EAD=90°+45°=135°$, $\angle EDC=180°-\angle EDA=180°-45°=135°$,所以 $\angle EAB=\angle EDC$.

在 $\triangle EAB$ 和 $\triangle EDC$ 中, $\begin{cases}EA=ED,\\\angle EAB=\angle EDC,\\AB=DC,\end{cases}$

所以 $\triangle EAB\cong\triangle EDC$. 所以 $BE=EC$.

4. **证明**:(1)因为在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是 BC 边上中线,所以 $AD\perp BC$,即 AD 垂直平分 BC. 所以 $OB=OC$. 又因为点 O 是 AB 的垂直平分线上的点,所以 $OA=OB$. 所以 $OA=OB=OC$.

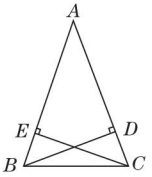
(2)因为 $AB=AC$, AD 是 BC 边上的中线,所以 AD 平分 $\angle BAC$,又因为 BI 平分 $\angle ABC$,且交 AD 于点 I,所以可知点 I 即为 $\triangle ABC$ 三条内角平分线的交点. 所以点 I 到 BC, CA, AB 的距离相等.

5. **证明**:因为 AD 平分 $\angle BAC$, $DE\perp AB$ 于 E, $DF\perp AC$ 于 F,所以 $DE=DF$. 所以点 D 在线段 EF 的垂直平分线上. 又因为 $AD=AD$,所以 $\mathrm{Rt}\triangle AED\cong\mathrm{Rt}\triangle AFD(HL)$. 所以 $AE=AF$. 所以点 A 也在线段 EF 的垂直平分线上. 所以 AD 垂直平分 EF.

6. **证明**:因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $\angle ABC=\angle ACB=60°$,所以 $\angle E+\angle CDE=60°$. 因为 BD 是中线,所以 BD 平分 $\angle ABC$. 所以 $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$. 因为 $CE=CD$,所以 $\angle E=\angle CDE$. 所以 $\angle E=30°$. 所以 $\angle DBC=\angle E$. 所以 $DB=DE$.

7. **解**:已知:如图, BD, CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高,且 $BD=CE$. 求证:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第7题）

证明：因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，$BD=CE$，

所以 $AB=AC$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

8. 证明：因为 $\angle BAC=120°$，$AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C=30°$. 因为 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，所以 $\angle BED=\angle CFD=90°$. 所以 $DE=\frac{1}{2}BD$，$DF=\frac{1}{2}DC$. 所以 $DE+DF=\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}(BD+DC)=\frac{1}{2}BC$.

9. 证明：连接 AF. 因为 $AB=AC$，$\angle BAC=120°$，所以 $\angle B=\angle C=30°$.

因为 EF 垂直平分 AC，所以 $AF=CF$. 所以 $\angle FAC=\angle C=30°$.

所以 $\angle BAF=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BAF$ 中，$\angle B=30°$，所以 $BF=2AF$.

所以 $BF=2CF$.

10. 证明：作 $CF\perp AB$，交 AB 于点 F. 因为 AC，BC 分别平分 $\angle DAB$，$\angle ABE$，$AD\perp DE$，

$BE\perp DE$，所以 $CD=CF$，$CE=CF$.

又因为 $AC=AC$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ADC\cong\mathrm{Rt}\triangle AFC$.

所以 $AD=AF$. 同理可得 $BE=BF$.

又因为 $AB=AF+BF$，所以 $AB=AD+BE$.

11. 证明：(1) 因为 $\angle A=90°$，$ED\perp BC$，所以 $\angle BAE=\angle BDE=90°$. 又因为 $BA=BD$，$BE=BE$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle BAE\cong\mathrm{Rt}\triangle BDE$ (HL). 所以 $\angle ABE=\angle DBE$，即 BE 平分 $\angle ABC$.

(2) 因为 BE 平分 $\angle ABC$，$\angle A=90°$，$ED\perp BC$，所以 $AE=ED$. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中，$AB=AC$，所以 $\angle C=45°$. 在 $\triangle EDC$ 中，

因为 $ED\perp BC$，所以 $\angle EDC=90°$.

又因为 $\angle C=45°$，所以 $\angle DEC=\angle C=45°$. 所以 $ED=DC$. 所以 $AE=ED=DC$.

12. 证明：因为 $\triangle ABD$，$\triangle ACE$ 为等边三角形，所以 $AB=AD$，$AE=AC$，$\angle BAD=\angle CAE=60°$. 所以 $\angle BAD+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$，即 $\angle BAE=\angle DAC$. 所以 $\triangle BAE\cong\triangle DAC$ (SAS). 所以 $BE=DC$.

13. 解：作线段 CD 的垂直平分线与 $\angle AOB$ 的平分线，它们的交点即为所求作的点 P（画图略）.

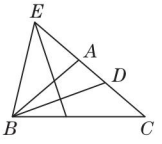
14. 解：需增加 $\angle A=30°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $\angle A=30°$，所以 $BC=\frac{1}{2}AB$. 根据折叠可知，$BC=BD$，所以 $BD=\frac{1}{2}AB$. 即 D 恰好为 AB 的中点.

点拨：本题答案不唯一.

B组 复习题：

1. 解：(1) 关于 y 轴对称（或向右平移6个单位）. (2) 向下平移5个单位（或关于直线 $y=3.5$ 对称）. (3) 关于 x 轴对称（或向下平移6个单位）. (4) 先向右平移1个单位，再向上平移1个单位（或先向上平移1个单位，再向右平移1个单位或关于直线 $y=-x$ 对称）.

2. 证明：如图，因为点 E 在 BD 的垂直平分线上，所以 $ED=EB$. 所以 $\angle EDB=\angle EBD$. 因为 BD 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle DBC=\angle ABD$. 所以 $\angle EDB+\angle ABD=\angle EBD+\angle DBC$，即 $\angle EAB=\angle EBC$.



（第2题）

3. (1) **解：**$AC=BD$ 且 $AC\perp BD$.

(2) **证明：**过点 A 作 $AE\parallel DB$，交 MN 于点 E，则 $\angle AEO=\angle 2$. 因为 O 是 AB 的中点，所以 $AO=BO$. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOD$ 中，

$$\begin{cases}\angle AEO=\angle 2,\\ \angle AOE=\angle BOD,\\ AO=BO,\end{cases}$$

所以 $\triangle AOE\cong\triangle BOD$ (AAS). 所以 $AE=BD$. 因为 $\angle AEO=\angle 2=45°$，$\angle 1=45°$，所以 $\angle AEO=\angle 1$. 所以 $AE=AC$. 所以 $AC=BD$. 延长 AC，交 DB 的延长线于点 F. 因为 $\angle MCF=\angle 1=45°$，$\angle 2=45°$，所以 $\angle F=90°$，即 $AC\perp BD$.

4. 证明：因为 $\angle ACB=90°$，

所以 $\angle A+\angle B=90°$.

因为 $AD=AC$，$BE=BC$，

所以 $\angle ADC=\angle ACD$，$\angle BEC=\angle BCE$.

所以 $\angle ADC=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$，$\angle BEC=\frac{1}{2}(180°-\angle B)$.

在 $\triangle DCE$ 中，$\angle DCE=180°-\angle DEC-\angle EDC=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle B)-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=\frac{1}{2}\times 90°=45°$.

5. 证明：过点 D 作 $DF\parallel AE$，交 BC 于点 F，则 $\angle CDF=\angle A$，$\angle CFD=\angle ABC$. 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle A=\angle ABC=\angle C=60°$. 所以$\angle CDF=\angle A=60°$, $\angle CFD=\angle ABC=60°$. 所以$\triangle CDF$为等边三角形. 所以$CD=DF$. 因为$BE=CD$, 所以$BE=DF$.

因为$DF/\!/AE$, 所以$\angle FDP=\angle E$.

又因为$\angle DPF=\angle EPB$,

所以$\triangle DPF\cong\triangle EPB(AAS)$. 所以$PD=PE$.

6. (1)**证明:** 因为$DE/\!/BC$, 所以$\angle OBC=\angle DOB$. 又因为BO平分$\angle DBC$, 所以$\angle OBC=\angle DBO$. 所以$\angle DBO=\angle DOB$.

所以$BD=DO$.

同理可证$CE=EO$.

所以$BD+CE=DO+EO=DE$.

(2)**解:** 原来的关系式$BD+CE=DE$不成立, BD, CE, DE存在的数量关系式为$BD-CE=DE$.

证明如下: 由BO平分$\angle DBC$, 得$\angle DBO=\angle OBC$. 由$DO/\!/BC$, 得$\angle OBC=\angle DOB$. 所以$\angle DBO=\angle DOB$. 所以$BD=DO$. 因为CO平分$\angle ACB$的邻补角且$EO/\!/BC$, 所以$\angle EOC=\angle ECO$. 所以$EO=CE$. 因为$DO=BD$, $EO=CE$, 所以$BD-CE=DO-EO=DE$.

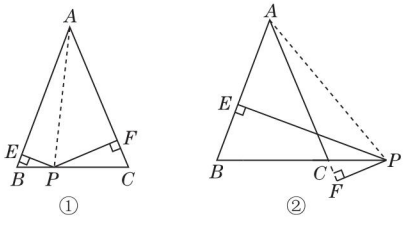
C组 复习题:

1. (1)**证明:** 如图①, 连接AP. 因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$, 且$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot PE$, $S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AC\cdot PF$, 所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PF$. 因为$AB=AC$, 所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot(PE+PF)$. 又因为$S_{\triangle ABC}$和$AB$都为定值, 所以$PE+PF$等于定值.

(2)略.

(3)**解:** 若点P在底边BC延长线上时, $PE-PF$等于定值. 理由如下:

如图②, 连接AP. 因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ACP}$, 且$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot PE$, $S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AC\cdot PF$. 所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot PE-\frac{1}{2}AC\cdot PF$. 因为$AB=AC$, 所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot(PE-PF)$. 又因为$S_{\triangle ABC}$与$AB$都是定值, 所以$PE-PF$等于定值.



(第1题)

2. (1)**证明:** 如图①, 连接AP, BP, CP.

则$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AB\cdot PD+\frac{1}{2}BC\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PF$.

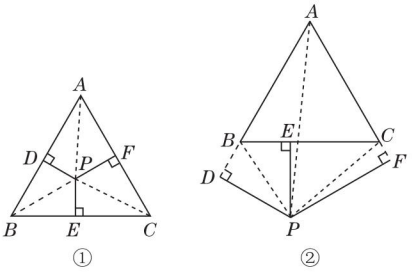
因为$\triangle ABC$为等边三角形,

所以$AB=BC=AC$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot(PD+PE+PF)$.

因为$S_{\triangle ABC}$与AB都为定值,

所以$PD+PE+PF$等于定值.



(第2题)

(2)**解:** 若点P在$\triangle ABC$外时,

$PD+PE+PF$不等于定值. 理由如下:

如图②, 连接AP, BP, CP,

则$S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AB\cdot PD+\frac{1}{2}BC\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PF$.

因为$\triangle ABC$为等边三角形,

所以$AB=BC=AC$. 所以$S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AB\cdot(PD+PE+PF)$.

因为AB为定值, $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}$不为定值, 所以$PD+PE+PF$不等于定值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记



荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料