教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法83招·七八九年级共338招



八年级
数学(上)
荣德基 主编
(XJ版)
赠教材习题答案

吉林教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

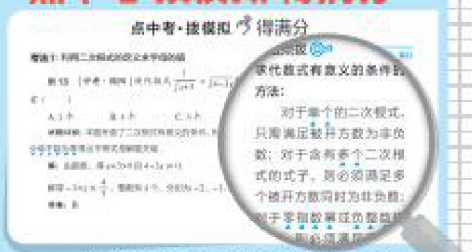
简约的知识梳理总结　　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

考法得满分

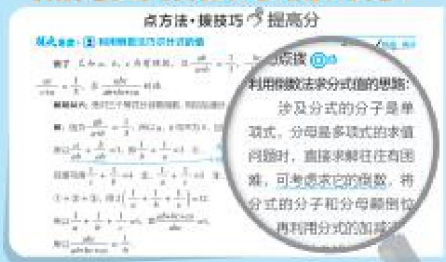
点中考 拨模拟 得满分



» 让你从默默无闻走向优秀卓越

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分



» 为你提供解题秘方

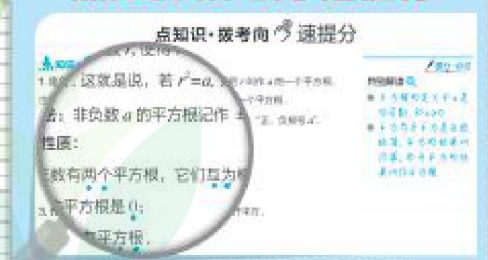
第3步　第2步　第1步

三个维度打造极致



基础速提分

点知识 拨考向 速提分



» 给你一把打开数学之门的钥匙

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

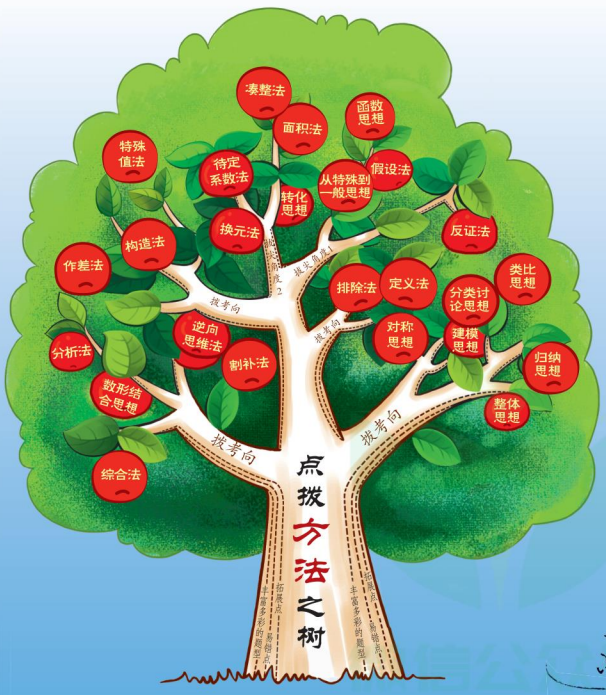
点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 上 （XJ版）

荣德基 主编

本册主编：范志刚



老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点 83 个 得高分

第1章 分式

		页码
1	判断一个式子是否是分式的方法	2
2	求分式值为 0 的字母值的方法	4
3	利用分式的基本性质化系数为整数的方法	6
4	整体思想	9
5	换元法	9
6	参数法	10
7	分式乘方的方法	13
8	逆向运用同底数幂相乘除的运算法则求值的方法	20
9	底倒指反法	20
10	等底法	23
11	化负为正法	23
12	确定最简公分母的一般方法	27
13	分式混合运算的方法	29
14	倒数法	31
15	拆项法	31
16	从特殊到一般的思想	31
17	判断一个方程是不是分式方程的方法	34
18	检验方程根的方法	35
19	分组通分法	38
20	分类讨论思想	39
21	类比法	40
22	特殊值法	44
23	裂项相消法	48

第2章 三角形

		页码
1	几何图形计数的常用方法	53
2	分类讨论思想	55
3	找三角形某边上的高的方法	56
4	等面积法	56
5	定义法	56
6	方程思想	57
7	求三角形内角的度数的方法	58
8	确定三角形分类的方法	59
9	类比法	62
10	整体思想	64
11	命题改写的方法	68
12	反证法	70
13	综合法	71
14	分析法	71
15	建模思想	72
16	判定一个三角形是等边三角形的方法	76
17	归一法	77
18	转化思想	82
19	判断线段垂直平分线的两种方法	83
20	作轴对称图形的对称轴的两种方法	83
21	折叠法	83
22	证明两条线段或角相等常用方法	85
23	确定两个图形全等的方法	88
24	利用全等三角形的性质求角的度数的方法	90
25	判定两个三角形全等常用的方法	92
26	逆向思维法	95
27	解答探究条件类题目的方法	95
28	数形结合思想	95
29	截长补短法	96
30	证明一条线段等于两条线段的和的方法	96
31	加倍折半法	96
32	证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法	97

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 83 个 得高分

第3章 实数

		页码
1	求一个正数的平方根的方法	124
2	定义法	127
3	估算法	129
4	作差法	129
5	解决条件式中根号内的数互为相反数问题的方法	130
6	确定$\sqrt{a}$的整数部分、小数部分的一般方法	130
7	方程思想	134
8	分类讨论思想	137
9	数形结合思想	141
10	比较实数的大小的方法	142
11	整体思想	143
12	利用绝对值的性质进行化简的方法	144
13	特殊值法	149

第4章 一元一次不等式（组）

		页码
1	作差法	156
2	辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法	159
3	作商法	164
4	倒数法	164
5	估算法	164
6	平方法	164
7	识别不等式的解与解集的方法	166
8	分类讨论思想	174
9	解方案设计问题的方法	175
10	确定一元一次不等式组解集的常用方法	179
11	数轴法	179
12	口诀法	179
13	根据不等式组的解集的情况求字母的取值范围的方法	182
14	求实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法	183
15	数形结合思想	183
16	构造不等式组法	184
17	建模思想	184
18	求不等式组的解集，通常利用“分开解”“集中解”的方法	185
19	转化思想	193

第5章 二次根式

		页码
1	求含有字母的式子有意义的字母取值范围的方法	200
2	定义法	204
3	数轴法	204
4	分类讨论思想	205
5	求代数式有意义的条件的方法	206
6	去掉分母中的根号（分母有理化）的方法	210
7	利用商的算术平方根的性质化简二次根式的方法	210
8	$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$（$a>0$，$b\geqslant 0$）的运算方法	211
9	二次根式乘除混合运算的方法	212
10	被开方数比较法	213
11	平方法	213
12	比较两个二次根式的大小的方法	213
13	整体思想	221
14	估算法	221
15	数形结合思想	222
16	倒数法	222
17	“根号外的非负因数（或因式）移到根号内”的方法	227
18	作商法	230
19	作差法	230
20	因式分解法	230
21	换元法	230
22	配方法	230
23	辅元法	230

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法

确定最简公分母的方法…… 27
分式方程的解法…… 35

看微课

分式的定义…… 2
分式的基本性质…… 5
分式方程的定义…… 34

学方法

反证法…… 70
等边三角形的判定方法…… 76

观动画

三角形的高…… 56
全等变换方式…… 89
三角形的稳定性…… 93

看微课

三角形的三边关系…… 55
等腰三角形的性质…… 74
全等三角形的性质…… 89

看微课

求平方根……124
求算术平方根……126

第1章 分 式

1.1 分 式 ……2
1.2 分式的乘法和除法 …… 12
1.3 整数指数幂 …… 19
1.4 分式的加法和减法 …… 26
1.5 可化为一元一次方程的分式方程 …… 34

素养提分

技巧篇：分式运算中的常用技巧与方法 ☞ P43
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P45

第2章 三角形

2.1 三角形 …… 53
2.2 命题与证明 …… 67
2.3 等腰三角形 …… 74
2.4 线段的垂直平分线 …… 82
2.5 全等三角形 …… 88
2.6 用尺规作三角形 ……102

素养提分

行动篇：运用铅垂法找重心 ☞ P66
应用篇：分类讨论思想在等腰三角形中的应用 ☞ P110
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P112

第3章 实 数

3.1 平方根 ……124
3.2 立方根 ……133
3.3 实 数 ……140

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分

行动篇： 实数应澄清的几个问题 ☞ P146

技巧篇： 平方根概念解题的几个技巧 ☞ P147

整合篇： 章末核心知识分类整合 ☞ P148

实数的分类 ……140

第 4 章 一元一次不等式（组）

4.1 不等式 ……155

4.2 不等式的基本性质 ……159

4.3 一元一次不等式的解法 ……165

4.4 一元一次不等式的应用 ……173

4.5 一元一次不等式组 ……178

观动画

数轴上表示解集……168

看微课

不等式的基本性质……159

一元一次不等式组的解法…180

一元一次不等式组的应用…182

素养提分

行动篇： 实数的大小比较 ☞ P164

类型篇： 一元一次不等式（组）与方程（组）的巧妙结合 ☞ P189

整合篇： 章末核心知识分类整合 ☞ P191

第 5 章 二次根式

5.1 二次根式 ……199

5.2 二次根式的乘法和除法 ……209

5.3 二次根式的加法和减法 ……217

看微课

二次根式的定义…… 199

二次根式的化简……203

素养提分

行动篇： 解密“非负数”的意义及性质 ☞ P208

技巧篇： 二次根式运算的技巧 ☞ P226

整合篇： 章末核心知识分类整合 ☞ P227

参考答案及点拨（单独成册）



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

2. **换元法：**所谓换元法，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，使它简化，使问题易于解决．

3. **参数法：**参数法是指在解题过程中，通过适当地引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，使问题得以解决的方法．

4. **拆项法：**拆项法是分组与组合思想在代数式求和中的具体应用．拆项法的实质是将代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的．

5. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论．

6. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

7. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

8. **特殊值法：**又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，从而通过简单的运算，得出最终答案的一种方法．这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要跟最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干中给出的等量关系是一个不可或缺的量．

9. **裂项相消法：**裂项相消法的实质是将所要求和的代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一项，最终达到求和的目的．

10. **等面积法：**运用图形的面积关系建立一个或几个方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法．

11. **定义法：**所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的．因此用定义法解题是最直接的方法．

12. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法．

13. **逆向思维法：**逆向思维法是指为实现某一创新或解决某一用常规思路难以解决的问题，而采取反向思维寻求解决问题的方法．

14. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

再次领略数式的飞跃

再次领略数式的飞跃











第1章 分式

核心考点

你将见到的

- 分式的基本性质
- 分式的运算
- 整数指数幂
- 分式方程的解法
- 分式方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 换元法
- 倒数法
- 拆项法
- 底倒指反法
- 类比法
- 裂项相消法
- 整体思想
- 特殊值法
- 分类讨论思想

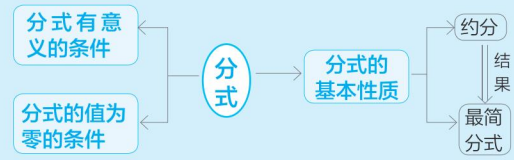
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1 分 式

核心知识
- 分式的概念
- 分式的基本性质
- 约分

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的概念

1. 定义： 一个整式 f 除以一个非零整式 g（g 中含有字母），所得的商记作 $\frac{f}{g}$，把代数式 $\frac{f}{g}$ 叫作分式，其中 f 是分式的分子，g 是分式的分母，$g \neq 0$.

分式的“三要素”：

（1）形如 $\frac{f}{g}$ 的式子；

（2）f 为整式，g 为非零整式；

（3）分母 g 中含有字母.

分式的定义

2. 分式与分数、整式的关系：

（1）分式中分母含有字母. 由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性；分数是分式中字母取特定值时的特殊情况.

（2）分式与整式的根本区别就是分式的分母中含有字母.

拨考向 利用分式的概念识别分式

例 1 下列各式中，哪些是分式？哪些是整式？

$\frac{4}{m}$，$-2x^2$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{1}{2x^3+3}$，$\frac{3a+b}{2\pi}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$.

解题秘方： 利用分式的“三要素”判断即可.

解： 分式有 $\frac{4}{m}$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{1}{2x^3+3}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$；

整式有 $-2x^2$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{3a+b}{2\pi}$.

π是常数，不能当字母看

方法点拨：判断一个式子是否是分式的方法：

首先要具有 $\frac{f}{g}$ 的形式，其次 f，g 是整式，最后看分母中是不是含有字母. 分式只注重形式而不注重结果，分母中含有字母是判断分式的必要条件.

提分·必记

特别解读

1. 分式可看成是两个整式的商，它的分子是被除式，分母是除式，分数线相当于除号，分数线还具有括号作用和整体作用.
2. 判断一个式子是否是分式不能将原式子进行变形后再判断，而必须按照原有的本来“面目”进行判断. 如：$\frac{3a^2}{a}$ 是分式.

提分·秘诀

特别警示

由于 $\frac{P^2}{P}$ 约分后为 P，所以容易误认为其是整式.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式的值存在、不存在的条件

1. 分式的值存在（分式有意义）的条件：

分式的分母表示除数，由于除数不能为 0，所以分式的分母不能为 0，即当 $g \neq 0$ 时，分式 $\frac{f}{g}$ 才有意义．

2. 分式的值不存在（分式无意义）的条件：

分式的分母为 0，即当 $g=0$ 时，分式 $\frac{f}{g}$ 无意义．

求法：当分式的值不存在时，根据分式中分母的值为 0 的条件转化为解方程问题．

提分·必记

特别提醒

- 分母不为 0，并不是说分母中的字母不能为 0，而是表示分母的整式的值不能为 0．
- 分式的值是否存在，只与分式的分母是否为 0 有关，而与分式的分子是否为 0 无关．

技考向▶ 利用分式的值存在和不存在的条件确定字母的值或取值范围

题型 1：分式的值存在的条件在求字母范围中的应用

例 2 x 满足什么条件时下列分式的值存在？

（1）$\frac{2x+1}{5x-3}$；　　（2）$\frac{2}{|m|-1}$；

（3）$\frac{x+1}{x^2+3}$；　　（4）$\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$．

解题秘方：分母的值不等于 0 时，分式的值存在．

解：（1）当 $5x-3 \neq 0$，即 $x \neq \frac{3}{5}$ 时，分式 $\frac{2x+1}{5x-3}$ 的值存在；

（2）当 $|m|-1 \neq 0$，即 $m \neq \pm 1$ 时，分式 $\frac{2}{|m|-1}$ 的值存在；

（3）因为不论 x 取什么值，都有 $x^2+3>0$，

所以 x 取任何数，分式 $\frac{x+1}{x^2+3}$ 的值都存在；

（4）当 $(x-2)(x+4) \neq 0$，即 $x \neq 2$ 且 $x \neq -4$ 时，分式 $\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$ 的值存在．

警示误区

只能对原分母进行讨论，不能先约分化简，否则会使取值范围扩大，如此题中，若约去 $x-2$，易错得当 $x \neq -4$ 时，分式的值存在．

题型 2：分式的值不存在的条件在求字母值中的应用

例 3 分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 中的字母满足什么条件时分式的值不存在？

解题秘方：分母的值等于 0 时，分式的值不存在．

解：要使分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 的值不存在，则分母 $x^2-16=0$，

即 $x^2=16$，

解得 $x=\pm 4$．

所以当 $x=\pm 4$ 时，分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 的值不存在．

提分·秘诀

方法点拨

求分式的值存在时字母的取值范围：

根据“分式的值存在的条件：分式的分母不等于 0”求得分式的值存在时字母的取值范围．

方法点拨

当分式的值不存在时，利用分母等于 0 的条件构造出方程求解即可．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 分式的值为 0 的条件

1. 分式的值为 0 的条件：

当分式的分子等于 0 且分母不等于 0 时，分式的值为 0.

即：对于分式 $\frac{f}{g}$，当 $f=0$ 且 $g\neq 0$ 时，$\frac{f}{g}=0$.

2. 常见的几种特殊分式值情况讨论：

对于分式 $\frac{f}{g}$：

（1）若 $\frac{f}{g}$ 的值为 1，则 $f=g$，且 $g\neq 0$；反过来，若 $f=g\neq 0$，则 $\frac{f}{g}=1$.

（2）若 $\frac{f}{g}$ 的值为 -1，则 $f=-g$，且 $g\neq 0$；反过来，若 $f=-g\neq 0$，则 $\frac{f}{g}=-1$.

拔考向▶ 利用分式的值为 0 的条件求字母的值

例 4 当 x 取何值时，下列分式的值为 0？

（1）$\frac{x+2}{2x-3}$；　（2）$\frac{|x|-2}{x+2}$；

（3）$\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$；　（4）$\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$.

解题秘方： 分式的值为 0 的条件：分子为 0，分母不为 0.

解：（1）由 $\begin{cases}x+2=0,\\2x-3\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-2$，

所以当 $x=-2$ 时，分式 $\frac{x+2}{2x-3}$ 的值为 0.

（2）由 $\begin{cases}|x|-2=0,\\x+2\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=2$，

所以当 $x=2$ 时，分式 $\frac{|x|-2}{x+2}$ 的值为 0.

（3）由 $\begin{cases}3-|x|=0,\\(x-3)(x+1)\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-3$，

若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$

所以当 $x=-3$ 时，分式 $\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$ 的值为 0.

（4）由 $\begin{cases}(x-1)(x-3)=0,\\x^2-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=3$，

若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$

所以当 $x=3$ 时，分式 $\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$ 的值为 0.

提分·必记

特别提醒

分式的值是在分式的值存在的前提下才考虑的，所以分式 $\frac{f}{g}$ 的值为 0 的条件：$f=0$ 且 $g\neq 0$，二者缺一不可.

对于分式的几个特殊值的讨论既要考虑分子，又要考虑分母.

提分·秘诀

教你一招

求分式值为 0 的字母值的方法：

（1）解题时可以先求出使分子为 0 的字母的值，再检验这个值是否使分母的值为 0，当分母的值不为 0 时，这个值就是所要求的字母的值. 切记使分母为 0 的值必须舍去.

（2）若有多个值使分式的值为 0，则这几个值之间用“或”连接.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 4 分式的基本性质

1. 分式的基本性质：

（1）分式的分子与分母都乘同一个非零整式，所得分式与原分式相等．即对于分式 $\frac{f}{g}$，有 $\frac{f}{g}=\frac{f\cdot h}{g\cdot h}(h\neq 0)$.

（2）分式的分子与分母都除以它们的一个公因式，所得分式与原分式相等．

2. 分式的符号法则： 分式的分子、分母与分式本身的符号，同时改变其中两个，分式的值不变．用字母表示为：

（1）$\frac{f}{g}=\frac{-f}{-g}=-\frac{-f}{g}=-\frac{f}{-g}$；

（2）$-\frac{f}{g}=-\frac{-f}{-g}=\frac{-f}{g}=\frac{f}{-g}$.


分式的基本性质

拔考向 ▸ 利用分式的基本性质对分式进行变形

类型 1：分式的基本性质在分式变形中的应用

例 5 写出下列等式中未知的分子或分母：

（1）$\frac{15x^2y}{25xy^2}=\frac{3x}{(\quad)}$；

（2）$\frac{a+2b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^2}$；

（3）$\frac{3x}{x^2-xy}=\frac{3}{(\quad)}$；

（4）$\frac{1}{y-x}=\frac{(\quad)}{x^2-y^2}$.

解题秘方： 观察等号两边已知的分子或分母发生了什么样的变化，再根据分式的基本性质用相同的变化确定所要填的式子．

解：（1）中，右边的分子 $3x$ 是由左边的分子 $15x^2y$ 除以 $5xy$ 得到的，所以右边的分母可以由左边的分母 $25xy^2$ 除以 $5xy$ 得到，因此结果是 $5y$.

（2）中，右边的分母 a^2b^2 是由左边的分母 ab^2 乘 a 得到的，所以右边的分子可以由左边的分子 $a+2b$ 乘 a 得到，因此结果是 a^2+2ab.

（3）中，右边的分子 3 是由左边的分子 $3x$ 除以 x 得到的，所以右边的分母可以由左边的分母 x^2-xy 除以 x 得到，因此结果是 $x-y$.

（4）中，右边的分母 x^2-y^2 是由左边的分母 $y-x$ 乘 $-x-y$ 得到的，所以右边的分子可以由左边的分子 1 乘 $-x-y$ 得到，因此结果是 $-x-y$.

答案：（1）$5y$　（2）a^2+2ab　（3）$x-y$　（4）$-x-y$

提分·必记

特别解读

1. $g\neq 0$ 是已知中隐含的条件，$h\neq 0$ 是在解题过程中另外附加的条件，在运用此性质时，必须重点强调 $h\neq 0$ 这个前提．
2. 应用性质时，要理解“同”的含义：一是要同时做“乘法”（或“除法”）运算；二是“乘”（或“除以”）的对象必须是同一个不等于 0 的整式．
3. 运用分式的基本性质进行分式的变形是恒等变形，它不改变分式值的大小，只改变其形式．

提分·秘诀

解法提醒

解决与分式的恒等变形有关的填空题时，一般从分子或分母的已知部分入手，先观察等号两边的分子或分母发生了怎样的变化，再通过对分母或分子作相同的变形得到未知项．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：分式的基本性质在改变分式的符号中的应用

例 6 不改变分式的值，使下列各分式的分子与分母都不含“−”号.

（1）$\frac{-4x}{-7y}$；（2）$\frac{-3n}{8m}$；（3）$\frac{c}{-a-b}$；（4）$-\frac{-x-y}{xy}$.

解题秘方： 分式的分子、分母及分式本身这三处的正负号，同时改变其中两处，分式的值不变.

解：（1）$\frac{-4x}{-7y}=\frac{4x}{7y}$.（2）$\frac{-3n}{8m}=-\frac{3n}{8m}$.

（3）$\frac{c}{-a-b}=-\frac{c}{a+b}$.（4）$-\frac{-x-y}{xy}=\frac{x+y}{xy}$.

类型 3：分式中字母的取值变化在对分式的值的影响中的应用

例 7 把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的 2 倍　　B. 不变

C. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$　　D. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$

解题秘方： 将分式中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，再代入原分式，利用分式的基本性质变形.

解： 把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，

可将分式变为$\frac{2\cdot 2n}{3(2m)^2-(2n)^2}=\frac{4n}{4(3m^2-n^2)}=\frac{n}{3m^2-n^2}$，

因此分式的值缩小为原来的$\frac{1}{2}$.

答案： C

类型 4：分式的基本性质在化系数为整数中的应用

例 8 不改变分式的值，把下列各式的分子和分母中的各项系数都化为整数.

（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}$；（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}$.

解题秘方： 利用分式的基本性质将分子、分母同时乘同一个数，使系数都化为整数.

解：（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}=\frac{(0.01a-0.5b)\times 100}{(0.3a-0.04b)\times 100}=\frac{a-50b}{30a-4b}$.

（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\times 12}{\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y\right)\times 12}=\frac{6x+4y}{3x-4y}$.

警示误区

当分子、分母是多项式时，应将其看成一个整体，若分子或分母的首项系数是负数，应先提取“−”号并添加括号，注意此时多项式中的每一项都要变号，然后改变分式的符号.

方法点拨

解答此类问题，应先写出变化后的分式，然后运用分式的基本性质化简，再与原分式进行比较即可.

教你一招

利用分式的基本性质化系数为整数的方法：

若各项系数都是小数时，则分子、分母同乘 10，100，1 000，…；

若各项系数都是分数，则分子、分母同乘分子和分母中所含分数的分母的最小公倍数；

若各项系数既有小数又有分数时，则要先统一成小数或者分数，然后化为整数.

注意将系数化为整数的过程中不要漏项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 5 分式的约分

1. **分式的约分**：根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的公因式约去（即分子与分母都除以它们的公因式），叫作分式的约分.

2. **找公因式的方法**：

（1）当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公约数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式；

（2）当分子、分母都是多项式时，先把多项式分解因式，再按（1）中的方法找公因式.

3. **约分的方法**：

（1）若分式的分子、分母都是单项式，就直接约去分子、分母的公因式；

（2）若分子或分母含有多项式，应先分解因式，再确定公因式并约去.

4. **最简分式**：分子与分母没有公因式的分式叫作最简分式.

提分·必记

特别解读

1. 约分的依据是分式的基本性质，关键是确定分子和分母的公因式.
2. 约分是针对分式的分子和分母整体进行的，而不是针对其中的某些项，因此约分前一定要确认分子和分母都是乘积的形式.
3. 约分一定要彻底，其结果必须是最简分式或整式.

考向▶ 利用分式约分的方法对分式约分

类型 1：分式的约分在化简中的应用

例 9 约分：

（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}$；（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}$；（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}$.

解题秘方：（1）中的分子、分母都是单项式，可以直接约分；（3）中的分子、分母都是多项式，先将分子、分母分解因式，再进行约分.

解：（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}=-\frac{7a^2b^5\cdot 3ac}{7a^2b^5\cdot 8b^5d}=-\frac{3ac}{8b^5d}$.

（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}=\frac{(x-y)\cdot 1}{(x-y)(x-y)^2}=\frac{1}{(x-y)^2}$.

（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}=\frac{a(a-5)}{(5+a)(5-a)}=\frac{a(a-5)}{-(5+a)(a-5)}=-\frac{a}{5+a}$.

类型 2：最简分式的定义在识别最简分式中的应用

例 10 下列各式中，最简分式有_____.

$\frac{y}{2x}$，$\frac{m+n}{m^2-n^2}$，$\frac{9x+y}{45xy^2}$，$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$.

解题秘方：根据最简分式的概念识别.

解：$\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{(m+n)(m-n)}=\frac{1}{m-n}$；

$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}$. 所以最简分式为$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$.

答案：$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$

提分·秘诀

特别提醒

约分时需要注意的问题：

（1）注意发现分式的分子和分母的一些隐含的公因式（如互为相反数的式子）；

（2）当分式的分子或分母的系数是负数时，可利用分式的基本性质，把负号提到分式的前面.

知识储备

最简分式是约分后的形式，所以判断最简分式的唯一标准就是分式的分子与分母没有公因式.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：分式的约分在求分式的值中的应用

例 11 先约分，再求值：$\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{4x^2-y^2}$，其中 $x=2$，$y=1$.

解题秘方：紧扣约分的方法步骤，先将分式化成最简分式，然后代入求值.

解：原式 $=\dfrac{(2x+y)^2}{(2x+y)(2x-y)}$

$=\dfrac{2x+y}{2x-y}$.

当 $x=2$，$y=1$ 时，原式 $=\dfrac{2\times2+1}{2\times2-1}=\dfrac{5}{3}$.



认真会有收获

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的特殊值求分式中字母的取值

挑战·高分

类型 1：分式的值为 1 或 -1 在求字母值中的应用

例 12 （1）当 $x=$_____时，分式 $\dfrac{x-3}{3-2x}$ 的值为 1；

（2）当 $x=$_____时，分式 $\dfrac{x-3}{3-2x}$ 的值为 -1.

解题秘方：根据分式的值为 ±1 的条件列出方程，求出字母的值.

解：（1）因为分式 $\dfrac{x-3}{3-2x}$ 的值为 1，所以 $x-3=3-2x$，解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$3-2x=3-4=-1\neq0$.

（2）因为分式 $\dfrac{x-3}{3-2x}$ 的值为 -1，

所以 $(x-3)+(3-2x)=0$，解得 $x=0$.

当 $x=0$ 时，$3-2x=3-0=3\neq0$.

答案：（1）2 （2）0

方法点拨

分式的值为 1 或 -1 满足的条件是分子和分母相等或互为相反数，由此可列出方程，求分式中字母的值，同时要注意分母不为 0 这一隐含条件.

类型 2：分式的值为整数在求字母值中的应用

例 13 若分式 $\dfrac{4x-8}{x^2-4}$ 的值为整数，求整数 x 的值.

解题秘方：先化简分式，再由分子能被分母整除求出整数 x 的值.

解：$\dfrac{4x-8}{x^2-4}=\dfrac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{4}{x+2}$.

因为分式的值为整数，x 为整数，

所以 $x+2$ 可取整数 -4，-2，-1，1，2，4.

所以 x 可取整数 -6，-4，-3，-1，0，2.

又 $x^2-4\neq0$，所以 $x\neq\pm2$.

所以整数 x 可取的值为 -6，-4，-3，-1，0.

方法点拨

若使分式的值为整数，则分式的分子是分母的整数倍. 化简后形如 $\dfrac{n}{x+a}$（n 为非零整数，x，a 为整数）的分式的值为整数，$x+a$ 为 n 的因数. 求得 x 的值要代入原分式检验，保证原分式有意义.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用分式的基本性质求分式的值

类型 1：分式的基本性质在巧求值中的应用

例 14 已知$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，求分式$\frac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2}$的值.

解题秘方： 由条件可知 $y\neq 0$，根据分式的基本性质将分式的分子和分母同时除以 y^2 转化为含$\frac{x}{y}$的式子，再代入即可求值.



解： 由条件可知 $y\neq 0$，因此 $y^2\neq 0$，

$$\text{原式}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+1}=-4.$$

类型 2：设比值在巧求分式的值中的应用

例 15 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$（其中 $x\neq 0$），求分式$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}$的值.

解题秘方： 因为条件是以比相等的形式出现的，所以可考虑设比值为 k，把待求式子转化为关于 k 的式子求值.

解： 设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$（$k\neq 0$），

则$\frac{x}{2}=k$，$\frac{y}{3}=k$，$\frac{z}{4}=k$，

所以 $x=2k$，$y=3k$，$z=4k$，

所以$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}=\frac{4k+9k-12k}{4k-9k+12k}=\frac{k}{7k}=\frac{1}{7}$.

挑战·高分

技巧点拨

本题运用了**整体思想**求值. 关键是将所求分式利用分式的基本性质化为含条件式的式子，再将条件中式子的值整体代入求值.

解法指导

本题运用了换元法求值. 当数学问题中出现或隐含比值相等的条件时，设比值为一个新字母，把问题转化为新字母的问题求解，往往可得到意想不到的效果.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点是分式的值存在和不存在的条件、分式的值为 0 的条件、分式的基本性质，这也是近年中考的热点，题目难度较小，多以选择题、填空题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用分式的值存在的条件求字母的取值范围

例 16 [中考·武汉]若分式$\frac{1}{x+2}$的值存在，则字母 x 的取值范围是（　　）

A. $x>-2$　　B. $x<-2$

C. $x=-2$　　D. $x\neq -2$

试题评析： 本题考查了分式的值存在的条件，即分式的分母不等于零.

解： 由题意可得 $x+2\neq 0$，所以 $x\neq -2$.

答案： D

冲刺·满分

考法点评

分式的值存在的条件是分母不等于 0，利用解分母不等于 0 的不等式求字母的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 分式值为零的条件

例 17 [中考·新疆]已知分式$\frac{x-1}{x+1}$的值是 0，则 x 的值是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

试题评析： 分式的值为 0，则分子等于 0，同时分母不为 0，求出 x 的值即可.

解： 要使分式的值为 0，则 $x-1=0$，解得 $x=1$，当 $x=1$ 时，分母 $x+1\neq0$，所以 x 的值为 1.

答案： C

考法点评

考查分式值为零的条件，把握两点：一是解分子为零的方程；二是验证分母不为零.

考法 3 分式的基本性质

例 18 [中考·金华]若$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则$\frac{a+b}{b}=$_____.

试题评析： 本题考查分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键.

思路点拨

分式的基本性质是分式约分和通分的依据，求分式的值时，若无法求出分式中字母的值，也可利用参数法，将分子、分母换一个字母，利用分式的基本性质求解.

解： 因为$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

所以$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$.

设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=k\ (k\neq0)$，

则 $a=2k$，$b=3k$，

所以$\frac{a+b}{b}=\frac{2k+3k}{3k}=\frac{5}{3}$.

利用分式的基本性质，分子、分母可同时除以 k

答案： $\frac{5}{3}$

考法 4 约分

例 19 [中考·孝感]如图 1.1-1，图①是一个边长为 a 的正方形剪去一个边长为 1 的小正方形，图②是一个边长为 $(a-1)$ 的正方形，记图①，图②中阴影部分的面积分别为 S_1，S_2，则$\frac{S_1}{S_2}$可化简为_____.

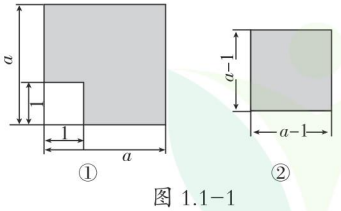


图 1.1-1

试题评析： 本题主要考查的是分式的化简，依据题意列出式子是解题的关键.

解： 由题可得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2-1}{(a-1)^2}=\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}$.

答案： $\frac{a+1}{a-1}$

考法点评

化简分式的关键就是约分，而约分的关键是找公因式，确定公因式的关键是对分子、分母进行因式分解.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见233页

1. 在式子①$\frac{2}{x}$；②$\frac{x+y}{5}$；③$\frac{1}{2-a}$；④$\frac{x}{\pi+1}$；⑤$1+\frac{1}{m}$中，是分式的有（　　）

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

2. [中考·扬州]分式$\frac{1}{3-x}$可变形为（　　）

A. $\frac{1}{3+x}$　　B. $-\frac{1}{3+x}$

C. $\frac{1}{x-3}$　　D. $-\frac{1}{x-3}$

3. [中考·滨州]下列分式中，最简分式是（　　）

A. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$　　B. $\frac{x+1}{x^2-1}$

C. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy}$　　D. $\frac{x^2-36}{2x+12}$

4. 把分式$\frac{x}{x+y}$（$x\neq0$，$y\neq0$）中的x，y同时扩大为原来的3倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的3倍　　B. 缩小为原来的$\frac{1}{3}$

C. 扩大为原来的6倍　　D. 不变

5. [中考·莱芜]若x，y的值均扩大为原来的3倍，则下列分式的值保持不变的是（　　）

A. $\frac{2+x}{x-y}$　　B. $\frac{2y}{x^2}$　　C. $\frac{2y^3}{3x^2}$　　D. $\frac{2y^2}{(x-y)^2}$

6. 下列式子：

①$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}$；②$\frac{b-a}{c-a}=\frac{a-b}{a-c}$；

③$\frac{|b-a|}{a-b}=-1$；④$\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{x-y}{x+y}$.

其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 已知分式$\frac{x+1}{2-x}$，当x取a时，该分式的值为0；当x取b时，分式的值不存在；则a^b的值等于（　　）

A. -2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

8. 当x取何值时，下列分式的值是零？

（1）$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$；（2）$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$.

9. 约分：

（1）$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}$；（2）$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

10. 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求分式$\frac{2x-3xy-2y}{x+2xy-y}$的值.

11. 先约分，再求值：$\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}$，其中$a=\frac{1}{3}$，$b=-2$.　　【导学号：5136175】

12. 已知分式$\frac{x-m}{2mx-n}$，当$x=-3$时，分式的值为0，当$x=3$时，分式的值不存在，求分式$\frac{(n-m)^{2\,020}}{(m-n)^{2\,021}}$的值.

13. 学校安排一项劳动任务，若单独派甲班去需a小时完成，单独派乙班去需b小时完成. 学校为了尽快完成任务，派甲班和乙班一起完成，则两个班合作需多少小时完成任务？若甲班单独完成需6小时，乙班单独完成需12小时，则两个班合作需几小时完成任务？

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2 分式的乘法和除法

核心知识

- 分式的乘除
- 分式的乘方
- 分式乘除、乘方混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 分式的乘法

1. 分式的乘法运算法则： 分式乘分式，把分子乘分子、分母乘分母分别作为积的分子、分母.

即 $\frac{f}{g}\cdot\frac{u}{v}=\frac{fu}{gv}$.

2. 法则的运用方法：

（1）若分子、分母都是单项式，可直接利用乘法运算法则运算后再约分；

（2）若分子、分母中有多项式，可先对分子、分母因式分解，约分后，再进行乘法运算；

（3）若分式乘整式，可把整式看成分母为 1 的“分式”参与运算.

（4）运算的结果应为最简分式或整式.

拨考向▸利用分式的乘法运算法则进行分式乘法计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}$；

（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)$；

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}$.

解题秘方： 利用分式的乘法运算法则进行计算.

解：（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}=\frac{15x^2y^2}{12x^3y}=\frac{5y}{4x}$.

（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)=-\frac{6x^2}{5y}\cdot4xy^2=-\frac{24x^3y}{5}$.

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{(a+b)(a-b)}=\frac{3a}{2(a-b)}$.

提分·必记

特别解读

分式乘法运算的基本步骤：

第一步，确定积的符号，写在积中分式的前面.

第二步：运用法则，将分子与分母分别相乘，多项式要带括号.

第三步：约分，将结果化成最简分式或整式.

提分·秘诀

解法提醒

对于分式的结果，要注意以下两点：

（1）结果必须是最简分式或整式；

（2）不能把 $\frac{b}{-a}$ 作为结果，要运用分式的符号法则写成 $-\frac{b}{a}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式的除法

1. 分式的除法运算法则： 分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘．

即 $\frac{f}{g}\div\frac{u}{v}=\frac{f}{g}\cdot\frac{v}{u}=\frac{fv}{gu}$（$u\neq0$）．

2. 法则的运用方法：

（1）分式的除法需转化成乘法，再利用分式乘法运算法则计算；

（2）当除式是整式时，可以将整式看成分母是 1 的“分式”进行运算．

技考向▶ 利用分式的除法运算法则进行分式除法计算

例 2 计算：

（1）$\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}$；

（2）$\frac{2x^2}{3y}\div(-2xy^2)$；

（3）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2}\div\frac{a^2-1}{a^2+2a}$．

解题秘方： 运用分式的除法运算法则将分式的除法运算转化为分式的乘法运算．

解：（1）$\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}=\frac{ab^3}{2c^2}\cdot\frac{4cd}{-5a^2b^2}=\frac{2bd}{-5ac}=-\frac{2bd}{5ac}$．

（2）$\frac{2x^2}{3y}\div(-2xy^2)=\frac{2x^2}{3y}\cdot\frac{1}{-2xy^2}=-\frac{2x^2}{6xy^3}=-\frac{x}{3y^3}$．

（3）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2}\div\frac{a^2-1}{a^2+2a}=\frac{-(a-1)^2}{a+2}\cdot\frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-a(a-1)}{a+1}=-\frac{a^2-a}{a+1}$．

提分·必记

特别解读

分式除法运算的基本步骤：

第一步：将分子、分母是多项式的进行因式分解，并约分；

第二步：将除法转化成乘法；

第三步：利用分式的乘法运算法则计算．

提分·秘诀

特别提醒

1. 分式的除法与分数的除法类似，可类比分数的除法学习．
2. 分式的除法法则是数学转化思想的具体体现，即把除法运算转化为乘法运算．
3. 运算的结果应为最简分式或整式．

点知识▶ 3 分式的乘方

1. 分式的乘方运算法则： 分式的乘方是把分子、分母各自乘方．

即对于任意一个正整数 n，有 $\left(\frac{f}{g}\right)^n=\frac{f^n}{g^n}$．

2. 分式乘方的方法：

（1）分式乘方时，确定乘方结果符号的方法与有理数乘方确定结果符号的方法相同；

（2）分式乘方时，一定要将分式的分子、分母分别乘方，不能将 $\left(\frac{f}{g}\right)^n=\frac{f^n}{g^n}$ 错写成 $\left(\frac{f}{g}\right)^n=\frac{f^n}{g}$；

（3）分式乘方时，若分式的分子与分母是多项式，应把分子、分母分别看成一个整体乘方，避免出现 $\left(\frac{f-g}{f+g}\right)^2=\frac{f^2-g^2}{f^2+g^2}$ 的错误．

提分·必记

特别解读

1. 分式乘方是分式乘法中因式相同时的一种特殊情况，因此分式乘方都可转化为分式乘法进行计算．
2. 学习了分式的乘方运算法则后，直接可用法则进行计算，在计算时先确定结果的符号，再把分子、分母分别乘方．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用分式的乘方运算法则进行分式乘方运算

例 3 计算：

（1）$\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4$；　（2）$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3$；

（3）$\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3$；　（4）$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$.

解题秘方： 先运用分式的乘方运算法则将分子、分母分别乘方，再运用幂的乘方和积的乘方的性质计算.

解：（1）$\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4=\frac{(2x^2y)^4}{(-z^2)^4}=\frac{16x^8y^4}{z^8}$.

（2）$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}=-\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$.

（3）$\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3=\frac{(xy)^3}{(x-y)^3}=\frac{x^3y^3}{(x-y)^3}$.

（4）$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$

$=\frac{[(a+b)(a-b)]^2}{(ab)^2}$

$=\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2b^2}$.

提分·秘诀

特别警示

在进行乘方运算时，必须将分子、分母整体分别乘方，当分式中含有“-”号时，要特别注意符号问题.

误答 1：

$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{-3c^2}$

$=-\frac{a^{12}b^6}{3c^2}$. 忘记将分母乘方

误答 2：

$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}$

$=\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$.

负数的奇次方为负，结果应为负

知识▶4 分式的乘除、乘方混合运算

1. 分式的乘除混合运算：

在运算时，乘除是同一级运算，若没有其他附加条件（如括号等），则应按照从左到右的顺序进行计算，若有括号，则先算括号里面的.一般地，乘除混合运算可以统一为乘法运算.

2. 分式的乘除、乘方混合运算：

分式的乘除、乘方混合运算顺序与分数的乘除、乘方混合运算顺序相同，即先乘方，再乘除，有括号的先算括号里面的.

提分·必记

知识链接

- 分式的乘除、乘方混合运算关键有两点：一是正确选择运算顺序；二是正确运用运算法则.
- 运算的结果应化为最简分式或整式.

考向▶利用分式的乘、除法运算法则及乘方运算法则进行分式的混合运算

类型 1：分式的乘除运算法则在乘除混合运算中的应用

例 4 计算：

（1）$\frac{8xy}{9a^2b}\div\frac{2x}{3b}\cdot\frac{3ab^2}{2x^3y}$；　（2）$\frac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\frac{x^2-1}{4-x}$.

提分·秘诀

方法点拨

分式乘除混合运算的解题步骤：

在分式的乘除混合运算中，一定要先将乘除混合运算统一成乘法运算，再按

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：将分式乘除混合运算统一为分式乘法运算．

解：（1）$\dfrac{8xy}{9a^2b}\div\dfrac{2x}{3b}\cdot\dfrac{3ab^2}{2x^3y}$

$=\dfrac{8xy}{9a^2b}\cdot\dfrac{3b}{2x}\cdot\dfrac{3ab^2}{2x^3y}$

$=\dfrac{2b^2}{ax^3}$．

（2）$\dfrac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\dfrac{x^2-1}{4-x}$

$=\dfrac{3x-12}{1-2x+x^2}\cdot\dfrac{1}{x+1}\cdot\left(-\dfrac{x^2-1}{x-4}\right)$

$=-\dfrac{3(x-4)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-4)}$

$=-\dfrac{3}{x-1}$．

分式的乘法运算法则进行计算，能分解因式的，要分解因式，这样便于约分，计算结果应是最简分式或整式．

类型 2：分式的乘除、乘方运算法则在乘除、乘方混合运算中的应用

例 5 计算：

（1）$\left(\dfrac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{ab}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3c}{2a}\right)^3$；

（2）$\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\div\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3$．

解题秘方：先乘方，再乘除，有括号的先算括号里面的．

解：（1）$\left(\dfrac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{ab}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3c}{2a}\right)^3$

$=\dfrac{4c^6}{9a^2b^4}\div\dfrac{1}{a^3b^3}\cdot\left(-\dfrac{27c^3}{8a^3}\right)$

$=\dfrac{4c^6}{9a^2b^4}\cdot a^3b^3\cdot\left(-\dfrac{27c^3}{8a^3}\right)$

$=-\dfrac{3c^9}{2a^2b}$．

（2）$\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\div\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3$

$=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\div\dfrac{(x+y)^3}{x^3}$

$=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\cdot\dfrac{x^3}{(x+y)^3}$

$=\dfrac{x^2}{xy+y^2}$．

方法点拨

分式乘除、乘方混合运算的解题步骤：

在分式乘除、乘方的混合运算中，先计算乘方，再计算乘除；乘、除是同一级运算，要按照从左到右的运算顺序计算；当分式中的分子、分母是多项式且能分解因式时，还要分解因式，以达到约分的目的．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度 1 利用分式的值存在的条件选取分式的化简求值中字母的值

例 6 先化简，再求值：$\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$，选一个合适的数作为 a 的值代入求值.

解题秘方： 利用分式的乘、除法运算法则进行化简，再取适合字母的值代入.

解： $\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}=\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a}=2a+2.$

取 $a=3$，原式 $=2\times3+2=8$.

a 不能取 $-2,-1,0,1,2$

挑战·高分

特别警示

对于字母开放式取值，不能只关注化简结果的式子有意义，还应该关注原式有意义，在原式中，既要注意不能使各个分式的分母为 0，也不能使除式 $\frac{a}{a^2-1}$ 的值为 0.

拨尖角度 2 利用字母的取值说明分式的乘方、乘除运算中的现象

例 7 在解答题目“已知 $x=2\,021$，求 $\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 的值”时，小明误将 $x=2\,021$ 看成了 $x=2\,020$，但算出的结果仍然正确，你能解释原因吗？

解题秘方： 先化简，然后观察化简结果.

解： $\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\cdot\frac{2x^3}{x(x+3)}\cdot\frac{1}{x^2}=2.$

因为原式化简后的结果是常数 2，与 x 的值无关，所以小明误将 $x=2\,021$ 看成了 $x=2\,020$，其结果仍然是正确的.

挑战·高分

方法点拨

一般情况下，分式的值与分式中字母的取值有关，若字母取不同的值，分式的值仍然相同，则化简的式子中不含字母. 若字母取的值互为相反数，分式的值仍然相同，则化简结果可能有两种情况：一是含字母的幂是偶次幂，二是不含字母.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查分式的乘除、乘方的混合运算，在中考中，题目主要有分式的计算和分式的化简求值两种，简单的分式计算题以选择题形式考查，化简求值题以解答题形式考查.

三年中考兵法

考法 1 利用整式、分式的运算法则进行辨析

例 8 [中考·山西]下列运算正确的是（　　）

A. $(-a^3)^2=-a^6$　　B. $2a^2+3a^2=6a^2$

C. $2a^2\cdot a^3=2a^6$　　D. $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3=-\frac{b^6}{8a^3}$

试题评析： 本题主要考查整式与分式的运算，解题的关键是掌握幂的乘方、合并同类项法则、同底数幂的乘法及分式的乘方运算法则.

冲刺·满分

思路点拨

整式与分式的运算有很多类似的地方，考查时经常在一起考查，解决问题的关键都是运算法则的正确运用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：A. $(-a^3)^2=a^6$，此选项错误；B. $2a^2+3a^2=5a^2$，此选项错误；C. $2a^2\cdot a^3=2a^5$，此选项错误；D. $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3=-\frac{b^6}{8a^3}$，此选项正确．故选 D.

答案：D

考法 2 利用分式的乘、除法运算法则解游戏问题

例 9 ［中考·河北］老师设计了接力游戏，用合作的方式完成分式化简，规则是：每人只能看到前一人给的式子，并进行一步计算，再将结果传递给下一人，最后完成化简．过程如图 1.2-1：

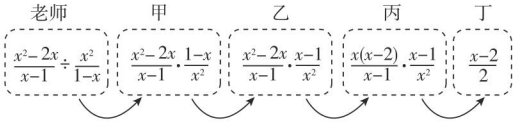


图 1.2-1

接力中，自己负责的一步出现错误的是（　　）

A. 只有乙　　B. 甲和丁　　C. 乙和丙　　D. 乙和丁

试题评析：本题主要考查分式的乘除法，解题的关键是掌握分式的乘、除法运算法则.

解：因为$\frac{x^2-2x}{x-1}\div\frac{x^2}{1-x}$

$=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x^2}$

$=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x^2}$,

$\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x(x-2)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-2}{x}$,

所以出现错误的是乙和丁.

答案：D

考法 3 利用已知结论进行分式除法计算

例 10 ［中考·滨州］(1) 计算：$(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(2) 利用所学知识以及 (1) 所得等式，化简式子$\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}\div\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}$.

试题评析：本题主要考查多项式乘多项式及分式的除法，灵活运用 (1) 中的结论是解题的关键.

解：(1) 原式 $=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$.

(2) 原式 $=\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{m^2+mn+n^2}\cdot\frac{(m+n)^2}{(m+n)(m-n)}$

$=(m-n)\cdot\frac{m+n}{m-n}$

$=m+n$.

思路点拨

根据分式的乘除运算步骤和运算法则逐一计算即可判断.

思路点拨

(1) 根据多项式乘多项式法则计算即可；

(2) 利用(1)中的结果及已学知识将(2)中原式的分子、分母因式分解，再约分即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见233页

1. [中考·江西]计算$\frac{1}{a}\div\left(-\frac{1}{a^2}\right)$的结果为(　　)

A. a　　B. $-a$　　C. $-\frac{1}{a^2}$　　D. $\frac{1}{a^2}$

2. [中考·济南]化简$\frac{2}{x^2-1}\div\frac{1}{x-1}$的结果是(　　)

A. $\frac{2}{x+1}$　　B. $\frac{2}{x}$

C. $\frac{2}{x-1}$　　D. $2(x+1)$

3. 下列计算正确的是(　　)

A. $a^2\cdot a=a^2$　　B. $m\div n\times\frac{1}{n}=m$

C. $a^2b-2ba^2=-a^2b$　　D. $\left(-\frac{3}{2a}\right)^3=-\frac{9}{8a^3}$

4. 已知分式$\frac{x^2-y^2}{x}$乘一个分式后结果为$-\frac{(x-y)^2}{x^2}$,则所乘分式为_____.

5. 计算:

(1) $\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\div\frac{5xym}{3n}$;

(2) $\frac{a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a-1}{a^2+4a+4}\div\frac{1}{a+2}$;

(3) $\frac{1}{x-1}\div(x+2)\cdot\frac{x-1}{x+2}$.

6. 计算:

(1) $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{1}{ab}\right)^3$;

(2) $\frac{m^2-n^2}{(m-n)^2}\cdot\left(\frac{n-m}{mn}\right)^2\div\frac{m+n}{m}$;

(3) $\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\div(x+y)^2\cdot\left(\frac{x}{x-y}\right)^3$.

7. 甲、乙两个工程队合修一条公路,已知甲工程队每天修(a^2-4)米,乙工程队每天修$(a-2)^2$米(其中$a>2$),则甲工程队修900米所用时间是乙工程队修600米所用时间的多少倍?

8. 有这样一道题:"计算$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}$的值,其中$x=2\,021$".甲同学把"$x=2\,021$"错抄成"$x=2\,012$",但他的计算结果也正确,你说这是怎么回事?

9. 已知$a^2+b^2-4a+6b+13=0$,求$\frac{a^2-6a+9}{4-b^2}\div\frac{3-a}{2+b}\cdot\frac{a^2}{3a-9}$的值.

10. 已知一列分式:$\frac{x^3}{y}$,$-\frac{x^5}{y^2}$,$\frac{x^7}{y^3}$,$-\frac{x^9}{y^4}$,…,其中$xy\neq0$.

(1) 从第2个分式开始,用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式,你发现了什么规律?

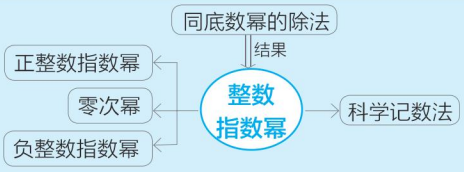
(2) 根据你发现的规律,试写出第7个分式.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

1.3 整数指数幂

核心知识
- 同底数幂的除法
- 零次幂和负整数指数幂
- 科学记数法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 1 同底数幂的除法

1. 同底数幂相除的运算法则：

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

用字母表示为$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$（$a\neq0$，m,n是正整数，且$m>n$）.

2. 法则的拓展运用：

（1）法则的推广：适用于三个及三个以上的同底数幂相除，即$a^m\div a^n\div a^p=a^{m-n-p}$（$a\neq0$，$m$，$n$，$p$是正整数，且$m>n+p$）；

（2）同底数幂相除的运算法则既可以正用，也可以逆用，逆用时$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$（$a\neq0$，m，n是正整数，且$m>n$）.

拔考向▶ 利用同底数幂相除的运算法则进行幂的除法计算

类型 1：同底数幂相除的运算法则在计算中的应用

例 1 计算：

（1）$(-x)^8\div(-x)^4$；

（2）$(2x)^7\div(2x)^4$；

（3）$(x-y)^7\div(y-x)^5$.

解题秘方：同底数幂相除，底数不变，指数相减.

解：（1）$(-x)^8\div(-x)^4$

$=(-x)^{8-4}$

$=(-x)^4$

$=x^4$.

（2）$(2x)^7\div(2x)^4$

$=(2x)^{7-4}$

$=(2x)^3$

$=8x^3$.

提分·必记

特别解读

1. 运用法则的关键有两个：一是底数相同，二是除法运算，二者缺一不可.
2. 底数a可以是单项式，也可以是多项式，但底数a不能为0.
3. 同底数幂相除，底数不变，指数相减，而不是相除.

提分·秘诀

知识链接

1. 底数互为相反数的偶次幂相等，奇次幂仍然互为相反数，即：
$(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$，
$(a-b)^{2n-1}=-(b-a)^{2n-1}$.
（$n\geqslant1$，且n为整数）
2. 同底数幂的除法直接运用法则计算，底数互为相反数的幂相除，先化为同底数幂，然后再利用法则计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）$(x-y)^7 \div (y-x)^5$

$=(x-y)^7 \div [-(x-y)^5]$

$=-(x-y)^{7-5}$

$=-(x-y)^2$.

类型 2：逆用同底数幂相除的运算法则在求整式的值中的应用

例 2 已知 $x^m=9$，$x^n=27$，求 x^{3m-2n} 的值.

解题秘方：逆用同底数幂相除的运算法则，即 $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$（$a\neq 0$，m，n 是正整数，且 $m>n$），进行变形求值.

解： x^{3m-2n}

$=x^{3m} \div x^{2n}$

$=(x^m)^3 \div (x^n)^2$

$=9^3 \div 27^2$

$=1$.

方法点拨：逆向运用同底数幂相乘除的运算法则求值的方法：

当幂的指数是含有字母的加法时，通常转化为同底数幂的乘法；当幂的指数是含有字母的减法时，通常转化为同底数幂的除法；当幂的指数是含有字母的乘法时，通常转化为幂的乘方，然后整体代入求值.

思路点拨

观察 x^{3m-2n} 的特征可以发现，其指数里含减号，可逆用同底数幂相除的运算法则解题.

$9^3 \div 27^2=(3^2)^3 \div (3^3)^2$

$=3^6 \div 3^6=1$

点知识 2 零次幂和负整数指数幂

1. 零次幂：

（1）任何不等于零的数的零次幂都等于 1.

（2）零次幂要把握三点：①底数不为零；②指数为零；③结果是 1.

2. 负整数指数幂：

（1）任何不等于零的数的 $-n$（n 为正整数）次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数. 即 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$（$a\neq 0$，n 是正整数）.

（2）由于 $\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$，因此 $a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$（$a\neq 0$，$n$ 是正整数）.

提分·必记

特别提醒

1. 在 $a^0=1$ 中规定 $a\neq 0$，原因是 0^0 无意义.
2. 在 $a^0=1$ 中，a 可以是非零的有理数，也可以是多项式或非零的单项式.
3. $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$（$a\neq 0$，n 为正整数），仍然成立.

拔考向 利用整数指数幂的运算法则进行幂的计算

类型 1：零次幂和负整数指数幂的运算法则在数的运算中的应用

例 3 计算：$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$_____.

解题秘方：紧扣零次幂和负整数指数幂的运算法则进行计算.

解： $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$=9+4+1-2$

$=12$.

答案： 12

提分·秘诀

解法提醒

对于底数是分数的负整数指数幂，我们可采用底倒指反法，将其转化为这个数的倒数的正整数指数幂，即 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用负整数指数幂改写幂的形式

例 4 把下列各式写成分式的形式：

（1）y^{-3}；（2）$3x^{-3}y$.

解题秘方：直接用负整数指数幂的运算法则求解.

解：（1）$y^{-3}=\frac{1}{y^3}$.

（2）$3x^{-3}y=3\cdot\frac{1}{x^3}\cdot y=\frac{3y}{x^3}$.

方法总结

在化简、计算中，结果不能含有负整数指数幂，如果出现负整数指数幂，一定要利用前面的公式化成对应的正整数指数幂来表示.

点知识▶3 科学记数法

提分·必记

特别提醒

用科学记数法表示绝对值小于1的数时，10的指数是负数，一定不要忘记指数n前面的“-”号.

1. 用科学记数法表示数：一般地，把一些绝对值较大的数表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 a 的取值范围是 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数；把一些绝对值较小的数表示成 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 a 的取值范围是 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数. 用这两种形式表示数的方法称为科学记数法. 用科学记数法表示较小的数的关键是掌握公式：$\underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个}0}=10^{-n}$.

2. 用科学记数法表示绝对值较小的数的一般步骤：

（1）确定 a：a 是只有一位整数的数.

（2）确定 n：确定 n 的方法有两个，即

① n 等于原数中左起第一个非零数前零的个数（包括小数点前的那个 0）；

②小数点向右移到第一个非零的数后，小数点移动了几位，n 就等于几.

（3）将原数用科学记数法表示为 $a\times10^{-n}$（其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数）.

拔考向▶利用科学记数法解科学记数法表示的数与原数的关系问题

类型 1：科学记数法在表示数中的应用

例 5 用科学记数法表示下列各数：

（1）0.000 003；

（2）−0.000 020 8；

（3）0.000 000 004 67.

解题秘方：按照科学记数法的要求，将各数写成 $\pm a\times10^{-n}$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数.

解：（1）$0.000\ 003=3\times10^{-6}$.

3 前面有 6 个 0

（2）$-0.000\ 020\ 8=-2.08\times10^{-5}$.

2 前面有 5 个 0

（3）$0.000\ 000\ 004\ 67=4.67\times10^{-9}$.

4 前面有 9 个 0

提分·秘诀

教你一招

用科学记数法表示绝对值较小的数的思路：

用科学记数法表示绝对值较小的数时，一般形式为 $a\times10^{-n}$，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 由原数左起第一个不为零的数字前面零的个数决定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：科学记数法表示的数在还原成原数中的应用

例 6 将下列用科学记数法表示的数还原成原数.

（1）6×10^{-4}；

（2）-7.2×10^{-5}；

（3）5.68×10^{-6}.

解题秘方：把用科学记数法表示的绝对值较小的数还原时，指数的绝对值是几，小数点就向左移几位.

解：（1）$6\times10^{-4}=0.000\,6$.

（2）$-7.2\times10^{-5}=-0.000\,072$.

（3）$5.68\times10^{-6}=0.000\,005\,68$.

类型 3：科学记数法表示的数在计算中的应用

例 7 计算：

（1）$(3\times10^{-4})^2\times(2\times10^{-6})^3$；

（2）$(8\times10^{-7})^2\div(2\times10^{-3})^3$.

解题秘方：先计算乘方，再计算乘除.

解：（1）$(3\times10^{-4})^2\times(2\times10^{-6})^3$

$=9\times10^{-8}\times8\times10^{-18}$

$=(9\times8)\times(10^{-8}\times10^{-18})$

$=7.2\times10^{-25}$.

（2）$(8\times10^{-7})^2\div(2\times10^{-3})^3$

$=(64\times10^{-14})\div(8\times10^{-9})$

$=(64\div8)\times(10^{-14}\div10^{-9})$

$=8\times10^{-5}$.

点知识 4 整数指数幂的运算法则

		运算法则	公式
幂的运算	同底数幂的乘法	同底数幂相乘，底数不变，指数相加	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（$a\neq0$，m，n 都是整数） ①
	幂的乘方	幂的乘方，底数不变，指数相乘	$(a^m)^n=a^{mn}$（$a\neq0$，m，n 都是整数）
	积的乘方	积的乘方等于各因数分别乘方的积	$(ab)^n=a^nb^n$（$a\neq0$，$b\neq0$，n 是整数） ②
	同底数幂的除法	同底数幂相除，底数不变，指数相减	$\frac{a^m}{a^n}=a^m\cdot a^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}$（$a\neq0$，$m$,$n$ 都是整数）
	分式的乘方	分式乘方等于分子、分母分别乘方	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(a\cdot b^{-1})^n=a^n\cdot(b^{-1})^n=a^n\cdot b^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$（$a\neq0$，$b\neq0$，$n$ 是整数）

教你一招

将用科学记数法表示的数还原的思路：

把 $a\times10^{-n}$（其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数）还原成原数时，只要把 a 的小数点向左移动 n 位即可.

解法提醒

计算用科学记数法表示的数时，乘方运算用积的乘方法则，乘除运算用单项式乘除法则，计算的结果也应该用科学记数法形式表示.

提分·必记

特别提醒

同底数幂相除的运算法则被包含在公式①中，分式的乘方的运算法则被包含在公式②中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用整数指数幂的运算法则进行幂的运算

例 8 计算：

（1）$(-m^2n^{-3})\cdot(3m^{-3}n^{-2})$；

（2）$(2a^{-2})^3b^2\div 4a^{-8}b^3$；

（3）$(3x^2y^{-1})^{-2}\cdot(2x^{-2}y^3)^2$；

（4）$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^{-3}\div\left(-\frac{y}{x}\right)^{-4}$.

解题秘方： 按照先乘方，再乘除的顺序进行计算.

解： （1）$(-m^2n^{-3})\cdot(3m^{-3}n^{-2})=-1\times 3\times m^{2+(-3)}\times n^{-3-2}=-3m^{-1}n^{-5}=-\frac{3}{mn^5}$.

（2）$(2a^{-2})^3b^2\div 4a^{-8}b^3=8a^{-6}b^2\div 4a^{-8}b^3=2a^2b^{-1}=\frac{2a^2}{b}$.

（3）$(3x^2y^{-1})^{-2}\cdot(2x^{-2}y^3)^2=\frac{1}{9}x^{-4}y^2\cdot 4x^{-4}y^6=\frac{4}{9}x^{-8}y^8=\frac{4y^8}{9x^8}$.

（4）$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^{-3}\div\left(-\frac{y}{x}\right)^{-4}=x^{-4}y^2\cdot y^{-6}x^3\div x^4y^{-4}=x^{-4}y^2\cdot x^3y^{-6}\cdot x^{-4}y^4=x^{-5}y^0=\frac{1}{x^5}$.

提分·秘诀

方法点拨

1. 幂的运算法则适用于任何整数指数幂.
2. 底数是分式的幂计算时，先将分式形式的幂改写，分子的指数不变，分母的指数改为相反数，例如 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=a^nb^{-n}$，然后再按幂的运算法则计算.
3. 运算的结果有负指数的，要改写成分式的形式.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用等底法求负整数指数幂中字母的值

例 9 已知 $3^m=\frac{1}{27}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^n=16$，求 m^n 的值.

解题秘方： 将等式两边都用幂的形式表示，对比底数和指数求值.

解： 因为 $3^m=\frac{1}{27}=3^{-3}$，所以 $m=-3$.

因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n=16=2^4=\frac{1}{2^{-4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$，所以 $n=-4$.

所以 $m^n=(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$.

挑战·高分

教你一招

运用负整数指数幂解决这类题目时，要先从不含待定字母的一边入手变形，将两边化为同底数或同指数的形式，然后构造方程，并通过解方程确定指数或底数中的待定字母的值.

拔尖角度▶ 2 利用化负为正法化简含有负整数指数幂的式子

例 10 计算：

（1）$\frac{(2x^2y^2)^2\cdot(-3x^{-1}y^3)}{6x^{-2}y^{-3}\cdot(3x^2y^3)}$；

（2）$\left(\frac{x^2+xy}{x}\right)^{-1}\div\left(\frac{x-y}{x}\cdot\frac{x}{y-x}\right)^{-5}$.

解题秘方： 用化负为正法，即将负整数指数幂转化成它的倒数的正整数指数幂进行计算.

挑战·高分

解法提醒

将负整数指数幂先化成正整数指数幂，再运算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）原式 $=\dfrac{4x^4y^4\cdot(-3y^3)\cdot x^2y^3}{6x\cdot(3x^2y^3)}$

$=\dfrac{-12x^6y^{10}}{18x^3y^3}=-\dfrac{2x^3y^7}{3}$.

（2）原式 $=\dfrac{x}{x(x+y)}\cdot\left[\dfrac{x-y}{x}\cdot\dfrac{x}{-(x-y)}\right]^5$

$=\dfrac{1}{x+y}\cdot(-1)^5$

$=-\dfrac{1}{x+y}$.

方法点拨

在运算过程中，根据题目的结构和自身的习惯采用合适的方法解决，做到二者相辅相成为好，但结果中一般不含有负整数指数幂.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查零次幂、负整数指数幂及用科学记数法表示绝对值较小的数，其中用科学记数法表示绝对值较小的数是中考考查的热点，一般以选择题或填空题的形式出现；零次幂和负整数指数幂在中考中可能以简单计算的形式出现在填空题或选择题中，也可能作为计算的一部分出现在解答题中.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 负整数指数幂的运算

例11 [中考·济宁]计算 $(a^2)^3+a^2\cdot a^3-a^2\div a^{-3}$，结果是（　　）

A. $2a^5-a$　　B. $2a^5-\dfrac{1}{a}$　　C. a^5　　D. a^6

试题评析：本题考查了幂的乘方和同底数幂的乘除法，解题的关键是掌握幂的乘方和同底数幂的乘除法的运算法则.

解：$(a^2)^3+a^2\cdot a^3-a^2\div a^{-3}=a^6+a^5-a^5=a^6$，故选D.

答案：D

考法点评

进行整数指数幂的运算时，要注意两点：一是运算顺序，二是运算法则，运算结果要化为整数指数幂的形式.

考法2 利用科学记数法解实际应用问题

例12 [中考·邵阳]据《经济日报》2018年5月21日报道：目前，世界集成电路生产技术水平最高已达到7 nm(1 nm=10^{-9} m)，主流生产线的技术水平为14~28 nm，中国大陆集成电路生产技术水平最高为28 nm. 将28 nm用科学记数法可表示为（　　）

A. 28×10^{-9} m　　B. 2.8×10^{-8} m

C. 28×10^{9} m　　D. 2.8×10^{8} m

试题评析：本题考查了用科学记数法表示绝对值较小的数的方法及科学记数法的计算，解题的关键是掌握用科学记数法表示数的方法.

解：28 nm=28×10^{-9} m=2.8×10^{-8} m.

答案：B

思路点拨

绝对值较小的数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a\times10^{-n}$，与绝对值较大的数的科学记数法不同的是其所使用的是负整数指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的零的个数决定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见234页

1. 计算 $2^{-2}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. 4

2. [中考·河北]一次抽奖活动特等奖的中奖率为 $\frac{1}{50\,000}$，把 $\frac{1}{50\,000}$ 用科学记数法表示为（　　）

A. 5×10^{-4}　　B. 5×10^{-5}

C. 2×10^{-4}　　D. 2×10^{-5}

3. [中考·威海]下列运算正确的是（　　）

A. $3x^2+4x^2=7x^4$　　B. $2x^3\cdot3x^3=6x^3$

C. $a\div a^{-2}=a^3$　　D. $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{6}a^6b^3$

4. 若 $a=0.3^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$，$d=\left(-\frac{1}{3}\right)^0$，则 a，b，c，d 的大小关系是（　　）

A. $a<b<c<d$　　B. $b<a<d<c$

C. $a<d<c<b$　　D. $c<a<d<b$

5. 若 $(x-3)^0+\left(\frac{x}{3x-6}\right)^{-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x\neq3$ 且 $x\neq2$

B. $x\neq3$ 或 $x\neq2$

C. $x\neq3$ 或 $x\neq2$ 或 $x\neq0$

D. $x\neq3$ 且 $x\neq2$ 且 $x\neq0$

6. [中考·贵港]将实数 3.18×10^{-5} 用小数表示为_____.

7. [中考·河北]若 $7^{-2}\times7^{-1}\times7^0=7^p$，则 p 的值为_____.

8. 已知 $2^x=\frac{1}{32}$，则 $x=$_____.

9. 计算：（用科学记数法表示结果）

（1）$(2\times10^{-3})\times(3\times10^{-3})$；

（2）$(2\times10^{-3})^2\times(3\times10^{-3})$.

10. 计算：$(2-\pi)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$.

11. 化简：

（1）$(xy^{-1})^n\div(-x^2y^{-n})^2$（$n$ 是整数）；

（2）$(x^{-2}y^3)^2\cdot(x^{-1}y)^{-2}\div(xy^{-2})^3$.

12. 先化简，再求值：$\frac{x-2}{x-1}\div\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$，其中 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+1$.

13. 有一句谚语：捡了芝麻，丢了西瓜.据测算，5万粒芝麻才重200 g，你能计算出1粒芝麻重多少克吗（结果用科学记数法表示）？

14. 已知 $(2x-1)^{x-2}=1$，求整数 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.4 分式的加法和减法

核心知识
- 分式的加法和减法
- 通分
- 分式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同分母的分式的加减法

1. 同分母的分式的加、减法运算法则：

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减.

即 $\frac{f}{g}\pm\frac{h}{g}=\frac{f\pm h}{g}$.

2. 同分母分式相加减的一般步骤：

（1）分母不变，把分子相加减；

（2）分子相加减时，应先去括号，再合并同类项；

（3）结果应化成最简分式或整式.

提分·必记

特别解读

“分子相加减”就是把各个分式的分子整体相加减，在计算时，各分子都应用括号括起来，若分子是系数为正的单项式，括号可以省略；若分子是多项式，且分子相减时，括号不能省略，否则容易出现符号错误.

拨考向 利用同分母的分式加、减法运算法则计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}$；

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}$；

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}$.

解题秘方： 按照同分母的分式的加减法法则进行计算即可，结果要化为最简分式或整式.

解：（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}=\frac{(x-y)-(x+y)}{2xy^2}=\frac{-2y}{2xy^2}=-\frac{1}{xy}$.

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{4x-4y}{x^2-y^2}=\frac{4(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{4}{x+y}$.

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}=\frac{a+2b}{b-a}-\frac{b}{b-a}-\frac{2a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$.

提分·秘诀

警示误区

同分母的分式相加减的三大易错点：

（1）当分母不相同而是相反数时，不能直接相加减，将分母变成相同时，中间的运算符号随之改变：“+”号变“−”号，“−”号变“+”号；

（2）当分子是多项式时，对分子进行加减时，要带括号，后去括号运算；

（3）加减运算后，对运算的结果要化简，最后的结果应是最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式的通分

1. 分式的通分：

根据分式的基本性质，把几个异分母的分式化成同分母的分式的过程，叫作分式的通分．

2. 最简公分母：

通分时，一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作为公分母，这样的公分母称为最简公分母．

3. 通分的一般步骤：

（1）确定最简公分母；

（2）用最简公分母分别除以各分母求商；

（3）用所得的商分别乘各分式的分子、分母得出同分母分式．

核考向▶ 利用通分的方法步骤对分式进行通分

例 2 把下列各组分式通分：

（1）$\frac{5}{6x^2yz^3}$和$\frac{3}{4x^3y^2z}$；

（2）$\frac{1}{x+1}$和$\frac{1}{x-1}$；

（3）$\frac{a}{x-y}$，$\frac{b}{3y-3x}$，$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}$．

解题秘方：先确定最简公分母，再通分．

解：（1）最简公分母是$12x^3y^2z^3$，

$$\frac{5}{6x^2yz^3}=\frac{5\cdot 2xy}{6x^2yz^3\cdot 2xy}=\frac{10xy}{12x^3y^2z^3},$$

$$\frac{3}{4x^3y^2z}=\frac{3\cdot 3z^2}{4x^3y^2z\cdot 3z^2}=\frac{9z^2}{12x^3y^2z^3}.$$


确定最简公分母的方法

（2）最简公分母是$(x+1)(x-1)$，

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1},$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x^2-1}.$$

（3）最简公分母是$3(x-y)^2$，

$$\frac{a}{x-y}=\frac{a\cdot 3(x-y)}{(x-y)\cdot 3(x-y)}=\frac{3a(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{b}{3y-3x}=-\frac{b}{3(x-y)}=-\frac{b\cdot(x-y)}{3(x-y)\cdot(x-y)}=-\frac{b(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}=\frac{c}{(x-y)^2}=\frac{c\cdot 3}{(x-y)^2\cdot 3}=\frac{3c}{3(x-y)^2}.$$

提分·必记

特别解读

约分与通分的联系与区别：

（1）约分与通分都是对分式进行恒等变形，即变形之后每个分式的值都不变．

（2）约分是针对一个分式来说的，约分可使分式得以化简，而通分是针对两个或两个以上的分式来说的，通分可使异分母的分式化为同分母的分式．

提分·秘诀

教你一招

确定最简公分母的一般方法：

（1）如果各分母都是单项式，那么最简公分母就是由①各分母系数的最小公倍数；②各分母相同字母的最高次幂；③各分母所有不同字母及其指数的乘积这三部分组成；

（2）如果各分母中有多项式，就先把分母是多项式的分解因式，再按照分母都是单项式时求最简公分母的方法，从系数、相同因式、不同因式三个方面去确定．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 异分母的分式的加减法

1. 异分母的分式的加、减法运算法则：

异分母的分式进行加、减运算时，要先化成同分母的分式，然后再加减．即$\frac{f}{g}\pm\frac{u}{v}=\frac{fv}{gv}\pm\frac{gu}{gv}=\frac{fv\pm gu}{gv}$．

2. 异分母的分式相加减的一般步骤：

（1）**通分**：将异分母的分式转化为同分母的分式；

（2）**加减**：按照同分母的分式加减运算的一般步骤进行计算．

注意：异分母的分式加减运算的关键是通分．

提分·必记

特别解读

通分的关键是确定最简公分母，分式与分式相加减时的最简公分母是各分母的所有因式的最高次幂的积．

拔考向▶ 利用异分母的分式的加、减法运算法则计算

题型1：分式的加减法运算

例3 计算：

（1）$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$；　　（2）$a+2-\frac{a^2}{a-2}$．

解题秘方：异分母的分式相加减，先找最简公分母，进行通分，变为同分母的分式，再按照同分母的分式的加、减法运算法则进行计算．

解：（1）$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3}{x-4}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{24-3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3x+12}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3(x-4)}{(x+4)(x-4)}$

$=-\frac{3}{x+4}$．

（2）$a+2-\frac{a^2}{a-2}$

在通分时，整式看成分母是1，整式作为分子的“分式”，若是多项式时，则看成一个整体；通分时要带上括号

$=\frac{(a+2)(a-2)}{a-2}-\frac{a^2}{a-2}$

$=\frac{a^2-4-a^2}{a-2}$

$=-\frac{4}{a-2}$．

提分·秘诀

特别提醒

1. 通分时，若要改变某个因式的符号，可利用分式的符号变化规律进行变换，如本例题(1)中，将分母“4-x”变为“x-4”，提出的“-”号放在分式的前面，使本来的“+”号变为“-”号．

2. 类似同分母相加减，分子是多项式的注意带上括号．

3. 最后运算的结果应是最简分式或整式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：分式的运算在实际问题中的应用

例 4 从甲地到乙地有两条路，每条路都是 3 km，其中第一条是平路，第二条有 1 km 的上坡路，2 km 的下坡路，小亮在上坡路上的骑车速度为 a km/h，在平路上的骑车速度为 $2a$ km/h，在下坡路上的骑车速度为 $3a$ km/h.

（1）当他分别走第一条路和第二条路时，从甲地到乙地各需要多长时间？

（2）从甲地到乙地，他走哪条路花费的时间少？少用多长时间？

解题秘方： 紧扣题意中揭示的数量关系，利用分式的运算结果解决问题.

解：（1）走第一条路所用的时间为 $\frac{3}{2a}$ h；

走第二条路所用的时间为 $\frac{1}{a}+\frac{2}{3a}=\frac{3}{3a}+\frac{2}{3a}=\frac{5}{3a}$（h）.

（2）因为 $\frac{3}{2a}-\frac{5}{3a}=\frac{9}{6a}-\frac{10}{6a}=-\frac{1}{6a}<0$，

所以 $\frac{3}{2a}<\frac{5}{3a}$，

所以他走第一条路花费的时间少，少用 $\frac{1}{6a}$ h.

思路点拨

（1）根据时间 = 路程 ÷ 速度，求出走这两条路分别花费的时间；

（2）将走这两条路分别花费的时间作差，比较大小，差的绝对值就是少用的时间.

知识 4 分式的混合运算

1. 分式的混合运算顺序：

分式与分数的混合运算有相同的运算顺序，即先乘方，再乘除，然后加减. 有括号时，先做括号内的运算，按照小括号、中括号、大括号的顺序进行，对于同级运算，按从左到右的顺序进行.

点拨微课堂

2. 分式混合运算的方法：

（1）进行分式混合运算时，可以根据需要合理地运用运算律来简化运算，此时先将分式的乘除法统一成乘法，分式的加减法统一成加法，才能使用乘法运算律、加法运算律简化运算.

（2）运算过程中及时约分化简，有时可使解题过程简单.

（3）运算结果是最简分式或整式.

提分·必记

特别提醒

- 分式混合运算要注意运算顺序和解题步骤，把好符号关.
- 分式除法只有转化为乘法后才能运用乘法运算律进行计算.

拔 考向 利用分式的混合运算顺序进行计算

例 5 计算：

（1）$\frac{a^2+2a}{a^2-4}-\frac{a-2}{a}\cdot\left(\frac{2a}{a-2}\right)^2$；

（2）$\frac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\frac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$.

解题秘方： 在进行分式的混合运算时，应先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号时要先算括号里面的.

提分·秘诀

方法点拨

1. 分式的计算应先分清运算顺序，再按分式的运算法则进行计算，当某一项是整式时，可将此项看成分母为 1 的式子.
2. 分式的混合运算中要注意各分式中分子、分母符号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$

$=\dfrac{a(a+2)}{(a+2)(a-2)}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\dfrac{4a^2}{(a-2)^2}$

$=\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{4a}{a-2}$

$=-\dfrac{3a}{a-2}$.

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\left[\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}\right]$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\dfrac{5b^2-(a^2-4b^2)}{a-2b}$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\dfrac{9b^2-a^2}{a-2b}$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\cdot\dfrac{a-2b}{(3b-a)(3b+a)}$

$=-\dfrac{a-3b}{a^2+3ab}$.

的处理，结果中分子或分母的系数是负数的，要把“−”号提到分式的前面.

3. 所有的分式运算，结果必须达到最简.

详解剖析

若将a与2b单独通分，则形式为$\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{a(a-2b)}{a-2b}-\dfrac{2b(a-2b)}{a-2b}$.

若将a与2b的运算看成一个整体进行通分，则形式为$\dfrac{5b^2}{a-2b}-(a+2b)=\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用对应项系数相等巧求分式中待定字母的值

挑战·高分

例6 已知$\dfrac{4}{x(x^2+4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$，则$A=$_____，$B=$_____，$C=$_____.

解题秘方：先利用分式的加减法运算进行恒等变形，再求待定字母的值.

解：$\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}=\dfrac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}=\dfrac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}=\dfrac{4}{x(x^2+4)}$.

因为左右两边恒等且分母相同，故分子也应恒等，

即$(A+B)x^2+Cx+4A=4$，

所以$\begin{cases}A+B=0,\\C=0,\\4A=4.\end{cases}$

解得$\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=0.\end{cases}$

答案：1；−1；0

解法指导

1. 解这类题首先左、右两边通分，并各自进行加减运算，发现通分后左、右两边的分母相同，所以左、右两边的分子相等，构造方程或方程组来确定待定字母的值；

2. 解这类题也可利用恒等式的定义，任取x的三个值（使分式有意义），列出方程组，求出A，B，C的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸2 利用倒数法巧求分式的值

挑战·高分

技巧点拨

利用倒数法求分式值的思路：

涉及分式的分子是单项式，分母是多项式的求值问题时，直接求解往往有困难，可考虑求它的倒数，将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的加减法综合题目条件求解.

例7 已知 a，b，c 为有理数，且 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$，$\frac{ac}{c+a}=\frac{1}{5}$，求 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值.

解题秘方： 先对三个等式分别取倒数，相加后通分，再取倒数即得结果.

解： 因为 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，所以 a，b 均不为 0，且 $\frac{a+b}{ab}=3$.

所以 $\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=3$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$ ①. 利用分式的基本性质化简

同理可得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=4$ ②，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=5$ ③.

① + ② + ③，得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=12$.

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$，即 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=6$.

所以 $\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{6}$.

拔尖角度▸3 利用拆项法巧求分式的值

挑战·高分

解法提醒

本题体现了从特殊到一般的思想，注意猜想的结果要用所学的知识论证，本题总结的结论：$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

例8 [中难题] (1) 由 $\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$，$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$，…，你能总结出 $\frac{1}{n(n+2)}$（n 为正整数）的结果吗?

(2) 化简：$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\cdots+\frac{1}{(x+18)(x+20)}$.

解题秘方： 从数的运算猜想到式的规律，利用分式的加减法进行规律论证和运用.

解： (1) $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

(2) $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\cdots+\frac{1}{(x+18)(x+20)}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x+18}-\frac{1}{x+20}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}+\cdots+\frac{1}{x+18}-\frac{1}{x+20}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+20}\right)=\frac{10}{x^2+20x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节重点考查分式的加减法及分式的混合运算，在中考中，主要有分式的计算和分式的化简求值，其中分式的化简求值是中考的热点，多以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法1 利用分式的加、减法运算法则进行分式加减运算

例9 [中考·吉林]某学生化简分式$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}$出现了错误，解答过程如下：

$$\text{原式}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第一步})$$

$$=\frac{1+2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第二步})$$

$$=\frac{3}{x^2-1}.\ (\text{第三步})$$

（1）该学生解答过程是从第_____步开始出错的，其错误原因是_____；

（2）请写出此题正确的解答过程.

试题评析： 本题主要考查了分式的加减法运算，正确掌握分式的加、减法运算法则是解题的关键.

解：（1）一；分式的基本性质用错

（2）原式$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$.

考法2 利用分式的混合运算求值

例10 [中考·菏泽]先化简，再求值：$\frac{1}{x-y}\left(\frac{2y}{x+y}-1\right)\div\frac{1}{y^2-x^2}$，其中$x=y+2\,019$.

试题评析： 本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

解： $\frac{1}{x-y}\left(\frac{2y}{x+y}-1\right)\div\frac{1}{y^2-x^2}$

$=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{2y-x-y}{x+y}\cdot(y+x)(y-x)$

$=x-y$,

因为$x=y+2\,019$,

所以原式$=x-y=y+2\,019-y=2\,019$.

冲刺·满分

考法点评

考查分式的加减法，先分清是同分母还是异分母，其中分母互为相反数可变为同分母，若是异分母，必须先通分，然后运用同分母的分式的加、减法运算法则进行计算.

解法提醒

分式的化简求值一般是先化简再求值.化简的过程就是分式的混合运算，求值的过程就是求式子值的过程，若已知的是字母关系式的值时，则可考虑用整体代入求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见235页

1. [中考·攀枝花]化简 $\frac{m^2}{m-n}+\frac{n^2}{n-m}$ 的结果是(　　)

A. $m+n$　　B. $n-m$　　C. $m-n$　　D. $-m-n$

2. [中考·威海]化简 $\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{1}{x-3}$　　B. $\frac{1}{x+3}$　　C. $\frac{1}{3-x}$　　D. $\frac{3x+3}{x^2-9}$

3. 化简 $\left(1+\frac{4}{a-2}\right)\div\frac{a}{a-2}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{a+2}{a}$　　B. $\frac{a}{a+2}$　　C. $\frac{a-2}{a}$　　D. $\frac{a}{a-2}$

4. [中考·河北]若 $\frac{3-2x}{x-1}=(\quad)+\frac{1}{x-1}$，则(　　)中的数是(　　)

A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. 任意数

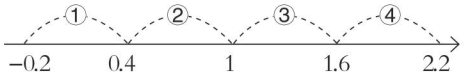
5. [中考·包头]化简：$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cdot ab$，其结果是(　　)　　【导学号：5136175】

A. $\frac{a^2b^2}{a-b}$　　B. $\frac{a^2b^2}{b-a}$　　C. $\frac{1}{a-b}$　　D. $\frac{1}{b-a}$

6. [中考·北京]如果 $m+n=1$，那么代数式 $\left(\frac{2m+n}{m^2-mn}+\frac{1}{m}\right)\cdot(m^2-n^2)$ 的值为(　　)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

7. [中考·河北]如图，若 x 为正整数，则表示 $\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x+1}$ 的值的点落在(　　)



(第7题)

A. 段①　　B. 段②　　C. 段③　　D. 段④

8. [中考·包头]化简：$1-\frac{a-1}{a+2}\div\frac{a^2-1}{a^2+4a+4}=$_____.

9. 某单位全体员工计划在植树节义务植树240棵，原计划每小时植树 a 棵，实际每小时植树的棵数是原计划的1.2倍，那么实际比原计划提前了_____h完成任务(用含 a 的代数式表示).

10. 若 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$，则 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ 的值为_____.

11. 设 a，b 是有理数，且 $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$，则 $\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}$ 的值是_____.

12. 将下列各式通分：

(1) $\frac{3}{4a^2b}$，$-\frac{5}{6b^2c}$，$\frac{1}{2ac^2}$；

(2) $\frac{x+2}{2x+2}$，$\frac{x}{x^2-x-2}$，$\frac{3}{8-4x}$；

(3) $\frac{a}{a^2+3a+2}$，$\frac{2}{a^2+2a+1}$，$\frac{1}{-3a-6}$.

13. 计算：$\left(a+2-\frac{3a-4}{a-2}\right)\div\frac{a^2-6a+9}{a-2}$.

14. [中考·杭州]化简：$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1$.

圆圆的解答如下：

$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1=4x-2(x+2)-(x^2-4)=-x^2+2x$.

圆圆的解答正确吗？如果不正确，写出正确的解答.

15. [中考·大庆]已知 $ab=1$，$b=2a-1$，求代数式 $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}$ 的值.

16. [中考·宿迁]先化简，再求值：$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\div\frac{2a}{a^2-1}$，其中 $a=-2$.

17. 已知 $\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$，试求 A，B 的值.

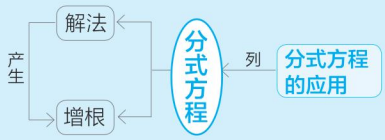
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.5 可化为一元一次方程的分式方程

核心知识

- 分式方程
- 分式方程的解法
- 增根
- 分式方程的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式方程的概念

1. 分式方程： 分母中含有未知数的方程叫作分式方程.

2. 判断一个方程是分式方程的条件：

（1）是方程；

（2）含有分母.

（3）分母中含有未知数.

以上三者缺一不可.


分式方程的定义

注意： 分式方程的分母中含有未知数，而不是一般的字母参数.

拨考向 利用分式方程的概念识别分式方程

例 1 判断下列方程是不是分式方程，并说明理由.

（1）$\frac{2x+3}{2}=8$；

（2）$\frac{3}{4-x}=\frac{4}{x+2}$；

（3）$\frac{x^2}{x}=1$；

（4）$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{y-3}$；

（5）$\frac{x}{a}-2=x$（a 为非零常数）.

解题秘方： 利用判断分式方程的依据——分母中含有未知数进行识别.

解：（1）不是分式方程，因为分母中不含有未知数.

（2）是分式方程，因为分母中含有未知数.

（3）是分式方程，因为分母中含有未知数.

（4）是分式方程，因为分母中含有未知数.

（5）不是分式方程，因为分母虽然含有字母 a，但 a 为非零常数，不是未知数.

提分·必记

特别解读

- 分母中是否含有未知数是区分分式方程和整式方程的依据.
- 识别分式方程时，不能对方程进行约分或通分变形，更不能用等式的基本性质变形.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是不是分式方程的方法：

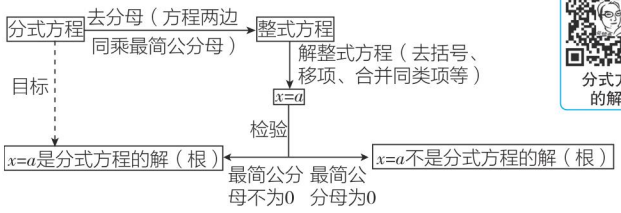
根据分式方程定义中的条件，判断方程中分母是否含有未知数（注意仅仅是字母不行，必须是表示未知数的字母），如果含有未知数，那么这个方程就是分式方程，否则就不是分式方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式方程的解法

1. 解分式方程的基本思路： 去分母，把分式方程转化为整式方程.

2. 解分式方程的一般步骤：





3. 检验方程根的方法：

一般地，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为0，因此应进行如下检验：

（1）将整式方程的解代入最简公分母，若最简公分母的值不为0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

（2）也可以将整式方程的解代入原分式方程，这种方法不仅能检验出该解是否适合原分式方程，还能检验所得的解是否正确.

4. 增根：

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的解使最简公分母的值为0，则这个解叫作原分式方程的增根.

技考向▶ 利用解分式方程的步骤解分式方程

例2 解下列方程：

（1）$\frac{x}{x-4}=\frac{x+2}{x-6}$；　　（2）$\frac{2-x}{x-3}=\frac{1}{3-x}-2$；

（3）$\frac{4x+6}{3x-3}-\frac{5x-4}{x-1}=1$；　　（4）$\frac{4}{x^2+2x}+\frac{7}{x^2-4}=\frac{6}{x^2-2x}$.

解题秘方： 将分式方程转化为整式方程，通过求整式方程的解并检验，从而得到分式方程的解.

解：（1）方程两边同乘$(x-4)(x-6)$，

得$x(x-6)=(x+2)(x-4)$.

解得$x=2$.

当$x=2$时，$(x-4)(x-6)\neq 0$.

所以原分式方程的解为$x=2$.

（2）方程两边同乘$(x-3)$，得$2-x=-1-2(x-3)$.

解得$x=3$.

当$x=3$时，$x-3=0$，

所以$x=3$不是原分式方程的解.

所以原分式方程无解.

提分·必记

特别解读

1. 解分式方程的关键是去分母. 去分母时不要漏乘不含分母的项，当分子是多项式时要用括号括起来.
2. 解分式方程一定要检验，对于增根必须舍去.
3. **对增根的理解：**
   （1）增根一定是分式方程化成的整式方程的解；
   （2）若分式方程有增根，则必是使最简公分母为0时的未知数的值.

提分·秘诀

特别警示

解分式方程时的易错点归纳：

(1) 去分母时常见三种典型错误：

①分母与最简公分母中的因式不是相同而是相反时，去分母后注意改变符号，如例2(2)中最简公分母是$(x-3)$，而$\frac{1}{3-x}$的分母是$(3-x)$，去分母后是“-1”而不是“1”.

②分子是多项式的，去分母后要带上括号，如例2(3)中$\frac{5x-4}{x-1}$，去分母后为$3(5x-4)$；

③不含分母的项易漏

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）方程两边同乘 $3(x-1)$，得 $4x+6-3(5x-4)=3(x-1)$.

解得 $x=\frac{3}{2}$.

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$3(x-1)\neq 0$.

所以原分式方程的解为 $x=\frac{3}{2}$.

（4）原方程可化为 $\frac{4}{x(x+2)}+\frac{7}{(x+2)(x-2)}=\frac{6}{x(x-2)}$.

方程两边同乘 $x(x+2)(x-2)$，得 $4(x-2)+7x=6(x+2)$.

解得 $x=4$.

当 $x=4$ 时，$x(x+2)(x-2)\neq 0$.

所以原分式方程的解为 $x=4$.

乘最简公分母，且最简公分母是多项式的也要带上括号.

（2）验根这一步是必不可少的步骤.

点知识▶3 分式方程的应用

1. 列分式方程常用的等量关系：

（1）**行程问题**：速度 × 时间 = 路程.

（2）**利润问题**：利润 = 售价 − 进价；利润率 = 利润 ÷ 进价 × 100%.

（3）**工程问题**：工作量 = 工作时间 × 工作效率；总工作量 = 各个分工作量之和.

2. 列分式方程解应用题的一般步骤：

（1）**审**：即审题，根据题意找出已知量和未知量，并找出等量关系.

（2）**设**：即设未知数，设未知数的方法有直接设和间接设，注意单位要统一，选择一个未知量用未知数表示，并用含未知数的式子表示相关量.

（3）**列**：即列方程，根据等量关系列出分式方程.

（4）**解**：即解所列的分式方程，求出未知数的值.

（5）**验**：即验根，既要检验所求的未知数的值是否适合分式方程，还要检验此解是否符合实际意义.

（6）**答**：即写出答案，注意单位和答案要完整.

提分·必记

特别解读

1. 审题时，先寻找题目中的关键词，然后借助列表、画图等方法准确找出相等关系. 当题目中包含多个相等关系时，要选择一个能够体现全部（或大部分）数量的相等关系列方程.
2. 设未知数时，一般题中问什么就设什么，若直接设未知数难以列方程，则可设另一个相关量为未知数，有时设一个未知数无法表示等量关系，可设多个未知数.
3. 应用题中解分式方程同样要验根.

拔考向▶利用建立分式方程的模型解决实际问题

类型 1：行程问题

例 3 为加快城市群的建设与发展，要在 A，B 两城市间新建一条城际铁路，建成后，铁路运行里程由现在的 120 km 缩短至 114 km，城际铁路的设计平均时速要比现行的平均时速快 110 km，运行时间仅是现行时间的 $\frac{2}{5}$，求建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间.

提分·秘诀

另解

本题也可从采用设间接未知数的方法进行求解.

设城际铁路的现行平均速度是 x km/h，则城际铁路的设计平均速度

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据题意中的两个等量关系，一个用来列式子，一个用来列方程解决问题.

1. 设计平均时速比现行平均时速快 110 km；
2. 设计运行时间是现行运行时间的 $\frac{2}{5}$

解：设建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间为 x h，则现行的运行时间为 $\frac{5}{2}x$ h.

根据题意，得 $\frac{114}{x}-\frac{120}{\frac{5}{2}x}=110$.

解得 $x=0.6$.

当 $x=0.6$ 时，$\frac{5}{2}x\neq 0$，且符合题意.

所以原分式方程的解为 $x=0.6$.

答：建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间为 0.6 h.

是 $(x+110)$ km/h.
根据题意，得
$\frac{120}{x}\times\frac{2}{5}=\frac{114}{x+110}$.
解得 $x=80$.
经检验，$x=80$ 是原分式方程的解，且符合题意.
所以 $\frac{120}{80}\times\frac{2}{5}=0.6$ (h).
答：建成后的城际铁路在 A, B 两城市间的运行时间为 0.6h.

类型 2：工程问题

例 4 在某市“青山绿水”行动中，某社区计划对面积为 3 600 m^2 的区域进行绿化，经投标由甲、乙两个工程队来完成. 已知甲队每天能完成绿化的面积是乙队每天能完成绿化面积的 2 倍，如果两队各自独立完成面积为 600 m^2 区域的绿化时，甲队比乙队少用 6 天.

（1）求甲、乙两个工程队每天各能完成多少面积的绿化；

（2）若甲队每天绿化费用是 1.2 万元，乙队每天绿化费用是 0.5 万元. 社区要使这次绿化的总费用为 40 万元，则应安排乙工程队绿化多少天？

解题秘方：紧扣工程问题中的常见的量之间的关系建立分式方程模型，从而解决问题.

解：（1）设乙工程队每天能完成的绿化面积为 x m^2，则甲工程队每天能完成的绿化面积为 $2x$ m^2，

根据题意，得 $\frac{600}{x}-\frac{600}{2x}=6$，解得 $x=50$.

经检验 $x=50$ 是原方程的解，

则 $2x=100$.

答：甲工程队每天能完成的绿化面积为 100 m^2，乙工程队每天能完成的绿化面积为 50 m^2.

（2）设甲工程队施工 a 天，乙工程队施工 b 天刚好完成绿化任务，

由题意，得 $100a+50b=3\,600$，

则 $a=\frac{72-b}{2}=-\frac{1}{2}b+36$，

根据题意，得 $1.2\times\left(-\frac{1}{2}b+36\right)+0.5b=40$，解得 $b=32$.

答：应安排乙工程队绿化 32 天.

解法提醒

1. 将工作量看作“1”时，完成任务的天数与工作效率互为倒数.
2. 在工程问题中，无论工作过程是怎样的，等量关系是：甲完成的工作量 + 乙完成的工作量 +…= 总工作量. 当总工作量没有给出时，一般记为整体“1”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：销售问题

例 5 某超市用 3 000 元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨 9 000 元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了 20%，购进干果的质量比第一次的质量的 2 倍还多 300 千克．若超市按每千克 9 元的价格出售，当大部分干果售出后，余下的 600 千克按售价的 8 折售完．

（1）该种干果第一次的进价是多少元／千克？

（2）超市销售这种干果共盈利多少元？

解题秘方：（1）根据等量关系“第二次购进干果的质量 =2× 第一次购进干果的质量 +300 千克”列方程进行求解；（2）根据“盈利 = 销售额 − 成本”列式进行计算．

解：（1）设该种干果第一次的进价是 x 元／千克，则第二次的进价为 $(1+20\%)x$ 元／千克．

根据题意，得 $\dfrac{9\,000}{(1+20\%)x}=2\times\dfrac{3\,000}{x}+300$.

解得 $x=5$.

经检验 $x=5$ 是分式方程的根，且符合题意．

所以原分式方程的解为 $x=5$.

答：该种干果第一次的进价是 5 元／千克．

（2）根据题意，盈利为 $\left[\dfrac{3\,000}{5}+\dfrac{9\,000}{5\times(1+20\%)}-600\right]\times 9+600\times 9\times 80\%-(3\,000+9\,000)=(600+1\,500-600)\times 9+4\,320-12\,000=5\,820$（元）．

答：超市销售这种干果共盈利 5 820 元．

知识储备

利润问题的相关公式及基本数量关系：

相关公式：

售价 = 进价 ×（1+ 利润率）；

售价 = 标价 × 折扣；

利润率 $=\dfrac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$.

基本数量关系：

利润 = 售价 − 进价；

利润 = 进价 × 利润率；

销售额 = 销售量 × 销售单价；

进价 ×（1+ 利润率）= 标价 × 折扣．

详解

由题意可知，按每千克 9 元的价格出售的干果的质量等于两次购进的干果的总质量减去 600 千克．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分组通分法巧解复杂的分式方程

例 6 解方程：$\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+6}$.

解题秘方：分析四个分式中分母之间的数量关系，利用分组通分的方式来解方程．

解：（方法一）方程两边分别通分后相加，

得 $\dfrac{2x+11}{(x+4)(x+7)}=\dfrac{2x+11}{(x+5)(x+6)}$.

因为无论 x 为何值，两个分母 $(x+4)(x+7)=x^2+11x+28$ 和 $(x+5)(x+6)=x^2+11x+30$ 都不可能相等，

所以要使两个分式的值相等，则分子相等，且都为 0.

挑战·高分

技巧点拨

一个复杂的分式方程，直接去分母时，计算相当麻烦，观察分式的结构特征可采取**分组通分法**，达到以下两种结果：

（1）左右两边分子相同，分母一定不相等，则只有分子的值为0时，分式方程才成立．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $2x+11=0$，所以 $x=-\frac{11}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

所以 $x=-\frac{11}{2}$ 是原方程的根.

（方法二）移项得 $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$，

方程两边分别通分后相减，

得 $\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

因为两个分式分子相同，分式值相同，所以分式的分母相同.

所以 $(x+4)(x+5)=(x+6)(x+7)$，

所以 $-4x-22=0$，所以 $x=-\frac{11}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

所以 $x=-\frac{11}{2}$ 是原方程的根.

（2）左右两边分子是一个相等的非零常数，则只有分母相等时，分式方程才成立.

拔尖角度▶ 2 利用分类讨论思想求分式方程无解时字母的值

挑战·高分

例 7 若关于 x 的分式方程 $2-\frac{1-kx}{x-2}=\frac{1}{2-x}$ 无解，求 k 的值.

解题秘方：根据分式方程无解的两种情况：（1）求出的整式方程的解使最简公分母为 0；（2）分式方程所化成的整式方程无解进行分类讨论，确定字母的值.

解：方程两边同乘最简公分母 $(x-2)$，

得 $2(x-2)-(1-kx)=-1$，即 $(2+k)x=4$ ①.

分两种情况讨论：

（1）当 $2+k\neq 0$，即 $k\neq -2$ 时，$x=\frac{4}{2+k}$.

因为原方程无解，

所以 $x-2=0$，即 $x=2$.

把 $x=2$ 代入①，得 $k=0$.

（2）当 $2+k=0$，即 $k=-2$ 时，方程①无解，

则原分式方程也无解.

综上，k 的值为 0 或 -2.

点拨微课堂

教你一招：将利用分类讨论思想解决分式方程无解问题的思路整理如下：

（1）将分式方程通过去分母化成整式方程，整式方程是 $ax=b$（$a=0$，$b\neq 0$）的形式；

（2）分式方程所化成的整式方程求得的根是原分式方程的增根：一般容易忽略第一种情况.

警示误区

分类讨论时，容易只考虑求出的整式方程的解使最简公分母为 0 的情况，而忽略了分式方程所化成的整式方程无解的情况，从而漏掉 k 的值为 -2 的结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用类比法探究分式方程的解与分式方程之间的关系

挑战·高分

思路点拨

（1）仿照已知几个方程左右两边及其解之间的关系，得出一般结论.

（2）将（2）题的分式方程变形，得到类似于（1）题中方程的结构，利用**整体思想**解方程.

例 8 阅读下列材料：

关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{1}{c}$；$x-\frac{1}{x}=c-\frac{1}{c}$，即 $x+\left(-\frac{1}{x}\right)=c+\left(-\frac{1}{c}\right)$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=-\frac{1}{c}$；

$x+\frac{2}{x}=c+\frac{2}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{2}{c}$；

$x+\frac{3}{x}=c+\frac{3}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{3}{c}$……

（1）请观察上述方程与其解的特征，猜想关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$（$m\neq 0$）的解是 $x_1=$_____，$x_2=$_____；

（2）利用上述结论求关于 x 的方程 $x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$ 的解.（不用进行检验）

解题秘方：根据题目所给的几个方程的解，找出解与方程之间的规律，然后将待解方程变形为已知方程的结构形式求解.

解：（1）c；$\frac{m}{c}$

（2）原方程可化为 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$，仿照（1）的结论可知 $x-1=a-1$ 或 $x-1=\frac{2}{a-1}$，解得 $x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是解分式方程、列分式方程解应用题.其中解分式方程是中考考查的热点，考查形式有选择题、填空题和解答题，难度一般不大；列分式方程解应用题是中考考查的重点，常常考查行程问题、工程问题和销售问题等，难度中等.

三年中考兵法

考法 1 利用分式方程的解的定义求字母的值

冲刺·满分

思路点拨

先利用方程解的定义，把x=4代入原分式方程，就得到一个关于a的新分式方程，解这个新分式方程，求出a的值并检验.

例 9 [中考·株洲]关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$ 的解为 $x=4$，则常数 a 的值为（　　）

A. $a=1$　　B. $a=2$　　C. $a=4$　　D. $a=10$

试题评析：本题考查分式方程解的概念及分式方程的解法，解答本题的关键是明确分式方程的解是使方程两边相等的未知数的值.

解：把 $x=4$ 代入方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$，得 $\frac{2}{4}+\frac{3}{4-a}=0$，解得 $a=10$. 经检验，当 $a=10$ 时，$x=4$ 是原方程的解.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分式方程增根的定义求字母的值

例 10 [中考·巴中]若分式方程 $\frac{3x-a}{x^2-2x}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x}$ 有增根，则 a 的值是（　　）

A. 0 或 2　　B. 4　　C. 8　　D. 4 或 8

试题评析：本题考查的是分式方程的增根. 在分式方程变形时，有可能产生不适合原方程的根，即能满足去掉分母后的整式方程，但代入原分式方程则无意义，我们把这样的根叫作原分式方程的增根.

解：方程两边同乘 $x(x-2)$，得 $3x-a+x=2(x-2)$，

由题意得，分式方程的增根为 $x=0$ 或 $x=2$，

当 $x=0$ 时，$-a=-4$，解得 $a=4$；

当 $x=2$ 时，$6-a+2=0$，解得 $a=8$.

所以 a 的值是 4 或 8.

答案：D

知识储备

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的解使最简公分母的值为 0，则这个解叫作原分式方程的增根；反之，若分式方程有增根，则必是使最简公分母为 0 时的未知数的值.

考法 3 分式方程的解法

例 11 [中考·济宁]解方程：$\frac{2x}{x-2}=1-\frac{1}{2-x}$.

试题评析：本题主要考查分式方程的解法，解决本题的关键是把分式方程两边同乘最简公分母后转化为整式方程.

解：去分母，得 $2x=x-2+1$，

解得 $x=-1$.

经检验 $x=-1$ 是原分式方程的解.

考法点评

解分式方程要把握两个关键：一是将分式方程转化为整式方程，二是分式方程的验根.

考法 4 分式方程的应用

例 12 [中考·宜宾]用 A，B 两种机器人搬运大米，A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 20 袋大米，A 型机器人搬运 700 袋大米与 B 型机器人搬运 500 袋大米所用时间相等. 求 A，B 型机器人每小时分别搬运多少袋大米.

试题评析：本题考查分式方程的应用，认真阅读，仔细分析题意，找出题中的等量关系是解题的关键.

解：设 A 型机器人每小时搬运 x 袋大米，则 B 型机器人每小时搬运 $(x-20)$ 袋大米.

根据题意，得 $\frac{700}{x}=\frac{500}{x-20}$，

解得 $x=70$.

经检验，$x=70$ 是原分式方程的解，且符合题意.

此时 $x-20=50$.

答：A 型机器人每小时搬运 70 袋大米，B 型机器人每小时搬运 50 袋大米.

考法点评

解分式方程的应用题和解一般方程的应用题步骤一样，由于解分式方程要验根，所以解分式方程的应用题既要检验未知数的值是否是方程的解，还要检验是否符合问题的实际意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见236页

1. 下列方程不是分式方程的是（　　）

A. $\frac{1}{x}+x=2$　　B. $\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1+x}=2$　　D. $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-7}$

2. [中考·荆州]解分式方程 $\frac{1}{x-2}-3=\frac{4}{2-x}$ 时，去分母可得（　　）

A. $1-3(x-2)=4$　　B. $1-3(x-2)=-4$

C. $-1-3(2-x)=-4$　　D. $1-3(2-x)=4$

3. [中考·成都]分式方程 $\frac{3}{2x}=\frac{1}{x-1}$ 的解为（　　）

A. $x=1$　　B. $x=2$

C. $x=3$　　D. $x=4$

4. [中考·聊城]如果解关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2}-\frac{2x}{2-x}=1$ 时出现增根，那么 m 的值为（　　）

A. -2　　B. 2　　C. 4　　D. -4

5. [中考·十堰]十堰即将跨入高铁时代，钢轨铺设任务也将完成．现还有 6 000 米的钢轨需要铺设，为确保年底通车，如果实际施工时每天比原计划多铺设 20 米，就能提前 15 天完成任务．设原计划每天铺设钢轨 x 米，则根据题意所列的方程是（　　）

A. $\frac{6\,000}{x}-\frac{6\,000}{x+20}=15$

B. $\frac{6\,000}{x+20}-\frac{6\,000}{x}=15$

C. $\frac{6\,000}{x}-\frac{6\,000}{x-15}=20$

D. $\frac{6\,000}{x-15}-\frac{6\,000}{x}=20$

6. 对于非零的两个数 a,b，规定 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，若 $2\oplus(2x-1)=1$，则 x 的值为_____.

7. 方程 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$ 的解为 $x=1$；方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$ 的解为 $x=2$；方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}$ 的解为 $x=3$；…；按此规律，解为 $x=6$ 的方程应表示为_____.

8. 解分式方程：

（1）[中考·金华] $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$；

（2） $\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$.

9. [中考·黄冈]黄麻中学为了创建全省“最美书屋”，购买了一批图书，其中科普类图书平均每本的价格比文学类图书平均每本的价格多 5 元．已知学校用 12 000 元购买的科普类图书的本数与用 9 000 元购买的文学类图书的本数相等，求学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格各是多少元．

10. [中考·百色]班级组织同学乘大巴车前往“研学旅行”基地开展爱国教育活动，基地离学校有 90 千米，队伍 8:00 从学校出发，苏老师因有事情，8:30 从学校自驾小车以大巴车 1.5 倍的速度追赶，追上大巴车后继续前行，结果比队伍提前 15 分钟到达基地，问：

（1）大巴车与小车的平均速度各是多少？

（2）苏老师追上大巴车的地点到基地的路程有多远？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分式运算中的常用技巧与方法

荣老师告诉你 在分式的运算中，若能认真观察题目的结构特征，灵活运用解题技巧，选择恰当的运算方法，常常会得到事半功倍的效果.

技巧一 ▶ 整体通分法

例 1 计算：$\frac{a^2}{a-1}-a-1$.

解题秘方：将后两项看成一个整体，则可以整体通分，简便求解.

解：原式 $=\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}$

$=\frac{a^2-(a^2-1)}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

方法点拨：运用**整体通分法**计算时，看成一个整体的部分要用括号括起来，运用添括号法则时，如果前面是“−”号，注意要变号.

技巧二 ▶ 逐项通分法

例 2 计算：

$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$.

解题秘方：若全部通分，最简公分母好确定，但分子的计算量太大，观察分母发现，从前到后逐项通分时，分母都构成平方差形式.

解：原式 $=\frac{(a+b)-(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}=\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b(a^2+b^2)-2b(a^2-b^2)}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{4b^3}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}=0$.

技巧三 ▶ 先约分，后通分

例 3 计算：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$.

解题秘方：先不要盲目通分，观察后发现每个分式都可以约分，所以先将分子、分母分解因式，约分后再通分计算.

解：原式 $=\frac{a(a+6)}{a(a+2)}-\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}$

$=\frac{a+6}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}$

$=\frac{a^2-2a+6a-12}{a^2-4}-\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}$

$=\frac{-16}{a^2-4}=-\frac{16}{a^2-4}$.

方法点拨：先约分的目的是为了简化最简公分母，使在运算过程中分子的计算量减少.

技巧四 ▶ 整体代入法

例 4 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，求 $\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}$ 的值.

解题秘方：一个条件无法求出两个未知数的值，所以只能考虑整体代入求值.

解：（方法一） 因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，所以 $xy\neq 0$.



所以原式 $=\frac{\frac{2}{y}-5+\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}+2+\frac{1}{x}}=\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-5}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2}$

$=\frac{2\times 5-5}{5+2}=\frac{5}{7}$.

（方法二） 因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，

所以 $\frac{x+y}{xy}=5$，所以 $x+y=5xy$ 且 $xy\neq 0$.

所以原式 $=\frac{2(x+y)-5xy}{(x+y)+2xy}=\frac{2\times 5xy-5xy}{5xy+2xy}=\frac{5xy}{7xy}=\frac{5}{7}$.

方法点拨：用**整体代入法**求分式的值是最常用的方法，原因是分式可以约分，当不能求出分式中各个字母的值时，可以考虑利用整体代入法，虽然分子和分母中都含有字母，但通过约分可以求出其值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧五 ▶ 运用公式变形法

例 5 已知 $a^2-5a+1=0$，计算：$a^4+\frac{1}{a^4}$.

解题秘方： 借用整式的乘法公式解决分式的求值问题，关键是找准公式的基本模型.

解： 由已知条件可得 $a\neq 0$，所以 $a+\frac{1}{a}=5$.

所以 $a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$

$=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2$

$=(5^2-2)^2-2$

$=527$.

方法点拨： 运用乘法公式变形求分式的值，避免了求出分式中字母的值. 其中互为倒数的两个式子的和在运用完全平方公式时，积的 2 倍等于 2.

技巧六 ▶ 设辅助参数法

例 6 已知 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$，计算：$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

解题秘方： 利用设参数进行转化，从而求出待定字母的值.

解： 设 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则 $b+c=ak$，$a+c=bk$，$a+b=ck$.

把这 3 个等式相加，得 $2(a+b+c)=(a+b+c)k$，

若 $a+b+c=0$，即 $a+b=-c$，则 $k=-1$.

若 $a+b+c\neq 0$，则 $k=2$.

$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{ck\cdot ak\cdot bk}{abc}=k^3$.

当 $k=-1$ 时，原式 $=-1$.

当 $k=2$ 时，原式 $=8$.

方法点拨： 设辅助参数，利用**整体代入法**将要求的分式转化为以辅助参数为字母的分式，利用约分可求出其值.

技巧七 ▶ 应用倒数变换法

例 7 已知 $\frac{a}{a^2-a+1}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$ 的值.

解题秘方： 将已知的分式和要求的分式的分子和分母都颠倒，对比其结构求值.

解： 由条件知 $a\neq 0$，

所以 $\frac{a^2-a+1}{a}=7$，即 $a+\frac{1}{a}=8$，

所以 $\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+1=63$，

所以 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}=\frac{1}{63}$.

方法点拨： 本题将分式的分子和分母颠倒，然后转化为用技巧五中的公式变形法求值. 注意对于要求的分式的值要倒过来还原.

技巧八 ▶ 把未知数当成已知数法

例 8 已知 $3a-4b-c=0$，$2a+b-8c=0$，$c\neq 0$. 计算：$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$.

解题秘方： 确定一个字母为已知数，利用解二元一次方程组求出方程组的解，再代入待求式子求值.

解： 把 c 当作已知数，用 c 表示 a 和 b，得 $a=3c$，$b=2c$.

又因为 $c\neq 0$，

所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}=\frac{14c^2}{11c^2}=\frac{14}{11}$.

技巧九 ▶ 特殊值法

例 9 已知 $abc=1$，求 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$ 的值.

解题秘方： 由已知条件无法求出 a,b,c 的值，可根据已知条件取字母的一些特殊值，然后代入求值.

解： 令 $a=1$，$b=1$，$c=1$，则

原式 $=\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}=1$.

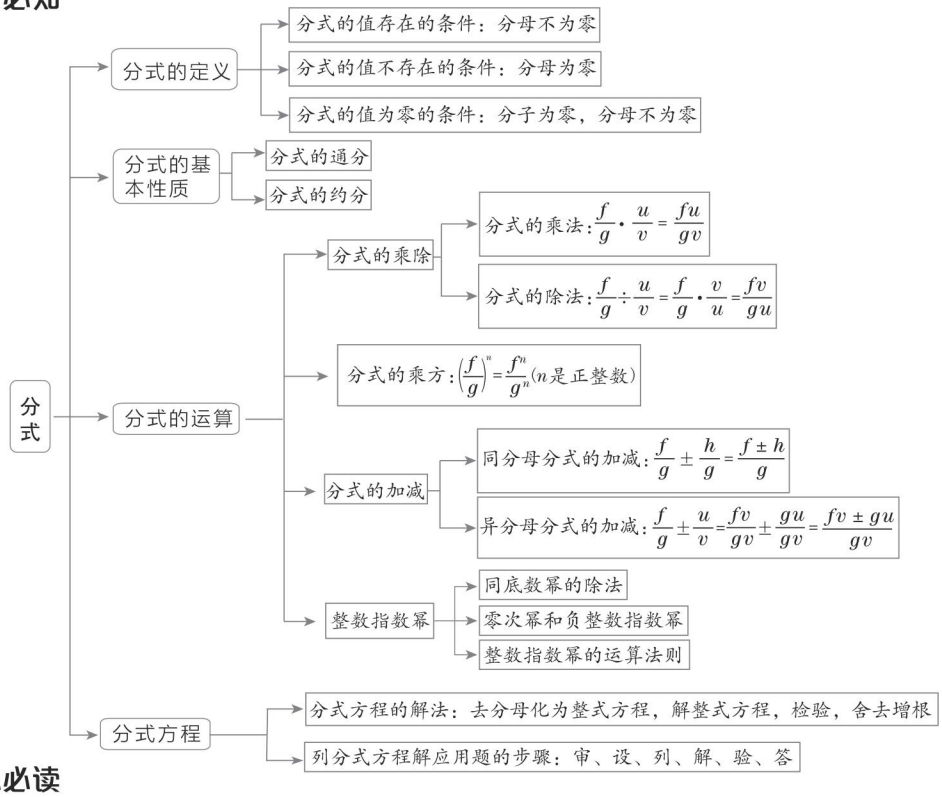
方法点拨： 特殊值法要求所取的特殊值必须符合题目中给出的已知条件，运用**特殊值法**可准确、迅速地求出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一个整式f除以一个非零整式g（g中含有字母），所得的商记作$\frac{f}{g}$，把代数式$\frac{f}{g}$叫作分式，$g\neq 0$是分式的值存在的条件；$f=0$，$g\neq 0$是分式的值为零的条件.

2. **分式的基本性质：**分式的分子与分母都乘或除以同一个非零整式，所得分式与原分式相等.根据分式的基本性质可以将分式进行通分或者约分.

3. 分式的运算包括乘方、乘除和加减，乘除法运算关键是约分，加减法运算关键是通分，运算的最后结果一定要是最简分式或整式.

4. 一个数的负整数指数幂等于这个数的正整数指数幂的倒数，利用负整数指数幂可以将一个绝对值较小的数用科学记数法的形式表示出来.

5. 解分式方程关键就是利用等式的性质将方程的两边同乘最简公分母，将分式方程转化成整式方程，然后解整式方程.解完整式方程后一定要注意检验.若使最简公分母的值为零，则该根为增根.

6. 列分式方程解应用题时，应先分析题意，准确找出题中的相等关系，然后设出恰当的未知数，列出方程，解方程，最后一定要检验，既要检验是否为所列方程的解，又要检验是否符合题意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 分式的相关概念

链接中考» 在分式的相关概念中，分式的值存在的条件及分式值为0的条件最为重要，也是中考中热门的考点，一般都是以填空题、选择题的形式出现.

例1 （1）要使分式$\frac{3}{x-2}$的值存在，则x的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x\neq -2$　　D. $x\neq 2$

（2）[中考·衡阳]若分式$\frac{x-2}{x+1}$的值为0，则x的值为（　　）

A. 2或-1　　B. 0

C. 2　　D. -1

解题秘方： 利用分式的值存在及分式的值为0的条件解决问题.

解：（1）根据分式的值存在的条件可知$x-2\neq 0$，所以$x\neq 2$.

（2）由题意可知$x-2=0$，得$x=2$. 由$x+1\neq 0$，得$x\neq -1$，所以$x=2$.

答案：（1）D　　（2）C

方法点拨： 分式的值为0需要同时具备两个条件：一是分子等于0，二是分母不等于0，二者缺一不可.

专题二 分式的运算

链接中考» 分式的运算是本章的重点，它的关键是分式的运算顺序以及分式的运算法则，中考中考查的形式主要是化简求值，属中等难度题目.

例2 先化简：$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2}{x^2+2x+1}$，再代入一个合适的$x$的值求值.

解题秘方： 利用分式的运算法则进行化简，选择一个使原式有意义的值代入求值.

解：
$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2}{x^2+2x+1}$$
$$=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^2}$$
$$=\frac{(x+1)^2}{x^2}-\frac{x+1}{x^2}$$
$$=\frac{x^2+x}{x^2}$$
$$=\frac{x+1}{x}.$$

取$x=2$，则$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2}{x^2+2x+1}=\frac{x+1}{x}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$.

方法点拨： 对于分式化简求值问题没有捷径，需要掌握因式分解和代入求值的方法等知识，分式问题中还需注意分式的值存在的条件. 如本题代入x的值必须使原式有意义，不能是0和-1.

专题三 科学记数法

链接中考» 利用负整数指数幂将一个绝对值较小的数用科学记数法的形式表示出来，一般这个数据都是生活中出现的数据，体现了数学应用于生活，考查时一般以选择题的形式出现，在中考中也是考查的热点.

例3 [中考·宜宾]人体中枢神经系统中约含有1千亿个神经元，某种神经元的直径约为52微米，52微米为0.000 052米，将0.000 052用科学记数法表示为（　　）

A. 5.2×10^{-6}　　B. 5.2×10^{-5}

C. 52×10^{-6}　　D. 52×10^{-5}

解题秘方： 利用科学记数法的表示方法表示提供的数据.

解： 0.000 052是绝对值较小的数，这类数用科学记数法表示的方法是写成$a\times10^{-n}$（$1\leqslant|a|<10$，n为正整数）的形式，关键是确定$-n$，先确定n的值，$-n$的值就确定了. 确定方法是：n的值等于原数中左起第一个非零数字前零的个数（含整数数位

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

上的零）. 由于数 0.000 052，非 0 数字 5 前面共有 5 个 0，因此 $0.000\,052=5.2\times10^{-5}$.

答案： B

方法点拨： 把一个数写成 $a\times10^{n}$ 的形式（$1\leqslant|a|<10$，n 为非零整数），这种记数法称为科学记数法，其方法是：

（1）确定 a，a 是整数数位只有一位的数；

（2）确定 n，当原数的绝对值较大时，n 为正整数，n 等于原数的整数位数减 1；当原数的绝对值较小时，n 为负整数，n 的绝对值等于原数中左起第一个非零数字前零的个数（含整数数位上的零）.

专题四 解分式方程

链接中考》 解分式方程关键就是将分式方程转化为整式方程，解分式方程一定要注意检验. 解方程是中考中的热门考点，一般都是直接考查解分式方程.

例 4 解方程：$\dfrac{x}{3x-1}=2-\dfrac{1}{1-3x}$.

解题秘方： 利用解分式方程的步骤解分式方程，注意验根.

解： 去分母，得 $x=2(3x-1)+1$，

去括号，得 $x=6x-2+1$，

移项，得 $x-6x=-2+1$，

合并同类项，得 $-5x=-1$，

系数化为 1，得 $x=\dfrac{1}{5}$，

经检验，$x=\dfrac{1}{5}$ 是分式方程的解.

方法点拨： 分式方程 $\xrightarrow[\text{转化为}]{\text{去分母}}$ 整式方程 $\longrightarrow$ 解整式方程 $\longrightarrow$ 检验根 $\longrightarrow$ 确定原方程的根.

专题五 分式方程的应用

链接中考》 分式方程的应用是分式方程作用的关键体现，都是以解决生活中的问题为目的，所以考查分式方程的应用时，问题的背景都是现实生活中的热点问题，解决问题的关键是寻找等量关系. 在中考中单独考查时一般以解答题的形式出现.

例 5 ［中考·黄冈］为了对学生进行革命传统教育，红旗中学开展了“清明节祭扫”活动. 全校学生从学校同时出发，步行 4 000 米到达烈士纪念馆. 学校要求九（1）班提前到达目的地，做好活动的准备工作. 行走过程中，九（1）班步行的平均速度是其他班的 1.25 倍，结果比其他班提前 10 分钟到达. 分别求九（1）班、其他班步行的平均速度.

解题秘方： 紧扣题意中揭示的等量关系，建立分式方程的模型解决问题.

解： 设其他班步行的平均速度为 x 米/分，则九（1）班步行的平均速度为 $1.25x$ 米/分.

依题意，得 $\dfrac{4\,000}{x}-\dfrac{4\,000}{1.25x}=10$，

解得 $x=80$，

经检验，$x=80$ 是原方程的解，且符合题意，

所以 $1.25x=100$.

答：九（1）班步行的平均速度为 100 米/分，其他班步行的平均速度为 80 米/分.

方法点拨： 分式方程的应用关键要把握两点：一是合理地设出未知数建立分式方程的模型；二是验根的步骤不能漏掉.

Ⅱ 方法必会

专题六 整体思想

专题解读》 解决某些数学问题时，把一组数或一个式子看成一个整体进行处理，不仅可以简化解题过程，而且还能拓宽思路，培养创新意识，体现了数学中的一种重要思想——整体思想. 这一思想在整式的乘法的运算中体现明显，在解题中应用较多，要引起重视.

例 6 ［中考·河北］若 $a=2b\neq0$，则 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$ 的值为_____.

解题秘方： 利用**整体代入法**，将分式的分子、分母用同一个字母表示出来，再利用分式的基本性质求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$

$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$

$=\dfrac{a+b}{a}$

$=\dfrac{2b+b}{2b}$

$=\dfrac{3b}{2b}$

$=\dfrac{3}{2}$.

答案： $\dfrac{3}{2}$

方法点拨： 本题运用了**整体思想**求值．整体思想就是在研究和解决有关数学问题时，利用问题的整体形式、整体结构、整体特征等，对问题整体处理的解题方法．整体思想的表现形式有：整体代入、整体加减、整体补形、整体变换等．

专题七 倒数法

专题解读》 有些分式求值问题直接求解困难时，可考虑求它的倒数，将问题转化为方便求解的问题，这类问题中分式的形式通常是分子是单项式，分母是多项式，此时将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的基本性质，结合题目条件就方便求解了．

例 7 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，求 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值．

解题秘方： 颠倒所求分式的分子和分母的位置可得 $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$，利用分式的基本性质可得 $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$，再将条件等式两边平方即可求解．

解： $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的倒数是 $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$，

$\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$，

因为 $x+\dfrac{1}{x}=3$，

所以 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3^2$，

所以 $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=9$，

所以 $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}=8$，

所以 $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=8$，

因此 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{8}$．

方法点拨： **倒数法**是处理分式问题的常用方法，对于分式求值问题，要仔细研究式子的特征，灵活运用倒数法．

专题八 裂项相消法

专题解读》 裂项相消法，可使出现多个分式的加减或相关的分式方程问题，通过变形将一部分项相互抵消，转化为常见的分式加减或常见的相关的分式方程，变复杂为简单，变难为易，不失为一种巧妙的解题方法．

例 8 解方程：$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{x+3}$．

解题秘方： 观察可以发现等号左边每个分式的分母中的两个因式相差 1，因此可逆向运用异分母分式的加减法法则进行裂项，相消后化为常见的分式方程求解．

解： 原方程变形为 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}$，

整理，得 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+3}=0$，

去分母，得 $x+3-2x=0$，

移项，得 $x-2x=-3$，

合并同类项，得 $-x=-3$，

解得 $x=3$．

经检验，$x=3$ 是原分式方程的解．

方法点拨： 当涉及的分式方程有多个分式，且分母与分子有某种规律时，常常通过**裂项相消的方法**把方程化为熟悉的分式方程求解，体现了转化思想．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见237页

题型1：利用分式的基本性质求值

1. 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$，求$\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}$的值.

2. 已知$a+b+c=0$，求$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$的值.

3. 已知$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\neq 0$，求$\frac{3a-2b+5c}{a+b+c}$的值.

题型2：分式的化简求值

4. 先化简，再求值：$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}$，其中$x=2$.

5. 先化简，再求值：$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\div\frac{2x-y}{x^2-y^2}$，其中$x$，$y$满足$|x-2|+(2x-y-3)^2=0$.

6. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\div\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{x}{x+1}$，其中$x$满足$x^2-x-1=0$.

题型3：分式方程的解法

7. 解方程：$\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{3x+3}+1$.

8. 解方程：$\frac{2+x}{2-x}+\frac{16}{x^2-4}=-1$.

题型4：分式方程解的情况

9. 当m为何值时，关于x的分式方程$\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$会产生增根?

10. 若关于x的方程$\frac{m}{x^2-9}+\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-3}$无解，求$m$的值.

题型5：分式方程的应用

11. [**中考·威海**]小明和小刚约定周末到某体育公园打羽毛球. 他们两家到体育公园的距离分别是1 200 m,3 000 m, 小刚骑自行车的速度是小明步行速度的3倍，若二人同时到达，则小明需提前4 min出发. 求小明和小刚两人的速度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 1 章测试卷

☞答案见 238 页

（120 分 90 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 若分式$\frac{x}{x-2}$有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x=2$　　D. $x\neq 2$

2. 分式 $\frac{2}{3x}$，$\frac{x+1}{-2x^2}$，$\frac{2x-1}{4x^3}$ 的最简公分母是（　　）

A.12　　B.$24x^6$　　C.$12x^6$　　D.$12x^3$

3. 下列变形正确的是（　　）

A. $\frac{b+1}{a+1}=\frac{b}{a}$　　B. $\frac{a+b}{a+b}=0$

C. $\frac{0.1a-0.3b}{0.2a+b}=\frac{a-3b}{2a+b}$　　D. $\frac{-a+b}{a-b}=-1$

4. 已知 $a=2^{-2}$，$b=(\pi-1)^0$，$c=(-1)^3$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

5. 花粉的质量很小，一粒某种植物花粉的质量约为 0.000 037 毫克，已知 1 克 =1 000 毫克，那么 0.000 037 毫克可以用科学记数法表示为（　　）

A.3.7×10^{-5} 克　　B.3.7×10^{-6} 克

C.3.7×10^{-7} 克　　D.3.7×10^{-8} 克

6. 计算$\frac{a-1}{a}\div\left(a-\frac{1}{a}\right)$的结果是（　　）

A. $\frac{1}{a+1}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{a-1}$　　D. -1

7. 若$\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot w=1$，则 $w=$（　　）

A.$a+2$　　B.$-a+2$

C.$a-2$　　D.$-a-2$

8. 分式方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$ 的解是（　　）

A. $x=0$　　B. $x=-1$

C. $x=\pm1$　　D. 无解

9. 甲种污水处理器处理 25 吨污水与乙种污水处理器处理 35 吨污水所用时间相同，已知乙种污水处理器每小时比甲种污水处理器多处理 20 吨污水，求两种污水处理器的污水处理效率．设甲种污水处理器的污水处理效率为 x 吨／时，依题意列方程正确的是（　　）

A. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x-20}$　　B. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x+20}$

C. $\frac{25}{x-20}=\frac{35}{x}$　　D. $\frac{25}{x+20}=\frac{35}{x}$

10. 若分式方程 $\frac{x}{x+1}=\frac{m}{x+1}$ 无解，则 m 的值为（　　）

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D.-2

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 如果分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 的值为 0，那么 x 的值为_____.

12. 计算：$(-2xy^{-1})^{-3}=$_____.

13. 分式方程 $\frac{2x}{x+2}-\frac{3}{x-2}=2$ 的解是_____.

14. 已知 $3x-4y-z=0$，$2x+y-8z=0$，则分式 $\frac{xy+yz+2xz}{x^2+y^2+z^2}=$_____.

15. 若 $(x-y-2)^2+|xy-3|=0$，则 $\left(\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{x-y}\right)\div\frac{1}{y}$ 的值是_____.

16. 某中学图书馆添置图书，用 240 元购进一种科普书，同时用 200 元购进一种文学书．由于科普书的单价比文学书的单价高出一半，因此学校所购进的文学书比科普书多 4 本，则这种文学书的单价为_____元.　**【导学号：5136175】**

三、解答题（共 72 分）

17.（6 分）化简：$\frac{2a}{a+1}-\frac{2a-4}{a^2-1}\div\frac{a-2}{a^2-2a+1}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（8分）先化简，再求值：$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$，其中$x=3$.

19.（8分）[中考·东营]化简求值：$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-ab}\right)\div\frac{a^2+2ab+b^2}{a}$，当$a=-1$时，请你选择一个适当的数作为$b$的值，代入求值.

20.（8分）[中考·张家界]先化简，再求值：$\left(\frac{2x-3}{x-2}-1\right)\div\frac{x^2-2x+1}{x-2}$，然后从0，1，2三个数中选择一个恰当的数代入求值.

21.（10分）解方程：

（1）$\frac{3x}{x+2}+\frac{2}{x-2}=3$；

（2）$\frac{4}{x^2-1}+\frac{x+2}{1-x}=-1$.

22.（10分）[中考·大庆]某工厂现在平均每天比原计划多生产50台机器，现在生产600台机器所需时间与原计划生产450台机器所需时间相同，求该工厂原来平均每天生产多少台机器.

23.（10分）[中考·云南]为进一步营造扫黑除恶专项斗争的浓厚宣传氛围，推进平安校园建设，甲、乙两所学校各租用一辆大巴车组织部分师生，分别从距目的地240 km和270 km的两地同时出发，前往“研学教育”基地开展扫黑除恶教育活动，已知乙校师生所乘大巴车的平均速度是甲校师生所乘大巴车的平均速度的1.5倍，甲校师生比乙校师生晚1 h到达目的地，分别求甲、乙两所学校师生所乘大巴车的平均速度.

24.（12分）仙桃是遂宁市某地的特色时令水果，仙桃一上市，水果店的老板用2 160元购进一批仙桃，很快售完；老板又用3 700元购进第二批仙桃，所购件数是第一批的$\frac{5}{3}$倍，但进价比第一批每件多了5元.

（1）第一批仙桃每件进价是多少元?

（2）老板以每件225元的价格销售第二批仙桃，售出80%后，为了尽快售完，剩下的决定打折促销，要使得第二批仙桃的销售利润为440元，剩余的仙桃每件售价打几折?（利润=售价−进价）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

感悟三角形的基本性质

感悟三角形的基本性质

第2章 三角形









核心考点

你将见到的

- 三角形的三边关系
- 三角形的三条重要线段
- 三角形内角和定理
- 等腰三角形
- 线段的垂直平分线
- 全等三角形

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 等面积法
- 设元法
- 整体思想
- 分类讨论思想
- 方程思想
- 类比法
- 截长补短法
- 加倍折半法

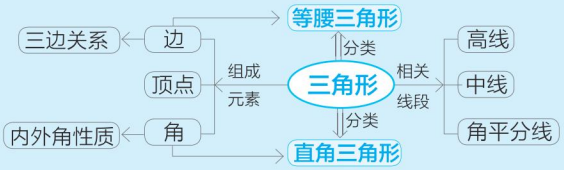
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1 三角形

核心知识

- 三角形的相关元素
- 三角形的三边关系
- 三角形的三条重要线段
- 三角形的角

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三角形的相关元素

1. 三角形的定义：

不在同一直线上的三条线段首尾相接所构成的图形叫作三角形.

三角形的表示法：三角形可用符号“△”表示，如图 2.1−1 中的三角形可记作“△ ABC”，读作“三角形 ABC”. 字母的顺序可以自由安排

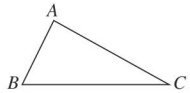


图 2.1−1

2. 三角形的“三元素”：

（1）**顶点：**如图 2.1−1，点 A，B，C 叫作△ ABC 的顶点.

（2）**内角：**如图 2.1−1，∠ A，∠ B，∠ C 叫作△ ABC 的内角.

（3）**边：**如图 2.1−1，线段 AB，BC，CA 叫作△ ABC 的边.

拨考向 利用三角形识别三角形中相关元素

例 1 如图 2.1−2，在△ ABC 中，D，E 分别是 BC，AC 上的点，连接 BE，AD 交于点 F.

（1）图中共有多少个三角形？请把它们表示出来.

（2）△ BDF 的三个顶点是什么？三条边是什么？三个内角呢？

（3）以 AB 为边的三角形有哪些？

（4）以∠ C 为内角的三角形有哪些？

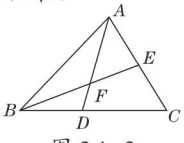


图 2.1−2

解题秘方：紧扣“三角形及其元素的定义”及几何图形计数的常用方法进行解答.

解：（1）图中共有 8 个三角形，分别是△ ABF，△ AEF，△ ABE，△ ABD，△ ACD，△ ABC，△ BDF，△ BCE.

（2）△ BDF 的三个顶点是点 B，D，F，三条边是线段 BD，DF，BF，三个内角是∠ FBD，∠ FDB，∠ BFD.

（3）以 AB 为边的三角形有△ ABF，△ ABD，△ ABE，△ ABC.

（4）以∠ C 为内角的三角形有△ ACD，△ BCE，△ ACB.

提分·必记

特别解读

1. 三角形的“三要素”：
   （1）三条线段；
   （2）三个顶点不在同一条直线上；
   （3）三条线段首尾顺次相接.
2. 三角形的边是一条线段，既可用两个顶点的大写字母表示，也可用边所对的顶点的小写字母表示，如顶点 A 所对的边 BC 可用 a 表示.

提分·秘诀

方法点拨

几何图形计数的常用方法：
(1) 按序计数法；
(2) 画图计数法；
(3) 基本图形计数法；
(4) 分类计数法.

特别提醒

三角形的三个顶点的字母的次序可以任意调换，如△ ABF 也可以写成△ BAF，△ BFA，△ FAB 等.

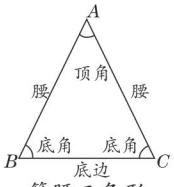
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 等腰三角形及相关概念

1. 等腰三角形：两条边相等的三角形叫作等腰三角形.

在等腰三角形中，相等的两边叫作腰，另外一边叫作底边，两腰的夹角叫作顶角，腰和底边的夹角叫作底角.（如图 2.1−3）

三边都相等的三角形叫作等边三角形（或正三角形），它是腰和底边相等的等腰三角形.



等腰三角形
图 2.1−3

2. 三角形的分类：

等腰三角形包括等边三角形，等边三角形是特殊的等腰三角形.

按边的相等关系分类：

三角形 $\begin{cases}\text{三边都不相等的三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底边和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$



分类示意图如图 2.1−4.

图 2.1−4

拔考向▶ 利用等腰三角形相关概念判断三角形的形状

例 2 [易错题]已知△ ABC 的三边长分别为 a,b,c，试判断△ ABC 的形状.

（1）三边长满足 $(a-b)^2+|b-c|=0$；

（2）三边长满足 $(a-b)(b-c)=0$.

解题秘方：要判断三角形的形状，可根据“是否有边相等”来判断，所以从条件中分析出三边的关系是解决本题的关键.

解：（1）因为 $(a-b)^2+|b-c|=0$，

所以 $a-b=0$，$b-c=0$.

所以 $a=b=c$. 所以△ ABC 为等边三角形.

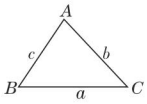
（2）因为 $(a-b)(b-c)=0$，

所以 $a-b=0$ 或 $b-c=0$.

所以 $a=b$ 或 $b=c$. 所以△ ABC 为等腰三角形.

点知识▶ 3 三角形的三边关系

三角形的三边关系：

文字语言	数学语言	图形
三角形的任意两边之和大于第三边	$a+b>c$，$b+c>a$，$a+c>b$	
三角形的任意两边之差小于第三边	$a-b<c$，$b-c<a$，$a-c<b$（$a>b>c$）	

提分·必记

特别提醒

- 等腰三角形中有关边角的名称与三角形的摆放位置无关.
- 等腰三角形的顶角可以是锐角直角或钝角，而底角只能是锐角.

提分·秘诀

方法点拨

从边的角度判断三角形的形状，若只能判断出有两条边相等，则此三角形是等腰三角形，若能判断出三边相等，则此三角形是等边三角形.

提分·必记

特别提醒

应用三角形的三边关系时，常选取两条较小的边的和与第三边作比较，选取最大边与最小边的差与第三边作比较.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用三角形的三边关系判断三角形的存在

例 3 用一条长为 21 cm 的细绳围成一个三角形，能围成一个有一边长是 5 cm 的等腰三角形吗？

解题秘方：紧扣“5 cm 长的边的可能性（腰或底边）”进行分类解答.

解：当 5 cm 长的边是底边时，设腰长为 x cm，

则 $5+2x=21$，解得 $x=8$. 易知符合三角形的三边关系.

当 5 cm 长的边是腰时，设底边长为 y cm，

则 $2\times5+y=21$，解得 $y=11$.

因为 $5+5<11$，不符合三角形的三边关系，

所以不能围成腰长为 5 cm 的等腰三角形.

综上可知，能围成底边长为 5 cm 的等腰三角形.

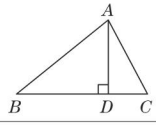
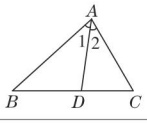
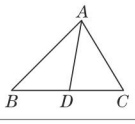

三角形的三边关系

提分·秘诀

特别提醒

本题运用分类讨论思想，在考虑腰长为 5 cm 和底边长为 5 cm 两种情况的同时，要注意隐含的条件：任意两边之和大于第三边. 解答这类题时，出现两种结果的较多，应高度重视.

知识点▶4 三角形的三条重要线段

	三角形的高线	三角形的角平分线	三角形的中线
文字语言	从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段	在三角形中，一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段	在三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段
图形语言			
符号语言	（1）AD 是△ ABC 的高；（2）AD 是△ ABC 的 BC 边上的高；（3）$AD\perp BC$ 于点 D；（4）$\angle ADC=90°$，$\angle ADB=90°$（或 $\angle ADC=\angle ADB=90°$）	（1）AD 是△ ABC 的角平分线；（2）AD 平分 $\angle BAC$，交 BC 于点 D；（3）$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$（或 $\angle BAC=2\angle 1=2\angle 2$）	（1）AD 是 △ ABC 的中线；（2）AD 是 △ ABC 的 BC 边上的中线；（3）$BD=DC=\frac{1}{2}BC$（或 $BC=2BD=2DC$）（4）点 D 是 BC 边的中点
推理语言	因为 AD 是△ ABC 的高，所以 $AD\perp BC$（或 $\angle ADB=\angle ADC=90°$）	因为 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$（或 $\angle BAC=2\angle 1=2\angle 2$）	因为 AD 是 △ ABC 的中线，所以 $BD=DC=\frac{1}{2}BC$（或 $BC=2BD=2DC$）
用途举例	（1）线段垂直；（2）角度相等	角度相等	（1）线段相等；（2）面积相等
注意事项	（1）与边的垂线不同；（2）不一定在三角形内	（1）与角的平分线不同；（2）一定在三角形内部	一定在三角形内部
重要特征	三角形的三条高所在的直线交于一点	一个三角形有三条角平分线，它们相交于三角形内一点	三角形的三条中线相交于一点，这三条中线的交点叫作三角形的重心

提分·必记

拓展

1. 三角形三条高所在的直线的交点叫作三角形的垂心.
2. 三角形三条角平分线的交点叫作三角形的内心.
3. 三角形的角平分线与角的平分线是两个不同的概念：三角形的角平分线是一条线段；角的平分线是一条射线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用三角形的三条重要线段的用途解决问题

类型1：三角形的高线在求线段长中的应用

例4 如图2.1-5，$AE \perp EC$ 于点 E，$CD \perp AD$ 于点 D，AD 交 EC 于点 B.

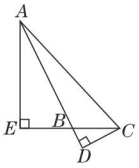


图 2.1-5

（1）$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高为_____，边 AB 上的高为_____.

（2）若 $AB=5$，$BC=2$，$CD=\frac{9}{5}$，则 $AE=$_____.

解题秘方：（1）紧扣“三角形高的定义”进行判断.

（2）分别以 BC，AB 为底边计算 $\triangle ABC$ 的面积，列式求解.

解：（1）$\triangle ABC$ 是钝角三角形，由钝角三角形高的定义和位置可知，组成钝角的两条边上的高在三角形的外部，

故边 BC 上的高为 AE，边 AB 上的高为 CD.

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

所以 $\frac{1}{2}\times 2\times AE=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{9}{5}$，

所以 $AE=\frac{9}{2}$.

三角形的高

答案：（1）AE；CD　　（2）$\frac{9}{2}$

类型2：三角形的角平分线在说明角平分线中的应用

例5 如图2.1-6，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，EF 交 AD 于点 O.

试问：DO 是否为 $\triangle DEF$ 的角平分线？并说明理由.

解题秘方：根据三角形角平分线的定义进行说明.

解：DO 是 $\triangle DEF$ 的角平分线.

理由如下：因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，所以 $\angle 1=\angle 2$.

因为 $DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$，

所以 $\angle 3=\angle 2$，$\angle 1=\angle 4$.

所以 $\angle 3=\angle 4$.

所以 DO 是 $\triangle DEF$ 的角平分线.

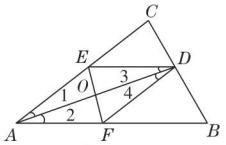


图 2.1-6

提分·秘诀

方法点拨

找三角形某边上的高的方法：

（1）找出该边所对的顶点；

（2）过此顶点作该边的垂线，垂线段为该边上的高.

如，作 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高：找 BC 边所对的顶点 A，过 A 作 BC 的垂线（E 为垂足），垂线段 AE 即为 BC 边上的高.

教你一招

求三角形的面积联想三角形的高，求三角形的高联想三角形的面积是解三角形问题中常用的方法之一.用同一个三角形不同的面积表达式建立求线段长度的等量关系式是一种很重要的数学方法——等面积法.

解法提醒

本例在解题过程中，先利用三角形的角平分线的定义，得出相等的角，再结合相关条件推出一组新的相等的角，最后由三角形角平分线的定义说明是三角形的角平分线.它经历了定义→条件→定义的过程，这就是**定义法**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：三角形的中线在解决三角形周长与面积中的应用

例 6 如图 2.1−7，在△ ABC 中，AD，BE 分别是△ ABC，△ ABD 的中线.

（1）若△ ABD 与△ ADC 的周长之差为 3，AB=8，求 AC 的长.

（2）若 $S_{\triangle ABC}$=8，求 $S_{\triangle ABE}$.

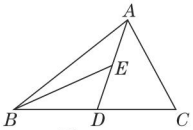


图 2.1−7

解题秘方： 利用中线将三角形分成的两个三角形的周长之间的关系和面积之间的关系解题.

解：（1）因为 AD 为 BC 边上的中线，所以 BD=CD，

所以△ ABD 与△ ADC 的周长之差 =(AB+AD+BD)−(AC+AD+CD)= AB−AC.

因为△ ABD 与△ ADC 的周长之差为 3，AB=8，

所以 8−AC=3，解得 AC=5.

（2）因为 AD 是△ ABC 的中线，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$=4.

因为 BE 是△ ABD 的中线，所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$=2.

详解

三角形的中线把边分成相等的两条线段，故 BD=CD，且△ ABD 的边 BD 上的高与△ ACD 的边 CD 上的高相同，根据等底同高的三角形的面积相等，可得所分成的两个三角形的面积相等，即 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

知识▶ 5 三角形的内角和



1. 三角形的内角和等于 180°.

几何语言： 在△ ABC 中，∠ A+∠ B+∠ C=180°.

2. 证明思路：

思路一： 利用“两直线平行，内错角及同位角相等”将三角形的三个内角转化为一个平角. 如图 2.1−8 ①②.

思路二： 利用“两直线平行，内错角相等”将三角形的三个内角转化为两平行线间的一组同旁内角. 如图 2.1−9 ①②.

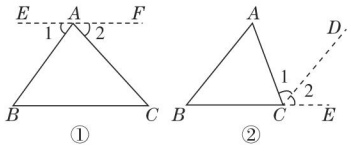


图 2.1−8

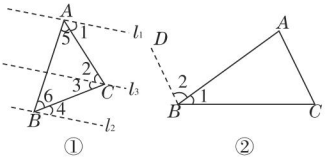


图 2.1−9

提分·必记

特别解读

三角形的三个内角中最多只有一个钝角或直角，或者说至少有两个锐角.

特别提醒

主要是运用平行线作为桥梁，将三个内角“转移”集中成一个角或两个角，再说明这个角或两个角的和是 180°即可.

拔考向▶ 利用三角形的内角和解与三角形内角相关的问题

类型 1：三角形的内角和在求角中的应用

例 7 ∠ A，∠ B，∠ C 是△ ABC 的三个内角.

（1）已知∠ A=40°，∠ B=∠ C，求∠ B，∠ C 的度数；

（2）已知∠ A−∠ B=16°，∠ C=54°，求∠ A，∠ B 的度数；

（3）已知∠ $A=\frac{1}{2}$∠ $B=\frac{1}{3}$∠ C，求∠ A，∠ B，∠ C 的度数.

提分·秘诀

方法点拨

三角形中求角的度数问题一般用**方程思想**求解. 当角之间存在数量关系时，一般根据三角形内角和为 180° 列方程（组）求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣三角形的内角和等于 180° 建立方程（组）求解.

解：（1）设$\angle B=\angle C=x°$，

因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

所以 $40+x+x=180$，解得 $x=70$，

所以$\angle B=\angle C=70°$.

另解

因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle A=40°$，

所以$\angle B+\angle C=180°-40°=140°$.

又因为$\angle B=\angle C$，

所以$\angle B=\angle C=140°\div 2=70°$.

（2）设$\angle A=x°$，$\angle B=y°$，

因为$\angle A-\angle B=16°$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\angle C=54°$，

所以$\begin{cases}x-y=16,\\ x+y+54=180,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=71,\\ y=55.\end{cases}$

两式相加可消去 y，求出 x，

两式相减可消去 x，求出 y

所以$\angle A=71°$，$\angle B=55°$.

（3）因为$\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$，

所以$\angle B=2\angle A$，$\angle C=3\angle A$.

设$\angle A=x°$，则$\angle B=(2x)°$，$\angle C=(3x)°$，

因为$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

所以 $x+2x+3x=180$.

所以 $x=30$.

所以$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$.

教你一招：求三角形内角的度数的方法：

（1）若已知两个角的度数，求第三个角的度数，直接利用三角形的内角和等于 180° 求解.

（2）若已知一个角的度数及另两个角之间的数量关系；或不知道任何一个角的度数，只知道三个角之间的关系，一般根据“三角形的内角和等于 180°”这个隐含的等量关系列方程（或方程组）求解.

类型 2：三角形内角和在解实际问题中的应用

例 8 一个零件的形状如图 2.1−10，按规定$\angle A$ 应等于 90°，$\angle ABD$，$\angle ACD$ 应分别是 34°和 18°. 李叔叔量得$\angle BDC=146°$，请你帮李叔叔判断这个零件是否合格，并说明理由.

解题秘方：建立三角形的模型利用三角形内角和求出角度，再用三角形内角和进行验证.

方法点拨

“三角形的内角和等于 180°”是任何一个三角形都必须具备的性质. 若某三角形三个内角和不等于 180°，则说明该三角形不存在.

解：这个零件不合格. 理由如下：如图 2.1−10，连接 BC，

在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，

因为$\angle A=90°$，$\angle ACD=18°$，$\angle ABD=34°$，

所以$\angle DCB+\angle DBC=38°$.

在 $\triangle DCB$ 中，$\angle BDC+\angle DCB+\angle DBC=146°+38°=184°\neq 180°$，

所以这个零件不合格.

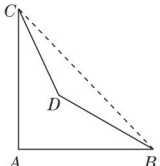


图 2.1−10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 6 三角形按角分类

1. 按三角形内角的大小分类：

三角形 {
- 锐角三角形：三个角都是锐角的三角形，如图 2.1−11 ①
- 直角三角形：有一个角是直角的三角形，如图 2.1−11 ②
- 钝角三角形：有一个角是钝角的三角形，如图 2.1−11 ③

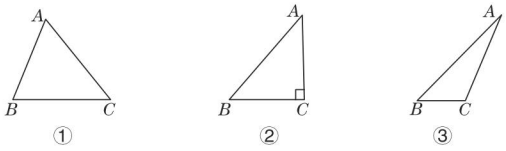


图 2.1−11

2. 直角三角形的相关概念：直角三角形可用符号“Rt △”来表示．例如直角三角形 ABC 可以记作“Rt △ ABC”．在直角三角形中，夹直角的两边叫作直角边，直角的对边叫作斜边．两条直角边相等的直角三角形叫作等腰直角三角形．

提分·必记

特别提醒

- 根据三角形的内角和为 180° 可知，一个三角形至多有一个直角或钝角．
- 等腰三角形可以是锐角三角形，也可以是直角三角形或钝角三角形．

拔考向▶ 利用三角形的分类判断三角形的形状

例 9 根据下列所给条件，判断△ ABC 的形状．

（1）∠ A=45°，∠ B=65°，∠ C=70°；（2）∠ C=120°；

（3）∠ C=90°；（4）AB=BC=4，AC=5.

解题秘方：根据三角形的分类标准进行判断．

解：（1）因为∠ A=45°，∠ B=65°，∠ C=70°，

所以∠ A<∠ B<∠ C<90°，所以△ ABC 是锐角三角形．

（2）因为∠ C=120°>90°，所以△ ABC 是钝角三角形．

（3）因为∠ C=90°，所以△ ABC 是直角三角形．

（4）因为 AB=BC=4，AC=5，所以△ ABC 是等腰三角形．

提分·秘诀

方法技巧

确定三角形分类的方法：

（1）若按角分类，则看这个三角形的最大角的类型：最大角是钝角的三角形是钝角三角形；最大角是直角的三角形是直角三角形；最大角是锐角的三角形是锐角三角形．

（2）若按边分类，则看边是否相等．

点知识▶ 7 三角形的外角

1. 定义：三角形的一边与另一边的延长线所组成的角，叫作三角形的外角．

2. 外角性质：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和．

常见应用：

（1）已知一个外角及与它不相邻的两个内角中的一个，可求另一个内角；

（2）证明一个角等于另两个角的和或差；

（3）作为中间关系式证明两个角相等．

3. 拓展性质：

（1）三角形的一个外角大于与它不相邻的任一内角．

（2）三角形的外角和等于 360°．

提分·必记

特别解读

1. 位置：在三角形的外部．
2. 与相邻内角是邻补角．
3. 三角形每一个顶点处都有两个外角，它们是对顶角，因此三角形共有六个外角，通常每一个顶点处取一个外角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用外角的性质解与三角形的角相关的问题

类型1：三角形外角的性质在求角的度数中的应用

例10 如图2.1-12，AD是$\angle CAE$的平分线，$\angle B=35°$，$\angle DAE=60°$，求$\angle ACD$的度数.

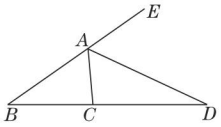


图2.1-12

解题秘方：利用外角的性质，将$\angle ACD$转化为$\angle B+\angle BAC$进行求解.

解：因为AD是$\angle CAE$的平分线，$\angle DAE=60°$，

所以$\angle CAE=2\angle DAE=2\times60°=120°$.

所以$\angle BAC=180°-\angle CAE=180°-120°=60°$.

因为$\angle ACD$是$\triangle ABC$的一个外角，

所以$\angle ACD=\angle BAC+\angle B=60°+35°=95°$.

类型2：三角形外角的性质在探究角之间的关系中的应用

例11 如图2.1-13①，AC与BD相交于点O，连接AB，CD.

（1）试说明：$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$；

（2）如图2.1-13②，AP平分$\angle BAC$，DP平分$\angle BDC$.

试说明：$2\angle P=\angle B+\angle C$.

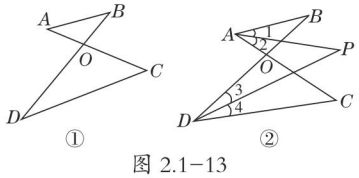


图2.1-13

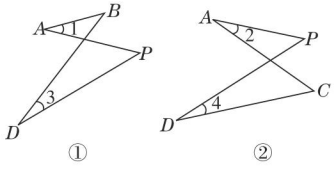


图2.1-14

解题秘方：将复杂图形分解成基本图形进行探究.

解：（1）因为$\angle BOC=\angle A+\angle B$，

$\angle BOC=\angle C+\angle D$，

所以$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

（2）由（1）的结论可知，

$\angle 1+\angle B=\angle 3+\angle P$，

$\angle 4+\angle C=\angle 2+\angle P$.

所以$\angle 2+\angle 3+\angle P+\angle P=\angle 1+\angle 4+\angle B+\angle C$.

因为AP，DP分别是$\angle BAC$，$\angle BDC$的平分线，

所以$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

所以$2\angle P=\angle B+\angle C$.

提分·秘诀

一题多解

求三角形的某一个角的度数时，可以从三角形的内角和与三角形的外角的角度思考.本题还可以将∠ACD看成△ACD的内角来求.

因为∠DAE=60°，

∠B=35°，

所以∠D=60°-35°=25°.

因为AD是∠CAE的平分线，

所以∠CAD=∠DAE=60°.

所以∠ACD=180°-60°-25°=95°.

解法提醒

剖图是解决几何问题的关键步骤，关键是根据图中角的关系从复杂图形中解剖出常见的基本图形.

图2.1-13①中，$\angle BOC$既是$\triangle AOB$的外角，又是$\triangle COD$的外角.

图2.1-13②可以解剖出两个“8字形”图形（如图2.1-14①②），则可得$\angle 1+\angle B=\angle 3+\angle P$，$\angle 4+\angle C=\angle 2+\angle P$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等面积法证明线段的和差关系

例 12 如图 2.1−15，已知在△ ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，$DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F，$BG \perp AC$ 于 G.

试说明：$BG=DE+DF$.

解题秘方： 判断三角形的高与垂线段之间的关系，可转化为用面积之间的关系解决.

解： 如图 2.1−15，连接 AD.

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

所以 $\frac{1}{2}AC \cdot BG=\frac{1}{2}AB \cdot DE+\frac{1}{2}AC \cdot DF$.

又因为 $AB=AC$，

所以 $BG=DE+DF$.

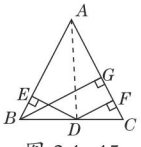


图 2.1−15

挑战·高分

方法点拨

等面积法是数学中很重要的解题方法，而在涉及垂线段（或三角形的高）的关系时，常将线段的关系转化为面积的关系来解决. 当几个三角形的底边相等时，面积的和差关系反映的就是高的和差关系.

拔尖角度 2 利用方程思想求三角形中角的度数

例 13 如图 2.1−16，在△ ABC 中，D 是 BC 边上一点，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle BAC=63°$，求 $\angle DAC$ 的度数.

解题秘方： 设未知数，根据三角形外角的性质及题中条件列方程求解.

解： 设 $\angle 1=\angle 2=x°$，

则 $\angle 3=\angle 4=\angle 1+\angle 2=2x°$.

因为 $\angle BAC=63°$，

所以 $\angle DAC=63°-x°$.

因为 $\angle 3+\angle 4+\angle DAC=180°$，

所以 $2x+2x+63-x=180$，

解得 $x=39$.

所以 $\angle DAC=63°-39°=24°$.

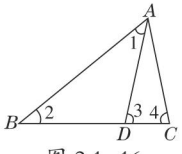


图 2.1−16

挑战·高分

方法点拨

外角性质可以把不在同一个三角形中的几个内角联系起来，它是不同三角形的内角之间相互转化的“纽带”.

拔尖角度 3 利用分类讨论思想巧求涉及中线的三角形线段的长

例 14 在△ ABC 中，$AB=AC$，AC 边上的中线 BD 把△ ABC 的周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分，求△ ABC 的各边长.

解题秘方： 根据中线的定义及分类讨论思想分不同情况进行计算.

解： 设 $AB=AC=x$ cm，

则 $AD=CD=\frac{1}{2}x$ cm.

由于题中条件不能确定图形形状，因此需分以下两种情况求解：

挑战·高分

解法指导

若题目中条件交代不是很清楚，如本题“周长分为 12 cm 和 15 cm 两部分”，具体哪部分的长是 12 cm 没有指代清楚，故应**分类讨论**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如图 2.1−17 ①，

若 $AB+AD=12$ cm，则 $x+\frac{1}{2}x=12$.

解得 $x=8$，即 $AB=AC=8$ cm，

则 $CD=4$ cm. 故 $BC=15-4=11$（cm）.

此时 $AB+AC>BC$，三角形存在.

所以三边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm；

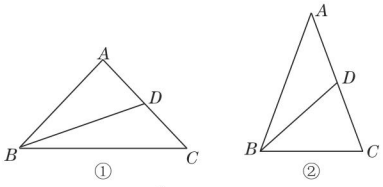


图 2.1−17

如图 2.1−17 ②，若 $AB+AD=15$ cm，则 $x+\frac{1}{2}x=15$.

解得 $x=10$，即 $AB=AC=10$ cm，则 $CD=5$ cm.

故 $BC=12-5=7$（cm）. 显然此时三角形存在.

所以三边长分别为 10 cm，10 cm，7 cm.

综上所述，$\triangle ABC$ 的三边长分别为 8 cm，8 cm，11 cm 或 10 cm，10 cm，7 cm.

解法提醒

求得的三角形的边长必须用三角形三边关系进行验证.

拔尖角度 4 利用类比法探究三个角间的数量关系

挑战·高分

例 15 如图 2.1−18，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 上的高，AE 是 $\angle BAC$ 的平分线. 若 $\angle B=50°$，$\angle C=70°$，求 $\angle EAD$ 的度数. 试猜想：若 $\angle B=\alpha$，$\angle C=\beta$（$\beta>\alpha$），则 $\angle EAD$ 的度数是多少？（用含 α，β 的式子表示）

解题秘方： 利用三角形的高线和角平分线揭示角的数量关系解决问题.

解： 因为 $\angle B=50°$，$\angle C=70°$，

所以 $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-50°-70°=60°$.

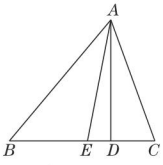


图 2.1−18

因为 AD 是边 BC 上的高，

所以 $\angle ADB=90°$.

所以 $\angle BAD=90°-\angle B=40°$.

因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线，

所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$.

所以 $\angle EAD=\angle BAD-\angle BAE=40°-30°=10°$.

猜想：$\angle EAD=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

详解

因为 AD 是 BC 边上的高，

所以 $\angle BAD=90°-\alpha$，

$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-\alpha-\beta$.

因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线，

所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-\alpha-\beta)=90°-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$.

所以 $\angle EAD=\angle BAD-\angle BAE=90°-\alpha-\left(90°-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 5 利用三角形内角、外角关系探究角平分线夹角的规律

例 16 在△ ABC 中，$\angle A=40°$.

（1）如图 2.1-19 ①，已知 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数；

（2）如图 2.1-19 ②，已知 $\angle ABC$ 的平分线和△ ABC 的外角 $\angle ACD$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数；

（3）如图 2.1-19 ③，已知△ ABC 的外角 $\angle CBD$ 与 $\angle BCE$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数.

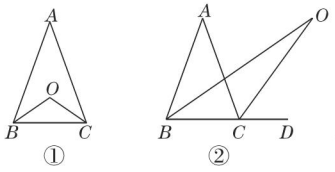




图 2.1-19

解题秘方： 利用角平分线的定义、三角形的内角和为 180° 及外角的性质探究需求的角与已知角之间的关系.

解：（1）因为 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线交于点 O，

所以 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

因为 $\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=140°$，

所以 $\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=110°$.

（2）因为 $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线交于点 O，

所以 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCD=\frac{1}{2}\angle ACD$.

因为 $\angle OCD$ 是△ BCO 的外角，$\angle ACD$ 是△ ABC 的外角，

所以 $\angle OCD=\angle BOC+\angle OBC$，$\angle ACD=\angle ABC+\angle A$.

所以 $\angle BOC=\angle OCD-\angle OBC=\frac{1}{2}(\angle ACD-\angle ABC)=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle A-\angle ABC)=\frac{1}{2}\angle A=20°$.

（3）因为 $\angle CBD$ 与 $\angle BCE$ 的平分线交于点 O，

所以 $\angle CBO=\frac{1}{2}\angle CBD$，$\angle BCO=\frac{1}{2}\angle BCE$.

所以 $\angle BOC=180°-(\angle CBO+\angle BCO)=180°-\frac{1}{2}\times(\angle CBD+\angle BCE)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB+\angle A+\angle ABC)=180°-\frac{1}{2}(\angle A+180°)=90°-\frac{1}{2}\angle A=70°$.

挑战·高分

归纳总结

与三角形角平分线有关的结论：

（1）三角形中任意两个内角的平分线相交所成的角（简记为内夹角）等于 90° 加上第三个角的一半. 即 $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

（2）三角形中任意一个内角的平分线和与该内角不相邻的一个外角的平分线所成的角（简记为内外夹角）等于另外一个不与此外角相邻的内角的一半. 即 $\angle BOC=\frac{1}{2}\angle A$.

（3）三角形中与 $\angle A$ 不相邻的两个外角平分线相交所成的角（简记为外夹角）等于 90° 减去 $\angle A$ 的一半，即 $\angle BOC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

另解

根据角平分线的定义和三角形外角的性质，可得 $\angle OCD=\angle OBC+\angle BOC$，$\angle ACD=2\angle OBC+40°$，$\angle ACD=2\angle OCD$，所以 $2\angle OBC+40°=2\angle OBC+2\angle BOC$，所以 $\angle BOC=20°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查三角形的边、角重要性质以及三角形的三条重要线段，题型主要以填空题、选择题为主，与平行线综合考查的形式较常见，难度都不大，属于基础题.

三年中考兵法

考法1 利用三角形的三边关系求三角形的边长

例17 [中考·武威]已知 a，b，c 是三角形的三边长，a，b 满足 $|a-7|+(b-1)^2=0$，c 为奇数，则 $c=$_____.

试题评析： 本题考查了三角形的三边关系，解题的关键是求出两边长，确定第三边长的取值范围.

解： 因为 $|a-7|+(b-1)^2=0$，所以 $a=7$，$b=1$. 所以 $7-1<c<7+1$，即 $6<c<8$. 因为 c 为奇数，所以 $c=7$.

答案： 7

考法2 利用角平分线及整体思想求角的度数

例18 [中考·陕西]如图 2.1-20，$\triangle ABC$ 中，BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线，若 $\angle A=52°$，则 $\angle 1+\angle 2$ 的度数为_____.

试题评析： 本题考查了三角形角平分线的定义，解题关键是根据角平分线的定义得出角的数量关系.

解： 因为 $\angle A=52°$，所以 $\angle ABC+\angle ACB=180°-52°=128°$. 因为 BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线，所以 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$，所以 $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times 128°=64°$.

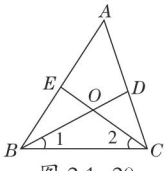


图 2.1-20

答案： 64°

考法3 利用三角形的内角和为180°判断三角形的形状

例19 [中考·长沙]一个三角形三个内角的度数之比为 1∶2∶3，则这个三角形一定是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

试题评析： 本题考查了三角形的内角和、三角形按角分类等知识，解题关键是掌握三角形的内角和等于 180°，以及三角形按角如何分类.

解： 设三角形的三个内角的度数分别为 $x°$，$(2x)°$，$(3x)°$，根据三角形的内角和等于 180°，可得 $x+2x+3x=180$，解得 $x=30$，因此三角形的三个内角度数分别为 30°，60°，90°，故该三角形为直角三角形.

答案： B

冲刺·满分

易错警示

先由关系式求三角形两边的长，再根据三角形第三边的取值范围在两边的差与两边的和之间，千万不能带等号，从而求出第三边.

方法点拨

三角形的角平分线揭示三角形中角的数量关系，通常与三角形的内角和等于 180° 结合在一起求三角形中角的度数.

解法指导

在一个三角形中，若有一个内角的度数等于另两个内角的度数之和，则这个三角形为直角三角形，表现形式可以是数量关系，如 $\angle A=\angle B+\angle C$，也可以是比例关系，如本题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用平行线的性质及内外角的关系求角的度数

例 20 [中考·宿迁]如图 2.1-21，点 D 在△ ABC 的边 AB 的延长线上，$DE \parallel BC$，若∠ $A=35°$，∠ $C=24°$，则∠ D 的度数是(　　)

A. 24°　　B. 59°

C. 60°　　D. 69°

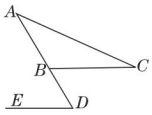


图 2.1-21

试题评析：本题考查了平行线的性质和外角的性质，掌握平行线的性质并且准确识图是解题的关键.

解：根据三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和求得∠ $CBD=59°$，再根据两条直线平行，内错角相等知 B 正确.

答案：B

教你一招

在平行线的性质中，同位角相等及内错角相等都能起到转化角的作用，通过相等角的转化建立内外角之间关系的模型.

两年模拟兵法

☞答案见 239 页

1. [中考·常德]已知三角形两边的长分别是 3 和 7，则此三角形第三边的长可能是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 8　　D. 11

2. [中考·贺州]一个等腰三角形的两边长分别为 4，8，则它的周长为(　　)

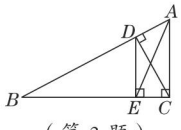
A. 12　　B. 16

C. 20　　D. 16 或 20

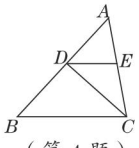
3. 如图，在△ ABC 中，∠ $ACB=90°$，$CD \perp AB$，$DE \perp BC$，垂足分别为 D，E. 下面有四个结论：① DE 是△ BCD 的高；② DE 是△ ABE 的高；③ CD 是△ ABC 的高；④ AC 是△ ABE 的高. 其中，正确的结论是(　　)

A. ①和③　　B. ②和③

C. ①②③　　D. ①③④



(第 3 题)



(第 4 题)

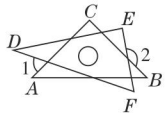
4. [中考·长春]如图，在△ ABC 中，CD 平分∠ ACB 交 AB 于点 D，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E. 若∠ $A=54°$，∠ $B=48°$，则∠ CDE 的大小为(　　)

A. 44°　　B. 40°

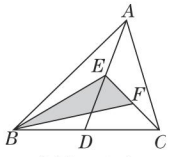
C. 39°　　D. 38°

5. 小桐把一副三角尺按如图的方式摆放在一起，其中∠ $E=90°$，∠ $C=90°$，∠ $A=45°$，∠ $D=30°$，则∠ 1+∠ 2 等于(　　)

A. 150°　　B. 180°　　C. 210°　　D. 270°



(第 5 题)

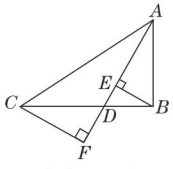


(第 6 题)

6. 如图，在△ ABC 中，已知点 D，E，F 分别为 BC，AD，CE 的中点，且 $S_{\triangle ABC}=8\ cm^2$，则 $S_{阴影}=$(　　)　**【导学号：5136175】**

A. $4\ cm^2$　　B. $2\ cm^2$　　C. $1\ cm^2$　　D. $\frac{1}{2}\ cm^2$

7. 如图，已知在直角三角形 ABC 中，∠ $ABC=90°$，点 D 沿 BC 自 B 向 C 运动(点 D 与点 B，C 不重合)，作 $BE \perp AD$ 于 E，$CF \perp AD$ 于 F，则 $BE+CF$ 的值(　　)



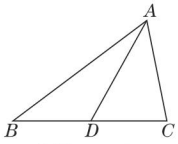
(第 7 题)

A. 不变　　B. 变大

C. 变小　　D. 先变大再变小

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AB=5\ \text{cm}$，$AC=3\ \text{cm}$，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的周长之差是_____.

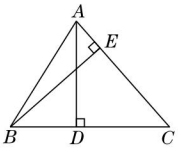


（第 8 题）

9. 已知等腰三角形的周长为 14，一边长为 6，则另外两边长分别为_____.

10. 已知 a，b，c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，b，c 满足 $(b-2)^2+|c-3|=0$，且 a 为方程 $|x-4|=2$ 的解，则 $\triangle ABC$ 的形状为_____，周长为_____.

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 D，$BE\perp AC$ 于 E，$BC=9$，$AC=8$，$AD=6$. 求 BE 的长.

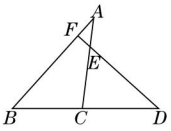


（第 11 题）

12. 如图，已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的延长线上一点，DF 交 AC 于点 E，$\angle A=35°$，$\angle ACD=83°$.

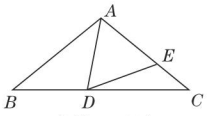
（1）求 $\angle B$ 的度数；

（2）若 $\angle D=42°$，求 $\angle AFE$ 的度数.



（第 12 题）

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，$\angle BAD=40°$，且 $\angle ADE=\angle AED$. 求 $\angle CDE$ 的度数.



（第 13 题）

素养提分 行动篇

运用铅垂法找重心

［阅读材料］我们知道，三角形的三条中线的交点称为三角形的重心.

重心是一个物理名词，从效果上看，我们可以认为物体各个部分所受重力的合力集中于一点，这一点就叫作该物体的重心. 在生活中，我们常常用手指来支撑一个物体，不断变化手指的位置，物体越来越稳定，此时手指的位置就越来越接近重心.

把一根均匀的木棒悬挂在一根细绳上，不断调整悬挂点的位置，直至木棒处于水平状态，记下悬挂点的位置，用刻度尺测量该点在木棒上的位置，刚好处在木棒的正中间. 在数学上，我们可以把一根均匀的木棒抽象地看成一条线段，一条线段的重心就是这条线段的中点.

取一块均匀的三角形纸板，画出它的两条中线，用一根细绳在两条中线的交点处将三角形纸板悬挂起来，纸板处于平衡状态.

［探究实验］我们把上面这种找重心的办法叫作铅垂法，可以自己试着用铅垂法找出平行四边形、长方形、正方形的重心.

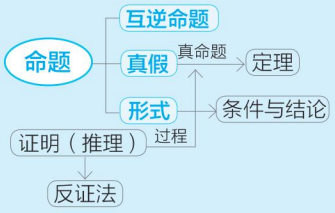
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 命题与证明

核心知识

- 定义
- 命题及其结构
- 互逆命题
- 命题的真假
- 基本事实与定理
- 证明与反证法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 定义

定义：对一个概念的含义加以描述说明或作出明确规定的语句叫作这个概念的定义.

说明：

（1）定义是对一个概念的独有的特征性质的描述；

（2）定义既可以作为概念的性质，也可以作为概念的判定方法.在几何推理中常常作为问题求解的依据；

（3）定义的常见句型是陈述句，定义的一般形式有：“……叫作……”“……称为……”“……是指……”“……是……”等；

（4）给概念下定义必须是严密的，语句不能含糊不清、模棱两可.

提分·必记

特别提醒

在定义中，必须提示该事物与其他事物的本质区别，必须严密.定义有两方面的运用，一是确定该事物的性质；二是判别该事物的方法.

拨考向▸利用定义的特征识别定义

例1 下列语句不属于定义的是（　　）

A. 连接两点的线段的长度叫作这两点间的距离

B. 只含有一个未知数，并且未知数的指数是一次的整式方程是一元一次方程

C. 两直线平行，内错角相等

D. 从一个角的顶点引出的一条射线，把这个角分成两个相等的角，这条射线叫作这个角的平分线

解题秘方：紧扣定义是对名词或术语的含义进行描述，作出规定，进行逐项识别.

解：选项A，B，D分别对两点间的距离、一元一次方程、角的平分线的含义作出描述，是定义；

C是平行线的性质，不是定义.

故选C.

答案：C

提分·秘诀

方法点拨

定义是对名词或术语的描述，是为了区分许多名称和术语的含义才给予的明确规定.判定一个语句是定义的方法：（1）叙述方式是“……叫作……”；（2）对一个名词或术语的意义作出明确的规定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 命题

1. **定义**：一般地，对某一件事情作出判断的语句（陈述句）叫作命题.

说明：

（1）命题只是对事情进行判断，判断的结果可能是正确的，也可能是错误的；

（2）命题必须是一个完整的句子，不能是一个词语；

（3）命题必须具有“判断”作用，要对事情作出肯定或否定的判断，故命题不能是祈使句或疑问句.

2. **命题的结构**：命题由条件和结论两部分组成. 条件是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.

3. **互逆命题**：对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，我们把这样的两个命题称为互逆命题，其中一个叫作原命题，另一个叫作逆命题.

注意：原命题和逆命题是相对的，可以把条件和结论互换之后的两个命题中的任何一个作为原命题，另一个则是它的逆命题.

提分·必记

特别解读

1. 命题通常写成“如果……，那么……”的形式，其中“如果”引出的部分是条件，“那么”引出的部分是结论.
2. 有些命题的条件和结论不明显，可将它经过适当变形，改写成“如果……，那么……”的形式.

拔考向▶ 利用命题相关概念解决问题

类型 1：利用命题的结构形式改写命题

例 2 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式.

（1）对顶角相等；

（2）垂直于同一条直线的两条直线平行；

（3）同角或等角的余角相等.

解题秘方：紧扣命题的结构形式进行改写.

解：（1）如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

（2）如果两条直线垂直于同一条直线，那么这两条直线平行.

（3）如果两个角是同一个角的余角或两个相等的角的余角，那么这两个角相等.

提分·秘诀

方法点拨

- 命题改写的原则：不改变命题的原意.
- 命题改写的方法：先弄清命题的条件部分和结论部分，再将其改写为“如果……，那么……”的形式.

类型 2：利用互逆命题的关系写逆命题

例 3 写出下列命题的逆命题：

（1）如果两条直线都和第三条直线垂直，那么这两条直线平行；

（2）两直线平行，同位角相等；

（3）对顶角相等.

解题秘方：紧扣互逆的两个命题之间的关系写出原命题的逆命题.

解：（1）如果两条直线平行，那么这两条直线都和第三条直线垂直.

（2）同位角相等，两直线平行.

（3）相等的两个角是对顶角.

方法点拨

若原命题的条件和结论不明确，可以先将其改写为“如果……，那么……”的形式，再写出它的逆命题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 真命题和假命题

1. 命题的种类：

（1）**真命题**：正确的命题称为真命题．

（2）**假命题**：错误的命题称为假命题．

2. **举反例**：要判断一个命题是假命题，只需举出一个例子（反例），它符合命题的条件，但不满足命题的结论，从而就可判断这个命题为假命题．我们通常把这种方法称为“举反例”．

提分·必记

特别提醒

原命题是真命题时，它的逆命题不一定是真命题；反之，逆命题是真命题时，它的原命题不一定是真命题．

拔考向▶利用真假命题的类型识别命题

类型 1：利用判断命题真假的方法判断命题的真假

例 4 指出下列命题的条件和结论，并判断是真命题还是假命题．

（1）互为补角的两个角相等；

（2）若 $a=b$，则 $a+c=b+c$.

解题秘方：紧扣真命题和假命题的意义进行判断．

解：（1）条件：两个角互为补角；结论：这两个角相等．假命题．

（2）条件：$a=b$；结论：$a+c=b+c$. 真命题．

提分·秘诀

方法技巧

真假命题的判定：

（1）要判定一个命题是真命题，常常通过讲道理（推理）的方式得出其结论成立；

（2）要判定一个命题是假命题，只要举出一个反例即可．

类型 2：反例在识别假命题中的应用

例 5 举反例说明下列命题是假命题：

（1）有理数一定是自然数；

（2）三角形的一个外角大于它的内角．

解题秘方：正确举出反例是解题的关键．

解：（1）0.5，−1.2 等都是有理数，但它们不是自然数，所以该命题是假命题．

（2）在钝角三角形中，与钝角相邻的外角小于这个钝角，所以该命题是假命题．

点知识▶4 基本事实和定理

1. 概念：

基本事实	少数真命题
定理	经过证明为真的命题
推论	由某定理直接得出的真命题
逆定理	一个定理的逆命题，它被证明是真命题
互逆定理	原定理与逆定理共同称为互逆定理

2. 基本事实和定理的区别与联系

	真假性	来源	作用
基本事实	真命题	实践中总结出来，不需要推理论证	作为判断其他命题真假的原始依据
定理	真命题	通过推理得出，能够被证明	作为判断其他命题真假的依据

提分·必记

特别提醒

- 定理是真命题，但真命题不一定是定理；
- 任何定理都有逆命题，但这个逆命题不一定是真命题，所以并不是每一个定理都有逆定理．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用基本事实的特征进行识别

例6 下列命题中属于基本事实的是（　　）

A. 同角的补角相等

B. 邻补角的平分线互相垂直

C. 两点之间线段最短

D. 三角形任何两边的和大于第三边

解题秘方： 紧扣基本事实的基本特征并结合课本知识进行识别.

解： 基本事实是人们在长期实践中总结出来的，它不需要证明，而其他命题的正确性则需要推理证明. 选项C中，“两点之间线段最短”就是人们在长期实践中总结出来的；而A，B，D都是利用基本事实或定理证明出来的. 因此只有C是基本事实.

答案： C

提分·秘诀

方法点拨

基本事实是人们长期实践后公认为正确的命题，它不需要证明，但并不是所有真命题都是基本事实.

点知识▶5 证明与反证法

1. 证明： 要判断一个命题是真命题，常常要从命题的条件出发，运用定义、基本事实以及已经证明了的定理和推论，通过一步步的推理，最后证实这个命题的结论成立，从而判断这个命题为真命题，这个过程叫作证明.

说明：

（1）证明一个命题是真命题的依据可以是已知条件，也可以是学过的定义、基本事实、定理等.

（2）证明一个命题是假命题，只要举出一个反例即可.


反证法

2. 证明与图形有关的命题是真命题的一般步骤：

（1）根据题意画出图形；

（2）根据命题的条件和结论，结合图形写出已知和求证；

（3）分析因果关系，找出证明途径，写出证明过程.

3. 反证法：

用反证法证明数学命题的步骤：

否定结论，提出假设 → 论证推理，导出矛盾 → 否定假设，肯定结论

提分·必记

特别提醒

在反证法的第一步否定结论时，要注意“大于”的反面不是“小于”，而是“小于或等于”. 类似地，“小于”的反面是“大于或等于”；“都是”的反面是“不都是”，不可写成“都不是”.

方法点拨

可能产生的矛盾：①与已知条件矛盾；②与定义矛盾；③与基本事实矛盾；④与定理或推论矛盾.

拔考向▶利用证明或反证法证明真命题

类型1：利用已学过的基本事实或定理进行证明

例7 如图2.2-1，已知AC，BD相交于点O，DF平分$\angle CDO$与AC相交于点F，BE平分$\angle ABO$与AC相交于点E，$\angle A=\angle C$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.（写出推理依据）

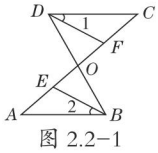


图2.2-1

解题秘方： 通过分析命题的条件和结论，找出证明的途径.

提分·秘诀

方法点拨

证明是从条件出发，经过一步一步推理，最后推出结论的过程. 证明的每一步推理都要有根据，不能“想当然”，这些根据可以

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明： ∵∠A=∠C（已知），

∴AB // CD（内错角相等，两直线平行）.

∴∠ABO=∠CDO（两直线平行，内错角相等）.

又∵DF平分∠CDO，BE平分∠ABO（已知），

∴∠1=$\frac{1}{2}$∠CDO，∠2=$\frac{1}{2}$∠ABO（角平分线的定义）.

∴∠1=∠2（等量代换）.

是已知条件，也可以是定义、基本事实、已学过的定理．在初学证明时要把根据写在每一步推理后面的括号里，如本例中的“已知”“等量代换”等．

类型 2：利用反证法证明一个真命题

例 8 已知△ABC，求证：在∠A，∠B，∠C这三个内角中，至少有两个锐角.

解题秘方： 紧扣用反证法证明命题的一般步骤，通过反设——归谬——作结论进行证明.

解： 假设△ABC的三个内角中至多有一个锐角，不妨设0°<∠A<90°，则90°≤∠B<180°，90°≤∠C<180°.

∴∠A+∠B+∠C>180°，与三角形内角和定理相矛盾，

∴假设不正确.

∴三角形中至少有两个锐角.

方法点拨

在假设结论不成立时要注意考虑结论的反面所有可能的情况，如果只有一种，那么否定一种就可以了，如果有多种情况，那么必须一一否定.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用综合法或分析法进行推理证明

挑战·高分

例 9 已知：如图 2.2−2，DE ⊥ AC于点E，BC ⊥ AC于点C，FG ⊥ AB于点G，∠1=∠2. 求证：CD ⊥ AB.

解法思路展示

分析法（由果索因）

$CD \perp AB$，$FG \perp AB$ ⇒ $FG \parallel CD$ ⇒ ∠1=∠3，∠1=∠2 ⇒ ∠2=∠3 ⇒ $DE \parallel BC$ ⇒ $DE \perp AC$，$BC \perp AC$

解题秘方： 可由条件进行分析得到结论，也可由结论逆推符合条件.

证明： ∵DE ⊥ AC，BC ⊥ AC（已知），

∴∠5=∠ACB=90°（垂直的定义）.

∴DE // BC（同位角相等，两直线平行）.

∴∠2=∠3（两直线平行，内错角相等）.

又∵∠1=∠2（已知），

∴∠1=∠3（等量代换）.

∴GF // CD（同位角相等，两直线平行）.

∴∠4=∠6（两直线平行，同位角相等）.

∵FG ⊥ AB（已知），

∴∠6=90°（垂直的定义）.

∴∠4=90°（等量代换）.

∴CD ⊥ AB（垂直的定义）.

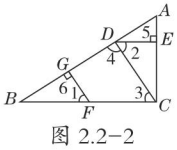


图 2.2−2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用建模思想对文字命题进行证明

例 10 求证：两条平行线被第三条直线所截，内错角的角平分线互相平行.

解题秘方：分析命题的条件和结论，结合图形写出已知和求证，最后写出证明过程.

解：已知：如图 2.2−3，$AB \parallel CD$，GP 平分 $\angle AGH$，HQ 平分 $\angle EHD$.

求证：$GP \parallel HQ$.

证明：$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle AGH = \angle GHD$.

$\because GP$ 平分 $\angle AGH$，

$\therefore \angle HGP = \frac{1}{2}\angle AGH$.

$\because HQ$ 平分 $\angle GHD$，

$\therefore \angle GHQ = \frac{1}{2}\angle GHD$.

$\therefore \angle HGP = \angle GHQ$.

$\therefore GP \parallel HQ$.

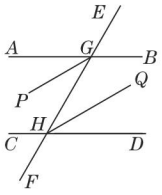


图 2.2−3

挑战·高分

方法点拨

证明一个命题的一般步骤：

第一步：分清命题的条件和结论，如果与图形有关，首先根据题意，画出图形，并在图形上标出有关字母与符号；

第二步：根据条件、结论，结合图形，写出已知、求证；

第三步：经过分析，找出由已知推出结论的途径，有条理地写出证明过程.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

命题、定理和证明是学习几何的基础，常考的知识点有判断一个命题的真假、将命题改写成“如果……，那么……”的形式，一般都比较简单，常出现在选择题和填空题中.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 命题真假的辨析

例 11 [中考·凉山]下列命题中：①邻补角是互补的角；②相等的角是对顶角；③同位角相等；④两锐角的和不一定是钝角.

其中正确的个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

详解

“不一定是”含两层意义，“是”或者“不是”.“两锐角的和不一定是钝角”的意思是：两锐角的和既可能是钝角，也可能是锐角，还可能是直角.

试题评析：本题考查命题真假的辨析，解题的关键是分清条件和结论.

解：①邻补角是互补的角，说法正确；

②相等的角不一定是对顶角，说法错误；

③同位角相等，没有说两直线平行这个条件，说法错误；

④两锐角的和不一定是钝角，也可以是锐角，还可以是直角，说法正确.

综上可得①④正确，共 2 个，故选 C.

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见239页

1. 下列语句是命题的是（　　）

A. 画两条相等的线段

B. 等于同一个角的两个角相等吗

C. 延长线段 AO 到 C，使 $OC=OA$

D. 两条直线相交，有且只有一个交点

2. 下列命题：①对顶角相等；②相等的角是对顶角；③在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；④平行于同一条直线的两条直线垂直．其中是真命题的有（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

3. 下列说法中正确的是（　　）

A. 命题一定是正确的

B. 不正确的判断就不是命题

C. 命题可以没有题设

D. 定理一定是经过证明了的真命题

4. [**中考·常州**]判断命题“如果 $n<1$，那么 $n^2-1<0$”是假命题，只需举出一个反例．反例中的 n 可以为（　　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

5. 命题“直角三角形两个锐角互余”的逆命题是

_____.

6. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式，并分别指出它们的条件与结论．

（1）两个负数之积为正数；

（2）两点确定一条直线；

（3）同角的补角相等．

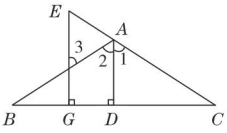
7. 判断下列命题是真命题还是假命题．若是假命题，请举出反例．

（1）一个角的补角一定是钝角；

（2）互补的两个角一定是一个锐角，一个钝角．

8. 证明“在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行”．

9. 如图，$AD\perp BC$ 于 D，$EG\perp BC$ 于 G，$\angle E=\angle 3$，AD 平分 $\angle BAC$ 吗？为什么？



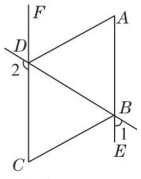
（第9题）

10. 如图，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle A=\angle C$，DA 平分 $\angle BDF$.

（1）AE 与 FC 平行吗？说明理由．

（2）AD 与 BC 的位置关系如何？为什么？

（3）BC 平分 $\angle DBE$ 吗？为什么？



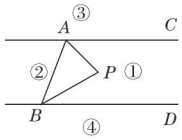
（第10题）

11. 如图，直线 $AC\parallel BD$，连接 AB，直线 AC，BD 及线段 AB 把平面分成①②③④四个部分，规定线上各点不属于任何部分．当动点 P 落在某个部分时，连接 PA，PB，构成 $\angle PAC$，$\angle PBD$，$\angle APB$ 三个角．（提示：有公共端点的两条重合的射线所组成的角是 $0°$ 角）

（1）当动点 P 落在第①部分时，求证：$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$；

（2）当动点 P 落在第②部分时，$\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$ 是否成立？（直接回答成立或不成立）

（3）当动点 P 落在第③部分时，全面探究 $\angle PAC$，$\angle PBD$，$\angle APB$ 之间的关系，并写出动点 P 的具体位置和相应的结论，选择一种结论加以证明．



（第11题）

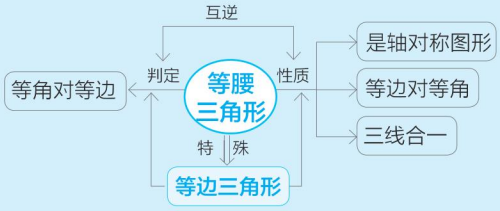
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 等腰三角形

核心知识

- 等腰三角形的性质定理
- 等边三角形的性质定理
- 等腰三角形的判定定理
- 等边三角形的判定定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 等腰三角形的性质定理

1. 性质定理 1：等腰三角形是轴对称图形，对称轴是顶角平分线所在的直线.

2. 性质定理 2：等腰三角形底边上的高、中线及顶角平分线重合（简称“三线合一”）.

几何语言：如图 2.3−1，在△ ABC 中，

（1）∵ $AB=AC$，$AD \perp BC$，

∴ AD 平分∠ BAC（或 $BD=CD$）；

（2）∵ $AB=AC$，$BD=DC$，

∴ $AD \perp BC$（或 AD 平分∠ BAC）；

（3）∵ $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

∴ $BD=DC$（或 $AD \perp BC$）.

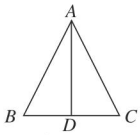


图 2.3−1



3. 性质定理 3：等腰三角形的两底角相等（简称“等边对等角”）.

几何语言：如图 2.3−1，在△ ABC 中，

∵ $AB=AC$，

∴ ∠ B = ∠ C.

提分·必记

特别解读

1. 适用条件：
（1）必须是等腰三角形，
（2）必须是底边上的高、底边上的中线和顶角平分线才相互重合.
2. 作用：是证明线段相等、角相等、线段垂直等关系的重要方法.

特别解读

- 适用条件：必须在同一个三角形中.
- 作用：证明角相等的常用方法.

拨考向▸ 利用等腰三角形的性质求线段长或角的度数

例 1 如图 2.3−2，在△ ABC 中，$AB=AC$，AD 平分∠ BAC.

（1）求∠ ADB 的度数；

（2）若∠ $BAC=100°$，求∠ B，∠ C 的度数；

（3）若 $BC=3$ cm，求 BD 的长.

解题秘方：紧扣等腰三角形的性质进行解答.

解：（1）∵ $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

∴ $AD \perp BC$，

∴ ∠ $ADB=90°$.

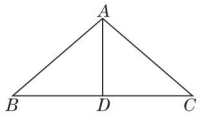


图 2.3−2

提分·秘诀

特别提醒

在等腰三角形中，运用“三线合一”时，已知其中“一线”，就可以得到另外“两线”. 根据等腰三角形的“三线合一”的性质可以得到等线段、等角以及两条直线互相垂直.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）在△ABC中，∵$AB=AC$，∠$BAC=100°$，

∴∠$B=$∠$C=\frac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$.

（3）∵$AB=AC$，AD平分∠BAC，∴AD是BC边上的中线，

∴$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times3=1.5$（cm）.

特别提醒

“等边对等角”的前提是在同一个三角形中.

点知识▶2 等边三角形的性质定理

提分·必记

性质定理：

（1）等边三角形的三条边都相等.

（2）等边三角形的三个内角相等，且都等于60°.

（3）等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴，分别是三个内角的平分线所在的直线.

（4）各边上的高、中线、对应的角平分线重合，且长度相等.

特别解读

等边三角形是特殊的等腰三角形，具备等腰三角形的所有性质：

任意两边都可以作为腰；

任意一个角都可以作为顶角；

任意一边上的“三线合一”.

拔考向▶利用等边三角形的性质解边角关系问题

提分·秘诀

例2 如图2.3-3，△ABC是等边三角形，D，E，F分别是三边AB，AC，BC上的点，且$DE\perp AC$，$EF\perp BC$，$DF\perp AB$，求△DEF各个内角的度数.

解法指导

等边三角形的三个内角等于60°，为三角形的内角直接提供了角的条件.若同时要运用三个内角，只需从一个角为例计算，其余可同理得到.

解题秘方：紧扣等边三角形的三个内角等于60°，求角的度数.

解：∵△ABC是等边三角形，∴∠$A=$∠$B=$∠$C=60°$.

∵$DE\perp AC$，$DF\perp AB$，

∴∠$AED=$∠$FDB=90°$，

∴∠$ADE=180°-90°-$∠$A=30°$，

∴∠$EDF=180°-30°-90°=60°$.

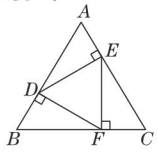


图2.3-3

同理可得∠$DEF=$∠$EFD=60°$.∴△DEF各个内角的度数都是60°.

点知识▶3 等腰三角形的判定定理

提分·必记

1. 判定定理：有两个角相等的三角形是等腰三角形（简称“等角对等边”）.

几何语言：如图2.3-4，在△ABC中，

∵∠$B=$∠C，∴$AB=AC$.

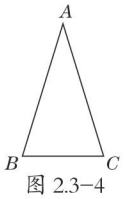


图2.3-4

2. 等腰三角形的性质与判定的异同：

相同点：使用的前提都是“在同一个三角形中”.

不同点：由三角形的两边相等，得到它们所对的角相等，是等腰三角形的性质；

由三角形的两角相等，得到它是等腰三角形，是等腰三角形的判定.

即：**等腰三角形的性质：**两边相等→这两边所对的角相等.

等腰三角形的判定：两角相等→这两角所对的边相等.

特别提醒

1. “等角对等边”不能叙述为“如果一个三角形有两个底角相等，那么它的两条腰相等”，因为在未判定出它是等腰三角形之前，不能用“底角”“顶角”“腰”“底边”这些名词.

2. “等角对等边”是我们以后证明两条线段相等的常用方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用等腰三角形的判定方法判定等腰三角形

例 3 如图 2.3−5，在△ ABC 中，P 是 BC 边上一点，过点 P 作 BC 的垂线，交 AB 于点 Q，交 CA 的延长线于点 R，若 $AQ=AR$，则△ ABC 是等腰三角形吗？请说明理由．

解题秘方： 利用“等角对等边”判定等腰三角形，只需证明三角形两个内角相等即可．

解： △ ABC 是等腰三角形．理由如下：

∵ $AQ=AR$，∴ $\angle R=\angle AQR$.

又∵ $\angle BQP=\angle AQR$，∴ $\angle R=\angle BQP$.

∵ $RP\perp BC$，∴ $\angle RPB=\angle RPC=90°$．

易知 $\angle B+\angle BQP=90°$，$\angle C+\angle R=90°$，

∴ $\angle B=\angle C$，∴ △ ABC 是等腰三角形．

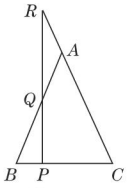


图 2.3−5

提分·秘诀

方法点拨

根据等腰三角形的判定定理可知，证明一个三角形是等腰三角形，就是要证明这个三角形有两个内角相等，所以证明两个内角相等是判定等腰三角形的关键所在．

点知识▶4 等边三角形的判定定理

1. 判定定理 1： 三个角都是 60° 的三角形是等边三角形．

几何语言： 如图 2.3−6，在△ ABC 中，

∵ $\angle A=\angle B=\angle C=60°$，

∴ △ ABC 是等边三角形．

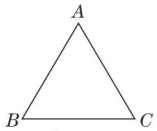


图 2.3−6

2. 判定定理 2： 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形．

几何语言： 如图 2.3−6，在△ ABC 中，∵ $AB=AC$，$\angle A=60°$ 或 $\angle B=60°$ 或 $\angle C=60°$，∴ △ ABC 是等边三角形．

证明等边三角形的思维导图：

三角形 —（思路 1：三边相等；思路 2：三角都是 60°）→ 等边三角形

三角形 —（等腰三角形的判定）→ 等腰三角形 —（有一个角等于 60°）→ 等边三角形



提分·必记

特别解读

在等腰三角形中，只要有一个角是 60°，无论这个角是顶角还是底角，判定定理 2 都成立．

拔考向▶利用等边三角形的判定方法判定等边三角形

例 4 如图 2.3−7，已知△ ABC 与△ DEF 都是等边三角形，点 B，E，C，F 在同一条直线上，AC 与 DE 相交于点 M．求证：△ MEC 是等边三角形．

解题秘方： 紧扣等边三角形的判定方法，从条件中分析出思路，找出最优的方法．

证明： ∵ △ ABC 与△ DEF 都是等边三角形，

∴ $\angle MCE=\angle MEC=60°$，

∴ △ MEC 是等腰三角形．

又∵ $\angle MEC=60°$，

∴ △ MEC 是等边三角形．

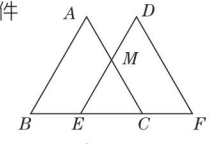


图 2.3−7

提分·秘诀

方法点拨

判定一个三角形是等边三角形的方法：

若已知三边关系，则选用等边三角形的定义来判定；

若已知三角关系，则选用“三个角都等于 60° 的三角形是等边三角形”来判定；

若已知是等腰三角形，则选用“有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形”来判定．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等边三角形的性质求边长

例5 如图2.3-8，等边三角形ABC的边长为3，D是AC的中点，点E在BC的延长线上，若$DE=DB$，求CE的长.

解题秘方： 利用等边三角形“三线合一”将未知线段向已知线段转化.

解： $\because \triangle ABC$是等边三角形，D是AC的中点，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，$CD=\frac{1}{2}AC$，$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\therefore \angle DBE=30^\circ$. 又$DE=DB$，$\therefore \angle E=\angle DBE=30^\circ$.

$\because \angle ACB=\angle CDE+\angle E$，

$\therefore \angle CDE=\angle ACB-\angle E=30^\circ$.

$\therefore \angle CDE=\angle E$，$\therefore CD=CE$.

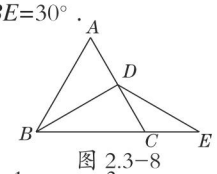


图 2.3-8

$\because$等边三角形ABC的边长为3，$\therefore CE=CD=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$.

挑战·高分

方法点拨

等边三角形的任何一边上都有“三线合一”的性质，有时要运用的和已知的不一致，需要通过“三线合一”的性质进行转化，找出要求线段与已知线段的关系，再解答.

拔尖角度 2 利用方程思想求等腰三角形中角的度数

例6 如图2.3-9，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D，E分别在AC，AB边上，且$BC=BD$，$AD=DE=EB$，求$\angle A$的度数.

解题秘方： 利用“等边对等角”及外角的性质将$\triangle ABC$中除$\angle A$外的其余两个角都用要求的$\angle A$来表示，再利用三角形内角和定理解决问题.

解： 设$\angle A=x^\circ$，$\because AD=DE$，$\therefore \angle AED=\angle A=x^\circ$.

$\therefore \angle EBD+\angle EDB=\angle AED=x^\circ$.

$\because DE=EB$，$\therefore \angle EBD=\angle BDE=\frac{1}{2}x^\circ$，

$\therefore \angle BDC=\angle A+\angle EBD=\frac{3}{2}x^\circ$.

$\because BC=BD$，$\therefore \angle C=\angle BDC=\frac{3}{2}x^\circ$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle C=\frac{3}{2}x^\circ$.

$\therefore x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x=180$，解得$x=45$. $\therefore \angle A=45^\circ$.

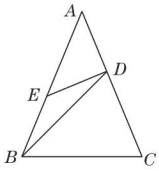


图 2.3-9

挑战·高分

方法点拨

当已知条件中没有已知度数的角而又要求角的度数时，一般采用**方程思想**来解决. 设出要求的角的度数，然后根据等腰三角形的性质以及三角形外角与内角之间的关系，用含未知数的式子表示出一个三角形的三个内角的度数，再利用三角形内角和定理列出方程，求出未知数的值即可.

拔尖角度 3 利用归一法证明线段之间的和差关系

例7 如图2.3-10，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$，$\angle CAB$的平分线交于点P，过点P作$DE\parallel AB$，分别交BC，AC于点D，E. 求证：$DE=BD+AE$.

解题秘方： 由平行线的性质结合角平分线的定义解决问题.

证明： $\because DE\parallel AB$，$\therefore \angle ABP=\angle DPB$.

$\because BP$平分$\angle ABC$，$\therefore \angle ABP=\angle DBP$，

$\therefore \angle DBP=\angle DPB$. $\therefore DP=DB$，

同理$EP=EA$. $\therefore DE=DP+EP=DB+EA$，即$DE=BD+AE$.

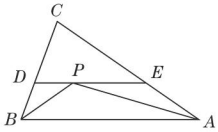


图 2.3-10

挑战·高分

解法提醒

当题目中出现角平分线、平行线这两个条件时，一般会有等腰三角形出现，记住这个基本图形，有助于解题. 简记为：角平分线+平行线→等腰三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查等腰三角形(等边三角形)的性质和判定,应用“等边对等角”和“等角对等边”解题,是近几年中考必考的内容,是求角的度数常用的方法,是证明线段相等和角相等的重要依据,单独考查时选择题较多,与其他知识综合考查时常以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法1 利用等腰三角形的性质求角的度数

例8 [中考·滨州]如图2.3-11,在△ABC中,$AB=AC$,D为BC上一点,且$DA=DC$,$BD=BA$,则∠B的大小为(　　)

A. 40°　　B. 36°　　C. 30°　　D. 25°

试题评析: 本题考查等腰三角形的性质、三角形内角和定理以及三角形的外角性质,解题的关键是通过三角形的外角,将不在同一个三角形中的角用同一个未知数表示出来.

解: 设∠$B=x$,∵$AB=AC$,

∴∠$C=$∠$B=x$.

∵$DA=DC$,∴∠$DAC=$∠$C=x$.

∴∠$ADB=$∠$DAC+$∠$C=2x$.

∵$BD=BA$,

∴∠$BAD=$∠$ADB=2x$.

∵∠$B+$∠$C+$∠$BAC=180°$,

∴$x+x+x+2x=180°$,解得$x=36°$.

三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和

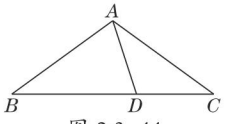


图 2.3-11

答案: B

冲刺·满分

方法点拨

计算三角形中有关角的度数时,如果计算不出来,或者找不到解题路径时,不妨考虑三角形的外角,它可以将不在同一个三角形中的角建立等量关系.

考法2 利用等边三角形的性质求角的度数

例9 [中考·镇江]如图2.3-12,直线$a//b$,△ABC的顶点C在直线b上,边AB与直线b相交于点D,若△BCD是等边三角形,∠$A=20°$,则∠1=_____°.

试题评析: 本题考查了等边三角形的性质、平行线的性质、对顶角的性质及三角形外角的性质,熟练掌握相关性质是解题的关键.

解: 如图2.3-12,设直线a与AB的交点为E,与AC的交点为F,

∵△BCD是等边三角形,

∴∠$BDC=60°$.

∵$a//b$,∴∠$DEF=$∠$BDC=60°$,

∴∠$AFE=$∠$DEF-$∠$A=60°-20°=40°$.

∴∠1=∠$AFE=40°$.

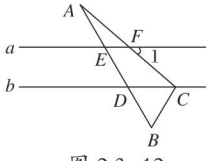


图 2.3-12

答案: 40

方法点拨

利用等边三角形的性质求角的度数时,根据等边三角形的三个内角相等,并且每一个角都等于60°的性质,找出要求角与已知角间的关系来进行相关计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用等腰三角形的性质和判定解决问题

例 10 [中考·重庆]如图 2.3-13，在△ABC中，$AB=AC$，$AD\perp BC$于点D.

（1）若$\angle C=42°$，求$\angle BAD$的度数；

（2）若点E在边AB上，$EF//AC$交AD的延长线于点F，求证：$AE=FE$.

试题评析：本题主要考查等腰三角形的性质和判定，充分利用“等角对等边”和“等边对等角”是解决问题的关键.

（1）**解**：在△ABC中，$\because AB=AC$，$AD\perp BC$于点D，

$\therefore\angle B=\angle C$，$AD$为顶角$\angle BAC$的平分线，

$\therefore\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$.

$\because\angle C=42°$，

$\therefore\angle BAC=180°-2\angle C=96°$，$\therefore\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=48°$.

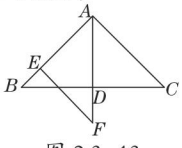


图 2.3-13

（2）**证明**：由（1）可知，$\angle FAC=\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$.

$\because EF//AC$交AD的延长线于点F，$\therefore\angle AFE=\angle FAC$，

$\therefore\angle AFE=\angle BAD$，$\therefore AE=FE$.

方法点拨

等腰三角形的性质和判定是证明角相等和线段相等的重要的依据，注意前提条件是两个角或两条线段在同一个三角形中.

考法 4 利用分类讨论思想求角的度数

例 11 [中考·绍兴]数学课上，张老师举了下面的例题：

例 1　等腰三角形ABC中，$\angle A=110°$，求$\angle B$的度数.（答案：35°）

例 2　等腰三角形ABC中，$\angle A=40°$，求$\angle B$的度数.（答案：40°或70°或100°）

张老师启发同学们进行变式，小敏编了如下一题：

变式：等腰三角形ABC中，$\angle A=80°$，求$\angle B$的度数.

（1）请你解答以上的变式题.

（2）解（1）后，小敏发现，$\angle A$的度数不同，得到$\angle B$的度数的个数也可能不同，如果在等腰三角形ABC中，设$\angle A=x°$，当$\angle B$有三个不同的度数时，请你探索x的取值范围.

试题评析：本题主要考查了等腰三角形的性质及三角形内角和定理，解题的关键是采用分类讨论思想求解.

解：（1）若$\angle A$为顶角，则$\angle B=(180°-\angle A)\div 2=50°$；

若$\angle A$为底角，$\angle B$为顶角，则$\angle B=180°-2\times 80°=20°$；

若$\angle A$为底角，$\angle B$为底角，则$\angle B=80°$；

故$\angle B=50°$或20°或80°.

方法点拨

对于等腰三角形，只要已知它的一个内角的度数，就能算出其他两个内角的度数，如果条件中没有确定这个内角是顶角还是底角，就要分情况讨论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）分两种情况：

①当 $90 \leqslant x<180$ 时，$\angle A$ 只能为顶角，

$\therefore \angle B$ 的度数只有一个；

②当 $0<x<90$ 时，

若 $\angle A$ 为顶角，则 $\angle B=\left(\dfrac{180-x}{2}\right)^{\circ}$；

若 $\angle A$ 为底角，$\angle B$ 为顶角，则 $\angle B=(180-2x)^{\circ}$；

若 $\angle A$ 为底角，$\angle B$ 为底角，则 $\angle B=x^{\circ}$．

当 $\dfrac{180-x}{2} \neq 180-2x$ 且 $180-2x \neq x$ 且 $\dfrac{180-x}{2} \neq x$，

即 $x \neq 60$ 时，$\angle B$ 有三个不同的度数．

综上所述，可知当 $0<x<90$ 且 $x \neq 60$ 时，$\angle B$ 有三个不同的度数．

特别提醒

$\because \left(\dfrac{180-x}{2}\right)^{\circ}$，$(180-2x)^{\circ}$，$x^{\circ}$ 表示的是 $\angle A$ 为顶角或底角时，$\angle B$ 的三种不同情况，且 $\angle B$ 要有三个不同的度数，

$\therefore \dfrac{180-x}{2}$，$180-2x$，$x$ 互不相等．

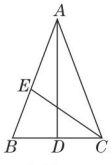
两年模拟兵法

☞答案见 240 页

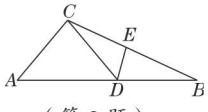
1.［中考·湖州］如图，AD，CE 分别是 $\triangle ABC$ 的中线和角平分线．若 $AB=AC$，$\angle CAD=20^{\circ}$，则 $\angle ACE$ 的度数是（　　）

A. 20°　　B. 35°

C. 40°　　D. 70°



（第 1 题）



（第 2 题）

2.［中考·滨州］如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 上一点，E 为 BC 上一点，且 $AC=CD=BD=BE$，$\angle A=50^{\circ}$，则 $\angle CDE$ 的度数为（　　）

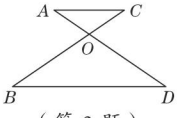
A. 50°　　B. 51°

C. 51.5°　　D. 52.5°

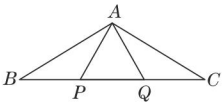
3. 如图，已知 $AC \parallel BD$，$OA=OC$，则下列结论不一定成立的是（　　）

A. $\angle B=\angle D$　　B. $\angle A=\angle B$

C. $OA=OB$　　D. $AD=BC$



（第 3 题）

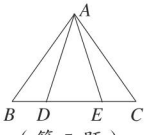


（第 4 题）

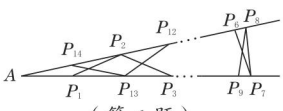
4. 如图，P，Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点，且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$，则 $\angle PAC$ 的大小等于（　　）

A. 120°　　B. 105°　　C. 90°　　D. 60°

5.［中考·成都］如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D，E 都在边 BC 上，$\angle BAD=\angle CAE$，若 $BD=9$，则 CE 的长为_____．



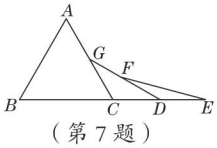
（第 5 题）



（第 6 题）

6.［中考·绍兴］如图所示的钢架中，焊上等长的 13 根钢条来加固钢架．若 $AP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_{13}P_{14}=P_{14}A$，则 $\angle A$ 的度数是_____．

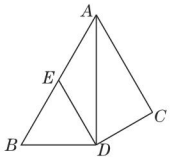
7. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 B，C，D，E 在同一直线上，且 $CG=CD$，$DF=DE$，求 $\angle E$ 的度数．



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考·内江] 如图，AD 平分 $\angle BAC$，$AD \perp BD$，垂足为点 D，$DE /\!/ AC$，求证：$\triangle BDE$ 是等腰三角形.

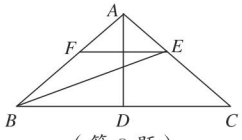


（第 8 题）

9. [中考·重庆] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是 BC 边上的中点，连接 AD，BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E，过点 E 作 $EF/\!/BC$ 交 AB 于点 F.

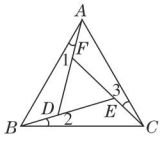
（1）若 $\angle C=36°$，求 $\angle BAD$ 的度数；

（2）求证：$FB=FE$.



（第 9 题）

10. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，则 $\triangle DEF$ 是等边三角形，请说明理由.



（第 10 题）

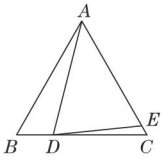
11. [中考·绍兴] 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为直线 BC 上一点，E 为直线 AC 上一点，$AD=AE$，设 $\angle BAD=\alpha$，$\angle CDE=\beta$.

（1）如图，若点 D 在线段 BC 上，点 E 在线段 AC 上.

①如果 $\angle ABC=60°$，$\angle ADE=70°$，那么 $\alpha=$_____°，$\beta=$_____°.

②求 α，β 之间的关系式.

（2）是否存在不同于以上②中的 α，β 之间的关系式？若存在，求出这个关系式（求出一个即可）；若不存在，请说明理由.



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4 线段的垂直平分线

核心知识

- 线段垂直平分线的性质定理
- 线段垂直平分线的性质定理的逆定理
- 画对称轴

知识链接



点知识▸ 1 线段垂直平分线的定义及性质定理

1. 定义： 垂直且平分一条线段的直线叫作这条线段的垂直平分线.

注意： 线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是它的对称轴.

2. 性质定理： 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

条件： 点在线段的垂直平分线上.

结论： 这个点到线段两端的距离相等.

几何语言： 如图 2.4−1，

$\because AD \perp BC$，$BD=CD$，$\therefore AB=AC$.



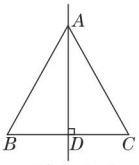


图 2.4−1

拔考向▸ 利用线段垂直平分线的性质求线段长

例 1 如图 2.4−2，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$ cm，BC 的垂直平分线分别交 AB，BC 于点 D，E，$\triangle ACD$ 的周长为 8 cm，求线段 AC 的长.

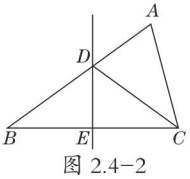


图 2.4−2

解题秘方： 利用线段的垂直平分线的性质将要求的线段向已知条件转化.

解： $\because DE$ 为 BC 的垂直平分线，

$\therefore CD=BD$.

$\therefore \triangle ACD$ 的周长 $=AC+AD+CD=AC+AD+BD=AC+AB=8$ cm.

又 $\because AB=5$ cm，$\therefore AC=3$ cm.

点知识▸ 2 线段垂直平分线的性质定理的逆定理

1. 逆定理： 到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

条件： 点到线段两端距离相等.

结论： 点在线段的垂直平分线上.

几何语言： 如图 2.4−3，$\because AB=AC$，

$\therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上.

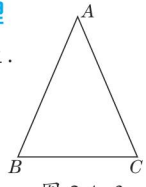


图 2.4−3

2. 三角形三边垂直平分线的性质： 三角形三边垂直平分线相交于一点；这个点到三角形三个顶点的距离相等.

提分·必记

特别解读

1. 线段的垂直平分线的性质定理中的“距离”是“该点与这条线段两端的距离”.
2. 用线段的垂直平分线的性质可直接证明线段相等.

提分·秘诀

解法指导

利用线段垂直平分线的性质转化线段的位置，是一种常用的解题方法. 本题中解题的关键是利用线段垂直平分线的性质将△ ACD 的周长转化为线段 AB+AC 的长，进行求解. 注意转化思想的应用.

提分·必记

特别解读

1. 证明一个点在一条线段的垂直平分线上，思路有两种：一是作垂直，证平分；二是连中点证垂直.
2. 证明线段的垂直平分线，必须证明两个点在垂直平分线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用线段垂直平分线的性质定理的逆定理证明两直线的位置关系

例 2 如图 2.4−4，在△ABC中，D为BC上的一点，连接AD，点E在AD上，并且∠1=∠2，∠3=∠4. 求证：AD垂直平分BC.

解题秘方：紧扣线段垂直平分线的性质定理的逆定理，利用线段相等证明垂直平分线.

解：∵∠1=∠2，∠3=∠4，∴∠ABD=∠ACD，

∴AB=AC. ∴点A在线段BC的垂直平分线上.

∵∠1=∠2，∴BE=CE，

∴点E在线段BC的垂直平分线上，

∴AD是线段BC的垂直平分线.

即AD垂直平分BC.

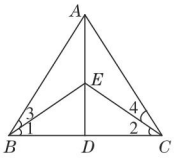


图 2.4−4

提分·秘诀

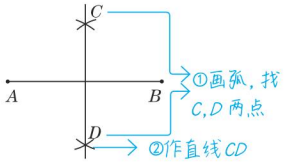
教你一招

判断线段垂直平分线的两种方法：

一是**定义法**，二是判定定理. 一般习惯用定义法进行判断，而利用判定定理判断更简单. 用判定定理判定一条直线是线段的垂直平分线时，一定要证明直线上有两点到线段两端的距离相等.

知识▶3 线段的垂直平分线的作法

作线段AB的垂直平分线：

作法	图示
第 1 步：分别以点A，B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径画弧，两弧相交于点C和点D ↓ 第 2 步：过点C，D作直线CD，则直线CD就是线段AB的垂直平分线	

提分·必记

特别提醒

在作线段的垂直平分线的过程中，弧的半径一定要大于已知线段长的一半.

考向▶利用线段的垂直平分线的作法作图形的对称轴

例 3 如图 2.4−5 所示图形是轴对称图形，点B与点E，点C与点D分别是对应点，画出该图形的对称轴.

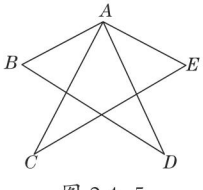


图 2.4−5

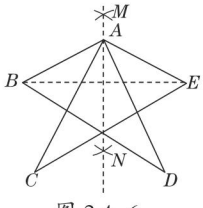


图 2.4−6

解题秘方：作轴对称图形中任意一对对应点所连线段的垂直平分线，此线即为对称轴.

解：作法：如图 2.4−6.（1）连接BE；

（2）分别以点B和点E为圆心，大于$\frac{1}{2}BE$的长为半径作弧，两弧相交于M，N两点；

（3）作直线MN，则直线MN即为所求作的对称轴.

提分·秘诀

方法点拨

作轴对称图形的对称轴的两种方法：

一是**折叠法**，将轴对称图形对折，折痕所在的直线为对称轴；

二是先找到轴对称图形的一组对应点，再作连接这组对应点的线段的垂直平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 过一点作已知直线的垂线

1. 当点 P 在直线 l 上：

作法

第 1 步：在直线 l 上点 P 的两旁分别截取线段 PA，PB，使 $PA=PB$

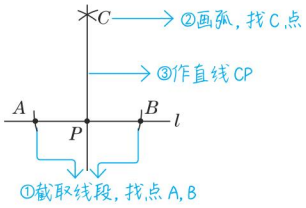
↓

第 2 步：分别以点 A，B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 C

↓

第 3 步：过点 C，P 作直线 CP，则直线 CP 为所求作的直线

图示



2. 当点 P 在直线 l 外：

作法

第 1 步：以点 P 为圆心，以大于点 P 到直线 l 的距离的线段长为半径画弧，交直线 l 于点 A，B

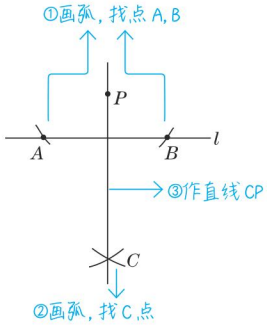
↓

第 2 步：分别以点 A，B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 C

↓

第 3 步：过点 C，P 作直线 CP，则直线 CP 为所求作的直线

图示



拔考向▶ 利用作垂线的方法作垂线

例 4 如图 2.4−7，点 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点，过点 D 作 AC 边的垂线（要求：尺规作图，保留作图痕迹，写出作法，不用证明）.

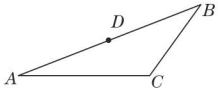


图 2.4−7

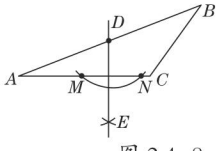


图 2.4−8

解题秘方： 紧扣过直线外一点作已知直线的垂线的方法进行作图.

解： 作法：（1）以点 D 为圆心，以大于点 D 到 AC 的距离的线段长为半径画弧，交直线 AC 于点 M，N；

（2）分别以点 M，N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 E；

（3）过点 D，E 作直线 DE，则直线 DE 为所求作的垂线. 如图 2.4−8.

提分·必记

特别提醒

- 规定“以大于已知线段的一半（$\frac{1}{2}AB$）的长为半径”是两弧有交点的前提；
- 两弧的交点到线段的两个端点的距离相等.

提分·秘诀

特别提醒

过一点作已知直线的垂线时，要分清该点在直线外还是在直线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 线段垂直平分线中的边角关系问题

挑战·高分

例 5 如图 2.4−9，$AB=AD$，$BC=DC$，点 E 是 AC 上一点，求证：（1）$BE=DE$；（2）$\angle ABE=\angle ADE$.

解题秘方： 连接 BD，先利用线段垂直平分线的判定，得到 AC 是 BD 的垂直平分线，然后再利用垂直平分线的性质证明线段相等.

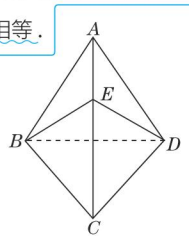


图 2.4−9

证明： 如图 2.4−9，连接 BD.

（1）$\because AB=AD$，

$\therefore$ 点 A 在线段 BD 的垂直平分线上.

$\because BC=CD$，

$\therefore$ 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上.

$\therefore AC$ 是线段 BD 的垂直平分线.

又$\because$ 点 E 在 AC 上，$\therefore BE=DE$.

（2）$\because AB=AD$，

$\therefore \angle ABD=\angle ADB$.

由（1）知 $BE=DE$，

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$.

$\therefore \angle ABD-\angle EBD=\angle ADB-\angle EDB$.

$\therefore \angle ABE=\angle ADE$.

方法点拨

证明两条线段或角相等常用方法：

（1）通过证明两条线段所在的三角形全等（2.5 节才学）；

（2）用线段垂直平分线的性质证明两条线段相等.

拔尖角度▸ 2 利用尺规作图解决实际问题

挑战·高分

例 6 图 2.4−10 中的△ ABC 是某村若干公顷土地的示意图，该村决定把这块土地平均分给四位花农种植，请你帮他们分一分，提供两种分法（要求画出图形，并简要说明分法）.

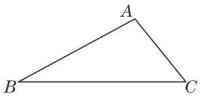


图 2.4−10

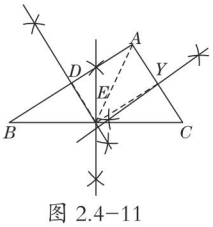


图 2.4−11

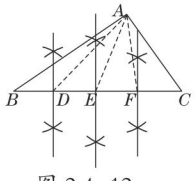


图 2.4−12

解题秘方： 解决问题的关键是平分线段，利用尺规作图进行平分线段即可.

解： 第一种分法：如图 2.4−11，分别取 AB，BC，AC 的中点 D，E，Y，连接 DE，EY，AE，所形成的四个三角形面积相等.

第二种分法：如图 2.4−12，在 BC 边上取四等分点 D，E，F，分别连接 AD，AE，AF，所形成的四个三角形面积相等.（答案不唯一）

方法点拨

解决与尺规作图有关的实际问题，不仅需要动手操作能力，更多的是需要几何知识的运用，这就需要我们在日常的生活中不断培养自己的空间观念，从分析图形入手，研究图形特点，在掌握相关几何知识的基础上提高动手操作能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 线段垂直平分线的性质的应用是本节的重点内容，近几年中考常将线段垂直平分线与其他知识综合在一起考查，若简单考查，常与三角形的周长相结合，题目难度不大，题型主要是选择题和填空题.

三年中考兵法

考法1 利用线段垂直平分线的性质求角度

例7 [中考·深圳]如图2.4-13，已知线段AB，分别以A，B为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧，连接弧的交点得到直线l，在直线l上取一点C，使得$\angle CAB=25°$，延长AC至M，则$\angle BCM$的度数为（　　）

A.40°　　B.50°　　C.60°　　D.70°

试题评析： 本题考查了线段垂直平分线的性质，解题的关键是利用线段垂直平分线的性质得到线段相等，转化为角相等.

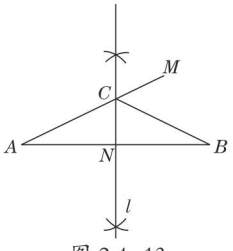


图2.4-13

解： 根据作图可知，直线l是线段AB的垂直平分线，

$\therefore AC=BC$. $\therefore \angle A=\angle B$.

$\therefore \angle BCM=2\angle A=2\times25°=50°$.

答案： B

考法2 利用线段垂直平分线的性质求线段长

例8 [中考·恩施州]如图2.4-14，在$\triangle ABC$中，DE是AC的垂直平分线，$\triangle ABC$的周长为19 cm，$\triangle ABD$的周长为13 cm，则AE的长为（　　）

A. 3 cm　　B. 6 cm　　C. 12 cm　　D. 16 cm

试题评析： 本题考查线段垂直平分线的性质，利用线段垂直平分线的性质转化线段的数量关系.

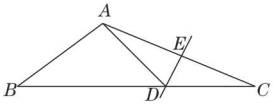


图2.4-14

解： $\because DE$是AC的垂直平分线，

$\therefore AE=CE$，$AD=CD$.

$\because \triangle ABD$的周长$=AB+BD+AD=AB+BD+CD=AB+BC=13$ cm，$\triangle ABC$的周长$=AB+BC+AC=19$ cm，$\therefore AC=6$ cm.

$\therefore AE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times6=3$（cm）.

答案： A

冲刺·满分

解法指导

线段的垂直平分线不仅可以证明线段相等，还可以借助线段相等，得角相等，从而求一些相关角的度数.

解法提醒

三角形一边的垂直平分线与另一边相交于一点，此点与三角形第三边的两个顶点构成的三角形的周长等于原三角形的两边之和.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

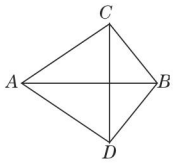
1. 如图，已知 $AC=AD$，$BC=BD$，则有（　　）

A. AB 垂直平分 CD

B. CD 垂直平分 AB

C. AB 与 CD 互相垂直平分

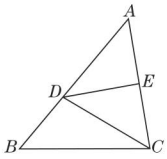
D. CD 平分 $\angle ACB$



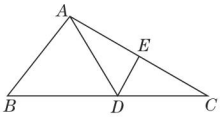
（第 1 题）

2. 如图，线段 AC 的垂直平分线交线段 AB 于点 D，$\angle A=50°$，则 $\angle BDC$ 等于（　　）

A. 50°　　B. 100°　　C. 120°　　D. 130°



（第 2 题）



（第 3 题）

3. [中考·天门] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AC 的垂直平分线分别交 AC，BC 于 E，D 两点，$EC=4$，$\triangle ABC$ 的周长为 23，则 $\triangle ABD$ 的周长为（　　）

A. 13　　B. 15　　C. 17　　D. 19

4. 锐角三角形 ABC 内有一点 P，满足 $PA=PB=PC$，则点 P 是 $\triangle ABC$（　　）

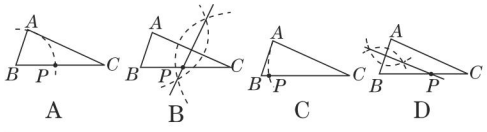
A. 三条角平分线的交点

B. 三条中线的交点

C. 三条高的交点

D. 三边垂直平分线的交点

5. [中考·安顺] 已知 $\triangle ABC$（$AC<BC$），用尺规作图的方法在 BC 上确定一点 P，使 $PA+PC=BC$，则符合要求的作图痕迹是（　　）

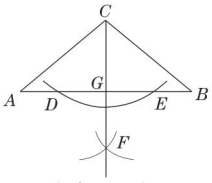


A　　B　　C　　D

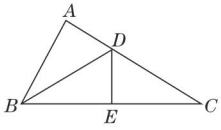
6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle A=40°$，观察图中尺规作图的痕迹，可知 $\angle BCG$ 的度数为（　　）

A. 40°　　B. 45°

C. 50°　　D. 60°



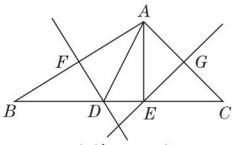
（第 6 题）



（第 7 题）

7. [中考·徐州] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=31°$，$\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 D，如果 DE 垂直平分 BC，那么 $\angle A=$_____°.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AB，AC 的垂直平分线分别交 BC 于点 D，E，垂足分别为 F，G，已知 $\triangle ADE$ 的周长为 12 cm，则 $BC=$_____.



（第 8 题）

9. 如图，某城区有 A，B 两所学校，在距学校不远处有 C，D 两家机关单位，现在要在它们之间安装一个邮筒，使得这个邮筒到 A，B 两所学校的距离相等，同时到 C，D 两家机关单位的距离也相等，请在图中标出邮筒的位置.



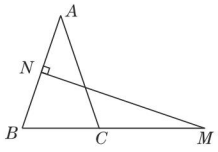
（第 9 题）

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，交 BC 的延长线于点 M.

（1）若 $\angle A=40°$，求 $\angle NMB$ 的度数.

（2）如果将（1）中 $\angle A$ 的度数改为 70°，其余条件不变，求 $\angle NMB$ 的度数.

（3）由（1）（2）你发现了什么规律？并说明理由.



（第 10 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.5 全等三角形

核心知识

- 全等图形
- 全等三角形
- 全等三角形的性质
- 全等三角形的判定

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 全等图形

1. **定义**：能够完全重合的两个图形叫作全等图形.

全等图形的特征：两相同与两无关.

（1）两相同：

①形状相同；②大小相同.

（2）两无关：

①与位置无关；②与方向无关.

2. **全等变换的常见方式**：平移、轴反射、旋转.

提分·必记

特别提醒

完全重合说明两个图形周长和面积相等

周长或面积相等的两个图形不一定是全等的.

拨考向 利用全等图形的定义识别全等图形

例 1 如图 2.5-1 中是全等图形的是_____.

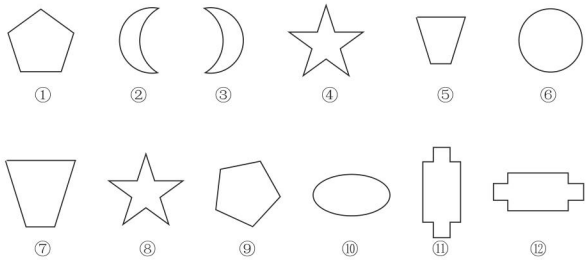


图 2.5-1

解题秘方：根据全等图形的定义进行判断.

解：上述图形中，⑤和⑦形状相同，但大小不同，

⑥和⑩大小、形状都不同；

①和⑨、②和③、⑪和⑫尽管方向不同，但大小、形状完全相同，所以它们是全等图形，

④和⑧都是五角星，大小、形状都相同，是全等图形.

答案：①和⑨、②和③、④和⑧、⑪和⑫

提分·秘诀

方法点拨

确定两个图形全等的方法：

（1）**条件判定法**：

①形状相同，

②大小相等.

是否是全等图形与位置无关.

（2）**重合判定法**：通过平移、旋转、轴反射等方法把两个图形叠合在一起，看它们能否完全重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 全等三角形

1. 全等三角形的相关概念：

（1）**全等三角形的概念：**能完全重合的两个三角形叫作全等三角形.

（2）**全等三角形的对应元素：**

①**对应顶点：**全等三角形中，互相重合的顶点.

②**对应边：**全等三角形中，互相重合的边.

③**对应角：**全等三角形中，互相重合的角.


全等变换方式

2. 全等三角形的表示方法：

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”，在表示两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应位置上.

拔考向▶利用全等三角形的对应关系确定对应元素

例 2 如图 2.5−2，已知△ ABD ≌△ CDB，∠ ABD=∠ CDB. 写出其对应边和对应角.

解题秘方：根据图形的位置特征确定对应角和对应边.

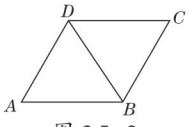


图 2.5−2

解： BD 与 DB，AD 与 CB，AB 与 CD 是对应边；∠ A 与∠ C，∠ ABD 与∠ CDB，∠ ADB 与∠ CBD 是对应角.

点知识▶3 全等三角形的性质

1. 性质：全等三角形的对应边相等；全等三角形的对应角相等.

几何语言：∵△ ABC ≌△ DEF，

$$\therefore \begin{cases} AB=DE,\ BC=EF,\ AC=DF, \\ \angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F. \end{cases}$$


全等三角形的性质

2. 拓展：全等三角形的对应元素相等.

全等三角形中的对应元素包括对应边、对应角、对应边上的中线、对应边上的高、对应角的平分线、周长、面积等.

拔考向▶利用全等三角形的性质求对应元素间的关系

类型 1：全等三角形的性质在说明线段关系中的应用

例 3 如图 2.5−3，已知△ ABC ≌△ EDF.

（1）求证：$DC=BF$；

（2）求证：AC // EF.

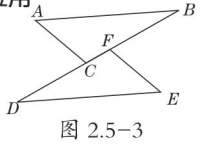


图 2.5−3

解题秘方：利用全等三角形的对应边相等和对应角相等解决问题.

证明：（1）∵△ ABC ≌△ EDF，

∴ $DF=BC$. ∴ $DF-CF=BC-CF$，即 $DC=BF$.

（2）∵△ ABC ≌△ EDF，∴∠ ACB=∠ EFD. ∴ AC // EF.

提分·必记

特别解读

对应边或对应角与对边或对角的区别：

对应边、对应角是两个全等三角形中对应的两条边之间或对应的两个角之间的关系；对边、对角是同一个三角形中边和角之间的关系，“对边”是指三角形中某个角所对的边，“对角”是指三角形中某条边所对的角.

提分·秘诀

方法点拨

利用图形的位置特征确定对应边和对应角时，要抓住对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边；当全等三角形的两组对应边（角）已确定时，剩下的一组边（角）就是对应边（角）.

提分·必记

要点解读

1. 应用全等三角形的性质时，要先确定两个条件：

（1）两个三角形全等；

（2）找对应元素.

2. 全等三角形的性质是证明线段、角相等的常用方法.

提分·秘诀

解法指导

全等三角形的对应边、对应角相等，由此可得两条线段或两个角相等，从而进一步说明线段或角的相等关系、和差关系或求线段的长度、角的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：全等三角形的性质在求角度中的应用

例 4 如图 2.5−4，在△ ABC 中，D，E 分别是边 AC，BC 上的点，若△ ADB ≌△ EDB ≌△ EDC，求∠ C 的度数．

解题秘方： 利用全等三角形的对应角相等的性质，并结合三角形内角和定理进行计算．

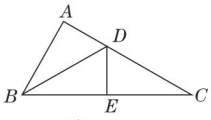


图 2.5−4

解： ∵△ ADB ≌△ EDB ≌△ EDC，

∴∠ ABD = ∠ EBD = ∠ C，

∠ A = ∠ BED = ∠ CED.

又∵∠ BED + ∠ CED = 180°，

∴∠ BED = ∠ CED = 90°．∴∠ A = 90°．

∴∠ ABD + ∠ DBE + ∠ C = 180° − ∠ A = 90°．

∴ 3∠ C = 90°．∴∠ C = 30°．

点知识 4 基本事实“边角边”或“SAS”

基本事实： 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等（通常可简写成“边角边”或“SAS”）．

几何语言： 如图 2.5−5，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，$\begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$

∴△ ABC ≌△ $A'B'C'$（SAS）．

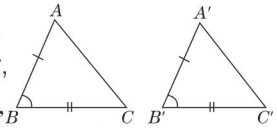


图 2.5−5

特别解读：

（1）两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等．

（2）在列举两个三角形全等的条件时，应把三个条件按顺序排列，并用大括号括起来．

拔考向 利用“SAS”判定两个三角形全等

例 5 如图 2.5−6，点 C 是 AB 的中点，$AD=CE$，且 AD // CE. 求证：△ ACD ≌△ CBE.

解题秘方： 根据条件找出两个三角形中的两边及其夹角对应相等，利用“SAS”判定两个三角形全等．

证明： ∵点 C 是 AB 的中点，∴ $AC=CB$.

∵ AD // CE，∴∠ CAD = ∠ BCE.

在△ ACD 和△ CBE 中，

$\begin{cases} AC=CB, \\ \angle CAD=\angle BCE, \\ AD=CE, \end{cases}$

∴△ ACD ≌△ CBE（SAS）．

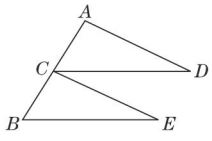


图 2.5−6

方法点拨

利用全等三角形的性质求角的度数的方法：

一般先确定两个三角形中角的对应关系，由这种关系实现已知角和未知角之间的转换，从而求出所要求的角的度数．

提分·必记

要点解读

- 相等的元素：两边及这两边的夹角．
- 书写顺序：边→角→边．

提分·秘诀

方法点拨

常见的隐含等角的情况：①公共角相等；②对顶角相等；③等角加（或减）等角，其和（或差）仍相等；④同角或等角的余（或补）角相等；⑤由角平分线的定义得出角相等；⑥由垂直的定义得出角相等；⑦由平行线得到同位角或内错角相等，另外，一些自然规律如“太阳光线可以看成是平行的”“光的反射角等于入射角”等也是常见的隐含条件．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 5 基本事实“角边角”或“ASA”

基本事实：两角及其夹边分别相等的两个三角形全等（通常可简写成“角边角”或“ASA”）.

几何语言：如图 2.5−7，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\\ \angle C=\angle C',\end{cases}$$

$\therefore$△ $ABC\cong$△ $A'B'C'$（ASA）.

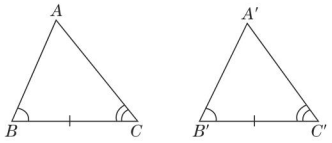


图 2.5−7

拔考向▶ 利用“ASA”判定两个三角形全等

例 6 如图 2.5−8，已知 $AB\parallel DF$，$AC\parallel DE$，$BC=FE$，且点 B，E，C，F 在一条直线上. 求证：△ $ABC\cong$△ DFE.

解题秘方：解题的关键是由两组平行线得出两组角对应相等，构造两角及夹边对应相等.

证明：$\because AB\parallel DF$ 且点 B，E，C，F 在一条直线上，$\therefore\angle B=\angle F$.

$\because AC\parallel DE$，$\therefore\angle ACB=\angle DEF$.

在△ ABC 和△ DFE 中，$\begin{cases}\angle B=\angle F,\\ BC=FE,\\ \angle ACB=\angle DEF,\end{cases}$

$\therefore$△ $ABC\cong$△ DFE（ASA）.

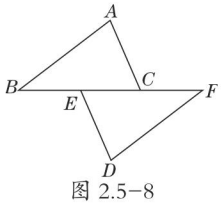


图 2.5−8

点知识▶ 6 定理“角角边”或“AAS”

1. **定理：**两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（通常可简写成“角角边”或“AAS”）.

几何语言：

如图 2.5−9，在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A',\\ \angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\end{cases}$$

$\therefore$△ $ABC\cong$△ $A'B'C'$（AAS）.

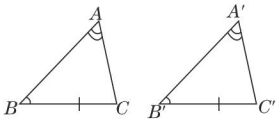


图 2.5−9

2. “ASA”与“AAS”的区别与联系：

	“S”的意义	书写格式	联系
ASA	“S”是两角的夹边	把夹边相等写在两角相等的中间	由三角形内角和定理可知，“AAS”可由“ASA”推导得出
AAS	“S”是其中一角的对边	把两角相等写在一起，边相等放在最后	

提分·必记

特别解读

1. 相等的元素：两角及两角的夹边.
2. 书写顺序：角→边→角.
3. 夹边即两个角的公共边.

提分·秘诀

方法点拨

用“ASA”判定两个三角形全等时，一定要说明这两个三角形有两个角以及这两个角的夹边分别相等，说明时要强调是夹边.

提分·必记

特别提醒

- 判定两个三角形全等的三个条件中，“边”是必不可少的.
- 由于“角角边”和“角边角”是可以互相转化的，故能用“角角边”证明的问题，一般也可以用“角边角”证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用“AAS”判定两个三角形全等

例 7 如图 2.5−10，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，求证：$\triangle BOD \cong \triangle COE$.

解题秘方：找出两个三角形中两个角及其中一角的对边对应相等，利用“AAS”判定两个三角形全等.

证明：在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle A=\angle A, \\ AE=AD, \end{cases}$$

公共角可直接写出，对顶角也可直接写出

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$（SAS）. $\therefore \angle B=\angle C$.

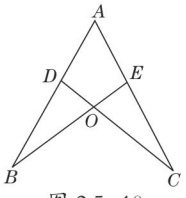


图 2.5−10

$\because AB=AC$，$AD=AE$，$\therefore BD=CE$.

在$\triangle BOD$和$\triangle COE$中，

$$\begin{cases} \angle BOD=\angle COE, \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOD \cong \triangle COE$（AAS）.

点知识▶7 基本事实“边边边”或“SSS”

基本事实：三边分别相等的两个三角形全等（通常可简写成“边边边”或“SSS”）.

几何语言：如图 2.5−11，

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \\ AC=A'C', \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（SSS）.

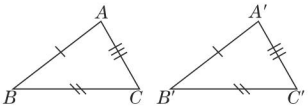


图 2.5−11

2. 判定两个三角形全等常用的方法：

判定两个三角形全等需要三组元素对应相等，在具体解题时，其中两组元素对应相等往往是已知的或容易得到的，而寻找第三组元素相等，则需要一定的方法，如下表：

已知对应相等的元素	可选择的判定方法	需寻找的条件
两边（SS）	SSS 或 SAS	可找第三边对应相等或找两边的夹角对应相等
一边及其邻角（SA）	SAS 或 ASA 或 AAS	可找夹已知角的另一边对应相等或找夹已知边的另一角对应相等或找已知边的对角对应相等
一边及其对角（SA）	AAS	可找另一角对应相等
两角（AA）	ASA 或 AAS	可找两角的夹边对应相等或找相等一角的对边对应相等

提分·秘诀

方法点拨

证明三角形全等时，有些条件是已知的，有些条件是隐含在条件或图形中的，比如对顶角，公共角，公共边等，还有些条件是通过证明三角形全等，利用全等三角形的性质得到的.

提分·必记

特别提醒

在两个三角形的六组元素（三组边和三组角）中，由已知的三组元素可判定两个三角形全等的组合有4个：“SSS”“SAS”“ASA”和“AAS”，不能判定两个三角形全等的组合是“AAA”和“SSA”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用“SSS”判定两三角形全等

例 8 如图 2.5−12，已知点 A，D，B，F 在一条直线上，$AC=FE$，$BC=DE$，$AD=FB$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

解题秘方：紧扣“SSS”找出两个三角形中三边对应相等的条件来判定两个三角形全等.

证明：$\because AD=FB$，

$\therefore AD+DB=FB+DB$，（DB 为公共边）

即 $AB=FD$.

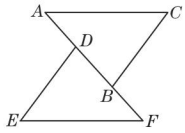


图 2.5−12

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FDE$ 中，$\begin{cases} AC=FE, \\ AB=FD, \\ BC=DE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FDE$（SSS）.

提分·秘诀

方法点拨

运用“SSS”证明两个三角形全等主要就是找边相等，边相等除了题目中已知的边相等以外，还有些相等的边隐含在条件或图形中，常见的隐含的等边有：①公共边相等；②等边加（或减）等边，其和（或差）仍相等；③由中线的定义得出线段相等.

知识▶8 三角形的稳定性

1. 三角形的稳定性：

只要三角形三边的长度确定，那么这个三角形的形状和大小也就固定了，三角形的这个性质叫作三角形的稳定性.



2. 三角形稳定性的应用：

（1）稳定性是三角形特有的，在生产和生活中具有广泛的应用，有很多需要保持稳定性的物体都被制成三角形的形状，如起重机、钢架桥等.

（2）四边形及四边以上的图形不具有稳定性，为保证其稳定性，常在图形中构造三角形. 四边形的不稳定性在生活中也有广泛的应用，如活动挂架、伸缩门等.

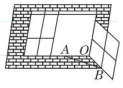
提分·必记

示图

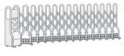
钢架桥 →



伸缩门 →



窗户 →



考向▶利用三角形的稳定性固定物体的形状

例 9 李明家有一个由六根钢管连接而成的钢架 $ABCDEF$，如图 2.5−13，为了使这个钢架稳固，他计划用三根钢管来连接使它不变形. 请帮李明解决这个问题.

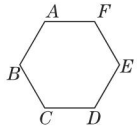
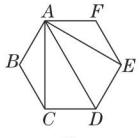
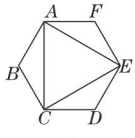


图 2.5−13



①



②

图 2.5−14

解题秘方：根据三角形的稳定性，将钢架分割成三角形.

解：如图 2.5−14 ①②.（答案不唯一，只要将图形分割成三角形即可）

提分·秘诀

解法提醒

- 判断一个图形是否具有稳定性要看它的基本组成部分是不是三角形. 若是，则具有稳定性；若不是，则不具有稳定性.
- 为了保证四边形及四边以上的图形稳定，最简单的方法是连对角线（不相邻两个顶点的连线）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用建立三角形全等的模型解实际应用问题

挑战·高分

例 10 某校八年级学生到野外活动，为测量一池塘两端 A，B 的距离，甲、乙、丙三名同学分别设计出如图 2.5-15 的三种方案：

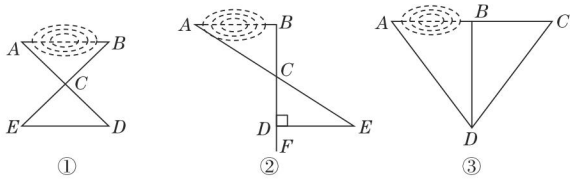


图 2.5-15

甲：如图 2.5-15 ①，先在平地取一个可直接到达 A，B 的点 C，再连接 AC，BC，并延长 AC 至点 D，延长 BC 至点 E，使 $DC=AC$，$EC=BC$，最后测出 DE 的长（即 A，B 的距离）.

乙：如图 2.5-15 ②，先过点 B 作 AB 的垂线 BF，再在 BF 上取 C，D 两点，使 $CD=BC$，接着过点 D 作 BD 的垂线 DE，交 AC 的延长线于点 E，测出 DE 的长（即 A，B 的距离）.

丙：如图 2.5-15 ③，过点 B 作 $BD\perp AB$，连接 AD，在 AB 的延长线上取一点 C，使 $\angle BDC=\angle BDA$，测出 BC 的长（即 A，B 的距离）.

（1）以上三名同学所设计的方案，可行的有_____；

（2）请你选择其中一种可行的方案，说明它可行的理由.

解题秘方：根据方案中给出的条件，判定两个三角形全等，将无法测量的线段转化为可以测量的线段.（2）中任选一种可行的方案说明即可.

解：（1）甲、乙、丙

（2）选甲：在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，$\begin{cases}AC=DC,\\ \angle ACB=\angle DCE,\\ BC=EC,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle DEC$（SAS）. $\therefore AB=DE$.

选乙：$\because AB\perp BD$，$DE\perp BD$，$\therefore\angle B=\angle CDE=90^\circ$.

在$\triangle ABC$和$\triangle EDC$中，$\begin{cases}\angle ABC=\angle EDC,\\ CB=CD,\\ \angle ACB=\angle ECD,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle EDC$（ASA）. $\therefore AB=ED$.

选丙：$\because BD\perp AB$，$\therefore\angle ABD=\angle CBD=90^\circ$.

在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle CBD,\\ BD=BD,\\ \angle BDA=\angle BDC,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CBD$（ASA）. $\therefore AB=CB$.

解法指导

建立三角形全等的模型解决实际问题时，需把握以下步骤：

（1）根据实际问题抽象出几何图形；

（2）根据图形结合题意，建立三角形全等的模型；

（3）分析问题，寻找推理途径；

（4）写出推理论证过程，解决问题.

教你一招

构造全等三角形测距离的求解思路：

（1）当两点间的距离不能直接测量时，可以把要测量的两点间的线段作为三角形的一边构造全等三角形，把待测量的线段转化为可直接测量的线段来求解.

（2）构造全等三角形模型时，要充分利用地形及已知条件，根据全等三角形的判定条件设计出最简单的测量方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用逆向思维法解决条件探索问题

例 11 如图 25-16，A，D，E 三点在同一条直线上，且 $\triangle BAD \cong \triangle ACE$，$AB$ 与 CA，AD 与 CE 是对应边.

（1）求证：$BD=DE+CE$.

（2）$\triangle ABD$ 满足什么条件时，$BD \parallel CE$？请说明理由.

解题秘方：根据全等三角形的性质找出相等的线段和角，然后利用要解决的问题与得出的相等的线段和角之间的关系去解决.

（1）**证明：**$\because \triangle BAD \cong \triangle ACE$，

$\therefore BD=AE$，$AD=CE$.

又 $\because AE=AD+DE$，$\therefore BD=DE+CE$.

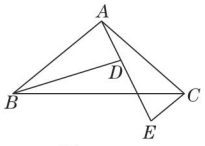


图 2.5-16

（2）**解：**当 $\triangle ABD$ 满足 $\angle ADB=90°$ 时，$BD \parallel CE$.

理由：$\because \triangle BAD \cong \triangle ACE$，$\therefore \angle ADB=\angle CED$.

若 $\angle ADB=90°$，则 $\angle CED=90°$.

又 $\because \angle ADB+\angle BDE=180°$，$\therefore \angle BDE=90°$，

$\therefore \angle BDE=\angle CED$，$\therefore BD \parallel CE$.

挑战·高分

方法点拨

解答探究条件类题目的方法：

方法一：先猜想出条件，利用猜想出的条件推出题目的结论；

方法二：将题目中的结论当作条件进行推理，这样推出的结果即为要探究的条件.

解题时常采用**逆向思维法**用方法二寻找条件，再用方法一进行证明.

拔尖角度▶ 3 利用分类讨论思想求动态问题中的速度、时间

例 12 如图 2.5-17，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$BC=8$，点 D 为 AB 的中点. 点 P 在线段 BC 上以每秒 3 个单位长度的速度由点 B 向点 C 运动，同时点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 以每秒 a 个单位长度的速度运动，设运动时间为 t 秒.

（1）求 CP 的长；

（2）若以点 C，P，Q 为顶点的三角形和以点 B，D，P 为顶点的三角形全等，且 $\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角，求 a 和 t 的值.

解题秘方：（1）点在线段上运动，用点运动的路程表示线段长.

（2）根据对应关系得出线段相等，求出 a，t 的值.

解：（1）由题意得 $BP=3t$. $\because BC=8$，$\therefore CP=8-3t$.

（2）由题意知，需分两种情况讨论：

若 $\triangle BDP \cong \triangle CPQ$，则 $BD=CP$，$BP=CQ$.

$\because AB=10$，点 D 为 AB 的中点，$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=5$.

$\therefore 5=8-3t$，$3t=at$，解得 $t=1$，$a=3$.

若 $\triangle BDP \cong \triangle CQP$，则 $BP=CP$，$BD=CQ$，

$\therefore 3t=8-3t$，$5=at$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$a=\frac{15}{4}$.

综上所述，$a=3$，$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$，$t=\frac{4}{3}$.

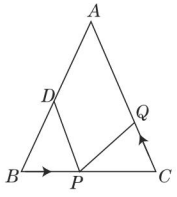


图 2.5-17

挑战·高分

解法提醒

由∠B 和∠C 是对应角可知 DP 和 PQ 是对应边，而其他两组边的对应关系不确定，因此要分 BD 与 CP 是对应边、BP 与 CP 是对应边两种情况讨论.

教你一招

动态问题的求解思路：

此类动态数学问题的特点是动中有静，静中有动. 解题时通常用**分类讨论思想**、**方程思想**及**数形结合思想**，分情况对题目进行讨论，结合图形根据全等三角形的性质列出方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 4 利用构造法并结合全等三角形性质解边角问题

技巧 1：连公共边在构造全等三角形中的应用

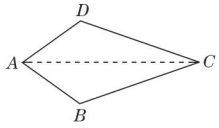
例 13 [中考·十堰]如图 2.5-18，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$. 求证：$\angle B=\angle D$.

解题秘方：紧扣“SSS”的条件构造全等三角形，巧连 AC 即可.

证明：如图 2.5-18，连接 AC，

在△ ABC 和△ ADC 中，$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

∴△ ABC ≌△ ADC（SSS）. ∴∠ B=∠ D.



2.5-18

技巧 2：“截长补短法”在构造全等三角形中的应用

例 14 如图 2.5-19，已知 $AB\parallel CD$，CE，BE 分别平分∠ BCD 和∠ CBA，点 E 在 AD 上. 求证：$BC=AB+CD$.

解题秘方：紧扣“截长补短法”的特征构造全等三角形.

证明：如图 2.5-19，在 BC 上取一点 F，使 $BF=BA$，连接 EF.

∵ CE，BE 分别平分∠ BCD 和∠ CBA，

∴∠ 3=∠ 4，∠ 1=∠ 2.

在△ ABE 和△ FBE 中，$\begin{cases}BA=BF,\\\angle 1=\angle 2,\\BE=BE,\end{cases}$

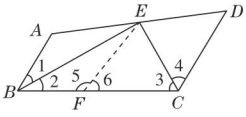


图 2.5-19

∴△ ABE ≌△ FBE（SAS）. ∴∠ A=∠ 5.

∵ $AB\parallel CD$，∴∠ A+∠ D=180°.

又∵∠ 5+∠ 6=180°，∴∠ 6=∠ D.

在△ EFC 和△ EDC 中，$\begin{cases}\angle 6=\angle D,\\\angle 3=\angle 4,\\EC=EC,\end{cases}$

∴△ EFC ≌△ EDC（AAS）.

∴ $FC=DC$.

∴ $BC=BF+CF=AB+CD$.

点拨微课堂

技巧 3：“加倍折半法”在构造全等三角形中的应用

例 15 如图 2.5-20，已知 CE，CB 分别是△ ABC，△ ADC 的中线，且 $AB=AC$，∠ ACB=∠ ABC. 求证：$CD=2CE$.

解题秘方：CE 是△ ABC 中 AB 边上的中线，将 CE 延长一倍至 F，可构造△ ACE 和△ BFE 全等，即出现了 $2CE$ 这条线段，因此再证明△ CBD 和△ CBF 全等即可.

证明：如图 2.5-20，延长 CE 到点 F，使 $EF=CE$，连接 FB，则 $CF=2CE$.

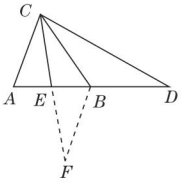


图 2.5-20

挑战·高分

解法指导

公共边是相等线段的一种形式，若已知有两组边对应相等，而第三边是公共边，则连接公共边，可构造两个三角形全等.

方法点拨

运用“截长补短法”构造全等三角形有两个标志：

一是条件中有角平分线，截长补短是在角平分线所在角的两边中进行；

二是条件或结论中出现一条线段等于另外两条线段的和或差，截长补短也是在相关的线段中进行.

教你一招

证明一条线段等于两条线段的和的方法：

（1）“**截长法**”的基本思路是在长线段上取一段，使之等于其中一短线段，然后证明剩下的线段等于另一短线段；

（2）“**补短法**”的基本思路是延长短线段，使延长部分等于另一短线段，再证明延长后的线段等于长线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ CE 是△ ABC 的中线，∴ $AE=BE$.

在△ BEF 和△ AEC 中，$\begin{cases} BE=AE, \\ \angle BEF=\angle AEC, \\ EF=EC, \end{cases}$

∴△ BEF ≌△ AEC（SAS）. ∴∠ EBF=∠ A，$BF=AC$.

又∵∠ ABC=∠ ACB，

∴∠ CBD=∠ A+∠ ACB=∠ EBF+∠ ABC=∠ CBF.

∵ CB 是△ ADC 的中线，∴ $AB=BD$.

又∵ $AB=AC$，$AC=BF$，∴ $BF=BD$.

在△ CBF 与△ CBD 中，$\begin{cases} CB=CB, \\ \angle CBF=\angle CBD, \\ BF=BD, \end{cases}$

∴△ CBF ≌△ CBD（SAS）.

∴ $CF=CD$. ∴ $CD=2CE$.

教你一招

证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法：

“加倍法”或“折半法”.“加倍法”的基本思路是延长短线段，使延长后的线段等于原来的 2 倍，再证明它等于另一线段；“折半法”的基本思路是取长线段的中点，证明其中一部分等于短线段 . 本例采用的是“加倍法”.

技巧 4：基础三角形模型法在构造一个与它全等的三角形中的应用

例 16 如图 2.5−21，已知∠ BAC=90°，$AB=AC$，∠ ABC=∠ ACB=45°，M 为 AC 边的中点，AD ⊥ BM 于点 E，交 BC 于点 D，连接 DM. 求证：∠ AMB=∠ CMD.

解题秘方：由于∠ AMB 与∠ CMD 所在的两个三角形不全等，因此可以以∠ CMD 所在的△ CMD 为基础三角形，在△ ABM 中构造一个含∠ AMB 的三角形与△ CMD 全等 .

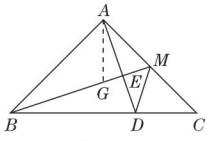


图 2.5−21

解法指导

- 当要证明的两个角所在的三角形明显不全等时，可借助与这两个角相关的边和角添加辅助线构造三角形全等 .
- 基础三角形法是构造全等三角形的一种常用方法，它是从要证的边（角）关系中一边（角）所在的三角形为基础三角形，再从要证的另一边（角）为一边（角）作一个与基础三角形全等的三角形 .

证明：作∠ BAC 的平分线 AG 交 BM 于点 G，如图 2.5−21，

则∠ BAG=∠ MAG.

所作辅助线必须满足：(1) 不能破坏图形中的已知条件；(2) 能够作为证明的一个已知条件

∵∠ BAC=90°，∠ ABC=∠ ACB=45°，

∴∠ MAG=∠ BAG=∠ ACB=45°.

∵ AE ⊥ BM，∴∠ MAE+∠ AMB=180° −90° =90°.

又∵∠ ABM+∠ AMB=180° −90° =90°，

∴∠ ABM=∠ MAE.

在△ ABG 和△ CAD 中，$\begin{cases} \angle BAG=\angle ACD, \\ AB=CA, \\ \angle ABG=\angle CAD, \end{cases}$

∴△ ABG ≌△ CAD（ASA）. ∴ $AG=CD$.

∵ M 为 AC 边的中点，∴ $AM=CM$.

在△ AMG 和△ CMD 中，$\begin{cases} AG=CD, \\ \angle MAG=\angle MCD, \\ AM=CM, \end{cases}$

∴△ AMG ≌△ CMD（SAS）. ∴∠ AMB=∠ CMD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 全等三角形的性质与判定，是中考的必考内容，以填空题、选择题和解答题的形式出现，题目以中、低档为主，与其他知识综合考查时，难度较大，主要出现在解答题中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用全等三角形的性质用折叠法求角的度数

例17 [中考·天门]如图2.5-22，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，点D在AB边上，将△CBD沿CD折叠，使点B恰好落在AC边上的点E处．若$\angle A=26°$，则$\angle CDE=$_____.

试题评析： 本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是折叠，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数．

解： 由三角形内角和定理可知，$\angle B=64°$，

由折叠可知△BCD≌△ECD，

$\therefore \angle BCD=\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，

$\angle CED=\angle B=64°$．

$\therefore \angle CDE=180°-\angle DCE-\angle CED=180°-45°-64°=71°$．

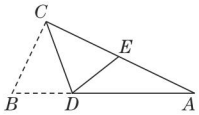


图2.5-22

答案： 71°

方法点拨

平移、旋转、轴反射变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等三角形的性质得到对应边相等、对应角相等，从而解决问题．

本题属于轴反射变换，它隐含着折叠前后的△CBD与△CED全等．

考法2 利用全等三角形的判定补充三角形全等的条件

例18 [中考·成都]如图2.5-23，已知$\angle ABC=\angle DCB$，添加以下条件，不能判定△ABC≌△DCB的是（　　）

A. $\angle A=\angle D$　　B. $\angle ACB=\angle DBC$

C. $AC=DB$　　D. $AB=DC$

试题评析： 本题考查的是全等三角形的判定定理，解答本题的关键是掌握全等三角形的判定定理及进行推理的方法．

解： A. $\angle A=\angle D$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，符合AAS，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项错误；

B. $\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，$\angle ACB=\angle DBC$，符合ASA，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项错误；

C. $\angle ABC=\angle DCB$，$AC=BD$，$BC=CB$，不符合全等三角形的判定定理，即不能推出△ABC≌△DCB，故本选项正确；

D. $AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，符合SAS，即能推出△ABC≌△DCB，故本选项错误．

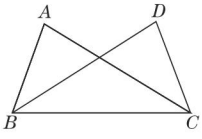


图2.5-23

答案： C

方法点拨

证明两个三角形全等，若条件不够需要补充条件时，有以下几种情况：

（1）已知两边
- 找第三边，
- 找两边的夹角；

（2）已知两角
- 找其中任意一角的对边，
- 找两角的夹边；

（3）已知一角及其邻边
- 找任意一角，
- 找夹该已知角的另一边；

（4）已知一边及其对角，找余下的任一角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用全等三角形的性质判断两线段间的关系

例 19 [中考·菏泽]如图 2.5−24，$AB \parallel CD$，$AB=CD$，$CE=BF$. 请写出 DF 与 AE 的关系，并证明你的结论.

试题评析： 本题主要考查全等三角形的判定与性质，解题的关键是识别两条线段所在的两个三角形全等.

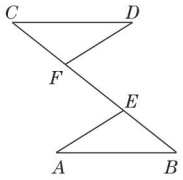


图 2.5−24

解： $DF \parallel AE$ 且 $DF=AE$.

证明：$\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle C=\angle B$.

$\because CE=BF$，$\therefore CE-EF=BF-EF$，$\therefore CF=BE$.

在$\triangle DCF$和$\triangle ABE$中，$\begin{cases} DC=AB, \\ \angle C=\angle B, \\ CF=BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle DCF \cong \triangle ABE$（SAS），

$\therefore DF=AE$，$\angle DFC=\angle AEB$.

$\therefore \angle DFE=\angle AEF$. $\therefore DF \parallel AE$.

考法点评

两条线段的关系包括数量关系和位置关系，数量关系一般是相等，位置关系有平行或垂直. 线段的这些关系可以通过这两条线段所在的三角形全等得到.

考法 4 利用全等三角形的判定和性质求图形的面积

例 20 [中考·黑龙江]如图 2.5−25，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$AC=5$，$\angle DAB=\angle DCB=90°$，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

A. 15　　B. 12.5　　C. 14.5　　D. 17

试题评析： 本题主要考查了全等三角形的判定与性质，全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件，在应用全等三角形的判定时，要注意三角形的公共边和公共角，必要时添加适当的辅助线构造三角形.

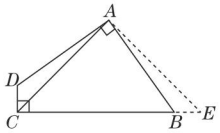


图 2.5−25

解： 如图 2.5−25，过 A 作 $AE \perp AC$，交 CB 的延长线于 E.

$\because \angle DAB=\angle DCB=90°$，

$\therefore \angle D+\angle ABC=360°-90°-90°=180°$.

又$\because \angle ABE+\angle ABC=180°$，$\therefore \angle D=\angle ABE$.

$\because \angle DAB=\angle CAE=90°$，

$\therefore \angle DAB-\angle CAB=\angle CAE-\angle CAB$，$\therefore \angle CAD=\angle EAB$.

又$\because AD=AB$，$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB$（SAS），

$\therefore AC=AE$，$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACE}$.

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}$，
$S''_{\triangle ACE}=S''_{\triangle AEB}+S''_{\triangle ABC}$

$\therefore S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 5\times 5=12.5$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 12.5.

答案： B

解法指导

“化不规则图形为规则图形”是求面积问题的一种常用解题方法，本例是利用全等三角形进行割补转化. 即：过 A 作 AE ⊥ AC，交 CB 的延长线于 E，判定△ ACD ≌△ AEB，即可得到 AC=AE，四边形 ABCD 的面积与△ ACE 的面积相等，根据 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 5\times 5=12.5$，即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见242页

1. 下列说法中错误的有（　　）

①图形中只有两个三角形才能完全重合；

②如果两个图形全等，那么它们的形状和大小一定都相同；

③两个正方形一定是全等图形；

④边数相同的图形一定能互相重合.

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

2. 如果△ABC≌△DEF，且△ABC的周长为100 cm，A，B分别与D，E对应，AB=30 cm，DF=25 cm，则BC的长为（　　）

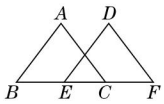
A. 45 cm　　B. 55 cm

C.30 cm　　D. 25 cm

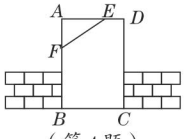
3. 如图，在△ABC和△DEF中，AB=DE，∠B=∠DEF，补充下列条件后，能直接用“SAS”判定△ABC≌△DEF的是（　　）

A. BC=EF　　B. ∠ACB=∠DFE

C. AC=DF　　D. ∠A=∠D



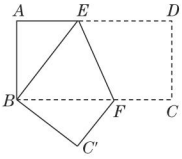
（第3题）



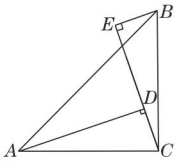
（第4题）

4. 如图，工人师傅砌门时，需要用木条EF固定长方形门框$ABCD$，使其不变形，这样做的依据是_____.

5. 如图，将长方形纸片$ABCD$折叠，使点D与点B重合，点C落在C'处，折痕为EF. 若AB=1，BC=2，则△ABE和△$BC'F$的周长之和为_____.



（第5题）

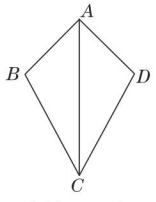


（第6题）

6. 如图，∠ACB=90°，AC=BC，AD⊥CE，BE⊥CE，垂足分别是点D，E. AD=3，BE=1，则DE的长是（　　）

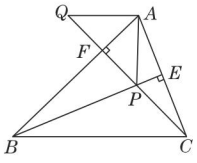
A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. 2.5

7. [中考·云南]如图，AB=AD，CB=CD. 求证：∠B=∠D.



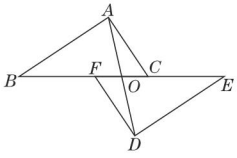
（第7题）

8. 如图，已知BE，CF是△ABC的边AC和AB上的高，Q为CF的延长线上一点，P为BE和CF的交点，△PAB≌△AQC. 求证：AP⊥AQ.



（第8题）

9. [中考·恩施州]如图，点B，F，C，E在一条直线上，FB=CE，AB∥ED，AC∥FD，AD交BE于O. 求证：AD与BE互相平分.



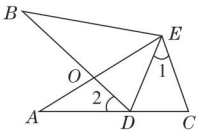
（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.[中考·苏州]如图，$\angle A=\angle B$，$AE=BE$，点D在AC边上，$\angle 1=\angle 2$，AE和BD相交于点O. 【导学号：5136175】

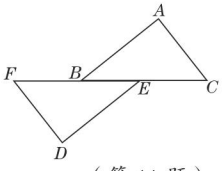
（1）求证：$\triangle AEC\cong\triangle BED$；

（2）若$\angle 1=42°$，求$\angle BDE$的度数.



（第10题）

11.[中考·随州]如图，点F，B，E，C在同一直线上，并且$BF=CE$，$\angle ABC=\angle DEF$. 能否由上面的已知条件证明$\triangle ABC\cong\triangle DEF$？如果能，请给出证明；如果不能，请从下列三个条件中选择一个合适的条件，添加到已知条件中，使$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，并给出证明. 提供的三个条件是：①$AB=DE$；②$AC=DF$；③$AC\parallel DF$.

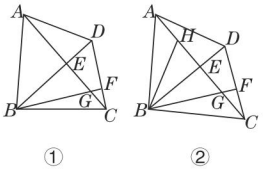


（第11题）

12.[中考·哈尔滨]在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点E，且$AC\perp BD$，作$BF\perp CD$，垂足为点F，BF与AC交于点G，$\angle BGE=\angle ADE$.

（1）如图①，求证：$AD=CD$；

（2）如图②，BH是$\triangle ABE$的中线，若$AE=2DE$，$DE=GE$，在不添加任何辅助线的情况下，请写出图②中四个三角形，使写出的每个三角形的面积都等于$\triangle ADE$面积的2倍.



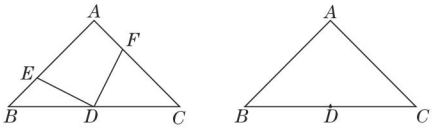
①　②

（第12题）

13.[中考·滨州]在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，点D为BC的中点.

（1）如图①，若点E，F分别为AB，AC上的点，且$DE\perp DF$，求证：$BE=AF$；

（2）若点E，F分别为AB，CA延长线上的点，且$DE\perp DF$，那么$BE=AF$吗？请利用图②说明理由.



①　②

（第13题）

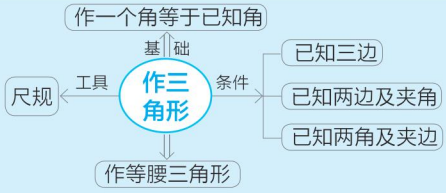
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.6 用尺规作三角形

核心知识

- 已知三边作三角形
- 已知底边及底边上的高线作等腰三角形
- 作已知角的平分线
- 作一个角等于已知角
- 已知两边及夹角或两角及夹边作三角形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 已知三边作三角形

已知三角形的三边求作三角形，具体作图的方法、步骤及图形如下：

已知线段 a，b，c，如图 2.6-1. 求作 $\triangle ABC$，使 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

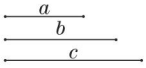
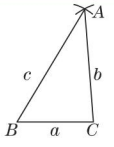


图 2.6-1

作法与图示如下：

作法	图示
①作线段 $BC=a$	
②以点 C 为圆心，以 b 为半径画弧，再以点 B 为圆心，以 c 为半径画弧，两弧相交于点 A	
③连接 AB 和 AC，则 $\triangle ABC$ 为所求作的三角形	

拔考向 利用已知三边作三角形的方法画三角形

例 1 如图 2.6-2，$\triangle ABC$ 是三边各不相等的三角形，$DE=BC$，以 D，E 为两个顶点作位置不同的三角形，使所作三角形与 $\triangle ABC$ 全等，这样的三角形最多可以画出_____个.

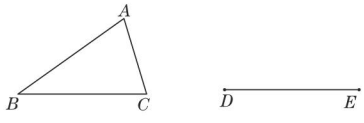


图 2.6-2

解题秘方： 紧扣已知三边作三角形的方法作三角形，关键要找准对应关系.

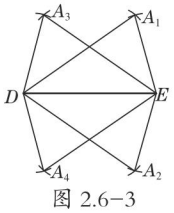


图 2.6-3

解：（1）分别以点 D 为圆心，以线段 AB 的长为半径画弧，以点 E 为圆心，以线段 AC 的长为半径画弧，两弧相交于两点 A_1，A_2（线段 DE 上下各一个），经过连接后得到两个三角形（$\triangle A_1DE$ 和 $\triangle A_2DE$）；

（2）分别以点 D 为圆心，以线段 AC 的长为半径画弧，以点 E 为圆心，以线段 AB 的长为半径画弧，两弧相交于两点 A_3，A_4（线段 DE 上下各一个），经过连接后也得到两个三角形（$\triangle A_3ED$ 和 $\triangle A_4ED$），如图 2.6-3 所示.

答案： 4

提分·必记

特别解读

1. **作图依据：** 全等三角形的判定方法“SSS”.
2. **作图思路：** 三次运用“作一条线段等于已知线段”这一基本作图方法.

提分·秘诀

方法点拨

已知三边作三角形的注意点：

(1) 先作出一条边（即先确定三角形的两个顶点），再用两条弧的交点确定第三个顶点.

(2) 作出的符合要求的三角形，形状相同，位置可能不同.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 已知底边及底边上的高线作等腰三角形

已知底边及底边上的高线作等腰三角形，具体作图的方法、步骤及图形如下：

已知线段 a，h，如图 2.6−4. 求作 $\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

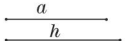
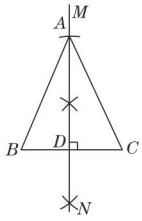


图 2.6−4

作法与图示如下：

作法	图示
①作线段 $BC=a$	
②作线段 BC 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 D	
③在射线 DM（或 DN）上截取线段 DA，使 $DA=h$	
④连接 AB，AC，则 $\triangle ABC$ 为所求作的等腰三角形	

拔考向▶ 利用尺规作图作等腰三角形

例 2 已知线段 m，如图 2.6−5，求作 $\triangle ABC$，使 $AC=BC$，且 $BA=m$，BA 边上的高 $CE=\frac{1}{2}m$.

解题秘方：紧扣尺规作图，利用等腰三角形的性质和已知条件作出等腰三角形.



图 2.6−5

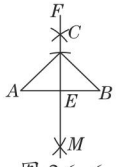


图 2.6−6

解：（1）作线段 $AB=m$；

（2）作线段 AB 的垂直平分线 MF，交 AB 于点 E；

（3）在射线 EF 上截取 $EC=BE=\frac{1}{2}m$，连接 BC，AC，则 $\triangle ABC$（如图 2.6−6）为所求作的三角形.

点知识▶ 3 作已知角的平分线

1. 角的平分线的作法：

（1）**折叠法：**将已知角折叠，使角的两边重合，折痕就是角的平分线所在的直线.

（2）**度量法：**用量角器度量已知角的度数，再除以 2，然后用量角器画出这个角的平分线.

（3）**尺规作图法：**保留作图痕迹，并指出结论.

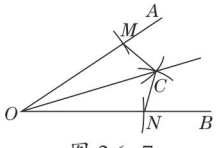


图 2.6−7

2. 尺规作图步骤与图示：

如图 2.6−7，已知 $\angle AOB$. 求作 $\angle AOB$ 的平分线.

作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 M，交 OB 于点 N.

（2）分别以点 M，N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部相交于点 C.

（3）画射线 OC. 射线 OC 即为所求（如图 2.6−7）.

提分·必记

特别解读

1. **作图依据：**线段的垂直平分线的性质.
2. **作图思路：**运用“作一条线段等于已知线段”和“作线段的垂直平分线”的基本作图方法.

提分·秘诀

思路点拨

先画出草图，由草图知，等腰三角形的底边已确定，关键是再确定出顶点 C. 根据等腰三角形“三线合一”的性质，得顶点 C 在 AB 的垂直平分线上，且顶点 C 到 AB 的距离即是高 $\frac{1}{2}m$.

提分·必记

特别提醒

1. “适当长为半径画弧”的目的是方便作图，不能太长也不要太短；
2. “以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧”是因为若以小于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径，则画出的两弧不能相交；
3. “画射线 OC”不能叙述为“连接 OC”，因为角平分线是射线而不是线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用作已知角的平分线等分角

例 3 如图 2.6−8，已知∠ AOB，求作：∠ $AOM=\frac{1}{4}$∠ AOB.

解题秘方：利用尺规作图作两次角平分线，可将已知角四等分.

解：作法：（1）以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 OA 于点 E，交 OB 于点 F；

（2）分别以点 E，F 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧在∠ AOB 的内部交于点 C；

（3）画射线 OC；

（4）同理，作∠ AOC 的平分线 OM.

∠ AOM 即为所求作的角（如图 2.6−8）.

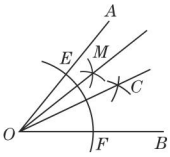


图 2.6−8

提分·秘诀

方法点拨

将一个角四等分，可先作这个角的平分线，将这个角二等分，再作其中的一个半角的平分线，使其将原角四等分.

点知识▶4 作一个角等于已知角

作一个角等于已知角：

已知∠ AOB（如图 2.6−9①），求作∠ $A'O'B'$，使∠ $A'O'B'$ = ∠ AOB.

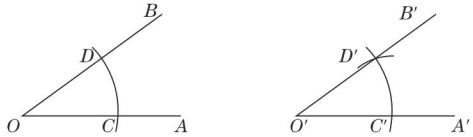


图 2.6−9

作法：（1）以点 O 为圆心，以任意长为半径画弧，分别交 OA，OB 于点 C，D；

（2）画一条射线 $O'A'$，以点 O' 为圆心，以 OC 的长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；

（3）以点 C' 为圆心，以 CD 的长为半径画弧，交前弧于点 D'；

（4）过点 D' 画射线 $O'B'$，则∠ $A'O'B'$ 即为所求作的角（如图 2.6−9②）.

提分·必记

特别解读

作一个角等于已知角，是利用尺规作一个三角形与已知三角形全等，利用的判定方法是“SSS”，然后利用三角形全等的性质——对应角相等，说明作出的角等于已知角.

拔考向▶利用作一个角等于已知角作平行线

例 4 如图 2.6−10①，过点 C 作直线 DE，使 DE // AB.

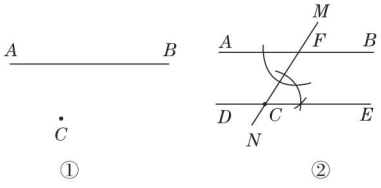


图 2.6−10

提分·秘诀

解法提醒

由平行线的判定知内错角相等，两直线平行，故可先以这条直线为一边，另一边过这一点构造一个角，然后作出这个角的内错角等于这个角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：通过作一对内错角相等来作已知直线的平行线.

解：作法如下：（1）过点 C 作直线 MN 与 AB 相交，交点为 F；

（2）在直线 MN 的右侧作$\angle FCE$，使$\angle FCE=\angle AFC$；

（3）反向延长 CE，则直线 DE 即为所求（如图 2.6-10 ②）.

注：也可以采用作同位角法作平行线.

点知识▶ 5 已知两边及其夹角作三角形

已知三角形的两边及其夹角，求作三角形的具体作图的方法、步骤及图形如下：

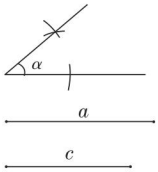
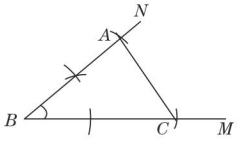


图 2.6-11

已知$\angle\alpha$和线段 a，c，如图 2.6-11. 求作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle\alpha$，$BC=a$，$BA=c$.

作法与图示如下：

作法	图示
①作$\angle MBN=\angle\alpha$	
②在射线 BM，BN 上分别截取 $BC=a$，$BA=c$	
③连接 AC，则$\triangle ABC$ 为所求作的三角形	

提分·必记

特别解读

1. **作图依据**：全等三角形的判定方法“SAS”.
2. **作图思路**：依次运用基本作图“作一个角等于已知角”“作一条线段等于已知线段”.

拔考向▶ 利用已知两边及其夹角作三角形的方法作三角形

例 5 如图 2.6-12，已知线段 a 和$\angle\alpha$. 求作$\triangle ABC$，使 $AB=a$，$AC=2a$，$\angle A=\angle\alpha$.

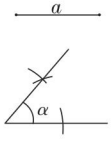


图 2.6-12

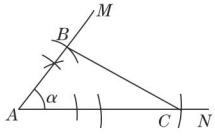


图 2.6-13

解：如图 2.6-13，（1）作$\angle MAN=\angle\alpha$；（2）分别在射线 AM，AN 上截取 $AB=a$，$AC=2a$；（3）连接 BC，则$\triangle ABC$ 就是所求作的三角形.

提分·秘诀

方法点拨

用尺规作图的一般步骤：

第一步：分析已知，确定求作类型.

第二步：确定作图思路.

第三步：依次叙述作图过程并作图.

第四步：下结论.

点知识▶ 6 已知两角及其夹边作三角形

已知三角形的两角及其夹边，求作三角形的具体作图的方法、步骤及图形如下：

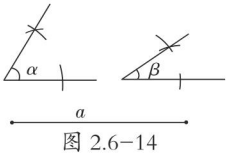
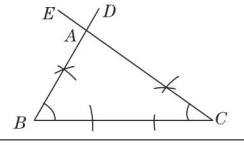


图 2.6-14

如图 2.6-14. 已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$ 和线段 a. 求作$\triangle ABC$，使$\angle ABC=\angle\alpha$，$\angle ACB=\angle\beta$，$BC=a$.

作法与图示如下：

作法	图示
①作线段 $BC=a$；	
②在 BC 的同旁，作$\angle DBC=\angle\alpha$，$\angle ECB=\angle\beta$，BD 与 CE 相交于点 A，则$\triangle ABC$ 为所求作的三角形	

提分·必记

特别解读

1. **作图依据**：全等三角形的判定方法“ASA”.
2. 已知两个角和其中一个角的对边不能直接作三角形，而要转化为作两个角和它们的夹边.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用已知两角及其夹边作三角形的方法作三角形

例 6 如图 2.6−15，已知∠ α 和线段 a，求作△ ABC，使 $BC=a$，∠ ABC=∠ ACB=∠ α.

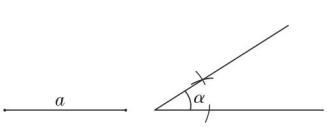


图 2.6−15

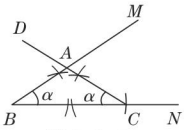


图 2.6−16

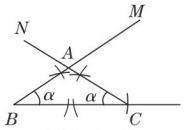


图 2.6−17

解题秘方： 紧扣已知两角及其夹边作三角形的方法将作三角形分解成几个基本作图的方法解决问题.

解：（方法一）如图 2.6−16，

（1）作∠ MBN=∠ α；

（2）在射线 BN 上截取 $BC=a$；

（3）以 C 为顶点，以 CB 为一边，作∠ DCB=∠ α，CD 与 BM 相交于点 A，则△ ABC 为所求作的三角形.

（方法二）如图 2.6−17，

（1）作线段 $BC=a$；

（2）在线段 BC 的同侧，作∠ CBM=∠ α，∠ BCN=∠ α；

（3）BM 和 CN 相交于点 A，则△ ABC 为所求作的三角形.

提分·秘诀

方法点拨

明确作图的依据，按照尺规作图中作线段等于已知线段、作角等于已知角的方法来作即可.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用尺规作图进行计算与证明

例 7 如图 2.6−18，一块涂料 $ABCD$，AD // BC，现进行如下操作：以点 B 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 BA，BC 于点 G，H，再分别以点 G，H 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}GH$ 的长为半径画弧，两弧在∠ ABC 内部相交于点 O，画射线 BO，交 AD 于点 E.

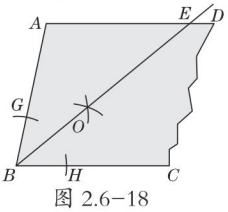


图 2.6−18

（1）求证：$AB=AE$.

（2）若∠ A=100°，求∠ EBC 的度数.

解题秘方： 紧扣尺规作图得出的结论进行计算与证明.

（1）**证明：** ∵ AD // BC，∴∠ AEB=∠ EBC.

由画图过程知 BE 是∠ ABC 的平分线，

∴∠ EBC=∠ ABE，∴∠ AEB=∠ ABE，∴ $AB=AE$.

（2）**解：** 由∠ A=100°，∠ ABE=∠ AEB，得∠ ABE=∠ AEB=40°，由（1）得∠ EBC=∠ AEB，∴∠ EBC=40°.

挑战·高分

方法点拨

与尺规作图有关的计算与证明会涉及平行线、等腰三角形的三线合一、全等三角形的性质、角平分线的定义与垂直平分线的性质，还有以后学的相似三角形的性质等，是一类较为综合的题目.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸2 尺规作图

例 8 已知：线段 a，b，h（$h<b$），如图 2.6-19. 求作 $\triangle ABC$，使 $BC=a$，$AB=b$，BC 边上的高 $AD=h$.

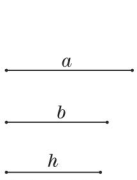


图 2.6-19

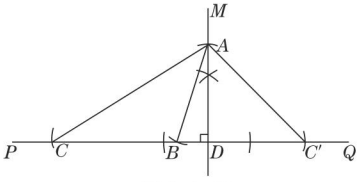


图 2.6-20

解题秘方：解题的关键是列举出所有符合条件的图形.

解：作法：

（1）作直线 $PQ\perp DM$，垂足为 D；

（2）在 DM 上截取 $DA=h$；

（3）以点 A 为圆心，以 b 为半径作弧，交射线 DP 于点 B；

（4）在直线 PQ 上截取 $BC'=BC=a$；

（5）连接 AC，AC'，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 即为所求作的三角形，如图 2.6-20.

挑战·高分

方法点拨

一般地，作三角形的依据是全等三角形的判定方法，特别注意：SSA 和 AAA 不能判定一个三角形与另一个三角形全等. 若不能根据三角形全等的判定条件作出三角形，则作出的三角形往往不唯一.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

用尺规作三角形在中考中的考点较少，大多是与其他知识综合起来考查的，有时也以选择题、填空题的形式出现，在今后的中考中对本节知识的考查仍以基础题的形式出现.

三年中考兵法

考法 尺规作图

例 9 [中考·柳州]已知 $\angle AOB$（如图 2.6-21）. 求作 $\angle A'O'B'$，使得 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

作法：①以 O 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 OA，OB 于点 C，D；

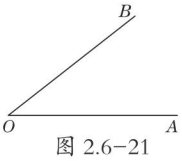


图 2.6-21

②画一条射线 $O'A'$，以点 O' 为圆心，OC 长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C'；

③以点 C' 为圆心，CD 长为半径画弧，与第②步中所画的弧相交于点 D'；

④过点 D' 画射线 $O'B'$，则 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.

根据上面的作法，完成以下问题：

（1）使用直尺和圆规，作出 $\angle A'O'B'$.（请保留作图痕迹）

冲刺·满分

方法点拨

作一个角等于已知角的尺规作图，本质上是构造全等三角形，它也是我们进行其他作图的重要步骤之一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）完成下面证明∠$A'O'B'$ = ∠AOB 的过程.（注：括号里填写推理的依据）

证明：由作法可知 $O'C'=OC$，$O'D'=OD$，$D'C'=$_____，

∴△$C'O'D'$ ≌△COD（_____），

∴∠$A'O'B'$ = ∠AOB（_____）.

试题评析：本题考查了尺规作图——作一个角等于已知角，解题的关键是熟练掌握基本尺规作图的步骤.

解：（1）如图 2.6−22，∠$A'O'B'$ 即为所求.

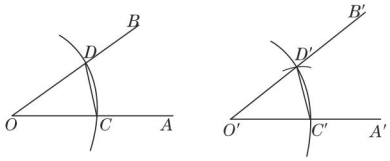


图 2.6−22

（2）DC；SSS；全等三角形的对应角相等



爱学习的孩子，美呀！

两年模拟兵法

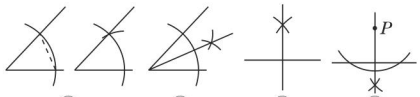
☞答案见 243 页

1. 已知∠α 和线段 a，用尺规作△ABC，使∠A=2∠α，∠C=3∠α，AC=2a，则全班同学用尺规作出的△ABC 都是全等的，那么判定三角形全等的依据是（　　）

A. SSS　　B. SAS

C. AAS　　D. ASA

2. [**中考·衢州**]下列四种基本尺规作图分别表示：①作一个角等于已知角；②作一个角的平分线；③作一条线段的垂直平分线；④过直线外一点 P 作已知直线的垂线，则对应选项中作法错误的是（　　）

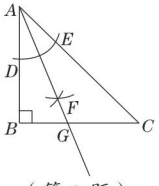


（第 2 题）

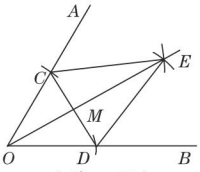
A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

3. [**中考·包头**]如图，在直角三角形 ABC 中，∠B=90°，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB，AC 于点 D，E，再分别以点 D，E 为圆心，大于$\frac{1}{2}DE$ 的长为半径画弧，两弧交于点 F，作射线 AF 交边 BC 于点 G，若 BG=1，AC=4，则△ACG 的面积是（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{5}{2}$



（第 3 题）



（第 4 题）

4. [**中考·潍坊**]如图，已知∠AOB. 按照以下步骤作图：　　【**导学号：5136175**】

①以点 O 为圆心，以适当的长为半径作弧，分别交∠AOB 的两边于 C，D 两点，连接 CD.

②分别以点 C，D 为圆心，以大于线段 OC 的长为半径作弧，两弧在∠AOB 内交于点 E，连接 CE，DE.

③连接 OE 交 CD 于点 M.

下列结论中错误的是（　　）

A. ∠CEO= ∠DEO

B. CM=MD

C. ∠OCD= ∠ECD

D. $S_{四边形 OCED}=\frac{1}{2}CD\cdot OE$

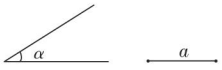
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 如图，已知线段 a，求作△ ABC，使 $AB=2a$，$AC=3a$，$BC=4a$.（保留作图痕迹，不写作法）



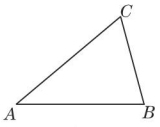
（第 5 题）

6. 如图，已知线段 a 及∠ α，求作△ ABC，使∠ $C=90°$，∠ $B=\angle\alpha$，$BC=a$.



（第 6 题）

7. [**中考·贵港**]尺规作图（只保留作图痕迹，不要求写出作法）：如图，已知△ ABC，请根据“SAS”基本事实作出△ DEF，使△ $DEF\cong$△ ABC.

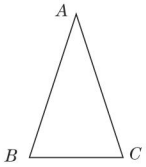


（第 7 题）

8. 如图，在△ ABC 中，$AB=AC$，∠ $ABC=72°$.

（1）用直尺和圆规作∠ ABC 的平分线 BD 交 AC 于点 D（保留作图痕迹，不要求写作法）；

（2）在（1）中作出∠ ABC 的平分线 BD 后，求∠ BDC 的度数.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分类讨论思想在等腰三角形中的应用

荣老师告诉你 分类讨论思想是一种重要的思想方法．如果所研究的问题有多种不同的情境，那么我们常常按照一定的标准，把所研究的问题分成若干类，互不包含，没有遗漏，一类一类解决，然后进行归纳，得到问题的答案．等腰三角形是一种特殊而又十分重要的三角形，就是因为这种特殊性，在处理具体问题时往往又会出现错误，因此在求解有关等腰三角形的问题时一定要注意分类讨论．

应用一 ▶ 对顶角和底角的分类讨论

例 1 等腰三角形中有一个角为 36°，它的一条腰上的高与底边的夹角为多少度？

解题秘方： 已知等腰三角形的一个角的度数，而不知是顶角还是底角，在解决问题时应分两种情况．

解： 若已知的这个角为顶角，则底角的度数为（180°−36°）÷2=72°．故一腰上的高与底边的夹角为 18°；若已知的这个角为底角，则一腰上的高与底边的夹角为 54°．故它的一条腰上的高与底边的夹角为 18°或 54°．

应用二 ▶ 对腰长和底边长的分类讨论

例 2 已知等腰三角形的两边长为 3 和 7，求等腰三角形的周长．

解题秘方： 已知等腰三角形的两边长，但不知道哪个是底边长，哪个是腰长，因此要分类讨论．

解： 当 3 为腰长时，则三边长为 3,3,7，

∵ 3+3<7，∴不能构成三角形．

当 7 为腰长时，则三边长为 7,7,3，这三边能构成三角形，

∴周长为 7+7+3=17.

方法点拨： 在解答已知等腰三角形边长的问题时，当题目中的条件没有指明已知的这条边长是腰长还是底边长时，就要分类讨论，从腰长和底边长两种情况去分类．若涉及边的长度，应运用三角形的三边关系进行辨别取舍．

应用三 ▶ 对等腰三角形从角的角度进行分类讨论

例 3 已知△ ABC 中，$AB=AC$，AB 边的垂直平分线与 AC 所在的直线相交成 58°的角，求底角的度数．

解题秘方： 由题意可知△ ABC 不可能是直角三角形，可能是锐角三角形或钝角三角形，故分两种情况画图解决．

解： 当△ ABC 是锐角三角形时，如图 1 ①，AB 边的垂直平分线与 AC 交于点 E，与 AB 交于点 D，$\angle AED=58°$．

则 $\angle A=32°$，

$\therefore \angle B=\angle C=74°$．

当△ ABC 为钝角三角形时，如图 1 ②，AB 边的垂直平分线与 CA 的延长线交于点 E，与 AB 交于点 D，$\angle AED=58°$．

则 $\angle DAE=32°$，$\therefore \angle B=\angle C=16°$．

综上可知，底角的度数为 74°或 16°．

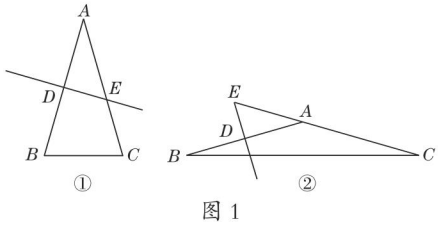


图 1

方法点拨： 根据等腰三角形的顶角的度数可以将等腰三角形分为锐角等腰三角形、直角等腰三角形和钝角等腰三角形．不同类型的等腰三角形其边上的高线或垂直平分线的交点位置均不同．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用四 ▶ 几何图形之间的位置关系不明确的分类讨论

例 4 如图 2，已知△ ABC 中，$BC>AB>AC$，$\angle ACB=40°$，如果 D，E 是直线 AB 上的两点，且 $AD=AC$，$BE=BC$，求 $\angle DCE$ 的度数.



图 2

解题秘方： 因为在不等边三角形 ABC 中，D，E 是直线 AB 上的两点，所以点 D，E 可以在点 A 的同侧，也可以在点 A 的两侧，因此需要分类讨论.

解：（1）当点 D，E 在点 A 的同侧，且都在 BA 的延长线上时，如图 3 ①，

$\because BE=BC$，

$\therefore \angle BEC=(180°-\angle ABC)\div 2$.

$\because AD=AC$，

$\therefore \angle ADC=(180°-\angle DAC)\div 2=$

$\angle BAC\div 2$.

$\because \angle DCE=\angle BEC-\angle ADC$，

$\therefore \angle DCE=(180°-\angle ABC)\div 2-\angle BAC\div 2$

$=(180°-\angle ABC-\angle BAC)\div 2$

$=\angle ACB\div 2$

$=40°\div 2$

$=20°$.

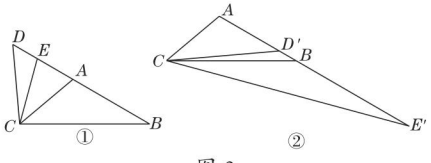


图 3

（2）当点 D，E 在点 A 的同侧，且点 D 在 D' 的位置，E 在 E' 的位置时，如图 3 ②，

与（1）类似地也可以求得 $\angle D'CE'=\angle ACB\div 2=20°$.

（3）当点 D，E 在点 A 的两侧，且 E 点在 E' 的位置时，如图 4 ①.

$\because BE'=BC$，

$\therefore \angle BE'C=(180°-\angle CBE')\div 2$

$=\angle ABC\div 2$.

$\because AD=AC$，

$\therefore \angle ADC=(180°-\angle DAC)\div 2$

$=\angle BAC\div 2$.

又 $\because \angle DCE'=180°-(\angle BE'C+\angle ADC)$，

$\therefore \angle DCE'=180°-(\angle ABC+\angle BAC)\div 2$

$=180°-(180°-\angle ACB)\div 2$

$=90°+\angle ACB\div 2$

$=90°+40°\div 2$

$=110°$.

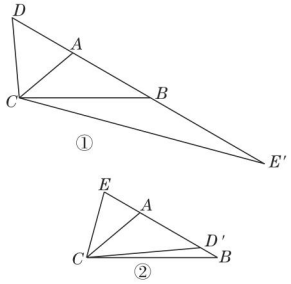


图 4

（4）当点 D，E 在点 A 的两侧，且点 D 在 D' 的位置时，如图 4 ②，

$\because AD'=AC$，

$\therefore \angle AD'C=(180°-\angle BAC)\div 2$.

$\because BE=BC$，

$\therefore \angle BEC=(180°-\angle ABC)\div 2$.

$\therefore \angle D'CE=180°-(\angle D'EC+\angle ED'C)$

$=180°-[(180°-\angle ABC)\div 2+(180°-\angle BAC)\div 2]$

$=(\angle ABC+\angle BAC)\div 2$

$=(180°-\angle ACB)\div 2$

$=(180°-40°)\div 2$

$=70°$.

故 $\angle DCE$ 的度数为 20°或 110°或 70°.

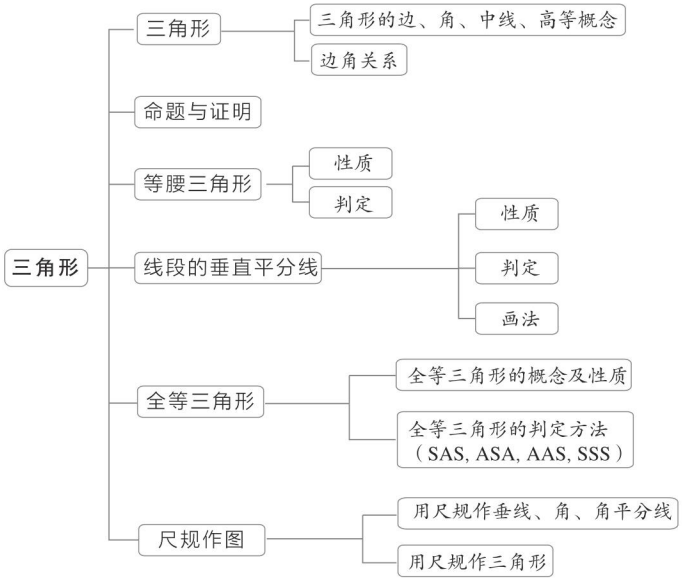
方法点拨： 当两点在直线上的位置不明确时，分两点在某点的同侧和两侧两大类情况讨论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **三角形的边的关系：**三角形的任意两边之和大于第三边．

2. **三角形三条重要线段：**高、角平分线、中线．每种都有三条，且所在直线都是相交于一点．除高线有可能在三角形的外部或边上，中线和角平分线都在三角形的内部．

3. **三角形的角的定理：**

（1）三角形的内角和等于 $180°$；

（2）三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和．

4. 要判定一个命题是真命题，需要证明（当直接证明较为困难时，通常用反证法）；而判定一个命题是假命题，只需要举一个反例即可．

5. **等腰三角形的性质：**①是轴对称图形；②三线合一；③等边对等角．等腰三角形的判定与性质是互逆的，**判定：**①等角对等边；②三线中只要有两线合一就能判定．

6. **等边三角形是特殊的等腰三角形，具有等腰三角形的所有的性质，独特的性质：**

①三个内角相等，且都等于 $60°$；②任意一边上的三线都合一．

判定：①三个角都是 $60°$；②有一个角是 $60°$ 的等腰三角形．

7. 线段的垂直平分线的性质和判定是互逆命题，经常配合三角形全等进行运用．

8. 全等三角形是特殊的全等图形，全等三角形的对应边相等、对应角相等．

9. 全等三角形的判定——SSS，SAS，ASA，AAS.

10. 尺规作图时要明白作图的依据，根据作图的步骤和痕迹去识别或进行一些计算．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 三角形的三边关系

链接中考» 三角形的三边关系是判断三条线段能否组成三角形的重要依据，它主要解决两个问题：(1)判断三条线段能否组成三角形；(2)已知三角形的两边长确定第三边长的取值范围．在中考中考查时，一般以填空题形式出现，有时会以解答题形式出现．

例1 老师让同学们用20 cm，90 cm，100 cm长的三根木条搭一个三角形，小明不小心把100 cm的木条折断了，他用折断后剩下的较长木条与另两根木条怎么搭也不能搭成三角形．

(1)你知道这是为什么吗？

(2)小明把100 cm的木条至少折去了多少厘米？

(3)如果100 cm的木条折去了40 cm，你能通过截90 cm长的木条的办法帮小明搭一个小的三角形吗？

解题秘方： 判断三条线段能否组成三角形，关键是看其是否满足三角形的三边关系．

解： (1)构成三角形的三条线段必须满足任意两条线段之和大于第三条线段，任意两条线段之差小于第三条线段．小明不能搭成三角形的原因是所用的木条与20 cm，90 cm的两根不符合该条件．

(2)设100 cm的木条折断后剩下的较长木条的长度为x cm，与另两根木条可搭成三角形，则$90-20<x<90+20$，可得$70<x<110$，当搭不成三角形时，$50<x\leqslant 70$．当折断后剩下的较长木条最长时，折去的木条最短，为30 cm．

所以100 cm的木条至少折去了30 cm．

(3)设a cm长的木条与另两根木条可以搭成三角形，则$(100-40)-20<a<(100-40)+20$，解得$40<a<80$．

$90-40=50$(cm)，$90-80=10$(cm)，所以90 cm长的木条截去的长度大于10 cm且小于50 cm时可以搭成三角形．

方法点拨： 本题根据“两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”解题，确定木条长度的取值范围是解题的关键．

专题二 三角形的三条重要线段

链接中考» 三角形的三条重要线段在解决三角形问题中都有非常重要的作用，中线用来求线段长或等分面积，角平分线用来求角，高用来求面积．单独考查时，一般以选择题形式考查，其他的一般作为解答题的条件进行考查．

例2 [中考·长沙]如图2-1，过$\triangle ABC$的顶点A，作BC边上的高，以下作法正确的是(　　)

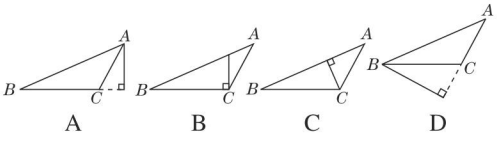


图2-1

解题秘方： 利用三角形高的定义及作法进行判断．

答案： A

方法点拨： 作三角形的高时，要分清是作哪边上的高以及过哪个顶点作垂线．

专题三 三角形的角的定理

链接中考» 与三角形的角有关的定理有两个：一个是三角形内角和定理；另一个是三角形外角的性质．在中考中单独考查时，一般以选择题形式出现．

例3 [中考·绵阳]如图2-2，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线BE，CD相交于点F，$\angle ABC=42°$，$\angle A=60°$，则$\angle BFC$的度数是(　　)

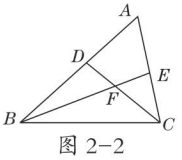


图2-2

A.118°　　B.119°

C.120°　　D.121°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用三角形内角和定理，建立要求角与已知角之间的关系解决问题.

解：因为$\angle A=60°$，$\angle ABC=42°$，

所以$\angle ACB=180°-\angle A-\angle ABC=78°$.

因为$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线分别为BE，CD，所以$\angle FBC=\frac{1}{2}\angle ABC=21°$，$\angle FCB=\frac{1}{2}\angle ACB=39°$.所以$\angle BFC=180°-\angle FBC-\angle FCB=120°$.

答案：C

方法点拨：运用三角形内角和定理求角的度数时，先找所求角所在的三角形，然后结合已知条件分析要求的角与已知角之间的关系.

专题四 命题

链接中考» 命题分为真命题和假命题，判断命题的真假是中考考查的热点，一般以填空题、选择题的形式出现.

例4 [中考·泰州]命题“三角形的三个内角中至少有两个锐角”是_____（填“真命题”或“假命题”）.

解题秘方：根据三角形内角和定理判断即可.

答案：真命题

专题五 等腰三角形的性质与判定

链接中考» 等腰三角形的性质与判定从根本上体现“线段相等”与“角相等”之间的相互转化，等腰三角形的“三线合一”性质应用相当广泛，本考点是中考的热门考点，直接考查时多以填空题、选择题形式出现，综合考查时多以解答题的形式出现.

例5 [中考·北京]如图2-3，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是BC边上的中线，$BE\perp AC$于点E.求证：$\angle CBE=\angle BAD$.

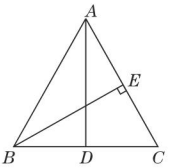


图2-3

解题秘方：利用等腰三角形的性质转化角，使要证明的两个角建立等量关系.

证明：$\because AB=AC$，$\therefore\triangle ABC$是等腰三角形.

$\because AD$是BC边上的中线，

$\therefore AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore\angle ADC=90°$.

$\therefore\angle CAD+\angle C=180°-90°=90°$.

$\because BE\perp AC$，$\therefore\angle CBE+\angle C=90°$，

$\therefore\angle CBE=\angle CAD$，$\therefore\angle CBE=\angle BAD$.

方法点拨：证明两个角相等的常见方法：一是在同一个三角形中，利用等边对等角；二是在两个三角形中，证明两个三角形全等；三是利用相等的中间角进行转化，如：同角或等角的余角（补角）相等.

专题六 等边三角形的性质与判定

链接中考» 以等边三角形为基本模型建立的几何解答题主要考查等边三角形的性质与判定，等边三角形的性质为三角形全等提供了大量的条件，都是用来证明角或线段相等.本考点在中考中是热门考点，单独直接考查时多以填空题、选择题形式出现，综合考查时以解答题形式出现较多.

例6 [中考·烟台]【问题提出】如图2-4①，已知$\triangle ABC$是等边三角形，点E在线段AB上，点D在直线BC上，且$ED=EC$，将$\triangle BCE$绕点C顺时针旋转60°至$\triangle ACF$，连接EF.试证明：$AB=DB+AF$.

【类比探究】（1）如图2-4②，如果点E在线段AB的延长线上，其他条件不变，线段AB，DB，AF之间又有怎样的数量关系？请说明理由.

（2）如果点E在线段BA的延长线上，其他条件不变，请在图2-4③的基础上将图形补充完整，并写出AB，DB，AF之间的数量关系，不必说明理由.

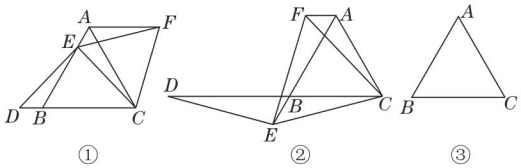


图2-4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用等边三角形的性质为三角形全等提供边、角相等的条件，从而探究线段之间的数量关系.

【问题提出】**证明：**由旋转知 $BE=AF$，$\angle ABC=\angle FAC$，$EC=FC$，$\angle ECF=60°$，

$\therefore\triangle ECF$ 是等边三角形.

$\therefore\angle FEC=60°$，$\therefore\angle AEF+\angle BEC=120°$.

$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore\angle BAC=\angle ABC=60°$.

$\therefore\angle BEC+\angle BCE=\angle ABD=120°$，

$\therefore\angle AEF=\angle BCE$.

$\because ED=EC$，$\therefore\angle D=\angle ECD$.

$\therefore\angle D=\angle AEF$.

$\because\angle FAC=\angle ABC=60°$，$\angle BAC=60°$，

$\therefore\angle EAF=120°$.

$\because\angle DBE=120°$，$\therefore\angle DBE=\angle EAF$.

又$\because BE=AF$，

$\therefore\triangle BDE\cong\triangle AEF$. $\therefore BD=AE$.

又$\because AB=AE+EB$，

$\therefore AB=DB+AF$.

【类比探究】**解：**（1）$AB=DB-AF$.

理由：由旋转知 $BE=AF$，$\angle EBC=\angle FAC$，$EC=FC$，$\angle ECF=60°$，

$\therefore\triangle ECF$ 是等边三角形. $\therefore\angle FEC=60°$，

$\therefore\angle FEA+\angle BEC=60°$.

$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore\angle BAC=\angle ABC=60°$.

$\therefore\angle BEC+\angle BCE=60°$，

$\therefore\angle FEA=\angle BCE$.

$\because DE=CE$，$\therefore\angle D=\angle BCE$，

$\therefore\angle FEA=\angle D$.

$\because\angle ABC=60°$，$\therefore\angle DBE=60°$，$\angle EBC=120°$.

$\therefore\angle FAC=\angle EBC=120°$.

$\because\angle BAC=60°$，$\therefore\angle FAE=60°$.

$\therefore\angle FAE=\angle DBE$.

又$\because\angle FEA=\angle D$，$AF=BE$，

$\therefore\triangle AEF\cong\triangle BDE$.

$\therefore AE=BD$.

又$\because AB=AE-BE$，

$\therefore AB=DB-AF$.

（2）$AB=AF-DB$.

如图 2-5，有两种情况.

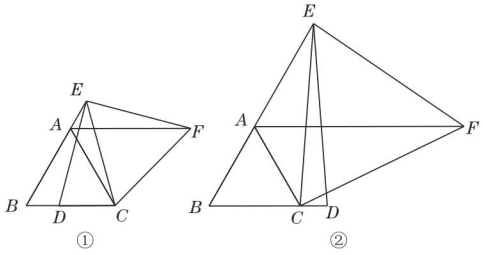


图 2-5

专题七 线段的垂直平分线

链接中考» 由线段的垂直平分线可以得到两条线段相等，实际应用中多与三角形结合，实现边的转化，还能构成等腰三角形，利用等腰三角形的性质解决问题.在中考中，一般以填空题、选择题形式出现，在本章考查时，与等腰三角形的性质综合考查多以解答题形式出现.

例7 **[中考·来宾]**如图 2-6，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=100°$，AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB，BC 于点 D，E，则 $\angle BAE$ 等于(　　)

A. 80°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 40°

解题秘方：利用线段的垂直平分线的性质得到线段相等，再将线段相等转化为角相等，求角的度数.

解：$\because AB=AC$，$\angle BAC=100°$，

$\therefore\angle B=\angle C=(180°-100°)\div2=40°$.

$\because AB$ 的垂直平分线 DE 分别交 AB，BC 于点 D，E，

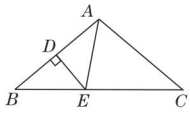


图 2-6

$\therefore AE=BE$，

$\therefore\angle BAE=\angle B=40°$，故选 D.

答案：D

方法点拨：线段的垂直平分线的性质揭示两条线段相等，结合等腰三角形的性质可转化证明角相等，为求角的度数提供了思路.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题八 全等三角形的性质与判定

链接中考» 三角形全等的判定是几何中常见的证明，全等三角形的性质是解决线段相等或角相等的基本思路，是中考的热门考点，单独考查时，形式多种多样，填空题、选择题、解答题都有．但三角形全等往往成为其他综合证明题的一个工具．

类型 1：利用三角形全等证明线段的关系

例 8 ［中考·武汉］如图 2-7，点 B，C，E，F 在同一直线上，$BC=EF$，$AC \perp BC$ 于点 C，$DF \perp EF$ 于点 F，$AC=DF$.

求证：（1）$\triangle ABC \cong \triangle DEF$；

（2）$AB \parallel DE$.

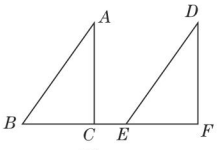


图 2-7

解题秘方：（1）这两个三角形中，根据已知有两组边对应相等，且夹角对应相等，故用 SAS 可证它们全等；（2）要证 $AB \parallel DE$，只需证 $\angle ABC=\angle DEF$，而这可由 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 得到．

证明：（1）$\because AC \perp BC$ 于点 C，$DF \perp EF$ 于点 F，

$\therefore \angle ACB=\angle DFE=90°$．

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} BC=EF, \\ \angle ACB=\angle DFE, \\ AC=DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$（SAS）．

（2）$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$，

$\therefore \angle ABC=\angle DEF$，

$\therefore AB \parallel DE$.

类型 2：利用三角形全等证明角的关系

例 9 ［中考·宜宾］如图 2-8，$AC=DC$，$BC=EC$，$\angle ACD=\angle BCE$.

求证：$\angle A=\angle D$.

解题秘方：先找出要证的两个角所在的三角形，然后结合已知条件，证明两个三角形全等．

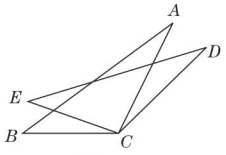


图 2-8

证明：$\because \angle ACD=\angle BCE$，

$\therefore \angle ACD+\angle ACE=\angle BCE+\angle ACE$，

$\therefore \angle DCE=\angle ACB$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$\because AC=DC$，$\angle ACB=\angle DCE$，$BC=EC$.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$（SAS）．

$\therefore \angle A=\angle D$.

方法点拨：全等三角形的性质“对应边相等，对应角相等”为证明线段或角相等提供了思路，其思路主要分两步，第一步：找要证的线段或角所在的三角形；第二步：证这两个三角形全等．

专题九 尺规作图

链接中考» 尺规作图是指在几何作图中，用无刻度的直尺和圆规作图，在中考中单独考查较少，常与其他知识综合考查．

例 10 ［中考·宜昌］通过如图 2-9 所示的尺规作图，能确定点 D 是 BC 边中点的是（　　）

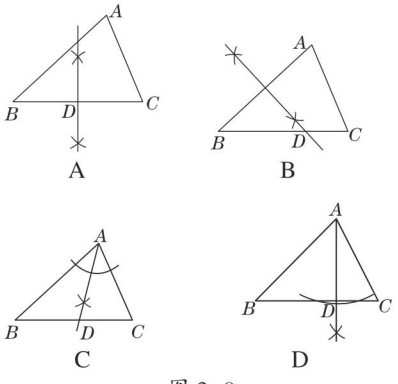


图 2-9

解题秘方：根据作图痕迹进行判断．

解：A 中所作的直线是 BC 的垂直平分线，B 中所作的直线是 AB 的垂直平分线，C 中的 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，D 中的 AD 是 BC 的高，故只有 A 能确定点 D 是 BC 的中点，故选 A.

答案：A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题十 分类讨论思想

专题解读≫ 本章分类讨论能解决的问题主要有：三角形形状不确定；等腰三角形腰或顶角不确定．分类讨论思想不仅可以使我们有效地解决一些问题，同时还可以培养我们的观察能力和全面思考问题的能力．

例 11 已知等腰三角形 ABC 的两个底角相等（$\angle ABC=\angle C$），且一腰 AC 上的高 BD 与另一腰 AB 的夹角为 $40°$．求 $\angle ABC$，$\angle C$ 的度数．

解题秘方： 若等腰三角形的顶角是钝角，则腰上的高在三角形外部；若等腰三角形的顶角是锐角，则腰上的高在三角形的内部，题中没明确指出三角形的形状，要分两种情况讨论．

解：（1）如图 2−10，当 BD 在三角形内部时，

$\because BD\perp AC$，$\therefore \angle ADB=90°$．

$\therefore \angle A=180°-\angle ADB-\angle ABD=180°-90°-40°=50°$，

$\therefore \angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=65°$．

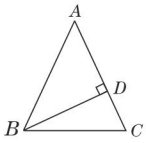


图 2−10

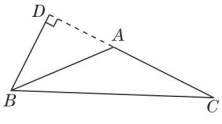


图 2−11

（2）如图 2−11，当 BD 在三角形外部时，

$\because BD\perp AC$，$\therefore \angle ADB=90°$．

$\therefore \angle DAB=180°-\angle ADB-\angle ABD=180°-90°-40°=50°$．

$\because \angle DAB$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，

$\therefore \angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times 50°=25°$．

综上，$\angle ABC$，$\angle C$ 的度数都是 $65°$ 或都是 $25°$．

规律点拨： 分类讨论思想，也称分情况讨论，当一个数学问题在一定条件下，其结论并不唯一时，就需要对这一问题进行必要的分类．根据条件分为有限的若干种情况，在每一种情况下分别求解，最后将各种情况下得到的答案进行归纳总结．它体现了化整为零和积零为整的思想与归类整理的方法．

专题十一 方程思想

专题解读≫ 方程思想就是指在求解数学题时，从题中已知量和未知量之间的关系入手，找出相等关系，运用数学符号语言将相等关系转化成方程或方程组，再通过解方程或方程组，使问题得到解决．本章中等腰（等边）三角形的内角、边长都存在特殊关系，因此，在求等腰（等边）三角形的内角的度数或边的长度时，常需要通过设未知数列方程或方程组的方法来解决．

例 12 ［中考·南通］如图 2−12，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上一点，$AC=AD=DB$，$\angle BAC=102°$，则 $\angle ADC=$_____°．

解题秘方： 利用等腰三角形的性质建立角的等量关系，利用方程建立已知角与未知角之间的等量关系．

解： $\because AC=AD=DB$，

$\therefore \angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=\angle C$．

设 $\angle B=\angle BAD=x°$，

$\therefore \angle ADC=2x°$．

$\therefore \angle C=2x°$．

$\therefore \angle B+\angle C=3x°$．

$\because \angle BAC=102°$，

$\therefore \angle B+\angle C=78°$．

$\therefore 3x=78$，解得 $x=26$．

$\therefore \angle ADC=52°$．

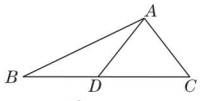


图 2−12

答案： 52

方法点拨： 本题运用了**方程思想**．本题含有两个等腰三角形，运用了等边对等角、三角形内角和定理及三角形外角的性质，用角反复表示比较麻烦且易出错，而用设未知数列方程的方法可使问题变得简单明了．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见244页

题型1：三角形的三边关系

1. 在△ABC中，AC=5 cm，AD是△ABC的中线，把△ABC的周长分为两部分，若其差为3 cm，则BA=_____.

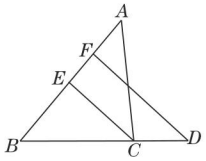
2. 已知a，b，c是三角形的三边长.

（1）化简：$|a-b-c|+|b-c-a|+|c-a-b|$；

（2）若a=5，b=4，c=3，求（1）中式子的值.

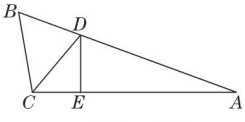
题型2：三角形中角度的计算

3. 如图，在△ABC中，∠A=46°，CE是∠ACB的平分线，B，C，D在同一条直线上，DF∥EC，∠D=42°. 求∠B的度数.



（第3题）

4. 如图，在△ABC中，∠A=20°，CD是∠BCA的平分线，在△CDA中，DE是CA边上的高，且∠EDA=∠CDB，求∠B的度数.



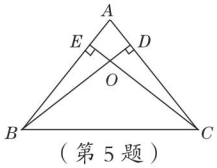
（第4题）

题型3：等腰三角形与等边三角形的性质与判定

5. [中考·常州]如图，在△ABC中，AB=AC，BD，CE是高，BD与CE相交于点O.

（1）求证：OB=OC；

（2）若∠ABC=50°，求∠BOC的度数.



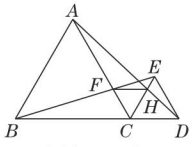
（第5题）

6. 如图，已知点B，C，D在同一条直线上，△ABC和△CDE都是等边三角形，BE交AC于F，AD交CE于H，连接FH.

（1）求证：△BCE≌△ACD；

（2）求证：CF=CH；

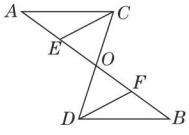
（3）判断△CFH的形状，并说明理由.



（第6题）

题型4：全等三角形的性质与判定

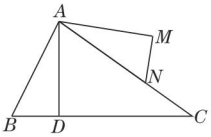
7. 如图，AB，CD交于点O，E，F为AB上两点，OA=OB，OE=OF，∠A=∠B，∠ACE=∠BDF. 求证：△ACE≌△BDF.



（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

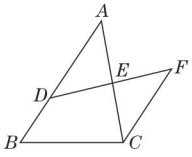
8. 如图，$\angle BAC=\angle DAM$，$AB=AN$，$AD=AM$，求证：$\angle B=\angle ANM$.



（第 8 题）

9. 如图，D 是△ ABC 的边 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE=FE$，$FC\parallel AB$.

求证：$AE=CE$.



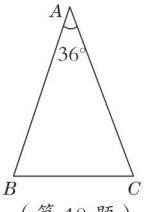
（第 9 题）

题型 5：尺规作图

10. [**中考 · 玉林**] 如图，已知等腰三角形 ABC 顶角 $\angle A=36°$.

（1）在 AC 上作一点 D，使 $AD=BD$（要求：尺规作图，保留作图痕迹，不必写作法和证明）；

（2）求证：△ BCD 是等腰三角形.

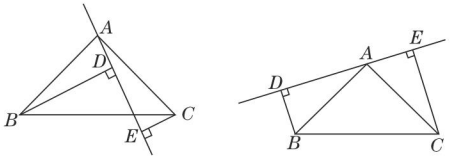


（第 10 题）

题型 6：动态中的全等三角形

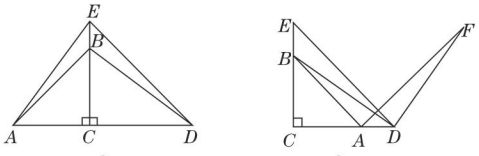
11. （1）如图①，△ ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，AE 是过 A 点的一条直线，且 B，C 在 AE 的异侧，$BD\perp AE$ 于 D，$CE\perp AE$ 于 E，求证：$BD=DE+CE$；

（2）若直线 AE 绕点 A 旋转到图②的位置时（$BD<CE$），其余条件不变，问 BD 与 DE，CE 的关系如何？请予以证明.



（第 11 题）

12. [**中考 · 莱芜**] 已知△ ABC 与△ DEC 是两个大小不同的等腰直角三角形.



（第 12 题）

（1）如图①，连接 AE，DB，试判断线段 AE 和 DB 的数量和位置关系，并说明理由；

（2）如图②，连接 DB，将线段 DB 绕 D 顺时针旋转 $90°$ 到 DF，连接 AF，试判断线段 DE 和 AF 的数量和位置关系，并说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 章测试卷

☞答案见 246 页

（120 分 90 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

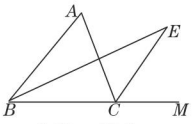
1.[中考·金华]若长度分别为 a，3，5 的三条线段能组成一个三角形，则 a 的值可以是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 8

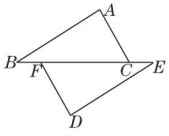
2.[中考·大庆]如图，在△ABC 中，BE 是∠ABC 的平分线，CE 是外角∠ACM 的平分线，BE 与 CE 相交于点 E，若∠A=60°，则∠BEC 是（　　）

A. 15°　　B. 30°

C. 45°　　D. 60°



（第 2 题）



（第 3 题）

3.[中考·安顺]如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，AB // ED，AC // FD，那么添加下列一个条件后，仍无法判定△ABC ≌△DEF 的是（　　）

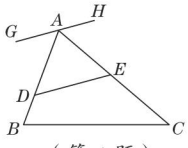
A. ∠A=∠D　　B. AC=DF

C. AB=ED　　D. BF=EC

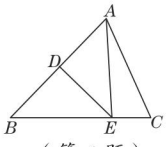
4.[中考·宁夏]如图，在△ABC 中，AC=BC，点 D 和 E 分别在 AB 和 AC 上，且 AD=AE. 连接 DE，过点 A 的直线 GH 与 DE 平行，若∠C=40°，则∠GAD 的度数为（　　）

A. 40°　　B. 45°

C. 55°　　D. 70°



（第 4 题）



（第 6 题）

5. 下列各条件中，能作出唯一的△ABC 的是（　　）

A. AB=3 cm，AC=5 cm，BC=9 cm

B. AB=3 cm，AC=2.5 cm，∠B=30°

C. AB=3 cm，∠B=30°，∠C=45°

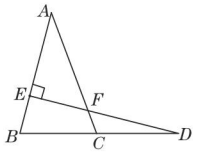
D. ∠A=105°，∠B=30°，∠C=45°

6.[中考·南充]如图，在△ABC 中，AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 BC 于点 E，若 BC=6，AC=5，则△ACE 的周长为（　　）

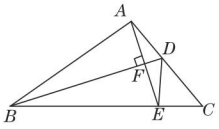
A. 8　　B. 11　　C. 16　　D. 17

7.[中考·赤峰]如图，点 D 在 BC 的延长线上，DE ⊥ AB 于点 E，交 AC 于点 F. 若∠A=35°，∠D=15°，则∠ACB 的度数为（　　）

A. 65°　　B. 70°　　C. 75°　　D. 85°



（第 7 题）



（第 8 题）

8.[中考·青岛]如图，BD 是△ABC 的角平分线，AE ⊥ BD，垂足为 F. 若∠ABC=35°，∠C=50°，则∠CDE 的度数为（　　）

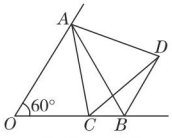
A. 35°　　B. 40°

C. 45°　　D. 50°

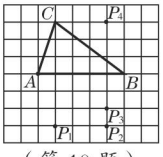
9.[中考·玉林]如图，∠AOB=60°，OA=OB，动点 C 从点 O 出发，沿射线 OB 方向移动，以 AC 为边在右侧作等边三角形 ACD，连接 BD，AB，则 BD 所在直线与 OA 所在直线的位置关系是（　　）

A. 平行　　B. 相交

C. 垂直　　D. 平行、相交或垂直



（第 9 题）



（第 10 题）

10.[中考·宜昌]如图，在方格纸中，以 AB 为一边作△ABP，使之与△ABC 全等，从 P_1，P_2，P_3，P_4 四个点中找出符合条件的点 P，则点 P 有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

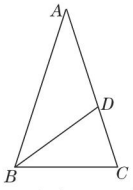
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题（每题3分，共18分）

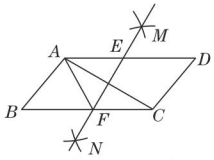
11. [中考·安徽]命题“如果$a+b=0$，那么a，b互为相反数”的逆命题为_____.

12. [中考·广安]等腰三角形的两边长分别为6 cm，13 cm，其周长为_____cm.

13. [中考·绥化]如图，在△ABC中，$AB=AC$，点D在AC上，且$BD=BC=AD$，则∠A=_____度.



（第13题）

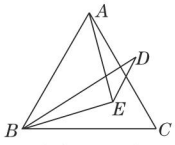


（第15题）

14. 已知△DEF≌△ABC，$AB=AC$，且△ABC的周长为23 cm，$BC=4$ cm，则△DEF的边中必有一条边等于_____.

15. [中考·鞍山]如图，在平行四边形$ABCD$中，分别以点A和点C为圆心，以大于$\frac{1}{2}AC$的长为半径作弧，两弧相交于M，N两点，作直线MN，分别交AD，BC于点E，F，连接AF，∠$B=50°$，∠$DAC=30°$，则∠BAF等于_____.

16. 如图，点E是等边三角形ABC内一点，且$EA=EB$，△ABC外一点D满足$BD=AC$，且BE平分∠DBC，则∠BDE=_____.



（第16题）

三、解答题（共72分）

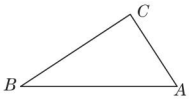
17.（10分）[中考·达州]如图，在Rt△ABC中，∠$ACB=90°$，$AC=2$，$BC=3$.

（1）尺规作图：不写作法，保留作图痕迹.

①作∠ACB的平分线，交斜边AB于点D；

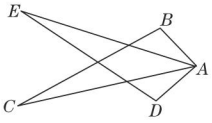
②过点D作BC的垂线，垂足为点E.

（2）在（1）作出的图形中，求DE的长.



（第17题）

18.（10分）[中考·淄博]已知，在如图所示的“风筝”图案中，$AB=AD$，$AC=AE$，∠$BAE=$∠DAC. 求证：∠$E=$∠C.

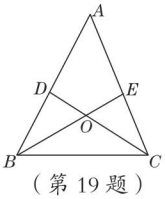


（第18题）

19.（10分）[中考·无锡]如图，在△ABC中，$AB=AC$，点D，E分别在AB，AC上，$BD=CE$，BE，CD相交于点O.

求证：（1）△DBC≌△ECB；

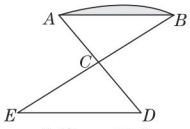
（2）$OB=OC$.



（第19题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.（10分）[中考·南通]如图，有一池塘，要测池塘两端A，B的距离，可先在平地上取一点C，从点C不经过池塘可以直接到达点A和B. 连接AC并延长到点D，使$CD=CA$. 连接BC并延长到点E，使$CE=CB$. 连接DE，那么量出DE的长就是A，B的距离. 为什么?

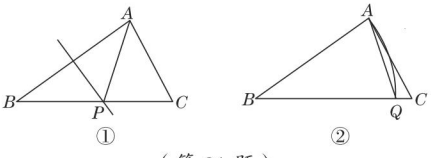


（第20题）

21.（10分）[中考·杭州]在$\triangle ABC$中，$AC<AB<BC$.

（1）如图①，已知线段AB的垂直平分线与BC边交于点P，连接AP，求证：$\angle APC=2\angle B$.

（2）如图②，以点B为圆心，线段AB的长为半径画弧，与BC边交于点Q，连接AQ. 若$\angle AQC=3\angle B$，求$\angle B$的度数.

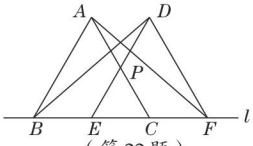


（第21题）

22.（10分）如图，两个全等的等边三角形ABC，三角形DEF的一边重叠地放在直线l上，AC，DE交于点P，

（1）判断$\triangle PCE$的形状，并说明理由；

（2）求证：$AF=BD$.



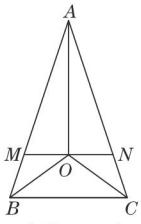
（第22题）

23.（12分）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle ABC$与$\angle ACB$的平分线交于点O，过点O作$MN\parallel BC$，分别交AB，AC于点M，N，连接AO.

（1）求证：$\triangle BOC$是等腰三角形；

（2）BM与CN相等吗？对你的结论说明理由；

（3）求证：$AO\perp MN$.



（第23题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1章 分 式

1.1 分 式

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** A

4. D **点拨:** 由题意可得$\frac{3x}{3x+3y}=\frac{3x}{3(x+y)}=\frac{x}{x+y}$,因此分式的值不变,应选 D. 解答本题的关键是根据题意写出满足条件的分式,再利用分式的基本性质化简,将化简结果与原分式进行对比来确定正确选项.

5. D

6. C **点拨:** ①中分子、分母同时约去 $x-y$,正确;②中分式的分子、分母同时除以 -1,正确;③中因为 $b-a$ 的正负不确定,当 $b-a>0$ 时,结果为 -1,当$b-a<0$ 时,结果为 1,错误;④正确.

7. C

8. **解:** (1)由题意,可得$|x|-1=0$,

所以 $x=\pm1$.

把 $x=1$ 代入 x^2+2x-3,得 $1+2-3=0$. 不合题意,舍去.

把 $x=-1$代入 x^2+2x-3,得$(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$,所以当 $x=-1$ 时,$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$的值为零.

(2)由题意,得 $x-2=0$ 或 $x-1=0$,

所以$x=2$ 或 $x=1$,

因为$|x|-1\neq0$,所以 $x\neq\pm1$,

所以当 $x=2$ 时,$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$的值为零.

9. **解:** (1)$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$.

(2)$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$

$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}$

$=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

10. **解:** 由已知条件可知,$xy\neq0$.

原 式 $=\frac{(2x-3xy-2y)\div(-xy)}{(x+2xy-y)\div(-xy)}=\frac{2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+3}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-2}$,

因为$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$,

所以原式 $=\frac{2\times3+3}{3-2}=9$.

11. **解:** $\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}=\frac{a(3a-b)}{(3a)^2-2\cdot3a\cdot b+b^2}=\frac{a(3a-b)}{(3a-b)(3a-b)}=\frac{a}{3a-b}$.

当 $a=\frac{1}{3}$,$b=-2$ 时,$\frac{a}{3a-b}=\frac{\frac{1}{3}}{1-(-2)}=\frac{1}{9}$.

12. **解:** 由题意,得$\begin{cases}-3-m=0,\\6m-n=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-3,\\n=-18.\end{cases}$

所以$\frac{(n-m)^{2\,020}}{(m-n)^{2\,021}}=\frac{1}{m-n}=\frac{1}{-3+18}=\frac{1}{15}$.

13. **解:** 由题意,得甲班每小时完成$\frac{1}{a}$,乙班每小时完成 $\frac{1}{b}$,所以两个班合作每小时完成$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$,从而两个班合作完成任务所需时间是$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$小时.

当 $a=6$,$b=12$ 时,$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=1\div\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=4$(小时),

即两个班合作需 4 小时完成任务.

1.2 分式的乘法和除法

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** C

4. $\frac{y-x}{x^2+xy}$

5. **解:** (1)原式 $=\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{5xm}{6yn}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{1}{2y^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)原式 $=\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a-1}{(a+2)^2}\cdot(a+2)=\frac{1}{(a+1)(a+2)}\cdot(a+2)=\frac{1}{a+1}$.

(3)原式 $=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{(x+2)^2}$.

6. 解:(1)原式 $=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b^3}{a^6}\right)\div\left(-\frac{1}{a^3b^3}\right)$

$=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{a^6}{b^3}\right)\cdot(-a^3b^3)$

$=\frac{a^5}{2b}\cdot(-a^3b^3)$

$=-\frac{a^8b^2}{2}$.

(2)原式 $=\frac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}\cdot\frac{(n-m)^2}{m^2n^2}\cdot\frac{m}{m+n}$

$=\frac{m-n}{mn^2}$.

(3)原式 $=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{x}{y^2(x-y)}$

$=\frac{x}{xy^2-y^3}$.

7. 解:由题意可知,甲工程队修 900 米所用时间为 $\frac{900}{a^2-4}$ 天,乙工程队修 600 米所用时间为 $\frac{600}{(a-2)^2}$ 天.

$\frac{900}{a^2-4}\div\frac{600}{(a-2)^2}=\frac{900}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a-2)^2}{600}=\frac{3(a-2)}{2(a+2)}=\frac{3a-6}{2a+4}$.

答:甲工程队修 900 米所用时间是乙工程队修 600 米所用时间的 $\frac{3a-6}{2a+4}$ 倍.

8. 解: $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$,因此,不管 x 取何值,这个式子的值都是 $\frac{1}{2}$.

9. 解:由 $a^2+b^2-4a+6b+13=0$,

得 $(a-2)^2+(b+3)^2=0$. 根据非负数的性质,可得 $a=2,b=-3$.

原式 $=\frac{(a-3)^2}{-(b+2)(b-2)}\cdot\frac{b+2}{-(a-3)}\cdot\frac{a^2}{3(a-3)}=\frac{a^2}{3(b-2)}=\frac{a^2}{3b-6}$.

当 $a=2,b=-3$ 时,

原式 $=\frac{2^2}{3\times(-3)-6}=-\frac{4}{15}$.

10. 解:(1)因为 $-\frac{x^5}{y^2}\div\frac{x^3}{y}=\frac{x^7}{y^3}\div\left(-\frac{x^5}{y^2}\right)=-\frac{x^9}{y^4}\div\frac{x^7}{y^3}=\cdots=-\frac{x^2}{y}$,

所以从第 2 个分式开始,用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式的结果恒等于 $-\frac{x^2}{y}$.

(2)由已知的一列分式可知,分式的分母的指数依次增加 1,分子的指数是分母指数的 2 倍加 1,并且分母的指数是偶数的分式带有“-”号,所以第 7 个分式应该是 $\frac{x^{15}}{y^7}$.

1.3 整数指数幂

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D

3. C **点拨:** $3x^2+4x^2=7x^2$,故 A 不正确,$2x^3\cdot3x^3=6x^6$,故 B 不正确,$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{8}a^6b^3$,故 D 不正确.

4. B **点拨:**本题综合考查各种整数指数幂的运算,由已知条件可得 $a=0.09$,$b=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}$,$c=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=9$,$d=1$.

因为 $-\frac{1}{9}<0.09<1<9$,

所以 $b<a<d<c$.

5. D **点拨:**由条件可得 $x-3\neq0$ 且 $3x-6\neq0$ 且 $x\neq0$,因此 $x\neq3$ 且 $x\neq2$ 且 $x\neq0$,因此选 D. 零指数幂底数不能为 0,负整数指数幂底数不能为 0,分式的分母不能为 0.

6. 0.000 031 8 **7.** -3

8. -5 **点拨:**此类题目可利用逆向思维求解.

因为 $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$,

所以 $x=-5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解：(1)6×10^{-6}.

(2)1.2×10^{-8}.

10. 解：原式$=1-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$.

11. 解：(1)原式$=x^{n}y^{-n}\div x^{4}y^{-2n}=x^{n-4}y^{-n+2n}=x^{n-4}y^{n}$；

(2)原式$=x^{-4}y^{6}\cdot x^{2}y^{-2}\div x^{3}y^{-6}=x^{-4+2-3}y^{6-2-(-6)}=x^{-5}y^{10}=\frac{y^{10}}{x^{5}}$.

12. 解：$\frac{x-2}{x-1}\div\frac{x^{2}-4}{x^{2}+4x+4}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+2)^{2}}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x+2}{x-1}$.

当$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+1=3+1=4$时，

原式$=\frac{4+2}{4-1}=2$.

13. 解：5万$=5\times10^{4}$，

$200\div(5\times10^{4})=0.004=4\times10^{-3}$(g).

答：1粒芝麻重4×10^{-3} g.

14. 解：①当$x-2=0$且$2x-1\neq0$时，解得$x=2$；

②当$2x-1=1$时，解得$x=1$；

③当$2x-1=-1$且$x-2$为偶数时，解得$x=0$.

综上，整数x的值为2或1或0.

方法规律：本题运用分类讨论思想求解，注意考虑问题要全面. 本题分三种情况讨论：①当指数为0，底数不为0时，式子的值为1；②当底数为1时，式子的值为1；③当底数为-1，指数为偶数时，式子的值为1.

1.4 分式的加法和减法

【两年模拟兵法】

1. A

2. B　**点拨：**$\frac{2x}{x^{2}-9}+\frac{1}{3-x}$

$=\frac{2x}{(x+3)(x-3)}-\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{2x-x-3}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{1}{x+3}$.

3. A　**点拨：**原式$=\left(\frac{a-2}{a-2}+\frac{4}{a-2}\right)\cdot\frac{a-2}{a}=\frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{a-2}{a}=\frac{a+2}{a}$. 故选A. 分式混合运算，先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的先算括号里面的. 当异分母分式相加减时，要先通分，转化为同分母分式相加减；而对于分式的除法运算，都是转化为乘法后再计算.

4. B　**点拨：**$\frac{3-2x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-2x}{x-1}=\frac{2(1-x)}{x-1}=-2$.

5. B　**点拨：**原式$=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b^{2}-a^{2}}{a^{2}b^{2}}\cdot ab=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{a^{2}b^{2}}{(b+a)(b-a)}\cdot ab=\frac{a^{2}b^{2}}{b-a}$. 故选B.

6. D　**7.** B　**8.** $-\frac{1}{a+1}$　**9.** $\frac{40}{a}$

10. 5　**点拨：**先将条件等式两边同时乘$(m+n)$，再通过拆分得到结果. 因为$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$，两边同时乘$(m+n)$，得$\frac{m+n}{m}+\frac{m+n}{n}=7$，所以$1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+1=7$，因此$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=5$. 故答案为5.

对于此类问题，往往需要对条件式进行变形，当待求式含有两个字母时，还要注意利用整体思想去求解.

11. 3　**点拨：**因为$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$，

所以$\frac{1+b-(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$，

所以$\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$，

所以$(1+a)(1+b)=(b-a)^{2}$，

因此$a^{2}+b^{2}=1+a+b+3ab$.

所以$\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}=\frac{(1+b)^{2}+(1+a)^{2}}{(1+a)(1+b)}=\frac{1+2b+b^{2}+1+2a+a^{2}}{1+a+b+ab}=\frac{3+3a+3b+3ab}{1+a+b+ab}=3$.

12. 解：(1)最简公分母是$12a^{2}b^{2}c^{2}$.

$\frac{3}{4a^{2}b}=\frac{9bc^{2}}{12a^{2}b^{2}c^{2}}$，

$-\frac{5}{6b^{2}c}=-\frac{10a^{2}c}{12a^{2}b^{2}c^{2}}$，

$\frac{1}{2ac^{2}}=\frac{6ab^{2}}{12a^{2}b^{2}c^{2}}$.

(2)最简公分母是$4(x+1)(x-2)$.

$\frac{x+2}{2x+2}=\frac{2(x+2)(x-2)}{4(x+1)(x-2)}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{4x}{4(x+1)(x-2)}$,

$\frac{3}{8-4x}=\frac{-3(x+1)}{4(x+1)(x-2)}$.

(3) $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$, $a^2+2a+1=(a+1)^2$, $-3a-6=-3(a+2)$, 可知三个分式的最简公分母为 $-3(a+1)^2(a+2)$.

所以$\frac{a}{a^2+3a+2}=\frac{a}{(a+1)(a+2)}=\frac{-3a(a+1)}{-3(a+1)^2(a+2)}$,

$\frac{2}{a^2+2a+1}=\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{-6(a+2)}{-3(a+1)^2(a+2)}$,

$\frac{1}{-3a-6}=\frac{1}{-3(a+2)}=\frac{(a+1)^2}{-3(a+1)^2(a+2)}$.

13. **解:** 原式 $=\frac{(a+2)(a-2)-(3a-4)}{a-2}\cdot\frac{a-2}{(a-3)^2}=\frac{a^2-3a}{a-2}\cdot\frac{a-2}{(a-3)^2}=\frac{a}{a-3}$.

14. **解:** 圆圆的解答不正确.

正确解答如下:

原式 $=\frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^2-4}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{4x-(2x+4)-(x^2-4)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{-x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=-\frac{x}{x+2}$.

15. **解:** 因为 $ab=1$, $b=2a-1$,

所以 $b-2a=-1$,

所以$\frac{1}{a}-\frac{2}{b}=\frac{b-2a}{ab}=\frac{-1}{1}=-1$.

16. **解:** 原式 $=\left(\frac{a-1}{a-1}+\frac{1}{a-1}\right)\cdot\frac{a^2-1}{2a}=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{a^2-1}{2a}=\frac{a+1}{2}$,

当 $a=-2$ 时, 原式 $=-\frac{1}{2}$.

17. **解:** 将等号右边的两个分式相加, 得 $\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$.

因为左右恒等, 且分母相同,

所以分子应恒等, 即 $2x+1=A(x-2)+B(x+2)$, 所以 $2x+1=(A+B)x+(-2A+2B)$,

即$\begin{cases}A+B=2,\\-2A+2B=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}A=\frac{3}{4},\\B=\frac{5}{4}.\end{cases}$

1.5 可化为一元一次方程的分式方程

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C

4. D **点拨:** 方程两边同乘 $(x-2)$, 得 $m+2x=x-2$, 整理, 得 $x=-2-m$. 因为原分式方程出现增根时 $x=2$, 所以 $-2-m=2$, 所以 $m=-4$.

5. A

6. $\frac{5}{6}$ **点拨:** 根据新定义把 $2\oplus(2x-1)$ 用含 x 的式子表示出来, 列出方程后求解.

因为 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,

所以 $2\oplus(2x-1)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}$,

故有$\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}=1$,

所以$\frac{1}{2x-1}=\frac{3}{2}$, 解得 $x=\frac{5}{6}$.

经检验, $x=\frac{5}{6}$是原方程的根.

7. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$ **点拨:** 观察已知的分式方程可知, 分式方程中的左右两边都有两个分式, 且分子都是 1; 左边两个分式的分母依次小 1, 右边第一个分式的分母比左边第二个分式的分母小 2, 右边第二个分式的分母比右边第一个分式的分母小 1; 左边第一个分式中的分母与对应方程的解的和为 $x+2$, 从而可得解为 $x=6$ 的分式方程的左边第一个分式的分母应为 $x-4$, 因此对应的方程应为$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$.

8. **解:** (1) 方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$, 得 $2(x-1)=x+1$, 解这个一元一次方程, 得 $x=3$, 经检验, $x=3$ 是原分式方程的根, 所以原分式方程的根是 $x=3$.

(2) 去分母得 $(x-2)^2-16=(x+2)^2$, 去括号得 $x^2-4x+4-16=x^2+4x+4$, 解得 $x=-2$. 经检验, $x=-2$ 是增根, 所以原分式方程无解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解：设科普类图书平均每本的价格为 x 元，则文学类图书平均每本的价格为 $(x-5)$ 元，由题意得 $\frac{12\,000}{x}=\frac{9\,000}{x-5}$，解得 $x=20$.

经检验，$x=20$ 是所列方程的解，且符合题意.

则 $x-5=15$.

答：学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格各是 20 元、15 元.

10. 解：(1)设大巴车的平均速度为 x 千米/时，则小车的平均速度为 $1.5x$ 千米/时，

根据题意，得 $\frac{90}{x}=\frac{90}{1.5x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，

解得 $x=40$，经检验 $x=40$ 是原方程的解.

则 $1.5x=60$.

答：大巴车的平均速度为 40 千米/时，小车的平均速度为 60 千米/时.

(2)设苏老师赶上大巴车的地点到基地的路程有 y 千米，根据题意，得 $\frac{1}{2}+\frac{90-y}{60}=\frac{90-y}{40}$，

解得 $y=30$.

答：苏老师追上大巴车的地点到基地的路程有 30 千米.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：显然 $xy\neq0$. 将待求分式的分子、分母同时除以 xy，得 $\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}=\frac{-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+5}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-3}=\frac{-3\times5+5}{5-3}=-5$.

2. 解：原式 $=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$.

因为 $a+b+c=0$，

所以 $b+c=-a$，$a+c=-b$，$a+b=-c$.

所以原式 $=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$.

3. 解：令 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq0)$，则 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$，代入原式，得原式 $=\frac{3\times2k-2\times3k+5\times4k}{2k+3k+4k}=\frac{20k}{9k}=\frac{20}{9}$.

4. 解：原式 $=\frac{6x+10}{(x+1)(3x+2)}$.

当 $x=2$ 时，原式 $=\frac{12+10}{24}=\frac{11}{12}$.

5. 解：因为 $|x-2|+(2x-y-3)^2=0$，

所以 $\begin{cases}x-2=0,\\2x-y-3=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

所以原式 $=\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{2x-y}=\frac{2x}{2x-y}$.

当 $x=2$，$y=1$ 时，原式 $=\frac{4}{3}$.

6. 解：原式 $=\frac{x-1}{x+2}\div\frac{x-1}{x(x+2)}-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=x-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x^2}{x+1}$.

因为 $x^2-x-1=0$，所以 $x^2=x+1$. 所以原式 $=1$.

7. 解：方程两边同乘 $3(x+1)$，得 $3x=2x+3(x+1)$，

解得 $x=-\frac{3}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$3(x+1)\neq0$，

所以 $x=-\frac{3}{2}$ 是原方程的解.

8. 解：原方程可化为 $\frac{x+2}{x-2}-\frac{16}{x^2-4}=1$.

方程的两边同乘 $(x+2)(x-2)$，

得 $(x+2)^2-16=(x+2)(x-2)$.

整理，得 $4x=8$，解得 $x=2$.

检验：当 $x=2$ 时，$(x+2)(x-2)=0$，

所以 $x=2$ 是原方程的增根，所以原方程无解.

9. 解：原方程两边同乘最简公分母 $(x+1)(x-1)$，得 $m(x-1)-2(x+1)=3$，整理得 $(m-2)x=5+m$，假设产生增根 $x=1$，则有 $m-2=m+5$，方程无解，所以不存在 m 的值，使原方程产生增根 $x=1$；假设产生增根 $x=-1$，则有 $2-m=5+m$，

解得 $m=-\frac{3}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以当 $m=-\frac{3}{2}$ 时,关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ 会产生增根.

10. 解: 在原分式方程的两边同乘 $(x+3)(x-3)$,

得 $m+2(x-3)=x+3$.

因为分式方程无解,

所以这时最简公分母 $(x+3)(x-3)=0$,

所以 $x=3$ 或 $x=-3$.

当 $x=3$ 时,$m+2\times(3-3)=3+3$,解得 $m=6$;

当 $x=-3$ 时,$m+2\times(-3-3)=-3+3$,解得 $m=12$.

所以当分式方程无解时,$m=6$ 或 $m=12$.

点拨: 分式方程无解的本质:一是使原分式方程无意义,即分母的值为零;二是将分式方程化为整式方程后,所得的整式方程无解.

11. 解: 设小明步行的速度是 x m/min,则小刚骑自行车的速度是 $3x$ m/min,

根据题意可得 $\frac{1\,200}{x}-4=\frac{3\,000}{3x}$,

解得 $x=50$,

经检验:$x=50$ 是原方程的根,

故 $3x=150$.

答:小明步行的速度是 50 m/min,小刚骑自行车的速度是 150 m/min.

【第 1 章测试卷】

一、**1.** D **2.** D **3.** D **4.** B **5.** D **6.** A **7.** D **8.** D **9.** B **10.** C

二、**11.** -1 **12.** $-\frac{y^3}{8x^3}$ **13.** $x=\frac{2}{7}$ **14.** 1 **15.** $\frac{3}{2}$ **16.** 10

三、**17. 解:** 原式 $=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{a-2}$

$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-1)}{a+1}$

$=\frac{2}{a+1}$.

18. 解: 原式 $=\frac{x-1-1}{x-1}\div\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x+1}{x-2}$.

当 $x=3$ 时,原式 $=\frac{3+1}{3-2}=4$.

19. 解: 原式 $=\frac{a^2-b^2}{a(a-b)}\times\frac{a}{(a+b)^2}$

$=\frac{(a-b)(a+b)}{a(a-b)}\times\frac{a}{(a+b)^2}$

$=\frac{1}{a+b}$.

当 $a=-1$ 时,若选择 $b=2$,则原式 $=\frac{1}{-1+2}=1$.

点拨: b 的取值不唯一.

20. 解: $\left(\frac{2x-3}{x-2}-1\right)\div\frac{x^2-2x+1}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}$,

当 $x=0$ 时,原式 $=-1$. (x 不能取 1 和 2)

21. 解: (1)方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$,

得 $3x(x-2)+2(x+2)=3(x+2)(x-2)$.

化简得 $-4x=-16$. 解得 $x=4$.

经检验,$x=4$ 是原方程的解.

所以原方程的解是 $x=4$.

(2)方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,

得 $4-(x+1)(x+2)=-(x+1)(x-1)$.

解得 $x=\frac{1}{3}$.

经检验,$x=\frac{1}{3}$ 是原方程的解.

所以原方程的解是 $x=\frac{1}{3}$.

22. 解: 设该工厂原来平均每天生产 x 台机器,则现在平均每天生产 $(x+50)$ 台机器.

根据题意得 $\frac{600}{x+50}=\frac{450}{x}$,解得 $x=150$.

经检验,$x=150$ 是原方程的根.

答:该工厂原来平均每天生产 150 台机器.

23. 解: 设甲校师生所乘大巴车的平均速度为 x km/h,则乙校师生所乘大巴车的平均速度为 $1.5x$ km/h.

根据题意得 $\frac{240}{x}-\frac{270}{1.5x}=1$,解得 $x=60$,

经检验,$x=60$ 是原分式方程的解.

此时 $1.5x=90$.

答:甲、乙两所学校师生所乘大巴车的平均速度分别为 60 km/h 和 90 km/h.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24. 解:(1)设第一批仙桃每件进价是 x 元. 则

$\frac{2\,160}{x}\times\frac{5}{3}=\frac{3\,700}{x+5}$,解得 $x=180$.

经检验,$x=180$ 是原分式方程的根.

答:第一批仙桃每件进价是 180 元.

(2)设剩余的仙桃每件售价打 y 折,

则$\frac{3\,700}{180+5}\times225\times80\%+\frac{3\,700}{180+5}\times225\times(1-80\%)\times0.1y-3\,700=440$,

解得 $y=6$.

答:剩余的仙桃每件售价打六折.

第2章 三角形

2.1 三角形

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** D **4.** C **5.** C **6.** B

7. C 点拨:由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}$,得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot CF+\frac{1}{2}AD\cdot BE=\frac{1}{2}AD(CF+BE)$,显然△$ABC$ 的面积不变,点 D 由点 B 运动到点 C,AD 的长度变大,故 $BE+CF$ 的值减小,故选择 C.

8. 2 cm **9.** 2,6 或 4,4

10. 等腰三角形;7 点拨:因为 $(b-2)^2\geqslant0$,$|c-3|\geqslant0$,且 $(b-2)^2+|c-3|=0$,所以 $b-2=0$,$c-3=0$. 所以 $b=2$,$c=3$. 因为 a 为方程 $|x-4|=2$ 的解,所以 $a=2$ 或 6. 当 $a=6$,$b=2$,$c=3$ 时,$2+3<6$,不满足三角形的三边关系,故舍去. 当 $a=2$,$b=2$,$c=3$ 时,$2+2>3$,满足三角形的三边关系,所以△ABC 为等腰三角形,周长为 $2+2+3=7$.

11. 解:因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE$,

所以$\frac{1}{2}\times9\times6=\frac{1}{2}\times8\times BE$.

所以 $BE=\frac{27}{4}$.

12. 解:(1)根据三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和,可得

$\angle B=\angle ACD-\angle A=83^\circ-35^\circ=48^\circ$.

(2)在△AFE 中,$\angle A+\angle AFE+\angle AEF=180^\circ$,

在△CED 中,$\angle D+\angle ECD+\angle DEC=180^\circ$,

因为 $\angle D=42^\circ$,$\angle ECD=83^\circ$,

所以 $\angle DEC=180^\circ-\angle D-\angle ECD=55^\circ$.

又因为 $\angle DEC=\angle AEF$(对顶角相等),

所以 $\angle AFE=180^\circ-\angle AEF-\angle A=180^\circ-\angle DEC-\angle A=180^\circ-55^\circ-35^\circ=90^\circ$.

13. 解:设 $\angle CDE=x$,

因为 $\angle ADC$ 是△ADB 的外角,

所以 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle B+40^\circ$.

所以 $\angle ADE=\angle ADC-\angle CDE=\angle B+40^\circ-x$.

因为 $\angle AED$ 是△CDE 的外角,

所以 $\angle AED=\angle CDE+\angle C=x+\angle C$.

因为 $\angle ADE=\angle AED$,

所以 $\angle B+40^\circ-x=x+\angle C$.

因为 $\angle B=\angle C$,

所以 $40^\circ-x=x$.

解得 $x=20^\circ$,即 $\angle CDE=20^\circ$.

2.2 命题与证明

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B **3.** D **4.** A

5. 有两个锐角互余的三角形是直角三角形

6. 解:(1)如果两个数是负数,那么它们的积是正数. 条件:两个数是负数,结论:它们的积是正数.

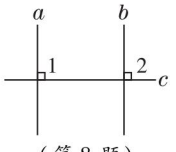
(2)如果过两个已知点作直线,那么能且只能作一条. 条件:过两个已知点作直线,结论:能且只能作一条.

(3)如果两个角是某一个角的补角,那么这两个角相等. 条件:两个角是某一个角的补角,结论:这两个角相等.

7. 解:(1)假命题. 反例:钝角的补角是锐角.(反例不唯一)

(2)假命题. 反例:互补的两个角可以都是直角.

8. 解:已知:如图,在直线 a,b,c 中,$a\perp c$,$b\perp c$.



(第 8 题)

求证:$a\parallel b$.

证明:∵ $a\perp c$(已知),

∴ $\angle1=90^\circ$(垂直的定义).

∵ $b\perp c$(已知),∴ $\angle2=90^\circ$(垂直的定义).

∴ $\angle1=\angle2$(等量代换).

∴ $a\parallel b$(同位角相等,两直线平行).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:AD 平分$\angle BAC$,理由如下:

$\because AD\perp BC, EG\perp BC$,

$\therefore AD\parallel EG$.

$\therefore \angle 2=\angle 3, \angle 1=\angle E$.

又$\because \angle E=\angle 3$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

即 AD 平分$\angle BAC$.

10. 解:(1)平行. 理由如下:

$\because \angle 1+\angle 2=180°, \angle 2+\angle CDB=180°$,

$\therefore \angle 1=\angle CDB$.

$\therefore AE\parallel FC$(同位角相等,两直线平行).

(2)平行. 理由如下:

由(1)知 $AE\parallel CF$,

$\therefore \angle C=\angle CBE$(两直线平行,内错角相等).

又$\because \angle A=\angle C$,

$\therefore \angle A=\angle CBE$.

$\therefore AD\parallel BC$(同位角相等,两直线平行).

(3)BC 平分$\angle DBE$. 理由如下:

$\because DA$ 平分$\angle BDF$,

$\therefore \angle FDA=\angle ADB$.

$\because AE\parallel CF, AD\parallel BC$,

$\therefore \angle FDA=\angle A=\angle CBE, \angle ADB=\angle CBD$.

$\therefore \angle CBE=\angle CBD$.

$\therefore BC$ 平分$\angle DBE$.

11. (1)证明:如图①,过点 P 作$FP\parallel AC$.

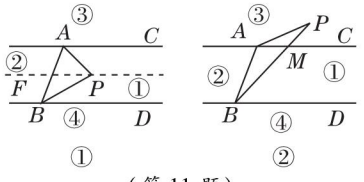
则$\angle PAC=\angle APF$.

$\because AC\parallel BD$,

$\therefore FP\parallel BD$.

$\therefore \angle FPB=\angle PBD$.

$\therefore \angle APB=\angle APF+\angle FPB=\angle PAC+\angle PBD$.



(第 11 题)

(2)解:不成立.

(3)解:(a)当动点 P 在射线 BA 的右侧时,结论是$\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

(b)当动点 P 在射线 BA 上时,结论是$\angle PBD=\angle PAC+\angle APB$ 或$\angle PAC=\angle PBD+\angle APB$ 或$\angle APB=0°, \angle PAC=\angle PBD$.(任写一个即可)

(c)当动点 P 在射线 BA 的左侧时,

结论是$\angle PAC=\angle APB+\angle PBD$.

选择(a)证明:

如图②,设 PB 交 AC 于 M.

$\because AC\parallel BD$,

$\therefore \angle PMC=\angle PBD$.

又$\because \angle APM+\angle PAM+\angle AMP=180°, \angle AMP+\angle PMC=180°$,

$\therefore \angle PMC=\angle PAM+\angle APM$.

$\therefore \angle PBD=\angle PAC+\angle APB$.

2.3 等腰三角形

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** C

4. C 点拨:由题易知$\triangle APQ$为等边三角形,$\angle QAC=\angle C=30°$. $\therefore \angle PAC=\angle PAQ+\angle QAC=90°$.

5. 9

6. 12° 点拨:设$\angle A$ 的度数是 x,根据“等边对等角”的性质和三角形外角的性质可得$\angle AP_7P_8=\angle AP_8P_7=7x$,

$\because \angle A+\angle AP_7P_8+\angle AP_8P_7=180°$,

$\therefore x+7x+7x=180°$.

$\therefore x=12°$.

7. 解:$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ACB=60°$.

$\therefore \angle ACD=120°$.

$\because CG=CD$,

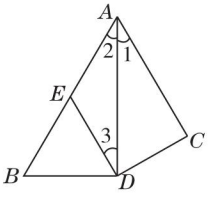
$\therefore \angle CDG=\angle CGD=30°$.

$\therefore \angle FDE=150°$.

$\because DF=DE$,

$\therefore \angle E=\angle DFE=15°$.

8. 证明:如图.



(第 8 题)

$\because DE\parallel AC$,$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because AD$ 平分$\angle BAC$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\because AD\perp BD$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ADB = 90°$,

$\therefore \angle 2 + \angle B = 180° - 90° = 90°$,

$\angle 3 + \angle BDE = 90°$, $\therefore \angle B = \angle BDE$,

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰三角形.

9. (1)**解:** $\because AB = AC$, D 是 BC 边上的中点,

$\therefore \angle ABC = \angle C = 36°$, $AD \perp BC$.

$\therefore \angle ADB = 90°$.

$\therefore \angle BAD = 180° - 90° - 36° = 54°$.

(2)**证明:** $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE = \frac{1}{2}\angle ABC$.

$\because EF /\!/ BC$,

$\therefore \angle FEB = \angle CBE$,

$\therefore \angle ABE = \angle FEB$,

$\therefore FB = FE$.

10. **解:** $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = BC = AC$, $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60°$,

$\therefore \angle 3 + \angle FCB = 60°$.

$\because \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 2 + \angle FCB = 60°$,

$\therefore \angle FED = 60°$.

同理 $\angle FDE = \angle DFE = 60°$,

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形.

11. **解:** (1)①20;10

②设 $\angle ABC = x$, $\angle ADE = y$,

$\because AB = AC$, $AD = AE$,

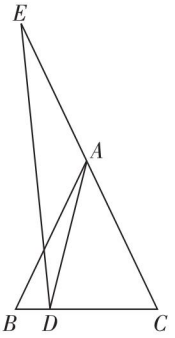
$\therefore \angle ACB = \angle ABC = x$, $\angle AED = \angle ADE = y$.

$\because \angle AED = \angle ACB + \angle CDE$, $\therefore y = x + \beta$.

$\because \angle ABC + \angle BAD = \angle ADE + \angle CDE$,

$\therefore x + \alpha = y + \beta$,

$\therefore \alpha = 2\beta$.



(第 11 题)

(2)存在. 若点 E 在 CA 的延长线上,点 D 在线段 BC 上,如图,设 $\angle ABC = x$, $\angle ADE = y$,

易知 $\angle ACB = x$, $\angle AED = y$.

$\because \angle ABC + \angle BAD = \angle ADC$, $\therefore x + \alpha = \beta - y$.

又$\because$ 在 $\triangle DEC$ 中, $x + y + \beta = 180°$,

$\therefore \alpha = 2\beta - 180°$. (所求关系式不唯一)

2.4 线段的垂直平分线

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:** $\because AC = AD$, $BC = BD$,

$\therefore A$, B 两点均在线段 CD 的垂直平分线上,根据两点确定一条直线,可知直线 AB 垂直平分 CD.

2. B **点拨:** $\because DE$ 是 AC 的垂直平分线,

$\therefore AD = CD$.

$\therefore \angle A = \angle ACD = 50°$,

$\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ACD = 100°$,

故选 B.

3. B **点拨:** $\because DE$ 是 AC 的垂直平分线,

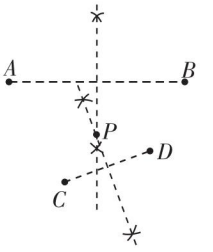
$\therefore AD = DC$.

$\therefore \triangle ABD$ 的周长等于 AB, BC 的长度之和.

4. D **5.** D **6.** C **7.** 87 **8.** 12 cm

9. **解:** 如图,点 P 为所求的位置.

点拨: 到 A, B 两点距离相等的点在线段 AB 的垂直平分线上,到 C, D 两点距离相等的点在线段 CD 的垂直平分线上,同时满足上述条件的点是两条线段垂直平分线的交点.



(第 9 题)

10. **解:** (1) $\because AB = AC$, $\angle A = 40°$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$.

$\because MN \perp AB$, $\therefore \angle MNB = 90°$.

$\therefore \angle NMB = 180° - \angle MNB - \angle B = 180° - 90° - 70° = 20°$.

(2)过程同(1)可求得 $\angle NMB = 35°$.

(3)规律: $\angle NMB = \frac{1}{2}\angle A$.

理由: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle B=\angle ACB=\dfrac{180^\circ-\angle A}{2}$.

$\because AB$ 的垂直平分线交 AB 于点 N,交 BC 的延长线于点 M,

$\therefore \angle MNB=90^\circ$.

$\therefore \angle NMB=180^\circ-\angle MNB-\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$.

2.5 全等三角形

【两年模拟兵法】

1. B

2. A **点拨:**由题意得 $AC=DF=25$ cm,

$\therefore BC=100-AC-AB=100-25-30=45$(cm).

3. A **4.** 三角形具有稳定性

5. 6 **点拨:**由折叠得 $BE=ED$,$BC'=DC$,$C'F=FC$,$\therefore$ $\triangle ABE$ 和 $\triangle BC'F$ 的周长之和等于长方形 $ABCD$ 的周长.

6. B **点拨:**$\because AD\perp CE$,$BE\perp CE$,

$\therefore \angle ADE=\angle ADC=\angle CEB=90^\circ$,

$\therefore \angle DAC+\angle DCA=90^\circ$.

$\because \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \angle ECB+\angle DCA=90^\circ$,

$\therefore \angle DAC=\angle ECB$.

$\because AC=CB$,

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$,

$\therefore AD=CE=3$,$CD=BE=1$,

$\therefore DE=CE-CD=3-1=2$.

7. **证明:**在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,$\begin{cases}AB=AD,\\AC=AC,\\CB=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$,

$\therefore \angle B=\angle D$.

8. **证明:**$\because \triangle PAB\cong\triangle AQC$,

$\therefore \angle BAP=\angle CQA$.

$\because CF\perp AB$,

$\therefore \angle AFC=90^\circ$.

$\therefore \angle CQA+\angle QAF=\angle AFC=90^\circ$.

$\therefore \angle BAP+\angle QAF=90^\circ$,

即 $\angle QAP=90^\circ$.

$\therefore AP\perp AQ$.

9. **证明:**$\because FB=CE$,

$\therefore BC=EF$.

$\because AB/\!/ED$,$AC/\!/FD$,

$\therefore \angle ABC=\angle DEF$,$\angle ACB=\angle DFE$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$\begin{cases}\angle ABC=\angle DEF,\\BC=EF,\\\angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$(ASA),

$\therefore AB=DE$.

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle DEO$ 中,

$\begin{cases}\angle AOB=\angle DOE,\\\angle ABC=\angle DEF,\\AB=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle DEO$(AAS),

$\therefore AO=DO$,$BO=EO$.

$\therefore AD$ 与 BE 互相平分.

10. (1) **证明:**在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOE$ 中,$\angle A=\angle B$,$\angle AOD=\angle BOE$,

易知 $\angle BEO=\angle 2$.

又$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 1=\angle BEO$,

$\therefore \angle AEC=\angle BED$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BED$ 中,

$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\AE=BE,\\\angle AEC=\angle BED,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BED$(ASA).

(2)**解:**$\because \triangle AEC\cong\triangle BED$,

$\therefore EC=ED$,$\angle C=\angle BDE$.

在 $\triangle EDC$ 中,$\because EC=ED$,$\angle 1=42^\circ$,

$\therefore \angle C=\angle EDC=69^\circ$,

$\therefore \angle BDE=69^\circ$.

11. **解:**由已知条件不能证明 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$. 选择添加条件①.

证明:$\because BF=CE$,

$\therefore BC=EF$.

又$\because \angle ABC=\angle DEF$,$AB=DE$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$(SAS).

点拨:添加条件③时,证明:

$\because AC/\!/DF$,

$\therefore \angle C=\angle F$.

$\because BF=CE$,

$\therefore BC=EF$.

又$\because \angle ABC=\angle DEF$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA).

添加条件②$AC = DF$,此时不能证明两三角形全等.

12. (1)**证明:**$\because \angle BGE = \angle ADE$, $\angle BGE = \angle CGF$,

$\therefore \angle ADE = \angle CGF$.

$\because AC \perp BD, BF \perp CD$,

$\therefore \angle CED = \angle BFD = 90°$.

$\therefore \angle ADE + \angle DAE = \angle CGF + \angle GCF = 90°$,

$\therefore \angle DAE = \angle GCF$.

$\therefore AD = CD$.

(2)**解:**设 $DE = a$,

则 $AE = 2DE = 2a, EG = DE = a$,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2$.

$\because BH$ 是 $\triangle ABE$ 的中线,

$\therefore AH = HE = a$.

$\because AD = CD, DE \perp AC$,

$\therefore CE = AE = 2a$,

则 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot (2a + 2a) \cdot a = 2a^2 = 2S_{\triangle ADE}$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BGE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AED = \angle BEG, \\ DE = GE, \\ \angle ADE = \angle BGE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BGE$(ASA),

$\therefore BE = AE = 2a$,

$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$,

$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} CE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$,

$S_{\triangle BHG} = \frac{1}{2} HG \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot (a + a) \cdot 2a = 2a^2$.

综上,面积等于 $\triangle ADE$ 面积的 2 倍的四个三角形有 $\triangle ACD$, $\triangle ABE$, $\triangle BCE$, $\triangle BHG$.

13. (1)**证明:**如图①,连接 AD,

$\because D$ 为 BC 的中点, $AB = AC$,

$\therefore AD \perp BC$, $\angle BAD = \angle CAD$.

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90°$.

$\because DE \perp DF$,

$\therefore \angle EDF = 90°$,

$\therefore \angle ADB = \angle EDF = 90°$,

$\therefore \angle BDE + \angle EDA = \angle EDA + \angle ADF$.

$\therefore \angle BDE = \angle ADF$.

$\because \angle BAC = 90°$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 45°$.

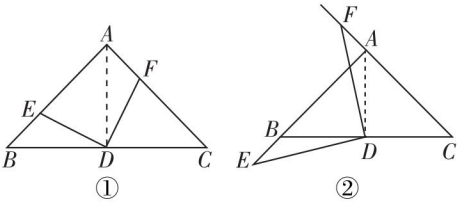
又$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle B = \angle BAD = \angle DAC = 45°$.

$\therefore BD = AD$.

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF$(ASA).

$\therefore BE = AF$.



(第 13 题)

(2)**解:**$BE = AF$. 如图②,连接 AD,

由(1)知 $\angle BDA = 90°$.

又$\because ED \perp DF$,

$\therefore \angle BDA = \angle EDF = 90°$,

$\therefore \angle BDE + \angle BDF = \angle BDF + \angle ADF$.

$\therefore \angle BDE = \angle ADF$.

由(1)知 $\angle ABC = \angle DAC = 45°$,

$\therefore \angle EBD = \angle FAD = 180° - 45° = 135°$.

由(1)知 $BD = AD$,

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF$(ASA).

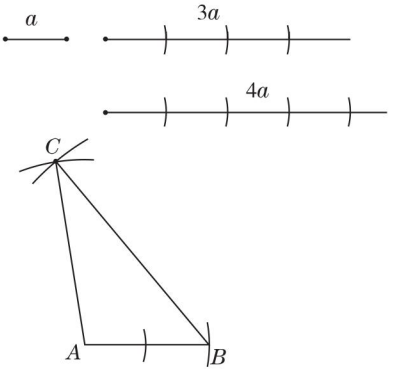
$\therefore BE = AF$.

2.6 用尺规作三角形

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** C **4.** C

5. **解:**如图.



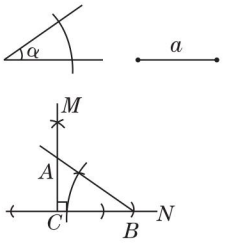
(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解: 作$\angle MCN=90°$;

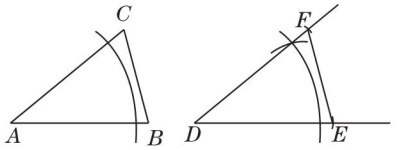
在CN上截取$BC=a$;

以B为顶点,BC为一边作$\angle ABC=\angle\alpha$,交CM于点A,则$\triangle ABC$为所求作的三角形. 如图.



(第6题)

7. 解: 如图,$\triangle DEF$即为所求.



(第7题)

8. 解: (1)如图所示.

(2)$\because AB=AC$,$\angle ABC=72°$,

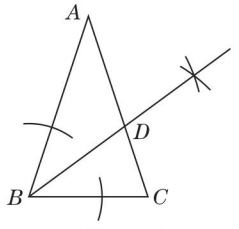
$\therefore \angle ACB=\angle ABC=72°$,

$\therefore \angle BAC=36°$.

$\because BD$平分$\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 72°=36°$.

$\therefore \angle BDC=\angle ABD+\angle BAC=36°+36°=72°$.



(第8题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 8 cm或2 cm

2. 解: (1)$\because a,b,c$是三角形的三边长,

$\therefore a-b-c<0$,$b-c-a<0$,$c-a-b<0$.

$\therefore$原式$=-a+b+c-b+c+a-c+a+b=a+b+c$.

(2)当$a=5$,$b=4$,$c=3$时,原式$=5+4+3=12$.

3. 解: $\because DF\parallel EC$,

$\therefore \angle BCE=\angle D=42°$.

$\because CE$是$\angle ACB$的平分线,

$\therefore \angle ACB=2\angle BCE=84°$.

$\because \angle A=46°$,$\therefore \angle B=180°-84°-46°=50°$.

4. 解: $\because DE$是CA边上的高,

$\therefore \angle DEA=\angle DEC=90°$.

$\because \angle A=20°$,

$\therefore \angle EDA=180°-90°-20°=70°$.

$\because \angle EDA=\angle CDB$,

$\therefore \angle CDE=180°-70°\times 2=40°$.

在Rt$\triangle CDE$中,$\angle DCE=180°-90°-40°=50°$.

$\because CD$是$\angle BCA$的平分线,

$\therefore \angle BCA=2\angle DCE=2\times 50°=100°$.

在$\triangle ABC$中,$\angle B=180°-\angle BCA-\angle A=180°-100°-20°=60°$.

5. (1)**证明:** $\because AB=AC$,

$\therefore \angle EBC=\angle DCB$.

$\because BD$,CE是$\triangle ABC$的两条高,

$\therefore \angle BEC=\angle CDB=90°$.

又$\because BC=CB$,

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle CDB$(AAS).

$\therefore \angle DBC=\angle ECB$,

$\therefore OB=OC$.

(2)**解:** $\because \angle ABC=50°$,$AB=AC$,

$\therefore \angle A=180°-2\times 50°=80°$.

$\because BD$,CE是高,

$\therefore \angle AEO=\angle ADO=90°$.

$\therefore \angle DOE+\angle A=180°$.

$\therefore \angle BOC=\angle DOE=180°-80°=100°$.

6. (1)**证明:** $\because \triangle ABC$和$\triangle CDE$都是等边三角形,

$\therefore BC=AC$,$CE=CD$,$\angle ACB=\angle ECD=60°$.

$\therefore \angle BCE=\angle ACD$. $\therefore \triangle BCE\cong\triangle ACD$.

(2)**证明:** $\because \triangle BCE\cong\triangle ACD$,

$\therefore \angle FBC=\angle HAC$.

$\because \angle ACH=180°-\angle ACB-\angle ECD=60°$,

$\therefore \angle ACB=\angle ACH=60°$.

又$\because BC=AC$,

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle ACH$. $\therefore CF=CH$.

(3)**解:** $\triangle CFH$是等边三角形.

理由:$\because CF=CH$,$\angle FCH=60°$,

$\therefore \triangle CFH$是等边三角形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

7. 证明：∵ $OA=OB$，$OE=OF$，

∴ $OA-OE=OB-OF$，即 $AE=BF$.

在△ACE 和△BDF 中，

$$\begin{cases}\angle ACE=\angle BDF,\\ \angle A=\angle B,\\ AE=BF,\end{cases}$$

∴ △ACE≌△BDF(AAS).

8. 证明：∵ $\angle BAC=\angle DAM$，

即 $\angle BAD+\angle DAC=\angle DAC+\angle NAM$，

∴ $\angle BAD=\angle NAM$.

在△BAD 和△NAM 中，

$$\begin{cases}AB=AN,\\ \angle BAD=\angle NAM,\\ AD=AM,\end{cases}$$

∴ △BAD≌△NAM(SAS).

∴ $\angle B=\angle ANM$.

9. 证明：∵ $FC/\!/AB$，

∴ $\angle ADE=\angle CFE$.

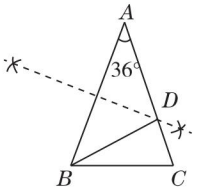
在△ADE 和△CFE 中，

$$\begin{cases}\angle ADE=\angle CFE,\\ DE=FE,\\ \angle AED=\angle CEF,\end{cases}$$

∴ △ADE≌△CFE(ASA).

∴ $AE=CE$.

10. (1)解：如图，点 D 即为所求.



(第 10 题)

(2)证明：∵ $AB=AC$，

∴ $\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-36°)=72°$.

∵ $DA=DB$，

∴ $\angle ABD=\angle A=36°$，

∴ $\angle BDC=\angle A+\angle ABD=36°+36°=72°$，

∴ $\angle BDC=\angle C$.

∴ △BCD 是等腰三角形.

11. (1)证明：∵ $BD\perp AE$，$CE\perp AE$，

∴ $\angle BDE=\angle BDA=\angle AEC=90°$，

∴ $\angle ABD+\angle BAE=90°$.

∵ $\angle CAE+\angle BAE=\angle BAC=90°$，

∴ $\angle ABD=\angle CAE$.

在△ABD 和△CAE 中，

$$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$$

∴ △ABD≌△CAE(AAS).

∴ $BD=AE$，$AD=CE$.

∵ $AE=AD+DE$，∴ $BD=DE+CE$.

(2)解：$BD=DE-CE$.

证明：∵ $BD\perp AE$，$CE\perp AE$，

∴ $\angle BDA=\angle AEC=90°$.

∴ $\angle ABD+\angle DAB=180°-90°=90°$.

∵ $\angle BAC=90°$，

∴ $\angle ABD+\angle DAB=\angle DAB+\angle CAE=90°$，

∴ $\angle ABD=\angle CAE$，

在△ABD 和△CAE 中，

$$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$$

∴ △ABD≌△CAE(AAS).

∴ $BD=AE$，$AD=CE$，

∴ $DE=AD+AE=BD+CE$，

∴ $BD=DE-CE$.

12. 解：(1)$AE=DB$，$AE\perp DB$.

理由：如图①，延长 DB 交 AE 于点 M.

由题意可知，$CA=CB$，$CE=CD$，

$\angle ACE=\angle BCD=90°$，

∴ △ACE≌△BCD.

∴ $AE=DB$，$\angle AEC=\angle BDC$.

又∵ $\angle AEC+\angle EAC=\angle BCD=90°$，

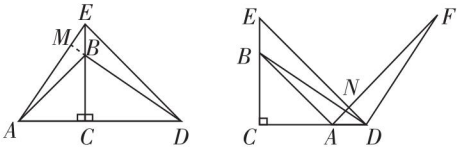
∴ $\angle BDC+\angle EAC=90°$，

∴ 在△AMD 中，$\angle AMD=180°-90°=90°$，

∴ $AE\perp DB$.

(2)$DE=AF$，$DE\perp AF$.

理由：如图②，设 ED 与 AF 相交于点 N，由题意可知，$BE=AD$，$\angle C=\angle BDF=90°$.



(第 12 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $\angle EBD=\angle C+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

$\angle ADF=\angle BDF+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

∴ $\angle EBD=\angle ADF$,

又∵ $DB=FD$,

∴ $\triangle EBD\cong\triangle ADF$.

∴ $DE=AF$, $\angle E=\angle FAD$.

易知$\angle E=45°$,

∴ $\angle FAD=45°$.

易知$\angle EDC=45°$,

∴ $\angle AND=180°-45°-45°=90°$,

∴ $DE\perp AF$.

【第2章测试卷】

一、**1**. C **2**. B **3**. A **4**. C **5**. C **6**. B

7. B **8**. C **9**. A **10**. C

二、**11**. 如果 a,b 互为相反数,那么 $a+b=0$

12. 32 **13**. 36 **14**. 4 cm 或 9.5 cm

15. 70° **点拨**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD/\!/BC$,

∴ $\angle BAD=180°-\angle B=130°$,

$\angle ACF=\angle CAD=30°$.

由作图过程可知 EF 是 AC 的垂直平分线,

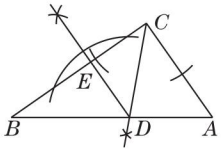
∴ $AF=CF$,

∴ $\angle CAF=\angle ACF=30°$,

∴ $\angle BAF=\angle BAD-\angle CAD-\angle CAF=70°$.

16. 30°

三、**17**. **解**:(1)①②如图.



(第17题)

(2)过点 D 作 $DF\perp AC$,垂足为 F,

则$\angle CFD=\angle CED=90°$,

∵ CD 平分$\angle ACB$,

∴ $\angle DCF=\angle DCE$.

又∵ $CD=CD$,

∴ $\triangle CDF\cong\triangle CDE$,∴ $DF=DE$.

∴ $\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}AC\times DF+\frac{1}{2}BC\times DE=\frac{1}{2}(AC+BC)\times DE$,

∴ $2\times3=(2+3)\times DE$,解得 $DE=\frac{6}{5}$.

18. **证明**:∵ $\angle BAE=\angle DAC$,

∴ $\angle BAC=\angle DAE$.

又∵ $AB=AD$,$AC=AE$,

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADE$(SAS),

∴ $\angle E=\angle C$.

19. **证明**:(1)∵ $AB=AC$,

∴ $\angle ECB=\angle DBC$.

在$\triangle DBC$与$\triangle ECB$中,$BD=CE$,

$\angle DBC=\angle ECB$,$BC=CB$,

∴ $\triangle DBC\cong\triangle ECB$(SAS).

(2)由(1)知$\triangle DBC\cong\triangle ECB$,

∴ $\angle DCB=\angle EBC$,∴ $OB=OC$.

20. **解**:在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中,

$$\begin{cases}CA=CD,\\ \angle ACB=\angle DCE,\\ CB=CE,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEC$,∴ $AB=DE$.

即量出 DE 的长就是 A,B 的距离.

21. (1)**证明**:∵ 点 P 在 AB 的垂直平分线上,

∴ $PA=PB$,∴ $\angle PAB=\angle B$.

∵ $\angle APC=\angle PAB+\angle B$,

∴ $\angle APC=2\angle B$.

(2)**解**:根据题意,得 $BQ=BA$,

∴ $\angle BAQ=\angle BQA$.

设$\angle B=x$,则$\angle AQC=\angle B+\angle BAQ=3x$,

∴ $\angle BAQ=\angle BQA=2x$,

在$\triangle ABQ$中,$x+2x+2x=180°$,解得 $x=36°$,

∴ $\angle B=36°$.

22. (1)**解**:$\triangle PCE$ 是等边三角形. 理由如下:

∵ $\triangle ABC$,$\triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

∴ $\angle DEC=\angle ACE=60°$.

∴ $\angle EPC=180°-\angle DEC-\angle ACE=180°-60°-60°=60°$.

∴ $\triangle PCE$ 是等边三角形.

(2)**证明**:∵ $\triangle ACB$,$\triangle DEF$ 是全等的等边三角形,

∴ $AC=DE$,$\angle ACB=\angle DEF=60°$,$BC=EF$.

∴ $\angle ACF=\angle DEB=120°$,$FC=BE$.

在$\triangle AFC$和$\triangle DBE$中,$\begin{cases}AC=DE,\\ \angle ACF=\angle DEB,\\ FC=BE,\end{cases}$

∴ $\triangle AFC\cong\triangle DBE$.∴ $AF=BD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23. (1)**证明:**∵ $AB=AC$,

∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

又∵ $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O,

∴ $\angle ABC=2\angle OBC$, $\angle ACB=2\angle OCB$,

∴ $\angle OBC=\angle OCB$. ∴ $OB=OC$.

∴ $\triangle BOC$ 是等腰三角形.

(2)**解:**$BM=CN$. 理由如下:

∵ $MN/\!/BC$,

∴ $\angle AMN=\angle ABC$, $\angle ANM=\angle ACB$.

又∵ $\angle ABC=\angle ACB$,

∴ $\angle AMN=\angle ANM$. ∴ $AM=AN$.

又 ∵ $AB=AC$,

∴ $AB-AM=AC-AN$, 即 $BM=CN$.

(3)**证明:**∵ $AB=AC$, $BO=CO$, $AO=AO$,

∴ $\triangle ABO\cong\triangle ACO$.

∴ $\angle BAO=\angle CAO$.

又∵ $AM=AN$, ∴ $AO\perp MN$.

第3章 实 数

3.1 平方根

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B **3.** A

4. C **点拨:**$2.6^2=6.76$, $2.7^2=7.29$, $2.8^2=7.84$, $2.9^2=8.41$, $3^2=9$, 因为 $7.84<8<8.41$, 所以 $2.8<\sqrt{8}<2.9$, 所以表示 $\sqrt{8}$ 的点落在段③.

5. B **6.** A

7. 6; -7; ±5 **8.** $\frac{49}{4}$ **9.** $\underbrace{555\cdots5}_{2\,021个}$

10. **解:**(1)因为 $\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, $\left(\pm\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,

所以 $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 的平方根是 $\pm\frac{1}{3}$,

即 $\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\frac{1}{3}$.

(2)因为 $0^2=0$, 所以 0 的平方根是 0.

(3)因为 $(\pm2)^2=4$, 所以 4 的平方根是 ±2.

11. **解:**(1)因为 $9x^2-25=0$, 所以 $x^2=\frac{25}{9}$.

所以 $x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$.

(2)因为 $4(2x-1)^2=36$,

所以 $(2x-1)^2=9$.

所以 $2x-1=\pm3$. 所以 $x=2$ 或 $x=-1$.

(3)因为 $(x+1)^2-81=0$,

所以 $(x+1)^2=81$.

所以 $x+1=\pm9$, 所以 $x=8$ 或 $x=-10$.

(4)因为 $4(2x+3)^2=(-3)^2$,

所以 $(2x+3)^2=\frac{9}{4}$.

所以 $2x+3=\pm\frac{3}{2}$.

所以 $x=-\frac{3}{4}$ 或 $x=-\frac{9}{4}$.

12. **解:**依题意, 得 $2a-1=9$ 且 $3a+b-1=16$,

所以 $a=5$, $b=2$.

所以 $a+2b=5+4=9$.

所以 $a+2b$ 的平方根为 ±3,

即 $\pm\sqrt{a+2b}=\pm3$.

13. **解:**因为 $2<\sqrt{7}<3$,

所以 $\sqrt{7}$ 的整数部分是 2, 小数部分是 $\sqrt{7}-2$.

所以 $\sqrt{7}+7$ 的小数部分是 $\sqrt{7}-2$, 即 $a=\sqrt{7}-2$.

因为 $2<\sqrt{7}<3$, 所以 $4<7-\sqrt{7}<5$,

所以 $7-\sqrt{7}$ 的整数部分是 4,

所以 $7-\sqrt{7}$ 的小数部分是 $7-\sqrt{7}-4=3-\sqrt{7}$,

即 $b=3-\sqrt{7}$.

所以 $a+b=(\sqrt{7}-2)+(3-\sqrt{7})=1$.

点拨:先估算 $\sqrt{7}$ 的整数部分, 根据它的整数部分, 算出它的小数部分, 再根据它参与的算式确定算式结果的整数部分和小数部分.

14. **解:**由题意知, $a^2-1\geqslant0$ 且 $1-a^2\geqslant0$, ∴ $a^2=1$.

又∵ $a>0$, ∴ $a=1$, ∴ $b=4$.

∴ $a+b=1+4=5$.

3.2 立方根

【两年模拟兵法】

1. A

2. D **点拨:**对于 a^2, 无论 a 为何值时, 都有 $a^2\geqslant0$, 所以 $-a^2\leqslant0$, 当 $-a^2=0$ 时, $-a^2$ 的平方根是 0, 所以 A 错误; 0 有平方根, 但它的平方根只有 0, 所以 B 错误; 由立方根的性质可知 C 错误; 由立方根的概念可知 D 正确. 故选 D.

3. B **点拨:**∵ $3^3=27$, $4^3=64$,

∴ $3<\sqrt[3]{58}<4$. 故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. D **点拨:** $\sqrt[3]{64}=4$,4 的算术平方根为$\sqrt{4}=2$.

5. -4 **点拨:**因为$\sqrt{x}=8$,所以 $x=64$,所以 $\sqrt[3]{-x}=\sqrt[3]{-64}=-4$.

6. $-68\ 800$ **点拨:**由题意可知,$-x$ 的立方根是68.8的立方根的10倍,因此$-x$是68.8的1 000倍.

7. $\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$ **点拨:**因为$\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$,$\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}=2$,所以$\sqrt[3]{7}<2<\sqrt{5}$.

8. **解:**(1)因为$10^3=1\ 000$,

所以1 000的立方根是10.

(2)因为$(-2)^3=-8$,

所以-8的立方根是-2.

(3)因为$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$,

所以$\frac{27}{125}$的立方根是$\frac{3}{5}$.

(4)因为$\left(-\frac{3}{5}\right)^3=-\frac{27}{125}$,

所以$-\frac{27}{125}$的立方根是$-\frac{3}{5}$.

(5)$\sqrt{64}=8$,因为$2^3=8$,

所以$\sqrt{64}$的立方根是2.

(6)因为$0.1^3=0.001$,

所以0.001的立方根是0.1.

(7)因为$(-0.3)^3=-0.027$,

所以-0.027的立方根是-0.3.

(8)因为$(-1)^3=-1$,

所以-1的立方根是-1.

(9)因为$0^3=0$,

所以0的立方根是0.

9. **解:**(1)$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2}$.

(2)方法一:$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{3}\right)^3}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

方法二:$-\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}$.

(3)$\sqrt[3]{1-\frac{169}{512}}=\sqrt[3]{\frac{343}{512}}=\sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^3}=\frac{7}{8}$.

(4)$\sqrt[3]{-(m+1)^3}=-\sqrt[3]{(m+1)^3}=-(m+1)=-m-1$.

10. **解:**(1)因为$(x+2)^3+1=0$,所以$(x+2)^3=-1$,所以$x+2=-1$,所以$x=-3$.

(2)因为$\frac{1}{4}(2x+3)^3=54$,所以$(2x+3)^3=216$,所以$2x+3=6$,所以$2x=3$,所以$x=\frac{3}{2}$.

11. **解:**由题意,得$4a-6=2$,$3a+2b-9=3$,

$\therefore a=2$,$b=3$.

$\therefore A=\sqrt{4}=2$,$B=\sqrt[3]{-1}=-1$.

$\therefore A+B$的立方根即$2-1=1$的立方根,为1.

12. **解:**$\because \sqrt[3]{x+1}-1=x$,

$\therefore \sqrt[3]{x+1}=x+1$.

$\therefore x+1=0$或-1或1.

$\therefore x=-1$或-2或0.

13. **解:**设正方体的棱长为x m,

根据题意,得$x^3=1.728$,

$\therefore x=1.2$.

$\therefore$ 正方体的表面积是$6\times1.2^2=6\times1.44=8.64(\text{m}^2)$.

故至少需要8.64 m^2的铁皮.

3.3 实 数

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** B

4. C **点拨:**解决本题的关键是估算出无理数的大小.

5. C

6. 3 **点拨:**由数轴可知,$2<a<5$,所以$a-2>0$,$a-5<0$,所以$\sqrt{(a-5)^2}+|a-2|=5-a+a-2=3$.

7. $-6<0<\sqrt{5}<\pi$

8. $4-\sqrt{2}$ **点拨:**设数轴上的原点为O,因为点A,C关于点B对称,所以$BC=AB=2-\sqrt{2}$,所以$OC=OB+BC=2+2-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$,所以点$C$所对应的实数为$4-\sqrt{2}$.

9. **解:**有理数:$\{-7,0.32,\frac{1}{3},46,0,\sqrt[3]{216},0.\dot{8}\dot{7},\sqrt{16},\cdots\}$;

无理数:$\{-\sqrt{8},\sqrt{\frac{1}{2}},-\frac{\sqrt{2}}{2},5\pi,\cdots\}$;

负实数:$\{-7,-\sqrt{8},-\frac{\sqrt{2}}{2},\cdots\}$.

10. **解:**(1)原式$=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)原式 $=1-4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-4+(-2)=-5$.

11. 解:(1)因为 $-5<-\sqrt{19}<-4$,

$3<\sqrt{10}<4$,

所以大于 $-\sqrt{19}$ 且小于 $\sqrt{10}$ 的所有整数为 -4, ±3, ±2, ±1, 0.

(2)因为 $4<\sqrt{18}<5$,

所以绝对值小于 $\sqrt{18}$ 的所有整数为 ±4, ±3, ±2, ±1, 0.

点拨:此题主要考查了无理数的估算.

12. 解:(1)因为 $2<\sqrt{5}<3$,所以 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2,所以 $\sqrt{5}+2$ 的整数部分是 $2+2=4$,小数部分是 $\sqrt{5}+2-4$,即 $\sqrt{5}-2$.

(2)因为 $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1,小数部分是 $\sqrt{3}-1$,所以 $10+\sqrt{3}$ 的整数部分是 $10+1=11$,小数部分是 $\sqrt{3}-1$,即 $x=11$, $y=\sqrt{3}-1$. 所以 $x-y$ 的相反数为 $y-x=\sqrt{3}-12$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. A **2.** B

3. $\pm\sqrt{19}$ 点拨:∵ $\sqrt{x+2}=3$,

∴ $x+2=9$, $x=7$.

∴ $\pm\sqrt{2x+5}=\pm\sqrt{19}$.

4. 解:由题意,得 $a-b=2$, $a-2b+2=2$.

∴ $a=4$, $b=2$.

∴ $M=\sqrt{a+b+3}=\sqrt{4+2+3}=\sqrt{9}=3$,

$N=\sqrt{a+6b}=\sqrt{4+6\times2}=\sqrt{16}=4$.

∴ $M\cdot N=3\times4=12$.

5. A **6.** C

7. 解:(1)根据题意,得 $(2a-4)+(a-8)=0$.

解得 $a=4$.

∴ 这个非负数是 $(2a-4)^2=(2\times4-4)^2=16$.

(2)∵ $2x-1$ 的平方根是 ±6, $2x+y-1$ 的算术平方根是 5,∴ $\begin{cases}2x-1=36,\\2x+y-1=25,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{37}{2},\\y=-11,\end{cases}$

∴ $2x-3y+11=81$,

∴ $2x-3y+11$ 的立方根是 $\sqrt[3]{81}$.

8. 解:(1)原式 $=0.5+3+7=10.5$.

(2)原式 $=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+2=4-\sqrt{2}$.

(3)原式 $=2-\sqrt{3}+(-2)+2-2=-\sqrt{3}$.

9. 解:(1)因为 $25(x-1)^2=49$,

所以 $(x-1)^2=\frac{49}{25}$.

所以 $x-1=\pm\frac{7}{5}$.

所以 $x=\frac{12}{5}$ 或 $x=-\frac{2}{5}$.

(2)因为 $64(x-2)^3-1=0$,

所以 $(x-2)^3=\frac{1}{64}$,

所以 $x-2=\frac{1}{4}$. 所以 $x=\frac{9}{4}$.

10. 7. 16

11. $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$ (n 为大于或等于 2 的自然数)

12. 解:∵ $15^2<250<16^2$,

∴ $15<\sqrt{250}<16$.

∴ $\sqrt{250}$ 的整数部分是 15,即 $a=15$.

∵ $b-1=\sqrt{400}=20$,∴ $b=21$.

∴ $\sqrt{a+b}=\sqrt{15+21}=\sqrt{36}=6$.

【第 3 章测试卷】

一、**1.** C **2.** B **3.** D **4.** D **5.** B **6.** B **7.** C **8.** C **9.** D **10.** D

二、**11.** $\sqrt{2}$ 点拨:答案不唯一.

12. $2-\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$ **13.** $<$

14. 4 **15.** -1; 49 **16.** $\pi-1$

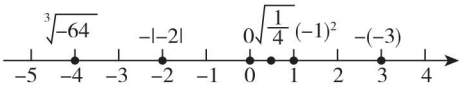
三、**17.** 解:(1)原式 $=2+9-2=9$.

(2)原式 $=(1+3-5)\times\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

(3)原式 $=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{6}}-(\sqrt{6})^2=1-6=-5$.

(4)原式 $=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$.

18. 解:如图.



(第 18 题)

$\sqrt[3]{-64}<-|-2|<0<\sqrt{\frac{1}{4}}<(-1)^2<-(-3)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. 解:依题意有$\begin{cases}a-2b+3=2,\\2a-b-1=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=2,\end{cases}$

$\therefore A=\sqrt{3+3\times2}=\sqrt{9}=3,B=\sqrt[3]{1-3^2}=\sqrt[3]{-8}=-2,\therefore A-B=3+2=5.$

故$A-B$的平方根是$\pm\sqrt{5}$.

20. 解:(1)因为$4x^2-9=0$,

所以$4x^2=9$,

所以$x^2=\frac{9}{4}$,

所以$x=\pm\frac{3}{2}$.

(2)因为$8(x-1)^3=-\frac{125}{8}$,

所以$(x-1)^3=-\frac{125}{64}$,

所以$x-1=-\frac{5}{4}$,

所以$x=-\frac{1}{4}$.

21. 解:$\because x^2+2y+\sqrt{2}y=17-4\sqrt{2}$,

$\therefore (x^2+2y-17)+(4+y)\sqrt{2}=0.$

又$\because x,y$都是有理数,

$\therefore x^2+2y-17$和$y+4$都是有理数.

$\because \sqrt{2}$是无理数,

$\therefore y+4=0,x^2+2y-17=0$,即$y=-4$.

当$y=-4$时,$x=\pm5$.

故$x+y=1$或$x+y=-9$.

22. 解:设截得的每个小正方体的棱长为x cm.

依题意,得$1\ 000-8x^3=488$.

$\therefore 8x^3=512.\therefore x=4.$

答:截得的每个小正方体的棱长是4 cm.

23. 解:根据题意,得$a=3,b=\sqrt{10}-3$,

$\therefore (-a)^3+(b+3)^2$

$=(-3)^3+(\sqrt{10}-3+3)^2$

$=-27+10$

$=-17.$

24. 解:(1)$\sqrt{11-2}=3$.

(2)$\sqrt{1\ 111-22}=33$.

(3)$\sqrt{111\ 111-222}=333$.

(4)$\sqrt{11\ 111\ 111-2\ 222}=3\ 333$.

规律为$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}1}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}}=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}3}$($n$为正整数).

$\underbrace{33\cdots3}_{1\,010\text{个}}$

第4章 一元一次不等式(组)

4.1 不等式

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** A **4.** D **5.** D

6. (1)$2m\geqslant\frac{1}{3}n$

(2)$\frac{1}{5}x+y\geqslant0$

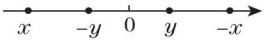
(3)$\frac{1}{3}(m+n)^2\geqslant16$

(4)$m^2+n^2\neq0$

7. $\frac{3m+9}{5}\geqslant0$

8. $10x-5(10-1-x)\geqslant60$

9. $x<-y<y<-x$ **点拨:**此题可运用数形结合思想.根据题目中的条件把$x,-x,y,-y$表示在数轴上,如图,大小关系一目了然.



(第9题)

10. 解:(1)$\frac{1}{2}a+3>10.$

(2)$3x-1\leqslant3.$

(3)$\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}n\geqslant0.$

(4)$27x-\frac{1}{4}x\neq0.$

11. 解:(1)>;=;=

(2)当$ab<0$时,$|a|+|b|>|a+b|$;

当$ab\geqslant0$时,$|a|+|b|=|a+b|$.

(3)$x\geqslant0.$

12. 解:由题意易知,小红家该月的用水量超过了10 m^3.设小红家这个月的用水量为x m^3,则$1.6\times10+3(x-10)\geqslant25$.

点拨:因为水费不少于25元,$25>10\times1.6$,所以小红家该月的用水量超过了10 m^3.因此水费要分两段计算,即10 m^3按1.6元/m^3计算,其余的按3元/m^3计算.

13. 解:答案不唯一,以下不等式都成立,写出2个即可:$x<20,20-x<20,2x+2.4(20-x)\geqslant42,600\times2x+800\times2.4(20-x)\geqslant31\ 500.$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4.2 不等式的基本性质

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** C

4. (1) > (2) > (3) > (4) <

5. (1) > (2) > (3) < (4) < (5) > (6) <

6. $y<a<b<x$ **点拨:** $\because x+y=a+b$,

$\therefore y=a+b-x, x=a+b-y$,

把 $y=a+b-x$ 代入 $y-x<a-b$,得

$a+b-x-x<a-b$,

$2b<2x, \therefore b<x$①,

把 $x=a+b-y$ 代入 $y-x<a-b$,得

$y-(a+b-y)<a-b, 2y<2a, \therefore y<a$②.

又 $\because b>a$③,

$\therefore$ 由①②③得 $y<a<b<x$.

7. 解: (1) $x>4$.

(2) $x<\frac{3}{2}$.

(3) $x<1$.

(4) $x>2$.

8. 解: ① + ②,得 $4x+4y=4+a$,

所以 $x+y=1+\frac{a}{4}$.

因为 $x+y<2$,

所以 $1+\frac{a}{4}<2$.

两边同时减去 1,得 $\frac{a}{4}<1$,

两边同时乘 4,得 $a<4$.

所以 a 的取值范围为 $a<4$.

9. 解: 设这人要跑 x min,则他要走 $(23-x)$ min.

根据题意,得 $240x+90(23-x)\geqslant 3\,420$,

整理,得 $240x+2\,070-90x\geqslant 3\,420$,

两边同时减去 2 070,得 $240x-90x\geqslant 1\,350$,

所以 $150x\geqslant 1\,350$,两边同时除以 150,得 $x\geqslant 9$.

答:这人至少要跑 9 min.

4.3 一元一次不等式的解法

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D

3. $x<-3$ **点拨:** 先由 x 的次数是 1 求出 m 的值,然后将 m 的值代入不等式,即可求出不等式的解集.

4. $x\geqslant\frac{10}{9}$ **5.** $m<4$ **6.** $x<8$

7. 解: 错误步骤的序号是①②⑤. 正确的解答过程:

去分母,得 $3(1+x)-2(2x+1)\leqslant 6$.

去括号,得 $3+3x-4x-2\leqslant 6$.

移项,得 $3x-4x\leqslant 6-3+2$.

合并同类项,得 $-x\leqslant 5$.

两边都除以 -1,得 $x\geqslant -5$.

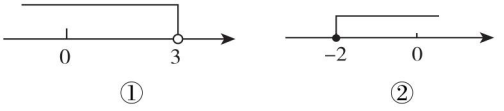
8. 解: (1) 去括号,得 $2x-2-3<1$.

移项,得 $2x<1+3+2$.

合并同类项,得 $2x<6$.

系数化为 1,得 $x<3$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图①所示.



① ②

(第 8 题)

(2) 去分母,得 $2(2x-1)-(9x+2)\leqslant 6$.

去括号,得 $4x-2-9x-2\leqslant 6$.

移项,得 $4x-9x\leqslant 6+2+2$.

合并同类项,得 $-5x\leqslant 10$.

系数化为 1,得 $x\geqslant -2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图②所示.

9. 解: $2(x+1)-5<3(x+1)+4$,

去括号,得 $2x+2-5<3x+3+4$.

移项,得 $2x-3x<3+4+5-2$.

合并同类项,得 $-x<10$.

系数化为 1,得 $x>-10$.

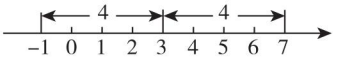
所以该不等式的最小整数解为 $x=-9$.

把 $x=-9$ 代入 $\frac{1}{3}x-mx=5$,得 $\frac{1}{3}\times(-9)-m\cdot(-9)=5$,解得 $m=\frac{8}{9}$.

所以 $m^2-2m-11=\left(\frac{8}{9}\right)^2-2\times\frac{8}{9}-11=\frac{64}{81}-\frac{16}{9}-11=-\frac{971}{81}$.

点拨: 此题主要考查了一元一次不等式的解法和一元一次方程的解法,根据不等式的解集求出其最小整数解,再将最小整数解代入方程中求出 m 的值,进而求出 $m^2-2m-11$ 的值.

10. 解: 如图.



(第 10 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$|x-3|=4$ 的解为 $x=-1$ 或 $x=7$,

所以 $|x-3|>4$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>7$.

点拨:解本题的关键是要理解绝对值的几何意义,本题巧在将含绝对值的不等式转化为含绝对值的方程,以方程的解为界点,得出不等式的解集. 一般情况下含绝对值的不等式的解集包含的范围是由不等号决定的,不等号为“>”时,解集范围为以界点向两边取,不等号为“<”时,解集范围为以界点向中间取.

4.4 一元一次不等式的应用

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**:购买方便面的金额为(5×3)元,购买火腿肠的金额为$4x$元,根据总购物款不超过36元建立不等式.

2. C **3**. B

4. **解**:设小明买x支钢笔,则小明买$(30-x)$本笔记本. 根据题意,得$5x+2(30-x)\leqslant100$.

解得$x\leqslant\frac{40}{3}$.

$\therefore$ x的最大整数值是13.

答:小明最多能买13支钢笔.

点拨:(1)审题是解题的基础,找到题中的不等关系是解题的关键点也是难点,要抓住题中的关键词,如“最多”“小于”“不小于”“至少”等. (2)对于求得的不等式的解集,要符合实际问题的意义,最后作答时要根据实际意义进行取舍.

5. **解**:设这个班要胜x场,则负$(28-x)$场.

由题意,得$3x+(28-x)\geqslant43$,解得$x\geqslant7.5$.

因为场次x为正整数,所以x的最小值为8.

答:这个班至少要胜8场.

6. **解**:(1)设A款毕业纪念册的销售单价为x元,B款毕业纪念册的销售单价为y元,

根据题意可得$\begin{cases}15x+10y=230,\\20x+10y=280,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\y=8.\end{cases}$

答:A款毕业纪念册的销售单价为10元,B款毕业纪念册的销售单价为8元.

(2)设能购买a本A款毕业纪念册,则购买B款毕业纪念册$(60-a)$本,

根据题意可得$10a+8(60-a)\leqslant529$,

解得$a\leqslant24.5$.

答:最多能购买24本A款毕业纪念册.

7. **解**:(1)设该社区种植甲种花卉1 m^2需x元,种植乙种花卉1 m^2需y元,

依题意,得$\begin{cases}2x+3y=430,\\x+2y=260,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=80,\\y=90.\end{cases}$

答:该社区种植甲种花卉1 m^2需80元,种植乙种花卉1 m^2需90元.

(2)设该社区种植乙种花卉m m^2,则种植甲种花卉$(75-m)m^2$,

依题意,得$80(75-m)+90m\leqslant6\,300$,

解得$m\leqslant30$.

答:该社区最多能种植乙种花卉30 m^2.

8. **解**:(1)设小樱桃的进价为每千克x元,大樱桃的进价为每千克y元,

则$\begin{cases}200x+200y=8\,000,\\y-x=20,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\y=30.\end{cases}$

所以大樱桃的进价为每千克30元,小樱桃的进价为每千克10元.

$200\times[(40-30)+(16-10)]=3\,200$(元).

所以销售完后,该水果商共赚了3 200元.

(2)设大樱桃的售价为每千克m元. 由题意得$(1-20\%)\times200\times16+200m-8\,000\geqslant3\,200\times90\%$,解得$m\geqslant41.6$.

所以大樱桃的售价最少应为每千克41.6元.

9. **解**:(1)设该企业购买A种型号设备x台,则购买B种型号设备$(10-x)$台.

由题意,得$12x+10(10-x)\leqslant105$,解得$x\leqslant\frac{5}{2}$.

因为x取非负整数,

所以$x=1,2,0$.

所以共有3种购买方案,分别为:

方案一:购买A种型号设备1台,B种型号设备9台;

方案二:购买A种型号设备2台,B种型号设备8台;

方案三:不购买A种型号设备,购买B种型号设备10台.

(2)方案一:$1\times240+9\times200=2\,040$(t),

$1\times12+9\times10=102$(万元).

方案二:$2\times240+8\times200=2\,080$(t),

$2\times12+8\times10=104$(万元).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方案三：$10\times200=2\,000$(t)，

$10\times10=100$(万元).

若该企业每月产生的污水量为2 040 t，为了节约资金，应选择方案一.

4.5 一元一次不等式组

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** A **4.** A **5.** D

6. $a\geqslant-1$ **7.** 15

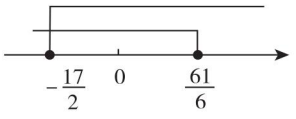
8. 解：(1) $-7\leqslant\dfrac{2(1+3x)}{7}\leqslant9$ 可转化为不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{2(1+3x)}{7}\geqslant-7,①\\ \dfrac{2(1+3x)}{7}\leqslant9,②\end{cases}$$

解不等式①，得 $x\geqslant-\dfrac{17}{2}$.

解不等式②，得 $x\leqslant\dfrac{61}{6}$.

把不等式①②的解集在数轴上表示出来，如图所示.



[第8(1)题]

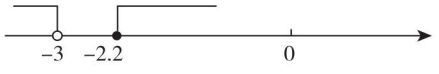
所以连写不等式的解集为 $-\dfrac{17}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{61}{6}$.

(2) 解不等式①，得 $x<-3$.

解不等式②，得 $x\geqslant-2.2$.

把不等式①②的解集在数轴上表示出来，如图所示.

所以原不等式组无解.



[第8(2)题]

9. 解：解方程组，得 $\begin{cases}x=\dfrac{3m-8}{7},\\ y=\dfrac{m-19}{7}.\end{cases}$

因为 x 的值是正数，y 的值是负数，

所以 $\begin{cases}\dfrac{3m-8}{7}>0,\\ \dfrac{m-19}{7}<0.\end{cases}$

解得 $\dfrac{8}{3}<m<19$.

所以 m 的取值范围为 $\dfrac{8}{3}<m<19$.

10. 解：(1) 设购买甲种奖品 x 件，购买乙种奖品 $(20-x)$ 件，则 $40x+30\times(20-x)=650$，解得 $x=5$，

$\therefore 20-x=15$.

答：购买甲种奖品5件，乙种奖品15件.

(2) 设购买甲种奖品 y 件，购买乙种奖品 $(20-y)$ 件，则 $\begin{cases}20-y\leqslant2y,\\ 40y+30(20-y)\leqslant680,\end{cases}$

解得 $\dfrac{20}{3}\leqslant y\leqslant8$.

$\because y$ 为整数，$\therefore y=7$ 或 $y=8$.

当 $y=7$ 时，$20-y=13$；当 $y=8$ 时，$20-y=12$.

答：该公司有两种不同的购买方案：购买甲种奖品7件，乙种奖品13件或购买甲种奖品8件，乙种奖品12件.

11. 解：(1) 设购买A型公交车每辆需 x 万元，购买B型公交车每辆需 y 万元，由题意得

$\begin{cases}x+2y=400,\\ 2x+y=350.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=100,\\ y=150.\end{cases}$

答：购买A型公交车每辆需100万元，购买B型公交车每辆需150万元.

(2) 设购买A型公交车 a 辆，则购买B型公交车 $(10-a)$ 辆，由题意得

$\begin{cases}100a+150(10-a)\leqslant1\,220,\\ 60a+100(10-a)\geqslant650.\end{cases}$

解得 $\dfrac{28}{5}\leqslant a\leqslant\dfrac{35}{4}$.

$\because a$ 为正整数，

$\therefore a$ 可取6或7或8，

$\therefore 10-a$ 为4或3或2.

则该公司有三种购车方案：

①购买A型公交车6辆，B型公交车4辆，总费用为 $100\times6+150\times4=1\,200$(万元)；

②购买A型公交车7辆，B型公交车3辆，总费用为 $100\times7+150\times3=1\,150$(万元)；

③购买A型公交车8辆，B型公交车2辆，总费用为 $100\times8+150\times2=1\,100$(万元).

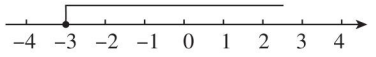
$\therefore$ 购买A型公交车8辆，B型公交车2辆总费用最少，最少总费用是1 100万元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:去分母,得 $3x-6\leqslant 4x-3$. 移项,得 $3x-4x\leqslant -3+6$. 合并同类项,得 $-x\leqslant 3$. 系数化为 1,得 $x\geqslant -3$. 原不等式的解集在数轴上的表示如图.



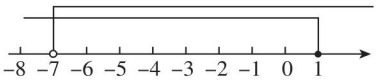
(第 1 题)

2. 解:解不等式①,得 $x\leqslant 1$,

解不等式②,得 $x>-7$.

∴ 不等式组的解集为 $-7<x\leqslant 1$.

其解集在数轴上的表示如图.



(第 2 题)

3. A **4.** D **5.** A **6.** $m>-2$

7. 解:解方程,得 $x=\dfrac{4m+1}{2}$.

(1)方程有正数解,则 $\dfrac{4m+1}{2}>0$. 解得 $m>-\dfrac{1}{4}$.

(2)方程有负数解,则 $\dfrac{4m+1}{2}<0$. 解得 $m<-\dfrac{1}{4}$.

(3)方程有不大于 2 的解,则 $\dfrac{4m+1}{2}\leqslant 2$. 解得 $m\leqslant\dfrac{3}{4}$.

8. 解:解方程组,得 $\begin{cases}x=a+2,\\y=2a+2.\end{cases}$

∵ x 大于 0,y 小于 4,

∴ $\begin{cases}a+2>0,\\2a+2<4,\end{cases}$

解这个不等式组,得 $-2<a<1$.

故 a 的取值范围为 $-2<a<1$.

9. 解:$\begin{cases}5x+1>3(x-1),①\\\dfrac{1}{2}x\leqslant 8-\dfrac{3}{2}x+2a,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>-2$.

解不等式②,得 $x\leqslant 4+a$.

∵ 原不等式组有解集,

∴ 不等式组的解集为 $-2<x\leqslant 4+a$.

∵ 原不等式组恰有两个整数解,

∴ $0\leqslant 4+a<1$. ∴ $-4\leqslant a<-3$.

10. 解:(1)设 B 种粽子的单价为 x 元,则 A 种粽子的单价为 $1.2x$ 元.

根据题意,得 $\dfrac{1\,500}{1.2x}+\dfrac{1\,500}{x}=1\,100$,

解得 $x=2.5$.

经检验,$x=2.5$ 是原方程的根.

所以 $1.2x=1.2\times 2.5=3$.

答:A 种粽子的单价是 3 元,B 种粽子的单价是 2.5 元.

(2)设购进 A 种粽子 m 个,则购进 B 种粽子 $(2\,600-m)$ 个.

根据题意,得 $3m+2.5(2\,600-m)\leqslant 7\,000$,

解得 $m\leqslant 1\,000$.

答:A 种粽子最多能购进1 000个.

11. 解:(1)设去年每千克小龙虾的养殖成本为 x 元,去年每千克小龙虾的售价为 y 元,

由题意得 $\begin{cases}y-x=32,\\(1-10\%)y-(1-25\%)x=30,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=8,\\y=40.\end{cases}$

答:去年每千克小龙虾的养殖成本为 8 元,去年每千克小龙虾的售价为 40 元.

(2)8 万元 = 80 000 元,

设今年稻谷的亩产量为 a 千克,

由题意得 $20\times 100\times 30+20\times 2.5a-20\times 600\geqslant 80\,000$,

解得 $a\geqslant 640$.

答:今年稻谷的亩产量至少会达到 640 千克.

12. 解:(1)设每本文学名著 x 元,每本动漫书 y 元,根据题意,得

$\begin{cases}20x+40y=1\,520,\\20x=20y+440,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40,\\y=18.\end{cases}$

答:每本文学名著 40 元,每本动漫书 18 元.

(2)设学校要求购买文学名著 a 本,则购买动漫书 $(a+20)$ 本,根据题意,得

$\begin{cases}a+20+a\geqslant 72,\\40a+18(a+20)\leqslant 2\,000,\end{cases}$

解得 $26\leqslant a\leqslant 28\dfrac{8}{29}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 a 为整数，

所以 $a=26,27,28$.

所以有三种购书方案：

方案一：购买文学名著 26 本，动漫书 46 本；

方案二：购买文学名著 27 本，动漫书 47 本；

方案三：购买文学名著 28 本，动漫书 48 本.

【第 4 章测试卷】

一、1. A　2. C　3. B　4. D　5. D

6. A　7. D　8. B　9. B　10. C

二、11. $-3<x\leqslant 5$　12. $>$　13. $x\leqslant\frac{5}{2}$　14. 21

15. $6\leqslant a<9$　16. $a\geqslant 2$

三、17. 解：(1) 去括号，得 $5x-10+8<6x-6+7$.

移项，得 $5x-6x<10-8-6+7$.

合并同类项，得 $-x<3$.

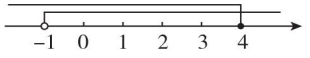
系数化为 1，得 $x>-3$.

(2) 解不等式①，得 $x>-1$.

解不等式②，得 $x\leqslant 4$.

∴ 不等式组的解集为 $-1<x\leqslant 4$.

解集在数轴上的表示如图.



（第 17 题）

18. 解：解不等式①，得 $x\leqslant 3$.

解不等式②，得 $x<a$.

∵ a 是不等于 3 的常数，

∴ 当 $a>3$ 时，不等式组的解集为 $x\leqslant 3$；

当 $a<3$ 时，不等式组的解集为 $x<a$.

19. 解：(1) $(-2)\oplus 3=-2\times(-2-3)+1$

$=-2\times(-5)+1$

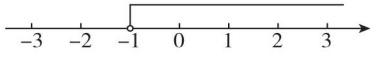
$=10+1$

$=11$.

(2) ∵ $3\oplus x<13$，

∴ $3(3-x)+1<13$. 解得 $x>-1$.

解集在数轴上的表示如图.



（第 19 题）

20. 解：方法一：$\begin{cases}2x-3y=5, & ①\\ x-2y=k, & ②\end{cases}$

① − ②，得 $x-y=5-k$.

∵ $x>y$，∴ $x-y>0$，

∴ $5-k>0$，

∴ $k<5$.

方法二：$\begin{cases}2x-3y=5, & ①\\ x-2y=k, & ②\end{cases}$

① − ② × 2，得 $y=5-2k$，

代入②，得 $x-2(5-2k)=k$，

解得 $x=10-3k$.

∵ $x>y$，

∴ $10-3k>5-2k$，

∴ $-k>-5$，解得 $k<5$.

21. 解：∵ $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$，

∴ $(x-1)(x+1)-(x+2+a)=(x-1)(x+2)$，

∴ $x^2-1-x-2-a=x^2+x-2$.

解得 $x=-\frac{a+1}{2}$.

∵ 方程的解小于 3 且 $x=-\frac{a+1}{2}$ 不能为增根，

∴ $-\frac{a+1}{2}<3$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq 1$，$-\frac{a+1}{2}\neq -2$.

解得 $a>-7$ 且 $a\neq\pm 3$.

22. 解：(1) 设每辆小客车的乘客座位数是 x 个，每辆大客车的乘客座位数是 y 个，

根据题意，得 $\begin{cases}y-x=17,\\ 6y+5x=300,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=18,\\ y=35.\end{cases}$

答：每辆小客车的乘客座位数是 18 个，每辆大客车的乘客座位数是 35 个.

(2) 设租用 a 辆小客车才能使所有参加活动的师生乘载完成，则 $18a+35(11-a)\geqslant 300+30$，

解得 $a\leqslant 3\frac{4}{17}$.

符合条件的 a 的最大整数值为 3.

答：租用小客车数量的最大值为 3.

23. 解：(1) 设 A 商品的单价为 x 元，B 商品的单价为 y 元，则根据题意可得

$\begin{cases}60x+30y=1\,080,\\ 50x+20y=880,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=16,\\ y=4.\end{cases}$

答：A，B 两种商品的单价分别为 16 元和 4 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设购买A商品m件,则购买B商品$(2m-4)$件,则根据题意可得

$$\begin{cases} m+(2m-4)\geqslant 32, \\ 16m+4(2m-4)\leqslant 296, \end{cases}$$

解得$12\leqslant m\leqslant 13$.

又因为m为整数,

所以$m=12$或$m=13$.

当$m=12$时,$2m-4=20$;

当$m=13$时,$2m-4=22$.

所以该商店有两种购买方案:

方案一:购买A商品12件,B商品20件;

方案二:购买A商品12件,B商品22件.

第5章 二次根式

5.1 二次根式

【两年模拟兵法】

1. D **点拨:**紧扣二次根式的定义:①根指数为2(通常省略不写);②被开方数为非负实数进行判断.

2. B **点拨:**本题考查最简二次根式的定义,最简二次根式必须满足两个条件:被开方数不含分母;被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

3. B **4.** C **5.** A **6.** D **7.** B

8. 解:由题图知$a<0,b>0$,$\therefore a-b<0$.

$\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|-|b|+|a-b|=-a-b-(a-b)=-2a$.

点拨:本题首先利用数轴判断出a,b的符号,进一步确定$a-b$的符号,然后利用$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(a\geqslant 0), \\ -a(a<0) \end{cases}$化简.

9. 解:(1)$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

(2)$\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{(25+7)\times(25-7)}=\sqrt{32\times 18}=\sqrt{16\times 2\times 2\times 9}=\sqrt{16\times 4\times 9}=\sqrt{16}\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=4\times 2\times 3=24$.

(3)$\sqrt{27a^2b^3}=\sqrt{9a^2b^2\cdot 3b}=3ab\sqrt{3b}(a\geqslant 0)$.

(4)$\sqrt{63\times 1\frac{17}{25}}=\sqrt{63\times\frac{42}{25}}$

$=\sqrt{9\times 7\times 7\times\frac{1}{25}\times 6}$

$=\sqrt{9}\times\sqrt{7^2}\times\sqrt{\frac{1}{25}}\times\sqrt{6}$

$=3\times 7\times\frac{1}{5}\times\sqrt{6}=\frac{21}{5}\sqrt{6}$.

10. 解:(1)原式$=(x^2-2)(x^2+2)$

$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$.

(2)原式$=-(x^2-2\sqrt{2}x+2)$

$=-(x-\sqrt{2})^2$.

点拨:(1)两次应用平方差公式分解;(2)先提取-1,再应用完全平方公式分解.

11. 解:甲的解答是正确的.

乙的解答错在$\sqrt{(1-a)^2}=1-a$,因为$a=5$,所以$1-a<0$,

所以$\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|=a-1$.

12. 解:$\because \sqrt{52n}=\sqrt{4\times 13n}$,且$\sqrt{52n}$是整数,

$\therefore n$的最小正整数值为13.

点拨:如果一个二次根式化简后是整数,那么其被开方数是完全平方数. 解决本题首先要把被开方数分解因数,把能化为完全平方数的部分找出来,然后确定n的最小正整数值.

13. 解:$\because |x-1|=2$,$\therefore x-1=\pm 2$,

$\therefore x=3$或$x=-1$.

$\therefore \sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}=|x-4|-|2x-1|$.

当$x=3$时,原式$=|-1|-|5|=1-5=-4$;

当$x=-1$时,原式$=|-5|-|-3|=5-3=2$.

方法规律:本题运用了分类讨论思想. 去绝对值符号常常需要分类讨论:当绝对值符号内的代数式大于或等于0时,去掉绝对值符号后是它本身;当绝对值符号内的代数式小于0时,去掉绝对值符号后是它的相反数.

14. 解:$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$

$=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a-\frac{1}{a}\right|+\left|a+\frac{1}{a}\right|$.

$\because -1<a<0$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore a+\frac{1}{a}<0, a-\frac{1}{a}>0.$

$\therefore$ 原式 $=a-\frac{1}{a}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-\frac{2}{a}.$

5.2 二次根式的乘法和除法

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B

3. A **点拨:** 由题意可知 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\\ x^2-1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$.

4. C

5. C **点拨:** 本题综合考查了二次根式的乘除法法则及二次根式的化简,其中①②④是正确的,由于 $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=3\sqrt{\frac{2}{27}}=3\sqrt{\frac{6}{9^2}}=3\times\frac{\sqrt{6}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,因此③是错误的.

6. A **点拨:** $m=\frac{2\sqrt{63}}{3}=\frac{6\sqrt{7}}{3}=2\sqrt{7}$,因为 $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$,而 $5<\sqrt{28}<6$,所以 $5<m<6$,故选 A.

7. 解: (1) $\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{ab\div a\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}.$

(2) $\frac{1}{4}\sqrt{18}\times 8\sqrt{\frac{1}{36}}\div\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\times 8\div\frac{2}{3}\right)\sqrt{18\times\frac{1}{36}\times\frac{2}{9}}=3\sqrt{\frac{1}{9}}=3\times\frac{1}{3}=1.$

8. 解: (1) D

(2) 在去掉绝对值符号时没有准确确定 $a-2b$ 与 0 的大小关系,导致去绝对值符号出错

(3) $\because 0<a<2b, \therefore a-2b<0.$

$\therefore$ 原式 $=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{b(a^2-4ab+4b^2)}{a}}$

$=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{ab(a-2b)^2}{a^2}}$

$=\frac{a}{a-2b}\cdot\frac{|a-2b|}{|a|}\cdot\sqrt{ab}$

$=\frac{a}{a-2b}\cdot\frac{-(a-2b)}{a}\cdot\sqrt{ab}$

$=-\sqrt{ab}.$

点拨: 化简二次根式时,一定要注意题目中所给出的限制条件,这是化简时去掉绝对值符号的关键.

9. 解: $\frac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\frac{9-a}{2a+6}\cdot\frac{1}{a+9}$

$=\frac{(9+a)(9-a)}{(a+3)^2}\cdot\frac{2(a+3)}{9-a}\cdot\frac{1}{a+9}$

$=\frac{2}{a+3}.$

当 $a=\sqrt{3}-3$ 时,原式 $=\frac{2}{\sqrt{3}-3+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

点拨: 先将所求式子化为最简形式,然后代值计算. 本题的结果要通过分母有理化化为最简二次根式.

10. 解: 根据二次根式的非负性及已知条件可得 $\begin{cases}4a-b+1=0,\\ \frac{1}{3}b-4a-3=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$

所以 $2a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{-\frac{1}{b}}\right)$

$=2a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\div\left(-\frac{1}{b}\right)}$

$=2a\cdot\sqrt{-\frac{b^2}{a}}$

$=-2\times\sqrt{-\frac{(-3)^2}{-1}}$

$=-2\times 3$

$=-6.$

方法规律: 本题巧用了非负数的性质和方程思想,利用二次根式的非负性构建方程组,求出字母的值,然后进行化简,代入求值.

11. 解: 因为 $\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$,所以 $9-x\geqslant 0, x-7\geqslant 0$,即 $7\leqslant x\leqslant 9$.

又因为 x 为偶数,所以 $x=8$.

所以原式 $=(1+x)\cdot\sqrt{\frac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)}}$

$=\sqrt{(1+x)^2\cdot\frac{x-4}{x+1}}$

$=\sqrt{(x-4)(x+1)}$

$=\sqrt{(8-4)\times(8+1)}$

$=\sqrt{4\times 9}$

$=6.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 解:设该圆形图片的半径为 r cm,根据题意可得,

$\pi r^2=\sqrt{140\pi}\times\sqrt{35\pi}=\sqrt{140\pi\times35\pi}=70\pi$.

所以 $r^2=70$.

因为$(\pm\sqrt{70})^2=70$,且 $r>0$,所以 $r=\sqrt{70}$.

答:该圆形图片的半径为 $\sqrt{70}$ cm.

5.3 二次根式的加法和减法

【两年模拟兵法】

1. C 点拨:化成最简二次根式后即可判断.

2. D **3.** B

4. 2 点拨:因为题中的二次根式已经是最简二次根式,所以直接令被开方数相等即可,$2b+1=7-b$,解得 $b=2$.

5. 解:(1)原式 $=8\sqrt{6}-18\sqrt{6}+3-2$

$=1-10\sqrt{6}$.

(2)原式 $=2b\cdot\dfrac{\sqrt{ab}}{b}+\dfrac{3}{a}\cdot a\sqrt{ab}-\left(4a\cdot\dfrac{\sqrt{ab}}{a}+3\sqrt{ab}\right)$

$=2\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}$

$=-2\sqrt{ab}$.

(3)原式 $=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=0$.

6. 解:$\dfrac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{\sqrt{xy}-y}{x-\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\dfrac{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$.

当 $x=\sqrt{3}+1$,$y=\sqrt{3}-1$ 时,原式 $=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.

7. 解:(1)m^2+3n^2;$2mn$

(2)13;4;1;2(答案不唯一)

(3)由题意,得 $a=m^2+3n^2$,$4=2mn$.

∵ m,n 为正整数,∴ $m=2$,$n=1$ 或 $m=1$,$n=2$.

∴ $a=2^2+3\times1^2=7$ 或 $a=1^2+3\times2^2=13$.

点拨:(1)运用完全平方公式求解;(2)首先确定好 m,n 的值,然后根据(1)的结论即可求出 a,b 的值,答案不唯一;(3)根据题意,得 $4=2mn$,首先确定 m,n 的值,通过分析知 $m=2$,$n=1$ 或 $m=1$,$n=2$,然后即可确定 a 的值. 本题主要考查二次根式的运算与完全平方公式,解题的关键在于熟练运用完全平方公式和二次根式的运算法则.

8. 解:∵ $a=\sqrt{7}+2$,$b=\sqrt{7}-2$,

∴ $a+b=\sqrt{7}+2+\sqrt{7}-2=2\sqrt{7}$,

$a-b=\sqrt{7}+2-(\sqrt{7}-2)=4$,

$ab=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$.

(1)$a^2b+b^2a=ab(a+b)=3\times2\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

(2)$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=4^2+3=16+3=19$.

(3)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\sqrt{7}\times4=8\sqrt{7}$.

9. 解:∵ $a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$,$b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,

∴ $a-c=(a-b)+(b-c)=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}$.

∴ $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$

$=\dfrac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]$

$=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$

$=\dfrac{1}{2}[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2]$

$=\dfrac{1}{2}\times36$

$=18$.

10. 解:∵ $(a-\sqrt{2}+1)^2$ 与 $\sqrt{b-2}$ 互为相反数,

∴ $(a-\sqrt{2}+1)^2+\sqrt{b-2}=0$,

∴ $a-\sqrt{2}+1=0$,$b-2=0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore a=\sqrt{2}-1, b=2.$

$\therefore a^b=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}.$

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：由题意得 $x-4\geqslant 0, 4-x\geqslant 0,$

$\therefore x=4, \therefore y=\frac{1}{2}.$

$\therefore x^2+y^2=4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=16\frac{1}{4}.$

2. 解：由题意得 $-a^2\geqslant 0, \therefore a^2\leqslant 0.$

又$\because a^2\geqslant 0, \therefore a=0.$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{3}-\sqrt{3}+0=0.$

3. 解：$\because \sqrt{x+3}\geqslant 0, \sqrt{x+y-6}\geqslant 0,$ 且其和为 0，

$\therefore x+3=0, x+y-6=0,$ 解得 $x=-3, y=9.$

4. 解：由题意得 $\sqrt{5x-2}\geqslant 0$ 且 $5x-2\geqslant 0,$

即 $x\geqslant\frac{2}{5}.$

$\therefore$ 当 $x=\frac{2}{5}$ 时，式子 $\sqrt{5x-2}+3$ 的取值最小，最小值为 3.

5. 解：由题意知 $\begin{cases}2-a\geqslant 0,\\ 3a-6\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a=2, \therefore b=4.$

当三边长分别为 2，2，4 时不能构成三角形；当三边长分别为 4，4，2 时能构成三角形，$\therefore$ 此等腰三角形的周长为 10.

6. 解：由题图可知，$a<0, c<0, b>0,$ 所以 $a+c<0, c-b<0,$

所以原式 $=-a-[-(a+c)]+[-(c-b)]-b$

$=-a+a+c-c+b-b$

$=0.$

点拨： 先根据 a, b, c 在数轴上的对应点的位置确定 $a, a+c, c-b, b$ 的符号，再利用二次根式的性质进行化简.

7. 解：$\because (\sqrt{5}+\sqrt{13})^2=18+2\sqrt{65},$

$(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2=18+2\sqrt{77},$

$18+2\sqrt{65}<18+2\sqrt{77},$

$\therefore (\sqrt{5}+\sqrt{13})^2<(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2.$

又$\because \sqrt{5}+\sqrt{13}>0, \sqrt{7}+\sqrt{11}>0,$

$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{13}<\sqrt{7}+\sqrt{11}.$

8. 解：因为 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}\div\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}=\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}+2)^2}=\frac{a+4\sqrt{a}+3}{a+4\sqrt{a}+4}<1,$

易知 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}>0, \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}>0,$

所以 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}.$

点拨： 作商比较两个二次根式的大小的方法：当两个二次根式（均为正数）均由分母和分子两部分组成时，常通过作商比较它们的大小，先计算两个二次根式的商，然后比较商与 1 的大小关系. 已知 $a>0, b>0,$ 若 $\frac{a}{b}>1,$ 则 $a>b;$ 若 $\frac{a}{b}=1,$ 则 $a=b;$ 若 $\frac{a}{b}<1,$ 则 $a<b.$

9. 解：$\because \frac{\sqrt{11}-1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{11}-3}{3}, \sqrt{11}-3>0,$

$\therefore \frac{\sqrt{11}-3}{3}>0.$

$\therefore \frac{\sqrt{11}-1}{3}>\frac{2}{3}.$

10. 解：$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}>0,$

$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}>0.$

$\because \sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>0,$

$\therefore \frac{1}{x}>\frac{1}{y}>0,$

$\therefore x<y.$

11. 解：原式 $=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2\times 5}+\sqrt{2\times 7}+\sqrt{3\times 5}+\sqrt{3\times 7}}$

$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

12. 解：设 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=a, \sqrt{x+1}+\sqrt{x}=b,$

则 $a+b=2\sqrt{x+1}, ab=1.$

原式 $=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{(2\sqrt{x+1})^2-2\times 1}{1}=4x+2.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解:将$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$两边同时平方,得$x+\frac{1}{x}-2=4$,

$\therefore x+\frac{1}{x}=6$.

$\therefore \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12}=\sqrt{6^2+12}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

点拨:本题先将条件式两边同时平方,求出$x+\frac{1}{x}$的值,再将$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$配方成含$x+\frac{1}{x}$的二次根式,从而运用整体代入就可求出二次根式$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$的值.

14. 解:设$x=k(k>0)$,则$y=2k,z=3k$,

$\therefore$ 原式$=\frac{\sqrt{3k}}{\sqrt{4k}+\sqrt{5k}}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

【第5章测试卷】

一、**1.** A **2.** C **3.** C **4.** D **5.** B **6.** B **7.** C **8.** D **9.** C **10.** B

二、**11.** $\geqslant 1$ **12.** 6 **13.** $9\sqrt{3}$ **14.** $-\sqrt{-y}$

15. $\frac{2}{3}$ **16.** $2\,018\frac{2\,018}{2\,019}$

三、**17.** 解:(1)原式$=4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=7\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

(2)原式$=\left(-1\times\frac{1}{3}\times5\right)\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{28}\times\frac{16}{7}}$

$=-\frac{5}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{7}$

$=-\frac{5\sqrt{10}}{21}$.

18. 解:$a^2-6a-2=(a-3)^2-11$.

当$a=3-\sqrt{10}$时,

$(a-3)^2-11=(3-\sqrt{10}-3)^2-11=-1$.

19. 解:根据题意得$\begin{cases}m-n-1=2,\\2m+n+3=m+10,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=5,\\n=2.\end{cases}$

20. 解:$\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)\div\frac{a^2-b^2}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}\div\frac{(a+b)(a-b)}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\frac{a}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a-b}{a+b}$.

当$a=2+\sqrt{3},b=2-\sqrt{3}$时,

原式$=\frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. 解:由题意得$a-2\,021\geqslant 0$,

$\therefore a\geqslant 2\,021$.

原等式变形为$a-2\,020+\sqrt{a-2\,021}=a$.

整理,得$\sqrt{a-2\,021}=2\,020$.

两边平方,得$a-2\,021=2\,020^2$.

$\therefore a-2\,020^2=2\,021$.

22. 解:(1)$S=\frac{1}{2}(\sqrt{8}+\sqrt{32})\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}(\mathrm{m}^2)$.

答:横断面的面积为$3\sqrt{6}\ \mathrm{m}^2$.

(2)$\frac{300}{3\sqrt{6}}=\frac{100}{\sqrt{6}}=\frac{100\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{100\sqrt{6}}{6}=\frac{50\sqrt{6}}{3}(\mathrm{m})$.

答:可修$\frac{50\sqrt{6}}{3}$ m长的拦河坝.

23. 解:第1个数:当$n=1$时,

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}$

$=1$.

第2个数:当$n=2$时,

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}\times1$

$=1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第1章 分 式

1.1 分 式

练习

1. (1)$\frac{50}{m}$ (2)$\frac{m}{a+b}$

2. 解:(1)当$4x-5=0$,即$x=\frac{5}{4}$时,分母的值为0,此时分式$\frac{x+3}{4x-5}$的值不存在.

(2)当$x+3=0$,$4x-5\neq0$,即$x=-3$时,分式$\frac{x+3}{4x-5}$的值为0.

3.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$\frac{x}{3-2x}$	…	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	-2	-1	…

练习

1. (1)x^2-6 (2)$2xy^2$ (3)x^2-1 (4)y (5)$x-1$ (6)$x+y$

2. 解:(1)$\frac{18a^2b^3}{12a^3b^2}=\frac{6a^2b^2\cdot3b}{6a^2b^2\cdot2a}=\frac{3b}{2a}$.

(2)$\frac{8x(x-y)}{6y(y-x)}=\frac{2(x-y)\cdot4x}{2(x-y)\cdot(-3y)}=-\frac{4x}{3y}$.

(3)$\frac{xy+5x}{y^2+10y+25}=\frac{x(y+5)}{(y+5)^2}=\frac{x}{y+5}$.

(4)$\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}=$

$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c}=a+b-c$.

3. 解:$\frac{x^2-2xy+y^2}{y-x}=\frac{(y-x)^2}{y-x}=y-x$.

当$x=2$,$y=3$时,

$y-x=3-2=1$.

习题1.1

A组

1. 解:当$x=0$时,分式$\frac{x}{x+1}$的值等于0.

2. 解:(1)当$2x+4=0$,即$x=-2$时,分母的值为0,此时分式$\frac{1}{2x+4}$的值不存在.

(2)当$x^2-1=0$,即$x=1$或$x=-1$时,分母的值为0,此时分式$\frac{x-2}{x^2-1}$的值不存在.

3. 解:因为$\frac{7x^2y^3}{3xy^4}=\frac{xy^3\cdot7x}{xy^3\cdot3y}=\frac{7x}{3y}$,

$\frac{7x^2(y+1)}{3y^2(y+1)}=\frac{7x^2}{3y^2}$,$\frac{7x(y+1)}{3y(y+1)}=\frac{7x}{3y}$,

所以$\frac{7x^2y^3}{3xy^4}=\frac{7x}{3y}=\frac{7x(y+1)}{3y(y+1)}$,

$\frac{7x^2}{3y^2}=\frac{7x^2(y+1)}{3y^2(y+1)}$.

4. (1)xy (2)$xy-y^2$

(3)$x-3$ (4)$3x$ (5)$x+y$

5. 解:(1)$\frac{7a^2b}{5abc}=\frac{ab\cdot7a}{ab\cdot5c}=\frac{7a}{5c}$.

(2)$\frac{x^2-16}{x+4}=\frac{(x-4)(x+4)}{x+4}=x-4$.

(3)$\frac{y-x}{x^2-y^2}=\frac{-(x-y)}{(x-y)(x+y)}=-\frac{1}{x+y}$.

(4)$\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a^2-b^2}=$

$\frac{(2a+b)^2}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{2a+b}{2a-b}$.

(5)$\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(z-y)(y-x)(x-z)}=$

$\frac{-[(z-y)(y-x)(x-z)]}{(z-y)(y-x)(x-z)}=-1$.

6. 解:(1)$\frac{m+2n}{m^2-4n^2}=\frac{m+2n}{(m+2n)(m-2n)}=\frac{1}{m-2n}$.

当$m=1$,$n=3$时,

$\frac{1}{m-2n}=\frac{1}{1-2\times3}=-\frac{1}{5}$.

(2)$\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}=$

$\frac{(x-2y)(x+2y)}{(x-2y)^2}=\frac{x+2y}{x-2y}$.

当$x=2$,$y=4$时,

$\frac{x+2y}{x-2y}=\frac{2+2\times4}{2-2\times4}=-\frac{5}{3}$.

7. 解:根据题意,得面积之比为$\frac{(a-10)(b-10)}{ab-(a-10)(b-10)}$,当$a=65$,$b=52$时,上式$=\frac{(65-10)\times(52-10)}{65\times52-(65-10)\times(52-10)}=\frac{231}{107}$.

B组

8. 解:由题意,知$x^2-4=0$,即$x=\pm2$.

又$(x+1)(x-2)\neq0$,

即$x\neq-1$且$x\neq2$,所以$x=-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:$\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}$.

当$x=2$时,$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1$.

点拨:本题答案不唯一.

1.2 分式的乘法和除法

练习

1. 解:(1)$\frac{2x}{3y}\cdot\frac{6y^2}{x^2}=\frac{2x\cdot 6y^2}{3y\cdot x^2}=\frac{4y}{x}$.

点拨:根据分式的乘法法则,把分子乘分子、分母乘分母分别作为积的分子、分母,然后约去分子与分母的公因式.

(2)$\frac{2x}{x+1}\div\frac{4x^2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{4x^2}=\frac{1}{2x}$.

(3)$\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+1}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{x+2}{x+1}$.

(4)$(x+2)\div\frac{x^2+4x+4}{x}=(x+2)\cdot\frac{x}{(x+2)^2}=\frac{x}{x+2}$.

2. 解:(1)$\frac{2x^2}{3(x-1)}\cdot\frac{x^2-1}{x}$

$=\frac{2x^2}{3(x-1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}$

$=\frac{2x^2+2x}{3}$.

(2)$\frac{x^2-2xy+y^2}{x+y}\div(x-y)$

$=\frac{(x-y)^2}{x+y}\cdot\frac{1}{x-y}$

$=\frac{x-y}{x+y}$.

(3)$\frac{ab+a}{b}\cdot\frac{b^2}{b^2-1}$

$=\frac{a(b+1)}{b}\cdot\frac{b^2}{(b+1)(b-1)}$

$=\frac{ab}{b-1}$.

(4)$\frac{a}{a-b}\div\frac{a^2}{a^2-2ab+b^2}$

$=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2}$

$=\frac{a-b}{a}$.

练习

1. 解:(1)$\left(\frac{-xy^2}{3z}\right)^4=\frac{(-xy^2)^4}{(3z)^4}=\frac{x^4y^8}{81z^4}$.

(2)$\left(\frac{3yz}{5x^2}\right)^3=\frac{(3yz)^3}{(5x^2)^3}=\frac{27y^3z^3}{125x^6}$.

2. 解:(1)$4x^2y\div\left(\frac{2x}{-y}\right)^3$

$=4x^2y\div\frac{8x^3}{-y^3}$

$=4x^2y\cdot\frac{-y^3}{8x^3}$

$=-\frac{y^4}{2x}$.

(2)$\left(\frac{x^2}{-y^3}\right)^3\cdot\left(\frac{y}{x^3}\right)^4$

$=\frac{x^6}{-y^9}\cdot\frac{y^4}{x^{12}}$

$=-\frac{1}{x^6y^5}$.

(3)$\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3\cdot\left(\frac{z}{xy}\right)^3\cdot\left(\frac{y^2}{xz}\right)^2$

$=\frac{x^6}{8y^3}\cdot\frac{z^3}{x^3y^3}\cdot\frac{y^4}{x^2z^2}$

$=\frac{xz}{8y^2}$.

(4)$\left(\frac{-y^2}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{-y}\right)^3\div\left(\frac{x^2y}{z}\right)^2$

$=\frac{y^4}{x^2}\cdot\frac{x^3}{-y^3}\div\frac{x^4y^2}{z^2}$

$=\frac{y^4}{x^2}\cdot\frac{x^3}{-y^3}\cdot\frac{z^2}{x^4y^2}$

$=-\frac{z^2}{x^3y}$.

习题1.2

A组

1. 解:(1)$\frac{3a^2}{b^4}\cdot\frac{b^3}{6a}=\frac{a}{2b}$.

(2)$8x^2y^3\cdot\frac{-3x}{4y^5}=-\frac{6x^3}{y^2}$.

(3)$10x^3y^2\div\frac{15x^2y^4}{-3z^2}=10x^3y^2\cdot\frac{-3z^2}{15x^2y^4}=-\frac{2xz^2}{y^2}$.

(4)$\frac{(x+y)^2}{xy-y^2}\cdot\frac{(y-x)^2}{xy+y^2}=\frac{(x+y)^2}{y(x-y)}\cdot\frac{(x-y)^2}{y(x+y)}=\frac{x^2-y^2}{y^2}$.

2. 解:(1)$\left(\frac{10c}{-a^2b}\right)^3=\frac{(10c)^3}{(-a^2b)^3}=-\frac{1\,000c^3}{a^6b^3}$.

(2)$\left(\frac{-3a}{4b^2}\right)^2\div 6a^2b=\frac{9a^2}{16b^4}\cdot\frac{1}{6a^2b}=\frac{3}{32b^5}$.

(3)$\left(\frac{y^3}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{-x}{2y^2}\right)^3=\frac{y^6}{x^2}\cdot\frac{-x^3}{8y^6}=-\frac{x}{8}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)$\left(\frac{xy^2}{-z}\right)^4\cdot\left(\frac{z^2}{xy}\right)^3\div\left(\frac{xz}{-y}\right)^5$

$=\frac{x^4y^8}{z^4}\cdot\frac{z^6}{x^3y^3}\cdot\frac{-y^5}{x^5z^5}$

$=-\frac{y^{10}}{x^4z^3}$.

3. 解:$\frac{x-1}{x}\div\frac{2x+1}{x^2}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x^2}{2x+1}=\frac{x^2-x}{2x+1}$.

若使分式有意义,则 $x\neq0$ 且 $x\neq-\frac{1}{2}$.

当$x=2$时,$\frac{x^2-x}{2x+1}=\frac{2^2-2}{2\times2+1}=\frac{2}{5}$.

点拨:所选 x 的值不唯一. 取值时,注意分式是否有意义.

B 组

4. 解:(1)$\frac{3x^2y^4}{8z^3}\cdot\frac{10z^2}{-6x^2y^2}$

$=-\frac{5y^2}{8z}$.

(2)$\frac{4x^2-y^2}{3x^2y}\div\frac{2x-y}{xy}$

$=\frac{(2x+y)(2x-y)}{3x^2y}\cdot\frac{xy}{2x-y}$

$=\frac{2x+y}{3x}$.

(3)$\frac{a+b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$

$=\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a-b)^2}{ab}$

$=\frac{a-b}{ab}$.

(4)$\frac{x^2-4y^2}{x^2+6xy+9y^2}\div\frac{2y^2-xy}{x^2+3xy}$

$=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+3y)^2}\cdot\frac{x(x+3y)}{y(2y-x)}$

$=-\frac{x^2+2xy}{xy+3y^2}$.

5. 解:(1)$\frac{x^4-1}{x^2+2x+1}\div(x^2+1)$

$=\frac{(x^2+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$

$=\frac{x-1}{x+1}$.

(2)$(2y-x)\div\frac{x^2-4xy+4y^2}{x+2y}$

$=(2y-x)\cdot\frac{x+2y}{(2y-x)^2}$

$=\frac{x+2y}{2y-x}$.

6. 解:令地球的质量为 M,则月球的质量为$\frac{10}{801}M$,再令一物体的质量为 m.

因为地球的半径为 R,所以月球的半径为$\frac{100}{367}R$.

由题意得,$\frac{G\frac{10}{801}Mm}{\left(\frac{100}{367}R\right)^2}\div\frac{GMm}{R^2}=\frac{10\times367^2GMm}{801\times100^2R^2}\cdot\frac{R^2}{GMm}=\frac{10\times367^2}{801\times100^2}=\frac{134\,689}{801\,000}$.

答:月球上的物体所受的月球重力将是它在地球表面上所受地球重力的$\frac{134\,689}{801\,000}$.

1.3 整数指数幂

练习

1. 解:(1)$\frac{3^{12}}{3^4}=3^{12-4}=3^8$.

(2)$\left(-\frac{2}{3}\right)^{15}\div\left(-\frac{2}{3}\right)^{12}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{15-12}=\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}$.

(3)$\frac{(-x^2y)^7}{(-x^2y)^4}=(-x^2y)^{7-4}=(-x^2y)^3=-x^6y^3$.

(4)$a^{2m+1}\div a^m=a^{2m+1-m}=a^{m+1}$.

点拨:同底数幂相除,底数不变,指数相减.

2. 解:(1)不对. 改正:$a^5\div a=a^{5-1}=a^4$.

点拨:错解不符合同底数幂的除法法则,同底数幂相除,底数不变,指数相减.

(2)不对. 改正:$\frac{(-xy)^{10}}{(-xy)^6}=(-xy)^{10-6}=(-xy)^4=x^4y^4$.

点拨:由同底数幂的除法法则得到$(-xy)^4$,再乘方,符号应为正.

练习

1. 解:$0.5^0=1$,$(-1)^0=1$,$10^{-5}=\frac{1}{10^5}=\frac{1}{100\,000}$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=2^6=64$,$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$.

点拨:任意不等于零的数的零次幂都等于 1,任何不等于零的数的 $-p$(p 是正整数)次幂等于这个数的倒数的 p 次幂.

2. 解:(1)$x^{-3}=\frac{1}{x^3}$.

(2)$-5x^{-2}y^3=-\frac{5y^3}{x^2}$.

点拨:任何不等于零的数的 $-p$(p 是正整数)次幂等于这个数的 p 次幂的倒数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:$5.6\times10^{-4}=5.6\times\frac{1}{10^4}=5.6\times0.0001=0.00056$.

4. 解:$0.000\,000\,05=5\times10^{-8}$.

练习

1. 解:(1)$-a\cdot(-a)^3=-a\cdot(-a^3)=a^4$.

(2)$(-a)^3\cdot(a^{-1})^2=(-a^3)\cdot a^{-2}=-a$.

(3)$[(-a)^2]^{-1}=(a^2)^{-1}=\frac{1}{a^2}$.

(4)$a^{-5}(a^2b^{-1})^3=a^{-5}(a^6b^{-3})=\frac{a}{b^3}$.

2. 解:(1)$\frac{5x^{-1}y^4}{4x^2y}=\frac{5y^3}{4x^3}$.

(2)$\left(\frac{y^{-2}}{3x^4}\right)^{-3}=\frac{y^6}{3^{-3}x^{-12}}=27x^{12}y^6$.

习题 1.3

A 组

1. 解:(1)$\frac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2$.

(2)$\frac{(-x^2y^3)^4}{(-x^2y^3)^2}=(-x^2y^3)^{4-2}=(-x^2y^3)^2=x^4y^6$.

(3)$\frac{(-x)^{2m+1}}{(-x)^{m+2}}=(-x)^{2m+1-(m+2)}=(-x)^{2m+1-m-2}=(-x)^{m-1}$.

(4)$\frac{-x^5y^3}{2xy^2}=-\frac{x^4y}{2}$.

2. 解:(1)$1\,000^0=1$.

(2)$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27}$.

(3)$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16$.

(4)$(x^{-2}y)^{-3}=x^6y^{-3}=\frac{x^6}{y^3}$.

3. 解:(1)$1.5\times10^{-5}=1.5\times\frac{1}{10^5}=1.5\times0.000\,01=0.000\,015$.

(2)$2.08\times10^{-3}=2.08\times\frac{1}{10^3}=2.08\times0.001=0.002\,08$.

4. 解:(1)$0.000\,008=8\times10^{-6}$.

(2)$0.000\,010\,8=1.08\times10^{-5}$.

5. 解:(1)$2.5\times0.000\,001=2.5\times10^{-6}$(m).

答:相当于2.5×10^{-6}m.

(2)$1\div(2.5\times10^{-6})=4\times10^5$(个).

答:4×10^5 个直径为 2.5 μm 的颗粒物首尾连接起来能达到 1 m.

6. 解:(1)$(-x)^{-3}\cdot(2x^{-1})^2=\frac{1}{-x^3}\cdot4x^{-2}=-\frac{4}{x^5}$.

(2)$(-x^3y^{-2})^{-5}=-x^{-15}y^{10}=-\frac{y^{10}}{x^{15}}$.

(3)$\frac{(-2xy^{-4})^{-2}}{8xy^3}=\frac{x^{-2}y^8}{32xy^3}=\frac{y^5}{32x^3}$.

(4)$\left(-\frac{5x^2y}{6z}\right)^{-2}=\left(-\frac{6z}{5x^2y}\right)^2=\frac{36z^2}{25x^4y^2}$.

B 组

7. 解:(1)$(-a^2b^{-1}c^{-2})^{-3}$

$=-a^{-6}b^3c^6$

$=-\frac{b^3c^6}{a^6}$.

(2)$(a^2b^{-1}c)^{-2}\div2a^{-1}bc$

$=a^{-4}b^2c^{-2}\cdot(2a^{-1}bc)^{-1}$

$=a^{-4}b^2c^{-2}\cdot\frac{1}{2}ab^{-1}c^{-1}$

$=\frac{b}{2a^3c^3}$.

(3)$(3x^{-2}y^{-3})\cdot(-2x^2y)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{6}xy^2\right)^{-2}$

$=3x^{-2}y^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{8}x^{-6}y^{-3}\right)\cdot(36x^{-2}y^{-4})$

$=-\frac{27}{2}x^{-2+(-6)+(-2)}y^{-3+(-3)+(-4)}$

$=-\frac{27}{2}x^{-10}y^{-10}$

$=-\frac{27}{2x^{10}y^{10}}$.

8. 解:(1)$0.2\text{ nm}=0.2\times10^{-9}\text{ m}=2\times10^{-10}$m.

(2)$4.5\text{ cm}=0.045\text{ m}$,$0.045\div(2\times10^{-10})=4.5\times10^{-2}\div(2\times10^{-10})=2.25\times10^8$.

答:最大的蜂鸟的长度相当于该标尺最小刻度的 2.25×10^8 倍.

1.4 分式的加法和减法

练习

1. 解:(1)$\frac{7}{x}+\frac{3}{x}-\frac{8}{x}=\frac{7+3-8}{x}=\frac{2}{x}$.

(2)$\frac{x^2}{x+y}-\frac{y^2}{x+y}=\frac{x^2-y^2}{x+y}$

$=\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}$

$=x-y$.

(3)$\frac{ac}{a^2-b^2}-\frac{bc}{a^2-b^2}=\frac{ac-bc}{a^2-b^2}$

$=\frac{c(a-b)}{(a+b)(a-b)}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{c}{a+b}$.

点拨:根据同分母的分式加减法的运算法则进行运算,并把结果化为最简分式.

2. 解:(1)$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$

$=\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$

$=\frac{a^2-b^2}{a-b}$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}$

$=a+b$.

(2)$\frac{m+2n}{n-m}+\frac{n}{m-n}$

$=\frac{m+2n}{n-m}-\frac{n}{n-m}$

$=\frac{m+2n-n}{n-m}$

$=\frac{m+n}{n-m}$.

(3)$\frac{3x}{3x-2y}+\frac{2y}{2y-3x}$

$=\frac{3x}{3x-2y}-\frac{2y}{3x-2y}$

$=\frac{3x-2y}{3x-2y}$

$=1$.

练习

1. 解:(1)最简公分母是$12xy$,

$\frac{1}{4x}=\frac{3y}{12xy}$,$\frac{1}{6y}=\frac{2x}{12xy}$.

(2)最简公分母是$56xy$,

$\frac{7}{8x}=\frac{49y}{56xy}$,$\frac{5}{7y}=\frac{40x}{56xy}$.

(3)最简公分母是a^2b^2,

$\frac{b}{a^2}=\frac{b^3}{a^2b^2}$,$\frac{c}{b^2}=\frac{a^2c}{a^2b^2}$.

(4)最简公分母是$24x^2y^2$,

$\frac{7}{8xy^2}=\frac{21x}{24x^2y^2}$,$\frac{y}{6x^2}=\frac{4y^3}{24x^2y^2}$.

2. 解:(1)最简公分母是$6xy(x+y)$,

$\frac{3x}{2y(x+y)}=\frac{9x^2}{6xy(x+y)}$,

$\frac{2y}{3x(x+y)}=\frac{4y^2}{6xy(x+y)}$.

(2)最简公分母是$x(x-y)$,

$\frac{1}{x^2-xy}=\frac{1}{x(x-y)}$,$\frac{y}{y-x}=-\frac{xy}{x(x-y)}$.

练习

1. 解:(1)$\frac{7}{8x}-\frac{5}{7y}=\frac{49y}{56xy}-\frac{40x}{56xy}=\frac{49y-40x}{56xy}$.

(2)$\frac{a}{xy}-\frac{b}{yz}=\frac{az}{xyz}-\frac{bx}{xyz}=\frac{az-bx}{xyz}$.

(3)$\frac{b^2}{2a^2}+\frac{a^2}{3b^2}=\frac{3b^4}{6a^2b^2}+\frac{2a^4}{6a^2b^2}=\frac{3b^4+2a^4}{6a^2b^2}$.

(4)$\frac{2}{x}-\frac{5}{3x}+\frac{3}{4y}=\frac{24y}{12xy}-\frac{20y}{12xy}+\frac{9x}{12xy}=\frac{9x+4y}{12xy}$.

2. 解:(1)$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$

$=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{2x}{x^2-4}$.

(2)$\frac{x}{y(x+y)}-\frac{y}{x(x+y)}$

$=\frac{x^2}{xy(x+y)}-\frac{y^2}{xy(x+y)}$

$=\frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)}$

$=\frac{x-y}{xy}$.

(3)$\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{4-2x}$

$=\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{1}{2(2-x)}$

$=\frac{4}{2(x-2)(x+2)}-\frac{x+2}{2(x-2)(x+2)}$

$=\frac{2-x}{2(x-2)(x+2)}$

$=-\frac{1}{2x+4}$.

(4)$1-\frac{1}{1-x}$

$=\frac{1-x}{1-x}-\frac{1}{1-x}$

$=-\frac{x}{1-x}$.

3. 解:$1\ 500\div(50+b)=\frac{1\ 500}{50+b}$(h),

$\frac{1\ 500}{b}-\frac{1\ 500}{b+50}=\frac{1\ 500(b+50)}{b(b+50)}-\frac{1\ 500b}{b(b+50)}=\frac{75\ 000}{b(b+50)}$(h).

答:提速后列车跑完全程要少花$\frac{75\ 000}{b(b+50)}$ h.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 1.4

A 组

1. 解:(1)$\frac{x-y}{2x}+\frac{y}{2x}$

$=\frac{x}{2x}$

$=\frac{1}{2}$.

(2)$\frac{5}{x-5}+\frac{x}{5-x}$

$=\frac{5}{x-5}-\frac{x}{x-5}$

$=\frac{5-x}{x-5}$

$=-1$.

(3)$\frac{5x}{x^2-2xy+y^2}-\frac{5y}{x^2-2xy+y^2}$

$=\frac{5x}{(x-y)^2}-\frac{5y}{(x-y)^2}$

$=\frac{5(x-y)}{(x-y)^2}$

$=\frac{5}{x-y}$.

(4)$\frac{x^2}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x^2-y^2}$

$=\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

$=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{x-y}{x+y}$.

2. 解:(1)最简公分母是 $12x^2y^2$,

$\frac{1}{2x^2y}=\frac{6y}{12x^2y^2}$,$\frac{2}{3x^2}=\frac{8y^2}{12x^2y^2}$,$\frac{3}{4xy^2}=\frac{9x}{12x^2y^2}$.

(2)最简公分母是 $xy(x+y)$,

$\frac{1}{xy}=\frac{x+y}{xy(x+y)}$,$\frac{2}{x^2y+xy^2}=\frac{2}{xy(x+y)}$.

(3)最简公分母是 $(x+2)^2(x-2)$,

$\frac{x}{x^2-4}=\frac{x(x+2)}{(x+2)^2(x-2)}$,

$\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{2(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}$.

3. 解:(1)$\frac{2}{3x^2}-\frac{5}{6x}=\frac{4}{6x^2}-\frac{5x}{6x^2}=\frac{4-5x}{6x^2}$.

(2)$\frac{1}{2x^2y}+\frac{2}{3x^2}-\frac{3}{4xy^2}=\frac{6y}{12x^2y^2}+\frac{8y^2}{12x^2y^2}-\frac{9x}{12x^2y^2}=$

$\frac{6y+8y^2-9x}{12x^2y^2}$.

4. 解:(1)$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{x^2+x-x+1}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

(2)$\frac{y^2}{x^2-xy}+\frac{x}{y-x}$

$=\frac{y^2}{x(x-y)}-\frac{x^2}{x(x-y)}$

$=\frac{(y+x)(y-x)}{x(x-y)}$

$=-\frac{y+x}{x}$.

(3)$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{2a+2b}$

$=\frac{2a^2+2b^2}{2(a+b)(a-b)}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)(a-b)}$

$=\frac{2a^2+2b^2-a^2-b^2+2ab}{2(a+b)(a-b)}$

$=\frac{(a+b)^2}{2(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a+b}{2(a-b)}$.

(4)$\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$

$=\frac{2+2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x+1}$.

(5)$x-y+\frac{y^2}{x+y}$

$=\frac{x-y}{1}+\frac{y^2}{x+y}$

$=\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}+\frac{y^2}{x+y}$

$=\frac{x^2}{x+y}$.

点拨:把 $x-y$ 看成一个分母为 1 的式子,再通分.

5. 解:$1\div\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$=1\div\frac{x+y}{xy}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{xy}{x+y}$(h).

$x-\frac{xy}{x+y}$

$=\frac{x}{1}-\frac{xy}{x+y}$

$=\frac{x^2+xy-xy}{x+y}$

$=\frac{x^2}{x+y}$(h).

答:甲、乙两人合做完成这项工程需要$\frac{xy}{x+y}$ h,合做完成的时间比甲单独做要少$\frac{x^2}{x+y}$ h.

B 组

6. 解:(1)$\frac{1}{a+1}-\frac{a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2+4a+4}$

$=\frac{1}{a+1}-\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{(a+2)^2}$

$=\frac{1}{a+1}-\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}$

$=\frac{a+2-a+1}{(a+1)(a+2)}$

$=\frac{3}{(a+1)(a+2)}$.

(2)$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{2}{1-x}$

$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{1-x}{2}$

$=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1-x}{2}-\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1-x}{2}$

$=\frac{1-x}{2(x+1)}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1-x+x+1}{2(x+1)}$

$=\frac{1}{x+1}$.

7. 解:(1)$\frac{1}{n}$;$\frac{1}{n+1}$

(2)$\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,014)(x+2\,015)}$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+2014}-\frac{1}{x+2\,015}$

$=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+2\,015}$

$=\frac{2x+4\,030-x}{x(x+2\,015)}$

$=\frac{x+4\,030}{x^2+2\,015x}$.

1.5 可化为一元一次方程的分式方程

练习

1. 解:(1)方程两边同乘最简公分母$2x(x-3)$,

得$5(x-3)-2x=0$,

解得$x=5$.

检验:把$x=5$代入原方程,

得左边$=0=$右边,

因此$x=5$是原方程的根.

(2)方程两边同乘最简公分母$2x-1$,

得$x-2=3(2x-1)$,

解得$x=\frac{1}{5}$.

检验:把$x=\frac{1}{5}$代入原方程,

得左边$=3=$右边,

因此$x=\frac{1}{5}$是原方程的根.

(3)方程两边同乘最简公分母$x-1$,

得$1-x=x-1$,

解得$x=1$.

检验:把$x=1$代入原方程,方程左边的分式的分母为0,这样的分式没有意义.

因此,$x=1$不是原分式方程的根,从而原分式方程无解.

(4)方程两边同乘最简公分母

$x(x-1)(x+1)$,得$3(x+1)=x$,

解得$x=-\frac{3}{2}$.

检验:把$x=-\frac{3}{2}$代入原方程,

方程左边$=\frac{4}{5}=$右边,

因此$x=-\frac{3}{2}$是原方程的根.

2. 解:(1)方程两边同乘最简公分母$(x-2)(x+2)$,得

$2(x+2)-4=0$,

解得$x=0$.

检验:把$x=0$代入原方程,

方程左边$=0=$右边,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因此 $x=0$ 是原方程的根.

(2)方程两边同乘最简公分母 $3(2x-1)$,

得 $2x-1-6=1$,

解得 $x=4$.

检验:把 $x=4$ 代入原方程,

方程左边 $=\frac{1}{21}=$ 右边,

因此 $x=4$ 是原方程的根.

练习

1. 解:设由二队单独施工,需要 x 天才能盖成,把盖成这座楼房的工程总量设为 1,

则根据题意,得 $30\times\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{10}\times1$,

即 $\frac{1}{180}+\frac{1}{x}=\frac{1}{100}$,

方程两边同乘最简公分母 $1\ 800x$,

得 $10x+1\ 800=18x$,

解得 $x=225$.

检验:把 $x=225$ 代入 $1\ 800x$ 中,

它的值不为 0,

因此,$x=225$ 是原方程的根,且符合题意.

答:需要 225 天才能盖成.

2. 解:设轮船在静水中航行的速度为 x km/h.

根据题意,得 $\frac{60}{x+2}=\frac{48}{x-2}$.

方程两边同乘最简公分母 $(x+2)(x-2)$,

得 $60(x-2)=48(x+2)$.

解得 $x=18$.

检验:把 $x=18$ 代入 $(x+2)(x-2)$ 中,它的值不等于 0,

因此 $x=18$ 是原方程的根,且符合题意.

答:轮船在静水中航行的速度为 18 km/h.

点拨:解决本题的关键是弄清轮船的顺水航行速度、逆水航行速度与静水航行速度的关系,并找到等量关系.

习题 1.5

A 组

1. 解:(1)方程两边同乘最简公分母 $x+2$,

得 $3x-1=-4(x+2)$,

解得 $x=-1$.

检验:把 $x=-1$ 代入原方程,方程左边 $=-4=$ 右边,

因此 $x=-1$ 是原方程的根.

(2)方程两边同乘最简公分母 $x-1$,

得 $7+3(x-1)=x$,

解得 $x=-2$.

检验:把 $x=-2$ 代入原方程,

方程左边 $=\frac{2}{3}=$ 右边,

因此 $x=-2$ 是原方程的根.

(3)方程两边同乘最简公分母 $6x$,

得 $6+4=5x$,

解得 $x=2$.

检验:把 $x=2$ 代入原方程,

方程左边 $=\frac{5}{6}=$ 右边,

因此 $x=2$ 是原方程的根.

(4)方程两边同乘最简公分母 $x(x+1)$,

得 $x+1=0$,

解得 $x=-1$.

检验:把 $x=-1$ 代入原方程,

方程左边的分式的分母都为 0,这样的分式没有意义,

因此 $x=-1$ 不是原分式方程的根,原分式方程无解.

2. 解:设小青的速度为 x m/s,则小亮的速度为 $1.25x$ m/s.

根据题意,得 $\frac{800}{x}-\frac{800}{1.25x}=40$.

方程两边同乘最简公分母 $1.25x$,

得 $800\times1.25-800=40\times1.25x$.

解得 $x=4$.

检验:当 $x=4$ 时,最简公分母 $1.25x$ 的值为 $1.25\times4=5\neq0$.

因此 $x=4$ 是原方程的根,且符合题意,

$1.25x=1.25\times4=5$.

答:小亮和小青的速度分别是 5 m/s 和 4 m/s.

3. 解:设甲单位有 x 人捐款,则乙单位有 $(x+50)$ 人捐款.

根据题意,得 $\frac{4\ 800}{x}=\frac{6\ 000}{x+50}$,

方程两边同乘最简公分母 $x(x+50)$,

得 $4\ 800(x+50)=6\ 000x$,

解得 $x=200$.

检验,把 $x=200$ 代入 $x(x+50)$ 中,它的值不等于 0,

因此 $x=200$ 是原方程的根,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

此时 $x+50=200+50=250$,

$250+200=450$(人),$\frac{4\,800}{200}=24$(元).

答:这两单位共有 450 人捐款. 人均捐款额是 24 元.

4. 解:设乙每小时录入 x 名学生的成绩,则甲每小时录入 $2x$ 名学生的成绩.

根据题意,得$\frac{2\,640}{x}-\frac{2\,640}{2x}=2$.

方程两边同乘最简公分母 $2x$,

得 $2\times2\,640-2\,640=4x$.

解得 $x=660$.

检验:当 $x=660$ 时,最简公分母 $2x$ 的值不为 0,

因此 $x=660$ 是原方程的根,且符合题意,$2x=1\,320$.

答:甲每小时录入 1 320 名学生的成绩,乙每小时录入 660 名学生的成绩.

B 组

5. 解:(1)方程两边同乘最简公分母 $x-2$,

得 $x-3+x-2=-3$,

解得 $x=1$.

检验:把 $x=1$ 代入原方程,

得左边 $=3=$ 右边,

因此 $x=1$ 是原方程的解.

(2)方程两边同乘最简公分母 $3x(x+8)$,

得 $42x=12(x+8)+10x$,解得 $x=\frac{24}{5}$.

检验:把 $x=\frac{24}{5}$代入原方程,

得左边 $=\frac{35}{32}=$ 右边,

因此$x=\frac{24}{5}$是原方程的解.

6. 解:方程两边同乘最简公分母 RR_1R_2,得 $R_1R_2=R_2R+R_1R$,解得 $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

7. 解:设此商品的进价是 x 元,则商场第一个月销售该商品$\frac{600}{20\%\,x}$件,根据题意可得

$\left(\frac{600}{20\%\,x}+40\right)\times15\%\,x=600+150$,

解得 $x=50$,

经检验,$x=50$ 是原方程的根,

所以$\frac{600}{20\%\,x}+40=100$.

答:此商品的进价是 50 元,商场第二个月销售该商品 100 件.

复习题 1

A 组

1. 解:由$\frac{x^2-4}{2x-5}=0$,得 $x^2-4=0$ 且 $2x-5\neq0$.

由 $x^2-4=0$ 得 $x=\pm2$,

由 $2x-5\neq0$ 得 $x\neq\frac{5}{2}$,所以 $x=\pm2$.

2. 解:$\frac{2x+6}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x-2}{x^2+3x}=\frac{2(x+3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{x-2}{x(x+3)}=\frac{2}{x(x-2)}$,

当 $x=3$ 时,$\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{3(3-2)}=\frac{2}{3}$.

3. 解:(1)$6a^3b\cdot\frac{-3b}{2a}=\frac{-18a^3b^2}{2a}=-9a^2b^2$.

(2)$(-24x^5y^3)\div36x^4y^4=-\frac{24x^5y^3}{36x^4y^4}=-\frac{2x}{3y}$.

(3)$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+x}\cdot\frac{x+1}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{x(x+1)}\cdot\frac{x+1}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x(x+y)}=\frac{x-y}{x^2+xy}$.

(4)$\left(\frac{xz^2}{-y}\right)^3\cdot\left(\frac{y^2}{xz}\right)^4\div\left(\frac{xy}{-2z}\right)^3=\frac{x^3z^6}{-y^3}\cdot\frac{y^8}{x^4z^4}\cdot\frac{-8z^3}{x^3y^3}=\frac{8y^2z^5}{x^4}$.

4. 解:(1)$-2^0=-1$.

(2)$\frac{5x^3y^5}{-2x^2y}=-\frac{5xy^4}{2}$.

(3)$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}=(-4)^3=-64$.

(4)$(-2xy^3)^{-4}=\frac{1}{(-2xy^3)^4}=\frac{1}{16x^4y^{12}}$.

点拨:根据一个数的 $-p$(p 是正整数)次幂等于这个数的倒数的 p 次幂来计算.

5. 解:(1)$0.000\,001\,68=1.68\times10^{-6}$.

(2)$0.000\,000\,052=5.2\times10^{-8}$.

6. 解:(1)$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

$=\frac{x(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{x^2+2x-x+2}{(x-2)(x+2)}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{x^2+x+2}{(x-2)(x+2)}$.

(2)$\frac{8a}{a^2-b^2}+\frac{b}{ab+b^2}$

$=\frac{8ab}{b(a+b)(a-b)}+\frac{b(a-b)}{b(a+b)(a-b)}$

$=\frac{9ab-b^2}{b(a+b)(a-b)}$

$=\frac{b(9a-b)}{b(a+b)(a-b)}$

$=\frac{9a-b}{(a+b)(a-b)}$.

(3)$\frac{x+1}{x^2-2x+1}-\frac{x-1}{x^2-1}$

$=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)}-\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2}$

$=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$

$=\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$.

(4)$\frac{3}{y^2-1}-\frac{2}{y+1}-\frac{1}{y-1}$

$=\frac{3-2(y-1)-(y+1)}{(y+1)(y-1)}$

$=\frac{3-2y+2-y-1}{(y+1)(y-1)}$

$=\frac{4-3y}{(y+1)(y-1)}$.

7. 解:(1)方程两边同乘最简公分母$3-x$,

得$2x+1=-(3-x)$.

解得$x=-4$.

检验:把$x=-4$代入原方程,

得左边$=-1=$右边,

因此,$x=-4$是原方程的根.

(2)方程两边同乘最简公分母

$x(x+1)(x-1)$,

得$2x=x-1$,解得$x=-1$.

检验:把$x=-1$代入原方程,方程两边的分式的分母都为0,这样的分式没有意义. 因此,$x=-1$不是原分式方程的根,从而原分式方程无解.

8. 解:设原计划每天种x棵树,则实际每天种树$\left(x+\frac{1}{3}x\right)$棵.

根据题意可得$\frac{960}{x}-\frac{960}{x+\frac{1}{3}x}=4$,

方程两边同乘最简公分母$\frac{4}{3}x$,

得$960\times\frac{4}{3}-960=4\times\frac{4}{3}x$.

解得$x=60$.

经检验$x=60$是原方程的根.

答:原计划每天种60棵树.

9. 解:设一片国槐树叶一年的平均滞尘量为x mg.

根据题意可得$\frac{1\,000}{2x-4}=\frac{550}{x}$,

方程两边同乘最简公分母$2x(x-2)$,

得$1\,000x=1\,100(x-2)$.

解得$x=22$.

经检验$x=22$是原方程的根.

答:一片国槐树叶一年的平均滞尘量为22 mg.

B组

10. 解:(1)方程两边同乘最简公分母$2(3x-1)$,

得$3(3x-1)-2=1$.

解得$x=\frac{2}{3}$.

检验:把$x=\frac{2}{3}$代入最简公分母$2(3x-1)$中,

得$2\times\left(3\times\frac{2}{3}-1\right)=2\neq0$,

因此,$x=\frac{2}{3}$是原方程的根.

(2)方程两边同乘最简公分母

$x(x+4)(x+12)$,

得$4x(x+12)=3(x+4)(x+12)+x(x+4)$.

解得$x=-36$,

检验:把$x=-36$代入最简公分母$x(x+4)(x+12)$中,

得$-36\times(-36+4)\times(-36+12)=-27\,648\neq0$. 因此$x=-36$是原方程的根.

11. 解:设该校八年级学生的总人数为x.

则$\frac{1\,936}{x}\times80\%=\frac{1\,936}{x+88}$.

方程两边同乘最简公分母$x(x+88)$,

得$1\,936\times80\%(x+88)=1\,936x$.

解得$x=352$.

经检验$x=352$是原方程的根.

答:该校八年级学生的总人数为352.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

C 组

12. 解:(1)如下表:

a	b	$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$	$\frac{4}{ab}$
1	1	4	4
1	2	$\frac{9}{4}$	2
2	2	1	1
2	3	$\frac{25}{36}$	$\frac{2}{3}$
3	3	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{169}{36}$	4

(2)取 $a=2,b=1$,则 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{9}{4},\frac{4}{ab}=\frac{4}{2}=2$.($a,b$ 取值不唯一,只要 a 和 b 不取 0 即可)

(3)猜测:$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{4}{ab}(a>0,b>0)$.

(4)当 $a=b(a>0,b>0)$ 时,

等式 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{4}{ab}$ 成立.

因为左边 $=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\frac{2}{ab}$,右边 $=\frac{4}{ab}$,所以左边 − 右边 $=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\frac{2}{ab}-\frac{4}{ab}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2$. 等式成立等价于 $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=0$,即 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$.

故 $a=b(a>0,b>0)$.

第 2 章 三角形

2.1 三角形

练习

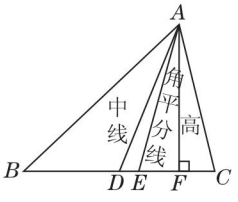
1. 解:(1)图中有 5 个三角形. 它们分别是 $\triangle ABO$,$\triangle BOC$,$\triangle DOC$,$\triangle ABC$,$\triangle BDC$.

(2)$\angle D$ 的对边为 BC,BD 边的对角是 $\angle DCB$.

2. 解:能.

练习

1. 解:如图.



(第 1 题)

点拨:本题答案不唯一.

2. (1)ADC;90　(2)AE;AB

(3)EBF;ABD

练习

1. (1)60°　(2)30°

2. 解:在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle B=36°,\angle C=76°$,

所以 $\angle BAC=68°$.

因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

所以 $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=34°$.

3. 解:因为 $\angle CAD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角,

所以 $\angle CAD=\angle B+\angle C$.

因为 $\angle B=30°,\angle CAD=100°$,

所以 $\angle C=70°$.

习题 2.1

A 组

1. 解:可以;不可以. 因为不在同一条直线上的三条线段首尾相接所构成的图形叫作三角形,A,B,C 三点不在同一条直线上,所以可以构成三角形. 而 A,B,D 三点在同一条直线上,所以不可以构成三角形.

2. 解:(1)不可以. 因为 $3+5<10$,所以不可以.

(2)可以. 因为 $5+4>8$,所以可以.

3. 解:(1)有 2 对. 分别是 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$,$\triangle ADE$ 与 $\triangle CDE$.

(2)12 cm^2

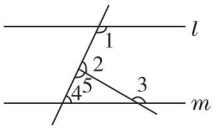
4. 解:如图,因为 $l/\!/m$,所以 $\angle1+\angle4=180°$,

又因为 $\angle2+\angle5=180°,\angle3=\angle4+\angle5$,

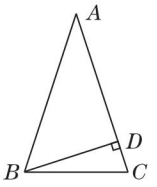
所以 $\angle1+\angle4+\angle2+\angle5=\angle1+\angle2+\angle3=360°$.

因为 $\angle1=115°,\angle2=95°$,

所以 $\angle3=150°$.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 解:如图,因为 $\angle ABC=\angle ACB=2\angle A$.

所以 $\angle A=36°,\angle ABC=\angle ACB=72°$.

因为 $BD\perp AC$,所以 $\angle BDC=90°$.

所以 $\angle DBC=180°-90°-72°=90°-72°=18°$.

B 组

6. 解:若 5 cm 为腰长,则三角形三边长分别为 5 cm,5 cm,6 cm,此时周长为 16 cm;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

若6 cm为腰长,则三角形三边长分别为6 cm,6 cm,5 cm,此时周长为17 cm.

所以此三角形的周长是16 cm或17 cm.

7. **解:**因为$\angle A=40°$,

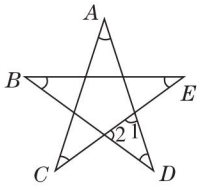
所以$\angle ABC+\angle ACB=180°-40°=140°$.

因为BP,CP分别平分$\angle ABC,\angle ACB$,

所以$\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times140°=70°$.

所以$\angle BPC=180°-(\angle PBC+\angle PCB)=180°-70°=110°$.

8. **解:**如图,因为$\angle1=\angle A+\angle C,\angle2=\angle B+\angle E$,所以$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=\angle1+\angle2+\angle D=180°$.



(第8题)

2.2 命题与证明

练习

1. **解:**(1)不是;(2)是;(3)不是;(4)是.

2. **解:**(1)如果两条直线相交,那么这两条直线只有一个交点.

(2)如果一个整数的个位数字是5,那么这个整数一定能被5整除.

(3)如果两个数互为相反数,那么这两个数的和等于0.

(4)如果一个角是一个三角形的外角,那么它大于这个三角形的任何一个内角.

3. **解:**(1)如果两数的绝对值相等,那么这两个数也相等.

(2)如果m是有理数,那么它也是整数.

(3)内错角相等,两直线平行.

(4)等腰三角形有两边相等.

练习

1. **解:**(1)真命题,因为任意一个数的绝对值都为非负数.

(2)假命题,因为相等的角不一定是对顶角.

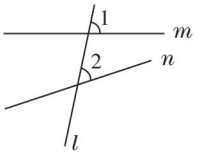
(3)假命题,钝角的补角小于它本身,直角的补角等于它本身.

(4)真命题,因为在同一平面内,垂直于同一直线的两条直线平行.

2. **解:**(1)$42°+42°=84°<90°$.

(2)$(-1)\times(-3)=3>0$,但$-1,-3$均为负数.

(3)如图,直线m,n被直线l所截,但$\angle1\neq\angle2$.



(第2题)

3. **解:**两直线平行,同位角相等;同位角相等,两直线平行.

点拨:本题答案不唯一,合理即可.

练习

1. 同旁内角互补,两直线平行;两直线平行,同旁内角互补

2. **证明:**$\because\angle1=\angle2$,$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore\angle2=\angle3,\angle3+\angle4=180°$.

3. **证明:**$\because AB$与CD相交于点E.

$\therefore\angle AEC=\angle BED$.

又$\because\angle A+\angle C+\angle AEC=\angle B+\angle D+\angle BED=180°$,

$\therefore\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$.

习题2.2

A组

1. **解:**(1)如果两条直线被第三条直线所截形成的同旁内角互补,那么这两条直线平行.

(2)如果$a+b=0$,那么a与b互为相反数.

(3)如果两条直线平行于同一条直线,那么这两条直线平行.

2. **解:**(1)条件:两个角的和等于一个平角(180°),结论:这两个角互为补角.

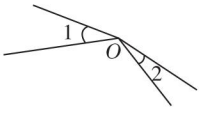
(2)条件:两个图形成轴对称,结论:这两个图形对应点的连线被对称轴垂直平分.

(3)条件:两条直线被第三条直线所截形成的内错角相等,结论:这两条直线平行.

3. **解:**(1)假命题.

理由:$(-1)+1=0$,-1和1都不为0.

(2)假命题. 理由:如图,$\angle1$和$\angle2$有公共顶点,但它们不是对顶角.



(第3题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)真命题. 理由略.

4. 略.

5. **解**:猜测:$(n+1)\times\frac{n+1}{n}=n+1+\frac{n+1}{n}$.

$\because n+1+\frac{n+1}{n}=\frac{n(n+1)}{n}+\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+2n+1}{n}=\frac{(n+1)^2}{n}$,

$(n+1)\times\frac{n+1}{n}=\frac{(n+1)^2}{n}$,

$\therefore (n+1)\times\frac{n+1}{n}=n+1+\frac{n+1}{n}$.

6. **证明**:$\because AB/\!/DC$,$\therefore \angle B+\angle C=180°$.

$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \angle A+\angle B=180°$.

$\therefore \angle A=\angle C$.

7. **证明**:$\because AB/\!/CD$,

$\therefore \angle EGB=\angle EHD$.

$\because$ 射线 GM,HN 分别平分$\angle EGB$,$\angle EHD$,

$\angle EGM=\frac{1}{2}\angle EGB$,$\angle EHN=\frac{1}{2}\angle EHD$,

$\therefore \angle EGM=\angle EHN$.

$\therefore GM/\!/HN$.

B 组

8. **证明**:$\because \angle FEC$ 是$\triangle ADE$ 的外角,

$\therefore \angle FEC=\angle A+\angle ADE$.

$\because \angle ABC$ 是$\triangle FDB$ 的外角,

$\therefore \angle ABC=\angle F+\angle FDB$.

$\because \angle A=\angle ABC$,$\angle ADE=\angle FDB$,

$\therefore \angle F+\angle FEC=\angle F+\angle A+\angle ADE=\angle F+\angle FDB+\angle A=\angle ABC+\angle A=2\angle A$.

9. **证明**:假设$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 中至少有两个钝角,则$\angle A+\angle B+\angle C>180°$,与$\angle A+\angle B+\angle C=180°$不符. 所以$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 中至多有一个角是钝角.

2.3 等腰三角形

练习

1. **解**:$\because AB=AC$,AD 为 BC 边上的高,

$\therefore AD$ 平分$\angle BAC$,点 D 为 BC 的中点.

$\therefore DC=\frac{1}{2}BC$,$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$.

$\because \angle BAC=49°$,$BC=4$,

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\times 49°=24.5°$,

$DC=\frac{1}{2}BC=2$.

2. **解**:$\because AD=AP$,

$\therefore \angle ADP=\angle APD=80°$.

$\because \angle ADP$ 是$\triangle PDC$ 的外角,

$\therefore \angle ADP=\angle C+\angle DPC$.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle C=60°$.

$\therefore \angle DPC=80°-60°=20°$.

练习

1. **证明**:$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\because \angle ABC$ 与$\angle ACB$ 的平分线相交于点 O,

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \angle OBC=\angle OCB$.

$\therefore OB=OC$.

$\therefore \triangle OBC$为等腰三角形.

2. **证明**:$\because \angle ACE=60°$,

$\therefore \angle ACB=120°$.

$\because CD$平分$\angle ACB$,

$\therefore \angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=60°$.

$\because AE/\!/DC$,

$\therefore \angle CAE=\angle ACD=60°$.

$\therefore \angle E=180°-60°-60°=60°$.

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形.

3. **证明**:$\because \angle CDE=120°$,

DF 平分$\angle CDE$,

$\therefore \angle CDF=\frac{1}{2}\times 120°=60°$.

$\because DF/\!/BA$,

$\therefore \angle ABC=\angle CDF=60°$.

又$\because AB=BC$,

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

习题 2.3

A 组

1. **解**:当30°的角为顶角时,其余两个角的度数分别为75°,75°;当30°的角为底角时,其余两个角的度数分别为30°,120°.

2. **解**:$\because AB=AC$,AD 平分$\angle BAC$,

$\therefore AD\perp BC$,D 为 BC 的中点.

$\therefore BC=2CD$.

$\because CD=2$,

$\therefore BC=2CD=4$.

又$\because AD=5$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ACB=60°$.

∵ $\angle ACB$ 是 $\triangle ECD$ 的外角,

$\therefore \angle ACB=\angle D+\angle CED$.

又∵ $CD=CE$,

$\therefore \angle D=\angle CED=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times 60°=30°$.

4. 解:$\triangle ACB$,$\triangle ACD$,$\triangle CDB$,$\triangle CDE$,$\triangle EDB$.

5. 解:由题意知,$AB=20\times 2=40$(海里),

∵ $\angle DBC$ 是 $\triangle ABC$ 的外角,

$\therefore \angle DBC=\angle DAC+\angle C$,

$\therefore \angle C=80°-40°=40°$.

$\therefore \angle C=\angle DAC$.

$\therefore BC=AB=40$ 海里.

答:从 B 处到灯塔 C 的距离为 40 海里.

6. 证明:∵ $AB/\!/DE$,$\therefore \angle DEC=\angle B$.

∵ $\angle B=\angle C$,$\therefore \angle DEC=\angle C$.

∵ $EC=ED$,$\therefore \angle EDC=\angle C$.

$\therefore \angle EDC=\angle C=\angle DEC$.

$\therefore \triangle DEC$ 为等边三角形.

7. 证明:∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形,D 为 AC 的中点,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60°$,$BD$ 平分 $\angle ABC$.

$\therefore \angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$.

∵ $\angle ACB$ 是 $\triangle DCE$ 的外角,

$\therefore \angle ACB=\angle E+\angle CDE$.

∵ $CE=CD$,$\therefore \angle E=\angle CDE=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$.

$\therefore \angle DBC=\angle E$. $\therefore BD=DE$.

B 组

8. 解:设 $\angle A=x°$.

∵ $AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle ACB$.

∵ $AD=DC=BC$,$\therefore \angle ACD=\angle A$,$\angle B=\angle BDC$.

∵ $\angle BDC$ 是 $\triangle ADC$ 的外角,

$\therefore \angle BDC=2\angle A$.

$\therefore \angle B=\angle ACB=\angle BDC=2\angle A$.

$\therefore x+2x+2x=180$,解得 $x=36$.

$\therefore \angle A=36°$,$\angle B=\angle ACB=2\angle A=72°$.

9. 证明:∵ $AB=AC$,$\therefore \angle ABC=\angle C$.

$\therefore \angle A=180°-2\angle C$.

∵ $BD\perp AC$,$\therefore \angle BDC=90°$.

$\therefore \angle DBC=180°-90°-\angle C=90°-\angle C$.

$\therefore \angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

10. 证明:∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A=60°$,$AB=BC=AC$.

∵ 点 D,F 分别为 AB,AC 的中点,

$\therefore AD=\frac{1}{2}AB$,$AF=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore AD=AF$.

$\therefore \triangle DFA$ 为等边三角形.

$\therefore DF=\frac{1}{2}AB$.

同理可得 $DE=\frac{1}{2}AB$,$EF=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore DE=DF=EF$.

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形.

2.4 线段的垂直平分线

练习

1. 解:∵ 点 E 是 AB 的垂直平分线上的点,

$\therefore EA=EB$,

$\therefore \angle EAD=\angle B=30°$.

又∵ $\angle BAC=\angle BAE+\angle CAE=80°$,

$\therefore \angle CAE=\angle BAC-\angle BAE=80°-30°=50°$.

2. 证明:∵ $AC=BC$,

$\therefore$ 点 C 在 AB 的垂直平分线上,

又∵ $AD=BD$,

$\therefore$ 点 D 在 AB 的垂直平分线上.

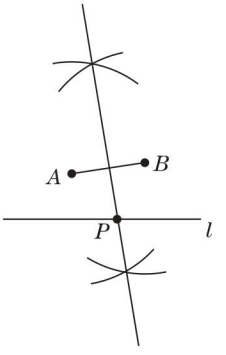
∵ 两点确定一条直线,

$\therefore CD$ 是线段 AB 的垂直平分线.

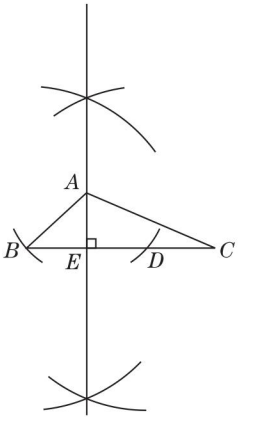
$\therefore AO=BO$.

练习

1. 解:如图所示,点 P 即为所求.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解:如图所示,AE 即为所求.

习题 2.4

A 组

1. 解:∵ $AB=AC$,且 $\angle A=36°$,

$\therefore \angle B=\angle ACB=72°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ ED 为 AC 的垂直平分线，∴ $EA=EC$，

∴ $\angle ECA=\angle A=36°$.

而 $\angle ACB=\angle ACE+\angle ECB$，

∴ $\angle ECB=\angle ACB-\angle ACE=72°-36°=36°$.

∴ $\angle BEC=180°-\angle B-\angle ECB=180°-72°-36°=72°$，

∴ $\angle BEC=\angle B$，

∴ $BC=CE=AE=5$.

2. 证明：∵ 点 C，D 在线段 AB 的垂直平分线上，

∴ $CA=CB$，$DA=DB$.

∴ $\angle CAB=\angle CBA$，$\angle DAB=\angle DBA$.

∴ $\angle CAB+\angle DAB=\angle CBA+\angle DBA$，

即 $\angle CAD=\angle CBD$.

3. 解：∵ 点 F 在 AB 的垂直平分线上，

∴ $FB=FA$.

又∵ 点 N 在 AC 的垂直平分线上，

∴ $NC=NA$.

∴ $\triangle AFN$ 的周长为 $FA+AN+NF=FB+NC+FN=BC=9$.

4. 证明：∵ $\angle B=30°$，$\angle C=90°$，

∴ $\angle BAC=60°$.

又∵ AD 平分 $\angle BAC$，

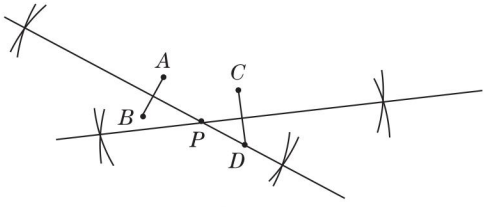
∴ $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$.

∴ $\angle B=\angle BAD$，

∴ $DB=DA$.

∴ 点 D 在 AB 的垂直平分线上.

5. 解：如图所示，P 点即为所求.



（第 5 题）

B 组

6. 解：∵ 点 E 在 AC 的垂直平分线上，

∴ $EA=EC$.

又∵ 点 D 在 AC 的垂直平分线上，

∴ $DA=DC=3$ cm，

∴ $AC=6$ cm.

∵ $\triangle ABE$ 的周长为 $AB+BE+EA=13$ cm，

∴ $AB+BE+EC=AB+BC=13$ cm.

∴ $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=13+6=19$（cm），即 $\triangle ABC$ 的周长为 19 cm.

7. 解：$AO\perp BC$. 理由如下：

∵ $AB=AC$，

∴ 点 A 在 BC 的垂直平分线上.

又∵ $OB=OC$，

∴ 点 O 在 BC 的垂直平分线上，由两点确定一条直线得，AO 是 BC 的垂直平分线，∴ $AO\perp BC$.

2.5 全等三角形

练习

解：（1）AD 和 CB，AF 和 CE，DF 和 BE 分别是对应边；$\angle A$ 和 $\angle C$，$\angle D$ 和 $\angle B$，$\angle AFD$ 和 $\angle CEB$ 分别是对应角.

（2）∵ $\triangle ADF\cong\triangle CBE$，

∴ $\angle C=\angle A=20°$，$DF=BE=3$（全等三角形的对应角相等，对应边相等）.

∴ $\triangle ADF$ 的周长为 $AD+AF+DF=4+6+3=13$，$\angle BEC=180°-\angle B-\angle C=180°-120°-20°=40°$.

练习

1. 解：∵ O 是 AA' 和 BB' 的中点，

∴ $OA'=OA$，$OB'=OB$.

在 $\triangle OA'B'$ 和 $\triangle OAB$ 中，

$$\begin{cases}OA'=OA,\\ \angle A'OB'=\angle AOB\text{（对顶角相等）},\\ OB'=OB,\end{cases}$$

∴ $\triangle OA'B'\cong\triangle OAB$（SAS），

∴ $A'B'=AB$（全等三角形的对应边相等）.

2. 解：是全等三角形.

理由：∵ $AD/\!/BC$，

∴ $\angle DAC=\angle BCA$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CBA$ 中，$\begin{cases}AD=CB,\\ \angle DAC=\angle BCA,\\ AC=CA\text{（公共边）},\end{cases}$

∴ $\triangle ADC\cong\triangle CBA$（SAS）.

3. 证明：∵ $AB=AC$，点 E，F 分别是 AC，AB 的中点，

∴ $AE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=AF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中，

$$\begin{cases}AE=AF,\\ \angle A=\angle A\text{（公共角）},\\ AB=AC,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$（SAS）.

∴ $BE=CF$（全等三角形的对应边相等）.

练习

1. 解：应带玻璃碎片③去. 理由如下：因为玻璃碎片③包含原三角形的两个角以及它们的夹边，根据

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

"ASA"可确定唯一的三角形.

2. 证明: $\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

$\therefore \angle A = \angle A', \angle ACB = \angle A'C'B', AC = A'C'$(全等三角形的对应角相等,对应边相等).

$\because CF, C'F'$分别是$\angle ACB$和$\angle A'C'B'$的平分线,

$\therefore \angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle A'C'B' = \angle A'C'F'$,

在$\triangle ACF$和$\triangle A'C'F'$中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A', \\ AC = A'C', \\ \angle ACF = \angle A'C'F', \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACF \cong \triangle A'C'F'$(ASA).

$\therefore CF = C'F'$(全等三角形的对应边相等).

练习

1. 证明: 在$\triangle ADC$和$\triangle AEB$中,

$$\begin{cases} \angle 2 = \angle 1, \\ \angle A = \angle A(\text{公共角}), \\ AD = AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB$(AAS).

2. 证明: $\because BD \perp AC, CE \perp AB$,

$\therefore \angle BDC = \angle CEB = 90°$.

在$\triangle BDC$和$\triangle CEB$中,

$$\begin{cases} \angle BDC = \angle CEB, \\ \angle DCB = \angle EBC, \\ BC = CB(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle CEB$(AAS),

$\therefore BD = CE$(全等三角形的对应边相等).

练习

1. 解: 相等. 在$\triangle ABC$和$\triangle BAD$中,

$$\begin{cases} AB = BA(\text{公共边}), \\ AC = BD, \\ BC = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$(SSS).

$\therefore \angle 1 = \angle 2$(全等三角形的对应角相等).

2. 证明: $\because AC = BD$,

$\therefore AC + CB = BD + CB$,

即$AB = CD$.

在$\triangle AEB$和$\triangle CFD$中,$\begin{cases} AE = CF, \\ AB = CD, \\ BE = DF, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD$(SSS),

$\therefore \angle A = \angle FCD, \angle EBA = \angle D$.

$\therefore AE /\!/ CF, BE /\!/ DF$.

练习

1. 证明: 连接AC,在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中,

$$\begin{cases} AB = AD, \\ AC = AC, \\ BC = DC, \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC(\text{SSS}).$$

$\therefore \angle B = \angle D$.

2. $AB = DE$; $\angle B = \angle E$; $\angle ACB = \angle DCE$; $BC = EC$.

习题 2.5

A 组

1. 解: 相等的边有$AB = AE, AC = AD, BC = ED, EC = DB$.

相等的角有$\angle C = \angle D, \angle ABC = \angle AED, \angle CBD = \angle DEC$.

2. 解: 对. 理由如下:$\because BE = CF$,

$\therefore BF = CE$.

在$\triangle ABF$和$\triangle DCE$中,$\begin{cases} AB = DC, \\ \angle B = \angle C, \\ BF = CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$(SAS).

$\therefore AF = DE$.

3. 证明: $\because AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle A = \angle D$. 在$\triangle OAB$和$\triangle ODC$中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ OA = OD, \\ \angle AOB = \angle DOC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle ODC$(ASA). $\therefore OB = OC$.

4. 证明: $\because AB \perp AC, AD \perp AE$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 90°$,

$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中,$\begin{cases} \angle BAD = \angle CAE, \\ AB = AC, \\ \angle ABD = \angle ACE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$(ASA),

$\therefore AD = AE$.

5. 证明: 在$\triangle ABC$和$\triangle BAD$中,$\begin{cases} \angle C = \angle D, \\ \angle 1 = \angle 2, \\ AB = BA, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$(AAS).

$\therefore AC = BD$.

$\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore AE = BE$,

$\therefore AC - AE = BD - BE$,即$EC = ED$.

6. 解: 合理. 理由如下:如果$DF = EG$,

则在$\triangle BDF$和$\triangle CEG$中,$\begin{cases} BD = CE, \\ BF = CG, \\ DF = EG, \end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CEG$(SSS).

$\therefore \angle B = \angle C$.

7. 解: 门框本来是长方形的,不具有稳定性,钉上 AB,CD 两根木条后,在门框上方形成两个三角形,利用三角形的稳定性,可以防止门框变形.

8. 证明: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,$\begin{cases} AB = AD, \\ BC = DC, \\ AC = AC, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$(SSS).

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$.

在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle DAP$ 中,

$\begin{cases} AB = AD, \\ \angle BAP = \angle DAP, \\ AP = AP, \end{cases}$

$\therefore \triangle BAP \cong \triangle DAP$(SAS).

$\therefore BP = DP$.

9. 证明: (1)$\because AD = BC$,

$\therefore AC = BD$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BFD$ 中,

$\begin{cases} AE = BF, \\ CE = DF, \\ AC = BD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BFD$(SSS).

$\therefore \angle A = \angle B$.

$\therefore AE /\!/ FB$.

(2)由(1)知,$\angle A = \angle B$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 中,$\begin{cases} AD = BC, \\ \angle A = \angle B, \\ AE = BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF$(SAS).

$\therefore DE = CF$.

B 组

10. 证明: $\because AC$ 是 $\angle DAB$ 的平分线,

$\therefore \angle DAC = \angle BAC$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,$\begin{cases} AB = AD, \\ \angle BAC = \angle DAC, \\ AC = AC, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$,

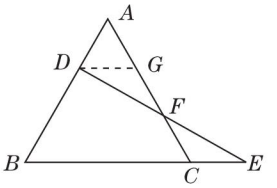
$\therefore \angle ACE = \angle ACF$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ACF$ 中,$\begin{cases} AC = AC, \\ \angle ACE = \angle ACF, \\ CE = CF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ACF$(SAS).

$\therefore AE = AF$.

11. 证明: 如图,过点 D 作 $DG /\!/ BC$ 交 AC 于点 G,



(第 11 题)

则 $\angle E = \angle GDF$,$\angle AGD = \angle ACB$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A = \angle ACB$,

$\therefore \angle A = \angle AGD$.

$\therefore DG = AD$(等角对等边).

又$\because CE = AD$,

$\therefore DG = CE$.

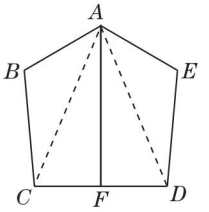
在 $\triangle FDG$ 和 $\triangle FEC$ 中,

$\begin{cases} \angle DFG = \angle EFC, \\ \angle FDG = \angle E, \\ DG = EC, \end{cases}$

$\therefore \triangle FDG \cong \triangle FEC$(AAS).

$\therefore FD = FE$.

12. 证明: 连接 AC,AD,如图所示.



(第 12 题)

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中,

$\begin{cases} AB = AE, \\ \angle B = \angle E, \\ BC = ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED$(SAS).

$\therefore AC = AD$.

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形.

又$\because$ 点 F 是 CD 的中点,

$\therefore AF \perp CD$.

2.6 用尺规作三角形

练习

1. 解: 作法:①以点 A 为圆心,1.5 cm 长为半径画弧;②以点 B 为圆心,1.8 cm 长为半径画弧. 则两弧在 AB 上方的交点即为 C 点. (图略)

2. 解: 作法:①作线段 $BC = b$;②分别以点 B,C 为圆心,a 为半径画弧,两弧交于点 A;③连接 AB,AC. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的等腰三角形. (图略)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

1. 图略. **点拨**:①作直线 l;②在直线 l 上任取一点 C,以点 C 为圆心,任意长为半径画弧,交直线 l 于 A,B 两点;③分别以点 A,B 为圆心,大于 AC 的长为半径画弧,两弧相交于 M,N 两点;④连接 MN. 则 $\angle MCA=\angle MCB=\angle NCA=\angle NCB=90°$.

2. 图略. **点拨**:①同 1 题作法作 $\angle MCP=90°$;②以点 C 为圆心,a 为半径画弧,交射线 CM 于点 B;③以点 C 为圆心,b 为半径画弧,交射线 CP 于点 A;④连接 AB. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的直角三角形.

习题 2.6

A 组

1. 图略. **点拨**:①作直线 l;②以直线 l 上任意一点为圆心,a 为半径画弧,交直线 l 于 D,E 两点;③作线段 $BC=a$;④分别以点 B,C 为圆心,DE 长为半径画弧,两弧交于点 A;⑤连接 AB,AC. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

2. 图略. **点拨**:①作线段 $AD=h$;②过点 D 作直线 $l\perp AD$;③以点 A 为圆心,a 为半径画弧,交直线 l 于 B,C 两点;④连接 AB,AC. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的等腰三角形.

3. 图略. **点拨**:①作 $\angle ABP=\angle\alpha$;②以射线 BP 为一条边,在 $\angle ABP$ 的外部作 $\angle PBC=\angle\beta$. 则 $\angle ABC$ 即为所求作的角.

4. 图略. **点拨**:①作线段 $BC=a$;②以射线 BC 为一条边,作 $\angle MBC=\angle\alpha$;③同 3 题作法,以射线 CB 为一条边,作 $\angle NCB=2\angle\alpha$($\angle MBC$ 和 $\angle NCB$ 在 BC 同侧),射线 BM 和 CN 相交于点 A. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

B 组

5. **解**:图略. 作法:①作 $\angle AOB=\angle\alpha$;②以点 O 为圆心,任意长为半径画弧,分别交射线 OA,OB 于点 M,N;③分别以点 M,N 为圆心,大于 $\frac{1}{2}MN$ 长为半径画弧,两弧在 $\angle AOB$ 内部相交于点 P;④作射线 OP. 则 $\angle AOP$ 及 $\angle BOP$ 为所求作的锐角.

6. **解**:图略. 作法一:①作线段 $EF=BC$;②以点 E 为圆心,AB 长为半径画弧;③以点 F 为圆心,AC 长为半径画弧,交前弧于点 D;④连接 DE,DF. 则 $\triangle DEF$ 为所求作的三角形.

作法二:①作 $\angle MEN=\angle ABC$;②以点 E 为圆心,AB 长为半径画弧,交射线 EM 于点 D;③以点 E 为圆心,BC 长为半径画弧,交射线 EN 于点 F;④连接 DF. 则 $\triangle DEF$ 为所求作的三角形.

作法三:①作线段 $EF=BC$;②在 EF 的同侧分别作 $\angle FEP=\angle ABC$,$\angle EFQ=\angle ACB$,射线 EP 和 FQ 相交于点 D. 则 $\triangle DEF$ 为所求作的三角形. 其中作法一最简便.

点拨:作法不唯一. 利用 SSS,SAS,ASA 均可作出满足条件的三角形.

复习题 2

A 组

1. B 2. 略. 3. (1)36° (2)20°;$\frac{15}{2}$

4. **解**:$\because\ \angle1=\angle2$,

$\therefore AD=AE$,$\angle ADB=\angle AEC$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,$\begin{cases}AD=AE\\ \angle ADB=\angle AEC,\\ BD=CE,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS).

$\therefore AB=AC$.

$\therefore\ \triangle ABC$ 是等腰三角形.

5. **解**:由题图知 $\angle ABC=180°-80°-40°=60°$,

$\angle A=80°-20°=60°$.

$\therefore\ \angle A=\angle ABC$.

$\therefore AC=BC=40\times\frac{1}{2}=20$(海里).

答:货轮到达 C 处时与灯塔 A 的距离为 20 海里.

6. **解**:$\because AD\perp BC$,$BD=DC$,

$\therefore AD$ 是 BC 的垂直平分线,

$\therefore AB=AC$.

又点 C 在 AE 的垂直平分线上,

$\therefore AC=CE$,

$\therefore AB=AC=CE$.

7. **解**:$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore AE=BE$.

$\because\ \triangle BCE$ 的周长为 24,$BC=10$,

$\therefore BE+CE=24-10=14$.

$\therefore AE+CE=14$,即 $AC=14$.

$\because AB=AC$,

$\therefore AB=14$.

8. **解**:$AA'=BB'$.

理由如下:由题意知,$OA'=OA$,$OB'=OB$.

$\because$ 点 O 是 AB 的中点,$\therefore OA=OB$.

$\therefore OA'=OA=OB=OB'$.

在 $\triangle OAA'$ 和 $\triangle OBB'$ 中,$\begin{cases}OA=OB,\\ \angle AOA'=\angle BOB',\\ OA'=OB',\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle OAA' \cong \triangle OBB'$(SAS).

$\therefore AA' = BB'$.

9. **证明:** $\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

$\therefore AB = A'B', \angle A = \angle A'$.

$\because BE, B'E'$分别是AC和$A'C'$上的高,

$\therefore \angle AEB = \angle A'E'B' = 90°$.

在$\triangle ABE$和$\triangle A'B'E'$中,$\begin{cases} \angle AEB = \angle A'E'B', \\ \angle A = \angle A', \\ AB = A'B', \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$(AAS).

$\therefore BE = B'E'$.

10. (2)$AC = DC$; $\angle 3 = \angle 4$; SAS

(3)$AB = DB$; $AC = DC$; SSS

(4)$\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; ASA

(5)$\angle 1 = \angle 2$; $\angle A = \angle D$; AAS

(6)$\angle 3 = \angle 4$; $\angle A = \angle D$; AAS

11. **解:** $\angle BAD = \angle CAD$.

理由如下:$\because AB = AC, AE = \frac{1}{3}AB, AF = \frac{1}{3}AC$,

$\therefore AE = AF$.

在$\triangle AEO$与$\triangle AFO$中,$\begin{cases} AE = AF, \\ OE = OF, \\ AO = AO, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle AFO$.

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

B 组

12. **解:** 若4为腰,则三边长为4,4,6,此时底边长为6;若4为底,则三边长为5,5,4,此时底边长为4. 所以它的底边长为4或6.

13. **解:** 如图,$\because D$是AC的中点,且$BD \perp AC$,

$\therefore BD$是AC的垂直平分线,$AD = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore AB = BC$,

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because DE // BC$,

$\therefore \angle 3 = \angle 2$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore BE = DE$.

$\because AC = 4$ cm,

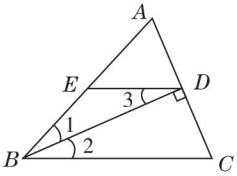
$\therefore AD = \frac{1}{2}AC = 2$ cm.

$\therefore \triangle AED$的周长 $= AE + ED + AD = AE + BE + AD = AB + AD = BC + AD$.

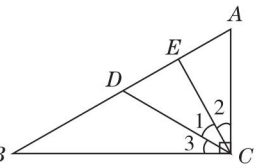
$\because BC = 5$ cm,

$\therefore \triangle AED$的周长 $= 5 + 2 = 7$(cm).

答:$\triangle AED$的周长为7 cm.



(第13题)



(第14题)

14. **解:** 如图,$\because CE$所在直线垂直平分线段AD,

$\therefore AC = CD$.

$\therefore CE$平分$\angle ACD$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because CD$平分$\angle BCE$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

$\because \angle ACB = 90°$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 30°$,

$\therefore \angle ECB = 60°$.

$\because CE \perp AD$,

$\therefore \angle CEB = 90°$.

$\therefore \angle B = 30°$.

$\therefore \angle B = \angle 3$.

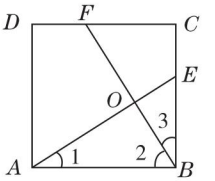
$\therefore BD = CD$.

$\because AC = 5$ cm,

$\therefore BD = CD = AC = 5$ cm.

答:BD的长为5 cm.

15. **解:** 如图,$\because$四边形$ABCD$为正方形,



(第15题)

$\therefore \angle C = \angle ABC = 90°, AB = BC$.

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90°$.

$\because AE$与BF相互垂直,

$\therefore \angle AOB = 90°$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180° - 90° = 90°$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

在$\triangle ABE$与$\triangle BCF$中,$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3, \\ AB = BC, \\ \angle ABC = \angle C, \end{cases}$

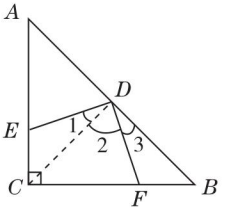
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF$(ASA).

$\therefore AE = BF$. 即它们爬行的距离相等.

16. **证明:** 连接DC,如图,由题意得$\angle B = 45°$,$CD \perp$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

AB,CD 平分$\angle ACB$.



(第 16 题)

$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$,$\angle ACD=\angle DCB=\angle B=45°$.

$\therefore DC=DB$.

$\because DE\perp DF$,

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$

$\therefore \angle 1=\angle 3$.

在$\triangle DEC$与$\triangle DFB$中,$\begin{cases}\angle 1=\angle 3,\\ DC=DB,\\ \angle DCE=\angle B,\end{cases}$

$\therefore \triangle DEC\cong\triangle DFB$(ASA).

$\therefore DE=DF$.

C 组

17. **解:**$BM=CN$. 证明如下:

如图,过点 N 作 $NH\perp AD$,交 AD 于点 H,

则$\angle 2+\angle 3=90°$,$\angle NHE=90°$.

由题意易知 $HN=CD=AB$,$HD=NC$,$\angle A=90°$,

$\angle 1+\angle 2=90°$.

$\therefore \angle 1=\angle 3$.

又$\because AD=2AB$,E 是 AD 的中点,

$\therefore AE=ED=\frac{1}{2}AD=AB$.

$\therefore AE=HN$.

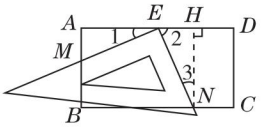
在$\triangle AEM$与$\triangle HNE$中,$\begin{cases}\angle 1=\angle 3,\\ AE=HN,\\ \angle A=\angle NHE=90°,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEM\cong\triangle HNE$.

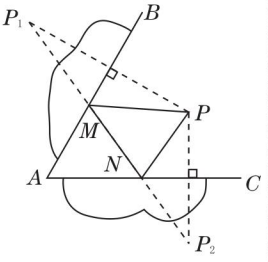
$\therefore EH=AM$.

$\because BM=AB-AM$,$NC=HD=ED-EH$,

$\therefore BM=CN$.



(第 17 题)



(第 18 题)

18. **解:**如图.

作法:①分别作出点 P 关于 AB,AC 的对称点 P_1,P_2;②连接 P_1P_2,交 AB 于点 M,交 AC 于点 N;③连接 PM,PN,养鱼专业户沿路线 $P\to M\to N\to P$ 或 $P\to N\to M\to P$ 走距离最短.

点拨:利用轴对称把折线转化为直线,再根据两点之间线段最短即可得出结论.

第 3 章 实 数

3.1 平方根

练习

1. **解:**由于 $8^2=64$,因此 64 的平方根是 8 与 -8;

由于$\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$,

因此$\frac{49}{81}$的平方根是$\frac{7}{9}$与$-\frac{7}{9}$;

由于 $2.5^2=6.25$,

因此 6.25 的平方根是 2.5 与 -2.5.

2. **解:**由于 $9^2=81$,因此$\sqrt{81}=9$;

由于$\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$,因此$\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$;

由于 $0.4^2=0.16$,因此 $\sqrt{0.16}=0.4$.

3. **解:**(1)正确;(2)正确;

(3)不正确;(4)不正确.

练习

1. **解:**(1) $\sqrt{3\,136}=56$.

(2) $\sqrt{1.537\,6}=1.24$.

2. **解:**设正方形的边长是 x cm,则 $x^2=6$.

所以 $x=\sqrt{6}\approx 2.449$.

答:它的边长是$\sqrt{6}$ cm,边长的近似值是 2.449 cm.

3. **解:**$\sqrt{2}\approx 1.414$;$\sqrt{3}\approx 1.732$;$\sqrt{5}\approx 2.236$; $\sqrt{11}\approx 3.317$; $\sqrt{0.58}\approx 0.762$.

习题 3.1

A 组

1. **解:**由于 $7^2=49$,因此 49 的平方根是 7 与 -7;

由于 $1.6^2=2.56$,

因此 2.56 的平方根是 1.6 与 -1.6;

由于$\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$,

因此$\frac{9}{100}$的平方根是$\frac{3}{10}$与$-\frac{3}{10}$.

2. **解:**由于 $5^2=25$,因此 $\sqrt{25}=5$;

由于 $0.9^2=0.81$,因此 $\sqrt{0.81}=0.9$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由于$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，因此$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$.

3. 解：$\sqrt{1}=1$；$-\sqrt{2\frac{1}{4}}=-\frac{3}{2}$；$\pm\sqrt{\frac{49}{16}}=\pm\frac{7}{4}$；$\sqrt{0.0049}=0.07$；$\pm\sqrt{(-7)^2}=\pm7$；$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

4. 解：$\sqrt{529}=23$；$\sqrt{8.41}=2.9$；$\sqrt{729}=27$.

5. 解：设正方形的边长是 x m，则 $x^2=10$.

所以 $x=\sqrt{10}\approx3.162$.

答：它的边长是 $\sqrt{10}$ m，近似值是 3.162 m.

6. 解：$\sqrt{7}\approx2.646$；$\sqrt{12}\approx3.464$.

B 组

7. 解：$-b$ 有平方根，因为 $b=-169$，所以 $-b=169$.

由于 $13^2=169$，因此 169 的平方根是 13 与 -13，即 $-b$ 的平方根是 13 与 -13.

点拨：只有非负数才有平方根，要判断一个数有没有平方根就看它是否是非负数.

8. (1)16；36；16；16　(2)a；$|b|$

点拨：由此题可归纳出：$(\pm\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$，$\sqrt{a^2}=|a|$（$a$ 为任意实数）.

9. 解：22 与 23.

10. 解：0.03；0.3；3；30；300

规律：根号内的数的小数点每向左（或向右）移动两位，结果的小数点就向左（或向右）移动一位.

3.2 立方根

练习

1. 解：由于 $1^3=1$，因此$\sqrt[3]{1}=1$；

由于$\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$，因此$\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\frac{5}{2}$；

由于$(-0.5)^3=-0.125$，

因此$\sqrt[3]{-0.125}=-0.5$.

2. 解：$\sqrt[3]{-1\,000}=-10$；$\sqrt[3]{216}=6$；

$\sqrt[3]{-3.375}=-1.5$.

3. 解：$\sqrt[3]{3}\approx1.442$；$\sqrt[3]{5}\approx1.710$；$\sqrt[3]{-7}\approx-1.913$.

习题 3.2

A 组

1. 解：(1)不正确. -4 是 -64 的立方根；

(2)不正确. -64 的立方根是 -4；

(3)正确；

(4)正确.

2. 解：设它的棱长是 x cm，则 $x^3=500$.

所以$x=\sqrt[3]{500}\approx7.94$.

答：它的棱长大约是 7.94 cm.

3. 解：由于$(-6)^3=-216$，因此$\sqrt[3]{-216}=-6$；

由于$\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}$，因此$\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\frac{5}{4}$；

由于$(-0.2)^3=-0.008$，

因此$\sqrt[3]{-0.008}=-0.2$；

由于$(100)^3=10^6$，因此$\sqrt[3]{10^6}=100$.

4. 解：$-\sqrt[3]{-1}=1$；$\sqrt[3]{-0.001}=-0.1$；$-\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=-\frac{4}{5}$；$\sqrt[3]{10^3}=10$.

B 组

5. (1)64；-64；2；-2　(2)a；b

点拨：$(\sqrt[3]{a})^3=a$，$\sqrt[3]{b^3}=b$.

6. 解：设捏成的长方体橡皮泥的长是 x cm，则侧面边长为$\frac{1}{2}x$ cm，所以长方体体积为$\frac{1}{4}x^3$ cm^3.

又因为正方体体积为 $4^3=64$(cm^3)，所以$\frac{1}{4}x^3=64$，$x=\sqrt[3]{256}\approx6.3$.

答：捏成的长方体橡皮泥的长大约是 6.3 cm.

7. 解：0.06；0.6；6；60　规律：在开立方运算时，根号内的数的小数点每向左（或向右）移动三位，结果的小数点就向左（或向右）移动一位.

3.3 实　数

练习

1. 有理数：-3.14，1.732，0，$\frac{3}{10}$，18，$\sqrt{\frac{25}{36}}$，$-\sqrt{16}$

无理数：$-\pi$，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$

2. 解：相反数分别为 -3.14，$\sqrt{7}$，$\frac{\pi}{2}$，$3.15-\pi$；

绝对值分别为 3.14，$\sqrt{7}$，$\frac{\pi}{2}$，$3.15-\pi$.

3. (1)√　(2)×　(3)×

练习

1. 解：(1)$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

(2)$3\sqrt{5}-5\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$.

2. 解：(1)$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx3.15$.

(2)$\sqrt[3]{5}-1\approx0.71$.

(3)$\sqrt{5}\pi\approx7.02$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:$\sqrt{37}>6$.

习题 3.3

A 组

1. 解:有理数:$\frac{22}{7}$,3.141 592 6,$3.\dot{3}$,$\sqrt{1}$,$-\sqrt[3]{8}$;

无理数:$\sqrt{5}$,$\sqrt[3]{9}$.

2. 解:相反数分别为$-\sqrt[3]{2}$,$-\frac{\sqrt{5}}{2}$,2.8,$-\sqrt{8}$,

3.141 5,$-\pi$;

绝对值分别为:$\sqrt[3]{2}$,$\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\sqrt{8}$,2.8,π,3.141 5.

3. a^{n+m};a^{nm};$a^n b^n$

4. 解:(1)$3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$.

(2)$2\sqrt[3]{5}-(-\sqrt[3]{5})=2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}=3\sqrt[3]{5}$.

5. 解:(1)$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 7.71$.

(2)$\sqrt{23}\div\sqrt{13}\approx 1.33$.

6. 解:$5<\sqrt{26}$.

7. 解:设它的半径是 x m,则 $\pi\cdot x^2=12.61$.

所以 $x=\sqrt{\frac{12.61}{\pi}}\approx 2.00$.

答:它的半径大约是 2.00 m.

B 组

8. 解:$\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}$;$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$.

9. 解:当 $a=\sqrt{2}$,$b=\sqrt[3]{2}$ 时,

(1)$a^2-b^3=(\sqrt{2})^2-(\sqrt[3]{2})^3=2-2=0$;

(2)$a^6-b^6=(\sqrt{2})^6-(\sqrt[3]{2})^6=2^3-2^2=4$.

10. 解:(1)$3x+\sqrt{2}=0$,所以 $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(2)$-2x+\sqrt{5}=0$,所以 $-2x=-\sqrt{5}$,

所以$x=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

11. 解:设它的底面周长是 x m,则 $\pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=1\,658$,所以 $x=\sqrt{1\,658\times 4\pi}\approx 144.34$.

答:它的底面周长大约是 144.34 m.

复习题 3

A 组

1. (1)$\sqrt[3]{12}$,0.7,$\frac{\pi}{2}$,$\sqrt{3}$,0.686 886 888 6…(相邻两个 6 之间 8 的个数逐次加 1)

(2)$-\frac{1}{9}$,$\sqrt[3]{-27}$

(3)$-\frac{1}{9}$,0.7,$\sqrt[3]{-27}$,0

(4)$\sqrt[3]{12}$,$\frac{\pi}{2}$,$\sqrt{3}$,0.686 886 888 6…(相邻两个 6 之间 8 的个数逐次加 1)

2. 解:有理数:$\pm\sqrt{1}$,$\pm\sqrt{4}$,$\pm\sqrt{9}$,$\sqrt[3]{1}$,$\sqrt[3]{8}$;

无理数:$\pm\sqrt{2}$,$\pm\sqrt{3}$,$\pm\sqrt{5}$,$\pm\sqrt{6}$,$\pm\sqrt{7}$,$\pm\sqrt{8}$,$\pm\sqrt{10}$,$\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[3]{3}$,$\sqrt[3]{4}$,$\sqrt[3]{5}$,$\sqrt[3]{6}$,$\sqrt[3]{7}$,$\sqrt[3]{9}$,$\sqrt[3]{10}$.

3. 解:由于 $4^2=(-4)^2$,因此 $(-4)^2$ 的平方根是 4 与 -4;

由于 $3^2=\sqrt{81}$,因此 $\sqrt{81}$ 的平方根是 3 与 -3;

由于 $\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$,因此 $\frac{49}{81}$ 的平方根是 $\frac{7}{9}$ 与 $-\frac{7}{9}$.

4. 解:$\sqrt{481}\approx 21.932$;$\sqrt{0.357}\approx 0.597$;$\sqrt{8.26}\approx 2.874$.

5. 解:$(-4)^3$ 的立方根是 -4;

由于 $2^3=\sqrt{64}$,因此 $\sqrt{64}$ 的立方根是 2;

由于 $\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-3\frac{3}{8}$,

因此 $-3\frac{3}{8}$ 的立方根是 $-\frac{3}{2}$.

6. (1)81 (2)13 (3)27 (4)-13

7. (1)a (2)$|a|$;a (3)0 (4)0,± 1

8. 解:相反数分别为 2.5,$\sqrt{7}$,$\frac{\pi}{2}$,$\sqrt{15}-4$;

绝对值分别为 2.5,$\sqrt{7}$,$\frac{\pi}{2}$,$4-\sqrt{15}$.

9. 解:(1)$\sqrt[3]{-1}=-1$.

(2)$\sqrt{\frac{25}{121}}=\frac{5}{11}$.

(3)$-\sqrt{\frac{4}{81}}=-\frac{2}{9}$.

(4)$\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{5}{3}$.

10. 解:(1)$3(\sqrt{2}-\sqrt{3})+3\sqrt{2}=3\sqrt{2}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}=6\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

(2)$(-\sqrt{2})^2-(\sqrt[3]{2})^3=2-2=0$.

11. 解:(1)$5\sqrt{2}-2\sqrt{3}+1\approx 4.61$.

(2)$3\sqrt{7}+5-\sqrt{11}\approx 9.62$.

12. 解:$\sqrt{86}<10$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

B 组

13. 解：$x=2$，$x=3$.

14. 解：$x=\sqrt{5}$时，(1)$\sqrt{3}x+2=\sqrt{3}\times\sqrt{5}+2\approx5.873$.

(2)$\pi x^2=\pi\times(\sqrt{5})^2\approx15.708$.

15. 解：设这座球形建筑物的半径是 x m，

则$\frac{4}{3}\pi x^3=100$，所以 $x=\sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}}\approx2.88$.

答：这座球形建筑物的半径约是 2.88 m.

C 组

16. 解：圆的周长：$2\pi\cdot\sqrt{\frac{4\pi}{\pi}}\approx12.57$(cm)，

正方形的周长：$4\cdot\sqrt{4\pi}\approx14.18$(cm)，

∵ 12.57 < 14.18，

∴ 圆的周长小于正方形的周长.

17. 解：(1) 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987.

(2) 1.000 0，0.500 0，0.666 7，0.600 0，0.625 0，0.615 4，0.619 0，0.617 6，0.618 2，0.618 0，0.618 1，0.618 0，0.618 0，0.618 0，0.618 0.

(3)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$.

(4)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx\frac{610}{987}$(答案不唯一).

第 4 章 一元一次不等式(组)

4.1 不等式

练习

1. 解：(1)$a\geqslant0$. (2)$x<-3$. (3)$m-n>5$.

2. 解：$7\times10\leqslant x\leqslant7+9\times10$，即 $70\leqslant x\leqslant97$.

点拨：前十箭中最低每箭都得 7 分，最高有一箭得 7 分，其余每箭都得满分，所以求 x 的范围列式为 $7\times10\leqslant x\leqslant7+9\times10$.

习题 4.1

A 组

1. 解：$0<h\leqslant4.5$.

2. 解：(1)$2x-1\geqslant3$.

(2)$(x+y)^2>100$.

(3)$ab+a>12$.

B 组

3. 解：$1\leqslant x\leqslant\frac{81-6}{5}+1$，即 $1\leqslant x\leqslant16$(x 为正整数).

4. 解：设 A 型冰箱降价 x 元.

则可得不等式 $2\,190-x-1\,700\geqslant3\%\times1\,700$，

解得 $x\leqslant439$.

因为 $x>0$，所以 $0<x\leqslant439$.

4.2 不等式的基本性质

练习

1. (1) < (2) >

2. 解：(1)不等式的两边都减去 1，由不等式基本性质 1，得 $1+x-1>3-1$，即 $x>2$.

(2)不等式的两边都减去 x，由不等式基本性质 1，得 $2x-x<x+6-x$，即 $x<6$.

练习

1. (1) > (2) < (3) <

2. (1) >；< (2) <；<；>

习题 4.2

A 组

1. (1) > (2) < (3) > (4) >

2. 解：(1)不等式的两边都减去 1，由不等式基本性质 1，得 $x+1-1<5-1$，即 $x<4$.

(2)不等式的两边都减去 $6x$，由不等式基本性质 1，得 $7x-6x<6x+3-6x$，即 $x<3$.

3. (1) > (2) < (3) < (4) >

4. 解：(1)不等式的两边都减去 5，由不等式基本性质 1，得 $2x+5-5>3-5$.

化简，得 $2x>-2$.

两边都除以 2，由不等式基本性质 2，得 $x>-1$.

(2)不等式的两边都加上 7，由不等式基本性质 1，得 $6x-7+7<0+7$.

化简，得 $6x<7$.

两边都除以 6，由不等式基本性质 2，得$x<\frac{7}{6}$.

(3)两边都减去 2，由不等式基本性质 1，得 $-3x+2-2>4-2$.

化简，得 $-3x>2$.

两边都除以 -3，由不等式基本性质 3，得 $x<-\frac{2}{3}$.

(4)两边都减去 4，由不等式基本性质 1，

得 $-\frac{1}{4}x+4-4>\frac{1}{2}-4$.

化简，得 $-\frac{1}{4}x>-\frac{7}{2}$.

两边都除以 $-\frac{1}{4}$，由不等式基本性质 3，得 $x<14$.

B 组

5. (1)≠ (2) <

6. (1) > (2) = (3) <

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:由题意得,$25-5x<15$.

不等式的两边都减去 25,由不等式基本性质 1,得 $-5x<-10$.

两边都除以 -5,由不等式基本性质 3,得 $x>2$.

4.3 一元一次不等式的解法

练习

1. 解:(1)两边都除以 -5,得 $x\geqslant -2$.

(2)移项,得 $4x-10x<7+3$.

合并同类项,得 $-6x<10$.

两边都除以 -6,得 $x>-\frac{5}{3}$.

2. 解:(1)去括号,得 $3x-1>4-10x$.

移项,得 $3x+10x>4+1$.

合并同类项,得 $13x>5$.

两边都除以 13,得 $x>\frac{5}{13}$.

(2)去分母,得 $2(x+2)\geqslant 3(2x-3)$.

去括号,得 $2x+4\geqslant 6x-9$.

移项,得 $2x-6x\geqslant -9-4$.

合并同类项,得 $-4x\geqslant -13$.

两边都除以 -4,得 $x\leqslant\frac{13}{4}$.

点拨:解不等式与解方程的过程基本相同,但要注意两边同时乘或除以一个负数时,不等号要改变方向.

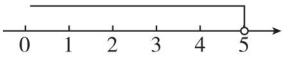
练习

1. 解:(1)移项,得 $4x-2x<7+3$.

合并同类项,得 $2x<10$.

两边都除以 2,得 $x<5$.

原不等式的解集在数轴上表示如图所示.



[第 1(1)题]

(2)去分母,得 $2(x-3)>3x+5$.

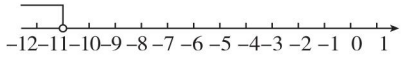
去括号,得 $2x-6>3x+5$.

移项,得 $2x-3x>5+6$.

合并同类项,得 $-x>11$.

两边都除以 -1,得 $x<-11$.

原不等式的解集在数轴上表示如图所示.



[第 1(2)题]

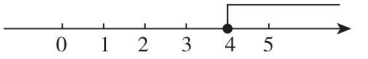
点拨:在数轴上表示解集时,有等号的用实心圆点,没有等号的用空心圆圈.

2. 解:(1)$\frac{1}{2}x\geqslant 2$,解得 $x\geqslant 4$. 解集在数轴上表示如图所示.

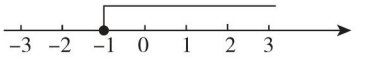
(2)$x+2\geqslant 1$,解得 $x\geqslant -1$. 解集在数轴上表示如图所示.

(3)$y-1\leqslant 0$,解得 $y\leqslant 1$. 解集在数轴上表示如图所示.

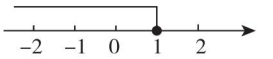
(4)$y-5>-2$,解得 $y>3$. 解集在数轴上表示如图所示.



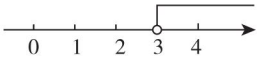
[第 2(1)题]



[第 2(2)题]



[第 2(3)题]



[第 2(4)题]

习题 4.3

A 组

1. 解:(1)移项,得 $3x>15$.

两边都除以 3,得 $x>5$.

(2)移项,得 $4x-3x<6+5$,

合并同类项,得 $x<11$.

(3)去分母,得 $4(2x-1)\leqslant 3(3-4x)$.

去括号,得 $8x-4\leqslant 9-12x$.

移项,得 $8x+12x\leqslant 9+4$.

合并同类项,得 $20x\leqslant 13$.

两边都除以 20,得 $x\leqslant\frac{13}{20}$.

(4)去分母,得 $4(3x+2)+2>5+x$.

去括号,得 $12x+8+2>5+x$.

移项,得 $12x-x>5-2-8$.

合并同类项,得 $11x>-5$.

两边都除以 11,得 $x>-\frac{5}{11}$.

2. 解:根据题意,得 $\frac{3x-5}{7}-\frac{x+4}{3}\geqslant 1$.

去分母,得 $3(3x-5)-7(x+4)\geqslant 21$.

去括号,得 $9x-15-7x-28\geqslant 21$.

移项,得 $9x-7x\geqslant 21+15+28$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

合并同类项，得 $2x \geqslant 64$.

两边都除以 2，得 $x \geqslant 32$.

所以当 $x \geqslant 32$ 时，代数式 $\frac{3x-5}{7}-\frac{x+4}{3}$ 的值不小于 1.

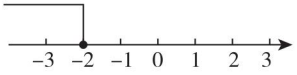
点拨：由已知条件建立不等式，不小于就是“大于或等于”.

3. 解：(1) 移项，得 $5x-7x \geqslant 5-1$.

合并同类项，得 $-2x \geqslant 4$.

两边同时除以 -2，得 $x \leqslant -2$.

解集在数轴上表示如图所示.



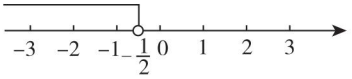
[第 3(1)题]

(2) 移项，得 $-2x-6x>5-1$.

合并同类项，得 $-8x>4$.

两边都除以 -8，得 $x<-\frac{1}{2}$.

解集在数轴上表示如图所示.



[第 3(2)题]

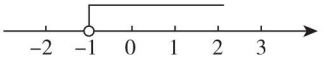
(3) 去分母，得 $2x-3<4x-1$.

移项，得 $2x-4x<-1+3$.

合并同类项，得 $-2x<2$.

两边都除以 -2，得 $x>-1$.

解集在数轴上表示如图所示.



[第 3(3)题]

(4) 去分母，得 $2\times4(1+x)-6 \leqslant 3(4+x)$.

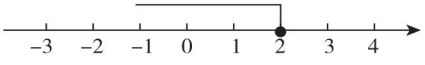
去括号，得 $8+8x-6 \leqslant 12+3x$.

移项，得 $8x-3x \leqslant 12-8+6$.

合并同类项，得 $5x \leqslant 10$.

两边都除以 5，得 $x \leqslant 2$.

解集在数轴上表示如图所示.



[第 3(4)题]

4. 解：(1) $x<2$.

(2) $x \geqslant -3$.

点拨：看线的方向确定不等号的方向，看是实心圆点还是空心圆圈确定有无等号.

5. 解：根据题意，得 $\frac{3-x}{2}<3$. 解得 $x>-3$.

所以当 $x>-3$ 时，代数式 $\frac{3-x}{2}$ 的值小于 3.

满足条件的负整数有 -2，-1.

B 组

6. 解：因为不等式的解集是 $x<1$，

所以 $a+1<0$，即 $a<-1$.

7. 解：(1) 去括号，得 $5x-10+8<6x-6+7$.

移项，得 $5x-6x<-6+7+10-8$.

合并同类项，得 $-x<3$.

两边同时除以 -1，得 $x>-3$.

(2) 由题意，得 $x=-2$ 是方程 $2x-ax=3$ 的解，

所以 $2\times(-2)-a\times(-2)=3$，

解得 $a=\frac{7}{2}$.

4.4 一元一次不等式的应用

练习

1. 解：设需要购买 x 块这样的地板砖.

5 m = 500 cm，4 m = 400 cm.

则 $60^2x \geqslant 500\times400$.

解这个不等式，得 $x \geqslant 55\frac{5}{9}$.

由于地板砖的数目必须是整数，

所以 x 的最小值为 56.

答：至少需要购买 56 块这样的地板砖.

点拨：根据实际可知，购买的地板砖必须够用，所以至少需要购买 56 块这样的地板砖.

2. 解：设她打了 x min 的电话.

根据题意，得 $0.22+(x-3)\times0.11 \leqslant 0.5$.

解这个不等式，得 $x \leqslant 5\frac{6}{11}$.

答：她最多打了 5 min 的电话.

点拨：由于通话 3 min 以后，不足 1 min 部分按 1 min计算，所以 x 的最大值是 5.

习题 4.4

A 组

1. 解：设这个两位数是 x.

则 $x+\frac{1}{2}x<20$.

解这个不等式，得 $x<13\frac{1}{3}$.

答：这个两位数最大是 13.

2. 解：设该零件需要销售 x 个.

根据题意，得 $(5-3)x-5\times10\% \geqslant 30\,000$.

解这个不等式，得 $x \geqslant 20\,000$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答:该零件至少要销售20 000个.

点拨:用总的利润减去纳税款后,可得纯利润.

3. **解**:设天气转好后平均每天要完成x m.

根据题意,得$(14-4)x+4\times100\geqslant1\ 900$.

解这个不等式,得$x\geqslant150$.

答:天气转好后平均每天至少要完成150 m.

4. **解**:设该球队投中x个3分球,

则$3x+2(45-x)\leqslant100$.

解这个不等式,得$x\leqslant10$.

答:该球队最多投中10个3分球.

5. **解**:设这个班上有x名学生.

根据题意,得$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+6\geqslant x$,

解这个不等式,得$x\leqslant56$.

答:这个班上最多有56名学生.

B组

6. **解**:设乙班有x人.

根据题意,得$46\times50+42x\leqslant44(x+50)$.

解这个不等式,得$x\geqslant50$.

答:乙班至少有50人.

7. **解**:方案(1)所需总钱数为$1\ 200\times20+200(x-20)=20\ 000+200x$.

方案(2)所需总钱数为$1\ 200\times90\%\times20+200\times90\%\cdot x=21\ 600+180x$.

假设方案(1)最省钱,则$20\ 000+200x<21\ 600+180x$.

解这个不等式,得$x<80$.

假设方案(1)与方案(2)所需钱数相等,则有$20\ 000+200x=21\ 600+180x$,解得$x=80$.

假设方案(2)最省钱,则$20\ 000+200x>21\ 600+180x$,解得$x>80$.

答:当$20<x<80$时,选择方案(1)最省钱;当$x=80$时,选择方案(1)和方案(2)所需总钱数相等;当$x>80$时,选择方案(2)最省钱.

4.5 一元一次不等式组

练习

1. $x>-3$;$-5<x\leqslant-3$;$x<-3$;无解

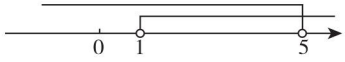
点拨:利用数轴找两个不等式的解集的公共部分或利用口诀"同大取大,同小取小,大小小大中间找,大大小小无处找"来求不等式组的解集.

2. **解**:(1)$\begin{cases}2x-4<x+1,①\\2x-4>-(x+1).②\end{cases}$

解不等式①,得$x<5$.

解不等式②,得$x>1$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第2(1)题]

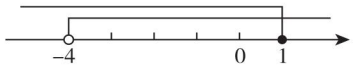
由图可知,不等式①、②的解集的公共部分是$1<x<5$,所以这个不等式组的解集是$1<x<5$.

(2)$\begin{cases}3x+2>2(x-1),①\\4x-3\leqslant3x-2.②\end{cases}$

解不等式①,得$x>-4$.

解不等式②,得$x\leqslant1$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第2(2)题]

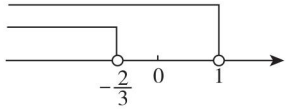
由图可知,不等式①、②的解集的公共部分是$-4<x\leqslant1$,所以这个不等式组的解集是$-4<x\leqslant1$.

(3)$\begin{cases}2x+1<3,①\\3x+4<2.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<1$.

解不等式②,得$x<-\frac{2}{3}$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第2(3)题]

由图可知,不等式①、②的解集的公共部分是$x<-\frac{2}{3}$,

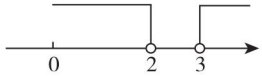
所以这个不等式组的解集为$x<-\frac{2}{3}$.

(4)$\begin{cases}2x<x+2,①\\x+6<4x-3.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<2$.

解不等式②,得$x>3$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第2(4)题]

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由图可以看出这两个不等式的解集没有公共部分，所以这个不等式组无解.

习题 4.5

A 组

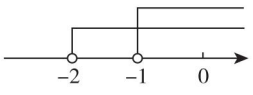
1. 解：(1) $\begin{cases}2x+5>3,① \\ 3x-2<4x.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-1$.

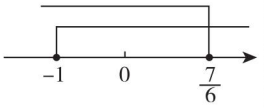
解不等式②，得 $x>-2$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图所示.

由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $x>-1$，所以这个不等式组的解集为 $x>-1$.



[第 1(1)题]



[第 1(2)题]

(2) $\begin{cases}6x-7\leqslant 0,① \\ 3x\leqslant 5x+2.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x\leqslant\frac{7}{6}$.

解不等式②，得 $x\geqslant -1$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图所示.

由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $-1\leqslant x\leqslant\frac{7}{6}$，

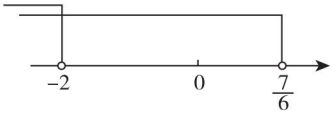
所以这个不等式组的解集为 $-1\leqslant x\leqslant\frac{7}{6}$.

(3) $\begin{cases}\frac{1}{2}x<\frac{7}{12},① \\ -\frac{1}{4}x>\frac{1}{2}.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<\frac{7}{6}$.

解不等式②，得 $x<-2$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图所示.



[第 1(3)题]

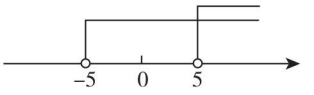
由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $x<-2$，所以这个不等式组的解集为 $x<-2$.

(4) $\begin{cases}3x-4>11,① \\ 5(x+1)>4x.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>5$.

解不等式②，得 $x>-5$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图所示.



[第 1(4)题]

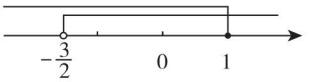
由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $x>5$，所以不等式组的解集为 $x>5$.

2. 解： $\begin{cases}5x-1>3x-4,① \\ -\frac{1}{3}x\leqslant\frac{2}{3}-x.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-\frac{3}{2}$.

解不等式②，得 $x\leqslant 1$.

把不等式①、②的解集在数轴上表示出来，如图所示.



(第 2 题)

由图可知，不等式①、②的解集的公共部分是 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$，所以这个不等式组的整数解是 $-1,0,1$.

点拨：先分别求出两个不等式的解集，再利用数轴找出两个不等式解集的公共部分，最后在解集的公共部分内取整数解即可.

3. 解：因为 $\begin{cases}x<3a+2, \\ x<a-4\end{cases}$ 的解集是 $x<3a+2$，

所以 $3a+2\leqslant a-4$.

解得 $a\leqslant -3$，所以 a 的取值范围是 $a\leqslant -3$.

点拨：利用口诀“同小取小”可知 $3a+2\leqslant a-4$，解这个不等式即可求出 a 的取值范围.

B 组

4. 解：设小明今年 x 岁，则小华今年 $(x-8)$ 岁.

根据题意，得 $\begin{cases}x>2(x-8),① \\ (x-8)+2>\frac{1}{2}(x+2).②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<16$. 解不等式②，得 $x>14$.

所以原不等式组的解集为 $14<x<16$.

因为 x 是整数，所以 $x=15$，$x-8=7$.

答：小明今年 15 岁，小华今年 7 岁.

点拨：分析题中数量关系，找准不等关系列出不

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

等式,组成不等式组,求出解集,依据实际情况作答.

复习题4

A组

1. 解:(1)$4x<7$.

(2)$2a-1\leqslant -3$.

(3)$\frac{y}{2}+6\leqslant 3$.

2. (1)< (2)> (3)≥ (4)≥

3. 解:(1)不等号没有改变方向.

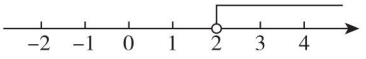
(2)忽略了x的正负.

4. 解:(1)移项,得$3x-5x<1-5$.

合并同类项,得$-2x<-4$.

两边都除以-2,得$x>2$.

解集在数轴上的表示如图所示.



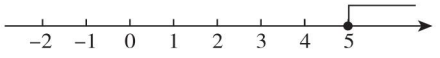
[第4(1)题]

点拨:两边都除以负数,不等号方向改变.

(2)移项,得$-5x+6x\geqslant 7-2$.

合并同类项,得$x\geqslant 5$.

解集在数轴上的表示如图所示.



[第4(2)题]

(3)去分母,得$5(x-3)>2(x+6)$.

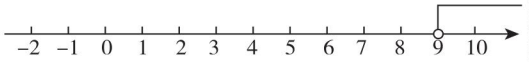
去括号,得$5x-15>2x+12$.

移项,得$5x-2x>12+15$.

合并同类项,得$3x>27$.

两边都除以3,得$x>9$.

解集在数轴上的表示如图所示.



[第4(3)题]

(4)去分母,得$5(x+2)>4(2x-2)$.

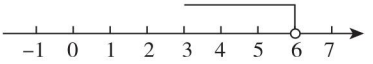
去括号,得$5x+10>8x-8$.

移项,得$5x-8x>-8-10$.

合并同类项,得$-3x>-18$.

两边都除以-3,得$x<6$.

解集在数轴上的表示如图所示.



[第4(4)题]

点拨:去分母时,右边的$2x-2$也要乘4.

5. 解:(1)去括号,得$10-4x+12\leqslant 2x-2$.

移项,得$-4x-2x\leqslant -2-12-10$.

合并同类项,得$-6x\leqslant -24$.

两边都除以-6,得$x\geqslant 4$.

(2)去分母,得$x+5-2>3x+2$.

移项,得$x-3x>2-5+2$.

合并同类项,得$-2x>-1$.

两边都除以-2,得$x<\frac{1}{2}$.

点拨:(2)题去分母时,常数项-1不要漏乘2.

6. 解:设得奖应选对x道题.

根据题意,得$4x-2(25-x)\geqslant 60$.

解这个不等式,得$x\geqslant 18\frac{1}{3}$.

因为x是整数,所以x最小取19.

答:得奖至少应选对19道题.

7. 解:根据题意可知,两种书籍进价共为$(90m+70n)$元,售价共为$\left[\frac{m+n}{2}(90+70)\right]$元.

$\frac{m+n}{2}(90+70)-(90m+70n)=80(m+n)-(90m+70n)=80m+80n-90m-70n=10n-10m=10(n-m)$.

因为$n>m$,所以$n-m>0$,

所以$10(n-m)>0$,所以赢利了.

答:该书店从这两种书籍中赢利了.

8. 解:(1)$\begin{cases}7-3x>0,①\\5-x<2.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<\frac{7}{3}$. 解不等式②,得$x>3$.

所以原不等式组无解.

(2)$\begin{cases}2x+3<5,①\\x\geqslant -1.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<1$.

所以原不等式组的解集为$-1\leqslant x<1$.

(3)$\begin{cases}-(x-1)>3,①\\2x+9<3.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<-2$. 解不等式②,得$x<-3$.

所以原不等式组的解集为$x<-3$.

(4)$\begin{cases}\frac{2}{3}x+5>1-x,①\\x-1<\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}.②\end{cases}$

解不等式①,得$x>-\frac{12}{5}$.

解不等式②,得$x<\frac{7}{2}$.

所以原不等式组的解集为$-\frac{12}{5}<x<\frac{7}{2}$.

点拨:由口诀"同大取大,同小取小,大小小大中

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

间找，大大小小无处找”确定两个不等式解集的公共部分.

B 组

9. 解：(1) $b>0$. 因为两边同时减去 a，得到 $b>0$.

(2) $a<0$. 因为 $-a>a$，所以 $-2a>0$，

所以 $a<0$.

(3) $a>0$.

因为 $5a>3a$，所以 $5a-3a>0$，

所以 $2a>0$，所以 $a>0$.

10. 解：把 $1<2x-3<5$ 改写为 $\begin{cases}2x-3>1,①\\2x-3<5.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>2$. 解不等式②，得 $x<4$.

所以 $1<2x-3<5$ 的解集为 $2<x<4$.

11. 解：设空宿舍有 x 间，则有学生 $(4x+20)$ 人.

根据题意，可知 $0<4x+20-8(x-1)<8$，

可化为 $\begin{cases}4x+20-8(x-1)<8,\\4x+20-8(x-1)>0.\end{cases}$

解这个不等式组得 $5<x<7$.

因为 x 为整数，所以 $x=6$，所以 $4x+20=44$.

答：空宿舍有 6 间，这批学生有 44 人.

C 组

12. 解：解方程 $x-\frac{3}{2}(x+2a)=3-\frac{x-6a}{5}$，得 $x=-10-14a$.

因为方程的解为正数，所以 $-10-14a>0$.

所以 $a<-\frac{5}{7}$.

点拨：先求出用含有 a 的式子表示的 x 的值，再由题意求出 a 的取值范围.

13. 解：$\begin{cases}2x-3a<4b,①\\6b-4x<5a.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<\frac{3a+4b}{2}$.

解不等式②，得 $x>\frac{6b-5a}{4}$.

因为不等式组的解集是 $2<x<9$，

所以 $\frac{6b-5a}{4}=2$，$\frac{3a+4b}{2}=9$.

所以 $a=2$，$b=3$.

14. 解：设安排 A 型集装箱 x 个，则安排 B 型集装箱 $(50-x)$ 个.

根据题意，得 $\begin{cases}35x+25(50-x)\geqslant 1\,530,①\\15x+35(50-x)\geqslant 1\,150.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x\geqslant 28$. 解不等式②，得 $x\leqslant 30$.

所以原不等式组的解集为 $28\leqslant x\leqslant 30$.

因为 x 是整数，所以 x 取 28，29，30.

于是有三种运输方案.

方案一：安排 A 型集装箱 28 个，B 型集装箱 22 个；方案二：安排 A 型集装箱 29 个，B 型集装箱 21 个；方案三：安排 A 型集装箱 30 个，B 型集装箱 20 个.

第 5 章 二次根式

5.1 二次根式

练习

1. 解：(1) 由 $1-x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 1$. 所以当 $x\leqslant 1$ 时，$\sqrt{1-x}$ 在实数范围内有意义.

(2) 由 $2x-3\geqslant 0$，得 $x\geqslant\frac{3}{2}$. 所以当 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{2x-3}$ 在实数范围内有意义.

点拨：本题考查二次根式有意义的条件，即被开方数为非负数，列不等式求解即可.

2. 解：(1) $(-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3})^2=3$.

(2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times(\sqrt{5})^2=\frac{1}{4}\times 5=\frac{5}{4}$.

3. 解：(1) $\sqrt{7^2}=7$.

(2) $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3$.

(3) $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

(4) $\sqrt{(-0.01)^2}=\sqrt{0.01^2}=0.01$.

练习

1. 解：(1) $\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{28}=\sqrt{4\times 7}=\sqrt{4}\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$.

(3) $\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

(4) $\sqrt{54}=\sqrt{9\times 6}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$.

2. 解：(1) $\sqrt{\frac{45}{2}}=\sqrt{\frac{45\times 2}{2\times 2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 90}=\frac{1}{2}\sqrt{9\times 10}=\frac{1}{2}\sqrt{9}\times\sqrt{10}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

(2) $\sqrt{\frac{125}{12}}=\sqrt{\frac{25\times 5}{4\times 3}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{3}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5\times 3}{3\times 3}}=\frac{5}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 15}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}\times\sqrt{15}=\frac{5\sqrt{15}}{6}$.

习题 5.1

A 组

1. 解：(1) 由 $2x-1\geqslant 0$，得 $x\geqslant\frac{1}{2}$. 所以当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{2x-1}$ 在实数范围内有意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $1+x^2\geqslant 0$,得 x 为任意实数. 所以,当 x 为任意实数时,$\sqrt{1+x^2}$ 在实数范围内有意义.

点拨:本题考查二次根式有意义的条件,即被开方数必须为非负数.

2. 解:(1)$(-5\sqrt{2})^2=(-5)^2\times(\sqrt{2})^2=25\times 2=50$.

(2)$\left(3\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=3^2\times\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=9\times\frac{5}{3}=15$.

3. 解:(1)$\sqrt{11^2}=11$.

(2)$\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{6^2}=6$.

(3)$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$.

(4)$\sqrt{(-0.005)^2}=\sqrt{0.005^2}=0.005$.

4. 解:(1)$\sqrt{96}=\sqrt{16\times 6}=\sqrt{16}\times\sqrt{6}=4\sqrt{6}$.

(2)$\sqrt{128}=\sqrt{64\times 2}=\sqrt{64}\times\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

(3)$\sqrt{243}=\sqrt{81\times 3}=\sqrt{81}\times\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

5. 解:(1)$\sqrt{\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}\times 3}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2\times 3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

(2)$\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{8\times 3}{3\times 3}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 24}=\frac{1}{3}\sqrt{24}=\frac{1}{3}\sqrt{4\times 6}=\frac{1}{3}\sqrt{4}\times\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(3)$\sqrt{\frac{49}{18}}=\sqrt{\frac{49\times 2}{18\times 2}}=\sqrt{\frac{49}{36}\times 2}=\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2\times 2}=\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

6. 解:由题意可知陶瓷容器的底面积为 $40\times 45\times 20\div 10=3\,600(\text{cm}^2)$,因为 $\sqrt{3\,600}=60$,所以陶瓷容器的底面边长是 60 cm.

7. 解:由题意可知 $t=\sqrt{\frac{h}{4.9}}$,当 $h=39.2$ 时,$t=\sqrt{\frac{39.2}{4.9}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,

所以该物体到达地面所需的时间为 $2\sqrt{2}$ s.

B 组

8. 解:(1)$\sqrt{9a^2}=\sqrt{9}\times\sqrt{a^2}=3|a|$.

(2)$\sqrt{a^4}=\sqrt{(a^2)^2}=a^2$.

9. 解:(1)$x^2-2=x^2-(\sqrt{2})^2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2)$2x^2-9=(\sqrt{2}x)^2-3^2=(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{2}x-3)$.

10. 解:若 $\sqrt{38-n}$ 是整数,则 $\sqrt{38-n}=0,1,2,3,\cdots$,且 $0\leqslant n\leqslant 38$. 解得 $n=38,37,34,29,22,13,2$. 所以自然数 n 的值为 2,13,22,29,34,37,38.

5.2 二次根式的乘法和除法

练习

1. 解:(1)$\sqrt{3}\times\sqrt{15}=\sqrt{3\times 15}=\sqrt{3^2\times 5}=3\sqrt{5}$.

(2)$\sqrt{6}\times\sqrt{12}=\sqrt{6\times 12}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$.

(3)$3\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{5}=3\times 2\times\sqrt{2\times 10\times 5}=6\sqrt{10^2}=6\times 10=60$.

2. 解:(1)$\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2\times 3}=2\sqrt{6}$.

(2)$4\sqrt{3}\times(-3\sqrt{15})=-4\times 3\times\sqrt{3\times 15}=-12\times\sqrt{3^2\times 5}=-12\times 3\sqrt{5}=-36\sqrt{5}$.

3. 解:该三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3\times 2}=\sqrt{6}(\text{cm}^2)$.

练习

1. 解:(1)$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$.

(2)$\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(3)$\sqrt{\frac{162}{169}}=\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{81\times 2}}{\sqrt{169}}=\frac{9\sqrt{2}}{13}$.

2. 解:(1)$8\sqrt{55}\div 2\sqrt{11}=\frac{8\sqrt{55}}{2\sqrt{11}}=4\sqrt{\frac{55}{11}}=4\sqrt{5}$.

(2)$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

(3)$\frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{4\times 3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

3. 解:长方形的长为 $48\sqrt{6}\div 3\sqrt{2}=\frac{48\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=16\sqrt{\frac{6}{2}}=16\sqrt{3}(\text{m})$.

点拨:利用长方形的面积公式可推出长 = 长方形的面积 ÷ 宽.

习题 5.2

A 组

1. 解:(1)$\sqrt{90}\times\sqrt{6}=\sqrt{90\times 6}=\sqrt{6^2\times 15}=6\sqrt{15}$.

(2)$4\sqrt{35}\times 3\sqrt{70}=4\times 3\times\sqrt{35\times 70}=12\sqrt{35^2\times 2}=12\times 35\sqrt{2}=420\sqrt{2}$.

(3)$(-2\sqrt{42})\times\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}\right)=(-2)\times\left(-\frac{1}{7}\right)\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{42\times14}=\frac{2}{7}\sqrt{14^2\times3}=\frac{2}{7}\times14\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

(4) $\sqrt{18}\times3\sqrt{10}\times2\sqrt{15}=3\times2\times\sqrt{18\times10\times15}=6\sqrt{30^2\times3}=6\times30\times\sqrt{3}=180\sqrt{3}$.

2. 解:(1)$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$.

(2)$\sqrt{\frac{18}{5}}=\sqrt{\frac{18\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3^2\times10}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

3. 解:(1)$3\sqrt{15}\div\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{\frac{15}{5}}=3\sqrt{3}$.

(2)$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{28}{3}}=\sqrt{\frac{4\times7\times3}{3\times3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

(3)$\sqrt{24}\times\sqrt{12}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{24}\times\sqrt{12}}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=12\sqrt{\frac{2}{5}}=12\sqrt{\frac{2\times5}{5\times5}}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$.

(4)$\sqrt{18}\times\sqrt{30}\div2\sqrt{3}=3\sqrt{2}\times\sqrt{30}\div2\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2\times30}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\times30}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{20}=\frac{3}{2}\times\sqrt{2^2\times5}=\frac{3}{2}\times2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

4. 解:这个长方体的体积为$2\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=2\sqrt{6\times3\times2}=2\times6=12(\mathrm{cm}^3)$.

5. 解:由题意可知方格中第一列3个实数的积为$2\sqrt{3}\times3\times\sqrt{2}=6\sqrt{6}$. 所以第一行的空格中的实数为$6\sqrt{6}\div2\sqrt{3}\div1=3\sqrt{2}$;第二行的空格中的实数为$6\sqrt{6}\div3\div2=\sqrt{6}$;第三行的空格中的实数为$6\sqrt{6}\div\sqrt{2}\div6=\sqrt{3}$. 所以这3个空格中的实数之积为$3\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2\times6\times3}=3\times6=18$.

B组

6. 解:(1)$\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab^2}}=\sqrt{\frac{a^3b}{ab^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{b}}=\sqrt{\frac{a^2\cdot b}{b\cdot b}}=\frac{a}{b}\sqrt{b}$,当$a=3,b=4$时,原式$=\frac{3}{4}\sqrt{4}=\frac{3}{4}\times2=\frac{3}{2}$.

(2)$\frac{\sqrt{20ab}}{\sqrt{5a^5}}=\sqrt{\frac{20ab}{5a^5}}=\sqrt{\frac{4b}{a^4}}=\frac{2\sqrt{b}}{a^2}$,当$a=3,b=4$时,原式$=\frac{2\times\sqrt{4}}{3^2}=\frac{4}{9}$.

7. 解:$\begin{cases}x+\sqrt{5}y=3\sqrt{2},①\\x-\sqrt{5}y=\sqrt{2}.②\end{cases}$

①+②,得$2x=4\sqrt{2}$,

解得$x=2\sqrt{2}$.

把$x=2\sqrt{2}$代入①,得$y=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2\sqrt{2},\\y=\frac{\sqrt{10}}{5}.\end{cases}$

点拨:含有二次根式系数的二元一次方程组的解法和前面所学过的方程组的解法一致,解题的指导思想是"消元",方法是"代入法"或"加减法".

8. 解:$8\sqrt{\frac{2h}{5}}\div8\sqrt{\frac{h}{5}}=8\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{h}{5}}\div8\sqrt{\frac{h}{5}}=\sqrt{2}$.

答:他看到的水平距离是原来的$\sqrt{2}$倍.

5.3 二次根式的加法和减法

练习

1. 解:(1)$5\sqrt{2}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

(2)$4\sqrt{18}-9\sqrt{2}=4\sqrt{3^2\times2}-9\sqrt{2}=4\times3\sqrt{2}-9\sqrt{2}=12\sqrt{2}-9\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

(3)$10\sqrt{2}+3\sqrt{8}-7\sqrt{2}=3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}$.

(4)$5\sqrt{12}-3\sqrt{8}-2\sqrt{27}=5\times2\sqrt{3}-3\times2\sqrt{2}-2\times3\sqrt{3}=10\sqrt{3}-6\sqrt{2}-6\sqrt{3}=4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$.

点拨:在进行二次根式加、减混合运算时,先把二次根式化成最简二次根式,再把被开方数相同的二次根式的系数相加减,被开方数及根指数不变.

2. 解:(1)$\sqrt{2}-(3\sqrt{8}+2\sqrt{7})=\sqrt{2}-3\sqrt{8}-2\sqrt{7}=\sqrt{2}-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}=-5\sqrt{2}-2\sqrt{7}$.

(2)$(2\sqrt{3}-5\sqrt{8})-(\sqrt{75}-\sqrt{18})=2\sqrt{3}-5\times2\sqrt{2}-5\sqrt{3}+3\sqrt{2}=-3\sqrt{3}-7\sqrt{2}$.

点拨:在进行二次根式加、减混合运算时,有括号的应先去括号,再进一步利用二次根式的加、减运算法则进行计算.

练习:

1. 解:(1)$\sqrt{5}\times\left(\sqrt{15}-4\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\sqrt{5}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times4\sqrt{\frac{3}{5}}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)$(\sqrt{80}+\sqrt{40})\div\sqrt{5}=(4\sqrt{5}+2\sqrt{10})\div\sqrt{5}=4+2\sqrt{2}$.

(3)$(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=6+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3=3+\sqrt{3}$.

(4)$(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})=3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{2}=-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

2. 解:(1)$(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{10}+2=7-2\sqrt{10}$.

(2)$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=7-2=5$.

3. 解:(1)$\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}+2$.

(2)$(\sqrt{8}-\sqrt{4})\div\sqrt{2}=(2\sqrt{2}-2)\div\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$.

习题 5.3

A 组

1. 解:(1)$3\sqrt{12}+\sqrt{27}=6\sqrt{3}+3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

(2)$2\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}=6\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

(3)$3\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$.

(4)$\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{18}}=\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{18}=\frac{5}{6}\sqrt{2}$.

2. 解:(1)$5\sqrt{12}-7\sqrt{8}+\sqrt{48}=10\sqrt{3}-14\sqrt{2}+4\sqrt{3}=14\sqrt{3}-14\sqrt{2}$.

(2)$\sqrt{8}-(3\sqrt{32}+2\sqrt{18})=2\sqrt{2}-(12\sqrt{2}+6\sqrt{2})=-16\sqrt{2}$.

(3)$\sqrt{80}-\sqrt{20}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

(4)$\sqrt{18}+(\sqrt{98}-\sqrt{27})=3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-3\sqrt{3}=10\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

3. 解:(1)$\sqrt{8}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}=-2$.

(2)$(2+\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})=6-4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-10=-4-\sqrt{5}$.

(3)$\sqrt{\frac{1}{2}}-8\times\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

4. 解:(1)$(\sqrt{12}-\sqrt{2})^2=12-2\times\sqrt{12}\times\sqrt{2}+2=14-2\sqrt{24}=14-4\sqrt{6}$.

(2)$(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=5-1=4$.

(3)$(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})\div\sqrt{3}=3\sqrt{2}-2$.

(4)$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2=12-18=-6$.

B 组

5. 解:根据题意,得宽为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\frac{(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+3)}{4}=\frac{5+3\sqrt{5}-\sqrt{5}-3}{4}=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$(m)

答:它的宽是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ m.

6. 解:(1)$a+b=-1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-2$,

$ab=(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1-2=-1$,

$\frac{b}{a}=\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2}=-3-2\sqrt{2}$.

(2)$a^2+2a-1=a^2+2a+1-2=(a+1)^2-2=(-1+\sqrt{2}+1)^2-2=0$,

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=[-1+\sqrt{2}-(-1-\sqrt{2})]^2=(2\sqrt{2})^2=8$.

复习题 5

A 组

1. 解:(1)由$2-3x\geqslant0$,得$x\leqslant\frac{2}{3}$,所以当$x\leqslant\frac{2}{3}$时,$\sqrt{2-3x}$在实数范围内有意义.

(2)由$x^2+4\geqslant0$,得x为任意实数,所以当x为任意实数时,$\sqrt{x^2+4}$在实数范围内有意义.

(3)由$(2-3x)^2\geqslant0$,得x为任意实数,所以当x为任意实数时,$\sqrt{(2-3x)^2}$在实数范围内有意义.

(4)由$\frac{1}{x}>0$,得$x>0$,所以当$x>0$时,$\sqrt{\frac{1}{x}}$在实数范围内有意义.

点拨:本题考查二次根式有意义的条件,即被开方数为非负数,列不等式求解.

2. 解:(1)$\sqrt{56}=\sqrt{4\times14}=2\sqrt{14}$.

(2)$-\sqrt{0.5}=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 解:(1)$2\sqrt{12}+\sqrt{27}=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}=7\sqrt{3}$.

(2)$\sqrt{18}-2\sqrt{8}=3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

(3)$\sqrt{54}-5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=3\sqrt{6}-5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=-4\sqrt{6}$.

(4)$\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{8}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:(1)$5\sqrt{12}\times3\sqrt{18}=10\sqrt{3}\times9\sqrt{2}=90\sqrt{6}$.

(2)$-6\sqrt{45}\times(-4\sqrt{48})=18\sqrt{5}\times16\sqrt{3}=288\sqrt{15}$.

(3)$3\sqrt{6}\div6\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4)$\sqrt{8.5}\div(-\sqrt{1.7})=-\sqrt{5}$.

5. 解:(1)$\sqrt{50}\times\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{400}+3\sqrt{2}=20+3\sqrt{2}$.

(2)$(\sqrt{3}+2\sqrt{6})\div\sqrt{3}=1+2\sqrt{2}$.

(3)$(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2=12-12\sqrt{6}+18=30-12\sqrt{6}$.

(4)$(2+3\sqrt{5})^2=4+4\times3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2=49+12\sqrt{5}$.

(5)$(\sqrt{91}+\sqrt{13})\div\sqrt{13}=\sqrt{7}+1$.

(6)$(\sqrt{9}+\sqrt{7})(\sqrt{9}-\sqrt{7})=9-7=2$.

6. 解:$\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times4=12$;$\sqrt{(-1)^2}=1$;

$(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)=10-1=9$;

$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=\sqrt{9}=3$;$\sqrt{7^2}=7$;

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6$. 连线略.

7. 解:根据题意,

得 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[3^2\times4^2-\left(\frac{3^2+4^2-5^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\times144}=\sqrt{36}=6$.

答:$\triangle ABC$ 的面积是6.

B 组

8. 解:(1)$x^2-11=(x+\sqrt{11})(x-\sqrt{11})$.

(2)$3x^2-16=(\sqrt{3}x+4)(\sqrt{3}x-4)$.

(3)$9x^2-19=(3x+\sqrt{19})(3x-\sqrt{19})$.

(4)$x^4-14x^2+49=(x^2-7)^2=(x+\sqrt{7})^2(x-\sqrt{7})^2$.

9. 解:$\sqrt{x^2y-4x^2y^2+4x^2y^3}=\sqrt{x^2y(1-4y+4y^2)}=\sqrt{x^2y(1-2y)^2}$.

当$x=3,y=4$时,原式$=\sqrt{3^2\times4\times(1-2\times4)^2}=\sqrt{36\times49}=42$.

10. 解:(1)$x_1+x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$;

$x_1-x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$;

$x_1x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-5}{4}=-1$;

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{6+2\sqrt{5}}{1-5}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(2)$x_1^2+x_1-1=x_1^2+x_1+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}=\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0$;

$x_2^2+x_2-1=x_2^2+x_2+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}=\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0$.

C 组

11. 解:$\because\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$,

$\therefore\sqrt{10}$的整数部分为3,即$x=3$,

$\therefore y=\sqrt{10}-3$.

$(\sqrt{10}+x)y=(\sqrt{10}+3)\times(\sqrt{10}-3)=10-9=1$.

12. 解:(1)$S_2-S_1=(1+2\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})^2=1+8+4\sqrt{2}-1-2-2\sqrt{2}=6+2\sqrt{2}$.

$S_3-S_2=(1+3\sqrt{2})^2-(1+2\sqrt{2})^2=1+18+6\sqrt{2}-1-8-4\sqrt{2}=10+2\sqrt{2}$.

$S_4-S_3=(1+4\sqrt{2})^2-(1+3\sqrt{2})^2=1+32+8\sqrt{2}-1-18-6\sqrt{2}=14+2\sqrt{2}$.

(2)由第(1)题的计算结果,可猜出$S_{n+1}-S_n=4n+2+2\sqrt{2}$.

猜想正确.

因为$S_{n+1}-S_n=[1+(n+1)\sqrt{2}]^2-(1+n\sqrt{2})^2=1+2\sqrt{2}(n+1)+2(n+1)^2-1-2\sqrt{2}n-2n^2=4n+2+2\sqrt{2}$,

所以$S_{n+1}-S_n=4n+2+2\sqrt{2}$.

点拨:本题注意审清题意,$S_i(i=1,2,3,4)$代表的是正方形的面积,而已知条件是正方形的边长,所以代入时注意和面积联系起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记



荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料