教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

中国品牌创新发展工程　推荐品牌



本书解题方法72招·七八九年级共258招

八年级
数学（上）

荣德基 主编
（SK版）
赠教材习题答案

吉林教育出版社

扫码后，您将享受10项专属服务

海量资源
一码搞定

教师 专享服务

1 配套授课课件
2 其他相关教学资源包
3 单元测试卷电子版

学生 专享服务

4 重难点点拨微课堂 直通车
5 物理动态实验演示视频
6 化学动态实验演示视频
7 线上答疑解惑服务

惊喜活动

8 尖子生凭成绩单免费领取《点拨》
9 教师免费领取样书试用大礼包
10 优秀教师有机会加入中国品牌创新发展工程推荐品牌《点拨》丛书编委会

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

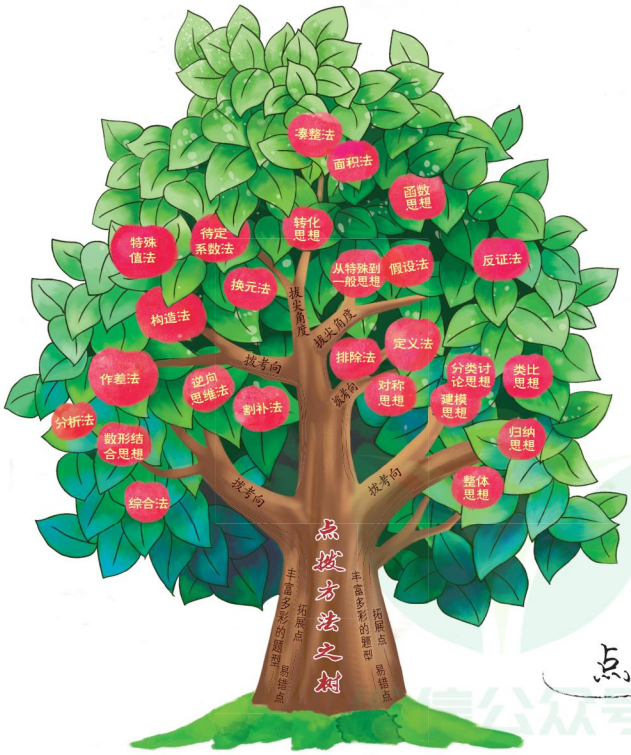
点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 上 （SK 版）

荣德基 主编

本册主编：许业锋



老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨

批注式学习的践行者

老师批注方法
点拨只为高分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

买书？看完点拨再做决定！

中考压轴题的抢分绝招
培优拔尖题的破解策略
实用的方法技巧揭秘
精准的重难疑惑点拨
简约的知识梳理总结

冲满分

三个维度 打造极致

第1步 基础速提分

给你一把打开数学之门的钥匙

点知识·拨考向 速提分

第2步 方法提高分

为你提供解题秘方

点方法·拨技巧 提高分

第3步 考法得满分

让你从默默无闻走向优秀卓越

点中考·拨模拟 得满分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点 72 个 得高分

第1章 全等三角形

		页码
1	证明线段位置关系的方法	7
2	解答探究条件类题目的方法	8
3	动态问题的求解思路	8
4	证明三角形全等时找条件的方法	14
5	数形结合思想	15
6	从特殊到一般的思想	15
7	证明线段或角相等的方法	18
8	常见的分析问题的方法	19
9	截长补短法	20
10	加倍法	20
11	折半法	20
12	转化思想	26
13	类比思想	27

第2章 轴对称图形

		页码
1	判断两个图形是否成轴对称的方法	33
2	判断一个图形或图案是不是轴对称图形的方法	36
3	求分散的阴影部分面积的方法	40
4	判断线段垂直平分线的两种方法	50
5	证明角平分线的方法	52
6	转化思想	53
7	等边三角形的判定方法	61
8	证明等边三角形的思维导图	61
9	构造法	65
10	证明线段相等的方法	65
11	动态问题的求解思路	65
12	在出现 60° 角的图形中构造等边三角形的方法	66
13	截长法	66
14	补短法	66
15	判定等腰三角形的方法	68
16	方程思想	77
17	分类讨论思想	78
18	整体思想	78

第3章 勾股定理

		页码
1	通过拼图证明命题的思路	86
2	证明线段的平方关系的方法	89
3	确定勾股数的方法	96
4	转化思想	97
5	运用勾股定理解决实际问题的一般步骤	101
6	构造法	102
7	解决几何体表面上两点间的最短路程问题的方法	102
8	求直线同侧的两点到直线上一点的最短路径长的方法	103
9	寻找与大于 1 的奇数组成的勾股数的一种方法	105
10	数形结合思想	110
11	分类讨论思想	111

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 72 个 得高分

第4章 实数

		页码
1	求一个正数的平方根的方法	118
2	利用平方根的定义解方程的一般步骤	119
3	分类讨论思想	121
4	解决条件式中被开方数互为相反数问题的方法	121
5	整体思想	125
6	利用绝对值的性质进行化简的方法	136
7	判断近似数的精确度的方法	139
8	由近似数确定准确数的范围的方法	140
9	数形结合思想	145

第5章 平面直角坐标系

		页码
1	常用的确定物体位置的方法	150
2	辨识平面直角坐标系的“四要素”	156
3	确定点的坐标的方法	157
4	根据点的坐标描点的方法	158
5	对称点的坐标规律	161
6	建立平面直角坐标系的一般步骤	161
7	处理折叠问题的常用思路	162
8	分类讨论思想	170
9	转化思想	171
10	数形结合思想	171

第6章 一次函数

		页码
1	判断一个量是常量还是变量的方法	177
2	函数的三种表示方法	180
3	判断函数是否为一次函数的方法	186
4	用待定系数法求一次函数表达式的一般步骤	187
5	一次函数图像的画法	192
6	用一次函数选择方案的一般步骤	203
7	转化思想	214
8	二元一次方程组的图像解法	215
9	一次函数图像法解一元一次方程的步骤	221
10	利用图像法解一元一次不等式的一般步骤	222
11	分类讨论思想	231



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨微课堂



目录

索引

观动画
全等变换方式…… 2

看微课
全等三角形…… 6
全等三角形的性质…… 6

学方法
等边三角形的判定方法…… 61

看微课
轴对称图形与轴对称 …… 34
等腰三角形的性质…… 57
等腰三角形的判定…… 58

观动画
勾股定理的证明…… 86

看微课
勾股定理…… 85
勾股定理的应用 …… 85
勾股定理的逆定理 …… 94

第 1 章 全等三角形

1.1 全等图形 …… 2
1.2 全等三角形 …… 6
1.3 探索三角形全等的条件 …… 12

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P25

第 2 章 轴对称图形

2.1 轴对称与轴对称图形 …… 33
2.2 轴对称的性质 …… 38
2.3 设计轴对称图案 …… 44
2.4 线段、角的轴对称性 …… 49
2.5 等腰三角形的轴对称性 …… 57

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P72

点拨微课堂 ☞ P64 ☞ P65

第 3 章 勾股定理

3.1 勾股定理 …… 85
3.2 勾股定理的逆定理 …… 94
3.3 勾股定理的简单应用 …… 101

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P109

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 章 实数

4.1 平方根 …… 118
4.2 立方根 …… 124
4.3 实数 …… 130
4.4 近似数 …… 139

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P143

看微课
求平方根…… 118
求算术平方根…… 119
实数的分类…… 131

第 5 章 平面直角坐标系

5.1 位置的确定 …… 150
5.2 平面直角坐标系 …… 156

素养提分

行动篇：笛卡儿的《几何学》 ☞ P166
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P168

观动画
平面内点的位置的确定……150

看微课
点的坐标特征……158
图形的平移……160

第 6 章 一次函数

6.1 函数 …… 177
6.2 一次函数 …… 186
6.3 一次函数的图像 …… 192
6.4 用一次函数解决问题 …… 203
6.5 一次函数与二元一次方程 …… 214
6.6 一次函数、一元一次方程和一元一次不等式 …… 221

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P228

学方法
函数的三种表示方法……180
待定系数法……187

观动画
一次函数的图像……192

看微课
一次函数……186
一次函数图像的画法……193

参考答案及点拨（单独成册）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **数形结合思想：**数形结合就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

2. **分类讨论思想：**把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

3. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

4. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

5. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

6. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论．它的特点：特殊→一般．

7. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

8. **倍长中线法：**延长底边的中线，使所延长部分与中线相等，然后往往需要连接相应的顶点，则对应角对应边都对应相等．此法常用于构造全等三角形，利用中线的性质进行证明对应边之间的关系．

9. **函数思想：**是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题的一种思想．

10. **割补法：**割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

11. **截长补短法：**截长补短法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想．所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一段线段相等．所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长至与另一条已知的较短的线段相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系．

12. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造图形法（全等、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

13. **图像法：**利用图像这种特殊且形象的数学语言工具，来表达各种现象的过程和规律，这种方法称为图像法．

14. **待定系数法：**待定系数法是求函数解析式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数解析式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数解析式的方法就叫做待定系数法．

微信公众号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

领略图形全等的魅力
领略图形全等的魅力











第1章 全等三角形

核心考点

你将见到的

- 全等图形
- 全等三角形的性质
- 全等三角形的判定方法

核心方法

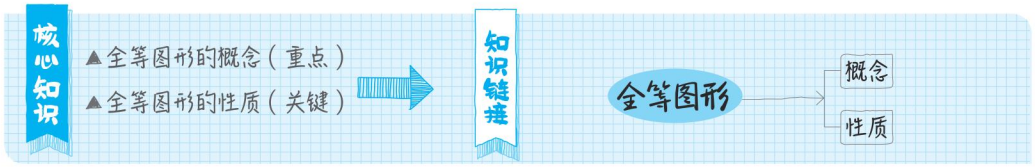
我们为你提供的

- 截长法
- 补短法
- 转化思想
- 类比思想
- 分类讨论思想
- 数形结合思想

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1 全等图形



点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

特别解读：

（1）两个全等图形的周长相等、面积相等；

（2）周长、面积相等的两个图形不一定是全等图形.



点知识 全等图形

1. 定义 能完全重合的图形叫做全等图形. 全等图形的特征：

（1）两相同：①形状相同；②大小相同.

（2）两无关：①与位置无关；②与方向无关.

2. 全等变换的常见方式 平移、翻折、旋转.

拨考向 认识全等图形

类型 1：全等图形概念的辨析

例 1 如果两个图形全等，那么这两个图形（　　）

A. 形状相同，但大小不同

B. 形状、大小均相同

C. 大小相同，但形状不同

D. 形状、大小均不相同

解题秘方： 根据全等图形的概念，如果两个图形全等，那么这两个图形形状、大小均相同.

答案： B

»提分·秘诀

方法点拨：

（1）运用定义识别全等图形，确定两个图形全等要符合两个条件：①形状相同，②大小相同. 两个图形是否是全等图形与位置无关.

（2）判断两个图形是否全等还可以通过平移、旋转、翻折等方法把它们叠合在一起，看它们能否完全重合，即用叠合法判断.

类型 2：利用定义识别全等图形

例 2 如图 1.1-1，在下列 4 个正方形图案中，与左边正方形图案全等的是（　　）.

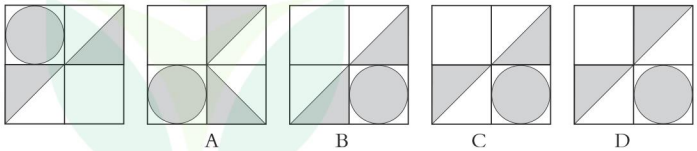


图 1.1-1

解题秘方： 本题考查的是全等图形的识别，主要根据全等图形的定义做题，A、B、D 选项的图案经过平移、旋转、翻折后均与左边正方形图案不重合，C 选项的图案旋转 180° 后与左边正方形图案重合.

答案： C

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 根据全等图形的性质计算

» 挑战·高分

例 3 如图 1.1-2，宽为 50 cm 的长方形图案由 10 个全等的小长方形拼成，求一个小长方形的面积.

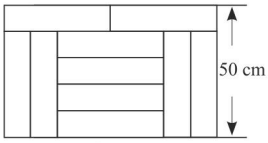


图 1.1-2

解题秘方：由题意可知本题存在两个等量关系式，即：小长方形的长 + 小长方形的宽 =50 cm，小长方形的长 + 小长方形宽的 4 倍 = 小长方形长 的 2 倍，根据这两个等量关系式可列出方程组，进而求出小长方形的长与宽，最后求得小长方形的面积.

解：设一个小长方形的长为 x cm，宽为 y cm，

则可列方程组 $\begin{cases} x+y=50, \\ x+4y=2x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=40, \\ y=10, \end{cases}$

则一个小长方形的面积 $=40\times10=400\ (\text{cm}^2)$.

方法点拨：

解答本题的关键是弄清题意，看懂图示，并弄清小长方形的长与宽的关系，找出正确的等量关系式，列出方程组.

拔尖角度 2 分割成全等图形

» 挑战·高分

例 4 沿着图 1.1-3 中的虚线，请把图形划分为 4 个全等图形，并把你的方案画在图中.

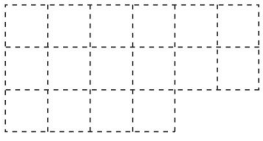


图 1.1-3

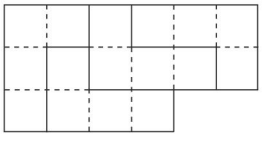


图 1.1-4

解题秘方：根据整个图形的面积和新图形的形状画出新图形即可.

解：如图 1.1-4 所示.

方法点拨：

在网格中将一个图形分割成几个全等图形，首先明确被分割图形的特点，再将被分割图形的面积进行等分，最后根据新图形的面积确定新图形的形状. 验证 4 个新图形经过平移、旋转、翻折后能否完全重合.

平移是全等变换的一种方式，△ABC 平移得到△DEF，即这两个三角形全等.

拔尖角度 3 利用等面积法求全等变换中图形的面积

» 挑战·高分

例 5 如图 1.1-5，将 Rt △ ABC 沿着从 B 到 C 的方向平移得到 Rt △ DEF，如果 AB=8cm，BE=4cm，DH =3cm，求图中阴影部分的面积.

解题秘方：利用全等三角形的性质，将阴影部分的面积转化为梯形 $ABEH$ 的面积来求.

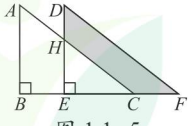


图 1.1-5

解：由题意可知△ ABC 和△ DEF 全等，

$\therefore DE=AB=8$ cm，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$.

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\text{梯形 }ABEH}+S_{\triangle HEC}$，

$S_{\triangle DEF}=S_{\text{阴影部分}}+S_{\triangle HEC}$，$\therefore S_{\text{阴影部分}}=S_{\text{梯形 }ABEH}$.

$\because DH+HE=DE$，$\therefore HE=DE-DH=8-3=5$（cm）.

$\therefore S_{\text{梯形 }ABEH}=\frac{1}{2}(AB+HE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(8+5)\times4=26\ (\text{cm}^2)$.

$\therefore S_{\text{阴影部分}}=26\ \text{cm}^2$.

方法点拨：

等面积法：

将所求的图形面积通过全等变换转化为易求解（或已知）的图形面积的方法，我们称之为等面积法，它是解面积或涉及垂直（高）等几何问题的常用方法. 本题运用等面积法将所求阴影部分的面积转化成易求解的梯形 ABEH 的面积.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查全等图形的识别以及全等图形性质的应用，一般结合图形平移、旋转、翻折进行考查，主要以选择题、填空题、作图题的形式出现，试题难度不大.

三年中考兵法

》冲刺·满分

活学技巧：

全等图形要学好，
完全重合要记牢，
位置变化不影响，
形状大小皆一样.

考法 全等图形的识别与性质的应用

例 6 下列四个几何体中，主视图、左视图与俯视图是全等图形的几何体是（　　）

A. 圆柱　　B. 正方体　　C. 三棱柱　　D. 圆锥

试题评析： 本题考查了全等图形的识别和几何体的三视图.

解： A. 圆柱的三视图分别为长方形（或正方形），长方形（或正方形），圆，故 A 不符合题意；

B. 正方体的三视图是边长相等的 3 个正方形，故 B 符合题意；

C. 三棱柱的三视图分别为长方形（或正方形），长方形（或正方形），三角形，故 C 不符合题意；

D. 圆锥的三视图分别为三角形，三角形，圆及圆心，故 D 不符合题意.

答案： B

例 7 如图 1.1−6，在由边长为 1 的小正方形组成的网格中，画如图所示的图形，现要求再画出 9 个与它全等的图形，且图形之间只有边可以重叠，则网格至少有多少列？

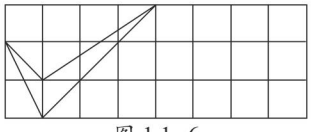


图 1.1−6

试题评析： 本题考查的是全等图形的作图，根据观察发现画下一个图形的时候需要的列数，然后根据规律得出答案. 所画图形如图 1.1−7.

解： ∵后面画出的图形与第 1 个图形完全一样，再画出 9 个图形即一共有 10 个图形.

∴画第 2 个图形的时候，网格有 4+1=5（列），画第 3 个图形的时候，网格有 4+（1+3）=8（列），画第 4 个图形的时候，网格有 4+（1+3+1）=9（列）…

∴画第 10 个图形的时候，网格有 4+（1+3+1+3+1+3+1+3+1）=21（列）.

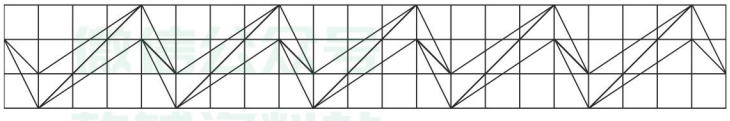


图 1.1−7

教辅资料站

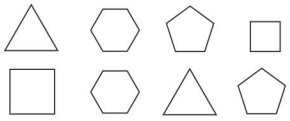
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 下列说法正确的有（　　）

①全等图形的周长一定相等；②我国国旗上的4颗小五角星是全等图形；③所有的正方形都是全等图形；④全等图形的面积一定相等.

A. 1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

2. 如图所示的图形中是全等图形的有（　　）



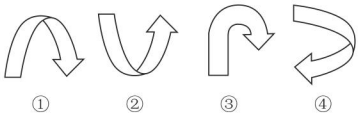
（第2题图）

A. 1对　　B.2对　　C.3对　　D.4对

3. 下列立体图形：圆柱、长方体、正方体、球、圆锥，其中三视图是全等图形的有（　　）

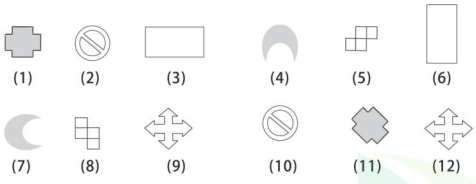
A. 0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

4. 下列图形中全等的是_____.



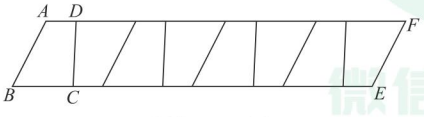
（第4题图）

5. 如图（1）~（12）中，全等的图形是：____和____；____和____；____和____；____和____；____和____；____和____.（填图形的序号）



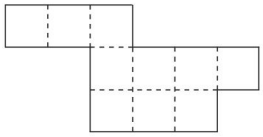
（第5题图）

6. 如图所示的图案是由全等图形拼成的，其中AD = 0.5 cm，BC = 1 cm，则AF =_____ cm.



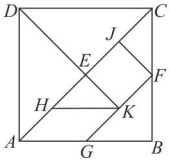
（第6题图）

7. 如图，试沿着虚线把图形分成两个全等图形.（在图上画出实线）



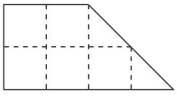
（第7题图）

8. 如图，找出七巧板中的全等图形.



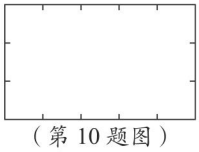
（第8题图）

9. 如图所示，是由一个正方形和一个等腰直角三角形拼成的图形，现要把它分割成4个全等图形，并且形状与原图形相同，如何分？（在图中画出实线加以说明）



（第9题图）

10. 如图，请你把长和宽分别为5和3的长方形分成四个均不全等的小长方形或正方形，且小长方形或正方形的各边长均为整数.

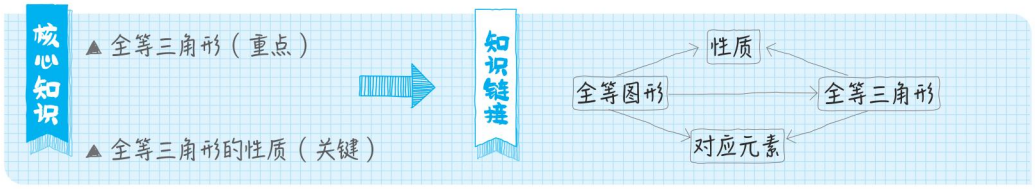


（第10题图）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2 全等三角形



点知识·拨考向 速提分

提分·必记

特别解读：

对应边或对应角与对边或对角的区别：

对应边、对应角是两个全等三角形中对应的两条边之间或对应的两个角之间的关系；对边、对角是同一个三角形中边和角之间的关系，“对边”是指三角形中某个角所对的边，“对角”是指三角形中某条边所对的角.

点知识 1 全等三角形

1. 全等三角形的相关概念

（1）全等三角形的定义：两个能完全重合的三角形叫做全等三角形.

（2）全等三角形的对应元素：

① 对应顶点：全等三角形中，能够重合的顶点；

② 对应边：全等三角形中，能够重合的边；

③ 对应角：全等三角形中，能够重合的角.



2. 全等三角形的表示方法

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”.表示两个三角形全等时，通常把对应顶点的字母写在对应的位置上.

示图：

如图1.2-1中的△ABC和△A′B′C′全等，记作△ABC≌△A′B′C′，读作“△ABC全等于△A′B′C′”，其中点A和点A′，点B和点B′，点C和点C′是对应顶点；AB和A′B′，BC和B′C′，AC和A′C′是对应边；∠A和∠A′，∠B和∠B′，∠C和∠C′是对应角.

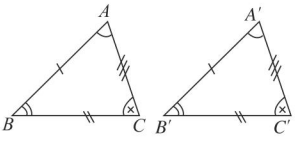


图 1.2-1

拨考向 根据全等三角形的表示方法找对应元素

例 1 如图 1.2-2，已知△ABD≌△CDB，∠ABD=∠CDB，写出其对应边和对应角.

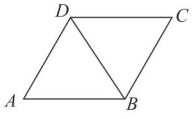


图 1.2-2

解题秘方：根据全等三角形的表示方法，结合图形的位置特征确定对应边和对应角.

解：BD和DB，AD和CB，AB和CD是对应边；∠A和∠C，∠ABD和∠CDB，∠ADB和∠CBD是对应角.

点知识 2 全等三角形的性质

1. 性质 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

几何语言：∵△ABC≌△DEF，

$$\therefore\begin{cases}AB=DE,\ BC=EF,\ AC=DF,\\ \angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F.\end{cases}$$





图 1.2-3

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. **拓展**　全等三角形的对应元素相等.

全等三角形中的对应元素包括对应边、对应角、对应边上的中线、对应边上的高、对应角的角平分线、周长、面积等.

3. **易错警示**　周长相等的两个三角形不一定全等，面积相等的两个三角形也不一定全等.

拔考向　根据全等三角形的性质求线段的长

»提分·秘诀

例 2　如图 1.2–4，已知点 A，D，B，F 在同一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle FDE$，$AB = 8\ \text{cm}$，$BD = 6\ \text{cm}$. 求 FB 的长.

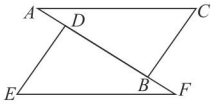


图 1.2–4

解题秘方：由全等三角形的性质知 $AB=FD$，由等式的基本性质可得 $AD=FB$，所以要求 FB 的长，只需求 AD 的长.

解：$\because \triangle ABC \cong \triangle FDE$，$\therefore AB=FD$.

$\therefore AB-DB=FD-BD$，即 $AD=FB$.

$\because AB = 8\ \text{cm}$，$BD = 6\ \text{cm}$，

$\therefore AD=AB-DB=8-6=2\ (\text{cm})$.

$\therefore FB=AD=2\ \text{cm}$.

要点提醒：

(1) 应用全等三角形的性质时，要先确定两个条件：

① 两个三角形全等；

② 找准对应元素.

(2) 全等三角形的性质是证明线段、角相等的常用方法.

方法点拨：全等三角形的性质在几何证明和计算中起着重要作用，当所求线段不是全等三角形的边时，可利用等式的基本性质进行转换，从而找到所求线段与已知线段的关系.

点方法·拨技巧　提高分

拔尖角度 1　利用全等三角形的性质探究线段之间的位置关系

»挑战·高分

例 3　如图 1.2–5，已知 Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle CDE$，且点 B，C，D 在同一条直线上，试判断 AC 与 CE 的位置关系，并给予证明.

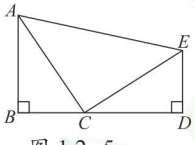


图 1.2–5

解题秘方：通过求 AC，CE 夹角的度数判断其位置关系.

解：$AC \perp CE$. 证明如下：

$\because$ Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle CDE$，$\therefore \angle BAC = \angle DCE$.

易知 $\angle BAC + \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle DCE + \angle ACB = 90°$.

$\therefore \angle ACE = 180° - (\angle DCE + \angle ACB) = 180° - 90° = 90°$.

$\therefore AC \perp CE$.

方法点拨：

证明线段位置关系的方法：

证明两条线段的位置关系，通常考虑平行、垂直两种特殊关系，证明平行的方法是转化为证明同位角相等、内错角相等或同旁内角互补；证明垂直的方法是转化为证明它们的夹角为 90° 或三角形其他两内角互余.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

» 挑战·高分

方法点拨：

解答探究条件类题目的方法：

（1）先猜想出条件，利用猜想出的条件推出题目中的结论；

（2）将题目中的结论当作条件进行推理，这样推出的结果即为要探究的条件.

拔尖角度 2 利用逆向思维解决条件探索问题（拓展点）

例 4 如图 1.2-6，A，D，E 三点在同一条直线上，且 $\triangle BAD \cong \triangle ACE$，$AB$ 与 CA，AD 与 CE 是对应边.

（1）求证 $BD=CE+DE$.

（2）当 $\triangle ABD$ 满足什么条件时，$BD \parallel CE$？请说明理由.

解题秘方： 根据全等三角形的性质找出相等的线段和角，然后利用要解决的问题与得出的相等的线段和角之间的关系去解决.

解：（1）$\because \triangle BAD \cong \triangle ACE$，

$\therefore BD=AE$，$AD=CE$.

又 $\because AE=AD+DE$，$\therefore BD=CE+DE$.

（2）当 $\triangle ABD$ 满足 $\angle ADB=90°$ 时，$BD \parallel CE$.

理由：$\because \triangle BAD \cong \triangle ACE$，$\therefore \angle ADB=\angle CEA$.

若 $\angle ADB=90°$，则 $\angle CEA=90°$.

又 $\because \angle ADB+\angle BDE=180°$，$\therefore \angle BDE=90°$.

$\therefore \angle BDE=\angle CEA$. $\therefore BD \parallel CE$.

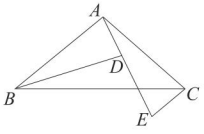


图 1.2-6

» 挑战·高分

教你一招：

动态问题的求解思路：

解决此类动态数学问题的关键是动中求静，通常用分类讨论思想、方程思想及数形结合思想，分情况对题目进行讨论，结合图形根据全等三角形的性质列出方程求解.

拔尖角度 3 利用全等三角形的性质探究动态问题（拓展点）

例 5 如图 1.2-7，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$BC=8$，点 D 为 AB 的中点. 点 P 在线段 BC 上以每秒 3 个单位长度的速度由点 B 向点 C 运动，同时点 Q 在线段 CA 上以每秒 a 个单位长度的速度由点 C 向点 A 运动，设运动时间为 t 秒.

（1）用含 t 的式子表示 PC 的长；

（2）若以点 C，P，Q 为顶点的三角形和以点 B，D，P 为顶点的三角形全等，且 $\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角，求 a 和 t 的值.

解题秘方：（1）点在线段上运动，用点运动的路程表示线段的长.

（2）根据对应关系得出线段相等，求出 a 和 t 的值.

解：（1）由题意得 $BP=3t$. $\because BC=8$，$\therefore PC=8-3t$.

（2）由题意知，需分两种情况讨论：

若 $\triangle BDP \cong \triangle CPQ$，则 $BD=CP$，$BP=CQ$.

$\because AB=10$，点 D 为 AB 的中点，$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=5$.

$\therefore 5=8-3t$，$3t=at$，解得 $t=1$，$a=3$.

若 $\triangle BDP \cong \triangle CQP$，则 $BP=CP$，$BD=CQ$，

$\therefore 3t=8-3t$，$5=at$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$a=\frac{15}{4}$.

由 $8-3t>0$，得 $t<\frac{8}{3}$. 综上所述，$a=3$，$t=1$ 或 $a=\frac{15}{4}$，$t=\frac{4}{3}$.

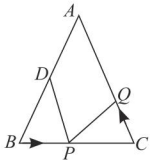


图 1.2-7

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查全等三角形的性质，一般不单独命题，常与全等三角形的判定或全等三角形的变换形式：平移、翻折、旋转综合考查，主要是以选择题和填空题的形式出现，难度适中.

三年中考兵法

考法1 利用全等三角形的性质求角的度数

>>冲刺·满分

例6 [中考·南通]已知：如图1.2-8，$\triangle OAD \cong \triangle OBC$，且$\angle O = 70°$，$\angle C = 25°$，则$\angle AEB =$_____.

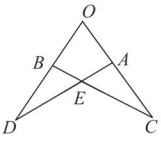


图1.2-8

试题评析：本题考查全等三角形的性质和三角形外角的性质，做题时要仔细读图，识别全等三角形的对应边、对应角是解题的关键.

解：$\because \triangle OAD \cong \triangle OBC$，

$\therefore \angle D = \angle C = 25°$，

$\therefore \angle CAE = \angle O + \angle D = 95°$，

$\therefore \angle AEB = \angle C + \angle CAE = 25° + 95° = 120°$.

答案：120°

解法提醒：

首先要根据全等结合图形确定对应角，应用全等三角形的性质写出相等的角，然后观察已知角和所求的角之间的位置关系，最后结合三角形外角的性质进行计算.

考法2 利用图形经过平移、旋转、翻折后仍和原图形全等求角的度数

例7 [中考·潜江]如图1.2-9，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，点D在AB边上，将$\triangle CBD$沿CD折叠，使点B恰好落在AC边上的点E处.若$\angle A=26°$，则$\angle CDE=$_____.

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，其中全等变换的形式是翻折，解题的关键是利用全等三角形的性质求角的度数.

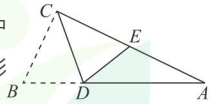


图1.2-9

解：由三角形内角和定理可知$\angle B=180° - 90° - 26° = 64°$.

由折叠可知$\triangle BCD \cong \triangle ECD$.

$\therefore \angle BCD = \angle ECD = \frac{1}{2}\angle ACB = 45°$，$\angle CED = \angle B = 64°$.

$\therefore \angle CDE = 180° - \angle ECD - \angle CED = 180° - 45° - 64° = 71°$.

答案：71°

解法提醒：

平移、旋转、翻折变换都是全等变换，当问题涉及这些变换时，要找到变换前后的图形，然后利用全等的性质得到对应边相等、对应角相等，从而解决问题.

本题属于翻折变换，它隐含着翻折前后的$\triangle BCD$与$\triangle ECD$全等.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法提醒：

对于探究结论问题，可以由题目中的已知条件结合图形的特点猜想出结论.

考法3 运用全等三角形性质解决探究性问题

例8 [二模·常州] 如图 1.2−10，△ AOB ≌△ ADC，点 B 和点 C 是对应顶点，∠ O= ∠ D=90°，记∠ OAD=α，∠ ABO=β，当 BC // OA 时，α 与 β 之间的数量关系为（　　）

A. $\alpha=\beta$　　B. $\alpha=2\beta$　　C. $\alpha+\beta=90°$　　D. $\alpha+\beta=180°$

试题评析：本题考查了全等三角形的性质，等腰三角形两底角相等的性质，平行线的性质，熟记各性质并准确识图理清图中各角度之间的关系是解题的关键.

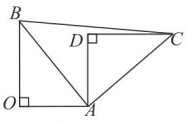


图 1.2−10

解：∵△ AOB ≌△ ADC，

∴ $AB=AC$，∠ BAO = ∠ CAD，

∴ ∠ ABC = ∠ ACB，∠ BAC = ∠ OAD = α，

在△ ABC 中，∠ $ABC=\frac{1}{2}(180°-\alpha)$，

∵ BC // OA，

∴ ∠ OBC = 180° − ∠ O = 180° − 90° = 90°，

∴ $\beta+\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°$，整理得：$\alpha=2\beta$.

答案：B

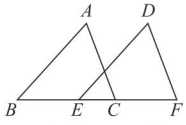
两年模拟兵法

☞答案见 241 页

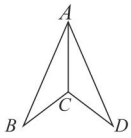
1. 如图，已知△ ABC ≌△ DEF，则下列结论中不正确的是（　　）

A. $AB=DE$　　B. $BE=CF$

C. $BC=EF$　　D. $AC=DE$



（第 1 题图）

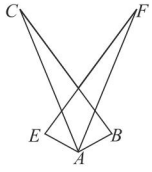


（第 2 题图）

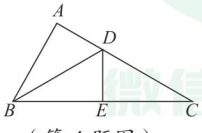
2. 如图，已知△ ABC ≌△ ADC，∠ B=30°，∠ BAC=23°，则∠ ACD 的度数为（　　）

A.120°　　B.125°　　C.127°　　D.104°

3. [期中·盐城] 如图，△ ABC ≌△ AEF，则∠ EAC 等于（　　）



（第 3 题图）

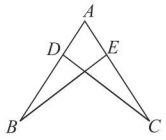


（第 4 题图）

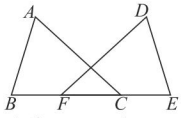
A. ∠ BAF　　B. ∠ C　　C. ∠ F　　D. ∠ CAF

4. 如图所示，在△ ABC 中，D、E 分别是边 AC、BC 上的点，若△ ADB ≌△ EDB ≌△ EDC，则∠ C 的度数为（　　）

A.30°　　B.25°　　C.20°　　D.15°



（第 5 题图）

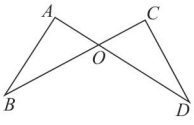


（第 6 题图）

5. 如图，若△ ABE ≌△ ACD，且 AB = 6，AE = 2，则 EC 的长是 _____.

6. 如图，已知△ ABC ≌△ DEF，且 BE=10 cm，CF=4 cm，则 BC=_____ cm.

7. 如图，△ AOB ≌△ COD，∠ B=29°，∠ C=90°，则∠ COD 的度数是 _____.

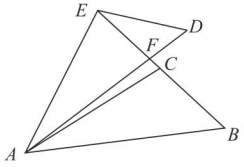


（第 7 题图）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [期中·连云港]如图，△ ABC ≌△ ADE，BC 的延长线经过点 E，交 AD 于点 F，∠ AED=105°，∠ CAD=5°，∠ B=50°，则∠ EAB=_____.

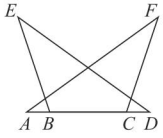


（第 8 题图）

9. 如图，△ ACF ≌△ DBE，若 AD=11，BC=7.

（1）证明 AB = CD;

（2）求线段 AB 的长.

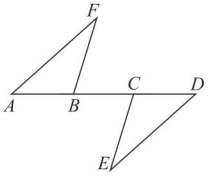


（第 9 题图）

10. 如图，A、B、C、D 四点在同一条直线上，且 △ ABF ≌△ DCE. 求证：

（1）AF // DE，BF // CE;

（2）AC=BD.



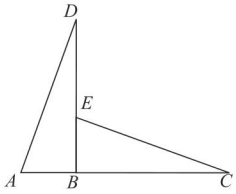
（第 10 题图）

11. 若点 A、B、C 在一条直线上，如图，△ ABD ≌△ EBC，AB=2cm，BC=5cm，

（1）求 DE 的长；

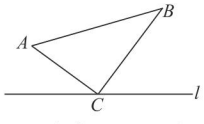
（2）DB 与 AC 垂直吗？为什么？

（3）判断直线 AD 与直线 CE 的位置关系，并说明理由.



（第 11 题图）

12. 如图，在△ ABC 中，∠ ACB=90°，AC=6，BC=8. 点 P 从 A 点出发沿 A→C→B 路径运动，终点为 B 点；点 Q 从 B 点出发沿 B→C→A 的路径运动，终点为 A 点. 点 P 和点 Q 分别以每秒 1 个单位长度和 3 个单位长度的运动速度同时开始运动，两点都要到相应的终点时才能停止运动，在某时刻，分别过 P 和 Q 作 PE ⊥直线 l 于 E，QF ⊥直线 l 于 F. 问：点 P 运动多长时间时，以点 P、E、C 为顶点的三角形与以点 Q、F、C 为顶点的三角形全等？请说明理由.



（第 12 题图）

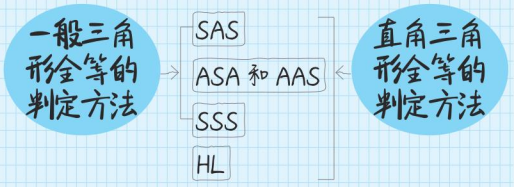
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3 探索三角形全等的条件

核心知识

▲ 三角形全等的判定方法——SAS（重点）
▲ 三角形全等的判定方法——ASA（重点）
▲ 三角形全等的判定方法——AAS（重点）
▲ 三角形全等的判定方法——SSS（重点）
▲ 直角三角形全等的判定方法——HL（重点）

知识链接



点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

要点提醒：

（1）相等的元素：两边及其夹角.

（2）书写顺序：边→角→边.

（3）两边和其中一边的对角分别相等的两个三角形不一定全等.

点知识 1 全等三角形的判定方法——边角边（SAS）

1. **基本事实** 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）.

2. **书写格式** 如图 1.3−1，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，$\begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$

∴ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（SAS）.

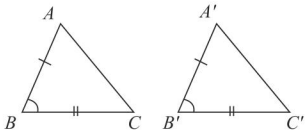


图 1.3−1

拨考向 利用“SAS”判定两个三角形全等

例 1 如图 1.3−2，点 C 是 AB 的中点，$AD=CE$，且 $AD \parallel CE$. 求证△ ACD ≌△ CBE.

解题秘方： 先根据条件找出两个三角形中的两条边及其夹角对应相等，再根据“SAS”判定两个三角形全等.

证明： ∵点 C 是 AB 的中点，

∴ $AC=CB$.

∵ $AD \parallel CE$，

∴ $\angle CAD=\angle BCE$.

在△ ACD 和△ CBE 中，

$\begin{cases} AC=CB, \\ \angle CAD=\angle BCE, \\ AD=CE, \end{cases}$

∴ △ ACD ≌△ CBE（SAS）.

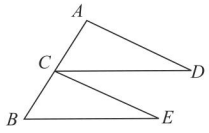


图 1.3−2

»提分·秘诀

方法点拨： 常见的隐含等角的情况：①公共角相等；②对顶角相等；③等角加（或减）等角，其和（或差）仍相等；④同角或等角的余（或补）角相等；⑤由角平分线的定义得出角相等；⑥由垂直的定义得出角相等；⑦由平行线得到同位角或内错角相等. 另外，一些自然规律如“太阳光线可以看成是平行的”“光的反射角等于入射角”等也是常见的隐含条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 全等三角形的判定方法——角边角（ASA）

1. 基本事实 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

2. 书写格式 如图 1.3−3，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\\ \angle C=\angle C',\end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（ASA）.

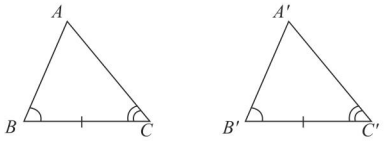


图 1.3−3

»提分·必记

要点提醒：

（1）相等的元素：两角及其夹边.

（2）书写顺序：角→边→角.

（3）夹边即两个角的公共边.

拔考向 利用“ASA”判定两个三角形全等

例 2 如图 1.3−4，已知 $AB \parallel DF$，$AC \parallel DE$，$BC=FE$，且点 B，E，C，F 在一条直线上. 求证△ ABC ≌△ DFE.

解题秘方： 解题的关键是由两组平行线得出两组角对应相等，构造两角及其夹边对应相等.

证明： $\because AB \parallel DF$ 且点 B，E，C，F 在一条直线上，

$\therefore \angle B=\angle F$. $\because AC \parallel DE$，$\therefore \angle ACB=\angle DEF$.

在△ ABC 和△ DFE 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle F,\\ BC=FE,\\ \angle ACB=\angle DEF,\end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ DFE（ASA）.

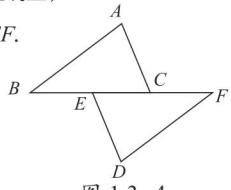


图 1.3−4

»提分·秘诀

方法点拨： 运用“ASA”判定两个三角形全等，既找边相等，又找角相等，除已知条件外，看缺什么条件，去找什么条件，找边或角相等的方式与例 1 相同.

点知识 3 全等三角形的判定方法——角角边（AAS）

1. 基本事实 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

2. 书写格式

如图 1.3−5，在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A',\\ \angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（AAS）.

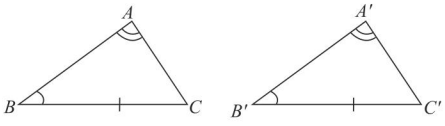


图 1.3−5

3. 特别解读

（1）判定两个三角形全等的三个条件中，“边”是必不可少的；

（2）由于“角角边”和“角边角”是可以互相转化的，故能用“角角边”证明的问题，一般也可以用“角边角”证明；

（3）在运用“ASA”和“AAS”判定时，要注意“夹边”和“对边”的区别.

»提分·必记

要点提醒：

（1）相等的元素：两角及其中一角的对边；

（2）用判定三角形全等的方法证明三角形全等时，要注意图形中隐含的等角. 虽然已知条件无涉及，但证明中要特别注意挖掘这些重要条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

»提分·秘诀

教你一招：

证明三角形全等时找条件的方法：

证明三角形全等时，有些条件是已知的，有些条件是隐含在题设或图形中的，比如对顶角相等、公共角相等、公共边相等等，还有些条件是通过证明其他三角形全等，利用全等三角形的性质得到的.

拔考向 判定两个三角形全等

类型1：利用“AAS”判定两个三角形全等

例3 如图 1.3–6，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，求证△ BOD ≌△ COE.

解题秘方：找出两个三角形中两组角及其中一组角的对边对应相等，利用“AAS”判定两个三角形全等.

证明：在△ ABE 和△ ACD 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle A=\angle A, \\ AE=AD, \end{cases}$$

公共角可直接写出，对顶角也可直接写出.

$\therefore$ △ ABE ≌△ ACD（SAS）.

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because AB=AC$，$AD=AE$，

$\therefore BD=CE$.

在△ BOD 和△ COE 中，

$$\begin{cases} \angle BOD=\angle COE, \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ △ BOD ≌△ COE（AAS）.

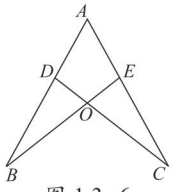


图 1.3–6

方法点拨：

补充的条件取决于题目中的已知条件，若已知两组边对应相等，则找它们的夹角对应相等；若已知两组角对应相等，则必须再找一组对应边对应相等.

类型2：补充条件判定两个三角形全等

例4 如图 1.3–7，已知 $CD=CA$，$\angle 1=\angle 2$，要使△ ECD ≌△ BCA，需添加的条件是（　　）.（只写出一个条件即可）

解题秘方：已知$\angle 1=\angle 2$，可得$\angle DCE=\angle ACB$，又 $CD=CA$，即题中已知了两个条件：一组角及这组角的一组邻边分别相等，于是可再添加：这组角的另一组邻边或另两组角中的任意一组角对应相等.

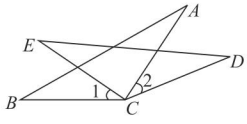


图 1.3–7

解：$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 2+\angle ACE=\angle 1+\angle ACE$，

即$\angle DCE=\angle ACB$.

又$\because CD=CA$，

$\therefore$若添加 $CE=CB$，可根据“SAS”判定两个三角形全等；

若添加$\angle D=\angle A$，可根据“ASA”判定两个三角形全等；

若添加“$\angle E=\angle B$”，可根据“AAS”判定两个三角形全等.

答案：$CE=CB$（答案不唯一，合理即可）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 全等三角形的判定方法——边边边（SSS）

»提分·必记

1. 基本事实 三边分别相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

2. 书写格式 如图 1.3−8，

在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \\ AC=A'C', \end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ $A'B'C'$（SSS）.

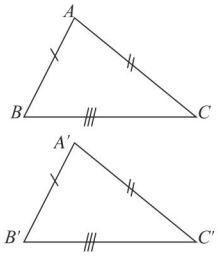


图 1.3−8

要点提醒：

（1）相等的元素：三角形的三条边；

（2）在列举两个三角形全等的条件时，应把三个条件按顺序排列（等号左边是全等号左边三角形的三个元素，等号右边是全等号右边三角形的三个元素）并用大括号将其括起来；

（3）书写过程中三角形边的两个端点及三角形的顶点前后顺序要对应.

拔考向 利用“SSS”判定两个三角形全等

例 5 如图 1.3−9，已知点 A，D，B，F 在一条直线上，$AC=FE$，$BC=DE$，$AD=FB$. 求证△ ABC ≌△ FDE.

»提分·秘诀

方法点拨：

除了题目中已知的边相等以外，还有些相等的边隐含在题设或图形中. 常见的有：

①公共边相等；

②等边加（或减）等边，其和（或差）仍相等；

③由中点得出线段相等.

解题秘方： 紧扣“SSS”找出两个三角形中三边对应相等的条件来判定两个三角形全等.

证明： $\because AD=FB$，

$\therefore AD+DB=FB+DB$，即 $AB=FD$.

在△ ABC 和△ FDE 中，$\begin{cases} AC=FE, \\ AB=FD, \\ BC=DE, \end{cases}$

$\therefore$ △ ABC ≌△ FDE（SSS）.

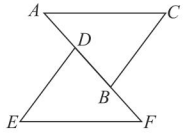


图 1.3−9

点知识 5 三角形的稳定性

1. 三角形的稳定性 如果一个三角形三边的长度确定，那么这个三角形的形状和大小就完全确定，这个性质叫做三角形的稳定性，三角形的稳定性在生活和生产中有着广泛应用.

2. 四边及四边以上的图形不具有稳定性，为保证其稳定，常在多边形中构造三角形.

拔考向 根据三角形的稳定性解决实际问题

»提分·秘诀

例 6 [探究题]要使四边形木架（用四根木条钉成）不易变形，至少要再钉上几根木条？五边形木架呢？六边形木架呢？n 边形木架呢？

方法点拨：

本题运用了数形结合思想，使问题更直观、易懂，还运用了从特殊到一般的思想，由四边形、五边形、六边形类比推出 n 边形. 此题为一道规律探究题，通过观察图形，分析、归纳出其中的规律.

解题秘方： 若要多边形稳定，需将它变换成若干个三角形.

先画出图形，结合图形分割三角形得出：四边形：1 根，五边形：2 根，六边形：3 根，由类比推理可知，n 边形：$(n-3)$ 根，如图 1.3−10 所示.


图 1.3−10

解： 四边形木架至少要再钉上 1 根木条，五边形木架至少要再钉上 2 根木条，六边形木架至少要再钉上 3 根木条，n 边形木架至少要再钉上（$n-3$）根木条.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 6 用尺规作角平分线

已知∠ AOB. 求作：∠ AOB 的平分线.

作法：（1）以点 O 为圆心，任意长为半径作弧，分别交射线 OA、OB 于点 C、D.

（2）分别以点 C、D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧在∠ AOB 的内部相交于点 M.

（3）作射线 OM. OM 就是∠ AOB 的平分线.（如图 1.3−11）

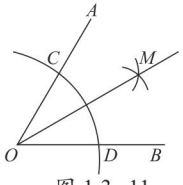


图 1.3−11

拔考向 利用作已知角的平分线等分角

例 7 如图 1.3−12，已知∠ AOB，求作：∠ $AOM=\frac{1}{4}$∠ AOB.

解题秘方： 利用尺规作图作两次角平分线即可.

解： 作法：

（1）以点 O 为圆心，适当的长为半径作弧，交 OA 于点 E，交 OB 于点 F；

（2）分别以点 E、F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径作弧，两弧在∠ AOB 的内部交于点 C；

（3）作射线 OC；

（4）同理，作∠ AOC 的平分线 OM.

∠ AOM 即为所求作的角（如图 1.3−12）.

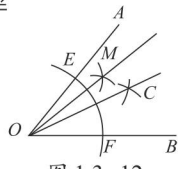


图 1.3−12

提分·必记

特别解读：

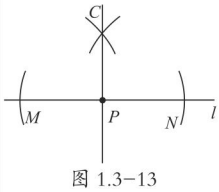
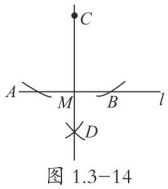
（1）“任意长为半径作弧”是为了作图方便，一般选取适当的长度，不能太长也不要太短；

（2）“大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧”是因为若以小于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径，则画出的两弧不能相交；

（3）作射线 OM”不能叙述为“连接 OM”，因为角平分线是射线而不是线段；

（4）连接 CM、BM，依据作图可知 $\triangle OCM \cong \triangle ODM$（SSS），所以 OM 平分∠ AOB.

点知识 7 用尺规作垂线

过直线上一点作垂线	1. 以点 P 为圆心，适当的长为半径作弧，交直线 l 于点 M、N. 2. 分别以点 M、N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧交于点 C. 3. 作直线 CP. 直线 CP 即为所求. 如图 1.3−13.	图 1.3−13
过直线外一点作垂线	1. 以点 C 为圆心，适当的长为半径作弧，交直线 l 于点 A、B. 2. 分别以点 A、B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧交于点 D. 3. 作直线 CD. 直线 CD 即为所求. 如图 1.3−14.	图 1.3−14

提分·必记

特别解读：

（1）因为所作的垂线是一条直线，所以不能说成“作射线 CP”或者“连接 CP”.

（2）根据图 1.3−13 连接 CM、CN，可知 $\triangle CMP \cong \triangle CNP$（SSS），所以∠ CPM=∠ CPN=90°，直线 CP 即为所求作的垂线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向 利用尺规作三角形的高

例 8 如图 1.3−15，已知△ ABC，$\angle BAC=90°$.

（1）尺规作图：作 BC 边上的高 AD（保留作图痕迹，不写作法）；

（2）求证：$\angle C=\angle BAD$.

解题秘方：（1）直接利用过直线外一点作垂线的方法作图即可；

（2）利用直角三角形的性质结合垂线的定义得出答案 .

（1）**解：**如图 1.3−15，线段 AD 即为所求；

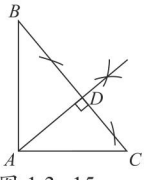


图 1.3−15

（2）**证明：**$\because \angle BAC=90°$ ，$\therefore \angle BAD+\angle CAD=90°$.

$\because AD$ 是 BC 边上的高，

$\therefore \angle CDA=90°$ ，

$\therefore \angle C+\angle CAD=90°$ ，

$\therefore \angle C=\angle BAD$.

»提分·秘诀

方法点拨：

尺规作图要虚实分明，一般辅助性的线用虚线，要求画出的线用实线，要保留作图痕迹，这样才可以体现出作图的全过程 .

点知识 8 直角三角形全等的判定方法——斜边、直角边（HL）

1. 基本事实 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.

2. 书写格式 如图 1.3−16，

在 Rt△ ABC 和 Rt△ $A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \end{cases}$$

$\therefore$ Rt△ $ABC\cong$ Rt△ $A'B'C'$（HL）.

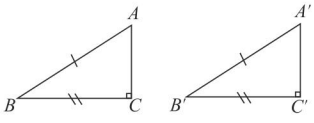


图 1.3−16

3. 注意点 书写时必须强调直角三角形 .

4. 易错警示 “HL”是判定两个直角三角形全等的特殊方法，但不是唯一方法，前面学习的判定三角形全等的方法在直角三角形中仍然适用 .

»提分·必记

特别提醒：

（1）应用“HL”判定两个直角三角形全等，在书写时两个三角形符号前一定要加上“Rt”.

（2）判定两个直角三角形全等的特殊方法“HL”，只适用于直角三角形全等的判定，对于一般三角形不适用 .

拔考向 利用“HL”判定两个直角三角形全等

例 9 如图 1.3−17，$AC\perp BC$，$AD\perp BD$，$AD=BC$，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别是点 E，F. 求证 $CE=DF$.

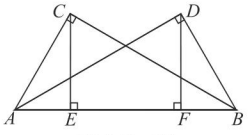


图 1.3−17

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧点拨：

(1) 两个直角三角形中，由于有直角相等的条件，所以判定两个直角三角形全等只需要再找 2 对对应元素分别相等（其中至少有一对边）；

(2) 直角三角形是特殊的三角形，不仅可以运用一般三角形全等的判定方法，还有直角三角形特有的判定方法"HL".

解题秘方：利用"HL"证明两个直角三角形全等，为证明两条线段相等创造条件.

证明：$\because AC \perp BC$，$AD \perp BD$，

$\therefore \angle ACB = \angle BDA = 90°$.

在 Rt $\triangle ABC$ 和 Rt $\triangle BAD$ 中，$\begin{cases} AB=BA, \\ BC=AD, \end{cases}$

$\therefore$ Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle BAD$（HL）.

$\therefore \angle CBE = \angle DAF$.

$\because CE \perp AB$，$DF \perp AB$，$\therefore \angle CEB = 90°$，$\angle DFA = 90°$.

在$\triangle BCE$ 和$\triangle ADF$ 中，$\begin{cases} \angle CEB = \angle DFA = 90°, \\ \angle CBE = \angle DAF, \\ BC=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ADF$（AAS）. $\therefore CE=DF$.

点方法·拨技巧 提高分

» 挑战·高分

方法点拨：

证明线段或角相等的方法：

(1) 找出所要证明相等的线段（或角）在哪两个可能全等的三角形中，如待证线段或角不分布在两个全等的三角形中时，常需添加辅助线构造全等三角形；

(2) 分析需要证明全等的两个三角形，已知条件（包含图形中的隐含条件）是什么，还缺什么条件；

(3) 根据已知条件及所学的定理、定义等推导出所缺的条件；

(4) 整理书写证明过程.

拔尖角度 1 运用"分析法"进行几何推理（拓展点）

例 10 如图 1.3–18，已知 Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle ADE$，$\angle ABC = \angle ADE = 90°$，$BC$ 与 DE 相交于点 F，连接 CD，EB. 求证：$CF=EF$.

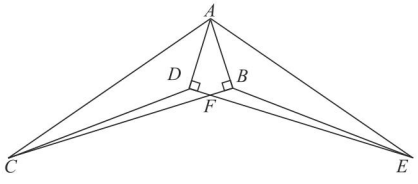


图 1.3–18

解题秘方：

（思路一）证 CF，EF 所在的两个三角形全等. 由 Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle ADE$，可得边角相等关系，进一步证得$\triangle ACD \cong \triangle AEB$，进而证出$\triangle CDF \cong \triangle EBF$，可得 $CF=EF$.

（思路二）要证 $CF=EF$，可先证 $BF=DF$. 连接 AF，构造两个直角三角形，且 AF 是公共边，可证得 Rt $\triangle ABF \cong$ Rt $\triangle ADF$，可得 $BF=DF$，进而得出 $CF=EF$.

证明：（方法一）$\because$ Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle ADE$，

$\therefore AC=AE$，$AB=AD$，$\angle ACB = \angle AED$，$\angle CAB = \angle EAD$.

$\therefore \angle CAB - \angle DAB = \angle EAD - \angle DAB$，即 $\angle DAC = \angle BAE$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

在△ ACD 和△ AEB 中，$\begin{cases} AC=AE, \\ \angle DAC=\angle BAE, \\ AD=AB, \end{cases}$

∴ △ ACD ≌△ AEB（SAS）.

∴ $CD=EB$，$\angle ACD=\angle AEB$.

又∵ $\angle ACB=\angle AED$，

∴ $\angle ACB-\angle ACD=\angle AED-\angle AEB$，即 $\angle DCF=\angle BEF$.

在△ CDF 和△ EBF 中，$\begin{cases} \angle DFC=\angle BFE, \\ \angle DCF=\angle BEF, \\ CD=EB, \end{cases}$

∴ △ CDF ≌△ EBF（AAS）.

∴ $CF=EF$.

（方法二）连接 AF，如图 1.3-19.

∵ Rt △ ABC ≌ Rt △ ADE，

∴ $CB=ED$，$AB=AD$.

在 Rt △ ADF 和 Rt △ ABF 中，$\begin{cases} AD=AB, \\ AF=AF, \end{cases}$

∴ Rt △ ADF ≌ Rt △ ABF（HL）.

∴ $DF=BF$.

∴ $CB-BF=ED-DF$，即 $CF=EF$.

公共边是相等线段的一种形式，若已知有两组边对应相等，而第三边是公共边，则可利用“SSS”证明两个三角形全等.

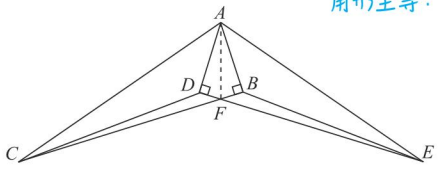


图 1.3-19

解法提醒：

常见的分析问题的方法：

（1）分析法：从要证明的结论出发，根据已学过的定义、定理、基本事实等，寻找使结论成立所需的条件，这样一步步倒推，一直追溯到使结论成立的条件与已知条件吻合；

（2）综合法：从已知条件入手，根据已学过的定义、定理、基本事实等，逐步推出要证的结论；

（3）在实际解决问题的过程中，经常把两种方法结合起来思考.

拔尖角度 2 构造全等证明全等

类型 1：连线构造

例 11 如图 1.3-20，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$. 求证：$\angle B=\angle D$.

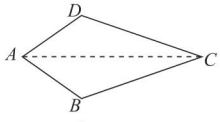


图 1.3-20

解题秘方：紧扣“SSS”的条件构造全等三角形，连接 AC 即可.

证明：如图 1.3-20，连接 AC.

在△ ABC 和△ ADC 中，$\begin{cases} AB=AD, \\ CB=CD, \\ AC=AC, \end{cases}$

∴ △ ABC ≌△ ADC（SSS）. ∴ $\angle B=\angle D$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：巧用“截长补短法”构造全等三角形

方法提示：

运用“截长补短法”构造全等三角形有两个标志：一是条件中有角平分线，截长补短是在角平分线所平分的角的两边上进行．二是条件或结论中出现一条线段等于另外两条线段的和或差，截长补短也是在相关的线段中进行．

例 12 如图 1.3−21，已知 $AB \parallel CD$，CE，BE 分别平分 $\angle BCD$ 和 $\angle CBA$，点 E 在 AD 上．求证 $BC=AB+CD$.

解题秘方：紧扣“截长补短法”的特征构造全等三角形．

证明：如图 1.3−21，在 BC 上取一点 F，使 $BF=BA$，连接 EF.

$\because CE$，BE 分别平分 $\angle BCD$ 和 $\angle CBA$，$\therefore \angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 中，$\begin{cases} BA=BF, \\ \angle 1=\angle 2, \\ BE=BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE$（SAS）．$\therefore \angle A=\angle 5$.

$\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle A+\angle D=180°$.

又 $\because \angle 5+\angle 6=180°$，$\therefore \angle 6=\angle D$.

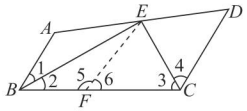


图 1.3−21

在 $\triangle EFC$ 和 $\triangle EDC$ 中，$\begin{cases} \angle 6=\angle D, \\ \angle 3=\angle 4, \\ EC=EC, \end{cases}$ $\therefore \triangle EFC \cong \triangle EDC$（AAS）．

$\therefore CF=CD$. $\therefore BC=BF+CF=AB+CD$.

技巧点拨：

证明一条线段等于两条线段的和的方法：

（1）“截长法”的基本思路是在长线段上取一段，使之等于其中一条短线段，然后证明剩下的线段等于另一条短线段；

（2）“补短法”的基本思路是延长短线段，使延长部分等于另一条短线段，再证明延长后的线段等于长线段．

类型 3：巧用“加倍折半法”构造全等三角形

例 13 如图 1.3−22，已知 CE，CB 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 的中线，且 $AB=AC$. 求证 $CD=2CE$.

解题秘方：CE 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的中线，将 CE 延长至原来的两倍至点 F，可构造 $\triangle BEF$ 和 $\triangle AEC$ 全等，即出现了 $2CE$，因此再证明 $\triangle CBD$ 和 $\triangle CBF$ 全等即可．

证明：如图 1.3−22，延长 CE 到点 F，使 $EF=CE$，连接 FB，则 $CF=2CE$.

$\because CE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\therefore AE=BE$.

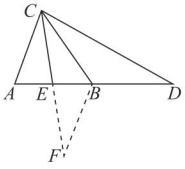


图 1.3−22

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle AEC$ 中，$\begin{cases} BE=AE, \\ \angle BEF=\angle AEC, \\ EF=EC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle AEC$（SAS）．

$\therefore \angle EBF=\angle A$，$BF=AC$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle ACB=\angle ABC$.

$\therefore \angle CBD=\angle A+\angle ACB=\angle EBF+\angle ABC=\angle CBF$.

$\because CB$ 是 $\triangle ADC$ 的中线，$\therefore AB=BD$.

又 $\because AB=AC$，$AC=BF$，$\therefore BD=BF$.

在 $\triangle CBD$ 和 $\triangle CBF$ 中，$\begin{cases} CB=CB, \\ \angle CBD=\angle CBF, \\ BD=BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle CBD \cong \triangle CBF$（SAS）．$\therefore CD=CF$. $\therefore CD=2CE$.

技巧点拨：

证明一条线段等于另一条线段的 2 倍的方法：

“加倍法”或“折半法”．“加倍法”的基本思路是延长短线段，使延长后的线段等于原来的 2 倍，再证明它等于长线段；“折半法”的基本思路是取长线段的中点，证明其一半等于短线段．本例采用的是“加倍法”，待学过三角形中位线定理后我们还可以用“折半法”来证明．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

全等三角形的判定是中考的必考内容，主要考查添加条件或选用适当的方法证明三角形全等．常与全等三角形的性质一起考查，近几年的中考题以填空题、选择题和解答题的形式出现，题目以中、低档为主，有时也与其他知识综合考查，难度较大，主要出现在解答题中．

三年中考兵法

考法 1 利用全等三角形的判定补充三角形全等的条件

>>冲刺·满分

例 14 如图 1.3−23，在△ ABC 和△ DCB 中，AC 与 BD 相交于点 O，下列四组条件中，不能证明△ ABC ≌△ DCB 的是（　　）

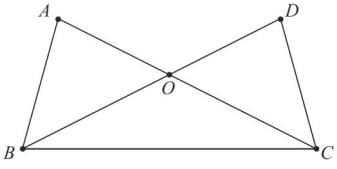


图 1.3−23

A. $AB = DC$，$AC = DB$

B. $AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB$

C. $BO = CO$，$\angle A = \angle D$

D. $\angle ABD = \angle DCA$，$\angle A = \angle D$

试题评析：本题考查了全等三角形的判定：在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件．在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角．

解：A. ∵ $AB = DC$，$AC = DB$，$BC = CB$，

∴△ ABC ≌△ DCB（SSS），故 A 选项正确；

B. ∵ $AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB$，$BC = CB$，

∴△ ABC ≌△ DCB（SAS），故 B 选项正确；

C. ∵ $BO = CO$，∴ $\angle ACB = \angle DBC$，

∵ $\angle A = \angle D$，$BC = CB$，∴△ ABC ≌△ DCB（AAS），故 C 选项正确；

D. ∵ $\angle ABD = \angle DCA$，$\angle A = \angle D$，$BC = CB$，不能证明△ ABC ≌△ DCB，故 D 选项错误；

答案：D

方法点拨：

证明两个三角形全等，若条件不够需要补充时，有以下几种情况：

（1）已知两边，
- 找第三边，
- 找两边的夹角；

（2）已知两角，
- 找其中任意一角的对边，
- 找两角的夹边；

（3）已知一角及其一条邻边，
- 找其他两角中任意一角，
- 找该已知角的另一条邻边；

（4）已知一边及其对角，找余下的任意一角．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法点评：

两条线段的关系包括数量关系和位置关系，数量关系有相等、倍分等，位置关系有平行和垂直.

考法 2 利用全等三角形的判定和性质判断两条线段的关系

例 15 如图 1.3−24，$AC \perp BC$，$DC \perp EC$，$AC = BC$，$DC = EC$，图中 AE、BD 有怎样的关系（数量关系和位置关系）？并证明你的结论.

试题评析：本题考查全等三角形的判定和性质，解题的关键是判定两条线段所在的三角形全等.

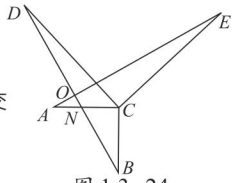


图 1.3−24

解：结论：$AE = BD$，$AE \perp BD$.

理由：如图 1.3−24，设 AC 交 BD 于点 N，AE 交 BD 于点 O，

$\because AC \perp BC, DC \perp EC$，

$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$，$\therefore \angle DCB = \angle ECA$，

在△ DCB 和△ ECA 中，

$$\begin{cases} BC=AC, \\ \angle DCB= \angle ECA, \\ CD=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ △ $DCB \cong$ △ ECA（SAS），$\therefore \angle B = \angle A$，$BD = AE$.

$\because \angle AND = \angle BNC$，$\angle B + \angle BNC = 90^\circ$，

$\therefore \angle A + \angle AND = 90^\circ$，$\therefore \angle AON = 90^\circ$，

$\therefore AE \perp BD$.

方法点拨：

判定两个三角形全等，先根据已知条件或待求证的结论确定三角形，然后再根据三角形全等的判定方法，看缺什么条件，再去证什么条件. 本题得出三角形全等后，再根据全等三角形的性质可得线段或角相等.

考法 3 利用全等三角形的判定和性质求角的度数

例 16 [中考·徐州]如图 1.3−25，$AC \perp BC$，$DC \perp EC$，$AC = BC$，$DC = EC$，AE 与 BD 交于点 F.

（1）求证：$AE = BD$；

（2）求 $\angle AFD$ 的度数.

试题评析：本题考查全等三角形的判定和性质，三角形内角和定理，三角形外角定理，解题的关键是正确寻找全等三角形全等的条件，属于中考常考题型.

解：（1）$\because AC \perp BC$，$DC \perp EC$，

$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$，

$\therefore \angle ACE = \angle BCD$.

在△ ACE 和△ BCD 中，

$$\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ACE= \angle BCD, \\ CE=CD, \end{cases}$$

$\therefore$ △ $ACE \cong$ △ BCD（SAS），

$\therefore AE = BD$；

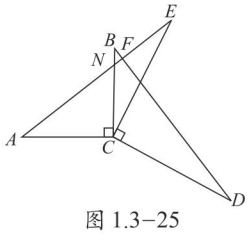


图 1.3−25

（2）如图 1.3−25，设 BC 与 AE 交于点 N，

$\because \angle ACB = 90^\circ$，$\therefore \angle A + \angle ANC = 90^\circ$，

$\because$ △ $ACE \cong$ △ BCD，$\therefore \angle A = \angle B$，

$\because \angle ANC = \angle BNF$，$\therefore \angle B + \angle BNF = \angle A + \angle ANC = 90^\circ$，

$\therefore \angle AFD = \angle B + \angle BNF = 90^\circ$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用全等三角形解决实际问题

例 17 [中考·南通]如图 1.3–26，有一池塘，要测池塘两端 A，B 的距离，可先在平地上取一个点 C，从点 C 不经过池塘可以直接到达点 A 和点 B. 连接 AC 并延长到点 D，使 $CD = CA$. 连接 BC 并延长到点 E，使 $CE = CB$. 连接 DE，那么量出 DE 的长就是 AB 的长，为什么？

试题评析：本题考查了全等三角形的应用，要熟练掌握三角形全等的判定方法.

解：量出 DE 的长就是 AB 的长，理由如下：

在△ ABC 和△ DEC 中，

$$\begin{cases} BC=EC, \\ \angle ACB=\angle DCE, \\ AC=DC, \end{cases}$$

$\therefore$ △ ABC ≌△ DEC（SAS），

$\therefore$ $AB = DE$.

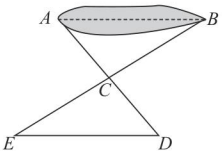


图 1.3–26

方法点拨：

在生活中有些距离直接测量有困难，此时可利用全等三角形的有关知识来解决，把实际问题转化为三角形全等的问题，把已知条件转化为三角形中的边和角是解决问题的关键.

两年模拟兵法

☞答案见 242 页

1. 如图，某同学把一块三角形的玻璃打碎成了 3 块，现在要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃，那么最省事的方法是（　　）

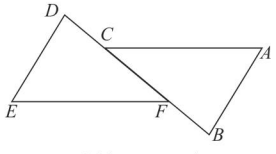


（第 1 题图）

A. 带①去　　B. 带②去

C. 带③去　　D. ①②③都带去

2. 如图，点 B、F、C、D 在一条直线上，$AB \parallel ED$，$CD = BF$，若△ ABC ≌△ EDF，则还需要补充的条件可以是（　　）



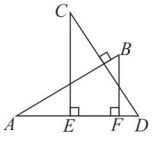
（第 2 题图）

A. $AC = EF$　　B. $BC = DF$

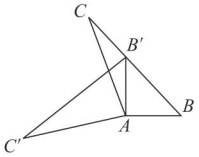
C. $AB = ED$　　D. $\angle B = \angle E$

3. [中考·南京]如图，$AB \perp CD$，且 $AB=CD$. E、F 是 AD 上两点，$CE \perp AD$，$BF \perp AD$. 若 $CE=a$，$BF=b$，$EF=c$，则 AD 的长为（　　）

A. $a+c$　　B. $b+c$　　C. $a-b+c$　　D. $a+b-c$



（第 3 题图）

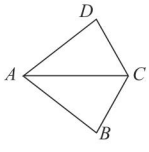


（第 4 题图）

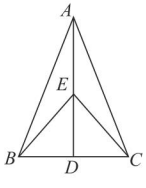
4. [中考·苏州]如图，在△ ABC 中，$\angle BAC = 108°$，将△ ABC 绕点 A 按逆时针方向旋转得到△ $AB'C'$. 若点 B' 恰好落在 BC 边上，且 $AB' = CB'$，则 $\angle C'$ 的度数为（　　）

A. 18°　　B. 20°　　C. 24°　　D. 28°

5. 如图，在△ ADC 与△ ABC 中，已知 $AD=AB$，在不添加任何辅助线的前提下，要使△ ADC ≌△ ABC，只需再添加的一个条件可以是_____.



（第 5 题图）

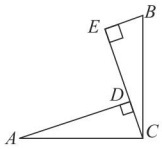


（第 6 题图）

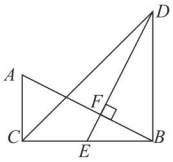
6. 如图，已知 $AB=AC$，$AD \perp BC$ 于 D，点 E 在 AD 上，图中共有_____对全等三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$AD\perp CE$于D，$BE\perp CE$于E. 若$AD=2.5$ cm，$DE=1.7$ cm，则$BE=$_____cm.



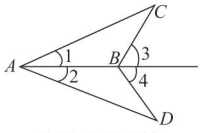
（第7题图）



（第8题图）

8. 如图，在$\triangle ABC$和$\triangle DBC$中，$\angle ACB=\angle DBC=90°$，$E$是$BC$的中点，$DE\perp AB$，垂足为点$F$，且$AB=DE$. 若$BD=8$ cm，则AC的长为_____.

9. [中考·乐山]如图，已知$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求证：$BC=BD$.

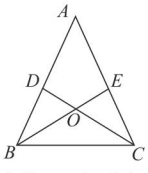


（第9题图）

10. [中考·无锡]如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D、E分别在AB、AC上，$BD=CE$，BE、CD相交于点O.

（1）求证：$\triangle DBC\cong\triangle ECB$；

（2）求证：$OB=OC$.



（第10题图）

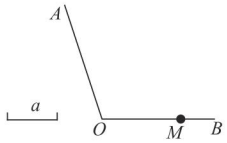
11. 尺规作图（不写作法，保留作图痕迹）：

已知线段a和$\angle AOB$，点M在OB上（如图所示）.

（1）在OA边上作点P，使$OP=2a$；

（2）作$\angle AOB$的平分线；

（3）过点M作OB的垂线.

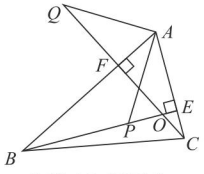


（第11题图）

12. 如图，BE、CF是$\triangle ABC$的高，它们相交于点O，点P在BE上，点Q在CF的延长线上且$BP=AC$，$CQ=AB$.

（1）求证：$\triangle ABP\cong\triangle QCA$；

（2）AP和AQ的位置关系如何，请给予证明.

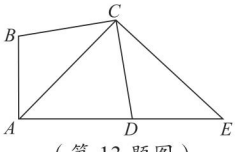


（第12题图）

13. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$BC=DC$，延长$AD$到$E$点，使$DE=AB$.

（1）求证：$\angle B=\angle EDC$；

（2）求证：$\triangle ABC\cong\triangle EDC$.



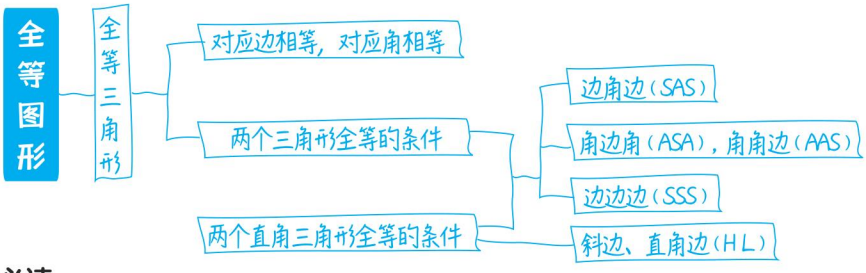
（第13题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 全等三角形是特殊的全等图形，全等三角形的对应边相等，对应角相等．

2. 全等三角形的判定——SSS、SAS、ASA、AAS，对于直角三角形而言，特殊的判定方法——HL.

知识方法专题

知识必学

专题一 全等三角形的性质与判定

链接中考» 全等三角形的性质与判定是中考的热门考点，单独考查时，形式有很多，填空题、选择题、解答题都有．但全等三角形的性质往往是其他综合证明题的一个工具．

类型 1：利用全等三角形证明线段之间的关系

例 1 [中考·无锡] 如图 1–1，已知 $AB \parallel CD$，$AB = CD$，$BE = CF$.

求证：（1）$\triangle ABF \cong \triangle DCE$；

（2）$AF \parallel DE$.

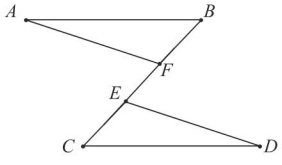


图 1–1

导引：（1）先由平行线的性质得 $\angle B = \angle C$，从而利用 SAS 判定 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$；

（2）根据全等三角形的性质得 $\angle AFB = \angle DEC$，由等角的补角相等可得 $\angle AFE = \angle DEF$，再由平行线的判定可得结论.

证明：（1）$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle B = \angle C$，

$\because BE = CF$，

$\therefore BE - EF = CF - EF$，即 $BF = CE$，

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle DCE$ 中，$\begin{cases} AB = DC, \\ \angle B = \angle C, \\ BF = CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$（SAS）；

（2）$\because \triangle ABF \cong \triangle DCE$，

$\therefore \angle AFB = \angle DEC$，

$\therefore \angle AFE = \angle DEF$，

$\therefore AF \parallel DE$.

类型 2：利用全等三角形证明角之间的关系

例 2 [中考·常州] 已知：如图 1–2，点 A、B、C、D 在一条直线上，$EA \parallel FB$，$EA = FB$，$AB = CD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）求证：∠ E = ∠ F；

（2）若∠ A = 40°，∠ D = 80°，求∠ E 的度数.

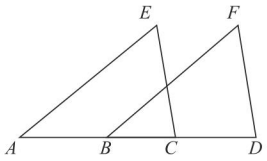


图 1−2

导引：（1）首先利用平行线的性质得出，∠ A = ∠ FBD，根据 AB = CD 即可得出 AC = BD，进而得出△ EAC ≌△ FBD 解答即可；

（2）根据全等三角形的性质和三角形内角和定理解答即可.

证明：（1）∵ EA // FB，∴∠ A = ∠ FBD，

∵ AB = CD，

∴ AB+BC = CD+BC，

即 AC = BD，

在△ EAC 和△ FBD 中，$\begin{cases} EA=FB, \\ \angle A=\angle FBD, \\ AC=BD, \end{cases}$

∴△ EAC ≌△ FBD（SAS），

∴∠ E = ∠ F；

（2）∵△ EAC ≌△ FBD，

∴∠ ECA = ∠ D = 80°，

∵∠ A = 40°，

∴∠ E = 180° − 40° − 80° = 60°.

专题二 尺规作图

链接中考» 尺规作图是几何作图的基础，也是每年中考的基本考点，解答时关键是将要解决的问题转化为基本作图，再根据要求规范作图.

例 3 ［中考·贵港］尺规作图（只保留作图痕迹，不要求写出作法）. 如图 1−3，已知∠ α 和线段 a，求作△ ABC，使∠ A = ∠ α，∠ ACB=90°，AB=a.

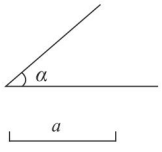


图 1−3

导引：根据作一个角等于已知角，线段截取以及垂线的作法作图.

解：如图 1− 4 所示.

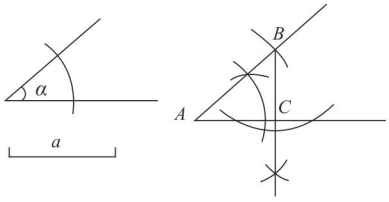


图 1−4

专题三 转化思想

专题解读» 转化思想是把不熟悉的问题转化为熟悉的问题，复杂问题转化为简单问题来解题的一种数学思想. 本章中，常通过添加辅助线，将复杂的问题转化为简单的问题来解答.

例 4 如图 1−5，已知 AD 平分∠ BAC，∠ BAC+∠ BDC=180°. 若∠ C 是钝角，求证：BD=CD.

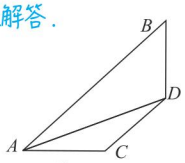


图 1−5

导引：过点 D 作 DM ⊥ AB 于 M，DN ⊥ AC，交 AC 的延长线于 N，证明△ DMB ≌△ DNC，即可得出结论.

证明：如图 1−6，过点 D 作 DM ⊥ AB 于 M，DN ⊥ AC，交 AC 的延长线于 N.

∴∠ AMD= ∠ AND=90°.

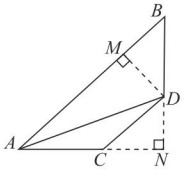


图 1−6

∵ AD 平分∠ BAC，

∴∠ DAM= ∠ DAN.

在△ ADM 和△ ADN 中，

$\begin{cases} \angle AMD=\angle AND, \\ \angle DAM=\angle DAN, \\ AD=AD, \end{cases}$

∴△ ADM ≌△ ADN（AAS），∴ DM=DN.

∵∠ BAC+ ∠ BDC=180°，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ACD+\angle B=180°$,

$\because \angle ACD+\angle DCN=180°$,

$\therefore \angle B=\angle DCN$.

在△ BDM 和△ CDN 中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle DCN,\\ \angle BMD=\angle CND=90°,\\ DM=DN,\end{cases}$$

$\therefore$ △ BDM ≌△ CDN (AAS),

$\therefore BD=CD$.

解法提醒: 本题要证明 $BD=CD$, 无法直接通过全等三角形来证明, 通过添加辅助线, 构造全等三角形可解决问题.

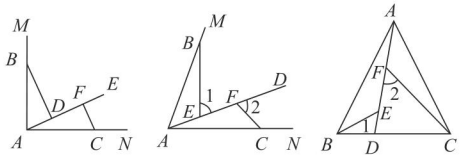
专题四 类比思想

专题解读» 对于几何图形的平移、翻折、旋转等一些规律性的图形变换题, 常常会出现一些基本图形, 而一些复杂的图形都是由基本图形通过变换得到的, 它和基本图形有很多相似的条件和结论, 此时可以利用类比思想, 通过基本图形的结论和方法的类比, 解决复杂图形问题中的相关问题.

例 5 (1) 如图 1-7(1), $\angle MAN=90°$, 射线 AE 在这个角的内部, 点 B、C 分别在 $\angle MAN$ 的边 AM、AN 上, 且 $AB=AC$, $CF\perp AE$ 于点 F, $BD\perp AE$ 于点 D. 求证: △ ABD ≌△ CAF;

(2) 如图 1-7(2), 点 B、C 分别在 $\angle MAN$ 的边 AM、AN 上, 点 E、F 都在 $\angle MAN$ 内部的射线 AD 上, 连接 BE、CF, $\angle 1$、$\angle 2$ 分别是△ ABE、△ CAF 的外角. 已知 $AB=AC$, 且 $\angle 1=\angle 2=\angle BAC$. 求证: △ ABE ≌△ CAF;

(3) 如图 1-7(3), 在△ ABC 中, $AB=AC$, $AB>BC$. 点 D 在边 BC 上, $CD=2BD$, 点 E、F 在线段 AD 上, $\angle 1=\angle 2=\angle BAC$. 若△ ABC 的面积为 15, 求△ ACF 与△ BDE 的面积之和.



(1) (2) (3)

图 1-7

导引: (1) 求出 $\angle BDA=\angle AFC=90°$, $\angle ABD=\angle CAF$, 根据 AAS 证两个三角形全等即可; (2) 根据已知条件和三角形外角性质求出 $\angle ABE=\angle CAF$, $\angle BAE=\angle ACF$, 根据 ASA 证两个三角形全等即可; (3) 求出△ ABD 的面积, 根据△ ABE ≌△ CAF 得出△ ACF 与△ BDE 的面积之和等于△ ABD 的面积, 即可得出答案.

(1) **证明**: $\because CF\perp AE$, $BD\perp AE$,

$\therefore \angle BDA=\angle AFC=90°$.

$\therefore \angle ABD+\angle BAD=90°$.

$\because \angle MAN=90°$,

$\therefore \angle BAD+\angle CAF=90°$,

$\therefore \angle ABD=\angle CAF$.

在△ ABD 和△ CAF 中,

$$\begin{cases}\angle ADB=\angle CFA,\\ \angle ABD=\angle CAF,\\ AB=CA,\end{cases}$$

$\therefore$ △ ABD ≌△ CAF (AAS).

(2) **证明**: $\because \angle 1=\angle 2=\angle BAC$,

$\angle 1=\angle BAE+\angle ABE$,

$\angle BAC=\angle BAE+\angle CAF$,

$\angle 2=\angle FCA+\angle CAF$.

$\therefore \angle ABE=\angle CAF$, $\angle BAE=\angle ACF$.

在△ ABE 和△ CAF 中,

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle ACF,\\ AB=CA,\\ \angle ABE=\angle CAF,\end{cases}$$

$\therefore$ △ ABE ≌△ CAF (ASA).

(3) **解**: $\because$ △ ABC 的面积为 15, $CD=2BD$,

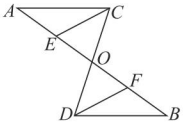
$\therefore$ △ ABD 的面积是 $\frac{1}{3}\times 15=5$. 同(2)易得△ ABE ≌△ CAF, $\therefore$ △ ACF 与△ BDE 的面积之和等于△ ABE 与△ BDE 的面积之和, 即等于△ ABD 的面积 5.

方法点拨: 解答本题关键是从问题(2)、(3)中发现问题(1)中的基本图形, 再运用类比思想解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

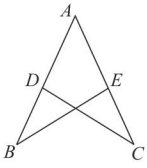
题型一 全等三角形的性质与判定

1. 已知：如图，AB，CD交于点O，点E，F为AB上两点，$OA=OB$，$OE=OF$，$\angle A=\angle B$，$\angle ACE=\angle BDF$. 求证：$\triangle ACE\cong\triangle BDF$.



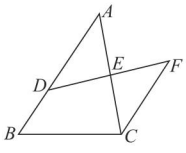
（第1题图）

2.[中考·南京]如图，点D在AB上，点E在AC上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$，求证：$BD=CE$.



（第2题图）

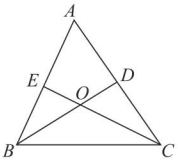
3. 已知：如图，D是$\triangle ABC$的边AB上的一点，DF交AC于点E，$DE=FE$，$FC\parallel AB$.
求证：$AE=CE$.



（第3题图）

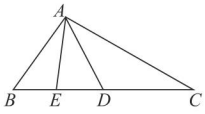
题型二 构造全等三角形解决问题

4.（截长补短构造）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，BD，CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$，BD，CE交于点O，试判断BE，CD，BC的数量关系，并加以证明.



（第4题图）

5. 如图，AD，AE分别是$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的中线，且$BA=BD$. 求证：$AE=\frac{1}{2}AC$.

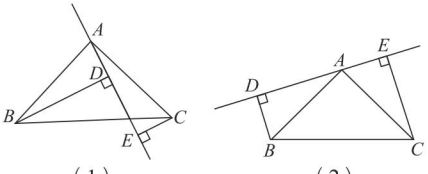


（第5题图）

题型三 动态中的全等三角形

6.（1）如图（1），在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，AE是过A点的一条直线，且B，C在AE的异侧，$BD\perp AE$于D，$CE\perp AE$于E，求证：$BD=DE+CE$；

（2）若直线AE绕点A旋转到图（2）的位置时（$BD<CE$），其余条件不变，问BD，DE，CE之间的数量关系如何？请予以证明.



（1）　　（2）

（第6题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 1 章测试卷

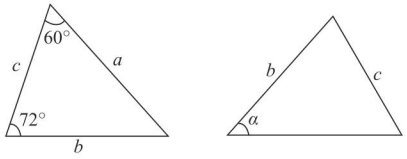
☞答案见 244 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 已知图中的两个三角形全等，则∠ α 等于（　　）

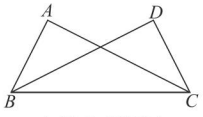
A.72°　　B.60°　　C.58°　　D.48°



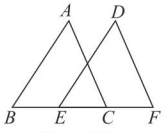
（第 1 题图）

2. 如图，△ ABC ≌△ DCB，点 A 与点 D 对应，点 B 与点 C 对应，如果 AC=6 cm，AB=3 cm，那么 DC 的长为（　　）

A.3 cm　　B.5 cm　　C.6 cm　　D. 无法确定



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，在△ ABC 和△ DEF 中，AB=DE，∠ B=∠ DEF，要证明△ ABC ≌△ DEF 则不能添加下列条件（　　）

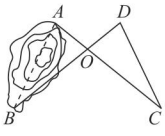
A. AC // DF　　B. ∠ A=∠ D

C. AC=DF　　D. BC=EF

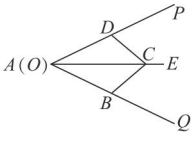
4. 如图，已知 AC=DB，AO=DO，CD=100 m，则 A，B 两点间的距离（　　）

A. 大于 100 m　　B. 等于 100 m

C. 小于 100 m　　D. 无法确定



（第 4 题图）



（第 5 题图）

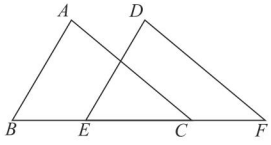
5. 如图，有一个简易平分角的仪器（四边形 $ABCD$），其中 AB=AD，BC=DC，将点 A 放在∠ POQ 的顶点 O 处，AB，AD 分别沿着角的两边 OQ，OP 放置，沿四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 画射线 AE，AE 就是∠ POQ 的平分线．这个平分角的仪器的制作原理是（　　）

A. 角平分线的性质　　B.AAS

C.SSS　　D.SAS

6. 如图，若△ ABC ≌△ DEF，点 B、E、C、F 在同一直线上，BC = 7，EC = 5，则 CF 的长是（　　）

A.2　　B.3　　C.5　　D.7

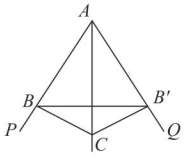


（第 6 题图）

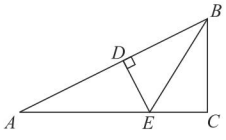
7. 如图，已知 AC 平分∠ PAQ，点 B，B' 分别在边 AP，AQ 上，如果添加一个条件，即可推出 AB=AB'，那么该条件不可以是（　　）

A.BB' ⊥ AC　　B.CB=CB'

C. ∠ ACB=∠ ACB'　　D. ∠ ABC=∠ $AB'C$



（第 7 题图）



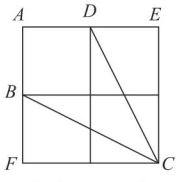
（第 8 题图）

8. 如图，在△ ABC 中，∠ C=90°，ED ⊥ AB 于点 D，BD=BC，若 AC=6 cm，则 AE+DE 等于（　　）

A. 4 cm　　B. 5 cm　　C. 6 cm　　D. 7 cm

9. 如图是由 4 个相同的小正方形组成的网格图，点 A、B、C、D、E、F 都在格点上，则∠ ABC+∠ EDC 的度数为（　　）

A.150°　　B.180°　　C.210°　　D.225°



（第 9 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

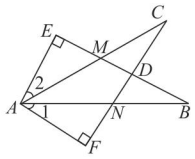
10. 如图，EB 交 AC 于点 M，交 FC 于点 D，AB 交 FC 于点 N，$\angle E=\angle F=90°$，$\angle B=\angle C$，$AE=AF$，给出下列结论：其中正确的结论有（　　）

①$\angle 1=\angle 2$；　　②$BE=CF$；

③$\triangle ACN\cong\triangle ABM$；　　④$CD=DN$；

⑤$\triangle AFN\cong\triangle AEM$.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

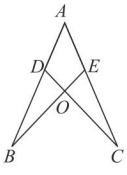


（第 10 题图）

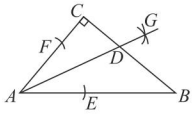
二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\angle A=60°$，$\angle F=50°$，点 B 的对应点是点 E，则$\angle B$ 的度数是_____.

12. 如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，CD 与 BE 相交于点 O，且 $AD=AE$，$AB=AC$，若$\angle B=20°$，则$\angle C$=_____.



（第 12 题图）



（第 13 题图）

13. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle CAB=50°$，按以下步骤作图：

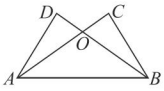
① 以点 A 为圆心，小于 AC 的长为半径画弧，分别交 AB，AC 于点 E，F；

② 分别以点 E，F 为圆心，大于$\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 G；

③ 作射线 AG 交 BC 于点 D.

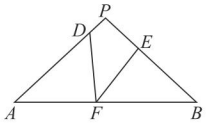
则$\angle CDA$ 的度数为_____.

14. 如图，已知$\angle C=\angle D$，$\angle ABC=\angle BAD$，AC 与 BD 相交于点 O，请写出图中一组相等的线段：_____.

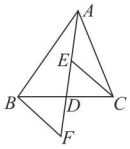


（第 14 题图）

15. 如图，在$\triangle PAB$中，$PA=PB$，点 D、E、F 分别是边 PA、PB、AB 上的点，且 $AD=BF$，$BE=AF$，若$\angle DFE=40°$，则$\angle P$=_____°.



（第 15 题图）



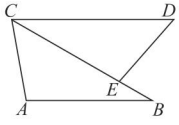
（第 16 题图）

16. 如图，AD 是$\triangle ABC$的中线，点 E、F 分别是 AD 和 AD 延长线上的点，且 $DE=DF$，连接 BF、CE. 下列说法：① $CE=BF$；②$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 的面积相等；③ $BF\parallel CE$；④$\triangle BDF\cong\triangle CDE$. 其中正确的有_____.（填写序号）

三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）已知：如图，E 是 BC 上一点，$AB=EC$，$AB\parallel CD$，$BC=CD$.

求证：$AC=ED$.



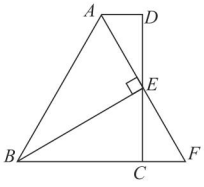
（第 17 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（10 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，E 为 CD 的中点，连接 AE、BE，$BE \perp AE$，延长 AE 交 BC 的延长线于点 F. 求证：

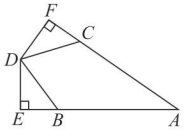
（1）$AD = FC$；

（2）$AB = BC+AD$.



（第 18 题图）

19.（10 分）已知：如图，$AB=AC$，$BD=CD$，$DE \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E，$DF \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 F，求证：$DE=DF$.

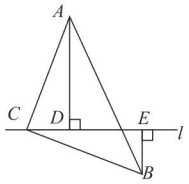


（第 19 题图）

20.（12 分）如图，Rt $\triangle ABC$ 的直角顶点 C 置于直线 l 上，$AC=BC$，现过 A，B 两点分别作直线 l 的垂线，垂足分别为点 D，E.

（1）请你在图中找出一对全等三角形，并写出证明过程；

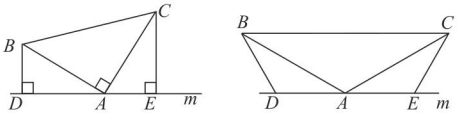
（2）若 $BE=3$，$DE=5$，求 AD 的长.



（第 20 题图）

21.（12 分）（1）已知：如图（1），在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，$AB = AC$，直线 m 经过点 A，$BD \perp$ 直线 m，$CE \perp$ 直线 m，垂足分别为点 D、E，求证：$DE = BD+CE$；

（2）如图（2），将（1）中的条件改为：在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，点 D、A、E 三点都在直线 m 上，并且有 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC = \alpha$，其中 α 为任意钝角，请问结论 $DE = BD+CE$ 是否仍然成立？若成立，请你给出证明；若不成立，请说明理由.



（1）　　（2）

（第 21 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

初步领略图形的全等变换

初步领略图形的全等变换

第2章 轴对称图形

核心考点

你将见到的

- 轴对称图形
- 轴对称及其性质
- 线段、角的轴对称性
- 等腰三角形的性质与判定
- 等边三角形的性质与判定

核心方法

我们为你提供的

- 转化思想
- 整体思想
- 方程思想
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1 轴对称与轴对称图形

核心知识
▲ 轴对称（重点）
▲ 轴对称图形（重点）

知识链接
沿直线对折重合 → 轴对称、对称轴、轴对称图形

点知识·拨考向 速提分

点知识1 轴对称

1. 定义

把一个图形沿着某一条直线翻折，如果它能够与另一个图形重合，那么称这两个图形关于这条直线对称，也称这两个图形成轴对称，这条直线叫做对称轴，翻折后重合的点是对应点，叫做对称点.

2. 轴对称的两个特性

（1）成轴对称的两个图形全等，但全等的两个图形不一定成轴对称；

（2）轴对称是图形的一种全等变换.

》提分·必记

特别解读：

轴对称的三个条件：
（1）有两个图形；
（2）存在一条直线；
（3）其中一个图形沿着这条直线翻折后与另一个图形重合.

拨考向 利用轴对称的定义识别轴对称

例1 如图 2.1-1，下列四组图形中，成轴对称的有（　　）

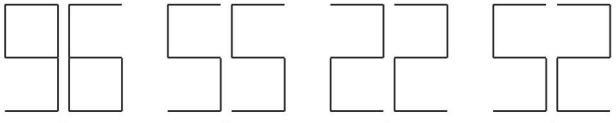


图 2.1-1

A. 4 组　　B. 3 组

C. 2 组　　D. 1 组

解题秘方： 根据轴对称的定义判断即可.

解： 根据轴对称的定义，可以判断只有④中的两个图形沿着某一条直线翻折后，这两个图形能够重合，所以成轴对称的只有 1 组.

答案： D

》提分·秘诀

方法点拨：

判断两个图形是否成轴对称的方法：
（1）定义法：紧扣定义中的“两个图形，一条直线，完全重合”；
（2）反面观察法：从纸的反面观察图形，若观察到的和正面一样，两个图形就成轴对称.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

»提分·必记

特别解读：

轴对称图形的三个条件：

（1）一个整体图形；

（2）一条直线——对称轴；

（3）沿直线折叠后，直线两旁的部分互相重合.



点知识 2 轴对称图形

1. 定义 把一个图形沿着某一条直线折叠，如果直线两旁的部分能够互相重合，那么称这个图形是轴对称图形，这条直线就是对称轴.

2. 轴对称与轴对称图形的区别与联系

名称		轴对称	轴对称图形
区别	对象不同	两个图形	一个图形
	意义不同	两个图形的特殊位置关系	一个具有特殊形状的图形
	对称点位置不同	对称点分别在两个图形上	对称点在同一个图形上
	对称轴位置不同	两个图形成轴对称，其对称轴可能在两个图形的外部，也可能经过两个图形的内部或它们的公共边（点）	轴对称图形的对称轴一定经过这个图形的内部
	对称轴数量不同	只有一条对称轴	有一条或多条
联系	（1）定义中都有一条直线，都要沿着这条直线折叠 （2）把成轴对称的两个图形看成一个整体，这个整体就是一个轴对称图形.把一个轴对称图形位于对称轴两旁的部分看成两个图形，这两个图形就成轴对称.		

3. 易错警示

（1）轴对称图形是一个图形自身的对称特性，它被对称轴分成的两部分沿对称轴折叠后能够互相重合，其对称点在同一图形上；

（2）轴对称图形的对称轴是一条直线，而不是线段或射线，它可能是一条，也可能是多条，甚至是无数条.

»提分·秘诀

知识储备：

（1）在汉字中有很多是轴对称图形；

（2）在26个英文字母中也有很多是轴对称图形.

拔考向 利用轴对称图形的定义解相关应用

类型1：利用轴对称图形的定义识别轴对称图形

例2 如图2.1-2，是轴对称图形的有（　　）



①　②　③　④

图 2.1-2

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

解题秘方： 根据轴对称图形的定义识别.

答案： D

特别提醒：

判断一个图形是否是轴对称图形时要从多角度来翻折和观察.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：确定对称轴的条数

例 3 ［中考·广州］如图 2.1–3 所示的五角星是轴对称图形，它的对称轴共有（　　）

A. 1 条　　B. 3 条　　C. 5 条　　D. 无数条



图 2.1–3

解题秘方：根据轴对称图形的定义确定图形对称轴的条数.

答案：C

方法点拨：

确定对称轴的条数应在理解轴对称图形的定义的基础上根据图形的性质作出判断，如正 n 边形有 n 条对称轴.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 用轴对称的知识解决生活中的问题

» 挑战·高分

例 4 在平面镜里看到其对面墙上电子钟显示的时间如图 2.1–4 所示，那么实际时间是（　　）



图 2.1–4

A. 21：05　　B. 21：50

C. 20：15　　D. 20：51

解题秘方：根据镜面对称的性质求解，在平面镜中的像与现实中的事物恰好左右或上下顺序颠倒，且关于镜面对称. 由镜面对称性可知，平面镜里的 20：15 实际上应该是 21：05.

答案：A

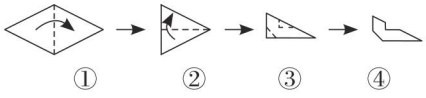
方法点拨：

镜中像问题一般采用左右翻折的方法观察. 水中倒影问题通常采用上下翻折的方法观察.

拔尖角度 2 折纸问题中的轴对称

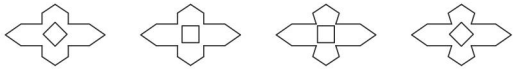
» 挑战·高分

例 5 ［中考·青海］剪纸是我国传统的民间艺术. 将一张纸片按图 2.1–5 中①②的方式沿虚线依次对折后，再沿图③中的虚线裁剪，最后将图④中的纸片打开铺平，所得图案应该是（　　）



① ② ③ ④

图 2.1–5



A B C D

解题秘方：对于此类问题，只要依据翻折变换，将图④中的纸片按顺序展开铺平，即可得到一个图案.

答案：A

方法点拨：

本题主要考查了剪纸问题，解决这类问题要熟知轴对称图形的特点，关键是要准确地找到对称轴. 一般方法是动手操作，拿一张纸按照题目的要求剪出图案，展开即可得到正确的图案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

» 挑战·高分

技巧点拨：

作这类图形的对称轴可以根据图形的对称性用直尺直接画出，但要注意有些图形的对称轴不止一条.

拔尖角度 3 用直尺画简单轴对称图形的对称轴

例 6 图 2.1–6 中，哪些是轴对称图形？是轴对称图形的，画出它的所有对称轴.

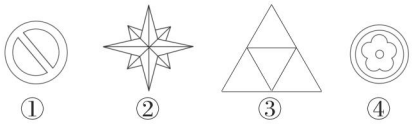


图 2.1–6

解题秘方： 根据轴对称图形的定义分别得出即可.

解： ①②③④都是轴对称图形，对称轴如图 2.1–7 所示.

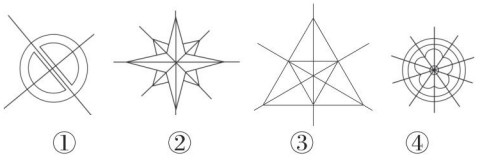


图 2.1–7

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

轴对称图形的识别是近几年中考的热点，但一般不单独考查，常与轴对称的性质结合在一起命题，考查以基础为主，题型以选择题为主.

三年中考兵法

» 冲刺·满分

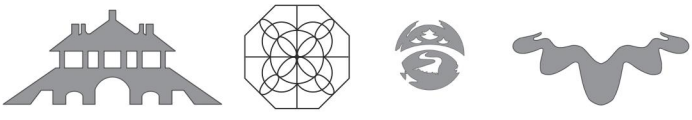
教你一招：

判断一个图形或图案是不是轴对称图形的方法：

根据图形的特征，尝试找到一条直线，使这个图形沿这条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合.

考法 利用轴对称图形的定义识别轴对称图形

例 7 [中考·扬州]“致中和，天地位焉，万物育焉.”对称美是我国古人和谐平衡思想的体现，常被运用于建筑、器物、绘画、标识等作品的设计上，使对称之美惊艳了千年的时光. 在下列与扬州有关的标识或简图中，不是轴对称图形的是（　　）



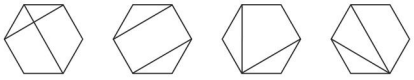
试题评析： 本题考查了轴对称图形的定义.

解： 选项 A、B、D 是轴对称图形，选项 C 不是轴对称图形.

答案： C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·徐州]下图均由正六边形与两条对角线所组成，其中不是轴对称图形的是（　　）



A　B　C　D

2.[模拟·镇江]下列剪纸作品都是轴对称图形．其中对称轴条数最多的作品是（　　）



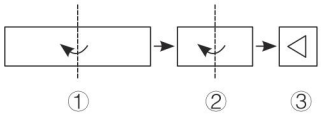
A　B　C　D

3. 下列图形中，对称轴条数最多的图形是（　　）



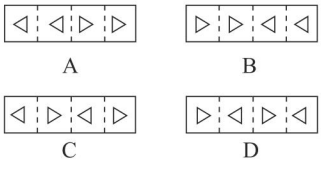
A　B　C　D

4. 把一张长方形纸片按图①、图②的方式连续对折后得到图③，再在图③中挖一个如图所示的三角形小孔，则重新展开后得到的图形是（　　）



①　②　③

（第4题图）



A　B　C　D

5.[期末·连云港]在下列黑体大写英文字母中，不是轴对称图形的是（　　）

E　M　N　H

A　B　C　D

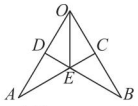
6. 下列图形：

①角；②直角三角形；

③等边三角形；④线段；

⑤等腰三角形；⑥平行四边形．其中一定是轴对称图形的有_____个．

7. 如图，OE是$\angle AOB$的平分线，$BD \perp OA$于点D，$AC \perp OB$于点C，则关于直线OE对称的三角形共有_____对．



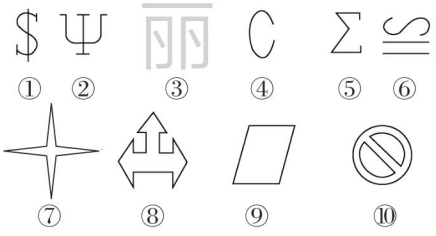
（第7题图）



（第8题图）

8. 小明上午在理发店理发时，从镜子内看到背后墙上的普通时钟如图所示，则此时的时间是_____．

9. 下列图形是不是轴对称图形？如果是，说出它有几条对称轴．

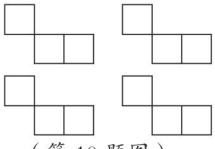


①　②　③　④　⑤　⑥

⑦　⑧　⑨　⑩

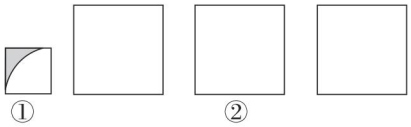
（第9题图）

10. 如图是由三个相同的小正方形组成的图形，请你用四种方法在图中补画一个相同的小正方形，使补画后的四个小正方形所组成的图形为轴对称图形．



（第10题图）

11. 请你用3种方法，将四块如图①所示的小正方形纸板在图②中分别拼成一个大的正方形，并且使拼成的大正方形是至少有两条对称轴的轴对称图形．



①　②

（第11题图）

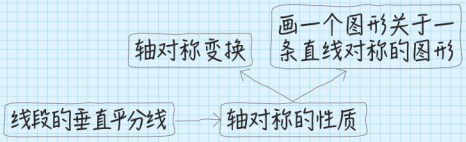
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 轴对称的性质

核心知识

- 线段的垂直平分线（重点）
- 轴对称的性质（重点）
- 轴对称变换（难点）

知识链接



点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

特别解读：

（1）线段的垂直平分线必须满足两个条件：

①经过线段的中点；

②垂直于这条线段.

两者缺一不可.

（2）线段的垂直平分线的定义反过来也成立.

点知识 1 垂直平分线与轴对称的性质

1. 线段的垂直平分线

垂直并且平分一条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线.

2. 几何语言 如图 2.2-1，直线 l 交线段 AB 于点 O，$\angle 1=90°$，$AO=BO$，直线 l 是线段 AB 的垂直平分线.

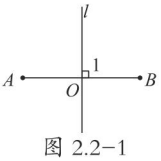


图 2.2-1

3. 轴对称的性质

（1）成轴对称的两个图形全等；

（2）成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分.

特别地：成轴对称的两个图形，它们的对应线段所在直线互相平行或者重合或者交点在对称轴上.

特别解读：

（1）轴对称图形或成轴对称的两个图形的对应线段、对应角相等；

（2）轴对称图形被对称轴分成的两部分全等，并且这两部分关于对称轴成轴对称. 成轴对称的两个图形也全等，但全等的两个图形不一定成轴对称.

4. 轴对称图形的性质 轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线，如图 2.2-2.

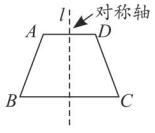


图 2.2-2

»提分·秘诀

解法提醒：

利用轴对称的性质求线段的长度或角的度数的方法：

先根据轴对称的特征确定两个图形的对应边、对应角，再运用轴对称的性质（对应边相等，对应角相等），把要求的边或角与已知的对应边或对应角建立联系，从而求出待求的线段的长度或角的度数.

拨考向 利用轴对称的性质求角度

例 1 如图 2.2-3，$\angle A=30°$，$\angle C'=60°$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，则 $\angle B=$_____.

解题秘方： 紧扣轴对称的性质确定对应元素进行计算.

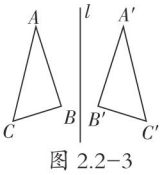


图 2.2-3

解： $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，$\angle C'=60°$，

$\therefore \angle C=\angle C'=60°$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-30°-60°=90°$.

答案： 90°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 根据轴对称的性质作图

1. 方法

几何图形都可以看作由点组成．对于某些图形，只要画出图形中的一些特殊点（如线段端点）关于一条直线的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形关于这条直线对称的图形．

2. 步骤

画一个图形关于一条直线对称的图形的方法可简单归纳为“一找二画三连”．

找—在原图形上找特殊点；

↓

画—画出各个特殊点关于这条直线的对称点；

↓

连—按照原图顺序依次连接各对称点．

3. 画出的新图形与原图形的关系

（1）新图形与原图形的形状、大小完全相同；

（2）新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于对称轴的对称点；

（3）任意一对对应点的连线被对称轴垂直平分．

4. 要点精析

（1）图形上的特殊点还有角的顶点、多边形的顶点等；

（2）对称轴上的点的对称点是它本身；

（3）找图形上的特殊点时，要找全，否则画出的对称图形不准确．

»提分·必记

特别解读：

画一个图形关于一条直线对称的图形，关键是确定某些点关于这条直线的对称点．

拔考向 利用轴对称的性质画一个图形关于一条直线对称的图形

例 2 如图 2.2−4，画出下列图形关于直线 l 对称的图形．

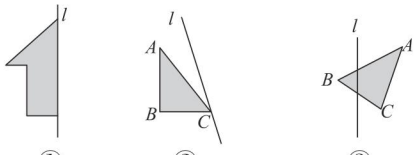


图 2.2−4

解题秘方： 找全确定已知图形形状的特殊点，画出这些特殊点关于直线 l 的对称点，然后按原图顺序连接所画的对称点．

解： 如图 2.2−5.

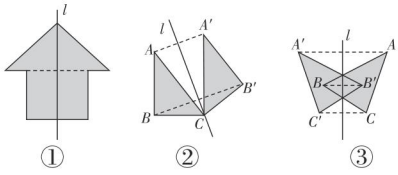


图 2.2−5

»提分·秘诀

方法点拨：

（1）找特殊点的方法：规则图形的特殊点是图形的顶点，不规则图形的特殊点是线与线的交点．

（2）作对称点的方法：过这个点作对称轴的垂线，并延长一倍，就得到该点的对称点．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

» 挑战·高分

技巧点拨：

求分散的阴影部分面积的方法：

一般先通过观察找到阴影部分与非阴影部分的关系，再结合条件把阴影部分集中转化为一个规则图形或便于求面积的图形，从而求出阴影部分的面积.

拔尖角度 1 利用轴对称的性质求面积

例 3 如图 2.2−6，△ ABC 是轴对称图形，且直线 AD 是△ ABC 的对称轴，E、F 是线段 AD 上的两点，若△ ABC 的面积为 18 cm^2，则图中阴影部分的面积为_____cm^2.

解题秘方： 根据轴对称图形的性质，将阴影部分的面积集中转化为△ ABD 的面积，再进行计算.

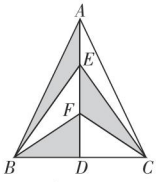


图 2.2−6

解： ∵△ ABC 是轴对称图形，且直线 AD 是对称轴，

∴△ ABD 与△ ACD 关于直线 AD 对称，

∴ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

∵ E、F 是线段 AD 上的两点，

∴△ BEF 与△ CEF 关于直线 AD 对称，

∴ $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle BEF}$，

∴ $S_{阴影}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CEF}+S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 18=9\ (cm^2)$.

答案： 9

» 挑战·高分

解题策略：

轴对称变换的关键是对称轴垂直平分对称点所连线段，利用轴对称的性质是解题的关键.

拔尖角度 2 利用轴对称的性质求周长

例 4 如图 2.2−7，∠ AOB 内有一点 P，P_1、P_2 分别是点 P 关于 OA、OB 的对称点，连接 P_1P_2 交 OA 于点 M，交 OB 于点 N，若 P_1P_2=5 cm，则△ PMN 的周长是_____cm.

解题秘方： 本题主要考查轴对称的性质，解决问题的关键是利用轴对称的性质将△ PMN 的周长转化为线段 P_1P_2 的长.

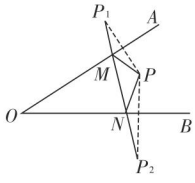


图 2.2−7

解： ∵点 P 与点 P_1 关于 OA 对称，

∴ OA 垂直平分 PP_1，

∴ $PM=P_1M$.

∵点 P 与点 P_2 关于 OB 对称，

∴ OB 垂直平分 PP_2，

∴ $PN=P_2N$.

∴△ PMN 的周长 $=PM+MN+PN$

$=P_1M+MN+P_2N$

$=P_1P_2$

=5 cm.

答案： 5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用轴对称的性质解决周长最短问题（拓展点）

» 挑战·高分

例 5 如图 2.2−8，在 $\angle AOB$ 的内部有两点 M、N，在 OA、OB 上是否分别存在点 E、F，使得以 E、F、N、M 四点为顶点的四边形的周长最短？若存在，找出 E、F 两点，并说明理由．

解题秘方：作点 M 关于直线 OA 的对称点 C，作点 N 关于直线 OB 的对称点 D，连接 CD，交 OA 于点 E，交 OB 于点 F，此时以 E、F、N、M 四点为顶点的四边形的周长最短．

解：如图 2.2−8，作点 M 关于直线 OA 的对称点 C，

作点 N 关于直线 OB 的对称点 D，连接 CD，交 OA 于点 E，交 OB 于点 F，则点 E、F 就是所要求作的点．

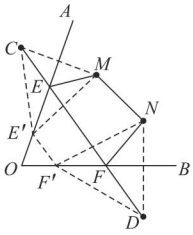


图 2.2−8

理由：分别在 OA、OB 上取不同于 E、F 的点 E'、F'，连接 CE'、$E'F'$、DF'、ME'、NF'．∵点 C 和点 M 关于直线 OA 对称，点 N 和点 D 关于直线 OB 对称，

$\therefore ME=CE$，$CE'=ME'$，$NF=DF$，$NF'=DF'$，

$\therefore MN+ME+EF+NF=MN+CE+EF+DF=MN+CD$，

$MN+ME'+E'F'+NF'=MN+CE'+E'F'+DF'$．

$\because CE'+E'F'+DF'>CD$，

$\therefore MN+CE'+E'F'+DF'>MN+CE+EF+DF$，

$\therefore MN+ME+EF+NF<MN+ME'+E'F'+NF'$．

方法点拨：

通过找对称点，将四边形的周长转化为线段的长之和．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

轴对称图形的识别以及轴对称的性质是近几年中考的热点，一般考查识别轴对称图形及利用轴对称的性质求边或角．考查以基础为主，题型以选择题为主．

三年中考兵法

考法 利用轴对称的性质求角的度数

» 冲刺·满分

例 6 [中考·哈尔滨] 如图 2.2−9，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$\angle B=50°$，$AD\perp BC$，垂足为 D，$\triangle ADB$ 与 $\triangle ADB'$ 关于直线 AD 对称，点 B 的对称点是点 B'，则 $\angle CAB'$ 的度数为（　　）

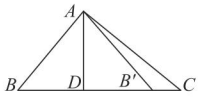


图 2.2−9

A. 10°　　B. 20°　　C. 30°　　D. 40°

试题评析：本题考查了轴对称的性质，由题意易得 $\angle C=40°$，由轴对称的性质可得 $\angle AB'B=\angle B=50°$，由三角形的外角性质可得 $\angle AB'B=\angle CAB'+\angle C$，即可求得 $\angle CAB'$ 的度数．

解：$\because \angle BAC=90°$，$\angle B=50°$，$\therefore \angle C=40°$．

$\because \triangle ADB$ 与 $\triangle ADB'$ 关于直线 AD 对称，点 B 的对称点是点 B'，

$\therefore \angle AB'B=\angle B=50°$．

$\therefore \angle CAB'=\angle AB'B-\angle C=50°-40°=10°$．

答案：A

方法点拨：

掌握轴对称的性质是解本题的关键，直线 AD 是 △ADB 与 △ADB′ 的对称轴，△ADB ≌ △ADB′．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

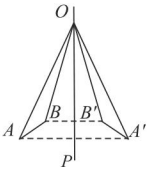
1. 如图，△ OAB 和△ $OA'B'$ 关于直线 OP 对称，则下列说法错误的是（　　）

A. $OA=OA'$

B. 线段 AA' 被直线 OP 平分

C. $\angle OAB=\angle OA'B'$

D. 直线 OP 不是线段 BB' 的垂直平分线



（第 1 题图）

2. 下列语句中，正确的有（　　）

① 两个关于某直线对称的图形是全等的；

② 两个图形关于某直线对称，对称点一定分别在该直线的两旁；

③ 两个成轴对称的图形的对应点的连线的垂直平分线，就是它们的对称轴；

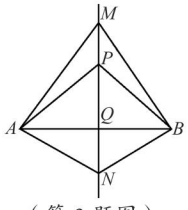
④ 平面内两个全等的图形一定关于某直线对称.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

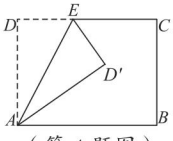
3. 如图，直线 MN 是四边形 $AMBN$ 的对称轴，与对角线 AB 交于点 Q，点 P 是直线 MN 上一点，下列判断错误的是（　　）

A. $AQ=BQ$　　B. $AP=BP$

C. $\angle MAP=\angle MBP$　　D. $\angle ANM=\angle NMB$



（第 3 题图）

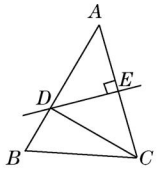


（第 4 题图）

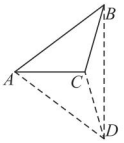
4. [模拟·南通]将长方形 $ABCD$ 沿 AE 折叠，得到如图所示的图形，已知 $\angle CED'=55°$，则 $\angle BAD'$ 的度数为（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°

5. 如图，在△ ABC 中，$AB+BC=8$，点 A、C 关于直线 DE 对称，则△ BCD 的周长是_____.



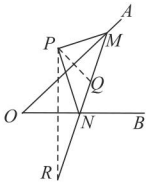
（第 5 题图）



（第 6 题图）

6. 如图，在△ ABC 中，$AC=BC$，把△ ABC 沿 AC 翻折，使点 B 落在点 D 处，连接 BD，若 $\angle CBD=16°$，则 $\angle BAC=$_____°.

7. 如图，点 P 是 $\angle AOB$ 外的一点，点 M、N 分别是 $\angle AOB$ 两边上的点，点 P 关于直线 OA 的对称点 Q 恰好落在线段 MN 上，点 P 关于直线 OB 的对称点 R 落在 MN 的延长线上，若 $PM=3$，$PN=4$，$MN=5$，则线段 QR 的长为_____.



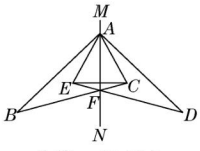
（第 7 题图）

8. 如图，△ ABC 与△ ADE 关于直线 MN 对称，BC 与 DE 的交点 F 在直线 MN 上. 若 $ED=4$ cm，$FC=1$ cm，$\angle BAC=76°$，$\angle EAC=58°$.

（1）求 BF 的长；

（2）求 $\angle CAD$ 的度数；

（3）连接 EC，线段 EC 与直线 MN 有什么关系?



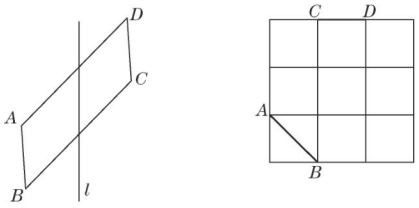
（第 8 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 按下列要求作图．（不写作法，保留作图痕迹）

（1）如图①，作出四边形 $ABCD$ 关于直线 l 对称的四边形 $A'B'C'D'$；

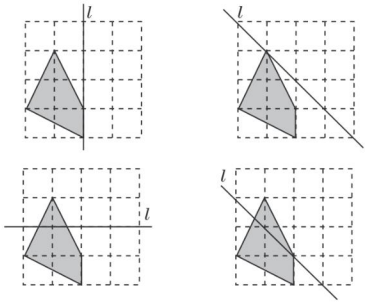
（2）如图②，在“3×3”的正方形网格中，已知线段 AB、CD，画线段 EF，使它与 AB、CD 组成轴对称图形．（画出所有可能情况）



①　　②

（第 9 题图）

10. 如图，将已知四边形分别在方格纸上补成以已知直线 l 为对称轴的轴对称图形．



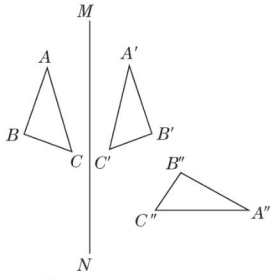
（第 10 题图）

11. 如图，△ ABC 和△ $A'B'C'$ 关于直线 MN 对称，△ $A'B'C'$ 和△ $A''B''C''$ 关于直线 EF 对称．

（1）画出直线 EF（不写画法，保留作图痕迹）；

（2）直线 MN 与 EF 相交于点 O，连接 BO，$B''O$，试探究∠ BOB'' 与直线 MN、EF 所夹锐角 α 的数量关系；

（3）你能否将△ ABC 经过一次变换得到△ $A''B''C''$？如果能，请说说你是如何变换的？如果不能，请说明理由．



（第 11 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 设计轴对称图案

核心知识 ▲设计轴对称图案(重点) → 知识链接：分析图案、设计图案 → 轴对称图案

点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

特别提醒：

(1) 要根据题意恰当地选取对称轴；

(2) 要抓住基本图形用模拟折叠的方法进行图案设计.

点知识 设计轴对称图案

设计轴对称图案往往以正方形、菱形、等边三角形等网格纸(或格点纸)为基础，因为这些图形本身就是轴对称图形，利用轴对称的有关性质容易设计出它们的对称点或对称部分.设计轴对称图案时，要先确定出有几条对称轴，然后根据对称轴的不同，合理地设计出整体的轴对称图案.

在设计轴对称的彩色图案时需注意，除图形对称外，颜色也要“对称”.

»提分·秘诀

方法点拨：

本题是开放题，答案不唯一.按要求设计图案具有很强的实用性，通过设计，加深学生对轴对称图形概念的理解，激发学生学好数学的热情.

拨考向 设计轴对称图案

类型1：用基本图形设计图案

例1 如图2.3-1，是一块正方形的瓷砖，请用四块这样的瓷砖拼出一个轴对称图形，在图2.3-2①②③中画出，要求三种画法各不相同.

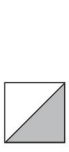
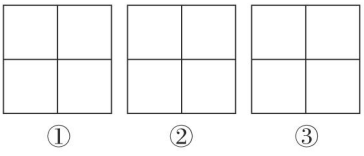


图2.3-1

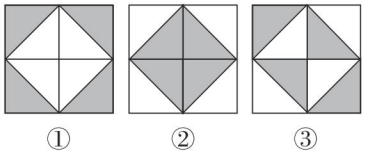


①　②　③

图2.3-2

解题秘方： 观察已知图形，根据轴对称图形的概念设计图案.

解： 如图2.3-3所示.(答案不唯一，合理即可)



①　②　③

图2.3-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：折叠、剪纸中的图案设计

例 2 把一张正方形纸片按图 2.3–4 ①②对折两次后，再按图③挖一个三角形小孔，则展开后的图形是（　　）

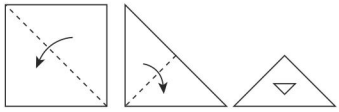
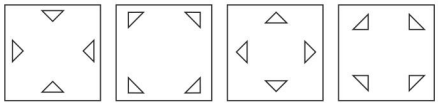


图 2.3–4



解题秘方：以图 2.3–4 ③为基本图形，沿第二次对折时的折痕所在直线进行轴对称变换，然后以整个图形为基本图形，沿第一次对折时的折痕所在直线进行轴对称变换，就可以得出正确答案．

答案：C

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 在格点图中设计轴对称图案

挑战·高分

例 3 如图 2.3–5，在“3×3”的正方形网格图中，阴影三角形的顶点都在格点上，请在网格图中各画一个三角形，使得画出的三角形与原三角形成轴对称，且顶点都在格点上．（画出三种即可）

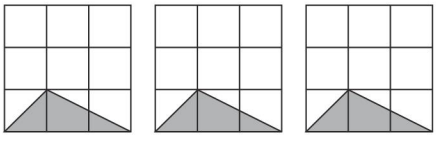


图 2.3–5

解：如图 2.3–6 所示．（答案不唯一）

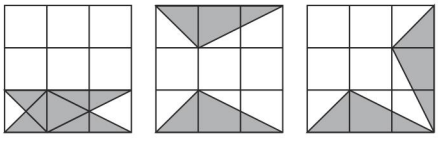


图 2.3–6

方法点拨：

本题考查了利用轴对称设计图案的知识，属于基础题，解答本题的关键是掌握轴对称的特点．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

» 挑战·高分

方法点拨：

解答本题的关键是掌握轴对称图形的特点.

拔尖角度 2 通过分割图形设计图案

例 4 为创建绿色校园，学校决定在一块正方形的空地上种植花草，现向学生征集设计图案. 要求图案是轴对称图形，且只能用圆弧在正方形内加以设计. 种植花草的部分用阴影表示. 请你在图 2.3–7 ③④⑤中画出三种不同的设计图案. 提示：在两个图案中，只有半径变化而圆心不变的图案属于同一种，例如：图 2.3–7 ①②只能算一种.

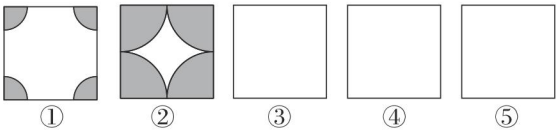


图 2.3–7

解题秘方： 根据轴对称图形的特点，结合所给图案及题目要求进行设计即可.

解： 所设计图案如图 2.3– 8 所示.（答案不唯一）

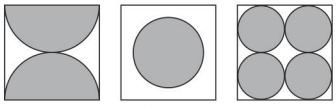


图 2.3–8

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中的考点是利用轴对称设计图案，经常与三角形、四边形结合起来综合考查，常以选择题、填空题的形式出现，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用轴对称设计图案

例 5 [中考·河北] 如图 2.3–9，在小正三角形组成的网格中，已有 6 个小正三角形涂黑，还需涂黑 n 个小正三角形，使它们与原来涂黑的小正三角形组成的新图案恰有三条对称轴，则 n 的最小值为（　　）

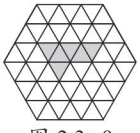


图 2.3–9

A. 10　　B. 6　　C. 3　　D. 2

试题评析： 本题主要考查利用轴对称设计图案，由等边三角形有三条对称轴可得答案.

解： 如图 2.3–10 所示，n 的最小值为 3.

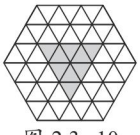


图 2.3–10

答案： C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用基本图形求拼图的长度

例 6 [中考·广东] 如图 2.3–11 所示的图形是一个轴对称图形，且每个角都是直角，长度如图所示．小明按图 2.3–12 所示的方法玩拼图游戏，两两相扣，相互间不留空隙，那么小明用 9 个这样的图形（图 2.3–11）拼出来的图形的总长度是 _____．（结果用含 a、b 的代数式表示）．

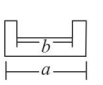


图 2.3–11

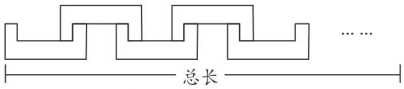


图 2.3–12

试题评析：本题可以按照口朝上和口朝下两种类型分别计算，也可以用 9 个基本图形的长度减去重叠部分的长度进行计算．

解：解法一：如图 2.3–13，由图可得拼出来的图形的总长度 $=(5a+4a)-8(a-b)=a+8b$.

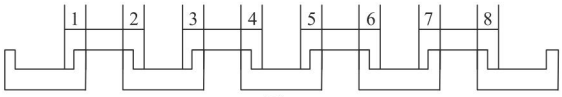


图 2.3–13

解法二：小明用 9 个基本图形（图 2.3–11）拼出来的图形，口朝上的 5 个长度之和是 $5a$，口朝下的 4 个长度为 $4[b-(a-b)]=8b-4a$.

所以总长度为 $5a+(8b-4a)=a+8b$.

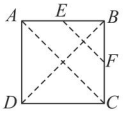
答案：$a+8b$

考法 3 利用轴对称求拼图的面积

例 7 如图 2.3–14，正方形硬纸片 $ABCD$ 的边长是 4，点 E、F 分别是 AB、BC 的中点，若沿图 2.3–14 中的虚线剪开，拼成如图 2.3–15 所示的一座“小别墅”，则图中阴影部分的面积是（　　）

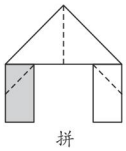
A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 10

试题评析：本题考查空间想象能力，掌握拼成的新图形与原正方形面积之间的关系是解题的关键．



剪

图 2.3–14



拼

图 2.3–15

解：阴影部分由一个等腰直角三角形和一个直角梯形组成，由图 2.3–14 可知：阴影部分的两部分可构成正方形的四分之一，正方形的面积 $=4\times4=16$，所以图中阴影部分的面积是 $16\div4=4$.

答案：B

» 冲刺·满分

解题通法：

设计轴对称图案的策略：

设计轴对称图案时，

（1）弄清所给定的基本图形是什么；

（2）确定所设计的图案要表达的意义；

（3）对基本图形运用轴对称变换；

（4）采取动手操作的方法（如扎孔、印墨迹、折叠、剪纸、画图等）来完成．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·泰州]下列图形中是轴对称图形的是（　　）



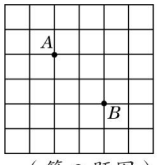
A　　B　　C　　D

2. 如图，在标有序号①②③④⑤的小正方形中随机选择一个涂黑，与图中阴影部分能构成轴对称图形的有（　　）

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个



（第2题图）

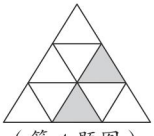


（第3题图）

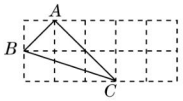
3. 如图，点A、B都在方格纸的格点上，若要再找一个格点C，使它们所构成的三角形为轴对称图形，则这样的格点C在图中共有（　　）

A.4个　　B.6个　　C.8个　　D.10个

4.[月考·泰州]如图，在等边三角形网格纸中，已有两个小等边三角形被涂黑，再将图中其余小等边三角形涂黑一个，使整个被涂黑的图案构成一个轴对称图形的方法有_____种.



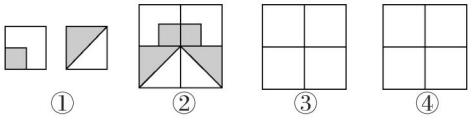
（第4题图）



（第5题图）

5. 如图，在“2×5”的正方形网格中，△ABC的顶点都在小正方形的格点上，这样的三角形称为格点三角形，在这个网格中与△ABC成轴对称的格点三角形一共有_____个.

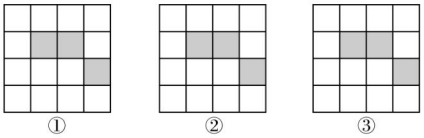
6. 现有如图①所示的两种瓷砖，这两种瓷砖各选两块，拼成一个新的正方形，使拼成的图案为轴对称图形（如图②），要求：在图③、图④中各设计一种与示例拼法不同的轴对称图案.



①　②　③　④

（第6题图）

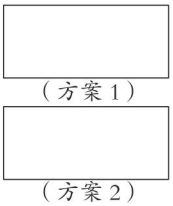
7. 如图，在“4×4”的方格纸中，已有三个小正方形被涂黑，请你在图①、图②、图③中的空白处各选一个小正方形涂黑，使它与其余三个黑色小正方形组成的新图形是一个轴对称图形.



①　②　③

（第7题图）

8. 某居民小区要在一块长方形的空地上建花坛，现征集设计方案.要求设计的图案由圆和正方形组成（圆和正方形的个数不限）.满足方案1的整个长方形花坛是轴对称图形且对称轴只有一条；满足方案2的整个长方形花坛是轴对称图形且对称轴有两条.请你分别在下面两个长方形内画出两种设计方案并画出其对称轴.



（方案1）

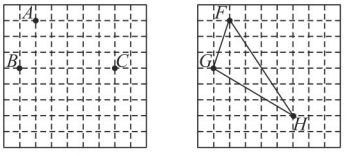
（方案2）

（第8题图）

9. 如图所示的方格纸中每个小方格都是边长为1的正方形，图①中的点A、B、C和图②中的点F、G、H都在方格纸的格点上.

（1）在图①中确定格点D，并画出一个以点A、B、C、D为顶点的四边形，使其为轴对称图形；（画出一种情况即可）

（2）直接写出图②中△FGH的面积_____.

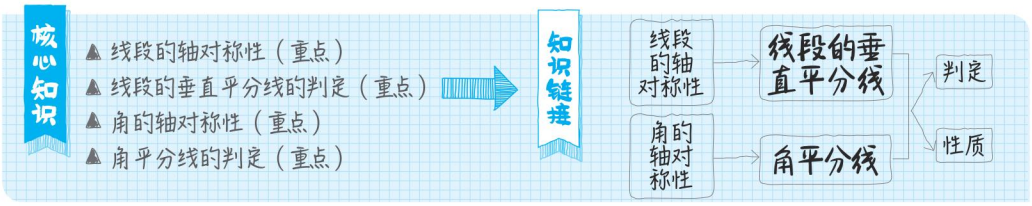


①　②

（第9题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4 线段、角的轴对称性



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 线段垂直平分线的性质

»提分·必记

1. 线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是它的对称轴.

2. **性质** 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

3. **几何语言**

如图 2.4−1，∵点 A 在线段 BC 的垂直平分线上，

∴ $AB=AC$.

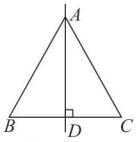


图 2.4−1

4. **易错提醒**

线段有两条对称轴，线段的垂直平分线是它的对称轴，线段自身所在的直线也是它的对称轴.

特别解读：

（1）线段的垂直平分线的性质中的“距离”是“该点与这条线段两个端点的距离”.

（2）用线段的垂直平分线的性质可直接证明线段相等，不必再用三角形全等来证明，因此它为证明线段相等提供了新方法.

拨考向 利用线段垂直平分线的性质求线段的长

»提分·秘诀

例 1 如图 2.4−2，在△ ABC 中，$AB=5$ cm，BC 的垂直平分线分别交 AB、BC 于点 D、E，△ ACD 的周长为 8 cm，求线段 AC 的长.

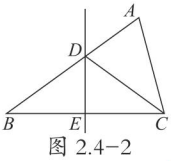


图 2.4−2

解题秘方： 利用线段的垂直平分线的性质将要求的线段向已知条件转化.

解： ∵直线 DE 为 BC 的垂直平分线，∴ $CD=BD$.

∴△ ACD 的周长 $=AC+AD+CD=AC+AD+BD=AC+AB=8$ cm.

∵ $AB=5$ cm，∴ $AC=3$ cm.

解法指导：

利用线段的垂直平分线的性质转化线段的位置，是一种常用的解题方法. 解答本题的关键是利用线段垂直平分线的性质将△ ACD 的周长转化为线段 AB+AC 的长，进行求解.

点知识 2 线段垂直平分线的判定

»提分·必记

1. **判定** 到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

2. **几何语言** 如图 2.4−3，∵ $AB=AC$，∴点 A 在线段 BC 的垂直平分线上.

3. **拓展**

（1）线段的垂直平分线是到线段两端距离相等的点的集合；

（2）三角形三边的垂直平分线相交于一点，这一点到三角形三个顶点的距离都相等.

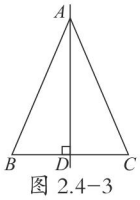


图 2.4−3

特别解读：

（1）证明一个点在一条线段的垂直平分线上，思路有两种：一是作垂直，证平分；二是取中点，证垂直.

（2）证明线段的垂直平分线，必须证明与线段两个端点距离相等的两个点在线段的垂直平分线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

»提分·秘诀

教你一招：

判断线段垂直平分线的两种方法：

一是定义法，二是判定定理．一般习惯用定义法进行判断，而利用判定定理判断更简单．用判定定理判定一条直线是线段的垂直平分线时，一定要证明直线上有两个不同的点到线段两个端点的距离相等．

拔考向 利用线段的垂直平分线的判定证明两直线的位置关系

例 2 如图 2.4–4，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，交 BC 于点 D，$AE=AF$，请判断线段 AD 所在的直线是否为线段 EF 的垂直平分线，若是，请给予证明；若不是，请说明理由．

解题秘方： 根据线段垂直平分线的判定可知，证明直线 AD 上的点 A 和点 D 到线段 EF 的两个端点的距离相等即可．

解： 线段 AD 所在的直线是线段 EF 的垂直平分线．证明如下：如图 2.4–4，连接 DE、DF．

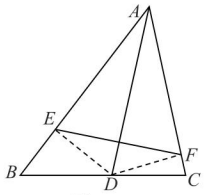


图 2.4–4

$\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle EAD=\angle FAD$．

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中，

$$\begin{cases} AE=AF, \\ \angle EAD=\angle FAD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$，

$\therefore DE=DF$，

$\therefore$ 点 D 在线段 EF 的垂直平分线上．

$\because AE=AF$，

$\therefore$ 点 A 在线段 EF 的垂直平分线上．

切忌只证明一个点在直线上，就说过该点的直线是线段的垂直平分线．

$\therefore$ 线段 AD 所在的直线是线段 EF 的垂直平分线．

误区警示：

此题易错之处是只证明一个点在线段的垂直平分线上，就说过该点的直线是线段的垂直平分线，因为过该点的直线有无数条，其中只有一条是线段的垂直平分线．

例 3 如图 2.4–5，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，AD 平分 $\angle BAC$，$DE\perp AB$ 于 E．求证：直线 AD 是线段 CE 的垂直平分线．

解题秘方： 根据全等三角形的判定方法“AAS”可得 $AE=AC$，$DE=DC$，进而可得点 D 在线段 CE 的垂直平分线上，点 A 也在线段 CE 的垂直平分线上．

证明： $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle EAD=\angle CAD$．

$\because \angle ACB=90°$，$DE\perp AB$，

$\therefore \angle AED=\angle ACD=90°$．

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} \angle AED=\angle ACD, \\ \angle EAD=\angle CAD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

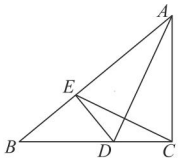


图 2.4–5

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD$，

$\therefore AE=AC$，$DE=DC$．

$\therefore$ 点 A 在线段 CE 的垂直平分线上，

点 D 也在线段 CE 的垂直平分线上，

$\therefore$ 直线 AD 是线段 CE 的垂直平分线．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 线段的垂直平分线的画法

1. 用尺规作线段 AB 的垂直平分线的方法：

（1）分别以点 A、B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 C、D；

（2）过 C、D 两点作直线，直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线，如图 2.4−6.

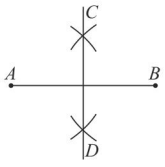


图 2.4−6

»提分·必记

易错警示：

作线段 AB 的垂直平分线时，必须以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，否则所画的弧就不能相交或只有一个交点.

拔考向 根据线段的垂直平分线的性质作图

例 4 在铁路 a 的同侧有两个工厂 A 和 B，要在铁路边建一货场 C，使 A、B 两个工厂到货场 C 的距离相等，试在图 2.4−7 中作出点 C.

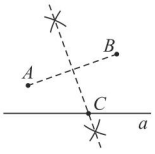


图 2.4−7

解题秘方： 连接 AB，作出线段 AB 的垂直平分线即可.

解： 连接 AB，作线段 AB 的垂直平分线交直线 a 于点 C. 如图 2.4−7，点 C 即为所求.

»提分·秘诀

方法点拨：

尺规作图时要注意虚实线，即辅助性的线用虚线，所要画的线用实线，同时要注意保留作图痕迹.

点知识 4 角平分线的性质

1. 角是轴对称图形，角平分线所在的直线是它的对称轴.

2. 性质

角平分线上的点到角两边的距离相等.

3. 几何语言 如图 2.4−8，

$\because$ OP 平分 $\angle AOB$，

$PD \perp OA$ 于点 D，

$PE \perp OB$ 于点 E，

$\therefore$ $PD=PE$.

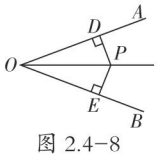


图 2.4−8

4. 线段垂直平分线的性质与角平分线的性质的比较

相同点：两者都可以直接得到两条线段相等；

不同点：前者指的是点到点的距离，后者指的是点到线的距离.

»提分·必记

特别提醒：

（1）角平分线的性质是由两个条件（角平分线、垂线）得到一个结论（线段相等）.

（2）利用角平分线的性质证明线段相等时，证明的线段是“垂直于角两边的线段”而不是“垂直于角平分线的线段”.

拔考向 根据角平分线的性质求距离

例 5 如图 2.4−9，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，AD 平分 $\angle BAC$，交 BC 于点 D，$DE \perp AC$，垂足为 E，若 $BD=3$，则 DE 的长为（　　）

A. 3　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 6

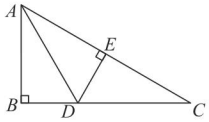


图 2.4−9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：本题考查了角平分线的性质，根据角平分线上的点到角两边的距离相等即可求出 DE 的长.

解：$\because \angle B=90^\circ$，

$\therefore DB \perp AB$.

又$\because AD$ 平分$\angle BAC$，$DE \perp AC$，

$\therefore DE=BD=3$.

答案：A

点知识 5 角平分线的判定

1. 角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

2. **几何语言** 如图 2.4−10，

$\because$点 P 为$\angle AOB$ 内一点，

$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，

垂足分别为 D、E，且 $PD=PE$，

$\therefore$点 P 在$\angle AOB$ 的平分线 OC 上.

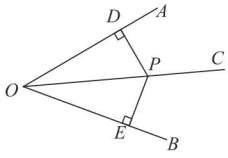


图 2.4−10

3. **角平分线的判定定理与性质定理的关系**

（1）如图 2.4−10，都与距离有关：即条件 $PD \perp OA$，$PE \perp OB$ 都具备；

（2）点在角的平分线上 $\underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}}$（角的内部的）点到角两边的距离相等.

4. **拓展**

三角形三个内角的平分线交于一点且这点到三边的距离相等.

拔考向 运用角平分线的判定定理判定角平分线

例 6 如图 2.4−11，$BE=CF$，$BF \perp AC$ 于点 F，$CE \perp AB$ 于点 E，BF 和 CE 交于点 D，连接 AD. 求证：AD 平分$\angle BAC$.

解题秘方：利用角平分线的判定定理证明角平分线时，紧扣点在角的内部且点到角两边的距离相等进行证明.

证明：$\because BF \perp AC$，$CE \perp AB$，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90^\circ$.

在$\triangle BDE$ 和$\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BDE=\angle CDF, \\ \angle DEB=\angle DFC, \\ BE=CF, \end{cases}$$

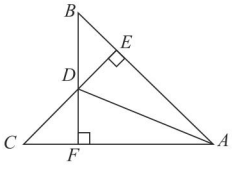


图 2.4−11

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF$，$\therefore DE=DF$.

又$\because BF \perp AC$，$CE \perp AB$，

$\therefore$点 D 在$\angle BAC$ 的平分线上，即 AD 平分$\angle BAC$.

提分·秘诀

方法点拨：

运用角平分线的性质解决问题时，条件中必须有角平分线性质的模型（即两个必要条件），若缺少某个部分，则通过作辅助线补充完整，才能运用此性质解决问题.

提分·必记

特别提醒：

（1）使用该判定定理的前提是这个点必须在角的内部.

（2）角的平分线的判定是由两个条件（垂线，线段相等）得到一个结论（角平分线）.

（3）角的平分线的判定定理是证明两角相等的重要依据，它比利用三角形全等证两角相等更方便快捷.

提分·秘诀

方法点拨：

证明角平分线的方法：

（1）从数量上证明被要证的线分成的两个角相等.

（2）从形上证明角的内部的点到角两边的距离相等，即只需从要证的线上的某一点向角的两边作垂线段，再证明垂线段相等即可. 这样把证“某线是角的平分线”的问题转化为证“垂线段相等”的问题，体现了转化思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 根据线段垂直平分线和角平分线的性质解决实际问题

» 挑战·高分

例 7 如图 2.4−12 所示，三条公路分别相交于 A、B、C 三点，现计划修建一个加油站，要求该加油站到三条公路的距离相等，用直尺和圆规作出加油站 O 的位置.（不写作法，请保留作图痕迹）

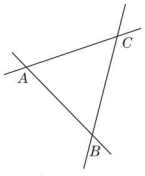


图 2.4−12

解题秘方：根据已知条件结合角平分线的性质进行思考，三角形三条内角平分线相交于同一点，而外角平分线的交点不重合，也有 3 个满足要求的点.

解：如图 2.4−13 所示，点 O_1、O_2、O_3、O_4 即为所求.

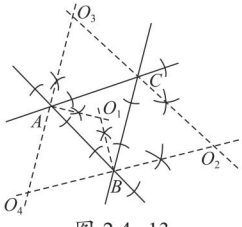


图 2.4−13

方法点拨：

到三角形三边距离相等的点应在三角形的三条角平分线的交点处，但题设中三条公路是直线，因而还应注意从三角形外角平分线进行分析.

拔尖角度 2 根据线段垂直平分线和角平分线的性质证明

» 挑战·高分

例 8 如图 2.4−14，$\angle 1=\angle 2$，P 为 BN 上一点，且 $PD\perp BC$ 于点 D，$AB+BC=2BD$，求证：$\angle BAP+\angle BCP=180^\circ$.

解题秘方：要证明两个角的和是 180°，可把它们转化到一起，利用三角形全等的性质证它们可以拼成一个平角.

证明：如图 2.4−14. 过点 P 作 $PE\perp BA$ 于点 E.

$\because PD\perp BC$，$PE\perp BA$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore PE=PD$.

在 Rt△BPE 和 Rt△BPD 中，$\begin{cases} BP=BP, \\ PE=PD, \end{cases}$

$\therefore$ Rt△$BPE\cong$ Rt△BPD.

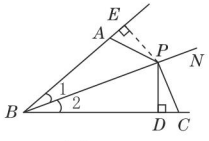


图 2.4−14

$\therefore BE=BD$.

$\because AB+BC=2BD$，$BC=CD+BD$，$AB=BE-AE=BD-AE$，

$\therefore BD-AE+CD+BD=2BD$，即 $AE=CD$.

$\because PE\perp BE$，$PD\perp BC$，$\therefore \angle PEA=\angle PDC=90^\circ$.

在△PEA 和△PDC 中，$\begin{cases} PE=PD, \\ \angle PEA=\angle PDC, \\ AE=CD, \end{cases}$

$\therefore$△$PEA\cong$△PDC，$\therefore \angle EAP=\angle BCP$.

$\because \angle BAP+\angle EAP=180^\circ$，$\therefore \angle BAP+\angle BCP=180^\circ$.

解法提醒：

本题运用转化思想进行证明. 当遇到证明两角的和是 180°的问题时，往往将其转化为证明平角或三角形内角和的问题.

本题根据角平分线的性质想到从点 P 向∠ ABC 的两边中无垂线的一边作垂线，构造直角三角形，证明两直角三角形全等，从而将两个角的和转化为一个平角，进而得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

线段垂直平分线、角平分线的性质与判定，是中考必考内容，经常用来证明线段和角的相等关系，在中考中一般不单独命题，常与三角形、四边形、圆等知识综合考查，主要以填空题、解答题等形式出现，以低、中档题为主．尺规作角平分线和垂直平分线，近几年中考主要以选择题、填空题或操作题的形式出现，以考查基本作图为主，难度不大．

三年中考兵法

》冲刺·满分

解法提醒：

角平分线的判定和性质运用的基本模型：一有角平分线，二有过角平分线上的点作角两边的垂线．运用此判定和性质解决问题时，若基本模型不齐全，可通过作辅助线构造出基本模型．

考法1 利用角平分线的判定和性质求角的度数

例9 [中考·大庆] 如图2.4-15，$\angle B=\angle C=90^\circ$，$M$是$BC$的中点，$DM$平分$\angle ADC$，且$\angle ADC=110^\circ$，则$\angle MAB=$（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°

试题评析： 本题主要考查的是角平分线的性质和判定，利用角平分线上的点到角两边的距离相等构造角平分线的基本模型是解题的关键．

解： 如图2.4-15，过点M作$MN\perp AD$于点N.

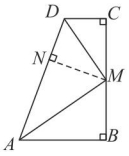


图2.4-15

$\because \angle B=\angle C=90^\circ$，$\therefore \angle B+\angle C=180^\circ$，

$\therefore AB\parallel CD$，$\therefore \angle DAB=180^\circ-\angle ADC=70^\circ$．

$\because DM$平分$\angle ADC$，$MN\perp AD$，$MC\perp CD$，

$\therefore MN=MC$.

$\because M$是BC的中点，$\therefore MC=MB$，$\therefore MN=MB$.

又$\because MN\perp AD$，$MB\perp AB$，$\therefore AM$是$\angle DAB$的平分线，

$\therefore \angle MAB=\frac{1}{2}\angle DAB=35^\circ$．

答案： B

考法2 利用尺规作图及角平分线的性质求三角形的面积

例10 [中考·扬州] 如图2.4-16，在$\triangle ABC$中，按以下步骤作图：

①以点B为圆心，任意长为半径作弧，分别交AB、BC于点D、E.

②分别以点D、E为圆心，大于$\frac{1}{2}DE$的同样长为半径作弧，两弧交于点F.

③作射线BF交AC于点G. 如果$AB=8$，$BC=12$，$\triangle ABG$的面积为18，则$\triangle CBG$的面积为_____.

试题评析： 本题考查了基本作图和角平分线的性质，根据作图过程可得BG是$\angle ABC$的平分线，根据$\triangle ABG$的面积为18，求出GM的长，再根据角平分线的性质可得$GM=GN$，可求得$\triangle CBG$的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 2.4–16，过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M，$GN \perp BC$ 于点 N.

根据作图过程可知：BG 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\therefore GM = GN$.

$\because \triangle ABG$ 的面积为 18，$AB = 8$，

$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times GM = 18$，$\therefore GM = \frac{9}{2}$，

$\therefore GN = GM = \frac{9}{2}$.

$\therefore S_{\triangle CBG} = \frac{1}{2} \times BC \times GN = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{9}{2} = 27$.

答案：27

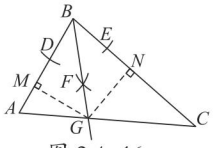


图 2.4–16

考法点评：

角平分线的性质揭示了两条线段之间的相等关系，而这两条线段都是垂线段，所以考查时，一是用来求线段长，二是用来解决三角形的面积问题.

两年模拟兵法

☞答案见 247 页

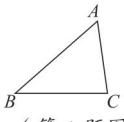
1. 如图，点 A、B、C 分别表示某公司三个车间的位置，现在要建一个仓库，要求它到三个车间的距离相等，则仓库应建在（　　）

A. $\triangle ABC$ 三条边的中线的交点上

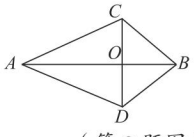
B. $\triangle ABC$ 三条内角平分线的交点上

C. $\triangle ABC$ 三条边上的高的交点上

D. $\triangle ABC$ 三条边垂直平分线的交点上



（第 1 题图）



（第 2 题图）

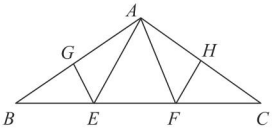
2. 如图，$AC=AD$，$BC=BD$，AB 与 CD 相交于点 O，则下列结论一定正确的是（　　）

A. $\angle ABC = \angle CAB$　　B. $OA=OB$

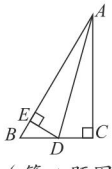
C. $\angle ACD = \angle BDC$　　D. $AB \perp CD$

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AB 的垂直平分线分别交 AB、BC 于点 G，E，AC 的垂直平分线分别交 AC，BC 于点 H，F. 若 $\angle BAC=110°$，则 $\angle EAF$ 为（　　）

A. 35°　　B. 40°　　C. 45°　　D. 50°



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 如图，已知 $AC \perp BC$，$DE \perp AB$，AD 平分 $\angle BAC$，下列结论错误的是（　　）

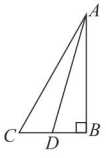
A. $BD+ED=BC$

B. DE 平分 $\angle ADB$

C. DA 平分 $\angle EDC$

D. $ED+AC > AD$

5. 如图，AD 为 Rt $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线，$\angle B = 90°$，$DB=2$，则点 D 到 AC 的距离为_____.

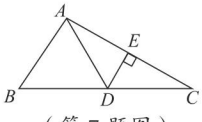


（第 5 题图）

6. 如图，AB 垂直平分 CD，$AC=6$，$BD=4$，则四边形 $ADBC$ 的周长是_____.



（第 6 题图）

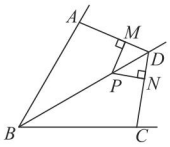


（第 7 题图）

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AC 的垂直平分线分别交 AC、BC 于 E、D 两点，$EC=4$，$\triangle ABC$ 的周长为 23，则 $\triangle ABD$ 的周长为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

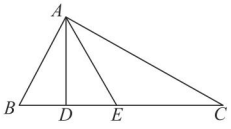
8. 如图，已知 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$AB=BC$，点 P 在 BD 上，$PM \perp AD$，$PN \perp CD$，垂足分别是 M、N. 求证：$PM=PN$.



（第 8 题图）

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，在线段 DC 上取一点 E，使 $BD=DE$，连接 AE，已知 $AB+BD=DC$.

求证：点 E 在线段 AC 的垂直平分线上.

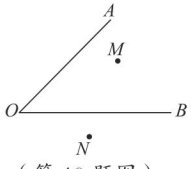


（第 9 题图）

10. 如图，已知 $\angle AOB$ 及点 M、N.

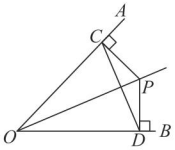
求作点 P，使得点 P 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等，且到 M、N 两点的距离也相等.

（要求：用尺规作图，保留作图痕迹，不写作法）



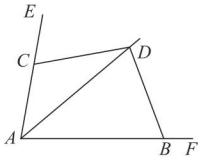
（第 10 题图）

11. 如图，已知点 P 是 $\angle AOB$ 平分线上一点，$PC \perp OA$，$PD \perp OB$，垂足分别为 C、D，OP 与 CD 有什么关系？请证明你的结论.



（第 11 题图）

12. 如图，点 D 是 $\angle EAF$ 平分线上的一点，若 $\angle ACD+\angle ABD=180^\circ$，请证明：$CD=BD$.



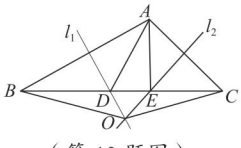
（第 12 题图）

13.[**期中 · 无锡**]如图，在 $\triangle ABC$ 中，AB 边的垂直平分线 l_1 交 BC 于点 D，AC 边的垂直平分线 l_2 交 BC 于点 E，l_1 与 l_2 相交于点 O，连接 OB、OC. 若 $\triangle ADE$ 的周长为 15cm，$\triangle OBC$ 的周长为 31cm.

（1）求线段 BC 的长；

（2）连接 OA，求线段 OA 的长；

（3）若 $\angle BAC=n^\circ$（$n>90$），求 $\angle DAE$ 的度数.



（第 13 题图）

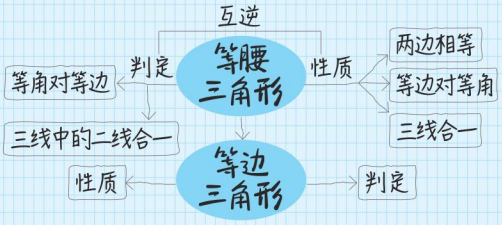
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.5 等腰三角形的轴对称性

核心知识

- 等腰三角形的性质（重点）
- 等腰三角形的判定（重点）
- 等边三角形的性质
- 等边三角形的判定
- 直角三角形斜边上中线的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

点知识 1 等腰三角形的性质

1. 性质 1 等腰三角形的两底角相等（简称“等边对等角”）.

几何语言：如图 2.5−1，在△ ABC 中，

$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.



等腰三角形的性质

2. 性质 2 等腰三角形底边上的高线、中线及顶角平分线重合（简称“三线合一”）.

如图 2.5−1，在△ ABC 中，

（1）$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$，$BD=DC$.

（2）$\because AB=AC$，$BD=DC$，

$\therefore AD\perp BC$，AD 平分 $\angle BAC$.

（3）$\because AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore BD=DC$，$AD\perp BC$.

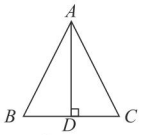


图 2.5−1

特别提醒：

（1）适用条件：必须在同一个三角形中.

（2）作用：是证明角相等的常用方法，应用它证角相等时可省去三角形全等的证明，因而更简便.

特别解读：

（1）适用条件：

①必须是等腰三角形，

②必须是底边上的中线、底边上的高线和顶角平分线才相互重合.

（2）作用：是证明线段相等、角相等、线段垂直等关系的重要方法.

3. 对称性 等腰三角形是轴对称图形，顶角平分线（或底边上的高线、底边上的中线）所在的直线是它的对称轴.

拨考向 根据等腰三角形的性质证明

»提分·秘诀

例 1 如图 2.5−2，在△ ABC 中，$AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$.

（1）求 $\angle ADB$ 的度数；

（2）若 $\angle BAC=100°$，求 $\angle B$、$\angle C$ 的度数；

（3）若 $BC=3$ cm，求 BD 的长.

解题秘方： 紧扣等腰三角形的性质进行解答.

解：（1）$\because AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADB=90°$.

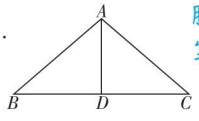


图 2.5−2

特别提醒：

（1）在等腰三角形中，运用“三线合一”时，已知其中“一线”，就可以得到另外“两线”. 根据等腰三角形的“三线合一”的性质可以得到等线段、等角以及两条线段互相垂直.

（2）“等边对等角”的前提是在同一个三角形中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）在△ ABC 中，$\because AB=AC$，$\angle BAC=100°$，

$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$.

（3）$\because AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore AD$ 是 BC 边上的中线，

$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times3=1.5$（cm），即 BD 的长是 1.5cm.

例 2 如图 2.5−3，在△ ABC 中，$AB=AC$，BD、CE 分别是 AC、AB 边上的高．求证：$CE=BD$.

解题秘方： 利用等腰三角形的性质为证明△ BEC 和△ CDB 全等创造条件．

证明： **方法一**

$\because AB=AC$，$\therefore \angle EBC=\angle DCB$.

$\because BD\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore \angle BDC=\angle CEB=90°$.

在△ BEC 和△ CDB 中，

$$\begin{cases}\angle EBC=\angle DCB,\\ \angle BEC=\angle CDB,\\ BC=CB,\end{cases}$$

$\therefore$ △ $BEC\cong$△ CDB，

$\therefore CE=BD$.

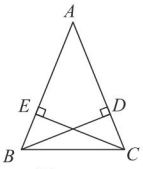


图 2.5−3

方法二

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，且 $AB=AC$，

$\therefore CE=BD$.



点知识 2 等腰三角形的判定

1. 判定定理 有两个角相等的三角形是等腰三角形（简称“等角对等边”）.

几何语言： 在△ ABC 中，$\because \angle B=\angle C$，$\therefore AB=AC$.

2. 等腰三角形的性质与判定的异同

相同点： 使用的前提都是“在同一个三角形中”；

不同点： 由三角形的两边相等，得到它们所对的角相等，是等腰三角形的性质；由三角形的两角相等，得到它是等腰三角形，是等腰三角形的判定．

即**等腰三角形的性质：** 两边相等→这两边所对的角相等．

等腰三角形的判定： 两角相等→这两角所对的边相等．

3. 拓展 根据等腰三角形的性质定理和判定定理是互逆定理可知，由等腰三角形的“三线合一”性质的逆命题可得出等腰三角形的三个判定方法：

（1）三角形中一边上的中线和高线重合时，利用线段的垂直平分线定理，可以判定该三角形为等腰三角形；

解法提醒：

（1）方法一是利用等腰三角形的性质1为证明三角形全等提供角相等的条件．由此可得等腰三角形的性质：

①等腰三角形两腰上的中线相等；

②等腰三角形两腰上的高相等；

③等腰三角形两底角的平分线也相等．

（2）方法二是利用等面积法，由此方法还可得等腰三角形的性质：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高．

»提分·必记

特别提醒：

（1）“等角对等边”不能叙述为“如果一个三角形有两个底角相等，那么它的两条腰相等”，因为在未判定出它是等腰三角形之前，不能用“底角”“顶角”“腰”“底边”这些名词．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）三角形中一边上的中线和对角的平分线重合时，利用三角形全等可以判定三角形为等腰三角形；

（3）三角形中一边上的高线和对角的平分线重合时，直接利用三角形全等可判定三角形为等腰三角形.

（2）“等角对等边”是我们以后证明两条线段相等的常用方法，在证明过程中，经常通过计算三角形各角的度数，或利用角之间的关系得到角相等，从而得到所对的边相等.

拔考向 利用等腰三角形的判定方法判定等腰三角形

例 3 如图 2.5-4，在△ ABC 中，P 是 BC 边上一点，过点 P 作 BC 的垂线，交 AB 于点 Q，交 CA 的延长线于点 R，若 $AQ=AR$，则△ ABC 是等腰三角形吗？请说明理由.

解题秘方：利用“等角对等边”判定等腰三角形，只需证明三角形两个内角相等即可.

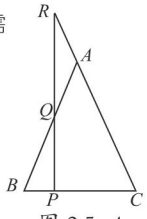


图 2.5-4

解：△ ABC 是等腰三角形. 理由如下：

∵ $AQ=AR$，∴ $\angle AQR=\angle R$.

又∵ $\angle BQP=\angle AQR$，∴ $\angle R=\angle BQP$.

∵ $RP\perp BC$，∴ $\angle RPB=\angle RPC=90^\circ$，

∴ $\angle B+\angle BQP=90^\circ$，$\angle C+\angle R=90^\circ$，即 $\angle B+\angle BQP=\angle C+\angle R=90^\circ$.

∴ $\angle B=\angle C$，∴ $AB=AC$，∴△ ABC 是等腰三角形.

点知识 3 等边三角形的定义及性质

»提分·必记

特别解读：

等边三角形是特殊的等腰三角形，具备等腰三角形的所有性质：

（1）任意两边都可以作为腰.

（2）任意一个角都可以作为顶角.

（3）任意一边上都有“三线合一”.

1. 定义 三边相等的三角形叫做等边三角形或正三角形.

2. 性质

（1）等边三角形的三条边都相等；

（2）等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于 60° ；

（3）等边三角形是轴对称图形，它有 3 条对称轴，分别为三边的垂直平分线；

（4）各边上的高线、中线、对应的角平分线重合，且长度相等.

拔考向 利用等边三角形的性质解边角关系问题

类型 1：等边三角形角的性质在求角度中的应用

例 4 如图 2.5-5，△ ABC 是等边三角形，D、E、F 分别是边 AB、AC、BC 上的点，且 $DE\perp AC$、$EF\perp BC$、$FD\perp AB$，计算△ DEF 各个内角的度数.

解题秘方：紧扣等边三角形的三个内角都等于 60°，求角的度数.

»提分·秘诀

解法提醒：

等边三角形的三个内角都等于 60°，为三角形的内角直接提供了角的条件. 若同时要运用三个内角，只需以一个角为例计算，其余可同理得到.

解：∵△ ABC 是等边三角形，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$.

∵ $DE\perp AC$，$EF\perp BC$，$FD\perp AB$，

∴ $\angle AED=\angle EFC=\angle FDB=90^\circ$，

∴ $\angle ADE=90^\circ-\angle A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

∴ $\angle EDF=180^\circ-\angle ADE-\angle FDB=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$.

同理可得 $\angle DEF=\angle EFD=60^\circ$.

∴△ DEF 各个内角的度数都是 60°.

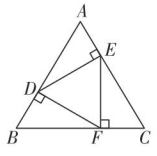


图 2.5-5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：

等边三角形的任何一边上都有“三线合一”的性质，有时要运用的和已知的不一致，需要通过“三线合一”的性质将未知线段向已知线段转化.

类型 2: 等边三角形“三线合一”的性质在求边长中的应用

例 5 如图 2.5-6，等边三角形 ABC 的边长为 3，D 是 AC 的中点，点 E 在 BC 的延长线上，若 $DE=DB$，求 CE 的长.

解题秘方：利用等边三角形“三线合一”的性质将未知线段向已知线段转化.

解：$\because$ 等边三角形 ABC 的边长是 3，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，

$AC=3$.

$\because D$ 是 AC 的中点，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AC=1.5$，$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$.

$\because DE=DB$，

$\therefore \angle DEC=\angle DBE=30^\circ$.

$\because \angle ACB=60^\circ$，

$\therefore \angle CDE=\angle ACB-\angle DEC=30^\circ$，

$\therefore \angle CDE=\angle DEC$，

$\therefore CE=CD=1.5$，即 CE 的长是 1.5.

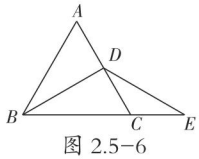


图 2.5-6

解法提醒：

等边三角形的三条边相等，三个内角相等且都等于 60°，为证明三角形全等创造了边、角相等的条件.

类型 3: 根据等边三角形的性质证明三角形全等

例 6 如图 2.5-7，已知△ ABC 为等边三角形，点 D、E 分别在 BC、AC 上，且 $AE=CD$，AD 与 BE 相交于点 F.

（1）求证：△ $ABE\cong$△ CAD；

（2）求∠ BFD 的度数.

解题秘方：利用等边三角形中三条边相等，三个内角相等且都为 60° 的性质进行解答.

（1）**证明**：$\because$△ ABC 为等边三角形，

$\therefore \angle BAE=\angle ACD=60^\circ$，$AB=CA$.

在△ ABE 和△ CAD 中，

$$\begin{cases} AB=CA, \\ \angle BAE=\angle ACD, \\ AE=CD, \end{cases}$$

$\therefore$△ $ABE\cong$△ CAD.

（2）**解**：$\because$△ $ABE\cong$△ CAD，

$\therefore \angle ABF=\angle CAD$.

$\because \angle BFD=\angle ABF+\angle BAF$，

$\therefore \angle BFD=\angle CAD+\angle BAF=\angle BAC=60^\circ$.

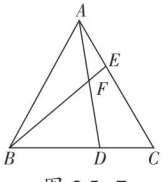


图 2.5-7

思维拓展：

当 D、E 两点分别在 BC、AC 上运动时，∠ BFD 的度数是一个定值，若 D、E 两点分别运动到 BC、CA 的延长线上时，直线 AD 与直线 BE 相交于点 F，∠ BFD 的度数是否仍然是 60°呢？请同学们自己画图证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 等边三角形的判定

1. 判定定理 1 三个角都相等的三角形是等边三角形.

几何语言：如图 2.5−8，在△ ABC 中，

∵ ∠ A= ∠ B= ∠ C，∴△ ABC 是等边三角形.

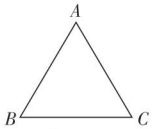


图 2.5−8

2. 判定定理 2 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

几何语言：如图 2.5−8，在△ ABC 中，

∵ AB=AC，∠ A=60°（或∠ B=60° 或∠ C=60°），

∴△ ABC 是等边三角形.



证明等边三角形的思维导图：

三角形 —（思路 1：三边相等 / 思路 2：三角相等）→ 等边三角形

三角形 —（等腰三角形的判定）→ 等腰三角形 —（有一个角等于 60°）→ 等边三角形

提分·必记

特别解读：

（1）在等腰三角形中，只要有一个角是 60°，无论这个角是顶角还是底角，判定定理 2 都成立.

（2）等边三角形的判定方法：

①若已知三边关系，一般选用定义判定；

②若已知三角关系，一般选用判定定理 1 判定；

③若已知该三角形是等腰三角形，一般选用判定定理 2 判定.

拔考向 利用等边三角形的判定方法判定等边三角形

类型 1: 判定定理 1 在判定等边三角形中的应用

例 7 如图 2.5−9，在等边三角形 ABC 中，∠ ABC 和∠ ACB 的平分线相交于点 O，OB、OC 的垂直平分线分别交 BC 于点 E、F，连接 OE、OF. 求证：△ OEF 是等边三角形.

解题秘方：利用等边三角形的判定定理 1，通过求∠ OEF= ∠ OFE= ∠ EOF=60°，得到△ OEF 是等边三角形.

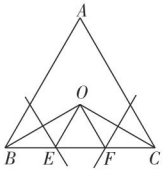


图 2.5−9

证明：∵△ ABC 是等边三角形，

∴∠ ABC= ∠ ACB=60°.

∵ CO、BO 分别平分∠ ACB、∠ ABC，

∴∠ OBE= ∠ OCF=30°.

∵ OB、OC 的垂直平分线分别交 BC 于点 E、F，

∴ OE=BE，OF=CF，

∴∠ BOE= ∠ OBE=30°，∠ COF= ∠ OCF=30°.

∴∠ OEF= ∠ BOE+ ∠ OBE=60°，

∠ OFE= ∠ COF+ ∠ OCF=60°.

∴∠ OEF= ∠ OFE=60°，

∴∠ EOF=180° − ∠ OEF− ∠ OFE =60°，

∴△ OEF 是等边三角形.

提分·秘诀

教你一招：

（1）从角的角度证明三角形是等边三角形的两条思路：

一是证明三角形的三个内角相等；

二是求出三角形的三个内角的度数都是 60°.

（2）在已知的等边三角形内部判定某个三角形是等边三角形时，原等边三角形的三个内角为 60°，为求新等边三角形的内角度数提供了条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2: 判定定理 2 在判定等边三角形中的应用

例 8 如图 2.5−10，点 C 为线段 AB 上一点，△ ACM 和△ CBN 都是等边三角形，AN、MC 相交于点 E，BM、CN 相交于点 F. 求证：

（1）$AN=MB$；

（2）△ CEF 是等边三角形.

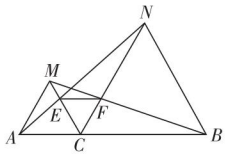


图 2.5−10

解题秘方：（1）要证 $AN=MB$，只需证△ ACN ≌△ MCB；

（2）根据已知条件，易求∠ $ECF=60°$，故证明△ ECF 为等腰三角形即可.

证明：（1）∵△ ACM 和△ CBN 都是等边三角形，

∴ $AC=MC$，$CN=CB$，∠ ACM= ∠ $BCN=60°$.

∴ ∠ ACM+ ∠ MCN= ∠ BCN+ ∠ MCN，即∠ ACN= ∠ MCB.

在△ ACN 和△ MCB 中，$\begin{cases} AC=MC, \\ \angle ACN=\angle MCB, \\ CN=CB, \end{cases}$

∴ △ ACN ≌△ MCB，∴ $AN=MB$.

（2）∵△ ACN ≌△ MCB，∴ ∠ ENC= ∠ FBC.

∵ ∠ $ECN=180°-\angle ACM-\angle NCB=60°$，

∴ ∠ ECN= ∠ FCB.

在△ ECN 和△ FCB 中，$\begin{cases} \angle ENC=\angle FBC, \\ CN=CB, \\ \angle ECN=\angle FCB, \end{cases}$

∴ △ ECN ≌△ FCB，∴ $CE=CF$.

又∵ ∠ $ECF=60°$，

∴ △ CEF 是等边三角形.

另解：

∵△ ACN ≌△ MCB,
∴∠ CAE= ∠ CMF.
∵∠ MCF=180°−∠ ACM−∠ NCB=60°,
∴∠ ACE= ∠ MCF.
∵△ ACM 是等边三角形,
∴ AC=MC.
在△ ACE 和△ MCF 中,

$\begin{cases} \angle ACE=\angle MCF, \\ AC=MC, \\ \angle CAE=\angle CMF, \end{cases}$

∴△ ACE ≌△ MCF,
∴ CE=CF.

点知识 5 直角三角形斜边上的中线的性质

1. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

几何语言：如图 2.5−11，在 Rt △ ABC 中，

∵ ∠ $ACB=90°$，D 为 AB 的中点，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB$.

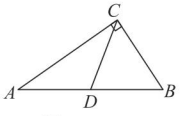


图 2.5−11

（1）在直角三角形中，有斜边上的中点，通常考虑运用这一性质解题.

（2）根据定理可知直角三角形斜边上的中线将直角三角形分成两个等腰三角形.

2. 易错警示

在△ ABC 中，D 为 AB 的中点，不能得出 $CD=\frac{1}{2}AB$，前提是∠ $ACB=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向 根据直角三角形斜边上的中线的性质计算

例 9 如图 2.5−12，在 Rt △ ABC 中，∠ ACB=90° ，D 为 AB 的中点，若∠ ACD=20° ，则∠ B= _____.

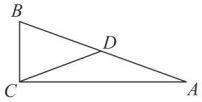


图 2.5−12

解题秘方：先根据直角三角形斜边上的中线的性质得 AD=CD，再由等腰三角形的性质得∠ A=20° ，最后利用直角三角形两锐角互余可得结论.

解：∵∠ ACB=90° ，D 为 AB 的中点，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB=AD$，∴∠ A= ∠ ACD=20° ，

∴∠ B=90° − ∠ A=90° −20° =70°.

答案：70°

提分·秘诀

方法点拨：

可以运用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”解决的问题往往具有两个明显特征：一是有直角（直角三角形），二是有中点（斜边上的中线）.

点知识 6 含 30° 角的直角三角形的性质

1. 性质

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

几何语言：如图 2.5−13，在 Rt △ ABC 中，

∵∠ C=90° ，∠ A=30° ，

∴ $BC=\frac{1}{2}AB$.

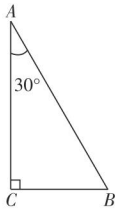


图 2.5−13

2. 作用

应用于证线段的倍分关系和计算角度.

提分·必记

特别解读：

（1）应用此性质，必须满足两个条件：

①在直角三角形中；

②有一个锐角为 30°.

二者缺一不可.

（2）含 30° 角的直角三角形的性质是求线段长度和证明线段倍分关系的重要依据.

拔考向 利用含 30° 角的直角三角形的性质解线段关系问题

例 10 如图 2.5−14，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90 °，AB 边的垂直平分线 MN 交 AB 于点 M，交 BC 于点 N，且∠ B=15°，AC=4 cm，求 BN 的长.

解题秘方：先构造含 30° 角的直角三角形，再利用含 30° 角的直角三角形的性质求线段长.

解：如图 2.5−14，连接 AN.

∵ MN 为 AB 边的垂直平分线，

∴ AN=BN，∴∠ NAB= ∠ B=15° ，

∴∠ ANC= ∠ B+ ∠ NAB=30° .

在 Rt △ ACN 中，∠ ANC=30° ，

∴ AN=2AC=2×4=8（cm），∴ BN=8 cm.

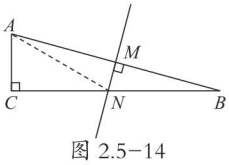


图 2.5−14

提分·秘诀

教你一招：

含 30° 角的直角三角形的性质揭示了直角边与斜边的数量关系.

（1）若求某直角三角形的边长时，考虑建立含 30° 角的直角三角形模型.

（2）若给出的是 15° 角，则构造 15° 角为底角的等腰三角形，其顶角处的外角为 30°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

» 挑战·高分

方法点拨：

当已知条件中没有已知度数的角而又要求角的度数时，一般采用方程思想来解决．先设出要求的角的度数，然后根据等腰三角形的性质以及三角形外角与内角之间的关系，用含未知数的式子表示出一个三角形的三个内角的度数，再利用三角形的内角和等于180°列出方程，求出未知数的值即可．



拔尖角度1 利用方程思想求角度

例11 如图2.5−15，在△ABC中，$AB=AC$，点D、E分别在AC、AB边上，且$BC=BD$，$AD=DE=EB$，求∠A的度数．

解题秘方： 利用“等边对等角”及三角形外角的性质将△ABC中的三个角都用要求的∠A来表示，利用三角形内角和解决问题．

解： 设∠$A=x°$．

∵ $AD=DE$，∴ ∠AED=∠$A=x°$．

∵ $DE=EB$，∴ ∠EBD=∠$BDE=\frac{1}{2}$∠$AED=\frac{1}{2}x°$，

∴ ∠BDC=∠A+∠$EBD=\frac{3}{2}x°$．

∵ $BC=BD$，∴ ∠C=∠$BDC=\frac{3}{2}x°$．

∵ $AB=AC$，∴ ∠ABC=∠$C=\frac{3}{2}x°$．

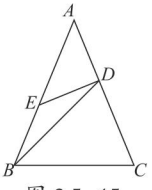


图2.5−15

∵ ∠A+∠ABC+∠C=180°，∴ $x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x=180$.

解得$x=45$. ∴ ∠A=45°．

» 挑战·高分

方法点拨：

本题考查了等腰三角形的性质的运用，解决问题的关键是熟练利用三角形的内角和定理及等腰三角形的性质．解题时注意分类讨论思想的运用．

拔尖角度2 三角形形状不确定引起的分类讨论

例12 等腰三角形的一腰上的高与另一腰所在直线的夹角为40°，则这个三角形的底角为_____．

解题秘方： 分两种情况讨论，求出每种情况的顶角的度数，再利用等边对等角的性质（两底角相等）和三角形的内角和定理，即可求出底角的度数．

解：（1）如图2.5−16，当△ABC是锐角三角形时，$BD\perp AC$于点D，则∠ADB=90°．

∵ ∠ABD=40°，∴ ∠A=90°−∠ABD=90°−40°=50°．

∵ $AB=AC$，∴ ∠ABC=∠$C=\frac{1}{2}\times$（180°−∠A）=65°．

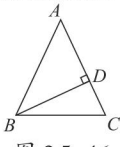


图2.5−16

（2）如图2.5−17，当△EFG是钝角三角形时，$FH\perp GE$，交GE的延长线于H，则∠FHE=90°．

∵ ∠HFE=40°，

∴ ∠HEF=90°−∠HFE=50°，

∴ ∠FEG=180°−∠HEF=130°．

∵ $EF=EG$，

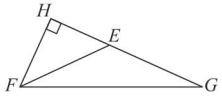


图2.5−17

∴ ∠EFG=∠$G=\frac{1}{2}\times$（180°−∠FEG）=25°．

答案： 65° 或25°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用平行线构造等腰三角形证明线段相等

» 挑战·高分

方法点拨：

（1）等腰三角形构造法：等腰三角形任意一边的平行线与另两边相交所构成的三角形是等腰三角形.

（2）证明线段相等的方法：把要证的两条线段放到一个三角形中，证其为等腰三角形或等边三角形，或把要证的两条线段放到两个三角形中，构造全等三角形，利用全等三角形的性质证明.

例 13 如图 2.5−18，在△ ABC 中，$AB=AC$，EF 交 AB 于点 E，交 AC 的延长线于点 F，交 BC 于点 D，且 $BE=CF$. 求证：$DE=DF$.

解题秘方： 过等腰三角形一边上的一点作另一边的平行线，截得的三角形仍然是等腰三角形.

证明： 如图 2.5−18，过点 E 作 $EG \parallel AC$，交 BC 于点 G，则 $\angle ACB=\angle BGE$，$\angle F=\angle DEG$.

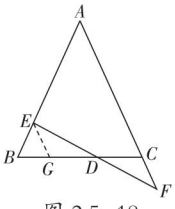


图 2.5−18

$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle ACB$，

$\therefore \angle B=\angle BGE$，$\therefore BE=GE$.

$\because BE=CF$，$\therefore GE=CF$.

在△ GDE 和△ CDF 中，

$$\begin{cases}\angle GDE=\angle CDF,\\ \angle DEG=\angle F,\\ GE=CF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle GDE \cong \triangle CDF$，

$\therefore DE=DF$.



拔尖角度 4 等边三角形的性质与判定的综合运用

» 挑战·高分

方法点拨：

动态问题的求解思路：

动态问题是以点、线、面运动为情境，探索和发现其中的规律或结论的题型，由于图形运动，导致题目的条件不断改变，相应的数量关系和结论可能不改变，也可能改变，一般由条件进行探索.

若得到不变的值或结论，就求出了不变的值或得到不变的结论；

若不能得到不变的值或结论，就相应说明了理由.

例 14 如图 2.5−19，△ ABC 是边长为 6 的等边三角形，P 是 AC 边上的动点，由点 A 向点 C 运动（与点 A、C 不重合），Q 是 CB 延长线上的动点，与点 P 同时以相同的速度由点 B 向 CB 延长线的方向运动（点 Q 不与点 B 重合），过点 P 作 $PE \perp AB$ 于点 E，连接 PQ 交 AB 于点 D.

（1）当 $\angle BQD=30°$ 时，求 AP 的长；

（2）在运动过程中线段 ED 的长是否发生变化？如果不变，求出线段 DE 的长；如果发生改变，请说明理由.

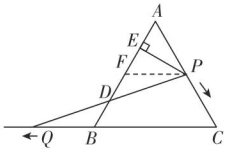


图 2.5−19

解题秘方：（1）由动变静，寻找不变量，结合等边三角形的性质求解即可；

（2）过点 P 作 $PF \parallel QC$，交 AB 于点 F，构造等边三角形 AFP，寻找 ED 与 AB 之间的数量关系即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：

在出现60°角的图形中构造等边三角形的方法：

（1）利用补形法，使夹60°角的两边相等；

（2）若60°角是已知等边三角形的内角，可用作平行线的方法构造等边三角形.

解：（1）∵△ABC是等边三角形，∴∠C=60°.

∵P、Q两点同时同速出发，∴AP=BQ.

设AP=BQ=x，则PC=6−x，QC=6+x.

在△QCP中，∠CQP=30°，∠C=60°，则∠CPQ=90°.

∴QC=2PC，即6+x=2（6−x）.解得x=2.

∴AP=2.

（2）在运动过程中线段ED的长不变.

如图2.5−19，过点P作PF∥QC，交AB于点F，

则易得△AFP是等边三角形.∴AP=PF.

又∵AP=BQ，∴PF=BQ.

∵PF∥QC，∴∠PFD=∠QBD.

在△PFD和△QBD中，$\begin{cases}\angle FDP=\angle BDQ,\\ \angle PFD=\angle QBD,\\ PF=QB,\end{cases}$

∴△PFD≌△QBD，∴BD=FD.

∵△APF是等边三角形，PE⊥AF，∴AE=EF，

∴$ED=DF+EF=\frac{1}{2}BF+\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}AB=3$.

» 挑战·高分

解法指导：

证明一条线段等于两条线段的和或差，一般采用截长补短法：

方法一（截长法）：如图2.5−21，在AC上取一点E，使AE=BC.连接DE.同学们可以自己证明.

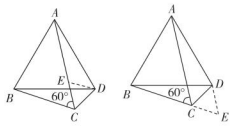


图2.5−21

图2.5−22

方法二（补短法）：如图2.5−22，延长BC至点E，使BE=AC，连接DE.同学们可以自己证明.

拔尖角度5 利用构造等边三角形法证明线段之间的和差关系

例15 如图2.5−20，△ABD是等边三角形，∠BCA=60°，求证：AC=BC+CD.

解题秘方：利用有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形构造等边三角形，为证明三角形全等创造条件.

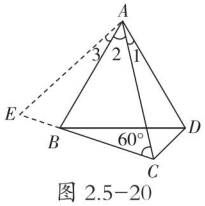


图2.5−20

证明：如图2.5−20，延长CB至点E，使CE=CA，连接AE.

∵∠ACB=60°，∴△AEC是等边三角形，

∴∠EAC=60°，AE=EC=AC.

∵△ABD是等边三角形，

∴∠BAD=60°，AB=AD.

∴∠BAD=∠EAC=60°，

即∠2+∠1=∠2+∠3，∴∠1=∠3.

在△ABE和△ADC中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle 3=\angle 1,\\ AE=AC,\end{cases}$

∴△ABE≌△ADC，∴BE=CD，

∴BC+CD=BC+BE=EC=AC，即AC=BC+CD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查等腰三角形的性质和判定，应用“等边对等角”和“等角对等边”解题，是近几年中考必考的内容，是求角的度数常用的方法，是证明线段相等和角相等的重要依据，单独考查时选择题较多，与其他知识综合考查时常以解答题、证明题的形式出现.

三年中考兵法

考法1 利用等腰三角形的性质求角的度数

»冲刺·满分

例16 [中考·镇江]如图2.5-23，△ABC中，$AB=AC$，点E、F在边BC上，$BE=CF$，点D在AF的延长线上，$AD=AC$.

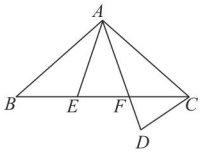


图2.5-23

（1）求证：△ABE≌△ACF；

（2）若∠$BAE=30°$，则∠ADC=_____°.

试题评析：本题考查等腰三角形的性质和全等三角形的判定与性质.（1）要证明△ABE≌△ACF，由题意可得$AB=AC$，∠B=∠ACF，$BE=CF$，从而可以证明结论成立；（2）根据（1）中的结论和等腰三角形的性质可以求得∠ADC的度数.

（1）**证明**：∵$AB=AC$，

∴∠B=∠ACF.

在△ABE和△ACF中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle B=\angle ACF, \\ BE=CF, \end{cases}$

∴△ABE≌△ACF.

（2）**解**：∵△ABE≌△ACF，∠$BAE=30°$，

∴∠CAF=∠$BAE=30°$.

∵$AD=AC$，

∴∠ADC=∠ACD，

∴$\angle ADC=\frac{1}{2}(180°-\angle CAD)=75°$.

答案：75

方法点拨：

三角形全等和等腰三角形的性质及判定是密不可分的，等腰三角形的性质为证明三角形全等提供边、角相等的条件，而三角形全等的性质为等腰三角形的判定创造边或角相等的条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：

判定等腰三角形的方法有两种：一种是利用定义即证明两边相等，另一种是判定定理即“等角对等边”.

考法 2 利用等腰三角形的判定证明等腰三角形

例 17 [中考·连云港]如图 2.5–24，在△ ABC 中，$AB = AC$. 将△ ABC 沿着 BC 方向平移得到△ DEF，其中点 E 在边 BC 上，DE 与 AC 相交于点 O.

求证：△ OEC 为等腰三角形.

试题评析：本题考查平移的性质、等腰三角形的判定等知识点，能综合运用知识点进行推理是解此题的关键.

证明：

∵△ ABC 沿着 BC 方向平移得到△ DEF，

∴∠ B = ∠ DEC.

∵ $AB = AC$，

∴∠ B = ∠ ACB.

∴∠ ACB = ∠ DEC，

∴ $OE = OC$.

即△ OEC 为等腰三角形.

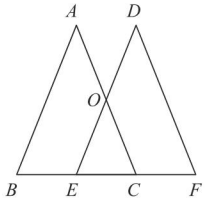


图 2.5–24

方法点拨：

已知等腰三角形两边的长，没有明确说明底边和腰，要分两种情况讨论. 还应验证各种情况是否能构成三角形，这点非常重要，也是解题的关键.

考法 3 有关等腰三角形底边的分类讨论问题

例 18 [中考·南通]一个等腰三角形的两边长分别为 4 cm 和 9 cm，则它的周长为_____cm.

试题评析：本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系. 没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况，分类进行讨论.

解：分情况讨论：

（1）当腰是 4 cm，底边是 9 cm 时，4+4 < 9，不满足三角形的三边关系，因此舍去；

（2）当底边是 4 cm，腰是 9 cm 时，4+9 > 9，能构成三角形，则其周长为 4+9+9 = 22（cm）.

答案：22

方法点拨：

对于等腰三角形，只要已知它的一个内角的度数，就能算出其他两个内角的度数，如果条件中没有确定这个内角是顶角还是底角，就要分两种情况讨论.

考法 4 有关等腰三角形底角的分类讨论问题

例 19 [中考·青海]等腰三角形的一个内角为 70°，则另外两个内角的度数分别是（　　）

A. 55°，55°　　B. 70°，40° 或 70°，55°

C. 70°，40°　　D. 55°，55° 或 70°，40°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了等腰三角形的性质及三角形的内角和定理，解题的关键是分类讨论进行求解．

解：分情况讨论：

（1）当等腰三角形的顶角为 70° 时，

底角 =（180° −70°）÷2 = 55°；

（2）当等腰三角形的底角为 70° 时，它的另外一个底角为 70°，

顶角 = 180° −70° −70° = 40°.

答案：D

考法 5 利用等边三角形的性质求角的度数

例 20 ［中考·盐城节选］如图 2.5−25，已知等边三角形 ABC，将直角三角板的 60° 角顶点 D 任意放在 BC 边上（点 D 不与点 B、C 重合），使两边分别交线段 AB、AC 于点 E、F. 若 $AB = 6$，$AE = 4$，$BD = 2$，则 $CF =$ _____.

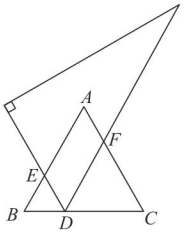


图 2.5−25

试题评析：本题考查了等边三角形的性质与判定，综合性较强，需要学生具备综合应用能力．证明△ BDE 和△ CDF 是等边三角形是解题的关键．

解：∵△ ABC 是等边三角形，

∴ $AB = BC = AC = 6$，$\angle B = \angle C = 60°$.

∵ $AE = 4$，

∴ $BE = 2$，

∴ $BE = BD$，

∴△ BDE 是等边三角形，

∴ $\angle BED = \angle EDB = 60°$ ，

∴ $\angle CDF = 180° - \angle EDF - \angle EDB = 60°$ ，

∴ $\angle CDF = \angle C = 60°$ ，

∴△ CDF 是等边三角形．

∴ $CF = CD = BC - BD = 6 - 2 = 4$.

答案：4

方法点拨：

本题考查等边三角形的性质和判定，关键是扣住 60° 的内角，既可以通过两个内角是 60° 证明等边三角形，也可以通过三个内角相等证明等边三角形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

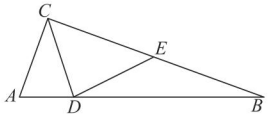
1.[模拟·徐州]等腰三角形有一个角的度数是80°，则另两个角的度数可能是（　　）

A. 40°，40°　　B. 20°，20°

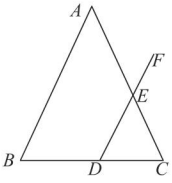
C. 80°，20°　　D. 30°，50°

2.[模拟·扬州]如图，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，∠A=70°，CD⊥AB，垂足为D，E是BC的中点，连接ED，则∠CED的度数是（　　）

A. 20°　　B. 40°　　C. 55°　　D. 70°



（第2题图）



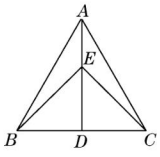
（第3题图）

3.[中考·聊城]如图，在△ABC中，AB = AC，∠C = 65°，点D是BC边上任意一点，过点D作DF // AB交AC于点E，则∠FEC的度数是（　　）

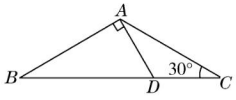
A. 120°　　B. 130°　　C. 145°　　D. 150°

4. 如图，等边三角形ABC中，AD⊥BC，垂足为D，点E在线段AD上，∠EBC=45°，则∠ACE等于（　　）

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°



（第4题图）

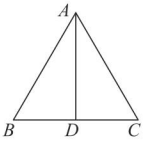


（第5题图）

5. 如图，在△ABC中，AB=AC，∠C=30°，AB⊥AD，AD=2 cm，则BC的长等于（　　）

A.8 cm　　B.6 cm　　C.4 cm　　D.2 cm

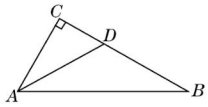
6. 如图，在等边三角形ABC中，点D是边BC的中点，则∠BAD=_____.



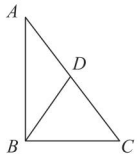
（第6题图）

7.[中考·淮安]已知直角三角形斜边长为16，则这个直角三角形斜边上的中线长为_____.

8. 如图，在Rt△ABC中，∠C=90°，∠B=30°，AD是∠CAB的平分线，CD=2，则BC=_____.



（第8题图）

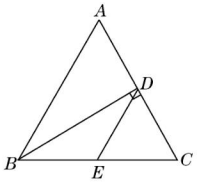


（第9题图）

9.[中考·徐州]如图，在Rt△ABC中，∠ABC = 90°，D为AC的中点，若∠C = 55°，则∠ABD = _____°.

10. 如图，△ABC是等边三角形，BD⊥AC于点D，E为BC的中点，连接DE.

求证：DE=DC.

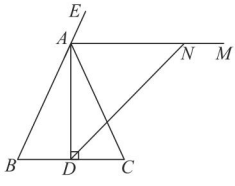


（第10题图）

11. 如图，在△ABC中，AB=AC，AD⊥BC于点D，AM是△ABC的外角∠CAE的平分线.

（1）求证：AM // BC；

（2）若DN平分∠ADC交AM于点N，判断△ADN的形状，并说明理由.

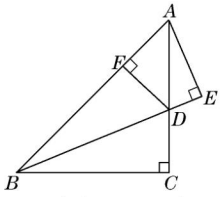


（第11题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 如图，在△ ABC 中，∠ C=90°，AC=BC，D 是 AC 上一点，AE ⊥ BD 交 BD 的延长线于点 E，且 $AE=\frac{1}{2}BD$，DF ⊥ AB 于点 F.

求证：CD=DF.



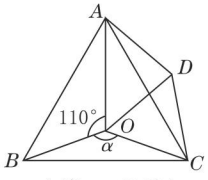
（第 12 题图）

13. 如图，点 O 是等边三角形 ABC 内一点，∠ AOB=110°，∠ BOC=α. 将△ BOC 绕点 C 按顺时针方向旋转 60° 得到△ ADC，连接 OD.

（1）求证：△ COD 是等边三角形；

（2）当 α=150° 时，试判断△ AOD 的形状，并说明理由；

（3）探究：当 α 为多少度时，△ AOD 是等腰三角形.



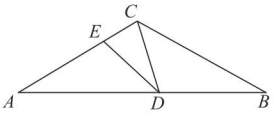
（第 13 题图）

14. 如图，△ ABC 中，AC=BC，∠ ACB=120°，点 D 在 AB 边上运动（点 D 不与点 A、B 重合），连接 CD，作∠ CDE=30°，DE 交 AC 于点 E.

（1）当 DE // BC 时，△ ACD 按角分类是 _____

_____；

（2）在点 D 运动的过程中，△ ECD 可以是等腰三角形吗？若可以，请求出∠ AED 的度数；若不可以，请说明理由.



（第 14 题图）

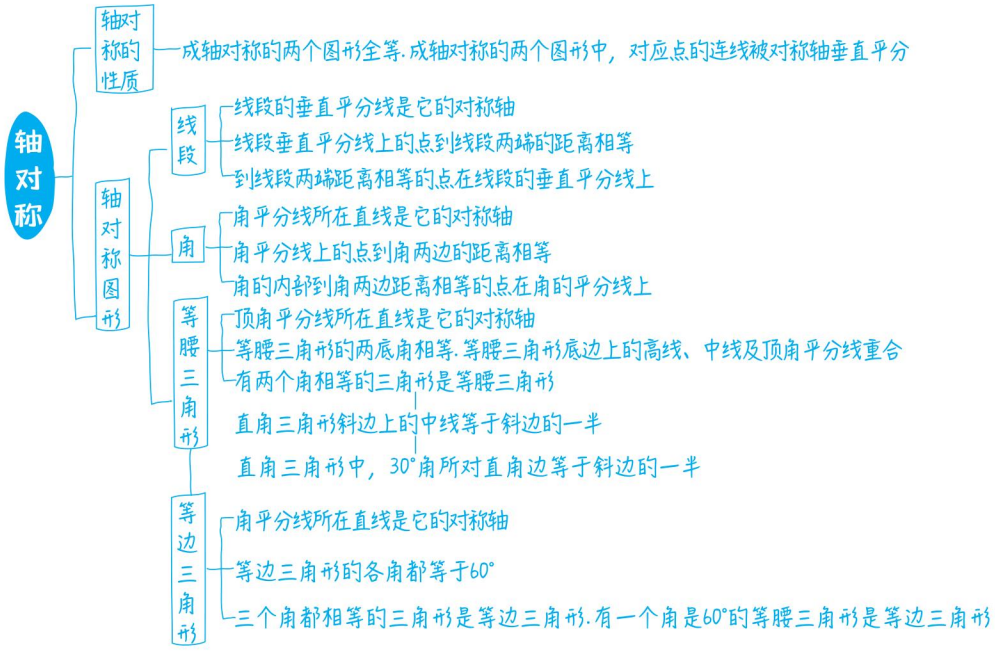
错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **轴对称和轴对称图形之间既有区别又有联系，区别是：**轴对称是两个图形的位置关系，轴对称图形是某一个图形具有轴对称这一特征．**联系是：**成轴对称的两个图形看成一个整体时是轴对称图形；将轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条直线成轴对称．
2. 线段的垂直平分线的性质和判定是互逆命题，经常配合三角形全等进行运用．
3. **等腰三角形是一个轴对称图形，根据其对称性，可得出其性质：**（1）等边对等角；（2）三线合一．等腰三角形的判定与性质是互逆的，**判定有：**（1）等角对等边；（2）三线中只要有两线合一就能判定．
4. **等边三角形是特殊的等腰三角形，具有等腰三角形的所有的性质，等边三角形独有的性质：**（1）三个角相等，都等于 60° ；（2）任意一边上的三线都合一．
5. **直角三角形的两条特殊性质：**（1）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；（2）30° 角所对的直角边等于斜边的一半．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 轴对称图形及其性质

链接中考» 轴对称图形的识别关键要扣住轴对称图形的特征，图形大都来自于生活，主要让学生感受知识的重要性，是中考的热门考点，主要以选择题的形式出现.

例 1 [中考·无锡]如图 2–1 中的五边形 $ABCDE$ 都是正五边形，则这些图形中的轴对称图形有（　　）

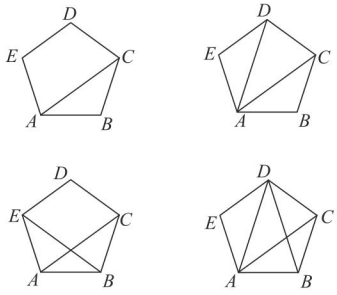


图 2–1

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

导引：直接利用轴对称图形的定义画出对称轴即可得出答案. 如图 2–2, 直线 l 为各图形的对称轴，故选 D.

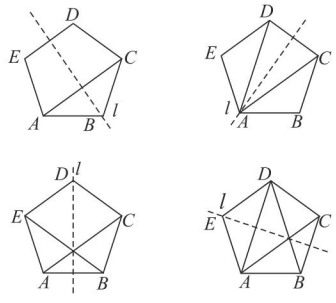


图 2–2

答案：D

方法点拨：等腰三角形、正方形、等边三角形、等腰梯形、圆和正多边形都是轴对称图形. 有的轴对称图形不止一条对称轴. 圆有无数条对称轴，圆的直径所在的直线都是圆的对称轴.

例 2 [中考·吉林]如图 2–3 中，图①、图②、图③都是“3×3”的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点. A、B、C 均为格点. 在给定的网格中，按下列要求画图：

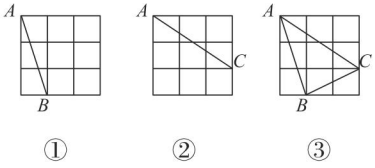


图 2–3

（1）在图①中，画一条不与 AB 重合的线段 MN，使 MN 与 AB 关关于某条直线对称，且 M、N 为格点；

（2）在图②中，画一条不与 AC 重合的线段 PQ，使 PQ 与 AC 关于某条直线对称，且 P、Q 为格点；

（3）在图③中，画一个△ DEF，使△ DEF 与△ ABC 关于某条直线对称，且 D、E、F 为格点.

导引：本题是作轴对称图形，确定对称轴的位置是解答这类问题的关键，一般从横竖网格线或者对角线入手，尝试能否在网格内作出轴对称图形.

解：（1）如图 2–4 ①，MN 即为所求.（答案不唯一）

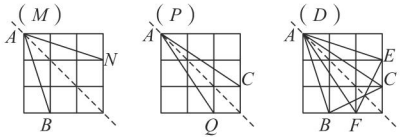


图 2–4

（2）如图 2–4 ②，PQ 即为所求.（答案不唯一）

（3）如图 2–4 ③，△ DEF 即为所求.（答案不唯一）

方法点拨：画轴对称图形，关键是要确定对称轴，然后找出关键点，作出每个关键点关于对称轴的对称点，按原图形顺序连接相应的对称点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 线段的垂直平分线的性质与判定

链接中考» 由线段的垂直平分线可以得到两条线段相等，实际应用中多与三角形结合，实现边的转化，还能构成等腰三角形，利用等腰三角形的性质综合解决问题．在中考中，一般以填空题、选择题的形式出现，在本章中，常与等腰三角形的性质综合考查，以解答题的形式出现．

例 3 [中考·南京]如图 2-5，线段 AB、BC 的垂直平分线 l_1、l_2 相交于点 O，若 $\angle 1=39°$，则 $\angle AOC=$_____.

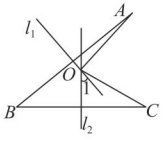


图 2-5

导引：本题主要考查线段的垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、三角形外角的性质．连接 BO 并延长，得到线段相等是解题的关键．

解：如图 2-6，连接 BO，并延长 BO 到点 P，记 l_1 与 AB 交于点 D，l_2 与 BC 交于点 E.

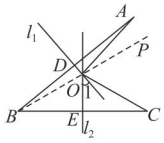


图 2-6

$\because$ 线段 AB、BC 的垂直平分线 l_1、l_2 相交于点 O，

$\therefore OA=OB=OC$，$\angle BDO=\angle BEO=90°$，

$\therefore \angle DOE+\angle ABC=360°-(\angle BDO+\angle BEO)=180°$.

$\because \angle DOE+\angle 1=180°$，

$\therefore \angle ABC=\angle 1=39°$.

$\because OA=OB=OC$，

$\therefore \angle A=\angle ABO$，$\angle OBC=\angle C$.

$\because \angle AOP=\angle A+\angle ABO$，

$\angle COP=\angle C+\angle OBC$，

$\angle ABC=\angle OBC+\angle ABO$，

$\therefore \angle AOC=\angle AOP+\angle COP=\angle A+\angle ABO+\angle C+\angle OBC=2(\angle OBC+\angle ABO)=2\angle ABC=2\times 39°=78°$.

答案：78°

方法点拨：本题考查的是线段的垂直平分线的性质、三角形外角的性质，掌握线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等是解题的关键．

专题三 角平分线的性质与判定

链接中考» 角平分线的性质及其判定在解题中应用广泛，解答时常需过角平分线上的点向角的两边作垂线段，构造全等三角形．考查形式多样，往往综合性较强．

例 4 如图 2-7，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，BD 平分 $\angle ABC$，$DE\perp BC$. 若 $BC=10$. 求△DCE 的周长．

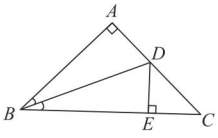


图 2-7

导引：先利用角平分线的性质，求得 $AD=DE$，然后结合等量代换即可求解．

解：因为 BD 平分 $\angle ABC$，$DE\perp BC$，$AD\perp AB$，所以 $AD=DE$.

在△ABD 和△EBD 中，

$$\begin{cases}\angle BAD=\angle BED,\\ \angle ABD=\angle EBD,\\ BD=BD,\end{cases}$$

所以△ABD ≌△EBD，

所以 $BA=BE$.

又因为 $AB=AC$，

所以 $BE=AC=AD+DC=DE+DC$.

所以△DCE 的周长为

$ED+DC+CE=BE+CE=BC=10$.

方法点拨：利用转化思想求三角形的周长．在本题中，由角平分线的性质得到的相等线段和相等角与已知条件一起证出三角形全等，再利用全等三角形的性质得到对应线段相等，最后由等量代换将△DCE 的周长转化为 BC 的长．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题四 等腰三角形的性质与判定

链接中考» 等腰三角形的性质与判定从根本上体现了“线段相等”与“角相等”之间的相互转化，等腰三角形“三线合一”的性质应用相当广泛，本考点是中考的热门考点，直接考查时多以填空题、选择题的形式出现，单元检测时大都以解答题的形式出现.

例 5 [中考·连云港] 如图 2-8，已知等腰三角形 ABC 中，$AB = AC$，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，且 $AD = AE$，连接 BE、CD，交于点 F.

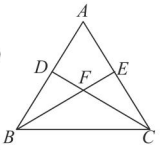


图 2-8

（1）判断 $\angle ABE$ 与 $\angle ACD$ 的数量关系，并说明理由；

（2）求证：过点 A、F 的直线垂直平分线段 BC.

导引：（1）利用等腰三角形的性质证得 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$.（2）利用垂直平分线的判定定理即可证得结论.

（1）**解**：$\angle ABE = \angle ACD$. 理由如下：

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

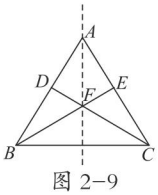


图 2-9

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAE=\angle CAD, \\ AE=AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$,

$\therefore \angle ABE = \angle ACD$.

（2）**证明**：如图 2-9，作直线 AF.

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$.

由（1）可知 $\angle ABE = \angle ACD$,

$\therefore \angle FBC = \angle FCB$,

$\therefore FB = FC$.

$\because AB = AC$,

$\therefore$ 点 A、F 均在线段 BC 的垂直平分线上，

即过点 A、F 的直线垂直平分线段 BC.

方法点拨：本题考查了等腰三角形的性质及垂直平分线的判定，解题的关键是能够从题目中整理出全等三角形.

专题五 等边三角形的性质与判定

专题解读» 以等边三角形为基本模型建立的几何解答题主要考查等边三角形的性质与判定. 等边三角形的性质为证明三角形全等提供了大量的条件，中考中是热门考点，单独考查时以填空题、选择题形式出现，综合考查时以解答题形式出现.

例 6 [模拟·盐城] 数学课上，李老师出示了如下的题目：“在等边三角形 ABC 中，点 E 在 AB 上，点 D 在 CB 的延长线上，且 $ED=EC$，试确定线段 AE 与 DB 的大小关系，并说明理由.”

小敏与同桌小聪讨论后，进行了如下解答：

（1）小敏说，如图 2-10 ①，当点 E 为 AB 的中点时，$AE=DB$；

（2）小聪说，如图 2-10 ②，过点 E 作 $EF \parallel BC$，交 AC 于点 F，也能得到结论 $AE=DB$.

他们说的正确吗？如果正确，请写出证明过程.

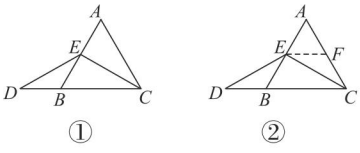


图 2-10

证明：（1）$\because$ 点 E 为等边 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的中点，$\therefore AE=BE$, $\angle BCE=\frac{1}{2}\angle BCA=30°$.

$\because ED=EC$，$\therefore \angle BDE=\angle BCE=30°$.

$\because \angle ABC=60°$,

$\therefore \angle BED=\angle ABC-\angle BDE=30°$,

$\therefore DB=EB$,

$\therefore AE=DB$.

（2）$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\angle BAC=60°$,

$AB=AC=BC$,

$\therefore \angle AEF=\angle ABC=60°$,

$\angle AFE=\angle ACB=60°$,

即 $\angle AEF=\angle AFE=\angle EAF=60°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形，

$\therefore AE=EF=AF$.

$\because \angle ABC=\angle ACB=\angle AFE=60°$，

$\therefore \angle DBE=\angle EFC=120°$，

$\angle D+\angle BED=\angle FCE+\angle ECD=60°$.

$\because DE=EC$，

$\therefore \angle D=\angle ECD$，

$\therefore \angle BED=\angle ECF$.

在$\triangle DEB$和$\triangle ECF$中，$\begin{cases}\angle DBE=\angle EFC,\\ \angle DEB=\angle ECF,\\ DE=EC,\end{cases}$

$\therefore \triangle DEB \cong \triangle ECF$，

$\therefore BD=FE=AE$，即$AE=DB$.

方法点拨：本题考查了三角形外角的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、等边三角形的判定与性质等知识，综合性较强.

专题六 直角三角形的性质

链接中考» 直角三角形斜边上中线的性质，有一个角是30°的直角三角形的性质是常考知识点，特别是在一些几何计算题中应用广泛，考查形式多样.

例7 [中考·葫芦岛节选]如图2–11，在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，点O是AC的中点，点P是AC上的一个动点(点P不与点A、O、C重合).过点A、C作直线BP的垂线，垂足分别为E、F，连接OE、OF.

(1)如图①，请直接写出线段OE与OF的数量关系；

(2)如图②，当$\angle ABC=90°$时，请判断线段OE与OF之间的数量关系和位置关系，并说明理由.

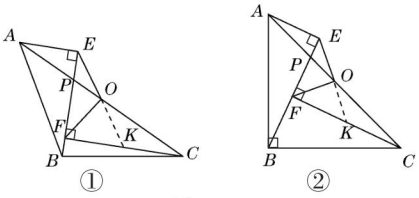


图2–11

导引：(1)延长EO交CF于点K.证明$\triangle AOE \cong \triangle COK$，推出$OE=OK$即可解决问题；

(2)延长EO交CF于点K.由$\triangle ABE \cong \triangle BCF$，推出$BE=CF$，$AE=BF$，由$\triangle AOE \cong \triangle COK$，推出$AE=CK$，$OE=OK$，进而推出$FK=EF$，可得$\triangle EFK$是等腰直角三角形，即可解决问题.

解：(1)如图①，延长EO交CF于点K.

$\because AE \perp BE$，$CF \perp BE$，$\therefore AE \parallel CF$，

$\therefore \angle EAO=\angle KCO$.

$\because$点O是AC的中点，$\therefore AO=CO$.

在$\triangle AOE$和$\triangle COK$中，

$\begin{cases}\angle EAO=\angle KCO,\\ AO=CO,\\ \angle EOA=\angle KOC,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COK$，$\therefore OE=OK$.

又$\because \triangle EFK$是直角三角形，

$\therefore OF=\frac{1}{2}EK=OE$.

答案：$OE=OF$.

(2)$OF=OE, OF \perp OE$.理由如下：

如图②，延长EO交CF于点K.

$\because \angle ABC=\angle AEB=\angle CFB=90°$，

$\therefore \angle ABE+\angle BAE=90°$，

$\angle ABE+\angle CBF=90°$，

$\therefore \angle BAE=\angle CBF$.

在$\triangle ABE$和$\triangle BCF$中，

$\begin{cases}\angle AEB=\angle BFC=90°,\\ \angle BAE=\angle CBF,\\ AB=BC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF$，

$\therefore BE=CF$，$AE=BF$.

由(1)易知$\triangle AOE \cong \triangle COK$，

$\therefore AE=CK$，$OE=OK$，$\therefore BF=CK$，

$\therefore BE-BF=CF-CK$，即$EF=FK$.

又$\because CF \perp BE$，

$\therefore \triangle EFK$是等腰直角三角形.

$\because OE=OK$，

$\therefore OF \perp OE$，$OF=OE$.

方法点拨：本题考查了等腰三角形的性质、全等三角形的判定和性质、直角三角形斜边上中线的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题七 方程思想

专题解读≫ 方程思想就是指在求解数学题时，从题中已知量和未知量之间的关系入手，找出相等关系，运用数学符号语言将相等关系转化成方程或方程组，再通过解方程或方程组，使问题得到解决．本章中等腰（等边）三角形的内角、边长都存在特殊关系，因此，在求等腰（等边）三角形的内角的度数或边的长度时，常需通过设未知数列方程或方程组的方法来解决．

例 8 （1）如图 2-12 ①，点 B、D 在射线 AM 上，点 C、E 在射线 AN 上，且 $AB=BC=CD=DE$，已知 $\angle EDM=88°$，求 $\angle A$ 的度数；

（2）①如图 2-12 ②，$\angle MAN=11°$，点 B 在 AM 上，且 $AB=1$，按下列要求画图：以点 B 为圆心，1 为半径向右画弧交 AN 于点 B_1，得第 1 条线段 BB_1；再以点 B_1 为圆心，1 为半径向右画弧交 AM 于点 B_2，得第 2 条线段 B_1B_2，…，这样画下去，直到得第 n 条线段，之后就不能再画出符合要求的线段了，则 n 为多少？

②已知 $\angle MAN$，按照①题的思路画图，现在一共可以画出 6 条线段，请你求出 $\angle MAN$ 的度数范围．

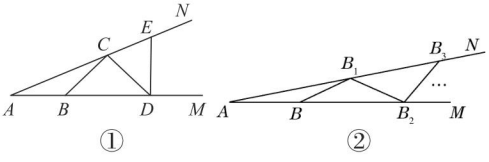


图 2-12

导引：（1）根据等边对等角可得 $\angle A=\angle BCA$，$\angle CBD=\angle BDC$，$\angle ECD=\angle CED$，再根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得 $\angle A+\angle BCA=\angle CBD$，$\angle A+\angle CDB=\angle ECD$，$\angle A+\angle CED=\angle EDM$，

然后设 $\angle A$ 为 $x°$，列方程即可求解；

（2）①由特殊到一般，找到各三角形底角度数的规律，根据规律及三角形的内角和定理列不等式可得结论；②设 $\angle MAN=n°$，由①中规律可列不等式组：$\begin{cases}6n<90,\\7n\geqslant 90,\end{cases}$ 求解即可．

解：（1）$\because AB=BC=CD=DE$，

$\therefore \angle A=\angle BCA$，$\angle CBD=\angle BDC$，$\angle ECD=\angle CED$.

根据三角形外角的性质，

可得 $\angle A+\angle BCA=\angle CBD$，

$\angle A+\angle CDB=\angle ECD$，

$\angle A+\angle CED=\angle EDM$.

设 $\angle A=x°$，则 $\angle CBD=\angle CDB=2x°$，$\angle DCE=\angle CED=3x°$，$\angle EDM=4x°$．

又 $\because \angle EDM=88°$，

$\therefore 4x=88$，$\therefore x=22$，即 $\angle A=22°$．

（2）①由题意可知，$\triangle ABB_1$，$\triangle BB_1B_2$，$\triangle B_1B_2B_3$，…都是等腰三角形，第一个等腰三角形 $\triangle ABB_1$ 的底角为 $11°$．

由三角形外角的性质可以得到，第二个等腰三角形 $\triangle BB_1B_2$ 的底角为 $22°$，第三个等腰三角形 $\triangle B_1B_2B_3$ 的底角为 $33°$，…，

于是可得，第 n 个等腰三角形的底角为 $(11n)°$．

当 $n=8$ 时，底角为 $88°$；当 $n=9$ 时，底角为 $99°$，而等腰三角形的底角小于 $90°$，

$\therefore n=8$ 以后就不能再画出符合要求的线段了，故 $n=8$.

②设 $\angle MAN=n°$，由①中的规律可得 $\begin{cases}6n<90,\\7n\geqslant 90,\end{cases}$ 解得 $\frac{90}{7}\leqslant n<15$.

$\therefore \angle MAN$ 的度数范围是 $\left(\frac{90}{7}\right)°\leqslant\angle MAN<15°$.

方法点拨：本题考查了等腰三角形两底角相等的性质和图形类规律问题，熟练掌握三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，是解题的关键．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题八 分类讨论思想

专题解读≫ 等腰三角形是特殊的三角形，它除了具有一般三角形的性质外，还具有自身特有的性质，主要体现在它的两腰相等，两底角相等．正是因为等腰三角形的特殊性，所以有关等腰三角形的题目很多情况下会有两个解．在等腰三角形的三个内角中，有顶角和底角两种；在三条边中，有腰和底边两种，因此，在求解有关等腰三角形的角、边问题时常需要分类讨论．还要注意：求出的解必须满足三角形的内角和定理及三角形的三边关系．

例 9 如图 2−13，已知在 Rt △ ABC 中，∠ ACB=90°，∠ BAC=30°．在直线 AC 上找一点 P，使△ ABP 是等腰三角形，则∠ APB 的度数为_____.

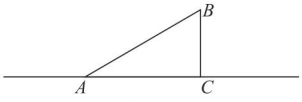


图 2−13

导引：分 AB=BP，AB=AP，AP=BP 三种情况，求出答案即可．

解：点 P 的位置如图 2−14 点 P_1、P_2、P_3、P_4 所示．

当 AB=BP_1 时，∠ AP_1B=∠ BAP_1=30°；

当 AB=AP_3 时，

$$\angle AP_3B=\angle ABP_3=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 30^\circ=15^\circ;$$

当 AB=AP_2 时，

$$\angle AP_2B=\angle ABP_2=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle BAC)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ;$$

当 AP_4=BP_4 时，∠ ABP_4=∠ BAP_4=30°，

∴∠ AP_4B=180°−30°×2=120°．

综上，∠ APB 的度数为 15°、30°、75° 或 120°．

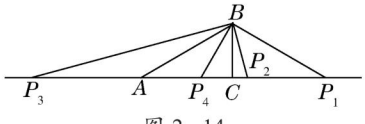


图 2−14

答案：15°、30°、75° 或 120°

方法点拨：此题主要考查了等腰三角形的判定，熟练掌握等边对等角是解题的关键，本题利用了分类讨论思想，注意不要漏解．

专题九 整体思想

专题解读≫ 整体思想就是从问题的整体性质出发，突出对问题的整体结构的分析和改造，发现问题的整体结构特征，善于用“集成”的眼光，把某些式子或图形看成一个整体，把握它们之间的关联，进行有目的、有意识的整体处理．

例 10 如图 2−15，在 △ ABC 中，MP 和 NQ 分别垂直平分 AB 和 AC，MP 分别交 AB、BC 于 M、P 两点，NQ 分别交 AC、BC 于 N、Q 两点，连接 AP、AQ.

（1）若△ APQ 的周长为 18，求 BC 的长；

（2）若∠ BAC=110°，求∠ PAQ 的度数．

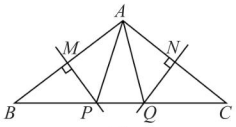


图 2−15

导引：（1）根据线段垂直平分线的性质得到 PA=PB，QA=QC，根据三角形周长公式求解即可；（2）根据三角形内角和定理得到∠ B+∠ C=70°，根据等腰三角形的性质求解即可．

解：（1）∵ MP 和 NQ 分别垂直平分 AB 和 AC，∴ PA=PB，QA=QC.

∵△ APQ 的周长为 18，

∴ AP+PQ+AQ=BP+PQ+QC=18，

即 BC=18.

（2）∵∠ BAC=110°，

∴∠ B+∠ C=70°．

∵ PA=PB，QA=QC，

∴∠ PAB=∠ B，∠ QAC=∠ C，

∴∠ PAB+∠ QAC=∠ B+∠ C=70°，

∴∠ PAQ=∠ BAC−（∠ PAB+∠ QAC）=40°．

方法点拨：本题考查的是线段垂直平分线的性质，掌握线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等是解题的关键．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

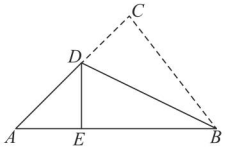
好题必解 ☞答案见249页

题型一 轴对称变换中的翻折问题

1.[期中·苏州]如图，在三角形纸片中，$AB=8$ cm，$BC=5$ cm，$AC=6$ cm，沿过点B的直线折叠这个三角形，使点C落在AB边上的点E处，折痕为BD，则$\triangle AED$的周长为（　　）

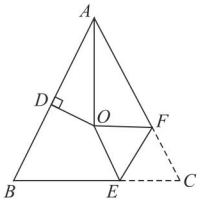
A. 7cm　　B. 8cm

C. 9cm　　D. 10cm



（第1题图）

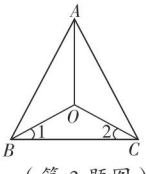
2.[月考·徐州]如图，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=54°$，$\angle BAC$的平分线与AB的垂直平分线交于点O，将$\angle C$沿EF（点E在BC上，点F在AC上）折叠，点C与点O恰好重合，则$\angle OEC$为_____°.



（第2题图）

题型二 等腰三角形与等边三角形的性质与判定

3. 如图，AO平分$\angle BAC$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.



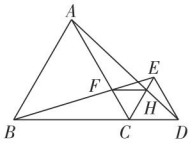
（第3题图）

4. 如图，已知点B、C、D在同一条直线上，$\triangle ABC$和$\triangle CDE$都是等边三角形.BE交AC于点F，AD交CE于点H.

（1）求证：$\triangle BCE\cong\triangle ACD$；

（2）求证：$CF=CH$；

（3）判断$\triangle CFH$的形状，并说明理由.



（第4题图）

题型三 等腰三角形中的思想和方法

5. 等腰三角形中有一个角为52°，它的一条腰上的高与底边的夹角为多少度?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 若等腰三角形一腰上的中线把周长分为 9 cm 和 12 cm 两部分，求这个等腰三角形的底边长和腰长．

题型四 与等腰三角形有关的动态探索问题

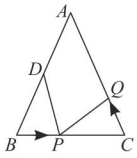
7. 如图，已知△ ABC 中，$AB=AC=10$ cm，$BC=8$ cm，点 D 为 AB 的中点．

（1）如果点 P 在线段 BC 上以 3 cm/s 的速度由点 B 向点 C 运动，同时，点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 运动．

①若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，则经过 1 s 后，△ BPD 与△ CQP 是否全等，请说明理由；

②若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度不相等，当点 Q 的运动速度为多少时，能够使△ BPD 与△ CQP 全等?

（2）若点 Q 以②中的运动速度从点 C 出发，点 P 以原来的运动速度从点 B 同时出发，都逆时针沿△ ABC 三边运动，求经过多长时间点 P 与点 Q 第一次在△ ABC 的哪条边上相遇．



（第 7 题图）

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 章测试卷

☞答案见 251 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 剪纸是我国最古老的民间艺术之一，被列入第四批《人类非物质文化遗产代表作名录》，下列剪纸作品中，是轴对称图形的为（　　）

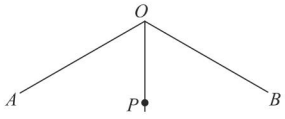


A　　B　　C　　D

2. 等腰三角形的顶角为 80°，则它的底角是（　　）

A.20°　　B.50°　　C.60°　　D.80°

3. 如图，$\angle AOB=120°$，OP 平分 $\angle AOB$，且 $OP=2$. 若点 M、N 分别在 OA、OB 上，且 $\triangle PMN$ 为等边三角形，则满足上述条件的 $\triangle PMN$ 有（　　）

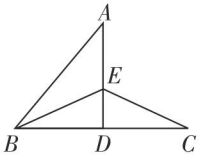


（第 3 题图）

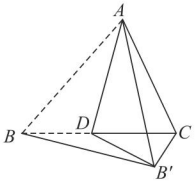
A.3 个　　B.4 个　　C.5 个　　D. 无数个

4. 如图，$\angle ABC=50°$，AD 垂直平分线段 BC 于点 D，$\angle ABC$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E，连接 EC，则 $\angle AEC$ 的度数是（　　）

A.115°　　B.75°　　C.105°　　D. 50°



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5.[一模·启东]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC>AB>AC$，D 是边 BC 上的一个动点（点 D 不与点 B、C 重合），将 $\triangle ABD$ 沿 AD 折叠，点 B 落在点 B' 处，连接 BB'，$B'C$，若 $\triangle BCB'$ 是等腰三角形，则符合条件的点 D 的个数是（　　）

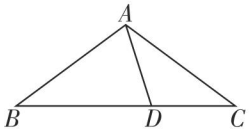
A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD 平分 $\angle ABC$，交 AC 于点 D，若 $\angle BDC=75°$，则 $\angle A$ 的度数为（　　）

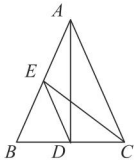
A.30°　　B.40°　　C.45°　　D.60°

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，且 D 为 BC 上一点，$CD=AD$，$AB=BD$，则 $\angle B$ 的度数为（　　）

A.30°　　B.36°　　C.40°　　D.45°



（第 7 题图）



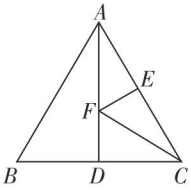
（第 8 题图）

8.[模拟·盐城]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，CE 是 $\triangle ABC$ 的中线，连接 DE，若 $AB=6$，则 DE 为（　　）

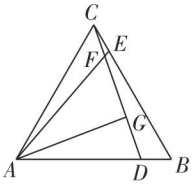
A.6　　B.3　　C.2　　D. $\frac{3}{2}$

9. 如图，等边三角形 ABC 的边长为 4，AD 是 BC 边上的中线，F 是 AD 边上的动点，E 是 AC 边上一点，若 $AE=2$，当 $EF+CF$ 取得最小值时，$\angle ECF$ 的度数为（　　）

A.15°　　B.22.5°　　C.30°　　D.45°



（第 9 题图）



（第 10 题图）

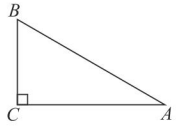
10. 如图，在等边三角形 ABC 中，D、E 分别为 AB、BC 边上的两个动点，且总有 $BD=CE$，AE 与 CD 交于点 F，$AG\perp CD$ 于点 G，则以下结论：（1）$\triangle ACE\cong\triangle CBD$；（2）$\angle AFG=60°$；（3）$AF=2FG$；（4）$AC=2CE$. 其中正确的结论有（　　）

A.4 个　　B.3 个　　C.2 个　　D.1 个

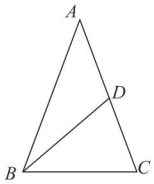
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 如图，在△ ABC 中，∠ C=90°，∠ A=30°，若 AB=6 cm，则 BC=_____.



（第 11 题图）

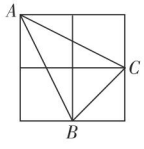


（第 12 题图）

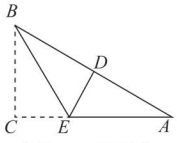
12.[模拟·淮安]如图，在△ ABC 中，AB=AC，∠ C=70°，点 D 在 AC 上，BD=BC，则∠ ABD 的度数是_____.

13. 若等腰三角形的一个内角为 50°，则它的顶角为_____.

14. 如图，由 4 个小正方形组成的田字格中，△ ABC 的顶点都是小正方形的顶点，在田字格上画与△ ABC 成轴对称的三角形，且顶点都是小正方形的顶点，则这样的三角形（不包含△ ABC 本身）共有_____个.



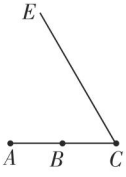
（第 14 题图）



（第 15 题图）

15. 如图，在三角形纸片 ABC 中，∠ C=90°，AC=6，折叠该纸片，使点 C 落在 AB 边上的点 D 处，折痕 BE 与 AC 交于点 E. 若 AD=BD，则折痕 BE 的长为_____.

16. 如图，点 B 是线段 AC 的中点，过点 C 的射线 CE 与 AC 成 60° 的角，点 P 为射线 CE 上一动点，给出以下四个结论：



（第 16 题图）

①当 AP ⊥ CE，垂足为 P 时，∠ APB=30°；

②当 CP=AC 时，∠ APB=30°；

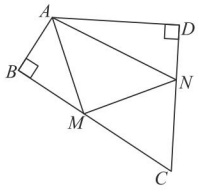
③在射线 CE 上，使△ APC 为直角三角形的点 P 只有 1 个；

④在射线 CE 上，使△ APC 为等腰三角形的点 P 只有 1 个.

其中正确结论的序号是_____.

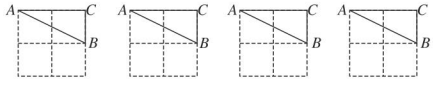
三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）如图，四边形 $ABCD$ 中，∠ BAD=120°，∠ B=∠ D=90°，在 BC，CD 上分别找一点 M，N，当△ AMN 周长最小时，∠ AMN+∠ ANM 的度数为多少?



（第 17 题图）

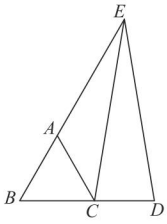
18.（8 分）如图均为“2×2”的正方形网格，每个小正方形的边长均为 1. 请分别在四个图中各画出一个与△ ABC 成轴对称、顶点在格点上，且位置不同的三角形.



（第 18 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.（12 分）如图，已知△ *ABC* 是等边三角形，延长 *BA* 到点 *E*，延长 *BC* 到点 *D*，使 *AE*=*BD*. 求证：*CE*=*DE*.

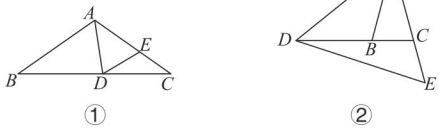


（第 19 题图）

20.（12 分）如图，△ *ABC* 中，∠ *ABC*= ∠ *ACB*，点 *D* 在 *BC* 所在的直线上，点 *E* 在射线 *AC* 上，且 *AD*=*AE*，连接 *DE*.

（1）如图①，若 ∠ *B*= ∠ *C*=35 °，∠ *BAD*=80°，求∠ *CDE* 的度数；

（2）如图②，若 ∠ *ABC*= ∠ *ACB*=75 °，∠ *CDE*=18°，求∠ *BAD* 的度数；



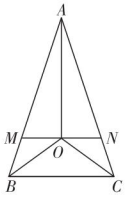
（第 20 题图）

21.（12 分）如图，在 △ *ABC* 中，*AB*=*AC*，∠ *ABC* 与 ∠ *ACB* 的平分线交于点 *O*，过点 *O* 作 *MN* // *BC*，分别交 *AB*、*AC* 于点 *M*、*N*，连接 *AO*.

（1）求证：△ *BOC* 是等腰三角形；

（2）*BM* 与 *CN* 相等吗？请说明理由；

（3）求证：*AO* ⊥ *MN*.



（第 21 题图）

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



荣德基 主编

荣德基

参考答案及点拨

（241页~279页）

另赠送 教材习题参考答案及点拨

（280页~316页）

八年级 数学上

（SK版）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

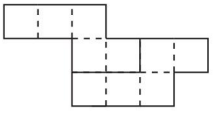
参考答案及点拨

第1章 全等三角形

1.1 全等图形

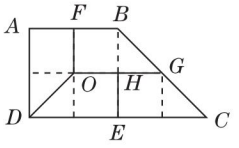
【两年模拟兵法】

1. C
2. C
3. C　**点拨**：正方体的三视图都是大小相同的正方形，所以它的三视图是全等图形；球的三视图都是大小相同的圆，所以球的三视图也是全等图形.
4. ①②④
5. (1)；(11)；(2)；(10)；(3)；(6)；(4)；(7)；(5)；(8)；(9)；(12)
   点拨：能完全重合的图形叫做全等图形.
6. 6　**点拨**：根据全等图形的概念可知
   $AF=4AD+4BC=4\times0.5+4\times1=6(\text{cm})$.
7. **解**：如图所示.



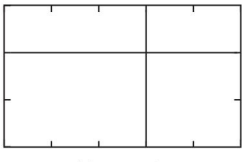
（第7题图）

8. **解**：$\triangle ADE$ 与 $\triangle CDE$，$\triangle EHK$ 与 $\triangle JCF$，$\triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$，四边形 $AGKE$ 与四边形 $CFKE$，四边形 $AGKE$ 与四边形 $HKFJ$，四边形 $HKFJ$ 与四边形 $CFKE$，四边形 $AGKD$ 与四边形 $CFKD$ 都是全等图形.
9. **解**：如图所示，过点 O 分别作 $OF\parallel AD$ 交 AB 于点 F，作 $OG\parallel CD$ 交 BE 于点 H，交 BC 于点 G，连接 OD、HE，则四边形 $ADOF$，四边形 $OGBF$，四边形 $EDOH$，四边形 $ECGH$ 是全等图形.



（第9题图）

10. **解**：如图所示.



（第10题图）

点拨：答案不唯一.

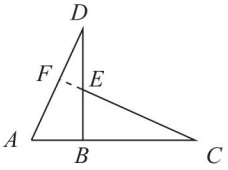
1.2 全等三角形

【两年模拟兵法】

1. D
2. C
3. A　**点拨**：$\because\triangle ABC\cong\triangle AEF$，$\therefore\angle CAB=\angle FAE$，
   $\angle FAE-\angle CAF=\angle CAB-\angle CAF$，
   $\therefore\angle EAC=\angle BAF$.
4. A
5. 4
6. 7
7. 61°
8. 55°　**点拨**：$\because\triangle ABC\cong\triangle ADE$，$\angle B=50°$，
   $\therefore\angle D=\angle B=50°$，$\angle EAD=\angle CAB$.
   $\because\angle AED=105°$，$\therefore\angle EAD=180°-\angle D-\angle AED=25°$，$\angle CAB=\angle EAD=25°$.
   $\because\angle CAD=5°$，$\therefore\angle EAB=\angle EAD+\angle DAC+\angle CAB=25°+5°+25°=55°$.
9. (1)**证明**：$\because\triangle ACF\cong\triangle DBE$，
   $\therefore AC=DB$，
   $\therefore AC-BC=DB-BC$，
   即 $AB=CD$.
   (2)**解**：$\because AD=11$，$BC=7$，$AB=CD$，
   $\therefore AB=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}\times(11-7)=2$.
10. **证明**：(1)$\because\triangle ABF\cong\triangle DCE$，
    $\therefore\angle A=\angle D$，$\angle ABF=\angle DCE$，
    $\therefore AF\parallel DE$，$\angle FBC=\angle BCE$，
    $\therefore BF\parallel CE$.
    (2)$\because\triangle ABF\cong\triangle DCE$，
    $\therefore AB=DC$，
    $\therefore AB+BC=DC+BC$，
    即 $AC=BD$.
11. **解**：(1)$\because\triangle ABD\cong\triangle EBC$，$\therefore BD=BC=5\text{cm}$，
    $EB=AB=2\text{cm}$，$\therefore DE=BD-EB=3(\text{cm})$；
    (2)DB 与 AC 垂直，
    理由：$\because\triangle ABD\cong\triangle EBC$，$\therefore\angle ABD=\angle EBC$.
    又$\because$ 点 A、B、C 在一条直线上，
    $\therefore\angle EBC+\angle ABD=180°$，$\therefore\angle EBC=\angle ABD=90°$.
    $\therefore DB$ 与 AC 垂直.
    (3)直线 AD 与直线 CE 垂直.
    理由：如图，延长 CE 交 AD 于点 F，
    $\because\triangle ABD\cong\triangle EBC$，$\therefore\angle D=\angle C$，
    $\because\angle ABD=90°$，
    $\therefore$ 在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\angle A+\angle D=90°$，
    $\therefore\angle A+\angle C=90°$，$\therefore\angle AFC=90°$，
    即 $CF\perp AD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 直线 AD 与直线 CE 垂直.

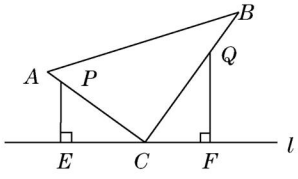


(第 11 题图)

12. **解:**设点 P 运动 t s 时,

以点 P、E、C 为顶点的三角形与以点 Q、F、C 为顶点的三角形全等.

有四种情况:①如图①,当点 P 在 AC 上,点 Q 在 BC 上时,



(第 12 题图①)

此时 $\triangle PEC \cong \triangle CFQ$,

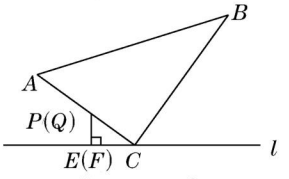
则 $CP = QC$.

$\because CP = 6 - t, QC = 8 - 3t$,

$\therefore 6 - t = 8 - 3t$,

$\therefore t = 1$,$\therefore$ 此时点 P 运动 1s;

②如图②,当点 P、Q 都在 AC 上时,



(第 12 题图②)

此时 P、Q 重合,

即 $\triangle PEC$ 与 $\triangle QFC$ 重合,

则 $CP = CQ$.

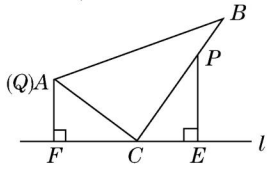
$\because CP = 6 - t, CQ = 3t - 8$,

$\therefore 6 - t = 3t - 8$,

$\therefore t = 3.5$,$\therefore$ 此时点 P 运动 3.5s;

③当点 Q 继续运动到 A 点处时,易知点 P 在 AC 上,所以点 Q 与点 P 重合后至运动到点 A 处,不存在以点 P、E、C 为顶点的三角形与以点 Q、F、C 为顶点的三角形全等.

④如图③,当点 Q 运动到 A 点(和 A 点重合),点 P 在 BC 上时,



(第 12 题图③)

此时 $\triangle PEC \cong \triangle CFQ$,

则 $PC = CQ$.

$\because CQ = PC, CQ = AC = 6, PC = t - 6$,

$\therefore t - 6 = 6$.

$\therefore t = 12$,$\therefore$ 此时点 P 运动 12s.

$\because t < (6 + 8) \div 1 = 14$,

$\therefore t = 12$ 符合题意.

$\therefore$ 点 P 运动 1s、3.5s 或 12s 时,以点 P、E、C 为顶点的三角形与以点 Q、F、C 为顶点的三角形全等.

1.3 探索三角形全等的条件

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**角边角可判定两个三角形全等,③包括了两个角和它们的夹边.

2. C **点拨:**$\because AB \parallel ED$,点 B、F、C、D 在一条直线上,$\therefore \angle B = \angle D$.

$\because CD = BF$,$\therefore BC = DF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDF$ 中,$BC = DF$,$\angle B = \angle D$,$AB = ED$,$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDF$(SAS).

3. D

4. C **点拨:**$\because AB' = CB'$,点 B' 恰好落在 BC 边上,

$\therefore \angle C = \angle CAB'$,

$\therefore \angle AB'B = \angle C + \angle CAB' = 2\angle C$.

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转得到 $\triangle AB'C'$,

$\therefore \angle C = \angle C'$,$AB = AB'$,$\therefore \angle B = \angle AB'B = 2\angle C$,

$\because \angle B + \angle C + \angle BAC = 180°$,

$\therefore 3\angle C = 180° - 108° = 72°$,

$\therefore \angle C = 24°$,$\therefore \angle C' = \angle C = 24°$.

5. $DC = BC$ 或 $\angle DAC = \angle BAC$

点拨:(1)若添加条件为 $DC = BC$,在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 中,$AD = AB$,$AC = AC$,$DC = BC$,$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC$(SSS);(2)若添加条件为 $\angle DAC = \angle BAC$,在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 中,$AD = AB$,$\angle DAC = \angle BAC$,$AC = AC$,$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC$(SAS).

6. 3 **7.** 0.8 **8.** 4 cm

9. **证明:**$\because \angle ABC + \angle 3 = 180°$,

$\angle ABD + \angle 4 = 180°$,

$\angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle ABC = \angle ABD$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ AB = AB, \\ \angle ABC = \angle ABD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$(ASA),

$\therefore BC = BD$.

10. **证明:**(1)$\because AB = AC$,$\therefore \angle DBC = \angle ECB$.

$\because$ 在 $\triangle DBC$ 与 $\triangle ECB$ 中,$\begin{cases} BD = CE, \\ \angle DBC = \angle ECB, \\ BC = CB, \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ △DBC≌△ECB(SAS);

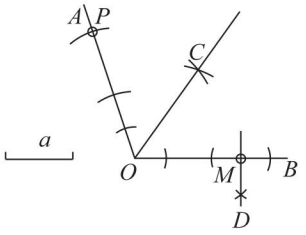
(2)由(1)知△DBC≌△ECB,

∴ ∠DCB = ∠EBC,∴ OB = OC.

11. 解:如图.(1)点 P 为所求;

(2)射线 OC 为所求;

(3)直线 MD 为所求.



(第 11 题图)

12. (1)**证明:**∵ BE、CF 是△ABC 的高,

∴ ∠AEB = 90°,∠AFC = 90°,

∴ ∠ABP + ∠BAE = 90°,∠QCA + ∠BAE = 90°,

∴ ∠ABP = ∠QCA.

在△ABP 与△QCA 中,

$$\begin{cases} BP = CA, \\ \angle ABP = \angle QCA, \\ AB = QC, \end{cases}$$

∴ △ABP≌△QCA(SAS);

(2)**解:**$AP \perp AQ$. 证明如下:

由△ABP≌△QCA 得∠BAP = ∠Q.

∵ ∠Q + ∠BAQ = 90°,

∴ ∠BAP + ∠BAQ = 90°,即∠PAQ = 90°,

∴ $AP \perp AQ$.

13. **证明:**(1)在四边形 $ABCD$ 中,

∵ ∠BAD = ∠BCD = 90°,

∴ 90° + ∠B + 90° + ∠ADC = 360°,

∴ ∠B + ∠ADC = 180°.

又∵ ∠EDC + ∠ADC = 180°,

∴ ∠B = ∠EDC;

(2)在△ABC 和△EDC 中,

$$\begin{cases} AB = ED, \\ \angle B = \angle EDC, \\ BC = DC, \end{cases}$$

∴ △ABC≌△EDC(SAS).

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **证明:**∵ OA = OB,OE = OF,

∴ OA − OE = OB − OF,即 AE = BF.

在△ACE 和△BDF 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B, \\ \angle ACE = \angle BDF, \\ AE = BF, \end{cases}$$

∴ △ACE≌△BDF(AAS).

2. **证明:**∵ 在△ABE 与△ACD 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A, \\ AB = AC, \\ \angle B = \angle C, \end{cases}$$

∴ △ABE≌△ACD(ASA),

∴ AE = AD.

∴ AB − AD = AC − AE,即 BD = CE.

3. **证明:**∵ FC // AB,

∴ ∠ADE = ∠CFE.

在△ADE 和△CFE 中,

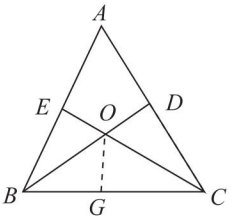
$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CFE, \\ DE = FE, \\ \angle AED = \angle CEF, \end{cases}$$

∴ △ADE≌△CFE(ASA).

∴ AE = CE.

4. **解:**BC = BE + CD. 证明如下:

在 BC 上取一点 G,使 CG = CD,连接 OG.



(第 4 题图)

∵ BD,CE 分别平分∠ABC 和∠ACB,

∴ ∠ABD = ∠CBD,∠ACE = ∠BCE.

∵ ∠A = 60°,

∴ ∠ABC + ∠ACB = 120°.

∴ ∠OBC + ∠OCB = 60°.

∴ ∠BOE = ∠COD = ∠OBC + ∠OCB = 60°.

在△CDO 和△CGO 中,

$$\begin{cases} CD = CG, \\ \angle OCD = \angle OCG, \\ OC = OC, \end{cases}$$

∴ △CDO≌△CGO(SAS),

∴ ∠COD = ∠COG = 60°,

∴ ∠BOG = 180° − ∠BOE − ∠COG = 60°.

∴ ∠EOB = ∠GOB.

在△BOE 和△BOG 中,

$$\begin{cases} \angle EOB = \angle GOB, \\ BO = BO, \\ \angle EBO = \angle GBO, \end{cases}$$

∴ △BOE≌△BOG(ASA).

∴ BE = BG.

∴ BC = BG + CG = BE + CD.

5. **证明:**延长 AE 至 F,使 EF = AE,连接 DF.

∵ AE 是△ABD 的中线,

∴ BE = DE.

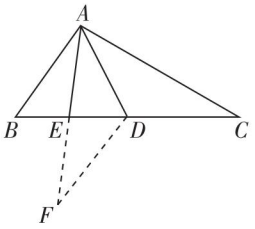
又∵ ∠AEB = ∠FED,AE = FE,

∴ △ABE≌△FDE(SAS).

∴ ∠B = ∠BDF,AB = FD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $BA=BD$,
∴ $\angle BAD=\angle BDA$,$BD=DF$.
∵ $\angle ADF=\angle BDA+\angle BDF$,
$\angle ADC=\angle BAD+\angle B$,
∴ $\angle ADF=\angle ADC$.
∵ AD 是$\triangle ABC$ 的中线,
∴ $BD=CD$.
∴ $FD=CD$.
又∵ $AD=AD$,
∴ $\triangle ADF\cong\triangle ADC$(SAS).
∴ $AC=AF=2AE$,
即 $AE=\frac{1}{2}AC$.



(第5题图)

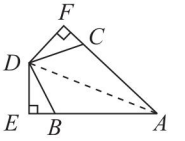
6. (1)**证明:**∵ $BD\perp AE$,$CE\perp AE$,
∴ $\angle BDA=\angle AEC=90°$,
∴ $\angle ABD+\angle BAE=90°$.
∵ $\angle CAE+\angle BAE=\angle BAC=90°$,
∴ $\angle ABD=\angle CAE$.
在$\triangle ABD$ 和$\triangle CAE$ 中,$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$
∴ $\triangle ABD\cong\triangle CAE$(AAS).
∴ $BD=AE$,$AD=CE$.
∵ $AE=AD+DE$,
∴ $BD=DE+CE$.
(2)$BD=DE-CE$.
证明:∵ $BD\perp AE$,$CE\perp AE$,
∴ $\angle BDA=\angle AEC=90°$.
∵ $\angle BAC=90°$,
∴ $\angle ABD+\angle DAB=\angle DAB+\angle CAE=90°$,
∴ $\angle ABD=\angle CAE$,
在$\triangle ABD$ 和$\triangle CAE$ 中,$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$
∴ $\triangle ABD\cong\triangle CAE$(AAS).
∴ $BD=AE$,$AD=CE$,
∴ $DE=AD+AE=CE+BD$,
∴ $BD=DE-CE$.

【第1章测试卷】

一、1. D **点拨:**∵ 图中的两个三角形全等,
∴ $\angle\alpha=180°-60°-72°=48°$.
2. A **3.** C
4. B **5.** C
6. A **点拨:**∵ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$,∴ $BC=EF$.
又∵ $BC=7$,∴ $EF=7$.
∵ $EC=5$,∴ $CF=EF-EC=7-5=2$.
7. B **8.** C
9. B **点拨:**在 Rt$\triangle DCE$ 和 Rt$\triangle BCF$ 中,
$DE=BF$,$\angle DEC=\angle BFC$,$CE=CF$,
∴ Rt$\triangle DCE\cong$Rt$\triangle BCF$(SAS),
∴ $\angle EDC=\angle FBC$,
∴ $\angle ABC+\angle EDC=\angle ABC+\angle FBC=180°$.
10. C **点拨:**∵ 在$\triangle ABE$ 与$\triangle ACF$ 中,
$\angle E=\angle F=90°$,$\angle B=\angle C$,$AE=AF$,
∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$(AAS),
∴ $BE=CF$,故②正确;
∵ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$,∴ $\angle BAE=\angle CAF$,
$\angle BAE-\angle BAC=\angle CAF-\angle BAC$,
∴ $\angle 2=\angle 1$,故①正确;
∵ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$,∴ $AB=AC$.
在$\triangle ACN$ 与$\triangle ABM$ 中,
$\angle NAC=\angle MAB$,$AC=AB$,$\angle C=\angle B$,
∴ $\triangle ACN\cong\triangle ABM$(ASA),故③正确;
$CD=DN$ 不能证明成立,故④错误;
∵ $\angle 1=\angle 2$,$AF=AE$,$\angle F=\angle E$,
∴ $\triangle AFN\cong\triangle AEM$(ASA),故⑤正确.

二、11. 70° **12.** 20° **13.** 65°
14. $AC=BD$(答案不唯一,合理即可)
15. 100 **点拨:**∵ $PA=PB$,∴ $\angle A=\angle B$.
在$\triangle ADF$ 和$\triangle BFE$ 中,$AD=BF$,$\angle A=\angle B$,
$AF=BE$,
∴ $\triangle ADF\cong\triangle BFE$(SAS),∴ $\angle ADF=\angle BFE$,
∵ $\angle DFB=\angle DFE+\angle BFE=\angle A+\angle ADF$,
∴ $\angle A=\angle DFE=40°$.
∴ $\angle P=180°-\angle A-\angle B=100°$.
16. ①②③④

三、17. **证明:**∵ $AB/\!/CD$,∴ $\angle B=\angle DCE$.
在$\triangle ABC$ 和$\triangle ECD$ 中,$\begin{cases}AB=EC,\\ \angle B=\angle DCE,\\ BC=CD,\end{cases}$
∴ $\triangle ABC\cong\triangle ECD$(SAS).
∴ $AC=ED$.
18. **证明:**(1)∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle ADE=\angle FCE$(两直线平行,内错角相等),
∵ E 为 CD 的中点,∴ $DE=CE$.
∵ 在$\triangle ADE$ 与$\triangle FCE$ 中,$\angle ADE=\angle FCE$,
$DE=CE$,$\angle AED=\angle FEC$,
∴ $\triangle ADE\cong\triangle FCE$(ASA),∴ $AD=FC$.
(2)∵ $\triangle ADE\cong\triangle FCE$,∴ $AE=FE$,$AD=FC$,
又∵ $BE\perp AE$,A、E、F 三点共线,
∴ BE 是线段 AF 的垂直平分线,
∴ $AB=FB=BC+FC=BC+AD$.
19. **证明:**连接 AD,如图.



(第19题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ACD和△ABD中，$\begin{cases}AC=AB,\\CD=BD,\\AD=AD,\end{cases}$

∴ △ACD≌△ABD(SSS).

∴ ∠FAD=∠EAD,

又∵ $DE\perp AE$,$DF\perp AF$,∴ ∠E=∠F=90°.

在△ADE和△ADF中，$\begin{cases}\angle FAD=\angle EAD,\\\angle F=\angle E,\\AD=AD,\end{cases}$

∴ △ADE≌△ADF(AAS),

∴ $DE=DF$.

20. **解**:(1) △ACD≌△CBE.

证明如下:∵ ∠ACB=90°,

∴ ∠ACD+∠BCE=90°.

又∵ $AD\perp$直线l,

∴ ∠ADC=90°,

∴ ∠CAD+∠ACD=90°.

∴ ∠BCE=∠CAD.

∵ $BE\perp$直线l,

∴ ∠ADC=∠CEB=90°.

在△ACD与△CBE中，$\begin{cases}\angle CAD=\angle BCE,\\\angle ADC=\angle CEB,\\AC=CB,\end{cases}$

∴ △ACD≌△CBE(AAS).

(2)由(1)可知△ACD≌△CBE,

∴ $AD=CE$,$CD=BE$.

∴ $AD=CE=CD+DE=BE+DE=3+5=8$.

21. **证明**:(1)∵ $BD\perp$直线m,$CE\perp$直线m,

∴ ∠BDA=∠AEC=90°.

∵ ∠BAC=90°,∴ ∠BAD+∠CAE=90°,

∵ ∠BAD+∠ABD=90°,∴ ∠CAE=∠ABD.

∵ 在△ADB和△CEA中，

∠ABD=∠CAE,∠BDA=∠AEC,$AB=CA$,

∴ △ADB≌△CEA(AAS),∴ $BD=AE$,$AD=CE$.

∴ $DE=AE+AD=BD+CE$;

(2)$DE=BD+CE$仍然成立,理由如下:

∵ ∠BDA=∠BAC=α,∴ ∠ABD+∠BAD=∠BAD+∠CAE=180°−α,

∴ ∠CAE=∠ABD,

在△ADB和△CEA中，

∠ABD=∠CAE,∠BDA=∠AEC,$AB=CA$,

∴ △ADB≌△CEA(AAS),∴ $BD=AE$,$AD=CE$,

∴ $DE=AE+AD=BD+CE$.

第2章 轴对称图形

2.1 轴对称与轴对称图形

【两年模拟兵法】

1. D **点拨**:本题主要考查轴对称图形,解题的关键是将图形沿某一条直线折叠,直线两旁的部分是否能够互相重合.

2. D **点拨**:A图形有3条对称轴,B图形有4条对称轴,C图形有2条对称轴,D图形有6条对称轴,故选D.

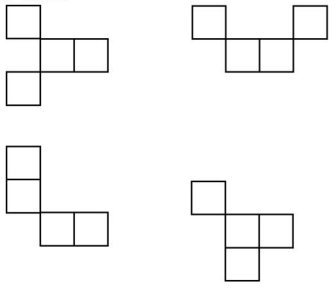
3. D **4.** C **5.** C

6. 4 **7.** 4 **8.** 11:55

9. **解**:①③⑤⑥⑨不是轴对称图形;②④⑦⑧⑩是轴对称图形.

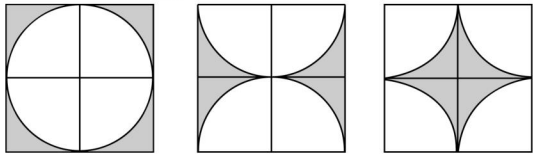
②④⑧分别有1条对称轴;⑦有4条对称轴;⑩有2条对称轴.

10. **解**:如图所示.



(第10题图)

11. **解**:如图所示.(答案不唯一)



(第11题图)

2.2 轴对称的性质

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B **3.** D

4. B **点拨**:∵ △EDA≌△$ED'A$,

∴ ∠D'=∠D=90°.

∵ ∠CED'=55°,∴ ∠DED'=125°,

∴ ∠DAD'=360°−∠D−∠D'−∠DED'=55°,

∴ ∠BAD'=∠DAB−∠DAD'=35°.

5. 8

6. 37 **点拨**:由折叠的性质可知,$CB=CD$,∠ACB=∠ACD.

∵ ∠CBD=16°,$CB=CD$,

∴ ∠CDB=∠CBD=16°,

∴ ∠DCB=180°−2×16°=148°,

∴ $\angle ACB=\angle ACD=\frac{1}{2}\times(360°-148°)=106°$.

∵ $AC=BC$,∴ $\angle BAC=\frac{1}{2}\times(180°-106°)=37°$.

7. 6

8. **解**:(1)∵ △ABC与△ADE关于直线MN对称,

$ED=4$ cm,$FC=1$ cm,

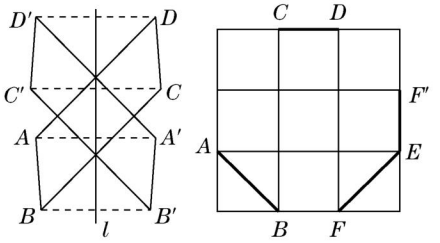
∴ $BC=DE=4$ cm,

∴ $BF=BC-FC=3$ (cm).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

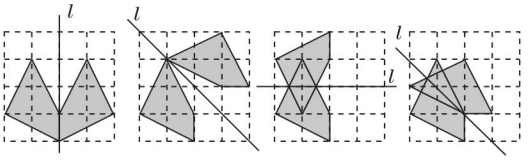
(2)∵ △ABC 与 △ADE 关于直线 MN 对称,
∠BAC = 76°, ∠EAC = 58°,
∴ ∠EAD = ∠CAB = 76°,
∴ ∠CAD = ∠EAD − ∠EAC = 76° − 58° = 18°.
(3)∵ 点 E、C 关于直线 MN 对称,
∴ 直线 MN 垂直平分线段 EC.

9. 解:(1)如图①,四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求.
(2)如图②,线段 EF 或 EF' 即为所求(两种情况).



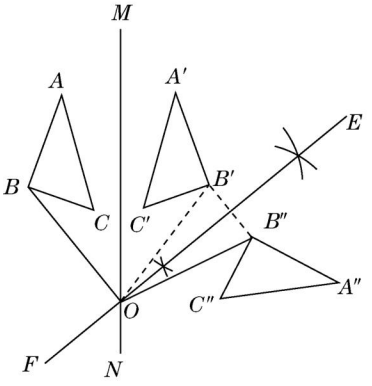
(第 9 题图)

10. 解:如图所示.



(第 10 题图)

11. 解:(1)如图.



(第 11 题图)

(2)∠BOB'' 是直线 MN、EF 所夹锐角 α 的 2 倍.
理由如下:如图,连接 OB'.
∵ △ABC 和 △$A'B'C'$ 关于直线 MN 对称,
∴ BO 与 $B'O$ 关于直线 MN 对称,
∴ ∠BOM = ∠$B'OM$.
同理可得 ∠$B'OE$ = ∠$B''OE$.
∴ ∠BOB'' = 2∠$B'OM$ + 2∠$B'OE$ = 2∠MOE = 2α.
(3)能. 把 △ABC 绕点 O 顺时针旋转 2α 的度数即可得到 △$A''B''C''$.

2.3 设计轴对称图案

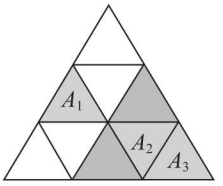
【两年模拟兵法】

1. B

2. B

3. D

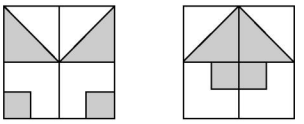
4. 3 **点拨:**如图所示,将图中其余小等边三角形涂黑一个,使整个被涂黑的图案构成一个轴对称图形的方法有 A_1、A_2、A_3,共 3 种.



(第 4 题图)

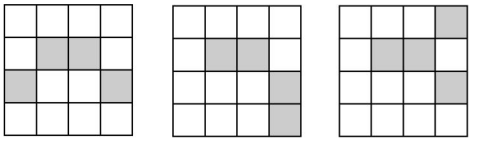
5. 4

6. 解:如图所示.(答案不唯一)



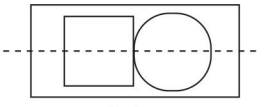
(第 6 题图)

7. 解:如图所示.(答案不唯一)

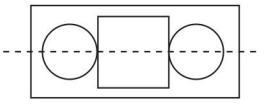


(第 7 题图)

8. 解:如图所示.(答案不唯一)



(方案1)

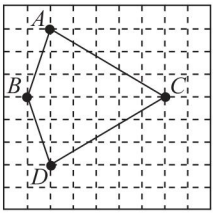


(方案2)

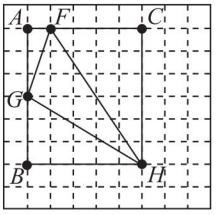
(第 8 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)如图①所示.(答案不唯一)



①



②

(第9题图)

(2)9　**点拨:**如图②中 $\triangle FGH$ 的面积 = 长方形 $ABHC$ 的面积 − $\triangle AFG$ 的面积 − $\triangle BGH$ 的面积 − $\triangle FCH$ 的面积 $= 5\times6-\frac{1}{2}\times1\times3-\frac{1}{2}\times3\times5-\frac{1}{2}\times4\times6=9$.

2.4　线段、角的轴对称性

【两年模拟兵法】

1. D　**2.** D　**3.** B　**4.** B

5. 2　**6.** 20　**7.** 15

8. 证明:∵ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,

∴ $\angle ABD=\angle CBD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中,$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABD=\angle CBD,\\ BD=BD,\end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle CBD$,

∴ $\angle ADB=\angle CDB$.

∵ $PM\perp AD$, $PN\perp CD$,

∴ $PM=PN$.

9. 证明:∵ AD 是 BC 边上的高,

∴ $AD\perp BC$.

又∵ $BD=DE$,

∴ AD 所在的直线是线段 BE 的垂直平分线,

∴ $AB=AE$,

∴ $AB+BD=AE+DE$.

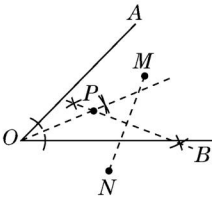
∵ $AB+BD=DC$,

∴ $AE+DE=DC$,即 $AE+DE=DE+EC$,

∴ $AE=EC$,

∴ 点 E 在线段 AC 的垂直平分线上.

10. 解:如图,点 P 即为所要求作的点.



(第10题图)

11. 解:OP 垂直平分 CD.

证明:∵ P 是 $\angle AOB$ 平分线上一点, $PC\perp OA$, $PD\perp OB$,

∴ $PC=PD$,

∴ 点 P 在线段 CD 的垂直平分线上.

在 Rt$\triangle POC$ 和 Rt$\triangle POD$ 中,

$\angle OCP=\angle ODP=90°$,

$\begin{cases}PC=PD,\\ OP=OP,\end{cases}$

∴ Rt$\triangle POC\cong$Rt$\triangle POD$,

∴ $OC=OD$,

∴ 点 O 也在线段 CD 的垂直平分线上.

∴ OP 垂直平分 CD.

12. 解:如图,过点 D 分别作 AE、AF 的垂线,交 AE 于点 M,交 AF 于点 N,

则 $\angle CMD=\angle BND=90°$.

∵ AD 是 $\angle EAF$ 的平分线,

∴ $DM=DN$.

∵ $\angle ACD+\angle ABD=180°$,

$\angle ACD+\angle MCD=180°$,

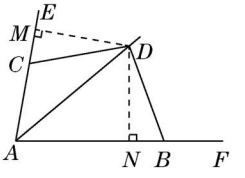
∴ $\angle MCD=\angle NBD$.

在 $\triangle CDM$ 和 $\triangle BDN$ 中,

$\begin{cases}\angle MCD=\angle NBD,\\ \angle CMD=\angle BND=90°,\\ DM=DN,\end{cases}$

∴ $\triangle CDM\cong\triangle BDN$,

∴ $CD=BD$.



(第12题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解:(1)∵ l_1 是 AB 边的垂直平分线,

∴ $DA=DB$.

∵ l_2 是 AC 边的垂直平分线,∴ $EA=EC$.

∴ $BC=BD+DE+EC=DA+DE+EA=15\text{cm}$.

(2)连接 OA.

∵ l_1 是 AB 边的垂直平分线,∴ $OA=OB$.

∵ l_2 是 AC 边的垂直平分线,∴ $OA=OC$.

∴ $OA=OB=OC$.

∵ $OB+OC+BC=31\text{cm}$, $BC=15\text{cm}$,

∴ $OA=OB=OC=8\text{cm}$.

(3)∵ $\angle BAC=n°$,

∴ $\angle ABC+\angle ACB=180°-n°$.

∵ $DA=DB$, $EA=EC$,

∴ $\angle BAD=\angle ABC$, $\angle EAC=\angle ACB$,

∴ $\angle DAE=\angle BAC-\angle BAD-\angle EAC$

$=\angle BAC-(\angle ABC+\angle ACB)$

$=n°-(180°-n°)$

$=2n°-180°$.

2.5 等腰三角形的轴对称性

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**分情况讨论:(1)当等腰三角形的顶角为80°时,另外两个内角的度数为 $\frac{1}{2}\times(180°-80°)=50°$;(2)当等腰三角形的底角为80°时,它的另外一个底角为80°,顶角为 $180°-80°-80°=20°$.

2. B **点拨:**∵ $\angle ACB=90°$, $\angle A=70°$,

∴ $\angle B=20°$.

∵ $CD\perp AB$, E 是 BC 的中点,∴ $ED=EC=EB$,

∴ $\angle EDB=\angle B=20°$,

∴ $\angle CED=\angle EDB+\angle B=40°$.

3. B **点拨:**∵ $AB=AC$, $\angle C=65°$,

∴ $\angle B=\angle C=65°$.

∵ $DF/\!/AB$,∴ $\angle CDE=\angle B=65°$,

∴ $\angle FEC=\angle CDE+\angle C=65°+65°=130°$.

4. A

5. B

6. 30°

7. 8

8. 6

9. 35 **点拨:**∵ 在 Rt△ABC 中, $\angle ABC=90°$, D 为 AC 的中点,

∴ BD 是斜边上的中线,∴ $AD=BD=CD$,

∴ $\angle DBC=\angle C=55°$,

∴ $\angle ABD=90°-55°=35°$.

10. **证明:**∵ △ABC 是等边三角形,∴ $AC=BC=AB$.

∵ $BD\perp AC$ 于点 D,

∴ $CD=\frac{1}{2}AC$, $\angle BDC=90°$.

∵ E 为 BC 的中点,

∴ $DE=\frac{1}{2}BC$.

∴ $DE=DC$.

11. (1)**证明:**∵ $AB=AC$, $AD\perp BC$,

∴ $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$.

∵ AM 平分 $\angle EAC$,

∴ $\angle EAM=\angle MAC=\frac{1}{2}\angle EAC$.

∴ $\angle MAD=\angle MAC+\angle DAC=\frac{1}{2}\angle EAC+\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times180°=90°$.

∵ $AD\perp BC$,

∴ $\angle ADC=90°$.

∴ $\angle MAD+\angle ADC=180°$.

∴ $AM/\!/BC$.

(2)**解:**△ADN 是等腰直角三角形.

理由如下:∵ $AM/\!/BC$,

∴ $\angle AND=\angle NDC$.

∵ DN 平分 $\angle ADC$,

∴ $\angle ADN=\angle NDC=\angle AND$,

∴ $AD=AN$.

又∵ $\angle NAD=90°$,

∴ △ADN 是等腰直角三角形.

12. **证明:**如图,延长 AE、BC 交于点 H.

∵ $AE\perp BE$,∴ $\angle BEH=90°$.

∵ $\angle ACB=90°$,∴ $\angle ACH=180°-\angle ACB=90°$,

∴ $\angle BEH=\angle ACH=90°$,

∴ $\angle DBC+\angle AHC=\angle HAC+\angle AHC=90°$.

∴ $\angle DBC=\angle HAC$.

在△ACH 和△BCD 中,

$$\begin{cases}\angle ACH=\angle BCD=90°,\\ AC=BC,\\ \angle HAC=\angle DBC,\end{cases}$$

∴ △$ACH\cong$△BCD,

∴ $AH=BD$.

又∵ $AE=\frac{1}{2}BD$,

∴ $AE=\frac{1}{2}AH$,即点 E 是 AH 的中点,

∴ BE 是线段 AH 的垂直平分线.

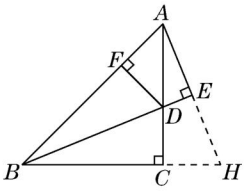
∴ $AB=BH$,

∴ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $\angle ACB=90°$，$DF\perp AB$ 于点 F，

∴ $CD=DF$.



（第 12 题图）

13. (1)**证明：**∵ 将△BOC 绕点 C 按顺时针方向旋转 60°得到△ADC，

∴ $CO=CD$，$\angle OCD=60°$，

∴ △COD 是等边三角形.

(2)**解：**当 $\alpha=150°$，即 $\angle BOC=150°$时，△AOD 是直角三角形. 理由如下：

∵ △BOC≌△ADC，

∴ $\angle ADC=\angle BOC=150°$.

∵ △COD 是等边三角形，∴ $\angle ODC=60°$，

∴ $\angle ADO=\angle ADC-\angle ODC=150°-60°=90°$.

∴ △AOD 是直角三角形.

(3)**解：**①要使 $AO=AD$，

需 $\angle AOD=\angle ADO$.

∵ $\angle AOD=360°-\angle AOB-\angle BOC-\angle COD=190°-\alpha$，$\angle ADO=\angle ADC-\angle ODC=\alpha-60°$，

∴ $190°-\alpha=\alpha-60°$，∴ $\alpha=125°$.

②要使 $OA=OD$，需 $\angle OAD=\angle ADO$.

∵ $\angle AOD=190°-\alpha$，

∴ $\angle ADO=\frac{1}{2}(180°-\angle AOD)=\frac{1}{2}[180°-(190°-\alpha)]=\frac{\alpha}{2}-5°$.

又∵ $\angle ADO=\alpha-60°$，

∴ $\frac{\alpha}{2}-5°=\alpha-60°$，∴ $\alpha=110°$.

③要使 $OD=AD$，需 $\angle OAD=\angle AOD$.

∵ $\angle AOD=190°-\alpha$，

∴ $\angle ADO=180°-(\angle AOD+\angle OAD)=180°-2(190°-\alpha)=2\alpha-200°$.

又∵ $\angle ADO=\alpha-60°$，

∴ $2\alpha-200°=\alpha-60°$，

∴ $\alpha=140°$.

综上所述，当 α 的度数为 125°或 110°或 140°时，△AOD 是等腰三角形.

14. **解：**(1)直角三角形

(2)△ECD 可以是等腰三角形.

①当 $EC=DE$ 时，

$\angle ECD=\angle CDE=30°$.

∵ $\angle AED=\angle ECD+\angle CDE$，

∴ $\angle AED=60°$.

②当 $CD=DE$ 时，$\angle DCE=\angle DEC$.

∵ $\angle ECD+\angle CED+\angle CDE=180°$，

∴ $\angle CED=\frac{180°-\angle CDE}{2}=\frac{180°-30°}{2}=75°$，

∴ $\angle AED=180°-\angle CED=105°$.

③当 $EC=CD$ 时，$\angle CED=\angle EDC=30°$.

∴ $\angle ACD=180°-\angle CED-\angle CDE=180°-30°-30°=120°$.

∵ $\angle ACB=120°$，

∴ 点 D 与点 B 重合，不合题意.

综上所述，△ECD 可以是等腰三角形，此时 $\angle AED$ 的度数为 60°或 105°.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. C　**点拨：**由题意可得，

$BC=BE$，$CD=DE$.

∵ $AB=8\text{cm}$，$BC=5\text{cm}$，$AC=6\text{cm}$，

∴ $AD+DE=AD+CD=AC=6\text{cm}$，

$AE=AB-BE=AB-BC=8-5=3(\text{cm})$，

∴ $AD+DE+AE=6+3=9(\text{cm})$，

即△AED 的周长为 9cm.

2. 108　**点拨：**如图，连接 OB、OC.

∵ $\angle BAC=54°$，AO 为 $\angle BAC$ 的平分线，

∴ $\angle CAO=\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 54°=27°$.

又∵ $AB=AC$，∴ $\angle ABC=\frac{1}{2}\times(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}\times(180°-54°)=63°$.

∵ DO 垂直平分线段 AB，

∴ $OA=OB$，

∴ $\angle ABO=\angle BAO=27°$，

∴ $\angle OBC=\angle ABC-\angle ABO=63°-27°=36°$.

在△AOB 和△AOC 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAO=\angle CAO, \\ AO=AO, \end{cases}$$

∴ △AOB≌△AOC，

∴ $OB=OC$，

∴ $\angle OCB=\angle OBC=36°$.

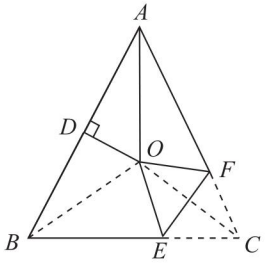
∵ 将 $\angle C$ 沿 EF（点 E 在 BC 上，点 F 在 AC 上）折叠，点 C 与点 O 恰好重合，

∴ $OE=CE$，

∴ $\angle COE=\angle OCB=36°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△OCE中,$\angle OEC = 180° - \angle COE - \angle OCE = 180° - 36° - 36° = 108°$.



(第2题图)

3. 证明:过点O作$OD \perp AB$于点D,$OE \perp AC$于点E,则△BOD和△COE都是直角三角形.

$\because AO$平分$\angle BAC$,$OD \perp AB$,$OE \perp AC$,

$\therefore OD = OE$.

$\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore OB = OC$.

在Rt△BOD和Rt△COE中,

$\begin{cases} OD = OE, \\ OB = OC, \end{cases}$

$\therefore$ Rt△BOD≌Rt△COE,

$\therefore \angle ABO = \angle ACO$,

$\therefore \angle ABO + \angle 1 = \angle ACO + \angle 2$,

即$\angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore AB = AC$,

$\therefore$ △ABC是等腰三角形.

4. (1)**证明:**$\because$ △ABC和△CDE都是等边三角形,

$\therefore BC = AC$,$CE = CD$,$\angle ACB = \angle ECD = 60°$,

$\therefore \angle ACB + \angle ACE = \angle ECD + \angle ACE$,

即$\angle BCE = \angle ACD$.

在△BCE和△ACD中,

$\begin{cases} BC = AC, \\ \angle BCE = \angle ACD, \\ CE = CD, \end{cases}$

$\therefore$ △BCE≌△ACD.

(2)**证明:**$\because$ △BCE≌△ACD,

$\therefore \angle FBC = \angle HAC$.

$\because \angle ACH = 180° - \angle ACB - \angle ECD = 60°$,

$\therefore \angle FCB = \angle ACH$.

在△BCF和△ACH中,$\begin{cases} \angle FBC = \angle HAC, \\ BC = AC, \\ \angle FCB = \angle HCA, \end{cases}$

$\therefore$ △BCF≌△ACH,$\therefore CF = CH$.

(3)**解:**△CFH是等边三角形.

理由:$\because CF = CH$,$\angle FCH = 60°$,

$\therefore$ △CFH是等边三角形.

5. 解:①若已知的这个角为顶角,则底角的度数为$(180° - 52°) \div 2 = 64°$,则一条腰上的高与底边的夹角为$180° - 64° - 90° = 26°$;②若已知的这个角为底角,则一条腰上的高与底边的夹角为$180° - 52° - 90° = 38°$. 故它的一条腰上的高与底边的夹角为26°或38°.

6. 解:由于条件中的中线把周长分为两部分,并没有指明哪一部分是9 cm,哪一部分是12 cm,因此,应有两种情形.

若设这个等腰三角形的腰长为x cm,底边长为y cm,于是根据题意,

得$\begin{cases} x + \frac{1}{2}x = 9, \\ \frac{1}{2}x + y = 12 \end{cases}$或$\begin{cases} x + \frac{1}{2}x = 12, \\ \frac{1}{2}x + y = 9. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x = 6, \\ y = 9 \end{cases}$或$\begin{cases} x = 8, \\ y = 5. \end{cases}$

即当这个等腰三角形的腰长是6 cm时,底边长是9 cm,

当这个等腰三角形的腰长是8 cm时,底边长是5 cm.

7. 解:(1)①经过1s后,△BPD与△CQP全等.

理由如下:

由题易知$BP = CQ = 3 \times 1 = 3$ (cm).

$\because AB = 10$ cm,点D为AB的中点,

$\therefore BD = 5$ cm.

又$\because PC = BC - BP$,$BC = 8$ cm,$BP = 3$cm,

$\therefore PC = 8 - 3 = 5$(cm).

$\therefore PC = BD$.

又$\because AB = AC$,$\therefore \angle B = \angle C$.

在△BPD和△CQP中,

$\begin{cases} BD = CP, \\ \angle DBP = \angle PCQ, \\ BP = CQ, \end{cases}$

$\therefore$ △BPD≌△CQP.

②$\because$ 点P、Q的运动速度不相等,$\therefore BP \neq CQ$.

又$\because$ △BPD与△CQP全等,$\angle B = \angle C$,

则$BP = PC = \frac{1}{2}BC = 4$ cm,$CQ = BD = 5$ cm,

$\therefore$ 点P、Q运动的时间为$\frac{BP}{3} = \frac{4}{3}$s,

$\therefore$ 点Q的运动速度为$\frac{CQ}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{4}$(cm/s).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ 当点 Q 的运动速度为 $\frac{15}{4}$ cm/s 时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等.

(2)设经过 x s 后点 P 与点 Q 第一次相遇.

由题意，得 $\frac{15}{4}x = 3x + 2\times10$，解得 $x = \frac{80}{3}$.

∴ 点 P 共运动了 $\frac{80}{3}\times3 = 80$(cm).

∵ $\triangle ABC$ 的周长为 $10+10+8 = 28$(cm)，

$28\times3 = 84$(cm)，$84-80 = 4$(cm)，$4\text{cm} < 10\text{cm}$，

∴ 点 P、点 Q 在 AB 边上相遇，

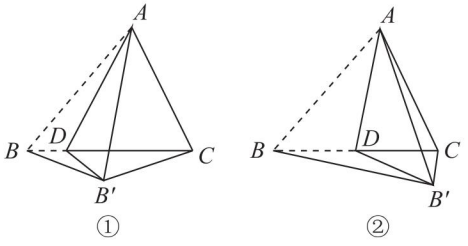
∴ 经过 $\frac{80}{3}$ s 点 P 与点 Q 第一次在 $\triangle ABC$ 的 AB 边上相遇.

【第 2 章测试卷】

一、1. B　**2.** B

3. D　**4.** A

5. C　**点拨：**如图①，当 $BB' = B'C$ 时，$\triangle BCB'$ 是等腰三角形.



(第 5 题图)

如图②，当 $BC = BB'$ 时，$\triangle BCB'$ 是等腰三角形，故若 $\triangle BCB'$ 是等腰三角形，则符合条件的点 D 的个数是 2 个.

6. B

7. B

8. B　**点拨：**∵ $AB = AC$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

∴ $AD \perp BC$.

又∵ CE 是 $\triangle ABC$ 的中线，

∴ DE 是 $\triangle ABD$ 的中线，

∴ $DE = \frac{1}{2}AB = 3$.

9. C　**10.** B

二、11. 3cm

12. 30°　**点拨：**∵ $AB = AC$，$\angle C = 70°$，

∴ $\angle ABC = \angle C = 70°$.

∵ $BD = BC$，∴ $\angle BDC = \angle C$，

∴ $\angle CBD = 180° - \angle C - \angle BDC = 180° - 70°\times2 = 40°$，

∴ $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 70° - 40° = 30°$.

13. 50°或 80°　**14.** 3　**15.** 4

16. ①②④

三、17. 解：如图所示，分别作点 A 关于直线 BC 和 CD 的对称点 A'，A''，连接 $A'A''$，交 BC 于点 M，交 CD 于点 N，此时 $\triangle AMN$ 的周长最小.

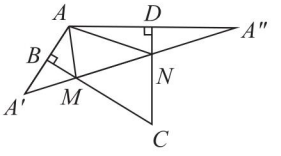
∵ $\angle BAD = 120°$，∴ $\angle A' + \angle A'' = 60°$.

易证 $\angle A' = \angle MAA'$，$\angle NAD = \angle A''$，

又 $\angle A' + \angle MAA' = \angle AMN$，

$\angle NAD + \angle A'' = \angle ANM$，

∴ $\angle AMN + \angle ANM = \angle A' + \angle MAA' + \angle NAD + \angle A'' = 2(\angle A' + \angle A'') = 2\times60° = 120°$.



(第 17 题图)

18. 略.

19. 解：如图，延长 BD 到点 F，使 $DF = BC$，连接 EF.

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B = 60$.

∵ $AE = BD$，

∴ $AE + AB = BD + DF$，

即 $BE = BF$.

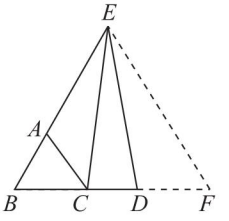
∴ $\triangle BEF$ 是等边三角形，

∴ $BE = EF$，$\angle B = \angle F = 60°$.

在 $\triangle ECB$ 和 $\triangle EDF$ 中，$\begin{cases} BE = FE, \\ \angle B = \angle F, \\ BC = FD, \end{cases}$

∴ $\triangle ECB \cong \triangle EDF$(SAS).

∴ $CE = DE$.



(第 19 题图)

20. 解：(1)∵ $\angle B = \angle C = 35°$，∴ $\angle BAC = 110°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \angle BAD=80°$,$\therefore \angle DAE=30°$.

$\because AD=AE$,

$\therefore \angle ADE=\angle AED=\frac{1}{2}(180°-\angle DAE)=75°$.

$\therefore \angle CDE=\angle AED-\angle C=75°-30°=45°$.

(2)$\because \angle ACB=75°$,$\angle CDE=18°$,

$\therefore \angle AED=\angle ACB-\angle CDE=75°-18°=57°$.

$\because AD=AE$,

$\therefore \angle ADE=\angle AED=57°$.

$\therefore \angle ADC=\angle ADE-\angle CDE=39°$.

$\because \angle ABC=\angle ADB+\angle DAB=75°$,

$\therefore \angle BAD=\angle ABC-\angle ADC=36°$.

21. (1)**证明**:$\because AB=AC$,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

又$\because \angle ABC$与$\angle ACB$的平分线交于点O,

$\therefore \angle ABC=2\angle OBC$,$\angle ACB=2\angle OCB$,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB$,

$\therefore OB=OC$,

$\therefore \triangle BOC$是等腰三角形.

(2)**解**:$BM=CN$. 理由如下:

$\because MN/\!/BC$,

$\therefore \angle AMN=\angle ABC$,$\angle ANM=\angle ACB$.

又$\because \angle ABC=\angle ACB$,

$\therefore \angle AMN=\angle ANM$.

$\therefore AM=AN$.

$\because AB=AC$,

$\therefore AB-AM=AC-AN$,即$BM=CN$.

(3)**证明**:在$\triangle ABO$和$\triangle ACO$中,

$$\begin{cases} AB=AC, \\ BO=CO, \\ AO=AO, \end{cases} \therefore \triangle ABO\cong\triangle ACO,$$

$\therefore \angle BAO=\angle CAO$.

又$\because AM=AN$,

$\therefore AO\perp MN$.

第3章 勾股定理

3.1 勾股定理

【两年模拟兵法】

1. B

2. B

3. C

4. D

5. $\frac{5}{3}$ **点拨**:在$\mathrm{Rt}\triangle ACB$中,$\angle C=90°$,$BC=4$,

$AB=5$,

$\therefore AC^2=AB^2-BC^2=5^2-4^2=9$,$\therefore AC=3$.

如图,过点D作$DE\perp AB$于点E.

$\because BD$平分$\angle ABC$,$\angle C=90°$,

$\therefore CD=ED$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$与$\mathrm{Rt}\triangle BED$中,

$\because BD=BD$,$CD=ED$,

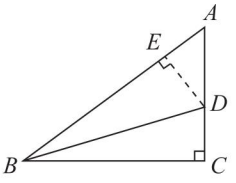
$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCD\cong\mathrm{Rt}\triangle BED$,

$\therefore BE=BC=4$,$\therefore AE=1$.

$\because AD^2=DE^2+AE^2$,

$\therefore AD^2=(3-AD)^2+1^2$,

$\therefore AD=\frac{5}{3}$.



(第5题图)

6. 2.4 **点拨**:如图,连接AM.

$\because AB=AC$,点M为BC的中点,

$\therefore AM\perp CM$,$BM=CM$.

$\because AB=AC=5$,$BC=6$,

$\therefore BM=CM=3$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABM$中,$AB=5$,$BM=3$,

$\therefore$根据勾股定理得:

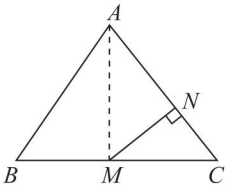
$AM^2=AB^2-BM^2=5^2-3^2=16$,

$\therefore AM=4$.

又$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}MN\cdot AC=\frac{1}{2}AM\cdot MC$,

$\therefore 5\times MN=4\times 3$,

$\therefore MN=2.4$.



(第6题图)

7. 16

8. $\frac{7}{8}$ cm

9. **解**:$\because \angle BAD=90°$,

$\therefore AD^2+AB^2=DB^2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 4^2+3^2=DB^2$,

$\therefore DB=5$.

$\because \angle CBD=90°$,

$\therefore BD^2+BC^2=DC^2$,

$\therefore 5^2+12^2=DC^2$,

$\therefore DC=13$,

$\therefore S_{正方形DCEF}=13^2=169$.

10. **解:**(1)设 $BD=x$,则 $CD=21-x$.

$\because AD\perp BC$,

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$.

在 Rt△ABD 中,

由勾股定理,得 $AD^2=AB^2-BD^2$,

$\therefore AD^2=13^2-x^2$.

在 Rt△ACD 中,

由勾股定理,得 $AD^2=AC^2-CD^2$,

$\therefore AD^2=20^2-(21-x)^2$.

$\therefore 13^2-x^2=20^2-(21-x)^2$.

解得 $x=5$,即 $BD=5$.

$\therefore CD=21-x=21-5=16$.

(2)在 Rt△ABD 中,由勾股定理,得 $AD=12$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 21\times 12=126$.

11. **解:**如图,延长 AB 交 KF 于点 O,延长 AC 交 GM 于点 P,

$\therefore$ 四边形 $AOLP$ 是正方形,

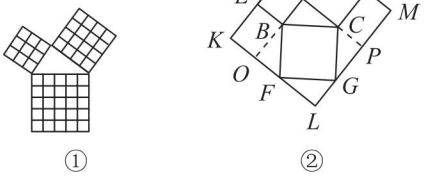
边长 $AO=OL=AB+AC=6+8=14$,

$\therefore KL=OL+OK=OL+AB=6+14=20$,

$LM=LP+MP=AO+AC=8+14=22$,

$\therefore$ 长方形 $KLMJ$ 的面积为 $20\times 22=440$.

点拨:本题考查了勾股定理的证明,作辅助线构造出正方形是解题的关键.



① ②

(第 11 题图)

12. **解:**(1)由题意可得 $AP=BP=2t$ cm,

$\because \angle ACB=90°$,$AB=5$ cm,$BC=3$ cm,

$\therefore$ 由勾股定理,得 $AC=4$ cm.

$\therefore PC=(4-2t)$ cm.

在 Rt△PCB 中,

由勾股定理,得 $PC^2+CB^2=PB^2$,

即 $(4-2t)^2+3^2=(2t)^2$,

解得 $t=\frac{25}{16}$,

$\therefore$ 当 $t=\frac{25}{16}$时,$PA=PB$.

(2)当点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上时,如图,过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E,

易得 $BP=(7-2t)$ cm,$PE=PC=(2t-4)$ cm,

$BE=5-4=1$(cm).

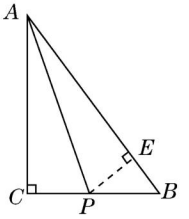
在 Rt△BEP 中,

由勾股定理,得 $PE^2+BE^2=BP^2$,

即 $(2t-4)^2+1^2=(7-2t)^2$,

解得 $t=\frac{8}{3}$,

$\therefore$ 当 $t=\frac{8}{3}$时,点 P 恰好在 $\angle BAC$ 的平分线上.



(第 12 题图)

3.2 勾股定理的逆定理

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**① $1+2=3$,故不可以构成三角形;

② $5^2+12^2=169=13^2$,故可以构成直角三角形;

③ $1.5^2+2^2=6.25=2.5^2$,故可以构成直角三角形;

④ $(3a)^2+(4a)^2=25a^2=(5a)^2$,故可以构成直角三角形.

2. D

3. A **点拨:**$\because AB^2+BC^2=5^2+12^2=169=AC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle ABC=90°$.

$\because$ 三个角的角平分线交于点 P,

$\therefore$ 点 P 到三边的距离相等,设为 h,

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(5+12+13)\times h=\frac{1}{2}\times 5\times 12$,

解得 $h=2$,

即点 P 到 AB 的距离为 2.

4. D **5.** 90

6. 2 **点拨:**作 $CH\perp AB$ 于 H,连接 OH、OC,如图所示.

$\because AC=BC=10$,$\therefore AH=BH=\frac{1}{2}AB=6$.

$\because$ 在 Rt△BCH 中,$CH^2=BC^2-BH^2=10^2-6^2=64$,

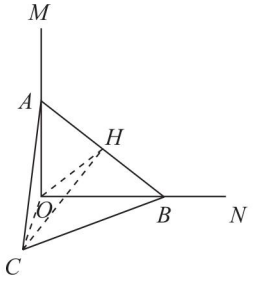
$\therefore CH=8$.

$\because \triangle AOB$ 是直角三角形,H 为 AB 的中点,

$\therefore OH=\frac{1}{2}AB=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $OC+OH\geqslant CH$(当点 C、O、H 共线时取等号),
∴ $OC\geqslant CH-OH$,即 OC 的最小值为 $8-6=2$.



(第6题图)

7. 5 **点拨:**∵ CE 平分 $\angle ACB$,CF 平分 $\angle ACD$,
∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$,$\angle ACF=\frac{1}{2}\angle ACD$,
∴ $\angle ECF=\angle ACE+\angle ACF=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=90°$.
∵ $CE=6$,$CF=8$,
∴ $EF^2=CE^2+CF^2=6^2+8^2=100$,
∴ $EF=10$.
又∵ $EF/\!/BC$,CE 平分 $\angle ACB$,CF 平分 $\angle ACD$,
∴ $\angle ECB=\angle MEC=\angle ECM$,
$\angle DCF=\angle CFM=\angle MCF$,
∴ $CM=EM=MF$,即 M 是 EF 的中点,
∴ $CM=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\times10=5$.

8. 解:∵ 在△ABE 中,DE 为 AB 边上的高,$DE=7$,
∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=35$,
∴ $AB=10$.
∵ $AC=8$,$BC=6$,
∴ $AC^2+BC^2=64+36=100=AB^2$,
∴ △ABC 为直角三角形,
∴ $\angle C=90°$.

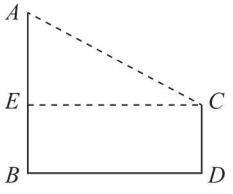
9. 解:(1)∵ $BD^2+CD^2=12^2+16^2=400$,
$BC^2=20^2=400$,
∴ $BD^2+CD^2=BC^2$,
∴ △BCD 是直角三角形,且 $\angle BDC=90°$.
设 $AC=AB=x$ cm,
∵ $BD=12$ cm,
∴ $AD=(x-12)$ cm.
在 Rt△ACD 中,有 $AD^2+CD^2=AC^2$,
即 $(x-12)^2+16^2=x^2$,解得 $x=\frac{50}{3}$,
即 $AC=AB=\frac{50}{3}$ cm,
∴ △ABC 的周长 $=AB+AC+BC=\frac{50}{3}+\frac{50}{3}+20=\frac{160}{3}$(cm).
(2)△ABC 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times\frac{50}{3}\times16=\frac{400}{3}$($cm^2$).

10. 解:(1)当 n 为奇数且 $n\geqslant3$ 时,勾、股、弦可分别表示为:n,$\frac{1}{2}(n^2-1)$,$\frac{1}{2}(n^2+1)$.
相等关系:①弦 − 股 = 1;②勾^2 + 股^2 = 弦^2.
证明相等关系①:弦 − 股 $=\frac{1}{2}(n^2+1)-\frac{1}{2}(n^2-1)=\frac{1}{2}[(n^2+1)-(n^2-1)]=1$.
证明相等关系②:勾^2 + 股^2 $=n^2+[\frac{1}{2}(n^2-1)]^2=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(n^2+1)^2$ = 弦^2.
(选一种进行证明即可)
(2)当 m 为偶数且 $m\geqslant4$ 时,股和弦的代数式分别为:$\left(\frac{m}{2}\right)^2-1$,$\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$.

3.3 勾股定理的简单应用

【两年模拟兵法】

1. D
2. D
3. A **点拨:**a 的最小长度显然就是圆柱的高,设最大长度为 b,根据勾股定理,得:$b^2=5^2+12^2=169$,∴ $b=13$,即 a 的取值范围是 $12\leqslant a\leqslant13$.
4. 100m^2
5. 10 **点拨:**如图,设大树高为 $AB=10$ 米,小树高为 $CD=4$ 米,
过 C 点作 $CE\perp AB$ 于 E,则四边形 $EBDC$ 是长方形,连接 AC,
∴ $EB=4$ 米,$EC=8$ 米,$AE=AB-EB=10-4=6$ 米.
在 Rt△AEC 中,
∵ $AC^2=AE^2+EC^2=6^2+8^2=100$,
∴ $AC=10$ 米,
∴ 小鸟至少飞行 10 米.

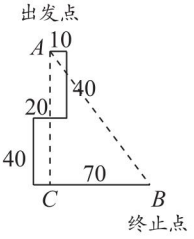


(第5题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 2.2　**点拨**：在 Rt△ACB 中，
∵ ∠ACB = 90°，BC = 0.7 米，AC = 2.4 米，
∴ AB^2 = 0.7² + 2.4² = 6.25.
在 Rt△$A'BD$ 中，∵ ∠$A'DB$ = 90°，$A'D$ = 2 米，
$BD^2 + A'D^2 = A'B^2$，
∴ $BD^2 + 2^2 = 6.25$，
∴ $BD^2 = 2.25$，
∴ BD = 1.5 米，
∴ $CD = BC + BD = 0.7 + 1.5 = 2.2$（米）.

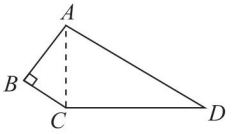
7. **解**：如图所示（单位：米），过点 A 作 $AC \perp CB$ 于点 C，
则在 Rt△ABC 中，$AC = 40 + 40 = 80$（米），
$BC = 70 - 20 + 10 = 60$（米），
∴ $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 80^2 + 60^2 = 100^2$，
∴ AB = 100 米.
∴ 终止点 B 与出发点 A 之间的距离 AB 为 100 米.



（第 7 题图）

8. **解**：在△ABD 中，
∵ AB = 13m，AD = 12m，BD = 5m，
∴ $AB^2 = AD^2 + BD^2$，
∴ △ADB 是直角三角形，∠ADB = 90°，
∴ $AD \perp BC$.
在 Rt△ADC 中，
∵ AD = 12m，AC = 15m，
∴ $DC^2 = AC^2 - AD^2 = 81$，∴ DC = 9m.
∴ $BC = BD + CD = 5 + 9 = 14$（m）.
∴ △ABC 的周长为
$AB + AC + BC = 13 + 15 + 14 = 42$（m），
△ABC 的面积为
$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$（m²）.

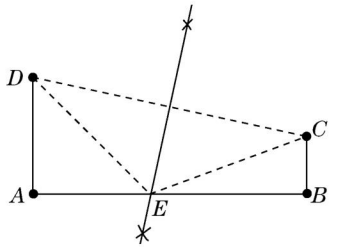
9. **解**：连接 AC，如图所示.
∵ ∠B = 90°，∴ △ABC 为直角三角形.
又 AB = 4，BC = 3，
∴ 根据勾股定理得：$AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$，∴ AC = 5，
又 AD = 13，CD = 12，
∴ $AD^2 = 13^2 = 169$，
$CD^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$，
∴ $CD^2 + AC^2 = AD^2$，
∴ △ACD 为直角三角形，∠ACD = 90°，
则 $S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot BC + \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 36$.



（第 9 题图）

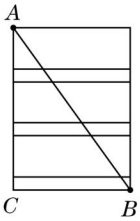
10. **解**：根据题意得：$AC = CD$，∠ABD = 90°.
在 Rt△ABD 中，
∵ AB = 3 000 米，AD = 5 000 米，
∴ BD = 4 000 米.
设 $CD = AC = x$ 米，则 BC = (4 000 − x) 米，
在 Rt△ABC 中，$AC^2 = AB^2 + BC^2$，
即 $x^2 = 3\,000^2 + (4\,000 - x)^2$，
解得 x = 3 125.
∴ 该超市与车站 D 的距离是 3 125 米.

11. **解**：如图所示，连接 CD，并作线段 CD 的垂直平分线，与 AB 相交于点 E，点 E 即为所建土特产收购站的位置.
连接 DE，CE，设 $AE = x$ km，则
BE = (50 − x) km.
在 Rt△ADE 中，$DE^2 = DA^2 + AE^2$，
即 $DE^2 = 20^2 + x^2$.
在 Rt△BCE 中，$CE^2 = CB^2 + BE^2$，
即 $CE^2 = 10^2 + (50 - x)^2$.
∵ $DE = CE$，
∴ $20^2 + x^2 = 10^2 + (50 - x)^2$，解得 x = 22.
∴ 收购站 E 到 A 站的距离为 22 km.



（第 11 题图）

12. **解**：将台阶展开，如图所示，
则 $AC = 3 \times 3 + 1 \times 3 = 12$（dm），
BC = 5（dm），
∴ $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 169 = 13^2$，
∴ AB = 13 dm，
∴ 这只蚂蚁从点 A 爬到点 B 的最短路程是 13 dm.



（第 12 题图）

13. **解**：(1) 过点 A 作 $AC \perp ON$ 于点 C，

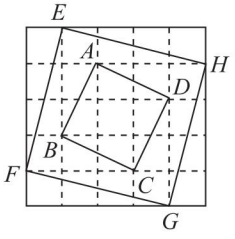
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $\angle QON=30°$, $OA=320$ m,
∴ $AC=160$m.
∵ $160<200$,
∴ 居民楼会受到噪音的影响.
(2)以 A 为圆心,200 m 为半径作⊙A,交 MN 于 B、D 两点.
当火车在 BD 段行驶时,对居民楼产生噪音影响.
∵ $AB=200$ m, $AC=160$m,
∴ 由勾股定理得: $BC=120$m,
∴ 在等腰三角形 ABD 中, $BD=2BC=240$m.
∵ 72 km/h = 20m/s,
∴ 居民楼受噪音影响的时间为 $240\div20=12$(s).

素养提分整合篇

【好题必解】

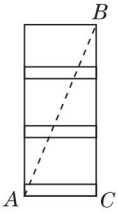
1. (1)5 (2)10
(3)如图,正方形 $EFGH$ 即为所求;17
点拨: (1)∵ $AB^2=1^2+2^2=5$,∴ $S_{正方形ABCD}=5$.
(2)∵ $AC^2=1^2+3^2=10$,
∴ 以 AC 为一边的正方形的面积为 10.
(3)如图, $S_{正方形EFGH}=1^2+4^2=17$,
∴ 所画正方形的最大面积为 17.



(第 1 题图)

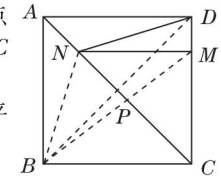
2. **解:** ∵ 四边形 $ABCD$ 是长方形,
∴ $\angle D=\angle A=\angle C=90°$, $AD=BC=6$,
$CD=AB=8$.
根据题意得△ABP≌△EBP,
∴ $EP=AP$, $\angle E=\angle A=90°$, $BE=BA=8$.
在△ODP 和△OEG 中, $\begin{cases}\angle D=\angle E=90°,\\ OD=OE,\\ \angle DOP=\angle EOG,\end{cases}$
∴ △ODP≌△OEG,
∴ $OP=OG$, $PD=GE$,∴ 易得 $DG=EP$.
设 $AP=EP=x$,则 $GE=PD=6-x$, $DG=x$,
∴ $CG=8-x$, $BG=8-(6-x)=2+x$.
在 Rt△BCG 中,
根据勾股定理得 $BC^2+CG^2=BG^2$,
即 $6^2+(8-x)^2=(2+x)^2$,解得 $x=4.8$,
∴ $AP=4.8$.

3. C **点拨:** 将台阶面展开,连接 AB,如图,线段 AB 即为壁虎所爬的最短路线. 在 Rt△ABC 中, $BC=30\times3+10\times3=120$(cm), $AC=50$ cm,根据勾股定理,得 $AB^2=AC^2+BC^2=16\,900$,所以 $AB=130$ cm,所以壁虎至少爬行 130 cm.



(第 3 题图)

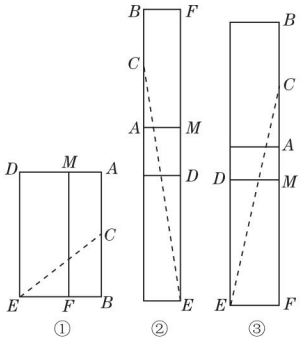
4. **解:** 如图所示,连接 BN, BD.
∵ 正方形是轴对称图形,点 B 与点 D 关于直线 AC 对称,
∴ 直线 AC 为 BD 的垂直平分线,
∴ $BN=DN$,
∴ $DN+MN=BN+MN$.
连接 BM 交 AC 于点 P.
∵ 点 N 为 AC 上的动点,
∴ 由三角形两边之和大于第三边可知,当点 N 运动到点 P 时,
$BN+MN=BP+PM=BM$,
∴ $DN+MN$ 的最小值为 BM 的长.
∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,
∴ $BC=CD=8$,
∴ $CM=CD-DM=8-2=6$.
∵ $\angle BCM=90°$,
∴ $BM^2=BC^2+CM^2=8^2+6^2=100$,∴ $BM=10$,
即 $DN+MN$ 的最小值为 10.



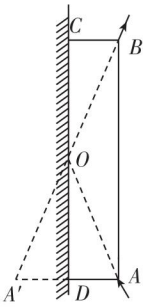
(第 4 题图)

5. **解:** 分为三种情况:
(1)如图①,连接 EC,
在 Rt△EBC 中, $EB=12+8=20$(cm),
$BC=\frac{1}{2}\times30=15$(cm).
由勾股定理,得 $EC^2=20^2+15^2=625$,
所以 $EC=25$cm.
(2)如图②,连接 EC.
根据勾股定理可求出
$CE^2=8^2+(30+12+15)^2=3\,313>625$.
(3)如图③,连接 EC.
根据勾股定理可求出
$CE^2=12^2+(30+8+15)^2=2\,953>625$.
综上可知,小虫爬行的最短路程是25 cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第5题图）



（第6题图）

6. 解：如图，作点 A 关于 CD 的对称点 A'，连接 $A'B$，交 CD 于点 O，则点 O 是光的反射点，连接 OA.

由对称性可知，$A'D = AD$，$OA = OA'$，

$\therefore OA + OB = OA' + OB = A'B$，

$AA' = 2AD = 20$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAA'$ 中，

$\because A'B^2 = AA'^2 + AB^2 = 20^2 + 48^2 = 2\,704$，

$\therefore A'B = 52$ cm，

$\therefore$ 光线在纸片上通过的距离为 52 cm.

点拨：先利用入射光线与反射光线的性质构造出直角三角形，再利用勾股定理计算求解.

7. 解：如图，过点 A 作 $AC \perp BD$ 于点 C.

(1)由题易知，$\angle CAD = 30°$，$\angle CAB = 60°$，

$\therefore \angle BAD = 60° - 30° = 30°$.

(2)$\because AC \perp BD$，$\therefore AC$ 的长是点 A 到 BD 的最短距离.

$\because \angle ABD = 90° - 60° = 30°$，

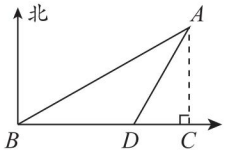
$\therefore \angle ABD = \angle BAD$，$\therefore AD = BD = 12$ 海里.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle CAD = 30°$，

$\therefore CD = \dfrac{1}{2}AD = 6$ 海里，

$\therefore$ 根据勾股定理，得 $AC^2 = AD^2 - CD^2 = 12^2 - 6^2 = 108$.

$\because 108 > 8^2$，$\therefore$ 如果渔船不改变航线继续向正东方向航行，没有触礁的危险.



（第7题图）

【第3章测试卷】

一、1. B　**点拨：**在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - 8^2 = 36$，所以 $AC = 6$.

2. B　**点拨：**设正方形的边长为 c，由勾股定理可知：$c^2 = 3^2 + 4^2$，$\therefore c^2 = 25$.

3. B　**点拨：**$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，AD 是边 BC 上的中线，$\therefore BD = \dfrac{1}{2}BC = 3$，$AD \perp BC$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，$AB = 5$，$BD = 3$，

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 = 5^2 - 3^2 = 16$，$\therefore AD = 4$.

4. A　**点拨：**设斜边上的高为 h，$\because 3^2 + 4^2 = 5^2$，

$\therefore$ 此三角形是直角三角形，

$\therefore \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = \dfrac{1}{2} \times 5 \cdot h$，解得 $h = 2.4$.

故它的斜边上的高为 2.4.

5. C

6. D　**点拨：**$\because AC = 4$，$BC = 3$，$AB = 5$，

$\therefore BC^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = AB^2$，

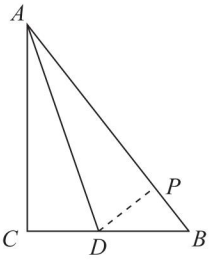
$\therefore \angle C = 90°$.

如图，过点 D 作 $DP \perp AB$ 于点 P.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore PD = CD$.

$\because S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC = \dfrac{1}{2}AC \cdot CD + \dfrac{1}{2}AB \cdot PD$，

$\therefore 4 \times 3 = 4CD + 5CD$，$\therefore CD = \dfrac{4}{3}$.



（第6题图）

7. D

8. C

9. C

10. B

二、11. 2　**点拨：**设所求直角边长为 a，根据勾股定理得：$a^2 = 2.5^2 - 1.5^2 = 4$，$\therefore a = 2$.

12. 3　**点拨：**由勾股定理得，$BC^2 = 2^2 - 1^2 = 3$，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 3.

13. <　**点拨：**因为 $AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8 < 3^2$，

所以线段 AB 的长度 < 3.

14. $\dfrac{3}{2}$

15. 18

16. 32 或 42

点拨：分两种情况讨论：

①当高 AD 在 $\triangle ABC$ 的内部时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 81$，

$\therefore BD = 9$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

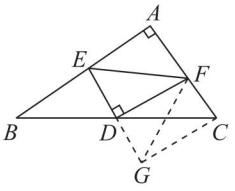
在 Rt△ACD 中,$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 25$,
∴ $CD = 5$,
∴ $BC = BD + CD = 14$.
②当高 AD 在△ABC 的外部时,
$BC = BD - CD = 4$,
∴ $C_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 15 + 14 + 13 = 42$.
或 $C_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 15 + 4 + 13 = 32$.

三、**17.** 解:设 $CD = x$.
在 Rt△ACD 中,由 $AD^2 = AC^2 - CD^2$,得
$AD^2 = 10^2 - x^2$.
在 Rt△ABD 中,由 $AD^2 = AB^2 - BD^2$,
得 $AD^2 = 17^2 - (x+9)^2$,
∴ $10^2 - x^2 = 17^2 - (x+9)^2$,解得 $x = 6$.
∴ $CD = 6$.
∴ $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 10^2 - 6^2 = 64$.
∴ $AD = 8$.

18. 解:∵ $AB^2 + AC^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 = 25$,
$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$,
∴ $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
∴ △ABC 是直角三角形.

19. (1)**证明:**∵ CE 平分∠ACB,CF 平分∠ACD,
∴ $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB$,$\angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACD$,
∴ $\angle ECF = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ACD) = 90°$,
∴ △EFC 为直角三角形,
(2)**解:**∵ $EF \parallel BC$,CE 平分∠ACB,
CF 平分∠ACD,
∴ $\angle ECB = \angle MEC = \angle ECM$,
$\angle DCF = \angle CFM = \angle MCF$,
∴ $CM = EM = MF = 5$,∴ $EF = 10$,
由勾股定理可知 $CE^2 + CF^2 = EF^2 = 100$.

20. **证明:**延长 ED 到点 G,使 $DG = DE$,连接 FG、CG,如图所示:
在△EDF 和△GDF 中,



(第 20 题图)

$$\begin{cases} DF = DF, \\ \angle EDF = \angle GDF = 90°, \\ DE = DG, \end{cases}$$
∴ △EDF≌△GDF,
∴ $EF = GF$.
又∵ D 为斜边 BC 的中点,
∴ $BD = CD$.
在△BDE 和△CDG 中,
$$\begin{cases} BD = CD, \\ \angle BDE = \angle CDG, \\ DE = DG, \end{cases}$$
∴ △BDE≌△CDG,
∴ $BE = CG$,$\angle B = \angle BCG$,
∴ $AB \parallel CG$,
∴ $\angle GCA = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$.
在 Rt△FCG 中,由勾股定理得:
$FG^2 = CF^2 + CG^2 = CF^2 + BE^2$,
∴ $EF^2 = FG^2 = BE^2 + CF^2$.

21. 解:在 Rt△ABC 中,$AB = 4$ m,设 $BC = x$ m,
则 $AC = (8 - x)$ m.
由勾股定理,得 $BC^2 = AC^2 + AB^2$,
即 $x^2 = (8 - x)^2 + 4^2$,解得 $x = 5$.
如果下次旗杆从 D 处刮断,设顶部的着地点为 E,
则 $DE = BC + CD = 5 + 1.25 = 6.25$(m),
$AD = AC - CD = 3 - 1.25 = 1.75$(m).
在 Rt△ADE 中,由勾股定理,得
$AE^2 = DE^2 - AD^2 = 6.25^2 - 1.75^2 = 36$,
∴ $AE = 6$ m.
∴ 杆脚周围 6 m 范围内有被砸伤的危险.

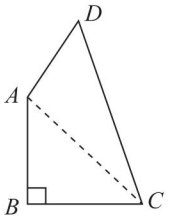
22. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 是长方形,
∴ $AB = CD$,$\angle B = \angle D = 90°$.
由折叠可知,$\angle D = \angle D'$,$CD = CD'$.
∴ $\angle B = \angle D'$,$AB = CD'$.
又∠AEB = ∠CED',∴ △ABE≌△$CD'E$.
∴ $AE = CE$.
设 $BE = x$,则 $AE = CE = 4 - x$.
∴ 在 Rt△ABE 中,根据勾股定理,
得 $3^2 + x^2 = (4 - x)^2$,解得 $x = \frac{7}{8}$. ∴ $BE = \frac{7}{8}$.

23. (1)**解:**正方形、长方形.
(2)**证明:**①∵ △ABC≌△DBE,∴ $BC = BE$.
∵ ∠CBE = 60°,∴ △BCE 是等边三角形.
②∵ △ABC≌△DBE,∴ $AC = DE$.
又∵ △BCE 为等边三角形,
∴ $BC = CE$,$\angle BCE = 60°$.
∵ ∠DCB = 30°,∴ ∠DCE = 90°.
在 Rt△DCE 中,$DC^2 + CE^2 = DE^2$,
∴ $DC^2 + BC^2 = AC^2$.
∴ 四边形 $ABCD$ 是勾股四边形.

24. 解:连接 AC,如图所示:
在 Rt△ABC 中,由勾股定理,得 $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
又∵ $AB = 9$cm,$BC = 12$cm,
∴ $9^2 + 12^2 = AC^2$,
∴ $AC = 15$cm.
又∵ 在△ACD 中,$DC^2 - AD^2 = 17^2 - 8^2 = 225 = 15^2$,
∴ $DC^2 = AD^2 + AC^2$,
∴ △ACD 为直角三角形,且∠DAC = 90°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=$
$\frac{1}{2}\times9\times12+\frac{1}{2}\times8\times15=114(cm^2)$.
即这块钢板的面积为 $114cm^2$.



(第 24 题图)

第4章 实 数

4.1 平方根

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** D

4. D **点拨:** 若 $x^2=16$,则 $x=\pm4$.
那么 $5-x=1$ 或 9,
所以 $5-x$ 的算术平方根是 1 或 3.

5. $\sqrt{5}$ **点拨:** $\because 5^2=25$,$\therefore \sqrt{25}=5$,
$\therefore \sqrt{25}$ 的算术平方根是 $\sqrt{5}$.

6. 16 **点拨:** 由题意,得 $3x-2+6-5x=0$,
解得 $x=2$. 所以 $3x-2=3\times2-2=4$.
所以这个正数是 16.

7. 直角

8. **解:** (1)$\because \left(\pm\frac{11}{13}\right)^2=\frac{121}{169}$,
$\therefore \frac{121}{169}$ 的平方根是 $\pm\frac{11}{13}$.
即 $\pm\sqrt{\frac{121}{169}}=\pm\frac{11}{13}$;
(2)$\because (\pm0.16)^2=0.0256$,
$\therefore 0.0256$ 的平方根是 ±0.16.
即 $\pm\sqrt{0.0256}=\pm0.16$.
(3)$\because (\pm5)^2=25=(-5)^2$,
$\therefore (-5)^2$ 的平方根是 ±5.
即 $\pm\sqrt{(-5)^2}=\pm5$.
(4)$\because (\pm10^{-2})^2=10^{-4}$,
$\therefore 10^{-4}$ 的平方根是 $\pm10^{-2}$.
即 $\pm\sqrt{10^{-4}}=\pm10^{-2}=\pm\frac{1}{100}$.

9. **解:** (1)$\because 9^2=81$,$\therefore \pm\sqrt{81}=\pm9$.
(2)$\because 4^2=16$,$\therefore -\sqrt{16}=-4$.
(3)$\because \left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$,$\therefore \sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.
(4)$\because 7^2=(-7)^2$,$\therefore \sqrt{(-7)^2}=7$.

10. **解:** 依题意,得 $2a-1=9$,$3a+b-1=16$,
所以 $a=5$,$b=2$,
所以 $a+2b=5+2\times2=9$,
所以 $a+2b$ 的平方根为 ±3,
即 $\pm\sqrt{a+2b}=\pm3$.

11. **解:** $\because \angle C=90°$,$AC=2$,$AD=\sqrt{5}$,
$\therefore CD^2=(\sqrt{5})^2-2^2=1$,$\therefore CD=1$.
又$\because \angle ADC=2\angle B$,$\angle ADC=\angle B+\angle BAD$,
$\therefore \angle B=\angle BAD$,$\therefore BD=AD=\sqrt{5}$.
$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(\sqrt{5}+1)\times2=\sqrt{5}+1$.

12. **解:** 3;0.7;0;6;$\frac{3}{4}$
(1)不一定. 我发现的规律:$\sqrt{a^2}=|a|$.
(2)原式 $=|3.14-\pi|=\pi-3.14$.

4.2 立方根

【两年模拟兵法】

1. D **点拨:** $\sqrt{64}=8$,8 的立方根是 $\sqrt[3]{8}=2$.

2. B

3. D **点拨:** 立方等于它本身的数有 0 和 ±1,即 $a^3=a$,则 a 的值是 0 或 1 或 -1.

4. C

5. -5

6. 1

7. 0.069 93 **点拨:** $\because 0.000\,342=0.342\times0.001$,
$\therefore \sqrt[3]{0.000\,342}=\sqrt[3]{0.342\times0.001}\approx$
$0.6993\times0.1=0.06993$.

8. **解:** (1)$\because 6^3=216$,
$\therefore 216$ 的立方根是 6.
(2)$\because (10^2)^3=10^6$,
$\therefore 10^6$ 的立方根是 10^2,也就是 100.
(3)$\because \left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$,
$\therefore -\frac{27}{64}$ 的立方根是 $-\frac{3}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)系数化为1得,$x^3=-\frac{1}{8}$,

解得,$x=-\frac{1}{2}$.

(2)开立方得,$x+1=2$,

解得,$x=1$.

(3)移项得,$3(x-1)^3=81$,

系数化为1得,$(x-1)^3=27$,

开立方得,$x-1=3$,

解得,$x=4$.

10. 解:(1)$\sqrt[3]{-8}=-2$.

(2)$\sqrt[3]{0.064}=0.4$.

(3)$-\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=-\frac{2}{5}$.

(4)$(\sqrt[3]{9})^3=9$.

11. 解:(1)由题意可知:

$(2a+5)+(2a-1)=0$,解得$a=-1$.

$b-30=(-3)^3=-27$,解得$b=3$.

(2)由(1)知$a+b=-1+3=2$,

$\therefore a+b$的算术平方根是$\sqrt{2}$.

12. 解:(1)2与-2互为相反数,$2=\sqrt[3]{8}$,$-2=\sqrt[3]{-8}$,8与-8也互为相反数. 所以上述结论成立.

(2)因为$\sqrt[3]{1-2x}$与$\sqrt[3]{3x-5}$互为相反数,

所以$(1-2x)+(3x-5)=0$,所以$x=4$,

所以$1-x=1-4=-3$.

4.3 实 数

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:** $\sqrt{16}=4$是正数,$-5.\dot{1}\dot{8}$是无限循环小数,$\frac{4}{7}$是分数,都属于有理数;$-\frac{\pi}{2}$,$-\sqrt[3]{9}$,$-0.317\,311\,731\,117\cdots$都是无理数. 故选C.

2. B

3. A **点拨:** 比-2小的数是绝对值大于2的负数,分析选项可得,只有A符合要求. 故选A.

4. A **点拨:** 因为$\sqrt{5}$在2和2.5之间,$\sqrt{2}$在1和1.5之间,所以$\sqrt{5}+\sqrt{2}$在3和4之间. 故选A.

5. $\sqrt{3}$(答案不唯一,合理即可)

点拨: 该无理数的平方大于1小于4,所以可选其中的任意一个数作为被开方数即可.

6. $\sqrt{3}-1$

7. $>$

8. 2,3

9. $1+\sqrt{6}$或$1-\sqrt{6}$

10. $-\sqrt{5}$

11. 解:(1)负数:$\{-|-5|,-\pi,-\frac{\pi}{3},\cdots\}$;

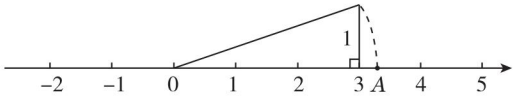
(2)非负整数:$\{0,-(-6),300\%,\cdots\}$;

(3)分数:$\{-\left(-\frac{3}{4}\right),0.12,\frac{22}{7},0.\dot{3},\cdots\}$;

(4)无理数:$\{2.525\,525\,552\cdots,-\pi,-\frac{\pi}{3},\cdots\}$.

12. 解:原式$=5-3+4-6=0$.

13. 解:如图,点A即为所求.



(第13题图)

14. 解:$\because a$、b互为相反数,c、d互为倒数,x的绝对值为$\sqrt{6}$,

$\therefore a+b=0$,$cd=1$,$x=\pm\sqrt{6}$,

当$x=\sqrt{6}$时,原式$=6+(0+1)\times\sqrt{6}+0+1=7+\sqrt{6}$.

当$x=-\sqrt{6}$时,原式$=6+(0+1)\times(-\sqrt{6})+0+1=7-\sqrt{6}$.

4.4 近似数

【两年模拟兵法】

1. D

2. A

3. A

4. D

5. C **点拨:** 0.050 49精确到千分位的近似数为0.050.

6. 23.1

7. 3.5×10^5

8. 千

9. 解:(1)0.632 8(精确到0.01)$\approx$0.63.

(2)7.912 2(精确到个位)$\approx$8.

(3)130.96(精确到十分位)$\approx$131.0.

(4)46 021(精确到百位)$\approx4.60\times10^4$.

10. 解:有差别. 6.1×10^4精确到千位,而6.10×10^4精确到百位.

11. 解:设该两层卫生纸的厚度为h cm. 根据题意,得$11.4\times11\times h\times300=\pi(5.8^2-2.3^2)\times11$,

解得$h\approx0.026$.

答:该两层卫生纸的厚度约为0.026 cm.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B **点拨:** -3.14是有限小数,属于有理数;

0是整数,属于有理数;

$0.\dot{1}\dot{8}$是无限循环小数,属于有理数;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\sqrt[3]{64}=4$,是整数,属于有理数;

无理数有$-\sqrt{3}$,π共2个.

2. B　**点拨:**已知正方形面积求边长就是求面积的算术平方根.

3. $\pm\sqrt{19}$　**点拨:**$\because\sqrt{x+2}=3$,$\therefore x+2=9$,$x=7$,

$\therefore\pm\sqrt{2x+5}=\pm\sqrt{19}$.

4. 解:由题意,得$a-b=2$,$a-2b+2=2$,

$\therefore a=4$,$b=2$,

$\therefore M=\sqrt{a+b+3}=\sqrt{4+2+3}=3$,

$N=\sqrt{a+6b}=\sqrt{4+6\times2}=4$.

$\therefore M\cdot N=3\times4=12$.

5. 解:(1)由数轴可知:

$-2<b<-1<0<a<1$,

所以$a-b>0$,$b+1<0$,$2-a>0$.

答案:>;<;>

(2)$\because-2<b<-1<0<a<1$,$|b|>|a|$,

$\therefore|a-b|-|b+1|+|2-a|$

$=a-b-(-b-1)+(2-a)$

$=a-b+b+1+2-a$

$=3$.

6. C

7. 解:$\because|z-1|+\sqrt{x-2y+4}=0$,

$|z-1|\geqslant0$,$\sqrt{x-2y+4}\geqslant0$,

$\therefore x-2y+4=0$①,$z-1=0$.

又$\sqrt[3]{2y-1}+\sqrt[3]{1-3x}=0$,

$\therefore(2y-1)+(1-3x)=0$②,

由①②得$\begin{cases}x-2y+4=0,\\(2y-1)+(1-3x)=0,\end{cases}$

解得:$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

由$z-1=0$得,$z=1$,

$\therefore x+y+z=2+3+1=6$,

$\therefore x+y+z$的平方根为$\pm\sqrt{6}$.

8. 解:(1)原式$=2-9-4=-11$.

(2)原式$=2-\sqrt{3}-1-8+9=2-\sqrt{3}$.

9. 解:(1)化简,得$(x-1)^2=\frac{49}{25}$.

所以$x-1=\pm\frac{7}{5}$.

所以$x=\frac{12}{5}$或$x=-\frac{2}{5}$.

(2)化简,得$(x-2)^3=\frac{1}{64}$,

所以$x-2=\frac{1}{4}$,

所以$x=\frac{9}{4}$.

10. 7. 16

11. $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$($n$为大于或等于2的自然数)

12. 解:$\because15^2<250<16^2$,

$\therefore15<\sqrt{250}<16$.

$\therefore\sqrt{250}$的整数部分是15,即$a=15$.

$\because b-1=\sqrt{400}=20$,

$\therefore b=21$.

$\therefore\sqrt{a+b}=\sqrt{15+21}=\sqrt{36}=6$.

【第4章测试卷】

一、1. B　**点拨:**$\because-3<-\sqrt{5}<0<1$,

$\therefore$在实数$-\sqrt{5}$,-3,0,1中,最小的数是-3.

2. B　**点拨:**$\because\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$,

$\therefore2<\sqrt{7}<3$.

3. C　**点拨:**$\sqrt{16}=4$,故A选项错误;

$\sqrt{(-4)^2}=4$,故B选项错误;

$\pm\sqrt{16}=\pm4$,故C选项正确;

$\pm\sqrt{16}=\pm4$,故D选项错误.

4. C　**点拨:**$\because2.2^2<5<2.3^2$,

$\therefore2.2<\sqrt{5}<2.3$,

$\therefore1.2<\sqrt{5}-1<1.3$,

$\therefore0.6<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<0.65$. 故选C.

5. C　**点拨:**在$\sqrt{4}$,$-0.101\,001\cdots$,$\sqrt{5}$,$\frac{22}{7}$,0,$-\frac{\pi}{2}$,$\sqrt[3]{8}$中,无理数有$-0.101\,001\cdots$,$\sqrt{5}$,$-\frac{\pi}{2}$,共3个.

6. A　**点拨:**3是27的立方根,①错误;

$\frac{1}{16}$的算术平方根是$\frac{1}{4}$,②错误;

$-\sqrt[3]{-8}=2$,③正确;

$\sqrt{16}=4$,4的平方根是±2,④错误;

9是81的算术平方根,⑤错误.

故其中正确的有1个.

7. B　**点拨:**$\because9<11<16$,

$\therefore3<\sqrt{11}<4$,

$\because3.5^2=12.25>11$,

$\therefore3<\sqrt{11}<3.5$,

$\therefore2.5<6-\sqrt{11}<3$.

$\therefore$与$6-\sqrt{11}$最接近的是3.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. D　**点拨:** $(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$,
$2\times(2+\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}$,
$\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3})=2\sqrt{3}+3$,
$(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=4-3=1$.

9. C　**点拨:** 由数轴可得: $-2<a<-1$, $0<b<1$,
$a<b$,故 A 选项错误;
$|a|>|b|$,故 B 选项错误;
$a+b<0$,故 C 选项正确;
$\frac{a}{b}<0$,故 D 选项错误.

10. A　**点拨:** $\because 5\leqslant\sqrt{a}\leqslant7$, $4\leqslant\sqrt{b}\leqslant6$,
$\therefore 25\leqslant a\leqslant49$, $16\leqslant b\leqslant36$,
$\therefore 41\leqslant a+b\leqslant85$,
$\therefore \sqrt{a+b}$的整数部分可以是 7,8,9.

二、11. >　**点拨:** $\because -2-a-(-a-\sqrt{5})=-2-a+a+\sqrt{5}=\sqrt{5}-2>0$,
$\therefore -2-a>-a-\sqrt{5}$.

12. 9　**点拨:** 由题意得: $2a-1-a+2=0$,
解得: $a=-1$, 故 $2a-1=-3$,
则这个正数为 $(-3)^2=9$.

13. 0.023 7

14. -8　**点拨:** 由题意,得: $x+2=0$, $y-3=0$,
即 $x=-2$, $y=3$,
故 $x^y=(-2)^3=-8$.

15. $b<-1$ 或 $b>3$　**点拨:** 由 $a^3b^3=(ab)^3=27$,
得 $ab=3$,
$\because -3<a<1$ 且 $a\neq0$,
$\therefore b=\frac{3}{a}$,
$\therefore b<-1$ 或 $b>3$.

16. $2a+1$　**点拨:** $\because m+1=a^2+(a+1)^2$,
$\therefore m=a^2+(a+1)^2-1$,
$\therefore 2m+1=2a^2+2(a+1)^2-1=4a^2+4a+1=(2a+1)^2$.
$\because a>0$,
$\therefore 2m+1$ 的算术平方根为 $2a+1$.

三、17. **解:** (1) 由原式得, $x^2=\frac{25}{4}$.
所以 $x=\pm\frac{5}{2}$.
(2) 由原式得, $(x+2)^3=27$.
所以 $x+2=3$.
所以 $x=1$.

18. **解:** (1) 原式 $=2+2+3=7$;
(2) 原式 $=1-3+4=2$.

19. **解:** (1) $\because 2a-1$ 的平方根为 ±3,
$\therefore 2a-1=9$,
解得 $a=5$,
$\because 3a+b-1$ 的算术平方根为 4,
$\therefore 3a+b-1=16$,
解得 $b=2$.
(2) 由(1)知 $a=5$, $b=2$,
$\therefore a+2b=5+2\times2=9$,
$\therefore a+2b$ 的算术平方根为 3.

20. **解:** (1) 由数轴可知: $a<0<b<c$,
$|c|>|b|>|a|$,
所以 $a-c<0$, $a+b>0$, $b-c<0$,
答案: <; >; <
(2) 由(1)可得: $a-c<0$, $a+b>0$,
$b-c<0$,
所以 $|a-c|-|a+b|-|b-c|$
$=-(a-c)-(a+b)-[-(b-c)]$
$=-a+c-a-b+b-c$
$=-2a$.

21. **解:** 解方程 $\frac{2a-1}{3}=3$,得 $a=5$.
$\because (2k+1)^2+\sqrt{91+7b}=0$,
$\therefore 2k+1=0$, $91+7b=0$,
$\therefore k=-\frac{1}{2}$, $b=-13$.
把 $a=5$, $b=-13$ 代入 $\sqrt[3]{a^2-3b}$,
得 $\sqrt[3]{a^2-3b}=\sqrt[3]{5^2-3\times(-13)}=\sqrt[3]{64}=4$,
即 $\sqrt[3]{a^2-3b}$的值为 4.

第5章 平面直角坐标系

5.1 位置的确定

【两年模拟兵法】

1. C

2. B

3. D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 140

5. (8,4)

6. B

7. **解**:(1)点 $C(2,2)$ 表示放置 2 个萝卜,2 棵青菜;
点 $D(3,2)$ 表示放置 3 个萝卜,2 棵青菜;
点 $E(3,1)$ 表示放置 3 个萝卜,1 棵青菜;
点 $F(4,1)$ 表示放置 4 个萝卜,1 棵青菜.
(2)选择路径③吃到的萝卜最多;选择路径①吃到的青菜最多.

8. B

9. HELLO

10. **解**:(1)略.
(2)给机器人下的指令为(3,20°).

11. (6,5)

12. **解**:(2,3)表示"皇后 Q"在第 2 列第 3 行的空格中,棋盘中不能被"皇后 Q"所控制的四个位置分别是(1,1)、(3,1)、(4,2)、(4,4).

5.2 平面直角坐标系

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**:∵ $x^2 \geqslant 0$,∴ $x^2+1 \geqslant 1$.
∴ 点 $P(-2, x^2+1)$ 在第二象限.

2. C

3. A **点拨**:∵ 点 M 在 x 轴的上方、y 轴的左侧,
∴ 点 M 在第二象限.
∵ 点 M 到 x 轴、y 轴的距离分别为 3 和 5,
∴ 点 M 的坐标为 $(-5,3)$.

4. C

5. D **点拨**:由 $P(0,-4)$、$Q(6,1)$,将线段 PQ 平移至 P_1Q_1,若 $P_1(m,-3)$、$Q_1(3,n)$,可得 $-4+1=-3$,$6-3=3$,即平移规律为向上平移 1 个单位长度,再向左平移 3 个单位长度,可得 $0-3=m$,$1+1=n$,解得 $m=-3$,$n=2$,把 $m=-3$,$n=2$ 代入 m^n,得 $(-3)^2=9$.

6. B **点拨**:∵ 点 $P(m+3,m+1)$ 在 x 轴上,
∴ $m+1=0$,解得 $m=-1$.
∴ $m+3=-1+3=2$. ∴ 点 P 的坐标为(2,0).

7. 2

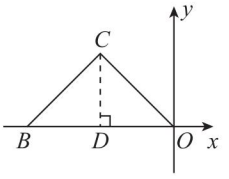
8. $(-3,6)$

9. (4,3)

10. -2 **点拨**:∵ 点 $B(m+2,m-1)$ 在 y 轴上,
∴ $m+2=0$,解得 $m=-2$.

11. $(6,-6)$ **点拨**:∵ 点 P 的坐标为 $(2-a,3a+6)$,点 P 在第四象限且点 P 到两坐标轴的距离相等,
∴ $2-a+3a+6=0$,
解得 $a=-4$.
故点 P 的坐标是 $(6,-6)$.

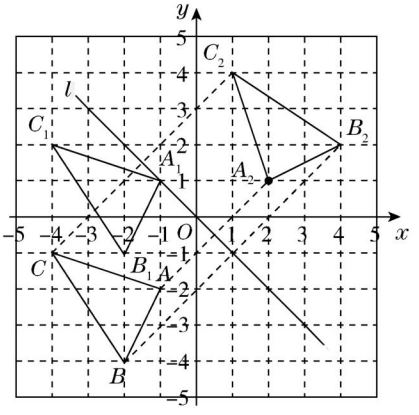
12. (3,3) **点拨**:如图,过点 C 作 $CD \perp OB$ 于点 D,
∵ $\angle OCB=90°$,$OC=BC$,
∴ $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形.
∴ $CD=OD=\frac{1}{2}OB$.
∵ $O(0,0)$,$B(-6,0)$,
∴ $OB=6$,
∴ $CD=OD=\frac{1}{2}\times 6=3$.
∴ 点 C 的坐标为 $(-3,3)$.
∴ 点 C 关于 y 轴对称的点 C' 的坐标是(3,3).



(第 12 题图)

13. 673 **点拨**:由题图可得,$P_0P_1=1$,$P_0P_2=1$,$P_0P_3=1$;
$P_0P_4=2$,$P_0P_5=2$,$P_0P_6=2$;
$P_0P_7=3$,$P_0P_8=3$,$P_0P_9=3$,…;
∵ $2\,018=3\times 672+2$,
∴ 点 $P_{2\,018}$ 在正南方向上.
∴ $P_0P_{2\,018}=672+1=673$.

14. **解**:(1)如图,$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求,$B_1(-2,-1)$.
(2)如图,直线 l 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



(第 14 题图)

15. **解**:(1)由已知 $|a-2|+(b-3)^2=0$,$(c-4)^2 \leqslant 0$,
可得 $a-2=0$,$b-3=0$,$c-4=0$,
解得 $a=2$,$b=3$,$c=4$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)∵ $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$, $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times2\times(-m)=-m$,

∴ $S_{四边形ABOP}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle APO}=3+(-m)=3-m$.

(3)存在.

∵ $S_{四边形ABOP}=S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$,

∴ $3-m=6$,解得 $m=-3$,

∴ 存在点 $P(-3,\frac{1}{2})$,使四边形 $ABOP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. B

2. A **点拨**:由题意,得 $|y|=2$, $|x|=3$.

又∵ 点 P 在第二象限,∴ $x=-3$, $y=2$,

∴ 点 P 的坐标是 $(-3,2)$.

3. $(-1,5)$

点拨:∵ A' 向下平移 4 个单位长度得点 $A''(1,1)$,

∴ 点 A' 的坐标是 $(1,5)$.

∵ 点 A 关于 y 轴的对称点 A' 的坐标是 $(1,5)$,

∴ 点 A 的坐标是 $(-1,5)$.

4. **解**:(1)∵ 点 $P(2m+4,m-1)$,点 P 的纵坐标比横坐标大 3,

∴ $m-1-(2m+4)=3$,解得 $m=-8$.

∴ $2m+4=-12$, $m-1=-9$.

∴ 点 P 的坐标为 $(-12,-9)$.

(2)∵ 点 P 在过点 $A(2,-3)$,且与 x 轴平行的直线上,

∴ $m-1=-3$,解得 $m=-2$.

∴ $2m+4=0$.

∴ 点 P 的坐标为 $(0,-3)$.

5. A

6. **解**:(1) $S_{\triangle ABO}=3\times3-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times(3-1)\times(3-1)=4$;

(2)$(2,-2)$ **点拨**:当点 A_1 和点 B 重合时,需将 $\triangle ABC$ 向右平移 2 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度,

∴ 点 O 的对应点 O_1 的坐标是 $(2,-2)$.

(3)3 3

7. **解**:(1)∵ $|a+2|+\sqrt{b-4}=0$,

∴ $a+2=0$, $b-4=0$.

∴ $a=-2$, $b=4$.

∴ 点 A 的坐标为 $(-2,0)$,点 B 的坐标为 $(4,0)$.

又∵ 点 C 的坐标为 $(0,3)$,

∴ $AB=4-(-2)=6$, $CO=3$.

∴ $S_{三角形ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CO=\frac{1}{2}\times6\times3=9$;

(2)设点 M 的坐标为 $(x,0)$,

则 $AM=|x-(-2)|=|x+2|$.

又∵ $S_{三角形ACM}=\frac{1}{3}S_{三角形ABC}$,

∴ $\frac{1}{2}AM\cdot OC=\frac{1}{3}\times9$.

∴ $\frac{1}{2}|x+2|\times3=3$.

∴ $|x+2|=2$,即 $x+2=\pm2$.

解得 $x=0$ 或 -4,

故点 M 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(-4,0)$.

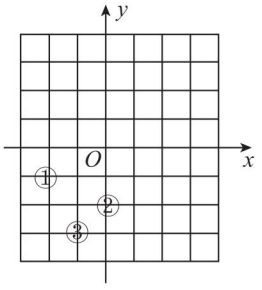
8. B

9. B

【第 5 章测试卷】

一、**1**. B

2. A **点拨**:如图,棋子②的坐标是 $(0,-2)$.



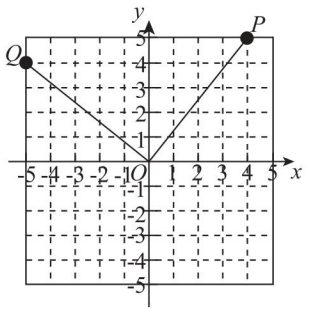
(第 2 题图)

3. B

4. B

5. B **点拨**:如图,点 $P(4,5)$ 按逆时针方向旋转 90°,得点 $Q(-5,4)$,所在的象限为第二象限.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第5题图）

6. D

7. B　**点拨**：由点 B 的坐标为(3,2)可知 $AB=2$，$BC=3$. 又因为 $BD=BE=1$，所以 $CE=2$，$AD=1$，所以点 B' 的坐标为(2,1)，故选 B.

8. C　**9**. D　**10**. C

二、11. (3,7)

12. $(-5,1)$

13. 5

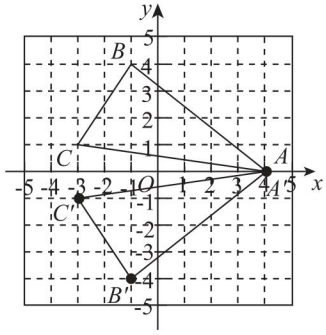
14. -2　**点拨**：∵ 两点 $A(a,3)$，$B(1,b)$ 关于 x 轴对称，

∴ $a=1$，$b=-3$，∴ $a+b=1-3=-2$.

15. (1,2)或$(-7,2)$

16. (674,0)

三、17. **解**：(1)如图.



（第17题图）

(2)点 A' 的坐标为(4,0)，点 B' 的坐标为$(-1,-4)$，点 C' 的坐标为$(-3,-1)$.

18. **解**：(1) $S_{长方形ABCD}=(5-2)\times(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}$.

(2) $A'(2,-\sqrt{2})$，$B'(5,-\sqrt{2})$，

$C'(5,0)$，$D'(2,0)$.

19. **解**：(1)如图所示.

(2)13

(3)为方便求四边形 $ABCD$ 的面积，将其分割如图所示.

∵ $S_{四边形ABCD}=S_{三角形ADE}+S_{三角形DFC}+S_{长方形BEFG}+S_{三角形BCG}$，

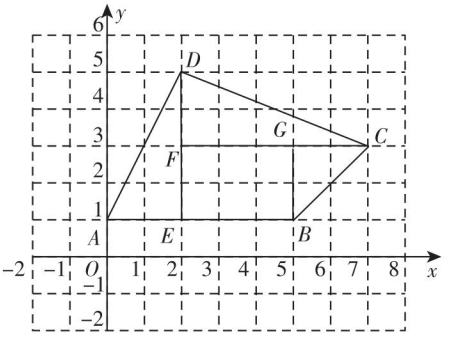
$S_{三角形ADE}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，

$S_{三角形DFC}=\frac{1}{2}\times2\times5=5$，

$S_{长方形BEFG}=2\times3=6$，

$S_{三角形BCG}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

∴ $S_{四边形ABCD}=4+5+6+2=17$.



（第19题图）

20. **解**：(1)如图①，过点 B 作 $BD\perp y$ 轴，垂足为点 D.

∵ $\angle BCD+\angle ACO=90°$，$\angle ACO+\angle CAO=90°$，

∴ $\angle BCD=\angle CAO$，

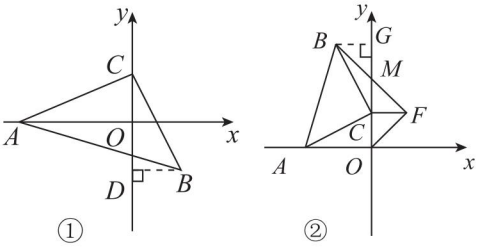
在$\triangle ACO$ 和$\triangle CBD$ 中，

$$\begin{cases}\angle COA=\angle BDC=90°,\\ \angle CAO=\angle BCD,\\ AC=CB,\end{cases}$$

∴ $\triangle ACO\cong\triangle CBD$(AAS)，

∴ $CD=AO=4$，$BD=CO=2$，

∴ 点 B 的坐标为$(2,-2)$；



（第20题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图②,过点 B 作 $BG\perp y$ 轴,垂足为点 G.

$\because \angle CAO+\angle OCA=90°$,$\angle OCA+\angle BCG=90°$,

$\therefore \angle CAO=\angle BCG$,

在$\triangle CAO$和$\triangle BCG$中,

$$\begin{cases}\angle AOC=\angle CGB=90°,\\ \angle CAO=\angle BCG,\\ AC=CB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle CAO\cong\triangle BCG(\mathrm{AAS})$,$\therefore CG=AO$,$BG=CO$,

$\because OC=CF$,$\therefore CF=BG$,

在$\triangle BGM$和$\triangle FCM$中,

$$\begin{cases}\angle BMG=\angle FMC,\\ \angle BGM=\angle FCM,\\ BG=FC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BGM\cong\triangle FCM(\mathrm{AAS})$,$\therefore MG=MC$,

$\therefore MC=\frac{1}{2}CG=\frac{1}{2}AO=2$.

21. **解:**(1)$A(2,3)$与$D(-2,-3)$;$B(1,2)$与$E(-1,-2)$;$C(3,1)$与$F(-3,-1)$. 对应点的坐标的特征:横坐标互为相反数,纵坐标互为相反数.

(2)由(1)可得$a+3=-2a$,$4-b=-(2b-3)$.

解得$a=-1$,$b=-1$.

第6章 一次函数

6.1 函 数

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**$\because$ 骆驼的体温是随时间的变化而变化的,

$\therefore$ 自变量是时间,因变量是体温.

2. B **点拨:**根据函数定义,如果在某个变化过程中,有两个变量x、y,并且对于x在某个范围内的每一个确定的值,y都有唯一确定的值和它对应. 而B中的y的值不具有唯一性,所以y和x不是函数关系.

3. B

4. A

5. $y=180+120t(t\geqslant 0)$

点拨:$\because A$、B两地相距180km,一列火车从B地出发沿BC方向以120km/h的速度行驶,

$\therefore$ 离A地的路程y(km)与行驶时间t(h)之间的函数表达式是$y=180+120t(t\geqslant 0)$.

6. 1

7. $0\leqslant y\leqslant 2$

8. 5

9. **解:**(1)设出租车的起步价为x元,超过3千米后,每千米的车费是y元,由题意,得

$$\begin{cases}x+(8-3)y=17,\\ x+(18-3)y=35,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=8,\\ y=1.8,\end{cases}$$

答:出租车的起步价是8元,超过3千米后,每千米的车费是1.8元.

(2)当$0<a\leqslant 3$时,$w=8$;

当$a>3$时,$w=1.8(a-3)+8=1.8a+2.6$,

即$w=\begin{cases}8(0<a\leqslant 3),\\ 1.8a+2.6(a>3).\end{cases}$

10. **解:**(1)6;2;17

(2)$\because$ 长方形$ABCD$的面积是

$10\times 8=80(\mathrm{cm}^2)$,

$\therefore$ 当$0\leqslant x\leqslant 6$时,$\frac{1}{2}\times 8x=80\times\frac{1}{4}$,解得$x=5$;

易求当点P运动到C时所需的时间为12 s,

当$12\leqslant x\leqslant 17$时,

$\frac{1}{2}\times 8\times 2(17-x)=80\times\frac{1}{4}$,解得$x=14.5$.

$\therefore$ 点P出发5 s或14.5 s后,$\triangle APD$的面积是长方形$ABCD$面积的四分之一.

6.2 一次函数

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**根据一次函数定义判断,A选项自变量x在分母里,C选项自变量x是二次方,D选项自变量x在根号里都不符合一次函数的特征.

2. C **3.** A **4.** B

5. 5

6. -1

7. $\frac{9}{2}$

8. 2

9. **解:**$\because y+1$与z成正比例,比例系数为2,

$\therefore y+1=2z$.

又$\because z$与$x-1$成正比例,

$\therefore$ 设$z=k(x-1)$,

则$y+1=2k(x-1)$.

$\because$ 当$x=-1$时,$y=7$,

$\therefore 7+1=2k\cdot(-1-1)$,

$\therefore k=-2$,

$\therefore y+1=-4(x-1)$,即$y=-4x+3$.

10. **解:**(1)设一次函数的表达式为$y=kx+b$,

把$x=-2$,$y=3$和$x=1$,$y=0$分别代入$y=kx+b$中得$\begin{cases}-2k+b=3,\\ k+b=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1,\\ b=1,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 一次函数的表达式为 $y=-x+1$.

(2)当 $x=0$ 时,得 $y=1$,即 $p=1$.

11. 解:(1)设函数表达式为 $y=kx+b$,由题意可得 $\begin{cases}b=32,\\-20k+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=32,\\k=\dfrac{9}{5},\end{cases}$

∴ 函数表达式为 $y=\dfrac{9}{5}x+32$.

(2)当 $y=0$ 时,$x=-\dfrac{160}{9}$.

即 0℉时摄氏温度是 $-\dfrac{160}{9}$℃.

(3)有. 当 $x=y$ 时,$x=\dfrac{9}{5}x+32$,

解得 $x=-40$,

∴ 华氏温度的值与摄氏温度的值有相等的可能,相应的摄氏温度是 -40 ℃.

6.3 一次函数的图像

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** B

4. D **点拨:**∵ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像与直线 $y=-x+1$ 平行,

∴ $k=-1$,

∵ 一次函数的图像过点(8,2),

∴ $2=-8+b$,

解得 $b=10$,

∴ 此一次函数的表达式为 $y=-x+10$.

5. 一、三、四

6. >

7. $y=7x+7$

8. $-5\leqslant y\leqslant 5$

9. $(-3,1)$

点拨:∵ 一次函数 $y=kx+3k+1$,不论 k 为何值,该函数的图像都经过点 P,

∴ $y=kx+3k+1=(x+3)k+1$,

当 $x+3=0$ 时,$x=-3$,$y=1$.

∴ 点 P 的坐标为 $(-3,1)$.

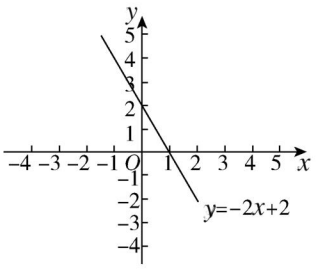
10. 解:(1)将点 $(-2,6)$ 的坐标代入 $y=mx+2$,得 $6=-2m+2$,解得 $m=-2$.

(2)由(1)知,该一次函数的表达式为 $y=-2x+2$,

令 $x=0$,则 $y=2$;

令 $y=0$,则 $x=1$,

∴ 该直线经过点 $(0,2)$,$(1,0)$,其图像如图所示.



(第 10 题图)

(3)此时图像所对应的函数表达式是 $y=-2x+4$ 或 $y=-2x-4$.

11. 解:(1)当 $3-k<0$,即 $k>3$ 时,y 随着 x 的增大而减小,

∴ 满足条件的 k 的值可以为 4,5.

(答案不唯一,满足条件即可)

(2)由题意,得 $3-k\neq 0$ 且 $-k^2+9=0$,

解得 $k=-3$.

∴ 当 k 为 -3 时,它的图像经过原点.

(3)由题意,得 $3-k\neq 0$ 且 $-k^2+9=-2$,

解得 $k=\pm\sqrt{11}$,

∴ 当 k 为 $\pm\sqrt{11}$ 时,它的图像经过点 $(0,-2)$.

12. 解:在直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$ 中,

当 $x=0$ 时,得 $y=0+3=3$,

∴ 点 B 的坐标为 $(0,3)$,

当 $y=0$ 时,得 $-\dfrac{3}{4}x+3=0$,解得 $x=4$,

∴ 点 A 的坐标为 $(4,0)$.

由折叠性质可知,$\triangle ABD\cong\triangle ACD$,

∴ $AC=AB$,$BD=CD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中,$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$,

∴ $AC=5$,

∴ $OC=AC-OA=5-4=1$,

∴ 点 C 的坐标为 $(-1,0)$.

设 $OD=m$,则 $CD=BD=3-m$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中,$OC^2+OD^2=CD^2$,

即 $1^2+m^2=(3-m)^2$,

解得 $m=\dfrac{4}{3}$,∴ $OD=\dfrac{4}{3}$,

∴ 点 D 的坐标为 $(0,\dfrac{4}{3})$.

设直线 AD 的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

将 $A(4,0)$、$D(0,\dfrac{4}{3})$ 代入,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得 $\begin{cases}4k+b=0,\\ b=\frac{4}{3},\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}k=-\frac{1}{3},\\ b=\frac{4}{3},\end{cases}$

∴ 直线 AD 的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

13. 解: ∵ 直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B,

∴ 当 $y=0$ 时,$x=6$,即 A 点坐标为(6,0),

当 $x=0$ 时,$y=8$,即 B 点坐标为(0,8);

∴ $BO=8$,$AO=6$,

∴ $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

∵ 将△ABM 沿 AM 折叠,点 B 恰好落在 x 轴负半轴上的点 C 处,

∴ $AB=AC=10$,$MB=MC$,

∴ $OC=AC-OA=10-6=4$.

设 $MO=m$,则 $MB=MC=8-m$,

在 Rt△OMC 中,$OM^2+OC^2=CM^2$,

∴ $m^2+4^2=(8-m)^2$,

解得 $m=3$,

∴ 点 M 的坐标为(0,3).

14. 解: (1)∵ 点 A 的坐标为(−1,0),点 B 是点 A 关于直线 l 的对称点,直线 l 过点 M 且垂直于 x 轴,

∴ 点 B 的坐标为(2,0).

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$,把点 $C(0,-2)$,$B(2,0)$的坐标分别代入,可得

$\begin{cases}-2=b,\\ 0=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=-2,\end{cases}$

∴ 直线 BC 的表达式为 $y=x-2$.

(2)设 Q 点的坐标为(a,0),

∵ 该垂线与直线 $y=-x+1$ 交于 H 点,与直线 BC 交于 G 点,

∴ $H(a,-a+1)$,$G(a,a-2)$,

∵ 线段 HG 的长为 5,

∴ 当 $a-2-(-a+1)=5$ 时,$a=4$;

当 $-a+1-(a-2)=5$ 时,$a=-1$.

∴ Q 点的坐标为(4,0)或(−1,0).

(3)m 的取值范围为 $-\frac{5}{2}\leqslant m\leqslant 4$.

6.4 用一次函数解决问题

【两年模拟兵法】

1. D

2. B

3. B **点拨:** 由图像可知,

甲始终是匀速行进,乙的行进不是匀速的,故①正确;

乙用了 5−0.5=4.5(小时)到达目的地,故②错误;

乙比甲迟出发 0.5 小时,故③正确;

甲在出发不到 5 小时后被乙追上,故④错误.

故选 B.

4. 30 **点拨:** 设当 $x>18$ 时的函数表达式为 $y=kx+b$,

$\begin{cases}18k+b=54,\\ 28k+b=94,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=4,\\ b=-18,\end{cases}$

即当 $x>18$ 时的函数表达式为 $y=4x-18$,

∵ 102>54,

∴ 当 $y=102$ 时,$102=4x-18$,得 $x=30$,

故答案为 30.

5. ①③ **点拨:** 由题图可得,

货车的速度为:300÷5=60(千米/时),故①正确,

设当 $2.5\leqslant x\leqslant 4.5$ 时,轿车对应的函数表达式为 $y=kx+b$,

$\begin{cases}2.5k+b=80,\\ 4.5k+b=300,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=110,\\ b=-195,\end{cases}$

∴ 当 $2.5\leqslant x\leqslant 4.5$ 时,轿车对应的函数表达式为 $y=110x-195$,

令 $110x-195=60x$,得 $x=3.9$,

即轿车与货车相遇时,货车恰好从甲地出发了 3.9 小时,故②错误,

若轿车到达乙地后,马上沿原路以 CD 段速度返回,设轿车从乙地出发 t 小时再次与货车相遇,

则 $60(4.5+t)+\frac{300-80}{4.5-2.5}t=300$,得 $t=\frac{3}{17}$,故③正确.

6. 解: (1)由题意可得:小丽骑车的速度 $=\frac{36}{2.25}=16$(km/h).

设小明骑车的速度为 $x$km/h,由题意得:

$1\times(16+x)=36$,解得 $x=20$.

答:小明骑车的速度为 20km/h,小丽骑车的速度为 16km/h.

(2)由图像可得:

点 E 的横坐标 $=\frac{36}{20}=\frac{9}{5}$,

点 E 的纵坐标 $=\frac{9}{5}\times 16=\frac{144}{5}$,

∴ 点 $E(\frac{9}{5},\frac{144}{5})$.

点 E 表示小明到了甲地,此时小丽没到乙地.

7. 解: (1)3 600;20;55

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)①设当 $50\leqslant x\leqslant 80$ 时,y 与 x 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

由图像知:点(50,1 950)与点(80,3 600)在函数图像上,

$\therefore \begin{cases}50k+b=1\,950,\\80k+b=3\,600,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=55,\\b=-800,\end{cases}$

$\therefore$ 当 $50\leqslant x\leqslant 80$ 时,y 与 x 的函数表达式为 $y=55x-800$.

②缆车到山顶的线路长为 $3\,600\div 2=1\,800$(m).

乘坐缆车到达终点所需的时间为 $1\,800\div 180=10$(min).

$\therefore$ 小颖到达终点时小亮已用时 $50+10=60$(min),

$\therefore$ 小亮离缆车终点的路程为 $55\times(80-60)=1\,100$(m).

答:当小颖到达缆车终点时,小亮离缆车终点的路程是 1 100 m.

8. 解:(1)设 A 型凳子的售价为 x 元/张,根据题意,得 $\begin{cases}300x-50a=14\,250,\\500x-250a=21\,250,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=50,\\a=15.\end{cases}$

答:a 的值为 15.

(2)设购买 A 型凳子 m 张,则购买 B 型凳子 $(900-m)$ 张,根据题意,得 $\begin{cases}m\geqslant 150,\\m\leqslant 2(900-m),\end{cases}$

解得 $150\leqslant m\leqslant 600$,

设总采购费用为 w 元,根据题意得:

当 $150\leqslant m\leqslant 250$ 时,

$w=50m+40(900-m)=10m+36\,000$;

当 $250<m\leqslant 600$ 时,$w=50\times 250+(50-15)\times(m-250)+40(900-m)=-5m+39\,750$,

$\therefore w=\begin{cases}10m+36\,000(150\leqslant m\leqslant 250),\\-5m+39\,750(250<m\leqslant 600),\end{cases}$

当 $150\leqslant m\leqslant 250$ 时,$10>0$,w 随 m 的增大而增大,

$m=150$ 时,w 的最小值为 37 500;

当 $250<m\leqslant 600$ 时,$-5<0$,w 随 m 的增大而减小,

$m=600$ 时,w 的最小值为 36 750.

$\because 37\,500>36\,750$,

$\therefore$ 购买 A 型凳子 600 张,购买 B 型凳子 300 张时总采购费用最少,最少是 36 750 元.

9. 解:(1)24;$\frac{1}{3}$ **点拨:**观察图像知 A、B 两地相距 24 千米,

$\because$ 甲先出发 6 分钟,由纵坐标看出甲 6 分钟行进了 2 千米,

$\therefore$ 甲的速度是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$(千米/分).

(2)设甲、乙相遇时甲所用的时间为 a 分钟,根据题意,得

$\frac{3}{2}(a-6)+\frac{1}{3}a=24$,

解得 $a=18$,$\therefore F(18,0)$,

设线段 EF 表示的 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$,根据题意,得

$\begin{cases}0=18k+b,\\22=6k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{11}{6},\\b=33,\end{cases}$

$\therefore$ 线段 EF 表示的 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-\frac{11}{6}x+33$.

(3)乙到达终点 A 需要 $24\div\frac{3}{2}=16$(分钟),

甲到达终点 B 需要 $24\div\frac{1}{3}=72$(分钟),

$\therefore$ 当乙到达终点 A 时,甲还需 $72-16-6=50$(分钟)到达终点 B.

10. 解:(1)75 **点拨:**乙车的速度为 $270\div 2-60=75$(千米/时),故答案为 75.

(2)由(1)易知 $a=270\div 75=3.6$,

故当 $a=3.6$ 时,两车之间的距离为 $60\times 3.6=216$(千米),

$b=270\div 60=4.5$,

当 $2<x\leqslant 3.6$ 时,设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$,

$\begin{cases}2k+b=0,\\3.6k+b=216,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=135,\\b=-270,\end{cases}$

即当 $2<x\leqslant 3.6$ 时,y 与 x 之间的函数表达式为 $y=135x-270$;

当 $3.6<x\leqslant 4.5$ 时,设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=mx+n$,

$\begin{cases}3.6m+n=216,\\4.5m+n=270,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=60,\\n=0,\end{cases}$

即当 $3.6<x\leqslant 4.5$ 时,y 与 x 之间的函数表达式为 $y=60x$;

由上可得,甲、乙两车相遇后,y 与 x 之间的函数表达式为

$y=\begin{cases}135x-270(2<x\leqslant 3.6),\\60x(3.6<x\leqslant 4.5).\end{cases}$

(3)当甲车到达距 B 地 90 千米处时,

$x=\frac{270-90}{60}=3$,

$\therefore$ 将 $x=3$ 代入 $y=135x-270$,得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$y=135\times3-270=135$,

即当甲车到达距B地90千米处时,甲、乙两车之间的距离是135千米.

11. 解:(1)30

(2)设乙前往A地时,与B地的距离$y_{乙}$(km)与乙行驶时间x(h)之间的表达式为$y_{乙}=k_1x$,由题意,得$30=k_1$,

$\therefore y_{乙}=30x$.

设乙返回B地时,与B地的距离$y_{乙}$(km)与乙行驶时间x(h)之间的表达式为$y_{乙}=k_2x+b_2$,由题意,

得$\begin{cases}30=k_2+b_2,\\0=2k_2+b_2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-30,\\b_2=60,\end{cases}$

$\therefore y_{乙}=-30x+60$.

综上所述,$y_{乙}=\begin{cases}30x(0\leqslant x\leqslant1),\\-30x+60(1<x\leqslant2).\end{cases}$

(3)由题意得甲修车前、修车后的速度一样,都为$30\div[2-(1.25-0.75)]=20$(km/h).

由函数图像得,乙的速度为30 km/h.

$\therefore$ 甲、乙第一次相遇的时间为出发后$30\div(30+20)=0.6$(h).

(4)设甲与B地的距离为$y_{甲}$(km).

当$x=0.75$时,$y_{甲}=30-0.75\times20=15$.

设甲在修车前$y_{甲}$与x之间的函数表达式为$y_{甲}=kx+b$,将(0,30),(0.75,15)分别代入得

$\begin{cases}30=b,\\15=0.75k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-20,\\b=30,\end{cases}$

$\therefore y_{甲}=-20x+30$,

设甲在修车后$y_{甲}$与x之间的函数表达式为$y_{甲}=k_3x+b_3$,由题意,得

$\begin{cases}15=1.25k_3+b_3,\\0=2k_3+b_3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_3=-20,\\b_3=40,\end{cases}$

$\therefore y_{甲}=-20x+40$,

当$\begin{cases}-20x+30-30x\leqslant10,\\30x-15\leqslant10,\end{cases}$时,

解得$\frac{2}{5}\leqslant x\leqslant\frac{5}{6}$.

当$\begin{cases}-30x+60-15\leqslant10,\\x\leqslant2,\end{cases}$时,

解得$\frac{7}{6}\leqslant x\leqslant2$.

$\therefore$ 乙在行进中能用无线对讲机与甲保持联系的x的取值范围为$\frac{2}{5}\leqslant x\leqslant\frac{5}{6}$或$\frac{7}{6}\leqslant x\leqslant2$.

6.5 一次函数与二元一次方程

【两年模拟兵法】

1. B

2. B

3. A **点拨:**$\because$ 直线$y=k_1x+b_1$与$y=k_2x+b_2$的交点坐标为(2,4),

$\therefore$ 二元一次方程组$\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}$

4. B

5. $2x-3$

6. $\begin{cases}x=-5,\\y=-8\end{cases}$

7. $-\frac{9}{4}$

8. 2;3

9. 解:(1)将点$P(-1,m)$的坐标代入$y=2x+6$得$-2+6=m$,解得$m=4$.

(2)$\begin{cases}x=-1,\\y=4\end{cases}$

(3)直线$y=-bx-k$也经过点P. 理由如下:

$\because$ 直线$y=kx+b$经过点$P(-1,4)$,

$\therefore -k+b=4$,

当$x=-1$时,$y=-bx-k=b-k=-k+b=4$.

$\therefore$ 直线$y=-bx-k$也经过点P.

10. 解:(1)设直线l_1的表达式为$y=kx+b$,

根据题意得$\begin{cases}8k+b=0,\\b=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\frac{5}{8},\\b=-5.\end{cases}$

$\therefore$ 直线l_1的表达式为$y=\frac{5}{8}x-5$.

$\because B(0,-5)$,

$\therefore OB=5$,

$\because$ 点$C(0,-1)$,

$\therefore OC=1$,

$\therefore BC=5-1=4$.

设$D(x,y)$,则$\triangle DCB$的面积$=\frac{1}{2}\times4\times|x|=8$,

解得$x=4$(负值舍去),将$x=4$

代入$y=\frac{5}{8}x-5$得$y=-\frac{5}{2}$.

$\therefore D\left(4,-\frac{5}{2}\right)$

(2)设直线l_2的表达式为$y=ax+c$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据题意得 $\begin{cases}4a+c=-\frac{5}{2},\\ c=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{8},\\ c=-1,\end{cases}$

∴ 直线 l_2 的表达式为 $y=-\frac{3}{8}x-1$.

∵ l_1、l_2 相交于点 D,

∴ 点 D 的坐标可以是方程组 $\begin{cases}y=\frac{5}{8}x-5,\\ y=-\frac{3}{8}x-1\end{cases}$ 的解.

11. 解:(1)把 $C(m,4)$ 代入一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+5$,

可得 $4=-\frac{1}{2}m+5$,解得 $m=2$,∴ $C(2,4)$,

设 l_2 的表达式为 $y=ax(a\neq0)$,则 $4=2a$,解得 $a=2$,

∴ l_2 的表达式为 $y=2x$.

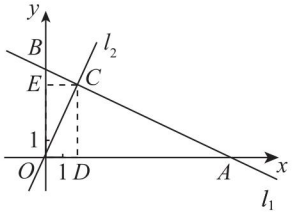
(2)如图,过 C 作 $CD\perp AO$ 于 D,$CE\perp BO$ 于 E,则 $CD=4$,$CE=2$,

在 $y=-\frac{1}{2}x+5$ 中,令 $x=0$,则 $y=5$;令 $y=0$,则 $x=10$,

∴ $A(10,0)$,$B(0,5)$,

∴ $AO=10$,$BO=5$,

∴ $S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times10\times4-\frac{1}{2}\times5\times2=20-5=15$.



(第 11 题图)

(3)k 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 2 或 $-\frac{1}{2}$. **点拨:**一次函数 $y=kx+1$ 的图像为 l_3,且 l_1,l_2,l_3 不能围成三角形,

∴ 当 l_3 经过点 $C(2,4)$ 时,$k=\frac{3}{2}$;

当 l_2,l_3 平行时,$k=2$;

当 l_1,l_3 平行时,$k=-\frac{1}{2}$;

故 k 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 2 或 $-\frac{1}{2}$.

12. 解:(1) $\begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$

(2)解方程组 $\begin{cases}y=x-1,\\ y=-\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

把 $\begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$ 代入 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ 成立,

∴ 三条直线 $y=x-1$,$y=-\frac{1}{2}x+2$,$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ 经过同一个点(2,1).

6.6 一次函数、一元一次方程和一元一次不等式

【两年模拟兵法】

1. D

2. C

3. A **点拨:**根据题意,$y>0$,即 x 轴上方的部分,由函数图像可知 $x>-4$ 时 $y>0$.

4. A

5. $x=-1$

6. $x\leqslant-1$ **点拨:**方法一:把 $(-1,2)$ 代入 $y=-x+m$ 得 $1+m=2$,解得 $m=1$,

∴ 一次函数表达式为 $y=-x+1$,

解不等式 $-x+1\geqslant2$ 得 $x\leqslant-1$.

方法二:∵ 不等式 $-x+m\geqslant2$,即 $y\geqslant2$,

∴ 图像是 $y=2$ 和 $y=2$ 上方的函数图像.

∵ 点 $(-1,2)$ 在函数图像上,∴ 当 $y=2$ 时,$x=-1$,

∵ 一次函数图像自左向右呈下降趋势,

∴ 当 $x\leqslant-1$ 时,$y\geqslant2$.

7. $x<2$

8. $x<-1$ **点拨:**∵ 不等式 $kx+b-(x+a)>0$ 的解集是一次函数 $y_1=kx+b$ 在 $y_2=x+a$ 的图像上方的部分对应的 x 的取值范围,

∴ 不等式 $kx+b-(x+a)>0$ 的解集是 $x<-1$.

9. 解:∵ 一次函数 $y=kx+1$ 与 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 的图像相交于点(2,5),

∴ $5=2k+1$,$5=-\frac{1}{2}\times2+b$,

解得 $k=2$,$b=6$,

将 $k=2$,$b=6$ 代入方程 $kx+b=0$,得 $2x+6=0$,

解得 $x=-3$.

10. 解:(1)∵ 直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(5,0)$,$B(1,4)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases}5k+b=0,\\ k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=5.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+5$.

(2)$\because$ 直线 $y=2x-4$ 与直线 AB 相交于点 C,

$\therefore \begin{cases}y=-x+5,\\ y=2x-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

$\therefore$ 点 C 的坐标为(3,2).

(3)根据图像可得 $x<3$.

11. 解:(1)当 $x=0$ 时,$\frac{1}{2}x+3=0+3=3$,

$\therefore$ 点 A 的坐标是(0,3),

$\because$ 点 A 与点 B 恰好关于 x 轴对称,

$\therefore$ 点 B 坐标为(0,-3).

(2)$\because$ 点 P 横坐标为 -1,$\therefore \frac{1}{2}\times(-1)+3=\frac{5}{2}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标是$(-1,\frac{5}{2})$,

设直线 l_2 的表达式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}b=-3,\\ -k+b=\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{11}{2},\\ b=-3,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 l_2 的表达式为 $y=-\frac{11}{2}x-3$.

(3)$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$或$(\frac{1}{2},-\frac{23}{4})$

点拨:$\because$ 点 P 横坐标是 -1,$\triangle MAB$ 的面积是 $\triangle PAB$ 的面积的$\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 M 的横坐标的长度是$\frac{1}{2}$,

①当横坐标是$-\frac{1}{2}$时,

$y=(-\frac{11}{2})\times(-\frac{1}{2})-3=\frac{11}{4}-3=-\frac{1}{4}$,

②当横坐标是$\frac{1}{2}$时,

$y=(-\frac{11}{2})\times\frac{1}{2}-3=-\frac{11}{4}-3=-\frac{23}{4}$.

$\therefore$ 点 M 的坐标是

$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$或$(\frac{1}{2},-\frac{23}{4})$.

(4)$l_1:y=\frac{1}{2}x+3$,当 $y=0$ 时,$\frac{1}{2}x+3=0$,

解得$x=-6$,

$l_2:y=-\frac{11}{2}x-3$,当 $y=0$ 时,$-\frac{11}{2}x-3=0$,

解得$x=-\frac{6}{11}$,

$\therefore$ 当$-6<x<-\frac{6}{11}$时,l_1,l_2 表示的两个函数的函数值都大于0.

12. 解:(1)将 $A(0,5)$,$B(2,0)$的坐标分别代入 $y=kx+b$,得

$\begin{cases}b=5,\\ 2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{5}{2},\\ b=5,\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{5}{2}x+5$.

把 $x=\frac{4}{3}$代入 $y=-\frac{5}{2}x+5$,解得$y=\frac{5}{3}$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$,

把点 C 的坐标代入 $y=mx$ 得 $m=\frac{5}{4}$,

$\therefore$ 正比例函数的表达式为 $y=\frac{5}{4}x$.

(2)由图像可知:不等式组 $0<-\frac{5}{2}x+5<\frac{5}{4}x$ 的解集为$\frac{4}{3}<x<2$.

13. 解:(1)把点 $C(1,m)$的坐标代入 $y_2=3x$ 得 $m=3$,则点 $C(1,3)$,

把点 $A(3,0)$,点 $C(1,3)$的坐标分别代入$y_1=ax+b$ 中,得 $\begin{cases}3a+b=0,\\ a+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2},\\ b=\frac{9}{2}.\end{cases}$

(2)当$y_1>y_2$ 时,自变量 x 的取值范围为 $x<1$.

(3)当 $y=1$ 时,$3x=1$,解得 $x=\frac{1}{3}$;

当 $y=1$ 时,$-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=1$,解得 $x=\frac{7}{3}$,

$\therefore$ 当点 $P(n,1)$ 在 $\triangle ACO$ 内部(不包括边界)时,n 的取值范围为$\frac{1}{3}<n<\frac{7}{3}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)$\because$ $y=(2m+1)x+m-3$ 是一次函数,且 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore 2m+1<0$,

解得 $m<-\frac{1}{2}$.

(2)$\because$ 图像过第一、二、三象限,

$\therefore \begin{cases}2m+1>0,\\ m-3>0,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $m>3$.

2. **解:**(1)∵ 四边形 $OABC$ 是矩形,

∴ $BC=OA=10$,$AB=OC=8$,

$\angle B=\angle OCB=90°$,$BC/\!/OA$,

由折叠性质得 $AE=OA=10$,$DE=OD$,

在 Rt△ABE 中,由勾股定理得

$BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$,

∴ $CE=10-6=4$,∴ 点 E 坐标为$(4,8)$;

在 Rt△DCE 中,$DE=OD$,$CD=8-OD$,

由勾股定理得 $OD^2=(8-OD)^2+4^2$,

解得 $OD=5$,∴ 点 D 坐标为$(0,5)$.

(2)设直线 DE 的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$,

将 $E(4,8)$、$D(0,5)$ 代入表达式,

得 $\begin{cases}4k+b=8,\\b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{4},\\b=5,\end{cases}$

∴ 直线 DE 的表达式为 $y=\dfrac{3}{4}x+5$,

令 $y=0$,由 $0=\dfrac{3}{4}x+5$ 解得 $x=-\dfrac{20}{3}$,

∴ DE 所在的直线与 x 轴的交点坐标为$(-\dfrac{20}{3},0)$.

3. **解:**(1)∵ $(1,b)$ 在直线 $y=x+1$ 上,

∴ 当 $x=1$ 时,$b=1+1=2$.

(2)方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

(3)直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P. 理由如下:将点$(1,2)$代入 $y=mx+n$,得 $m+n=2$. 将 $x=1$ 代入 $y=nx+m$,得 $y=2$.

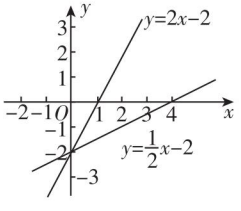
∴ 直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P.

4. **解:**原不等式组可化为 $\begin{cases}2x-2<0,\\\dfrac{1}{2}x-2>0.\end{cases}$

在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=2x-2$ 和 $y=\dfrac{1}{2}x-2$ 的图像如图所示.

∵ $x<1$ 时,$2x-2<0$,$x>4$ 时,$\dfrac{1}{2}x-2>0$,

∴ 原不等式组无解.



(第4题图)

点拨:先将不等式转化为大于或小于 0 的形式,再画出所对应的函数图像,最后通过函数图像找出不等式组的解集.

5. **解:**(1)∵ 直线 DC 的表达式为 $y=-2x+8$,

令 $y=0$,得 $x=4$,即点 C 的坐标为$(4,0)$.

把点 C 的坐标$(4,0)$代入 $y=ax+3$,

得 $0=4a+3$,

∴ $a=-\dfrac{3}{4}$.

(2)由(1)知直线 AC 的表达式为 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$.

令 $x=0$,得 $y=3$,

∴ 点 E 的坐标为$(0,3)$.

∵ BD 与 x 轴平行,

∴ $y_B=y_D=y_E$,即点 D 的纵坐标为 3,

令 $3=-2x+8$,得 $x=\dfrac{5}{2}$.

∴ $DE=\dfrac{5}{2}$.

由平行四边形的性质得 $S_{□ABCD}=4S_{△CDE}=4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times3=15$.

又 $S_{△EOC}=\dfrac{1}{2}\times OC\times OE=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$.

∴ 平行四边形 $ABCD$ 的面积是 △EOC 面积的 $\dfrac{5}{2}$ 倍.

6. **解:**(1)设甲种材料每千克 x 元,乙种材料每千克 y 元,

依题意得 $\begin{cases}x+y=60,\\2x+3y=155,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=25,\\y=35.\end{cases}$

答:甲种材料每千克 25 元,乙种材料每千克 35 元.

(2)设生产 B 产品 a 件,则生产 A 产品$(60-a)$件.

依题意,

得 $\begin{cases}(25\times4+35\times1)(60-a)+(25\times3+35\times3)a\leqslant9\,900,\\a\geqslant38,\end{cases}$

解得 $38\leqslant a\leqslant40$.

∵ a 的值为非负整数,∴ $a=38$、39、40.

∴ 共有如下三种方案:

方案 1:A 产品 22 件,B 产品 38 件;

方案 2:A 产品 21 件,B 产品 39 件;

方案 3:A 产品 20 件,B 产品 40 件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)生产 A 产品 22 件,B 产品 38 件成本最低.

理由如下:

设生产成本为 W 元,则 W 与 a 的关系式为

$W=(25\times4+35\times1+40)(60-a)+(35\times3+25\times3+50)a=55a+10\ 500$,

即 W 是 a 的一次函数,

$\because k=55>0$,$\therefore W$ 随 a 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $a=38$ 时,总成本最低,

即生产 A 产品 22 件,B 产品 38 件成本最低.

【第 6 章测试卷】

一、1. C

2. D

3. C **点拨:** $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过第二、三、四象限,

$\therefore k<0,b<0$.

$\therefore$ 函数 $y=-2kx-b$ 的图像经过第一、二、三象限.

$\because |k|<|-2k|$,

$\therefore$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像比 $y=-2kx-b$ 的图像的倾斜度小,

综上所述,符合条件的图像是 C 选项.

4. A

5. B **点拨:** $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $(3,2)$,

$\therefore 2=3k+b$,即 $b=2-3k$.

$\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像不经过第二象限,

$\therefore$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过第一、三、四象限或第一、三象限,

$\therefore k>0,b\leqslant0$,

$\therefore \begin{cases}k>0,\\2-3k\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $k\geqslant\frac{2}{3}$.

6. B **7.** C **8.** A **9.** A **10.** C

二、11. $x\leqslant\frac{2}{3}$

12. -4 **点拨:** 根据题意得 $y+2=k(x-0.5)+b$,

$y=kx+b-0.5k-2$,而 $y=kx+b$,

$\therefore 0.5k+2=0$,$\therefore k=-4$.

13. 三

14. $x>3$ **点拨:** 由图像可得,

当 $x>3$ 时,$y_1<y_2$,即 $kx+b<x+a$,

所以不等式 $kx-x<a-b$ 的解集为 $x>3$.

15. $(-\frac{2}{3},0)$

16. $(\frac{7}{4},0)$

三、17. **解:** (1)由题意,得 $b=0$,$3=2k$,解得 $k=\frac{3}{2}$,$\therefore y=\frac{3}{2}x$.

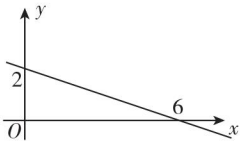
(2)由题意,得 $\begin{cases}2k+b=4,\\\frac{1}{3}k+b=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{13}{5},\\b=-\frac{6}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ 函数表达式为 $y=\frac{13}{5}x-\frac{6}{5}$.

18. **解:** (1)令 $x=0$,得 $y=2$;令 $y=0$,得 $x=6$.

$\therefore$ 直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 过点 $(0,2)$ 和点 $(6,0)$,函数图像如图.



(第 18 题图)

(2)它的图像与 x 轴交于点 $(6,0)$,与 y 轴交于点 $(0,2)$.

(3)$S=\frac{1}{2}\times2\times6=6$.

19. **解:** (1)$\because$ 直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(5,0)$,$B(1,4)$,$\therefore \begin{cases}5k+b=0,\\k+b=4.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=5.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+5$.

(2)联立 $\begin{cases}y=-x+5,\\y=2x-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3,2)$.

20. **解:** (1)$\because$ 正比例函数 $y=2x$ 的图像经过点 $A(m,2)$,

$\therefore 2=2m$,$\therefore m=1$.

$\because$ 一次函数的图像经过点 $A(1,2)$,$B(-2,-1)$,

$\therefore \begin{cases}k+b=2,\\-2k+b=-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=x+1$.

(2)当 $y=0$ 时,$x+1=0$,即 $x=-1$,

$\therefore D(-1,0)$.$\therefore OD=1$.

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

21. **解:** (1)由直线 $y=-2x+4$ 与 x 轴交于点 A,令 $y=0$,则 $-2x+4=0$,解得 $x=2$.$\therefore A(2,0)$.

$\because OC=OA$,$\therefore C(0,2)$ 或 $(0,-2)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 直线 $y=kx+b$（k、b 是常数，且 $k\neq0$）经过点 A 和点 C，∴ $\begin{cases}2k+b=0,\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2k+b=0,\\b=2.\end{cases}$

解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

(2)由(1)易知 $B(0,4)$，$C(0,2)$，又 $PC=PB$，

∴ P 的纵坐标为 3.

∵ 点 P 在直线 $y=-2x+4$ 上，

∴ 把 $y=3$ 代入 $y=-2x+4$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

∴ 点 P 的坐标为 $(\frac{1}{2},3)$.

22. 解：(1)设线段 AB 的函数表达式为 $E_1=k_1t+b_1$，将 $(0,20)$，$(2,100)$ 代入 $E_1=k_1t+b_1$，

得 $\begin{cases}b_1=20,\\2k_1+b_1=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_1=20,\\k_1=40,\end{cases}$

∴ 线段 AB 的函数表达式为：$E_1=40t+20$；

设线段 AC 的函数表达式为 $E_2=k_2t+b_2$，

将 $(0,20)$，$(6,100)$ 代入 $E_2=k_2t+b_2$，

得 $\begin{cases}b_2=20,\\6k_2+b_2=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_2=20,\\k_2=\frac{40}{3},\end{cases}$

∴ 线段 AC 的函数表达式为：$E_2=\frac{40}{3}t+20$.

(2)根据题意，得 $\frac{40}{3}\times(6-2-a)=10a$，

解得 $a=\frac{16}{7}$.

答：a 的值为 $\frac{16}{7}$.

23. 解：(1)在图像中可以看出，从出发到父子相遇花费了 12 分钟.

设小明步行速度为 x 米/分，则小明父亲骑车速度为 $2x$ 米/分，根据题意，得

$12x+12\times2x=2\,880$. 解得 $x=80$.

∴ 两人相遇处离学校的距离是 $80\times12=960$(米).

(2)设小明的父亲在赶往学校的过程中，离学校的路程 s 与时间 t 之间的函数表达式为 $s=kt+b$.

把 $(0,2\,880)$ 和 $(12,960)$ 分别代入，

得 $\begin{cases}2\,880=b,\\960=12k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-160,\\b=2\,880.\end{cases}$

∴ $s=-160t+2\,880$.

(3)在 $s=-160t+2\,880$ 中，

令 $s=0$，得 $0=-160t+2\,880$.

解得 $t=18$，$20-18=2$(分钟).

∴ 改由他的父亲骑车载他到学校，他不会迟到，且能提前 2 分钟到校.

【期末选优拔尖测试】

一、1. D

2. C　**点拨：**其中 $\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{4}$，$\frac{\pi}{3}$，0.101 001 000 1…(每相邻两个 1 之间依次多 1 个 0)都是无理数，$-\sqrt{9}=-3$，$0.\dot{3}\dot{2}$ 是无限循环小数，$\frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,857\dot{}$，$(\sqrt{2}-1)^0=1$，它们都是有理数.

3. C　**点拨：**∵ 点 $P(m-2,m+1)$ 在第二象限，

∴ $\begin{cases}m-2<0,\\m+1>0,\end{cases}$ 解得 $-1<m<2$.

4. C　**点拨：**图中全等三角形有 $\triangle AOD\cong\triangle BOC$，$\triangle ACD\cong\triangle BDC$，$\triangle ABD\cong\triangle BAC$.

5. C　**点拨：**∵ $AB=AC$，AE 是 $\angle BAC$ 的平分线，

∴ AE 垂直平分 BC，选项 A、B 正确；

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\begin{cases}AB=AC,\\\angle BAD=\angle CAD,\\AD=AD,\end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，选项 D 正确. 故选 C.

6. A　**点拨：**由图像可知，汽车行驶到距离出发点 120 千米的地方后又返回出发点，共行驶了 240 千米，所以①错误；

从 1.5 小时开始到 2 小时，时间增加而汽车离出发地的距离没有变化，停留了 $2-1.5=0.5$(小时)，所以②正确；

平均速度为 $240\div4.5=\frac{160}{3}$(千米/时)，所以③错误；

出发后 3 小时至 4.5 小时，图像是直线形式，说明在进行匀速运动，所以④错误. 故选 A.

7. A　**点拨：**∵ CE 平分 $\angle ACB$，CF 平分 $\angle ACD$，

∴ $\angle ACE=\angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\angle ACF=\angle DCF=\frac{1}{2}\angle ACD$.

∵ $\angle ACB+\angle ACD=180°$，

∴ $\angle ACE+\angle ACF=\frac{1}{2}\times180°=90°$，

∴ $\triangle CEF$ 是直角三角形.

又∵ $EF/\!/BC$，

∴ $\angle BCE=\angle MEC$，$\angle DCF=\angle MFC$，

∴ $\angle ACE=\angle MEC$，$\angle ACF=\angle MFC$，

∴ $CM=EM=FM$，

∵ $CM=3$，∴ $EF=6$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore CE^2 + CF^2 = EF^2 = 6^2 = 36$.

8. B **点拨:**解法一:如图①,过点 C 作 $CN \perp AB$ 于 N,CN 交 AD 于 F,作 N 关于 AD 的对称点 E,此时 $CF + EF$ 最短,

$\because AB = AC$,AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore AD \perp BC$,

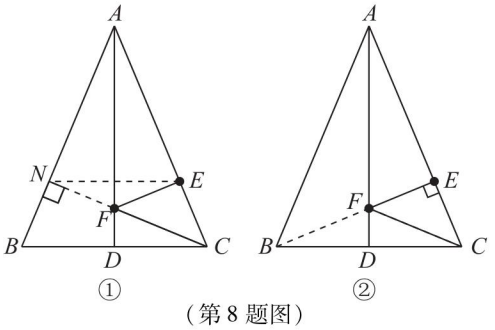
$\therefore E$ 点在 AC 上,

即 $CF + EF$ 的最小值为 CN 的长度,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times AB \times CN$,

$\therefore CN = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{10 \times 12}{13} = \frac{120}{13}$,

即 $CF + EF$ 的最小值是 $\frac{120}{13}$.



(第 8 题图)

解法二:如图②,过点 B 作 $BE \perp AC$ 于 E,BE 交 AD 于 F,连接 CF,此时 $CF + EF$ 最短,

$\because AB = AC$,AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore AD$ 垂直平分 BC,

$\therefore CF = BF$,

$\therefore CF + EF = BF + EF$,

即 $CF + EF$ 的最小值为 BE 的长度,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times AC \times BE$,

$\therefore BE = \frac{BC \times AD}{AC} = \frac{10 \times 12}{13} = \frac{120}{13}$,

即 $CF + EF$ 的最小值是 $\frac{120}{13}$.

二、9. $k < 2$ **点拨:**$\because$ 一次函数的图像经过第一、二、四象限,$\therefore k - 2 < 0$,解得 $k < 2$.

10. 6 或 $2\sqrt{41}$

点拨:当 x 为斜边时,$x = \sqrt{8^2 + 10^2} = 2\sqrt{41}$,

当 x 为直角边时,$x = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$.

11. 6cm **点拨:**当 4cm 为腰时,$4 + 4 = 8$,不符合三角形两边之和大于第三边,所以舍去;

当 4cm 为底时,腰长为 $\frac{1}{2} \times (16 - 4) = 6$,

$4 + 6 > 6$ 成立.

12. 4 **点拨:**$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle ABC = 60°$,

$\because \angle E = 30°$,$\therefore \angle CDE = 30°$,

$\therefore CD = CE = 2$.

又$\because BD$ 为 AC 边上的高,

$\therefore \angle DBC = 30°$.

$\therefore BC = 2CD = 4$.

13. $(-2, -2)$

点拨:当线段 AB 与直线 $y = x$ 垂直时,线段 AB 最短,如图过 A 作 $AB \perp$ 直线 $y = x$ 于 B,则此时 AB 最短,过 B 作 $BC \perp OA$ 于 C,

$\because$ 点 B 在直线 $y = x$ 上,

$\therefore \angle AOB = \angle OAB = 45°$,

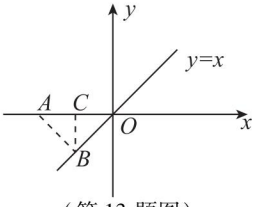
$\therefore AB = OB$,

$\because BC \perp OA$,$\therefore C$ 为 OA 的中点,

$\because \angle ABO = 90°$,

$\therefore BC = OC = AC = 2$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2, -2)$.



(第 13 题图)

14. 16 **点拨:**$\because DE$ 是 BC 的垂直平分线,

$\therefore DB = DC$,

$\therefore \triangle ABD$ 的周长 $= AB + AD + BD = AB + AD + DC = AB + AC = 16$.

15. $x > -2$ **点拨:**从图像上看,$l_1: y = -x + b$ 在 $l_2: y = mx + n$ 下方时,$-x + b < mx + n$,此时 $x > -2$,所以不等式的解集为 $x > -2$.

16. 3 **点拨:**过点 D 作 $DH \perp BC$ 交 BC 于点 H,如图所示.

$\because BD \perp CD$,$\therefore \angle BDC = 90°$,

又$\because \angle C + \angle BDC + \angle DBC = 180°$,

$\angle ADB + \angle A + \angle ABD = 180°$,

$\angle ADB = \angle C$,$\angle A = 90°$.

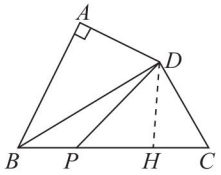
$\therefore \angle ABD = \angle CBD$.

$\therefore BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

又∵ $AD \perp AB$，$DH \perp BC$，∴ $DH = AD = 3$，

∴ 当 $DP \perp BC$ 时 DP 最短，即 DP 长的最小值为 3.



（第 16 题图）

17. 14　**点拨：**如图，取 AB 的中点 D，连接 CD.

∵ $AC = BC = 10$，$AB = 12$.

∴ $BD = \frac{1}{2}AB = 6$，

$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 8$；

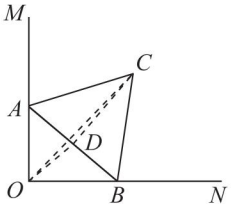
连接 OD，OC，有 $OC \leqslant OD + DC$，

当 O、D、C 共线时，OC 有最大值，最大值是 $OD + CD$，

又∵ $\triangle AOB$ 为直角三角形，D 为斜边 AB 的中点，

∴ $OD = \frac{1}{2}AB = 6$，

∴ $OD + CD = 6 + 8 = 14$，即 OC 最大距离为 14.



（第 17 题图）

18. $\frac{7}{8}$ 或 9

点拨：把 $x = 0$ 代入函数表达式，得 $y = 3$，则点 B 坐标为 $(0,3)$.

把 $y = 0$ 代入函数表达式，得 $x = 4$，则点 A 坐标为 $(4,0)$.

所以 $OB = 3$，$OA = 4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，由勾股定理知，$AB = 5$.

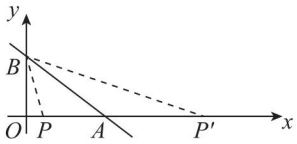
设 $P(t,0)$.

①当 $AP = BP$ 时，$OB^2 + OP^2 = BP^2 = AP^2$，

即 $3^2 + t^2 = (4 - t)^2$，解得 $t = \frac{7}{8}$.

②当 $AP' = AB = 5$ 时，P' 的坐标为 $(9,0)$，此时 $t = 9$.

综上所述，当点 P 的运动时间是 $\frac{7}{8}$ 或 9 秒时，$\triangle PAB$ 是等腰三角形.



（第 18 题图）

三、19. **解：**(1) 原式 $= -3 + 3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$.

(2) $3(x-1)^3 - 24 = 0$，

$3(x-1)^3 = 24$，

$(x-1)^3 = 8$，

$x - 1 = 2$，

$x = 3$.

四、20. (1) **证明：**∵ BE 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle MBE = \angle CBE$，

∵ $MN /\!/ BC$，

∴ $\angle MEB = \angle CBE$，

∴ $\angle MBE = \angle MEB$.

∴ $\triangle MBE$ 为等腰三角形.

(2) **解：**同 (1) 可得 $\triangle CEN$ 为等腰三角形，

∴ $CN = EN$. 由 (1) 可知 $BM = EM$.

∵ $C_{\triangle AMN} = AM + MN + AN = AM + EM + EN + AN$

$= AM + BM + CN + AN = AB + AC = 8\mathrm{cm}$，

∴ $BC = C_{\triangle ABC} - (AB + AC) = 13 - 8 = 5(\mathrm{cm})$.

∴ 线段 BC 的长为 5cm.

21. **证明：**(1) ∵ $AE = CF$，

∴ $AE + EF = CF + EF$，即 $AF = CE$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CED$ 中，

$\begin{cases} AB = CD, \\ AF = CE, \end{cases}$ ∴ $\mathrm{Rt}\triangle AFB \cong \mathrm{Rt}\triangle CED(\mathrm{HL})$，

∴ $\angle A = \angle C$，∴ $AB /\!/ CD$.

(2) 由 (1) 得 $\mathrm{Rt}\triangle AFB \cong \mathrm{Rt}\triangle CED$，

∴ $BF = DE$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEM$ 中，

$\begin{cases} \angle BFM = \angle DEM = 90^\circ, \\ \angle BMF = \angle DME, \\ BF = DE, \end{cases}$

∴ $\triangle BFM \cong \triangle DEM(\mathrm{AAS})$，

∴ $ME = MF$，即点 M 是线段 EF 的中点.

22. **解：**(1) 把点 $A(2,a)$ 的坐标代入 $y = \frac{1}{2}x$，解得 $a = 1$，

把点 $A(2,1)$ 的坐标代入 $y = -\frac{1}{2}x + b$，解得 $b = 2$.

(2) 把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 2$，解得 $x = 4$，

∴ 点 B 的坐标为 $(4,0)$，∴ $OB = 4$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOB}$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\cdot OC=\frac{1}{2}\times 4\times 1$,$\therefore OC=2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(0,2)$或$(0,-2)$.

23. **解:**(1)当 $x\geqslant 2$ 时,

$y_1=3\,000+3\,000(x-1)\times(1-30\%)=2\,100x+900$.

$y_2=3\,000x\times(1-25\%)=2\,250x$.

(2)当甲、乙两个商场的收费相同时,

$2\,100x+900=2\,250x$,解得 $x=6$.

答:当甲、乙两个商场的收费相同时,所买商品为 6 件.

24. (1)**证明:**如图,连接 MC、MD,

$\because \angle ACB=\angle ADB=90^\circ$,$M$ 是 AB 的中点,

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB$,$DM=\frac{1}{2}AB$,$\therefore MC=MD$,

又$\because$ 在$\triangle CDM$中,N 是 CD 的中点,

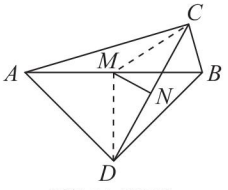
$\therefore MN\perp CD$.

(2)**解:**$\because AB=50$,$\therefore CM=\frac{1}{2}\times 50=25$,

$\because MN\perp CD$,N 是 CD 的中点,

$\therefore CN=\frac{1}{2}CD=24$,

在 Rt$\triangle CMN$中,根据勾股定理得 $MN=7$.



(第 24 题图)

25. **解:**(1)如图①所示,过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D,

$\because BP$ 平分$\angle ABC$,$\therefore PD=PC$.

在 Rt$\triangle BPD$与 Rt$\triangle BPC$中,

$\begin{cases}PD=PC,\\PB=PB,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BPD\cong$Rt$\triangle BPC$(HL),

$\therefore BD=BC=6$ cm,$\therefore AD=10-6=4$(cm).

由题意,可得 $AC=8$cm.

设 $PD=PC=x$ cm,则 $PA=(8-x)$cm.

在 Rt$\triangle APD$中,$PD^2+AD^2=PA^2$,

即 $x^2+4^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$,

$\therefore$ 当 $t=3$ 时,BP 平分$\angle ABC$.

(2)①如图②,当 P 在 AC 边上时,$CP=BC=6$cm,

当 $t=6$ 时,$\triangle BCP$为等腰三角形;

②当 P 在 AB 边上时,有三种情况:

(ⅰ)如图③,使 $BP=CB=6$cm,此时 $AP=4$cm,

P 运动的路程为 12cm,

当 $t=12$ 时,$\triangle BCP$为等腰三角形;

(ⅱ)如图④,若 $CP=CB=6$cm,过 C 作斜边 AB 的高,根据面积法求得高 $CD=4.8$cm,

在 Rt$\triangle PCD$中,$PD=\sqrt{PC^2-CD^2}=\sqrt{6^2-4.8^2}=3.6$(cm),$BP=7.2$cm,

P 运动的路程为 $8+10-7.2=10.8$(cm),

当 $t=10.8$ 时,$\triangle BCP$为等腰三角形;

(ⅲ)如图⑤,若 $BP=CP$,则$\angle PCB=\angle PBC$,

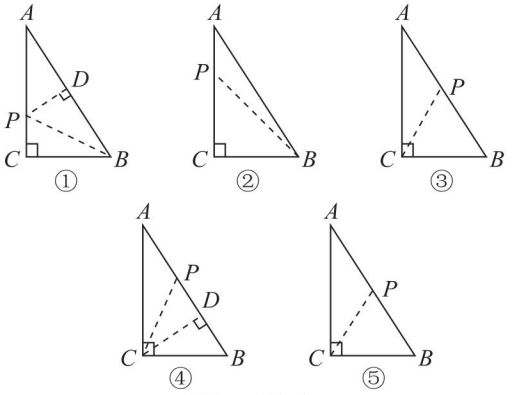
$\because \angle ACP+\angle BCP=90^\circ$,$\angle PBC+\angle CAP=90^\circ$,

$\therefore \angle ACP=\angle CAP$,$\therefore PA=PC=PB$.

$\therefore PA=PB=5$cm,P 的路程为 13cm,

当 $t=13$ 时,$\triangle BCP$为等腰三角形.

综上所述,当 $t=6$、12、10.8 或 13 时,$\triangle BCP$为等腰三角形.



(第 25 题图)

26. **解:**(1)如图①,在 AB 上截取 $AE=AC$,连接 DE,

$\because AD$ 为$\angle BAC$的平分线,$\therefore \angle CAD=\angle EAD$.

在$\triangle ACD$与$\triangle AED$中,$\begin{cases}AC=AE,\\\angle CAD=\angle EAD,\\AD=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle AED$(SAS),

$\therefore \angle C=\angle AED$,$AC=AE$,$CD=DE$,

$\because \angle C=2\angle B$,$\therefore \angle AED=2\angle B$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

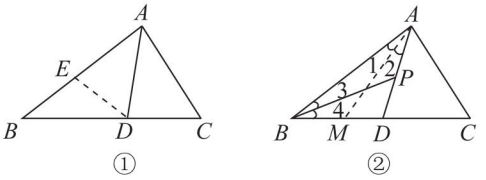
$\because \angle AED = \angle B + \angle BDE$,

$\therefore \angle B = \angle BDE$,

$\therefore BE = DE$,

$\therefore BE = AB - AE = AB - AC = 12 - 7.2 = 4.8$,

$\therefore CD = DE = BE = 4.8$.



(第26题图)

(2) 如图②过点 A 作 AM 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 M,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$,即

$\angle BAC = 2\angle BAD = 2\angle CAD$,

$\because \angle BAC = 2\angle ABC$,$\therefore \angle ABC = \angle BAD = \angle CAD$,

$\because AM$ 平分 $\angle BAD$,BP 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle BAD$,

$\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle ABC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$,

在 $\triangle BAM$ 与 $\triangle ABP$ 中, $\begin{cases} \angle ABC = \angle BAD, \\ \angle 1 = \angle 3, \\ BA = AB, \end{cases}$

$\therefore \triangle BAM \cong \triangle ABP$(AAS),$\therefore AM = BP$,

$\because AC = BP$,$\therefore AM = AC$,

$\because \angle AMC = \angle ABC + \angle 1$, $\angle CAM = \angle CAD + \angle 2$,

并且 $\angle ABC = \angle CAD$, $\angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle AMC = \angle CAM$, $\therefore AC = MC$,

$\therefore AC = MC = AM$,

$\therefore \triangle ACM$ 为等边三角形,

$\therefore \angle C = 60°$.

27. 解:【探索方法】

$\because AD \perp ED$,$BE \perp ED$, $\angle ACB = 90°$,

$\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90°$,

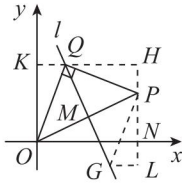
$\therefore \angle ACD + \angle DAC = \angle ACD + \angle ECB = 90°$,

$\therefore \angle DAC = \angle ECB$,

在 $\triangle CDA$ 和 $\triangle BEC$ 中, $\begin{cases} \angle DAC = \angle ECB, \\ \angle ADC = \angle CEB, \\ CA = BC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BEC \cong \triangle CDA$(AAS).

【方法应用】



(第27题图)

如图,过点 P 作 $PN \perp x$ 轴于点 N,过点 Q 作 $QK \perp y$ 轴于点 K,

直线 KQ 和直线 NP 相交于点 H,

由题意易得 $\triangle OKQ \cong \triangle QHP$(AAS),

若设 $H(4,n)$,则 $KQ = PH = n - m = n - 2$,

$OK = QH = 4 - KQ = 6 - n$,

$\because OK = n$,则 $6 - n = n$,$\therefore n = 3$,

$\therefore$ 点 Q 坐标为$(1,3)$.

过点 P 作 $PG \perp PQ$ 交直线 QM 于点 G,过点 G 作 $GL \perp HP$ 交直线 HP 于点 L,

此时易得 $\triangle QHP \cong \triangle PLG$(AAS),从而可求 $G(3,-1)$,

设直线 l 的函数表达式为 $y = kx + b$,把 $Q(1,3)$,$G(3,-1)$代入,

得 $\begin{cases} 3 = k + b, \\ -1 = 3k + b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -2, \\ b = 5, \end{cases}$

$\therefore$ 直线 l 的函数表达式为 $y = -2x + 5$,

当 $y = 0$ 时, $-2x + 5 = 0$,解得 $x = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 直线 l 与 x 轴的交点坐标为$(\frac{5}{2},0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

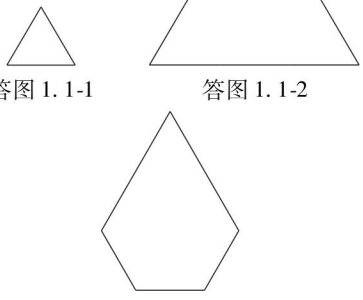
教材习题参考答案及点拨

第1章 全等三角形

1.1 全等图形

练习

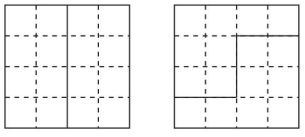
1. 解: 如答图1.1-1,有6个全等的小等边三角形;如答图1.1-2,有2个全等的大等边三角形;如答图1.1-3,有6个全等的五边形等.



答图1.1-1　答图1.1-2　答图1.1-3

点拨: 根据全等图形的定义判断即可.

2. 解: 如答图1.1-4所示.



答图1.1-4

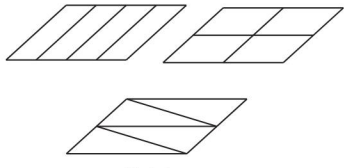
点拨: 答案不唯一,将正方形适当分割,使分割成的两个图形满足全等图形的定义即可.

习题1.1

1. 解: 第(1)组中,题图③与题图④两个图形是全等图形;第(2)组中,题图①、题图②与题图④三个图形是全等图形.

点拨: 判断几个图形是否为全等图形时,既要看图形的形状是否相同,也要看图形的大小是否相等. 注意,图形的全等与否不受位置影响.

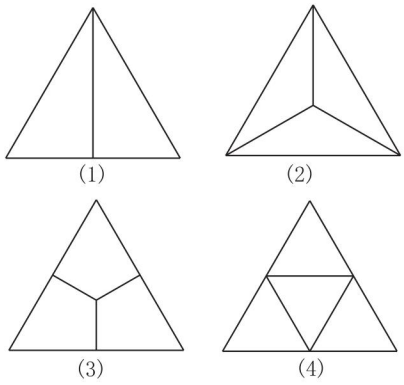
2. 解: 如答图1.1-5所示.



答图1.1-5

点拨: 答案不唯一,只要能使分成的4个图形全等即可.

3. 解: 如答图1.1-6所示.



答图1.1-6

点拨: 分成2个全等图形,只需连接一个顶点和它的对边的中点即可,如答图1.1-6(1);分成3个全等图形的方案较多,如答图1.1-6(2)(3);分成4个全等图形,只需连接三边中点即可,如答图1.1-6(4).

1.2 全等三角形

练习

1. 解: $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle B = \angle D$, $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAD = \angle DCB$.

点拨: (1) AC 是这对全等三角形的公共边,因此不必写出;(2)根据等量加等量和相等,可以得到 $\angle BAC + \angle CAD = \angle DCA + \angle ACB$, 即 $\angle BAD = \angle DCB$.

2. 略. **点拨:** 翻折和旋转可以改变图形的位置,但不改变图形的形状和大小,这两种变换是全等变换,因此可以通过这两种变换解答.

习题1.2

1. 解: 对应边是 OM 和 OP, MQ 和 PN, OQ 和 ON;对应角是 $\angle M$ 和 $\angle P$, $\angle Q$ 和 $\angle N$, $\angle MOQ$ 和 $\angle PON$.

点拨: 全等三角形的表示方法体现了严密的对应关系,若两个三角形全等,则三对顶点互相对应,三对边互相对应,三对角互相对应.

2. 解: 对应边是 BC 和 CB, CE 和 BD, BE 和 CD;对应角是 $\angle EBC$ 和 $\angle DCB$, $\angle E$ 和 $\angle D$, $\angle BCE$ 和 $\angle CBD$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 解: ∵ $\triangle ABC \cong \triangle DBC$,

∴ $\angle A = \angle D$, $\angle ACB = \angle DCB$.

∵ $\angle A = 45°$, $\angle ACD = 76°$,

∴ $\angle D = 45°$, $\angle ACB = \angle DCB = \frac{1}{2} \times 76° = 38°$.

在$\triangle BCD$中,由三角形内角和定理知:$\angle D + \angle DCB + \angle DBC = 180°$,

∴ $45° + 38° + \angle DBC = 180°$,

∴ $\angle DBC = 97°$.

1.3 探索三角形全等的条件

练习

1. 解: 题图①与题图④是全等三角形. 因为在这两个三角形中,有两组对应边相等,且对应边所夹的角也相等,根据 SAS,可以判定这两个三角形全等. 同理可证,题图③与题图⑤也是全等三角形.

点拨: 在题图②与题图⑥中,虽然两个三角形有两组对应边相等,但是对应边所夹的角不相等,所以这两个三角形不是全等三角形.

2. 证明: 在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AE = AD, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ACD$(SAS).

点拨: 在书写判定三角形全等的理由 SAS 时,要按照边、角、边的顺序书写,然后将这三条理由用"{"括起来.

练习

1. AC;BC;线段中点的定义;AC;BC;已证;A;B;已知;AE;BD;已知;SAS;全等三角形的对应角相等

点拨: 几何证明属于演绎推理,每个步骤都要有充分的依据.

2. BDA;CDA;BDA;CDA;等角的补角相等;BD;CD;已知;BDA;CDA;已证;AD;AD;公共边;SAS;全等三角形的对应边相等

3. 证明: ∵ $AB // CD$(已知),

∴ $\angle ABD = \angle CDB$(两直线平行,内错角相等).

在$\triangle ABD$和$\triangle CDB$中,

$$\begin{cases} AB = CD(\text{已知}), \\ \angle ABD = \angle CDB(\text{已证}), \\ BD = DB(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$(SAS).

∴ $\angle ADB = \angle CBD$(全等三角形的对应角相等).

∴ $AD // BC$(内错角相等,两直线平行).

点拨: 本题中,将证明两直线平行的问题转化为证明两个角相等的问题,进而转化为证明两个三角形全等的问题.

练习

1. 解: 题图①与题图⑥是全等三角形. 因为在这两个三角形中,有两组对应角相等,且对应角夹的边也相等,根据 ASA,可以判定这两个三角形全等. 同理可证,题图②与题图④、题图③与题图⑤也是全等三角形.

点拨: 在已知条件中涉及的角比较多的情况下,一般要考虑利用 ASA 证明三角形全等.

2. 证明: ∵ O 是 AB 的中点(已知),

∴ $AO = BO$(线段中点的定义).

∵ $AC // BD$(已知),

∴ $\angle A = \angle B$(两直线平行,内错角相等).

在$\triangle AOC$和$\triangle BOD$中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B(\text{已证}), \\ AO = BO(\text{已证}), \\ \angle AOC = \angle BOD(\text{对顶角相等}), \end{cases}$$

∴ $\triangle AOC \cong \triangle BOD$(ASA).

∴ $CO = DO$(全等三角形的对应边相等),

即 O 是 CD 的中点.

点拨: 证明 O 是 CD 的中点,可以通过证明 $CO = DO$, $CO = \frac{1}{2}CD$ 或 $DO = \frac{1}{2}CD$来解决. 本题中,$\triangle AOC$和$\triangle BOD$全等的条件充分,因此更适合通过证明 $CO = DO$ 来证明 O 是 CD 的中点.

练习

1. 证明: 在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D(\text{已知}), \\ \angle ACB = \angle DBC(\text{已知}), \\ BC = CB(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$(AAS).

∴ $AB = DC$(全等三角形的对应边相等).

点拨: 运用 AAS 证明三角形全等时,应注意对应边是两组对应的角中的一组对应角所对的边,而不是两组对应角所夹的边.

2. 证明: 方法一:∵ $CB \perp AD$, $AE \perp DC$(已知),

∴ $\angle ABF = \angle CBD = \angle AED = 90°$(垂直的定义),

∴ $\angle A + \angle AFB = 90°$, $\angle A + \angle D = 90°$(直角三角形的两锐角互余).

∴ $\angle AFB = \angle D$(同角的余角相等).

在$\triangle ABF$和$\triangle CBD$中,

$$\begin{cases} \angle AFB = \angle D(\text{已证}), \\ \angle ABF = \angle CBD(\text{已证}), \\ AB = CB(\text{已知}), \end{cases}$$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ △ABF≌△CBD(AAS).

方法二:∵ $CB\perp AD$,$AE\perp DC$(已知),

∴ ∠ABF = ∠CBD = ∠AED = 90°(垂直的定义),

∴ ∠A + ∠D = 90°,∠C + ∠D = 90°(直角三角形的两锐角互余).

∴ ∠A = ∠C(同角的余角相等).

在△ABF 和△CBD 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle C\text{(已证)},\\ AB=CB\text{(已知)},\\ \angle ABF=\angle CBD\text{(已证)},\end{cases}$$

∴ △ABF≌△CBD(ASA).

练习

1. 证明:在△ABE 和△ACD 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle A\text{(公共角)},\\ AB=AC\text{(已知)},\\ \angle 1=\angle 2\text{(已知)},\end{cases}$$

∴ △ABE≌△ACD(ASA).

∴ $AE=AD$(全等三角形的对应边相等).

∵ $DB=AB-AD$,$EC=AC-AE$,

∴ $DB=EC$(等量减等量差相等).

点拨:“等量加等量和相等”与“等量减等量差相等”是推导几何中的数量关系时常用的基本原理.

2. 证明:∵ ∠ABC = ∠DCB,∠1 = ∠2(已知),

∴ ∠ACB = ∠DBC(等量减等量差相等).

在△ABC和△DCB 中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle DCB\text{(已知)},\\ BC=CB\text{(公共边)},\\ \angle ACB=\angle DBC\text{(已证)},\end{cases}$$

∴ △ABC≌△DCB(ASA).

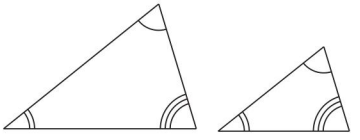
∴ $AB=DC$(全等三角形的对应边相等).

点拨:本题在证明∠ACB = ∠DBC 的过程中,应用了“等量减等量差相等”的基本原理.

练习

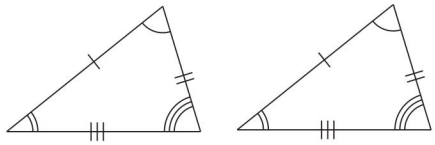
1. 解:三对内角分别相等的两个三角形不一定全等.

(1)如答图1.3-1,当两个三角形三对内角分别相等,但对应边不相等时,这两个三角形不全等;



答图1.3-1

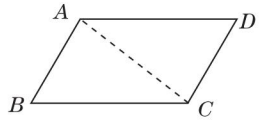
(2)如答图1.3-2,当两个三角形三对内角分别相等,且有任意一对对应边相等时,这两个三角形全等.



答图1.3-2

点拨:证明两个三角形全等时,至少要有一组对应边相等.

2. 证明:如答图1.3-3,连接 AC.



答图1.3-3

在△ABC 和△CDA 中,

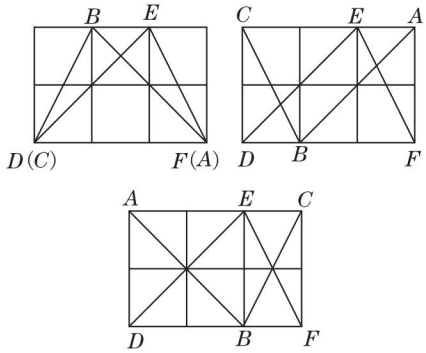
$$\begin{cases}AB=CD\text{(已知)},\\ BC=DA\text{(已知)},\\ AC=CA\text{(公共边)},\end{cases}$$

∴ △ABC≌△CDA(SSS).

∴ ∠BAC = ∠DCA,∠ACB = ∠CAD(全等三角形的对应角相等),

∴ $AB\parallel DC$,$AD\parallel BC$(内错角相等,两直线平行).

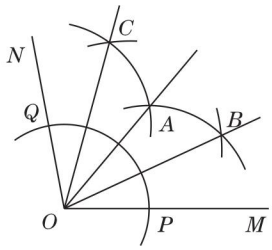
3. 解:所画的图形如答图1.3-4所示. 这样的格点三角形能画3个.



答图1.3-4

练习

1. 解:(1)如答图1.3-5.

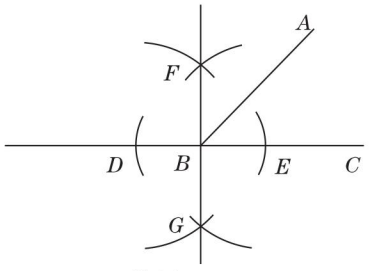


答图1.3-5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

①以 O 为圆心，适当长度为半径画弧，分别交 OM、ON 于点 P、Q；②分别以点 P、Q 为圆心，大于 $\frac{1}{2}PQ$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle MON$ 内部交于点 A；③作射线 OA，则射线 OA 将 $\angle MON$ 二等分；④以相同的方法，作射线 OB、OC，则射线 OB、OC 分别将 $\angle AOM$、$\angle AON$ 二等分. 所以射线 OB、OA、OC 将 $\angle MON$ 四等分.

(2)如答图 1.3-6，



答图 1.3-6

①以 B 为圆心，适当长度为半径画弧，交 BC 于点 E，交 BC 的反向延长线于点 D；②分别以点 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径画弧，设四段圆弧的两个交点为点 F 与点 G；③作直线 FG.

直线 FG 就是过点 B 的 BC 的垂线. 图中 $\angle ABC$ 的余角为 $\angle FBA$.

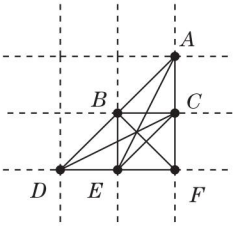
2. 解：作法：

①作射线 OM；②过点 O 作 $ON \perp OM$；③以点 O 为圆心，线段 a 的长度为半径作弧，在 ON 上截取 OB，使 $OB = a$；④以点 O 为圆心，线段 b 的长度为半径作弧，在 OM 上截取 OA，使 $OA = b$；⑤连接 AB. 则 $\triangle AOB$ 就是所求作的直角三角形.

作图略.

练习

1. 解：如答图 1.3-7，其中 $\triangle ABC \cong \triangle BDE \cong \triangle CEF \cong \triangle ECB \cong \triangle FBC \cong \triangle BFE$；$\triangle ABF \cong \triangle DBF$；$\triangle AEF \cong \triangle DCF$.



答图 1.3-7

2. 解：需要添加条件 $AC = AD$ 或 $BC = BD$，可以根据 HL 证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$；

需要添加条件 $\angle CAB = \angle DAB$ 或 $\angle CBA = \angle DBA$，可以根据 AAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

点拨：从已知看，$AC \perp CB$，$AD \perp DB$，可以得到 $\angle C = \angle D = 90°$；从图形上看，可以得到 AB 是公共边. 因此，要证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$，还需要再添加一个条件.

3. 证明：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDA$ 中，

$$\begin{cases} BC = DA\text{(已知)}, \\ AC = CA\text{(公共边)}, \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle CDA$(HL).

$\therefore \angle BCA = \angle DAC$(全等三角形的对应角相等).

$\therefore AD /\!/ BC$(内错角相等，两直线平行).

点拨：用 HL 判定三角形全等时，需要特定的条件——三角形必须为直角三角形.

习题 1.3

1. 解：题图①与题图⑥、题图②与题图⑤、题图③与题图④中的三角形全等. 因为在每两个三角形中，有两组对应边相等，且对应边所夹的角也相等，根据 SAS 可判定全等.

2. 证明：在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle BCA$ 中，

$$\begin{cases} BD = AC, \\ \angle 2 = \angle 1, \\ AB = BA, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle BCA$(SAS).

3. 解：$\because O$ 为 AA'、BB' 的中点，

$\therefore AO = A'O$，$BO = B'O$.

又 $\because \angle AOB = \angle A'OB'$，

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'OB'$.

$\therefore AB = A'B'$.

$\therefore$ 只要量出 $A'B'$ 的长度，就可以知道工件内槽 AB 的长度.

4. 证明：$\because B$、D 分别是 AC、AE 的中点，

$\therefore AC = 2AB$，$AE = 2AD$.

又 $\because AB = AD$，

$\therefore AC = AE$.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB, \\ \angle A = \angle A, \\ AC = AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABE$(SAS).

5. 证明：$\because C$ 是 AE 的中点，

$\therefore AC = CE$.

$\because AB /\!/ CD$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ ∠A = ∠DCE.
又∵ AB = CD,
∴ △ABC≌△CDE(SAS),
∴ ∠ACB = ∠E,
∴ BC∥DE(同位角相等,两直线平行).

6. **解:**(1)△ABE≌△ACD.
证明:∵ ∠A = ∠A,AB = AC,∠B = ∠C,
∴ △ABE≌△ACD(ASA).
(2)△BDF≌△CEF.
证明:∵ ∠B = ∠C,∠BFD = ∠CFE,BD = CE,
∴ △BDF≌△CEF(AAS).
点拨:本题答案不唯一.

7. **解:**∵ AB⊥BD,ED⊥BD,
∴ ∠ABC = ∠EDC = 90°.
又∵ BC = DC,∠ACB = ∠ECD,
∴ △ABC≌△EDC(ASA),
∴ AB = ED.
∴ 测量 DE 的长就能知道 A、B 两点之间的距离.

8. **证明:**∵ BD、CE 是△ABC 的高,
∴ ∠ADB = ∠AEC = 90°.
又∵ ∠A = ∠A,AB = AC,
∴ △ABD≌△ACE(AAS),
∴ BD = CE.
点拨:本题在证明 BD = CE 的过程中,考虑将这两条线段分别放置在两个三角形中,然后去证明这两个三角形全等,可以选择的三角形有两对,一是△ABD 和△ACE,二是△BDC 和△CEB.

9. **证明:**∵ ∠AOB = ∠DOC,∠1 = ∠2,AB = DC,
∴ △AOB≌△DOC(AAS).
∴ AO = DO,BO = CO,
∴ AO + CO = DO + BO,
即 AC = DB.
易错提示:本题容易出现下面的错误证法:
在△ABC 和△DCB 中,
∵ ∠1 = ∠2,AB = DC,BC = CB,
∴ △ABC≌△DCB(ASS).
∴ AC = DB.
点拨:全等三角形的判定方法只有五种,不存在 ASS 这种判定方法.

10. **证明:**∵ ED⊥AB,FC⊥AB,
∴ ∠ADE = ∠BCF = 90°.
∵ AE∥BF,
∴ ∠A = ∠B.
又∵ AE = BF,
∴ △ADE≌△BCF(AAS),
∴ AD = BC,
∴ AD − CD = BC − CD,
即 AC = BD.
点拨:本题运用转化思想,将证明 AC = BD 转化为证明 AD = BC.

11. **解:**(1)△ABC≌△CDA.
证明:∵ AB∥DC,
∴ ∠BAC = ∠DCA.
∵ AD∥BC,
∴ ∠ACB = ∠CAD.
又∵ AC = CA,
∴ △ABC≌△CDA(ASA).
(2)△ABD≌△CDB.
证明:∵ AB∥DC,
∴ ∠ABD = ∠CDB.
∵ AD∥BC,∴ ∠ADB = ∠CBD.
又∵ BD = DB,∴ △ABD≌△CDB(ASA).
(3)△ABO≌△CDO.
证明:由(1)知,△ABC≌△CDA,
∴ AB = CD.
∵ AB∥DC,
∴ ∠OAB = ∠OCD.
又∵ ∠AOB = ∠COD,
∴ △ABO≌△CDO(AAS).
(4)△AOD≌△COB.
证明:由(2)知,△ABD≌△CDB,
∴ AD = CB. ∵ AD∥BC,
∴ ∠ADO = ∠CBO. 又∵ ∠AOD = ∠COB,
∴ △AOD≌△COB(AAS).

12. **解:**(1)△ABC≌△AED.
证明:∵ ∠ACB = 180° − ∠3,∠ADE = 180° − ∠4,∠3 = ∠4,∴ ∠ACB = ∠ADE. 又∵ ∠1 = ∠2,BC = ED,∴ △ABC≌△AED(AAS).
(2)△ABD≌△AEC.
证明:∵ ∠BAD = ∠1 + ∠CAD,∠EAC = ∠2 + ∠CAD,∠1 = ∠2,∴ ∠BAD = ∠EAC. ∵ BD = BC + CD,EC = CD + ED,BC = ED,∴ BD = EC.
在△ABD 和△AEC 中,
$$\begin{cases} \angle BAD = \angle EAC, \\ \angle 4 = \angle 3, \\ BD = EC, \end{cases}$$
∴ △ABD≌△AEC(AAS).
点拨:本题有两对全等三角形,解题过程中不要漏解.

13. **证明:**∵ AB = AC − BC,DC = DB − BC,AC = DB,
∴ AB = DC. ∵ AE = DF,BE = CF,∴ △ABE≌△DCF(SSS). ∴ ∠A = ∠D,∠ABE = ∠DCF,
∴ AE∥DF.
∵ ∠EBC = 180° − ∠ABE,
∠FCB = 180° − ∠DCF,∴ ∠EBC = ∠FCB,
∴ BE∥CF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨：本题在得到△ABE≌△DCF后，通过角相等证明$AE\parallel DF$，$BE\parallel CF$. 本题中，易误认为$BE\perp AD$，$CF\perp AD$. 事实上，条件中根本没有提到任何关于垂直的说法，因此，在解题过程中千万不能只看图形想问题.

14. 证明：∵ $BE=FC$，$BC=BE+EC$，$FE=FC+EC$，

∴ $BC=FE$. 又∵ $AC=DE$，$AB=DF$，

∴ △ABC≌△DFE(SSS). ∴ $\angle B=\angle F$.

又∵ $\angle AOB=\angle DOF$，$AB=DF$，

∴ △ABO≌△DFO(AAS).

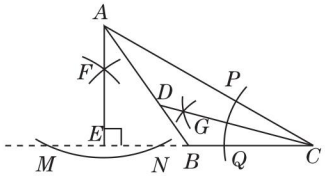
∴ $AO=DO$，$BO=FO$.

点拨：尽管要证明的结论有两个，但只要将这两个结论与△ABO和△DFO联系起来，问题就不难解决.

15. 解：如答图 1.3-8 所示，

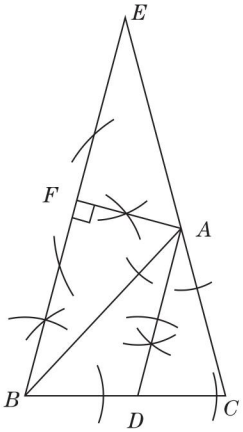
(1)①以点C为圆心，小于BC的长度为半径画圆弧，交AC于点P，交BC于点Q；②分别以P、Q为圆心，大于$\frac{1}{2}PQ$的长为半径作弧，两弧在$\angle ACB$的内部交于点G；③作射线CG，与AB边交于点D，线段CD即为△ABC的角平分线.

(2)①以点A为圆心，适当长度为半径画圆弧，交BC的反向延长线于点M、N；②分别以点M、N为圆心，大于$\frac{1}{2}MN$的长为半径作弧，两弧交于点F；③连接AF并延长，交MN于点E，线段AE即为△ABC的高.



答图 1.3-8

16. 解：(1)如答图 1.3-9 所示.



答图 1.3-9

(2)相等.

证明：∵ AD平分$\angle BAC$，

∴ $\angle BAD=\angle DAC$.

∵ $\angle CBE=\angle ADC$，

∴ $AD\parallel BE$，

∴ $\angle E=\angle DAC$，$\angle ABF=\angle BAD$，

∴ $\angle E=\angle ABF$.

∵ $AF\perp BE$，

∴ $\angle AFB=\angle AFE=90°$.

在△AFB和△AFE中，

$$\begin{cases}\angle ABF=\angle E,\\ \angle AFB=\angle AFE,\\ AF=AF,\end{cases}$$

∴ △AFB≌△AFE(AAS).

∴ $BF=EF$.

点拨：准确作图是解本题的基本前提. 本题综合了全等三角形、角平分线、平行线和垂线的有关知识，解题时，应尽可能把得到的各个结论同△AFB和△AFE联系起来.

17. 解：∵ $CE\perp OA$，$CF\perp OB$，

∴ △OCE和△OCF是直角三角形.

在 Rt△OCE和Rt△OCF中，$\begin{cases}OC=OC,\\ OE=OF,\end{cases}$

∴ Rt△OCE≌Rt△OCF(HL)，

∴ $\angle COE=\angle COF$，即OC平分$\angle AOB$.

点拨：解本题的关键，是要从给出的画法中得到一对待证的全等三角形.

18. 证明：∵ AD是△ABC的高，

∴ △ADB与△ADC都是直角三角形.

在 Rt△ADB和 Rt△ADC中，$\begin{cases}AB=AC,\\ AD=AD,\end{cases}$

∴ Rt△ADB≌Rt△ADC(HL)，

∴ $\angle DAB=\angle DAC$. ∵ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴ $\angle DEA=\angle DFA=90°$. 在△$DEA$和△$DFA$中，

$$\begin{cases}\angle DEA=\angle DFA,\\ \angle DAE=\angle DAF,\\ AD=AD,\end{cases}$$

∴ △DEA≌△DFA(AAS)，

∴ $DE=DF$.

复习题

1. 解：题图①与题图⑥中的三角形全等，可以根据SAS判定；题图②与题图④中的三角形全等，可以根据SSS判定；题图③与题图⑤中的三角形全等，可以根据HL判定.

2. 解：由题意可知$AC=DC$，$BC=EC$.

又∵ $\angle ACB=\angle DCE$，

∴ △ABC≌△DEC(SAS)，

∴ $AB=DE$，即量得的DE的长度就是A、B两点的距离.

点拨：把实际问题转化为几何问题，证明△ABC≌△DEC即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:点 C、D 到点 A 的距离相等.

理由如下:$\because AB \perp CD$,

$\therefore \angle ABC = \angle ABD = 90°$.

又$\because BC = BD, AB = AB$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD(\mathrm{SAS})$,

$\therefore CA = DA$,

即点 C、D 到点 A 的距离相等.

点拨:将实际问题转化为几何问题,再根据 SAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$,从而得到 $CA = DA$.

4. 证明:$\because BE$、CD 是中线,

$\therefore AE = \frac{1}{2}AC, AD = \frac{1}{2}AB$.

$\because AB = AC, \therefore AE = AD$.

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AE = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAD(\mathrm{SAS})$,

$\therefore BE = CD$.

5. 证明:$\because MS \perp PS, MN \perp SN, PQ \perp SN$,

$\therefore \angle MSP = \angle N = \angle PQS = 90°$,

$\therefore \angle MSN = 90° - \angle NSP = \angle P$.

在 $\triangle MNS$ 和 $\triangle SQP$ 中,

$$\begin{cases} \angle N = \angle PQS, \\ \angle MSN = \angle P, \\ MS = SP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle MNS \cong \triangle SQP(\mathrm{AAS})$.

6. 证法一:$\because BE /\!/ CF$,

$\therefore \angle BEF = \angle CFE$,

$\therefore \angle BEA = \angle CFD$.

$\because AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle A = \angle D$.

又$\because AB = DC$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF(\mathrm{AAS})$,

$\therefore BE = CF$.

证法二:$\because AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle A = \angle D, \angle ABO = \angle DCO$.

又$\because AB = DC$,

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle DCO(\mathrm{ASA})$,

$\therefore BO = CO$.

$\because BE /\!/ CF$,

$\therefore \angle BEO = \angle CFO, \angle EBO = \angle FCO$,

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF(\mathrm{AAS})$.

$\therefore BE = CF$.

点拨:证法二中,也可以利用 $\angle BOE = \angle COF, BO = CO$ 和 $\angle EBO = \angle FCO$,证明 $\triangle BOE \cong \triangle COF$,理由是 ASA.

7. 证明:$\because AB = DC, AC = DB, BC = CB$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB(\mathrm{SSS})$,

$\therefore \angle BAC = \angle CDB, \angle ABC = \angle DCB$,

$\angle ACB = \angle DBC$,

$\therefore \angle ABC - \angle DBC = \angle DCB - \angle ACB$,

即 $\angle ABO = \angle DCO$.

又$\because AB = DC, \angle BAO = \angle CDO$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC(\mathrm{ASA})$.

点拨:通过证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$,得到 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ 所需的对应角相等的条件是关键.

8. 证明:$\because \triangle AOD \cong \triangle BOC$,

$\therefore OA = OB, OD = OC, \angle AOD = \angle BOC$,

$\therefore \angle AOC = \angle AOD - \angle COD = \angle BOC - \angle COD = \angle BOD$.

在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$ 中,

$$\begin{cases} OA = OB, \\ \angle AOC = \angle BOD, \\ OC = OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD(\mathrm{SAS})$.

9. 解:①$\angle ABE = \angle DCE$,②$\angle AEB = \angle DEC$(对顶角相等),③$\angle ACB = \angle DBC$,④$\angle ABC = \angle DCB$.

证明:$\because \angle AEB = \angle DEC, \angle A = \angle D = 90°$,

$AB = DC, \therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE(\mathrm{AAS})$,

$\therefore AE = DE, BE = CE$, ①$\angle ABE = \angle DCE$.

$\therefore AE + CE = DE + BE$,即 $AC = DB$.

又$\because \angle A = \angle D, AB = DC$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB(\mathrm{SAS})$,

$\therefore$ ③$\angle ACB = \angle DBC$,④$\angle ABC = \angle DCB$.

10. 解:题图中有 3 对全等的直角三角形,它们分别是(1)$\mathrm{Rt}\triangle ABE \cong \mathrm{Rt}\triangle ACD$;

(2)$\mathrm{Rt}\triangle BDO \cong \mathrm{Rt}\triangle CEO$;

(3)$\mathrm{Rt}\triangle ADO \cong \mathrm{Rt}\triangle AEO$.

证明:(1)$\because BE \perp AC, CD \perp AB$,

$\therefore \angle AEB = \angle ADC = 90°$.

又$\because AB = AC, \angle BAE = \angle CAD$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABE \cong \mathrm{Rt}\triangle ACD(\mathrm{AAS})$.

(2)$\because \triangle ABE \cong \triangle ACD$,

$\therefore \angle B = \angle C, AE = AD$,

$\therefore BD = AB - AD = AC - AE = CE$.

又$\because \angle BDO = \angle CEO = 90°$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDO \cong \mathrm{Rt}\triangle CEO(\mathrm{ASA})$.

(3)在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中,

$\because AD = AE, AO = AO$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADO \cong \mathrm{Rt}\triangle AEO(\mathrm{HL})$.

点拨:因为要证明的全等三角形较多,所以应事先规划好证明的顺序,再证明.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

11. 解:(1)$BD=AE$;(2)$AE\perp BD$.

证明:(1)$\because AC\perp BC$,$DC\perp EC$,

$\therefore \angle ACB=\angle DCE=90°$,

$\therefore \angle DCB=\angle ACB+\angle DCA=\angle DCE+\angle DCA=\angle ECA$.

又$\because BC=AC$,$DC=EC$,

$\therefore \triangle DCB\cong\triangle ECA$(SAS),

$\therefore BD=AE$.

(2)如答图1,设AE与BD交于点M,与CD交于点N,则$\angle E+\angle ENC=90°$.

$\because \triangle DCB\cong\triangle ECA$,

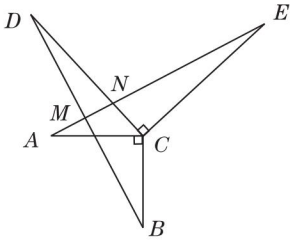
$\therefore \angle D=\angle E$,

又$\because \angle DNM=\angle ENC$,

$\therefore \angle D+\angle DNM=90°$,

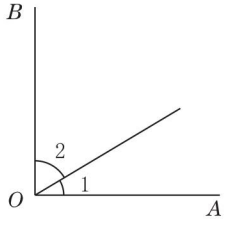
$\therefore \angle DMN=90°$,

即$AE\perp BD$.

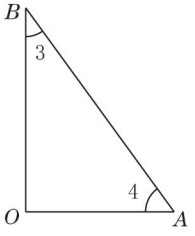


答图1

点拨:判定两条线段相等,可以把这两条线段看成是两个三角形的对应边,通过证明这两个三角形全等来说明这两条线段相等;判定两条线段互相垂直,可以先找到这两条线段所在直线的交点,通过证明两条直线夹角为90°来说明两条线段的垂直关系;判定一个角是直角,常用以下两种方法,如答图2,根据垂直的定义,通过证明$\angle 1+\angle 2=90°$判定$\angle AOB$是直角;如答图3,根据三角形内角和定理,通过证明$\angle 3+\angle 4=90°$判定$\angle AOB$是直角.

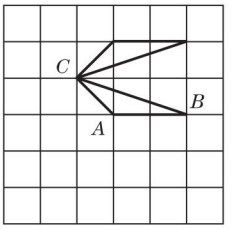


答图2



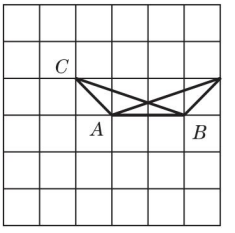
答图3

12. 解:(1)如答图4所示.



答图4

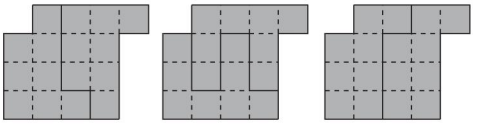
(2)如答图5所示.



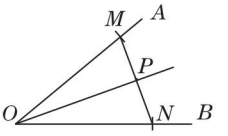
答图5

点拨:本题答案不唯一.

13. 解:如答图6所示. 有3种不同的分割方法.



答图6



答图7

14. 解:如答图7,已知$\angle AOB$.

(1)用刻度尺在OA、OB边上分别截取相等的线段OM、ON;(2)连接MN,量出MN的长度并计算出$\frac{1}{2}MN$;(3)在MN上作$MP=\frac{1}{2}MN$;

(4)作射线OP. 射线OP即是$\angle AOB$的平分线.

证明:由作图方法可知,$OM=ON$,$MP=NP$.

又$\because OP=OP$,

$\therefore \triangle OMP\cong\triangle ONP$(SSS),

$\therefore \angle MOP=\angle NOP$,

即OP平分$\angle AOB$.

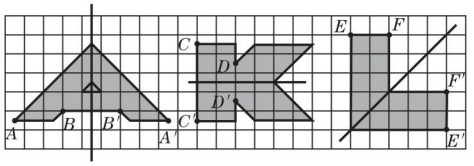
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2章 轴对称图形

2.1 轴对称与轴对称图形

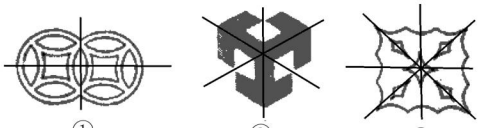
练习

1. **解**:如答图 2.1-1 所示.



答图 2.1-1

2. **解**:如答图 2.1-2 所示.



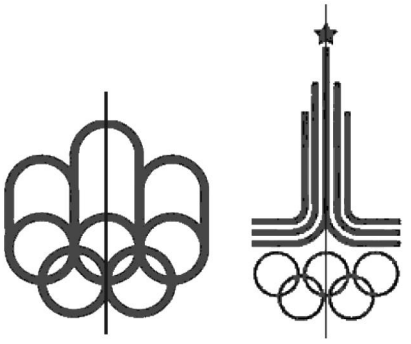
答图 2.1-2

3. **解**:题图②中的两个截面成轴对称.

点拨:题图①中的两个截面可以看成是平移.

习题 2.1

1. **解**:1976 年蒙特利尔和 1980 年莫斯科奥运会会徽是轴对称图形,对称轴如答图 2.1-3 所示. 2004 年雅典和 2008 年北京奥运会会徽不是轴对称图形.

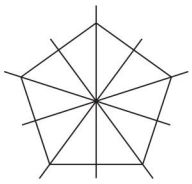


答图 2.1-3

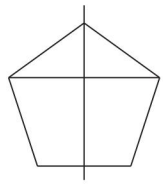
2. **解**:(1)如答图 2.1-4,正五边形有 5 条对称轴.

(2)如答图 2.1-5,有 1 条对称轴.

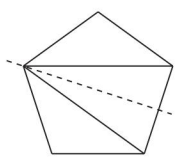
(3)有两种情况,如答图 2.1-6 与答图 2.1-7,但无论哪一种情况,所得图形都只有 1 条对称轴.



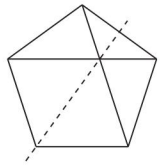
答图 2.1-4



答图 2.1-5



答图 2.1-6



答图 2.1-7

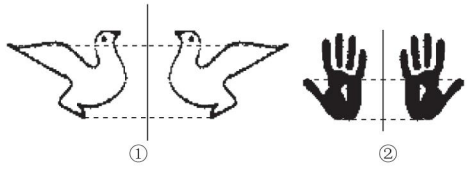
3. 略. **点拨**:答案不唯一,只要符合轴对称图形的定义即可.

4. 略. **点拨**:答案不唯一,只要符合轴对称图形的定义即可.

2.2 轴对称的性质

练习

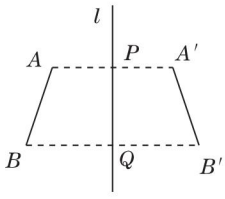
1. **解**:如答图 2.2-1 所示.



答图 2.2-1

点拨:在图中任取两对对应点,连接对应点,取对应点所连线段的中点,过两个中点作直线,则所作直线就是要求作的对称轴.

2. **解**:如答图 2.2-2.



答图 2.2-2

(1)$AB = A'B'$,$AP = A'P$,$BQ = B'Q$

(2)AA'与 BB'平行. 原因如下:

$\because AA' \perp l$,$BB' \perp l$,

$\therefore \angle APQ = \angle BQP = 90°$.

$\therefore \angle APQ + \angle BQP = 180°$.

$\therefore AA'$与 BB'平行.

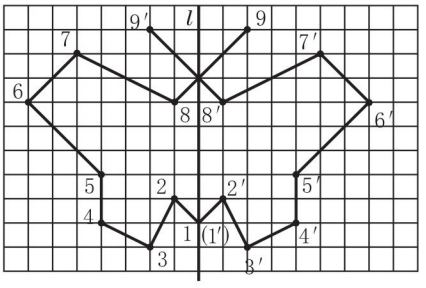
点拨:根据轴对称的性质,可知对应点的连线被对称轴垂直平分,从而可以得到相等的线段

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（数量关系），也可以得到垂直（位置关系），进而可推得 AA' 与 BB' 平行.

练习

1. 解：如答图 2.2-3，得到了一幅蝴蝶图案.



答图 2.2-3

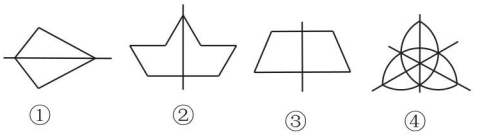
2. (1) AO 与 OA'，AB 与 $A'B'$，OB 与 OB'

(2) 成轴对称；AA'；$A'B'O$；$A'OB$

点拨：根据轴对称的性质逐一判断即可.

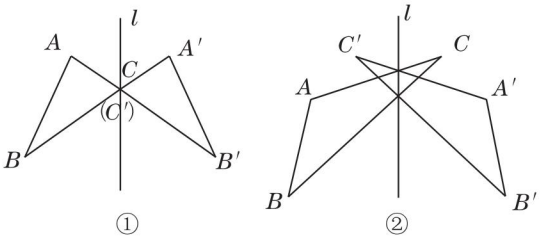
习题 2.2

1. 解：如答图 2.2-4 所示.



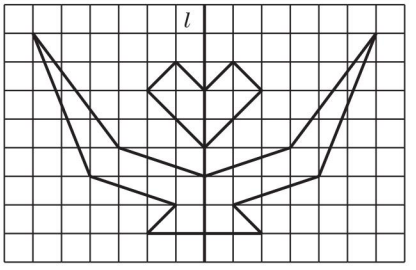
答图 2.2-4

2. 解：如答图 2.2-5 所示.



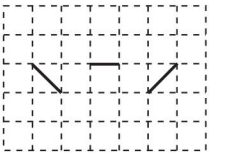
答图 2.2-5

3. 解：如答图 2.2-6 所示.



答图 2.2-6

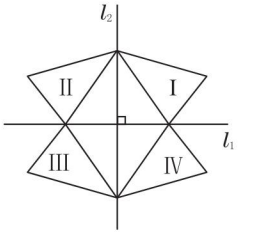
4. 解：如答图 2.2-7 所示.



答图 2.2-7

点拨：答案不唯一.

5. 解：如答图 2.2-8 所示，所画的三角形Ⅳ与三角形Ⅰ成轴对称.

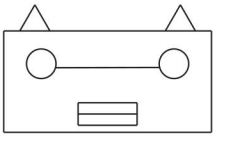


答图 2.2-8

2.3 设计轴对称图案

练习

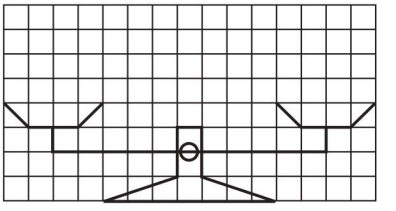
1. 解：如答图 2.3-1 所示.



答图 2.3-1

点拨：答案不唯一.

2. 解：如答图 2.3-2 所示.



答图 2.3-2

点拨：答案不唯一.

3. 略. **点拨：**答案不唯一.

习题 2.3

1. 解：由琴键组成的轴对称图形还有：E、F；

$^{\flat}$E、E、F、$^{\#}$F；

G、$^{\flat}$A、A；

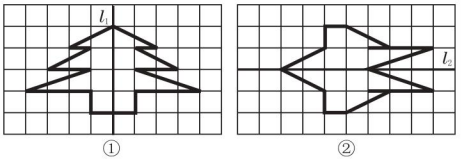
$^{\#}$F、G、$^{\flat}$A、A、$^{\flat}$B；

F、$^{\#}$F、G、$^{\flat}$A、A、$^{\flat}$B、B；

C、$^{\#}$C、D、$^{\flat}$E、E.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:如答图 2. 3-3 所示,得到一棵松树,一只燕子.

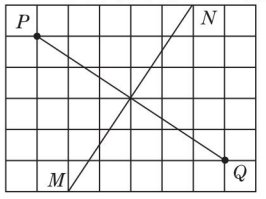


答图 2. 3-3

2. 4 线段、角的轴对称性

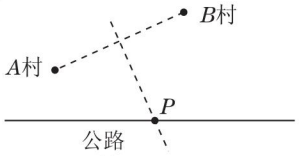
练习

1. 解:如答图 2. 4-1 所示,直线 MN 即为所求.



答图 2. 4-1

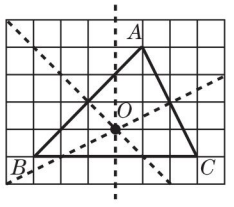
2. 解:如答图 2. 4-2 所示,连接 AB,作 AB 的垂直平分线,交公路所在直线于点 P,则点 P 即为设置车站的地方.



答图 2. 4-2

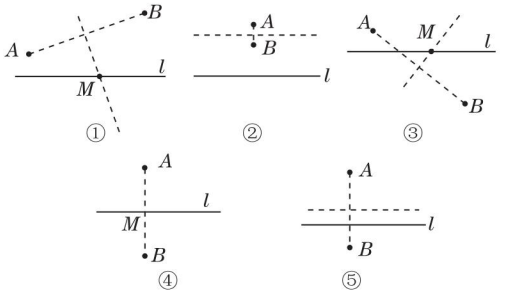
练习

1. 解:如答图 2. 4-3 所示.



答图 2. 4-3

2. 解:不一定能找到这样的点. 如答图 2. 4- 4.



答图 2. 4- 4

(1)当点 A、B 在直线同侧时,

如答图 2. 4- 4①,直线 AB 不与直线 l 垂直,此时能找到这样的点.

连接 AB,作 AB 的垂直平分线,交 l 于点 M,则点 M 即为要找的点.

如答图 2. 4- 4②,直线 AB 与直线 l 垂直,此时找不到符合要求的点.

(2)当点 A、B 在直线异侧时,

如答图 2. 4- 4③,直线 AB 不与直线 l 垂直,此时能找到这样的点.

连接 AB,作 AB 的垂直平分线,交 l 于点 M,则点 M 即为要找的点.

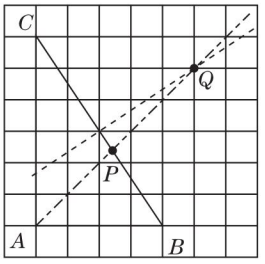
如答图 2. 4- 4④,直线 AB 与直线 l 垂直,且 l 平分线段 AB,此时能找到这样的点. 直线 l 上所有的点都符合要求.

如答图 2. 4- 4⑤,直线 AB 与直线 l 垂直,且 A、B 到 l 的距离不相等,此时找不到符合要求的点.

点拨:运用分类讨论思想,对点 A、B 所处的不同位置分类讨论,是解本题的关键.

练习

解:如答图 2. 4-5.

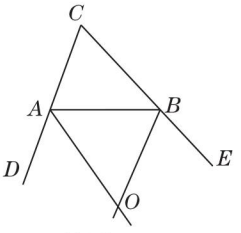


答图 2. 4-5

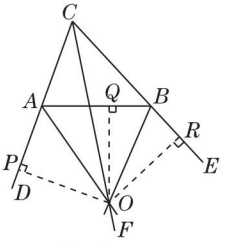
点拨:对于(1),点 P 到 AB 和 AC 的距离相等,则点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 的交点处;对于(2),$QB = QC$,则点 Q 在 BC 的垂直平分线与射线 AP 的交点处.

练习

解:(1)如答图 2. 4- 6 所示.



答图 2. 4- 6



答图 2. 4-7

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) 点 O 在射线 CF 上.

证明:如答图 2.4-7,作 $OP \perp CD$、$OQ \perp AB$、$OR \perp CE$,垂足分别为 P、Q、R.

$\because AO$ 平分 $\angle BAD$,$\therefore OP = OQ$.

$\because BO$ 平分 $\angle ABE$,$\therefore OQ = OR$.

$\therefore OP = OR$,$\therefore$ 点 O 在 $\angle DCE$ 的平分线上.

$\because CF$ 平分 $\angle DCE$,

$\therefore$ 点 O 在射线 CF 上.

点拨:本题的明显特征是,既利用了角平分线的性质得到相等的线段,又利用了角平分线的判定方法确定点 O 在射线 CF 上.

习题 2.4

1. 解:$\because DE$ 垂直平分 AB,$\therefore AE = BE$.

$\because FG$ 垂直平分 AC,$\therefore AG = CG$.

$\therefore \triangle AEG$ 的周长 $= AE + EG + AG = BE + EG + CG = BC$.

又 $\because BC = 7$,$\therefore \triangle AEG$ 的周长为 7.

2. 解:连接 BE. 设 $EC = x$,

$\because AE : EC = 2 : 1$,

$\therefore AE = 2x$.

$\because AE + EC = AC$,$AC = 9$,

$\therefore 2x + x = 9$,解得 $x = 3$,

$\therefore AE = 2x = 6$.

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore BE = AE = 6$,

即点 B 到点 E 的距离为 6.

点拨:运用方程思想,根据 $AC = 9$,$AE : EC = 2 : 1$ 可以求得 AE 的长,使本题得以顺利解决.

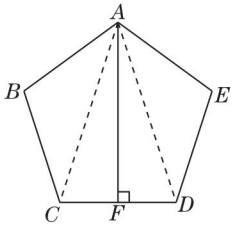
3. 证明:如答图2.4-8,连接 AC、AD.

$\because AF$ 垂直平分 CD,$\therefore AC = AD$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} AB = AE, \\ BC = ED, \\ AC = AD, \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle AED,$$

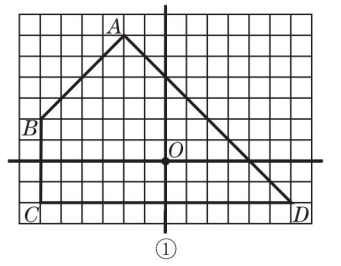
$\therefore \angle B = \angle E$.



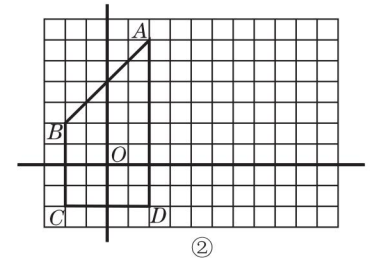
答图 2.4-8

点拨:初中阶段,解决几何问题的方法多数都集中在三角形中. 本题要证明的两个角都不在任何三角形中,在这种情况下,往往需要添加辅助线,将问题与三角形的知识联系在一起,从而使问题得以解决. 要注意的是线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等,一般情况下,遇到这个已知条件,都要考虑从垂直平分线上的点向线段两个端点分别连线,得到相等的线段. 这是有关垂直平分线最常见的辅助线添加方式.

4. 解:(1) 如答图 2.4-9①所示,所画垂直平分线不唯一.



①

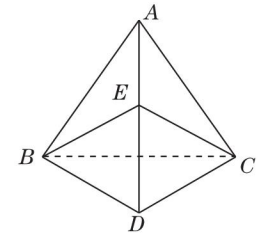


②

答图 2.4-9

(2) 从图形上看,点 O 在另两边的垂直平分线上.

(3) 如答图 2.4-9②所示,平移点 D 后,不能观察到与上面相同的结论.



答图 2.4-10

5. 证明:如答图 2.4-10,连接 BC.

$\because AB = AC$,$DB = DC$,

$\therefore$ 点 A、D 都在线段 BC 的垂直平分线上,

$\therefore AD$ 是线段 BC 的垂直平分线.

$\because$ 点 E 在 AD 上,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore EB = EC.$

点拨:从本题的证法上可以明显看出,灵活运用线段垂直平分线的性质定理与判定定理,可以帮助我们快速有效地解决与轴对称图形有关的问题.

6. 证明:在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle A = \angle A, \\ AE = AD, \end{cases} \therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD,$$

$\therefore \angle DBO = \angle ECO.$

$\because BD = AB - AD, CE = AC - AE, \therefore BD = CE.$

在$\triangle BOD$和$\triangle COE$中,$\begin{cases} \angle BOD = \angle COE, \\ \angle DBO = \angle ECO, \\ BD = CE, \end{cases}$

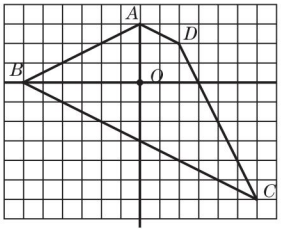
$\therefore \triangle BOD \cong \triangle COE, \therefore OB = OC,$

$\therefore$点O在线段BC的垂直平分线上.

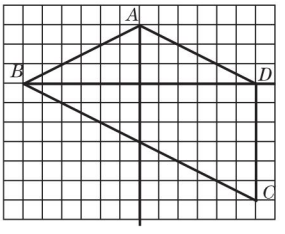
7. 解:(1)如答图2.4-11,所画内角平分线不唯一.

(2)从图形上看,点O在另两个内角的平分线上.

(3)如答图2.4-12所示,平移点D后,不能观察到与上面相同的结论.



答图2.4-11



答图2.4-12

8. 证明:连接AD,$\because DE \perp AB, DF \perp AC$,且$DE = DF$,

$\therefore AD$平分$\angle BAC, \therefore \angle BAD = \angle CAD.$

在$\triangle BAD$和$\triangle CAD$中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AD = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD,$

$\therefore BD = CD$,即D是BC的中点.

9. 解:如答图2.4-13,作$DF \perp BC$于点F.

$\because BD$是$\triangle ABC$的角平分线,$DE \perp AB, DF \perp BC,$

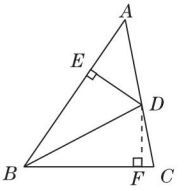
$\therefore DE = DF.$

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times AB \times DE + \frac{1}{2} \times BC \times DF = \frac{1}{2} \times (AB + BC) \times DE.$

又$\because \triangle ABC$的面积为70,$AB = 16, BC = 12,$

$\therefore 70 = \frac{1}{2} \times (16 + 12) \times DE$,解得$DE = 5.$

$\therefore DE$的长为5.



答图2.4-13

点拨:本题解法的独特之处在于利用了面积关系构造方程.

10. 证明:如答图2.4-14,连接DB、DC.

$\because$点D在BC的垂直平分线上,

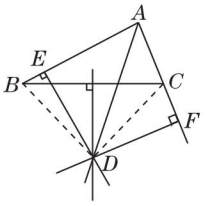
$\therefore DB = DC.$

$\because AD$是$\angle BAC$的平分线,$\therefore DE = DF.$

在$\mathrm{Rt}\triangle DBE$和$\mathrm{Rt}\triangle DCF$中,

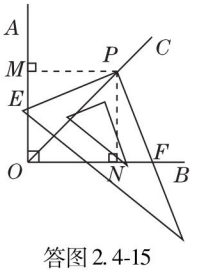
$DE \perp AB, DF \perp AC,$ $\begin{cases} DB = DC, \\ DE = DF, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DBE \cong \mathrm{Rt}\triangle DCF, \therefore BE = CF.$



答图2.4-14

11. 证明:如答图2.4-15,过点P作$PM \perp OA$于点M,$PN \perp OB$于点N,



答图2.4-15

则$\angle PME = \angle PNO = \angle PNF = 90°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

又∵ $\angle AOB=90°$，

$\angle PME+\angle PNO+\angle AOB+\angle MPN=360°$，

∴ $\angle MPN=90°$. ∵ $\angle EPF=90°$，

∴ $\angle MPN=\angle EPF$，

∴ $\angle MPE=\angle MPN-\angle EPN=\angle EPF-\angle EPN=\angle NPF$.

∵ OC 平分 $\angle AOB$，$PM\perp OA$，$PN\perp OB$，

∴ $PM=PN$.

在 $\triangle PME$ 和 $\triangle PNF$ 中，

$$\begin{cases}\angle MPE=\angle NPF,\\ PM=PN,\\ \angle PME=\angle PNF,\end{cases}$$

∴ $\triangle PME\cong\triangle PNF$，∴ $PE=PF$.

2.5 等腰三角形的轴对称性

练习

1. $BAD;CAD;AD;BC;\angle BAD=\angle CAD;BD=CD$

2. **解：**(1)70;40　(2)55;55　(3)120;30;30

(4)另两个角等于 50°，80°或 65°，65°.

点拨：根据等腰三角形性质定理、三角形内角和定理，逐一计算即可. 要注意(3)题与(4)题虽然都可能存在两种不同情况，但(3)题中的已知角等于 120°，这个角只能是等腰三角形的顶角，不可能是底角，因此(3)题无需讨论. 而(4)题则需要分成两种情况讨论求解.

3. **解：**∵ $AB=AC$，∴ $\angle B=\angle C$.

∵ $\angle BAC=110°$，$\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$，

∴ $\angle B=\angle C=35°$. ∵ $AD\perp BC$，

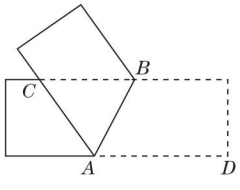
∴ AD 平分 $\angle BAC$，

∴ $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=55°$.

练习

1. **解：**$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

理由：如答图 2.5-1.

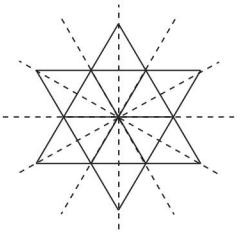


答图 2.5-1

由题意可得 $CB/\!/AD$，∴ $\angle CBA=\angle BAD$. 由折叠可知 $\angle CAB=\angle BAD$，∴ $\angle CBA=\angle CAB$，

∴ $CA=CB$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

2. **解：**如答图 2.5-2 所示.



答图 2.5-2

3. **解：**∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=60°$.

∵ BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的中线，

∴ BD、CE 平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，

∴ $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ECB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

∴ $\angle DBC=\angle ECB=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

∴ $\angle1=\angle2=\angle DBC+\angle ECB=30°+30°=60°$，

$\angle3=\angle4=180°-\angle1=180°-60°=120°$.

练习

1. **解：**(1)4.8

(2)$DA=DB=DC$，$EA=EC$；

$\angle DCA=\angle A$，$\angle DEC=\angle DEA=\angle ACB$，

$\angle CDE=\angle ADE=\angle B=\angle DCB$.

2. **证明：**∵ $AB=AC$，∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

∵ BD、CE 是角平分线，

∴ $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ECB=\frac{1}{2}\angle ACB$，

∴ $\angle DBC=\angle ECB$，∴ $OB=OC$.

点拨：等边对等角、等角对等边是几何证明中边(长度关系)与角(角度关系)相互转化的常用工具.

习题 2.5

1. **解：**(1)腰长 $=(10-4)\div2=3$.

(2)底边长 $=10-4\times2=2$.

(3)①如果长为 5 的边是等腰三角形的底边，则腰长 $=(12-5)\div2=3.5$，所以另外两边的长分别为 3.5 和 3.5；

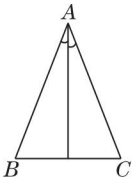
②如果长为 5 的边是等腰三角形的腰，则底边长 $=12-5\times2=2$，所以另外两边的长分别为 5 和 2.

综上，这个等腰三角形另外两边的长分别为 3.5 和 3.5 或 5 和 2.

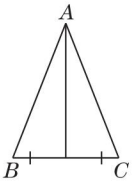
点拨：在等腰三角形中，当给出的边长不明确是底边长还是腰长时，应运用分类讨论思想，分两种情况讨论解题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

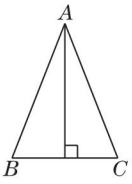
2. 解:有 3 种画法. 画法 1,如答图 2. 5-3,作等腰三角形 ABC 的顶角平分线;



答图 2. 5-3



答图 2. 5- 4



答图 2. 5-5

画法 2,如答图 2. 5-4,作等腰三角形 ABC 底边上的中线;

画法 3,如答图 2. 5-5,作等腰三角形 ABC 底边上的高线.

3. 解:(1)$\because \angle A$ 是顶角,

$\therefore \angle B = \angle C$.

$\because \angle A = 4\angle B$,

$\therefore \angle A = 4\angle C$.

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$,

$\therefore 4\angle C + \angle C + \angle C = 180°$,解得 $\angle C = 30°$.

(2)$\because \angle A$ 是底角,

$\therefore \angle B$ 是顶角,$\angle A = \angle C$.

$\because \angle A = 4\angle B$,

$\therefore \angle B = \frac{1}{4}\angle A = \frac{1}{4}\angle C$.

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$,

$\therefore \angle C + \frac{1}{4}\angle C + \angle C = 180°$,解得 $\angle C = 80°$.

点拨:(1)题和(2)题在求 $\angle C$ 的过程中,都运用了方程思想,根据三角形内角和定理,构造了以 $\angle C$ 为未知数的方程,这是解本题的关键.

4. 解:$\because AB = AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

$\because D$ 是 BC 的中点,重锤线正好经过点 A,

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore AD \perp BC$.

$\because AD$ 自然下垂,

$\therefore BC$ 与水平线平行.

$\therefore BC$ 处于水平位置.

点拨:把实际问题转化为几何问题是解本题的关键.

5. 解:如答图 2. 5- 6,

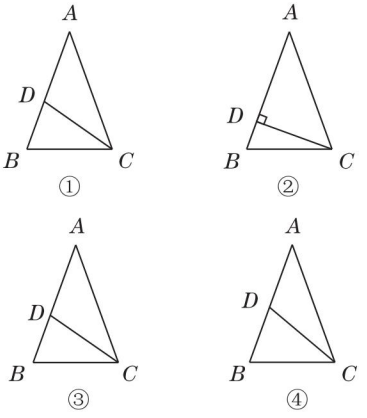
$\because AB = AC$, $\angle A = 40°$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = 70°$.

(1)如答图 2. 5-6①,

$\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 35°$.



答图 2. 5- 6

(2)如答图 2. 5- 6②,$\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的高,

$\therefore \angle BDC = 90°$. 在 $\triangle BCD$ 中,$\angle B + \angle BDC + \angle BCD = 180°$,

$\therefore \angle BCD = 180° - 70° - 90° = 20°$.

(3)如答图 2. 5- 6③,$\because CD = AD$,$\therefore \angle A = \angle DCA$,

$\because \angle A = 40°$,$\therefore \angle BDC = 2\angle A = 2 \times 40° = 80°$,

$\therefore \angle BCD = 180° - \angle B - \angle BDC = 180° - 70° - 80° = 30°$.

(4)如答图 2. 5- 6④,$\because CD = CB$,

$\therefore \angle BDC = \angle B = 70°$,

$\therefore \angle BCD = 180° - \angle B - \angle BDC = 180° - 70° - 70° = 40°$.

6. 解:第一种情况:$\angle A$ 是顶角,$\angle B$ 与 $\angle C$ 都是底角,此时 $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \times (180° - 40°) = 70°$;

第二种情况:$\angle A$ 是底角,$\angle B$ 是顶角,此时 $\angle B = 180° - 2 \times 40° = 100°$;

第三种情况:$\angle A$ 是底角,$\angle B$ 也是底角,此时 $\angle B = \angle A = 40°$.

综上,$\angle B$ 为 40°,70°或 100°时,$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

7. 解:(1)$\because \angle C = 36°$, $\angle B = 72°$,

$\therefore \angle CAB = 180° - \angle C - \angle B = 72°$.

$\because \angle BAD = 36°$,$\therefore \angle 1 = \angle CAB - \angle BAD = 36°$,

$\therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle C = 72°$.

(2)①$\triangle ABC$ 是等腰三角形,②$\triangle ACD$ 是等腰三

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

角形，③△ABD 是等腰三角形.

证明：由(1)知：①$\angle CAB=\angle B=72°$，

$\therefore$ △ABC 是等腰三角形；②$\because \angle 1=\angle C=36°$，

$\therefore$ △ACD 是等腰三角形；

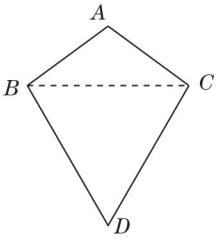
③$\because \angle 2=\angle B=72°$，$\therefore$ △ABD 是等腰三角形.

8. 证明：$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle BAC=120°$，$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}\times(180°-120°)=30°$. $\because AD\perp AB$，$AE\perp AC$，$\therefore \angle ADB=90°-\angle B=90°-30°=60°$，$\angle AEC=90°-\angle C=90°-30°=60°$，$\therefore \angle ADB=\angle AEC$，$\therefore AE=AD$，$\therefore$ △AED 是等边三角形.

9. 证明：如答图 2. 5-7，连接 BC. $\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.



答图 2. 5-7

$\because \angle ABD=\angle ACD$，$\therefore \angle DBC=\angle DCB$，

$\therefore BD=CD$.

10. 解：$AD=BE$.

证明：$\because$ △ABC 和△CDE 都是等边三角形，

$\therefore AC=BC$，$DC=EC$，$\angle ACB=\angle DCE=60°$.

$\because \angle ACD=\angle ACB+\angle BCD$，

$\angle BCE=\angle BCD+\angle DCE$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$.

在△ACD 和△BCE 中，

$$\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ACD=\angle BCE, \\ DC=EC, \end{cases}$$

$\therefore$ △$ACD\cong$△BCE，$\therefore AD=BE$.

11. 解：(1)$\because AD$ 是△ABC 的高，$\therefore$ △ABD 与△ACD 都是直角三角形. $\because E$、F 分别是 AB、AC 的中点，$AB=10$，$AC=8$，

$\therefore EA=ED=\frac{1}{2}AB=5$，$FA=FD=\frac{1}{2}AC=4$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 的周长 $=EA+ED+FA+FD=5+5+4+4=18$.

(2)$EF\perp AD$.

证明：由(1)知 $EA=ED$，$FA=FD$，$\therefore$ 点 E、F 都在线段 AD 的垂直平分线上. $\therefore$ 直线 EF 是 AD 的垂直平分线. $\therefore EF\perp AD$.

12. 证明：$\because \angle ACB=90°$，$\therefore$ △ABC 是直角三角形.

$\because AC=BC$，

$\therefore \angle B=\angle A=\frac{1}{2}\times(180°-90°)=45°$.

$\because D$ 是 AB 的中点，

$\therefore DA=DB=DC$，

$\therefore \angle DCF=\angle B=45°$.

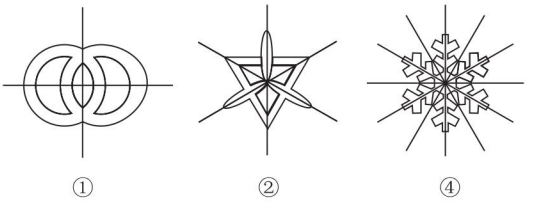
$\therefore \angle A=\angle DCF$.

在△AED 和△CFD 中，$\begin{cases} AE=CF, \\ \angle A=\angle DCF, \\ AD=CD, \end{cases}$

$\therefore$ △$AED\cong$△CFD，$\therefore DE=DF$.

复习题

1. 解：题图①②④是轴对称图形，题图③不是轴对称图形. 轴对称图形的对称轴如答图 1 所示.

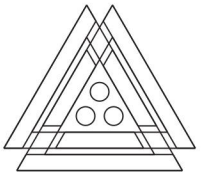


答图 1

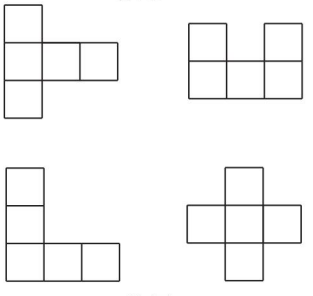
2. 略.

3. 解：(1)题图①不是轴对称图形. 适当延长相应的线段，可以得到答图 2.

(2)移动其中 1 张正方形纸片，能使它变成轴对称图形. 如答图 3 所示.



答图 2



答图 3

点拨：答案不唯一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

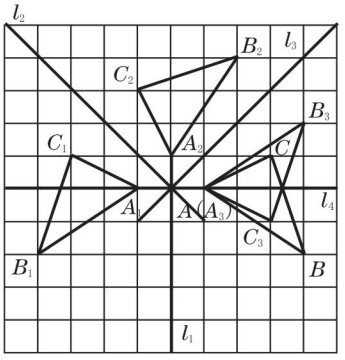
4. AB、AC;A、B、C

点拨: $\because AB=AC$,$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形. $\because D$ 是 BC 的中点,$\therefore AD$ 垂直 BC,且 AD 平分 $\angle BAC$. $\therefore F$ 到 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的距离相等. $\because FE$ 垂直平分 AC,FD 垂直平分 BC,$\therefore$ 点 F 到 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 的距离相等.

5. (1)50;20;80

(2)2.5;BC 是底边;2;AC 是底边;3

6. **解:** (1)(2)(3)如答图4.(4)如答图4,直线 l_4 是 $\triangle A_3B_3C_3$ 与 $\triangle ABC$ 的对称轴.



答图4

7. **解:** (1)题图①中的 $\triangle BDE$ 是等腰三角形.

证明:$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,$\therefore \angle ABD=\angle DBE$.

$\because DE/\!/AB$,$\therefore \angle ABD=\angle BDE$. $\therefore \angle DBE=\angle BDE$.

$\therefore EB=ED$. $\therefore \triangle BDE$ 是等腰三角形.

(2)题图②中的 $\triangle ACE$ 是等腰三角形.

证明:$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$.

$\because EC/\!/AD$,

$\therefore \angle BAD=\angle E$,$\angle DAC=\angle ACE$,

$\therefore \angle ACE=\angle E$,

$\therefore AC=AE$,

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰三角形.

(3)题图③中的 $\triangle AGF$ 是等腰三角形.

证明:$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,$\therefore \angle BAD=\angle DAC$.

$\because GE/\!/AD$,$\therefore \angle BAD=\angle GFA$,$\angle DAC=\angle G$.

$\therefore \angle GFA=\angle G$. $\therefore AG=AF$. $\therefore \triangle AGF$ 是等腰三角形.

8. **证明:** $\because BO$ 平分 $\angle ABC$,$\therefore \angle MBO=\angle OBC$.

$\because MN/\!/BC$,$\therefore \angle MOB=\angle OBC$.

$\therefore \angle MOB=\angle MBO$,$\therefore BM=MO$.

同理可证 $CN=NO$.

$\therefore MN=MO+NO=BM+CN$,即 $MN=BM+CN$.

9. **解:** 题图中还有 $BD=CE$,$BE=CD$.

证明:$\because AB=AC$,$AD=AE$,

$\therefore \angle B=\angle C$,$\angle ADE=\angle AED$.

$\because \angle BAD=\angle ADE-\angle B$,$\angle CAE=\angle AED-\angle C$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$,$\therefore BD=CE$.

$\because BE=BD+DE$,$CD=CE+DE$,

$\therefore BE=CD$.

10. **证明:** 如答图5,连接 MB、MD.

$\because \angle ABC=\angle ADC=90°$,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 都是直角三角形.

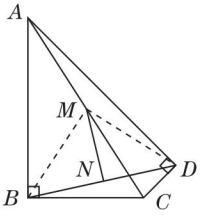
$\because M$ 是 AC 的中点,

$\therefore MB=MD=\frac{1}{2}AC$,

$\therefore \triangle MBD$ 是等腰三角形.

$\because N$ 是 BD 的中点,

$\therefore MN\perp BD$.



答图5

11. **解:** (1)这是因为等腰三角形是轴对称图形,它有一条对称轴,只要沿着对称轴把饼翻身,饼仍能正好落在"锅"中.

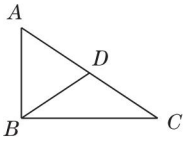
(2)小丽是沿着直角三角形斜边上的中线方向切的.

因为直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半,所以斜边上的中线把直角三角形分成两个等腰三角形,而每个等腰三角形都是轴对称图形,所以切完后将两小块都翻身,饼就能正好落在"锅"中.

(3)作这个三角形两条边的垂直平分线,交于一点,将三角形的三个顶点都与该点连成线段,沿线段方向将饼分成三小块,这样,将烙饼翻身才能使烙饼仍能正好落在"锅"中.

12. **解:** 这个三角形是直角三角形.

已知:如答图6,在 $\triangle ABC$ 中,$DA=DB=DC$. 求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.



答图6

证明:$\because DA=DB=DC$,

$\therefore \angle A=\angle DBA$. $\angle C=\angle DBC$.

$\because \angle A+\angle ABC+\angle C=180°$,

$\therefore \angle A+\angle DBA+\angle DBC+\angle C=180°$.

$\therefore 2(\angle DBA+\angle DBC)=180°$.

$\therefore \angle DBA+\angle DBC=90°$,即 $\angle ABC=90°$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

13. 解:(1) $\angle C=2\angle D$.

证明:$\because AB=AC=AD$,

$\therefore \angle ABC=\angle C,\angle ABD=\angle D$.

$\because AD/\!/BC,\therefore \angle D=\angle DBC$,

$\therefore \angle DBC=\angle ABD$,

$\therefore \angle ABC=2\angle D$,

$\therefore \angle C=2\angle D$.

(2) $AD/\!/BC$.

证明:$\because AB=AC=AD$,

$\therefore \angle ABC=\angle C,\angle ABD=\angle D$.

$\because \angle C=2\angle D$,

$\therefore \angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=\angle DBC+\angle D=2\angle D$.

$\therefore \angle DBC=\angle D,\therefore AD/\!/BC$.

14. 解:(1) $\because BD=BA$,

$\therefore \angle BAD=\angle BDA$.

$\therefore \angle BDA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle B)$.

$\because CE=CA$,

$\therefore \angle CAE=\angle E$.

$\therefore \angle ACB=\angle CAE+\angle E=2\angle E$.

$\therefore \angle E=\frac{1}{2}\times\angle ACB$.

$\because \angle DAE=\angle BDA-\angle E$,

$\therefore \angle DAE=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle B)-\frac{1}{2}\times\angle ACB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle B-\angle ACB)=\frac{1}{2}\times\angle BAC$.

$\because \angle BAC=90^\circ$,

$\therefore \angle DAE=\frac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$.

(2) 由(1)知,$\angle DAE=\frac{1}{2}\times\angle BAC=\frac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$,因此只要 $\angle BAC$ 的度数不变,那么 $\angle DAE$ 的度数就不会改变.

(3) $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC$.

证明:设 $\angle AEC=\alpha$.

$\because CA=CE,\therefore \angle CAE=\alpha$.

$\therefore \angle DCA=2\alpha$. $\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle ACB=2\alpha$.

$\therefore \angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle ACB=180^\circ-4\alpha$.

$\because AB=BD,\angle B=2\alpha$,

$\therefore \angle BDA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=90^\circ-\alpha$.

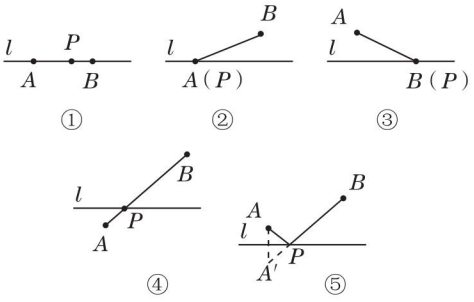
$\therefore \angle DAC=\angle BDA-\angle ACD=90^\circ-\alpha-2\alpha=90^\circ-3\alpha$.

$\therefore \angle DAE=\angle DAC+\angle CAE=90^\circ-3\alpha+\alpha=90^\circ-2\alpha=\frac{1}{2}(180^\circ-4\alpha)=\frac{1}{2}\angle BAC$.

即 $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC$.

15. 证明:假设点 P 在线段 AB 的垂直平分线 l 上,根据垂直平分线的性质,知 $PA=PB$,这与已知条件 $PA\neq PB$ 相矛盾,所以点 P 不在线段 AB 的垂直平分线 l 上.

16. 解:点 P 的位置如答图 7 所示.(其中在答图 7① 中,点 P 可以是线段 AB(含 A、B 两点)上的任意一点)



答图 7

第3章 勾股定理

3.1 勾股定理

练习

1. 解:题图①中,根据勾股定理,得 $5^2+12^2=x^2$,解得 $x=\pm13$(舍去负值),所以 $x=13$;题图②中,根据勾股定理,得 $8^2+x^2=17^2$,解得 $x=\pm15$(舍去负值),所以 $x=15$;题图③中,根据勾股定理,得 $16^2+x^2=20^2$,解得 $x=\pm12$(舍去负值),所以 $x=12$.

2. 解:题图①中,根据勾股定理,得 $81+144=x^2$,解得 $x=\pm15$(舍去负值),所以 $x=15$;

题图②中,根据勾股定理,得 $y^2+144=169$,解得 $y=\pm5$(舍去负值),所以 $y=5$;

题图③中,根据勾股定理,得 $z^2+576=625$,解得 $z=\pm7$(舍去负值),所以 $z=7$.

3. 解:$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都不是直角三角形,

$\therefore AC^2+BC^2\neq AB^2,DE^2+FE^2\neq DF^2$. 又$\because AC^2$、$BC^2$、$AB^2$、$DE^2$、$FE^2$、$DF^2$ 分别是几个正方形的面积,

$\therefore$ 在每个图中,两个小正方形面积的和不等于大正方形的面积.

练习

(1)15 (2)6 (3)5 (4)60

习题 3.1

1. 解:题图①中,根据勾股定理,得 $15^2+20^2=x^2$,解得 x

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\pm25$(舍去负值),所以 $x=25$;题图②中,根据勾股定理,得 $16^2+x^2=34^2$,解得 $x=\pm30$(舍去负值),所以 $x=30$;题图③中,根据勾股定理得 $24^2+x^2=26^2$,解得 $x=\pm10$(舍去负值),所以 $x=10$.

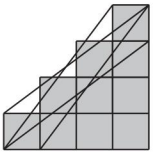
2. 解: 依题意知,梯子与墙、地面围成一个直角三角形,

根据勾股定理,得 $h^2+1.5^2=2.5^2$,

解得 $h=\pm2$(舍去负值),所以 $h=2$.

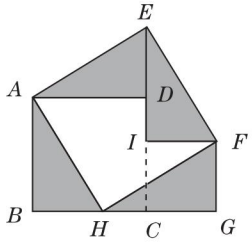
答:梯子顶端的高度 h 为 2 m.

3. 解: ∵ 小方格的面积为 1,∴ 小方格的边长为 1. 根据勾股定理,只要画出两条直角边长分别为 3、4 的直角三角形,则该直角三角形的斜边长即为 5. 如答图 3.1-1 所示.



答图 3.1-1

4. 证明: 如答图 3.1-2,易知四边形 $ABCD$、四边形 $CGFI$、四边形 $AEFH$ 都是正方形,



答图 3.1-2

∵ $S_{多边形AHFID}=S_{正方形AEFH}-S_{△ADE}-S_{△EIF}$,$S_{多边形AHFID}=S_{正方形ABCD}+S_{正方形CGFI}-S_{△ABH}-S_{△HGF}$,∴ $S_{正方形AEFH}-S_{△ADE}-S_{△EIF}=S_{正方形ABCD}+S_{正方形CGFI}-S_{△ABH}-S_{△HGF}$,

∴ $c^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}ab=b^2+a^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}ab$,整理得 $a^2+b^2=c^2$.

3.2 勾股定理的逆定理

练习

1. 解: 依题意知,$AB=4$,$AC=3$,$BC=5$.

∵ $3^2+4^2=5^2$,∴ $AC^2+AB^2=BC^2$,

∴ △ABC 是直角三角形. ∵ BC 是最长边,

∴ BC 所对的∠BAC 是直角.

2. 解: 由这 3 条线段组成的三角形是直角三角形.

∵ $c^2=a^2-b^2$,∴ $c^2+b^2=a^2$,

∴ 由 3 条长度分别为 a、b、c 的线段组成的三角形是直角三角形.

点拨: 利用勾股定理的逆定理判定直角三角形,要注意三边数量关系必须满足"$a^2+b^2=c^2$". 同时还要注意,这里的 a、b、c 只代表三角形的三边,并未特指 a、b 是直角边,c 是斜边. 因为本题得到了 $c^2+b^2=a^2$,所以可以判断 b、c 是直角边,a 是斜边.

3. 解: (1)∵ $12^2+15^2=369$,$18^2=324$,

∴ $12^2+15^2\neq18^2$,∴ 12,15,18 不是勾股数.

(2)∵ $11^2+60^2=3\,721$,$61^2=3\,721$,

∴ $11^2+60^2=61^2$,∴ 11,60,61 是勾股数.

(3)∵ $15^2+36^2=1\,521$,$39^2=1\,521$,

∴ $15^2+36^2=39^2$,∴ 15,36,39 是勾股数.

(4)∵ $12^2+35^2=1\,369$,$36^2=1\,296$,

∴ $12^2+35^2\neq36^2$,∴ 12,35,36 不是勾股数.

习题 3.2

1. 解: (1)把这 3 个数分别扩大 2 倍,所得的 3 个数还是勾股数. 扩大 3 倍、4 倍和 k 倍,所得的 3 个数还是勾股数.

证明:$3\times2=6$,$4\times2=8$,$5\times2=10$,

∵ $6^2+8^2=10^2$,∴ 把这 3 个数分别扩大 2 倍,所得的 3 个数还是勾股数;

$3\times3=9$,$4\times3=12$,$5\times3=15$,

∵ $9^2+12^2=15^2$,∴ 把这 3 个数分别扩大 3 倍,所得的 3 个数还是勾股数;

$3\times4=12$,$4\times4=16$,$5\times4=20$,

∵ $12^2+16^2=20^2$,∴ 把这 3 个数分别扩大 4 倍,所得的 3 个数还是勾股数;

把 3、4、5 这三个数分别扩大 k 倍,得 $3k$、$4k$、$5k$,

则 $(3k)^2+(4k)^2=25k^2$,$(5k)^2=25k^2$,

∴ $(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$,∴ 把这 3 个数分别扩大 k 倍,所得的 3 个数还是勾股数.

(2)△ABC 是直角三角形. 证明如下:

∵ $a=n^2-1$,$b=2n$,$c=n^2+1$,

∴ $a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4-2n^2+1+4n^2=n^4+2n^2+1$,

$c^2=(n^2+1)^2=n^4+2n^2+1$,∴ $a^2+b^2=c^2$,

∴ △ABC 是直角三角形.

2. 解: ∠BAC 是直角.

证明: ∵ $AD\perp BC$,∴ △ABD 与△ACD 都是直角三角形. ∵ $CD=1$,$AD=2$,∴ $AC^2=AD^2+CD^2=2^2+1^2=5$.

∵ $AD=2$,$BD=4$,∴ $AB^2=AD^2+BD^2=2^2+4^2=20$,

∴ $AC^2+AB^2=5+20=25$.

∵ $BC=BD+CD=4+1=5$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore BC^2=5^2=25$,

$\therefore AC^2+AB^2=BC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形,

$\therefore \angle BAC$是直角.

3.3 勾股定理的简单应用

练习

1. 解: $\because \triangle ABD$ 是直角三角形,$\angle A=90°$,$AB=16$,$AD=12$,

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 16\times 12=96$,$BD^2=AD^2+AB^2=12^2+16^2=400$,$\therefore BD=20$.

$\because CD^2=15^2=225$,

$\therefore BD^2+CD^2=400+225=625$.

$\because BC^2=25^2=625$,$\therefore BD^2+CD^2=BC^2$,

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形,

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 20\times 15=150$,

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=96+150=246$.

2. 解: $\because$ 三角形三边长的比为 3∶4∶5,

$\therefore$ 设三角形三边长为 $3k$ cm、$4k$ cm、$5k$ cm.

$\because$ 它的周长是 60 cm,

$\therefore 3k+4k+5k=60$,解得 $k=5$,

$\therefore$ 三角形三边长为 $3\times 5=15$(cm),

$4\times 5=20$(cm),$5\times 5=25$(cm).

$\because 15^2+20^2=625$,$25^2=625$,

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形,且两直角边长分别为 15 cm 和 20 cm,

$\therefore$ 这个三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 15\times 20=150$($cm^2$).

习题 3.3

1. 解: 由题图可知,$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle B=90°$,

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$.

又$\because BC=7.5$ m,$AC=19.5$ m,

$\therefore AB^2+7.5^2=19.5^2$,

解得 $AB=18$ m.

答:AB 的长为 18 m.

2. 解: 由题图可知,育苗棚的侧面是直角三角形,且两直角边长分别为 1.5 m 和 2 m,斜边是育苗棚顶部矩形的宽.

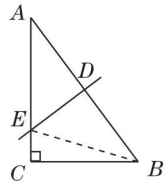
根据勾股定理,得 $1.5^2+2^2=$斜边长^2,

解得斜边长 $=2.5$ m,

$\therefore$ 该直角三角形的斜边长为 2.5 m.

$\therefore$ 育苗棚顶部塑料薄膜的面积为 $20\times 2.5=50$(m^2).

3. 解: 如答图 3.3-1,连接 BE. 设 $AE=x$,



答图 3.3-1

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore BE=AE=x$.

$\because AC=12$,$\therefore EC=12-x$.

在 Rt$\triangle BCE$ 中,根据勾股定理,得 $BC^2+EC^2=BE^2$,$\because BC=9$,

$\therefore 9^2+(12-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{75}{8}$,

$\therefore 12-x=12-\frac{75}{8}=\frac{21}{8}$,

答:AE、EC 的长分别为$\frac{75}{8}$和$\frac{21}{8}$.

4. 解: 以 AB、BC 为直径的两个半圆的面积之和等于以 AC 为直径的半圆的面积.

理由:$\because AB$、BC、AC 为 3 个半圆的直径,$\therefore$ 这 3 个半圆的半径分别为$\frac{1}{2}AB$、$\frac{1}{2}BC$ 和$\frac{1}{2}AC$,$\therefore$ 这 3 个半圆的面积分别为 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$、$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ 和 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AC\right)^2$,即 $\frac{1}{8}\pi AB^2$、$\frac{1}{8}\pi BC^2$和$\frac{1}{8}\pi AC^2$. $\therefore$ 两个较小半圆的面积之和为$\frac{1}{8}\pi AB^2+\frac{1}{8}\pi BC^2=\frac{1}{8}\pi(AB^2+BC^2)$.

$\because \triangle ABC$是直角三角形,且 AC 为斜边,

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$,$\therefore \frac{1}{8}\pi(AB^2+BC^2)=\frac{1}{8}\pi AC^2$.

$\therefore$ 以 AB、BC 为直径的两个半圆的面积之和等于以 AC 为直径的半圆的面积.

复习题

1. 解: (1)$\because a^2+c^2=15^2+8^2=289$,$b^2=17^2=289$,

$\therefore a^2+c^2=b^2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 由线段 a、b、c 组成的三角形是直角三角形.

(2)∵ $a^2+b^2=4^2+5^2=41$, $c^2=36$,

∴ $a^2+b^2\neq c^2$,

∴ 由线段 a、b、c 组成的三角形不是直角三角形.

2. 解:(1)∵ △ABD 为直角三角形,AD 为斜边,

∴ $AB^2+BD^2=AD^2$.

∵ $AB=2.0$ m, $BD=1.5$ m,

∴ $2.0^2+1.5^2=AD^2$,解得 $AD=2.5$ m.

答:AD 的长为 2.5 m.

(2)∵ △ABC 为直角三角形,AB 为斜边,

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$.

∵ $AC=1.2$ m, $BC=0.9$ m,

∴ $1.2^2+0.9^2=AB^2$,解得 $AB=1.5$ m.

答:AB 的长为 1.5 m.

3. 解:∵ $\angle BAC=90°$,∴ △ABC 是直角三角形,

∴ $AB^2+AC^2=BC^2$. ∵ $AB=15$, $AC=20$,

∴ $15^2+20^2=BC^2$,解得 $BC=25$.

∵ $AD\perp BC$,∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times BC\times AD$,∴ $AB\times AC=BC\times AD$. ∴ $15\times 20=25\times AD$,解得 $AD=12$. 在Rt△ABD中,由勾股定理,得 $AD^2+BD^2=AB^2$. ∵ $AB=15$, $AD=12$,∴ $12^2+BD^2=15^2$,解得 $BD=9$.

4. 解:设水深 $AC=x$ 尺,∵ $BC=1$ 尺,∴ 芦苇高 $AB=AB'=AC+BC=(x+1)$ 尺. 在Rt△$AB'C$中,根据勾股定理,得 $AC^2+B'C^2=AB'^2$.

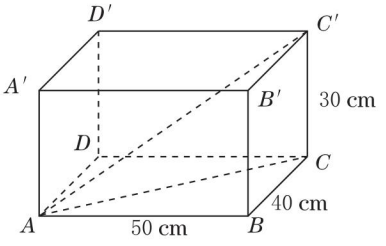
∵ 底面边长为 10 尺,

∴ $B'C=\frac{1}{2}\times 10=5$(尺),∴ $x^2+5^2=(x+1)^2$,

解得 $x=12$,∴ $AB=x+1=12+1=13$(尺).

答:水深 12 尺,芦苇长 13 尺.

5. 解:如答图1,由已知得 $AB=50$ cm, $BC=40$ cm, $CC'=30$ cm,连接 AC、AC'.



答图1

在Rt△ABC中,

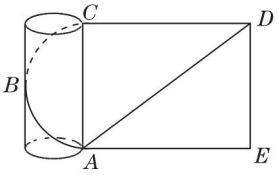
$AC^2=AB^2+BC^2=50^2+40^2=4\ 100$,

在Rt△ACC'中,

$AC'^2=AC^2+CC'^2=4\ 100+30^2=5\ 000$.

∵ $70^2=4\ 900<5\ 000$,∴ 能放进去.

6. 解:如答图2,设葛藤绕圆柱形树干盘旋的部分是曲线 ABC,画出圆柱的侧面展开图,得长方形 $ACDE$,则对角线 AD 即为葛藤的长.



答图2

在Rt△ADE中,依题意知 $AE=12$ cm, $DE=9$ cm,根据勾股定理,得 $AE^2+DE^2=AD^2$,

∴ $12^2+9^2=AD^2$,解得 $AD=15$ cm.

答:这段葛藤的长是 15 cm.

第4章 实 数

4.1 平方根

练习

解:81 的平方根是 ±9;289 的平方根是 ±17;0 的平方根是 0;2$\frac{1}{4}$的平方根是 $\pm\frac{3}{2}$;2.56 的平方根是 ±1.6;0.81 的平方根是 ±0.9.

点拨:一个正数有两个平方根,它们互为相反数;0 的平方根是 0;负数没有平方根.

练习

1. 解:0.01 的算术平方根是 0.1;$\frac{25}{16}$的算术平方根是$\frac{5}{4}$;0 的算术平方根是 0;10 的算术平方根是 $\sqrt{10}$;∵ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$的算术平方根是$\frac{1}{3}$,

∴ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 的算术平方根是$\frac{1}{3}$.

点拨:注意算术平方根与平方根的区别与联系.

2. 解:$(\sqrt{4})^2$ 有意义,$(\sqrt{4})^2=4$;

$(\sqrt{-3})^2$ 无意义;

$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$有意义,$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$;

$\sqrt{(-2)^2}$有意义,$\sqrt{(-2)^2}=2$.

点拨:①$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$;

②$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 4.1

1. 解: 169 的平方根是 ±13;225 的平方根是 ±15;$\frac{1}{4}$的平方根是 $\pm\frac{1}{2}$;11 的平方根是 $\pm\sqrt{11}$;0.16 的平方根是 ±0.4;$\frac{36}{49}$的平方根是 $\pm\frac{6}{7}$;1.44 的平方根是 ±1.2.

点拨: 一个正数有两个平方根,它们互为相反数.

2. 解: 49 的算术平方根是 7;$\frac{144}{121}$的算术平方根是 $\frac{12}{11}$;10 的算术平方根是 $\sqrt{10}$;$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ 的算术平方根是 $\frac{2}{3}$.

3. 解: (1) $x=\pm4$. (2) $x=\pm\frac{5}{7}$.

(3) $x=\pm\sqrt{15}$.

(4) $x=\pm\frac{9}{2}$.

点拨: 求等式中的 x,实际上就是解方程. 一般地,解这类题,先将方程化为 $x^2=a$ 的形式,再把方程两边同时开平方,得到 x 的值. 问题的结果有 3 种情况:

(1) 当 $a>0$ 时,可以得到两个解;(2) 当 $a=0$ 时,可以得到一个解;(3) 当 $a<0$ 时,没有解.

4. 解: $\because\angle C=90°$, $\therefore AB^2=AC^2+BC^2$.

(1) $\because AC=5, BC=12$,

$\therefore AB^2=5^2+12^2=169$,

$\therefore AB=13$(舍去负值);

(2) $\because AC=2, BC=3$,

$\therefore AB^2=2^2+3^2=13$,

$\therefore AB=\sqrt{13}$(舍去负值);

(3) $\because AB=25, BC=24$,

$\therefore 25^2=AC^2+24^2$,

$\therefore AC^2=49$,

$\therefore AC=7$(舍去负值).

点拨: 根据勾股定理求解即可,注意区分直角边和斜边.

5. 解: (1) $\because$ 直角三角形的两条直角边的长分别为 3 和 5,

$\therefore$ 斜边长的平方为 $3^2+5^2=34$,

$\therefore$ 斜边长为 $\sqrt{34}$(舍去负值).

(2) ①若 3 和 5 都是直角三角形的直角边长,由(1)知,斜边长为 $\sqrt{34}$;②若 3 是直角边长,5 是斜边长,则第三边长的平方为 $5^2-3^2=16$,

$\therefore$ 第三边的长为 4(舍去负值). 综上,第三边的长为 $\sqrt{34}$ 或 4.

点拨: 根据勾股定理求解即可,注意区分直角边和斜边.

6. 解: (1) 依题意知 $h=1.532\ 7$ km,

$\therefore d\approx\sqrt{2\times1.532\ 7\times6\ 400}\approx140$(km).

$\because 140\ \text{km}<230\ \text{km}$, $\therefore$ 说法(1)错误.

(2) 依题意知 $h=0.125$ km,

$\therefore d\approx\sqrt{2\times0.125\times6\ 400}=40$(km).

$\because 40\ \text{km}>35\ \text{km}$, $\therefore$ 说法(2)正确.

点拨: 准确理解题意是解本题的关键.

4.2 立方根

练习

1. 解: -27 的立方根是 -3;

0.008 的立方根是 0.2;

$\frac{1}{125}$的立方根是 $\frac{1}{5}$;-1 的立方根是 -1;0.064 的立方根是 0.4;4 的立方根是 $\sqrt[3]{4}$.

点拨: 任何数都有立方根. 正数的立方根是正数;负数的立方根是负数;0 的立方根是 0.

2. (1) -8 (2) 2 (3) -3 (4) -3

点拨: (1) $(\sqrt[3]{a})^3=a$; (2) $\sqrt[3]{a^3}=a$.

3. 解: 设体积约为 5 120 m^3 的探空气球的半径为 R_1,体积约为 80 m^3 的探空气球的半径为 R_2.

$\because V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$,

$\therefore 5\ 120=\frac{4}{3}\pi {R_1}^3$, $80=\frac{4}{3}\pi {R_2}^3$,

$\therefore \frac{4}{3}\pi {R_1}^3 : \frac{4}{3}\pi {R_2}^3={R_1}^3 : {R_2}^3=(R_1 : R_2)^3$

$=5\ 120 : 80=64 : 1$,

$\therefore R_1 : R_2=4 : 1$.

点拨: 从本题可以看出,两个球形探空气球的体积之比等于它们的半径之比的立方.

习题 4.2

1. 解: -0.001 的立方根是 -0.1;$-\frac{27}{64}$的立方根是 $-\frac{3}{4}$;0.027 的立方根是 0.3;1 的立方根是 1;

1 331 的立方根是 11.

点拨: 任何数都有立方根. 正数的立方根是正数;负数的立方根是负数;0 的立方根是 0.

2. 解: $(\sqrt[3]{1.2})^3=1.2$; $\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$;

$(\sqrt[3]{-5})^3=-5$; $-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$.

点拨: (1) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$; (2) $\sqrt[3]{a^3}=a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解: (1) $x^3 = -0.125$, $x = -0.5$.

(2) $8x^3 = 27$, $x^3 = \frac{27}{8}$, $x = \frac{3}{2}$.

(3) $x^3 + 3 = 2$, $x^3 = -1$, $x = -1$.

(4) $(x-1)^3 = 8$, $x - 1 = 2$, $x = 3$.

点拨: 求等式中的 x,实际上就是解方程. 一般地,解这类题,先将方程化为 $x^3 = a$ 的形式,再把方程两边同时开立方,进而得到 x 的值.

4. 解: 设正方体原来的棱长为 a,则原来的体积为 a^3,扩大后的体积为 $64a^3$,所以扩大后的棱长为 $\sqrt[3]{64a^3} = \sqrt[3]{(4a)^3} = 4a$,即它的棱长扩大到原来的 4 倍.

点拨: 如果一个正方体的体积扩大到原来的 a 倍,那么它的棱长扩大到原来的 $\sqrt[3]{a}$ 倍.

5. 解: ∵ 球的体积公式为 $V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3$, R 为球的半径,

∴ $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$,

∴ $R^3 = 27$,

∴ $R = 3$.

答:这个球形容器的半径为 3 m.

点拨: 将相关数据代入公式计算即可.

4.3 实 数

练习

1. 解: (1) 有理数:$\{4\ \frac{2}{3}, 0.\dot{6}, \sqrt{0.25}, \sqrt[3]{-125}, -\sqrt{\frac{16}{49}}, \cdots\}$;

(2) 无理数:$\{-\sqrt[3]{9}, \sqrt{27}, \frac{\pi}{3}, 0.010\,010\,001\,000\,01\cdots, \cdots\}$;

(3) 正实数:$\{4\ \frac{2}{3}, 0.\dot{6}, \sqrt{0.25}, \sqrt{27}, \frac{\pi}{3}, 0.010\,010\,001\,000\,01\cdots, \cdots\}$;

(4) 负实数:$\{-\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{-125}, -\sqrt{\frac{16}{49}}, \cdots\}$.

点拨: ∵ $\sqrt{0.25} = 0.5$,

∴ $\sqrt{0.25}$ 是有理数;

∵ $\sqrt[3]{-125} = -5$,

∴ $\sqrt[3]{-125}$ 是有理数;

∵ $\frac{\pi}{3}$ 是无限不循环小数,

∴ $\frac{\pi}{3}$ 是无理数;

∵ 0.010 010 001 000 01… 是无限不循环小数,

∴ 0.010 010 001 000 01… 是无理数.

练习

1. 解: (1) $\sqrt{68} \approx 8$; (2) $\sqrt[3]{120} \approx 5$.

2. 解: (1) ∵ $\sqrt[3]{4} \approx 1.587\,4$, $\sqrt{3} \approx 1.732\,1$,

∴ $\sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$.

(2) ∵ $\sqrt{2} \approx 1.414\,2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707\,1$, ∴ $\sqrt{2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) ∵ $\sqrt{0.04} = 0.2$, $\frac{1}{\sqrt{0.04}} = 5$,

∴ $\sqrt{0.04} < \frac{1}{\sqrt{0.04}}$.

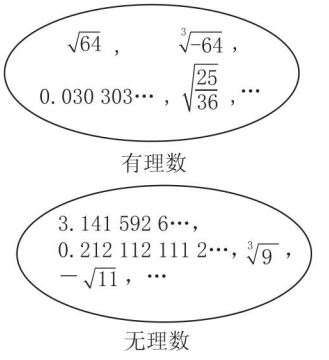
3. 解: (1) $3 \times \sqrt{2} - 2\pi \approx -2.040\,5$.

(2) $-2 \times \sqrt{5} + 5 \times \sqrt[3]{2} \approx 1.827\,5$.

(3) $\sqrt{2} - (\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}) \approx -1.555\,7$.

习题 4.3

1. 解: 如答图 4.3-1.



答图 4.3-1

点拨: ∵ $\sqrt{64} = 8$, ∴ $\sqrt{64}$ 是有理数;

∵ $\sqrt[3]{-64} = -4$, ∴ $\sqrt[3]{-64}$ 是有理数;

∵ 0.030 303… 是无限循环小数, ∴ 0.030 303… 是有理数;∵ $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$, ∴ $\sqrt{\frac{25}{36}}$ 是有理数. 判断 $\sqrt{a}$ 或 $\sqrt[3]{a}$ 是有理数还是无理数,不能只注意根号,还要看这个数的化简结果.

对于 $\sqrt[3]{9}$,容易忽视根指数 3,误认为 $\sqrt[3]{9} = 3$,错误地把它划分为有理数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解: (1)$\sqrt{7}+\frac{1}{4}-\pi\approx -0.25$.

(2)$\sqrt{5}-\sqrt{6}\approx -0.21$.

(3)$\pi-(\sqrt[3]{3}+\pi)\approx -1.44$.

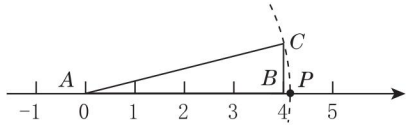
点拨: 精确到百分位,就是精确到0.01.

3. 解:

实数	相反数	绝对值	倒数
$\sqrt{2.5}$	$-\sqrt{2.5}$	$\sqrt{2.5}$	$\frac{1}{\sqrt{2.5}}$
$-\pi$	π	π	$-\frac{1}{\pi}$
$-\sqrt[3]{0.9}$	$\sqrt[3]{0.9}$	$\sqrt[3]{0.9}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{0.9}}$
$a(a>0)$	$-a$	a	$\frac{1}{a}$
$a(a<0)$	$-a$	$-a$	$\frac{1}{a}$

点拨: 根据相反数、绝对值和倒数的定义逐个解答即可.

4. 解: 如答图4.3-2所示,设原点为A,表示4的点为B. 过点B作数轴的垂线,在垂线上取一点C,使$BC=1$,连接AC,根据勾股定理得$AC^2=AB^2+BC^2=4^2+1^2=17$,所以$AC=\sqrt{17}$. 以点$A$为圆心,$AC$长为半径画弧,交数轴正半轴于点$P$,则点$P$所表示的数即为$\sqrt{17}$.



答图4.3-2

点拨: (1)构造两条直角边长分别为1和4的直角三角形是解本题的关键;(2)根据勾股定理计算出斜边的长度.

4.4 近似数

练习

1. 解: (1)中的数据是准确的,(2)、(3)、(4)中的数据均为近似的数据.

2. 解: (1)43.95 kg$\approx$40 kg$=4\times10$ kg;

(2)43.95 kg$\approx$44 kg;(3)43.95 kg$\approx$44.0 kg.

3. 解: 由题图可知,$\triangle ABC$是直角三角形,

且$\angle ACB=90°$.

又$\because AC=2.55$ m,$BC=3$ m,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2.55^2+3^2}\approx 3.9$(m).

答:拉索AB的长约为3.9 m.

习题4.4

1. 解: (1)3.3×10^{22}个;(2)3.6×10^{8} km^2.

2. 解: (1)1.7;(2)1.71;(3)1.710;(4)1.710 0.

3. 解: (1)精确到百分位;(2)精确到百位;

(3)精确到十分位;(4)精确到十亿分位.

4. 解: $\frac{157}{50}=3.14$;$\frac{22}{7}\approx 3.142\,857\,143$;

$\frac{355}{113}\approx 3.141\,592\,92$.

5. 解: $\because \triangle ABC$是直角三角形,$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$.

$\because BA=1.36$ km,$AC=2.95$ km,

$\therefore BC=\sqrt{AC^2-BA^2}=\sqrt{2.95^2-1.36^2}\approx 2.62$(km).

$\therefore BA+AC-BC\approx 1.36+2.95-2.62=1.69\approx 1.7$(km).

答:通过隧道BC比绕道BA和AC约少1.7 km的路程.

点拨: 运用转化与化归思想,将实际问题转化为求$BA+AC-BC$长度的问题,是解本题的关键.

复习题

1. 解: $\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\pi}{4}$、$\sqrt[3]{0.8}$是无理数.

点拨: 1.732是有理数;$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$,是有理数;$\sqrt{16}=4$,是有理数;$\sqrt[3]{0.8}\neq 0.2$,且开立方开不尽,是无理数.

2. 解: $\frac{9}{100}$的平方根是$\pm\frac{3}{10}$;6.25的平方根是± 2.5;

10的平方根是$\pm\sqrt{10}$;$\frac{1}{144}$的平方根是$\pm\frac{1}{12}$;

$1\frac{9}{16}$的平方根是$\pm\frac{5}{4}$.

3. 解: $-1\,000$的立方根是-10;0.125的立方根是0.5;$-\frac{1}{64}$的立方根是$-\frac{1}{4}$;-5的立方根是$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$;$3\frac{3}{8}$的立方根是$\frac{3}{2}$.

4. 解: $(\sqrt{2.5})^2=2.5$,$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right)^3=-\frac{1}{4}$,

$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$,$\sqrt[3]{(-10)^3}=-10$,

$-\sqrt{(-5)^2}=-5$,$-\sqrt[3]{(-2)^3}=2$.

5. 解: (1)$5x^2=10$,

$x^2=2$,

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$;

(2)$x^3-2=6$,

$x^3=8$,

$\therefore x=2$;

(3)$(2x)^2=0.25$,

$2x=\pm 0.5$,

$\therefore x=\pm 0.25$;

(4)$(x+4)^3=-64$,

$x+4=-4$,

$\therefore x=-8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解:** $\sqrt[3]{-2}$的相反数是$\sqrt[3]{2}$,绝对值是$\sqrt[3]{2}$;$-2\sqrt{6}$的相反数是$2\sqrt{6}$,绝对值是$2\sqrt{6}$;$\sqrt{5}-\pi$的相反数是$\pi-\sqrt{5}$,绝对值是$\pi-\sqrt{5}$;$2-\sqrt{3}$的相反数是$\sqrt{3}-2$,绝对值是$2-\sqrt{3}$;$1.4-\sqrt{2}$的相反数是$\sqrt{2}-1.4$,绝对值是$\sqrt{2}-1.4$.

7. **解:** $\sqrt{22.5}\approx 4.743$, $\sqrt{1.018}\approx 1.009$, $\sqrt{0.043\,62}\approx 0.209$, $\sqrt[3]{0.108}\approx 0.476$, $\sqrt[3]{\frac{8}{5}}\approx 1.170$.

8. **解:** (1)$2\times\sqrt{3}-3\times\sqrt{2}+\sqrt{5}\approx 1.46$;

(2)$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{355}{113}+2\pi-\sqrt{2}\approx 2.59$.

9. **解:** $\sqrt{18}\approx 4.2$, $\sqrt{34}\approx 5.8$, $\sqrt[3]{9}\approx 2.1$, $\sqrt[3]{60}\approx 3.9$.

10. **解:** (1)$2.0\dot{2}>2.020\,020\,002\cdots$;

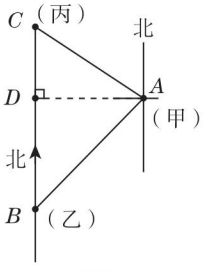
(2)$-\sqrt[3]{3}<-\sqrt[3]{2}$;

(3)$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

(4)$\pi-3>0.14$.

点拨: 比较两个负数的大小,可以先比较这两个负数的相反数的大小,相反数较大的负数反而小.$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|$是含有绝对值的式子,且去绝对值符号后为$\sqrt{5}-\sqrt{3}$,所以$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

11. **解:** 如答图1,设甲、乙、丙三地分别为点A、B、C,过点A作$AD\perp BC$于点D.



答图1

依题意知$\angle BAD=90°-45°=45°$,$AB=80$ km,$BC=100$ km.

$\because AD\perp BC$,

$\therefore \angle ABD=90°-45°=45°$,

$\therefore AD=DB$.

在Rt$\triangle ABD$中,$AD^2+DB^2=AB^2$,

$\therefore 2AD^2=2DB^2=80^2$,

$\therefore AD=DB=\sqrt{3200}\approx 56.6$(km),

$\therefore CD=BC-DB\approx 100-56.6=43.4$(km).

在Rt$\triangle ACD$中,$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}\approx\sqrt{56.6^2+43.4^2}\approx 71$(km).

答:这时它离甲地约71 km.

点拨: (1)运用概括与抽象的思想,将实际问题转化为几何问题,是解本题的前提;(2)过点A作BC的垂线,构造直角三角形,是解本题的关键;(3)运用方程思想,根据勾股定理列方程求相关线段的长,是解这类题常见的解题思路.

12. **解:** 在Rt$\triangle ABC$中,$AC=8$ m,$AB=10$ m,

由勾股定理得:

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$(m).

$\because$梯子顶端下滑了1 m,

$\therefore A'C=8-1=7$(m).

在Rt$\triangle A'B'C$中,$A'C=7$ m,$A'B'=10$ m,

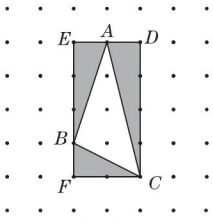
由勾股定理得:$B'C=\sqrt{A'B'^2-A'C^2}=\sqrt{10^2-7^2}=\sqrt{51}\approx 7.14$(m).

$\therefore BB'=B'C-BC\approx 7.14-6\approx 1.1$(m),

即BB'的长约是1.1 m.

若梯子的顶端下滑1.5 m,同理可知它的底端向外滑动的距离是$\sqrt{10^2-(8-1.5)^2}-6=\sqrt{57.75}-6\approx 1.6$(m).

13. **解:** 如答图2,分别取D,E,F三个点,构成长方形$CDEF$,则点A,B分别在DE,EF上.



答图2

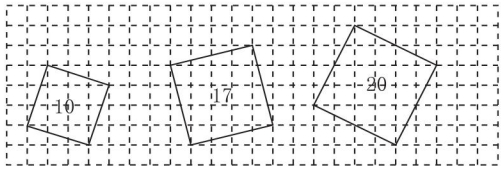
依题意知,$AE=1$,$EB=3$,$BF=1$,$FC=2$,$CD=4$,$DA=1$,

在Rt$\triangle AEB$、Rt$\triangle BFC$和Rt$\triangle CDA$中,$AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$;$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$;$CA=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$,

$\therefore\triangle ABC$的周长$=AB+BC+CA=\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{17}\approx 9.5$.

$S_{\triangle ABC}=S_{长方形CDEF}-S_{\triangle AEB}-S_{\triangle BFC}-S_{\triangle CDA}=2\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 3-\frac{1}{2}\times 1\times 2-\frac{1}{2}\times 1\times 4=3.5$.

14. **解:** 如答图3所示.

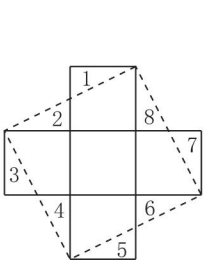


答图3

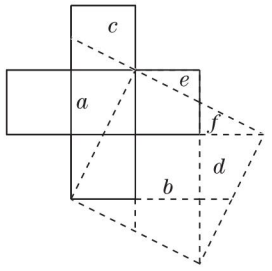
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨：画正方形，关键是要确定边长，根据要画的正方形面积可以求得其边长分别为 $\sqrt{10}$、$\sqrt{17}$ 和 $\sqrt{20}$，因此问题就转化为：在方格纸上作出长度分别为 $\sqrt{10}$、$\sqrt{17}$ 和 $\sqrt{20}$ 的线段，这可以根据勾股定理，构造直角三角形来解决.

15. 解：(1) 如答图 4 所示将图形剪开，其中，将 1 移至 2 处，3 移至 4 处，5 移至 6 处，7 移至 8 处即可.



答图 4



答图 5

(2) 最少只需剪 2 刀. 如答图 5 所示将图形剪开，其中，将 a 移至 b 处，c 移至 d 处，e 移至 f 处.

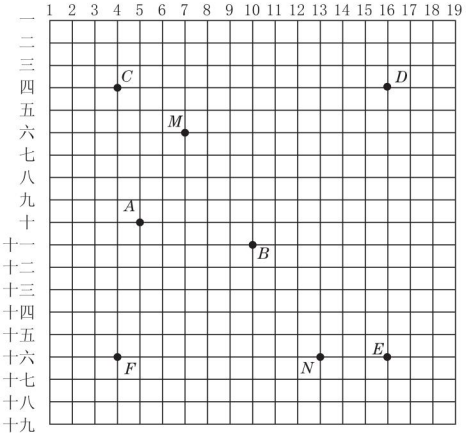
第5章 平面直角坐标系

5.1 位置的确定

练习

解：(1) 点 C 记为：4，四；点 D 记为：16，四；点 E 记为：16，十六；点 F 记为：4，十六.

(2) 如答图 5.1-1 所示.



答图 5.1-1

习题 5.1

1. 略.

2. 略.

3. 解：这些三角形的周长先逐渐变小，然后又逐渐变大.

有最小值.

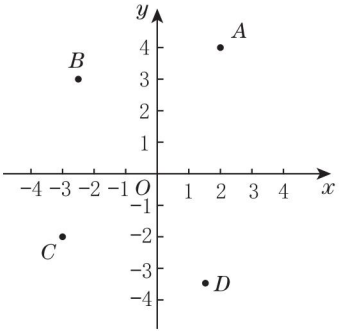
作点 P 关于直线 l 的对称点 P'，连接 $P'Q$，与直线 l 的交点即为所求的点 O.

5.2 平面直角坐标系

练习

1. 解：$A(4,5)$；$B(-5,-3)$；$C(3,-4)$.

2. 解：如答图 5.2-1 所示，点 A 在第一象限，点 B 在第二象限，点 C 在第三象限，点 D 在第四象限.



答图 5.2-1

练习

解：(1) 题图①中，点 A 的坐标为 $(2,3)$、点 B 的坐标为 $(3,0)$、点 M 的坐标为 $(1,1.5)$、点 N 的坐标为 $(2.5,1.5)$.

(2) 题图①向右平移 2 个单位长度，可以得到题图②，此时点 A' 的坐标为 $(4,3)$、点 B' 的坐标为 $(5,0)$、点 M' 的坐标为 $(3,1.5)$、点 N' 的坐标为 $(4.5,1.5)$；

题图①沿 x 轴向下翻折，可以得到题图③，此时点 A' 的坐标为 $(2,-3)$、点 B' 的坐标为 $(3,0)$、点 M' 的坐标为 $(1,-1.5)$、点 N' 的坐标为 $(2.5,-1.5)$；

题图①绕原点顺时针旋转 90°，可以得到题图④，此时点 A' 的坐标为 $(3,-2)$、点 B' 的坐标为 $(0,-3)$、点 M' 的坐标为 $(1.5,-1)$、点 N' 的坐标为 $(1.5,-2.5)$.

练习

1. 略.

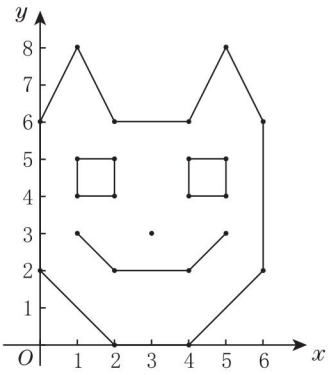
2. 解：以 AB 所在的直线为 x 轴，AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，点 P 在 y 轴的正半轴上. 当 $\triangle PAB$ 是等边三角形时，各顶点的坐标为 $P(0,\sqrt{3})$，$A(-1,0)$，$B(1,0)$；当 $\triangle PAB$ 是等腰直角三角形时，各顶点的坐标为 $P(0,1)$，$A(-1,0)$，$B(1,0)$.

点拨：答案不唯一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 5.2

1. 解:如答图 5.2-2 所示.



答图 5.2-2

2. (1)5　(2)13　(3)$m<0$

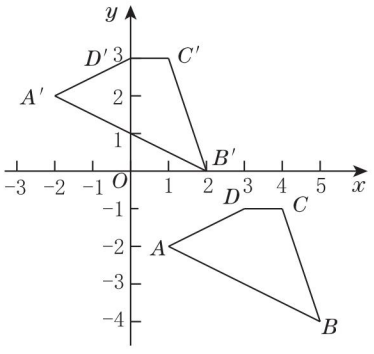
点拨:(2)可由勾股定理计算得出结果;(3)根据第二象限内点的坐标特征得出 m 的取值范围.

3. 解:点 $A(3,9)$ 在第一象限、点 $B(-3,9)$ 在第二象限、点 $C(-7,6)$ 在第二象限、点 $D(-2,0)$ 在 x 轴上、点 $E(-7,-9)$ 在第三象限、点 $F(7,-9)$ 在第四象限、点 $G(2,0)$ 在 x 轴上、点 $H(7,6)$ 在第一象限.

4. 解:$P(-5,3)$.

5. 解:$D(0,3)$.

6. 解:如答图 5.2-3,$A'(-2,2)$、$B'(2,0)$、$C'(1,3)$、$D'(0,3)$.

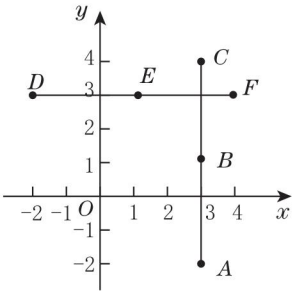


答图 5.2-3

7. 解:如答图 5.2-4.

(1)点 A、B、C 在一条直线上,AC 平行于 y 轴,点 A、B、C 的横坐标相等.

(2)点 D、E、F 在一条直线上,DF 平行于 x 轴,点 D、E、F 的纵坐标相等.



答图 5.2-4

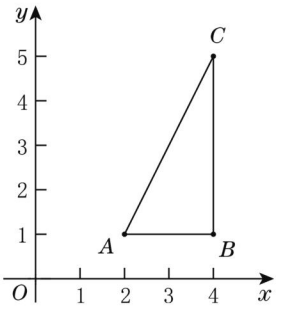
复习题

1. 解:(1)略.

(2)1 月至 7 月的平均气温逐渐上升.

(3)7 月至 12 月的平均气温逐渐下降.

2. 解:(1)如答图 1,$\triangle ABC$ 是直角三角形.

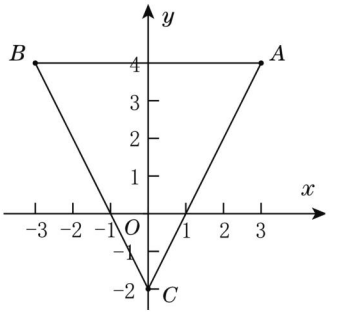


答图 1

(2)如答图 2,$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

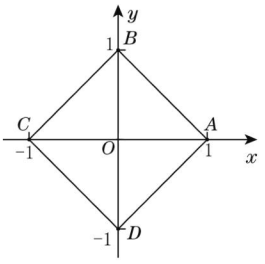
(3)如答图 3,四边形 $ABCD$ 是正方形.

(4)如答图 4,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

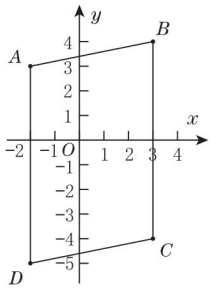


答图 2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



答图3



答图4

3. **解**:点 A 在第二象限;点 B 在第四象限;点 C 在第一象限;点 D 在第三象限;点 E 在 y 轴上.

4. **解**:填表如下:

点的坐标	(5,2)	(−2,5)	(−2,−4)	(4,−2)
关于 x 轴对称的点的坐标	(5,−2)	(−2,−5)	(−2,4)	(4,2)
关于 y 轴对称的点的坐标	(−5,2)	(2,5)	(2,−4)	(−4,−2)

5. **解**:$A(-1,-1)$;$B(3,-1)$;$C(3,3)$;$D(-1,3)$;$E(1,1)$.

6. (1)B;C;A;B　(2)二;y 轴上

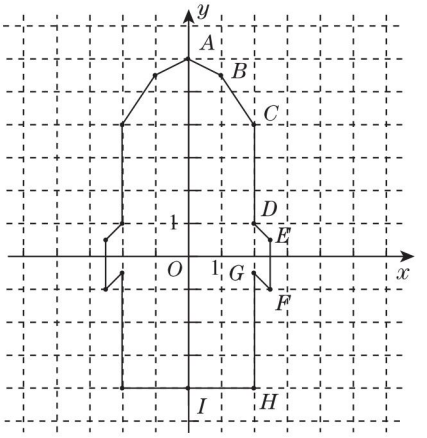
点拨:(1)关于 x 轴对称的两个点的横坐标相等,纵坐标互为相反数,关于 y 轴对称的两个点的纵坐标相等,横坐标互为相反数;

(2)横坐标或纵坐标为 0 的点,一定在坐标轴上.特别地,横坐标与纵坐标都为 0 的点是原点.

7. **解**:填表如下:

点的横坐标(符号)	点的纵坐标(符号)	点所在的象限或坐标轴
+	+	第一象限
−	+	第二象限
+	−	第四象限
−	−	第三象限
0	0	原点
−	0	x 轴的负半轴
+	0	x 轴的正半轴
0	−	y 轴的负半轴
0	+	y 轴的正半轴

8. **解**:如答图5所示,在平面直角坐标系中,依次作出并连接点 $A(0,6)$,$B(1,5.5)$,$C(2,4)$,$D(2,1)$,$E(2.5,0.5)$,$F(2.5,-1)$,$G(2,-0.5)$,$H(2,-4)$,$I(0,-4)$,再作连接这些点得到的折线关于 y 轴对称的折线即可.



答图5

9. **解**:∵ 点 C 在 y 轴上,

∴ 设点 C 的坐标为 $(0,a)$.

∵ $A(0,0)$、$B(3,0)$,

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形,且点 A 为直角顶点,$AB=3$,$AC=|a|$.

∵ $\triangle ABC$ 的面积是 5,

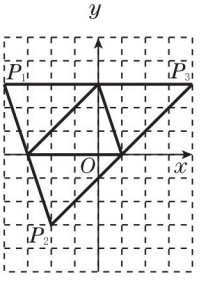
∴ $\frac{1}{2}\times AB\times AC=5$,即 $\frac{1}{2}\times 3\times|a|=5$,

∴ $|a|=\frac{10}{3}$,∴ $a=\pm\frac{10}{3}$,

∴ 点 C 的坐标为 $\left(0,\frac{10}{3}\right)$或 $\left(0,-\frac{10}{3}\right)$.

10. **解**:设第 4 个顶点为 P.

(1)如答图6,当第3个顶点在 y 轴的正半轴上时,第4个顶点为 $P_1(-4,3)$ 或 $P_2(-2,-3)$ 或 $P_3(4,3)$.



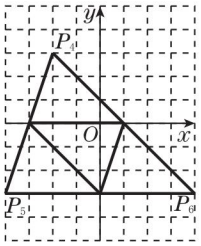
答图6

(2)如答图7,当第3个顶点在 y 轴的负半轴上

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

时,第4个顶点为$P_4(-2,3)$或$P_5(-4,-3)$或$P_6(4,-3)$.

综上所述,第4个顶点的坐标为$(-4,3)$或$(-2,-3)$或$(4,3)$或$(-2,3)$或$(-4,-3)$或$(4,-3)$.

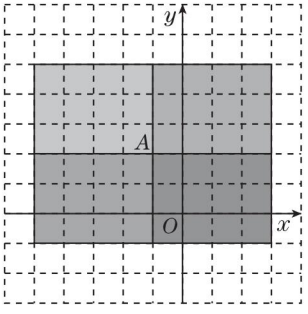


答图7

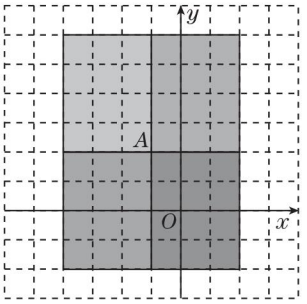
11. **解:**如答图8所示,当长方形长为4的边与x轴平行时,长方形的位置共有4种不同情况,所以长方形其余三个顶点的坐标为$(3,2)$,$(3,5)$,$(-1,5)$或$(-1,5)$,$(-5,5)$,$(-5,2)$或$(-5,2)$,$(-5,-1)$,$(-1,-1)$或$(-1,-1)$,$(3,-1)$,$(3,2)$;

如答图9所示,当长方形长为3的边与x轴平行时,长方形的位置共有4种不同情况,所以长方形其余三个顶点的坐标为$(2,2)$,$(2,6)$,$(-1,6)$或$(-1,6)$,$(-4,6)$,$(-4,2)$或$(-4,2)$,$(-4,-2)$,$(-1,-2)$或$(-1,-2)$,$(2,-2)$,$(2,2)$.

综上所述,所画长方形的其余三个顶点的坐标为$(3,2)$,$(3,5)$,$(-1,5)$或$(-1,5)$,$(-5,5)$,$(-5,2)$或$(-5,2)$,$(-5,-1)$,$(-1,-1)$或$(-1,-1)$,$(3,-1)$,$(3,2)$或$(2,2)$,$(2,6)$,$(-1,6)$或$(-1,6)$,$(-4,6)$,$(-4,2)$或$(-4,2)$,$(-4,-2)$,$(-1,-2)$或$(-1,-2)$,$(2,-2)$,$(2,2)$.



答图8



答图9

第6章 一次函数

6.1 函 数

练习

1. 略.

2. **解:**y是x的函数. 因为在这个运算过程中,有两个变化的量x与y,并且对于任意的一个x的值,y都有唯一的一个值和它对应,符合函数的定义,所以y是x的函数.

练习

1. **解:**$100-x$

当x的值越来越大时,y的值越来越小.

2. **解:**题图②表示甲离家的路程s(m)与时间t(min)之间的函数关系;题图④表示乙离家的路程与时间之间的函数关系.

点拨:(1)甲用20 min走了900 m,题图①②④符合题意,甲随即按原速返回,意味着甲仍然用20 min走了900 m,所以题图②符合题意;(2)乙用20 min走了900 m,题图①②④符合题意,接着乙与朋友交谈了10 min,意味着在这10 min之内,乙的路程没有发生变化,所以题图④符合题意.

习题6.1

1. **解:**(1)$S=\frac{\pi}{4}d^2$,其中$\frac{\pi}{4}$是常量,d与S是变量,d是自变量,S是d的函数.

(2)$y=1.20x$,其中1.20是常量,x与y是变量,x是自变量,y是x的函数.

(3)$g=h-105$,其中-105是常量,h与g是变量,h是自变量,g是h的函数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解: $l=340t$.

听到雷声比看到闪电延迟了 7 s 可以看作是雷声从雷电发生地传到观察者所在地用了7 s,此时 $l=340\times7=2\ 380$(m).

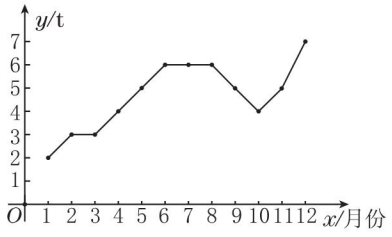
答:雷电大约发生在离观察者 2 380 m 远的高空.

3. 解: $y=-\frac{3}{500}x+14.1$.

点拨: 上山过程中的气温 $y=14.1-0.6\times\frac{x}{100}=-\frac{3}{500}x+14.1$.

4. 略.

5. 解: (1)(2)如答图 6.1-1 所示.

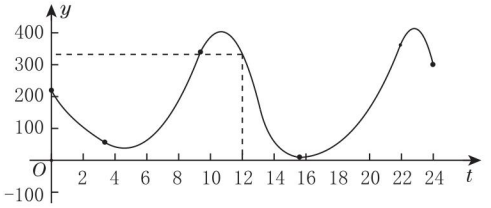


答图 6.1-1

(3)与上月相比,2、4、5、6、11、12 这六个月的产量是上升的,9、10 这两个月的产量是下降的,3、7、8 这三个月的产量是不升不降的.

6. 解: (1)如答图 6.1-2 所示.

(2)12:00 时的潮位约为 325 cm.



答图 6.1-2

6.2 一次函数

练习

1. 解: $y=465-15t$.

2. 解: $y=-10x+150$.

点拨: 依题意得 $y=10(15-x)$,整理得 $y=-10x+150$.

练习

1. (1) -7;0 (2) -5;$\frac{1}{3}$

2. 解: $s=520-80t$.

∵ 甲、乙两地相距 520 km,车速为 80 km/h,

∴ 汽车到达乙地所用的时间为 $520\div80=6.5$(h),

∴ $0\leqslant t\leqslant6.5$.

习题 6.2

1. (1) -11;4 (2) $\frac{15}{4}$;7

2. 解: (1) $y=-x+25$.

(2)当 $x=10$ 时,$y=15$,所以当宽为10 cm时,长为 15 cm.

3. 解: (1) $y=-2x+80$.

(2)当 $x=30$ 时,$y=-2\times30+80=20$,所以当腰长为 30 时,底边长为 20.

(3)当 $y=8$ 时,$8=-2x+80$,解得 $x=36$,所以当底边长为 8 时,腰长为 36.

4. 解: (1) $d=0.32x$.

(2)依题意得 $y=25\times11\times d$,

∵ $d=0.32x$,

∴ $y=25\times11\times0.32x$,即 $y=88x$.

(3)当 $d=1.6$ 时,$1.6=0.32x$,解得 $x=5$,

把 $x=5$ 代入 $y=88x$,得 $y=88\times5=440$,

即需往游泳池注水 5h,注水 440 m^3.

点拨: 本题涉及两个函数表达式,一是 $d=0.32x$,二是 $y=88x$. 所以在解(3)题时,先根据 $d=0.32x$ 计算出注水时间,再根据 $y=88x$ 计算出注水量.

5. 解: ∵ 当 $x=1$ 时,$y=7$,

∴ $7=a-3$,解得 $a=10$.

点拨: 用待定系数法求解. 当问题中只有一个待定系数时,只需找到一个独立条件代入表达式,即可求得待定系数的值.

6. 解: ∵ 当 $x=-3$ 时,$y=0$,

∴ $-3k+b=0$,

∵ 当 $x=0$ 时,$y=-4$,

∴ $b=-4$,

把 $b=-4$ 代入 $-3k+b=0$ 得 $-3k-4=0$,

解得 $k=-\frac{4}{3}$.

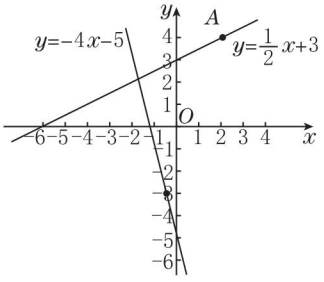
∴ $k=-\frac{4}{3}$,$b=-4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.3 一次函数的图像

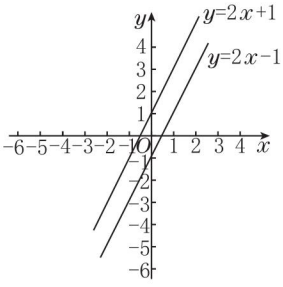
练习

1. 解: 如答图 6.3-1 所示,点 $A(2,4)$ 在函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的图像上,点 $B\left(-\frac{1}{2},-3\right)$ 在函数 $y=-4x-5$ 的图像上.



答图 6.3-1

2. 解: 如答图 6.3-2 所示,这两条直线互相平行.



答图 6.3-2

练习

1. 解: (1) 函数 $y=-1.6x+4$ 的值随自变量增大而减小.

(2) 函数 $y=0.5x-5$ 的值随自变量增大而增大.

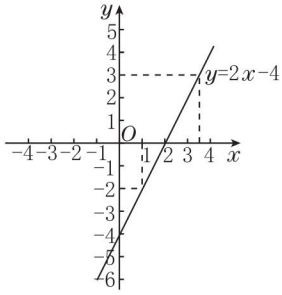
(3) 函数 $y=4x$ 的值随自变量增大而增大.

(4) 函数 $y=-\frac{3}{2}x-3$ 的值随自变量增大而减小.

(5) 函数 $y=5x-7$ 的值随自变量增大而增大.

点拨: 对于一次函数 $y=kx+b$,当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小.

2. 解: 如答图 6.3-3.



答图 6.3-3

由图像可知,(1) 当 $x=3.5$ 时,y 的值是 3.

(2) 当 $y=-2$ 时,x 的值是 1.

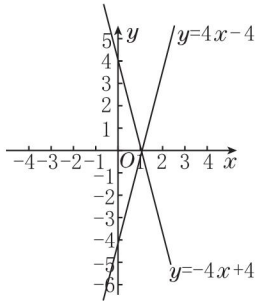
(3) 当 $x>2$ 时,$y>0$,当 $x=2$ 时,$y=0$,当 $x<2$ 时,$y<0$.

3. 解: 将正比例函数 $y=-\frac{3}{2}x$ 的图像向上平移 1 个单位长度,得到一次函数 $y=-\frac{3}{2}x+1$ 的图像;

将正比例函数 $y=-\frac{3}{2}x$ 的图像向下平移 2 个单位长度,得到一次函数 $y=-\frac{3}{2}x-2$ 的图像.

习题 6.3

1. 解: 如答图 6.3-4,由图像可知,它们的交点坐标为 $(1,0)$.



答图 6.3-4

2. 解: 由题图①知,该函数是正比例函数,设函数表达式为 $y=kx$,

∵ 图像经过点 $(3.5,2)$,

∴ $2=3.5k$,解得 $k=\frac{4}{7}$,

∴ 该函数表达式为 $y=\frac{4}{7}x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由题图②知，该函数是一次函数，设函数表达式为 $y=k'x+b$，

∵ 图像经过点(0,2)，∴ $b=2$，

∵ 图像经过点(2,0)，∴ $0=2k'+2$，

∴ $k'=-1$，

∴ 该函数表达式为 $y=-x+2$.

点拨：运用待定系数法，将图像上已知点的坐标代入函数表达式，求出待定系数，问题即可获解.

3. 解：函数(3) $y=x$，(4) $y=\frac{3}{2}x-2$，

(5) $y=5x-6$ 的值随自变量增大而增大；

函数(1) $y=5-2x$，(2) $y=-x+3$，

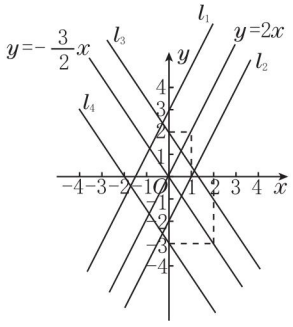
(6) $y=-0.75x$ 的值随自变量增大而减小；

函数(3) $y=x$，(6) $y=-0.75x$ 的图像经过原点.

4. (1) $>$；$>$　(2) $<$；$>$　(3) $>$；$<$　(4) $<$；$<$

5. 解：(1) 可以将 $y=2x$ 的图像向上平移 3 个单位长度，得到 l_1 的图像，相应的函数表达式为 $y=2x+3$；将 $y=2x$ 的图像向下平移 2 个单位长度，得到 l_2 的图像，相应的函数表达式为 $y=2x-2$.

(2) 如答图 6.3-5，将 $y=-\frac{3}{2}x$ 的图像向上平移 2 个单位长度，得到的图像为 l_3，相应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{2}x+2$；将 $y=-\frac{3}{2}x$ 的图像向下平移 3 个单位长度，得到的图像为 l_4，相应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{2}x-3$.



答图 6.3-5

6.4　用一次函数解决问题

练习

1. 解：依题意知，雪线海拔 y(m) 是时间 x(年) 的一次函数，函数表达式为 $y=4\,500+10x$. 当雪线退至山顶时，$y=5\,596$，即 $4\,500+10x=5\,596$，解得 $x=109.6$.

答：大约 109.6 年后，玉龙雪山的雪线会消失.

2. 解：(1) 当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=7.0$；当 $x>3$ 时，$y=7+2.4(x-3)$，即 $y=2.4x-0.2$.

(2) ∵ 小亮付费 19 元，

∴ 他乘车的路程超过了 3 千米，

把 $y=19$ 代入 $y=2.4x-0.2$，得 $19=2.4x-0.2$，解得 $x=8$.

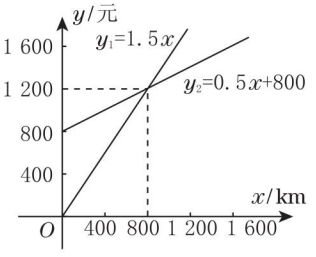
答：小亮乘车的路程为 8 千米.

练习

1. 解：甲汽车出租公司收取的费用 y_1(元) 与汽车行驶路程 x(km) 的函数表达式为 $y_1=150\times\frac{x}{100}=1.5x$；乙汽车出租公司收取的费用 y_2(元) 与汽车行驶路程 x(km) 的函数表达式为

$y_2=50\times\frac{x}{100}+800$，即 $y_2=0.5x+800$.

如答图 6.4-1，在同一平面直角坐标系中画出两个函数在第一象限的图像，



答图 6.4-1

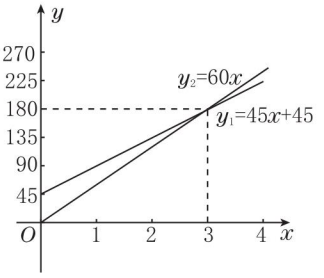
由图像可知，当汽车行驶路程小于800 km时，$y_1<y_2$，租用甲汽车出租公司的汽车费用较少，应选择甲汽车出租公司；当汽车行驶路程等于 800 km 时，$y_1=y_2$，租用两家公司的汽车费用相等，选择两家公司均可；当汽车行驶路程大于800 km 时，$y_1>y_2$，租用乙汽车出租公司的汽车费用较少，应选择乙汽车出租公司.

2. 解：A 旅行社收取的票款 y_1(元) 与全家人数 x(人) 的函数表达式为 $y_1=\frac{1}{2}\times 90(x-1)+90$，即 $y_1=45x+45$；B 旅行社收取的票款 y_2(元) 与全家人数 x(人) 的函数表达式为 $y_2=\frac{2}{3}\times 90x$，即 $y_2=60x$. 在同一平面直角坐标系中画出两个函数在第一象限的图像，如答图 6.4-2 所示，

由图像可知：(1) 若全家人数少于 3 人，$y_1>y_2$，选择 B 旅行社费用较少；(2) 若全家人数恰好为 3 人，$y_1=y_2$，两家旅行社费用相等；(3) 若全家人

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数多于3人，$y_1 < y_2$，选择A旅行社费用较少.



答图6.4-2

习题6.4

1. **解**：函数表达式为$Q = -6t + 40$，当$t = 2.5$时，$Q = -6 \times 2.5 + 40 = 25$，∴ 工作2.5 h后油箱中的剩余油量为25 L.

2. **解**：(1)设y与x之间的函数表达式为$y = kx + b$，∵ 汽车从离A站10 km的P地出发，∴ 当$x = 0$时，$y = 10$，∴ $b = 10$. ∵ 汽车15 min后离A站30 km，且15 min = 0.25 h，∴ 当$x = 0.25$时，$y = 30$，∴ $30 = 0.25k + 10$，解得$k = 80$，∴ y与x之间的函数表达式为$y = 80x + 10$.

(2)能准时到达. 由题意知$AB = 250$ km，$BC = 60$ km，∴ $AC = AB + BC = 310$ km，令$y = 310$，则$310 = 80x + 10$，解得$x = 3.75$，∴ 按原速行驶汽车出发3.75 h后可到达C站. ∵ 汽车8:00出发，通知要求12:00前赶到C站，∴ 汽车按原速行驶，能准时到达，出发后3.75 h到达C站，即11:45到达C站.

3. **解**：设电信公司收取费用为y(元)，通话时间为x(分钟)，

则甲种收费方式的函数表达式为$y = 0.2x + 8$；乙种收费方式的函数表达式为$y = 0.3x$. 由$0.2x + 8 = 0.3x$解得$x = 80$，所以通话时间超过80分钟时，甲种收费方式收取的费用较低，应选择甲种收费方式；通话时间低于80分钟时，乙种收费方式收取的费用较低，应选择乙种收费方式；当通话时间为80分钟时，选择任意一种收费方式均可.

4. **解**：依题意得：$y = 700x + 1\,200(50 - x) = -500x + 60\,000$. ∴ y与x之间的函数表达式为$y = -500x + 60\,000$.

5. **解**：(1)依题意得：$y = 1\,800x + 1\,600(20 - x) + 1\,200 \times 30 = 200x + 68\,000$，

即$y = 200x + 68\,000 (0 \leqslant x \leqslant 20$，且$x$为整数).

(2)依题意得：$y = 1\,600x + 1\,200(30 - x) + 1\,600 \times 20 = 400x + 68\,000$，

即$y = 400x + 68\,000 (0 \leqslant x \leqslant 30$，且$x$为整数).

6.5 一次函数与二元一次方程

练习

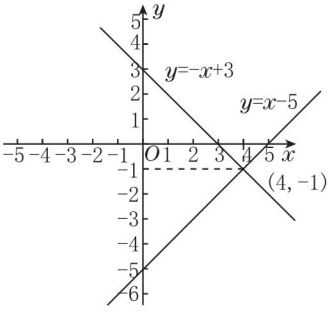
1. **解**：(1)$y = -3x + 7$；(2)$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$.

2. **解**：(1)由$x - y = 5$得$y = x - 5$，

由$y = 3 - x$得$y = -x + 3$，

如答图6.5-1，在同一平面直角坐标系中画出函数$y = x - 5$和函数$y = -x + 3$的图像，它们的交点坐标为$(4, -1)$，

所以二元一次方程组$\begin{cases} x - y = 5, \\ y = 3 - x \end{cases}$的解为$\begin{cases} x = 4, \\ y = -1. \end{cases}$



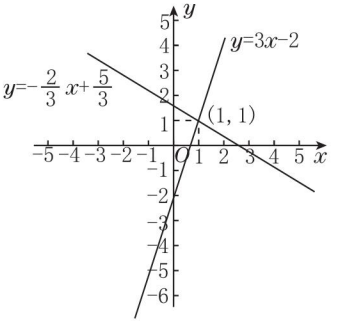
答图6.5-1

(2)由$2x + 3y = 5$得$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$，

由$3x - y = 2$得$y = 3x - 2$，

如答图6.5-2，在同一平面直角坐标系中画出函数$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$和函数$y = 3x - 2$的图像，它们的交点坐标为$(1, 1)$，

所以二元一次方程组$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - y = 2 \end{cases}$的解为$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$



答图6.5-2

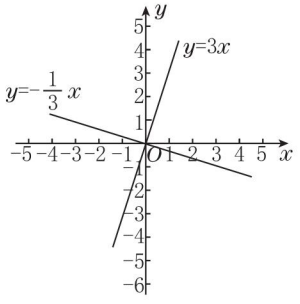
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 6.5

1. 解:(1)由 $3x-y=0$ 得 $y=3x$,

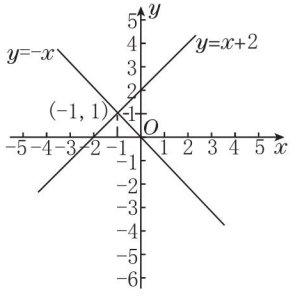
由 $x+3y=0$ 得 $y=-\frac{1}{3}x$,

如答图 6.5-3,在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=3x$ 和函数 $y=-\frac{1}{3}x$ 的图像,它们的交点坐标为(0,0),所以二元一次方程组 $\begin{cases}3x-y=0,\\x+3y=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$



答图 6.5-3

(2)由 $x+y=0$ 得 $y=-x$,由 $x-y+2=0$ 得 $y=x+2$,如答图 6.5-4,在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=-x$ 和函数 $y=x+2$ 的图像,它们的交点坐标为(-1,1),所以二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=0,\\x-y+2=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

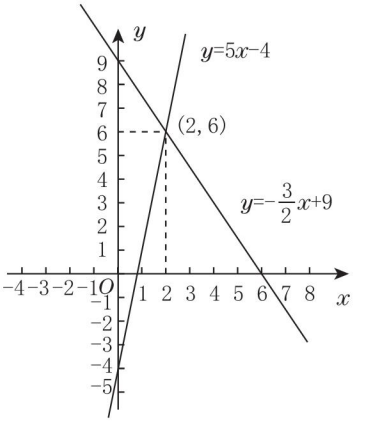


答图 6.5-4

2. 解:(1)由 $5x-y-4=0$ 得 $y=5x-4$,

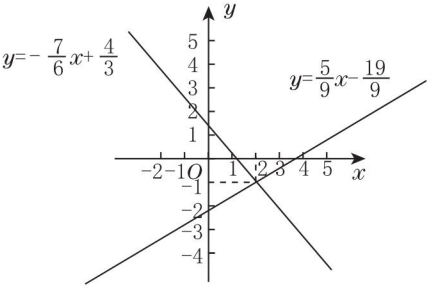
由 $3x+2y-18=0$ 得 $y=-\frac{3}{2}x+9$,

如答图 6.5-5,在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=5x-4$ 和函数 $y=-\frac{3}{2}x+9$ 的图像,它们的交点坐标为(2,6),所以二元一次方程组 $\begin{cases}5x-y-4=0,\\3x+2y-18=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=6.\end{cases}$



答图 6.5-5

(2)由 $7x+6y-8=0$ 得 $y=-\frac{7}{6}x+\frac{4}{3}$,由 $5x-9y-19=0$ 得 $y=\frac{5}{9}x-\frac{19}{9}$,如答图 6.5-6,在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=-\frac{7}{6}x+\frac{4}{3}$ 和函数 $y=\frac{5}{9}x-\frac{19}{9}$ 的图像,它们的交点坐标为(2,-1),所以二元一次方程组 $\begin{cases}7x+6y-8=0,\\5x-9y-19=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$



答图 6.5-6

3. 解:∵ 一次函数 $y=kx+1$ 与 $y=-0.5x+b$ 的图像相交于点(2,5),

∴ 点(2,5)在函数 $y=kx+1$ 的图像上,

∴ $5=2k+1$,解得 $k=2$;点(2,5)在函数 $y=-0.5x+b$ 的图像上,

∴ $5=-0.5\times2+b$,解得 $b=6$.

∴ $k=2$,$b=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.6 一次函数、一元一次方程和一元一次不等式

练习

1. 解: ∵ 当 $-2(x+1)+4>0$ 时,

函数 $y=-2(x+1)+4$ 的值是正数,解得 $x<1$,

∴ 当 $x<1$ 时,函数 $y=-2(x+1)+4$ 的值是正数;

∵ 当 $-2(x+1)+4<0$ 时,函数 $y=-2(x+1)+4$ 的值是负数,解得 $x>1$,

∴ 当 $x>1$ 时,函数 $y=-2(x+1)+4$ 的值是负数;

∵ 当 $-2(x+1)+4\geqslant 0$ 时,函数 $y=-2(x+1)+4$ 的值是非负数,解得 $x\leqslant 1$,

∴ 当 $x\leqslant 1$ 时,函数 $y=-2(x+1)+4$ 的值是非负数.

2. 解: (1)依题意得:$340=\frac{3}{5}x+331$,解得 $x=15$,

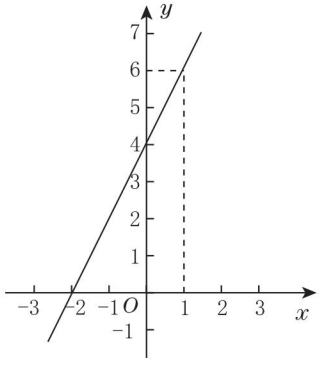
∴ 音速为 340 m/s 时,气温为 15 ℃.

(2)当音速超过 340 m/s 时,$\frac{3}{5}x+331>340$,解得 $x>15$,

∴ 音速超过340 m/s时,气温超过 15 ℃.

习题 6.6

1. 解: 如答图 6.6-1 所示,



答图 6.6-1

(1)方程 $2x+4=6$ 的解是 $x=1$;

(2)不等式 $2x+4>6$ 的解集是 $x>1$;

(3)不等式 $2x+4<6$ 的解集是 $x<1$.

2. 解: 令 $-3x+1>-2$,解得 $x<1$;令 $-3x+1<-2$,解得 $x>1$;令 $-3x+1=-2$,解得 $x=1$. ∴ 当 $x<1$ 时,函数 $y=-3x+1$ 的值大于 -2;当 $x>1$ 时,函数 $y=-3x+1$ 的值小于 -2;当 $x=1$ 时,函数 $y=-3x+1$ 的值等于 -2.

3. 解: 由 $x+2y=-5$ 得:$y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$,

令 $-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}>0$,解得 $x<-5$,

∴ 当 $x<-5$ 时,y 的值是正数;

令 $-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}<0$,解得 $x>-5$,

∴ 当 $x>-5$ 时,y 的值是负数;

令 $-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\geqslant 0$,解得 $x\leqslant -5$,

∴ 当 $x\leqslant -5$ 时,y 的值是非负数.

4. 解: (1)由图像知,当 $x=40$ 时,$y=6$;

当 $x=60$ 时,$y=10$.

$$\therefore \begin{cases} 6=40k+b, \\ 10=60k+b, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=\frac{1}{5}, \\ b=-2. \end{cases}$$

(2)由(1)知,$y=\frac{1}{5}x-2$,当 $y=0$ 时,

$\frac{1}{5}x-2=0$,解得 $x=10$,

∴ 旅客最多可免费携带行李的质量为 10 kg.

(3)依题意得:$4\leqslant \frac{1}{5}x-2\leqslant 15$,解得 $30\leqslant x\leqslant 85$,

∴ 行李费为 4 ~ 15 元时,旅客携带行李的质量为 30 ~ 85 kg.

复习题

1. (1)$y=200-120x$

(2)$S=256-\pi r^2$

(3)$y=-\frac{1}{2}x+4$

(4)$y=0.5x+20$

2. 解: ∵ 点 $P(-2,a)$ 在一次函数 $y=3x+1$ 的图像上,

∴ $a=3\times(-2)+1$,解得 $a=-5$.

∴ $P(-2,-5)$.

3. 解: (1)$y=-x$;(2)点 $A(a,2)$ 在 $y=-x$ 的图像上,∴ $2=-a$,即 $a=-2$.

4. 解: 如答图 1,由图像可知,

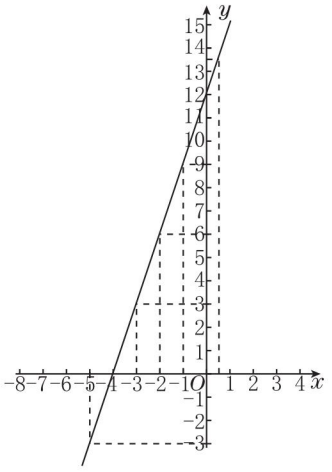
(1)当 $x=-2$ 时,$y=6$;当 $x=-1$ 时,$y=9$;

当 $x=0.5$ 时,$y=13.5$.

(2)当 $y=3$ 时,$x=-3$;当 $y=9$ 时,$x=-1$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

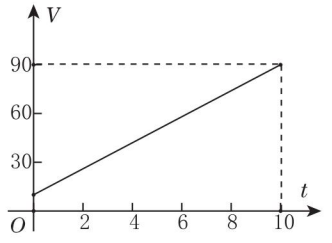
当 $y=-3$ 时，$x=-5$.



答图 1

5. 解：(1) $V=8t+10(0\leqslant t\leqslant 10)$；(2) 当 $t=0$ 时，$V=10$；当 $V=90$ 时，$90=8t+10$，解得 $t=10$.

(3) 如答图 2 所示，

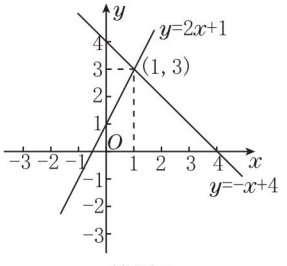


答图 2

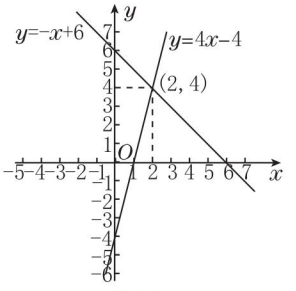
6. 解：(1) 由 $x+y-4=0$ 得 $y=-x+4$，

由 $2x-y+1=0$ 得 $y=2x+1$.

如答图 3，在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=-x+4$ 和函数 $y=2x+1$ 的图像，它们的交点坐标为 $(1,3)$，所以二元一次方程组 $\begin{cases}x+y-4=0,\\2x-y+1=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$



答图 3



答图 4

(2) 由 $4x-y-4=0$ 得 $y=4x-4$，由 $x+y-6=0$ 得 $y=-x+6$. 如答图 4，在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=4x-4$ 和函数 $y=-x+6$ 的图像，它们的交点坐标为 $(2,4)$，所以二元一次方程组 $\begin{cases}4x-y-4=0,\\x+y-6=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}$

7. (1) $\frac{1}{2}$

(2) 一、三、四

(3) 一、二、三

8. 解：(1) 设一次函数 $y=2x+b$ 的图像与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，则 $\triangle AOB$ 是直角三角形.

当 $y=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}b$；当 $x=0$ 时，$y=b$.

$\therefore OA=\left|\frac{1}{2}b\right|, OB=|b|$,

$\because S_{\triangle AOB}=4$,

$\therefore \frac{1}{2}\times OA\times OB=\frac{1}{2}\times\left|\frac{1}{2}b\right|\times|b|=4$,

解得 $b=\pm 4$.

(2) 依题意得 $\begin{cases}y=-2x+1,\\y=x+4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数 $y=2x+b$ 的图像经过点 $(-1,3)$，

$\therefore 3=2\times(-1)+b$，解得 $b=5$.

9. 略.

10. 解：(1) 填表如下：

t	0:00	3:00	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00	24:00
y	7	9	6.9	5	7	9	7.2	5	7

(2) 由题图可知，16:30 时，水深约为 8.5 m，所以港口能满足该货轮进港的时间要求.

11. 解：设该一次函数表达式为 $y=kx+b$.

依题意知，当 $x=-3$ 时，$y=-9$；当 $x=0$ 时，$y=-3$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases} -9=-3k+b, \\ -3=b, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=2, \\ b=-3, \end{cases}$

$\therefore y=2x-3$.

B 中的实数从上至下依次为 $-2\sqrt{2}-3$，-5，$2\pi-3$.

12. 解：(1)由 $\frac{1}{2}x+y=0$ 得：$y=-\frac{1}{2}x$，把 $y=-\frac{1}{2}x$ 代入 $x+2y-3=0$ 得：$-3=0$，

$\therefore$ 方程组无解.

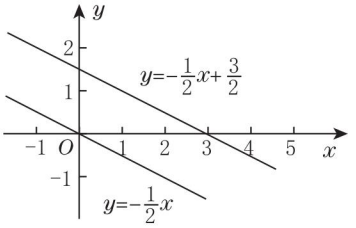
(2)由 $\frac{1}{2}x+y=0$ 得：$y=-\frac{1}{2}x$，

由 $x+2y-3=0$ 得：$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图像，如答图5，

由图像可知，两条直线互相平行，没有交点，

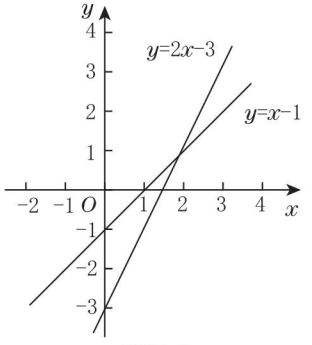
$\therefore$ 原方程组无解.



答图5

(3)从(1)、(2)的解答中发现：如果二元一次方程组无解，那么它们对应的两个一次函数图像互相平行；反之，如果两个一次函数的图像互相平行，那么它们对应的二元一次方程组无解.

13. 解：(1)由 $x-y=1$ 得 $y=x-1$，由 $2x-y=3$ 得 $y=2x-3$，



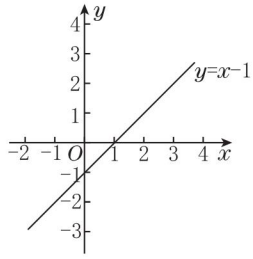
答图6

如答图6，在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图像，由图像可知，两条直线相交，有一个交点，所以该方程组有一组解.

(2)由 $x-y=1$ 得 $y=x-1$，

由 $2x-2y=2$ 得 $y=x-1$，

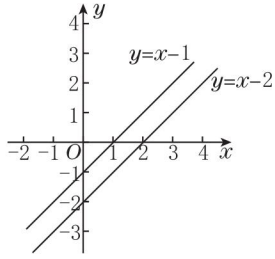
如答图7，在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图像，由图像可知，两条直线重合，所以该方程组有无数组解.



答图7

(3)由 $x-y=1$ 得 $y=x-1$，由 $2x-2y=4$ 得 $y=x-2$，

如答图8，在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图像，由图像可知，两条直线互相平行，没有交点，所以该方程组无解.



答图8

因此，如果一个二元一次方程组对应的两个一次函数图像相交，那么方程组有一组解；如果一个二元一次方程组对应的两个一次函数图像重合，那么方程组有无数组解；如果一个二元一次方程组对应的两个一次函数图像互相平行，那么方程组无解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基教育微官网

关注荣德基教育微官网，获取海量学习资源。

荣德基教育微官网：http://www.rongdeji.cn

荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

客服热线：182 1039 5892

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记



荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料