特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 下 （R版）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

吉林教育出版社

教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提分攻略

第十六章 二次根式

知识点 63 个 必得分

	页码
1 二次根式的定义	2
2 二次根式有意义的条件	3
3 二次根式的性质	4
4 代数式	5
5 二次根式的乘法	11
6 积的算术平方根	12
7 二次根式的除法	12
8 商的算术平方根	13
9 最简二次根式	15
10 可以合并的二次根式	21
11 二次根式的加减	22
12 二次根式的混合运算	22

考向点 68 个 速提分

	页码
1 利用二次根式的性质计算化简	5
2 利用“数轴法”化简含二次根式的代数式	6
3 利用“数形法”解二次根式与三角形的综合问题	7
4 利用“分类法”解决含二次根式的代数式的化简问题	8
5 利用积的算术平方根的性质进行化简	12
6 利用商的算术平方根的性质进行计算化简	14
7 利用“非负数（式）平方内移法”变形	17
8 利用“被开方数比较法”或“平方法”比较二次根式的大小	17
9 利用二次根式的混合运算顺序及运算律进行计算	23
10 利用整体思想巧求对称式的值	25
11 利用估值作差法求代数式的值	25
12 利用化简求值法求代数式的值	25

第十七章 勾股定理

1 勾股定理	40
2 勾股定理的证明	41
3 勾股定理的应用	42
4 在数轴上表示$\sqrt{n}$（n为大于1的整数）	44
5 互逆命题和互逆定理	54
6 勾股定理的逆定理	55
7 勾股数	57

1 利用勾股定理求直角三角形的边长	40
2 利用化整为零法求线段的长	44
3 利用化不规则为规则法求四边形的面积	45
4 利用化斜为直法证平方关系	46
5 利用折叠法求线段的长	46
6 利用对称法求平面上最短距离	46
7 利用化折为直法求立体图形中两点间的最短距离	47
8 利用化分散为集中判定直角三角形	58
9 利用建模法解实际应用问题	60

第十八章 平行四边形

1 平行四边形	74
2 平行四边形的边、角性质	75
3 两条平行线之间的距离	76
4 平行四边形的对角线性质	77
5 平行四边形的判定	85
6 三角形的中位线	87
7 矩形的定义及其性质	98
8 直角三角形斜边上的中线的性质	99
9 矩形的判定	100
10 菱形的定义及其性质	108
11 菱形的判定	110
12 正方形的定义	118
13 正方形的性质	119
14 正方形的判定	120

1 利用平行四边形的定义判定平行四边形	75
2 利用平行四边形的边角性质解证明计算问题	76
3 利用两条平行线间的距离的性质说明面积相等	77
4 利用构造对角线法证平行四边形中线段相等	80
5 利用三角形的中位线说明线段间的关系	88
6 利用一题多解法判定平行四边形	88
7 利用中位线法解中点四边形问题	90
8 利用“动中求静”法探究动点问题	92
9 利用直角三角形斜边上中线的性质证明线段垂直	100
10 利用矩形的判定方法判定矩形	101
11 利用折叠法解矩形中的计算问题	102
12 利用菱形的判定定理判定菱形	110
13 利用面积法求菱形中线段的长	111
14 利用对称性求菱形的最值	112
15 利用正方形的判定方法判定正方形	120
16 利用角度代换法求正方形中的角	121
17 利用截长补短法证明正方形中的和差关系	124

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分↑方法↑学霸

点拨就是提分机

方法点57个得高分

	页码
1 求式子有意义时字母的取值范围的方法	4
2 在实数范围内分解因式的策略	5
3 二次根式乘除混合运算的方法	16
4 比较两个二次根式的大小的方法	17
5 二次根式加减运算的技巧	22
6 用整体思想求代数式的值的方法	25
7 化简求值问题的常用技巧	25
8 倒数法比较大小	26
9 数形结合思想	34
1 通过拼图证明命题的思路	41
2 构造法	44
3 证明线段的平方关系的方法	46
4 求直线同侧的两点到直线上一点的最短路径长的方法	46
5 解决几何体表面上两点间的最短路程问题的方法	47
6 判定直角三角形的方法	56
7 倍长中线法	58
8 割补法	59
9 分类讨论思想	68
1 分类法数几何图形的个数	75
2 求线段或角的常用方法	80
3 判定平行四边形的方法选择	85
4 证明线段倍分关系的方法	88
5 证明两条线段（或两角）相等的常用方法	89
6 证明一个平行四边形为矩形的两种方法	101
7 解决矩形折叠问题的方法	102
8 解决动态几何探究题的关键	104
9 判定菱形的方法	111
10 求线段和的最小值的方法	112
11 线段代换法	121
12 特殊位置法	122
13 截长补短法	124
14 分类讨论思想	138
15 数形结合思想	139

考法点53个争满分

	页码
第十六章 二次根式	
1 利用二次根式的定义求字母的值	8
2 利用二次根式的性质化简	8
3 利用最简二次根式的定义判断最简二次根式	18
4 利用分母有理化找规律计算	19
5 利用二次根式的运算法则进行辨析	28
6 利用二次根式的混合运算进行计算	28
7 利用二次根式的运算解几何应用	28
第十七章 勾股定理	
1 利用勾股定理解古算术中的求线段长问题	49
2 利用勾股定理解求面积问题	49
3 利用勾股定理解探究规律问题	50
4 利用勾股定理解实际中应用问题	50
5 利用勾股定理的逆定理判定三角形的形状	61
6 利用勾股数通解公式求三角形的边长	62
第十八章 平行四边形	
1 利用平行四边形的性质解全等三角形问题	82
2 利用线段垂直平分线的性质解平行四边形的周长问题	82
3 利用勾股定理及其逆定理解求平行四边形中的线段长问题	83
4 利用全等三角形判定平行四边形	93
5 利用平行四边形的性质和判定解与勾股定理综合问题	93
6 利用平行四边形的判定和性质解与等腰三角形、勾股定理综合问题	94
7 利用三角形的中位线求角的度数	95
8 利用面积法求矩形中线段的长	105
9 利用三角形的相关性质求矩形中线段的长	105
10 利用矩形的判定和性质探求矩形的条件	106
11 利用整体思想求菱形的面积	114
12 利用作图信息求菱形中的角	114
13 利用三角形的性质判定菱形	115
14 利用三角形三边关系解正方形中的作图问题	125
15 利用整体思想解正方形中的线段的求和问题	125
16 利用三角形、菱形性质解判定正方形的条件问题	126
17 利用比例关系求角解判定正方形问题	127

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第十九章 一次函数

知识点 63 个 必得分

	页码
1 常量与变量	146
2 函数	147
3 函数自变量的取值范围与函数值	147
4 函数解析式	149
5 函数的图象	154
6 函数的表示方法	155
7 正比例函数	161
8 正比例函数的图象	162
9 正比例函数的性质	163
10 一次函数	167
11 一次函数的图象	168
12 一次函数图象的平移	169
13 一次函数的性质	170
14 用待定系数法确定一次函数解析式	171
15 建立一次函数模型解实际应用题	172
16 一次函数与一元一次方程	184
17 一次函数与一元一次不等式	185
18 一次函数与二元一次方程	186
19 一次函数与二元一次方程组	187
20 选择方案	196

考向点 68 个 速提分

	页码
1 利用函数的定义判定两变量的函数关系	147
2 利用几何问题中的数量关系建立函数解析式	149
3 利用函数的图象与点的坐标的关系解相关问题	154
4 利用图象信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用题	156
5 利用表格信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用题	157
6 利用情境信息法获取两个变量的函数关系确定其图象	157
7 利用画函数图象的步骤画正比例函数的图象	162
8 利用正比例函数的图象与性质比较函数值的大小	163
9 利用一次函数图象的平移规律求函数解析式	170
10 利用一次函数的图象与性质解相关应用问题	171
11 待定系数法在求一次函数解析式中的应用	172
12 利用分类法求涉及三角形面积的一次函数解析式	175
13 利用图象信息法解双图象问题的实际应用题	177
14 利用图象法解一元一次方程及不等式	188
15 利用直线位置关系法说明方程组解的情况	189
16 利用数形结合法解函数、方程、几何综合问题	190
17 利用建模法解实际应用问题	191
18 利用选择方案的方法解生活中的实际应用问题	196

第二十章 数据的分析

1 平均数	216
2 加权平均数	217
3 用样本估计总体	219
4 中位数	226
5 众数	227
6 平均数、中位数和众数的关系	228
7 方差	236
8 极差、平均差、标准差	237
9 数据的收集与整理	244
10 数据分析	246

1 利用加权平均数的定义求加权平均数	217
2 利用新数据法求平均数	220
3 利用整体代入法求平均数	221
4 利用方程思想求平均数中数据	222
5 利用中位数的定义找中位数	226
6 利用众数的定义识别众数	227
7 利用“三数特点法”对数据进行分析	229
8 利用方差分析数据	236
9 利用标准差的公式进行计算	238
10 利用“三数、方差”分析数据	239
11 利用数据分析法作决策	240
12 利用统计数据进行数据分析	246

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分←方法←学霸

点拨就是提分机

方法点57个得高分

	页码
1 常见函数自变量取值范围的确定	148
2 求函数值的一般步骤	148
3 确定函数解析式的方法	149
4 正比例函数中比较函数值大小的方法	163
5 判断函数是否为一次函数的方法	167
6 直角坐标系中图形面积的计算方法	169
7 已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积，求直线对应的函数解析式的方法	175
8 用一次函数解决实际问题的策略	177
9 一次函数的图象与坐标轴交点的坐标求法	185
10 利用图象法解一元一次不等式的一般步骤	185
11 用图象法解二元一次方程组的基本方法	188
12 解一次函数与方程、不等式综合实际应用问题的方法	196
13 利用方程（组），不等式（组）求解方案类问题的策略	201
14 待定系数法	208
15 分类讨论思想	209
1 用权重解决实际问题的策略	218
2 借助频数统计图（表）中的组中值计算加权平均数的一般步骤	218
3 新数据法求平均数的方法	220
4 选择合适的一个数来代表一组数据的方法	229
5 比较两组数据稳定性的方法	237
6 最优决策型问题的解题思路	237
7 根据方差大小进行决策的方法	239
8 统计思想	257
9 数形结合思想	257

考法点53个争满分

	页码
1 利用函数的定义在平面直角坐标系中辨别函数	151
2 利用定义法求自变量的取值范围	152
3 利用函数解析式确定函数的图象	158
4 利用函数图象确定函数表达的实际意义	158
5 利用函数图象确定函数表达的几何意义	159
6 利用图象与点的坐标的关系求字母的值	165
7 利用正比例函数的增减性求字母的值	165
8 利用代数式的定义解与一次函数图象的位置问题	178
9 利用一次函数的图象和性质求含绝对值函数的性质	178
10 利用一次函数的图象的特征解点的坐标问题	179
11 利用一次函数的模型解实际应用问题	180
12 利用一次函数的性质解实际应用问题	180
13 利用一次函数的交点坐标解不等式	192
14 利用解二元一次方程组解两直线的交点坐标问题	192
15 利用解方程解一次函数的实际应用	193
1 利用平均数解实际中的售价问题	222
2 利用平均数作决策	223
3 利用样本估计总体解生活中的应用问题	224
4 利用众数的定义求平均数	232
5 利用中位数、众数定义求平均数	232
6 利用三数的定义分析数据	232
7 利用数的定义识别数	241
8 利用数的特征作决策	241

第十九章 一次函数

第二十章 数据的分析



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法
二次根式比较大小的方法… 17

看微课
二次根式的定义…… 2
二次根式的化简…… 15

看微课
勾股定理…… 40
勾股定理的应用…… 40
勾股定理的逆定理…… 55

观动画
勾股定理的证明…… 41

学方法
平行四边形的判定方法…… 85

看微课
平行四边形的性质…… 77
矩形的判定……100
菱形的性质……108

观动画
中点四边形…… 90

第十六章 二次根式

16.1 二次根式 …… 2
16.2 二次根式的乘除 …… 11
16.3 二次根式的加减 …… 21

素养提分

行动篇：解密“非负数”的意义及性质 ☞ P10
技巧篇：二次根式运算的技巧 ☞ P31
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P32

第十七章 勾股定理

17.1 勾股定理 …… 40
17.2 勾股定理的逆定理 …… 54

素养提分

行动篇：“面积法”的思考与延伸 ☞ P51
思维篇：勾股定理中的数学思想方法 ☞ P64
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P66

第十八章 平行四边形

18.1 平行四边形 …… 74
18.1.1 平行四边形的性质 …… 74
18.1.2 平行四边形的判定 …… 85
18.2 特殊的平行四边形 …… 98
18.2.1 矩形 …… 98
18.2.2 菱形 …… 108
18.2.3 正方形 …… 118

素养提分

行动篇：解密中考——“习题改造” ☞ P130
技巧篇：特殊平行四边形的特殊解题技巧 ☞ P131
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P134

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十九章 一次函数

19.1 函数 …… 146
19.1.1 变量与函数 …… 146
19.1.2 函数的图象 …… 154
19.2 一次函数 …… 161
19.2.1 正比例函数 …… 161
19.2.2 一次函数 …… 167
19.2.3 一次函数与方程、不等式 …… 184
19.3 课题学习 选择方案 …… 196

素养提分

行动篇：“待定系数法”的解读与延伸 ☞ P181
类型篇：一次函数解析式的常见题型 ☞ P204
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P206

学方法

函数的三种表示方法……156
待定系数法……171

看微课

一次函数……167
一次函数图象的画法……169

观动画

一次函数的图象……168

第二十章 数据的分析

20.1 数据的集中趋势 …… 216
20.1.1 平均数 …… 216
20.1.2 中位数和众数 …… 226
20.2 数据的波动程度 …… 236
20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析 …… 244

素养提分

行动篇：论“决策” ☞ P250
应用篇：平均数、众数、中位数的应用 ☞ P251
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P254

参考答案及点拨（单独成册）

看微课

算术平均数和加权平均数……217
众数、中位数…… 226



微信公众号 教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **数形结合思想**：数形结合就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

2. **分类讨论思想**：把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

3. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

4. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

5. **建模思想**：是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题模型的一种强有力的数学手段．

6. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

7. **函数思想**：是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题的一种思想．

8. **统计思想**：所谓统计思想，就是在统计实际工作、统计学理论的应用研究中，必须遵循的基本理念和指导思想．统计思想主要包括：均值思想、估计思想等．

9. **平方法**：通过比较两个数的平方来比较两个数大小的方法，此方法通常用来比较两个二次根式的大小．

10. **演绎推理法**：就是从一般性的前提出发，通过推导即“演绎”得出具体陈述或个别结论的过程．

11. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

12. **截长补短法**：截长补短法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想．所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一段线段相等．所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长至与另一条已知的较短的线段相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系．

13. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

14. **图象法**：利用图象这种特殊且形象的数学语言工具，来表达各种现象的过程和规律，这种方法称为图象法．

15. **待定系数法**：待定系数法是求函数解析式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数解析式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数解析式的方法就叫做待定系数法．

微信公众号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

再探从数到式的奥秘

再探从数到式的奥秘











第十六章 二次根式

核心考点

你将见到的

- 二次根式的定义
- 二次根式有意义的条件
- 二次根式的性质
- 二次根式的运算

核心方法

我们为你提供的

- 内移法
- 平方法
- 拆项法
- 数形结合思想
- 分类讨论思想
- 整体代入法

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.1 二次根式

核心知识

- 二次根式的定义
- 二次根式有意义的条件
- 二次根式的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次根式的定义

1. 二次根式的定义： 一般地，我们把形如$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子叫做二次根式；“$\sqrt{\ }$”称为二次根号.

2. 二次根式的特征：

（1）必须含有二次根号“$\sqrt{\ }$”，“$\sqrt{\ }$”的根指数为2，即“$\sqrt[2]{\ }$”，我们一般省略根指数2，写作“$\sqrt{\ }$”.

（2）二次根式中的被开方数既可以是一个数，也可以是一个含有字母的式子.


二次根式的定义

（3）**双重非负性：** 二次根式$\sqrt{a}$表示非负数a的算术平方根，因此$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$.

提分·必记

特别提醒

二次根式应满足两个条件：

1. 含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；
2. 被开方数是正数或0.

特别地：形如$b\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子也是二次根式，它表示b与$\sqrt{a}$的乘积，当b是带分数时，要写成假分数的形式.

拨考向 利用二次根式的定义解辨识求值问题

题型1：二次根式的定义在识别二次根式中的应用

例1 给出下列式子：

①$\sqrt{(-2)^2}$；②$\sqrt[3]{7}$；③$\sqrt{9}$；④$\sqrt{x+y}$；⑤$\sqrt{a^2+1}$；⑥$\sqrt{-2a^2-1}$；

其中一定是二次根式的是_____.（只填序号）

解题秘方： 紧扣二次根式定义中“两个条件”进行识别.

解： ①中含有二次根号，且被开方数$(-2)^2$是非负数，故①是二次根式；

②中“$\sqrt[3]{\ }$”是三次根号，不是二次根号，故②不是二次根式；

③中虽然$\sqrt{9}=3$，但它的初始的外在形态符合二次根式的条件，故③是二次根式；

④中虽然含有二次根号，但被开方数$x+y$可能为负数，故④不一定是二次根式；

⑤中含有二次根号，且被开方数a^2+1大于0，故⑤是二次根式；

⑥中含有二次根号，但被开方数$-2a^2-1$小于0，故⑥不是二次根式.

答案： ①③⑤

提分·秘诀

特别提醒

1. 二次根式是在初始的外在形式上定义的，不能从化简结果上判断，如$\sqrt{9}$等都是二次根式.
2. 像$\sqrt{a}+1(a\geqslant 0)$这样的式子只能称为含有二次根式的式子，不能称为二次根式.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：二次根式的双重非负性在求字母值中的应用

例 2 （1）[中考·攀枝花]若 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2$，则 $x^y=$_____.

（2）[中考·泰州]实数 a，b 满足 $\sqrt{a+1}+4a^2+4ab+b^2=0$，则 b^a 的值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{1}{2}$

解题秘方：紧扣二次根式定义中的双重非负性：“$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$”进行解答.

解：（1）由二次根式的非负性“$a\geqslant 0$”，

得 $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\3-x\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore x=3.$

$\because y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2,$

$\therefore y=2.$

$\therefore x^y=3^2=9.$

答案：9

（2）整理，得 $\sqrt{a+1}+(2a+b)^2=0.$

由二次根式的非负性“$\sqrt{a}\geqslant 0$”及平方的非负性“$a^2\geqslant 0$”得：

$\begin{cases}a+1=0,\\2a+b=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore b^a=2^{-1}=\frac{1}{2}.$

答案：B

解法提醒

二次根式的双重非负性“$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$”在解题中的应用有两种情况：

一是当一个式子有两个二次根式，且被开方数互为相反数时，通常先利用二次根式 $\sqrt{a}$ 的被开方数的非负性 $a\geqslant 0$，建立不等式组，再解不等式组确定未知数的值；

二是当一个式子含有几个非负数：“绝对值的非负性，偶次方的非负性，二次根式的非负性，即：$|a|\geqslant 0$，$a^{2n}\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$.”式子的和为 0 时，通常先利用每个式子都为 0 建立方程组，再解这个方程组确定未知数的值.

知识点 2 二次根式有意义的条件

1. 二次根式有意义的条件：被开方数（式）为非负数，反之也成立；即 $\sqrt{a}$ 有意义 $\Leftrightarrow a\geqslant 0$.

2. 求含有字母的式子有意义的字母取值范围的方法：

（1）如果一个式子含有多个二次根式，那么它有意义的条件是：各个二次根式中的被开方数（式）都必须是非负数.

（2）如果一个式子中既含有二次根式又含有分式，那么它有意义的条件是：二次根式中的被开方数（式）是非负数，分式的分母不等于 0.

（3）如果一个式子中既有二次根式又含有零指数幂或负整数指数幂，那么它有意义的条件是：二次根式中的被开方数（式）是非负数且零指数幂或负整数指数幂的底数不等于 0.

提分·必记

巧记口诀

二次根式有意义，
被开方数非负数；
二次根式无意义，
被开方数是负数；
单个二次根式时，
列出不等式求解；
复合形式的式子，
列不等式组求解.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用二次根式的定义求式子有意义时字母的取值范围

例 3 当 x 取怎样的数时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{-2x-6}+(x+5)^0$；　（2）$\sqrt{\dfrac{1}{3x+7}}$；

（3）$\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$；　（4）$\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

解题秘方：紧扣“求含有字母的式子有意义的字母取值范围的方法”求解.

解：（1）欲使 $\sqrt{-2x-6}+(x+5)^0$ 有意义，则必有 $\begin{cases}-2x-6\geqslant 0,\\ x+5\neq 0,\end{cases}$

$\therefore x\leqslant -3$ 且 $x\neq -5$.

（2）欲使 $\sqrt{\dfrac{1}{3x+7}}$ 有意义，则必有 $\begin{cases}\dfrac{1}{3x+7}\geqslant 0,\\ 3x+7\neq 0,\end{cases}$ $\therefore x>-\dfrac{7}{3}$.

（3）欲使 $\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$ 有意义，则必有 $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 5-x\geqslant 0,\end{cases}$ $\therefore 2\leqslant x\leqslant 5$.

（4）欲使 $\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$ 有意义，则必有 $\begin{cases}x+4\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$ $\therefore x\geqslant -4$ 且 $x\neq 2$.

提分·秘诀

解法提醒

求式子有意义时字母的取值范围的方法：

第一步，明确各种式子有意义的条件；

第二步，利用式子中所有有意义的条件，建立不等式或不等式组；

第三步，求出不等式或不等式组的解集，即为字母的取值范围.

知识▶3 二次根式的性质

1. 二次根式的性质：

（1）$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，即一个非负数的算术平方根的平方等于它本身；

（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0),\end{cases}$ 即一个数的平方的算术平方根等于它的绝对值.

2. $\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2\ (a\geqslant 0)$ 的异同点：

表达式		$\sqrt{a^2}$	$(\sqrt{a})^2$
区别	取值范围不同	a 为全体实数	$a\geqslant 0$
	运算顺序不同	$\sqrt{a^2}$ 是先平方后开方	$(\sqrt{a})^2$ 是先开方后平方
	运算结果不同	$\sqrt{a^2}=\|a\|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0)\end{cases}$	$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$
联系		$\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2$ 均为非负数，当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$	

提分·必记

应用提醒

1. 正用公式：$(\sqrt{5})^2=5$，$(\sqrt{m^2+1})^2=m^2+1$.

2. 逆用公式：若 $a\geqslant 0$，则 $a=(\sqrt{a})^2$，如 $2=(\sqrt{2})^2$，$\dfrac{1}{2}=\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^2$.

注意：无论应用 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$ 进行化简，还是逆用，都要注意前提：$a\geqslant 0$.

应用提醒

1. 正用公式：$\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$.

2. 逆用公式：$3\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3^2\times\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$（以后将会学习）.

注意：化简形如 $\sqrt{a^2}$ 的式子时，先转化为 $|a|$ 的形式，再根据 a 的符号去绝对值符号.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用二次根式的性质计算化简

题型1：二次根式的性质在计算中的应用

例4 计算：

（1）$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$；（2）$\sqrt{(-6)^2}$；（3）$\sqrt{10^{-2}}$；

（4）$(-2\sqrt{2})^2$；（5）$\sqrt{(3.14-\pi)^2}$.

解题秘方：紧扣“二次根式的性质的两公式”进行计算.

解：（1）$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=\frac{3}{5}$.

（2）$\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$.

（3）$\sqrt{10^{-2}}=\sqrt{(10^{-1})^2}=|10^{-1}|=10^{-1}=\frac{1}{10}$.

（4）$(-2\sqrt{2})^2=(-2)^2\times(\sqrt{2})^2=8$.

（5）$\sqrt{(3.14-\pi)^2}=|3.14-\pi|=\pi-3.14$.

题型2：二次根式的性质在逆用中的应用

例5 在实数范围内分解因式：

（1）x^2-5；（2）x^4-4x^2+4.

解题秘方：逆用$(\sqrt{a})^2=a$分解因式.

解：（1）x^2-5

$=x^2-(\sqrt{5})^2$

$=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

逆用二次根式的性质时，必须先确定该数为非负数，故一般只对数进行变形，对字母必须谨慎.

（2）x^4-4x^2+4

$=(x^2-2)^2$

$=[(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})]^2$

$=(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$.

提分·秘诀

特别提醒

计算二次根式的注意事项：

1. 计算二次根式要严格按照$(\sqrt{a})^2=a(a\geq0)$，$\sqrt{a^2}=|a|$进行.
2. 正确区分$(\sqrt{a})^2(a\geq0)$与$\sqrt{a^2}$的异同点是计算二次根式的关键.
3. 计算$\sqrt{a^2}$一般有两步：(1)去掉根号及被开方数的指数，写成绝对值的形式；(2)去掉绝对值符号，根据绝对值的意义进行化简.

解法提醒

在实数范围内分解因式的策略：

1. 在实数范围内分解因式时，常常把正数a转化为$(\sqrt{a})^2$，以便于使用平方差公式或完全平方公式进行分解因式.
2. 一般地，如果题目没有指明在什么范围内分解因式，都是指在实数范围内分解因式.

知识点▶4 代数式

1. 定义：用基本运算符号（基本运算包括加、减、乘、除、乘方和开方）把数或表示数的字母连接起来的式子称为代数式.

2. 列代数式：把实际问题中与数量有关的语句用含有数、字母和运算符号的式子表示出来.

3. 列代数式的常用方法：

（1）**直接法**：根据问题中的语言叙述直接写出代数式；

（2）**公式法**：根据公式列出代数式；

（3）**探究规律法**：将蕴含在一组数或一组图形中的排列规律用代数式表示出来.

提分·必记

特别提醒

1. 单独一个数或字母也是代数式.
2. 将两个代数式用关系符号（“=”“>”“<”等）连接起来的式子叫做关系式，方程和不等式都是关系式.如：$3x-1=2x+3$就是关系式，不是代数式.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用代数式表示式子的变化规律

例6 观察：

$①\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$；$②\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$；$③\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$；….

（1）根据以上规律，按顺序写出④式；

（2）用含自然数 n（$n\geqslant 1$）的式子表示你观察到的规律.

解题秘方：紧扣“数字与序号间的关系”用从特殊到一般的思想找规律解答.

解：经观察可知，等号左边根号内包含两项：整数和分数，整数是从1开始的连续整数，分数是从$\frac{1}{3}$开始的分母依次增加1的分数；等号右边根号外的因数是从2开始的连续整数，根号内的分数与等号左边根号内的分数相同.

（1）$\sqrt{4+\frac{1}{6}}=5\sqrt{\frac{1}{6}}$.（2）规律为$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

提分·秘诀

解法提醒

用式子表示变化规律，先分析等式左右两边数字的变化规律，找出数字与式子序号之间的关系，然后将式子的序号用 n 表示，进而表示出变化规律.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用“定义法”求二次根式中的字母的值

例7 若$\sqrt{12-n}$为一个整数，试求自然数 n 的值.

解题秘方：紧扣二次根式定义中被开方数的非负性及“整数的定义及其性质”进行解答.

解：由题意，得 $12-n\geqslant 0$ 且 $n\geqslant 0$，$\therefore 0\leqslant n\leqslant 12$.

$\therefore 0\leqslant 12-n\leqslant 12$.

又$\because\sqrt{12-n}$为一个整数，即 $12-n$ 是一个完全平方数，在0~12之间的完全平方数有0，1，4，9，

$\therefore$当 $12-n=0$ 时，$n=12$；当 $12-n=1$ 时，$n=11$；

当 $12-n=4$ 时，$n=8$；当 $12-n=9$ 时，$n=3$.

$\therefore$自然数 n 的值为3或8或11或12.

挑战·高分

解法提醒

“$\sqrt{12-n}$为一个整数”给我们提供了如下信息：它是二次根式，所以有 $12-n\geqslant 0$；被开方数 $12-n$ 是一个完全平方数；“自然数 n”给我们提供了 $n\geqslant 0$ 且 n 为整数这一条件.

技巧点拨

先通过二次根式的定义求自然数 n 的范围，

再由二次根式为整数并由整数的定义巧定 $12-n$ 是一个完全平方数，

最后通过分类讨论思想求出自然数 n 的值.

拔尖角度▶2 利用“数轴法”化简含二次根式的代数式

例8 [中考·广州]已知实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图16.1-1所示，试化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$.

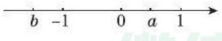


图16.1-1

解题秘方：紧扣表示数的点在数轴上的位置判断字母式子的正负性，结合二次根式的性质$\sqrt{a^2}=|a|$化简含二次根式的代数式.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：由数轴上点的位置可知：$a>b$，$0<a<1$，$b<-1$，

所以 $a-b>0$，$b-1<0$，$a-1<0$.

则 $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$

$=|a|+|b|+|a-b|+|b-1|-|a-1|$

$=a-b+a-b+1-b-(1-a)$

$=3a-3b$.

技巧点拨：本例题属于“数形结合思想”的经典例题，它是由“形”的位置来确定“数（式）”的符号，反之由“数（式）”的符号也可以确定“形”的位置，这充分体现了“数”与“形”是一个互相依存、不可分割的有机结合体；解答利用二次根式的性质化简题的关键是确保去掉根号后的结果是非负数.

挑战·高分

解法提醒

数轴分析法

利用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行化简的关键是确定绝对值内式子的正负，此题在判断正负时要根据字母在数轴上的对应点的位置来确定.

拔尖角度 3 利用“三角形三边关系法”化简含二次根式的代数式

例 9 设 a，b，c 分别为一三角形的三边长，试化简：$\sqrt{(a+b+c)^2}+|a-b-c|+\sqrt{(b-a-c)^2}-\sqrt{(c-b-a)^2}$.

解题秘方：紧扣“三角形三边关系”判断要化简式子的符号进行化简.

解：$\because$ a，b，c 分别为一三角形的三边长，

$\therefore a+b+c>0$，$a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$.

$\therefore$ 原式 $=|a+b+c|+|a-b-c|+|b-a-c|-|c-b-a|$

$=(a+b+c)-(a-b-c)-(b-a-c)+(c-b-a)$

$=a+b+c-a+b+c-b+a+c+c-b-a$

$=4c$.

挑战·高分

解题通法

运用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行化简时，其关键步骤是**去绝对值符号**，而去绝对值符号的关键是**判断绝对值符号内的代数式的符号**，因此一定要结合具体问题（如数轴、几何图形的特征等）确定其符号，然后进行化简.

拔尖角度 4 利用“数形法”解二次根式与三角形的综合问题

例 10 已知实数 x，y 满足 $\sqrt{2x-6}+\sqrt{y-6}=0$，则以 x，y 的值为两边长的等腰三角形的周长是（　　）

A. 12 或 15　　B. 15　　C. 12　　D. 无法确定

解题秘方：紧扣“二次根式的非负性”综合三角形三边关系求解.

解：根据题意，得 $\begin{cases}2x-6=0,\\ y-6=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=6.\end{cases}$

若 3 为腰长，则此三角形的三边长分别为 3，3，6，此时 3+3=6，不能构成三角形，舍去；

若 6 为腰长，则此三角形的三边长分别为 3，6，6，能构成三角形，且周长为 3+6+6=15.

答案：B

挑战·高分

特别提醒

对于二次根式与几何问题的综合：

1. 要灵活利用二次根式的性质探讨几何量之间的关系；
2. 要注意几何量的实际意义；
3. 本例中在求得 x，y 值后，要看是否满足三角形任意两边之和大于第三边的条件，否则会错选 A.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 5 利用“分类法”解决含二次根式的代数式的化简问题

挑战·高分

例 11 已知 x 为任意实数，化简：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+6x+9}$.

解题秘方：紧扣“0 值分段法”进行分类化简.

解：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+3)^2}$

$=|x-1|+|x+3|$.

（1）当 $x<-3$ 时，$x-1<0$，$x+3<0$，

∴原式 $=(1-x)+(-x-3)=-2x-2$.

（2）当 $-3\leqslant x\leqslant 1$ 时，$x-1\leqslant 0$，$x+3\geqslant 0$，

∴原式 $=1-x+x+3=4$.

（3）当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$x+3>0$，

∴原式 $=x-1+x+3=2x+2$.

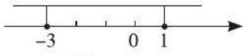


图 16.1-2

解法提醒

令需化简的每个绝对值都为 0，在数轴上找出表示使绝对值为 0 的字母的值的点，再利用数轴划分范围进行分类.

令 $|x-1|=0$，得 $x=1$.

令 $|x+3|=0$，得 $x=-3$.

∴分 $x<-3$，$-3\leqslant x\leqslant 1$，$x>1$ 三种情况（如图 16.1-2）.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是：（1）二次根式的概念，主要考查二次根式有意义的条件，也常与分式知识相结合进行考查，题型主要是选择题和填空题，难度较小，以基础题为主；（2）二次根式的性质，主要考查二次根式非负性的应用及 $\sqrt{a^2}$ 的化简，题型主要是选择题和填空题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用二次根式的定义求字母的值

例 12 [中考·绵阳]使代数式 $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+\sqrt{4-3x}$ 有意义的整数 x 有（　　）

A. 5 个　　B. 4 个　　C. 3 个　　D. 2 个

试题评析：本题考查了二次根式有意义的条件，利用被开方数是非负数，分母不能为零得出不等式是解题关键.

解：由题意，得 $x+3>0$ 且 $4-3x\geqslant 0$，解得 $-3<x\leqslant\dfrac{4}{3}$，

整数有 -2，-1，0，1.

答案：B

知识储备

求代数式有意义的条件的方法：

对于单个的二次根式，只需满足被开方数为非负数；对于含有多个二次根式的式子，则必须满足多个被开方数同时为非负数；对于零指数幂，则必须满足底数不能为零；对于含有分式的式子，则需满足分母不能为零.

考法 2 利用二次根式的性质化简

例 13 [中考·枣庄]实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图 16.1-3 所示，化简 $|a|+\sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是（　　）

A. $-2a+b$　　B. $2a-b$　　C. $-b$　　D. b

试题评析：此题主要考查了二次根式的性质以及实数与数轴，正确得出各项符号是解题关键.

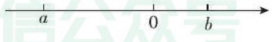


图 16.1-3

解：由图可知：$a<0$，$a-b<0$，

则 $|a|+\sqrt{(a-b)^2}=-a-(a-b)=-2a+b$.

答案：A

思路点拨

直接利用实数 a，b 在数轴上对应点的位置，得出 a<0，a-b<0，再利用绝对值以及二次根式的性质化简得出答案.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 已知 a 为任意实数，下列式子一定是二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt[3]{a}$

C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a^2}$

2. 下列计算结果正确的是（　　）

A. $(-\sqrt{5})^2=-5$　　B. $\sqrt{5^{-4}}=5^{-2}$

C. $-(-\sqrt{5})^2=5$　　D. $\sqrt{(-5)^2}=-5$

3. [中考·济宁] 若 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+1$ 在实数范围内有意义，则 x 满足的条件是（　　）

A. $x\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x\neq\frac{1}{2}$

4. 如果一个三角形的三边长分别为 1，k，4，那么化简 $|2k-5|-\sqrt{k^2-12k+36}$ 的结果是（　　）

A. $3k-11$　　B. $k+1$

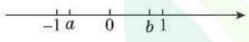
C. 1　　D. $11-3k$

5. [中考·宿迁] 若实数 m，n 满足等式 $|m-2|+\sqrt{n-4}=0$，且 m，n 恰好是等腰三角形 ABC 的两条边的边长，则 $\triangle ABC$ 的周长是（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

6. 若 $\sqrt{(x-6)^2}=6-x$，则 x 的取值范围是_____.

7. 实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$.



（第7题）

8. 在实数范围内分解因式：

（1）x^4-4；　　（2）$3x^2-6y^2$；

（3）$x^4-3x^2y^2+2y^4$；　　（4）$-x^2+2\sqrt{2}x-2$.

9. 阅读甲、乙两人的解答过程，并回答问题：

甲、乙两人计算当 $a=5$ 时，$a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值得到不同的答案.

甲的解答是：$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+|a-1|$，因为 $a=5$，所以 $a+|a-1|=a+a-1=2a-1=2\times5-1=9$；

乙的解答是：$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1$.

谁的解答是正确的？错误的解答错在哪里？为什么？

10. 已知 a，b 为实数，且 $\sqrt{a-5}+2\sqrt{10-2a}=b+4$，求 a，b 的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 已知 n 是正整数，$\sqrt{52n}$ 是整数，求 n 的最小正整数值.

12.[易错题]已知 $|x-1|=2$，求 $\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}$ 的值. 【导学号：8592074】

13. 已知 $-1<a<0$，化简代数式 $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$.

素养提分 行动篇

解密“非负数”的意义及性质

实数的绝对值、实数的偶次幂和非负数的算术平方根是初中阶段学习的三个重要的非负数. 其表达式是 $|a|\geqslant 0$，$a^{2n}\geqslant 0$（n 为正整数），$\sqrt{a}\geqslant 0$（$a\geqslant 0$）.

非负数的性质：

（1）所有的非负数都有最小值，为 0；

（2）有限个非负数之和仍然是非负数；

（3）非负数与正数之和是正数；

（4）几个非负数的和为零，则每一个非负数都为零.

非负数的性质的几种常见运用形式：

（1）求某个代数式的最大值或最小值. 如：当 $x=2$ 时，式子 $7-|x-2|$ 有最大值，为 7.

（2）求二次函数的最大值或最小值（以后会学到）. 将二次函数解析式化成含有非负数的顶点式：$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，利用完全平方的非负性，可知当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值或最小值，为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

（3）已知一个等式求多个未知数的值：

①利用二次根式的双重非负性. 如由 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}-4$ 可以求出 x 与 y 的值；

②利用几个非负数的和等于零，则每个非负数都为零. 如：由 $|x-1|+(y+3)^2+\sqrt{z-4}=0$ 可以求出 x，y，z 的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.2 二次根式的乘除

核心知识

- 二次根式的乘除法
- 积（商）的算术平方根
- 最简二次根式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 1 二次根式的乘法

1. 二次根式的乘法法则：

两个二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变，即：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

2. 二次根式的乘法法则的推广：

（1）当二次根式根号外有因数（式）时，可类比单项式乘单项式的法则进行运算，即根号外因数（式）之积作为积的根号外因数（式），被开方数之积作为积的被开方数. 即：$a\sqrt{b}\cdot c\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$（$b\geqslant 0$，$d\geqslant 0$）.

（2）几个二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变，即：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$）.

（3）几个二次根式相乘，可利用乘法交换律、结合律使运算简便.

提分·必记

特别提醒

1. 法则中被开方数 a，b 既可以是数，也可以是式子，但都必须是非负的.
2. 如果没有特别说明，本章中的所有字母都表示正数.
3. 二次根式相乘，被开方数的积中有开得尽方的因数或因式时一定要开方.
4. 二次根式相乘的结果是一个二次根式或一个有理式.

拔考向▶ 利用二次根式乘法法则进行二次根式计算

例 1 计算：

（1）$\sqrt{28}\times\sqrt{7}$；　（2）$\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y}}$；

（3）$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})$；　（4）$\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{2\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{1\dfrac{3}{5}}$.

解题秘方：紧扣“二次根式乘法法则”计算.

解：（1）$\sqrt{28}\times\sqrt{7}=\sqrt{28\times 7}=\sqrt{196}=14$.

（2）$\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y}}=\sqrt{xy\cdot\dfrac{1}{y}}=\sqrt{x}$.

（3）$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})=6\times(-2)\times\sqrt{27\times 3}=-12\times\sqrt{81}=-12\times 9=-108$.

（4）$\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{2\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{1\dfrac{3}{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{8}{5}}=\sqrt{2}$.

提分·秘诀

解法提醒

（1）（2）直接用法则计算，且（2）中字母取值未加说明为正数，不需讨论.

（3）按推广中（1）计算.

（4）按推广中（2）计算，但注意要将带分数化为假分数计算.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 积的算术平方根

1. 积的算术平方根的性质： 积的算术平方根等于乘积中各个因式的算术平方根的积，即$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

2. 性质的应用：

（1）积的算术平方根的性质的实质是逆用二次根式的乘法法则，它对两个以上因数（式）的积的算术平方根同样适用；

（2）运用此公式化简二次根式时，关键是将被开方数分解因数（或因式），把含有a^2形式的a移到根号外面.

提分·必记

特别提醒

公式中的a，b既可以是一个数，也可以是一个式子. 积中各个因式必须都为非负数，若不是非负数，应将其化成非负数再运用公式化简.

拔考向▶ 利用积的算术平方根的性质进行化简

例2 ［易错题］化简：

（1）$\sqrt{(-7)\times(-14)}$；

（2）$\sqrt{36^2+48^2}$；

（3）$\sqrt{0.49x^5y^6}$；

（4）$\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

解题秘方： 紧扣“积的算术平方根的性质”的特征进行化简.

解：（1）$\sqrt{(-7)\times(-14)}=\sqrt{7\times 14}=\sqrt{2\times 7^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{7^2}=7\sqrt{2}$.

（2）$\sqrt{36^2+48^2}=\sqrt{(12\times 3)^2+(12\times 4)^2}=\sqrt{12^2\times(3^2+4^2)}=\sqrt{12^2}\times\sqrt{25}=12\times 5=60$.

（3）$\sqrt{0.49x^5y^6}=\sqrt{0.7^2(x^2)^2(y^3)^2\cdot x}=0.7x^2y^3\sqrt{x}$.

（4）$\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-a^2+b^2)}=\sqrt{2a^2\cdot 2b^2}$

$=2ab$.

提分·秘诀

特别提醒

运用二次根式的乘法法则时，利用积的算术平方根的性质，要注意以下两点：

1. 注意被开方数（式）的范围；
2. 注意被开方数（式）一定是乘积的形式，不要出现“$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$”这样的错误.

点知识▶ 3 二次根式的除法

1. 二次根式的除法法则： 两个二次根式相除，把被开方数相除，根指数不变，即$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）.

2. 二次根式的除法法则的推广：

（1）如果是几个二次根式相除，应按除法法则依次计算；即：$\sqrt{a}\div\sqrt{b}\div\sqrt{c}=\sqrt{a\div b\div c}$（$a\geqslant 0$，$b>0$，$c>0$）.

（2）当二次根式根号外有因数（式）时，可类比单项式除以单项式的法则进行运算，将根号外的因数（式）之商作为商的根号外因数（式），被开方数（式）之商作为商的被开方数（式），即：$a\sqrt{b}\div c\sqrt{d}=(a\div c)\sqrt{b\div d}$（$b\geqslant 0$，$d>0$，$c\neq 0$）.

提分·必记

特别提醒

法则中的被开方数a，b既可以是数，也可以是式子，但都必须是非负的且b不为0；若b=0，则式子无意义；

进行二次根式的除法运算时，若两个被开方数可以整除，就直接运用二次根式的除法法则进行计算；若两个被开方数不能整除，可以对二次根式化简或变形后再相除.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用二次根式的除法法则求字母取值范围与化简问题

题型1：二次根式的除法法则在求字母取值范围中的应用

例3 如果$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-8}}=\sqrt{\frac{a}{a-8}}$成立，那么（　　）

A.$a\geqslant 8$　　B.$0\leqslant a\leqslant 8$　　C.$a\geqslant 0$　　D.$a>8$

解题秘方：紧扣“二次根式除法法则”成立的条件求解.

解：根据二次根式除法法则成立的条件，

得$\begin{cases}a\geqslant 0,\\ a-8>0,\end{cases}$ $\therefore a>8.$

答案：D

题型2：二次根式的除法法则在计算中的应用

例4 计算：

（1）$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$；（2）$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$；

（3）$\sqrt{4(a-1)^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a-1}{b}}\right)$（$a>1$，$b>0$）.

解题秘方：紧扣“二次根式除法法则”进行计算.

解：（1）$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

（2）$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\div\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times 6}=3.$

（3）$\sqrt{4(a-1)^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a-1}{b}}\right)$

$=-\sqrt{4(a-1)^3b\div\frac{a-1}{b}}$

$=-\sqrt{4(a-1)^3b\cdot\frac{b}{a-1}}$

$=-\sqrt{4(a-1)^2b^2}$

$=-2b(a-1)$.

提分·秘诀

解法提醒

要求使等式成立的字母的取值范围，只需使等式的每部分都有意义.这里包括二次根式的被开方数是非负数，分式的分母不为零，零指数幂和负整数指数幂的底数不为零等.

技巧点拨

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）的运算方法：

1. 当a是b的倍数或a，b为分数时，常先利用$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$计算.

2. 当$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$中的被开方数含有完全平方的因数（式）时，常先将完全平方的因数（式）“开方”出来，再进行除法运算.

3. 当根号前含有系数时，根号前的系数与系数对应相除，根号内的被开方数与被开方数对应相除，再把除得的结果相乘.

知识点▶4 商的算术平方根

1. 商的算术平方根的性质：商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.即：$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）.

2. 去掉分母中的根号（分母有理化）的方法：

（1）当分母是$\sqrt{a}$或$b\sqrt{a}$的形式时，分子与分母同乘$\sqrt{a}$；

（2）当分母是$a+\sqrt{b}$的形式时，分子与分母同乘$a-\sqrt{b}$，利用平方差公式将分母中的根号去掉；

（3）当分母是$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的形式时，分子与分母同乘$\sqrt{a}-\sqrt{b}$，利用平方差公式将分母中的根号去掉.

提分·必记

特别提醒

1. 商的算术平方根的性质的实质是逆用二次根式的除法法则；

2. 公式中的a，b既可以是一个数，也可以是一个式子，但必须满足$a\geqslant 0$，$b>0$.

3. 利用商的算术平方根的性质可以把被开方数中含有分母的二次根式化成被开方数不含分母的二次根式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用商的算术平方根的性质进行计算化简

题型1：商的算术平方根的性质在化简中的应用

例5 将下列各式化简：

（1）$\sqrt{1\frac{7}{9}}$；　（2）$\sqrt{\frac{1}{32}}$；

（3）$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}$；　（4）$\frac{xy}{x-y}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}}$（$x>y>0$）.

解题秘方：紧扣“商的算术平方根的性质”进行化简.

解：（1）$\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$.

（2）$\sqrt{\frac{1}{32}}=\sqrt{\frac{2}{64}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

（3）$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}=a\sqrt{\frac{2^2\times7}{a^2\cdot a}}=a\sqrt{\frac{2^2\times7\times a}{a^2\cdot a^2}}=a\cdot\frac{2\sqrt{7a}}{a^2}=\frac{2}{a}\sqrt{7a}$.

（4）$\frac{xy}{x-y}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}}=\frac{xy}{x-y}\cdot\sqrt{\frac{xy(x-y)^2}{x^2y^2}}=\frac{xy}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}\sqrt{xy}$

$=\sqrt{xy}$.

题型2：商的算术平方根的性质在去掉分母中的根号中的应用

例6 去掉下列分母中的根号：

（1）$\frac{3}{\sqrt{3}}$；　（2）$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}$；

（3）$\frac{2}{\sqrt{2ab}}$；　（4）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

解题秘方：紧扣“去掉分母中的根号的方法”进行变形.

解：（1）$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

（2）方法一：$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{12}{32}}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times2}{8\times2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

方法二：$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{4\times3}{16\times2}}=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{\sqrt{16}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=$

$\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

（3）$\frac{2}{\sqrt{2ab}}=\frac{2\times\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2ab}}=\frac{2\sqrt{2ab}}{2ab}=\frac{\sqrt{2ab}}{ab}$.

（4）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$

$\frac{5+2\sqrt{6}}{3-2}=5+2\sqrt{6}$.

提分·秘诀

解法点拨

利用商的算术平方根的性质化简二次根式的方法：

1. 若被开方数（式）的分母是一个完全平方数（式），则可以直接利用商的算术平方根的性质，先将分子、分母分别开平方，然后求商；
2. 若被开方数（式）的分母不是完全平方数（式），可根据分式的基本性质，先将分式的分子、分母同时乘一个不等于0的数或整式，使分母变成一个完全平方数（式），然后利用商的算术平方根的性质进行化简.

解法提醒

有多种方法：

可以先运用二次根式的除法法则，再把被开方数进行化简，然后进行开方运算；

也可以先分别把分子、分母进行化简，再将分子、分母同乘一个适当的数（式），化去分母中的根号.

解题通法

去掉分母中的根号一般经历如下三步：

“一移”，即将分子、分母中能开得尽方的因数（式）开方后移到根号外；

“二乘”，即将分子、分母同乘分母的有理化因数（式）；

“三化”，即化简计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 5 最简二次根式

1. 定义： 如果一个二次根式满足以下两个条件，那么这个二次根式叫做最简二次根式：

（1）被开方数不含分母；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.


二次根式的化简

2. 二次根式化简成最简二次根式的步骤：

（1）“一分”，即利用因数（式）分解的方法把被开方数的分子、分母都化成质因数（式）的幂的乘积形式；

（2）“二移”，即把能开得尽方的因数（式）用它的算术平方根代替，移到根号外，其中把根号内的分母中的因式移到根号外时，要注意应写在分母的位置上；

（3）“三化”，即化去被开方数中的分母.

提分·必记

特别提醒

判断一个二次根式是否是最简二次根式，要紧扣两个条件：

1. 被开方数不含分母；

2. 被开方数中每个因数（式）的指数都小于根指数2，即每个因数（式）的指数都是1.

注意：分母中含有根式的式子不是最简二次根式.

拔考向▸ 利用最简二次根式的定义识别最简二次根式

例7 下列各式中，哪些是最简二次根式？哪些不是最简二次根式？不是最简二次根式的，请说明理由.

（1）$\sqrt{\frac{1}{3}}$；（2）$\sqrt{x^2+1}$；（3）$\sqrt{0.2}$；（4）$\sqrt{24x}$；

（5）$\sqrt{x^3+6x^2+9x}$；（6）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

解题秘方： 紧扣最简二次根式的定义进行判断.

解：（1）不是最简二次根式，因为被开方数中含有分母.

（2）是最简二次根式.

（3）不是最简二次根式，因为被开方数是小数（即含有分母）.

（4）不是最简二次根式，因为被开方数 $24x$ 中含有能开得尽方的因数4，$4=2^2$.

（5）不是最简二次根式，因为 $x^3+6x^2+9x=x(x^2+6x+9)=x(x+3)^2$，被开方数中含有能开得尽方的因式.

（6）不是最简二次根式，因为分母中有二次根式.

综上，只有（2）是最简二次根式.

提分·秘诀

特别警示

判断最简二次根式有两大思维误区：

1. 是被开方数不含分母而不是式子不含分母，如$\frac{\sqrt{2}}{3}$有分母但$\frac{\sqrt{2}}{3}$是最简二次根式；

2. 被开方数中不能含有能开得尽方的因数或因式，如$\sqrt{x^2+y^2}$是最简二次根式.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“法则法”进行二次根式乘法运算

例8 计算：

（1）$\sqrt{8}\times\sqrt{15}\times\sqrt{20}$；

（2）$-5\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}\times3\sqrt{54}$；

（3）$\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{\frac{b}{125a}}$.

挑战·高分

技巧提醒

二次根式的乘法运算过程的实质是二次根式的乘法法则 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）的正用与逆用的一个综合过程，它不

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“二次根式的乘法法则”进行计算化简，计算结果必须是最简二次根式或整式.

解：（1）方法一：$\sqrt{8}\times\sqrt{15}\times\sqrt{20}=\sqrt{8\times15\times20}=\sqrt{2^5\times5^2\times3}=\sqrt{(2^2\times5)^2\times6}=20\sqrt{6}$；

方法二：$\sqrt{8}\times\sqrt{15}\times\sqrt{20}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}=(\sqrt{4}\times\sqrt{4})\times(\sqrt{5}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})=4\times5\times\sqrt{6}=20\sqrt{6}$.

（2）$-5\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}\times3\sqrt{54}$

$=-15\sqrt{\frac{8}{27}\times\frac{5}{4}\times54}$

$=-15\times\sqrt{2^2\times5}$

$=-30\sqrt{5}$.

（3）$\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{\frac{b}{125a}}$

$=\sqrt{5ab\cdot\frac{b}{125a}}$

$=\sqrt{\frac{b^2}{25}}=\frac{b}{5}$.

仅是简单地将两个被开方数相乘，而且更重要的是将所得的积化简，计算形如$\sqrt{ac}\cdot\sqrt{a}$的式子的过程如下：

方法一：

$\sqrt{ac}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2c}=a\sqrt{c}$；

方法二：

$\sqrt{ac}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a}\times\sqrt{c}\times\sqrt{a}=a\sqrt{c}$.

拔尖角度 2 利用“顺序法”进行二次根式混合运算

例 9 计算：

（1）$-\sqrt{18}\times2\sqrt{\frac{4}{9}}\div\left(-\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{3}}\right)$；（2）$\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

解题秘方：紧扣二次根式的乘除运算的法则及混合运算顺序进行计算.

解：（1）原式$=\left(2\div\frac{2}{3}\right)\sqrt{18\times\frac{4}{9}\div\frac{4}{3}}$

$=\left(2\times\frac{3}{2}\right)\sqrt{18\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}}$

$=3\sqrt{6}$.

（2）原式$=\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$

$=\sqrt{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{ab}$

$=\frac{\sqrt{ab}}{a^2b}$.

挑战·高分

解法提醒

二次根式乘除混合运算的方法：

二次根式乘除混合运算的方法与整式乘除混合运算的方法相同，整式乘除法的一些法则、公式在二次根式乘除法中同样适用. 其一般步骤为：

1. 将算式中的除法转化为乘法；
2. 利用乘法运算律转化为系数和被开方数的运算；
3. 将系数和被开方数分别相乘；
4. 结果化成最简二次根式或整式.

拔尖角度 3 利用“定义法”将二次根式化成最简二次根式或整式

例 10 把下列各式化成最简二次根式或整式：

（1）$\sqrt{0.3}$；（2）$-3\sqrt{\frac{1}{3}}$；

（3）$\sqrt{41^2-40^2}$；（4）$\sqrt{\frac{a+1}{a^2b}}$（$a>0$，$b>0$）.

挑战·高分

解法点拨

解决此类题目时，根据最简二次根式的定义，先将被开方数中的小数转化成分数，利用分数的基本性质将分母化为完全平方数，再

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“最简二次根式定义中的两个条件”及化简二次根式的步骤进行变形.

解：（1）$\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{3\times10}{10\times10}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

（2）$-3\sqrt{\frac{1}{3}}=-3\sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}}=-\sqrt{3}$.

（3）$\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{(41+40)\times(41-40)}=\sqrt{81}\times\sqrt{1}=9$.

（4）因为 $a>0$，$b>0$，

所以$\sqrt{\frac{a+1}{a^2b}}=\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b(a+1)}}{\sqrt{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{ab+b}}{ab}$.

拔尖角度▸ 4 利用“非负数（式）平方内移法”变形

例 11 把下列各式中根号外的因数（式）移到根号内：

（1）$3\sqrt{\frac{2}{3}}$；（2）$-2\sqrt{3}$；（3）$x\sqrt{-\frac{1}{x}}$.

解题秘方：紧扣“二次根式的性质 $a=\sqrt{a^2}$（$a\geqslant0$）和$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）”对式子进行变形.

解：（1）$3\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{3^2\times\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$.

（2）$-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\times3}=-\sqrt{12}$.

（3）因为 $-\frac{1}{x}>0$，所以 $x<0$.

所以$x\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\sqrt{(-x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)}=-\sqrt{-x}$.

拔尖角度▸ 5 利用“被开方数比较法”或“平方法”比较二次根式的大小

例 12 比较大小：（1）$7\sqrt{2}$与$3\sqrt{11}$；（2）$-2\sqrt{11}$与$-3\sqrt{5}$.

解题秘方：紧扣“被开方数大的算术平方根大”或“两个正数，平方大的正数大”的规律比较.

二次根式比较大小的方法

解：（1）方法 1：∵ $7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\times2}=\sqrt{98}$，

$3\sqrt{11}=\sqrt{3^2\times11}=\sqrt{99}$，$98<99$，

∴$\sqrt{98}<\sqrt{99}$，即 $7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$.

方法 2：∵ $7\sqrt{2}>0$，$3\sqrt{11}>0$，且 $(7\sqrt{2})^2=49\times2=98$，

$(3\sqrt{11})^2=9\times11=99$，$98<99$，

∴ $(7\sqrt{2})^2<(3\sqrt{11})^2$，∴ $7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$.

（2）∵ $-2\sqrt{11}=-\sqrt{44}$，$-3\sqrt{5}=-\sqrt{45}$，$44<45$，

∴$\sqrt{44}<\sqrt{45}$，∴ $-\sqrt{44}>-\sqrt{45}$，即 $-2\sqrt{11}>-3\sqrt{5}$.

将其算术平方根移到根号外，也可利用二次根式的除法法则直接运算，最后将分母中的二次根式化成整数或整式.

挑战·高分

特别警示

（3）容易忽视隐含条件 $x<0$，而产生如下错误.

$x\sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{-x}$.

挑战·高分

解法提醒

比较两个二次根式的大小的方法：

1. 可以转化成比较两个被开方数的大小，即可以将根号外的正因数平方后移到根号内，比较移后的被开方数的大小，被开方数大的，其算术平方根也大；
2. 可以将两个二次根式分别平方，计算出结果，再比较大小，依据是：当 $a>0$，$b>0$ 时，若 $a^2>b^2$，则 $a>b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 6 利用“特殊到一般思想”探究等式变化规律

挑战·高分

例 13 先观察下列等式，再回答问题：

① $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1\frac{1}{2}$；

② $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=1\frac{1}{6}$；

③ $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=1\frac{1}{12}$.

（1）请根据上面三个等式提供的信息，猜想 $\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$ 的结果；

（2）请按照上面各等式反映的规律，试写出用 n（n 为正整数）表示的等式.

解题秘方：紧扣等式提供的数据信息，运用对比分析、猜想发现规律.

解：（1）$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}=1\frac{1}{20}$.

（2）$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1\frac{1}{n(n+1)}$.

解法提醒

寻找通式的一般步骤：

1. 将所给的已知结论进行编号；
2. 确定已知结论中的每一部分与序号的关系；
3. 用序号及确定的关系表示通式.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的内容主要是二次根式的乘除法及最简二次根式. 中考命题主要考查二次根式的化简，多以选择题和填空题的形式出现，有时出现在代数式的化简求值中，试题的难度不大，只要灵活掌握 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$），$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）及其逆运算，就能解决中考试题中有关二次根式的化简问题.

三年中考兵法

考法 1 利用最简二次根式的定义判断最简二次根式

例 14 [中考·荆州]下列根式是最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　B. $\sqrt{0.3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{20}$

试题评析：本题考查了最简二次根式的定义，熟悉最简二次根式的两个条件是解答本题的关键.

解：A. 该二次根式的被开方数中含有分母，不是最简二次根式，故本选项错误；

B. 该二次根式的被开方数中含有小数，不是最简二次根式，故本选项错误；

C. 该二次根式符合最简二次根式的定义，故本选项正确；

D. $20=2^2\times 5$，该二次根式的被开方数中含开得尽方的因数，不是最简二次根式，故本选项错误.

答案：C

冲刺·满分

知识链接

化简二次根式的常用技巧：

1. 把被开方数中能开得尽方的因数或因式进行开方.
2. 若被开方数中含有带分数，应先将带分数化为假分数.
3. 若被开方数中含有小数，应先将小数化为分数.
4. 若被开方数是多项式，则先进行因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分母有理化找规律计算

例 15 [中考·黄石]观察下列等式：

第 1 个等式：$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

第 2 个等式：$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

第 3 个等式：$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

第 4 个等式：$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

按上述规律，回答以下问题：

（1）请写出第 n 个等式：$a_n=$_____；

（2）$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$_____.

试题评析：此题考查了分母有理化及数字变化规律，会用对比分析、猜想法是解题的关键.

解：（1）∵第 1 个等式：$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

第 2 个等式：$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

第 3 个等式：$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

第 4 个等式：$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

∴第 n 个等式：$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

（2）$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$.

答案：（1）$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（2）$\sqrt{n+1}-1$

思路点拨

1. 根据题意可知，

$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

由此得出第 n 个等式：

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

2. 将每一个等式化简的结果代入即可求得答案.

两年模拟兵法 ☞答案见 266 页

1. [中考·包头]下列计算结果正确的是（　　）

A. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$

C. $(-2a^2)^3=-6a^6$　　D. $(a+1)^2=a^2+1$

2. [中考·兰州]下列二次根式中，是最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{18}$　　B. $\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{27}$　　D. $\sqrt{12}$

3. [期末·南陵县]已知：$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，则 a 与 b 的关系是（　　）

A. 相等　　B. 互为相反数

C. 互为倒数　　D. 平方相等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 等式 $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-1}$ 成立的条件是（　　）

A. $x\geqslant 1$　　B. $x\geqslant -1$

C. $-1\leqslant x\leqslant 1$　　D. $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

5. [**中考·上海**] 在下列各式中，二次根式 $\sqrt{a-b}$ 的有理化因式是（　　）

A. $\sqrt{a+b}$　　B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

C. $\sqrt{a-b}$　　D. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

6. 下列计算：

①$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$；②$\sqrt{\dfrac{3}{10}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$；

③$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$；　④$\sqrt{16}=4$.

其中错误的是（　　）

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

7. [**中考·杭州**] 已知 $m=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times(-2\sqrt{21})$，则有（　　）

A. $5<m<6$　　B. $4<m<5$

C. $-5<m<-4$　　D. $-6<m<-5$

8. 计算：

（1）[**易错题**] $\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\dfrac{1}{a}}$；

（2）$\dfrac{1}{4}\sqrt{18}\times 8\sqrt{\dfrac{1}{36}}\div\dfrac{2}{3}\sqrt{4\dfrac{1}{2}}$.

9. 化简：$\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{a^2b-4ab^2+4b^3}{a}}$（$0<a<2b$）.

解：原式 $=\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{b(a^2-4ab+4b^2)}{a}}$　A

$=\dfrac{a}{a-2b}\sqrt{\dfrac{ab(a-2b)^2}{a^2}}$　B

$=\dfrac{a}{a-2b}\cdot\dfrac{|a-2b|}{|a|}\cdot\sqrt{ab}$　C

$=\dfrac{a}{a-2b}\cdot\dfrac{a-2b}{a}\cdot\sqrt{ab}$　D

$=\sqrt{ab}$　E

（1）上述解题过程中，从哪一步开始出现错误？请写出该步的代号：_____；

（2）错误的原因是_____；

（3）请你写出本题正确的解答过程.

10. [**中考·黄石**] 先化简，后计算：

$\dfrac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\dfrac{9-a}{2a+6}\cdot\dfrac{1}{a+9}$，其中 $a=\sqrt{3}-3$.

11. 已知 a，b 满足 $\sqrt{4a-b+1}+\sqrt{\dfrac{1}{3}b-4a-3}=0$.

求 $2a\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\div\sqrt{-\dfrac{1}{b}}\right)$ 的值.

12. 已知 $\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$，且 x 为偶数，求 $(1+x)\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.3 二次根式的加减

核心知识

- 可合并的二次根式
- 二次根式的加减
- 二次根式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 可以合并的二次根式

1. 定义：

将某些二次根式化成最简二次根式，如果被开方数相同，则这样的二次根式称为可以合并的最简二次根式.

2. 合并的方法：

合并可合并的二次根式与合并同类项相类似，将根号外的因数或因式相加，根指数和被开方数不变，合并的依据是乘法分配律的逆向运用，

即：$a\sqrt{m}+b\sqrt{m}=(a+b)\sqrt{m}\ (m\geqslant 0)$.

拨考向 利用可合并的二次根式的定义进行识别可合并的二次根式

例1 [中考·凉山州]下列根式中，不能与$\sqrt{3}$合并的是（　　）

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　B. $\frac{3}{\sqrt{3}}$　　C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$　　D. $\sqrt{12}$

解题秘方：紧扣“可合并的二次根式”的定义中的两个必要条件进行识别.

解：首先把选项中每个根式化成最简二次根式，然后找出被开方数不是3的二次根式，即

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}.$$

答案：C

提分·必记

特别提醒

1. 可合并的二次根式必须同时满足：最简二次根式和被开方数相同这两个条件，它与根号前面的因数(式)无关；
2. “被开方数相同的最简二次根式”在习惯上及相关课外读物上都称为“同类二次根式”；判断“同类二次根式”的前提是最简二次根式.

提分·秘诀

解法提醒

判断两个二次根式是否能合并，应先把二次根式化为最简二次根式，然后判断被开方数是否相同，相同就能合并，否则不能合并.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 二次根式的加减

1. 二次根式加减的法则： 二次根式加减时，先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

2. 二次根式加减运算的步骤：

（1）“化”：将每个二次根式都化成最简二次根式；

（2）“找”：找出被开方数相同的最简二次根式；

（3）“并”：将被开方数相同的最简二次根式合并成一项.

3. 二次根式的乘除法与二次根式的加减法的区别

运算	二次根式的乘除法	二次根式的加减法
系数	系数相乘除	系数相加减
被开方数	被开方数相乘除	被开方数不变
化简	结果化为最简二次根式或整式	先化为最简二次根式，再合并同类二次根式

技考向▸ 利用二次根式加减法的法则进行计算

例 2 计算：

（1）$\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128}+\sqrt{2}$；（2）$\sqrt{27}+\frac{\sqrt{18}}{3}-\sqrt{0.5}-\frac{6}{\sqrt{3}}$.

解题秘方： 紧扣“二次根式加减法法则”，按“化简→判断→合并”的顺序计算.

解：（1）$\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

（2）$\sqrt{27}+\frac{\sqrt{18}}{3}-\sqrt{0.5}-\frac{6}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{6\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

提分·必记

特别提醒

1. 化成最简二次根式后被开方数不相同的二次根式不能合并，但是不能丢弃，它们也是结果的一部分.
2. 整式加减运算中的交换律、结合律、去括号法则、添括号法则在二次根式运算中仍然适用.
3. 根号外的因式就是这个二次根式的系数，二次根式的系数是带分数的要化为假分数的形式.

提分·秘诀

解法提醒

二次根式加减运算的技巧：

1. 将每个二次根式都化为最简二次根式，若被开方数中含有带分数，则要先化成假分数；若含有小数，则要化成分数，进而化为最简二次根式.
2. 原式中若有括号，要先去括号，再应用加法交换律、结合律将被开方数相同的二次根式进行合并.

点知识▸ 3 二次根式的混合运算

1. 二次根式的混合运算种类：

二次根式的加、减、乘、除、乘方（或开方）的混合运算.

2. 二次根式的混合运算顺序：

先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，如果有括号就先算括号里面的；与整式的混合运算顺序相同.

3. 二次根式混合运算中的运算律：

实数运算中的运算律（交换律、结合律、分配律）和整式乘法中的乘法公式（平方差公式和完全平方公式）在二次根式的运算中仍然适用.

4. 二次根式混合运算的几种常见类型及计算方法

（1）$\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$；

提分·必记

特别提醒

1. 二次根式混合运算的结果应写成最简二次根式（或整式）的形式并且分母中不含二次根式.
2. 进行二次根式的开方运算时应使开出的因数（式）是非负数（式）.
3. 在进行计算时，能用乘法公式的要尽量使用乘法公式，同时注意合理地运用运算律.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})=\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$;

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$;

(4) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\pm2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a\pm2\sqrt{ab}+b$;

(5) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\div\sqrt{c}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{c}$;

(6) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\div(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$

$\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$.

活学巧记

二次根式混合算，
加减乘除和乘方，
运算顺序同实数，
恰到好处运算律，
乘法公式用到位，
计算过程变容易.

核心考向▶利用二次根式的混合运算顺序及运算律进行计算

题型1：二次根式的混合运算顺序在计算中的应用

例3 计算：

(1) $\left(\sqrt{\dfrac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\times\sqrt{6}$;

(2) $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;

(3) $\left(4\sqrt{8}-8\sqrt{\dfrac{1}{8}}+\sqrt{32}\right)\div2\sqrt{2}$.

解题秘方：紧扣二次根式的混合运算顺序运算即可.

提分·秘诀

解法提醒

1. 在进行二次根式混合运算过程中，每个根式可以看作是一个“单项式”，多个被开方数不同的二次根式的和可以看作“多项式”，然后类比整式的运算法则进行运算.二次根式混合运算的结果应写成最简二次根式或整式的形式.
2. 在进行二次根式的计算时，能用乘法公式的要尽量使用乘法公式，这样可以使计算过程大大简化.

解：(1) 原式 $=\sqrt{\dfrac{8}{27}}\times\sqrt{6}-5\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{\dfrac{8}{27}\times6}-5\sqrt{3\times6}$

$=\dfrac{4}{3}-15\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}$

$=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+10\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

$=19\sqrt{2}$.

(3) 方法一：原式 $=(8\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\div2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}\div2\sqrt{2}$

$=5$.

方法二：原式 $=\left(4\sqrt{8}-8\sqrt{\dfrac{1}{8}}+\sqrt{32}\right)\times\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{4}-4\sqrt{\dfrac{1}{16}}+\dfrac{\sqrt{16}}{2}$

$=4-1+2$

$=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：运算律和乘法公式在二次根式混合运算中的应用

例 4 计算：

（1）$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})^2$；

（2）$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

（3）$(3+2\sqrt{2})^{2019}(3-2\sqrt{2})^{2020}$.

解题秘方： 紧扣“乘法公式”和“幂的运算法则”的特征，进行灵活运算.

解：（1）原式 $=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$

$=(2\sqrt{2}-2\sqrt{6})\times 2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{6}-12\sqrt{2}$.

（2）原式 $=[1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})][1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]$

$=1^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

$=1-(5-2\sqrt{6})$

$=2\sqrt{6}-4$.

（3）原式 $=(3+2\sqrt{2})^{2019}(3-2\sqrt{2})^{2019}(3-2\sqrt{2})$

$=[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^{2019}(3-2\sqrt{2})$

$=1^{2019}\times(3-2\sqrt{2})$

$=3-2\sqrt{2}$.

技巧点拨

当题目出现平方差形式的计算式时，如果先利用完全平方公式计算比较麻烦，可逆用平方差公式转化为乘积的形式计算；

当题目中出现两个三项式的乘积的形式时，一般将相同的数看作 m，相反的数看作 n，利用平方差公式计算；

当题目中出现两个大指数幂的积的形式时，一般先逆用同底数幂相乘和积的幂的运算法则，把算式化为底数相乘的幂再进行计算.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用“定义法”巧求字母值

挑战·高分

例 5 已知 a，b 是正整数，且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2020}$，求 a，b 的值.

解题秘方： 紧扣“$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2020}$ 即 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 可以合并”这一特征解答.

解： 由 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2020}$，

可知 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{2020}$ 是可以合并的二次根式.

$\because \sqrt{2020}=\sqrt{4\times 505}=2\sqrt{505}$，

$\therefore$ 可设 $\sqrt{a}=m\sqrt{505}$，$\sqrt{b}=n\sqrt{505}$，

$\therefore m\sqrt{505}+n\sqrt{505}=2\sqrt{505}$，

即 $(m+n)\sqrt{505}=2\sqrt{505}$，

$\therefore m+n=2$.

又 $\because a$，b 为正整数，

$\therefore m$，n 为正整数，

$\therefore m=n=1$. $\therefore a=b=505$.

技巧提醒

解答本题的技巧在于巧用“$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2020}$”，即 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{2020}$ 是可以合并的二次根式，也就是说它们可以化为**被开方数相同的二次根式**，利用这一特征解决问题. 如按思维习惯把已知等式两边平方，这样等式中的两个未知量 a，b 是无法求出的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用整体思想巧求对称式的值

例 6 已知 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，求代数式 x^2-xy+y^2 的值.

解题秘方：根据所求代数式的结构特点，将其转化为含有 $x+y$ 与 xy 的代数式；求 $x+y$ 与 xy 的值，整体代入进行计算.

解：$\because x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，

$\therefore x+y=\sqrt{7}$，$xy=\frac{1}{2}$.

$\therefore x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=(\sqrt{7})^2-3\times\frac{1}{2}=7-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

用整体思想求代数式的值的方法：

求关于 x，y 的对称式（即交换两个字母的位置后，代数式不变）的值，一般先求出 $x+y$，xy，$x-y$，$\frac{x}{y}$ 等的值，然后将所求对称式进行适当变形，使之成为只含有 $x+y$，xy，$x-y$，$\frac{x}{y}$ 等的式子，最后将其值整体代入即可求解.

拔尖角度 3 利用估值作差法求代数式的值

例 7 已知 a，b 分别是 $3-\sqrt{2}$ 的整数部分和小数部分，求 $(a-\sqrt{2})(b-1)$ 的值.

解题秘方：用“估值法”紧扣“小数部分 = 原数 − 整数部分”确定字母的值进行求值.

解：$\because 1<2<4$，$\therefore 1<\sqrt{2}<2$，$\therefore 1<3-\sqrt{2}<2$，

$\therefore a=1$，$b=3-\sqrt{2}-1=2-\sqrt{2}$.

$\therefore (a-\sqrt{2})(b-1)=(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{2}-1)$

$=(1-\sqrt{2})^2$

$=3-2\sqrt{2}$.

挑战·高分

知识储备

任何一个实数都可以表示为整数部分与小数部分的和的形式，确定其整数部分的方法是先将实数确定在两个连续整数之间，然后估算出整数部分，进而确定其小数部分.

拔尖角度 4 利用化简求值法求代数式的值

例 8 已知 $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

解题秘方：分别对已知字母值和所求代数式进行化简，再代入求值.

解：$\because a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$，

显然 $0<a<1$，$\therefore\sqrt{(a-1)^2}=1-a$.

$\therefore \frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}=\frac{(1-a)^2}{a-1}-\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}=a-1-\frac{1-a}{a(a-1)}=a-1+\frac{1}{a}$.

$\because a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，$\therefore\frac{1}{a}=2+\sqrt{3}$.

$\therefore a-1+\frac{1}{a}=(2-\sqrt{3})-1+(2+\sqrt{3})=3$.

挑战·高分

解法提醒

化简求值问题的常用技巧：

1. 当代数式复杂而字母取值单一时，一般先化简代数式，再把字母取值代入；
2. 当代数式复杂且字母取值含有运算时，一般先将代数式和字母取值的式子同时化简，再把字母取值式子的结果代入化简后的代数式求值；
3. 当代数式含有关于某个字母的式子且条件中含有或可化为这个式子时，可考虑整体代入求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 5 利用数形结合法解几何应用

挑战·高分

例 9 已知 a，b，c 满足 $(a-\sqrt{8})^2+\sqrt{b-5}+|c-3\sqrt{2}|=0$.

（1）求 a，b，c 的值；

（2）用长为 a，b，c 的三条线段能否围成三角形？若能围成，说明理由并求出三角形的周长；若不能围成，请说明理由.

解题秘方：先利用代数知识求出相关字母的值，再结合几何性质说明以这些字母值为线段长能否组成三角形.

解：（1）$\because (a-\sqrt{8})^2+\sqrt{b-5}+|c-3\sqrt{2}|=0$，

且 $(a-\sqrt{8})^2\geqslant 0$，$\sqrt{b-5}\geqslant 0$，$|c-3\sqrt{2}|\geqslant 0$，

$$\therefore \begin{cases} a-\sqrt{8}=0, \\ b-5=0, \\ c-3\sqrt{2}=0, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=2\sqrt{2}, \\ b=5, \\ c=3\sqrt{2}. \end{cases}$$

（2）用长为 a，b，c 的三条线段能围成三角形.

理由如下：

由（1）可知，$b>c>a$.

$\therefore a+c=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$，$5\sqrt{2}>5$，$\therefore a+c>b$.

$\therefore$ 用长为 a，b，c 的三条线段能围成三角形.

三角形的周长为 $a+b+c=2\sqrt{2}+5+3\sqrt{2}=5+5\sqrt{2}$.

解法提醒

数形结合思想是数学中的一种重要思想，它能将数与形有机地融为一体，本题是关于三角形以及非负数的综合题，由非负数的特性求出 a，b，c 的值，再根据三角形的三边关系判断能否围成三角形.

拔尖角度▸ 6 利用倒数法比较二次根式的大小

挑战·高分

例 10 已知 $a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-2$，那么 a，b，c 的大小关系是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

解题秘方：紧扣“两个正数，倒数大的正数反而小”这一规律用倒数法比较大小.

解：$\because a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-2$，

$$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+1=\sqrt{\frac{3}{2}}+1.$$

$$\because \sqrt{\frac{3}{2}}+1<\sqrt{2}+1<\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

$$\therefore 0<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}, \quad \therefore b<a<c.$$

答案：C

解题通法

倒数法比较大小

此题先求出 a，b，c 的倒数，再根据一个正数的倒数越大，则这个正数越小，进行几个数的大小比较.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 7 利用探索规律法化简二次根式

挑战·高分

例 11 阅读下列材料，并解答问题.

$$①\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$②\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$③\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{4})(4\sqrt{3}-3\sqrt{4})}=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{4}}{4},$$

…

（1）若 n 为正整数，用含 n 的等式表示你发现的规律；

（2）利用你发现的规律计算：$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}$.

解题秘方：紧扣“题序号与题中数字变化的对应关系”用对比呈现法找规律解答.

解：（1）$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

（2）$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{25\sqrt{24}+24\sqrt{25}}$

$=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{4}}{4}+\cdots+\frac{\sqrt{24}}{24}-\frac{\sqrt{25}}{25}$

$=1-\frac{\sqrt{25}}{25}$

$=1-\frac{1}{5}$

$=\frac{4}{5}$.

技巧点拨

当题目中出现“…”号时，一般都存在着某种规律，因此解题时，不一定都要化简二次根式后才计算，有时根据特征可使互为相反数的项互相抵消，达到简化运算过程的目的.

解法提醒

对比呈现法

1. 本题中的 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可写成 $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，这样观察题中给出的式子及化简结果易得出规律.
2. 遇到此类规律探究题时，要注意对比呈现，这样更易找到规律.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

二次根式的加减运算及混合运算是中考的必考内容，题型有选择题、填空题、化简求值题，有时也渗透到其他混合运算中，与其他知识综合在一起进行考查，在今后的中考中，对本节知识的考查仍将以基础题与中档题为主.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用二次根式的运算法则进行辨析

例12 [中考·十堰]下列运算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

C. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$　　D. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$

试题评析：本题主要考查二次根式的运算法则，运用运算法则进行计算是解题关键.

解：A. $\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$不能合并，所以A选项错误；

B. 原式$=6\times2=12$，所以B选项错误；

C. 原式$=\sqrt{8\div2}=2$，所以C选项正确；

D. 原式$=2\sqrt{2}$，所以D选项错误.

答案：C

思路点拨

根据二次根式的加减法法则对A、D进行判断；根据二次根式的乘法法则对B进行判断；根据二次根式的除法法则对C进行判断.

考法2 利用二次根式的混合运算进行计算

例13 (1)[中考·聊城]计算$\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}-2\sqrt{45}\right)\div(-\sqrt{5})$的结果为(　　)

A.5　　B.-5　　C.7　　D.-7

(2)[中考·大连]计算：$(\sqrt{2}+1)^2-\sqrt{8}+(-2)^2$.

试题评析：本题考查了二次根式的混合运算，正确掌握混合运算顺序和理解乘法公式的结构是解题关键.

解：(1)原式$=(\sqrt{5}-6\sqrt{5})\div(-\sqrt{5})$

$=(-5\sqrt{5})\div(-\sqrt{5})$

$=5$.

答案：A

(2)原式$=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4=7$.

思路点拨

1. 先把二次根式化为最简二次根式，然后把括号内合并后进行二次根式的除法运算；
2. 首先利用完全平方来计算乘方，化简二次根式，乘方，然后合并同类二次根式即可.

考法3 利用二次根式的运算解几何应用

例14 [中考·泸州]已知三角形的三边长分别为a、b、c，求其面积问题，中外数学家曾经进行过深入研究，古希腊的几何学家海伦给出求其面积的海伦公式$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中$p=\frac{a+b+c}{2}$；我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求其面积的秦九韶公式$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$，若一个三角形的三边长分别为2，3，4，则其面积是(　　)

A. $\frac{3\sqrt{15}}{8}$　　B. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$　　C. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

试题评析：本题考查二次根式的应用，解答本题的关键是明确题意，求出相应的三角形的面积.

巧记口诀

周半、周半减各边，
乘积、开方三角面.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： $\because S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$，

$\therefore$ 若一个三角形的三边长分别为 2,3,4，则其面积是：

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times3^2-\left(\frac{2^2+3^2-4^2}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

答案： B

思路点拨

根据题目中的秦九韶公式，可以求得一个三边长分别为 2,3,4 的三角形的面积，从而可以解答本题.

两年模拟兵法

☞ 答案见 267 页

1. 下列二次根式中，与其他三个不是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{98}$

C. $\sqrt{48}$　　D. $\sqrt{50}$

2. [中考·重庆] 计算 $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$ 的值是（　　）

A. 2　　B. 3

C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

3. 下列计算正确的是（　　）

A. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2=7-3=4$

B. $(\sqrt{x}+\sqrt{2x})(-\sqrt{x}+\sqrt{2x})=2x-x=x$

C. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})\times\sqrt{10}=\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

D. $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{2b})=a-4b$

4. 已知最简二次根式 $\sqrt{2b+1}$ 和 $\sqrt{7-b}$ 是被开方数相同的二次根式，那么 $b=$_____.

5. 计算：

(1) $\sqrt{48}\div\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{12}+\sqrt{24}$；

(2) $4\sqrt{24}-6\sqrt{54}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(3) $2b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}-\left(4a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$；

(4) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{xy}-\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\div\sqrt{xy}$.

6. 先化简，再求值：

$\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y}+\frac{\sqrt{xy}-y}{x-\sqrt{xy}}$，其中 $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{3}-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. 善于思考的小明进行了以下探索：

设 $a+b\sqrt{2}=(m+n\sqrt{2})^2$（其中 a，b，m，n 均为正整数），则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$.

$\therefore a=m^2+2n^2$，$b=2mn$. 这样小明就找到了一种把类似 $a+b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

（1）当 a，b，m，n 均为正整数时，若 $a+b\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，用含 m，n 的式子分别表示 a，b，得：$a=$_____，$b=$_____；

（2）利用所探索的结论，找一组正整数 a，b，m，n 填空：_____+_____$\sqrt{3}=$（_____+_____$\sqrt{3}$）^{2}；

（3）若 $a+4\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，且 a，m，n 均为正整数，求 a 的值.

8. 已知 $a=\sqrt{7}+2$，$b=\sqrt{7}-2$，求下列各式的值：

（1）a^2b+b^2a；（2）a^2-ab+b^2；（3）a^2-b^2.

9. 已知 $a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ 的值.

10. 已知 $(a-\sqrt{2}+1)^2$ 与 $\sqrt{b-2}$ 互为相反数，求 a^b 的值.

【导学号：8592074】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二次根式运算的技巧


荣老师告诉你 二次根式的运算通常是根据其运算法则进行计算的，但在计算过程中若能巧妙地运用一些数学思想方法，可使问题化繁为简，易于计算．下面举例说明二次根式的运算技巧．

技巧一 巧移因式，避繁就简

例1 计算 $(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-4\sqrt{3})$．

解题秘方：将 $3\sqrt{2}$、$4\sqrt{3}$ 根号外的因数移到根号内，然后用平方差公式计算比较简便，或先把 $\sqrt{48}$、$\sqrt{18}$ 化简，然后利用平方差公式计算．

解：原式 $=(\sqrt{3^2\times2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-\sqrt{4^2\times3})$

$=(\sqrt{18}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-\sqrt{48})$

$=18-48$

$=-30$.

方法点拨：利用二次根式的性质可以将根号内的因式移到根号外，也可以将根号外的因式移到根号内．注意由内向外是开方；由外向内是乘方．

技巧二 巧提公因数，化难为易

例2 计算 $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$．

解题秘方：$5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ 提出公因数 $\sqrt{2}$ 后，再用平方差公式计算．

解：原式 $=(5+\sqrt{6})[5\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}]$

$=(5+\sqrt{6})[\sqrt{2}(5-\sqrt{6})]$

$=\sqrt{2}(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})$

$=\sqrt{2}(25-6)$

$=19\sqrt{2}$.

方法点拨：先提公因数，然后运用乘法公式计算．提公因数时，要注意打破思维习惯，对于一个有理数和一个无理数，可先将一个有理数化成一个无理数的乘方形式，然后再提公因数．

技巧三 巧分组，出奇制胜

例3 计算 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$．

解题秘方：将 $(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ 看成一个整体，构造符合平方差公式的结构，利用平方差公式计算．

解：原式 $=[(\sqrt{2}-\sqrt{6})+\sqrt{3}][(\sqrt{2}-\sqrt{6})-\sqrt{3}]$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2$

$=2-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6-3$

$=5-4\sqrt{3}$.

方法点拨：整式的乘法公式对二次根式同样适用，只要符合乘法公式的结构即可．

技巧四 巧分解，独占鳌头

例4 计算 $(x+2\sqrt{xy}+y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$．

解题秘方：直接计算显然很麻烦，先将被除式因式分解，然后直接与除式约分即可．

解：原式 $=[(\sqrt{x})^2+2\sqrt{xy}+(\sqrt{y})^2]\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

方法点拨：因式分解在整式范围内使用，对于二次根式，只要符合公式的结构特征，同样可以运用公式进行因式分解．

技巧五 巧拆项，独具一格

例5 化简 $\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$．

解题秘方：直接计算相当麻烦，若将分子中的 $4\sqrt{3}$ 拆成 $\sqrt{3}+3\sqrt{3}$，则可将整个式子拆成分母相同的两个式子的和，然后进行化简．

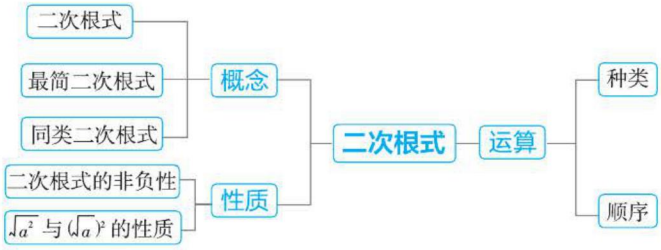
解：$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 二次根式$\sqrt{a}$，具有双重非负性：一是$a \geqslant 0$，二是$\sqrt{a} \geqslant 0$.

2. 二次根式的性质有：

①$\sqrt{a^2}=|a|$；

②$(\sqrt{a})^2=a\ (a \geqslant 0)$；

③$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$；

④$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a \geqslant 0,\ b>0)$.

3. 二次根式的运算包括二次根式的加减乘除以及乘方等几种运算，二次根式的运算不仅要考虑运算的法则、运算的顺序和运算律，还要注意与整式的乘法公式相结合应用.

4. 两个互逆过程：

(1)$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\xrightleftharpoons[\text{积的算术平方根}]{\text{二次根式的乘法}}\sqrt{ab}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$；

(2)$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\xrightleftharpoons[\text{商的算术平方根}]{\text{二次根式的除法}}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a \geqslant 0,\ b>0)$.

5. 常用的有理化因式有：$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$；$\sqrt{a+b}$与$\sqrt{a+b}$；$\sqrt{a-b}$与$\sqrt{a-b}$；$\sqrt{a}+\sqrt{b}$与$\sqrt{a}-\sqrt{b}$；$a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$与$a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$等.

6.“根号外的非负因数（式）移到根号内”的方法：先根据二次根式有意义的条件判断根号外的因数（式）的正负性.

（1）如果根号外的因数（式）是正数，则直接把该因数（式）变成其平方放在根号内；

（2）如果根号外的因数（式）是负数，则把负号留在根号外，把根号外的因数（式）变成其相反数的平方放在根号内.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 二次根式有意义的条件

链接中考≫ 二次根式有意义的条件是二次根式的核心，也是解决很多二次根式问题的隐含条件．在中考中单独考查时较多，有时也与分式进行综合考查．一般都以选择题形式出现．

例1 [中考·莱芜]要使二次根式$\sqrt{3-2x}$有意义，则x的取值范围是(　　)

A.$x\geqslant\frac{3}{2}$　　B.$x\leqslant\frac{3}{2}$

C.$x\geqslant\frac{2}{3}$　　D.$x\leqslant\frac{2}{3}$

解题秘方：先根据二次根式有意义的条件建立关于x的不等式．再解这个不等式$3-2x\geqslant 0$，解得$x\leqslant\frac{3}{2}$，故选择B.

答案：B

方法点拨：形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子是二次根式，因此二次根式的被开方数a应满足条件$a\geqslant 0$. 解答与二次根式概念有关的问题通常是根据这个条件建立不等式来求解．

专题二 二次根式的性质

链接中考 >> 二次根式的性质是对二次根式进行化简和计算的关键，特别是二次根式的双重非负性在中考中考查特别多，一般都以填空题、选择题的形式出现．

例2 [中考·日照]若$\sqrt{(x-3)^2}=3-x$，则x的取值范围是_____.

解题秘方：根据二次根式的性质得出$3-x\geqslant 0$，求解即可．

解：$\because\sqrt{(x-3)^2}=3-x$，

$\therefore 3-x\geqslant 0$，

解得$x\leqslant 3$.

答案：$x\leqslant 3$

例3 [中考·巴中]若a，b，c分别为三角形的三边长，且a，b满足$\sqrt{a^2-9}+(b-2)^2=0$，则第三边长c的取值范围是_____.

解题秘方：首先根据非负数的性质，得出a，b的值，然后根据三角形的三边关系得出c的取值范围．

解：$\because a$，b满足$\sqrt{a^2-9}+(b-2)^2=0$，

$\therefore\begin{cases}a^2-9=0,\\ b-2=0.\end{cases}$

又$\because a>0$，

$\therefore\begin{cases}a=3,\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore$根据三角形的三边关系，

得$3-2<c<3+2$，

即$1<c<5$.

答案：$1<c<5$

方法点拨：初中阶段学习了三个非负数：①$|a|\geqslant 0$；②$a^2\geqslant 0$；③$\sqrt{a}\geqslant 0$. 题目一般是其中两个的和（少数有三个的和）为零，根据非负数的性质，得到方程组，求得方程组的解，再代入求值即可．

专题三 二次根式的运算

链接中考 >> 二次根式的运算包括二次根式的加减乘除以及乘方等几种运算，二次根式的运算不仅要考虑运算的法则、运算的顺序和运算律，还要注意与整式的乘法公式相结合应用．在中考中一般以填空题、选择题的形式出现，有的地区也以解答题的形式考查．

例4 [中考·滨州]计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$的结果为_____.

解题秘方：根据平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$进行运算即可．

解：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2$

$=2-3$

$=-1$.

答案：-1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：二次根式的乘法运算中，若式子符合整式的乘法公式的特点，可使用整式的乘法公式，使运算简便.

专题四 最简二次根式

链接中考 >> 最简二次根式是二次根式运算的最后结果，对最简二次根式的识别是最常见的考查形式，关键就是扣住最简二次根式的几个条件.在中考中一般以选择题的形式出现.

例5 [中考·扬州]下列二次根式中的最简二次根式是（　　）

A. $\sqrt{30}$　　B. $\sqrt{12}$

C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

解题秘方：对照最简二次根式的概念，逐一判断.

解：B选项中，$\sqrt{12}$可以化为$2\sqrt{3}$；C选项中，$\sqrt{8}$可以化为$2\sqrt{2}$；D选项中，$\sqrt{\frac{1}{2}}$的根号内含有分母，它们都不是最简二次根式，故选择A.

答案：A

方法点拨：最简二次根式要满足以下几个要求：根号内不含分母，且不含开得尽方的因式，分母中也不含有根式.

方法必会

专题五 整体思想

专题解读 >> 整体思想就是在数学问题中，对于某些问题，可以从整体角度去思考，即将局部放在整体中去观察分析、探究问题的解决方法，从而使问题得以巧妙解决.在二次根式的运算中，遇到对称式、倒数式的求值问题时经常用到整体思想.

例6 [一题多解]已知$xy=6$，$x+y=-5$，求$x\sqrt{\frac{x}{y}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}$的值.

解：方法一：由题意可知$x<0$，$y<0$.

$$\text{原式}=x\cdot\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}+y\cdot\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}}$$

$$=\frac{x\sqrt{xy}}{-y}+\frac{y\sqrt{xy}}{-x}$$

$$=-\sqrt{xy}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$=-\sqrt{xy}\cdot\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}.$$

将$xy=6$，$x+y=-5$代入，

则原式$=-\frac{13\sqrt{6}}{6}$.

方法二：由题意可知$x<0$，$y<0$.

$$\text{原式}=x\sqrt{\frac{xy}{y^2}}+y\sqrt{\frac{xy}{x^2}}$$

$$=x\cdot\frac{\sqrt{xy}}{-y}+y\cdot\frac{\sqrt{xy}}{-x}$$

$$=-\sqrt{xy}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$=-\sqrt{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$=-\sqrt{xy}\cdot\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$

将$xy=6$，$x+y=-5$代入，

则原式$=-\frac{13\sqrt{6}}{6}$.

方法点拨：如果把$x+y=-5$，$xy=6$联立成方程组，目前我们还未学解此类的方程组，因此可以考虑用整体思想求解.

专题六 数形结合思想

专题解读 >> 数形结合思想就是根据数学问题的题设和结论之间的内在联系，既分析其数量关系，又揭示其几何意义，使数量关系和几何图形巧妙地结合起来，并充分地利用这种结合，使问题得到解决.在进行二次根式的化简时，可以借助数轴确定字母的取值范围，然后对式子进行化简.

例7 已知实数a，b在数轴上对应点的位置如图16-1所示，试化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

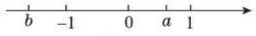


图 16−1

解题秘方：由实数 a，b 在数轴上对应点的位置可判断出 a，b 的大小，从而可根据二次根式的性质及绝对值的有关知识进行化简.

解：由实数 a，b 在数轴上对应点的位置可知 $0 < a < 1$，$b < -1$.

$\therefore a+b < 0$，$b+1 < 0$，$a-1 < 0$.

$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$

$=|a|+|b|+|a+b|+|b+1|+|a-1|$

$=a-b-a-b-b-1+1-a$

$=-a-3b$.

方法点拨：先将二次根式的问题转化为绝对值的问题，然后根据数轴上各点的位置确定相应代数式的符号，再去绝对值符号进行化简.

好题必解 ☞答案见 268 页

类型 1　利用被开方数的非负性求值

1. 已知 $y=3\sqrt{x-4}+2\sqrt{4-x}+\frac{1}{2}$，求 x^2+y^2 的值.

2. 已知 a 为实数，求式子 $\sqrt{a+3}-\sqrt{3-6a}+\sqrt{-a^2}$ 的值.

类型 2　利用二次根式的非负性求值

题型 1　利用二次根式的非负性求字母的值

3. 已知 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+y-6}=0$，求 x，y 的值.

题型 2　利用二次根式的非负性求最值

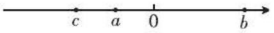
4. 当 x 取什么实数时，式子 $\sqrt{5x-2}+3$ 的取值最小？并求出这个最小值.

题型 3　利用二次根式的非负性解几何问题

5. 已知 a，b 为一等腰三角形的两边长，且满足等式 $2\sqrt{3a-6}+3\sqrt{2-a}=b-4$，求此等腰三角形的周长.

类型 3　利用二次根式的性质化简代数式（数形结合思想）

6. 已知实数 a，b，c 在数轴上的对应点的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-b)^2}-|b|$.



（第 6 题）

类型 4　巧比较二次根式的大小

题型 1　平方法

7. 比较 $\sqrt{5}+\sqrt{13}$ 与 $\sqrt{7}+\sqrt{11}$ 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　作商法

8. 比较$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}$与$\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$的大小.

题型 3　作差法

9. 比较$\frac{\sqrt{11}-1}{3}$与$\frac{2}{3}$的大小.

题型 4　倒数法

10. 已知$x=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$，$y=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$，试比较x，y的大小.

类型 5　巧用二次根式化简求值

题型 1　因式分解法

11. 化简：$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$.

题型 2　换元法

12. 化简：$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

题型 3　配方法

13. 已知$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$，求$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$的值.

题型 4　辅元法

14. 已知$x:y:z=1:2:3$（$x>0$，$y>0$，$z>0$），求$\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+z}+\sqrt{x+2y}}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十六章测试卷

☞答案见269页

（120分 90分钟）

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（　　）

A.$-\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{12}$　　C.$\sqrt{\frac{1}{5}}$　　D.$\sqrt{a^2}$

2. 在式子$\frac{1}{x-2}$，$\frac{1}{x-3}$，$\sqrt{x-2}$，$\sqrt{x-3}$中，x可以取2和3的是（　　）

A.$\frac{1}{x-2}$　　B.$\frac{1}{x-3}$

C.$\sqrt{x-2}$　　D.$\sqrt{x-3}$

3. 下列各组数中，两数相乘，积为1的是（　　）

A.2和-2　　B.-2和$\frac{1}{2}$

C.$\sqrt{3}$和$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$

4. 关于$\sqrt{8}$的叙述正确的是（　　）

A. 在数轴上不存在表示$\sqrt{8}$的点

B.$\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

C.$\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

D. 与$\sqrt{8}$最接近的整数是3

5. 下列运算正确的是（　　）

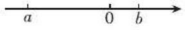
A.$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$　　B.$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

C.$(\sqrt{3}-1)^2=3-1$　　D.$\sqrt{5^2-3^2}=5-3$

6. 若$\sqrt{75n}$是整数，则正整数n的最小值是（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

7. 实数a，b在数轴上的对应点的位置如图所示，且$|a|>|b|$，则化简$\sqrt{a^2}-|a+b|$的结果为（　　）



（第7题）

A.$2a+b$　　B.$-2a+b$

C.b　　D.$2a-b$

8. 若$\sqrt{x-2y+9}$与$|x-y-3|$互为相反数，则$x+y$的值为（　　）

A.3　　B.9　　C.12　　D.27

9. 已知$x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，则$x_1^2+x_2^2$等于（　　）

A.8　　B.9　　C.10　　D.11

10. 将1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$三个数按图中方式排列，若规定(a,b)表示第a排第b列的数，则$(8,2)$与$(10,10)$表示的两个数的积是（　　）

1　　第1排

$\sqrt{3}$　　$\sqrt{2}$　　第2排

$\sqrt{3}$　　$\sqrt{2}$　　1　　第3排

1　　$\sqrt{3}$　　$\sqrt{2}$　　1　　第4排

…

…　第4列　第3列　第2列　第1列

（第10题）

A.$\sqrt{6}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.1

二、填空题（每题3分，共18分）

11. 当x_____时，二次根式$\sqrt{x-1}$有意义.

12. 计算$\sqrt{12}\times\sqrt{3}$的结果是_____.

13. 已知三角形三边的长分别为$\sqrt{27}$ cm，$\sqrt{12}$ cm，$\sqrt{48}$ cm，则它的周长为_____cm.

14. 已知$xy>0$，化简二次根式$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$的正确结果是_____.

15. 若$y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-2x}+1$，则$x^{-y}$=_____.

16. 对于任意实数a，b，定义一种运算“*”如下：$a*b=a(a-b)+b(a+b)$，如：$3*2=3\times(3-2)+2\times(3+2)=13$，那么$\sqrt{3}*\sqrt{2}$=_____.

三、解答题（共72分）

17.（8分）计算：

（1）$4\sqrt{5}+\sqrt{45}-\sqrt{8}+4\sqrt{2}$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）$\sqrt{2\frac{1}{2}} \div 3\sqrt{28} \times \left(-5\sqrt{2\frac{2}{7}}\right)$.

18.（8分）若 $a=3-\sqrt{10}$，求代数式 a^2-6a-2 的值.

19.（8分）如果最简二次根式 $\sqrt{2m+n+3}$ 与 $\sqrt[m-n-1]{m+10}$ 是可以合并的，求正整数 m，n 的值.

20.（8分）先化简，再求值：

$\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right) \div \frac{a^2-b^2}{a}$，其中 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$.

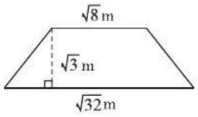
21.（8分）有三根钢条长分别为 $\sqrt{8}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{32}$，那么这三根钢条首尾相连能焊成一个三角形钢架吗？为什么？

22.（10分）已知等式 $|a-2\,018|+\sqrt{a-2\,019}=a$ 成立，求 $a-2\,018^2$ 的值.

23.（10分）拦河坝的横断面是梯形，如图，其上底是 $\sqrt{8}$ m，下底是 $\sqrt{32}$ m，高是 $\sqrt{3}$ m.

（1）求横断面的面积；

（2）若用 300 m^3 的土，可修多长的拦河坝？



（第23题）

24.（12分）阅读与计算：

请阅读以下材料，并完成相应的任务.

斐波那契是意大利数学家，他研究了一列数，这列数非常奇妙，被称为斐波那契数列（按照一定顺序排列着的一列数称为数列）.后来人们在研究它的过程中，发现了许多意想不到的结果，在实际生活中，很多花朵（如梅花、飞燕草、万寿菊等）的瓣数恰是斐波那契数列中的数. 斐波那契数列还有很多有趣的性质，在实际生活中也有广泛的应用.

斐波那契数列中的第 n 个数可以用 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 表示（$n \geqslant 1$）.这是用无理数表示有理数的一个范例.

任务：请根据以上材料，通过计算求出斐波那契数列中的第1个数和第2个数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解密奇妙的勾股弦

解密奇妙的勾股弦











第十七章 勾股定理

核心考点

你将见到的

- 勾股定理的证明
- 勾股定理的应用
- 勾股定理的逆定理

核心方法

我们为你提供的

- 割补法
- 面积法
- 展开法
- 旋转变换法
- 构造法
- 化折为直法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.1 勾股定理

核心知识
- 勾股定理
- 勾股定理的证明
- 勾股定理的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 勾股定理

1. 勾股定理：

直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

数学表达式：如图 17.1−1，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，AB=c，AC=b，BC=a，则 $a^2+b^2=c^2$.

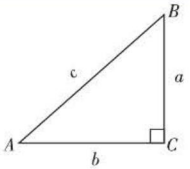


图 17.1−1

2. 勾股定理的变形公式：$a^2=c^2-b^2$；$b^2=c^2-a^2$.

3. 基本思想方法：

勾股定理把“形”与“数”有机地结合起来，即把直角三角形这个“形”与三边关系这一“数”结合起来，它是数形结合思想的典范.


勾股定理

特别提醒

1. 勾股定理揭示的是直角三角形的三边的平方关系，只有在直角三角形中才可以使用勾股定理.
2. 利用勾股定理已知其中任意两边可以求出第三边.
3. 运用勾股定理，若分不清哪条边是斜边时，则要分类讨论，写出所有可能，以免漏解或错解.

提分·必记

拔考向▸利用勾股定理求直角三角形的边长

题型 1：勾股定理在斜边确定的三角形中的应用

例 1 在 Rt △ ABC 中，∠ A，∠ B，∠ C 的对边分别为 a，b，c，∠ C=90°.

（1）已知 a=3，b=4，求 c；

（2）已知 c=19，a=13，求 b（结果保留根号）；

（3）已知 a ∶ b=1 ∶ 2，c=5，求 b.


勾股定理的应用

解题秘方：紧扣“勾股定理的特征”解答.

解：（1）∵∠ C=90°，a=3，b=4，

∴由勾股定理，得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$；

（2）∵∠ C=90°，c=19，a=13，

∴由勾股定理，得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{19^2-13^2}=8\sqrt{3}$；

（3）∵ a ∶ b=1 ∶ 2，∴ b=2a.

∵∠ C=90°，c=5，b=2a，∴由勾股定理，得 $a^2+(2a)^2=5^2$，解得 $a=\sqrt{5}$（负值舍去）. ∴ $b=2\sqrt{5}$.

解法提醒

分清待求的是斜边还是直角边，以便合理选择是直接用勾股定理还是变形公式. 若求斜边则直接用勾股定理；若求直角边，则用变形公式.

提分·秘诀

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：勾股定理在斜边不确定的三角形中的应用

例 2 已知直角三角形两边的长分别是 3 和 4，则第三边的长为_____.

解题秘方：紧扣“所求第三边可能是斜边或直角边”，进行分类解答.

解：当第三边是斜边时，第三边长为$\sqrt{3^2+4^2}=5$；

当第三边为直角边时，第三边长为$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.

答案：5 或$\sqrt{7}$

方法点拨：直接求三角形的边长问题一般借助勾股定理求值，但一定要分清楚直角边和斜边，一旦问题没有明确直角边和斜边，那么就要进行分类讨论.

特别警示

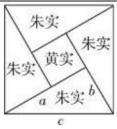
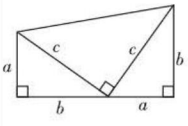
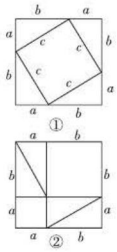
此类问题容易出错的地方是忽视第二种情况，直接认为 4 是直角边，得到答案为 5，从而漏解.

知识 2 勾股定理的证明


勾股定理的证明

1. **常用证法**：验证勾股定理的方法很多，有测量法，几何证明法；但最常用的是通过拼图，构造特殊图形，并根据拼图中各部分面积之间的关系来验证.

2. **著名证法举例**：

方法	图形	证明
赵爽“赵爽弦图”		因为大正方形的边长为 c，所以大正方形的面积为 c^2. 又大正方形的面积 $=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=a^2+b^2$，所以 $a^2+b^2=c^2$
刘徽“青朱出入图”		设大正方形的面积为 S，则 $S=c^2$. 根据“出入相补，以盈补虚”的原理，有 $S=a^2+b^2$，所以 $a^2+b^2=c^2$
加菲尔德总统拼图		设梯形的面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+ab$. 又 $S=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}c^2+ab$，所以 $a^2+b^2=c^2$
毕达哥拉斯拼图		由图①得大正方形面积 $=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，由图②得大正方形面积 $=a^2+b^2+4\times\frac{1}{2}ab$，比较两式易得 $a^2+b^2=c^2$

提分·必记

特别提醒

通过拼图证明命题的思路：

1. 图形经过割补拼接后，只要没有重叠、没有空隙，面积就不会改变；
2. 根据同一种图形的面积的不同表示方法列出等式；
3. 利用等式性质变换验证结论成立，即拼出图形→写出图形面积的表达式→找出等量关系→恒等变形→推导命题结论.

通过拼图，利用求面积来验证，这种方法以数形转换为指导思想，以图形拼补为手段，以各部分面积之间的关系为依据而达到目的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用拼图法验证勾股定理

例 3 一个直立的火柴盒在桌面上倒下，启发人们发现了勾股定理的一种验证方法．如图 17.1-2 所示，火柴盒的一个侧面 $ABCD$ 倒下后到四边形 $AB'C'D'$ 的位置，连接 AC，AC'，CC'，设 $AB=a$，$BC=b$，$AC=c$．请利用四边形 $BCC'D'$ 的面积验证勾股定理：$a^2+b^2=c^2$．

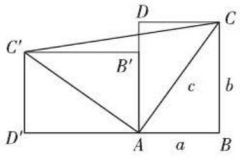


图 17.1-2

解题秘方：紧扣“总体面积等于各部分面积之和”进行验证．

证明：因为四边形 $BCC'D'$ 为直角梯形，

所以 $S_{梯形BCC'D'}=\frac{1}{2}(BC+C'D')\cdot BD'=\frac{(a+b)^2}{2}$．

因为 $Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle AB'C'$，

所以 $AC'=AC=c$，$\angle BAC=\angle B'AC'$．

所以 $\angle CAC'=\angle CAB'+\angle B'AC'=\angle CAB'+\angle BAC=90°$．

所以 $S_{梯形BCC'D'}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CAC'}+S_{\triangle D'AC'}$

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$

$=\frac{c^2+2ab}{2}$．

所以 $\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{c^2+2ab}{2}$，即 $a^2+b^2=c^2$．

详解

$Rt\triangle AB'C'$ 是火柴盒 $ABCD$ 中 $Rt\triangle ABC$ 倒下得到的，因此 $Rt\triangle ABC$ 的形状、大小未改变，只是位置由 $\triangle ABC$ 改变为 $Rt\triangle AB'C'$，所以 $Rt\triangle AB'C'\cong Rt\triangle ABC$．

整个图形面积等于不重叠、无空隙、各组成部分的面积的和．

点知识▶3 勾股定理的应用

1. 勾股定理的应用范围：

勾股定理是直角三角形的一个重要性质，它把直角三角形有一个直角的“形”的特点转化为三边“数”的关系．利用勾股定理，可以解决与直角三角形有关的计算和证明问题，还可以解决生活、生产中的一些实际问题．

2. 勾股定理应用的常见类型：

（1）已知直角三角形的任意两边求第三边；

（2）已知直角三角形的任意一边确定另两边的关系；

（3）证明包含有平方（算术平方根）关系的几何问题；

（4）求解几何体表面上的最短路程问题；

（5）构造方程（或方程组）计算有关线段长度，解决生产、生活中的实际问题．

提分·秘诀

提分·必记

特别提醒

运用勾股定理解决实际问题的一般步骤：

1. 从实际问题中抽象出几何图形．
2. 确定要求的线段所在的直角三角形．
3. 找准直角边和斜边，根据勾股定理建立等量关系．
4. 求得结果．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用勾股定理解应用问题

题型1：勾股定理在求线段长中的应用

例4 如图17.1-3所示，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，AC=3，BC=4，CD⊥AB，垂足为D，求CD的长.

解题秘方：紧扣“同一三角形的面积的两种表示法”求解.

解：∵∠ACB=90°，AC=3，BC=4，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∵ $CD\perp AB$，∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴ $AB\cdot CD=AC\cdot BC$，

∴ $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$.

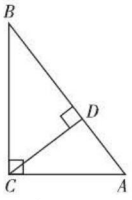


图17.1-3

题型2：勾股定理在证明平方关系中的应用

例5 如图17.1-4所示，在Rt△ABC中，∠C=90°，AM是中线，MN⊥AB，垂足为N，求证：$AN^2-BN^2=AC^2$.

解题秘方：将要证明的线段归结到不同的直角三角形中，结合等式性质证明.

证明：∵ $MN\perp AB$，

∴在Rt△AMN中，$AN^2+MN^2=AM^2$，

在Rt△BMN中，$BN^2+MN^2=MB^2$.

∴ $AN^2-AM^2=BN^2-MB^2$，即$AN^2-BN^2=AM^2-MB^2$.

在Rt△AMC中，∵∠C=90°，∴ $AM^2-MC^2=AC^2$，

又∵AM是中线，∴ $MC=MB$.

∴ $AM^2-MB^2=AC^2$. ∴ $AN^2-BN^2=AC^2$.

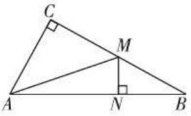


图17.1-4

题型3：勾股定理在实际生活中的应用

例6 一架长5 m的梯子，斜靠在一竖直墙上，这时梯足距墙脚3 m，若梯子的顶端下滑1 m，则梯足将滑动（　　）

A.0 m　　B.1 m　　C.2 m　　D.3 m

解题秘方：将实际应用问题通过建模转化为直角三角形的问题求解.

解：根据题意，建立如图17.1-5所示的模型，BB_1的长即为所求.

在Rt△ABC中，∠ACB=90°，AB=5 m，BC=3 m.

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$（m）.

在Rt△A_1B_1C中，∠A_1CB_1=90°，

$A_1C=AC-AA_1=4-1=3$（m），$A_1B_1=5$ m.

∴ $B_1C=\sqrt{A_1B_1^2-A_1C^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$（m）.

∴ $BB_1=B_1C-BC=4-3=1$（m）.

答案：B

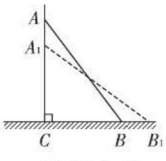


图17.1-5

提分·秘诀

解法提醒

等面积法：

用不同的方法表示同一个图形的面积.此题是典型的应用等面积法求直角三角形斜边上高的问题.即△ABC的面积既可以表示为$\frac{AC\cdot BC}{2}$，又可以表示为$\frac{AB\cdot CD}{2}$，再利用同一图形的面积相等解答.

另解

∵ $MN\perp AB$，

∴ △AMN和△MNB为直角三角形.

在Rt△ACM中，$AM^2=AC^2+MC^2$.

在Rt△MNB中，$MB^2=MN^2+NB^2$.

∵ AM是中线，∴ $MC=MB$.

∴ $AM^2=AC^2+MN^2+NB^2$.

在Rt△AMN中，$AM^2=AN^2+MN^2$，

∴ $AC^2+MN^2+NB^2=AN^2+MN^2$

∴ $AN^2-BN^2=AC^2$.

解法提醒

此题首先根据题意建立数学模型，然后利用直角三角形的三边之间的关系和一些隐含关系（如：墙与地面垂直、梯子的长度不变等）来解决题中的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 4 在数轴上表示$\sqrt{n}$（n为大于1的整数）

1. 用勾股定理画长为$\sqrt{n}$的线段

利用勾股定理画出长为$\sqrt{n}$的线段的关键是找到两个整数a，b，使$a^2+b^2=n$. 因此只要作出直角边长为a，b的直角三角形，斜边的长即为$\sqrt{n}$. 例如，长为$\sqrt{13}$的线段就是直角边长为3，2的直角三角形的斜边.

2. 在数轴上表示$\sqrt{n}$

如图17.1−6，构造两条直角边长都是1的直角三角形，利用勾股定理得到斜边的长为$\sqrt{2}$，再用圆规截取的方法画$\sqrt{2}$在数轴上的对应点；

构造两直角边长分别为$\sqrt{2}$，1的直角三角形，用勾股定理得到斜边的长为$\sqrt{3}$，再用圆规截取的方法画出$\sqrt{3}$在数轴上的对应点，….

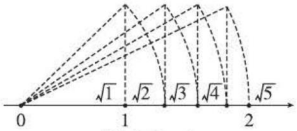


图17.1−6

依此规律可以在数轴上表示出$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，….

提分·必记

特别提醒

在数轴上表示$\sqrt{n}$的步骤：

第1步：利用勾股定理求出长为$\sqrt{n}$的线段.

第2步：在数轴上以原点为圆心，以长为$\sqrt{n}$的线段长为半径画弧与数轴的正方向相交.

则交点即为表示$\sqrt{n}$的点.

拔考向▸ 利用勾股定理在数轴上表示$\sqrt{n}$

例7 在数轴上画出表示$\sqrt{10}$的点.

解题秘方：紧扣长为$\sqrt{10}$的线段是两直角边长分别为1和3的直角三角形的斜边“作图”.

解：如图17.1−7所示.

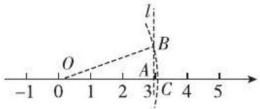


图17.1−7

（1）画出数轴，数轴上要标明原点O、正方向、单位长度.

（2）在数轴上找出表示3的点A，则$OA=3$. 过点A作直线l垂直于OA，在l上取点B，使$AB=1$.

（3）以原点O为圆心，以OB为半径作弧，弧与数轴的交点C即为表示$\sqrt{10}$的点.

提分·秘诀

作法提醒

作一条长度等于无理数的线段的方法不唯一，尽量利用直角边长为整数的直角三角形作出.

另要注意：并不是所有的无理数都能用尺规作图的方法在数轴上作出对应的点，如π，0.101 001 000 1…（相邻两个1之间的0的个数逐次加1）等就不能.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用化整为零法求线段的长

例8 已知△ABC中，$\angle B=60°$，$AC=50$，$AB=20$，求BC的长.

解题秘方：紧扣“勾股定理的特征”，将BC转化为两直角三角形的直角边分别进行计算.

解：作出示意图如图17.1−8，过点A作$AD\perp BC$于点D.

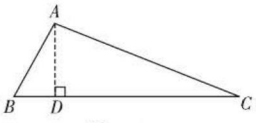


图17.1−8

$\because \angle B=60°$，$\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle BAD=30°$，$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=10$.

在Rt△ABD中，$AD^2=AB^2-BD^2=20^2-10^2=300$，

在Rt△ADC中，$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{50^2-300}=10\sqrt{22}$，

$\therefore BC=BD+DC=10+10\sqrt{22}$.

挑战·高分

技巧点拨

构造法：

利用勾股定理求线段的长是勾股定理的一个重要应用，当题目中没有直角三角形时，往往作垂线构造直角三角形，然后利用勾股定理可求得线段的长. 但是构造直角三角形时，尽量不要破坏已知条件中的特殊角和已知的边.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ ② 利用化不规则为规则法求四边形的面积

题型 1：分割法在求面积中的应用

例 9 如图 17.1−9，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=6$，$\angle A=60°$，$\angle ADC=150°$，$\angle ABC=90°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方：将不规则的四边形分割成规则的特殊三角形；再利用特殊的三角形性质求面积.

解：如图 17.1−9，连接 BD，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E.

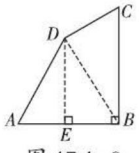


图 17.1−9

$\because AB=AD=6$，$\angle A=60°$，$\therefore \triangle ADB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ABD=\angle ADB=60°$，$BD=6$，$AE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 6=3$.

在 Rt $\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ADB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

$\because \angle ADC=150°$，$\angle ADB=60°$，$\therefore \angle CDB=90°$.

$\because \angle DBC=\angle ABC-\angle ABD=90°-60°=30°$，

$\therefore BC=2DC$.

由勾股定理，得 $BC^2=DC^2+BD^2$，

即 $(2DC)^2=DC^2+6^2$，$\therefore DC=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle BDC}=\dfrac{1}{2}BD\cdot DC=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle BDC}=9\sqrt{3}+6\sqrt{3}=15\sqrt{3}$.

题型 2：补形法在求面积中的应用

例 10 如图 17.1−10，已知四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$CD=1$，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle D=90°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方：将不规则的四边形补形成规则的特殊三角形，再利用特殊的三角形面积的差求解.

解：延长 AD，BC 交于点 E，如图 17.1−10.

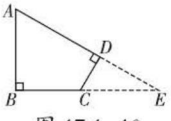


图 17.1−10

$\because \angle B=90°$，$\angle A=60°$，$\therefore \angle E=30°$.

在 Rt $\triangle ABE$ 中，$AB=2$，$\therefore AE=4$，

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BE=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

在 Rt $\triangle CDE$ 中，$\angle CDE=90°$，$CD=1$，

$\therefore CE=2$，$\therefore DE=\sqrt{CE^2-CD^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle CDE}=\dfrac{1}{2}DE\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}=2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

转化法：

不规则图形的面积不易直接求得，往往通过转化法将不规则图形的面积转化为规则图形面积的和或差，常用的转化法有分割法和补形法两种，如例9中将四边形面积通过分割转化为等边三角形和直角三角形的面积和，例10中将四边形面积通过补形转化为两个直角三角形的面积差.

技巧点拨

解决不规则图形的面积时，我们一般通过作辅助线将不规则图形转化成几个规则的图形，再利用所学图形的面积公式求面积. 本题通过补形将不规则图形转化成两个三角形，并尽可能地构造出直角三角形，以便利用勾股定理求出各线段的长，从而求出三角形的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用化斜为直法证平方关系

例 11 如图 17.1−11，已知 AD 是△ ABC 的中线．

求证：$AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2)$．

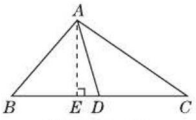


图 17.1−11

解题秘方：构造直角三角形，利用勾股定理把需要证明的线段联系起来，结合等式的性质进行变形．

证明：如图 17.1−11，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.

在 Rt△ ABE，Rt△ ACE 和 Rt△ ADE 中，

$AB^2=AE^2+BE^2$，$AC^2=AE^2+CE^2$，$AE^2=AD^2-ED^2$，

$\therefore AB^2+AC^2=(AE^2+BE^2)+(AE^2+CE^2)$

$=2(AD^2-ED^2)+(DB-DE)^2+(DC+DE)^2$

$=2AD^2-2ED^2+DB^2-2DB\cdot DE+DE^2+DC^2+2DC\cdot DE+DE^2$

$=2AD^2+DB^2+DC^2+2DE(DC-DB)$．

又∵ AD 是△ ABC 的中线，

$\therefore DB=DC$，

$\therefore AB^2+AC^2=2AD^2+2DC^2=2(AD^2+DC^2)$．

挑战·高分

解法提醒

证明线段的平方关系的方法：

对于带有平方运算的问题，主要思路是找出直角三角形，利用勾股定理结合等量代换和代数中的恒等变形进行转化．若没有直角三角形，则需构造直角三角形进行解答．

拔尖角度 4 利用折叠法求线段的长

例 12 如图 17.1−12，有一张直角三角形纸片，两直角边 AC=6 cm，BC=8 cm，现将直角边 AC 沿 AD 折叠，使点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处，试求 CD 的长．

解题秘方：紧扣“折叠前后重合的线段相等，重合的角相等”，利用勾股定理解答．

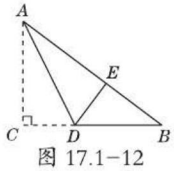


图 17.1−12

解：在 Rt△ ABC 中，AC=6 cm，BC=8 cm.

因为 $AB^2=AC^2+BC^2=6^2+8^2=100$，

所以 AB=10 cm.

由折叠的性质，可知∠ C=∠ DEA=90°，

$AC=AE$=6 cm，故 BE=10−6=4(cm)．

设 $CD=x$ cm，则 $DE=x$ cm，BD=(8−x) cm.

在 Rt△ BDE 中，由勾股定理，得 $x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得 x=3.

所以 CD 的长为 3 cm.

挑战·高分

解法提醒

关于折叠问题要紧扣折叠前后的对应边相等，对应角相等，其解题步骤为：

1. 利用重合的图形传递数据（一般不用重合的图形进行计算）；
2. 选择直角三角形，这个直角三角形一般已知一边，另两边可通过重合图形找到数量关系，便能利用勾股定理列方程求解．

拔尖角度 5 利用对称法求平面上最短距离

例 13 如图 17.1−13①，一个牧童正在小河南 4 km 的 A 处牧马，此时正位于他的小屋 B 的西 8 km 北 7 km 处，他想把他的马牵到小河边去饮水，然后回家．

他要完成这件事情所走的最短路程是多少？

解题秘方：利用对称法将两点到直线上的一点的最短路程和转化为两点间的距离，用勾股定理求解．

挑战·高分

解法提醒

求直线同侧的两点到直线上一点的最短路径长的方法：

先找到其中一个点关于这条直线的对称点，连接对称点与另一个点的线段长就是最短路径长．以连接对

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 17.1−13 ②，作出点 A 关于河岸 MN 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交 MN 于点 P，连接 AP，则 $AP+PB=A'B$ 就是最短路程．

在 Rt△$A'DB$ 中，$AD'=4+4+7=15$（km），$BD=8$ km，由勾股定理求得 $A'B=\sqrt{15^2+8^2}=17$（km）．

即他要完成这件事情所走的最短路程是 17 km.

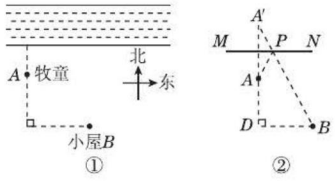


图 17.1−13

拔尖角度▸ 6 利用化折为直法求立体图形中两点间的最短距离

例 14 如图 17.1−14 所示的长方体的高为 4 cm，底面是长为 5 cm，宽为 3 cm 的长方形．一只蚂蚁从顶点 A 出发沿长方体的表面爬到顶点 B．求：

（1）蚂蚁经过的最短路程；

（2）蚂蚁沿着棱爬行（不能重复爬行同一条棱）的最长路程．

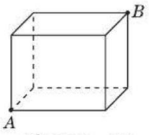


图 17.1−14

解题秘方：利用化折为直法将不同的展开方式进行分类计算比较得出结果．

解：（1）将长方体与顶点 A，B 相关的两个面展开，共有三种方式，如图 17.1−15 所示．

若蚂蚁沿侧面爬行，如图 17.1−15 ①，则爬行的最短路程为 $\sqrt{(5+3)^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$（cm）；

若蚂蚁沿侧面和上面爬行，如图 17.1−15 ②③，则爬行的最短路程分别为 $\sqrt{(4+5)^2+3^2}=3\sqrt{10}$（cm），$\sqrt{(4+3)^2+5^2}=\sqrt{74}$（cm）．

因为 $\sqrt{74}<4\sqrt{5}<3\sqrt{10}$，

所以蚂蚁经过的最短路程是 $\sqrt{74}$ cm.

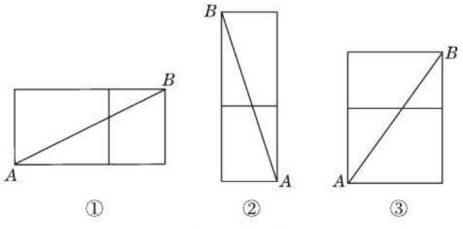


图 17.1−15

（2）$5+4+5+4+3+4+5=30$（cm），所以蚂蚁沿着棱爬行的最长路程是 30 cm.

挑战·高分

解法点拨

解决几何体表面上两点间的最短路程问题的方法：

将几何体表面展开，即将立体几何问题转化为平面几何问题，然后利用“两点之间，线段最短”去确定路线，最后利用勾股定理计算．它运用的是**化折为直**的思想方法．

称点与另一个点的线段为斜边，构造出一个两条直角边已知的直角三角形，**将分散的线段集中在同一三角形中**，然后利用勾股定理即可求出直线同侧的两点到直线上一点的最短路径长．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 7 利用分类法解几何中的动点问题

挑战·高分

例 15 如图 17.1−16 所示，在△ ABC 中，已知∠ C=90°，AC=8，BC=6，P，Q 是△ ABC 边上的两个动点，点 P 从点 A 开始沿 $A\to C$ 方向运动，且速度为每秒 1 个单位，点 Q 从点 C 开始沿 $C\to B\to A$ 方向运动，且速度为每秒 2 个单位，它们同时出发，设运动的时间为 t 秒.

（1）出发 2 秒后，求线段 PQ 的长；

（2）t 为何值时，△ APB 能形成等腰三角形；

（3）当点 Q 在 BA 上运动时，求能使△ CBQ 成为等腰三角形的运动时间.

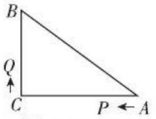


图 17.1−16

解题秘方：利用代数法解几何问题，即紧扣几何图形的性质，通过列方程求解.

解：（1）t=2 时，CQ=2×2=4，CP=8−1×2=6，如图 17.1−17，

$PQ=\sqrt{CQ^2+CP^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

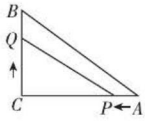


图 17.1−17

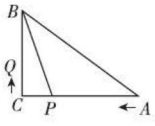


图 17.1−18

（2）如图 17.1−18，△ APB 是等腰三角形时，有 $AP=BP=t$，则 $CP=8-t$.

在△ CPB 中，由勾股定理得 $6^2+(8-t)^2=t^2$，∴ $t=\dfrac{25}{4}$.

因此，当 t 为$\dfrac{25}{4}$时，△ APB 能形成等腰三角形.

（3）因为点 Q 在边 BA 上运动时，△ CBQ 为等腰三角形，所以应分三种情况：

①若 $CQ=BQ$，则∠ B=∠ BCQ.

∵∠ B+∠ A=∠ BCQ+∠ ACQ=90°，

∴∠ A=∠ ACQ，∴ $AQ=CQ=BQ$，

又 $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴ BQ=5，∴ $2t-6=5$，∴ t=5.5.

②若 $BQ=BC$，则 $2t-6=6$，∴ t=6.

③若 $CQ=CB$，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，

则$\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE$，

又 AB=10，∴$\dfrac{1}{2}\times8\times6=\dfrac{1}{2}\times10\times CE$，∴ $CE=\dfrac{24}{5}$.

∴ $BE=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=\dfrac{18}{5}$. ∴ $BQ=\dfrac{36}{5}=7.2$.

∴ $2t=6+7.2$，∴ t=6.6.

由上可知，当运动时间为 5.5 秒或 6 秒或 6.6 秒时，△ CBQ 为等腰三角形.

图解

① $CQ=BQ$，如图 17.1−19.

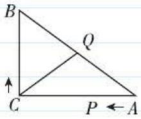


图 17.1−19

② $BQ=BC$，如图 17.1−20.

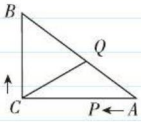


图 17.1−20

③ $CQ=CB$，如图 17.1−21.

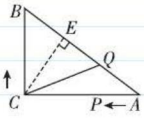


图 17.1−21

特别警示

在(3)中，容易出现忽视分类而只得出其中一种情况的错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 勾股定理是直角三角形的重要性质，常运用勾股定理计算线段的长度、证明线段之间的数量关系、解决与周长或面积有关的问题等．在中考试题中对勾股定理的考查，由原来的以选择题、填空题为主，开始向探究题、动手操作题、信息题等新题型转变，而且题目涉及的内容也多与实际生活联系．另外，对该部分内容的考查也经常与折叠、轴对称、旋转等知识相结合．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用勾股定理解古算术中的求线段长问题

例16 [中考·荆州]《九章算术》中的“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去根六尺．问折高者几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈=10尺），一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部6尺远，问折断处离地面的高度是多少？设折断处离地面的高度为x尺，则可列方程为（　　）

A.$x^2-6=(10-x)^2$　　B.$x^2-6^2=(10-x)^2$

C.$x^2+6=(10-x)^2$　　D.$x^2+6^2=(10-x)^2$

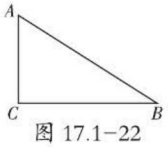


图 17.1-22

试题评析：本题考查的是勾股定理的应用，在应用勾股定理解决实际问题时与方程的结合是解决实际问题常用的方法，解本题时要从题中抽象出勾股定理这一数学模型，画出准确的示意图．

解：如图17.1-22，由折断处离地面的高度为x尺，得$AB=(10-x)$尺，又$BC=6$尺，在Rt△ABC中，$AC^2+BC^2=AB^2$，即$x^2+6^2=(10-x)^2$．

答案：D

思路点拨

根据题意画出图形，再利用勾股定理列出方程即可．

考法2 利用勾股定理解求面积问题

例17 [中考·温州]四个全等的直角三角形按图17.1-23所示的方式围成正方形$ABCD$，过各较长直角边的中点作垂线，围成面积为S的小正方形$EFGH$．已知AM为Rt△ABM较长直角边，$AM=2\sqrt{2}EF$，则正方形$ABCD$的面积为（　　）

A.$12S$　　B.$10S$　　C.$9S$　　D.$8S$

试题评析：本题考查正方形的性质、勾股定理、线段的垂直平分线的定义等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考选择题中的压轴题．

解：设$AM=2a$，$BM=b$．则正方形$ABCD$的面积$=4a^2+b^2$，由题意可知$EF=(2a-b)-2(a-b)=2a-b-2a+2b=b$，

∵$AM=2\sqrt{2}EF$，∴$2a=2\sqrt{2}b$，∴$a=\sqrt{2}b$，

∵正方形$EFGH$的面积为S，∴$b^2=S$．

∴正方形$ABCD$的面积$=4a^2+b^2=9b^2=9S$．

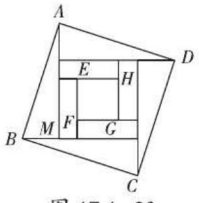


图 17.1-23

答案：C

解法提醒

设$AM=2a$，$BM=b$．则正方形$ABCD$的面积$=4a^2+b^2$．由题意可知$EF=(2a-b)-2(a-b)=2a-b-2a+2b=b$．由此即可解决问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用勾股定理解探究规律问题

例 18 [中考·青海]如图 17.1−24，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，其面积标记为 S_1，以 CD 为斜边作等腰直角三角形，以该等腰直角三角形的一条直角边为边向外作正方形，其面积标记为 S_2，…，按照此规律继续下去，则 S_9 的值为（　　）

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^6$　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^7$　C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$　D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$

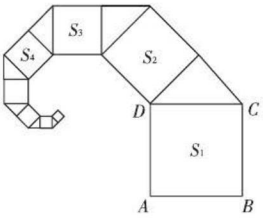


图 17.1−24

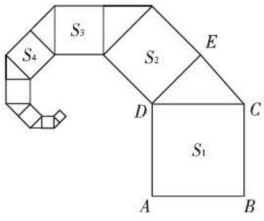


图 17.1−25

试题评析：本题考查了等腰直角三角形的性质、勾股定理以及规律型题中数的变化规律，解题的关键是找出规律 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. 本题属于中档题，难度不大，解决该题型题目时，写出部分 S_n 的值，根据数值的变化找出变化规律是关键.

解：在图中标上字母 E，如图 17.1−25 所示.

∵正方形 $ABCD$ 的边长为 2，△ CDE 为等腰直角三角形，

∴ $DE^2+CE^2=CD^2$，$DE=CE$，∴ $S_2+S_2=S_1$.

观察，发现规律：$S_1=2^2=4$，$S_2=\frac{1}{2}S_1=2$，$S_3=\frac{1}{2}S_2=1$，$S_4=\frac{1}{2}S_3=\frac{1}{2}$，…，∴ $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

当 $n=9$ 时，$S_9=\left(\frac{1}{2}\right)^{9-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$.

答案：A

思路点拨

根据等腰直角三角形的性质可得出 $S_2+S_2=S_1$，写出部分 S_n 的值，根据数的变化找出变化规律 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$，依此规律即可得出结论.

考法 4 利用勾股定理解实际中应用问题

例 19 [中考·十堰]如图 17.1−26，海中有一小岛 A，它周围 8 海里内有暗礁，渔船跟踪鱼群由西向东航行，在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60° 方向上，航行 12 海里到达 D 点，这时测得小岛 A 在北偏东 30° 方向上. 如果渔船不改变航线继续向东航行，有没有触礁的危险？

试题评析：本题考查了勾股定理的应用和解直角三角形，此题是一道方向角问题，结合航海中的实际问题，按解直角三角形的相关知识求解，体现了数学应用于实际生活的思想.

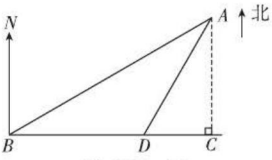


图 17.1−26

解法提醒

常见的航海问题有避险、抵御台风等. 解决这类问题，首先要确定方向角，根据方向角正确作出图形，通过添加辅助线**构造直角三角形**，将实际问题转化为与勾股定理有关的几何问题进行求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：无触礁危险，理由如下：

如图 17.1−26，过 A 作 $AC \perp BD$ 交 BD 的延长线于点 C，则 AC 的长是 A 到 BD 的距离，

由题意易知 $\angle CAD=30°$，$\angle CAB=60°$，

$\therefore \angle BAD=60°-30°=30°$，又易知 $\angle ABD=30°$，

$\therefore \angle ABD=\angle BAD$. $\therefore BD=AD=12$ 海里，

$\because \angle CAD=30°$，$\angle ACD=90°$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD=6$（海里），

由勾股定理得：$AC=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$（海里）$>8$ 海里，

即渔船继续向正东方向航行，没有触礁的危险.

方法提醒

判断该船继续向东航行是否有触礁的危险，即判断 AC 的长与 8 海里的大小关系，若 AC > 8 海里，则该船继续向东航行不会有触礁危险；若 AC ≤ 8 海里，则该船继续向东航行有触礁危险.

素养提分 行动篇

“面积法”的思考与延伸

平面图形的面积是同学们最熟悉的概念之一，而且经常用图形割补的方法求一些不规则平面图形的面积，除此之外，面积还可以作为几何证明的工具，这就是面积法. 我们把改变平面图形的形状和位置但不改变其面积大小的几何变换叫做面积变换. 对勾股定理的证明是面积变换最常见的例证. 勾股定理是在直角三角形的三边外作三个正方形，其实将三个正方形换成等边三角形，半圆等都可以.

面积变换是利用图形的面积关系揭示图形性质的方法，面积变换的基本依据是以下几条性质：

①全等三角形的面积相等；相似三角形的面积比等于相似比的平方（以后将学到）；

②同底（或等底）等高的两个三角形的面积相等.

③两个三角形的面积比，等于它们各自的底与高之积的比. 特别地，当两个三角形的高相等时，面积比等于底边的比；底相等时，面积比等于高的比；

④两个三角形有一个内角相等（或互补）时，它们的面积比等于夹这个角的两边之积的比.

下面介绍几种“面积法”的典型应用：

1. 求证：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

解析：如图 17.1−27，连接 AD，根据三角形的面积公式：三角形的面积 $=\frac{1}{2}$ 底 × 高求得 $S_{\triangle ABD}$、$S_{\triangle ACD}$、$S_{\triangle ABC}$；

又由图易知，$S_{\triangle ABD}$、$S_{\triangle ACD}$、$S_{\triangle ABC}$ 的底、高分别为 AB 和 DE、AC 和 DF，AB 和 CG；

又由图易知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，分析到这里，问题就迎刃而解了.

2. 如图 17.1−28，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 CD 上一点，F 是 AD 上一点，AE 与 CF 相交于点 O，且 $AE=CF$，求证：OB 平分 $\angle AOC$.

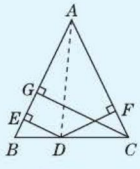


图 17.1−27

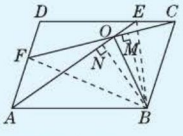


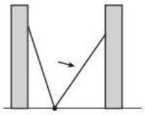
图 17.1−28

解析：连接 BE、BF，作 $BM \perp CF$ 于 M，$BN \perp AE$ 于 N，由于 $\triangle CBF$ 的面积 = 平行四边形 $ABCD$ 面积的一半，$\triangle ABE$ 的面积 = 平行四边形 $ABCD$ 面积的一半，所以可得 $\triangle CBF$ 的面积 = $\triangle ABE$ 的面积，可得 $CF \cdot BM=AE \cdot BN$，下面问题易解.

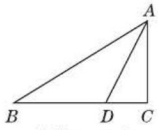
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·绍兴]如图，小巷左右两侧是竖直的墙，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙脚的距离为0.7米，顶端距离地面2.4米.如果保持梯子底端位置不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面2米，则小巷的宽度为(　　)

A.0.7米　B.1.5米　C.2.2米　D.2.4米



(第1题)



(第2题)

2. [中考·大连]如图，在△ABC中，∠C=90°，AC=2，点D在BC上，∠ADC=2∠B，$AD=\sqrt{5}$，则BC的长为(　　)

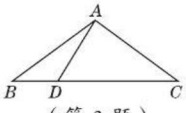
A.$\sqrt{3}-1$　　B.$\sqrt{3}+1$

C.$\sqrt{5}-1$　　D.$\sqrt{5}+1$

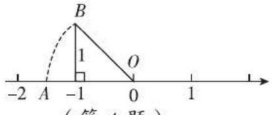
3. [中考·漳州]如图，在△ABC中，AB=AC=5，BC=8，D是线段BC上的动点(不含端点B，C)，若线段AD长为正整数，则点D的个数共有(　　)

A.5个　　B.4个

C.3个　　D.2个



(第3题)



(第4题)

4. 如图，以原点O为圆心，OB为半径画弧与数轴交于点A，且点A表示的数为x，则x^2-10的立方根为(　　)

A.$\sqrt{2}-10$　　B.$-\sqrt{2}-10$

C.2　　D.−2

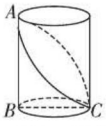
5. [中考·十堰]如图，已知圆柱的底面直径$BC=\frac{6}{\pi}$，高AB=3，小虫在圆柱表面爬行，从C点爬到A点，然后再沿另一面爬回C点，则小虫爬行的最短路程为(　　)

A.$3\sqrt{2}$

B.$3\sqrt{5}$

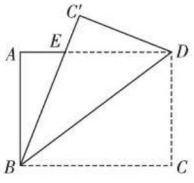
C.$6\sqrt{5}$

D.$6\sqrt{2}$



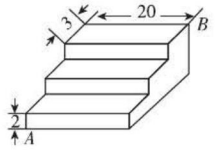
(第5题)

6. 如图，长方形$ABCD$沿着直线BD折叠，使点C落在C'处，BC'交AD于点E，AD=8，AB=6，求AE的长.



(第6题)

7. 如图，台阶下A处的蚂蚁要爬到B处搬运食物，它走的最短路程是多少?



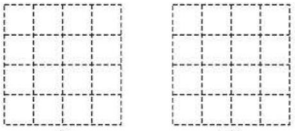
(第7题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图所示，每个小正方形的边长都是 1，在每幅图中以格点为顶点，分别画出一个符合下列要求的三角形：

（1）三边长分别为 3，$\sqrt{10}$，5，并求此三角形的面积；

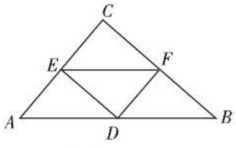
（2）直角边长是无理数的等腰直角三角形，并求此三角形的斜边长.



（第 8 题）

9. 如图所示，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，点 D 为 AB 的中点，点 E，F 分别为 AC，BC 上的点，且 $DE \perp DF$.

求证：$AE^2+BF^2=EF^2$.

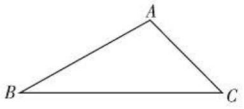


（第 9 题）

10. [**中考 · 德州**]如图所示，某公路检测中心在一事故多发地段安装了一个测速仪器，检测点设在距离公路 10m 的 A 处，测得一辆汽车从 B 处行驶到 C 处所用时间为 0.9 s，已知 $\angle B=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$.

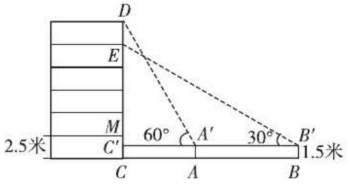
（1）求 B，C 之间的距离；（保留根号）

（2）如果此地限速为 80km/h，那么这辆汽车是否超速？请说明理由.（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.7$，$\sqrt{2}\approx 1.4$）



（第 10 题）

11. [**中考 · 潍坊**]如图，某数学兴趣小组要测量一栋五层居民楼 CD 的高度.该楼底层为车库，高 2.5 米；上面五层居住，每层高度相等.测角仪支架离地 1.5 米，在 A 处测得五楼顶部点 D 的仰角为 60°，在 B 处测得四楼顶部点 E 的仰角为 30°，AB=14 米.求居民楼的高度（精确到 0.1 米，参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.73$）　　**【导学号：8592074】**



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.2 勾股定理的逆定理

核心知识

- 互逆命题
- 互逆定理
- 勾股定理的逆定理
- 勾股数

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 互逆命题和互逆定理

提分·必记

1. 互逆命题

如果两个命题的题设、结论正好相反，那么这两个命题称为互逆命题，如果把其中一个叫做原命题，那么另一个叫做它的逆命题.

特别提醒：（1）“题设、结论正好相反”是指：第一个命题的题设是第二个命题的结论，第一个命题的结论是第二个命题的题设.

（2）“互逆命题”是说明两个命题之间的关系，两个命题的地位可以互换，可以确定其中任何一个为原命题，另一个为逆命题.

（3）写一个命题的逆命题的关键是分清它的题设和结论，把题设和结论互换，并用通顺的语句将它们连接起来即可得到逆命题.

（4）原命题的真假和逆命题的真假没有必然联系，原命题是真命题，其逆命题不一定是真命题；原命题是假命题，其逆命题也不一定是假命题.

特别警示

判断一个命题是真命题需要证明，而判断一个命题是假命题，只需举一个反例即可.

2. 互逆定理

如果一个定理的逆命题经过证明是正确的，那么它也是一个定理，称其为原定理的逆定理，这两个定理称为互逆定理.

注意：命题有真有假，而定理都是正确的，即都是真命题.

3. 互逆命题与互逆定理的关系

每个命题都有逆命题；但每个定理不一定都有逆定理；只有当定理的逆命题经过证明是正确的，才能称这个逆命题为逆定理.

拔考向▸利用命题的定义改写判断命题

题型1：互逆命题在改写、判断真假中的应用

例1 判断下列命题的真假，写出逆命题，并判断逆命题的真假：

（1）如果两条直线相交，那么它们只有一个交点；

（2）如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$；

（3）如果两个数互为相反数，那么它们的和为零；

（4）如果 $ab<0$，那么 $a>0$，$b<0$.

提分·秘诀

解法提醒

写出逆命题的关键是分清楚原命题的题设和结论，然后将它的题设和结论交换位置就可得到这个命题的逆命题.判断一个命题是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣互逆命题“题设、结论正好相反”这一特征改写命题.

解：（1）原命题是真命题. 逆命题：如果两条直线只有一个交点，那么它们相交. 逆命题是真命题.

（2）原命题是假命题. 逆命题：如果 $a^2 > b^2$，那么 $a > b$. 逆命题是假命题.

（3）原命题是真命题. 逆命题：如果两个数的和为零，那么它们互为相反数. 逆命题是真命题.

（4）原命题是假命题. 逆命题：如果 $a > 0$，$b < 0$，那么 $ab < 0$. 逆命题是真命题.

真命题需要进行逻辑推理，判断一个命题是假命题只需要举出一个反例就可以了.

题型 2：互逆定理在判断中的应用

例 2 定理“角平分线上的点到角的两边的距离相等”是否有逆定理？请说明理由.

解题秘方：通过写逆命题并判断真假说明是否存在逆定理.

解：原定理有逆定理. 理由如下：定理的逆命题：在角的内部，到角的两边的距离相等的点在这个角的平分线上. 可以证明其为真命题：

已知：如图 17.2−1，$PE \perp OA$，$PF \perp OB$，垂足分别为 E，F，且 $PE=PF$.

求证：OP 是 $\angle AOB$ 的平分线.

证明：$\because PE \perp OA$，$PF \perp OB$，

$\therefore \angle OEP = \angle OFP = 90°$.

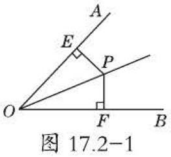


图 17.2−1

在 $\mathrm{Rt}\triangle POE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle POF$ 中，$\because \begin{cases} OP=OP, \\ PE=PF, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle POE \cong \mathrm{Rt}\triangle POF$（HL），

$\therefore \angle AOP = \angle BOP$，即 OP 是 $\angle AOB$ 的平分线.

即在角的内部，到角两边距离相等的点在这个角的平分线上.

故定理“角平分线上的点到角的两边的距离相等”有逆定理.

解法提醒

判断一个定理是否有逆定理的方法：

先把定理作为命题，写出它的逆命题，然后判断其逆命题的真假，如果是假命题，举一个反例即可，如果是真命题，加以证明即可判断原定理有逆定理.

知识▶2 勾股定理的逆定理

提分·必记

1. 勾股定理的逆定理：

如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.

2. 利用边的关系判定直角三角形的步骤：

（1）“找”：找出三角形三边中的最长边.

（2）“算”：计算其他两边的平方和与最长边的平方.

（3）“判”：若两者相等，则这个三角形是直角三角形；否则不是.


勾股定理的逆定理

特别提醒

1. 勾股定理的逆定理是判定直角三角形的一个依据，在判定时不能说“在直角三角形中‘‘直角边’‘斜边’”，因为还没有确定是直角三角形.

2. $a^2+b^2=c^2$ 只是一种表现形式，满足 $a^2=b^2+c^2$ 或

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 勾股定理与其逆定理的关系

定理	勾股定理	勾股定理的逆定理
区别	（1）勾股定理是以“一个三角形是直角三角形”为条件，进而得到这个直角三角形三边长的关系，即 $a^2+b^2=c^2$（c 为斜边长）； （2）勾股定理是根据直角三角形探求边的关系，体现了由形到数的转化	（1）勾股定理的逆定理是以“一个三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$”为条件，进而得到这个三角形为直角三角形； （2）勾股定理的逆定理是由三角形的三边关系探求三角形的形状，体现了由数到形的转化
联系	勾股定理和勾股定理的逆定理的条件和结论相反，勾股定理是直角三角形的性质，而其逆定理是直角三角形的判定，勾股定理及其逆定理都与直角三角形有关	

$b^2=a^2+c^2$ 的也是直角三角形，只是这时 a 或 b 为斜边.

方法点拨

判定直角三角形的方法：

1. 如果已知条件与角度有关，可求出其中一个角是直角，或者证明其中一个角等于已知的直角，得到直角三角形.
2. 如果已知条件与边有关，可通过计算推导出三角形三边长的数量关系（即 $a^2+b^2=c^2$（c 为最长边）），得到直角三角形.

考向▶利用直角三角形的判定方法进行判断

例 3 判断满足下列条件的三角形是不是直角三角形：

（1）在△ABC 中，$\angle A=25°$，$\angle C=65°$；

（2）在△ABC 中，$AC=12$，$AB=20$，$BC=16$；

（3）一个三角形的三边长 a，b，c 满足 $a:b:c=1:1:\sqrt{2}$.

解题秘方：紧扣“直角三角形的定义”和“勾股定理的逆定理”进行判断.

解：（1）在△ABC 中，

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore \angle B=180°-25°-65°=90°$，

$\therefore$△ABC 是直角三角形.

（2）在△ABC 中，

$\because AC^2+BC^2=12^2+16^2=20^2=AB^2$，

$\therefore$△ABC 是直角三角形，且$\angle C$ 为直角.

（3）设 $a=x$，则 $b=x$，$c=\sqrt{2}x$.

$\because x^2+x^2=(\sqrt{2}x)^2$，

即 $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore$△ABC 是直角三角形.

方法点拨：已知三角形三边的比例关系判断三角形形状的方法

先设出参数，表示出三条边的长，再用勾股定理的逆定理判断其是否是直角三角形. 如果三角形三条边中有两条边相等，那么这个三角形还是等腰三角形.

提分·秘诀

解法提醒

1. 判断一个三角形是不是直角三角形有两种方法：
(1) 利用定义，即如果已知条件与角度有关，可借助三角形的内角和定理判断；
(2) 利用直角三角形的判定条件，即若已知条件与边有关，一般通过计算得出三边的数量关系，看是否符合较短两边的平方和等于最长边的平方.
2. 判断一个三角形的形状时，除了考虑是直角三角形之外，还要考虑是否为等腰三角形.
3. 若最长边的平方比较短两边的平方和大，则该三角形为钝角三角形；若最长边的平方比较短两边的平方和小，则该三角形为锐角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 勾股数

1. 勾股数：

能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，叫做勾股数.

勾股数必须同时满足两个条件：

（1）三个数都是正整数；

（2）两个较小数的平方和等于最大数的平方.

2. 判别一组数是否为勾股数的一般步骤

（1）“看”：看是不是三个正整数.

（2）“找”：找最大数.

（3）“算”：计算最大数的平方与两个较小数的平方和.

（4）“判”：若两者相等，则这三个数是一组勾股数；否则，不是一组勾股数.

拔考向▶ 利用勾股数的定义识别勾股数

例 4 下面四组数中是勾股数的一组是（　　）

A.6，7，8　　B.5，8，13

C.1.5，2，2.5　　D.21，28，35

解题秘方：紧扣“勾股数定义中的两个条件”进行判断.

解：根据勾股数的定义：满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数 a，b，c 称为勾股数.A.$6^2+7^2 \neq 8^2$，不能构成勾股数，故错误；B.$5^2+8^2 \neq 13^2$，不能构成勾股数，故错误；C.1.5 和 2.5 不是正整数，所以不能构成勾股数，故错误；D.$21^2+28^2=35^2$，能构成勾股数，故正确. 故选 D.

答案：D

提分·必记

特别提醒

1. 勾股数有无数组；
2. 一组勾股数中的各数都乘相同的倍数可以得到一组新的勾股数：如 3，4，5 是勾股数，则 6，8，10 和 9，12，15 也是勾股数，即如果 a，b，c 是一组勾股数，那么 na，nb，nc（n 为正整数）也是一组勾股数.

提分·秘诀

解法提醒

确定勾股数的方法：

首先看这三个数是否是正整数，然后看较小的两个数的平方和是否等于最大数的平方，记住常见的勾股数（3，4，5；5，12，13；8，15，17；7，24，25）可以提高解题速度.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用计算比较法判断三角形的形状

例 5 如图 17.2−2，E，F 分别是正方形 $ABCD$ 中 BC 和 CD 边上的点，且 $AB=4$，$CE=\frac{1}{4}BC$，F 为 CD 的中点，连接 AF，AE，EF，问：$\triangle AEF$ 是什么三角形？请说明理由.

解题秘方：紧扣“勾股定理的逆定理”的特征，通过三角形三边长的数量关系进行判断.

解：$\triangle AEF$ 是直角三角形，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=CD=AB=BC=4$，$\angle B=\angle D=\angle C=90°$.

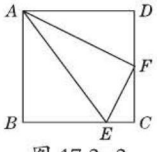


图 17.2−2

$\because CE=\frac{1}{4}BC$，$F$ 为 CD 的中点，

$\therefore CE=1$，$BE=BC-CE=3$，$CF=DF=2$，$\therefore AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=5$，$EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{5}$，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=2\sqrt{5}$.

又$\because (\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=5^2$，$\therefore EF^2+AF^2=AE^2$，

$\therefore \triangle AEF$ 是直角三角形.

挑战·高分

解法提醒

当要判断的三角形三边都未知且给出的条件与边有关时，一般情况下要先借助题目中给出的一些数量关系分别求出三角形三边的长，然后利用勾股定理的逆定理来判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用化分散为集中判定直角三角形

题型1：“倍长中线法”在化分散为集中中的应用

例6 如图17.2-3所示，在△ABC中，$AB=5$，$AC=13$，BC边上的中线$AD=6$，求BC的长.

解题秘方：紧扣“倍长中线法”构造全等三角形，将所有已知的数据条件集中到同一个三角形（△ACM）中进行求解.

解：如图17.2-3所示，延长AD到点M，使$DM=AD$，则$AM=2AD=12$.

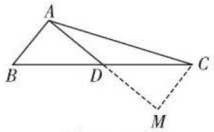


图17.2-3

连接CM，易得△ABD≌△MCD，

∴$AB=CM=5$.

在△ACM中，$5^2+12^2=13^2$，即$CM^2+AM^2=AC^2$，∴∠$AMC=90°$.

在Rt△DCM中，$CD=\sqrt{CM^2+DM^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$，

∴$BC=2CD=2\sqrt{61}$.

题型2：“分割法”在化分散为集中中的应用

例7 如图17.2-4所示，在四边形$ABCD$中，已知$AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$，且∠$B=90°$，试求∠DAB的度数.

解题秘方：紧扣∠B为直角这一条件，将四边形$ABCD$分割成Rt△ABC和△ADC，利用勾股定理将分散的条件集中到△ADC中进行解答.

解：如图17.2-4所示，连接AC.

∵$AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$，

∴设$AB=2x$，则$BC=2x$，$CD=3x$，$DA=x$.

在Rt△ABC中，由$AB=BC$，得∠$BAC=45°$，

$AC^2=AB^2+BC^2=(2x)^2+(2x)^2=8x^2$，

∴$AD^2+AC^2=x^2+8x^2=9x^2$.

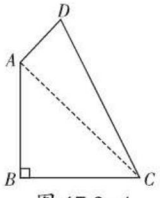


图17.2-4

又∵$DC^2=(3x)^2=9x^2$，∴$DC^2=AD^2+AC^2$. ∴∠$DAC=90°$.

∴∠$DAB=$∠$DAC+$∠$BAC=90°+45°=135°$.

题型3：“旋转法”在化分散为集中中的应用

例8 如图17.2-5，在△ABC中，∠$ACB=90°$，$AC=BC$，P是△ABC内的一点，且$PB=1$，$PC=2$，$PA=3$，求∠BPC的度数.

解题秘方：紧扣$AC=BC$这一条件，将△ACP绕点C旋转到△BCE的位置，利用勾股定理等几何性质将分散的条件集中到△BPE中进行解答.

解：将△ACP绕点C逆时针旋转90°得到△BCE，连接PE.

则$CP=CE=2$，∠$ECP=90°$，

$EB=PA=3$，

∴△CPE为等腰直角三角形，

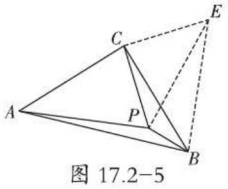


图17.2-5

挑战·高分

解法提醒

倍长中线法：

当出现三角形的中线而需要添加辅助线时，一般要延长中线，使延长的部分与中线等长（倍长中线法），构造全等三角形，把已知条件转化到同一个三角形中进行计算或证明.

详解

∵$\begin{cases}AD=DM,\\ \angle ADB=\angle MDC,\\ BD=CD,\end{cases}$

∴△ABD≌△MCD（SAS）.

思路点拨

当已知条件比较分散且无法直接使用时，往往通过作辅助线将有用条件集中到一个图形中，再利用相关知识进行计算或证明.如本题不是直接求∠DAB，而是连接AC，把∠DAB分成∠BAC和∠DAC，利用勾股定理及其逆定理和角的和差运算求出∠DAB的度数.

另解

如图17.2-5，过点C作$CE\perp CP$，并截取$CE=CP$，连接BE，PE，则△PCE为等腰直角三角形.

∴∠$CPE=45°$，

$PE^2=PC^2+CE^2=8$.

∵∠$ACP+$∠$PCB=$∠$BCE+$∠$PCB=90°$，

∴∠$ACP=$∠BCE.

又∵$AC=BC$，

∴△APC≌△BEC.

∴$BE=PA=3$.

∵$PB=1$，∴$PE^2+PB^2=BE^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PE=\sqrt{CP^2+CE^2}=2\sqrt{2}$，$\angle CPE=45°$.

在$\triangle PEB$中，$PB=1$，$PE=2\sqrt{2}$，$EB=3$，

$\therefore PB^2+PE^2=BE^2$，

$\therefore \triangle PBE$为直角三角形，且$\angle EPB=90°$，

$\therefore \angle BPC=45°+90°=135°$.

∴△BPE是直角三角形，且∠BPE=90°.

∴∠BPC=∠CPE+∠BPE=45°+90°=135°.

拔尖角度▸ 3 利用割补法求不规则图形面积

挑战·高分

例9 如图17.2−6，已知$AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$CD=24$，$DA=26$，求四边形$ABCD$的面积.

解题秘方：紧扣“化不规则为规则”的思想，将不规则的四边形$ABCD$分割成两个规则的三角形求解.

解：如图17.2−6，连接AC.

在Rt$\triangle ABC$中，由勾股定理得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

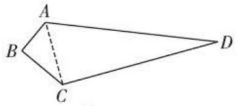


图17.2−6

在$\triangle ACD$中，$AC^2+CD^2=10^2+24^2=26^2=AD^2$.

由勾股定理的逆定理得$\angle ACD=90°$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{Rt\triangle ABC}+S_{Rt\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times6\times8+\frac{1}{2}\times10\times24=144$.

技巧点拨

求不规则图形的面积常用的方法是**割补法**，即把不规则的图形分割或拼补成规则图形，本题通过连接AC将四边形$ABCD$分割成$\triangle ABC$和$\triangle ACD$，再利用勾股定理及其逆定理和两个三角形面积的和求出四边形的面积.

拔尖角度▸ 4 利用数形结合思想解动点问题

挑战·高分

例10 如图17.2−7所示，四边形$ABCD$的三条边AB，BC，CD和对角线BD的长度都为5 cm，动点P从点A出发沿$AB-BD$运动到点D，速度为2 cm/s，动点Q从点D出发沿$DC-CB-BA$运动到点A，速度为2.8 cm/s. 若点P、Q同时出发，5 s时点P，Q相距3 cm，试确定5 s时$\triangle APQ$的形状.

思路点拨

首先确定5s时P,Q的位置，此时P与D重合，Q在AB边上，且BQ=4cm，然后根据勾股定理的逆定理判定△BPQ为直角三角形，且∠BQP=90°，再由邻补角定义得到∠AQP=90°.从而得出△APQ为直角三角形.

解题秘方：利用数形结合思想，将动点的变化数据转化到几何图形上的定点上去，结合相关数据进行解答.

解：动点P从点A出发到点D，速度为2 cm/s，

$\therefore$ 5 s时点P的运动路程为$2\times5=10$（cm）.

$\because AB=BD=5$ cm，$\therefore AB+BD=10$ cm，

$\therefore$ 5 s时点P与点D重合.

$\because$动点Q从点D出发到点A，速度为2.8 cm/s，

$\therefore$ 5 s时点Q的运动路程为$2.8\times5=14$（cm）.

$\because AB=BC=CD=5$ cm，$\therefore DC+CB+BA=15$ cm，

$\therefore$ 5 s时点Q在AB边上，且$BQ=4$ cm，如图17.2−8所示.

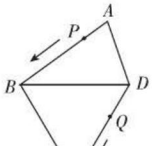


图17.2−7

在$\triangle BPQ$中，$\because BQ=4$ cm，$PQ=3$ cm，$BP=5$ cm，

$\therefore BQ^2+PQ^2=BP^2$，$\therefore \triangle BPQ$为直角三角形，$\angle BQP=90°$，

$\therefore \angle AQP=180°-\angle BQP=90°$，

$\therefore \triangle APQ$为直角三角形.

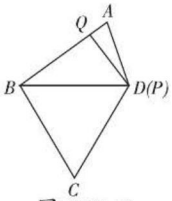


图17.2−8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 5 利用观察法探究特殊到一般的变化规律

例11 观察下面的表格中给出的三个数 a，b，c，其中 $a<b<c$.

3，4，5	$3^2+4^2=5^2$
5，12，13	$5^2+12^2=13^2$
7，24，25	$7^2+24^2=25^2$
9，40，41	$9^2+40^2=41^2$
…	…
a，b，c	$a^2+b^2=c^2$

（1）试找出它们的共同点，你能得出什么结论？并证明你的结论.

（2）当 $a=21$ 时，求 b，c 的值.

解题秘方：只要能够发现每组三个数之间的规律即可，这就需要从不同的角度去观察、分析，运用从特殊到一般的思想来解答.

解：（1）各组数的共同点是：

①各组数均满足 $a^2+b^2=c^2$；

②最小数 a 是正奇数，其余的两个数 b，c 是连续的正整数；

③最小正奇数的平方等于另外两个连续正整数的和.

由以上特点可得出这样一个结论：设 x 为大于 1 的奇数，将 x^2 拆分为两个连续正整数之和，即 $x^2=y+(y+1)$，则 x，y，$y+1$ 就能构成一组勾股数.

证明：$\because x^2=y+(y+1)$（x 为大于 1 的奇数），

$\therefore x^2+y^2=y+(y+1)+y^2=y^2+2y+1=(y+1)^2$.

$\therefore x$，y，$y+1$ 是一组勾股数.

（2）运用以上结论，当 $a=21$ 时，$21^2=441=220+221$，

$\therefore b=220$，$c=221$.

挑战·高分

技巧点拨

寻找与大于 1 的奇数组成的勾股数的一种方法：

先选一个大于 1 的奇数，然后把这个数的平方写成两个连续正整数的和，则这个奇数和分成的两个连续正整数就构成了一组勾股数，如 $45^2=2\,025=1\,012+1\,013$，则 45，1 012，1 013 就是一组勾股数，运用此法可以得到许多组勾股数.

拔尖角度▸ 6 利用建模法解实际应用问题

例12 如图 17.2-9，南北方向的直线 MN 为我国领海线，即 MN 以西为我国领海，以东为公海，上午 9 时 50 分，我国反走私艇 A 发现正东方有一走私艇 C 以 13 海里/时的速度偷偷向我国领海开来，便立即通知正在 MN 线上巡逻的我国反走私艇 B 密切注意. 反走私艇 A 和走私艇 C 的距离是 13 海里，A，B 两艇距离是 5 海里；反走私艇 B 离走私艇 C12 海里，若走私艇 C 的速度不变，最早会在什么时候进入我国领海？

解题秘方：用数学知识解决实际问题的关键是建立合适的数学模型，注意提炼题中的有效信息，并转化成数学语言.

解：设 MN 与 AC 相交于点 D，则 $\angle BDC=90°$.

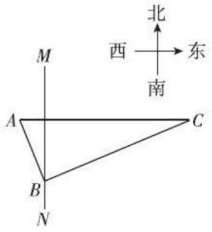


图 17.2-9

挑战·高分

解法提醒

本题要求走私艇C最早何时进入我国领海，必须先确定走私艇C进入我国领海的航行路线，由“垂线段最短”可知线段CD的长即为该走私艇进入我国领海的最短距离，因此，计算CD的长度是解题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AB^2+BC^2=5^2+12^2=13^2=AC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且$\angle ABC=90°$.

$\because MN \perp CD$,

$\therefore$走私艇 C 进入我国领海的最短路线是 CD.

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BD$,

得 $BD=\frac{60}{13}$海里.

由 $CD^2+BD^2=BC^2$，得 $CD=\frac{144}{13}$海里，

$\therefore \frac{144}{13}\div 13=\frac{144}{169}\approx 0.85$（时）$=51$（分）.

$\therefore$走私艇 C 到达点 D 时大约为 10 时 41 分.

答：走私艇 C 最早大约在 10 时 41 分进入我国领海.

另解

设 MN 与 AC 相交于点 D，则$\angle ADB=\angle BDC=90°$.

在 Rt $\triangle ADB$ 和 Rt $\triangle BDC$ 中，$BD^2=AB^2-AD^2$，$BD^2=BC^2-CD^2$，

所以 $AB^2-AD^2=BC^2-CD^2$，

即 $5^2-(13-CD)^2=12^2-CD^2$，

解得 $CD=\frac{144}{13}$海里.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点是勾股定理的逆定理，主要考查运用勾股定理的逆定理来判断三角形是直角三角形. 中考中单一考查较少，常与其他知识结合考查，题型以选择题、填空题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用勾股定理的逆定理判定三角形的形状

例 13 [中考·南京]下列长度的三条线段能组成钝角三角形的是（　　）

A. 3，4，4　　B. 3，4，5

C. 3，4，6　　D. 3，4，7

试题评析：本题考查了勾股定理的逆定理：如果三角形的三边长 a，b，c，满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形. 掌握组成钝角三角形的条件是解题的关键.

解：A. 因为 $3^2+4^2>4^2$，所以三条线段能组锐角三角形，不符合题意；

B. 因为 $3^2+4^2=5^2$，所以三条线段能组成直角三角形，不符合题意；

C. 因为 $3+4>6$，且 $3^2+4^2<6^2$，所以三条线段能组成钝角三角形，符合题意；

D. 因为 $3+4=7$，所以三条线段不能组成三角形，不符合题意.

答案：C

思路点拨

在能组成三角形的条件下，满足较小的两边平方的和等于最大边的平方是直角三角形；满足较小两边平方的和大于最大边的平方是锐角三角形；满足较小两边平方的和小于最大边的平方是钝角三角形，依此求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用勾股数通解公式求三角形的边长

例 14 [中考·宜昌]阅读：能够成为直角三角形三条边长的三个正整数 a，b，c，称为勾股数，世界上第一次给出勾股数通解公式的是我国古代数学著作《九章算术》，其勾股数组公式为：

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}(m^2-n^2), \\ b=mn, \\ c=\dfrac{1}{2}(m^2+n^2), \end{cases}$$ 其中 $m>n>0$，m，n 是互质的奇数.

应用：当 $n=1$ 时，求有一边长为 5 的直角三角形的另外两条边长.

试题评析：本题考查了勾股定理的逆定理，分类讨论是解题的关键.

解：当 $n=1$ 时，$a=\dfrac{1}{2}(m^2-1)$ ①，$b=m$ ②，$c=\dfrac{1}{2}(m^2+1)$ ③.

∵直角三角形有一边长为 5，

∴当 $a=5$ 时，$\dfrac{1}{2}(m^2-1)=5$，解得 $m=\pm\sqrt{11}$（舍去）；

当 $b=5$ 时，$m=5$，代入①③得 $a=12$，$c=13$；

当 $c=5$ 时，$\dfrac{1}{2}(m^2+1)=5$，解得 $m=\pm 3$，

由 $m>0$，得 $m=3$，代入①②得 $a=4$，$b=3$.

综上所述，直角三角形的另外两条边长分别为 12，13 或 3，4.

解法提醒

由 $n=1$ 得

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}(m^2-1), \\ b=m, \\ c=\dfrac{1}{2}(m^2+1), \end{cases}$$ 由直角三角形有一边长为 5 知 a，b，c 都有可能为 5，因此可分类列方程求解.

两年模拟兵法 答案见 271 页

1. 下列命题的逆命题是真命题的是（　　）

A. 若 a 的倒数为 $\dfrac{1}{a}$，则 a 是整数

B. 若三个数 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，则 a，b，c 一定是三角形的三条边长

C. 若△ABC 与△$A'B'C'$ 关于某直线对称，则△ABC 与△$A'B'C'$ 一定全等

D. 两直线平行，同旁内角互补

2. △ABC 的三边长分别为 a，b，c，下列条件：

①$\angle A=\angle B-\angle C$；

②$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$；

③$a^2=(b+c)(b-c)$；

④$a:b:c=5:12:13$.

其中能判断△ABC 是直角三角形的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. [月考·雁塔区]已知△ABC 的三边长分别是 6，8，10，则△ABC 的面积是（　　）

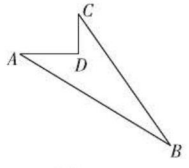
A. 24　　B. 30　　C. 40　　D. 48

4. 在△ABC 中，$BC:AC:AB=1:1:\sqrt{2}$，则△ABC 是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

5. 如图所示的一块地，已知 $AD=4$ m，$CD=3$ m，$AD\perp DC$，$AB=13$ m，$BC=12$ m，求这块地的面积.



（第 5 题）

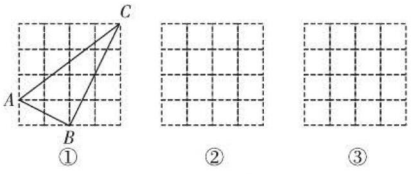
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 正方形网格中，小正方形的顶点叫做格点，小华按下列要求作图：

（1）在正方形网格上取三个不同的格点，使其中任意两点不在横竖同一条直线上；

（2）连接这三个格点，使之构成直角三角形，小华在图①的正方形网格中作出了 Rt△ABC.

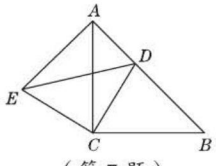
请你按照同样的要求，在图②③的正方形网格中各画出一个直角三角形，并使三个网格中的直角三角形互不相同.



（第 6 题）

7. 如图，D 为 AB 边上一点，△ACE ≌ △BCD，$AD^2+BD^2=DE^2$，试判断△ABC 的形状，并说明理由.

【导学号：8592074】

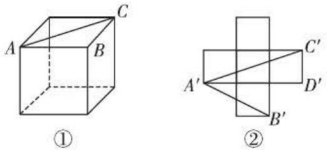


（第 7 题）

8. 如图①所示为一上面无盖的正方体纸盒，现将其剪开展成平面图，如图②所示，已知展开图中每个正方形的边长为 1.

（1）求线段 $A'C'$ 的长度；

（2）试比较立体图中∠BAC 与展开图中∠$B'A'C'$ 的大小关系，并写出理由.



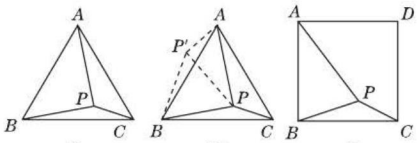
（第 8 题）

9. 请阅读下面的材料：

问题：如图①，在等边三角形 ABC 内有一点 P，且 $PA=2$，$PB=\sqrt{3}$，$PC=1$，求∠BPC 的度数和等边三角形 ABC 的边长.

李明同学的解题思路是：将△BPC 绕点 B 逆时针旋转 60°，画出旋转后的图形如图②所示，连接 PP'，可得△$P'PB$ 是等边三角形，而△$PP'A$ 又是直角三角形（由勾股定理的逆定理可证），所以∠$BP'A=150°$，所以∠BPC=∠$BP'A=150°$，进而可求出等边三角形 ABC 的边长为 $\sqrt{7}$，问题得到解决.

请你参考李明同学的解题思路，探究并解决下面的问题：如图③，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，且 $PA=\sqrt{5}$，$BP=\sqrt{2}$，$PC=1$，求∠BPC 的度数和正方形 $ABCD$ 的边长.



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

勾股定理中的数学思想方法

荣老师告诉你 勾股定理是反映自然界基本规律的一条重要结论，它有着悠久的历史，在数学发展中起着重要的作用．它揭示了一个直角三角形三条边之间的数量关系，把数与形统一起来，在现实世界中有着广泛的应用．在运用勾股定理解题时，若能正确地把握数学思想，则可开阔思路，简便快捷地解决问题．

应用一 数形结合思想

例1 有一直立标杆，它的上部被风吹折，杆顶着地处离杆脚20 cm，修好后又被风吹折，新断处比前次低了5 cm，且标杆顶着地处比前次远10 cm，求标杆的高．

解题秘方：依题意建立如图1所示模型，数形结合求解．

解：设第一次吹折后下段AB的长为x cm，上段BC的长为y cm，则第二次吹折后下段AD的长为$(x-5)$ cm，上段DE的长为$(y+5)$ cm，依题意得

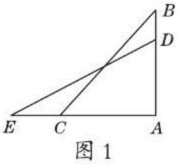


图1

$$\begin{cases} y^2-x^2=20^2, & ① \\ (y+5)^2-(x-5)^2=30^2. & ② \end{cases}$$

②－①得，$10(x+y)=500$，

$\therefore x+y=50$.

故标杆的高为50 cm.

方法点拨：勾股定理本身就是数形结合的定理，它的验证和应用，都体现了数形结合的思想．数形结合思想是数学中的重要思想方法，它可以使抽象的知识转化为形象的图形，从而处理起来更直观、容易，应引起同学们的重视．

应用二 方程思想

例2 如图2，$\triangle ABC$是直角三角形，DE是AB的垂直平分线，若$AC=4$ cm，$BC=3$ cm，求CE的长．

解题秘方：CE是Rt $\triangle EBC$的直角边，设CE为x cm，则BE可用含x的代数式表示，由勾股定理列出关于x的方程，解之即可．

解：设$CE=x$ cm，$\because AC=4$ cm，

$\therefore AE=AC-CE=(4-x)$ cm，

$\because DE$是AB的垂直平分线，

$\therefore BE=AE=(4-x)$ cm.

在Rt $\triangle EBC$中，

$\because CE^2+BC^2=BE^2$，

$BC=3$ cm.

$\therefore x^2+3^2=(4-x)^2$，

$x^2+9=16-8x+x^2$，

$x=\dfrac{7}{8}$，

$\therefore CE$的长为$\dfrac{7}{8}$ cm.

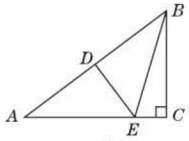


图2

方法点拨：方程思想是从分析问题的数量关系入手，适当设定未知数，运用定义、公式、性质、定理和已知条件、隐含条件，把所研究的数学问题中已知量和未知量之间的数量关系，转化为方程或方程组等数学模型，从而使问题得到解决的思想方法．

应用三 转化思想

例3 如图3①，一块长、宽、高分别是6 cm、4 cm、3 cm的长方体木块，一只蚂蚁要从长方体的一个顶点A处，沿着长方体的表面到长方体上和A相对的顶点B处吃食物，那么它需要爬行的最短路线的长是（　　）

A. $(3+2\sqrt{97})$ cm　　B. $\sqrt{97}$ cm

C. $\sqrt{85}$ cm　　D. 9 cm

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

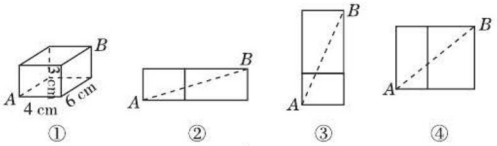


图 3

解题秘方：求空间几何体表面的最短路程问题，通常可将几何体表面展开，把立体图形问题转化为平面图形问题．由于蚂蚁爬行的路线不同，爬行的路线的长短可能也不一样．

解：分三种情况：

（1）经过前面和右面或经过左面和后面，这时蚂蚁爬行的最短路线是长为 4+6=10（cm），宽为 3 cm 的长方形的对角线（如图 3 ②中的 AB），其长为 $\sqrt{109}$ cm.

（2）经过前面和上面，这时蚂蚁爬行的最短路线是长为 3+6=9（cm），宽为 4 cm 的长方形的对角线（如图 3 ③中的 AB），其长为 $\sqrt{97}$ cm.

（3）经过左面和上面，这时蚂蚁爬行的最短路线是长为 3+4=7（cm），宽为 6 cm 的长方形的对角线（如图 3 ④中的 AB），其长为 $\sqrt{85}$ cm.

比较（1）（2）（3）的结果，知蚂蚁爬行的最短路线的长为 $\sqrt{85}$ cm.

答案：C

应用四 ▶ 分类讨论思想

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$AC=2\sqrt{10}$，BC 边上的高 $AD=6$，则 BC 等于（　　）

A.10　　B.8

C.6 或 10　　D.8 或 10

解题秘方：根据题意画出相应的图形，然后利用勾股定理分别求出 BD，CD 的长，从而可求出 BC 的长．

解：如图 4 ①所示，在 Rt $\triangle ABD$ 中，

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

在 Rt $\triangle ACD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-6^2}=2$，

$\therefore BC=BD+CD=8+2=10$.

如图 4 ②所示，同理求出 $BD=8$，$CD=2$，

$\therefore BC=BD-CD=8-2=6$.

故选 C.

答案：C

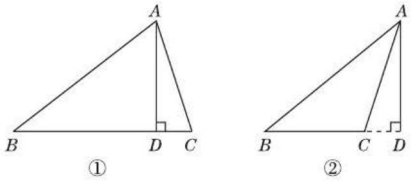


图 4

方法点拨：一个几何题若没有图形，必须先根据题意画图，在画图时，若涉及高，考虑到不同的三角形的高的位置不同，要对图形的形状进行分类．

应用五 ▶ 整体思想

例 5 已知 a、b、c 分别是 Rt $\triangle ABC$ 的两条直角边和斜边，且 $a+b=14$，$c=10$，则 $S_{\triangle ABC}=$_____.

解题秘方：一般的想法，要求直角三角形的面积，先求出其两条直角边 a、b，则 $S_{\triangle ABC}$ 即可求出，但这样求 a、b 非常繁杂，甚至在现阶段不可能求出，如果注意到 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$，那么只要求出 ab 这一整体就可以了．

解：由 $a+b=14$，两边平方得 $a^2+2ab+b^2=196$，

所以 $ab=\frac{196-(a^2+b^2)}{2}$.

根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$，所以 $ab=\frac{196-c^2}{2}=\frac{196-10^2}{2}=48$.

因此 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=24$.

答案：24

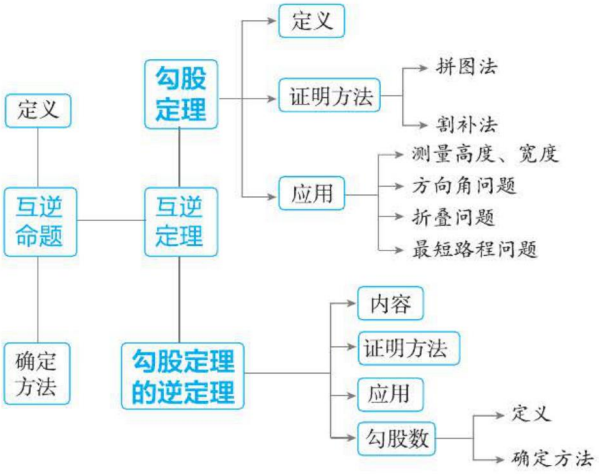
方法点拨：整体思想，有时可以使问题直奔主题，少走弯路，使问题的解决方便、快捷，在一定程度上，体现了解题者的目标意识．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **勾股定理及其应用：**勾股定理是反映直角三角形中三边关系的性质定理，是求线段长度的常用依据之一，是数学中从形到数的一个重要体现.

2. **勾股定理的逆定理的应用：**勾股定理的逆定理是判定直角三角形的重要方法之一. 题目中若告诉三角形三边的数量关系，就需要借助勾股定理的逆定理加以判断.

知识方法专题

知识必学

专题一 勾股定理

链接中考≫ 勾股定理是直角三角形的性质，可结合直角三角形的其他性质，解决求线段的长、判断线段的位置关系和数量关系等问题，应根据题中的条件，综合特殊直角三角形的性质解题. 勾股定理单独考查时，一般以填空、选择题的形式出现.

例1 [中考·株洲]图17-1是“赵爽弦图”，$\triangle ABH$、$\triangle BCG$、$\triangle CDF$和$\triangle DAE$是四个全等的直角三角形，四边形$ABCD$和$EFGH$都是正方形，如果$AB=10$，$EF=2$，那么AH等于_____.

解题秘方：由全等三角形的性质可知$AH=BG$，由正方形的性质可知，$GH=EF=2$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABH$中，利用勾股定理求AH的长即可.

解：由题意可知，$BG=AH$，$GH=EF=2$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABH$中，由勾股定理，得$AB^2=AH^2+BH^2=AH^2+(AH+GH)^2$，即$10^2=AH^2+(AH+2)^2$，整理得$AH^2+2AH=48$，配方得$(AH+1)^2=49$，所以$AH+1=7$或$AH+1=-7$（舍去），所以

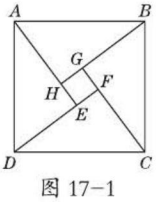


图17-1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$AH=6$，故答案为 6.

答案：6

方法点拨：解答与勾股定理有关的问题时，通常用代数方法求解，这是最常见的一种解法.

专题二 勾股定理的逆定理

链接中考≫ 勾股定理的逆定理是直角三角形的判定定理，是用三角形的三边关系说明三角形为直角三角形. 通过数量关系来研究图形中线的位置关系，在证明中经常用到. 勾股定理的逆定理在中考中单独考查时很少，一般作为解答题的某一条件出现.

例 2 在△ABC中，∠A，∠B，∠C的对边分别是a，b，c，已知$a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$（$n>1$）. 求证：∠$C=90°$.

解题秘方：要证∠$C=90°$，只要证△ABC是直角三角形，并且c边最大，即根据勾股定理的逆定理证明$a^2+b^2=c^2$即可. 由于$a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2$，而$c^2=(n^2+1)^2$，所以$a^2+b^2=c^2$，命题得证.

证明：在△ABC中，∵ $a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$（$n>1$），

∴ $a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2$，$c^2=(n^2+1)^2$，∴ $a^2+b^2=c^2$，

∴∠$C=90°$.

专题三 勾股定理的应用

链接中考≫ 勾股定理作为直角三角形中最重要的性质之一，描述了直角三角形三边之间的关系，主要用来求线段的长度，在实际生活中，当我们遇到求距离、高度、宽度、长度等可以转化为求线段长度的问题时，首先看所求线段能否看成某直角三角形的一边，若不能，可以先构造直角三角形，然后再利用勾股定理进行求解.

例 3 如图 17-2，某人从A点出发欲横渡一条河，由于水流的影响，实际上岸地点C偏离欲到达地点B有 50 米远，结果他在水中实际游的路程比河的宽度多 10 米，则该河的宽度为多少米?

解题秘方：先构造出直角三角形模型，然后利用勾股定理建立等量关系求解.

解：设该河的宽度为x米，根据题意可知△ABC是直角三角形，且∠$ABC=90°$，则$AC^2=AB^2+BC^2$，即$(x+10)^2=x^2+50^2$，解得$x=120$，所以该河的宽度为 120 米.

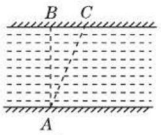


图 17-2

方法点拨：运用勾股定理解决实际问题时，有时不能直接求出边长，可以考虑运用勾股定理建立方程进行解答.

Ⅱ 方法必会

专题四 面积法

专题解读≫ 利用三角形的面积之间的关系得到三角形中边之间的关系的方法叫做面积法. 利用面积法主要涉及的是由三角形的面积关系转化为三角形中底边或高线的关系.

例 4 [中考·黑龙江]如图 17-3，在△ABC中，$AB=AC=5$，$BC=8$，点P是BC边上的动点，过点P作$PD\perp AB$于点D，$PE\perp AC$于点E，则$PD+PE$的长是（　　）

A.4.8　　B.4.8 或 3.8

C.3.8　　D.5

解题秘方：过A点作$AF\perp BC$于点F，连接AP，根据等腰三角形三线合一的性质和勾股定理可得AF的长，根据$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$，代入数值，计算即可.

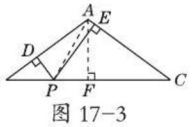


图 17-3

解：如图 17-3，过A点作$AF\perp BC$于点F，连接AP，

∵在△ABC中，$AB=AC=5$，$BC=8$，

∴ $BF=4$.

∴ 在 Rt△ABF中，由勾股定理得$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 8\times 3=\frac{1}{2}\times 5\times PD+\frac{1}{2}\times 5\times PE$,

$12=\frac{1}{2}\times 5\times (PD+PE)$,

$PD+PE=4.8$.

答案：A

方法点拨：面积法是解决一类几何问题独特的方法，其明显特征是：（1）与三角形的面积有关，需要借助于三角形的面积公式解决问题；（2）需要根据面积之间的数量关系建立方程.

专题五 分类讨论思想

专题解读≫ 当被研究的问题包含多种情形，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情形来分类讨论，得出各种情形下相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想.

例5 [中考·黄冈]在△ABC中，AB=13 cm，AC=20 cm，BC边上的高为12 cm，则△ABC的面积为_____ cm^2.

解题秘方：画出图形，根据勾股定理计算BC的长度，然后根据三角形的面积公式进行计算.

解：分两种情况讨论如下：

（1）当高在三角形内部时，如图17−4①所示.

在Rt△ABD中，由勾股定理得BD=5 cm，

在Rt△ACD中，由勾股定理得CD=16 cm，

$\therefore BC$=21 cm. $\therefore$ △ABC的面积为$\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 21\times 12=126\ (cm^2)$.

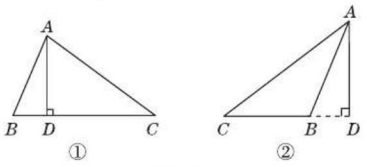


图17−4

（2）当高在三角形外部时，如图17−4②所示.

在Rt△ABD中，由勾股定理得BD=5 cm，

在Rt△ACD中，由勾股定理得CD=16 cm，

$\therefore BC$=11 cm.

$\therefore$ △ABC的面积为$\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 11\times 12=66\ (cm^2)$.

综上，△ABC的面积为66 cm^2或126 cm^2.

答案：66或126

方法点拨：本例中△ABC有可能是锐角三角形，也有可能是钝角三角形，因此要采用分类讨论思想，把每一种情况下的第三条边BC都求出来，再计算面积.

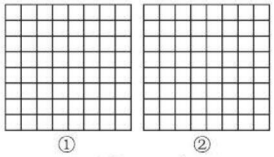
好题必解 ☞答案见272页

类型1 巧用勾股定理解网格问题

1. 如图，正方形网格中的每个小正方形的边长都是1，每个小正方形的顶点叫做格点. 以格点为顶点画三角形.

（1）使三角形的三边长分别为3，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$.

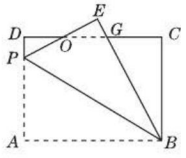
（2）使三角形的周长为$\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{17}$.



（第1题）

类型2 巧用勾股定理解折叠问题

2. [中考·泰州]如图，长方形$ABCD$中，AB=8，BC=6，P为AD上一点，将△ABP沿BP翻折至△EBP，PE，BE分别与CD相交于点O，G，且OE=OD，求AP的长.



（第2题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3　巧用勾股定理解最短距离问题

题型 1　平移法

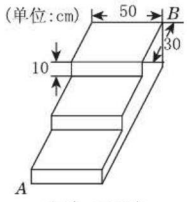
3. 如图是一个三级台阶，它的每一级的长、宽和高分别是 50 cm，30 cm，10 cm，A 和 B 是这个台阶的两个相对的端点，A 点上有一只壁虎，它想到 B 点去吃可口的食物，请你想一想，这只壁虎从 A 点出发，沿着台阶面爬到 B 点，至少需爬（　　）

A. 13 cm

B. 40 cm

C. 130 cm

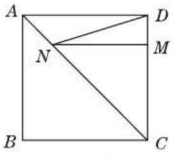
D. 169 cm



（第 3 题）

题型 2　对称法

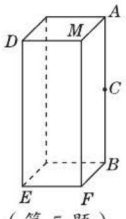
4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 M 在 DC 上且 $DM=2$，N 是 AC 上的一动点，求 $DN+MN$ 的最小值.



（第 4 题）

题型 3　展开法

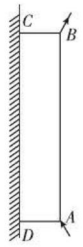
5. 如图，桌子上有一个长方体盒子，长、宽、高分别是 12 cm，8 cm，30 cm，在 AB 的中点 C 处有一滴蜜糖，一只小虫从 E 处沿盒子表面爬到 C 处去吃，求小虫爬行的最短路程.



（第 5 题）

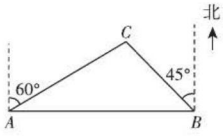
类型 4　巧用勾股定理解实际问题

6. 如图，在一张长 48cm、宽 10cm 的长方形纸片的长边 CD 上竖直放一平面镜，一束光线从纸片顶点 A 处射入，恰好由 CD 上一点反射后经过点 B，求光线在纸片上通过的距离.



（第 6 题）

7. 2019 年某省将位于 A，B 两地（A 地在 B 地的正西方向）的两所大学合并成一所综合大学，为了方便 A，B 两地师生的交往，学校准备在相距 2 千米的 A，B 两地之间修筑一条笔直的公路（如图中线段 AB），经测量，在 A 地北偏东 60° 方向，B 地北偏西 45° 方向的 C 处有一个半径为 0.7 千米的公园，问计划修筑的这条公路会不会穿过公园？为什么？



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十七章测试卷

☞答案见273页

（120分 90分钟）

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列每一组数据中的三个数值分别为三角形的三边长，不能构成直角三角形的是（　　）

A.3，4，5　　B.6，8，10

C.$\sqrt{3}$，2，$\sqrt{5}$　　D.5，12，13

2. 已知命题：等边三角形是等腰三角形，则下列说法正确的是（　　）

A. 该命题为假命题

B. 该命题为真命题

C. 该命题的逆命题为真命题

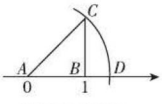
D. 该命题没有逆命题

3. 点A（-3，-4）到原点的距离为（　　）

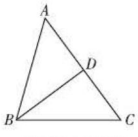
A.3　　B.4　　C.5　　D.7

4. 如图，数轴上点A表示的数是0，点B表示的数是1，$BC\perp AB$，垂足为B，且$BC=1$，以A为圆心，AC的长为半径画弧，与数轴交于点D，则点D表示的数为（　　）

A. 1.4　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

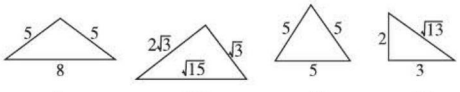


（第4题）



（第7题）

5. 下面各三角形中，面积为无理数的是（　　）



A　　B　　C　　D

6. 已知一个三角形的三个内角的比是1∶2∶1，则这三个内角对应的三条边的比是（　　）

A.1∶1∶$\sqrt{2}$　　B.1∶1∶2

C.1∶$\sqrt{2}$∶1　　D.1∶4∶1

7. 如图，点D在△ABC的边AC上，将△ABC沿BD翻折后，点A恰好与点C重合．若$BC=5$，$CD=3$，则BD的长为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

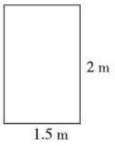
8. 如图是一扇高为2 m，宽为1.5 m的门框，李师傅有3块薄木板，尺寸如下：

①号木板长3 m，宽2.7 m；

②号木板长2.8 m，宽2.8 m；

③号木板长4 m，宽2.4 m.

可以从这扇门通过的木板是（　　）



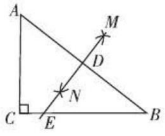
（第8题）

A. ①号　　B. ②号

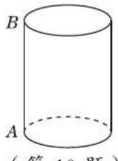
C. ③号　　D. 均不能通过

9. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，分别以点A和点B为圆心，相同的长（大于$\frac{1}{2}AB$）为半径作弧，两弧相交于点M和点N，作直线MN交AB于点D，交BC于点E．若$AC=3$，$AB=5$，则DE等于（　　）

A.2　　B.$\frac{10}{3}$　　C.$\frac{15}{8}$　　D.$\frac{5}{2}$



（第9题）



（第10题）

10. 如图，有一个圆柱形油罐，已知油罐的底面周长是12 m，高AB是5 m，要从A点环绕油罐建梯子，正好到A点正上方的B点，则梯子最短需要建（　　）

A.12 m　　B.13 m　　C.17 m　　D.24 m

二、填空题（每题3分，共18分）

11. 直角三角形斜边长是6，一直角边的长是5，则此直角三角形的另一直角边长为_____.

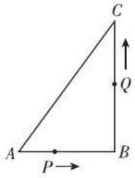
12. 写出命题“如果$a=b$，那么$3a=3b$”的逆命题：_____.

13. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=45°$，$AB=10$，$BC=$_____.

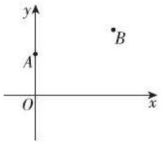
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 在平静的湖面上，有一朵红莲，高出水面 1 m，一阵风吹来，红莲被吹到一边，花朵贴到水面，已知红莲移动的水平距离为 2 m，则这里的水深是_____m.

15. 如图，在 △ ABC 中，AB ∶ BC ∶ CA=3 ∶ 4 ∶ 5，且周长为 36 cm，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以每秒 1 cm 的速度移动；点 Q 从点 B 沿 BC 边向点 C 以每秒 2 cm 的速度移动，如果同时出发，则过 3 秒时，△ BPQ 的面积为_____cm^2.



（第 15 题）

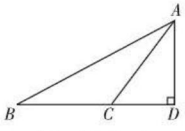


（第 16 题）

16. 要在街道旁修建一个奶站，向居民区 A，B 提供牛奶，奶站应建在什么地方，才能使 A，B 到它的距离之和最小？小聪根据实际情况，以街道为 x 轴，建立了如图所示的平面直角坐标系，并测得 A 点的坐标为（0，3），B 点的坐标为（6，5），则 A，B 两点到奶站距离之和的最小值是_____.

三、解答题（共 72 分）

17.（8 分）如图，在△ ABD 中，∠ D=90°，C 是 BD 上一点，已知 CB=9，AB=17，AC=10，求 AD 的长.

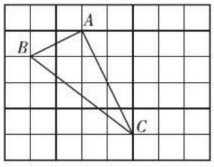


（第 17 题）

18.（8 分）如图，在边长为 1 的正方形组成的网格图中，△ ABC 的三个顶点均在格点上，请按要求完成下列问题：

（1）求△ ABC 的周长；

（2）试判断△ ABC 的形状.

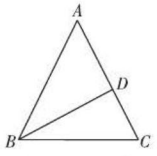


（第 18 题）

19.（8 分）如图，△ ABC 中，AB=AC，D 是 AC 边上的一点，CD=1，BC=$\sqrt{5}$，BD=2.

（1）求证：△ BCD 是直角三角形；

（2）求△ ABC 的面积.



（第 19 题）

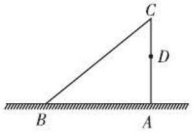
20.（8 分）已知 a，b，c 满足 $(a-3)^2+\sqrt{b-4}+|c-5|=0$.

（1）求 a，b，c 的值；

（2）试问以 a，b，c 为边长能否构成三角形？若能构成三角形，求出三角形的周长；若不能构成三角形，请说明理由.

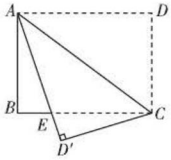
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.（8分）一根直立的旗杆长8 m，一阵大风吹过，旗杆从C点处折断，顶部B着地，离杆脚A4 m，如图，工人在修复的过程中，发现在折断点C的下面1.25 m的D处，有一明显伤痕，如果下次大风将旗杆从D处刮断，则杆脚周围多大范围内有被砸伤的危险?



（第21题）

22.（10分）如图所示，四边形$ABCD$是长方形，把△ACD沿AC折叠得到△ACD'，AD'与BC交于点E，若$AD=4$，$DC=3$，求BE的长.



（第22题）

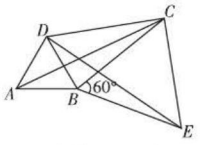
23.（10分）给出定义，若一个四边形中存在相邻两边的平方和等于一条对角线的平方，则称该四边形为勾股四边形.

（1）在你学过的特殊四边形中，写出两种勾股四边形的名称；

（2）如图，将△ABC绕顶点B按顺时针方向旋转60°得到△DBE，连接AD，DC，CE，已知∠$DCB=30°$.

①求证：△BCE是等边三角形；

②求证：$DC^2+BC^2=AC^2$，即四边形$ABCD$是勾股四边形.　　【导学号：8592074】



（第23题）

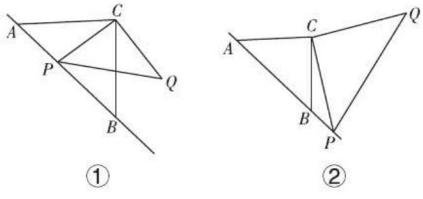
24.（12分）已知：△ABC是等腰直角三角形，动点P在斜边AB所在的直线上，以PC为直角边作等腰三角形PCQ，其中∠$PCQ=90°$，探究并解决下列问题：

（1）如图①，若点P在线段AB上，且$AC=1+\sqrt{3}$，$PA=\sqrt{2}$，则：

①线段$PB=$_____，$PC=$_____；

②猜想：PA^2，PB^2，PQ^2三者之间的数量关系为_____.

（2）如图②，若点P在线段AB的延长线上，在（1）②中所猜想的结论仍然成立，请你利用图②给出证明过程.



（第24题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

几何图形性质的探秘

几何图形性质的探秘











第十八章 平行四边形

核心考点

你将见到的

- 平行四边形的性质与判定
- 三角形的中位线定理
- 特殊平行四边形——矩形、菱形、正方形的性质与判定

核心方法

我们为你提供的

- 分类讨论思想
- 数形结合思想
- 构造法
- 转化思想
- 类比思想
- 演绎推理法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.1 平行四边形

18.1.1 平行四边形的性质

核心知识

- 平行四边形的定义
- 平行四边形的性质
- 两条平行线之间的距离

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形

1. 定义：

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

2. 表示方法：

平行四边形用符号“$\square$”表示，如图 18.1−1，平行四边形 $ABCD$ 记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”.

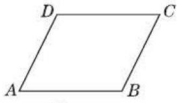


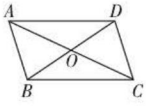
图 18.1−1

注意：

（1）平行四边形的表示一定要按顺时针或逆时针依次注明各顶点，不能打乱顺序.

（2）“$\square$”作为表示平行四边形的符号，不可单独使用它来代替“平行四边形”.

3. 平行四边形的基本元素：

基本元素		主要内容	图示
边	邻边	AD 和 AB，AD 和 DC，DC 和 BC，BC 和 AB，共有四对	
	对边	AB 和 DC，AD 和 BC，共有两对	
角	邻角	$\angle BAD$ 和 $\angle ADC$，$\angle ADC$ 和 $\angle DCB$，$\angle DCB$ 和 $\angle ABC$，$\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，共有四对	
	对角	$\angle BAD$ 和 $\angle BCD$，$\angle ADC$ 和 $\angle ABC$，共有两对	
对角线		AC 和 BD，共有两条	

提分·必记

特别提醒

1. 平行四边形的定义有两个要素：
(1) 是四边形；
(2) 两组对边分别平行.
作为四边形，平行四边形具有一般四边形的一切性质，如有四条边，四个内角，两条对角线，内角和为 360°，外角和为 360° 等.
作为平行四边形，它区别于其他一般四边形的特殊性质为：平行四边形的两组对边分别平行；

2. 平行四边形的定义既是它的一个性质，又是它的一种判定方法：
∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴ $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ AD \parallel BC; \end{cases}$
反过来，∵ $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ AD \parallel BC, \end{cases}$
∴四边形 ABCD 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核考向▶利用平行四边形的定义判定平行四边形

题型1：平行四边形的定义的判定功能在找平行四边形中的应用

例1 如图18.1-2，在$\square ABCD$中，过点P作直线EF，GH分别平行于AB，BC，那么图中共有_____个平行四边形.

解题秘方：紧扣平行四边形定义中的“两要素”进行识别.

解：在$\square ABCD$中，$\because EF \parallel AB$，$GH \parallel BC$，

$\therefore EF \parallel AB \parallel CD$，$GH \parallel AD \parallel BC$.

$\therefore$单独一个四边形是平行四边形的有4个：$\square DEPH$，$\square EAGP$，$\square HPFC$，$\square PGBF$；由两个四边形组成的平行四边形有4个：$\square DEFC$，$\square EABF$，$\square DAGH$，$\square HGBC$；由四个四边形组成的平行四边形有1个：$\square ABCD$.

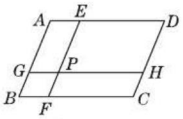


图18.1-2

$\therefore$图中共有9个平行四边形.

答案：9

题型2：平行四边形的定义的双重功能在判定平行四边形中的应用

例2 如图18.1-3，在$\square ABCD$中，$\angle 1=\angle 2$.

求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

解题秘方：紧扣平行四边形的定义中的双重功能：“性质功能和判定功能”进行证明.

证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore CD \parallel AB$（平行四边形的两组对边分别平行），即$DE \parallel BF$，

$\therefore \angle 1=\angle DFA$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 2=\angle DFA$，

$\therefore DF \parallel BE$，

$\therefore$四边形$BEDF$是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

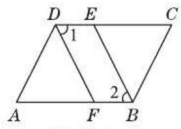


图18.1-3

点知识▶2 平行四边形的边、角性质

1. 边的性质：平行四边形的对边平行；平行四边形的对边相等.

数学表达式：如图18.1-4，$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

2. 角的性质：平行四边形的对角相等；平行四边形的邻角互补.

数学表达式：如图18.1-4，$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore \angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle A+\angle B=180°$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle C+\angle D=180°$，$\angle A+\angle D=180°$.

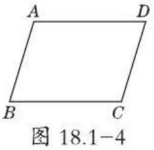


图18.1-4

提分·秘诀

方法点拨

分类法数几何图形的个数：

数几何图形的个数时，往往带有很大的盲目性，结果不是多数了就是漏数了.若将几何图形分类（按顺序或大小）数，就能将问题简化，如例1，将平行四边形分为分别由一个、两个、四个四边形组成的平行四边形，这样就能做到**不重不漏**.

解法提醒

当题目的条件中有平行四边形时，应立即想到两组对边分别平行；当题目的结论要证平行四边形时，首先应联想到它的两组对边是否分别平行.逆向利用及正向利用平行四边形的定义是后面学习平行四边形的性质及判定的主要依据.

提分·必记

特别提醒

由于组成平行四边形的元素有边和角，因此讨论其性质也应从边和角这两个方面去看.

1. **从边看**：平行四边形的对边平行且相等；
2. **从角看**：平行四边形的对角相等、邻角互补.

注意：已知平行四边形得出什么性质，要根据推理证明的需要，合理选用需要的性质.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用平行四边形的边角性质解证明计算问题

例 3 如图 18.1−5 所示，在 $\square ABCD$ 中，$AB=5$ cm，$BC=4$ cm，则 $\square ABCD$ 的周长为_____cm.

解题秘方：紧扣“平行四边形的边的性质”进行解答.

解：∵平行四边形的对边相等，

∴ $CD=AB=5$ cm，$AD=BC=4$ cm.

∴ $\square ABCD$ 的周长

$=2(AB+BC)$

$=2\times(5+4)=18$(cm).

答案：18

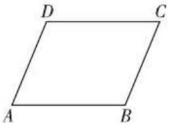


图 18.1−5

提分·秘诀

解法提醒

平行四边形的边角性质、平行线的性质、全等三角形的判定和性质在有关平行四边形的问题中，常融合在一起综合应用，而利用平行四边形的边角性质、平行线的性质获得三角形全等的条件是解题的关键.

点知识▶3 两条平行线之间的距离

1. 定义：

两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

三种距离之间的区别与联系

类别	两点间的距离	点到直线的距离	两条平行线间的距离
区别	连接两点的线段的长度	点到直线的垂线段的长度	两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的垂线段的长度
联系	最后都归结为两点间的一条线段的长度		

2. 性质：

如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等，即平行线间的距离处处相等.

数学表达式：如图 18.1−6，A，C 是 l_1 上任意两点，∵ $l_1 \parallel l_2$，$AB\perp l_2$，$CD\perp l_2$，∴ $AB=CD$.

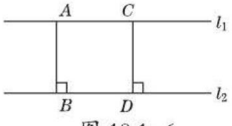


图 18.1−6

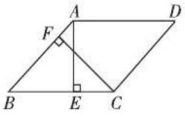


图 18.1−7

3. 拓展：

（1）夹在两条平行线间的任何平行线段都相等.

（2）等底等高的平行四边形的面积相等.

（3）平行四边形的面积 = 底 × 高 $=ah$（其中 a 是平行四边形的任意一条边长，h 必须是边长为 a 的边与它的对边之间的距离）. 如图 18.1− 7 所示，在 $\square ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于点 E，$CF\perp AB$ 于点 F，则 $S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=AB\cdot CF$.

提分·必记

特别提醒

1. 距离是指垂线段的长度，它是正值；
2. 当两条平行线确定后，它们之间的距离是一定值，不随位置的不同而改变；
3. 平行线间的距离处处相等，因此在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置；
4. 任何两条平行线间的距离都是存在的、唯一的，都是两条平行线间最短线段的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用两条平行线间的距离的性质说明面积相等

例 4 如图 18.1-8，直线 $a \parallel b$，点 A，E，F 在直线 a 上，点 B，C，D 在直线 b 上，$BC=EF$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等吗？为什么？

解题秘方：紧扣等底等高的三角形面积相等作三角形的高进行说明.

解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等. 理由如下：

如图 18.1-8，过点 A 作 $AH_1 \perp$ 直线 b，垂足为点 H_1，

过点 D 作 $DH_2 \perp$ 直线 a，垂足为点 H_2.

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，

$\therefore S_1=\frac{1}{2}BC \cdot AH_1$，$S_2=\frac{1}{2}EF \cdot DH_2$.

$\because$ 直线 $a \parallel b$，$AH_1 \perp$ 直线 b，$DH_2 \perp$ 直线 a，

$\therefore AH_1=DH_2$.

又 $\because BC=EF$，$\therefore S_1=S_2$，

即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

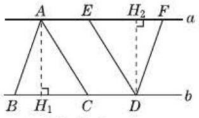


图 18.1-8

提分·秘诀

解法提醒

1. 由平行线间的距离处处相等，可知顶点都在两平行线上的三角形的高相等.
2. 解顶点在两平行线间的三角形的面积问题常作高（两平行线间的垂线段）进行解答.

点知识▶4 平行四边形的对角线性质

1. 对角线的性质：平行四边形的对角线互相平分.

数学表达式：如图 18.1-9，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.



图 18.1-9

提分·必记

图示

如图 18.1-10，$\because$ 直线 EF 过平行四边形 $ABCD$ 两对角线的交点 O，

$\therefore AE+AB+BF=FC+CD+DE=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$，

$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

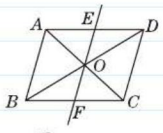


图 18.1-10

2. 拓展性质：

（1）平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分，两条对角线将平行四边形分成面积相等的四部分.

（2）若一条直线过平行四边形两条对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积.

平行四边形的性质

核心考向▶利用平行四边形的对角线性质解与平行四边形有关的问题

题型 1：平行四边形对角线的性质在求边长中的应用

例 5 如图 18.1-11，已知 $\square ABCD$ 的周长是 60，对角线 AC，BD 相交于点 O. 若 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长长 8，求这个平行四边形各边的长.

解题秘方：紧扣平行四边形对角线、边的性质进行解答.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

$\because AB+BC+CD+DA=60$，

$OA+AB+OB-(OB+BC+OC)=8$，

$\therefore AB+BC=30$，$AB-BC=8$. $\therefore AB=CD=19$，$BC=AD=11$.

即这个平行四边形各边的长分别为 19，11，19，11.

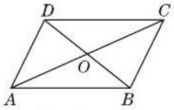


图 18.1-11

提分·秘诀

规律点拨

由“平行四边形的对角线互相平分”可以得出“平行四边形被它的两条对角线分成四个小三角形，相邻两个小三角形的周长之差等于平行四边形中对应的两邻边之差”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：平行四边形对角线分四边形面积的性质在说明面积关系中的应用

例 6 如图 18.1−12，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线 EF，分别交 AD，BC 于点 E，F. 判断四边形 $ABFE$ 的面积与四边形 $FCDE$ 的面积有何关系？试说明理由.

解题秘方：紧扣平行四边形的对角线性质、全等三角形的性质进行解答.

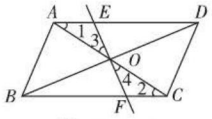


图 18.1−12

解：$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}$. 理由如下：

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$AD\parallel BC$. ∴ $\angle 1=\angle 2$.

又∵ $\angle 3=\angle 4$，∴ $\triangle AOE\cong\triangle COF$. ∴ $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$BC=DA$，$\angle ABC=\angle CDA$.

∴ $\triangle ABC\cong\triangle CDA$.

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CDA}$.

∵ $S_{四边形ABFE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle COF}+S_{\triangle AOE}=S_{\triangle ABC}$，

$S_{四边形FCDE}=S_{\triangle CDA}-S_{\triangle AOE}+S_{\triangle COF}=S_{\triangle CDA}$，

∴ $S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}$.

特别提醒

这是平行四边形对角线性质的两个拓展结论，即

1. 平行四边形的一条对角线将平行四边形分成两个面积相等的三角形.
2. 过平行四边形的两对角线交点的一条直线将平行四边形分成两个面积相等的梯形.

本例的实质是对知识点中的两条拓展性质的部分结论的证明过程.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用全等法解平行四边形问题

题型 1：全等法在平行四边形中证线段相等的应用

例 7 如图 18.1−13 所示，在▱$ABCD$ 中，平行于对角线 AC 的直线 MN 分别交 DA，DC 的延长线于点 M，N，交 BA，BC 于点 P，Q. 求证：$MP=QN$.

解题秘方：紧扣全等三角形对应边相等结合平行四边形定义的双重功能进行证明.

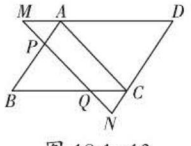


图 18.1−13

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，

∴ $\angle MPA=\angle N$，$\angle MAP=\angle D$，$\angle D=\angle QCN$，

∴ $\angle MAP=\angle QCN$.

∵ $MN\parallel AC$，$AM\parallel CQ$，

∴四边形 $AMQC$ 是平行四边形，

∴ $MA=CQ$，

∴ $\triangle MAP\cong\triangle QCN$，

∴ $MP=QN$.

挑战·高分

解法提醒

证明线段相等，通常利用平行四边形的性质，转化为证三角形全等；有时也可直接利用平行四边形的性质去证明.

注意：本例也可先证 $MQ=PN$，结合等式的性质可证 $MP=QN$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：全等法在平行四边形中证角相等的应用

例 8 如图 18.1−14，在▱$ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，点 F 在 BC 的延长线上，且 $BE=CF$. 求证：$\angle BAE=\angle CDF$.

解题秘方：紧扣“全等三角形对应角相等”结合平行四边形的定义和性质进行证明.

证明：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB=DC$，$AB\parallel DC$.

∴ $\angle B=\angle DCF$.

在 △ABE 和 △DCF 中，$AB=DC$，$\angle B=\angle DCF$，$BE=CF$.

∴ △$ABE\cong$△DCF，

∴ $\angle BAE=\angle CDF$.

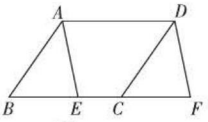


图 18.1−14

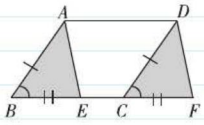
解题通法：证明角相等的常用方法

（1）对顶角相等；（2）一个三角形中等边对等角；（3）两直线平行，内错角相等（同位角相等）；（4）全等三角形对应角相等；（5）同角或等角的补角相等；（6）同角或 等角的余角相等；（7）平行四边形的对角相等.

解法提醒

1. 判断两线段的位置关系，其实质是判断两线段所在直线的位置关系. 两直线的位置关系有相交和平行两种情况，其中相交又有垂直和斜交两种情况；
2. 两线段的大小关系有大于、小于、相等这三种情况，它们的证明途径有利用全等三角形的性质，平行四边形的性质，等式的性质等.

图解



△$ABE\cong$△DCF

图 18.1−15

拔尖角度 ▶ 2 利用作差法判断平行四边形中线段间的关系

例 9 如图 18.1−16 所示，在▱$ABCD$ 中，AE，BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，且分别交 CD 于点 E，F，AE，BF 相交于点 M.

（1）求证：$AE\perp BF$；

（2）判断线段 DF 与 CE 的大小关系，并说明理由.

解题秘方：紧扣“等量减等量差相等”结合平行四边形的性质进行解答.

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$. ∴ $\angle DAB+\angle ABC=180°$.

∵ AE，BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，

∴ $2\angle EAB+2\angle FBA=180°$. ∴ $\angle EAB+\angle FBA=90°$.

∴ $\angle AMB=90°$，即 $AE\perp BF$.

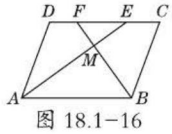


图 18.1−16

（2）**解**：$DF=CE$. 理由如下：

在▱$ABCD$ 中，$CD\parallel AB$，$AD=BC$.

∴ $\angle DEA=\angle EAB$.

又∵ AE 平分 $\angle DAB$，∴ $\angle DAE=\angle EAB$.

∴ $\angle DEA=\angle DAE$. ∴ $DE=AD$.

同理可得 $CF=BC$.

∵ $AD=BC$，∴ $DE=CF$.

∴ $DE-EF=CF-EF$，即 $DF=CE$.

挑战·高分

另解

如图 18.1−17 所示，分别延长 BC，AE 交于点 P.

在▱$ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，

∴ $\angle DAP=\angle P$.

∵ AE 平分 $\angle DAB$，

∴ $\angle DAP=\angle PAB$.

∴ $\angle PAB=\angle P$，

∴ $BA=BP$.

∵ BF 平分 $\angle ABC$，

∴ $BM\perp AP$，即 $AE\perp BF$.

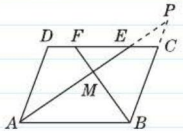


图 18.1−17

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用构造对角线法证平行四边形中线段相等

例 10 如图 18.1−18，已知$\square ABCD$的顶点A，C与$\square EBFD$的顶点E，F在一条直线上，求证：$AE=CF$.

解题秘方：紧扣“平行四边形对角线的性质”构造对角线证明对角线上的线段相等.

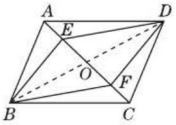


图 18.1−18

证明：如图 18.1−18，连接BD交AC于点O.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵四边形$EBFD$是平行四边形，

∴ $OE=OF$（平行四边形的对角线互相平分），

∴ $OA-OE=OC-OF$，即$AE=CF$（等式的性质）.

挑战·高分

特别提醒

本例易受全等三角形思维定式的影响，欲证的两线段相等且又属于不同的三角形，习惯上就联想到证这两个三角形全等，这样虽然能达到证明的目的，却忽视了平行四边形特有的性质，易走弯路. 因此在解决平行四边形的有关问题中，应注意灵活运用平行四边形的性质.

拔尖角度 4 利用等腰三角形的性质求平行四边形中的角的度数

例 11 如图 18.1−19，在$\square ABCD$中，点E是AD的中点，延长CE交BA的延长线于点F. 若$BC=2AB$，$\angle FBC=70°$，求$\angle EBC$的度数.

解题秘方：紧扣“等腰三角形三线合一”的性质展开计算求解.

解：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴ $AB=DC$，$DC\parallel AB$，

∴ $\angle ECD=\angle F$.

又∵ $DE=AE$，$\angle DEC=\angle AEF$，

∴ $\triangle DEC\cong\triangle AEF$.

∴ $CE=FE$，$DC=AF$，

∴ $AB=AF$. ∴ $BF=2AB$.

∵ $BC=2AB$，

∴ $BC=BF$.

又∵点E为CF的中点，

∴ $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC=\frac{1}{2}\times 70°=35°$.

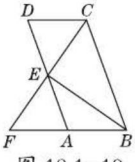


图 18.1−19

挑战·高分

方法规律

求线段或角的常用方法：

1. 利用等量代换；
2. 利用整体与部分之间的关系；
3. 利用角平分线的性质及判定；
4. 利用线段垂直平分线的性质及判定；
5. 利用等腰三角形的性质及判定；
6. 利用全等三角形的性质；
7. 利用面积（等底等高等积）；
8. 利用平行四边形的性质.

拔尖角度 5 利用面积法解与平行四边形相关的应用问题

题型 1：平行四边形的面积性质在求距离中的应用

例 12 如图 18.1−20，在$\square ABCD$中，对角线$BD=8$ cm，$AE\perp BD$，垂足为E，且$AE=3$ cm，$BC=4$ cm，则AD与BC之间的距离为_____.

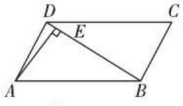


图 18.1−20

挑战·高分

解法提醒

在三角形或平行四边形中，根据面积为定值，用不同的边为底边和对应的高表示面积，可从

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“平行四边形及三角形的面积性质”进行计算.

解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴△ ABD 与△ CDB 的面积相等.

∵ $AE \perp BD$，$AE=3$ cm，$BD=8$ cm，

∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD \cdot AE=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12\ (\text{cm}^2)$.

∴ $S_{四边形 ABCD}=2S_{\triangle ABD}=24\ \text{cm}^2$. 设 AD 与 BC 之间的距离为 h cm，

∵ $BC=4$ cm，∴ $S_{四边形 ABCD}=BC \cdot h=4h\ \text{cm}^2$，∴ $4h=24$，解得 $h=6$.

答案：6 cm

得到不同的底和高之间数量的相等关系，从而转化为解方程使问题获解.

题型 2：平行四边形的面积性质在设计方案中的应用

例 13 张大伯承包了一个呈四边形的池塘，如图 18.1−21 所示，它的四个角 A，B，C，D 处均有一棵大树，张大伯今年养鱼喜获丰收，明年准备把池塘面积扩大一倍，但又不想毁掉这四棵大树，并且扩建后的池塘呈平行四边形形状. 张大伯这一设想是否能实现？请你帮助他解决一下，并画出草图.

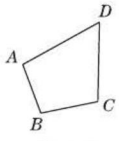


图 18.1−21

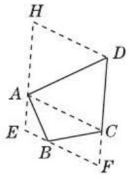


图 18.1−22

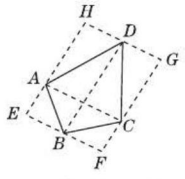


图 18.1−23

技巧提醒

解此题的关键是设计图形，利用平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分设计好图形，证明就简单了. 设计图形时还可以把原来的图形分为四个三角形，再扩大四个相应等大的三角形.

解题秘方：紧扣平行四边形中的面积性质进行方案设计，可利用“图 18.1−22 中 $S_{\square ACDH}=2S_{\triangle ACD}$，$S_{\square ACFE}=2S_{\triangle ACB}$ 和图 18.1−23 中 $S_{\square ACFE}=2S_{\triangle ACB}$，$S_{\square ACGH}=2S_{\triangle ACD}$”证明方案的合理性.

解：张大伯能实现这一设想. 有多种设计方案，现列举两种如下：

方案一：如图 18.1−22，连接 AC. 过点 D 作 $DH \parallel AC$，且使 $DH=AC$，连接 HA，过点 B 作 AC 的平行线，延长 HA，DC，分别交过点 B 且平行于 AC 的直线于点 E，F，则□ $EFDH$ 即为扩建成的平行四边形.

方案二：如图 18.1−23，连接 AC，BD. 分别过点 B，D 作 AC 的平行线，分别过点 A，C 作 BD 的平行线，这两组平行线的交点分别为点 E，F，G，H，则□ $EFGH$ 即为扩建成的平行四边形.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考考查的重点，也是热点，主要考查平行四边形定义和性质的应用，多以选择题、填空题或解答题的形式出现；也有一些创新题型，如开放探索题、操作题等，考查学生的数学思维能力和探索创新能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用平行四边形的性质解全等三角形问题

例 14 [中考·湘潭]如图 18.1-24，在$\square ABCD$中，$DE=CE$，连接AE并延长交BC的延长线于点F.

(1) 求证：$\triangle ADE \cong \triangle FCE$；

(2) 若$AB=2BC$，$\angle F=36°$，求$\angle B$的度数.

试题评析：此题主要考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质、三角形内角和定理. 熟练掌握平行四边形的性质，证明三角形全等是解决问题的关键.

(1) **证明**：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$，$AD=BC$，

$\therefore \angle D=\angle ECF$.

在$\triangle ADE$和$\triangle FCE$中，$\begin{cases}\angle D=\angle ECF,\\ DE=CE,\\ \angle AED=\angle FEC,\end{cases}$

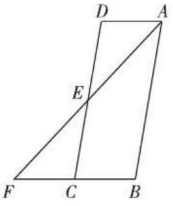


图 18.1-24

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$(ASA).

(2) **解**：∵$\triangle ADE \cong \triangle FCE$，

$\therefore AD=FC$，

∵$AD=BC$，$AB=2BC$，$\therefore AB=FB$.

$\therefore \angle BAF=\angle F=36°$.

$\therefore \angle B=180°-2\times 36°=108°$.

考法 2 利用线段垂直平分线的性质解平行四边形的周长问题

例 15 [中考·贵阳]如图 18.1-25，在$\square ABCD$中，对角线AC的垂直平分线分别交AD、BC于点E、F，连接CE，若$\triangle CED$的周长为 6，则$\square ABCD$的周长为(　　)

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

试题评析：本题考查了平行四边形的性质、线段垂直平分线的性质、三角形周长的计算. 熟练掌握平行四边形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore DC=AB$，$AD=BC$.

∵AC的垂直平分线交AD于点E，

$\therefore AE=CE$.

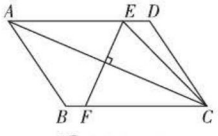


图 18.1-25

∵$\triangle CDE$的周长$=DE+CE+DC=DE+AE+DC=AD+DC=6$，

$\therefore \square ABCD$的周长$=2\times 6=12$.

答案：B

冲刺·满分

思路点拨

1. 利用平行四边形的性质得出AD∥BC，证出∠D=∠ECF，由ASA即可证出△ADE≌△FCE；
2. 证出AB=FB，由等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可得出答案.

解法提醒

由平行四边形的性质得出$DC=AB$，$AD=BC$，由线段垂直平分线的性质得出$AE=CE$，从而得出$\triangle CDE$的周长$=AD+DC$，即可得出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用勾股定理及其逆定理解求平行四边形中的线段长问题

例 16 [中考·青岛]如图 18.1-26，$\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE \perp BC$，垂足为 E，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$BD=4$，则 AE 的长为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

试题评析：本题考查了勾股定理的逆定理和平行四边形的性质，能得出 $\triangle BAC$ 是直角三角形是解此题的关键.

解：$\because AC=2$，$BD=4$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=1$，$BO=\frac{1}{2}BD=2$.

$\because AB=\sqrt{3}$，$\therefore AB^2+AO^2=BO^2$.

$\therefore \angle BAC=90°$. $\therefore AB \perp AC$.

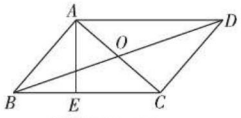


图 18.1-26

在 Rt $\triangle BAC$ 中，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$.

$\because S_{\square ABCD}=AB \cdot AC=BC \cdot AE$，$\therefore \sqrt{3} \times 2=\sqrt{7} \cdot AE$，$\therefore AE=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

答案：D

思路点拨

解本例有两个突破点：

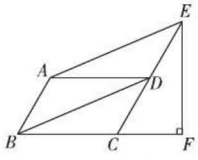
1. 确定 AB ⊥ AC，即求 ∠BAC=90°，这可由△ABO 的三边平方关系根据勾股定理的逆定理求得；
2. 同一平行四边形的面积相等，即 $S_{\square ABCD}=AB \cdot AC=BC \cdot AE$.

两年模拟兵法

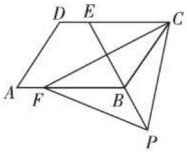
☞答案见 274 页

1. [中考·辽阳]如图，在 $\square ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，连接 BD，作 $AE \parallel BD$ 交 CD 的延长线于点 E，过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 F，且 $CF=1$，则 AB 的长是（　　）

A.2　　B.1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$



（第 1 题）



（第 3 题）

2. [中考·黑龙江]在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线把 BC 边分成长度是 3 和 4 的两部分，则平行四边形 $ABCD$ 的周长是（　　）

A.22　　B.20

C.22 或 20　　D.18

3. [中考·泰安]如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 是边 CD 上一点，且 $BC=EC$，$CF \perp BE$ 交 AB 于点 F，P 是 EB 延长线上一点，下列结论：

① BE 平分 $\angle CBF$；

② CF 平分 $\angle DCB$；

③ $BC=FB$；

④ $PF=PC$.

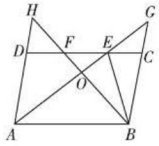
其中正确结论的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

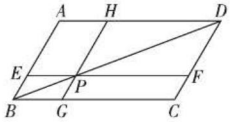
4. [中考·威海]如图，在 $\square ABCD$ 中，$\angle DAB$ 的平分线交 CD 于点 E，交 BC 的延长线于点 G，$\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F，交 AD 的延长线于点 H，AG 与 BH 交于点 O，连接 BE，下列结论错误的是（　　）

A.$BO=OH$　　B.$DF=CE$

C.$DH=CG$　　D.$AB=AE$



（第 4 题）

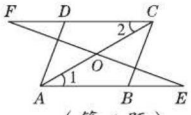


（第 5 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

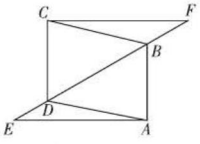
5. [中考·南充]如图，在▱$ABCD$中，过对角线BD上一点P作$EF \parallel BC$，$GH \parallel AB$，且$CG=2BG$，$S_{\triangle BPG}=1$，则$S_{\square AEPH}=$_____.

6. [中考·山西]已知：如图，在▱$ABCD$中，延长AB至点E，延长CD至点F，使得$BE=DF$，连接EF，与对角线AC交于点O.
求证：$OE=OF$.



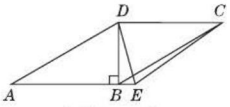
（第6题）

7. [中考·铜仁]如图，已知点E，F分别是平行四边形$ABCD$对角线BD所在直线上的两点，连接AE，CF，请你添加一个条件，使得$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，并证明.



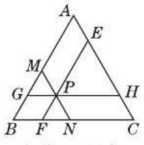
（第7题）

8. 如图，已知在▱$ABCD$中，对角线$BD \perp AB$，$\angle A=30°$，DE平分$\angle ADC$交AB的延长线于点E，连接CE.
（1）求证：$AD=AE$；
（2）若$AD=12$，连接AC交BD于点O. 画出图形，并求AC的长.



（第8题）

9. 如图，$\triangle ABC$是边长为a的等边三角形，P是$\triangle ABC$内的任意一点，过点P作$EF \parallel AB$分别交AC，BC于点E，F，作$GH \parallel BC$分别交AB，AC于点G，H，作$MN \parallel AC$分别交AB，BC于点M，N，猜想$EF+GH+MN$的值是多少，其值是否随点P位置的改变而改变？并说明理由.



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.1.2 平行四边形的判定

核心知识

- 边的关系判定平行四边形
- 角的关系判定平行四边形
- 对角线的关系判定平行四边形
- 三角形的中位线

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形的判定

1. 判定方法

判定平行四边形可以从对边、对角和对角线三个方面进行，如图18.1−27，在$\square ABCD$中，AC，BD相交于点O，具体方法如下表所示.

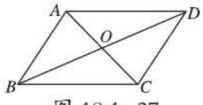


图 18.1−27

条件类型	判定方法	数学表达式
对边关系	两组对边分别平行的四边形是平行四边形	∵ $AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$， ∴ 四边形$ABCD$是平行四边形
	两组对边分别相等的四边形是平行四边形	∵ $AD=BC$，$AB=CD$， ∴ 四边形$ABCD$是平行四边形
	一组对边平行且相等的四边形是平行四边形	∵ $AD \underline{\parallel} BC$（或$AB \underline{\parallel} CD$）， ∴ 四边形$ABCD$是平行四边形
对角关系	两组对角分别相等的四边形是平行四边形	∵ $\angle DAB=\angle DCB$， $\angle ABC=\angle ADC$， ∴ 四边形$ABCD$是平行四边形
对角线关系	对角线互相平分的四边形是平行四边形	∵ $OA=OC$，$OB=OD$， ∴ 四边形$ABCD$是平行四边形

2. 灵活选择平行四边形判定定理的方法

（1）已知一组对边平行，可证明该组对边相等或证明另一组对边平行.

（2）已知一组对边相等，可证明该组对边平行或证明另一组对边相等.

（3）已知条件与对角线有关，可证明对角线互相平分.

（4）已知条件与角有关，可证明两组对角分别相等或证明对边之间的关系.


平行四边形的判定方法

提分·必记

特别提醒

1. 平行四边形的判定定理和性质定理是互逆定理，解题时要注意区别，不能混淆.
(1) 由平行四边形这一条件得到边、角、对角线关系是性质；
(2) 由边、角、对角线关系得到平行四边形是判定.
2. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形；
3. 两组邻边分别相等的四边形不一定是平行四边形.

方法提醒

判定平行四边形的方法选择

已知条件	证明思路
一组对边相等	1. 另一组对边相等
	2. 该组对边平行
一组对边平行	1. 另一组对边平行
	2. 该组对边相等
对角线相交	对角线互相平分
角	两组对角相等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平行四边形的判定解有关四边形的应用

题型 1：边的关系在判定平行四边形中的应用

例 1 如图 18.1-28，已知 $BE \parallel DF$，$\angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

解题秘方：紧扣“条件 $BE \parallel DF$”需说明“$BE=DF$”或“$DE \parallel BF$”即可得到四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

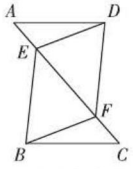


图 18.1-28

证明：$\because BE \parallel DF$，

$\therefore \angle AFD=\angle CEB$.

$\because \angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$，

$\therefore DF=BE$.

$\because BE \parallel DF$，$BE=DF$，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

解题通法：由边的关系判定平行四边形的方法

1. 若已知一组对边平行，则可采用证这组对边相等或另一组对边平行这两种方法说明平行四边形.

2. 若已知一组对边相等，则可采用证这组对边平行或另一组对边相等这两种方法说明平行四边形.

题型 2：角的关系在判定平行四边形中的应用

例 2 如图 18.1-29，在 $\square ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$，交 AD 于点 E，DF 平分 $\angle ADC$，交 BC 于点 F，那么四边形 $BFDE$ 是平行四边形吗？为什么？

解题秘方：针对条件中与角有关条件居多这一特点，紧扣“两组对角相等”来证明平行四边形.

解：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

理由：在 $\square ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$.

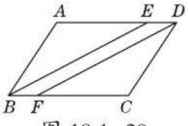


图 18.1-29

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$，DF 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle CDF=\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$，

$\therefore \angle CDF=\angle ADF=\angle ABE=\angle CBE$.

$\because \angle DFB=\angle C+\angle CDF$，$\angle BED=\angle ABE+\angle A$，

$\therefore \angle DFB=\angle BED$，

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

提分·秘诀

另解

$\because BE \parallel DF$，

$\therefore \angle AFD=\angle CEB$.

$\because \angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$，

$\therefore \angle A=\angle C$，$AD=CB$.

又 $AF=CE$，$\therefore AE=CF$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$，

$\therefore \angle AED=\angle CFB$，

$\therefore \angle DEF=\angle BFE$，

$\therefore DE \parallel BF$.

又 $BE \parallel DF$，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

解法提醒

当已知条件出现所要说明的四边形的角时，则需从角的关系中考虑判定平行四边形的方法，因此可选择两组对角分别相等的四边形是平行四边形来判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：对角线关系在判定平行四边形中的应用

例 3 [中考·徐州]已知：如图 18.1−30，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 在 AC 上，且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

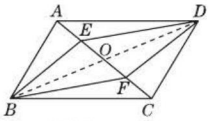


图 18.1−30

解题秘方：由于条件都与四边形的对角线相关，因此需紧扣对角线关系判定平行四边形.

证明：如图 18.1−30，连接 BD，设对角线 AC，BD 交于点 O.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$OB=OD$.

又∵ $AE=CF$，

∴ $OA-AE=OC-CF$，

即 $OE=OF$.

∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

解法提醒

当条件出现在所要说明的四边形的对角线上时，需从对角线的关系判定平行四边形，而从对角线的角度判定平行四边形，一般结合已知平行四边形的性质，利用已知平行四边形的对角线的性质去判定要说明的四边形是平行四边形.

点知识 ▸ 2 三角形的中位线

1. 三角形的中位线的定义：

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线.

数学表达式：如图 18.1−31，

∵ $AD=BD$，$AE=EC$，

∴ DE 是△ ABC 的中位线.

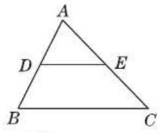


图 18.1−31

2. 三角形中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

数学表达式：如图 18.1-31，

∵ $AD=BD$，$AE=EC$，

∴ $DE \parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

3. 三角形的中位线的应用

（1）三角形的中位线定理反映了三角形的中位线与第三边的双重关系：一是位置关系，可以用来证两直线平行；二是数量关系，可以用来证线段的倍分关系.

（2）中位线具有平移角、倍分转化线段的功能，因此当遇到中点或中线时，应考虑构造中位线，即我们常说的“遇到中点想中位线”；相应地，若知道了三角形的中位线，则三角形两边的中点即可找到.

提分·必记

特别提醒

1. 一个三角形有三条中位线；
2. 三条中位线将原三角形分割成**四个**全等的三角形，**三个**面积相等的平行四边形；
3. 三角形的中位线与三角形的中线的区别：三角形的中线是连接**一顶点和它的对边中点**的线段，而三角形的中位线则是连接**两边中点**的线段；
4. 三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用三角形的中位线说明线段间的关系

题型1：三角形的中位线在说明线段数量关系中的应用

例4 如图18.1-32，已知E为平行四边形$ABCD$中DC边延长线上一点，且$CE=DC$，连接AE，分别交BC，BD于点F，G，连接AC交BD于点O，连接OF.

求证：$AB=2OF$.

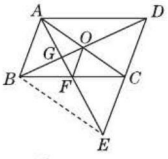


图18.1-32

解题秘方：紧扣“三角形中位线定理”的数量关系，将证明线段的倍数关系转化为证明OF是△ABC的中位线.

证明：如图18.1-32，连接BE.

∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$.

∵E为平行四边形$ABCD$中DC边延长线上一点，且$CE=DC$，

∴$AB\parallel CE$，$AB=CE$，∴四边形$ABEC$是平行四边形，

∴点F是BC的中点.

又∵点O是AC的中点，∴OF是△ABC的中位线，

∴$AB=2OF$.

题型2：三角形的中位线在说明线段位置关系中的应用

例5 如图18.1-33，在△ABC中，$BC>AC$，点D在BC上，且$DC=AC$，∠ACB的平分线CE交AD于E，点F是AB的中点，连接EF，求证：$EF\parallel BC$.

解题秘方：紧扣“三角形中位线定理”的位置关系，将证明线段的位置关系转化为证明三角形的中位线问题来解.

证明：∵CE平分∠ACB，$DC=AC$，

∴CE是△ACD的中线，

∴点E是AD的中点.

∵点F是AB的中点，

∴$EF\parallel BD$，即$EF\parallel BC$.

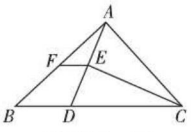


图18.1-33

提分·秘诀

方法点拨

证明线段倍分关系的方法：

由于三角形的中位线等于三角形第三边的一半，因此当需要证明某一线段是另一线段的一半或两倍，且题中出现中点时，常先证明这个一半的线段是三角形的中位线，再用三角形的中位线定理证明.

技巧点拨

由于三角形的中位线平行于第三边，因此当证明两线段平行且题中含中点条件时，常考虑用三角形中位线定理证明；而等腰三角形的“三线合一”、平行四边形的对角线“互相平分”是证明一条线段是三角形中位线的常用方法.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用一题多解法判定平行四边形

例6 如图18.1-34，在四边形$ABCD$中，$AE\perp BD$于E，$CF\perp BD$于F，$AE=CF$，$BF=DE$，四边形$ABCD$是不是平行四边形？为什么？

解题秘方：紧扣平行四边形的判定定理从不同的角度判定平行四边形.

挑战·高分

另解1

一组对边平行且相等法.

由方法1知

△$ABE\cong$△CDF，

∴$AB=CD$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，理由如下：

方法一：两组对边平行法（定义法）.

$\because BF=DE$，$\therefore BF-EF=DE-EF$，即 $BE=DF$.

$\because AE\perp BD$，$CF\perp BD$，

$\therefore \angle AEB=\angle CFD=90°$.

又 $\because AE=CF$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$. $\therefore \angle ABE=\angle CDF$.

$\therefore AB\parallel CD$.

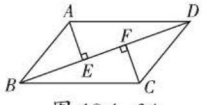


图 18.1-34

同理可证 $AD\parallel BC$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法二：两组对边相等法.

由方法一知$\triangle ABE\cong\triangle CDF$. $\therefore AB=CD$.

在$\triangle AED$与$\triangle CFB$中，$\because AE=CF$，$\angle AED=\angle CFB$，$DE=BF$，

$\therefore \triangle AED\cong\triangle CFB$. $\therefore AD=CB$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法三：两组对角相等法.

由方法一知$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，

$\therefore \angle ABE=\angle CDF$，$\angle BAE=\angle DCF$.

由方法二知$\triangle AED\cong\triangle CFB$，

$\therefore \angle CBF=\angle ADE$，$\angle DAE=\angle BCF$.

$\therefore \angle ABC=\angle CDA$，$\angle BAD=\angle DCB$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\angle ABE=\angle CDF$.

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

另解 2

对角线互相平分法.

如图 18.1-35，连接 AC，交 BD 于点 O，

$\because AE\perp BD$，$CF\perp BD$，

$\therefore \angle AEO=\angle CFO=90°$.

又 $\because AE=CF$，

$\angle AOE=\angle COF$，

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$.

$\therefore AO=CO$，$EO=FO$.

又 $\because BF=DE$，

$\therefore BF-FO=DE-EO$，

即 $BO=DO$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

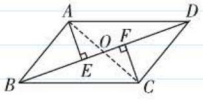


图 18.1-35

拔尖角度▶ 2 利用平行四边形法解几何问题

挑战·高分

题型 1：平行四边形法在证明线段相等中的应用

例 7 如图 18.1-36，AD 是$\triangle ABC$的角平分线，$DE\parallel AB$，在 AB 上截取 BF，使 $BF=AE$，求证：$EF=BD$.

解题秘方：由于要证的线段是四边形的对边，因此需将证明线段相等问题转化为证明平行四边形问题来解.

证明：$\because AD$ 是$\triangle ABC$的角平分线，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又 $\because DE\parallel AB$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$. $\therefore AE=DE$.

$\because BF=AE$，$\therefore DE=BF$.

又 $\because DE\parallel BF$，$\therefore$四边形 $BDEF$ 是平行四边形.

$\therefore EF=BD$.

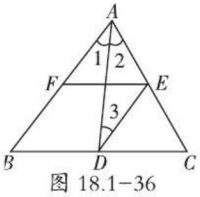


图 18.1-36

解法提醒

证明两条线段（或两角）相等的常用方法：

1. 线段垂直平分线的判定和性质；
2. 角平分线的判定和性质；
3. 等腰三角形的判定和性质；
4. 全等三角形的性质；
5. 平行四边形的性质.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：平行四边形法在说明线段关系中的应用

例 8 如图 18.1−37，在$\square ABCD$中，延长AB到E，延长CD到F，使得$BE=DF$，试猜测AC与EF有什么关系，并加以证明.

解题秘方：结合图形进行猜测：AC，EF互相平分. 紧扣平行四边形“对角线互相平分”这一特征，将证明线段互相平分问题转化为证明平行四边形问题来解.

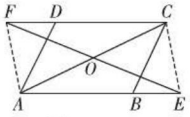


图 18.1−37

解：AC与EF互相平分，证明如下：

如图 18.1−37，连接AF，CE.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$DC \parallel AB$，$DC=AB$.

∵$DF=BE$，∴$CF=AE$.

∵$CF \parallel AE$，∴四边形$AECF$为平行四边形，

∴AC与EF互相平分.

知识储备

两条线段的数量关系有相等或倍分，位置关系有平行或相交，而相交的特殊情况有垂直、互相平分.

另解

∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$DC=AB$，$CF \parallel AE$，

∴$\angle CFE=\angle AEF$.

∵$DF=BE$，∴$CF=AE$.

∵$EF=FE$，∴$\triangle CFE \cong \triangle AEF$.

∴$\angle CEF=\angle AFE$，$CE \parallel AF$，

∴四边形$AECF$是平行四边形.

拔尖角度▸ 3 利用构造平行四边形法解几何问题

例 9 如图 18.1−38，已知AD为$\triangle ABC$的中线，点E为AC上一点，连接BE交AD于点F，且$AE=FE$. 求证：$BF=AC$.

解题秘方：利用构造平行四边形法将分散的两要证的线段（BF，AC）集中到同一个三角形中去，从而将证边相等的问题转化为证角相等的问题来解.

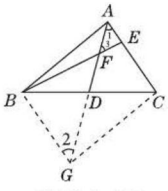


图 18.1−38

证明：如图 18.1−38，延长AD到点G，使$DG=AD$，连接BG，CG. ∵$DG=AD$，$BD=DC$，

∴四边形$ABGC$是平行四边形，∴$AC \parallel BG$，∴$\angle 1=\angle 2$.

又∵$AE=FE$，∴$\angle 1=\angle 3$. ∴$\angle 2=\angle 3=\angle BFG$，∴$BG=BF$.

又∵$BG=AC$，∴$BF=AC$.

挑战·高分

解法提醒

当题中有三角形中线时，常用倍长中线法构造平行四边形，然后利用平行四边形的性质推出线段相等或平行从及角相等.

拔尖角度▸ 4 利用中位线法解中点四边形问题

例 10 如图 18.1−39 所示的四边形$ABCD$，点E，F，G，H分别是边AB，BC，CD，DA的中点，连接EF，FG，GH，HE，得到四边形$EFGH$，求证：四边形$EFGH$是平行四边形.

解题秘方：针对四边形含中点的这一特征，连对角线构造中位线是解中点四边形问题的一种有效方法.

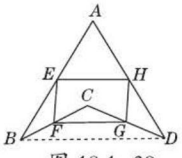


图 18.1−39

证明：如图 18.1−39，连接BD，

∵点E，H分别是边AB，DA的中点，

∴EH为$\triangle ABD$的中位线，

∴$EH \parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$. 同理可得$FG \parallel BD$，$FG=\frac{1}{2}BD$.

∴$EH \parallel FG$，$EH=FG$，∴四边形$EFGH$是平行四边形.

挑战·高分

解法提醒

1. 依次连接四边形各边中点所得到的四边形叫中点四边形，所有的中点四边形都是平行四边形.
2. 利用中位线定理判定平行四边形，一般用“一组对边平行且相等”判定平行四边形.


中点四边形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 5 利用归一法解线段的和倍关系问题

挑战·高分

题型 1：构造中位线法在证和倍关系中的应用

例 11 如图 18.1−40，在△ABC中，BD，CE分别平分∠ABC，∠ACB，$AM\perp CE$于点M，$AN\perp BD$于点N，求证：$MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

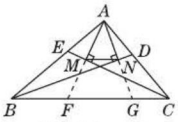


图 18.1−40

解题秘方：解决本例有两个突破口：

（1）构造△AFG，证MN是△AFG的中位线.

（2）将$AB+AC-BC$中的AB、AC转移到线段BC上，使分散的三条线段的和差关系转化为同一条直线上三条线段的和差关系.

证明：如图 18.1−40，延长AM，AN分别交BC于点F，G.

因为BD平分∠ABC，$AN\perp BD$，

所以$AN=NG$，$AB=BG$.

同理可得$AM=MF$，$AC=CF$.

所以M，N分别为AF，AG的中点，

所以$MN=\frac{1}{2}FG$.

又因为$FG=BG+FC-BC=AB+AC-BC$，

所以$MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

方法点拨

图中不存在中点，但结论与三角形中位线定理很类似，因此应设法寻找中点，再构造三角形的中位线.

要证明$MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$，可构造以MN为中位线的三角形，故延长AM交BC于点F，延长AN交BC于点G，易证明$2MN=FG$，而$FG=BG+FC-BC$.又易证明$BG=AB$，$FC=AC$，故问题得解.

本题的证明思路体现了类比思想和转化思想.

题型 2：平移法在证和差关系中的应用

例 12 （1）如图 18.1−41，已知点D是等腰三角形ABC的底边BC上一点，$DE\parallel AC$，交AB于点E，$DF\parallel AB$，交AC于点F，请你探究DE，DF，AB之间的关系，并说明理由.

（2）如果点D是等腰三角形ABC的底边BC延长线上任意一点，作$DE\parallel AC$交BA的延长线于点E，作$DF\parallel AB$交AC的延长线于点F，请你探究（1）中的结论是否还成立.如果不成立，你能得到什么结论？试说明理由.

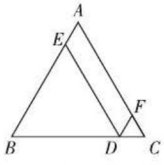


图 18.1−41

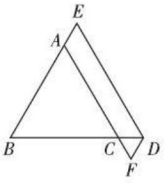


图 18.1−42

解题秘方：通过平移变换等手法将要说明和差关系的三条线段集中到同一条线段中进行解答.

解法提醒

归一法是证线段和倍问题的一种常用方法，其思路是将分散的线段集中到同一条线段中来说理的一种方式，常用的归一方法有：**平移法**（利用平行四边形对边平移），**截取法**，**等线段代换法**等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）$DE+DF=AB$，理由如下：

$\because DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形．$\therefore DF=AE$.

又 $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because DE \parallel AC$，$\therefore \angle C=\angle EDB$.

$\therefore \angle B=\angle EDB$. $\therefore BE=DE$. $\therefore DE+DF=BE+AE=AB$.

（2）如图 18.1−42，若点 D 在 BC 的延长线上，则（1）中的结论不成立，正确结论是 $DE-DF=AB$，理由如下：

$\because DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $AFDE$ 是平行四边形．$\therefore DF=AE$.

$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，$\therefore \angle B=\angle ACB$.

又 $\because DE \parallel AC$，$\therefore \angle ACB=\angle EDB$.

$\therefore \angle EDB=\angle B$. $\therefore DE=BE$.

$\therefore DE-DF=BE-AE=AB$.

技巧点拨

变换之中找不变

探索问题（2）的求解思路时可以类比问题（1）的求解思路，对比观察两个图形，探索问题（2）的结论．

拔尖角度▸ 6 利用“动中求静”法探究动点问题

挑战·高分

例 13 如图 18.1−43，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BC=18$ cm，$CD=15$ cm，$AD=10$ cm，$AB=12$ cm，动点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 3 cm/s 的速度由 C 向 B 运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动．

（1）几秒时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长；

（2）几秒时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长．

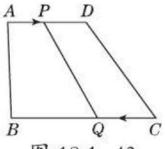


图 18.1−43

解法提醒

解决动点问题的基本思路就是变“动”为“静”，要用“静”去理解“动”．本题中，若设运动的时间为 t s，则 $AP=2t$ cm，$CQ=3t$ cm，用含 t 的式子表示相关线段的长，利用平行四边形的性质列方程即可求得 t 的值．

解题秘方：紧扣条件中有“一组对边平行”，由平行四边形的判定方法可知只需补充这组对边相等这一条件即可，再由运动的路程、速度、时间的关系表示出相关线段的长度，从而可列出方程进行求解．

解：（1）设 x s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，则 $10-2x=3x$，解得 $x=2$.

所以 2 s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，

此时四边形 $PDCQ$ 的周长是 $3\times2\times2+15\times2=42$（cm）．

（2）设 y s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，

则 $2y=18-3y$，解得 $y=3.6$.

所以 3.6 s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，

此时四边形 $ABQP$ 的周长是 $3.6\times2\times2+12\times2=38.4$（cm）．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 平行四边形的判定定理与三角形中位线定理是中考的重要内容，命题形式灵活多样，既有选择题、填空题，又有综合题，还常与平行四边形的性质定理综合在一起进行考查，在近几年的中考中，和平行四边形（三角形的中位线）有关的开放题、探索题逐渐成为中考的热点.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用全等三角形判定平行四边形

例 14 [中考·咸宁]如图 18.1-44，点 B、E、C、F 在一条直线上，$AB=DF$，$AC=DE$，$BE=FC$.

（1）求证：$\triangle ABC \cong \triangle DFE$；

（2）连接 AF，BD，求证：四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

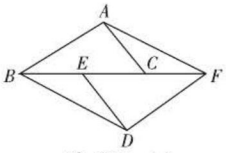


图 18.1-44

试题评析：本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定与性质、平行线的判定；熟练掌握平行四边形的判定方法，证明三角形全等是解决问题的关键.

思路点拨
1. 由 SSS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ 即可；
2. 由全等三角形的性质得出 $\angle ABC=\angle DFE$，证出 $AB \parallel DF$，即可得出结论.

证明：（1）$\because BE=FC$，

$\therefore BC=EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，$\begin{cases} AB=DF, \\ AC=DE, \\ BC=EF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE$.

（2）由（1）知 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$，

$\therefore \angle ABC=\angle DFE$，$\therefore AB \parallel DF$.

$\because AB=DF$，

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

考法 2 利用平行四边形的性质和判定解与勾股定理综合问题

例 15 [中考·鄂州]如图 18.1-45，$\square ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A，C 两点作 $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E，F，延长 AE，CF 分别交 CD，AB 于 M，N.

（1）求证：四边形 $CMAN$ 是平行四边形.

（2）已知 $DE=4$，$FN=3$，求 BN 的长.

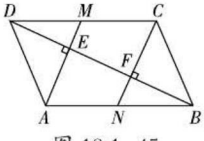


图 18.1-45

思路点拨
1. 只要证明 $CM \parallel AN$，$AM \parallel CN$ 即可.
2. 先证明 $\triangle MDE \cong \triangle NBF$，可得 $ME=NF$，再在 $Rt\triangle DEM$ 中，利用勾股定理即可解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查平行四边形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是记住平行四边形的判定方法和性质，正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CD \parallel AB$.

∵ $AM \perp BD$，$CN \perp BD$，

∴ $AM \parallel CN$，

∴四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

（2）**解**：∵四边形 $AMCN$ 是平行四边形，

∴ $CM=AN$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CD=AB$，$CD \parallel AB$，

∴ $DM=BN$，$\angle MDE=\angle NBF$.

在△ MDE 和△ NBF 中，

$$\begin{cases}\angle MDE=\angle NBF,\\ \angle DEM=\angle NFB=90^\circ,\\ DM=BN,\end{cases}$$

∴△ $MDE \cong$△ NBF.

∴ $ME=NF=3$.

在 Rt△ DME 中，

∵$\angle DEM=90^\circ$，$DE=4$，$ME=3$，

∴ $DM=\sqrt{DE^2+ME^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴ $BN=DM=5$.

考法 3 利用平行四边形的判定和性质解与等腰三角形、勾股定理综合问题

例 16 [中考·大庆]如图 18.1-46，以 BC 为底边的等腰△ ABC，点 D，E，G 分别在 BC，AB，AC 上，且 $EG \parallel BC$，$DE \parallel AC$，延长 GE 至点 F，使得 $BE=BF$.

（1）求证：四边形 $BDEF$ 为平行四边形；

（2）当 $\angle C=45^\circ$，$BD=2$ 时，求 D，F 两点间的距离.

试题评析：本题考查了平行四边形的判定与性质、等腰三角形的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理等知识；熟练掌握平行四边形的判定与性质和勾股定理是解决问题的关键.

（1）**证明**：∵△ ABC 是等腰三角形，

∴ $\angle ABC=\angle C$.

∵ $EG \parallel BC$，$DE \parallel AC$，

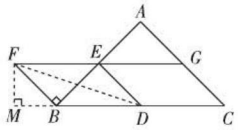


图 18.1-46

技巧点拨

平行四边形的判定方法有很多种，解题时要注意灵活选用，尽量选使解题过程简便的方法，本题也可借助△ $ADM \cong$△ CBN 推出 $CM=AN$，结合 $CM \parallel AN$ 证明四边形 $CMAN$ 是平行四边形.

思路点拨

1. 由等腰三角形的性质得出∠ABC=∠C，证出∠AEG=∠ABC=∠C，四边形CDEG是平行四边形，得出∠DEG=∠C，证出∠BFE=∠DEG，得出BF∥DE，即可得出结论；

2. 证出△BDE、△BEF是等腰直角三角形，由勾股定理得出 $BF=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$，作FM⊥BD交DB的延长线于M，连

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AEG=\angle ABC=\angle C$，四边形 $CDEG$ 是平行四边形．

$\therefore \angle DEG=\angle C$.

$\because BE=BF$，

$\therefore \angle BFE=\angle BEF=\angle AEG$，

$\therefore \angle BFE=\angle DEG$.

$\therefore BF /\!/ DE$.

又 $\because FE /\!/ BD$，

∴四边形 $BDEF$ 为平行四边形．

（2）**解**：$\because DE /\!/ AC$，$\angle C=45°$，

$\therefore \angle BDE=\angle C=\angle ABC=\angle BFE=\angle BEF=45°$，

∴△ BDE、△ BEF 是等腰直角三角形，

$\therefore BF=BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$．

作 $FM\perp BD$ 交 DB 的延长线于 M，连接 DF，如图 18.1−46 所示．

则△ BFM 是等腰直角三角形，

$\therefore FM=BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BF=1$，

$\therefore DM=3$.

在 Rt △ DFM 中，由勾股定理得 $DF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

即 D，F 两点间的距离为 $\sqrt{10}$．

考法 4 利用三角形的中位线求角的度数

例 17 ［中考·黔南州］如图 18.1−47，在四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 的中点，E、F 分别是 AB、CD 的中点，$AD=BC$，$\angle FPE=100°$，则 $\angle PFE$ 的度数是_____.

试题评析：本题考查的是三角形中位线定理的应用，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键．

解：$\because P$ 是对角线 BD 的中点，E 是 AB 的中点，

$\therefore EP=\dfrac{1}{2}AD$.

同理 $FP=\dfrac{1}{2}BC$.

$\because AD=BC$，

$\therefore PE=PF$，

$\therefore \angle PFE=\angle PEF$.

$\because \angle FPE=100°$，

$\therefore \angle PFE=40°$．

答案：40°

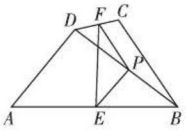


图 18.1−47

思路点拨

根据三角形中位线定理得到 $EP=\dfrac{1}{2}AD$，$FP=\dfrac{1}{2}BC$，得到 $PE=PF$，根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理计算即可．

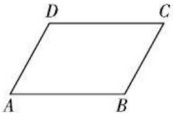
接 DF，则△BFM 是等腰直角三角形，由勾股定理得出 $FM=BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BF=1$，得出 DM=3，在 Rt△DFM 中，由勾股定理求出 DF 即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

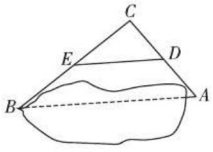
1. [中考·衡阳]如图，在四边形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，要使四边形$ABCD$是平行四边形，可添加的条件不正确的是（　　）

A.$AB=CD$　　B.$BC \parallel AD$

C.$\angle A=\angle C$　　D.$BC=AD$



（第1题）



（第3题）

2. [中考·黔西南州]四边形$ABCD$中，$AB=CD$，$AB \parallel CD$，则下列结论中错误的是（　　）

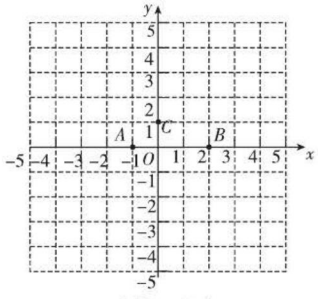
A.$\angle A=\angle C$　　B.$AD \parallel BC$

C.$\angle A=\angle B$　　D. 对角线互相平分

3. [中考·宜昌]如图，要测定被池塘隔开的A，B两点的距离，可以在AB外选一点C，连接AC，BC，并分别找出它们的中点D，E，连接DE，现测得$AC=30\text{m}$，$BC=40\text{m}$，$DE=24\text{m}$，则$AB=$（　　）

A. 50m　　B. 48m　　C. 45m　　D. 35m

4. [模拟·桥西区]如图，在平面直角坐标系中，以$A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,1)$为顶点构造平行四边形，下列不能作为平行四边形顶点坐标的是（　　）



（第4题）

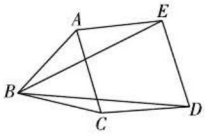
A.$(3,\ 1)$　　B.$(-4,\ 1)$

C.$(1,\ -1)$　　D.$(-3,\ 1)$

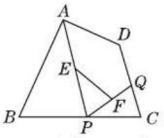
5. [中考·黄石]如图，已知凸五边形$ABCDE$的边长均相等，且$\angle DBE=\angle ABE+\angle CBD$，$AC=1$，则$BD$必定满足（　　）

A. $BD<2$　　B. $BD=2$

C. $BD>2$　　D. 以上情况均有可能



（第5题）



（第6题）

6. 如图，在四边形$ABCD$中，Q是CD上的一定点，P是BC上的一动点，点E，F分别是PA，PQ的中点. 当点P在BC上移动时，线段EF的长度（　　）

A. 先变大，后变小

B. 保持不变

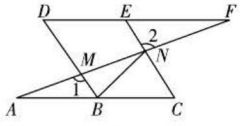
C. 先变小，后变大

D. 逐渐变大

7. [中考·镇江]如图，点B、E分别在AC、DF上，AF分别交BD、CE于点M、N，$\angle A=\angle F$，$\angle 1=\angle 2$.

（1）求证：四边形$BCED$是平行四边形；

（2）已知$DE=2$，连接BN，若BN平分$\angle DBC$，求CN的长.

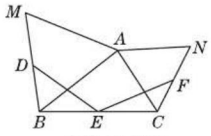


（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，已知△ABC是锐角三角形，分别以AB，AC为边向外侧作等边三角形ABM和等边三角形CAN. 点D，E，F分别是MB，BC，CN的中点，连接DE，FE.

求证：$DE=EF$.

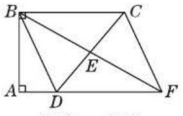


（第8题）

9. [**中考·宿迁**]如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle ABC=90°$，$AD=1$，$BC=3$，E是边CD的中点，连接BE并延长与AD的延长线相交于点F.

（1）求证：四边形$BDFC$是平行四边形；

（2）若△BCD是等腰三角形，求四边形$BDFC$的面积.

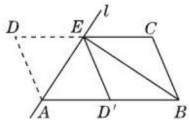


（第9题）

10. [**中考·扬州**]如图，将▱$ABCD$沿过点A的直线l折叠，使点D落到AB边上的点D'处，折痕l交CD边于点E，连接BE.

（1）求证：四边形$BCED'$是平行四边形；

（2）若BE平分$\angle ABC$，求证：$AB^2=AE^2+BE^2$.

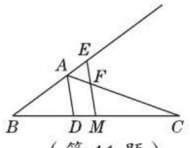


（第10题）

11. [**中考·淄博**]如图，已知△ABC，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，BC的中点为M，$ME\parallel AD$，交BA的延长线于点E，交AC于点F.

（1）求证：$AE=AF$；

（2）求证：$BE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.



（第11题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

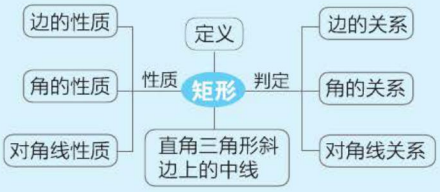
18.2 特殊的平行四边形

18.2.1 矩形

核心知识

- 矩形的定义
- 矩形的性质
- 直角三角形斜边上的中线
- 矩形的判定

知识链接

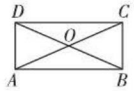


点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 矩形的定义及其性质

1. **定义**：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

2. **性质**：矩形的性质如下表：

图形	性质	数学表达式
	矩形的四个角都是直角	∵四边形 $ABCD$ 是矩形， ∴∠ DAB= ∠ DCB= ∠ ADC= ∠ ABC=90°
	矩形的对角线相等	∵四边形 $ABCD$ 是矩形， ∴ AC=BD，AO=OC=OB=OD
	矩形是轴对称图形，它有两条对称轴	

特别提醒：1. 利用矩形的性质可以证明线段相等或倍分关系、直线平行、角相等等.

2. 矩形的一条对角线把矩形分成两个直角三角形，矩形的两条对角线将矩形分成两对全等的等腰三角形，分成四个面积相等的等腰三角形，因此有关矩形的计算问题经常通过转化到直角三角形和等腰三角形中来解决.

提分·必记

特别提醒

1. 矩形必须具备两个条件：（1）它是一个平行四边形；（2）它有一个角是直角，这两个条件缺一不可.
2. 由矩形的定义知，矩形一定是平行四边形，但平行四边形不一定是矩形. 矩形的定义可以作为判定一个四边形是矩形的一种方法.

拨考向▸ 利用矩形的定义与性质解相关问题

题型 1：矩形的定义在判断矩形中的应用

例 1 如图 18.2-1 所示，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别为 BC 边上的点，且 BE=CF，AF=DE，求证：▱$ABCD$ 是矩形.

解题秘方：紧扣矩形定义的“两个条件”进行证明.

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ AB=CD，∠ B+ ∠ C = 180° .

∵ BE=CF，∴ BE+EF=CF+EF，即 BF=CE.

又∵ AF=DE，∴△ ABF ≌△ DCE.

∴∠ B= ∠ C=90° . ∴▱$ABCD$ 是矩形.

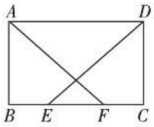


图 18.2-1

提分·秘诀

解法提醒

由定义来判定矩形，要在平行四边形的前提下，判定有一个角是90°，若在四边形的前提下，则需先证平行四边形，再判定有一个角是90°，矩形的定义既是矩形的性质也是矩形的判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：矩形的性质在计算中的应用

例 2 如图 18.2−2 所示，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle BOC=120°$，$AB=6$.

求：（1）对角线的长；

（2）BC 的长；

（3）矩形 $ABCD$ 的面积.

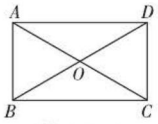


图 18.2−2

解题秘方：紧扣矩形的“角、对角线的性质”进行计算.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC=BD$，$OA=OC=OB=OD$.

又∵$\angle BOC=120°$，∴$\angle AOB=60°$，

∴△ AOB 是等边三角形，

∴ $OA=AB=6$，

∴ $BD=AC=2OA=2\times6=12$.

（2）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$\angle ABC=90°$.

∴ $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

（3）$S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=6\times6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$.

解法提醒

1. 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.
2. 矩形的两条对角线把矩形分成四个等腰三角形；另外，矩形的对角线与两邻边构成四个直角三角形，矩形中的有关计算通常需要用到等腰三角形的性质或直角三角形的有关知识来解决.

知识▸2 直角三角形斜边上的中线的性质

提分·必记

1. 直角三角形斜边上的中线的性质：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

数学表达式：如图 18.2−3，在 Rt△ ABC 中，

∵$\angle ACB=90°$，$AD=BD$，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB$（或 $CD=AD=BD$）.

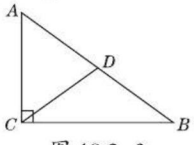


图 18.2−3

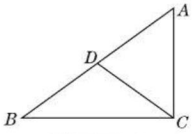


图 18.2−4

说明：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，是根据矩形的两条对角线相等且互相平分推导出来的. 将矩形沿某条对角线剪掉一半，剩下的一半就是直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的模型.

特别提醒

1. 直角三角形斜边上的中线把直角三角形分成两个面积相等的等腰三角形.
2. 此性质与“直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半”都是解决线段倍分关系的重要依据，但后者只在含 30° 角的直角三角形中才成立，而“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”适用于所有直角三角形，更具一般性.

2. 直角三角形斜边上的中线的性质的逆命题：

如果三角形一边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

数学表达式：如图 18.2−4，在△ ABC 中，

∵ $CD=BD=AD=\frac{1}{2}AB$. ∴$\angle ACB=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用直角三角形斜边上中线的性质证明线段垂直

例 3 如图 18.2−5，BD，CE 是△ABC 的两条高，M，N 分别是 BC，DE 的中点．

求证：$MN \perp DE$.

解题秘方：紧扣“N 为 DE 中点这一条件，$MN \perp DE$ 这一结论”，联想建立等腰三角形“三线合一”模型，结合直角三角形斜边上中线的性质求解．

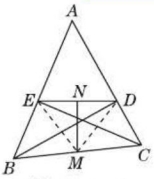


图 18.2−5

证明：连接 EM，DM，如图 18.2−5.

∵ BD，CE 为△ABC 的两条高，

∴ $BD \perp AC$，$CE \perp AB$，

∴ $\angle BEC = \angle CDB = 90°$.

在 Rt△BEC 中，

∵ M 为斜边 BC 的中点，

∴ $EM = \frac{1}{2} BC$.

在 Rt△CDB 中，

∵ M 为斜边 BC 的中点，

∴ $DM = \frac{1}{2} BC$.

∴ $EM = DM$.

又∵ N 为 DE 的中点，

∴ $MN \perp DE$.

技巧点拨

1. 若题目中出现了一边的中点，往往需要用到中线，若又有直角，往往需要用到直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质．
2. 在直角三角形中，遇到斜边的中点常作斜边上的中线，从而利用直角三角形斜边上的中线的性质把问题转化为等腰三角形的问题，利用等腰三角形的性质解决．

点知识▶3 矩形的判定

1. 判定定理 1：对角线相等的平行四边形是矩形．

数学表达式：如图 18.2−6，在▱$ABCD$ 中，$AC = BD$，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形．

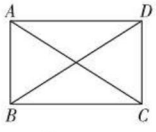


图 18.2−6

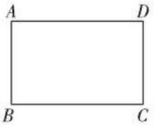


图 18.2−7

2. 判定定理 2：有三个角是直角的四边形是矩形．

数学表达式：如图 18.2−7，

在四边形 $ABCD$ 中，

$\angle A = \angle B = \angle C = 90°$ ，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形．


矩形的判定

特别提醒

1. 矩形的判定和性质互为逆定理．
2. 矩形判定的常见思路

从角上证明：

（1）四边形 —有三个直角→ 矩形，

（2）平行四边形 —有一个直角→ 矩形．

从对角线上证明：

（1）平行四边形 —对角线相等→ 矩形；

（2）四边形 —对角线互相平分且相等→ 矩形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用矩形的判定方法判定矩形

题型1：对角线的相等关系在判定矩形中的应用

例4 如图18.2-8，在四边形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，E，F两点在边BC上，$AB \parallel DE$，$AF \parallel DC$，且四边形$AEFD$是平行四边形.

（1）AD与BC有何数量关系？请说明理由.

（2）当$AB=DC$时，求证：$\square AEFD$是矩形.

解题秘方：紧扣“平行四边形”这一前提，从“对角线相等”入手（或有一直角入手）进行证明.

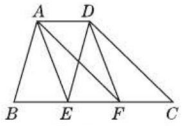


图18.2-8

（1）**解**：$BC=3AD$. 理由如下：

$\because AD \parallel BC$，$AB \parallel DE$，$AF \parallel DC$，

$\therefore$四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形，

$\therefore AD=BE$，$AD=FC$.

又$\because$四边形$AEFD$是平行四边形，$\therefore AD=EF$，

$\therefore AD=BE=EF=FC$，$\therefore BC=3AD$.

（2）**证明**：$\because$四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形，

$\therefore DE=AB$，$AF=DC$.

又$\because AB=DC$，$\therefore DE=AF$.

又$\because$四边形$AEFD$是平行四边形，

$\therefore$四边形$AEFD$是矩形.

题型2：角的关系在判定矩形中的应用

例5 如图18.2-9，$\square ABCD$的四个内角的平分线分别相交于点E，F，G，H.

求证：四边形$EFGH$是矩形.

解题秘方：题中条件是建立在四边形基础上，且都与角相关，可从证直角入手进行判定.

证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$，

$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180°$.

$\because BG$平分$\angle ABC$，CG平分$\angle BCD$，

$\therefore \angle GBC+\angle GCB=$

$\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCD)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

$\therefore \angle BGC=90°$.

同理可得$\angle AFB=\angle AED=90°$，

$\therefore \angle GFE=\angle FEH=\angle FGH=90°$，

$\therefore$四边形$EFGH$是矩形.

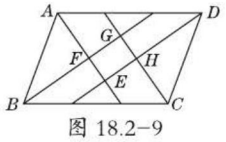


图18.2-9

提分·秘诀

方法点拨

证明一个平行四边形为矩形的两种方法：

一种是证明有一个角是直角，

另一种是证明两条对角线相等.

本例的证法采用的是对角线相等的方法. 若采用有一个角是直角的方法，可证$DE=DC$，$EF=FC$，利用等腰三角形“三线合一”可得$\angle DFE=90°$. 用这种方法证明请读者独立完成.

思路点拨

要判定一个四边形是矩形，通常选用“有三个角是直角的四边形是矩形”来证明；也可以先判定它是平行四边形，再根据平行四边形成为矩形应满足的条件，证明有一个角是直角或对角线相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用折叠法解矩形中的计算问题

例 6 如图 18.2−10 所示，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，点 C 的对应点为点 C'，BC' 与 AD 交于点 E. 若 $AD=8$ cm，$AB=4$ cm，求△ BDE 的面积.

解题秘方：先将求面积问题转化为求 DE 的长的问题；再紧扣折叠中角的不变性，由三角形的边角关系将求 DE 的长转化成求 BE 的长，这样就将要求的边与已知边都集中在同一个三角形中进行求解.

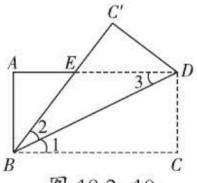


图 18.2−10

解：设 $DE=x$ cm，则 $AE=(8-x)$ cm.

由折叠的性质知△ BCD 与△ $BC'D$ 全等，

则∠ 1= ∠ 2.

在矩形 $ABCD$ 中，∵ $AD \parallel BC$，

∴∠ 1= ∠ 3，

∴∠ 2= ∠ 3，

∴ $BE=DE=x$ cm.

在 Rt △ ABE 中，由勾股定理，

得 $BE^2=AB^2+AE^2$，

即 $x^2=4^2+(8-x)^2$，

解得 $x=5$.

尽量将数量关系集中到同一个直角三角形中利用勾股定理列方程求解.

∴△ BDE 的面积为 $\frac{1}{2}DE\cdot AB=\frac{1}{2}\times5\times4=10\ (\text{cm}^2)$.

挑战·高分

解法提醒

解决矩形折叠问题的方法

1. 利用折叠的性质：折叠前后的图形能够完全重合，折叠前后的图形对应边相等，对应角相等.
2. 此类问题往往通过图形间的折叠找出折叠部分与原图形中线段或角的关系，从而得到折叠部分与原图形或其他图形中线段或角的关系.

拔尖角度▸ 2 利用计算法判定图形的形状

例 7 [探究题]如图 18.2−11，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=5$，E，P 分别在 AD，BC 上，且 $DE=BP=1$，AP，BE 相交于点 H，CE，DP 相交于点 F.

（1）判断△ BEC 的形状，并说明理由；

（2）判断四边形 $EFPH$ 是什么特殊四边形，并证明你的判断.

解题秘方：紧扣勾股定理的逆定理，通过计算得出三角形三边平方关系，从而得出∠ $BEC=90°$.

解：（1）△ BEC 是直角三角形，且∠ $BEC=90°$.

理由：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴∠ $ADC=$ ∠ $EAB=90°$，$AD=BC=5$，$CD=AB=2$.

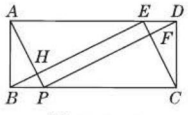


图 18.2−11

挑战·高分

思路点拨

1. 根据矩形的性质得出 $AD=5$，$CD=2$，根据勾股定理求出 CE 和 BE，进而求出 CE^2+BE^2，BC^2，根据勾股定理的逆定理判断即可；
2. 根据矩形的性质和平行四边形的判定，推出四边形 $DEBP$ 和四边形 $AECP$ 都是平行四边形，进而推出四边形 $EFPH$ 是平行四

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $DE=1$，∴ $AE=4$.

由勾股定理得 $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

∴ $CE^2+BE^2=5+20=25$.

∵ $BC^2=5^2=25$，∴ $BE^2+CE^2=BC^2$，

∴△ BEC 是直角三角形，且∠ $BEC=90°$.

（2）四边形 $EFPH$ 为矩形.

证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD=BC$，$AD\parallel BC$.

∴ $DE\parallel BP$.

∵ $DE=BP$，∴四边形 $DEBP$ 是平行四边形，

∴ $BE\parallel DP$.

∵ $AD=BC$，$AD\parallel BC$，$DE=BP$，∴ $AE=CP$，$AE\parallel CP$，

∴四边形 $AECP$ 是平行四边形，

∴ $AP\parallel CE$，∴四边形 $EFPH$ 是平行四边形.

∵∠ $BEC=90°$，

∴四边形 $EFPH$ 是矩形.

拔尖角度▸ 3 利用逆向思维法解确定矩形条件问题

挑战·高分

例 8 如图 18.2-12，在△ ABC 中，点 O 是 AC 边上一动点，过点 O 作直线 $MN\parallel BC$，设 MN 交∠ BCA 的平分线于点 E，交∠ ACH 的平分线于点 F.

（1）证明：$EO=FO$；

（2）当点 O 运动到何处时，四边形 $AECF$ 是矩形？简要说明理由.

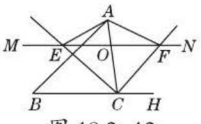


图 18.2-12

解题秘方：（1）紧扣“三角形的边角关系”说明 OE、OF 都等于 OC 即可；

（2）紧扣“$OE=OF$”这一条件，只需说明 $OA=OC$ 即可得出平行四边形，结合矩形的定义解答.

（1）**证明**：∵ $MN\parallel BC$，∴∠ $CEO=$∠ ECB.

∵ CE 是∠ BCA 的平分线，

∴∠ $ECO=$∠ ECB，∴∠ $CEO=$∠ ECO，

∴ $EO=OC$，同理 $FO=OC$. ∴ $EO=FO$.

（2）**解**：当点 O 运动到 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下：由（1）知 $OE=OF$.

又∵ $AO=CO$，∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∵ $OE=OC$，∴ $AC=EF$，∴四边形 $AECF$ 是矩形.

解法提醒

求点 O 运动到何处时四边形 AECF 是矩形，可以先把矩形当作已知条件，求出 O 点与 AC 的位置关系，然后将这个位置关系作为需添加的条件，经过说理，证明四边形 AECF 是矩形. 这种逆向思维的方法是条件探索题的一般解题思路.

边形，再根据矩形的判定即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用数形结合法解动点问题

挑战·高分

例 9 如图 18.2−13 ①所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=24$ cm，$BC=10$ cm，点 P 从 A 开始沿 AB 边以 4 cm/s 的速度运动，点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 2 cm/s 的速度运动，如果点 P，Q 分别从 A，C 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动，设运动时间为 ts.

（1）当 $t=2$ 时，求 P，Q 两点之间的距离.

（2）当 t 为何值时，线段 AQ 与 DP 互相平分?

（3）当 t 为何值时，四边形 $APQD$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{8}$?

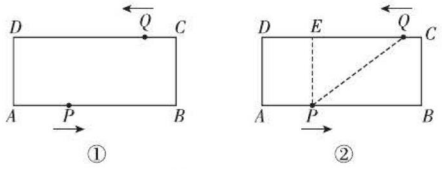


图 18.2−13

解题秘方：将运动过程中某一时刻动点的运动距离转化为几何图形的条件或满足几何图形条件时动点需运动的距离作为条件进行解答.

解：（1）如图 18.2−13②所示，连接 PQ，过点 P 作 $PE\perp DQ$ 于点 E. 则 $DE=AP$，$PE=BC$.

∵点 P 从 A 开始沿 AB 边以 4 cm/s 的速度运动，点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 2 cm/s 的速度运动，

∴当 $t=2$ 时，$QC=4$ cm，$AP=8$ cm.

在矩形 $ABCD$ 中，$DC=AB=24$ cm，

∴ $DQ=DC-QC=20$ cm，则 $EQ=12$ cm，

∴ $PQ=\sqrt{QE^2+PE^2}=\sqrt{12^2+10^2}=2\sqrt{61}$（cm）.

（2）$AP=4t$ cm，$DQ=(24-2t)$ cm，

当线段 AQ 与 DP 互相平分时，四边形 $APQD$ 为矩形，

则 $AP=DQ$，即 $4t=24-2t$，解得 $t=4$.

故当 t 为 4 时，线段 AQ 与 DP 互相平分.

（3）∵ P 在 AB 上，

∴ $S_{四边形APQD}=\frac{1}{2}(AP+DQ)\cdot AD=\frac{1}{2}(4t+24-2t)\times 10=(10t+120)$（cm^2）（$0<t\leqslant 6$）.

∵ $S_{矩形ABCD}=10\times 24=240$（cm^2），

∴ $10t+120=\frac{5}{8}\times 240$，解得 $t=3$，

∴当 t 为 3 时，四边形 $APQD$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{8}$.

解法提醒

解决动态几何探究题的关键：

抓住点在运动过程中的一个瞬间（或一个确定的位置），动中取静，如本例(1)求PQ的长时，可构造直角三角形，利用勾股定理求解.(2)中AQ与DP互相平分，只需保证四边形APQD是平行四边形即可，结合四边形ABCD是矩形可判断此时四边形APQD是矩形，用含t的式子分别表示AP，DQ的长，列出方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用矩形的性质和判定解决问题是中考命题的重点，题型较全，有难度不大的选择题、填空题，也有与其他知识相结合的证明题、解答题.

三年中考兵法

考法 1 利用面积法求矩形中线段的长

例 10 [中考·陕西]如图 18.2-14，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，若点 E 是边 CD 的中点，连接 AE，过点 B 作 $BF\perp AE$ 交 AE 于点 F，则 BF 的长为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

试题评析：本题考查矩形的性质、勾股定理、三角形的面积公式等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会用面积法解决有关线段问题，属于中考常考题型.

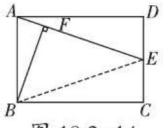


图 18.2-14

解：如图 18.2-14，连接 BE.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB=CD=2$，$BC=AD=3$，$\angle D=90^\circ$，

∴ $DE=1$.

在 Rt△ADE 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

∵ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=3=\frac{1}{2}AE\cdot BF$，∴ $BF=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

答案：B

考法 2 利用三角形的相关性质求矩形中线段的长

例 11 [中考·西宁]如图 18.2-15，点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点，$OM\parallel AB$ 交 AD 于点 M，若 $OM=3$，$BC=10$，则 OB 的长为（　　）

A.5　　B.4　　C. $\frac{\sqrt{34}}{2}$　　D. $\sqrt{34}$

试题评析：本题考查了矩形的性质，勾股定理，直角三角形斜边上中线的性质以及三角形的中位线的应用，解此题的关键是求出 AC 的长.

解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$\angle D=90^\circ$.

∵ O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点，$OM\parallel AB$，∴ OM 是△ADC 的中位线.

∵ $OM=3$，∴ $DC=6$.

∵ $AD=BC=10$，∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{34}$，

∴ $BO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{34}$.

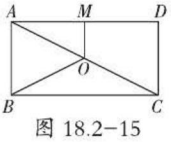


图 18.2-15

答案：D

冲刺·满分

解法提醒

面积法求垂线段长在解题中有较多的应用，特别是在特殊四边形中应用更广泛，本例先用勾股定理求 AE，然后借助矩形面积和三角形面积的关系：$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$，即 $\frac{1}{2}AE\cdot BF=3$，即可求出 BF.

思路点拨

易知 OM 是△ADC 的中位线，再结合已知条件可求出 DC 的长，所以利用勾股定理可求出 AC 的长，由直角三角形斜边上中线的性质可求出 BO 的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用矩形的判定和性质探求矩形的条件

例 12 [中考·徐州]如图 18.2-16，在□$ABCD$中，点O是边BC的中点，连接DO并延长，交AB的延长线于点E，连接BD，EC.

（1）求证：四边形$BECD$是平行四边形；

（2）若$\angle A=50°$，则当$\angle BOD=$_____°时，四边形$BECD$是矩形.

试题评析：此题主要考查了矩形的判定、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识；熟练掌握平行四边形的判定与性质是解决问题的关键.

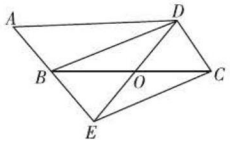


图 18.2-16

（1）**证明**：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$AB\parallel DC$，$AB=CD$，∴$\angle OEB=\angle ODC$.

又∵O为BC的中点，∴$BO=CO$，

在△BOE和△COD中，$\begin{cases}\angle OEB=\angle ODC,\\ \angle BOE=\angle COD,\\ BO=CO,\end{cases}$

∴△$BOE\cong$△COD（AAS）.∴$OE=OD$，

∴四边形$BECD$是平行四边形.

（2）**解**：若$\angle A=50°$，则当$\angle BOD=100°$时，四边形$BECD$是矩形，理由如下：

∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$\angle BCD=\angle A=50°$.

∵$\angle BOD=\angle BCD+\angle ODC$，

∴$\angle ODC=100°-50°=50°=\angle BCD$，∴$OC=OD$.

∵$BO=CO$，$OD=OE$，∴$DE=BC$.

∵四边形$BECD$是平行四边形，∴四边形$BECD$是矩形.

答案：100

思路点拨

1. 由AAS证明△BOE≌△COD，得出OE=OD，即可得出结论；
2. 由平行四边形的性质得出∠BCD=∠A=50°，由三角形的外角性质求出∠ODC=∠BCD，得出OC=OD，证出DE=BC，即可得出结论.

两年模拟兵法 答案见 277 页

1. [期末·马山]矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是（　　）

A. 对角相等

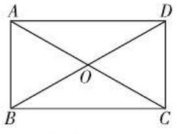
B. 对边相等

C. 对角线相等

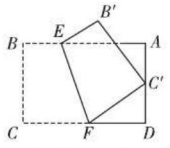
D. 对角线互相平分

2. [中考·怀化]如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$\angle AOB=60°$，$AC=6$cm，则AB的长是（　　）

A.3cm　　B.6cm　　C.10cm　　D.12cm



（第 2 题）



（第 3 题）

3. [中考·葫芦岛]如图，将矩形纸片$ABCD$沿直线EF折叠，使点C落在AD边的中点C'处，点B落在点B'处，其中$AB=9$，$BC=6$，则FC'的长为（　　）

A. $\frac{10}{3}$　　B.4　　C.4.5　　D.5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

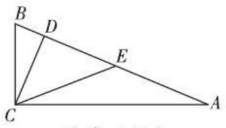
4.[中考·大连]如图，在△ABC中，∠ACB=90°，$CD\perp AB$，垂足为D，点E是AB的中点，$CD=DE=a$，则AB的长为（　　）

A.$2a$

B.$2\sqrt{2}a$

C.$3a$

D.$\frac{4\sqrt{3}}{3}a$



（第4题）

5.[中考·上海]已知平行四边形$ABCD$，AC、BD是它的两条对角线，那么下列条件中，能判断这个平行四边形为矩形的是（　　）

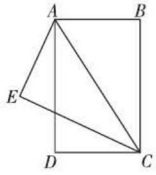
A.∠BAC=∠DCA　　B.∠BAC=∠DAC

C.∠BAC=∠ABD　　D.∠BAC=∠ADB

6.[中考·日照]如图，已知$BA=AE=DC$，$AD=EC$，$CE\perp AE$，垂足为E.

（1）求证：△DCA≌△EAC；

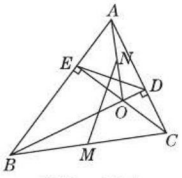
（2）只需添加一个条件，即_____，可使四边形$ABCD$为矩形，请加以证明.



（第6题）

7.如图，已知BD，CE是△ABC的两条高，M，N分别为BC，AO的中点.

求证：MN垂直平分DE.

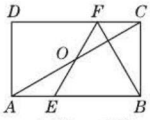


（第7题）

8.如图，在矩形$ABCD$中，E，F分别是AB，CD上的点，$AE=CF$，连接EF，BF，EF与对角线AC交于点O，且$BE=BF$，∠BEF=2∠BAC.

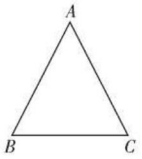
（1）求证：$OF=OE$；

（2）若$FC=2$，求AB的长.



（第8题）

9.如图是一块等腰三角形的小钢板下脚料，其中$AB=AC$，工人师傅要将它做适当的切割，重新拼接后焊成一个面积与原下脚料面积相等的矩形工件，请根据上述要求，设计出将这块下脚料分割成两块或三块的两种不同的拼接方案（在图中用虚线画出切割线，并画出拼接后得到的矩形，保留拼接的痕迹）.　　【导学号：8592074】

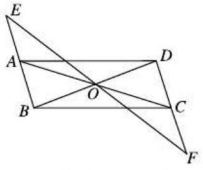


（第9题）

10.如图，▱$ABCD$中，点O是AC与BD的交点，过点O的直线与BA，DC的延长线分别交于点E，F.

（1）求证：△AOE≌△COF.

（2）请连接EC，AF，则EF与AC满足什么条件时，四边形$AECF$是矩形？并说明理由.



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.2.2 菱形

核心知识

- 菱形的定义
- 菱形的性质
- 菱形的判定

知识链接

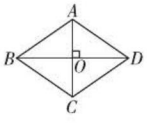


点知识·拨考向 速提分

点知识 1 菱形的定义及其性质

1. **定义**：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

2. **性质如下表**：

图形	性质	数学表达式
	菱形的四条边都相等	∵四边形 $ABCD$ 是菱形， ∴ $AB=BC=CD=AD$
	菱形的两条对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角	∵四边形 $ABCD$ 是菱形， ∴ $BD \perp AC$， $\angle DAC=\angle BAC$， $\angle ACD=\angle ACB$， $\angle ABD=\angle CBD$， $\angle ADB=\angle CDB$
	菱形是轴对称图形，有两条对称轴	

特别提醒：（1）菱形的性质可以用来证明线段相等，角相等，直线平行、垂直以及进行相关的计算.

（2）菱形的性质与勾股定理联系，可得对角线与边之间的关系，即边长的平方等于两条对角线长一半的平方和.

（3）如果菱形的一个内角为 $60°$，那么菱形的两条边与较短的对角线构成的三角形为等边三角形.

（4）菱形的面积 = 底 × 高 = 两条对角线长乘积的一半.

3. **矩形与菱形的区别**：

（1）矩形和菱形都是建立在平行四边形的基础上，矩形是附加一直角，而菱形是附加一组邻边相等；

（2）矩形的两条对角线把矩形分割成四个面积相等的等腰三角形. 而菱形的两条对角线把菱形分割成四个全等的直角三角形；

（3）矩形的对称轴是两条过两组对边中点的直线，而菱形的对称轴是两条对角线所在的直线.

提分·必记

特别提醒

1. 菱形必须满足两个条件：一是平行四边形；二是一组邻边相等. 二者必须同时具备，缺一不可.
2. 菱形的定义既是菱形的基本性质，也是菱形的基本判定方法.


菱形的性质

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用菱形的定义和性质解相关问题

题型1：菱形的定义在判定菱形中的应用

例1 已知：如图18.2-17，在△ABC中，CD平分∠ACB交AB于点D，DE∥AC交BC于点E，DF∥BC交AC于点F. 四边形$DECF$是菱形吗？为什么？

解题秘方：紧扣定义中“两个条件”进行判断.

解：四边形$DECF$是菱形.

理由如下：

∵ DE∥FC，DF∥EC，

∴四边形$DECF$为平行四边形.

∵ AC∥DE，

∴∠2=∠3.

∵ CD平分∠ACB，∴∠1=∠2，

∴∠1=∠3，

∴ DE=EC，

∴平行四边形$DECF$为菱形（有一组邻边相等的平行四边形是菱形）.

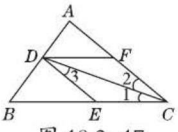


图18.2-17

题型2：菱形的性质在求角中的应用

例2 已知，如图18.2-18，在菱形$ABCD$中，E，F分别是BC，CD上的点，且∠B=∠EAF=60°，∠BAE=18°，求∠CEF的度数.

解题秘方：紧扣菱形的性质、三角形外角的性质求解.

解：如图18.2-18，连接AC.

∵四边形$ABCD$是菱形，∠B=60°，

∴ AB=BC=CD=DA，∠D=∠B=60°，

∴△ABC和△ACD为等边三角形，

∴ AB=AC，∠B=∠ACF=∠BAC=60°.

∵∠EAF=60°，∴∠BAE=∠CAF，

∴△ABE≌△ACF（ASA），

∴ AE=AF.

又∵∠EAF=60°，

∴△EAF是等边三角形，

∴∠AEF=60°.

又∵∠AEC=∠B+∠BAE=∠AEF+∠CEF，

∴ 60° +18° =60° +∠CEF，

∴∠CEF=18°.

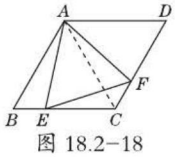


图18.2-18

在菱形中如果出现“30°”“60°”“120°”“一边等于最短对角线”这些词语时，往往都指向等边三角形，我们需用等边三角形的知识来解决.

提分·秘诀

解法提醒

菱形的定义既是菱形的性质，也是菱形的一种判定方法.

在用菱形的定义判定一个四边形是菱形时，首先判定这个四边形是平行四边形，再证一组邻边相等.

技巧点拨

在求有关菱形的角的问题时，由于菱形的每条对角线都把菱形分成两个全等的等腰三角形，因此通常通过连接**对角线**，把四边形问题**转化**为特殊三角形问题来解答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：菱形的性质在求线段长中的应用

例 3 如图 18.2−19 所示，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，H 为 AD 边的中点，菱形 $ABCD$ 的周长为 28，则 OH 的长等于（　　）

A.3.5　　B.4　　C.7　　D.14

解题秘方：紧扣菱形边的性质、两对角线性质进行解答.

解：在菱形 $ABCD$ 中，$AD=CD=BC=AB$，$AC\perp BD$，

$\therefore AD=\frac{1}{4}\times 28=7.$

$\because H$ 为 AD 边的中点，

$\therefore OH$ 为 Rt $\triangle AOD$ 斜边上的中线，

$\therefore OH=\frac{1}{2}AD=3.5.$

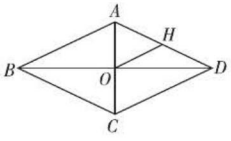


图 18.2−19

答案：A

解法提醒

菱形的两条对角线把菱形分成四个全等的直角三角形. 当题目中出现一边的中点时，往往需要用到直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质；当题目中出现了两边的中点时，往往需要用到三角形中位线的性质.

点知识 ▸ 2 菱形的判定

1. 判定定理 1：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

数学表达式：如图 18.2−20，在$\square ABCD$ 中，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC\perp BD$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

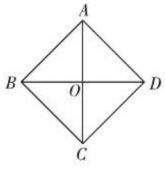


图 18.2−20

2. 判定定理 2：四条边相等的四边形是菱形.

数学表达式：如图 18.2−21，在四边形 $ABCD$ 中，

$\because AB=BC=CD=DA$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

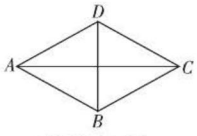


图 18.2−21

提分·必记

特别提醒

1. 菱形的判定定理和性质定理是互逆定理.

2. 判定菱形的常见思路

- 四边形
  - 四条边都相等→菱形
  - 对角线互相垂直且平分→菱形
- 平行四边形
  - 对角线互相垂直→菱形
  - 有一组邻边相等→菱形

可依据题目特点选取不同的方法.

拔考向 ▸ 利用菱形的判定定理判定菱形

题型 1：对角线关系在判定菱形中的应用

例 4 如图 18.2−22，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线 $EF\perp BD$，分别交 AD，BC 于点 E 和点 F，连接 BE，DF. 求证：四边形 $BEDF$ 是菱形.

解题秘方：紧扣对角线垂直这一条件，从判定平行四边形入手判定菱形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB=OD$，$AD\parallel BC$，

$\therefore\angle EDO=\angle FBO$，$\angle OED=\angle OFB$，

$\therefore\triangle OED\cong\triangle OFB$，$\therefore DE=BF.$

又 $\because DE\parallel BF$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\because EF\perp BD$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

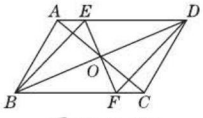


图 18.2−22

提分·秘诀

解法点拨

证明一个四边形是菱形的方法：

若已知要证的四边形的对角线互相垂直，则要考虑证明这个四边形是平行四边形，用“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”进行证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：边的关系在判定菱形中的应用

例 5 如图 18.2-23，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=CD$，点 E，F，G，H 分别是 AD，BD，BC，AC 的中点．试证明：四边形 $EFGH$ 是菱形．

解题秘方：紧扣题中中点条件与线段相等这一特征，从证四边相等入手判定菱形．

证明：∵点 E，H 分别为 AD，AC 的中点，

∴ EH 为△ ACD 的中位线，

∴ $EH=\frac{1}{2}CD$.

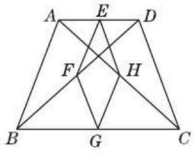


图 18.2-23

同理可得：$EF=\frac{1}{2}AB$，$FG=\frac{1}{2}CD$，$HG=\frac{1}{2}AB$.

∵ $AB=CD$，∴ $EH=EF=FG=HG$，

∴四边形 $EFGH$ 是菱形．

技巧点拨

判定菱形的方法：

1. 若用对角线进行判定：先证明四边形是平行四边形，再证明对角线互相垂直，或直接证明四边形的对角线互相垂直平分；
2. 若用边进行判定：先证明四边形是平行四边形，再证明一组邻边相等，或直接证明四边形的四条边都相等．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用面积法求菱形中线段的长

例 6 如图 18.2-24，在▱ $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AB=5$，$AC=6$，$BD=8$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H，求 AH 的长．

解题秘方：紧扣菱形的面积等于底、高的乘积或两条对角线长的积的一半进行解答．

（1）**证明**：∵在▱ $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AB=5$，$AC=6$，$BD=8$，

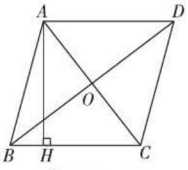


图 18.2-24

∴ $AO=\frac{1}{2}AC=3$，$BO=\frac{1}{2}BD=4$.

∵ $AB=5$，且 $3^2+4^2=5^2$，∴ $AO^2+BO^2=AB^2$.

∴△ AOB 是直角三角形，且∠ $AOB=90°$ ．∴ $AC \perp BD$.

∴四边形 $ABCD$ 是菱形．

（2）**解**：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $BC=AB=5$.

∵ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD=BC \cdot AH$，

即 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=5\times AH$，∴ $AH=\frac{24}{5}$.

挑战·高分

解法提醒

判断已知条件中涉及对角线关系的平行四边形是菱形问题，一般都采取证其对角线互相垂直来判定菱形，而用勾股定理的逆定理是证明对角线互相垂直的常用方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用特殊位置法确定点的位置

例 7 [中考·泰安]如图 18.2-25，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，E 是 CD 上一点，BE 交 AC 于 F，连接 DF.

（1）求证：$\angle BAC=\angle DAC$，$\angle AFD=\angle CFE$；

（2）若 $AB\parallel CD$，试证明：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（3）在（2）的条件下，试确定 E 点的位置，使 $\angle EFD=\angle BCD$，并说明理由.

解题秘方：用特殊位置法（E 为垂足或中点）探求确定 E 点的位置：$BE\perp CD$ 时的垂足.

（1）**证明**：在△ABC 和△ADC 中，

$$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$，$\therefore\angle BAC=\angle DAC$.

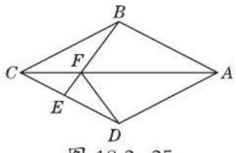


图 18.2-25

在△ABF 和△ADF 中，$\begin{cases}AB=AD,\\\angle BAF=\angle DAF,\\AF=AF,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABF\cong\triangle ADF$，$\therefore\angle AFB=\angle AFD$.

又$\because\angle AFB=\angle CFE$，$\therefore\angle AFD=\angle CFE$.

（2）**证明**：$\because AB\parallel CD$，$\therefore\angle BAC=\angle ACD$.

又$\because\angle BAC=\angle DAC$，$\therefore\angle DAC=\angle ACD$，$\therefore AD=CD$.

又$\because AB=AD$，$CB=CD$，$\therefore AB=CB=CD=AD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形.

（3）**解**：当 $BE\perp CD$ 时，$\angle EFD=\angle BCD$.

理由如下：$\because$四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore$由菱形的轴对称性得$\angle CBF=\angle CDF$.

$\because BE\perp CD$，$\therefore\angle BEC=\angle DEF=90^\circ$，

$\therefore\angle EFD=\angle BCD$.

挑战·高分

技巧点拨

探求点的位置的方法.

1. 特殊位置法：

倍分点法（含中点）和垂足法，并分别用这些点作为条件进行推理，从而找出符合条件的点.

2. 逆向思维法：

将结论作为已知条件，结合其他已知条件，推理出与要探求条件相关的结论，并用这个结论作为确定点的位置的方法.

如：本例中，（3）的结论为$\angle EFD=\angle BCD$，若将它作为条件，结合$\angle CDF=\angle CBF$，很容易得出$\angle CEB=\angle DEF$，因此需 $BE\perp CD$.

拔尖角度 3 利用对称性求菱形的最值

例 8 如图 18.2-26，菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle A=120^\circ$，点 E 是 BC 边上的动点，点 P 是对角线 BD 上的动点，若使 $PC+PE$ 的值最小，则这个最小值为_____.

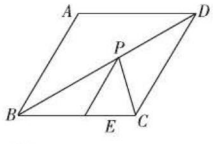


图 18.2-26

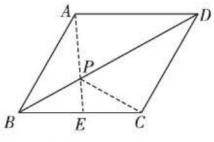


图 18.2-27

挑战·高分

解法提醒

求线段和的最小值的方法：先要通过轴对称的方式将同侧两点转化为异侧两点，再通过两点间线段最短求得两线段和的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：将菱形中的最值问题，转化为求“两点一线”的最值问题，结合菱形的对称性求解.

解：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ A，C 关于直线 BD 对称.

如图 18.2−27，连接 AE 交 BD 于点 P，连接 PC，

则 $PE+PC=PE+AP=AE$.

当 $AE\perp BC$ 时，AE 取得最小值.

∵$\angle BAD=120°$，∴$\angle ABC=60°$，

∴$\angle BAE=30°$，∴$BE=\frac{1}{2}AB=1$，

∴$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

详解

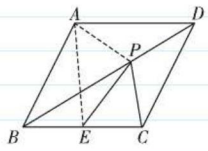


图 18.2−28

如图，在△APE 中，PE+AP>AE，因此当点 A，P，E 三点共线时，PE+AP 取得最小值，此时 PE+AP=AE.

拔尖角度▸ 4 利用动中取静法探究构成特殊四边形的条件

例 9 如图 18.2−29，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$ cm，$BC=8$ cm，点 P 从点 D 出发向点 A 运动，运动到点 A 立即停止；同时点 Q 从点 B 出发向点 C 运动，运动到点 C 立即停止，点 P，Q 的速度都是 1 cm/s，连接 PQ，AQ，CP，设点 P，Q 运动的时间为 t（s）.

（1）当 t 为何值时，四边形 $ABQP$ 是矩形；

（2）当 t 为何值时，四边形 $AQCP$ 是菱形；

（3）求出（2）中菱形 $AQCP$ 的周长和面积.

解题秘方：解动态条件问题的几何题，常用逆向思维法来做；即交换问题中的条件与结论的呈现方式，进行解答；如将“当 t 为何值时，四边形 $ABQP$ 是矩形”改为“当四边形 $ABQP$ 是矩形时，t 的值是多少？”求出 t 的值即可.

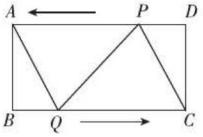


图 18.2−29

挑战·高分

特别提醒

方程中左边的（8−t）表示的是 AP 的长，t 表示的是速度是 1 cm/s 时，t s 运动的距离是（$t\times1$）cm；不要误读为（8−t）s；右边的 t 表示的是 BQ 的长，即（$t\times1$）cm.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$.

∴要使四边形 $ABQP$ 是矩形，只需满足 $AP=BQ$，

即 $8-t=t$，解得 $t=4$. ∴当 $t=4$ s 时，四边形 $ABQP$ 是矩形.

（2）由题意，知 $AP=CQ$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD\parallel BC$. ∴四边形 $AQCP$ 是平行四边形.

∴要使四边形 $AQCP$ 是菱形，只需满足 $AP=CP$，

由题意可知，$DP=t$ cm，则 $AP=CP=(8-t)$ cm.

∵ $DP^2+CD^2=CP^2$，∴ $t^2+16=(8-t)^2$，解得 $t=3$.

∴当 $t=3$ s 时，四边形 $AQCP$ 是菱形.

（3）由第（2）题，得菱形的边长为 5cm，

∴菱形 $AQCP$ 的周长 $=5\times4=20$（cm），

菱形 $AQCP$ 的面积 $=5\times4=20$（cm^2）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容是中考的热点，常与其他知识综合考查，常以解答题的形式出现，有时也单独考查菱形的性质或判定，以选择题、填空题、解答题的形式出现，在解决相关问题时，注意与前面所学的三角形全等，勾股定理和平行四边形等知识的联系.

三年中考兵法

考法1 利用整体思想求菱形的面积

例10 [中考·南充]已知菱形的周长为$4\sqrt{5}$，两条对角线的和为6，则菱形的面积为（　　）

A.2　　B.$\sqrt{5}$　　C.3　　D.4

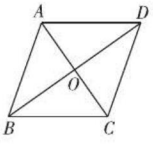


图 18.2-30

试题评析：本题考查菱形的性质、勾股定理；解题的关键是记住菱形的面积公式，记住菱形的对角线互相垂直，属于中考常考题型.

解：如图18.2-30，∵四边形$ABCD$是菱形，且周长为$4\sqrt{5}$，

$\therefore AB=\sqrt{5}$，$AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵$AC+BD=6$，$\therefore AO+BO=3$.

$\therefore (AO+BO)^2=9$，$\therefore AO^2+2AO\cdot BO+BO^2=9$.

又∵$AO^2+BO^2=AB^2=(\sqrt{5})^2=5$，

$\therefore 2AO\cdot BO=4$.

$\therefore$菱形的面积$=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2AO\cdot BO=4$.

答案：D

考法2 利用作图信息求菱形中的角

例11 [中考·滨州]如图18.2-31，在$\square ABCD$中，以点A为圆心，AB长为半径画弧交AD于点F，再分别以点B，F为圆心，大于$\frac{1}{2}BF$的相同长为半径画弧，两弧交于点P，连接AP并延长交BC于点E，连接EF，则所得四边形$ABEF$是菱形.

（1）根据以上尺规作图的过程，求证：四边形$ABEF$是菱形；

（2）若菱形$ABEF$的周长为16，$AE=4\sqrt{3}$，求$\angle C$的大小.

试题评析：本题考查菱形的判定和性质、平行四边形的性质、基本作图等知识，解题的关键是全等三角形的证明，解直角三角形，属于中考常考题型.

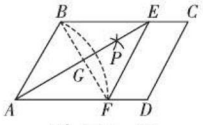


图 18.2-31

（1）**证明**：由作图过程可知$AB=AF$，AE平分$\angle BAD$，

冲刺·满分

思路点拨

由菱形的性质和勾股定理得出$AO+BO=3$，$(AO+BO)^2=9$，$AO^2+BO^2=AB^2$，求出$2AO\cdot BO=4$，即可得出答案.

思路点拨

1. 先由作图过程知$AB=AF$，$\angle EAB=\angle EAF$，由$AD\parallel BC$，推出$\angle EAF=\angle AEB=\angle EAB$，得到$BE=AB=AF$，由此即可证明；

2. 连接BF，交AE于G，根据菱形的性质得出$AB=4$，$AG=\frac{1}{2}AE=2\sqrt{3}$，$\angle BAF=2\angle BAE$，$AE\perp BF$，然后解直角$\triangle ABG$，求出$\angle BAG=30°$，那么$\angle BAF=2\angle BAE=60°$，再根据

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle EAB=\angle EAF$.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$. $\therefore \angle EAF=\angle AEB=\angle EAB$.

$\therefore BE=AB=AF$.

$\because AF \parallel BE$，$\therefore$四边形$ABEF$是平行四边形.

$\because AB=BE$，$\therefore$四边形$ABEF$是菱形.

（2）**解**：如图18.2-31，连接BF，交AE于G.

$\because$菱形$ABEF$的周长为16，$AE=4\sqrt{3}$，

$\therefore AB=BE=EF=AF=4$，$AG=\frac{1}{2}AE=2\sqrt{3}$，$\angle BAF=2\angle BAE$，$AE \perp BF$.

在Rt$\triangle ABG$中，$\because \angle AGB=90°$，$\therefore BG^2=AB^2-AG^2$，

即$BG^2=4^2-(2\sqrt{3})^2=2^2$，$\therefore BG=2$，

$\therefore \angle BAG=30°$，$\therefore \angle BAF=2\angle BAE=60°$.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore \angle C=\angle BAF=60°$.

平行四边形的对角相等即可求出$\angle C=\angle BAF=60°$.

考法3 利用三角形的性质判定菱形

例12 [中考·贵阳]如图18.2-32，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，点D，E分别是边BC，AB上的中点，连接DE并延长至点F，使$EF=2DE$，连接CE，AF.

（1）求证：$AF=CE$；

（2）当$\angle B=30°$时，试判断四边形$ACEF$的形状并说明理由.

试题评析：本题考查平行四边形的判定和性质，菱形的判定，三角形的中位线性质，含30°角的直角三角形性质，等边三角形的判定和性质；熟练掌握平行四边形的判定和性质，等边三角形的判定是解决问题的关键.

（1）**证明**：$\because$点D，E分别是边BC，AB上的中点，

$\therefore DE \parallel AC$，$AC=2DE$.

$\because EF=2DE$，$\therefore EF=AC$，$EF \parallel AC$，

$\therefore$四边形$ACEF$是平行四边形，$\therefore AF=CE$.

（2）**解**：当$\angle B=30°$时，四边形$ACEF$是菱形.

理由如下：$\because \angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，

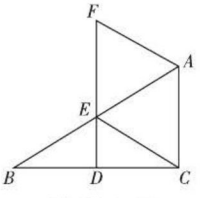


图18.2-32

$\therefore \angle BAC=60°$，$AC=\frac{1}{2}AB=AE$，

$\therefore \triangle AEC$是等边三角形，$\therefore AC=CE$.

又$\because$四边形$ACEF$是平行四边形，

$\therefore$四边形$ACEF$是菱形.

解法提醒

1. 由三角形的中位线性质得出$DE \parallel AC$，$AC=2DE$，再结合已知条件$EF=2DE$，得出$EF=AC$，$EF \parallel AC$，得出四边形ACEF是平行四边形，即可得出$AF=CE$；

2. 由直角三角形的性质得出$\angle BAC=60°$，$AC=\frac{1}{2}AB=AE$，证出$\triangle AEC$是等边三角形，得出$AC=CE$，即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见278页

1. [中考·河北]求证：菱形的两条对角线互相垂直.

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 交于点 O.

求证：$AC \perp BD$.

以下是排乱的证明过程：

①又 $BO=DO$；

②$\therefore AO \perp BD$，即 $AC \perp BD$；

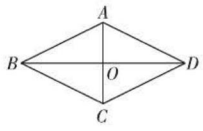
③$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

④$\therefore AB=AD$.

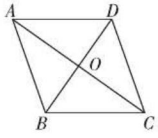
证明步骤正确的顺序是（　　）

A. ③→②→①→④　　B. ③→④→①→②

C. ①→②→④→③　　D. ①→④→③→②



（第1题）



（第2题）

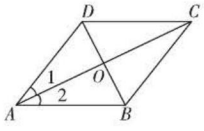
2. [中考·海南]如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AC=8$，$BD=6$，则△ABC 的周长是（　　）

A.14　　B.16　　C.18　　D.20

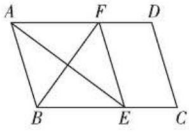
3. [中考·河南]如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，添加下列条件不能判定▱$ABCD$ 是菱形的只有（　　）

A.$AC \perp BD$　　B.$AB=BC$

C.$AC=BD$　　D.$\angle 1=\angle 2$



（第3题）



（第4题）

4. [期末·蒙阴县]如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F，若 $BF=12$，$AB=10$，则 AE 的长为（　　）

A.10　　B.12　　C.16　　D.18

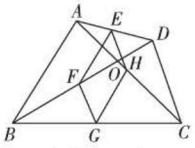
5. [模拟·安徽]如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F，G，H 分别是 AD，BD，BC，AC 的中点，要使四边形 $EFGH$ 是菱形，则四边形 $ABCD$ 需满足的条件是（　　）

A.$AB=AD$

B.$AC=BD$

C.$AD=BC$

D.$AB=CD$

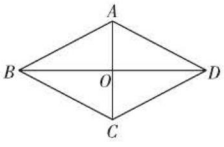


（第5题）

6. [中考·贺州]如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，BD 平分 $\angle ABC$，$AC \perp BD$，垂足为点 O.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）若 $CD=3$，$BD=2\sqrt{5}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.　　【导学号：8592074】

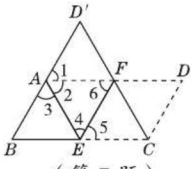


（第6题）

7. 将平行四边形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠，使点 C 与点 A 重合，点 D 落到点 D' 处，折痕为 EF.

（1）求证：△ABE ≌△$AD'F$；

（2）连接 CF，判断四边形 $AECF$ 是什么特殊四边形？并说明理由.



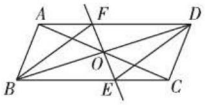
（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图所示，在$\square ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，将直线AC绕点O顺时针旋转，分别交BC，AD于点E，F，连接BF，DE.

（1）试证明在旋转过程中，线段AF与EC总保持相等；

（2）在旋转过程中，四边形$BEDF$可能是菱形吗？请说明理由.



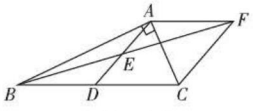
（第8题）

9. [**中考·遵义**]在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，D是BC的中点，E是AD的中点，过点A作$AF\parallel BC$交BE的延长线于点F.

（1）求证：$\triangle AEF\cong\triangle DEB$；

（2）求证：四边形$ADCF$是菱形；

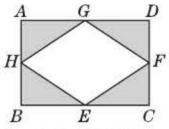
（3）若$AC=4$，$AB=5$，求菱形$ADCF$的面积.



（第9题）

10. 矩形、菱形由于其特殊的性质，为拼图提供了方便，因而墙面瓷砖一般设计为矩形，图案也以菱形居多. 如图是一种长30 cm，宽20 cm的矩形瓷砖，E，F，G，H分别是矩形$ABCD$各边的中点，阴影部分为淡黄色，中间部分为白色，现有一面长4.2 m，宽2.8 m的墙壁准备贴瓷砖.

问：这面墙壁最少要贴这种瓷砖多少块？全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现多少个最小的面积相等的菱形？其中淡黄色的菱形有多少个？



（第10题）

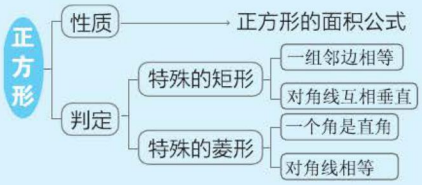
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.2.3 正方形

核心知识

- 正方形的定义
- 正方形的性质
- 正方形的判定
- 特殊四边形间的关系

知识链接



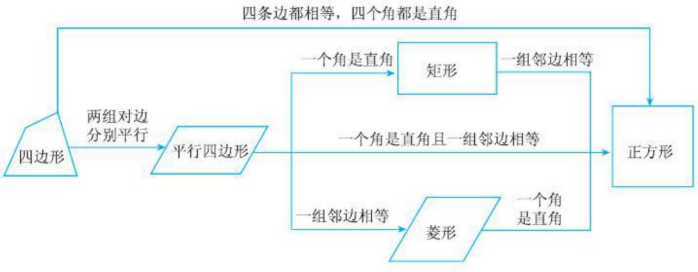
点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正方形的定义

1. 正方形的定义：

四条边都相等，四个角都是直角的四边形叫做正方形.

2. 特殊四边形定义间的关系



拔考向 利用正方形的定义判定正方形

例 1 如图 18.2-33 所示，在△ABC 中，$\angle ABC=90°$，BD 平分$\angle ABC$，$DE\perp BC$，$DF\perp AB$，求证：四边形 $BEDF$ 是正方形.

解题秘方： 紧扣定义中“四条边都相等，四个角都是直角”进行判定.

证明： $\because DE\perp BC$，$DF\perp AB$，$\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle DEB=\angle EBF=\angle BFD=90°$，

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是矩形.

$\therefore \angle DEB=\angle EBF=\angle BFD=\angle FDE=90°$，

$BE=FD$，$BF=ED$.

又$\because BD$ 平分$\angle ABC$，$DE\perp BC$，$DF\perp AB$，

$\therefore DE=DF$.

$\therefore DE=DF=BF=BE$.

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是正方形.

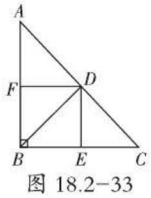


图 18.2-33

提分·必记

特别提醒

1. 正方形必须具备的两个条件：
（1）四条边相等.
（2）四个角是直角.
2. 正方形的四条边都相等，说明正方形既是平行四边形，又是菱形；正方形的四个角都是直角，说明正方形是矩形，即正方形不仅是平行四边形，也是矩形和菱形.

提分·秘诀

解法提醒

利用正方形定义判定正方形，它是建立在四边形的基础上，因此，既要有四条边相等，又要有四个角是直角，两者缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶2 正方形的性质

1. 正方形的性质：

具有矩形、菱形、平行四边形的一切性质，即：

（1）**边**：四条边相等，邻边垂直，对边平行；

（2）**角**：四个角都是直角；

（3）**对角线**：对角线相等，互相垂直平分，每条对角线平分一组对角；

（4）**是轴对称图形**，有 4 条对称轴；

（5）**面积**为边长的平方或对角线平方的一半．

2. 特殊四边形的性质间的关系：

类型		平行四边形	矩形	菱形	正方形
边	共性	对边平行且相等			
	特性			四条边都相等	
角	共性	对角相等且邻角互补			
	特性		四个角都是直角		四个角都是直角
对角线	共性	对角线互相平分			
	特性		对角线相等	对角线互相垂直	对角线相等且互相垂直

提分·必记

特别提醒

1. 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们之间的关系如图 18.2-34 所示．



图 18.2-34

2. **正方形的特殊性质：**

（1）正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形；两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形；

（2）周长相等的四边形中，正方形的面积最大．

技考向▶利用正方形的性质解与三角形有关的应用

例 2 如图 18.2-35 所示，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 上一点，F 为 BC 延长线上一点，$CE=CF$.

（1）求证：$\triangle BCE \cong \triangle DCF$；

（2）若 $\angle BEC=60°$，求 $\angle EFD$ 的度数．

解题秘方：从正方形中获取边、角相等的信息．

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $BC=DC$，$\angle BCE=\angle DCF=90°$．

又∵ $CE=CF$，

∴ $\triangle BCE \cong \triangle DCF$.

（2）**解**：∵ $\triangle BCE \cong \triangle DCF$，

$\angle BEC=60°$，

∴ $\angle DFC=\angle BEC=60°$．

∵ $CE=CF$，$\angle ECF=90°$，

∴ $\angle CFE=45°$．

∴ $\angle EFD=\angle DFC-\angle CFE=60°-45°=15°$．

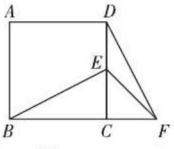


图 18.2-35

提分·秘诀

解法提醒

利用正方形的性质解题，由于正方形的性质较多，解题时不宜一一列出来，需要根据题中已知条件，结合要证明的结论，选择证明结论成立所需要的性质，使解题思路更简洁．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 正方形的判定

1. 判定方法：

（1）**从四边形出发**：①有四条边相等，四个角都是直角的四边形是正方形；②对角线互相平分、垂直且相等的四边形是正方形；

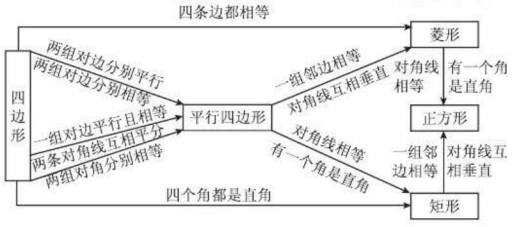
（2）**从平行四边形出发**：①有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形；②对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形；

（3）**从矩形出发**：①有一组邻边相等的矩形是正方形；②对角线互相垂直的矩形是正方形；

（4）**从菱形出发**：①有一个角是直角的菱形是正方形；②对角线相等的菱形是正方形．

2. 四边形间的关系：

四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的转化关系如下所示．



提分·必记

特别提醒

常见的判定思路：

从边上证明：

矩形 —邻边相等→ 正方形；

从角上证明：

菱形 —有一个角是直角→ 正方形；

从对角线上证明：

(1) 矩形 —对角线互相垂直→ 正方形；

(2) 菱形 —对角线相等→ 正方形；

(3) 平行四边形 —对角线相等且互相垂直→ 正方形；

(4) 四边形 —对角线相等且互相垂直平分→ 正方形．

拔考向▶ 利用正方形的判定方法判定正方形

例 3 如图 18.2–36 所示，点 A'，B'，C'，D' 分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA'=BB'=CC'=DD'$，求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形．

解题秘方：紧扣“先确定一种特殊的四边形，再加上边或角或对角线的关系”确定正方形．

证明：∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore BC=CD=DA=AB$，

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$．

又∵$AA'=BB'=CC'=DD'$，

$\therefore D'A=A'B=B'C=C'D$，

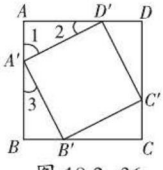


图 18.2–36

$\therefore \triangle AA'D' \cong \triangle BB'A' \cong \triangle CC'B' \cong \triangle DD'C'$（SAS）．

$\therefore D'A'=A'B'=B'C'=C'D'$，$\angle 2=\angle 3$．

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为菱形．

∵$\angle 1+\angle 2=90°$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$．

$\therefore \angle D'A'B'=180°-(\angle 1+\angle 3)=90°$．

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为正方形．

提分·秘诀

方法点拨

判定四边形是正方形的方法

1. 如果已知条件是平行四边形，需证它既是矩形又是菱形；
2. 如果已知条件是四边形，若按边角关系证明，则需证它的四条边相等，四个角是直角；若按特殊四边形证明，则要先证它是平行四边形，再证它既是矩形又是菱形；
3. 如果已知条件是矩形，再证它的邻边相等或对角线互相垂直即可；
4. 如果已知条件是菱形，再证它有一个角是直角或对角线相等即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用线段代换法求正方形中三角形的周长

例 4 如图 18.2-37，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E，F 分别在边 AD，CD 上，若 $\angle EBF=45°$，则 $\triangle EDF$ 的周长等于____.

解题秘方：将三角形的三条边转移到正方形的边上.

解：如图 18.2-37，延长 FC 到 G，使 $CG=AE$，连接 BG.

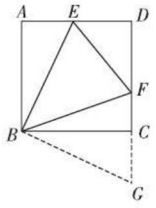


图 18.2-37

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB=CB$，$\angle A=\angle ABC=\angle BCD=90°$.

∴ $\angle A=\angle BCG=90°$. ∴ $\triangle ABE\cong\triangle CBG$.

∴ $\angle ABE=\angle CBG$，$BE=BG$.

∴ $\angle ABE+\angle EBC=\angle CBG+\angle EBC$.

∴ $\angle EBG=\angle ABC=90°$.

∵ $\angle EBF=45°$，∴ $\angle GBF=\angle EBF=45°$.

在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle BGF$ 中，$\begin{cases} BE=BG, \\ \angle EBF=\angle GBF, \\ BF=BF, \end{cases}$

将三角形的三边长进行转化，利用等量代换进行求解.

∴ $\triangle BEF\cong\triangle BGF$. ∴ $EF=FG=FC+CG=FC+AE$.

∴ $\triangle DEF$ 的周长为 $DE+DF+EF=DE+DF+AE+CF=AD+CD=4$.

答案：4

挑战·高分

解法提醒

在正方形中出现以正方形的一边为直角边的直角三角形时，我们经常通过延长或是旋转作辅助线，目的是通过证明三角形全等，得到需要的边、角关系.

拔尖角度 2 利用角度代换法求正方形中的角

例 5 如图 18.2-38，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，BD 与 CE 相交于点 F，连接 AF，求 $\angle AFD$ 的度数.

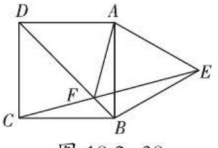


图 18.2-38

解题秘方：紧扣三角形的外角性质将所求的角转化为可求的特殊三角形的角.

解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=90°$，$\angle CBF=\angle ABF=45°$，

$\angle ABE=60°$，$BC=AB=BE$，

∴ $\angle CBE=150°$，$\angle BCE=\angle BEC$，

∴ $\angle BCE=\angle BEC=15°$.

∵正方形 $ABCD$ 关于 BD 轴对称，

∴ $\angle BAF=\angle BCE=15°$.

又∵ $\angle ABF=45°$，且 $\angle AFD$ 为 $\triangle AFB$ 的外角，

∴ $\angle AFD=\angle ABF+\angle BAF=45°+15°=60°$.

挑战·高分

解题流程

正方形及等边三角形的性质

↓

$\angle ABF$，$\angle BAF$ 的度数

↓

$\angle AFD$ 的度数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用执果索因法判定正方形

挑战·高分

例 6 如图 18.2-39，点 E 是正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，$EF \perp AB$，$EG \perp BC$，垂足分别为 F，G，若正方形 $ABCD$ 的周长是 40 cm.

（1）求证：四边形 $BFEG$ 是矩形；

（2）求四边形 $BFEG$ 的周长；

（3）当 AF 的长为多少时，四边形 $BFEG$ 是正方形？

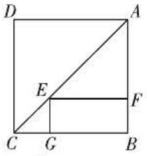


图 18.2-39

解题秘方：紧扣在矩形的基础上判定正方形需补充的条件探寻为正方形的条件.

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AB \perp BC$.

∵ $EF \perp AB$，$EG \perp BC$，

∴四边形 $BFEG$ 是矩形.

（2）**解**：∵正方形 $ABCD$ 的周长是 40cm，

∴ $AB=40 \div 4=10$（cm）.

易知△ AEF 为等腰直角三角形，

∴ $AF=EF$.

∵四边形 $BFEG$ 为矩形，

∴ $BF=EG$，$EF=BG$.

∴ 四边形 $BFEG$ 的周长为 $2(EF+BF)=2(AF+BF)=2\times 10=20$（cm）.

（3）**解**：若要使四边形 $BFEG$ 是正方形，只需 $EF=BF$.

∵ $AF=EF$，$AB=10$cm，

∴当 $AF=\frac{1}{2}AB=5$cm 时，四边形 $BFEG$ 是正方形.

解法提醒

若四边形是矩形，要探寻其为正方形，有两种思路：

1. 从边出发，需一组邻边相等；
2. 从对角线出发，需对角线互相垂直.

技巧点拨

矩形的判定方法比较多，要依据已知条件灵活选取，此处四边形 BFEG 中，已经有一个∠B 为直角，所以可考虑利用“有三个角是直角的四边形是矩形”来证明.

拔尖角度 4 利用特殊位置法探求正方形中旋转变换的定值

挑战·高分

例 7 如图 18.2-40，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 也是正方形 $A'B'C'O$ 的一个顶点，如果两个正方形的边长都等于 1，那么当正方形 $A'B'C'O$ 绕顶点 O 转动时，两个正方形重叠部分的面积大小有什么规律？请说明理由.

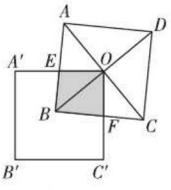


图 18.2-40

解题秘方：将正方形 $A'B'C'O$ 旋转到 OA' 与 OA 重合或 $OA' \perp AB$ 的位置，易得出两个正方形重叠部分面积大小的规律.

解：两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

理由如下：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

技巧点拨

特殊位置法

求证在某种规律变化的条件下，有着不变的结论产生（如定值、定点、定长等），这类问题统称为几何定值问题，解决几何定值问题通常用特殊位置法，如本题可将正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转到 $OC' \perp BC$ 的特殊位置，易发现

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC=90°$.

$\because$四边形 $A'B'C'O$ 是正方形，

$\therefore \angle EOF=90°$，$\therefore \angle BOC=\angle EOF$.

$\therefore \angle BOC-\angle BOF=\angle EOF-\angle BOF$，即 $\angle COF=\angle BOE$.

又$\because OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF$，$\therefore \triangle BOE\cong\triangle COF$.

$\therefore S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$. $\therefore$两个正方形重叠部分的面积等于 $S_{\triangle BOC}$.

$\because S_{正方形ABCD}=1\times1=1$，$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}$.

$\therefore$两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

$S_{正方形EBFO}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$，然后根据该猜想进行一般性验证即可.

拔尖角度▸ 5 利用构造法在正方形中构造全等三角形

挑战·高分

例 8 如图 18.2-41 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 6. 菱形 $EFGH$ 的三个顶点 E，G，H 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB，CD，DA 上，且 $AH=2$，连接 CF.

（1）当 $DG=2$ 时，求证：菱形 $EFGH$ 为正方形；

（2）设 $DG=x$，试用含 x 的代数式表示 $\triangle FCG$ 的面积.

解题秘方：紧扣三角形的面积公式，构造 $\triangle GCF$ 中 GC 边上的高 FM，设法求出 FM 长，即可用含 x 的代数式表示 $S_{\triangle GCF}$.

解法提醒

解答本题采用了演绎推理和构造法，

(1) 由于四边形 EFGH 为菱形，只需再证有一个内角是直角即可；

(2) 解题的关键是作辅助线：过 F 作 FM ⊥ DC，交 DC 的延长线于 M，连接 GE，构造全等三角形.

（1）**证明**：$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle D=\angle A=90°$.

$\because$四边形 $EFGH$ 是菱形，$\therefore HG=EH$.

$\because DG=AH=2$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$，

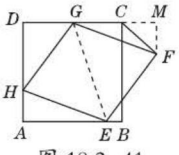


图 18.2-41

$\therefore \angle DHG=\angle AEH$.

$\because \angle AEH+\angle AHE=90°$，$\therefore \angle DHG+\angle AHE=90°$，

$\therefore \angle GHE=90°$，$\therefore$菱形 $EFGH$ 为正方形.

（2）**解**：过 F 作 $FM\perp CD$，交 DC 的延长线于 M，连接 GE，如图 18.2-41 所示.

$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore CD\parallel AB$，$\therefore \angle AEG=\angle MGE$.

$\because$四边形 $EFGH$ 为菱形，$\therefore FG=HE$，$GF\parallel HE$，

$\therefore \angle HEG=\angle FGE$，$\therefore \angle AEH=\angle MGF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle MFG$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle M=90°,\\ \angle AEH=\angle MGF,\\ HE=FG,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle MFG$，$\therefore MF=AH=2$.

$\because DG=x$，$\therefore CG=6-x$，$\therefore S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}CG\cdot MF=6-x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 6 利用截长补短法证明正方形中的和差关系

挑战·高分

例 9 已知：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB，DC（或它们的延长线）于点 M，N. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时（如图 18.2-42 ①），易证 $BM+DN=MN$.

（1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时（如图 18.2-42 ②），线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明.

（2）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 18.2-42 ③的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？请写出猜想，并加以证明.

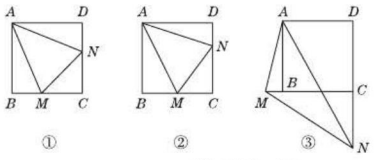


图 18.2-42

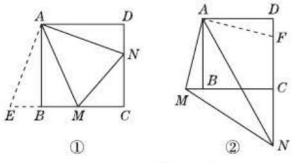


图 18.2-43

解题秘方：用“截长补短法”将分散的求和中的两线段集中成一条线段，再证明这条线段等于长线段.

解：（1）$BM+DN=MN$.

证明如下：如图 18.2-43 ①，在 MB 的延长线上截取 BE，使 $BE=DN$，连接 AE.

易得 $\triangle ABE\cong\triangle ADN$，$\therefore AE=AN$，$\angle EAB=\angle NAD$.

$\because\angle BAD=90°$，$\angle NAM=45°$，$\therefore\angle BAM+\angle NAD=45°$，

$\therefore\angle EAB+\angle BAM=45°$，$\therefore\angle EAM=\angle NAM$.

又 AM 为公共边，$\therefore\triangle AEM\cong\triangle ANM$，$\therefore ME=MN$.

$\because ME=BE+BM=DN+BM$，

$\therefore BM+DN=MN$.

（2）$DN-BM=MN$.

证明如下：如图 18.2-43 ②，在 DC 上截取 DF，使 $DF=BM$，连接 AF.

易知 $AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore\triangle ABM\cong\triangle ADF$（SAS），

$\therefore AM=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$，

$\therefore\angle MAB+\angle BAF=\angle FAD+\angle BAF=90°$，

即 $\angle MAF=\angle BAD=90°$.

又 $\angle MAN=45°$，$\therefore\angle FAN=\angle MAN=45°$.

又 $\because AN=AN$，$\therefore\triangle MAN\cong\triangle FAN$，$\therefore MN=FN$，

$\therefore MN=FN=DN-DF=DN-BM$，即 $DN-BM=MN$.

方法点拨

截长补短法是证明线段的和、差关系中常用的一种基本方法，它有两种思路求线段的和差问题.

截长法——在长线段上截取一线段使它等于两加数线段中一线段，并证明长线段中余下线段等于另一加数线段.

补短法——即延长两加数线段中一加数线段使延长部分等于另一加数线段，并证明这两线段的和等于长线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 运用正方形的性质与判定方法解决有关问题是中考的主要考点，经常与其他特殊四边形的性质和判定方法及全等三角形等知识结合起来一起考查，多以选择题、证明题的形式出现，有时也会出现在阅读理解题中，在今后的中考中，本节内容仍是考查的重点.

三年中考兵法

考法 1 利用三角形三边关系解正方形中的作图问题

例 10 [中考·河北]如图 18.2-44 是边长为 10cm 的正方形铁片，过两个顶点剪掉一个三角形，以下四种剪法中（如图 18.2-45），裁剪线长度所标的数据（单位：cm）不正确的是（　　）

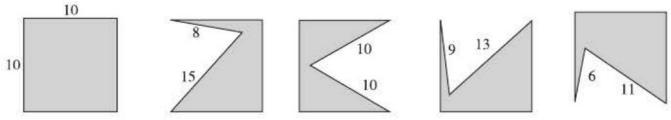


图 18.2-44

图 18.2-45

试题评析：本题考查正方形的性质、勾股定理等知识，解题的关键是利用勾股定理求出正方形的对角线的长.

解：∵正方形的边长为 10，∴对角线 $=10\sqrt{2}$.

∵ $15>10\sqrt{2}$，∴这个图形不可能存在.

答案：A

考法 2 利用整体思想解正方形中的线段的求和问题

例 11 [中考·绍兴]如图 18.2-46 为某城市部分街道示意图，四边形 $ABCD$ 为正方形，点 G 在对角线 BD 上，$GE \perp CD$，$GF \perp BC$，$AD=1500$ m，小敏行走的路线为 $B \to A \to G \to E$，小聪行走的路线为 $B \to A \to D \to E \to F$. 若小敏行走的路程为 3100 m，则小聪行走的路程为_____m.

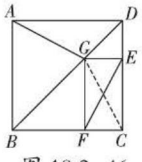


图 18.2-46

试题评析：本题考查了正方形的性质、全等三角形的性质和判定、矩形的性质及等腰三角形的性质，解决本题的关键是证明 $AG=EF$，$DE=GE$.

解：如图 18.2-46，连接 GC.

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AD=DC$，$\angle ADB=\angle CDB=45°$.

∵ $\angle CDB=45°$，$GE \perp DC$，

∴△ DEG 是等腰直角三角形，

∴ $DE=GE$.

冲刺·满分

思路点拨

由于剪掉的三角形三边长没有具体要求，因此裁剪线长度所标的数据正确与否，只需考虑最长的数据小于或等于正方形的对角线长度的数据即可.

思路点拨

连接 CG，由正方形的对称性，可知 AG=CG，由正方形的对角线互相平分一组对角，GE⊥DC，易得 DE=GE，在矩形 GECF 中，EF=CG，要计算小聪走的路程，只要得到小聪比小敏多走了多少就行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△AGD和△CGD中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADG=\angle CDG,\\ DG=DG,\end{cases}$

∴△AGD≌△CGD. ∴$AG=CG$.

易得四边形$GECF$为矩形，

∴$EF=CG$. ∴$EF=AG$.

∵小敏行走的路程为$BA+AG+GE=3100$（m），

∴小聪行走的路程为$BA+AD+DE+EF=AD+BA+GE+AG=1500+3100=4600$（m）.

答案：4600

考法3 利用三角形、菱形性质解判定正方形的条件问题

例12 [中考·青岛]已知：如图18.2-47，在菱形$ABCD$中，点E，O，F分别为AB，AC，AD的中点，连接CE，CF，OE，OF.

（1）求证：△BCE≌△DCF；

（2）当AB与BC满足什么关系时，四边形$AEOF$是正方形？请说明理由.

试题评析：本题考查了正方形的判定、菱形的性质与判定、全等三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识；熟练掌握菱形的性质和全等三角形的判定是解决问题的关键.

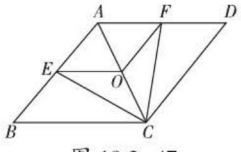


图18.2-47

（1）**证明**：∵四边形$ABCD$是菱形，

∴$\angle B=\angle D$，$AB=BC=DC=AD$.

∵点E，O，F分别为AB，AC，AD的中点，

∴$AE=BE=DF=AF$，$OF=\frac{1}{2}DC$，$OE=\frac{1}{2}BC$，$OE\parallel BC$.

在△BCE和△DCF中，$\begin{cases}BE=DF,\\ \angle B=\angle D,\\ BC=DC,\end{cases}$

∴△BCE≌△DCF（SAS）.

（2）**解**：当$AB\perp BC$时，四边形$AEOF$是正方形.

理由如下：

由（1）易得$AE=OE=OF=AF$，

∴四边形$AEOF$是菱形.

∵$AB\perp BC$，$OE\parallel BC$，

∴$OE\perp AB$，∴$\angle AEO=90°$，

∴四边形$AEOF$是正方形.

解法提醒

1. 由菱形的性质得出∠B=∠D，AB=BC=DC=AD，由已知和三角形中位线定理证出AE=BE=DF=AF，$OF=\frac{1}{2}DC$，$OE=\frac{1}{2}BC$，OE∥BC，由SAS证明△BCE≌△DCF即可；
2. 由(1)易得出：AE=OE=OF=AF，证出四边形AEOF是菱形，再证出∠AEO=90°，则四边形AEOF是正方形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用比例关系求角解判定正方形问题

例 13 [中考·上海]已知：如图 18.2-48，四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=CD$，E 是对角线 BD 上一点，且 $EA=EC$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）如果 $BE=BC$，且 $\angle CBE:\angle BCE=2:3$，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

试题评析：本题主要考查了正方形与菱形的判定及性质定理，熟练掌握定理是解答此题的关键.

证明：（1）在△ ADE 与△ CDE 中，

$$\begin{cases} AD=CD, \\ DE=DE, \\ EA=EC, \end{cases}$$

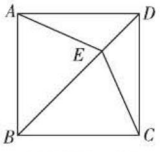


图 18.2-48

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$,

$\therefore \angle ADE=\angle CDE$.

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE=\angle CBD$,

$\therefore \angle CDE=\angle CBD$,

$\therefore BC=CD$.

$\because AD=CD$,

$\therefore BC=AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\because AD=CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

（2）$\because BE=BC$,

$\therefore \angle BCE=\angle BEC$.

$\because \angle CBE:\angle BCE=2:3$,

$\therefore \angle CBE=180^\circ \times \dfrac{2}{2+3+3}=45^\circ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle ABE=45^\circ$，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

思路点拨

1. 首先证得△ADE≌△CDE，由全等三角形的性质可得∠ADE=∠CDE，由AD∥BC可得∠ADE=∠CBD，易得∠CDB=∠CBD，可得BC=CD，易得AD=BC，利用平行四边形的判定定理可得四边形ABCD为平行四边形，由AD=CD可得四边形ABCD是菱形；

2. 由BE=BC可得△BEC为等腰三角形，可得∠BCE=∠BEC，利用三角形的内角和定理可得 $\angle CBE=180^\circ \times \frac{2}{8}=45^\circ$，易得∠ABE=45°；可得∠ABC=90°；由正方形的判定定理可得四边形ABCD是正方形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [期末·内乡县]用两块完全相同的直角三角形拼下列图形：

①平行四边形；②矩形；

③菱形；④正方形；

⑤等腰三角形；⑥等边三角形.

一定能拼成的图形是（　　）

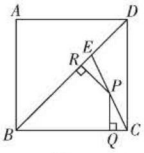
A. ①④⑤　　B. ②⑤⑥

C. ①②③　　D. ①②⑤

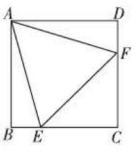
2. [模拟·雨城区]如图，E为边长为2的正方形$ABCD$的对角线上一点，$BE=BC$，P为CE上任意一点，$PQ\perp BC$于点Q，$PR\perp BE$于点R，则$PQ+PR$的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

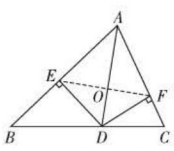
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$



（第2题）



（第3题）



（第4题）

3. [模拟·磴口县]如图，在正方形$ABCD$中，边长为2的等边三角形AEF的顶点E，F分别在BC和CD上，下列结论：

①$CE=CF$；②$\angle AEB=75°$；

③$BE+DF=EF$；④$S_{正方形ABCD}=2+\sqrt{3}$.

其中正确的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

4. [模拟·天门]如图，AD是$\triangle ABC$的角平分线，DE，DF分别是$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的高，得到下面四个结论：

①$OA=OD$；

②$AD\perp EF$；

③当$\angle BAC=90°$时，四边形$AEDF$是正方形；

④$AE^2+DF^2=AF^2+DE^2$.

其中正确的是（　　）

A. ②③　　B. ②④

C. ②③④　　D. ①③④

5. [中考·兰州]在平行四边形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，要使四边形$ABCD$是正方形，还需添加一组条件，下面给出了四组条件：

①$AB\perp AD$，且$AB=AD$；

②$AB=BD$，且$AB\perp BD$；

③$OB=OC$，且$OB\perp OC$；

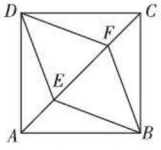
④$AB=AD$，且$AC=BD$.

其中正确的是_____（填序号）.

6. [中考·雅安]如图，E，F是正方形$ABCD$的对角线AC上的两点，且$AE=CF$.

（1）求证：四边形$BEDF$是菱形；

（2）若正方形边长为4，$AE=\sqrt{2}$，求菱形$BEDF$的面积.



（第6题）

7. 在$\square ABCD$中，AC，BD交于点O，过点O作直线EF，GH分别交平行四边形的四条边于E，F，G，H四点，连接EG，GF，FH，HE.

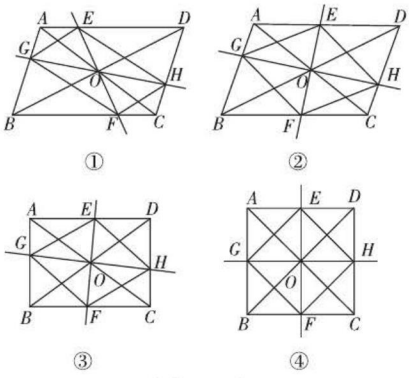
（1）如图①所示，四边形$EGFH$的形状是_____；

（2）如图②所示，当$EF\perp GH$时，四边形$EGFH$的形状是_____；

（3）如图③所示，在（2）的条件下，若$AC=BD$，则四边形$EGFH$的形状是_____；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）如图④所示，在（3）的条件下，若 $AC \perp BD$，试判断四边形 $EGFH$ 的形状，并说明理由.

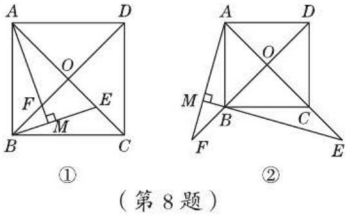


（第 7 题）

8. 如图①，已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 AC 上一点，连接 EB，过点 A 作 $AM \perp BE$，垂足为 M，AM 交 BD 于点 F.

（1）求证：$OE=OF$；

（2）如图②，若点 E 在 AC 的延长线上，$AM \perp BE$ 交 EB 的延长线于点 M，交 DB 的延长线于点 F，其他条件不变，则结论“$OE=OF$”还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.



（第 8 题）

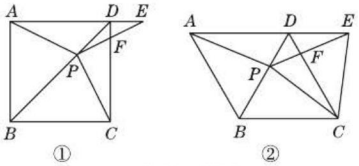
9. [**中考·荆州**]如图①，在正方形 $ABCD$ 中，P 是 BD 上的一点，点 E 在 AD 的延长线上，且 $PA=PE$，PE 交 CD 于 F.

（1）求证：$PC=PE$；

（2）求 $\angle CPE$ 的度数；

（3）如图②，把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$，其他条件不变，当 $\angle ABC=120°$ 时，连接 CE，试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系，并说明理由.

【导学号：8592074】



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解密中考——“习题改造”

展示教材习题人教版八年级（下）册第69页14题

例1 如图18.2-49，四边形$ABCD$是正方形，点E是边BC的中点，$\angle AEF=90°$，且EF交正方形外角的平分线CF于点F. 求证：$AE=EF$.（提示：取AB的中点G，连接EG.）

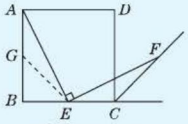


图18.2-49

改造展示

改造一：变特殊为一般

例2 [中考·黄石]如图18.2-50，四边形$ABCD$是正方形，点E是BC边上任意一点，$\angle AEF=90°$，且EF交正方形外角的平分线CF于点F. 求证：$AE=EF$.

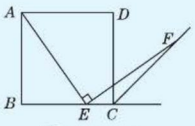


图18.2-50

[改造点]将“点E为BC的中点”这一特殊条件改造为“点E是BC边上任意一点”的一般条件.

改造二：改变条件的呈现方式

例3 [中考·黄冈]如图18.2-51，两个全等的正方形的其中一边CD完全重合，点M是BC边的中点，连接AM，且$\angle AMN=90°$，交CE于N. 求证：$CN=EN$.

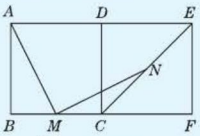


图18.2-51

[改造点]将“外角平分线”这一条件呈现的方式改为“正方形的对角线”.

改造三：改变问题呈现的背景

例4 [中考·乌鲁木齐]如图18.2-52，边长为5的正方形$OABC$的顶点O在坐标原点处，点A，C分别在x轴，y轴的正半轴上，点E是OA边上的点（不与点A重合），$EP\perp CE$，且与正方形外角平分线AG交于点P，

（1）当点E坐标为（3,0）时，试证明：$CE=EP$.

（2）如果将上述条件“点E坐标为（3,0）”改为“点E坐标为（t,0）（$t>0$）”，结论$CE=EP$是否仍然成立？请说明理由.

（3）在y轴上是否存在点M，使得四边形$BMEP$是平行四边形？若存在，用t表示点M的坐标；若不存在，请说明理由.

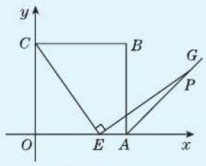


图18.2-52

[改造点]将整个问题由孤立的背景改为在平面直角坐标系中结合坐标去解决问题.

改造四：留其灵魂，换其躯壳

例5 [中考·无锡]（1）如图18.2-53①，在正方形$ABCD$中，M是BC边（不含端点B，C）上任意一点，P是BC延长线上一点，N是$\angle DCP$的平分线上一点. 若$\angle AMN=90°$，求证：$AM=MN$.

下面给出一种证明的思路，你可以按这一思路证明，也可以选择其他方法证明.

证明：在边AB上截取$AE=MC$，连接ME. 在正方形$ABCD$中，$\angle B=\angle BCD=90°$，$AB=BC$. $\therefore\angle NMC=180°-\angle AMN-\angle AMB=180°-\angle B-\angle AMB=\angle MAB=\angle MAE$.

（下面请你完成余下的证明过程）

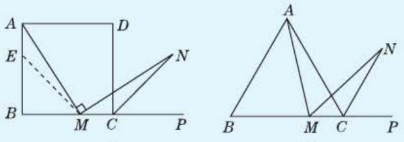


图18.2-53

（2）若将（1）中的“正方形$ABCD$”改为“正三角形ABC”（如图18.2-53②），N是$\angle ACP$的平分线上一点，则当$\angle AMN=60°$时，结论$AM=MN$是否还成立？请说明理由.

（3）若将（1）中的“正方形$ABCD$”改为“正n边形$ABCD\cdots\cdots X$”，请你作出猜想：当$\angle AMN=$_____°时，结论$AM=MN$仍然成立.（直接写出答案，不需要证明）

[改造点]去掉“正方形”的外壳，保留“外角平分线”与“两线的夹角”的灵魂.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特殊平行四边形的特殊解题技巧

荣老师告诉你 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质．因此在解决矩形、菱形和正方形的问题时，可以仿照平行四边形的做法，通过巧添辅助线，将特殊四边形的问题转化为三角形的问题解决．

技巧一 巧添对角线，将四边形问题转化为三角形问题

例 1 阅读下面材料：

在数学课上，老师请同学思考如下问题：如图 1①，我们把一个四边形 $ABCD$ 的四边中点 E，F，G，H 依次连接起来得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗？

小敏在思考问题时，有如下思路：如图 1①，连接 AC.

点 E，F 分别是 AB，BC 的中点 $\xrightarrow{\text{三角形中位线定理}}$ $EF \parallel AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$

点 G，H 分别是 CD，AD 的中点 $\xrightarrow{\text{三角形中位线定理}}$ $GH \parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$

$\rightarrow$ $EF \parallel GH$，$EF=GH$ $\rightarrow$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

参考小敏思考问题的方法，解决以下问题：

（1）若只改变图 1①中四边形 $ABCD$ 的形状（如图 1②），则四边形 $EFGH$ 还是平行四边形吗？说明理由．

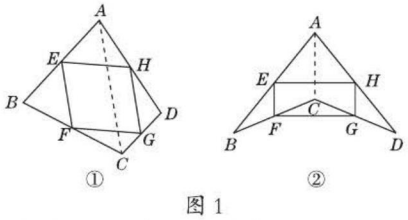


图 1

（2）如图 1②，在（1）的条件下，若连接 AC，BD.

①当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是菱形．写出结论并说明理由；

②当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是矩形．写出结论并说明理由．

解题秘方：（1）连接 AC，①由三角形中位线定理得出 EF 与 AC 的数量关系与位置关系；②再由三角形中位线定理得出 GH 与 AC 的数量关系与位置关系；③利用等量代换与平行线的传递性得出 EF 与 GH 的数量关系与位置关系，从而得到结论．

（2）①由（1）已经证得四边形 $EFGH$ 是平行四边形，所以只需证明邻边 $FG=EF$，由三角形中位线定理可得它们都等于 BD 或 AC 的一半，故易得“当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形”这一结论；②当 $AC \perp BD$ 时，由三角形中位线定理可知 $EF \parallel AC$，$FG \parallel BD$，故可得 $EF \perp FG$，即 $\angle EFG=90°$，故四边形 $EFGH$ 是矩形．

解：（1）四边形 $EFGH$ 还是平行四边形．理由如下：连接 AC，如图 1②．

$\because E$，F 分别是 AB，BC 的中点，

$\therefore EF \parallel AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$.

$\because G$，H 分别是 CD，AD 的中点，

$\therefore GH \parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore EF \parallel GH$，$EF=GH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

（2）①当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形．理由如下：

由（1）可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

当 $AC=BD$ 时，由题易得 $FG=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}AC$，$\therefore FG=EF$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴四边形 $EFGH$ 是菱形.

②当 $AC \perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是矩形.

理由如下：

由（1）可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

∵ E，F 分别是 AB，BC 的中点，

∴ $EF \parallel AC$. ∵ $AC \perp BD$，∴ $EF \perp BD$.

∵ G，F 分别是 CD，BC 的中点，

∴ $FG \parallel BD$.

∵ $EF \perp BD$，∴ $EF \perp FG$，即 $\angle EFG=90°$，

∴$\square EFGH$ 是矩形.

方法点拨：本题的实质是判定中点四边形的形状，而中点四边形的形状是由原四边形的对角线的关系来决定的.

技巧二 ▸ 巧用旋转添全等求线段长

例 2 如图 2，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3，E，F 分别是 AB，BC 边上的点，且 $\angle EDF=45°$. 将△ DAE 绕点 D 逆时针旋转 $90°$，得到△ DCM. 若 $AE=1$，求 FM 的长.

解题秘方：根据将△ DAE 绕点 D 逆时针旋转 $90°$ 得到△ DCM，可得 $\angle FDM=45°$，可进一步得到△ DEF ≌△ DMF，因此可得 $EF=MF$，若设 $EF=x$，则 BF 可用 x 表示，在△ BEF 中利用勾股定理可得关于 x 的方程，则可求得 FM 的长.

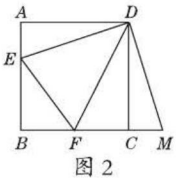


图 2

解：∵四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$AE=1$，

∴ $BE=2$，$\angle ADE+\angle EDF+\angle CDF=90°$.

∵ $\angle EDF=45°$，∴ $\angle ADE+\angle CDF=45°$.

∵将△ DAE 绕点 D 逆时针旋转 $90°$，得到△ DCM，∴ $\angle ADE=\angle CDM$，$DE=DM$，

$AE=CM=1$，

∴ $\angle CDM+\angle CDF=\angle MDF=45°$，

∴ $\angle EDF=\angle MDF$.

∵ $DF=DF$，∴△ DEF ≌△ DMF，

∴ $EF=FM$.

设 $EF=FM=x$，则 $FC=x-1$.

∴ $BF=BC-FC=3-(x-1)=4-x$.

在 Rt△ EBF 中，$BE^2+BF^2=EF^2$，

即 $2^2+(4-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{5}{2}$.

故 FM 的长为 $\frac{5}{2}$.

方法点拨：（1）题中将△ DAE 绕点 D 逆时针旋转 $90°$ 实际上揭示一种常见的通过旋转来构造全等三角形的方法，只不过要根据不同的题目来确定旋转的角度；（2）涉及求直角三角形的边长时，经常需要根据勾股定理列出方程来进行求解.

技巧三 ▸ 巧用作垂线添全等探究线段之间的关系

例 3 现有正方形 $ABCD$ 和一个以 O 为直角顶点的三角尺，移动三角尺，使三角尺两直角边所在直线分别与直线 BC，CD 交于点 M，N.

（1）如图 3①，若点 O 与点 A 重合，则 OM 与 ON 的数量关系是_____；

（2）如图 3②，若点 O 在正方形的中心（即两条对角线的交点），则（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由；

（3）如图 3③，若点 O 在正方形的内部（含边界），当 $OM=ON$ 时，请探究点 O 在移动过程中可形成什么图形？

（4）如图 3④是点 O 在正方形外部的一种情况.

当 $OM=ON$ 时，请你就“点 O 的位置在各种情况下（含外部）移动所形成的图形”提出一个正确的结论（不必说理）.

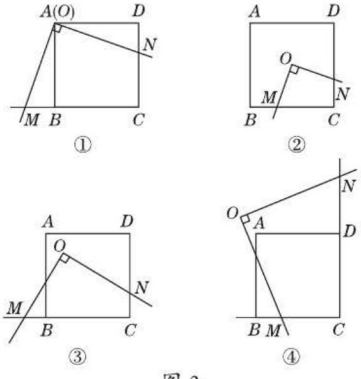


图 3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方:（1）证明△OBM与△ODN全等;（2）（3）（4）与（1）一脉相承，都是通过添加辅助线构造两个直角三角形全等求解.

解：（1）$OM=ON$

点拨：如图4①所示，

∵四边形$ABCD$是正方形，

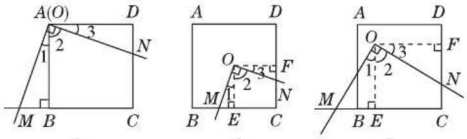
∴$AB=AD$，即$OB=OD$，

且$\angle OBC=\angle ODN=90°$，$\angle 2+\angle 3=90°$，∴$\angle OBM=\angle ODN=90°$.

∵$\angle MON=90°$，∴$\angle 1+\angle 2=90°$，

∴$\angle 1=\angle 3$，

∴△OBM≌△ODN，∴$OM=ON$.



①　②　③

图4

（2）$OM=ON$仍然成立.

如图4②，过O作$OE\perp BC$于E，$OF\perp CD$于F，

∴$\angle OEM=\angle OFN=90°$.

∵O是正方形$ABCD$的中心，∴$OE=OF$.

易知$\angle EOF=90°$，∴$\angle 2+\angle 3=90°$.

∵$\angle 1+\angle 2=90°$，∴$\angle 1=\angle 3$，

∴△OEM≌△OFN，

∴$OM=ON$.

（3）如图4③，过O作$OE\perp BC$于E，$OF\perp CD$于F，

∴$\angle OEM=\angle OFN=90°$.

∵$\angle C=90°$，∴$\angle 2+\angle 3=90°$.

∵$\angle 1+\angle 2=90°$，∴$\angle 1=\angle 3$.

∵$OM=ON$，

∴△OEM≌△OFN，

∴$OE=OF$，∴点O在$\angle BCD$的平分线上，

∴点O在正方形的内部（含边界）移动过程中所形成的图形是对角线AC.

（4）所形成的图形为直线AC.

方法点拨：本题的难度其实并不是很大，掌握好一个原则就可以突破这道题，这个原则就是“以退为进”，可以看到（2）（3）（4）的思路其实与（1）是一脉相承的.

技巧四▶巧借特殊四边形的对称性解题

例4　如图5，在菱形$ABCD$中，$\angle BAD=120°$，点E，F分别在边AB，BC上，△BEF与△GEF关于直线EF对称，点B的对称点是点G，且点G在边AD上.若$EG\perp AC$，$AB=6\sqrt{2}$，求线段FG的长.

解题秘方：先说明△ABC和△ACD都是等边三角形，再说明GF是菱形的高，同时也等于△ABC中BC边上的高，把求GF转化为求△ABC的高.

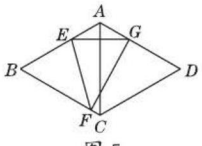


图5

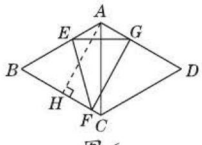


图6

解：如图6，过点A作$AH\perp BC$于H.

∵四边形$ABCD$是菱形，$\angle BAD=120°$，

∴$AB=BC=CD=AD$，$\angle CAB=\angle CAD=60°$，$AD\parallel BC$.

∴△ABC和△ACD是等边三角形.

∵$EG\perp AC$，∴$\angle AEG=\angle AGE=30°$.

易知$\angle EGF=\angle B=60°$，

∴$\angle AGF=90°$，∴$GF\perp AD$.

又∵$AD\parallel BC$，$AH\perp BC$，

∴$GF\parallel AH$.∴$GF=AH$.

在Rt△ABH中，$AB=6\sqrt{2}$，

易知$\angle BAH=30°$，∴$BH=3\sqrt{2}$.

∴$AH=3\sqrt{6}$，即$FG=3\sqrt{6}$.

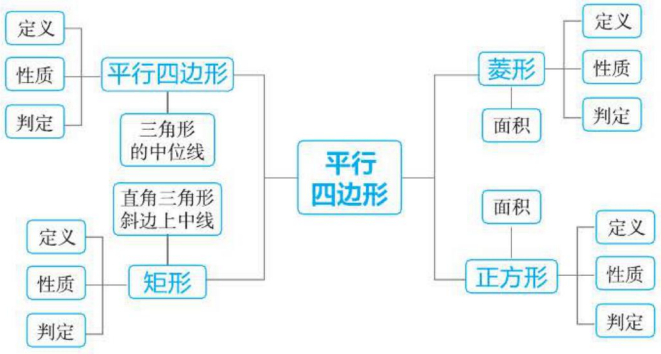
方法点拨：特殊图形的特殊性质是解题的法宝，用好菱形的对称性、成轴对称的两个图形的性质是将已知条件与待求问题建立联系的核心.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 特殊四边形的性质定理和判定定理都是互逆定理，它们分别从边的关系、角的关系、对角线的关系等角度考虑的；在判定时还要考虑是建立在什么四边形的基础上的.

2. 各种特殊四边形的性质.

	边	角	对角线
平行四边形	对边平行、相等	对角相等	对角线互相平分
菱形	对边平行，四条边相等	对角相等	对角线互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角
矩形	对边平行、相等	四个角都是直角	对角线互相平分且相等
正方形	对边平行，四条边相等	四个角都是直角	对角线互相垂直平分且相等，每一条对角线平分一组对角

知识方法专题

知识必学

专题一 平行四边形的性质与判定

链接中考≫ 平行四边形的性质与判定都涉及边和角相等，这与全等三角形的性质与判定相吻合，所以平行四边形的性质与判定通常与三角形的全等联合考查.

例1 [中考·桂林]如图18-1，在$\square ABCD$中，E，F分别是AB，CD的中点.

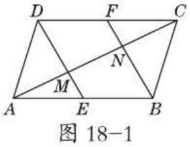


图18-1

(1) 求证：四边形$FBED$为平行四边形；

(2) 对角线AC分别与DE，BF交于点M，N，求证：$\triangle ABN \cong \triangle CDM$.

解题秘方：(1) 可以根据“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”来证明；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）因为 $AB=CD$，$\angle CAB=\angle ACD$，所以只需要再证明一组对应角相等即可.

证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$.

∵ E，F 分别是 AB，CD 的中点，

∴ $BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}DC$，

∴ $BE \parallel DF$，

∴四边形 $FBED$ 为平行四边形.

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，

∴$\angle CAB=\angle ACD$.

∵四边形 $FBED$ 为平行四边形，

∴$\angle ABN=\angle CDM$.

又∵ $AB=CD$，

∴△ $ABN \cong$△ CDM（ASA）.

专题二 三角形的中位线

链接中考≫ 三角形的中位线具有两方面的性质：一是位置关系，即三角形的中位线平行于三角形的第三边；二是数量关系，即三角形的中位线等于第三边的一半. 因此，若题目中给出三角形两边的中点时，则直接作出中位线，若题目中给出一边的中点时，则可从先取另一边的中点，再构造出中位线.

例 2 如图 18-2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，AB 与 CD 不平行，M，N 分别是 AD，BC 的中点，AB 与 MN 的大小关系是（　　）

A. $AB>MN$　　B. $AB=MN$

C. $AB<MN$　　D. $AB \leqslant MN$

解：如图 18-2，取 BD 的中点 E，连接 ME，NE.

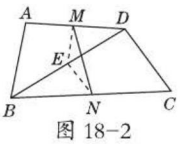


图 18-2

因为 M，N，E 分别是 AD，BC，BD 的中点，

所以 $ME \parallel AB$，$ME=\frac{1}{2}AB$，$NE \parallel CD$，$NE=\frac{1}{2}CD$.

因为 $AB=CD$，AB 与 CD 不平行，

所以 $ME+NE=AB$，M，N，E 三点不共线.

根据三角形的三边关系，得

$ME+NE>MN$，即 $AB>MN$.

答案：A

方法点拨：此题考查了三角形的中位线定理以及三角形的三边关系，能够巧妙构造三角形的中位线是解决此题的关键.

专题三 矩形的性质与判定

链接中考≫ 矩形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊点：一是内角是直角；二是对角线相等. 考查矩形的性质和判定时，也是主要扣住这两个特殊点进行考查.

例 3 [中考·北京] 如图 18-3，在 $\square ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E，点 F 在边 CD 上，$DF=BE$，连接 AF，BF.

（1）求证：四边形 $DEBF$ 是矩形；

（2）若 $CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF 平分 $\angle DAB$.

解题秘方：对于（1），可以分两步，先证明四边形 $DEBF$ 是平行四边形，再证明其有一个角是直角即可；对于（2），在（1）的基础上不难发现△ BCF 是直角三角形，因此可以根据勾股定理求出 BC 的长，再结合 $DF=5$ 及 $AD=BC$ 判断出 $DA=DF$，得到 $\angle DAF=\angle DFA$ 这一关键的结论，从而使问题获解.

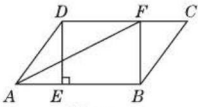


图 18-3

证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $DC \parallel AB$.

又∵ $DF=BE$，

∴四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

∵ $DE \perp AB$，∴$\angle DEB=90°$，

∴四边形 $DEBF$ 是矩形.

（2）∵四边形 $DEBF$ 是矩形，

∴$\angle BFC=90°$.

∵ $CF=3$，$BF=4$，∴由勾股定理得 $BC=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC=5$.

又∵ $DF=5$，∴ $AD=DF$，

∴∠ $DAF=$∠ DFA.

∵在平行四边形 $ABCD$ 中，$DC\parallel AB$，

∴∠ $DFA=$∠ FAB，

∴∠ $DAF=$∠ FAB，即 AF 平分∠ DAB.

专题四 直角三角形斜边上中线的性质

链接中考≫ 直角三角形斜边上中线的性质是直角三角形的一个重要性质，是常考的知识点，它为证明线段相等、角相等、线段的倍分等问题提供了很好的思路和理论依据.

例 4 如图 18−4，过矩形 $ABCD$ 对角线 AC 的中点 O 作 $EF\perp AC$，分别交 AB，DC 于 E，F 点，G 为 AE 的中点，若∠ $AOG=30°$，求证：$OG=\frac{1}{3}DC$.

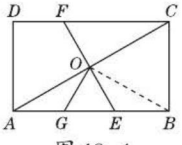


图 18−4

证明：如图 18−4，连接 OB.

∵ $EF\perp AC$，

∴△ AOE 是直角三角形.

∵ G 为 AE 的中点，

∴ $OG=AG=GE$，

∴∠ $BAC=$∠ $AOG=30°$，

∴∠ $AEO=60°$，∠ $GOE=60°$，

∴△ GOE 是等边三角形，

∴ $OE=GE=OG$.

易得∠ $ABO=$∠ $BAC=30°$，

∴∠ $BOE=$∠ $AEO-$∠ $ABO=30°$，

∴ $OE=EB$，

∴ $AG=GE=EB$，

∴ $OG=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}DC$.

专题五 菱形的性质与判定

链接中考≫ 菱形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊：一是四边相等；二是对角线互相垂直. 考查菱形的性质和判定时，也是主要从这两个方面考查.

例 5 [中考·安顺]如图 18−5，已知点 D 在△ ABC 的 BC 边上，$DE\parallel AC$ 交 AB 于 E，$DF\parallel AB$ 交 AC 于 F.

（1）求证：$AE=DF$；

（2）若 AD 平分∠ BAC，试判断四边形 $AEDF$ 的形状，并说明理由.

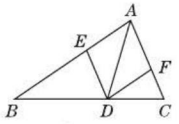


图 18−5

解题秘方：（1）根据两组对边分别平行的四边形为平行四边形判定四边形 $AEDF$ 是平行四边形，进而得到 $AE=DF$；

（2）根据一组邻边相等的平行四边形是菱形进行判定.

（1）**证明**：∵ $DE\parallel AC$，$DF\parallel AB$，

∴四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

∴ $AE=DF$.

（2）**解**：若 AD 平分∠ BAC，四边形 $AEDF$ 是菱形.

理由如下：∵ $DF\parallel AB$，

∴∠ $EAD=$∠ FDA.

∵ AD 平分∠ BAC，∴∠ $EAD=$∠ DAF，

∴∠ $DAF=$∠ FDA，∴ $AF=DF$.

由（1）知四边形 $AEDF$ 为平行四边形，

∴平行四边形 $AEDF$ 为菱形.

专题六 正方形的性质与判定

链接中考≫ 正方形既是矩形又是菱形，它具有矩形和菱形的所有性质，判定正方形的思路主要有两种：一种是先证明是矩形，再证明邻边相等或对角线互相垂直；另一种是先证明是菱形，再证明一个内角是直角或对角线相等. 在中考中一般以简

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

单的解答题形式考查.

例6 [中考·凉山州]如图18-6，在正方形$ABCD$中，G是BC上任意一点，连接AG，$DE \perp AG$于E，$BF \parallel DE$交AG于F，探究线段AF，BF，EF三者之间的数量关系，并说明理由.

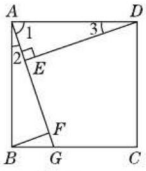


图18-6

解题秘方：首先根据正方形的性质和已知条件得到一些线段和角之间的等量关系，然后根据AAS判定两个三角形全等，从而根据全等三角形的性质得到三条线段之间的数量关系.

解：线段AF，BF，EF之间的数量关系是：$AF=BF+EF$.

理由如下：

$\because$四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=\angle 1+\angle 2=90^\circ$.

$\because DE \perp AG$，$\therefore \angle DEA=90^\circ$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=90^\circ$，$\therefore \angle 2=\angle 3$.

又$\because \angle DEF=90^\circ$，$BF \parallel DE$，

$\therefore \angle BFA=90^\circ$. $\therefore \angle DEA=\angle AFB$.

在$\triangle DAE$和$\triangle ABF$中，

$$\begin{cases}\angle DEA=\angle AFB,\\ \angle 3=\angle 2,\\ DA=AB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ABF$(AAS)，

$\therefore AE=BF$，

$\therefore AF=AE+EF=BF+EF$.

专题七 特殊四边形的探索题

链接中考≫ 与特殊四边形有关的实践探索题，关键是将特殊四边形进行折叠变换，而折叠变换就是全等变换，解决问题时既要运用到特殊四边形的性质与判定，又要运用到全等三角形的性质与判定.

例7 [中考·龙东地区]如图18-7，四边形$ABCD$是正方形，点E在直线BC上，连接AE. 将$\triangle ABE$沿AE所在直线折叠，点B的对应点是点B'，再展开，连接AB'并延长交直线DC于点F.

(1) 当点F与点C重合时如图18-7①，易证：$DF+BE=AF$(不需证明).

(2) 当点F在DC的延长线上时如图18-7②，当点F在CD的延长线上时如图18-7③，线段DF，BE，AF有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想，并选择其中一种情况给予证明.

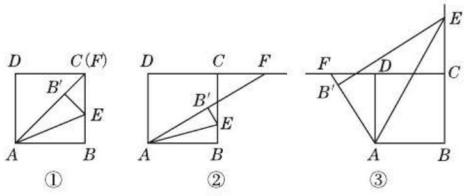


图18-7

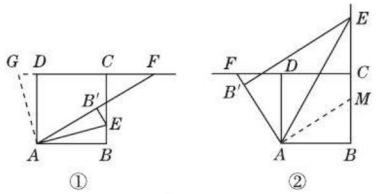


图18-8

解题秘方：对于图18-7①，由折叠可得$AB=AB'$，$BE=B'E$，再根据四边形$ABCD$是正方形，易证$B'E=B'F$，即可证明$DF+BE=AF$；

对于图18-7②和图18-7③，先从直观上判断，得到结论：$DF+BE=AF$和$BE-DF=AF$，在图18-7②中，延长CD到点G，使$DG=BE$，连接AG，得图18-8①，易证$\triangle ABE \cong \triangle ADG$，推导出$\angle G=\angle AEB$，根据$CB \parallel AD$，得$\angle AEB=\angle EAD$，则$\angle G=\angle EAD$，易得$\angle B'AE=\angle DAG$，则$\angle GAF=\angle EAD$，则$\angle G=\angle GAF$，则$GF=AF$，从而得出$DF+BE=AF$. 图18-7③的证明与图18-7②的证明类似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（2）图 18−7 ②的结论：$DF+BE=AF$；图 18−7 ③的结论：$BE-DF=AF$.

选择图 18−7 ②的证明：如图 18−8 ①，延长 CD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG.

∵在正方形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$，$\angle ABE=\angle ADG=90°$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$（SAS），

$\therefore \angle AEB=\angle G$，$\angle EAB=\angle GAD$.

∵ $CB \parallel AD$，$\therefore \angle AEB=\angle EAD$，

$\therefore \angle G=\angle EAD$.

由折叠可知，$\angle BAE=\angle B'AE$，

$\therefore \angle B'AE=\angle GAD$，

$\therefore \angle GAF=\angle EAD$，

$\therefore \angle G=\angle GAF$，

$\therefore GF=AF$.

∵ $GF=DF+DG=DF+BE$，

$\therefore DF+BE=AF$.

选择图 18−7 ③的证明：如图 18−8 ②，在 BC 上取点 M，使 $BM=DF$，连接 AM.

∵在正方形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF$（SAS），

$\therefore MA=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$.

由折叠知$\angle BAE=\angle EAB'$，

$\therefore \angle MAE=\angle DAE$.

∵ $AD \parallel BE$，

$\therefore \angle AEM=\angle DAE$，

$\therefore \angle MAE=\angle AEM$，

$\therefore ME=MA=AF$.

∵ $EM=BE-BM=BE-DF$，

$\therefore BE-DF=AF$.

方法点拨：此题属于几何综合证明题，题中包含了较多的基本图形，思考问题的过程中要善于发现这些基本图形带来的基本结论，以便迅速得到线索，使思路清晰．如图 18−9 所示：

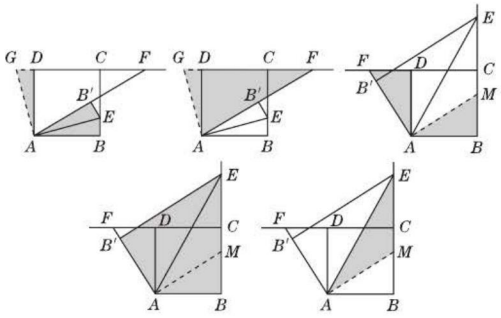


图 18−9

Ⅱ 方法必会

专题八 分类讨论思想

专题解读≫ 有些问题的答案不止一种，尤其是题目中没有给出图形的几何题，这时需要把问题分为几种可能的情况，然后针对每一种情况给出解答，要求思考问题必须严谨、细致．

例 8 ［中考·南京］如图 18−10，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，请画出以 A 为一个顶点，另外两个顶点在正方形 $ABCD$ 的边上，且含边长为 3 的所有大小不同的等腰三角形．（要求：只需画出示意图，并在所画等腰三角形长为 3 的边上标注数字 3）

解题秘方：本题应分类讨论，按 3 为底长或腰长进行分类，不论 3 为底长还是腰长，都应考虑 A 点为顶角的顶点还是底角的顶点．

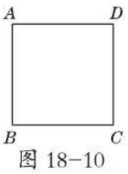


图 18−10

解：如图 18−11，满足条件的三角形有以下五种情形：

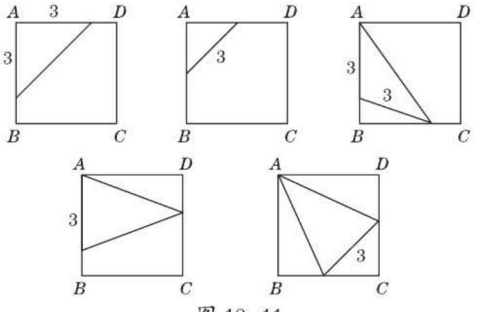


图 18−11

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：当一条线段作为等腰三角形的一边时，需要分为等腰三角形的底和腰讨论求解：当它作为等腰三角形的底时，可以利用尺规作该线段的垂直平分线产生等腰三角形顶角的顶点；当它作为等腰三角形的腰时，可以利用尺规画圆产生等腰三角形底角的顶点.

专题九 数形结合思想

专题解读≫数形结合思想就是把数、式与图形结合起来考虑，用几何图形直观地反映和描述数量关系，用代数方法来分析几何图形中蕴含的数量关系，从而使问题巧妙快速地得到解决.

例9 [中考·滨州]如图18-12，在平面直角坐标系中，将矩形$AOCD$沿直线AE折叠（点E在边DC上），折叠后顶点D恰好落在边OC上的点F处.若点D的坐标为$(10,8)$.则点E的坐标为_____.

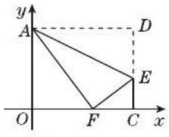


图18-12

解题秘方：由折叠前后的两个图形是全等形可实现线段之间的转换，得出$AF=AD=10$，$DE=EF$.在Rt△CEF中，易求边CF的长，又知$CE+EF=8$，可设未知数，利用勾股定理建立方程求解.

解：∵点D的坐标为$(10,8)$，∴$OA=DC=8$，$AD=OC=10$.根据折叠的性质知，$AF=AD=10$，$DE=EF$.在Rt△AOF中，$OF=\sqrt{AF^2-OA^2}=6$，

∴$CF=OC-OF=4$.

设$CE=x$，∴$EF=DE=8-x$，

∴在Rt△CEF中，$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得$x=3$.

∴点E的坐标为$(10,3)$.

答案：$(10,3)$

方法点拨：在直角三角形中，若已知两边的长度，可直接利用勾股定理求另一边的长度；若已知一边的长度，又知另两边之间的数量关系或角的数量关系时，可设未知数利用勾股定理建立方程求解另两边的长度.

专题十 条件探索题

专题解读≫条件探索题在分析时，应从结论出发，分析结论成立的条件，然后再根据已有条件，找出需添加的条件，从而进行推理论证.解有关特殊四边形的条件探索题，关键要扣住特殊四边形的性质与判定方法.

例10 [中考·武威]如图18-13，在平行四边形$ABCD$中，$AB=3$ cm，$BC=5$ cm，$\angle B=60°$，G是CD的中点，E是边AD上的动点，EG的延长线与BC的延长线交于点F，连接CE，DF.

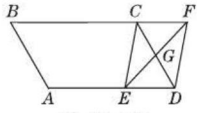


图18-13

（1）求证：四边形$CEDF$是平行四边形；

（2）①当$AE=$_____cm时，四边形$CEDF$是矩形；

②当$AE=$_____cm时，四边形$CEDF$是菱形.

（直接写出答案，不需要说明理由）

解题秘方：紧扣解决条件探索题的基本方法，从结论入手，逆向推理分析出条件，再结合条件解决问题.

（1）**证明**：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$CF\parallel ED$，

∴$\angle FCG=\angle EDG$.

∵G是CD的中点，

∴$CG=DG$.

在△FCG和△EDG中，

$$\begin{cases}\angle FCG=\angle EDG,\\ CG=DG,\\ \angle CGF=\angle DGE,\end{cases}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴△ FCG ≌△ EDG（ASA），

∴ $FG=EG$.

又∵ $CG=DG$，

∴四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

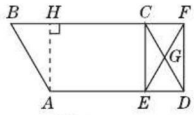


图 18−14

（2）①3.5

点拨：如图 18−14，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H.

∵∠ $B=60°$，$AB=3$ cm，

∴ $BH=1.5$ cm.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ ∠ CDA= ∠ $B=60°$，$DC=AB=3$ cm，$BC=AD=5$ cm.

∵ $AE=3.5$ cm，

∴ $DE=1.5$ cm$=BH$.

在△ HBA 和△ EDC 中，

$$\begin{cases} BH=DE, \\ \angle B=\angle CDE, \\ AB=CD, \end{cases}$$

∴△ HBA ≌△ EDC（SAS），

∴∠ CED= ∠ $AHB=90°$.

又∵四边形 $CEDF$ 是平行四边形，

∴四边形 $CEDF$ 是矩形.

②2

点拨：∵ $AD=5$ cm，$AE=2$ cm，

∴ $DE=3$ cm.

∵ $CD=3$ cm，∠ $CDE=60°$，

∴△ CDE 是等边三角形，

∴ $CE=DE$.

又∵四边形 $CEDF$ 是平行四边形，

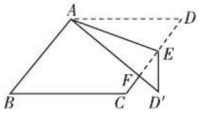
∴四边形 $CEDF$ 是菱形.

方法点拨：解决条件探索题，先将结论作为条件去分析此结论成立时应具备的条件，然后补充此条件，进行推理证明此结论成立.

好题必解 ☞答案见 280 页

类型 1　巧用特殊四边形求角的度数

1. 如图所示，在▱ $ABCD$ 中，E 为边 CD 上一点，将△ ADE 沿 AE 折叠至△ $AD'E$ 处，AD' 与 CE 交于点 F，若∠ $B=52°$，∠ $DAE=20°$，求∠ FED' 的度数.



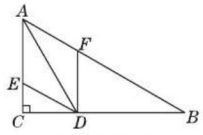
（第 1 题）

类型 2　巧用特殊四边形求线段长度

2. 如图，在△ ABC 中，∠ $C=90°$，∠ $B=30°$，AD 是△ ABC 的角平分线，$DE \parallel BA$ 交 AC 于点 E，$DF \parallel CA$ 交 AB 于点 F，已知 $CD=3$.

（1）求 AD 的长；

（2）求四边形 $AEDF$ 的周长.（注意：本题中的计算过程和结果均保留根号）

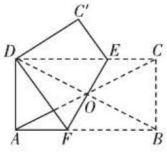


（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3　巧用特殊四边形求面积

3. 如图所示，有矩形纸片 $ABCD$，AC，BD 相交于点 O，且 $AC=4\sqrt{5}$．若 $AD:AB=1:2$，将纸片折叠使 B 与 D 重合，求折叠后纸片重合部分的面积．



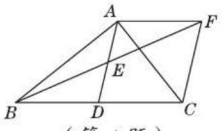
（第 3 题）

类型 4　巧用特殊四边形判定图形形状

4. 如图，在△ ABC 中，∠ $BAC=90°$，AD 是中线，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF\parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连接 CF.

（1）求证：$AD=AF$；

（2）如果 $AB=AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论．



（第 4 题）

类型 5　巧用特殊四边形证线段和差关系

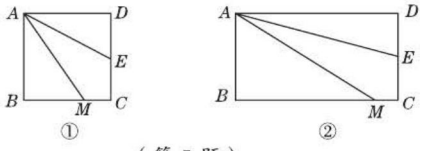
5. 问题情境：如图①，四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 边上的一点，E 是 CD 边的中点，AE 平分∠ DAM.

探究展示：

（1）求证：$AM=AD+MC$.

（2）$AM=DE+BM$ 是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由．

（3）若四边形 $ABCD$ 是长与宽不相等的矩形，其他条件不变，如图②，探究展示（1）（2）中的结论是否成立．请分别作出判断，不需要证明．

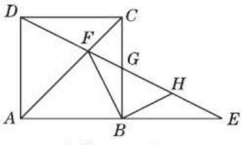


（第 5 题）

类型 6　巧用特殊四边形证位置关系

6. 如图，E 为正方形 $ABCD$ 的边 AB 的延长线上一点，DE 交 AC 于点 F，交 BC 于点 G，H 为 GE 的中点．

求证：$FB\perp BH$.



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十八章测试卷

☞答案见281页

（120分 90分钟）

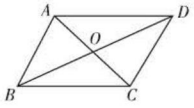
一、选择题（每题3分，共30分）

1. 如图，一张矩形纸片，剪去部分后得到一个三角形，则图中∠1+∠2的度数是（　　）

A.30°　　B.60°　　C.90°　　D.120°



（第1题）



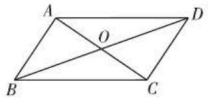
（第2题）

2. 如图，$\square ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，$\angle DAC=42°$，$\angle CBD=23°$，则$\angle COD=$（　　）

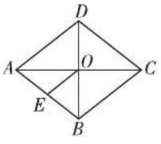
A.67°　　B.65°　　C.63°　　D.61°

3. 如图，$\square ABCD$的对角线AC与BD相交于点O，$AB\perp AC$，若$AB=4$，$AC=6$，则BD的长是（　　）

A.10　　B.9　　C.8　　D.11



（第3题）



（第5题）

4. 下列判断错误的是（　　）

A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

B. 四个内角都相等的四边形是矩形

C. 四条边都相等的四边形是菱形

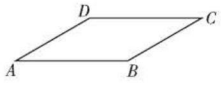
D. 两条对角线垂直且平分的四边形是正方形

5. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，E为AB的中点，且$OE=a$，则菱形$ABCD$的周长为（　　）

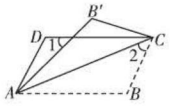
A.16a　　B.12a　　C.8a　　D.4a

6. 如图，已知$\square ABCD$中，$AB=3$，$AD=2$，$\angle B=150°$，则$\square ABCD$的面积为（　　）

A.2　　B.3　　C.$3\sqrt{3}$　　D.6



（第6题）



（第7题）

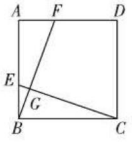
7. 如图，将$\square ABCD$沿对角线AC折叠，使点B落在B'处，若$\angle 1=\angle 2=44°$，则$\angle B$为（　　）

A.66°　　B.104°　　C.114°　　D.124°

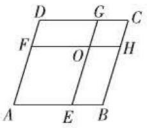
8. 如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在AB，AD上，且$BE=AF$，连接CE，BF相交于点G，则下列结论不正确的是（　　）

A.$BF=CE$　　B.$\angle AFB=\angle ECD$

C.$BF\perp CE$　　D.$\angle AFB+\angle BEC=90°$



（第8题）

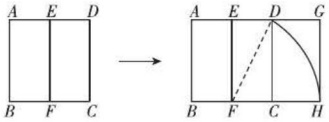


（第9题）

9. 如图，在菱形$ABCD$中，$AB=8$，点E，F分别在AB，AD上，且$AE=AF$，过点E作$EG\parallel AD$交CD于点G，过点F作$FH\parallel AB$交BC于点H，EG与FH交于点O. 当四边形$AEOF$与四边形$CGOH$的周长之差为12时，AE的长为（　　）

A.6.5　　B.5.5　　C.6　　D.5

10. 宽与长的比是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（约0.618）的矩形叫做黄金矩形，黄金矩形蕴藏着丰富的美学价值，给我们以协调和匀称的美感，我们可以用这样的方法画出黄金矩形：作正方形$ABCD$，分别取AD，BC的中点E，F，连接EF，以点F为圆心，FD长为半径画圆弧，交BC的延长线于点H，则图中下列矩形是黄金矩形的是（　　）



（第10题）

A. 矩形$ABFE$　　B. 矩形$EFCD$

C. 矩形$EFHG$　　D. 矩形$DCHG$

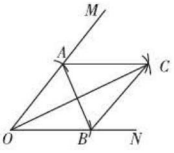
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题（每题3分，共18分）

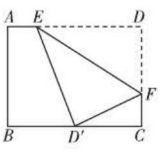
11. 若直角三角形斜边上的中线等于3，则这个直角三角形的斜边长为_____.

12. 已知三角形的三边长分别是4，5，6，则它的三条中位线围成的三角形的周长是_____.

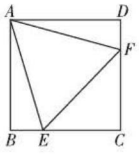
13. 如图，在$\angle MON$的两边上分别截取OA，OB，使$OA=OB$；分别以点A，B为圆心，OA长为半径作弧，两弧交于点C；连接AC，BC，AB，OC. 若$AB=2$ cm，四边形$OACB$的面积为4 cm^2，则OC的长为_____cm.



（第13题）



（第14题）



（第16题）

14. 如图，将矩形纸片$ABCD$沿EF折叠，使D点与BC边的中点D'重合. 若$BC=8$，$CD=6$，则$CF=$_____.

15. 在$\square ABCD$中，$AD=BD$，BE是AD边上的高，$\angle EBD=20°$，则$\angle A$的度数为____.

16. 如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在边BC，CD上，且$AE=EF=FA$. 有下列结论：

①$\triangle ABE \cong \triangle ADF$；②$CE=CF$；

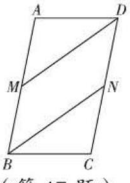
③$\angle AEB=75°$；④$BE+DF=EF$；

⑤$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle CEF}$.

其中正确的是_____（只填写序号）.

三、解答题（共72分）

17.（8分）如图，在$\square ABCD$中，已知M和N分别是边AB，DC的中点，求证：四边形$BMDN$是平行四边形.

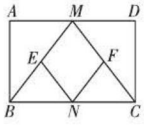


（第17题）

18.（8分）已知：如图，在矩形$ABCD$中，M，N分别是边AD，BC的中点，E，F分别是线段BM，CM的中点.

（1）求证：$\triangle ABM \cong \triangle DCM$；

（2）填空：当AB ∶ $AD=$_____时，四边形$MENF$是正方形.

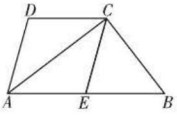


（第18题）

19.（8分）如图，四边形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，AC平分$\angle BAD$，$CE \parallel AD$交AB于点E.

（1）求证：四边形$AECD$是菱形；

（2）若点E是AB的中点，试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由.

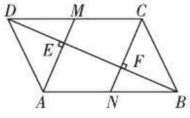


（第19题）

20.（10分）如图，$\square ABCD$中，BD是它的一条对角线，过A，C两点作$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为E，F，延长AE，CF分别交CD，AB于M，N.

（1）求证：四边形$CMAN$是平行四边形；

（2）已知$DE=4$，$FN=3$，求BN的长.



（第20题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

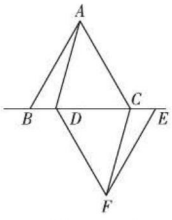
21.（12分）如图，已知△ABC和△DEF是两个边长为10 cm的等边三角形，且点B，D，C，E在同一条直线上，连接AD，CF.

（1）求证：四边形$ADFC$是平行四边形；

（2）若BD=3 cm，△ABC沿着BE的方向以1 cm/s的速度运动，设△ABC运动时间为t s.

①当t为何值时，▱$ADFC$是菱形？请说明理由；

②▱$ADFC$有可能是矩形吗？若可能，求出t的值及此矩形的面积；若不可能，请说明理由.

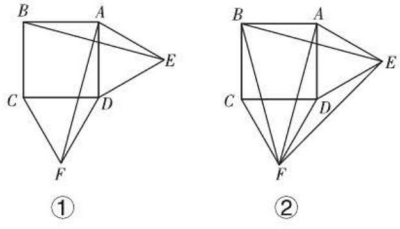


（第21题）

22.（12分）问题背景：在正方形$ABCD$的外侧，作△ADE和△DCF，连接AF，BE.

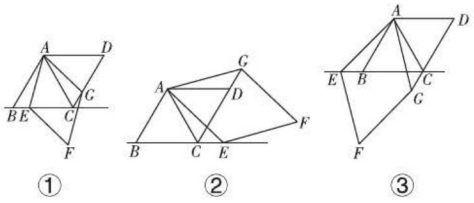
特例探究：如图①，若△ADE与△DCF均为等边三角形，试判断线段AF与BE的数量关系和位置关系，并说明理由；

拓展应用：如图②，在△ADE与△DCF中，AE=DF，ED=FC，且BE=4，则四边形$ABFE$的面积为_____.



（第22题）

23.（14分）已知AC是菱形$ABCD$的对角线，∠BAC=60°，点E是直线BC上的一个动点，连接AE，以AE为边作菱形$AEFG$，并且使∠EAG=60°，连接CG，当点E在线段BC上时，如图①，易证：AB=CG+CE.



（第23题）

（1）当点E在线段BC的延长线上时（如图②），猜想AB，CG，CE之间的关系并证明；

（2）当点E在线段CB的延长线上时（如图③），直接写出AB，CG，CE之间的关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

赏析数形结合体
赏析数形结合体











第十九章 一次函数

核心考点

你将见到的

- 函数的三种表示方法
- 正比例函数的图象与性质
- 一次函数的图象与性质
- 一次函数与方程、不等式之间的关系
- 一次函数的应用

核心方法

我们为你提供的

- 待定系数法
- 数形结合思想
- 定义法
- 分类讨论思想
- 方程思想
- 建模思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.1 函数

19.1.1 变量与函数

核心知识

- 常量与变量
- 函数的定义
- 函数自变量的取值范围

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 常量与变量

1. 定义： 在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为变量，数值始终不变的量为常量.

说明：（1）“常量”是已知数，是指在整个变化过程中保持不变的量；但“常量”不等于“常数”，它可以是数值不变的字母. 如在匀速运动中的速度 v 就是一个常量.

（2）变量与常量是相对的，前提是“在一个变化过程中”，一个量在某一变化过程中是常量，而在另一个变化过程中，它可能是变量. 如在 $s=vt$ 中，当 s 一定时，v，t 为变量，s 为常量；当 t 一定时，s，v 为变量，t 为常量.

2. 判断一个量是常量还是变量的方法：

看这个量在某一变化过程中的值是否发生改变（或者说是否会取不同的数值），若在变化过程中此量的数值不变，则此量是常量，若此量可以取不同的数值，则此量是变量.

注意：（1）常量与变量只与在某一个变化过程中的数值是否发生改变有关，与个数没有关系.

（2）变量、常量与字母的指数没有关系，如 $y=100-2x^2$ 中，x，y 是变量，而不能说 x^2 是变量.

拨考向 利用常量与变量的定义进行辨识

例 1 分别指出下列关系中的变量和常量：

（1）圆面积公式 $S=\pi r^2$（S 表示面积，r 表示半径）；

（2）若等腰三角形底角度数值为 x，则顶角度数值 y 与 x 的关系式是 $y=-2x+180$；

（3）在 $\triangle ABC$ 中，它的底边长 a 一定，底边上的高是 h，则三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ah$.

解题秘方： 紧扣“常量与变量”的定义进行辨识.

解：（1）r，S 是变量，π 是常量；（2）x，y 是变量，-2，180 是常量；（3）S，h 是变量，$\frac{1}{2}$，a 是常量.

提分·必记

特别提醒

1. 判断一个量是常量还是变量，应先看它是否在一个变化过程中，若在，则看它在这个变化过程中数值是否发生改变.
2. 指出一个变化过程中的常量时，应连同它前面的符号.

提分·秘诀

特别警示

常量与变量是从某一变化过程中该量的值是否发生改变，即该量是否会取不同的数值作为识别标准的. 不要误认为常量为常数，表示不变量的字母，也可以作为常量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 函数

1. 函数的定义：

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数.

说明：（1）在函数中定义的两个变量 x，y 是有主次之分的，变量 x 的变化是主动的，称之为自变量，而变量 y 是随 x 的变化而变化的，是被动的，称之为因变量（即自变量的函数）.

（2）函数不是数，函数的实质是两个变量的对应关系.

2. 判断一个关系是否是函数关系的方法：

一看是否在一个变化过程中；

二看是否存在两个变量；

三看对于变量每取一个确定的值，另一个变量是否都有唯一确定的值与其对应，以上三者（简称“三要素”）缺一不可.

提分·必记

特别提醒

函数的定义中包括了对应值的存在性和唯一性两重意思，即对自变量的每一个确定的值，函数有且只有一个值与之对应，对自变量 x 的不同值，y 的值可以相同，如：函数 $y=x^2$，当 x=1 和 x=-1 时，y 的对应值都是 1.

技考向▶ 利用函数的定义判定两变量的函数关系

例 2 判断下列变量之间是否是函数关系，若是，请指出自变量与自变量的函数，若不是，请说明理由.

（1）$y=\pm x$；　（2）$y=x^3$；　（3）$2x^2+y^2=10$；　（4）$y=|x|$.

解题秘方：紧扣函数定义的特征进行解答.

解：（1）不是函数关系，因为 x 每取一个值时，y 有两个对应值，不满足唯一确定；

（2）是函数关系，因为每一个 x 的值都有唯一的 y 值与之对应；其中 x 是自变量，y 是自变量的函数；

（3）不是函数关系，例如当 $x=1$ 时，y 有两个对应值，不满足唯一确定；

（4）是函数关系，因为每一个 x 的值都有唯一的 y 值与之对应；其中 x 是自变量，y 是自变量的函数.

提分·秘诀

特别提醒

判断两个变量是否具有函数关系，只需看它是否符合定义中“三要素”即可，但要注意两点：

1. 对于自变量 x 取不同的数值，与之对应的 y 的值不一定不同；只要有唯一值与之对应即可.
2. 不能只看是否有关系式存在，有些函数关系是没有关系式的（如心电图中的时间与生物电流的关系）.

点知识▶ 3 函数自变量的取值范围与函数值

1. 自变量的取值范围：

（1）**定义：**使函数有意义的自变量取值的全体实数叫做自变量的取值范围.

（2）**确定自变量取值范围的方法：**其一，要使函数关系式有意义；其二，对实际问题中的函数关系，还应该使得实际问题有意义.

注意：自变量的取值范围可以是无限的，也可以是有限的，甚至可以是几个数或单独一个数.

2. 函数值：

（1）**定义：**如果在自变量取值范围内给定一个数值 a，函数对应的值为 b，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值.

提分·必记

特别提醒

1. 函数与函数值的区别：函数表示的是两个变量之间的一种对应关系，而函数值是一个数值.
2. 一个函数的函数值是随着自变量的变化而变化的，故在求函数值时，一定要指明自变量为多少时的函数值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）**求函数值及自变量值的方法：**

①当已知关系是函数关系时，求函数值实质就是利用代入法求代数式的值.

②当自变量的值确定时，函数值是唯一确定的；当函数值确定时，求相应的自变量的值，就是解方程，对应的自变量的值可以不止一个，如 $y=x^2-1$ 中，当 $y=0$ 时，$x=\pm 1$.

3. 对于实际问题中的函数关系，函数值与自变量的值都要使实际问题有意义.

提分·秘诀

考向▶利用自变量取值范围、函数值的意义进行相关计算

题型 1：自变量取值范围的定义在求函数关系式中自变量取值范围中的应用

例 3 求下列函数中自变量 x 的取值范围.

（1）$y=3x+7$；　　（2）$y=\sqrt{x-4}$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$；　　（4）$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$.

解题秘方：紧扣“确定自变量取值范围的方法”求解.

解：（1）函数式右边是整式，

所以 x 的取值范围为一切实数；

（2）由 $x-4\geqslant 0$，得 $x\geqslant 4$，

所以 x 的取值范围是 $x\geqslant 4$；

（3）由 $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}$

得 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$，

所以 x 的取值范围是 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$；

（4）由 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 1-2x\geqslant 0\end{cases}$

得 $x=\dfrac{1}{2}$，

所以 x 的取值范围是 $x=\dfrac{1}{2}$.

解法提醒

常见函数自变量取值范围的确定

类型	取值范围
整式型	全体实数
分式型	使分母不为 0 的实数.
偶次根式型	使根号下的式子的值大于或等于 0 的实数
零次型	使幂的底数不为 0 的实数
综合型	使各部分都有意义的实数的公共部分

题型 2：函数值的定义在求函数关系式中变量的值中的应用

例 4 已知函数 $y=13-4x$.

（1）当 $x=3$ 时，对应的函数值是多少？

（2）当 x 为何值时，函数值为 2？

解题秘方：紧扣“求函数值及自变量值的方法”求解.

解：（1）当 $x=3$ 时，$y=13-4\times 3=1$.

（2）当 $y=2$ 时，$2=13-4x$，解得 $x=\dfrac{11}{4}$.

解法提醒

求函数值的一般步骤：

1. 明确自变量的取值；
2. 将自变量的取值代入函数解析式；
3. 按照函数解析式指明的运算顺序进行计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 函数解析式

1. 定义： 用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，这种式子叫做函数的解析式.

2. 特点： （1）函数解析式是等式.

（2）函数解析式中指明了哪个是自变量，哪个是函数，通常等式右边的代数式中的变量是自变量，等式左边的变量表示函数.

（3）书写函数的解析式是有顺序的.$y=2x-1$ 表示 y 是 x 的函数，若 $x=2y-1$，则表示 x 是 y 的函数，即求 y 关于 x 的函数解析式时，必须用含 x 的代数式表示 y，也就是等式左边是一个变量 y，右边是一个含 x 的代数式.

拔考向▶ 利用几何问题中的数量关系建立函数解析式

例 5 等腰三角形 ABC 的周长为 10 cm，底边 BC 的长为 y cm，腰 AB 的长为 x cm.

（1）写出 y 关于 x 的函数解析式；

（2）求 x 的取值范围.

解题秘方： 紧扣“函数解析式的特点”结合几何相关性质求解.

解：（1）由题意可得 $2x+y=10$，所以 y 关于 x 的函数解析式为 $y=10-2x$.

（2）由 x，y 均为线段长，可得 $x>0$，$y>0$，即 $10-2x>0$.

再由三角形三边关系，得 $2x>y$，即 $2x>10-2x$，所以自变量 x 应满足 $\begin{cases}x>0,\\10-2x>0,\\2x>10-2x,\end{cases}$ 解这个不等式组，得 $\frac{5}{2}<x<5$. 所以 x 的取值范围为 $\frac{5}{2}<x<5$.

提分·必记

特别提醒

确定函数解析式的方法：

1. 认真审题，根据题意找出相等关系；
2. 按相等关系写出含有两个变量的等式；
3. 将等式变形为用含有自变量的式子表示函数的形式.

注意：在确定实际问题的函数解析式时，一定不能忽略自变量的取值范围.

提分·秘诀

方法点拨

1. 求几何问题的函数解析式，实质上是建立几何中两个变量之间的数量关系，要熟悉一些常用的几何关系式.如：圆的周长与半径，立方体的体积与棱长等.
2. 确定自变量的取值范围时，一方面要考虑使函数解析式有意义，另一方面还要注意使几何问题有意义.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用观察法识别常量与变量

例 6 [期末·临城县]小邢到单位附近的加油站加油，如图 19.1-1 是小邢所用的加油机上的数据显示牌，则数据中的变量是（　　）

A. 金额　　B. 数量

C. 单价　　D. 金额和数量



图 19.1-1

解题秘方： 紧扣“常量与变量的意义”，结合表中的数据变化与否进行识别.

解： 常量是固定不变的量，变量是变化的量，单价是不变的量，而金额是随着数量的变化而变化，故选 D.

答案： D

挑战·高分

解法提醒

1. 本题的变化过程是指：每升单价 6.48 元时加油机数据显示牌的数据变化过程；
2. 识别：不变的数据表示的量是常量，不断变化的数据表示的量是变量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用可变性识别函数

挑战·高分

例7 [期中·滦南县]在圆的周长公式 $C=2\pi r$ 中，下列说法错误的是（　　）

A. C，π，r 是变量，2 是常量

B. C，r 是变量，2π 是常量

C. r 是自变量，C 是 r 的函数

D. 将 $C=2\pi r$ 写成 $r=\dfrac{C}{2\pi}$，则可看成 C 是自变量，r 是 C 的函数

解题秘方：紧扣“函数的表达形式”进行解答.

解：在圆的周长公式 $C=2\pi r$ 中，C 是 r 的函数，C，r 是变量，2π 是常量，将 $C=2\pi r$ 写成 $r=\dfrac{C}{2\pi}$，则可看成 C 是自变量，r 是 C 的函数，故说法错误的是 A.

答案：A

解法提醒

函数是相对于自变量而言的，而对于两个变量 x 和 y，谁是谁的函数，要看其表达形式，处于主动变化的量是自变量，处于被动变化的量是自变量的函数，注意：“C 是 r 的函数”不能简单说：“C 是函数”.

拔尖角度 3 利用数形结合法用函数解几何问题

挑战·高分

例8 如图 19.1-2，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E 为 CD 的中点，P 为正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的动点，动点 P 从点 B 向点 C 运动. 设 BP 的长度为 x，阴影部分△ APE 的面积为 y.

（1）求 y 与 x 之间的函数解析式；

（2）当点 P 运动的路程为多少时，△ APE 的面积为 0.25？

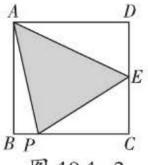


图 19.1-2

解题秘方：用“作差法”求出表示阴影部分面积的解析式.

解：（1）因正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E 为 CD 的中点.

所以 $AB=BC=CD=AD=1$，$CE=DE=\dfrac{1}{2}$.

因为 BP 的长度为 x，所以 $CP=1-x$.

所以 $S_{\triangle APE}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CPE}-S_{\triangle ADE}=1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}(1-x)\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1$，

即 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

此处 $BP\geqslant0$，$PC\geqslant0$，即 $x\geqslant0$，$1-x\geqslant0$，所以自变量 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant1$.

（2）因为△ APE 的面积为 0.25，

所以 $-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}=0.25$. 解得 $x=1$.

也就是当点 P 与点 C 重合，点 P 运动的路程为 1 时，△ APE 的面积为 0.25.

解法提醒

对于点运动所构成的图形的周长或面积相关问题的求解，一般先根据图形的形状来确定函数解析式（随着点运动范围不同，有时需要分类讨论，建立不同的函数解析式），再结合函数解析式进行相关计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用建模思想用函数解析式解生活问题

挑战·高分

例9 某实验中学组织学生到距学校6 km的光明科技馆去参观，学生王琳因有事没能乘上学校的校车，于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆．出租车的收费标准如下：

路程/km	费用/元
3 km以下（含3 km）	8.00
3 km以上，每增加1 km	1.80

（1）写出乘出租车的费用y（元）与出租车行驶的路程x（km）之间的函数解析式；

（2）王琳身上仅有14元，乘出租车到光明科技馆的车费够不够？

解题秘方：用“分类思想”列出不同路程的计费函数解析式．

解：（1）当$0<x\leqslant 3$时，$y=8$；

当$x>3$时，$y=1.8(x-3)+8=1.8x+2.6$.

即$y=\begin{cases}8, & (0<x\leqslant 3),\\ 1.8x+2.6, & (x>3).\end{cases}$

（2）当$x=6$时，$y=1.8x+2.6=1.8\times 6+2.6=13.4<14$.

所以车费够了．

解法提醒

分段计费在生活中比较常见，对于具体的数学问题的解决，既需要相关的生活经验，还需要分类讨论的思想，至于函数求值，只需要选择正确的解析式和已知变量的值，代入之后通过解一元一次方程即可．

详解

求此函数解析式利用的等量关系：

乘出租车费用=起步价(3 km以内)+单价×超过3 km部分的里程，即$y=8+1.8(x-3)$.

点中考·拨模拟 得满分

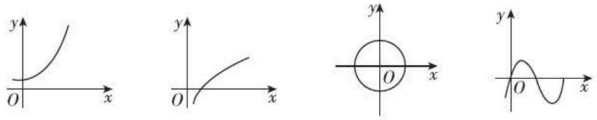
中考探秘 本节主要考点有：常量与函数的认识，求函数解析式及确定函数解析式中自变量的取值范围，试题类型多以选择题、填空题的形式出现，难度适中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用函数的定义在平面直角坐标系中辨别函数

例10 [中考·泸州]下列曲线（如图19.1-3）不能表示y是x的函数的是（　　）



A　　B　　C　　D

图19.1-3

试题评析：考查了函数的概念，理解函数的定义，是解决本题的关键．

解：当给x一个值时，y有唯一的值与其对应，就说y是x的函数，x是自变量．选项C中的曲线，不满足对于自变量的每一个确定的值，函数值有且只有一个值与之对应，即单对应，故C中曲线不能表示y是x的函数．故选C.

答案：C

思路点拨

理解函数的定义，在直角坐标系中，对于自变量在允许取值范围内每确定一个数，在曲线上表示y的点是否有唯一值与之对应；若对应的y值只有一个，则该曲线表示y是x的函数，否则就不是．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用定义法求自变量的取值范围

例 11 [中考·恩施州]函数 $y=\frac{1}{x-3}+\sqrt{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x \geqslant 1$　　B. $x \geqslant 1$ 且 $x \neq 3$

C. $x \neq 3$　　D. $1 \leqslant x \leqslant 3$

试题评析：本题考查了函数自变量的取值范围，被开方数是非负数，分母不能为零是解题的关键.

解：由题意，得 $x-1 \geqslant 0$ 且 $x-3 \neq 0$，

解得 $x \geqslant 1$ 且 $x \neq 3$.

答案：B

解法提醒

求自变量取值范围的过程，其实就是解不等式(组)的过程，当函数解析式中含有分式或二次根式时，要注意分母不为零或被开方数为非负数.

两年模拟兵法

☞答案见 283 页

1. [模拟·长乐市]在 $\triangle ABC$ 中，它的底边长是 a，底边上的高是 h，则三角形面积 $S=\frac{1}{2}ah$，当 a 为定长时，在此式中（　　）

A. S，h 是变量，$\frac{1}{2}$，a 是常量

B. S，h，a 是变量，$\frac{1}{2}$ 是常量

C. a，h 是变量，$\frac{1}{2}$，S 是常量

D. S 是变量，$\frac{1}{2}$，a，h 是常量

2. [期末·天桥]弹簧挂重物会伸长，测得某弹簧长度 y（cm）最长为 20 cm，与所挂物体质量 x（kg）间有下面的关系.

x/kg	0	1	2	3	4	…
y/cm	8	8.5	9	9.5	10	…

下列说法不正确的是（　　）

A. x 与 y 都是变量，x 是自变量，y 是因变量

B. 所挂物体质量为 6 kg 时，弹簧长度为 11 cm

C. 在弹簧弹性限度内，所挂物体质量每增加 1 kg，弹簧长度就增加 0.5 cm

D. 挂 30 kg 物体时，弹簧长度比原长增加 15 cm

3. [期末·玄武区]下列关系中，y 不是 x 的函数关系的是（　　）

A. 长方形的长一定时，其面积 y 与宽 x

B. 高速公路上匀速行驶的汽车，其行驶的路程 y 与行驶的时间 x

C. $y=|x|$

D. $|y|=x$

4. [期末·慈溪市]在国内投寄平信应付邮资如下表：

信件质量 p/克	$0<p\leqslant 20$	$20<p\leqslant 40$	$40<x\leqslant 60$
邮资 q/元	1.20	2.40	3.60

下列表述：

①若信件质量为 27 克，则邮资为 2.40 元；

②若邮资为 2.40 元，则信件质量为 35 克；

③ p 是 q 的函数；

④ q 是 p 的函数. 其中正确的是（　　）

A. ①④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②③④

5. [中考·赤峰]能使式子 $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $x \geqslant 1$　　B. $x \geqslant 2$

C. $1 \leqslant x \leqslant 2$　　D. $x \leqslant 2$

6. [月考·荣昌区]以等腰三角形底角的度数 x（单位：度）为自变量，顶角的度数 y 为因变量

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的函数关系式为（　　）

A.$y=180-2x$（$0<x<90$）

B.$y=180-2x$（$0<x\leqslant 90$）

C.$y=180-2x$（$0\leqslant x<90$）

D.$y=180-2x$（$0\leqslant x\leqslant 90$）

7. 若函数 $y=\begin{cases}x^2+2, & x\leqslant 2,\\ 2x, & x>2,\end{cases}$ 则当函数值 $y=8$ 时，自变量 x 的值是（　　）

A. $\pm\sqrt{6}$　　B.4

C. $\pm\sqrt{6}$ 或 4　　D.4 或 $-\sqrt{6}$

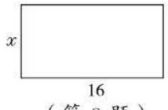
8. 如图，长方形的长是 16，宽为 x，周长为 y，面积为 S.

（1）写出 y 与 x 之间的函数解析式；

（2）写出 S 与 x 之间的函数解析式；

（3）当 $S=160$ 时，x 等于多少？ y 等于多少？

（4）当 x 增加 2 时，y 增加多少？ S 增加多少？



（第 8 题）

9. 如图，等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 12 cm，AC 与 MN 在同一直线上，开始时 A 点与 M 点重合，让△ ABC 沿直线 MN 向右运动，最后 A 点与 N 点重合.

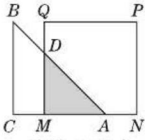
（1）试写出重叠部分面积 y（cm^2）与 MA 的长度 x（cm）之间的函数解析式.

（2）当 $MA=4$ cm 时，重叠部分的面积是多少？

（3）当 MA 的长度是多少时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5 ∶ 4？

（4）等腰直角三角形 ABC 开始时 A 点与 M 点重合，已知向右移动的速度是 1 cm/s，运动停止时边 BC 与 PN 重合，探究重叠部分面积 y（cm^2）与运动时间 t（s）的函数解析式.

【导学号：8592074】



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.1.2 函数的图象

核心知识
- 函数的图象及画法
- 函数的图象的应用
- 函数的表示方法

知识链接



点方法·拨技巧 提高分

点知识 1 函数的图象

1. 定义： 一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图象.

2. 函数图象的画法步骤：

（1）**列表：** 列表给出一些自变量和函数的对应值.

（2）**描点：** 以表中各组对应值为坐标，在坐标平面内描出相应的点.

（3）**连线：** 按照自变量由小到大的顺序，把所描各点用平滑的曲线依次连接起来.

注意：（1）函数的图象是由一些点组成的，在描点的时候应尽可能地多选几个点，使图象更准确；

（2）在画图象时，应考虑自变量的取值范围.

提分·必记

特别提醒

1. 函数图象上的任意点 P（x，y）中的 x，y 都满足函数解析式.
2. 满足函数关系的任意一对有序实数对（x，y）所对应的点一定在函数的图象上.
3. 函数图象上的所有点与函数解析式中的两个变量的关系是一一对应的. 它们是函数中的两个变量间的关系的两种不同（一种是“数”，一种是“形”）的呈现方式.

拔考向 利用函数的图象与点的坐标的关系解相关问题

题型 1：函数的图象与点的坐标间的关系在求字母值中的应用

例 1 已知函数 $y=2x-1$.

（1）试判断点 $A(-1,\ 3)$ 和点 $B\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ 是否在此函数的图象上；

（2）已知点 $C(a,\ a+1)$ 在此函数的图象上，求 a 的值.

解题秘方： 紧扣函数图象上的所有点与函数解析式中两个变量的一一对应关系进行解答.

解：（1）∵当 $x=-1$ 时，$y=2\times(-1)-1=-3\neq 3$，

∴点 A 不在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

∵当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$，∴点 B 在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

（2）∵点 $C(a,\ a+1)$ 在函数 $y=2x-1$ 的图象上，

∴把 $x=a$，$y=a+1$ 代入 $y=2x-1$，得 $a+1=2a-1$.

解得 $a=2$.

提分·秘诀

特别提醒

函数图象上点的坐标与函数解析式中两个变量的一一对应关系：

1. 横轴所表示的量是自变量，纵轴所表示的量是自变量的函数.
2. 函数图象上每一点的横坐标、纵坐标一定是这个函数的自变量和函数的一组对应值.
3. 从自变量的一个值和函数的对应值为坐标的点必在这个函数的图象上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：函数的图象上的点的坐标与函数解析式中两个变量的一一对应关系在作图中的应用

例 2 （1）画出函数 $y=2x-1$ 的图象；

（2）判断点（5，9），（7，15）是否在此函数的图象上.

解题秘方：紧扣“画函数图象的画法步骤”进行作图.

解：（1）列表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−7	−5	−3	−1	1	3	5	…

描点、连线就得到函数 $y=2x-1$ 的图象（如图 19.1−4）.

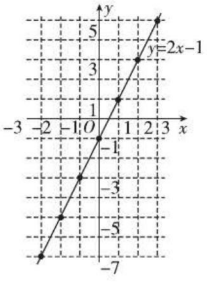


图 19.1−4

（2）当 $x=5$ 时，$y=2\times5-1=9$，所以点（5,9）在此函数的图象上.

当 $x=7$ 时，$y=2\times7-1=13\neq15$，所以点（7,15）不在此函数的图象上.

作法提醒

1. 列表时要根据自变量的取值范围取值，从小到大或自中间向两边取值，取值要有代表性，使画出的函数图象能反映出函数的全貌.
2. 描点体现了“数”与“形”的联系，是数形结合思想的体现，描点是要以表中每对对应值为坐标，点描得越多，图象就越精确.
3. 连线时要用平滑的曲线将所描的点依次连接.

知识 2 函数的表示方法

提分·必记

1. 函数的三种表示方法：

表示方法	定义	优点	缺点
解析式法	用数学式子表示函数关系的方法叫做解析式法. 其中的等式叫做函数解析式	能准确地反映整个变化过程中自变量与函数的对应关系	从函数解析式很难直观看出函数的变化规律，而且有些函数不能用解析式法表示出来
列表法	通过列出自变量的值与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做列表法	一目了然，对表格中已有自变量的每一个值，可直接查出与它对应的函数值	列出的对应值是有限的，而且在表格中也不容易看出自变量与函数的变化规律
图象法	用图象来表示两个变量间的函数关系的方法叫做图象法	直观、形象地反映出函数关系变化的趋势和某些性质	从自变量的值常常难以找到对应的函数的准确值

2. 列函数解析式：

根据实际问题列函数解析式的方法类似于列方程解应用题，只要找出自变量与函数之间存在的等量关系，列出等式即可. 但要整理成用含自变量的代数式表示函数的形式.

特别提醒

1. 函数的三种表示方法可以互相转化，在应用中，要根据三种表示方法的特点，选用适当的表示方法，或者三种方法结合起来使用；
2. 并不是所有的函数都可以用这三种方法表示出来. 如气温与时间的函数关系，只可用列表法和图象法表示，而无法用解析式法表示.
3. 在实际问题中，若纵轴和横轴上的点表示的是不同意义的量，则两轴可以取不同的单位长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用函数的表示方法表示实际问题

例 3 一水箱中有水 500 L，现在往外放水，每分钟放水 50L，请用三种不同的方法表示水箱中剩余水量 y（L）与放水时间 t（min）之间的函数关系．

解题秘方：紧扣“等量关系：剩余水量 = 原水量 − 放出水量”用三种方法表示函数关系．

解：（1）**解析式法**：解析式为 $y=500-50t$（$0 \leqslant t \leqslant 10$）．

（2）**列表法**：表格如下．

t/min	0	1	2	3	4	…	7	8	9	10
y/L	500	450	400	350	300	…	150	100	50	0

（3）**图象法**：图象如图 19.1−5 所示．

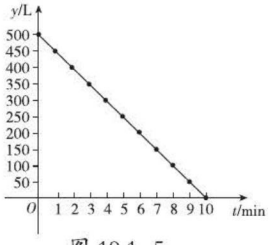


图 19.1−5



4. 特别需要注意的是不论用哪种表示方法都应使自变量的取值符合实际意义．

提分·秘诀

特别提醒

本题中纵轴和横轴上的点表示的是不同意义的量，因此两轴可以取不同的单位长度．不论用哪种表示方法都要注意自变量的取值要符合实际意义．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用图象信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用题

例 4 某仓库调拨一批物资，调进物资共用 8 小时，调进物资 4 小时后同时开始调出物资（调进与调出物资的速度均保持不变），该仓库库存物资 w（吨）与时间 t（小时）之间的函数关系如图 19.1−6 所示，则这批物资从开始调进到全部调出所需要的时间是（　　）

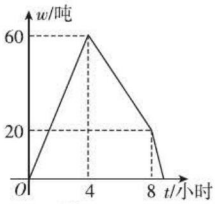


图 19.1−6

A. 8.4 小时　　B. 8.6 小时　　C. 8.8 小时　　D. 9 小时

解题秘方：紧扣“图象上特殊点的坐标表示的两变量的数据”信息，进行相关计算．

解：由图 19.1−6 可知 4 小时调进物资共 60 吨，平均每小时调进 15 吨，所以 8 小时共调进物资 120 吨；而 4 小时 ~8 小时时间段内共调出物资 120−20=100（吨），平均每小时调出 25 吨，从而调出剩余的 20 吨物资还需要 20÷25=0.8（小时），故这批物资从开始调进到全部调出所需要的时间是 8.8 小时．

答案：C

挑战·高分

解法提醒

本题需要先读懂题意，结合图象从两点的坐标中找出两个等量关系：4 小时一共调进物资 60 吨，8 小时后调进物资共 120 吨且在 4 小时~8 小时时间段内调出物资 120−20=100（吨），然后通过算出调进与调出物资的速度，即可轻松地解决问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用表格信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用题

挑战·高分

例5 [期中·胶州市]我们知道，在弹性限度内，弹簧挂上重物后会伸长，已知一根弹簧的长度（cm）与所挂重物的质量（kg）之间的关系如下表，则下列说法错误的是（　　）

重物的质量/kg	0	1	2	3	4	5
弹簧的长度/cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5

A. 在这一变化过程中，重物的质量是自变量，弹簧的长度是函数

B. 当所挂重物的质量是4 kg时，弹簧的长度是14 cm

C. 在弹性限度内，当所挂重物的质量是6kg时，弹簧的长度是16cm

D. 当不挂重物时，弹簧的长度为12 cm

解题秘方：紧扣“表格中两变量的数据”信息，找出两变量的变化规律.

解：由表格的数据可得：在这一变化过程中，重物的质量是自变量，弹簧的长度是自变量的函数，故选项A正确，不合题意；由表中数据知B、D正确，不合题意；用排除法，选C.

答案：C

解法提醒

解表格反映的两变量的函数关系的应用题，可先从表格中获取自变量的值与它对应的函数值的信息，观察各组对应数值之间的关系，确定函数的变化规律，再判断表外数据是否符合这一规律进行解答.

详解

弹簧的长度(cm)=12+重物的质量(kg)×0.5.

拔尖角度 3 利用情境信息法获取两个变量的函数关系确定其图象

挑战·高分

例6 如图19.1-7所示，正方形$ABCD$的边长为4，P为正方形边上一动点，沿$A\to D\to C\to B\to A$的路线匀速移动，设P点经过的路线长为x，$\triangle APD$的面积为y，则能大致反映y与x的函数关系的是图19.1-8中的（　　）

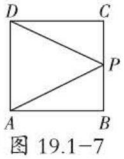


图19.1-7

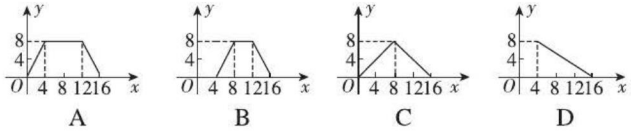


图19.1-8

解题秘方：紧扣动点P运动路线长x与面积y的变化规律信息，结合各选项的图象进行辨识.

解：当动点P从点A向D运动时，点A，D，P在一条直线上，即$y=0$；当点P在DC上运动时，$\triangle ADP$的底AD不变，y随着x的增大而增大；当点P在CB上运动时，根据“同底等高的三角形面积相等”，知y不变；当点P在BA上运动时，$\triangle ADP$的底AD不变，y随着x的增大而减小，据此应选B.

答案：B

技巧点拨

判断函数图象时应从以下几方面分析：

1. 看图象的升降趋势，当函数随着自变量的增加而增加时，图象呈上升趋势，反之，呈下降趋势；
2. 看图象的曲直，函数随着自变量的变化而均匀变化的，图象是直线，函数随着自变量的变化而不均匀变化的，图象是曲线；
3. 表示函数不随自变量的变化而变化时，函数图象与横轴平行（或在横轴上）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

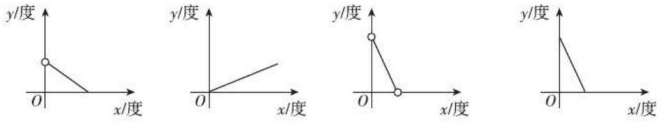
点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的考点主要有图象信息题，主要考查识图能力和读图能力，多为结合实际情境考查对实际问题中两个变量之间的变化趋势的理解或者结合图象提取信息，题型主要是选择题，难度中等或中等偏上.

三年中考兵法

考法1 利用函数解析式确定函数的图象

例7 [中考·牡丹江]如图19.1-9，能反映等腰三角形顶角y（度）与底角x（度）之间的函数关系的是（　　）



A　　B　　C　　D

图19.1-9

试题评析：本题考查了三角形内角和定理，一次函数的实际应用及其图象，熟练掌握等腰三角形的性质及一次函数的图象是解题的关键.

解：由等腰三角形的性质知$y=180-2x$，且$0<x<90$.

答案：C

考法2 利用函数图象确定函数表达的实际意义

例8 [中考·丽水]在同一条道路上，甲车从A地到B地，乙车从B地到A地，乙先出发，图19.1-10中的折线段表示甲、乙两车之间的距离y（千米）与行驶时间x（小时）的函数关系的图象，下列说法错误的是（　　）

A. 乙先出发的时间为0.5小时

B. 甲的速度是80千米/时

C. 甲出发0.5小时后两车相遇

D. 甲到B地比乙到A地早$\frac{1}{12}$小时

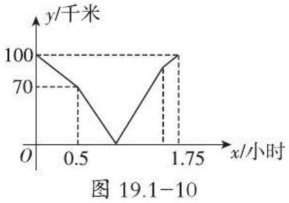


图19.1-10

试题评析：本题考查了利用函数的图象解决实际问题，解决本题的关键是正确理解函数图象横纵坐标表示的意义，理解问题的过程，就能够通过图象解决相应的问题.

解：A. 由图象横坐标可得，乙先出发的时间为0.5小时，故A选项正确；

B. ∵乙先出发0.5小时，行驶路程为（100-70）千米，∴乙的速度为60千米/时，故乙行驶全程所用时间为$\frac{100}{60}=1\frac{2}{3}$（小时），由最后时间为1.75小时，可得乙先到达A地，故甲车整个过程所用时间为1.75-

冲刺·满分

解法提醒

等腰三角形的两个底角相等，由内角和定理可知：$x+x+y=180$，从而得$y=180-2x$，由$y>0$得$x<90$，又$x>0$，故$0<x<90$，据此可得答案.

技巧点拨

1. 从函数图象中获取信息时要做到：

（1）看清横、纵坐标各表示哪个量，这一变化过程属于哪种变化；

（2）从左向右，分析每段图象上，自变量和函数值如何变化；

（3）平行于横轴的线段，自变量在变，函数值不变.

2. 从函数图象中获取信息时应注意三点：

其一是函数的最大值或最小值；

其二是随着自变量逐渐增加时，函数值是增加了还是减少了，还是不变（变化趋势）；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$0.5=1.25$（小时），故甲车的速度为$\frac{100}{1.25}=80$（千米/时），故B选项正确；

C. 由以上所求可得，甲出发0.5小时后行驶距离为40千米，乙车行驶的距离为60千米，$40+60=100$（千米），此时两车相遇，故C选项正确；

D. 由以上所求可得，乙到A地比甲到B地早$1.75-1\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$（小时），故D选项错误.

答案：D

其三是观察图象是否是几种变化情况的组合，以便分情况讨论变化规律.

考法3 利用函数图象确定函数表达的几何意义

例9 [中考·绍兴]均匀地向一个容器内注水，最后把容器注满，在注水过程中，水面高度h随时间t的变化规律如图19.1-11所示（图中$OABC$为折线），这个容器的形状可以是图19.1-12中的（　　）



图19.1-12

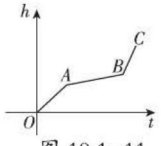


图19.1-11

思路点拨

认识图象的信息要明确：
1. 匀速对应的是直线；
2. 变速对应的是曲线；
3. 由快变慢曲线上升幅度逐渐平缓，由慢变快曲线上升幅度逐渐陡峭.

试题评析：此题考查函数图象的应用，需注意容器粗细和水面高度变化的关联.

解：注水量一定，函数图象的走势是稍陡、平、陡，那么速度就相应地变化，跟所给容器的粗细有关，则相应的排列顺序就为D.

答案：D

两年模拟兵法

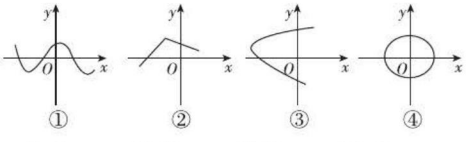
答案见283页

1. 小亮因感冒发烧住院治疗，护士为了较直观地了解小亮这天24小时的体温和时间的关系，应该选择的比较好的表示方法是（　　）

A. 列表法　　B. 图象法

C. 解析式法　　D. 以上三种方法均可

2. 下列图象中，表示y是x的函数的个数是（　　）

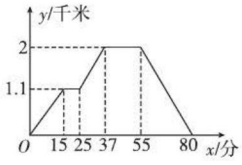


A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

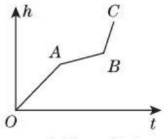
3. [中考·邵阳]如图所示的函数图象反映的过程是：小徐从家去菜地浇水，又去玉米地除草，然后回家. 其中x表示时间，y表示小徐离他家的距离，读图可知菜地离小徐家的距离为（　　）

A. 1.1千米　　B. 2千米

C. 15千米　　D. 37千米

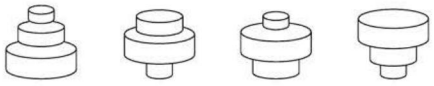


（第3题）



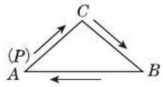
（第4题）

4. [中考·济宁]匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满. 在注水过程中，水面高度h随时间t的变化规律如图所示（图中$OABC$为一折线）. 这个容器的形状是图中的（　　）

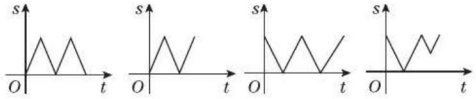


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [中考·广安]如图，在△ABC中，$AC=BC$，有一动点P从点A出发，沿$A\to C\to B\to A$匀速运动．则CP的长度s与时间t之间的函数关系用图象描述大致是（　　）



（第5题）



A　　B　　C　　D

6. 已知函数$y=3x+1$.

（1）试判断点$A(-1,2)$和$B\left(\frac{1}{3},2\right)$是否在此函数的图象上．

（2）已知点$(-a,a-1)$在此函数图象上，求a的值．

7. 一个小球由静止开始从一个斜坡上向下滚动，滚动的距离s（m）与时间t（s）之间的函数解析式为$s=2t^2$（$t\geqslant 0$）．通过仪器观察得到小球滚动的距离s（m）与时间t（s）的数据如下表：

时间t/s	0	1	2	3	…
距离s/m					…

（1）根据解析式完成上表，并画出函数图象；

（2）当小球滚动6.5 s时，其滚动的距离是多少？

（3）经过多少秒时，小球滚动128 m？

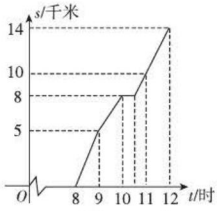
8. 一位旅行者在早晨8点时从城市出发去乡村，刚开始1小时走了5千米，然后他上坡，1小时走了3千米，之后休息了30分钟，休息后平均每时走4千米，在中午12时到达乡村，他离开城市的距离s（千米）与时间t（时）之间的函数关系如图所示，根据图象回答：

（1）该旅行者9时、10时30分、11时离开城市的距离分别是多少千米？

（2）他停下来休息时，离开城市的距离是多少千米？

（3）乡村离城市有多少千米的路程？

（4）求旅行者离开城市6千米时的时间．



（第8题）

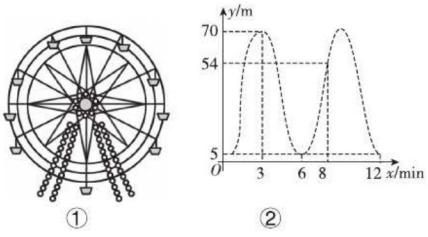
9. 图中的摩天轮可抽象成一个圆，圆上一点离地面的高度y（m）与旋转时间x（min）之间的关系如图所示．

（1）根据图填表：

x/min	0	3	6	8	12	…
y/m						…

（2）变量y是x的函数吗？为什么？

（3）根据图中的信息，请写出摩天轮的直径．



①　　②

（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

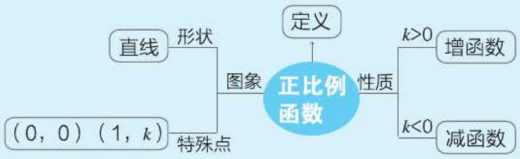
19.2 一次函数

19.2.1 正比例函数

核心知识

- 正比例函数的定义
- 正比例函数的图象
- 正比例函数的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正比例函数

1. 定义：

一般地，形如 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做正比例函数，其中 k 叫做比例系数.

注意：在正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）中，一定要注意 $k\neq 0$ 这个条件，当 $k=0$ 时，无论 x 取何值，y 的值都是 0，此时它不是正比例函数.

2. 判断正比例函数的方法：

（1）所给等式是形如 $y=kx$ 的等式，两变量 x、y 的次数都是 1；

（2）比例系数 k 是常数，且 $k\neq 0$.

提分·必记

特别提醒

一般情况下，正比例函数自变量的取值范围是全体实数，但在实际问题中，还要使实际问题有意义.

拨考向 利用正比例函数的定义辨识正比例函数

题型 1：正比例函数的定义在识别正比例函数中的应用

例 1 下列函数中，是正比例函数的是（　　）

① $y=-\frac{x}{6}$；② $y=-\frac{3}{x}$；③ $y=1+5x$；④ $y=x^2-5x$；⑤ $y=2x$.

A. ①⑤　　B. ①②　　C. ③⑤　　D. ②④

解题秘方：紧扣“判断正比例函数的方法”进行辨识.

解：② $y=-\frac{3}{x}$ 中 $-\frac{3}{x}$ 不是整式；

③ $y=1+5x$ 不符合 $y=kx$（$k\neq 0$）的形式；

④ $y=x^2-5x$ 中 x^2-5x 不是一次单项式，

所以②③④不是正比例函数.

①⑤符合正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的定义条件：k 为常数且 $k\neq 0$，两变量的次数都为 1，是正比例函数.

答案：A

提分·秘诀

解法提醒

等式形如 $y=kx$ 隐含两个条件：

(1) x、y 的次数都是 1；

(2) 左、右两边都是 1 次单项式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：正比例函数的定义在求字母值中的应用

例 2 （1）已知函数 $y=(k-2)x^{|k|-1}$（k 为常数）是关于 x 的正比例函数，求 k 的值.

（2）已知函数 $y=(k+1)x+k^2-1$，当 k 为何值时，它是正比例函数?

解题秘方：紧扣“正比例函数定义”列方程、不等式求解.

解：（1）根据正比例函数的定义，此函数解析式应满足：

①变量 x 的指数为 1，即 $|k|-1=1$，所以 $k=\pm 2$；

②比例系数 $k-2\neq 0$，即 $k\neq 2$. 综上，$k=-2$.

（2）由正比例函数定义知 $(k+1)x+k^2-1$ 是单项式，

所以 $k^2-1=0$.

又因为 $k+1\neq 0$，所以 $k=1$.

所以当 $k=1$ 时，它是正比例函数.

解法提醒

根据正比例函数的定义确定解析式中字母的取值(范围)时，要先根据比例系数 $k\neq 0$、自变量 x 的次数是 1 列方程或不等式，再求解. 应用定义求字母值时，不要忽略比例系数 $k\neq 0$ 这一条件!

点知识 ▶ 2 正比例函数的图象

1. 图象：一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）的图象是一条经过原点的直线，我们称它为直线 $y=kx$.

注意：有些正比例函数图象因其自变量取值范围的限制，并不一定都是一条直线，可能是一条射线或一条线段或一些点，如正比例函数 $y=x$（$x\geqslant 0$）的图象是一条射线；正比例函数 $y=x$（$0\leqslant x\leqslant 2$）的图象是一条线段；正比例函数 $y=x$（$0\leqslant x\leqslant 2$，且 x 为整数）的图象是三个点.

2. 图象的画法：

因为两点确定一条直线，所以可用两点法画正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象. 一般地，过原点和点（1，k）的直线，即为正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象.

注意：正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）中，$|k|$ 越大，直线与 x 轴相交所成的锐角越大，直线越陡；$|k|$ 越小，直线与 x 轴相交所成的锐角越小，直线越缓.

提分·必记

特别提醒

1. 用两点法画函数图象时，（0，0）这点必选，因为图象过原点，而（1，k）这点因函数关系式而定，选取时，最好使所选点的横、纵坐标为整数，这样描点较容易.
2. 如果某函数图象是直线且经过原点（坐标轴除外），那么它对应的函数是正比例函数.
3. 当 $k>0$ 时，图象过第一、三象限；当 $k<0$ 时，图象过第二、四象限.

拔考向 ▶ 利用画函数图象的步骤画正比例函数的图象

例 3 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=5x$，$y=x$ 的图象.

解题秘方：按“两点法：（0,0）和（1，k）”作图.

解：列表：

x	0	1
$y=5x$	0	5
$y=x$	0	1

描点、连线，如图 19.2-1 所示.

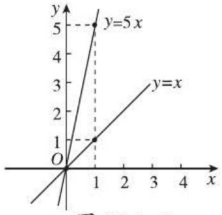


图 19.2−1

提分·秘诀

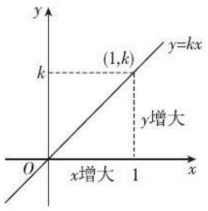
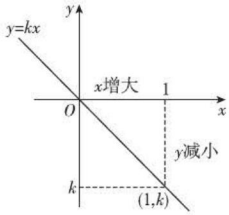
解法提醒

1. 画正比例函数图象时，要视具体情况尽量选取“整数点”，不一定必须选取点（1，k）.
2. 一般情况下，画正比例函数图象时要体现直线是向两方无限延伸的，不要画成线段或射线，若自变量有范围限制，则要依据端点情况进行适当调整.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 正比例函数的性质

正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$）的性质如下表：

	$k>0$	$k<0$
图象		
图象形状	过原点，从左向右是上升的直线（↗）	过原点，从左向右是下降的直线（↘）
经过的象限	第一、三象限	第二、四象限
增减性	y 随 x 的增大而增大	y 随 x 的增大而减小

提分·必记

特别提醒

对于正比例函数 $y=kx$（$k\neq0$），k 的符号、图象所经过的象限、函数的增减性这三者，知其一则知其二，即

$k>0$ ↔ 随着 x 的增大 y 也增大 ↔ 图象经过第一、三象限

$k<0$ ↔ 随着 x 的增大 y 反而减小 ↔ 图象经过第二、四象限

考向▶ 利用正比例函数的图象与性质比较函数值的大小

例 4 [中考·珠海]已知函数 $y=3x$ 的图象经过点 $A(-1,y_1)$，点 $B(-2,y_2)$，则 y_1_____y_2（填“>”“<”或“=”）.

解：方法一：把点 A、点 B 的坐标分别代入 $y=3x$，

当 $x=-1$ 时，$y_1=3\times(-1)=-3$；

当 $x=-2$ 时，$y_2=3\times(-2)=-6$.

$\because -3>-6$，$\therefore y_1>y_2$.

方法二：画出正比例函数 $y=3x$ 的图象，在函数图象上标出点 A、点 B，如图 19.2−2，观察图象，

$\because y_1$ 在 y_2 的上方，$\therefore y_1>y_2$.

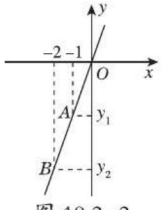


图 19.2−2

方法三：根据正比例函数的增减性来比较函数值的大小．根据正比例函数的性质，当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\because -1>-2$，$\therefore y_1>y_2$.

答案：>

提分·秘诀

方法点拨

1. 正比例函数图象上两点的纵坐标的大小与比例系数及自变量的大小有关；比例系数是正数时，函数值随自变量的增大而增大；比例系数是负数时，函数值随自变量的增大而减小．
2. 正比例函数中比较函数值大小的方法：
方法一：求值比较法；
方法二：数形结合思想，用“形”上的点的位置来比较“数”的大小；
方法三：利用函数的增减性来比较大小．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用逆向思维法结合正比例函数的性质求字母的取值范围

例5 若正比例函数 m：$y=(3k-5)x$ 及 n：$y=(5k-3)x$ 的图象如图 19.2-3 所示，则 k 的取值范围是_____.

解题秘方：紧扣正比例函数图象的位置与比例系数的关系求解.

解：由正比例函数的图象及性质知：

$3k-5<0$，即 $k<\frac{5}{3}$；$5k-3>0$，即 $k>\frac{3}{5}$.

综上可得 $\frac{3}{5}<k<\frac{5}{3}$.

答案：$\frac{3}{5}<k<\frac{5}{3}$

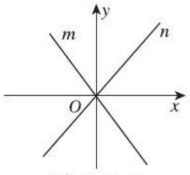


图 19.2-3

挑战·高分

解法提醒

由正比例函数的图象与性质知，比例系数决定正比例函数图象的走势；反之，根据正比例函数图象的走势可以确定正比例函数的比例系数的正负情况，进而得出不等式（组），通过求解不等式（组）可以确定字母系数的取值范围.

拔尖角度 2 利用定义法结合正比例函数的性质求字母的值

例6 已知函数 $y=(k+1)x^{|k|}$ 的图象是一条经过原点和第一、三象限的直线，请写出符合要求的 k 的取值：_____.

解题秘方：紧扣正比例函数的定义进行解答.

解：∵函数 $y=(k+1)x^{|k|}$ 的图象是一条经过原点和第一、三象限的直线，

$\therefore\begin{cases}k+1>0,\\|k|=1,\end{cases}$ 解得 $k=1$.

答案：1

挑战·高分

思路点拨

由函数的图象是一条经过原点和第一、三象限的直线可知，该函数为正比例函数且系数大于0，再根据正比例函数的定义列方程或不等式求解.

拔尖角度 3 利用建模法结合正比例函数解实际应用题

例7 某商店零售一种商品，其质量 x（kg）与售价 y（元）之间的关系如下表：

x/kg	1	2	3	4	5	6	7	8
y/元	2.4	4.8	7.2	9.6	12	14.4	16.8	19.2

（根据销售经验，顾客在此处购买该商品均未超过 8kg）

（1）由上表推出售价 y（元）随质量 x（kg）变化的函数解析式，并画出函数的图象.

（2）购买 5.5kg 这种商品应付多少元？

解题秘方：紧扣列函数解析式的方法建立正比例函数的模型.

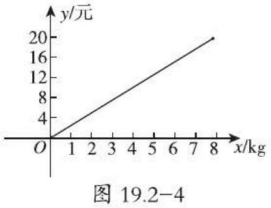


图 19.2-4

挑战·高分

特别提醒

因为本题中正比例函数解析式的自变量的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 8$，所以该正比例函数的图象是一条线段.

解：（1）由表中观察到质量每增加 1kg，售价就增加 2.4 元，这样的变化规律可以表示为 $y=2.4x$（$0\leqslant x\leqslant 8$）. 这个函数的图象如图 19.2-4.

（2）当 $x=5.5$ 时，$y=2.4\times 5.5=13.2$，所以购买 5.5kg 这种商品应付 13.2 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 正比例函数是学习一次函数的基础，在中考中涉及正比例函数的题目较单一，难度也不大，以选择题、填空题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用图象与点的坐标的关系求字母的值

例8 [中考·陕西]设正比例函数 $y=mx$ 的图象经过点 $A(m,4)$，且 y 的值随 x 值的增大而减小，则 $m=$（　　）

A.2　　B.−2　　C.4　　D.−4

试题评析：本题考查了点的坐标与函数的关系，正比例函数的性质，用性质确定系数的正负是解题关键.

解：把 $x=m$，$y=4$ 代入 $y=mx$ 中，可得 $m=\pm 2$.

因为 y 的值随 x 值的增大而减小，所以 $m=-2$.

答案：B

思路点拨

本例先"形"：图象过点 $A(m,4)$ 求出满足条件的 m 的值，再用正比例函数的性质：y 的值随 x 值的增大而减小，说明 $m<0$，最后确定答案.

考法2 利用正比例函数的增减性求字母的值

例9 [中考·西宁]若点 $A(m,n)$ 在直线 $y=kx(k\neq 0)$ 上，当 $-1\leqslant m\leqslant 1$ 时，$-1\leqslant n\leqslant 1$，则这条直线的函数解析式为_____.

试题评析：本题考查了利用正比例函数的增减性求正比例函数的解析式，把 $(-1,-1)$ 或 $(-1,1)$ 代入求出 k 的值是解题的关键.

解：∵点 $A(m,n)$ 在直线 $y=kx(k\neq 0)$ 上，当 $-1\leqslant m\leqslant 1$ 时，$-1\leqslant n\leqslant 1$，∴点 $(-1,-1)$ 或 $(-1,1)$ 在直线上，

∴ $k=1$ 或 -1，∴ $y=x$ 或 $y=-x$.

答案：$y=x$ 或 $y=-x$

解法提醒

本题条件中比例系数的正负没有确定，因此 y 是随 x 的增大而增大，还是随 x 的增大而减小不确定；因此当 $m=-1$ 时，n 可能为 -1 或 1；当 $m=1$ 时，n 可能为 -1 或 1，解题时，不要漏解.

两年模拟兵法

☞答案见 284 页

1. 下面各选项中的两个量成正比例的是（　　）

A. 从甲地到乙地，所用的时间和速度

B. 正方形的面积与边长

C. 买同样的作业本所需的钱数和所买作业本的数量

D. 人的体重与身高

2. 下列函数中，y 是 x 的正比例函数的是（　　）

A.$y=4x+1$　　B.$y=2x^2$

C.$y=-\sqrt{5}x$　　D.$y=\sqrt{x}$

3. [中考·陕西]若一个正比例函数的图象经过 $A(3,-6)$，$B(m,-4)$ 两点，则 m 的值为（　　）

A.2　　B.8

C.−2　　D.−8

4. 已知点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 是直线 $y=-3x$ 上的两点，且 $x_1>x_2$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是（　　）

A.$y_1>y_2$　　B.$y_1<y_2$

C.$y_1=y_2$　　D. 以上都有可能

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. [中考·陕西]如果一个正比例函数的图象经过不同象限的两点$A(2, m)$，$B(n, -3)$，那么一定有（　　）

A.$m>0$，$n>0$　　B.$m>0$，$n<0$

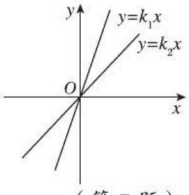
C.$m<0$，$n>0$　　D.$m<0$，$n<0$

6. 已知正比例函数$y=-kx$的图象经过第一、三象限，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$三点在函数$y=(k-2)x$的图象上，且$x_1>x_3>x_2$，则y_1，y_2，y_3的大小关系为（　　）

A.$y_1>y_3>y_2$　　B.$y_1>y_2>y_3$

C.$y_1<y_3<y_2$　　D.$y_3>y_2>y_1$

7. 已知正比例函数$y=k_1x$与$y=k_2x$的图象如图，比较k_1与k_2的大小.　　【导学号：8592074】



（第7题）

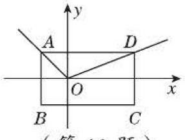
8. 在函数$y=-3x$的图象上取一点P，过点P作$PA\perp x$轴，垂足为A. 已知P点的横坐标为-2，求$\triangle POA$的面积.（O为坐标原点）

9. 若正比例函数$y=kx$与$y=2x$的图象关于x轴对称，则k的值是多少?

10. 如图，已知矩形$ABCD$的两组对边分别与x轴、y轴平行，点A的坐标是$(-2, 2)$，作射线OA与OD，$\triangle AOD$的面积是7.

（1）确定折线AOD对应的函数解析式；

（2）如果x轴是线段AB的垂直平分线，计算矩形$ABCD$的周长和面积.



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.2.2 一次函数

核心知识

- 一次函数的定义
- 一次函数的图象
- 一次函数的性质
- 求一次函数的解析式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数

1. 定义： 一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做一次函数.

2. 一次函数与正比例函数的关系：

（1）正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）是一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）中 $b=0$ 的特例，即正比例函数都是一次函数，但一次函数不一定是正比例函数.

（2）若已知 y 与 x 成正比例，则可设函数解析式为 $y=kx$（$k\neq 0$）；若已知 y 是 x 的一次函数，则可设函数解析式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）.


一次函数

拔考向 利用一次函数定义解涉及一次函数的应用

题型 1：一次函数的定义在辨识中的应用

例 1 下列函数中，哪些是一次函数，哪些又是正比例函数？

（1）$y=-2x^2$；（2）$y=\dfrac{x+1}{2}$；（3）$y=3x^2-x(3x-2)$；

（4）$x^2+y=1$；（5）$y=-\dfrac{3}{x}$.

解题秘方： 紧扣一次函数定义的结构特征进行识别.

解：（1）因为 x 的次数是 2，所以 $y=-2x^2$ 不是一次函数.

（2）因为 $y=\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$，

所以 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 是一次函数，但不是正比例函数.

（3）因为 $y=3x^2-x(3x-2)=2x$，$k=2$，$b=0$，

所以它是一次函数，也是正比例函数.

（4）$x^2+y=1$，即 $y=1-x^2$. 因为 x 的次数是 2，所以 $x^2+y=1$ 不是一次函数.

（5）因为 $y=-\dfrac{3}{x}$ 中 $-\dfrac{3}{x}$ 不是整式，不符合 $y=kx+b$ 的形式，所以它不是一次函数.

提分·必记

特别提醒

1. 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的结构特征：
(1) $k\neq 0$；
(2) 自变量 x 的次数是 1；
(3) 常数项 b 可以是任意实数.
2. 函数是一次函数⇔函数解析式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）.

提分·秘诀

技巧点拨

判断函数是否为一次函数的方法：

先看函数解析式是否是整式的形式，再将函数解析式进行恒等变形，然后看它是否符合一次函数解析式 $y=kx+b$ 的结构特征：

（1）$k\neq 0$；

（2）自变量 x 的次数为 1；

（3）常数项 b 可以为任意实数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：一次函数的定义在求字母值中的应用

例 2 ［原创易错题］已知函数 $y=(n^2-4)x^2+(2n-4)x^{m-2}-(m+n-8)$.

（1）当 m，n 为何值时，函数是一次函数？

（2）如果函数是一次函数，计算当 $x=1$ 时的函数值.

解题秘方：紧扣一次函数定义的三个特征及函数值的求法进行求解.

解：（1）由题意，得 $\begin{cases} n^2-4=0, \\ m-2=1, \\ 2n-4\neq 0. \end{cases}$ ∴ $m=3$，$n=-2$.

∴当 $m=3$，$n=-2$ 时，函数是一次函数.

（2）由（1）得此一次函数解析式为 $y=-8x+7$.

当 $x=1$ 时，$y=-8\times 1+7=-1$.

特别提醒

根据一次函数定义求待定字母的值时，要注意：

1. 函数解析式是自变量的一次式，若含有一次以上的项，则其系数必为 0；
2. 注意隐含条件：一次项的系数不为 0.

点知识 ▸ 2 一次函数的图象

1. 一次函数的图象：

一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$.


一次函数的图象

2. 一次函数的图象与正比例函数的图象的关系：

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象可以由直线 $y=kx$（$k\neq 0$）沿 y 轴向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位长度得到.

3. 一次函数图象的画法

（1）**两点法**：由于两点确定一条直线，所以一般选取直线 $y=kx+b$ 与两坐标轴的交点，即（0，b）与（$-\frac{b}{k}$，0）画直线.

（2）**平移法**：一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象，是由直线 $y=kx$ 沿 y 轴向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位长度得到，反之，直线 $y=kx$ 也可以通过沿 y 轴平移直线 $y=kx+b$ 得到.

提分·必记

特别提醒

$|k|$ 的大小与直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 倾斜程度间的关系：

$|k|$ 的大小决定直线 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的倾斜程度；$|k|$ 越大，直线与 x 轴相交所成的锐角越大，直线越陡；$|k|$ 越小，直线与 x 轴相交所成的锐角越小，直线越缓.

拔考向 ▸ 利用一次函数图象及作法解直线问题

题型 1：“两点法”在画一次函数图象中的应用

例 3 在同一平面直角坐标系中，作出下列函数的图象：

（1）$y_1=2x-1$；（2）$y_2=2x$；（3）$y_3=2x+2$.

然后观察图象，你能得到什么结论？

解题秘方：按“两点法”的作图步骤作图.

解：列表如下：

x	0	1
y_1	−1	1

x	0	1
y_2	0	2

x	0	1
y_3	2	4

描点、连线，即可得到它们的图象，如图 19.2-5.

提分·秘诀

解法提醒

画一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 的图象，若 $b\neq 0$，通常选取该直线与 y 轴的交点（横坐标为 0 的点）和与 x 轴的交点（纵坐标为 0 的点），由两点确定一条直线得一次函数的图象.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

从图象中我们可以看出：它们是一组互相平行的直线，原因是这组函数的解析式中 k 的值都是 2.

结论：一次函数中的 k 值相等（b 值不相等）时，其图象是一组互相平行的直线．它们可以通过互相平移得到．

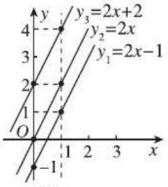


图 19.2-5


一次函数图象的画法

题型 2：一次函数的图象在求面积中的应用

例 4 设直线 $y=-\frac{x}{2}-3$ 与 x 轴的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，画出函数图象并求 $S_{\triangle AOB}$.

解题秘方：紧扣直线与两坐标轴的交点进行解答．

解：当 $x=0$ 时，$y=-3$，

$\therefore$ 点 B 的坐标为（0，−3）；

当 $y=0$ 时，$x=-6$，

$\therefore$ 点 A 的坐标为（−6，0）．

画出函数图象如图 19.2-6.

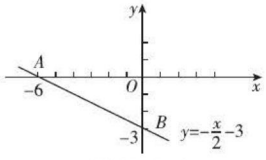


图 19.2-6

由图象可知，$OA=|-6|=6$，$OB=|-3|=3$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9.$

方法提醒

直角坐标系中图形面积的计算方法：

计算直角坐标系中图形面积的方法是先利用点的坐标求出线段的长，然后根据面积公式求图形的面积．

知识点 3 一次函数图象的平移

1. 上、下平移：

直线 $y=kx+b$ 向上平移 n（$n>0$）个单位长度得到直线 $y=kx+b+n$；直线 $y=kx+b$ 向下平移 n（$n>0$）个单位长度得到直线 $y=kx+b-n$，简记为：上加下减（只改变 b）．

2. 左、右平移：

直线 $y=kx+b$ 向左平移 m（$m>0$）个单位长度得到直线 $y=k(x+m)+b$；直线 $y=kx+b$ 向右平移 m（$m>0$）个单位长度得到直线 $y=k(x-m)+b$，简记为：左加右减（只改变 x）．

3. 拓展：

（1）当直线平行于 x 轴且与 y 轴交点的纵坐标为 b 时，这条直线的函数解析式为 $y=b$.

（2）当直线平行于 y 轴且与 x 轴交点的横坐标为 a 时，这条直线的函数解析式为 $x=a$.

（3）x 轴、y 轴分别表示为直线 $y=0$、直线 $x=0$.

综上所述，坐标平面内任意一条直线都可以用函数解析式表示．

提分·必记

特别提醒

平面直角坐标系中 l_1：$y=k_1x+b_1$ 与 l_2：$y=k_2x+b_2$ 的位置关系：

k_1，k_2，b_1，b_2 的关系	l_1 与 l_2 的关系
$k_1\neq k_2$	l_1 与 l_2 相交
$k_1\neq k_1$，$b_1=b_2$	l_1 与 l_2 相交于 y 轴上的同一点（0，b_1）或（0，b_2）
$k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	l_1 与 l_2 平行
$k_1=k_2$，$b_1=b_2$	l_1 与 l_2 重合

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用一次函数图象的平移规律求函数解析式

提分·秘诀

例5 [模拟·陕西]在平面直角坐标系中，将直线l_1：$y=-3x-2$向左平移1个单位长度，再向上平移3个单位长度得到直线l_2，则直线l_2的解析式为（　　）

A.$y=-3x-9$　　B.$y=-3x-2$

C.$y=-3x+2$　　D.$y=-3x+9$

解题秘方：紧扣“平移规律：上加下减、左加右减”进行求解.

解：将直线$y=-3x-2$向左平移1个单位长度得

直线$y=-3(x+1)-2$，即$y=-3x-5$，

再向上平移3个单位长度，即将直线$y=-3x-5$向上平移3个单位长度，得直线$y=-3x-5+3$，即$y=-3x-2$.

详解

“左加右减(只改变x)”即向左平移1个单位长度，只需将x变成(x+1)，其余都不变.

详解

“上加下减(只改变b)”即向上平移3个单位长度，只需将b加3，题中的(-5+3)，其余都不变.

答案：B

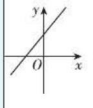
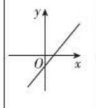
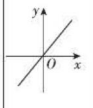
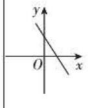
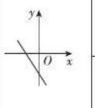
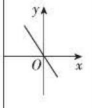
注：上述两次平移可合写一步为：$y=-3(x+1)-2+3$，即$y=-3x-2$.

特别警示：“上加下减（只改变b），左加右减（只改变x）”这种平移规律，是函数解析式的变化规律，不要将其与点的坐标的平移规律相混淆，点的坐标的平移规律是：上加下减，左减右加.

点知识▶4 一次函数的性质

提分·必记

一次函数$y=kx+b$（k，b是常数且$k\neq0$）的性质和k，b的符号关系：

一次函数	$y=kx+b$（$k\neq0$）					
k，b的符号	$k>0$			$k<0$		
	$b>0$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$b<0$	$b=0$
图象的位置						
增减性	y随x的增大而增大			y随x的增大而减小		
与y轴交点的位置	正半轴	负半轴	原点	正半轴	负半轴	原点

特别提醒

1. 由k，b的符号可以确定直线$y=kx+b$（k，b是常数，$k\neq0$）所经过的象限；反之，由直线$y=kx+b$（k，b是常数，$k\neq0$）所经过的象限也可以确定k，b的符号.
2. k决定一次函数$y=kx+b$（k，b是常数，$k\neq0$）的增减性，b决定函数图象与y轴的交点位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用一次函数的图象与性质解相关应用问题

题型1：一次函数的增减性在比较函数值大小中的应用

例6 已知直线 l_1 和直线 l_2 在同一平面直角坐标系中的位置如图 19.2-7，点 $P_1(x_1, y_1)$ 在直线 l_1 上，点 $P_3(x_3, y_3)$ 在直线 l_2 上，点 $P_2(x_2, y_2)$ 为直线 l_1，l_2 的交点，其中 $x_2<x_1$，$x_2<x_3$，则（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$　　C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

解题秘方：紧扣函数的增减性求解.

解：观察直线 l_1，知 y 随 x 的增大而减小.

∵ $x_2<x_1$，∴ $y_2>y_1$.

观察直线 l_2，知 y 随 x 的增大而增大.

∵ $x_2<x_3$，∴ $y_2<y_3$，∴ $y_1<y_2<y_3$.

答案：A

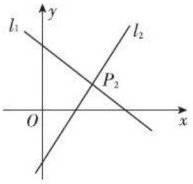


图 19.2-7

题型2：一次函数的增减性及图象与 y 轴的交点位置在求字母范围中的应用

例7 已知一次函数 $y=(6+3m)x+(m-4)$，y 随 x 的增大而增大，函数的图象与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上，求 m 的取值范围.

解题秘方：紧扣“k，b 的符号与函数的增减性及图象的位置关系”解答.

解：根据题意，得 $\begin{cases}6+3m>0,\\ m-4<0.\end{cases}$ 解得 $-2<m<4$.

所以 m 的取值范围是 $-2<m<4$.

详解

由y随x的增大而增大可得 $k>0$，即 $6+3m>0$.

由函数的图象与y轴的交点在y轴的负半轴上可知 $b<0$，即 $m-4<0$.

注：以上情况，反之亦成立.

提分·秘诀

解法提醒

对于一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 来说：

k 的符号，函数图象的上升或下降趋势，函数的增减性这三者有如影随形的关系，知其一，便可知其他两种的特性. 即：

$k>0$（$k<0$）⇔ 直线趋势上升（下降）

⇕　　⇕

y 随 x 增大而增大（减小）

知识▶5 用待定系数法确定一次函数解析式

1. 定义：

先设出待求的函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而得出函数解析式的方法，叫做待定系数法.

2. 一般步骤：

（1）**设**：设出含有待定系数的函数解析式；

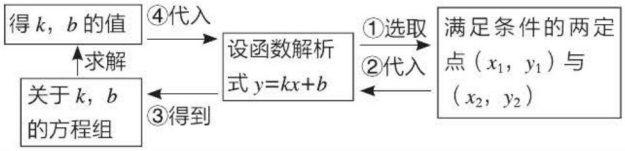
（2）**代**：把已知条件中的自变量与函数的对应值代入函数解析式，列出关于待定系数的方程（组）；

（3）**解**：解方程（组），求出待定的系数；

（4）**回代**：将求得的待定系数的值代回所设的解析式.

待定系数法

上面的步骤可表示如下：



提分·必记

特别提醒

1. 用待定系数法求函数解析式时，要先判断函数是哪一类函数，然后才能设出所求函数的解析式.
2. 在正比例函数 $y=kx$ 中，只有一个待定系数 k，只需要一个除（0，0）外的条件即可求出 k 的值；在一次函数 $y=kx+b$ 中，有两个待定系数 k，b，因而需要两个条件才能求出 k 和 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶待定系数法在求一次函数解析式中的应用

例8 [中考·陕西]根据下表中一次函数的自变量x与函数y的对应值，可得p的值为（　　）

x	-2	0	1
y	3	p	0

A.1　　B.-1　　C.3　　D.-3

解题秘方：紧扣待定系数法求函数解析式的步骤求解.

解：设一次函数解析式为$y=kx+b$，由表中对应值可知，当$x=-2$时，$y=3$，当$x=1$时，$y=0$，

由此得到$\begin{cases}-2k+b=3,\\k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

∴一次函数解析式为$y=-x+1$.

当$x=0$时，$y=(-1)\times0+1=1$，即p的值为1.

答案：A

提分·秘诀

解法提醒

确定一次函数的解析式除了用**待定系数法**（点的坐标与解析式的关系法）外，还可以通过**平移法**（两直线的位置关系法）求解，即通过平移，说明k相等，及平移规律确定k，b的值.

点知识▶6 建立一次函数模型解实际应用题

利用一次函数解决实际问题，关键是找到题目中的两个变量之间的数量关系，把实际问题抽象、升华为一次函数模型，即建模，再利用一次函数的相关性质解决实际问题，常见类型如下：

（1）题目中已知一次函数的解析式，可直接运用一次函数的性质求解.

（2）题目中没有给出一次函数的解析式，而是通过语言、表格或图象给出一次函数的情境，这时需要先根据题目给出的信息求出一次函数的解析式，再利用一次函数的性质解决实际问题.

提分·必记

特别提醒

应用一次函数解决实际问题的关键是建立一次函数模型，同时注意实际问题中自变量的取值范围要使实际问题有意义.

考向▶利用建立一次函数模型解生活中的实际应用题

题型1：建立一次函数模型在表格情境中的应用

例9 世界上大部分国家都使用摄氏温度（℃）计量法，但美、英等国的天气预报仍然使用华氏温度（℉）计量法，两种计量法之间有如下的对应关系：

x/℃	0	10	20	30	40	50
y/℉	32	50	68	86	104	122

（1）猜想y与x之间的函数关系.

（2）确定y与x之间的函数解析式，并加以检验.

（3）0℉时的温度对应多少摄氏度？

（4）华氏温度的值与对应的摄氏温度的值有相等的可能吗？如果没有相等的可能，请说明理由，如果有相等的可能，请写出此时的值.

解题秘方：紧扣一次函数的性质及待定系数法求解析式的方法求解.

提分·秘诀

解法提醒

在利用一次函数解决实际问题时，要先判断问题中的两个变量之间是不是一次函数关系，若是一次函数关系，再根据表格中提供的信息确定出函数解析式，并解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）观察表格中的对应数据的特征可知：摄氏温度每增加10℃，华氏温度就增加18°F，因此猜想 y 与 x 之间是一次函数关系.

（2）设 $y=kx+b$（$k\neq0$），把 $x=0$，$y=32$ 和 $x=10$，$y=50$ 代入，得 $\begin{cases}b=32,\\10k+b=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{9}{5},\\b=32,\end{cases}$ 所以 $y=\dfrac{9}{5}x+32$. 经检验，$x=20$，$y=68$；$x=30$，$y=86$；$x=40$，$y=104$；$x=50$，$y=122$ 均能满足上述解析式，所以 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=\dfrac{9}{5}x+32$.

（3）当 $y=0$ 时，$\dfrac{9}{5}x+32=0$，解得 $x=-\dfrac{160}{9}$，

所以 0°F 时的温度对应 $-\dfrac{160}{9}$℃.

（4）有. 当 $y=x$ 时，$x=\dfrac{9}{5}x+32$，得 $x=-40$.

所以当华氏温度为 −40°F 时，摄氏温度为 −40℃.

另解

先根据表中的数据特点建立适当的平面直角坐标系.

如图 19.2-8 所示，以表中对应值为坐标的点大致分布在一条直线上，据此，可猜想 y 与 x 之间的函数关系为一次函数关系.

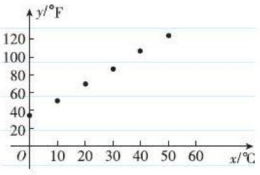
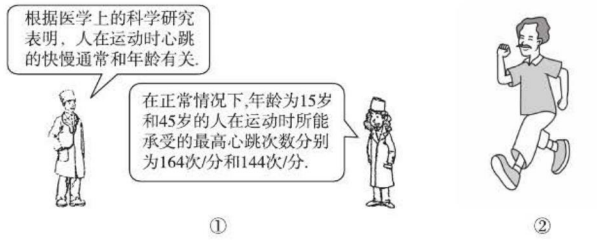


图 19.2-8

题型 2：建立一次函数模型在语言情境中的应用

例 10 在正常情况下，一个人在运动时所能承受的每分钟心跳的最高次数 s（次）是这个人年龄 n（岁）的一次函数.

（1）根据图 19.2-9 ①中所提供的信息，求在正常情况下，s 关于 n 的函数解析式.



① ②

图 19.2-9

（2）如图 19.2-9 ②所示，若一位 63 岁的老人在跑步，医生在途中给他测得 10 秒钟的心跳为 26 次，问：他此时是否有危险？为什么？

解题秘方：紧扣待定系数法求解析式的方法及自变量值与函数值的关系求解.

解：（1）设 s 关于 n 的函数解析式为 $s=kn+b$（$k\neq0$）.

由题意，得 $\begin{cases}15k+b=164,\\45k+b=144,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{2}{3},\\b=174.\end{cases}$

所以 s 关于 n 的函数解析式为 $s=-\dfrac{2}{3}n+174$.

（2）有危险，理由如下：当 $n=63$ 时，$s=-\dfrac{2}{3}\times63+174=132$. 而现在这位老人每分钟的心跳是 $26\div10\times60=156$（次）>132 次. 因此，他此时有危险.

解法提醒

1. 根据图表信息，利用待定系数法确定函数解析式，当已知自变量的取值时，利用函数解析式便可求出相对应的函数值.
2. 将实际问题抽象成数学问题，用数学知识解决身边的实际问题，体现了学以致用的理念.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：建立一次函数模型在图象情境中的应用

例 11 在一条直线上依次有 A，B，C 三个海岛，某海巡船从 A 岛出发沿直线匀速经 B 岛驶向 C 岛，执行海巡任务，最终达到 C 岛，设该海巡船行驶 x（h）后，与 B 岛的距离为 y（km），y 与 x 的函数关系如图 19.2−10 所示.

（1）A，C 两岛间的距离为_____km，a=_____；

（2）求 y 与 x 的函数关系式，并解释图中点 P 的坐标所表示的实际意义；

（3）在 B 岛有一不间断发射信号的信号发射台，发射的信号覆盖半径为 15 km，求该海巡船能接收到该信号的时间有多长.

解题秘方：结合图象信息用待定系数法求函数的关系式.

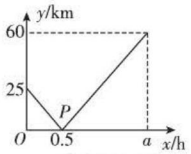


图 19.2−10

解：（1）由图 19.2−10 可知，A，B 两岛间的距离为 25 km，B，C 两岛间的距离为 60 km，

∴ A，C 两岛间的距离为 25+60=85（km），

海巡船的速度为 25÷0.5=50（km/h），

∴ a=85÷50=1.7.

答案：85；1.7

（2）当 $0 \leqslant x \leqslant 0.5$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

∵函数图象经过点（0，25），（0.5，0），

$$\therefore \begin{cases} b=25, \\ 0.5k+b=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k=-50, \\ b=25, \end{cases}$

∴ $y=-50x+25$；

当 $0.5<x \leqslant 1.7$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=mx+n$，

∵函数图象经过点（0.5，0），（1.7，60），

$$\therefore \begin{cases} 0.5m+n=0, \\ 1.7m+n=60, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=50, \\ n=-25, \end{cases}$$

∴ $y=50x-25$；

综上，$y=\begin{cases} -50x+25\ (0 \leqslant x \leqslant 0.5), \\ 50x-25\ (0.5<x \leqslant 1.7). \end{cases}$

点 P 的坐标所表示的实际意义为经过 0.5 h 海巡船到达 B 岛.

（3）由 $-50x+25=15$，解得 $x=0.2$.

由 $50x-25=15$，解得 $x=0.8$.

0.8−0.2=0.6（h）.

∴所以该海巡船能接收到该信号的时间为 0.6 h.

技巧点拨

对于有关一次函数图象的应用问题，信息量比较大，因此要从图象中提取出合理信息，过滤掉没用的信息，从中找到求关系式所用的条件，一般采用待定系数法求出一次函数的关系式.

特别警示

在不同自变量取值范围内求出函数关系式后，不要忘了综合在一起.

特别提醒

注意正确理解题意，所求时间应为(0.8−0.2)h，而不是 0.8h.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用排除法确定一次函数的图象

例12 两个一次函数 $y_1=ax+b$（$a\neq0$）与 $y_2=bx+a$（$b\neq0$），它们在同一平面直角坐标系中的图象可能是图 19.2-11 中的（　　）

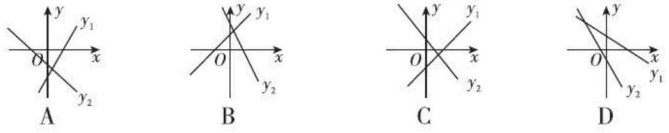


图 19.2-11

解题秘方：紧扣“k，b 的符号与一次函数图象的关系”求解.

解：选项 A 中，根据 y_1 的图象可知 $a>0$，$b<0$，因此 y_2 的图象应过第一、二、四象限，故选项 A 错误；

选项 B 中，根据 y_1 的图象可知 $a>0$，$b>0$，因此 y_2 的图象应过第一、二、三象限，故选项 B 错误；

选项 D 中，根据 y_1 的图象可知 $a<0$，$b>0$，因此 y_2 的图象应过第一、三、四象限，故选项 D 错误，所以选 C.

答案：C

挑战·高分

另解

事实上，对于一次函数 $y_1=ax+b$ 和 $y_2=bx+a$，当 $a>0$，$b>0$ 时，两函数图象均不经过第四象限，选项 A,B,C,D 中的图象均不符合；

当 $a<0$，$b<0$ 时，两函数图象均不经过第一象限，选项 A，B，C，D 中的图象均不符合；

当 $a<0$，$b>0$ 时，两函数图象如图 19.2-12 所示，选项 A，B，C，D 中的图象均不符合；

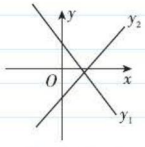


图 19.2-12

当 $a>0$，$b<0$ 时，两函数图象如选项 C 中图象所示. 故选 C.

拔尖角度▸ 2 利用分类法求涉及三角形面积的一次函数解析式

例13 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(3,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，O 为坐标原点，若 $\triangle AOB$ 的面积为 6，试求这个一次函数的解析式.

解题秘方：紧扣点 B 的位置的不确定（在 y 轴正半轴还是负半轴不确定）性进行分类求解.

解：$\because A(3,0)$，$\therefore OA=3$.

$\because$ 直线 $y=kx+b$ 与 y 轴交于点 $B(0,b)$，$\therefore OB=|b|$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times3\cdot|b|=6$，$\therefore b=\pm4$.

$\therefore$ 点 $B(0,4)$ 或 $B(0,-4)$.

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,4)$ 时，

得直线 AB 对应的函数解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$；

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,-4)$ 时，

得直线 AB 对应的函数解析式为 $y=\frac{4}{3}x-4$.

综上可知，符合条件的一次函数的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 或 $y=\frac{4}{3}x-4$.

挑战·高分

技巧点拨

已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积，求直线对应的函数解析式的方法：

先设出直线对应的函数解析式，

再用待定字母表示出直线与两坐标轴的交点坐标（注：这步中要考虑直线与 x 轴、y 轴相交时的位置的不同情况），

然后利用已知三角形的面积求出待定字母的值，最后代回所设函数解析式即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用分类法求涉及函数增减性的一次函数的解析式

挑战·高分

例 14 [中考·自贡]一次函数 $y=kx+b$，当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$3 \leqslant y \leqslant 6$，则 $\frac{b}{k}$ 的值是_____.

解题秘方：紧扣“一次函数的增减性”进行分类求解.

解：由于 k 的符号不能确定，故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行解答.

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$3 \leqslant y \leqslant 6$，

∴当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=4$ 时，$y=6$，

$\therefore \begin{cases} k+b=3, \\ 4k+b=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=2. \end{cases}$ $\therefore \frac{b}{k}=2.$

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

∵当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$3 \leqslant y \leqslant 6$，

∴当 $x=1$ 时，$y=6$；当 $x=4$ 时，$y=3$，

$\therefore \begin{cases} k+b=6, \\ 4k+b=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=7. \end{cases}$ $\therefore \frac{b}{k}=-7.$

答案：2 或 −7

特别警示

一次函数的增减性与 k 的正负性有关，若 k 的正负性无法确定，则必须分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况讨论，不要漏解.

拔尖角度 4 利用比较法解一次函数实际应用题

挑战·高分

例 15 甲、乙两个商场出售相同的某种商品，每件售价均为 3 000 元，并且多买都有一定的优惠，甲商场的优惠条件是：第一件按原售价收费，其余每件优惠 30%；乙商场的优惠条件是：每件优惠 25%. 设所买商品为 x 件时，甲商场收费为 y_1 元，乙商场收费为 y_2 元.

（1）分别求出 y_1，y_2 与 x 之间的关系式；

（2）当甲、乙两个商场的收费相同时，所买的商品为多少件？

（3）当所买商品为 5 件时，应选择哪个商场更优惠？请说明理由.

解题秘方：紧扣等量关系求出双函数，用比较函数值法解答相关问题.

解：（1）$y_1=3\,000\times(1-30\%)(x-1)+3\,000=2\,100x+900$；

$y_2=3\,000\times(1-25\%)x=2\,250x.$

（2）当 $y_1=y_2$ 时，即 $2\,100x+900=2\,250x$，

解得 $x=6$.

所以当甲、乙两个商场的收费相同时，所买的商品为 6 件.

（3）选择乙商场更优惠，理由如下：

当 $x=5$ 时，$y_1=2\,100\times5+900=11\,400$，

$y_2=2\,250\times5=11\,250$，$11\,250<11\,400$，

所以当所买商品为 5 件时，应选择乙商场更优惠.

详解

本题求解一次函数解析式的等量关系是商场收费=商品价格×所买商品的件数.

对于甲商场，商品价格为第一件 3 000 元，其余每件 3 000×(1−30%)元，则收费 $y_1=3\,000\times(1-30\%)(x-1)+3\,000=2\,100x+900$；

对于乙商场，商品价格为每件 3 000×(1−25%)元，则收费 $y_2=3\,000\times(1-25\%)x=2\,250x$.

特别警示

本题容易出错的地方是求 y_1 时，易忽视 x 减去 1 或者加上 3 000，导致整个解题过程错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 5 利用图象信息法解双图象问题的实际应用题

挑战·高分

例16 某单位准备印制一批证书，现有两个印刷厂可供选择，甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，乙厂直接按印刷数量收取印刷费，甲、乙两厂的印刷费用 y（千元）与证书数量 x（千个）的函数关系图象分别如图 19.2–13 中甲、乙.

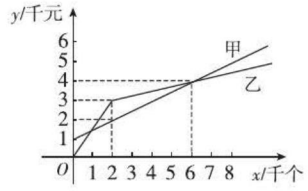


图 19.2–13

（1）请你直接写出甲厂的制版费及 $y_{甲}$ 与 x 的函数解析式，并求出其证书印刷单价.

（2）当印刷证书 8 千个时，选择哪个印刷厂更节省费用，节省费用多少元?

（3）如果甲厂想把 8 千个证书的印刷工作承揽下来，在不降低制版费的前提下，每个证书印刷费最少降低多少元?

解题秘方：紧扣图象的基本信息结合待定系数法求分段函数.

解：（1）甲厂的制版费为 1 千元，$y_{甲}=\frac{1}{2}x+1\ (x\geqslant 0)$，

证书印刷单价为 0.5 元.

（2）当 $x\geqslant 2$ 时，由图象可设 $y_{乙}$ 与 x 的函数解析式为 $y_{乙}=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$），将（2，3），（6，4）两点的坐标代入 $y_{乙}=kx+b$，得 $\begin{cases}2k+b=3,\\6k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{4},\\b=\frac{5}{2}.\end{cases}$

所以 $y_{乙}=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$.

当 $x=8$ 时，$y_{甲}=\frac{1}{2}\times 8+1=5$，

$y_{乙}=\frac{1}{4}\times 8+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$，$5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$（千元）.

故当印刷证书 8 千个时，选择乙厂更节省费用，节省费用 500 元.

（3）设甲厂每个证书的印刷费最少降低 a 元，

由题意，得 $8\,000a=500$.

所以 $a=0.062\,5$.

故每个证书的印刷费最少降低 0.062 5 元.

详解

如何求甲厂的制版费？

答：甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，当印刷证书数 $x=0$ 时，印刷费为 0，所以甲厂制版费等于印刷证书数 $x=0$ 时 $y_{甲}$ 的值，观察图象可知，当 $x=0$ 时，$y_{甲}=1$，所以甲厂的制版费为 1 千元.

详解

如何求证书印刷单价？

答：观察图象可知，当 $x=2$ 时，$y_{甲}=2$，而甲厂的制版费为 1 千元，所以印 2 千个证书的印刷费为 1 千元，所以证书的印刷单价为：$\frac{2-1}{2}=0.5$（元）.

解法提醒

用一次函数解决实际问题的策略：

一要利用好图表中的信息；

二要采用待定系数法求出函数解析式；

三要注意分段函数的应用；

四要注意自变量在不同阶段的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的考点主要有：（1）一次函数的图象及性质，主要考查根据函数图象判断系数的取值范围或根据系数确定函数图象，题型有选择题、填空题和解答题；（2）确定函数的解析式，主要考查待定系数法求一次函数的解析式，题型有选择题、填空题和解答题；（3）一次函数的实际应用，主要考查综合运用一次函数的图象和性质解决实际问题，题型以解答题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用代数式的定义解与一次函数图象的位置问题

例17 [中考·雅安]若式子$\sqrt{k-1}+(k-1)^0$有意义，则一次函数$y=(1-k)x+k-1$的图象可能是图19.2-14中的（　　）

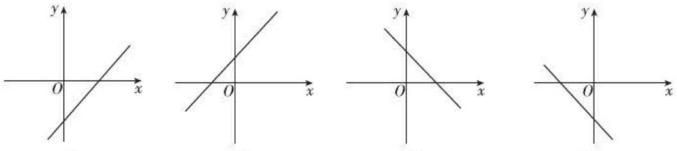


图19.2-14

试题评析：本题考查的是一次函数的图象，熟知一次函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

解：∵式子$\sqrt{k-1}+(k-1)^0$有意义，

∴$\begin{cases}k-1\geqslant 0,\\ k-1\neq 0,\end{cases}$ 解得$k>1$.

∴$1-k<0$，$k-1>0$.

∴一次函数$y=(1-k)x+k-1$的图象过一、二、四象限.

答案：C

解法提醒

一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$的图象的位置是由k，b的符号决定的，因此先求出k的取值范围，再判断出$1-k$及$k-1$的符号，进而可得出结论.

考法2 利用一次函数的图象和性质求含绝对值函数的性质

例18 [中考·咸宁]小慧根据学习函数的经验，对函数$y=|x-1|$的图象与性质进行了探究，下面是小慧的探究过程，请补充完成：

（1）函数$y=|x-1|$的自变量x的取值范围是_____；

（2）列表，找出y与x的几组对应值.

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	b	1	0	1	2	…

其中，b=_____；

（3）在平面直角坐标系xOy中（如图19.2-15），描出以上表中各对对应值为坐标的点，并画出该函数的图象；

解法提醒

解答本题也可以根据绝对值的意义，将函数$y=|x-1|$转化为$y=\begin{cases}x-1(x\geqslant 1),\\ -x+1(x<1)\end{cases}$这样的**分段函数**来解答，即将含绝对值的函数的问题转化为一次函数问题来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）写出该函数的一条性质：_____.

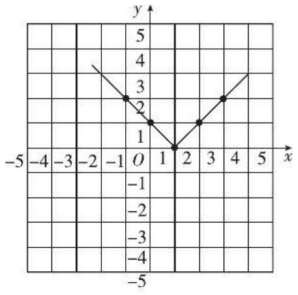


图 19.2−15

试题评析：本题考查的是含绝对值的函数的性质，画函数的图象，利用数形结合求解是解此题的关键.

解：（1）∵ x 无论为何值，函数均有意义，∴ x 为任意实数.

答案：任意实数

（2）∵当 $x=-1$ 时，$y=|-1-1|=2$，∴ $b=2$.

答案：2

（3）如图 19.2−15 所示.

（4）由函数图象可知，函数的最小值为 0.

答案：函数的最小值为 0（答案不唯一）

考法 3 利用一次函数的图象的特征解点的坐标问题

例 19 ［中考·泰州］平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为（$m+1$，$m-1$）.

（1）试判断点 P 是否在一次函数 $y=x-2$ 的图象上，并说明理由；

（2）如图 19.2−16，一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图象与 x 轴，y 轴分别相交于点 A，B，若点 P 在△ AOB 的内部，求 m 的取值范围.

试题评析：本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，一次函数的性质，图象上的点的坐标是否适合解析式. 解答本题的关键是弄清点的坐标、函数的解析式、函数的图象三者的关系.

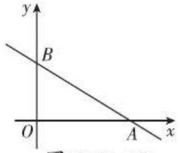


图 19.2−16

解：（1）∵当 $x=m+1$ 时，$y=m+1-2=m-1$，

∴点 P（$m+1$，$m-1$）在函数 $y=x-2$ 的图象上.

（2）∵函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$，∴ A（6，0），B（0，3）.

∵点 P 在△ AOB 的内部，

∴ $0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$.

∴ $1<m<\frac{7}{3}$.

思路点拨

1. 要判断点（$m+1$，$m-1$）是否在函数图象上，只要把这个点的坐标代入函数解析式，观察等式是否成立即可.
2. 根据题意得出 $0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$，解不等式组即可求得.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用一次函数的模型解实际应用问题

例 20 [中考·永州]永州市是一个降水丰富的地区，今年 4 月初，某地连续降雨导致该地某水库水位持续上涨，下表是该水库 4 月 1 日～4 月 4 日的水位变化情况：

日期 x	1	2	3	4
水位 y（米）	20.00	20.50	21.00	21.50

（1）请建立该水库水位 y 与日期 x 之间的函数模型；

（2）请用求出的函数表达式预测该水库今年 4 月 6 日的水位；

（3）你能用求出的函数表达式预测该水库今年 12 月 1 日的水位吗？

试题评析：本题考查了一次函数的应用，能够求出一次函数的表达式是解题的关键.

解：（1）水库的水位 y 随日期 x 的变化是均匀的，所以 y 与 x 之间的函数为一次函数，设 $y=kx+b$，

把 $x=1$，$y=20$ 和 $x=2$，$y=20.5$ 代入得 $\begin{cases}k+b=20,\\2k+b=20.5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=0.5,\\b=19.5.\end{cases}$

$\therefore y=0.5x+19.5$.

（2）当 $x=6$ 时，$y=0.5\times6+19.5=22.5$.

$\therefore$ 今年 4 月 6 日的水位为 22.5 米.

（3）不能，理由如下：

$\because$ 12 月远远大于 4 月，

$\therefore$ 所建立的函数模型远离已知数据作预测是不可靠的.

思路点拨

1. 由给出的表可知水库水位 y 与日期 x 之间的函数关系为一次函数关系，设 $y=kx+b$，把 $(1, 20)$ 和 $(2, 20.5)$ 代入求出 k、b 的值即可.
2. 把 $x=6$ 代入(1)中的函数表达式即可得到今年 4 月 6 日的水位.
3. 不能，因为所建立的函数模型远离已知数据作预测是不可靠的.

特别警示

不能以“连续降雨天”的水位上涨的趋势去预测相当长一段时间的水位情况.

考法 5 利用一次函数的性质解实际应用问题

例 21 [中考·天津]用 A4 纸复印文件，在甲复印店不管一次复印多少页，每页收费 0.1 元，在乙复印店复印同样的文件，一次复印页数不超过 20 时，每页收费 0.12 元；一次复印页数超过 20 时，超过部分每页收费 0.09 元.

设在同一家复印店一次复印文件的页数为 x（x 为非负整数）.

（1）根据题意，填写下表：

一次复印页数	5	10	20	30	…
甲复印店收费（元）	0.5	____	2	____	…
乙复印店收费（元）	0.6	____	2.4	____	…

（2）设在甲复印店复印收费 y_1 元，在乙复印店复印收费 y_2 元，分别写出 y_1，y_2 关于 x 的函数关系式；

思路点拨

1. 根据收费标准，列代数式求得即可；
2. 根据收费等于每页收费乘页数即可求得 $y_1=0.1x$（$x\geqslant0$）；当一次复印页数不超过 20 时，根据收费等于每页收费乘页数即可求得 $y_2=0.12x$，当一次复印页数超过 20 时，根据题意求得 $y_2=0.09x+0.6$；
3. 设 $y=y_1-y_2$，得到 y 与 x 的函数关系式，根据 y 与 x 的函数关系式即可作出判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）当 $x>70$ 时，顾客在哪家复印店复印花费少？请说明理由．

试题评析：本题考查了一次函数的应用，读懂题目信息，列出函数关系式是解题的关键．

解：（1）当 $x=10$ 时，

甲复印店收费为 $0.1\times10=1$（元），

乙复印店收费为 $0.12\times10=1.2$（元）；

当 $x=30$ 时，甲复印店收费为 $0.1\times30=3$（元）；

乙复印店收费为 $0.12\times20+0.09\times10=3.3$（元）．

答案：1，3；1.2；3.3

（2）$y_1=0.1x\ (x\geqslant0)$；

$$y_2=\begin{cases}0.12x\ (0\leqslant x\leqslant20),\\0.09x+0.6\ (x>20).\end{cases}$$

（3）顾客在乙复印店复印花费少．

当 $x>70$ 时，$y_1=0.1x$，$y_2=0.09x+0.6$，

$\therefore y_1-y_2=0.1x-(0.09x+0.6)=0.01x-0.6$．

设 $y=0.01x-0.6$，由 $0.01>0$，知 y 随 x 的增大而增大，

当 $x=70$ 时，$y=0.1$，$\therefore x>70$ 时，$y>0.1$，$\therefore y_1>y_2$，

$\therefore$ 当 $x>70$ 时，顾客在乙复印店复印花费少．

方法点拨

利用一次函数的性质解决实际问题时，首先要求出一次函数的解析式，然后再运用一次函数中函数值随自变量值的增减变化情况进行分析并解决问题．

素养提分 行动篇

“待定系数法”的解读与延伸

我们在求一次函数的解析式时，第一次接触待定系数法，此后在学习二次函数时，更经常地应用这个数学方法．但是，待定系数法的应用不仅仅局限于求函数的解析式．

如果一个多项式的系数和常数项不全已知，但这个多项式满足若干条件，那么我们便用字母表示这些未知的系数，根据这个多项式所满足的条件，把问题化归为解方程或方程组，方程中的未知数就是待定系数．因此，独立的条件的个数应与待定系数的个数相同．应用待定系数法构建已知与未知的关系，可用于解决许多其他问题．

（1）**多项式恒等的条件**：两个一元多项式，当且仅当同次项的系数对应相等时恒等．恒等就是多项式中字母取任何实数时，它们的值都相等．

例如：若代数式 $(2x^2+ax-y+b)-(2bx^2+3x+5y+1)$ 的值与字母 x 的取值无关，求字母 a，b 的值．

整式的运算，因式分解，分式的运算，方程的解等知识都涉及恒等式．

（2）**若 p 是有理数，a 是无理数，则 $p+a$ 是无理数**．

这也容易证明：若 $p+a$ 是有理数，记作 q，则 $p+a=q$，$a=q-p$，这个等式右边是有理数，不可能与无理数相等．

由此可知，当 $\sqrt{a}$ 是无理数时，若有理数 p，q，m，n 能使 $p+q\sqrt{a}=m+n\sqrt{a}$ 成立，那么 $p=m$，$q=n$．

例如：已知 m，n 是有理数，且 $(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，求 m，n 的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

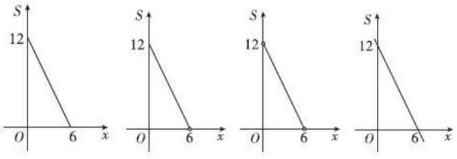
1. [模拟·长安区]下列函数中，是一次函数的有（　　）

（1）$y=\pi x$；（2）$y=2x-1$；（3）$y=\dfrac{1}{x}$；（4）$y=2-3x$；（5）$y=x^2-1$.

A.4个　　B.3个

C.2个　　D.1个

2. [中考·齐齐哈尔]点$P(x,y)$在第一象限内，且$x+y=6$，点A的坐标为$(4,0)$，设$\triangle OPA$的面积为S，则下列图象中，能正确反映面积S与x之间的函数关系式的图象是（　　）



A　　B　　C　　D

3. [中考·营口]若一次函数$y=ax+b$的图象经过第一、二、四象限，则下列不等式一定成立的是（　　）

A.$a+b<0$　　B.$a-b>0$

C.$ab>0$　　D.$\dfrac{b}{a}<0$

4. [中考·泰安]已知一次函数$y=kx-m-2x$的图象与y轴的负半轴相交，且函数值y随自变量x的增大而减小，则下列结论正确的是（　　）

A.$k<2$，$m>0$　　B.$k<2$，$m<0$

C.$k>2$，$m>0$　　D.$k<0$，$m<0$

5. [中考·大庆]对于函数$y=2x-1$，下列说法正确的是（　　）

A. 它的图象过点$(1,0)$

B. y值随着x值增大而减小

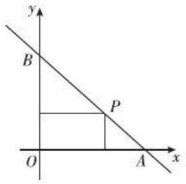
C. 它的图象经过第二象限

D. 当$x>1$时，$y>0$

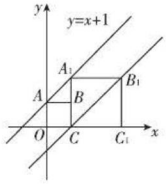
6. [中考·温州]如图，一直线与两坐标轴的正半轴分别交于A，B两点，P是线段AB上任意一点（不包括端点），过P分别作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形的周长为10，则该直线的函数表达式是（　　）

A.$y=x+5$　　B.$y=x+10$

C.$y=-x+5$　　D.$y=-x+10$



（第6题）



（第7题）

7. [模拟·碑林区]将正方形$AOCB$和$A_1CC_1B_1$按如图所示方式放置，点$A(0,1)$和点A_1在直线$y=x+1$上，点C，C_1在x轴上，若平移直线$y=x+1$至经过点B_1，则直线$y=x+1$向右平移的距离为（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

8. 已知一次函数$y=(m+2)x+(3-n)$，求：

（1）m，n为何值时，y随x的增大而减小？

（2）m，n为何值时，函数的图象经过原点？

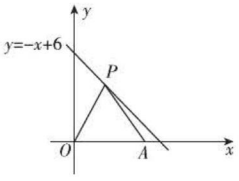
（3）若函数图象经过第二、三、四象限，求m，n的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [期中·汝州市]如图，在平面直角坐标系中，点$P(m, n)$在第一象限，且在直线$y=-x+6$上，点A的坐标为$(5, 0)$，O是坐标原点，$\triangle PAO$的面积是S.

(1) 求S与m的函数关系式，并画出函数的图象;

(2) 小杰认为$\triangle PAO$的面积可以为15，你认为呢?　　【导学号：8592074】



(第9题)

10. [期末·邢台]已知一次函数的图象经过点$(-2, -2)$和点$(2, 4)$.

(1) 求这个函数的解析式;

(2) 判断点$P(1, 1)$是否在此函数图象上，并说明理由.

(3) 求这个函数的图象与坐标轴围成的三角形的面积.

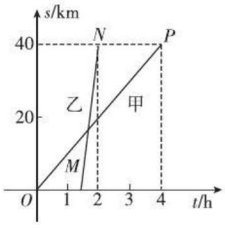
11. A，B两地相距40km，甲、乙两人沿同一路线从A地到B地，甲骑自行车先出发，1.5小时后乙乘坐公共汽车出发，两人匀速行驶的路程s(km)与时间t(h)的关系如图所示.

(1) 求甲、乙两人的速度;

(2) 若乙到达B地后，立即以原速返回A地.

①画出乙返程中与A地的距离y(km)与时间t(h)的函数图象，并求出此时y关于t的函数解析式;

②求甲在离B地多远处与返程中的乙相遇?



(第11题)

12. 已知直线$y=-x+2$与x轴，y轴分别交于点A和点B，另一直线$y=kx+b(k\neq 0)$经过点$C(1, 0)$，且把$\triangle AOB$分成两部分.

(1) 若$\triangle AOB$被分成的两部分面积相等，求k和b的值;

(2) 若$\triangle AOB$被分成的两部分面积之比为1∶5，求k和b的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.2.3 一次函数与方程、不等式

核心知识

- 一次函数与一元一次方程
- 一次函数与一元一次不等式
- 一次函数与二元一次方程
- 一次函数与二元一次方程组

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 一次函数与一元一次方程

1. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）与一元一次方程 $kx+b=0$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）的关系：

数：函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y=0$ 时自变量 x 的值是方程 $kx+b=0$ 的解.

形：函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标是方程 $kx+b=0$ 的解.

2. 一次函数图象法解一元一次方程的步骤：

（1）**转化**：将一元一次方程转化为一次函数；

（2）**画图象**：画出一次函数的图象；

（3）**找交点**：找出一次函数图象与 x 轴的交点，交点的横坐标即为一元一次方程的解.

拔考向▸ 利用一次函数与一元一次方程的关系解与方程的解相关问题

题型 1：一次函数的图象在解一元一次方程中的应用

例 1 利用函数图象解方程 $3x-2=x+4$.

解题秘方：紧扣“一次函数图象法解一元一次方程的步骤”求解.

解：由 $3x-2=x+4$ 得 $2x-6=0$，

令 $y=2x-6$，画函数 $y=2x-6$ 的图象，如图 19.2-17 所示，

由图 19.2-17 可知，直线 $y=2x-6$ 与 x 轴的交点坐标为（3，0），所以 $x=3$.

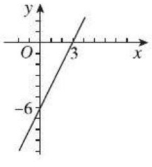


图 19.2-17

提分·必记

特别提醒

1. 求一次函数图象与 x 轴交点的横坐标的实质就是解一元一次方程；也就是说，“数”题可用“形”解，“形”题也可用“数”解.
2. 对于一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$，k，b 为常数），已知 x 的值求 y 的值，或已知 y 的值求 x 的值时，就是把问题转化为关于 y 或 x 的一元一次方程来求解.

提分·秘诀

解法提醒

利用函数图象解一元一次方程时，一般需将方程变形为 $kx+b=0$（$k\neq 0$，k，b 为常数）的形式，然后令 $y=kx+b$ 并画出其图象，通过观察直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标确定方程的解，此求解方法对作图的准确性要求较高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：解一元一次方程在确定一次函数图象与坐标轴交点坐标中的应用

例 2 如图 19.2-18，一次函数 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$ 的图象过直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A，试确定 b 的值，并计算两条直线与 y 轴的交点 B，C 和点 A 构成的三角形的面积.

解题秘方：紧扣“一元一次方程和一次函数间的关系”求解.

解：对于直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$，设 $y=0$，则 $\frac{1}{2}(x+1)=0$，解得 $x=-1$.

因此直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A 的坐标是 $(-1,0)$.

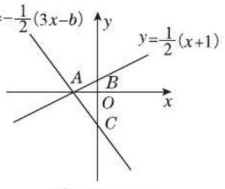


图 19.2-18

把 $(-1,0)$ 代入函数解析式 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$，

则 $-\frac{1}{2}\times[3\times(-1)-b]=0$. 解得 $b=-3$.

所以 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)=-\frac{1}{2}(3x+3)$.

直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 y 轴的交点 B 的坐标是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

直线 $y=-\frac{1}{2}(3x+3)$ 与 y 轴的交点 C 的坐标是 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，

因此 BC 的长度是 $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$.

又易知 $OA=1$，所以 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

解法提醒

1. 一次函数的图象与坐标轴交点的坐标求法：令 $y=0$，解方程即得与 x 轴的交点的横坐标；令 $x=0$，解方程即得与 y 轴的交点的纵坐标.
2. 同一坐标轴上两点的距离即是横坐标或者是纵坐标差的绝对值.

知识点 2 一次函数与一元一次不等式

1. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）与一元一次不等式 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$）（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的关系：

数：函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y>0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集；函数值 $y<0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

形：函数 $y=kx+b$ 的图象中，位于 x 轴上方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集；位于 x 轴下方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

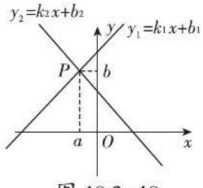


图 19.2-19

2. 拓展：直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与直线 $y_2=k_2x+b_2$ 的交点的横坐标即为方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$（或

提分·必记

特别提醒

利用图象法解一元一次不等式的一般步骤：

1. 将不等式转化为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$（$a\neq0$）的形式；
2. 画出函数图象并确定函数图象与坐标轴的交点坐标；
3. 根据函数图象确定对应不等式的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$k_1x+b_1<k_2x+b_2$）的解集就是直线 $y_1=k_1x+b_1$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2$ 上（或下）方部分对应的 x 的取值范围.

示例：如图 19.2−19 所示，方程 $k_2x+b_1=k_2x+b_2$ 的解为 $x=a$；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$ 的解集为 $x>a$；不等式 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$ 的解集为 $x<a$.

拔考向▸利用一次函数图象法解一元一次不等式

例 3 用画函数图象的方法解不等式 $3x+2>2x-1$.

解题秘方：紧扣“用图象法解一元一次不等式的步骤”求解.

解：方法一：原不等式可化为 $x+3>0$.

画出函数 $y=x+3$ 的图象（如图 19.2−20 所示）.

由图象可以看出，当 $x>-3$ 时，这条直线上的点在 x 轴上方，即此时 $y=x+3>0$.

所以不等式 $3x+2>2x-1$ 的解集为 $x>-3$.

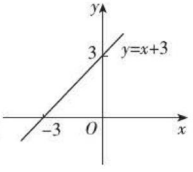


图 19.2−20

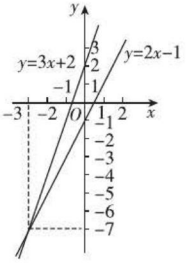


图 19.2−21

方法二：在同一坐标系中分别画出函数 $y=3x+2$ 与函数 $y=2x-1$ 的图象（如图 19.2−21 所示），可以看出，它们交点的横坐标为 -3.

当 $x>-3$ 时，对于同一个 x 的值，直线 $y=3x+2$ 上的点在直线 $y=2x-1$ 上相应点的上方，这时 $3x+2>2x-1$，即不等式的解集为 $x>-3$.

点知识▸3 一次函数与二元一次方程

1. 一次函数与二元一次方程的联系：

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图象上任意一点的坐标都是关于 x，y 的二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的解；以二元一次方程 $kx-y+b=0$ 的解为坐标的点都在一次函数 $y=kx+b$ 的图象上，即

（1）二元一次方程 $\overset{转化}{\Leftrightarrow}$ 一次函数 $\overset{转化}{\Leftrightarrow}$ 一条直线；

（2）二元一次方程的解 $\overset{对应}{\Leftrightarrow}$ 一次函数两变量的值 $\overset{对应}{\Leftrightarrow}$ 直线上的点的坐标.

2. 二元一次方程与一次函数的区别：

（1）二元一次方程有两个未知数，而一次函数有两个变量；

（2）二元一次方程是用一个等式表示两个未知数的关系，而一次函数既可以用一个等式表示两个变量的关系，又可以用列表法或图象法表示两个变量的关系.

提分·秘诀

解法提醒

将不等式转化为函数解析式，画出此函数的图象，观察图象即可求出不等式的解集.

方法点拨

一元一次不等式的图象解法就是把解不等式转化为比较直线上点的位置的高低，能直观地看到怎样用图象来表示不等式的解集，体现了数形结合和转化思想的应用.

提分·必记

特别提醒

1. 因为二元一次方程的解与一次函数图象上点的坐标之间的关系是一一对应的，所以可以实现方程与函数之间的相互转化，这体现了数形结合的思想.
2. 以二元一次方程的解为坐标的点所组成的图形与其对应的一次函数的图象完全重合（是一条直线）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用一次函数图象的点的坐标与二元一次方程的解的关系确定图象

例 4 如图 19.2-22 所示的四条直线，其中直线上每个点的坐标都是二元一次方程 $x-2y=2$ 的解组成的图象是（　　）

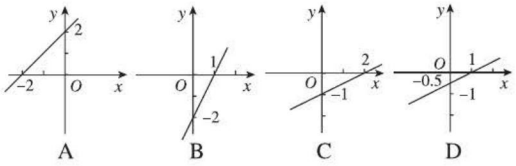


图 19.2-22

解题秘方：紧扣“一次函数与二元一次方程的联系”求解.

解：因为二元一次方程 $x-2y=2$，

有解$\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}$ 与$\begin{cases}x=2,\\y=0,\end{cases}$

故直线 $x-2y=2$ 与两坐标轴的交点是（0，-1），（2，0），对照四个选项中直线的位置，可知选 C.

答案：C

提分·秘诀

解法提醒

直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点的横坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中，当 $y=0$ 时 x 的值；直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点的纵坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中，当 $x=0$ 时 y 的值.

这类题的解法，体现了用数形结合思想和转化思想.

点知识▶ 4 一次函数与二元一次方程组

1. 一次函数与二元一次方程组的对应关系：

二元一次方程组$\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$两个一次函数$\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$两条直线；

二元一次方程组的解$\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$两个一次函数值相等时的自变量值及函数值$\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$两条直线的交点坐标.

2. 两直线交点个数与二元一次方程组解的个数的关系：

两条直线有交点（相交）⇔方程组只有一组解；

两条直线无交点（平行）⇔方程组无解；

两条直线是同一直线（重合）⇔方程组有无数组解.

3. 用图象法求二元一次方程组的解的一般步骤：

（1）**变函数**：把方程组$\begin{cases}k_1x-y+b_1=0,\\k_2x-y+b_2=0\end{cases}$ 化为一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$；

（2）**画图象**：建立平面直角坐标系，画出两个一次函数的图象；

（3）**找交点**：由图象确定两直线交点的坐标；

（4）**写结论**：依据点的坐标写出方程组的解.

提分·必记

特别提醒

1. 用图象法求出的二元一次方程组的解往往是近似值，而用解方程组的方法求出的解是准确值.
2. 利用图象法求出的方程组的解是否准确，**取决于所画的图象是否准确**，判断图象法求方程组所得到的解是否准确，**可以将得到的解代入方程组中进行检验**，如果方程组中的两个方程同时成立，则得到的解是准确的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用一次函数与二元一次方程组的关系解相关应用

题型1：图象法在解二元一次方程组中的应用

例5 利用图象法解二元一次方程组：$\begin{cases}3x-y=2,\\x+y=2.\end{cases}$

解题秘方：紧扣“图象法求二元一次方程组解的步骤”求解.

解：原方程组可转化为$\begin{cases}y=3x-2,\\y=2-x.\end{cases}$

如图19.2-23，在同一平面直角坐标系中分别画出函数$y=3x-2$和函数$y=2-x$的图象，

由图象知，两条直线交点的坐标为（1，1），

∴方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

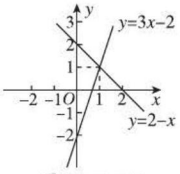


图19.2-23

题型2：交点坐标的意义在求函数解析式中的应用

例6 已知一次函数$y=ax+2$与$y=kx+b$的图象如图19.2-24，两直线的交点为A，且方程组$\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$点$B$为直线$y=kx+b$与$y$轴的交点，点$B$的坐标为（0，-1），请你确定这两个一次函数的解析式.

解题秘方：紧扣“交点坐标的意义”求解.

解：因为方程组$\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

所以交点A的坐标为（2，1），所以$2a+2=1$，解得$a=-\frac{1}{2}$.

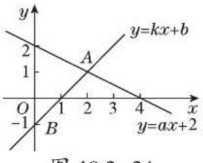


图19.2-24

又因为函数$y=kx+b$的图象过交点A（2，1）和点B（0，-1），

所以$\begin{cases}2k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$

所以这两个一次函数的解析式分别为$y=-\frac{1}{2}x+2$，$y=x-1$.

提分·秘诀

技巧点拨

用图象法解二元一次方程组的基本方法：

1. 将方程组中的两个方程转化成一次函数$y=kx+b$的形式；
2. 在同一直角坐标系中画出两函数的图象；
3. 利用图象的直观性确定交点坐标.

解法提醒

此类问题的解题规律是明确方程组的解就是两条相应直线的交点坐标，再利用待定系数法求解.本题中确定这两个函数的解析式的关键是确定a，k，b的值.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用图象法解一元一次方程及不等式

例7 画出函数$y=2x-1$的图象，利用图象求：

（1）方程$2x-1=0$的解；

（2）不等式$2x-1<0$的解集；

（3）当$-1\leqslant y\leqslant 1$时，x的取值范围.

解题秘方：紧扣“数”“形”结合思想按图象法解方程、不等式的步骤求解.

挑战·高分

解法提醒

1. 从“数”看解一元一次方程相当于求x取何值时，函数值为0，从“形”看解一元一次方程相当于求直线与x轴交点的横

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：过点$A\left(\frac{1}{2},0\right)$，$B(0,-1)$画函数$y=2x-1$的图象，如图19.2-25所示.

（1）由图象可知，直线$y=2x-1$与x轴的交点为$A\left(\frac{1}{2},0\right)$，∴方程$2x-1=0$的解是图象与$x$轴的交点的横坐标，即$x=\frac{1}{2}$.

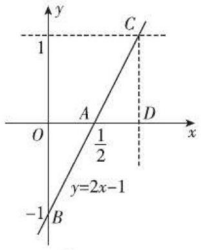


图 19.2-25

（2）不等式$2x-1<0$的解集是函数$y=2x-1$的图象在x轴下方区域部分对应的x的取值范围，即$x<\frac{1}{2}$.

（3）过点$(0,1)$作x轴的平行线交直线$y=2x-1$于点C，过点C作x轴的垂线交x轴于点D，则点D的坐标为$(1,0)$；

观察图象可知，当$-1\leqslant y\leqslant 1$时，x的取值范围是$0\leqslant x\leqslant 1$.

拔尖角度▸ 2 利用直线位置关系法说明方程组解的情况

例8 利用图象法解下列方程组：

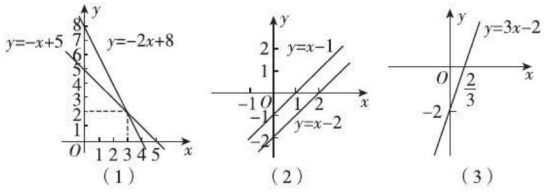
（1）$\begin{cases}x+y=5,\\2x+y=8;\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=y+1,\\3x-3y=6;\end{cases}$（3）$\begin{cases}y=3x-2,\\6x-2y=4.\end{cases}$

解题秘方：紧扣平面内两直线的位置关系结合图象法解方程组的方法求解.

解：（1）由$x+y=5$，得$y=-x+5$；

由$2x+y=8$，得$y=-2x+8$.

在同一平面直角坐标系中画出一次函数$y=-x+5$和$y=-2x+8$的图象，如图19.2-26（1）所示，由图象可知两直线的交点坐标为$(3,2)$，所以原方程组的解为$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$



（1） （2） （3）

图 19.2-26

（2）由$x=y+1$得$y=x-1$；由$3x-3y=6$得$y=x-2$.

在同一平面直角坐标系中画出一次函数$y=x-1$和$y=x-2$的图象，如图19.2-26（2）所示，由于两直线平行，没有交点，所以原方程组无解.

（3）由$6x-2y=4$，得$y=3x-2$.

在同一平面直角坐标系中画出一次函数$y=3x-2$和$y=3x-2$的图象，如图19.2-26（3）所示，两条直线重合，所以原方程组有无数组解.

坐标；

2. 从“数”看解一元一次不等式相当于求x取何值时，函数值大于或小于0，从“形”看解一元一次不等式相当于确定图象在x轴上方部分或下方部分对应的自变量x的取值范围.

挑战·高分

知识储备

二元一次方程组中两个方程化为一次函数后的图象，可能是两条相交直线、两条平行直线或两条重合直线，与之对应的方程组的解的情况是：有唯一解、无解或有无数组解.

提示

方程组还可按下列方法求解.

（2）中对应的两个一次函数分别为$y=x-1$和$y=x-2$，比较两个一次函数中k，b的值，得$1=1$，$-1\neq -2$，所以这两个一次函数对应的直线平行，故方程组$\begin{cases}x=y+1,\\3x-3y=6\end{cases}$无解.

（3）中对应的两个一次函数分别为$y=3x-2$和$y=3x-2$，比较两个一次函数中k，b的值得$3=3$，$-2=-2$，所以这两个一次函数对应的直线重合，故方程组$\begin{cases}y=3x-2,\\6x-2y=4\end{cases}$有无数组解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用图象法解含绝对值的二元一次方程组

挑战·高分

例 9 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$.

（1）求直线 AB 对应的函数解析式；

（2）在直角坐标系中，画出函数 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图象，并根据图象写出方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

解题秘方：紧扣图象法解方程组的步骤求解.

解：（1）∵一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$，

$$\therefore\begin{cases}-k+b=2,\\3k+b=0,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

故直线 AB 对应的函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

（2）作 $y=|x|$，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ 的图象，如图 19.2−27 所示，

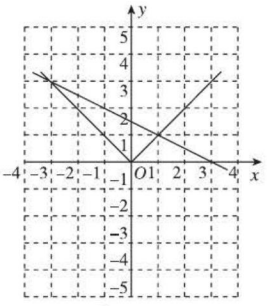


图 19.2−27

根据图象可得方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-3,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

解法提醒

利用图象法解决二元一次方程组相关问题的关键：

一是根据相关条件求出一次函数解析式；

二是结合所作的一次函数图象与二元一次方程组间的关系求解相关问题.

特别提醒

$y=|x|$ 的图象是一条折线.

拔尖角度 4 利用数形结合法解函数、方程、几何综合问题

挑战·高分

例 10 如图 19.2−28，直线 $y=kx-1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B，C 两点，且 $3OB-\dfrac{1}{2}OC=1$.

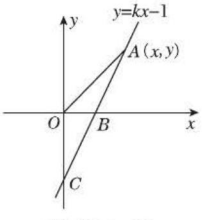


图 19.2−28

（1）求点 B 的坐标及 k 的值.

（2）若点 $A(x,y)$ 是直线 $y=kx-1$ 在第一象限内的一个动点. 在点 A 的运动过程中，试写出 $\triangle AOB$ 的面积 S 与 x 之间的函数解析式.

（3）探索：

①当点 A 运动到什么位置时，$\triangle AOB$ 的面积是 $\dfrac{1}{4}$？

②在①成立的情况下，在两条坐标轴上是否存在一点 P，使 $\triangle POA$ 是等腰直角三角形？若存在，请写出满足条件的所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

解题秘方：紧扣题中的数量关系结合直角坐标系中图形位置情况，用数形结合法求解.

思路点拨

1. 确定一次函数 $y=kx-1$ 的图象与 y 轴交点的坐标，根据线段 OB，OC 的长度关系，确定直线 $y=kx-1$ 与 x 轴交点的坐标，进而求出 k 的值；
2. 运用三角形面积计算方法建立函数关系；
3. 根据 S 与 x 之间的函数解析式，确定点 A 坐标，根据点 A 坐标特征以及等腰直角三角形的判定，确定所有点 P 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵直线 $y=kx-1$ 与 y 轴相交于点 C，

∴点 C 的坐标是（0，−1），∴ $OC=1$.

∵ $3OB-\frac{1}{2}OC=1$，∴ $OB=\frac{1}{2}$，∴点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

把点 B 的坐标 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ 代入 $y=kx-1$，得 $k=2$.

（2）∵ $S=\frac{1}{2}OB\cdot y$，$y=2x-1$，

∴ $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(2x-1)$，∴ $S=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

（3）①当 $S=\frac{1}{4}$ 时，$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，解得 $x=1$.

∴ $y=2x-1=1$. ∴当点 A 的坐标为（1，1）时，△ AOB 的面积为 $\frac{1}{4}$.

②存在. 满足条件的所有点 P 的坐标为（1，0），（2，0），（0，1），（0，2）.

特别提醒

如果没有点A在第一象限这个条件，那么(3)①中A点就不止一个；另外在(3)②中，要按OA为斜边、直角边两种情况进行分类，并分别向两侧作图，否则易出现漏解情况.

拔尖角度▸ 5 利用建模法解实际应用问题

挑战·高分

例 11 某家电集团公司生产某种型号的新家电，前期投资 200 万元，每生产一台这种新家电，后期还需其他投资 0.3 万元，已知每台新家电可实现产值 0.5 万元.

（1）分别求总投资额 y_1（万元）和总利润 y_2（万元）关于新家电的总产量 x（台）的函数解析式；

（2）当新家电的总产量为 900 台时，该公司的盈亏情况如何？

（3）请你利用（1）中 y_2 与 x 的函数解析式，分析该公司的盈亏情况.

知识储备

总投资 = 前期投资 + 后期其他投资，

总利润 = 总产值 − 总投资.

解题秘方：紧扣题中的数量关系列出函数解析式结合方程、不等式求解.

解：（1）根据题意，得 $y_1=0.3x+200$（$x\geqslant 0$），

$y_2=0.5x-(0.3x+200)=0.2x-200$（$x\geqslant 0$）.

（2）把 $x=900$ 代入 $y_2=0.2x-200$，

可得 $y_2=0.2\times 900-200=-20<0$，

∴当总产量为 900 台时，公司会亏损，亏损额为 20 万元.

（3）根据题意，当 $0.2x-200<0$ 时，解得 $x<1\ 000$.

又∵ $x\geqslant 0$，∴ $0\leqslant x<1\ 000$.

说明总产量大于等于 0 台且小于 1 000 台时，公司会亏损；

当 $0.2x-200>0$ 时，解得 $x>1\ 000$，

说明总产量大于 1 000 台时，公司会盈利；

当 $0.2x-200=0$ 时，解得 $x=1\ 000$，

说明总产量等于 1 000 台时，公司既不亏损也不盈利.

图解

如图 19.2-29 所示是 y_2 与 x 的函数图象，由函数图象可直接得到.

当 $0\leqslant x<1\ 000$ 时，$y_2<0$；

当 $x>1\ 000$ 时，$y_2>0$；

当 $x=1\ 000$ 时，$y_2=0$.

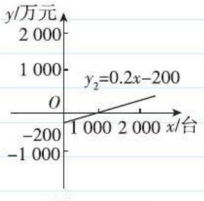


图 19.2-29

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的考点主要是利用一次函数的图象解方程（组）或不等式，它体现了用函数的观点看待方程（组）或不等式的思想，对该思想的考查近年来在中考中有所加强，尤其是实际应用问题，背景新颖，主要考查利用一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式的关系解决实际问题，难度中等偏上.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用一次函数的交点坐标解不等式

例12 [中考·菏泽]如图19.2-30，函数$y_1=-2x$与$y_2=ax+3$的图象相交于点$A(m,2)$，则关于x的不等式$-2x>ax+3$的解集是(　　)

A.$x>2$　　B.$x<2$　　C.$x>-1$　　D.$x<-1$

试题评析：此题主要考查了一次函数与一元一次不等式，关键是求出A点坐标.

解：∵函数$y_1=-2x$过点$A(m,2)$，

∴$-2m=2$，解得$m=-1$. ∴$A(-1,2)$.

∴不等式$-2x>ax+3$的解集为$x<-1$.

答案：D

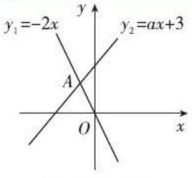


图19.2-30

思路点拨

首先利用待定系数法求出A点坐标，再以交点为分界，结合图象写出不等式$-2x>ax+3$的解集即可.

考法2 利用解二元一次方程组解两直线的交点坐标问题

例13 [中考·陕西]如图19.2-31，已知直线l_1：$y=-2x+4$与直线l_2：$y=kx+b$（$k\neq0$）在第一象限交于点M，若直线l_2与x轴的交点为$A(-2,0)$，则k的取值范围是(　　)

A.$-2<k<2$　　B.$-2<k<0$　　C.$0<k<4$　　D.$0<k<2$

试题评析：此题主要考查了两条直线的相交问题，以及一次函数图象的点的特征，要熟练掌握.

解：∵直线l_2与x轴的交点为$A(-2,0)$，

∴$-2k+b=0$. ∴$b=2k$.

$$\therefore \begin{cases} y=-2x+4, \\ y=kx+2k, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=\dfrac{4-2k}{k+2}, \\ y=\dfrac{8k}{k+2}. \end{cases}$$

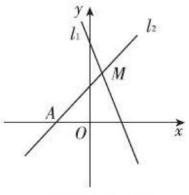


图19.2-31

∵直线l_1：$y=-2x+4$与直线l_2：$y=kx+b$（$k\neq0$）的交点在第一象限，

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{4-2k}{k+2}>0, \\ \dfrac{8k}{k+2}>0, \end{cases} \text{解得 } 0<k<2.$$

答案：D

思路点拨

首先根据直线l_2与x轴的交点为$A(-2,0)$，求出k、b的关系；然后求出直线l_1、直线l_2的交点坐标，根据直线l_1、直线l_2的交点的横坐标、纵坐标都大于0，求出k的取值范围即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用解方程解一次函数的实际应用

例 14 [中考·衡阳]为响应绿色出行号召，越来越多市民选择租用共享单车出行，已知某共享单车公司为市民提供了手机支付和会员卡支付两种方式，如图 19.2-32 描述了两种方式应支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）之间的函数关系，根据图象回答下列问题：

（1）求手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式；

（2）李老师经常骑行共享单车，请根据不同骑行时间帮他确定选择哪种支付方式比较合算.

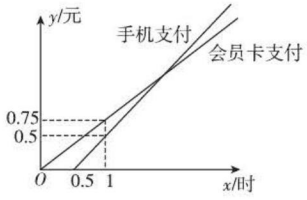


图 19.2-32

试题评析：本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，求出相应的函数关系式，利用数形结合的思想和一次函数的性质解答，这是一道典型的方案选择问题.

解：（1）当 $0 \leqslant x<0.5$ 时，$y=0$，

当 $x \geqslant 0.5$ 时，设手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式是 $y=kx+b$（$k \neq 0$），

由图象可得 $\begin{cases}0.5k+b=0,\\1\times k+b=0.5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-0.5.\end{cases}$

即当 $x \geqslant 0.5$ 时，手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式是 $y=x-0.5$.

由上可得，手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式是

$$y=\begin{cases}0\ (0 \leqslant x<0.5),\\x-0.5\ (x \geqslant 0.5).\end{cases}$$

（2）设会员卡支付对应的函数关系式为 $y=ax$，

则 $0.75=a\times 1$，解得 $a=0.75$，

即会员卡支付对应的函数关系式为 $y=0.75x$.

令 $0.75x=x-0.5$，解得 $x=2$.

由图象可知，当 $0 \leqslant x<2$ 时，李老师选择手机支付方式比较合算，

当 $x=2$ 时，李老师选择两种支付方式一样，

当 $x>2$ 时，李老师选择会员卡支付方式比较合算.

解法提醒

求解一次函数应用于最优方案问题，一般先利用条件求出函数的关系式，再根据条件借助不等式或图象分类讨论.

技巧点拨

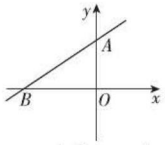
结合图象求解实际最优方案问题时，求出函数图象交点是常用的技巧，也是分析很多问题的桥梁.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

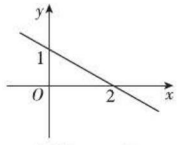
1. [中考·桂林]如图，直线 $y=ax+b$ 过点 $A(0,2)$ 和点 $B(-3,0)$，则方程 $ax+b=0$ 的解是（　　）

A. $x=2$　　B. $x=0$

C. $x=-1$　　D. $x=-3$



（第1题）



（第2题）

2. [中考·乌鲁木齐]一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象如图所示，则不等式 $kx+b>0$ 的解集是（　　）

A. $x<2$　　B. $x<0$

C. $x>0$　　D. $x>2$

3. [期末·泰兴市]一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）中变量 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	…	−1	0	1	2	3	…
y	…	8	6	4	2	0	…

下列结论：

① y 随 x 的增大而减小；

② $x=2$ 是方程 $(k-1)x+b=0$ 的解；

③当 $x<2$ 时，$(k-1)x+b<0$.

其中正确的个数为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

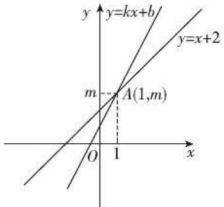
4. [期末·宝丰县]用图象法解关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}kx-y+b=0,\\x-y+2=0\end{cases}$ 时，小英所画图象如图所示，则方程组的解为（　　）

A. $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$

B. $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=1,\\y=2.5\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$

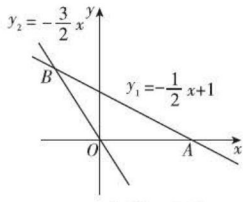


（第4题）

5. [中考·曲靖]如图，已知直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与 x 轴交于点 A，与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B.

（1）求△AOB 的面积；

（2）求 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围.



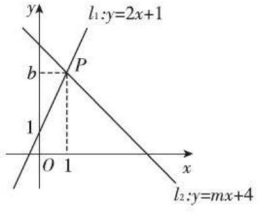
（第5题）

6. [中考·台州]如图，直线 l_1：$y=2x+1$ 与直线 l_2：$y=mx+4$ 相交于点 $P(1,b)$.

（1）求 b，m 的值；

（2）垂直于 x 轴的直线 $x=a$ 与直线 l_1，l_2 分别交于点 C，D，若线段 CD 长为 2，求 a 的值.

【导学号：8592074】



（第6题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 已知在平面直角坐标系中，直线 l_1 对应的函数解析式为 $y=2x-1$，直线 l_2 过原点且与直线 l_1 交于点 $P(-2,\ a)$.

(1) 试求 a 的值.

(2) 点 $P(-2,\ a)$ 的横纵坐标可以看成是哪个二元一次方程组的解?

(3) 设直线 l_1 与 x 轴交于点 A，你能求出 $\triangle APO$ 的面积吗? 试试看.

(4) 在直线 l_1 上是否存在点 M，使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等? 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

8. [中考·莱芜]某网店销售甲、乙两种防雾霾口罩，已知甲种口罩每袋的售价比乙种口罩多 5 元，小丽从该网店网购 2 袋甲种口罩和 3 袋乙种口罩共花费 110 元.

(1) 该网店甲、乙两种口罩每袋的售价各多少元?

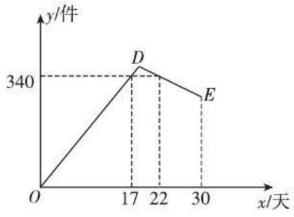
(2) 根据消费者需求，网店决定用不超过 10 000 元购进甲、乙两种口罩共 500 袋，且甲种口罩的数量大于乙种口罩的 $\frac{4}{5}$，已知甲种口罩每袋的进价为 22.4 元，乙种口罩每袋的进价为 18 元，请你帮助网店计算有几种进货方案? 若使网店获利最大，应该购进甲、乙两种口罩各多少袋，最大获利多少元?

9. [中考·咸宁]某公司开发出一款新的节能产品，该产品的成本价为 6 元/件，该产品在正式投放市场前通过代销点进行了为期一个月(30 天)的试销售，售价为 8 元/件，工作人员对销售情况进行了跟踪记录，并将记录情况绘成图象，图中的折线 ODE 表示日销售量 y(件)与销售时间 x(天)之间的函数关系，已知线段 DE 表示的函数关系中，时间每增加 1 天，日销售量减少 5 件.

(1) 第 24 天的日销售量是_____件，日销售利润是_____元.

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围;

(3) 日销售利润不低于 640 元的天数共有多少天? 试销售期间，日销售最大利润是多少元?



(第 9 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.3 课题学习 选择方案

核心知识

- 用一次函数解决问题
- 用一次函数图象解决问题
- 用一次函数的性质解决问题

知识链接

用一次函数解决问题 → 用函数图象解决问题；用函数性质解决问题

点知识·拨考向 速提分

点知识▸选择方案

1. 选择方案

选择方案是指某一问题中，符合条件的方案有多种，一般要利用数学知识经过分析、猜想、判断，筛选出最佳方案，常涉及的问题类型有利润最大、路程最短、运费最少、效率最高等，常建立函数模型，运用方程（组）或不等式的知识进行求解.

2. 用一次函数选择方案的一般步骤

（1）“析”：分析题意，弄清数量关系.

（2）“列”：列出函数解析式、不等式或方程.

（3）“求”：求出自变量在不同值对应的函数值的大小，或函数的最大（最小）值.

（4）“选”：结合实际需要选择最佳方案.

注意：在选择方案时，要考虑实际问题中自变量的取值范围，尤其要看它是不是某些特殊解（如正整数解）.

提分·必记

特别提醒

1. 解决含多个变量的问题时，注意分析这些变量之间的关系，从中选取一个取值能影响其他变量的值的变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数，以此作为解决问题的数学模型.
2. 选择最佳方案实际上是在比较的基础上完成的，它往往是将全部方案一一列举出来，然后根据题意选择一个最优的方案.

拨考向▸利用选择方案的方法解生活中的实际应用问题

题型 1：省钱方案

例 1 [中考·襄阳]某社区活动中心为鼓励居民加强体育锻炼，准备购买 10 副某种品牌的羽毛球拍，每副球拍配 $x(x \geqslant 2)$ 个羽毛球，供社区居民免费借用. 该社区附近 A，B 两家超市都有这种品牌的羽毛球拍和羽毛球出售，且每副球拍的标价均为 30 元，每个羽毛球的标价均为 3 元，目前两家超市同时在做促销活动：

A 超市：所有商品均打九折（按标价的 90%）销售；

B 超市：买一副羽毛球拍送 2 个羽毛球.

设在 A 超市购买羽毛球拍和羽毛球的费用为 y_A 元，在 B 超市购买羽毛球拍和羽毛球的费用为 y_B 元. 请解答下列问题：

（1）分别写出 y_A 和 y_B 与 x 之间的函数解析式.

提分·秘诀

技巧点拨

解一次函数与方程、不等式综合实际应用问题的方法：

先读懂题意，理解题干的条件和各个问题的关系，并利用题目中的信息建立函数模型，根据函数值的大小关系，建立方程、不等式模型，

再分类讨论，确定不同情况下自变量的取值范围及对应的函数值

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）若该活动中心只在一家超市购买，你认为在哪家超市购买更划算？

（3）若每副球拍配 15 个羽毛球，请你帮助该活动中心设计出最省钱的购买方案．

解题秘方：紧扣标价与折扣间的数量关系建立一次函数解析式的模型，用方程、不等式进行分类讨论．

解：（1）由题意得 $y_A=(10\times30+10\times3x)\times0.9=27x+270\ (x\geqslant2)$，

$y_B=10\times30+10\times3(x-2)=30x+240\ (x\geqslant2)$．

（2）当 $y_A=y_B$ 时，$27x+270=30x+240$，得 $x=10$；

当 $y_A>y_B$ 时，$27x+270>30x+240$，得 $x<10$；

当 $y_A<y_B$ 时，$27x+270<30x+240$，得 $x>10$．

∴当 $2\leqslant x<10$ 时，在 B 超市购买更划算；

当 $x=10$ 时，在两家超市购买费用一样；

当 $x>10$ 时，在 A 超市购买更划算．

（3）由题意，若“只在一家超市购买”，由于 $x=15>10$，则到 A 超市购买较省钱，此时 $y_A=27x+270=27\times15+270=675$．

注意本问中没有限制条件“只在一家超市购买”，因此先在 B 超市购买 10 副羽毛球拍，送 20 个羽毛球，然后在 A 超市购买剩下的羽毛球，需 $(10\times15-20)\times3\times0.9=351$（元），共需费用 $10\times30+351=651$（元）．

∵ $651<675$，∴最省钱的方案是先在 B 超市购买 10 副羽毛球拍，送 20 个羽毛球，然后在 A 超市购买 130 个羽毛球．

题型 2：生产方案

例 2 ［**中考·佳木斯**］为了推动“龙江经济带”建设，我省某蔬菜企业决定通过加大种植面积、增加种植种类，促进经济发展．2017 年春，预计种植西红柿、马铃薯、青椒共 100 公顷（三种蔬菜的种植面积均为整数），青椒的种植面积是西红柿种植面积的 2 倍，经预算，种植西红柿的利润可达 1 万元/公顷，青椒 1.5 万元/公顷，马铃薯 2 万元/公顷，设种植西红柿 x 公顷，总利润是 y 万元．

（1）求总利润 y（万元）与种植西红柿的面积 x（公顷）之间的关系式．

（2）若预计总利润不低于 180 万元，西红柿的种植面积不低于 8 公顷，有多少种种植方案？

（3）在（2）的前提下，该企业决定投资不超过获得最大利润的 $\frac{1}{8}$ 在冬季同时建造 A，B 两种类型的温室大棚，开辟新的经济增长点，经测算，投资 A 种类型的大棚 5 万元/个，B 种类型的大棚 8 万元/个，请直接写出有哪几种建造方案？

范围，从而得出不同范围内的方案．

本例的解答运用了分类讨论思想，解答的关键是建立函数模型．

特别提醒

本题涉及函数关系式与不等式（组）的关系，解决这类问题，先要把实际问题转化为一次函数问题，然后利用一次函数的增减性及自变量的取值范围来解决．当所列不等式是二元一次不等式时，可以通过对其中一个未知数取一个满足题意的自然数值代入不等式中，再解关于另一个未知数的一元一次不等式，并求出它的满足题意的自然数值．按照这个方法，将所有满足这个二元一次不等式中的自然数对求出，从而获得相应的方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣总利润与各部分利润之间的关系列函数关系式，结合方程、不等式求解.

解：（1）由题意得 $y=x+1.5\times 2x+2(100-3x)=-2x+200$.

（2）由题意得 $-2x+200\geqslant 180$，解得 $x\leqslant 10$.

又 $x\geqslant 8$，$\therefore 8\leqslant x\leqslant 10$.

$\because x$ 为整数，$\therefore x$ 可取 8，9，10.

$\therefore$ 有三种种植方案.

方案一：种植西红柿 8 公顷、马铃薯 76 公顷、青椒 16 公顷.

方案二：种植西红柿 9 公顷、马铃薯 73 公顷、青椒 18 公顷.

方案三：种植西红柿 10 公顷、马铃薯 70 公顷、青椒 20 公顷.

（3）$\because y=-2x+200$，$-2<0$，

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x=8$ 时，利润最大，最大利润为 184 万元.

设投资 A 种类型的大棚 a 个，B 种类型的大棚 b 个，

由题意得 $5a+8b\leqslant \frac{1}{8}\times 184$，

$\therefore 5a+8b\leqslant 23$，

$\therefore a=1$，$b=1$ 或 2；$a=2$，$b=1$；$a=3$，$b=1$.

$\therefore$ 可以投资 A 种类型的大棚 1 个，B 种类型的大棚 1 个；

或投资 A 种类型的大棚 1 个，B 种类型的大棚 2 个；

或投资 A 种类型的大棚 2 个，B 种类型的大棚 1 个；

或投资 A 种类型的大棚 3 个，B 种类型的大棚 1 个.

特别警示

解答本题时，容易忽视“同时建造 A，B 两种类型的温室大棚”而产生不符合题意的建造方案：

$a=0$，$b=0$ 或 1 或 2；

$a=1$，$b=0$；

$a=2$，$b=0$；

$a=3$，$b=0$；

$a=4$，$b=0$.

题型 3：调运方案

例 3 某县区大力发展猕猴桃产业，预计今年 A 地将采摘 200 吨，B 地将采摘 300 吨. 若要将这些猕猴桃运到甲、乙两个冷藏仓库，已知甲仓库可储存 240 吨，乙仓库可储存 260 吨，从 A 地运往甲、乙两仓库的费用分别为每吨 20 元和 25 元，从 B 地运往甲、乙两仓库的费用分别为每吨 15 元和 18 元. 设从 A 地运往甲仓库的猕猴桃为 x 吨，A，B 两地运往两仓库的猕猴桃运输费用分别为 y_A 元和 y_B 元.

（1）分别求出 y_A，y_B 与 x 之间的函数关系式；

（2）试讨论 A，B 两地的运费哪个较少；

（3）考虑 B 地的经济承受能力，B 地的猕猴桃运费不得超过 4 830 元，在这种情况下，请问怎样调运才能使两地运费之和最少？求出最少运费.

解题秘方：紧扣“调运过程中费用间的关系”列出一次函数关系式，用比较法求解.

解法提醒

当调运方案中涉及两个函数关系式时，要比较费用的大小，一般要分三种情况利用不等式或方程讨论求解；而要求得最省钱调运方案时，一般先根据数量之间的关系建立函数，然后利用一次函数的增减性确定出符合要求的最佳方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题意得，从A地运往乙仓库的猕猴桃为（200−x）吨，从B地运往甲仓库的猕猴桃为（240−x）吨，从B地运往乙仓库的猕猴桃为（60+x）吨．则 $y_A=20x+25(200-x)=-5x+5\,000$，$y_B=15(240-x)+18(60+x)=3x+4\,680$.

（2）因为 $y_A-y_B=(-5x+5\,000)-(3x+4\,680)=-8x+320$，

所以当 $-8x+320>0$，即 $x<40$ 时，B地的运费较少；

当 $-8x+320=0$，即 $x=40$ 时，两地的运费一样多；

当 $-8x+320<0$，即 $x>40$ 时，A地的运费较少．

（3）设两地运费之和为 W 元，

则 $W=y_A+y_B=(-5x+5\,000)+(3x+4\,680)=-2x+9\,680$，由 $3x+4\,680\leqslant 4\,830$，解得 $x\leqslant 50$，所以 W 的最小值为 $-2\times 50+9\,680=9\,580$. 故当A地运往甲、乙两仓库的猕猴桃分别为50吨、150吨，B地运往甲、乙两仓库的猕猴桃分别为190吨、110吨时，才能使两地运费之和最少，最少运费是9 580元．

技巧点拨

求解调运方案问题，常借助表格来分析问题，如本题，调运情况如下表．

猕猴桃重量/吨 \ 运地 \ 销地	甲	乙	总计
A	x	$200-x$	200
B	$240-x$	$60+x$	300
总计	240	260	500

特别警示

由 $W=-2x+9\,680$ 可知，W 随 x 的增大而减小，切忌忽略第(3)问对 x 取值范围的限制，认为 $x=200$ 时满足题意．

题型4：支付方案

例4 某公司推销一种产品，设 x（件）是推销产品的数量，y（元）是付给推销员的推销费，图19.3−1表示公司每月付给推销员的推销费的两种方案，根据图象解答下列问题．

（1）分别求 y_1，y_2 关于 x 的函数解析式．

（2）解释图中表示的两种方案是如何付推销费的？

（3）如果你是推销员，应如何选择付费方案？

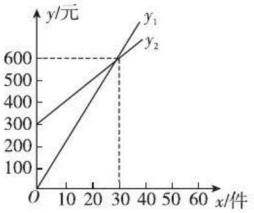


图19.3−1

解题秘方：从图象中获取求函数解析式的信息并通过图象信息选择支付方案．

思路点拨

1. 由待定系数法结合特殊点求解即可；
2. 根据两直线与 y 轴的交点，结合实际进行分析；
3. 根据业务能力，结合(2)中两种方案的付费方式进行解答．

解：（1）设这两个函数的解析式分别为 $y_1=k_1x$（$k_1\neq 0$），$y_2=k_2x+b$（$k_2\neq 0$）．

由 y_1 关于 x 的函数图象经过点（30，600），得 $600=30k_1$，解得 $k_1=20$，所以 y_1 关于 x 的函数解析式为 $y_1=20x$（$x\geqslant 0$）．

由 y_2 关于 x 的函数图象经过点（0，300），点（30，600），得 $b=300$，$600=30k_2+b$，解得 $k_2=10$，所以 y_2 关于 x 的函数解析式为 $y_2=10x+300$（$x\geqslant 0$）．

（2）y_1 的付费方案是不推销产品没有推销费，每推销1件产品得推销费20元；y_2 的付费方案是保底工资300元，另外每推销1件产品再得推销费10元．

（3）如果业务能力强，平均每月能保证推销多于30件产品，那么选择 y_1 的付费方案，否则，选择 y_2 的付费方案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 5：销售方案

例 5 某商店销售 10 台 A 型和 20 台 B 型电脑的利润为 4 000 元，销售 20 台 A 型和 10 台 B 型电脑的利润为 3 500 元.

（1）求每台 A 型电脑和 B 型电脑的销售利润；

（2）该商店计划一次购进两种型号的电脑共 100 台，其中 B 型电脑的进货量不超过 A 型电脑的 2 倍. 设购进 A 型电脑 x 台，这 100 台电脑的销售总利润为 y 元.

①求 y 关于 x 的函数关系式；

②该商店购进 A 型、B 型电脑各多少台，才能使销售总利润最大？

③实际进货时，厂家对 A 型电脑出厂价下调 m（$0<m<100$）元，且限定商店最多购进 A 型电脑 70 台. 若商店保持两种电脑的售价不变，请你根据以上信息及（2）中的条件，设计出使这 100 台电脑销售总利润最大的进货方案.

解题秘方：从列方程组求方程组解中获取求一次函数关系式的数据，并根据一次函数的信息求方案.

解：（1）设每台 A 型电脑的销售利润为 a 元，每台 B 型电脑的销售利润为 b 元，则有$\begin{cases}10a+20b=4\,000,\\20a+10b=3\,500,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=100,\\b=150.\end{cases}$

即每台 A 型电脑的销售利润为 100 元，每台 B 型电脑的销售利润为 150 元.

（2）①根据题意得 $y=100x+150(100-x)$，即 $y=-50x+15\,000$.

②根据题意得 $100-x\leqslant 2x$，解得 $x\geqslant 33\frac{1}{3}$.

$\because y=-50x+15\,000$ 中，$-50<0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\because x$ 为正整数，$\therefore$ 当 $x=34$ 时，y 取得最大值，此时 $100-x=66$.

即商店购进 A 型电脑 34 台，B 型电脑 66 台，才能使销售总利润最大.

③根据题意得 $y=(100+m)x+150(100-x)$.

即 $y=(m-50)x+15\,000\left(33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 70\right)$.

当 $0<m<50$ 时，$m-50<0$，y 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x=34$ 时，y 取得最大值.

即商店购进 34 台 A 型电脑和 66 台 B 型电脑才能获得最大利润；

当 $m=50$ 时，$m-50=0$，$y=15\,000$.

即商店购进 A 型电脑数量满足 $33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 70$ 的整数时，获得利润都相同；

当 $50<m<100$ 时，$m-50>0$，y 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x=70$ 时，y 取得最大值.

即商店购进 70 台 A 型电脑和 30 台 B 型电脑才能获得最大利润.

解法提醒

在商品经营活动中，经常会遇到求最大利润、最大销量等问题，解此类问题的关键是通过题意，确定出函数的解析式，然后根据函数的增减性确定其最大值，且要注意自变量的取值范围和问题的实际意义.

详解

根据“销售 10 台 A 型和 20 台 B 型电脑的利润为 4 000 元”可得 $10a+20b=4\,000$；“销售 20 台 A 型和 10 台 B 型电脑的利润为 3 500 元”可得 $20a+10b=3\,500$.

特别警示

本题③中，容易忽视一次函数随 m 值变化，其增减性也发生变化，不会利用分类讨论求解而产生错误.

详解

$y=(100+m)x+150(100-x)$

$=(100+m)x+15\,000-150x$

$=(100+m-150)x+15\,000$

$=(m-50)x+15\,000$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 6：利润方案

例 6 [中考·郴州]某工厂有甲种原料 130kg，乙种原料 144kg，现用两种原料生产出 A，B 两种产品共 30 件，已知生产每件 A 产品需甲种原料 5kg，乙种原料 4kg，且每件 A 产品可获利 700 元；生产每件 B 产品需甲种原料 3kg，乙种原料 6kg，且每件 B 产品可获利 900 元，设生产 A 产品 x 件（产品件数为整数），根据以上信息解答下列问题：

（1）生产 A，B 两种产品的方案有几种？

（2）设生产这 30 件产品可获利 y 元，写出 y 关于 x 的函数解析式，写出（1）中利润最大的方案，并求出最大利润.

解题秘方：从列不等式组求其解集中获取数据制定方案；由函数的增减性确定利润最大的方案.

解：（1）由 30 件产品中有 x 件 A 产品，知 B 产品有（$30-x$）件，

由题意可得$\begin{cases}5x+3(30-x)\leqslant 130,\\4x+6(30-x)\leqslant 144,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x\leqslant 20,\\x\geqslant 18,\end{cases}$

$\therefore 18\leqslant x\leqslant 20.$

$\because$ 产品件数为整数，$\therefore x$ 取整数解，$\therefore x=18$ 或 $x=19$ 或 $x=20$，

$\therefore$ 生产 A，B 两种产品的方案有如下三种：

方案一：A 产品 18 件，B 产品 12 件；

方案二：A 产品 19 件，B 产品 11 件；

方案三：A 产品 20 件，B 产品 10 件.

（2）由题意可得 $y=700x+900(30-x)=-200x+27\,000$，

$\because -200<0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

又 $18\leqslant x\leqslant 20$，$\therefore$ 当 $x=18$ 时有最大利润，

最大利润 $y=-200\times 18+27\,000=23\,400$.

答：（1）中利润最大的是方案一，即：A 产品 18 件，B 产品 12 件，最大利润为 23 400 元.

解法提醒

利用方程(组)、不等式(组)求解方案类问题的策略：

求解方案类问题时，应先正确建立函数模型，确定自变量的取值范围，然后可利用函数的性质求最大(小)值；或计算出各种方案的值进行大小比较，注意自变量的整数取值问题.

两年模拟兵法

答案见 288 页

1. [中考·贵阳]一个电信公司提供两种手机的月通话收费方式供用户选择，其中一种有月租费，另一种无月租费，这两种收费方式的通话费用 y（元）与通话时间 x（分钟）之间的函数关系如图所示，小红根据图象得出下列结论：

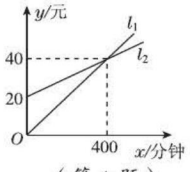
① l_1 描述的是无月租费的收费方式；

② l_2 描述的是有月租费的收费方式；

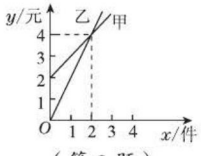
③当每月的通话时间为 500 分钟时，选择有月租费的收费方式省钱.

其中，正确结论的个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3



（第 1 题）



（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 如图是甲、乙两家商店销售同一种产品的销售额 y（元）与销售量 x（件）之间的函数图象，下列说法：

①买 2 件时，甲、乙两家的销售额一样；

②买 1 件时，买乙家的合算；

③买 3 件时，买甲家的合算；

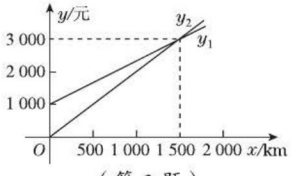
④买 1 件乙家的产品需付 3 元.

其中正确的是（　　）

A. ①②　　B. ②③

C. ①②③　　D. ②③④

3. 某单位急需用车，但又不准备买车，所以准备和一个个体车主或一国营出租车公司中的一家签订月租车合同. 设汽车每月行驶 x km，应付给个体车主的月费用是 y_1 元，应付给国营出租车公司的月费用是 y_2 元，y_1，y_2 分别与 x 之间的函数关系图象（两条射线）如图. 下列说法：



（第 3 题）

①每月行驶的路程大于 1 500 km 时，租国营出租车公司的车合算；

②每月行驶的路程等于 1 500 km 时，租两家车的费用相同；

③如果这个单位估计每月行驶的路程为 2 300 km，那么这个单位租个体车主的车合算.

其中正确的是（　　）

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ①②③

4. 某移动通信公司开设了两种通信业务：“全球通”使用者先缴 20 元月租费，然后每通话 1 min，再付话费 0.1 元；“神州行”不缴月租费，每通话 1 min 付费 0.2 元. 若一个月内通话 x min，两种方式的费用分别为 y_1 元和 y_2 元.

（1）分别写出 y_1，y_2 与 x 之间的函数关系式.

（2）一个月内通话多少分钟，两种通信业务费用相同?

（3）某人估计一个月内通话 300 min，选择哪种通信业务合算些?

5. [中考·广安]为了贯彻落实市委市政府提出的“精准扶贫”精神，某校特制定了一系列关于帮扶 A，B 两贫困村的计划，现决定从某地运送 152 箱鱼苗到 A，B 两村养殖，若用大、小货车共 15 辆，则恰好能一次性运完这批鱼苗. 已知这两种大、小货车的载货能力分别为 12 箱/辆和 8 箱/辆，其运往 A，B 两村的运费如下表：

目的地 / 车型	A 村（元/辆）	B 村（元/辆）
大货车	800	900
小货车	400	600

（1）求这 15 辆车中大、小货车各有多少辆.

（2）现安排其中的 10 辆货车前往 A 村，其余货车前往 B 村，设前往 A 村的大货车为 x 辆，运往 A，B 两村的总运费为 y 元，试求出 y 与 x 的函数解析式.

（3）在（2）的条件下，若运往 A 村的鱼苗不少于 100 箱，请你写出使总运费最少的货车调配方案，并求出最少总运费.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·甘孜州]一水果经销商购进了A，B两种水果各10箱，分配给他的甲、乙两个零售店(分别简称甲店、乙店)销售，预计每箱水果的盈利情况如下表：

	A种水果	B种水果
甲店	11元	17元
乙店	9元	13元

(1)如果甲、乙两店各配货10箱，其中A种水果两店各5箱，B种水果两店各5箱，请你计算出经销商能盈利多少元.

(2)在甲、乙两店各配货10箱(按整箱配送)，且保证乙店盈利不少于100元的条件下，请你设计出使水果经销商盈利最大的配货方案，并求出最大盈利为多少.　【导学号：8592074】

7. [中考·黄石]某年5月，我国南方某省A，B两市遭受严重洪涝灾害，1.5万人被迫转移，邻近县市C，D获知A，B两市分别急需救灾物资200吨和300吨的消息后，决定调运物资支援灾区.已知C市有救灾物资240吨，D市有救灾物资260吨，现将这些救灾物资全部调往A，B两市.已知从C市运往A，B两市的费用分别为每吨20元和25元，从D市运往A，B两市的费用分别为每吨15元和30元，设从D市运往B市的救灾物资为x吨.

(1)请填写下表.

	A(吨)	B(吨)	合计(吨)
C			240
D		x	260
总计(吨)	200	300	500

(2)设总运费为w元，求w与x之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围；

(3)经过抢修，从D市到B市的路况得到了改善，缩短了运输时间，运费每吨减少m元($m>0$)，其余路线运费不变.若总运费的最小值不小于10 320元，求m的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一次函数解析式的常见题型

荣老师告诉你 解析式是函数三种表示方法中最常用的方法，求函数解析式也是函数问题中的重要问题，下面将求一次函数的解析式几种常见类型归纳如下：

题型一 定义型

例 1 已知函数 $y=(m-3)x^{m^2-8}+3$ 是一次函数，求其解析式.

解题秘方：根据一次函数的定义，自变量的指数为 1，系数不等于 0，求出待定字母的值.

解：由一次函数定义知$\begin{cases}m^2-8=1,\\ m-3\neq 0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m=\pm 3,\\ m\neq 3.\end{cases}$

$\therefore m=-3.$

故一次函数的解析式为 $y=-6x+3$.

方法点拨：利用一次函数的定义中自变量的指数要求可以求出待定字母的值，当系数也含有待定字母时，要考虑系数不能为零.

题型二 点斜型

例 2 已知一次函数 $y=kx-3$ 的图象过点 $(2,-1)$，求这个函数的解析式.

解题秘方：直接将 $x=2$，$y=-1$ 代入解析式中求出待定的字母 k 的值即可.

解：∵一次函数 $y=kx-3$ 的图象过点 $(2,-1)$，

$\therefore -1=2k-3$，即 $k=1$.

故这个一次函数的解析式为 $y=x-3$.

题型三 两点型

例 3 已知某个一次函数的图象与 x 轴、y 轴的交点坐标分别是 $(-2,0)$，$(0,4)$，求这个函数的解析式.

解题秘方：先用待定系数法设出一次函数的解析式，然后将两个点的坐标代入即可.

解：设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，

由题意得$\begin{cases}0=-2k+b,\\ b=4,\end{cases}\therefore\begin{cases}k=2,\\ b=4.\end{cases}$

故这个一次函数的解析式为 $y=2x+4$.

题型四 图象型

例 4 已知某个一次函数的图象如图 1 所示，求这个函数的解析式.

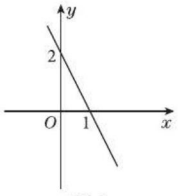


图 1

解题秘方：点的坐标是通过图象标出的，直接观察图象可知，图象上两个点的坐标为 $(1,0)$ 和 $(0,2)$，然后利用例 3 的方法步骤解决.

解：设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，

由图 1 可知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(1,0)$，$(0,2)$，

$\therefore\begin{cases}0=k+b,\\ 2=0+b,\end{cases}\therefore\begin{cases}k=-2,\\ b=2.\end{cases}$

故这个一次函数的解析式为 $y=-2x+2$.

题型五 斜截型

例 5 已知直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，且在 y 轴上的截距为 2，求直线的函数解析式.

解题秘方：先根据与直线 $y=-2x$ 平行确定 k 的值，再根据截距的大小确定 b 的值.

解：∵直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，

$\therefore k=-2$.

又∵直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距为 2，

$\therefore b=2$.

故直线的函数解析式为 $y=-2x+2$.

方法点拨：两条直线 l_1：$y=k_1x+b_1$；l_2：$y=k_2x+b_2$. 当 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$ 时，$l_1\parallel l_2$. 直线在 y 轴上的截距就是函数解析式中 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型六 ▶ 平移型

例 6 把直线 $y=2x+1$ 先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度得到的图象对应的函数解析式为_____.

解题秘方：直线左右平移时，图象上所有点的横坐标发生变化，但纵坐标不变；直线上下平移时，图象上所有点的横坐标不变，但纵坐标发生变化.

解：先将直线 $y=2x+1$ 向右平移 2 个单位长度，则所有点的横坐标都增加 2，纵坐标不变，即解析式为 $y=2(x-2)+1$；再将直线向下平移 2 个单位长度，则所有点的横坐标都不变，纵坐标都减小 2，即解析式为 $y=2(x-2)+1-2$，所以解析式为 $y=2x-5$.

答案：$y=2x-5$

题型七 ▶ 实际应用型

例 7 某油箱中存油 20 升，油从管道中匀速流出，流速为 0.2 升/分钟，则油箱中剩油量 Q（升）与流出时间 t（分钟）的函数关系式为_____.

解题秘方：由题意得 $Q=20-0.2t$，即 $Q=-0.2t+20$.

$\because Q\geqslant 0$，$\therefore t\leqslant 100$.

故所求的函数关系式为 $Q=-0.2t+20$ $(0\leqslant t\leqslant 100)$.

答案：$Q=-0.2t+20$ $(0\leqslant t\leqslant 100)$

方法点拨：在实际问题中列函数关系式，关键就是抓住两个变量之间的等量关系. 求实际应用型问题的函数关系式要写出自变量的取值范围.

题型八 ▶ 面积型

例 8 已知直线 $y=kx-4$ 与两坐标轴所围成的三角形面积等于 4，则直线的函数解析式为_____.

解：易求得直线与 x 轴交点为 $\left(\frac{4}{k},0\right)$，与 y 轴交点为 $(0,-4)$，所以 $4=\frac{4}{|k|}\times 4\times\frac{1}{2}$，所以 $|k|=2$，即 $k=\pm 2$，故直线的函数解析式为 $y=2x-4$ 或 $y=-2x-4$.

答案：$y=2x-4$ 或 $y=-2x-4$

方法点拨：直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,b)$，但表示线段长时，若不知 k，b 的正负性，则必须带上绝对值，以保证线段的长度为正.

题型九 ▶ 对称型

例 9 若直线 l 与直线 $y=2x-1$ 关于 y 轴对称，则直线 l 的函数解析式为_____.

解题秘方：先在直线 $y=2x-1$ 上任意取两个点的坐标，然后求出这两个点关于 y 轴的对称点的坐标，然后利用“两点型”求解析式.

解：直线 $y=2x-1$ 经过 $(1,1)$ 和 $(0,-1)$ 这两个点，这两个点关于 y 轴的对称点为 $(-1,1)$ 和 $(0,-1)$，

设直线 l 的函数解析式为 $y=kx+b$，

易知直线 l 过点 $(-1,1)$ 和点 $(0,-1)$，

$$\therefore\begin{cases}-k+b=1,\\ b=-1,\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}k=-2,\\ b=-1.\end{cases}$$

$\therefore$ 直线 l 的函数解析式为 $y=-2x-1$.

答案：$y=-2x-1$

方法点拨：若直线 l 与直线 $y=kx+b$ 关于

（1）x 轴对称，则直线 l 的函数解析式为 $y=-kx-b$；

（2）y 轴对称，则直线 l 的函数解析式为 $y=-kx+b$；

（3）直线 $y=x$ 对称，则直线 l 的函数解析式为 $y=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}$；

（4）直线 $y=-x$ 对称，则直线 l 的函数解析式为 $y=\frac{1}{k}x+\frac{b}{k}$；

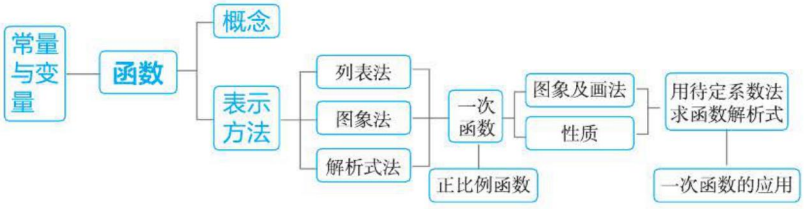
（5）原点对称，则直线 l 的函数解析式为 $y=kx-b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两个变量 x，y，当 x 取一个值时，y 有唯一值与它对应，x 是自变量，y 是 x 的函数.

2. **函数有三种表示方法：**

（1）**列表法**：列出有限的对应值；

（2）**图象法**：将每对对应值作为一个点的坐标在平面直角坐标系中标出；

（3）**解析式法**：将两个变量之间的数量关系用一个式子表示出来.

3. **一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象是一条直线**. 当 $b=0$ 时，一次函数为正比例函数，当 $k>0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小；当 $b>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的上方，当 $b<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的下方.

4. 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）从“数”的角度看是二元一次方程；从“形”的角度看是直线. 一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式之间的关系都是数形结合思想的体现.

知识方法专题

知识必学

专题一 函数图象

链接中考≫ 理解函数图象的意义是解决函数问题的根本，利用函数图象解决几何图形中的动点问题或者解决生活实际问题，都离不开对关键点的意义的理解. 其根本就是在于函数图象是数形相结合的产物. 对函数图象的考查是中考的热门考点，常见的考查形式是选择题.

例 1 [中考·聊城] 小亮家与姥姥家相距 24 km. 小亮 8：00 从家出发，骑自行车去姥姥家，妈妈 8：30 从家出发，乘车沿相同路线去姥姥家. 在同一直角坐标系中，小亮和妈妈的行进路程 s（km）与北京时间 t（时）的函数图象如图 19-1 所示. 根据图象得到下列结论，其中错误的是（　　）

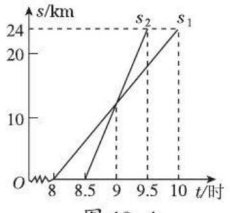


图 19-1

A. 小亮骑自行车的平均速度是每小时 12 km

B. 妈妈比小亮提前 0.5 小时到达姥姥家

C. 妈妈在距家 12 km 处追上小亮

D. 9：30 妈妈追上小亮

解题秘方：明确 s_1 是小亮行进路程与时间的函

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数图象，s_2 是妈妈行进路程与时间的函数图象．图象 s_1 与 s_2 的交点的横坐标表示妈妈追上小亮的时刻，可以利用待定系数法求出各自的函数解析式．

解：从图象 s_1 可以看出，小亮走 24 km 用了 2 小时，所以平均速度为每小时 12 km，故 A 正确；从图象可以看出，小亮 10：00 到达姥姥家，妈妈 9：30 到达姥姥家，故妈妈提前 0.5 小时到达，B 正确；设 $s_1=k_1x+b_1$，把（8，0）和（10，24）分别代入 $s_1=k_1x+b_1$ 得，$\begin{cases}0=8k_1+b_1,\\24=10k_1+b_1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=12,\\b_1=-96,\end{cases}$

所以 $s_1=12x-96$，

同理 $s_2=24x-204$，

联立可得方程组 $\begin{cases}s=12x-96,\\s=24x-204,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}s=12,\\x=9,\end{cases}$

即妈妈在 9：00，距家 12 km 处追上小亮，故 C 正确，D 错误．

答案：D

方法点拨：利用函数图象解决实际问题，其关键在于正确理解函数图象横、纵坐标表示的意义，理解问题的发展过程．解答此类问题一般需要用待定系数法确定函数图象对应的解析式，计算函数图象交点坐标，或已知某点的一个坐标计算另一个坐标，从而获取实际问题答案．一般解题过程为将实际问题抽象为数学问题、解这个数学问题、回归解答实际问题．

专题二 函数自变量的取值范围

链接中考≫ 函数自变量的取值范围表面形式是考查函数知识，其实是考查自变量出现的形式—整式、分式等知识．关键是几种形式组合时，要综合考查几个方面．考查的形式也都是选择题．

例 2 ［中考·黔南州］函数 $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x-4}$ 的自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x\leqslant 3$　　B. $x\neq 4$

C. $x\geqslant 3$ 且 $x\neq 4$　　D. $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 4$

解题秘方：先分别求出使 $\sqrt{3-x}$ 与 $\dfrac{1}{x-4}$ 有意义的条件，再合并求公共部分．

解：要使函数有意义，必须满足 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\x-4\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 3$.

答案：A

方法点拨：确定自变量的取值范围，应注意以下几种情况：（1）如果函数的解析式中含自变量的部分是整式，那么自变量的取值范围是全体实数；（2）如果函数的解析式中含自变量的部分是分式，那么自变量的取值范围是使分母不为零的实数；（3）在实际问题中，函数自变量的取值必须使实际问题有意义．

专题三 一次函数的图象

链接中考≫ 一次函数的图象是一条直线，它在平面直角坐标系中的位置是由函数解析式中的 k 和 b 决定的．对这个知识点的考查在中考中出现的频率较高．一般都是以填空题、选择题形式出现．

例 3 ［中考·枣庄］已知直线 $y=kx+b$，若 $k+b=-5$，$kb=6$，则此直线不经过的象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题秘方：先根据已知判断出 k，b 的符号，再根据 k，b 的符号确定直线经过的象限，从而解决问题．

解：因为 $kb=6>0$，

所以 k，b 同号．

又因为 $k+b=-5$，

所以 $k<0$，$b<0$.

所以一次函数的图象经过第二、三、四象限，因此图象不经过第一象限．

答案：A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：一次函数 $y=kx+b$ 中，k 决定了直线的走向，b 决定了直线与 y 轴的交点，因此由 k 和 b 的值可以确定出直线经过的象限，具体为：①当 $k>0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、三象限；②当 $k>0$，$b<0$ 时，函数图象经过第一、三、四象限；③当 $k<0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、四象限；④当 $k<0$，$b<0$ 时，函数图象经过第二、三、四象限；⑤当 $k>0$，$b=0$ 时，函数图象经过第一、三象限；⑥当 $k<0$，$b=0$ 时，函数图象经过第二、四象限.

专题四 一次函数与方程（组）或不等式之间的关系

链接中考≫ 一次函数与二元一次方程（组）或一元一次不等式之间的关系关键体现的是几个交点：(1) 函数图象与两坐标轴的交点；(2) 两个函数图象的交点. 函数图象与方程和不等式之间的关系就是数形结合的体现. 中考考查的形式多样化，填空题、选择题和解答题都有涉及.

例 4 [中考·济南] 如图 19-2，一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图象交于点 $P(1,3)$，则关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集是（　　）

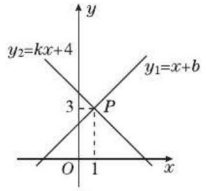


图 19-2

A. $x>-2$　　B. $x>0$

C. $x>1$　　D. $x<1$

解：由点 P 的横坐标为 1，可得关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集为 $x>1$.

答案：C

方法点拨：求解此类问题时，一是要明确一次函数与一元一次不等式的关系；二是要能发挥数形结合的作用.

专题五 一次函数的应用

链接中考≫ 一次函数的应用主要有两种形式：一是根据实际问题建立函数模型；二是利用函数的性质确定最佳方案. 这两种形式的纽带是函数自变量的取值范围. 它是中考的热门考点，一般都是以解答题形式出现.

例 5 [中考·威海] 为绿化校园，某校计划购进 A，B 两种树苗，共 21 棵. 已知 A 种树苗每棵 90 元，B 种树苗每棵 70 元. 设购买 B 种树苗 x 棵，购买两种树苗所需费用为 y 元.

(1) y 与 x 的函数关系式为_____；

(2) 若购买 B 种树苗的数量少于 A 种树苗的数量，请给出一种费用最省的方案，并求出该方案所需费用.

解题秘方：根据所需费用 = 购进 A，B 两种树苗的费用和，列出函数关系式，进而利用函数的性质求解.

解：(1) $y=-20x+1\,890$

(2) 由题意，得 $x<21-x$，解得 $x<10.5$.

又∵ $x\geqslant 1$ 且 x 为整数，

∴ $1\leqslant x<10.5$ 且 x 为整数.

由 (1) 中一次函数 $y=-20x+1\,890$ 的性质，

得当 $x=10$ 时，y 有最小值为 $-20\times10+1\,890=1\,690$，

∴ 费用最省的方案是购买 B 种树苗 10 棵，A 种树苗 11 棵，所需费用为 1 690 元.

方法点拨：此类问题一般先根据数量之间的关系确定函数关系式，然后根据题意转化为不等式求出自变量的取值范围，最后利用一次函数的性质得出答案.

Ⅱ 方法必会

专题六 待定系数法

专题解读≫ 先设出函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而得出函数解析式的方法叫做待定系数法. 运用待定系数法的关键就是找对应值或函

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数图象上点的坐标.

例6 小聪和小明沿同一条路同时从学校出发到图书馆查阅资料，学校与图书馆的路程是4千米，小聪骑自行车，小明步行，当小聪从原路回到学校时，小明刚好到达图书馆，图19-3中折线O—A—B—C和线段OD分别表示两人离学校的路程s（千米）与所经过的时间t（分钟）之间的函数关系，请根据图象回答下列问题：

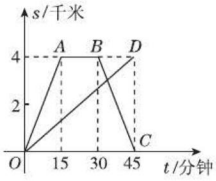


图19-3

（1）小聪在图书馆查阅资料的时间为_____分钟，小聪返回学校的速度为_____千米/分钟；

（2）请你求出小明离学校的路程s（千米）与所经过的时间t（分钟）之间的函数解析式；

（3）当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是多少千米？

解题秘方：（1）图象所示AB段为小聪查阅资料时间.线段BC表示小聪返回学校时的图象.（2）s是t的正比例函数，可设$s=kt$，将（45，4）代入求出k即可.（3）先求出直线BC对应的函数解析式，再求出BC与OD的交点.

解：（1）15；$\frac{4}{15}$

（2）根据图象设所求的函数解析式为$s=kt$（$k\neq0$）.将（45，4）代入，得$4=45k$.解得$k=\frac{4}{45}$.

∴所求函数解析式为$s=\frac{4}{45}t$（$0\leqslant t\leqslant45$）.

（3）由图象可知，小聪在$30\leqslant t\leqslant45$的时段内与小明迎面相遇.

设直线BC对应的函数解析式为$s=mt+n$（$m\neq0$），将（30，4），（45，0）代入，得$\begin{cases}30m+n=4,\\45m+n=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-\frac{4}{15},\\n=12.\end{cases}$

∴$s=-\frac{4}{15}t+12$（$30\leqslant t\leqslant45$），令$-\frac{4}{15}t+12=\frac{4}{45}t$，解得$t=\frac{135}{4}$.

当$t=\frac{135}{4}$时，$s=\frac{4}{45}\times\frac{135}{4}=3$.

答：当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是3千米.

方法点拨：本题主要考查函数图象的识别与一次函数解析式的求法，求函数解析式的一般方法是待定系数法，函数是中考的必考知识点，应引起足够重视.

专题七 分类讨论思想

专题解读≫ 一次函数$y=kx+b$（$k\neq0$）的性质由k的正负性决定，若条件中无法确定k的正负性，而又要运用其性质解决方案优化问题，则必须对k的正负进行分类讨论，使所有问题做到不遗漏.

例7 ［中考·济宁］小明到服装店参加社会实践活动，服装店经理让小明帮助解决以下问题：

服装店准备购进甲乙两种服装，甲种每件进价80元，售价120元；乙种每件进价60元，售价90元.计划购进两种服装共100件，其中甲种服装不少于65件.

（1）若购进这100件服装的费用不得超过7 500元，则甲种服装最多购进多少件？

（2）在（1）的条件下，该服装店对甲种服装以每件优惠a（$0<a<20$）元的价格进行促销活动，乙种服装价格不变，那么该服装店应如何调整进货方案才能获得最大利润？

解题秘方：（1）设购进甲种服装x件，根据“购进服装的费用不得超过7 500元”列出不等式求解；（2）设总利润为w元，根据“总利润＝甲种服装的利润＋乙种服装的利润”求得函数解析式，再根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

据 a 的取值以及 x 的范围讨论.

解：（1）设购进甲种服装 x 件，由题意可知：

$80x+60(100-x)\leqslant 7\,500$，解得 $x\leqslant 75$.

∵甲种服装不少于 65 件，即 $x\geqslant 65$.

∴ $65\leqslant x\leqslant 75$，

∴甲种服装最多购进 75 件.

（2）设总利润为 w 元，由（1）知 $65\leqslant x\leqslant 75$，

∴ $w=(40-a)x+30(100-x)=(10-a)x+3\,000$.

当 $0<a<10$ 时，$10-a>0$，w 随 x 的增大而增大，

∴当 $x=75$ 时，w 有最大值，则购进甲种服装 75 件，乙种服装 25 件才能获得最大利润；

当 $a=10$ 时，$w=3\,000$.

∴购进甲种服装件数满足 $65\leqslant x\leqslant 75$ 的整数时，获得利润都相同；

当 $10<a<20$ 时，$10-a<0$，

w 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=65$ 时，w 有最大值，则购进甲种服装 65 件，乙种服装 35 件才能获得最大利润.

方法点拨：解此类题的关键是理清各种数量关系，会利用等量关系列出函数解析式，能利用不等关系列不等式（组），会利用不等式（组）的整数解设计可行的方案，会利用函数的性质求最值.

好题必解 ☞答案见 289 页

类型 1　巧用一次函数的图象与性质求字母的取值范围

1. 已知函数 $y=(2m+1)x+m-3$.

（1）若这个函数是一次函数，且 y 随 x 的增大而减小，求 m 的取值范围；

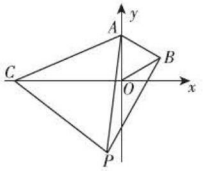
（2）若这个函数是一次函数，且图象过第一、二、三象限，求 m 的取值范围.

类型 2　巧用待定系数法求一次函数解析式

2. 如图，在直角坐标系中，点 A 的坐标是（0，3），点 C 是 x 轴上的一个动点，点 C 在 x 轴上移动时，始终保持△ ACP 是等边三角形. 当点 C 移动到点 O 时，得到等边三角形 AOB（此时点 P 与点 B 重合）.

（1）点 C 在移动的过程中，当等边三角形 ACP 的顶点 P 在第三象限时（如图所示），求证：△ $AOC\cong$△ ABP. 由此你发现什么结论?

（2）求点 C 在 x 轴上移动时，点 P 所在函数图象的解析式.



（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

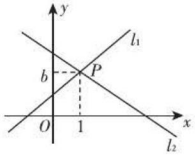
类型 3　巧用一次函数的图象解方程、不等式有关问题

3. 如图，直线 l_1：$y=x+1$ 与直线 l_2：$y=mx+n$ 相交于点 $P(1,\ b)$.

（1）求 b 的值.

（2）不解关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=mx+n,\end{cases}$ 请你直接写出它的解.

（3）直线 l_3：$y=nx+m$ 是否也经过点 P？请说明理由.



（第 3 题）

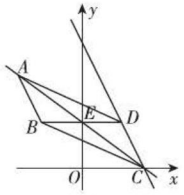
4. 试用图象法解不等式组 $\begin{cases}2x+3<5,\\\dfrac{1}{2}x-8>-6.\end{cases}$

类型 4　巧用一次函数的图象特点求解面积问题

5. 如图，O 为原点，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，C 为 x 轴上的一点. 点 E 为对角线 AC 与 BD 的交点，且在 y 轴上. 另外，BD 与 x 轴平行，直线 AC 的解析式为 $y=ax+3$（a 为常数），直线 DC 的解析式为 $y=-2x+8$.

（1）求 a 的值；

（2）求平行四边形 $ABCD$ 的面积是△ EOC 面积的多少倍.



（第 5 题）

类型 5　巧用一次函数的增减性解方案设计问题

6. 某商店分两次购进 A，B 两种商品进行销售，两次购进同一种商品的进价相同，具体情况如下表所示：

	购进数量（件）		购进所需费用（元）
	A	B	
第一次	30	40	3 800
第二次	40	30	3 200

（1）求A,B两种商品每件的进价分别是多少元.

（2）商场决定 A 种商品以每件 30 元出售，B 种商品以每件 100 元出售，为满足市场需求，需购进 A，B 两种商品共 1 000 件，且 A 种商品的数量不少于 B 种商品数量的 4 倍，请你求出销售利润最大的进货方案，并确定最大利润.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十九章测试卷 ☞答案见290页

（120分 90分钟）

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列函数：①$y=x$；②$y=2x-1$；③$y=\frac{1}{x}$；④$y=x^2-1$中，是一次函数的有（　　）

A.4个　　B.3个　　C.2个　　D.1个

2. 直线$y=2x-4$与y轴的交点坐标是（　　）

A.（4，0）　　B.（0，4）

C.（−4，0）　　D.（0，−4）

3. 一次函数$y=-2x+3$的图象不经过的象限是（　　）

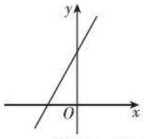
A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

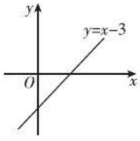
4. 已知点$A(-2, y_1)$和点$B(1, y_2)$是如图所示的一次函数$y=2x+b$图象上的两点，则y_1与y_2的大小关系是（　　）

A.$y_1 < y_2$　　B.$y_1 > y_2$

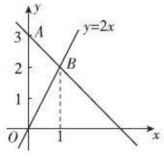
C.$y_1=y_2$　　D.$y_1 \geqslant y_2$



（第4题）



（第5题）



（第6题）

5. 如图是一次函数$y=x-3$的图象，点$P(2, m)$在该直线的上方，则m的取值范围是（　　）

A.$m>-3$　　B.$m>-1$

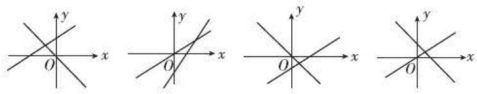
C.$m>0$　　D.$m < 3$

6. 如图，过A点的一次函数的图象与正比例函数$y=2x$的图象相交于点B，则这个一次函数的解析式是（　　）

A.$y=2x+3$　　B.$y=x-3$

C.$y=2x-3$　　D.$y=-x+3$

7. 一次函数$y=mx+n$与$y=mnx$（$mn \neq 0$）在同一平面直角坐标系的图象是（　　）



A　　B　　C　　D

8. 在平面直角坐标系中，将直线l_1：$y=-2x-2$平移后，得直线l_2：$y=-2x+4$，则下列平移作法正确的是（　　）

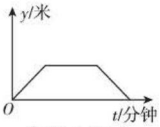
A. 将l_1向右平移3个单位长度

B. 将l_1向右平移6个单位长度

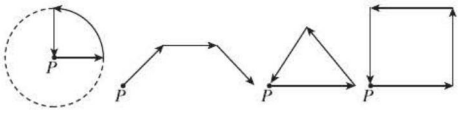
C. 将l_1向上平移2个单位长度

D. 将l_1向上平移4个单位长度

9. 李阿姨每天早晨从家慢跑到小区公园，锻炼一阵后，再慢跑回家．表示李阿姨离开家的距离y（单位：米）与时间t（单位：分钟）的函数关系的图象大致如图所示，则李阿姨跑步的路线可能是（用P点表示李阿姨家的位置）（　　）



（第9题）



A　　B　　C　　D

10. 某通信公司提供了两种移动电话收费方式：方式一，收月基本费20元，再以每分钟0.1元的价格按通话时间计费；方式二，收月基本费20元，送80分钟通话时间，超过80分钟的部分，以每分钟0.15元的价格计费．

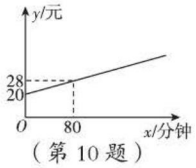
下列结论：

①如图描述的是方式一的收费方法；

②若月通话时间少于240分钟，选择方式二省钱；

③若月通信费为50元，则方式一比方式二的通话时间多；

④若方式一比方式二的通信费多10元，则方式



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一比方式二的通话时间多 100 分钟.

其中正确的是（　　）

A. 只有①②　　B. 只有③④

C. 只有①②③　　D. ①②③④

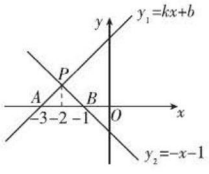
二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 函数 $y=\sqrt{2-3x}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

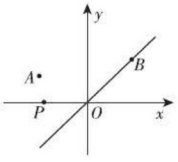
12. 已知一次函数经过点（-1，2），且 y 随 x 的增大而减小，请写出一个满足上述条件的函数关系式：_____.

13. 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象经过 A（1，0）和 B（0，2）两点，则它的图象不经过第_____象限.

14. 如图，直线 $y_1=kx+b$ 与 $y_2=-x-1$ 交于点 P，它们分别与 x 轴交于点 A，B，且 B，P，A 三点的横坐标分别为 -1，-2，-3，则满足 $y_1<y_2$ 的 x 的取值范围是_____.



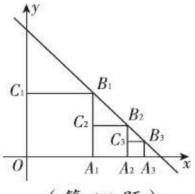
（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，定点 A（-2，1），点 B 在直线 $y=x$ 上，且横坐标为 2，动点 P 在 x 轴上运动，当线段 $PA+PB$ 最短时，点 P 的坐标为_____.

16. 正方形 $OA_1B_1C_1$，$A_1A_2B_2C_2$，$A_2A_3B_3C_3$，按如图所示放置，其中点 A_1，A_2，A_3 在 x 轴的正半轴上，点 B_1，B_2，B_3 在直线 $y=-x+2$ 上，则点 A_3 的坐标为_____.



（第 16 题）

三、解答题（共 72 分）

17.（8 分）根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式：

（1）y 与 x 成正比例，当 $x=2$ 时，$y=3$；

（2）直线 $y=kx+b$ 经过点（2，4）与点 $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.

18.（8 分）已知一次函数 $y=-\frac{1}{3}x+2$.

（1）在直角坐标系中画出它的图象；

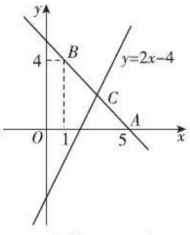
（2）写出它的图象与两坐标轴的交点坐标；

（3）求出这条直线与坐标轴围成的三角形的面积 S.

19.（10 分）如图，直线 $y=kx+b$ 经过点 A（5，0），B（1，4）.

（1）求直线 AB 的解析式；

（2）若直线 $y=2x-4$ 与直线 AB 相交于点 C，求点 C 的坐标.



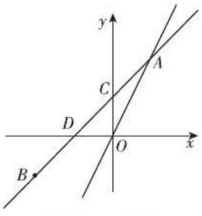
（第 19 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.（10 分）如图，正比例函数 $y=2x$ 的图象与一次函数 $y=kx+b$ 的图象交于点 $A(m, 2)$，一次函数的图象经过点 $B(-2, -1)$，与 y 轴交点为 C，与 x 轴交点为 D.

（1）求一次函数的解析式；

（2）求△ AOD 的面积.



（第 20 题）

21.（10 分）直线 $y=-2x+4$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，直线 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）经过点 A，与 y 轴交于点 C，且 $OC=OA$.

（1）求点 A 的坐标及 k 的值；

（2）点 C 在 x 轴的上方，点 P 在直线 $y=-2x+4$ 上，若 $PC=PB$，求点 P 的坐标.

22.（12 分）随着信息技术的快速发展，“互联网 +”渗透到我们日常生活的各个领域，网上在线学习交流已不再是梦. 现有某教学网站策划了 A，B 两种上网学习的月收费方式：

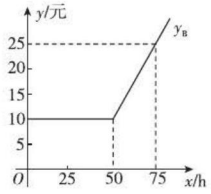
收费方式	月使用费/元	包时上网时间/h	超时费/（元/min）
A	7	25	0.01
B	m	n	0.01

设每月上网学习时间为 x h，A，B 两种方式的收费金额分别为 y_A 元，y_B 元.

（1）如图是 y_B 与 x 之间函数关系的图象，请根据图象填空：$m=$_____，$n=$_____；

（2）写出 y_A 与 x 之间的函数关系式；

（3）选择哪种方式上网学习合算，为什么？



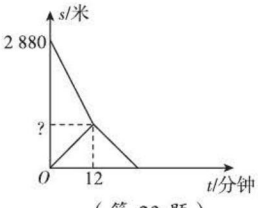
（第 22 题）

23.（14 分）五一假期过后，小明到校后发现忘记带数学课本. 一看手表，离上课还有 20 分钟，他立刻步行返回家中取书，同时，他的父亲也发现小明忘记带数学课本，带上课本立刻以小明步行速度的 2 倍骑车赶往学校；父子在途中相遇，小明拿到课本后马上按原速步行返回学校，到校后发现迟到了 4 分钟. 如图是父子俩离学校的路程 s（米）与所用时间 t（分钟）之间的函数关系，请结合图象，回答下列问题：

（1）两人相遇处离学校的距离是多少米？

（2）试求小明的父亲在赶往学校的过程中，路程 s 与时间 t 之间的函数解析式.

（3）假如小明父子相遇拿到课本后，改由他的父亲骑车搭他到学校，他会迟到吗？如果会，迟到几分钟；如果不会，能提前几分钟到校？



（第 23 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

体验数据的奥秘

体验数据的奥秘











第二十章 数据的分析

核心考点

你将见到的

- 平均数与加权平均数
- 中位数与众数
- 方差

核心方法

我们为你提供的

- 新数据法
- 观察法
- 统计思想
- 整体思想
- 方程思想
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

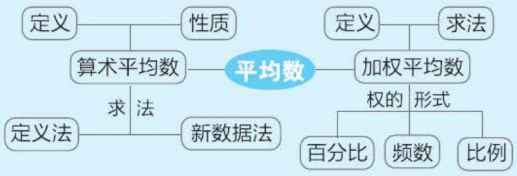
20.1 数据的集中趋势

20.1.1 平均数

核心知识

- 平均数
- 加权平均数
- 用样本估计总体

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平均数

1. 定义： 一般地，对于 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，我们把 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这 n 个数的算术平均数，简称平均数，记作“$\bar{x}$”，读作：“x 拔”，即 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

2. 计算方法：

（1）**定义法**：求平均数，只要把所有数据加起来求出总和再除以数据的总个数即可，即：如果有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，那么 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；

（2）**新数据法**：当所给的数据较大，且所给数据大部分都在某一常数 a 附近上、下波动时，可计算各数据与 a 的差：$x_1-a=x_1'$，$x_2-a=x_2'$，…，$x_n-a=x_n'$，则 $\bar{x}=a+\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')$.

3. 性质：

若 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，则：

（1）nx_1，nx_2，…，nx_n 的平均数为 $n\bar{x}$；

（2）x_1+b，x_2+b，…，x_n+b 的平均数为 $\bar{x}+b$；

（3）nx_1+b，nx_2+b，…，nx_n+b 的平均数为 $n\bar{x}+b$.

提分·必记

特别提醒

1. 一组数据的平均数是唯一的，它不一定是数据中的某个数据；
2. 算术平均数的大小与一组数据里的每个数据都有关，其中任何一个数据的变动都会引起算术平均数的变动；
3. 如果所给的数据带有单位，那么这组数据的算术平均数也要带单位，并且算术平均数所带单位与所给数据的单位一致.

拔考向 利用平均数的定义求字母的值

例 1 [中考·鞍山] 一组数据 2，4，3，x，4 的平均数是 3，则 x 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解题秘方： 紧扣“平均数的定义”求解.

解： 根据题意，得 $\frac{2+4+3+x+4}{5}=3$，解得 $x=2$.

答案： B

提分·秘诀

解法提醒

$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 的实质是数据总和除以数据总个数，它的作用：

（1）用来求平均数；

（2）用来求数据.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 加权平均数

1. 定义：

（1）一般地，若 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的权分别是 w_1，w_2，…，w_n，则 $\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ 叫做这 n 个数的加权平均数；

（2）在求 n 个数的平均数时，如果 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么这 n 个数的平均数 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$ 也叫做 x_1，x_2，…，x_k 这 k 个数的加权平均数，其中 f_1，f_2，…，f_k 分别叫做 x_1，x_2，…，x_k 的权.

2. 算术平均数与加权平均数的联系与区别：

（1）**联系**：算术平均数实质上是加权平均数的一种特殊情况，即各项的权相等，算术平均数也是加权平均数，但加权平均数不一定是算术平均数.


算术平均数和加权平均数

（2）**区别**：加权平均数不一定是算术平均数，若一组数据较小，可用算术平均数描述这组数据的集中变化趋势；若一组数据中的某些数据重复出现或各个数据的重要程度不同时，可用加权平均数描述这组数据的集中变化趋势.

拔考向▶ 利用加权平均数的定义求加权平均数

题型 1：权为数据的个数在求加权平均数中的应用

例 2 [中考·大连]在一次“爱心互助”捐款活动中，某班第一小组 8 名同学捐款的金额如下表所示：

金额/元	5	6	7	10
人数	2	3	2	1

这 8 名同学捐款的平均金额为（　　）

A.3.5 元　　B.6 元　　C.6.5 元　　D.7 元

解题秘方：根据“定义（2）的公式”进行计算.

解：$\bar{x}=\frac{5\times2+6\times3+7\times2+10\times1}{8}=6.5$（元）.

答案：C

题型 2：权为百分比在求加权平均数中的应用

例 3 某校为了提升初中学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，举办“玩转数学”比赛，现有甲、乙、丙三个小组进入决赛，评委从研究报告、小组展示、答辩三个方面为各小组打分，各项成绩均按百分制记录. 甲、乙、丙三个小组各项得分如下表：

提分·必记

特别提醒

1. 权能够反映某个数据的重要程度，权越大，该数据所占的比重越大，反之越小.
2. 权不一定都是以数据出现的次数的形式出现的，有时也以数据所占的百分比或数据所占的比例形式出现；即权的表现形式为：（1）数据的个数；（2）数据的百分比；（3）数据的比例关系.
3. 数据分组后，常用各组的组中值，即这个组中两个端点的数的平均数代表实际数据，这时“权”就是各组数据的频数.

提分·秘诀

解法提醒

权以个数的形式出现时，一般都以表格或条形图的形式呈现，求平均数时每个数据都乘权（个数），这时的加权平均数也是算术平均数.

知识储备

加权平均数中权的作用：

加权平均数不仅与每个数据的大小有关，而且受每个数据的权的影响，权越大，对平均数的影响就越大，反之就越小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

小组	研究报告	小组展示	答辩
甲	91	80	78
乙	81	74	85
丙	79	83	90

（1）计算各小组的平均成绩，并从高分到低分确定小组的排名顺序；

（2）如果按照研究报告占40%、小组展示占30%、答辩占30%，计算各小组的成绩，哪个小组的成绩最高？

特别提醒

各项的百分比之和为1.

解题秘方：根据加权平均数的公式进行计算，然后比较大小.

解：（1）$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{3}\times(91+80+78)=\frac{1}{3}\times249=83$；

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{3}\times(81+74+85)=\frac{1}{3}\times240=80$；

$\overline{x}_{丙}=\frac{1}{3}\times(79+83+90)=\frac{1}{3}\times252=84$.

$\because 84>83>80$，$\therefore$从高分到低分小组的排名顺序为丙、甲、乙.

（2）根据题意，得$\overline{x}_{甲}=\frac{91\times40\%+80\times30\%+78\times30\%}{40\%+30\%+30\%}=83.8$；

$\overline{x}_{乙}=\frac{81\times40\%+74\times30\%+85\times30\%}{40\%+30\%+30\%}=80.1$；

$\overline{x}_{丙}=\frac{79\times40\%+83\times30\%+90\times30\%}{40\%+30\%+30\%}=83.5$.

由以上数据可知，甲组的成绩最高.

技巧点拨

用权重解决实际问题的策略：

本题中，利用算术平均数计算得出丙小组的成绩最高，当不同的指标给定了不同的权重后，甲小组的成绩最高，结果不同，体现了权重在实际生活中的作用，因此，在实际生活中，当需要在某个方面要求比较高的时候，往往可以加大这方面的权重，以达到预期的结果.

题型3：组中值、频数在求加权平均数中的应用

例4 为了了解某县八年级女生的身高情况，在该县某校八年级女生中随机抽测了200名女生的身高，统计数据如下：

组别	身高 x/cm	人数
第一组	$135\leqslant x<145$	50
第二组	$145\leqslant x<155$	P
第三组	$155\leqslant x<165$	70
第四组	$165\leqslant x<175$	Q

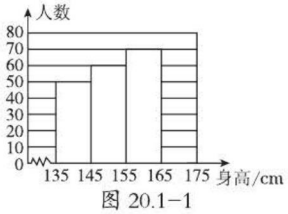


图 20.1−1

解法提醒

借助频数统计图（表）中的组中值计算加权平均数的一般步骤：

1. 计算每一小组的组中值.
2. 以每个小组的组中值作为各组的实际数据，对应的频数作为“权”计算加权平均数.

请你结合所给数据，回答下列问题：

（1）表中的$P=$_____，$Q=$_____；

（2）请把如图20.1−1所示的频数分布直方图补充完整；

（3）这200名女生的平均身高大约为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由统计图可以看出：$P=60$，则 $Q=200-50-60-70=20$.

答案：60；20

（2）如图 20.1−2 所示.

（3）求出的每组的组中值分别为 140，150，160，170，用每一小组的组中值近似地作为该小组内每名学生的身高.

$$\frac{140\times50+150\times60+160\times70+170\times20}{200}=153\text{（cm）}$$，因此这 200 名女生的平均身高大约为 153 cm.

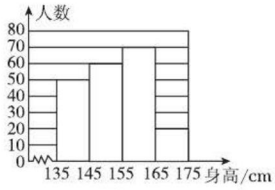


图 20.1−2

答案：153 cm

详解

$\frac{135+145}{2}=140$，

$\frac{145+155}{2}=150$，

$\frac{155+165}{2}=160$，

$\frac{165+175}{2}=170$.

知识▸3 用样本估计总体

1. 用样本估计总体：

当所要考察的对象很多，或者对考察对象带有破坏性时，统计中常常通过用样本估计总体的方法来获得对总体的认识. 例如，实际生活中经常用样本的平均数来估计总体的平均数.

2. 选取样本的方法：

（1）用样本估计总体时，样本容量越大，样本对总体的估计越准确，相应的工作量及破坏性也越大，因此样本容量的确定，既要考虑问题本身的需要，又要考虑实现的可能性及付出的代价.

（2）抽取的样本要具有一般性和代表性，这样有利于推测全貌、估计总体，作出决策，解决有关问题.

提分·必记

特别提醒

用样本估计总体的两种类型：

1. 用样本平均数估计总体平均数；
2. 用样本的总量估计总体的总量.

核心考向▸利用样本估计总体求实际中的总体平均数

例 5 有一学校为了了解九年级学生某次体育测试的成绩，现对该年级学生这次体育测试成绩进行抽样调查，结果统计如下，其中扇形统计图（如图 20.1−3）中 C 组所在的扇形圆心角为 36°.

被抽取学生的体育测试

成绩频数分布表

组别	成绩 x/ 分	频数
A	$20\leqslant x<24$	2
B	$24\leqslant x<28$	3
C	$28\leqslant x<32$	5
D	$32\leqslant x<36$	b
E	$36\leqslant x<40$	20
合计		a

被抽取学生的体育测试
成绩扇形统计图

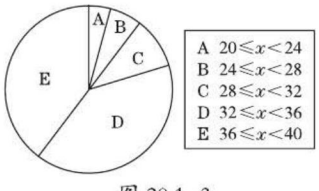


图 20.1−3

根据以上图表提供的信息，回答下列问题：

提分·秘诀

思路点拨

1. 由扇形的圆心角度数除以 360° 再乘 100% 算出 C 组的百分比，由 C 组的频数除以百分比算出总数 a，D 组的频数等于总数减去 A，B，C，E 频数的和；
2. 组中值与频数的积为该组数据的和，因此估计 C 组中所有数据的和为 30×5=150；
3. 根据用样本平均数估计总体平均数的思想求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）计算频数分布表中 a 与 b 的值；

（2）根据 C 组 $28 \leqslant x < 32$ 的组中值为 30，估计 C 组中所有数据的和为_____；

（3）请估计该校九年级学生这次体育测试成绩的平均分（结果取整数）.

解题秘方：用求“加权平均数法”求出样本平均数，并由样本平均数估计出总体平均数.

解：（1）由 C 组所在的扇形圆心角为 36°，可知 $a=50$，$b=20$.

（2）150

（3）$\bar{x}=(22\times2+26\times3+30\times5+34\times20+38\times20)\div50$

$=34.24$（分）

≈ 34 分，

即样本平均数约为 34 分.

因此，估计该校九年级学生这次体育测试成绩的平均分为 34 分.

详解

$a=5\div\left(\frac{36°}{360°}\times100\%\right)=50$，

$b=50-(2+3+5+20)=20$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用新数据法求平均数

挑战·高分

例 6 在一次数学考试中，抽取了 20 名学生的试卷进行分析. 这 20 名学生的数学成绩（单位：分）分别为 87，85，68，72，58，100，93，97，96，83，51，84，92，62，83，79，74，72，65，79［注：这份试卷满分 100 分，60 分以上（含 60 分）者为合格］.

（1）求这 20 名学生的平均成绩；

（2）求这 20 名学生的合格率.

解题秘方：通过观察法确定一个常数（这组数据在这一常数上下波动）；再按新数据法的公式进行计算.

解：（1）将原数据都减去 80，得到新数据为 7，5，-12，-8，…，-15，-1.

所以新数据的平均数

$\overline{x'}=[7+5+(-12)+(-8)+\cdots+(-15)+(-1)]\div20=-1$.

所以原数据的平均数 $\bar{x}=\overline{x'}+80=-1+80=79$，

即这 20 名学生的平均成绩为 79 分.

（2）这 20 名学生的合格率为 $\frac{18}{20}\times100\%=90\%$.

解法提醒

新数据法求平均数的方法：

1. 确定一个常数（这组数据在这个常数上下波动且较“整”）；
2. 用每个数据减去这个常数得到一组新数，并求出这组新数的平均数；
3. 原数据的平均数等于新数据的平均数加上常数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用排除极端值法求平均数

挑战·高分

例7 某校举行元旦文艺演出，由参加演出的10个班各推举出一名同学担任评委，给每个表演节目打分，每个节目演出后的得分取各评委所给的平均分数，下面是各评委对某班的一个节目打的分：

评委编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分数	7.20	7.00	7.25	7.10	10.00	7.30	7.20	7.10	6.20	7.15

（1）你对5号评委和9号评委的给分有何感想？

（2）该节目的得分是多少？此得分能否反映出该节目的水平？

（3）如果去掉一个最高分，去掉一个最低分后，再计算平均分应该是多少？这个平均分能否反映出该节目的实际水平？

解题秘方：从表格中获取信息进行解答.

解：（1）5号太高，9号太低，反映了一种极端.

（2）该节目的得分为$\frac{1}{10}\times(7.20+7.00+7.25+7.10+10.00+7.30+7.20+7.10+6.20+7.15)=7.35$，不能.

（3）该节目的得分为$\frac{1}{8}\times(7.20+7.00+7.25+7.10+7.30+7.20+7.10+7.15)\approx7.16$，能.

特别提醒

算术平均数是利用全部数据信息反映一组数据的集中趋势，它是一组数据的“重心”.若需要了解一组数据的平均水平，则计算这组数据的算术平均数即可.但算术平均数容易受极端值的影响，有时它不能代表一组数据的平均水平，因此，**在解答与平均数相关问题时，常去掉极端值，使数据趋于合理**.

拔尖角度▸ 3 利用整体代入法求平均数

挑战·高分

例8 已知一组数据a_1，a_2，a_3，a_4，a_5的平均数为8，则另一组数据a_1+10，a_2-10，a_3+10，a_4-10，a_5+10的平均数为（　　）

A.6　　B.8　　C.10　　D.12

解题秘方：用整体代入法求平均数.

解：∵数据a_1，a_2，a_3，a_4，a_5的平均数为8，

∴$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=40$.

∴另一组数据a_1+10，a_2-10，a_3+10，a_4-10，a_5+10的平均数为$\frac{1}{5}(a_1+10+a_2-10+a_3+10+a_4-10+a_5+10)=\frac{1}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+10)=\frac{1}{5}\times(40+10)=10$.

答案：C

技巧提醒

本题看似无法求解，但通过运用平均数的定义列出相关等式，进而利用整体思想，用整体代入法求值，使问题简捷获解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用方程思想求平均数中数据

挑战·高分

例 9 某校为灾区开展了“献出我们的爱”赈灾捐款活动. 八年级某班 50 名同学积极参加了这次赈灾捐款活动，下表是小明制作的全班同学捐款情况的统计表：

捐款/元	10	15	30		50	60
人数	3	6	11		13	6

因两处不慎被墨水污染，已无法看清，但已经知道全班平均每人捐款 38 元.

根据以上信息，请帮助小明计算出被污染的数据，并写出解答过程.

解题秘方：紧扣加权平均数的公式，用方程思想建立方程组求解.

解：设被墨水污染部分的人数为 x，捐款数为 y. 由题意，得

$$\begin{cases} 3+6+11+13+6+x=50, \\ \dfrac{1}{50}(xy+10\times3+15\times6+30\times11+50\times13+60\times6)=38. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=11, \\ y=40. \end{cases}$

所以被污染的数据中人数为 11，捐款数为 40.

解法提醒

根据捐款总人数等于各部分人数之和、加权平均数公式建立方程组求出未知量；用方程思想是解与平均数有关的实际应用问题的一种常用的方法.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

平均数是反映数据集中趋势的一个重要的量，利用它来解决以图表信息为背景的实际问题，是历年中考命题的热点，题型以填空、选择题为主，也有与其他知识综合的解答题，难度适中.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用平均数解实际中的售价问题

例 10 [中考·聊城]为了满足顾客的需求，某商场将 5 kg 奶糖，3 kg 酥心糖和 2 kg 水果糖混合成什锦糖出售. 已知奶糖的售价为每千克 40 元，酥心糖为每千克 20 元，水果糖为每千克 15 元，混合后什锦糖的售价应为每千克（　　）

A.25 元　　B.28.5 元　　C.29 元　　D.34.5 元

试题评析：此题考查了加权平均数，掌握加权平均数的计算公式是解题的关键，是一道基础题.

解：根据题意得：

$(40\times5+20\times3+15\times2)\div(5+3+2)=29$（元）.

答案：C

思路点拨

先求出买 5kg 奶糖，3kg 酥心糖和 2kg 水果糖的总钱数，再除以总的千克数，即可得出混合后什锦糖的售价.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用平均数作决策

例 11 [中考 · 甘孜州]某校学生会决定从三名学生会干事中选拔一名干事，对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试和面试，三人的测试成绩如下表所示：

测试项目	测试成绩 / 分		
	甲	乙	丙
笔试	75	80	90
面试	93	70	68



图 20.1-4

根据录用程序，学校组织 200 名学生采用投票推荐的方式，对三人进行民主测评，三人得票率（没有弃权，每名同学只能推荐 1 人）如扇形统计图（如图 20.1-4）所示，每得一票记 1 分.

（1）分别计算三人民主评议得分；

（2）根据实际需要，学校将笔试、面试、民主评议三项得分按 4 : 3 : 3 的比例确定个人成绩，三人中谁的得分最高？

试题评析：（1）此题主要考查了加权平均数的含义和求法的应用，要熟练掌握；

（2）此题还考查了统计表和扇形统计图的应用，要熟练掌握，要注意从中获取信息，并能应用获取的信息解决实际问题.

解：（1）甲民主评议的得分是：$200\times25\%=50$（分）；

乙民主评议的得分是：$200\times40\%=80$（分）；

丙民主评议的得分是：$200\times35\%=70$（分）.

（2）甲的成绩是：

$(75\times4+93\times3+50\times3)\div(4+3+3)$

$=729\div10$

$=72.9$（分）；

乙的成绩是：

$(80\times4+70\times3+80\times3)\div(4+3+3)$

$=770\div10$

$=77$（分）；

丙的成绩是：

$(90\times4+68\times3+70\times3)\div(4+3+3)$

$=774\div10$

$=77.4$（分）.

$\because 77.4>77>72.9$,

$\therefore$ 丙的得分最高.

思路点拨

1. 分别用 200 乘三人的得票率，求出三人民主评议的得分各是多少即可；
2. 首先根据加权平均数的计算方法列式计算，分别求出三人的得分各是多少；然后比较大小，判断出三人中谁的得分最高即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用样本估计总体解生活中的应用问题

例 12 [中考·福建]自 2016 年国庆后，许多高校均投放了使用手机就可随取随用的共享单车，某运营商为提高其经营的 A 品牌共享单车的市场占有率，准备对收费进行如下调整：一天中，同一个人第一次使用的车费按 0.5 元收取，每增加一次，当次车费就比上次车费减少 0.1 元，第 6 次开始，当次用车免费，具体收费标准如下：

使用次数	0	1	2	3	4	5（含 5 次以上）
累计车费	0	0.5	0.9	a	b	1.5

同时，就此收费方案随机调查了某高校 100 名师生在一天中使用 A 品牌共享单车的意愿，得到如下数据：

使用次数	0	1	2	3	4	5
人数	5	15	10	30	25	15

（Ⅰ）写出 a，b 的值；

（Ⅱ）已知该校有 5 000 名师生，且 A 品牌共享单车投放该校一天的费用为 5 800 元，试估计：收费调整后，此运营商在该校投放 A 品牌共享单车能否获利？说明理由.

试题评析：此题考查了样本平均数，用样本估计总体.（Ⅱ）中求得抽取的 100 名师生每人每天使用 A 品牌共享单车的平均车费是解题的关键.

解：（Ⅰ）$a=0.9+0.3=1.2$，$b=1.2+0.2=1.4$.

（Ⅱ）根据用车意愿调查结果，抽取的 100 名师生每人每天使用 A 品牌共享单车的平均车费为：$\frac{1}{100}\times(0\times5+0.5\times15+0.9\times10+1.2\times30+1.4\times25+1.5\times15)=1.1$（元），

所以估计 5 000 名师生一天使用共享单车的费用为：$5\,000\times1.1=5\,500$（元）.

因为 $5\,500<5\,800$，

所以收费调整后，此运营商在该校投放 A 品牌共享单车不能获利.

思路点拨

1. 根据收费调整情况列出算式计算即可求解；
2. 先根据平均数的计算公式求出抽取的 100 名师生每人每天使用 A 品牌共享单车的平均车费，再根据用样本估计总体求出 5 000 名师生一天使用共享单车的费用，再与 5 800 比较大小即可求解.

两年模拟兵法

☞答案见 291 页

1. [中考·六盘水]国产大飞机 C919 用数学建模的方法预测的价格是（单位：万美元）：5 098，5 099，5 001，5 002，4 990，4 920，5 080，5 010，4 901，4 902，这组数据的平均数是（　　）

A.5 000.3　　B.4 999.7

C.4 997　　D.5 003

2. [期末·巢湖]若数据 m，2，5，7，1，4，n 的平均数为 4，则 m，n 的平均数为（　　）

A.7.5　　B.5.5　　C.2.5　　D.4.5

3. 已知数据 x_1，x_2，x_3，x_4 的平均数是 2，则 x_1+3，x_2+3，x_3+3，x_4+3 的平均数为（　　）

A.2　　B.2.75　　C.2.5　　D.5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 某小组中 10 名学生的平均成绩是 x 分，如果本组余下的 5 名学生平均每人得 84 分，那么整个组 15 人的平均成绩是（　　）

A. $\frac{x+84}{2}$分　　B. $\frac{10x+420}{15}$分

C. $\frac{10x+84}{15}$分　　D. $\frac{x+420}{15}$分

5. [**中考 · 潍坊**]超市决定招聘广告策划人员一名，某应聘者三项素质测试的成绩如下表：

测试项目	创新能力	综合知识	语言表达
测试成绩 / 分	70	80	92

将创新能力、综合知识和语言表达三项测试成绩按 5 : 3 : 2 的比例计入总成绩，则该应聘者的总成绩是_____分.

6. 雾霾天气的多次出现，引起了各地环保部门的高度重视. 某市环保局对该市市区的空气质量状况进行检测，下面是一天每隔 2 小时测得的大气飘尘数据（单位：g/m^3）：

0.03　0.04　0.03　0.02　0.04　0.01

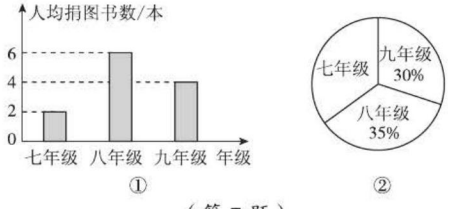
0.03　0.03　0.04　0.05　0.01　0.03

这天该市市区的大气飘尘数据的平均值是多少?　　【导学号：8592074】

7. 每年的 4 月 23 日是“世界读书日”，2015 年的这一天，向阳中学学生会组织了一次捐书活动. 如图①是学生捐图书给图书馆的条形统计图，图②是该学校学生人数的比例分布图. 已知该校学生共有 1 000 人.

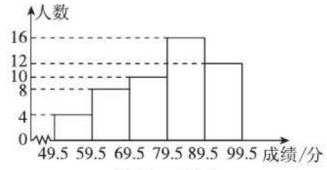
（1）求该校学生捐图书的总本数；

（2）问该校学生平均每人捐图书多少本?



（第 7 题）

8. 对某班全体学生的一次数学测试成绩进行统计分析，各分数段的人数如图所示（分数取正整数），请观察统计图，并回答下列问题：

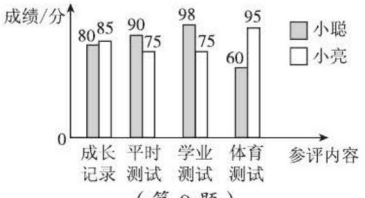


（第 8 题）

（1）求该班的学生总人数；

（2）你能估算该班这次测试的平均成绩吗? 若能，请你算出平均成绩；若不能，请说明理由.

9. 某市为了全面推进素质教育，努力提高学生的综合素质，改革中考评价方式，每一位学生的毕业成绩由四个部分组成：成长记录成绩、平时测试成绩、学业测试成绩、体育测试成绩（满分均为 100 分）. 小聪、小亮的四项成绩如图所示：



（第 9 题）

（1）分别计算小聪和小亮的平均成绩；

（2）若学校按 2 : 3 : 3 : 2 的方法计算毕业成绩，毕业成绩达 80 分以上（含 80 分）为“优秀毕业生”. 小聪和小亮谁能达到“优秀毕业生”水平? 哪位同学的毕业成绩更好些?

（3）小聪和小亮升入高中后，请你对他俩今后的发展给每人提一条建议.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.1.2 中位数和众数

核心知识
- 中位数
- 众数
- “三数”关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 中位数

1. 定义：

将一组数据按照由小到大（或由大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则称处于中间位置的数为这组数据的中位数；如果数据的个数是偶数，则称中间两个数据的平均数为这组数据的中位数.

2. 求中位数的方法（如图 20.1-5）：

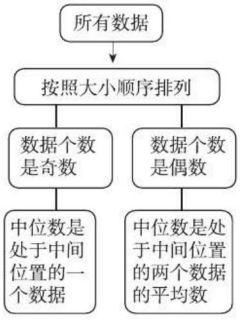


图 20.1-5

众数、中位数

拔考向▸利用中位数的定义找中位数

例 1 [中考·杭州]已知杭州市某天六个整点时的气温绘制成的统计图（如图 20.1-6），则这六个整点时气温的中位数是_____℃.

解题秘方：紧扣“中位数的定义”解答.

解：把这些数据从小到大排列为：4.5，10.5，15.3，15.9，19.6，20.1，

∵这组数据有 6 个，∴最中间的两个数的平均数是（15.3+15.9）÷2=15.6，∴这六个整点时气温的中位数是 15.6 ℃.

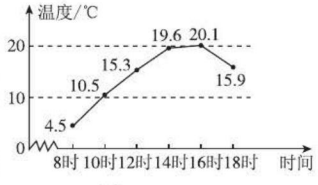


图 20.1-6

答案：15.6

提分·必记

特别提醒

1. 一组数据的中位数是唯一的，它可能是这组数据中的某个数，也可能不是这组数据中的数.
2. 中位数是刻画一组数据的“中等水平”的一个代表，反映了一组数据的集中趋势，它只与数据的排列位置有关.
3. 用中位数作为一组数据的代表，可靠性比较差，因为它不能充分利用所有的数据信息，但它不受极端值的影响，当一组数据中有个别数据变动较大时，可用中位数来描述这组数据的集中趋势.

提分·秘诀

解法提醒

根据中位数的定义，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数或最中间两个数的平均数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 众数

1. 定义：

一组数据中出现次数最多的数据称为这组数据的众数.

说明：（1）一组数据的众数的大小只与这组数据中的个别数据有关，它一定出现在这组数据中；

（2）众数是描述一组数据集中趋势的量，众数只与数据出现的频数有关，不受个别数据影响，有时是我们最为关心的统计数据.

2. 确定众数的方法：

（1）**排列**：将数据按照大小顺序排列；

（2）**确定众数**：先数出这组数据中各数据出现的次数；再找出这组数据中出现次数最多的数据.

在一组数据中，当出现次数最多的数据只有一个时，这个数据就是众数；当出现次数最多的数据不止一个时，这几组数据就是众数；当每个数据出现的次数相同时，这组数据没有众数.

提分·必记

特别提醒

1. 一组数据的众数不一定唯一，可能有一个或几个，也可能没有；
2. 众数是一组数据中出现次数最多的数据，而不是数据出现的次数.

拔考向▶利用众数的定义识别众数

例2 下表是某学习小组一次数学测验的成绩统计表：

分数	70	80	90	100
人数	1	3	x	1

已知该小组本次数学测验的平均分是85分，则测验成绩的众数是（　　）

A.80分　　B.85分　　C.90分　　D.80分和90分

解题秘方：紧扣众数的定义：先求出各种数据出现的次数，再确定众数.

解：由平均数的定义可知

$70\times1+80\times3+90x+100\times1=85(1+3+x+1)$，

即$410+90x=425+85x$，解得$x=3$，

从而可知这组数据中80和90出现的次数最多，都是3次，故众数有两个，80分和90分.

答案：D

方法点拨：众数是在一组数据中出现次数最多的数据，因此要确定众数，首先要找出各个数据出现的次数，再根据定义确定出现次数最多的数据就是众数.

注意：众数的单位与原数据的单位一致.

提分·秘诀

解法提醒

本题中没有全部呈现出不同分数所对应的人数，因此先确定x的值，才能确定众数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▶ 3 平均数、中位数和众数的关系

平均数、中位数和众数的联系与区别

类别	区别		联系
	优点	缺点	
平均数	平均数能充分利用各数据提供的信息，在实际生活中较为常用，可用样本的平均数估计总体的平均数	在计算平均数时，所有的数据都参与运算，所以它易受极端值的影响	（1）平均数、中位数和众数都能反映一组数据的集中趋势，刻画一组数据的“一般水平”； （2）实际问题中求得的平均数、中位数和众数的单位与原数据的单位一致
中位数	中位数不受个别偏大或偏小数据的影响，当一组数据中的个别数据变动较大时，一般用中位数来描述集中趋势	不能充分地利用各数据的信息	
众数	众数考察的是各数据所出现的次数，其大小只与部分数据有关，当一组数据中某些数据多次重复出现时，众数往往更能反映问题的实质	当各数据重复出现的次数大致相等时，它往往就没有什么特别意义	

核心考向 ▶ 利用平均数、中位数和众数的关系解实际应用问题

例3 某中学篮球队有10名队员，在一次投篮训练中，这10名队员各投篮50次的进球情况如下：

进球数	42	32	26	20	19	18	15	14
人数	1	1	1	1	2	1	2	1

根据上面的信息，请解答下列问题：

（1）求这10名队员进球数的平均数、中位数和众数；

（2）求这支球队整体的投篮命中率（投篮命中率 $=\frac{\text{进球数}}{\text{投篮总次数}}\times 100\%$）

（3）若队员小华的投篮命中率为40%，请你分析一下小华在这支球队中的投篮水平.

解题秘方： 紧扣“平均数需计算，中位数、众数需排序查找”，并结合“三数”的特点进行解答.

解：（1）平均数 $=\frac{1}{10}\times(42+32+26+20+19\times2+18+15\times2+14)=22$；

中位数：19；众数：15，19.

（2）投篮命中率为 $\frac{22\times10}{50\times10}\times100\%=44\%$.

（3）虽然小华命中率为40%，低于整体投篮命中率44%，但小华投50个球进了20（$50\times40\%=20$）个球，大于中位数19个球，事实上全队有6人低于这个水平，所以小华在这支球队中的投篮水平属于中等以上.

提分·必记

特别提醒

1. 它们从不同的角度反映数据的集中趋势，在实际应用中，需要依具体情况选择适当的量来分析数据，避免仅从一个方面考虑，就轻易下结论.
2. 特殊情况下，平均数、中位数和众数可能是同一个数据.

提分·秘诀

技巧点拨

平均数、中位数和众数都是用来代表一组数据的集中趋势的量，但有不同的倾向，平均数反映了一组数据的“平均水平”，中位数反映的是一组数据的“中等水平”，众数反映的是一组数据的“多数水平”. 最终选用哪一个量来代表这组数据，应结合实际情况来确定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“三数特点法”对数据进行分析

例4 公园有甲、乙两队游客在做团体游戏，两队游客的年龄如下（单位：岁）：

甲队：13，13，14，15，15，15，15，16，17，17；

乙队：5，6，6，7，7，8，8，8，46，49.

（1）分别算出两队游客年龄的平均数、众数和中位数.

（2）甲、乙两队游客年龄的平均数能代表他们各自的年龄特征吗？如果不能，哪个数据能代表？

解题秘方：根据“三数确定法”确定三数，用三数的特征分析数据.

解：（1）甲队游客年龄的平均数为$\frac{1}{10}\times(13+13+14+15+15+15+15+16+17+17)=15$（岁），

众数为15岁，中位数为15岁；

乙队游客年龄的平均数为$\frac{1}{10}\times(5+6+6+7+7+8+8+8+46+49)=15$（岁），众数为8岁，中位数为7.5岁.

（2）甲队游客年龄的平均数能代表他们的年龄特征，乙队游客年龄的平均数不能代表他们的年龄特征，对于乙队游客而言，10人中有8人的年龄在9岁以下，而他们的平均年龄是15岁，会让人误认为这队游客的年龄都在15岁左右，所以乙队的平均数不能代表该队游客年龄的特征，可选用中位数或众数来代表乙队游客的年龄特征.

技巧点拨：选择合适的一个数来代表一组数据的方法

平均数、中位数、众数都是数据的代表，它们从不同的方面刻画了一组数据的集中程度，具体情况应该具体分析、选择，并结合实际情况来确定.

挑战·高分

解法提醒

1. 将两组数据分别代入平均数计算公式计算；根据中位数和众数的定义来分别确定甲、乙两队的中位数和众数；
2. 要判断平均数能否代表各组年龄的特征，就是要看平均数是否与各组数据反映的实际意义相吻合，要说明数据的代表性，要从平均数、中位数、众数等多方面、多角度进行分析得出结论.

警示

当一组数据中出现过大或过小的数据时，平均数就不能代表该组数据的一般水平.

拔尖角度▸ 2 利用分析法解平均数、众数问题

例5 五名学生投篮球，规定每人投20次，统计他们每人投中的次数，得到五个数据，若这五个数据的中位数是6，唯一众数是7，设另外两个数据分别为a，b，则$a+b$的值不可能是（　　）

A.1　　B.5　　C.9　　D.10

解题秘方：紧扣中位数、众数定义，用分析法求解.

解：由题意可知五个数据中的三个一定是6，7，7.

另外两个数据分别为a，b，设$a<b$，则$0\leqslant a\leqslant 4$，$1\leqslant b\leqslant 5$，所以$1\leqslant a+b\leqslant 9$，即$a+b$的值不可能是10.

答案：D

挑战·高分

技巧点拨

本题由中位数是6，唯一的众数是7，根据中位数、众数定义先确定其中三个数是6，7，7，这是解题的关键，也是解题的突破口.再说明另外两个数的取值范围，最后得出$a+b$的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用综合法用三数分析数据

挑战·高分

例6 甲、乙两校参加区教育局举办的学生英语口语竞赛，两校参赛人数相等．比赛结束后，发现学生成绩分别为7分，8分，9分，10分（满分为10分）．依据统计数据绘制了如下尚不完整的统计图（如图20.1−7）及表．

甲校成绩统计表

分数	7分	8分	9分	10分
人数	11	0		8

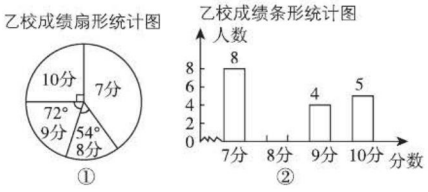


图20.1−7

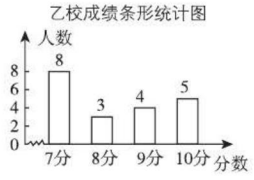


图20.1−8

（1）在图①中，“7分”所在扇形的圆心角等于_____°；

（2）请你将图②补充完整；

（3）经计算，乙校成绩的平均数是8.3分，中位数是8分，请写出甲校成绩的平均数、中位数，并从平均数和中位数的角度分析哪所学校成绩较好；

（4）如果该教育局要组织8人的代表队参加市级团体赛，为便于管理，决定从这两所学校中的一所挑选参赛选手，请你分析，应选哪所学校？

解题秘方：针对题中的数据特征，紧扣“三数”的特点进行数据分析．

解：（1）144

（2）$90\div360\times100\%=25\%$，

$5\div25\%=20$，$20-8-4-5=3$．

补图如图20.1−8所示．

（3）由于两校参赛人数相等，因此甲校的参赛人数也为20，所以得9分的有1人，则甲校成绩的平均数为$(7\times11+8\times0+9\times1+10\times8)\times\frac{1}{20}=8.3$（分），中位数为7分．

两所学校成绩的平均数一样，则只能从中位数的角度进行考虑．

因为乙校成绩的中位数为8分，大于甲校成绩的中位数，所以乙校的成绩较好．

（4）因为教育局要组织8人的代表队参赛，甲校的前8名都是10分，而乙校的前8名中只有5人是10分，所以应选择甲校．

知识储备

1. 扇形统计图能清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比，但是不能清楚地表示出每个项目的具体数目以及事物的变化情况；
2. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目，但是不能清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比以及事物的变化情况．

综上，在实际统计中，常两图综合使用，这样就能满足人们不同的数据需求．

详解

扇形统计图中“7分”所在扇形的圆心角的度数等于圆周角360°减去其余已知角的度数，即$360°-(90°+72°+54°)=144°$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用三数分析数据进行决策

挑战·高分

例 7 在喜迎建党九十周年之际，某校举办校园唱红歌比赛，选出 10 名同学担任评委，并事先拟定从如下四种方案中选择合理方案来确定演唱者的最后得分（每个评委打分最高 10 分）.

方案 1：所有评委给分的平均分；

方案 2：在所有评委中，去掉一个最高分和一个最低分，再计算剩余评委的平均分；

方案 3：所有评委给分的中位数；

方案 4：所有评委给分的众数.

为了探究上述方案的合理性，先对某名同学的演唱成绩进行统计试验，如图 20.1−9 是这名同学的得分统计图：

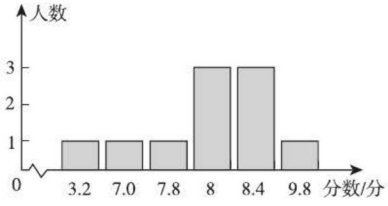


图 20.1−9

（1）分别按上述四种方案计算这名同学演唱的最后得分；

（2）根据（1）中的结果，请用统计的知识说明哪些方案不适合作为这名同学演唱的最后得分.

解题秘方：紧扣“三数”各自的特点进行计算并分析数据作决策.

解：（1）方案 1 最后得分：

$\frac{1}{10}\times(3.2+7.0+7.8+3\times8+3\times8.4+9.8)=7.7$（分）；

方案 2 最后得分：$\frac{1}{8}\times(7.0+7.8+3\times8+3\times8.4)=8$（分）；

方案 3 最后得分：8 分；

方案 4 最后得分：8 分或 8.4 分.

（2）因为方案 1 中的平均数受极端数值的影响，不能反映这组数据的“平均水平”，所以方案 1 不适合作为最后得分的方案.

因为方案 4 中的众数有两个，众数失去了实际意义，所以方案 4 不适合作为最后得分的方案.

特别警示

本题易错之处：

1. 方案 1 计算平均数时没有给 8 和 8.4 分别乘 3，众数写了一个；
2. 选择方案没有考虑极端值影响和实际意义.

解法提醒

解决统计问题时，要读懂统计图的横、纵坐标所表示的实际意义；区分加权平均数和算术平均数；计算中位数时要排序；众数有时不止一个；利用“三数”反映“一般水平”时，除了看是否受极端值的影响，还要考虑实际意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的考点主要有：中位数和众数，主要考查中位数和众数的概念及其实际应用，题型主要是选择题、填空题与其他知识综合的解答题、图表信息题，其中以实际问题为背景的应用题成为命题热点.

三年中考兵法

考法 1 利用众数的定义求平均数

例 8 [中考·黑龙江]一组从小到大排列的数据：a，3，4，4，6（a 为正整数），唯一的众数是 4，则该组数据的平均数是（　　）

A.3.6　　B.3.8

C. 3.6 或 3.8　　D.4.2

试题评析：本题主要考查了众数与平均数的定义，根据众数是一组数据中出现次数最多的数得出 a 的值是解题的关键.

解：由题意可得 $a=1$ 或 2.

当 $a=1$ 时，平均数为 $\frac{1+3+4+4+6}{5}=3.6$；

当 $a=2$ 时，平均数为 $\frac{2+3+4+4+6}{5}=3.8$.

答案：C

考法 2 利用中位数、众数定义求平均数

例 9 [中考·牡丹江]一组数据 1,5,7，x 的众数与中位数相等，则这组数据的平均数是（　　）

A.6　　B.5　　C.4.5　　D.3.5

试题评析：本题主要考查众数、中位数及平均数，根据众数的可能情况分类讨论求解是解题的关键.

解：若众数为 1，则数据为 1，1，5，7，此时中位数为 3，不符合题意；若众数为 5，则数据为 1，5，5，7，中位数为 5，符合题意，此时平均数为 $\frac{1+5+5+7}{4}=4.5$；

若众数为 7，则数据为 1，5，7，7，中位数为 6，不符合题意.

答案：C

考法 3 利用三数的定义分析数据

例 10 [中考·南京]某公司共 25 名员工，下表是他们月收入的资料.

月收入/元	45 000	18 000	10 000	5 500	4 800	3 400	3 000	2 200
人数	1	1	1	3	6	1	11	1

冲刺·满分

解法提醒

紧扣众数、平均数的定义用分类思想求解.

根据众数的定义得出正整数 a 的值，再根据平均数的定义求解可得.

解法提醒

分别假设众数为 1，5，7 分类讨论，用计算验证法找出符合题意的 x 的值；再根据平均数的定义求解即可.

思路点拨

1. 根据中位数的定义把这组数据按从小到大的顺序排列起来，找出最中间的一个数即

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）该公司员工月收入的中位数是_____元，众数是_____元．

（2）根据上表，可以算得该公司员工月收入的平均数为6 276元，你认为用平均数、中位数和众数中的哪一个反映该公司全体员工月收入水平较为合适？说明理由．

试题评析：此题考查了中位数、众数、平均数，掌握中位数、众数、平均数的定义是解题的关键．

解：（1）该公司共有25名员工，将这组数据按从小到大的顺序排列，中位数是第13个数，则中位数是3 400元；

3 000元出现了11次，出现的次数最多，则众数是3 000元．

答案：3 400；3 000

（2）用中位数或众数反映该公司全体员工月收入水平较为合适，理由：平均数受极端值的影响，只有3个人的工资达到了6 276元，不恰当．

可；根据众数的定义找出出现次数最多的数据即可；

2. 根据平均数、中位数和众数的意义回答．

两年模拟兵法

☞答案见292页

1. [**中考·黄石**]下表是某位男子马拉松长跑运动员近6次的比赛成绩（单位：分钟）

第几次	1	2	3	4	5	6
比赛成绩	145	147	140	129	136	125

则这组成绩的中位数和平均数分别为（　　）

A.137、138　　B.138、137

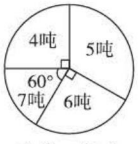
C.138、138　　D.137、139

2. [**中考·河北**]甲、乙两组各有12名学生，组长绘制了本组5月份家庭用水量的统计图(如图)表，

甲组12户家庭用水量统计表

用水量/吨	4	5	6	9
户数	4	5	2	1

乙组12户家庭用水量统计图



（第2题）

比较5月份两组家庭用水量的中位数，下列说法正确的是（　　）

A. 甲组比乙组大　　B. 甲、乙两组相同

C. 乙组比甲组大　　D. 无法判断

3. [**中考·镇江**]根据表格信息解决问题：

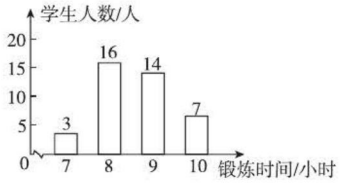
数据	37	38	39	40	41
频数	8	4	5	a	1

若该组数据的中位数不大于38，则符合条件的正整数a的取值共有（　　）

A.3个　　B.4个

C.5个　　D.6个

4. [**中考·安顺**]如图是根据某班40名同学一周的体育锻炼情况绘制的条形统计图，那么该班40名同学一周参加体育锻炼时间的众数、中位数分别是（　　）



（第4题）

A.16，10.5　　B.8，9

C.16，8.5　　D.8，8.5

5. [**中考·盘锦**]样本数据3，2，4，a，8的平均数是4，则这组数据的众数是（　　）

A.2　　B.3

C. 4　　D.8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·眉山]下列说法错误的是(　　)

A. 给定一组数据，那么这组数据的平均数一定只有一个

B. 给定一组数据，那么这组数据的中位数一定只有一个

C. 给定一组数据，那么这组数据的众数一定只有一个

D. 如果一组数据存在众数，那么该众数一定是这组数据中的某一个

7. [中考·荆州]为了解某班学生双休户外活动情况，对部分学生参加户外活动的时间进行抽样调查，结果如下表：

户外活动的时间/小时	1	2	3	6
学生人数/人	2	2	4	2

则关于“户外活动时间”这组数据的众数、中位数、平均数分别是(　　)

A.3、3、3　　B.6、2、3

C.3、3、2　　D.3、2、3

8. [中考·北京]某工厂甲、乙两个部门各有员工400人，为了解这两个部门员工的生产技能情况，进行了抽样调查，过程如下，请补充完整.

收集数据

从甲、乙两个部门各随机抽取20名员工，进行了生产技能测试，测试成绩(百分制)如下：

甲　78　86　74　81　75　76　87　70
　　75　90　75　79　81　70　74　80
　　86　69　83　77

乙　93　73　88　81　72　81　94　83
　　77　83　80　81　70　81　73　78
　　82　80　70　40

整理、描述数据

按如下分数段整理、描述这两组样本数据：

成绩 x / 人数 / 部门	40≤x≤49	50≤x≤59	60≤x≤69	70≤x≤79	80≤x≤89	90≤x≤100
甲	0	0	1	11	7	1
乙						

(说明：成绩80分及以上为生产技能优秀，70–79分为生产技能良好，60–69分为生产技能合格，60分以下为生产技能不合格)

分析数据

两组样本数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

部门	平均数	中位数	众数
甲	78.3	77.5	75
乙	78	80.5	81

得出结论：

a. 估计乙部门生产技能优秀的员工人数为_____;

b. 可以推断出_____部门员工的生产技能水平较高，理由为_____

_____.

(至少从两个不同的角度说明推断的合理性)

9. 某校八年级(1)班50名学生参加该县2019年数学质量监控考试，全班学生的成绩统计如下表：

成绩/分	71	74	78	80	82	83	85	86	88	90	91	92	94
人数	1	2	3	5	4	5	3	7	8	4	3	3	2

请根据表中提供的信息解答下列问题：

(1)该班学生考试成绩的众数是_____分.

(2)该班学生考试成绩的中位数是_____分.

(3)该班张华同学在这次考试中的成绩是83分，能不能说张华同学的成绩处于全班中游偏上水平？试说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 为了普及环保知识，增强环保意识，某中学组织了环保知识竞赛活动，初中各年级根据初赛成绩分别选出了 10 名同学参加决赛，这些选手的决赛成绩（满分为 100 分）如下表所示：

	决赛成绩 / 分
七年级	80 86 88 80 88 99 80 74 91 89
八年级	85 85 87 97 85 76 88 77 87 88
九年级	82 80 78 78 81 96 97 88 89 86

（1）请你填写下表：

	平均数 / 分	众数 / 分	中位数 / 分
七年级	85.5		87
八年级	85.5	85	
九年级			84

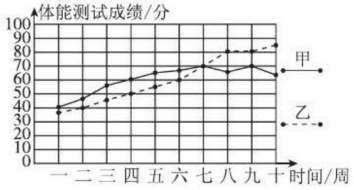
（2）请从以下两个不同的角度对三个年级的决赛成绩进行分析：

①从平均数和众数相结合看，哪个年级成绩更好一些？

②从平均数和中位数相结合看，哪个年级成绩更好一些？

（3）如果在每个年级参加决赛的选手中分别选出 3 人参加总决赛，你认为哪个年级的实力更强一些？并说明理由．

11. 如图所示是连续十周测试甲、乙两名运动员体能情况的折线统计图，规定：体能测试成绩 70 分以上（包括 70 分）为合格．



（第 11 题）

（1）请从下面两个不同的角度对运动员体能测试结果进行判断：

①依据平均数与成绩合格的次数比较甲和乙，_____的体能测试成绩较好；

②依据平均数与中位数比较甲和乙，_____的体能测试成绩较好．

（2）依据折线统计图和成绩合格的次数，可以得出_____运动员体能训练的效果较好．

【导学号：8592074】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.2 数据的波动程度

核心知识
- 方差
- 方差的作用
- 用样本方差估计总体方差

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 方差

1. 定义：

设有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，各数据与它们的平均数$\bar{x}$的差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$，我们用这些值的平均数来衡量这组数据波动的大小，并把它叫做这组数据的方差，记作 s^2.

2. 公式： 若 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为$\bar{x}$，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.

3. 求方差的步骤：

第一步：先求原始数据的平均数；

第二步：求原始数据中各数据与平均数的差；

第三步：求所得各个差数的平方；

第四步：求所得各平方数的平均数.

提分·必记

特别提醒

1. 方差是用来描述一组数据中每一个数据与这组数据的平均数的**偏离程度的量**，在实际生活中，经常用方差的大小来**判断数据的稳定性**；
2. 方差的大小与数据本身的大小无关，可能一组数据比较小，但方差较大，也可能一组数据比较大，但方差较小；
3. 方差的单位是原数据单位的平方.

拨考向 利用方差分析数据

题型 1：方差公式在求方差中的应用

例 1 [中考·自贡]一组数据 6，4，a，3，2 的平均数是 5，这组数据的方差为（　　）

A. 8　　B. 5　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

解题秘方：紧扣方差公式求方差.

解：∵ 6，4，a，3，2 的平均数是 5，

∴ $(6+4+a+3+2)\div 5=5$，

解得 $a=10$.

则这组数据的方差

$s^2=\frac{1}{5}[(6-5)^2+(4-5)^2+(10-5)^2+(3-5)^2+(2-5)^2]=8$.

答案：A

提分·秘诀

视野拓展

一般地，设 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，数据的波动越大，反之也成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：方差在作决策中的应用

例2 某射击队为从甲、乙两名运动员中选拔一人参加全国比赛，对他们进行了 8 次测试，测试成绩（单位：环）如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次
甲	10	8	9	8	10	9	10	8
乙	10	7	10	10	9	8	8	10

（1）根据表格中的数据，计算出甲的平均成绩是_____环，乙的平均成绩是_____环；

（2）分别计算甲、乙两名运动员 8 次测试成绩的方差；

（3）根据（1）（2）计算的结果，你认为推荐谁参加全国比赛更合适，并说明理由.

解题秘方：紧扣方差公式及方差的稳定性解答.

解：（1）9；9

（2）甲的方差：$s_{甲}^2=\frac{1}{8}[(10-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(10-9)^2+(9-9)^2+(10-9)^2+(8-9)^2]=0.75$（环^2），

乙的方差：$s_{乙}^2=\frac{1}{8}[(10-9)^2+(7-9)^2+(10-9)^2+(10-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(8-9)^2+(10-9)^2]=1.25$（环^2）.

（3）推荐甲参加全国比赛更合适. 理由如下：

甲、乙的平均成绩相等，说明其实力相当，但甲 8 次测试成绩的方差比乙小，说明甲发挥比较稳定，故推荐甲参加全国比赛更合适.

解法提醒

比较两组数据稳定性的方法：

在比较两组数据的稳定性时，一般先看平均数，在平均数相同或相近的情况下，再分析稳定性问题，而方差是反映数据的波动大小的量，因此可以通过比较方差的大小解决问题.

技巧点拨

最优决策型问题的解题思路：

对于此类问题的求解，一方面要正确理解平均数、方差的概念，

另一方面要熟练记忆并正确运用平均数、方差的计算公式，根据平均数与方差的意义作出最优选择.

知识 2 极差、平均差、标准差

1. 极差：

一组数据中最大值与最小值的差称为这组数据的极差；即：极差 = 最大值 − 最小值.

2. 平均差：

一组数据中各个数据与其平均数的差的绝对值的平均数叫做这组数据的平均差；

即：平均差 $=\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n}$.

3. 标准差： 标准差是方差的算术平方根，

即：$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$.

提分·必记

特别提醒

1. 极差能够反映数据的变化范围，但受极端值的影响较大.
2. 标准差（平均差）与方差一样反映的是数据在平均数附近的波动情况；标准差（平均差）越大，数据的波动越大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用标准差的公式进行计算

例3 [中考·衢州改编]一次数学测试，某小组五名同学的成绩如下表所示（有两个数据被遮盖）.

组员	甲	乙	丙	丁	戊	标准差	平均成绩
得分	81	79	■	80	82	■	80

那么被遮盖的两个数据依次是（　　）

A.80，2　　B.80，$\sqrt{2}$　　C.78，2　　D.78，$\sqrt{2}$

解题秘方：紧扣“标准差公式”求解.

解：$80\times5-(81+79+80+82)=78$，

标准差为$\sqrt{\dfrac{(81-80)^2+(79-80)^2+\cdots+(82-80)^2}{5}}=\sqrt{2}$.

答案：D

提分·秘诀

解法提醒

先根据平均数的计算公式，求出丙的得分，再根据标准差公式进行计算即可得出答案.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用中位数、众数分析数据

例4 某中学数学活动小组为了调查居民的用水情况，从某社区的1 500户家庭中随机抽取了30户家庭的月用水量，结果如下表所示：

月用水量/吨	3	4	5	7	8	9	10
户数	4	3	5	11	4	2	1

（1）求这30户家庭月用水量的平均数、众数和中位数；

（2）根据上述数据，试估计该社区的月用水量；

（3）由于我国水资源缺乏，许多城市常利用分段计费的办法引导人们节约用水，即规定每户家庭的月基本用水量为m（吨），家庭月用水量不超过m（吨）的部分按原价收费，超过m（吨）的部分加倍收费，你认为上述问题中的平均数、众数和中位数中哪一个量作为月基本用水量比较合理？简述理由.

解题秘方：紧扣各种数的特点分析数据.

解：（1）平均数是$\bar{x}=\dfrac{1}{30}(3\times4+4\times3+5\times5+7\times11+8\times4+9\times2+10\times1)=6.2$（吨），

众数是7吨，中位数是$\dfrac{1}{2}(7+7)=7$（吨）.

（2）$1\,500\times6.2=9\,300$（吨），

所以该社区月用水量约为9 300吨.

（3）以中位数或众数作为月基本用水量较为合理.

理由：因为这样既可满足大多数家庭的用水量，也可以引导用水量高于7吨的家庭节约用水.

挑战·高分

知识储备

1. 抽样的方法：

抽样调查获得的总体的估计值是科学可靠的，但抽取的样本应具有广泛性和随机性，这样才能保证样本的特征反映总体的特征.

2. 数据分析的方法：

在数据调查与分析中，有时所要考察的总体包含很多个体或者考察本身带有破坏性，常常用样本平均数估计总体平均数，用样本方差估计总体方差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用“三数、方差”分析数据

例5 [中考·扬州]为声援扬州“运河申遗”，某校举办了一次运河知识竞赛，满分10分，学生得分均为整数，成绩达到6分以上（包含6分）为合格，达到9分以上（包含9分）为优秀.这次竞赛中甲、乙两组学生成绩分布的条形统计图如图20.2-1所示.

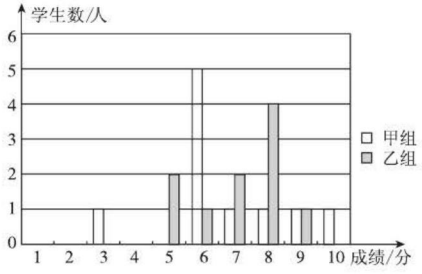


图20.2-1

（1）补充完成下面的成绩统计分析表：

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.7		3.41	90%	20%
乙组		7.5	1.69	80%	10%

（2）小明同学说：“这次竞赛我得了7分，在我们小组中排名属中游略偏上！”观察上表可知，小明是_____组的学生；（填“甲”或“乙”）

（3）甲组同学说他们组的合格率、优秀率均高于乙组，所以他们组的成绩好于乙组.但乙组同学不同意甲组同学的说法，认为他们组的成绩要好于甲组.请你给出两条支持乙组同学观点的理由.

解题秘方：紧扣从多角度分析数据的方法进行数据分析.

解：（1）填表如下：

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.7	6	3.41	90%	20%
乙组	7.1	7.5	1.69	80%	10%

（2）甲

（3）（答案不唯一）乙组的平均数高于甲组，方差小于甲组，故乙组成绩好于甲组.

挑战·高分

方法点拨

根据方差大小进行决策的方法：

在实际生活中，方差大与小都有其各自的用途，并不是所有的统计当中，都是方差越小越好，还要看这组数据所反映的实际问题，若是表示一个机器加工的几个零件的直径，方差越小表示零件越标准，因此是方差越小越好；但若是为了参加体育比赛而统计的数据，在平均值相同的情况下，则应选取数据波动较大且有上升趋势的那一组数据的参赛者参赛.

解法提醒

不能只通过某一个统计量去判断成绩的优劣，而应该从多个角度来分析成绩的情况，平均数、众数、中位数描述了一组数据的集中程度，方差较为精确地反映了一组数据相对于平均数的偏离程度，是一个被广泛用来描述数据离散程度的量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用数据分析法作决策

挑战·高分

例6 甲、乙两名队员参加射击训练，成绩分别被制成两个统计图（如图20.2-2）.

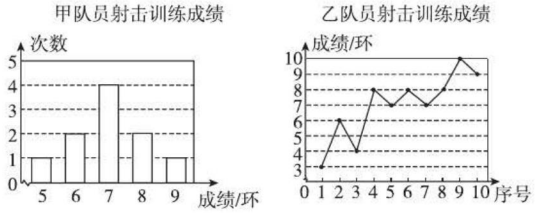


图 20.2-2

根据以上信息，整理分析数据如下：

	平均数/环	中位数/环	众数/环	方差
甲	a	7	7	1.2
乙	7	b	8	c

（1）求出表格中 a，b，c 的值；

（2）分别运用上表中的四个统计量，简要分析这两名队员的射击训练成绩. 若选派其中一名参赛，你认为应选哪名队员？

解题秘方：根据实际中不同的需要，结合不同的数据特点；选取“三数或方差”作依据进行决策.

解：（1）观察甲队员射击训练成绩统计图，可知 $a=\frac{1}{10}\times(5\times1+6\times2+7\times4+8\times2+9\times1)=\frac{1}{10}\times70=7$.

观察乙队员射击训练成绩统计图可知，乙的10次射击训练成绩分别为3，6，4，8，7，8，7，8，10，9，

按从小到大的顺序排列为：3，4，6，7，7，8，8，8，9，10，

其中最中间的两个数分别为7和8，故 $b=\frac{7+8}{2}=7.5$.

$c=\frac{1}{10}\times[(3-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+2\times(7-7)^2+3\times(8-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2]=4.2$.

（2）根据表中数据可知，甲和乙的平均数相等，乙的中位数大于甲的中位数，乙的众数大于甲的众数，说明乙的成绩好于甲的成绩；虽然乙的方差大于甲的方差，但乙的成绩呈上升趋势，故应选乙队员.

特别警示

通常情况下，方差越小越好，但也有例外，如本题中乙成绩的方差虽然较大，但由于他的成绩呈上升趋势，所以他的训练成绩较好，解答本题时容易出现根据方差大小来确定，得到选甲队员的错误.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

方差与生产、生活联系密切，是中考的必考内容，主要考查方差的计算及利用方差解决实际问题，题型以选择题、填空题为主，有时也以解答题的形式出现，涉及方案设计、策略制定等开放性问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用数的定义识别数

例 7 [中考·荆门]李老师为了了解学生暑期在家的阅读情况，随机调查了 20 名学生某一天的阅读小时数，具体情况统计如下：

阅读时间 / 小时	2	2.5	3	3.5	4
学生人数	1	2	8	6	3

则关于这 20 名学生阅读小时数的说法正确的是（　　）

A. 众数是 8　　B. 中位数是 3

C. 平均数是 3　　D. 方差是 0.34

试题评析：此题主要考查众数、中位数、加权平均数、方差，熟练掌握基本概念及计算公式是解题的关键.

解：A. 由统计表得：众数为 3，不是 8，所以此选项不正确；

B. 随机调查了 20 名学生，所以中位数是第 10 名和第 11 名学生的阅读小时数的平均数，故中位数是 3，所以此选项正确；

C. 平均数 $=\dfrac{1\times2+2\times2.5+3\times8+6\times3.5+4\times3}{20}=3.2$，所以此选项不正确；

D. $s^2=\dfrac{1}{20}\times[(2-3.2)^2+2\times(2.5-3.2)^2+8\times(3-3.2)^2+6\times(3.5-3.2)^2+3\times(4-3.2)^2]=\dfrac{5.2}{20}=0.26$，所以此选项不正确.

答案：B

考法 2 利用数的特征作决策

例 8 [中考·潍坊]甲、乙、丙、丁四名射击运动员在选拔赛中，每人射击了 10 次，甲、乙两人的成绩如下表所示，丙、丁两人的成绩如图 20.2-3 所示，欲选一名运动员参赛，从平均数和方差两个因素分析，应选（　　）

	甲	乙
平均数	9	8
方差	1	1

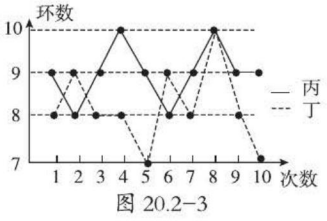


图 20.2-3

A. 甲　　B. 乙

C. 丙　　D. 丁

试题评析：本题考查方差、平均数、折线图等知识，解题的关键是记住平均数、方差的公式，属于基础题.

冲刺·满分

思路点拨

A. 根据众数的定义找出出现次数最多的数；

B. 根据中位数的定义将这组数据从小到大重新排列，求出最中间的 2 个数的平均数即可得出中位数.

C. 根据加权平均数公式代入计算可得；

D. 根据方差公式计算即可.

解法提醒

利用统计量分析数据，当平均数相同或接近时，往往考虑利用方差来确定数据的稳定性，从而作出决策；但有时还需要根据数据的变化趋势，综合各方面的因素来作出决策.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：丙的平均数 $=\dfrac{9+8+9+10+9+8+9+10+9+9}{10}=9$，

丙的方差 $=\dfrac{1}{10}\times[(9-9)^2+(8-9)^2+\cdots+(9-9)^2+(9-9)^2]=0.4$.

丁的平均数 $=\dfrac{8+9+8+8+7+9+8+10+8+7}{10}=8.2$.

丁的方差 $=\dfrac{1}{10}\times[(8-8.2)^2+(9-8.2)^2+\cdots+(8-8.2)^2+(7-8.2)^2]=0.76$.

∵丙的方差最小，平均成绩最高，∴丙的成绩最好.

答案：C

两年模拟兵法 ☞答案见292页

1. [中考·毕节]对一组数据：−2，1，2，1，下列说法不正确的是（　　）

A. 平均数是1　　B. 众数是1

C. 中位数是1　　D. 极差是4

2. [中考·兴安盟]一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋30双，各种尺码的鞋销售量如下表：

尺码/厘米	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	1	2	5	11	7	3	1

鞋店老板比较关注哪种尺码的鞋最畅销，也就是关注卖出鞋的尺码组成一组数据的（　　）

A. 平均数　　B. 中位数

C. 众数　　D. 方差

3. 计算某样本方差的算式是 $s^2=\dfrac{1}{10}[(x_1-20)^2+(x_2-20)^2+\cdots+(x_{10}-20)^2]$，则式子中的数字10和20分别表示样本的（　　）

A. 样本容量、平均数　　B. 平均数、样本容量

C. 样本容量、众数　　D. 中位数、平均数

4. 某校将举办一场“中国汉字听写大赛”，要求各班推选一名同学参加比赛，为此，九年级（1）班组织了五轮班级选拔赛，在这五轮选拔赛中，甲、乙两名同学的平均分都是96分，甲的成绩的方差是0.2，乙的成绩的方差是0.8，根据以上数据，下列说法正确的是（　　）

A. 甲的成绩比乙的成绩稳定

B. 乙的成绩比甲的稳定

C. 甲、乙两人的成绩一样稳定

D. 无法确定甲、乙的成绩谁更稳定

5. 10名同学分成甲、乙两队进行篮球比赛，他们的身高（单位：cm）如下表：

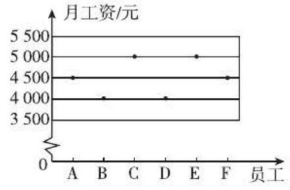
队员	队员1	队员2	队员3	队员4	队员5
甲队	177	176	175	172	175
乙队	170	175	173	174	183

设两队队员身高的平均数分别为 $\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，身高的方差分别为 $s^2_{甲}$，$s^2_{乙}$，则下列关系中完全正确的是（　　）

A. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s^2_{甲}>s^2_{乙}$　　B. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

C. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，$s^2_{甲}>s^2_{乙}$　　D. $\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙}$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

6. [中考·宁德]某创意工作室6位员工的月工资如图所示，因业务需要，现决定招聘一名新员工，若新员工的月工资为4 500元，则下列关于现在7位员工月工资的平均数和方差的说法正确的是（　　）



（第6题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. 平均数不变，方差变大

B. 平均数不变，方差变小

C. 平均数不变，方差不变

D. 平均数变小，方差不变

7. 已知一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数是 $\bar{x}$，方差是 s^2，设另一组数据 $x_1'=ax_1+b$，$x_2'=ax_2+b$，…，$x_n'=ax_n+b$ 的平均数是 $\overline{x'}$，方差是 s'^2. 请说明以下等式成立的理由：（1）$\overline{x'}=a\bar{x}+b$；（2）$s'^2=a^2s^2$.

8. 张老师为了从甲、乙两位同学中选拔一人参加某数学邀请赛，对两位同学进行了辅导，并在辅导期间进行了10次测验，两位同学测验成绩（单位：分）如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
甲	68	80	78	79	81	77	78	84	83	92
乙	86	80	75	83	85	77	79	80	80	75

利用表中提供的数据，解答下列问题.

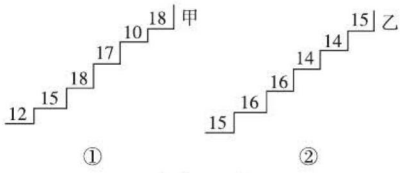
（1）填写下表：

	平均数 / 分	中位数 / 分	众数 / 分
甲		79.5	
乙	80		80

（2）张老师已经根据测验成绩表中的数据算出甲10次测验成绩的方差 $s_{甲}^2=33.2$，请你帮助张老师计算乙10次测验成绩的方差 $s_{乙}^2=$_____；

（3）请你运用所学的统计知识，帮助张老师从甲、乙两位同学中选出一人参加该数学邀请赛，并简要说明理由.

9. 公园内有一假山，假山上有一条台阶小路，其中有甲、乙两段台阶的高度分别如图①和图②所示（图中的数字表示每一级台阶的高度，单位：cm），请你运用所学习的统计知识，解决以下问题：



（第9题）

（1）把每一级台阶的高度作为数据，请从统计知识方面（平均数、中位数）分析这两组数据有哪些相同点和不同点?

（2）在甲、乙两段台阶上行走，哪段会比较舒服? 你能用所学知识说明原因吗?

（3）为方便行走，公园决定整修这两段台阶，在不改变台阶数量的前提下，应该怎样整修会比较好? 并说明你的方案的设计思路.

【导学号：8592074】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.3 课题学习　体质健康测试中的数据分析

核心知识
- 数据的收集与整理
- 数据的分析
- 用样本估计总体

知识链接



点知识·拨考向 速提分

课题 1 数据的收集与整理

1. 收集数据：

当所要考察的总体中包含的个体数很多时，我们收集数据的方法是从总体中抽取一个样本.

2. 整理数据：获取数据后，要对数据进行整理、分组制成频数分布表.

3. 描述数据：

根据实际问题的不同需要，选择适当的统计图：

（1）**条形统计图**：能清楚反映每个项目的具体数目；

（2）**扇形统计图**：能清楚反映各部分在总体中所占的百分比；

（3）**折线统计图**：能清楚反映事物的变化趋势；

（4）**频数分布直方图**：能清晰、直观地反映数据的整体分布情况.

提分·必记

特别解读

绘制频数分布表的一般步骤：

1. 找出所有数据中的最大值和最小值，算出它们的差；
2. 决定组距和组数；
3. 确定分点；
4. 列出频数分布表.

拔考向 利用数据的收集与整理解实际应用问题

题型 1：频数分布表在整理数据中的应用

例 1　为了解中学女生的身体发育情况，对某中学同年龄的 60 名女生的身高（单位：cm）进行了测量，结果如下：

167	154	159	166	169	159	156	166	162	158
159	156	166	160	164	160	157	156	157	161
158	158	153	158	164	158	163	158	153	157
162	162	159	154	165	166	157	151	146	151
158	160	165	158	163	163	162	161	154	165
162	162	159	157	159	149	164	168	159	153

请根据上述数据列出频数分布表.

解题秘方：紧扣“频数分布表的绘制步骤”进行绘制.

提分·秘诀

解法提醒

制作频数分布表是整理数据的一个重要环节；

$$组数=\frac{最大值-最小值}{组距}$$

而组数以 5~12 组为宜，因此制作频数分布表确定组距时，要从分 5~12 组作为参考条件；划分组时，对所有数据，要做到不重复，不遗漏.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）计算最大值和最小值的差：169−146=23（cm）.

（2）决定组距与组数：$\frac{23}{3}\approx 8$，即分成 8 组，组距为 3 cm.

（3）决定分点：146~149，149~152，152~155，155~158，158~161，161~164，164~167，167~170.

（4）列频数分布表如下：

身高 x/cm	划记	频数
$146 \leqslant x < 149$	一	1
$149 \leqslant x < 152$	下	3
$152 \leqslant x < 155$	正一	6
$155 \leqslant x < 158$	正下	8
$158 \leqslant x < 161$	正正正下	18
$161 \leqslant x < 164$	正正一	11
$164 \leqslant x < 167$	正正	10
$167 \leqslant x < 170$	下	3
合计		60

题型 2：制作统计图在描述数据中的应用

例 2 如图 20.3−1 是某校八年级 360 位同学购买不同品牌计算器人数的扇形统计图，每位同学购买一个计算器，试回答下列问题：

（1）分别求出购买各品牌计算器的人数；

（2）试画出购买不同品牌计算器人数的条形统计图.

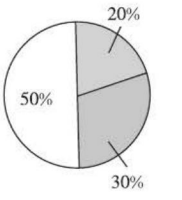


图 20.3−1

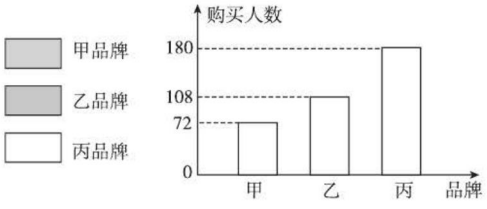


图 20.3−2

解题秘方：紧扣统计图的特征，从统计图中获取信息进行解答.

解：（1）购买甲品牌计算器的人数：360×20%=72，

购买乙品牌计算器的人数：360×30%=108，

购买丙品牌计算器的人数：360×50%=180.

（2）如图 20.3−2 所示.

解法提醒

1. 根据百分比求出人数；
2. 在第(1)问的基础上绘制条形统计图.

在扇形统计图中弄清楚百分比的含义是解答此题的关键，购买某品牌计算器人数所占百分比 = $\frac{\text{购买某品牌计算器人数}}{\text{总人数}}\times 100\%$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课题▶ 2 数据分析

1. 平均数、中位数、众数表示的是数据的集中趋势，平均数为平均水平，中位数为中等水平，众数为多数水平；

2. 方差、标准差表示的是数据的波动程度，反映的是数据的稳定程度；即方差、标准差都是表示这组数据偏离平均数的程度；方差、标准差越大，表明这组数据偏离平均数越大，数据越不稳定.

拔考向▶ 利用统计数据进行数据分析

题型 1：平均数、中位数、众数在数据分析中的应用

例 3 据报道，某公司的 33 名职工的月工资（单位：元）如下：

职务	董事长	副董事长	董事	总经理	经理	管理员	职员
人数	1	1	2	1	5	3	20
工资	5 500	5 000	3 500	3 000	2 500	2 000	1 500

（1）求该公司职工工资的平均数、中位数、众数.（精确到 1 元）

（2）假设副董事长工资从 5 000 元提升到 20 000 元，董事长的工资从 5 500 元提升到 30 000 元，其他职工的工资不变，那么新的平均数、中位数、众数又是多少？（精确到 1 元）

（3）你认为哪个统计量更能反映这个公司职工的工资水平？结合此问题谈一谈你的看法.

解题秘方：紧扣“三数”的特征对数据进行分析.

解：（1）平均数为$\frac{1}{33}\times(5\,500+5\,000+3\,500\times2+3\,000+2\,500\times5+2\,000\times3+1\,500\times20)\approx2\,091$（元），

中位数为 1 500 元，众数为 1 500 元.

（2）平均数为$\frac{1}{33}\times(30\,000+20\,000+3\,500\times2+3\,000+2\,500\times5+2\,000\times3+1\,500\times20)\approx3\,288$（元），

中位数为 1 500 元，众数为 1 500 元.

（3）中位数或众数均能反映这个公司职工的工资水平.

因为公司中少数人的工资额与大多数人的工资额差别较大，所以平均数不能反映这个公司职工的工资水平.

提分·必记

特别提醒

数据分析活动的步骤：

1. 收集数据；
2. 整理数据；
3. 描述数据；
4. 分析数据；
5. 撰写调查报告；
6. 交流.

提分·秘诀

解法提醒

平均数、中位数和众数都是描述一组数据的统计量，它们各有特点.

平均数反映了一组数据的“一般水平”；

中位数刻画了一组数据的“中等水平”，

众数刻画了一组数据的“多数水平”.

平均数应用最广泛，比较可靠与稳定，但它与这组数据中每一个数据都相关，当一组数据中出现过大或过小的数据时，平均数就不能代表这组数据的一般水平，否则就失去了公平性.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：数据分析在作决策中的应用

例 4 甲、乙两名选手在相同条件下各射靶 10 次，每次射靶的成绩如图 20.3-3 所示.

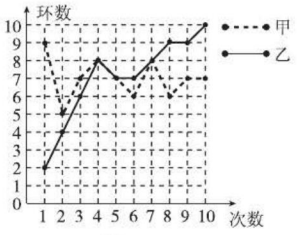


图 20.3-3

（1）请填写下表：

选手	平均数	方差	中位数	命中 9 环以上（包括 9 环）的次数
甲	7	1.2		1
乙		5.4		

（2）请从下列三个不同的角度对这次测试结果进行分析.

①从平均数和方差相结合看，谁的成绩好些？

②从中位数和命中 9 环以上（包括 9 环）的次数相结合看，谁的成绩好些？

③从折线图上两人射击命中的环数的走势看，谁更有潜力？

解题秘方：紧扣“数据信息”及“图表信息”作决策.

解：（1）

选手	平均数	方差	中位数	命中 9 环以上（包括 9 环）的次数
甲	7	1.2	7	1
乙	7	5.4	7.5	3

（2）①从平均数上看，甲、乙射击的平均水平相同，而 $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$，故甲射击环数的波动比乙射击环数的波动小，所以甲的成绩好些；

②因为乙的中位数比甲大，命中 9 环以上（包括 9 环）的次数比甲多，所以乙的成绩好些；

③从折线图上看，乙的成绩基本上呈上升趋势，而甲的成绩仍在平均数附近上下波动，说明乙的竞技状态越来越好，而甲无明显提高，所以乙更有潜力.

特别提醒

1. 在进行数据分析时，一般是先求出平均数、中位数、众数及方差，再根据它们的意义结合已知条件解决问题.
2. 日常生活中，我们经常遇到各种各样的数据或图表，要注意搜集和整理，然后加以分析从中找出规律.对不同的问题能选择不同的统计图加以描述，用不同的统计量加以评判，并从统计图中获取信息，作出对未来发展趋势的预判.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 去年A市有7.6万名学生参加初中毕业会考，为了解这7.6万名学生的数学成绩，从中抽取1 000名考生的数学成绩进行统计分析，以下说法正确的是（　　）

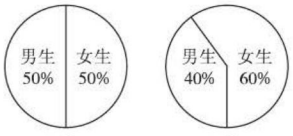
A. 这1 000名考生是总体的一个样本

B.7.6万名考生是总体

C. 每名考生的数学成绩是个体

D.1 000名考生是样本容量

2. 观察统计图（如图），下列结论正确的是（　　）



（第2题）

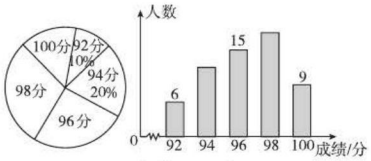
A. 甲校女生比乙校女生少

B. 乙校男生比甲校男生少

C. 乙校女生比甲校男生多

D. 甲、乙两校女生人数无法比较

3. [中考·泰安]某单位若干名职工参加普法知识竞赛，将成绩制成如图所示的扇形统计图和条形统计图，根据图中提供的信息，这些职工成绩的中位数和平均数分别是（　　）



（第3题）

A.94分，96分　　B.96分，96分

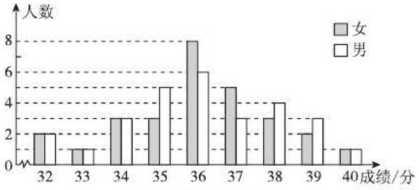
C.94分，96.4分　　D.96分，96.4分

4. 调查学生的体质健康状况一般分为_____、_____、_____、_____、_____、_____六个步骤.

5. 分析数据一般要计算各组数据的_____、_____、_____、_____等，通过分析图表和计算结果得出结论.

6. 已知一组数据：-2，-2，3，-2，x，-1，若这组数据的平均数是0.5，则这组数据的中位数是_____，众数是_____.

7. 我市某校九年级一班学生参加毕业体考的成绩统计图如图所示，请根据统计图中提供的信息完成后面的填空题.（将答案填写在相应的横线上）



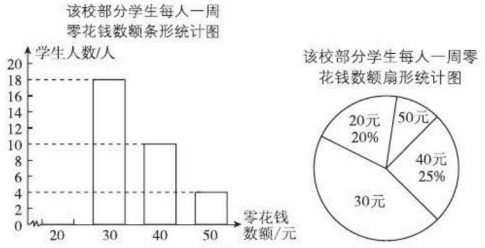
（第7题）

（1）该班共有_____名学生；

（2）该班学生体考成绩的众数是_____，男生体考成绩的中位数是_____；

（3）若女生体考成绩在37分及其以上，男生体考成绩在38分及其以上被认定为体尖生，则该班共有_____名体尖生.

8. [中考·嘉兴]为了解学生零花钱的使用情况，校团委随机调查了本校部分学生每人一周的零花钱数额，并绘制了如图所示的两个统计图（部分未完成）.请根据图中信息，回答下列问题：



（第8题）

（1）校团委随机调查了多少人？请你补全条形统计图；

（2）表示“50元”的扇形圆心角是多少度？被调查的学生每人一周零花钱数额的中位数是多少元？

（3）四川雅安地震后，全校1 000名学生每人自发地捐出一周零花钱的一半，以支援灾区建

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设．请估计全校学生共捐款多少元．

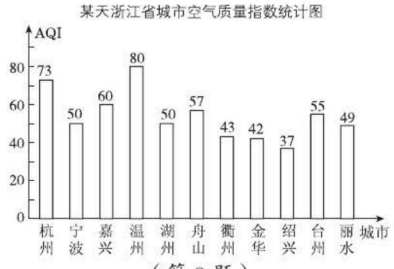
【导学号：8592074】

9. 某天浙江省 11 个城市的空气质量指数（AQI）如图所示：

（1）这 11 个城市当天的空气质量指数的众数和中位数分别是多少?

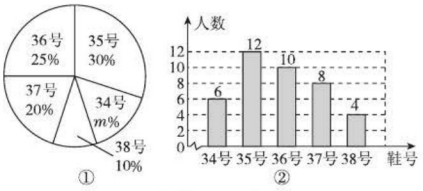
（2）当 $0 \leqslant AQI \leqslant 50$ 时，空气质量为优，求这 11 个城市当天的空气质量为优的频率；

（3）求宁波、嘉兴、舟山、绍兴、台州五个城市当天的空气质量的平均数．



（第 9 题）

10. [**中考 · 天津**]为了推动阳光体育运动的广泛开展，引导学生走向操场、走进大自然、走到阳光下，积极参加体育锻炼，学校准备购买一批运动鞋供学生借用，现从各年级随机抽取了部分学生的鞋号，绘制了如图所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：



（第 10 题）

（1）本次接受随机抽样调查的学生人数为_____，图①中 m 的值为_____；

（2）求本次调查获取的样本数据的众数和中位数；

（3）根据样本数据，若学校计划购买 200 双运动鞋，建议购买 35 号运动鞋多少双?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

论“决策”

决策型应用题是中考命题改革以来出现的一种反映时代要求的新题型. 这类题从实际生产和生活中提出，需要先将其抽象为数学问题，再用数学知识和方法加以解决. 它反映了数学应用的广泛性，也考查了学生的创新意识和初步的创新能力. 这类题目一般涉及的数学知识并不复杂，但由于题目文字量大，从中提取有用信息构思解题方案有一定难度. 近年各地中考题中，决策型问题出现越来越多，特别要加强阅读能力的训练，提高、培养快速、准确提取数学信息的能力. 除本章利用统计图表分析数据作决策外，下面还介绍几种作决策的问题：

一、数与式的应用

例 1 甲、乙两人是好朋友，一个月里两次同时到一家粮油商店去打油，两次的油价有变化. 他们两人的购买方式不一样，其中甲每次总是打一斤油；乙每次只拿出一元钱来打油，而不管能买多少. 问这两种打油方式，哪一种合算？（用两次打油的平均单价为标准来衡量）

二、方程的应用

例 2 某厂家对一工程建设招标，投标结果是甲、乙两队合做需 6 天完成，承包费为 8 700 元；乙、丙两队合做需 10 天完成，承包费为 9 500 元；甲、丙两队合做 5 天完成全部工程的 $\frac{2}{3}$，厂家需付 5 500 元. 假如你是厂长，要求在半个月内竣工，雇哪个队单独完成此项工程最合算（假定只考虑工程费用这一项指标）？

三、不等式的应用

例 3 某汽运公司计划装运甲、乙、丙三种蔬菜到外地销售，如下表，其中每辆汽车按规定满载，并且每辆汽车只能装一种蔬菜. 经理决定用 20 辆汽车装运 36 吨蔬菜（每种蔬菜不少于一车）. 作为技术调度，他将如何安排？怎样安排可使公司收益最多？

蔬菜种类	甲	乙	丙
每辆汽车能装的吨数	2	1	1.5
每吨蔬菜可获利 / 百元	5	7	4

四、函数的应用

例 4 在某商品的销售过程中，销量 y（件）是单价 x（元）的一次函数，而售出商品的总成本 z（元）又是销量 y 的一次函数. 现有一组统计数据如下表.

单价 x/ 元	120	130	…
销量 y/ 件	2 400	1 600	…

销量 y/ 件	2 400	1 600	…
成本 z/ 元	145 000	105 000	…

根据国家有关税收政策，每售出一件商品要向国家纳税 2 元.

求这种商品单价定为何值时，商家能获得最大销售利润，并求出这个最大销售利润.

五、直线形的应用

例 5 如图 20.3−4，A、B 两个村子在河 CD 的同侧，它们到河边的距离分别为 AC= 2 km，BD=6 km，且 CD=6 km，现要在河边 CD 上建一水厂向 A、B 两村输送自来水，铺设水管的工程费用为每千米 2.3 万元，请你在 CD 上选择水厂位置 O，使铺设水管的费用最省，最少费用是多少？

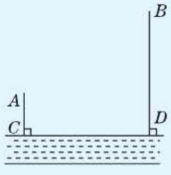


图 20.3−4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平均数、众数、中位数的应用

荣老师告诉你 平均数、众数、中位数都是反映一组数据集中趋势的量．在当今信息社会和市场经济的背景下，我们经常会遇到与平均数、众数、中位数有关的实际问题．

应用一 判断是非

例 1 在一次中学生田径运动会上，根据参加男子跳高初赛的运动员的成绩（单位：m），绘制出如图 1 所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：

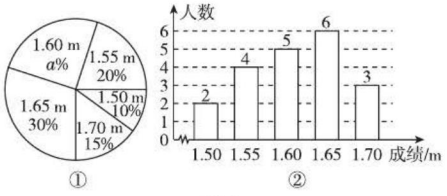


图 1

（1）图①中 a 的值为_____；

（2）求统计的这组初赛数据的平均数、众数和中位数；

（3）根据这组初赛成绩，由高到低确定 9 人能进入复赛，请直接写出初赛成绩为 1.65 m 的运动员能否进入复赛．

解题秘方：解题的关键是能够结合两个统计图找到进一步解题的有关信息．

解：（1）25

（2）$\because \bar{x}=\dfrac{1.50\times2+1.55\times4+\cdots+1.70\times3}{2+4+5+6+3}$

$=1.61$，

$\therefore$ 这组数据的平均数是 1.61.

$\because$ 在这组数据中，1.65 出现了 6 次，出现的次数最多，

$\therefore$ 这组数据的众数为 1.65.

$\because$ 将这组数据按从小到大的顺序排列，其中处于中间的两个数都是 1.60，且 $\dfrac{1.60+1.60}{2}=1.60$，

$\therefore$ 这组数据的中位数为 1.60.

（3）能．

方法点拨：平均数、中位数和众数都反映数据的集中趋势，但各自都有自己的代表性，利用三个数据各自的特征可以进行是非判断．

应用二 估算结果

例 2 为了传承优秀传统文化，我市组织了一次九年级 1 200 名学生参加的“汉字听写”大赛，为了更好地了解本次大赛的成绩分布情况，随机抽取了 100 名学生的成绩（满分 50 分），整理得到如图 2 所示的统计图和如下统计表：

成绩/分	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
人数	1	2	3	3	6	7	5	8	15	9	11	12	8	6	4

频数分布直方图

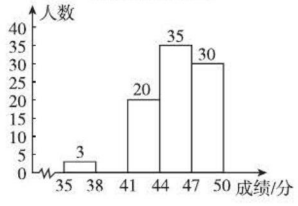


图 2

成绩分组	频数	百分比
$35\leqslant x<38$	3	3%
$38\leqslant x<41$	a	12%
$41\leqslant x<44$	20	20%
$44\leqslant x<47$	35	35%
$47\leqslant x\leqslant50$	30	b

请根据所提供的信息解答下列问题：

（1）样本的中位数是_____分；

（2）频数分布表中 $a=$_____，$b=$_____；

（3）请补全频数分布直方图；

（4）请根据抽样统计结果，估计本次大赛中成绩不低于 41 分的学生有多少人．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）将100个样本数据由小到大排序，第50和51个数的平均值就是中位数；（2）根据所有分组的频数之和等于100，百分比之和等于1求解；（3）根据（2）中数据补图即可；（4）41分及其以上的百分比×1 200所得结果就是本次大赛中成绩不低于41分的学生的人数.

解：（1）44.5

（2）12；30%

（3）补全频数分布直方图如图3.

（4）从频数分布表中得知，41分及其以上的百分比为1−（3%+12%）=85%，

1 200×85%=1 020（人），∴估计本次大赛中成绩不低于41分的学生有1 020人.

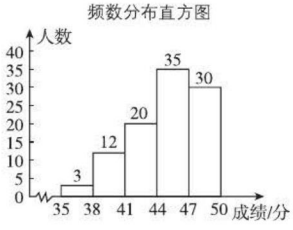


图3

方法点拨：用样本估计总体的思想是统计中最常用的思想，可以用样本中平均数、中位数和众数去估计总体中的情况.

应用三▶设计方案

例3 某文具店王经理统计了2018年1至5月A、B、C这三种型号的钢笔平均每月的销售量，并绘制出图4①（不完整）.销售这三种型号钢笔平均每月获得的总利润为600元，其中每种型号钢笔获得的利润分布情况如图4②.已知A、B、C这三种型号钢笔每支的利润分别是0.5元、0.6元、1.2元.请你结合图中的信息，解答下列问题.

（1）求出C型号钢笔平均每月的销售量，并将图4①补充完整；

（2）王经理计划6月份购进A、B、C这三种型号钢笔共900支.请你结合1至5月的销售情况（不考虑其他因素），设计一个方案，使获得的利润最大，并说明理由.

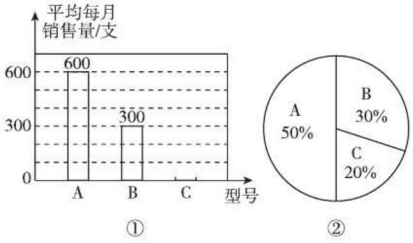


图4

解题秘方：（1）C型号钢笔平均每月的利润为600×20%=120（元），则C型号钢笔平均每月的销售量为120÷1.2=100（支）；

（2）利润大的应尽可能多进货，才可能获得最大利润，所以A、B、C这三种型号钢笔分别进500支、300支、100支.

解：（1）C型号钢笔平均每月的销售量为600×20%÷1.2=120÷1.2=100（支）；补图如图5.

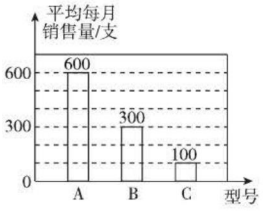


图5

（2）利润最大的C型号钢笔进能销售的最大量100支，其次B型号钢笔进能销售的最大量300支，余下的500支进A型号钢笔.

即A、B、C这三种型号钢笔分别进500支、300支、100支.

理由：利润大的应尽可能多进货，才可能获得最大利润.

方法点拨：本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用.读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键，条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

应用四▶综合运用

例4 为了从甲、乙两名选手中选拔一名

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参加射击比赛，现对他们进行一次测验，两个人在相同条件下各射靶10次，为了比较两个人的成绩，制作了如下的统计表和如图6所示的统计图.

甲、乙射击成绩统计表

	平均数	中位数	方差	命中10环的次数
甲	7			0
乙				1

甲、乙射击成绩折线图

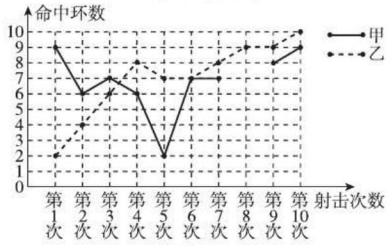


图6

（1）请补全上述图表.

（2）如果规定成绩较稳定者胜出，你认为谁应胜出？请说明你的理由.

（3）如果在（2）中希望另一名选手胜出，根据图表中的信息，应该制定怎样的评判规则？为什么？

解题秘方：（1）根据折线统计图列举出甲、乙的成绩，结合统计表计算出甲第8次射击的成绩、中位数、方差，以及乙的平均数、中位数及方差，补全图表即可.

（2）根据计算出的甲、乙两人的方差即可作出判断.

解：（1）根据折线统计图得甲的射击成绩分别为9，6，7，6，2，7，7，8，9，平均数为7，

则甲第8次射击成绩为$7\times10-(9+6+7+6+2+7+7+8+9)=9$，

所以甲的射击成绩分别为9，6，7，6，2，7，7，9，8，9.

中位数为7.

方差为$\frac{1}{10}\times[(9-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(2-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2]=4$.

乙的射击成绩分别为2，4，6，8，7，7，8，9，9，10，

平均数为$\frac{1}{10}\times(2+4+6+8+7+7+8+9+9+10)=7$.

中位数为7.5.

方差为$\frac{1}{10}\times[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2]=5.4$.

补全统计表如下，统计图如图7.

甲、乙射击成绩统计表

	平均数	中位数	方差	命中10环的次数
甲	7	7	4	0
乙	7	7.5	5.4	1

甲、乙射击成绩折线图

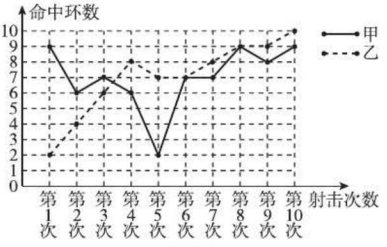


图7

（2）由甲的方差小于乙的方差，得甲的成绩比较稳定，故甲胜出.

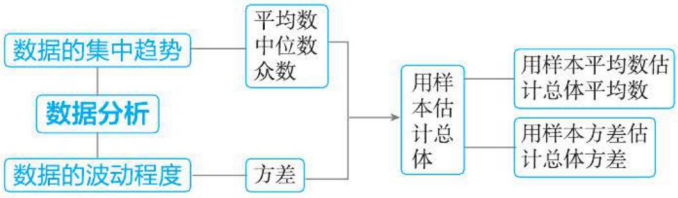
（3）（评判规则不唯一）如果希望乙胜出，应该制定如下评判规则：平均成绩高的胜出；若平均成绩相同，则随着比赛的进行，发挥越来越好者或命中满环（10环）次数多者胜出.因为甲、乙的平均成绩相同，乙只有第5次射击比第4次射击少命中1环，且命中1次10环，而甲第2次比第1次、第4次比第3次、第5次比第4次、第9次比第8次命中的环数都低，且命中10环的次数为0次，即随着比赛的进行，乙的射击成绩越来越好.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的平均数是 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；若 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次，且 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，则这 n 个数的平均数是 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$.

2. **中位数的求法：** 先将数据从大到小或从小到大排好顺序，若数据为偶数个，最中间的两个数的平均数即为中位数；若数据为奇数个，则中间一个数为中位数.

3. **众数的求法：** 一组数据中，出现次数最多的数就是这组数据的众数.

4. **方差：** 若数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 m，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2]$. 在平均数相同的条件下，方差越小，数据越整齐，稳定性越好.

知识方法专题

知识必学

专题一 “三数”与“三差”的计算

链接中考≫“三数”是平均数、中位数和众数，“三差”是极差、方差和标准差，对于数据的分析关键要看这六个数据，所以对这六个数据的考查是中考考查的重点，解答此类题的关键就是扣住定义.

例 1 [中考·鄂州]为了解某社区居民的用电情况，随机对该社区 10 户居民进行调查，下表是这 10 户居民 2015 年 4 月份用电量的调查结果：

居民/户	1	2	3	4
月用电量/度	30	42	50	51

那么关于这 10 户居民月用电量情况，下列说法错误的是（　　）

A. 中位数是 50　　B. 众数是 51

C. 方差是 42　　D. 极差是 21

解题秘方： 根据中位数、众数、方差、极差的定义进行判断.

解： 由题意可知排序后第 5，6 户的月用电量都是 50 度，故中位数是 50；月用电量为 51 度的户数有 4 户，出现次数最多，故众数是 51；极差是 51−30=21，排除 A、B、D 选项，只能选 C.

也可以代入方差计算公式进行计算，求出方差.

答案： C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：此题考查了众数、中位数、方差、极差，掌握众数、中位数、方差、极差的定义是解题的关键，众数是一组数据中出现次数最多的数，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（或最中间两个数的平均数），可用方差公式求方差.

专题二 加权平均数

链接中考≫ 加权平均数的计算是本章的重点，特别是对权的三种不同形式的考查是中考命题的热点. 一般以填空题、选择题的形式出现.

例2 （1）[中考·河南]小王参加某企业招聘测试，他的笔试、面试、技能操作得分分别为85分，80分，90分，若依次按照2∶3∶5的比例确定成绩，则小王的成绩是（　　）

A.255分　　B.84分

C.84.5分　　D.86分

（2）[中考·玉林]学校抽查了30名学生参加“学习雷锋社会实践”的活动次数，并根据数据绘成了条形统计图（如图20-1），则30名学生参加活动的平均次数是（　　）

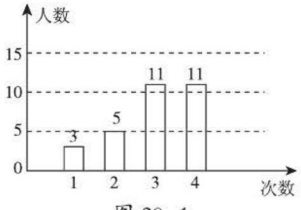


图20-1

A.2　　B.2.8　　C.3　　D.3.3

解：（1）把2，3，5分别看成是85分，80分和90分的权，按加权平均数的计算公式计算即可.

$\because \bar{x}=\dfrac{85\times2+80\times3+90\times5}{2+3+5}=86$（分），

∴小王的成绩为86分.

故选D.

（2）观察条形统计图，可知30名学生中，参加活动次数为1的有3人，参加活动次数为2的有5人，参加活动次数为3的有11人，参加活动次数为4的有11人，据此可计算平均次数.

30名学生参加活动的平均次数是

$$\frac{1\times3+2\times5+3\times11+4\times11}{30}=\frac{90}{30}=3,$$

故选C.

答案：（1）D　（2）C

方法点拨：一般地，如果在n个数据中，x_1出现f_1次，x_2出现f_2次，…，x_k出现f_k次，且$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，那么$\bar{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$为这组数据的加权平均数.

专题三 “三数”与“三差”的应用

链接中考≫ 平均数的计算要用到所有的数据，它表示所有的数据信息的平均水平；众数是当一组数据中某些数据多次重复出现时，人们往往关心的一个量；中位数可以代表一组数据的中间水平；方差反映一组数据的波动大小，即方差越大，波动越大；方差越小，波动越小. 做题时应该选择合适的统计量来描述数据.

例3 [中考·汕尾]在“全民读书月”活动中，小明调查了班级里40名同学本学期计划购买课外书的花费情况，并将结果绘制成如图20-2所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：（直接填写结果）

（1）本次调查获取的样本数据的众数是_____；

（2）这次调查获取的样本数据的中位数是_____；

（3）若该校共有学生1 000人，根据样本数据，估计本学期计划购买课外书花费50元的学生有_____人.

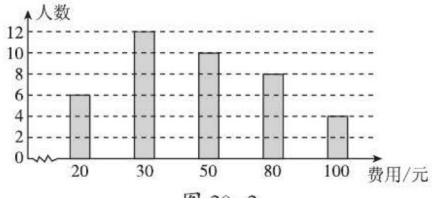


图20-2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）找到出现次数最多的数，即为众数；

（2）把样本数据按从小到大（或从大到小）的顺序排列，处于中间位置的一个数或两个数的平均数即为中位数；

（3）先算出本学期计划购买课外书花费 50 元的学生人数占调查总人数的百分比，然后根据用样本估计总体的思想，用该校学生总人数 1 000 乘所得的百分比即可求解.

答案：（1）30　（2）50　（3）250

例 4　［中考·河北］某厂生产 A，B 两种产品，其单价随市场变化而进行相应调整. 营销人员根据前三次单价的变化情况，绘制了如下统计表及不完整的折线图（如图 20-3）.

A，B 产品单价变化统计表

	第一次	第二次	第三次
A 产品单价 / 元	6	5.2	6.5
B 产品单价 / 元	3.5	4	3

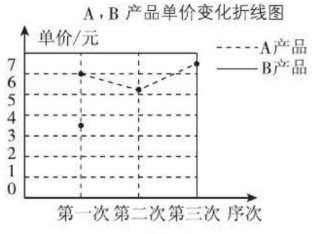


图 20-3

并求得了 A 产品三次单价的平均数和方差：$\overline{x}_A=5.9$；$s_A^2=\frac{1}{3}\times[(6-5.9)^2+(5.2-5.9)^2+(6.5-5.9)^2]=\frac{43}{150}$.

（1）补全图 20-3 中 B 产品单价变化的折线图. B 产品第三次的单价比上一次的单价降低了_____%；

（2）求 B 产品三次单价的方差，并比较哪种产品的单价波动小；

（3）该厂决定第四次调价，A 产品的单价仍为 6.5 元，B 产品的单价比 3 元上调 $m\%$（$m>0$），使得 A 产品这四次单价的中位数是 B 产品四次单价中位数的 2 倍少 1，求 m 的值.

解题秘方：（1）根据题目提供数据可补全折线图；（2）比较方差即可；（3）首先确定 A 产品这四次单价的中位数，然后确定 B 产品第四次单价的范围，最后根据“A 产品这四次单价的中位数是 B 产品四次单价中位数的 2 倍少 1”列式求 m 即可.

解：（1）如图 20-4 所示；25

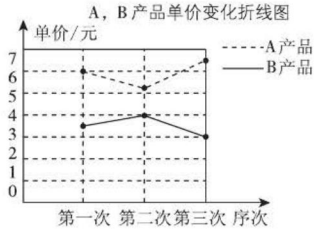


图 20-4

（2）$\overline{x}_B=\frac{1}{3}\times(3.5+4+3)=3.5$.

$s_B^2=\frac{(3.5-3.5)^2+(4-3.5)^2+(3-3.5)^2}{3}=\frac{1}{6}$.

$\because\frac{1}{6}<\frac{43}{150}$,

$\therefore$ B 产品的单价波动小.

（3）第四次调价后，

对于 A 产品，这四次单价的中位数为 $\frac{6+6.5}{2}=\frac{25}{4}$；

对于 B 产品，$\because m>0$,

$\therefore$ 第四次单价大于 3 元.

又 $\because\frac{3.5+4}{2}\times2-1=\frac{13}{2}>\frac{25}{4}$,

$\therefore$ 第四次单价小于 4 元.

$\therefore\frac{3(1+m\%)+3.5}{2}\times2-1=\frac{25}{4}$,

$\therefore m=25$.

方法点拨：此题考查了统计的有关知识，主要包括平均数、中位数、方差的意义. 它们各有局限性，因此要对统计量进行合理的选择和恰当的运用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题四 统计思想

专题解读≫运用统计思想，就是考查统计的有关知识，主要包括平均数、中位数和众数的意义，方差对数据决策的影响等，在中考中常以解答题形式出现.

例5 6月5日是世界环境日，某校组织了一次环保知识竞赛，每班选25名同学参加比赛，成绩分为A，B，C，D四个等级，其中相应等级的得分依次记为100分、90分、80分、70分，学校将某年级的一班和二班的成绩整理并绘制成统计图如图20-5所示：

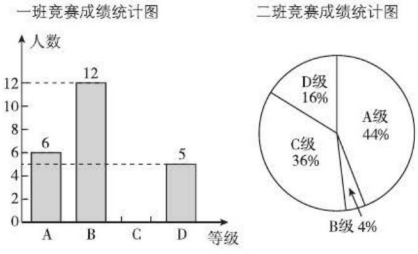


图20-5

根据以上提供的信息解答下列问题：

（1）把一班竞赛成绩统计图补充完整；

（2）求出下表中a，b，c的值：

	平均数/分	中位数/分	众数/分
一班	a	b	90
二班	87.6	80	c

（3）请从以下给出的三个方面中任选一个对这次竞赛成绩的结果进行分析：

①从平均数和中位数方面比较一班和二班的成绩；

②从平均数和众数方面比较一班和二班的成绩；

③从B级以上（包括B级）的人数方面来比较一班和二班的成绩.

解题秘方：（1）题求出一班中C级有多少人即可；（2）题根据平均数，中位数，众数的定义解答；（3）题任选一个即可.

解：（1）一班中C级有25-6-12-5=2（人）.故补全统计图如图20-6.

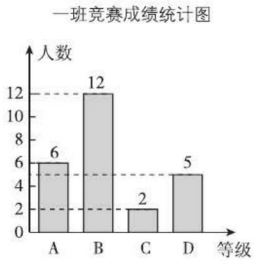


图20-6

（2）$a=(6\times100+12\times90+2\times80+70\times5)\div25=87.6$；$b=90$；$c=100$.

（3）①从平均数和中位数方面来比较，一班的成绩较好；

②从平均数和众数方面来比较，二班的成绩较好；

③从B级以上（包括B级）的人数方面来比较，一班的成绩较好.

专题五 数形结合思想

专题解读≫在确定“三数”和“三差”时，一般需要从统计图表中准确提取信息，运用数形结合思想对统计图表中的数据进行恰当的分析.这种解决问题的思想方法在中考中运用较广泛.

例6 随着我市社会经济的发展和交通状况的改善，我市的旅游业得到了高速发展，某旅游公司对我市一企业个人旅游年消费情况进行问卷调查，随机抽查部分员工，记录每个人年消费金额，并将调查数据适当整理，绘制成如下尚不完整的表和图（如图20-7）；

组别	个人年消费金额x/元	频数(人数)	百分比
A	$x\leqslant2\,000$	18	15%
B	$2\,000<x\leqslant4\,000$	a	b
C	$4\,000<x\leqslant6\,000$		
D	$6\,000<x\leqslant8\,000$	24	20%
E	$x>8\,000$	12	10%
	合计	c	100%

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

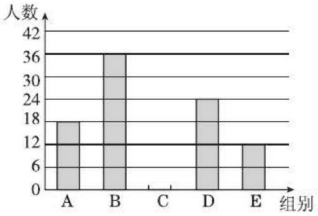


图 20−7

根据以上信息回答下列问题：

（1）a=_____，b=_____，c=_____，并将条形统计图补充完整；

（2）这次调查中，个人年消费金额的中位数出现在_____组；

（3）若这个企业有 3 000 名员工，请你估计个人旅游年消费金额在 6 000 元以上的人数．

解题秘方：（1）由统计图中的 B 组人数得到 a，由统计表的 A 组数据得到 c，再根据百分比 = 频数 ÷ 总数 × 100%，得到 b，最后求出 C 组人数，从而可将条形统计图补充完整．

（2）这次共调查了 120 人，其中 A 组 18 人，B 组 36 人，C 组 30 人，D 组 24 人，E 组 12 人，中位数应是第 60 个数与第 61 个数的平均数，这两个数据都在 C 组，故个人年消费金额的中位数出现在 C 组．

（3）个人旅游年消费金额在 6 000 元以上，是指 D、E 两组，它们的百分比分别为 20% 和 10%，

由此可知样本数据中，个人旅游年消费金额在 6 000 元以上的百分比为 30%，进而由总人数乘 30% 可求得结果．

解：（1）36；30%；120

C 组人数为 120−18−36−24−12=30. 补充条形统计图如图 20−8 所示．

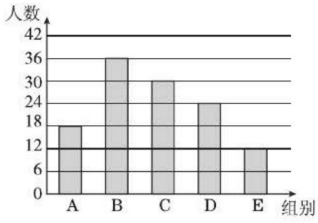


图 20−8

（2）C

（3）估计个人旅游年消费金额在 6 000 元以上的人数为 3 000 ×（20%+10%）=900.

方法点拨：将一组数据按大小顺序排列，如果数据的个数是奇数，那么处于中间位置的数叫做这组数据的中位数，如果数据的个数是偶数，那么处于中间位置的两个数的平均数叫做这组数据的中位数．

好题必解 ☞答案见 294 页

类型 1　平均数的应用

1. 张老师买了一辆启辰 R50X 汽车，为了掌握车的油耗情况，在连续两次加油时做了如下工作：

①把油箱加满油；

②记录了两次加油时的累计里程（注：“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程），以下是张老师连续两次加油时的记录：

加油时间	加油量 /L	加油时的累计里程 /km
2018 年 4 月 28 日	18	6 200
2018 年 5 月 16 日	30	6 600

则在这段时间内，该车每 100 km 的平均耗油量为（　　）

A.3 L　　B.5 L　　C.7.5 L　　D.9 L

2. 某校广播站要招聘 1 名记者，小亮和小丽报名参加了 3 项素质测试，成绩如下：

	写作能力	普通话水平	计算机水平
小亮	90 分	75 分	51 分
小丽	60 分	84 分	72 分

将写作能力、普通话水平、计算机水平这三项的总分由原来按 3 ∶ 5 ∶ 2 计算，变成按 5 ∶ 3 ∶ 2 计算，总分变化情况是（　　）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. 小丽增加得多　　B. 小亮增加得多

C. 两人成绩不变化　　D. 变化情况无法确定

类型 2　平均数与中位数的应用

3. 某公司有 15 名员工，他们所在的部门及相应每人所创的年利润如下表：

部　门	A	B	C	D	E	F	G
人　数	1	1	2	4	2	2	3
每人所创的年利润 / 万元	20	5	2.5	2.1	1.5	1.5	1.2

根据表中提供的信息填空：

（1）该公司每人所创年利润的平均数是_____万元；

（2）该公司每人所创年利润的中位数是_____万元；

（3）你认为应该使用平均数和中位数中的哪一个来描述该公司每人所创年利润的一般水平？

类型 3　中位数与众数的应用

4. 某家电商场的一个柜组出售容积分别为 268 升、228 升、185 升、182 升四种型号同一品牌的冰箱，每卖出一台冰箱，售货员就在一张纸上写出它的容积作为原始记录，到月底，柜组长清点原始记录，得到一组由 10 个 182、18 个 185、66 个 228 和 16 个 268 组成的数据．

（1）这组数据的平均数有实际意义吗？

（2）这组数据的中位数、众数分别等于多少？

（3）这个商场总经理关心的是中位数还是众数，说明理由？

类型 4　平均数、中位数与众数的应用

5. 某质量检测部门对甲、乙、丙三家公司销售产品的使用寿命进行了跟踪调查，统计结果如下（单位：年）：

甲公司：4，5，5，5，5，7，9，12，13，15；

乙公司：6，6，8，8，8，9，10，12，14，15；

丙公司：4，4，4，6，7，9，13，15，16，16.

请回答下列问题：

（1）在该产品的销售中，甲、乙、丙三家公司都声称其销售的该产品的使用寿命是 8 年，你如何理解这三家公司的宣传？（请用已学的统计量加以说明）

（2）如果你是顾客，你将选购哪家公司销售的产品，为什么？

（3）如果你是丙公司的推销员，结合上述数据，你将如何对本公司的产品进行推销？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 5　方差的应用

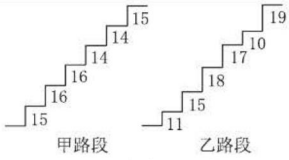
6. 在某旅游景区上山的一条小路上，有一些断断续续的台阶．如图是其中的甲、乙两段台阶路的示意图．请你用所学过的有关统计知识（平均数、中位数、方差和极差）回答下列问题：

（1）两段台阶路有哪些相同点和不同点？

（2）哪段台阶路走起来更舒服？为什么？

（3）为方便游客行走，需要重新整修上山的小路．对于这两段台阶路，在台阶数不变的情况下，请你提出合理的整修建议．

图中的数字表示每一级台阶的高度（单位：cm），并且数据 15，16，16，14，14，15 的方差 $s_{甲}^2=\frac{2}{3}$，数据 11，15，18，17，10，19 的方差 $s_{乙}^2=\frac{35}{3}$．



（第 6 题）

类型 6　用样本估计总体的应用

7. 老王家的鱼塘中放养某种鱼 1 500 条，若干年后，准备打捞出售，为了估计鱼塘中这种鱼的总质量，现从鱼塘中捕捞三次，得到数据如下表：

	鱼的条数	平均每条鱼的质量 /kg
第 1 次	15	2.8
第 2 次	20	3.0
第 3 次	10	2.5

（1）鱼塘中这种鱼平均每条约重多少千克（结果精确到 0.1）？

（2）若这种鱼放养的成活率是 82%，则鱼塘中这种鱼约有多少千克？

（3）如果把这种鱼全部卖掉，价格为每千克 6.2 元，那么这种鱼的总收入为多少元？若投资成本为 14 000 元，则这种鱼的纯收入是多少元？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十章测试卷

答案见 294 页

（120 分 90 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 某市五月份第二周连续七天的空气质量指数分别为 111，96，47，68，70，77，105，则这七天空气质量指数的平均数是（　　）

A.71.8　　B.77　　C.82　　D.95.7

2. 某专卖店专营某品牌的衬衫，店主对上一周中不同尺码的衬衫销售情况统计如下：

尺码	39	40	41	42	43
平均每天销售数量 / 件	10	12	20	12	12

该店主决定本周进货时，增加了一些 41 码的衬衫，影响该店主决策的统计量是（　　）

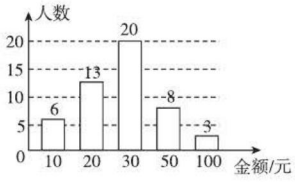
A. 平均数　　B. 方差

C. 众数　　D. 中位数

3. 7 位评委给一名演讲者打分（满分 10 分）如下：9，8，9，10，10，7，9，若去掉一个最高分和一个最低分，这名演讲者的最后平均得分是（　　）

A.7 分　　B.8 分　　C.9 分　　D.10 分

4. 随着智能手机的普及，抢微信红包成了春节期间人们最喜欢的活动之一．某中学九年级（5）班班长对全班 50 名学生在春节期间所抢的红包金额进行统计，并绘制成了统计图（如图）．根据图中提供的信息，红包金额的众数和中位数分别是（　　）



（第 4 题）

A.20，20　　B.30，20

C.30，30　　D.20，30

5. 学校组织领导、教师、学生、家长对教师的教学质量进行综合评分，满分为 100 分，张老师得分的情况如下：领导平均给分 80 分，教师平均给分 76 分，学生平均给分 90 分，家长平均给分 84 分，如果按照 1 ∶ 2 ∶ 4 ∶ 1 的权进行计算，那么张老师的综合评分为（　　）

A.83.5 分　　B.84.5 分

C.85.5 分　　D.86.35 分

6. 某小组同学在一周内参加家务劳动时间与人数情况如下表所示：

劳动时间 / 小时	2	3	4
人数	3	2	1

下列关于“劳动时间”这组数据叙述正确的是（　　）

A. 中位数是 2　　B. 众数是 2

C. 平均数是 3　　D. 方差是 0

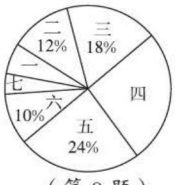
7. 若一组数据 3，4，x，5，6，8 的平均数是 5，则这组数据的中位数是（　　）

A.4　　B.4.5　　C.5　　D.6

8. 如果一组数据 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的方差为 2，那么数据 $3a_1$，$3a_2$，$3a_3$，…，$3a_n$ 的方差为（　　）

A.2　　B.6　　C.12　　D.18

9. 某校为了了解七年级学生的身高情况（单位：cm，精确到 1 cm），抽查了部分学生，将所得数据处理后分成七组（每组只含最低值，不含最高值），并制成如下统计表和如图所示的统计图（均不完整）．



（第 9 题）

分组	一	二	三	四	五	六	七
	140 ~ 145	145 ~ 150	150 ~ 155	155 ~ 160	160 ~ 165	165 ~ 170	170 ~ 175
人数	6	12		26			4

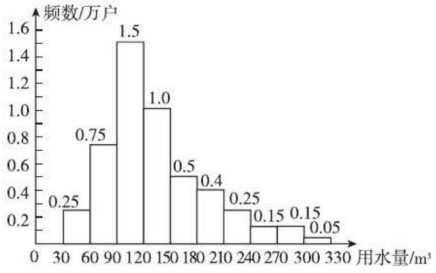
根据以上信息可知，样本的中位数落在（　　）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. 第二组　　B. 第三组

C. 第四组　　D. 第五组

10. 为了节约水资源，某市准备按照居民家庭年用水量实行阶梯水价，水价分档递增．计划使第一档、第二档和第三档的水价分别覆盖全市居民家庭的80%，15%和5%. 为合理确定各档之间的界限，随机抽查了该市5万户居民家庭上一年的年用水量（单位：m^3），绘制了统计图，如图所示．



（第10题）

下面有四个推断：

①年用水量不超过180 m^3的该市居民家庭按第一档水价交费；

②年用水量超过240 m^3的该市居民家庭按第三档水价交费；

③该市居民家庭年用水量的中位数在150 ~ 180之间；

④该市居民家庭年用水量的平均数不超过180.

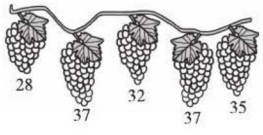
其中合理的是（　　）

A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

二、填空题（每题3分，共18分）

11. 一条葡萄藤上结有五串葡萄，每串葡萄的粒数如图所示（单位：粒），则这组数据的中位数为_____.



（第11题）

12. 跳远训练时，甲、乙两名同学在相同条件下各跳了10次，统计他们的平均成绩都是5.68米，且方差为$s_{甲}^2=0.3$，$s_{乙}^2=0.4$，则成绩较稳定的是_____.

13. 红树林中学共有学生1 600人，为了解学生最喜欢的课外体育运动项目的情况，学校随机抽查了200名学生，其中有85名学生表示最喜欢的项目是跳绳，则可估计该校学生中最喜欢的课外体育运动项目为跳绳的学生有_____人.

14. 已知一组数据0，2，x，4，5的众数是4，那么这组数据的中位数是_____.

15. 某公司销售部有五名销售员，2017年平均每人每月的销售额分别是6，8，11，9，8（万元）. 现公司需增加一名销售员，有甲、乙、丙三人应聘，试用三个月，平均每人每月的销售额分别为：甲是上述数据的平均数，乙是中位数，丙是众数. 最后正式录用三人中平均月销售额最高的人是_____.

16. 有5个从小到大排列的正整数，中位数是3，唯一的众数是8，则这5个数的和为_____.

三、解答题（共72分）

17. （8分）老师计算学生的学期总评成绩时按照如下的标准：平时作业占10%，单元测验占30%，期中考试占25%，期末考试占35%. 小丽和小明的成绩如下表所示：

学生	平时作业	单元测验	期中考试	期末考试
小丽	80	75	71	88
小明	76	80	70	90

请你通过计算，比较谁的学期总评成绩高？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. （8分）有甲、乙、丙三种糖果混合而成的什锦糖100千克，其中各种糖果的单价和质量如表所示，商家用加权平均数来确定什锦糖的单价.

	甲种糖果	乙种糖果	丙种糖果
单价/(元/千克)	15	25	30
质量/千克	40	40	20

（1）求该什锦糖的单价；

（2）为了使什锦糖的单价每千克至少降低2元，商家计划在什锦糖中加入甲、丙两种糖果共100千克，问其中最多可加入丙种糖果多少千克?

19. （10分）甲、乙两家电子厂在广告中都声称，它们的某种电子产品在正常情况下的使用寿命都是5年.质检部门对这两家销售的产品的使用寿命进行了跟踪调查，统计结果如下：（单位：年）

甲厂：3，4，5，6，7

乙厂：4，4，5，6，6

（1）分别求出甲厂、乙厂的该种电子产品在正常情况下的使用寿命的平均数和方差；

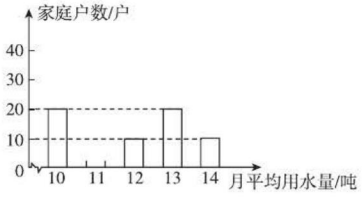
（2）如果你是顾客，你会选购哪家电子厂的产品?说明理由.

20. （10分）为了倡导“节约用水，从我做起”，黄冈市政府决定对市直机关500户家庭的用水情况进行一次调查，市政府调查小组随机抽查了其中100户家庭一年的月平均用水量（单位：吨），并将调查结果制成了如图所示的条形统计图.

（1）请将条形统计图补充完整；

（2）求这100个样本数据的平均数、众数和中位数；

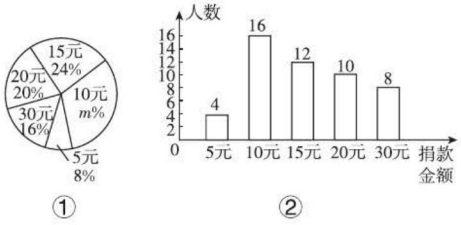
（3）根据样本数据，估计黄冈市直机关500户家庭中月平均用水量不超过12吨的约有多少户?



（第20题）

21. （10分）2017年8月8日四川九寨沟发生地震后，某校学生会向全校1 900名学生发起了“心系九寨沟”捐款活动，为了解捐款情况，学生会随机调查了部分学生的捐款金额，并用得到的数据绘制了如图所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



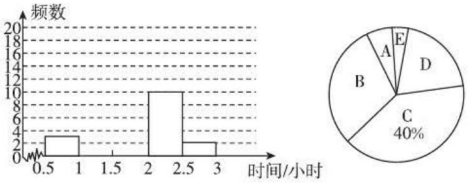
（第 21 题）

（1）本次接受随机抽样调查的学生人数为_____，图①中 m 的值是_____；

（2）求本次调查获取的样本数据的平均数、众数和中位数；

（3）根据样本数据，估计该校本次活动捐款金额为 10 元的学生约有多少名．

22.（12 分）九年级（1）班开展了为期一周的“敬老爱亲”社会活动，并根据学生做家务的时间来评价他们在活动中的表现．老师调查了全班 50 名学生在这次活动中做家务的时间，并将统计的时间（单位：小时）分成 5 组：A：$0.5 \leqslant x < 1$，B：$1 \leqslant x < 1.5$，C：$1.5 \leqslant x < 2$，D：$2 \leqslant x < 2.5$，E：$2.5 \leqslant x < 3$，制作成两幅不完整的统计图（如图）．



（第 22 题）

请根据图中提供的信息，解答下列问题：

（1）这次活动中学生做家务时间的中位数所在的组是_____；

（2）补全频数分布直方图；

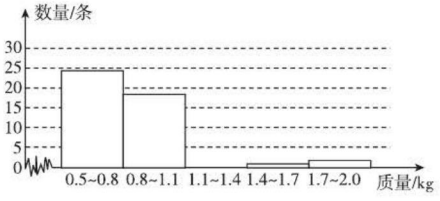
（3）该班的小明同学这一周做家务 2 小时，他认为自己做家务的时间比班里一半以上的同学多，你认为小明的判断符合实际吗？请用适当的统计知识说明理由．

23.（14 分）为了估计鱼塘中成品鱼（个体质量在 0.5 kg 及以上，下同）的总质量，先从鱼塘中捕捞 50 条成品鱼，称得它们的质量如下表：

质量/kg	0.5	0.6	0.7	1.0	1.2	1.6	1.9
数量/条	1	8	15	18	5	1	2

然后做上记号再放回鱼塘中，过几天又捕捞了 100 条成品鱼，发现其中 2 条带有记号．

（1）请根据表中数据补全如图所示的频数分布直方图（各组中数据包括左端点不包括右端点）；



（第 23 题）

（2）根据图中数据分组，估计从鱼塘中随机捕一条成品鱼，其质量落在哪一组的可能性最大？

（3）根据图中数据分组，估计鱼塘里质量中等的成品鱼，其质量落在哪一组内？

（4）请你用适当的方法估计鱼塘中成品鱼的总质量（精确到 1 kg）．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第十六章 二次根式

16.1 二次根式

【两年模拟兵法】

1. D **点拨**:紧扣二次根式的定义:①根指数为2(通常省略不写);②被开方数(式)为非负数进行判断.

2. B 3. C 4. A 5. B 6. $x\leqslant 6$

7. **解**:由题图知 $a<0,b>0$,$\therefore a-b<0$.

$\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|-|b|+|a-b|=-a-b-(a-b)=-2a$.

点拨:本题首先利用数轴判断出 a,b 的符号,进一步确定 $a-b$ 的符号,然后利用 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a,a>0,\\0,a=0,\\-a,a<0\end{cases}$ 化简.

8. **解**:(1)原式 $=(x^2-2)(x^2+2)$

$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$.

(2)原式 $=3(x^2-2y^2)$

$=3[x^2-(\sqrt{2}y)^2]$

$=3(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$.

(3)原式 $=(x^2-y^2)(x^2-2y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$.

(4)原式 $=-(x^2-2\sqrt{2}x+2)$

$=-(x-\sqrt{2})^2$.

点拨:(1)两次应用平方差公式分解;(2)先提取公因数3,再应用平方差公式分解;(3)先应用"十字相乘法"分解,再应用平方差公式分解;(4)先提取 -1,再应用完全平方公式分解.

9. **解**:甲的解答是正确的.乙的解答错在 $\sqrt{(1-a)^2}=1-a$,因为 $a=5$,所以 $1-a<0$,所以 $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$.

10. **解**:由二次根式有意义可得 $\begin{cases}a-5\geqslant 0,\\10-2a\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\geqslant 5,\\a\leqslant 5,\end{cases}$

$\therefore a=5$. $\therefore b+4=0$,即 $b=-4$.

11. **解**:$\because \sqrt{52n}=\sqrt{4\times 13n}$,且 $\sqrt{52n}$ 是整数,

$\therefore n$ 的最小正整数值为13.

点拨:如果一个二次根式化简后是整数,那么其被开方数是完全平方数.解决本题首先要把被开方数分解因数,把能化为完全平方数的部分找出来,然后确定 n 的最小正整数值.

12. **错解**:$\because |x-1|=2$,$\therefore x-1=2$,$\therefore x=3$.

$\therefore \sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}$

$=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}$

$=x-4-(2x-1)$

$=x-4-2x+1$

$=-x-3$.

将 $x=3$ 代入,得原式 $=-6$.

错解分析:①若 $|x|=a(a\geqslant 0)$,则 $x=\pm a$,而不是 $x=a$;② $\sqrt{a^2}=|a|$,而不是 $\sqrt{a^2}=a$.

正确解法:$\because |x-1|=2$,$\therefore x-1=\pm 2$,

$\therefore x=3$ 或 $x=-1$.

$\therefore \sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}=|x-4|-|2x-1|$.

当 $x=3$ 时,原式 $=|x-4|-|2x-1|=|-1|-|5|=1-5=-4$;

当 $x=-1$ 时,原式 $=|x-4|-|2x-1|=|-5|-|-3|=5-3=2$.

方法规律:本题运用了分类讨论思想.去绝对值符号常常需要分类讨论:当绝对值符号内的代数式大于或等于0时,去掉绝对值符号后是它本身;当绝对值符号内的代数式小于0时,去掉绝对值符号后是它的相反数.

13. **解**:$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$

$=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a-\frac{1}{a}\right|+\left|a+\frac{1}{a}\right|$.

$\because -1<a<0$,$\therefore a+\frac{1}{a}<0$,$a-\frac{1}{a}>0$.

$\therefore$ 原式 $=a-\frac{1}{a}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-\frac{2}{a}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

16.2 二次根式的乘除

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨**:本题考查最简二次根式的定义,最简二次根式必须满足两个条件:被开方数不含分母;被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

3. C

4. A **点拨**:由题意可知$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x-1\geqslant 0,\end{cases}$解得$x\geqslant 1$.

5. C **点拨**:一般来说,最简根式$\sqrt{a}$的有理化因式为它本身,即$\sqrt{a}$.

6. C **点拨**:本题综合考查了二次根式的乘除法及二次根式的化简,其中①②④是正确的,由于$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=3\sqrt{\frac{2}{27}}=3\sqrt{\frac{6}{9^2}}=3\times\frac{\sqrt{6}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,因此③是错误的.

7. A **点拨**:$m=\frac{2\sqrt{63}}{3}=\frac{6\sqrt{7}}{3}=2\sqrt{7}$,由于$2\sqrt{7}=\sqrt{28}$,而$5<\sqrt{28}<6$,所以$5<m<6$,故选A.

8. (1) **错解**:$\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{ab}\div\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=\sqrt{ab}\div 1=\sqrt{ab}$.

错解分析:二次根式的乘除混合运算,应按从左到右的顺序进行计算,或先将除法统一为乘法再计算,错解错在没有按运算顺序计算.

正确解法:$\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{ab\div a\times\frac{1}{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$.

(2) **解**:$\frac{1}{4}\sqrt{18}\times 8\sqrt{\frac{1}{36}}\div\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\times 8\div\frac{2}{3}\right)\sqrt{18\times\frac{1}{36}\times\frac{2}{9}}=3\sqrt{\frac{1}{9}}=3\times\frac{1}{3}=1$.

9. **解**:(1)D

(2)在去掉绝对值符号时没有准确确定$a-2b$与0的大小关系,导致去绝对值符号出错

(3)$\because 0<a<2b$,$\therefore a-2b<0$.

$$\therefore \frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^2b-4ab^2+4b^3}{a}}$$

$$=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{b(a^2-4ab+4b^2)}{a}}$$

$$=\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{ab(a-2b)^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a}{a-2b}\cdot\frac{|a-2b|}{|a|}\cdot\sqrt{ab}$$

$$=\frac{a}{a-2b}\cdot\frac{-(a-2b)}{a}\cdot\sqrt{ab}$$

$$=-\sqrt{ab}.$$

点拨:化简二次根式时,一定要注意题目中所给出的限制条件,这是化简时去掉绝对值符号的关键.

10. **解**:$\frac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\frac{9-a}{2a+6}\cdot\frac{1}{a+9}$

$$=\frac{(9+a)(9-a)}{(a+3)^2}\cdot\frac{2(a+3)}{9-a}\cdot\frac{1}{a+9}$$

$$=\frac{2}{a+3}.$$

当$a=\sqrt{3}-3$时,原式$=\frac{2}{\sqrt{3}-3+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

点拨:先将所求式子化为最简形式,然后代值计算.本题的结果要通过分母有理化化为最简二次根式.

11. **解**:根据二次根式的非负性及已知条件可得

$$\begin{cases}4a-b+1=0,\\\frac{1}{3}b-4a-3=0.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-1,\\b=-3.\end{cases}$$

所以$2a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{-\frac{1}{b}}\right)$

$$=2a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\div\left(-\frac{1}{b}\right)}$$

$$=2a\cdot\sqrt{-\frac{b^2}{a}}$$

$$=-2\times\sqrt{-\frac{(-3)^2}{-1}}$$

$$=-2\times 3$$

$$=-6.$$

方法规律:本题巧用了非负数的性质和方程思想,利用二次根式的非负性构建方程组,求出字母的值,然后进行化简求值.

12. **解**:因为$\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$,所以$9-x\geqslant 0$,$x-7\geqslant 0$,即$7\leqslant x\leqslant 9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又因为 x 为偶数,所以 $x=8$.

所以原式 $=(1+x)\cdot\sqrt{\dfrac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)}}$

$=\sqrt{(1+x)^2\cdot\dfrac{x-4}{x+1}}$

$=\sqrt{(x-4)(x+1)}$

$=\sqrt{(8-4)\times(8+1)}$

$=\sqrt{4\times9}$

$=6$.

16.3 二次根式的加减

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**化成最简二次根式后即可判断.

2. D

3. B

4. 2 **点拨:**因为题中的二次根式已经是最简二次根式,所以直接令被开方数相等即可,$2b+1=7-b$,解得 $b=2$.

5. 解:(1)原式 $=\sqrt{\dfrac{48}{3}}-\sqrt{\dfrac{12}{2}}+2\sqrt{6}$

$=4-\sqrt{6}+2\sqrt{6}$

$=4+\sqrt{6}$.

(2)原式 $=8\sqrt{6}-18\sqrt{6}+3-2$

$=1-10\sqrt{6}$.

(3)原式 $=2b\cdot\dfrac{\sqrt{ab}}{b}+\dfrac{3}{a}\cdot a\sqrt{ab}-\left(4a\cdot\dfrac{\sqrt{ab}}{a}+3\sqrt{ab}\right)$

$=2\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}$

$=-2\sqrt{ab}$.

(4)原式 $=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=0$.

6. 解:$\dfrac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{\sqrt{xy}-y}{x-\sqrt{xy}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\dfrac{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$.

当 $x=\sqrt{3}+1$,$y=\sqrt{3}-1$ 时,原式 $=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.

7. 解:(1)m^2+3n^2;$2mn$

(2)13;4;1;2(答案不唯一)

(3)由题意,得 $a=m^2+3n^2$,$4=2mn$.

$\because m,n$ 为正整数,$\therefore m=2,n=1$ 或 $m=1,n=2$.

$\therefore a=2^2+3\times1^2=7$ 或 $a=1^2+3\times2^2=13$.

点拨:(1)运用完全平方公式求解;(2)首先确定好 m,n 的值,然后根据(1)的结论即可求出 a,b 的值,答案不唯一;(3)根据题意,得 $4=2mn$,首先确定 m,n 的值,通过分析知 $m=2,n=1$ 或 $m=1,n=2$,然后即可确定 a 的值. 本题主要考查二次根式的运算与完全平方公式,解题的关键在于熟练运用完全平方公式和二次根式的运算法则.

8. 解:$\because a=\sqrt{7}+2,b=\sqrt{7}-2$,

$\therefore a+b=\sqrt{7}+2+\sqrt{7}-2=2\sqrt{7}$,

$a-b=\sqrt{7}+2-(\sqrt{7}-2)=4$,

$ab=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$.

(1)$a^2b+b^2a=ab(a+b)=3\times2\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

(2)$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=4^2+3=16+3=19$.

(3)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\sqrt{7}\times4=8\sqrt{7}$.

9. 解:$\because a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3},b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,

$\therefore a-c=(a-b)+(b-c)=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}$.

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$

$=\dfrac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]$

$=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$

$=\dfrac{1}{2}[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2]$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{1}{2}\times 36$

$=18.$

10. 解:$\because (a-\sqrt{2}+1)^2$ 与 $\sqrt{b-2}$ 互为相反数,

$\therefore (a-\sqrt{2}+1)^2+\sqrt{b-2}=0,$

$\therefore a-\sqrt{2}+1=0, b-2=0,$

$\therefore a=\sqrt{2}-1, b=2.$

$\therefore a^b=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}.$

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:由题意得 $x-4\geqslant 0, 4-x\geqslant 0,$

$\therefore x=4, \therefore y=\frac{1}{2}.$

$\therefore x^2+y^2=4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=16\frac{1}{4}.$

2. 解:由题意得 $-a^2\geqslant 0, \therefore a^2\leqslant 0,$

又 $a^2\geqslant 0, \therefore a=0.$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{3}-\sqrt{3}+0=0.$

3. 解:$\because \sqrt{x+3}\geqslant 0, \sqrt{x+y-6}\geqslant 0$,且其和为 0,

$\therefore x+3=0, x+y-6=0,$

解得 $x=-3, y=9.$

$\therefore x, y$ 的值分别为 $-3, 9.$

4. 解:由题意得 $\sqrt{5x-2}\geqslant 0$ 且 $5x-2\geqslant 0,$

即 $x\geqslant\frac{2}{5}.$

$\therefore$ 当 $x=\frac{2}{5}$ 时,式子 $\sqrt{5x-2}+3$ 的取值最小,最小值为 3.

5. 解:由题意知 $\begin{cases}2-a\geqslant 0,\\ 3a-6\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a=2, \therefore b=4,$

当三边长分别为 2,2,4 时不能构成三角形,当三边长分别为 4,4,2 时能构成三角形,$\therefore$ 此等腰三角形的周长为 10.

6. 解:由图可知,$a<0, c<0, b>0$,所以 $a+c<0, c-b<0,$

所以原式 $=-a-[-(a+c)]+[-(c-b)]-b$

$=-a+a+c-c+b-b$

$=0.$

点拨:先根据 a, b, c 在数轴上的对应点的位置确定 $a, a+c, c-b, b$ 的符号,再利用二次根式的性质进行化简.

7. 解:$\because (\sqrt{5}+\sqrt{13})^2=18+2\sqrt{65},$

$(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2=18+2\sqrt{77},$

$18+2\sqrt{65}<18+2\sqrt{77},$

$\therefore (\sqrt{5}+\sqrt{13})^2<(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2.$

又$\because \sqrt{5}+\sqrt{13}>0, \sqrt{7}+\sqrt{11}>0,$

$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{13}<\sqrt{7}+\sqrt{11}.$

8. 解:因为 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}\div\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}=\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}+2)^2}=$

$\frac{a+4\sqrt{a}+3}{a+4\sqrt{a}+4}<1$,易知 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}>0, \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}>0$,所以

$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}.$

点拨:作商比较两个二次根式的大小的方法:当两个二次根式(均为正数)均由分母和分子两部分组成时,常通过作商比较它们的大小,先计算两个二次根式的商,然后比较商与 1 的大小关系. 已知 $a>0, b>0$,若 $\frac{a}{b}>1$,则 $a>b$;若 $\frac{a}{b}=1$,则 $a=b$;若 $\frac{a}{b}<1$,则 $a<b.$

9. 解:$\because \frac{\sqrt{11}-1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{11}-3}{3}, \sqrt{11}-3>0,$

$\therefore \frac{\sqrt{11}-3}{3}>0. \therefore \frac{\sqrt{11}-1}{3}>\frac{2}{3}.$

10. 解:$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}>0,$

$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}>0,$

$\because \sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>0,$

$\therefore \frac{1}{x}>\frac{1}{y}>0, \therefore x<y.$

11. 解:原式 $=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2\times 5}+\sqrt{2\times 7}+\sqrt{3\times 5}+\sqrt{3\times 7}}$

$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

12. 解:设 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=a, \sqrt{x+1}+\sqrt{x}=b,$

则 $a+b=2\sqrt{x+1}, ab=1.$

原式 $=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$=\frac{(2\sqrt{x+1})^2-2\times1}{1}=4x+2.$$

13. 解: 将$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$两边同时平方得$x+\frac{1}{x}-2=4$,$\therefore x+\frac{1}{x}=6$.

$$\therefore \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12}=\sqrt{6^2+12}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

点拨: 本题先将条件式两边同时平方,求出$x+\frac{1}{x}$的值,再将$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$配方成含$x+\frac{1}{x}$的二次根式,从而运用整体代入就可求出二次根式$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$的值.

14. 解: 设$x=k(k>0)$,则$y=2k$,$z=3k$,

$$\therefore \text{原式}=\frac{\sqrt{3k}}{\sqrt{4k}+\sqrt{5k}}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}.$$

【第十六章测试卷】

一、1. A **2.** C **3.** C **4.** D **5.** B **6.** B **7.** C **8.** D **9.** C **10.** B

二、11. $\geqslant1$ **12.** 6 **13.** $9\sqrt{3}$ **14.** $-\sqrt{-y}$ **15.** $\frac{2}{3}$ **16.** 5

三、17. 解: (1) 原式$=4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=7\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

(2) 原式$=\left(-1\times\frac{1}{3}\times5\right)\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{28}\times\frac{16}{7}}$

$=-\frac{5}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{7}$

$=-\frac{5\sqrt{10}}{21}$.

18. 解: $a^2-6a-2=(a-3)^2-11$.

当$a=3-\sqrt{10}$时,

$(a-3)^2-11=(3-\sqrt{10}-3)^2-11=-1$.

19. 解: 根据题意得$\begin{cases}m-n-1=2,\\2m+n+3=m+10,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=5,\\n=2.\end{cases}$

20. 解: $\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)\div\frac{a^2-b^2}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}\div\frac{(a+b)(a-b)}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\frac{a}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a-b}{a+b}$.

当$a=2+\sqrt{3}$,$b=2-\sqrt{3}$时,

$$\text{原式}=\frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

21. 解: 能. 理由如下:因为$\sqrt{8}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}$,

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$,所以$\sqrt{8}+\sqrt{18}>\sqrt{32}$.

所以这三根钢条能焊成一个三角形钢架.

22. 解: 由题意,得$a-2\,019\geqslant0$. $\therefore a\geqslant2\,019$.

原等式变形为$a-2\,018+\sqrt{a-2\,019}=a$.

整理,得$\sqrt{a-2\,019}=2\,018$.

两边平方,得$a-2\,019=2\,018^2$.

$\therefore a-2\,018^2=2\,019$.

23. 解: (1) $S=\frac{1}{2}(\sqrt{8}+\sqrt{32})\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}\,(\text{m}^2)$.

答:横断面的面积为$3\sqrt{6}$ m^2.

(2) $\frac{300}{3\sqrt{6}}=\frac{100}{\sqrt{6}}=\frac{100\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{100\sqrt{6}}{6}=\frac{50\sqrt{6}}{3}(\text{m})$.

答:可修$\frac{50\sqrt{6}}{3}$ m长的拦河坝.

24. 解: 第1个数:当$n=1$时,

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}$

$=1$.

第2个数:当$n=2$时,

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}\times1=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十七章 勾股定理

17.1 勾股定理

【两年模拟兵法】

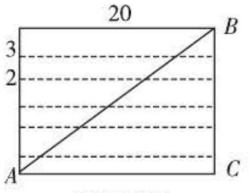
1. C 2. D 3. C

4. D **点拨**:由题图可知,$x^2=1^2+1^2=2$,则 $x^2-10=2-10=-8$,-8 的立方根为 -2.

5. D **点拨**:本题考查了平面展开图中最短路径问题,解题的关键是会将圆柱的侧面展开,并利用勾股定理解答.

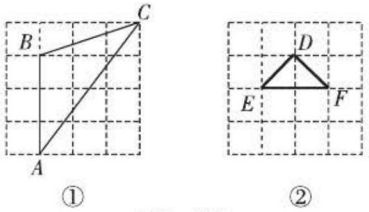
6. **解**:∵ $\triangle BDC'$ 是由 $\triangle BDC$ 折叠得到的,
∴ $\triangle BDC'$ 与 $\triangle BDC$ 全等,∴ $\angle DBC=\angle DBE$.
∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle DBC=\angle BDE$,
∴ $\angle DBE=\angle BDE$,∴ $BE=DE$.
设 $AE=x$,则 $DE=AD-AE=8-x$,$BE=8-x$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,∵ $AE^2+AB^2=BE^2$,
∴ $x^2+6^2=(8-x)^2$,解得 $x=1.75$,
即 AE 的长为 1.75.

7. **解**:把台阶展成如图所示的平面图形,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC=20$,$BC=15$,由勾股定理,得 $AB^2=BC^2+AC^2=15^2+20^2=625=25^2$,所以 $AB=25$.
所以蚂蚁走的最短路程是 25.



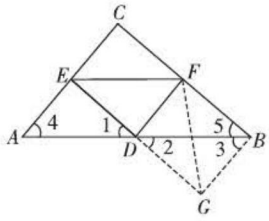
(第 7 题)

8. **解**:(1)画法不唯一. 如图①所示,三角形 ABC 即为所求,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$.
(2)答案不唯一.
如图②所示,$\triangle DEF$ 即为所求,$EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=2$.



(第 8 题)

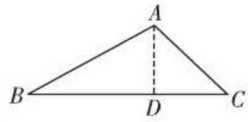
9. **证明**:如图所示,延长 ED 至点 G,使 $DG=ED$,连接 BG,FG.
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BDG$ 中,$AD=DB$,$\angle1=\angle2$,
$ED=DG$,
∴ $\triangle ADE\cong\triangle BDG(\mathrm{SAS})$. ∴ $AE=BG$,$\angle4=\angle3$.
又∵ $\angle4+\angle5=90°$,
∴ $\angle3+\angle5=90°$.
又∵ $DF\perp EG$,$DE=DG$,∴ $FG=EF$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle FBG$ 中,$BG^2+BF^2=FG^2$,即 $AE^2+BF^2=EF^2$.



(第 9 题)

点拨:欲证 $AE^2+BF^2=EF^2$,应联想到勾股定理,把 AE,BF 和 EF 转化为直角三角形的三边.

10. **解**:(1)如图,作 $AD\perp BC$ 于 D. 则 $AD=10$ m,
在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,∵ $\angle C=45°$,
∴ $AD=CD=10$ m,
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,
∵ $\angle B=30°$,
∴ $AB=2AD=20$ m.
∴ $BD=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}$(m),
∴ $BC=BD+DC=(10+10\sqrt{3})$ m.



(第 10 题)

(2)结论:这辆汽车超速.
理由:∵ $BC=(10+10\sqrt{3})\,\mathrm{m}\approx27$ m,
∴ 汽车速度 $\approx\frac{27}{0.9}=30(\mathrm{m/s})=108$ km/h,
∵ $108>80$, ∴ 这辆汽车超速.

11. **解**:设每层楼高为 x 米,由题意得:
$MC'=MC-CC'=2.5-1.5=1$(米),
∴ $DC'=(5x+1)$ 米,$EC'=(4x+1)$ 米,
在 $\mathrm{Rt}\triangle DC'A'$ 中,$\angle DA'C'=60°$,
∴ $\angle A'DC'=30°$. ∴ $A'C'=\frac{1}{2}A'D$.
∴ 由勾股定理易得
$C'A'=\frac{\sqrt{3}}{3}DC'=\frac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)$ 米,
在 $\mathrm{Rt}\triangle EC'B'$ 中,$\angle EB'C'=30°$,
∴ $EC'=\frac{1}{2}EB'$.
∴ 由勾股定理易得
$C'B'=\sqrt{3}EC'=\sqrt{3}(4x+1)$ 米,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because A'B'=C'B'-C'A'=AB$,

$\therefore \sqrt{3}(4x+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)=14$,

解得 $x\approx 3.17$,

则居民楼高为 $5\times 3.17+2.5\approx 18.4$(米).

17.2 勾股定理的逆定理

【两年模拟兵法】

1. D

2. C **点拨:** $\because \angle A=\angle B-\angle C$, $\angle A+\angle B+\angle C=180°$, $\therefore \angle B=90°$,

$\therefore$ ①能判断$\triangle ABC$是直角三角形;

$\because \angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$, $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore \angle A=45°$, $\angle B=60°$, $\angle C=75°$,

$\therefore$ ②不能判断$\triangle ABC$是直角三角形;

$\because a^2=(b+c)(b-c)$, $\therefore a^2+c^2=b^2$,

$\therefore$ ③能判断$\triangle ABC$是直角三角形;

$\because a:b:c=5:12:13$, $\therefore a^2+b^2=c^2$,

$\therefore$ ④能判断$\triangle ABC$是直角三角形.

$\therefore$ 能判断$\triangle ABC$是直角三角形的有3个.

3. A

4. D **点拨:** 设三角形三边长分别为 a, a, $\sqrt{2}a$, 因为 $a^2+a^2=(\sqrt{2}a)^2$, 故该三角形为等腰直角三角形.

5. **解:** 如图, 连接 AC, 因为 $AD=4$ m, $CD=3$ m, $AD\perp DC$, 所以 $AC=5$ m.

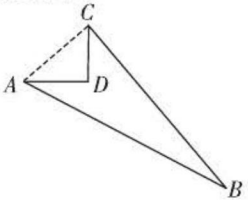
又因为 $BC=12$ m, $AB=13$ m,

所以 $AC^2+BC^2=5^2+12^2=169=13^2=AB^2$,

所以$\triangle ACB$是直角三角形.

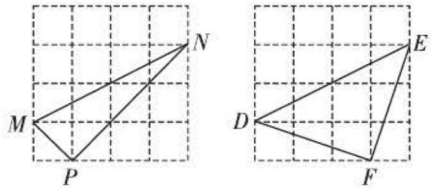
所以 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 5\times 12-\frac{1}{2}\times 3\times 4=24(\text{m}^2)$.

所以这块地的面积为 24 m^2.



(第5题)

6. **解:** 答案不唯一, 如图所示.



(第6题)

7. **解:** $\triangle ABC$是等腰直角三角形. 理由如下:

$\because \triangle ACE\cong\triangle BCD$,

$\therefore \angle EAC=\angle DBC$, $AE=BD$, $AC=BC$.

又$\because AD^2+BD^2=DE^2$, $\therefore AD^2+AE^2=DE^2$,

$\therefore \triangle AED$为直角三角形, 且$\angle EAD=90°$.

又$\because \angle EAD=\angle EAC+\angle CAD=\angle DBC+\angle CAD$,

$\therefore \angle ACB=180°-\angle DBC-\angle CAD=180°-\angle EAD=180°-90°=90°$.

$\therefore \triangle ABC$为直角三角形.

又$\because AC=BC$,

$\therefore \triangle ABC$为等腰直角三角形.

8. **解:** (1) 在 Rt$\triangle A'C'D'$中, $C'D'=1$, $A'D'=3$,

由勾股定理得, $A'C'=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

(2) $\angle BAC=\angle B'A'C'$. 理由如下:

$\because \angle BAC$为等腰直角三角形的一锐角,

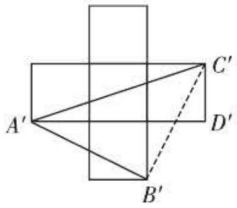
$\therefore \angle BAC=45°$.

如图, 连接 $B'C'$, 由勾股定理可得

$A'B'=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$B'C'=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$\therefore A'B'=B'C'$.



(第8题)

$\because A'B'^2+B'C'^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=10=(\sqrt{10})^2=A'C'^2$,

$\therefore \triangle A'B'C'$为直角三角形.

$\therefore \triangle A'B'C'$为等腰直角三角形,

$\therefore \angle B'A'C'=45°$,

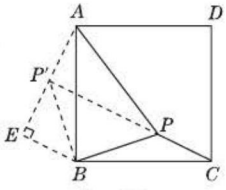
$\therefore \angle BAC=\angle B'A'C'$.

9. **解:** 如图, 将$\triangle BPC$绕点 B 逆时针旋转 90°, 得到$\triangle BP'A$,

则 $\triangle BPC\cong\triangle BP'A$, $\angle PBP'=90°$,

$\therefore AP'=CP=1$,

$BP'=BP=\sqrt{2}$, $\angle BP'A=\angle BPC$.



(第9题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

连接 PP',

在Rt$\triangle BP'P$中,

$\because BP = BP' = \sqrt{2}$, $\angle PBP' = 90°$,

$\therefore PP' = \sqrt{2+2} = 2$, $\angle BP'P = 45°$.

在 $\triangle AP'P$ 中, $\because AP'^2 + PP'^2 = 1^2 + 2^2 = 5 = (\sqrt{5})^2 = PA^2$,

$\therefore \triangle AP'P$ 是直角三角形,且 $\angle AP'P = 90°$,

$\therefore \angle BP'A = 90° + 45° = 135°$,

$\therefore \angle BPC = \angle BP'A = 135°$.

过点 B 作 $BE \perp AP'$,交 AP' 的延长线于点 E,则 $\angle EP'B = 180° - \angle BP'A = 45°$,$\therefore EP' = BE$.

又$\because EP'^2 + BE^2 = BP'^2$,$\therefore EP' = 1$,

$\therefore AE = AP' + EP' = 1 + 1 = 2$.

在Rt$\triangle ABE$中,由勾股定理,

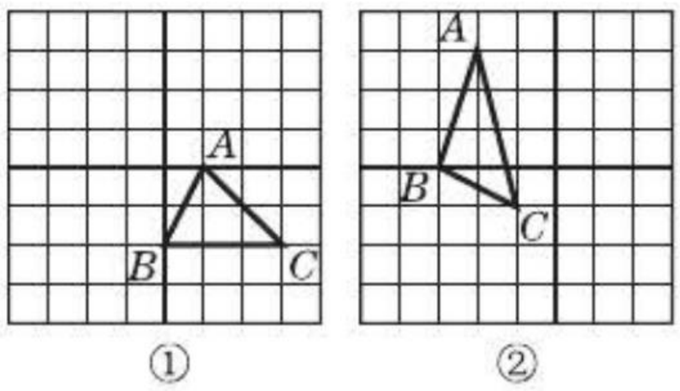
得 $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{5}$.

$\therefore \angle BPC = 135°$,正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{5}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)如图①中的$\triangle ABC$为所求的三角形.



(第1题)

(2)如图②中的$\triangle ABC$的三边长分别为 $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$,三角形的周长为 $\sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{17}$.

方法总结:在网格中画长为$\sqrt{n}$的线段的步骤:(1)设法将 n 表示成两个整数的平方和;(2)构造直角三角形,使直角三角形的两条直角边长等于第一步得出的两个整数,斜边即为长为$\sqrt{n}$的线段.

2. 解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,

$\therefore \angle D = \angle A = \angle C = 90°$, $AD = BC = 6$, $CD = AB = 8$.

根据题意得$\triangle ABP \cong \triangle EBP$,

$\therefore EP = AP$, $\angle E = \angle A = 90°$, $BE = AB = 8$.

在$\triangle ODP$和$\triangle OEG$中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle E = 90°, \\ OD = OE, \\ \angle DOP = \angle EOG, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ODP \cong \triangle OEG$.

$\therefore OP = OG$, $PD = GE$. $\therefore DG = EP$.

设 $AP = EP = x$,则 $GE = PD = 6 - x$, $DG = x$,

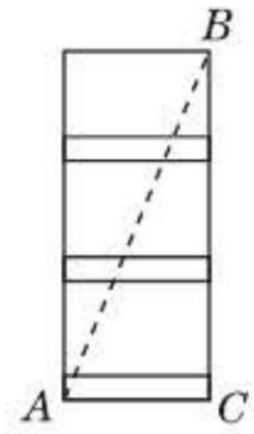
$\therefore CG = 8 - x$, $BG = 8 - (6 - x) = 2 + x$.

根据勾股定理得 $BC^2 + CG^2 = BG^2$.

即 $6^2 + (8 - x)^2 = (x + 2)^2$,解得 $x = 4.8$,

$\therefore AP = 4.8$.

3. C **点拨:**将台阶面展开,连接 AB,如图,线段 AB 即为壁虎所爬的最短路线. 在Rt$\triangle ABC$中,$BC = 30 \times 3 + 10 \times 3 = 120$(cm), $AC = 50$ cm,根据勾股定理,得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 16\,900$,所以 $AB = 130$ cm. 所以壁虎至少爬行 130 cm.



(第3题)

4. 解:如图所示,连接 BN, BD,

$\because$ 正方形是轴对称图形,点 B 与点 D 关于直线 AC 对称,

$\therefore$ 直线 AC 为 BD 的垂直平分线,

$\therefore BN = ND$.

$\therefore DN + MN = BN + MN$.

连接 BM 交 AC 于点 P,

$\because$ 点 N 为 AC 上的动点,

$\therefore$ 由三角形两边之和大于第三边,知当点 N 运动到点 P 时,

$BN + MN = BP + PM = BM$,

$\therefore DN + MN$ 的最小值为 BM 的长度.

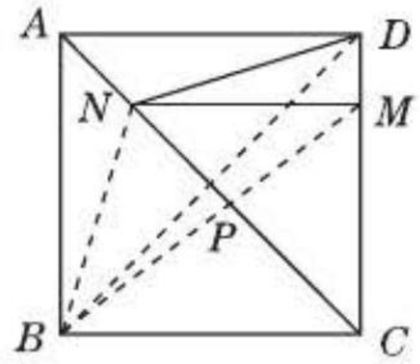
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore BC = CD = 8$,

$CM = 8 - 2 = 6$,

$\angle BCM = 90°$,

$\therefore BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.



(第4题)

即 $DN + MN$ 的最小值为 10.

5. 解:分为三种情况:

(1)如图①,连接 EC,

在Rt$\triangle EBC$中,$EB = 12 + 8 = 20$(cm), $BC = \frac{1}{2} \times 30 = 15$(cm).

由勾股定理,得 $EC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$(cm).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

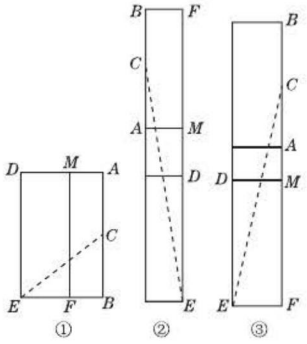
(2)如图②,连接 EC.

根据勾股定理可求出 $CE=\sqrt{8^2+(30+12+15)^2}=\sqrt{3\,313}$ (cm) >25 cm.

(3)如图③,连接 EC.

根据勾股定理可求出 $CE=\sqrt{12^2+(30+8+15)^2}$ $=\sqrt{2\,953}$(cm) >25 cm.

综上可知,小虫爬行的最短路程是25 cm.



(第5题)

6. **解:**如图,作点 A 关于 CD 的对称点 A',连接 $A'B$,交 CD 于点 O,则点 O 是光的反射点,连接 OA. 由对称性可知,$A'D=AD$,

$OA=OA'$,

$\therefore OA+OB=OA'+OB=A'B$.

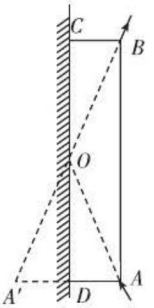
$AA'=2AD=20$ cm.

在 Rt$\triangle BAA'$中,

$\because A'B^2=AA'^2+AB^2=20^2+48^2=2\,704$.

$\therefore A'B=52$ cm.

$\therefore$ 光线在纸片上通过的距离为 52 cm.



(第6题)

点拨:先利用入射光线与反射光线的性质构造出直角三角形,再利用勾股定理计算求解.

7. **解:**如图,过点 C 作 $CD\perp AB$,垂足为点 D.

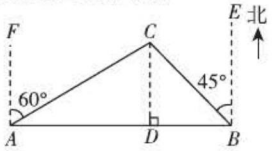
$\because \angle CBE=45°$,

$\therefore \angle BCD=\angle DBC=45°$. $\therefore CD=BD$.

设 $CD=BD=x$ 千米,

$\because \angle CAF=60°$,$\therefore \angle CAD=30°$,$\therefore AC=2x$ 千米.

由勾股定理,得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$ 千米.



(第7题)

由 $AD+DB=2$,得$\sqrt{3}x+x=2$,$\therefore x=\sqrt{3}-1$.

$\therefore CD=(\sqrt{3}-1)$千米$\approx0.732$ 千米>0.7 千米.

$\therefore$ 计划修筑的这条公路不会穿过公园.

【第十七章测试卷】

一、1. C **2.** B **3.** C **4.** B **5.** C **6.** C **7.** D **8.** C **9.** C **10.** B

二、11. $\sqrt{11}$ **12.** 如果 $3a=3b$,那么 $a=b$

13. $5\sqrt{2}$ **14.** $\frac{3}{2}$ **15.** 18 **16.** 10

三、17. **解:**设 $CD=x$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中,由 $AD^2=AC^2-CD^2$,得 $AD^2=10^2-x^2$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中,由 $AD^2=AB^2-BD^2$,

得 $AD^2=17^2-(x+9)^2$,

$\therefore 10^2-x^2=17^2-(x+9)^2$,解得 $x=6$. $\therefore CD=6$.

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

18. **解:**(1)$\because AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,$AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$,$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore AB+AC+BC=\sqrt{5}+2\sqrt{5}+5=3\sqrt{5}+5$.

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $3\sqrt{5}+5$.

(2)$\because AB^2+AC^2=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=25$,

$BC^2=5^2=25$,

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

19. (1)**证明:**$\because CD=1$,$BC=\sqrt{5}$,$BD=2$,

$\therefore CD^2+BD^2=BC^2$. $\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形.

(2)**解:**设 $AB=AC=x$,在 Rt$\triangle ADB$ 中,

$\because AB^2=AD^2+BD^2$,$\therefore x^2=(x-1)^2+2^2$.

解得 $x=\frac{5}{2}$. $\therefore AC=\frac{5}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times2=\frac{5}{2}$.

20. **解:**(1)$\because (a-3)^2+\sqrt{b-4}+|c-5|=0$,

$(a-3)^2\geqslant0$,$\sqrt{b-4}\geqslant0$,$|c-5|\geqslant0$,

$\therefore a-3=0$,$b-4=0$,$c-5=0$.

$\therefore a=3$,$b=4$,$c=5$.

(2)$\because 3^2+4^2=5^2$,

$\therefore$ 以 a,b,c 为边长的三角形是直角三角形.

$\therefore$ 以 a,b,c 为边长能构成三角形,且它的周长为$3+4+5=12$.

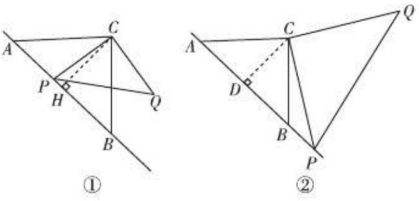
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21. **解**:在 Rt△ABC 中,$AB=4$ m,设 $BC=x$ m,
则 $AC=(8-x)$ m.
由勾股定理,得 $BC^2=AC^2+AB^2$,即 $x^2=(8-x)^2+4^2$,解得 $x=5$.
如果下次旗杆从 D 处刮断,设顶部的着地点为 E,
则 $DE=BC+CD=5+1.25=6.25$(m),$AD=AC-CD=3-1.25=1.75$(m).
在 Rt△ADE 中,由勾股定理,得
$AE^2=DE^2-AD^2=6.25^2-1.75^2=36$,
$\therefore AE=6$ m.
$\therefore$ 杆脚周围 6 m 范围内有被砸伤的危险.

22. **解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,
$\therefore AB=CD$,$\angle B=\angle D=90°$.
由折叠可知,$\angle D=\angle D'$,$CD=CD'$.
$\therefore \angle B=\angle D'$,$AB=CD'$.
又$\angle AEB=\angle CED'$,$\therefore$ △ABE≌△$CD'E$.
$\therefore AE=CE$.
设 $BE=x$,则 $AE=CE=4-x$.
$\therefore 3^2+x^2=(4-x)^2$. 解得 $x=\frac{7}{8}$. $\therefore BE=\frac{7}{8}$.

23. (1)**解**:正方形、长方形.
(2)**证明**:①$\because$ △ABC≌△DBE,$\therefore BC=BE$.
$\because \angle CBE=60°$,$\therefore$ △BCE 是等边三角形.
②$\because$ △ABC≌△DBE,$\therefore AC=ED$.
又$\because$ △BCE 为等边三角形,
$\therefore BC=CE$,$\angle BCE=60°$.
$\because \angle DCB=30°$,$\therefore \angle DCE=90°$.
在 Rt△DCE 中,$DC^2+CE^2=DE^2$,
$\therefore DC^2+BC^2=AC^2$.
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是勾股四边形.

24. **解**:(1)①$\sqrt{6}$;2
点拨:$\because AC=BC=1+\sqrt{3}$,$\angle ACB=90°$,
$\therefore AB=\sqrt{2}+\sqrt{6}$. $\therefore PB=\sqrt{6}$. 如图①,
过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H,则 $CH=AH=HB=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.
$\therefore PH=AH-AP=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$,
$\therefore PC=\sqrt{PH^2+CH^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$
②$PA^2+PB^2=PQ^2$
点拨:$PA^2=2$,$PB^2=6$,$PQ^2=2PC^2=8$,$\therefore PA^2+PB^2=PQ^2$.
(2)**证明**:如图②,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.
$\because$ △ACB 为等腰直角三角形,$CD\perp AB$,
$\therefore CD=AD=DB$.
$\because PA^2=(AD+PD)^2=(DC+PD)^2=DC^2+2DC\cdot PD+PD^2$,
$PB^2=(PD-BD)^2=(PD-DC)^2=DC^2-2DC\cdot PD+PD^2$,$\therefore PA^2+PB^2=2DC^2+2PD^2$.
$\because$ 在 Rt△PCD 中,由勾股定理,得 $PC^2=DC^2+PD^2$,$\therefore PA^2+PB^2=2PC^2$.
$\because$ △CPQ 为等腰直角三角形,$\therefore 2PC^2=PQ^2$.
$\therefore PA^2+PB^2=PQ^2$.



(第 24 题)

第十八章 平行四边形

18.1 平行四边形

18.1.1 平行四边形的性质

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. D **点拨**:$\because BC=EC$,$\therefore \angle CEB=\angle CBE$,
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore DC/\!/AB$,
$\therefore \angle CEB=\angle EBF$,$\therefore \angle CBE=\angle EBF$,
$\therefore BE$ 平分$\angle CBF$,①正确;
$\because BC=EC$,$CF\perp BE$,$\therefore \angle ECF=\angle BCF$,
$\therefore CF$ 平分$\angle DCB$,②正确;
$\because DC/\!/AB$,$\therefore \angle DCF=\angle CFB$,
$\because \angle ECF=\angle BCF$,$\therefore \angle CFB=\angle BCF$,
$\therefore BF=BC$,③正确;
$\because FB=BC$,$CF\perp BE$,
$\therefore BE$ 垂直平分 FC,
$\therefore PF=PC$,④正确. 故选 D.

4. D **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AH/\!/BG$,$AD=BC$,$\therefore \angle H=\angle HBG$,
$\because \angle HBG=\angle HBA$,$\therefore \angle H=\angle HBA$,
$\therefore AH=AB$,同理可证 $BG=AB$,$\therefore AH=BG$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AD=BC$，$\therefore DH=CG$，故C正确，

$\because AH=AB$，$\angle OAH=\angle OAB$，

$\therefore OH=OB$，故A正确.

$\because DF/\!/AB$，$\therefore \angle DFH=\angle ABH$，

$\because \angle H=\angle ABH$，$\therefore \angle H=\angle DFH$，

$\therefore DF=DH$，同理可证$EC=CG$，

$\because DH=CG$，$\therefore DF=CE$，故B正确.

无法证明$AE=AB$，故选D.

5. 4　**点拨：**$\because EF/\!/BC$，$GH/\!/AB$，四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore$四边形$HPFD$、$BEPG$、$AEPH$、$CFPG$为平行四边形，

$\therefore S_{\triangle PEB}=S_{\triangle BGP}$，$S_{\triangle PHD}=S_{\triangle DFP}$，$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CDB}$，

$\therefore S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PEB}-S_{\triangle PHD}=S_{\triangle CDB}-S_{\triangle BGP}-S_{\triangle DFP}$，

即$S_{\square AEPH}=S_{\square PFCG}$.

$\because CG=2BG$，$S_{\triangle BPG}=1$，

$\therefore S_{\square AEPH}=S_{\square PFCG}=4\times1=4$.

故答案为4.

6. 证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB/\!/CD$，$AB=CD$.

$\because BE=DF$，$\therefore AB+BE=CD+DF$，即$AE=CF$.

$\because AB/\!/CD$，$\therefore AE/\!/CF$.

$\therefore \angle1=\angle2$，$\angle E=\angle F$.

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$.

$\therefore OE=OF$.

7. 解：添加的条件是$DE=BF$，

证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB/\!/CD$，

$\therefore \angle EBA=\angle FDC$.

$\because DE=BF$，$\therefore BE=DF$.

$\because$在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle EBA=\angle FDC,\\ BE=DF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS).

点拨：本题考查了平行四边形的性质和全等三角形的判定，通过做此题培养了学生分析问题和解决问题的能力，也培养了学生的发散思维能力，题目比较好，是一道开放性的题目，答案不唯一.

8. (1)**证明：**$\because$在$\square ABCD$中，$AB/\!/CD$，$\angle A=30°$，

$\therefore \angle ADC=180°-\angle A=150°$.

$\because DE$平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ADE=\frac{1}{2}\angle ADC=75°$，

$\therefore \angle AED=180°-\angle A-\angle ADE=75°$，

$\therefore \angle ADE=\angle AED$，

$\therefore AD=AE$.

(2)**解：**如图.

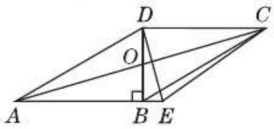
$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC$.

$\because \angle BAD=30°$，$\angle ABD=90°$，

$\therefore BD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times12=6$，

$\therefore OB=3$.



(第8题)

在Rt$\triangle ABD$中，由勾股定理，得$AB=\sqrt{AD^2-BD^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$. 在Rt$\triangle AOB$中，由勾股定理，得$OA=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+3^2}=3\sqrt{13}$.

$\therefore AC=2OA=6\sqrt{13}$.

9. 解：$EF+GH+MN=2a$，$EF+GH+MN$的值不随点P位置的改变而改变. 理由如下：

$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

$\because GH/\!/BC$，

$\therefore \angle AGH=\angle B=60°$，$\angle AHG=\angle C=60°$.

$\therefore \triangle AGH$是等边三角形，

$\therefore GH=AG=AM+MG$. ①

同理可得$\triangle BMN$是等边三角形，

$\therefore MN=MB=MG+GB$. ②

$\because MN/\!/AC$，$EF/\!/AB$，

$\therefore$四边形$AMPE$是平行四边形，$\therefore PE=AM$.

同理可得四边形$BFPG$是平行四边形.

$\therefore PF=GB$.

$\therefore EF=PE+PF=AM+GB$. ③

①+②+③，得$EF+GH+MN=(AM+GB)+(AM+MG)+(MG+GB)=2(AM+MG+GB)=2AB=2a$.

$\therefore EF+GH+MN$的值为$2a$，其值不随点P位置的改变而改变.

点拨：解本题的技巧1：把三条线段EF，MN，GH放到平行四边形或等边三角形中；技巧2：利用等量代换将线段EF，MN，GH转移到同一条边AB上.

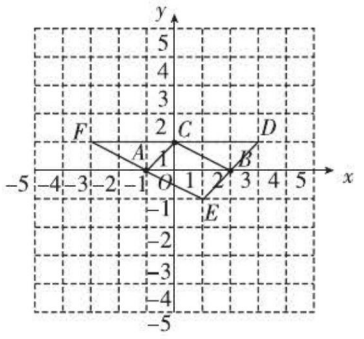
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.1.2 平行四边形的判定

【两年模拟兵法】

1. D 2. C 3. B

4. B **点拨**:如图所示



(第4题)

①以 AC 为对角线,可以画出$\square AFCB$,$F(-3,1)$;

②以 AB 为对角线,可以画出$\square ACBE$,$E(1,-1)$;

③以 BC 为对角线,可以画出$\square ACDB$,$D(3,1)$.

故选 B.

5. A

6. B **点拨**:连接 AQ. ∵ 点 E,F 分别是 PA,PQ 的中点,

∴ EF 是$\triangle PAQ$ 的中位线,∴ $EF=\frac{1}{2}AQ$.

∵ Q 是 CD 上的一定点,∴ AQ的长度保持不变,

∴ 线段 EF 的长度保持不变.

7. (1)**证明**:∵ $\angle A=\angle F$,∴ $DE\parallel BC$.

∵ $\angle 1=\angle 2$,且$\angle 1=\angle DMF$,

∴ $\angle DMF=\angle 2$,∴ $DB\parallel EC$,

则四边形 $BCED$ 为平行四边形.

(2)**解**:∵ BN 平分$\angle DBC$,∴ $\angle DBN=\angle CBN$.

∵ $EC\parallel DB$,∴ $\angle CNB=\angle DBN$,

∴ $\angle CNB=\angle CBN$,∴ $CN=BC=DE=2$.

点拨:此题考查了平行四边形的判定,熟练掌握平行四边形的判定是解本题的关键.

8. **证明**:连接 BN,CM.

∵ $\triangle ABM$、$\triangle CAN$ 均为等边三角形,

∴ $AM=AB,AC=AN,\angle MAB=\angle CAN=60°$.

而$\angle MAC=\angle MAB+\angle BAC$,

$\angle BAN=\angle CAN+\angle BAC$,故$\angle MAC=\angle BAN$,

∴ $\triangle MAC\cong\triangle BAN$,∴ $MC=BN$.

∵ 点 D,E 分别是 MB,BC 的中点,

∴ $DE=\frac{1}{2}MC$,同理可得 $EF=\frac{1}{2}BN$,

∴ $DE=EF$.

9. (1)**证明**:∵ $\angle A=\angle ABC=90°$,∴ $AF\parallel BC$,

∴ $\angle CBE=\angle DFE,\angle BCE=\angle FDE$.

∵ E 是边 CD 的中点,∴ $CE=DE$.

在$\triangle BCE$ 和$\triangle FDE$ 中,

$\angle CBE=\angle DFE,\angle BCE=\angle FDE,CE=DE$,

∴ $\triangle BCE\cong\triangle FDE$(AAS),∴ $BE=FE$.

又∵ $CE=DE$,∴ 四边形 $BDFC$ 为平行四边形.

(2)**解**:当$\triangle BCD$ 是等腰三角形时,

①若 $BD=BC$,在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$,

∴ 四边形 $BDFC$ 的面积 $=2\sqrt{2}\times 3=6\sqrt{2}$;

②若 $BD=DC$,过 D 作 BC 的垂线,则垂足为 BC 的中点,不可能;

③若 $BC=CD$,过 D 作 $DG\perp BC$,垂足为 G,则$CG=2$.

在 Rt$\triangle CDG$ 中,$DG=\sqrt{DC^2-GC^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$,

∴ 四边形 $BDFC$ 的面积 $=3\sqrt{5}$.

综上所述,当$\triangle BCD$ 是等腰三角形时,四边形 $BDFC$ 的面积为 $6\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.

10. **证明**:(1)∵ 将$\square ABCD$ 沿过点 A 的直线 l 折叠,使点 D 落到 AB 边上的点 D'处,

∴ $\angle DAE=\angle D'AE,\angle DEA=\angle D'EA,\angle D=\angle AD'E$.

∵ $DE\parallel AD'$,∴ $\angle DEA=\angle D'AE$.

∴ $\angle DAE=\angle D'AE=\angle DEA=\angle D'EA$.

∴ $\angle DAD'=\angle DED'$.

∴ 四边形 $DAD'E$ 是平行四边形. ∴ $DE=AD'$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel\!\!\parallel DC$. ∴ $CE\parallel\!\!\parallel D'B$.

∴ 四边形 $BCED'$是平行四边形.

(2)∵ BE 平分$\angle ABC$,∴ $\angle CBE=\angle EBA$.

∵ $AD\parallel BC$,∴ $\angle DAB+\angle ABC=180°$.

∵ $\angle DAE=\angle EAB$,

∴ $\angle EAB+\angle EBA=90°$.

∴ $\angle AEB=90°$. ∴ $AB^2=AE^2+BE^2$.

11. **证明**:(1)∵ AD 平分$\angle BAC$,∴ $\angle BAD=\angle CAD$.

∵ $AD\parallel EM$,∴ $\angle BAD=\angle AEF,\angle CAD=\angle AFE$.

∴ $\angle AEF=\angle AFE$. ∴ $AE=AF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图,作 $CG\parallel EM$,交 BA 的延长线于 G.

$\because EF\parallel CG$,$\therefore \angle G=\angle AEF$,$\angle ACG=\angle AFE$.

$\because \angle AEF=\angle AFE$,

$\therefore \angle G=\angle ACG$,

$\therefore AG=AC$.

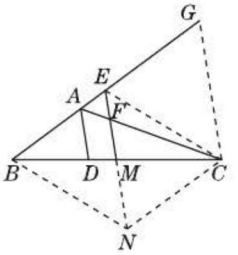
延长 EM 至 N,

使 $MN=EM$,

连接 NC,BN,EC.

$\because M$ 为 BC 的中点,

$\therefore MB=MC$.



(第 11 题)

$\therefore$ 四边形 $BNCE$ 是平行四边形.

$\therefore NC\parallel BE$,$NC=BE$. $\therefore NC\parallel EG$.

又$\because EM\parallel CG$,$\therefore$ 四边形 $NCGE$ 是平行四边形.

$\therefore NC=EG$. $\therefore BE=EG$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(AB+AG)=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

18.2 特殊的平行四边形

18.2.1 矩形

【两年模拟兵法】

1. C **2**. A

3. D **点拨**:设 $FC'=x$,则 $FD=9-x$,根据矩形的性质结合 $BC=6$,点 C' 为 AD 的中点,即可得出 $C'D$ 的长度,在 $\mathrm{Rt}\triangle FC'D$ 中,利用勾股定理即可得出关于 x 的方程,解之即可得出结论.

4. B **5**. C

6. (1)**证明**:在 $\triangle DCA$ 和 $\triangle EAC$ 中,$\begin{cases}DC=EA,\\AD=CE,\\AC=CA,\end{cases}$

$\therefore \triangle DCA\cong\triangle EAC(\mathrm{SSS})$;

(2)**解**:$AD=BC$;

证明如下:

$\because AB=DC$,$AD=BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because CE\perp AE$,$\therefore \angle E=90°$.

由(1)得 $\triangle DCA\cong\triangle EAC$,$\therefore \angle D=\angle E=90°$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形.

((2)题答案不唯一)

7. **证明**:连接 EM,DM,EN,DN.

$\because BD$,CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高,

$\therefore BD\perp AC$,$CE\perp AB$,

$\therefore \angle ADB=\angle CDB=\angle AEC=\angle BEC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中,N 为斜边 AO 的中点,

$\therefore DN=\frac{1}{2}AO$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中,N 为斜边 AO 的中点,

$\therefore EN=\frac{1}{2}AO$,$\therefore EN=DN$.

$\therefore N$ 在 DE 的垂直平分线上.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,M 为斜边 BC 的中点,

$\therefore DM=\frac{1}{2}BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,M 为斜边 BC 的中点,

$\therefore EM=\frac{1}{2}BC$,$\therefore DM=EM$,

$\therefore M$ 在 DE 的垂直平分线上,

$\therefore MN$ 垂直平分 DE.

8. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore CD\parallel AB$,$\therefore \angle FCO=\angle EAO$.

在 $\triangle FCO$ 与 $\triangle EAO$ 中,$\begin{cases}\angle FOC=\angle EOA,\\\angle FCO=\angle EAO,\\CF=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle FCO\cong\triangle EAO$,$\therefore OF=OE$.

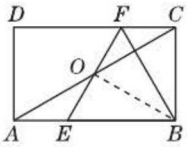
(2)**解**:如图,连接 OB,

$\because \angle BEF=2\angle BAC$,

$\angle BEF=\angle BAC+\angle AOE$,

$\therefore \angle BAC=\angle AOE$,

$\therefore AE=OE$.



(第 8 题)

$\because \triangle FCO\cong\triangle EAO$,

$\therefore CF=OF=OE=AE$.

又$\because BE=BF$,

$\therefore BO$ 垂直平分 EF.

易知 $\mathrm{Rt}\triangle BCF\cong\mathrm{Rt}\triangle BOF\cong\mathrm{Rt}\triangle BOE$.

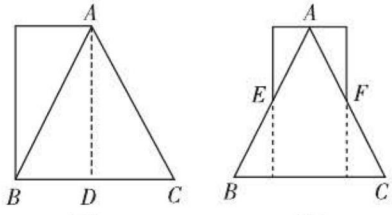
又$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle CBF=\angle OBF=\angle OBE=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中,$\angle CBF=30°$,$CF=2$,$\therefore BF=4$,

$\therefore AB=AE+BE=CF+BF=2+4=6$.

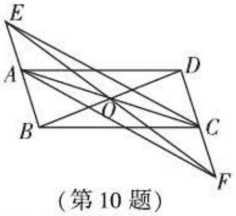
9. **解**:如图所示.(答案不唯一)



(第 9 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore OA=OC, AB\parallel CD.\therefore \angle E=\angle F.$
又∵ $\angle AOE=\angle COF$,
$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS).
(2)**解**:如图,EF 与 AC 满足 $EF=AC$ 时四边形 $AECF$ 是矩形. 理由如下:
由(1),知$\triangle AOE\cong\triangle COF$,
$\therefore OE=OF.$
∵ $OA=OC$,
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.
$\therefore$ 当 $EF=AC$ 时,四边形 $AECF$ 是矩形.



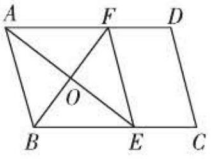
(第 10 题)

18.2.2 菱形

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** C

4. C **点拨**:如图所示,设 AE 与 BF 交于点 O.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AD\parallel BC$,
$\therefore \angle DAE=\angle BEA$,
∵ $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E,
$\therefore \angle DAE=\angle BAE$,
$\therefore \angle BAE=\angle BEA$,
$\therefore AB=BE$,同理可得 $AB=AF$,$\therefore AF=BE$,
又∵ $AD\parallel BC$,$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,
∵ $AB=AF$,$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形,
$\therefore AE\perp BF, OA=OE, OB=OF=\frac{1}{2}BF=6,$
$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8,$
$\therefore AE=2OA=16.$
故选 C.



(第 4 题)

5. D

6. (1)**证明**:∵ $AB=AD$,$\therefore \angle ABD=\angle ADB$,
∵ BD 平分$\angle ABC$,$\therefore \angle ABD=\angle CBD$,
$\therefore \angle ADB=\angle CBD$,
∵ $AB=AD, AC\perp BD$,$\therefore BO=DO$,
在$\triangle AOD$ 与$\triangle COB$ 中,
$$\begin{cases}\angle AOD=\angle COB,\\ OD=OB,\\ \angle ADO=\angle CBO,\end{cases}$$
$\therefore \triangle AOD\cong\triangle COB$,
$\therefore AO=OC$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
∵ $AC\perp BD$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.
(2)**解**:∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{5}$,$\therefore OC=\sqrt{CD^2-OD^2}=2,$
$\therefore AC=4$,$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=4\sqrt{5}.$

7. (1)**证明**:由折叠的性质,得$\angle D=\angle D'$,
$CD=AD'$,$\angle D'AE=\angle DCE$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore \angle B=\angle D, AB=CD, \angle BCD=\angle BAD.$
$\therefore \angle B=\angle D', AB=AD', \angle D'AE=\angle BAD,$
即$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$,$\therefore \angle 1=\angle 3$,
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle AD'F.$
(2)**解**:四边形 $AECF$ 是菱形. 理由如下:
由折叠的性质,得 $AE=EC$,$\angle 4=\angle 5$,$AF=FC$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD\parallel BC$,
$\therefore \angle 6=\angle 5=\angle 4$,$\therefore FC=AF=AE=EC$,
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

8. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,
$\therefore AO=CO$,$AD\parallel BC$,$\therefore \angle FAO=\angle ECO$,
又$\angle AOF=\angle COE$,
$\therefore \triangle AOF\cong\triangle COE$,$\therefore AF=EC.$
(2)**解**:四边形 $BEDF$ 可能是菱形,理由如下:
由(1)知$\triangle AOF\cong\triangle COE$,$\therefore OE=OF$,
又易得 $OB=OD$,$\therefore EF$ 与 BD 互相平分.
$\therefore$ 当 $EF\perp BD$ 时,四边形 $BEDF$ 为菱形.

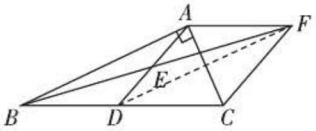
9. (1)**证明**:∵ $AF\parallel BC$,
$\therefore \angle AFE=\angle DBE$,
∵ E 是 AD 的中点,$\therefore AE=DE$,
在$\triangle AEF$ 和$\triangle DEB$ 中,
$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE,\\ \angle FEA=\angle BED,\\ AE=DE,\end{cases}$$
$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEB$(AAS).
(2)**证明**:由(1)知,$\triangle AEF\cong\triangle DEB$,则 $AF=DB$.
∵ AD 是 BC 边上的中线,$\therefore DB=DC$,$\therefore AF=CD.$
∵ $AF\parallel BC$,$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,
∵ $\angle BAC=90°$,D 是 BC 的中点,
$\therefore AD=DC=\frac{1}{2}BC,$
$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形.
(3)**解**:如图,连接 DF,∵ $AF\parallel BD$,$AF=BD$,
$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DF=AB=5$,

$\because$ 四边形 $ADCF$ 是菱形,

$\therefore S_{\text{菱形}ADCF}=\frac{1}{2}AC\cdot DF=\frac{1}{2}\times4\times5=10$.



(第9题)

10. **解**:4.2 m=420 cm,2.8 m=280 cm,

$420\div30=14$(块),$280\div20=14$(块),

$14\times14=196$(块);

由题意易得 $EF=FG=GH=HE$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

$\because$ 每一块瓷砖都有1个白色菱形,

$\therefore$ 白色菱形有196个.

$\because E,F,G,H$ 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点,

$\therefore$ 淡黄色菱形有 $(14-1)\times(14-1)=169$(个),且易知淡黄色菱形与白色菱形面积相等,

$\therefore$ 最多会出现最小的面积相等的菱形有 $196+169=365$(个).

答:这面墙壁最少要贴这种瓷砖196块,全部贴满瓷砖后,这面墙壁最多会出现365个最小的面积相等的菱形,其中淡黄色的菱形有169个.

18.2.3 正方形

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D

3. C **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB=AD=BC=DC,\angle B=\angle D=\angle C=90°$.

$\because$ $\triangle AEF$ 是等边三角形,

$\therefore AE=AF,\angle AEF=60°$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,$\begin{cases}AB=AD,\\AE=AF,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADF$(HL),

$\therefore BE=DF$,

$\because BC=DC,\therefore BC-BE=CD-DF$,

$\therefore CE=CF$,故①正确;

$\because CE=CF,\therefore\triangle ECF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore\angle CEF=45°$,

$\because\angle AEF=60°,\therefore\angle AEB=75°$,

故②正确;

如图,连接 AC,交 EF 于 G 点,

易得 $AC\perp EF$,且 AC 平分 EF,

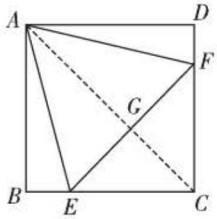
$\because\angle CAF\neq\angle DAF$,

$\therefore DF\neq FG$,

同理 $BE\neq EG$,$\therefore BE+DF\neq EF$,故③错误;

$\because EF=2,\therefore CE=CF=\sqrt{2}$,

设正方形的边长为 $a(a>0)$,



(第3题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,$a^2+(a-\sqrt{2})^2=4$,

解得 $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$(负值舍去),则 $a^2=2+\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD}=2+\sqrt{3}$,故④正确,

故正确的有①②④,故选C.

4. C **5.** ①③④

6. (1) **证明**:如图,连接 BD 交 AC 于点 O,

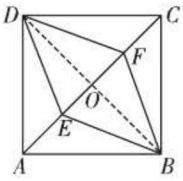
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore BD\perp AC,OD=OB=OA=OC$,

$\because AE=CF$,

$\therefore OA-AE=OC-CF$,

即 $OE=OF$,



(第6题)

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为平行四边形,且 $BD\perp EF$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为菱形;

(2) **解**:$\because$ 正方形边长为4,

$\therefore BD=AC=4\sqrt{2},\because AE=CF=\sqrt{2}$,

$\therefore EF=AC-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\text{菱形}BEDF}=\frac{1}{2}BD\cdot EF=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$.

7. **解**:(1)平行四边形

(2)菱形

(3)菱形

(4)四边形 $EGFH$ 是正方形.

理由如下:$\because AC=BD,\therefore\square ABCD$ 是矩形.

又$\because AC\perp BD,\therefore\square ABCD$ 是正方形,

$\therefore\angle BOC=90°,\angle GBO=\angle FCO=45°,OB=OC$.

$\because EF\perp GH,\therefore\angle GOF=90°$,

$\therefore\angle BOG=\angle COF,\therefore\triangle BOG\cong\triangle COF$.

$\therefore OG=OF,\therefore GH=EF$.

由(3)知四边形 $EGFH$ 是菱形,

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是正方形.

8. (1) **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BOE = \angle AOF = 90°, OB = OA.$

又$\because AM \perp BE,$

$\therefore \angle BEO + \angle MAE = 90° = \angle AFO + \angle MAE,$

$\therefore \angle BEO = \angle AFO, \therefore \triangle BOE \cong \triangle AOF,$

$\therefore OE = OF.$

(2)**解**:$OE = OF$ 还成立.

证明如下:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BOE = \angle AOF = 90°, OB = OA.$

又$\because AM \perp BE,$

$\therefore \angle F + \angle MBF = 90° = \angle E + \angle OBE.$

又$\because \angle MBF = \angle OBE, \therefore \angle E = \angle F,$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle AOF, \therefore OE = OF.$

9. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = CD, \angle ADP = \angle CDP,$

又$\because DP = DP, \therefore \triangle ADP \cong \triangle CDP,$

$\therefore PA = PC.$

又$\because PA = PE, \therefore PC = PE.$

(2)**解**:由(1)知$\triangle ADP \cong \triangle CDP,$

$\therefore \angle DAP = \angle DCP.$

$\because PA = PE, \therefore \angle DAP = \angle E,$

$\therefore \angle FCP = \angle E.$

又$\because \angle PFC = \angle DFE, \angle EDF = 90°,$

$\therefore \angle CPE = \angle EDF = 90°.$

(3)**解**:$AP = CE$. 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD = CD, \angle ADP = \angle CDP,$

又$\because DP = DP,$

$\therefore \triangle ADP \cong \triangle CDP.$

$\therefore PA = PC, \angle DAP = \angle DCP.$

又$\because PA = PE, \therefore PC = PE, \angle DAP = \angle DEP,$

$\therefore \angle DCP = \angle DEP,$

又$\because \angle PFC = \angle DFE,$

$\therefore \angle CPF = \angle EDF.$

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中,$\angle ABC = 120°,$

$\therefore \angle ADC = 120°,$

$\therefore \angle EDC = 60°.$

$\therefore \angle CPE = \angle EDF = 60°,$

又$\because PC = PE,$

$\therefore \triangle PCE$是等边三角形,

$\therefore PE = CE.$

又$\because PA = PE, \therefore AP = CE.$

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\angle B = 52°,$

$\therefore \angle D = \angle B = 52°.$

由折叠可得$\angle D'AE = \angle DAE = 20°, \angle D' = \angle D = 52°, \angle AED' = \angle AED,$

$\therefore \angle AEF = 20° + 52° = 72°, \angle AED' = \angle AED = 108°,$

$\therefore \angle FED' = \angle AED' - \angle AEF = 108° - 72° = 36°.$

2. **解**:(1)$\because \angle C = 90°, \angle B = 30°,$

$\therefore \angle CAB = 60°. \because AD$ 平分$\angle CAB,$

$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2}\angle CAB = 30°.$

在 Rt$\triangle ACD$ 中,

$\because \angle ACD = 90°, \angle CAD = 30°, CD = 3,$

$\therefore AD = 2CD = 6.$

(2)$\because DE \parallel BA$ 交 AC 于点 $E, DF \parallel CA$ 交 AB 于点 $F,$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,$\angle EAD = \angle ADF,$

$\angle CDE = \angle B.$

又$\because \angle EAD = \angle FAD, \therefore \angle ADF = \angle FAD.$

$\therefore AF = DF.$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

$\therefore AE = DE = DF = AF.$

在 Rt$\triangle CED$ 中,

$\because \angle CDE = \angle B = 30°,$

$\therefore CE = \frac{1}{2}DE.$ 又$\because CE^2 + CD^2 = DE^2,$

$\therefore \left(\frac{1}{2}DE\right)^2 + 9 = DE^2.$

$\therefore DE = 2\sqrt{3}$(负值舍去).

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 的周长为 $8\sqrt{3}$.

3. **解**:设 $AD = x$,则 $AB = 2x$. 在矩形 $ABCD$ 中,

$CD = AB.$

在 Rt$\triangle ADC$ 中,$AC = 4\sqrt{5},$

$\therefore x^2 + (2x)^2 = (4\sqrt{5})^2,$

解得 $x = 4$(负值舍去),即 $AD = 4.$

在矩形 $ABCD$ 中,$OD = OB, ED \parallel BF,$

$\therefore \angle EDO = \angle FBO, \angle DEO = \angle BFO,$

$\therefore \triangle DOE \cong \triangle BOF, \therefore DE = BF.$

由折叠可知 $DF = BF, \therefore DF = DE.$

设 $DF = DE = y$,则 $AF = 8 - y.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ADF 中，$4^2+(8-y)^2=y^2$，解得 $y=5$.

$\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot AD=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.

4. (1)**证明**：$\because AF/\!/BC$，

$\therefore \angle EAF=\angle EDB$.

$\because E$ 是 AD 的中点，$\therefore AE=DE$.

又$\because \angle AEF=\angle DEB$，

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEB$(ASA).

$\therefore AF=DB$.

$\because$ 在△ABC 中，$\angle BAC=90°$，AD 是中线，

$\therefore AD=BD=DC=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore AD=AF$.

(2)**解**：当 $AB=AC$ 时，四边形 $ADCF$ 是正方形.

证明如下：由(1)可知，$AD=AF=DC$，

$\because AF/\!/BC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

$\because AB=AC$，AD 是中线，$\therefore AD\perp BC$.

又$\because AD=AF$，$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是正方形.

5. (1)**证明**：延长 AE，BC 交于点 N，如图①所示.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AD/\!/BC$，所以 $\angle DAE=\angle CNE$.

因为 AE 平分 $\angle DAM$，

所以 $\angle DAE=\angle MAE$，

所以 $\angle CNE=\angle MAE$，

所以 $AM=MN$.

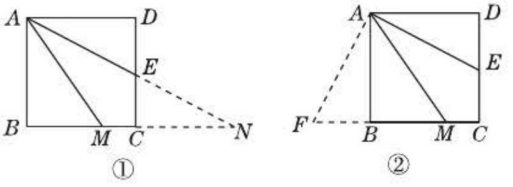
在△ADE 和△NCE 中，

$$\begin{cases}\angle DAE=\angle CNE,\\ \angle AED=\angle NEC,\\ DE=CE,\end{cases}$$

所以△$ADE\cong\triangle NCE$(AAS)，

所以 $AD=NC$，

所以 $AM=MN=NC+MC=AD+MC$.



(第 5 题)

(2)**解**：$AM=DE+BM$ 成立.

证明如下：过点 A 作 $AF\perp AE$，交 CB 的延长线于点 F，

如图②所示，因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $\angle BAD=\angle D=\angle ABC=90°$，$AB=AD$，

$AB/\!/DC$，

所以 $\angle ABF=\angle D=90°$.

因为 $AF\perp AE$，所以 $\angle FAE=90°$，

所以 $\angle FAB=90°-\angle BAE=\angle DAE$，

在△ABF 和△ADE 中，

$$\begin{cases}\angle FAB=\angle EAD,\\ AB=AD,\\ \angle ABF=\angle D=90°,\end{cases}$$

所以△$ABF\cong\triangle ADE$(ASA)，

所以 $BF=DE$，$\angle F=\angle AED$.

因为 $AB/\!/DC$，所以 $\angle AED=\angle BAE$，

因为 $\angle FAB=\angle EAD=\angle EAM$，

所以 $\angle AED=\angle BAE=\angle BAM+\angle EAM=\angle BAM+\angle FAB=\angle FAM$，

所以 $\angle F=\angle FAM$，所以 $AM=FM$，

所以 $AM=FB+BM=DE+BM$.

(3)**解**：①结论 $AM=AD+MC$ 仍然成立；

②结论 $AM=DE+BM$ 不成立.

6. **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore CD=CB$，$\angle DCF=\angle BCF=45°$，$DC/\!/AE$，

$\angle CBE=90°$，

$\therefore \angle CDF=\angle E$.

又$\because CF=CF$，$\therefore \triangle DCF\cong\triangle BCF$.

$\therefore \angle CDF=\angle CBF$. $\therefore \angle CBF=\angle E$.

$\because H$ 为 GE 的中点，

$\therefore HB=HG=\frac{1}{2}GE$.

$\therefore \angle HGB=\angle HBG$.

$\because \angle E+\angle HGB=90°$，

$\therefore \angle GBF+\angle HBG=90°$，

即 $\angle FBH=90°$，$\therefore FB\perp BH$.

【第十八章测试卷】

一、1. C **2.** B **3.** A **4.** D **5.** C **6.** B **7.** C **8.** D **9.** B **10.** D

二、11. 6 **12.** 7.5 **13.** 4 **14.** $\frac{5}{3}$ **15.** 35°或 55°

16. ①②③⑤

三、17. **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB/\!/CD$，$AB=DC$.

$\because M$ 和 N 分别是 AB，DC 的中点，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore BM=\frac{1}{2}AB, DN=\frac{1}{2}DC. \therefore BM=DN.$

$\therefore$ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

18. (1) **证明**: 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=CD$, $\angle A=\angle D=90°$,

又$\because M$ 是 AD 的中点, $\therefore AM=DM$.

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle DCM(\mathrm{SAS})$.

(2)1:2

19. (1) **证明**: $\because AB\parallel CD, CE\parallel AD$,

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形, $\angle CAE=\angle DCA$.

$\because AC$ 平分 $\angle BAD$, $\therefore \angle DAC=\angle CAE$.

$\therefore \angle DAC=\angle DCA. \therefore AD=DC$.

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是菱形.

(2) **解**: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

理由: $\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形,

$\therefore AE=EC$.

$\therefore \angle CAE=\angle ACE$.

$\because AE=EB, \therefore EB=EC$.

$\therefore \angle BCE=\angle B$.

又$\because$ 三角形内角和为 $180°$,

$\therefore \angle CAE+\angle ACE+\angle BCE+\angle B=180°$.

$\therefore \angle ACB=\angle ACE+\angle BCE=90°$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

20. (1) **证明**: $\because AE\perp BD, CF\perp BD$,

$\therefore AE\parallel CF$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $CMAN$ 是平行四边形.

(2) **解**: 由(1)知, 四边形 $CMAN$ 为平行四边形,

$\therefore CM=AN$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB=CD, AB\parallel CD$,

$\therefore \angle MDE=\angle NBF, DM=BN$.

$\because AM\perp BD, CN\perp BD$,

$\therefore \angle DEM=\angle BFN=90°$.

在 $\triangle MDE$ 和 $\triangle NBF$ 中, $\begin{cases}\angle MDE=\angle NBF,\\ \angle DEM=\angle BFN,\\ DM=BN,\end{cases}$

$\therefore \triangle MDE\cong\angle NBF(\mathrm{AAS}). \therefore DE=BF=4$.

$\therefore BN=\sqrt{FN^2+BF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

21. (1) **证明**: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个边长为 10 cm的等边三角形,

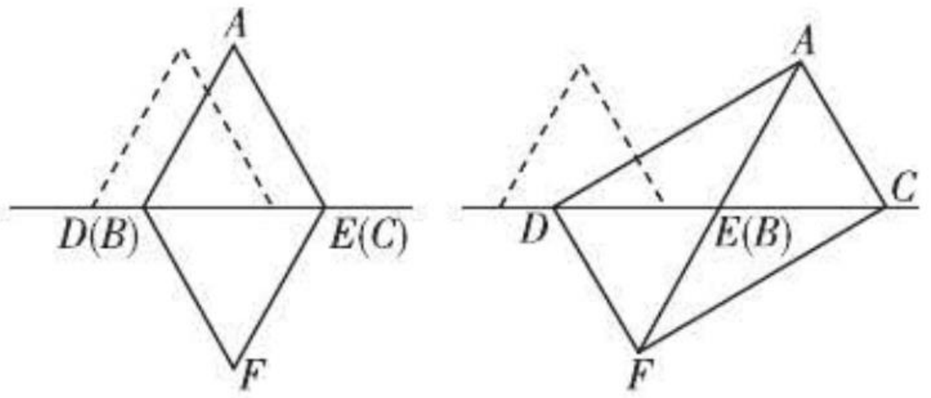
$\therefore AC=DF, \angle ACD=\angle FDE=60°. \therefore AC\parallel DF$.

$\therefore$ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形.

(2) **解**: ①如图①, 当 $t=3$ 时, $\square ADFC$ 是菱形.

理由: $\because t=3, \therefore$ 点 B 与点 D 重合, 点 C 与点 E 重合. 又$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个边长为10 cm的等边三角形,

$\therefore AD=DF=FE=EA. \therefore \square ADFC$ 是菱形.



(第21题)

②有可能是矩形. 如图②,

$\because \square ADFC$ 是矩形, $\therefore \angle DAC=90°$.

又$\because \angle ACD=60°, \therefore \angle ADC=30°$.

$\therefore DC=2AC=20$ cm, $AD=10\sqrt{3}$ cm.

$\therefore t=(20-7)\div 1=13(\mathrm{s})$,

$S_{\text{矩形}ADFC}=AD\cdot AC=10\sqrt{3}\times 10=100\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$.

22. **解**: 特例探究: $AF=BE, AF\perp BE$.

理由: 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\triangle ADE$ 与 $\triangle DCF$ 均为等边三角形,

$\therefore AB=AD=CD, \angle BAD=\angle ADC, AE=AD=CD=DF, \angle DAE=\angle CDF$.

$\therefore \angle BAD+\angle DAE=\angle ADC+\angle CDF$,

即 $\angle BAE=\angle ADF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中, $\begin{cases}AB=DA,\\ \angle BAE=\angle ADF,\\ AE=DF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DAF(\mathrm{SAS})$.

$\therefore AF=BE, \angle ABE=\angle DAF$.

$\because \angle DAF+\angle BAF=90°$,

$\therefore \angle ABE+\angle BAF=90°. \therefore AF\perp BE$.

拓展应用: 8

23. **解**: (1) $AB=CG-CE$.

证明如下: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB=BC$.

又$\because \angle BAC=60°, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ABC=\angle BAC=60°, AB=AC$.

$\because AB\parallel DC$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAC = \angle ACD = \angle EAG = 60° = \angle ABC.$

$\therefore \angle BAC + \angle CAE = \angle EAG + \angle CAE,$

即 $\angle BAE = \angle CAG.$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACG$ 中，$\begin{cases} \angle BAE = \angle CAG, \\ AB = AC, \\ \angle ABC = \angle ACD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACG(\mathrm{ASA}). \therefore BE = CG.$

$\because BC = CD, \therefore CE = DG.$

$\because AB = CD = CG - DG, \therefore AB = CG - CE.$

(2) $AB = CE - CG.$

第十九章 一次函数

19.1 函数

19.1.1 变量与函数

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** D

4. A **点拨：**①∵ 信件质量为 27 克，在 $20 < p \leqslant 40$ 范围内，∴ 邮资为 2.40 元，故①正确；②若邮资为 2.40 元，则信件质量在 $20 < p \leqslant 40$ 范围内均可，故②错误；由题意得 q 是 p 的函数，故③错误，④正确. 故选 A.

5. C **6.** A **7.** D

8. 解：(1) 由长方形的周长公式，得

$y = 2(x + 16)$，即 $y = 2x + 32.$

(2) 由长方形的面积公式，得 $S = 16x.$

(3) 当 $S = 160$ 时，$x = 10, y = 52.$

(4) 因为 $y = 2x + 32$，所以当 x 增加 2 时，y 增加 4；因为 $S = 16x$，所以当 x 增加 2 时，S 增加 32.

点拨：解决该题的关键是根据长方形的周长公式和面积公式写出 y 与 x，S 与 x 之间的函数解析式.

9. 解：(1) 由题意得 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 12.$

(2) 当 $x = 4$ 时，$y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8,$

即当 $MA = 4$ cm 时，重叠部分的面积是 8 cm^2.

(3) 当四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4 时，即等腰直角三角形 ABC 与重叠部分的三角形的面积的比是 9:4.

因为等腰直角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72(\mathrm{cm}^2),$

所以重叠部分的面积是 $\frac{4}{9} \times 72 = 32(\mathrm{cm}^2).$

因为函数解析式是 $y = \frac{1}{2}x^2,$

所以有 $\frac{1}{2}x^2 = 32$，所以 $x^2 = 64.$

由于 $x \geqslant 0$，因此只取 x 的正数值 8，即当 MA 的长度是 8 cm 时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4.

(4) 由于不同情况下重叠部分的形状发生了变化，故应分情况讨论.

①当 $0 \leqslant t \leqslant 12$ 时，重叠部分是三角形，所以函数解析式是 $y = \frac{1}{2}t^2.$

②当 $12 < t \leqslant 24$ 时，重叠部分是直角梯形，面积是 $\triangle ABC$ 的面积与右侧小直角三角形面积的差. 因为 $\triangle ABC$ 的面积是 72 cm^2，小直角三角形的面积是 $\frac{1}{2}(t - 12)^2$ cm^2，所以重叠部分的面积是 $\left[72 - \frac{1}{2}(t - 12)^2\right]$ cm^2，因此函数解析式是 $y = 72 - \frac{1}{2}(t - 12)^2.$

19.1.2 函数的图象

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨：**由函数的定义可知，图①②对任意一个 x 的值，y 都有唯一确定的值与之对应，所以图①②表示 y 是 x 的函数；而图③④对可取范围内 x 的值，y 与之对应的值不唯一，所以图③④不能表示 y 是 x 的函数. 所以表示 y 是 x 的函数的个数是 2.

3. A

4. C **点拨：**根据每一段函数图象的倾斜程度，判断水面上升速度的快慢，再观察容器的粗细，作出判断. 注水量一定，函数图象的走势是稍陡，平，陡，那么速度就相应地变化，跟所给容器的粗细有关. 则从下往上容器的粗细相应的排列顺序就为稍大、大、小，故选择 C.

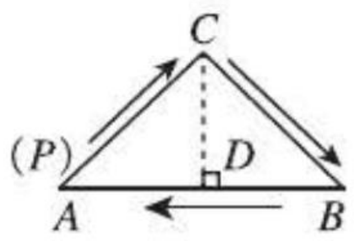
5. D **点拨：**该题属于分段函数问题：如图，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 $D.$

∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC, \therefore AD = BD.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

①当点 P 在边 AC 上时,s 随 t 的增大而减小. 故 A、B 错误;

②当点 P 在边 BC 上时,s 随 t 的增大而增大;



(第5题)

③当点 P 在线段 BD 上时,s 随 t 的增大而减小,当点 P 与点 D 重合时,s 最小,但是不等于零. 故 C 错误;

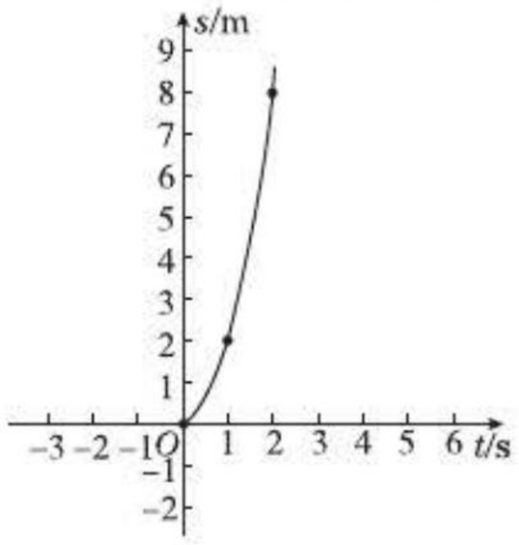
④当点 P 在线段 AD 上时,s 随 t 的增大而增大. 故 D 正确.

6. 解:(1)当 $x=-1$ 时,$y=3\times(-1)+1=-2\neq 2$,所以点 A 不在此函数的图象上;

当 $x=\frac{1}{3}$ 时,$y=3\times\frac{1}{3}+1=2$,所以点 B 在此函数的图象上.

(2)因为点 $(-a,a-1)$ 在此函数图象上,所以 $a-1=-3a+1$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

7. 解:(1)依次填:0,2,8,18,图象如图所示.



(第7题)

(2)当 $t=6.5$ 时,$s=2\times6.5^2=84.5$,即当小球滚动 6.5 s 时,其滚动的距离是 84.5 m.

(3)当 $s=128$ 时,$t=8$,即经过 8 s 时,小球滚动 128 m.

8. 解:(1)距离分别为 5 千米、8 千米、10 千米.

(2)他停下来休息时,离开城市的距离是 8 千米.

(3)乡村离城市有 14 千米的路程.

(4)观察图象可知 9 时到 10 时所走的路程为 $8-5=3$(千米),所以旅行者在 9 时到 10 时的速度为 $3\div1=3$(千米/时),当旅行者离开城市 6 千米时,上坡路走了 $6-5=1$(千米),此时走上坡路所用的时间为 $1\div3\times60=20$(分),所以旅行者离开城市 6 千米的时间为 9 时 20 分.

9. 解:(1)表格中分别填写:5,70,5,54,5.

(2)变量 y 是 x 的函数.

理由:因为在这个变化过程中,对于 x 的每一个确定的值,y 都有唯一确定的值与其对应,所以变量 y 是 x 的函数.

(3)摩天轮的直径是 $70-5=65$(m).

19.2 一次函数

19.2.1 正比例函数

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** A

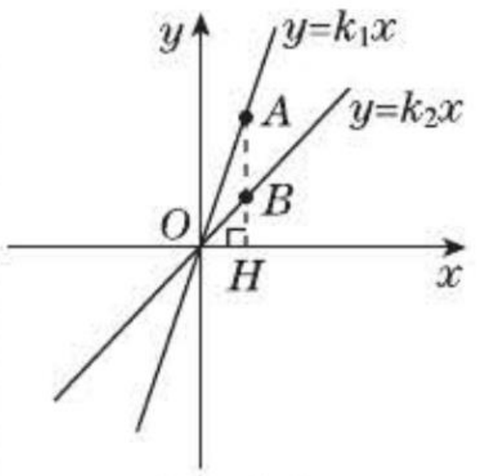
4. B **点拨:**对于正比例函数 $y=kx(k\neq0)$,当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小. 因为 $x_1>x_2$,所以 $y_1<y_2$. 故选 B.

5. B

6. C **点拨:**由 $y=-kx$ 的图象经过第一、三象限,可知 $-k>0$,即 $k<0$,$\therefore k-2<0$.

$\therefore y=(k-2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小,则由 $x_1>x_3>x_2$ 得 $y_1<y_3<y_2$.

7. 解:如图,在正比例函数 $y=k_1x$ 图象位于第一象限的部分上取一点 A,设点 A 的坐标是 (a,k_1a),过点 A 引 x 轴的垂线交正比例函数 $y=k_2x$ 的图象于点 B,x 轴上的垂足是 H,所以点 B 的坐标是 (a,k_2a). 由于 $k_1a>k_2a$,且 $a>0$,因此 $k_1>k_2$.



(第7题)

8. 解:如图所示.

依题意,当 $x=-2$ 时,

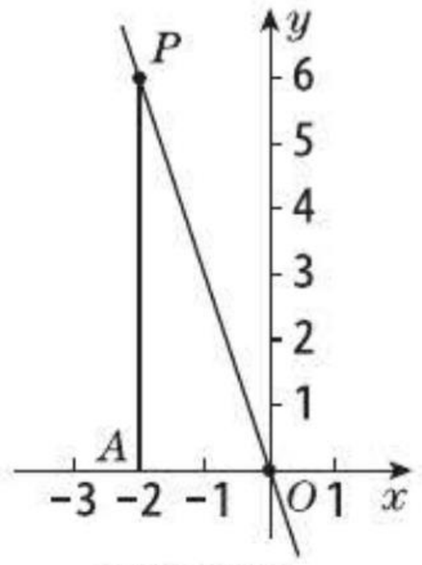
$y=-3\times(-2)=6$.

所以 $AP=6$.

所以 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}OA\cdot AP$

$=\frac{1}{2}\times2\times6$

$=6$.



(第8题)

9. 解:方法一:取直线 $y=2x$ 上的一点 $(1,2)$,则这个点关于 x 轴的对称点为 $(1,-2)$.

由点 $(1,-2)$ 在直线 $y=kx$ 上,得 $-2=k\times1$,即 $k=-2$.

方法二:$y=2x$ 的图象过第一、三象限,若正比例函数 $y=kx$ 与 $y=2x$ 的图象关于 x 轴对称,则直线 $y=kx$ 过第二、四象限,且 k 的绝对值等于 2,所以 $k=-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法规律:此题用了两种方法求解,方法一采用了特殊值法,找出函数图象上的特殊点,求出对称点并将此点坐标代入函数解析式,求出 k 的值. 方法二是从函数图象的特征着手,也就是从"形"的方面考虑,由关于 x 轴对称的两个函数图象的特征,分析这两个函数解析式中 k 值的关系,从而求解.

10. 解:(1)根据已知矩形的两组对边分别与坐标轴平行,$\triangle AOD$ 的面积是 7,点 A 的坐标是 $(-2,2)$,设点 D 的坐标是 $(x,2)$,则 $\frac{1}{2}\times(x+2)\times 2=7$,解得 $x=5$. 因此点 D 的坐标是 $(5,2)$.

设射线 OA 对应的函数解析式是 $y=k_1x$,

代入点 A 的坐标,得 $k_1\times(-2)=2$. 解得 $k_1=-1$,所以射线 OA 对应的函数解析式是 $y=-x$ $(x<0)$.

设射线 OD 对应的函数解析式是 $y=k_2x$,代入点 D 的坐标,得 $5k_2=2$. 解得 $k_2=\frac{2}{5}$.

所以射线 OD 对应的函数解析式是 $y=\frac{2}{5}x(x\geqslant 0)$.

因此折线 AOD 对应的函数解析式是:当 $x<0$ 时,$y=-x$;当 $x\geqslant 0$ 时,$y=\frac{2}{5}x$.

(2)若 x 轴是线段 AB 的垂直平分线,则 $AB=4$,而 $AD=7$,因此矩形 $ABCD$ 的周长是 $(7+4)\times 2=22$,面积是 $7\times 4=28$.

19.2.2 一次函数

【两年模拟兵法】

1. B 点拨:(1)$y=\pi x$ 是一次函数;

(2)$y=2x-1$ 是一次函数;

(3)$y=\frac{1}{x}$ 不是一次函数;

(4)$y=2-3x$ 是一次函数;

(5)$y=x^2-1$ 不是一次函数.

是一次函数的有 3 个. 故选 B.

2. C 3. D 4. A 5. D 6. C

7. C 点拨:根据正方形的性质、一次函数图象上点的坐标特征结合点 A 的坐标可得出点 A_1、B_1 的坐标,进而即可得出直线平移的距离.

8. 解:(1)由题意得:$m+2<0$,$\therefore m<-2$.

$\therefore$ 当 $m<-2$ 且 n 为任意实数时,y 随 x 的增大而减小.

(2)由题意得:$m+2\neq 0$ 且 $3-n=0$,

$\therefore$ 当 $m\neq -2$ 且 $n=3$ 时,函数的图象经过原点.

(3)由题意可得 $\begin{cases}m+2<0,\\3-n<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m<-2,\\n>3.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $m<-2$ 且 $n>3$ 时,函数的图象经过第二、三、四象限.

9. 解:(1)$\because P(m,n)$ 在直线 $y=-x+6$ 上,且在第一象限,

$\therefore n=-m+6$,点 P 到 x 轴距离为 $-m+6$.

$\because$ 点 A 坐标为 $(5,0)$,$\therefore OA=5$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 5\times(-m+6)=-\frac{5}{2}m+15$.

画图略.

(2)若 $S=15$,即 $-\frac{5}{2}m+15=15$,解得 $m=0$.

此时点 P 的坐标为 $(0,6)$,

与点 P 在第一象限矛盾,

$\therefore \triangle PAO$ 的面积不可以为 15.

10. 解:(1)设一次函数的解析式为 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$,

将点 $(-2,-2)$、$(2,4)$ 的坐标代入 $y=kx+b$ 中,

得 $\begin{cases}-2=-2k+b,\\4=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{2},\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 这个函数的解析式为 $y=\frac{3}{2}x+1$.

(2)当 $x=1$ 时,$y=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$,

$\because \frac{5}{2}\neq 1$,$\therefore$ 点 $P(1,1)$ 不在此函数图象上.

(3)当 $x=0$ 时,$y=1$,

$\therefore$ 该函数图象与 y 轴交点坐标为 $(0,1)$;

当 $y=0$ 时,$\frac{3}{2}x+1=0$,解得 $x=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 该函数图象与 x 轴交点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

$\therefore$ 这个函数的图象与坐标轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

11. 解:(1)由题图可知,甲 4 h 行驶了 40 km,则甲行驶的速度为 $40\div 4=10$(km/h);乙 0.5 h 行

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

驶了 40 km,则乙行驶的速度为 $40 \div 0.5 = 80$(km/h). 即甲、乙两人的速度分别是10 km/h,80 km/h.

(2)①乙返程中与 A 地的距离 y(km)与时间 t(h)的函数图象如图所示.

设乙返程中与 A 地的距离 y(km)关于时间 t(h)的函数解析式为 $y = kt + b(k \neq 0)$,

∵ 点(2,40),(2.5,0)在此函数的图象上,

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 40, \\ 2.5k + b = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = -80, \\ b = 200. \end{cases}$$

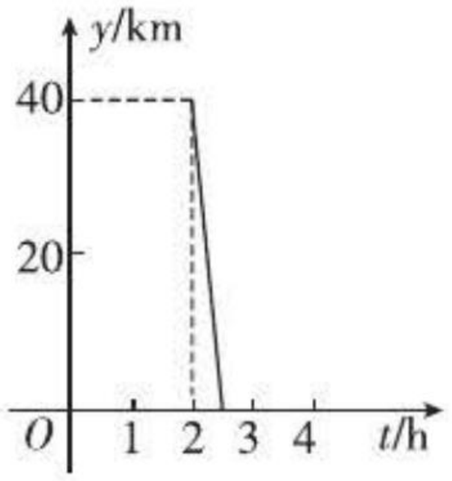
即乙返程中与 A 地的距离 y(km)关于时间 t(h)的函数解析式是 $y = -80t + 200(2 \leqslant t \leqslant 2.5)$

②设甲行驶的路程 s_1 关于时间 t 的函数解析式为 $s_1 = mt$,则由 $40 = 4m$,得 $m = 10$. 令 $10t = -80t + 200$,解得 $t = \frac{20}{9}$,

$$\therefore 10 \times \frac{20}{9} = \frac{200}{9}(\text{km}),$$

$$\therefore 40 - \frac{200}{9} = \frac{160}{9}(\text{km}),$$

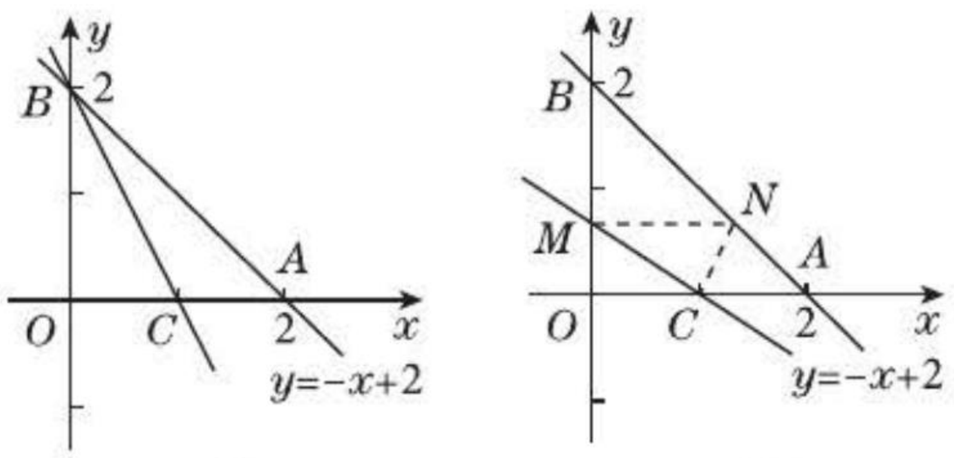
即甲在离 B 地$\frac{160}{9}$ km 处与返程中的乙相遇.



(第11题)

12. 解:(1)如图①所示,依题意,得 $A(2,0)$,$B(0,2)$.

因为△AOB 被分成的两部分面积相等,且易知 C 为 OA 的中点,



(第12题)

所以直线 $y = kx + b(k \neq 0)$ 过点 B.

由直线 $y = kx + b$ 过点 $C(1,0)$ 和点 $B(0,2)$,

易得 $k = -2, b = 2$.

(2)设直线 $y = kx + b$ 与 OB 交于点 $M(0,h)$,此时分△AOB 的面积之比为 1:5,如图②所示.

易得 $S_{\triangle OMC} = \frac{1}{6} S_{\triangle AOB}$,即 $\frac{1}{2} \times 1 \times h = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2$,所以 $h = \frac{2}{3}$. $\therefore M\left(0, \frac{2}{3}\right)$

过点 M 作直线 $MN \parallel OA$,交 AB 于点 $N\left(a, \frac{2}{3}\right)$,连接 CN,则 $S_{\triangle OMC} = S_{\triangle CAN}$.

因为点 $N\left(a, \frac{2}{3}\right)$在直线 $y = -x + 2$ 上,

所以 $a = \frac{4}{3}$.

所以点 $N\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

所以直线 $y = kx + b$ 经过 $M\left(0, \frac{2}{3}\right), C(1,0)$ 或 $N\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right), C(1,0)$.

$$\text{所以} \begin{cases} b = \frac{2}{3}, \\ k + b = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \frac{4}{3}k + b = \frac{2}{3}, \\ k + b = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{2}{3}, \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} k = 2, \\ b = -2. \end{cases}$$

19.2.3 一次函数与方程、不等式

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** C **4.** D

5. 解:(1)由 $y_1 = -\frac{1}{2}x + 1$,

可知当 $y = 0$ 时,$x = 2$,∴ 点 A 的坐标是(2,0),

$\therefore AO = 2$,

∵ 直线 $y_1 = -\frac{1}{2}x + 1$ 与直线 $y_2 = -\frac{3}{2}x$ 交于点 B,

∴ B 点的坐标是(−1,1.5),

$\therefore$ △AOB 的面积 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 1.5 = 1.5$.

(2)由(1)可知交点 B 的坐标是(−1,1.5),

由函数图象可知 $y_1 > y_2$ 时 $x > -1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)∵点 $P(1,b)$ 在直线 $l_1:y=2x+1$ 上,

$\therefore b=2\times1+1=3.$

∵点 $P(1,3)$ 在直线 $l_2:y=mx+4$ 上,

$\therefore 3=m+4,\therefore m=-1.$

(2)当 $x=a$ 时,$y_C=2a+1$;

当 $x=a$ 时,$y_D=4-a.$

∵ $CD=2,\therefore |2a+1-(4-a)|=2,$

解得 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{5}{3}.$

$\therefore a$ 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}.$

7. 解:(1)把 $(-2,a)$ 代入 $y=2x-1$,得 $-4-1=a,$

解得 $a=-5.$

(2)由(1)知点 $P(-2,-5)$,

则直线 l_2 对应的函数解析式是 $y=\frac{5}{2}x,$

因此点 $P(-2,a)$ 的横、纵坐标可以看成是二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\ y=\frac{5}{2}x\end{cases}$ 的解.

(3)易知直线 l_1 与 x 轴交于点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$,

所以 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{4}.$

(4)存在点 M,使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等.

设点 M 的坐标为 (m,b).

①当 $m=b$ 时,点 M 的坐标为 (m,m),代入 $y=2x-1$ 得 $2m-1=m,m=1$,即点 M 的坐标为 $(1,1)$;

②当 $m=-b$ 时,点 M 的坐标为 $(m,-m)$,代入 $y=2x-1$ 得 $2m-1=-m,m=\frac{1}{3}$,即点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

综上所述,存在符合条件的点 M,其坐标为 $(1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

8. 解:(1)设该网店甲种口罩每袋的售价为 x 元,乙种口罩每袋的售价为 y 元,

根据题意得 $\begin{cases}x-y=5,\\ 2x+3y=110,\end{cases}$

解这个方程组得 $\begin{cases}x=25,\\ y=20.\end{cases}$

故该网店甲种口罩每袋的售价为 25 元,乙种口罩每袋的售价为 20 元;

(2)设该网店购进甲种口罩 m 袋,则购进乙种口罩 $(500-m)$ 袋,

根据题意,得 $\begin{cases}m>\frac{4}{5}(500-m),\\ 22.4m+18(500-m)\leqslant10\,000,\end{cases}$

解这个不等式组得:$222\frac{2}{9}<m\leqslant227\frac{3}{11}.$

因 m 为整数,故有 5 种进货方案,分别是:

购进甲种口罩 223 袋,乙种口罩 277 袋;

购进甲种口罩 224 袋,乙种口罩 276 袋;

购进甲种口罩 225 袋,乙种口罩 275 袋;

购进甲种口罩 226 袋,乙种口罩 274 袋;

购进甲种口罩 227 袋,乙种口罩 273 袋;

设网店获利 w 元,则有 $w=(25-22.4)m+(20-18)(500-m)=0.6m+1\,000,$

故当 $m=227$ 时,w 最大,

$w_{最大}=0.6\times227+1\,000=1\,136.2.$

故该网店购进甲种口罩 227 袋,购进乙种口罩 273 袋,获利最大,最大利润为 1 136.2 元.

9. 解:(1)330;660

(2)设线段 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx$,将 $(17,340)$ 代入 $y=kx$ 中,

$340=17k$,解得 $k=20.$

$\therefore$ 线段 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=20x.$

根据题意得:线段 DE 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=340-5(x-22)=-5x+450.$

联立两线段所表示的函数关系式成方程组,

得 $\begin{cases}y=20x,\\ y=-5x+450,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=18,\\ y=360.\end{cases}$

$\therefore$ 交点 D 的坐标为 $(18,360)$,

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}20x(0\leqslant x\leqslant18)\\ -5x+450(18<x\leqslant30)\end{cases}.$$

(3)当 $0\leqslant x\leqslant18$ 时,

根据题意得:$(8-6)\times20x\geqslant640,$

解得 $x\geqslant16.$

当 $18<x\leqslant30$ 时,

根据题意得 $(8-6)\times(-5x+450)\geqslant640,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x \leqslant 26$.

$\therefore 16 \leqslant x \leqslant 26$.

$26-16+1=11$(天),

$\therefore$ 日销售利润不低于640元的天数共有11天,

$\because$ 点 D 的坐标为(18,360),

$\therefore$ 日最大销售量为360件.

$\because 360 \times 2 = 720$(元),

$\therefore$ 试销售期间,日销售最大利润是720元.

19.3 课题学习 选择方案

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** B

4. 解:(1)$y_1 = 20 + 0.1x$;$y_2 = 0.2x$.

(2)令 $y_1 = y_2$,即 $20 + 0.1x = 0.2x$,

解得 $x = 200$,

所以一个月内通话200 min,两种通讯业务费用相同.

(3)当 $x = 300$ 时,$y_1 = 20 + 0.1 \times 300 = 50$,$y_2 = 0.2 \times 300 = 60$,

因为 $y_1 < y_2$,

所以选择"全球通"合算些.

点拨:(1)根据两种通讯业务的收费方式可得 $y_1 = 20 + 0.1x$,$y_2 = 0.2x$;(2)令 $y_1 = y_2$,解方程即可;(3)当 $x = 300$ 时,分别求出 y_1,y_2 的值,再比较即可.

5. 解:(1)设大货车有 m 辆,则小货车有 $(15-m)$ 辆,

根据题意,得 $12m + 8(15-m) = 152$.

解得 $m = 8$. 则 $15 - m = 7$.

答:大货车有8辆,小货车有7辆.

(2)$y = 800x + 900(8-x) + 400(10-x) + 600[7-(10-x)] = 100x + 9\,400$($3 \leqslant x \leqslant 8$ 且 x 为整数).

(3)由题意得 $12x + 8(10-x) \geqslant 100$,解得 $x \geqslant 5$.

又$\because 3 \leqslant x \leqslant 8$,

$\therefore 5 \leqslant x \leqslant 8$.

$\because y = 100x + 9\,400$ 中,$k = 100 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 时,y 有最小值为 $100 \times 5 + 9\,400 = 9\,900$.

答:使总运费最少的货车调配方案为:派往A村5辆大货车,5辆小货车,派往B村3辆大货车,2辆小货车,最少总运费为9 900元.

6. 解:(1)经销商能盈利 $5 \times 11 + 5 \times 17 + 5 \times 9 + 5 \times 13 = 5 \times 50 = 250$(元).

(2)设甲店配A种水果 x 箱,水果经销商盈利 w 元,则甲店配B种水果 $(10-x)$ 箱,

乙店配A种水果 $(10-x)$ 箱,乙店配B种水果 $10-(10-x) = x$(箱).

$\because 9 \times (10-x) + 13x \geqslant 100$,且 x 为整数,

$\therefore x \geqslant 2\frac{1}{2}$,且 x 为整数.

$w = 11x + 17(10-x) + 9(10-x) + 13x = -2x + 260$.

$\because -2 < 0$,

$\therefore w$ 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时,w 最大.

即甲店配A种水果3箱,B种水果7箱,乙店配A种水果7箱,B种水果3箱,经销商盈利最大.

最大盈利:$-2 \times 3 + 260 = 254$(元).

7. 解:(1)

	A(吨)	B(吨)	合计(吨)
C	$x-60$	$300-x$	240
D	$260-x$	x	260
总计(吨)	200	300	500

(2)由题意得:$w = 20(x-60) + 25(300-x) + 15(260-x) + 30x = 10x + 10\,200$($60 \leqslant x \leqslant 260$).

(3)$\because$ 从D市到B市的运费每吨减少 m 元,

$\therefore w = (10-m)x + 10\,200$.

①若 $0 < m < 10$,则 $x = 60$ 时,总运费最少.

$\therefore (10-m) \times 60 + 10\,200 \geqslant 10\,320$,

解得 $0 < m \leqslant 8$.

②若 $m > 10$,则 $x = 260$ 时,总运费最少.

$\therefore (10-m) \times 260 + 10\,200 \geqslant 10\,320$,

解得 $m \leqslant \frac{124}{13} < 10$.

显然不合题意,应舍去.

③若 $m = 10$,则 $w = 10\,200$.

显然不合题意,应舍去.

综上所述,m 的取值范围为 $0 < m \leqslant 8$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解: (1)∵ $y=(2m+1)x+m-3$ 是一次函数,且 y 随 x 的增大而减小,

∴ $2m+1<0$,

解得 $m<-\frac{1}{2}$.

(2)∵ 图象过第一、二、三象限,

∴ $\begin{cases}2m+1>0,\\ m-3>0,\end{cases}$

解得 $m>3$.

2. 解: (1)证明:∵ $\triangle AOB$ 与 $\triangle ACP$ 都是等边三角形,

∴ $AO=AB$, $AC=AP$, $\angle CAP=\angle OAB=60°$.

∴ $\angle CAP+\angle PAO=\angle OAB+\angle PAO$,

即 $\angle CAO=\angle PAB$.

∴ $\triangle AOC\cong\triangle ABP$.

结论:点 P 在过点 B 且与 AB 垂直的直线上或 $PB\perp AB$ 或 $\angle ABP=90°$.

(2)点 P 所在函数图象是过点 B 且与 AB 垂直的直线.

∵ $\triangle AOB$ 是等边三角形, $A(0,3)$,

∴ $B(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.

当点 C 移动到使点 P 在 y 轴上时,得 $P(0,-3)$.

设点 P 所在直线的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$,

把 B, P 两点的坐标代入,得 $\begin{cases}b=-3,\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}k+b=\frac{3}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3},\\ b=-3.\end{cases}$

∴ 点 P 所在函数图象的解析式为 $y=\sqrt{3}x-3$.

3. 解: (1)∵ $(1,b)$ 在直线 $y=x+1$ 上,

∴ 当 $x=1$ 时, $b=1+1=2$.

(2)方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$

(3)直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P. 理由如下:将点 $(1,2)$ 代入 $y=mx+n$,得 $m+n=2$. 将 $x=1$ 代入 $y=nx+m$,得 $y=2$.

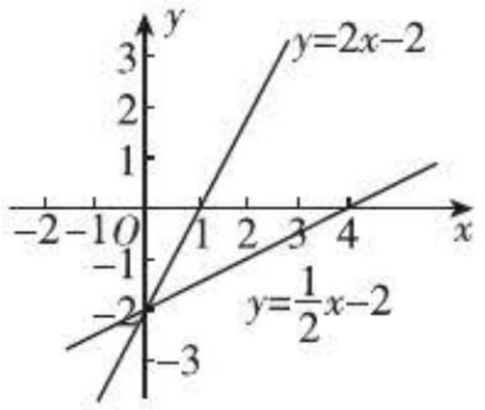
∴ 直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P.

4. 解: 原不等式组可化为 $\begin{cases}2x-2<0,\\ \frac{1}{2}x-2>0.\end{cases}$

在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=2x-2$ 和 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图象如图所示.

∵ $x<1$ 时, $2x-2<0$, $x>4$ 时, $\frac{1}{2}x-2>0$,

∴ 原不等式组无解.



(第4题)

点拨: 先将不等式转化为大于或小于0的形式,再画出所对应的函数图象,最后通过函数图象找出不等式组的解集.

5. 解: (1)因为直线 DC 的解析式为 $y=-2x+8$,

令 $y=0$,得 $x=4$,即点 C 的坐标为 $(4,0)$.

把点 C 的坐标 $(4,0)$ 代入 $y=ax+3$,

得 $0=4a+3$,

∴ $a=-\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

令 $x=0$,得 $y=3$,

∴ 点 E 的坐标为 $(0,3)$.

∵ BD 与 x 轴平行,

∴ $y_B=y_D=y_E$,即点 D 的纵坐标为3,

令 $3=-2x+8$,得 $x=\frac{5}{2}$.

∴ $DE=\frac{5}{2}$.

由平行四边形的性质得 $S_{\square ABCD}=4S_{\triangle CDE}=4\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times3=15$.

又 $S_{\triangle EOC}=\frac{1}{2}\times OC\times OE=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

∴ 平行四边形 $ABCD$ 的面积是 $\triangle EOC$ 面积的 $\frac{5}{2}$ 倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)设A种商品每件的进价为x元,B种商品每件的进价为y元,

根据题意,得$\begin{cases}30x+40y=3\ 800,\\40x+30y=3\ 200,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=20,\\y=80.\end{cases}$

∴A种商品每件的进价为20元,B种商品每件的进价为80元.

(2)设购进B种商品m件,获得的利润为ω元,则购进A种商品$(1\ 000-m)$件,

根据题意,得$\omega=(30-20)(1\ 000-m)+(100-80)m=10m+10\ 000$.

∵A种商品的数量不少于B种商品数量的4倍,

∴$1\ 000-m\geqslant 4m$,解得$m\leqslant 200$.

∵在$\omega=10m+10\ 000$中,$k=10>0$,

∴ω随m的增大而增大,

∴当$m=200$时,ω取最大值,最大值为$10\times 200+10\ 000=12\ 000$,

∴当购进A种商品800件、B种商品200件时,销售利润最大,最大利润为12 000元.

【第十九章测试卷】

一、1. C **2.** D **3.** C **4.** A **5.** B **6.** D **7.** C **8.** A **9.** A **10.** C

二、11. $x\leqslant\frac{2}{3}$ **12.** $y=-x+1$ **点拨:**答案不唯一.

13. 三 **14.** $x<-2$ **15.** $(-\frac{2}{3},0)$ **16.** $(\frac{7}{4},0)$

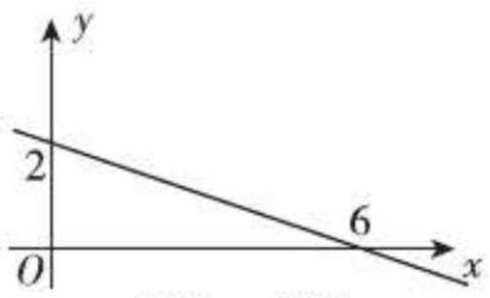
三、17. 解:(1)由题意,得$b=0$,$3=2k$,解得$k=\frac{3}{2}$,∴$y=\frac{3}{2}x$.

(2)由题意,得$\begin{cases}2k+b=4,\\\frac{1}{3}k+b=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{13}{5},\\b=-\frac{6}{5}.\end{cases}$∴函数解析式为$y=\frac{13}{5}x-\frac{6}{5}$.

18. 解:(1)令$x=0$,得$y=2$;令$y=0$,得$x=6$.

∴直线$y=-\frac{1}{3}x+2$过点$(0,2)$和点$(6,0)$,函数图象如图.



(第18题)

(2)它的图象与x轴交于点$(6,0)$,与y轴交于点$(0,2)$.

(3)$S=\frac{1}{2}\times 2\times 6=6$.

19. 解:(1)∵直线$y=kx+b$经过点$A(5,0)$,$B(1,4)$,

∴$\begin{cases}5k+b=0,\\k+b=4.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=5.\end{cases}$

∴直线AB的解析式为$y=-x+5$.

(2)联立$\begin{cases}y=-x+5,\\y=2x-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

∴点C的坐标为$(3,2)$.

20. 解:(1)∵正比例函数$y=2x$的图象经过点$A(m,2)$,

∴$2=2m$,∴$m=1$.

∵一次函数的图象经过点$A(1,2)$,$B(-2,-1)$,

∴$\begin{cases}k+b=2,\\-2k+b=-1.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

∴一次函数的解析式为$y=x+1$.

(2)当$y=0$时,$x+1=0$,$x=-1$,

∴$D(-1,0)$.∴$OD=1$.

∴$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$.

21. 解:(1)由直线$y=-2x+4$与x轴交于点A,令$y=0$,则$-2x+4=0$,解得$x=2$.∴$A(2,0)$.

∵$OC=OA$,∴$C(0,2)$或$(0,-2)$.

∵直线$y=kx+b$(k,b是常数,$k\neq 0$)经过点A和点C,∴$\begin{cases}2k+b=0,\\b=-2,\end{cases}$或$\begin{cases}2k+b=0,\\b=2.\end{cases}$解得$k=1$或$k=-1$.

(2)易知$B(0,4)$,$C(0,2)$,又$PC=PB$,

∴P的纵坐标为3.

∵点P在直线$y=-2x+4$上,

∴把$y=3$代入$y=-2x+4$,解得$x=\frac{1}{2}$,

∴点P的坐标为$(\frac{1}{2},3)$.

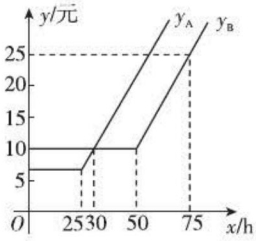
22. 解:(1)10;50

(2)$y_A=\begin{cases}7(0\leqslant x\leqslant 25),\\0.6x-8(x>25).\end{cases}$

(3)当$y_A=10$时,$0.6x-8=10$,解得$x=30$.

∴y_A的函数图象如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第22题）

根据图象可知，

当$0 \leqslant x < 30$时，选A方式合算；

当$x = 30$时，选A方式或B方式收费一样；

当$x > 30$时，选B方式合算.

23. 解：(1)在图象中可以看出，从出发到父子相遇花费了12分钟.

设小明步行速度为x米/分钟，则小明父亲骑车速度为$2x$米/分钟，根据题意，得

$12x + 12 \times 2x = 2\,880$. 解得$x = 80$.

∴ 两人相遇处离学校的距离是$80 \times 12 = 960$(米).

(2)设小明的父亲在赶往学校的过程中，路程s与时间t之间的函数解析式为$s = kt + b$.

把(0,2 880)和(12,960)分别代入，得

$\begin{cases} 2\,880 = b, \\ 960 = 12k + b. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -160, \\ b = 2\,880. \end{cases}$

∴ $s = -160t + 2\,880$.

(3)在$s = -160t + 2\,880$中，

令$s = 0$，得$0 = -160t + 2\,880$.

解得$t = 18$. ∴ $20 - 18 = 2$(分钟).

答：如果由他的父亲骑车搭他到学校，他不会迟到，且能提前2分钟到校.

第二十章 数据的分析

20.1 数据的集中趋势

20.1.1 平均数

【两年模拟兵法】

1. A　**2.** D

3. D　**点拨：**由平均数的定义，知$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \times 2 = 8$，则$\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4 \times 3) = \frac{1}{4} \times (8 + 12) = 5$，故选D. 关于平均数的计算有规律：若$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$，则数据$ax_1 + b$，$ax_2 + b, \cdots, ax_n + b$的平均数是$a\bar{x} + b$.

4. B　**点拨：**因为10名学生的平均成绩是x分，所以10名学生的总成绩是$10x$分，故整个组的平均成绩是$\frac{10x + 84 \times 5}{15} = \frac{10x + 420}{15}$(分).

5. 77.4

6. 解：由题意，得

$\bar{x} = \frac{0.01 \times 2 + 0.02 \times 1 + 0.03 \times 5 + 0.04 \times 3 + 0.05 \times 1}{2 + 1 + 5 + 3 + 1}$

$= 0.03(g/m^3)$.

所以这天该市市区的大气飘尘数据的平均值是$0.03\ g/m^3$.

7. 解：(1)九年级捐图书数为$1\,000 \times 30\% \times 4 = 1\,200$(本)，

八年级捐图书数为$1\,000 \times 35\% \times 6 = 2\,100$(本)，

七年级捐图书数为$1\,000 \times (1 - 30\% - 35\%) \times 2 = 700$(本)，

∴ 该校学生捐图书的总本数为$1\,200 + 2\,100 + 700 = 4\,000$(本).

(2)$4\,000 \div 1\,000 = 4$(本)，

因此，该校学生平均每人捐图书4本.

8. 解：(1)该班的学生总人数为$4 + 8 + 10 + 16 + 12 = 50$(人).

(2)能. 先估算全班总成绩为$54.5 \times 4 + 64.5 \times 8 + 74.5 \times 10 + 84.5 \times 16 + 94.5 \times 12 = 3\,965$(分)，则估算出平均成绩为$\frac{3\,965}{50} = 79.3$(分).

点拨：本题考查估算平均分，在计算时选取每一组的组中值近似地作为该组学生成绩的平均分.

9. 解：(1)小聪的平均成绩是：

$(80 + 90 + 98 + 60) \div 4 = 82$(分)，

小亮的平均成绩是：

$(85 + 75 + 75 + 95) \div 4 = 82.5$(分).

(2)小聪的毕业成绩是：

$(80 \times 2 + 90 \times 3 + 98 \times 3 + 60 \times 2) \div 10 = 84.4$(分)，

小亮的毕业成绩是：

$(85 \times 2 + 75 \times 3 + 75 \times 3 + 95 \times 2) \div 10 = 81$(分)，

故小聪和小亮都达到了“优秀毕业生”水平；小聪的毕业成绩更好些.

(3)(答案不唯一)小聪要加强体育锻炼，注意培养综合素质；小亮在学习文化知识方面还要努

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

力,成绩有待进一步提高.

20.1.2 中位数和众数

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨**:本题主要考查中位数和扇形统计图,根据扇形统计图中各项目的圆心角度数求得其户数是解题的关键.

3. C 4. B 5. B 6. C

7. A **点拨**:∵ 共有 10 人,∴ 中位数为第 5 和第 6 人参加户外活动时间的平均数,

∴ 中位数 $=(3+3)\div2=3$;

平均数 $=(1\times2+2\times2+3\times4+6\times2)\div10=3$;

众数是一组数据中出现次数最多的数据,

∴ 众数为 3;故选 A.

8. **解**:填表如下:

人数 / 成绩 x / 部门	$40\leqslant x\leqslant49$	$50\leqslant x\leqslant59$	$60\leqslant x\leqslant69$	$70\leqslant x\leqslant79$	$80\leqslant x\leqslant89$	$90\leqslant x\leqslant100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙	1	0	0	7	10	2

a. 240

b. (答案不唯一,理由合理即可)

甲;①甲部门生产技能测试中,平均分较高,表示甲部门员工的生产技能水平较高;

②甲部门生产技能测试中,没有技能不合格的员工,表示甲部门员工的生产技能水平较高

9. **解**:(1)88 (2)86

(3)不能,因为全班学生成绩的中位数是 86 分,所以张华同学的成绩处于中游偏下.

(或者指出高于 83 分的有 30 名学生,而低于 83 分的仅有 15 名学生,所以张华同学的成绩为中游偏下)

10. **解**:(1)填表如下:

	平均数/分	众数/分	中位数/分
七年级	85.5	80	87
八年级	85.5	85	86
九年级	85.5	78	84

(2)①∵ 平均数都相同,八年级成绩的众数最高,

∴ 八年级的成绩更好一些;

②∵ 平均数都相同,七年级成绩的中位数最高,

∴ 七年级的成绩更好一些.

(3)∵ 七、八、九各年级前 3 名学生决赛成绩的平均数分别是 93 分、91 分、94 分,

∴ 从各年级参加决赛的选手中分别选出 3 人参加总决赛,九年级的实力更强一些.

11. (1)①乙 ②甲 (2)乙

点拨:此题重点考查了理解统计图的能力. 由题图可知甲、乙成绩的平均数相当. 但乙的合格次数比甲多,甲成绩的中位数大于乙成绩的中位数,据此进行判断.

20.2 数据的波动程度

【两年模拟兵法】

1. A 2. C 3. A

4. A **点拨**:∵ $s_{甲}^2=0.2$, $s_{乙}^2=0.8$, ∴ $s_{甲}^2<s_{乙}^2$,

∴ 甲的成绩比乙的稳定.

5. B

6. B **点拨**:由题意得,原来 6 位员工的月工资平均数为 4 500 元,因为新员工的月工资为 4 500 元,所以现在 7 位员工的月工资的平均数是 4 500 元,由方差公式可知,7 位员工的月工资的方差变小,故选 B.

7. **解**:由题意可知 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

$$(1)\bar{x}'=\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')$$

$$=\frac{1}{n}[(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots+(ax_n+b)]$$

$$=\frac{1}{n}[a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nb]$$

$$=a\bar{x}+b.$$

$$(2)s'^2=\frac{1}{n}[(x_1'-\bar{x}')^2+(x_2'-\bar{x}')^2+\cdots+(x_n'-\bar{x}')^2]$$

$$=\frac{1}{n}[(ax_1+b-a\bar{x}-b)^2+(ax_2+b-a\bar{x}-b)^2+\cdots+(ax_n+b-a\bar{x}-b)^2]$$

$$=\frac{1}{n}[a^2(x_1-\bar{x})^2+a^2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\bar{x})^2]$$

$$=a^2s^2.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:(1)

	平均数/分	中位数/分	众数/分
甲	80	79.5	78
乙	80	80	80

(2)13

(3)选乙同学. 理由:从平均数看,两人成绩相同,从中位数看,乙好于甲,从众数看,乙好于甲,从方差看,乙比甲稳定,故选乙同学参加该数学邀请赛.

9. 解:(1)将甲、乙两段台阶的高度值从小到大排列如下,

甲:10,12,15,17,18,18;乙:14,14,15,15,16,16.

甲的中位数是$(15+17)\div2=16$,平均数是$\frac{1}{6}\times(10+12+15+17+18+18)=15$.

乙的中位数是$(15+15)\div2=15$,平均数是$\frac{1}{6}\times(14+14+15+15+16+16)=15$.

故甲、乙两段台阶的高度平均数相同,中位数不同.

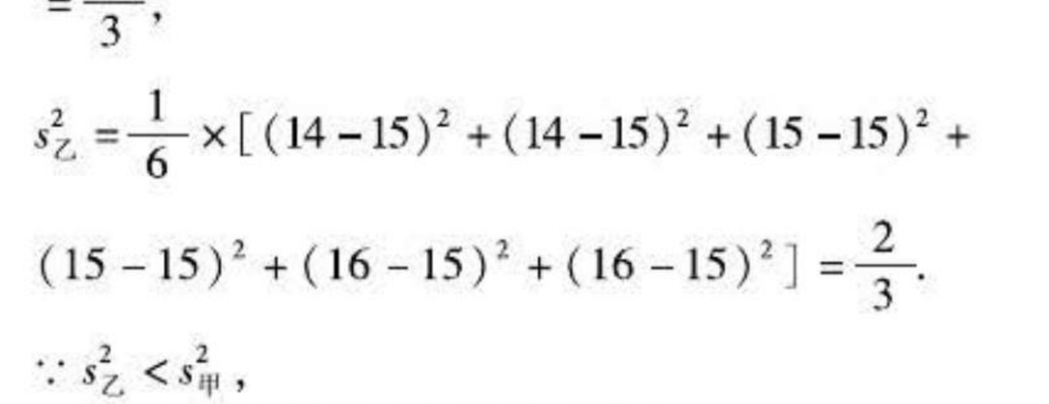
(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[(10-15)^2+(12-15)^2+(15-15)^2+(17-15)^2+(18-15)^2+(18-15)^2]=\frac{28}{3}$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[(14-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(16-15)^2]=\frac{2}{3}$.

$\because s_{乙}^2<s_{甲}^2$,

$\therefore$ 在乙台阶上行走会比较舒服.

(3)如图①和图②所示,为使游客在两段台阶上行走比较舒服,需使方差尽可能小,最理想应为0,同时不能改变台阶数量和台阶总体高度,故可使每个台阶高度均为15 cm(原平均数),使得方差为0.



(第9题)

20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析

【两年模拟兵法】

1. C 2. D 3. D

4. 收集数据;整理数据;描述数据;分析数据;撰写调查报告;交流

5. 平均数;中位数;众数;方差

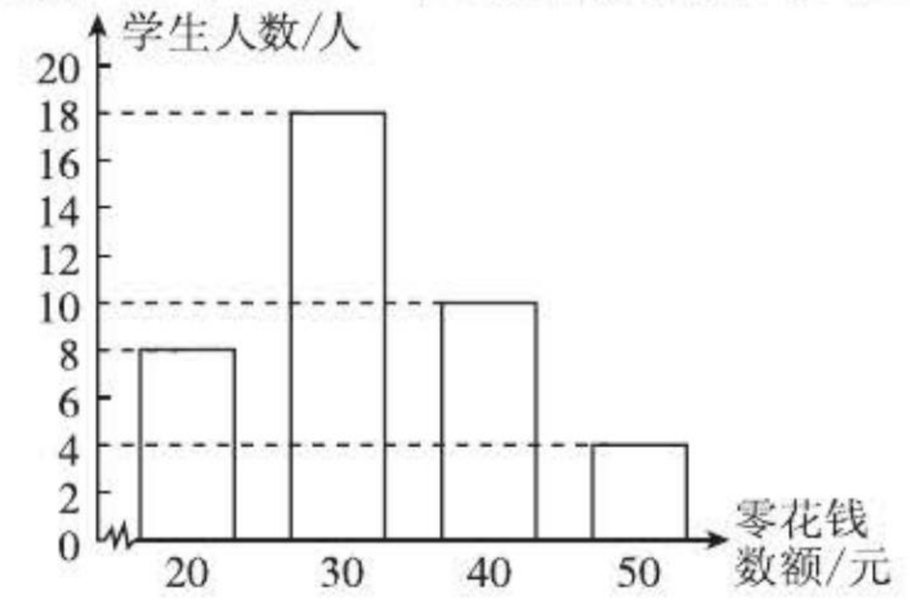
6. -1.5; -2

7. (1)56 (2)36分;36分 (3)19

8. 解:(1)$10\div25\%=40$(人)

答:校团委随机调查了40人.

$40\times20\%=8$(人). 补全条形统计图如图所示:



(第8题)

(2)"50元"所占的百分比是$\frac{4}{40}\times100\%=10\%$,

则圆心角是$360°\times10\%=36°$. 被调查的学生每人一周零花钱数额的中位数是30元.

(3)平均每人一周的零花钱是

$\frac{8\times20+18\times30+10\times40+4\times50}{40}=32.5$(元),

$\frac{1}{2}\times32.5\times1\,000=16\,250$(元).

答:估计全校学生共捐款16 250元.

9. 解:(1)众数是50,中位数是50.

(2)这11个城市中当天的空气质量为优的有6个,则这11个城市当天的空气质量为优的频率为$\frac{6}{11}$.

(3)这五个城市当天的空气质量的平均数为$(50+60+57+37+55)\div5=51.8$.

10. 解:(1)40;15

(2)$\because$ 在这组样本数据中,35出现了12次,出现的次数最多,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ 这组样本数据的众数为 35.

∵ 将这组样本数据按从小到大的顺序排列,处于最中间的两个数都是 36,$\frac{36+36}{2}=36$,

∴ 这组样本数据的中位数为 36.

(3)$200\times30\%=60$(双),

∴ 建议购买 35 号运动鞋 60 双.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. C **点拨:**由题意可得,两次加油间耗油 30 L,行驶的路程为 6 600 − 6 200 = 400(km),所以该车每 100 km 的平均耗油量为 30 ÷ (400 ÷ 100) = 7.5(L). 故选 C.

2. B

3. 解:(1)3.2

(2)2.1

(3)应该使用中位数来描述该公司每人所创年利润的一般水平.

4. 解:(1)这组数据的平均数没有实际意义.

(2)这组数据共有 110 个数据,中位数应是从小到大排列后第 55 个和第 56 个数据的平均数,这两个数据都是 228,这组数据中 228 出现的次数最多,所以这组数据的中位数、众数都是 228.

(3)商场总经理关心的是众数. 理由:众数是 228,表明容积为 228 升的冰箱的销量最大,它能为商场带来较多的利润,因此,这种型号的冰箱要多进货,其他的型号则要少进货.

5. 解:(1)甲公司销售的该产品使用寿命的平均数为$\frac{1}{10}\times(4+5+5+5+5+7+9+12+13+15)=8$(年),众数为 5 年,中位数为 6 年;

乙公司销售的该产品使用寿命的平均数为$\frac{1}{10}\times(6+6+8+8+8+9+10+12+14+15)=9.6$(年),众数为 8 年,中位数为 8.5 年;

丙公司销售的该产品使用寿命的平均数为$\frac{1}{10}\times(4+4+4+6+7+9+13+15+16+16)=9.4$(年),众数为 4 年,中位数为 8 年.

综上可知,甲公司宣传时用的是平均数,乙公司宣传时用的是众数,丙公司宣传时用的是中位数.

(2)乙公司. 理由如下:分别从平均数、众数和中位数三项指标来看,乙公司的产品都比其他两个公司的要好,所以可以认为乙公司的产品质量较高,可以选购乙公司销售的产品.

(3)可从以下两点对本公司的产品进行推销:①丙公司的该产品的平均数和中位数都比甲公司的高;②从产品使用寿命的最高年限考虑,若购买丙公司产品,则其使用寿命比较高的机会比乙公司的大一些.

6. 解:(1)因为$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(15+16+16+14+14+15)=15$;

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{6}\times(11+15+18+17+10+19)=15$.

甲路段的中位数为 15;乙路段的中位数为 16.

甲路段极差为 16 − 14 = 2;乙路段极差为 19 − 10 = 9.

$s^2_{甲}=\frac{2}{3}$,$s^2_{乙}=\frac{35}{3}$.

所以相同点:两段台阶路每一级台阶高度的平均数相同. 不同点:两段台阶路每一级台阶高度的中位数、方差和极差不同.

(2)甲段台阶路走起来更舒服一些,因为它的每一级台阶高度的方差小.

(3)每一级台阶高度均整修为 15 cm(原数据的平均数),使得方差为 0,此时游客行走最方便.

7. 解:(1)$\frac{2.8\times15+3\times20+2.5\times10}{15+20+10}\approx2.8$(kg).

答:鱼塘中这种鱼平均每条约重 2.8 kg.

(2)$1\ 500\times82\%\times2.8=3\ 444$(kg).

答:鱼塘中这种鱼约有 3 444 kg.

(3)总收入为 $6.2\times3\ 444=21\ 352.8$(元),纯收入为 21 352.8 − 14 000 = 7 352.8(元).

答:这种鱼的总收入为 21 352.8 元,纯收入为 7 352.8 元.

【第二十章测试卷】

一、**1.** C **2.** C **3.** C **4.** C **5.** B **6.** B **7.** B **8.** D **9.** C **10.** B

二、**11.** 35 **12.** 甲 **13.** 680 **14.** 4 **15.** 甲 **16.** 22

三、**17. 解:**小丽的成绩是 $80\times10\%+75\times30\%+71\times25\%+88\times35\%=79.05$(分),小明的成绩是 $76\times10\%+80\times30\%+70\times25\%+90\times35\%=80.6$(分),79.05 < 80.6,所以小明的学期总评成

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

绩高.

18. 解:(1)$\dfrac{15\times40+25\times40+30\times20}{100}$

$=22$(元/千克).

答:该什锦糖的单价是22元/千克.

(2)设加入丙种糖果x千克,则加入甲种糖果$(100-x)$千克,根据题意,得

$\dfrac{30x+15(100-x)+22\times100}{200}\leqslant20$,解得$x\leqslant20$.

答:最多可加入丙种糖果20千克.

19. 解:(1)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{5}\times(3+4+5+6+7)=5$(年),

$s^2_{甲}=\dfrac{1}{5}\times[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2]=2$,

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{5}\times(4+4+5+6+6)=5$(年),

$s^2_{乙}=\dfrac{1}{5}\times[(4-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(6-5)^2]=0.8$.

(2)由(1)知,甲厂、乙厂的该种电子产品在正常情况下的使用寿命平均数都是5年,

又∵$s^2_{甲}>s^2_{乙}$,∴应选乙厂的产品.

20. 解:(1)月平均用水11吨的用户为:$100-20-10-20-10=40$(户).补图略.

(2)∵$\bar{x}=\dfrac{1}{100}\times(10\times20+11\times40+12\times10+13\times20+14\times10)=11.6$(吨),∴平均数为11.6吨.

∵由统计图可知,11吨出现的次数最多,∴众数为11吨.∵将这组样本数据按从小到大的顺序排列,其中处于中间的两个数据都是11吨,

∴中位数为11吨.

(3)样本中月平均用水量不超过12吨的有$20+40+10=70$(户),∴黄冈市直机关500户家庭中月平均用水量不超过12吨的约有:

$500\times\dfrac{70}{100}\times100\%=350$(户).

21. 解:(1)50;32

(2)∵$\bar{x}=\dfrac{1}{50}\times(5\times4+10\times16+15\times12+20\times10+30\times8)=16$,

∴这组数据的平均数为16.

∵在这组样本数据中,10出现的次数最多,为16次,

∴这组数据的众数为10.

∵将这组样本数据按从小到大的顺序排列,其中处于中间的两个数都是15,

∴这组数据的中位数为15.

(3)$1\ 900\times32\%=608$(名).

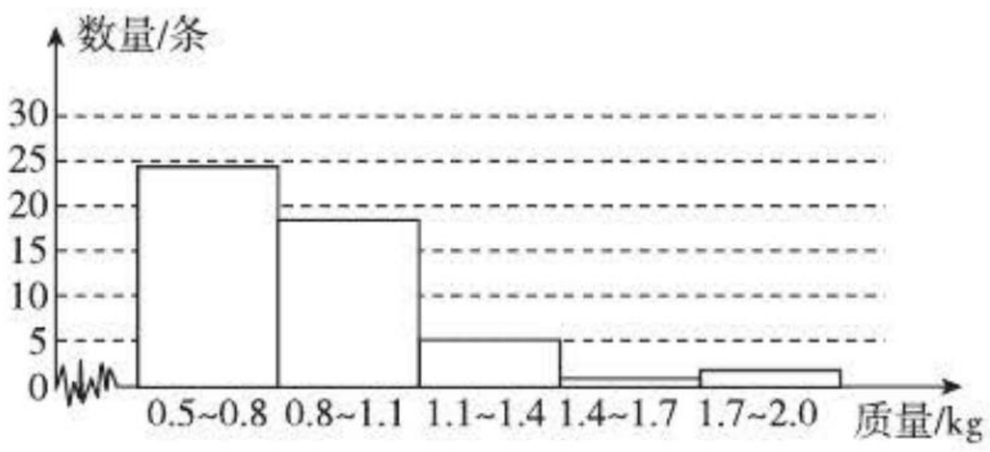
答:该校本次活动捐款金额为10元的学生约有608名.

22. 解:(1)C组

(2)图略.

(3)小明的判断符合实际.理由:这次活动中做家务的时间的中位数所在的范围是$1.5\leqslant x<2$,小明这一周做家务2小时,所在的范围是$2\leqslant x<2.5$,所以小明的判断符合实际.

23. 解:(1)补全频数分布直方图如图所示.



(第23题)

(2)落在0.5~0.8 kg范围内的可能性最大.

(3)落在0.8~1.1 kg范围内.

(4)方法一:平均数$\bar{x}=\dfrac{0.5\times1+0.6\times8+0.7\times15+1.0\times18+1.2\times5+1.6\times1+1.9\times2}{50}$

$=0.904$(kg).

$(100\div2)\times50\times0.904=2\ 260$(kg).

答:鱼塘中成品鱼的总质量约为2 260 kg.

方法二:利用组中值计算平均数:

$\bar{x}=\dfrac{0.65\times24+0.95\times18+1.25\times5+1.55\times1+1.85\times2}{50}$

$=0.884$(kg).

$(100\div2)\times50\times0.884=2\ 210$(kg).

答:鱼塘中成品鱼的总质量约为2 210 kg.

方法三:用众数(中位数)估计鱼塘中成品鱼的总质量:

$(100\div2)\times50\times1.0=2\ 500$(kg).

答:鱼塘中成品鱼的总质量约为2 500 kg.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第十六章 二次根式

16.1 二次根式

练习

1. 解: 设长方形的长、宽分别为 $3x$ cm,$2x$ cm,由题意得 $2x\times3x=18$,解得 $x=\sqrt{3}$(负值舍去). $3x=3\sqrt{3}$,$2x=2\sqrt{3}$.

答: 长方形的长、宽应分别取 $3\sqrt{3}$ cm 和 $2\sqrt{3}$ cm.

点拨: 利用长方形的面积公式和比例的性质解答本题.

2. 解: (1) 由 $a-1\geqslant0$,得 $a\geqslant1$,所以当 $a\geqslant1$ 时,$\sqrt{a-1}$ 在实数范围内有意义.

(2) 由 $2a+3\geqslant0$,得 $a\geqslant-\frac{3}{2}$,所以当 $a\geqslant-\frac{3}{2}$ 时,$\sqrt{2a+3}$ 在实数范围内有意义.

(3) 由 $-a\geqslant0$,得 $a\leqslant0$,所以当 $a\leqslant0$ 时,$\sqrt{-a}$ 在实数范围内有意义.

(4) 由 $5-a\geqslant0$,得 $a\leqslant5$,所以当 $a\leqslant5$ 时,$\sqrt{5-a}$ 在实数范围内有意义.

练习

1. 解: (1) $(\sqrt{3})^2=3$;

(2) $(3\sqrt{2})^2=3^2\times(\sqrt{2})^2=9\times2=18$.

2. 解: (1) $\sqrt{0.3^2}=0.3$;

(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}$;

(3) $-\sqrt{(-\pi)^2}=-\sqrt{\pi^2}=-\pi$;

(4) $\sqrt{10^{-2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{1}{10}$.

点拨: 利用公式 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$ 进行计算时,要注意根号内和根号外的符号.

习题 16.1

1. 解: (1) 由 $a+2\geqslant0$,得 $a\geqslant-2$,所以当 $a\geqslant-2$ 时,$\sqrt{a+2}$ 在实数范围内有意义.

(2) 由 $3-a\geqslant0$,得 $a\leqslant3$,所以当 $a\leqslant3$ 时,$\sqrt{3-a}$ 在实数范围内有意义.

(3) 由 $5a\geqslant0$,得 $a\geqslant0$,所以当 $a\geqslant0$ 时,$\sqrt{5a}$ 在实数范围内有意义.

(4) 由 $2a+1\geqslant0$,得 $a\geqslant-\frac{1}{2}$,所以当 $a\geqslant-\frac{1}{2}$ 时,$\sqrt{2a+1}$ 在实数范围内有意义.

2. 解: (1) $(\sqrt{5})^2=5$;

(2) $(-\sqrt{0.2})^2=0.2$;

(3) $\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2=\frac{2}{7}$;

(4) $(5\sqrt{5})^2=25\times5=125$;

(5) $\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{10^2}=10$;

(6) $\left(-7\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2=\left(7\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2=49\times\frac{2}{7}=14$;

(7) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$;

(8) $-\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=-\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=-\frac{2}{5}$.

3. 解: (1) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$;(2) 长:$3\sqrt{\frac{S}{6}}$,宽:$2\sqrt{\frac{S}{6}}$.

4. 解: (1) $9=3^2$;

(2) $5=(\sqrt{5})^2$;

(3) $2.5=(\sqrt{2.5})^2$;

(4) $0.25=0.5^2$;

(5) $\frac{1}{2}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$;

(6) $0=0^2$.

5. 解: 由题意,得 $\pi r^2=\pi\times2^2+\pi\times3^2$,所以 $r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

6. 解: 设 AB 的长为 $x(x>0)$,则 AB 边上的高为 $4x$. 由题意,得 $\frac{1}{2}x\cdot4x=12$,即 $2x^2=12$,所以 $x^2=6$,所以 $x=\sqrt{6}$,即 AB 的长为 $\sqrt{6}$.

7. 解: (1) 因为 $x^2\geqslant0$,所以 $x^2+1>0$,所以 x 取任意实数时,$\sqrt{x^2+1}$ 在实数范围内都有意义.

(2) 因为 $(x-1)^2\geqslant0$ 在实数范围内都成立,所以 x 取任意实数时,$\sqrt{(x-1)^2}$ 在实数范围内都有意义.

(3) 由 $\frac{1}{x}\geqslant0$,得 $x>0$,所以当 $x>0$ 时,$\sqrt{\frac{1}{x}}$ 在实数范围内有意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)由 $x+1\geqslant 0$ 且 $\sqrt{x+1}\neq 0$,得 $x>-1$,所以当 $x>-1$ 时,$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$在实数范围内有意义.

点拨:(3)(4)中不仅要注意被开方数为非负数,还要注意分母不为零.

8. 解:设 $t^2=kh$. 因为当 $h=20$ 时,$t=2$,所以 $2^2=20k$,所以 $k=\frac{1}{5}$,所以 $t^2=\frac{h}{5}$,所以 $t=\sqrt{\frac{h}{5}}$.

当 $h=10$ 时,$t=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$;

当 $h=25$ 时,$t=\sqrt{\frac{25}{5}}=\sqrt{5}$.

所以当 $h=10$ 和 $h=25$ 时,小球落地所用的时间分别为$\sqrt{2}$ s 和 $\sqrt{5}$ s.

9. 解:(1)因为 $\sqrt{18-n}$是整数,

所以 $18-n$ 是完全平方数,

又因为 n 为自然数,$18-n\geqslant 0$,

所以 $18-n$ 的值可以为 0,1,4,9,16.

所以 n 的值可以为 18,17,14,9,2.

(2)因为 $\sqrt{24n}$是整数,所以 $24n$ 是完全平方数.

因为当 $n=6$ 时,$\sqrt{24n}$是整数,

当 $n=1,2,3,4,5$ 时,$\sqrt{24n}$都不是整数,

所以正整数 n 的最小值为 6.

10. 解:由题意可知,$V=10\pi r^2$,所以 $r=\sqrt{\frac{V}{10\pi}}$.

当 $V=5\pi$ 时,$r=\sqrt{\frac{5\pi}{10\pi}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$;

当 $V=10\pi$ 时,$r=\sqrt{\frac{10\pi}{10\pi}}=\sqrt{1}=1$;

当 $V=20\pi$ 时,$r=\sqrt{\frac{20\pi}{10\pi}}=\sqrt{2}$.

所以当 $V=5\pi$,10π 和 20π 时,底面半径 r 的大小分别为 $\sqrt{\frac{1}{2}}$,1,$\sqrt{2}$.

16.2 二次根式的乘除

练习

1. 解:(1)$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times 5}=\sqrt{10}$;

(2)$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6$;

(3)$2\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{6\times\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$;

(4)$\sqrt{288}\times\sqrt{\frac{1}{72}}=\sqrt{288\times\frac{1}{72}}=\sqrt{4}=2$.

点拨:利用 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$ 计算时,要注意根号外面的因数.

2. 解:(1)$\sqrt{49\times 121}=\sqrt{49}\times\sqrt{121}=7\times 11=77$;

(2)$\sqrt{225}=\sqrt{15^2}=15$;

(3)$\sqrt{4y}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{y}=2\sqrt{y}$;

(4)$\sqrt{16ab^2c^3}=\sqrt{4^2ab^2c^2\cdot c}=4bc\sqrt{ac}$.

3. 解:$\sqrt{10}\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{10\times 2}=2\sqrt{4}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.

答:这个长方形的面积为 $4\sqrt{5}$.

点拨:二次根式相乘后,被开方数中能开得尽方的因数或因式一定要开尽方.

练习

1. 解:(1)$\sqrt{18}\div\sqrt{2}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$;

(2)$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$;

(3)$\sqrt{2a}\div\sqrt{6a}=\sqrt{\frac{2a}{6a}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(4)$\sqrt{\frac{b}{5}}\div\sqrt{\frac{b}{20a^2}}=\sqrt{\frac{b}{5}\cdot\frac{20a^2}{b}}=\sqrt{4a^2}=2a$.

点拨:根据公式$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$计算.

2. 解:(1)$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$;

(2)$\sqrt{40}=\sqrt{4\times 10}=\sqrt{4}\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$;

(3)$\sqrt{1.5}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$;

(4)$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

点拨:最简二次根式满足的条件:(1)被开方数不含分母;(2)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

3. 解:由题意可得 $S=ab$,所以 $a=\frac{S}{b}=\frac{16}{\sqrt{10}}=\frac{16\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{10}=\frac{8}{5}\sqrt{10}$.

习题 16.2

1. 解:(1)$\sqrt{24}\times\sqrt{27}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2\times3\times\sqrt{3\times6}=6\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=6\times3\times\sqrt{2}=18\sqrt{2}$;

(2) $\sqrt{6}\times(-\sqrt{15})=-\sqrt{6\times15}=-\sqrt{3^2}\times\sqrt{2\times5}=-3\sqrt{10}$;

(3) $\sqrt{18}\times\sqrt{20}\times\sqrt{75}=(\sqrt{9}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{4}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{25}\times\sqrt{3})=3\times2\times5\times\sqrt{2\times5\times3}=30\sqrt{30}$;

(4) $\sqrt{3^2\times4^3\times5}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{4^2}\times\sqrt{4\times5}=3\times4\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}=12\times2\times\sqrt{5}=24\sqrt{5}$.

点拨:公式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$ 可以推广到三个或三个以上的二次根式相乘.

2. 解:(1) $\sqrt{18}\div\sqrt{8}=\sqrt{\frac{18}{8}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$;

(2) $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}=2\sqrt{3}$;

(3) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{6}}=\sqrt{\frac{5}{3}\div\frac{5}{6}}=\sqrt{2}$;

(4) $\frac{2\sqrt{x^2y}}{3\sqrt{xy}}=\frac{2\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{xy}}{3\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=\frac{2x\sqrt{xy^2}}{3xy}=\frac{2y\sqrt{x}}{3y}=\frac{2\sqrt{x}}{3}$.

3. 解:(1) $\sqrt{4\times49}=\sqrt{4}\times\sqrt{49}=2\times7=14$;

(2) $\sqrt{300}=\sqrt{3}\times\sqrt{100}=10\sqrt{3}$;

(3) $\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}=\frac{3}{7}$;

(4) $\sqrt{\frac{a^2b}{4c^2}}=\frac{a}{2c}\sqrt{b}$.

点拨:注意化简结果要写成最简形式.

4. 解:(1) $\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{\sqrt{2^2\times3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$;

(2) $\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$;

(3) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{2}}{3\times\sqrt{2^2\times10}}=\frac{\sqrt{2}}{3\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{3\times2\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}{6\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2^2\times5}}{60}=\frac{2\sqrt{5}}{60}=\frac{\sqrt{5}}{30}$;

(4) $\frac{5n}{3\sqrt{n}}=\frac{5n\sqrt{n}}{3\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\frac{5\sqrt{n}}{3}$;

(5) $\frac{2xy}{\sqrt{2x}}=\frac{2xy\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2x}}=\frac{2xy\cdot\sqrt{2x}}{2x}=y\sqrt{2x}$;

(6) $\frac{-\sqrt{45y^2}}{3\sqrt{5y}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{45y^2}{5y}}=-\frac{1}{3}\sqrt{9y}=-\frac{1}{3}\sqrt{3^2y}=-\frac{1}{3}\times3\sqrt{y}=-\sqrt{y}$.

5. 解:(1)原式 $=\frac{-10+\sqrt{10^2-4\times1\times(-15)}}{2\times1}=\frac{-10+\sqrt{160}}{2}=\frac{-10+4\sqrt{10}}{2}=-5+2\sqrt{10}$;

(2)原式 $=\frac{-(-8)+\sqrt{(-8)^2-4\times2\times5}}{2\times2}=\frac{8+\sqrt{24}}{4}=\frac{8+2\sqrt{6}}{4}=2+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. 解:(1) $S=ab=\sqrt{8}\times\sqrt{12}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{6}$;

(2) $S=ab=2\sqrt{50}\times3\sqrt{32}=6\times\sqrt{25}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{16}=6\times5\times2\times4=240$.

点拨:根号前含有因数的二次根式相乘时,先将根号前的因数相乘.

7. 解:(1) $a=\sqrt{S}=\sqrt{50}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$;

(2) $a=\sqrt{S}=\sqrt{242}=\sqrt{121}\times\sqrt{2}=11\sqrt{2}$.

8. 解:(1) $\sqrt{0.4}\times\sqrt{3.6}=\sqrt{0.4\times0.4}\times\sqrt{9}=0.4\times3=1.2$;

(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$;

(3) $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{40}}\times\sqrt{5}=\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}{3\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{40}}{3\sqrt{40}}=\frac{1}{3}$;

(4) $\sqrt{27}\times\sqrt{50}\div\sqrt{6}=\sqrt{3}\times\sqrt{9}\times\sqrt{2}\times\sqrt{25}\div\sqrt{6}=15\times\sqrt{6}\div\sqrt{6}=15$.

9. 解: $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.414}{2}=0.707$,

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx2\times1.414=2.828$.

10. 解:由题意可得 $S=ab$,所以 $b=\frac{S}{a}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{15}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解：由题意可得 $V = Sh$，所以 $S = \frac{V}{h} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

12. 解：设面积为 15 cm^2 和 24 cm^2 的小正方形的边长分别为 a cm，b cm，则大正方形的边长为 $(a+b)$ cm，所以裁去两个小正方形后留下部分的面积为 $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 2ab$. 由题意可知，$a^2 = 15$，$b^2 = 24$，所以 $a = \sqrt{15}$，$b = \sqrt{24}$，所以 $2ab = 2 \times \sqrt{15} \times \sqrt{24} = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2^2 \times 2} = 2 \times 3 \times 2 \times \sqrt{10} = 12\sqrt{10}$，即留下部分的面积为 $12\sqrt{10}$ cm^2.

13. 解：(1) $\sqrt{9 \times 9 + 19} = 10$；

(2) $\sqrt{99 \times 99 + 199} = 100$；

(3) $\sqrt{999 \times 999 + 1\ 999} = 1\ 000$；

(4) $\sqrt{9\ 999 \times 9\ 999 + 19\ 999} = 10\ 000$.

规律是：根号内的任一数中的“9”有几位，开方后的数“1”后面就有几个“0”.

$1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}$

点拨：寻找式子中的规律时要仔细观察每个式子中变化的部分和不变的部分.

16.3 二次根式的加减

练习

1. 解：(1)错误，因为 $\sqrt{8} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$；

(2)错误，因为 $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$；

(3)正确.

2. 解：(1) $2\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = -4\sqrt{7}$；

(2) $\sqrt{80} - \sqrt{20} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$；

(3) $\sqrt{18} + (\sqrt{98} - \sqrt{27}) = 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 10\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$；

(4) $(\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6}\right) = 2\sqrt{6} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. 解：设大圆的半径为 R，小圆的半径为 r，$d = R - r = \sqrt{\frac{25.12}{\pi}} - \sqrt{\frac{12.56}{\pi}} \approx \sqrt{8} - \sqrt{4} = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0.83$.

答：圆环的宽度 d 约为 0.83.

练习

1. 解：(1) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

$= \sqrt{6} + \sqrt{10}$；

(2) $(\sqrt{80} + \sqrt{40}) \div \sqrt{5}$

$= \sqrt{\frac{80}{5}} + \sqrt{\frac{40}{5}}$

$= \sqrt{16} + \sqrt{8}$

$= 4 + 2\sqrt{2}$；

(3) $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 2)$

$= (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6$

$= 11 + 5\sqrt{5}$；

(4) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$= (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2$

$= 6 - 2$

$= 4$.

2. 解：(1) $(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})$

$= 4^2 - (\sqrt{7})^2$

$= 16 - 7$

$= 9$；

(2) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

$= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$

$= a - b$；

(3) $(\sqrt{3} + 2)^2$

$= (\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} + 2^2$

$= 7 + 4\sqrt{3}$；

(4) $(2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$

$= (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$= 22 - 4\sqrt{10}$.

习题 16.3

1. 解：(1)错误，因为 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 已是最简结果.

(2)错误，因为 $2 + \sqrt{2}$ 是 2 与 $\sqrt{2}$ 相加，而 $2\sqrt{2}$ 是 2 与 $\sqrt{2}$ 相乘，二者完全不一样.

(3)错误，因为 $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

(4)错误，如果原式改为 $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ 就正确了，本题是 $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{8}}{2}$，其化简结果为 $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 解：(1) $2\sqrt{12} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}=\frac{2}{3}\times3\sqrt{x}+6\times\frac{1}{2}\sqrt{x}=$

$2\sqrt{x}+3\sqrt{x}=5\sqrt{x}$;

(4) $a^2\sqrt{8a}+3a\sqrt{50a^3}=2a^2\cdot\sqrt{2a}+3a\cdot5a\cdot\sqrt{2a}=2a^2\sqrt{2a}+15a^2\sqrt{2a}=17a^2\sqrt{2a}$.

点拨:化简成最简二次根式后,是同类二次根式(被开方数相同的最简二次根式)的必须合并.

3. 解:(1) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$;

(2) $\sqrt{75}-\sqrt{54}+\sqrt{96}-\sqrt{108}=5\sqrt{3}-3\sqrt{6}+4\sqrt{6}-6\sqrt{3}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$;

(3) $(\sqrt{45}+\sqrt{18})-(\sqrt{8}-\sqrt{125})=3\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+5\sqrt{5}=8\sqrt{5}+\sqrt{2}$;

(4) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{27})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{9\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

点拨:二次根式的混合运算,一是要注意运算顺序;二是要注意加减乘除各自的法则;三是要注意括号前面的系数.

4. 解:(1) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}$

$=\sqrt{36}+10\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$=6+10\sqrt{6}$;

(2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2$

$=12-18$

$=-6$;

(3) $(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})^2$

$=(5\sqrt{3})^2+2\times5\sqrt{3}\times2\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2$

$=95+20\sqrt{15}$;

(4) $(\sqrt{48}+\frac{1}{4}\sqrt{6})\div\sqrt{27}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}+\frac{\frac{1}{4}\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

$=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{12}$.

5. 解:$5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{45}$

$=5\times\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}+\sqrt{9\times5}$

$=5\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{5}{4}\times\frac{2}{5}\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

$=\frac{7\sqrt{5}}{2}$

$\approx\frac{7}{2}\times2.236$

$=7.826$

≈7.83.

点拨:先化简,再求值. 注意"$\frac{7\sqrt{5}}{2}$"不能写成"$3\frac{1}{2}\sqrt{5}$".

6. 解:(1) $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$.

当 $x=\sqrt{3}+1$, $y=\sqrt{3}-1$ 时,

原式 $=[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)]^2=(2\sqrt{3})^2=12$.

(2) 当 $x=\sqrt{3}+1$, $y=\sqrt{3}-1$ 时,

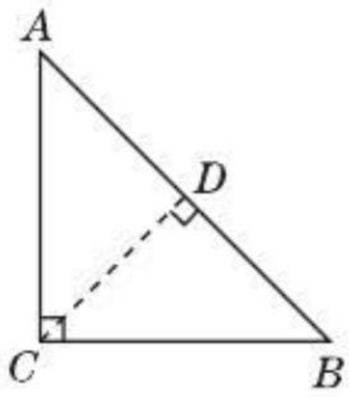
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$=[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)]\times[(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)]$

$=2\sqrt{3}\times2$

$=4\sqrt{3}$.

7. 解:过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,如图所示. 因为 $\angle ACB=90°$, $CB=CA$,所以 $\angle A=\angle B=45°$. 因为 $CD\perp AB$,所以 $\angle CDA=\angle CDB=90°$. 所以 $\angle ACD=\angle BCD=45°$. 所以 $\angle A=\angle ACD$, $\angle B=\angle BCD$. 所以 $CD=AD=BD$. 所以 $CD=\frac{1}{2}AB$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CB\cdot CA=\frac{1}{2}AB\cdot CD$,所以 $CB\cdot CA=AB\cdot CD$,即 $CB\cdot CA=\frac{1}{2}AB^2$,也即 $a^2=\frac{1}{2}AB^2$,所以 $AB^2=2a^2$,所以 $AB=\sqrt{2}a$.



(第7题)

8. 解:因为 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\frac{1}{a^2}=a^2+2+\frac{1}{a^2}-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=(\sqrt{10})^2-4=6$,所以

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$a-\frac{1}{a}=\pm\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\pm\sqrt{6}$.

点拨:本题易忽略 $a-\frac{1}{a}=-\sqrt{6}$ 这一结果.

9. 解:(1) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ 是方程 $2x^2-6=0$ 的解.

(2) $-5+2\sqrt{3}$, $-5-2\sqrt{3}$ 是方程 $2(x+5)^2=24$ 的解.

点拨:把括号内的数一一代入,能使方程成立的数即为方程的解.

复习题 16

1. 解:(1) 由 $3+x\geqslant 0$,得 $x\geqslant -3$,所以当 $x\geqslant -3$ 时,$\sqrt{3+x}$ 在实数范围内有意义.

(2) 由 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\2x-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x>\frac{1}{2}$,所以当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 在实数范围内有意义.

(3) 由 $\begin{cases}\frac{1}{2-3x}\geqslant 0,\\2-3x\neq 0,\end{cases}$ 得 $x<\frac{2}{3}$,所以当 $x<\frac{2}{3}$ 时,$\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$ 在实数范围内有意义.

(4) 由 $\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^2}\geqslant 0,\\(x-1)^2\neq 0,\end{cases}$ 得 $x\neq 1$,所以当 $x\neq 1$ 时,$\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}}$ 在实数范围内有意义.

点拨:在(2)(3)(4)中,除了考虑被开方数大于或等于 0 之外,不能忽略分母不等于 0 这一隐含条件.

2. 解:(1) $\sqrt{500}=\sqrt{5\times 100}=\sqrt{5}\times\sqrt{100}=10\sqrt{5}$;

(2) $\sqrt{12x}=\sqrt{4\times 3x}=\sqrt{4}\times\sqrt{3x}=2\sqrt{3x}$;

(3) $\sqrt{4\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$;

(4) $\sqrt{\frac{2}{3a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3a^2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{a\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3a}$;

(5) $\sqrt{2x^2y^3}=\sqrt{2y}\cdot\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{2y}\cdot\sqrt{(xy)^2}=xy\sqrt{2y}$;

(6) $\sqrt{\frac{5a^5}{6}}=\frac{\sqrt{5a^5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5a^5}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30a^5}}{6}=\frac{a^2}{6}\sqrt{30a}$.

3. 解:(1) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{6}\right)=2\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{6}=\sqrt{6}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$;

(2) $2\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\div 5\sqrt{2}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{5}\times\sqrt{\frac{12\times 3}{2}}=\frac{1}{10}\sqrt{18}=\frac{3}{10}\sqrt{2}$;

(3) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2=12-6=6$;

(4) $(2\sqrt{48}-3\sqrt{27})\div\sqrt{6}=2\sqrt{\frac{48}{6}}-3\sqrt{\frac{27}{6}}=2\sqrt{8}-9\sqrt{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}-\frac{9}{2}\sqrt{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

(5) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+2\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2=8+12\sqrt{6}+27=35+12\sqrt{6}$;

(6) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}}-\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}}\right)^2-2\times\frac{3}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}+\left(\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2=\frac{9}{4}\times\frac{5}{3}-2\times\frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{5}{3}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{5}{4}=\frac{15}{4}-\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=5-\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

4. 解:由题意,得 $a^2=96\times 12=12^2\times 8$,所以 $a=\sqrt{12^2\times 8}=12\sqrt{8}=24\sqrt{2}$,即 a 的值为 $24\sqrt{2}$.

5. 解:当 $x=\sqrt{5}-1$ 时,$x^2+5x-6=(\sqrt{5}-1)^2+5(\sqrt{5}-1)-6=(\sqrt{5})^2-2\times 1\times\sqrt{5}+1+5\sqrt{5}-5-6=3\sqrt{5}-5$.

点拨:本题先代入数值,再运用完全平方公式进行化简,也可以先将式子分解因式,再代入求值.

6. 解:当 $x=2-\sqrt{3}$ 时,$x^2=(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$. 所以 $(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=49-(4\sqrt{3})^2+4-(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}=49-48+4-3+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

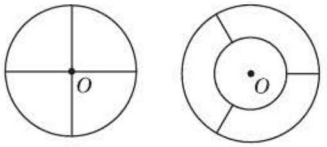
7. 解:因为 $Q=I^2Rt$,所以 $I=\sqrt{\frac{Q}{Rt}}$. 当 $R=5\ \Omega$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$t=1$ s, $Q=30$ J时, $I=\sqrt{\frac{30}{5\times1}}=\sqrt{6}\approx2.45$(A).

8. **解**:因为 $\sqrt{189n}=\sqrt{9\times21n}=3\sqrt{21n}$是整数,所以正整数 n 的最小值是21.

9. **解**:(1)分割方法如图①②所示.



①　②

(第9题)

(2)设 $OA=r$,因为 $\pi\cdot OD^2=\frac{1}{4}\pi r^2$,所以 $OD^2=\frac{1}{4}r^2$,所以 $OD=\sqrt{\frac{1}{4}r^2}=\frac{1}{2}r$.

因为 $\pi\cdot OC^2=\frac{1}{2}\pi r^2$,所以 $OC^2=\frac{1}{2}r^2$,

所以 $OC=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

因为 $\pi\cdot OB^2=\frac{3}{4}\pi r^2$,所以 $OB^2=\frac{3}{4}r^2$,

所以 $OB=\sqrt{\frac{3}{4}r^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

所以 OB, OC, OD 的长分别为 $\frac{\sqrt{3}}{2}OA$, $\frac{\sqrt{2}}{2}OA$, $\frac{1}{2}OA$.

点拨:(1)答案不唯一.

10. **解**: $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$都成立. 类比上述式子,还可以写出 $\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$, $\sqrt{6\frac{6}{35}}=6\sqrt{\frac{6}{35}}$ 等. 用字母表示其中的规律为 $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$($n$ 为正整数,且 $n>1$).

证明:左边 $=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}$,右边 $=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n^2\cdot\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}$,左边=右边,所以等式成立.

第十七章 勾股定理

17.1 勾股定理

练习

1. **解**:(1) $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$;

(2) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$;

(3) $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20$.

2. **解**: $S_E=(12^2+16^2)+(9^2+12^2)$
$=400+225$
$=625$.

练习

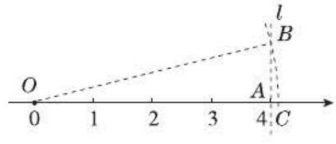
1. **解**:在 Rt$\triangle BAC$ 中, $\angle BAC=90°$, $BC=60$ m, $AC=20$ m, 由勾股定理,得 $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{60^2-20^2}\approx57$(m).

答: A, B 两点间的距离约为57 m.

2. **解**:由点 $A(5,0)$, $B(0,4)$ 可知 $OA=5$, $OB=4$,又因为 $\angle BOA=90°$,所以根据勾股定理,得 $AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

练习

1. **解**:如图所示. 作法:(1)在数轴上找出表示4的点 A,则 $OA=4$;(2)过点 A 作直线 l 垂直于 OA;(3)在直线 l 上取点 B,使 $AB=1$;(4)以原点 O 为圆心,以 OB 为半径作弧,弧与数轴的交点 C 即为表示 $\sqrt{17}$的点.



(第1题)

2. **解**:(1)由题意可知,在 Rt$\triangle ADB$ 中, $AB=6$, $BD=\frac{1}{2}BC=3$, $\angle ADB=90°$.

由勾股定理,得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

习题17.1

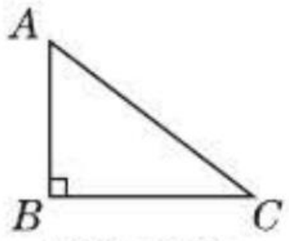
1. **解**:(1) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$;

(2) $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$;

(3) $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{10^2-9^2}=\sqrt{19}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解：如图，根据题意，可知 $AB=3$ m，$BC=4$ m，$\angle ABC=90°$. 根据勾股定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2$，即 $3^2+4^2=AC^2$，所以 $AC=5$ m. 故木杆折断之前的高为 $3+5=8$(m).



（第2题）

答：木杆折断之前有 8 m 高.

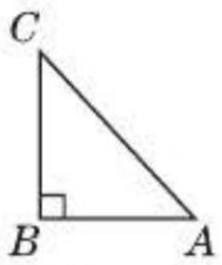
点拨：要求木杆折断之前有多高，只要求出 AC 即可，借助勾股定理，问题便得以解决.

3. 解：由题意可知，在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AO=2.4$，$OB=0.7$，根据勾股定理，得 $AB=\sqrt{AO^2+OB^2}=\sqrt{2.4^2+0.7^2}=2.5$，即 AB 的长是 2.5.

4. 解：因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形，所以根据勾股定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2$. 所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$. 又因为 $AC=40-21=19$(mm)，$BC=60-21=39$(mm)，所以 $AB=\sqrt{19^2+39^2}=\sqrt{1\,882}\approx 43.4$(mm).

答：两孔中心的距离约为 43.4 mm.

5. 解：设在电线杆上的点 C 处拉钢缆，如图所示，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{7^2-5^2}\approx 4.9$(m).



（第5题）

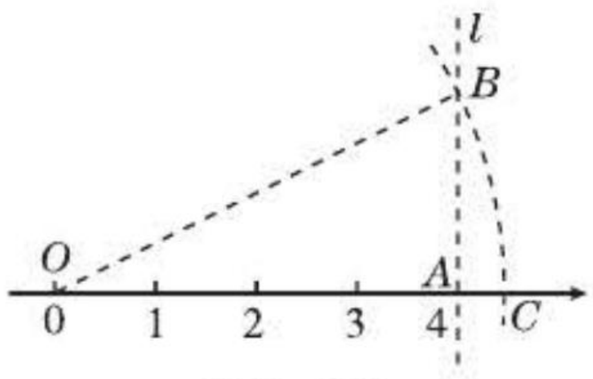
答：地面钢缆固定点 A 到电线杆底部 B 的距离约为 4.9 m.

6. 解：作法：(1) 在数轴上找出表示 4 的点 A，则 $OA=4$；

(2) 过点 A 作直线 l 垂直于 OA；

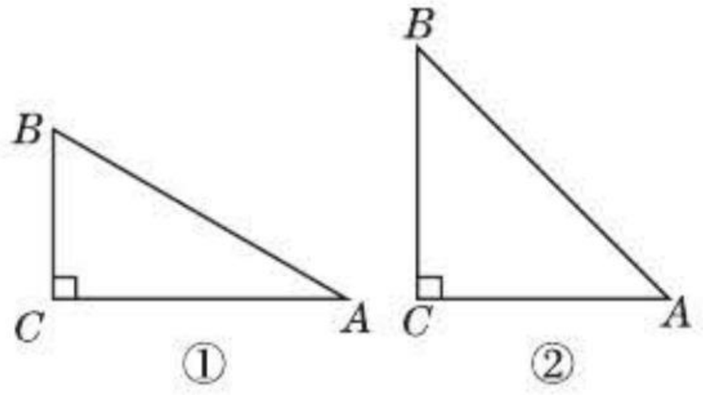
(3) 在 l 上取点 B，使 $AB=2$；

(4) 以原点 O 为圆心，以 OB 为半径作弧，弧与数轴的交点 C 即为表示 $\sqrt{20}$ 的点，如图所示.



（第6题）

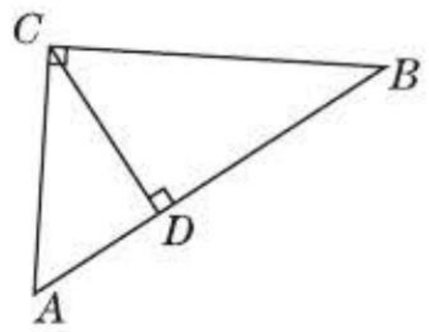
7. 解：(1) 如图①，因为在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$\angle A=30°$，所以 $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c$. 由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{1}{2}c\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.



（第7题）

(2) 如图②，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，即 $AC=BC$. 又由勾股定理，得 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC=\sqrt{\frac{c^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$，所以 $BC=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

8. 解：如图.



（第8题）

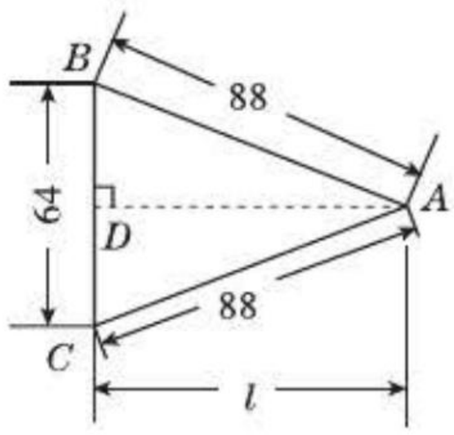
(1) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 2.1\times 2.8=2.94$.

(2) 由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2.1^2+2.8^2}=3.5$.

(3) 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times 3.5\cdot CD=2.94$，所以 $CD=1.68$.

9. 解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，则 AD 的长即为所求的高 l 的长. 因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$AD\perp BC$，所以 $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 64=32$(mm).

在 Rt$\triangle ADB$ 中，由勾股定理，得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{88^2-32^2}=\sqrt{6\,720}\approx 82$(mm).



（第9题）

答：高 l 的长约为 82 mm.

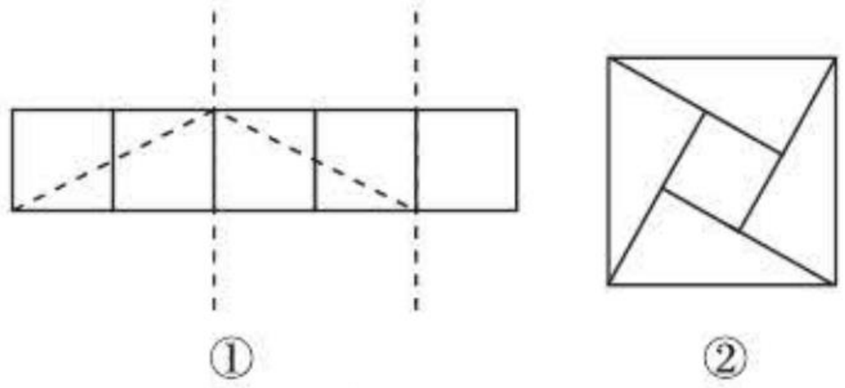
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解:设水深是 x 尺,则这根芦苇的长度是$(x+1)$尺. 根据勾股定理,得$(x+1)^2=x^2+5^2$,解得 $x=12$,即水的深度是12 尺,则这根芦苇的长度是 $12+1=13$(尺).

答:水的深度是 12 尺,这根芦苇的长度是 13 尺.

11. 解:设 BC 的长为 x,则根据 $\angle C=90°$,$\angle A=30°$ 可得 $AB=2x$,根据勾股定理可得:$(2x)^2=x^2+2^2$,解得 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则$2x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,即斜边 AB 的长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

12. 解:如图①,沿虚线剪开,可以拼接成如图②所示的正方形.



(第 12 题)

13. 证明:设 $AB=x$,易知 $AC=CD=\sqrt{2}x$,根据题意易知 $CB\perp AB$.

所以 $S_{月形AGCE}=S_{半圆形ACE}-(S_{扇形ABC}-S_{\triangle ABC})=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{4}\pi\cdot x^2-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{\pi}{4}x^2-\frac{\pi}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2$,同理 $S_{月形DHCF}=\frac{1}{2}x^2$. 又因为 $S_{Rt\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}=x^2$,$S_{月形AGCE}+S_{月形DHCF}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2=x^2$,所以 $S_{月形AGCE}+S_{月形DHCF}=S_{Rt\triangle ACD}$,即所得两个月形图案 $AGCE$ 和 $DHCF$ 的面积之和等于 $Rt\triangle ACD$ 的面积.

14. 证明:连接 BD. 因为$\triangle ACB$ 和$\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形,且 $CE=CD$,$AC=BC$,所以 $\angle ECD=\angle ACB=90°$,$\angle E=\angle EDC=45°$. 所以 $\angle ECD-\angle ACD=\angle ACB-\angle ACD$,即 $\angle ECA=\angle DCB$. 在 $\triangle ECA$ 和 $\triangle DCB$ 中,$CE=CD$,$\angle ECA=\angle DCB$,$CA=CB$,所以 $\triangle ECA\cong\triangle DCB$,所以 $AE=BD$,$\angle E=\angle CDB$. 所以 $\angle ADB=\angle ADC+\angle CDB=\angle ADC+\angle E=45°+45°=90°$. 所以 $BD^2+AD^2=AB^2$,所以 $AE^2+AD^2=AB^2$. 在 $Rt\triangle ACB$ 中,易知 $AB^2=2AC^2$,所以 $AE^2+AD^2=2AC^2$.

17.2 勾股定理的逆定理

练习

1. 解:这三条线段组成的三角形是直角三角形,因为三条线段长 a,b,c 满足 $a^2=c^2-b^2$,即 $a^2+b^2=c^2$,根据勾股定理的逆定理可知,三角形是直角三角形.

2. 解:(1)逆命题:内错角相等,两条直线平行. 逆命题成立.

(2)逆命题:如果两个实数的绝对值相等,那么这两个实数相等. 逆命题不成立.

(3)逆命题:三个角对应相等的两个三角形全等. 逆命题不成立.

(4)逆命题:角平分线上的点到角的两边的距离相等. 逆命题成立.

3. 解:由题意,得 $AB^2+BC^2=12^2+5^2=169=13^2=AC^2$,所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形,且 $\angle ABC=90°$. 又因为 A 地在 B 地的正东方向,所以 C 地在 B 地的正北方向.

习题 17.2

1. 解:(1)因为 $a^2+b^2=7^2+24^2=625=25^2=c^2$,所以这个三角形是直角三角形.

(2)因为 $b^2+c^2=4^2+5^2=41=(\sqrt{41})^2=a^2$,所以这个三角形是直角三角形.

(3)因为 $b^2+c^2=1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2=a^2$,所以这个三角形是直角三角形.

(4)因为 $a^2+b^2=40^2+50^2=4\ 100$,$c^2=60^2=3\ 600$,

所以 $a^2+b^2\neq c^2$,

所以这个三角形不是直角三角形.

2. 解:(1)逆命题:两直线平行,同旁内角互补. 逆命题成立.

(2)逆命题:如果两个角相等,那么这两个角是直角. 逆命题不成立.

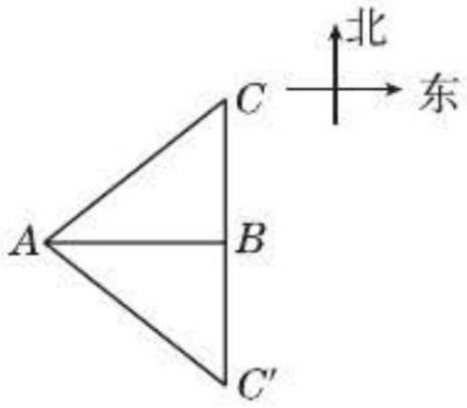
(3)逆命题:三边对应相等的两个三角形全等. 逆命题成立.

(4)逆命题:如果两个实数的平方相等,那么这两个实数相等. 逆命题不成立.

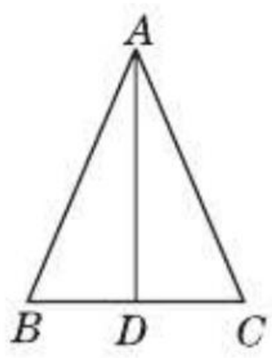
3. 解:因为 $80^2+60^2=6\ 400+3\ 600=10\ 000=100^2$,所以小明走的路线所形成的图形是直角三角形. 如

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图所示，A 为起始点，$AB = 80$ m，$\angle ABC = \angle ABC' = 90°$. 所以小明向东走80 m后是向正北方向或正南方向走的.



（第3题）



（第4题）

4. 解：根据题意，可画出图形如图所示.

因为 AD 为 BC 边上的中线，

所以 $BD = DC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$.

在 $\triangle ADB$ 中，因为 $AD^2 + BD^2 = 12^2 + 5^2 = 169$，

$AB^2 = 13^2 = 169$，所以 $AB^2 = AD^2 + BD^2$，

所以 $\triangle ADB$ 为直角三角形，且 $\angle ADB = 90°$，

所以 $\angle ADC = 90°$，

所以 $\triangle ADC$ 为直角三角形.

由勾股定理，得 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

5. 解：因为 $\angle B = 90°$，$AB = 3$，$BC = 4$，所以 $AC = 5$.

又因为 $CD = 12$，$AD = 13$，

所以 $AC^2 + CD^2 = AD^2$，

所以 $\angle ACD = 90°$.

$S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 6 + 30 = 36$.

6. 证明：设 $CF = x$，易得 $EC = BE = 2x$，$AB = AD = 4x$，$DF = 3x$.

因为在正方形 $ABCD$ 中，$\angle B = \angle C = \angle D = 90°$，

所以 $AB^2 + BE^2 = AE^2$，$CE^2 + CF^2 = EF^2$，$AD^2 + DF^2 = AF^2$，

所以 $AE^2 = 20x^2$，$EF^2 = 5x^2$，$AF^2 = 25x^2$，

所以 $AE^2 + EF^2 = AF^2$，

所以 $\triangle AEF$ 为直角三角形，其中 $\angle AEF = 90°$.

7. 解：$3k, 4k, 5k$（k 是正整数）是一组勾股数；如果 a, b, c 是一组勾股数，那么 ak, bk, ck（k 是正整数）也是一组勾股数.

复习题17

1. 解：设10 min后两人相距 x m. 向北直行的人行进的路程为 $20 \times 10 = 200$（m），向东直行的人行进的路程为 $30 \times 10 = 300$（m）. 根据勾股定理，可以得到 $200^2 + 300^2 = x^2$，所以 $x = \sqrt{130\,000} \approx 361$. 所以10 min后他们相距大约361 m远.

2. 解：易知 $SO \perp AB$，$OA = \frac{1}{2}AB = 2$ cm，

在Rt$\triangle SAO$ 中，

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$（cm）.

所以 $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}AB \cdot SO = \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$（cm^2）.

3. 解：根据题意，由勾股定理，得 $AC^2 + BC^2 = AB^2$，

所以 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{134^2 - 77^2} = \sqrt{12\,027} \approx 109.7$（mm）.

答：两孔中心的垂直距离约为109.7 mm.

4. 解：如图所示，由题意，得 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

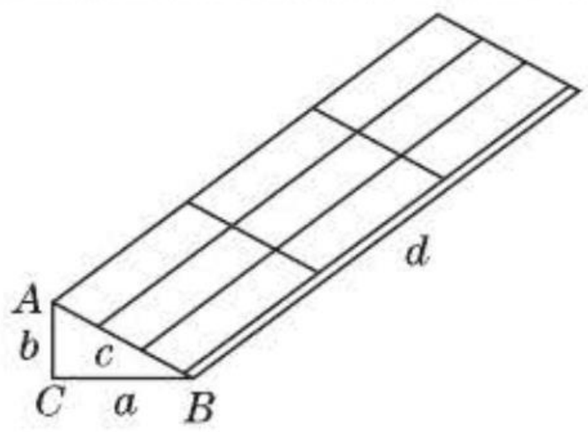
设 AB 的长为 c，

根据勾股定理，得 $c^2 = a^2 + b^2$，

所以 $c^2 = 3^2 + 1.5^2 = 11.25$，得 $c \approx 3.35$ m，

所以 $c \cdot d \approx 3.35 \times 10 = 33.5$（m^2）.

答：覆盖在顶上的塑料薄膜约需33.5 m^2.



（第4题）

5. 解：设这个三角形的最短边长为 x，

因为该三角形三边之比为 $1:\sqrt{3}:2$，

所以这个三角形的另两条边长分别为 $\sqrt{3}x, 2x$.

因为 $x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 4x^2 = (2x)^2$，

所以根据勾股定理的逆定理可知，这个三角形是直角三角形.

6. 解：（1）逆命题：同位角相等，两条直线平行. 逆命题成立.

（2）逆命题：如果两个实数的积是正数，那么这两个实数都是正数. 逆命题不成立.

（3）逆命题：锐角三角形是等边三角形. 逆命题不成立.

（4）逆命题：到线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上. 逆命题成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解: $c=\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2+(2\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{12+4\sqrt{3}+1+12-4\sqrt{3}+1}=\sqrt{26}$.

8. 解: 因为 $AB=AC=BC$,

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,

所以 $\angle BAC=60°$.

由 $AB=AC$, $AD\perp BC$ 可得 $\angle BAD=\angle CAD=30°$.

所以 $AB=2BD$.

所以 $(2BD)^2=BD^2+h^2$, $4BD^2=BD^2+h^2$, $3BD^2=h^2$, $BD^2=\frac{h^2}{3}$, $BD=\frac{\sqrt{3}h}{3}$.

所以 $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$.

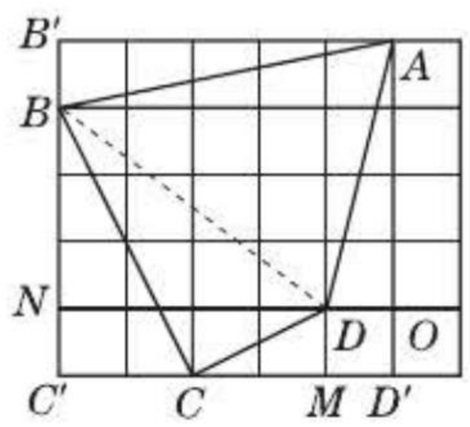
9. 解: (1)如图所示.

因为每个小正方形的边长都为1,

所以 $AB'=5$, $BB'=1$,

因为 $\triangle ABB'$ 为直角三角形,

所以由勾股定理,可得 $AB=\sqrt{AB'^2+BB'^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.



(第9题)

同理,可得 $BC=\sqrt{BC'^2+CC'^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

$CD=\sqrt{CM^2+DM^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$AD=\sqrt{AO^2+DO^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$,

所以四边形 $ABCD$ 的周长为 $AB+BC+CD+AD=\sqrt{26}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{17}=\sqrt{26}+3\sqrt{5}+\sqrt{17}$.

因为 $S_{\triangle AB'B}=\frac{1}{2}AB'\cdot BB'=\frac{5}{2}$,

$S_{\triangle BC'C}=\frac{1}{2}BC'\cdot CC'=4$, $S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}CM\cdot DM=1$,

$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot DO=2$,

$S_{正方形MD'OD}=DO^2=1$,

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{正方形AB'C'D'}-S_{\triangle AB'B}-S_{\triangle BC'C}-S_{\triangle CMD}-S_{\triangle AOD}-S_{正方形MD'OD}=25-\frac{5}{2}-4-1-2-1=14.5$.

(2)如图,连接 BD.

在 Rt$\triangle BND$ 中, $BD^2=BN^2+ND^2=3^2+4^2=25$.

在 $\triangle BCD$ 中, $BC^2+CD^2=20+5=25=BD^2$,

由勾股定理的逆定理,得 $\triangle BCD$ 为直角三角形,

$\angle BCD=90°$,所以 $\angle BCD$ 是直角.

10. 解: 设折断处离地面的高度是 x 尺. 根据勾股定理,得 $x^2+3^2=(10-x)^2$. 解得 $x=4.55$.

答: 折断处离地面的高度是4.55尺.

11. 解: 对. 理由:

因为 $c-a=m^2+1-2m=(m-1)^2$,且 m 表示大于1的整数,

所以 $(m-1)^2>0$,即 $c-a>0$,所以 $c>a$.

又因为 $c-b=(m^2+1)-(m^2-1)=2>0$,

所以 $c>b$.

因为 $a^2+b^2=(2m)^2+(m^2-1)^2=m^4+2m^2+1=(m^2+1)^2=c^2$,

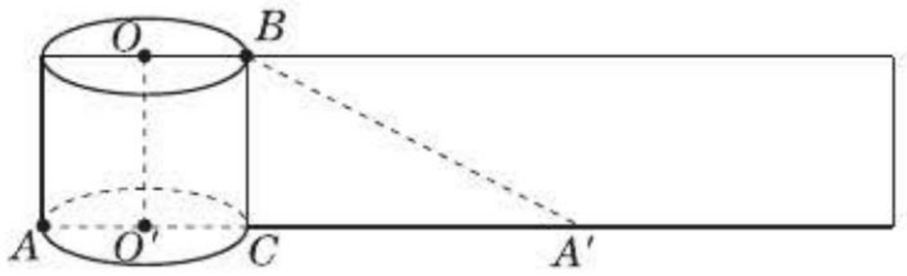
所以 a,b,c 为勾股数.

如:当 $m=2$ 时, $a=4$, $b=3$, $c=5$;当 $m=3$ 时, $a=6$, $b=8$, $c=10$,即3,4,5;6,8,10是勾股数.

点拨: 勾股数有两个条件:(1)必须满足 $a^2+b^2=c^2$;(2)必须为正整数,两者缺一不可.

12. 解: 如图,把圆柱的侧面展开,与圆柱中的点 A 对应的是点 A',连接 BA', BA' 的长即为所求. 在 Rt$\triangle A'CB$中, $CB=10$ cm, $CA'=6\pi$ cm. 由勾股定理,得 $BA'=\sqrt{CB^2+CA'^2}=\sqrt{10^2+(6\pi)^2}\approx 21.3$(cm).

答: 从点 A 爬到点 B 的最短路程约是21.3 cm.



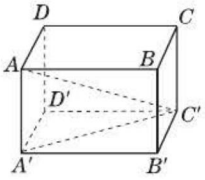
(第12题)

13. 解: 如图所示,连接 AC', $A'C'$,在 Rt$\triangle A'B'C'$中,由勾股定理,得 $A'C'=\sqrt{A'B'^2+B'C'^2}=\sqrt{50^2+40^2}=10\sqrt{41}$(cm).

在 Rt $\triangle AA'C'$ 中, $AC'=\sqrt{AA'^2+A'C'^2}=\sqrt{30^2+(10\sqrt{41})^2}=50\sqrt{2}$(cm),

$50\sqrt{2}$ cm >70 cm,所以木棒能放进去.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 13 题）

14. 证明：由题意可得$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot h$，

所以$ab=\sqrt{a^2+b^2}\cdot h$，

所以$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=h$，

所以$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=h^2$，

所以$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{h^2}$，

所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

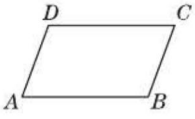
第十八章 平行四边形

18.1 平行四边形

18.1.1 平行四边形的性质

练习

1. 解：（1）如图所示，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $CD=AB=5$，$AD=BC=3$，所以 $\square ABCD$的周长为 $AB+BC+CD+AD=5+3+5+3=16$.



（第 1 题）

（2）因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB\parallel CD$，$\angle C=\angle A=38°$，$\angle B=\angle D$，所以$\angle A+\angle D=180°$，所以 $\angle D=180°-\angle A=180°-38°=142°$，所以$\angle B=\angle D=142°$.

2. 解：由已知，可得 $AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD=BC$，即线段 AD 和 BC 的长度相等.

练习

1. 解：在 $\square ABCD$ 中，$AD=BC=10$，$AB=CD$. 因为 $AC=8$，$BD=14$，所以 $OA=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 14=7$. 所以 $\triangle AOD$ 的周长为 $OA+OD+AD=4+7+10=21$. 又 $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+AC+BC=AB+8+10=18+AB$，$\triangle DBC$ 的周长为 $BC+CD+BD=10+CD+14=24+CD=24+AB$，所以 $\triangle DBC$ 的周长 $>\triangle ABC$ 的周长，$\triangle DBC$ 的周长 $-\triangle ABC$ 的周长 $=24+AB-(18+AB)=24+AB-18-AB=6$，即 $\triangle DBC$ 的周长比 $\triangle ABC$ 的周长长，长 6.

2. 证明：因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以 $OA=OC$，$AB\parallel CD$，所以 $\angle EAO=\angle FCO$.

又因为 $\angle AOE=\angle COF$，所以 $\triangle OAE\cong\triangle OCF$.

所以 $OE=OF$.

18.1.2 平行四边形的判定

练习

1. 解：$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$CD\parallel EF$，$DE\parallel CF$，$AB\parallel EF$.

2. 证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BO=DO$，$OA=OC$. 因为 E，F 分别是 OA，OC 的中点，所以 $OE=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OC=OF$. 又因为 $\angle BOE=\angle DOF$，所以 $\triangle BOE\cong\triangle DOF$，所以 $BE=DF$.

3. 解：因为一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，所以铁轨和夹在铁轨之间的枕木构成了平行四边形，因此可知两条直铺的铁轨是互相平行的.

4. 证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB\parallel CD$，$AB=CD$，所以 $\angle CDB=\angle ABD$. 又因为 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，所以 $\angle AEB=\angle CFD=90°$，所以 $AE\parallel CF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$AB=CD$，$\angle ABE=\angle CDF$，$\angle AEB=\angle CFD$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，所以 $AE=CF$. 又因为 $AE\parallel CF$，所以四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

练习

1. 解：可画出 3 个平行四边形，根据三角形的中位线定理可得平行四边形有：$\square BDFE$，$\square DFCE$，$\square ADEF$.

2. 解：$AB=CD$ 且 $AB\parallel CD$. 因为 $l_1\parallel l_2$，所以 $AD\parallel BC$，又因为 $AD=BC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

所以 $AB=CD$ 且 $AB\parallel CD$.

3. 解：如图所示，分别取 AC，BC 的中点 E，F，连接 EF，则 EF 就是 $\triangle ABC$ 的中位线.

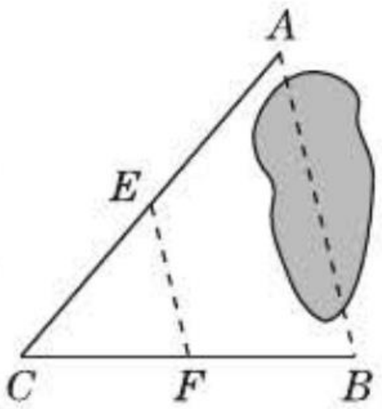
量出 EF 的长，根据 $AB=2EF$，即可求出 A，B 两点

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

间的距离.

习题 18.1

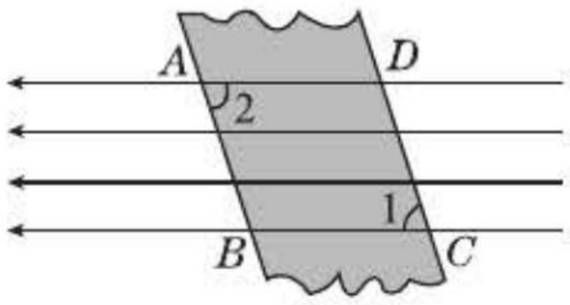
1. 解:因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $CD = AB = 6$, $AD = BC$. 由已知可得 $(AB + BC + CD + AD) \times \frac{3}{16} = 6$,即 $(6 + BC + 6 + AD) \times \frac{3}{16} = 6$,解得 $BC + AD = 20$,所以 $BC = AD = 10$. **点拨**:本题应用了“平行四边形的对边相等”这一性质.



(第3题)

2. 解:$\angle 2 = 72°15'$. 如图,由已知得 $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又因为 $\angle 1 = 72°15'$,所以 $\angle 2 = \angle 1 = 72°15'$.



(第2题)

点拨:本题应用了“平行四边形的对角相等”这一性质.

3. 解:由 $AC + BD = 36$,得 $OA + OC + OB + OD = 36$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA = OC$, $OB = OD$,所以 $OC + OD = OA + OB = 18$. 又因为 $CD = AB = 11$,所以 $\triangle OCD$ 的周长为 $OC + OD + CD = 18 + 11 = 29$.

点拨:本题应用了“平行四边形的对边相等”和“平行四边形的对角线互相平分”.

4. 证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD \parallel BC$,即 $AF \parallel CE$. 又因为 $AF = CE$,所以四边形 $AECF$ 是平行四边形.

点拨:本题考查了“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”这一判定方法.

5. 证明:因为点 E, F, G, H 分别是 AO, BO, CO, DO 的中点,所以 EF, GH 分别是 $\triangle AOB$, $\triangle COD$ 的中位线,所以 $EF \parallel \frac{1}{2}AB$, $GH \parallel \frac{1}{2}CD$.

又因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB \parallel CD$,所以 $EF \parallel GH$,所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

6. 证明:因为四边形 $AEFD$ 和四边形 $EBCF$ 都是平行四边形,所以 $AD \parallel EF$, $EF \parallel BC$,所以 $AD \parallel BC$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

7. 解:$\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等. 因为平行线间的距离处处相等,且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 同底,所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的面积相等. 根据平行线间的距离处处相等,以 BC 为底,在 l_1 上任找一点 O,可知 $\triangle BOC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等(画图略).

8. 解:分别过点 C, B 作 $CD \perp OA$ 于点 D, $BE \perp OA$ 于点 E,由已知得 $OD = b$, $CD = c$. 因为四边形 $OABC$ 是平行四边形,所以 $OC \parallel AB$,所以 $\angle COA = \angle BAE$. 又因为 $\angle ODC = \angle AEB = 90°$,所以 $\triangle OCD \cong \triangle ABE$,所以 $AE = OD = b$, $BE = CD = c$. 又因为点 A 的坐标为 $(a, 0)$,所以 $OA = a$,所以 $OE = OA + AE = a + b$,所以点 B 的坐标为 $(a + b, c)$.

9. 证明:分别过点 C, D 作 $CE \perp AB$ 于点 E, $DF \perp AB$ 于点 F,则 $\angle AFD = \angle BEC = 90°$. 因为 $AB \parallel CD$,所以 $DF = CE$(平行线间的距离处处相等).

(1)在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle BEC$ 中,因为 $\angle A = \angle B$, $\angle AFD = \angle BEC$, $DF = CE$,所以 $\triangle AFD \cong \triangle BEC$(AAS),所以 $AD = BC$.

(2)在 Rt $\triangle AFD$ 和 Rt $\triangle BEC$ 中,因为 $DF = CE$, $AD = BC$,所以 Rt $\triangle AFD \cong$ Rt $\triangle BEC$(HL),所以 $\angle A = \angle B$.

10. 解:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $\angle ABC = \angle ADC$, $AD \parallel BC$,即 $DE \parallel BF$.

又因为 $DF \parallel BE$,所以四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

所以 $\angle EBF = \angle EDF$,所以 $\angle ABE = \angle 1$.

因为 BE 平分 $\angle ABC$, $\angle ABC = 70°$,所以 $\angle ABE = \angle EBF = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$,所以 $\angle 1 = 35°$.

点拨:要求 $\angle 1$ 的度数,只要证得四边形 $BFDE$ 是平行四边形,利用 $\angle EBF = \angle EDF$,进一步推理即可.

11. 解:$\angle ABC = \angle B'$, $AB' = AC'$. 因为 $A'B' \parallel BA$, $B'C' \parallel CB$, $C'A' \parallel AC$,所以四边形 $ABCB'$ 与四边形 $ACBC'$ 都是平行四边形,所以 $\angle ABC = \angle B'$, $AB' = BC$, $AC' = BC$,所以 $AB' = AC'$.

12. 解:因为 $AD = 12$, $OD = 5$, $\angle ADB = 90°$,

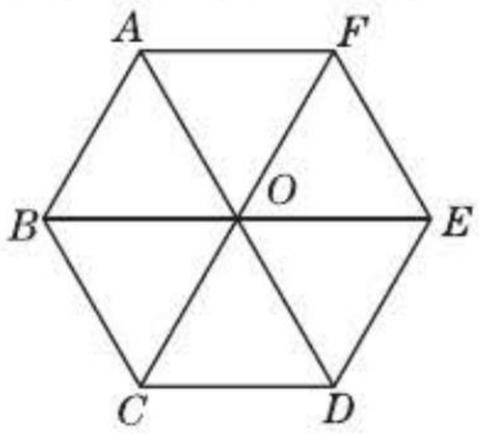
所以在 Rt $\triangle ADO$ 中, $AO = \sqrt{OD^2 + AD^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$,因为 $AC = 26$,所以 $OC = 13$. 所以

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$OA = OC$.

又因为 $OB = OD$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $BC = AD = 12$,$S_{四边形ABCD} = AD \cdot BD = 12 \times 10 = 120$.

13. 解:如图,有 6 个平行四边形,分别为$\square AFOB$,$\square AOEF$,$\square FODE$,$\square COED$,$\square BODC$,$\square ABCO$. 理由:两组对边分别相等的四边形是平行四边形.



(第 13 题)

14. 略.

15. 解:题图中有 3 对平行四边形的面积相等,分别是 $\square AHPE$ 与 $\square PFCG$,$\square ABGH$ 与 $\square EFCB$,$\square ADFE$ 与$\square HDCG$.

理由:由平行四边形的中心对称性,可知

在$\square ABCD$ 中,$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CDB}$;

在$\square HDFP$中,$S_{\triangle HDP} = S_{\triangle FPD}$;

在$\square EPGB$ 中,$S_{\triangle EPB} = S_{\triangle GBP}$,

所以有 $S_{\triangle ABD} - S_{\triangle HDP} - S_{\triangle EPB} = S_{\triangle CDB} - S_{\triangle FPD} - S_{\triangle GBP}$,即 $S_{\square AHPE} = S_{\square PFCG}$.

所以 $S_{\square AHPE} + S_{\square HDFP} = S_{\square PFCG} + S_{\square HDFP}$,$S_{\square AHPE} + S_{\square EPGB} = S_{\square PFCG} + S_{\square EPGB}$,即 $S_{\square ADFE} = S_{\square HDCG}$,$S_{\square ABGH} = S_{\square EFCB}$.

18.2 特殊的平行四边形

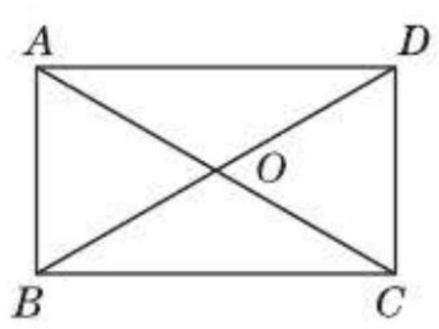
18.2.1 矩形

练习

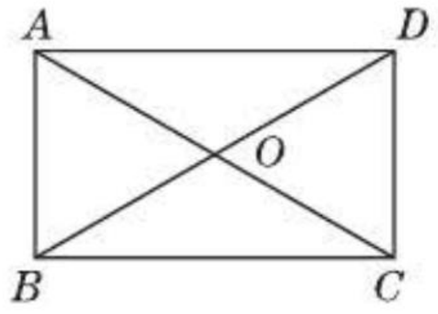
1. 解:已知:如图,四边形 $ABCD$ 是矩形,AC 与 BD 相交于点 O.

求证:$AC = BD$.

证明:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $\angle ABC = \angle DCB = 90°$,$AB = DC$. 又 $BC = CB$,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$,所以 $AC = BD$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解:如图所示,在矩形 $ABCD$ 中,$\angle AOD = \angle BOC = 120°$,所以 $\angle AOB = \angle COD = 60°$. 因为 $AC = BD = 8$,所以 $OA = OB = OC = OD = 4$,

所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形,

所以 $AB = OA = OB = 4$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中,$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} \approx 6.93$.

即这个矩形的边长分别为 4,6.93,4,6.93.

点拨:当求线段长,而又出现了直角三角形时,往往考虑应用勾股定理使问题简化.

3. 解:是,它有 2 条对称轴.

练习

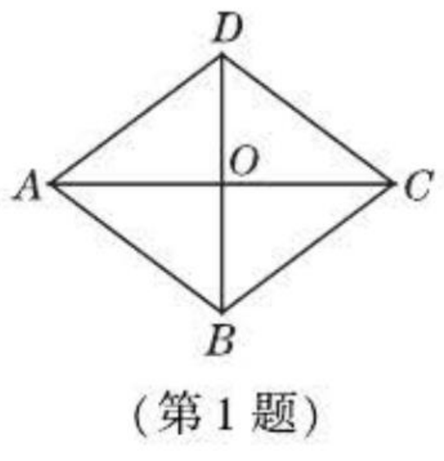
1. 略.

2. 解:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA = OC$,$OB = OD$. 又因为 $\triangle OAB$ 是等边三角形,所以 $OA = OB = AB$. 所以 $OA = OB = OC = OD$. 所以 $AC = BD$,所以$\square ABCD$是矩形. 又因为$AB = 4$,所以 $AC = 8$,所以$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$,所以 $S_{\square ABCD} = AB \cdot BC = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

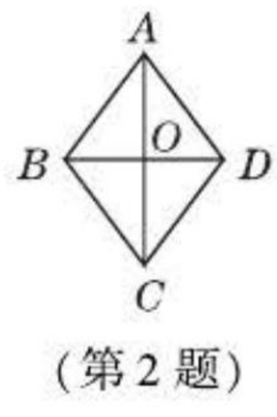
18.2.2 菱形

练习

1. 解:如图所示,因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC \perp BD$,且 $AO = CO$,$OB = OD$. 又因为 $AB = 5$,$AO = 4$,所以在 $Rt\triangle AOB$ 中,$OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$,所以 $BD = 2OB = 2 \times 3 = 6$. 易知 $AC = 2AO = 2 \times 4 = 8$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解:如图,由已知得,在菱形 $ABCD$ 中,$AC = 8$,$BD = 6$. 所以 $OA = OC = 4$,$OB = OD = 3$,$AC \perp BD$,所以在 $Rt\triangle OAB$ 中,$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. 又因为 $AB = BC = CD = AD$,所以菱形的周长为 $AB + BC + CD + AD = 4AB = 4 \times 5 = 20$. 菱形的面积为 $\frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times$

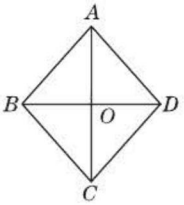
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$6=24$.

练习

1. 略.

2. **解**:这是一个特殊的平行四边形,是菱形. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=9$,$BD=12$,$AC=6\sqrt{5}$,所以 $OB=OD=6$,$OA=OC=3\sqrt{5}$. 因为 $6^2+(3\sqrt{5})^2=9^2$,即 $OB^2+OA^2=AB^2$,所以 $\triangle AOB$ 是直角三角形,所以 $AO\perp BO$,即 $AC\perp BD$,所以平行四边形 $ABCD$ 是菱形.



(第2题)

$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}\times 12=36\sqrt{5}$.

3. **解**:四边形 $ABCD$ 是一个菱形. 理由:由题意易得 $AB=BC=CD=AD$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

点拨:本题运用了"四边相等的四边形是菱形"这一判定方法.

18.2.3 正方形

练习

1. 略.

2. **解**:连接 AC,BD 相交于点 O. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,$BC=\sqrt{CE^2-BE^2}=\sqrt{900-100}=20\sqrt{2}$(m). 因为 $AB=BC=CD=AD$,所以 $S_{正方形ABCD}=BC^2=(20\sqrt{2})^2=800$(m^2). 因为 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{800+800}=40$(m),又 $BD=AC$,所以 $BD=40$ m. 所以这块场地的面积是800 m^2,对角线长是40 m.

3. **解**:(1)是;(2)是;(3)是;(4)是. 原因略.

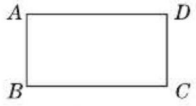
习题 18.2

1. **解**:$\square ABCD$ 是矩形. 理由如下:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$OB=OD$. 又因为 $\angle 1=\angle 2$,所以 $OB=OC$,所以 $OA=OB=OC=OD$,所以 $AC=BD$. 所以 $\square ABCD$ 是矩形.

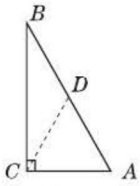
2. **解**:已知:如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$.

求证:四边形 $ABCD$ 是矩形.

证明:因为 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$,且 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$,所以 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$. 所以四边形 $ABCD$ 是矩形.



(第2题)



(第4题)

3. **解**:因为长木板的对边平行,由已知可得此四边形的四个内角都为直角,所以他能得到矩形踏板.

4. **解**:如图,取 AB 的中点 D,连接 CD,则 $CD=\frac{1}{2}AB$. 又因为 $AB=2AC$,所以 $AC=AD=CD$,所以 $\triangle ACD$ 是等边三角形,所以 $\angle A=60°$. 所以 $\angle B=90°-60°=30°$.

5. **解**:(1)设 AC,BD 相交于点 O,因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $\angle ACB=\angle ACD=30°$,所以 $\angle BCD=60°$. 所以 $\angle BAD=60°$,$\angle ABC=120°$.

(2)因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $OD=\frac{1}{2}BD=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中,$\angle ACD=30°$,$OD=3$,所以 $CD=2OD=6$,所以 $OC=\sqrt{CD^2-OD^2}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$,$AB=CD=6$. 所以 $AC=2OC=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

6. **证明**:因为 $AE/\!/BF$,所以 $\angle BAD+\angle ABC=180°$. 因为 AC 平分 $\angle BAD$,所以 $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAD$. 因为 BD 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC$,所以 $\angle BAO+\angle ABO=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle ABC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$,所以 $\angle AOB=180°-90°=90°$,即 $AC\perp BD$,所以 $\angle AOB=\angle AOD=90°$. 又因为 $AO=AO$,$\angle BAO=\angle DAO$,所以 $\triangle AOB\cong\triangle AOD$,所以 $AB=AD$. 同理可得 $AB=BC$,所以 $AD=BC$. 又因为 $AD/\!/BC$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因为 $AB=AD$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

7. 略. 8. 略.

9. **解**:$\angle ECD=45°$. 理由如下:因为 $\angle ACD=3\angle BCD$,$\angle ACB=90°$,所以 $\angle BCD+3\angle BCD=90°$,所以 $\angle BCD=22.5°$,所以 $\angle ACD=67.5°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

因为$\angle ACD+\angle A=90°$，所以$\angle A=90°-\angle ACD=22.5°$. 又因为$E$为$AB$的中点，所以$AE=CE$，所以$\angle ACE=\angle A=22.5°$. 所以$\angle ECD=90°-\angle BCD-\angle ACE=90°-22.5°-22.5°=45°$.

10. 证明：因为四边形$ABCD$是菱形，所以$AB=BC=CD=AD$. 因为$BM=DN$，所以$AM=AN$. 因为$MG/\!/AD$，$NF/\!/AB$，即$AN/\!/ME$，$AM/\!/NE$，所以四边形$AMEN$是平行四边形. 又因为$AM=AN$，所以四边形$AMEN$是菱形. 同理可证四边形$EFCG$是菱形.

点拨：本题采用的是定义法，即一组邻边相等的平行四边形是菱形. 用它来判定一个四边形是菱形需满足：(1)一组邻边相等；(2)必须是平行四边形.

11. 解：因为四边形$ABCD$是菱形，所以$AB=BC=CD=AD$，$AC\perp BD$. 因为$AC=8$，$BD=6$，所以$OA=OC=4$，$OB=OD=3$. 在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{16+9}=5$. 由已知得$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AB\cdot DH$，即$\frac{1}{2}\times 8\times 6=5\cdot DH$，所以$DH=4.8$.

12. 解：(1)由题意知$OB=b$，$OD=d$. 因为四边形$OBCD$是矩形，所以$CD\perp OD$，$CB\perp OB$，$CD=OB$，$CB=OD$，所以点C的坐标为(b,d).

(2)由题意知$OC=c$，$OD=d$. 因为四边形$ABCD$是菱形，所以$OA=OC$，$OB=OD$. 又因为点A在x轴的负半轴上，点B在y轴的负半轴上，所以A，B两点的坐标分别为$(-c,0)$，$(0,-d)$.

(3)由题意知$OD=d$，因为四边形$OBCD$是正方形，所以$OB=BC=CD=OD=d$. 又点B在x轴的正半轴上，点C在第一象限内，且$BC\perp OB$，$CD\perp OD$，所以点B，C的坐标分别为$(d,0)$，(d,d).

13. 解：四边形$EFMN$是正方形. 证明：因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AB=BC=CD=AD$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$. 因为$AE=BF=CM=DN$，所以$BE=CF=DM=AN$，所以$\triangle AEN\cong\triangle BFE\cong\triangle CMF\cong\triangle DNM$，所以$EN=FE=MF=NM$，所以四边形$EFMN$是菱形. 因为$\triangle AEN\cong\triangle BFE$，所以$\angle AEN=\angle BFE$. 因为$\angle BFE+\angle BEF=90°$，所以$\angle AEN+\angle BEF=90°$，所以$\angle NEF=90°$，所以菱形$EFMN$是正方形.

14. 解：可以拼成3种平行四边形.

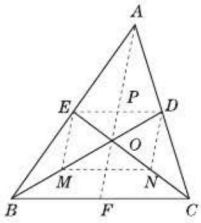
①以m为对角线的平行四边形，此平行四边形为矩形，两条对角线的长相等，都为m；

②以h为对角线的平行四边形，对角线长为h，$\sqrt{h^2+4n^2}$；

③以n为对角线的平行四边形，对角线长为n，$\sqrt{n^2+4h^2}$.

15. 证明：因为$DE\perp AG$，$BF/\!/DE$，所以$BF\perp AG$，所以$\angle AFB=\angle DEA=90°$. 所以$\angle EAD+\angle ADE=90°$. 因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AB=AD$，$\angle BAD=90°$，即$\angle BAF+\angle EAD=90°$. 所以$\angle BAF=\angle ADE$. 所以$\triangle BAF\cong\triangle ADE$. 所以$BF=AE$，所以$EF=AF-AE=AF-BF$，即$AF-BF=EF$.

16. 解：$BO=2OD$. BC边上的中线一定过点O. 理由如下：取BO的中点M，CO的中点N，连接ED，EM，MN，ND，如图所示. 因为BD，CE分别是边AC，AB上的中线，所以$ED/\!/\!=\frac{1}{2}BC$. 又因为M，N分别是BO，CO的中点，所以$MN/\!/\!=\frac{1}{2}BC$，所以$ED/\!/\!=MN$，所以四边形$EMND$是平行四边形，所以$OD=OM$. 又因为$OM=MB$，所以$BO=2OD$. 连接AO，并延长交BC于F，交ED于P. 因为E，M分别为AB，OB的中点，所以$EM/\!/AO$. 又因为O为DM的中点，所以P为ED的中点，即$EP=\frac{1}{2}ED$. 因为$ED/\!/BC$，E为AB的中点，所以P为AF的中点，所以$EP/\!/\!=\frac{1}{2}BF$，所以$ED/\!/\!=BF$. 又因为$ED/\!/\!=\frac{1}{2}BC$，所以$BF=\frac{1}{2}BC$，即F为BC的中点.



（第16题）

17. 解：方法一：连接两条对角线，将正方形分成四个等腰直角三角形，如图①.

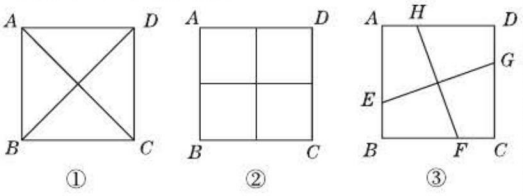
方法二：分别连接两组对边的中点，将正方形分成四个小正方形，如图②.

方法三：分别在AB，BC，CD，DA上截取$AE=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$BF=CG=DH=m\left(m\neq\frac{1}{2}AB,\text{且}0<m<AB\right)$,

连接 EG,FH,如图③.



(第17题)

点拨:要解此题,应知道过正方形的中心位置且互相垂直的两条直线都能将正方形的面积分成四等份.

复习题18

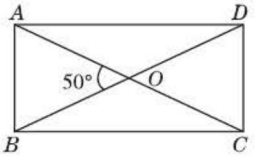
1. (1) B **点拨**:设这两个内角为 $\angle A$, $\angle B$,若 $\angle A=x$,则 $\angle B=2x$,然后利用平行四边形的邻角互补,对角相等即可求解.

(2) C **点拨**:由已知可求得菱形的边长为2,一个内角为30°,另一个与之相邻的内角为150°,故菱形两邻角的度数比为5:1.

(3) B **点拨**:易求得 $\angle BAE=150°$,又由 $AB=AE$ 可知 $\triangle ABE$ 为等腰三角形,所以 $\angle ABE=\angle AEB=15°$.

2. **证明**:连接 AC,交 BD 于点 O. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$, $OB=OD$. 又因为 $BE=DF$,所以 $OE=OF$,所以四边形 $AECF$ 是平行四边形.

3. **解**:如图,因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AC=BD$, $OA=OC=\frac{1}{2}AC$, $OB=OD=\frac{1}{2}BD$,所以 $OA=OC=OB=OD$. 因为 $\angle AOB=\angle COD=50°$,所以 $\angle OAB=\angle OBA=\angle OCD=\angle ODC=65°$,所以 $\angle OAD=\angle ODA=\angle OBC=\angle OCB=25°$.



(第3题)

点拨:本题是根据矩形的对角线互相平分且相等的性质来解决的. 另外矩形的两条对角线把矩形分成了四个等腰三角形.

4. **解**:能. 理由:因为书架的两侧边相等,上下底也相等,所以这个书架为平行四边形. 用绳子测出书架两条对角线的长度是否相等,根据"对角线相等的平行四边形是矩形"可知,若书架两条对角线的长度相等,则这个书架的侧边和上、下底都垂直;否则不垂直.

5. **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $OA=OB=OC=OD$. 又因为 $DE\parallel AC$, $CE\parallel BD$,所以 $DE\parallel OC$, $CE\parallel OD$,所以四边形 $OCED$ 是平行四边形. 又因为 $OC=OD$,所以四边形 $OCED$ 是菱形.

6. **解**:四边形 $EFGH$ 是正方形. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, $AB=BC=CD=AD$. 又因为点 E,F,G,H 分别是正方形 $ABCD$ 各边的中点,所以 $AE=BE=AH=DH=CG=DG=BF=CF$,所以 $\triangle AEH\cong\triangle BFE\cong\triangle CGF\cong\triangle DHG$,所以 $EH=EF=FG=HG$,所以四边形 $EFGH$ 是菱形. 因为 $AE=AH=BE=BF$, $\angle A=\angle B=90°$,所以 $\angle AEH=\angle BEF=45°$,所以 $\angle FEH=180°-90°=90°$,所以菱形 $EFGH$ 是正方形.

7. **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB\parallel CD$, $AB=CD$,所以 $\angle BAE=\angle DCF$.

又因为 $BE\parallel DF$,所以 $\angle BEF=\angle DFE$,

所以 $\angle BEA=\angle DFC$,所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$,

所以 $BE=DF$.

因为 $BE\parallel DF$,所以四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

所以 $DE\parallel BF$,所以 $\angle 1=\angle 2$.

点拨:要证 $\angle 1=\angle 2$,只要证出四边形 $BEDF$ 是平行四边形即可,可通过证 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 全等,得出 $BE=DF$,根据平行四边形的判定方法使问题得以解决.

8. **解**:这两条路等长且互相垂直.

设 BE 和 AF 相交于点 O.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB=BC=CD=AD$.

又因为 $DE=CF$,所以 $AE=DF$.

根据勾股定理得 $BE=\sqrt{AB^2+AE^2}$,

$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}$,所以 $BE=AF$.

因为 $AB=AD$, $AE=DF$, $BE=AF$,所以 $\triangle ABE\cong\triangle DAF$,所以 $\angle AEB=\angle DFA$.

因为 $\angle DAF+\angle DFA=90°$,

所以 $\angle DAF+\angle AEB=90°$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以$\angle AOE=90°$，

所以$BE\perp AF$.

9. 解：(1)平行四边形. 原因略.

(2)平行四边形. 原因略.

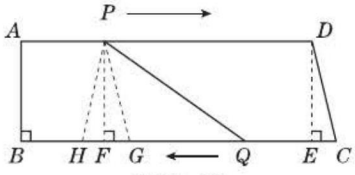
(3)任意矩形的中点四边形是菱形；任意菱形的中点四边形是矩形；任意正方形的中点四边形是正方形. 原因略.

10. 解：它不一定是菱形，也不一定是正方形，因为还有可能是一般的矩形.

11. 解：用纸板剪成两个全等的三角形，能够拼成平行四边形. 若把纸板剪成两个全等的直角三角形，则可拼成一个矩形；若把纸板剪成两个全等的等腰三角形，则可拼成一个菱形；若把纸板剪成两个全等的等腰直角三角形，则可拼成一个正方形. 理由略.

12. 解：四边形$EFGH$是菱形. 理由：因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$AB\parallel DC$，$BC\parallel AD$，所以$\angle EAO=\angle GCO$，$\angle HAO=\angle FCO$. 又因为O是AC的中点，所以$AO=CO$，在$\triangle EAO$和$\triangle GCO$中，因为$\angle EAO=\angle GCO$，$AO=CO$，$\angle AOE=\angle COG$，所以$\triangle EAO\cong\triangle GCO$，所以$EO=GO$. 同理可证$HO=FO$. 又因为$GE\perp HF$，所以四边形$EFGH$是菱形.

13. 解：分别需经过6 s；6 s或7 s. 理由如下：设经过t_1 s，$PQ\parallel CD$，根据题意易知此时四边形$PQCD$为平行四边形，所以$PD=CQ$，所以有$24-1\times t_1=3t_1$，解得$t_1=6$. 即经过6 s，$PQ\parallel CD$.



(第13题)

如图，过点D作$DE\perp BC$于E，过P作$PF\perp BC$于F，作$PG\parallel CD$交BC于G，作$PH=PG$，PH与BC交于H，则$\triangle PHG$为等腰三角形，易得$HF=FG=CE$. 因为在直角梯形$ABCD$中，$AD=24$ cm，$BC=26$ cm，

所以$CE=2$ cm.

所以$HF=FG=CE=2$ cm.

设经过t_2 s，$PQ=CD$.

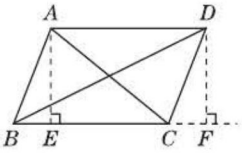
根据题意，得$24-1\cdot t_2=3t_2$或$24-1\cdot t_2=3t_2-4$.

解得$t_2=6$或$t_2=7$，

即经过6 s或7 s，$PQ=CD$.

14. 证明：取AB的中点G，连接EG. 因为四边形$ABCD$是正方形，所以$\angle B=90°$，$AB=BC$. 又因为G，E分别是AB，BC的中点，所以$AG=EC=BG=BE$，所以$\triangle BEG$是等腰直角三角形，所以$\angle BGE=45°$，所以$\angle AGE=135°$. 又因为$\angle BCD=90°$，CF平分正方形的外角，所以$\angle ECF=135°$，所以$\angle AGE=\angle ECF$. 因为$\angle BAE+\angle AEB=90°$，$\angle CEF+\angle AEB=90°$，所以$\angle BAE=\angle CEF$. 在$\triangle AGE$和$\triangle ECF$中，因为$\angle BAE=\angle CEF$，$AG=EC$，$\angle AGE=\angle ECF$，所以$\triangle AGE\cong\triangle ECF$，所以$AE=EF$.

15. 解：已知：如图，四边形$ABCD$是平行四边形，AC，BD为其对角线.



(第15题)

求证：$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

证明：过点A作$AE\perp BC$于E，过点D作$DF\perp BC$交BC的延长线于F，则易知$AE=DF$，$BE=CF$. 因为在Rt$\triangle ABE$中，$AB^2=AE^2+BE^2$，在Rt$\triangle BDF$中，$BD^2=FD^2+(BC+CF)^2$，在Rt$\triangle ACE$中，$AC^2=AE^2+(BC-BE)^2$，所以$AC^2+BD^2=AE^2+(BC-BE)^2+FD^2+(BC+CF)^2$，又因为$AE=DF$，$BE=CF$，所以$AC^2+BD^2=2AE^2+2BC^2+2BE^2=2(AE^2+BE^2)+2BC^2=2AB^2+2BC^2$. 又因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$AB=DC$，$AD=BC$，所以$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

第十九章 一次函数

19.1 函数

19.1.1 变量与函数

练习

解：(1)变量：月用水量x，月应交水费y；常量：自来水价4元/t.

(2)变量：通话时间t，余额w；常量：通话费

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

0.2 元/min,30 元.

(3)变量:半径 r,周长 C;常量:圆周率 π.

(4)变量:第一个抽屉放入本数 x,第二个抽屉放入本数 y;常量:总本数 10 本.

练习

1. 解:(1)正方形的边长 x 是自变量,正方形的面积 S 是边长 x 的函数,函数解析式是 $S=x^2$.

(2)注水时间 x 是自变量,注水量 y 是注水时间 x 的函数,函数解析式是 $y=0.1x$.

(3)人数 n 是自变量,人均占有耕地面积 y 是人数 n 的函数,函数解析式是 $y=\frac{10^6}{n}$.

(4)时间 t 是自变量,水池中的水量 V 是 t 的函数,函数解析式是 $V=10-0.05t$.

点拨:在列函数解析式时,等号左边是函数,右边是关于自变量的式子;第(3)小题不能写为 $yn=10^6$ 或 $n=\frac{10^6}{y}$的形式.

2. 解: $S=\frac{3}{2}(2+x)\ (2<x\leqslant 5)$.

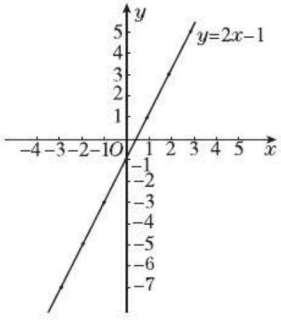
19.1.2 函数的图象

练习

1. 解:(1)列表:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2x-1$	…	-7	-5	-3	-1	1	3	5	…

描点、连线,图象如图.



(第 1 题)

(2)当 $x=-2.5$ 时,$y=-6$,所以点 $A(-2.5,-4)$不在函数 $y=2x-1$ 的图象上;当 $x=1$ 时,$y=1$,所以点 $B(1,3)$不在函数 $y=2x-1$ 的图象上;当 $x=2.5$ 时,$y=4$,所以点 $C(2.5,4)$在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

2. 解:(1)7 时和 12 时,上海与北京的气温相同.

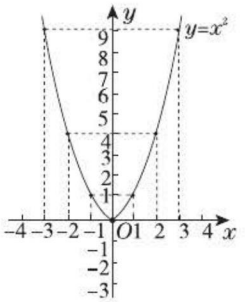
(2)0 时至 7 时,12 时至 24 时,上海比北京的气温高;7 时至 12 时,上海比北京的气温低.

点拨:本题考查了在同一直角坐标系中的两个图象的比较. 解题时,应从点的横坐标、纵坐标和两个图象位置的高低去分析.

3. 解:(1)列表:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

描点、连线,函数图象如图所示.



(第 3 题)

(2)从图象中观察可知,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

点拨:画函数图象时,若自变量 x 的取值范围是全体实数,则正数、负数、0 都要取,否则画出的函数图象只是整个图象的一部分. 本题中在 y 轴左边,图象从左到右下降;在 y 轴右边,图象从左到右上升.

练习:

1. 解:列表法:

多边形的边数 n	3	4	5	6	…
内角和 m	180°	360°	540°	720°	…

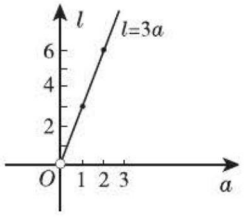
解析式法:$m=(n-2)\cdot 180°\ (n\geqslant 3,n$ 为正整数).

点拨:由表中数据可知:三角形的内角和是 180°,以后每增加 1 条边,内角和增加 180°,这个规律可表示为 $m=180°+(n-3)\cdot 180°$,即 $m=(n-2)\cdot 180°$.

2. 解:解析式法:$l=3a\ (a>0)$.

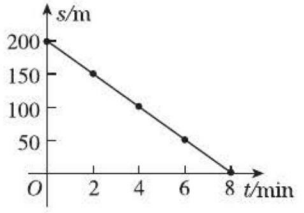
图象法:函数图象如图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第2题）

3. 解：s 是 t 的函数，函数解析式为：$s=200-25t$ $(0\leqslant t\leqslant 8)$，函数图象如图.



（第3题）

如果船速不变，8 min 后小船到达码头.

习题 19.1

1. 解：单价 0.2 元/支是常量，总价 y 和铅笔支数 x 是变量，其中 x 是自变量，y 是 x 的函数，$y=0.2x$（x 为正整数）.

点拨：由题意可知，总价 = 单价 × 支数，单价不变.

2. 解：$S=\frac{5}{2}h(h>0)$，$\frac{5}{2}$ 是常量，S 和 h 是变量，其中 h 是自变量，S 是 h 的函数；自变量 h 的取值范围是 $h>0$.

点拨：三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$ 底 × 高. 从实际问题中寻找函数关系，确定自变量和函数.

3. 解：表中依次填：7，11，−3，5，207，−5.4.

显示的计算结果 y 是输入数值 x 的函数，因为 x 每取一个值，y 都有唯一确定的值与之对应.

4. 解：(1)(2)(3)中的 y 都是 x 的函数，因为在保证函数解析式有意义的前提下，x 每取一个值，y 都有唯一确定的值与之对应. 举函数的例子如：$y=2x$，$y=\frac{1}{x-2}$，$y=\sqrt{x+20}$ 等.

5. 解：(1)使 $y=3x-5$ 有意义，x 取全体实数；使 $y=\frac{x-2}{x-1}$ 有意义，$x\neq 1$；使 $y=\sqrt{x-1}$ 有意义，$x\geqslant 1$.

(2)当 $x=5$ 时，$y=3x-5=3\times 5-5=10$；

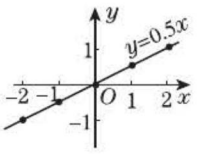
当 $x=5$ 时，$y=\frac{x-2}{x-1}=\frac{5-2}{5-1}=\frac{3}{4}$；

当 $x=5$ 时，$y=\sqrt{x-1}=\sqrt{5-1}=2$.

6. 解：列表：

x	…	−2	−1	0	1	2	…
$y=0.5x$	…	−1	−0.5	0	0.5	1	…

描点、连线，则函数图象如图所示. 自变量是 x，x 的取值范围是全体实数.



（第6题）

7. 解：(1)(2)(3)的曲线表示 y 是 x 的函数.

点拨：(4)中，x 取一个值时，y 可能有一个、两个或三个值与之对应. 由图象判断是否具有函数关系，必须符合 x 每取一个值，y 都有唯一确定的值与之对应，才能确定 y 是 x 的函数.

8. 解：(2)适合表示 y 与 x 的对应关系.

9. 解：(1)体育场离张强家的距离是 2.5 km；张强从家到体育场用了 15 min.

(2)体育场与文具店的距离是 2.5 − 1.5 = 1 (km).

(3)张强在文具店停留了 65 − 45 = 20 (min).

(4)从纵坐标看出，文具店离家 1.5 km，从横坐标看出，张强从文具店回家用了 100 − 65 = 35 (min)，所以张强从文具店回家的平均速度是 $\frac{1.5}{35}=\frac{3}{70}$ (km/min).

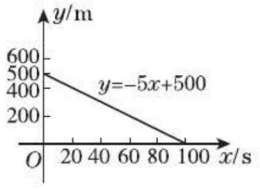
10. 解：$y=100+100\times 0.06\%\cdot x$，即 $y=0.06x+100$. 当 $x=4$ 时，$y=0.06\times 4+100=100.24$. 即存期为 4 个月时的本息和是 100.24 元.

11. 解：$y=(x+3)^2-9$，即 $y=x^2+6x(x>0)$. 其中 x 是自变量，y 是 x 的函数. 列表：

x	1	2	3	4
y	7	16	27	40

12. 解：$y=500+20x-25x$，即 $y=-5x+500$ $(0\leqslant x\leqslant 100)$. 函数图象如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第 12 题)

点拨:本题画函数图象时,注意自变量的取值范围是$0\leqslant x\leqslant 100$,所以对应函数值的取值范围是$500\geqslant y\geqslant 0$,所画图象为一条线段.

13. 解:(1) A,B 两城相距 300 km.

(2)甲车先出发,乙车先到 B 城.

(3)甲车平均速度为$\frac{300}{10-5}=60$(km/h);

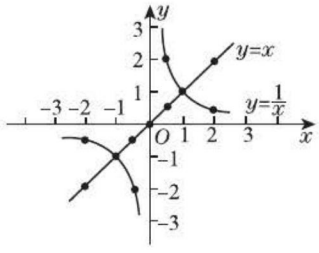
乙车平均速度为$\frac{300}{9-6}=100$(km/h).

(4)7:30 时乙车追上甲车.(答案不唯一)

14. 解:列表:

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x$	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=\frac{1}{x}$	…	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	/	2	1	$\frac{1}{2}$	…

在同一直角坐标系中画出 $y=x$ 和$y=\frac{1}{x}$的图象,如图.(1)由图象可知,当$x>1$或$-1<x<0$时,x 比$\frac{1}{x}$大;(2)由图象可知,当$0<x<1$或$x<-1$时,x 比$\frac{1}{x}$小.



(第 14 题)

15. 解:五边形有 5 条对角线,六边形有 9 条对角线,n 边形有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线.多边形对角线的条数是边数的函数.

19.2 一次函数

19.2.1 正比例函数

练习

1. 解:(1),(2)表示 y 是 x 的正比例函数.

2. 解:(1)$y=4x(x>0)$. (2)$y=12x(x>0)$.

(3)$y=2\times 1.5x$,即 $y=3x(x>0)$.

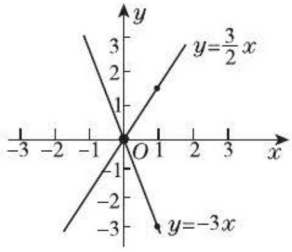
(1),(2),(3)都是正比例函数.

练习

解:函数 $y=\frac{3}{2}x$ 与函数 $y=-3x$ 均可以用两点法画图象,列表:

x	0	1
$y=\frac{3}{2}x$	0	$\frac{3}{2}$
$y=-3x$	0	-3

描点、连线,图象如图所示.



点拨:①直线经过原点,再找一个 x 不为 0 的值,计算出 y,再以(x,y),$(0,0)$描点连线.②k 值的正负确定函数的图象的位置.

19.2.2 一次函数

练习

1. 解:(1),(4)是一次函数;(1)是正比例函数.

点拨:正比例函数是特殊的一次函数,是正比例函数的一定是一次函数,是一次函数的不一定是正比例函数.

2. 解:把$\begin{cases}x=1,\\y=5\end{cases}$和$\begin{cases}x=-1,\\y=1\end{cases}$分别代入 $y=kx+b$,得$\begin{cases}5=k+b,\\1=-k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\b=3.\end{cases}$所以 k 的值为 2,b 的值为 3.

3. 解:(1)$v=2t$,它是一次函数.

(2)当 $t=2.5$ 时,$v=2\times 2.5=5$,

即第 2.5 s 时小球的速度为 5 m/s.

练习:

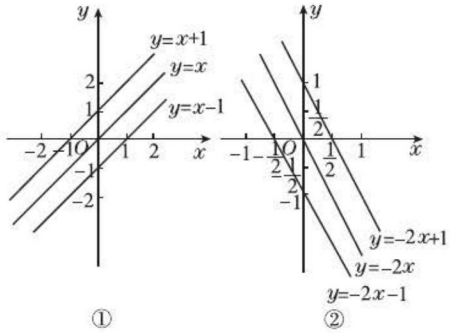
1. $\left(\frac{3}{2},0\right)$;$(0,-3)$;第一、三、四;增大

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨：直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 与 x 轴和 y 轴的交点坐标分别是 $\left(-\frac{b}{k},0\right),(0,b)$. 当 $k>0,b<0$ 时，直线经过第一、三、四象限.

2. 解：(1)函数 $y=x-1,y=x,y=x+1$ 的图象如图①.

(2)函数 $y=-2x-1,y=-2x,y=-2x+1$ 的图象如图②. 每小题中三个函数的图象均互相平行.

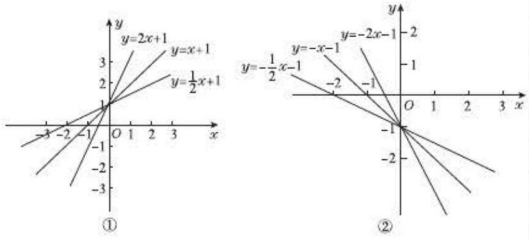


(第2题)

点拨：本题中，每组中由于 k 的值相同，所以直线互相平行.

3. 解：(1)图象如图①所示，它们的共同之处是都经过点(0,1).

(2)图象如图②，它们的共同之处是都经过点(0,−1).



(第3题)

点拨：直线 $y=kx+b$ 一定经过点(0,b).

练习

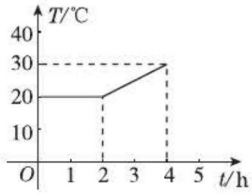
1. 解：设一次函数解析式为 $y=kx+b$. 则

$$\begin{cases}9k+b=0,\\24k+b=20,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=\frac{4}{3},\\b=-12.\end{cases}$$

所以一次函数解析式为 $y=\frac{4}{3}x-12$.

2. 解：当 $0\leqslant t\leqslant2$ 时，$T=20$. 当 $2<t\leqslant4$ 时，$T=20+5(t-2)=10+5t$.

即 T 与 t 的函数解析式为 $T=\begin{cases}20 & (0\leqslant t\leqslant2),\\10+5t & (2<t\leqslant4).\end{cases}$ 函数图象如图.



(第2题)

19.2.3 一次函数与方程、不等式

练习

解：设通话时间为 t min，方式一和方式二的费用分别为 y_1 元和 y_2 元，

则 $y_1=30+0.30t,y_2=0.40t$.

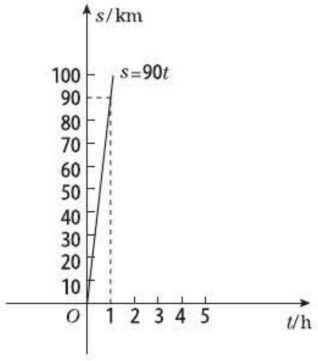
当 $y_1=y_2$ 时，即 $30+0.30t=0.40t$，

解得 $t=300$.

所以当通话时间为 300 min 时，两种计费方式费用相等.

习题 19.2

1. 解：$s=90t(t\geqslant0)$，函数图象如图.



(第1题)

点拨：因为 $t\geqslant0$，所以函数图象是一条射线，而不是直线.

2. 二、四；0；−5；减小

3. 解：$y=2x+12(x>0)$.

4. 解：

x	0	1
$y=4x$	0	4
$y=4x+1$	1	5
$y=-4x+1$	1	−3
$y=-4x-1$	−1	−5

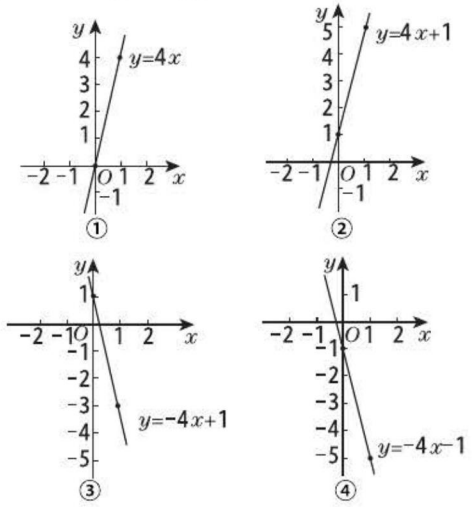
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)过点(0,0)与点(1,4),画出直线 $y=4x$(如图①).

(2)过点(0,1)与点(1,5),画出直线 $y=4x+1$(如图②).

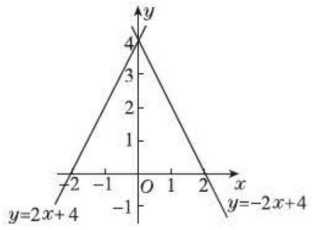
(3)过点(0,1)与点(1,-3),画出直线 $y=-4x+1$(如图③).

(4)过点(0,-1)与点(1,-5),画出直线 $y=-4x-1$(如图④).



(第4题)

5. 解:函数 $y=2x+4$ 和函数 $y=-2x+4$ 的图象如图所示. 在 $y=2x+4$ 中,y 随 x 的增大而增大;在 $y=-2x+4$ 中,y 随 x 的增大而减小.



(第5题)

点拨:本题考查了一次函数 $y=kx+b$ 的性质,当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小.

6. 解:因为一次函数 $y=kx+b$,当 $x=2$ 时 y 的值为4,当 $x=-2$ 时 y 的值为 -2,

所以 $\begin{cases}2k+b=4,\\-2k+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{2},\\b=1.\end{cases}$

7. 解:设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b$.

因为图象过点 $(-4,9)$,$(6,3)$,

所以 $\begin{cases}-4k+b=9,\\6k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{3}{5},\\b=\dfrac{33}{5}.\end{cases}$

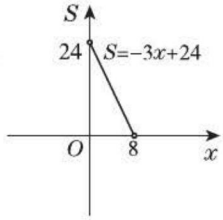
所以 $y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{33}{5}$.

8. 解:函数 $y=\dfrac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的值相等,即 $\dfrac{5}{2}x+1=5x+17$,解得 $x=-\dfrac{32}{5}$.

所以当 $x=-\dfrac{32}{5}$ 时,两函数的值相等,这个函数值是 $5\times\left(-\dfrac{32}{5}\right)+17=-15$.

9. 解:(1)因为 $A(6,0)$,所以 $OA=6$. 又点 P 在第一象限,P 到 OA 的距离为 $y=8-x$,

所以 $S_{\triangle OPA}=\dfrac{1}{2}OA\cdot y=\dfrac{1}{2}\times 6\times(8-x)=-3x+24$,即 $S=-3x+24\ (0<x<8)$. 图象如图.



(第9题)

(2)当 $x=5$ 时,$S=-3\times5+24=9$.

(3)$\triangle OPA$ 的面积不能大于24,因为 $x>0$,所以 $-3x+24<24$,即 $S<24$.

点拨:将 $\triangle OPA$ 的面积与 x 建立函数关系. 由点 $P(x,y)$ 在第一象限,可得横坐标、纵坐标都大于0,从而求出自变量的取值范围. 由自变量 $0<x<8$ 可知,函数的图象是一条线段,且两个端点是空心圆圈.

10. 解:直线 $y=3x+4$ 与 $y=3x-4$ 互相平行.

点拨:若 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 中,$k_1=k_2$,$b_1\neq b_2$,则两直线平行.

11. 解:根据题意得,当 $0<x\leqslant3$ 且 x 为整数时,$y=2.4$,当 $x>3$ 且 x 为整数时,$y=2.4+(x-3)\times1$,即 $y=x-0.6$. 故当 $y=10$ 时,显然 $x>3$,从而有 $x-0.6=10$,所以 $x=10.6$. 又因为 x 为整数,所以 $x=10$,即用10元钱打一次电话最多可以通话10 min.

点拨:这是分段函数,当 $0<x\leqslant3$ 时,$y=2.4$(x 取

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

整数)；当 $x>3$ 时，$y=2.4+(x-3)\times1$(x取整数)，注意分两部分分析.

12. 解：(1)当 $b>0$ 时，函数 $y=x+b$ 的图象经过第一、二、三象限.

(2)当 $b<0$ 时，函数 $y=-x+b$ 的图象经过第二、三、四象限.

(3)当 $k>0$ 时，函数 $y=kx+1$ 的图象经过第一、二、三象限.

(4)当 $k<0$ 时，函数 $y=kx+1$ 的图象经过第一、二、四象限.

点拨：本题考查了一次函数 $y=kx+b$ 的图象位置与 k,b 符号之间的关系.

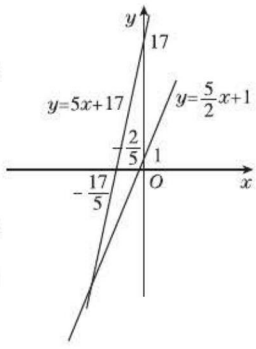
13. 解：画出函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的图象，

如图，它们的交点为 $\left(-\frac{32}{5},-15\right)$，

所以当 $x=-\frac{32}{5}$ 时，两个函数的函数值相等；

当 $x<-\frac{32}{5}$ 时，$y=\frac{5}{2}x+1$ 的函数值大于 $y=5x+17$ 的函数值；

当 $x>-\frac{32}{5}$ 时，$y=\frac{5}{2}x+1$ 的函数值小于 $y=5x+17$ 的函数值.



(第13题)

14. 解：(1)由图象可知这个人在 12:30 ~ 13:30 这段时间离家最远；这时他离家 45 km.

(2)10:30 开始第一次休息，休息 30 min，这时他离家 30 km.

(3)他骑了 15 km.

(4)他在 9:00 ~ 10:30 的平均速度为20 km/h；他在 10:30 ~ 12:30 的平均速度为 $\frac{15}{2}=7.5$(km/h).

(注意：10:30 ~ 11:00这段时间内此人休息时间应计算在内)

(5)他返家时的平均速度为 $\frac{45}{1.5}=30$(km/h).

(6)14:00 时他离家 18 km. 设 14:00 ~ 15:00 这段时间内他离家的距离与时刻的函数解析式为 $y=kx+b$.

把点(14,18)，(15,0)的坐标分别代入，

得 $\begin{cases}14k+b=18,\\15k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-18,\\b=270,\end{cases}$

所以 $y=-18x+270$.

当 $y=9$ 时，$x=14.5$，即回家路上，14:30 时他离家 9 km.

点拨：根据函数图象回答问题时，利用横、纵坐标的数量关系，充分体现了数形结合思想. 14:00 ~ 15:00 时他离家的距离与时间满足一次函数的关系.

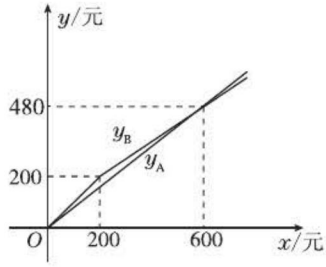
15. 解：(1)设顾客在甲商场的购物金额为 y_A 元，在乙商场的购物金额为 y_B 元，则 $y_A=0.8x$；

当 $x>200$ 时，$y_B=200+0.7(x-200)$，

即 $y_B=0.7x+60$，

所以 $y_B=\begin{cases}x(0\leqslant x\leqslant200),\\0.7x+60(x>200).\end{cases}$

(2)函数图象如图.



(第15题)

(3)①当 $x>200$ 时，由 $y_A=y_B$ 得 $0.8x=0.7x+60$，即 $x=600$；由 $y_A>y_B$ 得 $0.8x>0.7x+60$，即 $x>600$；由 $y_A<y_B$ 得 $0.8x<0.7x+60$，即 $x<600$.

②当 $0<x\leqslant200$ 时，明显有 $y_A<y_B$. 由以上可知，当消费金额为 600 元时，甲、乙两商场一样；当消费金额少于 600 元时，到甲商场购物更省钱；当消费金额大于 600 元时，到乙商场购物更省钱.

19.3 课题学习 选择方案(无)

复习题 19

1. 解：常量为已存款 100 元，每月存款 10 元；变量为存款总金额 y(元)，时间 x(月). 自变量为 x，y 是 x 的函数，函数解析式为 $y=100+10x(0\leqslant x\leqslant36$ 且 x 是整数).

点拨：根据题意知，存款总数 = (100 + 10 ×

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

月数)元.

2. 解: 当 $x=-5$ 时,$y=2x+6=2\times(-5)+6=-4$,所以点$(-5,-4)$在这条直线上;当$x=-7$时,$y=2x+6=2\times(-7)+6=-8\neq 20$,所以点$(-7,20)$不在直线上;当$x=-\frac{7}{2}$时,$y=2x+6=2\times\left(-\frac{7}{2}\right)+6=-1\neq 1$,所以点$\left(-\frac{7}{2},1\right)$不在直线上;当$x=\frac{2}{3}$时,$y=2x+6=2\times\frac{2}{3}+6=7\frac{1}{3}$,所以点$\left(\frac{2}{3},7\frac{1}{3}\right)$在直线上. 直线$y=2x+6$与$x$轴交于点$(-3,0)$,与$y$轴交于点$(0,6)$.

3. (1)一、二、四;减小 (2)一、三、四;增大

点拨: 对于一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$,当$k>0$时,y随x的增大而增大;当$k<0$时,y随x的增大而减小. 当$b>0$时,直线与y轴交于正半轴;当$b<0$时,直线与y轴交于负半轴. 结合k,b的符号,确定直线的位置.

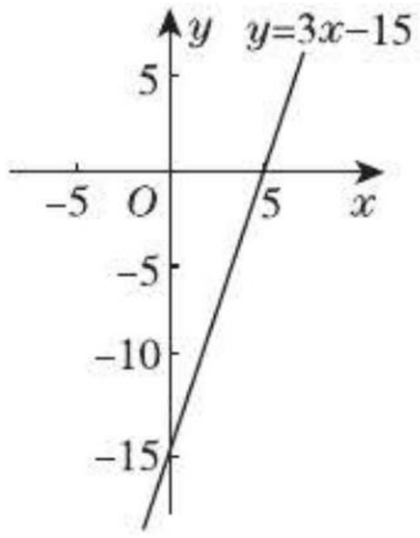
4. 解: (1)由y与x成正比例,得$b=0$,当$x=5$时,$y=6$,则$6=5k$,即$k=\frac{6}{5}$,所以$y=\frac{6}{5}x$.

(2)根据题意,得$\begin{cases}3k+b=6,\\ \frac{1}{2}k+b=-\frac{1}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{13}{5},\\ b=-\frac{9}{5}.\end{cases}$ 所以$y=\frac{13}{5}x-\frac{9}{5}$.

5. 解: 函数$y=3x-15$的图象与x轴交于点$(5,0)$,如图. 由图象可知,(1)当$x>5$时,$y>0$.

(2)当$x<5$时,$y<0$.



(第5题)

点拨: 当$y>0$时,对应函数图象在x轴上方;当$y<0$时,对应函数图象在x轴下方.

6. 解: $c=\begin{cases}2(0<p\leqslant 1,\text{且}p\text{为整数}),\\ 2+(p-1)\times 0.5(p>1,\text{且}p\text{为整数}),\end{cases}$

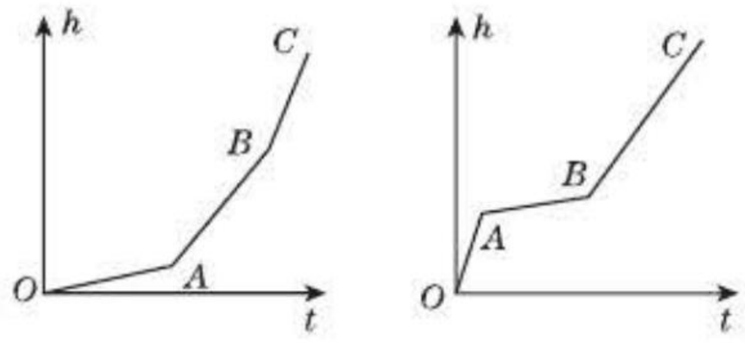
即$c=0.5p+1.5$(p为正整数).

点拨: 此题为分段函数,根据已知,分两种情况$0<p\leqslant 1$和$p>1$进行讨论.

7. 解: 根据题意,得$y=3\ 000-2.5x$,

因为$\begin{cases}x\geqslant 100,\\ 3\ 000-2.5x\geqslant 0,\end{cases}$ 所以$100\leqslant x\leqslant 1\ 200$.

8. 解: 容器的形状是(3). (1),(2)分别对应的图象(草图)如图.



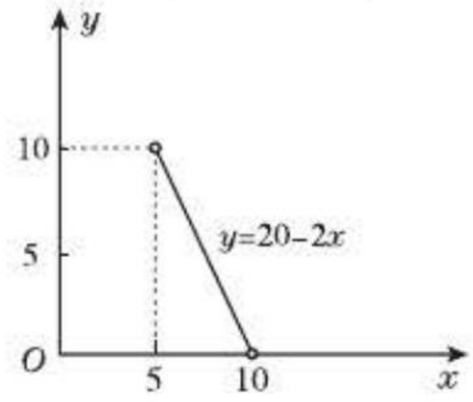
(第8题)

点拨: 注水过程中,水面高度h随时间t的变化规律:容器的底面积越大,则相同时间,水面高度h增大越慢,图象与x轴夹角越小. 反之,夹角越大.

9. 解: (1)$y=20-2x$.

(2)由$\begin{cases}x>0,\\ 20-2x>0,\\ 2x>20-2x,\end{cases}$ 解得$5<x<10$.

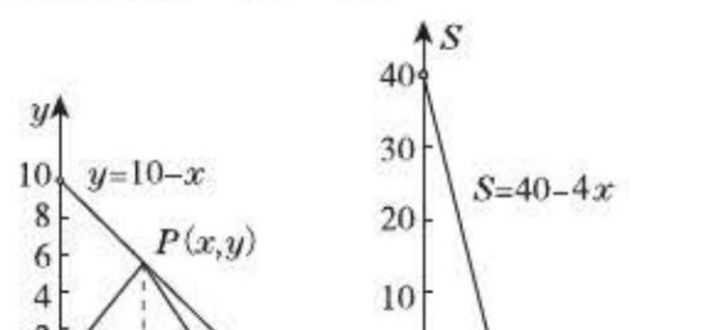
(3)函数$y=20-2x(5<x<10)$的图象如图.



(第9题)

点拨: 因为本题中的x,y都为三角形的边长,所以$x>0$,$y>0$,且满足三角形的两边之和大于第三边. 函数图象为一条线段,两端点是空心圆圈.

10. 解: (1)由$x+y=10$,得$y=-x+10$,函数$y=-x+10(0<x<10)$的图象如图①,在第一象限内,过点$P(x,y)$作$PE\perp x$轴于点E,则$PE=y$,所以$S=\frac{1}{2}OA\cdot PE$,即$S=\frac{1}{2}\times 8\times y=\frac{1}{2}\times 8\times(-x+10)$,即$S=40-4x$.



(第10题)

(2)因为点P在第一象限内,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $x>0, y>0$，得 $\begin{cases} x>0, \\ -x+10>0, \end{cases}$

解得 $0<x<10$.

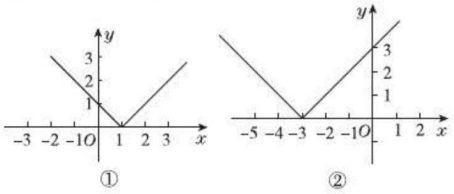
(3) 当 $S=12$ 时，即 $12=40-4x$，

解得 $x=7$，所以 $P(7,3)$.

(4) 图象如图②.

11. 解：(1) 如图①.

(2) $y=|x+3|$，图象如图②.



① ②

(第 11 题)

12. 解：设 t 时时，甲的行程为 $y_{甲}$，乙的行程为 $y_{乙}$.

(1) $y_{甲}=10t-80(8\leqslant t\leqslant 10.5)$；$y_{乙}=40t-380$ $(9.5\leqslant t\leqslant 10.125)$.

(2) 当 $y_{乙}=y_{甲}$ 时，$40t-380=10t-80$，解得 $t=10$.

所以乙能在途中超过甲，10:00 时超过.

13. 解：(1) 设 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时 y 关于 x 的函数解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases} 0=b, \\ 20=4k+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=0, \\ k=5. \end{cases}$ 即 $y=5x$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$.

(2) 设 $4<x\leqslant 12$ 时 y 关于 x 的函数解析式为 $y=mx+n$. 则 $\begin{cases} 4m+n=20, \\ 12m+n=30, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\dfrac{5}{4}, \\ n=15. \end{cases}$

即 $y=\dfrac{5}{4}x+15(4<x\leqslant 12)$.

(3) 每分进水：$\dfrac{20}{4}=5$(L)；

每分出水：$5-\dfrac{30-20}{12-4}=5-\dfrac{5}{4}=\dfrac{15}{4}$(L).

14. 解：设两人此后经过的时间为 t s，小明和小刚跑过的路程分别为 y_1 m，y_2 m.

则 $y_1=1\ 600+at$，$y_2=1\ 450+bt$.

则 $t=100$ 时，$y_1=y_2$，即 $1\ 600+100a=1\ 450+100b$. ①

设越野赛跑的全程为 s m，则：

当 $t=200$ 时，$y_2=s$. 即 $1\ 450+200b=s$②.

当 $t=300$ 时，$y_1=s$，即 $1\ 600+300a=s$③.

由①②③联立可解得 $\begin{cases} a=1.5, \\ b=3, \\ s=2\ 050. \end{cases}$

所以这次越野赛跑的全程为 2 050 m.

15. 解：设从 A 城往 C 乡运肥料 x t，则从 A 城往 D 乡运肥料 $(200-x)$ t，从 B 城往 C 乡运肥料 $(240-x)$ t，从 B 城往 D 乡运肥料 $(60+x)$ t，总运费 $y=20x+25(200-x)+15(240-x)+24(60+x)$. 整理得 $y=4x+10\ 040$. 因为 $k=4>0$，所以随着 x 的增大 y 也增大. 又由实际知 $0\leqslant x\leqslant 200$，所以当 $x=0$ 时，总运费 y 最少，所以从 A 城往 D 乡运肥料 200 t，从 B 城往 C 乡运肥料 240 t，往 D 乡运肥料 60 t 时，可使总运费最少.

第二十章 数据的分析

20.1 数据的集中趋势

20.1.1 平均数

练习

1. 解：(1) 甲的平均成绩为 $\dfrac{86+90}{2}=88$(分)，乙的平均成绩为 $\dfrac{83+92}{2}=87.5$(分)，因为甲的平均成绩高于乙的平均成绩，所以甲将被录取.

(2) 甲的平均成绩为 $\dfrac{86\times 6+90\times 4}{6+4}=87.6$(分)，乙的平均成绩为 $\dfrac{92\times 6+83\times 4}{6+4}=88.4$(分)，因为甲的平均成绩低于乙的平均成绩，所以乙将被录取.

2. 解：根据题意，得 $95\times 20\%+90\times 30\%+85\times 50\%=88.5$(分). 所以小桐这学期的体育成绩是 88.5 分.

练习

1. 解：平均年龄

$$\bar{x}=\frac{13\times 1+14\times 4+15\times 5+16\times 2}{1+4+5+2}\approx 15(岁),$$

所以校女子排球队队员的平均年龄约为 15 岁.

2. 解：树干的平均周长

$$\bar{x}=\frac{45\times 8+55\times 12+65\times 14+75\times 10+85\times 6}{8+12+14+10+6}$$

≈ 64(cm)，

所以这批法国梧桐树树干的平均周长约为 64 cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

解: $\bar{x} = \dfrac{10\times10+13\times15+14\times20+15\times18}{10+15+20+18} \approx$ 13(根),所以估计这个新品种黄瓜平均每株结13根黄瓜.

20.1.2 中位数和众数

练习

解:因为这组数据的中位数为处于中间的两个数据6,6的平均数,所以这些工人日加工零件数的中位数是6. 意义略.

练习

1. **解:**应多进M号的运动服,因为M号运动服销售量最大. **点拨:**答案不唯一.

2. **解:**平均数$\bar{x}=$ $\dfrac{13\times2+14\times6+15\times8+16\times3+17\times2+18\times1}{2+6+8+3+2+1}=$ 15(岁). 因为15出现的次数最多,所以众数为15岁. 这组数据的中位数为处于中间的两个数据15,15的平均数,即中位数为15岁. 意义略.

练习

解:设w_1,w_2分别是第1组、第2组数据的中位数,z_1,z_2分别是第1组、第2组数据的众数.

(1)平均数$\bar{x}_1 = \dfrac{1}{7}\times(35+36+38+40+42+42+75)=44$,$w_1=40$,$z_1=42$;平均数$\bar{x}_2 = \dfrac{1}{7}\times(35+36+38+40+42+42+45)\approx40$,$w_2=40$,$z_2=42$. 实际意义略.

(2)$\bar{x}_1>\bar{x}_2$,$w_1=w_2$,$z_1=z_2$. 对它们的认识略.

习题20.1

1. **解:**$\bar{x}=\dfrac{10\times1+8\times3+5\times7+3\times4}{1+3+7+4}=5.4$(万元).

所以这个公司平均每人所创年利润是5.4万元.

2. **解:**平均数$\bar{x}=$ $\dfrac{1.50\times2+1.60\times3+1.65\times2+1.70\times3+1.75\times4+1.80\times1}{2+3+2+3+4+1}\approx$ 1.67(m),中位数是1.70 m,众数是1.75 m.

3. **解:**$\bar{x}=\dfrac{1}{10}\times(22.36+22.35+\cdots+22.35)\approx22.35$(mm),所以估计这批零件的平均长度为22.35 mm.

4. **解:**$\bar{x}=\dfrac{1}{8}\times(9.5\times3+9.3+9.4+9.6\times2+9.2)=9.45$(分),所以这位歌手的最后得分为9.45分.

5. **解:**(1)甲的平均成绩为$\dfrac{70\times2+50\times3+80\times5}{2+3+5}=$ 69(分),乙的平均成绩为$\dfrac{90\times2+75\times3+45\times5}{2+3+5}=$ 63(分),丙的平均成绩为$\dfrac{50\times2+60\times3+85\times5}{2+3+5}=$ 70.5(分),所以从成绩看,应该录取丙;

(2)甲的平均成绩为$70\times50\%+50\times30\%+80\times20\%=66$(分),乙的平均成绩为$90\times50\%+75\times30\%+45\times20\%=76.5$(分),丙的平均成绩为$50\times50\%+60\times30\%+85\times20\%=60$(分),所以从成绩看,应该录取乙.

6. **解:**(1)这个月中午12时的平均气温为$\dfrac{1}{30}\times(22+31+25+\cdots+26+29)=\dfrac{1}{30}\times643\approx$ 21(℃).

(2)以4为组距对数据分组,作出频数分布表如下:

中午12时气温/℃	组中值	频数(天数)
$12\leqslant x<16$	14	7
$16\leqslant x<20$	18	4
$20\leqslant x<24$	22	8
$24\leqslant x<28$	26	4
$28\leqslant x<32$	30	7

根据频数分布表计算这个月中午12时的平均气温为$\dfrac{14\times7+18\times4+22\times8+26\times4+30\times7}{7+4+8+4+7}=$ $\dfrac{660}{30}=22$(℃),与(1)中的结果比较,可以发现利用频数分布表计算这个月中午12时的平均气温,计算较简便,但不如直接根据数据计算所得结果准确.

点拨:(2)中看法不唯一,合理即可.

7. **解:**(1)出售时这些鸡的平均质量为$\dfrac{1.0\times112+1.2\times226+1.5\times323+1.8\times241+2.0\times98}{112+226+323+241+98}=$ $\dfrac{1497.5}{1\,000}\approx1.5$(kg).

(2)质量为1.5 kg的鸡最多.

(3)中间的质量是1.5 kg.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解：$\bar{x}=\dfrac{50\times2+51\times5+52\times8+53\times6+54\times4+55\times2}{2+5+8+6+4+2}$

$\approx52.41(\text{km/h})$，所以这些车的平均速度约为52.41 km/h.

以52 km/h的速度行驶的车最多.

中间的车速是52 km/h.

9. 解：该班学生右眼视力的平均数$\bar{x}=(4.0\times1+4.1\times2+\cdots+5.0\times6)\div(1+2+\cdots+6)\approx4.6$，该班学生右眼视力的众数是4.9，中位数是$\dfrac{4.6+4.7}{2}=4.65$. 所得结论略.

10. 略.

20.2 数据的波动程度

练习

1. 解：作图略. (1)平均数是6，方差是0.

(2)平均数$\bar{x}=\dfrac{1}{7}\times(5\times2+6\times3+7\times2)=6$.

方差$s^2=\dfrac{1}{7}\times[2\times(5-6)^2+3\times(6-6)^2+2\times(7-6)^2]=\dfrac{4}{7}$.

(3)平均数$\bar{x}=\dfrac{1}{7}\times(3\times2+4+6+8+9\times2)=6$.

方差$s^2=\dfrac{1}{7}\times[2\times(3-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+2\times(9-6)^2]=\dfrac{44}{7}$.

(4)平均数$\bar{x}=\dfrac{1}{7}\times(3\times3+6+9\times3)=6$.

方差$s^2=\dfrac{1}{7}\times[3\times(3-6)^2+(6-6)^2+3\times(9-6)^2]=\dfrac{54}{7}$.

2. 解：甲的平均成绩$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{10}\times(7+7+8+9+8+9+10+9+9+9)=8.5$，

乙的平均成绩$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{10}\times(8+9+7+8+10+7+9+10+7+10)=8.5$.

甲的成绩的方差$s_{甲}^2=\dfrac{(7-8.5)^2+(7-8.5)^2+\cdots+(9-8.5)^2}{10}=0.85$，

乙的成绩的方差$s_{乙}^2=\dfrac{(8-8.5)^2+(9-8.5)^2+\cdots+(10-8.5)^2}{10}=1.45$，

因为$1.45>0.85$，所以$s_{乙}^2>s_{甲}^2$.

练习

解：$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{10}\times(5.85+5.93+\cdots+6.19)=6.01(\text{m})$，

$s_{甲}^2=\dfrac{1}{10}\times[(5.85-6.01)^2+(5.93-6.01)^2+\cdots+(6.19-6.01)^2]=0.009\ 54(\text{m}^2)$，

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{10}\times(6.11+6.08+\cdots+6.21)=6(\text{m})$，

$s_{乙}^2=\dfrac{1}{10}\times[(6.11-6)^2+(6.08-6)^2+\cdots+(6.21-6)^2]=0.024\ 34(\text{m}^2)$.

因为$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以甲的成绩更稳定，应该选择运动员甲参赛.

习题20.2

1. 解：(1)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{10}\times(0+1+\cdots+4)=1.5$，

$s_{甲}^2=\dfrac{1}{10}\times[(0-1.5)^2+(1-1.5)^2+\cdots+(4-1.5)^2]=1.65$；

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{10}\times(2+3+\cdots+1)=1.2$，

$s_{乙}^2=\dfrac{1}{10}\times[(2-1.2)^2+(3-1.2)^2+\cdots+(1-1.2)^2]=0.76$.

(2)因为$\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，所以乙机床出次品的平均数较小；因为$s_{甲}^2>s_{乙}^2$，所以乙机床出次品的波动较小.

2. 解：(1)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{10}\times(501+506+\cdots+499)=504.8$，

$s_{甲}^2=\dfrac{1}{10}\times[(501-504.8)^2+(506-504.8)^2+\cdots+(499-504.8)^2]=15.76$；

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{10}\times(505+507+\cdots+506)=504.8$，

$s_{乙}^2=\dfrac{1}{10}\times[(505-504.8)^2+(507-504.8)^2+\cdots+(506-504.8)^2]=5.56$.

(2)因为$s_{甲}^2>s_{乙}^2$，所以乙包装机包装的10袋糖果的质量比较稳定.

3. 解：(1)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{10}\times(12+13+\cdots+11)=13(\text{cm})$，

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{10}\times(11+16+\cdots+16)=13(\text{cm})$，所以甲

种小麦的平均苗高是13 cm,乙种小麦的平均苗高是13 cm.

(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(12-13)^2+(13-13)^2+\cdots+(11-13)^2]=3.6(cm^2)$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(11-13)^2+(16-13)^2+\cdots+(16-13)^2]=15.8(cm^2)$.

因为$s_{甲}^2<s_{乙}^2$,所以甲种小麦的长势比较整齐.

4. **解:**(1)$\bar{x}_1=\frac{1}{6}\times(9.4+8.9+8.8+8.9+8.6+8.7)\approx8.88$,$s_1^2\approx\frac{1}{6}\times[(9.4-8.88)^2+(8.9-8.88)^2+\cdots+(8.7-8.88)^2]\approx0.06$;

(2)$\bar{x}_2=\frac{1}{4}\times(8.9+8.8+8.9+8.7)\approx8.83$,

$s_2^2\approx\frac{1}{4}\times[(8.9-8.83)^2+(8.8-8.83)^2+\cdots+(8.7-8.83)^2]\approx0.01$;

(3)去掉一个最高分和一个最低分的方法更合理.

5. 略.

20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析(无)

复习题20

1. **解:**$\bar{x}=\frac{1}{20}\times(1.15+1.04+\cdots+1.16)\approx1.17(kg)$,所以估计水库中这种鱼的平均质量为1.17 kg.

2. **解:**$\bar{x}=\frac{8+12+16+10}{4}\approx12$(道),所以这四个小组平均正确回答约12道题目.

3. **解:**$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(183+209+\cdots+197)=194.7\approx195$(辆),所以在该时段中,平均约有195辆汽车通过这个路口.

点拨:注意实际情况下小数的取舍.

4. **解:**(1)这组数据的平均数$\bar{x}=\frac{1}{14}\times(8\ 000+6\ 000+\cdots+2\ 500)=6\ 003.5$,这组数据按从小到大的顺序排列,最中间的两个数据是4 200,4 400,$\frac{1}{2}\times(4\ 200+4\ 400)=4\ 300$,所以这组数据的平均数是6 003.5,中位数是4 300,众数是2 550.

(2)略. **点拨:**了解平均数、中位数、众数三者的区别和求法是解此类题目的关键.

5. **解:**(1)$\bar{x}_A=\frac{1}{4}\times[(-4)+19+9+(-10)]=3.5(℃)\approx4(℃)$,

$\bar{x}_B=\frac{1}{4}\times(16+30+24+11)=20.25(℃)\approx20(℃)$,

所以A城市的年平均气温是4℃,B城市的年平均气温是20℃.

(2)B城市四季的平均气温较为接近.

6. **解:**$\bar{x}_A=\frac{1}{5}\times(11.62+11.51+\cdots+11.17)\approx11.53$(元),

$s_A^2\approx\frac{1}{5}\times[(11.62-11.53)^2+(11.51-11.53)^2+\cdots+(11.17-11.53)^2]\approx0.07$;

$\bar{x}_B=\frac{1}{5}\times(13.53+14.07+\cdots+14.80)\approx13.95$(元),

$s_B^2\approx\frac{1}{5}\times[(13.53-13.95)^2+(14.07-13.95)^2+\cdots+(14.80-13.95)^2]\approx0.23$.

因为$s_A^2<s_B^2$,所以A股票在这段时间内的涨、跌变化情况比B股票小.

7. **解:**(1)$\bar{x}_{甲}=\frac{40\times0+30\times1+20\times3+10\times7+0\times39}{50}=3.2$(m),

$\bar{x}_{乙}=\frac{40\times1+30\times3+20\times2+10\times3+0\times41}{50}=4$(m).

(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{50}\times[(40-3.2)^2\times0+(30-3.2)^2\times1+(20-3.2)^2\times3+(10-3.2)^2\times7+(0-3.2)^2\times39]=45.76$.

$s_{乙}^2=\frac{1}{50}\times[(40-4)^2\times1+(30-4)^2\times3+(20-4)^2\times2+(10-4)^2\times3+(0-4)^2\times41]=92$.

因为$\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙}$且$s_{甲}^2<s_{乙}^2$,

所以甲炮射击的准确性好.

8. 略. **9.** 略.