特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 下 (JJ版)

荣德基 主编

本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提分攻略

	知识点 54 个 必得分	页码	考向点 70 个 速提分	页码
第十八章 数据的收集与整理	1 数据的收集	2	1 利用调查的目的确定调查对象	2
	2 普查与抽样调查	7	2 利用调查对象的特征选择收集数据的方法	3
	3 总体和样本	8	3 利用调查的目的设计调查问卷	3
	4 数据的整理	13	4 调查方式的选择	8
	5 条形统计图和扇形统计图	14	5 利用总体和样本及相关概念进行识别	9
	6 折线统计图	15	6 利用抽样调查的特征进行样本的选择	9
	7 频数分布表	23	7 利用统计表整理数据	13
	8 频数分布直方图	24	8 利用条形统计图读信息	14
			9 制作扇形统计图	14
			10 利用折线统计图的特征读信息	16
			11 统计图的选择	16
			12 制作频数分布表	24
			13 从频数分布直方图中获取信息	25
第十九章 平面直角坐标系	1 用有序数对表示位置	38	1 按已定“有序数对”表示其他“有序数对”	38
	2 用方位角和距离表示平面内点的位置	40	2 利用有序数对表示路径	39
	3 平面直角坐标系	44	3 利用方位角和距离表示平面内点的位置	40
	4 点的坐标	45	4 利用平面直角坐标系的定义进行识别	44
	5 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征	47	5 利用点的位置确定点的坐标	45
	6 特殊位置关系的点的坐标特征	48	6 由点到坐标轴的距离确定点的坐标	46
	7 建立平面直角坐标系	52	7 利用特殊位置的点的坐标特征解决问题	48
	8 用坐标表示地理位置	53	8 建立适当的平面直角坐标系确定几何图形顶点的坐标	52
	9 用坐标表示点的平移	56	9 利用坐标表示地理位置	53
	10 图形的平移与点的坐标	57	10 由点的平移情况求点的坐标	56
	11 图形的轴对称与点的坐标	59	11 由点的坐标变化确定图形的平移情况	57
	12 图形的放缩与点的坐标	60	12 利用关于横轴成轴对称的点的坐标特征进行图形变换	59
			13 利用关于纵轴成轴对称的点的坐标特征进行图形变换	60
			14 利用坐标的变化表示图形的放缩	60
第二十章 函数	1 常量和变量	70	1 利用常量与变量的定义进行识别	70
	2 函数	74	2 判断两个变量之间是否具有函数关系	74
	3 函数的关系式	76	3 求函数值	75
	4 函数的图像	81	4 利用自变量的呈现形式求自变量的取值范围	76
	5 函数的表示方法	83	5 利用点与函数图像的位置关系解决问题	81
	6 函数的应用	90	6 利用描点法画函数的图像	82
			7 利用表格揭示两个变量之间的关系	84
			8 利用图像揭示两个变量之间的变化规律	84
			9 利用实际问题中的等量关系建立函数关系	90
			10 解决与函数图像有关的问题	91

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分↑方法↑学霸

方法点48个得高分

	页码
第十八章 数据的收集与整理	
1 收集数据常用的方法	2
2 实地调查法	3
3 数形结合思想	18
4 确定组数的方法	23
5 统计图中相关量的计算方法	31
第十九章 平面直角坐标系	
1 方位角距离定位法	40
2 定义法	44
3 确定点的坐标的方法	45
4 根据点的坐标在平面直角坐标系中描点的方法	46
5 数形结合思想	46
6 由点的坐标（a，b）确定点的位置的方法	47
7 割补法	49
8 根据已知条件建立平面直角坐标系的常用方法	52
9 在几何图形中建立适当直角坐标系的一般方法	52
10 利用平面直角坐标系表示地理位置的方法	53
11 由点的坐标变化确定点的平移情况的方法	56
12 分类讨论思想	66
13 转化思想	66
第二十章 函数	
1 判断一个量是常量还是变量的方法	70
2 定义法	74
3 解决与几何图形以及图形运动有关的函数问题的方法	79
4 函数思想	79
5 观察法	79
6 折图法	79
7 描点法	81
8 判断点 $P(x, y)$ 是否在函数图像上的方法	81
9 函数的三种表示方法	83
10 数形结合思想	85
11 由特殊到一般的思想	90
12 分类讨论思想	92

拔尖角度57个争满分

	页码
第十八章 数据的收集与整理	
1 根据实际问题收集整理数据	4
2 抽样调查的合理性	10
3 利用两种调查方式的特征设计方案	10
4 补全统计图并从统计图中获取正确的信息	17
5 利用复合型统计图描述数据	18
6 灵活选择适当的统计图	27
7 从综合统计图中获取信息	28
第十九章 平面直角坐标系	
1 利用不同定位方式确定同一位置	41
2 实际综合问题	41
3 利用点的坐标特征求三角形的面积	49
4 用割补法求平面直角坐标系中图形的面积	49
5 用平面直角坐标系探究动点问题	50
6 利用平移的特征解决问题	61
7 利用平移解决实际问题	61
8 对平面图形的变换与坐标关系的探究	62
第二十章 函数	
1 探索实际问题中两个变量之间的关系	71
2 与常量和变量有关的新问题	71
3 利用函数关系式解决分段计费问题	78
4 巧用自变量的取值范围解决图形的运动问题	78
5 利用函数关系式解决规律探究问题	79
6 利用函数图像特征进行识别	86
7 利用函数的三种表示方法解决问题	86
8 利用函数的图像解决几何动态问题	87
9 利用函数图像解决实际问题	92
10 分类讨论思想在实际问题中的应用	92

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 54 个 必得分

第二十一章 一次函数

	页码
1 正比例函数的定义	101
2 正比例函数表达式的确定	102
3 一次函数的定义	102
4 一次函数的图像及画法	107
5 一次函数的图像和性质	109
6 用待定系数法确定一次函数的表达式	114
7 利用一个一次函数解决问题	121
8 利用两个一次函数解决实际问题	125
9 一次函数与二元一次方程	131
10 一次函数与二元一次方程组	132

第二十二章 四边形

	页码
1 平行四边形的定义及相关概念	143
2 平行四边形的边、角性质	144
3 平行四边形的对角线的性质	146
4 平行四边形的周长与面积	147
5 平行四边形的判定定理 1	152
6 两条平行线之间的距离	153
7 平行四边形的判定定理 2	154
8 平行四边形的判定定理 3	155
9 三角形的中位线	161
10 矩形的定义及性质	167
11 矩形的判定	169
12 菱形的定义与性质	175
13 菱形的判定	178
14 正方形的定义及性质	184
15 正方形的判定	186
16 多边形及其相关概念	194
17 多边形的内角和	195
18 多边形的外角和	197

考向点 70 个 速提分

	页码
1 识别实际问题中的正比例函数关系	101
2 利用一对对应值求函数表达式	102
3 利用一次函数解决实际问题	104
4 利用画函数图像的步骤画正比例函数的图像	107
5 利用一次函数图像的特征确定经过的象限	109
6 利用一次函数的性质比较函数值的大小	111
7 利用图像上两个点的坐标求一次函数的表达式	114
8 利用一次函数模型解决销售问题	122
9 利用一次函数的性质解决最值问题	124
10 利用两个一次函数解决行程问题	125
11 利用一次函数的图像表示二元一次方程的解	131
12 利用图像法解二元一次方程组	132
13 利用二元一次方程组的解与一次函数图像的交点坐标的关系解决问题	133
1 利用平行四边形的定义识别平行四边形	143
2 利用平行四边形的性质计算	145
3 利用平行四边形对角线的性质证明	146
4 利用判定定理 1 判定四边形是平行四边形	152
5 利用定义对有关距离进行识别	153
6 利用判定定理 2 判定四边形是平行四边形	154
7 利用判定定理 3 判定四边形是平行四边形	155
8 平行四边形判定方法的选择	156
9 利用三角形中位线的定义识别中位线	161
10 利用矩形的性质求线段长	167
11 利用定义判定矩形	170
12 利用对角线的特征判定矩形	170
13 利用菱形的性质求角的度数	175
14 利用菱形的对称性求最短距离	177
15 利用定义判定菱形	179
16 利用正方形的性质进行证明	185
17 中点四边形形状的确定	188
18 利用多边形的相关定义进行辨析	194
19 利用多边形内角和公式求内角和或边数	196
20 利用多边形的外角求多边形的边数	197

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 方法 学霸

方法点 48 个 得高分

	页码
1 判断一个函数是否为正比例函数的方法	101
2 判断函数是否为一次函数的方法	102
3 整体思想	104
4 一次函数图像的画法	107
5 数形结合思想	110
6 判断 k 值符号的方法	110
7 判断 b 值符号的方法	110
8 分类讨论思想	112
9 待定系数法	114
10 方程思想	123
11 图像法	132
1 求平行四边形中有关角度的基本方法	145
2 求线段或角的常用方法	148
3 证明两条线段（或两角）相等的常用方法	157
4 倍长中线法	157
5 定义法	161
6 证明线段倍分关系的方法	162
7 类比思想	163
8 转化思想	163
9 证明一个平行四边形为矩形的两种方法	170
10 菱形面积的三种计算方法	177
11 判定菱形的方法	178
12 割补法	185
13 演绎推理	187
14 构造法	190
15 截长补短法	191
16 已知多边形的内角和求边数 n 的方法	196
17 方程思想	197
18 分类讨论思想	198
19 数形结合思想	204

拔尖角度 57 个 争满分

	页码
1 利用整体思想求函数表达式	104
2 利用一次函数解决与几何相关的问题	104
3 利用一次函数图像与字母取值的关系解决问题	111
4 利用一次函数的图像及性质解决问题	111
5 利用几何图形的有关知识求一次函数的表达式	112
6 结合一次函数的性质求一次函数的表达式	117
7 利用图像的特征确定一次函数的表达式	117
8 求一次函数图像与坐标轴围成的图形的面积	117
9 一次函数与几何的综合问题的探究	118
10 分类讨论思想在实际问题中的应用	127
11 运用一次函数的性质选择合适的方案	127
12 利用函数图像解决方程组的问题	133
13 利用交点坐标求直线围成的几何图形的面积	134
1 综合利用平行四边形的性质进行线段或角的计算	148
2 综合利用平行四边形的性质进行证明	149
3 综合利用平行四边形的性质进行方案设计	149
4 平行四边形的判定与性质定理的综合应用	157
5 利用平行四边形的判定方法构造平行四边形解决问题	157
6 运用动中求静进行动态探究	157
7 构造三角形中位线的模型证明线段的倍分关系	163
8 与三角形中位线有关的新型题	163
9 利用矩形的性质解决矩形中的折叠问题	171
10 矩形的性质与判定的综合	171
11 利用矩形的判定方法解决与矩形有关的动态探索题	172
12 菱形的性质与判定的综合	180
13 菱形与全等变换的综合	181
14 利用矩形与菱形的性质探究规律	181
15 正方形的性质与判定的综合	190
16 巧借正方形的性质证明线段的和差关系	190
17 与正方形有关的规律探究	191
18 利用多边形的内角和及某个内角的取值范围求多边形对角线条数	197
19 利用多边形内角和探究多边形的截角问题	198

第二十一章 一次函数

第二十二章 四边形

注：“提分攻略 学霸图谱”中，所列“考向点”“拔尖角度”均为重要条目，全书不仅限于此。

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法

抽样调查……7

画频数分布直方图的方法… 24

看微课

统计图的选用…… 15

学方法

用坐标表示地理位置…… 53

看微课

确定点的坐标…… 45

点的坐标特征…… 48

图形的平移…… 58

学方法

函数的三种表示方法…… 83

看微课

函数的图像…… 81

描点法画函数的图像…… 82

第十八章 数据的收集与整理

18.1 统计的初步认识 …… 2

18.2 抽样调查 …… 7

18.3 数据的整理与表示 …… 13

18.4 频数分布表与直方图 …… 23

中考提分专题篇 ☞ P31

数学素养提升：用频率谈论谁是《红楼梦》的作者 ☞ P27

第十九章 平面直角坐标系

19.1 确定平面上物体的位置 …… 38

19.2 平面直角坐标系 …… 44

19.3 坐标与图形的位置 …… 52

19.4 坐标与图形的变化 …… 56

中考提分专题篇 ☞ P64

数学素养提升：笛卡儿的《几何学》 ☞ P54

第二十章 函 数

20.1 常量和变量 …… 70

20.2 函 数 …… 74

20.3 函数的表示 …… 81

20.4 函数的初步应用 …… 90

中考提分专题篇 ☞ P95

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十一章 一次函数

21.1 一次函数 …… 101

21.2 一次函数的图像和性质 …… 107

21.3 用待定系数法确定一次函数表达式 …… 114

21.4 一次函数的应用 …… 121

21.5 一次函数与二元一次方程的关系 …… 131

中考提分专题篇 ☞ P136

数学素养提升：“待定系数法”的解读与延伸 ☞ P116

学方法

待定系数法…… 114

观动画

一次函数的图像…… 109

看微课

一次函数…… 102

一次函数图像的画法…… 108

第二十二章 四边形

22.1 平行四边形的性质 …… 143

22.2 平行四边形的判定 …… 152

22.3 三角形的中位线 …… 161

22.4 矩 形 …… 167

22.5 菱 形 …… 175

22.6 正方形 …… 184

22.7 多边形的内角和与外角和 …… 194

中考提分专题篇 ☞ P200

数学素养提升：解密中考——“习题改造” ☞ P189

参考答案及点拨（单独成册）

学方法

平行四边形的判定方法…… 155

观动画

中点四边形…… 188

看微课

平行四边形的定义…… 143

平行四边形的性质…… 144

三角形中位线定理的应用… 161



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **数形结合思想**：在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

2. **分类讨论思想**：把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

3. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

4. **由特殊到一般的思想**：即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特性，得出一般的结论．

5. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．整体思想能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

6. **方程思想**：分析数学问题中各量之间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法．

7. **类比思想**：类比思想是根据两个对象之间在某些方面相同或相似，从而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种推理方法．因此，类比是从特殊到特殊的推理．通过类比，可以发现新旧知识的相同点，利用已有的旧知识，来认识新知识．

8. **定义法**：所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等都是由定义和公理推演出来的．因此，定义法是最直接的解题方法．

9. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形、复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下，利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

10. **观察法**：观察法是指研究者根据一定的研究目的、研究提纲或观察表，用自己的感官和辅助工具去直接观察被研究对象，从而获得资料的一种方法．

11. **待定系数法**：待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数关系式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数表达式的方法．

12. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷的解决方法．其主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

13. **截长补短法**：截长补短法是初中几何中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想．所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一条与已知的另一条线段相等．所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长至与另一条已知的较短的线段相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十八章 数据的收集与整理

带你走入数据的世界

数学点拨



你将学到的核心考点

普查与抽样调查 □
数据的收集与描述 □
统计图的制作与运用 □
频数分布表与直方图 □

我们为你提供的核心方法

样本估计总体 □　　数形结合思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.1 统计的初步认识

核心知识
- 统计的初步认识
- 数据的收集

知识链接：统计的初步认识 → 数据的收集

点知识·拨考向 速提分

点知识 数据的收集（重点）

1 数据及数据的收集

通过调查得到的结果叫做数据；得到结果的过程叫做数据的收集.

2 收集数据常用的方法

(1) 民意调查：问卷调查、访问、投票……

(2) 实地调查：现场观察、收集、统计数据.

(3) 媒体调查：报纸、杂志、电视、互联网……

3 收集数据的步骤

(1) 明确调查问题；

(2) 确定调查对象；

(3) 选择调查方法；

(4) 展开调查；

(5) 记录结果；

(6) 分析结果，得出结论.

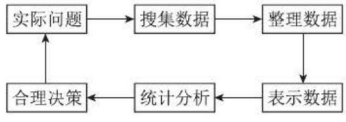
要点精析

(1) 在收集数据的过程中，要根据实际情况选取合适的方法.

(2) 选取收集数据的方法时，要掌握两个要点：一要简便易行；二要真实、全面.

(3) 收集数据时，统计表的设计要合理；设计调查问卷时，选项中的内容不能有重叠现象、问题不容易回答或问题带有调查者的某种倾向等情况.

4 统计的一般过程可用下面的框图表示.



拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用调查的目的确定调查对象

例1 针对动物园中的四种可爱动物——熊猫、孔雀、猴子、梅花鹿，想了解本班同学中喜欢哪种动物的人数最多，则调查的对象是(　　)

A. 本班全体同学　　B. 熊猫、孔雀、猴子、梅花鹿

C. 记录下来的数据　　D. 同学们的选票

导引： 在这个调查中，需要了解的是本班同学中喜欢哪种动物的人数最多，因此调查对象是本班全体同学.

答案： A

方法点拨

确定调查对象的标准：确定调查对象时，不用考虑调查对象的喜好.

同类变式 （答案见209页）

1. 要调查某所初中学生的平均体重，选取调查对象最合适的是(　　)

A. 选该校100名男生　　B. 选该校七年级的两个班的学生

C. 选该校100名女生　　D. 在各年级随机选取100名学生

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用调查对象的特征选择收集数据的方法

例2 调查下列问题时，选择哪些收集数据的方法比较恰当？

(1)长江某段水域的水污染情况；

(2)2017年央视春节联欢晚会的收视率；

(3)你们班谁最适合当数学课代表.

导引： 选择收集数据的方法要掌握两点：一要简便易行；二要真实、全面.

解： (1)因为调查的是长江某段水域的水污染情况，所以可采用实地调查法；

(2)由于电视的覆盖面较广，我们凭自己个人的力量是无法弄清收视率的，因此可采用媒体调查法；

(3)因为一个班的同学不多，且是本班同学，故可采用民意调查法.

方法点拨

选择收集数据的方法的关键取决于调查对象的特征.如第(1)题，对象“长江的水”不易全部带走，所以采用实地调查法.

考查角度3 利用调查的目的设计调查问卷

例3 请你设计一份调查问卷，并制作一份统计表，了解本班同学节约用水情况.

导引： 要想了解本班同学的节约用水情况，先要知道同学们主要的用水方式，再看他们的用水习惯；可以从洗手的用水情况和废水再利用两个方面去调查；从而设计出调查问卷及统计表，将杂乱无章的数据按一定的规律表示出来.

解： (1)调查问卷.

问题1：你在洗手时会一直开着水龙头吗？

A.经常这样　B.有时这样　C.从不这样

问题2：你会将用过的水再利用吗？例如，再用来浇花、冲厕所等.

A.经常这样　B.有时这样　C.从不这样

(2)统计表.

	A			B			C		
	画“正”字计数	人数	百分比	画“正”字计数	人数	百分比	画“正”字计数	人数	百分比
1									
2									

(本题答案不唯一)

技巧点拨

- 调查问卷要根据调查的需要和要求进行设计，如果考虑不周，有的数据了解不到，调查的结果就不具有代表性.因此，设计调查问卷时要考虑周密.一份调查问卷的设计包括问题的设计和答案的设计.(1)问题的设计要求：①表述要清楚；②表述要简单明了；③一个问题只能包含一个内容；④易于回答.(2)答案的设计：①答案要不同；②答案要涉及各种情况.
- 在收集整理数据的统计表中，画“正”字的主要作用是记录数据，然后根据所画“正”字的笔画数出数据，计算“百分比”的方法是该类数据除以调查总数据再乘100%.

同类变式 (答案见209页)

2. 请设计一份调查问卷，调查本班同学参加课外活动的情况.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4 数据的收集过程

例4 为了更好地组织课外体育活动，需要事先调查一下班里的同学喜欢哪些体育项目，以便活动前领好器材. 如果你是体育委员，请你说明调查应包括哪些步骤.

导引： 调查前应先向体育老师了解一下学校可提供给学生的场地和体育器材，然后向同学们说明. 为便于管理，一位同学只能报一个体育项目. 有些同学也许什么也不报，可以向他们说明体育锻炼的好处，并根据最后的统计结果，将全班同学适当地分在不同的组里.

解： 第一步：明确调查问题——喜欢哪种体育项目.

第二步：确定调查对象——全班每位同学.

第三步：选择调查方法——问卷调查.

第四步：展开调查——向全班同学说明学校允许开展的体育项目，然后让同学们在调查问卷上选择.

第五步：记录结果.

(1)设计表格.

项目	排球	篮球	乒乓球	羽毛球	跳绳	其他
画“正”字计数						
人数						

(2)用画“正”字的方法记录数据，最后统计出结果；

第六步：分析结果，得出结论——将全班同学合理分组，让每位同学都能进行充分活动.

方法点拨

步骤并不唯一，同学们可根据实际需要进行适当改动.

▲**同类变式** (答案见209页)

3. 假如你们班要选班长，通过什么方式选出大家满意的班长呢？你准备怎么做？

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 根据实际问题收集整理数据

例5 七年级开设的主要科目有语文、数学、外语，你知道全班同学最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科吗？你知道男生和女生各自最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科吗？

(1)如果想知道这些问题的答案，请你简要说明需要哪些步骤？

(2)就上述问题展开调查，请你设计一个调查问卷.

(3)如果用A表示语文，B表示数学，C表示外语，那么收集的数据如下.

男生：A B C B A C A B B A B C B B C A B C B B C B A C B B

女生：A C B A C B A C A B A B A B C A C A C B C B A C

请你根据上述数据回答：

①全班同学最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科？

②男生最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科？

③女生最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科？

导引： 根据数据收集与整理的一般步骤进行调查，即可得出正确的结论.

解： (1)需要的步骤：

①设计调查问卷；②进行问卷调查；

③回收数据；④整理数据；

⑤得出结论.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)答案不唯一,例如:

调查问卷　年　月　日

你最喜爱的主要科目是(　　)(单选)

A. 语文　　B. 数学　　C. 外语

答卷人性别:男(　　)　女(　　)(在你的性别后面的括号里打"√")

(3)①制作统计表如下:

全班同学最喜爱的主要科目的人数统计表

科目类型	画"正"字计数	人数	百分比
A	正正正	15	30%
B	正正正正	20	40%
C	正正正	15	30%
合计		50	100%

根据该表可知,全班同学最喜爱的主要科目是数学.

②制作统计表如下:

全班同学中男生最喜爱的主要科目的人数统计表

科目类型	画"正"字计数	人数	百分比
A	正一	6	23.1%
B	正正下	13	50.0%
C	正丁	7	26.9%
合计		26	100%

根据该表可知,全班同学中男生最喜爱的主要科目是数学.

③制作统计表如下:

全班同学中女生最喜爱的主要科目的人数统计表

科目类型	画"正"字计数	人数	百分比
A	正丌	9	37.5%
B	正丁	7	29.2%
C	正下	8	33.3%
合计		24	100%

根据该表可知,全班同学中女生最喜爱的主要科目是语文.

练中考·练模拟 得满分 (答案见209页)

基础巩固练

1. 为了了解某学校八年级同学平均每天参加体育锻炼的时间,比较恰当地收集数据的方法是(　　)

A. 查阅资料

B. 问卷调查

C. 实地观察

D. 试验

2. 要了解历届奥运会我国体育健儿获得的奖牌数,采用的收集数据的方式为(　　)

A. 问卷调查

B. 实地调查

C. 查阅资料

D. 试验

3. 将电视节目分为新闻纪实、文艺和体育、电视剧和电影、科技和教育四大类,在全班同学中进行"你最喜欢的电视节目"问卷调查,列表如下:

最喜欢的电视节目	新闻纪实	文艺和体育	电视剧和电影	科技和教育
画"正"字计数	下	正正	正正正	正一
人数				

请你把表格补充完整.

4. 要想知道全校学生中喜欢音乐的学生是多还是少,应采取怎样的步骤进行调查?

【导学号:1553889】

公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. 下表是某中学七年级全体学生最喜爱的球类运动的人数统计表：

最喜爱的球类运动	画“正”字计数	人数	百分比
排球			18%
足球		25	
乒乓球			32%
篮球			
其他	正一		6%
合计			100%

(1)补全上面的统计表；

(2)如果你是体育老师，要组织七年级学生观看一场比赛，你应该组织学生观看哪一种比赛？

能力提升练

6. 在四块试验田里进行水稻新品种的种植试验，各块试验田的面积和所种水稻的产量的统计数据如下表所示：

品种	A	B	C	D
产量/千克	20 250	12 875	7 125	10 375
面积/公顷	4	3	1	2

(1)统计员通过什么方法获得表中的数据？

(2)你从这些数据中获得了水稻新品种的哪些信息？

7. 在数学、英语、语文、其他学科中，某校八年级开展了学生最喜欢学习哪个学科的调查(八年级共有200人).

(1)调查的问题是什么？

(2)调查的范围是什么？

(3)在被调查的200名学生中，有40人最喜欢学语文，60人最喜欢学数学，80人最喜欢学英语，其余的人选择其他，求最喜欢学数学的学生占学生总数的百分比；

(4)根据调查的情况，把下表补充完整.

最喜欢学习的学科	语文	英语	数学	其他
人数				
占学生总数的百分比				

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.2 抽样调查

核心知识
- 普查与抽样调查
- 总体与样本

知识链接
数据的收集 —方式→ 普查 / 抽样调查

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 普查与抽样调查(重点)

1 普查

(1)**定义**：对全体对象进行调查叫做普查.

(2)**主要方法**：问卷调查、访问调查、电话调查等.

(3)**适用范围**：调查范围小、调查不具有破坏性、数据要求准确全面.

2 抽样调查

(1)**定义**：从总体中抽取部分个体进行调查，这种调查方式叫做抽样调查.

(2)**主要方法**

①简单随机抽样：能保证总体中每个个体有相同的机会被抽到的抽样调查称为简单随机抽样；当全体对象较少时，常采取简单随机抽样.

②分层抽样：当全体对象由有明显差异的几部分构成时，可将全体对象按差异情况分成几个部分，然后按各个部分所占的比例进行抽样，这样的抽样方法叫做分层抽样.


抽样调查

(3)**适用范围**：调查对象涉及面广，范围大，或受条件限制，或具有破坏性等.

要点精析///

在进行抽样时，要注意：

(1)调查对象不宜太少(具有广泛性)；

(2)调查对象应随意抽取(具有代表性)；

(3)调查数据应真实可靠(具有真实性).

拨考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用调查对象的特征确定普查

例1 下列调查中，适合进行普查的是(　　)

A. 某班同学“立定跳远”的成绩

B. 某水库中鱼的种类

C. 某鞋厂生产的鞋底承受的弯折次数

D. 某型号节能灯的使用寿命

导引：由于一个班级的人数有限，每个同学“立定跳远”的成绩可以逐一测量得知，适合进行普查；

要了解水库中鱼的种类，受客观条件的限制难以做到对每条鱼都一一进行统计，且个体数目多，工作量较大，进行普查没有必要；

测试鞋底承受弯折的次数与节能灯的使用寿命都具有破坏性，不适合进行普查.

故应选 A.

答案：A

方法点拨

适合普查的条件：调查范围小，调查不具有破坏性，数据要求准确全面.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 调查方式的选择

例2 下列调查中，哪些适宜抽样调查，哪些适宜普查？

(1)调查我市中学生每天做作业的时间；

(2)调查某班学生对“中国梦”的知晓率；

(3)调查一架“歼20”隐形战机各零部件的质量；

(4)调查里约奥运会100 m跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况.

导引： 紧扣普查和抽样调查的优缺点及适用范围进行判断.

(1)涉及的范围较大，适宜抽样调查.

(2)某班学生的人数有限，适宜普查.

(3)一架“歼20”隐形战机各零部件的数量有限，并且对质量的要求较高，适宜普查.

(4)调查里约奥运会100 m跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况，适宜普查.

解： (1)适宜抽样调查. (2)(3)(4)适宜普查.

点拨： 判断一个调查是否适合采用抽样调查，先看调查的范围有多大，调查的目的如何，对调查结果的要求是否很高，同时还要兼顾节省人力、物力.

同类变式 (答案见209页)

1. [中考·西宁]下列调查中，适合采用全面调查(普查)方式的是(　　)

A. 了解西宁电视台《教育在线》栏目的收视率

B. 了解青海湖斑头雁种群数量

C. 了解全国快递包裹产生包装垃圾的数量

D. 了解某班同学“跳绳”的成绩

技巧点拨

选择抽样调查的情况有：① 当被调查的对象数目较多时，普查的工作量较大，可选择抽样调查；② 当客观条件限制，无法对所有调查对象进行普查时，可选择抽样调查；③ 当调查具有破坏性时，可选择抽样调查.

知识2 总体和样本(重点)

1 相关概念

总体： 要考察对象的全体叫做总体.

个体： 把组成总体的每一个对象叫做个体.

样本： 从总体中抽取的一部分个体叫做总体的一个样本.

样本容量： 样本中包含个体的数目叫做样本容量.

要点精析///

(1)样本、个体、总体都是调查过程中的考察对象，所要考察的内容是相同的，只是数量不同.

(2)样本的抽取是否得当直接关系到对总体进行估计的准确度，因此抽取的样本要具有代表性和广泛性.

(3)样本和总体的关系：总体包括所有个体，样本只包括一部分个体；样本是总体的一部分，总体可以有多个样本；一个样本所体现的特征只是近似地反映总体的特征.

(4)样本容量是一个样本中包含的个体的数目；样本容量越大，样本的特征越接近总体的特征.

(5)用样本的情况去估计总体的情况称为用样本估计总体.

2 易错警示

样本容量是样本中个体的数目，不能带单位.

公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用总体和样本及相关概念进行识别

例3 某市有3万名学生参加2017年的中考，想要了解这3万名考生的中考成绩，从中抽取了500名考生的中考成绩进行统计分析，以下说法正确的是(　　)

A. 这500名考生是总体的一个样本

B. 每个考生的中考成绩是个体

C. 3万名考生是总体

D. 500名考生是样本容量

导引： 首先要明确考察对象是3万名考生的中考成绩，再按相关概念判断. 500名考生的中考成绩是总体的一个样本，所以选项A不正确；3万名考生的中考成绩是总体，所以选项C也不正确；由于选项D中所说的样本容量带有单位，因此选项D也不正确. 故本题的正确答案是B.

答案： B

方法点拨

要指出样本是在什么样的总体中的一个样本，并要指出样本所含考察对象的数量；个体是总体中的每一个考察对象，样本容量是指一个样本中所包含的个体数目，只是一个“数”，不含单位.

考查角度2 利用抽样调查的特征进行样本的选择

例4 判断下列调查中样本的选取是否合适，并说明理由.

(1)在网上调查“你对老师讲课时‘拖堂现象’的态度”；

(2)在某一个敬老院里调查我国老年人的寿命情况；

(3)在校园里调查我国青年人上网的时间；

(4)为了了解我校七年级同学看电视的时间，随机选取了100名同学进行调查.

导引： 根据抽样调查所需要的条件进行判断.

解： (1)不合适，因为网上调查只是一部分，不具有广泛性和代表性. (2)不合适，因为敬老院里的老年人的寿命情况只是所有老年人的寿命情况中的一部分，非敬老院中的老年人的寿命情况也应该调查. (3)不合适，因为校园学生只是青年人的一部分，还有非校园学生的青年人，校园学生上网的时间不代表所有青年人上网的时间. (4)合适，因为抽样是随机的，样本具有代表性.

方法点拨

为了使抽取的样本具有代表性，要注意三点：①样本容量适当；②当总体是由有明显差异的几个部分组成时，每个部分都应被抽取到且比例适中；③样本具有随机性，即保证每个个体被抽到的机会相等.

同类变式 (答案见209页)

2. 下列调查的样本缺乏代表性的是(　　)

A. 为了了解动物园一年中游客的人数，小明利用十一长假对7天的进园人数进行调查

B. 为了了解养鸡场中一批种鸡的体重情况，从该养鸡场中随机抽取该种鸡100只进行调查

C. 为了了解我市读者到市图书馆借阅图书的情况，从全年的借阅人数中抽查了100天每天到市图书馆借阅图书的人数

D. 调查某电影院单排号的观众，以了解观众对所看影片的看法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 抽样调查的合理性

例5 报纸上刊登了一则新闻，标题为《保健食品合格率为75%》，请据此回答下列问题：

(1)你认为这则消息来源于普查，还是抽样调查？为什么？

(2)这则新闻是否说明市面上恰好有25%的保健食品不合格？

(3)如果在这次质量监督检查中各项指标均合格的商品有45种，你能算出共有多少种保健食品接受检查吗？

(4)此次商品质量监督检查的结果如下表，有人由此认为“进口商品的不合格率较低，更让人放心”. 你同意这种说法吗？为什么？

产地	国内	国外
被检数/种	55	5
不合格数/种	14	1

导引： (1)易知此类调查总体数目太大，且调查具有破坏性，不适合普查，故消息来源于抽样调查；

(2)调查是抽样调查，因而结果不是很准确；

(3)根据“合格商品数÷合格率=接受检查商品数”解答；

(4)根据样本是否具有广泛性和代表性解答.

解： (1)抽样调查. 因为总体数目太大，且调查具有破坏性，不适合普查.

(2)不能说明. 因为是抽样调查，结果不是很准确.

(3)接受检查的保健食品有$\frac{45}{75\%}=60$(种).

(4)不同意这种说法. 因为进口商品被检数太少，即样本容量太小，不能反映总体水平.

方法点拨： 总体中个体数目较多，普查的工作量大，或受客观条件的限制不适用普查时，可采用抽样调查. 在抽样调查时，应注意样本的代表性和广泛性.

拔尖角度 2 利用两种调查方式的特征设计方案

例6 在下面两个事件中，你采用哪种调查方式完成收集数据的任务？

(1)学校为七年级新生订购了校服，要了解每个同学的上衣及裤子的型号；

(2)要了解全班各个同学的家庭一周丢弃的塑料袋数量.

导引： (1)要确保七年级新生都穿上合适的校服，只能通过普查的方式收集数据；

(2)要了解全班各个同学的家庭一周丢弃的塑料袋数量，采用普查的方式工作量较大，所以应该采用抽样调查的方式，在抽取样本时，一定要保证样本具有代表性.

解： (1)要采取普查的方式调查七年级每个同学的上衣及裤子的型号，这样才能保证每个同学穿上合适的校服.

(2)可以用抽样调查的方式了解全班各个同学的家庭一周丢弃的塑料袋数量，如确定星期一、星期四、星期日三天，全班同学都记录下自己家这三天丢弃的塑料袋数量，

利用这些数据估计出各个同学的家庭一周丢弃塑料袋的数量(抽取的样本不唯一，合理即可).

技巧点拨： 收集数据时，要根据实际情况确定调查方式. 采用抽样调查时，要注意选取的样本必须具有代表性.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见209页）

基础巩固练

1. ［中考·辽阳］下列调查中，适合采用抽样调查的是(　　)
   A. 某公司招聘人员，对应聘人员进行面试
   B. 调查一批节能灯泡的使用寿命
   C. 为保证火箭的成功发射，对其零部件进行检查
   D. 对乘坐某次航班的乘客进行安全检查
2. 为了了解南京市老年人的健康状况，下列调查方式中合适的是(　　)
   A. 在公园调查1 000名老年人在一年中的生病次数
   B. 在医院门诊部与住院部调查1 000名老年人的生病次数
   C. 调查自己所在小区的10名老年人的生病次数
   D. 让每一个同学调查自己身边的5名老年邻居的生病次数
3. ［中考·贺州］调查我市一批药品的质量是否符合国家标准，采用_____方式更合适.（填“普查”或“抽样调查”）
4. “建设大美青海，创建文明城市”，西宁市加快了郊区旧房拆迁的步伐. 为了解被拆迁的236户家庭对拆迁补偿方案是否满意，小明利用周末调查了其中的50户家庭，有32户家庭对方案表示满意. 在这一抽样调查中，样本容量为_____.
5. 指出下列问题中的总体、个体、样本.
   (1)为了估计某块玉米试验田里的单株产量，从中抽取100株进行调查；
   (2)某学校为了了解学生完成课外作业的时间，抽取了50名学生完成课外作业的时间进行分析.
6. 为了了解某校学生的体重，调查了某班45名学生的体重(单位：千克)，记录如下：
   48，48，42，50，61，44，43，51，46，46，51，46，50，45，52，54，51，57，55，48，49，48，53，48，56，55，57，42，54，49，47，60，51，51，44，41，49，53，52，49，61，58，52，54，50
   (1)这个问题中的总体、个体、样本、样本容量分别是什么？
   (2)请用简单随机抽样的方法，在该班45名学生的体重中，分别选取含有6名学生体重的两个样本和含有15名学生体重的两个样本.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

7. 进行下列调查：

①调查全班学生的鞋码；

②调查无锡市七年级学生双休日是如何安排的；

③调查学校大门两侧 100 米内有没有开网吧；

④电视台调查某部电视剧的收视率；

⑤质量监督部门调查某种电子产品的质量.

在这些调查中，适合进行普查的是_____，适合进行抽样调查的是_____.（只填序号）

8. 一个电脑生产厂家在某城市三个经销本厂产品的商场进行调查，产品的销售量占这三个商场同类产品销售量的40%. 由此在广告中宣传，他们的产品在国内同类产品的销售量中占40%. 请你根据所学的统计知识，判断该宣传中的数据是否可靠，并说明理由.

9. 为了估计某市一年的空气质量情况，某同学在30天里做了如下记录：

污染指数(w)	40	60	80	100	120	140
天数	3	5	10	6	5	1

其中 $w \leqslant 50$ 时，空气质量为优；$50 < w \leqslant 100$ 时，空气质量为良；$100 < w \leqslant 150$ 时，空气质量为轻微污染. 请指出本题中的总体和样本.

思维拓展练

10. 为了解全校同学的平均身高，小明调查了座位在自己旁边的3名同学的身高.

(1) 小明的调查是抽样调查吗？

(2) 如果是抽样调查，指出调查的总体、个体、样本和样本容量.

(3) 这次调查的结果能较好地反映总体的情况吗？如果不能，请说明理由.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.3 数据的整理与表示

核心知识

- 数据的整理——统计表
- 数据的描述——统计图

知识链接

数据的整理 → 统计表

数据的描述 → 统计图

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 数据的整理(重点)

1 通过调查或试验收集到的数据一般数量较大且无序，为了得到有用的信息，需要对数据进行分类(组)整理，利用统计表或统计图表示数据的特征.

2 统计表是根据原始数据制成的一种表格.为了实际需要，把原始数据按照一定的要求进行整理、归类，并按照一定的顺序排列起来，制成表格，这种表格叫做统计表.统计表一般都包括标题、标目、数据、单位、制表日期.统计表便于阅读和检查，便于计算和分析.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度 利用统计表整理数据

例1 某厂准备在六一儿童节时送一批气球给幼儿园的小朋友,特地对50名小朋友最喜欢的气球颜色进行调查,结果如下:

红 蓝 红 黄 红 蓝 绿 绿 黄 红
红 蓝 红 蓝 蓝 蓝 红 蓝 红 绿
黄 红 红 蓝 红 绿 黄 红 黄 红
黄 红 绿 蓝 蓝 黄 蓝 红 蓝 红
绿 红 红 蓝 蓝 红 红 黄 蓝 绿

(1)根据上面的调查结果,你能直接得出这些小朋友最喜欢哪种颜色的气球吗?

(2)请你设计一个表格,对上面的调查结果进行统计.

导引: (1)该调查的结果是几种颜色的随机分布,很难直接得出各种颜色的具体数量,从而很难判断这些小朋友最喜欢哪种颜色的气球.

(2)设计的表格不唯一,如可用画“正”字的方法进行整理.将每种颜色作为一类,“正”字的每一个笔画代表一名小朋友,逐一数出最喜欢每种颜色的人数,进行统计,然后用最喜欢每种颜色的人数除以总人数,得到最喜欢每种颜色的人数占调查总人数的百分比.

解: (1)根据上面的调查结果,很难直接得出这些小朋友最喜欢哪种颜色的气球.

方法点拨

利用表格把杂乱无章的数据按一定的规律表示出来.对数据分类时,标准要一样,不能重复,也不能遗漏,这样得到的表格才能更好地表示数据的特征.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设计表格如下：

最喜欢的气球颜色	画“正”字计数	人数	百分比
红色	正正正正	20	40%
黄色	正下	8	16%
蓝色	正正正	15	30%
绿色	正丅	7	14%
合计		50	100%



点知识 2 条形统计图和扇形统计图(重点)

1 **条形统计图** 用一个单位长度表示一定的数量，根据各项目数量的多少画出长短不等的“条形”，“条形”的宽度必须保持一致，然后把这些“条形”排列起来，这样的统计图叫做条形统计图.

要点精析///

制作条形统计图时，横轴的各个小长方形宽度要一样，间隔要均匀，纵轴一般要从0开始.

2 扇形统计图中，整个圆表示统计项目的总体，每一统计项目分别用圆中不同的扇形面积来表示，扇形面积占圆面积的百分比与各统计项目占总体的百分比相等.

3 在扇形统计图中，扇形圆心角的度数 = 该部分的百分比 × 360°.

4 **制作扇形统计图的步骤**

①先计算各部分占总体的百分比；

②再计算出各部分对应的扇形圆心角的度数，扇形圆心角的度数 = 各部分的百分比 × 360°；

③选取适当的半径画圆，在圆中画出各个扇形；

④在各部分扇形上标明相应名称(图例)和百分比；

⑤写出扇形统计图简洁的标题.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用条形统计图读信息

例2 [中考·山西] 四川雅安发生地震后，某校九(1)班学生开展献爱心活动，积极向灾区捐款. 图18.3-1是该班同学捐款情况的条形统计图. 写出一条你从图中所获得的信息：

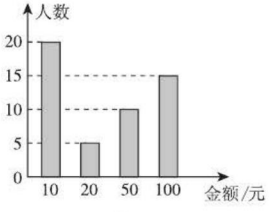


图18.3-1

_____.

答案： 该班有50人参与了献爱心活动

技巧点拨

本题是开放型题目，答案不唯一，只要符合题意即可.

考查角度2 制作扇形统计图

例3 李小林一周内总共花了48元钱，其中交通费12元，购买文具花费8元，午餐花费20元，娱乐消费8元. 请根据所给信息画出扇形统计图以直观地表示各项消费金额所占的百分比.

导引： 先算出各项消费的百分比，然后确定扇形的圆心角. 其中扇形的圆心角 = 该部分的百分比 × 360°.

解： 李小林一周内各项消费金额、所占百分比及对应的扇形

方法点拨

在制作扇形统计图时，先计算出要统计的各部分占总体的百分比，再根据这些百分比求出各部分对应的扇形圆心角的度数，然后在圆中利用量角

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

圆心角的度数如下表所示.

消费项目	交通	文具	午餐	娱乐	合计
消费金额	12 元	8 元	20 元	8 元	48 元
百分比	25.00%	16.67%	41.66%	16.67%	100%
圆心角	90°	60°	150°	60°	360°

扇形统计图如图 18.3-2.



图 18.3-2

器画出相应的扇形，在相应的扇形上标上各部分的名称(图例)和百分比，写出标题，从而得到一个完整的扇形统计图.

考查角度3 利用扇形统计图的特征辨别扇形统计图的信息

例4 [易错题] 图 18.3-3 是甲、乙两户居民家庭全年支出费用的扇形统计图，根据统计图可知，下面对全年食品支出费用判断正确的是(　　)

A. 甲户比乙户多

B. 乙户比甲户多

C. 甲、乙两户一样多

D. 无法确定哪一户多

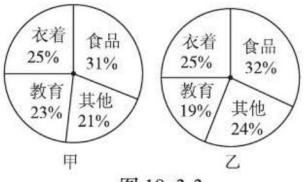


图 18.3-3

导引: 本题容易只凭表面现象去判断，而错选 B. 扇形统计图反映的是部分占总体的百分比，本题中的两个扇形统计图分别反映两户食品支出费用占各自的总支出费用的百分比. 由于不知道两户各自的总支出费用，因此根据两个扇形统计图中的百分比的大小，无法比较两户全年食品支出的费用.

答案: D

易错警示

因为扇形统计图仅说明各个统计量所占的百分比，并没有告诉各项的具体数量，光凭表面现象判断易出错.

知识 3 折线统计图

1 用一个单位长度表示一定的数量，根据各项目数量的多少描出各点，然后用线段顺次把各点连接起来，这样的统计图叫做折线统计图.

要点精析///

(1) 折线统计图既可以表示出项目的具体数量，又能清楚地反映事物变化的情况.

(2) 折线统计图的特点：可以反映事物变化的规律和趋势.

2 制作折线统计图的一般步骤

(1) 画出横轴和纵轴，并指明横轴、纵轴所表示的实际意义；

(2) 在横轴上等距离取点表示各个项目，在纵轴上用一个单位长度表示一定数量；

(3) 以各个项目的数量作为点的纵坐标描点，并用线段依次连接各点.

3 统计图的选用

用统计图描述数据，应根据问题中对描述数据的要求，结合统计图的特点进行选择. 如果要清楚地表示出各部分在整体中所占的百分比，那么选用扇形统计图；如果要清楚地表示出每个项目的具体数量，那么选用条形统计图；如果要清楚地反映事物的变化情况，那么选用折线统计图.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用折线统计图的特征读信息

例5 ［中考·温州］小林家今年1～5月份的用电量情况如图18.3-4所示. 由图可知,相邻两个月中,用电量变化最大的是(　　)

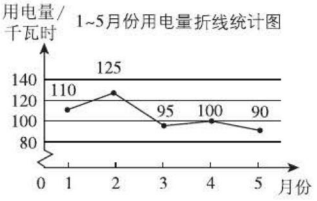


图18.3-4

A. 1月至2月　　B. 2月至3月

C. 3月至4月　　D. 4月至5月

导引: 根据折线统计图中的数据,分别求出相邻两个月的用电量的变化值.

1月至2月,125－110＝15(千瓦时);

2月至3月,125－95＝30(千瓦时);

3月至4月,100－95＝5(千瓦时);

4月至5月,100－90＝10(千瓦时),

所以相邻两个月中,用电量变化最大的是2月至3月.

答案: B

考查角度2 统计图的选择

例6 如图18.3-5所示的四个统计图中,表示不同品种的奶牛的平均产奶量最为合适的是(　　)

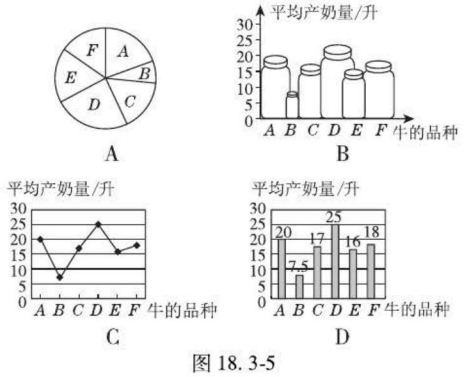


图18.3-5

导引: 根据统计图的特点,可知条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数量,正符合这道题要把不同品种的奶牛的平均产奶量显示清楚的目的. 故选D.

答案: D

技巧点拨

折线统计图表示的是事物的变化情况,根据图中信息求出相邻两个月的用电量的变化值是解题的关键.

同类变式 (答案见210页)

1. 下列说法不正确的是(　　)

A. 为了反映某市七县一区人口分布多少的情况,通常选择条形统计图

B. 为了反映我市连续五年来的国民生产总值增长情况,通常选择折线统计图

C. 为了反映某校中学生人数占全市中学生人数的比例情况,应选择扇形统计图

D. 以上三种统计图都可以直接找到所需数目

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3 利用合适的统计图描述数据

例7 某市一所中学为了解学生每天的消费情况，随机抽取了该校30名学生进行调查，并将调查结果记录如下：0～5元，有14人，占46.6%；6～10元，有6人，占_____%；11～15元，有5人，占16.7%；16～20元，有_____人，占10%；20元以上（不包括20元），有2人，占6.7%.

(1) 根据题意把题目中所缺数据补充完整；

(2) 请选择题中适当数据，设计一个能反映该校学生每天消费情况的统计图；

(3) 你从(2)题中的统计图中获得了什么信息？（只写一条）

导引： (1) 根据题意可得消费在6～10元的学生人数所占百分比为$\frac{6}{30}\times100\%=20\%$；消费在16～20元的学生有$30\times10\%=3$（人）；

(2) 根据题中所给的数据作出条形统计图（或扇形统计图）；

(3) 根据统计图给出合理的叙述即可.

解： (1) 20；3

(2) 选择关于人数的数据，制作条形统计图. 如图18.3-6所示.

(3) 学生每天的消费属正常情况，过高的消费只是个别情况.

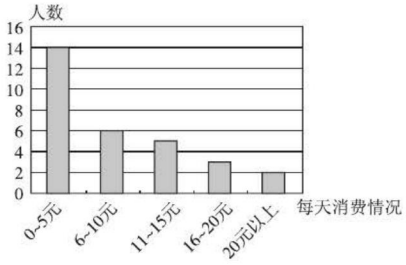


图18.3-6

方法点拨

(2)(3)题答案不唯一，符合题目要求即可.



认真会有收获

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 补全统计图并从统计图中获取正确的信息

例8 某商场对今年端午节这天销售的A，B，C三种品牌的粽子情况进行了统计，绘制了如图18.3-7所示的统计图（不完整）. 根据图中信息，解答下列问题：

(1) 哪一种品牌的粽子销售量最大？

(2) 补全图18.3-7①中的条形统计图.

(3) 写出A品牌粽子在图18.3-7②中所对应的扇形圆心角的度数.

(4) 根据上述统计信息，明年端午节期间该商场对A，B，C三种品牌的粽子如何进货？请你提一条合理化的建议.

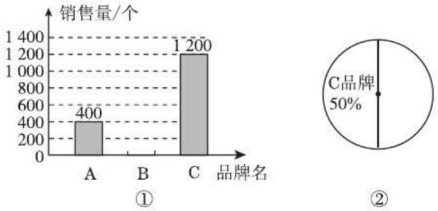


图18.3-7

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引: (1)由扇形统计图可以看出C品牌粽子的销售量占三种品牌粽子总销售量的50%,故C品牌粽子的销售量最大;

(2)由图18.3-7①和图18.3-7②可以看出A品牌粽子销售量+B品牌粽子销售量=C品牌粽子销售量,故B品牌粽子销售量为1 200−400=800(个),由此可补全条形统计图;

(3)由C品牌粽子销售的个数及所占的百分比可求出三种品牌粽子销售的总个数,再由A品牌粽子的销售个数求百分比及所对应的扇形圆心角的度数;

(4)可根据各品牌粽子销售量占总销售量的比例决定进货量等.

解: (1)C品牌粽子的销售量最大.

(2)如图18.3-8.

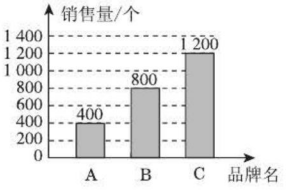


图18.3-8

(3)粽子销售总个数为1 200÷50%=2 400(个).

A品牌粽子所对应的扇形圆心角的度数为$\frac{400}{2\,400}\times360°=60°$.

(4)根据上述统计信息,明年端午节期间该商场对A,B,C三种品牌的粽子可按1:2:3的比例进货.(答案不唯一,合理即可)

方法点拨: 要抓住条形图的特征和扇形图中的百分比来分析数据,特别要注意数形结合思想的运用.题目中的部分信息隐含于统计图中,解题时需要运用数形结合思想,从两种统计图中获取正确的信息,从而达到解题的目的.

拔尖角度2 利用复合型统计图描述数据

例9 2012年中美光伏贸易摩擦使我国的光伏电子产品出口受到严重影响,在这种情况下,有两个电子仪器厂仍然保持着良好的增长势头.

(1)下面的两幅统计图分别反映了一厂、二厂各类人员数量及工业产值情况.根据统计图(如图18.3-9)填空:

①一厂、二厂的技术员占各自厂内总人数的百分比分别是_____和_____;(结果精确到1%)

②一厂、二厂2015年的产值比2014年的产值分别增长了_____万元和_____万元.

(2)仅从以上情况分析,你认为哪个厂生产经营得好一些?为什么?

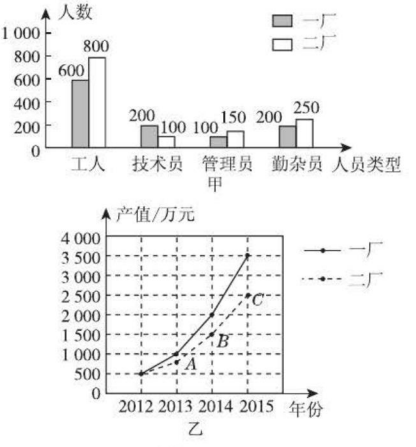


图18.3-9

导引: 从复合统计图中获取信息的关键是要把复合统计图拆成两个普通的统计图,然后再从普通统计图中获取我们所要的信息.(1)图18.3-9甲用复合条形图比较清楚地反映了两厂各种岗位人员数量的差别;图18.3-9乙用复合折线图既能反映两厂近几年工业产值的增长趋势,又能反映两厂增长速度的差别.①由图18.3-9甲可求出一厂技术员占厂内总人数的百分比为$\frac{200}{600+200+100+200}\times100\%\approx18\%$.二厂技术员占厂内总人数的百分比为$\frac{100}{800+100+150+250}\times100\%\approx8\%$;②由图

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

18. 3-9 乙可求出一厂2015年的产值比2014年的产值增长了3 500 − 2 000 = 1 500(万元),二厂2015年的产值比2014年的产值增长了2 500 − 1 500 = 1 000(万元).

(2)结合人数、产值及增长速度,比较两厂的生产经营状况.

解: (1)①18% ;8% ②1 500;1 000

(2)一厂生产经营得好一些. 因为从统计图给出的信息可以发现,一厂的总人数比二厂少,但产值大于或等于二厂,且增速比二厂快. (理由不唯一,合理即可)

方法点拨: (1)不同的统计图具有不同的特点和作用,根据需要能从对应统计图中获取相应的信息;(2)复合统计图是由我们常见的两个或两个以上同种统计图合在一起组成的,其中以条形统计图和折线统计图居多.

练中考·练模拟 得满分 (答案见210页)

基础巩固练

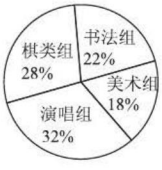
1. [中考·邵阳]如图是某班学生参加课外兴趣小组的人数占总人数百分比的统计图,则人数最多的课外兴趣小组是(　　)

A. 棋类组

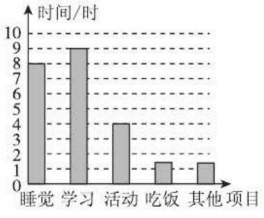
B. 演唱组

C. 书法组

D. 美术组



(第1题图)



(第2题图)

2. 如图是小颖一天的时间安排统计图,下列从统计图获取的信息中,不一定正确的是(　　)

A. 小颖的活动时间是睡觉时间的一半

B. 小颖这天在校时间是9小时

C. 小颖一天中吃饭的时间是1.5小时

D. 小颖学习的时间占整天时间的37.5%

3. [中考·北京]下面的统计图反映了我国与"一带一路"沿线部分地区的贸易情况.(以下数据摘自《"一带一路"贸易合作大数据报告(2017)》)

根据统计图提供的信息,下列推理不合理的是(　　)



(第3题图)

A. 与2015年相比,2016年我国与东欧地区的贸易额有所增长

B. 2011～2016年,我国与东南亚地区的贸易额逐年增长

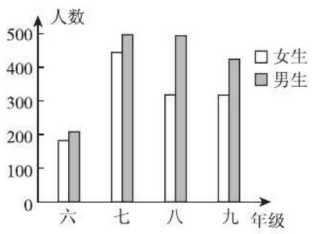
C. 2011～2016年,我国与东南亚地区的贸易额的平均值超过4 200亿美元

D. 2016年,我国与东南亚地区的贸易额是我国与东欧地区贸易额的3倍多

4. [中考·山西]要表示一个家庭一年用于"教育""服装""食品""其他"这四项的支出各占家庭本年总支出的百分比,从"扇形统计图""条形统计图""折线统计图"中选择一种统计图,最适合的统计图是_____.

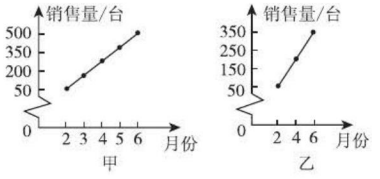
5. 如图所示的是某校四个年级男、女生人数的条形统计图,则学生最多的年级是_____年级.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第5题图）

6. 从2016年2月份到6月份，甲、乙两个商场的数码相机销售情况如图中两个统计图所示，其中销售量增长较快的是_____商场.



（第6题图）

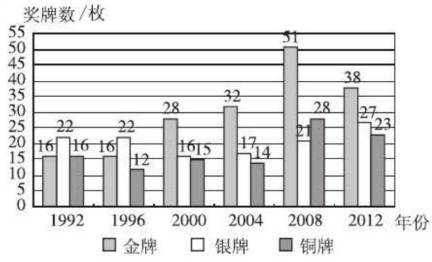
7. 某市有5类学校，各类学校数量占学校总数量的百分比如下：

学校	幼儿园	小学	中学	特殊教育	高等院校
百分比	36%	32%	22%	4%	6%

（1）若要画扇形统计图表示上面的信息，请计算出各类学校对应的扇形圆心角度数；

（2）画出扇形统计图来表示上面的信息.

8. 如图是我国运动员从1992年至2012年在奥运会上获得奖牌的条形统计图，请根据统计图提供的信息，回答下列问题：



（第8题图）

（1）从1992年至2012年的六届奥运会中，我国运动员共获得多少枚奖牌？

（2）哪一年奥运会上我国运动员获得的奖牌数最多？

（3）根据上述数据制作折线统计图表示我国运动员从1992年至2012年在奥运会上获得的金牌数和银牌数的变化情况.

9. 某校七年级共有150名男生，从中随机抽取30名男生在“阳光体育活动”启动日进行“引体向上”测试，下表是测试成绩记录（单位：个）：

3	2	1	2	3	3	5	2	2	4
2	4	2	5	2	3	4	4	1	3
3	2	5	1	4	2	3	1	2	4

（1）为了能让体育老师一目了然地知道整个测试的情况，请你选择一种合适的统计图表示上述数据；

（2）观察分析（1）题中画出的统计图，请你写出两条从中获得的信息：

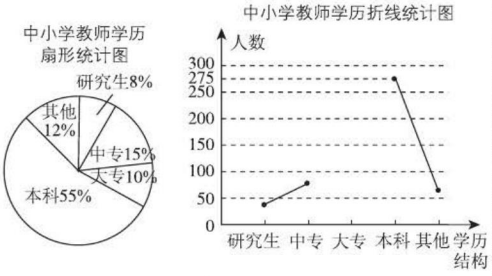
①_____；

②_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

10. 苏州某中学九年级学生在社会实践中，向市区的中小学教师调查他们的学历情况，并将调查结果分别用如图所示的扇形统计图和折线统计图（不完整）表示.



（第10题图）

（1）这次调查的教师共有多少人？

（2）补全折线统计图.

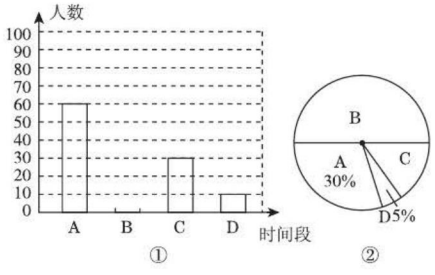
11. 为了了解中学生参加体育活动的情况，某校对部分学生进行了调查，其中一个问题是“你平均每天参加体育活动的时间是多少？”共有4个选项：

A. 1.5小时以上　　B. 1～1.5小时

C. 0.5～1小时　　D. 0.5小时以下

根据调查结果绘制了如图①②所示的两幅不完整的统计图.

请你根据以上信息解答下列问题：



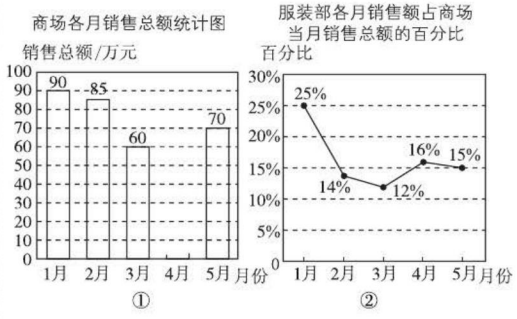
（第11题图）

（1）本次调查活动采取了_____的方式；

（2）计算本次调查的学生人数和图②中选项C所在扇形的圆心角度数；

（3）请把图①补充完整.

12. 图①②反映的是某商场今年1～5月份的商品销售额统计情况. 观察图①和图②，解答下面的问题：



（第12题图）

（1）来自该商场财务部的报告表明，商场1～5月份的销售总额一共是370万元，请你根据这一信息补全图①，并写出两条由统计图获得的信息.

（2）该商场服装部5月份的销售额是多少万元？

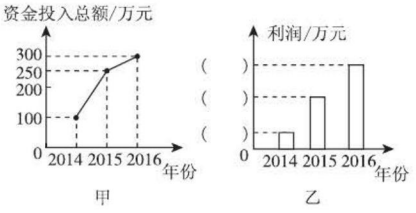
（3）李强观察图②后认为，5月份服装部的销售额比4月份减少了. 他的看法对吗？为什么？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 某公司 2014 ~ 2016 年每年的资金投入总额与每年利润的统计图如图甲、乙所示，其中利润率 = 利润 ÷ 资金投入总额 × 100%. 已知 2016 年的利润等于 2016 年、2015 年两年的资金投入差额，并且三年的利润每年上升 20 万元.

(1) 请在图乙中的括号里填上相关利润数据；

(2) 试确定哪一年的利润率最高.



(第 13 题图)

思维拓展练

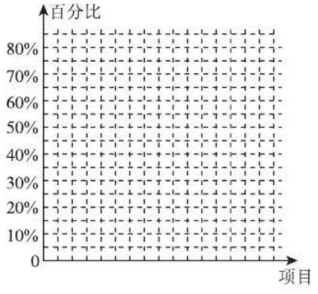
14. 下表是对网民进行的“将来最有希望的网上事业(可以选多个项目)”的调查表：

项目	百分比
网上购物	60.5%
网上学校	54.7%
网络通信	52.4%
网上炒股	50.9%
网上游戏	38.0%
网上医院	28.9%

(1) 请将表中描述的信息用折线统计图表示在如图所示的网格图中.

(2) 这个调查表能用扇形统计图表示吗？若能，请画出扇形统计图；若不能，请说明理由.

(3) 还能用什么统计图来表示这个调查表所描述的信息？



(第 14 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.4 频数分布表与直方图

核心知识

- 频数分布表
- 频数分布直方图

知识链接

频数分布表、频数分布直方图 —关键→ 频数

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 频数分布表(重点)

1 相关概念

(1)**组距:**把所有数据分成若干组，每组两个端点之间的距离称为组距.

(2)**组数:**把数据分成若干组，分成的组的个数叫组数.

(3)**频数:**各组中数据的个数叫做频数.

(4)**频率:**频数与数据总个数的比值叫做频率.

要点精析///

(1)各小组的频数之和等于总数.

(2)组距可以相同，也可以不同；为研究方便，本节中我们采用等距分组.

(3)为了使数据“不重不漏”，分组时常采用“上限不在内”的原则. 如:149 ~ 152 包含 149，但不包含 152.

2 频数(频率)分布表

(1)**定义:** 在表格中用画“正”字的方式统计各组的频数，计算相应的频率，就得到频数(频率)分布表.

(2)**制作步骤**

①算：计算该组数据中最大值与最小值的差，得到这组数据的变化范围.

②定：根据数据的个数与数据的变化范围，确定组距、组数.

③画：利用画“正”字的方法累计落在各组内的数据个数，得到各组的频数，计算相应的频率.

④列：根据上述过程列频数(频率)分布表.

频数(频率)分布表一般由三(四)部分组成,频数(频率)分布表如下:

数据分组					…
画“正”字计数					…
频数(频率)					…

3 易错警示 组数与组距没有固定的标准，要凭借经验和研究的具体问题来决定，当数据个数在 100 以内时，根据数据的多少，通常分为 5 ~ 10 组.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用数据的特征确定组数和组距

例 1 有 60 个数据,其中最大的数据是 187,最小的数据是 140,如果分组时的组距为 6,那么这组数据应分为(　　)

A. 7 组　　B. $7\frac{5}{6}$ 组

C. 8 组　　D. 10 组

导引: 因为这组数据的最大值是 187,最小值是 140,

最大值与最小值的差是 $187-140=47$,且 $\frac{47}{6}=7\frac{5}{6}$,

所以应分为 8 组. 故选 C.

答案: C

方法点拨

确定组数的方法：若最大值与最小值的差除以组距所得的商是整数，则这个商即为组数；若最大值与最小值的差除以组距所得的商是小数，则这个商的整数部分 + 1 即为组数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 制作频数分布表

例2 某校七年级(1)班30名男生的身高情况测量如下(单位:cm):

164	169	170	182	180	169
176	166	162	174	183	170
171	170	173	174	162	174
173	165	167	160	158	175
162	177	173	156	174	175

根据这些数据,列出频数分布表.

导引: 按照列频数分布表的步骤进行解答.

解: (1)求出最大值与最小值的差:最大值为183,最小值为156,它们的差为 $183-156=27$.

(2)确定组距与组数:组距定为5,则组数是 $27\div5=5.4\approx6$.

(3)分组如下:155.5~160.5,160.5~165.5,165.5~170.5,170.5~175.5,175.5~180.5,180.5~185.5.

(4)列频数分布表:

身高分组	画"正"字计数	频数
155.5~160.5	下	3
160.5~165.5	正	5
165.5~170.5	正下	7
170.5~175.5	正正	10
175.5~180.5	下	3
180.5~185.5	下	2
合计		30

技巧点拨

在列频数分布表时,先仔细观察并找出这组数据中的最大值和最小值,再决定组距与组数.

请开始你的表演



知识2 频数分布直方图(重点)

1 定义 根据频数分布表,用横轴表示各分组数据,纵轴表示频数,小长方形的高表示各组的频数,绘制图形,直观表示频数的分布情况.这样的图形叫做频数分布直方图.

2 频数分布直方图的特点

(1)能够显示数据的分布情况;

(2)易于显示各组之间的频数的差别.

3 画频数分布直方图的步骤

(1)确定数据的最大值与最小值;

(2)确定数据分组的组数与组距;

(3)列频数(频率)分布表;

(4)画频数分布直方图.



画频数分布直方图的方法

4 频数分布直方图与条形统计图的区别与联系

	条形统计图	频数分布直方图
区别	(1)条形统计图各个"条形"之间有间隙; (2)条形统计图用横轴表示考察对象的类别,用纵轴表示不同对象的数量特征	(1)频数分布直方图各个"条形"之间没有间隙; (2)频数分布直方图用横轴表示考察对象数据的变化范围,用纵轴表示相应范围内的频数
联系	条形统计图、频数分布直方图能从不同的角度直观、形象地描述、分析数据.频数分布直方图是特殊的条形统计图	

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度1 从频数分布直方图中获取信息

例3 某中学部分同学参加全国初中数学竞赛，取得了优异的成绩，指导老师统计了所有参赛同学的成绩（成绩都是整数，试题满分120分），并且绘制了如图18.4-1所示的频数分布直方图（每组中含最低分数，但不含最高分数），请回答：

(1) 该中学参加本次数学竞赛的共有多少人？

(2) 如果成绩在90分以上（含90分）的同学获奖，那么该中学参赛同学的获奖率是多少？

(3) 图中还提供了其他信息，例如该中学没有获得满分的同学等，请再写出两条信息.

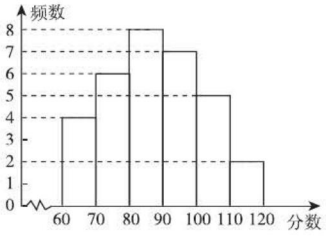


图18.4-1

解： (1) 由频数分布直方图知，从左到右各分数段的人数分别为4，6，8，7，5，2，

所以该中学参加本次数学竞赛的共有 $4+6+8+7+5+2=32$（人）.

(2) 90分以上（含90分）的同学有 $7+5+2=14$（人），

所以该中学参赛同学的获奖率是 $\frac{14}{32}\times 100\% = 43.75\%$.

(3) 该中学参赛同学的成绩均不低于60分；成绩在100分以上（含100分）的同学有7人.（答案不唯一，合理即可）

考查角度2 由数据信息绘制频数分布直方图

例4 为了解某地区八年级学生的身高情况，随机抽取了60名学生，测得他们的身高（单位：cm）如下：

156	162	163	172	160	141	152	173	180	174
157	174	145	160	153	165	156	167	161	172
178	156	166	155	140	157	167	156	168	150
164	163	155	162	160	168	147	161	157	162
165	160	166	164	154	161	158	164	151	169
169	162	158	163	159	164	162	148	170	161

(1) 将数据适当分组，并绘制相应的频数分布直方图；

(2) 如果身高在155 cm～170 cm（含155 cm，不含170 cm）的学生为正常，试求身高正常的学生的百分比.

方法点拨

在(1)题中，根据频数分布直方图，可以得出各分数段的人数，其和即为参加本次数学竞赛的人数；在(2)题中，先计算出得分在90分以上（含90分）的人数，结合(1)题即可得出获奖率；(3)题答案不唯一，合理即可.

方法点拨

根据频数分布直方图获取信息时，要注意三点：

(1) 理解横轴、纵轴分别表示的意义；

(2) 注意题目中的关键词语，如“每组中含最低分数，但不含最高分数”等；

(3) 在累计总数时不要出现遗漏或重复等错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：先确定最大值与最小值的差为 $180-140=40(\text{cm})$，故可将数据按组距为 5 进行分组，可分 $40\div5=8$(组).

解：(1)计算这组数据的最大值与最小值的差为 $180-140=40(\text{cm})$.

确定组数与组距，将数据按组距为 5 进行分组，可分为 $40\div5=8$(组)，即每个小组的范围分别是 $140\leqslant x<145$，$145\leqslant x<150$，$150\leqslant x<155$，$155\leqslant x<160$，$160\leqslant x<165$，$165\leqslant x<170$，$170\leqslant x<175$，$175\leqslant x\leqslant180$. 其中 x 为学生身高.

列频数分布表如下：

身高/cm	画“正”字计数	频数
$140\leqslant x<145$	丅	2
$145\leqslant x<150$	下	3
$150\leqslant x<155$	正	5
$155\leqslant x<160$	正丅	12
$160\leqslant x<165$	正正正	20
$165\leqslant x<170$	正正	10
$170\leqslant x<175$	正一	6
$175\leqslant x\leqslant180$	丅	2
合计		60

画频数分布直方图如图 18.4-2 所示.

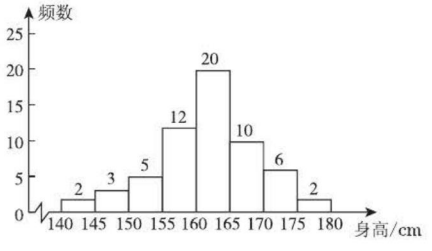


图 18.4-2

(2)由图可知，身高在正常范围内的学生人数为 $12+20+10=42$，其所占的百分比是 $\frac{42}{60}\times100\%=70\%$.

方法点拨

制作频数分布直方图要按步骤进行操作，关键是列频数分布表；频数分布表和频数分布直方图都表示数据落在各小组的个数；绘制频数分布直方图是为了把表中的结果直观地表示出来，它们是频数分布的“数”与“形”的两种不同形式，互相补充.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

用频率谈论谁是《红楼梦》的作者

我国有一部古典文学名著《红楼梦》，虽然书的封面上通常都印有曹雪芹和高鹗两位作家的名字，但是，它的作者究竟是谁，现在还是一个谜.一些专家正在试图用数学的方法揭开这个谜.

有一种研究方法是以计算机为工具，对这部名著的遣词造句进行了统计分析，看写作手法是否前后完全一致.如果整本小说出自一人之手，那么不管翻到书的哪一部分，遣词造句的写作手法应该极其相像.

谈祥柏先生在他的《数学广角镜》一书中介绍说，湖南师范大学的一位学者发现，在《红楼梦》的前80回中，丫鬟、佣人、老妈子等下人都自称为“小的”，可到了后40回，则一般都自称为“奴才”，这就露出了一个“马脚”，说明前80回和后40回的作者可能不是同一个人.

1987年《复旦大学学报(社科版)》介绍说，复旦大学的李贤平先生将《红楼梦》120回看成一个整体，统计了47个虚词的出现频率，又提出了不能笼统地认定前80回为一人所写，后40回为另一个不相干的人所写的看法.

那么《红楼梦》的作者究竟是曹雪芹一个人，还是曹雪芹和高鹗两个人，还是它原本就是一部在几本民间小说基础上合成的长篇小说呢？ 至今还没有定论.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 灵活选择适当的统计图

例5 (1)我国五座名山的海拔高度如下表.若想根据表中的数据绘制统计图,以便更清楚地比较五座山的高度,可选用(　　)

山名	泰山	华山	衡山	恒山	嵩山
海拔/m	1 545	2 154.9	1 300.2	2 016.1	1 491.7

A. 条形统计图　　B. 折线统计图

C. 扇形统计图　　D. 频数分布直方图

(2)某学校七年级(3)班40位同学都订阅了杂志(每人仅订一种),30%的同学订阅了《科学画报》,20%的同学订阅了《作文通讯》,40%的同学订阅了《英语周刊》,10%的同学订阅了其他杂志,能表示上述数据的统计图是(　　)

A. 条形统计图　　B. 折线统计图

C. 扇形统计图　　D. 频数分布直方图

(3)某地上半年每月的平均气温是5℃,8℃,12℃,18℃,24℃,30℃.为了表示出气温变化的情况,可以把上述数据绘制成(　　)

A. 条形统计图　　B. 折线统计图

C. 扇形统计图　　D. 频数分布直方图

(4)某班40名学生的体重情况如下(单位:kg):

38　32　39　40　35　45　37　38

40　29　39　41　37　42　39　34

36　39　33　42　36　44　33　29

40　35　39　37　46　39　31　39

36　42　38　41　36　44　38　34

为反映该班同学体重的分布情况,宜绘制成(　　)

A. 条形统计图

B. 折线统计图

C. 扇形统计图

D. 频数分布直方图

导引: 根据四种统计图各自的特点和适用情况作出正确选择.(1)要清楚地反映出五座名山的高度宜选用条形统计图;(2)已知的数据均为各部分占总体的百分比,因此应选用扇形统计图;(3)要反映出气温的变化情况,应选用折线统计图;(4)只有频数分布直方图能清楚地显示出各组频数的分布情况.

答案: (1)A　(2)C　(3)B　(4)D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧点拨： 目前我们已经学习了四种统计图——条形统计图、扇形统计图、折线统计图和频数分布直方图.各种统计图在描述数据方面各有特点，要选择合适的统计图来反映某些数据的特征：

(1)当数据之间彼此独立时，通常选用条形统计图；

(2)当要求描述给出的数据在整体中所占的百分比时，通常选用扇形统计图；

(3)当要求描述同一属性的一组数据的大小变化或增减趋势时，通常选用折线统计图；

(4)当同一属性的数据较多，需研究其分布情况时，通常选用频数分布直方图.

拔尖角度 2 从综合统计图中获取信息

例6 初中学生的视力状况受到全社会的广泛关注.2017年，某市有关部门对全市20万名初中学生的视力状况进行了一次抽样调查，从中随机抽查了10所中学全体学生的视力情况，绘制了如图18.4-3和图18.4-4所示的统计图.请你根据统计图，解答下列问题：

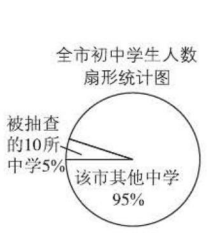


图18.4-3



图18.4-4

(1)2017年这10所中学的学生总人数是多少？

(2)2017年这10所中学的学生中，视力在4.75以上(含4.75)的学生人数占全市初中学生总人数的百分比是多少？

(3)2017年该市参加中考的学生达66 000人，请你估计2017年该市这10所中学参加中考的学生人数.

导引： (1)全市初中学生总人数×这10所中学全体学生所占百分比=这10所中学的学生总人数；

(2)$\frac{\text{视力在4.75以上(含4.75)的人数}}{\text{全市初中学生的总人数}}\times 100\%$ =所求百分比，因此应先求出这10所中学的学生中，视力在4.75以上(含4.75)的人数；

(3)求出该市参加中考的学生人数占该市初中学生总人数的百分比，从而可估算出这10所中学参加中考的学生人数.

解： (1)这10所中学的学生共有$20\times 5\% = 1$(万人).

(2)这10所中学的学生中，

视力在4.75以上(含4.75)的有$1\times 55\% = 0.55$(万人)，

故所求百分比为$\frac{0.55}{20}\times 100\% = 2.75\%$.

(3)该市参加中考的学生占该市初中学生总人数的百分比是$\frac{66\,000}{20\times 10\,000}\times 100\% = 33\%$，所以估计2017年该市这10所中学参加中考的学生有$10\,000\times 33\% = 3\,300$(人).

练中考·练模拟 得满分 (答案见212页)

基础巩固练

1. 一组数据的最大值与最小值之差为80，若取组距为9，则分成的组数应是(　　)

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 12

2. 在频数分布直方图中，小长方形的高(　　)

A. 与频数成正比

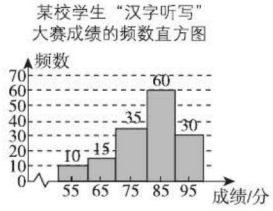
B. 是该组的频数与数据总数的比值

C. 是该组的组距

D. 是该组对应的频数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [中考·温州]某校学生“汉字听写”大赛成绩的频数直方图(每组含前一个边界值,不含后一个边界值)如图所示,其中成绩为“优良”(80分及以上)的学生有_____人.

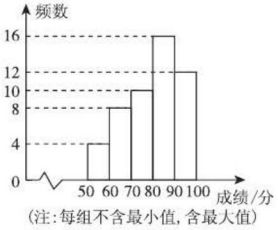


(第3题图)

4. 为纪念辛亥革命100周年,某校八年级(1)班全体学生举行了“首义精神耀千秋”知识竞赛.根据竞赛成绩(得分为整数,满分为100分)绘制了频数分布直方图,如图所示,根据频数分布直方图解答下列问题:

(1)求该班的学生总数;

(2)若成绩不低于80分为优秀,且该班有3名学生的成绩为80分,则该班学生成绩的优秀率是多少?



(注:每组不含最小值,含最大值)

(第4题图)

5. 为了让书籍开拓学生的视野,陶冶学生的情操,向阳中学开展了“五个一”课外阅读活动.为了解全校学生课外阅读情况,抽样调查了50名学生平均每天课外阅读时间(单位:min),将抽查得到的数据分成5组,下面是尚未完成的频数(频率)分布表:

(其中t为平均每天课外阅读时间)

组别	分组	频数	频率
1	$10\leqslant t<30$		0.16
2	$30\leqslant t<50$	20	
3	$50\leqslant t<70$		0.28
4	$70\leqslant t<90$	6	
5	$90\leqslant t<110$		

(1)补全上面的频数(频率)分布表;

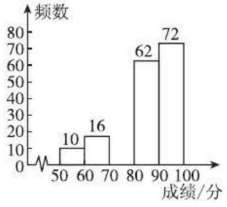
(2)请在平面直角坐标系中画出相应的频数分布直方图.

能力提升练

6. 已知一个样本中的50个数据分别落在五个小组内,第一、二、三、五小组数据的个数分别占数据总数的4%,16%,30%,10%,则第四小组的频数为_____.

7. 某区八年级的学生参加了“爱我中华”知识竞赛.为了了解本次知识竞赛的成绩分布情况,从中抽取了200名学生的成绩进行统计,得到如下图表:

成绩x/分	频数
$50\leqslant x<60$	10
$60\leqslant x<70$	16
$70\leqslant x<80$	a
$80\leqslant x<90$	62
$90\leqslant x<100$	72



(第7题图)

根据图表中提供的信息,解答下列问题:

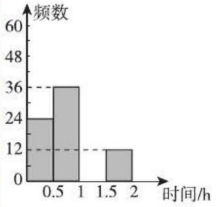
(1)$a=$_____,并补全频数分布直方图;

(2)若将得分转化为等级,规定$50\leqslant x<60$评为“D”,$60\leqslant x<70$评为“C”,$70\leqslant x<90$评为“B”,$90\leqslant x<100$评为“A”.这次抽查的学生中,有多少人的参赛成绩被评为“B”?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考·扬州]扬州市“五个一百工程”在各校普遍开展. 为了了解某校学生每天课外阅读所用的时间情况,某校从该校学生中随机抽取了部分学生进行问卷调查,并将结果绘制成如下不完整的频数分布表和频数分布直方图.

每天课外阅读时间 t/h	频数	频率
$0<t\leqslant 0.5$	24	
$0.5<t\leqslant 1$	36	0.3
$1<t\leqslant 1.5$		0.4
$1.5<t\leqslant 2$	12	b
合计	a	1



(第8题图)

根据以上信息,回答下列问题:

(1)表中 $a=$ _____,$b=$ _____;

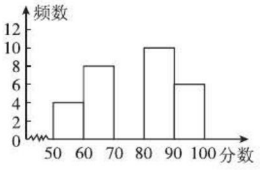
(2)请补全频数分布直方图;

(3)若该校有学生1 200人,试估计该校学生每天课外阅读时间超过1 h的人数.

思维拓展练

9. [中考·龙岩]某校在“6·26国际禁毒日”前组织七年级全体学生320人进行了一次“毒品预防知识”竞赛,赛后随机抽取了部分学生成绩进行统计,制作如下频数分布表和频数分布直方图. 请根据图表中提供的信息,解答下列问题:

分数段(x表示分数)	频数	频率
$50\leqslant x<60$	4	0.1
$60\leqslant x<70$	8	b
$70\leqslant x<80$	a	0.3
$80\leqslant x<90$	10	0.25
$90\leqslant x<100$	6	0.15



(第9题图)

(1)表中 $a=$ _____,$b=$ _____,并补全频数分布直方图;

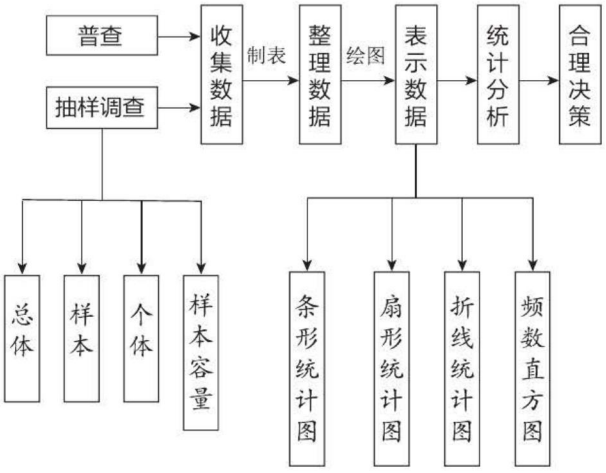
(2)若用扇形统计图描述此成绩统计分布情况,则分数段 $60\leqslant x<70$ 所对应扇形的圆心角度数是多少.【导学号:1553889】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一般来说,对于具有破坏性的、无法进行普查的、普查的意义或价值不大的调查,应选择抽样调查,对于精确度要求高的调查、事关重大的调查往往采用普查. 选择普查还是抽样调查,要根据考察对象的特征灵活选用.

2. 所要考察对象的全体叫做总体;
   把组成总体的每一个对象叫做个体;
   从总体中抽取的一部分个体叫做总体的一个样本;
   样本中包含个体的数目叫做样本容量.
   样本是总体的一部分,样本通常只包括一部分个体,样本在一定程度上能够反映总体.

3. 统计图中相关量的计算方法
   (1)条形统计图:一般涉及补图,也就是求未知组的频数. 方法如下:
   ①未知组频数 = 样本容量 - 已知组频数之和;
   ②未知组频数 = 样本容量 × 该组所占样本百分比.
   (2)扇形统计图:一般涉及求未知组的百分比或其所占圆心角的度数. 方法如下:
   ①未知组百分比 = 1 - 已知组百分比之和;
   ②未知组百分比 = $\frac{\text{未知组频数}}{\text{样本容量}} \times 100\%$;
   ③若求未知组对应的扇形圆心角的度数,则利用 360° × 其所占样本百分比即可.
   (3)统计表:一般涉及求频数和频率(百分比),方法同上.
   (4)折线统计图:一般涉及补图,根据统计表中已知组的数量(或根据题目条件)求出未知组的数量,描点即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识方法专题

知识必学

专题一 普查与抽样调查

链接中考>> 统计调查的常用方法是普查与抽样调查. 抽样调查利用的是用样本估计总体的思想，它是统计知识和方法的源头，也是中考命题的热点内容，题型多以选择题为主.

例 1 下列调查中，最适宜采用普查的是(　　)

A. 对重庆市中学生每天学习所用时间的调查

B. 对全国中学生心理健康现状的调查

C. 对某班学生进行 6 月 5 日是“世界环境日”知晓情况的调查

D. 对重庆市初中学生课外阅读量的调查

导引： 选项 A，B，D 调查范围较大，不适宜采用普查，只有选项 C 调查范围小，操作容易，适宜采用普查. 故选 C.

答案： C

方法点拨： 一般来说，对于具有破坏性的调查、调查范围广或无法进行普查的调查、普查的意义或价值不大的调查，应选择抽样调查；对于精确度要求高的调查、调查范围比较小或事关重大的调查，往往选用普查. 选择普查还是抽样调查，要根据考察对象的特征灵活选用.

专题二 数据的描述——统计图

链接中考>> 调查中，收集并整理数据后，可以用统计图来描述数据，统计图包括条形统计图、扇形统计图和折线统计图. 选择正确的统计图来描述数据至关重要，在近几年中考中，多以选择题和解答题为主.

例 2 某学校为了普及球类运动，拟成立多个球类运动社团，为此，学生会采取抽样调查的方法，从足球、乒乓球、篮球、排球四个项目调查了若干名学生的兴趣爱好(要求每名学生只能选择其中一种自己喜欢的球类运动)，并将调查结果绘制成了如图 18-1 所示的条形统计图和扇形统计图(不完整). 请你根据图中提供的信息，解答下列问题：

(1) 本次抽样调查，共调查了_____名学生；

(2) 请将条形统计图和扇形统计图补充完整.

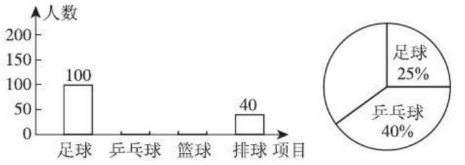


图 18-1

解： (1) 400

(2) 喜欢乒乓球的人数为 $400 \times 40\% = 160$，喜欢篮球的人数为 $400 - 100 - 160 - 40 = 100$，

补全条形统计图和扇形统计图如图 18-2 所示.

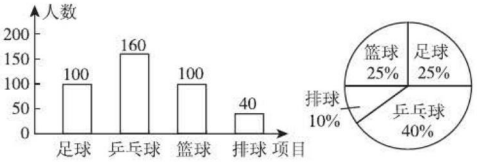


图 18-2

专题三 频数分布直方图

链接中考>> 统计主要研究日常生活中的数据，分析数据可以了解情况、发现规律、做出判断. 正确收集数据，并能根据具体情况选择适当的统计图表来描述数据至关重要，在近几年的中考题中，对此类问题的考查频繁出现，题型以填空题和解答题为主.

例 3 2015 年 4 月 25 日，尼泊尔发生了里氏 8.1 级地震，某中学组织了献爱心捐款活动，该校数学兴趣小组对本校学生献爱心捐款额进行了一次随机抽样调查，并绘制了不完整的频数分布表和频数分布直方图，如图 18-3 所示. 请你根据信息解答下列问题：

(1) $a =$ _____，$b =$ _____；

(2) 补全频数分布直方图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

捐款额/元	频数	频率
$5 \leqslant x < 10$	5	10%
$10 \leqslant x < 15$	a	20%
$15 \leqslant x < 20$	15	30%
$20 \leqslant x < 25$	14	b
$25 \leqslant x < 30$	6	12%
合计		100%

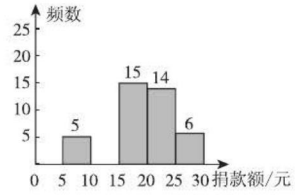


图 18-3

导引: (1)先利用第一组的频数与频率计算出样本容量,再用样本容量乘20%即可得到 a 的值,用 14 除以样本容量可得到 b 的值.

(2)由(1)题可补全频数分布直方图.

解: (1)10;28%

(2)如图 18-4 所示.

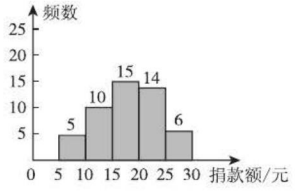


图 18-4

思想方法专题

专题四 数形结合思想

链接中考>> 涉及有关统计图表的问题时,需要从统计图表中准确提取信息,恰当分析统计图表中数据的含义.

例 4 某同学在学习了统计知识后,就下表所列的 5 种用牙不良习惯对全班每个同学进行了问卷调查(每个被调查的同学必须选择而且只能在 5 种用牙不良习惯中选择一项),调查结果如图 18-5 所示.

种类	A	B	C	D	E
不良习惯	睡前吃水果、喝牛奶	用牙开瓶盖	常喝饮料、嚼冰	常吃生冷零食	磨牙

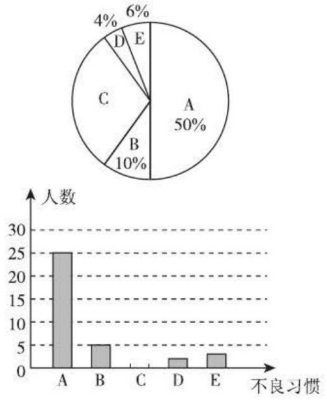


图 18-5

根据以上统计图提供的信息,回答下列问题:

(1)这个班共有学生多少人?

(2)这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生有多少人?占全班人数的百分比是多少?

(3)请补全条形统计图.

导引: 由统计图可知 A 类人数为 25,且占被调查总人数的 50%,从而求出全班的人数.

解: (1)$25 \div 50\% = 50$(人),

∴ 这个班共有学生 50 人.

(2)$1 - 50\% - 10\% - 4\% - 6\% = 30\%$,

$50 \times 30\% = 15$(人),

∴ 这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生有 15 人,占全班人数的 30%.

(3)如图 18-6 所示.

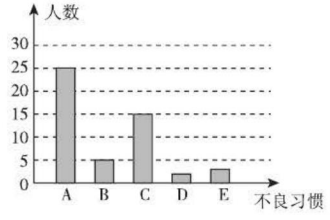


图 18-6

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

一、选择题

1. [中考·重庆]下列调查中,最适合采用普查的是(　　)

A. 对重庆市辖区内长江流域水质情况的调查

B. 对乘坐飞机的旅客是否携带违禁物品的调查

C. 对一个社区每天丢弃塑料袋数量的调查

D. 对重庆电视台“天天630”栏目收视率的调查

2. [中考·遂宁]某校为了了解家长对“禁止学生带手机进入校园”这一规定的意见,随机对全校100名学生家长进行调查,这一问题中样本是(　　)

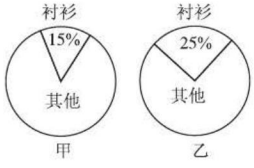
A. 100

B. 被抽取的100名学生家长

C. 被抽取的100名学生家长的意见

D. 全校学生家长的意见

3. 如图所示的是甲、乙两个服装公司销售情况的统计图,从统计图中可以看出(　　)



(第3题图)

A. 甲公司的衬衫销量比乙公司多

B. 乙公司的衬衫销量比甲公司多

C. 甲、乙两公司的衬衫销量一样多

D. 不能判断哪个公司的衬衫销量多

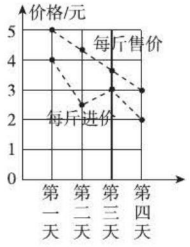
4. 一个容量为80的样本中的最大值是143,最小值是50,取组距为10,则可以分成(　　)

A. 10组　　B. 9组　　C. 8组　　D. 7组

5. 在样本的频数分布直方图中,共有11个小长方形,若中间的小长方形的高等于其他10个小长方形的高的和的$\frac{1}{4}$,且样本容量是60,则中间组的频数为(　　)

A. 12　　B. 0.2　　C. 40　　D. 0.25

6. [中考·宁夏]某商品四天内每天每斤的进价与售价信息如图所示,则售出这种商品每斤利润最大的是(　　)



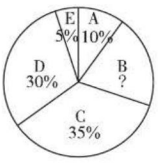
(第6题图)

A. 第一天　　B. 第二天

C. 第三天　　D. 第四天

7. [中考·安徽]自来水公司调查了若干用户的月用水量x(单位:吨),按月用水量将用户分成A,B,C,D,E五组进行统计,并制作了如图所示的扇形统计图.已知除B组以外,参与调查的用户共有64户,则所有参与调查的用户中月用水量在6吨以下的共有(　　)

组别	月用水量 x/吨
A	$0\leqslant x<3$
B	$3\leqslant x<6$
C	$6\leqslant x<9$
D	$9\leqslant x<12$
E	$x\geqslant 12$



(第7题图)

A. 18户　　B. 20户

C. 22户　　D. 24户

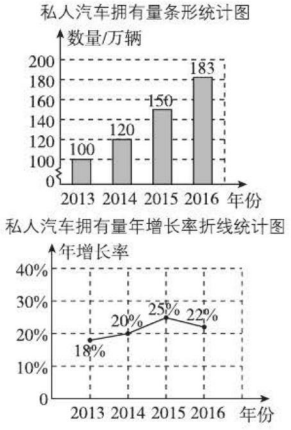
二、填空题

8. 若调查本班同学最喜欢的球类运动,我们采用_____比较合适.(填“普查”或“抽样调查”)

9. 为了了解1 000台某种型号风扇的使用寿命,从中随机抽取10台,对风扇进行试验,在这个问题中,个体指的是_____,样本是_____,样本容量是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. [中考·南京] 下面是某市 2013～2016 年私人汽车拥有量和年增长率的统计图，该市私人汽车拥有量年净增量最多的是_____年，私人汽车拥有量年增长率最大的是_____年.

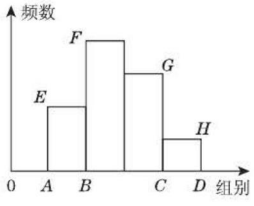


（第 10 题图）

11. 某教育网站就“中小学生对老师上课拖堂现象的态度”进行在线调查，你认为调查结果_____代表性.（填“具有”或“不具有”）

12. 七年级(3)班共有学生 54 人，学习委员调查了本班学生参加课外活动的情况（每人只参加一项活动），其中参加读书活动的有 18 人，参加科技活动的占全班总人数的 $\frac{1}{6}$，参加艺术活动的比参加科技活动的多 3 人，其他学生参加体育活动. 则在扇形统计图中，表示参加体育活动人数的扇形的圆心角是_____度.

13. 已知样本容量为 30，在如图所示的频数分布直方图中，各小长方形的高之比 $AE:BF:CG:DH=2:4:3:1$，则第 2 组的频数为_____.



（第 13 题图）

三、解答题

14. 下面的调查，哪些是普查？哪些是抽样调查？

(1) 为了了解七年级(1)班学生的视力情况，对全班同学进行调查；

(2) 为了了解全国农民的收支状况，从中抽取一部分进行统计；

(3) 灯泡厂为了了解一批灯泡的使用寿命，从中选取了 10 只进行试验；

(4) 为了了解某班同学喜欢的文艺节目情况，对全班同学进行调查.

(5) 为了了解一年内平均每天进入某超市的顾客人数，抽取了 50 天每天进入该超市的顾客人数进行统计.

15. 为了调查七年级男生的身高，随机抽取了 25 名七年级男生，其身高情况如下（单位：cm）：

168，172，164，167，171，162，164，165，168，166，169，165，168，163，157，159，167，160，166，170，174，171，155，163，165.

将上述数据分成如下五组：154.5～158.5，158.5～162.5，162.5～166.5，166.5～170.5，170.5～174.5.

(1) 列出频数分布表；

(2) 画出频数分布直方图.

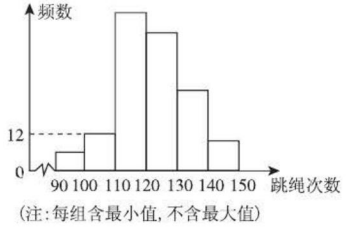
16. 某校为了了解九年级学生的体能情况，抽取了一部分学生进行一分钟跳绳测试，将测试成绩整理后作出如下统计图，甲同学计算出前两组的频率和是 0.12，乙同学计算出跳绳次数不少于 100 次的同学占 96%，丙同学计算出从左至右第二、三、四

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

组的频数比为4∶17∶15. 结合统计图回答下列问题：

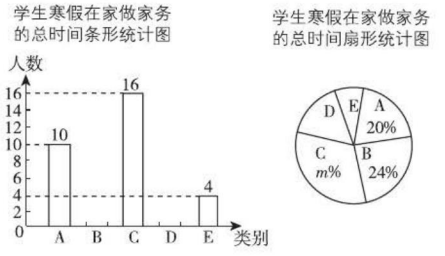
(1)这次共调查了多少人？

(2)若跳绳次数不少于130次为优秀，则这次测试成绩的优秀率是多少？



(第16题图)

17. [中考·沈阳]“勤劳”是中华民族的传统美德，学校要求学生们在家里帮助父母做一些力所能及的家务. 在本学期开学初，小颖随机调查了部分学生寒假在家做家务的总时间，设被调查的每名学生寒假在家做家务的总时间为x小时，将做家务的总时间分为五个类别：A($0 \leqslant x < 10$)，B($10 \leqslant x < 20$)，C($20 \leqslant x < 30$)，D($30 \leqslant x < 40$)，E($x \geqslant 40$). 并将调查结果制成如下两幅不完整的统计图：



(第17题图)

根据统计图提供的信息，解答下列问题：

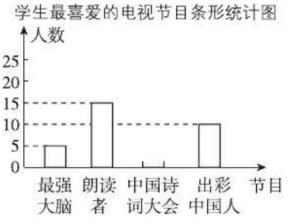
(1)本次共调查了_____名学生；

(2)请根据以上信息补全条形统计图；

(3)扇形统计图中m的值是_____，类别D所对应的扇形圆心角的度数是_____度；

(4)若该校有800名学生，根据抽样调查的结果，请你估计该校有多少名学生寒假在家做家务的总时间不低于20小时.

18. [中考·临沂]为了解某校学生对《最强大脑》《朗读者》《中国诗词大会》《出彩中国人》四个电视节目的喜爱情况，随机抽取了x名学生进行调查统计(要求每名学生选出并且只能选出一个自己最喜爱的节目)，并将调查结果绘制成如下统计图表：



(第18题图)

节目	人数	百分比
最强大脑	5	10%
朗读者	15	b%
中国诗词大会	a	40%
出彩中国人	10	20%

根据以上提供的信息，解答下列问题：

(1)x = _____，a = _____，b = _____；

(2)补全上面的条形统计图；

(3)若该校共有1 000名学生. 根据抽样调查结果，估计该校最喜爱《中国诗词大会》节目的学生有多少名.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第十九章 平面直角坐标系

一起飞跃一维到二维

数学点拨

你将学到的核心考点

- 用有序数对表示位置 □
- 平面直角坐标系 □
- 坐标与图形的位置 □
- 用坐标表示图形的变换 □

我们为你提供的核心方法

- 方位角距离定位法 □
- 割补法 □
- 定义法 □
- 分类讨论思想 □
- 数形结合思想 □
- 转化思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.1 确定平面上物体的位置

核心知识
- 有序数对
- 确定物体位置的方法

知识链接
物体位置的确定 → 有序数对；用方位角和距离

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用有序数对表示位置（重点）

1 定义 有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫做有序数对，记作(a,b).

作用 平面上每一个点都对应着一个有序数对，每一个有序数对都对应着平面上一个点，因此，利用有序数对可以准确地描述物体的位置，即：平面上的点⇔有序数对.

要点精析

(1)有序数对的含义有两层："有序"和"数对"，其中"有序"是指两个数的排列有先后顺序，"数对"是指两数成对出现.

(2)若 $a\neq b$，则有序数对(a,b)与(b,a)表示的是两个不同位置的点.

2 应用类型

(1)按已定"有序数对"表示其他"有序数对"；

(2)按已定"有序数对"在平面上找点的位置；

(3)由平面上的点，写出表示该点位置的"有序数对".

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 按已定"有序数对"表示其他"有序数对"

例1 [中考·盐城]如图 19.1-1，已知棋子"卒"表示为$(-2,3)$，棋子"马"表示为$(1,3)$，则棋子"炮"表示为_____.

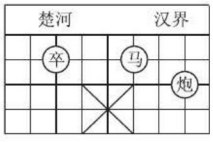


图 19.1-1

导引：先由"卒"$(-2,3)$，"马"$(1,3)$确定"行""列"序号，再写出"炮"的有序数对.

答案：$(3,2)$

考查角度2 按已定"有序数对"在平面上找点的位置

例2 如图 19.1-2 是某教室学生座位的平面图.



图 19.1-2

方法点拨

利用行、列定位法确定点的位置时，首先确定平面内行、列的序号，然后写出表示平面上点的位置的有序数对.

同类变式（答案见213页）

1. 在电影票上，若将"7排6号"简记为$(7,6)$，则"6排7号"可简记为_____；$(8,6)$表示的意义是_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)请说出王明和陈帅的座位位置.

(2)若用(3,2)表示第3排第2列的位置,那么(5,5)表示什么位置?王明和陈帅的座位位置可以怎样表示?

(3)请说出(3,3)和(4,8)分别表示哪两位同学的座位位置.

(4)(2,3)和(3,2)表示的位置相同吗?一般地,若$a\neq b$,(a,b)与(b,a)表示的位置相同吗?

导引: 在平面上确定物体的位置有多种方法,但基本上都需要两个数据,本例可以通过排数和列数来确定位置,即先确定有序数对的第一个数,再确定第二个数.

解: (1)王明的座位位置是第1排第2列;陈帅的座位位置是第5排第4列.

(2)(5,5)表示的位置是第5排第5列;王明的座位位置可表示为(1,2),陈帅的座位位置可表示为(5,4).

(3)(3,3)表示张军的座位位置;(4,8)表示夏凡的座位位置.

(4)(2,3)表示的是第2排第3列的位置,(3,2)表示的是第3排第2列的位置,所以它们表示的位置不相同.

一般地,若$a\neq b$,(a,b)与(b,a)表示的位置不相同.

易错警示

用有序数对来描述物体(点)的位置时,要注意(a,b)与(b,a)(其中$a\neq b$)中a与b的前后顺序不同,描述的位置就不同.如例题中的(3,2)和(2,3)表示不同的两个位置.

考查角度3 利用有序数对表示路径

例3 如图19.1-3,小军家(点A)在经5路和纬4路的十字路口附近,用有序数对(5,4)表示;点B是学校的位置,点C是小芸家的位置,如果用(5,4)→(5,5)→(5,6)→(6,6)→(7,6)→(8,6)表示从小军家到学校的一条路径.

(1)请你用有序数对表示出学校和小芸家的位置;

(2)请你写出从小军家到学校的其他几条路径.(至少写3条)

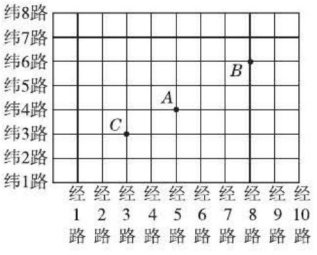


图19.1-3

导引: (1)先找出学校、小芸家各自所处的经、纬的位置的数据,再按题中先经后纬的顺序写出"有序数对";(2)先描出一条路线,再用有序数对表示交点的位置.

解: (1)学校和小芸家的位置分别是(8,6),(3,3).

(2)答案不唯一,如:①(5,4)→(5,5)→(6,5)→(7,5)→(8,5)→(8,6);②(5,4)→(6,4)→(7,4)→(8,4)→(8,5)→(8,6);③(5,4)→(6,4)→(6,5)→(7,5)→(8,5)→(8,6).

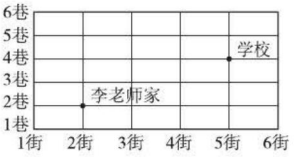
方法点拨

解决此类问题的步骤:(1)明确各交点处的"有序数对";(2)寻找规律,确定路线.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

同类变式 （答案见213页）

2. 如图，李老师家在2街与2巷的十字路口附近，如果用(2，2)→(2，3)→(2，4)→(3，4)→(4，4)→(5，4)表示李老师从家到学校的一条路线. 请你用同样的方式写出李老师由家到学校的另外一条路线：_____.



（第2题图）

点知识 2 用方位角和距离表示平面内点的位置（重点）

1 **方位角** 从某个参照点看物体，视线与正北（或正南）方向射线的夹角称为方位角.

2 **方位角距离定位法** 确定平面内一个物体的位置，可以选择一个参照物，然后用方位角和距离来表示物体的位置，这种表示物体位置的方法称为方位角距离定位法.

3 **表示方法** (1)选取某个点为参照点，过参照点画出表示东西和南北方向的直线；

(2)用量角器量出点 M 相对于参照点的方位角；

(3)用刻度尺量出点 M 与参照点之间的距离，并利用比例尺计算出点 M 与参照点之间的实际距离；

(4)用方位角和距离表示点 M 的位置.

要点精析

(1)用方位角和距离表示平面内点的位置时，必须有两个数据：①该点相对于参照点的方位角；②该点与参照点之间的实际距离.

(2)用方位角和距离表示平面内点的位置和地图上的方向一样，按上北下南、左西右东划分，处于四个直角平分线上的方向分别是东南、东北、西南、西北.

(3)方位角具有规定性，以正北或正南为基准，以向东或向西偏离的角度表示方位，共有四种形式：即北偏东××°，北偏西××°，南偏东××°，南偏西××°.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度 利用方位角和距离表示平面内点的位置

例4 小明绘制了市内的几所学校相对于光明广场（O 点）的位置简图（图19.1-4中1 cm表示5 km）.

东方红中学在光明广场的正南方向，测得 $OA=1.7$ cm，$OB=2$ cm，$OC=2$ cm，$OD=1.4$ cm，$\angle AOC=123°18'$，$\angle AOB=68°24'$，$\angle AOD=88°28'$. 如何确定每个学校的具体位置？

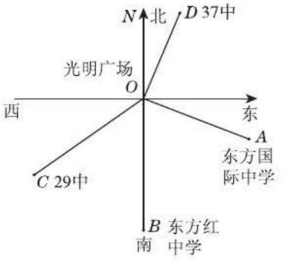


图19.1-4

思路点拨

要确定每个学校的位置，应从光明广场为参照点，通过计算确定各学校所在位置的方位角，最后用方位角和各学校到光明广场的距离来表示各学校的位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 123°18' - 68°24' = 54°54'$；

$\angle NOD = 180° - \angle AOB - \angle AOD = 180° - 68°24' - 88°28' = 23°8'$.

相对于光明广场，东方国际中学在南偏东 68°24′，距离为 8.5 km处；

东方红中学在正南方向，距离为 10 km 处；

29 中在南偏西54°54′，距离为 10 km 处；

37 中在北偏东 23°8′，距离为 7 km 处.

易错警示

用方位角和距离确定物体的位置时，首先要明确参照点的选取，不同的参照点会导致方位角和距离不同.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用不同定位方式确定同一位置

例 5 如图 19.1-5，一个正方形被等分成 4 行 4 列.

(1)若点 A 用(1,1)表示，点 B 用(2,2)表示，点 C 用(0,0)表示，请在图中标出点 C 的位置；

(2)若点 A 用(−3,1)表示，点 B 用(−2,2)表示，点 D 用(0,0)表示，请标出点 D 的位置，并说明(1)题中点 C 应如何表示.

导引： 确定位置的方式是多样的，要能灵活地运用不同的方式确定物体的位置. 由于同一位置上的点的定位方式发生了变化，因而点 C、点 D 的位置也不相同.

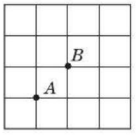


图 19.1-5

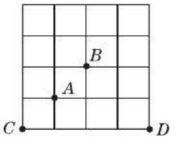


图 19.1-6

解： (1)点 C 的位置如图 19.1-6 所示.

(2)点 D 的位置如图 19.1-6 所示，点 C 可表示为(−4,0).

方法点拨： 有序数对从单个角度来看，它是绝对的，它必须有序；但从整体角度来看，它是相对的，它取决于点(0，0)的位置.

拔尖角度 2 实际综合问题

例 6 象棋中有“马走日，象(相)走田”的规则，在如图 19.1-7 所示的棋盘中，如果“相”的位置表示为(5,8)，则“相”走一步之后所在位置不可能是(　　)

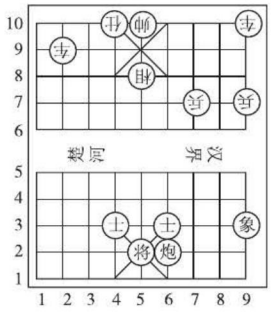


图 19.1-7

A. (7,6)　B. (7,10)　C. (2,6)　D. (3,10)

导引： 由“象(相)走田”的规则可知“相”走过的路径应是一个“田”字，现在“相”在(5,8)这个位置，“相”走一步所能到达的位置有(3,10)，(3,6)，(7,6)，(7,10)，因此“相”不能到达的位置是(2,6).

答案： C

方法点拨： 根据“田”字的结构可知，“相”走一步之后对应的有序数对的第一个数增加 2 或减小 2，即变为 3 或 7；同时第二个数也是增加 2 或减小 2，即变为 6 或 10，因此所在点的位置有(3，6)，(3，10)，(7，6)，(7，10)，共四种情况，由此即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基础巩固练

1. 到电影院看电影需要对号入座，“对号入座”的意思是(　　)

A. 只需要找到排号

B. 只需要找到座位号

C. 既要找到排号，又要找到座位号

D. 随便找座位

2. 海事救灾船前去救援某海域失火轮船需要确定(　　)

A. 方位角

B. 距离

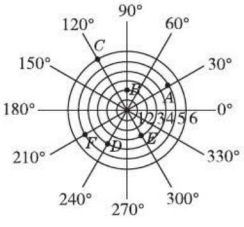
C. 方位角和距离

D. 失火轮船的国籍

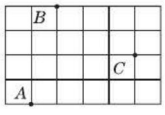
3. 如图，雷达探测器测得六个目标 A,B,C,D,E,F 出现，按照规定的目标表示方法，目标 C,F 的位置表示为 $C(6,120°)$，$F(5,210°)$，按照此方法在表示目标 A,B,D,E 的位置时，其中不正确的是(　　)

A. $A(5,30°)$　　B. $B(2,90°)$

C. $D(4,240°)$　　D. $E(3,60°)$



（第3题图）

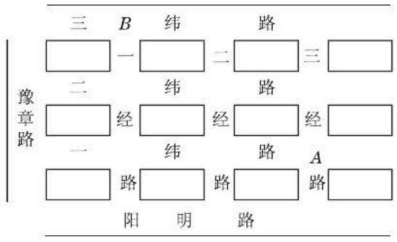


（第5题图）

4. 某人在车间里工作的时间 t 与工作总量 y 组成有序数对 (t,y)，若他的工作效率是不变的，其中两组数分别为 $(4,80)$，$(7,y)$，则 $y=$ _____.

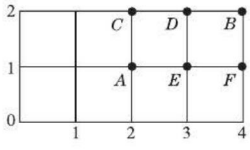
5. 如图，小明家所在的位置 A 用 $(4,2)$ 表示，小兰家所在的位置 B 用 $(5,6)$ 表示，则小丽家所在的位置 C 可表示为_____.

6. 如图，A 表示三经路与一纬路的十字路口，B 表示一经路与三纬路的十字路口，如果用 $(3,1)\to(3,2)\to(3,3)\to(2,3)\to(1,3)$ 表示由 A 到 B 的一条路径，那么你能用同样的方式写出由 A 到 B 的其他路径吗？（任写四种方式即可）



（第6题图）

7. 如图，若用点 $A(2,1)$ 表示放置2个萝卜、1棵青菜；点 $B(4,2)$ 表示放置4个萝卜、2棵青菜.



（第7题图）

(1) 请写出点 C,D,E,F 所表示的意义；

(2) 若一只小兔子从 A 到达 B（顺着方格线走）有以下三条路径可选择：①$A\to C\to D\to B$；②$A\to E\to D\to B$；③$A\to E\to F\to B$.

问：选择哪条路径吃到的萝卜最多？选择哪条路径吃到的青菜最多？

能力提升练

8. 甲看乙的方向为北偏东30°，那么乙看甲的方向是(　　)

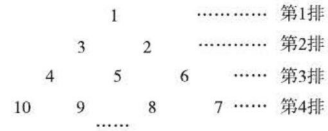
A. 南偏东60°　　B. 南偏西60°

C. 南偏东30°　　D. 南偏西30°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 按下列规律排列一组数对：(1,2)，(4,5)，(7,8)，…，则第五个数对为_____.

10. [探究题] 将正整数按如图所示的规律排列下去，若有序数对(n,m)表示第n排从左到右第m个数，如(4,2)表示正整数9，则表示正整数17的有序数对是_____.

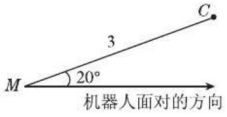


（第10题图）

11. 根据指令(s,A)[说明：$s\geqslant 0$(单位：厘米)；$0°\leqslant A<180°$]，机器人在平面上能完成下列动作：先原地逆时针旋转角度A，再朝其面对的方向沿直线行走距离s，若机器人站在点M处，面对的方向如图所示.

(1) 给机器人下了一个指令$(2,60°)$，机器人移动到点B，请你画出机器人从点M到点B的运动路径；

(2) 若机器人从点M运动到了点C，则给机器人下了一个什么指令？

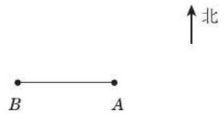


（第11题图）

12. 如图，已知A地在B地的正东方向，在A地观察到C地在北偏东45°方向，在B地观察到C地在北偏东60°方向.

(1) 试用这些条件在图中画出C地的位置；

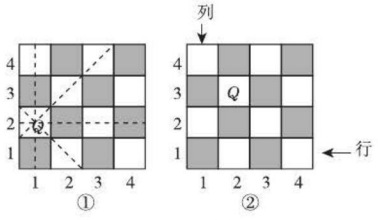
(2) 若A地与C地之间的距离是$10\sqrt{2}$ km，求B地与C地之间的距离.



（第12题图）

思维拓展练

13. [新情境题] 国际象棋、中国象棋和围棋号称世界三大棋种，国际象棋中的“皇后”的威力可比中国象棋中的“车”大得多，“皇后”还能控制她所在的“斜”方向的两条直线上的每一个小方格. 图①是一个4×4的小方格棋盘，图中的“皇后Q”能控制图中虚线所经过的每一个小方格. 在图②中的小方格棋盘中有一“皇后Q”，其所在的位置可用“(2,3)”来表示，请说明“皇后Q”所在的位置“(2,3)”的意义，并用这种表示法分别表示棋盘中不能被该“皇后Q”所控制的四个位置.



（第13题图）

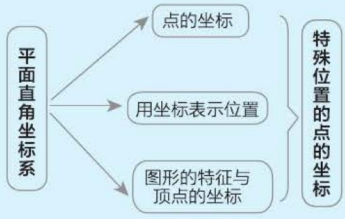
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.2 平面直角坐标系

核心知识

- 平面直角坐标系及点的坐标
- 用坐标表示位置
- 特殊位置的点的坐标

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平面直角坐标系(重点)

1 **坐标** 数轴上的点可以用一个实数来表示，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标.

2 **平面直角坐标系**

(1) **定义**:在平面内，画两条有公共原点且互相垂直的数轴，就构成了平面直角坐标系，简称直角坐标系.

(2) **相关概念**:水平方向的数轴叫做 x 轴(或横轴)，取向右为正方向；竖直方向的数轴叫做 y 轴(或纵轴)，取向上为正方向；x 轴与 y 轴的公共原点叫做坐标原点. 两条数轴统称为坐标轴. 建立了直角坐标系的这个平面叫做坐标平面.

要点精析///

(1) 一般情况下，平面直角坐标系的两条坐标轴的单位长度是一致的；但在实际问题中，受两轴表示的实际意义的影响，两坐标轴的单位长度可以有所不同.

(2) 4 个半轴根据实际问题的需要，可画得长些或短些，但原点必须画出.

拨考向

提分·秘诀

考查角度 利用平面直角坐标系的定义进行识别

例 1 下列语句不正确的是(　　)

A. 平面直角坐标系中，两条互相垂直的数轴的交点是原点

B. 平面直角坐标系所在的平面叫坐标平面

C. 平面直角坐标系中 x 轴、y 轴把坐标平面分成 4 部分

D. 凡是两条互相垂直的直线都能组成平面直角坐标系

导引: 根据平面直角坐标系的概念可知 A，B，C 项正确. D 项不正确，因为平面直角坐标系必须由数轴构成，且构成平面直角坐标系的两条数轴互相垂直、原点重合.

答案: D

规律点拨

本题应用定义法，理解平面直角坐标系必须明确：

(1) 建立平面直角坐标系的平面叫坐标平面；

(2) 平面直角坐标系必须具备：① 由两条数轴组成；② 这两条数轴有公共原点且互相垂直.

同类变式 (答案见 214 页)

1. 关于原点，下列说法中正确的是(　　)

A. 原点在 x 轴上，但不在 y 轴上

B. 原点在 y 轴上，但不在 x 轴上

C. 原点既在 x 轴上，又在 y 轴上

D. 原点既不在 x 轴上，也不在 y 轴上

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识 2 点的坐标(重点)

1 定义 从点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足在 x 轴和 y 轴上对应的点表示的实数分别是 x_0 和 y_0，我们把有序实数对 (x_0,y_0) 称为点 A 的坐标. 其中，x_0 称为点 A 的横坐标，y_0 称为点 A 的纵坐标. 点 A 也记作 $A(x_0,y_0)$. 这里的两个数据，一个表示原点在水平方向上与 A 点的距离，另一个表示原点在竖直方向上与 A 点的距离.

要点精析

(1) 记一个点的坐标时，一定要横坐标在前，纵坐标在后，中间用逗号隔开.

(2) 点的坐标是有序数对，数对 (a,b) 和 (b,a) 尽管数相同，但由于顺序不同，因此当 $a\neq b$ 时，这两个坐标表示的是两个不同的点.

(3) 点 (a,b) 到 x 轴与 y 轴的距离分别是 $|b|$ 与 $|a|$.

2 求一个点的坐标的方法



(1) 过点向两坐标轴作垂线，并读出垂足在两坐标轴上的坐标；

(2) 写出坐标，横坐标在前，纵坐标在后，中间用逗号隔开，再用小括号括起来；

(3) 原点 O 的坐标是 $(0,0)$，x 轴上的点的坐标为 $(a,0)$，y 轴上的点的坐标为 $(0,b)$.

3 平面直角坐标系内的点与有序数对的关系

(1) 平面内的任一点，都有唯一的一个有序数对(点的坐标)与它对应.

(2) 任意一个有序数对(点的坐标)在坐标平面内都有唯一的一个点和它对应，即坐标平面内的点与有序数对是一一对应的.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用点的位置确定点的坐标

例 2 如图 19.2-1，写出点 A,B,C,D,E,F,G,O 的坐标.

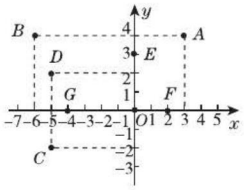


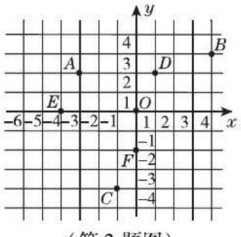
图 19.2-1

导引： 先从该点向 x 轴作垂线，垂足在 x 轴上的坐标为该点的横坐标，如点 A 的横坐标为 3；再从该点向 y 轴作垂线，垂足在 y 轴上的坐标为该点的纵坐标，如点 A 的纵坐标为 4，其他各点类似可得.

解： $A(3,4)$，$B(-6,4)$，$C(-5,-2)$，$D(-5,2)$，$E(0,3)$，$F(2,0)$，$G(-4,0)$，$O(0,0)$.

同类变式 (答案见 214 页)

2. 如图，写出点 A,B,C,D,E,F,O 的坐标.



(第 2 题图)

方法点拨

确定点的坐标的方法：首先从该点向 x 轴作垂线，垂足在 x 轴上的坐标为该点的横坐标；再从该点向 y 轴作垂线，垂足在 y 轴上的坐标为该点的纵坐标；最后用有序数对将它表示出来，即横坐标在前，纵坐标在后，中间用“，”分开，并用小括号括起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 根据点的坐标在平面直角坐标系中描点

例3 请你在如图19.2-2所示的平面直角坐标系中，描出以下各点：

$A(3,2)$，$B(0,3)$，$C(-1,-2)$，$D(2,-1)$.

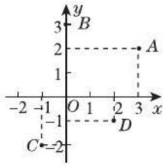


图19.2-2

导引： 若想描出点$A(3,2)$，可先在x轴上找出表示3的点，并过该点作x轴的垂线；然后在y轴上找出表示2的点，并过该点作y轴的垂线，两条垂线的交点即为点A. 利用同样的方法，可以描出点B,C,D.

解： 描出的点A,B,C,D如图19.2-2所示.

考查角度3 由点到坐标轴的距离确定点的坐标

例4 已知点P到x轴的距离为2，到y轴的距离为1. 如果过点P作两条坐标轴的垂线，垂足分别在x轴的正半轴上和y轴的负半轴上，那么点P的坐标是(　　)

A. $(2,-1)$　　B. $(1,-2)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(1,2)$

导引： 由点P到x轴的距离为2，可知点P的纵坐标的绝对值为2，又因为垂足在y轴的负半轴上，所以纵坐标为-2. 由点P到y轴的距离为1，可知点P的横坐标的绝对值为1，又因为垂足在x轴的正半轴上，所以横坐标为1. 故点P的坐标是$(1,-2)$.

答案： B

同类变式 (答案见214页)

3. 已知点$O(0,0)$，$B(3,2)$，点A在x轴上，且$S_{\triangle ABO}=2$，求A点的坐标.

考查角度4 利用点的坐标作图

例5 在平面直角坐标系中描出下列两组点，并用线段顺次连接起来：

(1)$(-9,0)$，$(-9,3)$，$(-10,3)$，$(-6,5)$，$(-2,3)$，$(-3,3)$，$(-3,0)$，$(-9,0)$；

(2)$(3,0)$，$(3,3)$，$(0,3)$，$(2,5)$，$(1,5)$，$(3,7)$，$(2,7)$，$(3.5,9)$，$(5,7)$，$(4,7)$，$(6,5)$，$(5,5)$，$(7,3)$，$(4,3)$，$(4,0)$，$(3,0)$.

第(1)组点和第(2)组点分别连成什么图案？

方法点拨

根据点的坐标在平面直角坐标系中描点的方法：假设点P的坐标为(a，b)，先在x轴上找到坐标为a的点A，在y轴上找到坐标为b的点B，再分别过点A、点B作x轴、y轴的垂线，两条垂线的交点就是所要描出的点P. 通过平面直角坐标系，把平面中的点和坐标结合起来，运用了数形结合思想.

易错警示

本例的易错点有三处：① 混淆距离与坐标之间的区别；② 不知道与“点P到x轴的距离”对应的是纵坐标的绝对值，与“点P到y轴的距离”对应的是横坐标的绝对值；③ 忽略坐标的符号. 若本例只给出距离而无附加条件，则点P的坐标有四个.

易错警示

解答本题一定要注意“顺次连接”，就是将每一组中的各点按一定顺序连接起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 在平面直角坐标系中描出各点，并用线段顺次连接起来.

解： 如图 19.2-3 所示. 第(1)组点连成一栋“房子”，第(2)组点连成一棵“大树”.

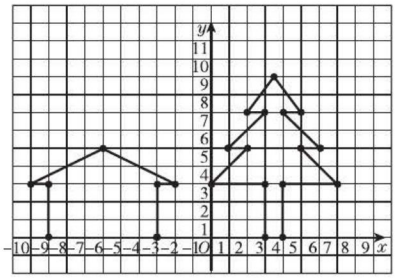


图 19.2-3

知识 3 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征(重点)

1 象限的划分 如图 19.2-4，平面直角坐标系的两条坐标轴将平面分成了四个部分，从右上方的部分说起，按逆时针方向，各部分依次叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 坐标轴上的点不属于任何一个象限.

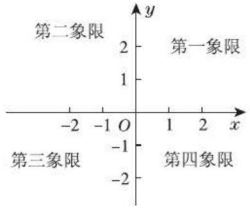


图 19.2-4

要点精析///

(1)“象限”的划分，是从“右上”起，按“逆时针”方向排列的；

(2)坐标轴上的点不属于任何一个象限.

2 平面直角坐标系中各区域的点的坐标特征

点 $M(x,y)$ 所处的位置		坐标特征
象限内的点	点 M 在第一象限	M(正,正)
	点 M 在第二象限	M(负,正)
	点 M 在第三象限	M(负,负)
	点 M 在第四象限	M(正,负)
坐标轴上的点	点 M 在 x 轴上	在 x 轴正半轴上：M(正,0)
		在 x 轴负半轴上：M(负,0)
	点 M 在 y 轴上	在 y 轴正半轴上：M(0,正)
		在 y 轴负半轴上：M(0,负)

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 由点的坐标确定点的位置

例6 [中考·株洲]在平面直角坐标系中，点 $A(2,-3)$ 位于哪个象限？(　　)

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

导引： 根据平面直角坐标系中四个象限内的点的坐标特征，即可确定点的位置.

答案： D

方法点拨

由点的坐标(a,b)确定点的位置的方法：

(1) 由点的坐标的符号确定点的位置；

(2) 分别过x轴上表示a的点和y轴上表示b的点，作x轴和y轴的垂线，这两条垂线的交点位置即为该点的位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 由点的特殊位置确定点的坐标

例7 已知点 $A(x^2-2,\ 1-x)$ 在 y 轴的正半轴上，求 A 点的坐标.

导引： 根据点在 y 轴上的特征——横坐标为0，可求出 x 的值，然后再确定 A 点的坐标.

解： 因为 A 点在 y 轴上，所以 $x^2-2=0$，所以 $x=\pm\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$1-x=1-\sqrt{2}<0$，

不符合 A 点在 y 轴的正半轴上的条件，所以舍去.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$1-x=1+\sqrt{2}>0$，符合题意.

所以 A 点的坐标为 $(0,1+\sqrt{2})$.

技巧点拨

已知点 (a,b)，若在 x 轴的正半轴上，则 $a>0$，$b=0$；若在 x 轴的负半轴上，则 $a<0$，$b=0$；若在 y 轴的正半轴上，则 $a=0$，$b>0$；若在 y 轴的负半轴上，则 $a=0$，$b<0$.

知识4 特殊位置关系的点的坐标特征（难点）

1 平行线上的点的坐标特征

(1)如图19.2-5，在与 x 轴平行的直线上，所有点的纵坐标相等，点 A，B 的纵坐标都等于 m；

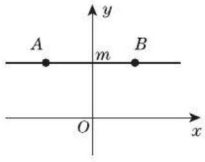


图19.2-5

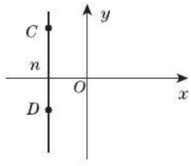
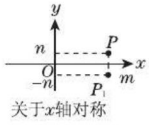


图19.2-6

(2)如图19.2-6，在与 y 轴平行的直线上，所有点的横坐标相等，点 C，D 的横坐标都等于 n.

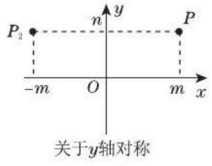
2 对称点的坐标特征

(1)如图19.2-7，点 $P(m,n)$ 关于 x 轴的对称点为 $P_1(m,-n)$，即横坐标不变，纵坐标互为相反数；



关于x轴对称

图19.2-7

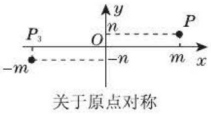


关于y轴对称

图19.2-8

(2)如图19.2-8，点 $P(m,n)$ 关于 y 轴的对称点为 $P_2(-m,n)$，即纵坐标不变，横坐标互为相反数；

(3)如图19.2-9，点 $P(m,n)$ 关于原点的对称点为 $P_3(-m,-n)$，即横、纵坐标都互为相反数.



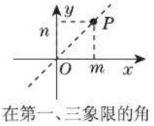
关于原点对称

图19.2-9

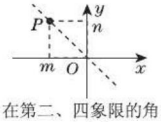


3 两条坐标轴夹角平分线上的点的坐标特征

(1)如图19.2-10，若点 $P(m,n)$ 在第一、三象限的角平分线上，则 $m=n$，即横、纵坐标相等；



在第一、三象限的角平分线上



在第二、四象限的角平分线上

图19.2-10　　图19.2-11

(2)如图19.2-11，若点 $P(m,n)$ 在第二、四象限的角平分线上，则 $m=-n$，即横、纵坐标互为相反数.

拔考向

提分·秘诀

考查角度 利用特殊位置的点的坐标特征解决问题

例8 已知点 $A(a,-5)$，$B(8,b)$，根据下列要求，确定 a，b 的值或范围.

(1)A，B 两点关于 y 轴对称；

(2)A，B 两点关于原点对称；

(3)$AB\parallel x$ 轴；

(4)A，B 两点在第一、三象限的角平分线上.

易错警示

点 (a,b) 关于 x 轴的对称点坐标是 $(a,-b)$，关于 y 轴的对称点坐标是 $(-a,b)$，关于原点的对称点坐标是 $(-a,-b)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：(1)两点关于y轴对称时，它们的横坐标互为相反数，而纵坐标相同；

(2)两点关于原点对称时，两点的横、纵坐标都互为相反数；

(3)两点连线平行于x轴时，这两点纵坐标相同(但横坐标不同)；

(4)当两点位于第一、三象限的角平分线上时，每个点的横、纵坐标相同.

解：(1)当点$A(a,-5)$，$B(8,b)$关于y轴对称时，有$a=-8$，$b=-5$.

(2)当点$A(a,-5)$，$B(8,b)$关于原点对称时，有$a=-8$，$b=5$.

(3)当$AB/\!/x$轴时，有$a\neq 8$，$b=-5$.

(4)当A，B两点位于第一、三象限的角平分线上时，有$a=-5$，$b=8$.

▲同类变式(答案见214页)

4. 已知点$A(a+2b,1)$，$B(-2,2a-b)$.

(1)若点A，B关于x轴对称，则$a=$_____，$b=$_____；

(2)若点A，B关于y轴对称，则$a+b=$_____.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用点的坐标特征求三角形的面积

例9 在平面直角坐标系中，已知$A(-2,3)$，$B(-1,0)$，$C(4,0)$，求三角形ABC的面积.

导引：由于点B，C在x轴上，因此可以以BC为底边、点A到x轴的距离为BC边上的高进行求解.

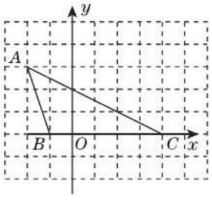


图19.2-12

解：三角形ABC如图19.2-12所示.

$\because B(-1,0)$，$C(4,0)$，$\therefore BC=5$.

又$\because A(-2,3)$，

$\therefore$点A到x轴的距离为3.

$\therefore$三角形ABC的面积为$\frac{1}{2}\times 5\times 3=7.5$.

技巧点拨：在平面直角坐标系中，点到x轴的距离是该点纵坐标的绝对值，到y轴的距离是该点横坐标的绝对值.

拔尖角度2 用割补法求平面直角坐标系中图形的面积

例10 [一题多解]如图19.2-13，已知三角形ABC，点$A(-2,1)$，$B(1,-3)$，$C(3,4)$，求三角形ABC的面积.

导引：因为三边均不平行于坐标轴，所以我们无法直接求边长，也无法求高，不易求解，因此需另想办法. 根据平面直角坐标系的特点，可以将三角形ABC围在一个梯形或长方形中.

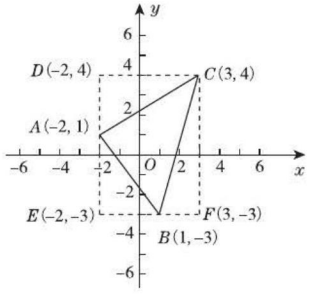


图19.2-13

解：过点A作x轴的垂线，

过点B作y轴的垂线，

过点C分别作x轴、y轴的垂线，

交于D，E，F三点，如图19.2-13所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法一：$S_{三角形ABC}=S_{长方形CDEF}-S_{直角三角形ACD}-S_{直角三角形ABE}-S_{直角三角形BCF}=CD\cdot DE-\frac{1}{2}AD\cdot CD-\frac{1}{2}AE\cdot BE-\frac{1}{2}BF\cdot CF=5\times7-\frac{1}{2}\times3\times5-\frac{1}{2}\times4\times3-\frac{1}{2}\times2\times7=\frac{29}{2}$.

方法二：$S_{三角形ABC}=S_{梯形BCDE}-S_{直角三角形ACD}-S_{直角三角形ABE}=\frac{1}{2}(BE+CD)\cdot DE-\frac{1}{2}AD\cdot CD-\frac{1}{2}AE\cdot BE=\frac{1}{2}\times(3+5)\times7-\frac{1}{2}\times3\times5-\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{29}{2}$.

方法三：$S_{三角形ABC}=S_{梯形CAEF}-S_{直角三角形ABE}-S_{直角三角形BCF}=\frac{1}{2}(AE+CF)\cdot EF-\frac{1}{2}AE\cdot BE-\frac{1}{2}BF\cdot CF=\frac{1}{2}\times(4+7)\times5-\frac{1}{2}\times4\times3-\frac{1}{2}\times2\times7=\frac{29}{2}$.

规律点拨： 本题运用了割补法，对于平面直角坐标系中的三角形，可以通过作垂线，运用割补法将三角形补形，将它转化为长方形和直角三角形或直角梯形和直角三角形，通过这些图形面积的和差关系来求原三角形的面积.

拔尖角度 3 用平面直角坐标系探究动点问题

例 11 如图 19.2-14，动点 P 在平面直角坐标系中按箭头所示方向运动，第 1 次从原点运动到点(1,1)，第 2 次接着运动到点(2,0)，第 3 次接着运动到点(3,2)，…，按这样的运动规律，经过第 2 017 次运动后，动点 P 的坐标是_____.

导引： 根据如图19.2-14 所示的点 P 的坐标变化的规律，可以看出：①点 P 的横坐标依次为 1,2,3,4，…，即点 P 的横坐标等于运动的次数，所以第 2 017 次运动后，点 P 的横坐标是 2 017；②点 P 的纵坐标依次是 1,0,2,0,1,0,2,0，…，即每运动四次为一个循环，因为 $2\,017\div4=504\cdots\cdots1$，所以运动第 2 017 次后，点 P 的纵坐标与第 1 次运动后的纵坐标相同，所以经过第 2 017 次运动后，点 P 的坐标为(2 017,1).

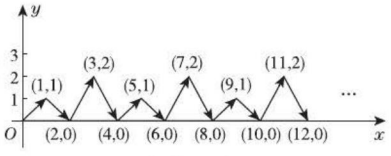


图 19.2-14

答案： (2 017,1)

技巧点拨： 本题的解题技巧在于观察图中动点 P 的坐标的变化规律，因为点 P 的横、纵坐标变化情况不同，所以应对点 P 的横、纵坐标变化情况分别进行分析，其中，找到点 P 的纵坐标按照一定的周期循环是解题的关键.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 214 页)

基础巩固练

1. [中考·金华] 点 $P(4,3)$ 所在的象限是(　　)
   A. 第一象限
   B. 第二象限
   C. 第三象限
   D. 第四象限

2. 若点 P 在第四象限，且点 P 到 x 轴、y 轴的距离分别为 4,3，则点 P 的坐标为(　　)
   A. $(4,-3)$　　B. $(-4,3)$
   C. $(-3,4)$　　D. $(3,-4)$

3. 点 $M(x,y)$ 的坐标满足 $xy<0$，则点 M 在(　　)
   A. 第一象限
   B. 第一或第三象限
   C. 第二象限
   D. 第二或第四象限

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·武汉] 点 $A(-3,2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为(　　)

A. $(3,-2)$

B. $(3,2)$

C. $(-3,-2)$

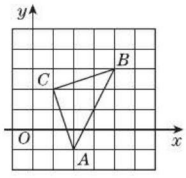
D. $(2,-3)$

5. [中考·甘肃] 已知点 $P(m+2,2m-4)$ 在 x 轴上,则点 P 的坐标是(　　)

A. $(4,0)$　　B. $(0,4)$

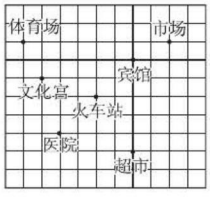
C. $(-4,0)$　　D. $(0,-4)$

6. 在如图所示的直角坐标系中,三角形 ABC 的顶点都在网格格点上,其中 A 点坐标为 $(2,-1)$,则三角形 ABC 的面积为_____.



(第 6 题图)

7. 下图是某城市部分简图,小方格的边长为 1 个单位长度,请以火车站所在位置为坐标原点建立平面直角坐标系,并分别写出各场所的坐标.



(第 7 题图)

8. 在坐标平面内描出下列各点:$A(-1,4)$,$B(0,3)$,$C(1,2)$,$D(2,1)$,$E(3,0)$,$F(4,-1)$. 这6 个点的位置关系怎样? 它们的横坐标 x 和纵坐标 y 之间有什么关系?

能力提升练

9. [中考·甘肃] 已知点 $P(0,m)$ 在 y 轴的负半轴上,则点 $M(-m,-m+1)$ 在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

10. 在平面直角坐标系中,点 $P(m^2+2,-4)$ 一定在第_____象限.

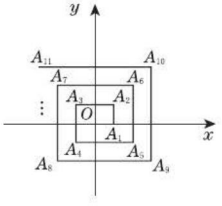
11. 已知 $A(1,2)$,$B(x,y)$,$AB\parallel x$ 轴,且 B 到 y 轴的距离为 2,则点 B 的坐标是_____.

12. 已知点 $A(a,0)$ 和点 $B(0,5)$,且直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积等于 10,则 a 的值是_____.

思维拓展练

13. 如图,已知点 $A_1(1,0)$,$A_2(1,1)$,$A_3(-1,1)$,$A_4(-1,-1)$,$A_5(2,-1)$,…,则点 $A_{2\,016}$ 的坐标为_____.

【导学号:1553889】



(第 13 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.3 坐标与图形的位置

核心知识

- 用坐标表示图形中点的位置
- 用坐标表示实际问题中的地理位置

知识链接

图形中的点、地理位置 → 点的坐标 → 建立平面直角坐标系

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 建立平面直角坐标系（重点）

1 根据已知条件建立平面直角坐标系的步骤

(1)分析条件，选择适当的点作为坐标原点；

(2)过原点在两个互相垂直的方向上分别作 x 轴与 y 轴；

(3)确定正方向，单位长度等.

2 根据已知条件建立平面直角坐标系的常用方法

(1)以某个已知点为原点；

(2)以图形中某条线段所在直线为 x 轴(或 y 轴)；

(3)以已知线段的中点为原点；

(4)以两条直线的交点为原点；

(5)利用图形的轴对称性把对称轴定为 y 轴(或 x 轴)等.

总之，原则就是使计算简便.

3 易错警示

(1)坐标原点不同，所得到的直角坐标系就不同，从而求出的同一个点的坐标也不会相同.

(2)在有多种方法建立直角坐标系时，往往考虑建立使计算比较简便的直角坐标系.

拨考向

提分·秘诀

考查角度 建立适当的平面直角坐标系确定几何图形顶点的坐标

例1 如图 19.3-1，长方形 $ABCD$ 的宽 AB 为 4，长 BC 为 6，按下列要求分别建立平面直角坐标系：

(1)使点 D 坐标为(6,4)；　(2)使点 D 坐标为(0,4)；

(3)使点 B 坐标为(−3,−2)；(4)使点 B 坐标为(−3,−4).

导引： (1)先找到坐标原点，因为点 D 坐标为(6,4)，所以坐标原点在点 D 左边 6 个单位长度、下边 4 个单位长度处，即点 B；以点 B 为原点，BC，AB 所在直线分别为 x 轴和 y 轴，建立平面直角坐标系. (2)(3)(4)题的方法同(1)题.

解： (1)如图 19.3-2 所示.

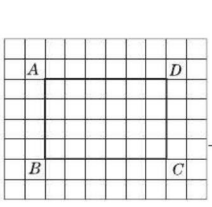


图 19.3-1

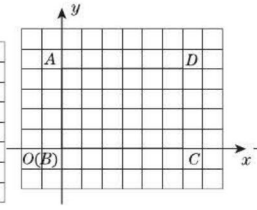


图 19.3-2

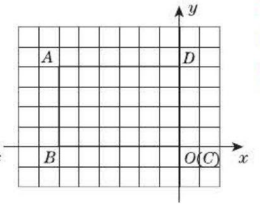


图 19.3-3

(2)如图 19.3-3 所示.　(3)如图 19.3-4 所示.

(4)如图 19.3-5 所示.

方法点拨

在几何图形中建立适当直角坐标系的一般方法：(1)使图形中尽量多的点在坐标轴上；(2)以某些特殊线段所在直线为 x 轴或 y 轴；(3)若某图形被一条直线分得的两部分形状、大小相同，则可以将此直线作为 x 轴或 y 轴；(4)以某已知点为原点，使它的坐标为(0，0).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

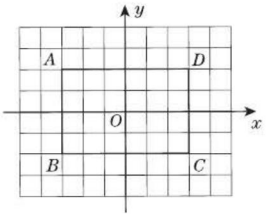


图 19.3-4

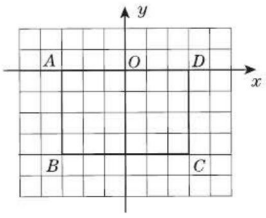


图 19.3-5

点知识 2 用坐标表示地理位置(重点)

1 利用平面直角坐标系表示地理位置的方法

(1)建立平面直角坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、y 轴及其正方向；

(2)根据具体问题确定适当的单位长度；

(3)在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和各个地点的名称.


用坐标表示地理位置

要点精析///

(1)建立平面直角坐标系的方法不是唯一的，建立平面直角坐标系的方法不同，解题的繁简程度也不同，因此建立平面直角坐标系时，要本着方便、简单、美观的原则；

(2)选取坐标原点要“适当”，一般取比较有名的地点，或所要绘制的区域内较居中的位置；

(3)当地点比较集中且坐标平面较小时，各地点的名称在图上可以用代号标出，在图外另附名称.

2 易错警示 平面直角坐标系变化时，坐标平面内的各点坐标发生变化，但各点之间的相对位置并不会发生变化.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用坐标表示地理位置

例2 根据下面的条件画一幅示意图，并在图中标出各个景点的位置和坐标.

菊花园：从中心广场向北走 150 m，再向东走 150 m.

湖心亭：从中心广场向西走 150 m，再向北走 100 m.

松风亭：从中心广场向西走 100 m，再向南走 50 m.

育德泉：从中心广场向北走 200 m.

导引：各个景点的位置均是以中心广场为参照点来描述的，故选中心广场为原点，取东西方向为 x 轴方向(向东为正)，南北方向为 y 轴方向(向北为正)，建立直角坐标系，并规定一个单位长度代表 50 m，根据行走方向和距离确定各景点的位置，标上坐标和名称.

解：如图19.3-6，选中心广场为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 50 m.

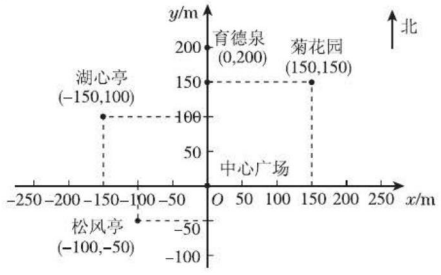


图 19.3-6

方法点拨

建立平面直角坐标系描述物体的位置时，要选择一个适当的参照点作为原点，一般将正北方向作为 y 轴正方向，将正东方向作为 x 轴正方向，选取适当的长度为单位长度.建立的平面直角坐标系不同，所得同一个点的坐标也不同；建立的直角坐标系在符合题意的基础上，应尽量使较多的点落在坐标轴上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用已知坐标找地理位置

例3 ［创新题］如图19.3-7为某废墟示意图，由于雨水冲蚀，残缺不全，依稀可见钟楼A的坐标为$(5,-2)$，街口B的坐标为$(5,2)$，资料记载阿明先生的祖居的坐标为$(2,1)$，你能帮助阿明先生找到他的祖居吗？

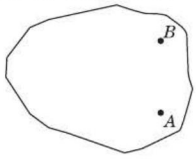


图19.3-7

导引： 根据钟楼A的坐标为$(5,-2)$、街口B的坐标为$(5,2)$确定x轴及单位长度，而A，B两点的横坐标都是5，知$AB\parallel y$轴且在y轴右侧，与y轴距离5个单位长度. 根据这些条件建立平面直角坐标系，找出坐标为$(2,1)$的点.

解： 根据题意建立平面直角坐标系如图19.3-8，阿明先生的祖居在点C处.

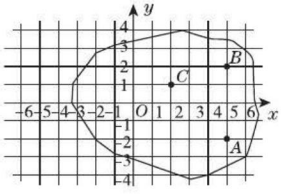


图19.3-8

方法点拨

遇到此类问题，先根据已知坐标确定平面直角坐标系，然后确定所求点的位置.



数学素养提升

笛卡儿的《几何学》

笛卡儿生于法国的一个贵族家庭，从小好奇心强，勤奋好学，自学了大量的数学、哲学方面的书籍，这些积累成为他数学和哲学思想的主要来源.笛卡儿毕业于法国巴黎普瓦捷大学，获法律学位.毕业两年后，他不满足于书本知识，决心走向社会，“去读世界这本大书”.于是，他入伍随军远游，但他始终在专心思考着数学与哲学问题.笛卡儿认为，希腊人的综合几何只研究一些非常抽象且看起来无用的问题，过于依赖图形，束缚了人的想象力；而对于当时流行的代数，他认为过于强调法则和公式，不能成为一门有利于增进智力的科学；他对于三段论逻辑也有看法，认为不产生任何新的结果.因此，笛卡儿对逻辑学、几何学和代数学进行了系统的思考，从而建立了一种“普遍的数学”.

《几何学》是笛卡儿唯一公开发表的数学著作.这本书的发表标志着解析几何学的诞生，是数学史上划时代的光辉著作.笛卡儿首先建立了坐标思想，引入坐标和变量的概念，使变量数学开始登上历史舞台，从而使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来，也就是说，可以用代数方法研究几何问题，也可以运用几何方法解决代数问题，对后来牛顿、莱布尼茨建立微积分理论起到关键的作用，为当时科学的发展提供了数学的工具，推动了17世纪以来数学的大发展.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 215 页）

基础巩固练

1. 张老师家在学校正东 300 米处，从张老师家向北走 250 米就到李老师家. 若选取学校为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，并规定一个单位长度代表 50 米，建立平面直角坐标系，则李老师家的位置可用坐标表示为（　　）

A. $(-300,-250)$　　B. $(300,250)$

C. $(-250,-300)$　　D. $(250,300)$

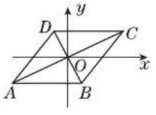
2. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点与坐标原点 O 重合，且点 A 和点 B 的坐标分别为 $(-2,-1)$ 和 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$，则点 C 和点 D 的坐标分别为（　　）

A. $(2,1)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

B. $(2,-1)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

C. $(-2,1)$ 和 $\left(\frac{1}{2},1\right)$

D. $(-1,-2)$ 和 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

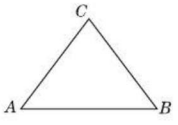


（第 2 题图）

3. 一个长方形的三个顶点坐标分别为 $(-1,-1)$，$(-1,2)$，$(3,-1)$，则它的第四个顶点的坐标为_____.

4. 已知三角形 ABC 的顶点 A，B 的坐标分别为 $(-1,0)$，$(3,0)$，若顶点 C 在 y 轴上，且三角形 ABC 的面积为 6，则顶点 C 的坐标为_____.

5. 如图，在三角形 ABC 中，已知 $AB=6$，$AC=BC=5$，建立适当的直角坐标系，把三角形 ABC 各个顶点的坐标写出来.



（第 5 题图）

能力提升练

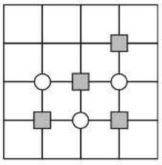
6. 小莹和小博士下棋，小莹执圆子，小博士执方子. 如图，棋盘中心方子的位置用 $(-1,0)$ 表示，右下角方子的位置用 $(0,-1)$ 表示. 小莹将第 4 枚圆子放入棋盘后，所有棋子构成一个轴对称图形. 她放的位置是（　　）

A. $(-2,1)$

B. $(-1,1)$

C. $(1,-2)$

D. $(-1,-2)$


（第 6 题图）

7. 在一次“寻宝”游戏中，小明已经找到了坐标为 $(-3,2)$ 和 $(3,2)$ 的 A，B 两个标志点，同时也知道藏宝地点是坐标为 $(4,4)$ 的 C 点，除此之外不知其他信息. 小明非常想找到宝藏，但不知道如何确定直角坐标系，你能帮助他建立直角坐标系吗？（直接建立直角坐标系，并标出 A，B，C 的位置）

思维拓展练

8. 某地区两条交通主干线 l_1 与 l_2 互相垂直，并交于点 O，现以 l_2 为 x 轴、l_1 为 y 轴且取 100 km 为 1 个单位长度建立平面直角坐标系，根据地震监测部门预报，该地区最近将有一次地震，震中位置在 $P(100,-200)$ 处，影响范围半径为 300 km.

(1) 按题意画出平面直角坐标系，并标出震中位置；

(2) 在平面直角坐标系内画出地震影响范围，并利用图判断下列城市是否受到地震影响.

城市：$O(0,0)$，$A(-300,0)$，$B(0,100)$，$C(-150,-400)$，$D(0,-400)$，$E(200,-400)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.4 坐标与图形的变化

核心知识

- 用坐标表示图形的平移
- 用坐标表示图形的轴对称
- 用坐标表示图形的放缩

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用坐标表示点的平移(重点)

1 点在坐标系中的平移 在平面直角坐标系中，某个点经过平移后，其位置发生变化；相应地，其坐标也发生变化.

2 点的平移与坐标变化的关系 根据点的平移情况可以得到平移后点的坐标变化情况；反过来，根据平移后点的坐标变化情况，可以得到点的平移情况，即：

$$(x,y)\xrightarrow[\text{向左平移 } a \text{ 个单位长度}]{\text{向右平移 } a \text{ 个单位长度}}(x+a,y)$$

$$(x,y)\xrightarrow[\text{向下平移 } b \text{ 个单位长度}]{\text{向上平移 } b \text{ 个单位长度}}(x,y+b)$$

要点精析///

(1)将点左右平移，纵坐标不变；上下平移，横坐标不变；

(2)将点向右(上)平移几个单位长度，其横(纵)坐标就加几；

(3)将点向左(下)平移几个单位长度，其横(纵)坐标就减几.

拨考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 由点的平移情况求点的坐标

例1 [中考·安顺]点 $P(-2,-3)$ 向左平移1个单位长度，再向上平移3个单位长度，则所得到的点的坐标为(　　)

A. $(-3,0)$　　B. $(-1,6)$

C. $(-3,-6)$　　D. $(-1,0)$

导引：根据平移规律，点 $P(-2,-3)$ 向左平移1个单位长度，所以横坐标由 -2 变化为 -3(即 $-2-1=-3$)；再向上平移3个单位长度，所以纵坐标由 -3 变为0(即 $-3+3=0$)，故所得到的点的坐标为 $(-3,0)$. 故选A.

答案：A

技巧点拨

知平移求坐标的口诀：左右平移，横坐标左减右加；上下平移，纵坐标上加下减.

同类变式 (答案见215页)

1. [中考·广安]将点 $A(1,-3)$ 沿 x 轴向左平移3个单位长度，再沿 y 轴向上平移5个单位长度后得到的点 A' 的坐标为_____.

考查角度2 利用点的坐标变化确定点的平移情况

例2 [中考·绍兴]在如图19.4-1所示的平面直角坐标系内，画在透明胶片上的平行四边形 $ABCD$，点 A 的坐标是 $(0,2)$. 现将这张胶片平移，使点 A 落在点 $A'(5,-1)$ 处，则点 A 的平移情况是(　　)

技巧点拨

由点的坐标变化确定点的平移情况的方法：在判断点的平移时，终点与

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

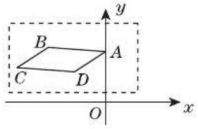


图 19.4-1

A. 先向右平移 5 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

B. 先向右平移 5 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度

C. 先向右平移 4 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

D. 先向右平移 4 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度

导引： 由点 $A(0,2)$ 平移到点 $A'(5,-1)$，可得出平移方向与距离. 即先向右平移 5 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度. 故选 B.

答案： B

始点的横坐标之差即为沿 x 轴的平移情况，若差值为正，则表示向右平移；若差值为负，则表示向左平移. 同理，终点与始点的纵坐标之差即为沿 y 轴的平移情况，若差值为正，则表示向上平移；若差值为负，则表示向下平移.

点知识 2 图形的平移与点的坐标

1 图形在坐标平面中的平移是指在平面直角坐标系中，保持坐标轴不动的情况下，图形的整体移动. 图形在坐标平面中平移变换的实质：(1) 图形的位置及表示位置的坐标发生变化；(2) 图形的形状、大小、方向不变.

2 图形的平移与图形上各点的坐标变化的关系

(1) 因为图形的平移是图形的整体平移，所以已知图形的平移情况，即可得到图形上各点坐标的变化情况；

(2) 平移时，因为图形上各点坐标的变化情况都相同，所以已知图形上某点坐标的变化情况，即可知道图形的变化情况.

要点精析///

(1) 图形的平移首先应转化为图形顶点的平移，再按照点的平移规律进行平移.

(2) 将一个图形依次沿两个坐标轴平移得到的图形，也可由原来的图形作一次平移得到.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 由点的坐标变化确定图形的平移情况

例 3 如图 19.4-2，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-4,-4)$，$B(-2,-3)$，$C(-3,-1)$.

(1) 将 $\triangle ABC$ 三个顶点的横坐标都加上 5，纵坐标不变，分别得到点 A_1，B_1，C_1，依次连接 A_1，B_1，C_1 各点，所得 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 在大小、形状和位置上有什么关系？

(2) 将 $\triangle ABC$ 三个顶点的纵坐标都加上 4，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，依次连接 A_2，B_2，C_2 各点，所得 $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 在大小、形状和位置上有什么关系？

导引： (1) 纵坐标不变，横坐标都加上 5，就是将 $\triangle ABC$ 向右平移 5 个单位长度；

(2) 横坐标不变，纵坐标都加上 4，就是将 $\triangle ABC$ 向上平移 4 个单位长度.

方法点拨

从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出这个图形进行了怎样的平移：横坐标的变化决定图形左右平移，纵坐标的变化决定图形上下平移.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

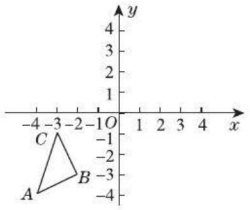


图 19.4-2

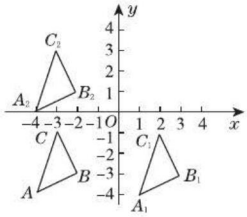


图 19.4-3

图形的平移

解： 平移后的图形如图19.4-3所示.

(1) 所得 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的大小、形状完全相同，$\triangle A_1B_1C_1$ 可以看成是将 $\triangle ABC$ 向右平移 5 个单位长度得到的.

(2) 所得 $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的大小、形状完全相同，$\triangle A_2B_2C_2$ 可以看成是将 $\triangle ABC$ 向上平移 4 个单位长度得到的.

考查角度2 由图形的平移情况确定点的坐标

技巧点拨

在平面直角坐标系中，画平移后的图形的实质是先根据平移的情况确定特殊点的对应点的坐标，然后再描点画出图形.

例 4 如图 19.4-4 所示的是一条小船，将其先向左平移 6 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度，试确定 A,B,C,D,E,F,G 平移后对应点的坐标，并画出平移后的图形.

导引： 把小船先向左平移6个单位长度，再向下平移 5 个单位长度，先确定关键点 A,B,C,D,E,F,G 的坐标，并把关键点先分别向左平移 6 个单位长度，再分别向下平移 5 个单位长度. 根据点的坐标的变化规律，由 $A(1,2)$，$B(3,1)$，$C(4,1)$，$D(5,2)$，$E(3,2)$，$F(3,4)$，$G(2,3)$，可确定平移后各对应点的坐标，根据原图的连接方式连接即可得到平移后的图形.

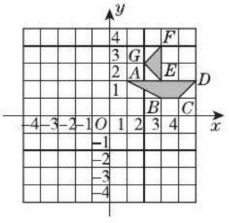


图 19.4-4

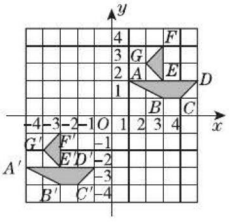


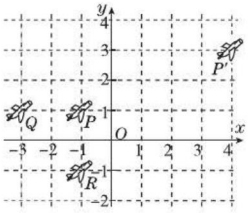
图 19.4-5

解： A,B,C,D,E,F,G 平移后对应点的坐标分别为 $A'(-5,-3)$，$B'(-3,-4)$，$C'(-2,-4)$，$D'(-1,-3)$，$E'(-3,-3)$，$F'(-3,-1)$，$G'(-4,-2)$，描出这些对应点并按原图的连接方式连接，可得平移后的图形，如图 19.4-5 所示.

同类变式 (答案见 215 页)

2. [中考·邵阳] 如图，三架飞机 P,Q,R 保持编队飞行，某时刻在坐标系中的坐标分别为 $(-1,1)$，$(-3,1)$，$(-1,-1)$. 30 秒后，飞机 P 飞到 $P'(4,3)$ 的位置，则飞机 Q，R 的位置 Q'，R' 分别为(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第2题图）

A. $Q'(2,3)$，$R'(4,1)$　　B. $Q'(2,3)$，$R'(2,1)$

C. $Q'(2,2)$，$R'(4,1)$　　D. $Q'(3,3)$，$R'(3,1)$

知识3 图形的轴对称与点的坐标（重点）

1 关于 x 轴成轴对称的两个图形，各对应顶点的横坐标相等，纵坐标互为相反数.

2 关于 y 轴成轴对称的两个图形，各对应顶点的纵坐标相等，横坐标互为相反数.

核心考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用关于横轴成轴对称的点的坐标特征进行图形变换

例5 如图 19.4-6，在平面直角坐标系中，$A(-3,4)$，$B(-4,1)$，$C(-1,1)$.

(1)求出 $\triangle ABC$ 的面积；

(2)作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的 $\triangle A'B'C'$；

(3)写出点 A'，B'，C' 的坐标.

导引：(1)借助直角坐标系中的正方形网格，易判断 $\triangle ABC$ 中，$BC=3$，BC 上的高为3，据此可求出其面积；

(2)根据轴对称的性质可画出图形，或根据关于 x 轴成轴对称的点的坐标特征，先求出 A，B，C 的对应点的坐标，再描出这些点，顺次连接即可；

(3)根据“关于 x 轴成轴对称的两点的横坐标相等，纵坐标互为相反数”，可得点 A'，B'，C' 的坐标.

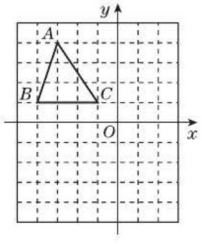


图 19.4-6

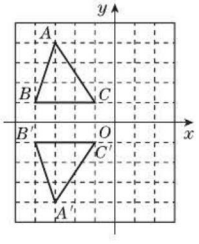


图 19.4-7

解：(1)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$.

(2)画出的 $\triangle A'B'C'$ 如图 19.4-7 所示.

(3)点 A'，B'，C' 的坐标依次为 $(-3,-4)$，$(-4,-1)$，$(-1,-1)$.

方法点拨

此题以带有网格的直角坐标系为背景，使面积的计算、轴对称作图及点的坐标判断显得简单明了.

▲**同类变式**（答案见215页）

3. 在平面直角坐标系中，顺次连接四个点 $A(1,1)$，$B(5,1)$，$C(5,5)$，$D(1,5)$，然后将这四个点的横坐标保持不变，纵坐标都乘 -1，再将变换后的各点顺次连接，所得的图案与原图案的关系是(　　)

A. 关于 x 轴成轴对称

B. 关于 y 轴成轴对称

C. 位置不变

D. 面积变小

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用关于纵轴成轴对称的点的坐标特征进行图形变换

例6 如图 19.4-8，求△ABC 的顶点 A,B,C 关于 y 轴成轴对称的点的坐标.

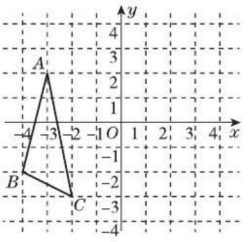


图 19.4-8

导引： 要确定点 A,B,C 关于 y 轴成轴对称的点的坐标，首先要写出点 A,B,C 的坐标，然后根据关于 y 轴成轴对称的点之间的坐标规律求解.

解： 因为点 A,B,C 的坐标分别为 $(-3,2)$，$(-4,-2)$，$(-2,-3)$，所以点 A,B,C 关于 y 轴成轴对称的点的坐标分别是 $(3,2)$，$(4,-2)$，$(2,-3)$.

方法点拨

确定一个点关于 y 轴成轴对称的点的坐标，首先要写出已知点的坐标，然后根据关于 y 轴成轴对称的点的坐标规律求解.

点知识 4 图形的放缩与点的坐标（难点）

1 将一个图形各顶点的横坐标和纵坐标都乘 k $\left(\text{或}\frac{1}{k},\ k>1\right)$，所得图形的形状不变，各边扩大到原来的 k 倍$\left(\text{或缩小为原来的}\frac{1}{k}\right)$，且连接各对应顶点的直线相交于一点.

2 **易错警示** 易将封闭图形各顶点的坐标变化与图形面积变化的关系弄错，误以为封闭图形各边扩大为原来的 n 倍（或缩小为原来的$\frac{1}{n}$），其面积也扩大为原来的 n 倍（或缩小为原来的$\frac{1}{n}$）.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度 利用坐标的变化表示图形的放缩

例7 如图 19.4-9，正方形 $ABCD$ 四个顶点 A,B,C,D 的坐标分别是 $(1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$，$(1,-1)$.

(1) 试求正方形 $ABCD$ 各顶点横、纵坐标都乘 2 后所得的正方形的面积；

(2) 试求正方形 $ABCD$ 各顶点横坐标不变，纵坐标都乘 2 后得到的长方形的面积.

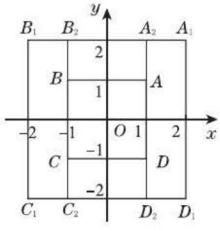


图 19.4-9

导引： 根据图形的放缩与坐标变化的关系判断当图形中各顶点坐标发生变化后，图形发生了怎样的变化，确定图形的边长，从而确定图形的面积.

解： (1) 变换后的正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 如图 19.4-9 所示，显然 $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1=2\times2=4$，

方法点拨

图形的平移只改变图形的位置，而不改变图形的形状和大小. 将图形各顶点的横、纵坐标都乘或除以同一个不为 0 的数（±1 除外）时，图形的形状没有改变，但大小发生了改变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $S_{正方形A_1B_1C_1D_1}=A_1B_1^2=4^2=16$.

(2)变换后的长方形 $A_2B_2C_2D_2$ 如图 19.4-9 所示,

显然 $A_2B_2=C_2D_2=2$, $B_2C_2=A_2D_2=4$,

所以 $S_{长方形A_2B_2C_2D_2}=A_2B_2\times B_2C_2=2\times4=8$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平移的特征解决问题

例 8 如图 19.4-10,在平面直角坐标系中,点 A 的坐标为(2,4),点 B 的坐标为(3,0). $\triangle AOB$ 中任意一点 $P(x_0,y_0)$ 经平移后的对应点为 $P_1(x_0+2,y_0)$,并且点 A,O,B 的对应点分别为点 D,E,F.

(1)指出平移方向和距离;

(2)画出平移后的 $\triangle DEF$;

(3)求线段 OA 在平移过程中扫过的面积.

导引: (1)由点 $P(x_0,y_0)$ 到点 $P_1(x_0+2,y_0)$ 可知,横坐标增加了 2,纵坐标不变,说明向右平移了 2 个单位长度;(2)由平移的规律找到点 A,O,B 的对应点 D,E,F,顺次连接即可;(3)连接 AD,观察图形可知,线段 OA 在平移过程中扫过的面积是平行四边形 $AOED$ 的面积.

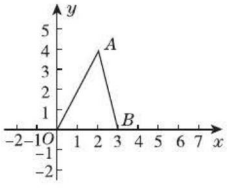


图 19.4-10

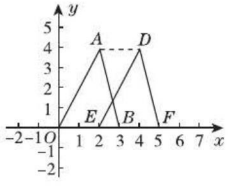


图 19.4-11

解: (1)把 $\triangle AOB$ 沿 x 轴正方向(即向右)平移 2 个单位长度.

(2)如图 19.4-11 所示.

(3)如图 19.4-11,连接 AD,线段 OA 在平移过程中扫过的面积是平行四边形 $AOED$ 的面积,所以所求面积为 $2\times4=8$.

方法点拨: 由点的平移情况可得图形的平移情况;要画平移后的图形,首先要求出平移后的图形各关键点的坐标,再描点画出图形.

拔尖角度 2 利用平移解决实际问题

例 9 中国象棋棋盘中蕴含着直角坐标系,如图 19.4-12 是中国象棋棋盘的一半,棋子"马"的规则是沿"日"字形的对角线走,例如:图中"马"可以从所在的位置直接走到 A,B 等处. 小明和一位同学正在下棋,他想把"马"从如图 19.4-12 所示的位置分三步移至 C 处,请在棋盘上用虚线画出一种你认为合理的行走路线,如何用平移的有关知识描述这一移动过程?

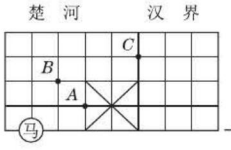


图 19.4-12

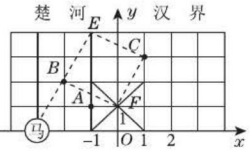


图 19.4-13

导引: 将"马"的行走路线用平移来描述,需要建立一个恰当的平面直角坐标系.

解: 用平移的有关知识描述这一移动过程,可以建立平面直角坐标系,如图 19.4-13 所示(平面直角坐标系的建法不唯一).

利用点的坐标描述这一过程:

方法一:$(-3,0)\rightarrow(-2,2)\rightarrow(-1,4)\rightarrow(1,3)$,即先向上平移 2 个单位长度、向右平移 1 个单位长度到点 B 处;再向上平移 2 个单位长度、向右平移 1 个单位长度到点 E 处;最后向下平移 1 个单位长度、向右平移 2 个单位长度到点 C 处.

方法二:$(-3,0)\rightarrow(-2,2)\rightarrow(0,1)\rightarrow(1,3)$,即先向上平移2 个单位长度、向右平移 1 个单位长度到点 B 处;再向下平移 1 个单位长度、向右平移 2 个单位长度到点 F 处;最后向上平移 2 个单位长度、向右平移 1 个单位长度到点 C 处.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

方法点拨： 解决这类问题的基本方法是把实际问题转化成数学问题，本题主要用平移的有关知识把“马”的平移转化成点在平面直角坐标系中的平移.

拔尖角度 3　对平面图形的变换与坐标关系的探究

例 10　如图 19.4-14，在平面直角坐标系中，第一次将 $\triangle OAB$ 变换成 $\triangle OA_1B_1$，第二次将 $\triangle OA_1B_1$ 变换成 $\triangle OA_2B_2$，第三次将 $\triangle OA_2B_2$ 变换成 $\triangle OA_3B_3$，已知 $A(1,3)$，$A_1(2,3)$，$A_2(4,3)$，$A_3(8,3)$，$B(2,0)$，$B_1(4,0)$，$B_2(8,0)$，$B_3(16,0)$.

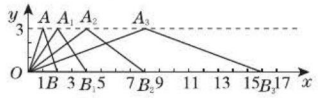


图 19.4-14

(1) 观察每次变换前后的三角形有何变化，按照变换规律再将 $\triangle OA_3B_3$ 变换成 $\triangle OA_4B_4$，则 A_4 的坐标是_____，B_4 的坐标是_____；

(2) 若按(1)找到的规律将 $\triangle OAB$ 进行了 n 次变换，得到 $\triangle OA_nB_n$，则 A_n 的坐标是_____，B_n 的坐标是_____.

导引： 通过比较点的横、纵坐标中变化的量以及不变的量，可推测出点 A_n 和点 B_n 的坐标及坐标变化规律为 A_n 的横坐标是按 2^n 变化的，纵坐标不变；B_n 的横坐标是按 2^{n+1} 变化的，纵坐标不变. 由此可得到新的三角形，所以点 A_4 的坐标是 $(16,3)$，点 B_4 的坐标是 $(32,0)$，进一步求得点 A_n 的坐标是 $(2^n,3)$，点 B_n 的坐标是 $(2^{n+1},0)$.

答案： (1)(16,3)；(32,0)

(2)$(2^n,3)$；$(2^{n+1},0)$

练中考·练模拟 得满分 （答案见 215 页）

基础巩固练

1. [中考·湘西州] 在平面直角坐标系中，将点 $(2,1)$ 向右平移 3 个单位长度，则所得的点的坐标是(　　)

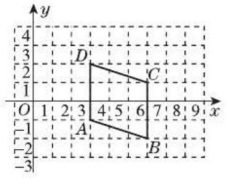
A. $(0,5)$　　B. $(5,1)$

C. $(2,4)$　　D. $(4,2)$

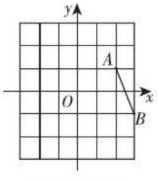
2. 如图，将四边形 $ABCD$ 先向左平移 3 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，那么点 A 的对应点 A' 的坐标是(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(6,1)$

C. $(0,-3)$　　D. $(6,-3)$



(第 2 题图)



(第 4 题图)

3. 在开全运会之前，沈阳某体育场要求重新规划，该长方形的体育场在平面直角坐标系中的四个顶点分别为 A,B,C,D. 将它们的横、纵坐标都乘 2，与原图形相比，下列说法中正确的是(　　)

A. 所得图形被横向拉伸为原来的 2 倍，纵坐标不变

B. 所得图形被纵向拉伸为原来的 2 倍，横坐标不变

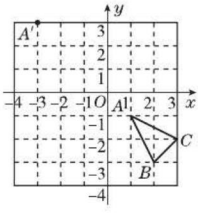
C. 所得图形形状不变，面积扩大为原来的 2 倍

D. 所得图形形状不变，面积扩大为原来的 4 倍

4. [中考·海南] 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,1)$，点 $B(3,-1)$，平移线段 AB，使点 A 落在点 $A_1(-2,2)$ 处，则点 B 的对应点 B_1 的坐标为(　　)

A. $(-1,-1)$　B. $(1,0)$　C. $(-1,0)$　D. $(3,0)$

5. [中考·铁岭] 如图，在平面直角坐标系中，三角形 ABC 经过平移后，点 A 的对应点为点 A'，则平移后点 B 的对应点 B' 的坐标为_____.



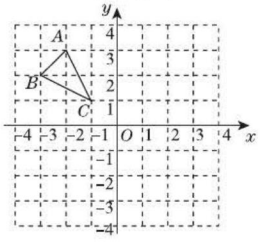
(第 5 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. $\triangle ABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示.

(1)直接写出点 A 的坐标;

(2)作出与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$,并分别写出点 A_1,B_1,C_1 的坐标.

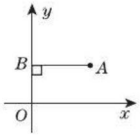


(第 6 题图)

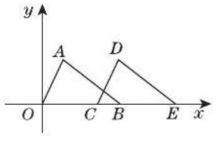
能力提升练

7. 如图,在直角坐标系中,线段 AB 垂直于 y 轴,垂足为 B,且 $AB=2$,如果将线段 AB 沿 y 轴翻折,点 A 落在点 C 处,那么点 C 的横坐标是(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 3　　D. -3



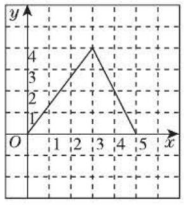
(第 7 题图)



(第 8 题图)

8. 如图,三角形 OAB 的顶点 B 的坐标为(4,0),把三角形 OAB 沿 x 轴向右平移得到三角形 CDE. 如果 $CB=1$,那么点 E 的坐标是_____.

9. 如图所示的三角形的各顶点坐标分别为(0,0),(3,4),(5,0),若将图中各顶点的横坐标_____,纵坐标_____,再将所得的点用线段依次连接,所得图案与原来的图案相比有什么变化?(先在横线上填上你认为合适的条件,再回答问题)



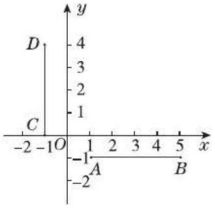
(第 9 题图)

10. 在如图所示的直角坐标系中,平行于 x 轴的线段 AB 上所有点的纵坐标都是 -1,横坐标 x 的取值范围是 $1\leqslant x\leqslant 5$,则线段 AB 上任意一点的坐标可以用 $(x,-1)(1\leqslant x\leqslant 5)$ 表示,按照这样的规定,回答下面的问题:

(1)怎样表示线段 CD 上任意一点的坐标?

(2)把线段 AB 向上平移 2.5 个单位长度后,所得的线段上任意一点的坐标怎样表示?

(3)把线段 CD 向左平移 3 个单位长度后,所得的线段上任意一点的坐标怎样表示?



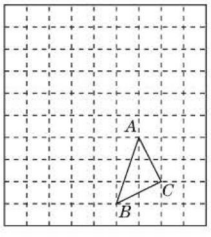
(第 10 题图)

思维拓展练

11. $\triangle ABC$ 在方格纸中的位置如图所示:

(1)请在方格纸上建立平面直角坐标系,使得 A,B 两点的坐标分别为(2,-1),(1,-4),并求出 C 点的坐标;

(2)作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$,并写出点 A_1,B_1,C_1 的坐标.



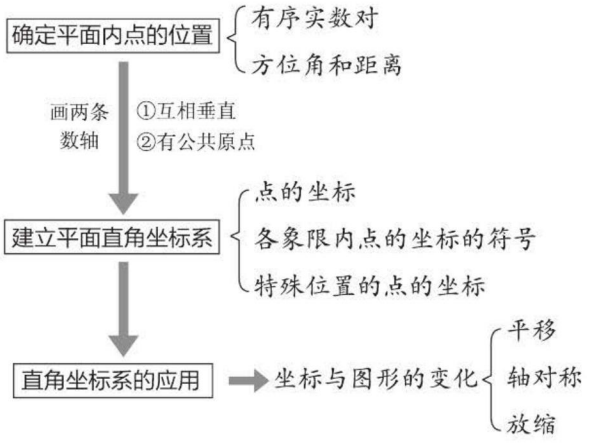
(第 11 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 由两条有公共原点且互相垂直的数轴构成平面直角坐标系，在直角坐标系中，每一个点的坐标都是一对有序实数对.

2. 象限内点(m,n)的坐标特征：

   第一象限$(+,+)$，即$m>0,n>0$；

   第二象限$(-,+)$，即$m<0,n>0$；

   第三象限$(-,-)$，即$m<0,n<0$；

   第四象限$(+,-)$，即$m>0,n<0$.

   x轴正半轴上的点(m,n)的坐标特征：$m>0,n=0$.

   x轴负半轴上的点(m,n)的坐标特征：$m<0,n=0$.

   y轴正半轴上的点(m,n)的坐标特征：$m=0,n>0$.

   y轴负半轴上的点(m,n)的坐标特征：$m=0,n<0$.

   反之亦成立.

3. 点的平移与其坐标变化的规律：上加下减，右加左减. 即向上平移a个单位长度，纵坐标加a，向下平移a个单位长度，纵坐标减a；向右平移a个单位长度，横坐标加a，向左平移a个单位长度，横坐标减a，其中$a>0$.

4. 图形的平移与其各顶点的坐标变化的规律：图形的平移首先应转化为图形各顶点的平移，再按点的平移规律进行平移.

5. 图形的放缩与其各顶点的坐标变化的规律：将一个图形各顶点的横坐标与纵坐标都乘k(或$\frac{1}{k}$，$k>1$)，所得图形的形状不变，各边扩大到原来的k倍(或缩小为原来的$\frac{1}{k}$).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 平面直角坐标系与点的坐标

链接中考>> 在平面直角坐标系中，点的坐标是核心，特殊位置的点的坐标特征是中考考查的热点，一般以选择题的形式出现.

例1 ［中考·威海］若点 $A(a+1,b-2)$ 在第二象限，则点 $B(-a,b+1)$ 在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

导引： 依题意，点 A 在第二象限，则有 $a+1<0, b-2>0$，从而有 $-a>0, b+1>0$，于是可以确定点 $B(-a,b+1)$ 在第一象限. 故选 A.

答案： A

方法点拨： 对于点 P(a，b)来说，点的位置与坐标特征的关系如下：

	点的位置	坐标特征
象限内的点	点 P 在第一象限	$a>0, b>0$
	点 P 在第二象限	$a<0, b>0$
	点 P 在第三象限	$a<0, b<0$
	点 P 在第四象限	$a>0, b<0$
坐标轴上及象限角平分线上的点	点 P 在 x 轴正半轴上	$a>0, b=0$
	点 P 在 x 轴负半轴上	$a<0, b=0$
	点 P 在 y 轴正半轴上	$a=0, b>0$
	点 P 在 y 轴负半轴上	$a=0, b<0$
	点 P 在第一、三象限角平分线上	$a=b$
	点 P 在第二、四象限角平分线上	$a+b=0$

专题二 用坐标表示地理位置

链接中考>> 学习坐标的目的就是表示地理位置，这是中考命题的宗旨——运用知识解决实际问题. 这一考点的考查形式也很简单，主要以选择题的形式出现.

例2 如图 19-1 是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建筑分布图，若这个直角坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，表示太和殿的点的坐标为 $(0,-1)$，表示九龙壁的点的坐标为 $(4,1)$，则表示下列宫殿的点的坐标正确的是(　　)

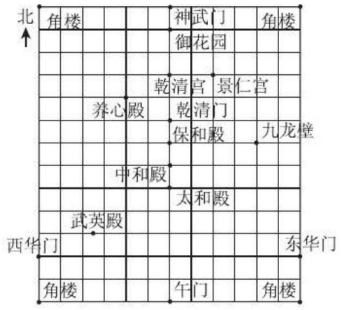


图 19-1

A. 景仁宫 $(4,2)$

B. 养心殿 $(-2,3)$

C. 保和殿 $(1,0)$

D. 武英殿 $(-3.5,-4)$

导引： 先根据两个已知点的坐标建立平面直角坐标系，再找出四个选项中宫殿所在位置的坐标即可.

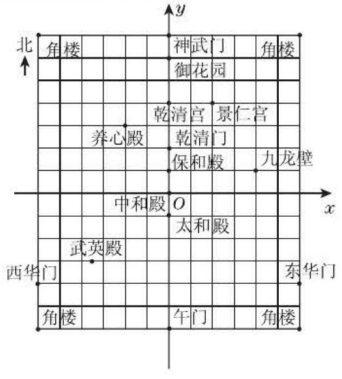


图 19-2

∵ 表示太和殿的点的坐标为 $(0,-1)$，表示九龙壁的点的坐标为 $(4,1)$，∴ 建立平面直角坐标系如图 19-2 所示. 由图可知，景仁宫的坐标为 $(2,4)$，养心殿的坐标为 $(-2,3)$，保和殿的坐标为 $(0,1)$，武英殿的坐标为 $(-3.5,-3)$，四个选项中只有 B 正确. 故选 B.

答案： B

规律点拨： x 轴上的点的纵坐标为 0，可以表示为(m，0)，y 轴上的点的横坐标为 0，可以表示为(0，n).反之亦成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题三 点的坐标的变化规律

链接中考>> 点的坐标的变化规律是图形变化规律的关键，图形变化主要有平移、轴对称和放缩三种，每种变化对应的点的坐标变化都有规律，在中考中是热门考点，一般以选择题的形式出现.

例3 [中考·梧州] 点 $P(2,-3)$ 先向左平移4个单位长度，再向上平移1个单位长度，得到点 P' 的坐标是_____.

导引： 根据平移规律解题. 直角坐标系中的点向左(或右)平移 $|a|$ 个单位长度，横坐标减去(或加上) $|a|$；直角坐标系中的点向上(或下)平移 $|b|$ 个单位长度，纵坐标加上(或减去) $|b|$.

答案： $(-2,-2)$

方法点拨： 直角坐标系中的点向左(或右)平移 $|a|$ 个单位长度，横坐标减去(或加上) $|a|$；直角坐标系中的点向上(或下)平移 $|b|$ 个单位长度，纵坐标加上(或减去) $|b|$；两点关于 x 轴对称，横坐标相等，纵坐标互为相反数；两点关于 y 轴对称，横坐标互为相反数，纵坐标相等；关于原点对称的点的横、纵坐标分别互为相反数.

Ⅱ 思想方法专题

专题四 分类讨论思想

专题解读>> 在平面直角坐标系中，所研究的问题有时包括多种情况，因而必须按可能出现的所有情况来分别讨论，这时我们就用到了分类讨论思想. 分类讨论思想不仅可以有效地解决一些问题，同时还可以培养同学们的观察能力和全面思考问题的能力.

例4 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=4, BC=6$，若将该长方形放在平面直角坐标系中，使点 A 的坐标为 $(-1,2)$，且 $AB \parallel x$ 轴，试求点 C 的坐标.

导引： 点 C 的坐标由长方形 $ABCD$ 的具体位置来确定，应分四种情况来讨论.

解： 如图19-3，长方形 $AB_1C_1D_1$、长方形 $AB_1C_2D_2$、长方形 $AB_2C_3D_1$、长方形 $AB_2C_4D_2$ 均符合题意，所以点 C 的坐标为 $(3,-4)$ 或 $(3,8)$ 或 $(-5,-4)$ 或 $(-5,8)$.

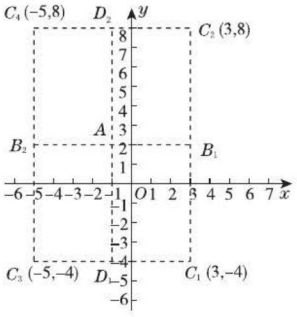


图 19-3

规律点拨： 本题在求解过程中用到了分类讨论思想，注意不要漏掉任何一种情况.

专题五 割补法、转化思想

专题解读>> 不规则图形的面积求解策略：利用“分割”或“补形”法将不规则图形的面积转化为规则图形的面积的和或差的形式，即把所要解决的问题转化为另一个较容易解决的问题来解决. 这种求不规则图形面积的方法叫割补法；其指导思想是化不规则为规则、化难为易的转化思想.

例5 在如图19-4所示的平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 的顶点分别为 $A(0,0)$，$B(9,0)$，$C(7,5)$，$D(2,7)$，试求四边形 $ABCD$ 的面积.

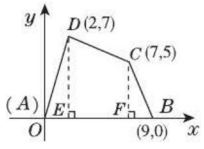


图 19-4

导引： 由于该图形不是规则的图形，因此可以考虑把它分割成三角形和梯形来解决.

解： 如图19-4，分别过点 D，C 向 x 轴作垂线，垂足分别是 E，F，则四边形 $ABCD$ 被分割为 $\triangle AED$，$\triangle CFB$ 和梯形 $EFCD$.

由各点的坐标可得 $AE=2, DE=7, FB=2, CF=5, EF=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle AED}+S_{梯形EFCD}+S_{\triangle CFB}=\frac{1}{2}\times AE\times DE+\frac{1}{2}\times(CF+DE)\times EF+\frac{1}{2}\times CF\times FB=\frac{1}{2}\times2\times7+\frac{1}{2}\times(5+7)\times5+\frac{1}{2}\times5\times2=42.$

方法点拨： 在平面直角坐标系中求不规则图形的面积，一般采用割补法，将其割补为规则且易求面积的图形，从而求出整个图形的面积.

好题必解 答案见216页

一、选择题

1. [中考·甘孜州] 在平面直角坐标系中，点 $P(2,-3)$ 所在的象限是(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 在点 $(0,0),(1,0),(0,2),(1,2),(-1,2),(-2,3)$ 中，不属于任何象限的点有(　　)

A. 2个　　B. 3个

C. 4个　　D. 5个

3. 若点 $P(x,y)$ 在第四象限，且点 P 到 x 轴的距离为3，到 y 轴的距离为2，则点 P 的坐标是(　　)

A. $(-2,-3)$　　B. $(-2,3)$

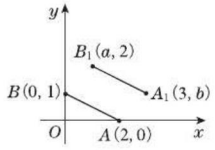
C. $(2,-3)$　　D. $(2,3)$

4. 在长方形 $ABCD$ 中，A,B,C 三点的坐标分别是 $(0,0),(5,0),(5,3)$，则点 D 的坐标是(　　)

A. $(0,5)$　　B. $(5,0)$

C. $(0,3)$　　D. $(3,0)$

5. [中考·菏泽] 如图，A,B 的坐标分别为 $(2,0),(0,1)$，若将线段 AB 平移至 A_1B_1 的位置，则 $a+b$ 的值为(　　)



(第5题图)

A. 2　　B. 3

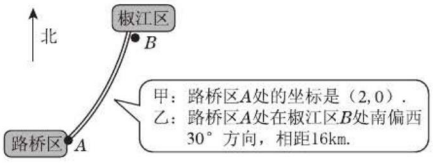
C. 4　　D. 5

二、填空题

6. [中考·广安] 若点 $M(3,x)$ 在第一象限，则 x 的取值范围是_____.

7. [中考·泸州] 在平面直角坐标系中，点 $M(a,b)$ 与点 $N(3,-1)$ 关于 x 轴对称，则 $a+b$ 的值是_____.

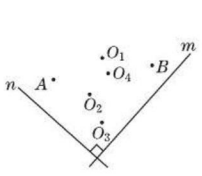
8. [中考·台州] 如图，这是台州市地图的一部分，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向建立直角坐标系，规定一个单位长度表示1 km，甲、乙两人对着地图这样描述路桥区 A 处的位置.



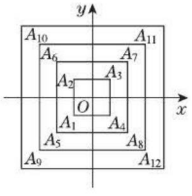
(第8题图)

则椒江区 B 处的坐标是_____.

9. 如图，直线 $m\perp n$，在某平面直角坐标系中，x 轴 $/\!/ m$，y 轴 $/\!/ n$，点 A 的坐标为 $(-4,2)$，点 B 的坐标为 $(2,-4)$，则坐标原点为_____.



(第9题图)



(第10题图)

10. [中考·甘孜州] 如图，有正方形 $A_1A_2A_3A_4$、正方形 $A_5A_6A_7A_8$、正方形 $A_9A_{10}A_{11}A_{12}$、…(每个正方形从第三象限的顶点开始，按顺时针方向的顺序，依次记为 $A_1,A_2,A_3,A_4;A_5,A_6,A_7,A_8;A_9,A_{10},A_{11},A_{12};\cdots$)其中心均在坐标原点 O，各边均与 x 轴或 y 轴平行，若它们的边长依次是2,4,6,…，则顶点 A_{20} 的坐标为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

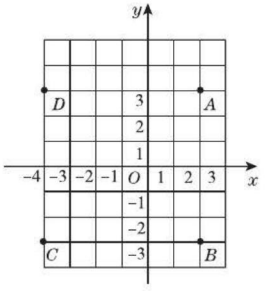
三、解答题

11. 在如图所示的平面直角坐标系中，

(1)写出 A,B,C,D 各点的坐标；

(2)描出 $E(1,0)$，$F(-1,3)$，$G(-3,0)$，$H(-1,-3)$；

(3)顺次连接 A,B,C,D 四点，其围成的封闭图形是什么图形.

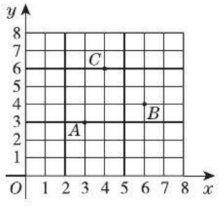


(第 11 题图)

12. 如图，A,B,C 为平行四边形的三个顶点，且 A,B,C 三个顶点的坐标分别为(3,3)，(6,4)，(4,6).

(1)请直接写出这个平行四边形的第四个顶点坐标；

(2)求此平行四边形的面积.



(第 12 题图)

13. 已知点 A 的坐标是(3,0)，$AB=5$.

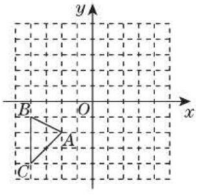
(1)当点 B 在 x 轴上时，求点 B 的坐标；

(2)当 $AB\parallel y$ 轴时，求点 B 的坐标.

14. [中考·金华]如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为 $A(-2,-2)$，$B(-4,-1)$，$C(-4,-4)$.

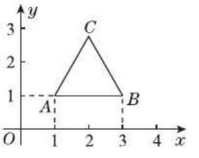
(1)作出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 成中心对称的 $\triangle A_1B_1C_1$；

(2)作出点 A 关于 x 轴的对称点 A'. 若把点 A' 向右平移 a 个单位长度后落在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内部(不包括顶点和边界)，求 a 的取值范围.



(第 14 题图)

15. [中考·龙东]如图，等边三角形的顶点 $A(1,1)$，$B(3,1)$，规定把等边三角形 ABC “先沿 x 轴翻折，再向左平移 1 个单位长度”为一次变换，如果这样连续经过 2 016 次变换后，求等边三角形 ABC 的顶点 C 的坐标.



(第 15 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十章 函数

揭示变量的变化规律

数学点拨



你将学到的核心考点

- 常量和变量 □
- 函数的概念 □
- 函数的三种表示法 □
- 函数的初步应用 □

我们为你提供的核心方法

- 定义法 □
- 观察法 □
- 分类讨论思想 □
- 数形结合思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.1 常量和变量

核心知识

- 常量
- 变量

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 常量和变量(重点)

1 变量和常量

在一个变化过程中，可以取不同数值的量叫做变量，而数值保持不变的量叫做常量.

要点精析

(1)“常量”是已知数，是指在整个变化过程中数值保持不变的量；但“常量”不等于“常数”，它可以是数值不变的字母. 如在匀速运动中的速度 v 就是一个常量.

(2)变量与常量是相对的，前提条件是“在一个变化过程中”，一个量在某一变化过程中是常量，而在另一个变化过程中，它可能是变量. 如在 $s=vt$ 中，当 s 一定时，v，t 为变量，s 为常量；当 t 一定时，s，v 为变量，t 为常量.

2 拓展

为了研究方便，我们经常用字母表示变量，这时要注意变量的单位，并在讨论它们的关系时要考虑变量的实际意义，如时间、长度、质量不能为负数，人数必须是非负整数等.

3 易错警示

(1)判断一个量是常量还是变量，应先看它是否在一个变化过程中，若在，则看它在这个变化过程中数值是否发生改变.

(2)常量与变量不是绝对的，而是对一个变化过程而言的.

(3)指出一个变化过程中的常量时，应连同它前面的符号一起指出.

拨考向 提分·秘诀

考查角度1 利用常量与变量的定义进行识别

例1 已知三角形的一边长为12，这条边上的高是 h，则三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 12\cdot h$，即 $S=6h$. 在这个式子中，常量和变量分别是什么？

导引： 根据常量和变量的定义分析. 三角形的面积等于一边与该边上的高的长度的乘积的一半，已知一边长，可以得出常量是该边长的一半，变量是高和面积.

解： 常量是6，变量是 h 和 S.

方法点拨

判断一个量是常量还是变量的方法：看这个量所在的变化过程中，该量的值是否发生改变(或者说是否会取不同的数值). 在变化过程中，数值不变的量是常量，可以取不同数值的量是变量.

考查角度2 利用常量与变量的相对性确定同一个问题中的常(变)量

例2 (1)设圆柱的底面半径 r 不变，圆柱的体积 V 与圆柱的高 h 的关系式为 $V=\pi r^2 h$. 其中的常量和变量分别是什么？

方法点拨

常量与变量往往是相对的，要辨别它们，关键

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设圆柱的高 h 不变,圆柱的体积 V 与圆柱的底面半径 r 的关系式是 $V=\pi r^2 h$. 这里的常量和变量又分别是什么?

是看变化过程中的条件和问题的实际背景.

导引: (1)因为圆柱的底面半径 r 不变,所以 π 和 r 是常量,V 和 h 是变量;

(2)因为圆柱的高 h 不变,所以 π 和 h 是常量,V 和 r 是变量.

解: (1)常量是 π 和 r,变量是 V 和 h.

(2)常量是 π 和 h,变量是 V 和 r.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 探索实际问题中两个变量之间的关系

例 3 一台拖拉机在开始工作前,油箱中有 40 升油,如果开始工作后,每小时耗油 4 升,设油箱中剩余油量为 y(升),工作时间为 x(时),怎样用含 x 的式子表示 y? 在这个变化过程中,哪些是变量,哪些是常量?

导引: 本题的等量关系为油箱中剩余油量 + 拖拉机耗油量 = 40 升.

解: 由题意知 $y+4x=40$,

$\therefore y=40-4x$.

$\therefore x$ 与 y 是变量,40 与 -4 是常量.

方法点拨: 探索实际问题中两个变量之间的关系,主要从这两个变量之间的等量关系入手. 判断一个量是常量还是变量,应先看它是否在一个变化过程中,若在,则看它在这个变化过程中数值是否发生改变.

拔尖角度 2 与常量和变量有关的新问题

例 4 [图形信息题] 如图 20.1-1 所示,把一个体积为 V 的"瘦长"的圆柱(圆钢条)锻压成一个"矮胖"的圆柱.

(1)在这个变化过程中,圆柱的体积、底面半径和高,哪些是变量?

(2)写出高 h 关于底面半径 r 的关系式.

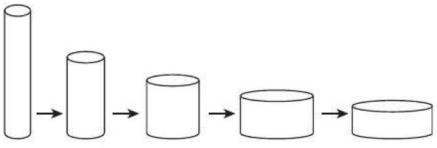


图 20.1-1

导引: 在这个变化过程中,圆柱的高和底面半径在变化,而体积不变.

解: (1)底面半径、高是变量.

(2)$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

方法点拨: 本题中圆柱的锻压过程实质上是几何体的等积变形过程,解题要点是理解在该过程中哪些量的数值固定不变,哪些量的数值不断变化,从而学会辩证地看问题.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 217 页)

基础巩固练

1. [易错题] 对于圆的周长公式 $C=2\pi R$,下列说法正确的是(　　)

A. π,R 是变量,2 是常量

B. R 是变量,π,C 是常量

C. C 是变量,π,R 是常量

D. C,R 是变量,2,π 是常量

2. 已知 y 与 x 之间有关系式:$y=x^2-1$. 显然,当 $x=1$ 时,$y=0$;当 $x=2$ 时,$y=3$. 在这个等式中,(　　)

A. x 是变量,y,-1 是常量

B. x,-1 是变量,y 是常量

C. x,-1 是常量,y 是变量

D. x,y 是变量,-1 是常量

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 某超市某种商品的价格为 70 元/件，若买 x 件该商品的总价为 y 元，则其中的常量是(　　)

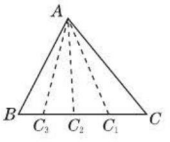
A. 70　　B. x　　C. y　　D. 不确定

4. 林老师骑摩托车到加油站加油，发现每个加油器上都有三个量，其中一个表示“单价”，其数值是固定不变的，另外两个量分别表示“数量”和“金额”，数值一直在变化. 在这三个量中，_____是常量，_____是变量.

5. 在 $s = v_0t + 2t^2$（v_0 为已知数）中，常量是_____，变量是_____.

6. 直角三角形两锐角的度数分别为 $x°$，$y°$，则 $x + y = 90$，其中变量为_____，常量为_____.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的高是 6 厘米，当 $\triangle ABC$ 的顶点 C 沿底边 CB 向点 B 运动时，$\triangle ABC$ 的面积发生了变化，如图.



（第 7 题图）

(1) 如果 $\triangle ABC$ 的底边 BC 长为 x 厘米，那么 $\triangle ABC$ 的面积 y（平方厘米）可以表示为_____；

(2) 在这个变化过程中，常量是_____，变量是_____.

8. 指出下列各个过程中的变量与常量：

(1) 铁的质量 m(g) 与体积 V(cm^3) 之间的关系式(已知铁的密度为 ρ，$\rho = 7.8\ g/cm^3$)；

(2) 长方形的长为 2 cm，它的面积 S(cm^2) 与宽 a(cm)（$0 < a < 2$）的关系式是 $S = 2a$；

(3) 匀速直线运动中，$s = vt$（v 表示速度，t 表示时间，s 表示在时间 t 内所走的路程).

能力提升练

9. 齿轮每分钟转 120 转，如果用 n 表示转数，t(分) 表示转动时间，那么用含 t 的代数式表示 n 为_____，其中的变量为_____，常量为_____.

10. [表格信息题] 某电信公司提供了一种移动通信服务的收费标准，如下表：

项目	月基本服务费	月免费通话时间	超出后每分收费
标准	40 元	150 分	0.6 元

则每月话费 y(元) 与每月通话时间 x(分) 之间有关系式 $y = \begin{cases} 40\ (0 \leqslant x \leqslant 150), \\ 0.6x - 50\ (x > 150). \end{cases}$ 在这个关系式中，常量是什么，变量是什么？

11. 阅读并完成下面的问题：

(1) 某人持续以 a 米/分的速度经 t 分时间跑了 s 米，其中常量是_____，变量是_____；

(2) 在 t 分内，不同的人以不同的速度 a 米/分跑了 s 米，其中常量是_____，变量是_____；

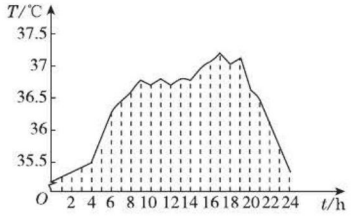
(3) s 米的路程，不同的人以不同的速度 a 米/分跑所需的时间为 t 分，其中常量是_____，变量是_____；

(4) 根据以上叙述，写出关于常量与变量的结论：_____.

12. [一题多解，规律探究题] 观察一列数：1，4，7，10，13，16，19，…，指出第 n 个数 W 与序号 n 的关系(其中 n 是正整数)，并指出这一变化过程中的常量与变量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. [图形信息题] 如图是某人一昼夜体温变化的曲线图，其中横轴是时间 t(h)，纵轴是体温 T(℃)，根据此图回答下列问题：



(第 13 题图)

(1) 这个图像反映了哪两个变量之间的关系？

(2) 一昼夜间哪个时间体温最高？哪个时间体温最低？

(3) 一昼夜间体温变化的幅度有多大？

思维拓展练

14. [表格信息题] 购买 x 千克某种大米，花费金额 y(元)由两部分组成：一是购买购物袋的费用，购物袋的售价是 0.5 元/个；二是购买大米所需的费用. 下表给出了购买大米的费用与所购质量的关系：

大米的质量 x/千克	2	3	4	6	8	10	12	…
购买大米的费用/元	9.6	14.4	19.2	28.8	38.4	48	57.6	…

如果购买质量不超过 5 千克，只需一个购物袋，在 5 千克以上而不超过 10 千克，需要两个购物袋，以此类推，每增加 5 千克，就需要增加一个购物袋. 写出购买 x 千克(不超过 20 千克)大米花费金额 y(元)与 x 之间的关系式，并指出这个变化过程中的常量与变量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.2 函　数

核心知识

- 函数的概念
- 函数自变量的取值范围

知识链接



点知识·拨考向　速提分

点知识 1 函数(重点)

1 函数　一般地，在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y. 如果给定 x 的一个值，就能相应地确定 y 的一个值，那么，我们就说 y 是 x 的函数，其中 x 叫做自变量.

要点精析///

理解函数的定义应注意以下三点(简称函数"三要素")：

(1)有两个变量；

(2)一个变量的数值随着另一个变量数值的变化而变化；

(3)对于自变量的每一个确定的值，函数有且只有一个值与之对应.

2 函数值　如果在自变量取值范围内给定一个数值 a，函数对应的值为 b，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值.

要点精析///

(1)函数表示的是两个变量之间的一种关系，而函数值是一个数值.

(2)一个函数的函数值是随着自变量的变化而变化的，故在求函数值时，一定要指明该函数值是自变量为多少时的函数值.

3 易错警示

(1)自变量 x 取不同的数值时，与之对应的 y 的值不一定不同；只要是有唯一值与之对应即可.

(2)判断两个变量是否具有函数关系，不能只看是否有关系式存在，有些函数关系是没有关系式的(如心电图中的时间与心脏部位的生物电流的关系).

拨考向 ▸▸▸　提分·秘诀

考查角度1　判断两个变量之间是否具有函数关系

例1　判断下面各量之间的关系是不是函数关系，若是，请指出自变量与函数.

(1)长方形的一边长 b 一定时，与其相邻的另一边长 a 与周长 C，其中 $C=2(a+b)$；

(2)$y=|x|$ 中的 x 与 y；

(3)小刚计划用 20 元购买本子，所能购买的本子数量 n(本)与单价 a(元)，其中 $n=\frac{20}{a}$.

解：(1)长方形的周长 $C=2(a+b)$，当一边长 b 一定时，对于与其相邻的另一边长 a 所取的每一个确定的值，周长 C 都有唯一的值与它对应，所以 C 是 a 的函数，自变量是 a.

(2)在 $y=|x|$ 中，对于每一个 x 值，y 都有唯一的值与它对应，所以 y 是 x 的函数，自变量是 x.

方法点拨

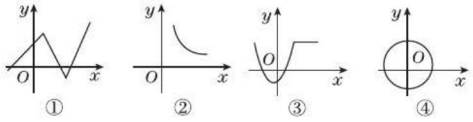
本题运用定义法解答. 判断一个关系是否是函数关系，根据函数定义，主要从以下几个方面分析：(1)是否在一个变化过程中；(2)在该过程中是否有两个变量；(3)对于一个变量每取一个确定的值，另一个变量是否有唯一确定的值与其对应.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)购买本子数量 $n=\frac{20}{a}$，a 每取一个确定的值，n 都有唯一的值与它对应，所以 n 是 a 的函数，自变量是 a.

同类变式 (答案见217页)

1. 下列各图中，表示 y 是 x 的函数的是_____(写出所有满足条件的图的序号).



(第1题图)

思路点拨

运用函数的定义进行辨析，注意从函数与自变量对应值的唯一性方面考虑.

考查角度2 求函数值

例2 [中考·东营]根据如图20.2-1所示的程序计算函数值，若输入的 x 的值为 $\frac{5}{2}$，则输出的函数值为(　　)

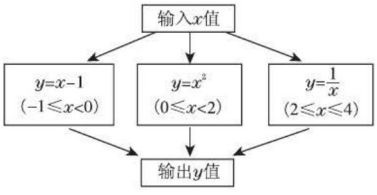


图20.2-1

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4}{25}$　　D. $\frac{25}{4}$

导引：由题意可知当 $x=\frac{5}{2}$ 时，

y 与 x 满足的关系式为 $y=\frac{1}{x}$，

把 $x=\frac{5}{2}$ 代入，得 $y=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$.

答案：B

方法点拨

求函数值时，要注意函数的对应关系：代入自变量的值计算时，要按照函数中关于自变量的数学式子指明的运算顺序计算，并结合相应的运算法则，使运算简便.

说函数值时，要说明该函数值是自变量是多少时的函数值.如本例中，当 $x=\frac{5}{2}$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的值为 $\frac{2}{5}$.

同类变式 (答案见217页)

2. (1)已知 $y=\frac{x^2+5}{3-x}$，当 $x=2$ 时，$y=$_____.

(2)当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=\sqrt{4x+22}$ 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 函数的关系式(难点)

1 定义 用关于自变量的数学式子表示函数与自变量之间的关系，这种式子叫做函数的关系式.

要点精析///

(1)函数关系式是等式.

(2)函数关系式的书写是有顺序的:单独写在等号左边的一个变量表示函数,等号右边的式子中的变量为自变量.例如:$y=2x-1$表示y是x的函数,即等号的左边是一个变量y,右边是一个含x的代数式.

2 确定函数关系式的步骤

(1)根据题意，运用等量关系建立二元方程.

(2)用含自变量的式子表示函数.

3 自变量取值范围的确定

使函数有意义的自变量取值的全体实数叫做自变量的取值范围.其确定方法是:

(1)当关系式是整式时，自变量的取值范围为全体实数;

(2)当关系式是分式时，自变量的取值须保证分母不为0;

(3)当关系式是二次根式时，自变量的取值须使被开方数为非负实数;

(4)当关系式有零指数幂(或负整数指数幂)时，自变量的取值应使相应的底数不为0;

(5)当关系式是实际问题的关系式时，自变量的取值必须使实际问题有意义;

(6)当关系式是复合形式时，需列关于自变量的不等式组，使所有式子同时有意义.

4 易错警示

(1)列实际问题的函数关系式时，要写明自变量的取值范围.

(2)自变量的取值可以是无限的，也可以是有限的，还可以是几个数或单独一个数.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用自变量的呈现形式求自变量的取值范围

例3 求下列函数中自变量x的取值范围.

(1)$y=3x+7$; (2)$y=\dfrac{1}{3x-2}$; (3)$y=\sqrt{x-4}$;

(4)$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$; (5)$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$.

导引: 结合各个函数关系式的特点,按自变量取值范围的确定方法求出.

解: (1)函数关系式右边是整式,所以x的取值范围为一切实数;

(2)由$3x-2\neq0$,得$x\neq\dfrac{2}{3}$,

所以x的取值范围为$x\neq\dfrac{2}{3}$的一切实数;

(3)由$x-4\geqslant0$,得$x\geqslant4$,所以x的取值范围是$x\geqslant4$;

(4)由$\begin{cases}x+2\geqslant0,\\x\neq0\end{cases}$得$x\geqslant-2$且$x\neq0$,

所以x的取值范围是$x\geqslant-2$且$x\neq0$;

(5)由$\begin{cases}2x-1\geqslant0,\\1-2x\geqslant0\end{cases}$得$x=\dfrac{1}{2}$,所以$x$的取值范围是$x=\dfrac{1}{2}$.

方法点拨

求自变量的取值范围，应按给出的各种式子有意义的条件求解.当给出的式子是复合形式时，应先列不等式或不等式组，再求其解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用实际问题中的等量关系建立函数关系式

例4 ［易错题］弹簧挂上物体后在弹性限度内(不超过100 kg)会伸长,测得一弹簧的长度 y 与所挂物体的质量 x 有如下关系:

x/kg	0	1	2	3	4	5	6	7	…
y/cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	…

弹簧的长度 y(cm)能看成是所挂物体质量 x(kg)的函数吗?若能,写出函数关系式.

导引: 这是一个由表格方式呈现出来的函数关系.由表中信息可得,每多挂1 kg重物,弹簧就会伸长0.5 cm.在这个变化过程中,有两个变量,即所挂物体的质量x(kg)和弹簧的长度 y(cm).给定一个 x 值,有唯一的y 值与其对应,符合函数的概念.

解: 弹簧的长度 y(cm)能看成是所挂物体质量 x(kg)的函数.

由上表可知,弹簧的原长为12 cm,所挂物体质量每增加1 kg,弹簧就伸长0.5 cm.

所以函数关系式为 $y=12+0.5x(0\leqslant x\leqslant 100)$.

考查角度3 利用几何问题中的等量关系建立函数关系式

例5 等腰三角形 ABC 的周长为10 cm,底边 BC 的长为 y cm,腰AB 的长为 x cm.

(1)写出 y 关于 x 的函数关系式;

(2)求 x 的取值范围.

导引: (1)由"底边长 $+2\times$ 腰长 $=$ 周长"可得 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)由(1)题中的函数关系式可求得 x 的取值范围,但还要考虑实际情况:x,y 分别代表等腰三角形的腰长及底边长,所以 x 与 y 均应大于0,同时 x 与 y 还应符合三角形的三边关系,综合这几个方面可求得 x 的取值范围.

解: (1)由题意可得 $2x+y=10$,所以 y 关于 x 的函数关系式为 $y=10-2x$.

(2)由 x,y 均为线段长,可得 $x>0$,$y>0$,即 $10-2x>0$.

再由三角形三边关系,得 $2x>y$,即 $2x>10-2x$,

所以自变量 x 应满足 $\begin{cases}x>0,\\10-2x>0,\\2x>10-2x,\end{cases}$

解这个不等式组,得 $\frac{5}{2}<x<5$.所以 x 的取值范围为 $\frac{5}{2}<x<5$.

易错警示

列实际应用问题的函数关系式时,常要写出自变量的取值范围,本题易忽略弹性限度这个条件.

方法点拨

写函数关系式的步骤:(1)认真审题,根据题意找出等量关系;(2)按等量关系写出含有两个变量的等式;(3)将等式变形为用含有自变量的代数式表示函数的形式.

方法点拨

(1)求几何问题中的函数关系式,实质上是建立几何中两个变量之间的数量关系,要熟悉一些常用的几何关系式.如:圆的周长与半径,立方体的体积与棱长,等等.

(2)确定自变量的取值范围时,一方面要考虑使函数关系式有意义,另一方面还要注意使几何问题有意义.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用函数关系式解决分段计费问题

例 6 某实验中学组织学生到距学校6 km的光明科技馆参观学习，学生王琳因有事没能乘上前去参观的校车，于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆. 出租车的收费标准如下：

路程/km	费用/元
3 km 以下(含 3 km)	8.00
3 km 以上，每增加 1 km	1.80

(1)写出乘出租车的费用 y(元)与出租车行驶的路程 x(km)之间的函数关系式；(注：行驶路程不足 1 km 的部分按 1 km 计算)

(2)王琳身上仅有 14 元，够不够乘出租车到光明科技馆的车费？

导引： (1)写函数关系式时，要分 3 km 以下(含 3 km)和 3 km 以上两种情况讨论：路程未超过 3 km 时的费用为 8.00 元；路程超过3 km时的费用为 $[(x-3)\times 1.8+8]$ 元.

(2)由 $y=14$ 求出 x 的值，再与 6 比较大小；或由 $x=6$ 求出 y 的值，再与 14 比较大小.

解： (1)当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=8$；

当 $x>3$ 时，$y=1.8(x-3)+8=1.8x+2.6$.

即 $y=\begin{cases}8, & 0<x\leqslant 3,\\ 1.8x+2.6, & x>3.\end{cases}$

(2)方法一　当 $y=14$ 时，$14=1.8x+2.6$.

解得 $x=6\frac{1}{3}$.

因为 $6\frac{1}{3}>6$，所以车费够了.

方法二　当 $x=6$ 时，$y=1.8x+2.6=1.8\times 6+2.6=13.4<14$.

所以车费够了.

方法点拨： 乘坐出租车问题是我们在日常生活中经常遇到的问题，也是中考的热点问题. 解答此类问题的方法一般是结合题目中所有信息分类讨论，在不同的条件下建立相应的函数关系式，再根据自变量所在的取值范围，代入对应的函数关系式求值.

拔尖角度 2 巧用自变量的取值范围解决图形的运动问题

例 7 如图 20.2-2，等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 12 cm，AC 与 MN 在同一直线上，开始时 A 点与 M 点重合，让 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 向右运动，最后 A 点与 N 点重合.

(1)试写出重叠部分面积 y(cm^2)与 MA 的长度 x(cm)之间的函数关系式.

(2)当 $MA=4$ cm 时，重叠部分的面积是多少？

(3)当 MA 的长度是多少时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是5:4？

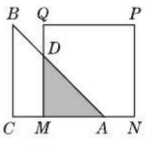


图 20.2-2

(4)若 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 向右移动的速度是1 cm/s，运动停止时边 BC 与 PN 重合，探究重叠部分面积 y(cm^2)与运动时间 t(s)的函数关系式.

解： (1)由题意得 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{1}{2}x^2$，其中 $0\leqslant x\leqslant 12$.

(2)当 $x=4$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$，

即当 $MA=4$ cm 时，重叠部分的面积是 8 cm^2.

(3)当四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4 时，等腰直角三角形 ABC 与重叠部分的面积的比是9:4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为等腰直角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}\times 12\times 12=72(\text{cm}^2)$，所以重叠部分的面积是 $\frac{4}{9}\times 72=32(\text{cm}^2)$.

因为函数关系式是 $y=\frac{1}{2}x^2$，

所以有 $\frac{1}{2}x^2=32$，所以 $x^2=64$.

由于 $x\geqslant 0$，因此只取 x 的正数值 8，

即当 MA 的长度是 8 cm 时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5∶4.

(4) 由于不同情况下重叠部分的形状发生了变化，故应分情况讨论.

①当 $0\leqslant t\leqslant 12$ 时，重叠部分是三角形，所以函数关系式是 $y=\frac{1}{2}t^2$.

②当 $12<t\leqslant 24$ 时，重叠部分的面积是 $\triangle ABC$ 的面积与右侧小等腰直角三角形面积的差.

因为 $\triangle ABC$ 的面积是 72 cm^2，小等腰直角三角形的面积是 $\frac{1}{2}(t-12)^2$ cm^2，所以重叠部分的面积是 $\left[72-\frac{1}{2}(t-12)^2\right]$ cm^2，

因此函数关系式是 $y=72-\frac{1}{2}(t-12)^2$.

方法点拨： 解决与几何图形以及图形运动有关的函数问题的方法：把几何图形信息转换为数字以及代数式信息，运用几何图形的有关性质建立函数模型，有时需要分类讨论，得出不同情况下的函数关系式.

拔尖角度 3 利用函数关系式解决规律探究问题

例 8 如图 20.2-3，结合表格中的数据回答问题：

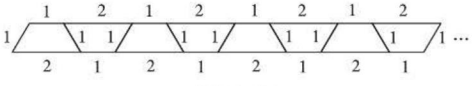


图 20.2-3

小梯形个数	1	2	3	4	5	…
图形周长	5	8	11	14	17	…

(1) 设图形的周长为 l，小梯形的个数为 n，试写出 l 与 n 的函数关系式；

(2) 求当 $n=11$ 时，图形的周长；

(3) 求当 $l=302$ 时，小梯形的个数.

导引： (1) 观察图形可以发现，每增加 1 个小梯形，周长就增加 3.

当有 1 个小梯形时，周长为 5；

当有 2 个小梯形，即增加 1 个小梯形时，周长增加 3，为 $5+3=8$；

当有 3 个小梯形，即增加 2 个小梯形时，周长增加 3×2，为 $5+3\times 2=11$；

当有 4 个小梯形，即增加 3 个小梯形时，周长增加 3×3，为 $5+3\times 3=14$；

……

当有 n 个小梯形，即增加 $(n-1)$ 个小梯形时，周长增加 $3\times(n-1)$，

为 $5+3\times(n-1)=3n+2$，即 $l=3n+2$.

(2) 把 $n=11$ 代入 (1) 题中的关系式，求出 l.

(3) 把 $l=302$ 代入 (1) 题中的关系式，求出 n.

解： (1) l 与 n 的函数关系式为 $l=3n+2$.

(2) 把 $n=11$ 代入 $l=3n+2$，

得 $l=3\times 11+2=35$.

所以当 $n=11$ 时，图形的周长为 35.

(3) 把 $l=302$ 代入 $l=3n+2$，

得 $302=3n+2$，

所以 $n=100$.

即当 $l=302$ 时，小梯形的个数为 100.

方法点拨： 对于探索图形规律的问题，解决的思路有两种：一种是数图形，将图形问题转化为代数规律问题，再用函数思想、观察法解决；另一种是通过图形的直观性，从图形中直接寻找规律，常用拆图法解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见217页）

基础巩固练

1. 某型号的汽车在路面上的制动距离 $s=\frac{v^2}{256}$，其中变量是(　　)

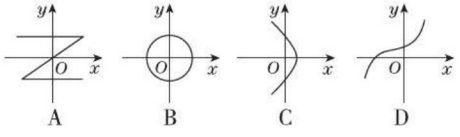
A. s,v　　B. s,v^2　　C. s　　D. v

2. 函数 $y=\frac{1}{x+3}+\sqrt{4-x}$ 中，自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x<4$　　B. $x<4$ 且 $x\neq -3$

C. $x>4$　　D. $x\leqslant 4$ 且 $x\neq -3$

3. 下列各图中，表示 y 是 x 的函数的是(　　)



A　　B　　C　　D

4. 在函数 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 中，当 $x=a$ 时，函数值为 1，则 a 的值是_____.

5. 写出下列各题中的函数关系式，并指出其自变量的取值范围.

(1) 多边形内角和 α 与边数 n 之间的关系；

(2) 拖拉机的油箱最多可装 80 升油，装满油后犁地，平均每小时耗油 4 升. 油箱中剩余油量 Q（升）与时间 t（时）之间的关系；

(3) 梯形的面积为 100（平方米），上底是下底的 $\frac{1}{3}$，高 y 与下底 x 之间的关系.

能力提升练

6. 下列关系中，不是函数关系的是(　　)

A. 矩形的周长一定，它的长与宽之间的关系

B. 正方体的棱长与体积之间的关系

C. 人的身高与体重之间的关系

D. 等边三角形的边长与周长之间的关系

7. 若函数 $y=\begin{cases}x^2+2, x\leqslant 2,\\ 2x, x>2,\end{cases}$ 则当函数值 $y=8$ 时，自变量 x 的值是(　　)

A. $\pm\sqrt{6}$　　B. 4　　C. $\pm\sqrt{6}$ 或 4　　D. 4 或 $-\sqrt{6}$

8. 某城市自来水收费实行阶梯水价，收费标准如下表所示，某用户 5 月份交水费 45 元，则该用户 5 月份用水量为_____立方米.

月用水量	不超过 12 立方米部分	超过 12 立方米而不超过 18 立方米部分	超过 18 立方米部分
收费标准/(元/立方米)	2	2.5	3

9. 已知长方形的长是 16，宽为 x，周长为 y，面积为 S.

(1) 写出 y 和 x 之间的函数关系式.

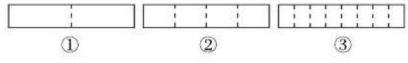
(2) 写出 S 和 x 之间的函数关系式.

(3) 当 $S=160$ 时，x 等于多少？y 等于多少？

(4) 当 x 增加 2 时，y 增加多少？S 增加多少？

思维拓展练

10. 将一张长方形的纸对折（如图①）可得到 1 条折痕，继续对折，对折时每条折痕与上次的折痕保持平行（如图②），连续对折 3 次后，可以得到 7 条折痕（如图③），回答下列问题：　　【导学号：1553889】



（第 10 题图）

(1) 对折 4 次可以得到_____条折痕；

(2) 写出折痕的条数 y 与对折次数 x 之间的函数关系式；

(3) 求出对折 10 次后的折痕条数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.3 函数的表示

核心知识

- 函数图像的画法
- 从函数图像中获取信息
- 函数三种表示法的相互转化

知识链接

函数图像 → 画图像、从图像中获取信息 → 函数三种表示法之间的转化

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 函数的图像(关键)

1 定义 一般地，我们把一个函数的自变量 x 的值与对应的函数 y 的值分别作为点的横坐标和纵坐标，在直角坐标系中描点，所有这些点组成的图形就叫做这个函数的图像.

要点精析///



(1)一方面，函数图像上的任意点 $P(x,y)$ 中的 x,y 都满足函数关系，另一方面，满足函数关系的任意一对有序实数对 (x,y) 所对应的点一定在函数的图像上.

(2)函数图像上的所有点与函数关系中的两个变量的关系是一一对应的. 它们是函数中两个变量间关系的两种不同(一个是“数”，一个是“形”)呈现方式.

2 用描点法画函数图像的一般步骤

(1)列表：根据函数表达式，在自变量取值范围内有代表性地取值，并求出相应的函数值，按这些对应值列表.

(2)描点：根据自变量和函数的数值表，在直角坐标系中描点.

(3)连线：按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑的曲线连接起来.

要点精析///

(1)取值时，要根据自变量的取值范围取值，从小到大或自中间向两边选取. 取值要有代表性，尽量使画出的函数图像能反映函数的全貌.

(2)描点时，要以表中每对对应值为坐标，在坐标系中准确描点.

(3)连线时，要用平滑的曲线将所描的点顺次连接起来.

3 易错警示

(1)要正确理解并会从函数图像中获取信息.

(2)画函数图像时，易忽略自变量的取值范围.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用点与函数图像的位置关系解决问题

例1 已知函数 $y=2x-1$.

(1)试判断点 $A(-1,3)$ 和点 $B\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 是否在此函数的图像上；

(2)已知点 $C(a,a+1)$ 在此函数的图像上，求 a 的值.

导引：(1)将点 A,B 的坐标分别代入 $y=2x-1$，看点的坐标能否满足这个关系式即可；

(2)将点 $C(a,a+1)$ 的坐标代入 $y=2x-1$，可得到一个关于 a 的一元一次方程，求出 a 的值即可.

方法点拨

(1)判断点 P(x, y)是否在函数图像上的方法：将点 P(x, y)的坐标代入函数关系式，若能满足函数的关系式，则这个点在函数图像上；若不能满足函数的关系式，则这个点不在函数图像上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)因为当 $x=-1$ 时，

$y=2\times(-1)-1=-3\neq 3$，

所以点 A 不在函数 $y=2x-1$ 的图像上.

因为当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$，

所以点 B 在函数 $y=2x-1$ 的图像上.

(2)因为点 $C(a,a+1)$ 在函数 $y=2x-1$ 的图像上，

所以把 $x=a$，$y=a+1$ 代入 $y=2x-1$，

得 $a+1=2a-1$. 解得 $a=2$.

(2)由坐标含字母的点在函数图像上求字母的值时，将坐标代入函数关系式中，得到一个关于该字母的方程，解这个方程即得字母的值.

同类变式 (答案见218页)

1. 如果点(1,2)同时在关于 x 的函数 $y=ax+b$ 与 $y=\frac{x-b}{a}$ 的图像上，求 $2a-b$ 的值.

考查角度2 利用描点法画函数的图像

例2 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像：

①$y=-x+1$；②$y=\frac{1}{2}x$.



导引：要在平面直角坐标系中画出函数的图像，关键要找出图像上的一些点.

解：列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-x+1$	…	4	3	2	1	0	-1	-2	…
$y=\frac{1}{2}x$	…	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	…

描点、连线，如图 20.3-1 所示.

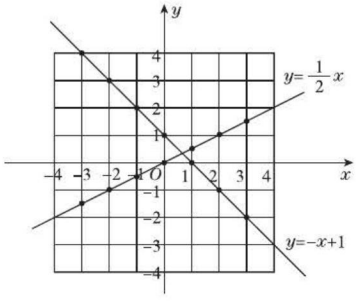


图 20.3-1

方法点拨

画函数图像时，如果自变量与函数值可以取0，往往找出图像与坐标轴的交点的坐标，自变量与函数值不能为0的例外，所列自变量与函数的对应值的组数以5组到7组为宜.

同类变式 (答案见218页)

2. 在同一直角坐标系中画出 $y=x$ 和 $y=\frac{4}{x}$ 的图像.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 从函数图像中获取信息

例3 小李与小陆从 A 地出发，骑自行车沿同一条路到 B 地，他们离出发地的距离 s（单位：km）和行驶时间 t（单位：h）之间的函数关系的图像如图 20.3-2，根据图中提供的信息，有下列说法：

（1）他们都行驶了 20 km；

（2）小陆全程共用了 1.5 h；

（3）小李与小陆相遇后，小李的速度小于小陆的速度；

（4）小李在途中停留了 0.5 h.

其中，正确的有（　　）

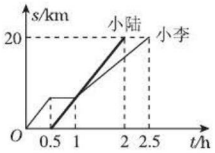


图 20.3-2

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

导引： 从图像中可以看出，（1）图像的终止点处对应的纵坐标是 20，所以都行驶了 20 km，正确；（2）小陆行驶总路程的对应时间段是 0.5 h～2 h，所以全程共用了 $2-0.5=1.5$（h），正确；（3）相遇后，小陆行驶路程对应的直线在小李的上方，所以小陆的速度快，正确；（4）小李行驶过程中，0.5 h～1 h 内对应的图像是水平线，代表停留了 0.5 h，正确. 4 个都正确，故选 A.

答案： A

技巧点拨

从函数图像中获取信息时应注意三点：其一，图像对应的函数的最大值或最小值；其二，随着自变量逐渐增加，函数值增加了还是减少了，还是不变（变化趋势）；其三，观察图像是否是几种变化情况的组合，以便分情况讨论变化规律.

知识 2 函数的表示方法（重点、难点）

1 函数的三种表示方法

表示方法	定义	优点	缺点
表达式法	用表达式来表示函数关系的方法叫做表达式法	能准确地反映整个变化过程中自变量与函数的内在联系，便于分析变量间的数量关系	由于比较抽象，所以并不是所有的函数都能列出表达式，有些实际问题不一定能用表达式表达出来
列表法	用表格来表示函数关系的方法叫做列表法	由表中已有的自变量的每一个值，可以直接得出相应的函数值	有局限性，自变量的值不能够一一列出，也不容易看出自变量与函数之间的对应关系
图像法	用图像来表示函数关系的方法叫做图像法	比较形象直观，通过图像可以发现变量之间的对应关系以及变化发展趋势	观察图像只能得到近似的数量关系

注意：表达式法应用较多，有的函数可以用三种方法中的任意一种表示，而有的只能用其中的一种或者两种方法表示. 如某地某天的气温与时间的关系，则很难用表达式法进行描述.

要点精析



（1）函数的三种表示方法可以互相转化，在应用中，要根据三种表示方法的特点，选用适当的表示方法，或者三种方法结合起来使用.

（2）并不是所有的函数都可以用这三种方法表示出来. 如气温与时间的函数关系，只可用列表法和图像法表示.

2 易错警示

对图像中反映的信息理解不完整，易出现表述错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用表格揭示两个变量之间的关系

例4 弹簧挂上物体后会伸长，已知一个弹簧的长度(cm)与所挂物体的质量(kg)之间的关系如下表：

物体的质量/kg	0	1	2	3	4	5
弹簧的长度/cm	10	12.5	15	17.5	20	22.5

下列说法错误的是(　　)

A. 在没挂物体时，弹簧的长度为10 cm

B. 弹簧的长度随物体的质量的变化而变化，物体的质量是函数，弹簧的长度是自变量

C. 若物体的质量为 m kg($0 \leqslant m \leqslant 5$)，弹簧的长度为 y cm，则 $y = 2.5m + 10$

D. 在弹簧能承受的范围内，当物体的质量为4 kg时，弹簧的长度为20 cm

导引： 根据表格中给出的有限对应值以及每组对应值所表示的实际意义逐项判断.

答案： B

方法点拨

观察表格中的自变量与函数的对应值，确定两个变量之间的关系，再结合数值可确定函数表达式.

考查角度2 利用图像揭示两个变量之间的变化规律

例5 [中考·十堰] 如图20.3-3，一只蚂蚁从 O 点出发，沿着扇形 OAB 的边缘匀速爬行一周，当蚂蚁运动的时间为 t 时，蚂蚁与 O 点的距离为 s，则 s 关于 t 的函数图像大致是图20.3-4中的(　　)

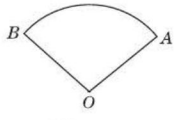


图20.3-3

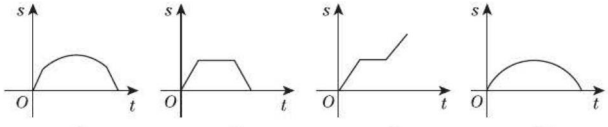


图20.3-4

导引： 抓住不同阶段运动的特点，运用排除法确定函数的图像. 由蚂蚁的运动路线可以得出函数的图像应该分为三部分，而且第三部分随着时间的推移，蚂蚁与 O 点的最终距离应该为0，所以排除C. 当蚂蚁在扇形的弧 AB 段上运动时，蚂蚁到 O 点的距离应该是不变的，所以排除A，D. 故选择B.

答案： B

技巧点拨

判断函数图像时应从以下方面分析：(1)看图像的升降趋势，当函数随着自变量的增大而增大时，对应的图像呈上升趋势，反之，呈下降趋势；(2)看图像的曲直，函数随着自变量的变化而均匀变化，对应的图像是直线，函数随着自变量的变化而不均匀变化，对应的图像是曲线；(3)函数不随自变量的变化而变化，即函数是一个定值时，对应的图像与横轴平行(或在横轴上).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用函数三种表示方法之间的关系进行互化

例6 某年初，我国西南部分省市遭遇了严重干旱. 某水库的蓄水量随着时间的增加而减少，蓄水量 V（万立方米）与干旱持续时间 t（天）的变化情况如图 20.3-5 所示，根据图像回答问题：

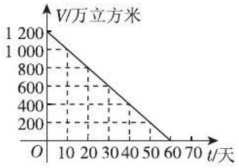


图 20.3-5

（1）这个图像反映了哪两个变量之间的关系？

（2）根据图像填表.

干旱持续时间 t/天	0	10	20	30	40	50	60
蓄水量 V/万立方米							

（3）当 t 取 0 至 60 之间的任意值时，对应着几个 V 值？

（4）V 可以看成是 t 的函数吗？若可以，写出函数表达式.

导引：（1）通过观察图像可知，横轴表示干旱持续时间，纵轴表示水库蓄水量，因此图像反映的是水库蓄水量与干旱持续时间之间的关系；

（2）根据图像信息确定出表格中各组对应值即可；

（3）观察图像可得；

（4）可根据函数的定义来判断.

解：（1）图像反映了水库蓄水量与干旱持续时间之间的关系.

（2）填表如下：

干旱持续时间 t/天	0	10	20	30	40	50	60
蓄水量 V/万立方米	1 200	1 000	800	600	400	200	0

（3）当 t 取 0 至 60 之间的任意值时，对应着一个 V 值.

（4）V 可以看成是 t 的函数.

根据图像可知，该水库初始蓄水量为 1 200 万立方米，干旱每持续 10 天，蓄水量相应减少 200 万立方米，

由此可得出函数表达式为 $V=1\,200-\frac{200}{10}t$，

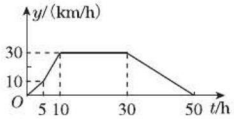
即 $V=-20t+1\,200(0\leqslant t\leqslant 60)$.

方法点拨

本例通过“形”，即图像中的信息，用列表及表达式这些“数”来表示函数，说明三种函数表示方法之间有互补性，是可以相互转化的，体现了数形结合思想的应用.

▲**同类变式**（答案见 218 页）

3. 某气象中心观测一场沙尘暴从发生到结束的全过程，绘制了风速 y（km/h）与时间 t（h）之间的关系图，如图所示.



（第 3 题图）

（1）根据此图填写下面的表格：

时间 t/h	0	5	10	30	50
风速 y/(km/h)					

（2）当 t 取 0 到 50 之间的一个确定的值时，相应的风速 _____ 确定；（填“能”或“不能”）

（3）风速 y 可以看成时间 t 的函数吗？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用函数图像特征进行识别

例 7 一列货运火车从南京站出发，匀加速行驶一段时间后开始匀速行驶，过了一段时间，火车到达下一个车站停下，装完货以后，火车又匀加速行驶，一段时间后再次开始匀速行驶. 图 20.3-6 中，可以近似地刻画出火车在这段时间内的速度变化情况的是(　　)

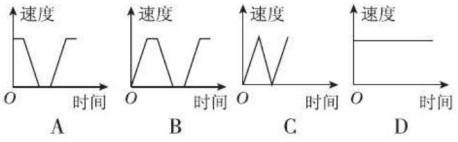


图 20.3-6

答案： B

例 8 ［中考·济宁］匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满. 在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图 20.3-7 所示(图中 $OABC$ 为一条折线). 这个容器的形状可能是图 20.3-8 中的(　　)

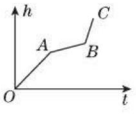


图 20.3-7

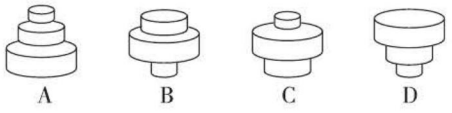


图 20.3-8

导引： 每一段函数图像的倾斜程度反映了水面上升速度的快慢，可以通过观察容器的粗细进行判断. 注水速度一定，函数图像的走势是稍陡、平缓、陡，那么在单位时间内，水面高度增长量就相应地变化，故函数图像的走势跟所给容器的粗细有关. 则从下往上容器的粗细排列顺序为稍粗、粗、细. 故选 C.

答案： C

规律点拨： 由快变慢对应的折线呈现形式为上升幅度变平缓，由慢变快对应的折线呈现形式为上升幅度变陡峭.

拔尖角度 2 利用函数的三种表示方法解决问题

例 9 一个小球由静止开始从一个斜坡上向下滚动，滚动的距离 s(m)与时间 t(s)之间的函数表达式为 $s=2t^2(t\geqslant 0)$. 通过仪器观察得到小球滚动的距离 s(m)与时间 t(s)的数据如下表：

时间 t/s	0	1	2	…
距离 s/m				…

(1) 根据表达式完成上表，并画出函数图像；

(2) 当小球滚动 6.5 s 时，其滚动的距离是多少？

(3) 经过多少秒时，小球滚动 128 m？

导引： 分析表达式，完成表格并画出函数图像.

解： (1) 依次填：0，2，8. 图像如图 20.3-9 所示.

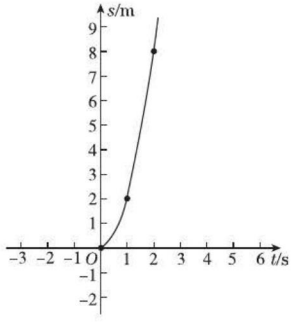


图 20.3-9

(2) 当 $t=6.5$ 时，$s=2\times 6.5^2=84.5$，

即当小球滚动 6.5 s 时，其滚动的距离是 84.5 m.

(3) 当 $s=128$ 时，$t=8$，

即经过 8 s 时，小球滚动 128 m.

方法点拨： 作函数图像时，点与点之间要用平滑的曲线连接.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3　利用函数的图像解决几何动态问题

例 10　［中考·广安］如图 20.3-10，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，有一动点 P 从点 A 出发，沿 $A\to C\to B\to A$ 匀速运动. 则 CP 的长度 s 与时间 t 之间的函数关系用图像描述大致是图20.3-11 中的(　　)

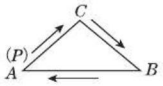


图 20.3-10

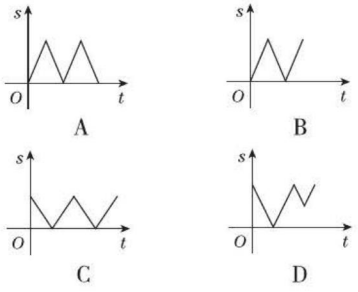


图 20.3-11

导引： 该题属于分段函数问题：

如图 20.3-12，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.

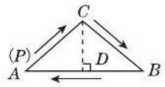


图 20.3-12

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，

$\therefore AD=BD$.

①当点 P 在边 AC 上时，s 随 t 的增大而减小.

故 A，B 错误.

②当点 P 在边 BC 上时，s 随 t 的增大而增大.

③当点 P 在线段 BD 上时，s 随 t 的增大而减小，当点 P 与点 D 重合时，s 最小，但是不等于 0. 故 C 错误.

④当点 P 在线段 AD 上时，s 随 t 的增大而增大. 故 D 正确.

答案： D

练中考·练模拟 得满分 （答案见 218 页）

基础巩固练

1. 小亮因感冒发烧住院治疗，护士为了较直观地了解小亮这天 24 小时的体温和时间的关系，应该选择的比较好的方式是(　　)

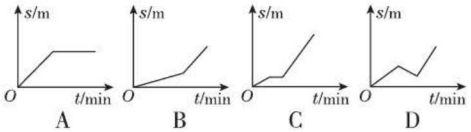
A. 列表法

B. 图像法

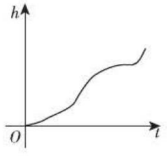
C. 函数表达式法

D. 以上三种方式均可

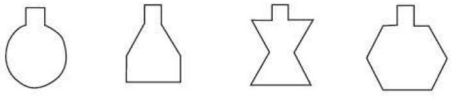
2. ［中考·东营］小明从家到学校，先匀速步行到车站，等了几分钟后坐上了公交车，公交车沿着公路匀速行驶一段时间后到达学校，小明从家到学校行驶路程 s(m) 与时间 t(min) 的大致图像是(　　)



3. 从某容器口以均匀的速度注入酒精，若液面高度 h 随时间的变化情况如图所示，则对应容器的形状为(　　)



(第 3 题图)

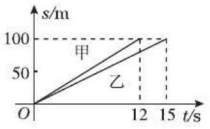


4. 已知点 $P(-1,2)$ 在函数 $y=\dfrac{n-3}{x}$ 的图像上，则 $n=$ _____.

5. 已知甲、乙两人在一次赛跑中，所跑路程 s 与所用时间 t 之间的关系如图，那么由图像

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

可知：



（第5题图）

(1)这是一次_____ m赛跑；

(2)甲、乙两人中，先到达终点的是_____；

(3)乙在这次赛跑中的速度是_____m/s.

6. 在同一直角坐标系中画出 $y=x+2$，$y=-\frac{2}{x}$的图像.

7. 某城市居民用水实行阶梯收费，每户每月用水量如果未超过20吨，按每吨2.5元收费. 如果超过20吨，未超过的部分按每吨2.5元收费，超过的部分按每吨3.3元收费. 设某户每月用水量为 x 吨，应缴水费为 y 元.

(1)分别写出每月用水量未超过20吨和超过20吨时，y 与 x 之间的函数关系式；

(2)若该城市某户4月份水费平均为每吨2.8元，求该户4月份用水多少吨.

8. 某工厂现在年产值是15万元，预计今后每年年产值增加2万元.

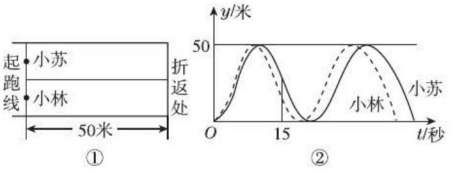
(1)写出今后每年年产值 y（万元）与年数 x（年）之间的函数关系式；

(2)画出函数图像；

(3)求第6年的年产值.

能力提升练

9. [中考·北京] 小苏和小林在如图①所示的跑道上进行4×50米折返跑. 在整个过程中，跑步者距起跑线的距离 y（单位：米）与跑步时间 t（单位：秒）的对应关系如图②所示. 下列叙述正确的是(　　)



（第9题图）

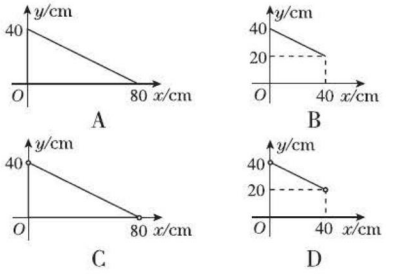
A. 两人从起跑线同时出发，同时到达终点

B. 小苏跑全程的平均速度大于小林跑全程的平均速度

C. 小苏前15秒跑过的路程大于小林前15秒跑过的路程

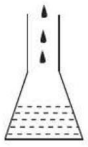
D. 小林在跑最后100米的过程中，与小苏相遇2次

10. [中考·齐齐哈尔] 若等腰三角形的周长是80 cm，则能反映这个等腰三角形的腰长 y（cm）与底边长 x（cm）的函数关系的图像是(　　)

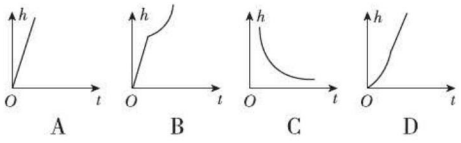


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. [中考·赤峰] 如图是九年级某考生做的水滴入一个玻璃容器的示意图(滴水速度保持不变),能正确反映容器中水的高度(h)与时间(t)之间对应关系的大致图像是(　　)



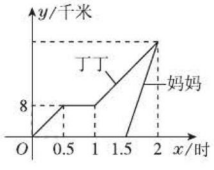
(第11题图)



12. 元旦,丁丁骑自行车去外婆家,路上经过一家超市逗留了半小时后又按同样的速度前往外婆家. 丁丁从家出发一个半小时后,妈妈忙完家务驾车去外婆家,恰好与丁丁同时到达. 如图是他们离家的距离 y(千米)与丁丁离家的时间x(时)之间的函数图像,根据图像回答下列问题:

(1)丁丁家离外婆家有多远?

(2)妈妈驾车的速度是丁丁骑自行车速度的多少倍?



(第12题图)

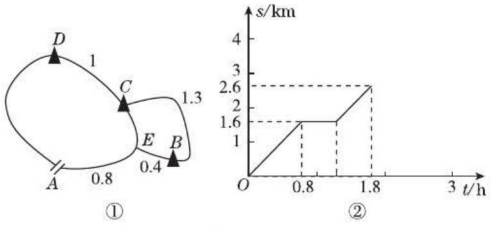
思维拓展练

13. [中考·咸宁] 某景区的旅游线路如图①所示,其中 A 为入口,B,C,D 为风景点,E 为三岔路的交会点,图①中所给数据为相应两点间的路程(单位:km). 甲游客以一定的速度沿线路"$A\to D\to C\to E\to A$"步行游览,在每个景点逗留的时间相同,当他回到 A 处时,共用去 3 h. 甲步行的路程 s(km)与游览时间 t(h)之间的部分函数图像如图②所示.

(1)求甲在每个景点逗留的时间,并补全图像;

(2)求 C,E 两点间的路程;

(3)乙与甲同时从 A 处出发,打算游完三个景点后回到 A 处,两人相约先到者在 A 处等候,等候时间不超过 10 min. 如果乙的步行速度为3 km/h,在每个景点逗留的时间与甲相同,他们的约定能否实现?请说明理由.



(第13题图)

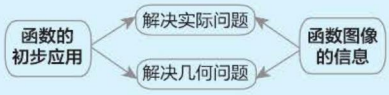
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

20.4 函数的初步应用

核心知识

- 在实际问题中建立函数关系
- 在几何问题中建立函数关系
- 利用函数图像解决实际问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 函数的应用(重点)

1 很多实际问题和数学问题都表现为两个变量之间的函数关系，即函数关系广泛存在，我们可以根据两个变量之间的内在联系，列出或求出函数的表达式，根据表达式分析和判断问题情境中的有关过程和结果，确定变量在一定条件下的特殊值或特定的范围，了解变量的变化规律.

2 **用函数解决问题的一般步骤**

(1)审清题意，找出题目中的常量、变量，并理清常量与变量之间的关系；

(2)根据常量与变量之间的关系(例如基本数量关系、公式等)确定函数表达式，同时确定自变量的取值范围；

(3)运用函数的表达式(或图像)解决问题.

3 **易错警示**

在应用函数知识解决实际问题时，自变量的取值范围一般有两方面的限制，一是使表达式本身有意义的限制，二是使实际问题有意义的限制.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用实际问题中的等量关系建立函数关系

例1 [表格信息题，易错题]一种树苗的高度用 h 表示，树苗生长的年数用 k 表示，测得的有关数据如下表(树苗原高为 50 cm)：

年数 k	1	2	3	4	…
高度 h/cm	$50+5$	$50+10$	$50+15$	$50+20$	…

则用年数 k 表示高度 h 的关系式是(　　)

A. $h=50k+5$

B. $h=50+5(k-1)$

C. $h=50+5k$

D. $h=50(k-1)+5$

导引：第1年，高度为 $(50+5)$ cm；

第 2 年，高度为 $(50+2\times5)$ cm；

第 3 年，高度为 $(50+3\times5)$ cm；

……

第 k 年，高度为 $(50+5k)$ cm.

依题意得 $h=50+5k$. 故选 C.

本题得到关系式时，应代入数据检验，以免错选为 B.

答案：C

方法点拨

解答本题运用了由特殊到一般的思想，解决本题的关键是根据所给的表格发现规律，从而得到高度 h 与相应年数 k 之间的关系式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 在几何问题中建立函数关系

例2 如图20.4-1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$DE \perp BC$，垂足为 E，$AD = DE = 4$，$\angle C = 45°$，设 $BC = x$，四边形 $ABED$ 的面积为 y，则 y 与 x 之间的函数关系式为_____（不必写出自变量的取值范围）.

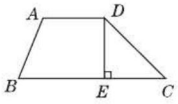


图20.4-1

导引： ∵ 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$DE \perp BC$，垂足为 E，$AD = DE = 4$，$\angle C = 45°$，∴ $EC = 4$. 又∵ $BC = x$，∴ $BE = x - 4$.

∴ 四边形 $ABED$ 的面积 $y = \frac{1}{2}(AD + BE) \times DE = \frac{1}{2} \times (4 + x - 4) \times 4 = 2x$，即 $y = 2x$. 故答案为 $y = 2x$.

答案： $y = 2x$

点拨： 此题主要考查了梯形面积公式等知识，利用已知条件表示出 BE 的长，进而利用梯形面积公式得出 $y = \frac{1}{2}(AD + BE) \times DE$ 即可.

考查角度3 解决与函数图像有关的问题

例3 ［中考·湘西州］小芳的爷爷每天坚持体育锻炼，某天他慢步行走到离家较远的公园，打了一会儿太极拳，然后沿原路跑步到家里，图20.4-2中，能够反映当天小芳爷爷离家的距离 y（米）与时间 x（分）之间关系的大致图像的是（　　）

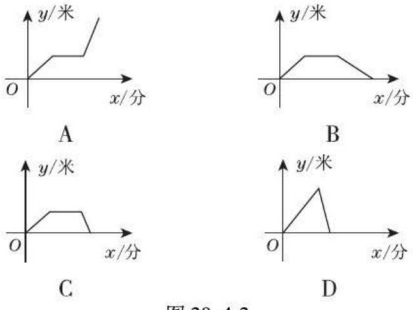


图20.4-2

导引： 图像大致分为三段：

(1) 慢步到公园，y 随 x 的增大，缓慢增大；

(2) 打太极拳，y 随 x 的增大，不变；

(3) 跑步回家，y 随 x 的增大，快速减小，

可得选项C中的图像符合，故选C.

答案： C

同类变式 （答案见219页）

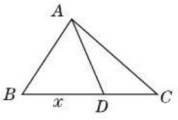
1. 如图，$\triangle ABC$ 的边 BC 的长是10，BC 边上的高是6，D 点在 BC 上运动，设 BD 的长为 x.

(1) 请求出 $\triangle ACD$ 的面积 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 求自变量 x 的取值范围；

(3) 求当 $x = 2.5$ 时，$\triangle ACD$ 的面积 y；

(4) 当 $\triangle ACD$ 的面积 $y = 6$ 时，BD 的长为多少？



（第1题图）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用函数图像解决实际问题

例4 ［图像信息题］宁安市与哈尔滨市两地相距360千米. 甲车在宁安市，乙车在哈尔滨市，两车同时出发，相向而行，在A地相遇. 为节约费用(两车相遇并换货后，均需按原路返回出发地)，两车换货后，甲车立即按原路返回宁安市. 设每车在行驶过程中速度保持不变，两车间的距离y(千米)与时间x(时)的函数关系如图20.4-3所示. 根据所提供的信息，回答下列问题：

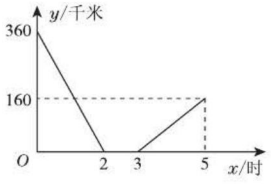


图20.4-3

(1)求甲、乙两车的速度；

(2)说明从两车开始出发到5小时这段时间内乙车的运动状态.

导引：(1)第一个时间段的函数图像表示2小时两车共走完360千米，从而可求得甲、乙两车的速度和为180千米/时；第三个时间段的函数图像表示甲车2小时走了160千米，从而可求得甲车的速度为80千米/时，然后用甲、乙两车的速度和减去甲车的速度即为乙车的速度，即乙车的速度为100千米/时.

(2)乙车只是在前2小时以100千米/时的速度行驶.

解：(1)由题意，可知相遇前，甲、乙两车的速度和为$\frac{360}{2}=180$(千米/时)，换货后，两车的速度和为$\frac{160}{5-3}=80$(千米/时).

∵ $180>80$，且每车在行驶过程中速度保持不变，∴ 换货后只有甲车在行驶.

∴ 甲车的速度为80千米/时，乙车的速度为$180-80=100$(千米/时).

(2)乙车以100千米/时的速度从哈尔滨出发，2小时到达A地，然后在A地停留了3小时.

方法点拨：解答本题运用了数形结合思想，正确理解函数图像中点的横、纵坐标表示的意义、分析图像的变化过程是解题的关键.

拔尖角度 2 分类讨论思想在实际问题中的应用

例5 某市为了鼓励居民节约用水，采用分段计费的方法按月计算每户家庭的水费，月用水量不超过20立方米时，按2元/立方米计费；月用水量超过20立方米时，其中的20立方米仍按2元/立方米计费，超过部分按2.6元/立方米计费，设每户家庭月用水量为x立方米时，应缴水费y元.

(1)求出y与x的函数关系式；

(2)小明家第二季度缴纳水费的情况如下：

月份	四	五	六
缴费金额	30元	34元	42.6元

小明家这个季度共用水多少立方米？

导引：(1)因为x的取值不同时，y随x的变化情况也不同，所以应分情况进行讨论.

(2)由每个月份所缴水费情况确定应代入哪个函数关系式进行计算.

解：(1)当$0\leqslant x\leqslant 20$时，y与x的函数关系式是$y=2x$；当$x>20$时，y与x的函数关系式是$y=2\times 20+2.6(x-20)$，即$y=2.6x-12$，所以y与x的函数关系式为$y=\begin{cases}2x, 0\leqslant x\leqslant 20,\\ 2.6x-12, x>20.\end{cases}$

(2)因为小明家四、五月份的水费都不超过40元，六月份的水费超过了40元，

所以把$y=30$代入$y=2x$中，得$x=15$；

把$y=34$代入$y=2x$中，得$x=17$；

把$y=42.6$代入$y=2.6x-12$中，得$x=21$.

$15+17+21=53$(立方米).

答：小明家这个季度共用水53立方米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 220 页）

基础巩固练

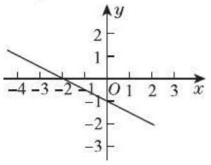
1. 函数的图像如图所示，则当 $y<0$ 时，x 的取值范围是（　　）

A. $x<-2$

B. $x>-2$

C. $x<-1$

D. $x>-1$



（第 1 题图）

2. 长方形的周长为 50，设它的一边长为 x，与其相邻的另一边长为 y，则 y 与 x 的函数关系式为（　　）

A. $y=-x+25$　　B. $y=x+25$

C. $y=-x+50$　　D. $y=x+50$

3. 为迎接省运会在某市召开，市里组织了一个梯形鲜花队参加开幕式，要求共站 60 排，第一排站 40 人，后面每一排都比前一排多站 1 人，则每排人数 y 与该排排数 x 之间的函数关系式为_____.

4. 弹簧挂上物体后会伸长，测得一个弹簧的长度 y 与所挂物体的质量 x 之间的关系如下表：

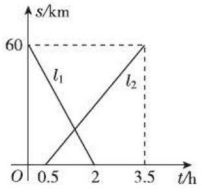
x/千克	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y/厘米	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	…

则 y 与 x 之间的函数关系式为_____.（不必写出自变量的取值范围）

5. ［中考·青岛］A，B 两地相距 60 km，甲、乙两人从两地出发相向而行，甲先出发. 图中 l_1，l_2 表示两人离 A 地的距离 s(km) 与时间 t(h) 的关系. 请结合图像解答下列问题：

(1) 表示乙离 A 地的距离与时间关系的图像是_____(填 l_1 或 l_2)；甲的速度是_____ km/h；乙的速度是_____km/h；

(2) 甲出发多少小时后，两人恰好相距 5 km？



（第 5 题图）

6. 有一个数值转换机操作如下：

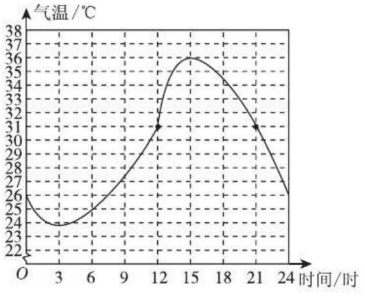
输入 $x\rightarrow+3\rightarrow\div5\rightarrow$输出结果 y.

(1) y 与 x 之间的关系式为 $y=$_____；

(2) 若输入的 x 为 -6，求输出的结果 y 是多少；

(3) 当输入的 x 为何值时，输入的值和输出的结果相等？

7. 如图表示的是长沙市 2017 年 6 月份某天的气温随时间变化的情况，请观察此图并回答下列问题：



（第 7 题图）

(1) 这天的最高气温是_____℃；

(2) 这天共有_____个小时的气温在 31 ℃以上(含 31 ℃)；

(3) 这天_____(时间范围)气温在上升；

(4) 请你预测一下，次日凌晨 1 时的气温大约是多少？

8. 在直角坐标系中，已知点 $A(6,0)$，点 $B(x,y)$ 在第一象限内，且 $x+y=8$，设 $\triangle AOB$ 的面积为 S.

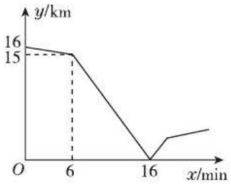
(1) 求出 S 与 x 之间的函数关系式，并求出 x 的取值范围；

(2) 画出函数图像.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

9. [中考·重庆]甲、乙两人在一条笔直的道路上相向而行,甲骑自行车从 A 地到 B 地,乙驾车从 B 地到 A 地,他们分别以不同的速度匀速行驶,已知甲先出发 6 min 后,乙才出发. 在整个过程中,甲、乙两人的距离 y(km)与甲出发的时间 x(min)之间的关系如图所示. 当乙到达终点 A 时,甲还需_____ min 到达终点 B.

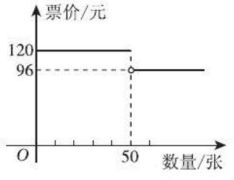


(第 9 题图)

10. 吉安市某旅游公司取得了某旅游景点门票销售权,每张普通票的票价与买票的数量的函数关系如图所示.

(1)从图中可以看出:买票的数量 a _____时,票价打_____折;

(2)吉安市某校九年级(1)班、(2)班的学生都不超过 50 人,两个班合起来买票,结果比各班单独买票共节省了 2 400 元,该校九年级(1)班、(2)班的人数各为多少?



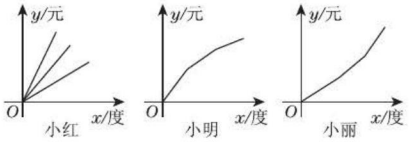
(第 10 题图)

思维拓展练

11. 从某市的供电公司获悉,该市于 2017 年 7 月 1 日开始执行阶梯电价. 居民月用电量分为三个档次,第一档为 230 度及以内,第二档为 230 度(不包含 230 度)至 400 度,第三档为高于 400 度部分. 第一档维持现行电价标准,即每度按 0.53 元收取;第二档每度加价 0.05 元,即每个月用电量超出 230 度而不超过 400 度部分,按照每度 0.58 元收取;第三档每度加价 0.3 元,即超出 400 度部分,按照每度 0.83 元收取. 请完成下列问题:

(1)若该市某户居民 2018 年 8 月用电 310 度,则该户居民 8 月应付电费多少元?

(2)实行阶梯电价后,如果月用电量用 x(度)表示,月支出电费用 y(元)表示,小红、小明、小丽三人绘制了如图所示的大致图像,你认为正确的是_____.



(第 11 题图)

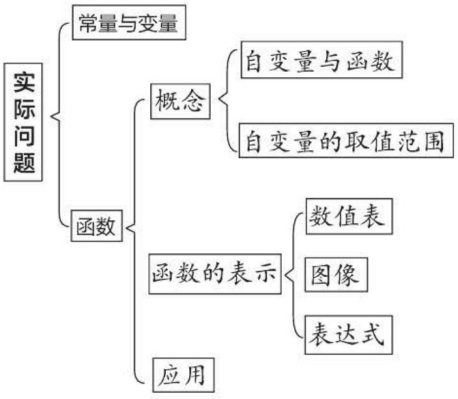
(3)小明家 2018 年 11 月和 12 月共用电 460 度,且 11 月用电量少于 12 月,他通过计算发现:他家这两个月的电费比调整前多出了 2.5 元. 你能求出小明家 11 月和 12 月的用电量分别是多少吗?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两个变量 x,y,当 x 取一个值时,y 有唯一值与它对应,x 是自变量,y 是 x 的函数.
2. 函数有三种表示方法:(1)数值表法,列出几对对应值的表格表示函数关系;(2)图像法,用以每对对应值为坐标的点组成的图形表示函数关系;(3)表达式法,将两个变量之间的数量关系用一个式子表示出来.

知识方法专题

知识必学

专题一 函数的概念

链接中考>>理解函数概念一定要注意以下三个要素:(1)有一个变化过程;(2)变量之间的对应关系;(3)当自变量取定一个数值时,对应的函数值是唯一确定的.

例 1 下列关系式中,y 不是 x 的函数的是(　　)

A. $y=-\frac{3}{2}x$　　B. $y=\frac{1}{x}$

C. $y=x^2$　　D. $|y|=x$

导引: 根据函数的概念可知 A,B,C 中,y 是 x 的函数,D 中 y 不是 x 的函数. 故选 D.

答案: D

方法点拨: 解答本题运用了定义法,根据函数的概念可得出正确答案.

例 2 如图 20-1 所示的四个图形中,表示函数的是(　　)

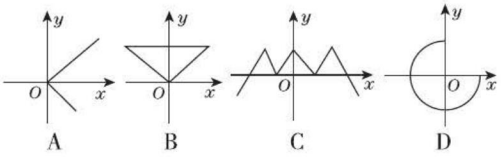


图 20-1

导引: 根据函数的概念可知,只有 C 选项的图形可以表示函数. 故选 C.

答案: C

专题二 函数的图像

链接中考>>理解函数图像的意义是解决函数问题的根本,利用函数知识解决几何图形中的动点问题或者解决生活中的实际问题,都离不开对函数图像中点的意义的理解,其根本就在于函数图像是数形相结合的产物. 函数图像是中考的热门考点,常见的考查题型是选择题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例3 ［中考·宜宾］如图 20-2 是甲、乙两车在某时段速度随时间变化的图像，下列结论错误的是(　　)

A. 前 4 秒乙行驶的路程为 48 米

B. 在 0 到 8 秒内，甲的速度每秒增加 4 米/秒

C. 到第 3 秒时两车行驶的路程相等

D. 在 4 至 8 秒内，甲的速度都大于乙的速度

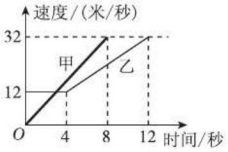


图 20-2

导引： 由图像可知，乙的速度变化分两段，第一段(前 4 秒)，图像与 x 轴平行，即时间改变，速度不变，都是 12 米/秒，所以前 4 秒行驶了 48 米；4 至 8 秒，乙的速度对应的图像都在甲的下面，说明 4 到 8 秒内甲的速度都大于乙的速度；再看 0 到 8 秒内，甲的速度对应的图像是一条过点 O 的线段，说明速度随时间是均匀变化的，8 秒内速度由 0 变到 32 米/秒，所以速度每秒增加 4 米/秒. A，B，D 都正确，故错误的是 C. 故选 C.

答案： C

方法点拨： 利用函数图像解决实际问题，关键在于正确理解函数图像中点的横、纵坐标表示的意义.

专题三 函数自变量的取值范围

链接中考>>函数自变量的取值范围表面上是考查函数知识，其实是考查自变量出现的形式——整式、分式等知识. 注意当几种形式组合时，要综合考虑几个方面. 一般以选择题的形式呈现.

例4 函数 $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x-4}$ 的自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x\leqslant 3$　　B. $x\neq 4$

C. $x\geqslant 3$ 且 $x\neq 4$　　D. $x<3$

导引： 先分别求出使 $\sqrt{3-x}$ 与 $\dfrac{1}{x-4}$ 有意义的条件，再求公共部分，即要使函数有意义，必须 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x-4\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 3$.

答案： A

方法点拨： 确定自变量的取值范围时，应注意以下几种情况：(1)如果函数的表达式中含自变量的部分是整式，那么自变量的取值范围是全体实数；(2)如果函数的表达式中含自变量的部分是分式，那么自变量的取值范围是使分母不为 0 的所有实数；(3)在实际问题中，函数自变量的取值必须使实际问题有意义.

专题四 建立函数模型解决实际问题

链接中考>>解答此类问题要运用建模思想、方程思想等. 首先要分析问题中的等量关系，列出关系式，再求解.

例5 一辆汽车的油箱中现有汽油 50 L. 如果不再加油，那么油箱中的剩余油量 y(单位：L)随行驶里程 x(单位：km)的增加而减少，平均每千米的耗油量为 0.1 L.

(1)写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)汽车行驶 200 km 时，油箱中还有多少油？

(3)汽车最多可行驶多少千米？

导引： (1)由题意可知 $y=50-0.1x$.

(2)将 $x=200$ 代入(1)题中求出的 x，y 的关系式，即可得出答案.

(3)剩余油量为 0 时，行驶的路程最多，由此计算即可.

解： (1)根据题意，可知 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=50-0.1x$.

(2)当 $x=200$ 时，$y=50-0.1\times 200=30$.

∴ 汽车行驶 200 km 时，油箱中还有 30 L 油.

(3)当 $y=0$ 时，$50-0.1x=0$，

解得 $x=500$.

∴ 汽车最多可行驶 500 km.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨： 首先要从问题情境中挖掘出“剩余油量＝总油量－耗油量”这一等量关系，进而得到关系式；解答(3)题的关键是理解“最多可行驶多少千米”的含义.

Ⅱ思想方法专题

专题五 数形结合思想

专题解读>> 数形结合思想是解决数学问题的重要的思想方法之一，运用数形结合思想，既能分析数量关系，又能揭示几何意义，使数量关系与几何图形巧妙地结合起来.

本章知识主要涉及图像信息题，必须认真观察图像，图像给我们提供了直观、准确的信息，从而给解题提供了帮助. 解决这类问题的关键是通过观察图像所提供的信息，正确地进行数形转换，抽象出数学问题.

例6 一列快车从甲地驶往乙地，一列慢车从乙地驶往甲地，两车同时出发，设慢车行驶时间为x(h)，两车之间的距离为y(km)，如图20-3中的折线表示y与x之间的函数关系，则线段BC所对应的y与x之间的函数关系式为_____(写出自变量的取值范围).

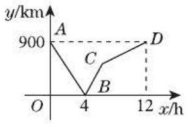


图20-3

导引： 两车的速度之和为$900\div4=225$(km/h)，

∴线段BC所对应的y与x之间的函数关系式为$y=225\times(x-4)=225x-900$.

慢车用了12 h到达终点，

速度为$900\div12=75$(km/h)，

则快车的速度为$225-75=150$(km/h)，

走完900 km所需要的时间为$900\div150=6$(h)，

∴$4\leqslant x\leqslant6$.

答案： $y=225x-900(4\leqslant x\leqslant6)$

Ⅱ好题必解 答案见221页

一、选择题

1. 已知点$A(2,3)$在函数$y=ax^2-x+1$的图像上，则a等于(　　)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

2. 在函数$y=\dfrac{\sqrt{x+4}}{x}$中，自变量x的取值范围是(　　)

A. $x>0$　　B. $x\geqslant-4$

C. $x\geqslant-4$且$x\neq0$　　D. $x\neq-4$

3. [中考·眉山]函数$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$中，自变量$x$的取值范围是(　　)

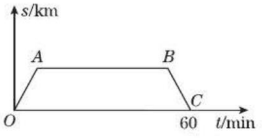
A. $x\geqslant-2$且$x\neq1$

B. $x\geqslant-2$

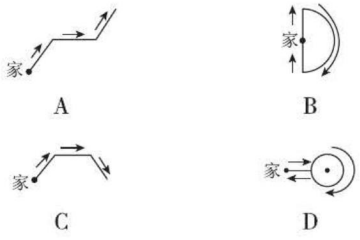
C. $x\neq1$

D. $-2\leqslant x<1$

4. [中考·贵阳]星期六早晨，蕊蕊的妈妈从家里出发去观山湖公园锻炼，她连续匀速走了60 min后回到家，图中的折线OA—AB—BC是她出发后所在位置离家的距离s(km)与行走时间t(min)之间的函数关系. 则下列图形中，可以大致描述蕊蕊的妈妈行走路线的是(　　)



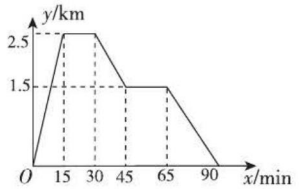
(第4题图)



5. [中考·黄冈]已知林茂的家、体育场、文具店在同一直线上，图中的信息反映的过程是林茂从家跑步去体育场，在体育场锻炼了一阵后又走到文具店买笔，然后再走回家.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图中 x 表示时间，y 表示林茂离家的距离，依据图中的信息，下列说法错误的是(　　)



(第 5 题图)

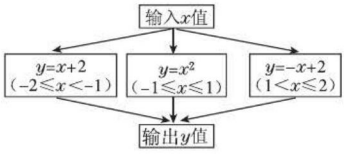
A. 体育场离林茂家 2.5 km

B. 体育场离文具店 1 km

C. 林茂从体育场出发到文具店的平均速度是 50 m/min

D. 林茂从文具店回家的平均速度是 60 m/min

6. 根据如图所示的程序计算函数值，若输入的 x 值是 $\frac{3}{2}$，则输出的结果为(　　)



(第 6 题图)

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

二、填空题

7. 下列各点中，在函数 $y=x+2$ 的图像上的有_____.

$A(1,3)$；$B(-2,0)$；$C(4.1,6.1)$；

$D(-6,-4)$；$E(-5,3)$.

8. [中考·上海] 同一温度的华氏度数 y(℉)与摄氏度数 x(℃)之间的函数关系式是 $y=\frac{9}{5}x+32$. 如果某一温度的摄氏度数是 25 ℃，那么它的华氏度数是_____℉.

9. 由试验测得某一弹簧的长度 y(cm)与悬挂物体的质量 x(kg)之间有如下关系式：$y=12+0.5x$，这里的变量是_____，常量是_____.

10. 若干个偶数按每行 8 个数排成如图所示的图形：

2	4	6	8	10	12	14	16
18	20	22	24	26	28	30	32
34	36	38	40	42	44	46	48

…

(第 10 题图)

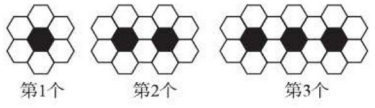
在图中用方框任意框中 9 个数，设它们的和为 y，中间的数为 x，则 y 与 x 之间的关系式为_____.

11. 某商品原价为 560 元，随着不同幅度的降价，日销量发生了相应的变化，如下表：

降价/元	5	10	15	20	25	30	35
日销量/件	780	810	840	870	900	930	960

这个表反映了_____个变量之间的关系，_____是自变量. 从表中可以看出每降价 5 元，日销量增加_____件，从而可以估计降价之前的日销量为_____件，当售价为 500 元时，日销量为_____件.

12. 用黑白两种颜色的正六边形地砖按如图所示的规律拼成若干个图案，则第 n 个图案中白色地砖的总数 N 与 n 之间的关系式为_____，其中常量是_____，变量是_____.



(第 12 题图)

三、解答题

13. 下表是佳佳往表妹家打长途电话的电话费与通话时间的记录情况：

通话时间/分	1	2	3	4	5	6	7	…
电话费/元	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	…

(1) 上表反映了哪两个变量之间的关系？哪个量是自变量？哪个量是这个自变量的函数？

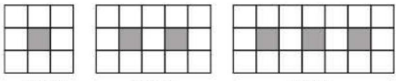
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)请你帮佳佳计算一下,当她往表妹家打电话的通话时间为 10 分钟时,需付多少元电话费?

14. 如图所示,下列图案是由边长相等的黑白两色正方形按一定规律拼接而成的,设第 x 个图案中白色正方形的个数为 y.

(1)写出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)求第 50 个图案中,白色正方形的个数.



(第 14 题图)

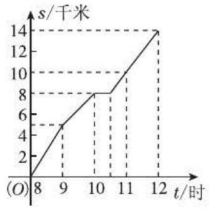
15. 一位旅行者在早晨 8 时从城市出发到乡村,第一个小时走了 5 千米,然后他开始上坡,1 小时走了 3 千米,之后休息了 30 分钟;休息后平均每小时走 4 千米,在中午 12 时到达乡村. 他离开城市的距离 s(千米)跟出发的时间 t(时)之间的函数关系如图所示,根据下图回答:

(1)旅行者在 9 时、10 时 30 分、11 时离开城市的距离分别为多少?

(2)他停下来休息时,离开城市的距离是多少?

(3)乡村离城市有多少千米路程?

(4)旅行者离开城市 6 千米、10 千米、12 千米、14 千米的时间分别为多少?



(第 15 题图)

16. 已知等腰三角形的周长为 12 cm,若底边长为 y cm,一腰长为 x cm.

(1)确定 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)确定 x 的取值范围;

(3)画出函数的图像.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十一章

一次函数

认识数形结合体

数学点拨

你将学到的核心考点

- 一次函数 □
- 一次函数的图像和性质 □
- 用待定系数法确定一次函数表达式 □
- 一次函数的应用 □
- 一次函数与二元一次方程的关系 □

我们为你提供的核心方法

- 待定系数法 □
- 数形结合思想 □
- 整体思想 □
- 分类讨论思想 □
- 方程思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.1 一次函数

核心知识

- 正比例函数的概念
- 一次函数的概念

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正比例函数的定义(重点)

1 定义 一般地，我们把形如 $y=kx$(k 为常数，且 $k\neq0$)的函数叫做正比例函数. 其中，非 0 常数 k 叫做比例系数.

要点精析

(1)判断一个函数是否为正比例函数的方法是看一个函数是否满足以下两个条件:①所给函数是形如 $y=kx$ 的函数;②比例系数 k 是常数,且 k 不等于 0. 同时满足这两个条件,它就是正比例函数.

(2)正比例函数反映两个变量之间的关系.

2 易错警示

(1)正比例函数 $y=kx$ 中，$k\neq0$，自变量 x 的指数为 1.

(2)自变量的取值范围：一般情况下，正比例函数中自变量的取值范围是全体实数，但在实际问题中，注意自变量的取值要有实际意义.

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 识别实际问题中的正比例函数关系

例 1 写出下列问题的函数表达式,并判断是否是正比例函数.

(1)已知圆的周长 C 是半径 r 的函数;

(2)油箱中有油 30 L,若油从油箱中均匀流出,150 min 流尽,则油箱中余油量 Q(L)是流出时间 t(min)的函数;

(3)小明以 4 km/h 的速度匀速前进,则他所走的路程 s(km)是时间 t(h)的函数;

(4)某种商品每件进价 100 元,售出时每件获得 20% 的利润,销售额 y(元)是售出商品数量 x(件)的函数.

解: (1)$C=2\pi r$,是正比例函数.

(2)$Q=30-\frac{1}{5}t$,不是正比例函数.

(3)$s=4t$,是正比例函数.

(4)$y=(100+100\times20\%)x$,即 $y=120x$,是正比例函数.

方法点拨

- 根据题意可先得到变量间的关系式，然后写成函数表达式的形式.
- 判断一个函数是否为正比例函数的方法：看两个变量的比是不是常数，即函数是不是形如 $y=kx$(k 为常数，且 $k\neq0$)的函数.

同类变式 (答案见 221 页)

1. [中考·梧州]下列函数中,正比例函数是(　　)

A. $y=-8x$　　B. $y=\frac{8}{x}$

C. $y=8x^2$　　D. $y=8x-4$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用正比例函数的定义求待定字母的值

例2 已知函数 $y=(k-2)x^{|k|-1}$（k 为常数）是关于 x 的正比例函数，则 $k=$ _____.

导引： 根据正比例函数的定义，此函数表达式应满足：(1)变量 x 的指数为 1，即 $|k|-1=1$，所以 $k=\pm2$；(2)比例系数 $k-2\neq0$，即 $k\neq2$. 综上，$k=-2$.

答案： -2

易错警示

应用定义求待定字母的值时，不要忽视比例系数不为0这一条件.

点知识2 正比例函数表达式的确定

1 确定正比例函数的表达式，就是确定正比例函数表达式 $y=kx(k\neq0)$ 中常数 k 的值.

2 **求正比例函数表达式的步骤**

设→代→求→还原.

(1)设：设出正比例函数表达式 $y=kx$.

(2)代：将已知条件代入函数表达式.

(3)求：求出 k 的值.

(4)还原：写出正比例函数表达式.

拔考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度 利用一对对应值求函数表达式

例3 y 与 $2x$ 成正比例，且当 $x=3$ 时，$y=12$，求 y 与 x 的函数表达式.

导引： 根据正比例函数的定义，按求正比例函数表达式的步骤求解.

解： 设 $y=k\cdot2x(k\neq0)$. ∵ 当 $x=3$ 时，$y=12$，

∴ $12=2\times3\times k$，∴ $k=2$. ∴ y 与 x 的函数表达式为 $y=4x$.

方法点拨

根据正比例函数的定义，要确定正比例函数的表达式，只需要确定比例系数 k 的值，所以知道一对对应值即可.

点知识3 一次函数的定义（关键）

1 **定义** 一般地，我们把形如 $y=kx+b(k,\ b$ 为常数，且 $k\neq0)$ 的函数叫做一次函数. 对于一次函数 $y=kx+b$，当 $b=0$ 时，它就化为 $y=kx$，所以正比例函数 $y=kx$ 是一次函数的特殊形式.

(1)一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的特征

①$k\neq0$；

②自变量 x 的指数是 1；

③常数项 b 可以是任意实数.

(2)函数是一次函数⇔函数表达式为 $y=kx+b(k,\ b$ 是常数，$k\neq0)$.

(3)正比例函数是一次函数，但一次函数不一定是正比例函数.

2 **易错警示**

自变量 x 的取值范围：一般情况下，一次函数中自变量 x 的取值范围是全体实数，但在实际问题中，注意自变量的取值要有实际意义.

拔考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用一次函数的定义进行识别

例4 下列函数中，哪些是一次函数，哪些是正比例函数？

(1)$y=-2x^2$；(2)$y=\dfrac{x+1}{2}$；

(3)$y=3x^2-x(3x-2)$；

(4)$x^2+y=1$；(5)$y=-\dfrac{3}{x}$.



导引： 先看函数表达式是否为整式，再通过恒等变形进行化简，然后根据一次函数和正比例函数的定义进行判断.

方法点拨

判断函数是否为一次函数的方法：先看函数表达式是否是整式，再将函数表达式进行恒等变形，然后看它是否符合一次函数表达式 $y=kx+b$ 的特征：(1)$k\neq0$；(2)自变量 x

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解: (1)因为 x 的指数是 2,所以 $y=-2x^2$ 不是一次函数,也不是正比例函数.

(2)因为 $y=\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$,$k=\frac{1}{2}\neq 0$,$b=\frac{1}{2}$,所以 $y=\frac{x+1}{2}$ 是一次函数,但不是正比例函数.

(3)因为 $y=3x^2-x(3x-2)=2x$,$k=2$,$b=0$,所以它是一次函数,也是正比例函数.

(4)$x^2+y=1$,即 $y=1-x^2$. 因为 x 的指数是 2,所以 $x^2+y=1$ 不是一次函数,也不是正比例函数.

(5)因为 $y=-\frac{3}{x}$ 中 $\frac{3}{x}$ 不是整式,不符合 $y=kx+b$ 的形式,所以它不是一次函数,也不是正比例函数.

的指数为 1;(3)常数项 b 可以为任意实数.

考查角度2 利用一次函数的定义求待定字母的值

例5 [原创易错题]已知关于 x 的函数 $y=(n^2-4)x^2+(2n-4)x^{m-2}-(m+n-8)$.

(1)当 m,n 为何值时,函数是一次函数?

(2)如果函数是一次函数,求 $x=1$ 时的函数值.

导引: (1)由一次函数的定义,结合所给函数表达式的特征可知:①二次项的系数必为 0,即 $n^2-4=0$;②$(2n-4)x^{m-2}$ 必为一次项,且系数不为 0,即 $m-2=1$,$2n-4\neq 0$.

(2)写出函数表达式,把 $x=1$ 代入求函数值.

解: (1)由题意,得 $\begin{cases}n^2-4=0,\\ m-2=1,\\ 2n-4\neq 0.\end{cases}$

$\therefore m=3$,$n=-2$. $\therefore$ 当 $m=3$,$n=-2$ 时,函数是一次函数.

(2)由(1)得此一次函数表达式为 $y=-8x+7$.

当 $x=1$ 时,$y=-8\times 1+7=-1$.

易错警示

根据一次函数定义求待定字母的值时,要注意:(1)函数表达式是自变量的一次式,若含有一次以上的项,则其系数必为 0;(2)注意隐含条件——一次项的系数不为 0.

考查角度3 利用一次函数与正比例函数的定义求待定字母的值或取值范围

例6 已知关于 x 的函数 $y=(2m-1)x+1-3m$,当 m 满足什么条件时:

(1)这个函数是正比例函数? (2)这个函数为一次函数?

导引: 根据正比例函数和一次函数的定义求解即可.

解: (1)$\because$ 函数 $y=(2m-1)x+1-3m$ 是正比例函数,$\therefore 1-3m=0$,$2m-1\neq 0$,$\therefore m=\frac{1}{3}$. $\therefore$ 当 $m=\frac{1}{3}$ 时,这个函数是正比例函数.

(2)$\because$ 函数 $y=(2m-1)x+1-3m$ 是一次函数,$\therefore 2m-1\neq 0$,解得 $m\neq\frac{1}{2}$. $\therefore$ 当 $m\neq\frac{1}{2}$ 时,这个函数为一次函数.

方法点拨

一次函数 $y=kx+b$ 中 k,b 为常数,$k\neq 0$,自变量 x 的指数为 1. 当 $b=0$ 时,一次函数 $y=kx+b$ 就化为正比例函数 $y=kx$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4 利用一次函数解决实际问题

例7 写出下列各题中 y 与 x 的函数关系式，并判断 y 是否为 x 的一次函数.

(1)假设电报收费标准为每个字0.1元，电报费y(元)与字数x(个)之间的函数关系式；

(2)某村耕地面积为 10^6 平方米，该村人均占有耕地面积y(平方米)与人数 x 之间的函数关系式；

(3)地面气温为28 ℃，如果高度每升高1 km，气温就下降6 ℃，那么气温 x(℃)与距离地面高度y(km)之间的函数关系式.



导引： (1)根据电报收费标准为每个字0.1元，即可得出电报费y(元)与字数x(个)之间的函数关系式；(2)根据人均占有耕地面积等于总面积除以总人数即可得出所求函数关系式；(3)根据高度每升高1 km，气温就下降6 ℃，得出 $28-6y=x$，进而得出答案.

解： (1)根据题意得 $y=0.1x$，是一次函数.

(2)根据题意得 $y=\dfrac{10^6}{x}$，不是一次函数.

(3)根据题意得 $28-6y=x$，则 $y=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{14}{3}$，是一次函数.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用整体思想求函数表达式

例8 已知 $y-1$ 与 $x+1$ 成正比例，且当 $x=-2$ 时，$y=-1$，则当 $x=-5$ 时，y 的值是多少？

导引： 将 $y-1$ 与 $x+1$ 看成两个整体，设出函数表达式，再把 $x=-2$，$y=-1$ 代入此表达式，进而求出函数表达式，再根据自变量 x 的值求出 y 的值.

解： ∵ $y-1$ 与 $x+1$ 成正比例，

∴ 设 $y-1=k(x+1)$.

将 $x=-2$，$y=-1$ 代入，得 $-1-1=k(-2+1)$，解得 $k=2$，

∴ $y-1=2(x+1)$.

整理得 $y=2x+3$.

当 $x=-5$ 时，$y=2\times(-5)+3=-7$.

方法点拨： 此题运用了整体思想，将 $y-1$ 与 $x+1$ 看成两个整体，设出函数表达式 $y-1=k(x+1)$ 是解题的关键.

拔尖角度2 利用一次函数解决与几何相关的问题

例9 如图21.1-1，若 O 是 $\triangle ABC$ 的内角的平分线的交点，$\angle A=x$，$\angle BOC=y$，求 y 与 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

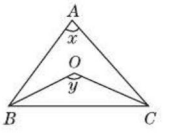


图21.1-1

导引： 首先根据三角形内角和定理用含 x 的式子表示 $\angle ABC+\angle ACB$，然后就可以用含 x 的式子表示 $\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$，最后利用 $\angle BOC=180^\circ-\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$ 即可求出 y 与 x 的函数关系式. 根据三角形的内角和为180°可以求出自变量 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解: ∵ O 是 $\triangle ABC$ 的内角的平分线的交点,

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB,$

$\therefore \angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=$

$\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-x).$

∵ $\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB),$

$\therefore \angle BOC=180°-\frac{1}{2}(180°-x).$

$\therefore y=90°+\frac{x}{2}(0°<x<180°).$

方法点拨: 本题利用了三角形内角和定理以及角平分线的定义. 根据题意, 结合图形, 找到等量关系是解决问题的关键.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 221 页)

基础巩固练

1. 下列函数:①$y=2x-1$;②$y=-x$;③$y=4x$;④$y=\frac{x}{2}$.

其中,正比例函数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2. 下列函数:①$y=-2x$;②$y=x^2+1$;③$y=-0.5x-1$.

其中一次函数有(　　)

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

3. 下列说法中错误的是(　　)

A. 一次函数是正比例函数

B. 函数 $y=|x|+3$ 不是一次函数

C. 正比例函数是一次函数

D. 在 $y=kx+b$(k,b 都是不为零的常数)中,$y-b$ 与 x 成正比例

4. 下列关系中,y 与 x 是一次函数关系的是(　　)

A. 路程一定时,时间 y 与速度 x 的关系

B. 用 10 米长的铁丝折成长为 y 米、宽为 x 米的长方形框架,y 与 x 的关系

C. 圆的面积 y 与它的半径 x 的关系

D. 斜边长为 5 的直角三角形的一条直角边长 y 与另一条直角边长 x 的关系

5. 某套餐收费标准为月租 25 元,接听免费,市话主叫每分钟 0.15 元. 假设只打市话,每月费用y(元)与市话主叫通话时间 x(分)的函数关系式为_____.

6. 若函数 $y=(m-2)x^{m^2-3}+3$ 是关于 x 的一次函数,试确定 m 的值,并求当 $x=-1$ 时,y 的值.

7. 有一个水池,它的容积是 500 升,水池中原有水 200 升,现在要将水池注满水,已知每分钟注入 10 升水.

(1)写出水池中的水量 Q(升)与注水时间 t(分)的函数关系式;

(2)求出自变量 t 的取值范围.

能力提升练

8. 已知函数 $y=(2k+1)x^{5-2k}$ 是关于 x 的正比例函数,则此函数的表达式为_____.

9. 已知 $y=y_1-2y_2$,其中 y_1 与 x 成正比例,y_2 与 $x+1$ 成正比例,且当 $x=1$ 时,$y=3$;当 $x=2$ 时,$y=5$,求 y 与 x 之间的函数关系式.

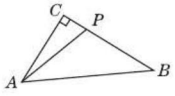
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. [中考·南平]某校为了实施“大课间”活动，计划购买篮球、排球共 60 个，跳绳 120 根. 已知一个篮球 70 元，一个排球 50 元，一根跳绳 10 元. 设购买篮球 x 个，购买篮球、排球和跳绳的总费用为 y 元.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)若购买上述体育用品的总费用为 4 700 元，则购买篮球、排球各多少个？

11. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，P 为 BC 上的一点，且 P 点不与 B，C 重合，设 $CP=x$，$S_{\triangle APB}=y$，求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.



(第 11 题图)

思维拓展练

12. [中考·包头]某产品生产车间有工人 10 名. 已知每名工人每天可生产甲种产品 12 个或乙种产品 10 个，且每生产一个甲种产品可获利润 100 元，每生产一个乙种产品可获利润 180 元. 在这 10 名工人中，车间每天安排 x 名工人生产甲种产品，其余工人生产乙种产品. 【导学号:1553889】

(1)请写出此车间每天所获利润 y(元)与 x(名)之间的函数关系式.

(2)若要使此车间每天所获利润为 14 400 元，要派多少名工人去生产甲种产品？

(3)若要使此车间每天所获利润不低于 15 600 元，你认为至少要派多少名工人去生产乙种产品？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.2 一次函数的图像和性质

核心知识

- 一次函数的图像
- 一次函数的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数的图像及画法

1 画函数图像的方法，可以概括为列表、描点、连线三步.

2 **一次函数图像的画法** 由于一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线，因此一次函数 $y=kx+b$ 的图像也称为直线 $y=kx+b$.

由于两点确定一条直线，因此在画一次函数图像时，只要描出两点即可. 例如：画一次函数 $y=kx+b$ 的图像时，只要描出点 $(0,\ b)$，$\left(-\frac{b}{k},\ 0\right)$即可.

3 **拓展**

点 $P(x_0,y_0)$ 与一次函数 $y=kx+b$ 的图像的关系

(1) 若点 $P(x_0,y_0)$ 在一次函数 $y=kx+b$ 的图像上，则 x_0，y_0 必满足表达式 $y=kx+b$.

(2) 若 x_0,y_0 是满足一次函数表达式 $y=kx+b$ 的一对对应值，则点 $P(x_0,y_0)$ 必在一次函数 $y=kx+b$ 的图像上.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用画函数图像的步骤画正比例函数的图像

例1 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=5x$，$y=x$ 的图像.

解： 列表：

x	0	1
$y=5x$	0	5
$y=x$	0	1

描点、连线，如图 21.2-1 所示.

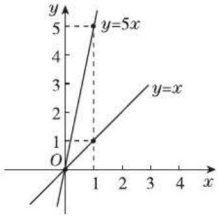


图 21.2-1

技巧点拨

正比例函数 $y=kx$（k 是常数，且 $k\neq0$）的图像是一条经过原点及点 $(1,\ k)$ 的直线，通常画正比例函数的图像就是过 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ k)$ 两点画直线，但也可以变通，选点应以便于计算和描点为原则.

同类变式 （答案见 222 页）

1. 在同一坐标系中画出正比例函数 $y=-2x$ 与 $y=0.5x$ 的图像.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 一次函数图像的画法

例2 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像：

(1) $y_1=2x-1$；(2) $y_2=2x$；(3) $y_3=2x+2$.

然后观察图像，你能得到什么结论？

导引： (1) 可取(0，−1)和(1，1)两点；(2) 可取(0，0)和(1，2)两点；(3) 可取(0，2)和(1，4)两点. 分别画出它们的图像，再通过观察图像，得出结论.

解： 列表如下：

x	…	0	1	…
y_1	…	−1	1	…

x	…	0	1	…
y_2	…	0	2	…

x	…	0	1	…
y_3	…	2	4	…

描点、连线，即可得到它们的图像，如图 21.2-2.

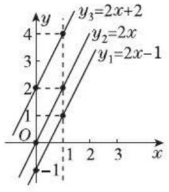


图 21.2-2

结论：一次函数的 k 值相等(b 值不等)时，其图像是一组互相平行的直线. 它们可以互相通过平移得到.

同类变式 (答案见 222 页)

2. 在平面直角坐标系中画出一次函数 $y=2x+6$ 的图像.

考查角度3 利用函数图像上的点求字母的值

例3 [中考·南宁] 若点 $A(2,4)$ 在一次函数 $y=kx-2$ 的图像上，则下列各点在此函数图像上的是(　　)

A. (1，1)　　B. (−1，1)

C. (−2，−2)　　D. (2，−2)

导引： 先将(2，4)代入函数表达式求出 k 的值，再把各点的坐标代入表达式，逐一检验即可.

答案： A

同类变式 (答案见 222 页)

3. 已知一次函数 $y=kx+1$ 的图像经过点(−1，2)，则 $k=$_____.

技巧点拨

画一次函数 $y=kx+b$ ($k\neq 0$) 的图像，通常选取该函数图像与 y 轴的交点(横坐标为 0 的点)和与 x 轴的交点(纵坐标为 0 的点)，由两点确定一条直线得一次函数的图像.



方法点拨

一次函数图像上各点的坐标一定满足此函数的表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 一次函数的图像和性质（重点、难点）

1 一次函数的图像与性质

（1）一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$，它必过 $(0,b)$ 和 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$ 两点.



（2）当 $k>0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而增大；

当 $k<0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而减小.

要点精析///

（1）在实际问题中，当自变量 x 的取值受限制时，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像就不一定是一条直线了，可能是线段、射线或直线上的部分点.

（2）k 决定直线的倾斜角度：

$k>0\Leftrightarrow$ 直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上方的部分与 x 轴正方向的夹角为锐角；

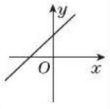
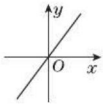
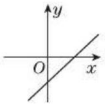
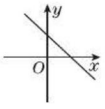
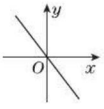
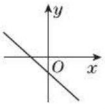
$k<0\Leftrightarrow$ 直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上方的部分与 x 轴正方向的夹角为钝角；

$k_1=k_2, b_1\neq b_2\Leftrightarrow$ 直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与直线 $y_2=k_2x+b_2$ 平行.

（3）$k>0\Leftrightarrow y$ 随 x 的增大而增大；

$k<0\Leftrightarrow y$ 随 x 的增大而减小.

2 易错警示 区分 k 的正、负与图像变化、函数增减间的关系. 直线 $y=kx+b$ 的位置是由 k 和 b 的符号决定的，它们的关系如下表：

k 的符号	$k>0$			$k<0$		
b 的符号	$b>0$	$b=0$	$b<0$	$b>0$	$b=0$	$b<0$
图像经过的象限	一、二、三	一、三	一、三、四	一、二、四	二、四	二、三、四
一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$ 图像的示意图						
性质	y 随 x 的增大而增大			y 随 x 的增大而减小		

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用一次函数图像的特征确定经过的象限

例4 ［中考·甘孜州］函数 $y=x-2$ 的图像不经过（　　）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

导引： 一次函数 $y=x-2$，

$\because k=1>0$，

$\therefore$ 函数图像经过第一、三象限，

$\because b=-2<0$，

$\therefore$ 函数图像与 y 轴负半轴相交，

$\therefore$ 函数图像经过第一、三、四象限，不经过第二象限.

故选 B.

答案： B

方法点拨

直线 $y=kx+b$ 的位置与 k，b 的符号有直接关系. $k>0$ 时，直线必经过第一、三象限；$k<0$ 时，直线必经过第二、四象限. $b>0$ 时，直线与 y 轴正半轴相交；$b=0$ 时，直线过原点；$b<0$ 时，直线与 y 轴负半轴相交.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 根据一次函数的图像判断 k,b 的取值范围

例5 [中考·莆田] 如图21.2-3,一次函数 $y=(m-2)x-1$ 的图像经过第二、三、四象限,则 m 的取值范围是(　　)

A. $m>0$

B. $m<0$

C. $m>2$

D. $m<2$

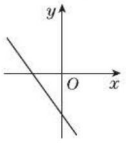


图21.2-3

导引: 根据一次函数图像所经过的象限得到不等式 $m-2<0$,据此可以求得 m 的取值范围.

答案: D

方法点拨

本题采用数形结合思想解题,主要考查一次函数图像在坐标平面内的位置与 k, b 的关系.

考查角度3 求一次函数图像与坐标轴的交点坐标

例6 一次函数 $y=-2x+4$ 的图像与 y 轴的交点坐标是(　　)

A. $(0,4)$　　B. $(4,0)$

C. $(2,0)$　　D. $(0,2)$

导引: 把 $x=0$ 代入函数表达式,就可以求出函数图像与 y 轴交点的纵坐标.

答案: A

方法点拨

函数图像与 x 轴交点的纵坐标为 0, 与 y 轴交点的横坐标为 0.

同类变式 (答案见222页)

4. 求一次函数 $y=x-4$ 的图像与坐标轴围成的三角形的面积.

5. [中考·湘潭] 将一次函数 $y=3x$ 的图像向上平移2个单位长度,所得图像的函数表达式为_____.

方法点拨

对于一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$, (1)判断 k 值符号的方法: ① 增减性法: 当 y 随 x 的增大而增大时, $k>0$; 反之, $k<0$. ② 直线升、降法: 当直线从左到右上升时, $k>0$; 反之, $k<0$. ③ 经过象限法: 当直线过第一、三象限时, $k>0$; 当直线经过第二、四象限时, $k<0$. (2)判断 b 值符号的方法: 与 y 轴交点法, 即若直线 $y=kx+b$ 与 y 轴交于正半轴, 则 $b>0$; 与 y 轴交于负半轴, 则 $b<0$; 与 y 轴交于原点, 则 $b=0$.

考查角度4 利用一次函数的图像和性质求字母的取值范围

例7 已知一次函数 $y=(6+3m)x+(m-4)$, y 随 x 的增大而增大,函数的图像与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上,求 m 的取值范围.

导引: 根据一次函数的性质可知,

$6+3m>0$,且 $m-4<0$,

联立解不等式组即可.

解: 根据题意,得 $\begin{cases}6+3m>0,\\ m-4<0.\end{cases}$

解得 $-2<m<4$.

所以 m 的取值范围是 $-2<m<4$.

同类变式 (答案见222页)

6. [中考·济南] 若一次函数 $y=(m-3)x+5$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大,则(　　)

A. $m>0$　　B. $m<0$

C. $m>3$　　D. $m<3$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度5 利用一次函数的性质比较函数值的大小

例8 [中考·贵阳]已知点 $M(1,a)$ 和点 $N(2,b)$ 是一次函数 $y=-2x+1$ 图像上的两点,则 a 与 b 的大小关系是_____.

导引: 解题方法有两个:

(1)由一次函数增减性比较函数值大小;

(2)把点的坐标分别代入函数表达式,求出 a,b,再比较大小.

方法一:$\because k=-2<0$,$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\because 1<2$,$\therefore a>b$.

方法二:把 $(1,a)$ 和 $(2,b)$ 代入 $y=-2x+1$,

$\therefore a=-1,b=-3$. $\because -1>-3$,$\therefore a>b$.

答案: $a>b$

方法点拨

一次函数增减性与比例系数 k 的关系:$k>0$,y 随 x 的增大而增大,$k<0$,y 随 x 的增大而减小.由此可利用自变量的大小关系比较对应的函数值的大小或者利用函数值的大小关系比较对应的自变量的大小.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用一次函数图像与字母取值的关系解决问题

例9 如图21.2-4,一次函数 $y=(m-3)x-m+1$ 的图像分别与 x 轴的负半轴和 y 轴的负半轴交于点 A,B.

(1)求 m 的取值范围;

(2)若该一次函数图像向上平移1个单位长度就经过原点,求 m 的值.

导引: (1)根据该函数的图像所经过的象限可知 $m-3<0$,且 $-m+1<0$,通过解不等式可以求得 m 的取值范围;

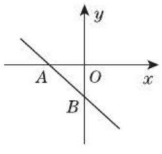


图21.2-4

(2)把点 $(0,0)$ 的坐标代入平移后所得直线的表达式,可以得到关于 m 的方程,通过解方程来求 m 的值.

解: (1)$\because$ 该函数的图像经过第二、三、四象限,

$\therefore m-3<0$,且 $-m+1<0$,

解得 $1<m<3$,

即 m 的取值范围是 $1<m<3$.

(2)该一次函数图像向上平移1个单位长度所得直线的表达式为 $y=(m-3)x-m+1+1$,即 $y=(m-3)x-m+2$.把点 $(0,0)$ 的坐标代入,得 $-m+2=0$,解得 $m=2$.所以 m 的值是2.

规律点拨: 一次函数 $y=kx+b$ 的图像可以看成是由函数 $y=kx$ 的图像向上或下平移 $|b|$ 个单位长度得到的,$b>0$ 时,向上平移,$b<0$ 时,向下平移.图像的上下平移与 k 无关.

拔尖角度2 利用一次函数的图像及性质解决问题

例10 已知关于 x 的函数 $y=(8-2m)x+m-2$.

(1)若这个函数的图像经过原点,求 m 的值;

(2)若这个函数是一次函数,且 y 随 x 的增大而减小,求 m 的取值范围;

(3)若这个函数是一次函数,且其图像经过第一、二、三象限,求 m 的取值范围.

导引: (1)根据图像经过原点,得 $m-2=0$;

(2)根据此函数为一次函数,且 y 随 x 的增大而减小,得 $8-2m<0$;

(3)根据此函数为一次函数,且其图像经过第一、二、三象限,得 $8-2m>0$,且 $m-2>0$,求解即可.

解: (1)根据题意得 $m-2=0$,解得 $m=2$.

(2)根据题意得 $8-2m<0$,解得 $m>4$.

(3)根据题意得 $8-2m>0$,且 $m-2>0$,

解得 $m<4$,且 $m>2$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $2<m<4$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

方法点拨： 借助函数的图像、运用函数的性质是解决有关一次函数问题的重要方法.

拔尖角度 3 利用几何图形的有关知识求一次函数的表达式

例 11 将一次函数 $y=kx-1$ 的图像向上平移 k 个单位长度后恰好经过点 $A(3,2+k)$.

(1)求 k 的值；

(2)若一条直线与函数 $y=kx-1$ 的图像平行，且与两个坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}$，求该直线的表达式.

导引： (1)一次函数 $y=kx-1$ 的图像向上平移 k 个单位长度后，对应的函数表达式为 $y=kx-1+k$，将点 $A(3,2+k)$ 的坐标代入可求出 k 的值为 1；

(2)依题意，设所求直线的表达式为 $y=x+b$，则其图像与两坐标轴的交点坐标分别为 $(-b,0)$，$(0,b)$，由三角形的面积公式求 b 即可.

解： (1)根据平移规律可知，平移后所得直线的表达式为 $y=kx-1+k$，将点 $A(3,2+k)$ 的坐标代入，得 $3k-1+k=2+k$，解得 $k=1$.

(2)设所求直线的表达式为 $y=x+b$，则其图像与两坐标轴的交点坐标分别为 $(-b,0)$，$(0,b)$，由题意得 $\frac{1}{2}\times|b|\times|-b|=\frac{1}{2}$，解得 $b=\pm1$，$\therefore y=x+1$ 或 $y=x-1$(不合题意，舍去)，故所求直线的表达式为 $y=x+1$.

方法点拨： 求直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 的表达式时常用到直线上两点的坐标；线段长度是联系坐标与面积的桥梁；要结合已知条件利用分类讨论思想进行讨论，验证取舍.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 222 页)

基础巩固练

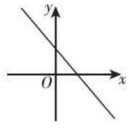
1. [中考·沈阳] 已知一次函数 $y=(k+1)x+b$ 的图像如图所示，则 k 的取值范围是(　　)

A. $k<0$

B. $k<-1$

C. $k<1$

D. $k>-1$



(第 1 题图)

2. [中考·娄底] 对于一次函数 $y=-2x+4$，下列结论错误的是(　　)

A. 函数值随自变量的增大而减小

B. 函数的图像不经过第三象限

C. 函数的图像向下平移 4 个单位长度得 $y=-2x$ 的图像

D. 函数的图像与 x 轴的交点坐标是(0,4)

3. [中考·徐州] 下列函数中，y 随 x 的增大而减小的是(　　)

A. $y=2x+8$　　B. $y=-2+4x$

C. $y=-2x+8$　　D. $y=4x$

4. [中考·毕节] 已知一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的图像经过第一、三、四象限，则下列结论正确的是(　　)

A. $kb>0$　　B. $kb<0$

C. $k+b>0$　　D. $k+b<0$

5. [中考·珠海] 已知函数 $y=3x$ 的图像经过点 $A(-1,y_1)$，点 $B(-2,y_2)$，则 y_1 _____ y_2(填“$>$”“$<$”或“$=$”).

6. 画出函数 $y=-x+3$ 的图像，并根据图像回答下列问题：

(1)当 $x=0$ 时，y 的值是多少？

(2)当 x 为何值时，$y>0$？

(3)当 $x>0$ 时，求 y 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 一个一次函数的图像平行于直线 $y=-2x$，并且经过点 $A(-4,2)$，求这个函数的表达式，并求出函数图像与 x 轴的交点 B 的坐标.

8. 已知关于 x 的一次函数 $y=(6+3m)x+n-4$.

(1) 当 m,n 满足什么条件时，函数的图像经过原点？

(2) 当 m,n 满足什么条件时，函数的图像经过第一、二、三象限？

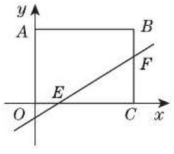
能力提升练

9. [中考·滨州] 若点 $M(-7,m)$，$N(-8,n)$ 都在函数 $y=-(k^2+2k+4)x+1$（k 为常数）的图像上，则 m 和 n 的大小关系是(　　)

A. $m>n$　　B. $m<n$

C. $m=n$　　D. 不能确定

10. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ 与长方形 $ABCO$ 的边 OC，BC 分别交于点 E，F，已知 $OA=3$，$OC=4$，则 $\triangle CEF$ 的面积是(　　)



(第 10 题图)

A. 6　　B. 3　　C. 12　　D. $\frac{4}{3}$

11. 已知一次函数 $y=-2x+3$.

(1) 求这个函数的图像与 x 轴的交点坐标；

(2) 求这个函数的图像在 x 轴下方时的自变量的取值范围；

(3) 求这个函数的图像在第一象限时的自变量的取值范围.

12. (1) 直线 $y=2x-4$ 向上平移 2 个单位长度所得直线的表达式为_____.

(2) 求直线 $y=2x-4$ 向左平移 4 个单位长度所得直线的表达式.

思维拓展练

13. 画出函数 $y=4x-1$ 的图像，并根据图像回答下列问题：

(1) y 随 x 的增大怎样变化？

(2) 指出图像与 x 轴交点 A、与 y 轴交点 B 的坐标，并求出 $\triangle AOB$ 的面积 S.

(3) 当 x 为何值时，$y>0$？$y<0$ 呢？

(4) 若函数 $y=-x+m^2$ 和 $y=4x-1$ 的图像与 x 轴交于同一点，求 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 用待定系数法确定一次函数表达式

核心知识

▲ 用待定系数法确定一次函数的表达式

知识链接

确定一次函数的表达式 —两对对应值→ 待定系数法

点知识·拨考向 速提分

点知识 用待定系数法确定一次函数的表达式(重点)

1 **定义** 先设出函数表达式，再根据已知条件确定表达式中未知的系数，从而求出函数表达式的方法，叫做待定系数法.

2 **一般步骤** (1)设一次函数表达式为 $y=kx+b$;

(2)根据条件，列出关于 k 和 b 的二元一次方程组;

(3)解这个方程组，求出 k 与 b 的值，从而得到一次函数表达式.



拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用两对对应值求一次函数的表达式

例1 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $x=0$ 时，$y=1$;当 $x=1$ 时，$y=0$. 试确定这个函数的表达式.

导引: 分别将 $x=0,y=1$ 和 $x=1,y=0$ 代入 $y=kx+b$ 中，得到关于 k,b 的二元一次方程组，解之即可.

解: 将 $x=0,y=1$ 和 $x=1,y=0$ 分别代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}b=1,\\k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$ 所以这个函数的表达式为 $y=-x+1$.

方法点拨

满足一次函数表达式的一对对应值就是将一次函数表达式作为方程时的一组解.将函数问题转化为方程问题来解决.

考查角度2 利用图像上两个点的坐标求一次函数的表达式

例2 如图 21.3-1，直线 l 是一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像.

求:(1)直线 l 对应的函数表达式;

(2)当 $y=2$ 时，x 的值.

导引: (1)根据一次函数图像上两点的坐标，可列出方程组，解出 k,b 的值即可.

(2)把 $y=2$ 代入所求出的函数表达式即可得到 x 的值.

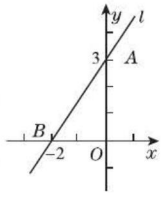


图 21.3-1

解: (1)由图 21.3-1 可知，直线 l 经过点 $(-2,0)$ 和点 $(0,3)$，将其坐标代入一次函数表达式 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}-2k+b=0,\\b=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{2},\\b=3,\end{cases}$ 则直线 l 对应的函数表达式为 $y=\dfrac{3}{2}x+3$. (2)当 $y=2$ 时，有 $2=\dfrac{3}{2}x+3$. 解得 $x=-\dfrac{2}{3}$.

方法点拨

求一次函数的表达式一般要经过设、列、解、还原四步：设就是设出一次函数的表达式；列就是把已知两点的坐标代入所设表达式，列出一个二元一次方程组；解就是解这个方程组；还原就是代回所设表达式得到所求的表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用表格中的对应值求一次函数的表达式

例3 ［中考·陕西］根据下表中一次函数的自变量 x 与函数值 y 的对应值，可得 p 的值为(　　)

x	-2	0	1
y	3	p	0

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

导引： 设一次函数表达式为 $y=kx+b$，由表中对应值可知，当 $x=-2$ 时，$y=3$，当 $x=1$ 时，$y=0$，

因此得到 $\begin{cases}-2k+b=3,\\k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1,\end{cases}$

∴ 一次函数表达式为 $y=-x+1$. 当 $x=0$ 时，$y=(-1)\times 0+1=1$，即 p 的值为 1. 故选 A.

答案： A

方法点拨

本题确定一次函数表达式是解题的关键.表格中提供了变量的对应值.

考查角度4 已知一次函数的图像与两坐标轴围成的三角形面积求函数表达式

例4 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(3,0)$，与 y 轴交于点 B，O 为坐标原点，若 $\triangle AOB$ 的面积为 6，试求这个一次函数的表达式.

导引： 由已知条件可先画出示意图，如图 21.3-2. 因为已知 $\triangle AOB$ 的面积、点 A 的坐标，所以点 B 有两种可能，由已知条件求得点 B 的坐标，再用待定系数法求出一次函数的表达式.

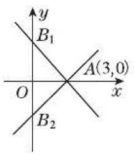


图 21.3-2

解： 设点 B 坐标为 $(0,b)$. 因为直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(3,0)$，$B(0,b)$，所以 $OA=3$，$OB=|b|$.

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times 3\cdot|b|=6$，所以 $|b|=4$，即 $b=\pm 4$.

所以点 B 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$. 故直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,4)$ 两点或 $(3,0)$，$(0,-4)$ 两点.

当直线 $y=kx+b$ 过点 $(3,0)$，$(0,4)$ 时，有 $\begin{cases}3k+b=0,\\b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\b=4.\end{cases}$ 所以函数表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$.

技巧点拨

已知直线与两坐标轴所围成的三角形面积，求直线的函数表达式时，先设出直线的函数表达式，再写出直线与两坐标轴的交点坐标(注：这步中要考虑直线与 x 轴、y 轴相交时的位置的不同情况)，然后利用已知三角形的面积求出待定字母的值，最后代回所设函数表达式即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当直线 $y=kx+b$ 过点 $(3,0)$，$(0,-4)$ 时，有 $\begin{cases}3k+b=0,\\b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{4}{3},\\b=-4.\end{cases}$ 所以函数表达式为 $y=\frac{4}{3}x-4$. 综上可知，一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 或 $y=\frac{4}{3}x-4$.

考查角度5　利用实际问题中提供的数据求一次函数的表达式

例5　某种小家电产品的出厂价是 80 元，在试销期间，商家发现每件产品的销售价 x（元）与产品的日销售量 y（件）之间的关系如下表：

x/元	100	110	120
y/件	70	50	30

已知日销售量 y（件）是每件产品的销售价 x（元）的一次函数，求 y 与 x 之间的函数表达式.

导引： 设出这个一次函数的表达式，任选表中的两组对应数据代入即可求出函数表达式.

解： 设函数表达式为 $y=kx+b$，将 $(100,70)$，$(110,50)$ 代入得 $\begin{cases}100k+b=70,\\110k+b=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=270.\end{cases}$ 故 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x+270$.

方法点拨

若两个变量之间的关系以表格的形式呈现，且两个变量在表格中都以等差的形式出现，则这两个变量是一次函数关系.

数学素养提升

“待定系数法”的解读与延伸

我们在求一次函数的函数表达式时，第一次接触待定系数法，此后在学习二次函数时，更会经常地应用这个数学方法. 但是，待定系数法的应用不仅仅局限于求函数的表达式.

如果一个多项式的系数不全已知，但这个多项式满足若干条件，那么我们便用字母表示这些未知的系数，根据这个多项式所满足的条件，把问题化归为解方程或方程组，方程（组）中的未知数就是待定系数. 因此，独立的条件的个数应与待定系数的个数相同. 应用待定系数法构建已知与未知的关系，可用于解决许多问题.

（1）多项式恒等的条件：两个一元多项式，当且仅当同次项的系数对应相等时恒等. 恒等就是多项式中字母取任何实数时，多项式的值都相等.

例如：若代数式 $(2x^2+ax-y+b)-(2bx^2+3x+5y+1)$ 的值与 x 的取值无关，求 a,b 的值.

整式的运算、因式分解、分式的运算、解方程等知识都涉及恒等式.

（2）若 p 是有理数，a 是无理数，则 $p+a$ 是无理数. 这也容易证明：若 $p+a$ 是有理数，记作 q，则 $p+a=q$，所以 $a=q-p$，这个等式右边是有理数，不可能与无理数相等，所以 $p+a$ 是无理数.

由此可知，当 $\sqrt{a}$ 是无理数时，若有理数 p，q，m，n 能使 $p+q\sqrt{a}=m+n\sqrt{a}$ 成立，那么 $p=m$，$q=n$.

例如：已知 m,n 是有理数，且 $(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，求 m,n 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 结合一次函数的性质求一次函数的表达式

例 6 ［中考·自贡］一次函数 $y=kx+b$，当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，则 $\frac{b}{k}$ 的值是_____.

导引： 由于 k 的符号不确定，故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行讨论.

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∵ 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，

∴ 当 $x=1$ 时，$y=3$；

当 $x=4$ 时，$y=6$.

$\therefore \begin{cases} k+b=3, \\ 4k+b=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=2. \end{cases}$

$\therefore \frac{b}{k}=2$.

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，

∵ 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，

∴ 当 $x=1$ 时，$y=6$；

当 $x=4$ 时，$y=3$.

$\therefore \begin{cases} k+b=6, \\ 4k+b=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=7. \end{cases}$

$\therefore \frac{b}{k}=-7$.

答案： 2 或 -7

方法点拨： 一次函数的增减性由 k 的正负决定，若 k 的正负无法确定，则必须分两种情况考虑.

拔尖角度 2 利用图像的特征确定一次函数的表达式

例 7 如图 21.3-3，在平面直角坐标系中，点 A，B 均在边长为 1 的正方形网格格点上.

(1) 求直线 AB 对应的函数表达式，并写出当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时，自变量 x 的取值范围.

(2) 将线段 AB 绕点 B 逆时针旋转 90°，得到线段 BC，请画出线段 BC. 若直线 BC 对应的函数表达式为 $y=mx+n$，则 y 随 x 的增大而_____.（填“增大”或“减小”）

导引： (1) 根据一次函数图像知 $A(1,0)$，$B(0,2)$，利用待定系数法求该函数的表达式；

(2) 根据旋转的性质画出线段 BC，然后根据直线 BC 对应函数的性质填空.

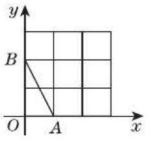


图 21.3-3

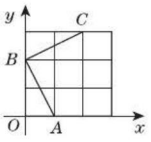


图 21.3-4

解： (1) 设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$，依题意，得 $A(1,0)$，$B(0,2)$，

$\therefore \begin{cases} 0=k+b, \\ 2=0+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-2, \\ b=2. \end{cases}$

∴ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-2x+2$.

当 $0\leqslant y\leqslant 2$ 时，自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 1$.

(2) 线段 BC 如图 21.3-4 所示. 增大

方法点拨： 本题综合考查了用待定系数法求一次函数的表达式、一次函数图像与几何变换. 解答此题时，采用数形结合思想，使问题变得形象、直观，降低了题的难度.

拔尖角度 3 求一次函数图像与坐标轴围成的图形的面积

例 8 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(-1,3)$ 和点 $B(2,-3)$，与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 D.

(1) 求这个一次函数的表达式；

(2) 求点 C，D 的坐标；

(3) 求直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积.

导引： (1) 将 A，B 两点的坐标代入一次函数表达式，解方程组即可.

(2) 利用 (1) 题中的一次函数的表达式求点 C，D 的坐标；

(3) 求直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积，即求 $\triangle COD$ 的面积，根据三角形面积公式求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)∵ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(-1,3)$ 和点 $B(2,-3)$，

$\therefore \begin{cases}3=-k+b,\\-3=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=1,\end{cases}$

∴ 该一次函数的表达式是 $y=-2x+1$.

(2)由(1)知，该一次函数的表达式是 $y=-2x+1$，∴ 当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $y=0$ 时，$x=\frac{1}{2}$，∴ $C\left(\frac{1}{2},0\right)$，$D(0,1)$.

(3)直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积，即 $\triangle COD$ 的面积，为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$，故直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积是 $\frac{1}{4}$.

方法点拨：此题用待定系数法求函数的表达式，根据条件列出关于字母系数的方程组，求解即可得到函数表达式．当已知函数表达式时，求函数中字母的值就是求关于字母的方程的解．

拔尖角度 4 一次函数与几何的综合问题的探究

例 9 已知直线 $y=-x+2$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B，另一直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 经过点 $C(1,0)$，且把 $\triangle AOB$ 分成两部分.

(1)若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等，求 k 和 b 的值；

(2)若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积之比为 1:5，求 k 和 b 的值.

导引：要求 k,b 的值，已知点 $C(1,0)$，关键是再求一个符合条件的点的坐标.

解：(1)如图 21.3-5①所示，依题意，得 $A(2,0)$，$B(0,2)$.

因为 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等，且 C 为 OA 中点，

所以直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 过点 B.

由直线 $y=kx+b$ 过点 $C(1,0)$ 和点 $B(0,2)$，

易得 $k=-2$，$b=2$.

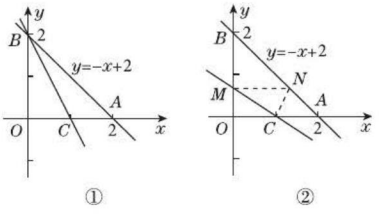


图 21.3-5

(2)设直线 $y=kx+b$ 与 OB 交于点 $M(0,h)$，此时 $\triangle AOB$ 被分成的两部分的面积之比为 1:5，如图 21.3-5②所示.

则 $S_{\triangle OMC}=\frac{1}{6}S_{\triangle AOB}$，

即 $\frac{1}{2}\times1\times h=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times2\times2$，

所以 $h=\frac{2}{3}$，故 $M\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

过点 M 作直线 $MN/\!/OA$，

交 AB 于点 $N\left(a,\frac{2}{3}\right)$，

连接 CN，

则 $S_{\triangle OMC}=S_{\triangle CAN}=\frac{1}{6}S_{\triangle AOB}$.

因为点 $N\left(a,\frac{2}{3}\right)$ 在直线 $y=-x+2$ 上，

所以 $a=\frac{4}{3}$. 所以 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

所以直线 $y=kx+b$ 经过点 $M\left(0,\frac{2}{3}\right)$，

$C(1,0)$ 或点 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，$C(1,0)$.

所以 $\begin{cases}b=\frac{2}{3},\\k+b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{4}{3}k+b=\frac{2}{3},\\k+b=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=2,\\b=-2.\end{cases}$

方法点拨：用待定系数法求直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 的表达式时常用到直线上两点的坐标.线段长度是联系坐标和面积的桥梁，要结合条件利用分类讨论思想进行讨论，验证取舍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 224 页）

基础巩固练

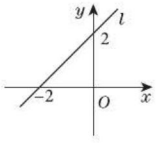
1. [中考·陕西] 若一个正比例函数的图像经过 $A(3,-6)$，$B(m,-4)$ 两点，则 m 的值为（　　）

A. 2　　B. 8　　C. -2　　D. -8

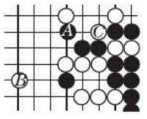
2. 如图所示，直线 l 的表达式是（　　）

A. $y=x+2$　　B. $y=-2x+2$

C. $y=x-2$　　D. $y=-x-2$



（第 2 题图）



（第 4 题图）

3. [中考·南昌] 已知一次函数的图像经过 $(2,-1)$，$(-3,4)$ 两点，则它的图像不经过（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 在如图所示的围棋盘上，若“黑棋 A”位于点 $(1,2)$，“白棋 C”位于点 $(3,2)$，则经过原点和“白棋 B”所在点的直线的表达式是（　　）

A. $y=\frac{1}{4}x$　　B. $y=-\frac{1}{2}x$

C. $y=\frac{1}{2}x$　　D. $y=2x$

5. [中考·怀化] 一次函数 $y=-2x+m$ 的图像经过点 $P(-2,3)$，且与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，则 $\triangle AOB$ 的面积是（　　）

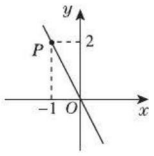
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. 8

6. 已知一次函数 $y=kx+b$，当 $x=-4$ 时，y 的值是 9，当 $x=2$ 时，y 的值是 -3.

(1) 求这个函数的表达式；

(2) 在直角坐标系中画出这个函数的图像.

7. 如图，正比例函数的图像经过点 P，若点 $Q(-m,m+3)$ 在此函数图像上，求 m 的值.



（第 7 题图）

8. 一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过 $(0,2)$，$(1,3)$ 两点.

(1) 求 k，b 的值；

(2) 若该一次函数的图像与 x 轴的交点为 $A(a,0)$，求 a 的值.

能力提升练

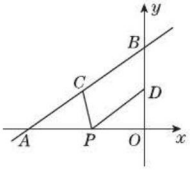
9. [中考·枣庄] 如图，直线 $y=\frac{2}{3}x+4$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B，点 C，D 分别为线段 AB，OB 的中点，点 P 为 OA 上一动点，当 $PC+PD$ 最小时，点 P 的坐标为（　　）

A. $(-3,0)$

B. $(-6,0)$

C. $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

D. $\left(-\frac{5}{2},0\right)$



（第 9 题图）

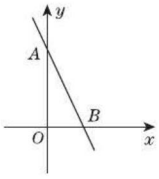
10. 已知一个一次函数的图像经过 $A(-2,-3)$，$B(1,3)$ 两点.

(1) 求这个一次函数的表达式；

(2) 试判断点 $P(-1,1)$ 是否在这个一次函数的图像上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 已知一条直线经过点 $A(0,4)$，$B(2,0)$，如图. 将该直线向左平移后与 x 轴负半轴、y 轴负半轴分别交于点 C,D，且 $DB=DC$. 求直线 CD 的表达式.

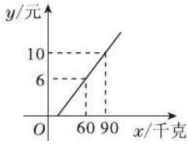


（第 11 题图）

12. 某汽车客运公司规定旅客可以随身携带一定质量的行李，如果超过规定的质量，则需要购买行李票，行李票费用 y（元）与行李质量 x（千克）之间函数关系的图像如图所示.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）旅客最多可免费携带多少千克的行李？



（第 12 题图）

13. 已知一次函数的图像经过点 $A(1,1)$，$B(-2,7)$，$C(m,-3)$.

（1）求这个一次函数的表达式；

（2）画出该函数的图像；

（3）设该函数图像与 y 轴交于点 D，O 是坐标原点，求 $\triangle DOC$ 的面积.

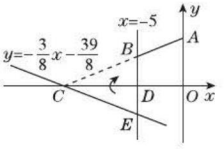
思维拓展练

14. ［中考 · 河北］如图，直角坐标系 xOy 中，$A(0,5)$，直线 $x=-5$ 与 x 轴交于点 D，直线 $y=-\frac{3}{8}x-\frac{39}{8}$ 与 x 轴及直线 $x=-5$ 分别交于点 C,E. 点 B,E 关于 x 轴对称，连接 AB.

（1）求点 C,E 的坐标及直线 AB 的表达式；

（2）设面积的和 $S=S_{\triangle CDE}+S_{四边形ABDO}$，求 S 的值；

（3）在求（2）题中 S 时，嘉琪有个想法：“将 $\triangle CDE$ 沿 x 轴翻折到 $\triangle CDB$ 的位置，而 $\triangle CDB$ 与四边形 $ABDO$ 拼接后可看成 $\triangle AOC$，这样求 S 便转化为直接求 $\triangle AOC$ 的面积不更快捷吗？”但大家经反复验算，发现 $S_{\triangle AOC}\neq S$，请通过计算解释他的想法错在哪里.



（第 14 题图）

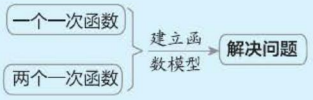
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.4 一次函数的应用

核心知识

- 利用一个一次函数解决问题
- 利用两个一次函数解决问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 利用一个一次函数解决问题(重点)

利用函数方法解决实际问题，关键是分析问题中的等量关系，联系实际生活及以前学过的内容，将实际问题抽象、升华为一次函数模型，即建模，再利用一次函数的性质解决问题. 一次函数的应用主要有两种类型：

(1)给出了一次函数表达式，直接应用一次函数的性质解决问题；

(2)只用语言叙述或用表格、图像提供一次函数的情境时，应先求出表达式，进而利用一次函数的性质解决问题.

要点精析///

“建模”可以把实际问题转化为关于一次函数的数学问题，转化的关键是确定函数与自变量之间的函数表达式，并确定实际问题中自变量的取值范围.

拨考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用表格或图像获取信息解决实际问题

例1 已知山区的平均气温与山区的海拔关系如下表：

海拔/米	0	100	200	300	400	…
平均气温/℃	22	21.5	21	20.5	20	…

(1)若海拔用 x(米)表示，平均气温用 y(℃)表示，试写出 y 与 x 的函数关系式；

(2)若某种植物适宜生长在 18 ~ 20 ℃(含 18 ℃和 20 ℃)的山区，该植物适宜种植在海拔为多少米的山区？

导引：观察、分析表中数据可知，海拔每增加 100 米，平均气温就下降 0.5 ℃. 这符合一次函数的特征，因此可以建立一次函数的模型解题.

(1)从表格中获取两对 x，y 的对应值(要便于计算)，利用待定系数法求一次函数关系式；

(2)将问题转化为一次函数问题，即求已知函数值所对应的自变量 x 的值.

解：(1)观察表格给出的数据可知山区的平均气温与山区的海拔是一次函数关系，故设所求函数关系式为 $y = kx + b$ $(k \neq 0)$.

∵ 当 $x = 0$ 时，$y = 22$；当 $x = 200$ 时，$y = 21$，

方法点拨

表格信息题是中考的热点题，解决表格信息题的关键是从表格中获取正确、易于解决问题的信息；其建模的过程是先设出函数的表达式，然后找出需要的对应值，列出方程(组)，求解即可得到表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases}21=200k+b,\\22=b,\end{cases}\therefore \begin{cases}k=-\dfrac{1}{200},\\b=22.\end{cases}$

$\therefore$ 所求函数关系式为 $y=-\dfrac{1}{200}x+22$.

(2) 由(1)可知 $y=-\dfrac{1}{200}x+22$,令 $y=18$,得 $x=800$. 由已知得 $y=20$ 时,$x=400$,$\therefore$ 当 $18\leqslant y\leqslant 20$ 时,$400\leqslant x\leqslant 800$.

$\therefore$ 该植物适宜种植在海拔为 400~800 米的山区.

考查角度2 利用一次函数模型解决销售问题

例2 [中考·湘潭] 莲城超市以 10 元/件的价格调进一批商品,根据前期销售情况,每天的销售量 y(件)与该商品定价 x(元/件)是一次函数关系,如图 21.4-1 所示.

(1) 求每天的销售量 y 与定价 x 之间的函数关系式;

(2) 如果超市将该商品的销售价定为 13 元/件,不考虑其他因素,求超市每天销售这种商品所获得的利润.

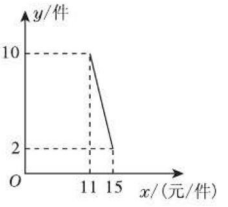


图 21.4-1

导引: (1) 由图像可知 y 与 x 是一次函数关系,又由函数图像过点(11,10)和(15,2),用待定系数法即可求得 y 与 x 的函数关系式;(2) 根据(1)题求出的函数关系式和销售每件该商品的利润,即可求得超市每天销售这种商品所获得的利润.

解: (1) 设 $y=kx+b(k\neq 0)$,由图像可知,$\begin{cases}11k+b=10,\\15k+b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=32,\end{cases}$ 故每天的销售量 y 与定价 x 之间的函数关系式是 $y=-2x+32$.

(2) 当 $x=13$ 时,超市每天销售这种商品所获得的利润是 $(-2x+32)\cdot(13-10)=-6x+96=-6\times 13+96=18$(元).

考查角度3 利用一次函数模型解决学科间综合问题

例3 如图 21.4-2 所示的是一个家用温度表的表盘,其左边为摄氏温度的刻度和读数(单位:℃),右边为华氏温度的刻度和读数(单位:℉). 左边的摄氏温度每格表示 1 ℃,而右边的华氏温度每格表示 2 ℉. 已知表示 −40 ℃与 −40 ℉的刻度线恰好对齐(在一条水平线上),表示 50 ℃与 122 ℉的刻度线恰好对齐.

技巧点拨

解答本题的关键是理解题意,根据题意求得函数关系式,注意待定系数法及数形结合思想的应用.

方法点拨

一次函数与物理问题经常结合在一起考查,利用物理中存在的规律,结合题目条件,列出一次函数关系式,并通过求函数

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)若摄氏温度为 x ℃时,华氏温度表示为 y ℉,求 y 与 x 的一次函数关系式;

(2)当摄氏温度为 0 ℃时,温度表上华氏温度一侧是否有刻度线与表示 0 ℃的刻度线对齐?若有,是多少华氏度?

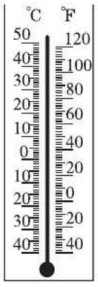


图 21.4-2

导引: (1)设 y 与 x 的一次函数关系式为 $y=kx+b$. 将 $x=-40, y=-40$ 和 $x=50, y=122$ 代入求出 k 和 b 的值即可.

(2)将 $x=0$ 代入一次函数关系式中求出 y 的值.

解: (1)设一次函数关系式为 $y=kx+b$.

将 $(-40,-40)$,$(50,122)$ 代入上式,

得 $\begin{cases}-40=-40k+b,\\122=50k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{9}{5},\\b=32.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 的一次函数关系式为 $y=\dfrac{9}{5}x+32$.

(2)将 $x=0$ 代入 $y=\dfrac{9}{5}x+32$,得 $y=32$.

$\because$ 华氏温度每格表示 2 ℉,32 是 2 的倍数,

$\therefore$ 表示 32 ℉的刻度线与表示 0 ℃的刻度线对齐.

的值,达到解决问题的目的.



认真会有收获

考查角度4 利用一次函数模型解决与几何图形有关的问题

例 4 一个平行四边形的底为 50,高为 30,现在将它的底增加 x,高减少 10,设变化后的平行四边形的面积为 y.

(1)写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)当 x 取何值时,变化后的平行四边形的面积是原平行四边形的面积的 2 倍?

(3)当 x 取何值时,变化后的平行四边形的面积比原平行四边形的面积大?

导引: (1)根据平行四边形的面积公式,直接写出函数关系式;

(2)根据(1)题中求出的函数关系式及 $y=50\times30\times2$ 求解即可;

(3)变化后的平行四边形的面积比原平行四边形的面积大,即 $y>50\times30$.

解: (1)根据题意得 $y=(50+x)\times(30-10)=20x+1\,000$.

(2)根据题意得 $20x+1\,000=50\times30\times2$,解得 $x=100$. 故当 $x=100$ 时,变化后的平行四边形的面积是原平行四边形的面积的 2 倍.

(3)根据题意得 $20x+1\,000>50\times30$,解得 $x>25$.

故当 $x>25$ 时,变化后的平行四边形的面积比原平行四边形的面积大.

易错警示

本题采用了方程思想,首先根据题意写出函数关系式,然后根据函数值的不同取值情况,构建一元一次方程或不等式,通过解方程或不等式确定 x 的取值情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度5 利用一次函数的性质解决最值问题

例5 [中考·衡阳] 为保障我国海外维和部队官兵的生活，现需通过 A 港口、B 港口分别运送 100 吨和 50 吨生活物资，已知该物资在甲仓库存有 80 吨，乙仓库存有 70 吨，若从甲、乙两仓库运送物资到港口的费用（元/吨）如下表所示.

港口	费用/（元/吨）	
	甲仓库	乙仓库
A	14	20
B	10	8

(1) 设从甲仓库运送到 A 港口的物资为 x 吨，求总费用 y（元）与 x（吨）之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围.

(2) 求出最低总费用，并说明总费用最低时的调配方案.

导引： (1) 第一步，先用含 x 的式子表示出从甲仓库运往 B 港口的物资的质量，以及从乙仓库运往 A，B 两港口的物资的质量；第二步，根据运输的总费用等于四条运输路线的费用总和，便可求出总费用 y（元）与 x（吨）之间的函数关系式；第三步，根据问题的实际意义列出不等式组，即可求得 x 的取值范围.

(2) 根据一次函数的增减性及自变量的取值范围，即可确定总费用最低时的物资调配方案和最低总费用.

解： (1) 因为从甲仓库运送到 A 港口的物资为 x 吨，所以从甲仓库运往 B 港口的有 $(80-x)$ 吨；从乙仓库运往 A 港口的有 $(100-x)$ 吨，运往 B 港口的有 $50-(80-x)=x-30$（吨），所以 $y=14x+20(100-x)+10(80-x)+8(x-30)=2\,560-8x$，$x$ 的取值范围是 $30\leqslant x\leqslant 80$.

(2) 由 (1) 得 $y=2\,560-8x$，y 随 x 的增大而减小，所以当 $x=80$ 时，总费用最低，为 $y=2\,560-8\times 80=1\,920$. 此时的调配方案为：把甲仓库的全部物资运往 A 港口，再从乙仓库运 20 吨往 A 港口，乙仓库余下的物资全部运往 B 港口.

方法点拨

解答此类问题的关键是理清各种等量关系，能利用等量关系列出函数关系式，能利用函数的增减性求最值. 注意要正确运用一次函数 $y=kx+b$ 的增减性：当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

考查角度6 通过分段函数解决实际问题

例6 某移动通信公司采用分段计费的方法来计算话费，月通话时间 x（min）与相应话费 y（元）之间的函数图像如图 21.4-3.

(1) 分别求出 $0\leqslant x<100$ 和 $x\geqslant 100$ 时，y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 月通话时间为 280 min 时，应交话费多少元？

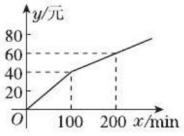


图 21.4-3

导引： 本题是一道和话费有关的分段函数问题，通过图像可以

技巧点拨

分段函数中，自变量在不同的取值范围内时，函数的表达式不同，在解决问题时，要特别注意自变量的取值范围的变化. 分段函数在水费、电费、商品促销等问题中都有广泛

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

观察到，当$0 \leqslant x < 100$时，y与x之间是正比例函数关系；当$x \geqslant 100$时，y与x之间是一次函数关系，用待定系数法可求得它们的关系式.

解：（1）当$0 \leqslant x < 100$时，设$y = k_1 x (k_1 \neq 0)$，

将$(100,40)$代入得$100k_1 = 40$，解得$k_1 = \frac{2}{5}$，

所以$y = \frac{2}{5}x$；

当$x \geqslant 100$时，设$y = k_2 x + b (k_2 \neq 0)$，

将$(100,40)$及$(200,60)$分别代入得$\begin{cases} 100k_2 + b = 40, \\ 200k_2 + b = 60. \end{cases}$

解得$\begin{cases} k_2 = \frac{1}{5}, \\ b = 20. \end{cases}$所以$y = \frac{1}{5}x + 20$.

所以$y = \begin{cases} \frac{2}{5}x (0 \leqslant x < 100), \\ \frac{1}{5}x + 20 (x \geqslant 100). \end{cases}$

（2）因为$280 > 100$，所以将$x = 280$代入$y = \frac{1}{5}x + 20$，得$y = \frac{1}{5} \times 280 + 20 = 76$.

所以月通话时间为280 min时，应交话费76元.

应用.本题考查一次函数及识图能力，体现了数形结合思想.解决问题的关键是从图像中挖掘有用的信息，利用待定系数法先求出函数表达式，再解决问题.

点知识 2 利用两个一次函数解决实际问题（重点）

1 在同一问题中，有时会同时出现两个一次函数，这时我们要通过两个函数之间的关系，以及在特殊情况下的函数值来解决实际问题.

2 若在同一直角坐标系中，同时出现两个一次函数的图像，要利用这两个图像的位置关系、交点坐标以及与坐标轴交点的坐标等有关信息解决问题. 利用两个一次函数图像可以解决利润最大、成本最小、话费最少、运费最省、是否合算等问题，这些问题我们可以利用函数的图像进行比较，为此归纳如下数学模型：已知一次函数y_1，y_2，y_3（自变量x均大于或等于0）的图像如图21.4-4，它们交点的横坐标分别为a，b，c.

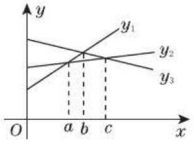


图21.4-4

当$0 < x < a$时，$y_1 < y_2 < y_3$；
当$a < x < b$时，$y_2 < y_1 < y_3$；
当$b < x < c$时，$y_2 < y_3 < y_1$；
当$x > c$时，$y_3 < y_2 < y_1$；
当$x = a$时，$y_1 = y_2$；
当$x = b$时，$y_1 = y_3$；
当$x = c$时，$y_2 = y_3$.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用两个一次函数解决行程问题

例7 ［中考·威海］甲、乙两辆摩托车同时从相距20 km的A，B两地出发，相向而行. 图21.4-5中l_1，l_2分别表示甲、乙两辆摩托车到A地的距离s(km)与行驶时间t(h)的函数关系. 则下列说法错误的是（　　）

方法点拨

本题考查了一次函数的应用，主要利用了路程、速度、时间三者之间的关系和相遇问题中的等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. 乙摩托车的速度较快

B. 经过 0.3 h 甲摩托车行驶到 A,B 两地的中点

C. 经过 0.25 h 两摩托车相遇

D. 当乙摩托车到达 A 地时，甲摩托车距离 A 地 $\frac{50}{3}$ km

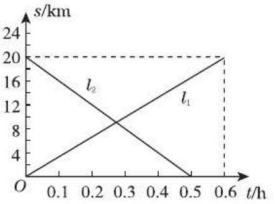


图 21.4-5

量关系，从图像中准确获取信息是解题的关键.

导引： A. 由图像可知，甲行驶完全程需要 0.6 h，乙行驶完全程需要 0.5 h，所以乙摩托车的速度较快；B. 因为甲摩托车行驶完全程需要 0.6 h，所以经过 0.3 h 甲摩托车行驶到 A,B 两地的中点；C. 设经过 t h 两摩托车相遇，根据题意得 $\frac{20t}{0.6}+\frac{20t}{0.5}=20$，解得 $t=\frac{3}{11}$，所以经过 $\frac{3}{11}$ h 两摩托车相遇；D. 当乙摩托车到达 A 地时，甲摩托车距离 A 地 $\frac{20}{0.6}\times0.5=\frac{50}{3}$(km).

答案： C

考查角度2 通过比较两个函数值的大小设计方案

例 8 某电信公司开设了两种通信业务，A 业务用户不交月租费，每通话 1 分钟，付话费 0.6 元；B 业务用户交 50 元月租费，然后每通话 1 分钟，付话费 0.1 元.

(1) 分别求出两种通信业务每月应交费用 y(元)与通话时间 x(分)之间的函数关系式.

(2) 在同一直角坐标系中画出(1)题中两个函数的图像.

(3) 每月通话多长时间，选择 A 业务划算？每月通话多长时间，选择 B 业务划算？

方法点拨

利用一次函数图像解决实际问题时，应正确建立函数模型，需用数形结合思想.

导引： (1) 根据题目所给的信息写出函数关系式；(2) 画一次函数图像，通常先描出函数图像与坐标轴的交点，再连线；(3) 结合图像解答即可.

解： (1) 使用 A 业务，每月应交费用与通话时间的函数关系式为 $y=0.6x(x\geqslant0)$. 使用 B 业务，每月应交费用与通话时间的函数关系式为 $y=0.1x+50(x\geqslant0)$.

(2) 图像如图21.4-6所示.

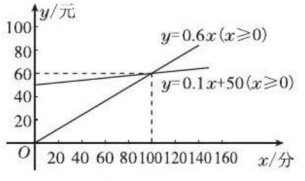


图 21.4-6

(3) 由图像可知：当 $0\leqslant x<100$ 时，即每月通话时间少于 100 分钟时，选择 A 业务划算；当 $x>100$ 时，即每月通话时间多于 100 分钟时，选择 B 业务划算.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 分类讨论思想在实际问题中的应用

例 9 ［中考·天水］为奖励在演讲比赛中获奖的同学，班主任派学习委员小明为获奖同学买奖品，要求每人一件. 小明到文具店看了商品后，决定奖品在钢笔和笔记本中选择. 如果买 4 本笔记本和 2 支钢笔，则需 86 元；如果买 3 本笔记本和 1 支钢笔，则需 57 元.

(1) 求购买每本笔记本和每支钢笔分别需多少元；

(2) 售货员提示，买钢笔有优惠：如果买钢笔超过 10 支，那么超出部分可以享受 8 折优惠. 若买 $x(x>0)$ 支钢笔需要花 y_1 元，请你求出 y_1 与 x 的函数关系式；

(3) 在(2)题的条件下，小明决定买同一种奖品，数量超过 10 件，请帮小明判断买哪种奖品省钱.

导引： (1) 设购买每本笔记本需 m 元，购买每支钢笔需 n 元，根据题意列出方程组，即可求出 $m=14, n=15$；(2) 分两种情况，①$0<x\leqslant 10$ 时，$y_1=15x$，②$x>10$ 时，$y_1=10\times 15+80\%\times 15\times(x-10)=12x+30$；(3) 设买 x 本笔记本需要 y_2 元，则 $y_2=14x$，当 $x>10$ 时，$y_2-y_1=14x-(12x+30)=2x-30$，分三种情况来比较 y_2 与 y_1 的大小.

解： (1) 设购买每本笔记本需 m 元，购买每支钢笔需 n 元，则依题意可列方程组 $\begin{cases}4m+2n=86,\\3m+n=57.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=14,\\n=15.\end{cases}$

答：购买每本笔记本需 14 元，购买每支钢笔需 15 元.

(2) 当 $0<x\leqslant 10$ 时，$y_1=15x$；当 $x>10$ 时，$y_1=10\times 15+80\%\times 15\times(x-10)=12x+30$.

$\therefore y_1=\begin{cases}15x & (0<x\leqslant 10),\\12x+30 & (x>10).\end{cases}$

(3) 设买 x 本笔记本需要 y_2 元，则 $y_2=14x$.

当 $x>10$ 时，$y_2-y_1=14x-(12x+30)=2x-30$.

当 $2x-30<0$，即 $x<15$ 时，$y_2<y_1$；

当 $2x-30=0$，即 $x=15$ 时，$y_2=y_1$；

当 $2x-30>0$，即 $x>15$ 时，$y_2>y_1$.

综上所述，当买奖品超过 10 件但少于 15 件时，买笔记本省钱；当买 15 件奖品时，买笔记本和钢笔花费一样；当买奖品超过 15 件时，买钢笔省钱.

方法点拨： 在实际问题中写函数表达式时，要根据自变量的取值范围分情况讨论，在方案选择问题中，同样要注意分情况讨论. 分类讨论思想是解决分段函数的常用思想.

拔尖角度 2 运用一次函数的性质选择合适的方案

例 10 ［中考·达州］我市化工园区一化工厂，组织 20 辆汽车装运 A,B,C 三种化学物资共 200 吨到某地. 按计划 20 辆汽车都要装运，每辆汽车只能装运同一种物资且必须装满. 请结合表中提供的信息，解答下列问题：

(1) 设装运 A 种物资的车辆数为 x，装运 B 种物资的车辆数为 y. 求 y 与 x 的函数关系式.

(2) 如果装运 A 种物资的车辆数不少于 5 辆，装运 B 种物资的车辆数不少于 4 辆，那么车辆的安排有几种方案？并写出每种安排方案.

(3) 在(2)题的条件下，若要求总运费最少，应采用哪种安排方案？请求出最少总运费.

物资种类	A	B	C
每辆汽车运载量/吨	12	10	8
每吨所需运费/元	240	320	200

解： (1) 根据题意，得 $12x+10y+8(20-x-y)=200$，整理得 $y=20-2x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)根据题意,得$\begin{cases}x\geqslant 5,\\20-2x\geqslant 4,\end{cases}$

解得$5\leqslant x\leqslant 8$. $\because x$为整数,$\therefore x$取5,6,7,8. $\therefore$共有4种方案,即

物资种类	A	B	C
方案一	5辆	10辆	5辆
方案二	6辆	8辆	6辆
方案三	7辆	6辆	7辆
方案四	8辆	4辆	8辆

(3)设总运费为M元,

则$M=12\times 240x+10\times 320\times(20-2x)+8\times 200\times(20-x+2x-20)$,

即$M=-1\ 920x+64\ 000$,

$\because M$是x的一次函数,且M随x的增大而减小,

$\therefore$当$x=8$时,M最小.

$\therefore$采用(2)题中的方案四总运费最少,

最少总运费为$-1\ 920\times 8+64\ 000=48\ 640$(元).

练中考·练模拟 得满分 (答案见225页)

基础巩固练

1. 鲁老师乘车从学校到省城去参加会议,学校距省城200千米,汽车行驶的平均速度为80千米/时. x小时后鲁老师距省城y千米,则y与x之间的函数关系式为(　　)

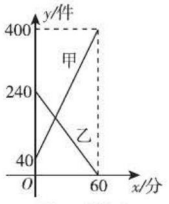
A. $y=80x-200$　　B. $y=-80x-200$

C. $y=80x+200$　　D. $y=-80x+200$

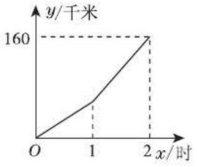
2. [中考·聊城]每天上午9:00~10:00为某快递公司集中揽件和派件时段,甲仓库用来揽收快件,乙仓库用来派发快件,该时段内甲、乙两仓库的快件数量y(件)与时间x(分)之间的函数图像如图所示,那么当两仓库快递数量相同时,此刻的时间为(　　)

A. 9:15　　B. 9:20

C. 9:25　　D. 9:30



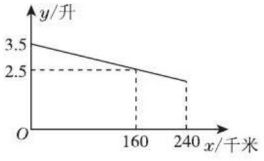
(第2题图)



(第3题图)

3. 一辆汽车在行驶过程中,路程y(千米)与时间x(时)之间的函数关系如图所示. 当$0\leqslant x\leqslant 1$时,y关于x的函数表达式为$y=60x$,那么当$1<x\leqslant 2$时,y关于x的函数表达式为_____.

4. [中考·上海]李老师开车从甲地到相距240千米的乙地,如果油箱剩余油量y(升)与行驶里程x(千米)之间是一次函数关系,其图像如图所示,那么到达乙地时油箱剩余油量是_____升.



(第4题图)

5. [中考·广安]为了节能减排,我市某校准备购买某种品牌的节能灯,已知3只A型节能灯和5只B型节能灯共需50元,2只A型节能灯和3只B型节能灯共需31元.

(1)求1只A型节能灯和1只B型节能灯的售价各是多少元.

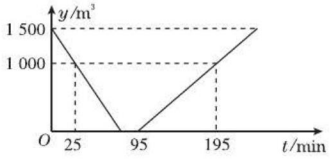
(2)学校准备购买这两种型号的节能灯共200只,要求A型节能灯的数量不超过B型节能灯的数量的3倍,请设计出最省钱的购买方案,并说明理由.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. [中考·岳阳] 游泳池常需进行换水清洗. 图中折线表示的是游泳池换水清洗过程"排水—清洗—灌水"中水量 y(m^3)与时间 t(min)之间的函数关系.

(1)根据图中提供的信息,求整个换水清洗过程中水量 y(m^3)与时间 t(min)的函数表达式;

(2)排水、清洗、灌水各花多少时间?



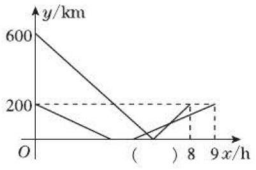
(第6题图)

7. 甲、乙两车在连通 A,B,C 三地的公路上行驶,甲车从 A 地出发匀速向 C 地行驶,同时乙车从 C 地出发匀速向 B 地行驶,到达 B 地并在 B 地停留 1 h 后,按原路原速返回到 C 地. 在两车行驶的过程中,甲、乙两车距 B 地的路程 y(km)与行驶时间 x(h)之间的函数图像如图所示,请结合图像回答下列问题:

(1)求甲、乙两车的速度,并在图中括号内填上正确的数;

(2)求乙车从 B 地返回到 C 地的过程中,y 与 x 之间的函数关系式;

(3)当甲、乙两车行驶到距 B 地的路程相等时,甲、乙两车距 B 地的路程是多少?



(第7题图)

能力提升练

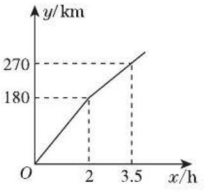
8. [中考·天津] 某电视台"走基层"栏目的一位记者乘汽车赴 360 km 外的农村采访,全程的前一部分为高速公路,后一部分为乡村公路. 若汽车在高速公路和乡村公路上分别以某一速度匀速行驶,汽车行驶的路程 y(单位:km)与时间 x(单位:h)之间的关系如图所示,则下列结论正确的是( )

A. 汽车在高速公路上的行驶速度为 100 km/h

B. 乡村公路总长为 90 km

C. 汽车在乡村公路上的行驶速度为60 km/h

D. 该记者在出发后4.5 h 到达采访地

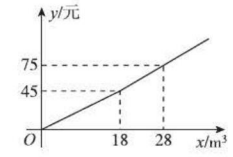


(第8题图)

9. [中考·绍兴] 某市规定了每月用水18 m^3 以内(含 18 m^3)和用水 18 m^3 以上两种不同的收费标准. 该市的用户每月应交水费 y(元)是用水量 x(m^3)的函数,其图像如图所示.

(1)若每月用水量为 18 m^3,则应交水费多少元?

(2)求当 $x>18$ 时,y 关于 x 的函数表达式. 若小敏家某月交水费 81 元,则这个月用水量为多少立方米?



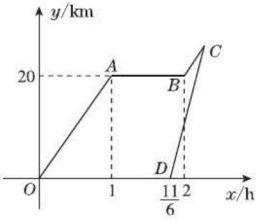
(第9题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. [中考·湛江] 周末，小明骑自行车从家里出发到野外郊游. 从家出发 1 h 后到达南亚所(景点)，游玩一段时间后按原速前往湖光岩. 小明离家 1 h 50 min 后，妈妈驾车沿相同路线前往湖光岩，如图是他们离家的路程 y(km)与小明离家时间 x(h)的函数图像.

(1)求小明骑车的速度和在南亚所游玩的时间；

(2)若妈妈在出发 25 min 后，刚好在湖光岩门口追上小明，求妈妈驾车的速度及 CD 所在直线对应的函数表达式.



(第 10 题图)

思维拓展练

11. [中考·德州] 现从 A，B 两个蔬菜市场向甲、乙两地运送蔬菜，A，B 各有蔬菜 14 吨，其中甲地需要蔬菜 15 吨，乙地需要蔬菜 13 吨，从 A 到甲地的运费为 50 元/吨，到乙地为30 元/吨；从 B 到甲地的运费为 60 元/吨，到乙地为 45 元/吨.

(1)设从 A 向甲地运送蔬菜 x 吨，请完成下表：

	运往甲地(单位：吨)	运往乙地(单位：吨)
A	x	
B		

(2)设总运费为 W 元，请写出 W 与 x 的函数关系式；

(3)怎样调运蔬菜才能使总运费最少？

【导学号：1553889】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.5 一次函数与二元一次方程的关系

核心知识

- 一次函数与二元一次方程
- 一次函数与二元一次方程组

知识链接

一次函数图像 → 二元一次方程；二元一次方程组

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数与二元一次方程（重点）

一次函数与二元一次方程

由于任意一个二元一次方程都可以转化为 $y=kx+b$（k,b 是常数，$k\neq0$）的形式，因此有：

（1）二元一次方程 $\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$ 一次函数 $\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$ 一条直线；

（2）二元一次方程的解 $\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$ 一次函数两变量的对应值 $\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$ 直线上的点的坐标.

拨考向

提分·秘诀

考查角度 利用一次函数的图像表示二元一次方程的解

例1 ［中考·呼和浩特］图 21.5-1 的四条直线，其中直线上每个点的坐标都是二元一次方程 $x-2y=2$ 的解的是（　　）

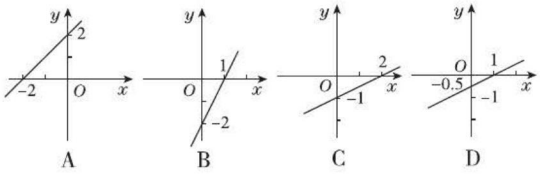


图 21.5-1

导引： 对于二元一次方程 $x-2y=2$，当 $x=0$ 时，$y=-1$；当 $y=0$ 时，$x=2$. 故直线 $x-2y=2$ 与两坐标轴的交点坐标是 $(0,-1)$，$(2,0)$. 对照四个选项中的直线，可知选 C.

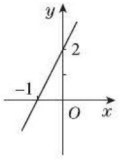
答案： C

方法点拨

直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点的横坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中，当 $y=0$ 时 x 的值；直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点的纵坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中，当 $x=0$ 时 y 的值. 解答这类题目，常运用数形结合思想.

同类变式 （答案见 226 页）

1. ［中考·济南］一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图所示，则关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解为（　　）



（第 1 题图）

A. $x=2$　　B. $y=2$　　C. $x=-1$　　D. $y=-1$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 一次函数与二元一次方程组(重点)

1 一次函数与二元一次方程组

(1)二元一次方程组$\overset{对应}{\Leftrightarrow}$两个一次函数$\overset{对应}{\Leftrightarrow}$两条直线;

二元一次方程组的解$\overset{即为}{\Leftrightarrow}$两个一次函数的函数值相等时的自变量值及函数值$\overset{即为}{\Leftrightarrow}$两条直线的交点坐标.

(2)两条直线交点个数与二元一次方程组的解的个数的关系:

两条直线有交点(相交)⇔方程组只有一组解;

两条直线无交点(平行)⇔方程组无解;

两条直线是同一直线(重合)⇔方程组有无数组解.

(3)用一次函数图像法解二元一次方程组的步骤:

①将方程组中每个方程分别转化成一次函数表达式;②在同一直角坐标系中分别画出转化后的两个一次函数的图像;③根据两个函数图像的交点坐标写出方程组的解.

2 易错警示 对两条直线交点与二元一次方程组的解的关系理解不透彻而出错.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用图像法解二元一次方程组

例2 利用图像法解二元一次方程组:$\begin{cases}3x-y=2,\\x+y=2.\end{cases}$

解: 列表得:

x	0	1
$y=3x-2$	-2	1
$y=2-x$	2	1

过点$(0,-2)$和$(1,1)$画出直线l_1,再过点$(0,2)$和$(1,1)$画出直线l_2,如图21.5-2,由图像可知两条直线的交点坐标为$(1,1)$,∴原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

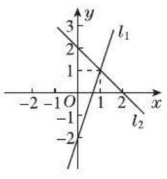


图21.5-2

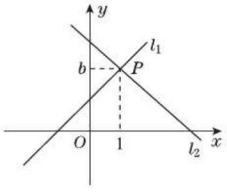
同类变式 (答案见226页)

2. 如图,直线$l_1:y=x+1$与直线$l_2:y=mx+n$相交于点$P(1,b)$.

(1)求b的值.

(2)不解关于x,y的方程组$\begin{cases}y=x+1,\\y=mx+n,\end{cases}$请你直接写出它的解.

(3)直线$l_3:y=nx+m$是否也经过点P?请说明理由.



(第2题图)

方法点拨

用图像法解二元一次方程组的基本步骤:(1)将方程组中的两个方程转化成一次函数$y=kx+b$的形式;(2)在同一直角坐标系中画出两个函数的图像;(3)利用图像的直观性确定交点坐标.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 利用二元一次方程组的解与一次函数图像的交点坐标的关系解决问题

例3 已知一次函数 $y=ax+2$ 与 $y=kx+b$ 的图像交于点 A，如图21.5-3，且方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 点 B 的坐标为 $(0,-1)$，请你确定这两个一次函数的表达式.

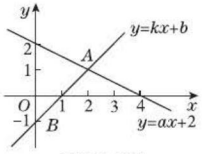


图 21.5-3

导引： 要确定这两个一次函数的表达式，需确定交点 A 的坐标，而交点 A 的坐标即为已知方程组的解. 因此用待定系数法可求得 k,b,a 的值，进而确定两个一次函数的表达式.

解： 因为方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

所以交点 A 的坐标为 $(2,1)$，

所以 $2a+2=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

又因为函数 $y=kx+b$ 的图像过交点 $A(2,1)$ 和点 $B(0,-1)$，

所以 $\begin{cases}2k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$

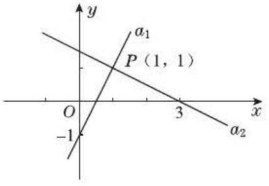
所以这两个一次函数的表达式分别为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，$y=x-1$.

方法点拨

“交点”是解决问题的关键，从“形”的角度讲，它是两个函数图像的公共点，即自变量值相等时函数值也相等的点；从“数”的角度讲，它是两个函数表达式的公共解，即二元一次方程组的解.

同类变式 （答案见227页）

3. 请你根据下图所提供的信息解答下面的问题.



（第3题图）

（1）分别写出直线 a_1，a_2 中 y 随 x 的变化情况；

（2）根据图像写出一个关于 x,y 的二元一次方程组，使其解为 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用函数图像解决方程组的问题

例4 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+b$ 的图像过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$.

（1）求直线 AB 对应的函数表达式；

（2）在图21.5-4给出的直角坐标系中，画出函数 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图像，并根据图像写出关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

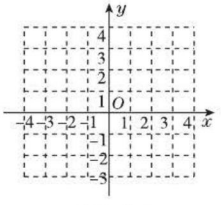


图 21.5-4

导引： （1）把点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$ 的坐标分别代入函数表达式，即可得关于 k,b 的方程组，解方程组即可；（2）画出函数 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图像，两函数图像的交点坐标就是方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)∵ 一次函数 $y=kx+b$ 的图像过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$，

$\therefore \begin{cases}-k+b=2,\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=\frac{3}{2},\end{cases}$

故直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

(2)作 $y=|x|$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的图像，如图 21.5-5 所示，

根据图像可得方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-3,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

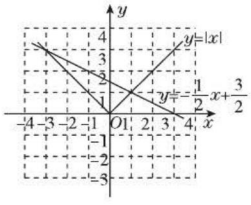


图 21.5-5

方法点拨：此题主要考查用待定系数法求一次函数表达式，以及方程组的解与函数图像的关系.解决问题的关键是掌握方程组的解与函数图像的关系，方程组的解就是两函数图像的交点坐标.警示：$y=|x|$ 的图像是一条折线.

拔尖角度 2　利用交点坐标求直线围成的几何图形的面积

例 5　已知直线 $y=-x+1$ 与 x 轴交于点 A，直线 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ 与 x 轴的交点为 B，两直线交于点 C，求 $\triangle ABC$ 的面积.

导引：利用方程思想求出点 A,B,C 的坐标，再用数形结合的方法求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：在 $y=-x+1$ 中，令 $y=0$，则 $-x+1=0$，$\therefore x=1$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1,0)$. 在 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ 中，令 $y=0$，则 $-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}=0$，$\therefore x=\frac{5}{3}$，$\therefore$ 点 B 的坐标是 $\left(\frac{5}{3},0\right)$. 解方程组 $\begin{cases}y=-x+1,\\y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$ $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3,-2)$. 则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{3}-1\right)\times|-2|=\frac{2}{3}$.

技巧点拨：求直线围成的几何图形的面积，关键是求出直线与直线的交点坐标，再利用数形结合思想求解；计算时要注意线段的长与坐标的关系.

练中考·练模拟　得满分 (答案见 227 页)

基础巩固练

1. 两条直线 $l_1:y=2x-1$ 与 $l_2:y=x+1$ 的交点坐标为(　　)

A. $(-2,3)$　　B. $(2,-3)$

C. $(-2,-3)$　　D. $(2,3)$

2. 因为方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\2x+2y=3\end{cases}$ 无解，所以一次函数 $y=2-x$ 与 $y=\frac{3}{2}-x$ 的图像必定(　　)

A. 重合　　B. 平行

C. 相交　　D. 无法判断

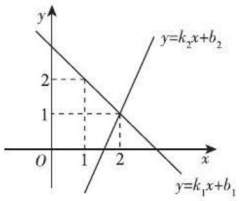
3. 若直线 $x+2y=2m$ 与直线 $2x+y=2m+3$(常数 m 为整数)的交点在第四象限，则整数 m 的值为(　　)

A. $-3,-2,-1,0$　　B. $-2,-1,0,1$

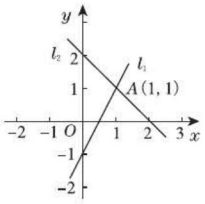
C. $-1,0,1,2$　　D. $0,1,2,3$

4. [中考·贵阳]在平面直角坐标系中，一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 的图像如图所示，则关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}y-k_1x=b_1,\\y-k_2x=b_2\end{cases}$ 的解是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第4题图）



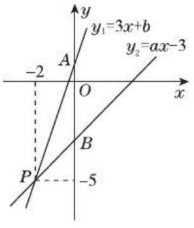
（第5题图）

5. 如图，直线 l_1，l_2 交于点 A. 观察图像，点 A 的坐标可以看作方程组_____的解.

6. 如图，已知函数 $y_1=3x+b$ 和 $y_2=ax-3$ 的图像交于点 P，分别交 y 轴于点 A，B.

（1）根据图像分别求出 a，b 的值；

（2）求 $\triangle APB$ 的面积.



（第6题图）

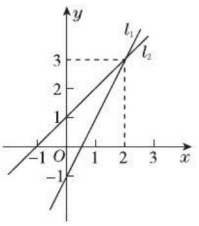
能力提升练

7. 如果一次函数 $y=3x+6$ 与 $y=2x-4$ 的图像的交点坐标是 (a,b)，则下列方程组中解是 $\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$ 的是（　　）

A. $\begin{cases}y-3x=6,\\2x+y=-4\end{cases}$　　B. $\begin{cases}3x+6+y=0,\\2x-4-y=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}y-3x=6,\\2x-y=4\end{cases}$　　D. $\begin{cases}3x-y=6,\\2x-y=4\end{cases}$

8. 如图，以两条直线 l_1，l_2 的交点坐标为解的方程组可能是（　　）



（第8题图）

A. $\begin{cases}x-y=1,\\2x-y=1\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x-y=-1,\\2x-y=-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x-y=-1,\\2x-y=1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x-y=1,\\2x-y=-1\end{cases}$

9. 一位同学在解方程组 $\begin{cases}y=kx+b,\\y=-2x\end{cases}$ 的过程中，错把 b 看成了 6，他其余的解题过程没有出错，解得此方程组的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$ 已知直线 $y=kx+b$ 过点 $(3,1)$，则 b 的值应该是_____.

思维拓展练

10. 在直角坐标系中，直线 l_1 对应的函数表达式为 $y=2x-1$，直线 l_2 过原点且与直线 l_1 交于点 $P(-2,a)$.

（1）试求 a 的值.

（2）试问 $(-2,a)$ 可以看作是怎样的二元一次方程组的解.

（3）设直线 l_1 与 x 轴交于点 A，求 $\triangle APO$ 的面积.

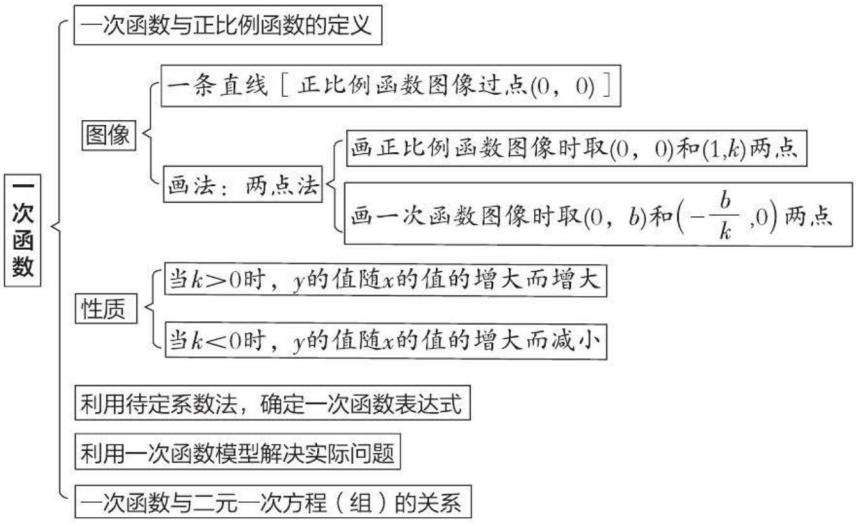
（4）［易错题］在直线 l_1 上是否存在点 M，使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是一条直线. 当 $b=0$ 时，一次函数为正比例函数. 当 $k>0$ 时，图像必经过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，图像必经过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小；当 $b>0$ 时，直线与 y 轴的交点在 x 轴的上方，当 $b<0$ 时，直线与 y 轴的交点在 x 轴的下方.
2. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 从“数”的角度看是二元一次方程；从“形”的角度看是一条直线. 一次函数与二元一次方程(组)、一元一次不等式之间的关系是数形结合的体现.

知识方法专题

知识必学

专题一 一次函数的图像

链接中考>>一次函数的图像是一条直线，它在平面直角坐标系中的位置是由函数表达式中的 k 和 b 决定的. 中考中，这个知识点出现的频率较高，一般都以填空题或选择题的形式出现.

例1 ［中考·枣庄］已知直线 $y=kx+b$，若 $k+b=-5$，$kb=6$，则此直线不经过(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

导引： 先根据已知判断出 k,b 的符号，再根据 k,b 的符号确定直线经过的象限，从而解决问题.

因为 $kb=6>0$，所以 k,b 同号，又因为 $k+b=-5$，所以 $k<0,b<0$. 所以直线经过第二、三、四象限，不经过第一象限.

答案： A

方法点拨： 直线 $y=kx+b$ 中，k 决定了直线的走向，b 决定了直线与 y 轴的交点，因此，由 k 和 b 的值可以确定出直线经过的象限，具体为：① 当 $k>0$，$b>0$ 时，直线经过第一、

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、三象限；② 当 $k>0$，$b<0$ 时，直线经过第一、三、四象限；③ 当 $k<0$，$b>0$ 时，直线经过第一、二、四象限；④ 当 $k<0$，$b<0$ 时，直线经过第二、三、四象限；⑤ 当 $k>0$，$b=0$ 时，直线经过第一、三象限；⑥ 当 $k<0$，$b=0$ 时，直线经过第二、四象限.

专题二 一次函数与方程(组)或不等式之间的关系

链接中考>> 一次函数与一次方程(组)或不等式之间的关系关键体现在几个交点上：(1)一次函数图像与两坐标轴的交点；(2)两个一次函数图像的交点. 函数图像与方程(组)或不等式之间的关系是数形结合的体现. 中考中，考查的形式多样，填空题、选择题和解答题都有涉及.

例2 [中考·济南] 如图 21-1，一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图像交于点 $P(1,3)$，则关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集是(　　)

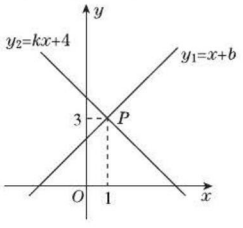


图 21-1

A. $x>-2$　　B. $x>0$

C. $x>1$　　D. $x<1$

导引： 由点 P 的横坐标为1，可得关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集为 $x>1$.

答案： C

方法点拨： 求解此类问题时，一是要明确一次函数与一元一次不等式的关系；二是要能理解数形结合的作用.

专题三 一次函数的应用

链接中考>> 一次函数的应用主要有两种形式：一是根据实际问题建立函数关系；二是利用函数的性质确定最佳方案. 这两种形式的纽带是函数自变量的取值范围. 一次函数的应用是中考的热门考点，一般都以解答题的形式出现.

例3 [中考·威海] 为绿化校园，某校计划购进 A，B 两种树苗，共 21 棵. 已知 A 种树苗每棵 90 元，B 种树苗每棵 70 元. 设购买 B 种树苗 x 棵，购买两种树苗所需费用为 y 元.

(1) y 与 x 的函数关系式为_____；

(2)若购买 B 种树苗的数量少于 A 种树苗的数量，请给出一种费用最省的方案，并求出该方案所需费用.

导引： 根据所需费用 = 购进 A，B 两种树苗的费用和，列出函数关系式，进而利用函数的性质求解.

解： (1) $y=-20x+1\,890$

(2)由题意，得 $x<21-x$，

解得 $x<10.5$，

又∵ $x\geqslant 1$，

∴ $1\leqslant x<10.5$，

且 x 为整数，

由(1)题中一次函数 $y=-20x+1\,890$，

得当 $x=10$ 时，

y 有最小值，

为 $-20\times10+1\,890=1\,690$，

∴ 费用最省的方案是购买 B 种树苗10 棵，A 种树苗 11 棵，所需费用为1 690 元.

方法点拨： 此类问题一般先根据等量关系确定函数关系式，然后根据题意列不等式求出自变量的取值范围，最后利用一次函数的性质得出答案.

II 思想方法专题

专题四 待定系数法

链接中考>> 先设出函数表达式，再根据已知条件确定表达式中未知的系数，从而求出函数表达式的方法叫做待定系数法. 运用待定系数法的前提是要有基本模型，关键是找对应值或图像上点的坐标.

例4 [中考·吉林] 一个有进水管与出水管的容器，从某时刻开始 4 min 内只进水不出水，在随后的 8 min 内既进水又出水，每分钟的进水量和出水量是两个常数. 容器内的水量 y(单位：L)与时间 x(单位：min)之间的关系如图 21-2 所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

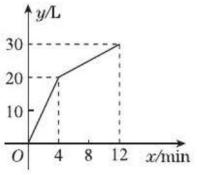


图 21-2

(1)当 $4\leqslant x\leqslant 12$ 时,求 y 关于 x 的函数表达式;

(2)直接写出每分钟进水、出水各多少升.

导引: (1)用待定系数法求对应的函数表达式;(2)每分钟的进水量根据前 4 分钟的水量变化求出,每分钟的出水量根据后 8 分钟的水量变化求出.

解: (1)当 $4\leqslant x\leqslant 12$ 时,设 y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx+b$.

∵ 点(4,20),(12,30)在其图像上,

$$\therefore \begin{cases}20=4k+b,\\30=12k+b.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k=\dfrac{5}{4},\\b=15.\end{cases}$$

∴ y 关于 x 的函数表达式为 $y=\dfrac{5}{4}x+15(4\leqslant x\leqslant 12)$.

(2)每分钟进水 5 L;每分钟出水 3.75 L.

方法点拨: 解题时首先正确理解题意,然后利用待定系数法确定函数的表达式.

专题五 分类讨论思想

链接中考>> 一次函数的增减性由函数表达式中 k 的正负决定,若无法确定 k 的正负,而又要运用一次函数的增减性解决方案优化问题,则必须根据 k 的正负进行分类讨论,做到不遗漏.

例 5 [中考·济宁]小明到服装店参加社会实践活动,服装店经理让小明帮助解决以下问题:

服装店准备购进甲、乙两种服装,甲种每件进价 80 元,售价 120 元;乙种每件进价 60 元,售价 90 元. 计划购进两种服装共 100 件,其中甲种服装不少于 65 件.

(1)若购进这 100 件服装的费用不得超过 7 500 元,则甲种服装最多购进多少件?

(2)在(1)的条件下,该服装店对甲种服装以每件优惠 $a(0<a<20)$ 元的价格进行促销活动,乙种服装价格不变,那么该服装店应如何调整进货方案才能获得最大利润?

导引: (1)设甲种服装购进 x 件,根据"购进这 100 件服装的费用不得超过 7 500 元"列出不等式求解;(2)设总利润为 w 元,根据"总利润 = 甲的利润 + 乙的利润"求得函数表达式,再根据 a 的取值范围进行分类讨论.

解: (1)设购进甲种服装 x 件,由题意可知

$80x+60(100-x)\leqslant 7\,500$,

解得 $x\leqslant 75$,

又∵ 甲种服装不少于 65 件,

∴ $x\geqslant 65$.

∴ $65\leqslant x\leqslant 75$,

∴ 甲种服装最多购进 75 件.

(2)设总利润为 w 元,

由(1)知 $65\leqslant x\leqslant 75$,

∴ $w=(40-a)x+30(100-x)=(10-a)x+3\,000(65\leqslant x\leqslant 75$,且 x 为整数).

当 $0<a<10$ 时,$10-a>0$,w 随 x 的增大而增大,

∴ 当 $x=75$ 时,w 有最大值,即购进甲种服装 75 件,乙种服装 25 件,能获得最大利润;

当 $a=10$ 时,所有方案获利相同,

∴ 按哪种方案进货都可以;

当 $10<a<20$ 时,$10-a<0$,w 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x=65$ 时,w 有最大值,即购进甲种服装 65 件,乙种服装 35 件,能获得最大利润.

方法点拨: 解答此类问题的关键是理清各种等量关系,利用等量关系列出函数表达式,利用不等关系列不等式(组),利用不等式(组)的整数解设计可行的方案,利用函数的性质求最值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

一、选择题

1. [中考·南宁] 已知正比例函数 $y=3x$ 的图像经过点 $(1,m)$，则 m 的值为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3

C. $-\frac{1}{3}$　　D. -3

2. [中考·成都] 一次函数 $y=2x+1$ 的图像不经过(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. [中考·泰安] 已知一次函数 $y=kx-m-2x$ 的图像与 y 轴的负半轴相交，且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，则下列结论正确的是(　　)

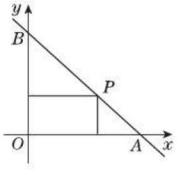
A. $k<2, m>0$　　B. $k<2, m<0$

C. $k>2, m>0$　　D. $k<0, m<0$

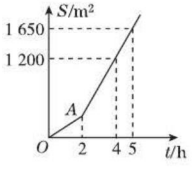
4. [中考·枣庄] 如图，一条直线与两坐标轴的正半轴分别交于 A，B 两点，P 是线段 AB 上任意一点(不包括端点)，过点 P 分别作两坐标轴的垂线，其与两坐标轴围成的长方形的周长为 8，则该直线的函数表达式是(　　)

A. $y=-x+4$　　B. $y=x+4$

C. $y=x+8$　　D. $y=-x+8$



(第4题图)



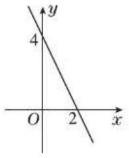
(第5题图)

5. 明君社区有一块空地需要绿化，某绿化组承担了此项任务，绿化组工作一段时间后，提高了工作效率. 该绿化组完成的绿化面积 S(单位：m^2)与工作时间 t(单位：h)之间的函数关系如图所示. 则该绿化组提高工作效率前每小时完成的绿化面积是(　　)

A. 300 m^2　　B. 150 m^2

C. 330 m^2　　D. 450 m^2

6. [中考·湘潭] 一次函数 $y=ax+b$ 的图像如图所示，则不等式 $ax+b\geqslant 0$ 的解集是(　　)



(第6题图)

A. $x\geqslant 2$　　B. $x\leqslant 2$

C. $x\geqslant 4$　　D. $x\leqslant 4$

7. [中考·北京] 一家游泳馆的游泳收费标准为30元/次，若购买会员年卡，可享受如下优惠：

会员年卡类型	办卡费用/元	每次游泳收费/元
A类	50	25
B类	200	20
C类	400	15

例如，购买 A 类会员年卡，一年内游泳20次，消费 $50+25\times 20=550$(元)，若一年内在该游泳馆游泳的次数为45～55，则最省钱的方式为(　　)

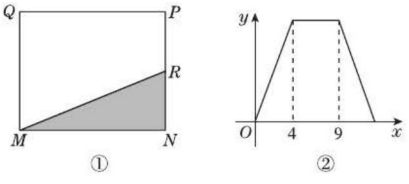
A. 购买 A 类会员年卡

B. 购买 B 类会员年卡

C. 购买 C 类会员年卡

D. 不购买会员年卡

8. [中考·黔南州] 如图①，在长方形 $MNPQ$ 中，动点 R 从点 N 出发，沿 $N\to P\to Q\to M$ 方向运动至点 M 处停止. 设点 R 运动的路程为 x，$\triangle MNR$ 的面积为 y，如果 y 关于 x 的函数图像如图②所示，则当 $x=9$ 时，点 R 应运动到(　　)



(第8题图)

A. 点 M 处　　B. 点 N 处

C. 点 P 处　　D. 点 Q 处

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

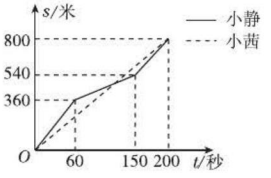
二、填空题

9. [中考·潍坊] 当直线 $y=(2-2k)x+k-3$ 经过第二、三、四象限时，k 的取值范围是_____.

10. [中考·广州] 某水库的水位在 5 小时内持续上升，初始的水位高度为 6 米，水位以每小时 0.3 米的速度匀速上升，则水库的水位高度 y（米）与时间 x（时）$(0\leqslant x\leqslant 5)$ 的函数关系式为_____.

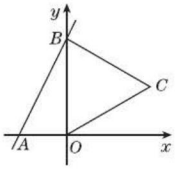
11. 将直线 $y=2x+1$ 向下平移3 个单位长度后所得直线表达式是_____.

12. [中考·重庆] 为增强学生体质，某中学在体育课中加强了学生的长跑训练，在一次女子 800 米耐力测试中，小静和小茜在校园内 200 米的环形跑道上同时起跑，同时到达终点，所跑的路程 s（米）与所用的时间 t（秒）之间的函数图像如图所示，则她们第一次相遇的时间是起跑后的第_____秒.

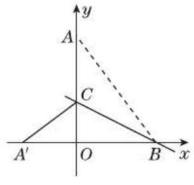


（第 12 题图）

13. [中考·枣庄] 如图，直线 $y=2x+4$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A，B 两点，以 OB 为边在 y 轴的右侧作等边三角形 OBC，将点 C 向左平移，使其对应点 C' 恰好落在直线 AB 上，则点 C' 的坐标为_____.



（第 13 题图）



（第 14 题图）

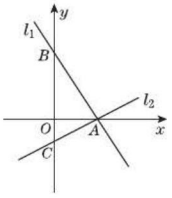
14. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(0,4)$，$B(3,0)$，连接 AB. 将 $\triangle AOB$ 沿过点 B 的直线折叠，使点 A 落在 x 轴上的点 A' 处，折痕所在的直线交 y 轴正半轴于点 C，则直线 BC 的表达式为_____.

三、解答题

15. [中考·江西] 如图，过点 $A(2,0)$ 的两条直线 l_1，l_2 分别交 y 轴于点 B，C，其中点 B 在原点上方，点 C 在原点下方，已知 $AB=\sqrt{13}$.

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 4，求直线 l_2 的表达式.

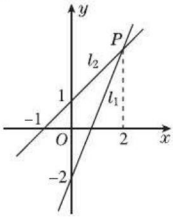


（第 15 题图）

16. [中考·来宾] 如图，过点 $(0,-2)$ 的直线 $l_1:y_1=kx+b(k\neq 0)$ 与直线 $l_2:y_2=x+1$ 交于点 $P(2,m)$.

(1) 写出使得 $y_1<y_2$ 的 x 的取值范围；

(2) 求点 P 的坐标和直线 l_1 的表达式.



（第 16 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17. [中考·山西]我省某苹果基地销售优质苹果，该基地对需要送货且购买量在2 000 kg~5 000 kg(含2 000 kg和5 000 kg)的客户有两种销售方案(客户只能选择其中一种方案).

方案A：每千克5.8元，由基地免费送货.

方案B：每千克5元，客户需支付运费2 000元.

(1)请分别写出按方案A、方案B购买这种苹果的应付款y(元)与购买量x(kg)之间的函数关系式；

(2)求购买量x在什么范围时，选用方案A比方案B付款少；

(3)某水果批发商计划用20 000元选用这两种方案中的一种，购买尽可能多的这种苹果，请直接写出他应选择哪种方案.

18. [中考·玉林]某新建学校举行绿化校园活动，九年级计划购买A，B两种花木共100棵绿化操场，其中A种花木每棵50元，B种花木每棵100元.

(1)若购进A，B两种花木刚好用去8 000元，购买了A，B两种花木各多少棵？

(2)如果购买B种花木的数量不少于A种花木的数量，请设计一种购买方案使所需总费用最低，并求出该购买方案所需总费用.

19. [中考·广安]为了贯彻落实市委市政府提出的“精准扶贫”精神，某校特别制订了一系列关于帮扶A，B两个贫困村的计划，现决定从某地运送152箱鱼苗到A，B两村养殖，若用大、小货车共15辆，则恰好能一次性运完这批鱼苗. 已知这两种大、小货车的载货能力分别为12箱/辆和8箱/辆，其运往A，B两村的运费如下表：

	A村(元/辆)	B村(元/辆)
大货车	800	900
小货车	400	600

(1)求这15辆车中大、小货车各有多少辆；

(2)现安排其中的10辆货车前往A村，其余货车前往B村. 设前往A村的大货车为x辆，前往A，B两村总费用为y元，试求出y与x的函数关系式；

(3)在(2)的条件下，若运往A村的鱼苗不少于100箱，请你写出使总费用最少的货车调配方案，并求出最少总费用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十二章

四边形

几何图形性质的探秘

数学点拨

你将学到的核心考点

- 平行四边形的性质与判定 □
- 三角形的中位线定理 □
- 矩形、菱形、正方形的性质与判定 □
- 多边形的内角和与外角和 □

我们为你提供的核心方法

- 定义法 □
- 演绎推理 □
- 转化思想 □
- 数形结合思想 □
- 割补法 □
- 类比思想 □
- 方程思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.1 平行四边形的性质

核心知识

- 平行四边形的定义
- 平行四边形的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形的定义及相关概念(关键)

1 **定义** 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

2 **表示方法** 平行四边形用符号“$\square$”表示,如图22.1-1,平行四边形$ABCD$记作“$\square ABCD$”,读作“平行四边形$ABCD$”.

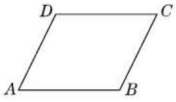


图22.1-1



3 **数学表达**

$\left.\begin{array}{l}AB\parallel CD\\AD\parallel BC\end{array}\right\}\Leftrightarrow$四边形$ABCD$是平行四边形.

即:若$AB\parallel CD$,$AD\parallel BC$,则四边形$ABCD$是平行四边形;若四边形$ABCD$是平行四边形,则$AB\parallel CD$,$AD\parallel BC$.

要点精析

(1)平行四边形的定义有两个要素:①四边形;②两组对边分别平行.

作为四边形,平行四边形具有一般四边形的一切性质,如有四条边、四个内角、两条对角线,内角和为360°,外角和为360°等.作为平行四边形,它有区别于其他一般四边形的特殊性质:平行四边形的两组对边分别平行.

(2)平行四边形的定义既是它的一个性质,又是它的一种判定方法:

∵四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore\begin{cases}AB\parallel CD,\\AD\parallel BC;\end{cases}$反过来,$\because\begin{cases}AB\parallel CD,\\AD\parallel BC,\end{cases}$

∴四边形$ABCD$是平行四边形.

4 连接平行四边形不相邻的两个顶点的线段叫做平行四边形的对角线,两条对角线的交点叫做平行四边形的中心.平行四边形是中心对称图形,它的对称中心是两条对角线的交点.

5 **易错警示** 平行四边形的表示要按一定的方向依次表示各个顶点,它既可以按顺时针方向排列字母顺序,也可以按逆时针方向排列字母顺序,但不能打乱顺序.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用平行四边形的定义识别平行四边形

例1 如图22.1-2,在$\square ABCD$中,过点P作直线EF,GH分别平行于AB,BC,那么图中共有_____个平行四边形.

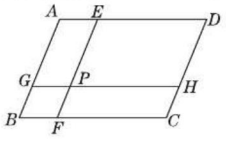


图22.1-2

技巧点拨

平行四边形的定义的功能:平行四边形的定义既是平行四边形的性质——平行四边形的两组对边分别平行;又是平行四边形判定的一种方法——两组对边分别平行的四边形是平行四

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 根据平行四边形的定义，知$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，由已知条件可知，$EF\parallel AB$，$GH\parallel BC$，所以根据平行四边形的定义可以判定四边形$ABFE$和四边形$GBCH$都是平行四边形，同理可判定四边形$EFCD$、四边形$AGHD$、四边形$AGPE$、四边形$EPHD$、四边形$GBFP$、四边形$PFCH$都是平行四边形，最后还要加上$\square ABCD$，即共有9个平行四边形.

答案： 9

考查角度2 利用平行四边形的定义证明平行四边形

例2 如图22.1-3，在$\square ABCD$中，$\angle 1=\angle 2$.

求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

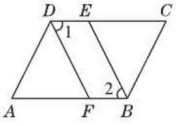


图22.1-3

导引： 要证四边形$BEDF$是平行四边形，由定义知需证$DE\parallel BF$及$DF\parallel BE$，其中$DE\parallel BF$可由$\square ABCD$的性质得出，而$DF\parallel BE$可通过同位角相等推出.

证明： ∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $CD\parallel AB$（平行四边形的两组对边分别平行），

∴ $DE\parallel BF$，∴ $\angle 1=\angle DFA$.

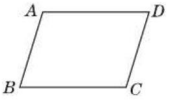
又∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle 2=\angle DFA$，

∴ $DF\parallel BE$，∴ 四边形$BEDF$是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

同类变式 （答案见228页）

1. 如图，在四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$\angle C+\angle D=180°$.

求证：四边形$ABCD$是平行四边形.



（第1题图）

边形.对于任何一个几何定义，都具有两种功能，顺用是判定，逆用是性质.对于几何计数问题，要按照一定的顺序（如从小到大等）分类计数，做到不重复、不遗漏.

方法点拨

当题目的条件中有平行四边形时，应立即想到两组对边分别平行；当题目中有要证的平行四边形时，首先应联想到它的两组对边是否分别平行.平行四边形的定义的逆向利用及正向利用是后面学习平行四边形的性质及判定的主要依据.

点知识 2 平行四边形的边、角性质（重点）

1 边的性质 平行四边形的对边平行；平行四边形的对边相等.

数学表达：如图22.1-4，

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

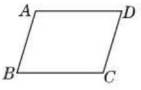


图22.1-4



2 角的性质 平行四边形的对角相等；平行四边形的邻角互补.

数学表达：如图22.1-4，∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，∴ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle A+\angle B=180°$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle C+\angle D=180°$，$\angle A+\angle D=180°$.

要点精析

由于组成平行四边形的元素有边和角，因此其性质也应从边和角这两个方面去看.

（1）从边看：平行四边形的对边平行且相等.

（2）从角看：平行四边形的对角相等、邻角互补.

3 易错警示 已知平行四边形，要根据推理证明的需要，合理选用需要的性质.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用平行四边形的性质计算

类型一 边的计算

例3 ［中考·玉林］如图22.1-5，在$\square ABCD$中，BM是$\angle ABC$的平分线，交CD于点M，且$MC=2$，$\square ABCD$的周长是14，则DM等于(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

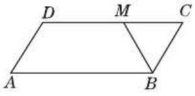


图22.1-5

导引： 根据BM平分$\angle ABC$和$AB\parallel CD$可以判定$\triangle BCM$是等腰三角形，从而得到$BC=MC=2$，再结合$\square ABCD$的周长是14得到CD的长，进而得到DM的长.

具体过程如下：

$\because$ 在$\square ABCD$中，$AB\parallel CD$，BM是$\angle ABC$的平分线，$\therefore \angle CBM=\angle ABM=\angle CMB$. $\therefore BC=MC=2$. 又$\because \square ABCD$的周长是14，$\therefore AB=CD=5$. $\therefore DM=3$.

答案： C

方法点拨

当题目中平行线和角平分线同时出现时，极有可能出现等腰三角形，如本题中由AB∥CD和BM平分∠ABC就得到△BCM是等腰三角形；在平行四边形的边的计算中，“平行四边形相邻两边之和等于平行四边形的周长的一半”会经常用到.

类型二 角的计算

例4 如图22.1-6，在$\square ABCD$中，已知$\angle A+\angle C=120°$，求$\square ABCD$各角的度数.

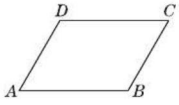


图22.1-6

导引： 由平行四边形的对角相等，得$\angle A=\angle C$，结合已知条件$\angle A+\angle C=120°$，即可求出$\angle A$和$\angle C$的度数，再根据平行线的性质，进而求出$\angle B$，$\angle D$的度数.

解： 在$\square ABCD$中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle A+\angle D=180°$.

$\because \angle A+\angle C=120°$，$\therefore \angle A=\angle C=60°$.

$\therefore \angle D=180°-\angle A=180°-60°=120°$.

$\therefore \angle B=\angle D=120°$.

方法点拨

求平行四边形中有关角度的基本方法：利用平行四边形的对角相等、邻角互补的性质，在已知一个角或已知两个角的关系时即可求出其他三个角的度数.

考查角度2 利用平行四边形的性质进行证明

例5 ［中考·来宾］如图22.1-7，在$\square ABCD$中，E，F为对角线AC上的两点，且$AE=CF$，连接DE，BF.

(1)写出图中所有的全等三角形；

(2)求证：$DE\parallel BF$.

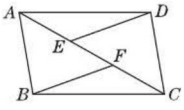


图22.1-7

导引： (1)根据平行四边形的性质得出对应的边、角相等，从而判断哪两个三角形是全等三角形；

(2)根据平行四边形的性质得出$AB\parallel CD$，$AB=CD$，进而得出$\angle BAF=\angle DCE$，再由$AE=CF$得出$AF=CE$，即可得出$\triangle ABF\cong\triangle CDE$，从而得出$\angle BFA=\angle DEC$，最终得出$DE\parallel BF$.

方法点拨

平行四边形的定义、平行线的性质、全等三角形的判定和性质在有关平行四边形的证明中，常融合在一起综合应用，而利用平行四边形的定义、平行线的性质获得三角形全等的条件是解题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)**解**：所有的全等三角形有：$\triangle ABF \cong \triangle CDE$，$\triangle AED \cong \triangle CFB$，$\triangle ADC \cong \triangle CBA$.

(2)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，$AB = CD$. ∴ $\angle BAF = \angle DCE$.

∵ $AE = CF$，∴ $AE + EF = CF + EF$，即 $AF = CE$.

∴ $\triangle ABF \cong \triangle CDE$. ∴ $\angle BFA = \angle DEC$. ∴ $DE \parallel BF$.

点知识 3 平行四边形的对角线的性质(重点)

1 对角线的性质 平行四边形的对角线互相平分.

数学表达：如图22. 1-8，∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC，BD 相交于点 O，∴ $OA = OC$，$OB = OD$.

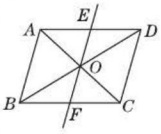


图 22. 1-8

2 拓展

(1)平行四边形的两条对角线把平行四边形分割成四个面积相等的三角形；

数学表达：如图22. 1-8，∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC，BD 相交于点 O，∴ $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle BCO} = S_{\triangle CDO} = S_{\triangle ADO}$.

(2)若一条直线过平行四边形两条对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积.

数学表达：如图 22. 1-8，∵ 直线 EF 过平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点 O，

$\therefore AE + AB + BF = FC + CD + DE = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$，$S_{四边形ABFE} = S_{四边形FCDE} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用对角线的性质求线段的长

例6 如图 22. 1-9，已知 $\square ABCD$ 的周长是60，对角线 AC，BD 相交于点 O. 若 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长长8，求这个平行四边形各边的长.

导引：由平行四边形对边相等可知，$2AB + 2BC = 60$，所以 $AB + BC = 30$. 又由 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长长 8，可知 $AB - BC = 8$，联立以上两式，即可求出各边的长.

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA = OC$，$AB = CD$，$AD = BC$.

又∵ $AB + BC + CD + DA = 60$，$OA + AB + OB - (OB + BC + OC) = 8$，

∴ $AB + BC = 30$，$AB - BC = 8$.

∴ $AB = CD = 19$，$BC = AD = 11$.

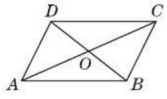


图 22. 1-9

考查角度2 利用平行四边形对角线的性质证明

例7 如图 22. 1-10，已知 $\square ABCD$ 的顶点 A，C 与 $\square EBFD$ 的顶点 E，F 在一条直线上. 求证：$AE = CF$.

导引：平行四边形的性质提供了边的平行与相等、角的相等与互补、对角线的互相平分，当所要证明的结论中的线段在对角线上时，往往利用平行四边形的对角线互相平分这一性质. 因此，要证对角线上的 $AE = CF$，可考虑利用对角线互相平分这一性质，先连接 BD 交 AC 于点 O，再进行证明.

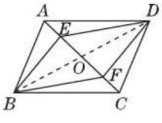


图 22. 1-10

方法点拨

在应用平行四边形的性质时，我们应从边、角、对角线这三个方面去考虑. 解本例时，我们由“平行四边形的对角线互相平分”可以得出“平行四边形被它的两条对角线分成四个小三角形，相邻两个小三角形的周长之差等于平行四边形中对应的两邻边之差”.

易错警示

欲证属于不同三角形的两条线段相等，习惯地联想到证两个三角形全等，这样虽然能达到证明的目的，却忽视了平行四边形特有的性质，易走弯路. 因此，在解决平行四边

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明： 如图22.1-10，连接 BD 交 AC 于点 O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形，

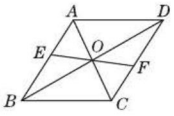
∴ $OE=OF$（平行四边形的对角线互相平分），

∴ $OA-OE=OC-OF$，即 $AE=CF$.

形的有关问题时，应注意灵活运用平行四边形的性质.

同类变式 （答案见228页）

2. [中考·广州] 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别相交于点 E，F. 求证：$\triangle AOE\cong\triangle COF$.



（第2题图）

点知识 4 平行四边形的周长与面积（重点）

1 **面积公式** 平行四边形的面积＝底×高（底为平行四边形的任意一条边，高为这条边与其对边间的距离）

2 等底等高的平行四边形的面积相等.

要点精析

(1) 求面积时，底和高一定要对应，必须是底边上的高；

(2) 等底等高的平行四边形与三角形面积间的关系：三角形面积＝与它等底等高的平行四边形面积的一半.

3 **拓展**

(1) 两个等底平行四边形（三角形）面积的比等于它们高的比；

(2) 两个等高平行四边形（三角形）面积的比等于它们底的比.

4 根据平行四边形的两组对边分别相等，可得平行四边形的周长等于两邻边之和的2倍.

5 平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分，两条对角线将平行四边形分成面积相等的四部分.

核考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用平行四边形周长的求法解决平行四边形的周长问题

例8 [中考·福州] 如图22.1-11，在 $\square ABCD$ 中，DE 平分 $\angle ADC$，$AD=6$，$BE=2$，则 $\square ABCD$ 的周长是_____.

导引： 求 $\square ABCD$ 的周长，已知一条边 $AD=6$，只需求出 AD 的邻边 AB 或 CD 的长即可.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AD=6$，

∴ $BC=AD=6$，

∴ $EC=BC-BE=6-2=4$.

∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle ADE=\angle DEC$.

∵ DE 平分 $\angle ADC$，

∴ $\angle ADE=\angle EDC$，

∴ $\angle EDC=\angle DEC$.

∴ $DC=EC=4$.

∴ $\square ABCD$ 的周长是 $2\times(4+6)=20$.

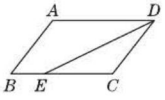


图22.1-11

答案： 20

方法点拨

根据平行四边形的性质可知平行四边形的周长等于相邻两边之和的2倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用平行四边形的面积公式求平行四边形的面积

例9 ［中考·本溪］如图22.1-12，在$\square ABCD$中，$AB=4$，$BC=6$，$\angle B=30°$，则此平行四边形的面积是(　　)

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

导引： 过点A作$AE\perp BC$于点E，根据含$30°$角的直角三角形的性质“在直角三角形中，$30°$角所对的直角边等于斜边的一半”可求出AE的长，利用平行四边形的面积公式即可求出其面积.

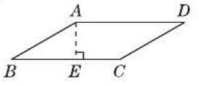


图22.1-12

如图22.1-12，过点A作$AE\perp BC$于点E，∵在$Rt\triangle ABE$中，$\angle B=30°$，∴$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 4=2$.

∴平行四边形$ABCD$的面积为$BC\cdot AE=6\times 2=12$.

答案： B

方法点拨

求平行四边形的面积时，根据平行四边形的面积公式，要知道平行四边形一边的长及这条边上的高.平行四边形的高不一定是过顶点的垂线段，因为平行线间的距离处处相等.

考查角度3 利用平行四边形的面积求线段的长

例10 如图22.1-13，在$\square ABCD$中，$AD:AB=5:4$，过点A作$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，垂足分别为E，F，$AE=4$ cm，求AF的长.

导引： 平行四边形的面积$S=ah$. 因为$AD:AB=5:4$，$AB=CD$，$AD=BC$，$S_{\square ABCD}=CD\cdot AF=BC\cdot AE$，所以$AF:AE=5:4$. 又因为$AE=4$ cm，所以$AF=5$ cm.

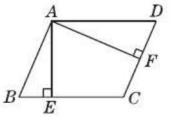


图22.1-13

解： ∵$S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=CD\cdot AF$，$AB=CD$，$AD=BC$，

∴$AD\cdot AE=AB\cdot AF$. ∴$AD:AB=AF:AE$. 又∵$AD:AB=5:4$，

∴$AF:AE=5:4$. ∴$AF=\frac{5}{4}AE=\frac{5}{4}\times 4=5$(cm).

方法点拨

在三角形或平行四边形中，根据面积为定值，用不同的底边和对应的高来表示面积，可以得到不同的底或高之间的关系.解本例的技巧在于将平行四边形的邻边之比转化为高之比.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 综合利用平行四边形的性质进行线段或角的计算

例11 如图22.1-14，在$\square ABCD$中，点E是AD的中点，延长CE交BA的延长线于点F. 若$BC=2AB$，$\angle FBC=70°$，求$\angle EBC$的度数.

导引： 由$\square ABCD$得$AB=DC$，再由$\triangle AEF\cong\triangle DEC$，可得$CE=FE$，$AF=DC$，从而可得$AB=AF$. 然后由$BC=2AB$，可得$BC=BF$，最后利用等腰三角形的性质可得$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC=35°$.

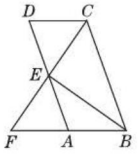


图22.1-14

解： ∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$AB=DC$，$DC\parallel AB$，∴$\angle ECD=\angle F$.

又∵$DE=AE$，$\angle DEC=\angle AEF$，

∴$\triangle DEC\cong\triangle AEF$. ∴$CE=FE$，$CD=AF$，

∴点E为CF的中点，$AB=AF$.

∴$BF=2AB$. 又∵$BC=2AB$，∴$BC=BF$.

∴$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC=\frac{1}{2}\times 70°=35°$.

方法点拨： 求线段或角的常用方法：(1)利用等量代换；(2)利用整体与部分之间的关系；(3)利用角平分线的性质及判定；(4)利用线段垂直平分线的性质及判定；(5)利用等腰三角形的性质及

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

判定；(6)利用全等三角形的性质；(7)利用面积(等底等高等积)；(8)利用平行四边形的性质.

拔尖角度 2 综合利用平行四边形的性质进行证明

例 12 如图 22.1-15，在$\square ABCD$中，AE，BF分别平分$\angle DAB$和$\angle ABC$，且分别交CD于点E，F，AE，BF相交于点M.

(1)求证：$AE \perp BF$；

(2)判断线段DF与CE的大小关系，并说明理由.

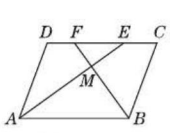


图 22.1-15

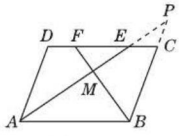


图 22.1-16

导引：(1)要证$AE \perp BF$，只需证$\angle AMB = 90°$. 在$\triangle ABM$中，利用平行四边形邻角互补及角平分线的定义证明$\angle MAB + \angle MBA = 90°$即可，此为证法一；由条件及结论“平分、垂直”联想到构造等腰三角形，再利用等腰三角形“三线合一”的性质即可证明，此为证法二.

(2)$DF = CE$. 利用EF将其转化为$DE = CF$，即可利用平行四边形和三角形的有关知识来证明.

(1)**证明：**方法一 $\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore AD /\!/ BC$.

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180°$.

又$\because AE$，BF分别平分$\angle DAB$和$\angle ABC$，

$\therefore 2\angle EAB + 2\angle FBA = 180°$.

$\therefore \angle EAB + \angle FBA = 90°$.

$\therefore \angle AMB = 90°$，即$AE \perp BF$.

方法二 如图 22.1-16 所示，延长BC，AE交于点P. 在$\square ABCD$中，$AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle DAP = \angle P$. $\because AE$平分$\angle DAB$，

$\therefore \angle DAP = \angle PAB$.

$\therefore \angle PAB = \angle P$.

$\therefore BA = BP$. 又$\because BF$平分$\angle ABC$，

$\therefore BM \perp AP$，即$AE \perp BF$.

(2)**解：**$DF = CE$. 理由如下：

在$\square ABCD$中，$CD /\!/ AB$，$\therefore \angle DEA = \angle EAB$.

$\because AE$平分$\angle DAB$，$\therefore \angle DAE = \angle EAB$.

$\therefore \angle DEA = \angle DAE$. $\therefore DE = DA$.

同理可得$CF = BC$. 又$\because AD = BC$，

$\therefore DE = CF$. $\therefore DE - EF = CF - EF$，

即$DF = CE$.

技巧点拨：(1)判断两条线段的位置关系，其实质是判断两条线段所在直线的位置关系.两条直线的位置关系有相交和平行两种，其中相交又有垂直和斜交两种情况.(2)两条线段的大小关系有大于、小于、相等三种，常用的证明相等的方法与例 11 中的几种方法相同.

拔尖角度 3 综合利用平行四边形的性质进行方案设计

例 13 张大伯承包了一个呈四边形的池塘，如图 22.1-17 所示，它的四个顶点A，B，C，D处均有一棵大树，张大伯今年养鱼喜获丰收，明年准备把池塘面积扩大一倍，但又不想毁掉这四棵大树，并且扩建后的池塘呈平行四边形. 张大伯的这一设想能否实现？请你帮助他解决，并画出示意图.

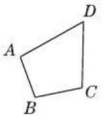


图 22.1-17

导引：张大伯的设想：(1)面积扩大一倍；(2)不毁掉这四棵大树；(3)扩建后池塘形状为平行四边形. 直接把四边形的面积扩大一倍，难度较大. 我们可以把四边形分成两个三角形，然后分别把两个三角形的面积扩大一倍，也就把四边形的面积扩大了一倍. 如图 22.1-18，根据平行四边形的性质可知$\square ACED$的面积是$\triangle ACD$的面积的 2 倍. 如图 22.1-19，$\square ACEF$的面积是$\triangle ACD$的面积的 2 倍.

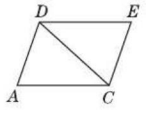


图 22.1-18

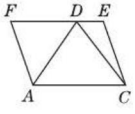


图 22.1-19

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：张大伯的这一设想能实现，并有多种设计方案(任选一种即可).

方案一：如图 22.1-20，连接 AC. 过点 D 作 $DH/\!/AC$，且使 $DH=AC$，连接 HA，过点 B 作 $EF/\!/AC$ 分别交 HA，DC 的延长线于点 E，F，则 $\square EFDH$ 即为扩建成的池塘的示意图.

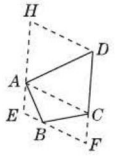


图 22.1-20

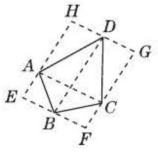


图 22.1-21

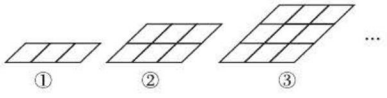
方案二：如图 22.1-21，连接 AC，BD. 分别过点 B，D 作 AC 的平行线，分别过点 A，C 作 BD 的平行线，这两组平行线的交点分别为点 E，F，G，H，则 $\square EFGH$ 即为扩建成的池塘的示意图.

方法点拨：解此题的关键是设计图形，利用平行四边形的对角线将平行四边形分成面积相等的两部分来设计，证明就简单了. 设计图形时还可以把原来的图形分为四个三角形，再扩大四个相应等大的三角形，则张大伯的设想也可以实现.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 228 页)

基础巩固练

1. 根据如图所示的①，②，③三个图的规律，第 n 个图中平行四边形的个数是(　　)



(第 1 题图)

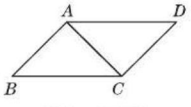
A. $3n$　B. $3n(n+1)$　C. $6n$　D. $6n(n+1)$

2. 以不共线的三点 A，B，C 为顶点作平行四边形，可作(　　)

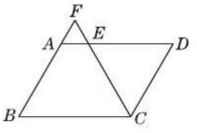
A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 无数个

3. [中考·丽水] 如图，在 $\square ABCD$ 中，连接 AC，$\angle ABC=\angle CAD=45°$，$AB=2$，则 BC 的长是(　　)

A. $\sqrt{2}$　B. 2　C. $2\sqrt{2}$　D. 4



(第 3 题图)



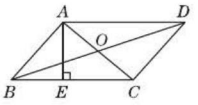
(第 4 题图)

4. [中考·泰安] 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，$\angle BCD$ 的平分线交 AD 于 E，交 BA 的延长线于 F，则 $AE+AF$ 的值等于(　　)

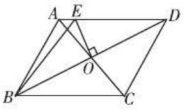
A. 2　B. 3　C. 4　D. 6

5. [中考·青岛] 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BC$，垂足为 E，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$BD=4$，则 AE 的长为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{3}{2}$　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$



(第 5 题图)



(第 6 题图)

6. [中考·遂宁] 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$OE\perp BD$ 交 AD 于点 E，连接 BE，若 $\square ABCD$ 的周长为 28，则 $\triangle ABE$ 的周长为(　　)

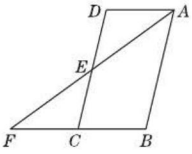
A. 28　B. 24　C. 21　D. 14

7. 在 $\square ABCD$ 中，$\angle A=30°$，$AB=7$ cm，$AD=6$ cm，则 $S_{\square ABCD}=$ _____.

8. [中考·湘潭] 如图，在 $\square ABCD$ 中，$DE=CE$，连接 AE 并延长交 BC 的延长线于点 F.

(1)求证：$\triangle ADE\cong\triangle FCE$；

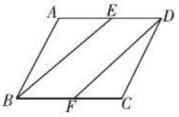
(2)若 $AB=2BC$，$\angle F=36°$，求 $\angle B$ 的度数.



(第 8 题图)

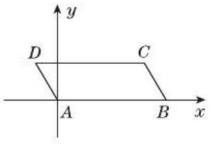
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [中考·淮安] 已知:如图,在$\square ABCD$中,点E,F分别是边AD,BC的中点. 求证:$BE=DF$.



(第9题图)

10. 在$\square ABCD$中,$AB=5$,$AD=2$,$\angle DAB=120°$,以点A为坐标原点,直线AB为x轴建立直角坐标系,如图所示,求B,C,D三点的坐标.



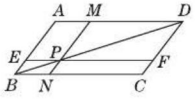
(第10题图)

能力提升练

11. 下列说法中:①平行四边形的任意一条对角线把平行四边形分成两个全等的三角形;②平行四边形的面积等于三角形的面积的2倍;③平行四边形的两条对角线把平行四边形分成四个面积相等的三角形;④平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等. 其中,正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

12. 如图,已知P是$\square ABCD$的对角线BD上一点,$EF\parallel BC$,$MN\parallel AB$,且EF,MN相交于点P,则$\square AEPM$与$\square PNCF$的面积的大小关系是(　　)



(第12题图)

A. 相等

B. $\square AEPM$的面积大

C. $\square AEPM$的面积小

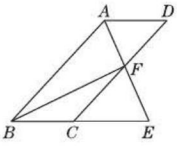
D. 无法确定

13. [中考·襄阳] 在$\square ABCD$中,$AD=BD$,BE是AD边上的高,$\angle EBD=20°$,则$\angle A$的度数为_____.

14. [中考·永州] 如图,四边形$ABCD$为平行四边形,$\angle BAD$的平分线AE交CD于点F,交BC的延长线于点E.

(1) 求证:$BE=CD$.

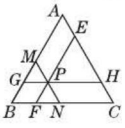
(2) 连接BF,若$BF\perp AE$,$\angle BEA=60°$,$AB=4$,求平行四边形$ABCD$的面积.



(第14题图)

思维拓展练

15. 如图,$\triangle ABC$是边长为a的等边三角形,P是$\triangle ABC$内的任意一点,过点P作$EF\parallel AB$分别交AC,BC于点E,F,作$GH\parallel BC$分别交AB,AC于点G,H,作$MN\parallel AC$分别交AB,BC于点M,N,猜想$EF+GH+MN$的值是多少,其值是否随点P位置的改变而改变?并说明理由.　　【导学号:1553889】



(第15题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2 平行四边形的判定

核心知识

- 平行四边形的判定定理
- 两条平行线之间的距离

知识链接

平行四边形的判定
- 从边的角度
  - 两组对边平行（定义）
  - 一组对边平行且相等
  - 两组对边相等
- 从对角线的角度
  - 两条对角线互相平分

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形的判定定理 1

平行四边形的判定定理 1 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

符号语言：如图 22.2-1，在四边形 $ABCD$ 中，$\because AB \parallel CD, AB = CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

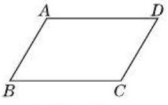


图 22.2-1

要点精析

(1) 判定定理 1 的关键是“平行且相等”；

(2) “平行且相等”是指同一组对边，而不是一组对边相等，另一组对边平行. 平行且相等的符号用“$\parallel\!\!=$”表示.

拨考向 提分·秘诀

考查角度 1 利用判定定理 1 判定四边形是平行四边形

例 1 [中考·郴州] 如图 22.2-2，已知 $BE \parallel DF$，$\angle ADF = \angle CBE$，$AF = CE$. 求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

导引： 首先根据平行线的性质可得 $\angle BEC = \angle DFA$，加上条件 $\angle ADF = \angle CBE$，$AF = CE$，可证明 $\triangle ADF \cong \triangle CBE$，再根据全等三角形的性质可得 $DF = BE$，根据“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”进行判定即可.

证明： $\because BE \parallel DF$，$\therefore \angle BEC = \angle DFA$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CBE$ 中，$\begin{cases} \angle ADF = \angle CBE, \\ \angle DFA = \angle BEC, \\ AF = CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$(AAS). $\therefore DF = BE$.

又 $\because BE \parallel DF$，$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

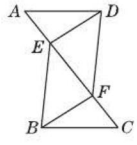


图 22.2-2

方法点拨

当已知条件中有一组对边平行时，常常利用三角形全等证明这组对边相等或利用平行线的判定证明另一组对边平行，从而判定这个四边形是平行四边形.

考查角度 2 利用判定定理 1 证明两条线段相等

例 2 如图 22.2-3，已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，$CN \parallel AB$，DN 交 AC 于点 M，$AM = CM$. 求证：$CD = AN$.

导引： 根据已知利用 ASA 判定 $\triangle AMD \cong \triangle CMN$，则 $AD = CN$. 又已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，$CN \parallel AB$，$\therefore AD \parallel CN$. $\therefore$ 四边形 $ADCN$ 是平行四边形. $\therefore CD = AN$.

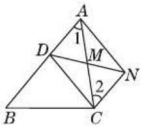


图 22.2-3

方法点拨

证明不在同一个三角形中的两条线段相等，一般可从证明这两条线段所在的三角形全等；若这两条线段是某一四边形的一

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明： $\because AB \parallel CN$，$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMN$ 中，$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ AM = CM, \\ \angle AMD = \angle CMN, \end{cases}$

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle CMN$(ASA).

$\therefore AD = CN$.

又$\because D$ 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，$CN \parallel AB$，

$\therefore AD \parallel CN$. $\therefore$ 四边形 $ADCN$ 是平行四边形.

$\therefore CD = AN$.

组对边，也可以证明该四边形为平行四边形.

点知识 2 两条平行线之间的距离

1 定义 两条平行线中，一条直线上的任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

要点精析///

(1) 点到直线的距离是指直线外一点到这条直线的垂线段的长度；

(2) 三种距离之间的区别与联系如下表：

类别	两点间的距离	点到直线的距离	两条平行线间的距离
区别	连接两点的线段的长度	直线外一点到直线的垂线段的长度	两条平行线中，一条直线上的任意一点到另一条直线的垂线段的长度
联系	最后都归结为两点间的线段的长度		

2 性质 如果两条直线平行，那么其中一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等，即两条平行线之间的距离处处相等.

要点精析///

(1) 因为平行线之间的距离处处相等，所以在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置；(注：平行线的这一性质常用来解决三角形中同底等高的问题)

(2) 平行线的位置确定后，它们之间的距离就是定值(正值)，不随垂线段位置的改变而改变.

符号语言：如图 22.2-4，A，C 是 l_1 上任意两点，$\because l_1 \parallel l_2$，$AB \perp l_2$ 于点 B，$CD \perp l_2$ 于点 D，$\therefore AB = CD$.

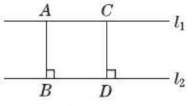


图 22.2-4

3 拓展

(1) 夹在两条平行线之间的任何平行线段的长度都相等；

(2) 等底等高的三角形的面积相等.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用定义对有关距离进行识别

例 3 如图 22.2-5，直线 $a \parallel b$，$AB \parallel CD$，$CE \perp b$，$FG \perp b$，点 E，G 为垂足，则下列结论中错误的是(　　)

A. $AB = CD$

B. $CE = FG$

C. A，B 两点间的距离就是线段 AB 的长

D. 直线 a，b 间的距离就是线段 CD 的长

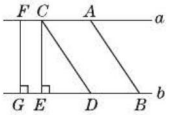


图 22.2-5

导引： 根据“两点间的距离”“两平行线间的距离”的有关概念可以做出判断.

答案： D

易错警示

误区1：“距离”是一条线段的长度，而不是一条线段.

误区2：“两点之间的距离”不需要垂直，而另外两个距离都需要垂直.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用两条平行线之间的距离的性质证明面积相等

例4 如图 22.2-6，直线 $a \parallel b$，点 A，E，F 在直线 a 上，点 B，C，D 在直线 b 上，$BC = EF$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等吗？为什么？

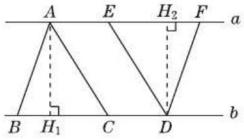


图 22.2-6

解： $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

理由如下：如图 22.2-6，过点 A 作 $AH_1 \perp$ 直线 b，垂足为点 H_1，过点 D 作 $DH_2 \perp$ 直线 a，垂足为点 H_2.

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，$\therefore S_1 = \frac{1}{2}BC \cdot AH_1$，$S_2 = \frac{1}{2}EF \cdot DH_2$. $\because$ 直线 $a \parallel b$，$AH_1 \perp$ 直线 b，$DH_2 \perp$ 直线 a，$\therefore AH_1 = DH_2$. 又 $\because BC = EF$，$\therefore S_1 = S_2$，

即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

技巧点拨

等底等高的三角形面积相等，其可作为定理直接应用.

点知识 3 平行四边形的判定定理 2

1 平行四边形的判定定理 2 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

符号语言：如图 22.2-7，在四边形 $ABCD$ 中，$\because AB = CD$，$AD = BC$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2 易错警示

(1) 平行四边形的判定定理 2 从两组对边入手，判定一个四边形是平行四边形.

(2) “一组对边平行，且另一组对边相等的四边形是平行四边形”是假命题. 如图 22.2-8，$AD \parallel BC$，$AB = DC$，但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形.

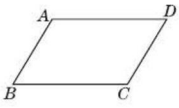


图 22.2-7

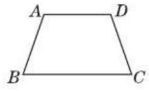


图 22.2-8

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度 利用判定定理 2 判定四边形是平行四边形

例5 如图 22.2-9，分别以 $\triangle ABC$ 的三边为一边，在 BC 的同侧作等边三角形 ABD、等边三角形 BCE、等边三角形 ACF，连接 DE，EF. 求证：四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

导引： 由等边三角形的性质可以得到线段相等，角相等，进而可以通过全等三角形证明四边形 $ADEF$ 的两组对边分别相等，最后根据“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”进行判定.

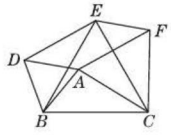


图 22.2-9

证明： $\because \triangle ABD$，$\triangle BCE$，$\triangle ACF$ 都为等边三角形，

$\therefore DB = AB = AD$，$BE = BC$，$AC = AF$，$\angle DBA = 60°$，$\angle EBC = 60°$.

$\therefore \angle DBE = 60° - \angle EBA$，$\angle ABC = 60° - \angle EBA$. $\therefore \angle DBE = \angle ABC$.

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle ABC$. $\therefore DE = AC$. 又 $\because AC = AF$，$\therefore AF = DE$.

同理可证 $\triangle ABC \cong \triangle FEC$，$\therefore AB = FE$. $\therefore FE = AD$.

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

方法点拨

证明三角形全等得到四边形 ADEF 的两组对边分别相等是解答本题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 平行四边形的判定定理 3

1 平行四边形的判定定理 3

两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

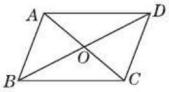


图 22.2-10

符号语言：如图 22.2-10，在四边形 $ABCD$ 中，$\because AO=CO, BO=DO$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2 拓展

(1) 两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

符号语言：如图 22.2-11，在四边形 $ABCD$ 中，$\because \angle A=\angle C, \angle B=\angle D$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

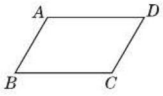


图 22.2-11

(2) 平行四边形的判定方法较多，大致可分为三类：①根据边判定；②根据角判定；③根据对角线判定. 在教材中，根据角的关系的判定没有作为基本定理，可将角的关系转化为对边平行，进而运用定义判定，具体的选择方法见下表.


平行四边形的判定方法

已知条件		选择的判定方法
边	一组对边相等	判定定理 1,2
	一组对边平行	定义或判定定理 1
角	两组对角分别相等	定义
对角线		判定定理 3

(3) 注意平行四边形的判定与性质定理的条件和结论，避免混淆：

对边相等
对角相等
对角线互相平分 } 判定/性质 平行四边形
对边平行

3 易错警示

(1) 这个定理从对角线入手，判定一个四边形是平行四边形.

(2) 要正确理解“互相平分”，即当一条对角线平分另一条对角线时，另一条对角线也平分这条对角线，若只有一条对角线平分另一条对角线，则不能判定四边形是平行四边形.

拔考向

提分·秘诀

考查角度 1 利用判定定理 3 判定四边形是平行四边形

例 6 [中考·徐州] 如图22.2-12，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E, F 在 AC 上，且 $AE=CF$. 求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

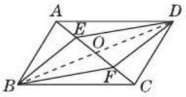


图 22.2-12

导引： 根据平行四边形的性质，可得对角线互相平分，根据“对角线互相平分的四边形是平行四边形”，可证明结论.

证明： 如图22.2-12，连接 BD，设对角线 AC, BD 交于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore OA=OC, OB=OD$.

又 $\because AE=CF$，$\therefore OA-AE=OC-CF$，

即 $OE=OF$. $\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

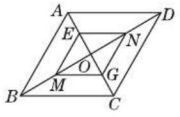
方法点拨

从对角线的角度判定四边形是平行四边形，一般结合已知平行四边形的性质.本例利用已知平行四边形的对角线的性质判定四边形是平行四边形.

同类变式 (答案见 230 页)

1. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O，在 AC, BD 上分别取点 E, G 和 M, N，使 $AE=CG, BM=DN$.

请说明四边形 $EMGN$ 是平行四边形.



(第 1 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用对角相等判定四边形是平行四边形

例7 如图22.2-13，在$\square ABCD$中，BE平分$\angle ABC$，交AD于点E，DF平分$\angle ADC$，交BC于点F，那么四边形$BFDE$是平行四边形吗？为什么？

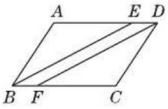


图22.2-13

导引： 利用平行四边形对角相等的性质可得$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$，然后再依据角平分线的定义和三角形外角的性质证出四边形$BFDE$的两组对角分别相等，于是可得出结论.

解： 四边形$BFDE$是平行四边形. 理由如下：

在$\square ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$.

$\because BE$平分$\angle ABC$，DF平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle CDF=\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$.

$\therefore \angle CDF=\angle ADF=\angle ABE=\angle CBE$.

$\because \angle DFB=\angle C+\angle CDF$，$\angle BED=\angle ABE+\angle A$，

$\therefore \angle DFB=\angle BED$. $\therefore$ 四边形$BFDE$是平行四边形.

方法点拨

当已知条件出现与所要说明的四边形相关的角时，一般可选择“两组对角分别相等的四边形是平行四边形”来判定.

考查角度3 平行四边形判定方法的选择

例8 ［中考·仙桃］如图22.2-14，四边形$ABCD$是平行四边形，E，F为对角线AC上两点，连接ED，EB，FD，FB. 给出以下条件：①$BE\parallel DF$；②$BE=DF$；③$AE=CF$. 请你从中选取一个条件，使$\angle 1=\angle 2$成立，并给出证明.

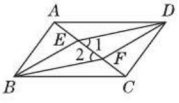


图22.2-14

导引： 欲证明$\angle 1=\angle 2$，只需证得四边形$BFDE$是平行四边形或$\triangle ABF\cong\triangle CDE$即可.

解： 选取条件①$BE\parallel DF$. 证明：如图22.2-14，$\because BE\parallel DF$，$\therefore \angle BEC=\angle DFA$. $\therefore \angle BEA=\angle DFC$.

$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$.

$\therefore \angle BAE=\angle DCF$.

在$\triangle ABE$与$\triangle CDF$中，$\begin{cases}\angle BEA=\angle DFC,\\ \angle BAE=\angle DCF,\\ AB=CD,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$（AAS）. $\therefore BE=DF$. 又$\because BE\parallel DF$，$\therefore$ 四边形$BFDE$是平行四边形. $\therefore ED\parallel BF$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

选取条件③$AE=CF$. 证明：$\because AE=CF$，$\therefore AF=CE$.

$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$. $\therefore \angle BAF=\angle DCE$.

在$\triangle ABF$与$\triangle CDE$中，$\begin{cases}AF=CE,\\ \angle BAF=\angle DCE,\\ AB=CD,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABF\cong\triangle CDE$（SAS）. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

方法点拨

平行四边形判定方法综合起来有多种，具体选择哪种判定方法取决于题目中给出的条件，最终目的都是为了简单、方便地判定四边形是平行四边形.

同类变式 （答案见230页）

2. 已知四边形$ABCD$的对角线AC，BD相交于点O，给出下列5个条件：①$AB\parallel DC$；②$OA=OC$；③$AB=DC$；④$\angle BAD=\angle DCB$；⑤$AD\parallel BC$. 请从这5个条件中选取2个条件证明四边形$ABCD$是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 平行四边形的判定与性质定理的综合应用

例 9 如图 22.2-15，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AE \perp BD$ 于点 E，$CF \perp BD$ 于点 F.

(1) 求证：$BE = DF$.

(2) 若 M，N 分别为边 AD，BC 上的点，且 $DM = BN$，试判断四边形 $MENF$ 的形状.

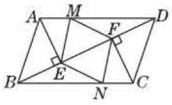


图 22.2-15

导引： (1) 根据平行四边形的性质和已知条件证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$，从而可得到 $BE = DF$；

(2) 根据平行四边形的判定方法“一组对边平行且相等的四边形为平行四边形”来判定四边形 $MENF$ 为平行四边形.

(1) **证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD, AB \parallel CD. \therefore \angle ABE = \angle CDF.$

$\because AE \perp BD$ 于点 E，$CF \perp BD$ 于点 F，

$\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90°.$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF(\text{AAS}). \therefore BE = DF.$

(2) **解：** 四边形 $MENF$ 是平行四边形.

理由如下：由 (1) 可知 $BE = DF$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC. \therefore \angle MDB = \angle NBD.$

$\because DM = BN, \therefore \triangle DMF \cong \triangle BNE(\text{SAS}).$

$\therefore MF = NE, \angle MFD = \angle NEB.$

$\therefore \angle MFE = \angle NEF. \therefore MF \parallel NE.$

$\therefore$ 四边形 $MENF$ 是平行四边形.

拔尖角度 2 利用平行四边形的判定方法构造平行四边形解决问题

例 10 如图 22.2-16，已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 为 AC 上一点，连接 BE 交 AD 于点 F，且 $AE = FE$.

求证：$BF = AC$.

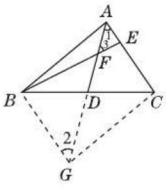


图 22.2-16

导引： 要证明 BF 与 AC 相等，可转化为证角相等，但边、角关系联系不到一块，这就需要构造图形把已知条件联系起来. 由点 D 是 BC 的中点，可把点 D 看成平行四边形一条对角线的中点，因此只要把另一条对角线作出来，就能构成平行四边形，由此该题便得以解决.

证明： 如图 22.2-16，延长 AD 到点 G，使 $DG = AD$，连接 BG, CG.

$\because DG = AD, BD = DC,$

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形.

$\therefore AC \parallel BG. \therefore \angle 1 = \angle 2.$

又 $\because AE = FE, \therefore \angle 1 = \angle 3.$

$\therefore \angle 2 = \angle 3 = \angle BFG.$

$\therefore BG = BF.$

又 $\because BG = AC, \therefore BF = AC.$

方法点拨： (1) 证明两条线段(或两角)相等的常用方法：① 线段垂直平分线的判定和性质；② 角平分线的判定和性质；③ 等腰三角形的判定和性质；④ 全等三角形的判定和性质；⑤ 平行四边形的判定和性质. (2) 当题中有三角形的中线时，常用倍长中线法构造平行四边形，然后利用平行四边形的性质推出线段相等或平行以及角相等.

拔尖角度 3 运用动中求静进行动态探究

例 11 如图 22.2-17，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BC = 18$ cm，$CD = 15$ cm，$AD = 10$ cm，$AB = 12$ cm，动点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 3 cm/s 的速度由 C 向 B 运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动.

(1) 几秒时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长.

(2) 几秒时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

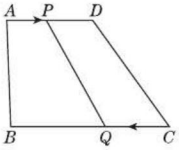


图 22.2-17

导引：（1）由 $AD \parallel BC$ 可知，只需使 $PD = CQ$，则四边形 $PDCQ$ 为平行四边形.

（2）由 $AD \parallel BC$ 可知，只需使 $AP = BQ$，则四边形 $ABQP$ 为平行四边形.

解：（1）设 x s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，则 $10 - 2x = 3x$，解得 $x = 2$.

所以 2 s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，此时四边形 $PDCQ$ 的周长是 $3 \times 2 \times 2 + 15 \times 2 = 42$(cm).

（2）设 y s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，则 $2y = 18 - 3y$，解得 $y = 3.6$.

所以 3.6 s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，此时四边形 $ABQP$ 的周长是 $3.6 \times 2 \times 2 + 12 \times 2 = 38.4$(cm).

方法点拨： 解决动点问题的基本思路就是变“动”为“静”，要用“静”去理解“动”.本题中，若运动的时间为 t s，则 AP = 2t cm，CQ = 3t cm，即用 2t cm，3t cm 表示线段的长，利用平行四边形的性质列方程求得 t 的值.

练中考·练模拟 得满分 （答案见 230 页）

基础巩固练

1. [中考·泸州] 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，下列四组条件中，一定能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是(　　)

A. $AD \parallel BC$

B. $OA = OC$，$OB = OD$

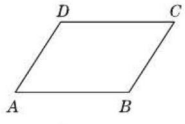
C. $AD \parallel BC$，$AB = DC$

D. $AC \perp BD$

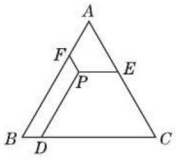
2. [中考·衡阳] 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，要使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可添加的条件不正确的是(　　)

A. $AB = CD$　　B. $BC = AD$

C. $\angle A = \angle C$　　D. $BC \parallel AD$



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 P 是三角形内的任意一点，$PD \parallel AB$，$PE \parallel BC$，$PF \parallel AC$，若 $\triangle ABC$ 的周长为 12，则 $PD + PE + PF =$ (　　)

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 3

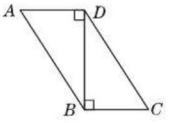
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 7$，$AC = 5$，AD 是边 BC 的中线，那么 AD 的取值范围是(　　)

A. $1 < AD < 12$　　B. $2 < AD < 12$

C. $0 < AD < 6$　　D. $1 < AD < 6$

5. [开放题] 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$，若再添加一个条件，能使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形，则这个条件可以是_____.(写出一个条件即可，不再添加辅助线)

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $BD \perp AD$，$BD \perp BC$，$AD = 11 - x$，$BC = x - 5$，则当 $x =$ _____ 时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



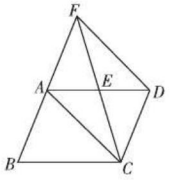
（第 6 题图）

7. 已知一个四边形的边长分别是 a, b, c, d，其中 a 与 c 为对边的长，且 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ac + 2bd$，则此四边形为_____四边形.

8. [一题多解] 已知：线段 a, b. 求作：平行四边形 $ABCD$，使 $AB = a$，$BC = b$，$\angle ABC = 60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [中考·郴州] 如图,在$\square ABCD$中,点E是边AD的中点,连接CE并延长交BA的延长线于点F,连接AC,DF. 求证:四边形$ACDF$是平行四边形.

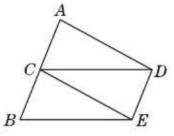


(第9题图)

10. [中考·新疆] 如图,点C是AB的中点,$AD=CE$,$CD=BE$.

(1)求证:$\triangle ACD\cong\triangle CBE$;

(2)连接DE. 求证:四边形$CBED$是平行四边形.

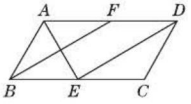


(第10题图)

11. 如图,已知在平行四边形$ABCD$中,$\angle ABC=60°$,$BC=2AB$,点E,F分别是BC,AD的中点,连接AE,DE,BF.

(1)求证:$AE=CD$.

(2)若$BF=6$,求DE的长.



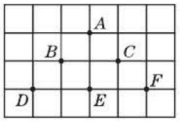
(第11题图)

能力提升练

12. 在平面直角坐标系中有四点$A(0,0)$,$B(8,0)$,$C(10,6)$,$D(2,6)$,有一条直线$y=mx-3m+2$将四边形$ABCD$分成面积相等的两部分,则m的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

13. [表格信息题] 如图,在方格图中,以格点A,B,C,D,E,F为顶点,你能画出_____个平行四边形. 并在图中画出来.



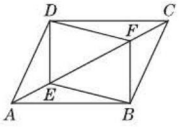
(第13题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. [中考·青海] 如图，在$\square ABCD$中，点E，F在对角线AC上，且$AE=CF$. 求证：

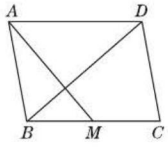
(1)$DE=BF$；

(2)四边形$DEBF$是平行四边形.



（第14题图）

15. 如图，在$\square ABCD$中，M是BC的中点，且$AM=9$，$BD=12$，$AD=10$，则该平行四边形的面积是多少？

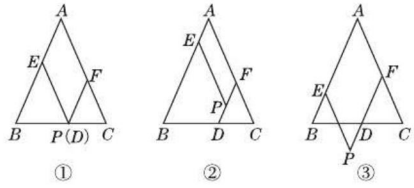


（第15题图）

16. [一题多变题] 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点P为$\triangle ABC$所在平面内的一点，过点P分别作$PE/\!/AC$交AB于点E，$PF/\!/AB$交BC于点D，交AC于点F. 如图①，若点P在BC边上，此时$PD=0$，猜想并写出PD，PE，PF与AB满足的数量关系，然后证明你的猜想.

(1)**一变**：如图②，当点P在$\triangle ABC$内部时，猜想并写出PD，PE，PF与AB满足的数量关系，然后证明你的猜想.

(2)**二变**：如图③，当点P在$\triangle ABC$外部时，猜想并写出PD，PE，PF与AB满足的数量关系.（不用说明理由）



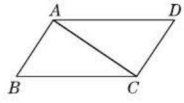
（第16题图）

思维拓展练

17. [探究题] 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle BAC=\angle ACD=90°$，$\angle B=\angle D$.

(1)求证：四边形$ABCD$是平行四边形.

(2)若$AB=3$ cm，$BC=5$ cm，点P从B点出发，以1 cm/s的速度沿$BC\rightarrow CD\rightarrow DA$运动至$A$点停止，则从运动开始经过多少时间，$\triangle ABP$为等腰三角形？



（第17题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.3 三角形的中位线

核心知识

- 三角形中位线的概念
- 三角形中位线定理
- 中点四边形

知识链接

三角形的中位线 → 定义、定理

点知识·拨考向 速提分

点知识 三角形的中位线(重点)

1 定义 连接三角形两边中点的线段，叫做三角形的中位线.

符号语言：如图 22.3-1，$\because AD=BD$，$AE=EC$，$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

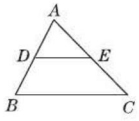


图 22.3-1

要点精析///

(1)一个三角形有三条中位线；

(2)三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形；

(3)三角形的中位线与三角形的中线的区别：三角形的中线是连接一个顶点和它的对边中点的线段，而三角形的中位线则是连接两边中点的线段；

(4)三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

2 中位线定理 三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

符号语言：如图 22.3-1，

$\because AD=BD$，$AE=EC$，$\therefore DE \parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

三角形中位线定理的应用

要点精析///

三角形的中位线定理反映了三角形的中位线与第三边的双重关系：一是位置关系，可以用来证两直线平行；二是数量关系，可以用来证线段的倍分关系.

3 易错警示 三角形的中位线与三角形的第三边存在数量与位置关系.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用三角形中位线的定义识别中位线

例1 如图 22.3-2，D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，则图中 $\triangle ABC$ 的中位线是(　　)

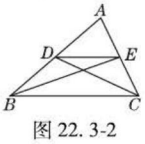


图 22.3-2

A. DE　　B. CD

C. BE　　D. 以上都不是

导引： 线段 CD，BE 为 $\triangle ABC$ 的中线，DE 是连接三角形两边中点的线段，是 $\triangle ABC$ 的中位线.

答案： A

方法点拨

解答本题运用了定义法.解答这类题目一定要掌握三角形中位线的定义，即连接三角形两边中点的线段是三角形的中位线.注意三角形的中位线与三角形的中线完全不同，三角形的中线是连接三角形一边中点与这条边所对的三角形顶点的线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用三角形中位线定理求线段长

例2 ［中考·山西］如图22.3-3，在△ABC中，点D，E分别是边AB，BC的中点．若△DBE的周长是6，则△ABC的周长是(　　)

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14

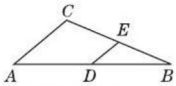


图22.3-3

导引： 先根据已知条件得到DE是△ABC的中位线，进而得到DE与AC的数量关系，再结合BD，BE与BA，BC的数量关系，即可求出△ABC的周长．具体解题过程如下：

因为点D，E分别是边AB，BC的中点，

所以$BC=2BE$，$BA=2BD$，且DE是△ABC的中位线，

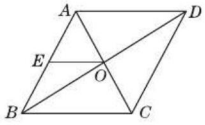
所以$AC=2DE$，所以$AB+BC+AC=2BD+2BE+2DE=2(BD+BE+DE)$，即△$ABC$的周长是△$DBE$周长的2倍．

又因为△DBE的周长是6，所以△ABC的周长是12．

答案： C

同类变式 （答案见232页）

1. ［中考·怀化］如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，点E是AB的中点，$OE=5$ cm，则AD的长为_____cm．



（第1题图）

考查角度3 利用三角形中位线定理证明线段的倍分关系

例3 如图22.3-4，已知E为平行四边形$ABCD$中DC边延长线上一点，且$CE=DC$，连接AE，分别交BC，BD于点F，G，连接AC交BD于点O，连接BE，OF．

求证：$AB=2OF$．

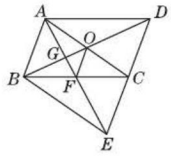


图22.3-4

导引： 因为点O是平行四边形两条对角线的交点，所以点O是线段AC的中点．要证明$AB=2OF$，我们只需证明点F是线段BC的中点，即证明OF是△ABC的中位线即可．

证明： ∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$．

∵E为平行四边形$ABCD$中DC边延长线上一点，且$CE=DC$，∴$AB\parallel CE$，$AB=CE$．

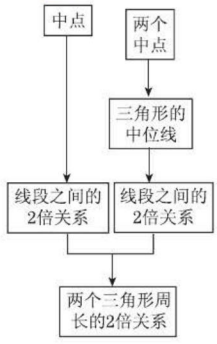
∴四边形$ABEC$是平行四边形．

∴点F是BC的中点．

又∵点O是AC的中点，

∴OF是△ABC的中位线．∴$AB=2OF$．

技巧点拨



方法点拨

证明线段倍分关系的方法：由于三角形的中位线等于三角形第三边的一半，因此当需要证明某一条线段是另一条线段的一半或两倍，且题中出现中点时，常考虑用三角形中位线定理．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4 利用三角形中位线定理证明四边形是平行四边形

例4 如图 22.3-5 所示的四边形 $ABCD$，点 E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点，连接 EF,FG,GH,HE，得到四边形 $EFGH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

导引： 连接 BD. 先根据已知，得 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，FG 是 $\triangle BCD$ 的中位线，再利用三角形中位线定理即可证明.

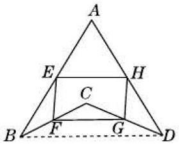


图 22.3-5

证明： 如图22.3-5，连接 BD. ∵ 点 E,H 分别是边 AB,DA 的中点，∴ EH 为 $\triangle ABD$ 的中位线. ∴ $EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD$. 同理，$FG \parallel BD, FG = \frac{1}{2}BD$. ∴ $EH \parallel FG, EH = FG$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

方法点拨

（1）依次连接四边形各边中点所得到的四边形叫中点四边形，所有的中点四边形都是平行四边形.

（2）利用中位线定理判定平行四边形一般用“一组对边平行且相等”来判定.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 构造三角形中位线的模型证明线段的倍分关系

例5 如图 22.3-6，在 $\triangle ABC$ 中，BD,CE 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$，$AM \perp CE$ 于点 M，$AN \perp BD$ 于点 N. 求证：$MN = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

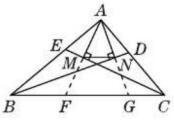


图 22.3-6

证明： 如图22.3-6，延长 AM，AN 分别交 BC 于点 F,G.

因为 BD 平分 $\angle ABC$，$AN \perp BD$，所以 $AN = NG, AB = BG$. 同理可得 $AM = MF, AC = CF$，所以 M,N 分别为 AF,AG 的中点，所以 $MN = \frac{1}{2}FG$. 又因为 $FG = BG + FC - BC = AB + AC - BC$，所以 $MN = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

方法点拨： 图中不存在中点，但结论与三角形中位线定理很类似，因此应设法寻找中点，再构造三角形的中位线. 要证明 $MN = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$，可找以 MN 为中位线的三角形的底边，故延长 AM 交 BC 于点 F，延长 AN 交 BC 于点 G，易证明 $2MN = FG$，而 $FG = BG + FC - BC$. 又易证明 $BG = AB$，$FC = AC$，故问题得解. 本题的证明思路体现了类比思想和转化思想.

拔尖角度 2 与三角形中位线有关的新型题

例6 用尺规三等分任意角是数学中的一大难题，但我们可以用“折纸法”把一个直角三等分. 如图 22.3-7，具体做法如下：

(1)将一长方形纸片 $ABCD$ 对折，EF 为折痕；(2)继续沿过点 C 的直线 CO 折叠，使点 B 落在 EF 上，得到点 G，则 CO,CG 就把 $\angle BCD$ 三等分了. 请你写出它的证明过程.

导引： 延长 OG 交 DC 于 H. 先根据已知条件得到 $OG = GH$，再证得 $\triangle CGO \cong \triangle CGH$，从而可得 $\angle OCG = \angle HCG$，最后再结合 $\angle BCO = \angle GCO$ 即可证得 CO,CG 把 $\angle BCD$ 三等分了.

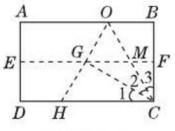


图 22.3-7

证明： 如图22.3-7，延长 OG 交 DC 于点 H. 由题意得 E,F 分别为 AD,BC 的中点，易得 GM 为 $\triangle OHC$ 的中位线.

∴ $OG = GH$. 由题意得 $\angle OGC = \angle HGC = 90°$，$CG$ 为公共边，

∴ $\triangle CGO \cong \triangle CGH$. ∴ $\angle 1 = \angle 2$. 由折叠的性质可得 $\angle 2 = \angle 3$，∴ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$，即 CO,CG 把 $\angle BCD$ 三等分了.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 232 页）

基础巩固练

1. ［中考·德阳］如果三角形的两边长分别为 3 和 5，那么连接这个三角形三边中点所得三角形的周长可能是（　　）

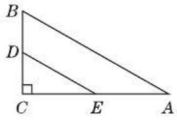
A. 5.5　　B. 5

C. 4.5　　D. 4

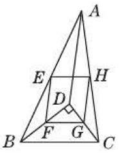
2. ［中考·南充］如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=30°$，$BC=1$，点 D，E 分别是直角边 BC，AC 的中点，则 DE 的长为（　　）

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{3}$



（第 2 题图）



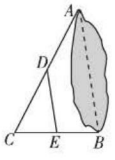
（第 3 题图）

3. ［中考·铜仁］如图，D 是△ABC 内一点，$BD\perp CD$，$AD=7$，$BD=4$，$CD=3$，E，F，G，H 分别是 AB，BD，CD，AC 的中点，则四边形 $EFGH$ 的周长为（　　）

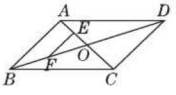
A. 12　　B. 14

C. 24　　D. 21

4. ［中考·长沙］如图，要测量池塘岸边相对的 A，B 两点间的距离，可以在池塘外选一点 C，连接 AC，BC，分别取 AC，BC 的中点 D，E，测得 $DE=50$ m，则 AB 的长是_____m.



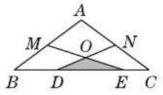
（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. 如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 分别是线段 AO，BO 的中点，若 $AC+BD=24$ 厘米，△OAB 的周长是 18 厘米，则 $EF=$_____厘米.

6. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，M，N 分别是 AB，AC 的中点，D，E 为 BC 上的点，连接 DN，EM，DN 与 EM 相交于点 O，若 $AB=5$ cm，$BC=8$ cm，$DE=4$ cm，则图中阴影部分的面积为_____.

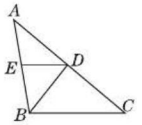


（第 6 题图）

7. 如图，在△ABC 中，$AB=BC$，$\angle ABC=100°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，E 是 AB 的中点.

(1) 求证：$DE\parallel BC$.

(2) 求 $\angle EDB$ 的度数.

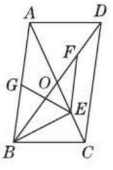


（第 7 题图）

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$BD=2AD$，E，F，G 分别是 OC，OD，AB 的中点，连接 EF，BE，EG. 求证：

(1) $BE\perp AC$；

(2) $EG=EF$.



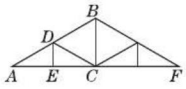
（第 8 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图是等腰三角形屋架设计图的一部分，点 D 是斜梁 AB 的中点，立柱 BC，DE 垂直于横梁 AF，$AB=8$ m，$\angle A=30°$，求：

(1) $\angle ABF$ 的度数；

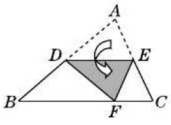
(2) 立柱 BC，DE 的长度.



(第 9 题图)

能力提升练

10. 如图，将非等腰三角形纸片 ABC 沿 DE 折叠后，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处. 若点 D 为 AB 边的中点，则下列结论：①$\triangle BDF$ 是等腰三角形；②$\angle DFE=\angle CFE$；③DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线. 其中，成立的有(　　)



(第 10 题图)

A. ①②　　B. ①③

C. ②③　　D. ①②③

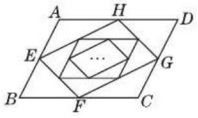
11. [规律探究题] 如图，已知 $\square ABCD$ 的面积是 S，依次连接 $\square ABCD$ 各边中点构成第 2 个平行四边形 $EFGH$，再依次连接第 2 个平行四边形各边中点构成第 3 个平行四边形……以此类推，则第 2 018 个平行四边形的面积为(　　)

A. $\frac{1}{2^{2\,017}}S$

B. $\frac{1}{2^{2\,016}}S$

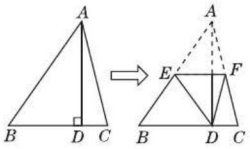
C. $\frac{1}{2^{2\,015}}S$

D. 无法确定



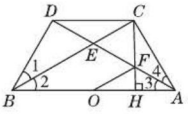
(第 11 题图)

12. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 31，AD 是 BC 边上的高. 将 $\triangle ABC$ 按如图所示的方式折叠，使点 A 与点 D 重合，折痕为 EF，则 $\triangle DEF$ 的周长为_____.



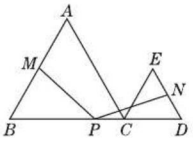
(第 12 题图)

13. 如图，AD 与 BC 相交于点 E，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$BD=CD$，$\angle ADB=90°$，$CH\perp AB$ 于点 H，CH 交 AD 于点 F. 若 O 为 AB 的中点. 求证：$OF=\frac{1}{2}BE$.



(第 13 题图)

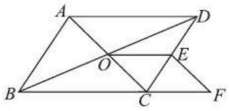
14. [探究题] 如图，B，C，D 三点在同一直线上，分别以 BC，CD 为边在同侧作两个等边三角形，即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$，P 为 BD 边的中点，M，N 分别为 AB，ED 的中点，连接 PM，PN，探求 PM 与 PN 的数量关系及 $\angle MPN$ 的度数，并证明.



(第 14 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. [中考·长春] 如图，在$\square ABCD$中，点O是对角线AC，BD的交点，点E是边CD的中点，点F在BC的延长线上，且$CF=\frac{1}{2}BC$. 求证：四边形$OCFE$是平行四边形.



（第15题图）

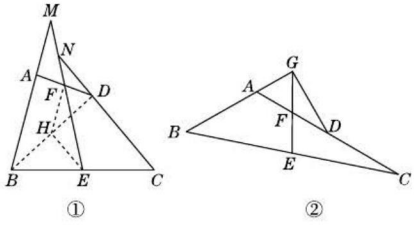
16. [易错题] 在$\triangle HBC$中，$\angle B=\angle C$，在边HC上取点D，在边BH上取点A，使$HD=BA$，连接AD. 求证：$AD\geqslant\frac{1}{2}BC$.

思维拓展练

17. 如图①，在四边形$ABCD$中，$AB=CD$，E，F分别是BC，AD的中点，连接EF并延长，分别与BA，CD的延长线交于点M，N，则$\angle BME=\angle CNE$（不需证明）.

小明的思路在图①中，连接BD，取BD的中点H，连接HE，HF，根据三角形中位线定理和平行线的性质，可证得$\angle BME=\angle CNE$.

问题：如图②，在$\triangle ABC$中，$AC>AB$，D点在AC上，$AB=CD$，E，F分别是BC，AD的中点，连接EF并延长，与BA的延长线交于点G，$\angle EFC=60°$，连接GD，判断$\triangle AGD$的形状并证明.



（第17题图）

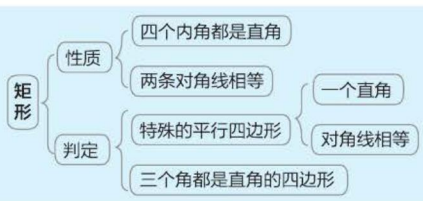
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.4 矩　形

核心知识

- 矩形的定义
- 矩形的性质
- 矩形的判定

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 矩形的定义及性质(重点)

1 定义　有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

注意:(1)由矩形的定义可知,矩形一定是平行四边形,但平行四边形不一定是矩形.

(2)矩形必须具备两个条件:①它是一个平行四边形;②它有一个角是直角.这两个条件缺一不可.

2 性质　(1)矩形的四个角都是直角.

(2)矩形的两条对角线相等.

(3)矩形具有平行四边形的所有性质.

(4)矩形既是中心对称图形,也是轴对称图形,如图 22.4-1 所示,邻边不相等的矩形有两条对称轴.

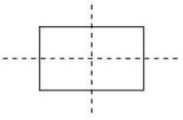


图 22.4-1

要点精析

(1)从边看:对边相等.

(2)从角看:四个角都是直角.

(3)从对角线看:对角线相等且互相平分.

(4)对称性:既是中心对称图形,也是轴对称图形,邻边不相等的矩形有两条对称轴.

(5)面积:矩形的面积 = 长 × 宽;矩形的面积 = 被对角线分成的四个等积的小三角形面积之和.注:这四个小三角形是两对全等的等腰三角形.

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用矩形的性质求线段长

例1　如图 22.4-2,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,已知 $AC=6$,$\angle BOC=120°$,求矩形 $ABCD$ 的面积.

导引: 要想求矩形 $ABCD$ 的面积,则需要求 AB,BC 的长.AB 的长可由矩形的性质及等边三角形的性质求出,BC 的长可由勾股定理求出.

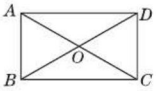


图 22.4-2

解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $AC=BD$,$OA=OC$,$OB=OD$.

∴ $OA=OB=\frac{1}{2}AC$.∵ $\angle BOC=120°$,∴ $\angle AOB=60°$.

∴ $\triangle OAB$ 为等边三角形.∴ $AB=OA=\frac{1}{2}AC$.∵ $AC=6$,

∴ $AB=3$.在 $Rt\triangle ABC$ 中,$AB=3$,$AC=6$,

∴ $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.

∴ $S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=3\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

方法点拨

因为矩形的对角线相等且互相平分,所以矩形的对角线将矩形分成了四个等腰三角形,再由特殊角可得到特殊的三角形——等边三角形,利用等边三角形的性质即可求解.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 利用矩形的性质求角度

例2 如图22.4-3,在矩形$ABCD$中,$AE\perp BD$于点E,$\angle DAE:\angle BAE=3:1$,求$\angle BAO$和$\angle EAO$的度数.

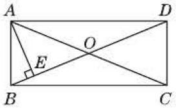


图22.4-3

导引: 先根据已知条件求出$\angle DAE$和$\angle BAE$的度数,从而求出$\angle ABE$的度数,再根据矩形的性质求出$\angle BAO$的度数,最后再根据$\angle EAO=\angle BAO-\angle BAE$求出$\angle EAO$的度数.

解: ∵四边形$ABCD$是矩形,∴$\angle DAB=90°$,$AO=\frac{1}{2}AC$,$BO=\frac{1}{2}BD$,$AC=BD$.∴$\angle BAE+\angle DAE=90°$,$AO=BO$.

又∵$\angle DAE:\angle BAE=3:1$,

∴$\angle BAE=22.5°$,$\angle DAE=67.5°$.

∵$AE\perp BD$,∴$\angle ABE=90°-\angle BAE=90°-22.5°=67.5°$.

∵$AO=BO$,∴$\angle BAO=\angle ABE=67.5°$.

∴$\angle EAO=\angle BAO-\angle BAE=67.5°-22.5°=45°$.

方法点拨

矩形的一条对角线把矩形分成两个直角三角形,矩形的两条对角线把矩形分成四个等腰三角形,因此有关矩形的计算问题经常转化到直角三角形或等腰三角形中来解决.

考查角度3 利用矩形的性质进行证明

例3 如图22.4-4,已知四边形$ABCD$是矩形,$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形,且点P在矩形上方,点Q在矩形内.

求证:(1)$\angle PBA=\angle PCQ=30°$;

(2)$PA=PQ$.

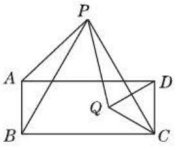


图22.4-4

导引: (1)利用矩形的四个内角都等于90°与$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形,容易求得$\angle PBA$和$\angle PCQ$的度数,从而得证;

(2)利用(1)题的结论以及矩形的性质得出$\triangle PAB\cong\triangle PQC$,从而证得$PA=PQ$.

证明: (1)∵四边形$ABCD$是矩形,∴$\angle ABC=\angle BCD=90°$.

∵$\triangle PBC$和$\triangle QCD$是等边三角形,

∴$\angle PBC=\angle PCB=\angle QCD=60°$.

∴$\angle PBA=\angle ABC-\angle PBC=30°$,$\angle PCD=\angle BCD-\angle PCB=30°$.∴$\angle PCQ=\angle QCD-\angle PCD=30°$.

∴$\angle PBA=\angle PCQ=30°$.

(2)∵四边形$ABCD$是矩形,∴$AB=DC$.

∵$\triangle PBC$和$\triangle QCD$是等边三角形,

∴$PB=PC$,$QC=DC=AB$.

又∵$\angle PBA=\angle PCQ$,

∴$\triangle PAB\cong\triangle PQC$(SAS).

∴$PA=PQ$.

方法点拨

利用矩形的性质,可以得到许多的结论.在解题时,要学会针对问题列出有用的结论作为论据.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4 利用矩形的对称性求面积

例4 ［一题多解］如图22.4-5，直线 EF 过矩形 $ABCD$ 对角线的交点 O，分别交 AB，CD 于点 E，F，若 $AB=3$，$BC=4$，那么阴影部分的面积为_____.

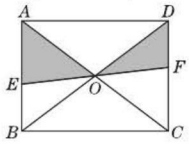


图22.4-5

导引： 由题意，易得 $\triangle OEB\cong\triangle OFD$，将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积进行计算. 具体解题过程如下：

方法一　∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴由中心对称的性质知 $S_{\triangle EBO}=S_{\triangle FDO}$，

∴阴影部分的面积为矩形面积的 $\frac{1}{4}$.

$$\therefore S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3.$$

方法二　在矩形 $ABCD$ 中，$OB=OD$，$\angle EBO=\angle FDO$.

在 $\triangle OEB$ 与 $\triangle OFD$ 中，

$$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle EOB=\angle FOD,\end{cases}$$

∴ $\triangle OEB\cong\triangle OFD$.

$$\therefore S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3.$$

答案： 3

方法点拨

矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形，根据对称性将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积求解，体现了转化思想.



认真会有收获

知识2 矩形的判定（难点）

1 矩形的判定

方法一（定义）：有一个角是直角的平行四边形是矩形.

方法二（对角线）：对角线相等的平行四边形是矩形；对角线相等且互相平分的四边形是矩形.

方法三（角）：有三个角是直角的四边形是矩形.

要点精析///

判定矩形的常见思路如图22.4-6.

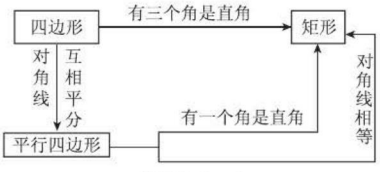


图22.4-6

2 易错警示

(1)用定义判定一个四边形是矩形必须满足两个条件：一是有一个角是直角，二是四边形是平行四边形.

也就是说，有一个角是直角的四边形不一定是矩形，必须加上“平行四边形”这个条件才是矩形.

(2)用对角线相等的平行四边形是矩形判定一个四边形是矩形必须满足两个条件：一是对角线相等，二是四边形是平行四边形.

也就是说，两条对角线相等的四边形不一定是矩形，必须加上“平行四边形”这个条件才是矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用定义判定矩形

例5 [中考·南宁] 如图22.4-7,在$\square ABCD$中,E,F分别是AB,DC边上的点,且$AE=CF$.

(1)求证:$\triangle ADE\cong\triangle CBF$.

(2)若$\angle DEB=90°$,求证:四边形$DEBF$是矩形.

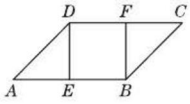


图22.4-7

导引: (1)先由平行四边形的性质得出$\angle A=\angle C,AD=BC$,再结合$AE=CF$,即可证明三角形全等;(2)先利用平行四边形的性质及已知条件证得四边形$DEBF$是平行四边形,再结合$\angle DEB=90°$,即可证明四边形$DEBF$是矩形.

证明: (1)∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$\angle A=\angle C,AD=BC$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CBF$中,∵$AD=CB,\angle A=\angle C,AE=CF$.

∴$\triangle ADE\cong\triangle CBF$(SAS).

(2)∵四边形$ABCD$是平行四边形,∴$AB\parallel CD,AB=CD$.

∴$AB-AE=CD-CF$.∴$BE=DF$.又$BE\parallel DF$,

∴四边形$DEBF$是平行四边形.

又$\angle DEB=90°$,∴四边形$DEBF$是矩形.

方法点拨

矩形的定义表明,要判定一个四边形是矩形,先判定这个四边形是平行四边形,然后再证明这个四边形有一个内角是直角即可.

考查角度2 利用对角线的特征判定矩形

例6 如图22.4-8,在四边形$ABCD$中,$AD\parallel BC,E,F$两点在边BC上,$AB\parallel DE,AF\parallel DC$,且四边形$AEFD$是平行四边形.

(1)AD与BC的数量关系如何?请说明理由.

(2)当$AB=DC$时,求证:$\square AEFD$是矩形.

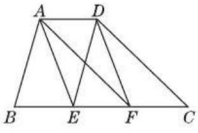


图22.4-8

导引: (1)先由$AD\parallel BC,AB\parallel DE,AF\parallel DC$,判定四边形$ABED$、四边形$AFCD$都是平行四边形,再根据平行四边形对边相等可知$AD=BE=EF=FC$,即$BC=3AD$;(2)要证明$\square AEFD$是矩形,只需证明两条对角线相等,即$AF=DE$即可.

(1)**解:** $BC=3AD$.理由如下:∵$AD\parallel BC,AB\parallel DE,AF\parallel DC$,∴四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形.

∴$AD=BE,AD=FC$.又∵四边形$AEFD$是平行四边形,

∴$AD=EF$.∴$AD=BE=EF=FC$.∴$BC=3AD$.

(2)**证明:** ∵四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形,∴$DE=AB,AF=DC$.∵$AB=DC$,∴$DE=AF$.

又∵四边形$AEFD$是平行四边形,

∴四边形$AEFD$是矩形.

方法点拨

证明一个平行四边形为矩形的两种方法:一种是证明有一个角是直角,另一种是证明两条对角线相等.本例的证法就是证对角线相等的方法.若采用证有一个角是直角的方法,可证$DE=DC$,然后利用等腰三角形"三线合一"的性质可得$\angle DFE=90°$.请同学们独立完成用这种方法的证明.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3 由四边形直接判定矩形

例7 如图22.4-9，$\square ABCD$的四个内角的平分线分别相交于点E,F,G,H. 求证：四边形$EFGH$是矩形.

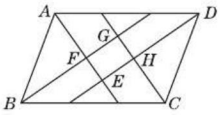


图22.4-9

导引： 要证明四边形$EFGH$是矩形，由于已知$\square ABCD$的四个内角的平分线分别相交于点E,F,G,H，因此可选用“有三个角是直角的四边形是矩形”来证明.

证明： $\because AB // CD$，$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180°$.

$\because BG$平分$\angle ABC$，CG平分$\angle BCD$，

$\therefore \angle GBC + \angle GCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$.

$\therefore \angle BGC = 90°$. 同理可得$\angle AFB = \angle AED = 90°$，

$\therefore \angle GFE = \angle FEH = \angle FGH = 90°$.

$\therefore$ 四边形$EFGH$是矩形.

方法点拨

本题在四边形的基础上，直接证矩形. 条件中涉及角的关系，一般采用“角的方法”来判定.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用矩形的性质解决矩形中的折叠问题

例8 如图22.4-10，纸片$ABCD$为平行四边形. 把纸片$ABCD$折叠，使点B恰好落在CD边上的E处，折痕为AF. 已知$AB = 10$，$AD = 8$，$DE = 6$.

(1) 求证：平行四边形$ABCD$是矩形.

(2) 求BF的长；

(3) 求折痕AF的长.

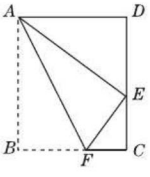


图22.4-10

导引： (1) 先根据折叠的性质可知$AE = AB$. 在$\triangle ADE$中，利用勾股定理的逆定理证明$\triangle ADE$为直角三角形，且$\angle D = 90°$，再根据有一个角是直角的平行四边形是矩形证明平行四边形$ABCD$是矩形即可.

(2) 设$BF = x$，在$Rt\triangle EFC$中利用勾股定理列方程求解即可.

(3) 在$Rt\triangle ABF$中，利用勾股定理求解即可.

(1) **证明：** $\because$ 把纸片$ABCD$折叠，点B恰好落在CD边上的E处，$\therefore AE = AB = 10$，即$AE^2 = 10^2 = 100$.

又$\because AD^2 + DE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$，$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2$. $\therefore \triangle ADE$是直角三角形，且$\angle D = 90°$. $\therefore$ 平行四边形$ABCD$是矩形(有一个角是直角的平行四边形是矩形).

(2) **解：** 设$BF = x$，则$EF = BF = x$，$FC = BC - BF = 8 - x$.

在$Rt\triangle EFC$中，$EC^2 + FC^2 = EF^2$，即$(10 - 6)^2 + (8 - x)^2 = x^2$，解得$x = 5$，$\therefore BF = 5$.

(3) **解：** 在$Rt\triangle ABF$中，$AB^2 + BF^2 = AF^2$.

$\because AB = 10$，$BF = 5$，

$\therefore AF = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$.

方法点拨： 折叠问题常常在四边形中出现，折叠前后的两个图形是全等的图形.

拔尖角度2 矩形的性质与判定的综合

例9 [探究题] 如图22.4-11，在矩形$ABCD$中，$AB = 2$，$BC = 5$，E,P分别在AD,BC上，且$DE = BP = 1$，AP,BE相交于点H，CE,DP相交于点F.

(1) 判断$\triangle BEC$的形状，并说明理由；

(2) 判断四边形$EFPH$是什么特殊四边形，并证明你的判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

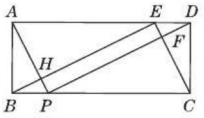


图 22.4-11

导引: (1)根据矩形的性质得出 $CD=2$,根据勾股定理求出 CE 和 BE,进而求出 CE^2+BE^2,BC^2,根据勾股定理的逆定理证明即可.

(2)先根据矩形的性质和平行四边形的性质与判定推出四边形 $EFPH$ 是平行四边形,再根据矩形的判定即可得出结论.

解: (1)$\triangle BEC$ 是直角三角形,

且 $\angle BEC=90°$.

理由:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $\angle ADC=\angle EAB=90°$,

$AD=BC=5$,$CD=AB=2$.

由勾股定理,得 $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

同理 $BE=2\sqrt{5}$.

∴ $CE^2+BE^2=5+20=25$.

∵ $BC^2=5^2=25$,

∴ $BE^2+CE^2=BC^2$,

∴ $\triangle BEC$ 是直角三角形,且 $\angle BEC=90°$.

(2)四边形 $EFPH$ 是矩形.

证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AD=BC$,$AD\parallel BC$.

∵ $DE=BP$,

∴ 四边形 $DEBP$ 是平行四边形. ∴ $BE\parallel DP$.

∵ $AD=BC$,$DE=BP$,

∴ $AE=CP$,

∴ 四边形 $AECP$ 是平行四边形.

∴ $AP\parallel CE$.

∴ 四边形 $EFPH$ 是平行四边形.

∵ $\angle BEC=90°$,

∴ 四边形 $EFPH$ 是矩形.

方法点拨: 本题综合考查了勾股定理及其逆定理,矩形、平行四边形的性质和判定等知识,主要培养了学生分析问题和解决问题的能力.

拔尖角度 3 利用矩形的判定方法解决与矩形有关的动态探索题

例 10 如图 22.4-12,在 $\triangle ABC$ 中,点 O 是 AC 边上一动点,过点 O 作直线 $MN\parallel BC$,设 MN 交 $\angle BCA$ 的平分线于点 E,交 $\angle ACH$ 的平分线于点 F.

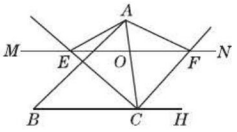


图 22.4-12

(1)证明:$EO=FO$.

(2)当点 O 运动到何处时,四边形 $AECF$ 是矩形?简要说明理由.

导引: (1)根据已知条件证明 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OCF$ 都是等腰三角形,即 $OE=OC=OF$.

(2)由(1)题知 $OE=OC=OF$,只要 $OA=OC$,即当点 O 为 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 就是矩形.

(1) **证明:** ∵ $MN\parallel BC$,

∴ $\angle CEO=\angle ECB$,$\angle CFO=\angle FCH$.

∵ CE,CF 分别是 $\angle BCA$,$\angle ACH$ 的平分线,

∴ $\angle ECO=\angle ECB$,$\angle FCO=\angle FCH$.

∴ $\angle CEO=\angle ECO$,$\angle CFO=\angle FCO$.

∴ $EO=OC$,$FO=OC$.

∴ $EO=FO$.

(2) **解:** 当点 O 运动到 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下:

由(1)可知 $OE=OF$.

又∵ $AO=CO$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∵ $OE=OC$,

∴ $AC=EF$.

∴ 四边形 $AECF$ 是矩形.

方法点拨: 求点 O 运动到何处时四边形 AECF 是矩形,可以先把矩形当成已知条件,求出 O 点在 AC 边上的具体位置,然后添加条件,经过说理,证明四边形 AECF 是矩形.这是解答条件探索题的一般思路.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

基础巩固练

1. ［中考·十堰］矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是(　　)

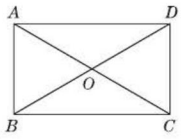
A. 对边相等　　B. 对角相等

C. 对角线相等　　D. 对角线互相平分

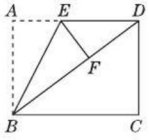
2. ［中考·怀化］如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle AOB = 60°$，$AC = 6$ cm，则 AB 的长是(　　)

A. 3 cm　　B. 6 cm

C. 10 cm　　D. 12 cm



（第 2 题图）

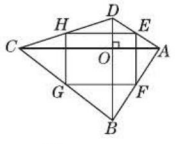


（第 3 题图）

3. ［中考·宜宾］如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC = 8$，$CD = 6$，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠，使点 A 恰好落在对角线 BD 上的 F 处，则 DE 的长是(　　)

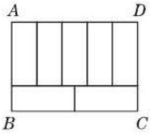
A. 3　　B. $\frac{24}{5}$　　C. 5　　D. $\frac{89}{16}$

4. ［中考·呼和浩特］如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC \perp BD$，垂足为 O，点 E，F，G，H 分别为边 AD，AB，BC，CD 的中点. 若 $AC = 8$，$BD = 6$，则四边形 $EFGH$ 的面积为_____.



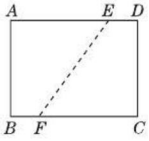
（第 4 题图）

5. 如图，周长为 68 的矩形 $ABCD$ 被分成 7 个全等的小矩形，则矩形 $ABCD$ 的面积为_____.



（第 5 题图）

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3$，$BC = 4$，将矩形 $ABCD$ 折叠，使 C 点和 A 点重合，再展开，求折痕 EF 的长.

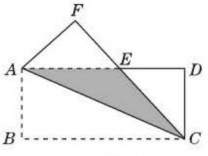


（第 6 题图）

7. ［中考·鄂州］如图，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 F 处，FC 交 AD 于 E.

(1) 求证：$\triangle AFE \cong \triangle CDE$.

(2) 若 $AB = 4$，$BC = 8$，求图中阴影部分的面积.



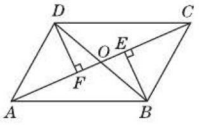
（第 7 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，$BE\perp AC$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，点 O 既是 AC 的中点，又是 EF 的中点.

(1)试说明 $\triangle BOE\cong\triangle DOF$；

(2)若 $OA=\frac{1}{2}BD$，则四边形 $ABCD$ 是什么特殊四边形？说明理由.



(第 8 题图)

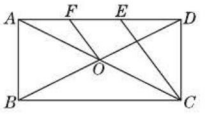
能力提升练

9. [中考·台州]如果将长为 6 cm、宽为 5 cm 的长方形纸片折叠一次，那么这条折痕的长不可能是(　　)

A. 8 cm　　B. $5\sqrt{2}$ cm

C. 5.5 cm　　D. 1 cm

10. 如图，已知在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，$CE=AE$，F 是 AE 的中点，$AB=4$，$BC=8$. 求线段 OF 的长.

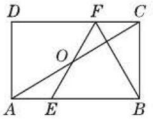


(第 10 题图)

11. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 上的点，$AE=CF$，连接 EF，BF，EF 与对角线 AC 交于点 O，且 $BE=BF$，$\angle BEF=2\angle BAC$. 【导学号:1553889】

(1)求证：$OF=OE$.

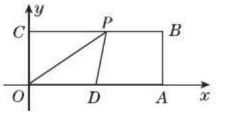
(2)若 $FC=2$，求 AB 的长.



(第 11 题图)

思维拓展练

12. [中考·攀枝花]如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，在矩形 $OABC$ 中，$A(10,0)$，$C(0,4)$，D 为 OA 的中点，P 为 BC 边上一点，若 $\triangle POD$ 为等腰三角形，求所有满足条件的点 P 的坐标.



(第 12 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.5 菱　形

核心知识

- 菱形的定义
- 菱形的性质
- 菱形的判定

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 菱形的定义与性质（重点）

1 定义　有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

要点精析

(1) 菱形必须满足两个条件：一是平行四边形；二是一组邻边相等. 二者必须同时具备，缺一不可.

(2) 菱形的定义既是菱形的基本性质，也是菱形的基本判定方法.

2 性质

(1) 菱形的四条边都相等.

(2) 菱形的两条对角线互相垂直，并且每条对角线平分一组对角.

(3) 菱形具有平行四边形的一切性质.

(4) 菱形既是中心对称图形，也是轴对称图形，对称轴是两条对角线所在的直线.

(5) 菱形的面积计算：

①菱形的面积等于底乘高；

②菱形的面积等于对角线乘积的一半.

注：对角线互相垂直的四边形的面积都可以用两条对角线乘积的一半来计算.

3 易错警示

(1) 菱形和矩形都是建立在平行四边形的基础上，矩形是附加一直角，而菱形是附加一组邻边相等；

(2) 矩形的两条对角线把矩形分割成四个面积相等的等腰三角形，而菱形的两条对角线把菱形分割成四个全等的直角三角形；

(3) 菱形的对称轴是两条对角线所在的直线，不要误认为两条对角线是它的对称轴.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用菱形的性质求角的度数

例1　如图 22.5-1，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 上的点，且 $\angle B=\angle EAF=60°$，$\angle BAE=18°$，求 $\angle CEF$ 的度数.

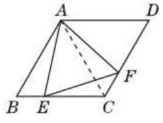


图 22.5-1

导引：要求 $\angle CEF$ 的度数，由图可知 $\angle CEF+\angle AEF=\angle B+\angle BAE=60°+18°$，因此需求 $\angle AEF$ 的度数. 由 $\angle EAF=60°$，猜想 $\triangle AEF$ 为等边三角形，所以只需证 $\triangle AEF$ 中有两边相等即可.

方法点拨

在求有关菱形的角的问题时，由于菱形的对角线互相垂直且平分一组对角，因此通常通过连接对角线，把四边形问题转化为特殊三角形（等边三角形、直角三角形）问题来解答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： 如图22.5-1，连接 AC.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle B=60°$，

$\therefore AB=BC=CD=DA$，$\angle D=\angle B=60°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 为等边三角形.

$\therefore AB=AC$，$\angle B=\angle ACD=\angle BAC=60°$.

$\because \angle EAF=60°$，$\therefore \angle BAE=\angle CAF$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACF$(ASA). $\therefore AE=AF$.

$\therefore \triangle EAF$ 是等边三角形.

$\therefore \angle AEF=60°$.

又$\because \angle AEC=\angle B+\angle BAE=\angle AEF+\angle CEF$，

$\therefore 60°+18°=60°+\angle CEF$.

$\therefore \angle CEF=18°$.

请开始你的表演



考查角度2 利用菱形的性质求线段的长

例2 如图22.5-2，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$BD=12$ cm，$AC=6$ cm. 求菱形的周长.

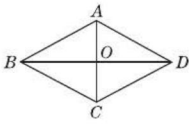


图 22.5-2

导引： 因为菱形的四条边都相等，所以要求其周长，就要先求出其边长. 由菱形的性质可知，其对角线互相垂直平分，因此可以在直角三角形中利用勾股定理来进行计算.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

$\because AC=6$ cm，$BD=12$ cm，

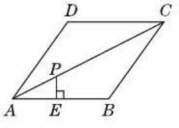
$\therefore AO=3$ cm，$BO=6$ cm.

在 Rt $\triangle ABO$ 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$(cm)，

$\therefore$ 菱形的周长 $=4AB=4\times3\sqrt{5}=12\sqrt{5}$(cm).

同类变式 （答案见236页）

1. [中考·宜宾] 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 P 是对角线 AC 上的一点，$PE\perp AB$ 于点 E. 若 $PE=3$，则点 P 到 AD 的距离为_____.



（第1题图）

方法点拨

菱形的对角线将菱形分成四个全等的直角三角形，我们通常将求菱形问题中相关线段的长转化为求直角三角形中相关线段的长，再利用勾股定理来计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用菱形的对称性求最短距离

例3 菱形 $OBCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图 22.5-3 所示，顶点 $B(2\sqrt{3},0)$，$\angle DOB=60°$，点 P 是对角线 OC 上一个动点，$E(0,-1)$，求 $EP+BP$ 的最小值.

导引： 根据菱形的轴对称的性质和最短距离可知，点 D 和点 B 关于对角线 OC 所在的直线对称，连接 DE 交 OC 于一点，那么这个点就是当 $EP+BP$ 取最小值时点 P 的位置，根据勾股定理求出 DE 的长，则 DE 的长就是 $EP+BP$ 的最小值.

解： 如图22.5-3，连接 DE，延长 CD 交 y 轴于点 F，易知 $CF\perp y$ 轴.

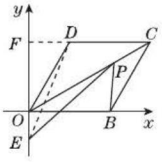


图 22.5-3

$\because$ 点 B 关于直线 OC 的对称点是点 D，

$\therefore DE$ 的长即为 $EP+BP$ 的最小值.

$\because$ 四边形 $OBCD$ 是菱形，顶点 $B(2\sqrt{3},0)$，$\angle DOB=60°$，$\therefore OD=OB=2\sqrt{3}$，

$\angle DOF=\angle BOF-\angle DOB=90°-60°=30°$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DOF$ 中，$DF=\sqrt{3}$，$OF=3$.

又 $\because E(0,-1)$，$\therefore EF=4$. $\therefore DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{19}$，即 $EP+BP$ 的最小值为 $\sqrt{19}$.

方法点拨

在菱形的对角线上找点求最短距离时，因为菱形的对角线所在的直线是菱形的一条对称轴，且相对的顶点关于对称轴对称，所以可直接利用相对的顶点进行转化求最短距离.

考查角度4 利用菱形的性质求面积

例4 ［易错题］如图 22.5-4，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，$AC=6$ cm. 求此菱形的周长和面积.

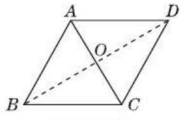


图 22.5-4

导引： 要求菱形的周长，需先求菱形的边长，而边长可通过菱形一条对角线将菱形分成的两个等边三角形求出. 而要求菱形的面积，可以通过求菱形的对角线长，并利用“菱形面积等于对角线乘积的一半”求出.

解： 如图22.5-4，连接 BD，AC 与 BD 交于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=120°$，

$\therefore AB=BC$，$\angle BAC=60°$，$AC\perp BD$，$AO=OC$，$BO=OD$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形. $\because AC=6$ cm，

$\therefore AB=BC=AC=6$ cm.

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 $6\times4=24$(cm).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，$AB=6$ cm，$AO=\frac{1}{2}AC=3$ cm，

$\therefore BO=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$(cm).

$\therefore BD=2BO=6\sqrt{3}$ cm.

$\therefore S_{\text{菱形}ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$(cm^2).

方法点拨

菱形面积的三种计算方法：(1)将其看成平行四边形，用底与高的积来求；(2)利用对角线分得的四个全等直角三角形面积之和来求；(3)利用两条对角线乘积的一半来求.

说明：同学们可利用(1)或(2)两种方法试一试；注意应用(3)这种方法时不要忽视“一半”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 （答案见236页）

2. 已知菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$\angle BAD = 120°$，$AC = 4$，则菱形 $ABCD$ 的面积是（　　）

A. $16\sqrt{3}$　　B. 16　　C. $8\sqrt{3}$　　D. 8

考查角度5 利用菱形的性质证明

例5 如图22.5-5①，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 CB，CD 上的点，且 $BE = DF$.

(1) 求证：$AE = AF$.

(2) 若 $\angle B = 60°$，点 E，F 分别是 BC，CD 的中点，求证：$\triangle AEF$ 为等边三角形.

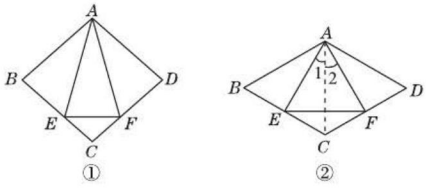


图22.5-5

导引： (1) 要证 $AE = AF$，只需证 $\triangle AEB \cong \triangle AFD$，由 $BE = DF$ 及菱形的相关性质进行证明即可.

(2) 连接 AC，要证 $\triangle AEF$ 为等边三角形，由 $AE = AF$ 可知，只需证 $\angle EAF = 60°$ 即可，要证 $\angle EAF = 60°$，只需证 $\angle 1 = \angle 2 = 30°$ 即可，这可由菱形及等边三角形的相关知识证出.

证明： (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB = AD$，$\angle B = \angle D$.

又 $\because BE = DF$，$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$. $\therefore AE = AF$.

(2) 如图22.5-5②，连接 AC.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB = BC$.

又 $\because \angle B = 60°$，$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形. $\therefore \angle BAC = 60°$.

$\because E$ 为 BC 的中点，$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$.

同理 $\angle 2 = 30°$，$\therefore \angle EAF = 60°$.

又 $\because AE = AF$，$\therefore \triangle AEF$ 为等边三角形.

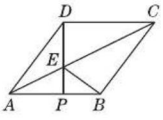
方法点拨

菱形的每条对角线把菱形分成两个全等的等腰三角形（特殊时为两个全等的等边三角形），两条对角线把菱形分成四个全等的直角三角形.所以有关菱形的一些证明与计算问题常常与特殊的三角形的有关问题综合在一起考查.

▲同类变式 （答案见236页）

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，P 是 AB 上的一个动点（不与 A，B 重合），连接 DP 交对角线 AC 于点 E，连接 EB.

求证：$\angle APD = \angle EBC$.



（第3题图）

点知识2 菱形的判定（难点）

判定方法

方法一（定义）：一组邻边相等的平行四边形是菱形.

方法二（边）：四条边相等的四边形是菱形.

方法三（对角线）：两条对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

要点精析

(1) 判定菱形时，一定要明确前提条件是从“四边形”出发的，还是从“平行四边形”出发的：①若从“四边形”出发，则还需四条边相等；②若从“平行四边形”出发，则还需一组邻边相等或对角线互相垂直.

(2) 判定菱形的方法：①若用边进行判定，则先证明四边形是平行四边形，再证明一组邻边相等，或直接证明四边形的四条边都相等；②若用对角线进行判定，则先证明四边形是平行四边形，再证明对角线互相垂直，或直接证明四边形的对角线互相垂直平分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用定义判定菱形

例6 ［模拟·新疆］两张完全相同的矩形纸片 $ABCD$，$BFDE$ 如图 22.5-6 所示放置，$AB=BF$.

求证：四边形 $BNDM$ 是菱形.

导引： 先证明四边形 $BNDM$ 是平行四边形，再运用 ASA 可证明 $\triangle ABM\cong\triangle FBN$，得 $BM=BN$ 即可.

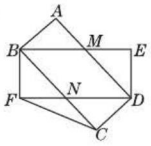


图 22.5-6

证明： 根据矩形的对边平行，知 $BC\parallel AD$，$BE\parallel DF$，∴ 四边形 $BNDM$ 是平行四边形.

∵ $\angle ABM+\angle MBN=90°$，$\angle MBN+\angle FBN=90°$，

∴ $\angle ABM=\angle FBN$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle FBN$ 中，$\begin{cases}\angle ABM=\angle FBN,\\ AB=FB,\\ \angle A=\angle BFN=90°,\end{cases}$

∴ $\triangle ABM\cong\triangle FBN$(ASA).

∴ $BM=BN$，∴ 四边形 $BNDM$ 是菱形.

考查角度2 用四条边相等的四边形是菱形判定菱形

例7 如图 22.5-7，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=CD$，点 E，F，G，H 分别是 AD，BD，BC，AC 的中点. 试说明：四边形 $EFGH$ 是菱形.

导引： 由点 E，F，G，H 分别是 AD，BD，BC，AC 的中点，可知 EH，HG，GF，FE 分别是 $\triangle ACD$，$\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle ABD$ 的中位线. 因为 $AB=CD$，所以 $EH=HG=GF=FE$，根据“四条边相等的四边形是菱形”可得四边形 $EFGH$ 是菱形.

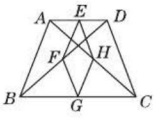


图 22.5-7

解： ∵ 点 E，H 分别为 AD，AC 的中点，

∴ EH 为 $\triangle ACD$ 的中位线. ∴ $EH=\frac{1}{2}CD$.

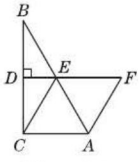
同理，$EF=\frac{1}{2}AB$，$FG=\frac{1}{2}CD$，$HG=\frac{1}{2}AB$.

∵ $AB=CD$，∴ $EH=EF=FG=HG$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

同类变式 （答案见 237 页）

5. 如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=60°$，DE 垂直平分 BC，垂足为点 D，交 AB 于点 E，点 F 在 DE 的延长线上，且 $AF=CE$. 判断四边形 $ACEF$ 的形状，并说明理由.



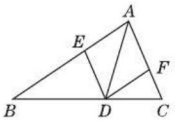
（第 5 题图）

同类变式 （答案见 237 页）

4. ［中考·安顺］如图，已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上，$DE\parallel AC$ 交 AB 于 E，$DF\parallel AB$ 交 AC 于 F.

(1) 证明：$AE=DF$.

(2) 若 AD 平分 $\angle BAC$，试判断四边形 $AEDF$ 的形状，并说明理由.



（第 4 题图）

方法点拨

有较多线段相等的条件时，我们可以考虑通过证明四条边相等来证明四边形是菱形.注意：本例也可以通过先证四边形 EFGH 是平行四边形，再证有一组邻边相等来证明这个四边形是菱形，只不过步骤复杂一点，同学们不妨试一试.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 用对角线互相垂直的平行四边形是菱形判定菱形

例8 如图22.5-8,在平行四边形$ABCD$中,对角线AC,BD相交于点O,过点O作直线$EF\perp BD$,分别交AD,BC于点E和点F,连接BE,DF. 求证:四边形$BEDF$是菱形.

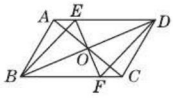


图22.5-8

导引: 若要证明四边形$BEDF$是菱形,则需要先证明四边形$BEDF$是平行四边形,而由题意易知$DE\parallel BF$,只需要证明$DE=BF$,即可判定四边形$BEDF$是平行四边形,证明$DE=BF$可通过证明$\triangle OED\cong\triangle OFB$来实现.

证明: $\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore OB=OD$,$AD\parallel BC$.

$\therefore \angle EDO=\angle FBO$,$\angle OED=\angle OFB$.

$\therefore \triangle OED\cong\triangle OFB$. $\therefore DE=BF$.

又$\because DE\parallel BF$,$\therefore$ 四边形$BEDF$是平行四边形.

$\because EF\perp BD$,$\therefore$ 四边形$BEDF$是菱形.

方法点拨

证明一个四边形是菱形时,若已知要证的四边形的对角线互相垂直,则要考虑先证明这个四边形是平行四边形.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 菱形的性质与判定的综合

例9 [中考·泰安] 如图22.5-9,在四边形$ABCD$中,$AB=AD$,$CB=CD$,E是CD上一点,BE交AC于F,连接DF.

(1)证明:$\angle BAC=\angle DAC$,$\angle AFD=\angle CFE$.

(2)若$AB\parallel CD$,试证明:四边形$ABCD$是菱形.

(3)在(2)的条件下,试确定E点的位置,使$\angle EFD=\angle BCD$,并说明理由.

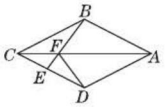


图22.5-9

导引: (1)首先利用SSS证明$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,可得$\angle BAC=\angle DAC$,再证明$\triangle ABF\cong\triangle ADF$,可得$\angle AFB=\angle AFD$. 进而得到$\angle AFD=\angle CFE$.

(2)首先证明$\angle CAD=\angle ACD$,再根据等角对等边可得$AD=CD$,然后由已知条件$AB=AD$,$CB=CD$可得$AB=CB=CD=AD$,进而可得四边形$ABCD$是菱形.

(3)在(2)的条件下,当$BE\perp CD$时,可使$\angle EFD=\angle BCD$. 首先证明$\triangle BCF\cong\triangle DCF$,可得$\angle CBF=\angle CDF$,再根据$BE\perp CD$可得$\angle BEC=\angle DEF=90°$,进而得到$\angle EFD=\angle BCD$.

(1) **证明:** 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中,$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$.

$\therefore \angle BAC=\angle DAC$.

在$\triangle ABF$和$\triangle ADF$中,$\begin{cases}AB=AD,\\\angle BAF=\angle DAF,\\AF=AF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ADF$. $\therefore \angle AFB=\angle AFD$.

又$\because \angle AFB=\angle CFE$,$\therefore \angle AFD=\angle CFE$.

(2) **证明:** $\because AB\parallel CD$,$\therefore \angle BAC=\angle ACD$.

又$\because \angle BAC=\angle DAC$,$\therefore \angle DAC=\angle ACD$.

$\therefore AD=CD$. 又$\because AB=AD$,$CB=CD$,

$\therefore AB=CB=CD=AD$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$是菱形.

(3) **解:** 当$BE\perp CD$时,$\angle EFD=\angle BCD$.

理由:$\because$ 四边形$ABCD$为菱形,

$\therefore \angle BCF=\angle DCF$.

在$\triangle BCF$和$\triangle DCF$中,$\begin{cases}CB=CD,\\\angle BCF=\angle DCF,\\CF=CF,\end{cases}$

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle DCF$. $\therefore \angle CBF=\angle CDF$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\because BE \perp CD$, $\therefore \angle BEC = \angle DEF = 90°$.

$\therefore \angle EFD = \angle BCD$.

方法点拨： 此题主要考查了菱形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质，这些都是证明线段和角相等的重要工具.

拔尖角度 2 菱形与全等变换的综合

例 10 如图 22.5-10，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ADC = 60°$，点 E 为 AB 边的中点，点 P 与点 A 关于 DE 对称，连接 DP, BP, CP，下列结论：①$DP = CD$；②$AP^2 + BP^2 = CD^2$；③$\angle DCP = 75°$；④$\angle CPA = 150°$. 其中，正确的是(　　)

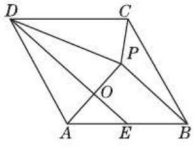


图 22.5-10

A. ①②　　B. ①②④

C. ③④　　D. ①②③④

导引： 如图 22.5-10，设 DE 交 AP 于 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore DA = DC = AB$.

$\because A, P$ 关于 DE 对称，

$\therefore DE \perp AP, OA = OP$，

$\therefore DA = DP$. $\therefore DP = CD$，故①正确；

$\because AE = EB, AO = OP$，

$\therefore OE // PB$, $\therefore PB \perp PA$，

$\therefore \angle APB = 90°$，

$\therefore PA^2 + PB^2 = AB^2 = CD^2$，故②正确；

若 $\angle DCP = 75°$，则 $\angle CDP = 30°$.

$\because \angle ADC = 60°$，

$\therefore DP$ 平分 $\angle ADC$，显然不符合题意，故③错误；$\because \angle ADC = 60°, DA = DP = DC$，

$\therefore \angle DAP = \angle DPA, \angle DCP = \angle DPC$，

$\therefore \angle CPA = \frac{1}{2}(360° - 60°) = 150°$，故④正确. 故选 B.

答案： B

拔尖角度 3 利用矩形与菱形的性质探究规律

例 11 矩形、菱形由于其特殊的性质，为拼图提供了方便，因而墙面瓷砖一般设计为矩形，图案以菱形居多. 如图 22.5-11 是一种长 30 cm、宽 20 cm 的矩形瓷砖，E, F, G, H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，阴影部分为淡黄色，中间部分为白色，现有一面长 4.2 m、宽 2.8 m 的矩形墙壁准备贴瓷砖.

问：这面墙壁最少要贴这种瓷砖多少块？全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现多少个最小的面积相等的菱形？其中淡黄色的菱形有多少个？

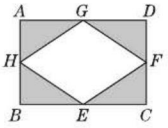


图 22.5-11

导引： 根据墙壁的长与宽以及矩形瓷砖的长与宽进行计算，求出所需要贴的瓷砖的行数与列数，然后进行计算即可；得到的菱形有白色的菱形与淡黄色的菱形两种，求出个数即可.

解： 4.2 m = 420 cm, 2.8 m = 280 cm，

$420 \div 30 = 14, 280 \div 20 = 14, 14 \times 14 = 196$(块).

$\because$ 每块瓷砖都有 1 个白色菱形，

$\therefore$ 白色菱形有 196 个. $\because E, F, G, H$ 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，

$\therefore$ 淡黄色菱形有 $(14-1) \times (14-1) = 169$(个)，且易知淡黄色菱形与白色菱形面积相等. $\therefore$ 最多会出现最小的面积相等的菱形共 $196 + 169 = 365$(个).

答：这面墙壁最少要贴这种瓷砖 196 块，全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现 365 个最小的面积相等的菱形，其中淡黄色的菱形有 169 个.

方法点拨： 本题考查了矩形的性质和菱形的性质，熟练掌握两种图形的性质，确定出瓷砖的贴法，求出所需要的行数与列数是解题的关键，注意单位换算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 237 页）

基础巩固练

1. ［中考·大庆］下列说法中不正确的是（　　）

A. 四边相等的四边形是菱形

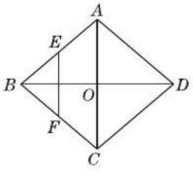
B. 对角线垂直的平行四边形是菱形

C. 菱形的对角线互相垂直且相等

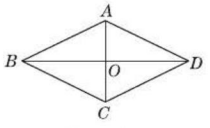
D. 菱形的邻边相等

2. ［中考·青岛］如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于 O 点，E,F 分别是 AB,BC 边上的中点，连接 EF. 若 $EF=\sqrt{3}$，$BD=4$，则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）

A. 4　　B. $4\sqrt{6}$　　C. $4\sqrt{7}$　　D. 28



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. ［中考·河北］求证：菱形的两条对角线互相垂直.

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC,BD 交于点 O. 求证：$AC\perp BD$.

以下是排乱的证明过程：

①又 $BO=DO$；

②$\therefore AO\perp BD$，即 $AC\perp BD$；

③$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

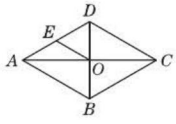
④$\therefore AB=AD$.

证明步骤的正确顺序是（　　）

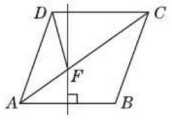
A. ③→②→①→④　　B. ③→④→①→②

C. ①→②→④→③　　D. ①→④→③→②

4. ［中考·扬州］如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O，E 为 AD 的中点，若 $OE=3$，则菱形 $ABCD$ 的周长为_____.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

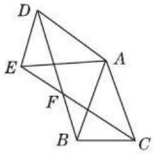
5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=70°$，AB 的垂直平分线交 AC 于点 F，则 $\angle CDF=$_____.

6. ［中考·菏泽］在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，其周长为 24 cm，则菱形的面积为_____cm^2.

7. ［中考·毕节］如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，把 $\triangle ABC$ 绕 A 点沿顺时针方向旋转得到 $\triangle ADE$，连接 BD,CE 交于点 F.

（1）求证：$\triangle AEC\cong\triangle ADB$.

（2）若 $AB=2$，$\angle BAC=45°$，当四边形 $ADFC$ 是菱形时，求 BF 的长.

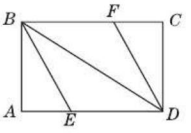


（第 7 题图）

8. ［中考·盐城］如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABD,\angle CDB$ 的平分线 BE,DF 分别交边 AD,BC 于点 E,F.

（1）求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

（2）当 $\angle ABE$ 为多少度时，四边形 $BEDF$ 是菱形？请说明理由.

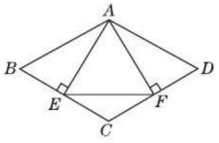


（第 8 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

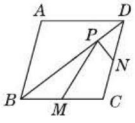
9. [中考·兰州] 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$\angle B=60°$，$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，垂足分别为 E，F，连接 EF，则 $\triangle AEF$ 的面积是(　　)



(第 9 题图)

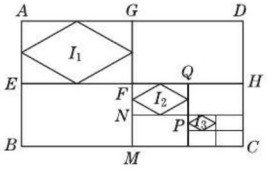
A. $4\sqrt{3}$　B. $3\sqrt{3}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $\sqrt{3}$

10. [中考·内江] 如图，已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线长分别为 6 和 8，M，N 分别是边 BC，CD 的中点，P 是对角线 BD 上一点，则 $PM+PN$ 的最小值是_____.



(第 10 题图)

11. [中考·本溪] 如图，已知矩形 $ABCD$ 的长、宽分别为 a，b. 连接其对边中点，得到四个矩形，顺次连接矩形 $AEFG$ 各边中点，得到菱形 I_1；连接矩形 $FMCH$ 对边中点，又得到四个矩形，顺次连接矩形 $FNPQ$ 各边中点，得到菱形 I_2……如此操作下去，得到菱形 I_n，则 I_n 的面积是_____.



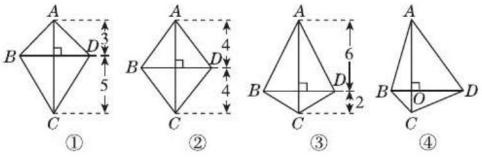
(第 11 题图)

12. 已知线段 $AC=8$，$BD=6$.

(1) 已知线段 $AC\perp BD$. 设图①②③中的四边形 $ABCD$ 的面积分别为 S_1，S_2 和 S_3，则 $S_1=$_____，$S_2=$_____，$S_3=$_____；

(2) 如图④，对于线段 AC 与线段 BD 垂直相交(垂足 O 不与点 A，C，B，D 重合)的任意情形，请你就四边形 $ABCD$ 面积的大小提出猜想，并证明你的猜想；

(3) 当线段 BD 与 AC(或 CA)的延长线垂直相交于点 O 时，猜想顺次连接点 A，B，C，D，A 所围成的封闭图形的面积是多少(直接写出你的猜想，不必证明).



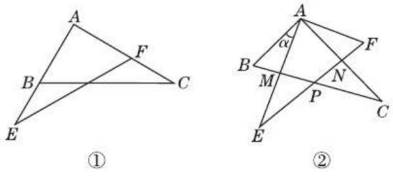
(第 12 题图)

思维拓展练

13. [中考·娄底] 某校九年级学习小组在探究学习过程中，将两块完全相同的且含 $60°$ 角的直角三角板 ABC 与直角三角板 AFE 按如图①所示位置放置，现将 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 绕 A 点按逆时针方向旋转 $\angle\alpha$($0°<\angle\alpha<90°$)，如图②，AE 与 BC 交于点 M，AC 与 EF 交于点 N，BC 与 EF 交于点 P.

(1) 求证：$AM=AN$.

(2) 当 $\angle\alpha=30°$ 时，四边形 $ABPF$ 是什么样的特殊四边形？并说明理由.



(第 13 题图)

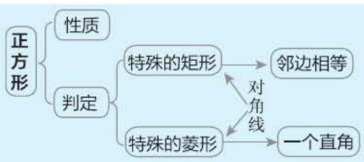
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.6 正方形

核心知识

- 正方形的性质
- 正方形的判定

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正方形的定义及性质(重点)

1 正方形的定义 有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

要点精析

(1)正方形的四条边都相等,说明正方形是特殊的菱形;

(2)正方形的四个角都是直角,说明正方形是特殊的矩形.

注:正方形既是特殊的矩形,又是特殊的菱形.

2 正方形的性质 (1)具有矩形、菱形、平行四边形的一切性质,即①(边)四条边相等,邻边垂直,对边平行;②(角)四个角都是直角;③(对角线)对角线相等,互相垂直平分,每条对角线平分一组对角.

(2)正方形的特殊性质:①正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形;两条对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形;②周长相等的四边形中,正方形的面积最大;③是中心对称图形,它的中心是对称中心;是轴对称图形,有4条对称轴(两条对角线和每组对边中点连线所在的直线);④面积为边长的平方或对角线平方的一半.

3 易错警示 正方形具备其他四边形的所有性质,应用时要细心寻找.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用正方形的性质计算

例1 如图22.6-1,正方形$ABCD$的边长为1 cm,AC为对角线,AE平分$\angle BAC$,$EF\perp AC$,垂足为F,求BE的长.

导引: 线段BE是$Rt\triangle ABE$的一边,但由于AE未知,不能直接用勾股定理求BE,由条件可证$\triangle ABE\cong\triangle AFE$,问题转化为求$EF$的长,结合已知条件易获解.

解: $\because$ 四边形$ABCD$为正方形,$\therefore\angle B=90°$,$\angle ACB=45°$,$AB=BC=1$ cm.

$\because EF\perp AC$,$\therefore\angle EFA=\angle EFC=90°$.

$\therefore\triangle EFC$是等腰直角三角形.

$\therefore EF=FC$. $\because AE$平分$\angle BAC$,

$\therefore\angle BAE=\angle FAE$. $\because\angle B=\angle EFA=90°$,$AE=AE$,

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle AFE$.

$\therefore AB=AF=1$ cm,$BE=EF$. $\therefore FC=BE$.

在$Rt\triangle ABC$中,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$(cm),

$\therefore FC=AC-AF=(\sqrt{2}-1)$ cm. $\therefore BE=(\sqrt{2}-1)$ cm.

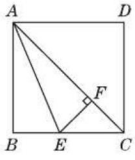


图22.6-1

方法点拨

解有关正方形的问题,要充分利用正方形的四边相等、四角相等、对角线互相垂直平分且相等等性质,正方形的性质、等腰直角三角形的特点、勾股定理是解决正方形相关证明与计算问题的三把钥匙.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 利用正方形的性质进行证明

技巧点拨

通过证明三角形全等得到边和角相等，再进一步得到平行或垂直，这种方法是有关正方形中证边或角相等的最常用的方法，而正方形的性质为证明三角形全等提供了条件.

例2 如图22.6-2，在正方形$ABCD$中，对角线AC与BD的交点为O，E是OB上的一点，$DG\perp AE$于G，DG交AO于F. 求证：$EF/\!/AB$.

导引： 要证$EF/\!/AB$，由于$\angle OBA=45°$，$\angle EOF=90°$，即需证$\angle OEF=45°$，即要证明$OE=OF$，而$OE=OF$可通过证明$\triangle AEO\cong\triangle DFO$获得.

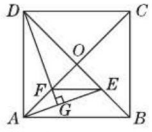


图22.6-2

证明： $\because$ 四边形$ABCD$是正方形，$\therefore\angle AOE=\angle DOF=90°$，$AO=DO$，$\angle OBA=45°$.

又$\because DG\perp AE$，$\therefore\angle EAO+\angle AEO=\angle EDG+\angle GED=90°$.

$\therefore\angle EAO=\angle FDO$.

$\therefore\triangle AEO\cong\triangle DFO$(ASA). $\therefore OE=OF$.

$\therefore\angle OEF=45°$. $\therefore\angle OEF=\angle OBA$.

$\therefore EF/\!/AB$.

考查角度3 利用正方形的性质求面积

技巧点拨

解答本题的关键在于巧用割补法，将不规则的阴影面积集中到一个规则的图形中，再利用正方形及三角形的性质求出.解答过程体现了割补法及转化思想.

例3 ［中考·山西］如图22.6-3，点E在正方形$ABCD$的对角线AC上，且$EC=2AE$，直角三角形FEG的两直角边EF，EG分别交BC，DC于点M，N. 若正方形$ABCD$的边长为a，则重叠部分四边形$EMCN$的面积为(　　)

A. $\frac{2}{3}a^2$　　B. $\frac{1}{4}a^2$　　C. $\frac{5}{9}a^2$　　D. $\frac{4}{9}a^2$

导引： 如图22.6-3，过点E作$EP\perp BC$于点P，$EQ\perp CD$于点Q.

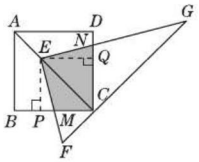


图22.6-3

$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore\angle BCD=90°$.

又$\because\angle EPM=\angle EQN=90°$，

$\therefore\angle PEQ=90°$，四边形$PCQE$是矩形.

$\therefore\angle PEM+\angle MEQ=90°$.

$\because\triangle FEG$是直角三角形，

$\therefore\angle NEF=\angle NEQ+\angle MEQ=90°$.

$\therefore\angle PEM=\angle NEQ$.

$\because CA$是$\angle BCD$的平分线，$\angle EPC=\angle EQC=90°$，

$\therefore EP=EQ$. $\therefore$ 四边形$PCQE$是正方形.

在$\triangle EPM$和$\triangle EQN$中，$\begin{cases}\angle PEM=\angle QEN,\\ EP=EQ,\\ \angle EPM=\angle EQN,\end{cases}$

$\therefore\triangle EPM\cong\triangle EQN$(ASA). $\therefore S_{\triangle EQN}=S_{\triangle EPM}$.

$\therefore$ 四边形$EMCN$的面积等于正方形$PCQE$的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a，$\therefore AC=\sqrt{2}a$.

$\because EC=2AE$，$\therefore EC=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$. $\therefore EP=PC=\frac{2}{3}a$.

$\therefore$ 正方形 $PCQE$ 的面积为 $\frac{2}{3}a\times\frac{2}{3}a=\frac{4}{9}a^2$.

$\therefore$ 四边形 $EMCN$ 的面积为 $\frac{4}{9}a^2$.

答案： D

考查角度4　利用正方形的对称性解决最短问题

例4　［中考·安顺］如图 22.6-4，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 BC 上的一点，$BE=1$，F 为 AB 上的一点，$AF=2$，P 为 AC 上一个动点，则 $PF+PE$ 的最小值为_____.

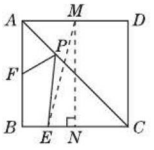


图 22.6-4

导引： 找到点 F 关于 AC 的对称点 M，连接 EM，计算 EM 的长即可. 具体解题过程如下：$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，$BE=1$，$AF=2$，$\therefore$ 如图 22.6-4，在 AD 上取一点 M，使 $AM=2$，点 M 即为点 F 关于 AC 的对称点. 连接 EM，过 M 点作 $MN\perp BC$ 于 N，则 EM 的长为 $PF+PE$ 的最小值.

由题意可知 $EN=BN-BE=AM-BE=AF-BE=2-1=1$，

易得 $MN=4$，$\therefore EM=\sqrt{EN^2+MN^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

答案： $\sqrt{17}$

方法点拨

正方形是特殊的平行四边形，正方形关于它的对角线所在直线对称. 求两线段和的最小值，往往要通过轴对称的方式将同侧两点转化为异侧两点，通过“两点之间，线段最短”求得两线段和的最小值.

知识2　正方形的判定（难点）

1 判定方法

(1) 从四边形出发：①有四条边相等，四个角都是直角的四边形是正方形；②对角线互相平分、垂直且相等的四边形是正方形.

(2) 从平行四边形出发：①有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形；②对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形.

(3) 从矩形出发：①有一组邻边相等的矩形是正方形；②对角线互相垂直的矩形是正方形.

(4) 从菱形出发：①有一个角是直角的菱形是正方形；②对角线相等的菱形是正方形.

2 四边形间的关系

(1) 四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的包含关系如图 22.6-5.



图 22.6-5

(2) 四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的转化关系如图 22.6-6.

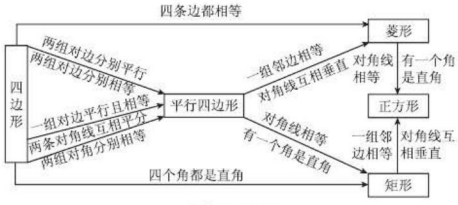


图 22.6-6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 先证矩形再证正方形

例5 [中考·铁岭] 如图22.6-7,在△ABC中,$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,点O为AB的中点,连接DO并延长到点E,使$OE=OD$,连接AE,BE.

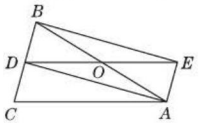


图22.6-7

(1)求证:四边形$AEBD$是矩形.

(2)当△ABC满足什么条件时,矩形$AEBD$是正方形?并说明理由.

导引: (1)利用平行四边形的判定方法首先得出四边形$AEBD$是平行四边形,进而由等腰三角形的性质得出$\angle ADB=90°$,即可证得结论;

(2)利用正方形的判定方法推出条件,并加以说明.

(1) **证明:** ∵点O为AB的中点,$OE=OD$,

∴四边形$AEBD$是平行四边形.

∵$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,

∴$AD\perp BC$. ∴$\angle ADB=90°$.

∴平行四边形$AEBD$是矩形.

(2) **解:** 当$\angle BAC=90°$时,矩形$AEBD$是正方形.

理由:∵$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,

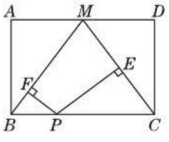
∴$AD=BD$. ∴矩形$AEBD$是正方形.

方法点拨

本题运用演绎推理解答,(1)题中先根据对角线互相平分判定四边形AEBD是平行四边形,再由等腰三角形三线合一的性质证直角,从而判定四边形AEBD是矩形,(2)题中添加条件后可证得矩形的一组邻边相等,即可判定该矩形是正方形.

同类变式 (答案见238页)

1. 如图,点M是矩形$ABCD$的边AD的中点,点P是BC边上的一动点,$PE\perp CM$,$PF\perp BM$,垂足分别为E,F.



(第1题图)

(1)当矩形$ABCD$的长与宽满足什么条件时,四边形$PEMF$为矩形?试说明理由.

(2)在(1)的条件下,当点P运动到什么位置时,矩形$PEMF$为正方形?为什么?

考查角度2 先证菱形再证正方形

例6 如图22.6-8,已知在▱$ABCD$中,对角线AC,BD交于点O,E是BD的延长线上的点,且$EA=EC$.

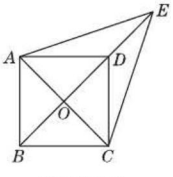


图22.6-8

(1)求证:四边形$ABCD$是菱形.

(2)若$\angle DAC=\angle EAD+\angle AED$,求证:四边形$ABCD$是正方形.

导引: 若要证明▱$ABCD$是菱形,由于题中条件与对角线相关,则需证$AC\perp BD$;要证▱$ABCD$是正方形,有三种途径可选,即在平行四边形、菱形、矩形的基础上,找各需补充的对角线的条件进行证明.(1)首先根据平行四边形的性质可得$AO=CO$,再由$EA=EC$可得△EAC是等腰三角形,然后根据等腰三角形三线合一的性质可得$EO\perp AC$,根据对角线

方法点拨

先证菱形再证正方形的思路有两种:一是证明有一个内角是直角;二是证明对角线相等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

互相垂直的平行四边形是菱形可证出结论;(2)首先根据角的关系得出 $AO=DO$,进而得到 $AC=BD$,再根据对角线相等的菱形是正方形可得到结论.

证明: (1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AO=CO$. ∵ $EA=EC$,

∴ $EO\perp AC$,即 $BD\perp AC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)∵ $\angle ADO=\angle EAD+\angle AED$, $\angle DAC=\angle EAD+\angle AED$,

∴ $\angle ADO=\angle DAC$. ∴ $AO=DO$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AC=2AO$, $BD=2DO$.

∴ $AC=BD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

考查角度3 中点四边形形状的确定

例7 如图 22.6-9,在四边形 $ABCD$ 中,$AC\perp BD$,$AC=BD$,E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,DA 的中点.

求证:四边形 $EFGH$ 是正方形.

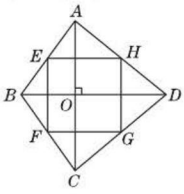


图 22.6-9

导引: 要证四边形 $EFGH$ 是正方形,以四边形、平行四边形、矩形、菱形为基础都可以证出所要的结论. 若以四边形为基础,则只需证明四条边相等、四个角是直角即可.

证明: ∵ E,F,G,H 分别为四边形 $ABCD$ 各边的中点,

∴ $EF/\!/GH/\!/AC$, $FG/\!/EH/\!/BD$,

且 $EF=GH=\frac{1}{2}AC$, $FG=EH=\frac{1}{2}BD$.

又∵ $AC\perp BD$, $AC=BD$,

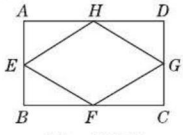
∴ $\angle HEF=\angle EFG=\angle GHE=\angle FGH=90°$,

$EF=FG=GH=HE$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

同类变式 (答案见 238 页)

2. [中考·无锡] 如图,已知矩形 $ABCD$ 的对角线长为 8 cm,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点,则四边形 $EFGH$ 的周长等于_____cm.



(第 2 题图)

方法点拨

几种常见的中点四边形形状的结论:

(1)连接四边形各边中点所得到的四边形是平行四边形;


中点四边形

(2)连接对角线互相垂直的四边形各边中点所得到的四边形是矩形;

(3)连接对角线相等的四边形各边中点所得到的四边形是菱形;

(4)连接对角线相等且互相垂直的四边形各边中点所得到的四边形是正方形;

(5)连接平行四边形各边中点所得到的四边形是平行四边形;

(6)连接矩形各边中点所得到的四边形是菱形;

(7)连接菱形各边中点所得到的四边形是矩形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

数学素养提升

解密中考——“习题改造”

练习题是本节知识得以升华的源泉，对一道习题进行改造是中考命题的精髓.

习题展示

例1 如图 22.6-10，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证：$AE=EF$.

【关键点】关键条件：外角平分线，$\angle AEF=90°$. 关键思路：如图 22.6-10，在 AB 上取中点 M，连接 ME，证明 $\triangle AME\cong\triangle ECF$.

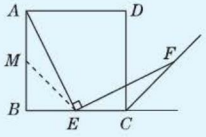


图 22.6-10

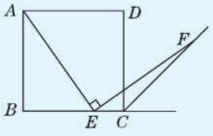


图 22.6-11

改造展示

改造一：变特殊为一般

例2 ［中考·黄石］如图 22.6-11，已知四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是 BC 边上任意一点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证：$AE=EF$.

【改造点】将“点 E 是 BC 边的中点”这一特殊条件改造为“点 E 是 BC 边上任意一点”的一般条件.

改造二：改变问题呈现的背景

例3 ［中考·乌鲁木齐］如图 22.6-12，边长为 5 的正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点处，顶点 A，C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 E 是 OA 边上的点（不与点 A 重合），$EP\perp CE$，且与正方形外角平分线 AG 交于点 P.

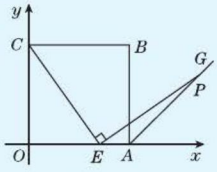


图 22.6-12

（1）当点 E 的坐标为（3，0）时，试证明：$CE=EP$.

（2）如果将上述条件“点 E 的坐标为（3，0）”改为“点 E 的坐标为（t，0）（$0<t<5$）”，结论 $CE=EP$ 是否仍然成立？请说明理由.

（3）在 y 轴上是否存在点 M，使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形？若存在，用 t 表示点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

【改造点】将整个问题放在平面直角坐标系中，结合点的坐标去解决问题.

改造三：留其灵魂，换其躯壳

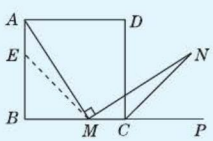
例4 ［中考·无锡］（1）如图 22.6-13①，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 边（不含端点 B，C）上任意一点，P 是 BC 延长线上一点，N 是 $\angle DCP$ 的平分线上一点. 若 $\angle AMN=90°$，求证：$AM=MN$.

下面给出一种证明思路，你可以按这一思路证明，也可以选择另外的方法证明.

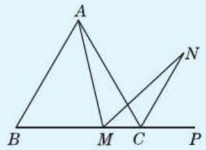
证明：如图 22.6-13①，在边 AB 上截取 $AE=MC$，连接 ME. 在正方形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle BCD=90°$，$AB=BC$.

$\therefore\ \angle NMC=180°-\angle AMN-\angle AMB=180°-\angle B-\angle AMB=\angle MAB=\angle MAE$.

（下面请你完成余下的证明过程）



①



②

图 22.6-13

（2）若将（1）中的“正方形 $ABCD$”改为“等边三角形 ABC”（如图 22.6-13②），N 是 $\angle ACP$ 的平分线上一点，则当 $\angle AMN=60°$ 时，结论 $AM=MN$ 是否还成立？请说明理由.

（3）若将（1）中的“正方形 $ABCD$”改为“正 n 边形 $ABCD\cdots X$”，请你猜想：当 $\angle AMN=$ _____°时，结论 $AM=MN$ 仍然成立.（直接写出答案，不需要证明）

【改造点】去掉“正方形”的外壳，保留“外角平分线”的灵魂.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 正方形的性质与判定的综合

例 8 如图 22.6-14，正方形 $ABCD$ 的边长为 6. 菱形 $EFGH$ 的三个顶点 E,G,H 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB,CD,DA 上，且 $AH=2$，连接 CF.

(1) 当 $DG=2$ 时，求证：菱形 $EFGH$ 为正方形.

(2) 设 $DG=x$，试用含 x 的代数式表示 $\triangle FCG$ 的面积.

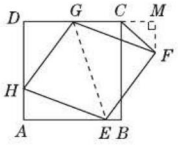


图 22.6-14

导引： (1) 由于四边形 $ABCD$ 为正方形，四边形 $EFGH$ 为菱形，因此 $\angle D=\angle A=90°$，$HG=HE$，而 $AH=DG=2$，易证 $\mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$，从而有 $\angle DHG=\angle AEH$，等量代换可得 $\angle AHE+\angle DHG=90°$，易证菱形 $EFGH$ 为正方形；

(2) 欲求 $\triangle FCG$ 的面积，由已知易求得 CG 的长，只需求出 GC 边上的高即可.

(1) **证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle D=\angle A=90°$.

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是菱形，

$\therefore HG=EH$.

$\because DG=AH=2$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$.

$\therefore \angle DHG=\angle AEH$.

$\because \angle AEH+\angle AHE=90°$，

$\therefore \angle DHG+\angle AHE=90°$.

$\therefore \angle GHE=90°$.

$\therefore$ 菱形 $EFGH$ 为正方形.

(2) **解：** 过点 F 作 $FM\perp CD$，交 DC 的延长线于点 M，连接 GE，如图 22.6-14 所示.

$\because CD/\!/AB$，

$\therefore \angle AEG=\angle MGE$.

$\because GF/\!/HE$，

$\therefore \angle HEG=\angle FGE$.

$\therefore \angle AEH=\angle FGM$.

在 $\triangle AHE$ 和 $\triangle MFG$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle A=\angle M=90°,\\ \angle AEH=\angle MGF,\\ HE=FG,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AHE\cong\triangle MFG$.

$\therefore MF=AH=2$.

$\because DG=x$，

$\therefore CG=6-x$.

$$\therefore S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}CG\cdot FM=6-x.$$

方法点拨： 解答本题采用了演绎推理和构造法. (1) 由于四边形 EFGH 为菱形，只需再证有一个内角是直角即可；(2) 解题的关键是作辅助线，构造全等三角形.

拔尖角度 2 巧借正方形的性质证明线段的和差关系

例 9 [中考·龙东] 如图 22.6-15，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 在直线 BC 上，连接 AE. 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 所在直线折叠，点 B 的对应点是点 B'，连接 AB' 并延长交直线 DC 于点 F.

(1) 当点 F 与点 C 重合时如图 22.6-15①，易证：$DF+BE=AF$（不需证明）；

(2) 当点 F 在 DC 的延长线上时如图 22.6-15②，当点 F 在 CD 的延长线上时如图 22.6-15③，线段 DF,BE,AF 有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想，并选择其中一种情况给予证明.

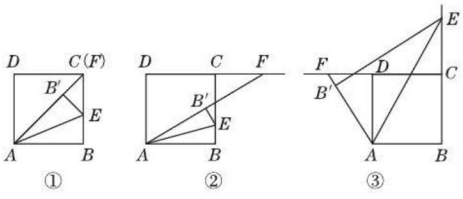


图 22.6-15

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 对于图22.6-15①，先由折叠的性质可得 $AB=AB'$，$BE=B'E$，再根据四边形 $ABCD$ 是正方形，易证 $B'E=B'F$，即可证明 $DF+BE=AF$. 对于图22.6-15②和图22.6-15③，先从直观上判断，得到结论：$DF+BE=AF$ 和 $BE-DF=AF$，再证明. 在图22.6-15②中，延长 CD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，易证 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$，根据 $CB/\!/AD$，得 $\angle AEB=\angle EAD$，即可得出 $\angle B'AE=\angle DAG$，则 $\angle GAF=\angle DAE$，则 $\angle G=\angle GAF$，即可得出答案 $BE+DF=AF$. 图22.6-15③的结论的证明与图22.6-15②的结论的证明类似.

解：（2）图22.6-15②的结论：$DF+BE=AF$.

图22.6-15③的结论：$BE-DF=AF$.

以下对两个结论进行证明，任选一种即可.

图22.6-15②的结论的证明：如图22.6-16①，延长 CD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG.

$\because AB=AD$，$\angle ABE=\angle ADG=90°$，

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ADG$(SAS).

$\therefore\angle G=\angle AEB$，$\angle GAD=\angle EAB$.

$\because CB/\!/AD$，$\therefore\angle AEB=\angle EAD$.

$\because\angle BAE=\angle B'AE$，

$\therefore\angle B'AE=\angle GAD$.

$\therefore\angle GAF=\angle DAE$.

$\therefore\angle G=\angle GAF$.

$\therefore GF=AF$.

$\therefore BE+DF=AF$.

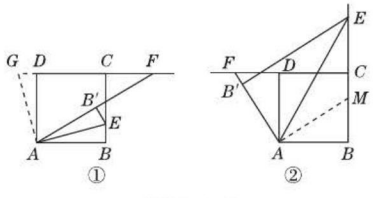


图22.6-16

图22.6-15③的结论的证明：如图22.6-16②，在 BC 上取点 M，使 $BM=DF$，连接 AM.

$\because AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore\triangle ABM\cong\triangle ADF$(SAS).

$\therefore MA=AF$，$\angle FAD=\angle MAB$.

由折叠的性质知 $\angle BAE=\angle EAB'$，

$\therefore\angle MAE=\angle DAE$.

$\because AD/\!/BE$，

$\therefore\angle AEM=\angle DAE$，

$\therefore\angle MAE=\angle AEM$.

$\therefore ME=MA=AF$.

$\therefore BE-DF=AF$.

方法点拨： 证明线段的和差关系，解决这类问题的基本方法是截长补短法，即在长的线段上截取或将短的线段延长，转化为线段相等的问题.

拔尖角度3 与正方形有关的规律探究

例10 ［中考·湛江］如图22.6-17，设四边形 $ABCD$ 是边长为1的正方形，以对角线 AC 为边作第2个正方形 $ACEF$，再以对角线 AE 为边作第3个正方形 $AEGH$……如此下去，若正方形 $ABCD$ 的边长记为 a_1，按上述方法所作的正方形的边长依次为 $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n$，则 $a_n=$ _____.

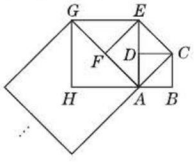


图22.6-17

导引： 由勾股定理可计算出部分正方形的边长，从而发现其中的规律，进行解答. 具体解题过程如下：

由勾股定理得，

$a_2=\sqrt{2}=(\sqrt{2})^1$，

$a_3=2=(\sqrt{2})^2$，

$a_4=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$，…….

发现规律，得到一般性结论：

$a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$.

答案： $(\sqrt{2})^{n-1}$

方法点拨： 这是一道规律探究题，从特殊到一般进行规律探究，主要考查学生的观察、分析、计算、归纳能力.

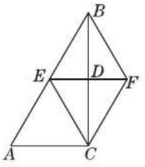
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基础巩固练

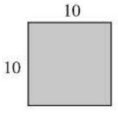
1. ［中考·威海］如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，BC的垂直平分线EF交BC于点D，交AB于点E，且$BE=BF$. 添加一个条件，仍不能证明四边形$BECF$为正方形的是（　　）

A. $BC=AC$　　B. $CF\perp BF$

C. $BD=DF$　　D. $AC=BF$

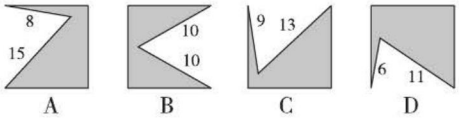


（第1题图）



（第2题图）

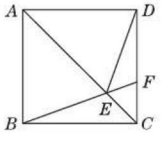
2. 如图是边长为10 cm的正方形铁片，过两个顶点剪掉一个三角形，以下四种剪法中，裁剪线长度所标的数据（单位：cm）不正确的是（　　）



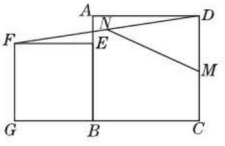
A　　B　　C　　D

3. ［中考·兰州］在平行四边形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，要使四边形$ABCD$是正方形，还需添加一组条件. 下面给出了四组条件：①$AB\perp AD$，且$AB=AD$；②$AB=BD$，且$AB\perp BD$；③$OB=OC$，且$OB\perp OC$；④$AB=AD$，且$AC=BD$. 其中，适合的条件的序号是_____（写出所有适合的条件的序号）.

4. ［中考·黄冈］如图，在正方形$ABCD$中，点F为CD上一点，BF与AC交于点E，若$\angle CBF=20°$，则$\angle AED$等于_____°.



（第4题图）



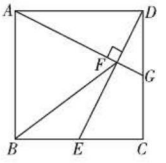
（第5题图）

5. ［中考·扬州］如图，已知点E在正方形$ABCD$的边AB上，以BE为边向正方形$ABCD$外部作正方形$BEFG$，连接DF，M，N分别是DC，DF的中点，连接MN，若$AB=7$，$BE=5$，则$MN=$_____.

6. ［中考·甘肃］如图，在正方形$ABCD$中，点E是BC的中点，连接DE，过点A作$AG\perp ED$交DE于点F，交CD于点G.

（1）证明：△ADG≌△DCE.

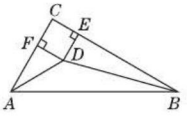
（2）连接BF，证明：$AB=FB$.



（第6题图）

7. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle CAB$，$\angle CBA$的平分线交于点D. 过D作$DE\perp BC$于点E，$DF\perp AC$于点F.

求证：四边形$CEDF$是正方形.

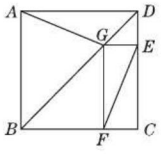


（第7题图）

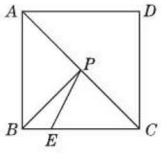
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

8. [中考·绍兴] 下图为某城市部分街道示意图,四边形 $ABCD$ 为正方形,点 G 在对角线 BD 上,$GE \perp CD$,$GF \perp BC$,$AD = 1\,500$ m,小敏行走的路线为 $B \to A \to G \to E$,小聪行走的路线为 $B \to A \to D \to E \to F$. 若小敏行走的路程为 3 100 m,则小聪行走的路程为_____m.



(第 8 题图)



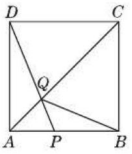
(第 9 题图)

9. [中考·天水] 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 4,E 是边 BC 上的一点且 $BE = 1$,P 为对角线 AC 上的一动点,连接 PB,PE,当点 P 在 AC 上运动时,$\triangle PBE$ 周长的最小值是_____.

10. 如图,在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中,点 P 在 AB 上从 A 向 B 运动,连接 DP 交 AC 于点 Q,连接 BQ.

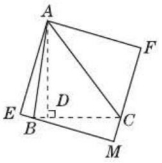
(1) 求证:无论点 P 运动到 AB 上何处时,都有 $\triangle ADQ \backsimeq \triangle ABQ$.

(2) 若点 P 从点 A 运动到点 B,然后继续在 BC 上运动到点 C,在整个运动过程中,当点 P 运动到什么位置时,$\triangle ADQ$ 恰为等腰三角形?



(第 10 题图)

11. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 45°$,$AD \perp BC$ 于点 D. 将 $\triangle ABD$ 沿 AB 所在直线折叠,使点 D 落在点 E 处,将 $\triangle ACD$ 沿 AC 所在直线折叠,使点 D 落在点 F 处,分别延长 EB,FC,使其交于点 M. 判断四边形 $AEMF$ 的形状并给予证明. 【导学号:1553889】



(第 11 题图)

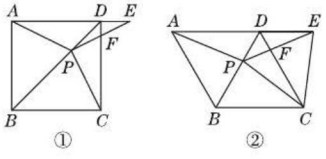
思维拓展练

12. [中考·荆州] 如图①,在正方形 $ABCD$ 中,P 是 BD 上的一点,点 E 在 AD 的延长线上,且 $PA = PE$,PE 交 CD 于 F.

(1) 求证:$PC = PE$.

(2) 求 $\angle CPE$ 的度数.

(3) 如图②,把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$,其他条件不变,当 $\angle ABC = 120°$ 时,连接 CE,试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系,并说明理由.



(第 12 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.7 多边形的内角和与外角和

核心知识

- 多边形
- 多边形的内角和
- 多边形的外角和

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 多边形及其相关概念(重点)

1 多边形的定义 平面上，由不在同一条直线上的线段首尾顺次相接组成的图形，叫做多边形. 多边形有几条边就叫做几边形. 三边形就是我们通常所说的三角形.

其中，各条线段叫做多边形的边，相邻两条边的公共端点叫做多边形的顶点.

要点精析///

(1) 多边形的条件：

①组成多边形的线段在“同一个平面内”；

②线段“不在同一条直线上”且不少于3条；

③首尾顺次相接.

(2) 多边形的表示方法：表示多边形时，先写出多边形的名称，后面依次写出多边形的顶点字母.

2 多边形的有关概念

(1) 内角：多边形相邻两边组成的角叫做多边形的内角.

(2) 外角：多边形的一边和与它相邻另一边的延长线组成的角叫做多边形的外角.

(3) 对角线：连接多边形不相邻两个顶点的线段叫做多边形的对角线.

3 拓展 从n边形的一个顶点出发，可以引$(n-3)$条对角线，这些对角线把n边形分成$(n-2)$个三角形；n边形的对角线条数为$\frac{n(n-3)}{2}$.

4 凸多边形 一个多边形如果总在它的任何一条边所在直线的同一侧，这个多边形就叫做凸多边形，否则就是凹多边形. 我们只研究凸多边形.

拨考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用多边形的相关定义进行辨析

例1 下列说法中，正确的有(　　)

(1) 三角形是边数最少的多边形；

(2) 由n条线段连接起来组成的图形叫多边形；

(3) n边形有n条边、n个顶点、$2n$个内角和外角；

(4) 多边形分为凹多边形和凸多边形.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

导引：(2) 题的说法不严密，应点明三点：其一，“不在同一条直线上”的线段；其二，是“平面图形”；其三，“线段首尾顺次相接”.

(3) 题中n边形有n个内角和$2n$个外角，即外角的个数是内角个数的2倍.

(1)(4) 说法正确.

答案：B

方法点拨

(1) 理解多边形的定义，要从多边形的几个条件入手.

(2) 一个n边形，它的顶点个数、内角的个数都是n，只有外角有$2n$个.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用多边形的边数与对角线的条数之间的关系求多边形对角线的条数

思路点拨

先根据多边形的定义画出图形，再观察图形，直观地解决问题.

例2 (1)四边形从一个顶点可引出几条对角线？共有几条对角线？五边形呢？

(2)n 边形从一个顶点可引出几条对角线？共有几条对角线？请说明理由.

解: (1)如图 22.7-1①，四边形从一个顶点可引出 1 条对角线，共有 2 条对角线；

如图 22.7-1②，五边形从一个顶点可引出 2 条对角线，共有 5 条对角线.

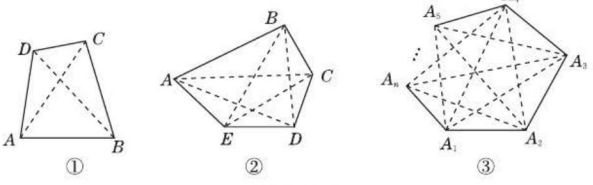


图 22.7-1



(2)n 边形从一个顶点可引出$(n-3)$条对角线，共有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线. 理由如下：

如图 22.7-1③，以顶点 A_1 为例，由定义可知，共有三个点(本身与相邻两点，即顶点 A_1，A_2，A_n)不能与 A_1 连成对角线，所以从顶点 A_1 引出的对角线有$(n-3)$条.

其他顶点以此类推.

n 边形有 n 个顶点，若用 $n(n-3)$ 计算，通过观察图形可知，每条对角线都重复计算了一次，即 $n(n-3)$ 是所有对角线条数的 2 倍，因此 n 边形共有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线.

知识 2 多边形的内角和(难点)

1 **定理** n 边形的内角和等于$(n-2)\times180°(n\geqslant3)$.

证明多边形内角和公式：

方法一：如图 22.7-2，从 n 边形的一个顶点出发作对角线；

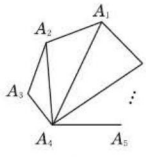


图 22.7-2

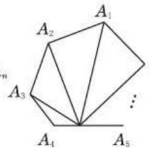


图 22.7-3

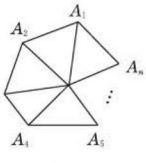


图 22.7-4

方法二：如图 22.7-3，在多边形的一条边上取一点与其他的顶点相连；

方法三：如图 22.7-4，在 n 边形内任取一点与 n 个顶点相连.

2 **思路** 把多边形内角和的问题转化为三角形内角和的问题，即把 n 边形分成几个三角形，利用三角形内角和定理推导.

3 **拓展**

(1)多边形的内角和随边数的变化而变化，边数每增加 1，内角和就增加 180°；

(2)若 n 边形的每个内角都相等，则每个内角的度数为$\frac{(n-2)\times180°}{n}(n\geqslant3)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用多边形内角和公式求内角和或边数

例3 在四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle A+\angle C+\angle D=270°$，则 $\angle B$ 的度数是(　　)

A. 80°　　B. 90°　　C. 170°　　D. 20°

导引： ∵ 四边形的内角和为 $(4-2)\times180°=360°$，

∴ $\angle B=360°-(\angle A+\angle C+\angle D)=360°-270°=90°$.

答案： B

例4 ［中考·重庆］若一个多边形的内角和是 900°，则这个多边形是(　　)

A. 五边形　　B. 六边形　　C. 七边形　　D. 八边形

导引： 设这个多边形的边数为 n，由题意得 $(n-2)\times180°=900°$，解得 $n=7$.

答案： C

同类变式 （答案见 240 页）

1. ［中考·丽水］一个多边形的每个内角均为 120°，则这个多边形是(　　)

A. 四边形　　B. 五边形　　C. 六边形　　D. 七边形

方法点拨

已知边数求内角和，可直接代入内角和公式“n 边形内角和 $=(n-2)\times180°$”求解.

方法点拨

已知多边形的内角和求边数 n 的方法：根据多边形内角和公式“$(n-2)\times180°=$ 内角和”列方程，解方程求出 n 的值，即得多边形的边数.

考查角度2 利用多边形的内角和公式求不规则图形中多个角的度数和

例5 如图 22.7-5，求 $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数.

导引： 要求不规则图形中多个角的度数和，就是想办法在不规则图形中找规则图形，然后把不规则图形的角通过已学的相关知识（本例中为三角形外角的性质）转移到规则图形中去，即把所求的六个角的和转移到四边形 $BEFG$ 中去.

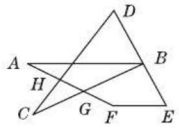


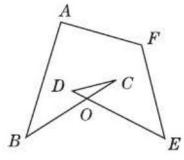
图 22.7-5

解： ∵ $\angle EBG=\angle C+\angle D$，$\angle BGF=\angle A+\angle ABC$，

∴ $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=\angle BGF+\angle EBG+\angle E+\angle F=360°$.

同类变式 （答案见 240 页）

2. 如图，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数.



（第 2 题图）

方法点拨

- 化不规则图形中的角为规则图形中的角是转化思想中一种常见的方法，它主要经历了两步：第一步是找规则图形，第二步是将不规则图形中的角转化到规则图形中.关键还是找规则图形.这类题目一般有不同的解法，如本例还可以将四边形 DEFH 作为目标四边形，请同学们自己完成这种解法.
- 若图中没有已知的规则图形，则需通过作辅助线构造规则图形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 多边形的外角和(难点)

定理 多边形的外角和等于360°.

要点精析///

(1)多边形的外角和与多边形的边数无关,它始终为360°;

(2)若n边形的每个内角相等,则每一个外角的度数为$\frac{360°}{n}(n\geqslant 3)$.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用多边形的外角求多边形的边数

例6 已知一个多边形的每个外角都等于40°,则这个多边形是(　　)

A. 五边形　　B. 九边形

C. 七边形　　D. 八边形

导引: 根据多边形外角和等于360°,可直接求出多边形的边数.

答案: B

方法点拨

用多边形外角和定理求多边形内(外)角的度数或求多边形的边数,一般可利用方程思想通过列方程解决.本例根据"边数×多边形每个外角的度数=360°"即可求出.

考查角度2 利用多边形内角和与外角和之间的数量关系求边数

例7 [中考·资阳]一个多边形的内角和是外角和的3倍,则这个多边形的边数是_____.

导引: 设这个多边形的边数为n.∵多边形的外角和为360°,

∴$(n-2)\times 180°=3\times 360°$.解得$n=8$.

答案: 8

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用多边形的内角和及某个内角的取值范围求多边形对角线条数

例8 [中考·莱芜]一个多边形除一个内角外其余内角的和为1 510°,则这个多边形对角线的条数是(　　)

A. 27　　B. 35　　C. 44　　D. 54

导引: 求多边形对角线的条数,要先求多边形的边数.已知除一个内角外的内角和的度数,可设出边数和除掉的内角的度数,根据多边形的每个内角的度数的取值范围列出不等式来解决问题.具体解题过程如下:

设去掉的这个内角的度数为x,边数为n,

∴$(n-2)\times 180°-x=1\ 510°$.

∴$x=(n-2)\times 180°-1\ 510°$.

∵$0°<x<180°$,

∴$0°<(n-2)\times 180°-1\ 510°<180°$.

∴$\frac{151}{18}<n-2<\frac{169}{18}$.

∵n是自然数,且$n\geqslant 3$,

∴$n-2=9$.

∴$n=11$.

∴$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{11\times 8}{2}=44$.

答案: C

方法点拨: (1)本题由多边形的每个内角大于0°且小于180°,可列出关于多边形边数的不等式,通过解不等式确定取值范围,进而得到整数解.(2)本题还可以用多边形的内角和能被180°整除这一特性来解决.同学们可自己完成.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拔尖角度 2　利用多边形内角和探究多边形的截角问题

例 9　一个多边形截去一个角后，形成的一个新多边形的内角和是 2 520°，那么原多边形的边数是多少？

导引： 设新多边形的边数是 n，根据内角和公式得关于 n 的方程，从而求得 n 的值. 一个多边形截去一个角后，会出现三种情况.

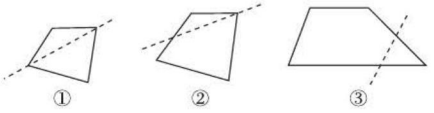


图 22.7-6

以四边形为例：(1) 边数减少 1，如图 22.7-6①；(2) 边数不变，如图 22.7-6②；(3) 边数增加 1，如图 22.7-6③.

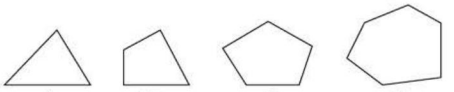
解： 设新多边形的边数是 n，根据内角和公式，得 $(n-2)\times 180° = 2\,520°$，解得 $n = 16$. 把一个多边形的一个角截去后，所得新多边形的边数可能不变，可能减少 1，也可能增加 1，所以原多边形的边数为 15，16 或 17.

易错警示： 解答本例的关键是探究多边形截去一个角后边数的不确定性，应用分类讨论思想分析问题中可能出现的三种截法，其他问题便迎刃而解.

练中考·练模拟 得满分 （答案见 240 页）

基础巩固练

1. [中考·北京] 内角和为 540° 的多边形是(　　)



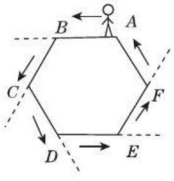
2. 一个多边形的外角中，钝角的个数不可能是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. [中考·莱芜] 一个多边形的内角和比其外角和的 2 倍多 180°，则该多边形的对角线的条数是(　　)

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15

4. 如图，某人从 A 点出发，沿着形状为六边形的公园逆时针走了一圈又回到了 A 点. 如果他在 B, C, D, E, F 五个转角处都转了 59°，那么他在 A 处转过(　　)才能仍面向 $A\to B$ 所指的方向.



（第 4 题图）

A. 59°　　B. 60°　　C. 63°　　D. 65°

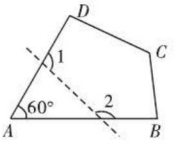
5. [中考·福建] 已知正多边形的一个外角为 36°，则该正多边形的边数为(　　)

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

6. [中考·岳阳] 若一个多边形的内角和等于它的外角和，则这个多边形的边数为_____.

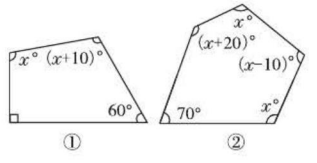
7. 已知一个多边形的每一个外角都相等，一个内角与一个外角的度数之比为 9∶2，则这个多边形的边数为_____.

8. [中考·广安] 如图，在四边形 $ABCD$ 中，若去掉一个 60° 的角得到一个五边形，则 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____°.



（第 8 题图）

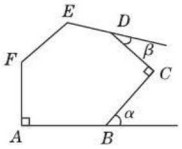
9. 求出下列图中 x 的值.



（第 9 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB \perp AF$，$BC \perp DC$，$\angle E + \angle F = 260°$，求 $\angle\alpha + \angle\beta$ 的度数.



（第 10 题图）

能力提升练

11. ［中考 · 益阳］将一矩形纸片沿一条直线剪成两个多边形，那么这两个多边形的内角和之和不可能是（　　）

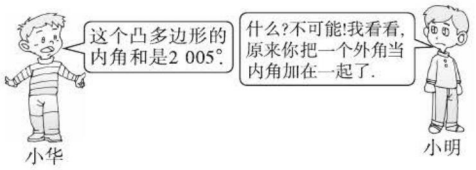
A. 360°　B. 540°　C. 720°　D. 900°

12. ［中考 · 河北］已知 n 边形的内角和 $\theta = (n-2) \times 180°$.

（1）甲同学说，θ 能取 360°；乙同学说，θ 也能取 630°. 甲、乙同学的说法对吗？若对，求出边数 n；若不对，说明理由.

（2）若 n 边形变为 $(n+x)$ 边形，发现内角和增加了 360°，用列方程的方法确定 x 的值.

13. 下面是小华与小明的对话.



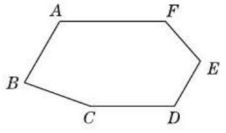
（第 13 题图）

（1）内角和是 2 005°，小明为什么说不可能？

（2）小华求的是几边形的内角和？

（3）请你求出被错当成内角的那个外角的度数.

14. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AF /\!/ CD$，$AB /\!/ DE$，且 $\angle A = 120°$，$\angle B = 80°$. 求 $\angle C$ 和 $\angle D$ 的度数.



（第 14 题图）

思维拓展练

15. ［中考 · 凉山州］一个多边形切去一个角后，形成的另一个多边形的内角和为 1 080°，那么原多边形的边数为（　　）

A. 7　B. 7 或 8

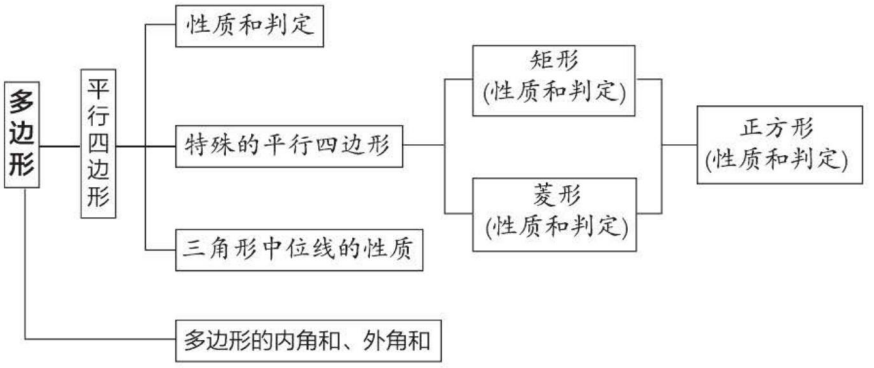
C. 8 或 9　D. 7，8 或 9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 平行四边形的性质

(1)边:两组对边平行且相等.

(2)角:对角相等.

(3)对角线:两条对角线互相平分.

2. 平行四边形的判定

(1)定义:两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

(2)两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

(3)一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

(4)两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

(5)两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. 三角形的中位线定理:三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半.

4. 矩形的性质:矩形的对边平行且相等,四个角都是直角,对角线相等且互相平分.

菱形的性质:菱形的对边平行且四边相等,对角相等,对角线互相垂直平分并且每条对角线平分一组对角.

正方形既具有矩形的性质,又具有菱形的性质.

5. 矩形的判定方法:①有一个角是直角的平行四边形是矩形;②有三个角是直角的四边形是矩形;③对角线相等的平行四边形是矩形.

菱形的判定方法:①一组邻边相等的平行四边形是菱形;②四条边都相等的四边形是菱形;③对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

正方形判定方法的两种思路:①一个角是直角的菱形是正方形;②一组邻边相等的矩形是正方形.

6. 多边形的内角和定理:n 边形的内角和等于$(n-2)\times180°(n\geqslant3)$.

多边形的外角和定理:多边形的外角和等于 360°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识方法专题

知识必学

专题一 平行四边形的性质与判定

链接中考>> 平行四边形的性质与判定都涉及边和角相等，这与全等三角形的性质与判定相吻合，所以平行四边形的性质与判定通常与三角形的全等综合考查.

例1 ［中考·桂林］如图22-1，在$\square ABCD$中，E,F分别是AB,CD的中点.

(1)求证：四边形$FBED$为平行四边形.

(2)对角线AC分别与DE,BF交于点M,N，求证：$\triangle ABN\cong\triangle CDM$.

导引： (1)可以根据“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”来证明；(2)因为$AB=CD$，$\angle CAB=\angle ACD$，所以只需再证明一组对应角相等即可.

证明： (1)∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$.

∵E,F分别是AB,CD的中点，∴$BE=\frac{1}{2}AB$，

$DF=\frac{1}{2}DC$. ∴$BE=DF$.

∴四边形$FBED$为平行四边形.

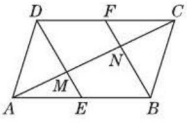


图22-1

(2)∵$AB\parallel CD$，∴$\angle CAB=\angle ACD$.

∵四边形$FBED$为平行四边形，

∴$\angle ABN=\angle CDM$.

又∵$AB=CD$，

∴$\triangle ABN\cong\triangle CDM$(ASA).

方法点拨： 平行四边形的性质与判定是互逆命题，综合考查的衔接点都是边和角.

专题二 三角形的中位线

链接中考>> 三角形的中位线具有两方面的意义：一是位置关系，即三角形的中位线平行于三角形的第三边；二是数量关系，即三角形的中位线等于第三边的一半. 当题目中给出三角形两边的中点时，可直接作出中位线；当题目中给出一边的中点时，可以先取另一边的中点，再构造出中位线. 在中考中，其考查形式有选择题、填空题和解答题.

例2 如图22-2，在四边形$ABCD$中，$AB=CD$，AB与CD不平行，M,N分别是AD,BC的中点. AB与MN的大小关系是(　　)

A. $AB>MN$　　B. $AB=MN$

C. $AB<MN$　　D. $AB\leqslant MN$

导引： 如图22-2，连接BD，取BD的中点E，连接ME,NE.

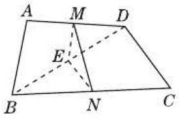


图22-2

因为M,N,E分别是AD,BC,BD的中点，

所以$ME\parallel AB$，$ME=\frac{1}{2}AB$，$NE\parallel CD$，

$NE=\frac{1}{2}CD$. 因为$AB=CD$，AB与CD不平行，所以$ME+NE=AB$，M,N,E三点不共线. 根据三角形的三边关系，得

$ME+NE>MN$，即$AB>MN$.

答案： A

方法点拨： 此题考查了三角形的中位线定理以及三角形的三边关系，巧妙地构造三角形的中位线是解决此题的关键.

专题三 矩形的性质与判定

链接中考>> 矩形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊点：一是内角是直角；二是对角线相等. 在中考中，考查矩形的性质和判定时，题目主要扣住这两个特殊点进行考查.

例3 ［中考·北京］如图22-3，在$\square ABCD$中，过点D作$DE\perp AB$于点E，点F在边CD上，$DF=BE$，连接AF,BF.

(1)求证：四边形$DEBF$是矩形.

(2)若$CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF平分$\angle DAB$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

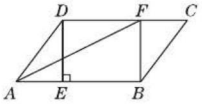


图 22-3

导引：(1)先证明四边形 $DEBF$ 是平行四边形，再证明其有一个角是直角即可.(2)在(1)题的基础上不难发现 $\triangle BCF$ 是直角三角形，因此可以根据勾股定理求出 BC 的长，再结合 $DF=5$ 判断出 $DA=DF$，得到 $\angle DAF=\angle DFA$ 这一关键结论，从而使问题获解.

证明：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $DC\parallel AB$. ∴ $DF\parallel BE$.

又∵ $DF=BE$，

∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

∵ $DE\perp AB$，∴ $\angle DEB=90°$.

∴ 四边形 $DEBF$ 是矩形.

(2)∵ 四边形 $DEBF$ 是矩形，

∴ $\angle BFC=90°$.

∵ $CF=3$，$BF=4$，

由勾股定理得 $BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC=5$. ∵ $DF=5$，∴ $AD=DF$.

∴ $\angle DAF=\angle DFA$.

∵ $DC\parallel AB$，

∴ $\angle DFA=\angle FAB$.

∴ $\angle DAF=\angle FAB$，即 AF 平分 $\angle DAB$.

专题四 菱形的性质与判定

链接中考>> 菱形是特殊的平行四边形，主要有两个方面比较特殊：一是四边相等；二是对角线互相垂直平分.在中考中，考查菱形的性质和判定时，题目主要从这两个方面进行考查.

例 4 如图 22-4，在平行四边形 $ABCD$ 中，用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E(尺规作图的痕迹保留在图中)，连接 EF，BF.

(1)求证：四边形 $ABEF$ 为菱形.

(2)AE，BF 相交于点 O，若 $BF=6$，$AB=5$，求 AE 的长.

导引：(1)根据尺规作 $\angle BAD$ 平分线的过程、角平分线的定义和平行四边形的性质，易证得四边形 $ABEF$ 为平行四边形，进而可得四边形 $ABEF$ 为菱形.(2)先根据菱形的性质得到 $AE\perp BF$，$OB=OF$，$OA=OE$，再由勾股定理得到 OA 的长，进而得到 AE 的长.

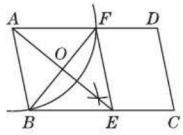


图 22-4

(1) **证明：** 由尺规作 $\angle BAD$ 的平分线的过程和角平分线的定义可知，

$AB=AF$，且 $\angle BAE=\angle FAE$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$. ∴ $AF\parallel BE$.

∴ $\angle FAE=\angle AEB$.

∴ $\angle BAE=\angle AEB$. ∴ $AB=BE$.

∴ $BE=AF$.

∴ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形.

又∵ $AB=BE$，∴ 四边形 $ABEF$ 为菱形.

(2) **解：**∵ 四边形 $ABEF$ 为菱形，

∴ $AE\perp BF$，$OB=\frac{1}{2}BF=3$，$AE=2AO$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$AO=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

∴ $AE=2AO=8$.

专题五 正方形的性质与判定

链接中考>> 正方形既是矩形，又是菱形，它具有矩形和菱形的所有性质，判定正方形的思路主要有两种：一种是先判定是矩形，再证明邻边相等或对角线互相垂直；另一种是先证明是菱形，再证明一个内角是直角或对角线相等.在中考中，其一般以简单的解答题的形式考查.

例 5 [中考·凉山州]如图 22-5，已知正方形 $ABCD$，动点 E 在 AC 上，$AF\perp AC$，垂足为 A，$AF=AE$.

(1)BF 和 DE 有怎样的数量关系？请证明你的结论.

(2)在其他条件都保持不变的情况下，当点 E 运动到 AC 的中点时，四边形 $AFBE$ 是什么特殊四边形？请证明你的结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：（1）首先根据正方形的性质和已知条件得到一些线段和角之间的等量关系，然后判定两个三角形全等，从而根据全等三角形的性质得到线段之间的数量关系.（2）利用线段的数量关系，结合已知条件即可解题.

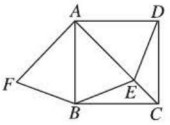


图 22-5

解：（1）$BF=DE$. 证明如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AB=AD$，$\angle DAC=\angle BAC=45°$.

∵ $AF\perp AC$，∴ $\angle FAB=\angle BAC=\angle DAC=45°$.

∵ $AF=AE$，∴ $\triangle AFB\cong\triangle AED$(SAS)，

∴ $BF=DE$.

（2）正方形. 证明如下：∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，E 是 AC 的中点，∴ $AE=BE$，$\angle AEB=90°$. ∵ $AB=AB$，$\angle FAB=\angle BAC=45°$，$AF=AE$，∴ $\triangle ABF\cong\triangle ABE$(SAS)，∴ $BF=BE$，∴ $AE=BE=BF=AF$，∴ 四边形 $AFBE$ 是菱形. 又∵ $AF\perp AE$，∴ 四边形 $AFBE$ 是正方形.

专题六 特殊四边形的实践探索题

链接中考>> 解决与特殊四边形有关的实践探索题，关键要将特殊四边形进行折叠变换，而折叠变换就是全等变换，解决问题时既要运用到特殊四边形的性质与判定，又要运用到全等三角形的性质与判定. 中考中，一般以解答题的形式考查.

例 6 ［中考·临沂］如图 22-6①，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是边 BC，AB 上的点，且 $CE=BF$. 连接 DE，过点 E 作 $EG\perp DE$，使 $EG=DE$，连接 FG，FC.

（1）请判断：FG 与 CE 的数量关系是_____，位置关系是_____.

（2）如图 22-6②，若点 E，F 分别是 CB，BA 延长线上的点，其他条件不变，（1）题中的结论是否仍然成立？请做出判断并给予证明.

（3）如图 22-6③，若点 E，F 分别是 BC，AB 延长线上的点，其他条件不变，（1）题中的结论是否仍然成立？请直接写出你的判断.

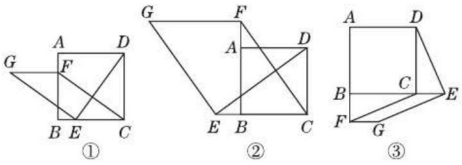


图 22-6

导引：（1）可证四边形 $GECF$ 是平行四边形，得到 $FG=CE$，$FG\parallel CE$.（2）结论仍然成立，先证 $\triangle FBC\cong\triangle ECD$，得出 $CF=DE$，$\angle FCB=\angle EDC$，再证明 $DE\perp CF$，得出 $CF\parallel EG$，因此可得四边形 $GECF$ 是平行四边形，则 $FG=CE$，$FG\parallel CE$.（3）结论仍然成立，证明方法与（2）题类似.

解：（1）$FG=CE$　平行（或 $FG\parallel CE$）

（2）结论仍然成立.

理由：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $BC=CD$，$\angle ABC=\angle BCD=90°$.

又∵ $BF=CE$，∴ $\triangle FBC\cong\triangle ECD$.

∴ $CF=DE$，$\angle FCB=\angle EDC$.

∵ $EG=DE$，∴ $CF=GE$.

∵ $\angle EDC+\angle DEC=90°$，

∴ $\angle FCB+\angle DEC=90°$.

∴ $DE\perp CF$. ∵ $EG\perp DE$，∴ $CF\parallel EG$.

∴ 四边形 $GECF$ 是平行四边形.

∴ $FG=CE$，$FG\parallel CE$.

（3）结论仍然成立.

专题七 多边形的内角和与外角和

链接中考>> 与多边形有关的角的定理有多边形的内角和定理和外角和定理. 在中考中，一般都以选择题的形式考查：一种是已知多边形的边数求内角和；另一种是已知内角和求多边形的边数.

例 7 ［中考·眉山］一个多边形的外角和是内角和的 $\frac{2}{5}$，这个多边形的边数为（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

答案： C

方法点拨： 多边形的内角和为 $(n-2)\times180°$（n 为多边形的边数）；任意多边形的外角和均为 360°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 思想方法专题

专题八 分类讨论思想

链接中考>> 有些问题的答案不是唯一的，尤其是题目中没有给出图形的几何题. 这时，我们需要把问题分为几种可能的情况，然后针对每一种情况给出解答，思考问题必须严谨、细致.

例8 ［中考·南京］如图22-7，在边长为4的正方形 $ABCD$ 中，请画出以 A 为一个顶点，另外两个顶点在正方形 $ABCD$ 的边上，且一边边长为3的所有大小不同的等腰三角形.（要求：只要画出示意图，并在所画等腰三角形长为3的边上标注数字3）

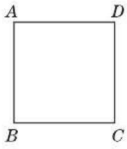


图 22-7

导引： 本题应分类讨论，按3为底长或腰长进行分类，还应考虑 A 点为顶角顶点或底角的顶点.

解： 满足条件的三角形有以下五种情形，如图22-8.

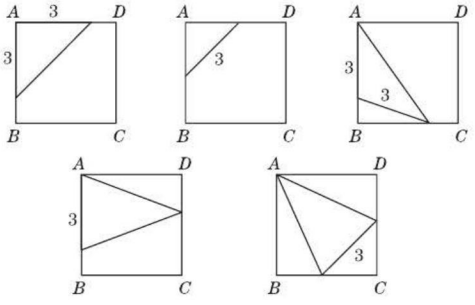


图 22-8

方法点拨： 当一条线段作为等腰三角形的一边时，需要分为等腰三角形的底和腰讨论求解. 当它作为等腰三角形的底时，可以利用尺规作该线段的垂直平分线产生等腰三角形顶角的顶点；当它作为等腰三角形的腰时，可以利用尺规画圆产生等腰三角形底角的顶点.

专题九 数形结合思想

链接中考>> 数形结合思想就是把数、式与图形结合起来考虑，用几何图形直观地反映和描述数量关系，用代数方法来分析几何图形中蕴含的数量关系，从而巧妙快速地解决问题.

例9 ［中考·滨州］如图22-9，在平面直角坐标系中，将矩形 $AOCD$ 沿直线 AE 折叠（点 E 在边 DC 上），折叠后顶点 D 恰好落在边 OC 上的点 F 处. 若点 D 的坐标为 $(10,8)$，则点 E 的坐标为_____.

导引： ∵ 点 D 的坐标为 $(10,8)$，∴ $OA=8$，$AD=OC=10$. 根据折叠的性质可知，$AF=AD=10$，$DE=EF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOF$ 中，

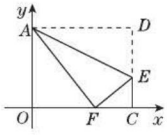


图 22-9

$OF=\sqrt{AF^2-OA^2}=6$，∴ $CF=OC-OF=4$. 设 $CE=x$，则 $DE=EF=8-x$，∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中，$x^2+4^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，∴ 点 E 的坐标为 $(10,3)$.

答案： $(10,3)$

方法点拨： 在直角三角形中，若已知两边的长度，可直接利用勾股定理求第三边的长度；若已知一边的长度，又知三边之间的数量关系，则可先设未知数，再利用勾股定理建立方程求另两边的长度.

专题十 条件探索题

链接中考>> 在分析条件探索题时，应从结论出发，分析结论成立的条件，然后再根据已有条件，找出需添加的条件，从而进行推理论证. 解有关特殊四边形的条件探索题，关键要扣住特殊四边形的性质与判定方法.

例10 ［中考·武威］如图22-10，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$ cm，$BC=5$ cm，$\angle B=60°$，G 是 CD 的中点，E 是边 AD 上的动点，EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F，连接 CE，DF.

（1）求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

（2）①当 $AE=$_____ cm 时，四边形 $CEDF$ 是矩形；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②当 $AE=$ _____ cm 时，四边形 $CEDF$ 是菱形.

（直接写出答案，不需要说明理由）

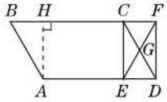


图 22-10

导引：（1）只要证明 $\triangle FCG\cong\triangle EDG$，就可得到四边形 $CEDF$ 的对角线互相平分，即可证明四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

（2）①若四边形 $CEDF$ 是矩形，

则 $\angle CED=90°$. 过 A 作 $AH\perp BC$ 于 H.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ 易推出 $DE=BH$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中可求得 BH 的长，

既而求出 AE 的长；

②若四边形 $CEDF$ 是菱形，

则 $CE=DE=DF=CF$.

由题意可得 $\triangle CDE$ 是等边三角形.

∴ $DE=CD=AB=3$ cm，

∴ $AE=AD-DE=2$ cm.

（1）**证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CF/\!/ED$. ∴ $\angle FCG=\angle EDG$.

∵ G 是 CD 的中点，∴ $CG=DG$.

在 $\triangle FCG$ 和 $\triangle EDG$ 中，

$$\begin{cases}\angle FCG=\angle EDG,\\ CG=DG,\\ \angle CGF=\angle DGE,\end{cases}$$

∴ $\triangle FCG\cong\triangle EDG$(ASA).

∴ $FG=EG$.

又∵ $CG=DG$，

∴ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

（2）①3.5　②2

好题必解 答案见 241 页

一、选择题

1. [中考·益阳] 下列判断错误的是(　　)

A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

B. 四个内角都相等的四边形是矩形

C. 四条边都相等的四边形是菱形

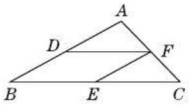
D. 两条对角线互相垂直且平分的四边形是正方形

2. [中考·宜昌] 设四边形的内角和等于 a，五边形的外角和等于 b，则 a 与 b 的关系是(　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. $b=a+180°$

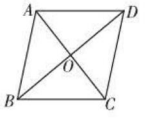
3. [中考·梧州] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$AC=2$，D，E，F 分别为 AB，BC，AC 的中点，连接 DF，FE，则四边形 $DBEF$ 的周长是(　　)



（第 3 题图）

A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 11

4. [中考·永州] 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，且点 O 是 BD 的中点，若 $AB=AD=5$，$BD=8$，$\angle ABD=\angle CDB$，则四边形 $ABCD$ 的面积为(　　)

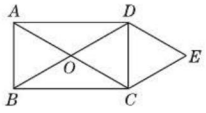


（第 4 题图）

A. 40　　B. 24

C. 20　　D. 15

5. [中考·兰州] 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$CE/\!/BD$，$DE/\!/AC$，$AD=2\sqrt{3}$，$DE=2$，则四边形 $OCED$ 的面积为(　　)



（第 5 题图）

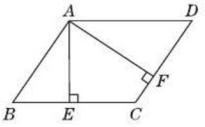
A. $2\sqrt{3}$　　B. 4

C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

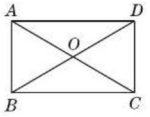
二、填空题

6. [中考·连云港] 如图，在$\square ABCD$中，$AE\perp BC$于点E，$AF\perp CD$于点F，若$\angle EAF=56°$，则$\angle B=$_____.



（第6题图）

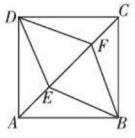
7. 如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，若$\angle AOB=60°$，$AB=4$ cm，则AC的长为_____cm.



（第7题图）

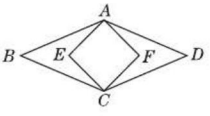
8. 在四边形$ABCD$中，点E，F，G，H分别是边AB，BC，CD，DA的中点，如果四边形$EFGH$为菱形，那么四边形$ABCD$是_____.（只要写出一种即可）

9. [中考·菏泽] 如图，E，F是正方形$ABCD$的对角线AC上的两点，$AC=8$，$AE=CF=2$，则四边形$BEDF$的周长是_____.



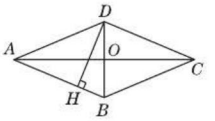
（第9题图）

10. [中考·南京] 如图，菱形$ABCD$的面积为120 cm^2，正方形$AECF$的面积为50 cm^2，则菱形的边长为_____ cm.



（第10题图）

11. [中考·孝感] 如图，四边形$ABCD$是菱形，$AC=24$，$BD=10$，$DH\perp AB$于点H，则线段BH的长为_____.



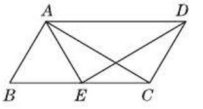
（第11题图）

三、解答题

12. 如图，在$\square ABCD$中，E为BC边上一点，且$AB=AE$.

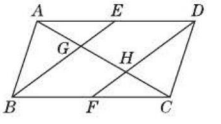
（1）求证：$\triangle ABC\cong\triangle EAD$.

（2）若AE平分$\angle DAB$，$\angle EAC=25°$，求$\angle AED$的度数.



（第12题图）

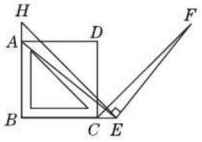
13. [中考·黄冈] 如图，在$\square ABCD$中，E，F分别为边AD，BC的中点，对角线AC分别交BE，DF于点G，H. 求证：$AG=CH$.



（第13题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 如图，一个含45°角的三角板 HBE 的两条直角边与正方形 $ABCD$ 的两邻边重合，过 E 点作 $EF \perp AE$ 交 $\angle DCE$ 的平分线于 F 点，试探究线段 AE 与 EF 的数量关系，并说明理由.

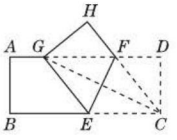


（第14题图）

15. [中考·十堰] 如图，将矩形纸片 $ABCD$ $(AD > AB)$ 折叠，使点 C 刚好落在线段 AD 上，且折痕分别与边 BC，AD 相交. 设折叠后点 C，D 的对应点分别为点 G，H，折痕分别与边 BC，AD 相交于点 E，F.

(1) 判断四边形 $CEGF$ 的形状；

(2) 若 $AB = 3$，$BC = 9$，求线段 CE 的取值范围.

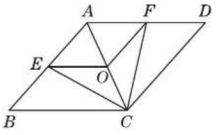


（第15题图）

16. [中考·青岛] 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E，O，F 分别为 AB，AC，AD 的中点，连接 CE，CF，OE，OF.

(1) 求证：$\triangle BCE \cong \triangle DCF$.

(2) 当 AB 与 BC 满足什么关系时，四边形 $AEOF$ 是正方形？请说明理由.

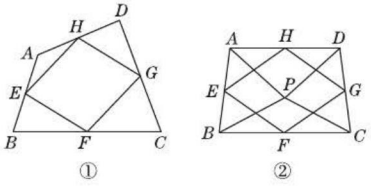


（第16题图）

17. [中考·德州] 我们给出如下定义：顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫做中点四边形.

(1) 如图①，四边形 $ABCD$ 中，点 E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



（第17题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图②,点 P 是四边形 $ABCD$ 内一点,且满足 $PA=PB$,$PC=PD$,$\angle APB=\angle CPD$. 点 E,F,G,H 分别为边 AB,BC,CD,DA 的中点. 猜想中点四边形 $EFGH$ 的形状,并证明你的猜想.

(3)若改变(2)中的条件,使 $\angle APB=\angle CPD=90°$,其他条件不变,直接写出中点四边形 $EFGH$ 的形状.(不必证明)

18. [中考·山西]综合与实践

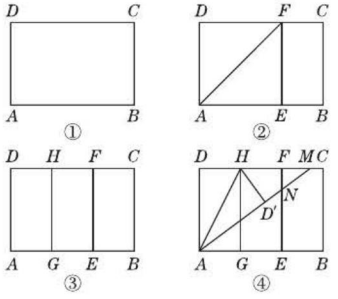
背景阅读 早在三千多年前,我国周朝数学家商高就提出:将一根直尺折成一个直角,如果勾等于三,股等于四,那么弦就等于五,即"勾三,股四,弦五". 它被记载于我国古代著名数学著作《周髀算经》中. 为了方便,在本题中,我们把三边的比为 $3:4:5$ 的三角形称为(3,4,5)型三角形. 例如:三边长分别为 9,12,15 或 $3\sqrt{2}$,$4\sqrt{2}$,$5\sqrt{2}$ 的三角形就是(3,4,5)型三角形. 用矩形纸片按下面的操作方法可以折出这种类型的三角形.

实践操作 如图①,在矩形纸片 $ABCD$ 中,$AD=8$ cm,$AB=12$ cm.

第一步:如图②,将图①中的矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 A 的直线折叠,使点 D 落在 AB 上的点 E 处,折痕为 AF,再沿 EF 折叠,然后把纸展平.

第二步:如图③,将图②中的矩形纸片再次折叠,使点 D 与点 F 重合,折痕为 GH,然后展平,隐去 AF.

第三步:如图④,将图③中的矩形纸片沿 AH 折叠,得到 $\triangle AD'H$,再沿 AD' 折叠,折痕为 AM,AM 与折痕 EF 交于点 N,然后展平.



(第 18 题图)

问题解决

(1)请在图②中证明四边形 $AEFD$ 是正方形;

(2)请在图④中判断 NF 与 ND' 的数量关系,并加以证明;

(3)请在图④中证明 $\triangle AEN$ 是(3,4,5)型三角形.

探索发现

(4)在不添加字母的情况下,图④中还有哪些(3,4,5)型三角形?请找出并直接写出它们的名称. 【导学号:1553889】

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

参考答案及点拨

第十八章 数据的收集与整理

18.1 统计的初步认识

同类变式

1. D

2. 解：

调查问卷 调查编号： 性别： 时间： 年 月 日 你最喜欢参加的课外活动是什么？				
A. 绘画	B. 音乐	C. 阅读	D. 体育	E. 其他
请在你最喜欢参加的课外活动名称下打“√”，或在“其他”一栏里写明你最喜欢参加的课外活动的名称.				

（答案不唯一）

3. 解：通过投票选举的方式对全班同学进行调查. 具体步骤如下.

第一步：明确调查问题——谁应当选班长.

第二步：确定调查对象——全班每位同学.

第三步：选择调查方法——采用投票选举的调查方法.

第四步：展开调查——每位同学将自己认为最合适的候选人的名字写在纸上投入选举箱.

第五步：记录结果——一位同学唱票，一位同学画“正”字计数，一位同学在旁边监督.

第六步：分析结果，得出结论——宣布得票数最多的那位同学当选班长. （答案不唯一）

练中考·练模拟 得满分

1. B 2. C

3. 按从左到右的顺序依次是 3，10，15，6.

4. 解：明确调查问题：喜欢音乐的学生是多还是少.

设计调查选项：喜欢、比较喜欢、无所谓、不喜欢、其他.

选择调查范围：全校学生

调查方式：问卷调查

展开调查：设计问卷、印刷问卷、选择调查的时间和地点、调查

记录结果：喜欢音乐的学生有_____名，参加调查的学生有_____名.

得出结论. （答案不唯一）

5. 解：（1）补全统计表如下：

最喜爱的球类运动	画“正”字计数	人数	百分比
排球	正正正下	18	18%
足球	正正正正正	25	25%
乒乓球	正正正正正正丅	32	32%
篮球	正正正丅	19	19%
其他	正一	6	6%
合计		100	100%

（2）应该组织学生观看乒乓球比赛.

6. 解：（1）试验及测量的方法.

（2）C 品种水稻单位面积产量最高. （答案不唯一）

7. 解：（1）调查的问题：在数学、英语、语文、其他学科中，最喜欢学习哪个学科.

（2）调查的范围：该校八年级的全体同学.

（3）最喜欢学数学的学生占学生总数的百分比为 $\frac{60}{200}\times 100\% = 30\%$.

（4）

最喜欢学习的学科	语文	英语	数学	其他
人数	40	80	60	20
占学生总数的百分比	20%	40%	30%	10%

18.2 抽样调查

同类变式

1. D 2. A

练中考·练模拟 得满分

1. B 点拨：选择普查还是抽样调查，要根据调查的对象的特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的、无法进行普查的、普查的意义或价值不大的调查，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查、事关重大的调查，往往选用普查.

2. D 点拨：A. 在公园调查，调查的对象不具有代表性；B. 在医院门诊部与住院部调查，调查的对象不具有代表性；C. 调查的人数太少；D. 样本具有代表性. 故选 D.

3. 抽样调查

4. 50 点拨：样本容量是指样本中所包含个体的数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目. 本题中小明调查了 50 户家庭对拆迁补偿方案是否满意,因而样本容量是 50.

5. **解**:(1)总体是该玉米试验田里所有玉米的单株产量,个体是该试验田里每株玉米的产量,样本是被抽取的 100 株玉米的单株产量.

(2)总体是该学校学生完成课外作业的时间,个体是该学校每名学生完成课外作业的时间,样本是被抽取的 50 名学生完成课外作业的时间.

点拨:我们在区分总体、个体、样本、样本容量这四个概念时,首先找出考察的对象,从而找出总体、个体,再根据被抽取的这一部分对象找出样本,最后根据样本确定出样本容量.

6. **解**:(1)总体是该校所有学生的体重,个体是每名学生的体重,样本是被抽取的 45 名学生的体重,样本容量是 45.

(2)①将该班 45 名学生的体重依次编号,从中随机抽取 6 名学生的体重,像这样连续做两遍,选出两个样本即可;②将该班 45 名学生的体重依次编号,从中随机抽取 15 名学生的体重,像这样连续做两遍,选出两个样本即可.

7. ①③;②④⑤ **点拨**:①调查全班学生的鞋码,调查范围小,实施普查简便易行,适合进行普查;②调查无锡市七年级学生双休日是如何安排的,调查对象范围太大,不宜进行普查,应选择抽样调查;③调查学校大门两侧 100 米内有没有开网吧,调查范围小,实施普查简便易行,且又能得到较准确的数据,适合进行普查;④电视台调查某部电视剧的收视率,调查对象范围太大,不宜进行普查,应选择抽样调查;⑤质量监督部门调查某种电子产品的质量,调查范围广,难度大,适合进行抽样调查. 综上可得:①③适合进行普查,②④⑤适合进行抽样调查.

8. 不可靠,因为选取的样本不具有代表性和广泛性.

点拨:抽样调查选取的样本必须具有代表性和广泛性,这个厂家只是在经销本厂产品的三个商场进行了调查,不能代表其他商场的销售数据.

9. 总体是该市一年的空气质量,样本是该同学记录的 30 天的空气质量.

10. **解**:(1)小明的调查是抽样调查.

(2)总体是该校全体同学的身高;个体是该校每名学生的身高;样本是小明座位旁边的 3 名同学的身高;样本容量是 3.

(3)这次调查不能较好地反映总体的情况.

理由:一是样本容量太小,二是坐在一起的同学身高都比较接近,所以这样选取的样本缺乏代表性.

18.3 数据的整理与表示

同类变式

1. D **点拨**:扇形统计图不能直接找到相应项目的数目. 故选 D.

练中考·练模拟 得满分

1. B **点拨**:人数最多的课外兴趣小组即占百分比最大的课外兴趣小组.

2. B **点拨**:A. 从统计图中看出,小颖的睡觉时间是 8 小时,活动时间是 4 小时,所以小颖的活动时间是睡觉时间的一半是正确的;B. 小颖学习时间是 9 小时,不一定都是在学校里学习的,所以小颖这天在校时间是 9 小时不一定正确;C. 从统计图中可以看出,小颖一天中吃饭的时间是 1.5 小时是正确的;D. 小颖学习的时间占整天时间的百分比为 $9 \div 24 \times 100\% = 37.5\%$,所以 D 是正确的. 故选 B.

3. B **点拨**:根据统计图,2015 年我国与东欧地区的贸易额是 1 332.0 亿美元,2016 年是 1 368.2 亿美元,1 332.0 < 1 368.2,有所增长,故选项 A 正确;2011 ~ 2014 年,我国与东南亚地区的贸易额逐年增长,但 2014 ~ 2016 年有所下降,故选项 B 错误;根据数据计算,2011 ~ 2016 年我国与东南亚地区的贸易额的平均值约为4 358.1 亿美元,故选项 C 正确;2016 年,我国与东南亚地区的贸易额是 4 554.4 亿美元,我国与东欧地区的贸易额是 1 368.2 亿美元,$4\,554.4 \div 1\,368.2 \approx 3.3$,故选项 D 正确. 故选 B.

4. 扇形统计图

5. 七 **点拨**:根据统计图易知人数最多的是七年级.

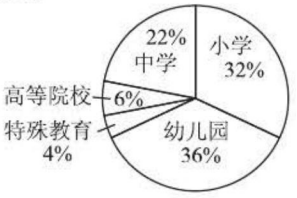
6. 甲 **点拨**:2 月份时两个商场的销售量都是 50 台. 甲商场从 2 月份到 6 月份销售量增加了 500 - 50 = 450(台),乙商场从 2 月份到 6 月份销售量增加了 350 - 50 = 300(台). 所以甲商场销售量增长较快.

7. **解**:(1)幼儿园:$360° \times 36\% = 129.6°$. 小学:$360° \times 32\% = 115.2°$. 中学:$360 \times 22\% = 79.2°$.

特殊教育:$360° \times 4\% = 14.4°$.

高等院校:$360° \times 6\% = 21.6°$.

(2)如图所示.



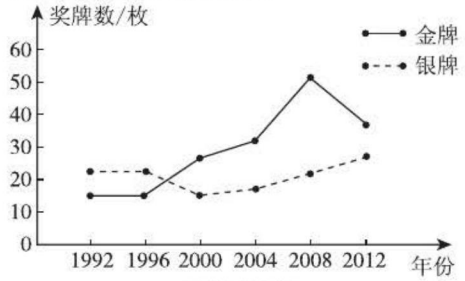
(第 7 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:(1)我国运动员共获得(16+22+16)+(16+22+12)+(28+16+15)+(32+17+14)+(51+21+28)+(38+27+23)=414(枚)奖牌.

(2)2008 年奥运会上我国运动员获得的奖牌数最多.

(3)折线统计图如图所示.



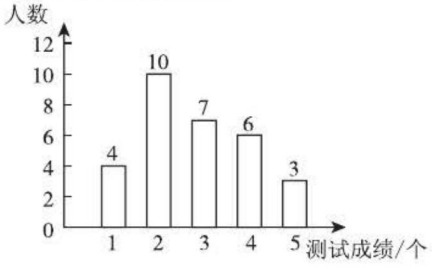
(第 8 题图)

9. 解:(1)选择条形统计图.

列表:

测试成绩/个	人数
1	4
2	10
3	7
4	6
5	3

所画的统计图如图所示:



(第 9 题图)

(2)①成绩为 5 个的有 3 人

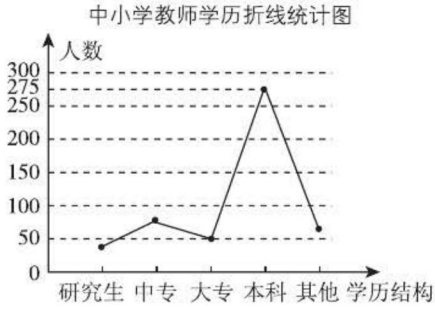
②成绩为 2 个的人数最多

点拨:首先整理题目中统计的数据,然后根据题意选择合适的统计图来表示这些数据,最后通过分析统计图,得出相关的信息.(2)题答案不唯一.

10. 解:(1)这次调查的教师共有 275÷55%=500(人).

(2)大专学历的教师人数为 500×10%=50.

补全折线统计图如图.



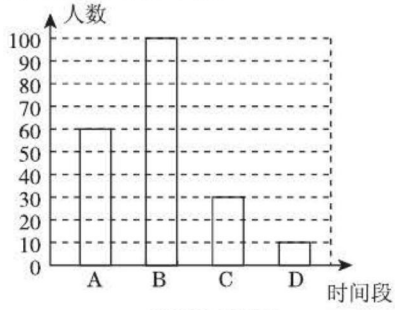
(第 10 题图)

11. 解:(1)抽样调查

(2)本次调查的学生有 60÷30%=200(人),选项 C 所在扇形的圆心角度数为 $360° \times \frac{30}{200} = 54°$.

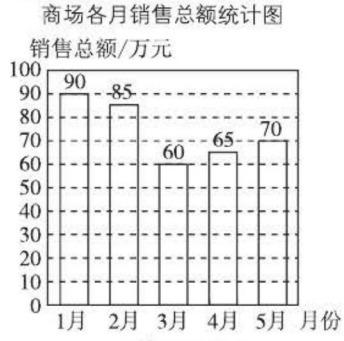
(3)选项 B 对应的人数:200−60−30−10=100.

补全条形统计图如图所示.



(第 11 题图)

12. 解:(1)补全条形图如图所示.



(第 12 题图)

两条信息:一、该商场 1 月份的销售总额最多;二、该商场 3 月份的销售总额最少.(获得的信息不唯一,符合题意即可)

(2)该商场服装部 5 月份的销售额是 70×15%=10.5(万元).

(3)李强的看法不对.5 月份服装部的销售额为 10.5 万元,而 4 月份服装部的销售额为 65×

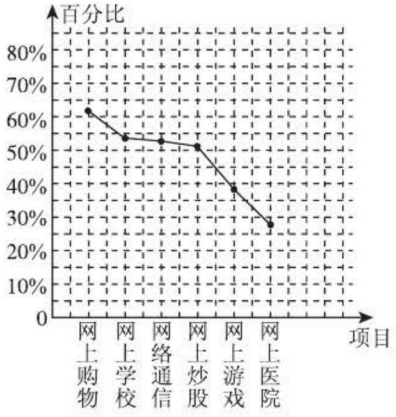
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16% = 10.4(万元),10.5 万元 > 10.4 万元,所以李强的看法不对.

13. 解:(1)从上到下依次填:50;30;10

(2)2014 年利润率为 $10 \div 100 \times 100\% = 10\%$,2015 年利润率为 $30 \div 250 \times 100\% = 12\%$,2016 年利润率为 $50 \div 300 \times 100\% \approx 16.7\%$,∵ 16.7% > 12% > 10%,∴ 2016 年的利润率最高.

14. 解:(1)如图所示.



(第 14 题图)

(2)这个调查表不能用扇形统计图表示. 因为各部分百分比之和不是 1.

(3)还能用条形统计图来表示.

18.4 频数分布表与直方图

练中考·练模拟 得满分

1. C 点拨:因为 $\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}} = 8\frac{8}{9}$,所以应分成 9 组.

2. A 点拨:在频数分布直方图中,小长方形的高随频数的增加而增加;随频数的减小而减小.

3. 90

4. 解:(1)因为 4 + 8 + 10 + 16 + 12 = 50(名),所以该班有 50 名学生.

(2)因为 $\frac{3+16+12}{50} \times 100\% = 62\%$,所以该班学生成绩的优秀率是 62%.

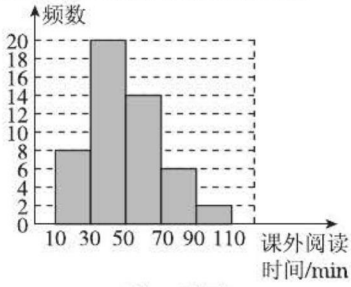
点拨:(1)直接把各个小组的频数相加即可得到该班的学生总数.

(2)由于成绩不低于 80 分为优秀,且该班有 3 名学生的成绩为 80 分,而 80 分以上的学生有 16 + 12 = 28(名),因此可得该班学生成绩为优秀的人数,然后除以总人数乘 100% 即可求解.

5. 解:(1)补全表格如下.

组别	分组	频数	频率
1	$10 \leqslant t < 30$	8	0.16
2	$30 \leqslant t < 50$	20	0.40
3	$50 \leqslant t < 70$	14	0.28
4	$70 \leqslant t < 90$	6	0.12
5	$90 \leqslant t < 110$	2	0.04

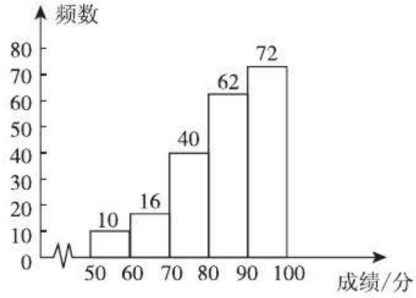
(2)画出频数分布直方图,如图所示.



(第 5 题图)

6. 20

7. 解:(1)40 补全频数分布直方图如图.

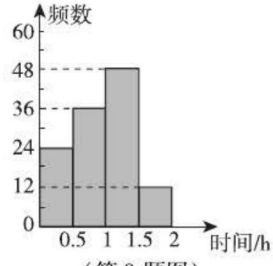


(第 7 题图)

(2)这次抽查的学生中,有 40 + 62 = 102(人)的参赛成绩被评为"B".

8. 解:(1)120;0.1

(2)补全频数分布直方图如图.



(第 8 题图)

(3)估计该校学生每天课外阅读时间超过 1 h 的人数为 1 200 × (0.4 + 0.1) = 600.

9. 解:(1)12;0.2 图略. (2)360° × 0.2 = 72°.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

中考提分专题篇

好题必解

一、1. B　2. C　3. D　4. A　5. A　6. B　7. D

二、8. 普查

9. 这 1 000 台风扇中每台风扇的使用寿命；抽取的 10 台风扇的使用寿命；10

10. 2016；2015　**点拨**：本题考查统计图的应用. 从条形统计图中可知，2014 年年净增长 20 万辆，2015 年年净增长 30 万辆，2016 年年净增长 33 万辆，所以 2016 年的年净增长量最多；在折线统计图中，2015 年的年增长率为 25%，所以年增长率最大的是 2015 年.

11. 不具有

12. 100　13. 12

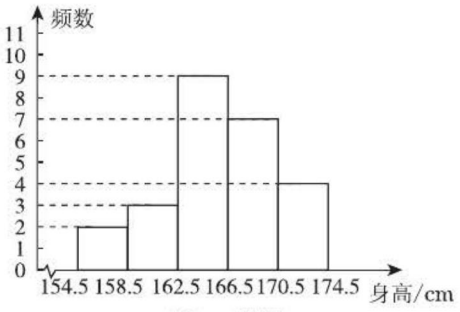
三、14. **解**：普查：(1)(4).

抽样调查：(2)(3)(5).

15. **解**：(1)频数分布表如下.

组别	154.5 ~ 158.5	158.5 ~ 162.5	162.5 ~ 166.5	166.5 ~ 170.5	170.5 ~ 174.5
画“正”字计数	丅	下	正丅	正丅	丅
频数	2	3	9	7	4

(2)根据上表绘制频数分布直方图，如图所示.



(第 15 题图)

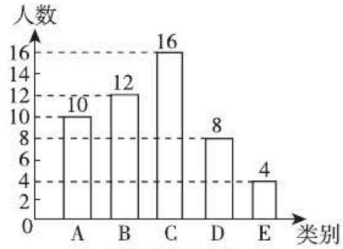
16. **解**：(1)第一组的频率为 1 − 96% = 4%，即 0.04，所以第二组的频率为 0.12 − 0.04 = 0.08，所以这次共调查了 12 ÷ 0.08 = 150(人).

(2)由从左至右第二、三、四组的频数比为 4∶17∶15，第二组的频数是 12，得第三、四组的频数分别是 51，45，根据题意，得第一组的频数为 150 × 0.04 = 6. 所以这次测试成绩的优秀率是 $\frac{150-6-12-51-45}{150}\times 100\% = 24\%$.

17. **解**：(1)50

(2)补全条形统计图如图.

学生寒假在家做家务的总时间条形统计图



(第 17 题图)

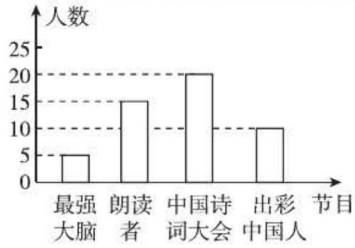
(3)32；57.6

(4)800 × (1 − 20% − 24%) = 448(名).

答：估计该校有 448 名学生寒假在家做家务的总时间不低于 20 小时.

18. **解**：(1)50；20；30　(2)如图.

学生最喜爱的电视节目条形统计图



(第 18 题图)

(3)1 000 × 40% = 400(名).

答：估计该校最喜爱《中国诗词大会》节目的学生有 400 名.

第十九章 平面直角坐标系

19.1 确定平面上物体的位置

同类变式

1. (6，7)；8 排 6 号

2. (2，2) → (3，2) → (4，2) → (5，2) → (5，3) → (5，4)(答案不唯一)

练中考·练模拟 得满分

1. C　2. C　3. D　4. 140　5. (8，4)

6. **解**：答案不唯一，如(3，1) → (2，1) → (2，2) → (2，3) → (1，3)；(3，1) → (2，1) → (2，2) → (1，2) → (1，3)；(3，1) → (3，2) → (2，2) → (1，2) → (1，3)；(3，1) → (3，2) → (2，2) → (2，3) → (1，3).

7. **解**：(1)点 $C(2,2)$ 表示放置 2 个萝卜、2 棵青菜；点 $D(3,2)$ 表示放置 3 个萝卜、2 棵青菜；点 $E(3,1)$ 表示放置 3 个萝卜、1 棵青菜；点 $F(4,1)$ 表示放置 4 个萝卜、1 棵青菜.

(2)选择路径③吃到的萝卜最多；

选择路径①吃到的青菜最多.

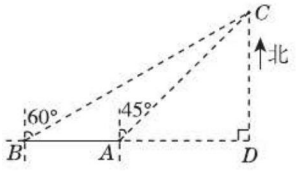
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. D **9.** (13,14) **10.** (6,5)

11. **解**:(1)略. (2)给机器人下的指令为(3,20°).

12. **解**:(1)C 地的位置如图所示.

(2)如图,过点 C 作 $CD\perp BA$,交 BA 的延长线于点 D,设 $CD=AD=x$ km,∵ $AC=10\sqrt{2}$ km,∴ $2x^2=200$.∴ $x=10$.∵ $\angle CBD=90°-60°=30°$,∴ $BC=2CD=20$ km.∴ B 地与 C 地之间的距离为 20 km.



(第 12 题图)

13. **解**:(2,3)表示"皇后 Q"在第 2 列第 3 行的空格中,此时不能被"皇后 Q"所控制的四个位置分别是(1,1),(3,1),(4,2),(4,4).

19.2 平面直角坐标系

同类变式

1. C

2. **解**:$A(-3,2)$,$B(4,3)$,$C(-1,-4)$,$D(1,2)$,$E(-4,0)$,$F(0,-2)$,$O(0,0)$.

方法总结:已知坐标平面内的点,求其坐标的方法:先由已知点分别向 x 轴、y 轴作垂线,设垂足分别为 A,B,再求出垂足 A 在 x 轴上的坐标 a 和垂足 B 在 y 轴上的坐标 b,最后按顺序写成 (a,b) 的形式即可.

3. **解**:过 B 点作 x 轴的垂线,垂足为 M 点,则 $BM=2$,由题意得 $\frac{1}{2}\cdot OA\cdot 2=2$. 解得 $OA=2$. 若 A 在 O 左侧,则 A 为 $(-2,0)$,若 A 在 O 右侧,则 A 为 $(2,0)$.

4. (1) $-\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5}$ (2) $\frac{7}{5}$ **点拨**:(1)由题意知 $\begin{cases}a+2b=-2,\\2a-b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{5},\\b=-\frac{3}{5}.\end{cases}$ (2)由题意知 $\begin{cases}a+2b=2,\\2a-b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{4}{5},\\b=\frac{3}{5}.\end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{7}{5}$.

练中考·练模拟 得满分

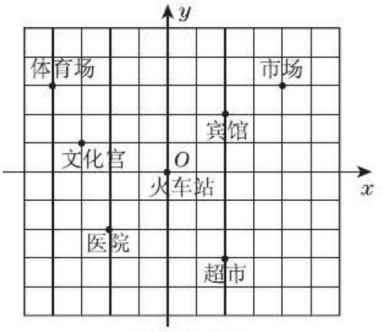
1. A **点拨**:点 P 的横坐标大于 0,纵坐标大于 0,故点 $P(4,3)$ 位于第一象限.

2. D

3. D **点拨**:两数相乘,异号得负,故 x,y 异号,即 $x>0$,$y<0$ 或 $x<0$,$y>0$. 故选 D.

4. B **5.** A **6.** 5

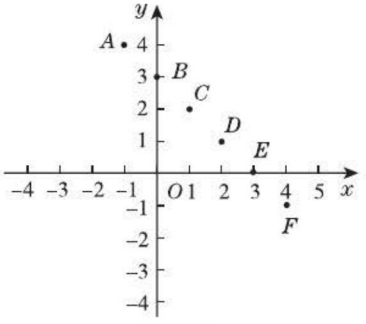
7. **解**:建立平面直角坐标系,如图所示.



(第 7 题图)

火车站(0,0),医院(−2,−2),文化宫(−3,1),体育场(−4,3),宾馆(2,2),市场(4,3),超市(2,−3).

8. **解**:如图所示. 这 6 个点在一条直线上;横坐标 x 和纵坐标 y 之间的关系是 $x+y=3$.



(第 8 题图)

9. A

10. 四 **点拨**:因为 $m^2+2>0$,$-4<0$,所以点 $P(m^2+2,-4)$ 一定在第四象限.

11. (−2,2)或(2,2)

12. 4 或 −4 **点拨**:由直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积等于 10,可知 $\frac{1}{2}OA\cdot OB=10$,即 $\frac{1}{2}|a|\times 5=10$,所以 $|a|=4$.

所以 $a=4$ 或 -4.

13. (−504,−504) **点拨**:依题意并结合图形可知:点 A_2,A_6,A_{10},A_{14},…,A_{4n-2} 在第一象限角平分线上;点 A_3,A_7,A_{11},A_{15},…,A_{4n-1} 在第二象限角平分线上;点 A_4,A_8,A_{12},A_{16},…,A_{4n} 在第三象限角平分线上. 由 $2\,016=504\times 4$ 可知,点 $A_{2\,016}$ 在第

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

三象限角平分线上，而此象限内点的横、纵坐标都是负数，且角平分线上的点的横、纵坐标相等，故点 $A_{2\,016}$ 的坐标为 $(-504,-504)$.

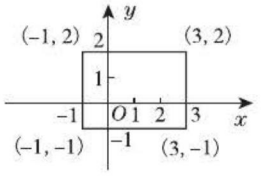
19.3 坐标与图形的位置

练中考·练模拟 得满分

1. B

2. A　**点拨**：由题意易知点 A,C 关于原点对称，点 B,D 关于原点对称，所以 C 点坐标为 $(2,1)$，D 点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$. 故选 A.

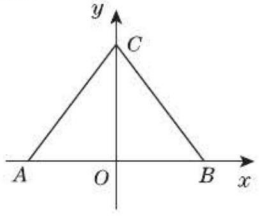
3. $(3,2)$　方法规律：如图所示，本题运用数形结合思想，通过画出长方形在直角坐标系中的位置，很容易看出第四个顶点的坐标.



（第 3 题图）

4. $(0,3)$ 或 $(0,-3)$　方法规律：本题运用分类讨论思想，由已知得 $AB=4$，设 C 点的坐标为 $(0,h)$，则三角形 ABC 的面积 $=\frac{1}{2}\times AB\times|h|=6$，所以 $|h|=3$，所以 $h=\pm3$，所以 C 点的坐标为 $(0,3)$ 或 $(0,-3)$.

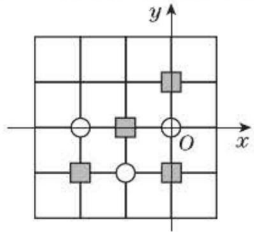
5. 解：如图所示，以线段 AB 所在的直线为 x 轴，线段 AB 的中点 O 为坐标原点，过 O 点且垂直于 AB 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 因为 $AC=5$，$AO=\frac{1}{2}AB=3$，所以由勾股定理得 $OC^2=AC^2-AO^2=5^2-3^2=4^2$，所以 $OC=4$，所以 A 点的坐标为 $(-3,0)$，B 点的坐标为 $(3,0)$，C 点的坐标为 $(0,4)$.



（第 5 题图）

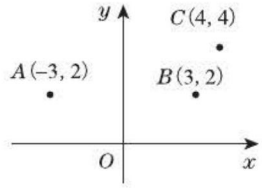
点拨：以线段 AB 的中点 O 为坐标原点，线段 AB 所在直线为 x 轴，过点 O 且垂直于 AB 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，这样容易写出三角形各顶点的坐标. 本题答案不唯一.

6. B　**点拨**：本题考查轴对称图形和坐标位置的确定. 棋盘中心方子的位置用 $(-1,0)$ 表示，则这点所在的横线是 x 轴，右下角方子的位置用 $(0,-1)$ 表示，则这点所在的纵线是 y 轴，建立直角坐标系如下图，由图可知，当小莹将第 4 枚圆子放在棋盘中心方子正上方的一格的位置时符合题意，即她放的位置是 $(-1,1)$ 时构成轴对称图形. 故选 B.



（第 6 题图）

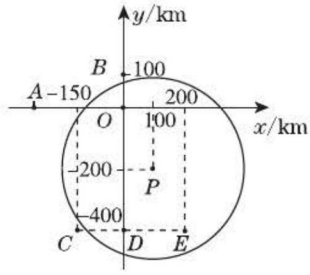
7. 解：如图所示.



（第 7 题图）

8. 解：(1) 如图所示.

(2) 城市 O,A,B,C,D,E 如图所示. 从图中可知，城市 O,D,E 会受到地震影响，而城市 A,B,C 不会受到地震影响.



（第 8 题图）

19.4 坐标与图形的变化

同类变式

1. $(-2,2)$

2. A　**3.** A

练中考·练模拟 得满分

1. B　**点拨**：向右平移 3 个单位长度，即横坐标增加 3，纵坐标不变.

2. A　**点拨**：将四边形 $ABCD$ 先向左平移 3 个单位

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

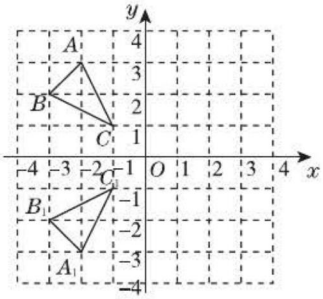
长度,再向上平移2个单位长度后,点A的横坐标变为0,纵坐标变为1. 所以点A'的坐标为(0,1). 故选A.

3. D **点拨**:横、纵坐标都乘2,所得图形形状不变,面积扩大为原来的4倍.

4. C **5.** $(-2,1)$

6. **解**:(1)点A的坐标为$(-2,3)$.

(2)$\triangle A_1B_1C_1$如图所示,$A_1(-2,-3)$,$B_1(-3,-2)$,$C_1(-1,-1)$.

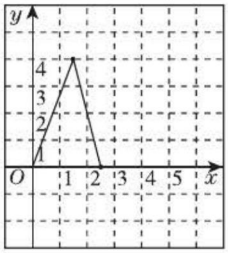


(第6题图)

7. B **点拨**:根据题意,得点A,C关于y轴对称,则它们的横坐标互为相反数,所以点C的横坐标是-2.

8. $(7,0)$

9. **解**:都乘$\frac{1}{2}$;保持不变;所得图案如图所示,与原三角形相比,新三角形被横向压缩为原来的一半.



(第9题图)

点拨:本题属于开放题,答案不唯一. 在横线上填上合适的条件,然后根据所填的条件解题即可.

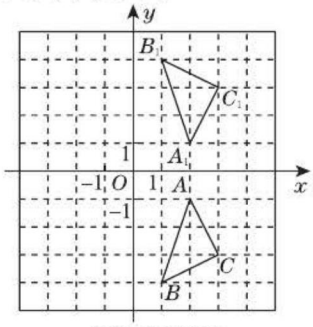
10. **解**:(1)线段CD上任意一点的坐标可用$(-1,y)(0\leqslant y\leqslant 4)$表示.

(2)把线段AB向上平移2.5个单位长度后,所得的线段上任意一点的坐标可用$(x,1.5)(1\leqslant x\leqslant 5)$表示.

(3)把线段CD向左平移3个单位长度后,所得的线段上任意一点的坐标可用$(-4,y)(0\leqslant y\leqslant 4)$表示.

11. **解**:(1)建立的平面直角坐标系如图所示,其中C点的坐标为$(3,-3)$.

(2)所作图形如图所示,其中A_1,B_1,C_1的坐标分别为$(2,1)$,$(1,4)$,$(3,3)$.



(第11题图)

中考提分专题篇

好题必解

一、1. D **2.** B **3.** C **4.** C **5.** A

二、6. $x>0$ **7.** 4 **8.** $(10,8\sqrt{3})$

9. O_1 **10.** $(5,-5)$

三、11. **解**:(1)$A(2,3)$,$B(2,-3)$,$C(-4,-3)$,$D(-4,3)$.

(2)略. (3)正方形.

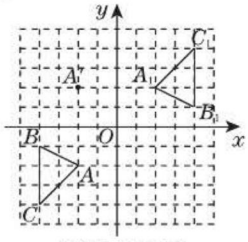
12. **解**:(1)$(1,5)$或$(5,1)$或$(7,7)$.

(2)8.

13. **解**:(1)$(8,0)$或$(-2,0)$.

(2)$(3,5)$或$(3,-5)$.

14. **解**:(1)如图.



(第14题图)

(2)点A'如图所示,a的取值范围是$4<a<6$.

15. **解**:$\because A(1,1)$,$B(3,1)$,$\therefore AB\parallel x$轴,$AB=3-1=2$,作$CM\perp AB$,设垂足为M,交x轴于点N,则$AM=1$,$MN=1$,$\because AB=2$,$\therefore AC=2$,$\therefore CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{3}$,$\therefore C(2,\sqrt{3}+1)$. 由题意可知:

经过1次变换,点C在x轴下方,到x轴的距离为$\sqrt{3}+1$,横坐标比第1次变换前减少1;

经过2次变换,点C在x轴上方,到x轴的距离为$\sqrt{3}+1$,横坐标比第1次变换前减少2;

经过3次变换,点C在x轴下方,到x轴的距离为$\sqrt{3}+1$,横坐标比第1次变换前减少3;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

经过4次变换，点 C 在 x 轴上方，到 x 轴的距离为 $\sqrt{3}+1$，横坐标比第1次变换前减少4；

……

经过2 016次变换，点 C 在 x 轴上方，到 x 轴的距离为 $\sqrt{3}+1$，横坐标比第1次变换前减少2 016，

∴ 经过2 016次变换后，点 C 的横坐标为 $2-2\,016=-2\,014$，纵坐标为 $\sqrt{3}+1$，即 $C(-2\,014,\sqrt{3}+1)$.

第二十章 函 数

20.1 常量和变量

练中考·练模拟 得满分

1. D 方法规律：本题运用定义法解答，根据常量和变量的定义，知 C,R 是变量，$2,\pi$ 是常量，故选D. 注意题中容易错把 π 看成变量.

2. D

3. A 点拨：根据题意得 $y=70x$，∴ 常量是70. 故选A.

4. 单价；数量，金额

5. v_0，2；s,t

6. x,y；90

7. (1) $y=3x$

(2) 3；x,y

点拨：(1) 由 $y=\frac{1}{2}\times 6x$，得 $y=3x$. (2) 常量是3，变量是 x 与 y.

8. 解：(1) 根据物理知识，知 $m=\rho V(\rho=7.8\ \mathrm{g/cm^3})$，所以，$m$ 和 V 是变量，ρ 是常量.

(2) S 和 a 是变量，2是常量.

(3) s 与 t 是变量，v 是常量.

方法规律：本题运用定义法解答. 根据“常量是在某一变化过程中，数值保持不变的量；变量是在某一变化过程中，可以取不同数值的量”，对各小题分析判断即可.

9. $n=120t$；t,n；120

10. 解：40，0.6，−50是常量，x,y 是变量.

11. (1) a；t,s

(2) t；a,s

(3) s；a,t

(4) 常量和变量在一个变化过程中是相对存在的

12. 解法一：每个数都减去1，得出的新数分别是0，3，6，9，12，15，18，…，发现每个数都是序号 n 减去1的差的3倍，因此原来的数 W 与序号 n 的关系是 $W=3(n-1)+1=3n-2$（其中 n 是正整数），常量是3与−2，变量是 W 与 n.

解法二：每一个数都加上2，得出的新数分别是3，6，9，12，15，18，21，…，发现每个数都是序号 n 的3倍，因此原来的数 W 与序号 n 的关系是 $W=3n-2$（其中 n 是正整数）. 常量是3与−2，变量是 W 与 n.

方法规律：探究一列数与序号的关系时，可以通过加上或减去适当的数，凑成序号的整数倍，从而得出数与序号的关系，得到一般规律. 本题体现了由特殊到一般的思想.

13. 解：(1) 这个图像反映了人的体温 T(℃) 与时间 t(h) 之间的关系.

(2) 由图像可知，最高体温是在17时，最低体温是在0时.

(3) 一昼夜间体温变化的幅度约为 $37.2-35.2=2$(℃).

点拨：由平面直角坐标系的知识可求出体温最高和最低的时间.

14. 解：观察表格，可以发现大米的价格是每千克4.8元，因此当 $0<x\leqslant 5$ 时，y 与 x 之间的关系式是 $y=4.8x+0.5$，常量是4.8和0.5，变量是 x 和 y；当 $5<x\leqslant 10$ 时，y 与 x 之间的关系式是 $y=4.8x+1$，常量是4.8和1，变量是 x 和 y；当 $10<x\leqslant 15$ 时，y 与 x 之间的关系式是 $y=4.8x+1.5$，常量是4.8和1.5，变量是 x 和 y；当 $15<x\leqslant 20$ 时，y 与 x 之间的关系式是 $y=4.8x+2$，常量是4.8和2，变量是 x 和 y.

20.2 函 数

同类变式

1. ①②③

2. (1) 9

(2) $2\sqrt{6}$

练中考·练模拟 得满分

1. A 点拨：∵ 制动距离 $s=\frac{v^2}{256}$，∴ s 随着 v 的变化而变化. ∴ 变量是 s,v.

2. D **3.** D **4.** 3

5. 解：(1) $\alpha=(n-2)\cdot 180°$，$n\geqslant 3$，且 n 为整数.

(2) $Q=80-4t$，$0\leqslant t\leqslant 20$.

(3) $y=\frac{150}{x}$，$x>0$.

6. C **7.** D

8. 20 点拨：由该用户5月份交水费45元易知5月份用水量超过了18立方米，设用水量为 x 立方米，水费为 y 元，则 $y=39+3(x-18)$. 当 $y=45$ 时，$x=20$，即用水量为20立方米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)由长方形的周长公式,

得 $y=2(x+16)$,

即 $y=2x+32$.

(2)由长方形的面积公式,

得 $S=16x$.

(3)当 $S=160$ 时,

$x=10$, $y=52$.

(4)因为 $y=2x+32$,

所以当 x 增加 2 时,y 增加 4;

因为 $S=16x$,

所以当 x 增加 2 时,S 增加 32.

点拨:解决该题的关键是根据长方形的周长公式和面积公式写出 y 和 x,S 和 x 之间的函数关系式.

10. 解:(1)15

(2)$y=2^x-1$.

(3)对折 10 次后的折痕条数为 $2^{10}-1=1\,023$.

方法规律:解决此类问题的关键是找出折痕的条数与对折次数之间的关系. 本题巧妙地由特殊情况(对折 1 次、2 次、3 次、4 次时,折痕的条数与对折次数的关系)总结出一般规律,然后再运用此规律求出结果.

20.3 函数的表示

同类变式

1. 解:∵ 点(1,2)同时在关于 x 的函数 $y=ax+b$ 与 $y=\dfrac{x-b}{a}$ 的图像上,

$$\therefore \begin{cases} 2=a+b, \\ 2=\dfrac{1-b}{a}, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=3. \end{cases}$

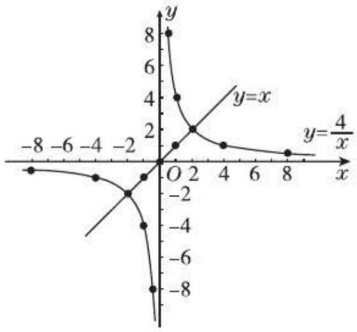
$\therefore 2a-b=2\times(-1)-3=-2-3=-5$.

2. 解:列表如下:

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=x$	…	-2	-1	0	1	2	…

x	…	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$y=\frac{4}{x}$	…	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	…

描点、连线,如图所示.



(第 2 题图)

3. 解:(1)0;10;30;30;0

(2)能 (3)风速 y 可以看成时间 t 的函数.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** C **3.** C

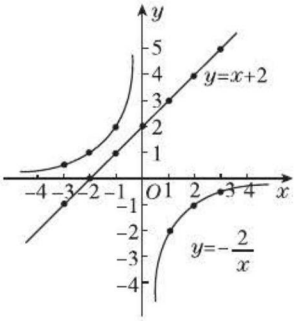
4. 1

5. (1)100 (2)甲 (3)$\dfrac{20}{3}$

6. 解:列表:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x+2$	…	-1	0	1	2	3	4	5	…
$y=-\frac{2}{x}$	…	$\frac{2}{3}$	1	2	不存在	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	…

描点、连线,如图.



(第 6 题图)

7. 解:(1)当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,$y=2.5x$;

当 $x>20$ 时,$y=3.3(x-20)+2.5\times 20$,即 $y=3.3x-16$.

(2)∵ 该户 4 月份水费平均为每吨 2.8 元,

∴ 该户 4 月份用水超过 20 吨.

设该户 4 月份用水 a 吨,

得 $2.8a=3.3a-16$,解得 $a=32$.

即该户 4 月份用水 32 吨.

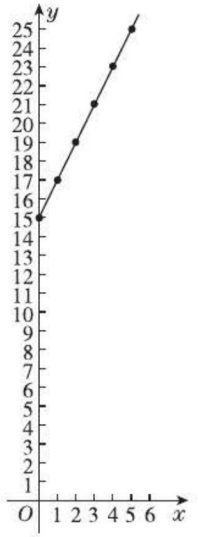
8. 解:(1)$y=15+2x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)列表:

x	0	1	2	3	4	5	…
$y=15+2x$	15	17	19	21	23	25	…

描点、连线,函数图像如下所示.



(第8题图)

(3)当 $x=6$ 时,$y=15+2\times6=27$,则第6年的年产值为27万元.

9. D　**点拨**:本题考查函数图像的应用. 从图像可知,小林比小苏先到达终点,故选项A错误;两人所跑路程一样,而小林用的时间比小苏少,所以小林跑全程的平均速度大于小苏跑全程的平均速度,故选项B错误;因第15秒时两人都是在折返后往起跑线跑,小林距起跑线的距离小,说明此时小林所跑过的路程比小苏的长,故选项C错误;从图像可知,他们两人在小林跑最后100米过程中相遇2次,故选项D正确. 故选D.

10. D　**11.** D

12. **解**:(1)∵ 丁丁骑自行车的速度为 $\frac{8}{0.5}=16$(千米/时),

∴ 丁丁家与外婆家的距离为 $16\times(2-0.5)=24$(千米).

(2)妈妈驾车的速度是 $\frac{24}{2-1.5}=48$(千米/时),

∵ $48\div16=3$,

∴ 妈妈驾车的速度是丁丁骑自行车速度的3倍.

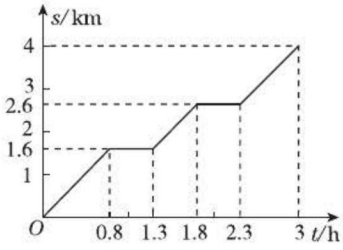
点拨:(1)由丁丁在开始的0.5小时骑了8千米可计算出骑车的速度为16千米/时,再从图像中找出他到外婆家共骑车的时间,然后计算丁丁家与外婆家的距离;(2)从图像可得到妈妈驾车用了$(2-1.5)$小时,进而可计算出驾车的速度,从而得到答案.

13. **解**:(1)由题意可知甲步行的速度为 $\frac{1.6}{0.8}=2$(km/h).

因此甲在每个景点逗留的时间为 $1.8-0.8-\frac{2.6-1.6}{2}=0.5$(h). 甲步行的总时间为 $3-0.5\times2=2$(h),

∴ 甲的总行程为 $2\times2=4$(km).

补全图像如图.



(第13题图)

(2)C,E 两点间的路程为 $4-1.6-1-0.8=0.6$(km).

(3)他们的约定能实现.

理由如下:乙游览的最短路线为 $A\to D\to C\to E\to B\to E\to A$(或 $A\to E\to B\to E\to C\to D\to A$),总行程为 $1.6+1+0.6+0.4\times2+0.8=4.8$(km).

乙游完三个景点后回到 A 处的总时间为 $\frac{4.8}{3}+0.5\times3=3.1$(h),

∴ 乙比甲晚6 min回到 A 处.

∴ 他们的约定能实现.

方法规律:(1)本题巧妙地运用了数形结合思想解题,由函数图像("形")可以确定出甲步行的速度("数"),再根据甲步行速度和所用总时间可以确定出甲在每个景点逗留的时间,然后根据此时间("数")可以有效地补全函数图像("形"). (2)找准切入点是解题的关键,本题根据函数图像提供的信息计算出甲的速度是解决问题的基础.

20.4　函数的初步应用

同类变式

1. **解**:(1)由 BD 的长为 x,得 $CD=10-x$,依题意得,$y=\frac{1}{2}\times(10-x)\times6$,即 $y=-3x+30$.

(2)∵ $\triangle ABC$ 的边 BC 的长是10,且 BD 的长非负,即 $x\geqslant0$,

∴ 自变量 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant10$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)当 $x=2.5$ 时,$\triangle ACD$ 的面积 $y=-3\times2.5+30=22.5$.

(4)将 $y=6$ 代入 $y=-3x+30$,得 $6=-3x+30$,解得 $x=8$,即当 $\triangle ACD$ 的面积 $y=6$ 时,BD 的长为 8.

方法规律:解答本题运用了方程思想,$\triangle ACD$ 的边 $CD=10-x$,该边上的高为 6,根据三角形面积公式建立函数关系式是解题的关键.

练中考·练模拟 得满分

1. B **点拨**:根据图像可知,当 $y<0$,即直线在 x 轴下方时,对应的 x 的取值范围是 $x>-2$. 故选 B.

2. A **点拨**:依题意有 $y=50\div2-x=-x+25$. 故选 A.

3. $y=x+39$($1\leqslant x\leqslant60$,且 x 为整数)

点拨:根据"第一排站 40 人,后面每一排都比前一排多站 1 人"可列出 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=40+(x-1)\times1$,整理即可得解. 注意自变量 x 的取值范围是 $1\leqslant x\leqslant60$,且 x 为整数.

4. $y=0.5x+12$

5. **解**:(1)l_2;30;20

(2)设甲出发 x h 后,两人恰好相距 5 km,

①若相遇前两人相距 5 km,则可列方程为 $30x+20(x-0.5)+5=60$,解得 $x=1.3$;

②若相遇后两人相距 5 km,则可列方程为 $30x+20(x-0.5)-5=60$,解得 $x=1.5$.

答:甲出发 1.3 h 或 1.5 h 后,两人恰好相距5 km.

6. **解**:(1)$\frac{x+3}{5}$

(2)当 $x=-6$ 时,$y=\frac{-6+3}{5}=-\frac{3}{5}$.

(3)由题意得 $x=\frac{x+3}{5}$,解得 $x=\frac{3}{4}$. ∴ 当输入的 x 为 $\frac{3}{4}$ 时,输入的值和输出的结果相等.

方法规律:解决本题的关键是得到 y 与 x 之间的关系式,解答本题主要体现了方程思想.

7. **解**:(1)36 (2)9 (3)3 时~15 时

(4)次日凌晨 1 时的气温大约是 25 ℃.(答案不唯一,预测合理即可)

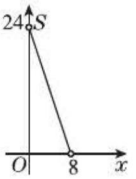
8. **解**:(1)由题意可知,$\triangle AOB$ 的边 OA 上的高为点 B 的纵坐标. 又∵ $x+y=8$,∴ $y=8-x$. ∴ $S=\frac{1}{2}OA\cdot y=\frac{1}{2}\times6\times(8-x)=24-3x$. ∵ 点 B 在第一象限内,

∴ $x>0$,$y=8-x>0$,

解得 $0<x<8$.

∴ $S=24-3x(0<x<8)$.

(2)函数图像如图所示.



点拨:(1)根据三角形的边 OA 上(第 8 题图)的高为点 B 的纵坐标,利用三角形的面积公式表示出两个变量之间的关系即可;(2)根据函数关系式和自变量的取值范围作出直线的一部分(避免作出直线或射线)即可.

9. 78 **点拨**:由图可以看出 A,B 两地的距离是 16 km,甲行驶 1 km 用了 6 min,所以甲的速度是 $1\div6=\frac{1}{6}$(km/min),

设乙的速度是 x km/min,

由题意得,$10x+16\times\frac{1}{6}=16$,

解得 $x=\frac{4}{3}$.

相遇后乙到达 A 地还需 $\left(16\times\frac{1}{6}\right)\div\frac{4}{3}=2$(min),

相遇后甲到达 B 地还需 $\left(10\times\frac{4}{3}\right)\div\frac{1}{6}=80$(min),

当乙到达终点 A 时,甲还需 $80-2=78$(min)到达终点 B,

故答案为 78.

根据路程与时间的关系,可得甲、乙的速度,用相遇前甲行驶的路程除以乙行驶的速度,可得相遇后乙到达 A 地还需要的时间,用相遇前乙行驶的路程除以甲行驶的速度,可得相遇后甲到达 B 地还需要的时间.

10. **解**:(1)>50;八

(2)设九年级(1)班、(2)班分别有 x 人、y 人,则 $120(x+y)-96(x+y)=2\,400$,解得 $x+y=100$.

∵ 每班人数都不超过 50,

∴ $x=y=50$.

∴ 该校九年级(1)班、(2)班的人数均为 50.

方法规律:解答本题运用了数形结合思想、方程思想,解题的关键从函数的图像中获取信息,然后列出方程进行求解.

11. **解**:(1)由题意,得该户居民 8 月应付电费 $230\times0.53+0.58\times(310-230)=168.3$(元).

(2)小丽

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)设小明家11月和12月的用电量分别为m度、n度,由题意得$m<230$,$n>230$,当$230<n\leqslant 400$时,由题意得

$$\begin{cases} m+n=460, \\ 0.53m+0.53\times 230+0.58(n-230)=0.53\times 460+2.5, \end{cases}$$

解得$\begin{cases} m=180, \\ n=280. \end{cases}$当$n>400$时,由题意得

$m+n=460$,①

$0.53m+0.53\times 230+0.58\times 170+0.83(n-400)=0.53\times 460+2.5$,②

由①②解得$n=380$,与$n>400$矛盾,故舍去.

答:小明家11月和12月用电量分别为180度、280度.

点拨:本题考查了"单价×数量=总价"的运用、根据题中条件判断函数的大致图像、分类讨论思想的运用以及列二元一次方程组解决实际问题,在解答时分类讨论是难点.

中考提分专题篇

好题必解

一、**1**. A　**2**. C　**3**. A　**4**. B　**5**. C　**6**. C

二、**7**. A,B,C,D　**8**. 77

9. x,y;12,0.5　**10**. $y=9x$

11. 两;降的价钱;30;750;1 110

12. $N=4n+2$;4与2;N与n

三、**13**. **解**:(1)上表反映了电话费与通话时间之间的关系,其中通话时间是自变量,电话费是通话时间的函数.

(2)观察题表中的数据,可知电话费$=0.6\times$通话时间,所以,当佳佳往表妹家打电话的通话时间为10分钟时,需付电话费6元.

14. **解**:(1)∵$x=1$时,白色正方形的个数为8,

$x=2$时,白色正方形的个数为13,

$x=3$时,白色正方形的个数为18,

∴第x个图案中白色正方形的个数为$y=5x+3$,

故y与x之间的函数关系式为$y=5x+3$.

(2)当$x=50$时,白色正方形的个数为$y=5\times 50+3=253$.

15. **解**:(1)旅行者在9时离开城市的距离为5千米,10时30分离开城市的距离为8千米,11时离开城市的距离为10千米.

(2)他停下来休息时,离开城市的距离是8千米.

(3)乡村离城市有14千米路程.

(4)旅行者离开城市6千米、10千米、12千米、14千米的时间分别为9时20分、11时、11时30分、12时.

16. **解**:(1)依题意,得$y=12-2x$.

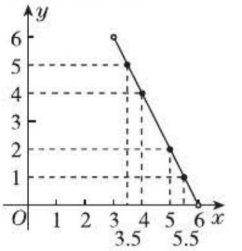
(2)∵$\begin{cases} 2x>12-2x, \\ 12-2x>0, \end{cases}$∴$\begin{cases} x>3, \\ x<6. \end{cases}$

∴自变量x的取值范围是$3<x<6$.

(3)列表:

x	3.5	4	5	5.5
y	5	4	2	1

描点、连线,其图像如图所示.



(第16题图)

第二十一章　一次函数

21.1　一次函数

同类变式

1. A

练中考·练模拟 得满分

1. C　**点拨**:根据正比例函数的定义,可知正比例函数有②③④.故选C.

2. C　**点拨**:根据一次函数的定义,可知②不是一次函数;①③是一次函数.故选C.　**3**. A

4. B　**点拨**:A.设路程是s,则$y=\frac{s}{x}$,不是一次函数关系;B.由长方形的周长公式,知$10=2(x+y)$,即$y=-x+5$,符合一次函数的定义,是一次函数关系;C.由圆的面积公式,知$y=\pi x^2$,不是一次函数关系;D.由勾股定理,知$x^2+y^2=25$,不是一次函数关系.

5. $y=0.15x+25$

6. **解**:因为$y=(m-2)x^{m^2-3}+3$是关于x的一次函数,所以$m-2\neq 0$,且$m^2-3=1$,解得$m=-2$.当$m=-2$时,$y=-4x+3$,所以当$x=-1$时,$y=7$.

7. **解**:(1)根据题意得$Q=200+10t$.

(2)因为$t\geqslant 0$,且$200+10t\leqslant 500$,

所以自变量t的取值范围是$0\leqslant t\leqslant 30$.

8. $y=5x$

9. **解**:设$y_1=k_1x$,$y_2=k_2(x+1)$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

则 $y=k_1x-2k_2(x+1)$.

根据题意得 $\begin{cases}3=k_1-4k_2,\\5=2k_1-6k_2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1,\\k_2=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore y=x-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)=2x+1.$

点拨:y_1 与 x 成正比例,可设 $y_1=k_1x$,y_2 与 $x+1$ 成正比例,可把 $x+1$ 看成一个整体,设 $y_2=k_2(x+1)$,进而求解.

10. 解:(1)依题意,得 $y=70x+50\times(60-x)+10\times120=20x+4\ 200$.

(2)当 $y=4\ 700$ 时,$4\ 700=20x+4\ 200$,

解得 $x=25$. $\therefore$ 购买排球 $60-25=35$(个).

答:购买篮球 25 个,购买排球 35 个.

点拨:(1)根据"总费用=购买篮球的费用+购买排球的费用+购买跳绳的费用"求解;(2)把 $y=4\ 700$ 代入(1)中的函数关系式就可以求出购买篮球的个数,从而求出购买排球的个数.

11. 解:$\because BC=8$,$CP=x$,$\therefore PB=8-x$,$\therefore S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\cdot PB\cdot AC=\frac{1}{2}\times(8-x)\times6=24-3x$.

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=24-3x(0<x<8)$.

点拨:本题考查了函数与几何知识的综合,根据三角形面积公式建立函数关系式是解题的关键.

12. 解:(1)根据题意得 $y=12x\times100+10(10-x)\times180$,$\therefore y=-600x+18\ 000$.

(2)当 $y=14\ 400$ 时,有 $14\ 400=-600x+18\ 000$,解得 $x=6$,$\therefore$ 要派 6 名工人去生产甲种产品.

(3)根据题意可得 $y\geqslant15\ 600$,即 $-600x+18\ 000\geqslant15\ 600$,解得 $x\leqslant4$,$\therefore 10-x\geqslant6$,$\therefore$ 至少要派 6 名工人去生产乙种产品.

点拨:(1)根据每名工人每天生产的产品个数以及每个产品可获利润,表示出总利润即可;(2)根据每天所获利润为 14 400 元,即 $y=14\ 400$,求解即可;(3)根据每天所获利润不低于 15 600 元,即 $y\geqslant15\ 600$,求解即可.

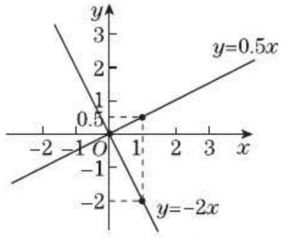
21.2 一次函数的图像和性质

同类变式

1. 解:列表:

x	0	1
$y=-2x$	0	-2
$y=0.5x$	0	0.5

描点、连线,如图所示.

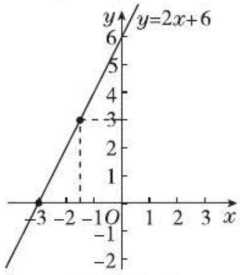


(第 1 题图)

2. 解:列表:

x	-3	$-\frac{3}{2}$
y	0	3

描点、连线,函数 $y=2x+6$ 的图像如图所示.



(第 2 题图)

3. -1

4. 解:一次函数 $y=x-4$ 的图像与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为(4,0),(0,-4),所以所求三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

5. $y=3x+2$

6. C

练中考·练模拟 得满分

1. B

2. D **点拨**:A. $\because$ 一次函数 $y=-2x+4$ 中 $k=-2<0$,$\therefore$ 函数值随自变量的增大而减小,故本选项正确;B. $\because$ 一次函数 $y=-2x+4$ 中 $k=-2<0$,$b=4>0$,$\therefore$ 此函数的图像经过第一、二、四象限,不经过第三象限,故本选项正确;C. 由"上加下减"的原则可知,函数的图像向下平移 4 个单位长度得 $y=-2x$ 的图像,故本选项正确;D. $\because$ 令 $y=0$,则 $x=2$,$\therefore$ 函数的图像与 x 轴的交点坐标是(2,0),故本选项错误.

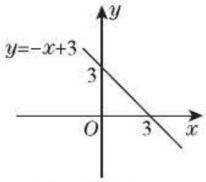
3. C **点拨**:根据一次函数的性质判断即可.

4. B

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. > **点拨**:根据一次函数的性质可知,当 $k=3>0$ 时,y 随 x 的增大而增大,故 $y_1>y_2$.

6. **解**:所画图像如图所示.



(第 6 题图)

(1)根据图像可知,当 $x=0$ 时,y 的值是 3.

(2)根据图像可知,当 $x<3$ 时,$y>0$.

(3)根据图像可知,当 $x>0$ 时,y 的取值范围是 $y<3$.

方法规律:本题考查了一次函数的图像与一次函数的性质.解答本题时,采用了数形结合思想,减少了计算过程.

7. **解**:根据题意,设一次函数表达式为 $y=-2x+b$,∵ 该函数的图像经过点 $A(-4,2)$,∴ $-2\times(-4)+b=2$,解得 $b=-6$.∴ 这个函数的表达式为 $y=-2x-6$.当 $y=0$ 时,$-2x-6=0$,解得 $x=-3$,∴ $B(-3,0)$.

8. **解**:(1)∵ 一次函数 $y=(6+3m)x+n-4$ 的图像经过原点,∴ $6+3m\neq0$,且 $n-4=0$,解得 $m\neq-2$,$n=4$.

(2)∵ 该函数的图像经过第一、二、三象限,∴ $6+3m>0$,且 $n-4>0$,解得 $m>-2$,$n>4$.

点拨:本题主要考查一次函数图像在坐标平面中的位置与 k,b 的关系.解答本题需理解:直线 $y=kx+b$ 的位置与 k,b 的符号有直接关系.$k>0$ 时,直线必经过第一、三象限;$k<0$ 时,直线必经过第二、四象限;$b>0$ 时,直线与 y 轴正半轴相交;$b=0$ 时,直线过原点;$b<0$ 时,直线与 y 轴负半轴相交.

9. B

10. B **点拨**:当 $y=0$ 时,$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=0$,解得 $x=1$,∴ 点 E 的坐标是(1,0),即 $OE=1$.∵ $OC=4$,∴ $EC=OC-OE=4-1=3$.∵ 点 F 的横坐标是 4,∴ 点 F 的纵坐标是 $\frac{2}{3}\times4-\frac{2}{3}=2$,即 $CF=2$,∴ $\triangle CEF$ 的面积 $=\frac{1}{2}CE\cdot CF=\frac{1}{2}\times3\times2=3$.故选 B.

11. **解**:(1)∵ $y=-2x+3$,∴ 当 $y=0$ 时,$-2x+3=0$,解得 $x=\frac{3}{2}$.∴ 这个函数的图像与 x 轴的交点坐标为 $(\frac{3}{2},0)$.

(2)由题意,得 $-2x+3<0$,解得 $x>\frac{3}{2}$,故这个函数的图像在 x 轴下方时的自变量的取值范围是 $x>\frac{3}{2}$.

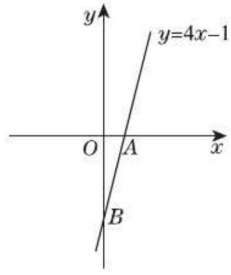
(3)由题意,得 $-2x+3>0$,且 $x>0$,解得 $0<x<\frac{3}{2}$,故这个函数的图像在第一象限时的自变量的取值范围是 $0<x<\frac{3}{2}$.

12. **解**:(1)$y=2x-2$

(2)由题意可设新直线的表达式为 $y=2x+b$,∵ 原直线经过点 $(0,-4)$,∴ 向左平移 4 个单位长度得到的直线经过点 $(-4,-4)$,将其坐标代入新直线表达式解得 $b=4$,∴ 新直线的表达式为 $y=2x+4$.

13. **解**:令 $x=0$ 得 $y=-1$,令 $y=0$ 得 $4x-1=0$,解得 $x=\frac{1}{4}$.

∴ 图像经过点 $(0,-1)$ 和 $\left(\frac{1}{4},0\right)$,所画图像如图所示.



(第 13 题图)

(1)观察图像可知 y 随 x 的增大而增大.

(2)图像与 x 轴交于点 $A(\frac{1}{4},0)$,与 y 轴交于点 $B(0,-1)$,$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{8}$.

(3)当 $x>\frac{1}{4}$ 时,$y>0$;当 $x<\frac{1}{4}$ 时,$y<0$.

(4)将点 $A\left(\frac{1}{4},0\right)$ 的坐标代入 $y=-x+m^2$,得 $0=-\frac{1}{4}+m^2$,∴ $m=\pm\frac{1}{2}$.

点拨:(1)根据一次函数的图像解题;(2)根据图像直接写出交点坐标,再根据三角形面积公式求解即可;(3)根据图像可直接确定自变量的取值范围;(4)由(2)可知函数 $y=4x-1$ 与 x 轴的交点 A 的坐标,将 A 点坐标代入 $y=-x+m^2$,即可求得 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 用待定系数法确定一次函数表达式

练中考·练模拟 得满分

1. A **点拨**:设正比例函数的表达式为 $y=kx(k\neq0)$,因为正比例函数 $y=kx$ 的图像经过点 $A(3,-6)$,所以 $-6=3k$,解得 $k=-2$,所以 $y=-2x$,把 $B(m,-4)$ 的坐标代入 $y=-2x$ 中,得 $m=2$.

2. A **方法规律**:直线 l 经过点 $(-2,0)$ 和点 $(0,2)$,用待定系数法可求出函数表达式.

3. C **点拨**:设此一次函数的表达式为 $y=kx+b$,将 $(2,-1)$ 与 $(-3,4)$ 分别代入一次函数表达式 $y=kx+b$ 中,得到关于 k 与 b 的二元一次方程组,求出方程组的解得到 k 与 b 的值,确定出一次函数表达式,即可得到一次函数图像不经过第三象限.

4. C **点拨**:首先根据"黑棋 A"和"白棋 C"的坐标判断出原点和"白棋 B"所在点的坐标,再设出正比例函数表达式,把"白棋 B"所在点的坐标代入,即可算出 k 的值,进而得到答案.

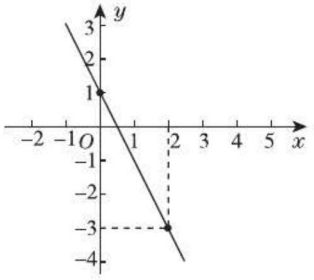
5. B **点拨**:先将点 $(-2,3)$ 的坐标代入 $y=-2x+m$,求出 m 的值,再求出图像与 x 轴、y 轴的交点坐标,从而求出三角形的面积.

6. **解**:(1)∵ 一次函数 $y=kx+b$,当 $x=-4$ 时,y 的值是 9,当 $x=2$ 时,y 的值是 -3,

$\therefore \begin{cases}9=-4k+b,\\-3=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore y=-2x+1$.

(2)画出函数图像如图所示.



(第 6 题图)

点拨:此类题目可直接将已知的对应值代入表达式,利用方程组解决问题.

7. **解**:设正比例函数的表达式为 $y=kx(k\neq0)$.

∵ 图像经过点 $P(-1,2)$,$\therefore 2=-k$,即 $k=-2$.

$\therefore$ 正比例函数的表达式为 $y=-2x$. 又∵ 图像经过点 $Q(-m,m+3)$,$\therefore m+3=2m$. $\therefore m=3$.

方法规律:首先利用待定系数法求得正比例函数的表达式为 $y=-2x$,然后将点 Q 的坐标代入该函数的表达式,列出关于 m 的方程,通过解方程来求 m 的值.

8. **解**:(1)由题意得 $\begin{cases}3=k+b,\\2=b,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}k=1.\\b=2.\end{cases}$

$\therefore k,b$ 的值分别是 1 和 2.

(2)由(1)知该一次函数的表达式为 $y=x+2$.

∵ 点 $A(a,0)$ 在函数 $y=x+2$ 的图像上,

$\therefore 0=a+2$,即 $a=-2$.

9. C

10. **解**:(1)设所求的一次函数的表达式为 $y=kx+b$. 由题意得 $\begin{cases}-3=-2k+b,\\3=k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 这个一次函数的表达式为 $y=2x+1$.

(2)∵ 当 $x=-1$ 时,$y=2\times(-1)+1=-1\neq1$,

$\therefore$ 点 $P(-1,1)$ 不在这个一次函数的图像上.

点拨:(1)先设出一次函数的表达式,把已知点的坐标代入,求得字母系数的值即可得出答案;(2)可以把 $(-1,1)$ 代入表达式看等式是否成立.

11. **解**:设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$,把点 $A(0,4)$,$B(2,0)$ 的坐标代入得 $\begin{cases}4=b,\\0=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=4,\end{cases}$ 故直线 AB 的表达式为 $y=-2x+4$. 将该直线向左平移后与 x 轴负半轴、y 轴负半轴分别交于点 C,D,且 $DB=DC$ 时,点 C 坐标为 $(-2,0)$,因为平移后的直线与原直线平行,故设直线 CD 的表达式为 $y=-2x+n$,把 $(-2,0)$ 代入解得 $n=-4$,所以直线 CD 的表达式为 $y=-2x-4$.

点拨:求直线平移后的表达式要注意平移时 k 的值不变,只有 b 发生变化.

12. **解**:(1)由题意可知 y 与 x 之间为一次函数关系,设 $y=kx+b$,∵ 当 $x=60$ 时,$y=6$,当 $x=90$ 时,$y=10$,$\therefore \begin{cases}60k+b=6,\\90k+b=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{2}{15},\\b=-2,\end{cases}$

$\therefore$ 所求函数关系式为 $y=\dfrac{2}{15}x-2$.

(2)当 $y=0$ 时,$\dfrac{2}{15}x-2=0$,所以 $x=15$,故旅客最多可免费携带 15 千克的行李.

方法规律:(1)由题图可知两点的坐标,利用待定系数法求函数关系式;(2)旅客可免费携带行李,即 $y=0$,代入(1)题求得的函数关系式,即可知免费携带的行李的最大质量.

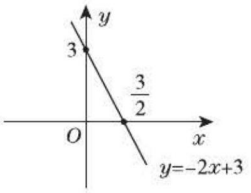
13. **解**:(1)设这个一次函数的表达式为 $y=kx+b$.

由题意,得 $\begin{cases}k+b=1,\\-2k+b=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=3.\end{cases}$

故该一次函数的表达式为 $y=-2x+3$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)由(1)可知,一次函数的表达式为 $y=-2x+3$,则当 $x=0$ 时,$y=3$;当 $y=0$ 时,$x=\frac{3}{2}$,所画图像如图所示.



(第13题图)

(3)由(2)可知,$D(0,3)$,则 $OD=3$.

∵点 C 在一次函数 $y=-2x+3$ 的图像上,

∴ $-3=-2m+3$,解得 $m=3$,∴ $C(3,-3)$,

∴ $S_{\triangle DOC}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$.

点拨:(1)设这个一次函数的表达式为 $y=kx+b$,把点 A,B 的坐标分别代入函数表达式,列出关于 k,b 的方程组,通过解方程组来求 k,b 的值;(2)利用"两点确定一条直线"画出图像;(3)根据表达式求得点 C,D 的坐标,然后由三角形的面积公式求得 $\triangle DOC$ 的面积.

14. 解:(1)把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x-\frac{39}{8}$,解得 $x=-13$,∴ $C(-13,0)$.

把 $x=-5$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x-\frac{39}{8}$,解得 $y=-3$,

∴ $E(-5,-3)$.

∵点 B,E 关于 x 轴对称,∴ $B(-5,3)$.

设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}b=5,\\-5k+b=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{2}{5},\\b=5.\end{cases}$

∴直线 AB 的表达式为 $y=\frac{2}{5}x+5$.

(2)易得 $CD=8,DE=DB=3,OA=OD=5$,

∴ $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times8\times3=12$,

$S_{四边形ABDO}=\frac{1}{2}\times(3+5)\times5=20$,∴ $S=32$.

(3)当 $x=-13$ 时,$y=\frac{2}{5}x+5=-0.2\neq0$.

∴点 C 不在直线 AB 上,即 A,B,C 三点不共线.

∴他的想法错在将 $\triangle CDB$ 与四边形 $ABDO$ 拼接后看成了 $\triangle AOC$.

21.4 一次函数的应用

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** B

3. $y=100x-40$ **4.** 2

5. 解:(1)设1只 A 型节能灯的售价是 x 元,1只 B 型节能灯的售价是 y 元,则 $\begin{cases}3x+5y=50,\\2x+3y=31,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=7.\end{cases}$

答:1只 A 型节能灯的售价是5元,1只 B 型节能灯的售价是7元.

(2)设购买 A 型节能灯 a 只,则购买 B 型节能灯 $(200-a)$ 只,设费用为 w 元,

则 $w=5a+7(200-a)=-2a+1\,400$,

∵ $-2<0$,∴ w 随 a 的增大而减小.

∵ $a\leqslant3(200-a)$,∴ $a\leqslant150$,

∴当 $a=150$ 时,w 取得最小值,此时 $w=1\,100$,$200-a=50$.

答:当购买 A 型节能灯150只,B 型节能灯50只时最省钱.

6. 解:(1)排水阶段:设函数表达式为 $y=kt+b$,

图像经过点 $(0,1\,500)$,$(25,1\,000)$,则 $\begin{cases}b=1\,500,\\25k+b=1\,000,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-20,\\b=1\,500,\end{cases}$

故排水阶段的函数表达式为 $y=-20t+1\,500$;

清洗阶段:$y=0$;

灌水阶段:设函数表达式为 $y=at+c$,

图像经过点 $(195,1\,000)$,$(95,0)$,

则 $\begin{cases}195a+c=1\,000,\\95a+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=10,\\c=-950,\end{cases}$

灌水阶段的函数表达式为 $y=10t-950$.

(2)∵排水阶段的函数表达式为 $y=-20t+1\,500$.

∴ $y=0$ 时,$0=-20t+1\,500$,解得 $t=75$,

则排水花75 min,清洗花 $95-75=20$(min),

根据图像可以得出游泳池蓄水量为1 500 m^3,

令 $1\,500=10t-950$,解得 $t=245$,

故灌水花 $245-95=150$(min).

方法规律:本题主要考查了用待定系数法求一次函数表达式.结合图像,找出关键点的坐标,从而求出函数表达式.

7. 解:(1)甲车的速度为 $\frac{600+200}{8}=100$(km/h),乙车的速度为 $\frac{200\times2}{9-1}=50$(km/h);6

(2)设乙车从 B 地返回到 C 地的过程中 y 与 x 之

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

间的函数关系式是 $y=kx+b$.

∵ 图像经过(5,0),(9,200)两点.

$\therefore \begin{cases}5k+b=0,\\9k+b=200.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=50,\\b=-250.\end{cases}$

$\therefore y=50x-250$,

故乙车从 B 地返回到 C 地的过程中,y 与 x 之间的函数关系式为 $y=50x-250$.

(3)设甲车从 A 地到 B 地的过程中 y 与 x 之间的函数关系式是 $y=k_1x+b_1$,∵ 图像经过(0,600),(6,0)两点,

$\therefore \begin{cases}b_1=600,\\6k_1+b_1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-100,\\b_1=600,\end{cases}$

$\therefore y=-100x+600$,

设甲车从 B 地到 C 地的过程中 y 与 x 之间的函数关系式是 $y=k_2x+b_2$,

∵ 图像经过(8,200),(6,0)两点,

$\therefore \begin{cases}6k_2+b_2=0,\\8k_2+b_2=200,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=100,\\b_2=-600,\end{cases}$

$\therefore y=100x-600$,

由题意得 $\begin{cases}y=50x-250,\\y=-100x+600\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=50x-250,\\y=100x-600,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{17}{3},\\y=\frac{100}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=7,\\y=100.\end{cases}$ 故甲、乙两车行驶到距 B 地的路程相等时,甲、乙两车距 B 地的路程是 $\frac{100}{3}$ 千米或 100 千米.

8. C **点拨**:汽车在高速公路上的行驶速度为 $180\div2=90$(km/h),A 错误;行驶 3.5 h 时在乡村公路上行驶了 90 km,但乡村公路总长不是 90 km,B 错误;汽车在乡村公路上行驶速度为 $90\div1.5=60$(km/h),C 正确;该记者从出发到到达采访地所用时间为 $2+(360-180)\div60=5$(h),D 错误.

9. **解**:(1)由图像可知每月用水量为 18 m^3 时,应交水费 45 元.

(2)设当 $x>18$ 时,y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx+b$,

将点(18,45),(28,75)的坐标分别代入函数表达式得:

$\begin{cases}18k+b=45,\\28k+b=75,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=3,\\b=-9,\end{cases}$ $\therefore y=3x-9$. 将 $y=81$ 代入 $y=3x-9$,得 $3x-9=81$,解得 $x=30$.

答:这个月用水量为 30 m^3.

10. **解**:(1)由图像可知小明骑车的速度为 20 km/h,在南亚所游玩的时间为 1 h.

(2)小明从南亚所到湖光岩所用时间为 $\frac{11}{6}+\frac{5}{12}-2=\frac{1}{4}$(h),所以从小明家到湖光岩的路程为 $20+20\times\frac{1}{4}=25$(km),所以妈妈驾车的速度为 $25\div\frac{5}{12}=60$(km/h).

易知 C 点的坐标为 $\left(\frac{9}{4},25\right)$,设 CD 所在直线对应的函数表达式为 $y=kx+b$,又 D 点的坐标为 $\left(\frac{11}{6},0\right)$,则 $\begin{cases}25=\frac{9}{4}k+b,\\0=\frac{11}{6}k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=60,\\b=-110.\end{cases}$

所以 CD 所在直线对应的函数表达式为 $y=60x-110$.

11. **解**:(1)

	运往甲地(单位:吨)	运往乙地(单位:吨)
A	x	$14-x$
B	$15-x$	$x-1$

(2)由题意,得

$W=50x+30(14-x)+60(15-x)+45(x-1)$,

整理得,$W=5x+1\,275$.

(3)∵ 从 A,B 向甲、乙两地运送的蔬菜量为非负数,

$\therefore \begin{cases}x\geqslant0,\\14-x\geqslant0,\\15-x\geqslant0,\\x-1\geqslant0.\end{cases}$

解不等式组,得 $1\leqslant x\leqslant14$.

在 $W=5x+1\,275$ 中,W 随 x 的增大而增大,

∴ 当 x 为 1 时,W 有最小值 1 280.

故从 A 向甲地运 1 吨,向乙地运 13 吨,B 的 14 吨蔬菜都运往甲地才能使总运费最少.

21.5 一次函数与二元一次方程的关系

同类变式

1. C **点拨**:∵ 直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标是 $(-1,0)$,即当 $x=-1$ 时,$y=0$,∴ 关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=-1$. 故选 C.

2. **解**:(1)∵ 点 $(1,b)$ 在直线 $y=x+1$ 上,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 当 $x=1$ 时，$b=1+1=2$.

(2)由(1)可知 $P(1,2)$，∴ 方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=mx+n\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

(3)直线 l_3：$y=nx+m$ 也经过点 P.

理由如下：∵ 点 $P(1,2)$ 在直线 $y=mx+n$ 上，

∴ $m+n=2$，∴ $2=n\times1+m$，

∴ 直线 $y=nx+m$ 也经过点 P.

3. 解：(1)直线 a_1：y 随 x 的增大而增大.

直线 a_2：y 随 x 的增大而减小.

(2)直线 a_1 经过点 $(0,-1)$ 与 $(1,1)$，设它的表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-1,\end{cases}$

即直线 a_1 的表达式是 $y=2x-1$.

同理可得直线 a_2 的表达式是 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，

∴ 所求的方程组是 $\begin{cases}y=2x-1,\\y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.\end{cases}$

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** A **3.** B

4. $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$ **5.** $\begin{cases}y=-x+2,\\y=2x-1\end{cases}$

6. 解：(1)∵ 函数 $y_1=3x+b$ 和 $y_2=ax-3$ 的图像交于点 $P(-2,-5)$，

∴ $3\times(-2)+b=-5$，$-2a-3=-5$，

解得 $b=1$，$a=1$；

(2)∵ $b=1$，$a=1$，

∴ 两个函数表达式是 $y_1=3x+1$ 和 $y_2=x-3$，

∴ $A(0,1)$，$B(0,-3)$，∴ $AB=4$，

∴ $\triangle APB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times AB\times2=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.

点拨：此题主要考查了两条直线相交问题，以及三角形面积的计算，关键是掌握用待定系数法求函数表达式，凡是函数图像经过的点的坐标都满足函数表达式.

7. C

8. C **点拨**：直线 l_1 经过点 $(2,3)$，$(0,-1)$，易知其函数表达式为 $y=2x-1$；直线 l_2 经过点 $(2,3)$，$(0,1)$，易知其函数表达式为 $y=x+1$. 因此，以两条直线 l_1，l_2 的交点坐标为解的方程组可能是 $\begin{cases}x-y=-1,\\2x-y=1.\end{cases}$ 故选 C.

9. -11 **点拨**：将 $\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$ 和 $b=6$ 代入方程 $y=kx+b$，得 $2=-k+6$，解得 $k=4$，所以 $y=4x+b$. 把 $(3,1)$ 代入 $y=4x+b$，得 $1=3\times4+b$，所以 $b=-11$.

10. 解：(1)把 $(-2,a)$ 代入 $y=2x-1$，得 $-4-1=a$，解得 $a=-5$.

(2)由(1)题可知点 $P(-2,-5)$，

则易得直线 l_2 对应的函数表达式是 $y=\frac{5}{2}x$，

因此 $(-2,a)$ 可以看作是二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\y=\frac{5}{2}x\end{cases}$ 的解.

(3)直线 l_1 与 x 轴交于点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$，

所以 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{4}$.

(4)存在点 M，使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等.

设点 M 的坐标为 (m,b)，

①当 $m=b$ 时，点 M 的坐标为 (m,m)，代入 $y=2x-1$ 得 $2m-1=m$，解得 $m=1$，即点 M 的坐标为 $(1,1)$；

②当 $m=-b$ 时，点 M 的坐标为 $(m,-m)$，代入 $y=2x-1$ 得 $2m-1=-m$，解得 $m=\frac{1}{3}$，即点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

综上所述，存在符合条件的点 M，坐标为 $(1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

方法规律：本题综合考查了函数图像交点、图形面积等知识. 解答(4)题时需注意，由于点 M 的坐标存在两种情况，应运用分类讨论思想，以免漏解.

中考提分专题篇

好题必解

一、**1.** B **2.** D **3.** A **4.** A **5.** B **6.** B **7.** C **8.** D

二、**9.** $1<k<3$ **10.** $y=0.3x+6(0\leqslant x\leqslant5)$

11. $y=2x-2$ **12.** 120

13. $(-1,2)$ **14.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

三、**15. 解**：(1)∵ 点 A 的坐标为 $(2,0)$，∴ $AO=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$2^2+OB^2=(\sqrt{13})^2$，

∴ $OB=3$，∴ $B(0,3)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot OA$,即 $4=\frac{1}{2}BC\times 2$,

$\therefore BC=4$,$\therefore OC=BC-OB=4-3=1$,

$\therefore C(0,-1)$.

设直线 l_2 的表达式为 $y=kx+b$.

$\because$ 直线 l_2 经过点 $A(2,0)$,$C(0,-1)$,

$\therefore \begin{cases}0=2k+b,\\-1=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 l_2 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x-1$.

16. **解**:(1)根据图像,得 $y_1<y_2$ 时,$x<2$.

(2)把点 P 的坐标代入 $y_2=x+1$,得 $m=3$.

所以点 P 的坐标为(2,3).

把(2,3),(0,-2)代入 $y_1=kx+b$,得

$\begin{cases}2k+b=3,\\b=-2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{5}{2},\\b=-2.\end{cases}$

所以直线 l_1 的表达式为 $y_1=\frac{5}{2}x-2$.

17. **解**:(1)方案 A:函数关系式为 $y=5.8x$.

方案 B:函数关系式为 $y=5x+2\,000$.

(2)由题意得 $5.8x<5x+2\,000$.

解不等式得 $x<2\,500$,

即当购买量 x 的取值范围为 $2\,000\leqslant x<2\,500$ 时,选用方案 A 比方案 B 付款少.

(3)他应选择方案 B.

18. **解**:(1)设购买了 A 种花木 a 棵,则购买了 B 种花木 $(100-a)$ 棵.

根据题意得 $50a+100(100-a)=8\,000$,

解得 $a=40$.

所以 $100-a=100-40=60$.

答:购买了 A 种花木 40 棵,B 种花木 60 棵.

(2)设购买了 A 种花木 x 棵,则购买了 B 种花木 $(100-x)$ 棵,总费用为 y 元.

根据题意,得 $100-x\geqslant x$,

解得 $x\leqslant 50$.

易知 $y=50x+100(100-x)=50x+10\,000-100x=-50x+10\,000$.

$\because k=-50<0$,$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

又$\because x\leqslant 50$,

$\therefore$ 当 $x=50$ 时,y 有最小值,最小值为 7 500.

$\therefore$ 当购买 A,B 两种花木均为 50 棵时,总费用最低,总费用最低为 7 500 元.

19. **解**:(1)设大货车有 m 辆,小货车有 n 辆,根据题意得 $\begin{cases}m+n=15,\\12m+8n=152,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=8,\\n=7.\end{cases}$

答:这 15 辆车中大货车有 8 辆,小货车有 7 辆.

(2)$y=800x+900(8-x)+400(10-x)+600[7-(10-x)]=100x+9\,400(3\leqslant x\leqslant 8$ 且 x 为整数).

(3)由题意得 $12x+8(10-x)\geqslant 100$,解得 $x\geqslant 5$.

又$\because 3\leqslant x\leqslant 8$,$\therefore 5\leqslant x\leqslant 8$ 且 x 为整数,$\because y=100x+9\,400$,$k=100>0$,$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,$\therefore$ 当 $x=5$ 时,y 有最小值,为 $100\times 5+9\,400=9\,900$.

答:使总费用最少的货车调配方案为:派往 A 村 5 辆大货车、5 辆小货车,派往 B 村 3 辆大货车、2 辆小货车,最少总费用为 9 900 元.

第二十二章 四边形

22.1 平行四边形的性质

同类变式

1. **证明**:$\because \angle C+\angle D=180°$,$\therefore BC\parallel AD$. 又$\because AB\parallel CD$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. **证法一**:在$\square ABCD$ 中,$\because AB\parallel CD$,

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$,$\angle AEO=\angle CFO$.

又$\because AO=CO$. $\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$.

证法二:在$\square ABCD$ 中,$\because AB\parallel CD$,

$\therefore \angle AEO=\angle CFO$.

又$\because \angle AOE=\angle COF$,$AO=CO$.

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$.

证法三:在$\square ABCD$ 中,$\because AB\parallel CD$,

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

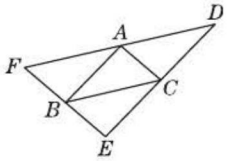
又$\because AO=CO$,$\angle AOE=\angle COF$.

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$.

练中考·练模拟 得满分

1. B **点拨**:从题图中我们发现①中有 6 个平行四边形,$6=3\times 1\times(1+1)$,②中有 18 个平行四边形,$18=3\times 2\times(2+1)$,③中有 36 个平行四边形,$36=3\times 3\times(3+1)$,所以第 n 个图中有 $3n(n+1)$ 个平行四边形. 故选 B.

2. C **点拨**:如图,连接 AB,BC,AC,分别把 AC,BC,AB 作为平行四边形的对角线作平行四边形,可作出 3 个:$\square ABCD$,$\square ACEB$,$\square ACBF$. 故选 C.



(第 2 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. C　4. C　5. D　6. D

7. 21 cm^2　**点拨**：根据直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半，可求出 AB 边上的高.

8. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD \parallel BC$.
∴ $\angle DAE = \angle F$.
又∵ $\angle DEA = \angle CEF$，$DE = CE$，
∴ $\triangle ADE \cong \triangle FCE$.
(2)**解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD = BC$.
∵ $\triangle ADE \cong \triangle FCE$，∴ $AD = CF$.
∴ $BC = CF$.
∴ $BF = 2BC$.
又∵ $AB = 2BC$，
∴ $BF = AB$.
∵ $\angle F = 36°$，
∴ $\angle FAB = \angle F = 36°$.
∴ $\angle B = 180° - 2\angle F = 180° - 2 \times 36° = 108°$.

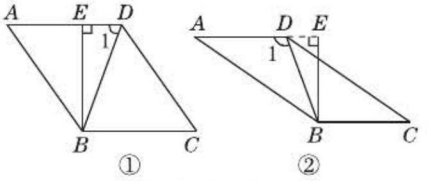
9. **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD = BC$，$AB = CD$，$\angle A = \angle C$.
∵ 点 E，F 分别是边 AD，BC 的中点，
∴ $AE = CF$.
∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.
∴ $BE = DF$.

10. **解**：过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E.
∵ $\angle DAB = 120°$，
∴ $\angle DAE = 60°$.
∴ $\angle ADE = 30°$.
∴ $AE = \frac{1}{2}AD = 1$.
在 Rt$\triangle ADE$ 中，根据勾股定理得，
$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.
∴ $D(-1, \sqrt{3})$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AB \parallel CD$，$AB = CD$.
又∵ $AB = 5$，
∴ $B(5, 0)$，$C(4, \sqrt{3})$.

11. C　**点拨**：根据平行四边形的性质可知：
平行四边形的任意一条对角线把平行四边形分成两个全等的三角形，故①正确；
平行四边形的面积等于与它等底（同底）等高（同高）的三角形的面积的 2 倍，故②错误；
平行四边形的两条对角线把平行四边形分成四个面积相等的三角形，故③正确；
平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等，故④正确. 故选 C.

12. A　**点拨**：在$\square ABCD$ 中，由 $EF \parallel BC$，$MN \parallel AB$，易得四边形 $EBNP$ 和四边形 $MPFD$ 都是平行四边形，∴ $S_{\triangle EBP} = S_{\triangle NPB}$，$S_{\triangle PMD} = S_{\triangle PFD}$.
又∵ $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DCB}$，∴ $S_{\square AEPM} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle EBP} - S_{\triangle PMD} = S_{\triangle DCB} - S_{\triangle NPB} - S_{\triangle PFD} = S_{\square PNCF}$. 故选 A.
解答本题的关键：巧用平行四边形的一条对角线，将其面积分为相等的两部分.

13. 55°或 35°　**点拨**：如图①，当 BE 在$\triangle ABD$ 的内部时，$\angle 1 = 90° - \angle EBD = 90° - 20° = 70°$.
∴ $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2} \times (180° - \angle 1) = 55°$.
如图②，当 BE 在$\triangle ABD$ 的外部时，$\angle 1 = 90° + \angle EBD = 90° + 20° = 110°$.
∴ $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2} \times (180° - \angle 1) = 35°$.
故答案为 55°或 35°.



（第 13 题图）

14. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AB = CD$，$AD \parallel BE$，∴ $\angle DAE = \angle AEB$. ∵ AE 平分 $\angle BAD$，∴ $\angle DAE = \angle BAE$. ∴ $\angle BAE = \angle AEB$.
∴ $BE = AB$. 又∵ $AB = CD$，∴ $BE = CD$.
(2)**解**：∵ $BE = AB$，$BF \perp AE$，∴ $AF = EF$，∵ $AD \parallel BE$，∴ $\angle D = \angle DCE$，$\angle DAF = \angle FEC$，∴ $\triangle ADF \cong \triangle ECF$. ∴ $S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABE}$. ∵ $BE = AB$，$\angle BEA = 60°$，∴ $\triangle ABE$ 为等边三角形. ∴ $AE = AB = 4$.
易得 $BF = 2\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. ∴ $S_{\square ABCD} = 4\sqrt{3}$.

15. **解**：$EF + GH + MN = 2a$，$EF + GH + MN$ 的值不随点 P 位置的改变而改变. 理由如下：
∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
∵ $GH \parallel BC$，
∴ $\angle AGH = \angle B = 60°$，
$\angle AHG = \angle C = 60°$.
∴ $\triangle AGH$ 是等边三角形.
∴ $GH = AG = AM + MG$. ①
同理可得$\triangle BMN$ 是等边三角形，
∴ $MN = MB = MG + GB$. ②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $MN \parallel AC, EF \parallel AB$,

∴ 四边形 $AMPE$ 是平行四边形,∴ $PE = AM$.

同理可得四边形 $BFPG$ 是平行四边形.

∴ $PF = GB$.

∴ $EF = PE + PF = AM + GB$. ③

①+②+③,得 $GH + MN + EF = (AM + MG) + (MG + GB) + (AM + GB) = 2(AM + MG + GB) = 2AB = 2a$.

点拨:解答本题的技巧:①把三条线段 EF, MN, GH 放到平行四边形或等边三角形中;②利用等量代换将线段 EF, MN, GH 转移到同一条边 AB 上.

22.2 平行四边形的判定

同类变式

1. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AO = CO, BO = DO$.

又∵ $AE = CG, BM = DN$,

∴ $EO = GO, MO = NO$.

∴ 四边形 $EMGN$ 是平行四边形.

点拨:根据已知平行四边形的性质得到对角线互相平分,再根据"对角线互相平分的四边形是平行四边形"判定四边形是平行四边形.

2. 解:选取条件①与②.

证明:∵ $AB \parallel DC$,

∴ $\angle ABO = \angle CDO$.

又∵ $\angle AOB = \angle COD, OA = OC$,

∴ $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

∴ $AB = CD$.

又∵ $AB \parallel CD$,

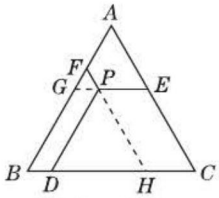
∴ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

点拨:答案不唯一.

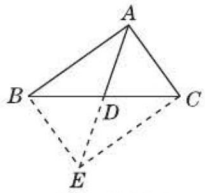
练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** B

3. C **方法规律**:解答本题采用转化思想,根据平行四边形的判定及性质,找出对应相等的边,利用等边三角形的性质把长度未知的线段转化到长度已知的线段上去解题. 如图,延长 EP, FP 分别交 AB, BC 于点 G, H,则由 $PD \parallel AB, PE \parallel BC, PF \parallel AC$,可得四边形 $PGBD$、四边形 $EPHC$ 是平行四边形,∴ $PG = BD, PE = HC$. 又 $\triangle ABC$ 是等边三角形,$PF \parallel AC, PD \parallel AB, PE \parallel BC$,可得 $\triangle PFG$, $\triangle PDH$ 是等边三角形,∴ $PF = PG = BD, PD = DH$. 又 $\triangle ABC$ 的周长为 12,∴ $PD + PE + PF = DH + HC + BD = BC = \frac{1}{3} \times 12 = 4$. 故选 C.



(第3题图)



(第4题图)

4. D **点拨**:如图,延长 AD 至点 E,使 $DE = AD$,连接 CE, BE. ∵ AD 是边 BC 的中线,∴ $BD = CD$. ∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形. ∴ $CE = AB = 7$. 在 $\triangle ACE$ 中,$CE - AC < AE < CE + AC$,即 $2 < 2AD < 12$,∴ $1 < AD < 6$. 故选 D.

5. $AD = BC$ **点拨**:∵ $AD \parallel BC, AD = BC$,∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形). 答案不唯一.

6. 8 **点拨**:∵ $BD \perp AD, BD \perp BC$,∴ $AD \parallel BC$. 只要 $AD = BC$,四边形 $ABCD$ 就是平行四边形. 当 $AD = BC$ 时,有 $11 - x = x - 5$,∴ $x = 8$. 故答案为 8.

7. 平行 **点拨**:由 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ac + 2bd$,整理可得 $(a - c)^2 + (b - d)^2 = 0$,即 $a = c, b = d$,又因为 a 与 c 为对边的长,则 b 与 d 为对边的长,所以这个四边形是平行四边形.

8. 解:图略. 作法一:(1)作 $\angle MBN = 60°$;

(2)在射线 BM, BN 上分别截取 $BA = a, BC = b$;

(3)分别以 A, C 两点为圆心、线段 b, a 的长为半径作弧,两弧交于点 D;

(4)连接 AD, CD. 则四边形 $ABCD$ 就是要求作的平行四边形.

作法二:

(1)以线段 a 的长为边长作等边三角形 ABE;

(2)在射线 BE 上截取 $BC = b$;

(3)过点 A 作 $AD \parallel BC$,过点 C 作 $CD \parallel BA$,CD 与 AD 交于点 D.

则四边形 $ABCD$ 就是要求作的平行四边形.

点拨:此题答案不唯一,有多种作法.

9. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB \parallel CD$.

∴ $\angle FAE = \angle CDE$.

∵ E 是 AD 的中点 ,∴ $AE = DE$.

又∵ $\angle FEA = \angle CED$,

∴ $\triangle FAE \cong \triangle CDE$.

∴ $AF = CD$. 又∵ $AF \parallel CD$,

∴ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:平行四边形的判定方法有多种,选择哪种方法解答应先分析题目中给的哪方面的条件多一些.

10. 证明:(1)∵ 点 C 是 AB 的中点,

$\therefore AC=BC$.

又∵ $AD=CE, CD=BE$,

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$.

(2)∵ $\triangle ACD\cong\triangle CBE$,$\therefore \angle ACD=\angle B$.

$\therefore CD\parallel BE$.

又∵ $CD=BE$,

∴ 四边形 $CBED$ 是平行四边形.

11. (1) **证明**:∵ $BC=2AB$,点 E 是 BC 的中点,

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC=AB$.

又∵ $\angle ABC=60°$,

$\therefore \triangle ABE$是等边三角形. $\therefore AE=AB$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB=CD$.

$\therefore AE=CD$.

(2)**解**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BC=AD, BC\parallel AD$.

∵ 点 E,F 分别是 BC,AD 的中点,

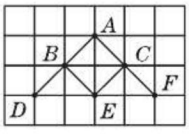
$\therefore BE=DF$.

又∵ $BC\parallel AD$,$\therefore BE\parallel FD$.

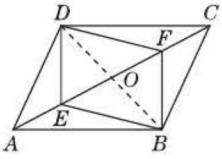
∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形. $\therefore DE=BF=6$.

12. A **点拨**:解答本题运用了待定系数法及数形结合思想. ∵ $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(10,6)$, $D(2,6)$,$\therefore AB\parallel CD$. 又∵ $AB=8-0=8$, $CD=10-2=8$,$\therefore AB=CD$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. ∵ $10\div2=5, 6\div2=3$,∴ 平行四边形的中心的坐标是$(5,3)$. ∵ 直线 $y=mx-3m+2$ 将四边形 $ABCD$ 分成面积相等的两部分,∴ 直线$y=mx-3m+2$ 过中心$(5,3)$. ∴ $5m-3m+2=3$,解得 $m=\frac{1}{2}$. 故选 A.

13. 解:3 如图. **点拨**:解答本题运用了数形结合思想. 如图,有 3 个平行四边形,分别为平行四边形 $ABEC$、平行四边形 $BCFE$、平行四边形 $BCED$.



(第 13 题图)



(第 14 题图)

14. 证明:(1)如图,连接 BD,与 AC 相交于点 O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC, OD=OB$.

∵ $AE=CF$,$\therefore OE=OF$.

又∵ $\angle DOE=\angle BOF$,

$\therefore \triangle DOE\cong\triangle BOF$(SAS).

$\therefore DE=BF$.

(2)∵ $OB=OD, OE=OF$,

∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

15. 解:过点 D 作 $DE\parallel AM$ 交 BC 的延长线于点 E. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\therefore AD\parallel BC$, $AD=BC$. ∵ $DE\parallel AM$,$\therefore$ 四边形 $AMED$ 是平行四边形. $\therefore AD=ME, AM=DE$. ∵ M 是 BC 的中点,

$AD=10$,$\therefore BM=\frac{1}{2}BC=5$. $\therefore BE=BM+ME=BM+AD=15$. ∵ 四边形 $AMED$ 是平行四边形,

$\therefore DE=AM=9$.

∵ $BD=12, 9^2+12^2=15^2$,$\therefore BD^2+DE^2=BE^2$.

$\therefore \triangle DBE$ 为直角三角形. $\therefore BE$ 边上的高为 $\frac{9\times12}{15}=\frac{36}{5}$.

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $10\times\frac{36}{5}=72$.

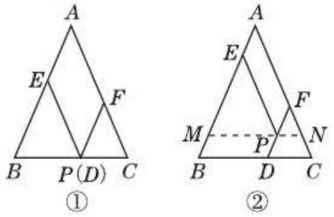
点拨:解答该题的关键是求出平行四边形的高,观察所给边长,通过构造平行四边形可以出现勾股数,由面积相等法可以求出平行四边形的高.

16. 解:猜想是 $PD+PE+PF=AB$.

证明:如图①,∵ $PE\parallel AC, PF\parallel AB$, ∴ 四边形 $PEAF$ 是平行四边形. $\therefore PF=AE$. ∵ $AB=AC$, $\therefore \angle B=\angle C$. ∵ $PE\parallel AC$, $\therefore \angle EPB=\angle C$. $\therefore \angle B=\angle EPB$. $\therefore PE=BE$.

∵ $AE+BE=AB$,$\therefore PE+PF=AB$.

又∵ $PD=0$,$\therefore PD+PE+PF=AB$.



(第 16 题图)

(1)猜想是 $PD+PE+PF=AB$.

证明:过点 P 作 $MN\parallel BC$ 分别交 AB,AC 于 M, N 两点,如图②所示.

由原题得 $PE+PF=AM$.

易知四边形 $BDPM$ 是平行四边形,

$\therefore MB=PD$.

$\therefore PD+PE+PF=MB+AM=AB$.

(2)猜想是 $PE+PF-PD=AB$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.（1）**证明**：在△ABC和△CDA中，

$\because \begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle BAC=\angle ACD=90°,\\ AC=CA,\end{cases}$

$\therefore$ △ABC≌△CDA（AAS）.

$\therefore BC=DA, AB=CD.$

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

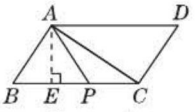
（2）**解**：在Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，由勾股定理，得$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$（cm）.

设经过t s时，△ABP为等腰三角形. 当P在BC上时，

①$BA=BP=3$ cm，即$t=3$时，△ABP为等腰三角形；

②$BP=AP$时，易得$BP=AP=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$ cm，即$t=\frac{5}{2}$时，△ABP为等腰三角形；

③$AB=AP$，如图，过点A作$AE\perp BC$，垂足为点E，易得$AE=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$ cm.



（第17题图）

在Rt△ABE中，根据勾股定理，得$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}$（cm）.

$\therefore BP=2BE=\frac{18}{5}$ cm，即$t=\frac{18}{5}$时，△ABP为等腰三角形. 当P在CD上时，不能得出等腰三角形. 当P在AD上时，只能是$AP=AB=3$ cm时，$\therefore BC+CD+DP=5+3+(5-3)=10$（cm），即$t=10$时，△$ABP$为等腰三角形.

答：从运动开始经过$\frac{5}{2}$ s或3 s或$\frac{18}{5}$ s或10 s时，△ABP为等腰三角形.

点拨：解答本题运用了分类讨论思想. （1）利用AAS证明△ABC≌△CDA，可得$BC=AD$，$AB=CD$，从而证得四边形$ABCD$是平行四边形；（2）利用勾股定理先求得AC的长，再分点P在BC上、点P在CD上、点P在AD上三种情况讨论，结合等腰三角形的判定和勾股定理进行计算即可.

22.3 三角形的中位线

同类变式

1. 10

练中考·练模拟 得满分

1. A **点拨**：设三角形的三边长分别是a,b,c，令$a=3,b=5$，则$2<c<8$，$\therefore 10<$三角形的周长<16. $\therefore 5<$所求三角形周长<8. 故选A.

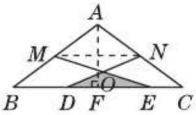
2. A

3. A **点拨**：$\because BD\perp DC, BD=4, CD=3$，由勾股定理得$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=5$，$\because E,F,G,H$分别是$AB,BD,CD,AC$的中点，$\therefore FG=\frac{1}{2}BC=EH=2.5$，$EF=HG=\frac{1}{2}AD=3.5$. $\therefore$四边形$EFGH$的周长是$EF+FG+HG+EH=2\times(2.5+3.5)=12$. 故选A.

4. 100

5. 3 **点拨**：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore OA=OC, OB=OD$. 又$\because AC+BD=24$厘米，$\therefore OA+OB=12$厘米. $\because$ △OAB的周长是18厘米，$\therefore AB=6$厘米. $\because$点E,F分别是线段AO,BO的中点，$\therefore EF$是△OAB的中位线. $\therefore EF=\frac{1}{2}AB=3$厘米. 故答案为3.

6. 1.5 cm² **点拨**：如图，连接MN，作$AF\perp BC$于点F. $\because AB=AC$，$\therefore BF=CF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 8=4$（cm）. 在Rt△$ABF$中，$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（cm）. $\because M,N$分别是AB,AC的中点，$\therefore MN$是△ABC的中位线，$\therefore MN$平分AF且$MN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 8=4$（cm）. $\therefore NM=DE$. 易得△MNO≌△EDO，$\therefore$阴影三角形的高是$\frac{1}{2}AF\div 2=\frac{1}{2}\times 3\div 2=0.75$（cm）. $\therefore S_{阴影}=4\times 0.75\div 2=1.5$（cm²）.



（第6题图）

7.（1）**证明**：$\because BD$是$\angle ABC$的平分线，$AB=BC$，$\therefore D$是AC的中点. 又$\because E$是AB的中点，$\therefore ED$是△ABC的中位线. $\therefore DE\parallel BC$.

（2）**解**：$\because DE\parallel BC$，$\therefore \angle EDB=\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=50°$.

8. **证明**：（1）$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore AD=BC, BD=2BO$. 又$\because BD=2AD$，$\therefore BO=BC$. 又$\because E$是OC的中点，$\therefore BE\perp AC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵ $BE \perp AC$, G 是 AB 的中点,

∴ EG 是 Rt△ABE 斜边上的中线.

∴ $EG = \frac{1}{2}AB$. 易得 EF 是△OCD 的中位线,

∴ $EF = \frac{1}{2}CD$.

又∵ $AB = CD$,

∴ $EG = EF$.

点拨:(1)先由已知条件证得△OBC 是等腰三角形,再根据等腰三角形三线合一的性质知 $BE \perp AC$;(2)利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半及中位线定理可证 $EG = EF$.

9. 解:(1)由题意得 $\angle ABF = 180° - 2 \times 30° = 120°$.

(2)∵ 立柱 BC, DE 垂直于横梁 AF,

∴ $BC // DE$.

∵ D 是 AB 的中点,

∴ $AD = BD$.

∴ 在 Rt△ACB 中, CD 是斜边上的中线.

∴ $CD = \frac{1}{2}AB = AD$.

又∵ $DE \perp AF$,

∴ $AE = CE$.

∴ DE 是△ABC 的中位线.

∴ $DE = \frac{1}{2}BC$.

在 Rt△ABC 中,

∵ $\angle A = 30°$,

∴ $BC = \frac{1}{2}AB = 4$ m,

∴ $DE = 2$ m.

∴ 立柱 BC 的长度为 4 m, DE 的长度为 2 m.

10. B

11. A **点拨**:连接 EG, HF, EG 和 HF 相交于点 O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD // BC$, $AD = BC$.

∵ H 和 F 分别为 AD, BC 的中点,

∴ $AH = BF$, $AH // BF$.

∴ 四边形$ABFH$ 为平行四边形.

∴ $AE // HO$.

同理可证 $EO // AH$,

∴ 四边形$AEOH$是平行四边形.

∵ EH 是▱$AEOH$的对角线,

∴ $S_{\triangle AEH} = S_{\triangle EOH} = \frac{1}{2}S_{\square AEOH}$.

同理可得 $S_{\triangle EOF} = S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}S_{\square EBFO}$,

$S_{\triangle CFG} = S_{\triangle FOG} = \frac{1}{2}S_{\square FOGC}$,

$S_{\triangle DHG} = S_{\triangle HOG} = \frac{1}{2}S_{\square HOGD}$,

∴ ▱$EFGH$的面积 $= \frac{1}{2} \times$ ▱$ABCD$的面积 $= \frac{1}{2}S$.

同理可得第 3 个平行四边形的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}S = \frac{1}{4}S$.

以此类推,可知每一个新构成的平行四边形的面积都为前一个平行四边形面积的$\frac{1}{2}$,

∴ 第 2 018个平行四边形的面积为$\frac{1}{2^{2\,017}}S$.

故选 A.

12. 15. 5 **点拨**:弄清△DEF 的周长与△ABC 的周长的关系是解决本题的关键.

13. 证明:∵ $BD = CD$,

∴ $\angle 1 = \angle BCD$.

∵ $\angle 1 = \angle 2$,

∴ $\angle BCD = \angle 2$.

∴ $CD // AB$.

∴ $\angle CDA = \angle 3$.

又∵ $\angle BCD = \angle 2 = \angle 3$,

∴ $\angle CDA = \angle BCD$, $BE = AE$.

∴ $DE = CE$.

又∵ $\angle BED = \angle AEC$,

∴ △BDE≌△ACE.

∴ $\angle 1 = \angle 4$,

$\angle BDE = \angle ACE = 90°$.

∴ $\angle ACH = 90° - \angle BCH$.

∵ $CH \perp AB$,

∴ $\angle 2 = 90° - \angle BCH$,

∴ $\angle ACH = \angle 2 = \angle 1 = \angle 4$,

∴ $AF = CF$.

∵ $\angle AEC = 90° - \angle 4$,

$\angle ECF = 90° - \angle ACH$,

∴ $\angle AEC = \angle ECF$.

∴ $CF = EF$.

∴ $EF = AF$.

又∵ O 为 AB 的中点,

∴ OF 为△ABE 的中位线.

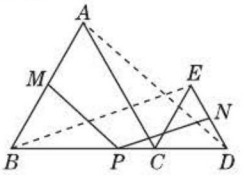
∴ $OF = \frac{1}{2}BE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨：由已知条件，易得 $CD \parallel AB$，再由 SAS 可证得 $\triangle BDE \cong \triangle ACE$，然后证得 F 是 AE 的中点，最后由三角形中位线定理可证得结论.

14. 解：$PM = PN$，$\angle MPN = 120°$.

证明：如图，连接 AD，BE.



（第 14 题图）

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形，

$\therefore AC = BC$，$\angle BCA = 60°$，$CD = CE$，$\angle ECD = 60°$.

$\therefore \angle ECD + \angle ACE = \angle BCA + \angle ACE$，

即 $\angle ACD = \angle BCE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\because \begin{cases} AC = BC, \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$（SAS）.

$\therefore AD = BE$，$\angle CAD = \angle CBE$.

又 $\because P$ 为 BD 边的中点，M，N 分别为 AB，ED 的中点，$\therefore PM$，PN 分别是 $\triangle ABD$，$\triangle BDE$ 的中位线.

$\therefore PM = \frac{1}{2}AD$，$PN = \frac{1}{2}BE$.

$\therefore PM = PN$.

易得 $MP \parallel AD$，

$\therefore \angle BPM = \angle CDA$.

同理 $\angle NPD = \angle EBC$，

$\therefore \angle NPD = \angle CAD$，

$\therefore \angle MPN = 180° - \angle BPM - \angle NPD = 180° - \angle CDA - \angle CAD = \angle ACD$.

$\because \angle ACD = \angle ABC + \angle BAC = 120°$，

$\therefore \angle MPN = 120°$.

点拨：解答本题运用了构造法，连接 AD，BE，通过证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$，得出 $AD = BE$；然后由三角形中位线定理求得 $PM = PN$；最后由平行线的性质、等量代换来求 $\angle MPN$ 的度数.

15. 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 点 O 是 BD 的中点.

又 $\because$ 点 E 是边 CD 的中点，

$\therefore OE$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线.

$\therefore OE \parallel BC$，且 $OE = \frac{1}{2}BC$.

又 $\because CF = \frac{1}{2}BC$，

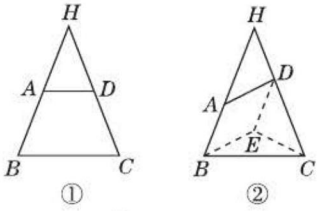
$\therefore OE = CF$.

$\because$ 点 F 在 BC 的延长线上，

$\therefore OE \parallel CF$.

$\therefore$ 四边形 $OCFE$ 是平行四边形.

16. 证明：如图①，当 A，D 分别为 BH，CH 的中点时，$AD = \frac{1}{2}BC$.



（第 16 题图）

如图②，当 A 不是 BH 的中点时，点 D 也不是 CH 的中点. $\because \angle B = \angle C$，$\therefore BH = HC$. $\because DH = AB$，$\therefore AH = CD$. 过点 B 作 $BE \parallel AD$，过点 D 作 $DE \parallel BH$，BE 与 DE 交于 E 点，连接 EC，$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形，$\angle EDC = \angle H$. $\therefore DE = AB$，$BE = AD$. $\therefore DH = DE$. 又 $\because CD = AH$，$\therefore \triangle ADH \cong \triangle CED$. $\therefore AD = CE$. $\therefore BE = CE$. 在 $\triangle BEC$ 中，$\because BE + EC > BC$，$\therefore 2AD > BC$.

$\therefore AD > \frac{1}{2}BC$. 综上可得，$AD \geqslant \frac{1}{2}BC$.

点拨：AD 有可能是三角形的中位线，所以 AD 可能等于 $\frac{1}{2}BC$；当 AD 不是三角形的中位线时，可利用 AD 和 AB 作为邻边来构造平行四边形求解. 本题易忽略第一种情况.

17. 解：$\triangle AGD$ 是直角三角形.

证明：如图，连接 BD，取 BD 的中点 H，连接 HF，HE.

$\because F$ 是 AD 的中点，

$\therefore HF \parallel AB$，$HF = \frac{1}{2}AB$，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

同理，$HE \parallel CD$，$HE = \frac{1}{2}CD$，

$\therefore \angle 2 = \angle EFC$.

$\because AB = CD$，

$\therefore HF = HE$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because \angle EFC = 60°$，

$\therefore \angle 3 = 60°$，$\angle AFG = 60°$，$\angle GFD = 120°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

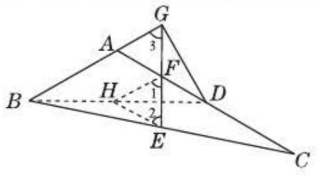
$\therefore \triangle AGF$为等边三角形.

$\because AF = FD$,

$\therefore GF = FD$,

$\therefore \angle FGD = \angle FDG = \frac{1}{2}(180° - \angle GFD) = 30°$,

$\therefore \angle AGD = 90°$,即$\triangle AGD$是直角三角形.



(第17题图)

点拨:本题考查了三角形中位线定理,解答本题的关键是作出辅助线,这步有一定难度.

22.4 矩 形

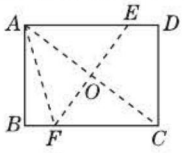
练中考·练模拟 得满分

1. C **2.** A **3.** C

4. 12 **点拨**:本题不难得出四边形$EFGH$为矩形,且易得出矩形$EFGH$的各边长,根据矩形的面积公式解答即可.

5. 280 **点拨**:等量关系:5个小矩形的宽等于2个小矩形的长;6个小矩形的宽加1个小矩形的长等于大矩形周长的一半.

6. **解**:如图,连接AC,AF,设AC与EF交于点O.



(第6题图)

易知EF垂直平分AC,

$\therefore AF = CF$,$AO = CO$,$\angle FOC = 90°$.

$\because$四边形$ABCD$为矩形,

$\therefore \angle B = 90°$,$CD = AB = 3$,

$AD = BC = 4$.

设$CF = x$,则$AF = x$,$BF = 4 - x$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,

由勾股定理得$AC^2 = BC^2 + AB^2 = 5^2$,

$\therefore AC = 5$.

又$\because O$为AC的中点,

$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$.

$\because AB^2 + BF^2 = AF^2$,

$\therefore 3^2 + (4 - x)^2 = x^2$,解得$x = \frac{25}{8}$. $\therefore CF = \frac{25}{8}$.

$\because \angle FOC = 90°$,$\therefore OF^2 = FC^2 - OC^2$.

$\therefore OF = \frac{15}{8}$.

同理$OE = \frac{15}{8}$,

$\therefore EF = OE + OF = \frac{15}{4}$.

7. (1)**证明**:由翻折的性质可得$AF = AB$,$\angle F = \angle B$.

$\because$四边形$ABCD$为矩形,

$\therefore AB = CD$,$\angle B = \angle D = 90°$.

$\therefore AF = CD$,$\angle F = \angle D = 90°$,

又$\because \angle AEF = \angle CED$,

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CDE$(AAS).

(2)**解**:$\because \triangle AFE \cong \triangle CDE$,

$\therefore AE = CE$,$EF = ED$.

根据翻折的性质可知$FC = BC = 8$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AFE$中,$AE^2 = AF^2 + EF^2$,

即$(8 - EF)^2 = 4^2 + EF^2$,

解得$EF = 3$,$\therefore AE = 5$.

$\therefore$阴影部分的面积为$\frac{1}{2}AE \cdot CD = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$.

8. **解**:(1)$\because BE \perp AC$,$DF \perp AC$,

$\therefore \angle BEO = \angle DFO = 90°$.

$\because$点O是EF的中点,$\therefore OE = OF$.

又$\because \angle BOE = \angle DOF$,

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOF$.

(2)四边形$ABCD$是矩形.

理由如下:$\because \triangle BOE \cong \triangle DOF$,$\therefore OB = OD$.

又$\because OA = OC$,

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.

$\because OA = \frac{1}{2}BD$,$OA = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore BD = AC$. $\therefore$四边形$ABCD$是矩形.

点拨:此题主要考查了全等三角形的判定与性质以及矩形的判定.

9. A

10. **解**:$\because$四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore \angle ADC = 90°$,$AD = BC = 8$,$CD = AB = 4$.

设$DE = x$,则$CE = AE = 8 - x$.

$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle DEC$中,$CE^2 = DE^2 + CD^2$,

$\therefore (8 - x)^2 = x^2 + 4^2$. $\therefore x = 3$.

$\therefore CE = 8 - x = 5$.

$\because$四边形$ABCD$是矩形,$\therefore O$为AC的中点.

又$\because F$是AE的中点,$\therefore OF = \frac{1}{2}CE = \frac{5}{2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:要想求 OF 的长,只需求出 CE 的长,若设 $DE=x$,则 $CE=AE=8-x$,在 $Rt\triangle DEC$ 中,$CE^2=DE^2+CD^2$,代入即可求出 DE 和 CE 的长,继而求出答案.

11. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $CD/\!/AB$.

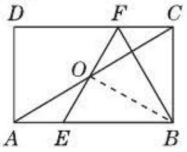
∴ $\angle FCO=\angle EAO$.

在 $\triangle FCO$ 与 $\triangle EAO$ 中,

$$\begin{cases}\angle FOC=\angle EOA,\\ \angle FCO=\angle EAO,\\ CF=AE,\end{cases}$$

∴ $\triangle FCO\cong\triangle EAO$. ∴ $OF=OE$.

(2)**解**:如图,连接 OB.



(第 11 题图)

∵ $\angle BEF=2\angle BAC$,

$\angle BEF=\angle BAC+\angle AOE$,

∴ $\angle BAC=\angle AOE$.

∴ $\triangle EAO$ 为等腰三角形.

∴ $AE=OE$.

∵ $\triangle FCO\cong\triangle EAO$,

∴ $\triangle FCO$ 为等腰三角形.

∴ $CF=OF=OE=AE$.

又∵ $BE=BF$,

∴ BO 垂直平分 EF.

易知 $Rt\triangle BCF\cong Rt\triangle BOF\cong Rt\triangle BOE$.

又∵ $\angle ABC=90°$,

∴ $\angle CBF=\angle OBF=\angle OBE=30°$.

在 $Rt\triangle BCF$ 中,

∵ $\angle CBF=30°$,$CF=2$,

∴ $BF=4$.

∴ $AB=AE+BE=CF+BF=2+4=6$.

12. **解**:∵ 四边形 $OABC$ 是矩形,$A(10,0)$,$C(0,4)$,

∴ $\angle OCB=90°$,$OC=4$,$BC=OA=10$.

∵ D 为 OA 的中点,

∴ $OD=AD=5$.

(1)当 $PO=PD$ 时,点 P 在 OD 的垂直平分线上,

∴ 点 P 的坐标为(2.5,4).

(2)当 $OP=OD$ 时,$OP=OD=5$,

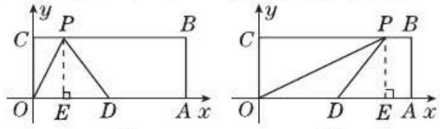
∴ $PC=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

∴ 点 P 的坐标为(3,4).

(3)当 $DP=DO$ 时,作 $PE\perp OA$ 于 E,

则 $\angle PED=90°$,$DE=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

分两种情况:当 E 在 D 的左侧时,如图①所示.



(第 12 题图)

$OE=5-3=2$,

∴ 点 P 的坐标为(2,4);

当 E 在 D 的右侧时,如图②所示.

$OE=5+3=8$,

∴ 点 P 的坐标为(8,4).

综上所述,点 P 的坐标为(2,4),(2.5,4),(3,4)或(8,4).

22.5 菱 形

同类变式

1. 3

2. C **点拨**:解题的关键是注意数形结合思想的应用及菱形的面积等于其对角线乘积的一半. 如图所示,∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AC\perp BD$,$OA=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4=2$,

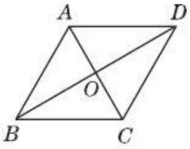
$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times120°=60°$.

∴ $\angle ABO=30°$. ∴ $AB=2OA=4$.

∴ $OB=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

∴ $BD=2OB=4\sqrt{3}$.

∴ 菱形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$. 故选 C.



(第 2 题图)

3. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $BC=CD$.

∵ CA 平分 $\angle BCD$,∴ $\angle BCE=\angle DCE$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCE$ 中,$\begin{cases}CB=CD,\\ \angle BCE=\angle DCE,\\ CE=CE,\end{cases}$

∴ $\triangle BCE\cong\triangle DCE$. ∴ $\angle EBC=\angle EDC$.

∵ $AB/\!/DC$,∴ $\angle APD=\angle EDC$.

∴ $\angle APD=\angle EBC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:本题考查了菱形的性质、全等三角形的判定与性质,解答本题要求熟练掌握菱形的四条边都相等且每条对角线都平分一组对角等性质.

4. (1)**证明**:因为 $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$,所以四边形 $AEDF$ 是平行四边形,所以 $AE = DF$.

(2)**解**:若 AD 平分 $\angle BAC$,则四边形 $AEDF$ 是菱形.

理由如下:因为 $DE \parallel AC$,

所以 $\angle DAF = \angle EDA$.

因为 AD 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle EAD = \angle DAF$,

所以 $\angle EDA = \angle EAD$,

所以 $AE = DE$.

由(1)知四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

所以四边形 $AEDF$ 是菱形.

5. **解**:四边形 $ACEF$ 是菱形. 理由如下:

$\because DE$ 垂直平分 BC, $\therefore BE = CE$.

$\because \angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$,

$\therefore \angle BCE = \angle B = 30°$. $\therefore \angle AEC = 60°$.

$\therefore \triangle ACE$ 为等边三角形,

$\therefore AE = CE = AC$.

$\because \angle AEF = \angle BED = 90° - \angle B = 60°$,

$AF = CE = AE$,

$\therefore \triangle AEF$ 为等边三角形.

$\therefore AC = CE = EF = AF$,

$\therefore$ 四边形 $ACEF$ 是菱形(四条边相等的四边形是菱形).

点拨:先由线段垂直平分线的性质得出 $BE = CE$,再得出 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AEF$ 都是等边三角形,进而得出四边形 $ACEF$ 是菱形.

练中考·练模拟 得满分

1. C **2**. C **3**. B **4**. 24

5. 75° **点拨**:首先连接 BF,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle BAD = 70°$,易求得 $\angle FBA = \angle FAB = 35°$,继而求得 $\angle CBF$ 的度数,然后由 $\triangle DCF \cong \triangle BCF$ 即可求得答案.

6. $18\sqrt{3}$

7. (1)**证明**:$\because \triangle ABC$ 绕 A 点旋转得到 $\triangle ADE$,

$\therefore AB = AD$, $AC = AE$, $\angle BAC = \angle DAE$,

$\therefore \angle BAC + \angle BAE = \angle DAE + \angle BAE$,

$\therefore \angle EAC = \angle DAB$.

又 $AB = AC$, $\therefore AE = AD$,

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle ADB$.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $ADFC$ 是菱形,

且 $\angle BAC = 45°$,

$\therefore BD \parallel AC$,

$\therefore \angle DBA = \angle BAC = 45°$,

又 $AB = AD$, $\therefore \angle DBA = \angle BDA = 45°$,

$\therefore \triangle BAD$ 是等腰直角三角形.

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$,

$\therefore BD = 2\sqrt{2}$.

$\because$ 四边形 $ADFC$ 是菱形,

$\therefore AD = DF = FC = AC = AB = 2$,

$\therefore BF = BD - DF = 2\sqrt{2} - 2$.

8. (1)**证明**:在矩形 $ABCD$ 中,

$BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$.

$\therefore \angle ABD = \angle CDB$.

$\because BE$, DF 分别平分 $\angle ABD$, $\angle CDB$,

$\therefore \angle DBE = \frac{1}{2}\angle ABD$, $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle CDB$.

$\therefore \angle DBE = \angle BDF$.

$\therefore BE \parallel DF$.

又$\because BF \parallel DE$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

(2)**解**:当 $\angle ABE = 30°$ 时,四边形 $BEDF$ 是菱形.

理由如下:$\because \angle ABE = 30°$,

$\therefore \angle DBE = 30°$.

$\because \angle A = 90°$,

$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90°$.

$\therefore \angle ADB = 30°$.

$\therefore \angle DBE = \angle EDB = 30°$.

$\therefore EB = ED$.

又$\because$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

9. B **10**. 5 **11**. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} ab$

12. **解**:(1)24;24;24

(2)对于线段 AC 与线段 BD 垂直相交(垂足 O 不与点 A, C, B, D 重合)的任意情形,四边形 $ABCD$ 的面积为定值 24.

证明如下:$\because AC \perp BD$, $\therefore S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB$,

$S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD$,

$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{\triangle BAC} + S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$.

(3)顺次连接点 A, B, C, D, A 所围成的封闭图形的面积仍为 24.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

13. (1)**证明**:∵ $\angle\alpha+\angle EAC=90°$,
$\angle NAF+\angle EAC=90°$,
∴ $\angle\alpha=\angle NAF$.
又∵ $\angle B=\angle F$, $AB=AF$,
∴ $\triangle ABM\cong\triangle AFN$,
∴ $AM=AN$.
(2)**解**:四边形 $ABPF$ 是菱形.
理由:∵ $\angle\alpha=30°$, $\angle EAF=90°$,
∴ $\angle BAF=120°$.
又∵ $\angle B=\angle F=60°$,
∴ $\angle B+\angle BAF=60°+120°=180°$,
$\angle F+\angle BAF=60°+120°=180°$,
∴ $AF/\!/BP$, $AB/\!/PF$,
∴ 四边形 $ABPF$ 是平行四边形.
又∵ $AB=AF$,
∴ 四边形 $ABPF$ 是菱形.
技巧点拨:巧用"邻边相等($AB=AF$)"这一条件,猜想它是菱形.

22.6 正方形

同类变式

1. **解**:(1)当 $AD=2AB$ 时,四边形 $PEMF$ 为矩形.
理由:∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形,
∴ $\angle A=\angle D=90°$.
∵ 点 M 是 AD 的中点,
∴ $AM=DM=\frac{1}{2}AD$.
又∵ $AD=2AB=2CD$,
∴ $AB=AM=DM=CD$.
∴ $\angle ABM=\angle AMB=45°$,
$\angle DCM=\angle DMC=45°$.
∴ $\angle BMC=180°-45°-45°=90°$.
∵ $PE\perp CM$, $PF\perp BM$,
∴ $\angle MEP=\angle MFP=90°$.
∴ 四边形 $PEMF$ 为矩形,
即当 $AD=2AB$ 时,四边形 $PEMF$ 为矩形.
(2)当点 P 运动到 BC 的中点时,矩形 $PEMF$ 为正方形.
理由:∵ $PE\perp CM$, $PF\perp BM$,
∴ $\angle PFB=\angle PEC=90°$.
∵ P 是 BC 的中点,
∴ $BP=CP$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
∴ $\angle ABC=\angle BCD=90°$.
由(1)知, $\angle ABM=45°$, $\angle DCM=45°$,
∴ $\angle FBP=45°$, $\angle ECP=45°$,
∴ $\angle FBP=\angle ECP$.
在 $\triangle BFP$ 和 $\triangle CEP$ 中,
$$\begin{cases}\angle FBP=\angle ECP,\\ \angle PFB=\angle PEC,\\ BP=CP,\end{cases}$$
∴ $\triangle BFP\cong\triangle CEP$.
∴ $PF=PE$.
∴ 矩形 $PEMF$ 是正方形,
即当点 P 运动到 BC 的中点时,矩形 $PEMF$ 为正方形.

2. 16

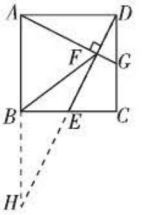
练中考·练模拟 得满分

1. D **点拨**:∵ EF 垂直平分 BC, ∴ $BE=EC$, $BF=CF$. ∵ $BE=BF$, ∴ $BE=EC=CF=BF$. ∴ 四边形 $BECF$ 是菱形. 当 $BC=AC$ 时, ∵ $\angle ACB=90°$, ∴ $\angle A=\angle ABC=45°$, ∵ 四边形 $BECF$ 是菱形, ∴ $\angle EBF=2\angle EBC=2\times45°=90°$. ∴ 四边形 $BECF$ 是正方形. 当 $CF\perp BF$ 时, $\angle BFC=90°$, ∴ 四边形 $BECF$ 是正方形. 当 $BD=DF$ 时, ∵ 四边形 $BECF$ 是菱形, ∴ $BC=2BD$, $EF=2DF$. ∴ $BC=EF$. ∴ 四边形 $BECF$ 是正方形. 当 $AC=BF$ 时,无法得出四边形 $BECF$ 是正方形. 故选 D.

2. A **点拨**:正方形铁片对角线的长是 $10\sqrt{2}$ cm$\approx$14.14 cm,所以正方形铁片内部的每一个点,到正方形铁片的顶点的距离都小于 14.14 cm. 故选 A.

3. ①③④ **4.** 65 **5.** $\frac{13}{2}$

6. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
∴ $\angle ADG=\angle C=90°$, $AD=DC$.
又∵ $AG\perp DE$,
∴ $\angle DAG+\angle ADF=90°=\angle CDE+\angle ADF$,
∴ $\angle DAG=\angle CDE$,
∴ $\triangle ADG\cong\triangle DCE$.
(2)如图所示,延长 DE 交 AB 的延长线 H.
∵ E 是 BC 的中点, ∴ $BE=CE$,
又∵ $\angle C=\angle HBE=90°$,
$\angle DEC=\angle HEB$,
∴ $\triangle DCE\cong\triangle HBE$,
∴ $BH=DC=AB$, 即 B 是 AH 的中点.
又∵ $\angle AFH=90°$,



(第 6 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ 在 Rt△AFH 中，$BF=\frac{1}{2}AH=AB$.

7. **证明**：过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G. 因为 $\angle C=90°$，$DE\perp BC$，$DF\perp AC$，所以 $\angle DEC=\angle DFC=90°=\angle C$. 所以四边形 $CEDF$ 是矩形. 因为 BD 平分 $\angle CBA$，$DG\perp AB$，$DE\perp BC$，所以 $DE=DG$. 同理可证 $DG=DF$，所以 $DE=DF$. 所以四边形 $CEDF$ 是正方形.

8. 4 600

9. 6　**点拨**：根据两点之间线段最短和点 B 与点 D 关于 AC 对称，即可求得△PBE 周长的最小值.

10. (1) **证明**：在正方形 $ABCD$ 中，无论点 P 运动到 AB 上何处时，

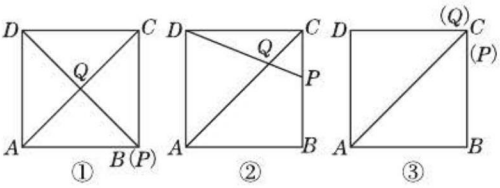
都有 $AD=AB$，$\angle DAQ=\angle BAQ=45°$.

在△ADQ 和△ABQ 中，

$$\begin{cases}AD=AB,\\ \angle DAQ=\angle BAQ,\\ AQ=AQ,\end{cases}$$

∴ △ADQ≌△ABQ.

(2) **解**：当 $AQ=DQ$ 时，如图①，此时点 Q 为正方形 $ABCD$ 的中心，点 B，P 重合.



（第 10 题图）

当 $AQ=AD$ 时，如图②，

此时有 $\angle ADQ=\angle AQD$.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，

∴ $AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

∴ $CQ=AC-AQ=AC-AD=4\sqrt{2}-4$.

∵ $AD/\!/BC$，

∴ $\angle CPQ=\angle ADQ$.

∴ $\angle CPQ=\angle AQD$.

∴ $\angle CQP=\angle CPQ$.

∴ $CP=CQ=4\sqrt{2}-4$.

∴ $BP=4-(4\sqrt{2}-4)=8-4\sqrt{2}$.

当 $AD=DQ$ 时，如图③，此时 C，P，Q 三点重合.

综上所述，当点 P 运动到点 B 或点 P 运动到 BC 上且到点 B 的距离为 $8-4\sqrt{2}$ 或点 P 运动到点 C 时，△ADQ 恰为等腰三角形.

点拨：(1) 利用正方形的性质即可证得无论点 P 运动到 AB 上何处时，都有 △ADQ≌△ABQ；(2) 要注意运用分类讨论思想求解.

11. **解**：四边形 $AEMF$ 是正方形. 证明如下：

∵ $AD\perp BC$，△AEB 是由 △ADB 折叠所得，

∴ $\angle EAB=\angle BAD$，$\angle E=\angle ADB=90°$，

$BE=BD$，$AE=AD$.

又∵ △AFC 是由△ADC 折叠所得，

∴ $\angle CAF=\angle CAD$，$\angle F=\angle ADC=90°$，

$CF=CD$，$AF=AD$.

∴ $AE=AF$.

∵ $\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC=45°$，

∴ $\angle EAB+\angle CAF=45°$.

∴ $\angle BAD+\angle CAD+\angle EAB+\angle CAF=90°$，

即 $\angle EAF=90°$.

∴ 四边形 $AEMF$ 是矩形.

又∵ $AE=AF$，

∴ 四边形 $AEMF$ 是正方形.

12. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP$.

又∵ $DP=DP$，

∴ △ADP≌△CDP.

∴ $PA=PC$.

又∵ $PA=PE$，

∴ $PC=PE$.

(2) **解**：由(1)知△ADP≌△CDP，

∴ $\angle DAP=\angle DCP$.

∵ $PA=PE$，

∴ $\angle DAP=\angle E$.

∴ $\angle FCP=\angle E$.

又∵ $\angle PFC=\angle DFE$，$\angle EDF=90°$，

∴ $\angle CPE=\angle EDF=90°$.

(3) **解**：$AP=CE$. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=120°$，

∴ $\angle ADC=120°$.

∴ $\angle EDC=60°$.

由(2)可知 $\angle CPE=\angle EDF$，

∴ $\angle CPE=60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $PC=PE$,

∴ $\triangle PCE$ 是等边三角形.

∴ $PE=CE$.

又∵ $PA=PE$,

∴ $AP=CE$.

22.7 多边形的内角和与外角和

同类变式

1. C

2. **解**:连接 BE.

在 $\triangle COD$ 与 $\triangle BOE$ 中,$\angle D+\angle C+\angle COD=180°$,$\angle OBE+\angle OEB+\angle BOE=180°$,

∴ $\angle D+\angle C=180°-\angle COD$,$\angle OBE+\angle OEB=180°-\angle BOE$.

∵ $\angle COD=\angle BOE$,

∴ $\angle D+\angle C=\angle OBE+\angle OEB$.

∴ $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle DEF+\angle F=\angle A+\angle ABC+\angle OBE+\angle OEB+\angle DEF+\angle F=\angle A+\angle ABE+\angle BEF+\angle F=360°$.

练中考·练模拟 得满分

1. C

2. D **点拨**:∵ 多边形的外角和是 360°,∴ 钝角最多只能有 3 个.

3. C **点拨**:设该多边形的边数为 n,则 $(n-2)\times180°=360°\times2+180°$,解得 $n=7$. 而七边形有 14 条对角线.

4. D

5. B

6. 4

7. 11 **点拨**:设一个内角的度数为 $9x$,一个外角的度数为 $2x$,则 $9x+2x=180°$,解得 $x=\left(\frac{180}{11}\right)°$. 所以一个外角的度数为 $\left(\frac{360}{11}\right)°$,这个多边形的边数为 $360°\div\left(\frac{360}{11}\right)°=11$.

8. 240 **点拨**:本题运用了整体思想,先根据四边形的内角和求 $\angle B$,$\angle C$,$\angle D$ 的度数和,再把 $\angle1+\angle2$ 看成一个整体,根据五边形的内角和求 $\angle1+\angle2$ 的度数.

9. **解**:题图①中,$90°+60°+x°+(x+10)°=(4-2)\times180°=360°$,解得 $x=100$.

题图②中,$70°+x°+x°+(x+20)°+(x-10)°=(5-2)\times180°=540°$,解得 $x=115$.

10. **解**:∵ $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F=(6-2)\times180°=720°$,

∴ $\angle CDE+\angle ABC=720°-\angle A-\angle C-\angle E-\angle F=720°-90°-90°-260°=280°$.

∴ $\angle\alpha+\angle\beta=2\times180°-(\angle CDE+\angle ABC)=360°-280°=80°$.

11. D

12. **解**:(1)甲同学对,乙同学不对.

∵ $\theta=360°$,

∴ $(n-2)\times180°=360°$,

解得 $n=4$.

∵ $\theta=630°$,

∴ $(n-2)\times180°=630°$,

解得 $n=\frac{11}{2}$.

∵ n 为整数,

∴ θ 不能取 630°.

(2)依题意,得 $(n-2)\times180°+360°=(n+x-2)\times180°$,解得 $x=2$.

13. **解**:(1)因为 2 005°不是 180°的整数倍,

所以小明说不可能.

(2)设这个多边形的边数为 x,

由题意得 $2\,005°-180°<(x-2)\times180°<2\,005°$,

解得 $12\frac{5}{36}<x<13\frac{5}{36}$.

所以小华求的是十三边形的内角和.

(3)十三边形的内角和是 $(13-2)\times180°=1\,980°$,被错当成内角的那个外角的度数是 $2\,005°-1\,980°=25°$.

14. **解**:如图,连接 AC,AD.

∵ $AF\parallel CD$,

∴ $\angle FAC+\angle DCA=180°$.

在 $\triangle ABC$ 中,

$\angle BAC+\angle B+\angle BCA=180°$.

∵ $\angle B=80°$,

∴ $\angle BAC+\angle BCA=100°$.

∴ $\angle BAF+\angle BCD=(\angle BAC+\angle FAC)+(\angle BCA+\angle DCA)=\angle BAC+\angle BCA+\angle FAC+\angle DCA=100°+180°=280°$.

∵ $\angle BAF=120°$,

∴ $\angle BCD=160°$.

∵ $AB\parallel DE$,

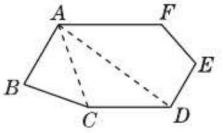
∴ $\angle BAD=\angle EDA$.

又∵ $AF\parallel CD$,

∴ $\angle FAD=\angle ADC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle EDC = \angle EDA + \angle ADC = \angle BAD + \angle FAD = \angle BAF = 120°$.



(第 14 题图)

15. D　**点拨**:设切去一个角后的多边形为 n 边形,根据题意有$(n-2)\cdot 180° = 1\,080°$,解得 $n = 8$. ∵ 一个多边形切去一个角后形成的多边形边数有三种可能:比原多边形边数少 1、与原多边形边数相等、比原多边形边数多 1. ∴ 原多边形边数可能为 $8-1=7$,8 或 $8+1=9$. 故选 D.

中考提分专题篇

好题必解

一、1. D　**2.** B　**3.** B　**4.** B　**5.** A

二、6. 56°　**点拨**:∵ $AE \perp BC$, $AF \perp CD$, ∴ $\angle AEC = \angle AFC = 90°$,在四边形 $AECF$ 中,$\angle C = 360° - \angle EAF - \angle AEC - \angle AFC = 360° - 56° - 90° - 90° = 124°$,在 $\square ABCD$ 中,$\angle B = 180° - \angle C = 180° - 124° = 56°$,故答案为 56°.

7. 8

8. 矩形(答案不唯一)

9. $8\sqrt{5}$

10. 13

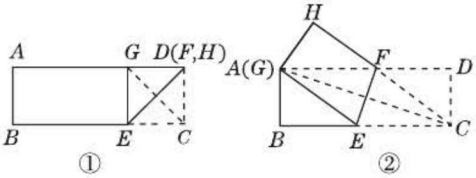
11. $\frac{50}{13}$

三、12. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,
∴ $AD /\!/ BC$, $BC = AD$.
∴ $\angle DAE = \angle AEB$.
∵ $AB = AE$,
∴ $\angle B = \angle AEB$.
∴ $\angle B = \angle DAE$.
∴ $\triangle ABC \cong \triangle EAD$.
(2)**解**:∵ $\angle DAE = \angle BAE$, $\angle DAE = \angle AEB$,
∴ $\angle BAE = \angle AEB = \angle B$.
∴ $\triangle ABE$ 为等边三角形.
∴ $\angle BAE = 60°$.
∵ $\angle EAC = 25°$,
∴ $\angle BAC = 85°$.
∵ $\triangle ABC \cong \triangle EAD$,
∴ $\angle BAC = \angle AED = 85°$.

13. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
∴ $AD /\!/ BC$,
∴ $\angle GAE = \angle HCF$.
∵ E, F 分别为边 AD, BC 的中点,
∴ $AE = CF$, $DE = BF$,
∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,
∴ $\angle BED = \angle BFD$.
∴ $\angle AEG = \angle CFH$.
∴ $\triangle AGE \cong \triangle CHF$,
∴ $AG = CH$.

14. **解**:$AE = EF$,理由如下:
由题意可知 $BH = BE$, $BA = BC$,
∴ $BH - BA = BE - BC$,
即 $AH = CE$.
易得 $\angle H = \angle FCE = 45°$.
∵ $AD /\!/ BC$,
∴ $\angle DAE = \angle AEB$.
又∵ $\angle HAD = \angle AEF = 90°$.
∴ $\angle DAE + \angle HAD = \angle AEB + \angle AEF$,
即 $\angle HAE = \angle CEF$.
∴ $\triangle HAE \cong \triangle CEF$(ASA).
∴ $AE = EF$.

15. **解**:(1)由题意知,EF 是 CG 的垂直平分线,
∴ $FC = FG$, $EC = EG$.
又∵ $AD /\!/ BC$,
∴ $\angle GFE = \angle CEF$.
由折叠的性质可知 $\angle CEF = \angle GEF$,
∴ $\angle GFE = \angle GEF$,
∴ $EG = GF$.
∴ $EG = FG = FC = EC$.
∴ 四边形 $CEGF$ 是菱形.
(2)如图①,当点 F 与点 D 重合时,四边形 $CEGF$ 是正方形,
此时 CE 最小,
且 $CE = CD = 3$,
如图②,当点 G 与点 A 重合时,CE 最大,
设 $CE = x$,则 $BE = 9 - x$,
由(1)题可知,$AE = CE = x$,
在 Rt$\triangle ABE$ 中,
$AB^2 + BE^2 = AE^2$,
即 $9 + (9-x)^2 = x^2$,
解得 $x = 5$,所以 $CE = 5$.
所以线段 CE 的取值范围为 $3 \leqslant CE \leqslant 5$.



(第 15 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.（1）**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=BC=CD=DA$，$\angle B=\angle D$.

∵ 点 E，F 分别为 AB，AD 的中点，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AD$.

$\therefore BE=DF$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases} BC=DC, \\ \angle B=\angle D, \\ BE=DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle DCF$（SAS）.

（2）**解**：$AB\perp BC$. 理由如下：

∵ 点 E，O，F 分别为 AB，AC，AD 的中点，

$\therefore OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=AF$.

同理可证，$OF=AE=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore OE=OF=AF=AE$.

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 是菱形.

∵ $AB\perp BC$，易知 $OE\parallel BC$，

$\therefore AE\perp OE$.

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 是正方形.

17.（1）**证明**：如图①，连接 BD.

∵ E，H 分别是 AB，AD 的中点，

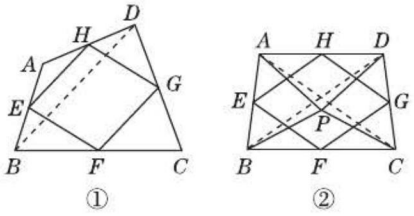
$\therefore EH=\frac{1}{2}BD$，$EH\parallel BD$.

∵ F，G 分别是 BC，CD 的中点，

$\therefore FG=\frac{1}{2}BD$，$FG\parallel BD$.

$\therefore EH=FG$，$EH\parallel FG$.

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



（第 17 题图）

（2）**解**：四边形 $EFGH$ 是菱形. 理由如下：

如图②，连接 AC，BD.

∵ $\angle APB=\angle CPD$，

$\therefore \angle APB+\angle APD=\angle CPD+\angle APD$.

即 $\angle BPD=\angle APC$.

又∵ $PA=PB$，$PC=PD$，

$\therefore \triangle APC\cong\triangle BPD$.

$\therefore AC=BD$.

∵ 点 E，F，G 分别为边 AB，BC，CD 的中点，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AC$，$FG=\frac{1}{2}BD$.

$\therefore EF=FG$.

又由（1）题可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是菱形.

（3）**解**：当 $\angle APB=\angle CPD=90°$ 时，中点四边形 $EFGH$ 是正方形.

18.（1）**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle D=\angle DAE=90°$.

由折叠可知 $AE=AD$，$\angle AEF=\angle D=90°$.

$\therefore \angle D=\angle DAE=\angle AEF=90°$，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

又∵ $AE=AD$，

$\therefore$ 矩形 $AEFD$ 是正方形.

（2）**解**：$NF=ND'$. 证明：如图，连接 HN.

由折叠可知 $\angle AD'H=\angle D=90°$，

$HF=HD=HD'$.

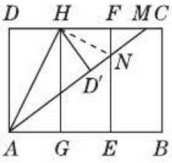
∵ 四边形 $AEFD$ 是正方形，$\therefore \angle EFD=90°$.

∵ $\angle AD'H=90°$，

$\therefore \angle HD'N=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle HNF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle HND'$ 中，$\begin{cases} HN=HN, \\ HF=HD'. \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle HNF\cong\mathrm{Rt}\triangle HND'$. $\therefore NF=ND'$.



（第 18 题图）

（3）**证明**：∵ 四边形 $AEFD$ 是正方形，

$\therefore AE=EF=AD=8$ cm.

由折叠可知 $AD'=AD=8$ cm.

设 $NF=ND'=x$ cm，

则 $AN=AD'+ND'=(8+x)$ cm，

$EN=EF-NF=(8-x)$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEN$ 中，

由勾股定理得 $AN^2=AE^2+EN^2$，

即 $(8+x)^2=8^2+(8-x)^2$，解得 $x=2$.

$\therefore AN=8+2=10$（cm），$EN=8-2=6$（cm）.

$\therefore EN:AE:AN=6:8:10=3:4:5$.

$\therefore \triangle AEN$ 是（3，4，5）型三角形.

（4）**解**：$\triangle MFN$，$\triangle MD'H$，$\triangle MDA$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第十八章 数据的收集与整理

18.1 统计的初步认识

练习(教材第3页)

解:(1)需要的数据是本班全体男生立定跳远的成绩. 调查范围:本班全体男生. 调查方式:问卷调查.

(2)需要的数据是本校全体同学星期日收看电视的时间. 调查范围:本校部分同学. 调查方式:问卷调查.

(3)略.

习题(教材第4页)

A组:**1**. 略.

2. 略.

B组:**1**. **解**:填写统计表略.

(1)采用举手示意的方法调查最方便、最省时间.

(2)略. (3)略.

2. **解**:选三好学生. **点拨**:答案不唯一.

18.2 抽样调查

练习(教材第6页)

1. **解**:应采用抽样调查. 总体是该市八年级5 000名学生的身高,个体是每名学生的身高,样本是按5%的比例确定的被调查的250名学生的身高,样本容量是250.

点拨:样本容量是指样本中包含个体的数目,不能带单位.

2. **解**:(1)普查. 总体是6月份出厂的所有电冰箱的质量,个体是6月份出厂的每台电冰箱的质量.

(2)抽样调查. 总体是全年级同学1分钟跳绳的次数,个体是全年级每名同学1分钟跳绳的次数,样本是全年级学号为偶数的同学1分钟跳绳的次数.

(3)抽样调查. 总体是全校八年级学生每天睡眠的时间,个体是全校八年级每名学生每天睡眠的时间,样本是从八年级每个班选的4名学生每天睡眠的时间.

点拨:总体、个体、样本是指被考察的具体对象,应具体到特定内容,不能含糊不清.

习题(教材第7页)

A组:**1**. **解**:(1)普查 (2)抽样调查 (3)普查 (4)抽样调查

2. **解**:(1)普查 (2)抽样调查 (3)抽样调查 (4)抽样调查

B组:**1**. **解**:(1)(3)(4)正确.

点拨:总体应是800名学生的立定跳远成绩,故(2)错误;样本容量是100,故(5)错误.

2. **解**:该调查的样本容量是$15\times30=450$.

练习(教材第9页)

1. **解**:(2)(4)代表性较好,(1)(3)缺乏代表性.

2. **解**:我认为这种调查缺乏代表性.

点拨:互联网上的调查仅局限于上网的人群,缺乏代表性.

习题(教材第10页)

A组:**1**. **解**:(1)总体是该家庭一年中每月的用电量,样本是该家庭7月份的用电量. 样本缺乏代表性.

(2)略.

(3)总体是一周内生产的果汁的维生素C含量,样本是被抽取的70瓶果汁的维生素C含量. 样本的代表性较好.

(4)总体是全国初中生的身高和体重,样本是被抽取的某省会城市某中学的100名八年级学生的身高和体重. 样本缺乏代表性.

2. **解**:(1)抽样调查 (2)抽样调查 (3)普查 (4)普查 (5)抽样调查

B组:**1**. **解**:(1)(2)缺乏代表性.

2. **解**:分别从山区、丘陵、平原的小麦种植地中抽取500公顷、1 000公顷、1 500公顷,调查小麦的产量.

点拨:答案不唯一,只要选取的样本具有较好的代表性即可.

18.3 数据的整理与表示

练习(教材第13页)

解:

空气质量	优	良	轻微污染	轻度污染	合计
天数/天	4	22	4	0	30
百分比	13.3%	73.4%	13.3%	0	100%

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

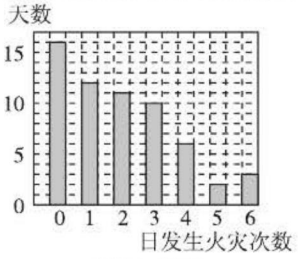
空气质量不错,这 30 天内有 22 天空气质量为良.(描述不唯一)

习题(教材第 13 页)

A 组:1. 解:日发生火灾次数的天数统计表如下:

日发生火灾次数	天数	百分比
0	16	26.7%
1	12	20.0%
2	11	18.3%
3	10	16.7%
4	6	10.0%
5	2	3.3%
6	3	5.0%
合计	60	100%

日发生火灾次数的天数统计图如图所示.



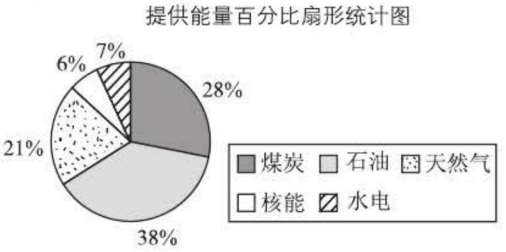
(第 1 题图)

2. 解:(1)

能源	提供能量的百分比	折合标准煤/亿吨
煤炭	28%	50.4
石油	38%	68.4
天然气	21%	37.8
核能	6%	10.8
水电	7%	12.6

(2)消耗的各种能源对应的扇形圆心角的度数分别为 100.8°,136.8°,75.6°,21.6°,25.2°.

(3)扇形统计图如图所示.



(第 2 题图)

B 组:1. 解:(1)

洲名	面积/万平方千米	百分比
亚洲	4 400	29.3%
非洲	3 030	20.2%
北美洲	2 410	16.1%
南美洲	1 800	12.0%
南极洲	1 400	9.3%
欧洲	1 060	7.1%
大洋洲	900	6.0%
合计	15 000	100%

(2)如图.



(第 1 题图)

(3)地球上七大洲中亚洲的面积最大,大洋洲的面积最小.(答案不唯一)

2. 略.

练习(教材第 16 页)

解:(1)题图(1)能较准确地反映空调机销量的增长情况.

(2)题图(2)的刻度不是从 0 开始的,今年比去年实际增长了 50%,但直观上看去,今年比去年增长了一倍.

习题(教材第 17 页)

A 组:1. 解:(1)两个城市月平均气温都是先升后降.它们之间最明显的差别是北京 1 月、2 月、12 月的月平均气温在0℃以下,而昆明 12 个月的月平均气温均在 0℃以上.(所写差别不唯一)

(2)1;7;1;7　(3)1;5

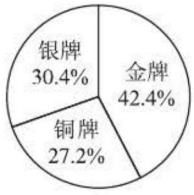
2. 解:(1)

届别	第23届	第24届	第25届	第26届	第27届	第28届	第29届	第30届	合计
金牌/枚	15	5	16	16	28	32	51	38	201
银牌/枚	8	11	22	22	16	17	21	27	144
铜牌/枚	9	12	16	12	15	14	28	23	129
合计/枚	32	28	54	50	59	63	100	88	474

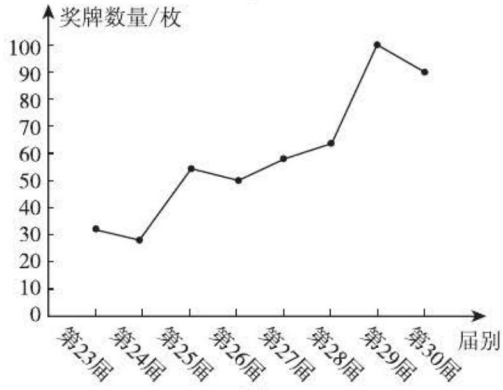
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图①.

(3)如图②.



①

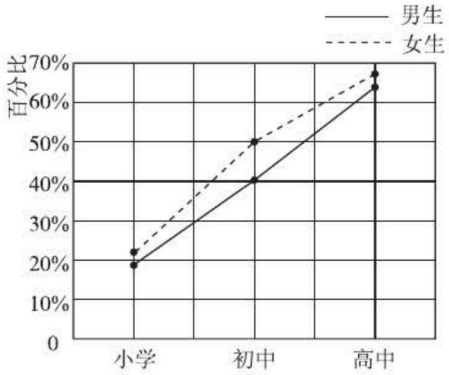


②

(第2题图)

B组:**解**:(1)小学:男生视力不良率为$\frac{27}{150}\times 100\% = 18\%$,女生视力不良率为$\frac{33}{150}\times 100\% = 22\%$.初中:男生视力不良率为$\frac{60}{150}\times 100\% = 40\%$,女生视力不良率为$\frac{75}{150}\times 100\% = 50\%$.高中:男生视力不良率为$\frac{96}{150}\times 100\% = 64\%$,女生视力不良率为$\frac{102}{150}\times 100\% = 68\%$.

(2)如图.



[第(2)题图]

(3)该地区中小学生的视力不良率随着年级的升高呈上升趋势,男生的视力情况好于女生的视力情况.

18.4 频数分布表与直方图

练习(教材第22页)

解:(1)$n = 2 + 4 + 10 + 22 + 20 + 11 + 6 + 4 + 1 = 80$.

数据的大致分布范围在147.5至174.5之间.

(2)组距为3,组数为9.

(3)频数最大的组为156.5~159.5,该组的频数为22,频率为$\frac{22}{80}\times 100\% = 27.5\%$.

(4)

身高/cm	148~156	157~165	166~174
人数/名	16	53	11
频率	20%	66.25%	13.75%

(5)建议小号校服和大号校服少订购一些,中号校服多订购一些.(建议不唯一,合理即可)

习题(教材第23页)

1. 解:(1)从下往上依次标5,10,15,20,25,30.

(2)30;30 (3)15%

2. 解:(1)最小值为5.05,最大值为5.88.

(2)如果组距取0.2,应该分5组,分组如下:$5.0 \leqslant x < 5.2$,$5.2 \leqslant x < 5.4$,$5.4 \leqslant x < 5.6$,$5.6 \leqslant x < 5.8$,$5.8 \leqslant x < 6.0$,其中x为地球的密度.如果组距取0.1,应该分9组,分组如下:$5.0 \leqslant x < 5.1$,$5.1 \leqslant x < 5.2$,$5.2 \leqslant x < 5.3$,$5.3 \leqslant x < 5.4$,$5.4 \leqslant x < 5.5$,$5.5 \leqslant x < 5.6$,$5.6 \leqslant x < 5.7$,$5.7 \leqslant x < 5.8$,$5.8 \leqslant x < 5.9$,其中x为地球的密度.

(3)组距取0.2,分成5组能较好地反映测量数据的分布.

(4)从左到右依次填:3,10,7,7,2,29

复习题(教材第25页)

A组:**1. 解**:(1)本班学生每天的睡眠时间.

(2)本班的全体学生,采用问卷调查.

(3)略.

2. 解:(1)总体:该乡镇8 000户家庭的人口.样本:被调查的200户家庭的人口.

(2)总体:该乡镇8 000户家庭的年实际收入.样本:被调查的100户家庭的年实际收入.

(3)总体:该乡镇8 000户家庭的年消费支出金额.样本:被调查的100户家庭的年消费支出金额.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 解：解答此题详见下表：

题号	需要的数据	调查方式
(1)	本班每名同学鞋的号码	问卷调查
(2)	本班每名同学的视力	问卷调查
(3)	去年植树总数量、成活的数量	实地调查
(4)	每平方分米的字数和这张报纸版心的面积	实际计算

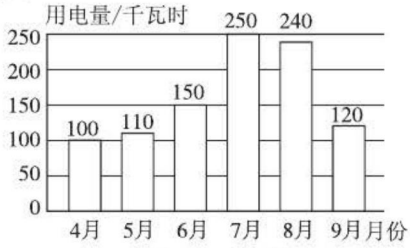
4. 解：(1) 数字 0～9 出现的次数及频率如下表所示：

数字	次数	频率
0	5	7.1%
1	7	10.0%
2	7	10.0%
3	6	8.6%
4	11	15.7%
5	9	12.8%
6	6	8.6%
7	9	12.9%
8	4	5.7%
9	6	8.6%
合计	70	100%

(2) 各数字出现的频率差异大. 如果选 100 期中奖号码的 700 个数字进行统计，各数字出现的频率大约在 10% 左右，会有偏差，但偏差不会太大.

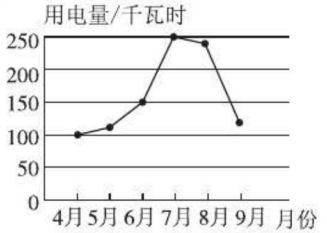
5. 解：(1) 从左到右依次填：100，110，150，250，240，120

(2) 如图.



[第 5(2) 题图]

(3) 如图.



[第 5(3) 题图]

(4) 用电量的变化可能主要由于 7，8 月份气温较高，使用空调所致. (答案不唯一)

6. 解：A 类基因片断中字符 A，T，C，G 出现的频数分别为 33，20，17，40；

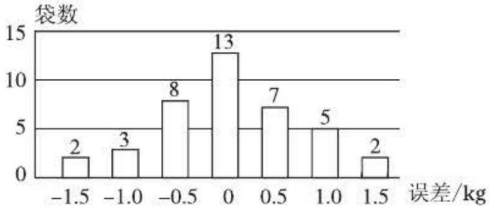
B 类基因片断中字符 A，T，C，G 出现的频数分别为 39，55，5，11.

A 类基因片断中字符 G 出现次数最多，而 B 类基因片断中字符 T 出现次数最多. (所写差异不唯一)

B 组 1. 解：(1)

误差/kg	−1.5	−1.0	−0.5	0	0.5	1.0	1.5
袋数	2	3	8	13	7	5	2
百分比	5%	7.5%	20.0%	32.5%	17.5%	12.5%	5%

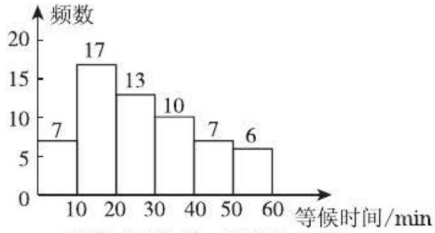
(2) 条形统计图如图. 根据统计图可知：误差为 0 kg的有 13 袋；误差的绝对值不超过 0.5 kg 的有 28 袋，占总袋数的 70%；误差的绝对值超过 1.0 kg 的有 4 袋，占总袋数的 10%. 总之，误差的绝对值偏小的占绝大多数，而误差的绝对值偏大的占少数. (一般的测量误差都服从这样的规律)



(第 1 题图)

2. 解：(1) $x = 60 - (7 + 17 + 13 + 7 + 6) = 10$. 从左到右依次填：$\frac{7}{60}, \frac{17}{60}, \frac{13}{60}, \frac{1}{6}, \frac{7}{60}, \frac{1}{10}$

(2) 如图.



(每组含最大值，不含最小值)

(第 2 题图)

(3) $\frac{10+7+6}{60} \times 100\% \approx 38.3\%$.

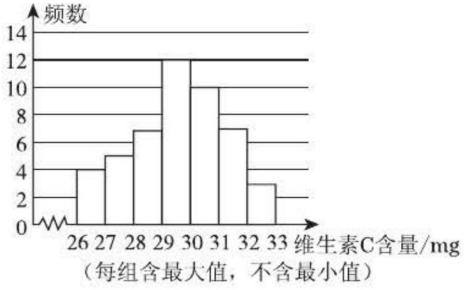
3. 解：(1) $20 \div 50\% = 40$(名)，即该班共有 40 名学生. (2) $40 \times (1 - 50\% - 30\%) = 40 \times 20\% = 8$(名) 或 $40 - 20 - 12 = 8$(名)，即该班有 8 名学生乘车到校. (3) 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:频数分布表如下:

维生素 C 含量 x/mg	画“正”字计数	频数	频率
$26<x\leqslant27$	𠃌	4	$\frac{1}{12}$
$27<x\leqslant28$	正	5	$\frac{5}{48}$
$28<x\leqslant29$	正𠃍	7	$\frac{7}{48}$
$29<x\leqslant30$	正正𠃍	12	$\frac{1}{4}$
$30<x\leqslant31$	正正	10	$\frac{5}{24}$
$31<x\leqslant32$	正𠃍	7	$\frac{7}{48}$
$32<x\leqslant33$	𠃌	3	$\frac{1}{16}$
合计		48	1

频数分布直方图如图.

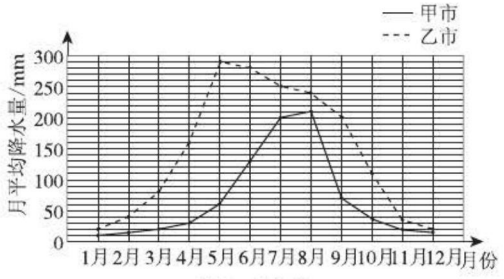


(第 4 题图)

描述数据的分布情况略.

C 组:**1.** 略.

2. 解:(1)如图.



(第 2 题图)

(2)乙市的降水量普遍多于甲市.

(3)5;12

第十九章 平面直角坐标系

19.1 确定平面上物体的位置

练习(教材第 32 页)

1. 解:(1)A2,B3,C4,D5 单元格中的内容分别为“李明”“86”“90”“91”.

(2)王涛的数学成绩所在的单元格为 B4;张磊的英语成绩所在的单元格为 D3.

2. 解:小明家在学校北偏西 50°方向上,距学校 500 m的位置.学校在小明家南偏东 50°方向上,距小明家 500 m 的位置.

习题(教材第 32 页)

1. 解:(1)“白后”所在方格的位置可用$(d,1)$表示;“黑车”所在方格的位置可用$(f,6)$表示.

(2)“白后”的位置用(4,1)表示;“黑车”的位置用(6,6)表示.

(3)“白车”的行走路线:$A(3,3)\rightarrow B(3,7)\rightarrow C(5,7)\rightarrow D(5,2)$.

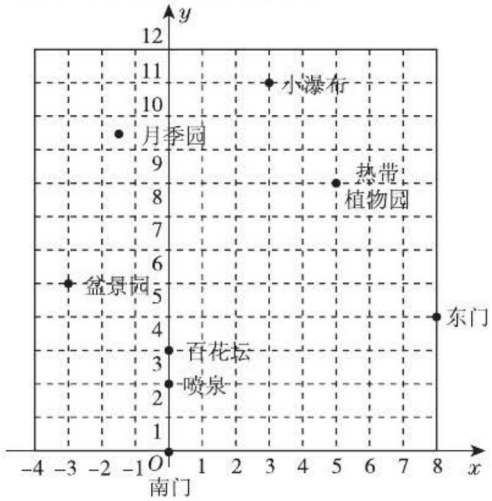
2. 解:根据比例尺,算得新华书店、少年宫及超市到学校的实际距离分别为 $1.6\times500=800$(m),$3.2\times500=1\,600$(m),$2.2\times500=1\,100$(m).所以新华书店在学校的北偏西 40°的方向上,距离学校 800 m 处;少年宫在学校的南偏西 20°的方向上,距离学校1 600 m 处;超市在学校的北偏东 60°的方向上,距离学校1 100 m 处.

3. 略.

19.2 平面直角坐标系

练习(教材第 36 页)

1. 解:如图所示,建立直角坐标系,东门及各景点的坐标分别为东门(8,4)、喷泉(0,2)、百花坛(0,3)、盆景园(−3,5)、热带植物园(5,8)、月季园(−1.5,9.5)、小瀑布(3,11).

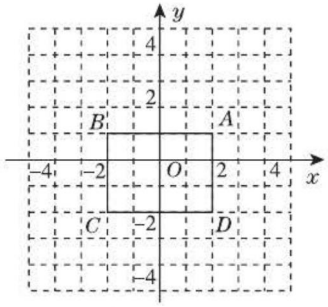


(第 1 题图)

点拨:注意一定要按照题中的要求建立直角坐标系.

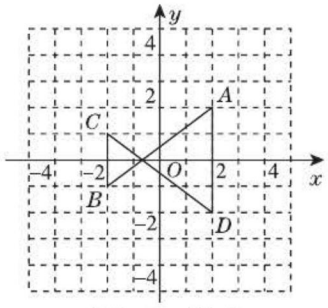
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)如图所示.



[第2(1)题图]

(2)如图所示.



[第2(2)题图]

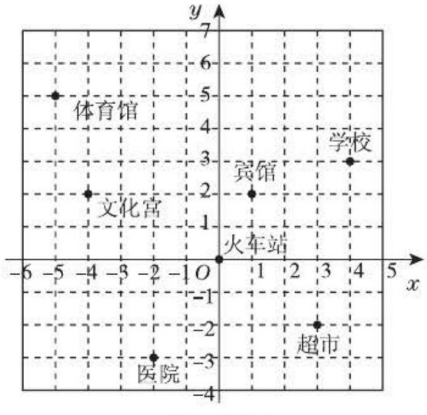
习题(教材第37页)

A组:**1. 解**:$A(4,2)$,$B(2,4)$,$C(-3,3)$,$D(-3,-3)$,$E(5,-3)$,$F(2,-4)$,$G(0,-2)$.

点拨:写坐标时要注意横、纵坐标的顺序以及坐标的表示方法.

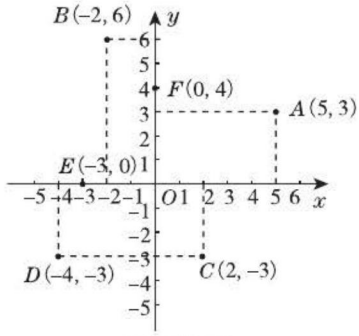
2. 解:建立直角坐标系如图所示.

火车站(0,0),宾馆(1,2),学校(4,3),体育馆(-5,5),文化宫(-4,2),医院(-2,-3),超市(3,-2).



(第2题图)

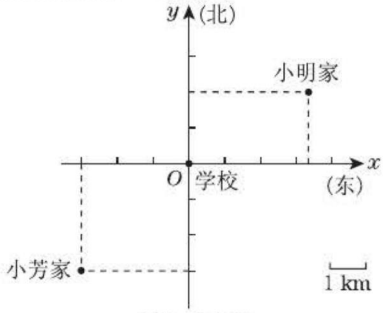
3. 解:如图所示.



(第3题图)

B组:**1. 解**:建立直角坐标系如图所示.

小明家所在位置的坐标为$(2\sqrt{3},2)$,小芳家所在位置的坐标为$(-3,-3)$.



(第1题图)

2. 解:(1)略.

(2)由点O到点A的其他最短的路径为:

①(0,0)→(4,0)→(7,0)→(7,8);

②(0,0)→(4,0)→(4,3)→(4,8)→(7,8).

点拨:注意题中要求"尽快",也就是邮递员所走路程最少,否则,还有其他路径可以走.

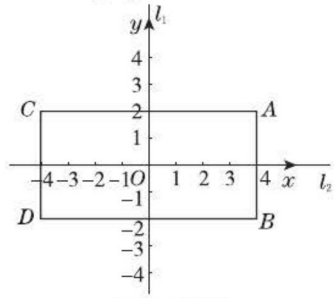
练习(教材第39页)

1. 二;4;3;5

2. 四;(3,5);(-3,-5);(-3,5)

3. 解:(1)如图.$B(4,-2)$,$C(-4,2)$,$D(-4,-2)$.

(2)是.对称轴l_1,l_2如图所示.



(第3题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

习题(教材第 40 页)

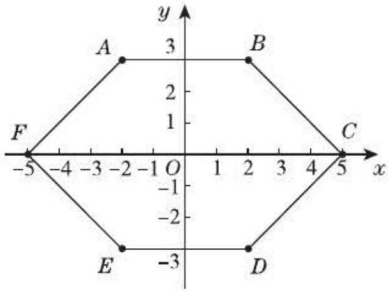
A 组:**1**. $a<0$

2. 二;四;一

3. **解**:因为 AC 垂直于 x 轴,y 轴垂直于 x 轴,所以 AC 平行于 y 轴,所以 C 点的横坐标等于 A 点的横坐标,为 1,又因为 C 点在 x 轴上,所以 C 点的坐标为(1,0).

点拨:根据已知条件可知 AC 平行于 y 轴,A 点、C 点的横坐标相等,因为 C 点在 x 轴上,所以 C 点的纵坐标为 0.

4. **解**:(1)如图.



(第 4 题图)

(2)点 A 在第二象限,点 B 在第一象限,点 D 在第四象限,点 E 在第三象限,点 C,F 在 x 轴上.

(3)点 A,B,C,D,E,F 关于 x 轴的对称点依次是点 E,D,C,B,A,F;关于 y 轴的对称点依次是点 B,A,F,E,D,C;关于原点的对称点依次是点 D,E,F,A,B,C.

B 组:**1**. 互为相反数

2. 相等

3. **解**:因为四边形 $ABCD$ 为长方形,所以点 C 的横坐标为 3,又因为 $BC=8$,所以点 C 的纵坐标为 11 或 -5. 所以点 C 的坐标为(3,11)或(3,-5).

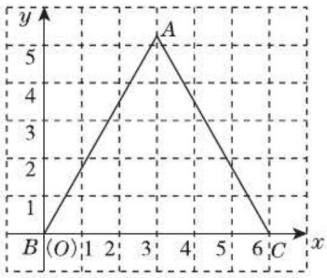
19.3 坐标与图形的位置

练习(教材第 42 页)

1. **解**:以 F 点为原点建立直角坐标系,标出点 $A(-1,2)$,$B(4,2)$,$C(3,0)$,$D(3,-3)$,$E(0,-3)$,并顺次连接各点,构成封闭图形 $ABCDEF$,即为题图所示图形.

点拨:所建直角坐标系不唯一.

2. **解**:建立的直角坐标系如图. 则 $A(3,3\sqrt{3})$,$B(0,0)$,$C(6,0)$.



(第 2 题图)

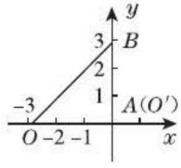
点拨:此题答案不唯一.

习题(教材第 43 页)

A 组:**1**. **解**:可告诉小红,先建立直角坐标系,在其中标出点 $A(0,3)$,$B(-3,0)$,$C(0,-3)$,$D(5,0)$,再顺次连接各点,构成封闭图形 $ABCD$ 即可.

点拨:所建直角坐标系不唯一.

2. **解**:(1)设 $OA=AB=x$,在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中,$OB^2=OA^2+AB^2$,所以 $4^2=x^2+x^2$,所以 $x=2\sqrt{2}$,所以点 B 的坐标为 $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

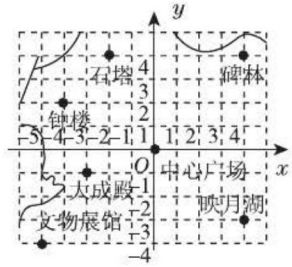


(第 2 题图)

(2)还可以建立如图所示的直角坐标系.

点拨:注意勾股定理在直角坐标系中的应用.

3. **解**:以中心广场为原点,建立如图所示的直角坐标系,石塔(-2,4),碑林(4,4),中心广场(0,0),映月湖(4,-3),文物展馆(-5,-4),大成殿(-3,-1),钟楼(-4,2).(答案不唯一)

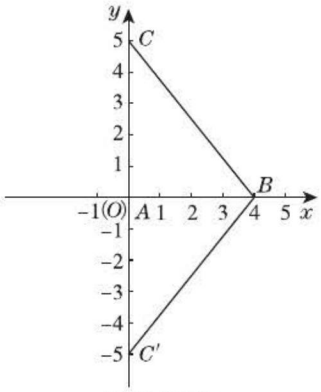


(第 3 题图)

B 组:**1**. **解**:设点 C 的坐标为(0,k),则 $\frac{1}{2}|k|\times 4=10$,解得 $k=\pm 5$. 故点 C 的坐标为(0,5)或(0,-5). 画出的三角形为如图所示的 $\triangle ABC$

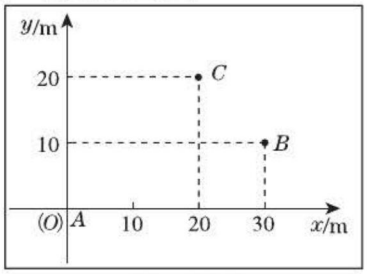
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

或△ABC'.



（第1题图）

2. 解：点 C 的位置如图所示.



（第2题图）

19.4 坐标与图形的变化

练习（教材第45页）

1. 解：点 $P(1,1)$ 向下平移2个单位长度，再向左平移2个单位长度后的坐标为 $(-1,-1)$.

2.

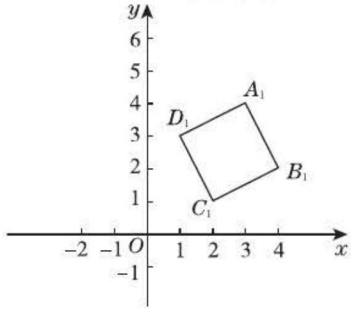
平移方向和距离	$A(-3,3)$	$B(-5,0)$	$P(x,y)$
向左平移4个单位长度	$(-7,3)$	$(-9,0)$	$(x-4,y)$
向下平移3个单位长度	$(-3,0)$	$(-5,-3)$	$(x,y-3)$
向右平移2个单位长度，再向上平移4个单位长度	$(-1,7)$	$(-3,4)$	$(x+2,y+4)$
向左平移3个单位长度，再向下平移5个单位长度	$(-6,-2)$	$(-8,-5)$	$(x-3,y-5)$

习题（教材第46页）

A组：1. 右；2个；下；4个（或下；4个；右；2个）

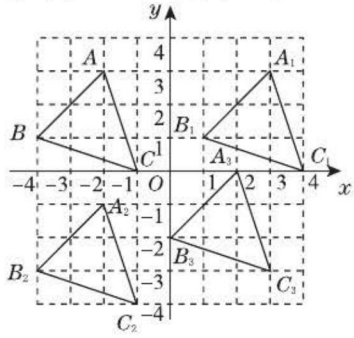
2. 解：△ABC 向左平移7个单位长度得到△$A_1B_1C_1$，所以△$A_1B_1C_1$ 与△ABC 各对应顶点的坐标之间的关系为将△ABC 各顶点的横坐标都减7，纵坐标不变；△ABC 向下平移6个单位长度得到△$A_2B_2C_2$，所以△$A_2B_2C_2$ 与△ABC 各对应顶点的坐标之间的关系为横坐标不变，将△ABC 各顶点的纵坐标都减6；将△ABC 向下平移6个单位长度，再向左平移7个单位长度得到△$A_3B_3C_3$，所以△$A_3B_3C_3$ 各顶点的坐标由△ABC 各顶点坐标的横坐标都减7、纵坐标都减6得到.

3. 解：由题意得 $A_1(3,4)$，$B_1(4,2)$，$C_1(2,1)$，$D_1(1,3)$. 画出的四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 如图.



（第3题图）

B组：1. 解：（1）画出的三角形如图所示.



（第1题图）

（2）△ABC 向右平移5个单位长度得到△$A_1B_1C_1$，△ABC 向下平移4个单位长度得到△$A_2B_2C_2$，△ABC 向下平移3个单位长度，向右平移4个单位长度后得到△$A_3B_3C_3$.

2. 解：点 P' 的坐标为 $(x+1,y+2)$，PP' 的长为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

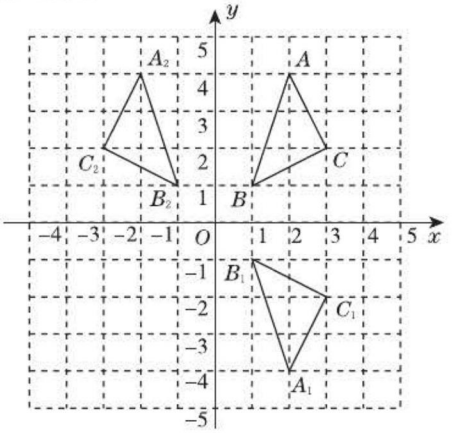
练习（教材第49页）

1. 解：（1）△$A_1B_1C_1$ 如图. $A_1(2,-4)$，$B_1(1,-1)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$C_1(3,-2)$.

(2) $\triangle A_2B_2C_2$ 如图. $A_2(-2,4)$, $B_2(-1,1)$, $C_2(-3,2)$.



(第1题图)

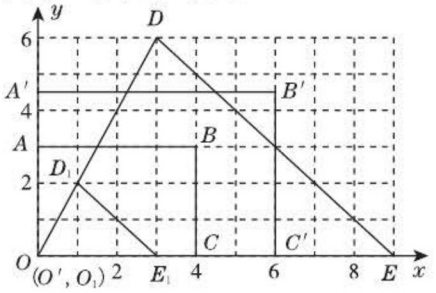
2. 解: (1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的形状相同,各边长是 $\triangle ABC$ 对应边长的2倍.

(2) $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的形状相同,各边长是 $\triangle ABC$ 对应边长的 $\frac{2}{3}$.

习题(教材第50页)

A组:1. 解: (1) 长方形 $OABC$ 的各顶点坐标都乘1.5后,各对应点 O',A',B',C' 的坐标分别为(0,0),(0,4.5),(6,4.5),(6,0). 画出的四边形 $O'A'B'C'$ 如图所示.

(2) $\triangle ODE$ 的各顶点坐标都除以3后,各对应点 O_1,D_1,E_1 的坐标分别为(0,0),(1,2),(3,0). 画出的 $\triangle O_1D_1E_1$ 如图所示.

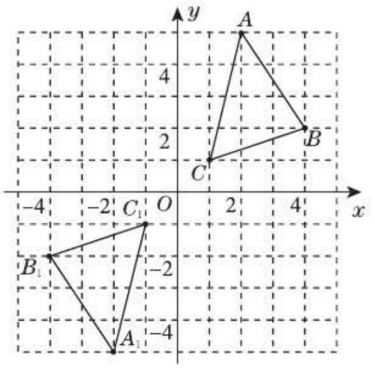


(第1题图)

2. 解: (1) 如图. $A_1(-2,-5)$, $B_1(-4,-2)$, $C_1(-1,-1)$. 分别依次连接点 A,B,C 和点 A_1,B_1,C_1,如图所示.

(2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 各对应顶点的横坐标互为相反数,纵坐标互为相反数.

(3) $\triangle ABC$ 关于原点 O 作中心对称变换得到 $\triangle A_1B_1C_1$.



(第2题图)

B组:解: (1) $O_1(3,0)$, $A_1(5,4)$, $B_1(7,0)$, $C_1(4,2)$, $D_1(6,2)$; $O_2(0,2)$, $A_2(2,6)$, $B_2(4,2)$, $C_2(1,4)$, $D_2(3,4)$; $O_3(4,2)$, $A_3(6,6)$, $B_3(8,2)$, $C_3(5,4)$, $D_3(7,4)$; $O(0,0)$, $A_4\left(\frac{3}{2},3\right)$, $B_4(3,0)$, $C_4\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$, $D_4\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$; $O(0,0)$, $A_5(2,-4)$, $B_5(4,0)$, $C_5(1,-2)$, $D_5(3,-2)$; $O(0,0)$, $A_6(4,8)$, $B_6(8,0)$, $C_6(2,4)$, $D_6(6,4)$.

(2)(3)如下表所示.

图号	图形的变化	对应点坐标的变化
(1)	向右平移3个单位长度	$P(x,y)\rightarrow P_1(x+3,y)$
(2)	向上平移2个单位长度	$P(x,y)\rightarrow P_2(x,y+2)$
(3)	向右平移4个单位长度,再向上平移2个单位长度	$P(x,y)\rightarrow P_3(x+4,y+2)$
(4)	各顶点的横、纵坐标都乘$-\frac{3}{4}$	$P(x,y)\rightarrow P_4\left(\frac{3}{4}x,\frac{3}{4}y\right)$
(5)	关于 x 轴作对称变换	$P(x,y)\rightarrow P_5(x,-y)$
(6)	各顶点的横、纵坐标都乘2	$P(x,y)\rightarrow P_6(2x,2y)$

复习题(教材第54页)

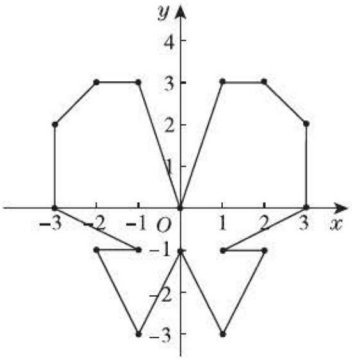
A组:1. 解: $A(0,3)$, $B(1,1)$, $C(4,0)$, $D(1,-1)$, $E(0,-3)$, $F(-1,-1)$, $G(-4,0)$, $H(-1,1)$.

2. 解: 如图所示. 得到的图形像一只蝴蝶.

这些点关于 x 轴对称的点的坐标依次为(0,0),(1,-3),(2,-3),(3,-2),(3,0),(1,1),(2,1),(1,3),(0,1),(-1,3),(-2,1),(-1,1),(-3,0),(-3,-2),(-2,-3),(-1,-3).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

关于y轴对称的点的坐标依次为$(0,0)$,$(-1,3)$,$(-2,3)$,$(-3,2)$,$(-3,0)$,$(-1,-1)$,$(-2,-1)$,$(-1,-3)$,$(0,-1)$,$(1,-3)$,$(2,-1)$,$(1,-1)$,$(3,0)$,$(3,2)$,$(2,3)$,$(1,3)$.



(第2题图)

3. (1)$(-3,2)$

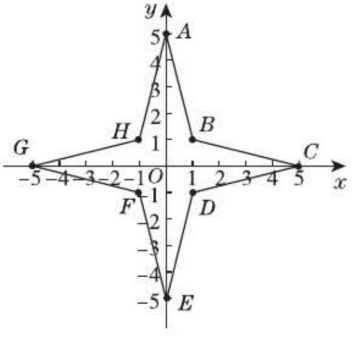
(2)一

(3)2;4　(4)-5

(5)4;$(2,2)$,$(-2,2)$,$(-2,-2)$,$(2,-2)$

(6)$(-3,2)$

4. **解**:封闭图形如图所示.



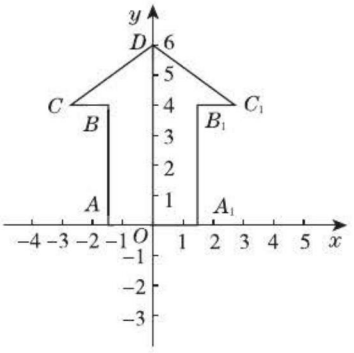
(第4题图)

这个图形还可以看成由这样的变化得到:分别作部分ABC关于x轴、y轴对称的图形,得到部分EDC和部分AHG,进而作部分EDC(或部分AHG)关于y轴(或x轴)对称的图形,得到部分EFG,从而得到整个图形.

5. **解**:(1)$A(-1.5,0)$,$B(-1.5,4)$,$C(-3,4)$,$D(0,6)$,$O(0,0)$.

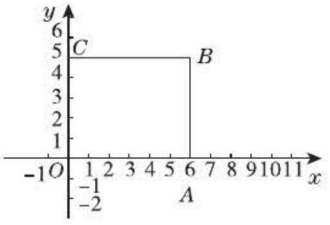
(2)如图所示,对称点$A_1(1.5,0)$,$B_1(1.5,4)$,$C_1(3,4)$,$D(0,6)$,$O(0,0)$.

6. 略.



(第5题图)

7. **解**:把一个顶点作为原点建立如图所示的直角坐标系,由图可知$O(0,0)$,$A(6,0)$,$B(6,5)$,$C(0,5)$.

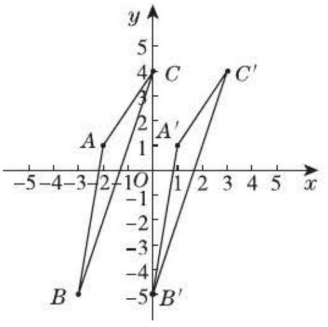


(第7题图)

点拨:此题答案不唯一,建立不同的直角坐标系,长方形各顶点的坐标也不同.

8. **解**:(1)如图所示.

(2)平移得到的$\triangle A'B'C'$如图所示.



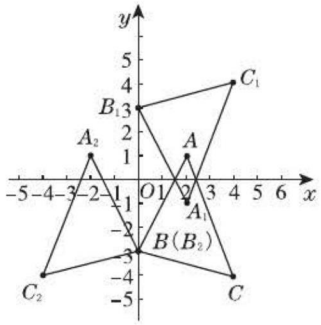
(第8题图)

点B,C平移后的对应点B',C'的坐标分别为$(0,-5)$,$(3,4)$.

(3)将$\triangle ABC$平移后,对应点的横坐标都加3,纵坐标不变.

9. **解**:如图所示,在$\triangle A_1B_1C_1$中,$A_1(2,-1)$,$B_1(0,3)$,$C_1(4,4)$;在$\triangle A_2B_2C_2$中,$A_2(-2,1)$,$B_2(0,-3)$,$C_2(-4,-4)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



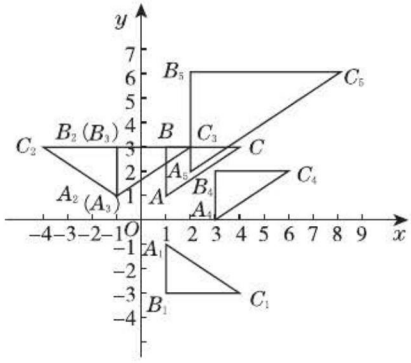
（第9题图）

10. 略.

11. **解**：(1)填表如下：

(x,y)	$(x,-y)$	$(-x,y)$	$(x-2,y)$	$(x+2,y-1)$	$(2x,2y)$
$A(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(3,0)$	$(2,2)$
$B(1,3)$	$(1,-3)$	$(-1,3)$	$(-1,3)$	$(3,2)$	$(2,6)$
$C(4,3)$	$(4,-3)$	$(-4,3)$	$(2,3)$	$(6,2)$	$(8,6)$

(2)如图.



（第11题图）

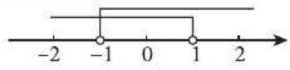
第二列得到的$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle ABC$关于x轴对称；第三列得到的$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle ABC$关于y轴对称；第四列得到的$\triangle A_3B_3C_3$是由$\triangle ABC$向左平移2个单位长度得到的；第五列得到的$\triangle A_4B_4C_4$是由$\triangle ABC$先向右平移2个单位长度，再向下平移1个单位长度得到的；第六列得到的$\triangle A_5B_5C_5$是由$\triangle ABC$各顶点的横、纵坐标分别乘2得到的.

点拨：对于这类题目可以简单地归纳为“坐标加、减必平移，坐标乘、除就变大小，坐标变号成对称”.

B组：**1.** **解**：由题意得$|2x-3|=|3-x|$，若$2x-3=3-x$，解得$x=2$，则点P的坐标为$(1,1)$. 若$2x-3=x-3$，解得$x=0$，则点P的坐标为$(-3,3)$. 综上，得点P的位置为$P(1,1)$或$P(-3,3)$.

2. **解**：由题意，得$a-1<0$且$2a+2>0$，可得a的取值范围是$-1<a<1$.

在数轴上表示如图.

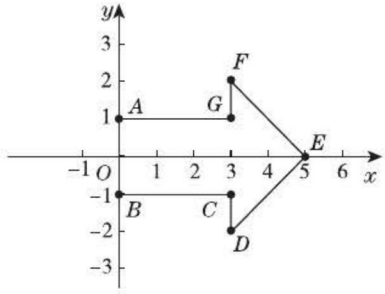


（第2题图）

3. **解**：(1)$A_1(9,2)$，$A_2(-6,-2)$，$A_3(6,-2)$，$A_4(12,4)$.

(2)题图(1)中的图形向右平移了3个单位长度，变化后对应点的纵坐标不变，横坐标都加上3；题图(2)中的图形关于原点O作中心对称变换，变换后对应点的横、纵坐标都乘-1；题图(3)中的图形关于x轴作轴对称变换，变换后对应点的横坐标不变，纵坐标都乘-1；题图(4)中的图形形状不变，各边长扩大为原来的2倍，变化后对应点的横、纵坐标都乘2.

C组：**1.** **解**：(1)如图所示.



（第1题图）

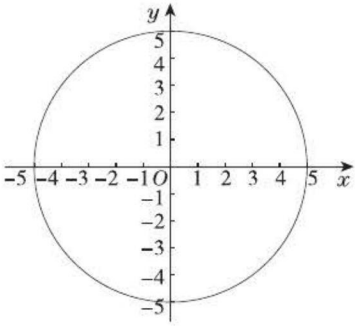
(2)

坐标变化	图形的位置或形状的变化
$P(a,b)\rightarrow P_1(a+2,b-3)$	图形向右和向下分别平移2个单位长度和3个单位长度，形状没变
$P(a,b)\rightarrow P_2(-a,b)$	图形关于y轴作轴对称变换，形状没变
$P(a,b)\rightarrow P_3(-a,-b)$	图形关于原点O作中心对称变换，形状没变
$P(a,b)\rightarrow P_4(2a,2b)$	图形各边长扩大为原来的2倍，形状没变
$P(a,b)\rightarrow P_5\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$	图形各边长缩小为原来的$\frac{1}{2}$，形状没变

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:如图所示.

圆周上横坐标与纵坐标都是整数的点的坐标是(5,0),(4,3),(3,4),(0,5),(-3,4),(-4,3),(-5,0),(-4,-3),(-3,-4),(0,-5),(3,-4),(4,-3).



(第2题图)

3. 略.

第二十章 函 数

20.1 常量和变量

练习(教材第62页)

1. 解:(1)10;5;1.25;1;2;4;10;26;10 001

(2)常量是1,变量是a和b;$a=b^2+1$.

2. 解:问题中的常量是梯形的高,变量是梯形的上底长、下底长及其面积;$S=15x$.

习题(教材第62页)

A组:**1. 解**:出售大米的质量m(kg)及获得的米款W(元)是变量,大米的价格2.4元/千克是常量.

2. 解:常量是π,变量是S和r;$S=\pi r^2$.

3. 解:实例1:正方形的周长C随其边长a的变化而变化,$C=4a$,其中周长C与边长a是变量,4是常量.实例2:100米短跑测试中,小红跑步的平均速度v(米/秒)与所用的时间t(秒)之间的关系式为$v=\frac{100}{t}$,其中100是常量,v与t是变量.

点拨:本题答案不唯一.

B组:**1. 解**:问题中的常量是平均每人一学期要使用某种笔记本的数量及这种笔记本的售价,变量是学生的人数及一学期买这种笔记本的总金额;$m=24n$.

2. 解:问题中的常量是地面温度10℃与高度每增加1 km的温度下降值4℃,变量是高度与对应的温度;$y=10-4x$.

20.2 函 数

练习(教材第65页)

1. 解:表中反映的两个量之间具有函数关系,其中新增病例数是日期的函数.

2. 解:设行驶的路程为s km,行驶的时间为t h,则$s=190t$,其中t是自变量,s是t的函数.

习题(教材第65页)

A组:**1. 解**:对于每一个确定的时刻,都能相应地确定一个温度,温度T是时间t的函数.

2. $4x$;x;S;S;x

3. 解:$m=2.4+(t-3)$,即$m=t-0.6$.

B组:**1. 解**:(1)$v=2t$,其中t是自变量,v是t的函数.

(2)当$t=3.5$时,$v=2\times3.5=7$,即速度是7 m/s.

2. 解:(1)$W=40-6t$,其中t是自变量,W是t的函数.

(2)当$t=3$时,$W=40-6\times3=22$,即油箱中的剩余油量为22 L.

练习(教材第67页)

1. 解:(1)x取任意实数.(2)由$x^2-1\neq0$,可得$x\neq\pm1$.(3)由$2-x\geqslant0$,得$x\leqslant2$.

2. 解:$s=270-60t$,自变量t的取值范围是$0\leqslant t\leqslant4.5$.

点拨:函数的自变量的取值范围由两个条件确定,一是使函数关系式有意义,二是使所描述的实际问题有意义.

习题(教材第68页)

A组:**解**:(1)x取任意实数.(2)$x\neq0$.(3)由$2x-1\neq0$,可得$x\neq\frac{1}{2}$.(4)由$x+4\geqslant0$,得$x\geqslant-4$.

B组:**1. 解**:要使函数关系式有意义,需满足$\begin{cases}x-2\geqslant0,\\x+3\geqslant0.\end{cases}$解得$x\geqslant2$.故自变量的取值范围是$x\geqslant2$.

2. 解:(1)设该厂每月的利润为W元,产品件数为x,则$W=(50-25)x-2\times0.5x-30\,000$,即$W=24x-30\,000$.

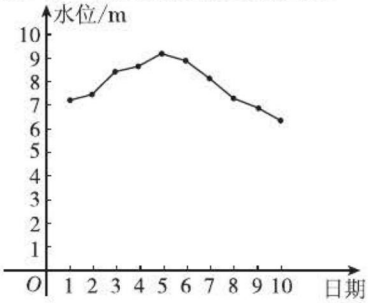
(2)由题意可知,$W>0$,即$24x-30\,000>0$,解得$x>1\,250$.因为x为正整数,所以该厂每月至少需生产并销售这种产品1 251件.

20.3 函数的表示

练习(教材第71页)

1. 解:(1)如图所示.

(2)从8月6日起水位开始全面回落.



(第1题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解:(1)题图(1)表示父亲距家的路程 y 与离家时间 x 的关系.

(2)题图(2)表示母亲距家的路程 y 与离家时间 x 的关系.

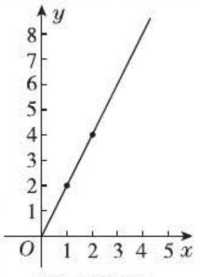
(3)小莉从家走了 30 min 到达离家 900 m 的一个报亭,随即用 15 min 跑步回家.

点拨:(3)题答案不唯一,只要故事情节与题图相符即可.

习题(教材第 71 页)

A 组:**1. 解**:(1)$y=2x$,自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$.

(2)函数 $y=2x$ 的图像如图所示.



(第 1 题图)

2. 解:(1)行驶 2 h 后司机开始吃饭,吃饭用了 1 h.

(2)饭后行驶 4 h 到加油站,到加油站时油箱内还有 10 L 油.

(3)相同. 理由:饭前行驶过程中,汽车每小时耗油 $(40-30)\div 2=5$(L);饭后行驶过程中,汽车每小时耗油 $(30-10)\div(7-3)=5$(L). 所以相同.

3. 解:(1)题图(2)能表示上述过程.

(2)选择题图(3):小亮放学回家,最初以某一速度匀速行进,途中经过一家文具店,便停下来在文具店里买了两件文具,然后他就匀速慢跑回家了. 设小亮从学校出发后所用的时间为 t(min),距离家的路程为 s(m).

点拨:(2)题答案不唯一.

B 组:**1. 解**:(1)$s=90t,t\geqslant 0$.

(2)36;72;90;135;180;360　画函数的图像略.

2. 解:(1)(答案不唯一)(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5).

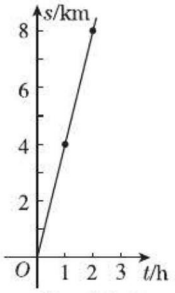
(2)将 $x=1,2,3,4,5$ 分别代入 $y=x$ 中,可得 y 的值依次为 1,2,3,4,5,所以(1)中 5 个点的坐标可分别使得表达式 $y=x$ 成立.

(3)(答案不唯一)(6,6),(7,7),(8,8),说明略.

20.4 函数的初步应用

练习(教材第 75 页)

1. 解:$s=4t,t\geqslant 0$. 画出函数图像如图.



(第 1 题图)

2. 解:(1)一天售出这种电子元件 300 个时盈利最多,最多盈利 400 元.

(2)这种电子元件一天卖出 100 个时不赔不赚.

习题(教材第 76 页)

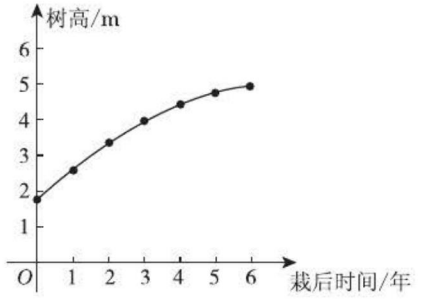
A 组:**1. 解**:从 2007 年到 2009 年,该产品的年产量逐年上升,从 2009 年到 2011 年,该产品的年产量保持不变.

点拨:答案不唯一.

2. 解:(1)9 岁到 15 岁.

(2)从 16 岁开始,男生的平均体重就超过了女生的平均体重.

3. 解:(1)如图.



(第 3 题图)

(2)从第 3 年开始,这种树生长变得缓慢.

B 组:**解**:(1)由题意可知,$a=\dfrac{7.5}{5}=1.5$,$c=\dfrac{16.2-1.5\times 6}{9-6}=2.4$.

(2)①当 $0\leqslant x\leqslant 6$ 时,$y=1.5x$;当 $x>6$ 时,$y=1.5\times 6+2.4(x-6)$,即 $y=2.4x-5.4$.

②当 $x=8$ 时,$y=2.4\times 8-5.4=13.8$,即该户 5 月份的水费为 13.8 元.

复习题(教材第 79 页)

A 组:**1. 解**:(1)常量是橙子的标价,变量是购买橙子的质量及付费.

(2)$y=3x,x\geqslant 0$.

2. 解:(1)BC 的长与 AD 的长是常量,CC' 的长 x 及 $\triangle ABC'$ 的面积 S 是变量.

(2)$S=\dfrac{1}{2}(16-x)\times 10$,即 $S=80-5x$,x 的取值范围是 $0\leqslant x<16$.

(3)当 $x=10$ 时,$S=80-5\times 10=30$;当 $x=5$ 时,$S=80-5\times 5=55$;当 $x=3$ 时,$S=80-5\times 3=65$.

3. 解:(1)(3)(4)是正确的.

4. 解:(1)变量有年份及升学率.

(2)可以把升学率看作年份的函数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

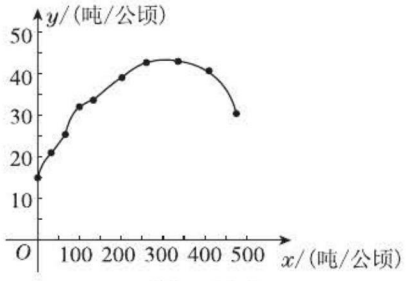
5. 解:(1)100 m. (2)小兰起跑慢了,慢了 0.5 s. (3)小兰. (4)小兰用了 15 − 0.5 = 14.5(s),小惠用了 16 s.

6. 解:(1)体温最高的时刻是 14 时,体温最低的时刻是 4 时.

(2)0 ~ 4 时及 14 ~ 24 时. (3)36 ~ 36.8 ℃.

7. 解:$y = 30 - 0.8x$,它们是函数关系,x 的取值范围是$0 \leqslant x \leqslant 37$,且 x 为整数.

8. 解:(1)如图.



(第 8 题图)

(2)不是. (3)略.

B 组:**1.** 解:题图(2).

2. 解:(1)$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times 20$,即 $V = \frac{20\pi}{3}r^2$,自变量 r 的取值范围是 $1 \leqslant r \leqslant 10$.

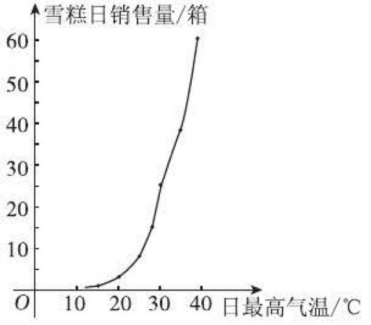
(2)$\frac{20\pi}{3}$;$\frac{500\pi}{3}$;540π;$\frac{2\,000\pi}{3}$

3. 解:(1)从家到旅游点全程共有 178 km,汽车行驶了 3 时 10 分.

(2)略.

(3)略.

C 组:**1.** 解:(1)反映了雪糕的日销售量与当日的最高气温之间的函数关系,可用图像法表示(表示方法不唯一),如图. (2)略.



(第 1 题图)

2. 解:(1)随着环境温度的升高,汗液量增多,尿液量减少.

(2)大约在 23℃时,汗液量与尿液量大体相等.

第二十一章 一次函数

21.1 一次函数

练习(教材第 85 页)

1. 解:(1)题中的两个量具有正比例关系.

2. (1)9 (2)4 (3) −5

习题(教材第 86 页)

A 组:**1.** 解:(1)(3)(5)(6)是正比例函数. (1)题中的比例系数为 −4;(3)题中的比例系数为$\frac{5}{6}$;(5)题中的比例系数为 −0.9;(6)题中的比例系数为$\sqrt{5} - 1$.

2. 解:(1)$y = 4x$.

(2)当 $x = 5$ 时,$y = 4 \times 5 = 20$.

(3)当 $y = 5$ 时,$4x = 5$,解得 $x = \frac{5}{4}$.

3. 解:(1)$V = 8S$.

(2)当 $S = 64\ \text{m}^2$ 时,$V = 8 \times 64 = 512(\text{m}^3)$.

B 组:**1.** 解:设 $y = kx$(k 为常数,且 $k \neq 0$),$z = k'y$(k'为常数,且 $k' \neq 0$),则 $z = k' \cdot kx = k'kx$,因为 kk'为常数,且 $kk' \neq 0$,所以 x 和 z 成正比例.

2. 解:由题意得 $3m + 9 = 0$,且 $2 - m \neq 0$,解得 $m = -3$,且 $m \neq 2$. 所以 m 的值为 −3.

练习(教材第 88 页)

1. 解:(1)(3)(4)(5)是一次函数. (1)题中的 $k = -1$,$b = 2$;(3)题中的 $k = 0.03$,$b = 8$;(4)题中的 $k = \frac{2}{5}$,$b = 0$;(5)题中的 $k = \sqrt{2}$,$b = -3$.

点拨:(2)题中的分母中含有自变量,(6)题中自变量的指数是 2. 故(2)(6)不是一次函数.

2. 解:$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 3 = \frac{3}{2}x$,这个函数是一次函数.

习题(教材第 89 页)

A 组:**1.** 解:(1)(2)(4)是一次函数. (1)题中的 $k = -1$,$b = \frac{1}{3}$;(2)题中的 $k = 2\pi$,$b = 0$;(4)题中的 $k = 0.5$,$b = \frac{\pi}{3}$.

点拨:(3)题中的分母中含有自变量,故(3)不是一次函数.

2. 解:(1)对于一次函数 $y = -2x + 3$,令 $y = 0$,即 $-2x + 3 = 0$,解得 $x = \frac{3}{2}$. 所以当 $x = \frac{3}{2}$时,$y = 0$.

(2)将 $x = 0$ 代入 $y = -2x + 3$ 中,得 $y = -2 \times 0 + 3 = 3$. 所以当 $y = 3$ 时,$x = 0$.

3. 解:(1)$y = 3x + 2$.

(2)当 $x = 7.8$ 时,$y = 3 \times 7.8 + 2 = 25.4$. 如果邮寄包裹的质量为 7.8 kg,那么邮寄总费用为 25.4 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

B 组：解：(1) $y_1 = 0.7x \times 31 = 21.7x$，

即 $y_1 = 21.7x(60 \leqslant x \leqslant 100)$.

(2) $y_2 = 1 \cdot x \times 20 + 1 \times 60 \times 11 = 20x + 660$，

即 $y_2 = 20x + 660(60 \leqslant x \leqslant 100)$.

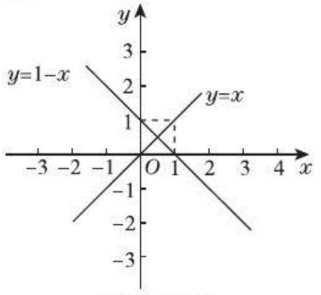
(3) $y_3 = 0.2(x - 60) \times 11 = 2.2x - 132$，即 $y_3 = 2.2x - 132(60 \leqslant x \leqslant 100)$.

(4) $y = y_2 + y_3 - y_1 = (20x + 660) + (2.2x - 132) - 21.7x = 0.5x + 528$，即 $y = 0.5x + 528(60 \leqslant x \leqslant 100)$.

21.2 一次函数的图像和性质

练习（教材第 91 页）

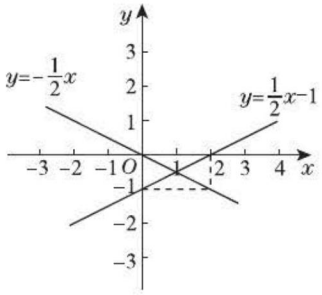
1. 解：如图所示.



（第 1 题图）

点拨：画一次函数和正比例函数的图像时，只要找到两点，便可以画出它们的图像.

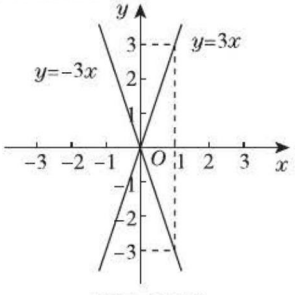
2. 解：如图所示.



（第 2 题图）

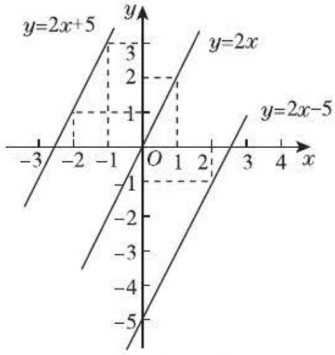
习题（教材第 91 页）

A 组：**1. 解**：如图所示.



（第 1 题图）

2. 解：如图所示.



（第 2 题图）

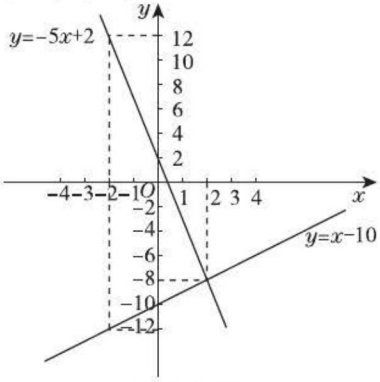
点拨：注意描点要准确.

B 组：**1. 解**：

x	…	−2	−1	0	1	2	…
$y = x - 10$	…	−12	−11	−10	−9	−8	…
$y = -5x + 2$	…	12	7	2	−3	−8	…

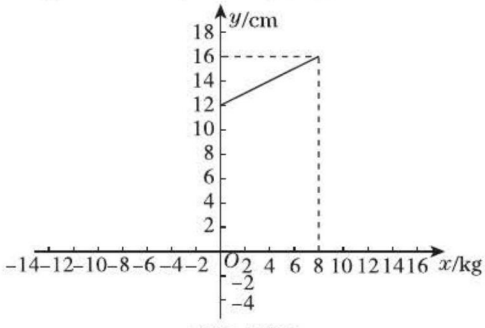
(1) 如图所示.

(2) 它们的图像有公共点. 观察图像可得公共点的坐标为(2，−8).



（第 1 题图）

2. 解：$y = 12 + 0.5x(0 \leqslant x \leqslant 8)$，图像如图所示.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习(教材第 94 页)

1. 解:(1)y 随 x 的增大而减小.

(2)y 随 x 的增大而增大.

(3)y 随 x 的增大而减小.

(4)y 随 x 的增大而增大.

点拨:在一次函数 $y=kx+b$(k,b 为常数,且 $k\neq 0$)中,当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小.

2. 解:(1)由题意得,$k\neq 0$,且 $4k-2=0$,

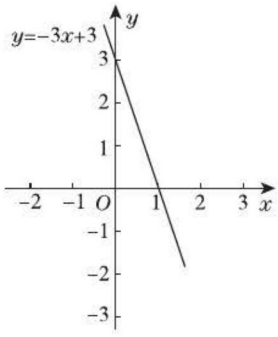
解得 $k=\frac{1}{2}$.

(2)由题意得,$k<0$.

习题(教材第 94 页)

A 组:1. 解:由题意得,$k+1<0$,所以 $k<-1$.

2. 解:图像如图所示.

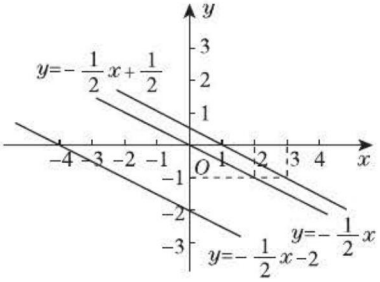


(第 2 题图)

(1)减小;下降 (2)当 $y<0$ 时,$x>1$.

(3)当 $0<x<1$ 时,$0<y<3$.

3. 解:所画函数图像如图所示.

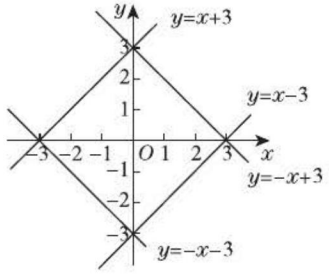


(第 3 题图)

(1)三条直线平行.

(2)与函数表达式中的 k 相关.

B 组:1. 解:所画函数图像如图所示. 每两个函数图像之间的共同特征略.

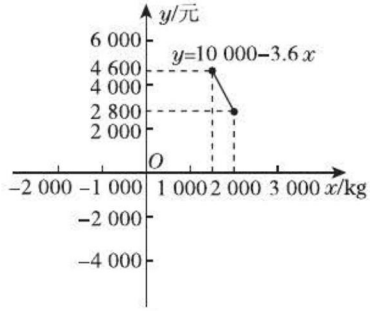


(第 1 题图)

点拨:用描点法画出函数图像后,仔细观察可知每两个函数图像之间的共同特征.

2. 解:(1)$y=10\,000-3.6x(1\,500\leqslant x\leqslant 2\,000)$.

(2)函数图像如图所示. (3)$2\,800\leqslant y\leqslant 4\,600$.



(第 2 题图)

点拨:解答本题的关键是理解题意,注意自变量的取值范围.

21.3 用待定系数法确定一次函数表达式

练习(教材第 98 页)

1. 解:设此一次函数的表达式为 $y=kx+b$,把点(1,2),(−2,1)的坐标分别代入得 $\begin{cases}2=k+b,\\1=-2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{3},\\b=\frac{5}{3}.\end{cases}$ 故这个函数的表达式为 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

2. 解:(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$,因为当 $x=20$ 时,$y=1\,600$;

当 $x=30$ 时,$y=2\,000$. 所以 $\begin{cases}20k+b=1\,600,\\30k+b=2\,000,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=40,\\b=800.\end{cases}$ 所以 $y=40x+800$(x 为正整数).

(2)当 $y=3\,200$ 时,$40x+800=3\,200$,解得 $x=60$. 所以,当支出总费用为 3 200 元时,有 60 人参加了比赛.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题(教材第 98 页)

A 组:**1.** -7　**点拨**:把点$(-5,7)$的坐标代入$y=(k+3)x-13$中,求出k的值即可.

2. 解:(1)设正比例函数的表达式为$y=kx$,将点$(2,-1)$的坐标代入,可得$2k=-1$,解得$k=-\frac{1}{2}$. 所以正比例函数的表达式为$y=-\frac{1}{2}x$.

(2)设一次函数的表达式为$y=kx+b$,将点$(-1,-2)$,$\left(\frac{1}{2},3\right)$的坐标分别代入,可得

$$\begin{cases}-k+b=-2,\\ \frac{1}{2}k+b=3,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=\frac{10}{3},\\ b=\frac{4}{3}.\end{cases}$$

所以一次函数的表达式为$y=\frac{10}{3}x+\frac{4}{3}$.

3. 解:设这个函数的表达式为$y=kx+b$,将点$(0,2)$,$(3,-4)$的坐标分别代入,可得$\begin{cases}b=2,\\ 3k+b=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\ b=2.\end{cases}$所以这个函数的表达式为$y=-2x+2$.

B 组:**解**:(1)设y与x的函数关系式为$y=kx+b$,将$(40.0,75.0)$和$(37.0,70.2)$分别代入,得$\begin{cases}40.0k+b=75.0,\\ 37.0k+b=70.2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=1.6,\\ b=11.\end{cases}$所以$y=1.6x+11$.

(2)配套. 理由:当$x=42.0$时,$y=1.6\times42.0+11=78.2$,所以它们配套.

21.4　一次函数的应用

练习(教材第 100 页)

1. 解:(1)通过观察表格中给出的数据可知,V是t的一次函数. 由此设V与t之间的函数关系式为$V=kt+b$,将$(30,1\,500)$,$(60,3\,000)$分别代入,可得$\begin{cases}30k+b=1\,500,\\ 60k+b=3\,000,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=50,\\ b=0.\end{cases}$所以$V=50t$. 将$(90,4\,500)$,$(120,6\,000)$,$(150,7\,500)$分别代入$V=50t$,均符合,所以放水量$V$与放水时间$t$之间的函数关系式为$V=50t$.

(2)当$t=60\times24$时,$V=50\times60\times24=72\,000$. 所以放水 24 h 的放水量为$72\,000\ \text{m}^3$.

2. 解:(1)设y与x之间的函数关系式为$y=kx+b$. 将$(6,3.1)$,$(8,3.6)$分别代入,可得$\begin{cases}6k+b=3.1,\\ 8k+b=3.6,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=0.25,\\ b=1.6.\end{cases}$所以$y$与$x$之间的函数关系式为$y=0.25x+1.6(x\geqslant5)$.

(2)将$y=4.1$代入$y=0.25x+1.6$,得$0.25x+1.6=4.1$,解得$x=10$. 所以当出版社投入成本 4.1 万元时,能印该书10 千册.

习题(教材第 101 页)

A 组:**1. 解**:(1)$y=30(60+x)=30x+1\,800(x>0)$. (2)令$30x+1\,800=60\times40$,解得$x=20$,即当$x=20$时,变化后的长方形与原来的长方形的面积相等. (3)令$30x+1\,800>2\times60\times40$,解得$x>100$,即当$x>100$时,可以使变化后的长方形的面积比原来的长方形面积的 2 倍还要大.

点拨:解决此类问题,首先要理解题意,根据题意构建函数模型,正确地列出函数关系式.

2. 解:(1)$y=25x-45-20-42=25x-107$,即$y=25x-107(0\leqslant x\leqslant19$,且$x$为整数$)$. (2)令$25x-107\geqslant0$,解得$x\geqslant\frac{107}{25}$,所以至少要有 5 名乘客才能保证不亏本. 当$x=19$时,$y=25\times19-107=368$. 故若载满了乘客,可获利 368 元.

3. 解:(1)设$y=kx$,则$9=60k$,解得$k=\frac{3}{20}$,

所以$y=\frac{3}{20}x(x\geqslant0)$. (2)由题意可得,$0\leqslant\frac{3}{20}x\leqslant12$,解得$0\leqslant x\leqslant80$. 故要使刹车距离不超过12 m,车速应保持在 0 ~ 80 km/h.

点拨:本题是图像信息题,主要考查正比例函数的有关知识,解题时注意自变量的取值范围.

B 组:**解**:设当$0\leqslant x\leqslant10$时,y与x之间的函数关系式为$y=kx$,将点$(10,22)$的坐标代入,可得$10k=22$,解得$k=2.2$. 即当$0\leqslant x\leqslant10$时,$y=2.2x$. 设当$x>10$时,y与x之间的函数关系式为$y=k'x+b$,将点$(10,22)$,$(20,57)$的坐标分别代入,可得$\begin{cases}10k'+b=22,\\ 20k'+b=57,\end{cases}$解得$\begin{cases}k'=3.5,\\ b=-13.\end{cases}$即当$x>10$时,$y=3.5x-13$. 综上可知,$y$与$x$之间的函数关系式为$y=\begin{cases}2.2x(0\leqslant x\leqslant10),\\ 3.5x-13(x>10).\end{cases}$

(1)当$x=7$时,将$x=7$代入$y=2.2x$,得$y=15.4$. 所以应交水费 15.4 元.

(2)通过观察图像可知,小兰家 3 月份用水量超过了 10 t,4 月份用水量少于 10 t. 所以将$y=29$代入$y=3.5x-13$,得$29=3.5x-13$,解得$x=12$;将$y=19.8$代入$y=2.2x$,得$19.8=2.2x$,解得$x=9$,即小兰家 3 月份用水量为 12 t,4 月份用水量为 9 t,所以小兰家 4 月份比 3 月份节约用水$12-9=3$(t).

点拨:此题主要考查观察图像的能力以及由图像求函数关系式的能力,运用数形结合思想,读懂图像所给的信息,并与生活实际相结合,这是解题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习(教材第 104 页)

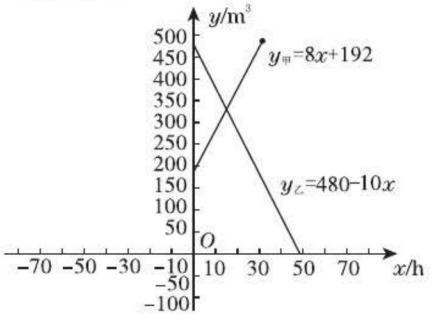
1. 解:(1)$m=25x+150\ 000$(x 为正整数);
$n=40x$(x 为正整数).
(2)当 $n>m$ 时,工厂才会有盈利,即 $40x>25x+150\ 000$,解得 $x>10\ 000$. 故至少生产并销售 10 000 件产品后,工厂才会有盈利.

2. 解:(1)甲行驶了 4.5 h 到达 B 地,乙行驶了 6 h 到达 A 地. (2)$s_{甲}=8t(0\leqslant t\leqslant 4.5)$,$s_{乙}=-6t+36(0\leqslant t\leqslant 6)$. (3)令 $8t=-6t+36$,解得 $t=\frac{18}{7}$,当 $t=\frac{18}{7}$ 时,$s_{甲}=s_{乙}=8\times\frac{18}{7}=\frac{144}{7}$,所以交点坐标为 $\left(\frac{18}{7},\frac{144}{7}\right)$. 实际意义:纵坐标表示二人相遇时距 A 地 $\frac{144}{7}$ km,横坐标表示二人行驶了 $\frac{18}{7}$ h 时相遇.
点拨:第(1)题可结合图像得出,第(2)题用待定系数法确定 $s_{甲}$,$s_{乙}$ 与 t 之间的函数关系式,第(3)题结合实际作答.

习题(教材第 104 页)

A 组:1. 解:设从甲店买需 y_1 元,从乙店买需 y_2 元,购买电脑的数量为 x 台,则 $y_1=4\ 800x\times 80\%=3\ 840x$,即 $y_1=3\ 840x(15\leqslant x\leqslant 25$,且 x 为整数);$y_2=4\ 800(x-1)\times 90\%=4\ 320x-4\ 320$,即 $y_2=4\ 320x-4\ 320(15\leqslant x\leqslant 25$,且 x 为整数). $y_1-y_2=3\ 840x-(4\ 320x-4\ 320)=-480x+4\ 320(15\leqslant x\leqslant 25$,且 x 为整数). 所以 y_1-y_2 的值随 x 的增大而减小,当 $x=15$ 时,y_1-y_2 有最大值. 而当 $x=15$ 时,$y_1-y_2=-480\times 15+4\ 320=-2\ 880<0$,所以这所学校购买甲店的电脑更合算.

2. 解:(1)甲池中的水量 $y=8x+192(0\leqslant x\leqslant 36)$;乙池中的水量 $y=480-10x(0\leqslant x\leqslant 48)$. 所画函数图像如图所示.



(第 2 题图)

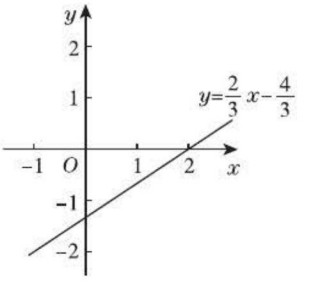
(2)①$x=16$;②$0\leqslant x<16$;③$16<x\leqslant 36$.

B 组:解:(1)$y=4x(x\geqslant 0)$.
(2)由题意得,方案二中,若购买不超过 3 kg,则付款金额 y(元)与购买的小麦种子的数量 x(kg)之间的函数关系式为 $y=5x(0\leqslant x\leqslant 3)$;若一次性购买超过 3 kg,则付款金额 y(元)与购买的小麦种子的数量 x(kg)之间的函数关系式为 $y=3\times 5+(x-3)\times 5\times 70\%=3.5x+4.5$,即 $y=3.5x+4.5(x>3)$. 当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时,$4x<5x$,即当购买不超过 3 kg 时,选择方案一购买. 当 $x>3$ 时,令 $3.5x+4.5=4x$,解得 $x=9$,即当一次性购买 9 kg 时,两方案付款金额一样;令 $3.5x+4.5>4x$,解得 $x<9$,即当一次性购买大于 3 kg 小于 9 kg 时,选择方案一购买;令 $3.5x+4.5<4x$,解得 $x>9$,即当一次性购买超过 9 kg 时,选择方案二购买.
综上可知:当购买不足 9 kg 时,选择方案一购买,当购买 9 kg 时,两种方案付款金额一样;当购买超过 9 kg 时,选择方案二购买.

21.5 一次函数与二元一次方程的关系

练习(教材第 108 页)

1. 解:$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$. 图像如图所示.



(第 1 题图)

2. 解:$2x-y=1$ 的解有 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=5,\end{cases}$ 画图略.
这些点均在一次函数 $y=2x-1$ 的图像上.
点拨:方程的解不唯一,任写三组即可.

习题(教材第 108 页)

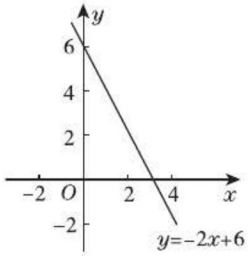
A 组:1. 解:(1)$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

(2)将 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}ax-y=-5,\\y+x=b,\end{cases}$

可得 $\begin{cases}a-2=-5,\\2+1=b,\end{cases}$ 所以 $a=-3$,$b=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：$y=-2x+6$. 图像如图所示.



（第 2 题图）

B 组：1. 解：解方程组，得$\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$由此可得两函数图像交点的坐标为(2,2).

2. 解：(1)$P(-1,2)$.

(2)一次函数 $y=-x+1$ 的图像与 x 轴的交点坐标为(1,0). 将$(-1,2)$代入 $y=-\frac{a}{3}x+\frac{8}{3}$，可得$2=-\frac{a}{3}\times(-1)+\frac{8}{3}$，解得 $a=-2$. 一次函数 $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ 的图像与 x 轴的交点坐标为 $(-4,0)$. 所以 $AB=5$，则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times5\times2=5$.

复习题（教材第 111 页）

A 组：1. (1)$\left(\frac{1}{3},0\right)$；(0,3)　(2)$\frac{5}{2}$

(3)$1<y<3$　(4)$s=40t+5(t\geqslant0)$

(5)$y=0.25x+2.2(0\leqslant x\leqslant10)$；一次

2. 解：(1)当 $x=1$ 时，$y=-1+3=2$，所以点(1,2)在直线 $y=-x+3$ 上；当 $x=2$ 时，$y=-2+3=1\neq-1$，所以点$(2,-1)$不在直线 $y=-x+3$ 上；当 $x=0$ 时，$y=3$，所以点(0,3)在直线 $y=-x+3$ 上；当 $x=2$ 时，$y=-2+3=1\neq2$，所以点(2,2)不在直线 $y=-x+3$ 上.

(2)对于 $y=-\frac{1}{2}x$，y 随 x 的增大而减小，因为 $-5<-2$，所以 $y_1>y_2$.

(3)②③正确，①错误. 理由：虽然该卫生纸产量与销量均呈直线上升的趋势，但是产量与销量的差距越来越大，出现供大于求的趋势，库存积压越来越大，所以应该压缩生产或设法促销，不能按原计划继续生产.

3. 解：设这个一次函数的表达式为 $y=kx+b$，由题意易得$\begin{cases}70=130k+b,\\50=150k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=200.\end{cases}$所以 $y=-x+200(120\leqslant x\leqslant200$，且 x 为整数).

点拨：本题为表格信息题，根据表中所给数据采用待定系数法求解.

4. 解：(1)是. V 是自变量. (2)是. m 是自变量.

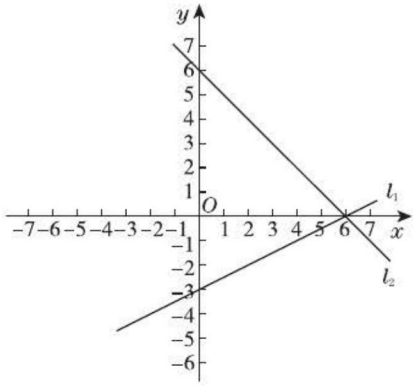
点拨：根据一次函数的定义进行判断.

5. 解：(1)设这个一次函数的表达式为 $y=kx+b$，则$\begin{cases}1=k+b,\\-5=-k+b.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=3,\\b=-2.\end{cases}$所以 $y=3x-2$.

(2)设这个一次函数的图像与 x 轴、y 轴的交点分别为 A，B，则 $A\left(\frac{2}{3},0\right)$，$B(0,-2)$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times2=\frac{2}{3}$.

点拨：(1)先设该一次函数的表达式为 $y=kx+b$，即可求出 k，b. (2)先分别求出函数图像与 x 轴、y 轴的交点坐标，即可求出面积.

6. 解：所画图像如图所示.



（第 6 题图）

(1)当 $x=6$ 时，l_1 与 l_2 所对应的表达式的 y 值相等.

(2)当 $x>6$ 时，l_1 所对应的表达式的 y 值大于 l_2 所对应的表达式的 y 值.

(3)当 $x<6$ 时，l_1 所对应的表达式的 y 值小于 l_2 所对应的表达式的 y 值.

7. 解：(1)正比例函数. (2)$s=\frac{50}{7}t(0\leqslant t\leqslant14)$.

(3)速度是$\frac{50}{7}$ m/s.　**点拨**：本题为图像信息题，观察图像可知，s 是 t 的正比例函数.

B 组：1. 解：(1)乙比甲晚出发 1 h，早到 2 h.

(2)甲：$s=15t(0\leqslant t\leqslant4)$. 乙：$s=60t-60(1\leqslant t\leqslant2)$.

(3)令 $15t=60t-60$，解得 $t=\frac{4}{3}$，$\frac{4}{3}\times15=20$(km)，所以乙在甲出发后$\frac{4}{3}$ h 追上甲，追上甲的地点离 A 地有 20 km.

点拨：第(1)题可结合图像得出，第(2)题用待定系数法求解，第(3)题根据路程相等，可求出时间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)当 $20\leqslant x\leqslant 30$ 时,$y=-5x+200$;当 $30\leqslant x\leqslant 35$ 时,$y=-10x+350$.

(2)把 $x=32$ 代入 $y=-10x+350$,得 $y=-10\times 32+350=30$,即当单价为 32 元/千克时,日销售量是 30 kg.

(3)当 $y=80$ 时,结合图像可知 $-5x+200=80$,解得 $x=24$. 所以单价是 24 元/千克.

3. 解:(1)由题意易得,$y_{甲}=20x(0\leqslant x\leqslant 3)$,$y_{乙}=8x+20(0\leqslant x\leqslant 5)$.

令 $20x=8x+20$,解得 $x=\frac{5}{3}$.

$60-20\times\frac{5}{3}=\frac{80}{3}$(km).

即出发后$\frac{5}{3}$ h 甲追上乙,此时离 C 地$\frac{80}{3}$ km.

(2)当 $x=2.5$ 时,$y_{甲}=20\times 2.5=50$,

$y_{乙}=8\times 2.5+20=40$,$50-40=10$(km).

即当出发后 2.5 h 时,甲在前面,此时甲超过乙 10 km.

C 组:**1. 解**:(1)5 种租车方案. ①4 辆甲种汽车,1 辆乙种汽车. ②3 辆甲种汽车,3 辆乙种汽车. ③2 辆甲种汽车,5 辆乙种汽车. ④1 辆甲种汽车,7 辆乙种汽车. ⑤9 辆乙种汽车. (2)将(1)题中的 5 种方案进行比较可知,方案①最便宜.

2. 解:(1)李虹跑了 360 m 时,速度开始下降;李虹跑完 400 m 用时 80 s. 张惠跑完400 m用时 75 s;张惠在跑了 60 s 后,速度加快.

(2)体育老师设计这个方案的目的是要说明在跑步中留着后劲儿冲刺比一直全速前进获胜的机会大.

点拨:本题属于开放题,答案不唯一,只要合理即可.

第二十二章 四边形

22.1 平行四边形的性质

练习(教材第 119 页)

1. 解:在$\square ABCD$ 中,因为 $AB=CD$,$AD=BC$,$AB=3$,$AD=2$,所以 $CD=3$,$BC=2$. 所以$\square ABCD$ 的周长为 $AB+CD+AD+BC=3+3+2+2=10$.

2. 解:在$\square ABCD$ 中,$AB=DC$,$BC=AD$,$AD\parallel BC$,所以 $\angle DAC=\angle BCA$. 因为 AC 平分 $\angle DAB$,所以 $\angle DAC=\angle BAC$. 所以 $\angle BAC=\angle BCA$. 所以 $AB=CB$. 又因为 $AB=3$,所以 $AD=DC=BC=AB=3$. 所以$\square ABCD$ 的周长为 $AD+DC+BC+AB=3+3+3+3=12$.

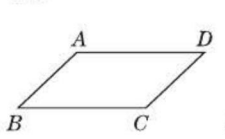
3. 解:在 $\square ABCD$ 中,因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle A+\angle B=180°$. 又因为 $\angle A:\angle B=5:4$,所以 $\angle A=180°\times\frac{5}{5+4}=100°$. 所以 $\angle C=\angle A=100°$.

习题(教材第 119 页)

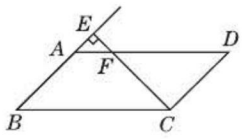
A 组:**1**. 略.

2. 解:如图所示,在$\square ABCD$ 中,因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle A+\angle B=180°$,$\angle C+\angle D=180°$. 所以平行四边形 $ABCD$ 的四个内角的和为 $2\times 180°=360°$.

点拨:根据平行四边形的定义和平行线的性质求解.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. 解:如图,记 AD 与 CE 交于点 F,在$\square ABCD$ 中,因为 $BA\parallel CD$,所以 $\angle D=\angle EAD=46°$. 因为 $CE\perp BA$,所以 $\angle AEC=90°$. 所以 $\angle AFE=90°-46°=44°$. 又因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle BCE=\angle AFE=44°$.

4. 解:$AE=CF$. 证明:在$\square ABCD$ 中,因为 $AB\parallel CD$,所以 $\angle ABE=\angle CDF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ BE=DF,\end{cases}$$所以$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

所以 $AE=CF$.

B 组:**1. 证明**:在$\square ABCD$ 中,因为 $AB\parallel CD$,所以 $\angle FBE=\angle DCE$. 因为 E 为 BC 的中点,所以 $BE=CE$. 在 $\triangle FBE$ 和 $\triangle DCE$ 中,$\begin{cases}\angle FBE=\angle DCE,\\ BE=CE,\\ \angle BEF=\angle CED,\end{cases}$

所以$\triangle FBE\cong\triangle DCE$.

所以 $BF=CD$. 又因为 $AB=CD$,

所以 $BF=AB$,即点 B 为 AF 的中点.

2. 证明:在$\square ABCD$ 中,$AB=CD$,$\angle B=\angle D$,在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$所以$\triangle ABE\cong\triangle CDF$,所以 $AE=CF$.

练习(教材第 121 页)

1. 解:在$\square ABCD$ 中,AC 与 BD 互相平分. 又因为 $AC=6$ cm,$BD=8$ cm,所以 $OA=OC=\frac{1}{2}AC=3$ cm,$OB=OD=\frac{1}{2}BD=4$ cm. 因为 $AB=5$ cm,且 $3^2+4^2=5^2$,即 $OA^2+OB^2=AB^2$,所以 $\angle AOB=90°$,所以 $\angle AOD=90°$,所以 $AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$(cm). 所以 $\triangle AOB$ 的周长为 $AB+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$OA+OB=5+3+4=12(\text{cm})$，$\triangle AOD$ 的周长为 $OA+OD+AD=3+4+5=12(\text{cm})$.

2. 解：在$\square ABCD$中，$OD=OB$，$AD\parallel BC$. 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle EDO=\angle FBO$，在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，$\begin{cases}\angle EDO=\angle FBO,\\ OD=OB,\\ \angle EOD=\angle FOB,\end{cases}$ 所以$\triangle DOE\cong\triangle BOF$.

所以 $S_{\triangle DOE}=S_{\triangle BOF}$. 所以阴影部分的面积为 $S_{\triangle AOE}+S_{\triangle BOF}+S_{\triangle DOC}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle DOE}+S_{\triangle DOC}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}\times 24=12$.

习题（教材第 121 页）

A 组：**1. 解**：由$\square ABCD$的周长是 38，可知 $AB+AD=\frac{38}{2}=19$①，由 $\triangle AOD$ 与 $\triangle AOB$ 的周长之差是 5，可知 $AD-AB=5$②，由①②联立方程组，得 $\begin{cases}AB+AD=19,\\ AD-AB=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}AB=7,\\ AD=12,\end{cases}$ 故 AB 的长为 7.

2. 解：在$\square ABCD$中，$AD=BC$，$AB=CD$，$AD\parallel BC$. 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle AEB=\angle EBC$. 又因为 $\angle ABE=\angle EBC$，所以 $\angle ABE=\angle AEB$，所以 $AB=AE=2$. 因为 E 是 AD 的中点，所以 $AD=2AE=4$. 所以$\square ABCD$的周长为 $AD+BC+AB+CD=4+4+2+2=12$.

3. 证明：在$\square ABCD$中，$OA=OC$. 因为 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，所以 $\angle AEO=\angle CFO=90°$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，$\begin{cases}\angle AEO=\angle CFO=90°,\\ \angle AOE=\angle COF,\\ OA=OC,\end{cases}$

所以$\triangle AOE\cong\triangle COF$. 所以 $OE=OF$.

B 组：**1. 证明**：在$\square ABCD$中，$OA=OC$，$OB=OD$，又因为 M 是 OA 的中点，N 为 OC 的中点，所以 $OM=ON$. 在 $\triangle MOB$ 和 $\triangle NOD$ 中，$\begin{cases}OM=ON,\\ \angle MOB=\angle NOD,\\ OB=OD,\end{cases}$

所以$\triangle MOB\cong\triangle NOD$. 所以 $BM=DN$，$\angle MBO=\angle NDO$. 所以 $BM\parallel DN$.

2. 证明：在$\square ABCD$中，$AD=BC$，$AD\parallel BC$，因为 $AE\parallel BC$，所以 $\angle E=\angle FBC$. 因为 $AD=BC$，$AD=DE$，所以 $DE=BC$. 在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle CBF$ 中，$\begin{cases}\angle DFE=\angle CFB,\\ \angle E=\angle FBC,\\ DE=CB,\end{cases}$ 所以$\triangle DEF\cong\triangle CBF$.

所以 $DF=FC$.

22.2 平行四边形的判定

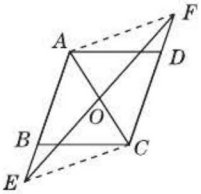
练习（教材第 125 页）

1. 解：是. 说明理由略.

2. 解：是. 说明理由略.

习题（教材第 125 页）

A 组：**1. 解**：AC 与 EF 互相平分. 证明如下：如图，连接 AF，CE. 在$\square ABCD$中，$AB=CD$，$AB\parallel CD$，因为 $BE=DF$，所以 $AE=CF$，又因为 $AE\parallel CF$，所以四边形 $AECF$ 是平行四边形，所以 AC 与 EF 互相平分.



（第 1 题图）

2. 证明：由把$\triangle ABC$绕边 BC 的中点 O 旋转 180°得到$\triangle DCB$ 可知，$AB=CD$，$\angle ABC=\angle DCB$，由 $\angle ABC=\angle DCB$ 得 $AB\parallel CD$，所以四边形 $ACDB$ 是平行四边形.

3. 证明：在$\square ABCD$中，$AB=CD$，$AB\parallel CD$，因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle ABE=\angle CDF$，在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ BE=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，所以 $AE=FC$，$\angle AEB=\angle CFD$，由 $\angle AEB=\angle CFD$ 得 $\angle AEF=\angle CFE$，所以 $AE\parallel CF$，由 $AE=FC$，$AE\parallel FC$ 得四边形 $AECF$ 是平行四边形.

B 组：**1. 证明**：在等边三角形 ABC 中，$\angle B=60°$，因为 $\angle EFB=60°=\angle B$，所以 $EF\parallel DC$，又因为 $EF=DC$，所以四边形 $EDCF$ 是平行四边形.

2. 证明：因为 $AE\perp AD$，$CF\perp BC$，所以 $\angle EAD=\angle FCB=90°$，因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle ADE=\angle CBF$，在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中，$\begin{cases}\angle EAD=\angle FCB,\\ \angle ADE=\angle CBF,\\ AE=CF,\end{cases}$ 所以

$\triangle ADE\cong\triangle CBF$，所以 $AD=CB$，又因为 $AD\parallel BC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

练习（教材第 128 页）

1. 解：①③，①④，①⑤，①⑥，②③，②④，④⑤，④⑥，⑤⑥均能够判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

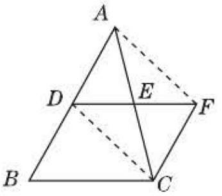
2. 证明：在$\square ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AD=BC$. 因为 $DE\perp AC$，$BF\perp AC$，所以 $\angle DEA=\angle DEF=\angle BFE=\angle BFC=90°$，因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DAE=\angle BCF$，在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中，$\begin{cases}\angle DEA=\angle BFC,\\ \angle DAE=\angle BCF,\\ AD=BC,\end{cases}$ 所以

$\triangle ADE\cong\triangle CBF$，所以 $DE=BF$，因为 $\angle DEF=\angle BFE=90°$，所以 $DE\parallel BF$，所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题(教材第128页)

A组:1. 证明:如图,连接AF,DC.由点D,E分别为$\triangle ABC$的边AB和边AC的中点,得$AD=BD$,$AE=EC$,由$AE=CE,DE=EF$可得四边形$ADCF$是平行四边形,所以$AD\parallel CF$,$AD=CF$,又因为$AD=BD$,所以$BD=CF$,又因为$BD\parallel CF$,所以四边形$BCFD$是平行四边形.



(第1题图)

2. 略.

3. 解:在AD边上找一点F,当满足$AF=EC$时,可使四边形$AECF$是平行四边形.说明理由略.

B组:1. 证明:在$\square ABCD$中,$\angle A=\angle C$,$\angle B=\angle D$,$AB=CD$,$AD=BC$,因为$AK=CM$,所以$DM=BK$,在$\triangle NDM$和$\triangle LBK$中,$\begin{cases}DN=BL,\\ \angle D=\angle B,\\ DM=BK,\end{cases}$所以$\triangle NDM\cong\triangle LBK$.所以$MN=KL$,同理可得$NK=ML$,所以四边形$KLMN$是平行四边形.

2. 证明:在$\square ABCD$中,$AD\parallel BC$,$OA=OC$,因为$AD\parallel BC$,所以$\angle EAO=\angle FCO$,在$\triangle AEO$和$\triangle CFO$中,$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$所以$\triangle AEO\cong\triangle CFO$,所以$EO=FO$,因为$G$是$OA$的中点,$H$是$OC$的中点,所以$OG=OH=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OC$,所以四边形$EGFH$是平行四边形.

22.3 三角形的中位线

练习(教材第132页)

1. 略.

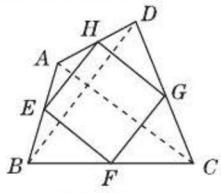
2. 解:$\because EF$为$\triangle ABC$的中位线,$\therefore EF=\frac{1}{2}BC=3$,$EF\parallel BC$.$\because BD$平分$\angle ABC$,$\therefore\angle EBD=\angle DBC$.$\because EF\parallel BC$,$\therefore\angle EDB=\angle DBC$,$\therefore\angle EBD=\angle EDB$,$\therefore ED=EB=\frac{1}{2}AB=2$,$\therefore DF=EF-ED=3-2=1$.

习题(教材第132页)

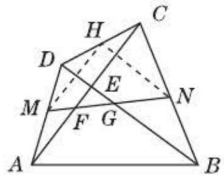
A组:1. 解:(1)道理:三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半.(2)在$\triangle ABC$中,$\because M,N$分别是AC,BC的中点,且$MN=20$ m,$\therefore A,B$两点间的距离为$20\times2=40$(m).

2. 解:相等的线段有$AB=BF=CD$,$BC=DF=DE$,$AC=CE$.平行的线段有$AF\parallel CD$,$AB\parallel CD$,$BF\parallel CD$,$BC\parallel DF$,$BC\parallel DE$,$BC\parallel EF$.

B组:1. 解:四边形$EFGH$为平行四边形.证明如下:如图,连接AC,BD.$\because H,E$分别是AD,AB的中点,$\therefore EH=\frac{1}{2}BD$,同理可得$FG=\frac{1}{2}BD$,$\therefore EH=FG$,同理可得$EF=HG$,$\therefore$四边形$EFGH$是平行四边形.



(第1题图)



(第2题图)

2. 证明:如图,取CD的中点H,连接MH,HN.$\because M,H$分别是AD,DC的中点,$\therefore MH=\frac{1}{2}AC$,$MH\parallel AC$,同理可得$NH=\frac{1}{2}BD$,$NH\parallel BD$.$\because AC=BD$,$\therefore MH=NH$,$\therefore\angle HMN=\angle HNM$.$\because MH\parallel AC,HN\parallel BD$,$\therefore\angle EFG=\angle HMN$,$\angle EGF=\angle HNM$,$\therefore\angle EFG=\angle EGF$,$\therefore EF=EG$.

22.4 矩 形

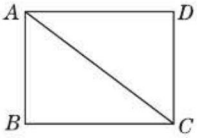
练习(教材第135页)

1. ①矩形的四个内角都是直角;②矩形的两条对角线相等

2. 解:相等的线段:$AB=CD$,$AD=BC$,$AC=BD$,$OA=OC=OB=OD$.相等的角:$\angle BAD=\angle ADC=\angle BCD=\angle ABC$,$\angle AOB=\angle DOC$,$\angle AOD=\angle BOC$,$\angle OAB=\angle ABO=\angle ODC=\angle OCD$,$\angle OAD=\angle ODA=\angle OBC=\angle OCB$.

习题(教材第136页)

A组:1. 解:如图,在矩形$ABCD$中,$AB=4$,$BC=5$,$\angle ABC=90°$.$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.



(第1题图)

2. 证明:在矩形$ABCD$中,$AB=CD$,$\angle A=\angle D=90°$,$\because E$为AD的中点,$\therefore AE=DE$.在$\triangle ABE$和$\triangle DCE$中,$\begin{cases}AB=DC,\\ \angle A=\angle D,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle DCE$.$\therefore EB=EC$,$\therefore\triangle EBC$是等腰三角形.

3. 解:在矩形$ABCD$中,$\angle A=\angle D=90°$,$AD=BC$,$AB=CD$,$\because EF\perp CE$,$\therefore\angle FEC=90°$,$\therefore\angle AEF+\angle DEC=90°$.$\because\angle DEC+\angle DCE=90°$,$\therefore\angle AEF=\angle DCE$.在$\triangle AEF$和$\triangle DCE$中,$\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ \angle AEF=\angle DCE,\\ EF=EC,\end{cases}$

$\therefore\triangle AEF\cong\triangle DCE$,$\therefore AE=CD$.设$AE=x$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

则 $CD=x$，$AD=x+2$. ∵ 矩形的周长为 16，∴ $2(x+x+2)=16$. 解得 $x=3$. 即 $AE=3$.

B 组：**1. 证明**：在矩形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AC=BD$. 因为 $AB\parallel CE$，$BE\parallel AC$，所以四边形 $ABEC$ 是平行四边形. 所以 $AC=BE$，所以 $BD=BE$.

2. 解：连接 PO. 在矩形 $ABCD$ 中，$AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，∴ $OA=OD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{2}$. ∵ $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle DOP}=\frac{1}{2}OA\cdot PE+\frac{1}{2}OD\cdot PF=\frac{1}{2}OA\cdot(PE+PF)=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AD\cdot DC=3$，∴ $PE+PF=\frac{12}{5}$.

3. 解：连接 AC. 在矩形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=BC$，$\angle ADC=\angle DCF=90°$. 因为 E 为 CD 的中点，所以 $DE=CE$. 因为 $AD\parallel CF$，所以 $\angle DAE=\angle CFE$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中，$\begin{cases}\angle DAE=\angle CFE,\\ \angle ADE=\angle FCE,\\ DE=CE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$，所以 $AD=CF$. 又因为 $AD=BC$，所以 $BC=CF$. 又因为 $DC\perp BF$，所以 $DF=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

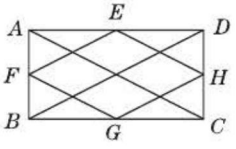
练习（教材第 138 页）

1. 解：(1)(2)(3)错误，(4)正确.

2. 证明：在 $\square AEDB$ 中，$AE=BD$，$AE\parallel BD$，$AB=DE$. ∵ D 为 BC 的中点，∴ $BD=DC$，∴ $AE=CD$. 又∵ $AE\parallel CD$，∴ 四边形 $AECD$ 是平行四边形. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，∴ $AC=DE$，∴ 四边形 $AECD$ 是矩形.

习题（教材第 139 页）

A 组：**1. 解**：如图，在矩形 $ABCD$ 中，AC，BD 的长都为 10 cm. 因为点 E，H 分别是 AD，CD 的中点，所以 $EH=\frac{1}{2}AC=5$ cm. 同理，FE，FG，GH 的长均为 5 cm. 所以所得的四边形的周长为 $5+5+5+5=20$(cm).



（第 1 题图）

2. 解：因为两条对角线 AC，BD 的夹角为 60°，$AO=BO$，所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形. 所以 $AC=2AB$. 所以 $AC+AB=2AB+AB=3AB=12$. 所以 $AB=4$，$AC=8$.

点拨：解题的关键是利用两条对角线所夹的角的度数得出 $\triangle AOB$ 为等边三角形.

3. 略.

B 组：**1. 证明**：由题意易知 $\angle MAC=\angle B+\angle ACB$. ∵ $AB=AC$，∴ $\angle B=\angle ACB$. ∴ $\angle MAC=2\angle B$. ∵ AN 是 $\angle MAC$ 的平分线，∴ $\angle MAC=2\angle MAE$，∴ $\angle MAE=\angle B$，∴ $AE\parallel BC$. ∵ $AD\perp BC$，∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$. ∵ $CE\perp AN$，∴ $\angle AEC=90°$. ∵ $AE\parallel BC$，∴ $\angle DAE=\angle ADB=90°$，∴ $\angle ADC=\angle DAE=\angle AEC=90°$，∴ 四边形 $ADCE$ 是矩形.

2. 解：在矩形 $ABCD$ 中，$OA=OB=OD=OC$. ∵ AE 平分 $\angle BAD$，∴ $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$，又∵ $\angle ABE=90°$，∴ $\angle AEB=45°$. ∴ $AB=BE$. ∵ $\angle CAE=15°$，∴ $\angle BAO=60°$，∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形. ∴ $OA=OB=AB$，$\angle ABO=60°$，∴ $BO=BE$，$\angle OBE=30°$，∴ $\angle BOE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$.

22.5 菱 形

练习（教材第 142 页）

1. 解：由题意易知菱形的另一条对角线的长为 $2\sqrt{3}$ cm，所以该菱形的面积为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$(cm²).

2. 解：过点 B 作 $BD\perp OA$，垂足为 D. 由题意可知 $\angle BAD=\angle AOC=45°$，$AB=OA=OC=\sqrt{2}$，所以 $AD=BD=1$. 所以 B 点的坐标为 $(\sqrt{2}+1,1)$.

习题（教材第 143 页）

A 组：**1. 解**：在菱形 $ABCD$ 中，∵ $\angle BAC=50°$，∴ $\angle BAD=2\angle BAC=100°$. ∵ $AD\parallel BC$，∴ $\angle BAD+\angle ABC=180°$，∴ $\angle ABC=80°$. ∴ $\angle ADC=80°$，$\angle BCD=100°$.

2. 解：由题意易知菱形的边长为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以周长为 $4\times5=20$.

3. 解：连接 BD. ∵ $AB=2$ cm，E 为 AB 的中点，∴ $AE=\frac{1}{2}AB=1$ cm. 在 Rt $\triangle AED$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm). ∴ $S_{菱形ABCD}=2S_{\triangle ABD}=2\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$(cm²).

B 组：**1. 解**：在菱形 $ABCD$ 中，∵ $AC=6$ cm，$BD=8$ cm，∴ $OA=\frac{1}{2}AC=3$ cm，$OB=\frac{1}{2}BD=4$ cm. ∴ 在 Rt $\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$ cm. ∴ $BC=5$ cm. ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot OB=\frac{1}{2}BC\cdot AE$，∴ $AE=\frac{AC\cdot OB}{BC}=\frac{6\times4}{5}=\frac{24}{5}$(cm).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 证明:(1)在菱形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,$BC = CD$.
$\because BE = BC$,$\therefore BE = CD$,$\therefore$ 四边形 $BECD$ 为平行四边形. $\therefore BD = EC$.
(2)由题意易知 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BEC}$.
$\because S_{菱形ABCD} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC}$,$S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BEC}$,$\therefore S_{菱形ABCD} = S_{\triangle AEC}$.

3. 解:$\because A(0,4)$,$B(-3,0)$,$\therefore OA = 4$,$OB = 3$,$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$. $\therefore AD = BC = AB = 5$. $\therefore D$ 点的坐标为$(0,-1)$,C 点的坐标为$(-3,-5)$.

练习(教材第 145 页)

1. 略.

2. 解:$\triangle ABE$,$\triangle AEF$ 是等腰三角形. 四边形 $ABCD$、四边形 $ABEF$、四边形 $CDFE$ 是平行四边形,四边形 $ABEF$ 是菱形.

习题(教材第 146 页)

A 组:**1. 证明**:连接 AC,则 $AC \perp BD$,又因为 $EF \perp BD$,$\therefore AC \parallel EF$. $\because E$ 是 AD 的中点,$\therefore G$ 是 DC 的中点. 易得 $\triangle DEG \cong \triangle CFG$,$\therefore EG = FG$,$\therefore DC$ 与 EF 互相平分.

2. 证明:$\because O$ 为 AC 的中点,$EF \perp AC$,$\therefore AE = EC$,$AF = FC$. 在 $\square ABCD$ 中,$\because AD \parallel BC$,$\therefore \angle AEO = \angle CFO$,$\angle EAO = \angle OCF$. 在 $\triangle AEO$ 与 $\triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle CFO, \\ \angle EAO = \angle FCO, \\ AO = OC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO$,$\therefore AE = CF$.
$\therefore AE = EC = CF = FA$. $\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形.

3. 证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,AC,BD 是其两条对角线,$\therefore EF$ 垂直平分 DB,$\therefore ED = EB$,$DF = BF$.
$\because DE$,DF 分别平分 $\angle ADB$,$\angle CDB$,$\angle ADB = \angle CDB$,$\therefore \angle ADE = \angle CDF$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CDF, \\ AD = CD, \\ \angle DAE = \angle DCF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$,$\therefore DE = DF$,
$\therefore DE = DF = BE = BF$. $\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是菱形.

B 组:**1. 解**:作点 M 关于 AC 对称的点 M',则 M' 在边 AD 上,且 M' 为 AD 的中点,连接 BM',易得 BM' 的长为 $PM + PB$ 的最小值,$\therefore BM' = 3$. 连接 BD,$\because AB = AD$,$\angle BAD = 60°$,$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形. $\therefore \angle ABM' = 30°$,$\angle AM'B = 90°$,$\therefore AM' = \frac{1}{2}AB$,$AB^2 - AM'^2 = BM'^2 = 9$,$\therefore AB = 2\sqrt{3}$.

2. 解:菱形. 理由略.

22.6 正方形

练习(教材第 148 页)

1. 解:由题意可知 $\angle CAE = \frac{1}{2}\angle DAB = 45°$. $\because$ 在菱形 $AEFC$ 中,AF 平分 $\angle CAE$,$\therefore \angle FAB = \frac{1}{2}\angle CAE = 22.5°$.

2. 解:正方形. 因为有三个角是直角,所以是矩形,由折叠可知一组邻边相等,所以是正方形.

习题(教材第 149 页)

A 组:**1. 解**:共 3 个,分别是点 D、点 C 和线段 CD 的中点.
点拨:绕点 D 按逆时针方向旋转 90°可重合,绕点 C 按顺时针方向旋转 90°可重合,绕线段 CD 的中点按顺时针方向或逆时针方向旋转 180°可重合.

2. 证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AB = CB$,$\angle ABC = 90°$. $\because$ 四边形 $BGFE$ 是正方形,$\therefore BE = BG$,$\angle EBG = 90°$. $\therefore \angle ABC - \angle EBC = \angle EBG - \angle EBC$,即 $\angle ABE = \angle CBG$. $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBG$.
$\therefore AE = CG$.

3. 解:$DM = CN$. 证明如下:
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore OA = OD$,$AD = DC$,$\angle DAM = \angle CDN = 45°$.
又$\because MN \parallel AD$,$\therefore OM = ON$.
$\therefore AM = DN$. $\therefore \triangle AMD \cong \triangle DNC$. $\therefore DM = CN$.

B 组:**1. 解**:连接 AC. 在正方形 $ABCD$ 中,$AC = BD$,$AD \parallel BC$,$\angle DAC = \angle ACD = 45°$. $\because BD = CE$,$\therefore AC = CE$. $\therefore \angle CAE = \angle CEA$. $\because AD \parallel CE$,
$\therefore \angle DAF = \angle AEC$. $\therefore \angle DAF = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle DAC = 22.5°$. 又$\because \angle ACF = 45°$,$\therefore \angle AFC = 112.5°$.

2. 证明:在正方形 $ABCD$ 中,$OA = OB$,$\angle BOC = \angle AOF = 90°$. $\because$ 在 Rt $\triangle AME$ 中,$\angle EAM + \angle AEM = 90°$,在 Rt $\triangle AOF$ 中,$\angle FAO + \angle AFO = 90°$,$\therefore \angle AEM = \angle AFO$. $\therefore \triangle AOF \cong \triangle BOE$.
$\therefore OE = OF$.

22.7 多边形的内角和与外角和

练习(教材第 153 页)

1. 解:960°不可能是多边形的内角和.

2. 解:$\angle B = 360° - (\angle A + \angle C + \angle D) = 360° - 280° = 80°$.

3. 解:设这个多边形的边数为 n,则$(n-2)\times 180° = 1\,080°$. 解得 $n = 8$. $\therefore$ 这个多边形的边数为 8.

4. 解:设这个多边形的边数为 n,则$(n-2)\cdot 180° = 2\times 360°$. 解得 $n = 6$. 所以这个多边形是六边形.

习题(教材第 153 页)

A 组:**1. 解**:由题意可知 $90°\times 3 + 2n° = (5-2)\times 180°$. 解得 $n = 135$.

2. 解:由题意可知 $\frac{360°}{(n-2)\cdot 180°} = \frac{2}{7}$,所以 $n = 9$.

3. 解:设这个多边形的边数为 n,则 $n - 3 = 10$,$\therefore n = 13$. $\therefore$ 内角和为$(13-2)\times 180° = 1\,980°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：$\angle D=\dfrac{4}{1+2+3+4}\times360°=144°$.

5. 解：不符合规定. 理由：因为五边形 $AEFCG$ 的内角和为 $(5-2)\times180°=540°$，所以 $\angle AGC=540°-(\angle E+\angle F+\angle BAE+\angle DCF)=540°-457°=83°\neq80°$. 所以不符合规定.

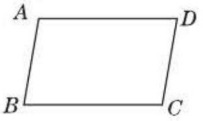
B 组：**1. 解**：不可以. 四边形的内角和是 360°，如果四边形的四个内角都是锐角，那么它的内角和小于 360°；如果都是钝角，那么它的内角和大于 360°.

2. 解：$BE\parallel DF$. 理由：$\because\ \angle A=\angle C=90°$，$\therefore\ \angle ADC+\angle ABC=360°-(\angle A+\angle C)=180°$. $\because BE,DF$ 分别平分 $\angle ABC,\angle ADC$，$\therefore\ \angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ADF=\dfrac{1}{2}\angle ADC$. $\therefore\ \angle ABE+\angle ADF=\dfrac{1}{2}\angle ABC+\dfrac{1}{2}\angle ADC=\dfrac{1}{2}\times180°=90°$. 又易知 $\angle ABE+\angle AEB=90°$，$\therefore\ \angle AEB=\angle ADF$. $\therefore BE\parallel DF$.

复习题（教材第 156 页）

A 组：**1.** (1)12；18　(2)有一个角是直角（或对角线相等）　(3)15 cm；10 cm　(4)十二　(5)2

2. 解：如图，在 $\square ABCD$ 中，因为 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2(\angle A+\angle B)=360°$，所以 $\angle A+\angle B=180°$ ①. 因为 $\angle A:\ \angle B=5:\ 4$，所以 $\angle A=\dfrac{5}{4}\angle B$ ②. 将②代入①，得 $\angle B=80°$，所以 $\angle A=100°$. 所以 $\angle C=100°$，$\angle D=80°$.



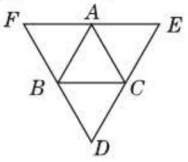
（第 2 题图）

点拨：平行四边形的对角相等.

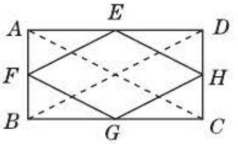
3. 解：4 个；$\square ABFE$，$\square ABCD$，$\square AFCE$，$\square EFCD$.

4. 解：两个全等三角形（三边互不相等）可以拼接成 3 个不同的平行四边形.

5. 解：(1)如图，$\triangle ABC$ 的周长为 a. 因为 $DE\parallel AB$，所以 $\angle BAC=\angle ACE$. 同理，$\angle ACB=\angle CAE$. 又 $AC=CA$，所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CEA$ 全等，所以 $\triangle CEA$ 的周长为 a. 同理，$\triangle BAF$，$\triangle DCB$ 的周长都为 a. 所以 $\triangle DEF$ 的周长为 $3a-a=2a$. (2)3 个，分别是 $\square ABDC$，$\square AFBC$，$\square ABCE$.



（第 5 题图）



（第 6 题图）

6. 证明：如图，连接 AC,BD. 因为点 E,F,G,H 分别是 AD,AB,BC,CD 的中点，所以 $FE=\dfrac{1}{2}BD=GH$，$EH=\dfrac{1}{2}AC=FG$. 在矩形中，对角线相等，所以 $AC=BD$，所以 $FE=GH=EH=FG$. 所以四边形 $EFGH$ 是菱形.

点拨：根据三角形中位线的性质可知，所得四边形各边都等于矩形对角线的一半.

7. 解：这个菱形是正方形.

证明：由所得图形与原来图形重合，易知这个菱形的四个角相等，对角线相等. 故这个菱形是正方形.

8. 解：$\triangle DBD'$ 是等腰直角三角形. 证明如下：

由题意得 $BD=BD'$ 且 $\angle DBD'=90°$，所以 $\triangle DBD'$ 是等腰直角三角形.

点拨：BD 为矩形 $ABCD$ 的对角线，旋转后对角线的长不变.

9. 解：$PE+PF$ 是正方形边长的 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 证明如下：

因为 $PE\perp DB$，$PF\perp CA$，$\angle DOC=90°$，所以四边形 $OFPE$ 为矩形，所以 $PE=OF$. 易得 $\triangle PFC$ 为等腰直角三角形，所以 $PF=FC$，所以 $PE+PF=OF+FC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC$.

点拨：正方形的对角线互相垂直是本题的突破口，得出 $\triangle PFC$ 为等腰直角三角形是解题的关键.

10. 解：(1) $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFD$，$\triangle AEG$ 和 $\triangle CFH$，$\triangle ABG$ 和 $\triangle CDH$，$\triangle AED$ 和 $\triangle CFB$，$\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$，$\triangle AGD$ 和 $\triangle CHB$ 分别全等.

(2)答案不唯一. $\triangle AEB\cong\triangle CFD$. 证明如下：

$\because AE\perp BD$，$CF\perp BD$，$\therefore\ \angle AEB=\angle CFD=90°$. $\because AB\parallel CD$，$\therefore\ \angle ABE=\angle CDF$. 又 $\because\ AB=CD$，$\therefore\ \triangle AEB\cong\triangle CFD$.

11. 解：连接 EB. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAC=\angle BAC$，$\angle DCE=\angle BCE$，$DC=BC$. $\because EF$ 垂直平分 AB，

$\therefore AE=BE$. $\therefore\ \angle EBA=\angle EAB=\dfrac{1}{2}\angle BAD=40°$.

在 $\triangle EDC$ 和 $\triangle EBC$ 中，$\begin{cases}DC=BC,\\ \angle DCE=\angle BCE,\\ EC=EC,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle EDC\cong\triangle EBC$. $\therefore\ \angle EDC=\angle EBC$. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=80°$，$\therefore\ \angle ABC=100°$. $\therefore\ \angle EBC=100°-40°=60°$. $\therefore\ \angle CDE=60°$.

12. 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$BF\perp AG$，

$\therefore\ \angle BAD=\angle AFB=90°$.

$\therefore\ \angle BAF+\angle DAE=\angle BAF+\angle ABF=90°$.

$\therefore\ \angle DAE=\angle ABF$.

$\because DE\perp AG$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AED = \angle BFA = 90°$.

又$\because AD = AB$，$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFA$. $\therefore AE = BF$.

$\therefore AF = AE + EF = BF + EF$.

13. 略. **点拨**：将问题转化为凸多边形内角和问题求解.

B 组：**1. 解**：在$\square ABCD$中，$AB = CD = 5$，$BC = AD = 8$，$AD \parallel BC$，

$\therefore \angle DAE = \angle AEB$.

$\because AE$平分$\angle BAD$，

$\therefore \angle DAE = \angle BAE$.

$\therefore \angle BAE = \angle AEB$.

$\therefore AB = BE = 5$.

同理可得$CF = DC = 5$.

$\therefore EF = BE + CF - BC = 2$.

2. 解：$EF = AP$. 证明如下：

连接PC. 因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AB = BC$，$\angle BCD = 90°$，$\angle ABD = \angle CBD = 45°$. 因为$PE \perp BC$，$PF \perp CD$，所以四边形$PECF$为矩形，所以$EF = PC$. 在$\triangle ABP$和$\triangle CBP$中，$AB = CB$，$\angle ABP = \angle CBP$，$BP = BP$，所以$\triangle ABP \cong \triangle CBP$. 所以$AP = PC$. 所以$AP = EF$.

3. 解：(1)$AF = DE$，且$AF \parallel DE$. 证明如下：因为D是AB的中点，E是BC的中点，所以$BD = DA$，$DE \parallel AC$，即$DE \parallel AF$. 因为$\angle BAC = 90°$，所以$\angle DAF = 90°$，$\angle BDE = 90°$. 在$\triangle BDE$和$\triangle DAF$中，$\angle B = \angle FDA$，$BD = DA$，$\angle BDE = \angle DAF$，所以$\triangle BDE \cong \triangle DAF$. 所以$DE = AF$.

(2)由(1)题可知四边形$AFDE$为平行四边形. 因为D，E分别为AB，BC的中点，所以$DE = \frac{1}{2}AC = 3$. 由(1)题易得$DF = BE = \frac{1}{2}BC = 5$. 所以四边形$AFDE$的周长为$2 \times (3 + 5) = 16$.

4. (1) **证明**：由折叠可知$\angle D = \angle D'$，$CD = AD'$，$\angle C = \angle D'AE$.

$\because$在$\square ABCD$中，$\angle B = \angle D$，$AB = CD$，$\angle C = \angle BAD$，

$\therefore \angle B = \angle D'$，$AB = AD'$，$\angle D'AE = \angle BAD$.

$\therefore \angle D'AE - \angle EAF = \angle BAD - \angle EAF$，

即$\angle D'AF = \angle BAE$.

在$\triangle ABE$和$\triangle AD'F$中，$\begin{cases} \angle B = \angle D', \\ AB = AD', \\ \angle BAE = \angle D'AF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AD'F$.

(2) **解**：四边形$AECF$是菱形. 证明如下：由折叠可知$AE = CE$. 由(1)题可知，$AE \parallel FC$.

又$\because AF \parallel EC$，

$\therefore$易知四边形$AECF$是菱形.

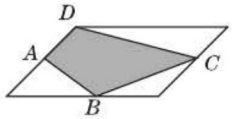
5. 解：$S_{\triangle BFD} = S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{正方形}CEFG} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle DGF} = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a + b) \cdot b - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b \cdot (b - a)$

$= a^2 + b^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab$

$= \frac{1}{2}a^2$. 即$\triangle BFD$的面积为$\frac{1}{2}a^2$.

6. 解：这个多边形是六边形. 设这个多边形是n边形，则$(n + 1 - 2) \times 180° = 900°$. 解得$n = 6$. 所以这个多边形是六边形.

7. 解：能，如图.（设计不唯一）



（第7题图）

C 组：**1. 解**：因为$\triangle ABC$与$\triangle AB'C$关于AC对称，所以$\angle B'AC = \angle CAB$，$\angle ACB = \angle ACB'$.

因为$\angle EAC = 25°$，所以$\angle CAB = 25°$.

又因为四边形$ABCD$为矩形，所以$\angle B = 90°$.

所以$\angle BCA = 65°$，所以$\angle B'CA = 65°$.

因为$DC \parallel AB$，所以$\angle DCA = \angle CAB = 25°$，

所以$\angle B'CE = \angle ACB' - \angle DCA = 40°$.

2. 解：(1)$AF = BH$；保持不变. (2)仍然成立. 证明如下：因为$AE = BE$，$EF = EH$，$\angle BEH + \angle AEH = 90°$，$\angle FEA + \angle AEH = 90°$，所以$\angle FEA = \angle HEB$.

所以$\triangle FEA \cong \triangle HEB$. 所以$AF = BH$.

点拨：运用三角形全等与正方形的性质求解.

3. (1) **证明**：在$\square ABCD$中，$OB = OD$，$AD \parallel BC$，

$\therefore \angle EDO = \angle FBO$.

又$\because \angle EOD = \angle FOB$，

$\therefore \triangle EOD \cong \triangle FOB$. $\therefore OE = OF$.

(2) **解**：四边形$AMCN$为平行四边形. 四边形$EMFN$为平行四边形. 四边形$AFCE$为平行四边形.

证明如下：在$\square ABCD$中，$\angle BAD = \angle BCD$，$AB = CD$，$AB \parallel CD$. 由$AB \parallel CD$得$\angle ABM = \angle CDN$. 由$\angle BAD = \angle BCD$，AM平分$\angle BAD$，CN平分$\angle BCD$，得$\angle BAM = \angle DCN$.

在$\triangle ABM$和$\triangle CDN$中，$\begin{cases} \angle BAM = \angle DCN, \\ AB = CD, \\ \angle ABM = \angle CDN, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CDN$. $\therefore BM = DN$. $\because$在$\square ABCD$中，$OB = OD$，$\therefore OM = ON$，由(1)题得$OE = OF$，$\therefore$四边形$EMFN$是平行四边形.

(3) **解**：点H在边BC的延长线上，且$CH = DG$.

(4)略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料