特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法69招·七八九年级共370招



八年级
数学(下)

荣德基 主编

(BS版)

赠教材习题答案

陕西新华出版传媒集团　陕西人民教育出版社

教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 下 （BS版）

荣德基 主编

本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 78 个 必得分

		页码
第一章 三角形的证明	1 全等三角形的判定与性质	2
	2 等腰三角形的性质定理及其推论	3
	3 等边三角形的性质定理	5
	4 等腰三角形的判定定理	6
	5 反证法	7
	6 等边三角形的判定定理	8
	7 含 30° 角的直角三角形的性质	10
	8 直角三角形角的性质定理与判定定理	18
	9 勾股定理	19
	10 勾股定理的逆定理	21
	11 互逆命题和互逆定理	22
	12 “斜边、直角边”(“HL”)定理	23
	13 线段垂直平分线的性质定理	31
	14 线段垂直平分线的判定定理	31
	15 三角形三条边的垂直平分线的性质定理	32
	16 用尺规作已知直线(或线段)的垂线	33
	17 角平分线的性质定理	39
	18 角平分线的判定定理	40
	19 三角形的角平分线的性质定理	41
第二章 一元一次不等式与一元一次不等式组	1 不等式	61
	2 不等式的基本性质	65
	3 不等式的基本性质的简单应用	66
	4 不等式的解与解集	70
	5 不等式的解集的表示方法	71
	6 一元一次不等式	74
	7 一元一次不等式的解法	75
	8 一元一次不等式的实际应用	76
	9 一次函数与一元一次不等式	83
	10 一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的综合应用	84
	11 一元一次不等式组	90
	12 一元一次不等式组的解集	91
	13 解一元一次不等式组	92
	14 一元一次不等式组的应用	94
第三章 图形的平移与旋转	1 平移的定义	112
	2 平移的性质	113
	3 平移作图	113
	4 用坐标表示点的平移	115
	5 用点的坐标表示图形的平移	115
	6 旋转及其相关概念	121
	7 旋转的性质	122
	8 旋转作图	123
	9 中心对称	129
	10 中心对称的性质	130
	11 中心对称的作图	130
	12 中心对称图形	131
	13 关于原点对称的点的坐标	132
	14 图案的形成	138
	15 图案的设计	139

考向点 84 个 速提分

		页码
第一章 三角形的证明	1 利用全等三角形的判定与性质进行证明	2
	2 利用等腰三角形的性质定理及其推论解决问题	3
	3 利用等边三角形的性质解决问题	5
	4 利用含 30° 角的直角三角形的性质解决线段问题	10
	5 利用平行线构造等腰三角形法证明线段相等	11
	6 利用补形构造“三线合一”基本图形法证明线段的倍分关系	11
	7 利用构造等边三角形法证明线段的和差关系	12
	8 利用勾股定理进行计算与证明	19
	9 利用互逆命题与互逆定理进行命题的改写与证明	22
	10 利用判定直角三角形全等的方法解决问题	24
	11 利用割补法求不规则图形的面积	25
	12 利用化折为直法求立体图形中两点间的最短距离	26
	13 利用线段垂直平分线的性质求线段的长	31
	14 利用三角形三条边的垂直平分线的性质解决实际问题	33
	15 利用截长补短法证明线段的和差关系	34
	16 利用角平分线的性质定理解与垂线段相关的问题	39
	17 利用角平分线的判定定理和性质定理判定三角形的角平分线	41
	18 利用转化思想证明含角平分线图形中角的和差关系	42
	19 利用面积法求三角形中的距离	42
第二章 一元一次不等式与一元一次不等式组	1 利用数形结合法表示不等关系	62
	2 利用不等式的基本性质将不等式变形	66
	3 利用不等式的基本性质比较两个整式的大小	67
	4 利用作差法比较大小解决生活中的方案选择问题	68
	5 利用不等式的解与解集的定义进行辨析	70
	6 利用不等式的特殊解确定字母的取值范围	72
	7 利用一元一次不等式解决实际问题	76
	8 利用两个不等式解集相同求字母的值	78
	9 利用不等式解与方程组综合的应用	78
	10 利用一次函数图象解一元一次不等式	83
	11 利用方程、不等式、函数之间的关系解决实际问题	84
	12 利用一元一次不等式组的解集解决问题	91
	13 建立一元一次不等式组的模型解决问题	94
	14 利用不等式组的特殊解的情况求字母的取值范围	96
	15 利用构造不等式组法求方程组中字母的取值范围	96
第三章 图形的平移与旋转	1 利用平移的定义识别平移现象	112
	2 利用平移的性质解决问题	113
	3 利用坐标的变化表示图形的平移	116
	4 利用平移法解决几何中的计算问题	116
	5 利用图形平移的定义求点的坐标	117
	6 利用旋转的定义认识旋转的“三要素”	121
	7 利用旋转的性质识别旋转前后对应图形的关系	122
	8 利用特殊三角形法求旋转图形中的角度	124
	9 利用中心对称的定义识别对称中心、对称点	129
	10 利用中心对称的性质找对应元素	130
	11 利用中心对称的性质作图	131
	12 利用构造中心对称图形(中心对称法)解决几何问题	134
	13 利用建立中心对称图形模型法巧解实际问题	135
	14 利用图案的特征分析图案的形成方法	138
	15 利用旋转的图形特征作出符合要求的图案	140

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ← 方法 → 学霸

方法点 69 个 得高分

		页码
1	叠合等腰三角形中几种常见的作辅助线的方法	4
2	等边三角形的判定方法	8
3	倍长线段法	11
4	截长补短法	12
5	在出现 60° 角的图形中构造等边三角形的方法	13
6	证明两条直线垂直的方法	19
7	面积法	20
8	判定直角三角形的方法	21
9	判断一个定理是否有逆定理的方法	23
10	构造法	24
11	割补法	25
12	解决几何体表面上两点间的最短路程问题的方法	26
13	判断线段垂直平分线的两种方法	32
14	证明角平分线的方法思路	41
15	等线段证角平分线法	43
1	数形结合法	62
2	辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法	65
3	作差法	67
4	识别不等式的解与解集的方法	70
5	用数轴表示解集的一般步骤	71
6	判断一个不等式是否为一元一次不等式的步骤	74
7	解方案设计问题的方法	79
8	利用图象法解一元一次不等式的一般步骤	83
9	确定一元一次不等式组解集的常用方法	91
10	利用数轴找不等式组整数解的步骤	93
11	根据不等式组的解的情况求字母的取值范围的方法	94
12	解决实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法	95
13	构造不等式组法	95
14	建模法	97
1	画平移图形的步骤	114
2	平移法	116
3	确定旋转中心的方法	123
4	特殊三角形法	124
5	化分散为集中法	124
6	归一法	125
7	作已知图形关于某点对称的图形的步骤	131
8	判断中心对称图形的方法	131
9	在坐标平面内作对称图形的两种方法	133
10	建立中心对称图形模型法	135
11	分析图案形成过程的一般步骤	138

考法点 66 个 争满分

		页码
1	利用等腰三角形的性质求角的度数	13
2	利用等腰三角形的判定证明等腰三角形	14
3	利用等边三角形的性质与判定探究动态运动中两直线的位置关系	14
4	利用含 30° 角的直角三角形的性质求线段的长	15
5	利用直角三角形角的性质求角的度数	27
6	利用勾股定理解古算术中的求线段长问题	28
7	利用勾股定理的逆定理判断三角形的形状	28
8	直角三角形全等的判定	29
9	利用线段垂直平分线的性质定理求角的度数	36
10	利用线段垂直平分线的性质定理求线段的长	36
11	利用作线段的垂直平分线解决实际问题	37
12	利用角平分线的判定定理和性质定理求角的度数	43
13	利用尺规作图及角平分线的性质定理求三角形的面积	44
14	利用线段垂直平分线和角平分线的性质解题	44
1	用不等式表示数量关系	63
2	根据实际问题列不等式	63
3	利用不等式的基本性质识别不等式的变形	68
4	利用不等式的基本性质比较大小	68
5	用数轴表示不等式的解集	72
6	求一元一次不等式的特殊解	80
7	一元一次不等式与一元一次方程的综合	80
8	一元一次不等式与二元一次方程组的综合	80
9	一元一次不等式的实际应用	81
10	利用一次函数图象的交点坐标解不等式	86
11	利用一次函数与一元一次不等式的关系解决方案设计问题	86
12	求不等式组的解集	98
13	根据不等式组的解集求字母的取值范围	98
14	求一元一次不等式组的特殊解	99
15	一元一次不等式组的应用	99
1	利用网格中的平移判断移动方向	118
2	利用点的平移与坐标的变化规律求坐标	119
3	利用图形的平移与点的坐标变化规律求坐标	119
4	利用旋转的性质求角的度数	126
5	利用旋转的性质求线段的长	126
6	利用旋转的性质解决坐标平面内的图形变换问题	127
7	利用中心对称图形的定义进行识别	135
8	利用中心对称求点的坐标	136
9	利用变换图形的作法解决网格中的作图问题	136
10	利用轴对称和旋转的作图设计图案	141

第一章 三角形的证明

第二章 一元一次不等式与一元一次不等式组

第三章 图形的平移与旋转

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第四章 因式分解

知识点 78 个 必得分

		页码
1	因式分解	153
2	公因式	157
3	提公因式法	158
4	用平方差公式分解因式	161
5	用完全平方公式分解因式	162

考向点 84 个 速提分

		页码
1	利用因式分解的定义解决整式变形问题	153
2	利用面积法探究多项式的因式分解	155
3	利用提公因式法求代数式的值	159
4	利用完全平方公式解决整式变形问题	162
5	利用辅助法对多项式进行因式分解	164
6	利用公式法进行有理数的巧算	165

第五章 分式与分式方程

知识点 78 个 必得分

		页码
1	分式的概念	177
2	分式有意义和无意义的条件	178
3	分式的值为 0 的条件	179
4	分式的基本性质	180
5	分式的约分	182
6	分式的乘法	188
7	分式的除法	189
8	分式的乘方	189
9	分式的乘除、乘方混合运算	190
10	同分母分式的加减法	196
11	分式的通分	197
12	异分母分式的加减法	198
13	分式的混合运算	199
14	分式方程的概念	204
15	分式方程的解法	205
16	含字母的分式方程的解法	206
17	分式方程的应用	207

考向点 84 个 速提分

		页码
1	利用分式的概念识别分式	177
2	利用分式有意义和无意义的条件确定字母的值或取值范围	178
3	利用分式的值为 0 的条件求字母的值	179
4	利用分式的基本性质对分式进行变形	180
5	利用分式的取值情况讨论分式的值与字母值的关系	183
6	利用分式的乘法法则进行分式乘法计算	188
7	利用分式的除法法则进行分式除法计算	189
8	利用分式的乘方法则进行分式乘方计算	190
9	利用建立分式的模型法对实际应用进行说理	192
10	利用同分母分式相加减的法则计算	196
11	利用异分母分式相加减的法则计算	198
12	利用分式的混合运算顺序进行计算	199
13	利用对应项系数相等法巧求分式中待定字母的值	200
14	利用倒数法巧求分式的值	201
15	利用分式方程的概念识别分式方程	204
16	利用建立分式方程的模型解决实际问题	207
17	利用分组通分法巧解复杂的分式方程	209
18	利用分类法求分式方程无解时字母的值	210
19	利用类比法探究分式方程的解与分式方程之间的关系	211

第六章 平行四边形

知识点 78 个 必得分

		页码
1	平行四边形的概念	226
2	平行四边形的边角性质	227
3	平行四边形的对角线性质	228
4	平行四边形的判定	236
5	两条平行线之间的距离	238
6	三角形的中位线	246
7	多边形的内角和	251
8	多边形的外角和	252

考向点 84 个 速提分

		页码
1	利用平行四边形的定义判定平行四边形	227
2	利用平行四边形的边角性质解决计算问题	228
3	利用全等法解决平行四边形问题	230
4	利用构造对角线法证平行四边形中的线段相等	231
5	利用两条平行线间的距离的性质说明面积相等	239
6	利用一题多解法判定平行四边形	239
7	利用三角形的中位线证明线段间的关系	246
8	利用中位线法解决中点四边形问题	247
9	利用多边形内角和公式求多边形的边数	251
10	利用转化凸多边形法求多边形的内角和	253

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

第四章 因式分解

方法点 69 个 得高分

		页码
1	运用因式分解求代数式值的方法	159
2	求与完全平方式有关的字母值的方法	162
3	十字相乘法	164
4	分组分解法	164
5	补项法	165
6	拆项法	165

考法点 66 个 争满分

		页码
1	利用因式分解的定义进行辨析	156
2	利用提公因式法分解因式	160
3	利用因式分解的方法分解因式	167
4	利用因式分解求代数式的值	167

第五章 分式与分式方程

方法点 69 个 得高分

		页码
1	求分式值为 0 时字母值的方法	179
2	利用分式的基本性质化系数为整数的方法	181
3	求解分式的值为负数时字母取值范围的思路	183
4	分式乘法运算的基本步骤	188
5	分式除法运算的基本步骤	189
6	分式乘除、乘方混合运算的解题步骤	191
7	确定最简公分母的一般方法	197
8	利用倒数法求分式值的思路	201
9	判断一个方程是否为分式方程的方法	204
10	分组通分法	209
11	类比法	211
12	分式运算中的常用技巧与方法	215

考法点 66 个 争满分

		页码
1	利用分式有意义的条件求字母的取值范围	184
2	利用分式的值为 0 的条件求字母的值	185
3	利用分式的基本性质进行化简求值	185
4	约分	185
5	利用分式的乘除法法则进行辨析	193
6	利用分式的乘除法法则进行化简求值	193
7	利用分式的加减法法则进行分式加减运算	202
8	利用分式的混合运算求值	202
9	利用分式方程的解的定义求字母的值	211
10	利用分式方程的解满足的条件求字母的值	212
11	利用分式方程增根的定义求字母的值	212
12	分式方程的应用	213

第六章 平行四边形

方法点 69 个 得高分

		页码
1	分类法数几何图形的个数	227
2	全等法	230
3	面积法	231
4	等分面积法	232
5	判定平行四边形的方法选择	236
6	证明两条线段（或两角）相等的常用方法	240
7	倍长中线法	241
8	“动中求静”法	241
9	证明线段倍分关系的方法	246
10	非凸多边形多角和的求解思路	253
11	构造平行四边形证题的技巧	257

考法点 66 个 争满分

		页码
1	利用平行四边形的性质证明三角形全等	233
2	利用线段垂直平分线的性质求平行四边形的周长	233
3	利用勾股定理及其逆定理求平行四边形中线段的长	234
4	利用全等三角形判定平行四边形	242
5	利用平行四边形的性质和判定解决与勾股定理综合的问题	242
6	利用平行四边形的判定和性质解决与等腰三角形、勾股定理综合的问题	243
7	利用三角形的中位线求角的度数	248
8	利用三角形的中位线证明线段相等	249
9	利用多边形的内角、外角的关系求内角和	254
10	利用正多边形的定义及外角和求边数和角	254
11	利用多边形的内角和公式和角平分线定义求角的度数	255

注：“提分攻略　学霸图谱”中，所列“考向点”“方法点”为重要条目，全书不仅限于此.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三角形中的逻辑推理











第一章 三角形的证明

核心考点

你将见到的

- 等腰三角形的性质与判定
- 勾股定理及其逆定理的应用
- 直角三角形全等的判定
- 线段垂直平分线的性质与判定
- 角平分线的性质与判定

核心方法

我们为你提供的

- 折叠法
- 割补法
- 面积法
- 构造法
- 截长补短法
- 方程思想
- 分类讨论思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 等腰三角形

核心知识

- 全等三角形的性质与判定
- 等腰三角形的性质与判定
- 等边三角形的性质与判定
- 反证法
- 直角三角形中 30° 角的性质

知识链接

全等三角形的性质与判定 ← 证明的依据 — 等腰三角形的性质与判定 — 特殊 → 等边三角形的性质与判定

等腰三角形的性质与判定 — 方法 → 反证法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 全等三角形的判定与性质

1. 判定定理 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.（AAS）

2. 判定三角形全等的一般思路

- 已知两边
  - 找夹角→ SAS
  - 找第三边→ SSS
- 已知一边一角
  - 边为角的对边→找任意一角→ AAS
  - 边为角的邻边
    - 找角的另一邻边→ SAS
    - 找边的另一邻角→ ASA
    - 找边的对角→ AAS
- 已知两角
  - 找夹边→ ASA
  - 找角的对边→ AAS

3. 全等三角形的性质 全等三角形的对应边相等、对应角相等.

提分·必记

特别提醒

1. 证明两个三角形全等需要三个条件，三个条件中至少有一组对应边相等.
2. 证明两个三角形全等时，对应顶点必须写在对应的位置上.
3. “全等三角形的对应边相等、对应角相等”是证明线段相等、角相等的重要依据.

拔考向 利用全等三角形的判定与性质进行证明

例 1 如图 1-1-1，C 为 BE 上一点，点 A，D 分别在 BE 的两侧，且 $BC=DE$，$AB \parallel ED$，$AB=CE$.

求证：$AC=CD$.

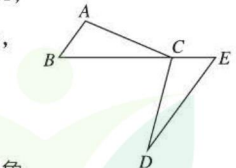


图 1-1-1

解题秘方：紧扣三角形全等的判定证两个三角形全等，然后利用全等三角形的性质证线段相等.

证明：$\because AB \parallel ED$，$\therefore \angle B=\angle E$.

在$\triangle ABC$和$\triangle CED$中，$\begin{cases} AB=CE, \\ \angle B=\angle E, \\ BC=ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED$（SAS）. $\therefore AC=CD$.

提分·秘诀

方法点拨

证明两条线段相等或两个角相等的方法：证明两条线段相等或两个角相等时，如果这两条线段或两个角分别在两个三角形中，那么可从尝试利用这两个三角形全等证明.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶2 等腰三角形的性质定理及其推论

1. 性质定理 等腰三角形的两底角相等（简写成“等边对等角”）.

几何语言：如图 1−1−2，在△ ABC 中，

∵ $AB=AC$，∴ ∠ $B=$ ∠ C.

2. 推论 等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线及底边上的高线互相重合（简写成“三线合一”）.

如图 1−1−2，在△ ABC 中，

（1）∵ $AB=AC$，$AD \perp BC$，

∴ AD 平分∠ BAC，且 $BD=CD$；

（2）∵ $AB=AC$，$BD=CD$，

∴ $AD \perp BC$，且 AD 平分∠ BAC；

（3）∵ $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

∴ $BD=CD$，且 $AD \perp BC$.

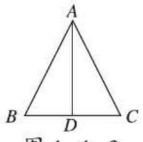


图 1−1−2

3. 对称性 等腰三角形是轴对称图形，顶角的平分线（或底边上的高线、底边上的中线）所在的直线是它的对称轴.

4. 等腰三角形中特殊线段的性质

（1）等腰三角形两底角的平分线相等；

（2）等腰三角形两腰上的中线相等；

（3）等腰三角形两腰上的高线相等.


等腰三角形的性质

提分·必记

特别提醒

1. **适用条件：** 必须在同一个三角形中.
2. 作用：是证明角相等的常用方法，应用它证角相等时可省去三角形全等的证明，因而更简便.

特别解读

1. 适用条件：
(1)必须是等腰三角形；
(2)必须是底边上的中线、底边上的高线和顶角的平分线才互相重合.
2. 作用：是证明线段相等、角相等、线段垂直等关系的重要方法.

核考向▶利用等腰三角形的性质定理及其推论解决问题

题型 1：等腰三角形的性质定理在证明线段相等中的应用

例 2 如图 1−1−3，在△ ABC 中，$AB=AC$，BD，CE 分别是 AC，AB 边上的高. 求证：$BD=CE$.

解题秘方： 利用等腰三角形的性质定理为证明△ BEC 和△ CDB 全等创造条件.

证明：方法一 ∵ $AB=AC$，∴ ∠ $ABC=$ ∠ ACB.

∵ $BD \perp AC$，$CE \perp AB$，∴ ∠ $BDC=$ ∠ $BEC=90°$.

在△ BEC 和△ CDB 中，

$$\begin{cases} \angle EBC=\angle DCB, \\ \angle BEC=\angle CDB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

∴ △ BEC ≌△ CDB（AAS）.

∴ $BD=CE$.

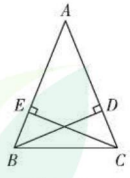


图 1−1−3

方法二 ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot CE$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC \cdot BD$，$AB=AC$，

∴ $BD=CE$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 方法一是利用等腰三角形的性质定理为三角形全等提供角相等的条件来解决问题的. 由此可得等腰三角形的性质：
   （1）等腰三角形两腰上的中线相等；
   （2）等腰三角形两腰上的高线相等；
   （3）等腰三角形两底角的平分线相等.
2. 方法二是**面积法**，由此方法还可得等腰三角形的性质：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：等腰三角形的性质定理及其推论在求边角中的应用

例 3 如图 1−1−4，在△ ABC 中，$AB=AC$，AD 平分∠ BAC.

（1）求∠ ADB 的度数；

（2）若∠ $BAC=100°$，求∠ B，∠ C 的度数；

（3）若 $BC=3$ cm，求 BD 的长.

解题秘方：紧扣等腰三角形的性质定理及其推论进行解答.

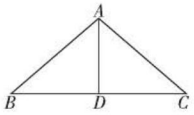


图 1−1−4

解：（1）∵ $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

∴ $AD \perp BC$.

∴∠ $ADB=90°$.

（2）在△ ABC 中，∵ $AB=AC$，∠ $BAC=100°$，

$$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-100°)=40°.$$

（3）∵ $AB=AC$，AD 平分∠ BAC，

∴ AD 是 BC 边上的中线.

$$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 3=1.5\ (\text{cm}).$$

题型 3：等腰三角形性质定理的推论在证明中的应用

例 4 如图 1−1−5，$AB=AE$，$BC=DE$，∠ $B=\angle E$，$AM \perp CD$，垂足为 M. 求证：$CM=MD$.

解题秘方：由已知 $AM \perp CD$ 和结论 $CM=MD$，联想到等腰三角形“三线合一”的性质，因此连接 AC，AD，构造等腰三角形.

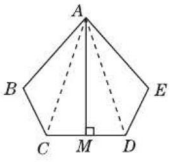


图 1−1−5

证明：如图 1−1−5，连接 AC，AD.

在△ ABC 和△ AED 中，

$$\begin{cases} AB=AE, \\ \angle B=\angle E, \\ BC=ED, \end{cases}$$

∴△ ABC ≌△ AED（SAS）.

∴ $AC=AD$.

又∵ $AM \perp CD$，

∴ $CM=MD$.

方法点拨：对于单一等腰三角形构造“三线合一”的基本图形，作底边上的高、中线还是顶角平分线，可根据解题需要作辅助线；对于叠合等腰三角形构造“三线合一”的基本图形，则需巧作辅助线.

特别提醒

1. 在等腰三角形中，运用“三线合一”时，已知其中“一线”，就可以得到另外“两线”. 根据等腰三角形“三线合一”的性质可以得到等线段、等角及两条直线互相垂直.
2. “等边对等角”应用的前提是在同一个三角形中.

解法提醒

叠合等腰三角形中几种常见的作辅助线的方法：

1. 如图 1−1−6 甲的情形，需作底边上的高；
2. 如图 1−1−6 乙的情形，需作顶角平分线；
3. 如图 1−1−6 丙的情形，需作底边上的中线；
4. 如图 1−1−6 丁的情形，需连接 AD 并延长，再证是“三线”即可.

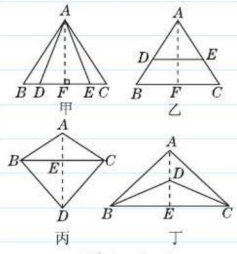


图 1−1−6

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 等边三角形的性质定理

1. 等边三角形内角的性质定理 等边三角形的三个内角都相等，并且每个角都等于 60°.

2. 等边三角形的其他性质

（1）等边三角形的三条边都相等；

（2）等边三角形是轴对称图形，它有 3 条对称轴，分别为三边的垂直平分线；

（3）等边三角形各边上的高、中线、对应的角平分线重合，且长度相等.

拔考向▶利用等边三角形的性质解决问题

题型 1：等边三角形角的性质在求角度中的应用

例 5 如图 1-1-7，△ ABC 是等边三角形，D，E，F 分别是三边 AB，AC，BC 上的点，且 $DE \perp AC$，$EF \perp BC$，$FD \perp AB$，计算△ DEF 各个内角的度数.

解题秘方：紧扣等边三角形的三个内角都等于 60°，求角的度数.

解：∵△ ABC 是等边三角形，∴ $\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

∵ $DE \perp AC$，$EF \perp BC$，$FD \perp AB$，

∴ $\angle AED=\angle EFC=\angle FDB=90°$.

∴ $\angle ADE=90°-\angle A=90°-60°=30°$.

∴ $\angle EDF=180°-30°-90°=60°$.

同理可得 $\angle DEF=\angle EFD=60°$，

∴△ DEF 各个内角的度数都是 60°.

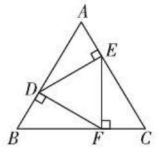


图 1-1-7

题型 2：等边三角形“三线合一”的性质在求边长中的应用

例 6 如图 1-1-8，等边三角形 ABC 的边长为 3，D 是 AC 的中点，点 E 在 BC 的延长线上. 若 $DE=DB$，求 CE 的长.

解题秘方：利用等边三角形“三线合一”的性质，将未知线段向已知线段转化.

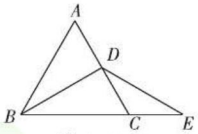


图 1-1-8

解：∵△ ABC 是等边三角形，D 是 AC 的中点，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=60°$，$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$.

∵ $DE=DB$，∴ $\angle E=\angle DBE=30°$.

∵ $\angle ACB=\angle CDE+\angle E$，∴ $\angle CDE=\angle ACB-\angle E=30°$.

∴ $\angle CDE=\angle E$. ∴ $CD=CE$.

∵等边三角形 ABC 的边长为 3，

∴ $CE=CD=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$.

提分·必记

特别解读

等边三角形是特殊的等腰三角形，所以：

1. 任意两边都可以作为腰；
2. 任意一个角都可以作为顶角；
3. 任意一边上都“三线合一”.

提分·秘诀

解法提醒

等边三角形的三个内角都等于60°，为求三角形的内角直接提供了角的条件. 若同时要运用三个内角，只需从一个角为例计算，其余可同理得到.

方法点拨

等边三角形的任何一边上都有“三线合一”的性质，有时要运用的条件和已知条件不一致，需要通过“三线合一”的性质进行转化，找出要求线段与已知线段的关系，再解答.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：等边三角形边、角的性质在证明三角形全等中的应用

例 7 如图 1-1-9，已知△ ABC 为等边三角形，点 D，E 分别在 BC，AC 边上，且 $AE=CD$，AD 与 BE 相交于点 F.

（1）求证：△ ABE ≌△ CAD.

（2）求∠ BFD 的度数.

解题秘方：利用等边三角形中边相等、角相等且为 60° 的性质进行解答.

（1）**证明**：∵△ ABC 为等边三角形，

∴∠ BAE=∠ ACD=60°，$AB=CA$.

在△ ABE 和△ CAD 中，

$$\begin{cases} AB=CA, \\ \angle BAE=\angle ACD, \\ AE=CD, \end{cases}$$

∴△ ABE ≌△ CAD（SAS）.

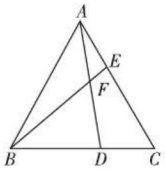


图 1-1-9

（2）**解**：∵△ ABE ≌△ CAD，

∴∠ ABE=∠ CAD.

∵∠ BFD=∠ ABE+∠ BAF，

∴∠ BFD=∠ CAD+∠ BAF=∠ BAC=60°.

思维拓展

当 D，E 两点分别在 BC，AC 边上运动时，∠ BFD 的度数是一个定值. 若 D，E 两点分别运动到 BC，CA 的延长线上，直线 AD 与直线 BE 相交于点 F，∠ BFD 的度数是否仍然是 60° 呢？同学们自己画图证明.

解法提醒

等边三角形的三条边相等，三个内角相等且都等于60°，为三角形全等创造了边、角相等的条件.

点知识 4 等腰三角形的判定定理

1. 判定定理 有两个角相等的三角形是等腰三角形（简写成“等角对等边”）.

几何语言：如图 1-1-10，在△ ABC 中，

∵∠ B=∠ C，

∴ $AB=AC$.

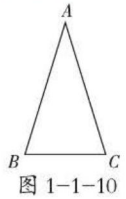


图 1-1-10

2. 等腰三角形的性质定理与判定定理的异同

相同点：使用的前提都是“在同一个三角形中”.

不同点：由三角形的两边相等，得到它们所对的角相等，是等腰三角形的性质；由三角形的两角相等，得到它是等腰三角形，是等腰三角形的判定.


等腰三角形的判定

等腰三角形的性质定理 两边相等→这两边所对的角相等.

等腰三角形的判定定理 两角相等→这两角所对的边相等.

特别提醒

- “等角对等边”不能叙述为“如果一个三角形有两个底角相等，那么它的两条腰相等”，因为在未判定出它是等腰三角形之前，不能用“底角”“顶角”“腰”“底边”这些名词.
- “等角对等边”是我们从后证明两条线段相等的常用方法，在证明过程中，经常通过计算三角形各角的度数，或利用角的关系得到角相等，从而得到所对的边相等.

拔考向 利用等腰三角形的判定方法判定等腰三角形

题型 1：“等角对等边”在判定等腰三角形中的应用

例 8 如图 1-1-11，在△ ABC 中，P 是 BC 边上一点，过点 P 作 BC 的垂线，交 AB 于点 Q，交 CA 的延长线于点 R. 若 $AQ=AR$，则△ ABC 是等腰三角形吗？请说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用“等角对等边”判定等腰三角形，只需证明三角形两个内角相等即可.

解：$\triangle ABC$ 是等腰三角形. 理由如下：

$\because AQ=AR$，$\therefore \angle R=\angle AQR$.

又$\because \angle BQP=\angle AQR$，$\therefore \angle R=\angle BQP$.

$\because RP\perp BC$，$\therefore \angle RPB=\angle RPC=90°$.

$\therefore \angle B+\angle BQP=90°$，$\angle C+\angle R=90°$.

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore AB=AC$，即$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

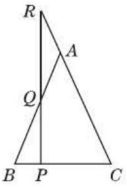


图 1-1-11

提分·秘诀

方法点拨

根据等腰三角形的判定定理可知，证明一个三角形是等腰三角形，就是要证明这个三角形有两个内角相等，所以证明两个内角相等是判定等腰三角形的关键所在.

题型 2：“等角对等边”在证明线段之间的和差关系中的应用

例 9 如图 1-1-12，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$，$\angle CAB$的平分线交于点P，过点P作$DE\parallel AB$，分别交BC，AC于点D，E. 求证：$DE=BD+AE$.

解题秘方：由平行线的性质结合角平分线的定义可证明$DP=DB$，$PE=AE$，即可证得结论.

证明：$\because DE\parallel AB$，

$\therefore \angle ABP=\angle DPB$.

$\because \angle ABP=\angle DBP$，

$\therefore \angle DBP=\angle DPB$.

$\therefore DP=DB$.

同理可得$EP=EA$，$\therefore DE=DP+EP=DB+EA$，即$DE=BD+AE$.

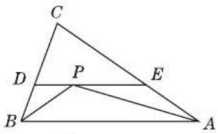


图 1-1-12

解法提醒

当题目中出现角平分线、平行线这两个条件时，一般会有等腰三角形出现，简记为：角平分线+平行线→等腰三角形. 记住这个模式，有助于解题.

知识 5 反证法

1. 概念 在证明时，先假设命题的结论不成立，然后推导出与定义、基本事实、已有定理或已知条件相矛盾的结果，从而证明命题的结论一定成立. 这种证明方法称为反证法.


反证法

2. 用反证法证明结论的一般步骤

（1）反设：假设结论的反面是正确的.

（2）归谬：从假设出发，通过演绎推理，推导出与基本事实、已有定理、定义或已知条件相矛盾的结果.

（3）定论：由矛盾说明假设不成立，进而得出原结论正确.

注意：用反证法证明时，否定的是命题的结论，而不是否定已知条件.

3. 适合用反证法的命题类型

（1）结论以否定形式出现的命题，如钝角三角形中不能有两个钝角；

（2）唯一性命题，如两条直线相交只有一个交点；

（3）结论以“至多”“至少”等形式叙述的命题，如一个凸多边形中至多有三个锐角.

提分·必记

特别提醒

用反证法证明时，因为要假设命题的结论不成立，所以必须考虑结论的反面可能出现的所有情况. 如果结论的反面只有一种情况，那么只需要否定这种情况，就足以证明原结论是正确的；如果结论的反面不止一种情况，那么必须把各种可能的情况全部列举出来，并且要一一加以否定，才能肯定原结论是正确的.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用反证法的一般步骤进行证明

例 10 求证：在一个三角形中，不能有两个角是钝角.

解题秘方：本题是命题类证明题，需要先写出已知、求证，然后利用所学知识写出证明过程. 本题不易直接证明，可考虑运用反证法来证明.

解：已知：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是$\triangle ABC$ 的三个内角.

求证：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中不能有两个角是钝角.

证明：假设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中有两个角是钝角，不妨设 $\angle A > 90°$，$\angle B > 90°$，则 $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$.

这与三角形内角和定理相矛盾，故 $\angle A$，$\angle B$ 均大于 $90°$ 不成立.

即在一个三角形中，不能有两个角是钝角.

提分·秘诀

归纳总结

利用反证法证明命题时，关键是否定原命题的结论，即假设原命题的结论不成立，从而提出与原命题结论相反的结论.

知识▶6 等边三角形的判定定理

1. 判定定理 1 三个角都相等的三角形是等边三角形.

几何语言：如图 1−1−13，在$\triangle ABC$ 中，

$\because \angle A = \angle B = \angle C$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

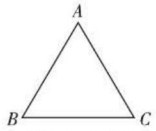


图 1−1−13

2. 判定定理 2 有一个角等于 $60°$ 的等腰三角形是等边三角形.

几何语言：如图 1−1−13，在$\triangle ABC$ 中，

$\because AB = AC$，$\angle A = 60°$ 或 $\angle B = 60°$ 或 $\angle C = 60°$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

证明等边三角形的思维导图：

三角形 $\xrightarrow[\text{思路 2　三角相等}]{\text{思路 1　三边相等}}$ 等边三角形

三角形 $\xrightarrow[\text{的判定}]{\text{等腰三角形}}$ 等腰三角形 $\xrightarrow[60°]{\text{有一个角等于}}$ 等边三角形

提分·必记

特别解读

1. 在等腰三角形中，只要有一个角是 60°，无论这个角是顶角还是底角，都可以用判定定理 2 判定等边三角形.
2. 等边三角形的判定方法：
   (1) 若已知三边关系，一般选用定义判定；
   (2) 若已知三角关系，一般选用判定定理 1 判定；
   (3) 若已知该三角形是等腰三角形，一般选用判定定理 2 判定.

考向▶利用等边三角形的判定方法判定等边三角形

题型 1：判定定理 1 在判定等边三角形中的应用

例 11 如图 1−1−14，在等边三角形 ABC 中，$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O，OB，OC 的垂直平分线分别交 BC 于点 E，F，连接 OE，OF. 求证：$\triangle OEF$ 是等边三角形.

解题秘方：利用等边三角形的判定定理 1，通过求 $\angle OEF = \angle OFE = 60°$，得$\triangle OEF$ 是等边三角形.

证明：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60°$.

$\because CO$，BO 分别平分 $\angle ACB$，$\angle ABC$，

$\therefore \angle OBE = \angle OCF = 30°$.

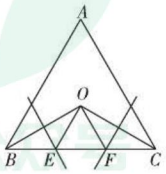


图 1−1−14

提分·秘诀

教你一招

1. 从角的角度证明三角形是等边三角形，有两条思路：
   （1）证明三角形的三个内角相等；
   （2）求出三角形的三个内角度数都是 60°.
2. 在已知的等边三角形内部判定某个三角形是等边三角形，原等边三角形的三个内角为 60°，为求新等边三角形的内角度数提供了条件.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ OB，OC 的垂直平分线分别交 BC 于点 E，F，

∴ $OE=BE$，$OF=FC$，

∴ $\angle BOE=\angle OBE=30°$，$\angle COF=\angle OCF=30°$.

∴ $\angle OEF=\angle BOE+\angle OBE=60°$，

$\angle OFE=\angle COF+\angle OCF=60°$.

∴ $\angle OEF=\angle OFE=60°$.

∴ $\angle EOF=60°$.

∴ $\triangle OEF$ 是等边三角形.

题型 2：判定定理 2 在判定等边三角形中的应用

例 12 如图 1-1-15，点 C 为线段 AB 上一点，$\triangle ACM$，$\triangle CBN$ 都是等边三角形，AN，MC 相交于点 E，BM，CN 相交于点 F. 求证：

（1）$AN=BM$；

（2）$\triangle CEF$ 是等边三角形.

解题秘方：（1）要证 $AN=BM$，只需证 $\triangle ACN\cong\triangle MCB$；

（2）根据已知条件，易求 $\angle ECF=60°$，故证明 $\triangle ECF$ 为等腰三角形即可.

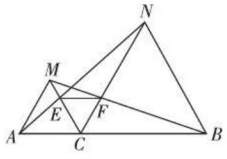


图 1-1-15

证明：（1）∵ $\triangle ACM$，$\triangle CBN$ 都是等边三角形，∴ $AC=CM$，$CN=BC$，$\angle ACM=\angle BCN=60°$.

∴ $\angle ACM+\angle MCN=\angle BCN+\angle MCN$，

即 $\angle ACN=\angle MCB$.

在 $\triangle ACN$ 和 $\triangle MCB$ 中，$\begin{cases}AC=MC,\\ \angle ACN=\angle MCB,\\ CN=CB,\end{cases}$

∴ $\triangle ACN\cong\triangle MCB$（SAS）.

∴ $AN=BM$.

（2）∵ $\triangle ACN\cong\triangle MCB$，

∴ $\angle ENC=\angle FBC$.

∵ $\angle ECN=180°-\angle ACM-\angle NCB=60°$，

∴ $\angle ECN=\angle FCB$.

在 $\triangle ECN$ 和 $\triangle FCB$ 中，$\begin{cases}\angle ENC=\angle FBC,\\ CN=CB,\\ \angle ECN=\angle FCB,\end{cases}$

∴ $\triangle ECN\cong\triangle FCB$（ASA）.

∴ $CE=CF$.

又 ∵ $\angle ECF=60°$，

∴ $\triangle CEF$ 是等边三角形.

解法提醒

证明一个三角形是等边三角形的思路：

1. 若已知三边关系，则选用等边三角形的定义来判定；
2. 若已知三角关系，则选用“三个角都相等的三角形是等边三角形”来判定；
3. 若已知是等腰三角形，则选用“有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形”来判定（如本例解法）.

另解

∵ $\triangle ACN\cong\triangle MCB$，

∴ $\angle CAE=\angle CMF$.

∵ $\angle MCF=180°-\angle ACM-\angle NCB=60°$，

∴ $\angle ACE=\angle MCF$.

又 ∵ $AC=MC$，

∴ $\triangle ACE\cong\triangle MCF$（ASA）.

∴ $CE=CF$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 7 含 30° 角的直角三角形的性质

1. **定理** 在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

几何语言：如图 1−1−16，在 Rt △ ABC 中，

∵ ∠ C=90°，∠ A=30°，

∴ $BC=\frac{1}{2}AB$.

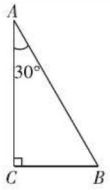


图 1−1−16

2. **作用** 应用于证线段的倍分关系和求线段的长度.

拔考向 ▸ 利用含 30° 角的直角三角形的性质解决线段问题

题型 1：含 30° 角的直角三角形的性质在求线段长中的应用

例 13 如图 1−1−17，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，AB 边的垂直平分线 MN 交 AB 于点 M，交 BC 于点 N，且∠ B=15°，AC=4 cm，求 BN 的长.

解题秘方：先构造含 30° 角的直角三角形模型，再利用含 30° 角的直角三角形的性质求线段长.

解：如图 1−1−17，连接 AN.

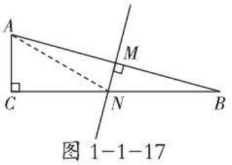


图 1−1−17

∵ MN 为 AB 边的垂直平分线，

∴ AN=BN，∴ ∠ NAB= ∠ B=15°，

∴ ∠ ANC= ∠ B+ ∠ NAB=30°.

在 Rt △ ACN 中，∠ ANC=30°，

∴ AN=2AC=2×4=8（cm）.

∴ BN=8 cm.

题型 2：含 30° 角的直角三角形的性质在证明线段的倍分关系中的应用

例 14 如图 1−1−18，在等边三角形 ABC 中，AE=CD，AD，BE 相交于点 P，BQ ⊥ AD 于 Q. 求证：BP=2PQ.

解题秘方：利用含 30° 角的直角三角形的性质证明线段的倍分关系.

证明：在等边三角形 ABC 中，AB=CA，

∠ BAE= ∠ C=60°.

又∵ AE=CD，

∴ △ ABE ≌ △ CAD（SAS），

∴ ∠ ABE= ∠ CAD，

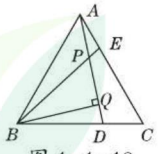


图 1−1−18

∴ ∠ BPQ= ∠ ABE+ ∠ BAP= ∠ CAD+ ∠ BAP= ∠ BAE=60°.

∵ BQ ⊥ AD，∴ ∠ BQP=90°.

∴ ∠ PBQ=30°.

∴ BP=2PQ.

提分·必记

特别解读

- 应用此定理，必须满足两个条件：1. 在直角三角形中；2. 有一个锐角为 30°. 二者缺一不可.
- 含 30° 角的直角三角形的性质是求线段长度和证明线段倍分关系的重要依据.

提分·秘诀

教你一招

含 30° 角的直角三角形的性质揭示直角边与斜边的数量关系. 若求某直角三角形的边长，考虑建立含 30° 角的直角三角形模型；若给出的是 15° 角，则构造以 15° 角为底角的等腰三角形，其顶角处的外角为 30° 的角.

方法点拨

在同一个三角形中证明一条线段等于另一条线段的 2 倍，可通过以下方法证明：(1) 证明三角形是直角三角形；(2) 证明较短的直角边所对的锐角等于 30°.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平行线构造等腰三角形法证明线段相等

例 15 如图 1−1−19，在△ ABC 中，$AB=AC$，EF 交 AB 于点 E，交 AC 的延长线于点 F，交 BC 于点 D，且 $BE=CF$.

求证：$DE=DF$.

解题秘方：过等腰三角形一边上的一点作另一边的平行线，截得的三角形仍然是等腰三角形.

证明：如图 1−1−19，过点 E 作 $EG \parallel AC$ 交 BC 于点 G，则 $\angle ACB=\angle BGE$，$\angle F=\angle DEG$.

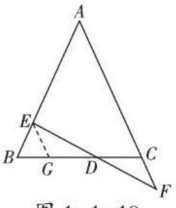


图 1−1−19

$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle ACB$.

$\therefore \angle B=\angle BGE$，$\therefore BE=GE$.

$\because BE=CF$，$\therefore GE=CF$.

在△ GDE 和△ CDF 中，

$$\begin{cases} \angle DEG=\angle F, \\ \angle GDE=\angle CDF, \\ GE=CF, \end{cases}$$

$\therefore$ △ $GDE \cong$ △ CDF（AAS）.

$\therefore DE=DF$.

挑战·高分

方法点拨

1. **等腰三角形构造法**

等腰三角形任意一边的平行线与另两边相交所构成的三角形是等腰三角形.

2. **证明线段相等的方法**

把要证的两条线段放到一个三角形中，证其为等腰三角形或等边三角形，或把要证的两条线段放到两个三角形中，构造全等三角形，利用全等三角形的性质证明.

拔尖角度 2 利用补形构造“三线合一”基本图形法证明线段的倍分关系

例 16 如图 1−1−20，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$\angle 1=\angle 2$，$CE \perp BE$. 求证：$BD=2CE$.

解题秘方：由角平分线与高线重合，构造等腰三角形，利用等腰三角形“三线合一”证明线段的倍分关系.

证明：延长 CE 交 BA 的延长线于点 F，如图 1−1−20 所示.

$\because CE \perp BE$，$\therefore \angle BEC=\angle BEF=90°$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle F=\angle BCE$.

$\therefore BC=BF$.

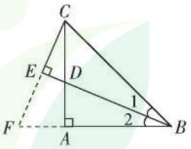


图 1−1−20

$\therefore CE=FE=\frac{1}{2}CF$，即 $CF=2CE$.

$\because \angle F+\angle 2=90°$，$\angle F+\angle ACF=90°$，

$\therefore \angle 2=\angle ACF$.

又 $\because AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAF=90°$，

$\therefore$ △ $BDA \cong$ △ CFA（ASA）.

$\therefore BD=CF$. $\therefore BD=2CE$.

挑战·高分

方法点拨

1. **等腰三角形构造法**

等腰三角形是个轴对称图形，“三线”所在的直线是对称轴，它将等腰三角形一分为二，若在图中出现其中一半，则可通过补形，构造出“三线合一”的基本图形.

2. **倍长线段法**

证明一条线段等于另外一条线段的两倍，可以延长较短线段，并使其延长部分与较短线段相等，即作一条线段等于较短线段的两倍，然后证明两条长线段相等.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用构造等边三角形法证明线段的和差关系

例 17 如图 1-1-21，△ ABD 是等边三角形，∠ $BCA=60°$.

求证：$AC=BC+CD$.

解题秘方：利用有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形构造等边三角形（补形法），为三角形全等创造条件.

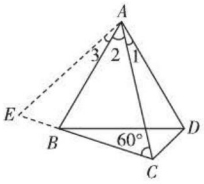


图 1-1-21

证明：如图 1-1-21，延长 CB 至点 E，使 $CE=CA$，连接 AE.

∵∠ $ACB=60°$，∴△ AEC 是等边三角形.

∴∠ $EAC=60°$，$AE=EC=AC$.

∵△ ABD 是等边三角形，

∴∠ $BAD=60°$，$AB=AD$.

∴∠ $BAD=$ ∠ $EAC=60°$，

∴∠ $2+$ ∠ $1=$ ∠ $2+$ ∠ 3. ∴∠ $1=$ ∠ 3.

在△ ABE 和△ ADC 中，$\begin{cases} AB=AD, \\ \angle 3=\angle 1, \\ AE=AC, \end{cases}$

∴△ ABE ≌△ ADC（SAS）. ∴ $BE=CD$.

∴ $BC+CD=BC+BE=EC=AC$，即 $AC=BC+CD$.

挑战·高分

解法指导

证明一条线段等于两条线段的和或差，一般采用截长补短法，下面再介绍两种方法.

方法一（截长法）：如图 1-1-22，在 AC 上取一点 E，使 AE=BC，连接 DE. 同学们可以自己证明.

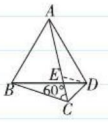


图 1-1-22

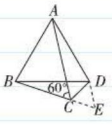


图 1-1-23

方法二（补短法）：如图 1-1-23，延长 BC 至点 E，使 BE=AC，连接 DE. 同学们可以自己证明.

拔尖角度 4 利用由动变静法探索等边三角形中的动态运动规律

例 18 如图 1-1-24，△ ABC 是边长为 6 的等边三角形，P 是 AC 边上的动点，由点 A 向点 C 运动（与点 A，C 不重合），Q 是 CB 延长线上的动点，与点 P 同时以相同的速度由点 B 向 CB 延长线方向运动（点 Q 不与点 B 重合）. 过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E，连接 PQ 交 AB 于点 D.

（1）当∠ $BQD=30°$ 时，求 AP 的长.

（2）在运动过程中，线段 ED 的长是否发生变化？如果不变，求出线段 ED 的长；如果发生变化，请说明理由.

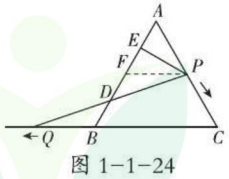


图 1-1-24

解题秘方：（1）由动变静，寻找不变量，结合等边三角形的性质求解即可；（2）过点 P 作 PF // QC，交 AB 于点 F，构造等边三角形 AFP，寻找 ED 与 AB 之间的数量关系即可.

解：（1）∵△ ABC 是等边三角形，∴∠ $C=60°$.

∵ P，Q 同时出发，同速运动，∴ $AP=BQ$.

设 $AP=BQ=x$，则 $PC=6-x$，$QC=6+x$.

挑战·高分

方法点拨

动态问题的求解思路

动态问题是以点、线、面运动为情境，探索和发现其中的规律或结论的题型. 由于图形运动，导致题目的条件不断改变，相应的数量关系和结论可能不改变，也可能改变，一般由条件进行探索.

若得到不变的值或结论，就求出了不改变的值或得到不变的结论；若不能得到不变的值或结论，就相当于说明了理由.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ QCP 中，$\angle CQP=30°$，$\angle C=60°$，则 $\angle CPQ=90°$.

$\therefore QC=2PC$，即 $6+x=2(6-x)$，解得 $x=2$.

$\therefore AP=2$.

（2）在运动过程中，线段 ED 的长不变.

如图 1−1−24，过 P 作 $PF \parallel QC$，交 AB 于点 F，易得△ AFP 是等边三角形，$\therefore AP=PF$.

$\because AP=BQ$，$\therefore PF=BQ$.

$\because PF \parallel QC$，$\therefore \angle PFD=\angle QBD$.

又 $\because \angle FDP=\angle BDQ$，$\therefore$△ $PFD \cong$△ QBD（AAS）.

$\therefore BD=DF$.

$\because$△ APF 是等边三角形，$PE \perp AF$，$\therefore AE=EF$.

$\therefore DE=DF+EF=\frac{1}{2}BF+\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}AB=3$.

方法点拨

在出现 60° 角的图形中构造等边三角形的方法：

1. 利用**补形法**，使夹 60° 角的两边相等；
2. 若 60° 角是已知等边三角形的内角，可用作平行线的方法构造等边三角形.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的中考考点比较多，全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质，以及含 30° 角的直角三角形的性质，都是中考的必考内容. 命题形式多种多样，可以单独考查某个知识点，也可以与其他几何性质结合在一起考查. 近几年的中考中，常出现与等腰三角形或全等三角形有关的开放题、探索题，这类题目的难度比较大.

三年中考兵法

考法 1 利用等腰三角形的性质求角的度数

例 19 [中考·滨州]如图 1−1−25，在△ ABC 中，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，且 $DA=DC$，$BD=BA$，则 $\angle B$ 的大小为（　　）

A. 40°　　B. 36°　　C. 30°　　D. 25°

试题评析：本题考查等腰三角形的性质、三角形内角和定理，以及三角形的外角性质，解题的关键是通过三角形的外角，将不在同一个三角形中的角用同一个未知数表示出来.

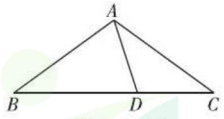


图 1−1−25

解：设 $\angle B=x$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle C=\angle B=x$.

$\because DA=DC$，$\therefore \angle DAC=\angle C=x$.

$\therefore \angle ADB=\angle DAC+\angle C=2x$.

$\because BD=BA$，$\therefore \angle BAD=\angle ADB=2x$.

$\therefore x+x+x+2x=180°$，解得 $x=36°$.

答案：B

冲刺·满分

归纳拓展

计算三角形中有关角的度数时，如果计算不出来，或者找不到解题途径时，不妨考虑三角形的外角，它可以将不在同一个三角形中的角联系起来，建立等量关系.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用等腰三角形的判定证明等腰三角形

例 20 [中考·广东]如图 1-1-26，长方形 $ABCD$ 中，$AB>AD$，把长方形沿对角线 AC 所在直线折叠，使点 B 落在点 E 处，AE 交 CD 于点 F，连接 DE. 求证：

（1）$\triangle ADE \cong \triangle CED$；

（2）$\triangle DEF$ 是等腰三角形.

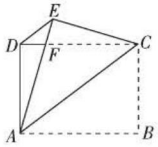


图 1-1-26

试题评析：本题主要考查三角形全等和等腰三角形的判定，解题的关键是利用三角形全等为等腰三角形的判定提供条件.

证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是长方形，∴ $AD=BC$，$AB=DC$.

∵$\triangle AEC$ 是由 $\triangle ABC$ 折叠而成，∴ $AD=BC=EC$，$AB=DC=AE$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CED$ 中，$\begin{cases} AD=CE, \\ DE=ED, \\ AE=CD, \end{cases}$

∴$\triangle ADE \cong \triangle CED$（SSS）.

（2）由 $\triangle ADE \cong \triangle CED$ 可得 $\angle AED=\angle CDE$，

∴ $FD=FE$. ∴$\triangle DEF$ 是等腰三角形.

考法点评

三角形全等和等腰三角形的性质和判定是密不可分的. 等腰三角形的性质为三角形全等提供边、角相等的条件，而三角形全等的性质为等腰三角形的判定创造边或角相等的条件.

考法 3 利用等边三角形的性质与判定探究动态运动中两直线的位置关系

例 21 [中考·玉林]如图 1-1-27，$\angle AOB=60°$，$OA=OB$. 动点 C 从点 O 出发，沿射线 OB 方向移动，以 AC 为边在右侧作等边 $\triangle ACD$，连接 BD，则 BD 所在直线与 OA 所在直线的位置关系是（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 垂直　　D. 平行、相交或垂直

试题评析：此题主要考查了等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，求出 $\angle ABD=60°$ 是解本题的关键.

解：∵$\angle AOB=60°$，$OA=OB$，

∴$\triangle OAB$ 是等边三角形.

∴ $OA=AB$，$\angle OAB=\angle ABO=60°$.

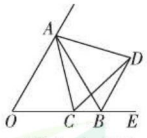


图 1-1-27

（1）当点 C 在线段 OB 上时，如图 1-1-27 所示.

∵$\triangle ACD$ 是等边三角形，∴ $AC=AD$，$\angle CAD=60°$.

∴ $\angle OAB=\angle CAD$. ∴ $\angle OAB-\angle CAB=\angle CAD-\angle CAB$，

即 $\angle OAC=\angle BAD$.

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle ABD$ 中，$\begin{cases} OA=BA, \\ \angle OAC=\angle BAD, \\ AC=AD, \end{cases}$

∴$\triangle AOC \cong \triangle ABD$（SAS）.

思路点拨

先推出 OA=AB，∠OAB=∠ABO=60°，再分两种情况推出△AOC≌△ABD，进而推出∠ABD=∠AOC，得到∠DBE=∠AOB，即可得出结论.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ABD=\angle AOC=60°$.

$\therefore \angle DBE=180°-\angle ABO-\angle ABD=60°=\angle AOB$.

$\therefore BD /\!/ OA$.

（2）当点 C 在线段 OB 的延长线上时，如图 1−1−28 所示.

$\because \triangle ACD$ 是等边三角形，$\therefore AC=AD$，$\angle CAD=60°$.

$\therefore \angle OAB=\angle CAD$.

$\therefore \angle OAB+\angle BAC=\angle CAD+\angle BAC$，

即 $\angle OAC=\angle BAD$.

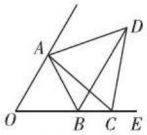


图 1−1−28

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle ABD$ 中，$\begin{cases} OA=BA, \\ \angle OAC=\angle BAD, \\ AC=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle ABD$（SAS）.

$\therefore \angle ABD=\angle AOC=60°$.

$\therefore \angle DBE=180°-\angle ABO-\angle ABD=60°=\angle AOB$.

$\therefore BD /\!/ OA$.

答案：A

教你一招

考查等边三角形的性质和判定，关键要扣住两点，一是利用 60° 的内角；二是边相等与三角形全等结合，一方面利用边相等为三角形全等创造条件，另一方面利用全等证明边相等.

考法 4 利用含 30° 角的直角三角形的性质求线段的长

例 22 ［中考 · 河池］已知等边三角形 ABC 的边长为 12，D 是 AB 上的动点，过 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E，过 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F，过 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G. 当 G 与 D 重合时，AD 的长是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 8　　D. 9

试题评析：本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质和等边三角形的性质，解题的关键是画出图形，根据图形求解.

归纳总结

含 30° 角的直角三角形的性质常与等边三角形的性质、直角三角形的两个锐角互余一起运用，此性质是求线段长度和证明线段倍分关系的重要依据.

解：如图 1−1−29，设 $BD=x$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

$\because DE \perp AC$，$EF \perp BC$，$FG \perp AB$，

$\therefore \angle BDF=\angle DEA=\angle EFC=90°$.

$\therefore \angle BFD=\angle CEF=\angle ADE=30°$.

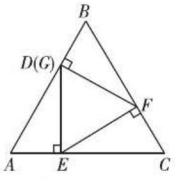


图 1−1−29

$\therefore BF=2x$，$\therefore CF=12-2x$.

$\therefore CE=2CF=24-4x$. $\therefore AE=12-CE=4x-12$.

$\therefore AD=2AE=8x-24$.

$\because AD+BD=AB$，$\therefore 8x-24+x=12$. $\therefore x=4$.

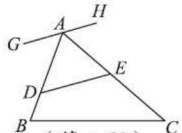
$\therefore AD=8x-24=32-24=8$.

答案：C

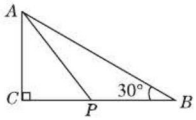
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·宁夏]如图，在△ABC中，$AC=BC$，点D，E分别在AB，AC上，且$AD=AE$. 连接DE，过点A的直线GH与DE平行，若∠$C=40°$，则∠GAD的度数为（　　）

A. 40°　　B. 45°　　C. 55°　　D. 70°



（第1题）

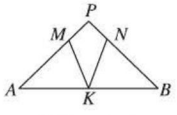


（第2题）

2.[中考·贵阳]如图，在△ABC中，∠$C=90°$，$AC=3$，∠$B=30°$，点P是BC边上的动点，则AP的长不可能是（　　）

A.3.5　　B.4.2　　C.5.8　　D.7

3.[中考·泰安]如图，在△PAB中，$PA=PB$，M，N，K分别是PA，PB，AB上的点，且$AM=BK$，$BN=AK$. 若∠$MKN=44°$，则∠P的度数为（　　）



（第3题）

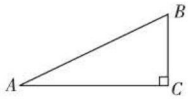
A. 44°　　B. 66°　　C. 88°　　D. 92°

4. 等腰三角形一腰上的高等于该三角形某一条边长度的一半，则其顶角等于（　　）

A. 30°　　B. 30°或150°

C. 30°或120°　　D. 30°或120°或150°

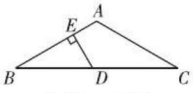
5.[中考·武汉]如图，在Rt△ABC中，∠$C=90°$，以△ABC的一边为边画等腰三角形，使得它的第三个顶点在△ABC的其他边上，则可以画出的不同的等腰三角形的个数最多为（　　）



（第5题）

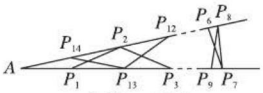
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

6. 如图，在△ABC中，∠$BAC=120°$，$AB=AC$，过BC的中点D作$DE\perp AB$于点E. 若$AE=2$ cm，则$BE=$_____.



（第6题）

7.[中考·绍兴]如图的钢架中，焊上等长的13根钢条来加固钢架. 若$AP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_{13}P_{14}=P_{14}A$，则∠$A$的度数是_____.



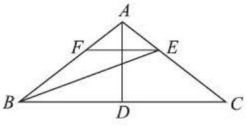
（第7题）

8. 用反证法证明“三角形中至少有一个角不小于60°”.

9.[中考·重庆]如图，在△ABC中，$AB=AC$，D是BC边上的中点，连接AD，BE平分∠ABC交AC于点E，过点E作$EF\parallel BC$交AB于点F.

（1）若∠$C=36°$，求∠BAD的度数；

（2）求证：$FB=FE$.

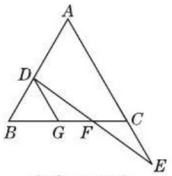


（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

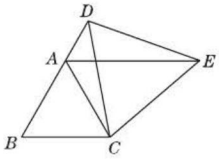
10. 如图，点 E 在 $\triangle ABC$ 的 AC 边的延长线上，点 D 在 AB 边上，DE 交 BC 于点 F，$DF=EF$，$BD=CE$，过点 D 作 $DG \parallel AC$ 交 BC 于点 G.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.



（第 10 题）

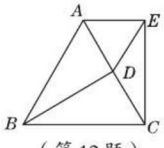
11. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，D 为边 BA 延长线上的一点，连接 CD，以 CD 为一边作等边三角形 CDE，连接 AE，判断 AE 与 BC 的位置关系，并说明理由. 【导学号：2850581】



（第 11 题）

12. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，D 为边 AC 的中点，$AE \perp EC$，$BD=EC$.

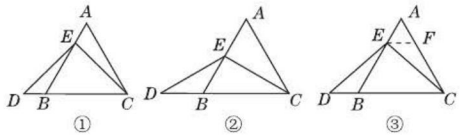
求证：$\triangle ADE$ 是等边三角形.



（第 12 题）

13. [探究题] 数学课上，李老师出示了如下的题目：在等边三角形 ABC 中，点 E 在 AB 上，点 D 在 CB 的延长线上，且 $ED=EC$，如图①. 试确定线段 AE 与 DB 的大小关系，并说明理由.

小明与同桌小聪讨论后，进行了如下解答.



（第 13 题）

（1）特殊情况，探索结论. 当点 E 为 AB 的中点时，如图②，确定线段 AE 与 DB 的大小关系，请你直接写出结论：AE_____DB（填“>”“<”或“=”）.

（2）一般情况，证明结论. 如图③，过点 E 作 $EF \parallel BC$，交 AC 于点 F. 请你继续完成对以上问题（1）中所写结论的证明.

（3）拓展结论，设计新题. 在等边三角形 ABC 中，点 E 在直线 AB 上，点 D 在直线 BC 上，且 $ED=EC$. 若 $\triangle ABC$ 的边长为 1，$AE=2$，则 CD 的长为_____（请直接写出结果）.

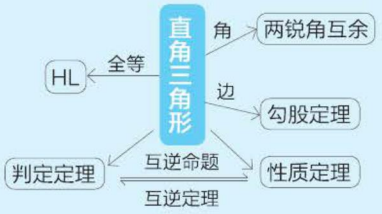
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 直角三角形

核心知识

- 直角三角形角的性质定理与判定
- 直角三角形边的性质定理与判定
- 互逆命题与互逆定理
- 直角三角形全等的判定

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 直角三角形角的性质定理与判定定理

1. 直角三角形角的性质定理 直角三角形的两个锐角互余.

几何语言：在△ABC中，∵∠C=90°，∴∠A+∠B=90°.

2. 直角三角形角的判定定理 有两个角互余的三角形是直角三角形.

几何语言：在△ABC中，∵∠A+∠B=90°，

∴∠C=90°，即△ABC为直角三角形.

拔考向 利用直角三角形角的性质定理与判定定理解与直角三角形相关的问题

题型1：直角三角形角的性质定理在求角的度数中的应用

例1 如图1-2-1，AB，CD相交于点O，$AC \perp CD$于点C. 若∠BOD=35°，则∠A=_____.

解题秘方：根据直角三角形中两锐角之间的数量关系求出角的度数.

解：∵∠BOD=35°，

∴∠AOC=35°.

又∵$AC \perp CD$，∴∠ACD=90°.

∴∠A=90°−∠AOC=90°−35°=55°.

答案：55°

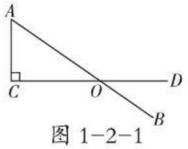


图1-2-1

题型2：直角三角形角的判定定理在证明直角三角形中的应用

例2 如图1-2-2，AB // CD，直线EF分别交AB，CD于点E，F，∠BEF的平分线与∠DFE的平分线相交于点P.

求证：△EFP是直角三角形.

解题秘方：三角形中有两个角的和等于90°就可说明该三角形为直角三角形.

证明：∵AB // CD，

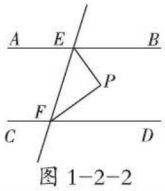


图1-2-2

提分·必记

特别解读

1. 直角三角形角的性质定理和判定定理的理论依据是三角形内角和定理.
2. 在直角三角形中，若已知两个锐角之间的关系，可结合两个锐角互余求出每个锐角的大小，不需要再利用三角形内角和定理求解.

提分·秘诀

解法提醒

求某一锐角的度数时，若这个锐角在一个直角三角形中，则可以先求该直角三角形另一个锐角的度数，然后利用直角三角形中锐角之间的互余关系求出该锐角的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BEF+\angle DFE=180°$.

又$\because EP$平分$\angle BEF$，FP平分$\angle DFE$，

$\therefore \angle PEF=\frac{1}{2}\angle BEF$，$\angle PFE=\frac{1}{2}\angle DFE$.

$\therefore \angle PEF+\angle PFE=\frac{1}{2}(\angle BEF+\angle DFE)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

$\therefore \triangle PEF$为直角三角形.

题型3：直角三角形角的性质定理与判定定理在证明两线垂直中的应用

例3 如图1-2-3，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle ACD=\angle B$. 求证：$CD\perp AB$.

解题秘方：利用直角三角形的性质定理与判定定理求出CD，AB的夹角为直角.

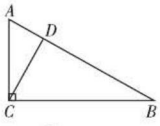


图1-2-3

证明：$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle A+\angle B=90°$.

$\because \angle ACD=\angle B$，

$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$.

$\therefore \angle CDA=90°$.

$\therefore CD\perp AB$.

特别提醒

直角三角形的判定方法

1. 证明三角形中有一个内角为90°（或证明三角形的两条边互相垂直）.
2. 证明三角形中有两个内角互余.
3. 证明三角形中有一个内角与已知的直角相等.

教你一招

证明两条直线垂直的方法：

1. **定义法** 推导相交的两直线的夹角中有一个角为直角.
2. **证明直角三角形法** 在三角形中，推导出两个角的和为90°，从而得此三角形为直角三角形.

知识▶2 勾股定理

提分·必记

1. 勾股定理

直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

数学表达式：如图1-2-4，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，则$a^2+b^2=c^2$.

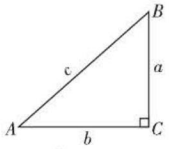


图1-2-4

2. 勾股定理的变形公式

$a^2=c^2-b^2$；$b^2=c^2-a^2$.

3. 基本思想方法

勾股定理把“形”与“数”有机地结合起来，即把直角三角形这个“形”与三边关系这一“数”结合起来，它是数形结合思想的典范.

特别提醒

1. 勾股定理揭示的是直角三角形的三边的平方关系，只有在直角三角形中才可以使用勾股定理.
2. 利用勾股定理，已知其中任意两边可以求出第三边.
3. 运用勾股定理，若分不清哪条边是斜边，则要分类讨论，写出所有可能，以免漏解或错解.

核心考向▶利用勾股定理进行计算与证明

题型1：勾股定理在求线段长中的应用

例4 如图1-2-5，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，$CD\perp AB$，垂足为D，求CD的长.

解题秘方：紧扣“同一三角形的面积的两种表示法”求解.

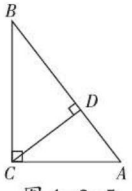


图1-2-5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：∵∠ACB=90°，AC=3，BC=4，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∵ $CD\perp AB$，∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴ $AB\cdot CD=AC\cdot BC$.

∴ $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$.

提分·秘诀

解法提醒

面积法：用不同的方法表示同一个图形的面积．此题是典型的应用面积法求直角三角形斜边上的高的问题．△ABC的面积既可以表示为$\frac{AC\cdot BC}{2}$，又可以表示为$\frac{AB\cdot CD}{2}$．再利用同一图形的面积相等解答．

题型2：勾股定理在证明平方关系中的应用

例5 如图1−2−6，在Rt△ABC中，∠C=90°，AM是中线，$MN\perp AB$，垂足为N．求证：$AN^2-BN^2=AC^2$.

解题秘方：将要证明的线段归结到不同的直角三角形中，结合勾股定理证明．

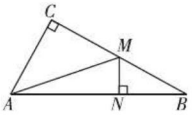


图1−2−6

证明：∵$MN\perp AB$，

∴在Rt△AMN中，$AN^2+MN^2=AM^2$，

在Rt△BMN中，$BN^2+MN^2=MB^2$.

∴ $AN^2-AM^2=BN^2-MB^2$，即$AN^2-BN^2=AM^2-MB^2$.

在Rt△AMC中，∵∠C=90°，

∴ $AM^2-MC^2=AC^2$.

又∵AM是中线，∴ $MC=MB$.

∴ $AM^2-MB^2=AC^2$.

∴ $AN^2-BN^2=AC^2$.

另解

∵$MN\perp AB$，

∴△AMN和△MNB为直角三角形．

在Rt△ACM中，$AM^2=AC^2+MC^2$.

在Rt△MNB中，$MB^2=MN^2+NB^2$.

∵AM是中线，∴ $MC=MB$.

∴ $AM^2=AC^2+MN^2+NB^2$.

在Rt△AMN中，$AM^2=AN^2+MN^2$，

∴ $AC^2+MN^2+NB^2=AN^2+MN^2$.

∴ $AN^2-BN^2=AC^2$.

题型3：勾股定理在实际生活中的应用

例6 一架长5 m的梯子，斜靠在一竖直的墙上，这时梯足距墙脚3 m．若梯子的顶端下滑1 m，则梯足将滑动（　　）

A.0 m　　B.1 m　　C.2 m　　D.3 m

解题秘方：将实际应用问题通过建模转化为直角三角形的问题求解．

解：根据题意，建立如图1−2−7所示的模型，BB_1的长即为所求．

在Rt△ABC中，∠ACB=90°，AB=5 m，BC=3 m，

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$（m）．

在Rt△A_1B_1C中，∠A_1CB_1=90°，

$A_1C=AC-AA_1=4-1=3$（m），$A_1B_1=5$ m，

∴ $B_1C=\sqrt{A_1B_1^2-A_1C^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$（m）．

∴ $BB_1=B_1C-BC=4-3=1$（m）．

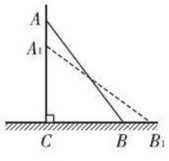


图1−2−7

答案：B

解法提醒

此题首先根据题意建立数学模型，然后利用直角三角形三边之间的关系和一些隐含条件（如：墙与地面垂直、梯子的长度不变等）来求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶3 勾股定理的逆定理

1. 勾股定理的逆定理

如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.

2. 利用边的关系判定直角三角形的步骤

（1）“找”：找出三角形三边中的最长边.

（2）“算”：计算其他两边的平方和与最长边的平方.

（3）“判”：若两者相等，则这个三角形是直角三角形；否则不是.

3. 勾股定理与其逆定理的关系

定理	勾股定理	勾股定理的逆定理
区别	（1）勾股定理是以“一个三角形是直角三角形”为条件，进而得到这个直角三角形三边长的关系，即 $a^2+b^2=c^2$（c 为斜边长）； （2）勾股定理是根据直角三角形探求边的关系，体现了由形到数的转化	（1）勾股定理的逆定理是以“一个三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$”为条件，进而得到这个三角形为直角三角形； （2）勾股定理的逆定理是由三角形的三边关系探求三角形的形状，体现了由数到形的转化
联系	勾股定理和勾股定理的逆定理的条件和结论相反，勾股定理是直角三角形的性质，而其逆定理是直角三角形的判定，勾股定理及其逆定理都与直角三角形有关	

核心考向▶利用直角三角形的判定方法进行判断

例 7 判断满足下列条件的三角形是不是直角三角形：

（1）在△ABC 中，$\angle A=25°$，$\angle C=65°$；

（2）在△ABC 中，$AC=12$，$AB=20$，$BC=16$；

（3）△ABC 的三边长 a，b，c 满足 $a:b:c=1:1:\sqrt{2}$.

解题秘方： 紧扣“直角三角形的定义”和“勾股定理的逆定理”进行判断.

解：（1）在△ABC 中，

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore \angle B=180°-25°-65°=90°$，

$\therefore$ △ABC 是直角三角形.

（2）在△ABC 中，

$\because AC^2+BC^2=12^2+16^2=20^2=AB^2$，

$\therefore$ △ABC 是直角三角形，且$\angle C$ 为直角.

提分·必记

特别提醒

1. 勾股定理的逆定理是判定直角三角形的一个依据，在判定时不能说“在直角三角形中”“直角边”“斜边”，因为还没有确定是直角三角形.

2. $a^2+b^2=c^2$ 只是一种表现形式，满足 $a^2=b^2+c^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$ 的也是直角三角形，只是这时 a 或 b 为斜边.

方法点拨

判定直角三角形的方法：

- 如果已知条件与角度有关，可求出其中一个角是直角，或者证明其中一个角等于已知的直角，从而判定直角三角形.
- 如果已知条件与边有关，可通过计算推导出三角形三边长的数量关系（即 $a^2+b^2=c^2$，c 为最长边），判定直角三角形.

提分·秘诀

解法提醒

1. **判断一个三角形是不是直角三角形有两种方法：**

（1）利用定义，即如果已知条件与角度有关，可借助三角形的内角和定理判断；

（2）利用直角三角形的判定条件，即若已知条件与边有关，一般通过计算得出三边的数量关系，看是否符合较短两边的平方和等于最长边的平方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）设 $a=x$，则 $b=x$，$c=\sqrt{2}\,x$.

$\because x^2+x^2=(\sqrt{2}\,x)^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

方法点拨：已知三角形三边的比例关系，判断是否为直角三角形时，可先设出参数，表示出三条边的长，再用勾股定理的逆定理判断其是否是直角三角形. 如果三角形三条边中有两条边相等，那么这个三角形还是等腰三角形.

2. 判断一个三角形的形状时，除了考虑是直角三角形之外，还要考虑是否为等腰三角形.

3. 若最长边的平方比较短两边的平方和大，则该三角形为钝角三角形；若最长边的平方比较短两边的平方和小，则该三角形为锐角三角形.

点知识 ▶ 4 互逆命题和互逆定理

1. 互逆命题

在两个命题中，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么这两个命题称为互逆命题，其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

特别提醒：（1）“互逆命题”说明了两个命题之间的关系，两个命题的地位可以互换，可以确定其中任何一个为原命题，另一个为逆命题.

（2）写一个命题的逆命题的关键是分清它的题设和结论，把题设和结论互换，并用通顺的语句将它们连接起来.

（3）原命题的真假和逆命题的真假没有必然联系. 原命题是真命题，其逆命题不一定是真命题；原命题是假命题，其逆命题也不一定是假命题.

2. 互逆定理

如果一个定理的逆命题经过证明是真命题，那么它也是一个定理，其中一个定理称为另一个定理的逆定理，这两个定理称为互逆定理.

注意：命题有真有假，而定理都是正确的，即都是真命题.

3. 互逆命题与互逆定理的关系

每个命题都有逆命题，但每个定理不一定都有逆定理. 只有当定理的逆命题经过证明是正确的，才能称这个逆命题为逆定理.

提分·必记

特别警示

判断一个命题是真命题需要证明，而判断一个命题是假命题，只需举一个反例即可.

拔考向 ▶ 利用互逆命题与互逆定理进行命题的改写与证明

题型 1：互逆命题在改写、判断真假中的应用

例 8 判断下列命题的真假，写出逆命题，并判断逆命题的真假：

（1）如果两条直线相交，那么它们只有一个交点；

（2）如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$；

（3）如果两个数互为相反数，那么它们的和为零；

（4）如果 $ab<0$，那么 $a>0$，$b<0$.

解题秘方：紧扣互逆命题“题设、结论正好相反”这一特征改写命题.

提分·秘诀

解法提醒

写出逆命题的关键是分清楚原命题的题设和结论，然后将它的题设和结论交换位置，就可得到这个命题的逆命题. 判断一个命题是真命题需要进行逻辑推理，判断一个命题是假命题只需要举出一个反例就可以了.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）原命题是真命题．逆命题：如果两条直线只有一个交点，那么它们相交．逆命题是真命题．

（2）原命题是假命题．逆命题：如果 $a^2 > b^2$，那么 $a > b$．逆命题是假命题．

（3）原命题是真命题．逆命题：如果两个数的和为零，那么它们互为相反数．逆命题是真命题．

（4）原命题是假命题．逆命题：如果 $a > 0$，$b < 0$，那么 $ab < 0$．逆命题是真命题．

题型 2：互逆定理在判断中的应用

例 9 定理“角平分线上的点到角的两边的距离相等”是否有逆定理？请说明理由．

解题秘方：通过写逆命题并判断真假说明是否存在逆定理．

解：原定理有逆定理．定理的逆命题：在角的内部，到角的两边的距离相等的点在这个角的平分线上．可以证明其为真命题．

已知：如图 1−2−8，$PE \perp OA$，$PF \perp OB$，垂足分别为 E，F，且 $PE=PF$．

求证：OP 是 $\angle AOB$ 的平分线．

证明：$\because PE \perp OA$，$PF \perp OB$，

$\therefore \angle OEP = \angle OFP = 90°$．

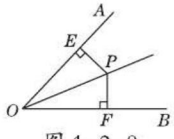


图 1−2−8

在 $\mathrm{Rt}\triangle POE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle POF$ 中，$\begin{cases} OP=OP, \\ PE=PF, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle POE \cong \mathrm{Rt}\triangle POF$（HL）．

$\therefore \angle AOP = \angle BOP$，

即 OP 是 $\angle AOB$ 的平分线．

因此，在角的内部，到角两边距离相等的点在这个角的平分线上，定理“角平分线上的点到角的两边的距离相等”有逆定理．

解法提醒

判断一个定理是否有逆定理的方法：先把定理作为命题，写出它的逆命题，然后判断其逆命题的真假．如果是假命题，举一个反例即可；如果是真命题，加以证明即可判断原定理有逆定理．

知识点 5 “斜边、直角边”（“HL”）定理

1. 定理 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）．


斜边、直角边（HL）

2. 书写格式 如图 1−2−9，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 中，$\begin{cases} AB=A'B', \\ BC=B'C', \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$（HL）．

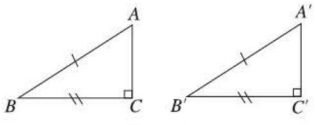


图 1−2−9

提分·必记

特别提醒

1. 应用“HL”判定两个直角三角形全等，在书写时两个三角形符号前一定要加上“Rt”．
2. 判定两个直角三角形全等的特殊方法“HL”，只适用于直角三角形全等的判定，对于一般三角形不适用．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 判定两个直角三角形全等常用的思路方法

直角三角形	一锐角（A）	ASA 或 AAS	可证直角与已知锐角的夹边对应相等或证已知锐角（或直角）的对边对应相等
	斜边（H）	HL 或 AAS	可证一条直角边对应相等或证一锐角对应相等
	一直角边（L）	HL 或 ASA 或 AAS 或 SAS	可证斜边对应相等或证与已知边相邻的锐角对应相等或证已知边所对的锐角对应相等或证另一直角边对应相等

3. 判定一般三角形全等的所有方法对判定两个直角三角形全等同样适用.

拔考向▶利用判定直角三角形全等的方法解决问题

例 10 如图 1-2-10，$AC \perp BC$，$AD \perp BD$，$AD=BC$，$CE \perp AB$，$DF \perp AB$，垂足分别是 E，F. 求证：$CE=DF$.

解题秘方：利用“HL”证明两直角三角形全等，为证明两条线段相等创造条件.

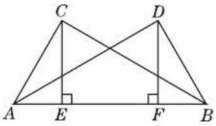


图 1-2-10

证明：$\because AC \perp BC$，$AD \perp BD$，

$\therefore \angle ACB=\angle BDA=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BAD$ 中，$\begin{cases} AB=BA, \\ BC=AD, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle BAD$（HL）.

$\therefore \angle CBE=\angle DAF$.

$\because CE \perp AB$，$DF \perp AB$，$\therefore \angle CEB=90°$，$\angle DFA=90°$.

在$\triangle BCE$和$\triangle ADF$中，$\begin{cases} \angle CEB=\angle DFA=90°, \\ \angle CBE=\angle DAF, \\ BC=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ADF$（AAS）.

$\therefore CE=DF$.

提分·秘诀

方法点拨

证明线段或角相等的方法：

1. 观察要证明的线段或角（或通过等量代换得到的线段或角）在哪两个可能全等的三角形中，当待证线段或角不分布在两个全等的三角形中时，常需添加辅助线构造全等三角形.
2. 分析需要证明全等的两个三角形，确定已知条件（包含图形中的隐含条件）是什么，还缺什么条件.
3. 设法推导出所缺的条件.
4. 整理书写证明过程.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用化整为零法求线段的长

挑战·高分

技巧点拨

构造法：利用勾股定理求线段的长是勾股定理的一个重要应用，当题目中没有直角三角形时，往往作垂线构造直角三角形，然后利用勾股定理求得线段的长. 但是构造直角三角形时，尽量不要破坏已知条件中的特殊角和已知的边.

例 11 已知$\triangle ABC$中，$\angle B=60°$，$AC=50$，$AB=20$，求 BC 的长.

解题秘方：紧扣勾股定理的特征，将 BC 转化为两直角三角形的直角边分别进行计算.

解：作出示意图如图 1-2-11，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D.

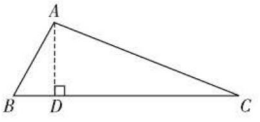


图 1-2-11

$\because \angle B=60°$，$\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle BAD=30°$，$\therefore BD=\dfrac{1}{2}AB=10$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2-BD^2=20^2-10^2=300$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{50^2-300}=10\sqrt{22}$，

$\therefore BC=BD+DC=10+10\sqrt{22}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用割补法求不规则图形的面积

题型 1：分割法在求面积中的应用

例 12 如图 1−2−12，已知 $AB \perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$CD=24$，$DA=26$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方：紧扣“化不规则为规则”的思想，将不规则的四边形 $ABCD$ 分割成两个规则的三角形求解.

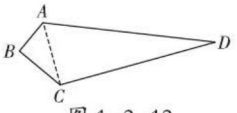


图 1−2−12

解：如图 1−2−12，连接 AC.

在 Rt △ ABC 中，由勾股定理得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

在△ ACD 中，$AC^2+CD^2=10^2+24^2=26^2=AD^2$.

由勾股定理的逆定理得∠ $ACD=90°$.

$$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{Rt\triangle ABC}+S_{Rt\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{1}{2}\times 10\times 24=144.$$

题型 2：补形法在求面积中的应用

例 13 如图 1−2−13，已知四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$CD=1$，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle ADC=90°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方：将不规则的四边形补形成规则的特殊三角形，再利用特殊三角形面积的差求解.

解：如图 1−2−13，延长 AD，BC 交于点 E.

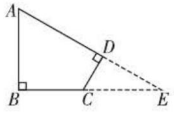


图 1−2−13

$\because \angle B=90°$，$\angle A=60°$，$\therefore \angle E=30°$.

在 Rt △ ABE 中，$AB=2$，$\therefore AE=4$.

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=2\sqrt{3}$.

$$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

在 Rt △ CDE 中，$\angle CDE=90°$，$CD=1$，

$\therefore CE=2$. $\therefore DE=\sqrt{CE^2-CD^2}=\sqrt{3}$.

$$\therefore S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}DE\cdot CD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

挑战·高分

技巧点拨

求不规则图形的面积常用的方法是**割补法**，即把不规则的图形分割或拼补成规则图形. 如例 12 通过连接 AC 将四边形 $ABCD$ 分割成△ ABC 和△ ACD，再利用两个三角形的面积和求出四边形的面积；例 13 将四边形 $ABCD$ 的面积通过补形转化为两个直角三角形面积的差.

拔尖角度▸ 3 利用折叠法求线段的长

例 14 如图 1−2−14，有一张直角三角形纸片，两直角边 $AC=6$ cm，$BC=8$ cm. 现将直角边 AC 沿 AD 折叠，使点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处，试求 CD 的长.

解题秘方：紧扣“折叠前后重合的线段相等，重合的角相等”，利用勾股定理解答.

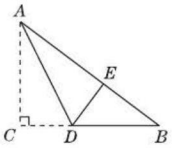


图 1−2−14

解：在 Rt △ ABC 中，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm.

因为 $AB^2=AC^2+BC^2=6^2+8^2=100$，

挑战·高分

解法提醒

关于折叠问题要紧扣折叠前后的对应边相等，对应角相等，其解题步骤为：

1. 利用重合的图形传递数据（一般不用重合的图形进行计算）；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $AB=10$ cm.

由折叠的性质可知 $\angle C=\angle DEA=90°$，$CD=DE$，

$AC=AE=6$ cm，故 $BE=10-6=4$（cm）.

设 $CD=x$ cm，则 $DE=x$ cm，$BD=(8-x)$ cm.

在 Rt $\triangle BDE$ 中，由勾股定理得 $x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得 $x=3$.

所以 CD 的长为 3 cm.

2. 选择直角三角形，这个直角三角形一般已知一边，另两边可通过重合图形找到数量关系，进而利用勾股定理列方程求解.

拔尖角度▸ 4 利用计算比较法判断三角形的形状

例 15 如图 1-2-15，E，F 分别是正方形 $ABCD$ 中 BC 和 CD 边上的点，且 $AB=4$，$CE=\frac{1}{4}BC$，F 为 CD 的中点，连接 AF，AE，EF，问：$\triangle AEF$ 是什么三角形？请说明理由.

解题秘方：紧扣勾股定理的逆定理的特征，通过三角形三边长的数量关系进行判断.

解：$\triangle AEF$ 是直角三角形. 理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=CD=AB=BC=4$，$\angle B=\angle D=\angle C=90°$.

$\because CE=\frac{1}{4}BC$，$F$ 为 CD 的中点，

$\therefore CE=1$，$BE=BC-CE=3$，$CF=DF=2$.

$\therefore AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=5$，$EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{5}$，

$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=2\sqrt{5}$.

又 $\because (\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=5^2$，$\therefore EF^2+AF^2=AE^2$.

$\therefore \triangle AEF$ 是直角三角形.

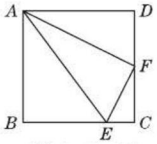


图 1-2-15

挑战·高分

解法提醒

当要判断的三角形三边都未知且给出的条件与边有关时，一般情况下要先借助题目中给出的一些数量关系分别求出三角形三边的长，然后利用勾股定理的逆定理来判断.

拔尖角度▸ 5 利用化折为直法求立体图形中两点间的最短距离

例 16 如图 1-2-16 所示的长方体的高为 4 cm，底面是长为 5 cm、宽为 3 cm 的长方形. 一只蚂蚁从顶点 A 出发，沿长方体的表面爬到顶点 B. 求：

（1）蚂蚁经过的最短路程；

（2）蚂蚁沿着棱爬行（不能重复爬行同一条棱）的最长路程.

解题秘方：利用化折为直法将不同的展开方式进行分类计算，然后比较得出结果.

解：（1）将长方体与顶点 A，B 相关的两个面展开，共有三种方式，如图 1-2-17 所示.

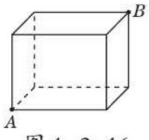


图 1-2-16

挑战·高分

解法点拨

解决几何体表面上两点间的最短路程问题的方法：将几何体表面展开，即将立体几何问题转化为平面几何问题，然后利用“两点之间，线段最短”去确定路线，最后利用勾股定理计算. 它运用的是化折为直的思想方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

若蚂蚁沿侧面爬行，如图 1−2−17 ①，则爬行的最短路程为 $\sqrt{(5+3)^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$（cm）；

若蚂蚁沿侧面和上面爬行，如图 1−2−17 ②③，则爬行的最短路程分别为 $\sqrt{(4+5)^2+3^2}=3\sqrt{10}$（cm），$\sqrt{(4+3)^2+5^2}=\sqrt{74}$（cm）.

∵ $\sqrt{74}<4\sqrt{5}<3\sqrt{10}$，

∴ 蚂蚁经过的最短路程是 $\sqrt{74}$ cm.

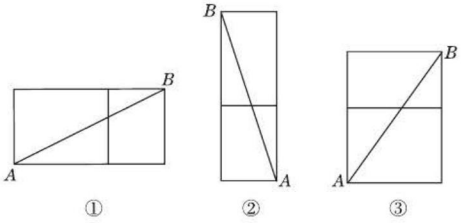


图 1−2−17

（2）∵ 5+4+5+4+3+4+5=30（cm），

∴ 蚂蚁沿着棱爬行（不能重复爬行同一条棱）的最长路程是 30 cm.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

直角三角形是初中数学中一种重要的基本图形，也是中考必考内容，常见考点有直角三角形角的性质定理与判定定理、勾股定理及其逆定理的应用、直角三角形全等的判定等．题型有选择题、填空题、解答题，解答题以证明题为主，也有可能出现以直角三角形为背景的探索题、阅读题等．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用直角三角形角的性质求角的度数

例 17 ［中考·益阳］如图 1−2−18，直线 $AB\parallel CD$，$OA\perp OB$. 若 $\angle 1=142°$，则 $\angle 2=$_____.

试题评析：本题主要考查平行线的性质及直角三角形角的性质，找出已知角与未知角之间的关系是解决问题的关键．

解：∵ $\angle 1=142°$，

∴ $\angle 3=180°-\angle 1=180°-142°=38°$.

∵ $OA\perp OB$，∴ $\angle 3+\angle 4=90°$.

∴ $\angle 4=90°-\angle 3=90°-38°=52°$.

∵ $AB\parallel CD$，

∴ $\angle 2=\angle 4=52°$.

答案：52°

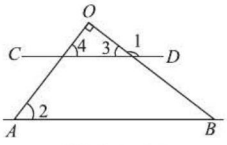


图 1−2−18

方法点拨

直角三角形角的性质主要揭示直角三角形两锐角之间的数量关系，在求直角三角形角的度数时常用到．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用勾股定理解古算术中的求线段长问题

例 18 [中考·荆州]《九章算术》中的“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去根六尺. 问折高者几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈 =10 尺），一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部 6 尺远，问折断处离地面的高度是多少？设折断处离地面的高度为 x 尺，则可列方程为（　　）

A. $x^2-6=(10-x)^2$　　B. $x^2-6^2=(10-x)^2$

C. $x^2+6=(10-x)^2$　　D. $x^2+6^2=(10-x)^2$

试题评析：本题考查的是勾股定理的应用，在应用勾股定理解决实际问题时，与方程结合是常用的方法. 解本题时要从题中抽象出勾股定理的数学模型，画出准确的示意图.

解：如图 1-2-19，由折断处离地面的高度为 x 尺，得 $AC=x$ 尺，$AB=(10-x)$ 尺，又 $BC=6$ 尺，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，即 $x^2+6^2=(10-x)^2$.

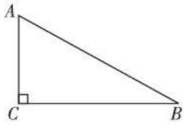


图 1-2-19

答案：D

思路点拨

根据题意画出图形，再利用勾股定理列出方程即可.

考法 3 利用勾股定理的逆定理判断三角形的形状

例 19 [中考·南京]下列长度的三条线段能组成钝角三角形的是（　　）

A. 3，4，4　　B. 3，4，5

C. 3，4，6　　D. 3，4，7

试题评析：本题考查了勾股定理的逆定理——如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形就是直角三角形. 掌握组成钝角三角形的条件是解题的关键.

解：A. 因为 $3+4>4$，且 $3^2+4^2>4^2$，所以三条线段能组成锐角三角形，不符合题意；

B. 因为 $3+4>5$，且 $3^2+4^2=5^2$，所以三条线段能组成直角三角形，不符合题意；

C. 因为 $3+4>6$，且 $3^2+4^2<6^2$，所以三条线段能组成钝角三角形，符合题意；

D. 因为 $3+4=7$，所以三条线段不能组成三角形，不符合题意.

答案：C

思路点拨

在能组成三角形的条件下，若较小两边平方的和等于最大边的平方，则是直角三角形，若较小两边平方的和大于最大边的平方，则是锐角三角形，若较小两边平方的和小于最大边的平方，则是钝角三角形. 依此求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 直角三角形全等的判定

例 20 [中考·芜湖]如图 1-2-20，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，$\angle A=\angle D=90°$，$AC=BD$，AC 与 BD 相交于点 O.

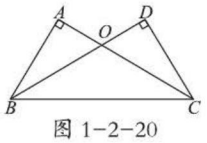


图 1-2-20

（1）求证：$\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

（2）$\triangle OBC$ 是等腰三角形吗？证明你的结论.

试题评析：本题考查了直角三角形全等的判定方法及等腰三角形的判定方法，找准直角三角形中对应相等的“斜边和直角边”是解决问题的关键.

（1）**证明**：$\because\angle A=\angle D=90°$，$\therefore\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 都是直角三角形.

在 Rt $\triangle ABC$ 和 Rt $\triangle DCB$ 中，$\begin{cases}AC=DB,\\BC=CB,\end{cases}$

$\therefore$ Rt $\triangle ABC\cong$ Rt $\triangle DCB$（HL）.

（2）**解**：$\triangle OBC$ 是等腰三角形.

$\because$ Rt $\triangle ABC\cong$ Rt $\triangle DCB$，

$\therefore\angle ACB=\angle DBC$. $\therefore OB=OC$.

$\therefore\triangle OBC$ 是等腰三角形.

技巧点拨

证明两个直角三角形全等时，先考虑利用“HL”来证，若不行，再考虑用其他四种方法求证.

两年模拟兵法 ☞答案见 266 页

1. 下列说法正确的是（　　）

A. 真命题的逆命题也是真命题

B. 每个命题都有逆命题

C. 每个定理都有逆定理

D. 假命题没有逆命题

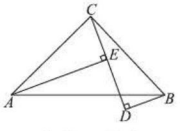
2. [中考·长沙]我国南宋著名数学家秦九韶的著作《数书九章》里记载有这样一道题目：问有沙田一块，有三斜，其中小斜五里，中斜十二里，大斜十三里，欲知为田几何？这道题讲的是：有一块三角形沙田，三条边长分别为 5 里、12 里、13 里，问这块沙田面积有多大？题中的“里”是我国市制长度单位，1 里 =500 米，则该沙田的面积为（　　）

A.7.5 平方千米　　B.15 平方千米

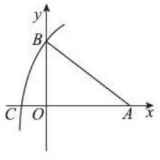
C.75 平方千米　　D.750 平方千米

3. 如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$AE\perp CE$ 于点 E，$BD\perp CE$ 交 CE 的延长线于点 D，$AE=5$ cm，$BD=2$ cm，则 DE 的长是（　　）

A.8 cm　　B.5 cm　　C.3 cm　　D.2 cm



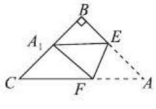
（第 3 题）



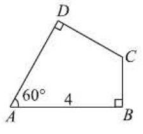
（第 4 题）

4. [中考·吉林]如图，在平面直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别为（4，0），（0，3），以点 A 为圆心，AB 长为半径画弧，交 x 轴的负半轴于点 C，则点 C 的坐标为_____.

5. [中考·阜新]如图，将等腰直角三角形 ABC（$\angle B=90°$）沿 EF 折叠，使点 A 落在 BC 边的中点 A_1 处，$BC=8$，那么线段 AE 的长度为_____.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. [中考·玉林]如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=4$，则 AD 的取值范围是_____.

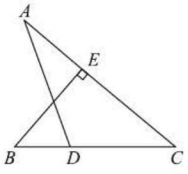
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [**中考·黄冈**]如图，圆柱形玻璃杯高为 14 cm，底面周长为 32 cm. 在杯内壁离杯底 5 cm 的点 B 处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿 3 cm 与蜂蜜相对的点 A 处，则蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短距离为_____cm（杯壁厚度不计）.



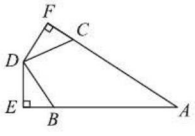
（第 7 题）

8. 如图，已知在△ ADC 中，$\angle A=30°$，$\angle ADC=110°$，$BE\perp AC$，垂足为点 E，求$\angle B$ 的度数.



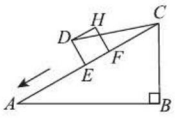
（第 8 题）

9. 如图，已知四边形 $ABDC$，$DE\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E，$DF\perp AC$ 交 AC 的延长线于点 F. 若 $DE=DF$，$AB=AC$，求证：$BE=CF$.



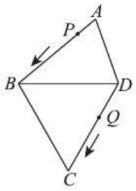
（第 9 题）

10. 一个正方体物体沿斜坡向下滑动，其截面如图所示，正方形 $DEFH$ 的边长为 2 m，$\angle A=30°$，$\angle B=90°$，$BC=6$ m. 连接 DC，当正方形 $DEFH$ 运动到什么位置，即当 AE 为多少米时，有 $DC^2=AE^2+BC^2$？



（第 10 题）

11. 如图，四边形 $ABCD$ 的三边（AB，BC，CD）和 BD 的长度都为 5 cm. 动点 P 从点 A 出发（$A\to B\to D$）到点 D，速度为 2 cm/s；动点 Q 从点 D 出发（$D\to C\to B\to A$）到点 A，速度为 2.8 cm/s. 5 s 后点 P，Q 相距 3 cm，试确定 5 s 时△ APQ 的形状. 【**导学号：2850581**】



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 线段的垂直平分线

核心知识

- 线段垂直平分线的性质定理
- 线段垂直平分线的判定定理
- 三角形三条边的垂直平分线的性质定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 线段垂直平分线的性质定理

1. 性质定理 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

条件：点在线段的垂直平分线上.

结论：这个点到线段两个端点的距离相等.

2. 几何语言 如图 1−3−1,

$\because AD \perp BC$ 于 D，$BD=CD$，$\therefore AB=AC$.

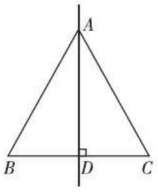


图 1−3−1

3. 线段垂直平分线的性质与角平分线的性质的联系与区别

联系：两者都可以直接得到两条线段相等.

区别：前者指的是点到点的距离，后者指的是点到直线的距离.

提分·必记

特别解读

1. 线段的垂直平分线的性质中的“距离”是“该点与这条线段两个端点的距离”.
2. 用线段的垂直平分线的性质可直接证明线段相等，不必再用三角形全等来证明，因此它为证明线段相等提供了新方法.

拨考向 利用线段垂直平分线的性质求线段的长

例 1 如图 1−3−2，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$ cm，BC 的垂直平分线分别交 AB，BC 于点 D，E，$\triangle ACD$ 的周长为 8 cm，求线段 AC 的长.

解题秘方：利用线段的垂直平分线的性质将要求的线段向已知条件转化.

解：$\because DE$ 为 BC 的垂直平分线，

$\therefore CD=BD$.

$\therefore \triangle ACD$ 的周长 $=AC+AD+CD=AC+AD+BD=AC+AB=8$ cm.

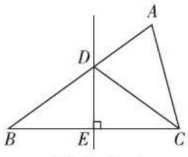


图 1−3−2

$\because AB=5$ cm，$\therefore AC=3$ cm.

提分·秘诀

解法指导

利用线段的垂直平分线的性质转化线段的位置，是一种常用的解题方法. 本题中解题的关键是利用线段垂直平分线的性质，将 $\triangle ACD$ 的周长转化为线段 AB 和 AC 长的和进行求解.

点知识 2 线段垂直平分线的判定定理

1. 判定定理 到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

条件：点到线段两个端点距离相等.

结论：点在线段的垂直平分线上.

2. 几何语言 如图 1−3−3，$\because AB=AC$,

$\therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上.

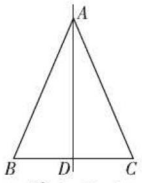


图 1−3−3

提分·必记

特别解读

1. 用定义法证明一个点在一条线段的垂直平分线上，思路有两种：一是作垂直，证平分；二是取中点，证垂直.
2. 用判定定理证明线段的垂直平分线，必须证明两个点在线段的垂直平分线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用线段的垂直平分线的判定证明两直线的位置关系

例 2 如图 1−3−4，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，交 BC 于点 D，$AE=AF$，请判断线段 AD 所在的直线是否为线段 EF 的垂直平分线．若是，请给予证明；若不是，请说明理由．

解题秘方：紧扣线段的垂直平分线的判定，证明直线 AD 上的点 A 和点 D 到线段 EF 的两个端点的距离相等即可．

解：线段 AD 所在的直线是线段 EF 的垂直平分线．如图 1−3−4，连接 DE，DF.

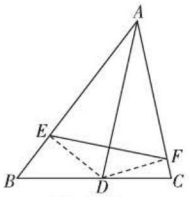


图 1−3−4

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle EAD=\angle FAD$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中，$\begin{cases} AE=AF, \\ \angle EAD=\angle FAD, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$（SAS）．

$\therefore DE=DF$.

$\therefore$ 点 D 在线段 EF 的垂直平分线上．

$\because AE=AF$，

$\therefore$ 点 A 在线段 EF 的垂直平分线上．

$\therefore$ 线段 AD 所在的直线是线段 EF 的垂直平分线．

切忌只证明一个点在线段的垂直平分线上，就说过该点的直线是线段的垂直平分线．

提分·秘诀

教你一招

判断线段垂直平分线的两种方法：一是定义法，二是判定定理．一般习惯用定义法进行判断，而利用判定定理判断更简单．用判定定理判定一条直线是线段的垂直平分线时，一定要证明直线上有两点到线段两个端点的距离相等．

知识▶3 三角形三条边的垂直平分线的性质定理

性质定理 三角形三条边的垂直平分线相交于一点，并且这一点到三个顶点的距离相等．

符号语言 如图 1−3−5，$\because$ 直线 MN，EF，PQ 分别垂直平分 BC，AB，AC，$\therefore$ 直线 MN，EF，PQ 相交于一点 O，且 $OA=OB=OC$.

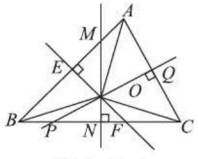
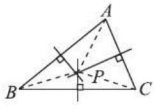


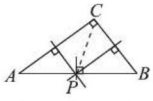
图 1−3−5

拓展 几种三角形三条边的垂直平分线交点的情况如图 1−3−6 所示．



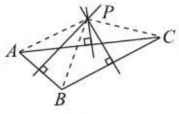
锐角三角形三条边的垂直平分线交于三角形内部一点

（1）



直角三角形三条边的垂直平分线交于三角形斜边中点处

（2）



钝角三角形三条边的垂直平分线交于三角形外部一点

（3）

图 1−3−6

提分·必记

特别解读

因为三角形任意两条边的垂直平分线一定交于一点，所以要证明三角形三条边的垂直平分线的性质，只要证明这个交点在第三条边的垂直平分线上即可．该性质综合了线段垂直平分线的性质定理和判定定理，是这两个定理的升华，同时也给出了判定三线共点的一种特殊方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用三角形三条边的垂直平分线的性质解决实际问题

例 3 某地准备建一所希望小学，支援贫困地区的教育，要求希望小学的位置到三个村庄 A，B，C 的距离相等，如图 1−3−7 所示，你能帮助村民确定希望小学的位置吗？



图 1−3−7

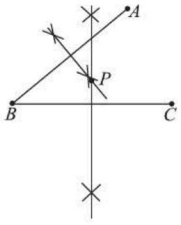


图 1−3−8

解题秘方：紧扣三角形三条边的垂直平分线的性质，作两边的垂直平分线，交点为所求的点．

解：如图 1−3−8 所示．

（1）连接 AB，BC；

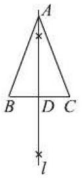
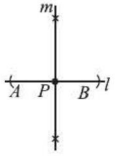
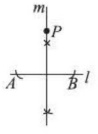
（2）分别作线段 AB，BC 的垂直平分线，这两条垂直平分线交于点 P，则点 P 即为所求希望小学的位置．

提分·秘诀

特别解读

三角形三条边的垂直平分线的交点到三个顶点的距离相等，这一性质在现实生活中有广泛的应用．

知识▶4 用尺规作已知直线（或线段）的垂线

作图	已知、求作	作法
作等腰三角形	已知：如图，线段 a，h. 求作：△ABC，使 $AB=AC$，$BC=a$，高 $AD=h$. a　　h	（1）如图，作线段 $BC=a$. （2）作线段 BC 的垂直平分线 l，交 BC 于点 D. （3）在 l 上作线段 DA，使 $DA=h$. （4）连接 AB，AC. △ABC 为所求的等腰三角形． 
过直线上一点作直线的垂线	已知：如图，直线 l 和 l 上一点 P. 求作：直线 l 的垂线，使它过点 P. P　l	（1）如图，以点 P 为圆心，适当长为半径作弧，交直线 l 于点 A，B. （2）作线段 AB 的垂直平分线 m，直线 m 为所求的垂线． 
过直线外一点作直线的垂线	已知：如图，直线 l 和 l 外一点 P. 求作：直线 l 的垂线，使它过点 P. P l	（1）如图，以点 P 为圆心，适当长为半径画弧，交直线 l 于点 A，B. （2）作线段 AB 的垂直平分线 m，直线 m 为所求的垂线． 

提分·必记

知识链接

尺规作图是指用没有刻度的直尺和圆规作图．

归纳总结

作图题的一般思路：

（1）假设所求作的图形已作出，画出草图；

（2）在草图上标出已知的边、角的对应位置及规定的点字母；

（3）从草图中找出可作的基本图形，确定作图顺序；

（4）按确定的顺序作出所求作的图形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▸利用尺规作垂线的方法进行作图与计算

例 4 如图 1-3-9，已知线段 a.

（1）只用直尺（没有刻度）和圆规，求作一个直角三角形 ABC，以 AB 和 BC 为两条直角边，使 $AB=a$，$BC=\frac{1}{2}a$（要求保留作图痕迹，不必写出作法）；

（2）若在（1）作出的 Rt△ABC 中，$AB=4$ cm，求 AC 边上的高.



图 1-3-9

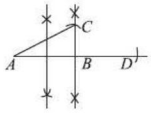


图 1-3-10

解题秘方：紧扣尺规作图作线段垂直平分线及过直线上一点作已知直线的垂线的步骤作出三角形，并按提供的数据求高.

解：（1）作图如图 1-3-10，△ABC 即为所求作的直角三角形.

（2）∵ $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times4=2$（cm），

∴由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$（cm）.

设斜边 AC 上的高为 h cm，

则根据△ABC 的面积得 $\frac{1}{2}\times4\times2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times h$，

解得 $h=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∴ AC 边上的高为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ cm.

提分·秘诀

思路导引

（1）首先作线段 $AB=a$，要得到 $\frac{1}{2}a$，应再作线段 AB 的垂直平分线；然后过点 B 作出线段 AB 的垂线，可以以点 B 为圆心，a 为半径画弧，交 AB 的延长线于点 D，作 AD 的垂直平分线即可得到过点 B 的线段 AB 的垂线；最后以 B 为圆心，以 $\frac{1}{2}a$ 为半径画弧，与线段 AB 的垂线相交于点 C，连接 AC，△ABC 即为所求作的直角三角形.

（2）利用勾股定理求出 AC，再利用面积法求出 AC 边上的高.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸[1] 利用截长补短法证明线段的和差关系

例 5 如图 1-3-11，在△ABC 中，$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于点 D. 求证：$CD=AB+BD$.

解题秘方：紧扣截长补短法截取相等线段，再结合线段垂直平分线的性质求证.

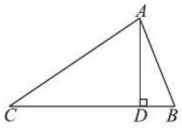


图 1-3-11

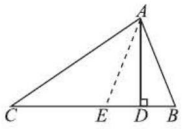


图 1-3-12

证明：如图 1-3-12，在 CD 上截取 $DE=DB$，连接 AE.

∵ $AD\perp BC$，∴ AD 垂直平分线段 BE.

挑战·高分

另解

如图 1-3-13，延长 DB 至点 N，使得 DN=DC，连接 AN.

∵ AD ⊥ BC，

∴ AD 垂直平分线段 CN.

∴ AC=AN，∴∠C= ∠N.

∵∠ABC= ∠1+ ∠N=2∠C，

∴∠1= ∠N，∴ AB=BN.

∴ CD=DN=BN+DB=AB+BD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AB=AE$，$\angle B=\angle AEB$.

$\because \angle B=2\angle C$，$\therefore \angle AEB=2\angle C$.

$\because \angle AEB=\angle C+\angle EAC$,

$\therefore \angle C=\angle EAC$，$\therefore AE=EC$，即 $AB=CE$.

$\because CD=CE+DE$，$\therefore CD=AB+BD$.

解题通法：证明线段和差的常用策略.

证明线段的和差常采用的方法是“截长补短法”. 在有垂直的条件下截取相等线段，构造线段的垂直平分线，从而利用线段垂直平分线的性质得到其他相等线段，进而利用等腰三角形的判定与性质求证.

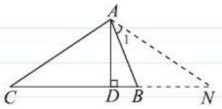


图 1−3−13

拔尖角度▸ 2 利用转化思想求线段的长

挑战·高分

例 6 如图 1−3−14，已知在△ ABC 中，$\angle C=90°$，AB 的垂直平分线交 BC 于点 M，交 AB 于点 N，若 $AC=\sqrt{3}$，$MB=2MC$，求 AB 的长.

解题秘方：紧扣线段垂直平分线的性质，将相等的线段进行转化，利用勾股定理求出线段长.

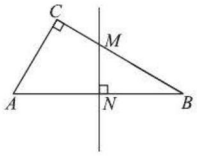


图 1−3−14

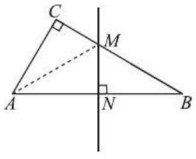


图 1−3−15

解：如图 1−3−15，连接 AM.

$\because$ 点 M 在线段 AB 的垂直平分线上，

$\therefore MA=MB=2MC$.

$\because \angle C=90°$，

$\therefore$ 在 Rt△ ACM 中，$AC^2+MC^2=MA^2$，即 $3+MC^2=4MC^2$，

解得 $MC=1$.

$\therefore MB=2MC=2$.

$\therefore BC=3$.

在 Rt△ ABC 中，由勾股定理可得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$，

即 AB 的长为 $2\sqrt{3}$.

技巧点拨

转化思想与线段垂直平分线性质的综合：本题运用了转化思想，借助线段垂直平分线的性质把 MB 与 MC 的关系转化为 MA 与 MC 的关系，从而可以借助勾股定理在 Rt△ AMC 中求出 MC 的长，进而求出 AB 的长，使问题得到解决.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

线段垂直平分线的性质定理的应用是本节的重点内容，近几年中考常将线段垂直平分线与其他知识综合在一起考查. 若简单考查，常与三角形的周长相结合，题目难度不大，题型主要是选择题和填空题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用线段垂直平分线的性质定理求角的度数

例7 [中考·深圳]如图1-3-16，已知线段AB，分别以A，B为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧，连接弧的交点得到直线l. 在直线l上取一点C，使得$\angle CAB=25°$，延长AC至M，则$\angle BCM$的度数为（　　）

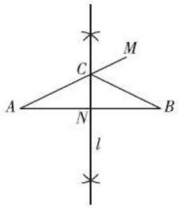


图1-3-16

A.40°　　B.50°　　C.60°　　D.70°

试题评析：本题考查了线段垂直平分线的性质定理，解题的关键是利用线段垂直平分线的性质定理得到线段相等，进而转化为角相等.

解：根据作图可知，直线l是线段AB的垂直平分线，$\therefore AC=BC$.

$\therefore \angle A=\angle B$.

$\therefore \angle BCM=2\angle A=2\times 25°=50°$.

答案：B

解法提醒

线段垂直平分线的性质不仅可以证明线段相等，还可以借助线段相等，得到角相等，从而求一些相关角的度数.

考法2 利用线段垂直平分线的性质定理求线段的长

例8 [中考·恩施州]如图1-3-17，在$\triangle ABC$中，DE是AC的垂直平分线，$\triangle ABC$的周长为19 cm，$\triangle ABD$的周长为13 cm，则AE的长为（　　）

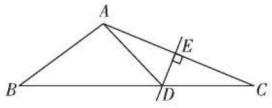


图1-3-17

A. 3 cm　　B. 6 cm　　C. 12 cm　　D. 16 cm

试题评析：本题考查线段垂直平分线的性质定理，利用线段垂直平分线的性质定理转化线段的数量关系.

解：$\because DE$是AC的垂直平分线，

$\therefore AE=CE$，$AD=CD$.

$\because \triangle ABD$的周长$C_1=AB+BD+AD=AB+BD+CD=AB+BC=13$ cm，

$\triangle ABC$的周长$C_2=AB+BC+AC=19$ cm，

$\therefore AC=6$ cm. $\therefore AE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 6=3$（cm）.

答案：A

解法提醒

三角形一边的垂直平分线与另一边相交于一点，此点与三角形第三边的两个端点构成的三角形的周长等于原三角形的两边之和. 如例8中，$\triangle ABD$的周长$C_1=AB+BC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用作线段的垂直平分线解决实际问题

例 9 [中考·绥化]如图 1-3-18，A，B，C 为某公园的三个景点，景点 A 和景点 B 之间有一条笔直的小路，现要在小路上建一个凉亭 P，使景点 B、景点 C 到凉亭 P 的距离之和等于景点 B 到景点 A 的距离，请用直尺和圆规在所给图中作出点 P.（不写作法和证明，只保留作图痕迹）

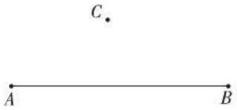


图 1-3-18

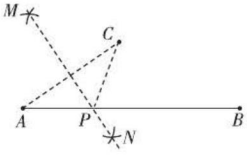


图 1-3-19

试题评析：本题考查了基本作图、线段的垂直平分线的性质等知识，解题的关键是深入理解线段垂直平分线的性质.

解：如图 1-3-19，点 P 即为所求的点.

特别提醒

利用作线段的垂直平分线解决实际问题，关键要分析出解决问题时需要作哪条线段的垂直平分线.

两年模拟兵法 ☞答案见 267 页

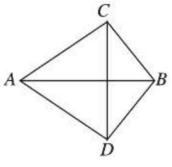
1. 如图，已知 $AC=AD$，$BC=BD$，则有（　　）

A. AB 垂直平分 CD

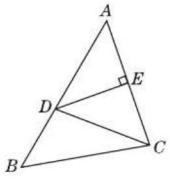
B. CD 垂直平分 AB

C. AB 与 CD 互相垂直平分

D. CD 平分 $\angle ACB$



（第 1 题）



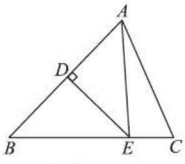
（第 2 题）

2. [中考·黄石]如图，线段 AC 的垂直平分线交线段 AB 于点 D，垂足为点 E，$\angle A=50°$，则 $\angle BDC$ 等于（　　）

A. 50°　　B. 100°

C. 120°　　D. 130°

3. [中考·南充]如图，在 $\triangle ABC$ 中，AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 BC 于点 E. 若 $BC=6$，$AC=5$，则 $\triangle ACE$ 的周长为（　　）



（第 3 题）

A. 8　　B. 11　　C. 16　　D. 17

4. 锐角三角形 ABC 内有一点 P，满足 $PA=PB=PC$，则点 P 是 $\triangle ABC$（　　）

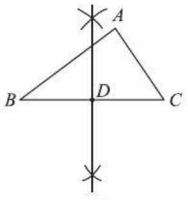
A. 三条角平分线的交点

B. 三条中线的交点

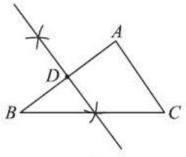
C. 三条高的交点

D. 三边垂直平分线的交点

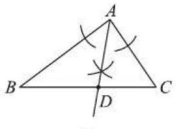
5. [中考·宜昌]通过如下尺规作图，能确定点 D 是 BC 边中点的是（　　）



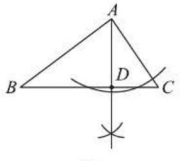
A



B



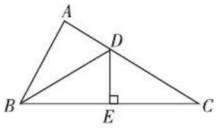
C



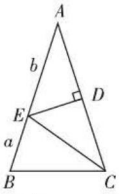
D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.[中考·徐州]如图，在△ABC中，∠C=31°，∠ABC的平分线BD交AC于点D. 如果DE垂直平分BC，那么∠A=_____°.



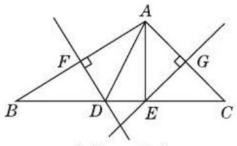
（第6题）



（第7题）

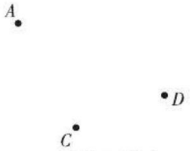
7.[中考·益阳]如图，在△ABC中，AB=AC，∠BAC=36°，DE是线段AC的垂直平分线. 若BE=a，AE=b，则用含a，b的式子表示△ABC的周长为_____.

8. 如图，在△ABC中，AB，AC的垂直平分线分别交BC于点D，E，垂足分别为F，G. 已知△ADE的周长为12 cm，则BC=_____.



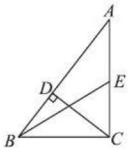
（第8题）

9. 如图，某城区有A,B两所学校，在距学校不远处有C,D两家机关单位，现在要在它们之间安装一个邮筒，使得这个邮筒到A,B两所学校的距离相等，同时到C,D两家机关单位的距离也相等，请在图中标出邮筒的位置. 【导学号：2850581】



（第9题）

10.[中考·攀枝花]如图，在△ABC中，CD是AB边上的高，BE是AC边上的中线，且BD = CE. 求证：（1）点D在线段BE的垂直平分线上；（提示：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）（2）∠BEC = 3∠ABE.



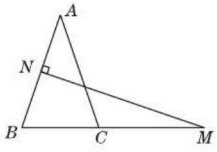
（第10题）

11. 如图，在△ABC中，AB=AC，AB的垂直平分线交AB于点N，交BC的延长线于点M.

（1）若∠A=40°，求∠NMB的度数.

（2）如果将（1）中∠A的度数改为70°，其余条件不变，求∠NMB的度数.

（3）由（1）（2）你发现了什么规律？请说明理由.



（第11题）

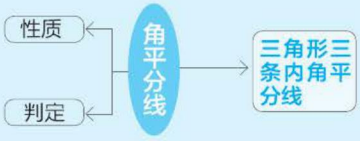
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 角平分线

核心知识

- 角平分线的性质定理
- 角平分线的判定定理
- 三角形三条内角平分线的性质定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 角平分线的性质定理

1. 性质定理 角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

角平分线的性质的两个必要条件:

(1) 点在角平分线上;

(2) 这个点到角两边的距离,即点到角的两边垂线段的长度.

两者缺一不可.

2. 几何语言 如图 1-4-1,

$\because OP$ 平分$\angle AOB$, $PD \perp OA$ 于点 D,

$PE \perp OB$ 于点 E,

$\therefore PD=PE$.

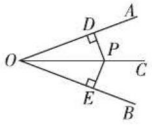


图 1-4-1

提分·必记

特别提醒

- 角平分线的性质是由两个条件(角平分线,垂线)得到一个结论(线段相等).
- 利用角的平分线的性质证明线段相等时,证明的线段是"垂直于角两边的线段",而不是"垂直于角平分线的线段".

拨考向 利用角平分线的性质定理解与垂线段相关的问题

题型 1: 角平分线的性质定理在证明线段相等中的应用

例 1 如图 1-4-2, OD 平分$\angle EOF$, 在 OE, OF 上分别取点 A, B, 使 $OA=OB$, P 为 OD 上一点, $PM \perp BD$, $PN \perp AD$, 垂足分别为 M, N.

求证: $PM=PN$.

解题秘方: 在图中找出符合角平分线性质的模型,利用角平分线的性质定理证线段相等.

证明: $\because OD$ 平分$\angle EOF$, $\therefore \angle BOD=\angle AOD$.

在$\triangle BOD$ 和$\triangle AOD$ 中,

$$\begin{cases} OB=OA, \\ \angle BOD=\angle AOD, \\ OD=OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOD \cong \triangle AOD$ (SAS).

$\therefore \angle BDO=\angle ADO$, 即 DO 平分$\angle BDA$.

又 $\because P$ 为 DO 上一点, 且 $PM \perp BD$, $PN \perp AD$, $\therefore PM=PN$.

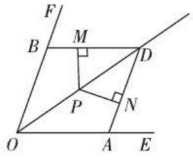


图 1-4-2

提分·秘诀

方法点拨

1. 在证明两条线段相等时,若两条线段分别在两个三角形中,可考虑使用三角形全等或角的平分线的性质.若条件中有垂直和角平分线,则优先考虑使用角的平分线的性质.
2. 运用角的平分线的性质证明线段相等时,不需要利用三角形全等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型 2：角平分线的性质定理在求三角形周长中的应用

例 2 如图 1−4−3，△ ABC 中，∠ C=90°，AC=BC，AD 平分∠ CAB，交 BC 于点 D，DE ⊥ AB，垂足为 E. 若 AB=8 cm，求△ DEB 的周长.

解题秘方：运用角平分线的性质定理及全等三角形的性质，将△ DEB 的周长转化为线段 AB 的长.

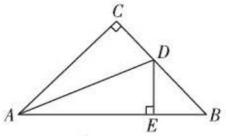


图 1−4−3

解：在△ ABC 中，∠ C=90°，∴ DC ⊥ AC.

∵ DE ⊥ AB，AD 平分∠ CAB，∴ DC=DE.

在 Rt△ ACD 和 Rt△ AED 中，$\begin{cases} AD=AD, \\ DC=DE, \end{cases}$

∴ Rt△ ACD ≌ Rt△ AED（HL）. ∴ AC=AE.

∵ AC=BC，∴ AE=BC.

∴ △ DEB 的周长 C=DE+DB+EB=DC+DB+EB=BC+EB=AE+EB=AB=8 cm.

题型 3：角平分线的性质定理在求涉及面积问题的线段长中的应用

例 3 如图 1−4−4，BD 是△ ABC 的角平分线，DE ⊥ AB 于 E，$S_{\triangle ABC}$=90 cm²，AB=18 cm，BC=12 cm，求 DE 的长.

解题秘方：紧扣总体面积等于各部分面积的和求解.

解：如图 1−4−4，过点 D 作 DF ⊥ BC，垂足为 F.

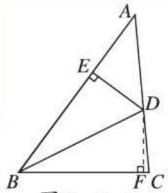


图 1−4−4

∵ BD 是∠ ABC 的平分线，DE ⊥ AB，

∴ DE=DF.

又∵ $S_{\triangle ABC}$=$S_{\triangle ABD}$+$S_{\triangle BDC}$=$\frac{1}{2}$×18×DE+$\frac{1}{2}$×12×DF=90 cm²，

∴ DE=6 cm.

点知识 2 角平分线的判定定理

1. **判定定理** 在一个角的内部，到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

2. **几何语言** 如图 1−4−5，

∵ 点 P 为 ∠ AOB 内一点，PD ⊥ OA，PE ⊥ OB，垂足分别为 D，E，且 PD=PE，

∴点 P 在∠ AOB 的平分线 OC 上.

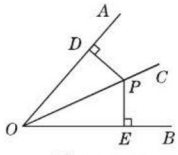


图 1−4−5

3. **角平分线的判定定理与性质定理的关系**

（1）如图 1−4−5，都与距离有关，即条件 PD ⊥ OA，PE ⊥ OB 都具备；

（2）点在角的平分线上 $\underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}}$（角的内部的）点到角两边的距离相等.

解法提醒

求三角形的周长时，若三角形各边的长不易求解，可考虑找出题中的相等线段进行等量替换. 角平分线的性质能起到等量替换的作用，它可使三角形的周长等于一条线段的长，从而整体求出.

方法点拨

运用角平分线的性质解决问题时，条件中必须有角平分线性质的模型（即两个必要条件），若缺少某个部分，则要通过作辅助线补充完整，才能运用此性质解决问题.

提分·必记

特别提醒

1. 使用该判定定理的前提是这个点必须在角的内部.
2. 角的平分线的判定是由两个条件（垂线，线段相等）得到一个结论（角平分线）.
3. 角的平分线的判定定理是证明两角相等的重要依据，它比利用三角形全等证两角相等更方便快捷.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用角平分线的判定定理证明角平分线

例4 如图1-4-6，$BE=CF$，$BF\perp AC$于点F，$CE\perp AB$于点E，BF和CE交于点D. 求证：AD平分$\angle BAC$.

解题秘方：利用角平分线的判定定理证明角平分线时，紧扣点在角的内部且点到角两边的距离相等进行证明.

证明：$\because BF\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90^\circ$.

在$\triangle BDE$和$\triangle CDF$中，

$$\begin{cases}\angle BDE=\angle CDF,\\ \angle DEB=\angle DFC,\\ BE=CF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$（AAS）. $\therefore DE=DF$.

又$\because BF\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore AD$平分$\angle BAC$.

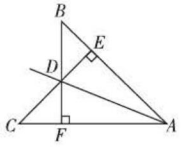


图1-4-6

提分·秘诀

方法点拨

证明角平分线的方法

思路：

1. 从数量上证明被角平分线分成的两个角相等.
2. 从形上证明角的内部的点到角两边的距离相等，即只需从要证的线上的某一点向角的两边作垂线段，再证明垂线段相等即可. 这样把证“某线是角的平分线”的问题转化为证“垂线段相等”的问题，体现了**转化思想**.

知识点3 三角形的角平分线的性质定理

1. 性质定理 三角形的三条角平分线相交于一点，并且这一点到三条边的距离相等.

2. 几何语言

如图1-4-7，在$\triangle ABC$中，AD，BM，CN分别是$\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线，AD，BM，CN交于一点O，且点O到三边BC，AB，AC的距离（OE，OG，OF的长）相等，即$OE=OG=OF$.

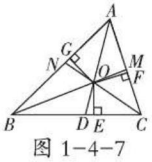


图1-4-7

提分·必记

要点解读

三角形的三条角平分线相交于三角形内一点，且该点到三角形三边的距离相等. 反之，三角形内部到三边距离相等的点是三角形三条角平分线的交点.

核心考向▶利用角平分线的判定定理和性质定理判定三角形的角平分线

例5 如图1-4-8，$\angle MAC$和$\angle NCA$是$\triangle ABC$的外角，$\angle ABC$的平分线BD与$\angle MAC$的平分线AD交于点D.

求证：CD平分$\angle ACN$.

解题秘方：紧扣“到CA，CN的距离相等的点在$\angle ACN$的平分线上”进行证明.

证明：如图1-4-8，作$DE\perp BM$于点E，$DF\perp BN$于点F，$DG\perp AC$于点G.

$\because BD$平分$\angle ABC$，$\therefore DE=DF$.

$\because AD$平分$\angle MAC$，

$\therefore DE=DG$.

$\therefore DG=DF$，

$\therefore CD$平分$\angle ACN$.

由此例的结论可知，三角形的一条内角平分线与两条外角平分线也相交于一点.

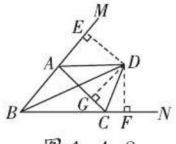


图1-4-8

提分·秘诀

方法点拨

角平分线的性质与判定都离不开“点到角两边的距离”，所以过点作角两边的垂线是运用角平分线性质或判定最常见的辅助线. 因此，常将证角平分线转化为证垂线段相等；反之，也常将证垂线段相等转化为证角平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用转化思想证明含角平分线图形中角的和差关系

例6 如图1−4−9，∠1=∠2，P为BN上一点，且$PD\perp BC$于D，$AB+BC=2BD$. 求证：∠BAP+∠BCP=180°.

解题秘方：要证明两个角的和是180°，可把它们转化到一起，利用三角形全等的性质证它们是邻补角.

证明：如图1−4−9. 过P作$PE\perp BA$于E.

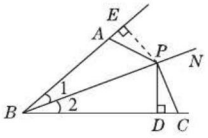


图1−4−9

∵ $PD\perp BC$，$PE\perp BA$，∠1=∠2，

∴ $PE=PD$.

在Rt△BPE和Rt△BPD中，$\begin{cases}BP=BP,\\PE=PD,\end{cases}$

∴ Rt△BPE≌Rt△BPD（HL）.

∴ $BE=BD$.

∵ $AB+BC=2BD$，$BC=CD+BD$，$AB=BE-AE$，

∴ $AE=CD$.

∵ $PE\perp BE$，$PD\perp BC$，∴∠PEA=∠PDC=90°.

在△PEA和△PDC中，$\begin{cases}PE=PD,\\\angle PEA=\angle PDC,\\AE=CD,\end{cases}$

∴ △PEA≌△PDC（SAS）.

∴∠EAP=∠BCP.

∵∠BAP+∠EAP=180°，∴∠BAP+∠BCP=180°.

挑战·高分

解法提醒

本题运用转化思想进行证明. 当遇到证明两角的和是180°的问题时，往往将其转化为证明平角或三角形内角和的问题. 本题根据角平分线的性质想到从点P向∠ABC的两边中无垂线的一边作垂线，构造直角三角形，证明两直角三角形全等，从而将两个角的和转化为一个平角，进而得出结论.

拔尖角度 2 利用面积法求三角形中的距离

例7 如图1−4−10，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，AB=5，BC=3，AC=4. 点P是∠BAC，∠ABC的平分线的交点，试求点P到AB边的距离.

解题秘方：运用面积法求点到三角形各边的距离.

解：如图1−4−10，连接PC.

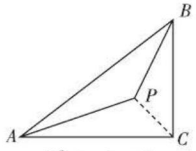


图1−4−10

∵点P是∠BAC，∠ABC的平分线的交点，

∴点P到△ABC的三边的距离相等.

设点P到△ABC的三边的距离为h，

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AC\cdot h+\frac{1}{2}BC\cdot h+\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}BC\cdot AC$，即$\frac{1}{2}\times(4+3+5)\times h=\frac{1}{2}\times3\times4$.

∴ h=1，即点P到AB边的距离为1.

挑战·高分

方法点拨

面积法求三角形的角平分线的交点到三边的距离的方法：

三角形角平分线的交点与三角形三个顶点的连线把原三角形分割成了三个小三角形，利用三个小三角形的面积之和等于原三角形的面积列式求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用等线段证角平分线法判定角平分线

例 8 如图 1-4-11，在△ ABC 的外部，分别以 AB，AC 为边作等边三角形 ABD 和等边三角形 ACE，CD，BE 相交于点 O.

求证：OA 平分∠ DOE.

解题秘方：证明某角的平分线，可转化为证明该线上的点到角两边的距离相等.

证明：如图 1-4-11，过点 A 作 $AM \perp CD$，$AN \perp BE$，垂足分别为 M，N.

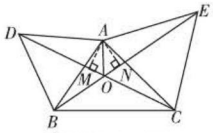


图 1-4-11

∵△ ABD 和△ ACE 为等边三角形，

∴ $AB=AD$，∠ BAD= ∠ $EAC=60°$，$AE=AC$.

∴∠ BAE= ∠ DAC. ∴△ ABE ≌△ ADC（SAS）.

∴ $BE=CD$，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADC}$. ∴ $\frac{1}{2}BE \cdot AN=\frac{1}{2}DC \cdot AM$，∴ $AM=AN$.

又∵ $AM \perp DO$，$AN \perp EO$，∴ OA 平分∠ DOE.

挑战·高分

方法点拨

等线段证角平分线法：

等线段证角平分线法就是利用角的内部到角两边的距离相等的点在角的平分线上这一定理，通过证明点到角的两边距离相等从而得到点在角的平分线上，即距离相等→角平分线.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

角的平分线的性质与判定，在中考中一般不单独命题，常与线段的垂直平分线、三角形全等及圆等其他几何知识综合考查，主要以填空题、解答题等形式出现，属于低、中档题目. 尺规作角平分线及证明，近几年中考主要以选择题、填空题或解答题的形式出现，以考查应用角平分线的性质求距离或考查基本画图为主，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用角平分线的判定定理和性质定理求角的度数

例 9 [中考·大庆]如图 1-4-12，∠ B= ∠ $C=90°$，M 是 BC 的中点，DM 平分∠ ADC，且∠ $ADC=110°$，则∠ MAB=（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°

试题评析：本题主要考查的是角平分线的性质定理和判定定理，利用角平分线上的点到角的两边的距离相等构造角平分线的基本模型是解题的关键.

解：如图 1-4-12，过点 M 作 $MN \perp AD$ 于点 N，

∵∠ B= ∠ $C=90°$，∴∠ B+ ∠ $C=180°$.

∴ $AB \parallel CD$. ∴∠ $DAB=180°$ − ∠ $ADC=70°$.

∵ DM 平分∠ ADC，$MN \perp AD$，$MC \perp CD$，

∴ $MN=MC$.

∵ M 是 BC 的中点，∴ $MC=MB$. ∴ $MN=MB$.

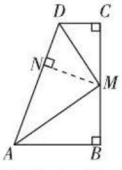


图 1-4-12

又∵ $MN \perp AD$，$MB \perp AB$，∴∠ $MAB=\frac{1}{2}$∠ $DAB=35°$.

答案：B

冲刺·满分

解法提醒

角平分线的判定定理和性质定理运用的基本模型，一有角平分线，二有过角平分线上的点作角两边的垂线. 运用此判定和性质解决问题时，若基本模型不齐全，可通过作辅助线构造出基本模型.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用尺规作图及角平分线的性质定理求三角形的面积

例 10 [中考·枣庄]如图 1-4-13，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，以顶点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，AB 于点 M，N，再分别以 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 BC 于点 D. 若 CD=4，AB=15，则△ ABD 的面积为(　　)

A.15　　B.30　　C.45　　D.60

试题评析：本题考查了角平分线的性质以及角平分线的画法，熟记性质是解题的关键.

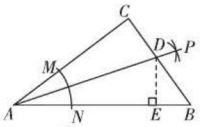


图 1-4-13

解：由题意得 AP 是∠ BAC 的平分线，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E，如图 1-4-13 所示.

∵∠ C=90°，

∴ DE=CD=4.

∴△ ABD 的面积 $=\frac{1}{2}AB \cdot DE=\frac{1}{2}\times 15\times 4=30$.

答案：B

考法 3 利用线段垂直平分线和角平分线的性质解题

例 11 [中考·湘潭]如图 1-4-14，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，BD 平分∠ ABC 交 AC 于点 D，DE 垂直平分 AB，垂足为点 E. 请任意写出一组相等的线段：_____.

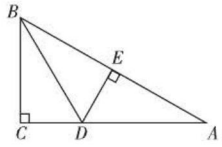


图 1-4-14

试题评析：本题考查了全等三角形的判定和性质、角平分线的性质、线段垂直平分线的性质. 可依据条件证明△ BDE ≌△ BDC，从而得到线段相等，也可利用角平分线的性质或线段垂直平分线的性质得到线段相等.

解：∵ DE 垂直平分 AB，

∴ AE=BE，∠ BED=90°，AD=BD.

∵∠ C=90°，BD 平分∠ CBA，

∴ CD=ED.

又∵ BD=BD，

∴ Rt △ BDE ≌ Rt △ BDC（HL）.

∴ BC=BE.

∴ BC=AE.

答案：AE=BE 或 AD=BD 或 CD=ED 或 BC=BE 或 BC=AE

考法点评

角平分线的性质定理揭示了两条线段之间的相等关系，而这两条线段都是垂线段，所以考查时一是用来求线段长，二是用来解决三角形的面积问题.

方法点拨

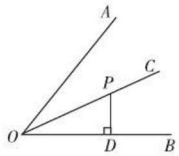
线段的垂直平分线的性质以及角平分线的性质都是揭示两条线段相等，只要具备模型就可直接应用，不需再证三角形全等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

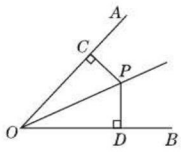
两年模拟兵法 ☞答案见268页

1. [中考·台州]如图，点P是$\angle AOB$的平分线OC上一点，$PD\perp OB$，垂足为D. 若$PD=2$，则点P到边OA的距离是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 4



（第1题）



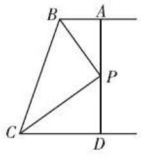
（第2题）

2. [中考·怀化]如图，OP为$\angle AOB$的平分线，$PC\perp OA$，$PD\perp OB$，垂足分别是C，D，则下列结论错误的是（　　）

A. $PC=PD$　　B. $\angle CPO=\angle DOP$

C. $\angle CPO=\angle DPO$　　D. $OC=OD$

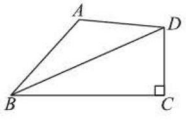
3. [中考·湖州]如图，$AB\parallel CD$，BP和CP分别平分$\angle ABC$和$\angle DCB$，AD过点P，且与AB垂直. 若$AD=8$，则点P到BC的距离是（　　）



（第3题）

A. 8　　B.6　　C.4　　D.2

4. [中考·湖州]如图，已知在四边形$ABCD$中，$\angle BCD=90°$，BD平分$\angle ABC$，$AB=6$，$BC=9$，$CD=4$，则四边形$ABCD$的面积是（　　）

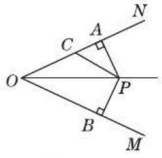


（第4题）

A. 24　　B.30

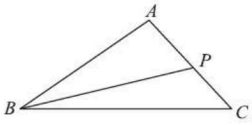
C.36　　D.42

5. 如图，已知$PA\perp ON$于A，$PB\perp OM$于B，且$PA=PB$，$\angle MON=50°$，$\angle OPC=30°$，求$\angle PCA$的大小.



（第5题）

6. [中考·甘肃]如图，在$\triangle ABC$中，点P是AC上一点，连接BP，求作一点M，使得点M到AB和AC两边的距离相等，并且到点B和点P的距离相等（不写作法，保留作图痕迹）.

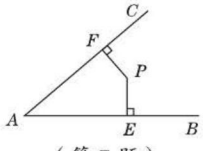


（第6题）

7. [中考·怀化]如图，P是$\angle BAC$内一点，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别为点E，F，$AE=AF$. 求证：

（1）$PE=PF$；

（2）点P在$\angle BAC$的平分线上.



（第7题）

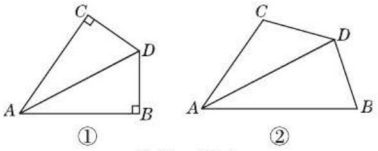
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.[中考·长春]感知：如图①，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle B=90°$.

易知：$DB=DC$.

探究：如图②，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle ABD+\angle ACD=180°$，$\angle ABD<90°$.

求证：$DB=DC$.　　【导学号：2850581】

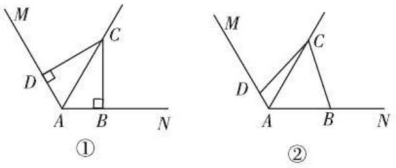


（第 8 题）

9. 如图，已知 $\angle MAN$，AC 平分 $\angle MAN$.

（1）在图①中，若 $\angle MAN=120°$，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，求证：$AB+AD=AC$.

（2）在图②中，若 $\angle MAN=120°$，$\angle ABC+\angle ADC=180°$，则（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.



（第 9 题）

素养提分　行动篇

倒过来想

司马光，北宋政治家、史学家、文学家，主持编纂了中国历史上第一部编年体通史《资治通鉴》. 他在小时候砸缸救人的故事至今仍广为流传.

司马光有一次跟一群小伙伴玩耍，其中一个小孩儿不小心跌入储满水的大缸里. 由于缸太高，同伴们无法救出这个孩子，大家都慌了神. 这时司马光把缸砸破，这样人便得救了.

在“让人离开水”有困难时，司马光设法“让水离开人”，这就是司马光的聪明所在.

倒过来想，就是逆向思考，这是数学中一种常用的思维方式，比如本章中对“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”进行逆向思考，经过证明就得到角平分线的判定定理：角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上. 类似的例子还有很多：如“线段垂直平分线的性质定理”与“线段垂直平分线的判定定理”；又如本书第四章中对整式乘法法则和乘法公式进行逆向思考，就得到了多项式因式分解的方法；再如，探求证明的途径时，如果不能顺利地从条件出发推出结论，不妨逆向思考，即从结论出发，寻找使结论成立的条件，往往能找到证明的途径.

学会“倒过来想”，有助于同学们不断地提高自己提出问题和解决问题的能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分类讨论思想在等腰三角形中的应用

荣老师告诉你 分类讨论思想是一种重要的思想方法．如果所研究的问题有多种不同的情境，那么我们常常按照一定的标准，把所研究的问题分成若干类，互不包含，没有遗漏，一类一类解决，然后进行归纳，得到问题的答案．等腰三角形是一种特殊而又十分重要的三角形，就是因为这种特殊性，我们在处理具体问题时往往会出现错误，因此在求解有关等腰三角形的问题时，一定要注意分类讨论．

应用一 对顶角和底角的分类讨论

例 1 等腰三角形中有一个角为 36°，它的一条腰上的高与底边的夹角为多少度？

解题秘方：已知等腰三角形的一个角的度数，而不知是顶角还是底角，在解决问题时应分两种情况讨论．

解：若已知的这个角为顶角，则底角的度数为（180°－36°）÷2=72°，故一腰上的高与底边的夹角为 18°．

若已知的这个角为底角，则一腰上的高与底边的夹角为 54°．

综上，它的一条腰上的高与底边的夹角为 18°或 54°．

应用二 对腰和底边的分类讨论

类型 1：运用分类讨论求周长

例 2 已知等腰三角形的两边长为 3 和 7，求等腰三角形的周长．

解题秘方：已知等腰三角形的两边长，但不知道哪个是底边长，哪个是腰长，因此要分类讨论．

解：当 3 为腰长时，则三边长为 3,3,7.

∵ 3+3<7, ∴不能构成三角形．

当 7 为腰长时，则三边长为 7,7,3，这三边能构成三角形，周长为 7+7+3=17.

综上可知，所求的等腰三角形的周长为 17.

方法点拨：在解答已知等腰三角形边长的问题时，当题目中的条件没有指明已知的这条边长是腰长还是底边长时，就要分类讨论．若涉及边的长度，应运用三角形的三边关系进行辨别取舍．

类型 2：运用分类讨论画等腰三角形

例 3 ［中考·武汉］平面直角坐标系中，已知点 A，B 的坐标分别为（2，2），（4，0）．若在坐标轴上取点 C，使△ ABC 为等腰三角形，则满足条件的点 C 的个数是（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解题秘方：若等腰三角形的一条边固定，需讨论这条边为腰或底边．

解：当 AB 为底边时，作线段 AB 的垂直平分线，与坐标轴的交点（有 2 个）即为所求．

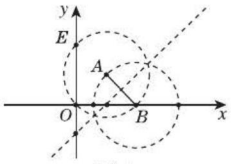


图 1

当 AB 为腰时，分别以 A，B 为圆心，以 AB 的长为半径作圆，与坐标轴的交点（有 4 个，不含 B 点）即为所求．

如图 1，一共有 6 个点，但点 E 与 A，B 两点共线，不能组成三角形，故满足条件的点 C 有 5 个．

答案：A

应用三 对等腰三角形从角的角度进行分类讨论

例 4 已知△ ABC 中，$AB=AC$，AB 边的垂直平分线与 AC 所在的直线相交所成的锐角为 58°，求底角的度数．

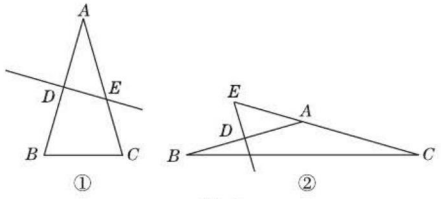


图 2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：由题意可知△ABC不可能是直角三角形，可能是锐角三角形或钝角三角形，故分两种情况画图解决.

解：当△ABC是锐角三角形时，如图2①，AB边的垂直平分线与AC交于点E，与AB交于点D，$\angle AED=58°$，则$\angle A=32°$，$\therefore \angle B=\angle C=74°$.

当△ABC为钝角三角形时，如图2②，AB边的垂直平分线与CA的延长线交于点E，与AB交于点D，$\angle AED=58°$，则$\angle DAE=32°$，$\therefore \angle B=\angle C=16°$.

综上可知，底角的度数为74°或16°.

方法点拨：根据等腰三角形顶角的度数可以将等腰三角形分为锐角等腰三角形、直角等腰三角形和钝角等腰三角形.不同类型的等腰三角形，其边上的高线或垂直平分线的交点位置均不同.

应用四 ▶ 几何图形之间的位置关系不明确的分类讨论

例5 如图3，已知△ABC中，$BC>AB>AC$，$\angle ACB=40°$.如果D，E是直线AB上的两点，且$AD=AC$，$BE=BC$，求$\angle DCE$的度数.

解题秘方：由于在不等边△ABC中，D，E是直线AB上的两点，因此点D，E可以在点A的同侧，也可以在点A的两侧，需要分类讨论.

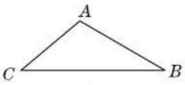


图3

解：（1）当点D，E在点A的同侧，且都在BA的延长线上时，如图4①.

$\because BE=BC$，

$\therefore \angle BEC=(180°-\angle ABC)\div 2$.

$\because AD=AC$，

$\therefore \angle ADC=(180°-\angle DAC)\div 2=\angle BAC\div 2$.

$\because \angle DCE=\angle BEC-\angle ADC$，

$\therefore \angle DCE=(180°-\angle ABC)\div 2-\angle BAC\div 2=(180°-\angle ABC-\angle BAC)\div 2=\angle ACB\div 2=40°\div 2=20°$.

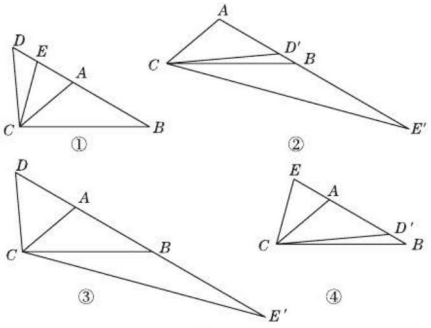


图4

（2）当点D，E在点A的同侧，且点D在D'的位置，E在E'的位置时，如图4②，与（1）类似地也可以求得$\angle D'CE'=\angle ACB\div 2=20°$.

（3）当点D，E在点A的两侧，且点E在E'的位置时，如图4③.

$\because BE'=BC$，

$\therefore \angle BE'C=(180°-\angle CBE')\div 2=\angle ABC\div 2$.

$\because AD=AC$，

$\therefore \angle ADC=(180°-\angle DAC)\div 2=\angle BAC\div 2$.

又$\because \angle DCE'=180°-(\angle BE'C+\angle ADC)$，

$\therefore \angle DCE'=180°-(\angle ABC+\angle BAC)\div 2=180°-(180°-\angle ACB)\div 2=90°+\angle ACB\div 2=90°+40°\div 2=110°$.

（4）当点D，E在点A的两侧，且点D在D'的位置时，如图4④.

$\because AD'=AC$，

$\therefore \angle AD'C=(180°-\angle D'AC)\div 2=(180°-\angle BAC)\div 2$.

$\because BE=BC$，

$\therefore \angle BEC=(180°-\angle ABC)\div 2$.

$\therefore \angle D'CE=180°-(\angle D'EC+\angle ED'C)=180°-(\angle BEC+\angle AD'C)=180°-[(180°-\angle ABC)\div 2+(180°-\angle BAC)\div 2]=(\angle ABC+\angle BAC)\div 2=(180°-\angle ACB)\div 2=(180°-40°)\div 2=70°$.

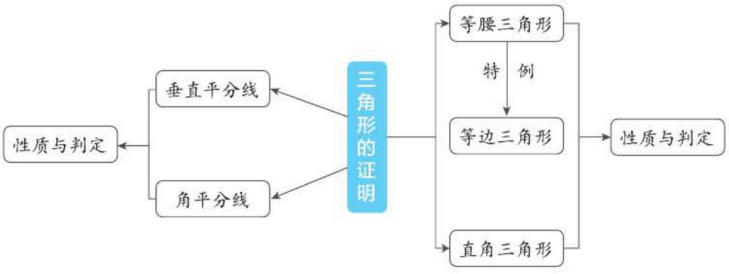
综上，$\angle DCE$的度数为20°或110°或70°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 三角形全等的判定方法：SSS，SAS，ASA，AAS. 此外，直角三角形全等的判定方法还有 HL.
2. 等腰三角形是一个轴对称图形，等腰三角形的性质包括：（1）等边对等角；（2）三线合一. 等腰三角形的判定与性质是互逆的，包括：（1）等角对等边；（2）三线中至少两线合一.
3. 等边三角形是特殊的等腰三角形，除具有等腰三角形的所有性质外，还具有独特的性质：（1）三个角都相等，且都等于 60° ；（2）任意一边上的高、中线、对应的角平分线重合.
4. 直角三角形的性质：（1）两个锐角互余，30° 角所对的直角边等于斜边的一半；（2）两直角边的平方和等于斜边的平方.
5. 直角三角形的判定：（1）有两个角互余的三角形是直角三角形；（2）如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.
6. 线段垂直平分线的性质定理和判定定理及角平分线的性质定理和判定定理都是互逆命题和互逆定理.

（1）线段的垂直平分线：①性质定理——线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；

②判定定理——到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

（2）角平分线：①性质定理——角平分线上的点到这个角的两边的距离相等；

②判定定理——在一个角的内部，到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

7. 三角形三边的垂直平分线相交于一点，这一点到三个顶点的距离相等；三角形三个内角的平分线相交于一点，这个点到三边的距离相等.

知识方法专题

知识必学

专题一 全等三角形的性质与判定

链接中考» 全等三角形的判定在几何中比较常见. 全等三角形的性质是证明线段相等或角相等的重要依据，是中考的热门考点. 单独考查时，考查形式多种多样，填空题、选择题、解答题都有. 但三角形全等更多的是其他综合证明题的一个工具.

类型 1：利用三角形全等证明线段的关系

例 1 [中考·孝感]如图 1-1，已知 $\angle C = \angle D = 90°$，$BC$ 与 AD 交于点 E，$AC = BD$. 求证：$AE = BE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣全等三角形的判定和性质证明.

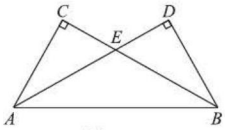


图 1-1

证明：在 Rt△ACB 和 Rt△BDA 中，

$$\begin{cases} AB = BA, \\ AC = BD, \end{cases}$$

∴ Rt△ACB ≌ Rt△BDA（HL）.

∴∠ABC = ∠BAD.

∴ $AE = BE$.

类型 2：利用三角形全等证明角的关系

例 2 ［中考·宜宾］如图 1-2，$AC=DC$，$BC=EC$，∠ACD = ∠BCE.

求证：∠A= ∠D.

解题秘方：先找出要证的两个角所在的三角形，然后结合已知条件，证明这两个三角形全等.

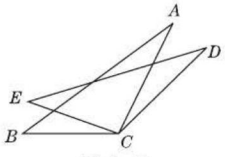


图 1-2

证明：∵∠ACD= ∠BCE，

∴∠ACD + ∠ACE = ∠BCE + ∠ACE，

∴∠DCE = ∠ACB.

在△ABC 和△DEC 中，

∵ AC =DC，∠ACB = ∠DCE，BC=EC.

∴△ABC ≌△DEC（SAS）.

∴∠A = ∠D.

方法点拨：全等三角形的性质“对应边相等，对应角相等”为证明线段或角相等提供了思路，其思路主要分两步：第一步，找要证的线段或角所在的三角形；第二步，证这两个三角形全等.

专题二 等腰三角形的性质与判定

链接中考» 等腰三角形的性质与判定从根本上体现了“线段相等”与“角相等”之间的相互转化，其中“三线合一”性质的应用相当广泛.本考点是中考的热门考点，直接考查时多以填空题选择题形式出现，综合考查时多以解答题形式出现.

例 3 ［中考·重庆］如图 1-3，在△ABC 中，AB = AC，AD ⊥ BC 于点 D.

（1）若∠C = 42°，求∠BAD 的度数；

（2）若点 E 在边 AB 上，EF // AC 交 AD 的延长线于点 F，求证：AE = FE.

解题秘方：紧扣等腰三角形的性质与判定，找出边或角的等量关系解决问题.

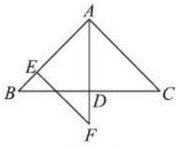


图 1-3

（1）**解**：在△ABC 中，

∵ AB = AC，AD ⊥ BC 于点 D，

∴△ABC 是等腰三角形，AD 为顶角∠BAC 的平分线，∠ADC = 90°.

∴∠BAD = ∠CAD.

∵∠C = 42°，

∴∠BAD =∠CAD = 90° − ∠C = 48°.

（2）**证明**：由（1）可知，∠FAC = ∠BAD.

∵ EF // AC 交 AD 的延长线于点 F，

∴∠AFE = ∠FAC.

∴∠AFE = ∠BAD.

∴ AE = FE.

方法点拨：等腰三角形的性质定理是由边到角，判定定理是由角到边，在同一个题中经常反复使用.

专题三 等边三角形的性质与判定

链接中考» 以等边三角形为基本模型建立的几何解答题主要考查等边三角形的性质与判定.等边三角形的性质为三角形全等提供了条件，包括角或线段相等.本考点在中考中是热门考点，单独直接考查时多以填空题、选择题形式出现，综合考查时以解答题形式出现较多.

例 4 ［中考·牡丹江］已知：线段 AB ⊥ 直线 l 于点 B，点 D 在直线 l 上，分别以 AB，AD 为边作等边三角形 ABC 和等边三角形 ADE，直线 CE 交直线 l 于点 F.

（1）当点 F 在线段 BD 上时，如图 1-4①，求证：DF=CE−CF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）当点 F 在线段 BD 的延长线上时，如图 1-4 ②；当点 F 在线段 DB 的延长线上时，如图 1-4 ③，请分别写出线段 DF，CE，CF 之间的数量关系，不需要证明．

（3）在（1）（2）的条件下，若 $BD=2BF$，$EF=6$，则 $CF=$_____．

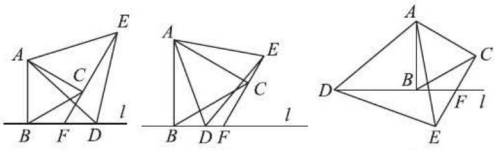


图 1-4

解题秘方：紧扣等边三角形的性质揭示的边、角的等量关系证明三角形全等，利用全等三角形的性质证明线段之间的数量关系．

（1）**证明**：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AB=AC, AD=AE, \angle BAC=\angle DAE=\angle ACB=\angle ABC=60°$．$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$（SAS）.

$\therefore CE=BD, \angle ACE=\angle ABD$.

$\because AB \perp$ 直线 l 于点 B，$\therefore \angle ABD=90°$．

$\therefore \angle ACE=90°$，$\angle CBF=30°$．

$\because E, C, F$ 在一条直线上，$\angle ACB=60°$，

$\therefore \angle BCF=30°$．$\therefore \angle CBF=\angle BCF$.

$\therefore BF=CF$.

$\because BD=DF+BF$，$\therefore BD=DF+CF=CE$，

即 $DF=CE-CF$.

（2）**解**：$DF=CF-CE$；$DF=CE+CF$.

（3）2 或 6

点拨：由（1）（2）可知 $BD=CE, CF=BF$.

$\because BD=2BF$，$\therefore CE=2BF$.

在图 1-4 ①中，$\because EF=CE+CF$，

$\therefore 3CF=EF=6$．$\therefore CF=2$.

在图 1-4 ③中，$\because CE=EF+CF$，

$\therefore 2CF=EF+CF$.

$\therefore CF=EF=6$.

综上所述，$CF=2$ 或 6.

专题四 含 30°角的直角三角形的性质

链接中考≫ 在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半．这个性质常与直角三角形的两个锐角互余综合应用，用来求线段的长度或证明线段间的倍分关系．

例 5 如图 1-5，在 Rt $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=90°$，$\angle A=60°$，$DC \parallel AB$，且 $\angle DBC=\angle BDC$，DC 与 BC 相交于点 C，$CD=4$.

（1）求 $\angle DBC$ 的度数；

（2）求 AB 的长．

解题秘方：找出含 30°角的直角三角形模型，利用其边的关系求线段长．

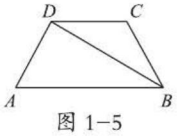


图 1-5

解：（1）在 Rt $\triangle ABD$ 中，

$\because \angle A=60°$，$\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle ABD=30°$.

$\because DC \parallel AB$，

$\therefore \angle CDB=\angle ABD=30°$.

$\therefore \angle DBC=\angle BDC=30°$.

（2）如图 1-6，过点 C 作 $CM \perp BD$ 于点 M，延长 CM 交 AB 于点 E，连接 DE.

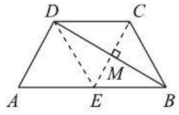


图 1-6

$\because \angle DBC=\angle BDC$，

$\therefore CD=CB$.

$\therefore CE$ 是 BD 的垂直平分线．

$\therefore DE=BE$.

$\therefore \angle EDB=\angle EBD=30°$.

$\because \angle DEM=90°-\angle EDM=90°-30°=60°$，

$\angle DCM=90°-\angle CDM=90°-30°=60°$.

$\therefore \angle DEM=\angle DCM$.

$\therefore DE=DC=4$.

$\because \angle DEA=\angle EDB+\angle DBE=60°$，$\angle A=60°$，

$\therefore \angle A=\angle DEA$.

$\therefore DA=DE=4$.

在 Rt $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=90°$，$\angle ABD=30°$，

$\therefore AB=2AD=8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题五 勾股定理

链接中考≫ 勾股定理是直角三角形的性质之一，可结合直角三角形的其他性质，解决求线段的长、判断线段的位置关系和数量关系等问题．有时还应根据题中的条件，综合特殊直角三角形的性质解题．勾股定理单独考查时，一般以填空题、选择题的形式出现．

例6 [中考·株洲]图1-7是“赵爽弦图”，$\triangle ABH$，$\triangle BCG$，$\triangle CDF$和$\triangle DAE$是四个全等的直角三角形，四边形$ABCD$和$EFGH$都是正方形．如果$AB=10$，$EF=2$，那么AH等于_____．

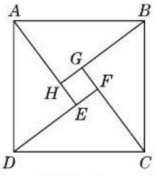


图1-7

解题秘方：由全等三角形的性质可知$AH=BG$，由正方形的性质可知$GH=EF=2$．在Rt$\triangle ABH$中，利用勾股定理求AH的长即可．

解：由题意可知$BG=AH$，$GH=EF=2$．在Rt$\triangle ABH$中，由勾股定理得$AB^2=AH^2+BH^2=AH^2+(AH+GH)^2$，即$10^2=AH^2+(AH+2)^2$．

整理得$AH^2+2AH=48$，配方得$(AH+1)^2=49$，

所以$AH+1=7$或$AH+1=-7$（舍去）．

所以$AH=6$．

答案：6

方法点拨：解答与勾股定理有关的问题时，通常用代数方法求解，这是最常见的一种解法．

专题六 勾股定理的逆定理

链接中考≫ 勾股定理的逆定理是直角三角形的判定定理，是用三角形的三边关系说明三角形为直角三角形．勾股定理的逆定理在中考中很少单独考查，一般在解答题的某一环节中涉及．

例7 在$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别是a，b，c，已知$a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$（$n>1$）．求证：$\angle C=90°$．

解题秘方：要证$\angle C=90°$，只要证$\triangle ABC$是直角三角形，并且c边最大，即根据勾股定理的逆定理证明$a^2+b^2=c^2$即可．

证明：在$\triangle ABC$中，

$\because a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$（$n>1$），

$\therefore a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2$，$c^2=(n^2+1)^2$．

$\therefore a^2+b^2=c^2$．

$\therefore \angle C=90°$．

技巧点拨：运用勾股定理的逆定理判断一个三角形是否为直角三角形的一般步骤：①先判断哪条边最大；②分别计算出较短两边的平方和和最长边的平方；③判断较短两边的平方和和最长边的平方是否相等，若相等，则是直角三角形，若不相等，则不是直角三角形．

专题七 线段的垂直平分线

链接中考≫ 由线段的垂直平分线可以得到两条线段相等．实际应用中，这一性质多与三角形结合，实现边的转化，还可以构造等腰三角形，利用等腰三角形的性质解决问题．在中考中，此类题目一般以填空题、选择题形式出现，常与等腰三角形的性质综合考查．

例8 [中考·来宾]如图1-8，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=100°$，AB的垂直平分线DE分别交AB，BC于点D，E，则$\angle BAE$等于（　　）

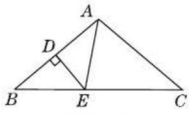


图1-8

A. 80°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 40°

解题秘方：利用线段的垂直平分线的性质得到线段相等，再将线段相等转化为角相等，求角的度数．

解：$\because AB=AC$，$\angle BAC=100°$，

$\therefore \angle B=\angle C=(180°-100°)\div 2=40°$．

$\because AB$的垂直平分线DE分别交AB，BC于点D，E，$\therefore AE=BE$，

$\therefore \angle BAE=\angle B=40°$．

答案：D

方法点拨：线段的垂直平分线的性质揭示两条线段相等，结合等腰三角形的性质可转化为证明角相等，为求角的度数提供了思路．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题八 角平分线

链接中考» 角平分线的性质与判定都与点到直线的距离有关．若图中出现角平分线和点到直线的距离，运用角平分线的性质就能证明两条线段相等．在中考中单独考查时，涉及角平分线的性质与判定的题目一般都是以填空题、选择题的形式出现．

例 9 ［中考·来宾］如图 1–9，在 $\triangle ABC$ 中，CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp BC$ 于点 F，且 $BC=4$，$DE=2$，则 $\triangle BCD$ 的面积是_____．

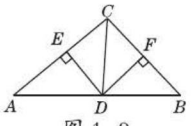


图 1–9

解题秘方：先利用角平分线的性质求出 DF 的长度，再根据三角形的面积公式即可求出 $\triangle BCD$ 的面积．

解：$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp BC$ 于点 F，且 $DE=2$，

$\therefore DF=2$．

$\therefore \triangle BCD$ 的面积为 $2\times 4\div 2=4$．

答案：4

方法必会

专题九 分析法

专题解读» 几何证明的基本方法是分析法，也称为逆推法．例如，要证明三角形全等，首先观察条件中哪些是直接条件，哪些是间接条件，在此基础上加以分析，完成解答．

例 10 ［中考·孝感］我们把两组邻边分别相等的四边形叫做“箏形”．如图 1–10，四边形 $ABCD$ 是一个箏形，其中 $AB=CB$，$AD=CD$．对角线 AC，BD 相交于点 O，$OE \perp AB$，$OF \perp CB$，垂足分别是 E，F．求证：$OE=OF$．

解题秘方：利用角平分线性质的模型进行证明．

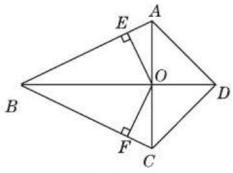


图 1–10

证明：在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中，

$$\begin{cases} AB=CB, \\ AD=CD, \\ BD=BD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$（SSS）．

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$．

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$．

又 $\because OE \perp AB$，$OF \perp CB$，

$\therefore OE=OF$．

方法点拨：证明线段相等的方法主要有以下几种．

（1）中点定义；

（2）等量代换；

（3）全等三角形的对应边相等；

（4）线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；

（5）角平分线上的点到角两边的距离相等．

在解决问题时，选择合适的方法可提高解题的效率．

专题十 方程思想

专题解读» 方程思想就是指在求解数学题时，从题中已知量和未知量之间的关系入手，找出相等关系，运用数学符号语言将相等关系转化成方程或方程组，再通过解方程或方程组，使问题得到解决．本章中等腰（等边）三角形的内角、边长都存在特殊关系，因此，在求等腰（等边）三角形的内角的度数或边的长度时，常需要通过设未知数列方程或方程组的方法来解决．

例 11 ［中考·南通］如图 1–11，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上一点，$AC=AD=DB$，$\angle BAC=102°$，则 $\angle ADC=$_____°．

解题秘方：利用等腰三角形的性质建立角的等量关系，然后利用方程建立已知角与未知角之间的等量关系．

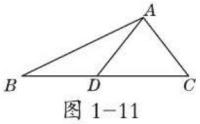


图 1–11

解：$\because AC=AD=DB$，

$\therefore \angle B=\angle BAD$，$\angle ADC=\angle C$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设$\angle B=\angle BAD=x°$，$\therefore \angle ADC=2x°$．

$\therefore \angle C=2x°$．$\therefore \angle B+\angle C=3x°$．

$\because \angle BAC=102°$，$\therefore \angle B+\angle C=78°$．

$\therefore 3x=78$，解得$x=26$．$\therefore \angle ADC=52°$．

答案：52

方法点拨：本题运用了方程思想．题中含有两个等腰三角形，解答时运用了等边对等角、三角形内角和定理及三角形外角的性质，若用角反复表示比较麻烦且易出错，而用设未知数列方程的方法可使问题变得简单明了．

专题十一 分类讨论思想

专题解读 ≫ 当被研究的问题包含多种情形，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情形来分类讨论，得出各种情形下相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想．

例12 ［中考·黄冈］在△ABC中，AB=13 cm，AC=20 cm，BC边上的高为12 cm，则△ABC的面积为_____cm^2.

解题秘方：画出图形，根据勾股定理计算BC的长度，然后根据三角形的面积公式进行计算．

解：分两种情况讨论如下．

（1）当高在三角形内部时，如图1−12①所示．

在Rt△ABD中，由勾股定理得BD=5 cm，

在Rt△ACD中，由勾股定理得CD=16 cm，

$\therefore BC$=21 cm．

$\therefore$△ABC的面积为$\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 21\times 12=126$（cm^2）．

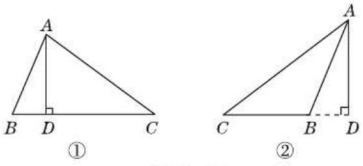


图1−12

（2）当高在三角形外部时，如图1−12②所示．

在Rt△ABD中，由勾股定理得BD=5 cm，

在Rt△ACD中，由勾股定理得CD=16 cm，

$\therefore BC$=11 cm．

$\therefore$△ABC的面积为$\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 11\times 12=66$（cm^2）．

综上，△ABC的面积为66 cm^{2}或126 cm^2.

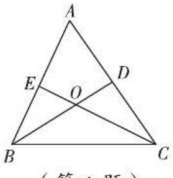
答案：66或126

方法点拨：本例中△ABC有可能是锐角三角形，也有可能是钝角三角形，因此要采用分类讨论思想，把每一种情况下的第三条边BC都求出来，再计算面积．

好题必解 答案见269页

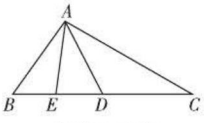
类型1：构造全等三角形判断线段的数量关系

1.（截长补短构造）如图，在△ABC中，$\angle A=60°$，BD，CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$，BD，CE交于点O．试判断BE，CD，BC的数量关系，并加以证明．



（第1题）

2. 如图，AD，AE分别是△ABC和△ABD的中线，且$BA=BD$．求证：$AE=\frac{1}{2}AC$．

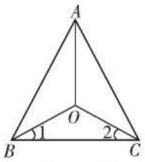


（第2题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：等腰三角形、等边三角形的性质与判定

3. 已知：如图，AO 平分 $\angle BAC$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

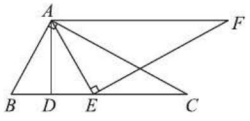


（第 3 题）

4. [中考 · 黄石] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，E 为边 BC 上的点，且 $AB=AE$，D 为线段 BE 的中点，过点 E 作 $EF\perp AE$，过点 A 作 $AF\parallel BC$，且 AF，EF 相交于点 F. 求证：

（1）$\angle C=\angle BAD$；

（2）$AC=EF$.

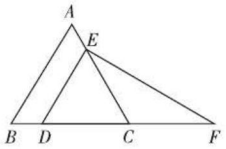


（第 4 题）

5. 如图，在等边三角形 ABC 中，点 D，E 分别在边 BC，AC 上，若 $CD=3$，$DE\parallel AB$，过点 E 作 $EF\perp DE$，交 BC 的延长线于点 F.

（1）求证：$\triangle CDE$ 为等边三角形.

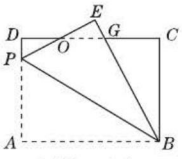
（2）求 EF 的长.



（第 5 题）

类型 3：巧用勾股定理解折叠问题

6. [中考 · 泰州] 如图，长方形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=6$，P 为 AD 上一点，将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折至 $\triangle EBP$，PE，BE 分别与 CD 相交于点 O，G，且 $OE=OD$，求 AP 的长.

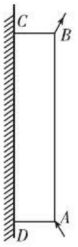


（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

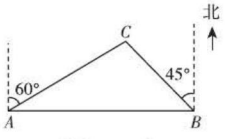
类型 4：巧用勾股定理解实际问题

7. 如图，在一张长 48 cm、宽 10 cm 的长方形纸片的长边 CD 上竖直放一平面镜，一束光线从纸片顶点 A 处射入，由 CD 上一点反射后恰好经过点 B，求光线在纸片上通过的距离．



（第 7 题）

8. 2020 年某省将位于 A，B 两地的两所大学合并成一所综合大学，为了方便 A，B 两地师生的交往，学校准备在相距 2 km 的 A，B 两地之间修筑一条笔直的公路（如图中线段 AB）．经测量，在 A 地北偏东 60° 方向，B 地北偏西 45° 方向的 C 处有一个半径为 0.7 km 的圆形公园，问计划修筑的这条公路会不会穿过公园？为什么？



（第 8 题）

类型 5：与等腰三角形有关的动态探索问题

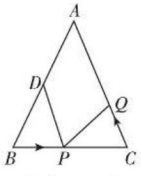
9. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$ cm，$BC=8$ cm，点 D 为 AB 的中点．

（1）如果点 P 在线段 BC 上以 3 cm/s 的速度由点 B 向点 C 运动，同时，点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 运动．

①若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，经过 1 s 后，$\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 是否全等？请说明理由．

②若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度不相等，当点 Q 的运动速度为多少时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等？

（2）若点 Q 以（1）②中的运动速度从点 C 出发，点 P 以原来的运动速度从点 B 同时出发，都逆时针沿 $\triangle ABC$ 三边运动，求经过多长时间点 P 与点 Q 第一次在 $\triangle ABC$ 的哪条边上相遇．



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章测试卷 答案见270页

（100分　60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下列长度的三条线段能组成直角三角形的是（　　）

A.3，4，5　　B.2，3，4

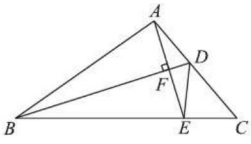
C.4，6，7　　D.5，11，12

2. 若实数 m，n 满足等式 $|m-2|+\sqrt{n-4}=0$，且 m，n 恰好是等腰△ABC 的两条边的边长，则△ABC 的周长是（　　）

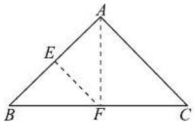
A.12　　B.10　　C.8　　D.6

3. [中考·青岛]如图，BD 是△ABC 的角平分线，$AE\perp BD$，垂足为 F. 若∠$ABC=35°$，∠$C=50°$，则∠CDE 的度数为（　　）

A.35°　　B.40°　　C.45°　　D.50°



（第3题）



（第4题）

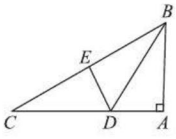
4. 如图，三角形纸片 ABC 中，$AB=AC$，∠$BAC=90°$，点 E 为 AB 的中点，沿过点 E 的直线折叠，使点 B 与点 A 重合，折痕 EF 交 BC 于点 F. 已知 $EF=\frac{3}{2}$，则 BC 的长是（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B.$3\sqrt{2}$

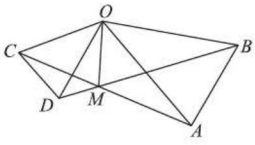
C.3　　D. $3\sqrt{3}$

5. 如图，已知 BD 是△ABC 的角平分线，ED 是 BC 的垂直平分线，∠$BAC=90°$，$AD=3$，则 CE 的长为（　　）

A.6　　B.5　　C.4　　D.$3\sqrt{3}$



（第5题）



（第6题）

6. [中考·滨州]如图，在△OAB 和△OCD 中，$OA=OB$，$OC=OD$，$OA>OC$，∠$AOB=$∠$COD=40°$，连接 AC，BD 交于点 M，连接 OM. 下列结论：

①$AC=BD$；

②∠$AMB=40°$；

③OM 平分∠BOC；

④MO 平分∠BMC.

其中正确的个数为（　　）

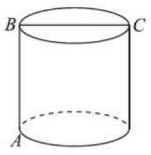
A.4　　B.3

C.2　　D.1

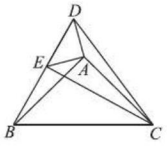
7. 如图，圆柱的高 $AB=3$，底面直径 $BC=3$. 现有一只蚂蚁想从 A 处沿圆柱表面爬到对角 C 处捕食，则它爬行的最短距离是（　　）

A.$3\sqrt{1+\pi}$　　B.$3\sqrt{2}$

C. $\frac{3\sqrt{4+\pi^2}}{2}$　　D. $3\sqrt{1+\pi^2}$



（第7题）



（第8题）

8. 如图，点 E 在△DBC 的边 DB 上，点 A 在△DBC 内部，∠$DAE=$∠$BAC=90°$，$AD=AE$，$AB=AC$. 给出下列结论：

①$BD=CE$；

②∠$ABD+$∠$ECB=45°$；

③$BD\perp CE$；

④$BE^2=2(AB^2+AD^2)-CD^2$.

其中正确的是（　　）

A. ①②③④　　B. ②④

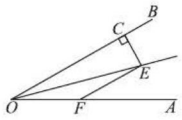
C. ①②③　　D. ①③④

二、填空题（每题4分，共16分）

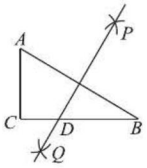
9. [中考·安徽]命题“如果 $a+b=0$，那么 a，b 互为相反数”的逆命题为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图，$\angle AOE=\angle BOE=15°$，$EF\parallel OB$，$EC\perp OB$于$C$. 若$EC=1$，则$OF=$_____.



（第10题）



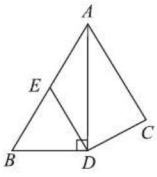
（第12题）

11. 已知Rt△ABC的两边长分别是3和4，若一个正方形的边长等于Rt△ABC的第三边的长，则这个正方形的面积是_____.

12. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=5$，分别以A，B为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径画弧，两弧交点分别为点P，Q，过P，Q两点作直线交BC于点D，则CD的长是_____.

三、解答题（共52分）

13.（8分）如图，AD平分$\angle BAC$，$AD\perp BD$，垂足为点D，$DE\parallel AC$. 求证：△BDE是等腰三角形.

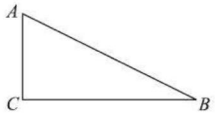


（第13题）

14.（10分）[**中考·泰州**]如图，△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=8$.

（1）用直尺和圆规作AB的垂直平分线（保留作图痕迹，不要求写作法）；

（2）若（1）中所作的垂直平分线交BC于点D，求BD的长.

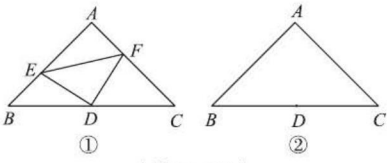


（第14题）

15.（10分）在△ABC中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，点D为BC的中点.

（1）如图①，若点E，F分别为AB，AC上的点，且$DE\perp DF$，求证：$BE=AF$.

（2）若点E，F分别为AB，CA延长线上的点，且$DE\perp DF$，那么$BE=AF$吗？请利用图②说明理由.



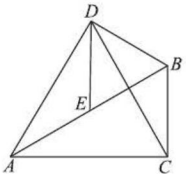
（第15题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.（12分）如图，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，∠BAC=30°，E为AB边的中点．以BE为边作等边△BDE，连接AD，CD.

（1）求证：△ADE≌△CDB.

（2）若$BC=\sqrt{3}$，在AC边上找一点H，使得$BH+EH$最小，并求出这个最小值.



（第16题）

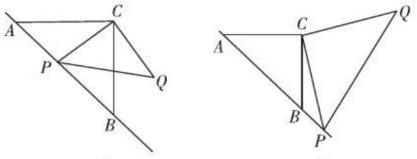
17.（12分）已知：△ABC是等腰直角三角形，动点P在斜边AB所在的直线上，以PC为直角边作等腰三角形PCQ，其中∠PCQ=90°．探究并解决下列问题．

（1）如图①，若点P在线段AB上，且$AC=1+\sqrt{3}$，$PA=\sqrt{2}$，则：

①线段PB=_____，PC=_____；

②猜想PA^2，PB^2，PQ^2三者之间的数量关系为_____.

（2）如图②，若点P在线段AB的延长线上，在（1）②中所猜想的结论仍然成立，请你利用图②给出证明过程．



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

探究倾斜天平的奥秘

探究倾斜天平的奥秘



第二章

一次不等式组 一元一次不等式与一元









核心考点

你将见到的

- 不等式的基本性质
- 解一元一次不等式
- 解一元一次不等式组
- 不等式及不等式组的应用

核心方法

我们为你提供的

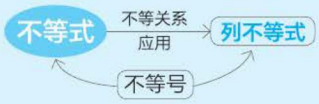
- 数值验证法
- 口诀法
- 建模思想
- 作差法
- 分类讨论思想
- 转化思想
- 数轴法
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 不等关系

核心知识
- 不等式
- 列不等式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸不等式

1. 定义 一般地，用符号“<”（或“≤”），“>”（或“≥”）连接的式子叫做不等式.

2. 基本的表达形式

（1）常见的不等号：

符号	名称	实际意义	读法	举例
<	小于号	小于、不足	小于	3+2<6
>	大于号	大于、高出	大于	3+3>5
≤	小于或等于号	不大于、不超过、至多	小于或等于	$x \leqslant 8$
≥	大于或等于号	不小于、不低于、至少	大于或等于	$x \geqslant 5$
≠	不等于号	不相等	不等于	$4 \neq 5$

（2）常见的不等式基本语言与符号表示：

① a 是正数表示为 $a > 0$，a 是负数表示为 $a < 0$；

② a 是非负数表示为 $a \geqslant 0$，a 是非正数表示为 $a \leqslant 0$；

③ a，b 同号表示为 $ab > 0$，a，b 异号表示为 $ab < 0$.

提分·必记

特别提醒

- 判断一个式子是否为不等式，关键是看所给式子是否含不等号；
- 不等号具有方向性，不等号两边的数（或式子）不能随意交换.

拨考向▸利用不等式的定义解决问题

题型 1：不等式的定义在识别中的应用

例 1 判断下列各式哪些是等式，哪些是不等式，哪些既不是等式也不是不等式.

（1）$x+y$；（2）$3x>7$；（3）$5=2x+3$；（4）$x^2>0$；

（5）$2x-3y=1$；（6）$5 \div 2$；（7）$2>3$.

解题秘方： 紧扣不等式的定义进行识别，关键是看式子是否含有不等号.

解：（3）（5）是等式，（2）（4）（7）是不等式，（1）（6）既不是等式也不是不等式.

提分·秘诀

特别警示

判断一个式子是否为不等式与不等式是否成立没有关系. 例如，本例中的“2>3”，虽然这个式子不成立，但它是不等式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：不等关系在列不等式中的应用

例 2 用不等式表示：

（1）a 的一半与 3 的和大于 5；

（2）x 的 3 倍与 1 的差小于 2；

（3）a 的 $\frac{1}{2}$ 与 1 的差是正数；

（4）m 与 2 的差是负数．

解题秘方：紧扣不等关系中的关键词语列出不等式．

解：（1）$\frac{1}{2}a+3>5$.（2）$3x-1<2$.

（3）$\frac{1}{2}a-1>0$.（4）$m-2<0$.

解法提醒

用不等式表示不等关系时，一定要抓住关键词语，弄清不等关系，把用文字语言描述的不等关系转化为用数学符号表示的不等式．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用数形结合法表示不等关系

挑战·高分

例 3 实数 a，b 在数轴上的位置如图 2-1-1 所示，则 $\frac{a-b}{a+b}$ ____ 0.（填“≤”“≥”“<”或“>”）

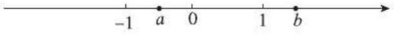


图 2-1-1

解题秘方：结合数轴得出 a，b 的取值范围，进而判断出 $a-b$ 和 $a+b$ 的符号，即可判断出 $\frac{a-b}{a+b}$ 的符号．

解：观察数轴可知，$-1<a<0$，$b>1$，故 $a-b<0$，$a+b>0$.

所以 $\frac{a-b}{a+b}<0$.

答案：<

方法点拨

求解此类不等式与数轴的综合题，一要掌握数轴的性质，二要掌握相应不等号的含义．

拔尖角度 2 利用图示法表示不等关系

挑战·高分

例 4 如图 2-1-2，a，b，c 分别表示每个苹果、每个梨、每个桃子的质量，则下列关系正确的是（　　）

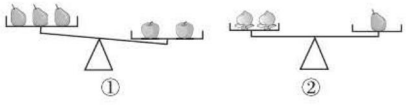


图 2-1-2

A.$a>c>b$　　B.$b>a>c$　　C.$a>b>c$　　D.$c>a>b$

解题秘方：紧扣图中揭示的数量关系进行识别．

解：由图 2-1-2 ①可知 $a>b$，由图 2-1-2 ②可知 $b>c$，

所以 $a>b>c$.

答案：C

详解

由图 2-1-2 ① 可知 $3b<2a$，所以 $a>b$. 由图 2-1-2 ②可知 $2c=b$，所以 $b>c$. 所以 $a>b>c$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要内容是不等式的定义及用不等式表示实际问题中的数量关系．在中考中主要考查列不等式的相关内容，以选择题、填空题为主，有时还与其他知识结合在一起，考查用不等式模型表示实际生活中的数量关系．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 用不等式表示数量关系

例5 [中考·柳州]如图2-1-3，身高为x cm的1号同学与身高为y cm的2号同学站在一起时，如果用一个不等式来表示他们的身高关系，则这个式子可以表示成x_____y（用“>”或“<”填空）．



图2-1-3

试题评析：本题主要考查了不等式的定义，仔细看图是解题的关键．

解：由图可知，1号同学的身高低于2号同学的身高，故这个式子可以表示成$x < y$.

答案：<

解题方法

站在同一水平线上比较身高，类似于比较两条线段的长短，可以直接从“形”上判断出“量”的大小．

考法2 根据实际问题列不等式

例6 [中考·淄博]篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜1场得2分，负1场得1分．某队预计在某赛季全部32场比赛中最少得到48分，才有希望进入季后赛．假设这个队在将要举行的比赛中胜x场，要达到目标，x应满足的关系式是（　　）

A.$2x+(32-x)\geqslant 48$　　B.$2x-(32-x)\geqslant 48$

C.$2x+(32-x)\leqslant 48$　　D.$2x\geqslant 48$

试题评析：本题考查根据实际问题列出不等式，解题关键是抓住关键词，寻找不等关系．

解：由题意得，若这个队在将要举行的比赛中胜x场，则输$(32-x)$场，所以$2x+(32-x)\geqslant 48$.

答案：A

方法归纳

列不等式的步骤：
(1) 分析题意，找出题中的各种量；
(2) 弄清各种量之间的不等关系；
(3) 用代数式表示各种量；
(4) 用适当的不等号将代数式连接起来．

两年模拟兵法

答案见272页

1. 给出下列式子：①$3>0$；②$4x+3y>0$；③$x=3$；④$x-1$；⑤$x+2\leqslant 3$. 其中不等式有（　　）

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

2. 某市今年5月份的最高气温为27 ℃，最低气温为18 ℃，已知某一天的气温为t ℃，则下面的不等关系正确的是（　　）

A.$18<t<27$　　B.$18\leqslant t<27$

C.$18<t\leqslant 27$　　D.$18\leqslant t\leqslant 27$

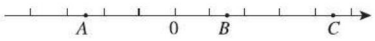
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.[中考·河北]语句“x的$\frac{1}{8}$与x的和不超过5”可以表示为(　　)

A. $\frac{x}{8}+x\leqslant 5$　　B. $\frac{x}{8}+x\geqslant 5$

C. $\frac{8}{x+5}\leqslant 5$　　D. $\frac{8}{x}+x=5$

4. 如图，数轴上A，B，C三点表示的数分别为a，b，c，下列结论正确的是(　　)



(第4题)

A.$a>0$　　B.$b>c$　　C.$b>a$　　D.$a>c$

5. 用表示大小关系的符号填空：

(1) -3_____2；(2) $(-2)^2$_____$(-1)^2$；

(3) $-|x|$_____0；(4) $-a^2$_____0；

(5) $-a^2-1$_____0；(6) a^2+1_____0.

6. 小明在闹市区街道边发现一块标志牌(如图所示)，小明知道这表示车速不能超过这个数据.请你用式子表示在该街道上车辆行驶速度v(km/h)的取值范围：_____.



(第6题)

7. 用适当的符号表示下列关系：

(1) x的2倍大于11；

(2) a与b的和的平方是非负数；

(3) x与5的和比它的3倍小；

(4) 小红的年龄y(岁)不大于15岁.

8. 一根弹簧长度为15 cm，在弹性限度内，所挂物体的质量每增加1 kg，弹簧伸长约0.5 cm，那么至少挂多少千克重的物体才能使弹簧长度超过20 cm？(列出不等式即可)【导学号：2850581】

9. 请设计实际情境解释下列不等式：

(1) $a-2b>4$；

(2) $10-(3m+n)\leqslant 5$.

10. 某超市在春节期间搞促销活动，促销方式如下：

一次性购物的金额	促销方式
不超过200元	全部九折
超过200元	不超过200元的部分九折，超过200元的部分八折

某顾客在该超市一次性购得标价为x元的商品.

(1) 该顾客得到的优惠不超过18元，请你列出不等式；

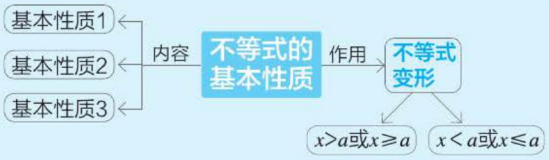
(2) 该顾客得到的优惠超过30元，请你列出不等式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 不等式的基本性质

核心知识
- 不等式的基本性质
- 利用不等式的基本性质变形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 不等式的基本性质


不等式的基本性质

1. 基本性质 1

不等式的两边都加（或减）同一个整式，不等号的方向不变．即如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$.

2. 基本性质 2

不等式的两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．即如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$.

3. 基本性质 3

不等式的两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．即如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$.

4. 不等式的基本性质与等式的基本性质的关系

类别	不同点	相同点
不等式	两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向要改变	（1）两边都加（或减）同一个整式，不等式和等式仍成立； （2）两边都乘（或除以）同一个正数，不等式和等式仍成立
等式	两边都乘（或除以）同一个负数，等式仍然成立	

拨考向 利用不等式的基本性质解决问题

题型 1：不等式的基本性质在判断不等式变形中的应用

例 1 若 $x>y$，则下列式子中错误的是（　　）

A. $x-3>y-3$　　B. $\frac{x}{3}>\frac{y}{3}$

C. $x+3>y+3$　　D. $-3x>-3y$

解题秘方：弄清每个选项变形的方式，紧扣不等式的基本性质进行解答．

提分·必记

特别解读

- 不等式的三条基本性质是不等式变形的依据．运用不等式的基本性质时，不等式的两边要同时进行相同的变形．
- 在不等式的变形中，还经常用到下列性质：
  （1）对称性．若 $a>b$，则 $b<a$.
  （2）传递性．若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

提分·秘诀

方法点拨

辨析由一个不等式变形到另一个不等式的方法：先判断出第二个不等式是由第一个不等式经过怎样的变形得到的，再确定出每一步变形的依据，最后确定不等号是否改变方向．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：分析如下表所示．

将 $x>y$ 变形	依据	结论
两边同时减 3，得 $x-3>y-3$	不等式的基本性质 1	A 正确
两边同时除以 3，得 $\frac{x}{3}>\frac{y}{3}$	不等式的基本性质 2	B 正确
两边同时加 3，得 $x+3>y+3$	不等式的基本性质 1	C 正确
两边同时乘 -3，得 $-3x<-3y$	不等式的基本性质 3	D 错误

答案：D

题型 2：不等式的基本性质在确定字母系数的范围中的应用

例 2 若关于 x 的不等式 $(m-1)x>m-1$ 变形为 $x<1$，求 m 的取值范围．

解题秘方：根据运用不等式的基本性质得到的结果，识别变形的条件．

解：∵关于 x 的不等式 $(m-1)x>m-1$ 变形为 $x<1$，

∴ $m-1<0$，即 $m<1$．

方法点拨

判断不等式两边乘（或除以）的同一个数的符号时，**只需看不等号的方向是否改变**．若不变，则这个数为正数；若改变，则这个数为负数．

点知识 ▸ 2 不等式的基本性质的简单应用

1. 将不等式化为 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）（a 为常数）的形式的依据

对于不等式两边多余的项，用不等式的基本性质 1 消去，而不等式的基本性质 2、基本性质 3 可将不等式中 x 的系数化为 1．

2. 利用不等式的基本性质将不等式变形的步骤

（1）用不等式的基本性质 1 将不等式变成 $ax>b$（$ax\geqslant b$）或 $ax<b$（$ax\leqslant b$）的形式；

（2）用不等式的基本性质 2，3 将不等式变成 $x>\frac{b}{a}\left(x\geqslant\frac{b}{a}\right)$或 $x<\frac{b}{a}\left(x\leqslant\frac{b}{a}\right)$的形式．

提分·必记

特别解读

- 利用不等式的基本性质 1，可使含未知数的项在不等号的一边，常数项在不等号的另一边．
- 利用不等式的基本性质 2 或基本性质 3 可把未知数的系数化为 1．

拔考向 ▸ 利用不等式的基本性质将不等式变形

例 3 利用不等式的基本性质将下列不等式变形为 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）的形式：

（1）$\frac{1}{4}x<-\frac{3}{4}x+2$；（2）$5x-6\leqslant 7x-4$．

解题秘方：先用不等式的基本性质 1，再用不等式的基本性质 2 或 3，可把题中的不等式化为 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）（a 为常数）的形式．

解：（1）根据不等式的基本性质 1，不等式两边都加 $\frac{3}{4}x$，不等号的方向不变，得 $\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x<-\frac{3}{4}x+2+\frac{3}{4}x$，

∴ $x<2$．

提分·秘诀

提示 1

不等式两边都加 $\frac{3}{4}x$，使含 x 的项在不等号的一边，不含 x 的项在不等号的另一边．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)根据不等式的基本性质1，不等式两边都减$7x$，不等号的方向不变，

得$5x-6-7x \leqslant 7x-4-7x$，

$\therefore -2x-6 \leqslant -4$.

根据不等式的基本性质1，不等式两边都加6，不等号的方向不变，

得$-2x-6+6 \leqslant -4+6$，

$\therefore -2x \leqslant 2$.

根据不等式的基本性质3，不等式两边都除以-2，不等号的方向改变，

得$\frac{-2x}{-2} \geqslant \frac{2}{-2}$，

$\therefore x \geqslant -1$.

提示2

不等式两边都减$7x$，使含x的项在不等号的左边；不等式两边都加6，使常数项在不等号的右边；利用不等式的性质3，使x的系数化为1.

特别提醒

不等式两边除以-2时，切记不等号的方向要改变.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用不等式的基本性质比较两个整式的大小

例4 比较$5-3a$与$-3a+2$的大小.

解题秘方：紧扣不等式的基本性质比较两个整式的大小.

解：$\because 5 > 2$，$\therefore 5-3a > -3a+2$.

挑战·高分

另解

本题也可以利用**作差法**求解：

$\because 5-3a-(-3a+2)=5-3a+3a-2=3 > 0$，

$\therefore 5-3a > -3a+2$.

拔尖角度 2 利用数形结合思想识别不等式

例5 若实数a，b，c在数轴上对应点的位置如图2-2-1所示，则下列不等式成立的是(　　)



图2-2-1

A.$ab < ac$　　B.$ac > bc$　　C.$a+c > b+c$　　D.$a+b < c+b$

解题秘方：紧扣数轴的特征及不等式的基本性质进行识别.

解：观察数轴知，$a > 0$，$b > c$，根据不等式的基本性质2，知$ab > ac$，所以选项A不成立；

观察数轴知，$a < b$，$c < 0$，根据不等式的基本性质3，知$ac > bc$，所以选项B成立；

观察数轴知，$a < b$，根据不等式的基本性质1，知$a+c < b+c$，所以选项C不成立；

观察数轴知，$a > c$，根据不等式的基本性质1，知$a+b > c+b$，所以选项D不成立.

答案：B

挑战·高分

技巧点拨

数形结合在解决此类问题时具有重要的作用.观察数轴，可以找到数在数轴上对应的点，由数轴上的点的位置关系得到对应的数的大小关系，进而利用不等式的基本性质求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用作差法比较大小解生活中的方案选择问题

挑战·高分

例6 制作某种产品有两种用料方案，方案1是用4张A型钢板，8张B型钢板，方案2是用3张A型钢板，9张B型钢板．已知A型钢板的面积比B型钢板的面积大．从省料的角度考虑，应选择哪种方案？

解题秘方： 分别表示出两种方案的用料面积，然后利用作差法比较大小．

解： 设A型钢板和B型钢板的面积分别为 x 和 y，于是两种方案用料面积分别为 $4x+8y$ 和 $3x+9y$，则 $4x+8y-(3x+9y)=x-y$.

∵ A型钢板的面积比B型钢板的面积大，即 $x>y$，∴ $x-y>0$.

∴ $4x+8y>3x+9y$. 故从省料的角度考虑，应选择方案2.

方法点拨

设 a，b 为任意两个实数，先求出 a 与 b 的差，再根据“当 $a-b<0$ 时，$a<b$；当 $a-b=0$ 时，$a=b$；当 $a-b>0$ 时，$a>b$”来比较 a 与 b 的大小．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

不等式的基本性质及利用不等式的基本性质将不等式变形是本节的重点，也是历年中考的重要考点之一，主要题型有选择题和填空题，有时也与方程知识综合起来以解答题的形式进行考查．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用不等式的基本性质识别不等式的变形

例7 [中考·株洲]已知实数 a，b 满足 $a+1>b+1$，则下列选项可能错误的为（　　）

A. $a>b$　　B. $a+2>b+2$　　C. $-a<-b$　　D. $2a>3b$

试题评析： 本题考查了不等式的基本性质，要注意不等式两边同时乘或除以同一个负数，不等号改变方向．

解： 将原不等式的两边同时减去1，得到 $a>b$；

将原不等式的两边同时加1，得到 $a+2>b+2$；

将原不等式的两边先同时减去1，再同时乘 -1，得到 $-a<-b$；

选项D的变形不符合不等式的基本性质．

答案： D

考法点津

不等式的基本性质是不等式的变形以及解不等式的依据，运用不等式的基本性质识别不等式变形是否正确应注意两点：

一是“两同”，两边都与同一个数进行同样的运算；

二是不等号方向的变与不变．

考法2 利用不等式的基本性质比较大小

例8 [中考·绵阳]设“▲”“●”“■”分别表示三种不同的物体，现用天平称两次，情况如图2-2-2所示，那么▲，●，■这三种物体按质量从大到小排列应为（　　）

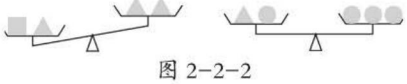


图2-2-2

A. ■，●，▲　　B. ▲，■，●

C. ■，▲，●　　D. ●，▲，■

方法点拨

解决本题的关键是识图，倾斜的天平表示不等关系，平衡的天平表示相等关系，结合不等式的基本性质可分析出大小关系．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了不等式的基本性质，解题的关键是从图中分析出如何利用不等式的基本性质.

解：设▲，●，■的质量分别为 a，b，c，由第一个天平可得 $a+c>2a$. 由不等式的基本性质 1，两边同时减去 a，得 $c>a$. 由第二个天平可得 $a+b=3b$，移项得 $a=2b$，所以 $a>b$. 因此 $c>a>b$.

答案：C

两年模拟兵法

☞答案见 272 页

1. 由 $m<n$ 得到 $ma^2<na^2$ 的条件是（　　）

A.$a>0$　　B.$a<0$

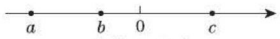
C.$a\neq 0$　　D.a 为任意实数

2. [中考·常州]若 $x>y$，则下列不等式中不一定成立的是（　　）

A.$x+1>y+1$　　B.$2x>2y$

C.$\frac{x}{2}>\frac{y}{2}$　　D.$x^2>y^2$

3. [中考·枣庄]实数 a，b，c 在数轴上对应的点的位置如图所示，则下列式子中正确的是（　　）

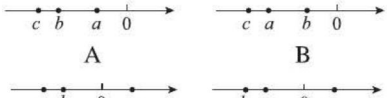


（第 3 题）

A.$ac>bc$　　B.$|a-b|=a-b$

C.$-a<-b<-c$　　D.$-a-c>-b-c$

4. [中考·南京]实数 a，b，c 满足 $a>b$ 且 $ac<bc$，它们在数轴上的对应点的位置可以是（　　）



5. 甲从一个鱼摊上购买了 3 条鱼，平均每条 a 元，又从另一个鱼摊上购买了 2 条鱼，平均每条 b 元，后来他又以平均每条 $\frac{a+b}{2}$ 元的价格把鱼全部卖给了乙，结果他赔了钱，原因是（　　）

A.$a>b$　　B.$a<b$

C.$a=b$　　D.$a\geqslant b$

6. 欢欢由不等式（$m+3$）$x<m+3$ 得到 $x>1$，由此我们可以知道 m 的取值范围是_____.

7. 根据不等式的基本性质，用“<”或“>”填空：

（1）若 $a-1>b-1$，则 a_____b；

（2）若 $a+3>b+3$，则 a_____b；

（3）若 $2a>2b$，则 a_____b；

（4）若 $-2a>-2b$，则 a_____b.

8. 若 $a>b$，$m>0$，$n<0$，用“>”或“<”填空：

（1）$a+m$_____$b+m$；（2）$a+n$_____$b+n$；

（3）$m-a$_____$m-b$；（4）an_____bn；

（5）$\frac{a}{m}$_____$\frac{b}{m}$；（6）$\frac{a}{n}$_____$\frac{b}{n}$.

9. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化为“$x>a$”或“$x<a$”的形式：　　【导学号：2850581】

（1）$x-3>1$；　　（2）$-\frac{2}{3}x>-1$；

（3）$3x<1+2x$；　　（4）$2x>4$.

10. （1）比较 m^2-2m+5 与 $-2m+5$ 的大小；

（2）比较 a^2-4a+3 与 $-4a+1$ 的大小.

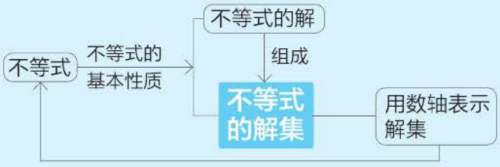
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 不等式的解集

核心知识

- 不等式的解与解集
- 用数轴表示不等式的解集

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 不等式的解与解集

1. 不等式的解 能使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解.

判断一个数是否为不等式的解，就是将这个数代替不等式中的未知数，看不等式是否成立，若成立，则该数就是不等式的一个解，若不成立，则该数就不是不等式的解.

2. 不等式的解集 一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解集.

特别提醒 不等式的解集必须符合两个条件：

（1）解集中的每一个数值都能使不等式成立；

（2）能够使不等式成立的所有数值都在解集中.

3. 解不等式 求不等式解集的过程叫做解不等式.

提分·必记

特别解读

不等式的解与不等式解集的区别与联系：

- 区别：不等式的解集是能使不等式成立的未知数的所有取值，是所有解的集合，而不等式的解是使不等式成立的未知数的值.
- 联系：解集包括所有的解，所有的解组成了解集.

拔考向 利用不等式的解与解集的定义进行辨析

例 1 有下列四种说法：

① $x=\frac{5}{4}$是不等式 $4x-5>0$ 的一个解；

② $x=\frac{5}{2}$是不等式 $4x-5>0$ 的一个解；

③ $x>\frac{5}{4}$是不等式 $4x-5>0$ 的解集；

④ $x>2$ 中的任何一个数都可以使不等式 $4x-5>0$ 成立，所以 $x>2$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集.

其中正确的有（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

解题秘方：紧扣不等式的解与解集的定义以及它们的区别与联系进行辨析.

解：①将 $x=\frac{5}{4}$代入不等式左边，得左边等于 0，不等式不成立，所以 $x=\frac{5}{4}$不是这个不等式的解；

提分·秘诀

方法点拨

识别不等式的解与解集的方法：代入不等式，能使不等式成立的未知数的值就是不等式的解；不等式的所有解的集合为不等式的解集. 注意：如果一个范围不包括不等式所有的解或有使不等式不成立的数，那么这个范围就不是不等式的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②将 $x=\frac{5}{2}$ 代入不等式左边，得左边等于 5，$5>0$，所以 $x=\frac{5}{2}$ 是这个不等式的一个解；

③在 $x>\frac{5}{4}$ 的范围内，所有 x 的值都满足不等式 $4x-5>0$，而不等式 $4x-5>0$ 的所有解都满足 $x>\frac{5}{4}$，所以 $x>\frac{5}{4}$ 是不等式 $4x-5>0$ 的解集；

④尽管 $x>2$ 中的任何一个数都可以使不等式 $4x-5>0$ 成立，但这个范围并不包含这个不等式所有的解，因而 $x>2$ 不是该不等式的解集．

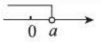
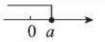
答案：B

点知识 2 不等式的解集的表示方法



在数轴上表示不等式的解集

不等式的解集表示的是未知数的取值范围，所以不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来．一般地，利用数轴表示不等式的解集通常有以下四种情况（设 $a>0$）：

不等式的解集	$x>a$	$x\geqslant a$	$x<a$	$x\leqslant a$
数轴表示				

注意：在数轴上表示不等式的解集时，大于向右画，小于向左画，有等号画实心圆点（表示包括这一点），无等号画空心圆圈（表示不包括这一点）．

提分·必记

方法总结

用数轴表示解集的一般步骤：

1. 画数轴；
2. 定界点，注意界点是实心圆点，还是空心圆圈；
3. 定方向，原则是“小于向左，大于向右”．

拔考向 在数轴上表示不等式的解集

例 2 在数轴上表示下列不等式的解集：

（1）$x>-1$；（2）$x\leqslant 1$．

解题秘方：根据在数轴上表示解集的方法，确定界点以及方向．

解：（1）如图 2-3-1 所示．

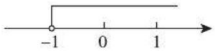


图 2-3-1

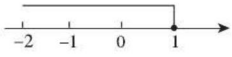


图 2-3-2

（2）如图 2-3-2 所示．

提分·秘诀

特别提醒

因为 $x>-1$ 无等号，所以在表示 -1 的点上画空心圆圈表示．

因为 $x\leqslant 1$ 有等号，所以在表示 1 的点上画实心圆点．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用数形结合思想求不等式的特殊解

例 3 填空．

（1）写出不等式 $x<3$ 的所有正整数解：_____．

（2）写出不等式 $x>-4$ 的所有负整数解：_____．

（3）写出不等式 $x<2$ 的所有非负整数解：_____．

（4）写出不等式 $x>-3$ 的最小整数解：_____．

解题秘方：此题中不等式本身就是其解集，将解集表示在数轴上，结合数轴的特征找出其特殊解即可．

挑战·高分

方法点拨

借助数轴这个“形”表示不等式中 x 的取值范围，再在该范围内找出符合条件的特殊“数”，利用数形结合思想能很直观地求出符合条件的数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：将这几个不等式的解集在数轴上表示出来，如图 2−3−3 所示．

（1）满足 $x<3$ 的正整数为 1，2．

（2）满足 $x>-4$ 的负整数为 -1，-2，-3．

（3）满足 $x<2$ 的非负整数（包括正整数和 0）为 0，1．

（4）满足 $x>-3$ 的整数有 -2，-1，0，1，…，其中最小的整数为 -2．

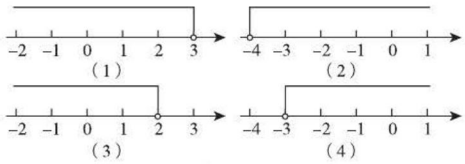


图 2−3−3

答案：（1）1，2　（2）-3，-2，-1　（3）0，1　（4）-2

详解

满足 $x<3$ 的正整数意思是 $0<x<3$ 且 x 为整数，故满足 $x<3$ 的正整数为 1，2．

拔尖角度 2 利用不等式的特殊解确定字母的取值范围

挑战·高分

例 4　已知不等式 $x<a$ 的正整数解为 1，2，3，求 a 的取值范围．

解题秘方：将 $x<a$ 在数轴上表示出来，再根据正整数解为 1，2，3，求出 a 的取值范围．

解：将 $x<a$ 在数轴上表示出来，如图 2−3−4 所示．

因为 $x<a$ 的正整数解为 1，2，3，

所以 $3<a\leqslant 4$，即 a 的取值范围是 $3<a\leqslant 4$．

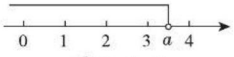


图 2−3−4

警示误区

已知不等式的特殊解确定字母的取值范围时，因为特殊解有限，所以该字母的范围一定是某一区间，关键是包不包括端点．为了防止出错，可以把包括和不包括端点分情况讨论．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点有理解不等式解集的概念及在数轴上表示不等式的解集，这也是继续学习不等式知识的基础，在中考中较少直接考查，若出现，一般是在填空题或选择题中，题目都非常简单．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 用数轴表示不等式的解集

例 5　［中考·贵阳］关于 x 的不等式的解集在数轴上的表示如图 2−3−5 所示，则该不等式的解集为_____．

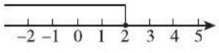


图 2−3−5

试题评析：本题考查了不等式的解集，解题的关键是掌握不等式解集的数轴表示．

解：从图 2−3−5 知，解集表示在数轴上时，方向向左且在表示 2 的点处为实心圆点，故其解集为 $x\leqslant 2$．

答案：$x\leqslant 2$

考法点津

考法 1：已知解集，在数轴上表示解集是从“数”到“形”的过程．

考法 2：已知解集在数轴上的表示，写出解集是从“形”到“数”的过程．

两者都要关注两点：一是方向，二是空心圆圈与实心圆点．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见272页

1. 下列说法中，错误的是（　　）

A. 不等式 $x < 5$ 的整数解有无数多个

B. 不等式 $x > -5$ 的负整数解有有限个

C. 不等式 $-2x < 8$ 的解集是 $x < -4$

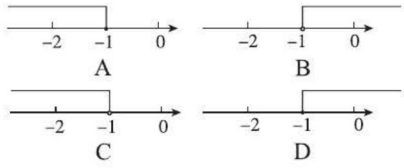
D. -40 是不等式 $2x < -8$ 的一个解

2. 在下列所表示的不等式的解集中，不包括 -5 的是（　　）

A. $x \leqslant -4$　　B. $x \geqslant -5$

C. $x \leqslant -6$　　D. $x \geqslant -7$

3. [中考·舟山]不等式 $1-x \geqslant 2$ 的解集在数轴上的表示正确的是（　　）



4. 已知 $ax < 5a$（$a \neq 0$）是关于 x 的不等式，那么它的解集是（　　）

A. $x < 5$

B. $x > -5$

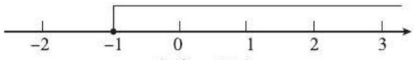
C. 当 $a > 0$ 时，$x < 5$

D. 当 $a > 0$ 时，$x < 5$；当 $a < 0$ 时，$x > 5$

5. [中考·宿迁]不等式 $x - 1 \leqslant 2$ 的非负整数解有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

6. 已知关于 x 的不等式 $x \geqslant a-1$ 的解集如图所示，则 a 的值为_____.



（第6题）

7. 若关于 x 的不等式 $3m-2x < 5$ 的解集是 $x > 2$，则实数 m 的值为_____.

8. [中考·大庆]已知 $x=4$ 是不等式 $ax-3a-1 < 0$ 的解，$x=2$ 不是不等式 $ax-3a-1 < 0$ 的解，则实数 a 的取值范围是_____.

9. 利用不等式的基本性质解下列不等式，并把解集在数轴上表示出来：　　【导学号：2850581】

（1）$9x > 8x+1$；

（2）$\frac{1}{2}x \geqslant -4$；

（3）$-10x \leqslant 5$.

10. 已知 $x=3$ 是方程 $x=-a+1$ 的解，试求不等式 $(-5+a)x < -14$ 的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 一元一次不等式

核心知识

- 一元一次不等式的定义
- 一元一次不等式的解法
- 一元一次不等式的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元一次不等式

1. 定义 左右两边都是整式，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是1，像这样的不等式，叫做一元一次不等式.

一元一次不等式的“三要素”：

（1）不等式的两边都是整式；

（2）只含一个未知数；

（3）未知数的次数是1.

2. 一元一次不等式与一元一次方程间的关系

		一元一次方程	一元一次不等式
相同点	未知数个数	1	1
	未知数次数	1	1
	式子特点	含有未知数的式子均为整式	含有未知数的式子均为整式
不同点	表示关系	相等	不等

提分·必记

特别警示

- 判断一个不等式是否为一元一次不等式，必须化简整理后再判断.
- 只含有一个未知数，隐含着未知数的系数不为零，即化成最简形式 $ax>0$（$ax\geqslant 0$），或 $ax<0$（$ax\leqslant 0$）时，$a\neq 0$.

拨考向 利用一元一次不等式的定义进行识别

例1 下列不等式中，是一元一次不等式的有（　　）

（1）$x^2+1>2x$；（2）$\frac{1}{x}+2>0$；（3）$x>y$；（4）$\frac{1-x}{2}\leqslant 1$.

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

解题秘方：紧扣一元一次不等式的“三要素”去识别.

解：（1）中未知数的最高次数是2，故不是一元一次不等式；

（2）中左边不是整式，故不是一元一次不等式；

（3）中有两个未知数，故不是一元一次不等式；

（4）是一元一次不等式.

答案：A

提分·秘诀

方法点拨

判断一个不等式是否为一元一次不等式的步骤：

先对所给不等式进行化简整理，再看是否满足一元一次不等式的“三要素”，同时要注意：

（1）化简前不等式的左右两边都是**整式**；

（2）化简后**未知数的次数是1，且系数不为0.**

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 一元一次不等式的解法

1. 解一元一次不等式，要根据不等式的基本性质，将不等式逐步化为 $x<a$（$x\leqslant a$）或 $x>a$（$x\geqslant a$）的形式. 解一元一次不等式的步骤如下：

去分母→去括号→移项→合并同类项→系数化为 1.

2. 解一元一次不等式与解一元一次方程的区别与联系

	一元一次方程	一元一次不等式
解法步骤	①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤系数化为 1.［解不等式时，去分母、系数化为 1 时，若两边同时乘（或除以）一个负数，不等号的方向改变］	
依据	等式的基本性质	不等式的基本性质
解的个数	只有一个解	有无数多个解
解（集）的形式	$x=a$	$x<a$（$x\leqslant a$）或 $x>a$（$x\geqslant a$）

提分·必记

特别提醒

- 解一元一次不等式时，五个步骤不一定都要用到，并且不一定都要按照这个顺序求解，应根据不等式的特点灵活求解.
- 解方程的移项变形对于解不等式同样适用.

拔考向▸ 利用解一元一次不等式解决问题

提分·秘诀

方法点拨

解一元一次不等式时，有两步可能会改变不等号的方向：其一，去分母；其二，系数化为 1. 为了使问题更加简便，可以在“去分母”这一步里，两边同乘一个正数，这样，“改变不等号的方向”的问题便落到“系数化为 1”这一步. 由于要注意的只有这一步，就不容易出错了.

题型 1：利用解一元一次不等式的步骤解一元一次不等式

例 2 解不等式 $x-\dfrac{3x-8}{2}+1\geqslant\dfrac{2(10-x)}{7}$，并把解集在数轴上表示出来.

解题秘方：先根据解一元一次不等式的步骤求出解集，然后在数轴上表示出解集.

解：去分母，得 $14x-7(3x-8)+14\geqslant 4(10-x)$.

去括号，得 $14x-21x+56+14\geqslant 40-4x$.

移项，得 $14x-21x+4x\geqslant 40-56-14$.

合并同类项，得 $-3x\geqslant -30$.

系数化为 1，得 $x\leqslant 10$.

注意改变不等号的方向.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 2-4-1 所示.



图 2-4-1

题型 2：已知不等式的解集求字母的值

例 3 已知不等式 $\dfrac{1}{3}(x-m)>3-m$ 的解集为 $x>1$，则 m 的值为_____.

题意解读

由不等式 $\frac{1}{3}(x-m)>3-m$ 的解集为 $x>1$，可知 x 为未知数.

解题秘方：先用含 m 的式子表示出不等式的解集，再根据已知条件列出关于 m 的方程，求解即可.

解：去分母，得 $x-m>3(3-m)$，

去括号，得 $x-m>9-3m$.

移项、合并同类项，得 $x>9-2m$.

∵不等式的解集为 $x>1$，

∴ $9-2m=1$，解得 $m=4$.

∵ $x>9-2m$ 与 $x>1$ 表示同一个不等式的解集，

∴ $9-2m=1$.

答案：4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：构造一元一次不等式求字母的取值范围

例 4 当 x 取何正整数时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值？

解题秘方：先根据题意列出不等式，再解不等式．

解：根据题意，得 $\frac{x-2}{2} \leqslant \frac{7-x}{3}$．

去分母，得 $3(x-2) \leqslant 2(7-x)$．

去括号，得 $3x-6 \leqslant 14-2x$．

移项、合并同类项，得 $5x \leqslant 20$．

系数化为 1，得 $x \leqslant 4$，

则不等式的正整数解为 1，2，3，4．

所以当 x 取 1，2，3，4 时，式子 $\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{7-x}{3}$ 的值．

方法点拨

求使不等关系成立时字母的值或取值范围，关键是列出正确的不等式．

点知识 ▸ 3 一元一次不等式的实际应用

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的解．

列不等式解决实际问题的步骤

（1）**审**：认真审题，找出已知量和未知量，并找出它们之间的关系．

（2）**设**：设出适当的未知数．

（3）**列**：根据题中的不等关系列出不等式．

（4）**解**：解不等式，求出其解集．

（5）**验**：检验所求出的不等式的解集是否符合题意．

（6）**答**：写出答案．

提分·必记

警示误区

- 设未知数时，表示不等关系的文字（如至少或最多）不能写；
- 检验时，要注意实际问题中的隐含条件，从两个方面检验：(1) 是不等式的解；(2) 要符合实际意义．

拔考向 ▸ 利用一元一次不等式解决实际问题

题型 1：利用一元一次不等式解决实际问题

例 5 某物流公司要将 300 t 物资运往某地，现有 A，B 两种型号的车可供调用，已知 A 型车每辆可装 20 t，B 型车每辆可装 15 t，在每辆车不超载的条件下，把 300 t 物资装运完．问：在已确定调用 5 辆 A 型车的前提下，至少还需调用 B 型车多少辆？

解题秘方：分析题中隐含的不等关系，建立不等式模型解决问题．

解：设还需调用 B 型车 x 辆．

根据题意，得 $20\times5+15x \geqslant 300$，

解得 $x \geqslant 13\frac{1}{3}$．

因为 x 为整数，所以 x 的最小值为 14．

答：至少还需调用 B 型车 14 辆．

提分·秘诀

特别提醒

- 隐含的不等关系：A，B 两种型号的汽车总共运的物资不少于 300 t．
- 本题中由于车的数量为整数，因此要在取值范围内取最小整数解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：方程组与不等式的综合应用

例 6 某电器商场销售 A，B 两种型号的计算器，A，B 两种计算器的进货价格分别为每台 30 元、40 元．商场销售 5 台 A 型号和 1 台 B 型号计算器，可获利润 76 元；销售 6 台 A 型号和 3 台 B 型号计算器，可获利润 120 元．（利润 = 销售价格 − 进货价格）

（1）求商场销售 A，B 两种型号计算器的销售价格分别是每台多少元？

（2）商场准备用不多于 2 500 元的资金购进 A，B 两种型号的计算器共 70 台，问最少需要购进 A 型号的计算器多少台？

解题秘方：根据题中的等量关系列出方程组，求出题目中关键的未知量，再根据不等关系建立不等式模型解决问题．

解：（1）设 A，B 两种型号计算器的销售价格分别是每台 x 元、y 元，

则 $\begin{cases}5(x-30)+(y-40)=76,\\6(x-30)+3(y-40)=120,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=42,\\y=56.\end{cases}$

答：A，B 两种型号计算器的销售价格分别为每台 42 元、56 元．

（2）设需要购进 A 型号的计算器 a 台，则

$30a+40(70-a)\leqslant 2\,500$，解得 $a\geqslant 30$.

答：最少需要购进 A 型号的计算器 30 台．

方法点拨

运用方程组或不等式解决实际问题时，可从实际问题中发现相等关系或不等关系，通过方程组模型或不等式模型求解．列不等式解应用题时，首先审题，找出题中的未知量和所有的已知量，直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为未知数，然后用含未知数的式子表示相关的量，找出不等关系列不等式、求解、作答，即审、设、找、列、解、答．

题型 3：利用一元一次不等式解决优化方案问题

例 7 某校组织学生参加“周末郊游”．甲旅行社说：“只要一名学生按全价，那么其余学生可享受半价优惠．”乙旅行社说：“全体学生都可按 6 折优惠．”已知全价为每人 240 元．

（1）设学生有 x 人，甲旅行社收费为 $y_{甲}$ 元，乙旅行社收费为 $y_{乙}$ 元，用含 x 的式子表示出 $y_{甲}$ 与 $y_{乙}$；

（2）讨论哪一家旅行社更优惠．

解题秘方：（1）根据题意直接列式、化简即可；（2）分三种情况讨论，并分别求出满足要求的学生数．

解：（1）$y_{甲}=240+(x-1)\times 120=120x+120$，

$y_{乙}=240\times 0.6x=144x$.

（2）当 $y_{甲}>y_{乙}$ 时，$120x+120>144x$，

解得 $x<5$.

∴当学生少于 5 人时，乙旅行社更优惠．

当 $y_{甲}=y_{乙}$ 时，$120x+120=144x$，

解得 $x=5$.

∴当学生正好为 5 人时，两家旅行社一样优惠．

当 $y_{甲}<y_{乙}$ 时，$120x+120<144x$，

解得 $x>5$.

∴当学生超过 5 人时，甲旅行社更优惠．

解法提醒

当一个问题有多种可能的情况时，需要分情况讨论出所有可能的结果，体现了分类讨论思想．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用两个不等式解集相同求字母的值

例8 若关于 x 的不等式 $3x-2<4x+1$ 与 $2x-a>x+a$ 的解集相同，求 a 的值.

解题秘方：先把字母 a 当成常数，求出两个关于 x 的不等式的解集，再根据两个不等式的解集相同，得出关于 a 的方程，最后求出 a 的值.

解：解不等式 $3x-2<4x+1$，

得 $x>-3$；

解不等式 $2x-a>x+a$，

得 $x>2a$.

∵关于 x 的不等式 $3x-2<4x+1$ 与 $2x-a>x+a$ 的解集相同，

∴ $2a=-3$.

∴ $a=-\frac{3}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

参数也可做已知数：遇到含字母参数的一元一次不等式求解集的问题时，其解题步骤和解不含字母参数的一元一次不等式的步骤基本一致.应注意去分母和系数化为1两步中乘(或除以)的若是含字母的式子，则要对式子的取值范围进行分类讨论.

拔尖角度 2 利用不等式解与方程组综合的应用

例9 已知方程组 $\begin{cases}3x+y=k+1,\\x+3y=k-1\end{cases}$ 的解满足 $x+y<0$，求 k 的取值范围.

解题秘方：由于方程组的解满足 $x+y<0$，故可考虑把 k 看成已知数，求出 x，y 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解：$\begin{cases}3x+y=k+1,①\\x+3y=k-1.②\end{cases}$

① $\times 3-$ ②，得 $8x=2k+4$，

∴ $x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}$.

② $\times 3-$ ①，得 $8y=2k-4$，

∴ $y=\frac{k}{4}-\frac{1}{2}$.

∵ $x+y<0$，

∴ $\frac{k}{4}+\frac{1}{2}+\frac{k}{4}-\frac{1}{2}<0$.

∴ $k<0$，

即 k 的取值范围为 $k<0$.

挑战·高分

另解

分析：观察这个方程组可以发现，我们只需把两个方程相加，就可以得到 $x+y$ 的值，然后代入 $x+y<0$，求出 k 的取值范围.

解：$\begin{cases}3x+y=k+1,①\\x+3y=k-1.②\end{cases}$

① + ②，得 $4x+4y=2k$，

∴ $x+y=\frac{2k}{4}=\frac{k}{2}$.

∵ $x+y<0$，

∴ $\frac{k}{2}<0$.

∴ $k<0$，

即 k 的取值范围为 $k<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 3 利用不等式解方案设计的实际应用

挑战·高分

例 10 某公司为了扩大经营，决定购进 6 台机器用于生产某种活塞．现有甲、乙两种机器可供选择，其中每台机器的价格和每台机器日生产活塞的数量如下表：

类型	甲	乙
价格/（万元/台）	7	5
每台日生产量/个	100	60

公司要求本次购买机器所耗资金不能超过 34 万元．

（1）按该公司要求，有哪几种购买方案？

（2）若该公司购进的 6 台机器的日生产量不低于 380 个，那么为了节约资金应选择哪种购买方案？

解题秘方：根据题目中的不等关系建立不等式模型，求出符合题意的几个特殊解，然后设计方案．

解：（1）设购买甲种机器 x（$0 \leqslant x \leqslant 6$）台，则购买乙种机器（$6-x$）台．

依题意，得 $7x+5(6-x) \leqslant 34$，解得 $x \leqslant 2$.

$\because x$ 取非负整数，

$\therefore x=0, 1, 2$.

∴该公司有以下三种购买方案：

方案一　不购买甲种机器，购买乙种机器 6 台．

方案二　购买甲种机器 1 台，购买乙种机器 5 台．

方案三　购买甲种机器 2 台，购买乙种机器 4 台．

（2）按方案一购买机器，所耗资金为 $6\times5=30$（万元），新购买的 6 台机器的日生产量为 $6\times60=360$（个）；

按方案二购买机器，所耗资金为 $1\times7+5\times5=32$（万元），新购买的 6 台机器的日生产量为 $1\times100+5\times60=400$（个）；

按方案三购买机器，所耗资金为 $2\times7+4\times5=34$（万元），新购买的 6 台机器的日生产量为 $2\times100+4\times60=440$（个）．

由于方案二既能达到日生产量不低于 380 个的要求，又比方案三节约 2 万元资金，故应选择方案二．

解法提醒

解方案设计问题的方法：先由题意列出不等式，解不等式，得出符合题意的解，然后对不同的情况进行讨论，从而得出最优方案．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

运用不等式的基本性质解一元一次不等式并把解集表示在数轴上，会求不等式的特殊解（整数解、非负整数解或负整数解等），利用不等式解决实际问题等是历年中考的重要考点．考查的形式多样，选择题、填空题和解答题都有涉及．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 求一元一次不等式的特殊解

例11 [中考·遵义]不等式$6-4x \geqslant 3x-8$的非负整数解有(　　)

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

试题评析：本题考查了求一元一次不等式的特殊解，掌握解一元一次不等式的一般步骤是解决问题的关键.

解：移项，得$-4x-3x \geqslant -8-6$.

合并同类项，得$-7x \geqslant -14$.

系数化为1，得$x \leqslant 2$.

故非负整数解为0，1，2.

答案：B

特别提醒

- 求一元一次不等式的特殊解，必须先求出一元一次不等式的解集，然后在解集中根据特殊解的“特殊”性取解.
- 非负整数包括正整数和0其中“0”易被忽视.

考法2 一元一次不等式与一元一次方程的综合

例12 [中考·丽水]关于x的一元一次方程$x-m+2=0$的解是负数，则m的取值范围是(　　)

A.$m \geqslant 2$　　B.$m > 2$　　C.$m < 2$　　D.$m \leqslant 2$

试题评析：本题主要考查解一元一次方程以及一元一次不等式，解题的关键是正确理解“解是负数”，从而将题目转化为不等式进行求解.

解：$x-m+2=0$.

移项，得$x=m-2$.

∵关于x的一元一次方程$x-m+2=0$的解是负数，

∴$x=m-2<0$，∴$m<2$.

答案：C

考法点评

一元一次方程与一元一次不等式转化的细节是“解或解集的情况”.由一元一次方程解的情况列一元一次不等式，也可由一元一次不等式解集的情况列一元一次方程.如：关于x的一元一次不等式$x-m+2>0$的解集为$x>2$，则$m=$_____.

考法3 一元一次不等式与二元一次方程组的综合

例13 [中考·宜宾]若关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}x-y=2m+1,\\x+3y=3\end{cases}$的解满足$x+y>0$，则$m$的取值范围是_____.

试题评析：本题是解二元一次方程组与解一元一次不等式的综合运用，熟练掌握二元一次方程组的解法和一元一次不等式的解法是解题的关键.

解：关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}x-y=2m+1,①\\x+3y=3.②\end{cases}$

②－①得，$4y=2-2m$，$y=\dfrac{1-m}{2}$.

①×3+②得，$4x=6m+6$，$x=\dfrac{3m+3}{2}$.

∵$x+y>0$，∴$\dfrac{3m+3}{2}+\dfrac{1-m}{2}>0$.

解得$m>-2$.

答案：$m>-2$

另解

将方程组中的两个方程相加得$2x+2y=2m+4$，

∴$x+y=m+2$.

∵$x+y>0$，

∴$m+2>0$.

∴$m>-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 一元一次不等式的实际应用

例 14 [中考·齐齐哈尔]为有效开展“阳光体育”活动，某校计划购买篮球和足球共 50 个，购买资金不超过 3 000 元. 若每个篮球 80 元，每个足球 50 元，则篮球最多可购买（　　）

A.16 个　　B.17 个　　C.33 个　　D.34 个

试题评析：本题考查了一元一次不等式的应用——求范围的问题，解题的关键是列出不等式.

解：设篮球可购买 x 个，由题意可得 $80x+50(50-x)\leqslant 3\,000$，

解得 $x\leqslant\frac{50}{3}$，故不等式的最大整数解为 $x=16$.

答案：A

剖题

1. 等量关系“篮球和足球共 50 个”，用于两个未知量之间的转化，若设购买篮球 x 个，则购买足球(50-x)个；
2. 不等关系“购买资金不超过 3 000 元”，用于列一元一次不等式.
3. 取解时，注意未知数的实际意义.

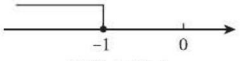
两年模拟兵法 ☞答案见 273 页

1. 下列各式是一元一次不等式的是（　　）

A.$2x<3y$　　B.$x^2+2x+1>0$

C.$4x-5<x$　　D.$3x=4(2-x)$

2. 关于 x 的不等式 $2x-a\leqslant -1$ 的解集在数轴上的表示如图所示，则 a 的值是（　　）



（第 2 题）

A. 0　　B. −3　　C. −2　　D. −1

3. [中考·呼和浩特]若不等式 $\frac{2x+5}{3}-1\leqslant 2-x$ 的解集中，x 的每一个值都能使关于 x 的不等式 $3(x-1)+5>5x+2(m+x)$ 成立，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m>-\frac{3}{5}$　　B. $m<-\frac{1}{5}$

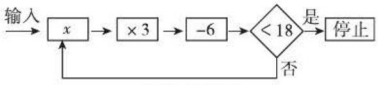
C. $m<-\frac{3}{5}$　　D. $m>-\frac{1}{5}$

4. 若 $(m-2)x^{2m+1}-1>5$ 是关于 x 的一元一次不等式，则该不等式的解集为_____.

5. 若 $1-\frac{x-2}{2}$ 的值不大于 $\frac{1+3x}{3}$ 的值，则 x 的取值范围是_____.

6. [中考·台州]商家花费 760 元购进某种水果 80 kg，销售中有 5% 的水果正常损耗. 为了避免亏本，售价至少应定为每千克_____元.

7. [中考·烟台]运行程序如图所示，从“输入实数 x”到“结果是否 <18”为一次程序操作. 若输入 x 后程序操作仅进行了一次就停止，则 x 的取值范围是_____.



（第 7 题）

8. [中考·舟山]小明解不等式 $\frac{1+x}{2}-\frac{2x+1}{3}\leqslant 1$ 的过程如下，请指出他解答过程中错误步骤的序号，并写出正确的解答过程.

> 解：去分母，得 $3(1+x)-2(2x+1)\leqslant 1$…①
> 去括号，得 $3+3x-4x+1\leqslant 1$…②
> 移项，得 $3x-4x\leqslant 1-3-1$…③
> 合并同类项，得 $-x\leqslant -3$…④
> 两边都除以 -1，得 $x\leqslant 3$…⑤

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

（1）$2(x-1)-3<1$；

（2）$\frac{2x-1}{3}-\frac{9x+2}{6}\leqslant 1$.

10. 已知不等式 $2(x+1)-5<3(x+1)+4$ 的最小整数解是关于 x 的方程 $\frac{1}{3}x-mx=5$ 的解，求 $m^2-2m-11$ 的值. 【导学号：2850581】

11. [中考·潍坊] 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-3y=5,\\x-2y=k\end{cases}$ 的解满足 $x>y$，求 k 的取值范围.

12. [中考·泰安] 某水果商从批发市场用 8 000 元购进了大樱桃和小樱桃各 200 kg，大樱桃的进价比小樱桃的进价每千克多 20 元. 大樱桃售价为每千克 40 元，小樱桃售价为每千克 16 元.

（1）大樱桃和小樱桃的进价分别是每千克多少元？销售完后，该水果商共赚了多少元钱？

（2）该水果商第二次仍用 8 000 元钱从批发市场购进了大樱桃和小樱桃各 200 kg，进价不变，但在运输过程中小樱桃损耗了 20%. 若小樱桃的售价不变，要想让第二次赚的钱不少于第一次所赚钱的 90%，大樱桃的售价最少应为每千克多少元？

13. 为了保护环境，某企业决定购买 10 台污水处理设备. 现有 A，B 两种型号的设备，其中每台的价格、月处理污水量如下表：

类型	A 型	B 型
价格/（万元/台）	12	10
月处理污水量/t	240	200

经预算，该企业购买设备的资金不高于 105 万元.

（1）该企业有哪几种购买方案？

（2）若该企业每月产生的污水量为 2 040 t，为了节约资金，应选择哪种购买方案？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 一元一次不等式与一次函数

核心知识

- 一次函数与一元一次不等式
- 一次函数与方程和不等式的综合应用

知识链接

一次函数 —关键点→ 与x轴的交点
一次函数 ⇕数 —→ 形⇕ 与x轴的交点
一元一次不等式 —→ 解集
（一次函数、与x轴的交点、一元一次不等式、解集）→ 相互转化与应用

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数与一元一次不等式

1. **一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）与一元一次不等式 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$）（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）的关系**

数：函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y>0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集，函数值 $y<0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

形：函数 $y=kx+b$ 的图象中，位于 x 轴上方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集，位于 x 轴下方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

2. **拓展**

直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与直线 $y_2=k_2x+b_2$ 的交点的横坐标即为方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$（或 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$）的解集就是直线 $y_1=k_1x+b_1$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2$ 上（或下）方部分对应的 x 的取值范围.

示例：如图 2−5−1，方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解为 $x=a$；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$ 的解集为 $x>a$；不等式 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$ 的解集为 $x<a$.

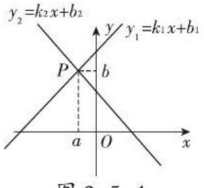


图 2−5−1

拔考向 利用一次函数图象解一元一次不等式

例 1 用画函数图象的方法解不等式 $3x+2>2x-1$.

解题秘方：紧扣“用图象法解一元一次不等式的步骤”求解.

解：**方法一** 原不等式可化为 $x+3>0$.

画出函数 $y=x+3$ 的图象（如图 2−5−2 所示）.

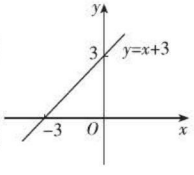


图 2−5−2

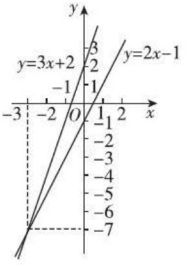


图 2−5−3

提分·必记

特别提醒

利用图象法解一元一次不等式的一般步骤：

1. 将不等式转化为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$（$a\neq 0$）的形式；
2. 画出函数 $y=ax+b$（$a\neq 0$）的图象，并确定函数图象与 x 轴的交点坐标；
3. 根据函数图象确定对应不等式的解集.

提分·秘诀

解法提醒

将不等式转化为函数关系式，画出此函数的图象，观察图象即可求出不等式的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由图象可以看出，当 $x > -3$ 时，这条直线上的点在 x 轴上方，即此时 $y=x+3 > 0$.

所以不等式 $3x+2 > 2x-1$ 的解集为 $x > -3$.

方法二 在同一坐标系中分别画出函数 $y=3x+2$ 与函数 $y=2x-1$ 的图象（如图 2-5-3 所示）. 可以看出，它们交点的横坐标为 -3.

当 $x > -3$ 时，直线 $y=3x+2$ 在直线 $y=2x-1$ 的上方，即 $3x+2 > 2x-1$，所以不等式的解集为 $x > -3$.

方法点拨

一元一次不等式的图象解法，就是把解不等式转化为比较直线上点的位置的高低，能直观地看出不等式的解集，体现了数形结合和转化思想的应用.

点知识 2 一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的综合应用

提分·必记

重点剖析

实际问题中，未知数（函数自变量）往往具有隐含条件，如表示物体个数时，要求必须都是非负整数，表示距离、时间、速度等，要求都是非负数，解题时一定要结合实际问题进行取值.

1. 一次函数、一元一次方程与一元一次不等式这三者之间的关系常用来解决比较型的方案决策问题，即对两种不同的方案进行比较，从而判断或选择某种合算的方案. 常见的问题有购物问题、利润问题、支出问题等.

2. 解答方案决策问题的一般步骤

（1）根据条件中两组独立的变量关系，列出相关的两个一次函数表达式 $y_1=k_1x+b_1$ 和 $y_2=k_2x+b_2$.

（2）根据 y_1 与 y_2 之间的大小关系（$y_1 > y_2$ 或 $y_1=y_2$ 或 $y_1 < y_2$），分情况求得相应的 x 的值或取值范围.

（3）比较所得结果，根据问题的要求进行判断或决策.

拔考向 利用方程、不等式、函数之间的关系解决实际问题

提分·秘诀

例 2 某商场计划投入一笔资金采购一批紧俏商品，经过市场调查发现：如果月初出售可获利 25%，并把本利再投资其他商品，到月末又可获利 10%；如果月末出售可获利 40%，但要付仓储费用 900 元. 请问如何投资获利较多？

解法提醒

本题利用建模思想求解. 利用不等式和一次函数解决实际问题的关键是建立数学模型，根据题中各种等量关系列出一次函数表达式，再根据题中所隐含的不等关系列出不等式求解.

解题秘方：先建立一次函数模型，再根据自变量的不同取值作出判断和选择.

解：设商场投入资金 x 元，第一种投资情况下，获得的总利润为 y_1 元，第二种投资情况下，获得的总利润为 y_2 元.

由题意，得 $y_1=(1+25\%)(1+10\%)x-x$，即 $y_1=0.375x$.

$y_2=(1+40\%)x-x-900$，即 $y_2=0.4x-900$.

（1）当 $y_1 > y_2$ 时，$0.375x > 0.4x-900$，$x < 36\,000$；

（2）当 $y_1=y_2$ 时，$0.375x=0.4x-900$，$x=36\,000$；

（3）当 $y_1 < y_2$ 时，$0.375x < 0.4x-900$，$x > 36\,000$.

答：当投资超过 36 000 元时，选择第二种投资方式；当投资 36 000 元时，选择两种投资方式获利相等；当投资少于 36 000 元时，选择第一种投资方式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用图象法解一元一次方程及不等式

例 3 画出函数 $y=2x-1$ 的图象，利用图象求：

（1）方程 $2x-1=0$ 的解；

（2）不等式 $2x-1<0$ 的解集；

（3）当 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 时，x 的取值范围．

解题秘方：紧扣“数”“形”结合思想，按图象法解方程、不等式的步骤求解．

解：画出函数 $y=2x-1$ 的图象，如图 2-5-4 所示．

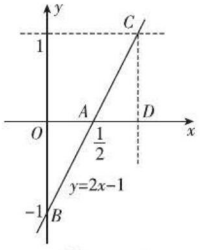


图 2-5-4

（1）由图象可知，直线 $y=2x-1$ 与 x 轴的交点为 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，∴方程 $2x-1=0$ 的解是直线与 x 轴的交点的横坐标，即 $x=\frac{1}{2}$．

（2）不等式 $2x-1<0$ 的解集是函数 $y=2x-1$ 的图象在 x 轴下方部分对应的 x 的取值范围，即 $x<\frac{1}{2}$．

（3）过点（0，1）作 x 轴的平行线交直线 $y=2x-1$ 于点 C，过点 C 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 D，则点 D 的坐标为（1，0）．

观察图象可知，当 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 时，x 的取值范围是 $0 \leqslant x \leqslant 1$．

挑战·高分

解法提醒

- 从“数”看，解一元一次方程相当于求 x 取何值时，函数值为 0；从“形”看，解一元一次方程相当于求直线与 x 轴交点的横坐标．
- 从“数”看，解一元一次不等式相当于求 x 取何值时，函数值大于或小于 0；从“形”看，解一元一次不等式相当于确定图象在 x 轴上方部分或下方部分对应的自变量 x 的取值范围．

拔尖角度 2 利用建模法用函数、方程及不等式解实际应用问题

例 4 某家电集团公司生产某种型号的新家电，前期投资 200 万元，每生产一台这种新家电，后期还需其他投资 0.3 万元，已知每台新家电可实现产值 0.5 万元．

（1）分别求总投资额 y_1（万元）和总利润 y_2（万元）关于新家电的总产量 x（台）的函数关系式；

（2）当新家电的总产量为 900 台时，该公司的盈亏情况如何？

（3）请你利用（1）中 y_2 与 x 的函数关系式，分析该公司的盈亏情况．

解题秘方：紧扣题中的数量关系列出函数关系式，结合方程、不等式求解．

解：（1）根据题意，得 $y_1=0.3x+200$（$x \geqslant 0$），

$y_2=0.5x-(0.3x+200)=0.2x-200$（$x \geqslant 0$）．

（2）把 $x=900$ 代入 $y_2=0.2x-200$，

挑战·高分

知识储备

1. 总投资 = 前期投资 + 后期其他投资；
2. 总利润 = 总产值 - 总投资．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

可得 $y_2=0.2\times900-200=-20<0$，

所以当总产量为 900 台时，公司会亏损，亏损额为 20 万元．

（3）根据题意，当 $0.2x-200<0$ 时，解得 $x<1\,000$，

因为 $x\geqslant0$，所以 $0\leqslant x<1\,000$，

说明总产量大于等于 0 台且小于 1 000 台时，公司会亏损；

当 $0.2x-200>0$ 时，解得 $x>1\,000$，

说明总产量大于 1 000 台时，公司会盈利；

当 $0.2x-200=0$ 时，解得 $x=1\,000$，

说明总产量等于 1 000 台时，公司既不亏损也不盈利．

解题通法：利用一次函数、一元一次方程和一元一次不等式解决实际应用问题，一要结合实际问题，提取等量关系，建立函数模型，且要注意实际问题中自变量的取值范围，二要结合所求，列方程或不等式，进而解方程或不等式，三要结合求得的结果回答实际问题．

图解

如图 2-5-5 所示是 $y_2=0.2x-200$（$x\geqslant0$）的函数图象，由函数图象可得：

当 $0\leqslant x<1\,000$ 时，$y_2<0$；

当 $x>1\,000$ 时，$y_2>0$；

当 $x=1\,000$ 时，$y_2=0$．

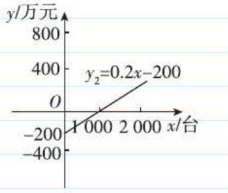


图 2-5-5

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的考点主要是利用一次函数的图象解方程（组）或不等式，它体现了用函数的观点看待方程（组）或不等式的思想，对该思想的考查近年来在中考中有所加强，尤其是实际应用问题，背景新颖，主要考查利用一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式的关系解决实际问题，难度中等偏上．

三年中考兵法

考法 1 利用一次函数图象的交点坐标解不等式

例 5 ［中考·菏泽］如图 2-5-6，函数 $y_1=-2x$ 与 $y_2=ax+3$ 的图象相交于点 $A(m,2)$，则关于 x 的不等式 $-2x>ax+3$ 的解集是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$　　C. $x>-1$　　D. $x<-1$

试题评析：此题主要考查了一次函数与一元一次不等式，关键是求出 A 点坐标．

解：∵函数 $y_1=-2x$ 过点 $A(m,2)$，

∴ $-2m=2$，解得 $m=-1$．

根据图象可知，不等式 $-2x>ax+3$ 的解集为 $x<-1$．

答案：D

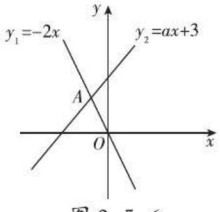


图 2-5-6

考法 2 利用一次函数与一元一次不等式的关系解决方案设计问题

例 6 ［中考·德州］下表中给出 A，B，C 三种手机通话的收费方式．

收费方式	月通话费 / 元	包时通话时间 / 时	超时费 /（元 / 分）
A	30	25	0.1
B	50	50	0.1
C	100	不限时	

冲刺·满分

思路点拨

首先利用函数 $y_1=-2x$ 求出 m 的值，再以交点为界点，结合图象写出不等式 $-2x>ax+3$ 的解集即可．

解法提醒

利用一次函数求解最优方案问题，一般先根据条件求出函数的关系式，再根据条件借助不等式或图象分类讨论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）设月通话时间为 x 时，则方案 A，B，C 的收费金额 y_1（元），y_2（元），y_3（元）都是 x 的函数，请分别求出这三个函数的关系式．

（2）填空：

若选择方式 A 最省钱，则月通话时间 x 的取值范围为_____；

若选择方式 B 最省钱，则月通话时间 x 的取值范围为_____；

若选择方式 C 最省钱，则月通话时间 x 的取值范围为_____．

（3）小王、小张今年 5 月份通话费均为 80 元，但小王比小张通话时间长，求小王该月的通话时间．

试题评析：本题主要考查利用一次函数与一元一次不等式之间的关系解决选择方案问题，从复杂的函数图象中找出不等式的解集是解题关键．

解：（1）0.1 元/分 = 6 元/时，

由题意可得 $y_1=\begin{cases}30\ (0\leqslant x\leqslant 25),\\ 6x-120\ (x>25);\end{cases}$

$y_2=\begin{cases}50\ (0\leqslant x\leqslant 50),\\ 6x-250\ (x>50);\end{cases}$

$y_3=100\ (x\geqslant 0)$．

（2）$0\leqslant x<\frac{85}{3}$；$\frac{85}{3}<x<\frac{175}{3}$；$x>\frac{175}{3}$

（3）∵小王、小张今年 5 月份通话费均为 80 元，但小王比小张通话时间长，

∴结合图象可得：小张选择的是方式 A，小王选择的是方式 B．

将 $y=80$ 代入 $y_2=6x-250\ (x>50)$，

可得 $6x-250=80$，解得 $x=55$．

∴小王该月的通话时间为 55 时．

思路点拨

（2）作出函数图象如图 2-5-7 所示．

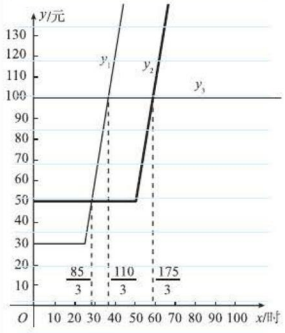


图 2-5-7

结合图象得出 x 的取值范围．

方法点拨

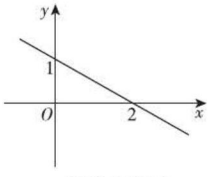
解决这类实际问题主要分三步：第一步，结合实际问题，建立每种方案的函数关系，在同一坐标系中画出函数图象；第二步，结合一次函数与一元一次不等式之间的关系，利用交点坐标的意义，根据图象直接写出满足条件的自变量的取值范围；第三步，根据自变量的取值范围（不等式的解集）设计方案或选择最优方案．

两年模拟兵法

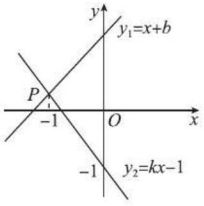
答案见 274 页

1.［中考·乌鲁木齐］一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象如图所示，则不等式 $kx+b>0$ 的解集是（　　）

A. $x<2$　　B. $x<0$　　C. $x>0$　　D. $x>2$

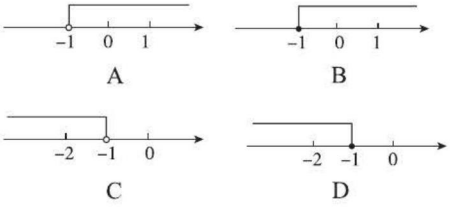


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 $y_1=x+b$ 与直线 $y_2=kx-1$ 相交于点 P，点 P 的横坐标为 -1，则关于 x 的不等式 $x+b>kx-1$ 的解集在数轴上表示正确的是（　　）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [**期末 · 泰兴**]一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）中变量 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	…	−1	0	1	2	3	…
y	…	8	6	4	2	0	…

下列结论：

① y 随 x 的增大而减小；

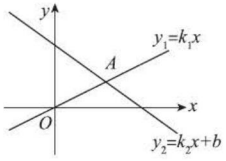
② $x=2$ 是方程 $(k-1)x+b=0$ 的解；

③当 $x<2$ 时，$(k-1)x+b<0$.

其中正确的个数为（　　）

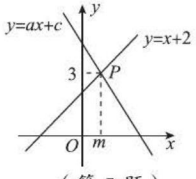
A.0　　B.1　　C.2　　D.3

4. [**中考 · 成都**]如图，正比例函数 $y_1=k_1x$ 和一次函数 $y_2=k_2x+b$ 的图象相交于点 $A(2,1)$. 当 $x<2$ 时，y_1_____y_2（填“>”或“<”）.



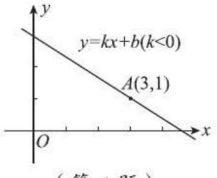
（第 4 题）

5. [**中考 · 烟台**]如图，直线 $y=x+2$ 与直线 $y=ax+c$ 相交于点 $P(m,3)$，则关于 x 的不等式 $x+2\leqslant ax+c$ 的解集为_____.

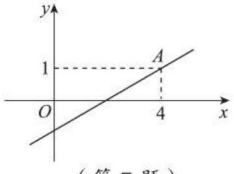


（第 5 题）

6. [**中考 · 滨州**]如图，直线 $y=kx+b$（$k<0$）经过点 $A(3,1)$. 当 $kx+b<\frac{1}{3}x$ 时，x 的取值范围为_____.



（第 6 题）



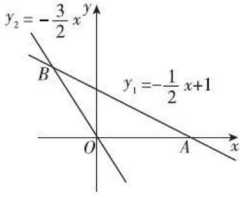
（第 7 题）

7. [**中考 · 黔东南州**]如图，一次函数 $y=ax+b$（a，b 为常数，且 $a>0$）的图象经过点 $A(4,1)$，则不等式 $ax+b<1$ 的解集为_____.

8. [**中考 · 曲靖**]如图，已知直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与 x 轴交于点 A，与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B.

（1）求△ AOB 的面积；

（2）求 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围.



（第 8 题）

9. [**中考 · 南京**]已知一次函数 $y_1=kx+2$（k 为常数，$k\neq0$）和 $y_2=x-3$.

（1）当 $k=-2$ 时，若 $y_1>y_2$，求 x 的取值范围.

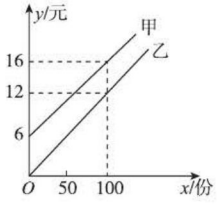
（2）当 $x<1$ 时，$y_1>y_2$. 结合图象，直接写出 k 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 某校实行学案式教学，需印制若干份数学学案，印刷厂有甲、乙两种收费方式，两种收费方式的费用 y_1（元），y_2（元）与印刷数量 x（份）之间的关系如图所示.

（1）甲种收费方式的费用 y_1（元）与印刷数量 x（份）之间的函数关系式是_____；乙种收费方式的费用 y_2（元）与印刷数量 x（份）之间的函数关系式是_____.

（2）该校某年级每次需印制 100 ~ 450（含 100 和 450）份数学学案，选择哪种收费方式较合算?



（第 10 题）

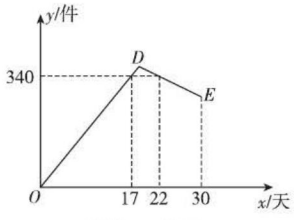
11. [中考·咸宁]某公司开发出一款新的节能产品，该产品的成本价为 6 元/件. 该产品在正式投放市场前通过代销点进行了为期一个月（30 天）的试销售，售价为 8 元/件，工作人员对销售情况进行了跟踪记录，并将记录情况绘成图象. 如图，其中的折线 ODE 表示日销售量 y（件）与销售时间 x（天）之间的函数关系. 已知线段 DE 表示的函数关系中，时间每增加 1 天，日销售量减少 5 件.

（1）第 24 天的日销售量是_____件，日销售利润是_____元.

（2）求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围.

（3）日销售利润不低于 640 元的时间共有多少天? 试销售期间，日销售利润最大是多少元?

【导学号：2850581】



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6 一元一次不等式组

核心知识

- 一元一次不等式组的定义
- 一元一次不等式组的解集
- 一元一次不等式组的解法
- 一元一次不等式组的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元一次不等式组

1. 定义 一般地，关于同一未知数的几个一元一次不等式合在一起，就组成一个一元一次不等式组.

注意 一元一次不等式组必须同时满足两个条件：

（1）组成不等式组的每个不等式必须是一元一次不等式；

（2）整个不等式组中只含一个未知数.

2. 表示方式 不等式组可以用“{”表示，也可以用形如 $a_2x+b_2<ax+b<a_1x+b_1$ 的方式表示.

拓考向 利用一元一次不等式组的定义进行识别

例 1 下列各不等式组，其中是一元一次不等式组的是_____（填序号）.

① $\begin{cases} x+2<3x, \\ y>2; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+1>2x, \\ x<1; \end{cases}$ ③ $\begin{cases} 2(x-1)>3x, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$

④ $-4x \leqslant x<5$； ⑤ $\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+3<0, \\ x-4>2x-1; \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} x+6 \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}>2. \end{cases}$

解题秘方：紧扣一元一次不等式组的定义的两个条件去识别.

解：①中含有两个未知数，不是一元一次不等式组；

②中未知数的最高次数是 2，不是一元一次不等式组；

③中含有两个一元一次不等式，且只含一个未知数，是一元一次不等式组；

④可以写成 $\begin{cases} x \geqslant -4x, \\ x<5, \end{cases}$ 是一元一次不等式组；

⑤中含有三个一元一次不等式，且只含一个未知数，是一元一次不等式组；

⑥中的 $\dfrac{1}{x}$ 不是整式，不是一元一次不等式组.

答案：③④⑤

提分·必记

特别解读

1. 一元一次不等式组中包含的一元一次不等式可以是两个，也可以是多个.

2. **未知数必须唯一**.

特别提醒

这句话包含如下两层意思：

(1) 每个不等式的左右两边必须是整式；

(2) 每个不等式化简后，未知数的次数是 1，且系数不为零.

提分·秘诀

特别提醒

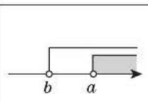
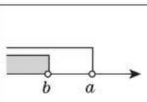
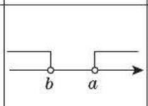
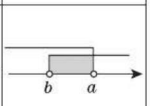
含有同一字母的几个一次整式连续不等的式子也是一元一次不等式组.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 一元一次不等式组的解集

1. **定义** 一元一次不等式组中各个不等式的解集的公共部分，叫做这个一元一次不等式组的解集.

2. **一元一次不等式组解集的四种情况**

不等式组（$a>b$）	$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$
不等式组的解集	$x>a$	$x<b$	无解	$b<x<a$
不等式组的解集在数轴上的表示				

提分·必记

特别解读

- “公共部分”是指同时满足不等式组中每一个不等式的解集的部分. 如果组成不等式组的各个不等式的解集没有公共部分，则这个不等式组无解.
- 不等式组的解集中的每一个解满足不等式组中的每一个不等式.

技考向▶ 利用一元一次不等式组的解集解决问题

题型 1：利用数轴确定一元一次不等式组的解集

例 2 利用数轴求下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x>-1;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x<-1;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x\geqslant 2,\\x<-1;\end{cases}$ （4）$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x>-1.\end{cases}$

解题秘方：解题时先在同一数轴上表示出不等式组中两个不等式的解集，再找出两个不等式解集的公共部分.

解：（1）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 2−6−1 所示.

所以这个不等式组的解集为 $x\geqslant 2$.

（2）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 2−6−2 所示.

所以这个不等式组的解集为 $x<-1$.

（3）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 2−6−3 所示.

所以这个不等式组无解.

（4）两个不等式的解集在数轴上的表示如图 2−6−4 所示.

所以这个不等式组的解集为 $-1<x\leqslant 2$.

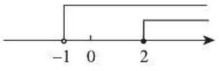


图 2−6−1

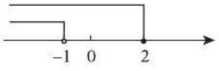


图 2−6−2

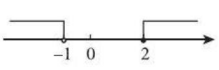


图 2−6−3

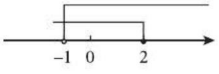


图 2−6−4

提分·秘诀

方法点拨

确定一元一次不等式组解集的常用方法：

1. **数轴法** 就是将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来，然后找出它们解集的公共部分，这个公共部分就是此不等式组的解集. 如果没有公共部分，那么这个不等式组无解.
2. **口诀法** 同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找. 数轴法找解集直观，口诀法找解集便于记忆.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：利用不等式组的解集确定字母的值

例 3 关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x>m-1,\\x>m+2\end{cases}$ 的解集是 $x>-1$，则 m 的值为_____.

解题秘方：根据不等式组解集的确定方法，得出两个不等式解集端点值之间的数量关系.

解：$\because 2>-1$，$\therefore m+2>m-1$.

根据“同大取大”可知，关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x>m-1,\\x>m+2\end{cases}$ 的解集是 $x>m+2$，而题中给出其解集为 $x>-1$，

$\therefore m+2=-1$. $\therefore m=-3$.

答案：-3

方法点拨

解答这类题，一般先将字母视为常数，再逆用不等式组解集的意义，由不等式组的解集反推得出含字母的方程，最后求出字母的值.

知识点 3 解一元一次不等式组

1. 定义 求不等式组解集的过程，叫做解不等式组.

2. 解一元一次不等式组的一般步骤

（1）分别解每一个不等式；

（2）利用数轴法或口诀法确定不等式组的解集；

（3）写出不等式组的解集.

一元一次不等式组的解法

提分·必记

特别提醒

解一元一次不等式组的实质就是寻找不等式组中所有不等式解集的公共部分.

考向 利用解一元一次不等式组解决问题

题型 1：解一元一次不等式组

例 4 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases}5x-2>3(x+1),①\\\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x;②\end{cases}$

（2）$-1<\frac{3x-1}{2}\leqslant 5$.

解题秘方：紧扣解一元一次不等式组的一般步骤求解.

解：（1）解不等式①，得 $x>2.5$；

解不等式②，得 $x\leqslant 4$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 2-6-5 所示.

由数轴可知，这两个不等式解集的公共部分是 $2.5<x\leqslant 4$，

所以原不等式组的解集是 $2.5<x\leqslant 4$.

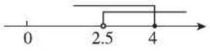


图 2-6-5



图 2-6-6

提分·秘诀

解法提醒

解不等式组的关键是要正确地求出每个不等式的解集，再利用数轴正确地表示出每个不等式的解集，从而找出不等式组的解集. 解题熟练后，可不画数轴，直接利用“口诀法”写出不等式组的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）$-1<\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 5$ 可转化为不等式组 $\begin{cases}-1<\dfrac{3x-1}{2}, & ①\\ \dfrac{3x-1}{2}\leqslant 5. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-\dfrac{1}{3}$；解不等式②，得 $x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

在数轴上表示不等式①和②的解集，如图 2−6−6 所示.

由数轴可知，这两个不等式解集的公共部分是 $-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$，

所以原不等式组的解集为 $-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

另解

$-2<3x-1\leqslant 10$，

$-1<3x\leqslant 11$，

$-\dfrac{1}{3}<x\leqslant\dfrac{11}{3}$.

题型 2：利用解一元一次不等式组确定特殊解

例 5 解不等式组 $\begin{cases}3x+1<2(x+2) & ①,\\ -\dfrac{1}{3}x\leqslant\dfrac{5}{3}x+2 & ②,\end{cases}$ 并求出该不等式组的整数解.

解题秘方：先求出不等式组的解集，然后在解集中取特殊解.

解：解不等式①，得 $x<3$；解不等式②，得 $x\geqslant -1$. 不等式①和②的解集在数轴上的表示如图 2−6−7 所示，所以不等式组的解集为 $-1\leqslant x<3$. 所以该不等式组的整数解为 -1，0，1，2.

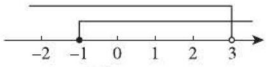


图 2−6−7

解法提醒

利用数轴找不等式组整数解的步骤：

(1) 解不等式组；

(2) 将不等式组的解集在数轴上表示出来；

(3) 观察解集在数轴上的区间范围；

(4) 确定其整数解.

题型 3：利用不等式组的解集情况求字母的值或取值范围

例 6 不等式组 $\begin{cases}x-2>a,\\ x+2<b\end{cases}$ 的解集为 $-3<x<2$，则 $(a+b)^{2020}=$ _____.

解题秘方：先解关于 x 的不等式组，得到其解集；然后结合已知条件，得到关于 a，b 的二元一次方程组，求得 a，b 的值.

解：$\begin{cases}x-2>a, & ①\\ x+2<b. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>2+a$；

解不等式②，得 $x<b-2$.

∵不等式组的解集为 $-3<x<2$，

∴$\begin{cases}2+a=-3,\\ b-2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-5,\\ b=4.\end{cases}$

∴$(a+b)^{2020}=(-5+4)^{2020}=(-1)^{2020}=1$.

答案：1

详解

∵$\begin{cases}x-2>a,\\ x+2<b\end{cases}$ 有解集，

∴由口诀“大小小大中间找”，得 $2+a<x<b-2$.

又∵ $-3<x<2$，

∴$\begin{cases}2+a=-3,\\ b-2=2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 7 若不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\1-2x>x-2\end{cases}$有解，则 a 的取值范围是_____.

解题秘方：先解不等式组中的两个不等式，再根据不等式组有解确定字母的取值范围.

解：$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\ ①\\1-2x>x-2.\ ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x\geqslant -a$；解不等式②，得 $x<1$.

∵不等式组$\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\1-2x>x-2\end{cases}$有解，

∴由“大小小大中间找”得 $-a<1$. ∴ $a>-1$.

答案：$a>-1$

方法点拨

根据不等式组的解的情况求字母的取值范围的方法：已知不等式组的解的情况，确定这个不等式组中未知字母的取值范围，可先求出不等式组的解集，然后结合已知条件，或利用数轴直观地得到关于未知字母的关系式，即可解决问题.

点知识 4 一元一次不等式组的应用

基本步骤 审→设→列→解→验→答（与列一元一次不等式解决实际问题相同）

（1）**审**：认真审题，分清题中的已知量、未知量，并明确它们之间的不等关系.

（2）**设**：恰当地设未知数.

（3）**列**：依据题中的不等关系列出不等式组.

（4）**解**：解不等式组，求出解集.

（5）**验**：检验所求得的解集是否符合题意和实际意义.

（6）**答**：写出答案.


一元一次不等式组的应用

提分·必记

解法提醒

列一元一次不等式组的步骤和要求与列一元一次不等式一样；所不同的是题中所反映的数量关系不止一个，因此需要将所有反映数量关系的语句用不等式一一表示出来，形成一元一次不等式组.

拔考向 建立一元一次不等式组的模型解决问题

题型 1：利用不等式组解决实际问题

例 8 在保护地球爱护家园活动中，校团委把一批树苗分给八（1）班同学去栽种. 如果每人分 2 棵，还剩 42 棵；如果前面每人分 3 棵，那么最后一人分得的树苗少于 5 棵（但至少分得 1 棵）.

（1）设八（1）班有 x 名同学，则这批树苗有多少棵？（用含 x 的式子表示）

（2）八（1）班至少有多少名同学？最多有多少名同学？

解题秘方：用式子表示最后一人分得的树苗数量，并根据最后一人分得的树苗数量的范围列不等式组.

解：（1）这批树苗有（$2x+42$）棵.

（2）根据题意，得 $1\leqslant 2x+42-3(x-1)<5$.

解这个不等式组，得 $40<x\leqslant 44$.

答：八（1）班至少有 41 名同学，最多有 44 名同学.

提分·秘诀

解读

2× 学生数 +42= 树苗数量，即树苗数量为 $2x+42$.

3×（学生数 −1）= 除最后一人分得的树苗外的树苗数量，即除最后一人分得的树苗外的树苗数量为 $3(x-1)$.

1 ≤ 最后一人分得的树苗数量 <5，而最后一人分得的树苗数量为 $2x+42-3(x-1)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：利用不等式组解决实际应用中的方案设计问题

例 9 某房地产开发公司计划建 A，B 两种户型的住房共 80 套．该公司所筹资金不少于 2 090 万元，但不超过 2 096 万元，且所筹资金全部用于建房．两种户型的建房成本和售价如下表：

类型	A 型	B 型
成本/（万元/套）	25	28
售价/（万元/套）	30	34

（1）该公司有哪几种建房方案？

（2）该公司如何建房可获得最大利润？

解题秘方：根据题中揭示的不等关系列出不等式组，在解集中找出其特殊解设计方案．

解：（1）设建 A 型住房 x 套，则建 B 型住房（$80-x$）套．

根据题意，得 $\begin{cases}25x+28(80-x)\geqslant 2\,090,\\25x+28(80-x)\leqslant 2\,096,\end{cases}$

解得 $48\leqslant x\leqslant 50$.

因为 x 为整数，所以 $x=48$，49，50，有三种建房方案：

方案一　A 型 48 套，B 型 32 套；

方案二　A 型 49 套，B 型 31 套；

方案三　A 型 50 套，B 型 30 套．

（2）方案一获利：$48\times(30-25)+32\times(34-28)=432$（万元）．

方案二获利：$49\times(30-25)+31\times(34-28)=431$（万元）．

方案三获利：$50\times(30-25)+30\times(34-28)=430$（万元）．

所以选方案一获利最大．

方法点拨

解决实际问题中方案的种类或最大值（最小值）问题的方法：常通过求不等式（组）的解集，分类讨论找出答案，即先根据题意，设出未知数，列出不等式（组），求出相应的取值范围，再根据题目的条件分类讨论，写出答案．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用构造不等式组法求字母的取值范围

例 10 若点 $P\left(2m+1,\ \dfrac{3m-1}{2}\right)$ 在第四象限，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m<\dfrac{1}{3}$　　B. $m>-\dfrac{1}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant\dfrac{1}{3}$

解题秘方：第四象限内的点的横坐标大于 0，纵坐标小于 0，据此建立不等式组求解即可．

解：∵点 $P\left(2m+1,\ \dfrac{3m-1}{2}\right)$ 在第四象限，∴ $\begin{cases}2m+1>0,\ ①\\ \dfrac{3m-1}{2}<0.\ ②\end{cases}$

挑战·高分

详解

对于不等式组

$\begin{cases}2m+1>0,\ ①\\ \dfrac{3m-1}{2}<0,\ ②\end{cases}$

由不等式①，得 $2m>-1$，

∴ $m>-\dfrac{1}{2}$.

由不等式②，得 $3m-1<0$，

∴ $3m<1$.

∴ $m<\dfrac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解不等式①，得 $m > -\frac{1}{2}$；

解不等式②，得 $m < \frac{1}{3}$.

∴不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$.

∴ m 的取值范围是 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$.

答案：C

∴不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$.

拔尖角度▸ 2 利用不等式组的特殊解的情况求字母的取值范围

挑战·高分

例 11 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-m<0, & ① \\ 7-2x \leqslant 1 & ② \end{cases}$ 的整数解共有 4 个，求 m 的取值范围.

解题秘方：先解不等式组，再根据其特殊解的情况找出界点的取值范围.

解：解不等式①，得 $x < m$，

解不等式②，得 $x \geqslant 3$，

所以原不等式组的解集为 $3 \leqslant x < m$.

因为原不等式组有 4 个整数解，

所以原不等式组的解集在数轴上的表示如图 2-6-8 所示.

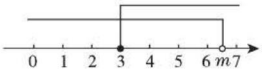


图 2-6-8

从图中可得 $6 < m < 7$.

当 m=6 时，不等式组只有 3 个整数解，不符合题意.

当 m=7 时，符合题意.

所以 m 的取值范围为 $6 < m \leqslant 7$.

方法点拨

结合不等式组解集的确定方法，灵活运用不等式组解集的意义构造不等式（或方程）是解此类问题的关键. 本题利用了**数形结合思想**.

特别警示

解题时 m=6 和 m=7 的情况容易被忽视，做此类题时需注意.

拔尖角度▸ 3 利用构造不等式组法求方程组中字母的取值范围

挑战·高分

例 12 在关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} x-y=2m+1, & ① \\ x+2y=3m & ② \end{cases}$ 中，已知 $x > 1$，$y < 2$，求 m 的取值范围.

解题秘方：先解方程组，求出 x，y（用含 m 的式子表示），再根据 $x > 1$，$y < 2$ 得到关于 m 的不等式组，解不等式组即可.

解：② − ①，得 $3y=m-1$，

∴ $y=\frac{m-1}{3}$.

把 $y=\frac{m-1}{3}$ 代入①，得 $x-\frac{m-1}{3}=2m+1$，

方法点拨

当方程组的解满足特定要求时，先设法求出这个方程组的解，然后根据题意列出不等式组，求出所求字母的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x=\dfrac{7m+2}{3}$.

$\because x>1$，$y<2$，$\therefore \begin{cases}\dfrac{7m+2}{3}>1,\\ \dfrac{m-1}{3}<2,\end{cases}$

解得 $\dfrac{1}{7}<m<7$.

$\therefore m$ 的取值范围为 $\dfrac{1}{7}<m<7$.

拔尖角度▸ 4 利用建模法解方程和不等式组的实际问题

挑战·高分

例 13 某学校为开展“阳光体育”活动，计划拿出不超过 3 000 元的资金购买一批篮球、羽毛球拍和乒乓球拍．已知篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8 ∶ 3 ∶ 2，且其单价和为 130 元．

（1）请问篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别是多少元？

（2）若要求购买篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的总数量是 80 个（副），羽毛球拍的数量是篮球数量的 4 倍，且购买乒乓球拍的数量不超过 15 副，请问有几种购买方案？

技巧点拨

解决这类问题的关键是在理解题意的基础上，寻找明显或隐含的等量关系或不等关系，准确列出方程(组)或不等式(组).

解题秘方：（1）根据题中的等量关系列方程求解．

（2）根据题中的等量关系和不等关系列一元一次不等式组，利用解集中的特殊解设计方案．

解：（1）因为篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价比为 8 ∶ 3 ∶ 2，所以，可设它们的单价分别为 $8x$ 元、$3x$ 元、$2x$ 元．

于是，得 $8x+3x+2x=130$，解得 $x=10$.

所以，篮球、羽毛球拍和乒乓球拍的单价分别为 80 元、30 元和 20 元．

（2）设购买篮球的数量为 y 个，则购买羽毛球拍的数量为 $4y$ 副，购买乒乓球拍的数量为 $(80-y-4y)$ 副．

根据题意，得

$$\begin{cases}80y+30\times 4y+20(80-y-4y)\leqslant 3\,000, & ①\\ 80-y-4y\leqslant 15. & ②\end{cases}$$

解不等式①，得 $y\leqslant 14$.

解不等式②，得 $y\geqslant 13$.

于是，不等式组的解集为 $13\leqslant y\leqslant 14$.

因为 y 取整数，所以 y 只能取 13 或 14.

因此，一共有两种购买方案．

方案一：当 $y=13$ 时，购买篮球 13 个，购买羽毛球拍 52 副，购买乒乓球拍 15 副．

方案二：当 $y=14$ 时，购买篮球 14 个，购买羽毛球拍 56 副，购买乒乓球拍 10 副．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点有：（1）一元一次不等式组的解法，主要考查一元一次不等式组解集的确定，属于基础题，既有选择题、填空题，也有解答题；（2）求一元一次不等式组的特殊解；（3）应用一元一次不等式组解决实际问题，题型以解答题为主，考查学生分析问题、解决问题的能力.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 求不等式组的解集

例14 [中考·聊城]不等式组$\frac{2-x}{2}\leqslant\frac{2x-4}{3}<\frac{x-1}{2}$的解集在数轴上（如图2-6-9）表示正确的是（　　）

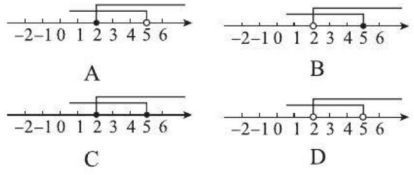


图2-6-9

试题评析：本题考查了不等式组的解法及解集，解题的关键是掌握不等式组解集的求法.

解：由题意得$\begin{cases}\frac{2-x}{2}\leqslant\frac{2x-4}{3},\\ \frac{2x-4}{3}<\frac{x-1}{2},\end{cases}$解不等式组得$2\leqslant x<5$.

答案：A

解题方法

求不等式组的解集，通常利用“分开解”“集中解”的方法.

- 分别求出不等式组中各不等式的解集；
- 利用数轴求出各不等式解集的公共部分.

考法2 根据不等式组的解集求字母的取值范围

例15 [中考·泰安]不等式组$\begin{cases}2x+9>6x+1,\\ x-k<1\end{cases}$的解集为$x<2$，则$k$的取值范围为（　　）

A.$k>1$　　B.$k<1$　　C.$k\geqslant 1$　　D.$k\leqslant 1$

试题评析：本题已知一元一次不等式组的解集，求不等式组中字母系数的范围. 解题的关键是根据“同小取小”来确定不等式组中字母系数的范围.

解：对于不等式组$\begin{cases}2x+9>6x+1,①\\ x-k<1,②\end{cases}$

由①得$x<2$，由②得$x<1+k$.

因为不等式组的解集为$x<2$，

所以$1+k\geqslant 2$，解得$k\geqslant 1$.

答案：C

解题方法

1. 解不等式或不等式组. 含有字母系数的，把字母系数当已知数来解，这是必不可少的步骤.
2. **借助数轴**. 形象准确地把握不等式组有解、无解以及有几个整数解的问题.
3. **注意端点值**. 这类问题一般都与端点有关，一是利用数轴来说明是哪个端点，二是检验端点是不是满足题意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 求一元一次不等式组的特殊解

例 16 [中考·枣庄] x 取哪些整数值时，不等式 $5x+2>3(x-1)$ 与 $\frac{1}{2}x \leqslant 2-\frac{3}{2}x$ 都成立？

试题评析：本题考查了求一元一次不等式组的整数解的方法，求出不等式组的解集是解决问题的关键.

解：解不等式组 $\begin{cases}5x+2>3(x-1),\\ \frac{1}{2}x \leqslant 2-\frac{3}{2}x,\end{cases}$ 得 $-\frac{5}{2}<x \leqslant 1$.

故满足条件的整数有 -2，-1，0，1.

解题方法

- 正确求出不等式组的解集；
- 根据题目中对解的限制条件，求得不等式组的特殊解.

考法 4 一元一次不等式组的应用

例 17 [中考·东营] 为解决中小学大班额问题，东营市各县区今年将改扩建部分中小学. 某县计划对 A，B 两类学校进行改扩建，根据预算，改扩建 2 所 A 类学校和 3 所 B 类学校共需资金 7 800 万元，改扩建 3 所 A 类学校和 1 所 B 类学校共需资金 5 400 万元.

（1）改扩建 1 所 A 类学校和 1 所 B 类学校所需资金分别是多少万元？

（2）该县计划改扩建 A，B 两类学校共 10 所，改扩建资金由国家财政和地方财政共同承担. 若国家财政拨付资金不超过 11 800 万元，地方财政投入资金不少于 4 000 万元，其中地方财政投入到 A，B 两类学校的改扩建资金分别为每所 300 万元和 500 万元，请问共有哪几种改扩建方案？

试题评析：本题考查了构建二元一次方程组、一元一次不等式组解决实际问题. 解题关键是找出题中的等量关系和不等关系.

解：（1）设改扩建 1 所 A 类学校需资金 x 万元，改扩建 1 所 B 类学校需资金 y 万元，

则 $\begin{cases}2x+3y=7\,800,\\ 3x+y=5\,400,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\,200,\\ y=1\,800.\end{cases}$

答：改扩建 1 所 A 类学校需资金 1 200 万元，改扩建 1 所 B 类学校需资金 1 800 万元.

（2）设 A 类学校有 a 所，则 B 类学校有 $(10-a)$ 所，

则 $\begin{cases}(1\,200-300)a+(1\,800-500)(10-a) \leqslant 11\,800,\\ 300a+500(10-a) \geqslant 4\,000,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a \geqslant 3,\\ a \leqslant 5.\end{cases}$ $\therefore 3 \leqslant a \leqslant 5$，即 $a=3$，4，5.

答：有 3 种改扩建方案.

方案一：A 类学校改扩建 3 所，B 类学校改扩建 7 所.

方案二：A 类学校改扩建 4 所，B 类学校改扩建 6 所.

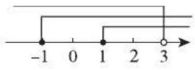
方案三：A 类学校改扩建 5 所，B 类学校改扩建 5 所.

解题方法

1. 寻找等量关系与不等关系，其中不等关系的常见词语有“不超过”“不少于”等；
2. 建立方程（组）或不等式（组）的模型；
3. 求出解或解集；
4. 利用未知数的实际意义确定其特殊解；
5. 根据特殊解设计方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 已知三个不等式的解集在数轴上的表示如图所示，则它们的解集的公共部分是（　　）

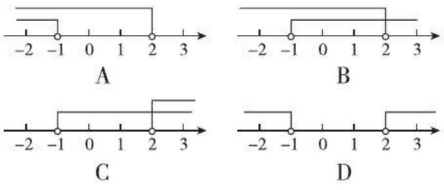


（第1题）

A. $-1 \leqslant x<3$　　B. $1 \leqslant x<3$

C. $-1 \leqslant x<1$　　D. 无解

2. [中考·湘潭]不等式组$\begin{cases}x<2,\\x>-1\end{cases}$的解集在数轴上表示为（　　）



3. [中考·鄂州]对于不等式组$\begin{cases}\frac{1}{3}x-6 \leqslant 1-\frac{5}{3}x,\\3(x-1)<5x-1,\end{cases}$下列说法正确的是（　　）

A. 此不等式组的正整数解为1，2，3

B. 此不等式组的解集为$-1<x \leqslant \frac{7}{6}$

C. 此不等式组有5个整数解

D. 此不等式组无解

4. [中考·聊城]若不等式组$\begin{cases}\frac{x+1}{3}<\frac{x}{2}-1,\\x<4m\end{cases}$无解，则$m$的取值范围为（　　）

A. $m \leqslant 2$　　B. $m<2$

C. $m \geqslant 2$　　D. $m>2$

5. [中考·永州]若不等式组$\begin{cases}x<1,\\x>m-1\end{cases}$恰好有两个整数解，则$m$的取值范围是（　　）

A. $-1 \leqslant m<0$　　B. $-1<m \leqslant 0$

C. $-1 \leqslant m \leqslant 0$　　D. $-1<m<0$

6. 在平面直角坐标系内，若点$P(x-2,\ x+1)$在第二象限，则x的取值范围为_____.

7. [中考·荆州]对非负实数x“四舍五入”到个位的值记为$\langle x\rangle$，即当n为非负整数时，若$n-0.5 \leqslant x<n+0.5$，则$\langle x\rangle=n$. 如$\langle 1.34\rangle=1$，$\langle 4.86\rangle=5$. 若$\langle 0.5x-1\rangle=6$，则实数x的取值范围是_____.

8. [中考·黔西南州]一元一次不等式组$\begin{cases}x-2>3x,\\x<a\end{cases}$的解集为$x<-1$，则$a$的取值范围是_____.

9. 已知关于x的不等式组$\begin{cases}3x-a \geqslant b,\\2x-a<2b+1\end{cases}$的解集为$3 \leqslant x<4$，则$a-2b=$_____.

10. 解下列不等式组：

(1) $-7 \leqslant \frac{2(1+3x)}{7} \leqslant 9$;

(2) $\begin{cases}3(1-x)>2(x+9), & ①\\\frac{x-3}{0.5}-\frac{3.5x+1.4}{0.7} \leqslant -1.4. & ②\end{cases}$

11. 若关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}3x-2y=m+2,\\2x+y=m-5\end{cases}$中，$x$的值是正数，$y$的值是负数，求$m$的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.[中考·黄石]若点 P 的坐标为 $\left(\frac{x-1}{3},\ 2x-9\right)$，其中 x 满足不等式组 $\begin{cases}5x-10\geqslant 2(x+1),\\ \frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x,\end{cases}$ 求点 P 所在的象限.

13.[中考·武汉]某公司为奖励在趣味运动会上取得好成绩的员工，计划购买甲、乙两种奖品共 20 件，其中甲种奖品每件 40 元，乙种奖品每件 30 元.

（1）如果购买甲、乙两种奖品共花费了 650 元，求甲、乙两种奖品各购买了多少件?

（2）如果购买乙种奖品的数量不超过甲种奖品数量的 2 倍，总花费不超过 680 元，求该公司有哪几种不同的购买方案?

14.[中考·天水]天水某公交公司将淘汰某一条线路上“冒黑烟”较严重的公交车，计划购买 A 型和 B 型两种环保节能公交车共 10 辆. 若购买 A 型公交车 1 辆，B 型公交车 2 辆，共需 400 万元；若购买 A 型公交车 2 辆，B 型公交车 1 辆，共需 350 万元.

（1）求购买每辆A型和B型公交车各需多少万元.

（2）预计在该线路上 A 型和 B 型公交车每辆年均载客量分别为60万人次和100万人次. 若该公司购买 A 型和 B 型公交车的总费用不超过 1 220 万元，且确保这 10 辆公交车在该线路的年均载客量总和不少于 650 万人次，则该公司有哪几种购车方案? 哪种购车方案总费用最少? 最少总费用是多少?

【导学号：2850581】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一元一次不等式（组）与方程（组）的巧妙结合

荣老师告诉你

一元一次不等式（组）与一元一次方程（组）有很多相似的地方，解题依据——等式的性质和不等式的性质，解题步骤——去分母、去括号、移项、合并同类项等，都基本相同．所以在解题时，两者经常巧妙地结合在一起．

结合点一 利用不等式求方程的正整数解

例 1 求方程 $3x+2y=17$ 的正整数解．

解题秘方：先用含 x 的式子表示 y，然后利用方程的解为正整数，列出以 x 为未知数的不等式，求出 x 的取值范围，最后确定正整数 x 的值．

解：方程可变形为 $y=\dfrac{17-3x}{2}$．

$\because y>0$，$\therefore \dfrac{17-3x}{2}>0$．

$\therefore x<\dfrac{17}{3}$，即 $x<5\dfrac{2}{3}$．

$\because x>0$，$\therefore 0<x<5\dfrac{2}{3}$．

又 $\because y$ 为正整数（即 $\dfrac{17-3x}{2}$ 为正整数），

$\therefore 17-3x$ 为偶数．

$\therefore x$ 必为奇数．

$\therefore x=1,3,5$．

当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times1}{2}=7$；

当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times3}{2}=4$；

当 $x=5$ 时，$y=\dfrac{17-3x}{2}=\dfrac{17-3\times5}{2}=1$．

故原方程的正整数解为 $\begin{cases}x=1,\\y=7,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

方法点拨：（1）一般地，一个二元一次方程有无数个解，但它的特殊解有时是有限个，如一个二元一次方程的正整数解、非负整数解都是有限个．

（2）求不定方程的正（非负）整数解时，往往借助不等式、整数的奇偶性等相关知识进行求解．

结合点二 利用方程（组）解的情况求字母的取值范围

例 2 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$ 若 $x>y$，求 a 的取值范围．

解题秘方：解本题的关键是构建以 a 为未知数的不等式，解之即得 a 的取值范围．构建不等式的依据是 $x>y$，用含 a 的式子分别表示 x 和 y，进而可得不等式．

解：解方程组 $\begin{cases}x-y=a+3,\\2x+y=5a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2a+1,\\y=a-2.\end{cases}$

$\because x>y$，

$\therefore 2a+1>a-2$，解得 $a>-3$．

故 a 的取值范围是 $a>-3$．

方法点拨：由方程（组）解的不等关系，列出不等式（组），求出方程（组）中待定字母的取值范围，关键点有两个：一是要会解除未知数以外还含有其他字母的方程（组）；二是要会根据解的不等关系列出不等式（组）．

结合点三 利用不等式组的解集建立方程组

例 3 若不等式组 $\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0\end{cases}$ 的解集是 $-1<x<1$，求 $(a+b)^{2021}$ 的值．

解题秘方：解此不等式组得 $a+2<x<\dfrac{b}{2}$，依题意，该不等式组的解集又是 $-1<x<1$，而不等式组的解集是唯一的，因此两解集的界点分别“吻合”，从而得两等式，即方程组，解之可得 a，b 的值．

解：解不等式组 $\begin{cases}x-a>2,\\b-2x>0,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得 $a+2<x<\frac{b}{2}$.

∵此不等式组的解集是 $-1<x<1$,

$\therefore\begin{cases}a+2=-1,\\ \frac{b}{2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-3,\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore(a+b)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$.

方法点拨：若不等式组中含有除未知数以外的其他字母，且不等式组的解集已知，可先求出不等式组的解集，然后对比已知的解集，列出以待定字母为未知数的方程组.

结合点四 利用方程组求出的数据列不等式解决实际问题

例 4 商场正在销售“福娃”玩具和徽章两种奥运商品. 已知购买 1 盒“福娃”玩具和 2 盒徽章共需 145 元；购买 2 盒“福娃”玩具和 3 盒徽章共需 280 元.

（1）1 盒“福娃”玩具和 1 盒徽章的价格分别是多少元?

（2）某公司准备购买这两种奥运商品共 20 盒送给幼儿园（要求每种商品都要购买），且购买金额不能超过 450 元，请你帮该公司设计购买方案.

解题秘方：本题属于方程组与不等式结合的实际应用题. 第（1）问只需依照题目所提供的两个等量关系即可列出二元一次方程组. 第（2）问可由题目所给不等关系“购买金额不能超过450元”及第(1)问所求出的数据列出不等式，从而求解.

解：（1）设 1 盒“福娃”玩具和 1 盒徽章的价格分别是 x 元和 y 元.

依题意，得$\begin{cases}x+2y=145,\\ 2x+3y=280,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=125,\\ y=10.\end{cases}$

答：1 盒“福娃”玩具和 1 盒徽章的价格分别是 125 元和 10 元.

（2）设购买“福娃”玩具 m 盒，则购买徽章 $(20-m)$ 盒.

由题意，得 $125m+10(20-m)\leqslant 450$,

解得 $m\leqslant\frac{50}{23}$.

所以 m 可以取 1，2.

则该公司有两种购买方案：

方案一　购买“福娃”玩具 1 盒，徽章 19 盒；

方案二　购买“福娃”玩具 2 盒，徽章 18 盒.

结合点五 同时建立方程和不等式的模型解决实际问题

例 5 认真阅读下面三个人的对话.

小朋友：阿姨，我买一盒饼干和一袋牛奶（递上 10 元钱）.

售货员：本来你用 10 元钱买一盒饼干还有剩余，但再买一袋牛奶就不够了. 不过今天是儿童节，我给你买的饼干打九折，两样东西请拿好，还有找你的 8 角钱.

旁观者：一盒饼干的标价可是整数哦!

根据对话内容，试求出饼干和牛奶的标价.

解题秘方：本题的条件隐含在对话中，应学会从对话中获取信息. “用 10 元钱买一盒饼干还有剩余”，说明一盒饼干的售价小于 10 元；“但再买一袋牛奶就不够了”，说明一盒饼干和一袋牛奶的价格之和大于 10 元. 对话中还隐含一个等量关系，就是用 10 元钱买一盒打九折的饼干和一袋牛奶剩余 0.8 元钱. 由一个方程和两个不等式结合可求出答案.

解：设饼干的标价为每盒 x 元，牛奶的标价为每袋 y 元.

根据题意，得$\begin{cases}x+y>10,\ ①\\ 0.9x+y=10-0.8,\ ②\\ x<10,\ ③\end{cases}$

由②，得 $y=9.2-0.9x$，④

将④代入①，

得 $x+9.2-0.9x>10$,

解得 $x>8$.

综合③可知 $8<x<10$.

又因为 x 为整数，所以 $x=9$.

所以 $y=9.2-0.9x=9.2-0.9\times 9=1.1$.

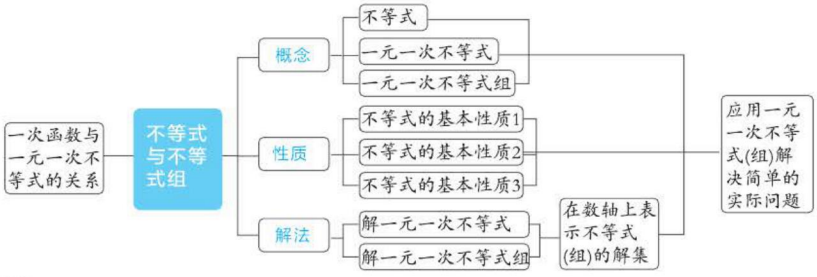
答：饼干的标价为每盒 9 元，牛奶的标价为每袋 1.1 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **在数轴上表示不等式（组）的解集时要注意“两定”：**一定界点，二定方向．在定界点时，若不等号是“≤”或“≥”，界点为实心圆点；若不等号是“<”或“>”，界点为空心圆圈．定方向时，相对于界点而言，“小于向左，大于向右”．
2. **解不等式通常按以下步骤进行：**去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1．容易出问题的地方是在“系数化为1”时，如果不等式的两边除以同一个负数，要注意不等号的方向需改变．
3. 利用一次函数的图象可解一元一次不等式，反过来，可利用解一元一次不等式确定相应函数值的范围对应的自变量的取值范围．
4. **一元一次不等式组的解法：**解组成不等式组的各个不等式，取各个不等式解集的公共部分，即为不等式组的解集．确定一元一次不等式组的解集应遵循的原则是“同大取大，同小取小，小大大小中间找，大大小小无处找”．

知识方法专题

知识必学

专题一 不等式的基本性质

链接中考» 不等式的基本性质是解不等式的理论依据，特别是基本性质3，解不等式的最后一步经常用到．在中考中，一般都是以选择题形式直接考查不等式的基本性质．

例1 ［中考·怀化］下列不等式变形正确的是（　　）

A. 由 $a>b$ 得 $ac>bc$

B. 由 $a>b$ 得 $-2a>-2b$

C. 由 $a>b$ 得 $-a<-b$

D. 由 $a>b$ 得 $a-2<b-2$

解题秘方：根据不等式的基本性质进行选择．

解：当 $c\leqslant 0$ 时，选项A错误；根据不等式的基本性质3，在不等式两边都乘同一个负数时，不等号的方向改变，故选项B错误，选项C正确；在不等式两边都加或减同一个数时，不等号的方向不变，故选项D错误．

答案：C

警示误区：此类问题容易出错的地方是由于对不等式的基本性质3掌握不透彻，认为选项B也正确．

专题二 解一元一次不等式

链接中考» 解不等式是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是直接解不等式；另一种是根据解不等式求其特殊解．一般都是以填空题和选择题形式出现．在有些地区也以解答题形式出现．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例2 [中考·安徽]解不等式：

$\frac{x}{3}>1-\frac{x-3}{6}$.

解题秘方：根据解一元一次不等式的步骤求解即可.

解：去分母，得 $2x>6-(x-3)$.

去括号，得 $2x>6-x+3$.

移项、合并同类项，得 $3x>9$.

系数化为1，得 $x>3$.

方法点拨：解一元一次不等式的一般步骤与解一元一次方程的步骤一样，只是解不等式时，给不等式两边都乘或除以同一个负数，要改变不等号的方向.

专题三 一次函数与方程（组）或不等式之间的关系

链接中考≫ 一次函数与二元一次方程（组）或一元一次不等式之间的关系关键在于几个交点：(1)函数图象与两坐标轴的交点；(2)两个函数图象的交点.函数图象与方程或不等式之间的关系就是数形结合思想的体现.中考考查的形式多样化，填空题、选择题和解答题都有涉及.

例3 [中考·济南]如图2-1，一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图象交于点 $P(1,3)$，则关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集是（　　）

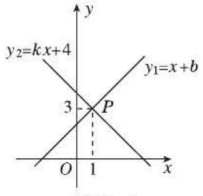


图2-1

A.$x>-2$　　B.$x>0$

C.$x>1$　　D.$x<1$

解：由点 P 的横坐标为1，可得关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集为 $x>1$.

答案：C

方法点拨：求解此类问题时，一要明确一次函数与一元一次不等式的关系，二要能发挥数形结合的作用.

专题四 解一元一次不等式组

链接中考≫ 解不等式组是本章的重点，也是中考必考的知识点，考查的形式主要有两种：一种是已知不等式组求解集；另一种是已知不等式组的解集，求不等式组中待定字母的值或范围.一般都是以填空题和选择题形式出现.在有些地区也以解答题形式出现.

例4 [中考·泰安]不等式组 $\begin{cases}4x-3>2x-6,\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5}\end{cases}$ 的整数解的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：分别解出每一个不等式，求出不等式组的解集，然后找出不等式组的整数解.

解：$\begin{cases}4x-3>2x-6,①\\ \frac{2}{5}-x\geqslant-\frac{3}{5}.②\end{cases}$

解不等式①，得 $x>-\frac{3}{2}$；

解不等式②，得 $x\leqslant 1$.

所以不等式组的解集为 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$.

所以整数解为 -1，0，1，即一共有3个整数解.

答案：C

方法点拨：求不等式组的整数解的关键是正确地解出每个不等式，确定出未知数的取值范围，从而求出整数解.

例5 [中考·恩施州]关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3x-1>4(x-1),\\ x<m\end{cases}$ 的解集为 $x<3$，那么 m 的取值范围为（　　）

A.$m=3$　　B.$m>3$

C.$m<3$　　D.$m\geqslant 3$

解题秘方：先分别解两个不等式，然后再利用“同小取小”来求解.

解：由 $3x-1>4(x-1)$，得 $x<3$.

而不等式组的解集为 $x<3$，$\therefore m\geqslant 3$.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：解含有参数的不等式组的步骤．

（1）解不等式组，把参数当已知数来解，这是必不可少的步骤；

（2）借助数轴，形象准确地把握不等式组有解、无解以及有几个整数解的问题；

（3）注意端点值．这类问题一般都与端点有关，一是用数轴来说明哪个是端点，二是进行检验，看端点是不是满足题意．

专题五 一元一次不等式的应用

链接中考≫ 不等式的应用题与方程的应用题相类似，方程是找等量关系，而不等式是找不等关系，不等关系有标志语——大于、小于、超过、不超过等等．不等式的应用题在中考中一般都是以解答题形式出现．

例6 ［中考·本溪］暑期临近，本溪某旅行社准备组织“亲子一家游”活动，去我省沿海城市旅游，共有69人报名，其中成人数量比儿童数量的2倍少3人．

（1）旅游团中成人和儿童各有多少人？

（2）旅行社为了吸引游客，打算给每名游客准备一件T恤衫．购买时，每购买10件成人T恤衫赠送1件儿童T恤衫（不足10件不赠送）．已知儿童T恤衫每件15元，旅行社购买服装的费用不超过1 200元，请问每件成人T恤衫的价格最高是多少元？

解题秘方：（1）设旅游团中儿童有x人，则成人有$(2x-3)$人，根据报名的人数共有69人，列方程求解；（2）根据题意可知，能赠送4件儿童T恤衫，设每件成人T恤衫的价格是m元，根据旅行社购买服装的费用不超过1 200元，列不等式求解．

解：（1）设旅游团中儿童有x人，则成人有$(2x-3)$人．

根据题意，得$x+(2x-3)=69$，

解得$x=24$．

则$2x-3=2\times24-3=45$．

答：旅游团中成人有45人，儿童有24人．

（2）∵ $45\div10=4.5$，

∴可赠送4件儿童T恤衫．

设每件成人T恤衫的价格是m元．

根据题意，得$45m+15\times(24-4)\leqslant1\,200$，

解得$m\leqslant20$．

答：每件成人T恤衫的价格最高是20元．

方法点拨：对于一元一次不等式的实际应用题，解题的关键是读懂题意，找出合适的不等关系，设未知数并列不等式求解．

Ⅱ 方法必会

专题六 转化思想

专题解读≫ 在不等式(组)与方程(组)的综合应用中，常会用到转化思想，将解方程(组)的问题转化为解不等式(组)的问题．

例7 ［改编·十堰］关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}5x+3y=23,①\\x+y=p\quad②\end{cases}$的解是正整数，则整数$p$的值为_____．

解题秘方：把p看成常数，求出方程组的解，再根据题意得到关于p的不等式组，求解即可．

解：②×3，得$3x+3y=3p$．③

①－③，得$2x=23-3p$，

则$x=\dfrac{23-3p}{2}$．

把$x=\dfrac{23-3p}{2}$代入②，

得$y=\dfrac{5p-23}{2}$．

∵ x，y为正整数，

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{23-3p}{2}>0,\\[2ex]\dfrac{5p-23}{2}>0,\end{cases}$$

解得$4\dfrac{3}{5}<p<7\dfrac{2}{3}$．

∵ p是整数，

∴ $p=5$，6，7．

把$p=5$，$p=6$，$p=7$分别代入原方程组的解可知，只有当$p=5$或$p=7$时方程组的解是正整数．

答案：5或7

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题七 数形结合思想

专题解读» 不等式及不等式组的解集都可以在数轴上表示出来，特别是确定不等式组的解集时，利用数轴的“形”可以非常直观地看出不等式组的解集.

例 8 [中考·丽水]如图 2-2，数轴上所表示的关于 x 的不等式组的解集是（　　）

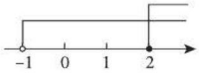


图 2-2

A. $x \geqslant 2$　　B. $x > 2$

C. $x > -1$　　D. $-1 < x \leqslant 2$

解题秘方：先从数轴上获取各个不等式的解集信息，再确定所有不等式解集的公共部分，即可确定不等式组的解集.

解：由数轴可以获取各个不等式的解集分别为 $x > -1$，$x \geqslant 2$，则两个不等式解集的公共部分为 $x \geqslant 2$.

答案：A

方法点拨：解决此类题的关键是能够将数、形结合起来，掌握在数轴上表示不等式解集的方法，“大于向右画，小于向左画，有等号为实心圆点，无等号为空心圆圈”. 另外，要知道不等式的解集是用“$x>a$ 或 $x<a$ 或 $x \geqslant a$ 或 $x \leqslant a$”等形式来表示的.

好题必解 ☞答案见 276 页

类型 1：解一元一次不等式及不等式组

1. 解不等式 $\frac{1}{2}x-1 \leqslant \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$，并把它的解集在数轴上表示出来.

2. [中考·宜昌]解不等式组 $\begin{cases} x > \dfrac{1-x}{2}, \\ 3\left(x-\dfrac{7}{3}\right) < x+1, \end{cases}$ 并求此不等式组的整数解.

类型 2：不等式（组）与方程（组）、一次函数的综合

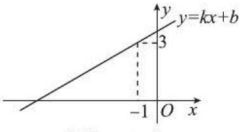
3. 若不等式组 $\begin{cases} 2x-a < 1, \\ x-2b > 3 \end{cases}$ 的解集为 $-1 < x < 1$，则 $(a-3)(b+3)$ 的值为（　　）

A.1　　B.−1　　C.2　　D.−2

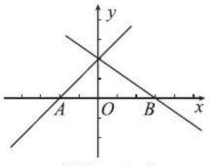
4. [中考·通辽]如图，直线 $y = kx + b\ (k \neq 0)$ 经过点 $(-1, 3)$，则不等式 $kx + b \geqslant 3$ 的解集为（　　）

A. $x > -1$　　B. $x < -1$

C. $x \geqslant 3$　　D. $x \geqslant -1$



（第 4 题）



（第 5 题）

5. [中考·娄底]如图，直线 $y = x + b$ 和 $y = kx + 2$ 与 x 轴分别交于点 $A(-2, 0)$，点 $B(3, 0)$，则 $\begin{cases} x+b > 0, \\ kx+2 > 0 \end{cases}$ 的解集为（　　）

A. $x < -2$　　B. $x > 3$

C. $x < -2$ 或 $x > 3$　　D. $-2 < x < 3$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·宜宾]若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x-y=2m+1,\\x+3y=3\end{cases}$ 的解满足 $x+y>0$，则 m 的取值范围是_____.

7. m 在什么范围内时，关于 x 的方程 $(m-2)x+2=1-m(4-x)$：

（1）有正数解?

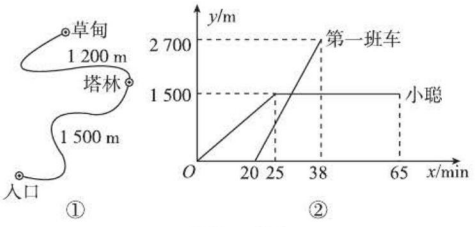
（2）有负数解?

（3）有不大于 2 的解?

8. [中考·遂宁]关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}2x+y=4a+6,\\3x-y=a+4\end{cases}$ 的解满足 x 大于 0，y 小于 4，求 a 的取值范围.

类型 3：建立不等式的模型解决问题

9. [中考·宁波]某风景区内的公路如图①所示，景区内有免费的班车，从入口处出发，沿该公路开往草甸，途中停靠塔林（上下车时间忽略不计）. 第一班车上午 8 点发车，以后每隔 10 min 有一班车从入口处发车. 小聪周末到该风景区游玩，上午 7：40 到达入口处，因还没到班车发车时间，于是他从景区入口处出发，沿该公路步行 25 min 后到达塔林. 小聪、班车离入口处的路程 y（m）与时间 x（min）的函数关系如图②所示.



（第 9 题）

（1）求第一班车离入口处的路程 y（m）关于时间 x（min）的函数表达式.

（2）求第一班车从入口处到达塔林所需的时间.

（3）小聪在塔林游玩 40 min 后，想坐班车到草甸，则小聪最早能够坐上第几班车? 如果他坐这班车到草甸，比他在塔林游玩结束后立即步行到草甸提早了几分钟?（假设每一班车速度均相同，小聪步行速度不变）

10. [中考·桂林]“全民阅读”深入人心，好读书，读好书，让人终身受益. 为满足同学们的读书需求，学校图书馆准备到新华书店采购文学名著和动漫书两类图书. 经了解，20 本文学名著和 40 本动漫书共需 1 520 元，20 本文学名著比 20 本动漫书贵 440 元（注：所采购的文学名著价格都一样，所采购的动漫书价格都一样）.

（1）求每本文学名著和动漫书各多少元.

（2）若学校要求购买动漫书比文学名著多 20 本，动漫书和文学名著总数量不低于 72 本，总费用不超过 2 000 元，请写出所有符合条件的购书方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章测试卷

☞答案见277页

（100分　60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下列各式：①$x^2 \neq 0$；②$|x|+1>0$；③$x+2<-5$；④$x+y=3$；⑤$\frac{1}{x}<0$.

其中是不等式的是（　　）

A. ①②③⑤　　B. ①②③④

C. ①②③④⑤　　D. ②③⑤

2. 不等式$3x \leqslant 2(x-1)$的解集为（　　）

A.$x \leqslant -1$　　B.$x \geqslant -1$

C.$x \leqslant -2$　　D.$x \geqslant -2$

3. 若$a>b$，则下列不等式中正确的是（　　）

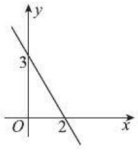
A.$a-b<0$　　B.$-5a<-5b$

C.$a+8<b-8$　　D.$\frac{a}{4}<\frac{b}{4}$

4. 不等式组$\begin{cases}2x-1<3,\\ -\frac{x}{2}\leqslant 1\end{cases}$的整数解有（　　）

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

5. 一次函数$y=kx+b(k \neq 0)$的图象如图所示，当$y>0$时，x的取值范围是（　　）



（第5题）

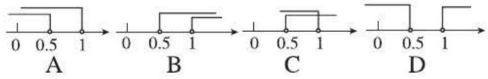
A.$x<0$　　B.$x>0$　　C.$x<2$　　D.$x>2$

6. 小丽同学准备用自己节省的零花钱购买一台售价为1 080元的学生平板电脑，她已存有750元，并计划从本月起每月节省30元，直到她至少存有1 080元．设x个月后小丽至少有1 080元，则可列出的不等式为（　　）

A.$30x+750>1\,080$　　B.$30x-750 \geqslant 1\,080$

C.$30x-750 \leqslant 1\,080$　　D.$30x+750 \geqslant 1\,080$

7. 已知点$P(2a-1,\ 1-a)$在第一象限，则a的取值范围在数轴上的表示正确的是（　　）



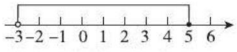
8. 若不等式组$\begin{cases}1+x>a,\\ 2x-4 \leqslant 0\end{cases}$有解，则$a$的取值范围是（　　）

A.$a \leqslant 3$　　B.$a<3$

C.$a<2$　　D.$a \leqslant 2$

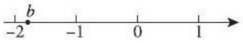
二、填空题（每题4分，共16分）

9. 若关于x的不等式组的解集在数轴上的表示如图所示，则其解集为_____.



（第9题）

10. 实数b在数轴上的对应点的位置如图所示，比较大小：$\frac{1}{2}b+1$_____0（用“<”或“>”填空）.



（第10题）

11. 在一次课外知识竞赛中，一共有30道判断题，答对一道题得4分，不答或答错一道题扣1分．如果在这次竞赛中得分要超过72分，那么至少应答对_____道题．

12. 节能灯越来越受人们的喜爱，一种白炽灯和一种节能灯的使用费用y（费用=灯的售价+电费，单位：元）与照明时间x（单位：h）之间的函数关系式分别为$y=0.03x+2$，$y=0.012x+20$（$0 \leqslant x \leqslant 2\,000$），则当使用时间超过_____时，节能灯的使用费用低于白炽灯的使用费用．

三、解答题（共52分）

13.（10分）（1）解不等式：$5(x-2)+8<6(x-1)+7$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）解不等式组$\begin{cases}\dfrac{x+1}{3}>0, & ①\\ 2(x+5)\geqslant 6(x-1), & ②\end{cases}$

并在数轴上表示其解集.

14.（8分）已知实数a是不等于3的常数，解不等式组$\begin{cases}-2x+3\geqslant -3, & ①\\ \dfrac{1}{2}(x-2a)+\dfrac{1}{2}x<0. & ②\end{cases}$

15.（10分）定义新运算：对于任意实数a，b，都有$a\oplus b=a(a-b)+1$，等式右边是通常的加法、减法及乘法运算.

比如：$2\oplus 5=2\times(2-5)+1$

$=2\times(-3)+1$

$=-6+1$

$=-5.$

（1）求$(-2)\oplus 3$的值；

（2）若$3\oplus x$的值小于13，求x的取值范围，并在数轴上表示出来.

16.（12分）某校计划组织师生共300人参加一次大型公益活动，如果租用6辆大客车和5辆小客车恰好全部坐满，且每辆大客车的乘客座位数比小客车多17个.

（1）求每辆大客车和每辆小客车的乘客座位数；

（2）由于最后参加活动的人数增加了30人，学校决定调整租车方案，在保持租用车辆总数不变的情况下，将所有参加活动的师生载完，求租用小客车数量的最大值.

17.（12分）某商场分两次购进A，B两种商品进行销售，两次购进同一种商品的进价相同，具体情况如下表：

	购进数量/件		所需费用/元
	A	B	
第一次	30	40	3 800
第二次	40	30	3 200

（1）求A，B两种商品每件的进价分别为多少元.

（2）商场决定A种商品以每件30元出售，B种商品以每件100元出售，为满足市场需求，需购进A，B两种商品共1 000件，且A种商品的数量不少于B种商品数量的4倍，请你写出销售利润最大的进货方案，并确定最大利润.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图形的全等变换



第二章 图形的平移与旋转









核心考点

你将见到的

- 平移的性质
- 图形的坐标变化与平移
- 旋转的性质
- 中心对称及中心对称图形

核心方法

我们为你提供的

- 化分散为集中法
- 归一法
- 基本图形法
- 分析法
- 分割法
- 分类讨论思想
- 转化思想
- 数形结合思想

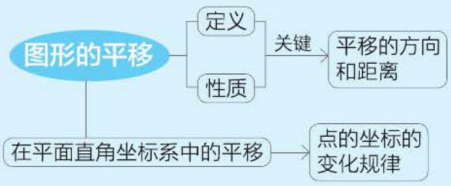
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 图形的平移

核心知识

- 平移的定义
- 平移的性质
- 平移作图
- 平面直角坐标系中的平移变换

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平移的定义

1. 平移 在平面内，将一个图形沿某个方向移动一定的距离，这样的图形运动称为平移.

2. 平移的“两要素”

（1）平移的方向；

（2）平移的距离.

特别提醒：平移图形时，原图形上的点到它对应点的方向就是平移的方向；任意一对对应点所连线段的长度就是平移的距离.

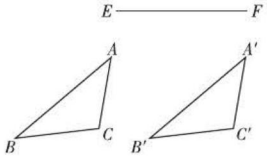


图 3-1-1

3. 平移中的对应元素

如图 3-1-1，把△ABC沿直线EF的方向平移，得到△$A'B'C'$.

对应点：点A与点A'，点B与点B'，点C与点C'.

对应线段：AB与$A'B'$，AC与$A'C'$，BC与$B'C'$.

对应角：$\angle A$与$\angle A'$，$\angle B$与$\angle B'$，$\angle C$与$\angle C'$.

提分·必记

特别解读

1. **图形的平移**是一种位置变换，它只**改变图形的位置，不改变图形的形状和大小**.
2. **平移**可以是上下平移和左右平移，也可以是按任意指定方向的平移，只要是直线方向即可.

拨考向 利用平移的定义识别平移现象

例1 在以下现象中：①用打气筒打气时，打气筒里活塞的运动；②直线传送带上瓶装饮料的移动；③随风摆动的旗帜；④钟摆的摆动.属于平移的是（　　）

A. ①　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ①②③④

解题秘方：紧扣“直线方向”进行辨析.

解：①中打气筒里活塞的运动属于平移；

②中传送带上瓶装饮料沿直线运动，所以属于平移；

③中随风摆动的旗帜的形状发生了改变，所以不属于平移；

④中钟摆的摆动属于旋转.

答案：B

提分·秘诀

方法提醒

判断一个现象是不是平移，要紧扣平移的定义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 平移的性质



1. 平移的性质

（1）平移后得到的新图形与原图形的形状、大小完全相同；

（2）对应点所连的线段平行（或在一条直线上）且相等；

（3）对应线段平行（或在一条直线上）且相等，对应角相等.

特别警示：“连接各组对应点的线段”和“对应线段”是不同的，“连接各组对应点的线段”是原图形上的点与平移后的图形上的点连接而成的，而“对应线段”就存在于原来的图形与平移后的图形之中，是图形的一部分.

2. 示图

如图 3−1−2，△ABC 平移到△$A'B'C'$ 的位置，则

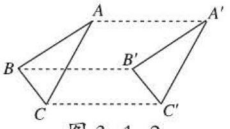


图 3−1−2

（1）$AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，$BC \parallel B'C'$，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$；

（2）$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，$AA'=BB'=CC'$；

（3）$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

拔考向▸ 利用平移的性质解决问题

例 2 如图 3−1−3，将面积为 3 的△ABC 沿 BC 方向平移到△DEF 的位置，$CE=5$，$EF=2$，$\angle B=40°$，则

（1）$BC=$_____，$\angle DEF=$_____；

（2）平移的距离是_____，△DEF 的面积是_____.

解题秘方：找准对应元素，根据平移的性质求出各个未知量.

解：根据平移后的新图形与原图形的形状、大小完全相同，得到 $BC=EF=2$，△DEF 的面积 = △ABC 的面积 =3，$\angle DEF=\angle B=40°$，所以平移的距离 $=BE=BC+CE=2+5=7$.

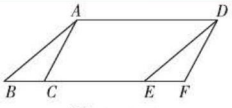


图 3−1−3

答案：（1）2；40°　（2）7；3



点知识▸ 3 平移作图

平移作图的一般步骤

平移作图是平移的性质的应用，利用平移可以得到许多美丽的图案，在具体作图时，应抓住作图的“四部曲”——定、找、移、连.

（1）**定**：确定平移的方向和距离.

（2）**找**：找出图形的关键点（图形的顶点、拐点、连接点）.

（3）**移**：过关键点作与已知对应点所连线段平行且相等的线段，得到关键点的对应点.

（4）**连**：按原图形顺次连接对应点.

提分·必记

特别解读

1. 连接对应点的线段的长度就是平移的距离.
2. 从原图形上一点到其对应点的方向为平移的方向.
3. 平移前后图形的对应边平行（或在一条直线上）且相等，对应角相等.

提分·秘诀

解法提醒

图形的平移是整个图形都在移动，不是局部移动，即图形中所有点、线平移的距离都相同，所以确定一个图形平移的距离，只需确定其上一个点平移的距离即可.

提分·必记

特别解读

1. 平移的性质是平移作图的依据.
2. 确定一个图形平移后的位置需要三个条件：
   (1) 图形原来的位置；
   (2) 平移的方向；
   (3) 平移的距离.
   这三个条件缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平移作图的步骤作平移后的图形

题型1：平移的性质在非网格作图中的应用

例3 如图3-1-4，经过平移，四边形$ABCD$的顶点A移到了点A'处，作出四边形$ABCD$平移后的图形.

解题秘方：由已知的一对对应点确定平移的方向和平移的距离，然后作出其他顶点的对应点的位置，最后连接得到平移后的图形.

解：（1）连接AA'；

（2）分别过点B，C，D作$l_1 // AA'$，$l_2 // AA'$，$l_3 // AA'$；

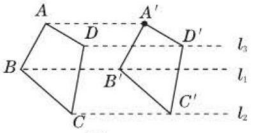


图3-1-4

（3）在l_1上沿AA'的方向截取$BB'=AA'$，在l_2，l_3上按同样的方法截取$CC'=AA'$，$DD'=AA'$；

（4）连接$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，即得到四边形$ABCD$平移后的图形$A'B'C'D'$，如图3-1-4.

题型2：平移的性质在网格作图中的应用

例4 现要把图3-1-5中方格纸（每个小正方形的边长均为1个单位长度）上的小船向右平移6个单位长度，再向上平移3个单位长度，请在方格纸上画出小船平移后的图形.

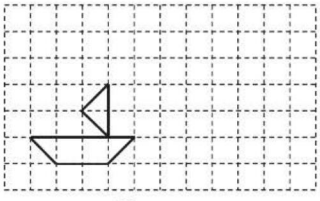


图3-1-5

解题秘方：将图形中的关键点按照指定的方向和距离平移，再按原图形的顺序依次连接对应点.

解：如图3-1-6，找到小船的7个关键点，并依次标上字母A，B，C，D，E，F，G. 把点A向右平移6个单位长度，到达点A_1，然后把点A_1向上平移3个单位长度，到达点A'，用同样的方法分别将小船的其他关键点B，C，D，E，F，G平移，得到各自的对应点，顺次连接对应点即可得到平移后的图形.

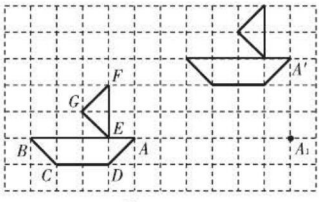


图3-1-6

提分·秘诀

方法点拨

画平移图形的步骤：

首先找出平移的方向和距离，再确定构成图形的关键点；

然后根据平移的方向和距离平移每个关键点；

最后顺次连接每个关键点的对应点，并标出相应的字母，得出平移后的图形.

技巧点拨

在网格中左右（或上下）平移整数倍的格数作图时，可以先找出原图形的关键点，按要求在网格中平移得到其对应点，再顺次连接各对应点，即可得到平移后的图形. 原图形的点在格点上的，通过左右（或上下）平移整数倍的格数，其对应点还在格点上，不会在其他位置.

另解

按要求平移点A，得到其对应点A'，因为平移前后的对应线段是平行（或在一条直线上）且相等的，所以以点A'为顶点，按原图形直接画出平移后的图形即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 4 用坐标表示点的平移

1. 点在坐标系中的平移

在平面直角坐标系中，某个点经过平移后，其位置发生了变化，其坐标也发生了变化.

2. 点的平移与坐标变化的关系

根据点的平移情况可以得到平移后点的坐标变化情况；反过来，根据点的坐标变化情况，可以得到点的平移情况. 即：

(x, y) ⟶（向右平移 a 个单位长度 / 向左平移 a 个单位长度）$(x+a, y)$

(x, y) ⟶（向上平移 b 个单位长度 / 向下平移 b 个单位长度）$(x, y+b)$

提分·必记

知识储备

平移的“两要素”：方向和距离.

特别解读

点平移时坐标变化的规律：

将点左右平移时，右加左减纵不变，上下平移时，上加下减横不变.

拔考向▸ 根据平移求点的坐标

例5 在平面直角坐标系中，将点 $A(x,y)$ 向右平移5个单位长度，再向上平移3个单位长度后与点 $B(-3, 2)$ 重合，则点 A 的坐标是（　　）

A. $(2, 5)$　B. $(-8, 5)$　C. $(-8, -1)$　D. $(2, -1)$

解题秘方：根据平移后的点的坐标及平移的方向和平移的距离确定平移前的点的坐标.

解：将点 A 向右平移5个单位长度，再向上平移3个单位长度后与点 $B(-3, 2)$ 重合，则将点 B 向左平移5个单位长度，再向下平移3个单位长度后得到点 A. 点 $B(-3, 2)$ 向左平移5个单位长度后的坐标为 $(-8, 2)$，再向下平移3个单位长度后的坐标为 $(-8, -1)$，即点 A 的坐标为 $(-8, -1)$.

答案：C

解题通法：已知平移方式，确定点的坐标的方法.

1. 已知平移前点的坐标和平移方式，确定平移后点的坐标时，按点的平移与坐标变化的关系求点的坐标.

2. 已知平移后点的坐标和平移方式，确定平移前点的坐标时，只需将平移后的点按照相反的方向平移即可.

提分·秘诀

另解

∵ 将点 A 向右平移5个单位长度，再向上平移3个单位长度后的点的坐标是 $(-3, 2)$，

∴ $x+5=-3$，$y+3=2$.

∴ $x=-8$，$y=-1$.

∴ 点 A 的坐标为 $(-8, -1)$.

点知识▸ 5 用点的坐标表示图形的平移

1. 图形在坐标平面中的平移是指在坐标系中，保持坐标轴不动的情况下，图形的整体移动.

图形在坐标平面中平移变换的实质：

（1）图形的位置及表示位置的坐标发生变化；

（2）图形的形状、大小不变.

提分·必记

特别解读

1. 图形的平移首先应转化为图形关键点的平移，再按照点的平移规律进行平移即可；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 图形的平移与图形上各点坐标变化的关系

（1）因为图形的平移是图形的整体平移，所以已知图形的平移情况，即可得到图形上各点坐标的变化情况；

（2）平移时，因为图形上各点的变化情况相同，所以已知图形上某点的坐标变化情况，即可知道图形的变化情况．

2. 一个图形依次沿x轴方向、y轴方向平移后所得的图形，可以看成是由原来的图形经过一次平移得到的．

拔考向▶利用坐标的变化表示图形的平移

提分·秘诀

例6 在平面直角坐标系中，△ABC的三个顶点的位置如图3-1-7所示，点A'的坐标是（-2，2）．现将△ABC平移，使点A变换为点A'，点B'，C'分别是点B，C的对应点．

（1）请画出平移后的图形△$A'B'C'$，并写出点B'，C'的坐标；

（2）试说明△ABC经过怎样的平移得到△$A'B'C'$；

（3）若△ABC内部一点P的坐标为(a,b)，则点P的对应点P'的坐标是_____．

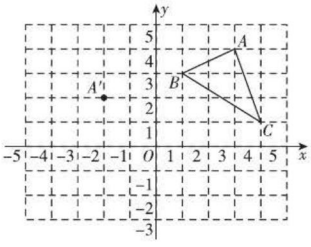


图3-1-7

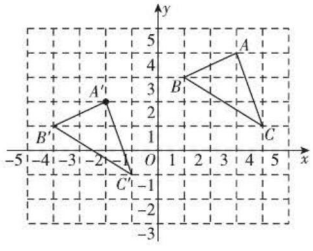


图3-1-8

解题秘方：根据一对对应点的坐标可确定平移的方向和平移的距离，图形边上的点和图形内部的点平移方式相同求解．

详解

由图可知点A的坐标为（3，4），又因点A平移后到点A'（-2，2），故平移后各点的横坐标减5，纵坐标减2．根据平移后图形上所有点都进行了相同方式的平移，可知点P'的坐标为（a-5，b-2）．

解：（1）△$A'B'C'$如图3-1-8所示．B'（-4，1），C'（-1，-1）．

（2）将△ABC先向左平移5个单位长度，再向下平移2个单位长度，得到△$A'B'C'$（或将△ABC先向下平移2个单位长度，再向左平移5个单位长度，得到△$A'B'C'$）．

（3）（a-5，b-2）

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用平移法解决几何中的计算问题

挑战·高分

题型1：平移法在求图形周长中的应用

例7 如图3-1-9，将周长为6的△ABC沿BC方向平移1个单位长度得到△DEF，则四边形$ABFD$的周长为_____．

图解

如图3-1-10，根据平移前后对应线段相等，得四边形ABFD的周长=

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用平移的性质，将求四边形 $ABFD$ 的周长转化为与△ ABC 的周长和平移距离相关的计算.

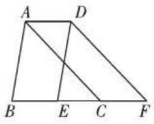


图 3-1-9

解：∵ △ ABC 沿 BC 方向平移 1 个单位长度得到△ DEF，

∴ $DF=AC$，$AD=CF=1$.

∵ △ ABC 的周长为 6，∴ $AB+BC+AC=6$.

∴ 四边形 $ABFD$ 的周长为 $AB+BF+DF+AD=AB+BC+CF+AC+AD=6+1+1=8$.

答案：8

题型 2：平移法在求图形面积中的应用

例 8 如图 3-1-11，将 Rt△ ABC 沿 CB 方向平移 BE 的距离后，得到 Rt△ DEF. 已知∠ $ABC=90°$，$AG=2$，$BE=4$，$DE=6$，求阴影部分的面积.

解题秘方：利用平移的性质将阴影部分的面积转化为梯形 $BEDG$ 的面积.

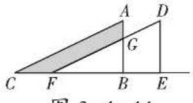


图 3-1-11

解：∵ △ DEF 是△ ABC 经过平移得到的，

∴ $AB=DE=6$，△ DEF 的面积 = △ ABC 的面积.

∴ $BG=AB-AG=6-2=4$，

△ ABC 的面积 − △ FGB 的面积 = △ DEF 的面积 − △ FGB 的面积，

即阴影部分的面积 = 梯形 $BEDG$ 的面积 = $\frac{1}{2}(BG+DE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(4+6)\times4=20$.

拔尖角度 2 利用图形平移的定义求点的坐标

例 9 如图 3-1-13，在平面直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别为（1，4），（3，2），$OC=AB$，$OC\parallel AB$.

（1）试用平移的知识求点 C 的坐标；

（2）求四边形 $ABCO$ 的面积.

解题秘方：（1）利用图形的平移与点的坐标的变化关系即可求解；（2）利用割补法求图形的面积.

解：（1）将 AB 平移可以得到 OC.

∵将点 A（1，4）平移到点 O（0，0），点 A 的横坐标减少 1，纵坐标减少 4，

∴ 将点 B(3，2)的横坐标减少 1，纵坐标减少 4，即可得到点 C 的坐标.

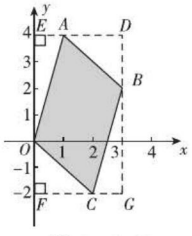


图 3-1-13

∴ 点 C 的坐标为（2，−2）.

△ABC 的周长 +2AD.

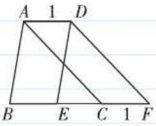


图 3-1-10

另解

如图 3-1-12，连接 GE.

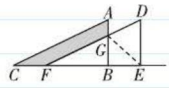


图 3-1-12

阴影部分的面积 = 四边形 $BEDG$ 的面积 = △ BEG 的面积 + △ DEG 的面积 = $\frac{1}{2}BG\cdot BE+\frac{1}{2}DE\cdot BE=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times6\times4=20$.

挑战·高分

技巧点拨

一条线段平移前后平行(或在一条直线上)且相等. 根据 OC=AB，OC // AB，可知线段 OC 可以看作是由线段 AB 平移得到的，利用图形平移前后坐标的变化规律，即可求出点 C 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于点 E，过点 C 作 $CF \perp y$ 轴于点 F，过点 B 作 y 轴的平行线，交 EA 的延长线于点 D，交 FC 的延长线于点 G，如图 3−1−13 所示．

则 $S_{\text{长方形}DEFG}=3\times6=18$，

$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

$S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，$S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$．

$\therefore S_{\text{四边形}ABCO}=S_{\text{长方形}DEFG}-S_{\triangle AOE}-S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BCG}-S_{\triangle OCF}=18-2-2-2-2=10$．

另解

本题也可借助网格求四边形 $ABCO$ 的面积，如图 3−1−14．

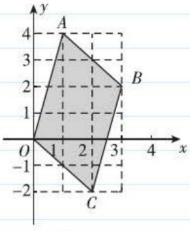


图 3−1−14

利用网格将四边形 $ABCO$ 分割后，观察并计算可知四边形 $ABCO$ 的面积为 10．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

在中考中，对平移的定义及性质的考查主要是以填空题、选择题为主．做此部分的题时，要会判断平移的方向和距离，熟练掌握平移前后图形的对应点、对应角、对应线段之间的关系，要注意平移前后图形的形状和大小都没有发生改变．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用网格中的平移判断移动方向

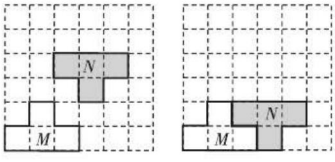
例 10 ［中考·广州］在 6×6 的方格中，将图 3−1−15 ①中的图形 N 平移后，位置如图 3−1−15 ②所示，则图形 N 的平移方法中，正确的是（　　）

A. 向下移动 1 格

B. 向上移动 1 格

C. 向上移动 2 格

D. 向下移动 2 格



①　　②

图 3−1−15

试题评析：本题考查了图形平移，解题的关键是理解平移的定义．

解：∵将图 3−1−15 ①中的图形 N 向下平移 2 格后，位置如图 3−1−15 ②所示，

∴图形的平移方法是向下移动 2 格．

答案：D

方法规律

图形的平移包含两个要素：

一是平移的方向，

二是平移的距离．

判断平移的时候，只需要沿平移的“路径”进行平移，便可确定这两个要素．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用点的平移与坐标的变化规律求坐标

例 11 [中考·黔东南州]在平面直角坐标系中有一点 $A(-2, 1)$，将点 A 先向右平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，则平移后点 A 的坐标为_____.

试题评析：本题考查的是根据点的平移确定点的坐标，解答本题的关键是掌握其变化规律.

解：点 $A(-2, 1)$ 先向右平移 3 个单位长度后，坐标为 $(1, 1)$，再向下平移 2 个单位长度，坐标为 $(1, -1)$.

答案：$(1, -1)$

解法提醒

根据点平移的方向和距离，可以得出点的坐标的变化情况；反过来，根据点的横、纵坐标的变化情况，可以判断出点平移的方向和距离.

考法 3 利用图形的平移与点的坐标变化规律求坐标

例 12 [中考·兰州]如图 3-1-16，在平面直角坐标系 xOy 中，将四边形 $ABCD$ 先向下平移，再向右平移得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$. 已知 $A(-3, 5)$，$B(-4, 3)$，$A_1(3, 3)$，则 B_1 的坐标为(　　)

A. $(1, 2)$　　B. $(2, 1)$　　C. $(1, 4)$　　D. $(4, 1)$

试题评析：本题主要考查图形平移的性质以及点的坐标的变化规律，熟练掌握图形的平移与图形中各点平移规律相同这一特征是解答本题的关键.

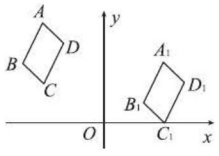


图 3-1-16

解：点 $A(-3, 5)$ 平移到点 $A_1(3, 3)$，说明点 A 向右平移了 6 个单位长度，向下平移了 2 个单位长度，故点 $B(-4, 3)$ 向右平移 6 个单位长度，向下平移 2 个单位长度后，得到 B_1 的坐标为 $(2, 1)$.

答案：B

方法点拨

解决本类题目主要分两步：

第一步，根据已知对应点的坐标分析出图形平移的规律；

第二步，根据分析出的平移规律，求出已知点的对应点坐标.

两年模拟兵法 ☞答案见 277 页

1. 下列现象不属于平移的是(　　)

A. 小华乘升降电梯从一楼至三楼

B. 足球在操场上沿直线滚动

C. 一个铁球从高处自由落下

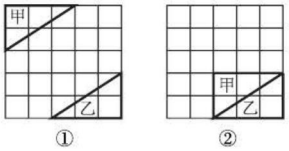
D. 小朋友坐滑梯下滑

2. 长度为 5 cm 的线段 AB 沿竖直方向平移了 10 cm，得到线段 $A'B'$，则线段 $A'B'$ 的长度为(　　)

A. 10 cm　　B. 2 cm

C. 5 cm　　D. 不确定

3. 如图，在方格纸中，将图①中的三角形甲平移到图②中所示的位置，与三角形乙拼成一个长方形，那么下面的平移方法中，正确的是(　　)



(第 3 题)

A. 先向下平移 3 格，再向右平移 1 格

B. 先向下平移 2 格，再向右平移 1 格

C. 先向下平移 2 格，再向右平移 2 格

D. 先向下平移 3 格，再向右平移 2 格

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

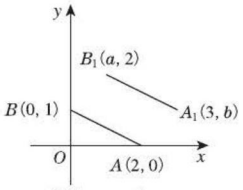
4. 将点 A（2，1）向下平移 2 个单位长度得到点 A'，则点 A' 的坐标是（　　）

A.（2，3）　　B.（2，−1）

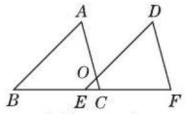
C.（4，1）　　D.（0，1）

5. [中考·菏泽]如图，A，B 的坐标分别为（2，0），（0，1），若将线段 AB 平移至 A_1B_1，则 $a+b$ 的值为（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5



（第 5 题）

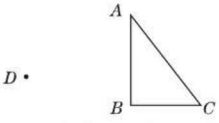


（第 7 题）

6. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8 cm，若把它向右平移 10 cm，那么点 A 移动了_____cm.

7. 如图，△ ABC 通过平移得到△ DEF，AC 与 DE 相交于 O. 已知 $\angle B=45°$，$\angle A=60°$，则 $\angle DEF=$_____，$\angle EOC=$_____. 若 $BC=3$ cm，$EC=0.5$ cm，则 $CF=$_____cm.

8. 如图，已知△ ABC 和点 A 平移后的对应点 D，请作出△ ABC 平移后的图形.

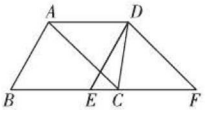


（第 8 题）

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $AD < BC$，将△ ABC 平移得到△ DEF.

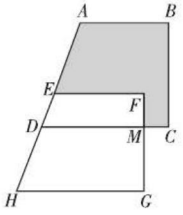
（1）指出平移的方向和平移的距离.

（2）求证：$AD+BC=BF$.



（第 9 题）

10. 如图，将直角梯形 $ABCD$ 平移得到直角梯形 $EFGH$. 若 $HG=10$，$MC=2$，$MG=5$，求图中阴影部分的面积.　　【导学号：2850581】



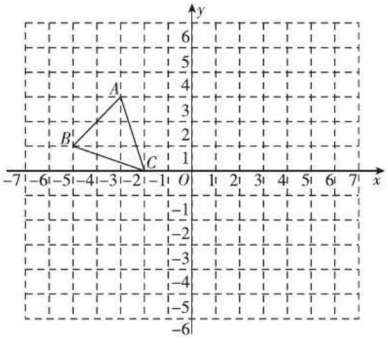
（第 10 题）

11. 如图，平面直角坐标系中，已知点 A，B，C 的坐标分别为（−3，3），（−5，1），（−2，0），点 P（a，b）是△ ABC 的边 AC 上任意一点，△ ABC 经过平移后得到△ $A_1B_1C_1$，点 P 的对应点为 P_1（$a+6$，$b-2$）.

（1）写出点 A_1，B_1，C_1 的坐标.

（2）在图中画出△ $A_1B_1C_1$.

（3）连接 OA，OA_1，AA_1，求△ AOA_1 的面积.



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 图形的旋转

核心知识

- 旋转（旋转中心、旋转角、旋转方向）
- 旋转的性质
- 旋转作图

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 旋转及其相关概念

1. 定义 在平面内，将一个图形绕一个定点按某个方向转动一个角度，这样的图形运动称为旋转，这个定点称为旋转中心，转动的角称为旋转角.

2. 旋转的“三要素” 旋转中心、旋转方向和旋转角.

（1）在旋转过程中，始终保持不动的点是旋转中心，旋转中心可以在图形的内部，也可以在图形的外部，还可以是图形上的某点；

（2）旋转方向有顺时针和逆时针两种；

（3）在描述一个旋转过程时，需要指明旋转的三要素，即旋转中心、旋转方向和旋转角.

3. 对应元素

旋转得到的图形能与原图形重合，我们把能够重合的点叫对应点，能够重合的线段叫对应线段，能够重合的角叫对应角.

提分·必记

特别提醒

把一个平面图形绕着平面内某一点 O 按某个方向转动一个角度，是指图形上的每一个点都绕点 O 沿相同的方向旋转相等的角度.

确定旋转角的关键是找到旋转中心.

旋转前后对应点与旋转中心所连线段的夹角就是旋转角.

拨考向▸利用旋转的定义认识旋转的“三要素”

例 1 如图 3-2-1，A，B，C 三点共线，△ACD 和△BCE 都是等边三角形，△ACE 经过旋转后到达△DCB 的位置.

（1）旋转中心是哪一点？

（2）旋转角是多少度？

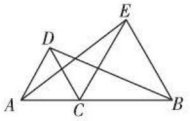


图 3-2-1

解题秘方：紧扣“图形旋转时，固定不动的点是旋转中心，转动的角是旋转角”进行判断.

解：（1）点 C 是在△ACE 旋转过程中不动的点，所以点 C 是旋转中心.

（2）△ACE 旋转后到达△DCB 的位置，AC 绕点 C 旋转到 DC，AC 转过的角，即∠ACD 就是旋转角.

因为△ACD 是等边三角形，

所以∠ACD=60°，即旋转角是 60°.

提分·秘诀

解法提醒

△ACE 经过旋转后得到△DCB：

- 在△ACE 旋转过程中，不动的点是旋转中心；
- 两个三角形的对应边所夹的角即为旋转角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 旋转的性质



1. 旋转的性质 一个图形和它经过旋转所得的图形中：

（1）对应点到旋转中心的距离相等；

（2）任意一组对应点与旋转中心的连线所成的角都等于旋转角；

（3）对应线段相等，对应角相等.

2. 旋转与平移、轴对称的对比

		旋转	平移	轴对称
不同点	对应线段、对应角	旋转变换前后，两个图形的任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都是旋转角	平移变换前后，两个图形的对应线段平行（或共线），对应角的两边分别平行（或共线），平移方向一致	如果成轴对称的两个图形的对应线段或其延长线相交，那么交点在对称轴上，成轴对称的两个图形的对应点的连线被对称轴垂直平分
	作图、运动方式	作图所需要的条件不同，运动方式不同		
相同点		（1）都是在平面内进行的图形变换； （2）都只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小，即变换前后图形的对应边相等，对应角相等； （3）都是把一个已知图形变换后，得到另一个图形		

拔考向▶ 利用旋转的性质识别旋转前后对应图形的关系

例2 如图 3-2-2，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 上，$\angle FDE=45°$，$\triangle DEC$ 按顺时针方向旋转一个角度后到达 $\triangle DGA$ 的位置.

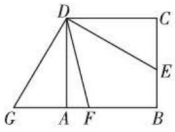


图 3-2-2

（1）图中哪一个点是旋转中心？旋转角是多少度？

（2）试指明图中旋转图形的对应线段与对应角.

（3）请写出图中除正方形的四条边、直角外的相等线段、相等角及能够完全重合的三角形.

（4）你能求出 $\angle GDF$ 的度数吗？说明你的理由.

解题秘方：紧扣旋转的性质解答相关问题.

解：（1）图中的点 D 是旋转中心，旋转角是 $90°$.

（2）图中 DE 与 DG，DC 与 DA，EC 与 GA 是对应线段；$\angle CDE$ 与 $\angle ADG$，$\angle C$ 与 $\angle DAG$，$\angle DEC$ 与 $\angle G$ 是对应角.

（3）相等线段：$DG=DE$，$GA=EC$.

相等角：$\angle G=\angle DEC=\angle ADE$，$\angle ADG=\angle CDE$，$\angle GDF=$

提分·必记

特别提醒

旋转的性质的作用：

1. 可以用来判断线段或角是否相等.
2. 可以用来计算图形的面积、线段的长度或角的大小.
3. 可以用来确定旋转中心. 因为对应点到旋转中心的距离相等，所以旋转中心在对应点所连线段的垂直平分线上，因此，旋转中心是两对对应点所连线段的垂直平分线的交点.

提分·秘诀

解题通法

由于旋转前后两个图形的形状、大小未发生改变，所以我们在利用旋转来解决与其相关的问题时应抓住以下三点：

1. 明确旋转中的“变”与“不变”.
2. 找准旋转前后的“对应关系”，正确判断旋转前后图形的对应点、对应角、对应线段及旋转角，这是理解和应用旋转特征的基础.
3. 充分挖掘旋转过程中的相等关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle EDF$，$\angle AFD=\angle CDF$.

能够完全重合的三角形：$\triangle DEC$ 与 $\triangle DGA$.

（4）能，$\angle GDF=45°$.

$\because \triangle DEC$ 绕点 D 顺时针旋转 $90°$ 到 $\triangle DGA$ 的位置，$\therefore \angle GDE=90°$.

又 $\because \angle FDE=45°$，

$\therefore \angle GDF=\angle GDE-\angle FDE=90°-45°=45°$.

点知识▶3 旋转作图

1. 作图依据 旋转的性质，即对应点到旋转中心的距离相等，每组对应点都旋转相同的角度.

2. 旋转作图的一般步骤

（1）确定旋转中心、旋转方向和旋转角.

（2）找出图形的关键点，一般是图形中的转折点.

（3）作旋转后的对应点，方法如下：

①**连** 连接图形的每个关键点与旋转中心；

②**转** 把连线绕旋转中心按旋转方向旋转相同的角度（作旋转角）；

③**截** 在作得的角的另一边截取与关键点到旋转中心的距离相等的线段，得到各个关键点的对应点.

（4）按原图形的顺序连接这些对应点，所得到的图形就是旋转后的图形.

（5）写出结论，说明作出的图形即为所求作的图形.

提分·必记

特别提醒

确定旋转中心的方法：

要看旋转中心是在图形上还是不在图形上.

若在图形上，哪一点在旋转的过程中位置没有改变，这一点就是旋转中心；

若不在图形上，任意两对对应点连线的垂直平分线的交点就是旋转中心.

拔考向▶利用旋转作图的方法作旋转后的图形

例3 如图 3-2-3，$\triangle ABC$ 绕点 O 旋转，使点 A 旋转到点 D 处，画出顺时针旋转后的三角形，并写出简要作法.

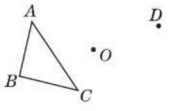


图 3-2-3

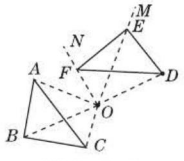


图 3-2-4

解题秘方：在旋转作图时，要紧扣以下三点.

（1）对应点到旋转中心的距离相等；

（2）旋转的角度相等；

（3）旋转的方向相同.

解：（1）连接 OA，OB，OC，OD；

（2）分别以 OB，OC 为边，作 $\angle BOM=\angle CON=\angle AOD$；

（3）分别在 OM，ON 上截取 $OE=OB$，$OF=OC$；

（4）连接 DE，EF，FD，$\triangle DEF$ 就是所求作的三角形，如图 3-2-4 所示.

提分·秘诀

作图提醒

1. 为了避免作图混乱，也可以先对一个关键点连、转、截，找到其对应点后再进行下一个关键点的旋转；
2. 已知旋转中心和一对对应点，画旋转图形时要先将这对对应点与旋转中心相连，找出旋转方向和旋转角.由此将此类问题转化成已知旋转三要素的旋转作图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用特殊三角形法求旋转图形中的角度

例 4 如图 3-2-5，D 是等腰直角三角形 ABC 内一点，BC 是斜边．如果将△ ABD 绕点 A 逆时针旋转到△ ACD' 的位置，则 $\angle ADD'$ 的度数是（　　）

A.25°　　B.30°　　C.35°　　D.45°

解题秘方：通过判定△ ADD' 是特殊三角形求角．

解：由旋转性质可知，△ $ABD \cong$ △ ACD'，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD'$，$AD = AD'$．

$\because$ △ ABC 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BAC = 90°$．

$\therefore \angle BAD + \angle CAD = 90°$．

$\therefore \angle DAD' = \angle CAD' + \angle CAD = 90°$．

即△ ADD' 为等腰直角三角形．

$\therefore \angle ADD' = 45°$．

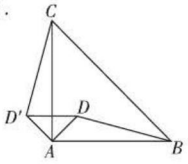


图 3-2-5

答案：D

特别提醒　求旋转变换中相关角的度数的方法：

（1）利用图形全等的性质求解；（2）利用旋转图形对应角的关系求解．

挑战·高分

另解

由图 3-2-5 可知，AB 和 AC 是对应边，AD 和 AD' 是对应边，

$\therefore AB = AC$，且 $\angle BAC$ 是旋转角；$AD = AD'$，且 $\angle DAD'$ 是旋转角．

$\because$ △ ABC 是等腰直角三角形，BC 是斜边，

$\therefore \angle BAC = 90°$．

$\therefore \angle DAD' = \angle BAC = 90°$．

即△ ADD' 是等腰直角三角形．

$\therefore \angle ADD' = 45°$．

答案：D

拔尖角度 2 利用旋转作辅助线法求以特殊图形为背景的边和角

题型 1：等边（腰）三角形中的旋转问题（化分散为集中法）

例 5 如图 3-2-6，等边三角形 ABC 内有一点 O，已知 $OA=4$，$OB=3$，$OC=5$．求 $\angle AOB$ 的度数．

解题秘方：借助旋转，将分散的三条已知线段集中到同一个三角形中，构造直角三角形或等边三角形求解．

解：如图 3-2-6，把△ BOA 绕点 B 顺时针旋转 60°，得到△ BPC，连接 OP．由旋转的性质，得 $BP=BO$，$PC=OA$，$\angle AOB = \angle CPB$，$\angle OBP = 60°$．

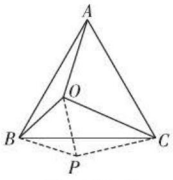


图 3-2-6

$\therefore$ △ OBP 为等边三角形．

$\therefore \angle OPB = 60°$，$OP = OB = 3$．

$\because PC = OA = 4$，$OC = 5$，

$\therefore OP^2 + PC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$，$OC^2 = 5^2 = 25$．

$\therefore OP^2 + PC^2 = OC^2$．$\therefore \angle OPC = 90°$．

$\therefore \angle CPB = \angle OPB + \angle OPC = 60° + 90° = 150°$．

$\therefore \angle AOB = \angle CPB = 150°$．

挑战·高分

另解提示

如图 3-2-7，将△ AOB 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到△ AMC，连接 OM．

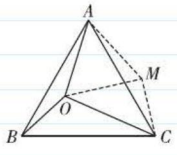


图 3-2-7

先证△ AMO 为等边三角形，得 $\angle AMO = 60°$，再证△ COM 为直角三角形，得 $\angle OMC = 90°$．

$\therefore \angle AMC = \angle AMO + \angle OMC = 150°$．

$\therefore \angle AOB = \angle AMC = 150°$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：正方形中的旋转问题（归一法）

例 6 如图 3-2-8，P 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上一点，$\angle BAP$ 的平分线交 BC 于点 Q. 求证：$AP=DP+BQ$.

解题秘方：借助旋转把两条线段转移到一条直线上，再证明线段间的关系.

证明：如图 3-2-8，将△ ABQ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到△ ADE.

由旋转的性质可得 $\angle E=\angle AQB$，$DE=BQ$，$\angle EAQ=90°$，$\angle B=\angle ADE=90°$.

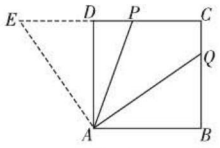


图 3-2-8

$\therefore E$，D，P 三点共线.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AD \parallel BC$.

$\therefore \angle DAQ=\angle AQB$.

$\because AQ$ 平分 $\angle BAP$，

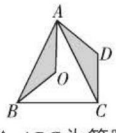
$\therefore \angle PAQ=\angle QAB$.

$\therefore \angle PAE=90°-\angle PAQ=90°-\angle QAB=\angle DAQ=\angle AQB=\angle E$.

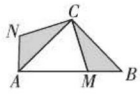
$\therefore AP=PE=DP+DE=DP+BQ$.

方法点拨：利用旋转解决与特殊图形相关的问题.

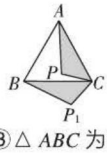
解决与等腰三角形、等边三角形或正方形有关的几何问题时，如果没有思路，我们可以考虑作辅助线，利用旋转将不相关的条件联系起来，找到解题的突破口. 常见的基本图形如图 3-2-9 所示.



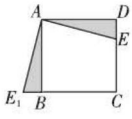
①△ ABC 为等腰三角形，$AB=AC$



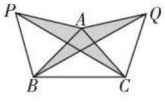
②△ BAC 为等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$



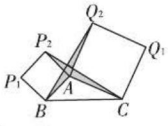
③△ ABC 为等边三角形



④四边形 $ABCD$ 为正方形



⑤△ ABP，△ AQC 为等边三角形



⑥四边形 ABP_1P_2，四边形 ACQ_1Q_2 为正方形

图 3-2-9

技巧提醒

本题将△ ABQ 旋转到△ ADE 的位置，将线段 DP 和 BQ 的和转化为一条线段 PE，再证明 $PE=AP$.

规律总结

旋转变换是一种基本的图形变换，它是将已知图形（或其中一部分）绕某一点旋转，构造出新的图形. 解题时可以等量转移图形的相关量，从而将一些分散的条件集中.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

在中考中重点考查应用旋转的性质求角度、线段长度或旋转图形中点的坐标. 旋转常与平移、轴对称等变换综合在一起考查，选择题、填空题、解答题中都有出现，难度适中. 求解旋转问题的关键是分析图形的变化规律，厘清旋转前后图形中线段和角的关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用旋转的性质求角的度数

例7 [中考·宁波]如图3-2-10，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D是AB边上一点（点D与A，B不重合），连接CD，将线段CD绕点C按逆时针方向旋转$90°$，得到线段CE，连接DE交BC于点F，连接BE.

（1）求证：△ACD≌△BCE.

（2）当$AD=BF$时，求$\angle BEF$的度数.

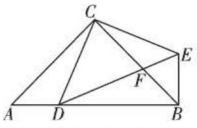


图3-2-10

试题评析：本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质及全等三角形的判定与性质，熟记各性质并准确识图是解题的关键.

（1）**证明**：∵将线段CD绕点C按逆时针方向旋转$90°$，得到线段CE，∴$\angle DCE=90°$，$CD=CE$.

又∵$\angle ACB=90°$，∴$\angle ACB=\angle DCE$. ∴$\angle ACD=\angle BCE$.

在△ACD和△BCE中，$\begin{cases} CD=CE, \\ \angle ACD=\angle BCE, \\ AC=BC, \end{cases}$

∴△ACD≌△BCE（SAS）.

（2）**解**：∵$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，∴$\angle A=45°$.

∵△ACD≌△BCE，∴$AD=BE$，$\angle CBE=\angle A=45°$.

又∵$AD=BF$，∴$BE=BF$.

∴$\angle BEF=\angle BFE=\dfrac{180°-45°}{2}=67.5°$.

考法2 利用旋转的性质求线段的长

例8 [中考·宜宾]如图3-2-11，四边形$ABCD$是边长为5的正方形，E是DC上一点，$DE=1$. 将△ADE绕着点A顺时针旋转到与△ABF重合，则$EF=$（　　）

A. $\sqrt{41}$　　B. $\sqrt{42}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{13}$

试题评析：本题主要考查了旋转的性质及勾股定理，利用旋转的性质判断△AEF的形状是解决问题的关键.

解：∵四边形$ABCD$是正方形，∴$\angle DAB=\angle ADE=90°$.

∴$AE=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.

∵△ADE绕点A顺时针旋转到与△ABF重合，

∴$\angle EAF=\angle DAB=90°$，$AF=AE$.

∴$EF=\sqrt{(\sqrt{26})^2+(\sqrt{26})^2}=2\sqrt{13}$.

答案：D

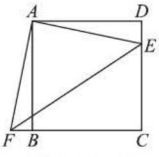


图3-2-11

特别提醒

利用旋转解决问题时要注意从下几点：

1. 旋转中的变（图形的位置）与不变（图形的形状、大小）；
2. 旋转前后的对应关系（顶点、边、角）；
3. 旋转过程中的相等关系.

方法归纳

在旋转问题中求线段的长时，通常先利用旋转的性质得到对应线段相等，再结合特殊几何图形的性质求出待求线段的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用旋转的性质解决坐标平面内的图形变换问题

例 9 [中考·齐齐哈尔]如图 3-2-12，平面直角坐标系内，小正方形网格的边长为 1 个单位长度，△ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(-1, 3)$，$B(-4, 0)$，$C(0, 0)$.

（1）画出将△ABC 向上平移 1 个单位长度，再向右平移 5 个单位长度后得到的图形△$A_1B_1C_1$；

（2）画出将△ABC 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后得到的图形△A_2B_2O；

（3）在 x 轴上存在一点 P，满足点 P 到点 A_1 与点 A_2 距离之和最小，请直接写出点 P 的坐标.

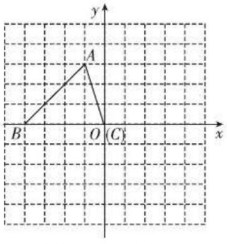


图 3-2-12

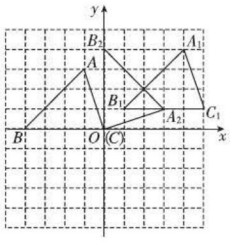


图 3-2-13

试题评析：本题考查了利用旋转和平移变换作图，熟练掌握网格结构，准确找出对应点的位置是解题的关键.

解：（1）如图 3-2-13，△$A_1B_1C_1$ 为所求作的三角形；

（2）如图 3-2-13，△A_2B_2O 为所求作的三角形；

（3）P 点的坐标为 $\left(\frac{16}{5}, 0\right)$.

思路点拨

- 分别将点 A, B, C 向上平移 1 个单位长度，再向右平移 5 个单位长度，然后顺次连接即可.
- 根据网格结构找出点 A, B, C 从点 O 为旋转中心顺时针旋转 90° 后的对应点，然后顺次连接即可.
- 利用最短路径问题解决，首先作点 A_1 关于 x 轴的对称点 A_3，再连接 A_2A_3，A_2A_3 与 x 轴的交点即为所求的 P 点.

方法总结

对于网格中画图问题，要充分利用网格的特殊性找对应点，再通过数网格找准坐标，不需要测量；对于最小值问题，若两点在某直线的同侧，必须先找到其中一点关于直线的对称点，再将这个对称点与另一点连接，与直线的交点就是满足最小值的点.

两年模拟兵法

☞答案见 278 页

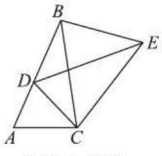
1. [中考·吉林]把图中的交通标志图案绕着它的中心旋转一定角度后与自身重合，则这个旋转角度至少为（　　）

A. 30°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 180°



（第 1 题）

2. [中考·天津]如图，将△ABC 绕点 C 顺时针旋转得到△DEC，使点 A 的对应点 D 恰好落在边 AB 上，点 B 的对应点为 E，连接 BE，下列结论一定正确的是（　　）

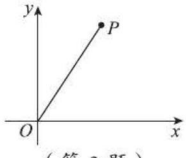


（第 2 题）

A. $AC = AD$　　B. $AB \perp EB$

C. $BC = DE$　　D. $\angle A = \angle EBC$

3. [中考·孝感]如图，在平面直角坐标系中，将点 $P(2, 3)$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 得到点 P'，则 P' 的坐标为（　　）



（第 3 题）

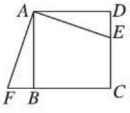
A. (3, 2)　　B. (3, −1)

C. (2, −3)　　D. (3, −2)

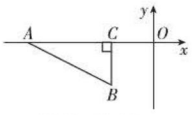
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·武威]如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 DC 上一点，把△ ADE 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 到△ ABF 的位置．若四边形 $AECF$ 的面积为 25，$DE=2$，则 AE 的长为（　　）

A. 5　　B. $\sqrt{23}$　　C. 7　　D. $\sqrt{29}$



（第 4 题）



（第 5 题）

5. [中考·济宁]如图，在平面直角坐标系中，点 A，C 在 x 轴上，点 C 的坐标为（-1，0），$AC=2$．将 Rt△ ABC 先绕点 C 顺时针旋转 $90°$，再向右平移 3 个单位长度，则变换后点 A 的对应点的坐标是（　　）

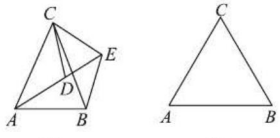
A.（2，2）　　B.（1，2）

C.（-1，2）　　D.（2，-1）

6. [中考·十堰节选]如图①，△ ABC 中，$CA=CB$，$\angle ACB=\alpha$，D 为△ ABC 内一点．将△ CAD 绕点 C 按逆时针方向旋转角 α 得到△ CBE，点 A，D 的对应点分别为点 B，E，且 A，D，E 三点在同一直线上．

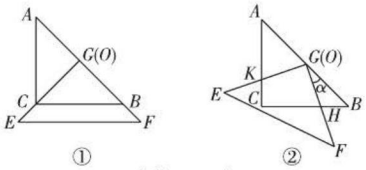
（1）$\angle CDE=$_____（用含 α 的代数式表示）；

（2）如图②，若 $\alpha=60°$，请补全图形，再过点 C 作 $CF\perp AE$ 于点 F，然后探究线段 CF，AE，BE 之间的数量关系，并证明你的结论．



（第 6 题）

7. 如图①，把两个全等的等腰直角三角尺 ABC 和 EFG（其直角边长均为 4）叠放在一起，且使三角尺 EFG 的直角顶点 G 与三角尺 ABC 的斜边中点 O 重合．现将三角尺 EFG 绕点 O 顺时针旋转角 α（旋转角 α 满足条件：$0°<\alpha<90°$），四边形 $CHGK$ 是旋转过程中两个三角尺的重叠部分（如图②）．在上述旋转过程中，四边形 $CHGK$ 的面积有何变化？【导学号：2850581】



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 中心对称

核心知识

- 中心对称
- 中心对称的性质
- 中心对称图形
- 关于原点对称的点的坐标

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 中心对称

1. 定义 如果把一个图形绕着某一点旋转 180°，它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称，这个点叫做它们的对称中心. 这两个图形在旋转前后能重合的对应点叫做关于对称中心的对称点.

2. 中心对称与轴对称的关系

	中心对称	轴对称
区别	有一个对称中心	有一条对称轴
	图形绕对称中心旋转 180°	图形沿对称轴折叠
	旋转后与另一个图形重合	折叠后与另一个图形重合
相同点	都是两个图形之间的关系，并且变换前后的两个图形全等	

提分·必记

特别解读

1. 中心对称是特殊的旋转，其旋转角为 180°；
2. 中心对称是指两个图形的位置关系，必须涉及两个图形；
3. 中心对称的两个图形，只有一个对称中心，这个对称中心可能在每个图形的外部，也可能在每个图形的内部或边上.

拨考向 利用中心对称的定义识别对称中心、对称点

例 1 如图 3-3-1，两个五角星关于某一点成中心对称，指出哪一点是对称中心，并指出图中点 A，B，C，D 的对称点.

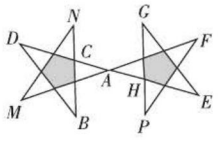


图 3-3-1

解题秘方：紧扣中心对称与相关定义判断.

解：从图中易看出旋转中心为点 A，故点 A 为对称中心；点 A，B，C，D 绕点 A 旋转 180° 后的位置分别在点 A，G，H，E 处，故点 A，B，C，D 关于点 A 的对称点分别是点 A，G，H，E.

提分·秘诀

特别提醒

旋转角为 180° 时的旋转中心即为对称中心，旋转中所说的对应点就是关于对称中心的对称点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 中心对称的性质

1. 性质

（1）成中心对称的两个图形中，对应点所连线段经过对称中心，且被对称中心平分；反之，如果两个图形的对应点的连线都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形关于这一点中心对称，利用这一性质可以识别中心对称.

（2）中心对称的两个图形是全等图形，对应角相等，对应线段平行（或在一条直线上）且相等.

2. 确定对称中心的方法

方法一：连接任意一对对称点，取这条线段的中点，则该中点为对称中心.

方法二：任意连接两对对称点，这两条线段的交点就是对称中心.

提分·必记

特别解读

由性质可以得到如下结论：

1. 对称中心在一对对称点的连线上；
2. 对称中心到一对对称点的距离相等.

全等的图形不一定成中心对称，而成中心对称的两个图形一定是全等的图形.

拔考向▶ 利用中心对称的性质找对应元素

例 2 如图 3-3-2，已知四边形 $ABCD$ 的中心对称图形是四边形 $A_1B_1C_1D_1$，请回答下列问题：

（1）点 A 的对称点是点_____，点 B 的对称点是点_____，对称中心是点_____.

（2）指出图中在同一条直线上的三点.

（3）指出图中相等的线段和全等的三角形.

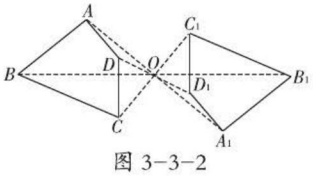


图 3-3-2

解题秘方：紧扣中心对称的性质进行判断.

解：（1）A_1；B_1；O

（2）A，O，A_1；B，O，B_1；C，O，C_1；D，O，D_1.

（3）图中相等的线段有 $OA=OA_1$，$OB=OB_1$，$OC=OC_1$，$OD=OD_1$，$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$CD=C_1D_1$，$DA=D_1A_1$.

全等的三角形有△ABO 与△A_1B_1O，△ADO 与△A_1D_1O，△BCO 与△B_1C_1O，△DCO 与△D_1C_1O.

提分·秘诀

解法提醒

找对称点是解决问题的关键，每一对对称点与对称中心在同一条直线上. 根据对称点来找对应线段、对应角，由中心对称的性质得到对应线段、对应角的相等关系，从而确定三角形的形状和大小关系.

点知识▶ 3 中心对称的作图

1. 作图关键 确定对称中心，再作出原图形上关键点关于对称中心的对称点.

2. 作图步骤

（1）将原图形上的所有关键点与对称中心连接；

（2）将以上连线延长找对称点，使得对称点与对称中心的距离和关键点与对称中心的距离相等；

（3）将对称点按原图形的形状顺次连接起来，即可得出关于对称中心对称的图形.


中心对称作图

提分·必记

特别提醒

作一个图形关于某点成中心对称的图形，要运用中心对称的性质，将已知图形的关键点与对称中心连接并延长至某点，使之到对称中心的距离与已知关键点到对称中心的距离相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用中心对称的性质作图

例 3 如图 3-3-3，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.

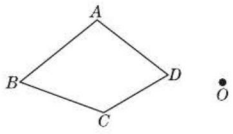


图 3-3-3

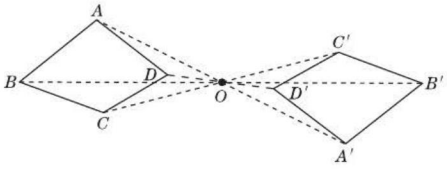


图 3-3-4

解题秘方：要作四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，只要作出点 A，B，C，D 关于点 O 的对称点，然后顺次连接即可.

解：（1）连接 AO 并延长 AO 到 A'，使 $OA' = OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对称点 A'.

（2）同样画出点 B，C 和点 D 关于点 O 的对称点 B'，C' 和 D'.

（3）连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求作的图形. 如图 3-3-4 所示.

提分·秘诀

作图通法

作已知图形关于某点对称的图形：

1. 作图依据　对称中心是对称点所连线段的中点.
2. 作图步骤
   （1）连接；
   （2）延长；
   （3）等长截取；
   （4）顺次连接对称点.

知识▶4 中心对称图形

1. 中心对称图形

把一个图形绕某个点旋转 180°，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做它的对称中心.

2. 中心对称图形的性质

（1）中心对称图形上对称点的连线必经过对称中心，且被对称中心平分，即过对称中心的直线与中心对称图形所交的两点是对称点；中心对称图形上所有的点关于对称中心的对称点都在这个图形上.

（2）过对称中心的任一直线把中心对称图形分成全等的两部分.

3. 中心对称与中心对称图形的区别和联系

	中心对称	中心对称图形
区别	（1）是针对两个图形而言的； （2）是指两个图形的（位置）关系； （3）对称点在两个图形上	（1）是针对一个图形而言的； （2）是指具有某种性质的一个图形； （3）对称点在一个图形上
联系	若把成中心对称的两个图形视为一个整体，则整个图形是中心对称图形；若把中心对称图形相互对称的两部分看作两个图形，则这两个图形成中心对称	

提分·必记

特别提醒

判断中心对称图形的方法：

1. 中心对称图形的“三要素”
   （1）对称中心；
   （2）旋转 180°；
   （3）与本身重合.
2. 常见的中心对称图形
   线段、平行四边形、长方形、正方形、边数是偶数的正多边形、圆等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用中心对称图形的定义和性质解相关问题

题型1：中心对称图形的定义在识别中心对称图形中的应用

例4 ［中考·本溪］下列图形中（如图3-3-5），既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）

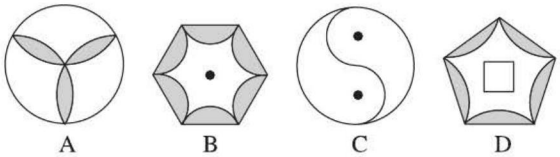


图3-3-5

解题秘方：紧扣轴对称图形及中心对称图形的定义进行识别.

答案：B

题型2：中心对称图形的性质在计算中的应用

例5 如图3-3-6是一个中心对称图形，点A为对称中心．若$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$BC=1$，则BB'的长为（　　）

A. 4　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解题秘方：紧扣中心对称图形的对称中心平分对称点的连线解答.

解：$\because \angle C=90°$，$\angle B=30°$，$\therefore AC=\frac{1}{2}AB$.

又$\because BC=1$，$\therefore$由勾股定理可知$AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore BB'=2AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

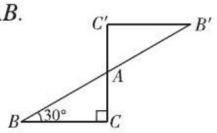


图3-3-6

答案：D

知识▶5 关于原点对称的点的坐标

1. 关于原点对称的点的坐标

两个点关于原点对称时，它们的横、纵坐标分别互为相反数，即点$P(x, y)$关于原点的对称点为$P'(-x, -y)$.

2. 关于坐标轴对称和关于原点对称的点的坐标的区别

名称		区别	表达式
关于坐标轴对称	关于x轴对称	横坐标相同，纵坐标互为相反数	$P(a, b)$关于x轴的对称点为$P_1(a, -b)$
	关于y轴对称	横坐标互为相反数，纵坐标相同	$P(a, b)$关于y轴的对称点为$P_2(-a, b)$
关于原点对称		横、纵坐标分别互为相反数	$P(a, b)$关于原点的对称点为$P_3(-a, -b)$

提分·秘诀

特别提醒

对轴对称图形和中心对称图形的识别，除定义外，还可以用**折叠法**和**旋转法**.

审题提醒

“是一个中心对称图形”，即已知$AB=AB'$，$AC=AC'$，B, A, B'和C, A, C'均三点共线，$\triangle ABC\cong\triangle AB'C'$等.

提分·必记

拓宽视野

1. 若$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$两点关于点$P(x, y)$对称，则$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$.

2. 点$P(x, y)$关于直线对称的点的坐标：

$P(x, y)\xrightarrow[y=x\text{对称}]{\text{关于直线}}P'(y, x)$；

$P(x, y)\xrightarrow[y=-x\text{对称}]{\text{关于直线}}P''(-y, -x)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨考向▶利用对称点的坐标特征在平面直角坐标系中作图

例6 △ABC在平面直角坐标系中的位置如图3-3-7，A，B，C三点在格点上.

（1）作出△ABC关于y轴对称的图形△$A_1B_1C_1$，并写出点C_1的坐标；

（2）作出△ABC关于原点O对称的图形△$A_2B_2C_2$，并写出点C_2的坐标.

解题秘方：紧扣“关于坐标轴、原点对称的点的坐标特征”解答.

解：（1）如图3-3-7，点C_1的坐标是（−4，2）.

（2）如图3-3-7，点C_2的坐标是（−4，−2）.

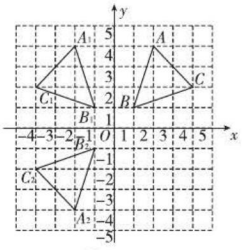


图3-3-7

提分·秘诀

作图通法

在坐标平面内作对称图形的两种方法：

方法一　先按对称点的坐标的特征，求出对称点的坐标，再在平面直角坐标系中描出对称点，最后将这些对称点顺次连接即可.

方法二　先在平面直角坐标系中分别作出各对称点，然后将这些对称点顺次连接即得所作图形，最后根据图形的位置读出各点的坐标.

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度▶1 利用过对称中心的直线等分中心对称图形法，等分几何图形的面积

例7 如图3-3-8①，直线EF经过平行四边形$ABCD$对角线的交点O，点E，F分别在AD，BC上，则$S_{四边形AEFB}=S_{四边形DEFC}$.

（1）如图3-3-8②，两个正方形一边重合，O为小正方形对角线的交点，求作过点O的直线l，使l将整个图形分成面积相等的两部分；

（2）8个大小相同的正方形如图3-3-8③摆放，求作直线m，使m将8个正方形分成面积相等的两部分（用三种方法分割）.

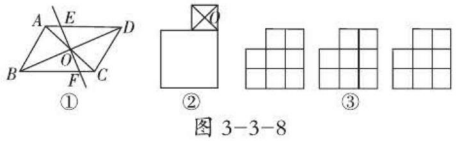


图3-3-8

解题秘方：将不规则图形分割成两个中心对称图形，用过对称中心的直线等分中心对称图形法，过这两个中心对称图形的对称中心作直线即可.

解：（1）如图3-3-9①所示.

（2）如图3-3-9②所示.

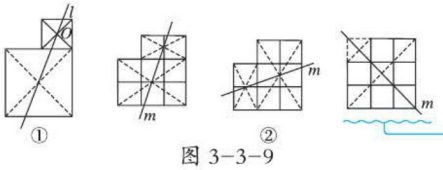


图3-3-9

挑战·高分

作图对策

画出大正方形的两条对角线，它们的交点就是大正方形的对称中心，小正方形的对称中心是点O，过这两个正方形的对称中心的直线就是所求作的直线l.

另解

因为图3-3-8③是轴对称图形，所以可以直接画出整个图形的对称轴，该直线就是所求作的直线m，如图3-3-10所示.

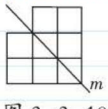


图3-3-10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用构造中心对称图形(中心对称法)解决几何问题

挑战·高分

题型1：构造中心对称图形在计算中的应用

例8 如图3-3-11，在△ABC中，$AB=5$，$AC=13$，BC边上的中线$AD=6$，求BC的长.

解题秘方：构造中心对称图形，把已知条件转化到同一个三角形中.

解：如图3-3-11，

∵D是BC的中点，

∴将△ABC绕点D顺时针旋转180°，得到△ECB，连接ED，

则易知A，D，E三点共线，且$AC=EB=13$，$AE=2AD=12$.

在△ABE中，

∵$AB^2+AE^2=5^2+12^2=169$，$EB^2=13^2=169$，

∴$AB^2+AE^2=EB^2$.

∴∠$BAE=90°$.

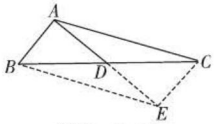


图3-3-11

在Rt△BDA中，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$，

∴$BC=2BD=2\sqrt{61}$.

技巧点拨

当多条线段或多个角不在同一个图形中时，可构造中心对称图形，利用中心对称的性质将分散的条件转化到同一个图形中，这样便于解决问题.

本题就是构造中心对称图形，把分散的已知线段转化到同一个三角形中，然后利用勾股定理进行求解.

题型2：构造中心对称图形在说明线段数量关系中的应用

例9 如图3-3-12，在△ABC中，∠$A=90°$，D为BC的中点，$DE\perp DF$，DE交AB于点E，DF交AC于点F，试探索线段BE，EF，FC之间的数量关系.

解题秘方：构造中心对称图形后，可以得到相等的线段和角，将分散的几何元素集中到一个三角形中.

解：∵D为BC的中点，

∴$BD=CD$.

作△BDE关于点D对称的图形△CDM，如图3-3-12.

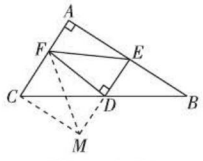


图3-3-12

由中心对称的性质可得$CM=BE$，$MD=ED$，∠$DCM=$∠B.

又∵∠$B+$∠$ACB=90°$，

∴∠$DCM+$∠$ACB=90°$，即∠$FCM=90°$.

连接FM，在△FME中，

$MD=DE$，$FD\perp ME$，∴$FM=FE$.

∵MD=DE，FD⊥ME，∴点F在线段ME的垂直平分线上.∴FM=FE.

∵在Rt△FCM中，$FC^2+CM^2=FM^2$，

∴$FC^2+BE^2=EF^2$.

解法提醒

线段BE，EF，FC位置分散，很难直接得出三者间的数量关系.题目中已知D是BC的中点，所以可作△BDE关于点D对称的图形△CDM，将BE转化成CM，再连接FM，将EF转化成FM，将三个分散的元素转化到△FCM中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用建立中心对称图形模型法巧解实际问题

挑战·高分

例10 甲、乙两人轮流往一个圆形桌面上平放同样大小的硬币，每次只能放一枚，但不允许任何两枚硬币有重叠部分，规定谁放下最后一枚，并使得对方没有再放的位置，就算谁获胜．假如甲、乙两人都是内行，试问是先放者获胜，还是后放者获胜？怎样放才能稳操胜券？

解题秘方：建立中心对称图形的模型，紧扣“中心对称图形的特性——除对称中心外，其余任何一处都可以找到关于对称中心的对称位置”解答．

解：先放者获胜．操作办法是：第一枚硬币要放在桌面中心处，然后每次都往对方所放硬币位置关于桌面中心的对称位置处放硬币．

特别提醒

对于此类放硬币的游戏，可把游戏问题转化为中心对称图形找对称点的模型来解决．只要桌面是中心对称图形，此方法就适用．所以先放者占领了对称中心后，后放者每放一处，先放者总可以找到与该位置关于对称中心对称的另一处位置．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考的重点内容，主要考查中心对称图形的识别，关于原点对称的点的坐标的变化规律，中心对称的性质的应用．近几年关于轴对称图形与中心对称图形的考题逐渐增多，题目多以选择题或解答题的形式出现，以中档题为主．

三年中考兵法

考法1 利用中心对称图形的定义进行识别

冲刺·满分

例11 [中考·徐州]如图3-3-13，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

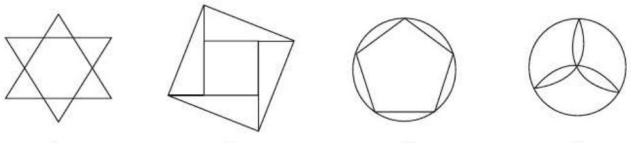


图3-3-13

试题评析：本题考查了中心对称及轴对称的知识，解题关键是掌握好中心对称图形与轴对称图形的概念．轴对称图形是要寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转180°后与原图重合．

解：A. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项正确；

B. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；

C. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

D. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误．

答案：A

方法技巧

	中心对称图形	轴对称图形
区别	关于某一点对称	关于某一条直线对称
	绕某一点旋转180°后，与原来的图形重合	沿一条直线折叠后，直线两旁的部分互相重合
联系	如果一个轴对称图形有两条相互垂直的对称轴，那么它必是中心对称图形，这两条对称轴的交点就是它的对称中心	

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用中心对称求点的坐标

例 12 [中考·内江]如图 3-3-14，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点 A 在第一象限，点 B，C 的坐标分别为 $(2,1)$，$(6,1)$，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，直线 AB 交 y 轴于点 P. 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 P 成中心对称，则点 A' 的坐标为（　　）

A. $(-4,-5)$　B. $(-5,-4)$　C. $(-3,-4)$　D. $(-4,-3)$

试题评析：本题考查了中心对称和等腰直角三角形的性质，利用待定系数法得出直线 AB 的表达式是解题的关键.

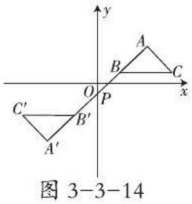


图 3-3-14

解：$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

$\because$ 点 B，C 的坐标分别为 $(2,1)$，$(6,1)$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4,3)$.

设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}4k+b=3,\\2k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=x-1$. 令 $x=0$，则 $y=-1$，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,-1)$.

又 $\because$ 点 A 与点 A' 关于点 P 中心对称，$\therefore$ 点 P 为 AA' 的中点.

设点 A' 的坐标为 (m,n)，则 $\frac{m+4}{2}=0$，$\frac{3+n}{2}=-1$，

$\therefore m=-4$，$n=-5$，$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(-4,-5)$.

答案：A

思路点拨

先求得直线 AB 的表达式为 $y=x-1$，即可得出点 P 的坐标为 $(0,-1)$，再根据点 A 与点 A′ 关于点 P 中心对称，利用中点坐标公式，即可得到点 A′ 的坐标.

考法 3 利用变换图形的作法解决网格中的作图问题

例 13 [中考·枣庄]如图 3-3-15，在 4×4 的方格纸中，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在格点上.

(1) 在图 3-3-15 ①中，画出一个与 $\triangle ABC$ 成中心对称的格点三角形；

(2) 在图 3-3-15 ②中，画出一个与 $\triangle ABC$ 成轴对称且与 $\triangle ABC$ 有公共边的格点三角形；

(3) 在图 3-3-15 ③中，画出 $\triangle ABC$ 绕着点 C 按顺时针方向旋转 $90°$ 后的三角形.

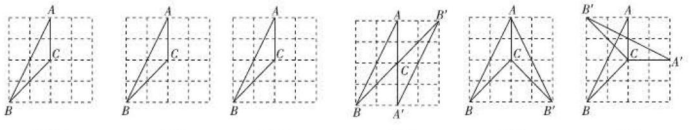


图 3-3-15

图 3-3-16

试题评析：本题考查图形变换，解题的关键是正确理解图形变换的性质，属于基础题型.

解：(1) 如图 3-3-16 ①，$\triangle A'B'C$ 为所求作的三角形（答案不唯一）.

(2) 如图 3-3-16 ②，$\triangle AB'C$ 为所求作的三角形（答案不唯一）.

(3) 如图 3-3-16 ③，$\triangle A'B'C$ 为所求作的三角形.

思路点拨

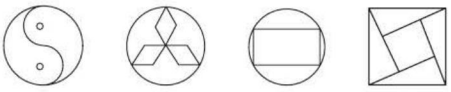
(1) 以 C 为对称中心，作点 A，B 关于 C 的对称点 A'，B'，连接 $A'C$，$B'C$，$A'B'$，即可画出三角形；或以 AB 的中点 O 为对称中心，作出点 C 关于 O 的对称点 C'，连接 BC'，AC'，即可画出三角形.

(2) 以直线 AC 为对称轴，作点 B 关于直线 AC 的对称点 B'，连接 AB'，$B'C$，即可画出三角形；或以直线 BC 为对称轴，作点 A 关于直线 BC 的对称点 A'，连接 $A'C$，$A'B$，即可画出三角形.

(3) 根据旋转的性质作点 A 和点 B 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 后的对应点 A'，B'，连接 $A'C$，$B'C$，$A'B'$，即可画出旋转后的三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·徐州]下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）



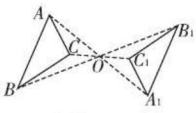
A　　B　　C　　D

2. [模拟·丹阳]如图，△ABC和△$A_1B_1C_1$关于点O成中心对称，下列说法：

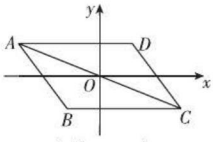
①∠BAC=∠$B_1A_1C_1$；②AC=A_1C_1；

③OA=OA_1；④△ABC与△$A_1B_1C_1$的面积相等. 其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



（第2题）



（第4题）

3. [中考·泸州]已知点A（a，1）与点B（−4，b）关于原点对称，则$a+b$的值为（　　）

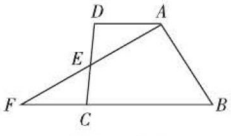
A. 5　　B. −5　　C. 3　　D. −3

4. [中考·宜昌]如图，在平面直角坐标系中，把△ABC绕原点O旋转180°得到△CDA，点A，B，C的坐标分别为（−5，2），（−2，−2），（5，−2），则点D的坐标为（　　）

A.（2，2）　　B.（2，−2）

C.（2，5）　　D.（−2，5）

5. 如图，四边形$ABCD$中，E是CD的中点，将△ADE绕点E旋转180°后得到△FCE. 如果CF恰好与BC在一条直线上，AD与BC平行吗？说明你的理由.　　【导学号：2850581】

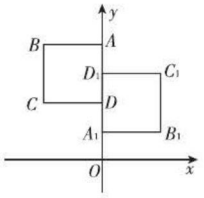


（第5题）

6. [中考·南昌]如图，正方形$ABCD$与正方形$A_1B_1C_1D_1$关于某点中心对称，已知A，D_1，D三点的坐标分别是（0，4），（0，3），（0，2）.

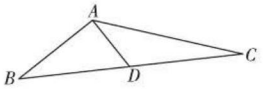
（1）求对称中心的坐标.

（2）写出顶点B，C，B_1，C_1的坐标.



（第6题）

7. 如图，已知在△ABC中，AC=5，AB=3，边BC上的中线AD=2，求△ABC的面积.



（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 简单的图案设计

核心知识

- 图案的形成
- 基本图形
- 图案的设计
- 平移、旋转、轴对称

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 图案的形成

1. 图案的形成 分析图案的形成过程时，要认真观察整个图案，从中找出基本图形，从基本图形的大小、形状、位置、距离等方面加以分析，确定由基本图形得到整个图案的变换方式.

2. 平面图案的形成依据 平移、旋转和轴对称.

3. 常见的形成图案的方式

（1）平移变换；

（2）旋转变换；

（3）轴对称变换；

（4）旋转变换与平移变换的组合；

（5）旋转变换与轴对称变换的组合；

（6）轴对称变换与平移变换的组合.

提分·必记

特别提醒

基本图形可能是一种图形，也可能是两种或更多种图形的组合图形. 一个图案中的基本图形可以有多个.

拔考向 利用图案的特征分析图案的形成方法

例 1 如图 3-4-1 ①中的图案是由六个全等的菱形拼成的，它也可以看作是以一个图案为基本图形，通过旋转得到的. 如图 3-4-1 ②的图案中，不能作为基本图形的是（　　）

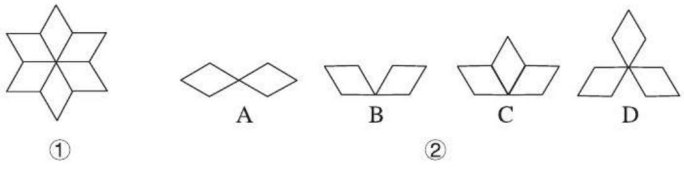


图 3-4-1

解题秘方：紧扣“能够经过全等变换形成已知图案的简单图案是基本图形”进行判断.

解：A 中的图案经过旋转可以得到整个图案，C 和 D 中的图案经过轴对称或旋转可以得到整个图案.

答案：B

提分·秘诀

解题通法

分析图案形成过程的一般步骤：

1. 确定设计图案的表达意图；
2. 分析图案所给定的基本图形；
3. 确定基本图形所进行的变换.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 图案的设计

1. 图案设计的思路

设计出基本图形后，利用平移、轴对称和旋转进行图案设计.

2. 图案设计的步骤

（1）明确设计意图；

（2）确定图案的形状和基本图形；

（3）构思图案的形成过程，即分析图案是由基本图形经过怎样的变换（平移、轴对称、旋转）得到的，再作出图案.

提分·必记

特别提醒

图案设计的"两要点"：

1. 选择基本图形（基本图形可以是一个图形，也可以是几个图形的组合）；

2. 制定出基本图形变换的具体操作过程.

技考向▶利用图案设计的方法按要求设计图案

例2 如图3-4-2，在4×3的网格中，由数量相同的白色方块与黑色方块组成一幅图案.请仿照此图案，在如图3-4-3中的4×3的网格中分别设计出符合下列要求的图案（注：a. 不得与图3-4-2中的图案相同；b. 每个图案中黑、白方块的数量要相同）.

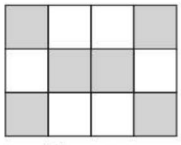
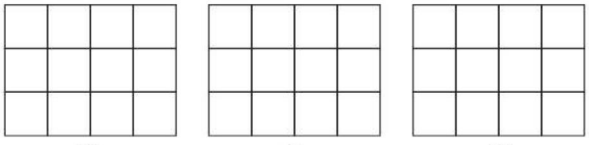


图3-4-2

（1）既是轴对称图形又是中心对称图形；

（2）是轴对称图形但不是中心对称图形；

（3）是中心对称图形但不是轴对称图形.



①　②　③

图3-4-3

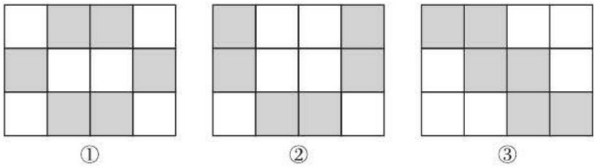
解题秘方：紧扣轴对称图形和中心对称图形的特征，按要求进行图案设计.

解：（答案不唯一）

（1）如图3-4-4①所示.

（2）如图3-4-4②所示.

（3）如图3-4-4③所示.



①　②　③

图3-4-4

提分·秘诀

特别提醒

本题考查了设计轴对称图案、中心对称图案.进行图案设计时，一定要熟悉这两种图案的特征.图案设计经常与轴对称图形、中心对称图形的知识综合考查，设计图案前一定要明确题目要求哦！

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用对称的图形特征设计符合面积要求的图案

例 3 如图 3-4-5 中有一个 4×4 的正方形网格，网格中每个小正方形的边长为 1. 请你以左上角的三角形为基本图形，通过平移、轴对称或旋转，在网格中设计一个图案，使其既是轴对称图形，又是以点 O 为对称中心的中心对称图形. 所作图案用阴影标识，且图案的面积为 4（即阴影部分的面积为 4）.

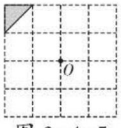


图 3-4-5

解题秘方：根据图案的面积为 4 可知，阴影部分的面积等于四个小正方形（即八个基本图形）的面积之和.

解：答案不唯一，举例如图 3-4-6 所示.

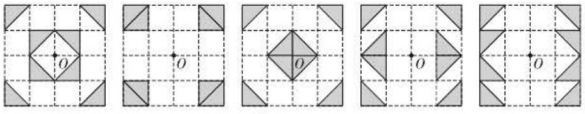


图 3-4-6

挑战·高分

解法提醒

根据题意可知，基本图形（即图 3-4-5 中的等腰直角三角形）的面积是 $\frac{1}{2}$，所以设计出的图案由八个基本图形组成. 通过平移、轴对称或旋转，设计出一个由八个基本图形构成的既是轴对称图形又是以点 O 为对称中心的中心对称图形的图案即可.

拔尖角度 2 利用旋转的图形特征作出符合要求的图案

例 4 把如图 3-4-7 中左上角的图案绕着中心 O 顺时针旋转 90°，180°，270°，画出你所得的图案.

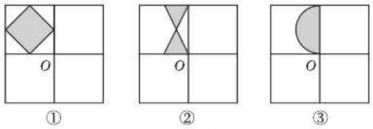


图 3-4-7

解题秘方：紧扣旋转作图的方法作图.

解：画出的图案如图 3-4-8 所示.

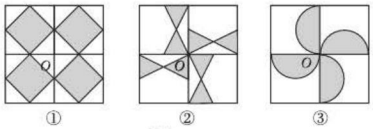


图 3-4-8

挑战·高分

作法提醒

本题是将基本图形按旋转图形的作法，分别按三个角度作旋转图形. 作旋转图形时注意旋转三要素：旋转中心、旋转方向、旋转角.

拔尖角度 3 利用图案分析其形成的过程

例 5 如图 3-4-9，找出图中各个图案的旋转中心、旋转的基本图形，并简述图案的形成过程.



图 3-4-9

挑战·高分

解法点拨

1. 分析图案所给定的“基本图形”；
2. 发现图案各部分的基本联系；
3. 确定“基本图形”所反映的变换：平移、旋转、轴对称，并进行分析.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据旋转的性质找出形成图案的基本图形.

解：图 3-4-9 ①中图案的旋转中心为图案的中心，基本图形是，将基本图形绕旋转中心顺（逆）时针旋转 120° 两次，即可得到图 3-4-9 ①中的图案.

图 3-4-9 ②中图案的旋转中心为图案的中心，基本图形是，将基本图形绕旋转中心顺（逆）时针旋转 72° 四次，即可得到图 3-4-9 ②中的图案.

图 3-4-9 ③中图案的旋转中心为图案的中心，基本图形是，将基本图形绕旋转中心顺（逆）时针旋转 60° 五次，即可得到图 3-4-9 ③中的图案.

警示误区

分析图案形成过程时，基本图形的旋转次数与该图案由多少个基本图形组成有关，旋转次数比基本图形个数少 1

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容在中考中着重考查分析图形的变换方式，或利用平移、旋转和轴对称进行简单的图案设计. 图形变换方式的分析多以选择题的形式出现；图案的设计常与四边形的知识相结合进行考查，综合性和开放性较强，有一定的难度. 考试中要注意画图的规范性.

三年中考兵法

考法 利用轴对称和旋转的作图设计图案

例 6 [中考·张家界]利用对称变换可设计出美丽图案，如图 3-4-10，在方格纸中有一个顶点都在格点上的四边形，且每个小正方形的边长都为 1，完成下列问题.

（1）图案设计：先作出四边形关于直线 l 成轴对称的图形，再将你所作的图形和原四边形绕 O 点顺时针旋转 90°.

（2）完成上述图案设计后，可知这个图案的面积等于_____.

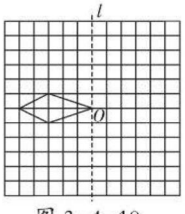


图 3-4-10

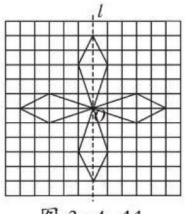


图 3-4-11

试题评析：此题主要考查了利用轴对称和旋转作图，以及求不规则图形的面积，关键是在作图时找出关键点的对称点.

解：（1）如图 3-4-11 所示.

（2）面积：$\left(5\times2-2\times1\times\frac{1}{2}\times2-3\times1\times\frac{1}{2}\times2\right)\times4=20$.

答案：20

冲刺·满分

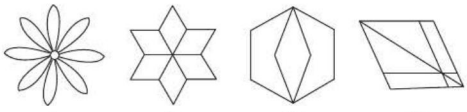
解法提醒

本例第（2）问也可用**分割法**求出其中一个小四边形的面积，再乘 4，即 $\left(2\times2\times\frac{1}{2}+2\times3\times\frac{1}{2}\right)\times4=20$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见279页

1. 下列四个图案中，不能由基本图形旋转得到的是（　　）

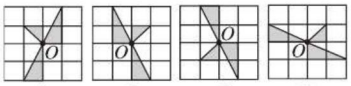


A　　B　　C　　D

2. 将下图方格纸中的图形绕 O 点顺时针旋转 90° 后得到的图形是（　　）

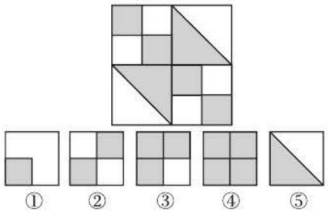


（第2题）



A　　B　　C　　D

3. 下图的图案是由五种基本图形中的两种拼接而成的，这两种基本图形是（　　）

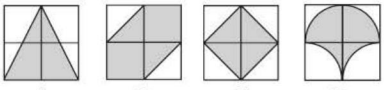


①　②　③　④　⑤

（第3题）

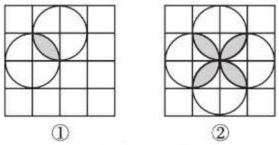
A. ①⑤　　B. ②③　　C. ②④　　D. ②⑤

4. 某正方形园地是由边长为 1 的四个小正方形组成的，现要在园地上建一个花坛（阴影部分），使花坛面积是园地面积的一半，以下图中设计不符合要求的是（　　）



A　　B　　C　　D

5. 如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长都为 1.　　【导学号：2850581】



①　②

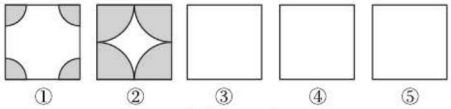
（第5题）

（1）如图①，两个半径为 1 的圆相交，求阴影部分的面积；

（2）图②是以图①中的图形为基本图形，通过怎样的变换得到的?

6. 为创建绿色校园，学校决定在一块正方形的空地上种植花草，现向学生征集设计图案．图案要求只能用圆弧在正方形内加以设计，使正方形和所画的圆弧构成的图案既是轴对称图形又是中心对称图形，种植花草部分用阴影表示．请你在图③④⑤中画出三种不同的设计图案．

提示：在两个图案中，只有半径变化而圆心不变的图案属于同一种，例如，图①②只能算一种．



①　②　③　④　⑤

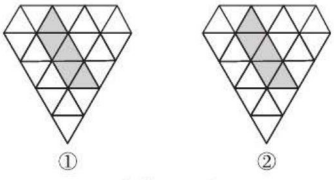
（第6题）

7.［中考·宁波］图①、图②都是由边长为 1 的小等边三角形构成的网格，每个网格图中有 5 个小等边三角形已涂上阴影．请在余下的空白小等边三角形中，按下列要求选取一个涂上阴影：

（1）使得 6 个阴影小等边三角形组成一个轴对称图形；

（2）使得 6 个阴影小等边三角形组成一个中心对称图形.

（请将两个小题依次作答在图①、图②中，均只需画出符合条件的一种情形）



①　②

（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

利用图形的旋转不变性解决几何图形问题

荣老师告诉你 我们知道，旋转和轴对称、平移一样，也是图形的一种基本变换，通过图形的旋转变换，可以将一些比较复杂的问题变为较简单的平面图形问题，再运用旋转的知识，使问题获得解决.

方法一 利用图形的旋转将零散的线段聚在一起（化分散为集中）

类型1：求角的度数

例1： 如图1，在等边三角形ABC内有一点P，$PA=10$，$PB=8$，$PC=6$，求$\angle BPC$的度数.

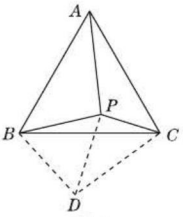


图1

解题秘方： 利用旋转将PA，PB，PC这三条线段转移到同一个三角形中，可证得此三角形为直角三角形，然后将$\angle BPC$转化为两个特殊角的和，求出度数.

解： $\because \triangle ABC$为等边三角形，

$\therefore BA=BC$，$\angle ABC=60°$.

把$\triangle BPA$绕点B顺时针旋转$60°$得到$\triangle BDC$，连接DP，如图1所示.

$\therefore BP=BD=8$，$\angle PBD=60°$，$DC=AP=10$.

$\therefore \triangle PBD$为等边三角形.

$\therefore \angle BPD=60°$，$PD=PB=8$.

$\because$在$\triangle PDC$中，$PC=6$，$PD=8$，$DC=10$，

$\therefore PC^2+PD^2=DC^2$.

$\therefore \triangle DCP$为直角三角形，且$\angle DPC=90°$.

$\therefore \angle BPC=60°+90°=150°$.

方法点拨： 图形的旋转是全等变换，根据全等三角形的性质——对应边相等，可以将一些数量上有明显关系但位置上较零散的线段聚在一起，这对解题起到至关重要的作用.

类型2：求线段长度

例2： 如图2，P是正方形$ABCD$内一点，点P到正方形的三个顶点A，B，C的距离分别为$PA=1$，$PB=2$，$PC=3$. 求正方形$ABCD$的边长.

解题秘方： PA，PB，PC这三条已知线段处在分散的位置，现有图形中的三角形却不是直角三角形，而要想由已知线段求未知线段，唯有将其转化到直角三角形中才能达到目的，而旋转可帮我们实现这一目标.

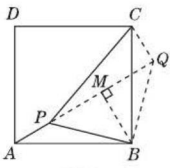


图2

解： $\because$四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore BA=BC$，$\angle ABC=90°$.

把$\triangle ABP$绕着点B按顺时针方向旋转$90°$至$\triangle CBQ$的位置，连接PQ，如图2所示.

$\therefore BQ=BP=2$，$CQ=AP=1$，$\angle APB=\angle CQB$，$\angle PBQ=90°$.

$\therefore \angle PQB=\angle QPB=45°$，$PQ=2\sqrt{2}$.

又$\because CQ=1$，$PC=3$，$\therefore PC^2=PQ^2+CQ^2$.

$\therefore \angle PQC=90°$. $\therefore \angle CQB=135°=\angle APB$.

又$\because \angle QPB=45°$，$\therefore \angle APB+\angle QPB=180°$.

$\therefore A$，P，Q三点共线.

如图2，过点B作$BM\perp PQ$，垂足为点M.

$\because \triangle BPQ$是等腰直角三角形，

$\therefore PM=\frac{1}{2}PQ=\sqrt{2}=BM$.

$\therefore AM=PA+PM=1+\sqrt{2}$.

$\therefore AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$，

即正方形$ABCD$的边长为$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

方法点拨： 通过图形的旋转变换，可以把分散的条件重新组合，转化成规则的等腰直角三角形或直角三角形，从而巧妙地使问题得到解决. 这种技巧在正方形、正三角形中经常使用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二 利用图形的旋转将零散的图形拼成规则的图形（化不规则为规则）

例 3： 如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=60°$，$\angle B+\angle ADC=180°$，对角线 $AC=m$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

解题秘方： 此四边形不是特殊的四边形，要求面积通常需要将图形转化成规则的图形求解.

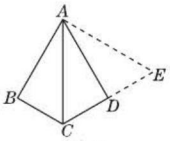


图 3

解： 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle ADE$，如图 3 所示.

$\because AB=AD$，

$\therefore$ 旋转后 AB 与 AD 重合，$AC=AE$，$\angle B=\angle ADE$，$\angle BAC=\angle DAE$.

$\because \angle B+\angle ADC=180°$，

$\therefore \angle ADE+\angle ADC=180°$.

$\therefore$ 点 C，D，E 在同一条直线上.

$\because \angle BAD=60°$，$\angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore \angle CAE=60°$.

又 $\because AE=AC$，

$\therefore \triangle AEC$ 是等边三角形.

由 $AC=m$，利用勾股定理可求得等边三角形 AEC 的高 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

$\therefore S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle AEC}=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$.

方法点拨： 图形的旋转是全等变换，因而两个图形全等，面积相等，故可利用旋转将不规则的图形拼成规则的图形，以便于求图形的面积.

方法三 利用旋转的特征探究结论的不变性和可变性

例 4： 如图 4，已知 Rt $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle C=90°$，D 为 AB 边的中点，$\angle EDF=90°$，$\angle EDF$ 绕 D 点旋转，它的两边分别交 AC，CB（或它们的延长线）于 E，F. 当 $\angle EDF$ 绕 D 点旋转到 $DE\perp AC$ 于 E 时（如图①），易证 $S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

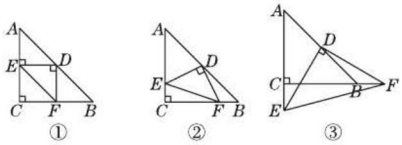


图 4

当 $\angle EDF$ 绕 D 点旋转到 DE 和 AC 不垂直时，在图②和图③这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，$S_{\triangle DEF}$，$S_{\triangle CEF}$，$S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明.

解题秘方： 因为图①中在 $DE\perp AC$，$DF\perp BC$ 时，结论成立，所以图②结论的探究，也要注重这一条件，故可过点 D 分别作 AC，BC 的垂线.

解： 图②成立；图③不成立.

如图 5，过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M，$DN\perp BC$ 于点 N，则 $\angle DME=\angle DNF=\angle MDN=90°$.

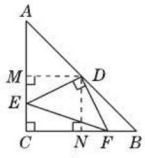


图 5

又由题意知 $\angle A=\angle B=45°$，$AD=BD$，

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle BDN$. $\therefore DM=DN$.

由题意易证 $\angle MDE=\angle NDF$，

故有 $\triangle DME\cong\triangle DNF$.

$\therefore S_{\triangle DME}=S_{\triangle DNF}$.

$\therefore S_{四边形DMCN}=S_{四边形DECF}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}$.

由题意知 $S_{四边形DMCN}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

图③不成立，$S_{\triangle DEF}$，$S_{\triangle CEF}$，$S_{\triangle ABC}$ 的关系是：$S_{\triangle DEF}-S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

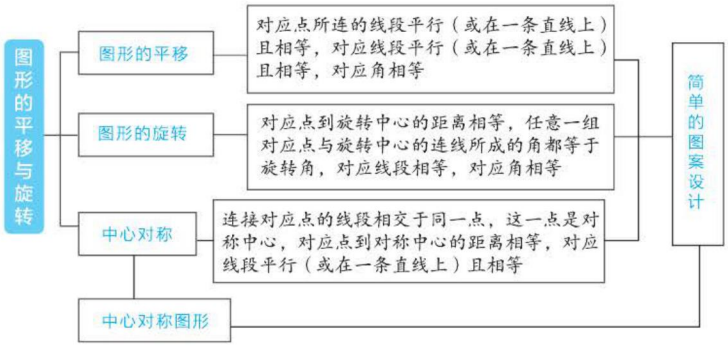
方法点拨： 通过旋转图形改变图形的位置来探究解决是否成立问题时，动态中无法判断结论是否成立，可以通过寻找运动范围的某一固定时刻，探究其结论的正确性，这就是“动中求静”的思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 图形的平行移动简称平移，平移由平移的方向和平移的距离决定．平移前后的两个图形，对应边平行（或在一条直线上）且相等，对应角相等．
2. **点的平移与其坐标变化的规律是：**上加下减，右加左减．即向上平移 a（$a>0$）个单位长度，纵坐标加 a，向下平移 a 个单位长度，纵坐标减 a；向右平移 a 个单位长度，横坐标加 a，向左平移 a 个单位长度，横坐标减 a.
3. 图形的旋转属于全等变换，即旋转前后的两个图形全等，也就是对应边和对应角均相等．对应点与旋转中心所连线段的夹角为旋转角，旋转角都相等．
4. 中心对称与中心对称图形的共同特征是绕某个点旋转 $180°$ 后重合，只不过中心对称是一个图形与另一个图形重合，而中心对称图形是与自身重合．
5. **关于原点对称的两个点的坐标的关系是：**横坐标与纵坐标都互为相反数．

知识方法专题

知识必学

专题一 平移

链接中考» 平移是一种图形变换的方式，应熟练掌握平移的条件，理解平移的特征：平移前后图形的大小和形状不发生变化．平移也是近几年中考的热点，多以选择题、填空题或作为综合题中的一个小题形式出现．主要考查是否能判断出平移的基本图形、平移后形成的图形，是否能够作出平移后的图形，利用平移的性质计算角度、面积或长度．

例 1 如图 3-1，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=33°$，将△ABC 向右平移得到△DEF.

（1）试求出 $\angle E$ 的度数；

（2）若 $AE=9$ cm，$DB=2$ cm，求 BE 的长度．

解题秘方：紧扣平移的性质，找出未知角和线段与已知角和线段之间的关系．

解：（1）∵$\angle ACB=90°$，$\angle A=33°$，

∴$\angle ABC=90°-33°=57°$．

∵△ABC 向右平移得到△DEF，

∴$\angle E=\angle ABC=57°$．

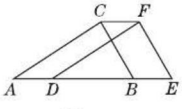


图 3-1

（2）∵△ABC 向右平移得到△DEF，∴$AB=DE$.

∴$AB-BD=DE-BD$，即 $AD=BE$.

∵$AD+BD+BE=AE$，∴$BE+2+BE=9$.

∴$BE=3.5$ cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 旋转

链接中考» 旋转的性质特征主要是全等，所以在考查时往往与全等联系比较紧密，有直接考查的，以填空或选择题形式出现，也有渗透到其他知识点中，以综合题的形式考查的.

例2 [中考·菏泽]如图 3-2，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=\sqrt{3}x$ 经过点 A，作 $AB\perp x$ 轴于点 B，将 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle CBD$. 若点 B 的坐标为（2，0），则点 C 的坐标为（　　）

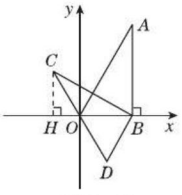


图 3-2

A. $(-1,\sqrt{3})$　　B. $(-2,\sqrt{3})$

C. $(-\sqrt{3},1)$　　D. $(-\sqrt{3},2)$

解：过点 C 作 $CH\perp x$ 轴于 H，如图 3-2.

∵点 B 的坐标为（2，0），$AB\perp x$ 轴于点 B，

∴点 A 的横坐标为 2.

把 $x=2$ 代入 $y=\sqrt{3}x$，得 $y=2\sqrt{3}$，

∴点 A 的坐标为 $(2,2\sqrt{3})$.

∵ $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle CBD$，∴ $BC=BA=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=60°$.

∴ $\angle CBH=30°$.

∴在 Rt $\triangle CBH$ 中，$CH=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$.

由勾股定理得 $BH=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$.

∴ $OH=BH-OB=3-2=1$.

∴点 C 的坐标为 $(-1,\sqrt{3})$.

答案：A

方法点拨：对于旋转相关问题，要始终注意旋转的性质.（1）旋转不改变图形的大小与形状，只改变图形的位置，也就是旋转前后图形全等；（2）对应点与旋转中心所连线段的夹角为旋转角，旋转角都相等.

专题三 轴对称图形及中心对称图形的识别

链接中考» 轴对称图形与中心对称图形的识别是中考的一个热点. 考查时常将生活中的热点图案、数学中的基本图形，以及文字、字母等作为背景材料，属于简单题，以选择题为主.

例3 [中考·济南]如图 3-3 所示的图标中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

图 3-3

解：A 选项是轴对称图形；B 选项是中心对称图形；D 选项既不是轴对称图形，也不是中心对称图形.

答案：C

技巧点拨：判断图形是否为中心对称图形时，可以用倒置观察法看图形是否保持不变；判断图形是否为轴对称图形时，可以用反面观察法看图形是否保持不变.

专题四 平面直角坐标系中的图形变换

链接中考» 在平面直角坐标系中，图形的变换关键是图形中顶点的变换. 根据不同变换的点的坐标的变化规律，可以作出变换后的图形. 求变换后点的坐标一般以选择题形式出现，而在平面直角坐标系中进行图形的变换操作则以解答题的形式考查.

例4 [中考·眉山]在边长为 1 个单位长度的正方形网格中建立如图 3-4 所示的平面直角坐标系，$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，请解答下列问题：

（1）作出 $\triangle ABC$ 向左平移 4 个单位长度后得到的图形 $\triangle A_1B_1C_1$，并写出点 C_1 的坐标；

（2）作出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 对称的图形 $\triangle A_2B_2C_2$，并写出点 C_2 的坐标；

（3）已知 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的图形 $\triangle A_3B_3C_3$ 的顶点 A_3 的坐标为 $(-4,-2)$，请直接写出直线 l 的函数表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

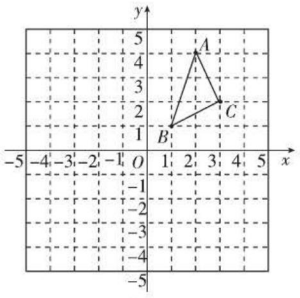


图 3-4

解：（1）△$A_1B_1C_1$ 如图 3-5 所示，点 C_1 的坐标为（−1，2）.

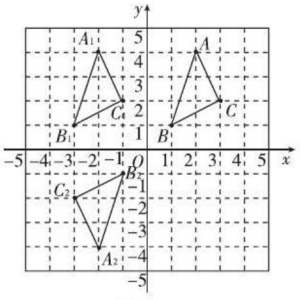


图 3-5

（2）△$A_2B_2C_2$ 如图 3-5 所示，点 C_2 的坐标为（−3，−2）.

（3）直线 l 的函数表达式为 $y=-x$.

方法点拨：平移、轴对称、旋转三种图形变换都不改变图形的形状和大小，只改变图形的位置；求平面直角坐标系中变化后的点的坐标，要注意灵活运用点与坐标轴的关系寻找解决办法.

方法必会

专题五 转化思想

专题解读» 转化思想是解决数学问题的基本思想，利用转化思想可将复杂问题转化为简单问题，将未知转化为已知，从而寻求解决问题的方法. 转化思想在本章中主要体现在利用平移或旋转的性质将题目中所给的条件集中到某个图形中，或者将所求线段或角转化为与已知条件相关的线段或角，从而解决问题.

例 5 如图 3-6 是某公园里一处长方形风景欣赏区 $ABCD$，长 AB=50 m，宽 BC=25 m. 为方便游人观赏，公园特意修建了如图所示的小路（图中非阴影部分）. 小路的宽均为 1 m，那么小明沿着小路的中间，从出口 A 到出口 B 所走的路线（图中虚线）长为（　　）

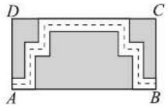


图 3-6

A.100 m　　B.99 m　　C.98 m　　D.74 m

解题秘方：紧扣平移的特征，将零散的线段转化为长方形的长或宽进行计算.

解：根据平移不改变线段的长度可知，小明所走路线的横向距离等于 AB，纵向距离等于（AD−1）×2，所以小明从出口 A 到出口 B 所走的路线长为 50+（25−1）×2=98（m）.

答案：C

方法点拨：观察图形的特点，利用平移的性质进行转化，化不规则图形为规则图形进行求解.

专题六 数形结合思想

专题解读» 运用数形结合思想，可以将“数”和“形”结合起来，将抽象的数学问题直观化. 求解旋转与平面直角坐标系结合的问题时，常在平面直角坐标系中把旋转前后的图形画出来，这样便于集中条件、厘清思路.

例 6 如图 3-7，△AOB 为等腰三角形，顶点 A 的坐标为（2，$\sqrt{5}$），底边 OB 在 x 轴上. 将△AOB 绕点 B 顺时针旋转一定角度后得到△$A'O'B$，点 A 的对应点 A' 在 x 轴上，求点 O' 的坐标.

解：如图 3-7，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C，过点 O' 作 $O'D\perp A'B$ 于点 D.

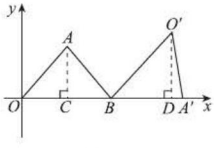


图 3-7

∵点 A 的坐标为（2，$\sqrt{5}$），

∴ OC=2，$AC=\sqrt{5}$.

由勾股定理，得 $OA=\sqrt{OC^2+AC^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵△AOB为等腰三角形，OB是底边，

∴ $OB=2OC=2\times2=4$.

由旋转的性质，得$O'B=OB=4$，$A'B=AB=OA=3$.

∵ $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle O'A'B}$，∴ $OB\cdot AC=A'B\cdot O'D$.

∴ $O'D=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$.

∴ $BD=\sqrt{O'B^2-O'D^2}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{8}{3}$.

∴ $OD=OB+BD=4+\dfrac{8}{3}=\dfrac{20}{3}$.

∴点O'的坐标为$\left(\dfrac{20}{3},\ \dfrac{4\sqrt{5}}{3}\right)$.

方法点拨：求解平面直角坐标系中关于旋转的综合题时，需要结合几何图形，运用数形结合的思想．解决此类问题要仔细研究题目中的已知条件及图形特征，作出相关的辅助线，再结合旋转以及勾股定理等知识解题．这样可以使复杂问题变得简单，达到事半功倍的效果．

专题七 分类讨论思想

专题解读» 在分析图案的形成过程和进行图案设计时，经常会遇到多解问题，这时就需要利用分类讨论思想分情况求解．在解决旋转变换中求旋转角的问题时，也经常需要用到分类讨论思想．

例7 如图3-8，在△ABC中，∠ACB=90°，∠BAC=30°，将△ABC绕点C按逆时针方向旋转角α（0° < α < 90°）得到△DEC．设CD交AB于点F，连接AD，当旋转角α的度数为_____时，△ADF是等腰三角形．

解：∵ △ABC绕点C按逆时针方向旋转角α（0° < α < 90°）得到△DEC，∴ ∠$DCA=\alpha$，

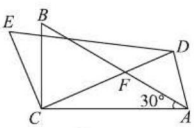


图3-8

$CD=CA$. ∴ ∠CDA=∠CAD=$\dfrac{1}{2}(180°-\alpha)$=$90°-\dfrac{1}{2}\alpha$. 由三角形外角的性质，得∠$DFA$=30°+$\alpha$.

当△ADF是等腰三角形时，分情况讨论．

① 若$FD=FA$，则∠FDA=∠FAD，而∠CDA=∠CAD，∴不合题意，舍去；

②若$AF=AD$，则∠ADF=∠AFD，

∴ $90°-\dfrac{1}{2}\alpha=30°+\alpha$，解得$\alpha=40°$；

③若$DF=DA$，则∠DFA=∠DAF，

∴ $30°+\alpha=90°-\dfrac{1}{2}\alpha-30°$，解得$\alpha=20°$．

综上所述，当$\alpha=40°$或20°时，△ADF是等腰三角形．

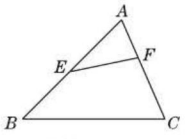
答案：40°或20°

方法点拨：在旋转过程中，要注意分析△ADF是等腰三角形的所有情况，然后求出各种情况下旋转角α的度数．

好题必解 ☞答案见279页

题型1：巧用平移的性质比较线段的大小

1. 如图，在△ABC中，E，F分别为AB，AC上的点，且$BE=CF$，请判断FE与BC的大小关系，并说明理由．



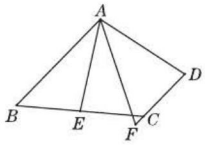
（第1题）

题型2：巧用中心对称构造全等三角形证线段和差

2. 如图，在四边形$ABCD$中，AB // DC，E为BC边的中点，∠BAE=∠EAF，AF与DC的延长线相交于点F.

（1）作出△ABE关于点E成中心对称的图形；

（2）探究线段AB与AF，CF之间的数量关系，并证明你的结论．



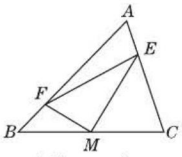
（第2题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：巧用旋转化分散为集中证线段不等关系

3. 如图，在△ABC中，M是BC的中点，E，F分别在AC，AB上，且$ME \perp MF$.

求证：$EF<BF+CE$.



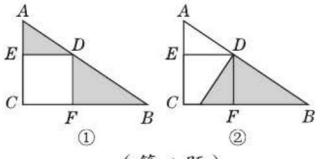
（第 3 题）

题型 4：巧用旋转化零为整求阴影部分面积

4. 如图，在Rt△ABC中，四边形$DECF$是正方形.

（1）请简述图①经过怎样的变换形成图②；

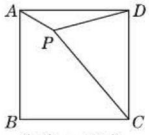
（2）当$AD=5$，$BD=6$时，设△ADE，△BDF的面积分别为S_1，S_2，求S_1+S_2.



（第 4 题）

题型 5：巧用旋转化整为零求角的度数

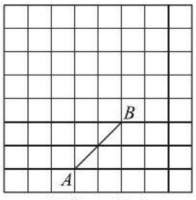
5. 如图，在正方形$ABCD$内有一点P，$PA=1$，$PD=2$，$PC=3$，求∠APD的度数.



（第 5 题）

题型 6：巧用图形特点进行平移、旋转作图

6.[**中考 · 淮安**]如图，方格纸上每个小正方形的边长均为1个单位长度，点A，B都在格点上.（两条网格线的交点叫格点）



（第 6 题）

（1）将线段AB向上平移两个单位长度，点A的对应点为点A_1，点B的对应点为点B_1，请画出平移后的线段A_1B_1；

（2）将线段A_1B_1绕点A_1按逆时针方向旋转90°，点B_1的对应点为点B_2，请画出旋转后的线段A_1B_2；

（3）连接AB_2，BB_2，求△ABB_2的面积.

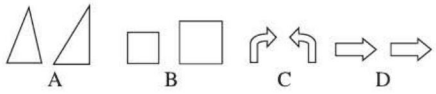
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章测试卷 ☞答案见280页

（100分　60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下面的每组图形中，左图平移后可以得到右图的是（　　）

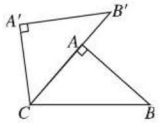


2. 下列标志既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

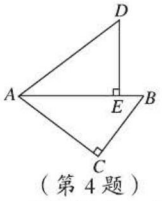


3. 如图，在Rt△ABC中，∠BAC=90°．将Rt△ABC绕点C逆时针旋转48°得到Rt△$A'B'C$，点A在边$B'C$上，则∠B'的大小为（　　）

A.42°　　B.48°　　C.52°　　D.58°



（第3题）



（第4题）

4. 如图，在△ABC中，∠C=90°，AC=4，BC=3．将△ABC绕点A逆时针旋转，使点C落在线段AB上的点E处，点B落在点D处，则B，D两点间的距离为（　　）

A.$\sqrt{10}$　　B.$2\sqrt{2}$　　C.3　　D.$2\sqrt{5}$

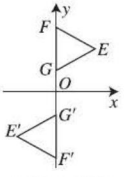
5. 如图，已知△EFG与△$E'F'G'$均为等边三角形，且E，E'的坐标分别为$(\sqrt{3},2)$，$(-\sqrt{3},-2)$．通过对图形的观察，下列说法正确的是（　　）

A. △EFG与△$E'F'G'$关于y轴对称

B. △EFG与△$E'F'G'$关于x轴对称

C. △EFG与△$E'F'G'$关于原点O对称

D. 以F，E'，F'，E为顶点的四边形是轴对称图形



（第5题）

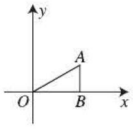
6. 如图，在△ABO中，$AB\perp OB$，$OB=\sqrt{3}$，AB=1．把△ABO绕点O旋转150°后得到△A_1B_1O，则点A_1的坐标为（　　）

A.$(-1,-\sqrt{3})$

B.$(-1,-\sqrt{3})$或$(-2,0)$

C.$(-\sqrt{3},-1)$或$(0,-2)$

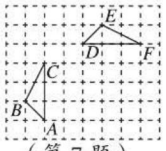
D.$(-\sqrt{3},-1)$



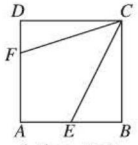
（第6题）

7. 如图，在方格纸上，△DEF是由△ABC绕定点P顺时针旋转得到的．如果用(2，1)表示方格纸上点A的位置，(1，2)表示点B的位置，那么点P的位置为（　　）

A.(5，2)　B.(2，5)　C.(2，1)　D.(1，2)



（第7题）



（第8题）

8. 如图，正方形$ABCD$的边长为6，点E，F分别在AB，AD上．若$CE=3\sqrt{5}$，且∠ECF=45°，则CF的长为（　　）

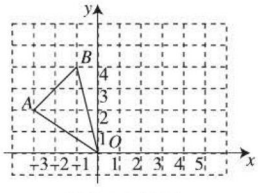
A.$2\sqrt{10}$　B.$3\sqrt{5}$　C.$\frac{5}{3}\sqrt{10}$　D.$\frac{10}{3}\sqrt{5}$

二、填空题（每题4分，共16分）

9. 如图所示的图案绕旋转中心旋转后能够与自身重合，那么它至少旋转_____．



（第9题）



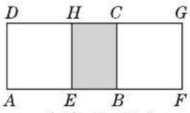
（第10题）

10. 在方格纸上建立如图所示的平面直角坐标系，将△ABO绕点O顺时针旋转90°，得到△$A'B'O$，则点A的对应点A'的坐标为_____．

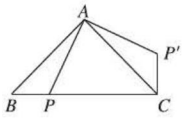
11. 如图，在长方形$ABCD$中，AB=10 cm，BC=6 cm，将长方形$ABCD$沿着AB方向平

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

移_____，才能使平移后的长方形 $EFGH$ 与原来的长方形 $ABCD$ 重叠部分（即阴影部分）的面积为 24 cm^2.



（第 11 题）



（第 12 题）

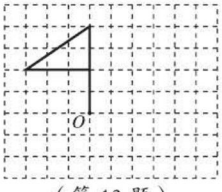
12. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，点 P 是斜边 BC 上一点，且 $AB=4$，$BP=\sqrt{2}$. 现将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转后，能与 $\triangle ACP'$ 重合，则 $\angle BCP'=$_____，$AP=$_____.

三、解答题（共 52 分）

13.（12 分）如图，在方格纸上按以下要求作图，不用写作法.

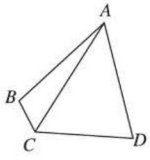
（1）作出“小旗子”向右平移 6 格后的图案；

（2）作出“小旗子”绕 O 点按逆时针方向旋转 90° 后的图案.



（第 13 题）

14.（12 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$，$AB=AD$，$AC=1$，$\angle ACD=60°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.



（第 14 题）

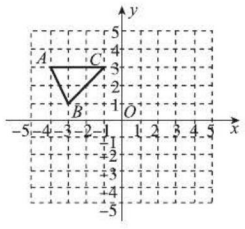
15.（14 分）如图，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-4,3)$，$B(-3,1)$，$C(-1,3)$.

（1）请按下列要求画图：

①将 $\triangle ABC$ 先向右平移 4 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，得到 $\triangle A_1B_1C_1$，画出 $\triangle A_1B_1C_1$；

②$\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 关于原点 O 成中心对称，画出 $\triangle A_2B_2C_2$.

（2）若（1）中所得的 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 关于点 M 成中心对称，请直接写出对称中心点 M 的坐标.

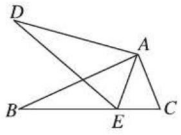


（第 15 题）

16.（14 分）如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，点 E 在 BC 边上，$\angle BAC=\angle DAE$，$\angle B=\angle D$，$AB=AD$.

（1）求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$.

（2）如果 $\angle AEC=70°$，将 $\triangle ADE$ 绕着点 A 旋转一个锐角后与 $\triangle ABC$ 重合，求这个旋转角的大小.



（第 16 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



整式恒等变形的再认识

整式恒等变形的再认识

第四章 因式分解









核心考点

你将见到的

- 因式分解
- 用提公因式法分解因式
- 用公式法分解因式

核心方法

我们为你提供的

- 类比法
- 分组分解法
- 数形结合思想
- 从特殊到一般的思想
- 整体思想
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 因式分解

核心知识
- 因式分解的定义
- 因式分解与整式乘法的关系

知识链接

因式分解 ⟷（互逆变形 / 检验）整式乘法

点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 因式分解

1. 定义 把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形叫做因式分解. 因式分解也可称为分解因式.

2. 整式乘法与因式分解的关系

（1）整式乘法与因式分解，一个是积化和差，另一个是和差化积，是两种互逆的变形.

即：多项式 $\underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}}$ 整式的积.

（2）可以利用整式乘法检验因式分解结果的正确性.

提分·必记

特别解读

1. 因式分解的对象是多项式，结果是整式的积.
2. 因式分解是恒等变形，形式改变但值不改变.
3. 因式分解必须分解到每个多项式的因式不能再分解为止.

拨考向▶ 利用因式分解的定义解决整式变形问题

题型 1：因式分解的定义在识别因式分解中的应用

例 1 下列变形中属于因式分解的有（　　）

① $8xy^3=2xy\cdot 4y^2$；② $x^2+1=x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$；

③ $(x+5)(x-5)=x^2-25$；④ $x^2+2x-3=x(x+2)-3$；

⑤ $x^2y+xy^2=xy(x+y)$.

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

解题秘方：紧扣因式分解的定义进行识别.

解：①中等号的左边不是多项式，故①不是因式分解；

②中 $\dfrac{1}{x}$ 不是整式，故②不是因式分解；

③是整式的乘法，不是因式分解；

④中等号右边不是积的形式，故④不是因式分解；

⑤符合因式分解的定义，是因式分解.

答案：D

提分·秘诀

解法提醒

识别因式分解的两个关键词：

1.“多项式”说明等式的左边是多项式，即分解的对象是多项式；

2.“整式的积”说明右边的结果是整式的积.

一句话：因式分解是整式的和差化积的变化过程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：因式分解与整式乘法之间的关系在判断因式分解中的应用

例 2 ［中考·毕节］下列因式分解正确的是（　　）

A. $x^3y-2x^2y+xy=xy(x^2-2x)$　　B. $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

C. $x^2-2x+4=(x-2)^2$　　D. $4x^2-y^2=(4x+y)(4x-y)$

解题秘方：根据因式分解与整式乘法之间的关系进行判断.

解：利用整式的乘法法则将各选项中等式的右边展开，与等式的左边相比较，左右两边相同的只有选项 B.

答案：B

思路点拨

还没有学习因式分解的方法时，可以通过逆向变形（整式乘法）检验因式分解是否正确.

题型 3：因式分解与整式乘法之间的关系在求字母的值中的应用

例 3 仔细阅读下面的例题，解答问题.

例题：已知二次三项式 x^2-4x+m 分解因式后有一个因式是 $x+3$，求其另一个因式及 m 的值.

解：设另一个因式为 $x+n$，则 $x^2-4x+m=(x+3)(x+n)$，即 $x^2-4x+m=x^2+(n+3)x+3n$.

$\therefore \begin{cases} n+3=-4, \\ m=3n. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} n=-7, \\ m=-21. \end{cases}$

$\therefore$ 另一个因式为 $x-7$，m 的值为 -21.

问题：

（1）若二次三项式 x^2-5x+6 可分解为 $(x-2)(x+a)$，则 $a=$_____；

（2）若二次三项式 $2x^2+bx-5$ 可分解为 $(2x-1)(x+5)$，则 $b=$_____；

（3）已知二次三项式 $2x^2+5x-k$ 分解因式后有一个因式为 $2x-3$，求其另一个因式及 k 的值.

解题秘方：利用因式分解与整式乘法是互逆变形，可以将因式分解的结果利用整式乘法算出多项式，并与已知多项式比较解决问题.

解：（1）-3　（2）9

（3）设另一个因式为 $x+q$，则 $2x^2+5x-k=(2x-3)(x+q)$，即 $2x^2+5x-k=2x^2+(2q-3)x-3q$.

$\therefore \begin{cases} 2q-3=5, \\ k=3q. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} q=4, \\ k=12. \end{cases}$

$\therefore$ 另一个因式为 $x+4$，k 的值为 12.

教你一招：因式分解与整式乘法是过程相反的恒等变形，将因式分解的结果利用整式乘法算出多项式，与已知多项式相比较，对应项的系数分别相等，列出方程（组）即可求出字母的值.

另解

因式分解是恒等变形，利用恒等式的性质还有另一技巧解法.

恒等式的性质：等式中的字母无论取何值，等式都成立.

如 $x^2-4x+m=(x+3)\cdot(x+n)$，

将 $x=-3$ 代入左右两边得

$9+12+m=0$，

解得 $m=-21$.

同样可利用此方法解决（2）（3）两题，同学们可以自己试一试.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用逆向思维解决因式分解问题

例 4 已知多项式 x^4+2x^3-x+m 能因式分解，且分解后的一个多项式为 $x+1$.

（1）当 $x=-1$ 时，求多项式 x^4+2x^3-x+m 的值；

（2）求 m 的值.

解题秘方：紧扣逆向思维过程，将因式分解的结果写成整式乘积的形式，利用因式的值求多项式的值.

解：（1）因为 $x+1$ 是 x^4+2x^3-x+m 的一个因式，可设另一个因式为 A，则 $x^4+2x^3-x+m=A\cdot(x+1)$. 当 $x=-1$ 时，$x+1=0$，所以多项式 x^4+2x^3-x+m 的值是 0.

（2）当 $x=-1$ 时，$x^4+2x^3-x+m=0$. 把 $x=-1$ 代入 $x^4+2x^3-x+m=0$，得 $(-1)^4+2\times(-1)^3-(-1)+m=0$，解得 $m=0$.

挑战·高分

方法点拨

已知一个多项式的一个因式，可以采取设元的方法，将多项式表示为两个整式乘积的形式，这样便于问题的解决.

拔尖角度 2 利用面积法探究多项式的因式分解

例 5 如图 4-1-1，用一个边长为 a 的小正方形和两个长、宽分别为 a，b 的小长方形拼成一个大长方形. 利用大长方形 $ABCD$ 面积的不同求法，请你写出一个有关多项式的因式分解的等式：_____.

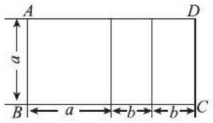


图 4-1-1

解题秘方：紧扣长方形 $ABCD$ 面积的两种表示方式，建立等量关系，揭示因式分解的过程.

解：因为大长方形 $ABCD$ 由一个边长为 a 的小正方形和两个长、宽分别为 a，b 的小长方形拼成，所以大长方形 $ABCD$ 的面积可表示为 a^2+2ab. 又因为大长方形 $ABCD$ 的长为 $a+2b$，宽为 a，所以大长方形 $ABCD$ 的面积又可表示为 $a(a+2b)$. 所以 $a^2+2ab=a(a+2b)$.

答案：$a^2+2ab=a(a+2b)$

挑战·高分

技巧点拨

表示图形面积的方法有两种：(1)直接表示，即直接运用所求图形的面积公式；(2)间接表示，即通过图形面积的加减表示所求图形的面积. 利用同一图形面积的不同表达形式，可推导出有关多项式的因式分解的恒等式，这是因式分解的几何意义.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节知识在中考中的主要考点是因式分解的定义，常与整式运算放在一起考查，多以选择题、填空题的形式出现，分值一般在 3 分左右. 熟练掌握因式分解的定义是解决此类问题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

思路点拨

对因式分解变形的识别，关键要把握因式分解定义中的几个关键词：
1. 等式左边是一个多项式.
2. 等式右边是几个整式的积.
3. 因式分解的结果要彻底.

考法 利用因式分解的定义进行辨析

例6 [中考·常德]下列各式由左到右的变形中，属于分解因式的是（　　）

A. $a(m+n)=am+an$　　B. $a^2-b^2-c^2=(a-b)(a+b)-c^2$

C. $10x^2-5x=5x(2x-1)$　　D. $x^2-16+6x=(x+4)(x-4)+6x$

试题评析：本题考查了因式分解的定义，解题的关键是掌握因式分解的定义，理解因式分解与整式乘法的联系与区别.

解：选项A中的变形是单项式与多项式的乘法计算；选项B和D中的变形都没有把多项式变为乘积的形式；选项C中把多项式变为了$5x$与$2x-1$的乘积的形式，因此符合因式分解的定义.

答案：C

两年模拟兵法

☞答案见281页

1. 下列从左到右的变形，属于因式分解的是（　　）

A. $8a^2b=2a\cdot 4ab$

B. $-ab^3-2ab^2-ab=-ab(b^2+2b)$

C. $4x^2+8x-4=4x\left(x+2-\frac{1}{x}\right)$

D. $4my-2=2(2my-1)$

2. 将多项式$ax^2-4ax+4a$因式分解，下列结果中正确的是（　　）

A. $a(x-4)^2$　　B. $a(x+2)(x-2)$

C. $a(x+2)^2$　　D. $a(x-2)^2$

3. 已知多项式$2x^2+bx+c$因式分解后为$2(x-3)\cdot(x+1)$，则b，c的值为（　　）

A. $b=3$，$c=-1$　　B. $b=-6$，$c=2$

C. $b=-6$，$c=-4$　　D. $b=-4$，$c=-6$

4. 若多项式因式分解的结果是$(x+3)(2x-1)$，则这个多项式是_____.

5. 若$x+5$，$x-3$都是多项式$x^2-kx-15$的因式，则$k=$_____.

6. 用整式的乘法检验下列的因式分解是否正确：

（1）$2m^2+7mn-15n^2=(2m+3n)(m-5n)$；

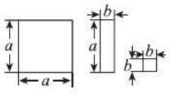
（2）$ab-a+b-1=(a+1)(b-1)$；

（3）$a^3-2a^2+3a-6=(a-2)(a^2+3)$；

（4）$x^2+y^2+2xy=(x+y)(x-y)$.

7. 关于x的多项式$6x^2-11x+m$因式分解后有一个因式是$2x-3$，试求m的值.

8. 给你几张正方形和长方形卡片，如图所示. 请你用拼图的方法拼成一个大长方形，使它的面积等于$2a^2+3ab+b^2$，并由此将多项式$2a^2+3ab+b^2$分解因式.　　【导学号：2850581】



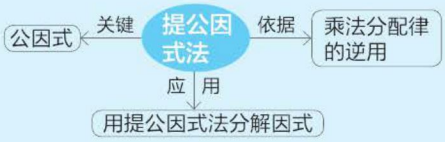
（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 提公因式法

核心知识
- 公因式
- 用提公因式法分解因式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 公因式

1. 定义 把多项式各项都含有的相同因式，叫做这个多项式各项的公因式.

2. 公因式的确定

（1）**确定公因式的系数**：若多项式中各项系数都是整数，则取各项系数的最大公因数.

（2）**确定字母及字母的指数**：取各项都含有的相同字母作为公因式中的字母，各项相同字母的指数取其中次数最低的.

（3）若多项式各项中含有相同的多项式因式，则应将其看成一个整体，不要拆开，作为公因式中的因式. 如 $3x(x-y)+x^2(x-y)$ 中各项的公因式是 $x(x-y)$.

提分·必记

特别解读

1. 公因式必须是多项式中每一项都含有的因式. 只在某项或某些项中含有而其他项中没有的因式不能成为公因式的一部分.
2. 公因式可以是单项式，也可以是多项式.
3. 若多项式各项中含有互为相反数的因式，则可将互为相反数的因式统一成相同的因式.

拨考向 利用公因式的定义确定多项式各项的公因式

例 1 指出下列多项式各项的公因式：

（1）$3a^2y-3ay+6y$；

（2）$4xy^3-8x^3y^2$；

（3）$a(x-y)^3+b(x-y)^2+(x-y)^3$；

（4）$-27a^2b^3+36a^3b^2+9a^2b$.

解题秘方：紧扣公因式的定义求解.

解：（1）中各项的公因式为 $3y$；

（2）中各项的公因式为 $4xy^2$；

（3）中各项的公因式为 $(x-y)^2$；

（4）中各项的公因式为 $-9a^2b$.

提分·秘诀

解法提醒

找准公因式的“四看”：一看系数. 若各项系数都是整数，应取各项系数的最大公因数；若多项式中首项的符号是“-”，则公因式的符号一般为负. 二看字母. 公因式中的字母是各项都含有的相同的字母. 三看字母的指数. 各项相同字母的指数取次数最低的. 四看整体. 如果多项式各项中含有相同的多项式因式，应将其看成整体，不要拆开.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 提公因式法

1. 定义 如果一个多项式的各项含有公因式，那么就可以把这个公因式提出来，从而将多项式化成两个因式乘积的形式．这种因式分解的方法叫做提公因式法．

用字母表示为：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$．

2. 提公因式法的一般步骤

（1）找出公因式，就是找出各项都含有的公共因式；

（2）确定另一个因式，另一个因式即多项式除以公因式所得的商；

（3）写成积的形式．

提分·必记

特别解读

1. 提公因式法实质上是逆用乘法的分配律．
2. 提公因式法就是把一个多项式分解成两个因式的积的形式，其中的一个因式是各项的公因式，另一个因式是多项式除以这个公因式所得的商．

拔考向 利用提公因式法分解因式

例 2 把下列各式因式分解：

（1）$6x^3y^2-8xy^3z$；　　（2）$-4a^3b^2+12a^2b-4ab$；

（3）$5m(y-x)^2-10(x-y)^3$．

解题秘方：紧扣提公因式法的步骤分解因式．

解：（1）$6x^3y^2-8xy^3z=2xy^2\cdot 3x^2-2xy^2\cdot 4yz=2xy^2(3x^2-4yz)$；

（2）$-4a^3b^2+12a^2b-4ab$

$=-(4a^3b^2-12a^2b+4ab)$

$=-(4ab\cdot a^2b-4ab\cdot 3a+4ab)$

$=-4ab(a^2b-3a+1)$；

（3）$5m(y-x)^2-10(x-y)^3$

$=5m(x-y)^2-10(x-y)^3$

$=5(x-y)^2[m-2(x-y)]$

$=5(x-y)^2(m-2x+2y)$．

提分·秘诀

解法提醒

- 当多项式首项系数是负数时，一般应先提出“-”，但要注意，此时括号内各项都要改变符号．
- $4ab$ 与公因式相同，提取公因式后，此项剩余项为“1”，此时容易漏掉“1”这一项而导致错误．
- $(y-x)^2$ 与 $(x-y)^3$ 的底数互为相反数，可将底数化成相同的数再提取公因式．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用提公因式法简化运算

例 3 计算：

（1）$96\times 3.14+16\times 3.14-12\times 3.14$；

（2）$39\times 37-13\times 3^4$；

（3）$\dfrac{2^{100}-2^{99}}{2^{97}-2^{96}}$．

解题秘方：从数的乘积或幂中，找出公因式，然后利用提公因式法简化运算．

解：（1）$96\times 3.14+16\times 3.14-12\times 3.14=3.14\times(96+16-12)=3.14\times 100=314$；

（2）$39\times 37-13\times 3^4=39\times 37-13\times 3\times 3^3=39\times(37-27)=390$；

（3）$\dfrac{2^{100}-2^{99}}{2^{97}-2^{96}}=\dfrac{2^{99}(2-1)}{2^{96}(2-1)}=\dfrac{2^{99}}{2^{96}}=\dfrac{2^{96}\cdot 2^3}{2^{96}}=8$．

挑战·高分

技巧点拨

凑公因数简化运算：39×37 和 13×3^4 不能直接看出所含公因数，但是 39 是 13 的 3 倍，而 13×3^4 含有幂的形式，所以需先对 13×3^4 变形，再提出 39．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用提公因式法求代数式的值

例 4 （1）已知 $b-a=6$，$ab=7$，求 a^2b-ab^2 的值；

（2）已知 $a-b=5$，$ab=6$，求 $3a^2b-6ab^2+18b+6$ 的值；

（3）已知 $(19x-31)(13x-17)-(13x-17)(11x-22)$ 可因式分解成 $(ax+b)(8x+c)$，其中 a，b，c 均为整数，求 $a+b+c$ 的值.

解题秘方：紧扣提公因式法，将代数式变形为已知整式的乘积的形式，然后整体代入求值.

解：（1）原式 $=ab(a-b)=7\times(-6)=-42$.

（2）原式 $=ab(3a-6b)+18b+6=6(3a-6b)+18b+6=18a-36b+18b+6=18a-18b+6=18(a-b)+6=18\times5+6=96$.

（3）因为原式 $=(13x-17)(19x-31-11x+22)=(13x-17)(8x-9)$，且 $(19x-31)(13x-17)-(13x-17)(11x-22)$ 可因式分解成 $(ax+b)(8x+c)$，所以 $(13x-17)(8x-9)=(ax+b)(8x+c)$，易得 $a=13$，$b=-17$，$c=-9$.

所以 $a+b+c=13-17-9=-13$.

挑战·高分

方法点拨

运用因式分解求代数式值的方法：

1. 利用因式分解的方法，先求出各字母的值，再将其代入所求代数式求值；
2. 利用因式分解与整式乘法之间的对应关系，构建相应的等量关系，借助等量关系求解各字母的值，进而求出代数式的值；
3. 利用因式分解将所求代数式转化为与已知条件相关的形式，再将已知条件整体代入求值.

拔尖角度▸ 3 利用提公因式法进行规律探究

例 5 先阅读下面因式分解的过程，再回答所提出的问题.

$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2=(x+1)[1+x+x(x+1)]=(x+1)^2\cdot(1+x)=(x+1)^3$.

（1）上述因式分解的方法是_____，共应用了_____次；

（2）若分解因式 $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^{2018}$，则需应用上述方法_____次，结果是_____；

（3）仿照上述方法因式分解：$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^n$（$n$ 为正整数）.

解题秘方：紧扣提公因式法，将多项式逐步提公因式，直到最后的结果，利用最后结果的形式进行规律探究.

解：（1）提公因式法；2

（2）2 018；$(x+1)^{2\,019}$

（3）$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^n=(x+1)[1+x+x(x+1)+\cdots+x(x+1)^{n-1}]=(x+1)^2[1+x+\cdots+x(x+1)^{n-2}]=\cdots=(x+1)^{n+1}$.

挑战·高分

方法点拨

解决探究性问题的一般思路：对于与等式有关的规律探究型问题，观察时要对所给等式做横向的分析，以确定等式左、右两边之间的数量关系，有些情况下还要对所给等式做纵向对比，以便发现一般规律.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 用提公因式法分解因式是因式分解的最基本、也是最重要的一种方法，在中考中可能会直接考查这种方法，也可能会与其他因式分解的方法综合考查，或者考查其在代数式的求值运算及实际生活中的应用，多以选择题、填空题的形式出现，是近几年中考命题的热点之一，难度不大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 利用提公因式法分解因式

例6 [中考·温州]因式分解：$a^2-5a=$_____.

试题评析：本题考查了利用提公因式法分解因式，找准公因式是解题的关键.

答案：$a(a-5)$

冲刺·满分

方法点拨

提公因式法分解因式的关键是找准公因式，结果是否正确可用整式乘法来验证.

两年模拟兵法

答案见282页

1. 下列多项式中能用提公因式法因式分解的是(　　)

A.x^2+y^2　　B.x^2-y^2

C.x^2+2x+1　　D.x^2+2x

2. 若代数式x^2+ax可以用提公因式法因式分解，则常数a不可以取(　　)

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

3. $(-8)^{2020}+(-8)^{2019}$能被下列哪个数整除?(　　)

A.3　　B.5　　C.7　　D.9

4. [中考·杭州]因式分解：$(a-b)^2-(b-a)=$_____.

5. 将多项式$3x^{2n}-6x^n$因式分解，应提取的公因式为_____，提取公因式后另一个因式是_____.

6. 把下列各式因式分解：

(1)$-2x^2+18x^2y-4xy^2$;

(2)$x^2-2x+(x-2)$;

(3)$10a(x-y)^2+5ax(y-x)$.

7. 先因式分解$7a(b+2)+3b(b+2)$，再求其值，其中$a=2$，$b=-1$.

8. 已知$x-y=3$，$x+y=7$，求$x(x-y)-y(y-x)$的值.

9. 计算：

(1)$\dfrac{2^{2020}}{2^{2020}-2^{2021}}$;

(2)$2020\times99+2021-(-1)^{2020}$.

10. 在分解因式a^2b+ab^2-a-b时，甲同学这样做：

$$\begin{aligned}&a^2b+ab^2-a-b\\=&ab(a+b)-(a+b)\\=&(a+b)(ab-1).\end{aligned}$$

请仿照甲同学的做法，利用提公因式法换一种方式因式分解.　　【导学号：2850581】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 公式法

核心知识
- 用平方差公式分解因式
- 用完全平方公式分解因式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用平方差公式分解因式

1. 平方差公式法

两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积.

即：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

2. 平方差公式的特点

（1）等号的左边是一个二项式，各项都是平方的形式且符号相反；

（2）等号的右边是两个二项式的积，其中一个二项式是两个数的和，另一个二项式是这两个数的差.

3. 运用平方差公式分解因式的步骤

一判：根据平方差公式的特点，判断是否为平方差，若负平方项在前面，利用加法的交换律把负平方项放在后面.

二定：确定公式中的 a 和 b，除 a 和 b 是单独一个数或字母外，其余不管是单项式还是多项式都必须用括号括起来，表示一个整体.

三套：套用平方差公式进行分解.

四整理：将每个因式整理化成最简形式.

提分·必记

特别解读

1. 因式分解中的平方差公式是乘法公式中的平方差公式的逆用.
2. 乘法公式中的平方差指的是符合两数和与两数差的积的条件后，结果写成平方差；而因式分解中的平方差公式指的是能写成平方差形式的多项式，可以分解成两个数的和乘这两个数的差.

拔考向 利用平方差公式进行因式分解

例 1 把下列各式因式分解：

（1）$4x^2-25y^2$；　（2）$(a+2)^2-1$；

（3）$-\frac{1}{81}+x^4$；　（4）$16(a-b)^2-25(a+b)^2$.

解题秘方：先确定平方差公式中的“a”“b”，再运用平方差公式分解因式.

解：（1）$4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x+5y)(2x-5y)$；

（2）$(a+2)^2-1$

$=(a+2+1)(a+2-1)$

$=(a+3)(a+1)$；

提分·秘诀

特别提醒

1. 确定公式中的“a”“b”时，不能只看表面，如 $4x^2=(2x)^2$，“a”指的是 $2x$；$16(a-b)^2=[4(a-b)]^2$，“a”指的是 $4(a-b)$.
2. 平方差公式可以连续运用. 如(3)题，必须做到每个因式不能再分解为止.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$(3)-\frac{1}{81}+x^4=x^4-\frac{1}{81}=\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x^2-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right);$$
$$(4)\ 16(a-b)^2-25(a+b)^2$$
$$=[4(a-b)+5(a+b)][4(a-b)-5(a+b)]$$
$$=(4a-4b+5a+5b)(4a-4b-5a-5b)$$
$$=(9a+b)(-a-9b)$$
$$=-(9a+b)(a+9b).$$

3. 运用平方差公式分解因式时，若“a”“b”都是多项式，先要添加括号，再去括号，然后化简最后结果.

点知识▶ 2 用完全平方公式分解因式



1. 完全平方式 形如 $a^2\pm2ab+b^2$ 的式子叫做完全平方式.

完全平方式的条件：

（1）多项式是二次三项式；

（2）首末两项是两个数（或式子）的平方且符号相同，中间项是这两个数（或式子）的积的 2 倍，符号可以是“+”，也可以是“−”.

2. 完全平方公式法 两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方.

即：$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

3. 完全平方公式的特点 等号左边是一个完全平方式，右边是这两个数的和（或差）的平方.

4. 公式法 根据因式分解与整式乘法的关系，我们可以利用乘法公式把某些多项式因式分解，这种因式分解的方法叫做公式法.

5. 因式分解的一般步骤

（1）当多项式有公因式时，先提取公因式；当多项式没有公因式时（或提取公因式后），若符合平方差公式或完全平方公式，就利用公式法分解因式；

（2）当不能直接提取公因式或不能用公式法分解因式时，可根据多项式的特点，把其变形为能提取公因式或能用公式法的形式，再分解因式；

（3）当乘积中每一个因式都不能再分解时，因式分解就结束了.

提分·必记

特别解读

1. 因式分解中的完全平方公式是整式乘法中的完全平方公式的逆用.
2. 结果是和的平方还是差的平方由乘积项的符号确定，乘积项的符号可以是“+”，也可以是“−”，而两个平方项的符号必须相同，否则就不是完全平方式，也就不能用完全平方公式进行因式分解.
3. 用完全平方公式分解因式时，若多项式各项有公因式，要先提取公因式，再用完全平方公式分解因式.

拔考向▶ 利用完全平方公式解决整式变形问题

题型 1：完全平方式在求值中的应用

例 2 已知 $9a^2+ka+16$ 是一个完全平方式，则 k 的值是____.

解题秘方： 根据平方项确定乘积项，进而确定字母的值.

解： $\because 9a^2=(3a)^2$，$16=4^2$，

$9a^2+ka+16$ 是一个完全平方式，

$\therefore ka=\pm2\times3a\times4=\pm24a$. $\therefore k=\pm24$.

答案： ±24

提分·秘诀

方法点拨

求与完全平方式有关的字母值的方法： 可根据首项、尾项和中间项三者之间的关系，由其中两项求出字母的值，要注意中间项的符号有“±”两种情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：完全平方公式在因式分解中的应用

例 3 把下列各式因式分解：

（1）$x^2-14x+49$；　　（2）$-6ab-9a^2-b^2$；

（3）$\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{2}ab+b^2$；　　（4）$(x^2+6x)^2+18(x^2+6x)+81$.

解题秘方：先确定完全平方公式中的“a”“b”，再运用完全平方公式分解因式.

解：（1）$x^2-14x+49=x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2=(x-7)^2$；

（2）$-6ab-9a^2-b^2$

$=-(9a^2+6ab+b^2)$

$=-[(3a)^2+2\cdot 3a\cdot b+b^2]$

$=-(3a+b)^2$；

（3）$\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{2}ab+b^2$

$=\left(\frac{1}{4}a\right)^2-2\cdot\frac{1}{4}a\cdot b+b^2$

$=\left(\frac{1}{4}a-b\right)^2$；

（4）$(x^2+6x)^2+18(x^2+6x)+81$

$=(x^2+6x)^2+2\cdot(x^2+6x)\cdot 9+9^2$

$=(x^2+6x+9)^2$

$=(x+3)^4$.

完全平方公式可以连续使用，因式分解的结果要彻底.

题型 3：选择适当的方法进行因式分解

例 4 把下列各式因式分解：

（1）$-3a^3b+48ab^3$；　　（2）x^4-8x^2+16；

（3）$25x^2(a-b)+36y^2(b-a)$.

解题秘方：先观察是否有公因式，若有，则提取公因式，然后通过观察项数确定能用哪个公式分解因式.

解：（1）$-3a^3b+48ab^3$

$=-3ab(a^2-16b^2)$

$=-3ab(a+4b)(a-4b)$；

（2）$x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$

$=[(x+2)(x-2)]^2$

$=(x+2)^2(x-2)^2$；

（3）$25x^2(a-b)+36y^2(b-a)$

$=25x^2(a-b)-36y^2(a-b)$

$=(a-b)(25x^2-36y^2)$

$=(a-b)(5x+6y)(5x-6y)$.

解法提醒

运用完全平方公式分解因式的关键是判断每个多项式是否符合完全平方式的结构特点，若符合，进一步确定公式中的“a”“b”. 注意当首项系数为负数时，一般要先提出负号，括号内多项式的各项都要变号，如(2)题.

方法点拨

“一提、二套、三查”是分解因式的步骤，有公因式的先提取公因式，然后套用公式——若多项式是两项，考虑用平方差公式，若多项式是三项，则考虑用完全平方公式，最后检查乘积中每一个多项式的因式是否能继续分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用辅助法对多项式进行因式分解

题型 1：$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子（十字相乘法）在因式分解中的应用

例 5 阅读下列材料.

（1）形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 型的二次三项式，有以下特点：①二次项系数是 1；②常数项是两个数之积；③一次项系数是常数项的两个因数之和. 把这个二次三项式因式分解，可以这样来解：

$x^2+(p+q)x+pq=x^2+px+qx+pq=(x^2+px)+(qx+pq)=x(x+p)+q(x+p)=(x+p)(x+q)$.

因此，可以得 $x^2+(p+q)x+pq=$_____.

利用上面的结论，可以直接将某些二次项系数为 1 的二次三项式分解因式.


因式分解的方法

（2）利用（1）的结论分解因式：

① $m^2+7m-18$；② $x^2-2x-15$.

解题秘方：阅读材料，用类比法确定 p，q 的值，从而分解因式.

解：（1）$(x+p)(x+q)$

（2）① $m^2+7m-18$

$=m^2+(9-2)m+9\times(-2)$

$=(m+9)(m-2)$；

② $x^2-2x-15=x^2+(-5+3)x+(-5)\times3=(x-5)(x+3)$.

题型 2：分组分解法在因式分解中的应用

例 6 把下列各式因式分解：

（1）$ad+bd-ax-ay-bx-by$；（2）$4xy+1-4x^2-y^2$.

解题秘方：分组一般应遵循分组后能运用公式法继续分解，或分组后可提公因式分解因式的原则，因而在分组时可进行适当尝试，直到找出解题思路为止.

解：（1）$ad+bd-ax-ay-bx-by$

$=(ad-ax-ay)+(bd-bx-by)$

$=a(d-x-y)+b(d-x-y)$

$=(a+b)(d-x-y)$；

（2）$4xy+1-4x^2-y^2$

$=1-(4x^2-4xy+y^2)$

$=1-(2x-y)^2$

$=(1+2x-y)(1-2x+y)$.

挑战·高分

解法提醒

将二次三项式 $x^2+(p+q)x+pq$ 因式分解时，先将常数项分解成两个数的积，但分解方式不止一种，只有当这两个数的和为一次项的系数时，才可确定两个因式.

方法点拨

把一个多项式按“先部分，后整体”的思路，先分组分别变形，再分解因式，这种因式分解的方法称为**分组分解法**. 分组分解法适用于三项以上的多项式的因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：补项法和拆项法在因式分解中的应用

例 7 把下列各式因式分解：

（1）x^4+4；　　（2）$3y^3-4y+1$.

解题秘方：（1）中的多项式只有两项，既没有公因式又不能运用公式法分解因式，但它是两个数的平方和的形式，这时若能添加一项，使之与原来两项运用完全平方公式分解，再与添加的项的相反数继续分解，可达到目的；（2）中可把 $-4y$ 拆成 $-3y$ 和 $-y$，分别与 $3y^3$ 和 1 分组后，分解因式.

解：（1）$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$；

（2）$3y^3-4y+1=3y^3-3y-y+1=(3y^3-3y)-(y-1)$

$=3y(y^2-1)-(y-1)=3y(y+1)(y-1)-(y-1)$

$=(y-1)[3y(y+1)-1]$

$=(y-1)(3y^2+3y-1)$.

解法提醒

根据多项式的特点，有时可添加两个互为相反数的项，使其中一个与原多项式中某些项结合后，能进行因式分解，达到解决问题的目的；有时还可以把多项式中某些项拆成两项或多项，与多项式中其他的项分组后，再进行因式分解.

拔尖角度 ▶ 2 利用公式法进行有理数的巧算

挑战·高分

例 8 用简便方法计算下列各式：

（1）$204^2+204\times192+96^2$；

（2）$50\times9.5^2-100\times9.5\times7.5+50\times7.5^2$；

（3）$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2\,021^2}\right)$.

解题秘方：（1）先将 204×192 化为 $2\times204\times96$，再利用完全平方公式计算；（2）先提取公因式，再利用完全平方公式计算；（3）每个括号中都利用平方差公式计算，然后逐项相乘约分即可.

解：（1）$204^2+204\times192+96^2=204^2+2\times204\times96+96^2$

$=(204+96)^2=300^2=90\,000$；

（2）$50\times9.5^2-100\times9.5\times7.5+50\times7.5^2$

$=50\times(9.5^2-2\times9.5\times7.5+7.5^2)$

$=50\times(9.5-7.5)^2=50\times2^2=200$；

（3）$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2\,021^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots$

$\left(1-\frac{1}{2\,021}\right)\left(1+\frac{1}{2\,021}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2\,020}{2\,021}\times\frac{2\,022}{2\,021}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\,022}{2\,021}=\frac{1\,011}{2\,021}$.

方法点拨

利用公式法进行计算可使计算简便，但需要考虑所计算式子的形式是否符合因式分解的特点，有时需要进行适当的变形才能进行因式分解，从而达到简化计算的效果.

详解

仔细观察前几项：

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$.

用平方差公式展开并化简得，

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}$，约分后只剩第一项和最后一项，故 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2020}{2021}\times\frac{2022}{2021}$ 约分后也只剩第一项和最后一项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用建因式分解模型法判断三角形的形状

挑战·高分

例 9 已知△ ABC 的三边长分别为 a，b，c，并且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，试判断△ ABC 的形状.

解题秘方：先将等式变形并且各项都同时乘 2，把多项式按完全平方式的特点分成三组分别进行因式分解，然后结合非负数的性质得出三边关系.

解：∵ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，

∴ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，

∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，

∴ $(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$.

将每个括号内的多项式分解因式，得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

由非负数的性质，得 $a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$.

∴ $a=b$，$b=c$，$c=a$.

∴ $a=b=c$，即△ ABC 为等边三角形.

解法提醒

涉及的多项式不止三项时，对多项式进行分组，将每一组分解因式是解答此类问题的常用方法.

拔尖角度▸ 4 利用从特殊到一般的思想探究等式的变化规律

挑战·高分

例 10 老师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$. 王华接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22$.

（1）请你再写出两个具有上述规律的算式（不同于上面算式）；

（2）用文字写出反映上述算式的规律；

（3）证明这个规律的正确性.

解题秘方：（2）通过题目中所给出的算式，不难看出这些算式的左边是两个奇数的平方差，右边是 8 的倍数；（3）可用含有字母的式子表示其规律，再运用平方差公式来证明.

（1）**解**：（答案不唯一）$7^2-3^2=8\times5$，$11^2-7^2=8\times9$.

（2）**解**：任意两个奇数的平方差是 8 的倍数.

（3）**证明**：设 m，n 为整数（$m>n$），两个奇数可分别表示为 $2m+1$，$2n+1$，则 $(2m+1)^2-(2n+1)^2=[(2m+1)+(2n+1)][(2m+1)-(2n+1)]=(2m+2n+2)(2m-2n)=2(m+n+1)\cdot2(m-n)=4(m-n)(m+n+1)$.

当 m，n 同是奇数或偶数时，$m-n$ 一定是偶数，

∴ $4(m-n)(m+n+1)$ 一定是 8 的倍数.

当 m，n 是一奇一偶时，$m+n+1$ 一定是偶数，

∴ $4(m-n)(m+n+1)$ 一定是 8 的倍数.

∴任意两个奇数的平方差是 8 的倍数.

规律点拨

对于规律探究题，一般先从特殊情况入手发现规律，再用文字或含有字母的关系式表示这个规律. 本题体现了**从特殊到一般的思想**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要内容是运用平方差公式、完全平方公式进行因式分解，在中考中，有时单独考查，有时与提公因式法综合在一起对某些多项式进行因式分解，也有利用因式分解的知识进行化简求值的题目和探索与创新题. 根据多项式的特点，灵活地选择合适的方法分解因式是解题的关键. 本节知识在中考中主要以选择题、填空题形式出现，有时也以解答题形式出现，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用因式分解的方法分解因式

例 11 [中考·济宁]分解因式：$ma^2+2mab+mb^2=$_____.

试题评析：本题考查了运用提公因式法和公式法把多项式因式分解，先找到多项式各项的公因式，提取公因式，再利用完全平方公式分解因式即可得出答案.

解：$ma^2+2mab+mb^2=m(a^2+2ab+b^2)=m(a+b)^2$.

答案：$m(a+b)^2$

冲刺·满分

解法提醒

因式分解是中考必考的内容之一，“一提二套”是主要考查内容. 提取公因式时一定要彻底，否则会导致最后结果分解不彻底.

考法 2 利用因式分解求代数式的值

例 12 [中考·徐州]已知 $a+b=10$，$a-b=8$，则 $a^2-b^2=$_____.

试题评析：本题考查了平方差公式，解题的关键是掌握平方差公式. 先根据平方差公式得到 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，再整体代入求解.

解：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=10\times 8=80$.

答案：80

解法提醒

本题运用整体思想求值，利用因式分解，将分解后的因式的值整体代入求得结果.

两年模拟兵法

答案见 282 页

1. 下列各多项式中，能用公式法因式分解的是(　　)

A. a^2-b^2+2ab　　B. a^2+b^2+ab

C. $25n^2+15n+9$　　D. $4a^2+12a+9$

2. [中考·贺州]下列各式因式分解正确的是(　　)

A. $x^2+6xy+9y^2=(x+3y)^2$

B. $2x^2-4xy+9y^2=(2x-3y)^2$

C. $2x^2-8y^2=2(x+4y)(x-4y)$

D. $x(x-y)+y(y-x)=(x-y)(x+y)$

3. 多项式 mx^2-m 和多项式 x^2-2x+1 的公因式是(　　)

A. $x-1$　　B. $x+1$

C. x^2-1　　D. $(x-1)^2$

4. 已知 $a^2+ma+\frac{1}{9}$ 是一个完全平方式，则 m 的值等于(　　)

A. $-\frac{2}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\pm\frac{2}{3}$

5. [中考·临沂]将 a^3b-ab 进行因式分解，正确的是(　　)

A. $a(a^2b-b)$　　B. $ab(a-1)^2$

C. $ab(a+1)(a-1)$　　D. $ab(a^2-1)$

6. [中考·株洲]因式分解：$m^3-mn^2=$_____.

7. [中考·安顺]若式子 $x^2+kx+25$ 是一个完全平方式，则 $k=$_____.

8. [中考·贵州]在实数范围内因式分解：$x^5-4x=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [中考·衢州] 已知实数 m，n 满足 $\begin{cases} m-n=1, \\ m+n=3, \end{cases}$ 则代数式 m^2-n^2 的值为_____.

10. [中考·南京] $(a-b)^2+4ab$ 因式分解的结果是_____.

11. [中考·河池] 因式分解：$(x-1)^2+(2x-5)=$_____.

12. 把下列各式因式分解：

（1）$121a^2-b^2$；

（2）$(a+3)^2-(a+b)^2$；

（3）$9x^2-24x+16$；

（4）$(x-1)^2-6(x-1)+9$.

13. 已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，且满足 $a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$. 试判断△ABC 的形状，并说明理由.

14. 阅读下面的材料.

对于形如 $x^2+2ax+a^2$ 的二次三项式，可以用公式法将它分解成 $(x+a)^2$ 的形式. 但对于二次三项式 $x^2+2ax-8a^2$，就不能直接运用公式法了. 此时，我们可以在二次三项式 $x^2+2ax-8a^2$ 中先加上一项 a^2，使它与 x^2+2ax 的和成为一个完全平方式，再减去 a^2，整个式子的值不变，于是有：

$$\begin{aligned} &x^2+2ax-8a^2 \\ =&(x^2+2ax+a^2)-a^2-8a^2 \\ =&(x+a)^2-(3a)^2 \\ =&(x+4a)(x-2a). \end{aligned}$$

像这样先添一个适当项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变的方法称为“配方法”.

请用配方法来解决下列问题.

（1）因式分解：$a^2-6a-16$.

（2）当 a 为何值时，二次三项式 a^2+4a+5 有最小值？ 【导学号：2850581】

15. 已知 a，b，c 为互不相等的实数，且满足关系式 $b^2+c^2=2a^2+8a-14$，$bc=a^2+3a-5$，求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

恒等变形在整式的运算和因式分解中的应用

荣老师告诉你 把一个式子变换成另一个和它恒等的式子，叫做式子的恒等变形．整式的恒等变形主要的依据有：整式的各种运算性质和法则，各种公式的正、逆应用等．

应用一 运用面积法验证整式的恒等变形

例 1 [中考·北京]图 1 中的四边形均为长方形，根据图形，写出一个正确的等式：_____.

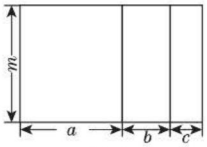


图 1

解题秘方：从图形的结构特征入手，找到一个面积之间的相等关系．

解：∵最大的长方形的长为 $a+b+c$，宽为 m，∴它的面积为 $m(a+b+c)$．又∵最大的长方形的面积为三个小长方形的面积之和，三个小长方形的面积分别为 am，bm，cm，

∴ $m(a+b+c)=am+bm+cm$.

答案：$m(a+b+c)=am+bm+cm$.

方法点拨：用面积法写恒等式，即用两种不同的表示图形面积的方法写恒等式．

应用二 运用恒等变形求等式中待定字母的值

例 2 [中考·吉林]若 $x^2-4x+5=(x-2)^2+m$，则 $m=$_____.

解题秘方：运用恒等式左右两边恒等的性质解决．

解：**方法一** $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$，∴ $m=1$.

方法二 $(x-2)^2+m=x^2-4x+4+m$，

∴ $4+m=5$. ∴ $m=1$.

方法三 将 $x=2$ 代入等式中得，$4-8+5=m$，

∴ $m=1$.

答案：1

方法点拨：三种方法都体现了整式的恒等变形，整式的恒等变形既可以从等式的左边推到右边，也可以从右边推到左边，还可以直接代入任何值，等式都成立．

应用三 运用恒等变形求式子的值

例 3 已知 $(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=16$，求 xy 的值．

解题秘方：运用完全平方公式的结构特征解题．

解：根据乘法公式知 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$，

∴ $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

∴ $4xy=25-16=9$.

∴ $xy=\dfrac{9}{4}$.

方法点拨：乘法公式本身就是整式的恒等变形，乘法公式常见的变形如下．

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;

(2) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$;

(3) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

应用四 运用恒等变形进行证明

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，两边长 a，b 满足 $a^2+b^2-4a-4b+8=0$，求证：$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

解题秘方：运用完全平方公式进行因式分解解决问题．

证明：已知等式可变形为 $a^2-4a+4+b^2-4b+4=0$，

∴ $(a-2)^2+(b-2)^2=0$.

∴ $a=b=2$.

∴ $\triangle ABC$ 为等腰三角形．

方法点拨：应用因式分解来进行整式的恒等变形是一种常用的解题方法．当题目有平方项且要求判断三角形的形状时，一般将所给的等式分解因式，再利用平方的非负性求得三角形三边的长或三边的关系，以此来判断三角形的形状．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **因式分解的定义** 把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形叫做因式分解.
2. **因式分解的方法** （1）提公因式法.（2）公式法：① $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；② $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
3. **因式分解的步骤** 一提：有公因式的先提公因式.二套：套用乘法公式.三检查：检查各因式分解的结果是否彻底.

知识方法专题

知识必学

专题一 因式分解的定义

链接中考» 因式分解与整式乘法主要从形式和结果两个方面区分，中考中一般都是以选择题形式出现.

例1 [模拟·平南]下列各式从左到右的变形中，为因式分解的是（　　）

A. $x(a-b)=ax-bx$

B. $x^2-1+y^2=(x-1)(x+1)+y^2$

C. $ax+bx+c=x(a+b)+c$

D. $y^2-1=(y+1)(y-1)$

解题秘方：紧扣因式分解的定义及与整式乘法之间的关系去识别.

解：选项A中，$x(a-b)=ax-bx$ 是整式乘法，故此选项错误；

选项B，C中，等式右边不是整式的积的形式，故不是因式分解，B，C错误；

选项D中，$y^2-1=(y+1)(y-1)$ 符合因式分解的定义，故此选项正确.

答案：D

方法点拨：识别因式分解时，不能看到等号左边是多项式，右边是积的形式就认为该等式是因式分解，还需要看等式是否满足如下条件.

（1）等式是恒等式，可用乘法运算验证等式是否成立；

（2）等号左右两边都是整式；

（3）因式分解的结果不能再分解.

专题二 利用提公因式法和公式法进行因式分解

链接中考» 因式分解与整式乘法是方向相反的变形，因式分解的主要步骤有：一提、二套、三查.因式分解是中考的热门考点，考查的形式主要是填空题.

例2 （1）[中考·梅州]因式分解：$m^3-m=$_____.

（2）[中考·武威]因式分解：$x^3y-2x^2y+xy=$_____.

（3）[中考·齐齐哈尔]因式分解：$a^2+1-2a+4(a-1)=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用因式分解的方法进行分解.

答案：（1）$m(m+1)(m-1)$

（2）$xy(x-1)^2$

（3）$(a-1)(a+3)$

专题三 因式分解的应用

链接中考» 在一些数字运算题或代数式的求值运算中，可以把某些数字看成字母，利用因式分解简化运算，或者把代数式因式分解后代入求值，这样会简化计算过程，并能将不能直接求解的问题转化为利用已知条件可以求解的问题．一般以解答题形式考查.

类型1：利用因式分解求代数式的值

例3 若 $|a+b-6|+(ab-4)^2=0$，求 $-a^3b-2a^2b^2-ab^3$ 的值.

解题秘方：根据非负数的性质求出 $a+b$ 和 ab 的值，再将代数式因式分解，然后整体代入求值.

解：$\because |a+b-6|+(ab-4)^2=0$，

$\therefore a+b-6=0$，且 $ab-4=0$，

则 $a+b=6$，$ab=4$.

$\therefore -a^3b-2a^2b^2-ab^3$

$=-ab(a^2+2ab+b^2)$

$=-ab(a+b)^2$

$=-4\times6^2$

$=-144$.

方法点拨：利用因式分解的方法，可以将某些多项式进行适当变形，以出现我们需要的式子，然后将这些式子的值代入，可以解决一些原本不易解决的问题.

类型2：利用因式分解进行简便运算

例4 利用因式分解计算：$999^2+999+685^2-315^2$.

解题秘方：将数字看成字母，利用提公因式法和平方差公式分解因式并求解.

解：$999^2+999+685^2-315^2$

$=999\times(999+1)+(685-315)\times(685+315)$

$=999\times1\,000+370\times1\,000$

$=999\,000+370\,000$

$=1\,369\,000$.

类型3：因式分解的实际应用

例5 某养殖专业户现计划投资建造仔猪场和成猪场，两个养猪场均为正方形，已知成猪场的面积比仔猪场大 $40\ m^2$，两个猪场的围墙总长为 $80\ m$. 请你帮助他算出这两个养猪场的面积分别是多少（两个养猪场没有公共围墙）.

解题秘方：根据题意列出方程组，利用因式分解解方程组，然后求值.

解：设成猪场的边长为 x m，仔猪场的边长为 y m.

由题意得$\begin{cases}x^2-y^2=40,\\4(x+y)=80.\end{cases}$

将方程组变形为$\begin{cases}(x+y)(x-y)=40,①\\x+y=20,②\end{cases}$

把②代入①，得 $x-y=2$. ③

由③ + ②，得 $x=11$，

由② − ③，得 $y=9$.

所以仔猪场的面积 $S_1=9^2=81\ (m^2)$，成猪场的面积 $S_2=11^2=121\ (m^2)$.

名师点评：本题中的原方程组若直接求解是非常烦琐的，但利用平方差公式将 $x^2-y^2=40$ 的左边因式分解后，该式子可变形为 $(x+y)(x-y)=40$，然后将 $x+y=20$ 整体代入即可求得 $x-y=2$. 再解$\begin{cases}x+y=20,\\x-y=2,\end{cases}$ 即可求出 x，y 的值.

方法必会

专题四 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想大致体现为两种情形：第一种情形是“从数解形”，有些图形直接观察找不出规律，可以将图形的边长、角度、面积等用数或字母表示出来，从而发现图形的规律；第二种情形是“从形助数”，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

把抽象的数学语言转化为直观的图形，可避免繁杂的计算，获得出奇制胜的解法．这里的“形”是指：若有形，则可为图表与模型，若无形，则需要构造或联想．在解题时要有数形结合的数学思想，要做到脑中有图，见数想图．

例 6 ［中考·达州］如图 4-1，在边长为 a 的正方形中，剪去一个边长为 b 的小正方形（$a>b$），将余下部分拼成一个梯形，根据两个图形阴影部分面积的关系，可以得到一个关于 a，b 的恒等式为（　　）

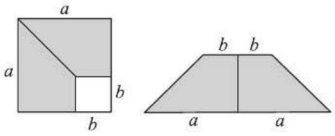


图 4-1

A. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

D. $a^2+ab=a(a+b)$

解题秘方：利用面积法表示两个图形的面积，建立等式．

解：在正方形中，$S_{阴影}=a^2-b^2$．

在梯形中，$S_{阴影}=\frac{1}{2}(2a+2b)(a-b)=(a+b)(a-b)$．故所得恒等式为 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$．

答案：C

名师点评：此题主要考查的是平方差公式的几何表示，解此类题的关键是要从整体与局部两个方面运用数形结合的思想，从而表示出阴影部分的面积，得出等量关系并化简．

专题五 分类讨论思想

专题解读» 所谓分类讨论思想，就是当要解决的问题包含两种或两种以上的可能情况时，则需要按不同的情况通过分类讨论来解决问题的一种思想方法．在运用分类讨论思想解题时，需要认真审题，全面考虑，做到分类标准统一，不重不漏，才能获得完整的解答．

例 7 二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式，求 k 的值．

解题秘方：在二次三项式 x^2-kx+9 中，x^2 和 9 分别是 x 和 3 的平方，由二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式可知，$-k$ 可能是正的，也可能是负的，故需要分两种情况讨论．

解：因为二次三项式 x^2-kx+9 是一个完全平方式，所以 $-kx=2x\times3$ 或 $-kx=-2x\times3$，解得 $k=-6$ 或 $k=6$．

方法点拨：本题运用了分类讨论思想，这是由完全平方式可能是两数和的平方，也可能是两数差的平方所决定的，解题时注意不要出现漏解现象．

好题必解 ☞答案见 283 页

类型 1：选择合适的方法进行因式分解

1. 把下列各式因式分解：

（1）x^3-16x；

（2）$(x-1)^2-4$；

（3）$16(a+b)^2-9(a-b)^2$；

（4）$(a+b)^2+6(a+b)+9$；

（5）b^3-6b^2+9b；

（6）a^4-2a^2+1．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：巧借因式分解计算

2. 用简便方法计算下列各式：

（1）$539^2-439\times539$；

（2）$(-2)^{2021}+(-2)^{2020}+2^{2019}$.

类型 3：巧借因式分解进行化简求值

3. 已知$\begin{cases}3x+2y=4,\\3x-2y=5,\end{cases}$求 $9x^2-4y^2$ 的值.

4. 已知 $x+y=4$，$xy=2$，求 $x^3y+2x^2y^2+xy^3$ 的值.

5. 已知长方形的长为 a，宽为 b，周长为 16，两边的平方和为 34.

（1）求此长方形的面积；

（2）求 $ab^3+2a^2b^2+a^3b$ 的值.

类型 4：巧借因式分解进行说理

6. 求证：不论 n 取何正整数，$(n+5)^2-(n-1)^2$ 一定是 12 的倍数.

7. 若△ ABC 的三边长分别是 a，b，c.

（1）当 $b^2-c^2+2ab-2ac=0$ 时，求证：△ ABC 是等腰三角形.

（2）求证：$a^2+c^2-b^2-2ac<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第四章测试卷

答案见 283 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列式子从左到右的变形属于因式分解的是（　　）

A. $a^2+4a-21=a(a+4)-21$

B. $a^2+4a-21=(a-3)(a+7)$

C. $(a-3)(a+7)=a^2+4a-21$

D. $a^2+4a-21=(a+2)^2-25$

2. $a(x-y)$ 与 $ay-ax$ 的公因式是（　　）

A. $a(x-y)$　　B. $ay+ax$

C. a　　D. $x-y$

3. 下列多项式能用平方差公式分解的是（　　）

A. a^2+4　　B. $-a^2-4$

C. $-(a^2+4)$　　D. a^2-4

4. 下列各式中，能用完全平方公式进行因式分解的是（　　）

A. $2x^2+4x+1$　　B. $x^2-2xy+y^2$

C. $2x^2+4xy+y^2$　　D. x^2-y^2+2xy

5. 把代数式 $ax^2-4ax+4a$ 分解因式，下列结果中正确的是（　　）

A. $a(x-2)^2$　　B. $a(x+2)^2$

C. $a(x-4)^2$　　D. $a(x+2)(x-2)$

6. 已知 $x^2+kxy+64y^2$ 是完全平方式，则 k 的值是（　　）

A. 8　　B. ± 8　　C. 16　　D. ± 16

7. 把多项式 x^2+ax+b 分解因式，得 $(x+1)(x-3)$，则 a，b 的值分别是（　　）

A. $a=2$，$b=3$　　B. $a=-2$，$b=-3$

C. $a=-2$，$b=3$　　D. $a=2$　$b=-3$

8. 已知 a,b,c 是三角形的三边，那么代数式 $(a-b)^2-c^2$ 的值（　　）

A. 大于零　　B. 小于零

C. 等于零　　D. 不能确定

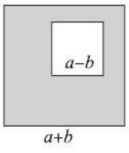
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 多项式 $9a^3-ab^2$ 分解因式的结果是_____.

10. 分解因式：$ab^4-4ab^3+4ab^2=$_____.

11. [中考·安顺] 若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是关于 x 的完全平方式，则 $m=$_____.

12. 将边长分别为 $a+b$ 和 $a-b$ 的两个正方形摆放成如图所示的位置，则阴影部分的面积化简后的结果是_____.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（12 分）把下列各式因式分解：

（1）$x(x-y)-y(y-x)$；

（2）$49(x-y)^2-16(x+y)^2$；

（3）$(a+b)^2+4(a+b)+4$；

（4）$a^2(x-y)+b^2(y-x)$.

14.（6 分）利用因式分解简便计算：

（1）$2\,020^2-20\times 2\,020$；

（2）$2\,020+2\,020^2-2\,019\times 2\,020$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.（6分）若$a^2-b^2=20$，求$[(a-b)^2+4ab][(a+b)^2-4ab]$的值.

16.（10分）（1）若$mx^2+19x-14$有一个因式是$x+7$，求m的值；

（2）已知多项式$2x^2-x+m$有一个因式是$2x+1$，求m的值.

（3）若关于x的多项式x^2-px-6含有因式$x-3$，求实数p的值.

17.（8分）若a，b，c为△ABC的三边，且满足$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，探索△ABC的形状，并说明理由.

18.（10分）[**中考·湘潭**]将多项式乘法$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$从右到左使用，即可得到用“十字相乘法”进行因式分解的公式：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

示例：$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

（1）尝试分解因式：$x^2+6x+8=(x+_____)\cdot(x+_____)$.

（2）请用上述方法解方程：$x^2-3x-4=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

再次领略数式的飞跃

再次领略数式的飞跃



第五章 分式与分式方程









核心考点

你将见到的

- 分式的基本性质
- 分式的运算
- 分式方程的解法
- 分式方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 换元法
- 倒数法
- 拆项法
- 转化思想
- 类比法
- 裂项相消法
- 整体思想
- 方程思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 认识分式

核心知识
- 分式的概念
- 分式有意义、无意义和值为 0 的条件
- 分式的基本性质
- 约分

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的概念

1. 定义 一般地，用 A，B 表示两个整式，$A\div B$ 可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式．如果 B 中含有字母，那么称 $\frac{A}{B}$ 为分式，其中 A 称为分式的分子，B 称为分式的分母．

分式的“三要素”：

（1）形如 $\frac{A}{B}$ 的式子；

（2）A，B 为整式；

（3）分母 B 中含有字母．

2. 分式与分数、整式的关系

（1）分式中分母含有字母．由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性；分数是分式中字母取特定值时的特殊情况．

（2）分式与整式的根本区别就是分式的分母中含有字母．

拨考向 利用分式的概念识别分式

例 1 下列各式中，哪些是分式？哪些是整式？

$\frac{4}{m}$，$-2x^2$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{\sqrt{x}}{2x^3+3}$，$\frac{3a+b}{2\pi}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$．

解题秘方：利用分式的“三要素”判断即可．

解：分式有 $\frac{4}{m}$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$；

整式有 $-2x^2$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{3a+b}{2\pi}$．

方法点拨：判断一个式子是否是分式时，首先要判断是不是 $\frac{A}{B}$ 的形式，其次判断 A，B 是不是整式，最后看分母中是不是含有字母．分式只注重形式而不注重结果，分母中含有字母是判断分式的必要条件．

提分·必记

特别解读

1. 分式可看成是两个整式的商，它的分子是被除式，分母是除式，分数线相当于除号，分数线还具有**括号作用**．
2. 判断一个式子是否是分式，不能将原式子进行变形后再判断，而必须按照本来“面目”进行判断．如：$\frac{3a^2}{a}$ 是分式．

提分·秘诀

特别警示

- 由于 $\frac{p^2}{p}$ 约分后为 p，所以容易误认为其是整式．
- $\frac{\sqrt{x}}{2x^3+3}$ 中，尽管分母中含有字母 x，但分子 $\sqrt{x}$ 不是整式，所以它既不是整式，也不是分式．
- π 是常数，不能当字母看，所以 $\frac{3a+b}{2\pi}$ 是整式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式有意义和无意义的条件

1. 分式有意义的条件

分式的分母表示除数，由于除数不能为 0，所以分式的分母不能为 0，即当 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义.

2. 分式无意义的条件

分式的分母为 0，即当 $B=0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 无意义.

拔考向▶ 利用分式有意义和无意义的条件确定字母的值或取值范围

题型 1：分式有意义的条件在求字母范围中的应用

例 2 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？

（1）$\frac{2x+1}{5x-3}$；　（2）$\frac{2}{|x|-1}$；

（3）$\frac{x+1}{x^2+3}$；　（4）$\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$.

解题秘方：分母的值不等于 0 时，分式有意义.

解：（1）当 $5x-3 \neq 0$，即 $x \neq \frac{3}{5}$ 时，分式 $\frac{2x+1}{5x-3}$ 有意义；

（2）当 $|x|-1 \neq 0$，即 $x \neq \pm 1$ 时，分式 $\frac{2}{|x|-1}$ 有意义；

（3）∵不论 x 取什么值，都有 $x^2+3 > 0$，

∴ x 取任何实数，分式 $\frac{x+1}{x^2+3}$ 都有意义；

（4）当 $(x-2)(x+4) \neq 0$，即 $x \neq 2$ 且 $x \neq -4$ 时，分式 $\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$ 有意义.

题型 2：分式无意义的条件在求字母值中的应用

例 3 分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 中的字母满足什么条件时，分式无意义？

解题秘方：分母的值等于 0 时，分式无意义.

解：要使分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 无意义，

则分母 $x^2-16=0$，

即 $x^2=16$，解得 $x=\pm 4$.

∴当 $x=\pm 4$ 时，分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 无意义.

提分·必记

特别提醒

1. 分母不为 0，并不是说分母中的字母不能为 0，而是表示分母的整式的值不能为 0；
2. 分式是否有意义，只与分式的分母是否为 0 有关，而与分式的分子是否为 0 无关.

提分·秘诀

解法提醒

根据“分式有意义的条件——分式的分母不等于 0”列不等式，求解得到分式有意义时字母的取值范围.

警示误区

只能对原分母进行讨论，不能先约分化简，否则会使取值范围扩大. 此题中，若约去 $x-2$，易错得当 $x \neq -4$ 时，分式有意义.

方法点拨

要使分式无意义，利用分母等于 0 的条件构造出方程求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 3 分式的值为 0 的条件

1. 分式的值为 0 的条件

当分式的分子等于 0 且分母不等于 0 时，分式的值为 0.

即：对于分式 $\frac{A}{B}$，当 $A=0$ 且 $B\neq 0$ 时，$\frac{A}{B}=0$.

2. 常见的几种特殊分式值情况讨论

（1）若 $\frac{A}{B}$ 的值为正数，则 $\begin{cases}A>0,\\B>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A<0,\\B<0;\end{cases}$

（2）若 $\frac{A}{B}$ 的值为负数，则 $\begin{cases}A>0,\\B<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A<0,\\B>0;\end{cases}$

（3）若 $\frac{A}{B}$ 的值为 1，则 $A=B$，且 $B\neq 0$；

（4）若 $\frac{A}{B}$ 的值为 -1，则 $A=-B$，且 $B\neq 0$.

核心考向▶ 利用分式的值为 0 的条件求字母的值

例 4 当 x 取何值时，下列分式的值为 0？

（1）$\frac{x+2}{2x-3}$；　　（2）$\frac{|x|-2}{x+2}$；

（3）$\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$；　　（4）$\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$.

解题秘方：分式的值为 0 的条件——分子为 0，分母不为 0.

解：（1）由 $\begin{cases}x+2=0,\\2x-3\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-2$，

∴当 $x=-2$ 时，分式 $\frac{x+2}{2x-3}$ 的值为 0.

（2）由 $\begin{cases}|x|-2=0,\\x+2\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=2$，

∴当 $x=2$ 时，分式 $\frac{|x|-2}{x+2}$ 的值为 0.

（3）由 $\begin{cases}3-|x|=0,\\(x-3)(x+1)\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-3$，

若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$.

∴当 $x=-3$ 时，分式 $\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$ 的值为 0.

（4）由 $\begin{cases}(x-1)(x-3)=0,\\x^2-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=3$，

若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.

∴当 $x=3$ 时，分式 $\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$ 的值为 0.

提分·必记

特别提醒

- 分式的值是在分式有意义的前提下才考虑的，所以分式 $\frac{A}{B}$ 的值为 0 的条件有两个——$A=0$，且 $B\neq 0$，二者缺一不可.
- 对于分式的几种特殊值的讨论，既要考虑分子，又要考虑分母.

提分·秘诀

教你一招

求分式值为 0 时字母值的方法：

1. 解题时可以先求出使分子为 0 的字母的值，再检验这个值是否使分母的值为 0. 当分母的值不为 0 时，这个值就是所要求的字母的值. 切记使分母为 0 的值必须舍去.
2. 若有多个值使分式的值为 0，则这几个值之间用“或”连接.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 分式的基本性质

1. 分式的基本性质

分式的分子与分母都乘（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变.

用字母表示为：$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$（$C\neq 0$）. 其中 A，B，C 是整式. 分式的基本性质是分式变形的理论依据.

2. 分式的符号法则

分式的分子、分母与分式本身的符号，同时改变其中两个，分式的值不变.

用字母表示为：

（1）$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$；

（2）$-\frac{A}{B}=-\frac{-A}{-B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$.



拔考向▶ 利用分式的基本性质对分式进行变形

题型 1：分式的基本性质在分式变形中的应用

例 5 写出下列等式中未知的分子或分母：

（1）$\frac{15x^2y}{25xy^2}=\frac{3x}{(\quad)}$；

（2）$\frac{a+2b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^2}$；

（3）$\frac{3x}{x^2-xy}=\frac{3}{(\quad)}$.

解题秘方：观察等号两边已知的分子或分母发生了什么样的变化，再根据分式的基本性质用相同的变化确定所要填的式子.

解：（1）中，右边的分子 $3x$ 是由左边的分子 $15x^2y$ 除以 $5xy$ 得到的，所以右边的分母可以由左边的分母 $25xy^2$ 除以 $5xy$ 得到，因此结果是 $5y$；

（2）中，右边的分母 a^2b^2 是由左边的分母 ab^2 乘 a 得到的，所以右边的分子可以由左边的分子 $a+2b$ 乘 a 得到，因此结果是 a^2+2ab；

（3）中，右边的分子 3 是由左边的分子 $3x$ 除以 x 得到的，所以右边的分母可以由左边的分母 x^2-xy 除以 x 得到，因此结果是 $x-y$.

答案：（1）$5y$

（2）a^2+2ab

（3）$x-y$

提分·必记

特别解读

1. “$B\neq 0$”是已知中隐含的条件，“$C\neq 0$”是在解题过程中另外附加的条件，在运用此性质时，必须重点强调“$C\neq 0$”这个前提.
2. 应用性质时，要理解“同”的含义：一是要同时进行“乘法”（或“除法”）运算；二是“乘”（或“除以”）的对象必须是同一个不等于 0 的整式.
3. 运用分式的基本性质进行分式的变形是恒等变形，它不改变分式值的大小，只改变其形式.

提分·秘诀

解法提醒

解决与分式的恒等变形有关的填空题时，一般从分子或分母的已知部分入手，先观察等号两边的分子或分母发生了怎样的变化，再通过对分母或分子进行相同的变形得到未知项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：分式的基本性质在改变分式的符号中的应用

例 6 不改变分式的值，使下列各分式的分子与分母都不含“−”号.

（1）$\frac{-4x}{-7y}$；（2）$\frac{-3n}{8m}$；（3）$\frac{c}{-a-b}$；（4）$-\frac{-x+y}{xy}$.

解题秘方：分式的分子、分母及分式本身这三处的符号，同时改变两处，分式的值不变.

解：（1）$\frac{-4x}{-7y}=\frac{4x}{7y}$；（2）$\frac{-3n}{8m}=-\frac{3n}{8m}$；

（3）$\frac{c}{-a-b}=-\frac{c}{a+b}$；（4）$-\frac{-x+y}{xy}=\frac{x-y}{xy}$.

题型 3：分式中字母的取值变化在对分式的值的影响中的应用

例 7 把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的 2 倍　　B. 不变

C. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$　　D. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$

解题秘方：将分式中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，再代入原分式，利用分式的基本性质变形.

解：把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，

可将分式变为$\frac{2\cdot 2n}{3(2m)^2-(2n)^2}=\frac{4n}{4(3m^2-n^2)}=\frac{n}{3m^2-n^2}$，

因此分式的值缩小为原来的$\frac{1}{2}$.

答案：C

题型 4：分式的基本性质在化系数为整数中的应用

例 8 不改变分式的值，把下列各式的分子和分母中的各项系数都化为整数.

（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}$；（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}$.

解题秘方：利用分式的基本性质将分子、分母同时乘同一个数，使系数都化为整数.

解：（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}=\frac{(0.01a-0.5b)\times 100}{(0.3a-0.04b)\times 100}=\frac{a-50b}{30a-4b}$；

（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\times 12}{\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y\right)\times 12}=\frac{6x+4y}{3x-4y}$.

警示误区

当分子、分母是多项式时，应将其看成一个整体，若分子或分母的首项系数是负数，应先提取“−”号并添加括号，注意此时多项式中的每一项都要变号，然后改变分式的符号.

方法点拨

解答此类问题，应先求出变化后的分式，然后运用分式的基本性质化简，再与原分式进行比较即可.

教你一招

利用分式的基本性质化系数为整数的方法：若各项系数都是小数时，则分子、分母同乘 10 的正整数倍；若各项系数都是分数，则分子、分母同乘分子和分母中所含分数的分母的最小公倍数；若各项系数既有小数又有分数时，则要先统一成小数或者分数，然后化为整数. 注意将系数化为整数的过程中不要漏项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 5 分式的约分

1. 分式的约分 把一个分式的分子和分母的公因式约去，这种变形称为分式的约分.

2. 找公因式的方法

（1）当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公约数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式；

（2）当分子、分母都是多项式时，先把多项式分解因式，再按（1）中的方法找公因式.

3. 约分的方法

（1）若分式的分子、分母都是单项式，就直接约去分子、分母的公因式；

（2）若分子或分母含有多项式，应先分解因式，再确定公因式并约去.

4. 最简分式 分子和分母没有公因式的分式，称为最简分式.

提分·必记

特别解读

1. 约分的依据是分式的基本性质，关键是确定分子和分母的公因式；
2. 约分是针对分式的分子和分母整体进行的，而不是针对其中的某些项，因此约分前一定要确认分子和分母都是乘积的形式；
3. 约分一定要彻底，其结果必须是最简分式或整式.

拔考向▶ 利用分式约分的方法对分式约分

题型 1：分式的约分在化简中的应用

例 9 化简下列分式：

（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}$；（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}$；（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}$.

解题秘方：（1）中的分子、分母都是单项式，可以直接约分；（3）中的分子、分母都是多项式，先将分子、分母分解因式，再进行约分.

解：（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}=-\frac{7a^2b^5\cdot 3ac}{7a^2b^5\cdot 8b^5d}=-\frac{3ac}{8b^5d}$；

（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}=\frac{(x-y)\cdot 1}{(x-y)(x-y)^2}=\frac{1}{(x-y)^2}$；

（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}=\frac{a(a-5)}{(5+a)(5-a)}=\frac{a(a-5)}{-(5+a)(a-5)}=-\frac{a}{5+a}$.

题型 2：最简分式的定义在识别最简分式中的应用

例 10 下列各式中，最简分式有_____.

$\frac{y}{2x}$，$\frac{m+n}{m^2-n^2}$，$\frac{9x+y}{45xy^2}$，$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$.

解题秘方：根据最简分式的概念识别.

解：$\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{(m+n)(m-n)}=\frac{1}{m-n}$；

$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}$. ∴最简分式为$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$.

答案：$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$

提分·秘诀

特别提醒

约分时需要注意的问题：

1. 注意发现分式分子和分母的一些隐含的公因式（如互为相反数的式子）；
2. 当分式的分子或分母的系数是负数时，可利用分式的基本性质，把负号提到分式的前面.

知识储备

判断最简分式的**唯一标准就是分式的分子与分母没有公因式**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的取值情况讨论分式的值与字母值的关系

挑战·高分

题型 1：分式的值为 1 或 -1 在求字母值中的应用

例 11 （1）当 $x=$_____时，分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 1；

（2）当 $x=$_____时，分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 -1.

解题秘方：根据分式的值为 ±1 列出方程，求出字母的值.

解：（1）∵分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 1，∴ $x-3=3-2x$，解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$3-2x=3-4=-1\neq0$.

（2）∵分式$\frac{x-3}{3-2x}$的值为 -1，

∴ $(x-3)+(3-2x)=0$，解得 $x=0$.

当 $x=0$ 时，$3-2x=3-0=3\neq0$.

答案：（1）2　（2）0

方法点拨

分式的值为 1 或 -1 时，分子和分母相等或互为相反数. 由此可列出方程，求分式中字母的值，同时要注意分母不为 0 这一隐含条件.

题型 2：分式的值为正或负在求字母的取值范围中的应用

例 12 当 x 为何值时，分式$\frac{x+2}{x-3}$的值为负数？

解题秘方：若要使分式的值为负数，则分子、分母异号.

解：由分式的值为负数，得$\begin{cases}x+2>0,\\x-3<0,\end{cases}$①或$\begin{cases}x+2<0,\\x-3>0.\end{cases}$②

解不等式组①，得 $-2<x<3$.

解不等式组②，无解.

∴当 $-2<x<3$ 时，分式$\frac{x+2}{x-3}$的值为负数.

思路点拨

求解分式的值为负数时字母取值范围的思路：当分式的值为负数时，分式的分子和分母异号，也就是分子为正、分母为负或分子为负、分母为正. 利用这两种情况分别列不等式组并求解，即可确定字母的取值范围.

题型 3：分式的值为整数在求字母值中的应用

例 13 若分式$\frac{4x-8}{x^2-4}$的值为整数，求整数 x 的值.

解题秘方：先化简分式，再由分子能被分母整除求出整数 x 的值.

解：$\frac{4x-8}{x^2-4}=\frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x+2}$.

∵分式的值为整数，x 为整数，

∴ $x+2$ 可取整数 -4，-2，-1，1，2，4.

∴ x 可取整数 -6，-4，-3，-1，0，2.

又∵ $x^2-4\neq0$，∴ $x\neq\pm2$.

∴整数 x 可取的值为 -6，-4，-3，-1，0.

方法点拨

若使分式的值为整数，则分式的分子是分母的整数倍. 化简后形如$\frac{n}{x+a}$（n 为非零整数，x，a 为整数）的分式的值为整数，$x+a$ 为 n 的因数. 求得 x 的值要代入原分式检验，保证原分式有意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用分式的基本性质求分式的值

题型 1：分式的基本性质在巧求值中的应用

例 14 已知$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，求分式$\frac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2}$的值.

解题秘方：由条件可知 $y\neq 0$，根据分式的基本性质将分式的分子和分母同时除以 y^2，使其转化为含$\frac{x}{y}$的式子，再代入已知数据即可求值.

解：由条件可知 $y\neq 0$，因此 $y^2\neq 0$，

$$\text{原式}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+1}=-4.$$

挑战·高分

技巧点拨

本题运用了**整体思想**求值. 关键是将所求分式利用分式的基本性质化为含有已知条件的式子，再整体代入求值.

题型 2：设比值在巧求分式的值中的应用

例 15 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$（其中 $x\neq 0$），求分式$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}$的值.

解题秘方：因为条件是以比相等的形式出现，所以可考虑设比值为 k，把待求式子转化为关于 k 的式子求值.

解：设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$（$k\neq 0$），则$\frac{x}{2}=k$，$\frac{y}{3}=k$，$\frac{z}{4}=k$，

$\therefore x=2k$，$y=3k$，$z=4k$，

$$\therefore\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}=\frac{4k+9k-12k}{4k-9k+12k}=\frac{k}{7k}=\frac{1}{7}.$$

解法提醒

本题运用了换元法求值. 当数学问题中出现或隐含比值相等的条件时，设比值为一个新字母，把问题转化为新字母的问题求解，往往可得到意想不到的效果.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是分式有意义或无意义的条件、分式的值为 0 的条件、分式的基本性质，这也是近年中考的热点，题目难度较小，多以选择题、填空题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用分式有意义的条件求字母的取值范围

例 16 [中考·武汉]若分式$\frac{1}{x+2}$在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是（　　）

A. $x>-2$　　B. $x<-2$

C. $x=-2$　　D. $x\neq -2$

试题评析：本题考查了分式有意义的条件，解题的关键是理解分式的分母不等于零.

解：由题意可得 $x+2\neq 0$，$\therefore x\neq -2$.

答案：D

冲刺·满分

考法点评

分式有意义的条件是分母不等于 0，通过解分母不等于 0 的不等式求字母的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分式的值为 0 的条件求字母的值

例 17 [中考·新疆]已知分式$\frac{x-1}{x+1}$的值是 0，则 x 的值是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

试题评析：分式的值为 0，则分子等于 0，同时分母不为 0，根据这两个条件求出 x 的值即可.

解：要使分式的值为 0，则 $x-1=0$，解得 $x=1$. 当 $x=1$ 时，分母 $x+1\neq0$，所以 x 的值为 1.

答案：C

考法点评

考查分式的值为 0 的条件，把握两点：一是解分子为零的方程；二是验证分母不为零.

考法 3 利用分式的基本性质进行化简求值

例 18 [中考·金华]若$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则$\frac{a+b}{b}=$_____.

试题评析：本题考查分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键.

思路点拨

分式的基本性质是分式约分的依据. 求分式的值时，若无法求出分式中字母的值，则可利用代入法，将分子、分母用同一个字母表示，然后利用分式的基本性质约分即可.

解：**方法一**　$\because\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

$\therefore\frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$.

方法二　$\because\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，$\therefore\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$.

设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=k\ (k\neq0)$，则 $a=2k$，$b=3k$，

$\therefore\frac{a+b}{b}=\frac{2k+3k}{3k}=\frac{5}{3}$.

答案：$\frac{5}{3}$

考法 4 约分

例 19 [中考·孝感]如图 5-1-1，图①是一个边长为 a 的正方形剪去一个边长为 1 的小正方形，图②是一个边长为 $(a-1)$ 的正方形，记图①、图②中阴影部分的面积分别为 S_1，S_2，则$\frac{S_1}{S_2}$可化简为_____.

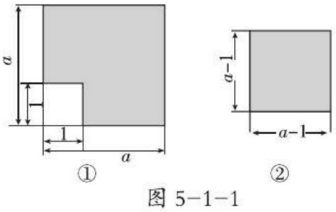


图 5-1-1

试题评析：本题主要考查的是分式的化简，依据题意列出式子是解题的关键.

解：由题可得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2-1}{(a-1)^2}=\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}$.

答案：$\frac{a+1}{a-1}$

考法点评

化简分式的关键就是约分，约分的关键是找公因式，而确定公因式的关键是对分子、分母进行因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见283页

1. [中考·常州]若代数式$\frac{x+1}{x-3}$有意义，则实数x的取值范围是（　　）

A. $x=-1$　B. $x=3$　C. $x\neq -1$　D. $x\neq 3$

2. [中考·滨州]下列分式中，最简分式是（　　）

A. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$　B. $\frac{x+1}{x^2-1}$

C. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy}$　D. $\frac{x^2-36}{2x+12}$

3. 把分式$\frac{x}{x+y}$（$x\neq 0$，$y\neq 0$）中的x，y同时扩大为原来的3倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的3倍　B. 缩小为原来的$\frac{1}{3}$

C. 扩大为原来的6倍　D. 不改变

4. [中考·莱芜]若x，y的值均扩大为原来的3倍，则下列分式的值保持不变的是（　　）

A. $\frac{2+x}{x-y}$　B. $\frac{2y}{x^2}$　C. $\frac{2y^3}{3x^2}$　D. $\frac{2y^2}{(x-y)^2}$

5. 下列式子：

①$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}$；②$\frac{b-a}{c-a}=\frac{a-b}{a-c}$；

③$\frac{|b-a|}{a-b}=-1$；④$\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{x-y}{x+y}$.

其中正确的有（　　）

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

6. 已知分式$\frac{x+1}{2-x}$，当x取a时，该分式的值为0，当x取b时，该分式无意义，则a^b的值等于（　　）

A. -2　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. 2

7. 若分式$\frac{1}{x^2-m}$不论x取任何实数总有意义，则m的取值范围是_____.

8. 当x取何值时，下列分式的值是零？

（1）$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$；（2）$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$.

9. 化简下列分式：

（1）$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}$；（2）$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

10. （1）分式$\frac{-x^2}{1-5x}$的值为负，求x的取值范围；

（2）当x满足什么条件时，分式$\frac{x+1}{2x+4}$的值为正？

11. [期末·濮阳]自学下面材料后，解答问题.

分母中含有未知数的不等式叫做分式不等式，如$\frac{x-2}{x+1}>0$，$\frac{2x-3}{x-1}<0$等.那么如何求出它们的解集呢？

根据我们学过的有理数除法法则可知，两数相除，同号得正，异号得负.其字母表达式为：

若$a>0$，$b>0$，则$\frac{a}{b}>0$；若$a<0$，$b<0$，则$\frac{a}{b}>0$；若$a>0$，$b<0$，则$\frac{a}{b}<0$；若

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$a<0$，$b>0$，则$\frac{a}{b}<0$.

反之，若$\frac{a}{b}>0$，则$\begin{cases}a>0,\\b>0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\b<0.\end{cases}$

若$\frac{a}{b}<0$，则$\begin{cases}a>0,\\b<0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\b>0.\end{cases}$

问题：

（1）求不等式$\frac{x-2}{x+1}<0$的解集.

（2）直接写出一个解集为$x>3$或$x<1$的最简分式不等式.　　【导学号：2850581】

12. [模拟·莒县]阅读下面的解题过程.

已知$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$，求$\frac{x^2}{x^4+1}$的值.

解：由$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$知$x\neq 0$，

$\therefore\frac{x^2+1}{x}=3$，即$x+\frac{1}{x}=3$.

$\therefore\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=3^2-2=7$.

故$\frac{x^2}{x^4+1}$的值为$\frac{1}{7}$.

该题的解法叫做“倒数法”，请你利用“倒数法”解决下面的题目.

已知$\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

素养提分　行动篇

类比·探索

学习一元一次不等式的解法，是与解一元一次方程对比进行的.由于两者标准形式类似（$ax+b=0$与$ax+b>0$或$ax+b<0$），解的依据都是类似的基本性质，因此，在学过一元一次方程的解法后，很容易通过类比，去研究一元一次不等式的解法.

当分式中分子与分母的字母以数值代替时，它就是分数.因此，我们可以通过与分数类比，来学习分式的性质与运算.

两类事物具有相同的结构、特征，当我们已经了解其中一类事物的某些属性后，往往可去认识、猜想另一类事物是否也具有类似的属性，这种思考问题的方法称为类比.

类比和归纳一样，也是科学研究中常用的方法，比如在人类对太空的探索中，发射探测器登陆火星，任务之一是了解火星上是否曾经有水的存在.因为火星与地球是同在太阳系中的行星，既然地球上有生物，那么火星上是否也有呢？而从地球上水是生命之源推测，如果火星上有过水，也可能存在过生物.

类比可启发我们去猜想、去思考，因此，我们要学会用类比的思想方法去发现新问题，探索新规律.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 分式的乘除法

核心知识

- 分式的乘除
- 分式的乘方
- 分式乘除、乘方混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的乘法

1. 分式的乘法法则 两个分式相乘，把分子相乘的积作为积的分子，把分母相乘的积作为积的分母.

用字母表示为：$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$.

2. 法则的运用方法

（1）若分子、分母都是单项式，可直接利用乘法法则运算后再约分；

（2）若分子、分母中有多项式，可先对分子、分母因式分解，约分后，再进行乘法运算；

（3）若分式乘整式，可把整式看成分母为 1 的“分式”参与运算.

拨考向 利用分式的乘法法则进行分式乘法计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}$；　　（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)$；

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}$.

解题秘方：利用分式的乘法法则进行计算.

解：（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}=\frac{15x^2y^2}{12x^3y}=\frac{5y}{4x}$；

（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)=-\frac{6x^2}{5y}\cdot4xy^2=-\frac{24x^3y}{5}$；

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{(a+b)(a-b)}=\frac{3a}{2(a-b)}$.

提分·必记

特别解读

分式乘法运算的基本步骤：

第一步，确定积的符号，写在积中分式的前面；

第二步，运用法则，将分子与分子相乘，分母与分母相乘，多项式要带括号；

第三步，约分，将结果化成最简分式或整式.

提分·秘诀

解法提醒

对于分式的结果，要注意以下两点：

1. 结果必须是最简分式或整式；

2. 不能把 $\frac{b}{-a}$ 作为结果，要运用分式的符号法则写成 $-\frac{b}{a}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式的除法

1. 分式的除法法则 两个分式相除，把除式的分子和分母颠倒位置后再与被除式相乘.

用字母表示为：$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$.

2. 法则的运用方法

（1）分式的除法需转化成乘法，再利用分式乘法法则计算；

（2）当除式是整式时，可以将整式看成分母是 1 的“分式”进行运算.

拔考向▶ 利用分式的除法法则进行分式除法计算

例 2 计算：

（1）$\frac{ab^3}{2c^2} \div \frac{-5a^2b^2}{4cd}$；　（2）$\frac{2x^2}{3y} \div (-2xy^2)$；

（3）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2} \div \frac{a^2-1}{a^2+2a}$.

解题秘方：运用分式的除法法则将分式的除法运算转化为分式的乘法运算.

解：（1）$\frac{ab^3}{2c^2} \div \frac{-5a^2b^2}{4cd} = \frac{ab^3}{2c^2} \cdot \frac{4cd}{-5a^2b^2} = \frac{2bd}{-5ac} = -\frac{2bd}{5ac}$；

（2）$\frac{2x^2}{3y} \div (-2xy^2) = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{1}{-2xy^2} = -\frac{2x^2}{6xy^3} = -\frac{x}{3y^3}$；

（3）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2} \div \frac{a^2-1}{a^2+2a}$

$= \frac{-(a-1)^2}{a+2} \cdot \frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)}$

$= \frac{-a(a-1)}{a+1} = -\frac{a^2-a}{a+1}$.

提分·必记

特别提醒

分式除法运算的基本步骤：

第一步，将分子、分母是多项式的进行因式分解，并约分；

第二步，将除法转化成乘法；

第三步，利用分式的乘法法则计算.

提分·秘诀

特别提醒

1. 分式的除法与分数的除法类似，可类比分数的除法学习.
2. 分式的除法法则是数学转化思想的具体体现，即把除法运算转化为乘法运算.
3. 运算的结果应为最简分式或整式.

点知识▶ 3 分式的乘方

1. 分式的乘方法则 分式乘方，要把分子、分母分别乘方.

用字母表示为：$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$（$n$ 为正整数）.

2. 分式乘方的方法

（1）分式乘方时，确定乘方结果符号的方法与有理数乘方确定结果符号的方法相同；

（2）分式乘方时，一定要将分式的分子、分母分别乘方，不能将$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$错写成$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b}$；

（3）分式乘方时，若分式的分子与分母是多项式，应把分子、分母分别看成一个整体乘方，避免出现$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$的错误.

提分·必记

特别解读

1. 分式乘方是分式乘法中因式相同时的一种特殊情况，因此分式乘方都可转化为分式乘法进行计算.
2. 学习了分式乘方法则后，直接可用法则进行计算，在计算时先确定结果的符号，再把分子、分母分别乘方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用分式的乘方法则进行分式乘方计算

例 3 计算：

（1）$\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4$；　　（2）$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3$；

（3）$\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3$；　　（4）$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$.

解题秘方：先运用分式乘方的法则将分子、分母分别乘方，再运用幂的乘方和积的乘方的性质计算.

解：（1）$\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4=\frac{(2x^2y)^4}{(-z^2)^4}=\frac{16x^8y^4}{z^8}$；

（2）$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}=-\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$；

（3）$\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3=\frac{(xy)^3}{(x-y)^3}=\frac{x^3y^3}{(x-y)^3}$；

（4）$\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$

$=\frac{[(a+b)(a-b)]^2}{(ab)^2}$

$=\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2b^2}$.

提分·秘诀

特别警示

在进行乘方运算时，必须将分子、分母整体分别乘方，当分式中含有“-”号时，要特别注意符号问题.

误答 1

$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{-3c^2}$

$=-\frac{a^{12}b^6}{3c^2}$，忘记将分母乘方

误答 2

$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}$

$=\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$.

负数的奇次方为负，结果应为负

点知识▶4 分式的乘除、乘方混合运算

1. 分式的乘除混合运算

在运算时，乘除是同一级运算，若没有其他附加条件（如括号等），应按照从左到右的顺序进行计算，若有括号，则先算括号里面的. 一般地，乘除混合运算可以统一为乘法运算.

2. 分式的乘除、乘方混合运算

分式的乘除、乘方混合运算顺序与分数的乘除、乘方混合运算顺序相同，即先乘方，再乘除，有括号的先算括号里面的.

提分·必记

知识链接

1. 分式的乘除、乘方混合运算关键有两点：一是正确选择运算顺序；二是正确运用运算法则.
2. 运算的结果应化为最简分式或整式.

拔考向▶利用分式的乘除运算及乘方法则进行分式的混合运算

题型 1：分式的乘除法则在乘除混合运算中的应用

例 4 计算：

（1）$\frac{8xy}{9a^2b}\div\frac{2x}{3b}\cdot\frac{3ab^2}{2x^3y}$；

（2）$\frac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\frac{x^2-1}{4-x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：将分式乘除混合运算统一为分式乘法运算．

解：（1）$\dfrac{8xy}{9a^2b}\div\dfrac{2x}{3b}\cdot\dfrac{3ab^2}{2x^3y}$

$=\dfrac{8xy}{9a^2b}\cdot\dfrac{3b}{2x}\cdot\dfrac{3ab^2}{2x^3y}$

$=\dfrac{2b^2}{ax^3}$；

（2）$\dfrac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\dfrac{x^2-1}{4-x}$

$=\dfrac{3x-12}{1-2x+x^2}\cdot\dfrac{1}{x+1}\cdot\left(-\dfrac{x^2-1}{x-4}\right)$

$=-\dfrac{3(x-4)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-4)}$

$=-\dfrac{3}{x-1}$．

题型 2：分式的乘除、乘方法则在乘除、乘方混合运算中的应用

例 5 计算：

（1）$\left(\dfrac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{ab}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3c}{2a}\right)^3$；

（2）$\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\div\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3$．

解题秘方：先乘方，再乘除，有括号的先算括号里面的．

解：（1）$\left(\dfrac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2\div\left(\dfrac{1}{ab}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3c}{2a}\right)^3$

$=\dfrac{4c^6}{9a^2b^4}\div\dfrac{1}{a^3b^3}\cdot\left(-\dfrac{27c^3}{8a^3}\right)$

$=\dfrac{4c^6}{9a^2b^4}\cdot a^3b^3\cdot\left(-\dfrac{27c^3}{8a^3}\right)$

$=-\dfrac{3c^9}{2a^2b}$；

（2）$\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\div\left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3$

$=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\div\dfrac{(x+y)^3}{x^3}$

$=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{xy}{(y-x)^2}\cdot\dfrac{x^3}{(x+y)^3}$

$=\dfrac{x^2}{xy+y^2}$．

提分·秘诀

技巧提醒

分式乘除混合运算的解题步骤：在分式的乘除混合运算中，一定要先将乘除混合运算统一成乘法运算，再按分式乘法法则进行计算，能分解因式的，要分解因式，这样便于约分，计算结果应是最简分式或整式．

解法提醒

分式乘除、乘方混合运算的解题步骤：在分式乘除、乘方的混合运算中，先计算乘方，再计算乘除；乘、除是同一级运算，要按照从左到右的运算顺序计算；当分式中的分子、分母是多项式且能分解因式时，还要分解因式，以达到约分的目的．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的定义法选取分式的化简求值中字母的值

例 6 先化简，再求值：$\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$．选一个合适的数作为 a 的值代入求值．

解题秘方：利用分式的乘除法则进行化简，再取适合字母的值代入．

解：$\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$

$=\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a}$

$=2a+2$.

取 $a=3$，原式 $=2\times3+2=8$.

挑战·高分

特别警示

对于字母开放式取值，不能只关注化简结果的式子有意义，还应该关注原式有意义．在原式中，既要注意不能使各个分式的分母为 0，也不能使除式 $\frac{a}{a^2-1}$ 的值为 0，故 a 不能取 -2，-1，0，1，2.

拔尖角度 2 利用建立分式的模型法对实际应用进行说理

例 7 为了美化环境，需要在某块空地上种植 m 棵树．若甲队单独植树，需要 n（$n>1$）天才能完成，若乙队单独植树，完成这项工程的时间比甲队的 2 倍多 1 天，则甲队每天植树的数量是乙队的 3 倍吗？请说明理由．

解题秘方：利用分式表示甲、乙两队每天植树的数量，再用除法求出甲队每天植树数量与乙队每天植树数量的比值，然后进行判断．

解：甲队每天植树的数量不是乙队的 3 倍．

由题意可知，甲队每天植树的数量为 $\frac{m}{n}$，乙队每天植树的数量为 $\frac{m}{2n+1}$，则 $\frac{m}{n}\div\frac{m}{2n+1}=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n+1}{m}=\frac{2n+1}{n}$.

$\because n>1$，$\therefore 2n+1<3n$. $\therefore\frac{2n+1}{n}<\frac{3n}{n}$，即 $\frac{2n+1}{n}<3$.

挑战·高分

方法点拨

若实际问题中的某些量都是用分式表示的，则这些量之间的倍数关系应用分式的除法结果来揭示．

详解

$\because n>1$，

$\therefore 2n+1<n+2n$，

即 $2n+1<3n$.

拔尖角度 3 利用字母取值法说明分式的乘方、乘除运算中的现象

例 8 在解答题目“已知 $x=2\,021$，求 $\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 的值”时，小明误将 $x=2\,021$ 看成了 $x=2\,020$，但算出的结果仍然正确，你能解释原因吗？

解题秘方：先化简，然后观察化简结果．

解：$\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\cdot\frac{2x^3}{x(x+3)}\cdot\frac{1}{x^2}=2$.

因为原式化简后的结果是常数 2，与 x 的值无关，因此小明误将 $x=2\,021$ 看成了 $x=2\,020$，其结果仍然是正确的．

挑战·高分

方法点拨

一般情况下，分式的值与分式中字母的取值有关，若字母取不同的值，分式的值相同，说明化简后的式子中不含字母．若字母取的值互为相反数，分式的值相同，则化简结果可能有两种情况：一是含字母的幂是偶次幂，二是不含字母．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查分式的乘除、乘方的混合运算，在中考中，题目主要有分式的计算和分式的化简求值两种，简单的分式计算题以选择题形式考查，化简求值题以解答题形式考查.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用分式的乘除法法则进行辨析

例9 [中考·河北]老师设计了接力游戏，用合作的方式完成分式化简，规则是：每人只能看到前一人给的式子，并进行一步计算，再将结果传递给下一人，最后完成化简.过程如图5-2-1.

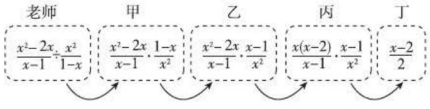


图5-2-1

接力中，自己负责的一步出现错误的是(　　)

A. 只有乙　　B. 甲和丁　　C. 乙和丙　　D. 乙和丁

试题评析：本题主要考查分式的乘除法，解题的关键是掌握分式乘除运算法则.

解：$\because\frac{x^2-2x}{x-1}\div\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x^2}=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x^2}$,

$\therefore$乙出现错误.

又$\because\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x(x-2)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-2}{x}$,

$\therefore$丁出现错误.

即出现错误的是乙和丁.

答案：D

考法2 利用分式的乘除法法则进行化简求值

例10 [中考·巴中]已知实数x，y满足$\sqrt{x-3}+y^2-4y+4=0$，求代数式$\frac{x^2-y^2}{xy}\cdot\frac{1}{x^2-2xy+y^2}\div\frac{x}{x^2y-xy^2}$的值.

试题评析：本题主要考查利用分式的乘除法法则进行分式的化简求值.正确化简分式及根据条件求出字母的值是解题的关键.

解：(1)$\because\sqrt{x-3}+y^2-4y+4=0$,

$\therefore\sqrt{x-3}+(y-2)^2=0$.

又$\because\sqrt{x-3}\geqslant0$，$(y-2)^2\geqslant0$,

$\therefore\sqrt{x-3}=0$，$(y-2)^2=0$,

即$x-3=0$，$y-2=0$,

解得$x=3$，$y=2$.

思路点拨

根据分式的乘除运算步骤和运算法则逐一计算即可判断.

方法点拨

分式的化简求值是中考中常考题型，解决此类题关键有三步：

第一步，运用分式的运算法则对分式进行化简，最后结果是最简分式或整式；

第二步，根据条件求出化简后分式或整式中字母的取值；

第三步，代入求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\therefore \frac{x^2-y^2}{xy}\cdot\frac{1}{x^2-2xy+y^2}\div\frac{x}{x^2y-xy^2}$$
$$=\frac{(x+y)(x-y)}{xy}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}\cdot\frac{xy(x-y)}{x}$$
$$=\frac{x+y}{x}$$
$$=\frac{3+2}{3}$$
$$=\frac{5}{3}.$$

两年模拟兵法

☞答案见284页

1. [中考·江西]计算$(-a)^2\cdot\frac{b}{a^2}$的结果为(　　)

A. b　　B. $-b$　　C. ab　　D. $\frac{b}{a}$

2. [中考·济南]化简$\frac{2}{x^2-1}\div\frac{1}{x-1}$的结果是(　　)

A. $\frac{2}{x+1}$　　B. $\frac{2}{x}$

C. $\frac{2}{x-1}$　　D. $2(x+1)$

3. [中考·曲靖]下列计算正确的是(　　)

A. $a^2\cdot a=a^2$　　B. $a^6\div a^2=a^3$

C. $a^2b-2ba^2=-a^2b$　　D. $\left(-\frac{3}{2a}\right)^3=-\frac{9}{8a^3}$

4. 若式子$\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}$有意义，则$x$的取值范围是_____.

5. 已知分式$\frac{x^2-y^2}{x}$乘一个分式后结果为$-\frac{(x-y)^2}{x^2}$，则所乘分式为_____.

6. 计算：

(1) $\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\div\frac{5xym}{3n}$;

(2) $\frac{a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a-1}{a^2+4a+4}\div\frac{1}{a+2}$;

(3) $\frac{1}{x-1}\div(x+2)\cdot\frac{x-1}{x+2}$.

7. 计算：

(1) $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{1}{ab}\right)^3$;

(2) $\frac{m^2-n^2}{(m-n)^2}\cdot\left(\frac{n-m}{mn}\right)^2\div\frac{m+n}{m}$;

(3) $\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\div(x+y)^2\cdot\left(\frac{x}{x-y}\right)^3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 甲、乙两个工程队合修一条公路，已知甲工程队每天修(a^2-4) m，乙工程队每天修$(a-2)^2$ m（其中$a>2$），则甲工程队修900 m所用时间是乙工程队修600 m所用时间的多少?

9. 有这样一道题：计算$\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\dfrac{2x-2}{x+1}$的值，其中$x=2\,019$. 甲同学把“$x=2\,019$”错抄成“$x=2\,091$”，但他的计算结果也正确，你说这是怎么回事? 【导学号：2850581】

10. 已知$a^2+b^2-4a+6b+13=0$，求$\dfrac{a^2-6a+9}{4-b^2}\div\dfrac{3-a}{2+b}\cdot\dfrac{a^2}{3a-9}$的值.

11. 化简$\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}\div\dfrac{x-1}{x}$，并判断当$x$满足不等式组$\begin{cases}x+2<1,\\2(x-1)>-6\end{cases}$时该式的符号.

12. 已知一列分式：

$\dfrac{x^3}{y}$，$-\dfrac{x^5}{y^2}$，$\dfrac{x^7}{y^3}$，$-\dfrac{x^9}{y^4}$，…，其中$xy\neq 0$.

（1）从第2个分式开始，用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式，你发现了什么规律?

（2）根据你发现的规律，试写出第7个分式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 分式的加减法

核心知识
- 通分
- 分式的加减法
- 分式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同分母分式的加减法

1. 同分母分式的加减法法则

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减.

用字母表示为：$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}$.

2. 同分母分式相加减的一般步骤

（1）分母不变，把分子相加减；

（2）分子相加减时，应先去括号，再合并同类项；

（3）结果应化成最简分式或整式.

提分·必记

特别解读

“分子相加减”就是把各个分式的分子整体相加减.在计算时，各分子都应用括号括起来.若分子是系数为正的单项式，括号可以省略；若分子是多项式，且分子相减时，括号不能省略，否则容易出现符号错误.

拨考向 利用同分母分式相加减的法则计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}$；

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}$；

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}$.

解题秘方：按照同分母分式的加减法法则进行计算即可，结果要化为最简分式或整式.

解：（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}=\frac{(x-y)-(x+y)}{2xy^2}=\frac{-2y}{2xy^2}=-\frac{1}{xy}$；

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{4x-4y}{x^2-y^2}=\frac{4(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{4}{x+y}$；

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}=\frac{a+2b}{b-a}-\frac{b}{b-a}-\frac{2a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$.

提分·秘诀

警示误区

同分母分式相加减的三大易错点：

1. 当分母不是相同而是相反时，不能直接相加减，而应将分母统一，同时中间的运算符号随之改变，“+”号变“−”号，“−”号变“+”号；
2. 当分子是多项式，对分子进行加减时，先要带括号，再去括号；
3. 加减运算后，对运算的结果要化简，最后的结果应是最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 分式的通分

1. 分式的通分

根据分式的基本性质，异分母的分式可以化为同分母的分式，这一过程称为分式的通分.

2. 最简公分母

通分时，一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母，这样的公分母叫做最简公分母.

3. 通分的一般步骤

（1）确定最简公分母；

（2）用最简公分母分别除以各分母求商；

（3）用所得的商分别乘各分式的分子、分母，得出同分母分式.

拔考向▶利用通分的方法步骤对分式进行通分

例2 把下列各组分式通分：

（1）$\frac{5}{6x^2yz^3}$，$\frac{3}{4x^3y^2z}$；

（2）$\frac{1}{x+1}$，$\frac{1}{x-1}$；

（3）$\frac{a}{x-y}$，$\frac{b}{3y-3x}$，$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}$.

解题秘方：先确定最简公分母，然后再通分.

解：（1）最简公分母是 $12x^3y^2z^3$，

$$\frac{5}{6x^2yz^3}=\frac{5\cdot 2xy}{6x^2yz^3\cdot 2xy}=\frac{10xy}{12x^3y^2z^3},$$

$$\frac{3}{4x^3y^2z}=\frac{3\cdot 3z^2}{4x^3y^2z\cdot 3z^2}=\frac{9z^2}{12x^3y^2z^3}.$$

（2）最简公分母是 $(x+1)(x-1)$，

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1},$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x^2-1}.$$

（3）最简公分母是 $3(x-y)^2$，

$$\frac{a}{x-y}=\frac{a\cdot 3(x-y)}{(x-y)\cdot 3(x-y)}=\frac{3a(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{b}{3y-3x}=-\frac{b}{3(x-y)}=-\frac{b\cdot(x-y)}{3(x-y)\cdot(x-y)}=-\frac{b(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}=\frac{c}{(x-y)^2}=\frac{c\cdot 3}{(x-y)^2\cdot 3}=\frac{3c}{3(x-y)^2}.$$

提分·必记

特别解读

约分与通分的联系与区别：

1. 约分与通分都是对分式进行恒等变形，即变形之后每个分式的值都不变.
2. 约分是针对一个分式来说的，约分可使分式得以化简，而通分是针对两个或两个以上的分式来说的，通分可使异分母的分式化为同分母的分式.

提分·秘诀

方法点拨

确定最简公分母的一般方法：

1. 如果各分母都是单项式，那么最简公分母就是由各分母系数的最小公倍数、各分母相同字母的最高次幂，以及各分母所有不同字母及其指数的乘积这三部分组成.
2. 如果各分母中有多项式，就先把分母中的多项式分解因式，再按照分母都是单项式时求最简公分母的方法，从系数、相同因式、不同因式三个方面去确定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 异分母分式的加减法

1. 异分母分式的加减法法则

异分母的分式相加减，先通分，化为同分母的分式，然后再按同分母分式的加减法法则进行计算.

用字母表示为：$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\pm\frac{ad}{ac}=\frac{bc\pm ad}{ac}$.

2. 异分母分式相加减的一般步骤

（1）**通分**：将异分母分式转化为同分母分式.

（2）**加减**：按照同分母分式加减运算的一般步骤进行计算.

注意异分母分式加减运算的关键是通分.

提分·必记

特别解读

通分的关键是确定最简公分母，分式与分式相加减时的最简公分母是各分母的**所有因式的最高次幂的积**.

拔考向▶ 利用异分母分式相加减的法则计算

例 3 计算：

（1）$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$；　　（2）$a+2-\frac{a^2}{a-2}$.

解题秘方：异分母分式相加减，先找最简公分母进行通分，变为同分母分式后，再按照同分母分式的加减法法则进行计算.

解：（1）$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3}{x-4}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{24-3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3x+12}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3(x-4)}{(x+4)(x-4)}$

$=-\frac{3}{x+4}$；

（2）$a+2-\frac{a^2}{a-2}$

$=\frac{(a+2)(a-2)}{a-2}-\frac{a^2}{a-2}$

$=\frac{a^2-4-a^2}{a-2}$

$=-\frac{4}{a-2}$.

在通分时，整式看成分母是1，整式作为分子的“分式”，若是多项式时，则看成一个整体；通分时要带上括号.

提分·秘诀

特别提醒

1. 通分时，若要改变某个因式的符号，可利用分式的符号变化规律进行变换.如本题，将分母“4-x”变为“x-4”，提出的“-”号放在分式的前面，使本来的“+”号变为“-”号.
2. 类似同分母相加减，分子是多项式的注意带上括号.
3. 最后运算的结果应是最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 4 分式的混合运算

1. 分式的混合运算顺序

分式的混合运算与分数的混合运算有相同的运算顺序，即先乘方，再乘除，然后加减．有括号时，先进行括号内的运算，按照小括号、中括号、大括号的顺序进行．对于同级运算，按从左到右的顺序进行．

2. 分式混合运算的方法

（1）进行分式混合运算时，可以根据需要合理地运用运算律来简化运算，如先将分式的乘除法统一成乘法，分式的加减法统一成加法，再使用乘法运算律、加法运算律简化运算．

（2）运算过程中及时约分化简，有时可使解题过程更为简单．

注意：运算结果是最简分式或整式．

考向▶ 利用分式的混合运算顺序进行计算

例 4 计算：

（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$；

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$．

解题秘方：在进行分式的混合运算时，应先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号时要先算括号里面的．

解：（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$

$=\dfrac{a(a+2)}{(a+2)(a-2)}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\dfrac{4a^2}{(a-2)^2}$

$=\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{4a}{a-2}$

$=-\dfrac{3a}{a-2}$；

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\left[\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}\right]$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\dfrac{9b^2-a^2}{a-2b}$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\cdot\dfrac{a-2b}{(3b-a)(3b+a)}$

$=-\dfrac{a-3b}{a^2+3ab}$．

方法点拨：分式的计算应先分清运算顺序，再按分式的运算法则进行计算，当某一项是整式时，可将此项看成分母为 1 的式子．

提分·必记

特别提醒

1. 分式混合运算要注意运算顺序和解题步骤，把好符号关．
2. 分式除法只有转化为乘法后，才能运用乘法分配律进行计算．

提分·秘诀

详解剖析

1. 若将 a 与 $2b$ 单独通分，则形式为 $\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{a(a-2b)}{a-2b}-\dfrac{2b(a-2b)}{a-2b}$．
2. 若将 a 与 $2b$ 的运算看成一个整体进行通分，则形式为 $\dfrac{5b^2}{a-2b}-(a+2b)=\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}$．

方法点拨

1. 有理数的运算顺序及运算律对分式运算同样适用．
2. 分式的混合运算中，要注意各分式中分子、分母符号的处理，结果中分子或分母的系数是负数的，要把“−”号提到分式的前面．
3. 所有的分式运算，结果必须达到最简．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用对应项系数相等法巧求分式中待定字母的值

挑战·高分

例5 已知$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$，则$A=$_____，$B=$_____，$C=$_____.

解题秘方：先利用分式的加减法法则进行恒等变形，再求待定字母的值.

解：$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}=\frac{4}{x(x^2+4)}$.

∵左右两边恒等，且分母相同，故分子也应恒等，即$(A+B)x^2+Cx+4A=4$，

$\therefore\begin{cases}A+B=0,\\C=0,\\4A=4.\end{cases}$解得$\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=0.\end{cases}$

答案：1；−1；0

方法点拨

1. 解这类题时，首先对等式左、右两边通分，并各自进行加减运算，由于通分后左、右两边的分母相同，所以左、右两边的分子相等，然后构造方程或方程组来确定待定字母的值.
2. 解这类题也可利用恒等式的定义，任取x的三个值（使分式有意义），列出方程组，求出待定字母的值.

拔尖角度 2 利用建立模型法用分式解实际问题

挑战·高分

例6 王红和李丽一个月里两次同时到一家粮油商店去买油，两次的油价有变化，其中第一次的油价为a元/kg，第二次的油价为b元/kg，但她们两人的购买方式不一样，王红每次买相同质量的油，而李丽每次只拿出相同数量的钱去买油.问：两种买油方式，哪一种较合算？

解题秘方：分别求出王红、李丽两次购买油的平均价格，作差进行比较.

解：设王红每次买相同质量的油为1 kg，李丽每次拿出相同数量的钱为“1”.由题意可知，王红买的油平均每千克花了$\frac{a+b}{2}$元，李丽买的油平均每千克花了$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$元，则$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{2(a+b)}-\frac{4ab}{2(a+b)}=\frac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

∵a，b都为正数，∴$a+b$是正数.

由题意知$a\neq b$，∴$(a-b)^2$是正数.

$\therefore\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$是正数，即$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}>0$.

$\therefore\frac{a+b}{2}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

因此，两种买油方式，李丽的购买方式较合算.

知识储备

作差法：作差法是比较两个数或两个式子的大小的常用方法.

当$a-b>0$时，$a>b$；

当$a-b=0$时，$a=b$；

当$a-b<0$时，$a<b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用倒数法巧求分式的值

挑战·高分

例 7 已知 a，b，c 为实数，且 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$，$\frac{ac}{c+a}=\frac{1}{5}$，求 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值.

解题秘方：先对三个等式分别取倒数，相加后通分，再取倒数即得结果.

解：$\because \frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，

$\therefore a$，b 均不为 0，且 $\frac{a+b}{ab}=3$.

$\therefore \frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=3$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$ ①.

同理可得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=4$ ②，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=5$ ③.

①+②+③，得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=12$.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$，即 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=6$.

$\therefore \frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{6}$.

技巧点拨

利用倒数法求分式值的思路：涉及分式的分子是单项式，分母是多项式的求值问题时，直接求解往往有困难，此时可考虑求它的倒数，将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的加减法，综合题目条件求解.

拔尖角度▸ 4 利用拆项法巧妙运算

挑战·高分

例 8 （1）由 $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，…，你能总结出 $\frac{1}{n(n+1)}$（n 为正整数）的结果吗？

（2）化简：$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+8)(x+9)}$.

解题秘方：从数的运算猜想到式的规律，利用分式的加减法进行规律论证和运用.

解：（1）$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

（2）$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+8)(x+9)}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+9}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}$

$=\frac{9}{x^2+9x}$.

解法提醒

- 拆项法是把一个常数（或分式）拆为两个数（或分式）的和或差的形式，从而使问题得以解决的方法. 本题是逆用分式减法进行拆项.
- 本题体现了“从特殊到一般”探究规律的过程，注意猜想的结果要用所学的知识论证. 本题总结的结论“$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$”可以用分式的减法转化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节重点是分式的加减法及分式的混合运算，在中考中，主要考查分式的计算和分式的化简求值，其中分式的化简求值是中考的热点，多以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用分式的加减法法则进行分式加减运算

例 9 [中考·吉林]某学生化简分式$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}$时出现了错误，解答过程如下：

$$\text{原式}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第一步})$$
$$=\frac{1+2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第二步})$$
$$=\frac{3}{x^2-1}.\ (\text{第三步})$$

（1）该学生的解答过程是从第_____步开始出错的，其错误原因是_____；

（2）请写出此题正确的解答过程.

试题评析：本题主要考查了分式的加减法运算，正确掌握分式的加减法法则是解题的关键.

解：（1）一；分式的基本性质用错

（2）原式$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$.

考法 2 利用分式的混合运算求值

例 10 [中考·北京]如果$a-b=2\sqrt{3}$，那么式子$\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-b\right)\cdot\frac{a}{a-b}$的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

试题评析：本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

解：原式$=\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-\frac{2ab}{2a}\right)\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{2a}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{a-b}{2}$,

当$a-b=2\sqrt{3}$时，原式$=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

答案：A

冲刺·满分

解法点评

分式的加减法计算，要先分清是同分母还是异分母，其中分母互为相反数可变为同分母，若是异分母，必须先通分，然后运用同分母分式加减法的法则进行化简.

解法提醒

分式的化简求值一般是先化简再求值. 化简的过程就是分式混合运算的过程，求值的过程就是求式子值的过程. 若已知的是字母关系式的值，则可考虑用**整体代入法**求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·攀枝花]化简 $\frac{m^2}{m-n}+\frac{n^2}{n-m}$ 的结果是(　　)

A. $m+n$　　B. $n-m$

C. $m-n$　　D. $-m-n$

2. [中考·威海]化简 $\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{1}{x-3}$　　B. $\frac{1}{x+3}$

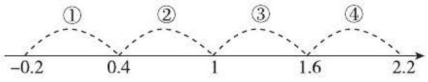
C. $\frac{1}{3-x}$　　D. $\frac{3x+3}{x^2-9}$

3. 化简 $\left(1+\frac{4}{a-2}\right)\div\frac{a}{a-2}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{a+2}{a}$　　B. $\frac{a}{a+2}$

C. $\frac{a-2}{a}$　　D. $\frac{a}{a-2}$

4. [中考·河北]如图,若 x 为正整数,则表示 $\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x+1}$ 的值的点落在(　　)



(第4题)

A. 段①　B. 段②　C. 段③　D. 段④

5. 若 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$,则 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ 的值为_____.

6. 设 a,b 是实数,且 $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$,则 $\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}$ 的值是_____.

7. [中考·杭州]化简:$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1$.

圆圆的解答如下:

$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-1=4x-2(x+2)-(x^2-4)=-x^2+2x$.

圆圆的解答正确吗?如果不正确,写出正确的解答.

8. [中考·南通]先化简,再求值:$\left(m+\frac{4m+4}{m}\right)\div\frac{m+2}{m^2}$,其中 $m=\sqrt{2}-2$.

9. [中考·张家界]先化简,再求值:$\left(\frac{2x-3}{x-2}-1\right)\div\frac{x^2-2x+1}{x-2}$.然后从0,1,2三个数中选择一个恰当的数代入求值.　【导学号:2850581】

10. [中考·滨州]先化简,再求值:$\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\div\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$.其中 x 是不等式组 $\begin{cases}x-3(x-2)\leqslant 4,\\ \frac{2x-3}{3}<\frac{5-x}{2}\end{cases}$ 的整数解.

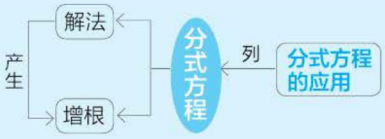
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4 分式方程

核心知识

- 分式方程的概念
- 分式方程的解法
- 分式方程的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式方程的概念

1. 定义

分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

2. 判断一个方程是分式方程的条件



（1）是方程；

（2）含有分母；

（3）分母中含有未知数.

以上三者缺一不可.

拨考向 利用分式方程的概念识别分式方程

例 1 判断下列方程是不是分式方程，并说明理由：

（1）$\frac{2x+3}{2}=8$；

（2）$\frac{3}{4-x}=\frac{4}{x+2}$；

（3）$\frac{x^2}{x}=1$；

（4）$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{y-3}$；

（5）$\frac{x}{a}-2=x$（a 为非零常数）.

解题秘方：利用判别分式方程的依据——分母中含有未知数进行识别.

解：（1）不是分式方程，因为分母中不含有未知数；

（2）是分式方程，因为分母中含有未知数；

（3）是分式方程，因为分母中含有未知数；

（4）是分式方程，因为分母中含有未知数；

（5）不是分式方程，因为分母虽然含有字母 a，但 a 为非零常数，不是未知数.

提分·必记

特别解读

- 分母中是否含有未知数是区分分式方程和整式方程的依据.
- 识别分式方程时，不能对方程进行约分或通分变形，更不能用等式的性质变形.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是否为分式方程的方法：根据分式方程定义中的条件，判断方程中分母是否含有未知数（注意仅仅是字母不行，必须是表示未知数的字母），如果含有未知数，那么这个方程就是分式方程，否则就不是分式方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

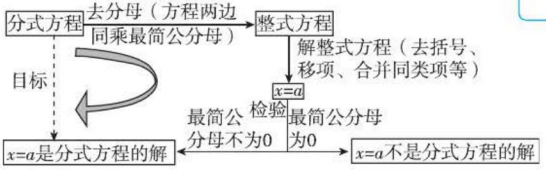
点知识▶ 2 分式方程的解法

1. 解分式方程的基本思路

去分母，把分式方程转化为整式方程.



2. 解分式方程的一般步骤



3. 检验方程根的方法

一般地，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为 0，因此应进行如下检验：

（1）将整式方程的解代入最简公分母，若最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

（2）也可以将整式方程的解代入原分式方程，这种方法不仅能检验出该解是否适合原分式方程，还能检验所得的解是否正确.

4. 增根

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的解使原分式方程的分母为 0，则这个解叫做原分式方程的增根.

技考向▶ 利用解分式方程的步骤解分式方程

例 2 解下列方程：

（1）$\frac{x}{x-4}=\frac{x+2}{x-6}$；　　（2）$\frac{2-x}{x-3}=\frac{1}{3-x}-2$；

（3）$\frac{4x+6}{3x-3}-\frac{5x-4}{x-1}=1$；　　（4）$\frac{4}{x^2+2x}+\frac{7}{x^2-4}=\frac{6}{x^2-2x}$.

解题秘方：将分式方程转化为整式方程，通过求整式方程的解并检验，得到分式方程的解.

解：（1）方程两边都乘（$x-4$）（$x-6$），

得 $x(x-6)=(x+2)(x-4)$，解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$(x-4)(x-6)\neq 0$，

∴原分式方程的解为 $x=2$.

（2）方程两边都乘（$x-3$），

得 $2-x=-1-2(x-3)$，解得 $x=3$.

当 $x=3$ 时，$x-3=0$，

∴ $x=3$ 不是原分式方程的解.

∴原分式方程无解.

提分·必记

特别解读

1. 解分式方程的关键是去分母. 去分母时不要漏乘不含分母的项，当分子是多项式时要用括号括起来.
2. 解分式方程一定要检验，对于增根必须舍去.
3. 对增根的理解：
   （1）增根一定是分式方程化为整式方程的解；
   （2）若分式方程有增根，则必是使最简公分母为 0 时未知数的值.

提分·秘诀

特别警示

解分式方程时易错点归纳：

1. 去分母时常见三种典型错误.
   (1) 分母与最简公分母中的因式不是相同而是相反时，去分母后要注意改变符号，如例2(2)中最简公分母是 x-3，而 $\frac{1}{3-x}$ 的分母是 3-x，故去分母后是"-1"而不是"1"；
   (2) 分子是多项式的，去分母后要带上括号，如例2(3)中 $\frac{5x-4}{x-1}$，去分母后为 3(5x-4)；

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（3）方程两边都乘 $3(x-1)$，

得 $4x+6-3(5x-4)=3(x-1)$，

解得 $x=\frac{3}{2}$.

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$3(x-1)\neq 0$，

∴原分式方程的解为 $x=\frac{3}{2}$.

（4）原方程可化为 $\frac{4}{x(x+2)}+\frac{7}{(x+2)(x-2)}=\frac{6}{x(x-2)}$.

方程两边都乘 $x(x+2)(x-2)$，

得 $4(x-2)+7x=6(x+2)$，

解得 $x=4$.

当 $x=4$ 时，$x(x+2)(x-2)\neq 0$，

∴原分式方程的解为 $x=4$.

(3)不含分母的项易漏乘最简公分母，且最简公分母是多项式的也要带上括号.

2. 验根是必不可少的步骤.

点知识 3 含字母的分式方程的解法

1. 含字母的分式方程

若分式方程中除了含有表示未知数的字母外，还含有表示已知数的字母，则该方程是含字母的分式方程.

2. 含字母的分式方程的解法

与一般分式方程的解法相同，含字母的分式方程求解时也是去分母、解整式方程、检验这三个步骤. 需要注意的是，要找准哪个字母表示未知数，哪个字母表示已知数，同时还要注意题目中所给的限制条件.

提分·必记

知识链接

1. 含有字母的分式方程一般都指出了未知数. 如："关于 x 的分式方程"表示只有 x 是未知数，其他字母都是已知数.
2. 解含字母的分式方程时，有时需分类讨论或结合题目对字母系数进行限制.

拔考向 利用去分母法解含字母的分式方程

例 3 解关于 x 的方程：$\frac{1}{a}-\frac{a}{x}=\frac{1}{b}-\frac{b}{x}$（$a\neq b$，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）.

解题秘方：此题已明确 x 为未知数，a，b 均为已知数，解题时先找出最简公分母，然后去分母，化成整式方程求解.

解：方程两边都乘 abx，得 $bx-a^2b=ax-ab^2$.

整理得 $(a-b)x=-ab(a-b)$.

∵ $a\neq b$，∴ $a-b\neq 0$.

方程两边都除以 $(a-b)$，得 $x=-ab$.

当 $x=-ab$ 时，最简公分母 $abx=-a^2b^2\neq 0$.

∴ $x=-ab$ 是原分式方程的解.

提分·秘诀

特别警示

方程两边同时除以 $a-b$ 前，要注意讨论 $a-b$ 是不是等于 0.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识▶ 4 分式方程的应用

1. 列分式方程常用的等量关系

（1）**行程问题**：速度 × 时间 = 路程.

（2）**利润问题**：利润 = 售价 − 进价；利润率 = 利润 ÷ 进价 ×100%.

（3）**工程问题**：工作量 = 工作时间 × 工作效率；总工作量 = 各个分工作量之和.

（4）**储蓄问题**：本息和 = 本金 + 利息.

2. 列分式方程解应用题的一般步骤

（1）**审**：指审题，根据题意找出已知量和未知量，并找出等量关系.

（2）**设**：指设未知数，设未知数的方法有直接设和间接设，可选择一个未知量用未知数表示，并用含未知数的式子表示相关未知量，注意单位要统一.

（3）**列**：指列方程，即根据等量关系列出分式方程.

（4）**解**：指解所列的分式方程，求出未知数的值.

（5）**验**：指验根，既要检验所求的未知数的值是否适合分式方程，还要检验此解是否符合实际意义.

（6）**答**：指写出答案，注意单位和答案要完整.

提分·必记

特别解读

1. 审题时，先寻找题目中的关键词，然后借助列表、画图等方法准确找出相等关系. 当题目中包含多个相等关系时，要选择一个能够体现全部（或大部分）数量的相等关系列方程.
2. 设未知数时，一般题中问什么就设什么，即设直接未知数；若设直接未知数难以列方程，则可设另一个相关量为未知数，即设间接未知数；有时设一个未知数无法表示等量关系，可设多个未知数，即设辅助未知数.
3. 应用题中解分式方程同样要验根.

技考向▶ 利用建立分式方程的模型解决实际问题

题型 1：行程问题

例 4 为加快城市群的建设与发展，要在 A，B 两城市间新建一条城际铁路，建成后，铁路运行里程由现在的 120 km 缩短至 114 km. 城际铁路的设计平均时速要比现行的平均时速快 110 km，运行时间仅是现行时间的$\frac{2}{5}$，求建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间.

解题秘方：找到题目中的两个等量关系，一个用来列式子，一个用来列方程解决问题.

1. 设计平均时速比现行平均时速快 110 km；
2. 设计运行时间是现行运行时间的$\frac{2}{5}$.

解：设建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间为 x h，则现行的运行时间为$\frac{5}{2}x$ h.

根据题意，得$\frac{114}{x}-\frac{120}{\frac{5}{2}x}=110$，解得 $x=0.6$.

当 $x=0.6$ 时，$\frac{5}{2}x\neq 0$，且符合题意.

∴原分式方程的解为 $x=0.6$.

答：建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间为 0.6 h.

提分·秘诀

另解

本题也可以采用**设间接未知数的方法**进行求解.

设城际铁路的现行平均速度是 x km/h，则城际铁路的设计平均速度是（x+110）km/ h.

根据题意，得

$$\frac{120}{x}\times\frac{2}{5}=\frac{114}{x+110}.$$

解得 x=80.

经检验，x=80 是原分式方程的解，且符合题意.

$$\therefore\frac{120}{80}\times\frac{2}{5}=0.6\text{（h）}.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：工程问题

例 5 ［中考·德阳］为配合“一带一路”国家倡议，某铁路货运集装箱物流园区正式启动了 2 期扩建工程. 一项地基基础加固处理工程由 A，B 两个工程公司承担建设，已知 A 工程公司单独建设完成此项工程需要 180 天，A 工程公司单独施工 45 天后，B 工程公司参与合作，两工程公司又共同施工 54 天后完成了此项工程.

（1）求 B 工程公司单独建设完成此项工程需要多少天.

（2）由于受工程建设工期的限制，物流园区管委会决定将此项工程划包成两部分，要求两工程公司同时开工，A 工程公司建设其中一部分用了 m 天完成，B 工程公司建设另一部分用了 n 天完成，其中 m，n 均为正整数，且 $m<46$，$n<92$，求 A，B 两个工程公司各施工建设了多少天.

解题秘方：利用一项工程分几部分完成，各部分工作量之和等于工作总量 1，列出方程解决问题.

解：（1）设 B 工程公司单独完成需要 x 天.

根据题意，得 $45\times\frac{1}{180}+54\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{x}\right)=1$，解得 $x=120$.

经检验，$x=120$ 是分式方程的解，且符合题意.

答：B 工程公司单独建设完成此项工程需要 120 天.

（2）根据题意，得 $m\times\frac{1}{180}+n\times\frac{1}{120}=1$.

整理得 $n=120-\frac{2}{3}m$. ∵ $m<46$，$n<92$，∴ $120-\frac{2}{3}m<92$，

解得 $42<m<46$. ∵ m 为正整数，∴ $m=43$，44 或 45.

又∵ $n=120-\frac{2}{3}m$ 为正整数，∴ $m=45$，$n=90$.

答：A，B 两个工程公司各施工建设了 45 天和 90 天.

解法提醒

- 将工作量看成“1”时，完成任务的天数与工作效率互为倒数.
- 在工程问题中，无论工作过程是怎样的，等量关系都是：甲完成的工作量 + 乙完成的工作量 +…= 总工作量. 当总工作量没有给出时，一般记为整体“1”.

题型 3：销售问题

例 6 某超市用 3 000 元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨 9 000 元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了 20%，购进干果的质量比第一次的质量的 2 倍还多 300 kg. 若超市按每千克 9 元的价格出售，当大部分干果售出后，余下的 600 kg 按售价的 8 折售完.

（1）该种干果第一次的进价是每千克多少元?

（2）超市销售这种干果共赢利多少元?

解题秘方：（1）根据等量关系“第二次购进干果的质量 =2× 第一次购进干果的质量 +300 kg”列方程进行求解；

（2）根据“赢利 = 销售额 − 成本”列式进行计算.

知识储备

利润问题的相关公式及基本数量关系：

1. 相关公式.

售价 = 进价 ×（1+ 利润率）；

售价 = 标价 × 折扣；

利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%$.

2. 基本数量关系.

利润 = 售价 − 进价；

利润 = 进价 × 利润率；

销售额 = 销售量 × 销售单价；

进价 ×（1+ 利润率）= 标价 × 折扣.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设该种干果第一次的进价是每千克 x 元，则第二次的进价是每千克（1+20%）x 元.

根据题意，得 $\frac{9\,000}{(1+20\%)x}=2\times\frac{3\,000}{x}+300$. 解得 $x=5$.

当 $x=5$ 时，$(1+20\%)x\neq 0$，且符合题意.

所以原分式方程的解为 $x=5$.

答：该种干果第一次的进价是每千克 5 元.

（2）根据题意，赢利为 $\left[\frac{3\,000}{5}+\frac{9\,000}{5\times(1+20\%)}-600\right]\times 9+600\times 9\times 80\%-(3\,000+9\,000)=(600+1\,500-600)\times 9+4\,320-12\,000=5\,820$（元）.

答：超市销售这种干果共赢利 5 820 元.

详解

由题意可知，按每千克9元的价格出售的干果的质量等于两次购进的干果的总质量减去600千克.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用分组通分法巧解复杂的分式方程

挑战·高分

例 7 解方程：$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.

解题秘方：分析四个分式中分母之间的数量关系，利用分组通分的方式来解方程.

解：**方法一** 方程两边分别通分后，

得 $\frac{2x+11}{(x+4)(x+7)}=\frac{2x+11}{(x+5)(x+6)}$.

∵无论 x 为何值时，$(x+4)(x+7)=x^2+11x+28$，$(x+5)(x+6)=x^2+11x+30$ 都不可能相等，

∴要使两个分式的值相等，必须是分子相等，且都为 0.

∴ $2x+11=0$. ∴ $x=-\frac{11}{2}$.

当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$.

∴ $x=-\frac{11}{2}$ 是原方程的根.

方法二 移项得 $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$.

方程两边分别通分后，

得 $\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

∵两个分式分子相同，分式值相同，∴分式的分母相同.

∴ $(x+4)(x+5)=(x+6)(x+7)$. ∴ $-4x-22=0$. ∴ $x=-\frac{11}{2}$.

当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$.

∴ $x=-\frac{11}{2}$ 是原方程的根.

技巧点拨

一个复杂的分式方程，直接去分母时，计算相当麻烦. 我们可以通过观察分式的结构特征，采取**分组通分法**，得到以下两种结果：

1. 左右两边分子相同，分母一定不相等，则只有分子的值为 0 时，分式方程才成立.
2. 左右两边分子是一个相等的非零常数，则只有分母相等时，分式方程才成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类法求分式方程无解时字母的值

例 8 若关于 x 的分式方程 $2-\frac{1-kx}{x-2}=\frac{1}{2-x}$ 无解，求 k 的值.

解题秘方：根据分式方程无解的两种情况——求出的整式方程的解使最简公分母为 0 和分式方程所化成的整式方程无解进行分类讨论，确定字母的值.

解：方程两边都乘最简公分母 $x-2$，

得 $2(x-2)-(1-kx)=-1$，

即 $(2+k)x=4$. ①

分两种情况讨论.

（1）当 $2+k\neq 0$，即 $k\neq -2$ 时，$x=\frac{4}{2+k}$.

∵原方程无解，

∴ $x-2=0$，即 $x=2$.

把 $x=2$ 代入①，得 $k=0$.

（2）当 $2+k=0$，即 $k=-2$ 时，方程①无解，

则原分式方程也无解.

综上，k 的值为 0 或 -2.

挑战·高分

方法点拨

导致分式方程无解的情况有两种：

1. 由于整式方程无解导致分式方程无解. 将分式方程通过去分母变成整式方程后，整式方程是 $ax=b$（$a=0$，$b\neq 0$）的形式；
2. 由于增根导致分式方程无解. 分式方程化成的整式方程的根是原分式方程的增根.

拔尖角度▸ 3 利用分式方程的解的范围列不等式（组）求字母的取值范围

例 9 关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-3}=1$ 的解是正数，求 a 的取值范围.

解题秘方：先将分式方程化为整式方程，再用含待定字母的式子表示方程的解，然后根据解的情况，确定待定字母的取值范围.

解：方程两边都乘 $x-3$，得 $2x+a=x-3$.

解得 $x=-3-a$.

∵原方程的解是正数，

∴ $-3-a>0$，

∴ $a<-3$.

又∵ $x-3\neq 0$，

∴ $-3-a-3\neq 0$，

解得 $a\neq -6$.

∴ $a<-3$，且 $a\neq -6$.

方法点拨：先把分式方程去分母后求出整式方程的解，再列出不等式（组）求出字母的取值范围，最后判断在字母的取值范围内是否可能产生增根，若可能，排除产生增根时字母的值.

挑战·高分

特别提示

若“解是正数”，则 $x-3$ 可能为 0，即可能产生增根 $x=3$；若“解是负数”，则 $x-3$ 不可能为 0，即不可能产生增根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用类比法探究分式方程的解与分式方程之间的关系

挑战·高分

例 10 阅读下列材料：

关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{1}{c}$；$x-\frac{1}{x}=c-\frac{1}{c}$，即 $x+\left(-\frac{1}{x}\right)=c+\left(-\frac{1}{c}\right)$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=-\frac{1}{c}$；

$x+\frac{2}{x}=c+\frac{2}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{2}{c}$；

$x+\frac{3}{x}=c+\frac{3}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{3}{c}$；……

（1）请观察上述方程解的特征，比较关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$（$m\neq 0$）与它们的关系，猜想它的解是 $x_1=$_____，$x_2=$_____；

（2）利用上述结论求关于 x 的方程 $x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$ 的解.（不用进行检验）

解题秘方：根据题目所给的几个方程的解，找出解与方程之间的规律，然后将待解方程变形为已知方程的结构形式求解.

解：（1）c；$\frac{m}{c}$

（2）原方程可化为 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$，仿照（1）的结论可知 $x-1=a-1$ 或 $x-1=\frac{2}{a-1}$，解得 $x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$.

解法提醒

1. 仿照已知几个方程左右两边及其解之间的关系，得出一般结论.
2. 将（2）小题的分式方程变形，得到类似于（1）小题中方程的结构，利用整体思想解方程.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是解分式方程、列分式方程解应用题，其中解分式方程是中考考查的热点，考查形式有选择题、填空题和解答题，难度一般不大；列分式方程解应用题是中考考查的重点，常常考查行程问题、工程问题和销售问题等，难度中等，且在今后的中考中仍是考查的重点.

三年中考兵法

考法 1 利用分式方程的解的定义求字母的值

冲刺·满分

例 11 [中考·株洲]关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$ 的解为 $x=4$，则常数 a 的值为（　　）

A. $a=1$　　B. $a=2$　　C. $a=4$　　D. $a=10$

试题评析：本题考查分式方程解的概念及分式方程的解法，解答本题的关键是明确分式方程的解是使方程两边相等的未知数的值.

解：把 $x=4$ 代入方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$，得 $\frac{2}{4}+\frac{3}{4-a}=0$，解得 $a=10$.

经检验，当 $a=10$ 时，$x=4$ 是原方程的解.

答案：D

思路点拨

先利用方程解的定义，把 $x=4$ 代入原分式方程，就得到一个关于 a 的新分式方程，解这个新分式方程，求出 a 的值并检验.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分式方程的解满足的条件求字母的值

例 12 [中考·重庆]若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{1+x}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$ 有且只有四个整数解，且使关于 y 的方程 $\dfrac{y+a}{y-1}+\dfrac{2a}{1-y}=2$ 的解为非负数，则符合条件的所有整数 a 的和为（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

试题评析：此题考查了解分式方程，以及解一元一次不等式组，熟练掌握解法是解本题的关键.

解：将不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{1+x}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}x<5,\\ x\geqslant\dfrac{a+2}{4}.\end{cases}$

由不等式组有且只有四个整数解，得到 $0<\dfrac{a+2}{4}\leqslant 1$，

解得 $-2<a\leqslant 2$，即整数 $a=-1$，0，1 或 2.

将分式方程 $\dfrac{y+a}{y-1}+\dfrac{2a}{1-y}=2$ 去分母，得 $y+a-2a=2(y-1)$，

解得 $y=2-a$.

由分式方程的解为非负数，以及分式有意义的条件，得到 $a\leqslant 2$，且 $a\neq 1$.

综上，整数 a 为 -1，0 或 2，故符合条件的所有整数 a 的和为 1.

答案：C

考法 3 利用分式方程增根的定义求字母的值

例 13 [中考·巴中]若分式方程 $\dfrac{3x-a}{x^2-2x}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x}$ 有增根，则实数 a 的取值是（　　）

A. 0 或 2　　B. 4　　C. 8　　D. 4 或 8

试题评析：本题考查的是分式方程的增根. 增根的定义：在分式方程变形时，有可能产生不适合原方程的根，即能满足去掉分母后的整式方程，但代入原分式方程则无意义，我们把这样的根叫做原分式方程的增根.

解：方程两边都乘 $x(x-2)$，

得 $3x-a+x=2(x-2)$，

由题意得，分式方程的增根为 $x=0$ 或 $x=2$.

当 $x=0$ 时，$-a=-4$，

解得 $a=4$；

当 $x=2$ 时，$6-a+2=0$，

解得 $a=8$.

答案：D

解法提醒

表示出不等式组的解集，由不等式组有且只有四个整数解确定出 a 的值，再由分式方程的解为非负数以及分式有意义的条件，求出满足题意的整数 a 的值，进而求出所有 a 的和.

知识储备

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的解使最简公分母的值为 0，则这个解叫做原分式方程的增根；反之，若分式方程有增根，则增根必是使最简公分母为 0 时未知数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 分式方程的应用

例 14 [中考·宜宾]用 A，B 两种机器人搬运大米，A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 20 袋大米，A 型机器人搬运 700 袋大米与 B 型机器人搬运 500 袋大米所用时间相等．求 A，B 型机器人每小时分别搬运多少袋大米．

试题评析：本题考查分式方程的应用，认真阅读，仔细分析题意，找出题中的等量关系是解题的关键．

解：设 A 型机器人每小时搬运 x 袋大米，则 B 型机器人每小时搬运（$x-20$）袋大米．

根据题意，得 $\frac{700}{x}=\frac{500}{x-20}$，

解得 $x=70$.

经检验，$x=70$ 是原分式方程的解，且符合题意．

由 $x=70$，得 $x-20=50$.

答：A 型机器人每小时搬运 70 袋大米，B 型机器人每小时搬运 50 袋大米．

考法点评

解分式方程的应用题，和解一般方程的应用题步骤一样：设未知数→列方程→解方程→答．由于解分式方程要验根，所以解分式方程的应用题既要检验未知数的值是否是原方程的解，还要检验它是否符合问题的实际意义．

两年模拟兵法 ☞答案见 286 页

1. 下列方程不是分式方程的是（　　）

A. $\frac{1}{x}+x=2$　　B. $\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1+x}=2$　　D. $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-7}$

2. 解分式方程 $\frac{1}{x-2}-3=\frac{4}{2-x}$ 时，去分母可得（　　）

A. $1-3(x-2)=4$

B. $1-3(x-2)=-4$

C. $1-3(2-x)=-4$

D. $1-3(2-x)=4$

3. [中考·成都]分式方程 $\frac{3}{2x}=\frac{1}{x-1}$ 的解为（　　）

A. $x=1$　　B. $x=2$

C. $x=3$　　D. $x=4$

4. [中考·十堰]十堰即将跨入高铁时代，钢轨铺设任务也将完成．现还有 6 000 m 的钢轨需要铺设，为确保年底通车，如果实际施工每天比原计划多铺设 20 m，就能提前 15 天完成任务．设原计划每天铺设钢轨 x m，则根据题意所列的方程是（　　）

A. $\frac{6\,000}{x}-\frac{6\,000}{x+20}=15$

B. $\frac{6\,000}{x+20}-\frac{6\,000}{x}=15$

C. $\frac{6\,000}{x}-\frac{6\,000}{x-15}=20$

D. $\frac{6\,000}{x-15}-\frac{6\,000}{x}=20$

5. [中考·聊城]如果解关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2}-\frac{2x}{2-x}=1$ 时出现增根，那么 m 的值为（　　）

A. -2　　B. 2

C. 4　　D. -4

6. [中考·荆州]已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1}-2=\frac{k}{1-x}$ 的解为正数，则 k 的取值范围为（　　）

A. $-2<k<0$　　B. $k>-2$ 且 $k\neq -1$

C. $k>-2$　　D. $k<2$ 且 $k\neq 1$

7. 当 $x=$_____时，分式 $\frac{4}{x-4}$ 与 $\frac{3}{x-1}$ 的值相等．

8. 对于非零的两个实数 a，b，规定 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$．若 $2\oplus(2x-1)=1$，则 x 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 方程 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$ 的解为 $x=1$；方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$ 的解为 $x=2$；方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}$ 的解为 $x=3$；…… 按此规律，解为 $x=6$ 的方程应表示为_____.

10. 解分式方程：

（1）[中考·金华] $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$；

（2）$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$.

11. [中考·黄冈] 黄麻中学为了创建全省“最美书屋”，购买了一批图书，其中科普类图书平均每本的价格比文学类图书平均每本的价格多 5 元. 已知学校用 12 000 元购买的科普类图书的数量与用 9 000 元购买的文学类图书的数量相等，求学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格分别是多少元. 【导学号：2850581】

12. [中考·吉林] 如图是学习分式方程应用时，老师板书的问题和两名同学所列的方程.

甲、乙两个工程队，甲队修路 400 m 与乙队修路 600 m 所用的时间相等，乙队每天比甲队多修 20 m，求甲队每天修路的长度.

冰冰：$\frac{400}{x}=\frac{600}{x+20}$

庆庆：$\frac{600}{y}-\frac{400}{y}=20$

（第 12 题）

根据以上信息，解答下列问题：

（1）冰冰同学所列方程中的 x 表示_____，庆庆同学所列方程中的 y 表示_____；

（2）两个方程中任选一个，写出它的等量关系；

（3）解（2）中你所选择的方程，并回答老师提出的问题.

13. 已知关于 x 的方程 $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$ 的解是正数，求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分式运算中的常用技巧与方法

荣老师告诉你 在分式的运算中，若能认真观察题目的结构特征，灵活运用解题技巧，选择恰当的运算方法，常常会得到事半功倍的效果.

技巧一 整体通分法

例1 化简：$\frac{a^2}{a-1}-a-1$.

解题秘方：将后两项看成一个整体，则可以整体通分进行求解.

解：$\frac{a^2}{a-1}-a-1=\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}=\frac{a^2-(a^2-1)}{a-1}$

$=\frac{1}{a-1}$.

方法点拨：运用整体通分法计算时，看成一个整体的部分要用括号括起来.运用添括号法则时，如果前面是“−”号，注意要变号.

技巧二 逐项通分法

例2 计算：

$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$.

解题秘方：若全部通分，最简公分母好确定，但分子的计算量太大.观察分母发现，从前到后逐项通分时，分母都构成平方差形式.

解：原式$=\frac{(a+b)-(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b(a^2+b^2)-2b(a^2-b^2)}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{4b^3}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=0$.

技巧三 先约分，后通分

例3 计算：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$.

解题秘方：先不要盲目通分，观察后发现每个分式都可以约分，所以先将分子、分母分解因式，约分后再通分计算.

解：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$

$=\frac{a(a+6)}{a(a+2)}-\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}$

$=\frac{a+6}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}$

$=\frac{a^2-2a+6a-12}{a^2-4}-\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}$

$=\frac{-16}{a^2-4}$

$=-\frac{16}{a^2-4}$.

方法点拨：先约分的目的是为了简化最简公分母，使运算过程中分子的计算量减少.

技巧四 整体代入法

例4 已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，求$\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}$的值.

解题秘方：一个条件无法求出两个未知数的值，所以只能考虑整体代入求值.

解：**方法一** $\because\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，$\therefore xy\neq 0$.

$\therefore\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{\frac{2}{y}-5+\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}+2+\frac{1}{x}}$

$=\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-5}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2}=\frac{2\times 5-5}{5+2}=\frac{5}{7}$.

方法二 $\because\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，$\therefore\frac{x+y}{xy}=5$.

$\therefore x+y=5xy$，且$xy\neq 0$.

$\therefore\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2(x+y)-5xy}{(x+y)+2xy}$

$=\frac{2\times 5xy-5xy}{5xy+2xy}=\frac{5xy}{7xy}=\frac{5}{7}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：用整体代入法求分式的值是最常用的方法，原因是分式可以约分．当不能求出分式中各个字母的值时，可以考虑利用整体代入法，虽然分子和分母中都含有字母，但通过约分可以求出其值．

技巧五 运用公式变形法

例 5 已知 $a^2-5a+1=0$，计算：$a^4+\frac{1}{a^4}$．

解题秘方：借用整式的乘法公式解决分式的求值问题，关键是找准公式的基本模型．

解：由已知条件可得 $a\neq 0$，$\therefore a+\frac{1}{a}=5$.

$$\therefore a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$$

$$=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2=(5^2-2)^2-2=527.$$

方法点拨：运用乘法公式变形求分式的值，避免了求出分式中字母的值．其中互为倒数的两个式子的和在运用完全平方公式时，积的 2 倍等于 2.

技巧六 设辅助参数法

例 6 已知 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$，计算：$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$．

解题秘方：利用设参数进行转化，从而求出待求式子的值．

解：设 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则 $b+c=ak$，$a+c=bk$，$a+b=ck$.

把这 3 个等式相加得 $2(a+b+c)=(a+b+c)k$.

若 $a+b+c=0$，即 $a+b=-c$，则 $k=-1$；

若 $a+b+c\neq 0$，则 $k=2$.

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{ck\cdot ak\cdot bk}{abc}=k^3.$$

当 $k=-1$ 时，原式 $=-1$.

当 $k=2$ 时，原式 $=8$.

方法点拨：设辅助参数，利用整体代入法将要求的分式转化为含辅助参数的分式，然后约分可求出其值．

技巧七 倒数法

例 7 已知 $\frac{a}{a^2-a+1}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$ 的值．

解题秘方：将已知的分式和要求的分式的分子和分母都颠倒，对比其结构求值．

解：由条件知 $a\neq 0$，

$$\therefore \frac{a^2-a+1}{a}=7，即\ a+\frac{1}{a}=8，$$

$$\therefore \frac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+1=63，\ \therefore \frac{a^2}{a^4+a^2+1}=\frac{1}{63}.$$

方法点拨：本题将分式的分子和分母颠倒，然后转化为用技巧五中的公式变形法求值．注意对于要求的分式的值要倒过来还原．

技巧八 把未知数当成已知数法

例 8 已知 $3a-4b-c=0$，$2a+b-8c=0$，$c\neq 0$. 计算：$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$．

解题秘方：确定一个字母为已知数，通过解二元一次方程组求出方程组的解，再代入待求式子求值．

解：把 c 当成已知数，用 c 表示 a 和 b，得 $a=3c$，$b=2c$.

又 $\because c\neq 0$，$\therefore \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}=\frac{14c^2}{11c^2}=\frac{14}{11}$.

技巧九 特殊值法

例 9 已知 $abc=1$，则 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$ 的值为_____.

解题秘方：由已知条件无法求出 a,b,c 的值，可根据已知条件取字母的一些特殊值，然后代入求值．

解：令 $a=1$，$b=1$，$c=1$，则

$$原式=\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}=1.$$

答案：1

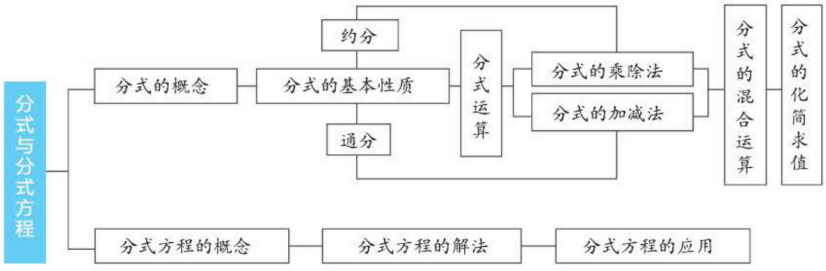
方法点拨：特殊值法要求所取的特殊值必须符合题目中给出的已知条件．运用特殊值法可准确、迅速地求出结果．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 形如$\frac{A}{B}$（A，B是整式，且B中含有字母，$B\neq 0$）的式子叫做分式.$B\neq 0$是分式有意义的条件；$A=0$，$B\neq 0$是分式的值为零的条件.
2. 分式的基本性质：分式的分子和分母同时乘或除以同一个不为0的整式，分式的值不变.根据分式的基本性质可以将分式进行通分或者约分.
3. 分式的运算包括乘方、乘除和加减这几则运算，乘除法运算关键是约分，加减法运算关键是通分，运算的最后结果一定要是最简分式或整式.
4. 解分式方程关键就是利用等式的性质将方程的两边乘最简公分母，将分式方程转化成整式方程，然后解整式方程.解完整式方程后一定要注意检验，若整式方程的解使最简公分母的值为零，则该根为增根.
5. 列分式方程解应用题时，应先分析题意，准确找出题中的相等关系，然后设出恰当的未知数，列出方程.解方程后一定要检验，既要检验所得解是否为所列方程的解，又要检验其是否符合题意.

知识方法专题

知识必学

专题一 分式的相关概念

链接中考» 在分式的相关概念中，分式有意义的条件及分式值为0的条件最为重要，也是中考中热门的考点，一般都是以填空题、选择题的形式出现.

例1 （1）[中考·常州]要使分式$\frac{3}{x-2}$有意义，则x的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x\neq -2$　　D. $x\neq 2$

（2）[中考·衡阳]若分式$\frac{x-2}{x+1}$的值为0，则x的值为（　　）

A. 2或-1　　B. 0

C. 2　　D. -1

解题秘方：利用分式有意义及分式值为0的条件解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）根据分式有意义的条件可知 $x-2\neq 0$，

$\therefore x\neq 2$.

（2）由题意可知 $x-2=0$，得 $x=2$.

由 $x+1\neq 0$，得 $x\neq -1$，$\therefore x=2$.

答案：（1）D　　（2）C

方法点拨：分式值为 0 需要同时具备两个条件，一是分子等于 0，二是分母不等于 0，二者缺一不可.

专题二 分式的运算

链接中考» 分式的运算是本章的重点，它的关键是分式的运算顺序及分式的运算法则. 中考中考查的形式主要是化简求值，属中档题目.

例 2 ［中考·荆门］先化简，再求值：

$\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2\cdot\dfrac{2a-2b}{3a+3b}-\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{3a}{b}$，其中 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$.

解题秘方：紧扣分式的加减、乘除及乘方的运算法则，将分式进行化简，然后代入求值即可.

解：原式 $=\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2\cdot\dfrac{2(a-b)}{3(a+b)}-\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{b}{3a}$

$=\dfrac{2(a+b)}{3(a-b)}-\dfrac{4ab}{3(a^2-b^2)}=\dfrac{2(a+b)^2-4ab}{3(a^2-b^2)}$

$=\dfrac{2(a^2+b^2)}{3(a^2-b^2)}$.

当 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$ 时，

原式 $=\dfrac{2\times(3+2)}{3\times(3-2)}=\dfrac{10}{3}$.

专题三 解分式方程

链接中考» 解分式方程的关键是将分式方程转化为整式方程，解分式方程后一定要注意检验. 解方程是中考中的热门考点，一般都是直接考查解分式方程.

例 3 解方程：$\dfrac{x}{3x-1}=2-\dfrac{1}{1-3x}$.

解题秘方：利用解分式方程的步骤解分式方程，注意验根.

解：去分母，得 $x=2(3x-1)+1$.

去括号，得 $x=6x-2+1$.

移项、合并同类项，得 $5x=1$.

系数化为 1，得 $x=\dfrac{1}{5}$.

经检验，$x=\dfrac{1}{5}$ 是分式方程的解.

方法点拨：分式方程 $\xrightarrow[\text{转化为}]{\text{去分母}}$ 整式方程 ⟶ 解整式方程 ⟶ 检验根 ⟶ 确定原方程的根.

专题四 分式方程的应用

链接中考» 分式方程的应用是分式方程作用的关键体现，主要以解决生活问题为目的，所以题目的背景大都是现实生活中的热点问题. 解决问题的关键是寻找等量关系. 在中考中单独考查时，一般以解答题的形式出现.

例 4 ［中考·柳州］小张去文具店购买作业本，作业本有大、小两种规格，大本作业本的单价比小本作业本贵 0.3 元. 已知用 8 元购买大本作业本的数量与用 5 元购买小本作业本的数量相同.

（1）求大本作业本与小本作业本每本各多少元.

（2）因作业需要，小张要再购买一些作业本，购买小本作业本的数量是大本作业本数量的 2 倍，总费用不超过 15 元，则最多能购买大本作业本多少本？

解题秘方：紧扣题意中的等量关系和不等关系，列出分式方程以及不等式，利用方程的解及不等式的解集解决问题.

解：（1）设小本作业本每本 x 元，则大本作业本每本 $(x+0.3)$ 元.

依题意，得 $\dfrac{8}{x+0.3}=\dfrac{5}{x}$，

解得 $x=0.5$.

经检验，$x=0.5$ 是原方程的解，且符合题意.

$\therefore x+0.3=0.8$.

答：大本作业本每本 0.8 元，小本作业本每本 0.5 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）设购买大本作业本 m 本，则购买小本作业本 $2m$ 本.

依题意，得 $0.8m+0.5\times 2m\leqslant 15$，

解得 $m\leqslant\frac{25}{3}$.



$\because m$ 为正整数，

$\therefore m$ 的最大值为 8.

答：最多能购买大本作业本 8 本.

方法必会

专题五 利用整体思想求分式的值

专题解读» 解决某些数学问题时，把一组数或一个式子看成一个整体进行处理，不仅可以简化解题过程，而且还能拓宽思路，培养创新意识，体现了数学中的一种重要思想——整体思想. 这一思想在整式的乘法运算中体现明显，在解题中应用较多，要引起重视.

例 5 ［中考·河北］若 $a=2b\neq 0$，则 $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$ 的值为_____.

解题秘方：利用整体代入法，将分式的分子、分母用同一个字母表示，再利用分式的基本性质求值.

解：$\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$

$=\frac{a+b}{a}$

$=\frac{2b+b}{2b}$

$=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

方法点拨：本题运用了整体思想求值. 整体思想就是在研究和解决有关数学问题时，利用问题的整体形式、整体结构、整体特征等，对问题整体处理的解题方法. 整体思想的表现形式有：整体代入、整体加减、整体补形、整体变换等.

专题六 倒数法求分式的值

专题解读» 有些分式求值问题直接求解困难时，可考虑求它的倒数，将问题转化为方便求解的问题. 这类问题中分式的形式通常是分子是单项式，分母是多项式，若将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的基本性质，结合题目条件求解就方便多了.

例 6 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

解题秘方：颠倒所求分式的分子和分母的位置可得 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$，利用分式的基本性质得 $x^2+1+\frac{1}{x^2}$，再将条件等式两边平方即可得解.

解：$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}$.

$\because x+\frac{1}{x}=3$,

$\therefore\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$,

$\therefore x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$,

$\therefore x^2+1+\frac{1}{x^2}=8$,

$\therefore\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=8$.

$\therefore\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{8}$.

方法点拨：倒数法是处理分式问题的常用方法，对于分式求值问题，要仔细研究式子的特征，灵活运用倒数法.

专题七 裂项相消法解分式方程

专题解读» 裂项相消法，可使出现多个分式的加减或相关的分式方程问题，通过变形将一部分项相互抵消，转化为常见的分式加减或相关的分式方程问题，变复杂为简单，变难为易，不失为一种巧妙的解题方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 7 解方程：$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$.

解题秘方：观察可以发现等号左边每个分式的分母中的两个因式相差 1，因此可逆向运用异分母分式的加减法法则进行裂项，相消后化为常见的分式方程求解.

解：原方程可变形为 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+3}$，

整理，得 $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+3}=0$，

去分母，得 $x+3-2x=0$，

解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的解.

方法点拨：当涉及的分式方程中有多个分式且分母与分子有某种规律时，常常通过裂项相消的方法把方程化为熟悉的分式方程求解，体现了转化思想.

好题必解

☞答案见 287 页

类型 1：利用分式的基本性质求值

1. 已知 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$，求 $\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}$ 的值.

2. 已知 $a+b+c=0$，求 $c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 的值.

3. 已知 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\neq 0$，求 $\frac{3a-2b+5c}{a+b+c}$ 的值.

4. 已知 $3x-4y-z=0$，$2x+y-8z=0$，$z\neq 0$，求 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+2xz}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：分式的化简求值

5. 先化简，再求值：$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}$，其中 $x=2$.

6. 先化简，再求值：$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\div\frac{2x-y}{x^2-y^2}$，其中 x，y 满足 $|x-2|+(2x-y-3)^2=0$.

7. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\div\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{x}{x+1}$，其中 x 满足 $x^2-x-1=0$.

8. 先化简，再求值：$\left(\frac{x}{x-1}-1\right)\div\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$，其中 $x=\sqrt{2}-1$.

类型 3：分式方程的解法

9. 解方程：$\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{3x+3}+1$.

10. 解方程：$\frac{2+x}{2-x}+\frac{16}{x^2-4}=-1$.

11. 解方程：$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$.

类型 4：分式方程解的情况

12. 当 m 为何值时，关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ 会产生增根?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 已知关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$ 的解小于 3，求 a 的取值范围.

类型 5：分式方程的应用

14. [中考·青岛] 甲、乙两人加工同一种零件，甲每天加工的数量是乙每天加工数量的 1.5 倍，两人各加工 600 个这种零件，甲比乙少用 5 天.

（1）求甲、乙两人每天各加工多少个这种零件.

（2）已知甲、乙两人加工这种零件每天的加工费分别是 150 元和 120 元，现有 3 000 个这种零件的加工任务，甲单独加工一段时间后另有安排，剩余任务由乙单独完成. 如果总加工费不超过 7 800 元，那么甲至少应加工多少天?

15. 华昌中学开学初在金利源商场购进 A，B 两种品牌的足球，购买 A 品牌足球花费了 2 500 元，购买 B 品牌足球花费了 2 000 元，且购买 A 品牌足球的数量是购买 B 品牌足球数量的 2 倍. 已知购买一个 B 品牌足球比购买一个 A 品牌足球多花 30 元.

（1）求购买一个 A 品牌、一个 B 品牌的足球各需多少元.

（2）华昌中学为响应习总书记“足球进校园”的号召，决定再次购进 A，B 两种品牌足球共 50 个. 恰逢金利源商场对两种品牌足球的售价进行调整，A 品牌足球售价比第一次购买时提高了 8%，B 品牌足球按第一次购买时售价的 9 折出售. 如果这所中学此次购买 A，B 两种品牌足球的总费用不超过 3 260 元，那么华昌中学此次最多可购买多少个 B 品牌足球?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第五章测试卷

答案见 288 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 若分式$\frac{x}{x-2}$有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x=2$　　D. $x\neq 2$

2. 分式 $\frac{2}{3x}$，$\frac{x+1}{-2x^2}$，$\frac{2x-1}{4x^3}$ 的最简公分母是（　　）

A.12　　B.$24x^6$　　C.$12x^6$　　D.$12x^3$

3. 下列变形正确的是（　　）

A. $\frac{b+1}{a+1}=\frac{b}{a}$

B. $\frac{a+b}{a+b}=0$

C. $\frac{0.1a-0.3b}{0.2a+b}=\frac{a-3b}{2a+b}$

D. $\frac{-a+b}{a-b}=-1$

4. 计算$\left(\frac{a-1}{a}\right)^2\div\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$的结果是（　　）

A. $\frac{1}{(a+1)^2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{(a-1)^2}$　　D. -1

5. 若$\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot w=1$，则 $w=$（　　）

A.$a+2$　　B.$-a+2$

C.$a-2$　　D.$-a-2$

6. 分式方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$的解是（　　）

A. $x=0$　　B. $x=-1$

C. $x=\pm 1$　　D. 无解

7. 甲种污水处理器处理 25 吨的污水与乙种污水处理器处理 35 吨的污水所用时间相同．已知乙种污水处理器每小时比甲种污水处理器多处理 20 吨的污水，求两种污水处理器的污水处理效率．设甲种污水处理器的污水处理效率为 x 吨／小时，依题意列方程正确的是（　　）

A. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x-20}$　　B. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x+20}$

C. $\frac{25}{x-20}=\frac{35}{x}$　　D. $\frac{25}{x+20}=\frac{35}{x}$

8. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2}=3$ 的解是正数，则 m 的取值范围为（　　）

A.$m<-6$　　B.$m>-6$

C.$m>-6$，且 $m\neq -4$　　D.$m\neq -4$

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 如果分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 的值为 0，那么 x 的值为_____.

10. [中考·巴中]若关于 x 的分式方程$\frac{x}{x-2}+\frac{2m}{2-x}=2m$ 有增根，则 m 的值为_____.

11. 若 $(x-y-2)^2+|xy-3|=0$，则 $\left(\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{x-y}\right)\div\frac{1}{y}$的值是_____.

12. 某中学图书馆添置图书，用 240 元购进一种科普书，同时用 200 元购进一种文学书．由于科普书的单价比文学书的单价高出一半，因此学校所购买的文学书比科普书多 4 本，则这种文学书的单价为_____元.

三、解答题（共 52 分）

13.（6 分）化简：$\frac{2a}{a+1}-\frac{2a-4}{a^2-1}\div\frac{a-2}{a^2-2a+1}$.

14.（6 分）先化简，再求值：$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$，其中 $x=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.（10 分）解方程：

（1）$\frac{3x}{x+2}+\frac{2}{x-2}=3$；

（2）$\frac{4}{x^2-1}+\frac{x+2}{1-x}=-1$.

16.（8 分）先化简 $\frac{x^2-4}{x^2-9}\div\left(1-\frac{1}{x-3}\right)$，再从不等式 $2x-3<7$ 的正整数解中选一个使原式有意义的数代入求值.

17.（10 分）一项工程，甲队单独做需 40 天完成，若乙队先做 30 天后，甲、乙两队一起合做 20 天恰好完成，请问：

（1）乙队单独做需要多少天才能完成?

（2）现将该工程分成两部分，甲队做其中一部分工程用了 x 天，乙队做另一部分工程用了 y 天. 若 x，y 都是正整数，且甲队做的时间不到 15 天，乙队做的时间不到 70 天，则甲、乙两队实际各做了多少天?

18.（12 分）杨梅是漳州的特色时令水果，杨梅一上市，某水果店的老板用 1 200 元购进一批杨梅，很快售完. 老板又用 2 500 元购进第二批杨梅，所购数量是第一批的 2 倍，但进价比第一批每件多了 5 元.

（1）第一批杨梅每件进价为多少元?

（2）老板以每件 150 元的价格销售第二批杨梅，售出 80% 后，为了尽快售完，决定打折促销. 要使第二批杨梅的销售利润不少于 320 元，剩余的杨梅每件售价最多打几折?（利润 = 售价 − 进价）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

几何图形性质的探秘











第六章 平行四边形

核心考点

你将见到的

- 平行四边形的性质
- 平行四边形的判定
- 三角形的中位线
- 多边形的内角和与外角和

核心方法

我们为你提供的

- 构造法
- 转化思想
- 分类讨论思想
- 类比思想
- 整体思想
- 方程思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 平行四边形的性质

核心知识

- 平行四边形的定义
- 平行四边形的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形的概念

1. 定义

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

2. 表示方法

平行四边形用符号“$\square$”表示，如图 6−1−1. 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，记作$\square ABCD$，读作“平行四边形 $ABCD$”.

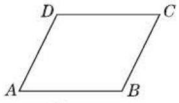


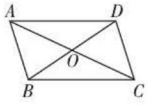
图 6−1−1

注意：

（1）平行四边形的表示一定要按顺时针或逆时针依次注明各顶点，不能打乱顺序.

（2）“$\square$”作为表示平行四边形的符号，不可单独使用它来代替“平行四边形”.

3. 平行四边形的基本元素

基本元素		主要内容	图示
边	邻边	AD 和 AB，AD 和 DC，DC 和 BC，BC 和 AB，共有四对	
	对边	AB 和 DC，AD 和 BC，共有两对	
角	邻角	$\angle BAD$ 和 $\angle ADC$，$\angle ADC$ 和 $\angle DCB$，$\angle DCB$ 和 $\angle ABC$，$\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，共有四对	
	对角	$\angle BAD$ 和 $\angle BCD$，$\angle ADC$ 和 $\angle ABC$，共有两对	
对角线		AC 和 BD，共有两条	

提分·必记

特别提醒

1. 平行四边形的定义有两个要素：
(1) 是四边形；
(2) 两组对边分别平行.
作为四边形，平行四边形具有一般四边形的一切性质，如有四条边，四个内角，两条对角线，内角和为 360°，外角和为 360°等.
作为平行四边形，它区别于其他一般四边形的特殊性质为：平行四边形的两组对边分别平行.

2. 平行四边形的定义既是它的一个性质，又是它的一种判定方法：
∵四边形 ABCD 是平行四边形，
∴ $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ AD \parallel BC; \end{cases}$
反过来，∵ $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ AD \parallel BC, \end{cases}$
∴四边形 ABCD 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平行四边形的定义判定平行四边形

题型1：平行四边形的定义的判定功能在找平行四边形中的应用

例1 如图6-1-2，在$\square ABCD$中，过点P作直线EF，GH分别平行于AB，BC，那么图中共有_____个平行四边形.

解题秘方：紧扣平行四边形定义中的“两个要素”进行识别.

解：在$\square ABCD$中，$AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，

$\because EF \parallel AB$，$GH \parallel BC$，

$\therefore EF \parallel AB \parallel CD$，$GH \parallel AD \parallel BC$.

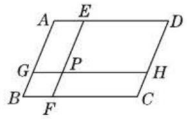


图6-1-2

$\therefore$单独一个四边形是平行四边形的有4个：$\square DEPH$，$\square EAGP$，$\square HPFC$，$\square PGBF$. 由两个四边形组成的平行四边形有4个：$\square DEFC$，$\square EABF$，$\square DAGH$，$\square HGBC$. 由四个四边形组成的平行四边形有1个：$\square ABCD$.

$\therefore$图中共有9个平行四边形.

答案：9

题型2：平行四边形的定义的双重功能在判定平行四边形中的应用

例2 如图6-1-3，在$\square ABCD$中，E，F分别是CD和AB上的点，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

解题秘方：紧扣平行四边形的定义的双重功能——性质功能和判定功能进行证明.

证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore CD \parallel AB$，即$DE \parallel BF$. $\therefore \angle 1 = \angle DFA$.

$\because \angle 1 = \angle 2$，$\therefore \angle 2 = \angle DFA$.

$\therefore DF \parallel BE$，

$\therefore$四边形$BEDF$是平行四边形.

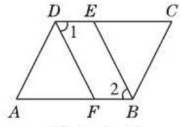


图6-1-3

知识▶2 平行四边形的边角性质

1. 平行四边形是中心对称图形，两条对角线的交点是它的对称中心.

2. **边的性质** 平行四边形的对边平行且相等.

数学表达式：如图6-1-4，$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，$AB = CD$，$AD = BC$.

3. **角的性质** 平行四边形的对角相等，邻角互补.

数学表达式：如图6-1-4，$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore \angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$，$\angle A + \angle B = 180°$，$\angle B + \angle C = 180°$，$\angle C + \angle D = 180°$，$\angle A + \angle D = 180°$.

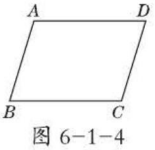


图6-1-4

提分·秘诀

方法点拨

分类法数几何图形的个数：数几何图形的个数时，往往带有很大的盲目性，结果不是多数了就是漏数了. 若将几何图形分类（按顺序或大小）数，就能将问题简化，如例1，将平行四边形分为分别由一个、两个、四个四边形组成的平行四边形，这样就能做到**不重不漏**.

解法提醒

当题目的条件中有平行四边形时，应立即想到两组对边分别平行；当题目的结论要证平行四边形时，首先应联想到它的两组对边是否分别平行. 逆向利用及正向利用平行四边形的定义是后面学习平行四边形的性质及判定的主要依据.

提分·必记

特别提醒

由于组成平行四边形的元素有边和角，因此讨论其性质也应从边和角这两个方面去看.

1. **从边看**：平行四边形的对边平行且相等.
2. **从角看**：平行四边形的对角相等、邻角互补.

注意：由已知平行四边形得出什么性质，要根据推理证明的需要，合理选用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平行四边形的边角性质解决计算问题

题型1：平行四边形边的性质在求线段长中的应用

例3 如图6-1-5，在$\square ABCD$中，$AB=5$ cm，$BC=4$ cm，则$\square ABCD$的周长为_____cm.

解题秘方：紧扣平行四边形边的性质进行解答.

解：∵平行四边形的对边相等，

∴ $CD=AB=5$ cm，$AD=BC=4$ cm.

∴ $\square ABCD$的周长为$2(AB+BC)=2\times(5+4)=18$(cm).

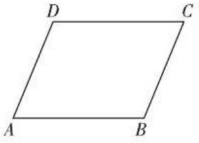


图6-1-5

答案：18

题型2：平行四边形角的性质在求角度中的应用

例4 [中考·武汉]如图6-1-6，在$\square ABCD$中，E，F是对角线AC上两点，$AE=EF=CD$，$\angle ADF=90°$，$\angle BCD=63°$，则$\angle ADE$的度数为_____.

解题秘方：紧扣平行四边形的性质及等腰三角形的性质，将要求的角向已知角进行转化.

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴ $AD\parallel BC$.

∴ $\angle DAE=\angle BCF$.

∵ $\angle ADF=90°$，$AE=EF$，∴ $DE=\frac{1}{2}AF=AE$.

∴ $\angle DAE=\angle ADE$. ∴ $\angle BCF=\angle ADE$.

∵ $AE=CD$，$DE=AE$，∴ $DE=CD$.

∴ $\angle DEF=\angle DCF$.

∵ $\angle DEF=\angle DAE+\angle ADE=2\angle ADE$,

∴ $\angle DCF=2\angle ADE$.

∵ $\angle BCD=63°$，∴ $\angle BCF+\angle DCF=63°$.

∴ $3\angle ADE=63°$，∴ $\angle ADE=21°$.

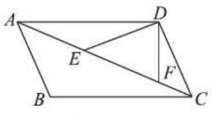


图6-1-6

答案：21°

知识▶3 平行四边形的对角线性质

1. 对角线的性质

平行四边形的对对角线互相平分.



数学表达式：如图6-1-7，

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.

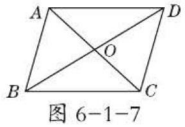


图6-1-7

2. 拓展性质

(1) 平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分，两条对角线将平行四边形分成面积相等的四部分.

(2) 若一条直线过平行四边形的两条对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积.

提分·秘诀

解法提醒

平行四边形的边角性质、平行线的性质、全等三角形的判定和性质，在有关平行四边形的问题中常融合在一起综合应用，而利用平行四边形的边角性质、平行线的性质获得三角形全等的条件是解题的关键.

提分·必记

图解

如图6-1-8，∵直线EF过平行四边形$ABCD$的两条对角线的交点O，

∴ $AE+AB+BF=FC+CD+DE=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$，

$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

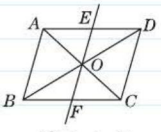


图6-1-8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用平行四边形的对角线性质解与平行四边形有关的问题

题型1：平行四边形对角线的性质在求边长中的应用

例5 如图6-1-9，已知$\square ABCD$的周长是60，对角线AC，BD相交于点O. 若$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长长8，求这个平行四边形各边的长.

解题秘方：紧扣平行四边形对角线的性质和边的性质进行解答.

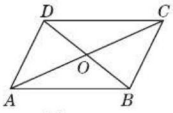


图6-1-9

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

∵ $AB+BC+CD+DA=60$，$OA+AB+OB-(OB+BC+OC)=8$，

∴ $AB+BC=30$，$AB-BC=8$.

∴ $AB=CD=19$，$BC=AD=11$.

故这个平行四边形各边的长分别为19，11，19，11.

题型2：平行四边形对角线所分四边形面积的性质在说明面积关系中的应用

例6 如图6-1-10，在$\square ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，过点O作直线EF，分别交AD，BC于点E，F. 判断四边形$ABFE$的面积与四边形$FCDE$的面积有何关系. 试说明理由.

解题秘方：紧扣平行四边形的对角线性质、全等三角形的性质进行解答.

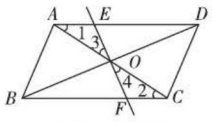


图6-1-10

解：$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$AD\parallel BC$.

∴ $\angle 1=\angle 2$.

又∵$\angle 3=\angle 4$，

∴ $\triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA).

∴ $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$BC=DA$，$\angle ABC=\angle CDA$.

∴ $\triangle ABC\cong\triangle CDA$(SAS).

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CDA}$.

∵ $S_{四边形ABFE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle COF}+S_{\triangle AOE}=S_{\triangle ABC}$，

$S_{四边形FCDE}=S_{\triangle CDA}-S_{\triangle AOE}+S_{\triangle COF}=S_{\triangle CDA}$，

∴ $S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}$.

提分·秘诀

规律点拨

由“平行四边形的对角线互相平分”可以得出“平行四边形被它的两条对角线分成四个小三角形，相邻两个小三角形的周长之差等于平行四边形中对应的两邻边之差”.

特别提醒

这是平行四边形对角线性质的两个拓展结论，即

1. 平行四边形的一条对角线将平行四边形分成两个面积相等的三角形.
2. 过平行四边形两条对角线交点的一条直线，将平行四边形分成两个面积相等的图形.

本例的实质是对知识点中两条拓展性质的部分证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用全等法解决平行四边形问题

题型 1：全等法在平行四边形中证线段相等时的应用

例 7 如图 6-1-11，在▱$ABCD$中，平行于对角线AC的直线MN分别交DA，DC的延长线于点M，N，交BA，BC于点P，Q. 求证：$MP=QN$.

解题秘方：紧扣“全等三角形对应边相等”，结合平行四边形定义的双重功能进行证明.

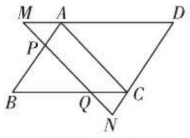


图 6-1-11

证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$.

∴ $\angle MPA=\angle N$，$\angle MAP=\angle D$，$\angle D=\angle QCN$.

∴ $\angle MAP=\angle QCN$.

∵ $MN \parallel AC$，$AM \parallel CQ$，

∴四边形$AMQC$是平行四边形.

∴ $MA=CQ$.

∴ $\triangle MAP \cong \triangle QCN$（AAS）.

∴ $MP=QN$.

题型 2：全等法在平行四边形中证角相等时的应用

例 8 如图 6-1-12，在▱$ABCD$中，点E在边BC上，点F在BC的延长线上，且$BE=CF$. 求证：$\angle BAE=\angle CDF$.

解题秘方：紧扣“全等三角形对应角相等”，结合平行四边形的定义和性质进行证明.

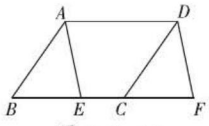


图 6-1-12

证明：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴ $AB=DC$，$AB \parallel DC$.

∴ $\angle B=\angle DCF$.

在$\triangle ABE$和$\triangle DCF$中，$\begin{cases} AB=DC, \\ \angle B=\angle DCF, \\ BE=CF, \end{cases}$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle DCF$（SAS）.

∴ $\angle BAE=\angle CDF$.

解题通法：证明角相等的常用方法如下.

（1）对顶角相等；（2）一个三角形中等边对等角；（3）两直线平行，内错角相等（同位角相等）；（4）全等三角形对应角相等；（5）同角或等角的补角相等；（6）同角或等角的余角相等；（7）平行四边形的对角相等.

挑战·高分

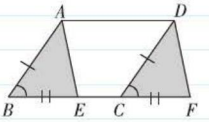
解法提醒

证明线段相等时，通常利用平行四边形的性质，将问题转化为证三角形全等；有时也可直接利用平行四边形的性质去证明.

注意：本例也可先证$MQ=PN$，然后结合等式的性质证$MP=QN$.

图解

如图 6-1-13 所示.



$\triangle ABE \cong \triangle DCF$

图 6-1-13

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用构造等腰三角形法判断平行四边形中线段间的关系

例 9 如图 6-1-14，在$\square ABCD$中，AE，BF分别平分$\angle DAB$和$\angle ABC$，且分别交CD于点E，F，AE，BF相交于点M.

（1）求证：$AE \perp BF$.

（2）判断线段DE与CF的大小关系，并说明理由.

解题秘方：紧扣等量代换，结合平行四边形的性质进行解答.

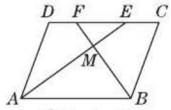


图 6-1-14

（1）**证明**：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$. $\therefore \angle DAB+\angle ABC=180°$.

$\because AE$，BF分别平分$\angle DAB$和$\angle ABC$，

$\therefore 2\angle EAB+2\angle FBA=180°$，即$\angle EAB+\angle FBA=90°$.

$\therefore \angle AMB=90°$，即$AE \perp BF$.

（2）**解**：$DE=CF$.

在$\square ABCD$中，$\because CD \parallel AB$，$AD=BC$，$\therefore \angle DEA=\angle EAB$.

又$\because AE$平分$\angle DAB$，$\therefore \angle DAE=\angle EAB$.

$\therefore \angle DEA=\angle DAE$. $\therefore DE=AD$.

同理可得$CF=BC$.

又$\because AD=BC$，$\therefore DE=CF$.

挑战·高分

解法提醒

1. 判断两线段的位置关系，其实质是判断两线段所在直线的位置关系. 两直线的位置关系有相交和平行两种情况，其中相交又有垂直和斜交两种情况.
2. 两线段的大小关系有大于、小于、相等这三种情况，它们的证明途径有：利用全等三角形的性质、平行四边形的性质、等式的性质等.

拔尖角度 3 利用构造对角线法证平行四边形中的线段相等

例 10 如图 6-1-15，已知$\square ABCD$的顶点A，C与$\square EBFD$的顶点E，F在一条直线上，求证：$AE=CF$.

解题秘方：紧扣平行四边形对角线的性质，构造对角线证明对角线上的线段相等.

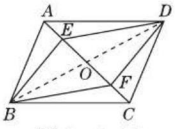


图 6-1-15

证明：如图 6-1-15，连接BD交AC于点O.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC$.

$\because$四边形$EBFD$是平行四边形，

$\therefore OE=OF$.

$\therefore OA-OE=OC-OF$，即$AE=CF$.

挑战·高分

特别提醒

本例易受全等三角形思维定式的影响，因欲证相等的两线段属于不同的三角形，习惯上就联想到证这两个三角形全等，这样虽然能达到证明的目的，却忽视了平行四边形特有的性质，走了弯路. 因此，在解决平行四边形的有关问题时，应注意灵活运用平行四边形的性质.

拔尖角度 4 利用面积法解与平行四边形相关的问题

例 11 如图 6-1-16，在$\square ABCD$中，对角线$BD=8$ cm，$AE \perp BD$，垂足为E，且$AE=3$ cm，$BC=4$ cm，则AD与BC之间的距离为_____.

解题秘方：紧扣平行四边形的性质及三角形的面积公式进行计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴△ ABD 与△ CDB 的面积相等．

∵ $AE \perp BD$，$AE=3$ cm，$BD=8$ cm，

∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD \cdot AE=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12\ (\text{cm}^2)$．

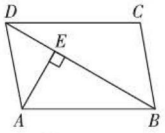


图 6-1-16

∴ $S_{四边形 ABCD}=2S_{\triangle ABD}=24\ \text{cm}^2$．设 AD 与 BC 之间的距离为 h cm，

∵ $BC=4$ cm，∴ $S_{四边形 ABCD}=BC \cdot h=4h\ \text{cm}^2$．∴ $4h=24$，解得 $h=6$．

答案：6 cm

拔尖角度▸ 5 等分面积法在设计方案中的应用

例 12 ［探究］如图 6-1-17 ①，在▱ $ABCD$ 中，AC，BD 交于点 O，过点 O 的直线交 AD 于 E，交 BC 于 F．

（1）求证：$OE=OF$．

（2）求证：四边形 $AEFB$ 与四边形 $DEFC$ 的周长相等．

（3）直线 EF 是否将▱ $ABCD$ 的面积二等分？

［应用］张大爷家有一块平行四边形的菜园，园中有一口水井 P，如图 6-1-17 ②所示．张大爷计划把菜园平均分成两块，分别种植西红柿和茄子，且使两块地共用这口水井，请你帮助张大爷把地分开．

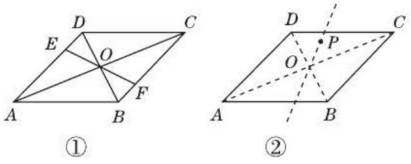


图 6-1-17

解题秘方：从平行四边形对角线互相平分及过对角线交点的任一直线等分平行四边形的面积入手解答．

（1）**证明**：∵在▱ $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$OB=OD$，

∴∠ $OBF=$ ∠ ODE．

又∵∠ $BOF=$ ∠ DOE，∴△ $BOF \cong$△ DOE（ASA）．∴ $OE=OF$．

（2）**证明**：由（1）得△ $BOF \cong$△ DOE，∴ $BF=DE$．

∵在▱ $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$OA=OC$，∴∠ $OAE=$ ∠ OCF．

又∵∠ $AOE=$ ∠ COF，∴△ $AOE \cong$△ COF（ASA）．∴ $AE=CF$．

∵在▱ $ABCD$ 中，$AB=CD$，

四边形 $AEFB$ 的周长为 $AE+EF+BF+AB$，

四边形 $DEFC$ 的周长为 $CF+EF+DE+CD$，

∴四边形 $AEFB$ 与四边形 $DEFC$ 的周长相等．

（3）**解**：由（1）（2）可知△ $BOF \cong$△ DOE，△ $COF \cong$△ AOE．

易证△ $AOB \cong$△ COD，∴ $S_{四边形 AEFB}=S_{四边形 DEFC}$．

故直线 EF 将▱ $ABCD$ 的面积二等分．

应用：如图 6-1-17 ②，连接 AC，BD 交于点 O，作直线 OP，则直线 OP 两旁的四边形面积相等．

挑战·高分

解法提醒

在三角形或平行四边形中，用不同的底边乘对应的高表示面积，根据面积为定值，可以得到不同的底和高之间的等量关系，从而将问题转化为解方程问题．

挑战·高分

技巧点拨

过平行四边形对角线交点的任意一条直线将平行四边形的面积二等分，且分成的两部分的周长相等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容是中考考查的重点，也是热点，主要考查平行四边形的定义和性质的应用，多以选择题、填空题或解答题的形式出现；也有一些创新题型，如开放探索题、操作题等，考查学生的数学思维能力和探索创新能力.

三年中考兵法

考法 1 利用平行四边形的性质证明三角形全等

例 13 [中考·湘潭]如图 6-1-18，在$\square ABCD$中，$DE=CE$，连接AE并延长，交BC的延长线于点F.

(1) 求证：$\triangle ADE \cong \triangle FCE$.

(2) 若$AB=2BC$，$\angle F=36°$，求$\angle B$的度数.

试题评析：此题主要考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、三角形内角和定理. 熟练掌握平行四边形的性质，证明三角形全等是解决问题的关键.

(1) **证明**：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD \parallel BC$. ∴$\angle D=\angle ECF$.

在$\triangle ADE$和$\triangle FCE$中，$\begin{cases}\angle D=\angle ECF,\\ DE=CE,\\ \angle AED=\angle FEC,\end{cases}$

∴$\triangle ADE \cong \triangle FCE$(ASA).

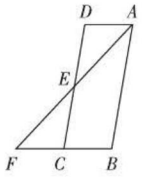


图 6-1-18

(2) **解**：∵$\triangle ADE \cong \triangle FCE$，∴$AD=FC$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$AD=BC$，∴$BC=FC$.

又∵$AB=2BC$，∴$AB=FB$. ∴$\angle BAF=\angle F=36°$.

∴$\angle B=180°-2\times 36°=108°$.

考法 2 利用线段垂直平分线的性质求平行四边形的周长

例 14 [中考·贵阳]如图 6-1-19，在$\square ABCD$中，对角线AC的垂直平分线分别交AD，BC于点E，F，连接CE. 若$\triangle CED$的周长为 6，则$\square ABCD$的周长为(　　)

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

试题评析：本题考查了平行四边形的性质、线段垂直平分线的性质、三角形周长的计算. 熟练掌握平行四边形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

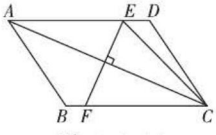


图 6-1-19

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$DC=AB$，$AD=BC$.

冲刺·满分

思路点拨

- 利用平行四边形的性质得出$AD \parallel BC$，故$\angle D=\angle ECF$，然后可证$\triangle ADE \cong \triangle FCE$；
- 证出$AB=FB$，由等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可得出答案.

解法提醒

由平行四边形的性质得出$DC=AB$，$AD=BC$，由线段垂直平分线的性质得出$AE=CE$，从而得出$\triangle CED$的周长为$AD+DC$，即可得出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ AC 的垂直平分线交 AD 于点 E，∴ $AE=CE$.

∴△ CED 的周长为 $DE+CE+DC=DE+AE+DC=AD+DC=6$，

∴□ $ABCD$ 的周长为 $2\times6=12$.

答案：B

考法 3 利用勾股定理及其逆定理求平行四边形中线段的长

例 15 [**中考·青岛**]如图 6-1-20，□ $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BC$，垂足为 E，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$BD=4$，则 AE 的长为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

试题评析：本题考查了勾股定理的逆定理和平行四边形的性质，能得出△ BAC 是直角三角形是解此题的关键.

解：∵ $AC=2$，$BD=4$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AO=\frac{1}{2}AC=1$，$BO=\frac{1}{2}BD=2$.

又∵ $AB=\sqrt{3}$，∴ $AB^2+AO^2=BO^2$.

∴∠ $BAC=90°$. ∴ $AB\perp AC$.

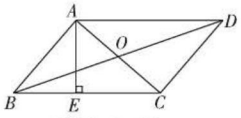


图 6-1-20

在 Rt△ BAC 中，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$.

∵ $S_{□ABCD}=AB\cdot AC=BC\cdot AE$，∴ $\sqrt{3}\times2=\sqrt{7}\cdot AE$，∴ $AE=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

答案：D

思路点拨

解本例有两个突破点：

1. 确定 $AB\perp AC$，即求 $\angle BAC=90°$，这可由△ ABO 的三边平方关系，根据勾股定理的逆定理求得；

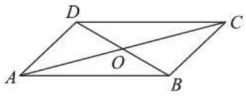
2. 同一平行四边形的面积相等，即 $S_{□ABCD}=AB\cdot AC=BC\cdot AE$.

两年模拟兵法

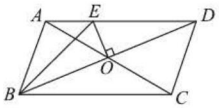
☞答案见 289 页

1. [**中考·柳州**]如图，在□ $ABCD$ 中，全等三角形的数量共有（　　）

A.2 对　　B.3 对　　C.4 对　　D. 5 对



（第 1 题）



（第 3 题）

2. [**中考·黑龙江**]在□ $ABCD$ 中，∠ BAD 的平分线把 BC 边分成长度是 3 和 4 的两部分，则□ $ABCD$ 的周长是（　　）

A.22　　B.20　　C.22 或 20　　D.18

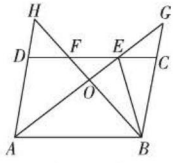
3. 如图，在□ $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$OE\perp BD$ 交 AD 于点 E，连接 BE. 若□ $ABCD$ 的周长为 28，则△ ABE 的周长为（　　）

A.28　　B.24　　C.21　　D.14

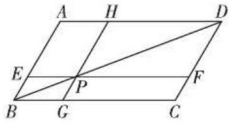
4. [**中考·威海**]如图，在□ $ABCD$ 中，∠ DAB 的平分线交 CD 于点 E，交 BC 的延长线于点 G，∠ ABC 的平分线交 CD 于点 F，交 AD 的延长线于点 H，AG 与 BH 交于点 O，连接 BE. 下列结论错误的是（　　）

A.$BO=OH$　　B.$DF=CE$

C.$DH=CG$　　D.$AB=AE$



（第 4 题）

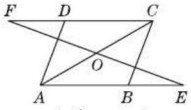


（第 5 题）

5. [**中考·南充**]如图，在□ $ABCD$ 中，过对角线 BD 上一点 P 作 $EF\parallel BC$，$GH\parallel AB$，且 $CG=2BG$，$S_{△BPG}=1$，则 $S_{□AEPH}=$_____.

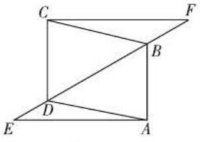
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·山西]已知：如图，在$\square ABCD$中，延长AB至点E，延长CD至点F，使得$BE=DF$，连接EF，与对角线AC交于点O.
求证：$OE=OF$.



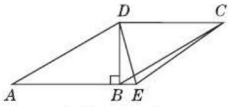
（第6题）

7. [中考·铜仁]如图，已知点E，F分别是平行四边形$ABCD$的对角线BD所在直线上的两点，连接AE，CF. 请你添加一个条件，使得$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，并证明.



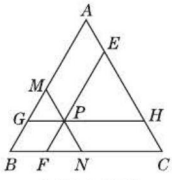
（第7题）

8. 如图，在$\square ABCD$中，对角线$BD \perp AB$，$\angle A=30°$，$\angle ADC$的平分线交AB的延长线于点E，连接CE.
（1）求证：$AD=AE$.
（2）若$AD=12$，连接AC交BD于点O. 画出图形，并求AC的长.



（第8题）

9. 如图，$\triangle ABC$是边长为a的等边三角形，P是$\triangle ABC$内的任意一点. 过点P作$EF \parallel AB$，分别交AC，BC于点E，F；作$GH \parallel BC$，分别交AB，AC于点G，H；作$MN \parallel AC$，分别交AB，BC于点M，N. 猜想$EF+GH+MN$的值是多少，其值是否随点P位置的改变而改变？并说明理由.
【导学号：2850581】



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 平行四边形的判定

核心知识

- 平行四边形的判定
- 平行线之间的距离

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形的判定

1. 判定方法

判定平行四边形可以从对边、对角和对角线三个方面入手. 如图 6-2-1，在 $\square ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，具体方法如下表所示.

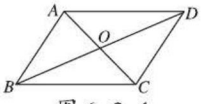


图 6-2-1



条件类型	判定方法	数学表达式
对边关系	两组对边分别平行的四边形是平行四边形	$\because AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形
	两组对边分别相等的四边形是平行四边形	$\because AD=BC$，$AB=CD$， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形
	一组对边平行且相等的四边形是平行四边形	$\because AD \parallel\!=\!= BC$（或 $AB \parallel\!=\!= CD$）， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形
对角关系	两组对角分别相等的四边形是平行四边形	$\because \angle DAB=\angle DCB$， $\angle ABC=\angle ADC$， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形
对角线关系	对角线互相平分的四边形是平行四边形	$\because OA=OC$，$OB=OD$， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

2. 灵活选择平行四边形判定定理的方法

（1）已知一组对边平行，可证明该组对边相等或证明另一组对边平行.

（2）已知一组对边相等，可证明该组对边平行或证明另一组对边相等.

（3）已知条件与对角线有关，可证明对角线互相平分.

（4）已知条件与角有关，可证明两组对角分别相等或证明对边之间的关系.

提分·必记

特别提醒

1. 平行四边形的判定定理和性质定理是互逆定理，解题时要注意区别，不能混淆.
(1) 由平行四边形这一条件得到边、角、对角线关系是性质；
(2) 由边、角、对角线关系得到平行四边形是判定.
2. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形.
3. 两组邻边分别相等的四边形不一定是平行四边形.

方法提醒

判定平行四边形的方法选择

已知条件	证明思路
一组对边相等	1. 另一组对边相等
	2. 该组对边平行
一组对边平行	1. 另一组对边平行
	2. 该组对边相等
对角线相交	对角线互相平分
角	两组对角分别相等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用平行四边形的判定方法判定平行四边形

题型1：边的关系在判定平行四边形中的应用

例1 如图6-2-2，已知 $BE \parallel DF$，$\angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$. 求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

解题秘方：结合条件“$BE \parallel DF$”，只需说明“$BE=DF$”或“$DE \parallel BF$”，即可得到四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

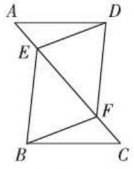


图6-2-2

证明：$\because BE \parallel DF$，

$\therefore \angle AFD=\angle CEB$.

又$\because \angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$.

$\therefore DF=BE$.

又$\because BE \parallel DF$，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

另解

$\because BE \parallel DF$，

$\therefore \angle AFD=\angle CEB$.

又$\because \angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$.

$\therefore \angle A=\angle C$，$AD=CB$.

$\because AF=CE$，$\therefore AE=CF$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$.

$\therefore \angle AED=\angle CFB$.

$\therefore \angle DEF=\angle BFE$.

$\therefore DE \parallel BF$.

又$\because BE \parallel DF$，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

解题通法：由边的关系判定平行四边形的方法如下.

1. 若已知一组对边平行，则可证这组对边相等或另一组对边平行.

2. 若已知一组对边相等，则可证这组对边平行或另一组对边相等.

题型2：角的关系在判定平行四边形中的应用

例2 如图6-2-3，在$\square ABCD$中，BE平分$\angle ABC$，交AD于点E，DF平分$\angle ADC$，交BC于点F，那么四边形$BFDE$是平行四边形吗？为什么？

解题秘方：针对条件中与角有关的条件居多这一特点，紧扣“两组对角分别相等”来证明平行四边形.

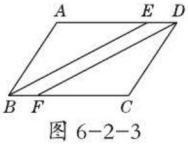


图6-2-3

解：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

在$\square ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$.

$\because BE$平分$\angle ABC$，DF平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle CDF=\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$，

$\therefore \angle CDF=\angle ADF=\angle ABE=\angle CBE$.

$\because \angle DFB=\angle C+\angle CDF$，$\angle BED=\angle ABE+\angle A$，

$\therefore \angle DFB=\angle BED$.

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

解法提醒

当已知条件中出现所要说明的四边形的角时，需从角的关系中考虑判定平行四边形的方法，因此，可根据两组对角分别相等的四边形是平行四边形来判定.

题型3：对角线的关系在判定平行四边形中的应用

例3 [中考·西宁]如图6-2-4，在四边形$ABCD$中，AC，BD相交于点O，O是AC的中点，$AD \parallel BC$，$AC=8$，$BD=6$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

（2）若 $AC \perp BD$，求$\square ABCD$的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：由于已知条件与四边形的对角线相关，因此可紧扣对角线关系判定平行四边形.

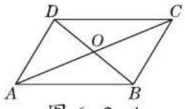


图 6-2-4

（1）**证明**：∵ O 是 AC 的中点，∴ $OA=OC$.

∵ $AD \parallel BC$，∴ $\angle ADO=\angle CBO$.

在△ AOD 和△ COB 中，$\begin{cases}\angle ADO=\angle CBO,\\ \angle AOD=\angle COB,\\ OA=OC,\end{cases}$

∴ △ AOD ≌△ COB（AAS）. ∴ $OD=OB$.

又∵ $OA=OC$，∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

（2）**解**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC \perp BD$，

∴ $S_{\square ABCD}=2S_{\triangle ABC}=2\times \frac{1}{2}AC\times \frac{1}{2}BD=24$.

解法提醒

当条件出现在所要说明的四边形的对角线上时，可根据对角线的关系判定平行四边形.

点知识 2 两条平行线之间的距离

1. 定义

两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

三种距离之间的区别与联系

类别	两点间的距离	点到直线的距离	两条平行线间的距离
区别	连接两点的线段的长度	点到直线的垂线段的长度	两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的垂线段的长度
联系	最后都归结为两点间的一条线段的长度		

2. 性质

如果两条直线互相平行，则其中一条直线上任意一点到另一条直线的距离都相等，即平行线间的距离处处相等.

数学表达式：如图 6-2-5，A，C 是 l_1 上任意两点，∵ $l_1 \parallel l_2$，$AB \perp l_2$，$CD \perp l_2$，∴ $AB=CD$.

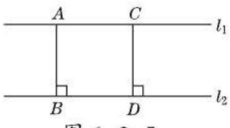


图 6-2-5

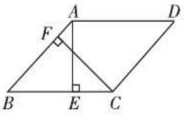


图 6-2-6

3. 拓展

（1）夹在两条平行线间的平行线段一定相等.

（2）等底等高的平行四边形的面积相等.

（3）平行四边形的面积 $S=$ 底 × 高 $=ah$（其中 a 是平行四边形的任意一条边长，h 必须是边长为 a 的边与它的对边之间的距离）. 如图 6-2-6 所示，在□ $ABCD$ 中，$AE \perp BC$ 于点 E，$CF \perp AB$ 于点 F，则 $S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=AB\cdot CF$.

提分·必记

特别提醒

1. 距离是指垂线段的长度，是正值；
2. 当两条平行线确定后，它们之间的距离是一定值，不随位置的不同而改变；
3. 平行线间的距离处处相等，因此，在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置；
4. 任何两条平行线间的距离都是存在的、唯一的，都是两条平行线间最短线段的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用两条平行线间的距离的性质说明面积相等

例 4 如图 6-2-7，直线 $a \parallel b$，点 A，E，F 在直线 a 上，点 B，C，D 在直线 b 上，$BC=EF$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等吗？为什么？

解题秘方：紧扣“等底等高的三角形面积相等”作三角形的高进行说明.

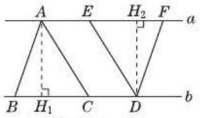


图 6-2-7

解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等. 理由如下.

如图 6-2-7，过点 A 作 $AH_1 \perp$ 直线 b，垂足为点 H_1，过点 D 作 $DH_2 \perp$ 直线 a，垂足为点 H_2.

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，

$\therefore S_1=\frac{1}{2}BC \cdot AH_1$，$S_2=\frac{1}{2}EF \cdot DH_2$.

$\because$ 直线 $a \parallel b$，$AH_1 \perp$ 直线 b，$DH_2 \perp$ 直线 a，

$\therefore AH_1=DH_2$.

又 $\because BC=EF$，$\therefore S_1=S_2$，

即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

提分·秘诀

解法提醒

1. 由平行线间的距离处处相等，可知顶点都在两平行线上的三角形的高相等.
2. 解顶点在两平行线上的三角形的面积问题，常作高（两平行线间的垂线段）进行解答.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用一题多解法判定平行四边形

例 5 如图 6-2-8，在四边形 $ABCD$ 中，$AE \perp BD$ 于 E，$CF \perp BD$ 于 F，$AE=CF$，$BF=DE$，四边形 $ABCD$ 是不是平行四边形？为什么？

解题秘方：紧扣平行四边形的判定定理，从不同的角度判定平行四边形.

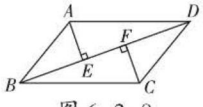


图 6-2-8

解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 理由如下.

方法一 两组对边分别平行法（定义法）.

$\because BF=DE$，$\therefore BF-EF=DE-EF$，即 $BE=DF$.

$\because AE \perp BD$，$CF \perp BD$，$\therefore \angle AEB=\angle CFD=90°$.

又 $\because AE=CF$，$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$（SAS）.

$\therefore \angle ABE=\angle CDF$. $\therefore AB \parallel CD$.

同理可证 $AD \parallel BC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法二 两组对边分别相等法.

由方法一知 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$，$\therefore AB=CD$.

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle CFB$ 中，$\because AE=CF$，$\angle AED=\angle CFB=90°$，$DE=BF$，

挑战·高分

另解 1

一组对边平行且相等法：

由方法一知

$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，

$\therefore AB=CD$，

$\angle ABE=\angle CDF$.

$\therefore AB \parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

另解 2

对角线互相平分法：

如图 6-2-9，连接 AC，交 BD 于点 O.

$\because AE \perp BD$，$CF \perp BD$，

$\therefore \angle AEO=\angle CFO=90°$.

又 $\because AE=CF$，

$\angle AOE=\angle COF$，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$（AAS）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFB$. $\therefore AD=CB$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法三 两组对角分别相等法.

由方法一知 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$,

$\therefore \angle ABE=\angle CDF$, $\angle BAE=\angle DCF$.

由方法二知 $\triangle AED \cong \triangle CFB$,

$\therefore \angle CBF=\angle ADE$, $\angle DAE=\angle BCF$.

$\therefore \angle ABC=\angle CDA$, $\angle BAD=\angle DCB$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

拔尖角度▶ 2 利用平行四边形法解几何问题

题型 1：平行四边形法在证明线段相等中的应用

例 6 如图 6-2-10，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \parallel AB$，在 AB 上截取 BF，使 $BF=AE$. 求证：$EF=BD$.

解题秘方：由于要证的线段是四边形的对边，因此，需将证明线段相等问题转化为证明平行四边形问题来解.

证明：$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又 $\because DE \parallel AB$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$. $\therefore AE=DE$.

$\because BF=AE$，$\therefore DE=BF$.

又 $\because DE \parallel BF$，$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形.

$\therefore EF=BD$.

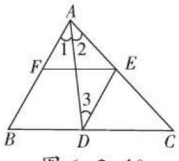


图 6-2-10

题型 2：平行四边形法在说明线段关系中的应用

例 7 如图 6-2-11，在 $\square ABCD$ 中，延长 AB 到 E，延长 CD 到 F，使得 $BE=DF$，试猜测 AC 与 EF 有什么关系，并加以证明.

解题秘方：结合图形进行猜测——AC，EF 互相平分. 紧扣“平行四边形对角线互相平分”这一特征，将证明线段互相平分问题转化为证明平行四边形问题来解.

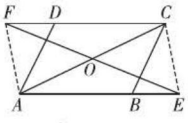


图 6-2-11

解：AC 与 EF 互相平分. 证明如下.

如图 6-2-11，连接 AF，CE.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore DC \parallel AB$，$DC=AB$.

$\because DF=BE$，$\therefore CF=AE$.

又 $\because CF \parallel AE$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

$\therefore AC$ 与 EF 互相平分.

$\therefore AO=CO$，$EO=FO$.

又 $\because BF=DE$，

$\therefore BF-FO=DE-EO$，

即 $BO=DO$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

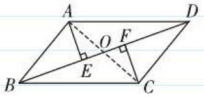


图 6-2-9

挑战·高分

解法提醒

证明两条线段（或两角）相等的常用方法：

1. 线段垂直平分线的判定和性质；
2. 角平分线的判定和性质；
3. 等腰三角形的判定和性质；
4. 全等三角形的性质；
5. 平行四边形的性质.

知识储备

两条线段的数量关系有相等或倍分，位置关系有平行或相交，而相交的特殊情况有垂直、互相平分.

另解

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore DC=AB$，$CF \parallel AE$.

$\therefore \angle CFE=\angle AEF$.

$\because DF=BE$，$\therefore CF=AE$.

又 $\because EF=FE$，

$\therefore \triangle CFE \cong \triangle AEF$.

$\therefore \angle CEF=\angle AFE$.

$\therefore CE \parallel AF$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用构造平行四边形法证明线段相等

挑战·高分

例 8 如图 6-2-12，已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 为 AC 上一点，连接 BE 交 AD 于点 F，且 $AE=FE$.

求证：$BF=AC$.

解题秘方：利用构造平行四边形法，将分散的两条要证的线段（BF，AC）集中到同一个三角形中，从而将证边相等的问题转化为证角相等的问题.

证明：如图 6-2-12，延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连接 BG，CG.

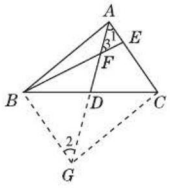


图 6-2-12

$\because DG=AD$，$BD=DC$，

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形.

$\therefore AC \parallel BG$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又 $\because AE=FE$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore \angle 2=\angle 3=\angle BFG$.

$\therefore BG=BF$.

又 $\because BG=AC$，$\therefore BF=AC$.

解法提醒

当题中有三角形中线时，常用**倍长中线法**构造平行四边形，然后利用平行四边形的性质推出线段相等或平行，以及角相等.

拔尖角度▸ 4 利用“动中求静”法探究动点问题

挑战·高分

例 9 如图 6-2-13，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BC=18$ cm，$CD=15$ cm，$AD=10$ cm，$AB=12$ cm. 动点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 3 cm/s 的速度由 C 向 B 运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动.

（1）几秒时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长；

（2）几秒时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长.

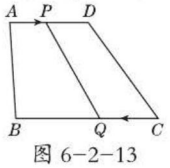


图 6-2-13

解题秘方：因条件中有一组对边平行，由平行四边形的判定可知，只需补充这组对边相等这一条件即可，再由运动的路程、速度、时间的关系表示出相关线段的长度，从而列出方程进行求解.

解：（1）设 x s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，

则 $10-2x=3x$，解得 $x=2$.

所以 2 s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形.

此时四边形 $PDCQ$ 的周长是 $3\times2\times2+15\times2=42$（cm）.

（2）设 y s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，

则 $2y=18-3y$，解得 $y=3.6$.

所以 3.6 s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形.

此时四边形 $ABQP$ 的周长是 $3.6\times2\times2+12\times2=38.4$（cm）.

解法提醒

解决动点问题的基本思路就是变“动”为“静”，用“静”去理解“动”. 本题中，若运动的时间为 t s，则 $AP=2t$ cm，$CQ=3t$ cm，利用平行四边形的性质列方程即可求得 t 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用平行四边形的判定和性质进行证明与计算是中考的重点内容，出现频率较高．近年来还经常出现条件或结论开放的试题，一般以选择题、填空题的形式出现，或作为综合题的一个知识点考查．今后中考命题的趋势仍向解决实际问题的方向发展，且仍会以基础题为主．

三年中考兵法

考法 1 利用全等三角形判定平行四边形

例 10 [中考·咸宁]如图 6-2-14，点 B，E，C，F 在一条直线上，$AB=DF$，$AC=DE$，$BE=FC$.

（1）求证：$\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

（2）连接 AF，BD，求证：四边形 $ABDF$ 是平行四边形．

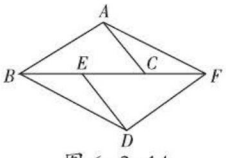


图 6-2-14

试题评析：本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定与性质、平行线的判定．熟练掌握平行四边形的判定方法和三角形全等的判定方法是解决问题的关键．

证明：（1）$\because BE=FC$，$\therefore BC=EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，$\begin{cases} AB=DF, \\ AC=DE, \\ BC=EF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE$（SSS）.

（2）由（1）知 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$，

$\therefore \angle ABC = \angle DFE$.

$\therefore AB \parallel DF$.

又 $\because AB=DF$，

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形．

考法 2 利用平行四边形的性质和判定解决与勾股定理综合的问题

例 11 [中考·鄂州]如图 6-2-15，在 $\square ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A，C 两点作 $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E，F，延长 AE，CF 分别交 CD，AB 于 M，N.

（1）求证：四边形 $CMAN$ 是平行四边形．

（2）已知 $DE=4$，$FN=3$，求 BN 的长．

试题评析：本题考查平行四边形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是记住平行四边形的判定方法和性质，正确寻找全等三角形，属于中考常考题型．

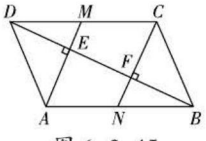


图 6-2-15

冲刺·满分

思路点拨

1. 由 SSS 即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$；
2. 由全等三角形的性质得出 $\angle ABC = \angle DFE$，证出 $AB \parallel DF$，即可得出结论．

思路点拨

- 只要证明 $CM \parallel AN$，$AM \parallel CN$ 即可．
- 先证明 $\triangle MDE \cong \triangle NBF$，可得 $BF=DE$，再在 $Rt\triangle BFN$ 中利用勾股定理即可解决问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CD \parallel AB$.

∵ $AM \perp BD$，$CN \perp BD$，∴ $AM \parallel CN$.

∴四边形 $CMAN$ 是平行四边形.

（2）**解**：∵四边形 $CMAN$ 是平行四边形，

∴ $CM=AN$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CD=AB$，$CD \parallel AB$.

∴ $DM=BN$，$\angle MDE=\angle NBF$.

在△ MDE 和△ NBF 中，

$$\begin{cases}\angle MDE=\angle NBF,\\ \angle DEM=\angle NFB=90^\circ,\\ DM=BN,\end{cases}$$

∴△ $MDE \cong$△ NBF（AAS）.

∴ $BF=DE=4$.

在 Rt△ BFN 中，∵$\angle BFN=90^\circ$，$BF=4$，$FN=3$，

∴ $BN=\sqrt{BF^2+FN^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

考法 3 利用平行四边形的判定和性质解决与等腰三角形、勾股定理综合的问题

例 12 [中考·大庆]如图 6-2-16，以 BC 为底边的等腰三角形 ABC，点 D，E，G 分别在 BC，AB，AC 上，且 $EG \parallel BC$，$DE \parallel AC$，延长 GE 至点 F，使得 $BE=BF$.

（1）求证：四边形 $BDEF$ 为平行四边形.

（2）当 $\angle C=45^\circ$，$BD=2$ 时，求 D，F 两点间的距离.

试题评析：本题考查了平行四边形的判定与性质、等腰三角形的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质和勾股定理是解决问题的关键.

（1）**证明**：∵△ ABC 是等腰三角形，

∴ $\angle ABC=\angle C$.

∵ $EG \parallel BC$，$DE \parallel AC$，

∴ $\angle AEG=\angle ABC=\angle C$，四边形 $CDEG$ 是平行四边形.

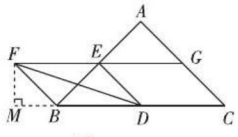


图 6-2-16

∴ $\angle DEG=\angle C$.

∵ $BE=BF$，∴ $\angle BFE=\angle BEF=\angle AEG$.

∴ $\angle BFE=\angle DEG$. ∴ $BF \parallel DE$.

又∵ $FE \parallel BD$，∴四边形 $BDEF$ 为平行四边形.

思路点拨

由等腰三角形的性质得出∠ABC=∠C，证出∠AEG=∠ABC=∠C，四边形CDEG是平行四边形，继而得出∠DEG=∠C，证出∠BFE=∠DEG，故BF∥DE，即可得出结论；

证出△BDE，△BEF都是等腰直角三角形，由勾股定理得出 $BF=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$. 作FM⊥BD交DB的延长线于M，则△BFM是等腰直角三角形，由勾股定理得出 $FM=BM=\frac{\sqrt{2}}{2}BF=1$，得出DM=3，在Rt△DFM中，由勾股定理求出DF的长即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）**解**：∵ $DE \parallel AC$，$\angle C=45°$，

∴ $\angle BDE=\angle C=\angle ABC=\angle BFE=\angle BEF=45°$.

∴ $\triangle BDE$，$\triangle BEF$ 都是等腰直角三角形.

∴ $BF=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$.

作 $FM\perp BD$ 交 DB 的延长线于 M，如图 6−2−16 所示，

则△ BFM 是等腰直角三角形.

∴ $FM=BM=\frac{\sqrt{2}}{2}BF=1$. ∴ $DM=3$.

在 Rt △ DFM 中，由勾股定理得 $DF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

即 D，F 两点间的距离为 $\sqrt{10}$.

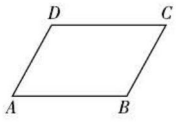
两年模拟兵法

☞答案见 290 页

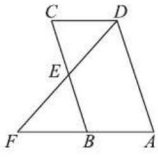
1. [**中考·衡阳**]如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，要使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可添加的条件不正确的是（　　）

A. $AB=CD$　　B. $BC \parallel AD$

C. $\angle A=\angle C$　　D. $BC=AD$



（第 1 题）



（第 3 题）

2. [**中考·黔西南州**]在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AB \parallel CD$，则下列结论中错误的是（　　）

A. $\angle A=\angle C$　　B. $AD \parallel BC$

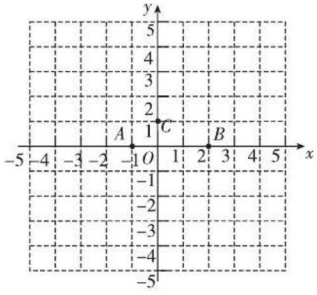
C. $\angle A=\angle B$　　D. 对角线互相平分

3. [**中考·东营**]如图，在四边形 $ABCD$ 中，E 是 BC 边的中点，连接 DE 并延长，交 AB 的延长线于点 F，$AB=BF$. 添加一个条件使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，你认为下面四个条件中可选择的是（　　）

A. $AD=BC$　　B. $CD=BF$

C. $\angle A=\angle C$　　D. $\angle F=\angle CDF$

4. [**模拟·桥西区**]如图，在平面直角坐标系中，以 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,1)$ 为顶点构造平行四边形，下列不能作为平行四边形的另一个顶点坐标的是（　　）



（第 4 题）

A. $(3,\ 1)$　　B. $(-4,\ 1)$

C. $(1,\ -1)$　　D. $(-3,\ 1)$

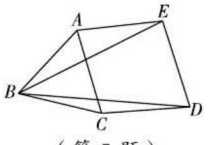
5. [**中考·黄石**]如图，已知凸五边形 $ABCDE$ 的边长均相等，且 $\angle DBE=\angle ABE+\angle CBD$，$AC=1$，则 BD 必定满足（　　）

A. $BD<2$

B. $BD=2$

C. $BD>2$

D. 以上情况均有可能



（第 5 题）

6. [**中考·铜仁**]在同一平面内，设 a，b，c 是三条互相平行的直线，已知 a 与 b 的距离为 4 cm，b 与 c 的距离为 1 cm，则 a 与 c 的距离为（　　）

A. 1 cm　　B. 3 cm

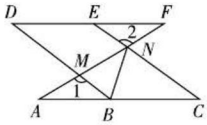
C. 5 cm 或 3 cm　　D. 1 cm 或 3 cm

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·镇江]如图，点B，E分别在AC，DF上，AF分别交BD，CE于点M，N，$\angle A=\angle F$，$\angle 1=\angle 2$.

（1）求证：四边形$BCED$是平行四边形.

（2）已知$DE=2$，连接BN. 若BN平分$\angle DBC$，求CN的长.

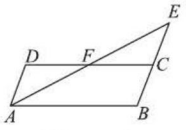


（第7题）

8. [中考·遂宁]如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，延长BC到点E，使$CE=BC$，连接AE交CD于点F，F是CD的中点.

求证：（1）$\triangle ADF\cong\triangle ECF$；

（2）四边形$ABCD$是平行四边形.

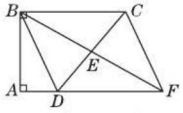


（第8题）

9. [中考·宿迁]如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle ABC=90°$，$AD=1$，$BC=3$，E是边CD的中点，连接BE并延长与AD的延长线相交于点F.

（1）求证：四边形$BDFC$是平行四边形.

（2）若$\triangle BCD$是等腰三角形，求四边形$BDFC$的面积.



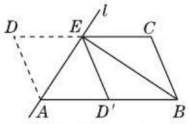
（第9题）

10. [中考·扬州]如图，将$\square ABCD$沿过点A的直线l折叠，使点D落到AB边上的点D'处，折痕l交CD边于点E，连接BE.

（1）求证：四边形$BCED'$是平行四边形.

（2）若BE平分$\angle ABC$，求证：$AB^2=AE^2+BE^2$.

【导学号：2850581】

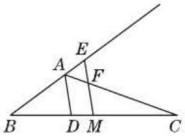


（第10题）

11. [中考·淄博]如图，已知$\triangle ABC$，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，BC的中点为M，$ME\parallel AD$，交BA的延长线于点E，交AC于点F.

求证：（1）$AE=AF$；

（2）$BE=\dfrac{1}{2}(AB+AC)$.



（第11题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 三角形的中位线

核心知识

- 三角形中位线的定义
- 三角形中位线定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸三角形的中位线

1. 三角形中位线的定义 连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线.

数学表达式：如图 6−3−1，∵ $AD=BD$，$AE=EC$，∴ DE 是△ ABC 的中位线.

2. 三角形中位线定理 三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半.

数学表达式：如图 6−3−1，∵ $AD=BD$，$AE=EC$，

∴ $DE \parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

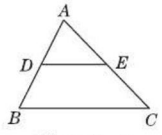


图 6−3−1

3. 三角形中位线的应用

（1）三角形中位线定理反映了三角形的中位线与第三边的双重关系：一是位置关系，可以用来证两直线平行；二是数量关系，可以用来证线段的倍分关系.

（2）中位线具有平移角、倍分转化线段的功能，因此当遇到中点或中线时，应考虑构造中位线，即我们常说的“遇到中点想中位线”；相应地，若知道了三角形的中位线，则三角形两边的中点即可找到.

拔考向▸利用三角形的中位线证明线段间的关系

题型 1：三角形的中位线在证明线段数量关系中的应用

例 1 如图 6−3−2，已知 E 为平行四边形 $ABCD$ 中 DC 边延长线上的一点，且 $CE=DC$，连接 AE，分别交 BC，BD 于点 F，G，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OF.

求证：$AB=2OF$.

解题秘方：紧扣三角形中位线定理的数量关系，将证明线段的倍数关系转化为证明 OF 是△ ABC 的中位线.

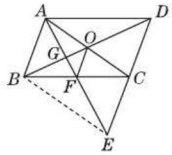


图 6−3−2

提分·必记

特别提醒

1. 一个三角形有三条中位线.
2. 三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形，三个面积相等的平行四边形.
3. 三角形的中位线与三角形的中线的区别：三角形的中线是连接一顶点和它的对边中点的线段，而三角形的中位线则是连接两边中点的线段.
4. 三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

提分·秘诀

方法点拨

证明线段倍分关系的方法：由于三角形的中位线等于三角形第三边的一半，因此当需要证明某一线段是另一线段的一半或两倍，且题中出现中点时，常先证明这个一半的线段是三角形的中位线，然后用三角形的中位线定理证明即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：如图 6−3−2，连接 BE.

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，$AB=CD$，点 O 是 AC 的中点.

∵ E 为平行四边形 $ABCD$ 中 DC 边延长线上的一点，且 $CE=DC$，

∴ $AB \parallel CE$，$AB=CE$，∴四边形 $ABEC$ 是平行四边形，

∴点 F 是 BC 的中点.

又∵点 O 是 AC 的中点，∴ OF 是△ ABC 的中位线，

∴ $AB=2OF$.

题型 2：三角形的中位线在证明线段位置关系中的应用

例 2 如图 6−3−3，在△ ABC 中，$BC>AC$，点 D 在 BC 上，且 $DC=AC$，∠ ACB 的平分线 CE 交 AD 于 E，点 F 是 AB 的中点，连接 EF. 求证：$EF \parallel BC$.

解题秘方：紧扣三角形中位线定理的位置关系，将证明线段的位置关系问题转化为证明三角形的中位线问题来解.

证明：∵ CE 平分∠ ACB，$DC=AC$，

∴ CE 是△ ACD 的中线.

∴点 E 是 AD 的中点.

又∵点 F 是 AB 的中点，

∴ EF 是△ ABD 的中位线.

∴ $EF \parallel BD$，即 $EF \parallel BC$.

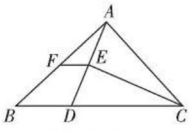


图 6−3−3

技巧点拨

由于三角形的中位线平行于第三边，因此，当要求证明两线段平行且题中含中点条件时，常考虑用三角形中位线定理证明；而等腰三角形的“三线合一”、平行四边形的“对角线互相平分”是证明一条线段是三角形中位线的常用方法.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用中位线法解决中点四边形问题

挑战·高分

例 3 如图 6−3−4 所示的四边形 $ABCD$，点 E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点，连接 EF，FG，GH，HE，得到四边形 $EFGH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

解题秘方：连对角线构造中位线是解中点四边形问题的一种有效方法.

证明：如图 6−3−4，连接 BD.

∵点 E，H 分别是边 AB，DA 的中点，

∴ EH 为△ ABD 的中位线.

∴ $EH \parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$.

同理可得 $FG \parallel BD$，$FG=\frac{1}{2}BD$.

∴ $EH \parallel FG$，$EH=FG$.

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

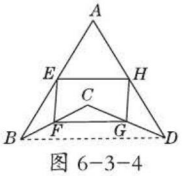


图 6−3−4


中点四边形

解法提醒

1. 依次连接四边形各边中点所得到的四边形叫中点四边形，所有的中点四边形都是平行四边形.
2. 利用中位线定理判定平行四边形，一般用“一组对边平行且相等”的方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用构造中位线法证明线段的和倍关系

例 4 如图 6-3-5，在△ ABC 中，BD，CE 分别平分∠ ABC，∠ ACB，$AM \perp CE$ 于点 M，$AN \perp BD$ 于点 N.

求证：$MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

解题秘方：解决本例有两个突破口.

（1）构造△ AFG，证 MN 是△ AFG 的中位线.

（2）将 $AB+AC-BC$ 中的 AB，AC 转移到线段 BC 上，使分散的三条线段的和差关系转化为同一条直线上三条线段的和差关系.

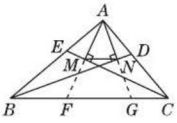


图 6-3-5

证明：如图 6-3-5，延长 AM，AN 分别交 BC 于点 F，G.

∵ BD 平分∠ ABC，$AN \perp BD$，

∴ $AN=NG$，$AB=BG$.

同理可得 $AM=MF$，$AC=CF$.

∴ M，N 分别为 AF，AG 的中点.

∴ $MN=\frac{1}{2}FG$.

又∵ $FG=BG+FC-BC=AB+AC-BC$，

∴ $MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

挑战·高分

方法点拨

图中不存在中点，但结论与三角形中位线定理类似，因此应设法寻找中点，构造三角形的中位线.

要证明 $MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$，可构造以 MN 为中位线的三角形，故延长 AM 交 BC 于点 F，延长 AN 交 BC 于点 G，易证明 $MN=\frac{1}{2}FG$. 又因 $FG=BG+FC-BC$，故只要证明 $BG=AB$，$FC=AC$，问题即可得解.

本题的证明思路体现了类比思想和转化思想.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容在中考中主要考查三角形的中位线定理及其应用，题型大多是选择题、填空题，题目难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用三角形的中位线求角的度数

例 5 [中考·黔南州]如图 6-3-6，在四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 的中点，E，F 分别是 AB，CD 的中点，$AD=BC$，∠ $FPE=100°$，则∠ PFE 的度数是_____.

试题评析：本题考查的是三角形中位线定理的应用，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键.

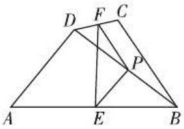


图 6-3-6

解：∵ P 是对角线 BD 的中点，E 是 AB 的中点，

∴ $EP=\frac{1}{2}AD$. 同理可得 $FP=\frac{1}{2}BC$.

冲刺·满分

思路点拨

根据三角形中位线定理得到 $EP=\frac{1}{2}AD$，$FP=\frac{1}{2}BC$，继而得到 $PE=PF$. 然后根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理计算即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AD=BC$,

∴ $PE=PF$.

∴ $\angle PFE=\angle PEF$.

∵ $\angle FPE=100°$,

∴ $\angle PFE=40°$.

答案：40°

考法 2 利用三角形的中位线证明线段相等

例 6 [中考·广元]如图 6-3-7，在△ ABC 中，$\angle BAC=90°$，延长 BA 到点 D，使 $AD=\frac{1}{2}AB$，E，F 分别是边 BC，AC 的中点. 求证：$DF=BE$.

试题评析：本题主要考查三角形的中位线定理，利用三角形中位线定理得到的结论证明三角形全等，是解决问题的关键.

解：∵ E，F 分别是边 BC，AC 的中点，

∴ $EF=\frac{1}{2}AB$，$EF\parallel AB$，$AF=FC$，$BE=EC$.

∵ $AD=\frac{1}{2}AB$，∴ $EF=AD$.

∵ $\angle BAC=90°$，$EF\parallel AB$，

∴ $\angle DAC=\angle EFC=90°$.

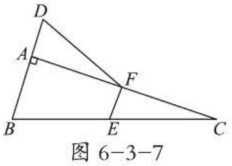


图 6-3-7

在△ DAF 和△ EFC 中，

$$\begin{cases} AF=FC, \\ \angle DAC=\angle EFC, \\ AD=EF, \end{cases}$$

∴△ $DAF\cong$△ EFC（SAS）. ∴ $DF=EC$.

又∵ $BE=EC$，∴ $DF=BE$.

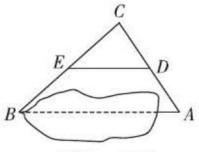
方法点拨

三角形的中位线定理揭示了线段之间的数量关系和位置关系，此结论为三角形全等提供边相等或角相等的依据.

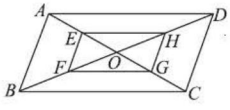
两年模拟兵法 ☞答案见 291 页

1. [中考·宜昌]如图，要测定被池塘隔开的 A，B 两点的距离，可以在 AB 外选一点 C，连接 AC，BC，并分别找出它们的中点 D，E，连接 DE. 现测得 $AC=30$ m，$BC=40$ m，$DE=24$ m，则 $AB=$（　　）

A. 50 m　　B. 48 m　　C. 45 m　　D. 35 m



（第 1 题）



（第 3 题）

2. 已知△ ABC 的各边长度分别为 3 cm，4 cm，5 cm，则连接各边中点的三角形的周长为（　　）

A. 2 cm　　B. 7 cm　　C. 5 cm　　D. 6 cm

3. [中考·广州]如图，在▱ $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=4$，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 E，F，G，H 分别是 AO，BO，CO，DO 的中点，则下列说法正确的是（　　）

A. $EH=HG$

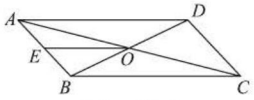
B. 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

C. $AC\perp BD$

D. △ ABO 的面积是△ EFO 的面积的 2 倍

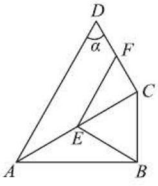
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.[中考·达州]如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 是 AB 的中点，$\triangle BEO$ 的周长为 8，则 $\triangle BCD$ 的周长为_____.



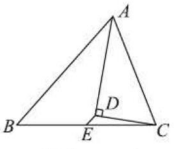
（第 4 题）

5.[中考·泰州]如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，$\angle ACD=\angle ABC=90°$，$E$，$F$ 分别为 AC，CD 的中点，$\angle D=\alpha$，则 $\angle BEF$ 的度数为_____（用含 α 的式子表示）.



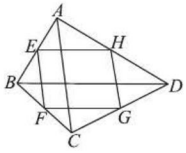
（第 5 题）

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 平分 $\angle BAC$，$CD\perp AD$，点 E 是 BC 的中点. 若 $AB=12$，$AC=10$，求 DE 的长. 【导学号：2850581】



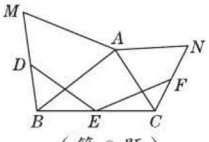
（第 6 题）

7. 如图，E，F，G，H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



（第 7 题）

8. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，分别以 AB，AC 为边向外侧作等边三角形 ABM 和等边三角形 CAN. 点 D，E，F 分别是 MB，BC，CN 的中点，连接 DE，FE. 求证：$DE=EF$.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 多边形的内角和与外角和

核心知识
- 多边形的内角和
- 多边形的外角和

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 多边形的内角和

1. **定理** n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.

2. **多边形内角和公式的常见应用**

（1）已知多边形的边数，求内角和；

（2）已知多边形的内角和，求边数；

（3）求正 n 边形每个内角的度数，其公式为 $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$；

（4）已知 n 边形每个内角的度数，且度数都相等，求边数.

提分·必记

特别解读

1. 由 n 边形的内角和公式 $(n-2)\cdot 180°$ 可知，n 边形的内角和一定是 $180°$ 的整数倍.
2. 多边形的内角和随边数的变化而变化，边数每增加 1，内角和就增加 $180°$.

拨考向 利用多边形内角和公式求多边形的边数

题型 1：多边形内角和（或角）在求边数中的应用

例 1 根据下列条件分别求多边形的边数：

（1）多边形的内角和是 $1\,620°$；

（2）正多边形的每个内角均为 $120°$.

解题秘方：根据多边形内角和公式列出方程求解.

解：设多边形的边数为 n.

（1）$(n-2)\cdot 180=1\,620$，

解得 $n=11$. 故多边形的边数为 11.

（2）$(n-2)\cdot 180=120n$，

解得 $n=6$. 故正多边形的边数为 6.

已知内角和，设出边数 n，利用内角和公式列出方程求解.

提分·秘诀

解法提醒

正多边形的内角和可以用每个内角的度数乘多边形内角的个数（多边形的边数）来表示，结合多边形的内角和公式，可求出边数.

题型 2：多边形的缺角和在求边数中的应用

例 2 已知一个多边形除一个内角外其余内角的和为 $1\,710°$，求这个多边形的边数及这个内角的度数.

解题秘方：紧扣多边形的内角大于 $0°$ 且小于 $180°$，列出关于多边形的边数 n 的不等式组求解.

解：设这个多边形是 n 边形，则其内角和为 $(n-2)\times 180°$. 根据题意，得 $1\,710° < (n-2)\times 180° < 1\,710° + 180°$，

$\therefore 11.5 < n < 12.5$. $\because n$ 为正整数，$\therefore n=12$.

$\therefore$ 这个内角的度数为 $(12-2)\times 180° - 1\,710° = 90°$.

解法提醒

在解决多边形的内角和问题时，有两个隐含的关键条件：

一是多边形的每一个内角的度数都大于 $0°$，且小于 $180°$；

二是多边形的边数 n 的取值范围是 $n \geqslant 3$，且 n 为整数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：截角在确定多边形边数中的应用

例 3 一个多边形截去一个角后，形成的新多边形的内角和是 2 880°，则原多边形的边数是多少？

解题秘方：紧扣截去一个角所得的多边形与原多边形相比，边数的变化规律求解.

解：设新多边形的边数为 n，根据题意得

$(n-2)\times 180^\circ = 2\,880^\circ$，

解得 $n=18$.

∵新多边形与原多边形相比，边数可能增加一条，可能不变，也可能减少一条，

∴原多边形的边数是 17 或 18 或 19.

特别提醒

一个多边形(除三角形外)截去一个角后，按不同的截法可得到边数不同的三种多边形，即边数增加1，边数不变，边数减少1. 以五边形为例，如图 6-4-1 所示.

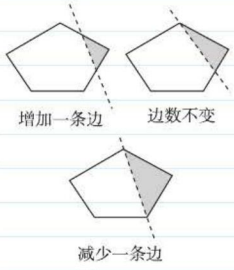


图 6-4-1

点知识 ▸ 2 多边形的外角和

1. 多边形的外角与外角和的定义 多边形内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做这个多边形的外角. 在每个顶点处取这个多边形的一个外角，它们的和叫做这个多边形的外角和.

2. 定理 多边形的外角和都等于 360°.

多边形的外角和是由多边形内、外角的关系推导出的，n 边形的外角和等于 $n\times 180^\circ-(n-2)\times 180^\circ=360^\circ$.

3. 常见应用

(1) 已知外角度数求正多边形的边数；

(2) 已知正多边形边数求外角度数，所用公式为 $\dfrac{360^\circ}{n}$.

提分·必记

特别解读

1. 多边形的外角和是指每个顶点处取一个外角的和.
2. 多边形的外角和恒等于 360°，与边数多少无关.

拔考向 ▸ 利用多边形的外角和定理计算

例 4 根据下列条件解决问题：

(1) 一个多边形的各内角都相等，已知其中一个外角为 72°，求该多边形的边数；

(2) 已知一个正多边形的每一个外角都等于 30°，求这个正多边形的边数.

解题秘方：根据多边形的内角与外角的关系、外角和定理计算.

解：(1) 设该多边形的边数为 n，

根据多边形的外角和为 360° 可得，

$n\times 72^\circ=360^\circ$，解得 $n=5$.

∴该多边形的边数为 5.

(2) ∵多边形的外角和为 360°，∴ $360^\circ\div 30^\circ=12$.

故这个正多边形的边数为 12.

提分·秘诀

解法提醒

多边形的各内角相等，故各外角也相等. 已知其中一个外角的度数，由多边形的外角和是 360°，即可得出边数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 通过求多边形的边数求多边形对角线的条数

例5 [中考·莱芜]一个多边形除一个内角外其余内角的和为1 510°，则这个多边形对角线的条数是（　　）

A. 27　　B. 35　　C. 44　　D. 54

解题秘方：先根据多边形的每一个内角都大于0°且小于180°，列出不等式组，求出边数，然后再求对角线的条数.

解：设这个内角度数为x，多边形的边数为n，

则$(n-2)\times180°-x=1\,510°$.

$\therefore x=(n-2)\times180°-1\,510°$.

$\because 0°<x<180°$,

$\therefore 0°<(n-2)\times180°-1\,510°<180°$.

$\therefore \frac{151}{18}<n-2<\frac{169}{18}$.

$\because n$是自然数，$\therefore n-2=9$.

$\therefore n=11$.

$\therefore \frac{n(n-3)}{2}=\frac{11\times8}{2}=44$.

答案：C

挑战·高分

另解

设这个多边形的边数为n，除去的那个内角度数为x，由题意得$(n-2)\times180°-x=1\,510°$.

解得

$n=\frac{1\,510°+x}{180°}+2$

$=10+\frac{70°+x}{180°}$.

$\because n$为正整数，

$0°<x<180°$,

$\therefore x=110°$，$n=11$.

拔尖角度 2 利用转化凸多边形法求多边形的内角和

例6 如图6-4-2，求$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$的度数.

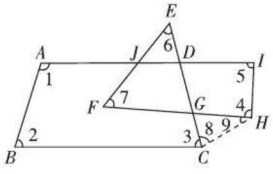


图6-4-2

解题秘方：将不规则图形中的角转化为一个凸多边形或几个凸多边形的内角，然后利用多边形内角和公式求解.

解：如图6-4-2，连接CH，

则$\angle6+\angle7=\angle8+\angle9$.

$\therefore\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$

$=\angle1+\angle2+\angle3+\angle8+\angle9+\angle4+\angle5$

$=(5-2)\times180°$

$=540°$.

挑战·高分

解法提醒

- 有关“折线图”中求多个角和的问题，可运用数学的转化思想，通过作适当的辅助线，将这些角转化到同一个多边形中，利用多边形的内角和解决.
- 非凸多边形多角和的求解思路：一般先通过添加辅助线把图形转化为凸多边形，然后运用多边形内角和公式求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查多边形的内角和公式，以及多边形的内、外角和与边数之间的关系．近几年中考主要以选择题和填空题形式考查，以基础为主，题目较容易．

三年中考兵法

考法 1 利用多边形的内角、外角的关系求内角和

例 7 [中考·北京]若正多边形的一个外角是 60°，则该正多边形的内角和为（　　）

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

试题评析：本题考查了多边形的内角、外角及内角和，解题的关键是掌握内角、外角的关系和多边形的内角和公式.

解：∵正多边形的一个外角为 60°，

∴每个内角为 120°.

设这个多边形的边数为 n.

由题意，得 $(n-2)\cdot 180°=120°n$，

解得 $n=6$.

∴ $120°\cdot n=120°\times 6=720°$.

答案：C

考法 2 利用正多边形的定义及外角和求边数和角

例 8 [中考·南平]一个机器人从 O 点出发，每前进 1 m，就向右转体 α（$0°<\alpha<180°$），照这样走下去，机器人恰能回到 O 点．若 $\alpha=15°$，则机器人所走过的路程为_____；若机器人所走过的路程最短，则 α 的值等于_____.

试题评析：本题主要考查正多边形的定义及正多边形的外角和，解题的关键是利用外角和等于 360°求正多边形的边数．

解：根据正多边形的定义可知，机器人走的路线恰好围成正多边形．

∵ $\alpha=15°$，

∴正多边形的每个外角等于 15°.

∴正多边形的边数为 $360°\div 15°=24$.

∵正多边形每条边长为 1 m，

∴机器人走过的路程为 24 m.

机器人转的次数越少，所走的路程就越短．根据多边形的定义可知，边数至少为 3，故 $\alpha=360°\div 3=120°$.

答案：24 m；120°

冲刺·满分

解法指导

利用多边形内角和公式构造关于边数的方程，通过解方程确定多边形的边数.

方法点拨

由于多边形的外角和是一个定值，所以正多边形每个外角的度数与边数的乘积就是一个定值．边数越大，外角的度数越小；反之，外角的度数越大，边数越小．边数最小的多边形是三角形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用多边形的内角和公式和角平分线定义求角的度数

例 9 [中考·济宁]如图 6-4-3，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，$DP$，$CP$ 分别平分 $\angle EDC$，$\angle BCD$，则 $\angle P$ 的度数是（　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°

试题评析：本题主要考查了多边形内角和公式及角平分线的定义，解题的关键是掌握多边形内角和公式.

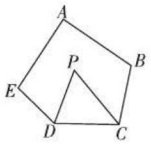


图 6-4-3

解：∵五边形 $ABCDE$ 的内角和为 $(5-2)\times 180°=540°$，$\angle A+\angle B+\angle E=300°$，

$\therefore \angle EDC+\angle BCD=240°$.

又∵DP，CP 分别平分 $\angle EDC$，$\angle BCD$，

$\therefore \angle PDC+\angle PCD=120°$，

$\therefore$ 在 $\triangle CDP$ 中，$\angle P=180°-(\angle PDC+\angle PCD)=180°-120°=60°$.

答案：C

思路点拨

先根据五边形内角和公式及已知条件求得 $\angle EDC+\angle BCD$，再根据角平分线的定义求得 $\angle PDC+\angle PCD$，最后根据三角形内角和定理求得 $\angle P$ 的度数.

两年模拟兵法 答案见 292 页

1. 若一个多边形的内角和等于 1 980°，则这个多边形的边数是（　　）

A.12　　B.13　　C.14　　D.15

2. [中考·乌鲁木齐]若正 n 边形每一个内角等于与它相邻的外角的 2 倍，则 n 的值是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. [期中·福建]已知正多边形的一个外角为 36°，则该正多边形的边数为（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

4. [月考·凉山州]一个多边形切去一个角后，形成的另一个多边形的内角和为 1 080°，那么原多边形的边数为（　　）

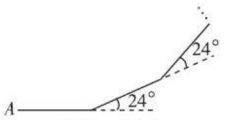
A. 7　　B. 7 或 8

C. 8 或 9　　D. 7 或 8 或 9

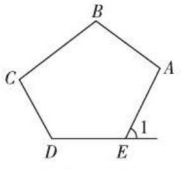
5. 如图，小丽从 A 点出发，沿直线前进 10 m 后左转 24°，再沿直线前进 10 m，又向左转 24°……照这样走下去，她第一次回到出发地 A 点时，一共走的路程是（　　）

A. 140 m　　B. 150 m

C. 160 m　　D. 240 m



（第 5 题）

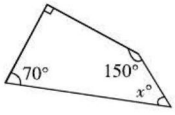


（第 7 题）

6. [中考·益阳]若一个多边形的内角和与外角和之和是 900°，则该多边形的边数是_____.

7. [中考·南京]如图，$\angle 1$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角. 若 $\angle 1=65°$，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=$_____°.

8. 如图，求图形中 x 的值.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

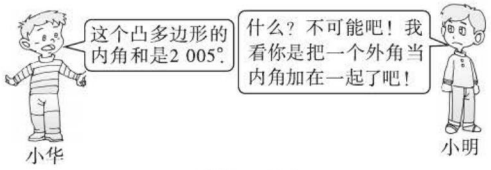
9. 一个多边形的所有内角与某一个外角的度数总和为 1 350°，求该多边形的边数.

10. [模拟 · 河北] 已知 n 边形的内角和 $\theta=(n-2)\times 180°$.

（1）甲同学说，θ 能取 360°；而乙同学说，θ 也能取 630°. 甲、乙的说法对吗？若对，求出边数 n. 若不对，请说明理由.

（2）若 n 边形变为（$n+x$）边形，发现内角和增加了 360°，用列方程的方法确定 x.

11. 如图是小华与小明的对话.



（第 11 题）

（1）内角和是 2 005°，小明为什么说不可能？

（2）小华求的是几边形的内角和？

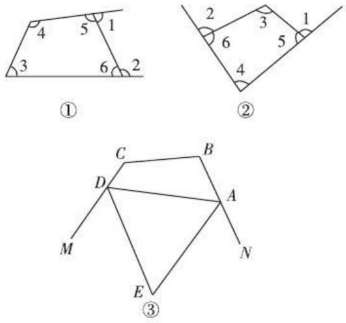
（3）请你求出错把外角当内角的那个外角的度数.

12.（1）如图①②，试探究 $\angle 1$，$\angle 2$ 与 $\angle 3$，$\angle 4$ 之间的数量关系；

（2）如果我们把 $\angle 1$，$\angle 2$ 称为四边形的外角，那么请你用文字描述上述关系；

（3）用你发现的结论解决下列问题：如图③，AE，DE 分别是四边形 $ABCD$ 的外角 $\angle NAD$，$\angle MDA$ 的平分线，$\angle B+\angle C=240°$，求 $\angle E$ 的度数.

【导学号：2850581】



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

构造平行四边形证题的技巧

荣老师告诉你 平行四边形是初中数学的重点，是中考的重要考点之一．它具有对边相等、对角相等、对角线互相平分等诸多性质．因此，在证（解）一些几何问题时，若能根据图形的特征添加恰当的辅助线，构造平行四边形并利用其性质，可使问题化难为易，化繁为简．

类型一 构造平行四边形证明线段平行

例 1 如图 1，AB，CD 交于点 O，$AC \parallel DB$，$AO=BO$，E，F 分别为 OC，OD 的中点，连接 AF，BE．求证：$AF \parallel BE$．

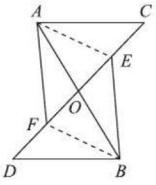


图 1

解题秘方：构造平行四边形，使要证的两条线段刚好是平行四边形的一组对边．

证明：如图 1，连接 BF，AE．

$\because AC \parallel DB$，$\therefore \angle C=\angle D$．

又 $\because AO=BO$，$\angle AOC=\angle BOD$，

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD$（AAS）．$\therefore OC=OD$．

又 $\because E$，F 分别为 OC，OD 的中点，

$\therefore OE=OF$．

$\therefore$ 四边形 $AFBE$ 是平行四边形．

$\therefore AF \parallel BE$．

类型二 构造平行四边形证明两线段相等

例 2 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 是 AB 上一点，F 是 AC 的延长线上一点，$BE=CF$，EF 交 BC 于 D．求证：$DE=DF$．

证明：如图 2，过点 E 作 $EG \parallel AC$，交 BC 于 G，连接 CE，GF．

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$．

$\because EG \parallel AC$，

$\therefore \angle EGB=\angle ACB$．

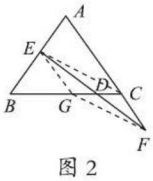


图 2

$\therefore \angle ABC=\angle EGB$．

$\therefore EG=BE$．

$\because BE=CF$，

$\therefore EG=CF$．

又 $\because EG \parallel CF$，

$\therefore$ 四边形 $EGFC$ 是平行四边形．

$\therefore DE=DF$．

类型三 构造平行四边形证明角相等

例 3 如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，E，F 分别是 CD，AB 的中点，直线 EF 分别交 BC，AD 的延长线于点 S，T．求证：$\angle ATF=\angle BSF$．

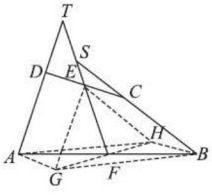


图 3

解题秘方：由于 $\angle ATF$ 和 $\angle BSF$ 不在同一个三角形中，又不可能在两个全等的三角形内，故可通过作平行线使所证明的两个角有一定的关系．由于所给中点和线段相等的条件都在四边形 $ABCD$ 中，因此可以把 $\angle ATF$ 和 $\angle BSF$ 移到四边形 $ABCD$ 内．

证明：如图 3，作 $EG \parallel\!\!\!\parallel AD$，$EH \parallel\!\!\!\parallel BC$，连接 AH，BG，AG，GH，HB，则四边形 $DEGA$ 和四边形 $ECBH$ 都是平行四边形．

$\therefore AG \parallel\!\!\!\parallel DE$，$BH \parallel\!\!\!\parallel CE$．

又 $\because DE=EC$，点 E 在 CD 上，

$\therefore AG \parallel\!\!\!\parallel BH$．

$\therefore$ 四边形 $AGBH$ 是平行四边形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ F 是 AB 的中点，

∴ H，F，G 三点共线，且 F 是 GH 的中点．

∴ EF 是△ EGH 的中线．

又∵ $EG=AD=BC=EH$，

∴ EF 是∠ GEH 的平分线，

即∠ $GEF=$ ∠ HEF.

∵ $EG \parallel AT$，$EH \parallel BS$，

∴∠ $GEF=$ ∠ ATF，∠ $HEF=$ ∠ BSF.

∴∠ $ATF=$ ∠ BSF.

类型四 ▶ 构造平行四边形证明两线段互相平分

例 4 如图 4，在□ $ABCD$ 中，$AE \perp BC$，$CF \perp AD$，E，F 分别为垂足，$DN=BM$.

求证：EF 与 MN 互相平分.

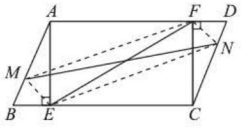


图 4

解题秘方：连接 ME，EN，FN，MF，只要证明四边形 $ENFM$ 是平行四边形即可．

证明：如图 4，连接 ME，EN，FN，MF.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$，∠ $BAD=$ ∠ BCD，∠ $B=$ ∠ D.

∵ $AE \perp BC$，$AD \parallel BC$，

∴ $AE \perp AD$.

又∵ $CF \perp AD$，

∴ $CF \parallel AE$.

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形．

∴ $AF=EC$，$AE=CF$.

易得 Rt△ ABE ≌ Rt△ CDF（HL），

∴ $BE=DF$.

又∵ $BM=DN$，∠ $B=$ ∠ D，

∴△ BEM ≌△ DFN（SAS）．

∴ $ME=NF$. ①

∵ $DN=BM$，$AB=CD$，

∴ $AM=CN$.

∵ $AF=CE$，$AM=CN$，∠ $MAF=$ ∠ NCE，

∴△ MAF ≌△ NCE（SAS）．

∴ $MF=NE$. ②

由① ②知，四边形 $ENFM$ 是平行四边形，故对角线 EF 与 MN 互相平分.

类型五 ▶ 构造平行四边形证明线段的和差关系

例 5 如图 5，在△ ABC 中，点 E，F 在边 AB 上，$AE=BF$，$ED \parallel AC \parallel FG$，点 G，D 在边 BC 上．求证：$ED+FG=AC$.

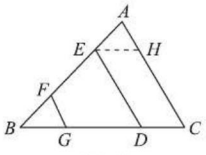


图 5

解题秘方：要证明一条线段等于两条线段的和，可以利用截长法．本题中需过点 E 作 $EH \parallel BC$，然后证明 $DE=CH$，$AH=FG$ 即可．

证明：如图 5，过点 E 作 $EH \parallel BC$，交 AC 于点 H.

∵ $EH \parallel BC$，$ED \parallel AC$，

∴四边形 $CHED$ 为平行四边形．

∴ $DE=CH$.

∵ $EH \parallel BC$，$FG \parallel AC$，

∴∠ $AEH=$ ∠ B，∠ $A=$ ∠ BFG.

又∵ $AE=BF$，

∴△ AEH ≌△ FBG（ASA）．

∴ $AH=FG$.

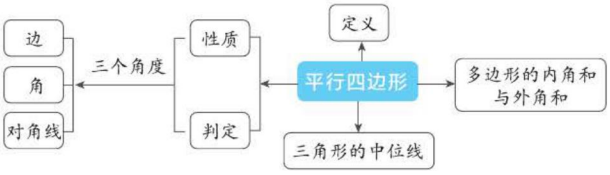
∴ $ED+FG=HC+AH=AC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **平行四边形的性质：**（1）对边平行且相等；（2）两组对角分别相等；（3）对角线互相平分；（4）平行四边形是中心对称图形.

2. **平行四边形的判定：**（1）两组对边分别平行的四边形；（2）两组对边分别相等的四边形；（3）一组对边平行且相等的四边形；（4）对角线互相平分的四边形.

3. 三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半.

4. **n 边形的内角和公式：**$(n-2)\cdot 180°$. 多边形的外角和都等于 $360°$.

知识方法专题

知识必学

专题一 平行四边形的性质与判定

链接中考≫ 平行四边形的性质与判定都涉及边和角相等，这与全等三角形的性质与判定相吻合，所以平行四边形的性质与判定通常与三角形的全等联合考查.

例 1 [中考·桂林]如图 6-1，在$\square ABCD$中，E，F 分别是 AB，CD 的中点.

（1）求证：四边形 $FBED$ 为平行四边形.

（2）对角线 AC 分别与 DE，BF 交于点 M，N.

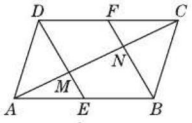


图 6-1

求证：$\triangle ABN \cong \triangle CDM$.

解题秘方：（1）可以根据“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”来证明；（2）易证得 $AB=CD$，$\angle CAB=\angle ACD$，所以只需要再证明一组对应角相等即可.

证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$.

∵ E，F 分别是 AB，CD 的中点，

∴ $BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}DC$.

∴ $BE \parallel DF$.

∴四边形 $FBED$ 为平行四边形.

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$.

∴ $\angle CAB=\angle ACD$.

∵四边形 $FBED$ 为平行四边形，

∴ $\angle ABN=\angle CDM$.

又∵ $AB=CD$，

∴ $\triangle ABN \cong \triangle CDM$（ASA）.

方法点拨：平行四边形的性质定理与判定定理是互逆定理，综合考查时衔接点都是边和角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 三角形的中位线

链接中考≫ 三角形的中位线具有两方面的性质：一是位置关系，即三角形的中位线平行于三角形的第三边；二是数量关系，即三角形的中位线等于第三边的一半．因此，若题目中给出三角形两边的中点，则直接作出中位线，若题目中给出一边的中点，则可以先取另一边的中点，再构造出中位线．

例 2 如图 6-2，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，AB 与 CD 不平行，M，N 分别是 AD，BC 的中点．AB 与 MN 的大小关系是（　　）

A. $AB>MN$　　B. $AB=MN$

C. $AB<MN$　　D. $AB\leqslant MN$

解：如图 6-2，取 BD 的中点 E，连接 ME，NE．

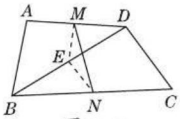


图 6-2

∵ M，N，E 分别是 AD，BC，BD 的中点，

∴ $ME\parallel AB$，$ME=\frac{1}{2}AB$；

$NE\parallel CD$，$NE=\frac{1}{2}CD$．

∵ $AB=CD$，AB 与 CD 不平行，

∴ $ME+NE=AB$，M，N，E 三点不共线．

根据三角形的三边关系，得 $ME+NE>MN$，

即 $AB>MN$．

答案：A

方法点拨：此题考查了三角形中位线定理及三角形的三边关系，能够巧妙构造三角形的中位线是解决此题的关键．

专题三 多边形的角的定理

链接中考≫ 与多边形有关的角的定理有多边形的内角和定理和外角和定理（外角和为 360°）．在中考中单独考查时，一般都是选择题．考查的形式有两种：一种是已知多边形的边数求内角和；另一种是已知内角和求多边形的边数．

例 3 ［中考·眉山］一个多边形的外角和是内角和的$\frac{2}{5}$，这个多边形的边数为（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解题秘方：利用多边形的内角和公式和外角和定理建立方程解决．

解：设这个多边形的边数为 n．根据题意，得 $\frac{2}{5}(n-2)\cdot 180°=360°$，解得 $n=7$．

答案：C

方法必会

专题四 转化思想

专题解读≫ 转化思想是将复杂的问题转化为简单的问题，将不熟悉的问题转化为熟悉的问题，将未知的问题转化为已知的问题的一种数学思想．在本章中，转化思想主要体现在将四边形、多边形等转化为平行四边形或三角形来研究，或通过添加辅助线将不规则图形转化为规则图形进行求解与证明．

例 4 如图 6-3，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 是 DC 的中点．

求证：$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{四边形 ABCD}$．

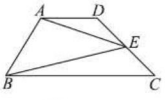


图 6-3

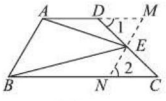


图 6-4

解题秘方：将不规则四边形通过作辅助线转化为平行四边形或三角形．

证明：方法一 如图 6-4，过点 E 作 $MN\parallel AB$，交 BC 于点 N，交 AD 的延长线于点 M．

∵ $AD\parallel BC$，

∴ 四边形 $ABNM$ 是平行四边形．

∵ △ABE 与平行四边形 $ABNM$ 同底等高，

∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\square ABNM}$．

∵ $AD\parallel BC$，

∴ $\angle 1=\angle C$，$\angle M=\angle 2$．

又∵ $DE=CE$，∴ △$EMD\cong$△ENC（AAS）．

∴ $S_{四边形 ABCD}=S_{\square ABNM}$．

∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{四边形 ABCD}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二 如图6-5，延长BC交AE的延长线于点M.

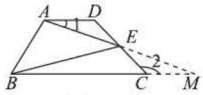


图 6-5

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle 1=\angle M$, $\angle D=\angle 2$.

又$\because DE=CE$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle MCE$（AAS）.

$\therefore AE=ME$, $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABM}$.

$\because \triangle AEB$与$\triangle EMB$等底同高,

$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle MEB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABM}$.

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$.

专题五 整体思想

专题解读＞对于在平行四边形中求三角形周长的问题，当不能直接通过求出三角形的三边长求周长时，可考虑寻找已知条件与所求三角形周长之间的关系，运用整体思想求解.

例5 如图6-6，$\square ABCD$的对角线AC，BD相交于点O，E是CD的中点，$\triangle ABD$的周长为16 cm，则$\triangle DOE$的周长是_____cm.

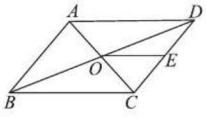


图 6-6

解题秘方：找出所求三角形的周长与给出的三角形周长之间的关系，利用整体思想解决问题.

解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore OA=OC$, $OD=\frac{1}{2}BD$, $AB=DC$.

$\because E$是CD的中点,

$\therefore DE=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AB$.

$\because AO=CO$, E是CD的中点,

$\therefore OE$为$\triangle CAD$的中位线.

$\therefore OE=\frac{1}{2}AD$.

$\because \triangle ABD$的周长为$AB+AD+BD=16$ cm,

$\therefore \triangle DOE$的周长为$DE+OE+OD=\frac{1}{2}(AB+AD+BD)=8$ cm.

答案：8

专题六 方程思想

专题解读≫数学研究的对象是现实世界中的空间形式和数量关系，方程是连接代数与几何的桥梁.通过三角形中位线定理、平行四边形的性质等（有时还需要借助勾股定理）找到等量关系，列方程（组）求解是方程思想在本章中的主要体现.

例6 如图6-7，四边形$ABCD$是平行四边形，$AE \perp BC$于点E，$AF \perp CD$交DC的延长线于点F，$AE=4$，$AF=5$，四边形$ABCD$的周长为36. 求AB，BC的长.

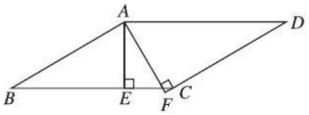


图 6-7

解题秘方：利用平行四边形的周长和面积两个等量关系列方程组解决问题.

解：设$AB=x$，$BC=y$.

$\because S_{\square ABCD}=BC \cdot AE=CD \cdot AF$,

$2(AB+BC)=36$,

$\therefore \begin{cases} 4y=5x, \\ 2(x+y)=36, \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=8, \\ y=10. \end{cases}$

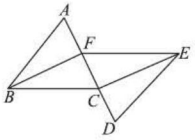
故$AB=8$，$BC=10$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见 293 页

类型 1：平行四边形的性质与判定

1. 如图，点 A，F，C，D 在同一直线上，$AF=CD$，$AB \parallel DE$，$AB=DE$，连接 BC，BF，CE，EF. 求证：四边形 $BCEF$ 是平行四边形.

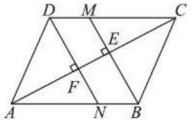


（第 1 题）

2. [中考·巴中] 如图，在 $\square ABCD$ 中，过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 E，交 CD 于点 M，过点 D 作 $DN \perp AC$ 于点 F，交 AB 于点 N.

（1）求证：四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

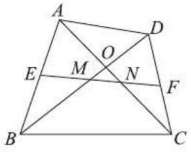
（2）已知 $AF=12$，$EM=5$，求 AN 的长.



（第 2 题）

类型 2：三角形的中位线

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，且 $AC=BD$，E，F 分别是 AB，CD 的中点，连接 EF，分别交 AC，BD 于点 N，M. 求证：$OM=ON$.



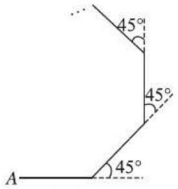
（第 3 题）

类型 3：多边形的内角和与外角和

4. 如图，小华从操场上点 A 出发，沿直线前进 10 m 后向左转 45°，再沿直线前进 10 m 后，又向左转 45°，再沿直线前进 10 m 后，又向左转 45° …… 照这样走下去，他第一次回到出发地所走的路程为（　　）

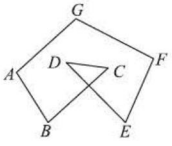
A.60 m　　B.80 m

C.120 m　　D.140 m



（第 4 题）

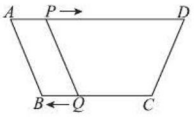
5. 如图，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的度数.



（第 5 题）

类型 4：平行四边形与动点问题

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $AD=9$ cm，$BC=6$ cm. 点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 1 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 2 cm/s 的速度由 C 向 B 运动，几秒后直线 PQ 将四边形 $ABCD$ 截出一个平行四边形?



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第六章测试卷

答案见 294 页

（100 分　60 分钟）

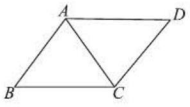
一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 在$\square ABCD$中，若$\angle BAD$与$\angle CDA$的平分线交于点E，则$\triangle AED$的形状是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

2. 如图，在$\square ABCD$中，已知$AC=4$ cm. 若$\triangle ACD$的周长为 13 cm，则$\square ABCD$的周长为（　　）



（第 2 题）

A.26 cm　　B.24 cm

C.20 cm　　D.18 cm

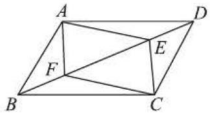
3. 在四边形$ABCD$中，①$AB \parallel CD$；②$AD \parallel BC$；③$AB=CD$；④$AD=BC$. 从上述条件中选择两个条件，使四边形$ABCD$是平行四边形的选法共有（　　）

A.3 种　　B.4 种　　C.5 种　　D.6 种

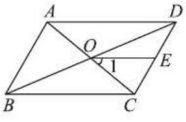
4. 如图，在$\square ABCD$中，E，F是对角线BD上不同的两点. 下列条件中，不能得出四边形$AECF$一定为平行四边形的是（　　）

A.$BE=DF$　　B.$AE=CF$

C.$AF \parallel CE$　　D.$\angle BAE=\angle DCF$



（第 4 题）

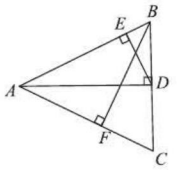


（第 5 题）

5. 如图，在$\square ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，E是边CD的中点，连接OE. 若$\angle ABC=60°$，$\angle BAC=80°$，则$\angle 1$的度数为（　　）

A.50°　　B.40°　　C.30°　　D.20°

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AD \perp BC$于点D，$DE \perp AB$于点E，$BF \perp AC$于点F，$DE=3$，则BF的长为（　　）

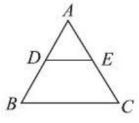


（第 6 题）

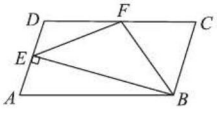
A.5　　B.$2\sqrt{3}$　　C.6　　D.$3\sqrt{3}$

7. 如图，边长为 4 的等边三角形ABC中，D，E分别是AB，AC的中点，则$\triangle ADE$的面积是（　　）

A.$\sqrt{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D.$2\sqrt{3}$



（第 7 题）



（第 8 题）

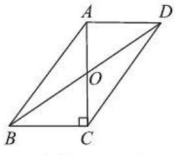
8. 如图，在$\square ABCD$中，$CD=2AD$，$BE \perp AD$于点E，F为DC的中点，连接EF，BF，下列结论：①$\angle ABC=2\angle ABF$；②$EF=BF$；③$S_{四边形DEBC}=2S_{\triangle EFB}$；④$\angle CFE=3\angle DEF$. 其中正确结论的数量为（　　）

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

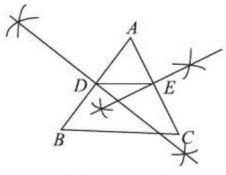
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是_____.

10. 如图，在$\square ABCD$中，$AB=10$，$AD=6$，$AC \perp BC$，则$BD=$_____.



（第 10 题）

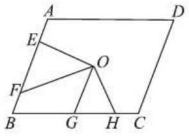


（第 11 题）

11. 如图，在$\triangle ABC$中，用直尺和圆规作AB，AC的垂直平分线，分别交AB，AC于点D，E，连接DE. 若$BC=10$ cm，则$DE=$_____cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

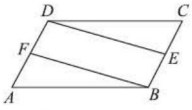
12. 如图，点 O 是$\square ABCD$的对称中心，$AD > AB$. E，F 是 AB 边上的点，且 $EF=\frac{1}{2}AB$；G，H 是 BC 边上的点，且 $GH=\frac{1}{3}BC$. 若 S_1，S_2 分别表示△ EOF 和△ GOH 的面积，则 S_1 与 S_2 之间的数量关系是_____.



（第 12 题）

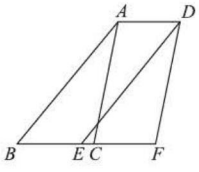
三、解答题（共 52 分）

13.（10 分）如图，在$\square ABCD$中，E，F 分别是边 BC，AD 的中点. 求证：∠ ABF= ∠ CDE.



（第 13 题）

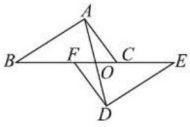
14.（10 分）如图，点 B，E，C，F 在一条直线上，已知 $AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$，$BE = CF$，连接 AD. 求证：四边形 $ABED$ 是平行四边形.



（第 14 题）

15.（10 分）[中考 · 恩施州]如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$FB=CE$，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，AD 交 BE 于点 O.

求证：AD 与 BE 互相平分.

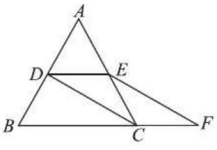


（第 15 题）

16.（10 分）如图，等边三角形 ABC 的边长是 2，D，E 分别为边 AB，AC 的中点，延长 BC 到点 F，使 $CF=\frac{1}{2}BC$，连接 DE，CD 和 EF.

（1）求证：$DE=CF$.

（2）求 EF 的长.

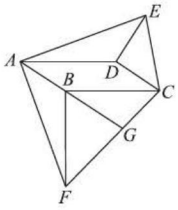


（第 16 题）

17.（12 分）如图，在$\square ABCD$中，分别以 BC，CD 为腰作等腰三角形 BCF 和等腰三角形 CDE，使 $BC=BF$，$CD=DE$，∠ CBF= ∠ CDE，连接 AF，AE.

（1）求证：△ ABF ≌△ EDA.

（2）延长 AB，与 CF 相交于点 G. 若 $AF \perp AE$，求证：$BF \perp BC$.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第一章 三角形的证明

1 等腰三角形

【两年模拟兵法】

1. C

2. D **点拨**：由题意知 $AB=2AC=6$，故 $3\leqslant AP\leqslant 6$.

3. D

4. D **点拨**：当顶角为 30°或 150°时，此高等于腰长的一半；当顶角为 120°时，此高等于底边长的一半.

5. D

6. 6 cm

7. 12° **点拨**：设 $\angle A$ 的度数是 x，根据“等边对等角”的性质和三角形外角的性质可得 $\angle AP_7P_8=\angle AP_8P_7=7x$，$\therefore x+7x+7x=180°$，解得 $x=12°$.

8. **解**：已知：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角.
求证：$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中至少有一个角不小于 60°.
证明：假设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 都小于 60°，则 $\angle A+\angle B+\angle C<3\times 60°$，即 $\angle A+\angle B+\angle C<180°$，这与三角形的内角和定理相矛盾，故 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 都小于 60°不成立.
所以三角形中至少有一个角不小于 60°.

9. (1) **解**：$\because AB=AC$，
$\therefore \angle C=\angle ABC$.
$\because \angle C=36°$.
$\therefore \angle ABD=36°$.
$\because BD=CD$，$AB=AC$，
$\therefore AD\perp BC$.
$\therefore \angle ADB=90°$.
$\therefore \angle BAD=90°-36°=54°$.
(2) **证明**：$\because BE$ 平分 $\angle ABC$，
$\therefore \angle ABE=\angle CBE$.
$\because EF/\!/BC$，
$\therefore \angle FEB=\angle CBE$.
$\therefore \angle FBE=\angle FEB$.
$\therefore FB=FE$.

10. **证明**：$\because DG/\!/AC$，
$\therefore \angle DGB=\angle ACB$，$\angle DGF=\angle ECF$.
$\because \angle DFG=\angle EFC$，$DF=EF$，
$\therefore \triangle GDF\cong\triangle CEF$.
$\therefore DG=EC$.
$\because BD=CE$，
$\therefore BD=DG$.
$\therefore \angle DGB=\angle B$.
$\because \angle DGB=\angle ACB$，
$\therefore \angle B=\angle ACB$.
$\therefore AC=AB$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

11. **解**：$AE/\!/BC$. 理由如下：
$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 都为等边三角形，
$\therefore BC=AC$，$CD=CE$，
$\angle B=\angle ACB=\angle DCE=60°$.
$\therefore \angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$，
即 $\angle BCD=\angle ACE$.
$\therefore \triangle BCD\cong\triangle ACE$(SAS).
$\therefore \angle B=\angle EAC$.
$\therefore \angle EAC=\angle ACB$.
$\therefore AE/\!/BC$.

12. **证明**：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，D 为边 AC 的中点，$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=60°$，$BD\perp AC$.
$\because AE\perp EC$，
$\therefore \angle BDA=\angle CEA=90°$.
$\because BD=CE$，
$\therefore$ 由勾股定理得 $AD=AE$.
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，
$$\begin{cases} AB=AC, \\ BD=CE, \\ AD=AE, \end{cases}$$
$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SSS).
$\therefore \angle EAD=\angle BAD=60°$.
又$\because AD=AE$，
$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形.

13. (1) =
(2) **证明**：在等边三角形 ABC 中，$\angle ABC=\angle ACB=\angle A=60°$.
$\because EF/\!/BC$，
$\therefore \angle AEF=\angle ABC=60°$，$\angle AFE=\angle ACB=60°$.
$\therefore \angle AEF=\angle AFE=\angle A=60°$.
$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形.
$\therefore AE=EF=AF$.
$\because \angle ABC=\angle ACB=\angle AFE=60°$，
$\therefore \angle DBE=\angle EFC=120°$，
$\angle D+\angle BED=\angle FCE+\angle ECD=60°$.
$\because DE=EC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle D = \angle ECD$.

$\therefore \angle BED = \angle FCE$.

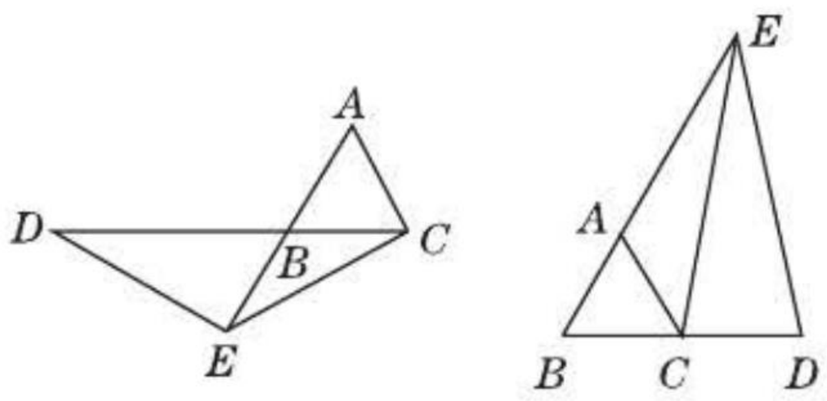
又$\because ED = EC$,

$\therefore \triangle DEB \cong \triangle ECF$(AAS).

$\therefore BD = FE = AE$,即$AE = DB$.

(3)1 或 3

方法规律:本题运用了从特殊到一般的思想和分类讨论思想,(3)题中注意分两种情况讨论,如图所示.



(第13题)

2 直角三角形

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**:真命题的逆命题不一定是真命题,故选项A错误;每个命题都有逆命题,故选项B正确;每个定理都有逆命题,但不一定都有逆定理,故选项C错误;假命题也有逆命题,故选项D错误.

2. A **点拨**:$\because 5^2 + 12^2 = 13^2$,$\therefore$ 长为5里、12里、13里的三边构成了直角三角形.$\therefore$ 这块沙田的面积为$\frac{1}{2} \times 5 \times 500 \times 12 \times 500 = 7\ 500\ 000$(平方米)$=$7.5平方千米.

3. C **点拨**:$\because \angle ACB = 90°$,$AE \perp CE$于点$E$,

$\therefore \angle AEC = 90°$,$\angle CAE + \angle ACD = \angle ACD + \angle BCD = 90°$.

$\therefore \angle CAE = \angle BCD$.

$\because BD \perp CE$交CE的延长线于点D,

$\therefore \angle CDB = \angle AEC = 90°$.

又$\because AC = BC$,

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle CDB$(AAS).

$\therefore CE = BD = 2$ cm, $CD = AE = 5$ cm.

$\therefore ED = CD - CE = 5 - 2 = 3$(cm).

4. $(-1,0)$ **点拨**:$\because$ 点A,B的坐标分别为$(4,0)$,$(0,3)$,$\therefore OA = 4$,$OB = 3$.

在Rt$\triangle AOB$中,由勾股定理得$AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$\therefore AC = AB = 5$.

$\therefore OC = 5 - 4 = 1$.

$\therefore$ 点C的坐标为$(-1,0)$.

5. 5 **点拨**:由折叠的性质可得$AE = A_1E$.

$\because \triangle ABC$为等腰直角三角形,$BC = 8$,$\therefore AB = 8$.

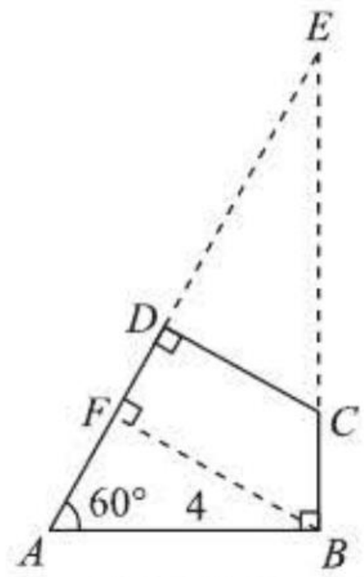
$\because A_1$为BC的中点,$\therefore A_1B = 4$.

设$AE = A_1E = x$,

则$BE = 8 - x$.

在Rt$\triangle A_1BE$中,由勾股定理可得$4^2 + (8-x)^2 = x^2$,解得$x = 5$,即$AE = 5$.

6. $2 < AD < 8$ **点拨**:如图,延长BC交AD的延长线于点E,作$BF \perp AD$于点F.



(第6题)

在Rt$\triangle ABE$中,$\because \angle A = 60°$,

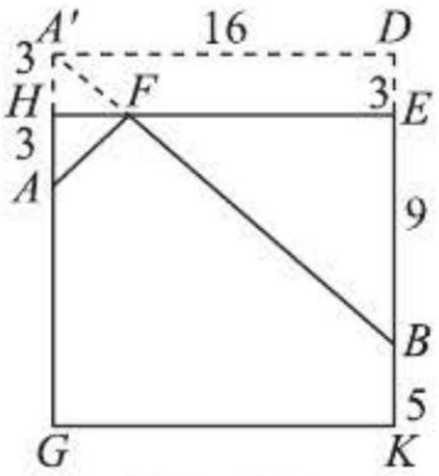
$\therefore \angle E = 30°$.

$\therefore AE = 2AB = 8$.

同理,在Rt$\triangle ABF$中,$AF = \frac{1}{2}AB = 2$.

$\therefore AD$的取值范围为$2 < AD < 8$.

7. 20 **点拨**:如图,将杯子侧面的一半展开成长方形$HEKG$,作点A关于直线EH的对称点A',连接$A'B$,交HE于点F,则$AF + FB$,即$A'B$的长为最短距离.过点A'作$A'D \parallel HE$,交KE的延长线于点D,则$A'B = \sqrt{A'D^2 + BD^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$(cm).



(第7题)

8. 解:在$\triangle ADC$中,$\because \angle A = 30°$,$\angle ADC = 110°$,

$\therefore \angle C = 180° - \angle A - \angle ADC = 180° - 30° - 110° = 40°$.

$\because BE \perp AC$,

$\therefore \angle BEC = 90°$.

$\therefore \angle B = 90° - \angle C = 90° - 40° = 50°$.

9. 证明:连接AD.

$\because DE \perp AB$,$DF \perp AC$,

$\therefore \angle E = \angle F = 90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ADE 和 Rt△ADF 中，

$\begin{cases} AD = AD, \\ DE = DF, \end{cases}$

∴ Rt△ADE≌Rt△ADF(HL).

∴ $AE = AF$.

∵ $AB = AC$,

∴ $AE - AB = AF - AC$，即 $BE = CF$.

10. 解：设 $AE = x$ m.

∵ $\angle A = 30°$，$\angle B = 90°$，$BC = 6$ m，

∴ $AC = 12$ m.

∴ $EC = (12 - x)$ m.

由题易知 $\angle DEC = 90°$，

∴ △DEC 为直角三角形.

又正方形 $DEFH$ 的边长为 2 m，即 $DE = 2$ m，

∴ 在 Rt△DEC 中，$DC^2 = DE^2 + EC^2 = 4 + (12 - x)^2$.

令 $DC^2 = AE^2 + BC^2$，又 $AE^2 + BC^2 = x^2 + 36$，

∴ $4 + (12 - x)^2 = x^2 + 36$，

解得 $x = \frac{14}{3}$.

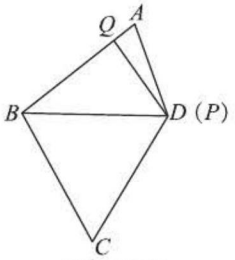
即当 AE 为 $\frac{14}{3}$ m 时，有 $DC^2 = AE^2 + BC^2$.

11. 解：∵ $AB = BD = 5$ cm，动点 P 从点 A 出发($A \to B \to D$)到点 D，速度为 2 cm/s，

∴ 5 s 后动点 P 运动的路程为 $2 \times 5 = 10$(cm).

而 $AB + BD = 10$ cm，

∴ 此时点 P 与点 D 重合(如图).



(第 11 题)

∵ $AB = BC = CD = 5$ cm，动点 Q 从点 D 出发($D \to C \to B \to A$)到点 A，速度为 2.8 cm/s，

∴ 5 s 后动点 Q 运动的路程为 $2.8 \times 5 = 14$(cm).

而 $DC + CB + BA = 15$ cm，

∴ 点 Q 在 AB 边上，且 $BQ = 4$ cm(如图).

在△BPQ 中，∵ $BQ = 4$ cm，$PQ = 3$ cm，$BP = 5$ cm，∴ $BQ^2 + PQ^2 = BP^2$.

∴ △BPQ 为直角三角形，且 $\angle BQP = 90°$.

∴ $\angle AQP = 90°$.

∴ △APQ 为直角三角形.

3 线段的垂直平分线

【两年模拟兵法】

1. A　**点拨**：∵ $AC = AD$，$BC = BD$，∴ A，B 两点均在线段 CD 的垂直平分线上. 根据两点确定一条直线，可知直线 AB 垂直平分线段 CD.

2. B　**点拨**：∵ DE 是 AC 的垂直平分线，

∴ $AD = CD$.

∴ $\angle A = \angle ACD = 50°$.

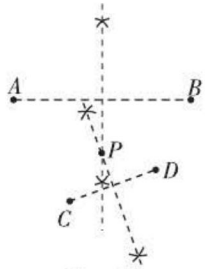
∴ $\angle CDA = 80°$.

∴ $\angle BDC = 100°$.

3. B　**4.** D　**5.** A　**6.** 87　**7.** $2a + 3b$　**8.** 12 cm

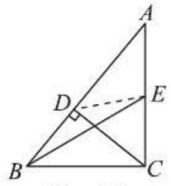
9. 解：如图，点 P 为所求的位置.

点拨：到 A，B 两点距离相等的点在线段 AB 的垂直平分线上，到 C，D 两点距离相等的点在线段 CD 的垂直平分线上，同时满足上述条件的点是两条线段垂直平分线的交点.



(第 9 题)

10. 证明：(1)如图，连接 DE.



(第 10 题)

∵ CD 是 AB 边上的高，

∴ $CD \perp AB$，∴ $\angle ADC = 90°$.

∵ BE 是△ABC 中 AC 边上的中线，

∴ DE 是 Rt△ADC 中斜边 AC 上的中线.

∴ $DE = \frac{1}{2}AC = CE = AE$.

∵ $BD = CE$，∴ $DE = BD$.

∴ 点 D 在线段 BE 的垂直平分线上.

(2)∵ $BD = DE$，∴ $\angle ABE = \angle DEB$.

∴ $\angle ADE = 2\angle ABE = 2\angle DEB$.

∵ $DE = AE$，

∴ $\angle A = \angle ADE = 2\angle ABE$.

∴ $\angle BEC = \angle ABE + \angle A = 3\angle ABE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解:(1)∵ $AB=AC$, $\angle A=40°$,

$\therefore \angle B=\angle ACB=\dfrac{180°-40°}{2}=70°$.

又∵ $MN\perp AB$,

$\therefore \angle NMB=90°-\angle B=90°-70°=20°$.

(2)过程同(1),可求得$\angle NMB=35°$.

(3)规律:$\angle NMB=\dfrac{1}{2}\angle A$.

理由:∵ 在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle ACB=\dfrac{180°-\angle A}{2}$.

∵ AB的垂直平分线交AB于点N,交BC的延长线于点M,

$\therefore \angle NMB=90°-\angle B=\dfrac{1}{2}\angle A$.

4 角平分线

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C **4.** B

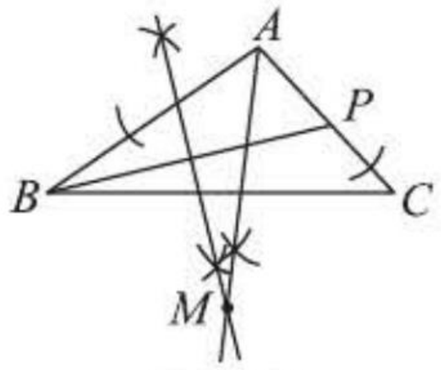
5. 解:∵ $PA\perp ON$, $PB\perp OM$, $PA=PB$, $\angle MON=50°$,

$\therefore \angle AOP=\dfrac{1}{2}\angle MON=25°$.

又∵ $\angle OPC=30°$,

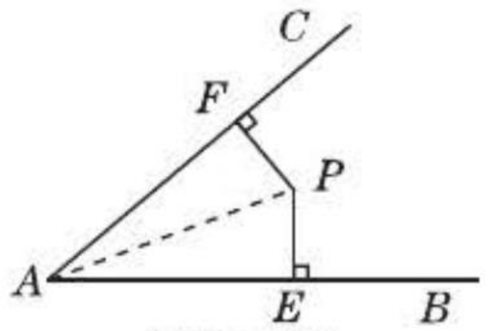
$\therefore \angle PCA=\angle AOP+\angle OPC=55°$.

6. 解:如图,点M即为所求.



(第6题)

7. 证明:(1)如图,连接AP,∵ $PE\perp AB$, $PF\perp AC$,



(第7题)

$\therefore \angle AEP=\angle AFP=90°$.

又∵ $AE=AF$, $AP=AP$,

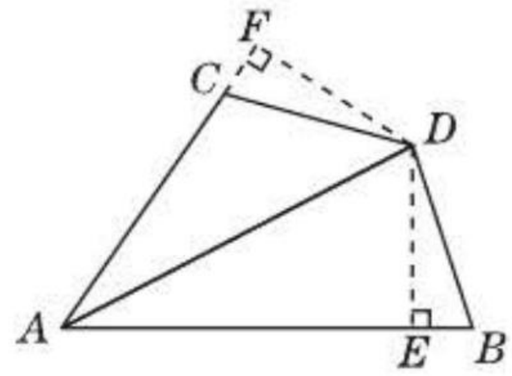
$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEP\cong\mathrm{Rt}\triangle AFP(\mathrm{HL})$.

$\therefore PE=PF$.

(2)∵ $PE=PF$, $PE\perp AB$, $PF\perp AC$,

$\therefore$ 点P在$\angle BAC$的平分线上.

8. 证明:如图,过点D分别作$DE\perp AB$于E, $DF\perp AC$,交AC的延长线于F.



(第8题)

∵ AD平分$\angle BAC$,

$DE\perp AB$, $DF\perp AC$,

$\therefore DE=DF$, $\angle F=\angle DEB=90°$.

∵ $\angle B+\angle ACD=180°$,

$\angle ACD+\angle FCD=180°$,

$\therefore \angle B=\angle FCD$.

在$\triangle DFC$和$\triangle DEB$中,

$$\begin{cases}\angle F=\angle DEB=90°,\\ \angle FCD=\angle B,\\ DF=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DFC\cong\triangle DEB(\mathrm{AAS})$.

$\therefore DB=DC$.

9. (1)证明:∵ AC平分$\angle MAN$, $\angle MAN=120°$,

$\therefore \angle CAB=\angle CAD=60°$.

∵ $\angle ABC=\angle ADC=90°$,

$\therefore \angle ACB=\angle ACD=30°$.

$\therefore AB=AD=\dfrac{1}{2}AC$.

$\therefore AB+AD=AC$.

(2)解:成立.

证明一 如图①,过点C分别作AM, AN的垂线,垂足分别为点E, F.

∵ AC平分$\angle MAN$, $\therefore CE=CF$.

∵ $\angle ABC+\angle ADC=180°$,

$\angle ADC+\angle CDE=180°$,

$\therefore \angle CDE=\angle ABC$.

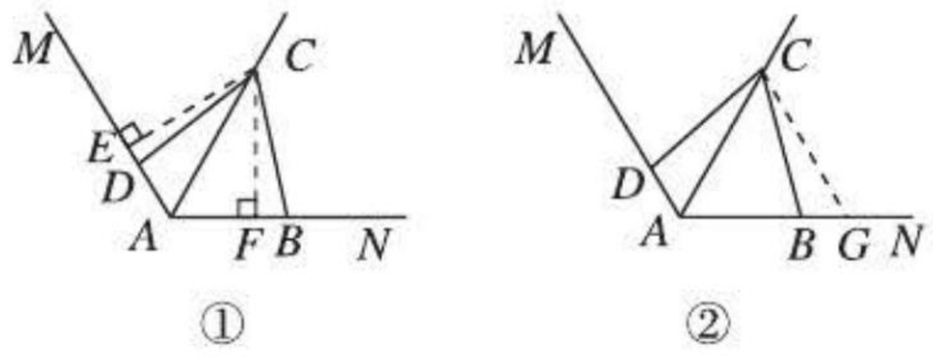
又∵ $\angle CED=\angle CFB=90°$,

$\therefore \triangle CED\cong\triangle CFB(\mathrm{AAS})$. $\therefore ED=FB$.

$\therefore AB+AD=AF+BF+AE-ED=AF+AE$.

由(1)知$AF+AE=AC$.

$\therefore AB+AD=AC$.



(第9题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明二 如图②,在AN上截取$AG=AC$,连接CG.

$\because \angle MAN=120°$,AC平分$\angle MAN$,

$\therefore \angle MAC=\angle CAB=60°$.

又$\because AG=AC$,

$\therefore \triangle ACG$为等边三角形.

$\therefore \angle AGC=\angle MAC=60°$,$CG=AC=AG$.

$\because \angle ABC+\angle ADC=180°$,

$\angle ABC+\angle CBG=180°$,

$\therefore \angle CBG=\angle ADC$.

$\therefore \triangle CBG\cong\triangle CDA(\mathrm{AAS})$.

$\therefore BG=AD$.

$\therefore AB+AD=AB+BG=AG=AC$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:$BC=BE+CD$.

在BC上取一点G,使$CG=CD$,连接OG.

$\because BD$,CE分别平分$\angle ABC$和$\angle ACB$,

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$,$\angle ACE=\angle BCE$.

$\because \angle A=60°$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=120°$.

$\therefore \angle OBC+\angle OCB=60°$.

$\therefore \angle BOE=\angle COD=\angle OBC+\angle OCB=60°$.

$\because CD=CG$,$\angle OCD=\angle OCG$,$OC=OC$,

$\therefore \triangle CDO\cong\triangle CGO(\mathrm{SAS})$.

$\therefore \angle COD=\angle COG=60°$.

$\therefore \angle BOG=180°-\angle BOE-\angle COG=60°$.

$\therefore \angle EOB=\angle GOB$.

又$\because \angle EBO=\angle GBO$,$BO=BO$,

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle BOG(\mathrm{ASA})$.

$\therefore BE=BG$.

$\therefore BC=BG+CG=BE+CD$.

2. **证明**:延长AE至F,使$EF=AE$,连接DF.

$\because AE$是$\triangle ABD$的中线,

$\therefore BE=DE$.

又$\because \angle AEB=\angle FED$,

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FDE(\mathrm{SAS})$.

$\therefore \angle B=\angle BDF$,$AB=DF$.

$\because BA=BD$,

$\therefore \angle BAD=\angle BDA$,$BD=DF$.

$\because \angle ADF=\angle BDA+\angle BDF$,

$\angle ADC=\angle BAD+\angle B$,

$\therefore \angle ADF=\angle ADC$.

$\because AD$是$\triangle ABC$的中线,

$\therefore BD=CD$.

$\therefore DF=CD$.

又$\because AD=AD$,$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ADC(\mathrm{SAS})$.

$\therefore AC=AF=2AE$,

即$AE=\frac{1}{2}AC$.

3. **证明**:过点O作$OD\perp AB$于D,$OE\perp AC$于E,

则$\triangle BOD$和$\triangle COE$都是直角三角形.

$\because OA$平分$\angle BAC$,$OD\perp AB$,$OE\perp AC$,

$\therefore OD=OE$.

$\because \angle 1=\angle 2$,$\therefore OB=OC$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BOD\cong\mathrm{Rt}\triangle COE(\mathrm{HL})$.

$\therefore \angle ABO=\angle ACO$.

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore AB=AC$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

4. **证明**:(1)$\because AB=AE$,

D为线段BE的中点,

$\therefore AD\perp BC$.

$\therefore \angle C+\angle DAC=90°$.

$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=90°$.

$\therefore \angle C=\angle BAD$.

(2)$\because AF/\!/BC$,$\therefore \angle EAF=\angle AEB$.

$\because AB=AE$,

$\therefore \angle ABE=\angle AEB$,$\therefore \angle ABC=\angle EAF$.

又$\because \angle BAC=\angle AEF=90°$,$AB=AE$,

$\therefore \triangle BAC\cong\triangle AEF(\mathrm{ASA})$.

$\therefore AC=EF$.

5. (1)**证明**:$\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore \angle B=\angle ACB=60°$.

$\because DE/\!/AB$,

$\therefore \angle EDC=\angle B=60°$.

$\therefore \angle DEC=60°$.

$\therefore \triangle CDE$是等边三角形.

(2)**解**:$\because \triangle CDE$是等边三角形,

$\therefore DE=DC=3$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DEF$中,$\because \angle DEF=90°$,$DE=3$,$\angle F=90°-60°=30°$,

$\therefore DF=2DE=6$.

$\therefore EF=\sqrt{DF^2-DE^2}=3\sqrt{3}$.

6. **解**:$\because$四边形$ABCD$是长方形,

$\therefore \angle D=\angle A=\angle C=90°$,$AD=BC=6$,$CD=AB=8$.

根据题意得$\triangle ABP\cong\triangle EBP$,

$\therefore EP=AP$,$\angle E=\angle A=90°$,$BE=AB=8$.

在$\triangle ODP$和$\triangle OEG$中,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases}\angle D=\angle E=90°,\\ OD=OE,\\ \angle DOP=\angle EOG,\end{cases}$

$\therefore \triangle ODP\cong\triangle OEG(\mathrm{ASA})$.

$\therefore OP=OG,PD=GE.\ \therefore DG=EP.$

设 $AP=EP=x$,则 $GE=PD=6-x,DG=x$,

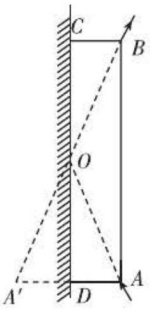
$\therefore CG=8-x,BG=8-(6-x)=2+x.$

根据勾股定理得 $BC^2+CG^2=BG^2$,

即 $6^2+(8-x)^2=(x+2)^2$,解得 $x=4.8$,

$\therefore AP=4.8.$

7. 解:如图,作点 A 关于 CD 的对称点 A',连接 $A'B$,交 CD 于点 O,则点 O 是光的反射点,连接 OA.



(第 7 题)

由对称性可知,$A'D=AD,OA=OA'$,

$\therefore OA+OB=OA'+OB=A'B.$

$AA'=2AD=20$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAA'$ 中,

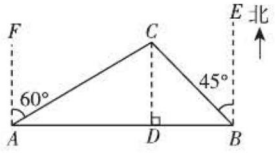
$\because A'B^2=AA'^2+AB^2=20^2+48^2=2\,704.$

$\therefore A'B=52$ cm.

$\therefore$ 光线在纸片上通过的距离为 52 cm.

点拨:先利用入射光线与反射光线的性质构造出直角三角形,再利用勾股定理计算求解.

8. 解:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$,垂足为点 D.



(第 8 题)

$\because \angle CBE=45°$,

$\therefore \angle BCD=\angle DBC=45°.\ \therefore CD=BD.$

设 $CD=BD=x$ km,

$\because \angle CAF=60°,\therefore \angle CAD=30°,\therefore AC=2x$ km.

由勾股定理,得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$ (km).

由 $AD+DB=2$ km,得 $\sqrt{3}x+x=2,\therefore x=\sqrt{3}-1.$

$\therefore CD=(\sqrt{3}-1)$ km ≈ 0.732 km >0.7 km.

$\therefore$ 计划修筑的这条公路不会穿过公园.

9. 解:(1)①$\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等.

$\because t=1$ s,$\therefore BP=CQ=3\times 1=3$ (cm).

$\because AB=10$ cm,点 D 为 AB 的中点,

$\therefore BD=5$ cm.

又$\because PC=BC-BP,BC=8$ cm,

$\therefore PC=8-3=5$(cm),$\therefore PC=BD.$

又$\because AB=AC,\therefore \angle B=\angle C,$

$\therefore \triangle BPD\cong\triangle CQP(\mathrm{SAS}).$

②$\because v_P\neq v_Q,\ \therefore BP\neq CQ.$

又$\because \triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等,$\angle B=\angle C,$

$\therefore BP=PC=4$ cm,$CQ=BD=5$ cm,

$\therefore$ 点 P、点 Q 运动的时间 $t=\dfrac{BP}{3}=\dfrac{4}{3}$ s.

$\therefore v_Q=\dfrac{CQ}{t}=\dfrac{5}{\frac{4}{3}}=\dfrac{15}{4}$(cm/s).

$\therefore$ 当点 Q 的运动速度为 $\dfrac{15}{4}$ cm/s 时,能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等.

(2)设经过 x s 后点 P 与点 Q 第一次相遇,

由题意,得 $\dfrac{15}{4}x=3x+2\times 10$,解得 $x=\dfrac{80}{3}.$

$\therefore$ 点 P 共运动了 $\dfrac{80}{3}\times 3=80$(cm).

$\triangle ABC$ 的周长为 $10+10+8=28$(cm),$28\times 3=84$(cm),$84-80=4$(cm) <10 cm,

$\therefore$ 点 P、点 Q 在 AB 边上相遇,

$\therefore$ 经过 $\dfrac{80}{3}$ s,点 P 与点 Q 第一次在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上相遇.

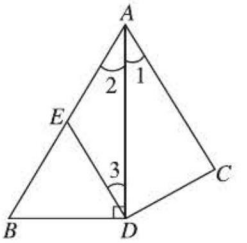
【第一章测试卷】

一、1. A **2.** B **3.** C **4.** B **5.** D **6.** B **7.** C **8.** A

二、9. 如果 a,b 互为相反数,那么 $a+b=0$

10. 2 **11.** 7 或 25 **12.** $\dfrac{8}{5}$

三、13. 证明:如图所示.



(第 13 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $DE \parallel AC$,

∴ $\angle 1 = \angle 3$.

∵ AD 平分 $\angle BAC$,

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∴ $\angle 2 = \angle 3$.

∵ $AD \perp BD$,

∴ $\angle 2 + \angle B = 90°$, $\angle 3 + \angle BDE = 90°$.

∴ $\angle B = \angle BDE$.

∴ $BE = DE$.

∴ $\triangle BDE$ 是等腰三角形.

14. **解**:(1)如图所示.

(2)如图,连接 AD,由作图可知 $AD = BD$. 设 $BD = AD = x$,则 $CD = 8 - x$.

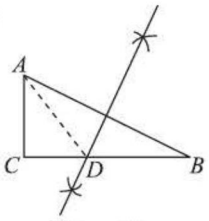
∵ $\angle C = 90°$, $AC = 4$,

∴ 由勾股定理可得 $AC^2 + CD^2 = AD^2$.

即 $4^2 + (8 - x)^2 = x^2$,

解得 $x = 5$.

∴ $BD = 5$.



(第 14 题)

15. **解**:(1)如图①,连接 AD,易知 $AD \perp BC$.

∵ $DE \perp DF$, ∴ $\angle BDA = \angle EDF = 90°$.

∴ $\angle BDE + \angle EDA = \angle EDA + \angle ADF$.

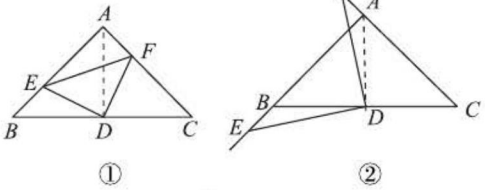
∴ $\angle BDE = \angle ADF$.

又∵ D 为 BC 的中点, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

∴ $BD = AD$, $\angle B = \angle DAC = 45°$.

∴ $\triangle BDE \cong \triangle ADF$(ASA).

∴ $BE = AF$.



(第 15 题)

(2)如图②,连接 AD,易知 $AD \perp BC$.

∵ $DE \perp DF$, ∴ $\angle BDA = \angle EDF = 90°$.

∴ $\angle BDE + \angle BDF = \angle BDF + \angle ADF$.

∴ $\angle BDE = \angle ADF$.

又∵ D 为 BC 的中点, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

∴ $BD = AD$, $\angle ABC = \angle DAC = 45°$.

∴ $\angle EBD = \angle FAD = 180° - 45° = 135°$.

∴ $\triangle BDE \cong \triangle ADF$(ASA).

∴ $BE = AF$.

16. (1)**证明**:在 Rt$\triangle ABC$ 中,

∵ $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, E 为 AB 边的中点,

∴ $BC = EA$, $\angle ABC = 60°$.

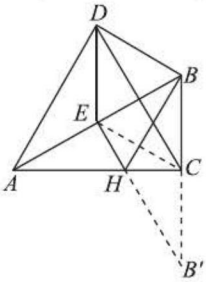
∵ $\triangle DEB$ 是等边三角形,

∴ $DB = DE$, $\angle DEB = \angle DBE = 60°$.

∴ $\angle DEA = \angle DBC = 120°$.

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CDB$(SAS).

(2)**解**:如图,作点 B 关于 AC 的对称点 B',连接 EB' 交 AC 于点 H,则点 H 即为所求.



(第 16 题)

连接 BH, CE,易知 $\triangle CBE$ 是等边三角形,

∴ $CE = CB = CB'$.

易知 $\angle BEB' = 90°$.

∵ $BC = \sqrt{3}$, ∴ $BE = \sqrt{3}$, $BB' = 2\sqrt{3}$.

∴ $BH + EH$ 的最小值为 $EB' = \sqrt{BB'^2 - BE^2} = 3$.

17. (1)①$\sqrt{6}$;2

点拨:∵ $AC = BC = 1 + \sqrt{3}$, $\angle ACB = 90°$,

∴ $AB = \sqrt{2} + \sqrt{6}$. ∴ $PB = \sqrt{6}$.

如图①,过 C 作 $CH \perp AB$ 于 H,易知 $CH = AH = HB = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

∴ $PH = AH - AP = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

∴ $PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$.

②$PA^2 + PB^2 = PQ^2$

(2)**证明**:如图②,过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D.

∵ $\triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $CD \perp AB$,

∴ $CD = AD = DB$.

∵ $PA^2 = (AD + PD)^2 = (DC + PD)^2 = DC^2 + 2DC \cdot PD + PD^2$,

$PB^2 = (PD - BD)^2 = (PD - DC)^2 = DC^2 - 2DC \cdot$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

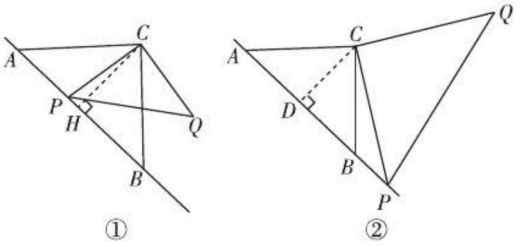
$PD+PD^2$,

$\therefore PA^2+PB^2=2DC^2+2PD^2$.

∵ 在 Rt△PCD 中,由勾股定理,得 $PC^2=DC^2+PD^2$,$\therefore PA^2+PB^2=2PC^2$.

∵ △CPQ 为等腰直角三角形,$\therefore 2PC^2=PQ^2$.

$\therefore PA^2+PB^2=PQ^2$.



(第 17 题)

第二章 一元一次不等式与一元一次不等式组

1 不等关系

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**根据不等式的定义可知,①②⑤是不等式,共有 3 个.

2. D **3.** A **4.** C

5. (1) < (2) > (3) ≤ (4) ≤ (5) < (6) >

6. $v\leqslant 10$

7. **解:**(1)$2x>11$;(2)$(a+b)^2\geqslant 0$;(3)$x+5<3x$;(4)$y\leqslant 15$.

8. **解:**设挂 x kg 重的物体才能使弹簧长度超过 20 cm. 根据题意,得 $15+0.5x>20$.

点拨:弹簧的长度应等于原来的长度加上伸长的长度.

9. **解:**(1)答案不唯一,如聪聪带了 a 元钱去超市,他买了 2 本单价为 b 元的笔记本后,剩下的钱多于 4 元.

(2)答案不唯一,如甲、乙两地相距 10 km,李天以 m km/h 的速度从甲地出发去乙地,2 h 后,王兵以 n km/h 的速度从乙地去发去甲地,王兵出发 1 h 后,两人之间的距离不大于 5 km(两人还未相遇).

10. **解:**(1)$x-0.9x\leqslant 18$;

(2)$x-[200\times 0.9+(x-200)\times 0.8]>30$.

2 不等式的基本性质

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D **3.** D **4.** A

5. A **点拨:**由题意,得 $\frac{5(a+b)}{2}-(3a+2b)=\frac{b-a}{2}$. 因为甲赔了钱,所以 $\frac{b-a}{2}<0$,解得 $a>b$.

6. $m<-3$

7. (1) > (2) > (3) > (4) <

8. (1) > (2) > (3) < (4) < (5) > (6) <

9. **解:**(1)不等式两边都加 3,得 $x>4$;

(2)不等式两边都乘 $-\frac{3}{2}$,得 $x<\frac{3}{2}$;

(3)不等式两边都减 $2x$,得 $x<1$;

(4)不等式两边都除以 2,得 $x>2$.

10. **解:**(1)$(m^2-2m+5)-(-2m+5)=m^2-2m+5+2m-5=m^2$.

∵ $m^2\geqslant 0$,

$\therefore (m^2-2m+5)-(-2m+5)\geqslant 0$.

$\therefore m^2-2m+5\geqslant -2m+5$.

(2)$(a^2-4a+3)-(-4a+1)=a^2-4a+3+4a-1=a^2+2$.

∵ $a^2\geqslant 0$,

$\therefore a^2+2\geqslant 2>0$.

$\therefore a^2-4a+3>-4a+1$.

3 不等式的解集

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** A

4. D **点拨:**字母 a 的符号可正可负,因此两边同除以 a 时,应分类考虑:当 $a>0$ 时,两边同除以 a,不等号方向不变;当 $a<0$ 时,两边同除以 a,不等号方向改变. 故选 D.

5. D

6. 0 **点拨:**∵ 数轴上表示的不等式的解集为 $x\geqslant -1$,$\therefore a-1=-1$,解得 $a=0$.

7. 3 **点拨:**因为 $3m-2x<5$ 的解集为 $x>\frac{3m-5}{2}$,所以 $\frac{3m-5}{2}=2$,解得 $m=3$.

8. $a\leqslant -1$ **点拨:**∵ $x=4$ 是不等式 $ax-3a-1<0$ 的解,$\therefore 4a-3a-1<0$,

$\therefore a<1$.

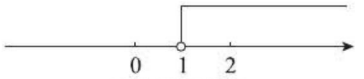
∵ $x=2$ 不是这个不等式的解,

$\therefore 2a-3a-1\geqslant 0$,$\therefore a\leqslant -1$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $a\leqslant -1$.

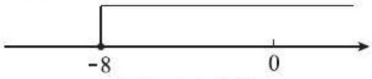
9. **解:**(1)利用不等式的基本性质 1,不等式两边都减 $8x$,得 $x>1$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



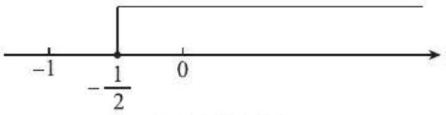
[第9(1)题]

(2)利用不等式的基本性质2,不等式两边都乘2,得 $x \geqslant -8$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第9(2)题]

(3)利用不等式的基本性质3,不等式两边都除以 -10,得 $x \geqslant -\frac{1}{2}$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第9(3)题]

10. 解:将 $x=3$ 代入 $x=-a+1$,得 $3=-a+1$,解得 $a=-2$.

将 $a=-2$ 代入不等式,得 $(-5-2)x<-14$,即 $-7x<-14$.

根据不等式的基本性质3,得 $x>2$.

4 一元一次不等式

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D **3.** C

4. $x<-3$ **点拨:**先由 x 的次数是1求出 m 的值,然后将 m 的值代入不等式,即可求出不等式的解集.

5. $x \geqslant \frac{10}{9}$ **6.** 10 **7.** $x<8$

8. 解:错误步骤的序号是①②⑤. 正确的解答过程如下.

去分母,得 $3(1+x)-2(2x+1) \leqslant 6$.

去括号,得 $3+3x-4x-2 \leqslant 6$.

移项,得 $3x-4x \leqslant 6-3+2$.

合并同类项,得 $-x \leqslant 5$.

两边都除以 -1,得 $x \geqslant -5$.

9. 解:(1)去括号,得 $2x-2-3<1$.

移项,得 $2x<1+3+2$.

合并同类项,得 $2x<6$.

系数化为1,得 $x<3$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图(1)所示.

(2)去分母,得 $2(2x-1)-(9x+2) \leqslant 6$.

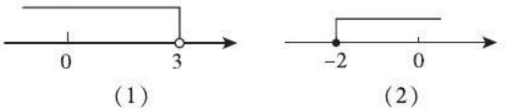
去括号,得 $4x-2-9x-2 \leqslant 6$.

移项,得 $4x-9x \leqslant 6+2+2$.

合并同类项,得 $-5x \leqslant 10$.

系数化为1,得 $x \geqslant -2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图(2)所示.



(1) (2)

(第9题)

10. 解:$2(x+1)-5<3(x+1)+4$,

去括号,得 $2x+2-5<3x+3+4$.

移项,得 $2x-3x<3+4+5-2$.

合并同类项,得 $-x<10$.

系数化为1,得 $x>-10$.

所以该不等式的最小整数解为 $x=-9$.

把 $x=-9$ 代入 $\frac{1}{3}x-mx=5$,得 $\frac{1}{3}\times(-9)-m\cdot(-9)=5$,解得 $m=\frac{8}{9}$.

所以 $m^2-2m-11=\left(\frac{8}{9}\right)^2-2\times\frac{8}{9}-11=\frac{64}{81}-\frac{16}{9}-11=-\frac{971}{81}$.

点拨:此题主要考查了一元一次不等式的解法和一元一次方程的解法,根据不等式的解集求出其最小整数解,再将最小整数解代入方程中求出 m 的值,进而求出 $m^2-2m-11$ 的值.

11. 解:方法一 $\begin{cases}2x-3y=5, & ①\\ x-2y=k. & ②\end{cases}$

① − ②,得 $x-y=5-k$.

$\because x>y$,$\therefore x-y>0$.

$\therefore 5-k>0$,$k<5$.

方法二 $\begin{cases}2x-3y=5, & ①\\ x-2y=k. & ②\end{cases}$

① − ② × 2,得 $y=5-2k$.

代入②,得 $x-2(5-2k)=k$,解得 $x=10-3k$.

$\because x>y$,$\therefore 10-3k>5-2k$,$-k>-5$,

解得 $k<5$.

12. 解:(1)设小樱桃的进价为每千克 x 元,大樱桃的进价为每千克 y 元,

则 $\begin{cases}200x+200y=8\,000,\\ y-x=20,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=10,\\ y=30.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以大樱桃的进价为每千克 30 元,小樱桃的进价为每千克 10 元.

$200\times[(40-30)+(16-10)]=3\ 200$(元).

所以该水果商共赚了 3 200 元.

(2)设大樱桃的售价为每千克 m 元.

由题意得$(1-20\%)\times200\times16+200m-8\ 000\geqslant3\ 200\times90\%$,

解得 $m\geqslant41.6$.

所以大樱桃的售价最少应为每千克 41.6 元.

13. **解**:(1)设该企业购买 A 型设备 x 台,则购买 B 型设备$(10-x)$台.

由题意,得 $12x+10(10-x)\leqslant105$,

解得 $x\leqslant\frac{5}{2}$.

因为 x 取非负整数,所以 $x=1,2,0$.

所以共有 3 种购买方案,分别为:

方案一　购买 A 型设备 1 台、B 型设备 9 台;

方案二　购买 A 型设备 2 台、B 型设备 8 台;

方案三　不购买 A 型设备,购买 B 型设备 10 台.

(2)方案一　$1\times240+9\times200=2\ 040$(t),

$1\times12+9\times10=102$(万元).

方案二　$2\times240+8\times200=2\ 080$(t),

$2\times12+8\times10=104$(万元).

方案三　$10\times200=2\ 000$(t),

$10\times10=100$(万元).

若该企业每月产生的污水量为 2 040 t,为了节约资金,应选择方案一.

5　一元一次不等式与一次函数

【两年模拟兵法】

1. A　**2.** A　**3.** C　**4.** <

5. $x\leqslant1$　**6.** $x>3$　**7.** $x<4$

8. **解**:(1)由 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$,可知当 $y=0$ 时,$x=2$,

$\therefore$ 点 A 的坐标是(2,0).

$\therefore AO=2$.

$\because$ 直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B,

$\therefore$ 点 B 的坐标是$(-1,1.5)$.

$\therefore\triangle AOB$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times2\times1.5=1.5$.

(2)由(1)可知交点 B 的坐标是$(-1,1.5)$,

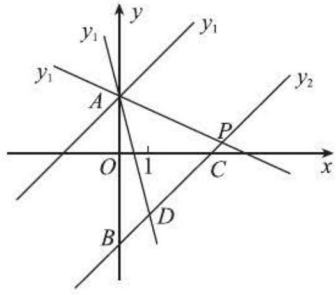
由函数图象可知,$y_1>y_2$ 时 $x>-1$.

9. **解**:(1)当 $k=-2$ 时,$y_1=-2x+2$.

根据题意,得 $-2x+2>x-3$,解得 $x<\frac{5}{3}$.

(2)k 的取值范围是 $-4\leqslant k\leqslant1$,且 $k\neq0$.

点拨:(2)如图,直线 $y_2=x-3$ 上横坐标是 1 的点 D 的坐标是$(1,-2)$.



(第 9 题)

①当直线 $y_1=kx+2$ 经过点 $D(1,-2)$ 时,$k=-4$,此时符合题意;

②当直线 $y_1=kx+2$ 与直线 $y_2=x-3$ 平行时,$k=1$,此时符合题意;

③当直线 $y_1=kx+2$ 与直线 $y_2=x-3$ 的交点 P 在射线 DC 上(不与点 D 重合)时,符合题意,此时 k 的取值范围是 $-4<k<1$ 且 $k\neq0$.

综上所述,k 的取值范围是 $-4\leqslant k\leqslant1$ 且 $k\neq0$.

10. **解**:(1)$y_1=0.1x+6(x\geqslant0)$;$y_2=0.12x(x\geqslant0)$

(2)当 $y_1>y_2$ 时,$0.1x+6>0.12x$,解得 $x<300$;

当 $y_1=y_2$ 时,$0.1x+6=0.12x$,解得 $x=300$;

当 $y_1<y_2$ 时,$0.1x+6<0.12x$,解得 $x>300$.

所以当印制 100~300(含 100,不含 300)份数学学案时,选择乙种收费方式较合算;当印制 300 份数学学案时,甲、乙两种收费方式一样合算;当印制 300~450(不含 300,含 450)份数学学案时,选择甲种收费方式较合算.

11. **解**:(1)330;660

(2)设 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为$y=kx$,将点(17,340)的坐标代入 $y=kx$,

得 $340=17k$,解得 $k=20$.

$\therefore OD$ 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为$y=20x$.

根据题意得 DE 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=340-5(x-22)=-5x+450$.

解方程组 $\begin{cases}y=20x,\\y=-5x+450,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=18,\\y=360.\end{cases}$

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(18,360)$.

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}20x(0\leqslant x\leqslant18),\\-5x+450(18<x\leqslant30).\end{cases}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)当$0\leqslant x\leqslant 18$时,
根据题意得$(8-6)\times 20x\geqslant 640$,
解得$x\geqslant 16$;
当$18<x\leqslant 30$时,
根据题意得$(8-6)\times(-5x+450)\geqslant 640$,
解得$x\leqslant 26$.
$\therefore 16\leqslant x\leqslant 26$.
$26-16+1=11$(天),
∴日销售利润不低于640元的时间共有11天.
∵点D的坐标为$(18,360)$,
∴日销售量最大为360件.
$360\times(8-6)=720$(元).
答:试销售期间,日销售利润最大是720元.

6 一元一次不等式组

【两年模拟兵法】

1. B **2**. B **3**. A **4**. A **5**. A

6. $-1<x<2$ **点拨**:根据第二象限内点的坐标特征,列出不等式组.因为点$P(x-2,x+1)$在第二象限,所以$\begin{cases}x-2<0,\\x+1>0,\end{cases}$从而可求得$x$的取值范围.

7. $13\leqslant x<15$ **8**. $a\geqslant -1$ **9**. 15

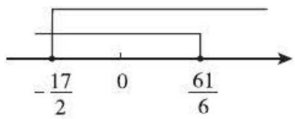
10. **解**:(1)原不等式组可转化为

$$\begin{cases}\dfrac{2(1+3x)}{7}\geqslant -7,①\\[2ex]\dfrac{2(1+3x)}{7}\leqslant 9.②\end{cases}$$

解不等式①,得$x\geqslant -\dfrac{17}{2}$.

解不等式②,得$x\leqslant\dfrac{61}{6}$.

把不等式①②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第10(1)题]

所以原不等式组的解集为$-\dfrac{17}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{61}{6}$.

(2)解不等式①,得$x<-3$.
解不等式②,得$x\geqslant -2.2$.
把不等式①②的解集在数轴上表示出来,如图所示.



[第10(2)题]

所以原不等式组无解.

点拨:(1)将连写不等式组改写成用"|"表示的不等式组来求解.(2)可根据分数的基本性质将不等式②分母中的小数化为整数后再求解.

11. **解**:解方程组,得$\begin{cases}x=\dfrac{3m-8}{7},\\[2ex]y=\dfrac{m-19}{7}.\end{cases}$

因为x的值是正数,y的值是负数,

所以$\begin{cases}\dfrac{3m-8}{7}>0,\\[2ex]\dfrac{m-19}{7}<0.\end{cases}$

解得$\dfrac{8}{3}<m<19$.

所以m的取值范围为$\dfrac{8}{3}<m<19$.

12. **解**:$\begin{cases}5x-10\geqslant 2(x+1),①\\[2ex]\dfrac{1}{2}x-1\leqslant 7-\dfrac{3}{2}x.②\end{cases}$

解不等式①,得$x\geqslant 4$.
解不等式②,得$x\leqslant 4$.
∴不等式组的解集为$x=4$.
当$x=4$时,P点的坐标为$(1,-1)$,
∴点P在第四象限.

13. **解**:(1)设购买甲种奖品x件,购买乙种奖品$(20-x)$件,则$40x+30(20-x)=650$,解得$x=5$,
$\therefore 20-x=15$.
答:购买甲种奖品5件,乙种奖品15件.
(2)设购买甲种奖品x件,购买乙种奖品$(20-x)$件,则$\begin{cases}20-x\leqslant 2x,\\40x+30(20-x)\leqslant 680,\end{cases}$

解得$\dfrac{20}{3}\leqslant x\leqslant 8$.

∵x为整数,∴$x=7$或$x=8$.
当$x=7$时,$20-x=13$;当$x=8$时,$20-x=12$.
答:该公司有两种不同的购买方案.购买甲种奖品7件,购买乙种奖品13件或购买甲种奖品8件,购买乙种奖品12件.

14. **解**:(1)设购买A型公交车每辆需x万元,购买B型公交车每辆需y万元.

由题意得$\begin{cases}x+2y=400,\\2x+y=350,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=100,\\y=150.\end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

答:购买A型公交车每辆需100万元,购买B型公交车每辆需150万元.

(2)设购买A型公交车a辆,则购买B型公交车$(10-a)$辆.

由题意得$\begin{cases}100a+150(10-a)\leqslant 1\ 220,\\60a+100(10-a)\geqslant 650,\end{cases}$

解得$\frac{28}{5}\leqslant a\leqslant\frac{35}{4}$.

$\because a$为正整数,

$\therefore a=6$或7或8.

$\therefore 10-a=4$或3或2.

则该公司有三种购车方案.

①购买A型公交车6辆、B型公交车4辆,总费用为$100\times6+150\times4=1\ 200$(万元);

②购买A型公交车7辆、B型公交车3辆,总费用为$100\times7+150\times3=1\ 150$(万元);

③购买A型公交车8辆、B型公交车2辆,总费用为$100\times8+150\times2=1\ 100$(万元).

则购买A型公交车8辆、B型公交车2辆总费用最少,最少总费用为1 100万元.

素养提分整合篇

【好题必解】

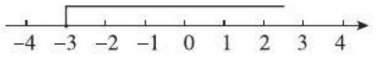
1. 解:去分母,得$3x-6\leqslant 4x-3$.

移项,得$3x-4x\leqslant -3+6$.

合并同类项,得$-x\leqslant 3$.

系数化为1,得$x\geqslant -3$.

原不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



(第1题)

2. 解:$\begin{cases}x>\frac{1-x}{2},①\\3\left(x-\frac{7}{3}\right)<x+1.②\end{cases}$

解不等式①,得$x>\frac{1}{3}$.

解不等式②,得$x<4$.

$\therefore$原不等式组的解集为$\frac{1}{3}<x<4$.

$\therefore$该不等式组的整数解为1,2,3.

3. D **4.** D **5.** D **6.** $m>-2$

7. 解:解方程,得$x=\frac{4m+1}{2}$.

(1)方程有正数解,则$\frac{4m+1}{2}>0$. 解得$m>-\frac{1}{4}$.

(2)方程有负数解,则$\frac{4m+1}{2}<0$. 解得$m<-\frac{1}{4}$.

(3)方程有不大于2的解,则$\frac{4m+1}{2}\leqslant 2$. 解得$m\leqslant\frac{3}{4}$.

8. 解:解这个方程组得$\begin{cases}x=a+2,\\y=2a+2.\end{cases}$

$\because x$大于0,y小于4,

$\therefore\begin{cases}a+2>0,\\2a+2<4.\end{cases}$

解这个不等式组,得$-2<a<1$.

故a的取值范围为$-2<a<1$.

9. 解:(1)设函数表达式为$y=kx+b(k\neq 0)$.

把点(20,0),(38,2 700)的坐标代入$y=kx+b$,

得$\begin{cases}0=20k+b,\\2\ 700=38k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=150,\\b=-3\ 000.\end{cases}$

$\therefore$第一班车离入口处的路程y(m)关于时间x(min)的函数表达式为$y=150x-3\ 000(20\leqslant x\leqslant 38)$.

(2)把$y=1\ 500$代入$y=150x-3\ 000$,解得$x=30$,则$30-20=10$(min).

$\therefore$第一班车从入口处到达塔林所需的时间为10 min.

(3)设小聪坐上第n班车.

$30-25+10(n-1)\geqslant 40$,解得$n\geqslant 4.5$,

$\therefore$小聪最早能坐上第5班车.

等班车的时间为5 min,坐班车所需时间为$1\ 200\div(1\ 500\div 10)=8$(min),

步行所需时间为$1\ 200\div(1\ 500\div 25)=20$(min).

$20-(8+5)=7$(min).

$\therefore$小聪坐班车到草甸,比他在塔林游玩结束后立即步行到草甸提早了7 min.

10. 解:(1)设每本文学名著x元,每本动漫书y元.

根据题意,得$\begin{cases}20x+40y=1\ 520,\\20x=20y+440,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=40,\\y=18.\end{cases}$

答:每本文学名著40元,每本动漫书18元.

(2)设学校要求购买文学名著a本,则购买动漫书$(a+20)$本.

根据题意,得$\begin{cases}a+20+a\geqslant 72,\\40a+18(a+20)\leqslant 2\ 000,\end{cases}$

解得$26\leqslant a\leqslant 28\frac{8}{29}$.

因为a为整数,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以 $a=26,27,28$.

所以有三种购书方案：

方案一　购买文学名著 26 本、动漫书 46 本；

方案二　购买文学名著 27 本、动漫书 47 本；

方案三　购买文学名著 28 本、动漫书 48 本.

【第二章测试卷】

一、**1**. A　**2**. C　**3**. B　**4**. D　**5**. C　**6**. D　**7**. C　**8**. B

二、**9**. $-3<x\leqslant 5$　**10**. >　**11**. 21　**12**. 1 000 h

三、**13**. **解**：(1) 去括号，得 $5x-10+8<6x-6+7$.

移项，得 $5x-6x<10-8-6+7$.

合并同类项，得 $-x<3$.

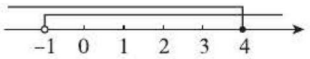
系数化为 1，得 $x>-3$.

(2) 解不等式①，得 $x>-1$.

解不等式②，得 $x\leqslant 4$.

∴ 不等式组的解集为 $-1<x\leqslant 4$.

解集在数轴上的表示如图所示.



(第 13 题)

14. **解**：解不等式①，得 $x\leqslant 3$.

解不等式②，得 $x<a$.

∵ a 是不等于 3 的常数，

∴ 当 $a>3$ 时，不等式组的解集为 $x\leqslant 3$；

当 $a<3$ 时，不等式组的解集为 $x<a$.

15. **解**：(1) $(-2)\oplus 3=-2\times(-2-3)+1$

$=-2\times(-5)+1$

$=10+1$

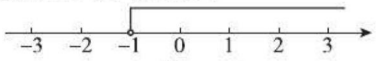
$=11$.

(2) ∵ $3\oplus x<13$，

∴ $3(3-x)+1<13$.

解得 $x>-1$.

在数轴上的表示如图所示.



(第 15 题)

16. **解**：(1) 设每辆小客车的乘客座位数是 x 个，每辆大客车的乘客座位数是 y 个，

根据题意，得 $\begin{cases}y-x=17,\\6y+5x=300,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=18,\\y=35.\end{cases}$

答：每辆小客车的乘客座位数是 18 个，每辆大客车的乘客座位数是 35 个.

(2) 设租用 a 辆小客车才能将所有参加活动的师生载完，则 $18a+35(6+5-a)\geqslant 300+30$，解得 $a\leqslant 3\frac{4}{17}$.

符合条件的 a 的最大整数值为 3.

答：租用小客车数量的最大值为 3.

17. **解**：(1) 设 A 种商品每件的进价为 x 元，B 种商品每件的进价为 y 元.

根据题意，得 $\begin{cases}30x+40y=3\ 800,\\40x+30y=3\ 200,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=20,\\y=80.\end{cases}$

答：A 种商品每件的进价为 20 元，B 种商品每件的进价为 80 元.

(2) 设购进 B 种商品 m 件，获得的利润为 ω 元，则购进 A 种商品 $(1\ 000-m)$ 件.

根据题意，得 $\omega=(30-20)(1\ 000-m)+(100-80)m=10m+10\ 000$.

∵ A 种商品的数量不少于 B 种商品数量的 4 倍，

∴ $1\ 000-m\geqslant 4m$，解得 $m\leqslant 200$.

∵ 在 $\omega=10m+10\ 000$ 中，$k=10>0$，

∴ ω 随 m 的增大而增大.

∴ 当 $m=200$ 时，ω 取最大值，最大值为 $10\times 200+10\ 000=12\ 000$.

答：当购进 A 种商品 800 件、B 种商品 200 件时，销售利润最大，最大利润为 12 000 元.

第三章　图形的平移与旋转

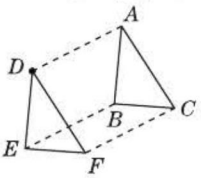
1　图形的平移

【两年模拟兵法】

1. B　**2**. C　**3**. D　**4**. B　**5**. A　**6**. 10

7. 45°；60°；2.5

8. **解**：如图，$\triangle DEF$ 即为所求作的图形.



(第 8 题)

9. (1) **解**：(答案不唯一) 平移的方向是点 A 到点 D 的方向，平移的距离是线段 AD 的长度.

(2) **证明**：∵ 将 $\triangle ABC$ 平移得到 $\triangle DEF$，

∴ $CF=AD$.

∵ $CF+BC=BF$，

∴ $AD+BC=BF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解: ∵ 阴影部分的面积既等于梯形 $ABCD$ 的面积减去梯形 $EFMD$ 的面积,也等于梯形 $EFGH$ 的面积减去梯形 $EFMD$ 的面积,

∴ 阴影部分的面积等于梯形 $DHGM$ 的面积.

由题可知 $DC=HG=10$.

又∵ $MC=2$,

∴ $DM=8$.

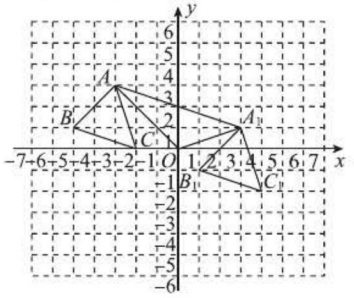
∴ $S_{阴影}=S_{梯形DHGM}=\frac{1}{2}(DM+HG)\times MG=\frac{1}{2}\times(8+10)\times5=45$.

11. 解: (1) ∵ 点 $P(a,b)$ 的对应点为 $P_1(a+6,b-2)$,

∴ 平移规律为向右平移 6 个单位长度,向下平移 2 个单位长度.

∴ $A(-3,3)$,$B(-5,1)$,$C(-2,0)$ 的对应点的坐标为 $A_1(3,1)$,$B_1(1,-1)$,$C_1(4,-2)$.

(2) $\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示.



(第 11 题)

(3) 如图,借助网格可知 $\triangle AOA_1$ 的面积为 $6\times3-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times6\times2=18-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-6=6$.

2 图形的旋转

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D **3.** D **4.** D

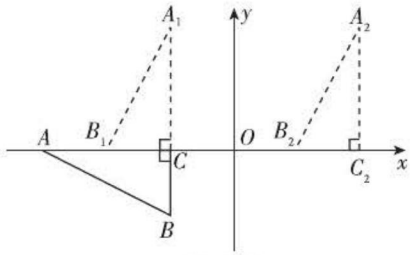
5. A **点拨:** 如图,先根据题意画出 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90°后的图形 $\triangle A_1B_1C$.

∵ 点 C 的坐标为 $(-1,0)$,$A_1C=AC=2$,

∴ 点 A_1 的坐标为 $(-1,2)$.

再画出将 $\triangle A_1B_1C$ 向右平移 3 个单位长度后的图形 $\triangle A_2B_2C_2$,如图所示.

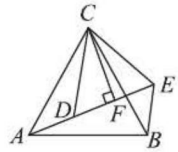
∴ 点 A_2 的坐标为 $(2,2)$.



(第 5 题)

6. 解: (1) $\frac{180°-\alpha}{2}$

(2) 如图,$AE=BE+\frac{2\sqrt{3}}{3}CF$. 证明如下.



(第 6 题)

∵ 将 $\triangle CAD$ 绕点 C 按逆时针方向旋转 60°得到 $\triangle CBE$,

∴ $AD=BE$,$CD=CE$,$\angle DCE=60°$.

∴ $\triangle CDE$ 是等边三角形. 又∵ $CF\perp DE$,

∴ $DF=EF$,$\angle DCF=30°$.

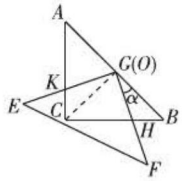
∴ $CD=2DF$.

∴ $CF=\sqrt{3}DF$.

∴ $DF=EF=\frac{\sqrt{3}}{3}CF$.

∵ $AE=AD+DF+EF$,∴ $AE=BE+\frac{2\sqrt{3}}{3}CF$.

7. 解: 如图,连接 GC,则 $GC=GB$.



(第 7 题)

∵ $\angle KGC$ 与 $\angle HGB$ 都是旋转角,

∴ $\angle KGC=\angle HGB=\alpha$.

又∵ $\angle GBH=\angle GCK=45°$,

∴ $\triangle GCK\cong\triangle GBH$.

∴ $S_{\triangle GCK}=S_{\triangle GBH}$.

∴ $S_{四边形CHGK}=S_{\triangle GCK}+S_{\triangle GCH}=S_{\triangle GBH}+S_{\triangle GCH}=S_{\triangle GCB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4\times4=4$.

∴ 四边形 $CHGK$ 的面积是始终不变的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 中心对称

【两年模拟兵法】

1. C

2. D **点拨:** 根据中心对称的性质即可判断.

3. C **点拨:** 根据关于原点对称的点,横纵坐标都变成相反数,可得 a,b 的值. 根据有理数的加法,可得答案.

4. A **点拨:** 因为 $\triangle ABC$ 绕原点 O 旋转 180° 得到 $\triangle CDA$,所以点 B,D 关于原点 O 对称. 因为点 B 的坐标为 $(-2,-2)$,所以点 D 的坐标为 $(2,2)$,故选 A.

5. **解:** $AD \parallel BC$,理由如下.

$\because$ 将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转 180° 后得到 $\triangle FCE$,

$\therefore$ $\triangle ADE$ 与 $\triangle FCE$ 关于点 E 中心对称.

由中心对称的性质可知,$\angle D = \angle FCE$.

根据内错角相等,两直线平行,得 $AD \parallel CF$.

又$\because$ CF 恰好与 BC 在一条直线上,$\therefore$ $AD \parallel BC$.

6. **解:** (1) 根据中心对称的性质,可得对称中心是 D_1D 的中点.

$\because$ D_1,D 的坐标分别是 $(0,3)$,$(0,2)$,

$\therefore$ 对称中心的坐标是 $(0,2.5)$.

(2)$\because$ A,D 的坐标分别是 $(0,4)$,$(0,2)$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长都是 $4-2=2$.

$\therefore$ B,C 的坐标分别是 $(-2,4)$,$(-2,2)$.

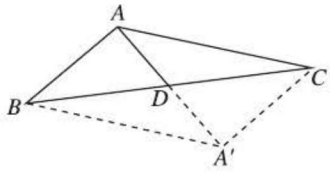
$\because$ $A_1D_1=2$,D_1 的坐标是 $(0,3)$,

$\therefore$ A_1 的坐标是 $(0,1)$.

$\therefore$ B_1,C_1 的坐标分别是 $(2,1)$,$(2,3)$.

综上,可得顶点 B,C,B_1,C_1 的坐标分别是 $(-2,4)$,$(-2,2)$,$(2,1)$,$(2,3)$.

7. **解:** 如图,将 $\triangle ABC$ 绕点 D 旋转 180° 得到 $\triangle A'CB$,连接 $A'D$.



(第 7 题)

易知 A,D,A' 在一条直线上,$A'B=AC=5$,$AA'=2AD=4$.

在 $\triangle AA'B$ 中,$AB^2+AA'^2=3^2+4^2=25$,$A'B^2=5^2=25$,

$\therefore$ $AB^2+AA'^2=A'B^2$.

$\therefore$ $\triangle AA'B$ 为直角三角形,且 $\angle BAA'=90°$.

易知 $\triangle ADC \backsimeq \triangle A'DB$,

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AA'B}=\dfrac{AB\cdot AA'}{2}=\dfrac{3\times4}{2}=6$.

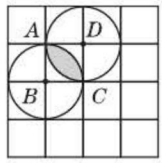
4 简单的图案设计

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B **3.** D **4.** B

5. **解:** (1) 如图,$S_{\text{正方形}ABCD}=1\times1=1$,

$S_{\text{扇形}ABC}=\dfrac{1}{4}\times\pi\times1^2=\dfrac{\pi}{4}$.

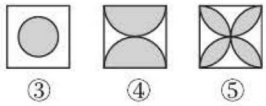


(第 5 题)

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $S_{\text{正方形}ABCD}-2(S_{\text{正方形}ABCD}-S_{\text{扇形}ABC})=\dfrac{\pi}{2}-1$.

(2) 题图②中的图形可以由题图①中的图形通过平移变换和轴对称变换得到. (答案不唯一)

6. **解:** 如图所示. (答案不唯一)



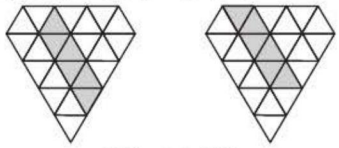
(第 6 题)

7. **解:** (1) 如图,画出下列其中一种即可.



[第 7(1) 题]

(2) 如图,画出下列其中一种即可.



[第 7(2) 题]

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解:** $FE<BC$. 理由如下.

如图,将 FE 平移到 BM,

则此时 BE 可平移到 MF,由于 $CF=BE=MF$,

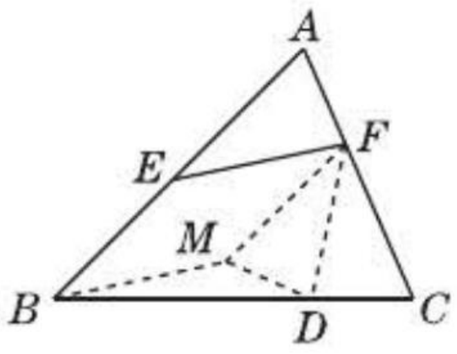
考虑到 MF 与 CF 的对称关系,作 $\angle MFC$ 的平分线交 BC 于点 D,连接 MD.

易得 $DM=DC$.

$\because$ $BD+DM>BM$,$\therefore$ $BD+DC>FE$.

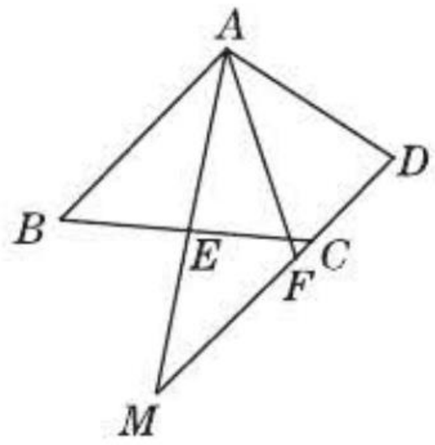
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore BC > FE$,即 $FE < BC$.



(第1题)

2. 解:(1)如图,延长 AE 到点 M,使 $EM = AE$,连接 CM,则 $\triangle MCE$ 为所求.



(第2题)

(2) $AB = AF + CF$.

证明:$\because$ $\triangle MCE$ 为 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称的图形,

$\therefore AB = MC$, $\angle BAE = \angle M$.

$\therefore AB \parallel MC$.

又$\because$ $AB \parallel DC$,

$\therefore D, C, F, M$ 共线.

又$\because$ $\angle BAE = \angle EAF$,

$\therefore \angle EAF = \angle M$.

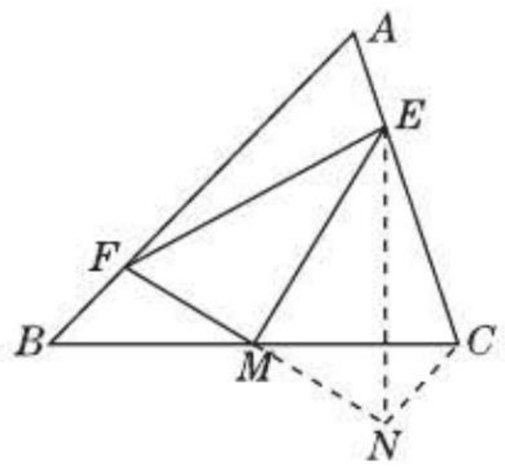
$\therefore MF = AF$.

$\because MC = MF + CF$,

$\therefore AB = AF + CF$.

3. 证明:由题意可知 $BM = MC$,

$\therefore$ 可将 $\triangle BFM$ 绕点 M 旋转 180°得到 $\triangle CNM$,连接 EN,如图所示.



(第3题)

$\therefore BF = CN$, $FM = MN$.

又$\because$ $ME \perp MF$, $\therefore EN = EF$.

在 $\triangle ENC$ 中, $EN < NC + CE$,

$\therefore EF < BF + CE$.

4. 解:(1)将题图①中的 $\triangle ADE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°得到题图②.

(2)设 $\triangle ADE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°得到 $\triangle GDF$,则 $S_1 + S_2 = S_{\triangle BDG}$.

由旋转的性质知,

$\angle ADG = 90°$, $DG = AD = 5$,

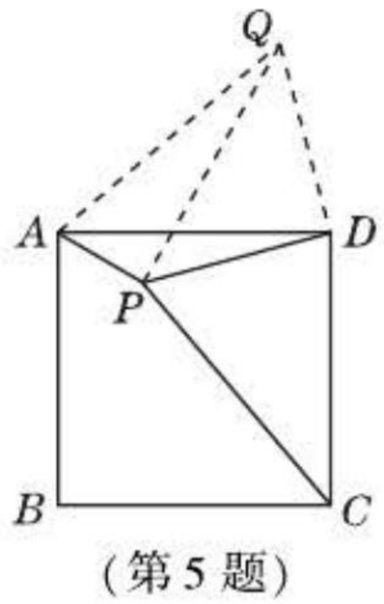
$\therefore \angle BDG = 90°$.

$\therefore S_{\triangle BDG} = \frac{1}{2} BD \cdot DG = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$.

$\therefore S_1 + S_2 = 15$.

5. 解:如图,将 $\triangle PCD$ 绕点 D 顺时针旋转 90°至 CD 与 AD 重合,得到 $\triangle QAD$,连接 PQ,

$\therefore QD = PD = 2$, $QA = PC = 3$, $\angle QDP = 90°$.



(第5题)

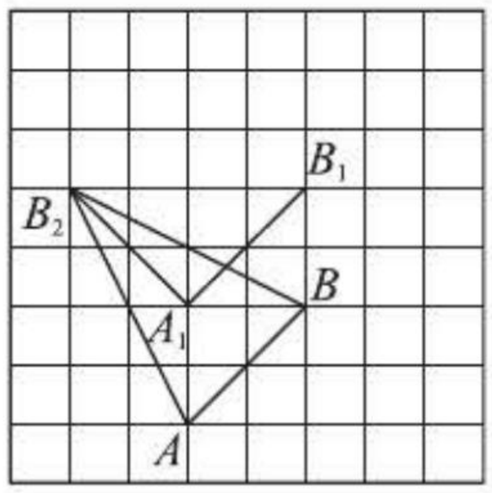
$\therefore PQ^2 = DP^2 + DQ^2 = 8$, $\angle QPD = 45°$.

在 $\triangle PAQ$ 中,$\because PA^2 + PQ^2 = 1 + 8 = 9 = AQ^2$,

$\therefore \angle APQ = 90°$.

$\therefore \angle APD = \angle APQ + \angle DPQ = 90° + 45° = 135°$.

6. 解:(1)(2)如图所示.



(第6题)

(3)如图,$S_{\triangle AB B_2} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6$.

【第三章测试卷】

一、**1.** D **2.** A **3.** A **4.** A **5.** C **6.** B **7.** A **8.** A

二、**9.** 60° **10.** (2,3) **11.** 6 cm

12. 90°; $\sqrt{10}$ **点拨:**连接 PP'. 根据题意,知 $\angle ACP = \angle ABC = \angle ACP' = 45°$,

$\therefore \angle BCP' = \angle ACP + \angle ACP' = 90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由题可得 $AP'=AP$，$\angle CAP'=\angle BAP$，$CP'=BP=\sqrt{2}$，

$\therefore \angle PAP'=90°$，即$\triangle PAP'$为等腰直角三角形.

在等腰直角三角形 BAC 中，$\because AB=4$，

$\therefore BC=4\sqrt{2}$.

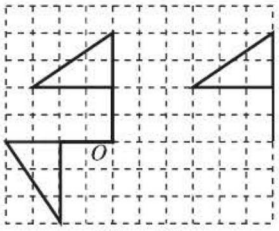
又$\because BP=\sqrt{2}$，$\therefore CP=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCP'$中，$CP=3\sqrt{2}$，$CP'=\sqrt{2}$，

$\therefore PP'=2\sqrt{5}$.

在等腰直角三角形 PAP'中，由勾股定理可求得 $AP=\sqrt{10}$.

三、**13. 解**：(1)(2)如图所示.



(第 13 题)

14. 解：将$\triangle ABC$以 A 为旋转中心逆时针旋转，使得 AB 与 AD 重合，得到$\triangle ADE$，

$\therefore \angle ADE=\angle B$，$AC=AE$.

$\because \angle B+\angle ADC=180°$，

$\therefore \angle ADE+\angle ADC=180°$，即 C，D，E 共线.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积等于$\triangle ACE$的面积.

$\because AC=AE$，$\angle ACE=60°$，

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形.

$\therefore CE=AC=1$.

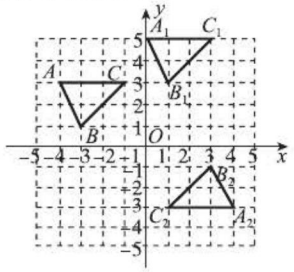
过点 A 作 $AF\perp CE$ 于点 F，则 $CF=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}$.

$\therefore AF=\sqrt{AC^2-CF^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

15. 解：(1)①$\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示；

②$\triangle A_2B_2C_2$ 如图所示.



(第 15 题)

(2)对称中心点 M 的坐标为(2,1).

16. (1)**证明**：$\because \angle BAC=\angle DAE$，$AB=AD$，$\angle B=\angle D$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADE$(ASA).

(2)**解**：$\because \triangle ABC\cong\triangle ADE$，

$\therefore AC=AE$.

$\therefore \angle ACE=\angle AEC=70°$.

$\therefore \angle CAE=180°-70°-70°=40°$，

即所求旋转角的大小为 40°.

第四章 因式分解

1 因式分解

【两年模拟兵法】

1. D　**点拨**：选项 A 中，等号左边是单项式，故 $8a^2b=2a\cdot 4ab$ 不是因式分解；选项 B 中，等号右边展开为 $-ab^3-2ab^2\neq$左边，不是因式分解；选项 C 中，等号右边的$\frac{1}{x}$不是整式，不是因式分解. 选 D.

2. D

3. D　**点拨**：由多项式 $2x^2+bx+c$ 因式分解后为 $2(x-3)(x+1)$，得 $2x^2+bx+c=2(x-3)(x+1)=2x^2-4x-6$. 所以 $b=-4$，$c=-6$.

4. $2x^2+5x-3$

5. -2　**点拨**：根据题意得$(x+5)(x-3)=x^2+2x-15=x^2-kx-15$，所以 $-k=2$，解得 $k=-2$.

6. 解：(1)$(2m+3n)(m-5n)=2m^2-15n^2+3mn-10mn=2m^2-7mn-15n^2\neq 2m^2+7mn-15n^2$，所以不正确.

(2)$(a+1)(b-1)=ab-a+b-1$，所以正确.

(3)$(a-2)(a^2+3)=a^3-2a^2+3a-6$，所以正确.

(4)$(x+y)(x-y)=x^2+xy-xy-y^2=x^2-y^2\neq x^2+y^2+2xy$，所以不正确.

7. 解：设 $6x^2-11x+m$ 因式分解后，另一个因式是 $ax+b$.

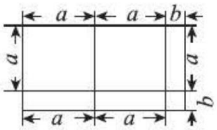
根据题意，得$(2x-3)(ax+b)=6x^2-11x+m$，

即 $2ax^2+(2b-3a)x-3b=6x^2-11x+m$，

所以$\begin{cases}2a=6,\\2b-3a=-11,\\-3b=m.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=-1,\\m=3.\end{cases}$

即 m 的值是 3.

8. 解：拼成的大长方形如图所示.



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

这个大长方形的面积可以表示为$2a^2+3ab+b^2$,也可以表示为$(a+b)(2a+b)$.

故可将多项式$2a^2+3ab+b^2$分解因式为$(a+b)\cdot(2a+b)$.

2 提公因式法

【两年模拟兵法】

1. D **2.** B

3. C **点拨:** $(-8)^{2\,020}+(-8)^{2\,019}=(-8)^{2\,019}\times(-8+1)=7\times8^{2\,019}$,所以原式能被7整除.

4. $(a-b)(a-b+1)$ **点拨:** 原式$=(a-b)^2+(a-b)=(a-b)(a-b)+(a-b)=(a-b)(a-b+1)$.

5. $3x^n$;x^n-2

6. **解:** (1) $-2x^2+18x^2y-4xy^2$

$=-2x(x-9xy+2y^2)$;

(2) $x^2-2x+(x-2)$

$=x(x-2)+(x-2)$

$=(x+1)(x-2)$;

(3) $10a(x-y)^2+5ax(y-x)$

$=10a(x-y)^2-5ax(x-y)$

$=5a(x-y)[2(x-y)-x]$

$=5a(x-y)(x-2y)$.

7. **解:** $7a(b+2)+3b(b+2)=(b+2)(7a+3b)$.

当$a=2,b=-1$时,原式$=(-1+2)\times(7\times2-3\times1)=11$.

8. **解:** $x(x-y)-y(y-x)=(x-y)(x+y)$.

把$x-y=3,x+y=7$代入,得原式$=3\times7=21$.

9. **解:** (1) $\dfrac{2^{2\,020}}{2^{2\,020}-2^{2\,021}}=\dfrac{2^{2\,020}}{2^{2\,020}\times(1-2)}=\dfrac{2^{2\,020}}{-2^{2\,020}}=-1$;

(2) $2\,020\times99+2\,021-(-1)^{2\,020}=2\,020\times99+2\,021-1=2\,020\times99+2\,020=2\,020\times(99+1)=2\,020\times100=202\,000$.

10. **解:** a^2b+ab^2-a-b

$=(a^2b-a)+(ab^2-b)$

$=a(ab-1)+b(ab-1)$

$=(ab-1)(a+b)$.

3 公式法

【两年模拟兵法】

1. D

2. A **点拨:** 选项A中,$x^2+6xy+9y^2=(x+3y)^2$,故此选项正确;

选项B中,$2x^2-4xy+9y^2$无法因式分解,故此选项错误;

选项C中,$2x^2-8y^2=2(x+2y)(x-2y)$,故此选项错误;

选项D中,$x(x-y)+y(y-x)=(x-y)^2$,故此选项错误.

3. A **点拨:** $\because mx^2-m=m(x^2-1)=m(x+1)(x-1)$,$x^2-2x+1=(x-1)^2$,$\therefore$它们的公因式为$x-1$.

4. D **5.** C **6.** $m(m+n)(m-n)$

7. 10或-10 **点拨:** 设$x^2+kx+25=(x+m)^2$,则$m^2=25$,故$m=\pm5$.

所以$k=2m=\pm10$.

8. $x(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ **9.** 3

10. $(a+b)^2$ **11.** $(x-2)(x+2)$

12. **解:** (1) 原式$=(11a)^2-b^2=(11a+b)(11a-b)$;

(2) 原式$=[(a+3)+(a+b)][(a+3)-(a+b)]=(2a+b+3)(3-b)$;

(3) 原式$=(3x)^2-2\cdot3x\cdot4+4^2=(3x-4)^2$;

(4) 原式$=[(x-1)-3]^2=(x-4)^2$.

13. **解:** $\triangle ABC$是等腰三角形.

$\because a^4-b^2c^2=b^4-a^2c^2$,

$\therefore a^4-b^4+a^2c^2-b^2c^2=0$,

$\therefore(a^2+b^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)c^2=0$,

$\therefore(a^2-b^2)(a^2+b^2+c^2)=0$,

$\therefore(a+b)(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$.

$\because a,b,c$是$\triangle ABC$的三边长,

$\therefore a^2+b^2+c^2>0,a+b>0$,

$\therefore a-b=0$,即$a=b$.

$\therefore\triangle ABC$是等腰三角形.

点拨: 先分组分解因式后,再提取公因式分解因式,将等式的一边化为乘积形式,另一边化为0,根据a,b,c为$\triangle ABC$的三边长得到$a=b$,从而利用两边相等的关系来确定三角形的形状.

14. **解:** (1) $a^2-6a-16=a^2-6a+9-9-16=(a-3)^2-25=(a-3+5)(a-3-5)=(a+2)(a-8)$.

(2) $a^2+4a+5=a^2+4a+4-4+5=(a+2)^2+1$.

$\because(a+2)^2$为非负数.

$\therefore$当$a=-2$时,二次三项式a^2+4a+5取得最小值.

15. **解:** $\because bc=a^2+3a-5$,

$\therefore 2bc=2a^2+6a-10$,①

又$b^2+c^2=2a^2+8a-14$,②

②$-$①,得$b^2-2bc+c^2=2a^2+8a-14-(2a^2+6a-10)=2a^2+8a-14-2a^2-6a+10=2a-4$,即$(b-c)^2=2a-4$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由题意知$(b-c)^2>0$,

$\therefore 2a-4>0$,解得$a>2$.

点拨:本题运用整体思想求解. 由于条件等式中的未知数较多,通过变形利用完全平方公式分解因式,结合非负数的性质转化为不等式求解是解题的关键.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)$x^3-16x=x(x^2-16)=x(x+4)(x-4)$;

(2)$(x-1)^2-4=(x-1+2)(x-1-2)=(x+1)(x-3)$;

(3)$16(a+b)^2-9(a-b)^2=[4(a+b)+3(a-b)][4(a+b)-3(a-b)]=(7a+b)(a+7b)$;

(4)$(a+b)^2+6(a+b)+9=(a+b+3)^2$;

(5)$b^3-6b^2+9b=b(b^2-6b+9)=b(b-3)^2$;

(6)$a^4-2a^2+1=(a^2-1)^2=(a+1)^2(a-1)^2$.

2. 解:(1)原式$=539\times(539-439)=539\times100=53\ 900$;

(2)原式$=-2^{2\ 021}+2^{2\ 020}+2^{2\ 019}=2^{2\ 019}\times(-2^2+2+1)=-2^{2\ 019}$.

3. 解:$9x^2-4y^2=(3x+2y)(3x-2y)=4\times5=20$.

4. 解:$x^3y+2x^2y^2+xy^3=xy(x^2+2xy+y^2)=xy(x+y)^2=2\times4^2=32$.

5. 解:(1)$\because 2a+2b=16$,$\therefore a+b=8$.

又$\because a^2+b^2=34$,$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=64$.

$\therefore ab=15$.

$\therefore S_{长方形}=ab=15$.

(2)$ab^3+2a^2b^2+a^3b=ab(b^2+2ab+a^2)=ab(a+b)^2=15\times64=960$.

6. 证明:$\because (n+5)^2-(n-1)^2=(n+5+n-1)(n+5-n+1)=6(2n+4)=12(n+2)$,且$n$为正整数,

$\therefore$不论n取何正整数,$(n+5)^2-(n-1)^2$一定是12的倍数.

7. 证明:(1)$\because b^2-c^2+2ab-2ac=0$,

$\therefore b^2+2ab+a^2=c^2+2ac+a^2$,

即$(a+b)^2=(a+c)^2$.

$\therefore b+a=c+a$. $\therefore b=c$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

(2)$a^2+c^2-b^2-2ac=(a-c)^2-b^2=(a-c+b)\cdot(a-c-b)$.

$\because a+b-c>0$,$a-c-b<0$,

$\therefore a^2+c^2-b^2-2ac<0$.

【第四章测试卷】

一、**1**. B **2**. A **3**. D **4**. B **5**. A **6**. D **7**. B **8**. B

二、**9**. $a(3a+b)(3a-b)$ **10**. $ab^2(b-2)^2$

11. -1或7 **12**. $4ab$

三、**13. 解**:(1)$x(x-y)-y(y-x)=(x-y)(x+y)$;

(2)$49(x-y)^2-16(x+y)^2=[7(x-y)+4(x+y)][7(x-y)-4(x+y)]=(11x-3y)(3x-11y)$;

(3)$(a+b)^2+4(a+b)+4=(a+b+2)^2$;

(4)$a^2(x-y)+b^2(y-x)=a^2(x-y)-b^2(x-y)=(x-y)(a^2-b^2)=(x-y)(a+b)(a-b)$.

14. 解:(1)原式$=2\ 020\times(2\ 020-20)=2\ 020\times2\ 000=4\ 040\ 000$;

(2)原式$=2\ 020\times(1+2\ 020-2\ 019)=2\ 020\times2=4\ 040$.

15. 解:原式$=(a^2+b^2-2ab+4ab)(a^2+b^2+2ab-4ab)=(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)$

$=(a+b)^2(a-b)^2$

$=[(a+b)(a-b)]^2$

$=(a^2-b^2)^2=20^2=400$.

16. 解:(1)$\because x+7$是多项式$mx^2+19x-14$的一个因式,

$\therefore mx^2+19x-14=(mx-2)(x+7)=mx^2-2x+7mx-14$.

即$7m-2=19$,$\therefore m=3$.

(2)$\because 2x+1$是多项式$2x^2-x+m$的一个因式,

$\therefore 2x^2-x+m=(2x+1)(x+m)=2x^2+2mx+x+m$.

即$2m+1=-1$,$\therefore m=-1$.

(3)$\because x-3$是多项式x^2-px-6的一个因式,

$\therefore x^2-px-6=(x-3)(x+2)=x^2+2x-3x-6=x^2-x-6$,$\therefore p=1$.

17. 解:$\triangle ABC$是等边三角形.

$\because a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$,

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$.

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

$\therefore a=b=c$.

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

18. 解:(1)2;4

(2)$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$,则原方程可化为$(x-4)(x+1)=0$,所以$x-4=0$或$x+1=0$,解得$x=4$或$x=-1$.

第五章 分式与分式方程

1 认识分式

【两年模拟兵法】

1. D **2**. A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. D　**点拨:** 由题意可得$\frac{3x}{3x+3y}=\frac{3x}{3(x+y)}=\frac{x}{x+y}$,因此分式的值不改变,应选 D. 解答本题的关键是根据题意列出满足条件的分式,再利用分式的基本性质化简,将化简结果与原分式进行对比来确定正确选项.

4. D

5. C　**点拨:** ①中分子、分母同时约去 $x-y$,正确;②中分式的分子、分母同时除以 -1,正确;③中 $b-a$ 的正负不确定,当 $b-a>0$ 时,结果为 -1,当 $b-a<0$ 时,结果为 1,错误;④正确.

6. C　**7.** $m<0$

8. **解:** (1)由题意可得$|x|-1=0$,

$\therefore x=\pm1$.

把 $x=1$ 代入 x^2+2x-3,得 $1+2-3=0$,不合题意,舍去.

把 $x=-1$ 代入 x^2+2x-3,得$(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$,$\therefore$ 当 $x=-1$ 时,$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$的值为零.

(2)由题意得 $x-2=0$ 或 $x-1=0$,

$\therefore x=2$ 或 $x=1$.

$\because |x|-1\neq0$,$\therefore x\neq\pm1$.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时,$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$的值为零.

9. **解:** (1)$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$;

(2)$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$

$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}$

$=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

10. **解:** (1)$\because$ $\frac{-x^2}{1-5x}$的值为负,

$\therefore\begin{cases}-x^2<0,\\1-5x>0,\end{cases}$

$\therefore x<\frac{1}{5}$且 $x\neq0$.

(2)当$\begin{cases}x+1>0,\\2x+4>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1<0,\\2x+4<0\end{cases}$时,分式$\frac{x+1}{2x+4}$的值为正.

解这两个不等式组,得 $x>-1$ 或 $x<-2$.

$\therefore$ 当 $x>-1$ 或 $x<-2$ 时,原分式的值为正.

点拨: (2)题中根据同号相除得正的法则易知,当分式的分子、分母的值同时为正或同时为负时,分式的值都为正,因此要考虑两种情况.

11. **解:** (1)由题意得$\begin{cases}x-2>0,\\x+1<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-2<0,\\x+1>0.\end{cases}$

第一个不等式组无解,第二个的解集为 $-1<x<2$,则原分式不等式的解集为 $-1<x<2$.

(2)$\frac{x-3}{x-1}>0$. (答案不唯一)

12. **解:** 由$\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$,知 $x\neq0$,

$\therefore\frac{x^2-3x+1}{x}=5$,$\therefore x+\frac{1}{x}=8$,

$\therefore\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1$

$=(x+\frac{1}{x})^2-1=63$,

$\therefore\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{63}$.

2　分式的乘除法

【两年模拟兵法】

1. A　**2.** A　**3.** C

4. $x\neq-2$,且 $x\neq-3$,且 $x\neq-4$

点拨: $\because\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}=\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+4}{x+3}$,$\therefore$ 要使原式子有意义,必须 $x+2\neq0$,且 $x+3\neq0$,且 $x+4\neq0$,因此,$x\neq-2$,且 $x\neq-3$,且 $x\neq-4$. 原因是分式的分母不能为 0,同时,含有除法运算时,除式不能为 0.

5. $\frac{y-x}{x(x+y)}$

6. **解:** (1)原式 $=\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{5xm}{6yn}\cdot\frac{3n}{5xym}=\frac{1}{2y^2}$;

(2)原式 $=\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a-1}{(a+2)^2}\cdot(a+2)=\frac{1}{(a+1)(a+2)}\cdot(a+2)=\frac{1}{a+1}$;

(3)原式 $=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{(x+2)^2}$.

7. **解:** (1)原式 $=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b^3}{a^6}\right)\div\left(-\frac{1}{a^3b^3}\right)$

$=\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{a^6}{b^3}\right)\cdot(-a^3b^3)$

$=\frac{a^5}{2b}\cdot(-a^3b^3)=-\frac{a^8b^2}{2}$;

(2)原式 $=\frac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}\cdot\frac{(n-m)^2}{m^2n^2}\cdot\frac{m}{m+n}=\frac{m-n}{mn^2}$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)原式$=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\frac{x}{y^2(x-y)}$

$=\frac{x}{xy^2-y^3}$.

8. 解:由题意可知甲工程队修900 m所用时间为$\frac{900}{a^2-4}$天,乙工程队修600 m所用时间为$\frac{600}{(a-2)^2}$天.

$\frac{900}{a^2-4}\div\frac{600}{(a-2)^2}=\frac{900}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a-2)^2}{600}=\frac{3(a-2)}{2(a+2)}=\frac{3a-6}{2a+4}$.

答:甲工程队修900 m所用时间是乙工程队修600 m所用时间的$\frac{3a-6}{2a+4}$.

9. 解:$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{2x-2}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}$,因此,不管$x$取何值,这个式子的值都是$\frac{1}{2}$.

10. 解:由$a^2+b^2-4a+6b+13=0$,

得$(a-2)^2+(b+3)^2=0$. 根据非负数的性质,

可得$a=2,b=-3$.

原式$=\frac{(a-3)^2}{-(b+2)(b-2)}\cdot\frac{b+2}{-(a-3)}\cdot\frac{a^2}{3(a-3)}=\frac{a^2}{3(b-2)}=\frac{a^2}{3b-6}$.

当$a=2,b=-3$时,原式$=\frac{2^2}{3\times(-3)-6}=-\frac{4}{15}$.

11. 解:原式$=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x+1}{x+2}$.

$\begin{cases}x+2<1,①\\2(x-1)>-6.②\end{cases}$

解不等式①,得$x<-1$;

解不等式②,得$x>-2$,

∴原不等式组的解集是$-2<x<-1$.

∴$x+1<0,x+2>0$.

∴$\frac{x^2-1}{x^2+2x}\div\frac{x-1}{x}=\frac{x+1}{x+2}<0$,

即该式的符号为负.

12. 解:(1)∵$-\frac{x^5}{y^2}\div\frac{x^3}{y}=\frac{x^7}{y^3}\div\left(-\frac{x^5}{y^2}\right)=-\frac{x^9}{y^4}\div\frac{x^7}{y^3}=\cdots=-\frac{x^2}{y}$,

∴从第2个分式开始,用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式的结果恒等于$-\frac{x^2}{y}$.

(2)由已知的一列分式可知,分式的分母的指数依次增加1,分子的指数是分母指数的2倍加1,并且分母的指数是偶数的分式带有“-”号,所以第7个分式应该是$\frac{x^{15}}{y^7}$.

3 分式的加减法

【两年模拟兵法】

1. A **2.** B **3.** A **4.** B

5. 5 **点拨:**先将已知等式两边同时乘$m+n$,再通过拆分得到结果. ∵$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$,两边同时乘$m+n$,得$\frac{m+n}{m}+\frac{m+n}{n}=7$,∴$1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+1=7$,因此$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=5$.

对于此类问题,往往需要对已知等式进行变形,当待求式含有两个字母时,还要注意利用整体思想去求解.

6. 3 **点拨:**∵$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$,

∴$\frac{1+b-(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$,

∴$\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$,

∴$(1+a)(1+b)=(b-a)^2$,

因此$a^2+b^2=1+a+b+3ab$.

∴$\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}$

$=\frac{(1+b)^2+(1+a)^2}{(1+a)(1+b)}$

$=\frac{1+2b+b^2+1+2a+a^2}{1+a+b+ab}$

$=\frac{3+3a+3b+3ab}{1+a+b+ab}=3$.

7. 解:圆圆的解答不正确. 正确解答如下.

原式$=\frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^2-4}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{4x-(2x+4)-(x^2-4)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{-x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=-\frac{x}{x+2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:原式 $=\frac{m^2+4m+4}{m}\cdot\frac{m^2}{m+2}$

$=\frac{(m+2)^2}{m}\cdot\frac{m^2}{m+2}$

$=m^2+2m.$

把 $m=\sqrt{2}-2$ 代入上式,原式 $=m^2+2m=m(m+2)=(\sqrt{2}-2)\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}.$

9. 解:$\left(\frac{2x-3}{x-2}-1\right)\div\frac{x^2-2x+1}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{(x-1)^2}$

$=\frac{1}{x-1}$,

当 $x=0$ 时,原式 $=-1$.(x 不能取 1 和 2)

10. 解:原式 $=\left[\frac{x^3+x^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{x^3}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{x^2}{x+1}.$

解不等式组 $\begin{cases}x-3(x-2)\leqslant 4,\\ \frac{2x-3}{3}<\frac{5-x}{2},\end{cases}$ 得 $1\leqslant x<3$.

则不等式组的整数解为 1,2.

又∵ $x\neq\pm1$,且 $x\neq0$,∴ $x=2$.

∴ 原式 $=\frac{4}{3}$.

4 分式方程

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C **4.** A

5. D **点拨:**由 $\frac{m}{x-2}-\frac{2x}{2-x}=\frac{m}{x-2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{2x+m}{x-2}=1$,可得 $x=-2-m$.∵ 原分式方程出现增根时 $x=2$,∴ $-2-m=2$,∴ $m=-4$.

6. B **7.** -8

8. $\frac{5}{6}$ **点拨:**根据新定义把 $2\oplus(2x-1)$ 用含 x 的式子表示出来,列出方程后求解.

∵ $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,

∴ $2\oplus(2x-1)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}$,

故有 $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}=1$,

∴ $\frac{1}{2x-1}=\frac{3}{2}$,解之得 $x=\frac{5}{6}$.

经检验,$x=\frac{5}{6}$ 是原方程的根.

9. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$ **点拨:**观察已知的分式方程可知,分式方程中的左右两边都有两个分式,且分子都是 1;左边两个分式的分母依次小 1,右边第一个分式的分母比左边第二个分式的分母小 2,右边第二个分式的分母比右边第一个分式的分母小 1;左边第一个分式中的分母与对应方程的解的和为 $x+2$,从而可得解为 $x=6$ 的分式方程的左边第一个分式的分母应为 $x-4$,

因此对应的方程应为 $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$.

10. 解:(1)方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$,

得 $2(x-1)=x+1$.

解这个一元一次方程,得 $x=3$.

经检验,$x=3$ 是原分式方程的根,

所以原分式方程的根是 $x=3$.

(2)去分母,得 $(x-2)^2-16=(x+2)^2$.

去括号,得 $x^2-4x+4-16=x^2+4x+4$,

解得 $x=-2$.

经检验,$x=-2$ 是增根,

所以原分式方程无解.

11. 解:设科普类图书平均每本的价格为 x 元,则文学类图书平均每本的价格为 $(x-5)$ 元.

由题意得 $\frac{12\,000}{x}=\frac{9\,000}{x-5}$,解得 $x=20$.

经检验,$x=20$ 是所列方程的解,且符合题意.

则 $x-5=15$.

答:学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格分别是 20 元、15 元.

12. 解:(1)甲队每天修路的长度;甲队修路 400 m 所用时间或乙队修路 600 m 所用时间

(2)冰冰用的等量关系是:甲队修路 400 m 所用时间 = 乙队修路 600 m 所用时间.

庆庆用的等量关系是:乙队每天修路的长度 - 甲队每天修路的长度 = 20 m.(选择一个即可)

(3)选冰冰的方程:$\frac{400}{x}=\frac{600}{x+20}$.

去分母,得 $400x+8\,000=600x$,

解得 $x=40$.

检验:当 $x=40$ 时,x 与 $x+20$ 均不为零.

∴ $x=40$ 是原方程的解,且符合题意.

答:甲队每天修路的长度为 40 m.

选庆庆的方程:$\frac{600}{y}-\frac{400}{y}=20$.

去分母,得 $600-400=20y$,

解得 $y=10$.

检验:当 $y=10$ 时,分母 y 不为 0.

∴ $y=10$ 是原方程的解,且符合题意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{400}{y}=40.$

答:甲队每天修路的长度为 40 m.

13. 解:由$\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$,

得$x(x-2)-(x-1)(x+1)=a$,

$\therefore x=\frac{1-a}{2}$.

$\because$ 原方程有增根时$x=-1$或$x=2$,

$\therefore$ 当$x=-1$时,$a=3$;

当$x=2$时,$a=-3$.

$\therefore$ 当$a\neq\pm3$时,$x=\frac{1-a}{2}$才是原方程的解.

又$\because x>0$,

$\therefore \frac{1-a}{2}>0$,解得$a<1$.

$\therefore a$ 的取值范围为$a<1$且$a\neq-3$.

点拨:在求分式方程中字母参数的取值范围时,通常是把分式方程去分母后求出整式方程的解,再列出不等式(组)求出字母参数的取值范围,同时要注意排除产生增根的字母参数的取值.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:显然$xy\neq0$. 将待求分式的分子、分母同时除以xy,得$\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}=\frac{-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+5}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-3}=\frac{-3\times5+5}{5-3}$

$=-5.$

2. 解:原式$=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}.$

$\because a+b+c=0$,

$\therefore b+c=-a,a+c=-b,a+b=-c.$

$\therefore$ 原式$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3.$

3. 解:令$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq0)$,则$a=2k,b=3k$,

$c=4k$,代入原式,得原式$=\frac{3\times2k-2\times3k+5\times4k}{2k+3k+4k}=$

$\frac{20k}{9k}=\frac{20}{9}.$

4. 解:把z看作已知数,解方程组$\begin{cases}3x-4y-z=0,\\2x+y-8z=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x=3z,\\y=2z.\end{cases}$

又$\because z\neq0$,

$\therefore$ 原式$=\frac{(3z)^2+(2z)^2+z^2}{3z\cdot2z+2z\cdot z+2\times3z\cdot z}=\frac{14z^2}{14z^2}=1.$

5. 解:原式$=\frac{6(x+1)+4}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{3x+2}=$

$\frac{6x+10}{(x+1)(3x+2)}.$

当$x=2$时,原式$=\frac{12+10}{24}=\frac{11}{12}.$

6. 解:$\because |x-2|+(2x-y-3)^2=0$,

$\therefore \begin{cases}x-2=0,\\2x-y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

$\therefore$ 原式$=\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{2x-y}=$

$\frac{2x}{2x-y}.$

当$x=2,y=1$时,原式$=\frac{4}{3}.$

7. 解:原式$=\frac{x-1}{x+2}\div\frac{x-1}{x(x+2)}-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=x-\frac{x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}.$

$\because x^2-x-1=0,\therefore x^2=x+1.$

$\therefore$ 原式$=1.$

8. 解:原式$=\frac{1}{x-1}\div\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}.$

当$x=\sqrt{2}-1$时,原式$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

9. 解:方程两边同乘$3(x+1)$,得$3x=2x+3(x+1)$,解得$x=-\frac{3}{2}$.

检验:当$x=-\frac{3}{2}$时,$3(x+1)\neq0$,

$\therefore x=-\frac{3}{2}$是原方程的解.

10. 解:原方程可化为$\frac{x+2}{x-2}-\frac{16}{x^2-4}=1.$

方程两边都乘$(x+2)(x-2)$,

得$(x+2)^2-16=(x+2)(x-2)$.

整理,得$4x=8$,解得$x=2$.

检验:当$x=2$时,$(x+2)(x-2)=0$,

$\therefore x=2$是原方程的增根.

$\therefore$ 原方程无解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解:方程两边分别通分后相减得

$$\frac{(x-5)-(x-4)}{(x-4)(x-5)}=\frac{(x-8)-(x-7)}{(x-7)(x-8)},$$

即$\frac{-1}{x^2-9x+20}=\frac{-1}{x^2-15x+56}$,

$\therefore x^2-9x+20=x^2-15x+56$,

解得 $x=6$.

经检验,$x=6$ 是原分式方程的解.

12. 解:原方程去分母并整理得$(m-2)x=5+m$.

假设产生增根 $x=1$,则有 $m-2=m+5$,方程无解,

$\therefore$ 不存在 m 的值,使原方程产生增根 $x=1$;

假设产生增根 $x=-1$,则有 $2-m=5+m$,

解得 $m=-\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 当 $m=-\frac{3}{2}$时,关于 x 的分式方程$\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$会产生增根.

13. 解:$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$,

$(x-1)(x+1)-(x+2+a)=(x-1)(x+2)$,

$x^2-1-x-2-a=x^2+x-2$,

解得 $x=-\frac{a+1}{2}$.

$\because$ 方程的解小于 3,且 $x=-\frac{a+1}{2}$不能为增根,

$\therefore -\frac{a+1}{2}<3$,且$-\frac{a+1}{2}\neq 1$,且$-\frac{a+1}{2}\neq -2$.

解得 $a>-7$,且 $a\neq\pm 3$.

14. 解:(1)设乙每天加工 x 个这种零件,则甲每天加工 $1.5x$ 个这种零件.

根据题意,得$\frac{600}{x}-\frac{600}{1.5x}=5$,

解这个方程,得 $x=40$.

经检验,$x=40$ 是原分式方程的根,且符合题意.

$1.5x=1.5\times 40=60$.

答:甲每天加工 60 个这种零件,乙每天加工 40 个这种零件.

(2)设甲应加工 a 天.

根据题意,得 $150a+\frac{3\,000-60a}{40}\times 120\leqslant 7\,800$.

解这个不等式,得 $a\geqslant 40$.

答:甲至少应加工 40 天.

15. 解:(1)设购买一个 A 品牌足球需 x 元,则购买一个 B 品牌足球需$(x+30)$元.

根据题意,得$\frac{2\,500}{x}=\frac{2\,000}{x+30}\times 2$,解得 $x=50$.

经检验,$x=50$ 是原方程的解,且符合题意.

$\therefore x+30=80$.

答:购买一个 A 品牌足球需 50 元,购买一个 B 品牌足球需 80 元.

(2)设此次购买 a 个 B 品牌足球,则购买 A 品牌足球$(50-a)$个.

根据题意,得 $50\times(1+8\%)(50-a)+80\times 0.9a\leqslant 3\,260$,解得 $a\leqslant 31\frac{1}{9}$.

$\because a$ 取正整数,

$\therefore a$ 的最大值为 31.

答:华昌中学此次最多可购买 31 个 B 品牌足球.

【第五章测试卷】

一、1. D **2.** D **3.** D **4.** A **5.** D **6.** D **7.** B **8.** C

二、9. -1 **10.** 1 **11.** $\frac{3}{2}$ **12.** 10

三、13. 解:原式$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{a-2}$

$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-1)}{a+1}$

$=\frac{2}{a+1}$.

14. 解:原式$=\frac{x-1-1}{x-1}\div\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x+1}{x-2}$.

当 $x=3$ 时,原式$=\frac{3+1}{3-2}=4$.

15. 解:(1)方程两边都乘$(x+2)(x-2)$,

得 $3x(x-2)+2(x+2)=3(x+2)(x-2)$.

化简,得 $-4x=-16$,解得 $x=4$.

经检验,$x=4$ 是原方程的解.

(2)方程两边都乘$(x+1)(x-1)$,

得 $4-(x+1)(x+2)=-(x+1)(x-1)$,

解得 $x=\frac{1}{3}$.

经检验,$x=\frac{1}{3}$是原方程的解.

16. 解:原式$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\div\frac{x-3-1}{x-3}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-4)}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

不等式 $2x-3<7$ 的解集为 $x<5$，其正整数解为 1，2，3，4.

∵ x 不能取 3 和 4，

∴ 当 $x=1$ 时，

原式 $=\frac{1}{4}$（或当 $x=2$ 时，原式 $=0$）.

17. 解：(1) 设乙队单独做需要 m 天才能完成.

由题意得 $\frac{30}{m}+\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{m}\right)\times 20=1$，

解得 $m=100$.

经检验，$m=100$ 是原方程的解，且符合题意.

答：乙队单独做需要 100 天才能完成.

(2) 由题意得 $\frac{x}{40}+\frac{y}{100}=1$，$x<15$，$y<70$，

且 x，y 为正整数，

则 $y=100-\frac{5}{2}x<70$，

解得 $x>12$.

∴ $x=13$ 或 14.

当 $x=13$ 时，$y=100-\frac{5}{2}x$ 不是整数，应舍去；

当 $x=14$ 时，$y=100-\frac{5}{2}x=65$，符合条件.

∴ 甲队做了 14 天，乙队做了 65 天.

答：甲、乙两队实际分别做了 14 天和 65 天.

18. 解：(1) 设第一批杨梅每件进价为 x 元.

由题意得 $\frac{1\ 200}{x}\times 2=\frac{2\ 500}{x+5}$，

解得 $x=120$.

经检验，$x=120$ 是原分式方程的解，且符合题意.

答：第一批杨梅每件进价为 120 元.

(2) 设剩余的杨梅每件售价打 y 折.

由题意得 $\frac{2\ 500}{125}\times 150\times 80\%+\frac{2\ 500}{125}\times 150\times(1-80\%)\times 0.1y-2\ 500\geqslant 320$，

解得 $y\geqslant 7$.

答：剩余的杨梅每件售价最多打 7 折.

第六章 平行四边形

1 平行四边形的性质

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** D

4. D **点拨：**∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AH/\!/BG$，$AD=BC$. ∴ $\angle H=\angle HBG$.

∵ $\angle HBG=\angle HBA$，∴ $\angle H=\angle HBA$.

∴ $AH=AB$. 同理可证 $BG=AB$，∴ $AH=BG$.

∵ $AD=BC$，∴ $DH=CG$，故 C 正确.

∵ $AH=AB$，$\angle OAH=\angle OAB$，

∴ $OH=OB$，故 A 正确.

∵ $DF/\!/AB$，

∴ $\angle DFH=\angle ABH$.

∵ $\angle H=\angle ABH$，

∴ $\angle H=\angle DFH$.

∴ $DF=DH$.

同理可证 $CE=GC$.

∵ $DH=CG$，

∴ $DF=CE$，故 B 正确.

无法证明 $AE=AB$，故选 D.

5. 4 **点拨：**∵ $EF/\!/BC$，$GH/\!/AB$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ 四边形 $HPFD$，$BEPG$，$AEPH$，$CFPG$ 为平行四边形.

∴ $S_{\triangle PEB}=S_{\triangle BGP}$，$S_{\triangle PHD}=S_{\triangle DFP}$，$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CDB}$.

∴ $S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PEB}-S_{\triangle PHD}=S_{\triangle CDB}-S_{\triangle BGP}-S_{\triangle DFP}$，

即 $S_{四边形AEPH}=S_{四边形PFCG}$.

∵ $CG=2BG$，$S_{\triangle BPG}=1$，

∴ $S_{四边形AEPH}=S_{四边形PFCG}=4\times 1=4$.

6. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB/\!/CD$，$AB=CD$.

∵ $BE=DF$，

∴ $AB+BE=CD+DF$，即 $AE=CF$.

∵ $AB/\!/CD$，

∴ $AE/\!/CF$.

∴ $\angle EAO=\angle FCO$，$\angle E=\angle F$.

∴ $\triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA).

∴ $OE=OF$.

7. 解：添加的条件是 $DE=BF$.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AB/\!/CD$.

∴ $\angle EBA=\angle FDC$.

∵ $DE=BF$，

∴ $BE=DF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle EBA=\angle FDC,\\ BE=DF,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS).

点拨：本题考查了平行四边形的性质和全等三角形的判定，通过做此题培养了学生分析问题和解决问题的能力，也培养了学生的发散思维. 题目比较好，是一道开放性的题目，答案不唯一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. (1)**证明:**∵ 在$\square ABCD$中,$AB \parallel CD$,$\angle A = 30°$,

∴ $\angle ADC = 180° - \angle A = 150°$.

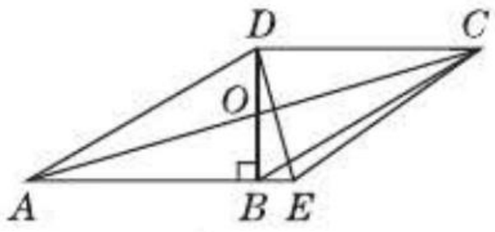
∵ DE平分$\angle ADC$,

∴ $\angle ADE = \frac{1}{2}\angle ADC = 75°$.

∴ $\angle AED = 180° - \angle A - \angle ADE = 75°$.

∴ $\angle ADE = \angle AED$. ∴ $AD = AE$.

(2)**解:**如图所示.



(第8题)

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

∴ $OB = OD = \frac{1}{2}BD$, $OA = OC = \frac{1}{2}AC$.

∵ $\angle BAD = 30°$, $\angle ABD = 90°$,

∴ $BD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 12 = 6$. ∴ $OB = 3$.

在Rt△ABD中,由勾股定理,得$AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$.

在Rt△AOB中,由勾股定理,得$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 3^2} = 3\sqrt{13}$.

∴ $AC = 2OA = 6\sqrt{13}$.

9. **解:**$EF + GH + MN = 2a$,$EF + GH + MN$的值不随点P位置的改变而改变.

∵ △ABC是等边三角形,

∴ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

∵ $GH \parallel BC$,

∴ $\angle AGH = \angle B = 60°$, $\angle AHG = \angle C = 60°$.

∴ △AGH是等边三角形,

∴ $GH = AG = AM + MG$. ①

同理可得△BMN是等边三角形,

∴ $MN = MB = MG + GB$. ②

∵ $MN \parallel AC$, $EF \parallel AB$,

∴ 四边形$AMPE$是平行四边形, ∴ $PE = AM$.

同理可得四边形$BFPG$是平行四边形,

∴ $PF = GB$.

∴ $EF = PE + PF = AM + GB$. ③

① + ② + ③,得$EF + GH + MN = (AM + GB) + (AM + MG) + (MG + GB) = 2(AM + MG + GB) = 2AB = 2a$.

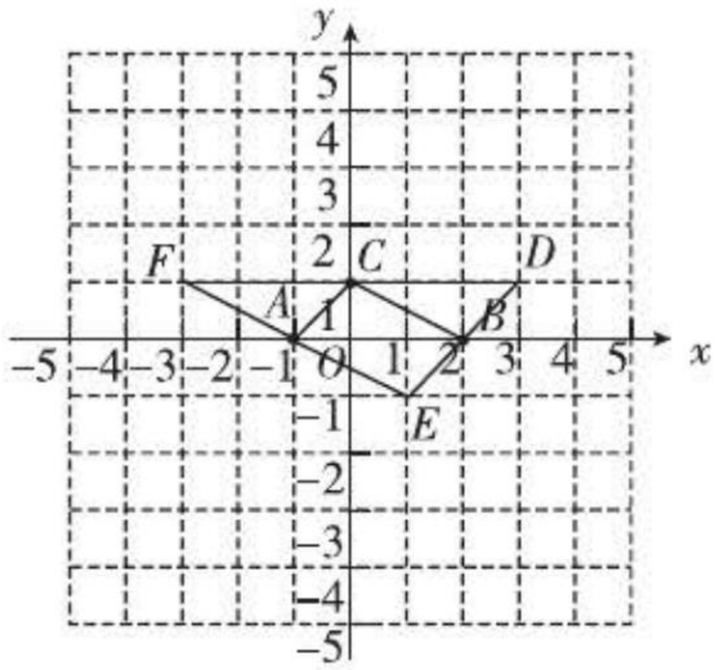
点拨:解本题的技巧——把三条线段EF,MN,GH放到平行四边形或等边三角形中;利用等量代换将线段EF,MN,GH转移到同一条边AB上.

2 平行四边形的判定

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** D

4. B **点拨:**如图所示.



(第4题)

①以AC为对角线,可以画出$\square AFCB$,点F的坐标为$(-3, 1)$;

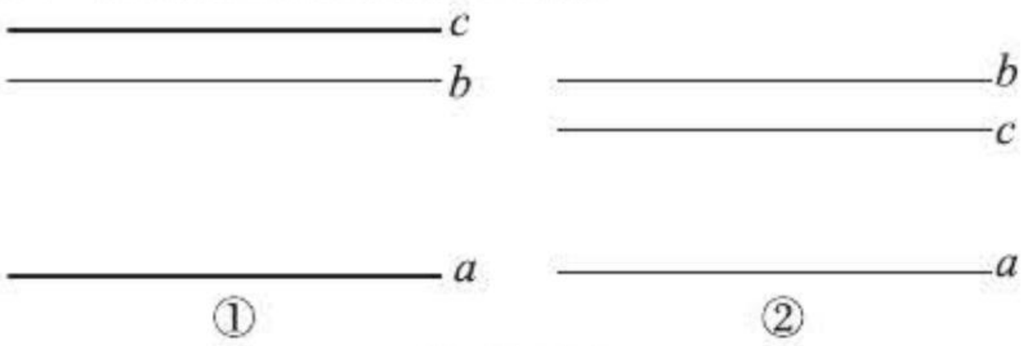
②以AB为对角线,可以画出$\square ACBE$,点E的坐标为$(1, -1)$;

③以BC为对角线,可以画出$\square ACDB$,点D的坐标为$(3, 1)$.

故选B.

5. A

6. C **点拨:**依据题意画出图形.



(第6题)

当直线a,b,c的位置如图①所示时,结合平行线间距离的知识,可得a与c的距离是$4 + 1 = 5$(cm);

当直线a,b,c的位置如图②所示时,结合平行线间距离的知识,可得a与c的距离是$4 - 1 = 3$(cm).

综上可知,a与c的距离是5 cm或3 cm.

7. (1)**证明:**∵ $\angle A = \angle F$, ∴ $DE \parallel BC$.

∵ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle DMF$,

∴ $\angle DMF = \angle 2$. ∴ $DB \parallel EC$.

∴ 四边形$BCED$为平行四边形.

(2)**解:**∵ 四边形$BCED$是平行四边形,

∴ $BC = DE = 2$.

∵ BN平分$\angle DBC$, ∴ $\angle DBN = \angle CBN$.

∵ $EC \parallel DB$, ∴ $\angle CNB = \angle DBN$.

∴ $\angle CNB = \angle CBN$.

∴ $CN = BC = DE = 2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 证明:(1)∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle DAF=\angle E$.

∵ F 是 CD 的中点,∴ $DF=CF$.

在△ADF 和△ECF 中,$\begin{cases}\angle DAF=\angle E,\\ \angle AFD=\angle EFC,\\ DF=CF,\end{cases}$

∴ △ADF≌△ECF(AAS).

(2)∵ △ADF≌△ECF,∴ $AD=EC$.

∵ $CE=BC$,∴ $AD=BC$.

又∵ $AD/\!/BC$,∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

9. (1)**证明**:∵ $\angle A=\angle ABC=90°$,∴ $AF/\!/BC$.

∴ $\angle CBE=\angle DFE$,$\angle BCE=\angle FDE$.

∵ E 是边 CD 的中点,∴ $CE=DE$.

在△BCE 和△FDE 中,

$\begin{cases}\angle CBE=\angle DFE,\\ \angle BCE=\angle FDE,\\ CE=DE,\end{cases}$

∴ △BCE≌△FDE(AAS).

∴ $BE=FE$.

又∵ $CE=DE$,∴ 四边形 $BDFC$ 为平行四边形.

(2)**解**:当△BCD 是等腰三角形时,

①若 $BD=BC$,在 Rt△ABD 中,$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$,

∴ 四边形 $BDFC$ 的面积为 $2\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}$;

②若 $BD=DC$,过 D 作 BC 的垂线,则垂足应为 BC 的中点,不可能;

③若 $BC=CD$,过 D 作 $DG\perp BC$,垂足为 G,则 $CG=2$,在 Rt△CDG 中,$DG=\sqrt{DC^2-GC^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$,

∴ 四边形 $BDFC$ 的面积为 $3\sqrt{5}$.

综上所述,当△BCD 是等腰三角形时,四边形 $BDFC$ 的面积为 $6\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.

10. 证明:(1)∵ 将▱$ABCD$ 沿过点 A 的直线 l 折叠,使点 D 落到 AB 边上的点 D' 处,

∴ $\angle DAE=\angle D'AE$,$\angle DEA=\angle D'EA$,$\angle D=\angle AD'E$.

∵ $DE/\!/AD'$,∴ $\angle DEA=\angle D'AE$.

∴ $\angle DAE=\angle D'AE=\angle DEA=\angle D'EA$.

∴ $\angle DAD'=\angle DED'$.

∴ 四边形 $DAD'E$ 是平行四边形.

∴ $DE=AD'$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\!/\!/\!/DC$.

∴ $CE\!/\!/\!/D'B$.

∴ 四边形 $BCED'$ 是平行四边形.

(2)∵ BE 平分∠ABC,∴ $\angle CBE=\angle EBA$.

∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle DAB+\angle ABC=180°$.

又∵ $\angle DAE=\angle EAB$,∴ $\angle EAB+\angle EBA=90°$.

∴ $\angle AEB=90°$.

∴ $AB^2=AE^2+BE^2$.

11. 证明:(1)∵ AD 平分∠BAC,

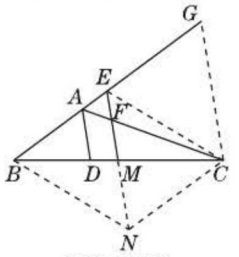
∴ $\angle BAD=\angle CAD$.

∵ $AD/\!/EM$,

∴ $\angle BAD=\angle AEF$,$\angle CAD=\angle AFE$.

∴ $\angle AEF=\angle AFE$. ∴ $AE=AF$.

(2)如图,作 $CG/\!/EM$,交 BA 的延长线于 G.



(第 11 题)

∵ $EF/\!/CG$,∴ $\angle G=\angle AEF$,$\angle ACG=\angle AFE$.

∵ $\angle AEF=\angle AFE$,∴ $\angle G=\angle ACG$.

∴ $AG=AC$.

延长 EM 至 N,使 $MN=EM$,连接 NC,BN,EC.

∵ M 为 BC 的中点,∴ $MB=MC$.

∴ 四边形 $BNCE$ 是平行四边形.

∴ $NC/\!/BE$,$NC=BE$. ∴ $NC/\!/EG$.

又∵ $EM/\!/CG$,∴ 四边形 $NCGE$ 是平行四边形.

∴ $NC=EG$. ∴ $BE=EG$.

∴ $BE=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(AB+AG)=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

3 三角形的中位线

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** B **4.** 16

5. $270°-3\alpha$ **点拨**:∵ $\angle ACD=90°$,$\angle D=\alpha$,

∴ $\angle DAC=90°-\alpha$.

∵ AC 平分∠BAD,

∴ $\angle BAC=\angle DAC=90°-\alpha$.

∵ $\angle ABC=90°$,E 是 AC 的中点,

∴ $BE=AE=EC$,∴ $\angle EBA=\angle EAB=90°-\alpha$,

∴ $\angle CEB=180°-2\alpha$.

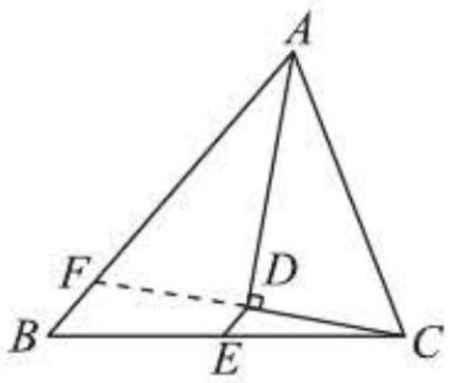
∵ E,F 分别为 AC,CD 的中点,

∴ $EF/\!/AD$,∴ $\angle CEF=\angle DAC=90°-\alpha$,

∴ $\angle BEF=\angle CEB+\angle CEF=180°-2\alpha+90°-\alpha=270°-3\alpha$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:延长 CD 交 AB 于点 F,如图所示.



(第6题)

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $CD \perp AD$,

$\therefore AF = AC = 10$, $CD = DF$.

又$\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle BFC$ 的中位线.

$\therefore DE = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}(AB - AF) = 1$.

7. 证明:因为 E, F 分别是 AB, BC 的中点,

所以 $EF /\!/ AC$,且 $EF = \frac{1}{2}AC$.

同理可得 $GH /\!/ AC$,且 $GH = \frac{1}{2}AC$.

所以 $EF /\!/ GH$,且 $EF = GH$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

8. 证明:连接 BN, CM.

$\because \triangle ABM$ 与 $\triangle CAN$ 均为等边三角形,

$\therefore AM = AB$, $AC = AN$, $\angle MAB = \angle CAN = 60°$.

$\because \angle MAC = \angle MAB + \angle BAC$,

$\angle BAN = \angle CAN + \angle BAC$,

$\therefore \angle MAC = \angle BAN$.

$\therefore \triangle MAC \cong \triangle BAN$(SAS).

$\therefore MC = BN$.

$\because$ 点 D, E 分别是 MB, BC 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}MC$,同理可得 $EF = \frac{1}{2}BN$,

$\therefore DE = EF$.

4 多边形的内角和与外角和

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** B

4. D **点拨**:本题可求出新多边形的边数为 8,而原多边形切去一个角形成的新多边形有 3 种情况:①增加一条边;②减少一条边;③边的条数不变.故原多边形的边数可能为 7 或 8 或 9.

5. B **6.** 5 **7.** 425

8. 解:四边形的内角和等于 360°,有三个内角分别为 70°, 150°, 90°,

$\therefore x = 360 - 70 - 150 - 90 = 50$.

9. 解:设这个外角的度数为 x,多边形的边数为 n,根据题意,得 $(n-2) \times 180° + x = 1350°$.

解得 $x = 1\,710° - 180° \cdot n$.

$\because 0° < x < 180°$,

$\therefore 0° < 1\,710° - 180° \cdot n < 180°$,

解得 $8.5 < n < 9.5$.

又$\because n$ 为正整数,

$\therefore n = 9$,

即该多边形的边数是 9.

10. 解:(1)甲对,乙不对.

$\because \theta = 360°$,

$\therefore (n-2) \times 180 = 360$,解得 $n = 4$.

$\because \theta = 630°$,

$\therefore (n-2) \times 180 = 630$,解得 $n = \frac{11}{2}$.

$\because n$ 为整数,

$\therefore \theta$ 不能取 630°.

(2)依题意,得 $(n-2) \times 180 + 360 = (n + x - 2) \times 180$,解得 $x = 2$.

11. 解:(1)因为 2 005 不是 180 的整数倍,

所以小明说不可能.

(2)设这个多边形的边数为 x,

由题意,得

$2\,005° - 180° < (x-2) \times 180° < 2\,005°$,

解得 $12\frac{5}{36} < x < 13\frac{5}{36}$.

$\because x$ 是正整数,$\therefore x = 13$.

$\therefore$ 小华求的是十三边形的内角和.

(3)十三边形的内角和是 $(13-2) \times 180° = 1\,980°$,错把外角当内角的那个外角的度数是 $2\,005° - 1\,980° = 25°$.

12. 解:(1)$\because \angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ 是四边形的四个内角,

$\therefore \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$,

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 360° - (\angle 5 + \angle 6)$.

$\because \angle 1 + \angle 5 = 180°$,

$\angle 2 + \angle 6 = 180°$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360° - (\angle 5 + \angle 6)$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$.

(2)四边形的任意两个外角(不同顶点)的和等于与它们不相邻的两个内角的和.

(3)由(2)知,

$\angle B + \angle C = \angle NAD + \angle MDA$.

$\because \angle B + \angle C = 240°$,

$\therefore \angle NAD + \angle MDA = 240°$.

$\because AE$, DE 分别是 $\angle NAD$, $\angle MDA$ 的平分线,

$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2}\angle MDA$, $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle NAD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ADE + \angle DAE = \frac{1}{2}(\angle MDA + \angle NAD) = \frac{1}{2} \times 240° = 120°.$

$\therefore \angle E = 180° - (\angle ADE + \angle DAE) = 180° - 120° = 60°.$

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 证明:由 $AB // DE$,得 $\angle A = \angle D$.

由 $AF = CD$,得 $AC = DF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \\ AC = DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF(\mathrm{SAS})$.

$\therefore BC = EF, \angle ACB = \angle DFE$.

$\therefore BC // EF$.

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形.

2. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CD // AB$.

由 $BM \perp AC, DN \perp AC$,得 $DN // BM$.

$\therefore$ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形,

$\therefore DM = BN$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CD = AB, CD // AB$.

$\therefore CM = AN, \angle MCE = \angle NAF$.

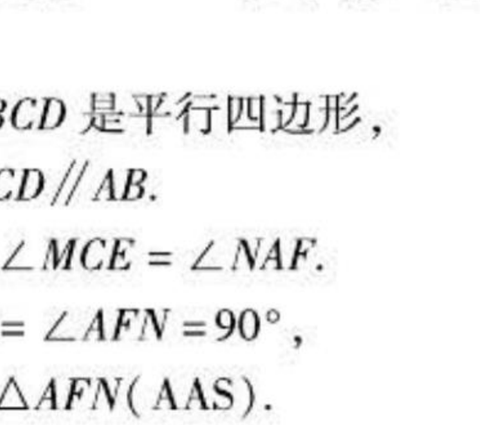
又$\because \angle CEM = \angle AFN = 90°$,

$\therefore \triangle CEM \cong \triangle AFN(\mathrm{AAS})$.

$\therefore NF = EM = 5$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFN$ 中,$AN = \sqrt{AF^2 + NF^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

3. 证明:如图,取 AD 的中点 G,连接 EG, FG.



(第 3 题)

$\because G, F$ 分别是 AD, CD 的中点,

$\therefore GF$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线.

$\therefore GF = \frac{1}{2}AC, GF // AC$.

同理可得 $GE = \frac{1}{2}BD, GE // BD$.

$\because AC = BD$,

$\therefore GF = GE$.

$\therefore \angle GFN = \angle GEM$.

$\because EG // OM, FG // ON$,

$\therefore \angle OMN = \angle GEM, \angle ONM = \angle GFN$,

$\therefore \angle OMN = \angle ONM$,

$\therefore OM = ON$.

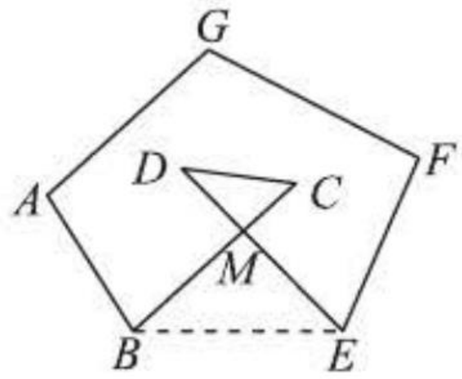
4. B　**点拨**:小华第一次回到出发地时,他走过的路线是一个外角为 45° 的正多边形,设这个正多边形的边数为 n.

由多边形的外角和都等于 360°,可得 $n \cdot 45° = 360°$,解得 $n = 8$.

所以 $n \times 10 = 8 \times 10 = 80(\mathrm{m})$.

所以他第一次回到出发地所走的路程为 80 m.

5. 解:如图,连接 BE,设 DE 与 BC 的交点为 M.



(第 5 题)

在 $\triangle CDM$ 中,$\angle C + \angle D = 180° - \angle CMD$.

在 $\triangle BEM$ 中,$\angle MBE + \angle MEB = 180° - \angle BME$.

$\because \angle CMD = \angle BME$,

$\therefore \angle C + \angle D = \angle MBE + \angle MEB$,

$\therefore \angle A + \angle ABC + \angle C + \angle D + \angle DEF + \angle F + \angle G$

$= \angle A + \angle ABC + \angle MBE + \angle MEB + \angle DEF + \angle F + \angle G$

$= \angle A + \angle ABE + \angle BEF + \angle F + \angle G$

$= (5 - 2) \times 180°$

$= 540°$.

6. 解:设点 P, Q 运动的时间为 t s.

根据题意,得 $CQ = 2t$ cm,$BQ = (6 - 2t)$ cm,$AP = t$ cm,$PD = (9 - t)$ cm.

分两种情况进行讨论.

①当 $BQ = AP$ 时,四边形 $APQB$ 是平行四边形,

即 $6 - 2t = t$,解得 $t = 2$;

②当 $CQ = PD$ 时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,

即 $2t = 9 - t$,解得 $t = 3$.

所以当点 P, Q 出发 2 s 或 3 s 时,直线 PQ 将四边形 $ABCD$ 截出一个平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

【第六章测试卷】

一、**1**. B **2**. D **3**. B **4**. B **5**. B **6**. C **7**. A **8**. D

二、**9**. 8 **10**. $4\sqrt{13}$ **11**. 5 **12**. $S_1=\frac{3}{2}S_2$

三、**13**. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴ $AB=CD$, $AD=BC$, $\angle C=\angle A$.

∵ E, F 分别是边 BC, AD 的中点,

∴ $CE=\frac{1}{2}BC$, $AF=\frac{1}{2}AD$.

∴ $AF=CE$.

∴ $\triangle ABF\cong\triangle CDE$(SAS).

∴ $\angle ABF=\angle CDE$.

14. **证明**:∵ $AB/\!/DE$,

∴ $\angle B=\angle DEF$.

∵ $AC/\!/DF$,

∴ $\angle ACB=\angle F$.

∵ $BE=CF$,

∴ $BE+CE=CF+CE$.

∴ $BC=EF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle F,\end{cases}$$

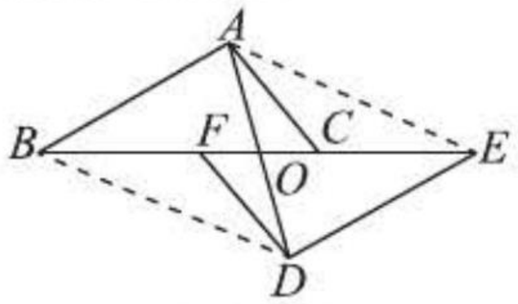
∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$(ASA).

∴ $AB=DE$.

又∵ $AB/\!/DE$,

∴ 四边形 $ABED$ 是平行四边形.

15. **证明**:如图,连接 BD, AE.



(第15题)

∵ $AB/\!/ED$,

∴ $\angle ABC=\angle DEF$.

∵ $AC/\!/FD$,

∴ $\angle ACB=\angle DFE$.

∵ $FB=CE$,

∴ $BC=EF$.

在$\triangle ACB$和$\triangle DFE$中,

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle DFE,\end{cases}$$

∴ $\triangle ACB\cong\triangle DFE$(ASA).

∴ $AB=DE$.

又∵ $AB/\!/ED$,

∴ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

∴ AD 与 BE 互相平分.

16. (1)**证明**:∵ D, E 分别为边 AB, AC 的中点,

∴ $DE=\frac{1}{2}BC$.

又∵ $CF=\frac{1}{2}BC$,

∴ $DE=CF$.

(2)**解**:易知 $DE/\!/\!/CF$,

∴ 四边形 $DEFC$ 是平行四边形.

∴ $EF=CD$.

∵ D 为边 AB 的中点,等边三角形 ABC 的边长是2,

∴ $AD=BD=1$, $CD\perp AB$, $BC=2$.

∴ $EF=DC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

17. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD=BC$, $AB=CD$, $\angle ABC=\angle ADC$.

∵ $BC=BF$, $CD=DE$,

∴ $BF=AD$, $AB=DE$.

又∵ $\angle ABC=\angle ADC$, $\angle CBF=\angle CDE$,

∴ $\angle ABF=\angle EDA$.

在$\triangle ABF$和$\triangle EDA$中,

$$\begin{cases}AB=DE,\\ \angle ABF=\angle EDA,\\ BF=DA,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABF\cong\triangle EDA$(SAS).

(2)∵ $AF\perp AE$,

∴ $\angle EAF=90°$.

由(1)知$\angle EAD=\angle AFB$,

易知$\angle GBF=\angle AFB+\angle BAF$.

由$\square ABCD$可知$AD/\!/BC$,

∴ $\angle DAG=\angle CBG$.

∴ $\angle FBC=\angle FBG+\angle CBG=\angle AFB+\angle BAF+\angle CBG=\angle EAD+\angle BAF+\angle DAG=\angle EAF=90°$.

∴ $BF\perp BC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第一章 三角形的证明

1 等腰三角形

▶随堂练习(教材第3页)

1. 解:在$\triangle ABC$中,$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$.

(1)$\because \angle A=40°$,$\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore 2\angle C=180°-\angle A=140°$.

$\therefore \angle C=70°$.

(2)$\because \angle B=72°$,

$\therefore \angle A=180°-2\angle B=180°-2\times 72°=36°$.

2. (1)**证明**:在$\triangle ACB$和$\triangle ACD$中,

$$\begin{cases} AC=AC, \\ \angle ACB=\angle ACD=90°, \\ BC=DC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACB\cong\triangle ACD$(SAS).

$\therefore AB=AD$(全等三角形的对应边相等).

$\therefore \triangle ABD$是等腰三角形.

(2)**解**:$\because AC=BC$,

$\therefore \angle B=\angle BAC$.

$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle BAC=45°$.

同理$\angle DAC=45°$,

$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle DAC=45°+45°=90°$.

点拨:本题实质上得到有关等腰直角三角形的一些特殊性质:①两底角都等于45°;②底边上的高等于底边的一半;③底边上的高将顶角分成两个45°的角.

习题1.1

1. 已知;已知;公共边;SSS;全等三角形的对应角相等

2. **证明**:$\because BE=CF$,

$\therefore BE+EC=CF+EC$,即$BC=EF$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,$\begin{cases} AB=DE, \\ BC=EF, \\ AC=DF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$(SSS).

$\therefore \angle A=\angle D$.

3. 解:$\because AB=AC$,$AD\perp BC$,$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\because \angle BAC=108°$,

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=54°$.

4. 解:$\angle ABC=\angle ACB$;$\angle BAD=\angle CAD$;$\angle ADB=\angle ADC$;$\angle EBD=\angle ECD$;$\angle BED=\angle CED$;$\angle AEB=\angle AEC$;$\angle ABE=\angle ACE$. 理由如下.

$\because AB=AC$,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

又$\because AD\perp BC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$,$\angle ADB=\angle ADC$.

易证$\triangle BED\cong\triangle CED$,

$\therefore \angle EBD=\angle ECD$,$\angle BED=\angle CED$(全等三角形的对应角相等).

易证$\triangle AEB\cong\triangle AEC$,

$\therefore \angle ABE=\angle ACE$,$\angle AEB=\angle AEC$(全等三角形的对应角相等).

5. 解:这两个三角形全等.

已知:等腰三角形ABC和等腰三角形$A'B'C'$,$\angle A$与$\angle A'$都是顶角,且$\angle A=\angle A'$,底边$BC=B'C'$.

求证:$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明:$\because \triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$都是等腰三角形,且顶角相等($\angle A=\angle A'$),

$\therefore \angle B=\angle C=\angle B'=\angle C'$.

又$\because BC=B'C'$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$(ASA).

6. 解:相等.

证明:$\because AB=AC$,$AD=AE$,

$\therefore \angle B=\angle C$,$\angle ADE=\angle AED$.

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

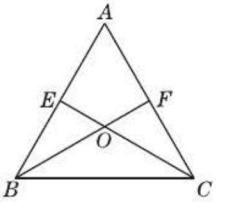
在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中,$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS).

$\therefore BD=CE$.

▶随堂练习(教材第6页)

1. 解:如图,在等边三角形ABC中,CE,BF分别是AB,AC边上的中线,且CE与BF相交于点O,则CE垂直平分AB,BF垂直平分AC.



(第1题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

在 Rt△ABF 中,∵ $\angle A=60°$,

∴ $\angle ABF=30°$.

在 Rt△BEO 中,∵ $\angle EBO=30°$,

∴ $\angle EOB=60°$.

即等边三角形两条中线相交所成锐角的度数为 60°.

2. 解:由题意易知,$BD=DE=AD$,$\angle ADE=\angle DAE=60°$,

∴ $\angle DBA=\angle BAD$.

又∵ $\angle DBA+\angle BAD=\angle ADE=60°$,

∴ $\angle BAD=30°$.

同理,$\angle CAE=30°$.

∴ $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAE+\angle CAE=30°+60°+30°=120°$.

习题 1.2

1. 解:在△ABC 中,∵ $AB=AC$,

∴ $\angle ABC=\angle C$.

又∵ BD 平分 $\angle ABC$,

∴ $\angle ABD=\angle DBC=\frac{1}{2}\angle C$.

∵ $BD=BC$,∴ $\angle BDC=\angle C$.

∵ $\angle DBC+\angle C+\angle BDC=180°$,

∴ $\frac{1}{2}\angle C+2\angle C=180°$.

∴ $\angle C=72°$.

∴ $\angle A=180°-2\angle C=180°-2\times72°=36°$.

2. 证明:∵ $AB=AC$,$AE=AF$,

∴ $\angle B=\angle C$,$EB=FC$.

∵ 点 D 为 BC 的中点,

∴ $BD=CD$.

在△EBD 和△FCD 中,

$$\begin{cases} EB=FC, \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CD, \end{cases}$$

∴ △EBD≌△FCD(SAS).

∴ $DE=DF$.

3. 证明:∵ △ABC 是等边三角形,

∴ $AC=BC$,$\angle A=\angle ACB=60°$.

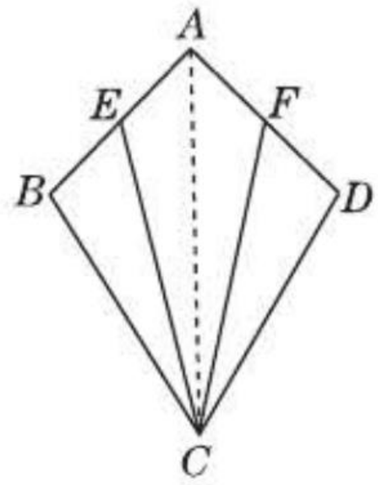
在△ADC 和△CEB 中,

$$\begin{cases} AD=CE, \\ \angle A=\angle ECB, \\ AC=CB, \end{cases}$$

∴ △ADC≌△CEB(SAS).

∴ $CD=BE$.

4. (1)**证明**:连接 AC,如图所示.



(第 4 题)

在△ABC 和△ADC 中,$\begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$

∴ △ABC≌△ADC(SSS).

∴ $\angle B=\angle D$.

在△BCE 和△DCF 中,$\begin{cases} BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AD=DF, \\ \angle B=\angle D, \\ BC=DC, \end{cases}$

∴ △BCE≌△DCF(SAS).

∴ $EC=FC$.

∴ 这两根彩线的长度相等.

(2)**解**:如果 $AE=\frac{1}{3}AB$,$AF=\frac{1}{3}AD$,那么这两根彩线的长度相等;如果 $AE=\frac{1}{4}AB$,$AF=\frac{1}{4}AD$,那么这两根彩线的长度也相等. 由此得到,如果 $AE=AF$,那么这两根彩线的长度相等.

(3)**解**:如果 $BE=DF$,或 $\angle BCE=\angle DCF$,或 $\angle BEC=\angle DFC$,也能得到这两根彩线的长度相等的结论.

▶随堂练习(教材第 9 页)

1. 解:△BDE 为等腰三角形. 理由如下.

∵ BD 平分 $\angle ABC$,

∴ $\angle ABD=\angle DBC$.

∵ $DE/\!/BC$,∴ $\angle EDB=\angle DBC$.

∴ $\angle EBD=\angle EDB$.

∴ $EB=ED$.

故△BDE 为等腰三角形.

2. 证明:假设这五个正数(a,b,c,d,e)均小于 $\frac{1}{5}$,

即 $0<a<\frac{1}{5}$,$0<b<\frac{1}{5}$,$0<c<\frac{1}{5}$,$0<d<\frac{1}{5}$,

$0<e<\frac{1}{5}$,∴ $0<a+b+c+d+e<\frac{1}{5}\times5=1$.

∴ $0<a+b+c+d+e<1$.

这与已知矛盾,∴ 假设不成立,原命题成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即已知五个正数的和等于1,则这五个正数中至少有一个大于或等于$\frac{1}{5}$.

习题1.3

1. 证明: $\because AD/\!/BC$,

$\therefore \angle 1=\angle B$(两直线平行,同位角相等),$\angle 2=\angle C$(两直线平行,内错角相等).

又$\because \angle 1=\angle 2$,$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore AB=AC$(等角对等边).

点拨: 从此题中可以看出,当平行线和角平分线同时出现时,图形中可能出现等腰三角形.

2. 证明: $\because AB=AC$,$EP\perp BC$,

$\therefore \angle B=\angle C$,$\angle BFP+\angle B=\angle E+\angle C=90°$.

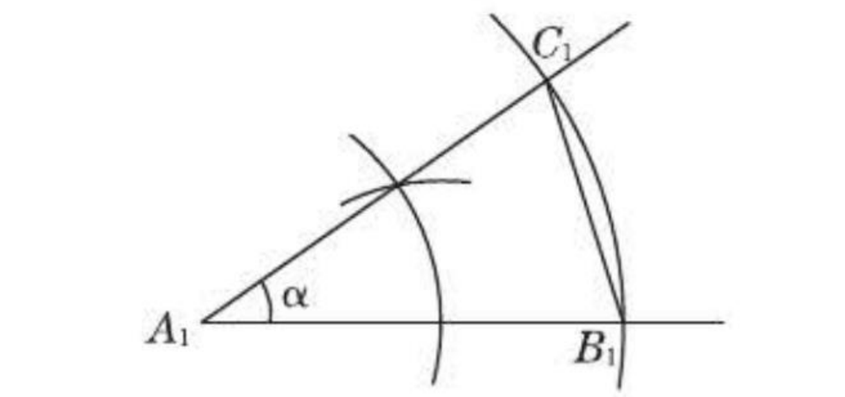
$\therefore \angle BFP=\angle E$.

$\because \angle AFE=\angle BFP$,$\therefore \angle E=\angle AFE$.

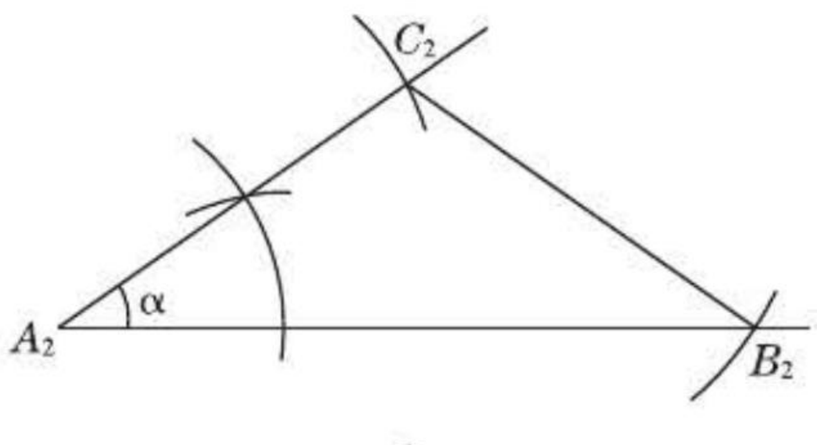
$\therefore AE=AF$.

故$\triangle AEF$是等腰三角形.

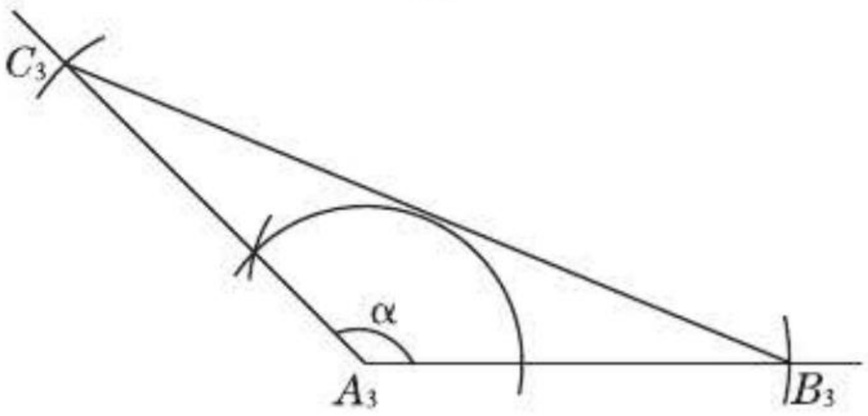
3. 解: (1)有两种情况. 一种情况是锐角α为顶角,如图①(作法略),$\triangle A_1B_1C_1$为所求作的三角形;另一种情况是锐角α为底角,如图②(作法略),$\triangle A_2B_2C_2$为所求作的三角形.



①



②



③

(第3题)

(2)因为底角只能为锐角,所以只有一种情况,即钝角α只能是顶角,如图③(作法略),$\triangle A_3B_3C_3$为所求作的三角形.

4. 解: $\because \angle NBC=\angle C+\angle BAC$,

$\therefore \angle C=\angle NBC-\angle BAC=84°-42°=42°$.

$\therefore \angle C=\angle BAC$. $\therefore BC=BA$.

又$\because BA=18\times 10=180$(n mile),

$\therefore BC=180$ n mile.

答: 从B处到灯塔C的距离是180 n mile.

▶**随堂练习(教材第12页)**

解: $\because CD$是$\triangle ABC$的高,$\therefore \angle BDC=90°$.

又$\because \angle B=60°$,$\therefore \angle BCD=30°$. $\therefore BC=2BD=2$.

$\because$在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$\angle B=60°$,

$\therefore \angle A=30°$. $\therefore AB=2BC=4$.

$\therefore AD=AB-BD=4-1=3$.

习题1.4

1. 证明: $\because DE/\!/BC$,

$\therefore \angle ADE=\angle B$,$\angle AED=\angle C$.

$\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

$\therefore \angle A=\angle ADE=\angle AED=60°$.

$\therefore \triangle ADE$是等边三角形.

点拨: 平行于等边三角形一边的直线截等边三角形得出的三角形仍是等边三角形.

2. 解: $\because$在Rt$\triangle ABC$中,$\angle A=30°$,

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 7.4=3.7$(m).

$\because D$是AB的中点,

$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=3.7$ m.

$\because$在Rt$\triangle ADE$中,$\angle A=30°$,

$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 3.7=1.85$(m).

答: BC的长为3.7m,DE的长为1.85 m.

3. 解: (1)$\triangle DEF$是等边三角形. 证明如下.

如图,$\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore \angle 1=60°$.

$\because BC/\!/EF$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=60°$.

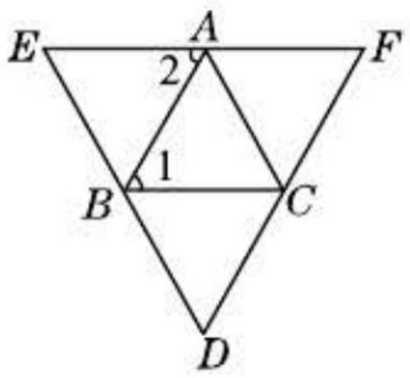
$\because AB/\!/DF$,

$\therefore \angle 2=\angle F=60°$.

同理可证$\angle E=\angle D=60°$.

$\therefore \triangle DEF$是等边三角形.

$\triangle ABE$,$\triangle ACF$,$\triangle BCD$也都是等边三角形.



(第3题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点 A,B,C 分别是 EF,ED,FD 的中点. 证明如下.

$\because \angle E=60°, \angle 2=60°$,

$\therefore \angle EBA=180°-\angle E-\angle 2=180°-60°-60°=60°$.

$\therefore \triangle EAB$ 为等边三角形.

同理可证 $\triangle ACF, \triangle BCD$ 也都是等边三角形.

又$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB=AC=BC$.

$\therefore EA=AF=AB=AC=EB=BD=CF=CD=BC$.

$\therefore$ 点 A,B,C 分别是 EF,ED,FD 的中点.

(2)如果 $\triangle DEF$ 是等边三角形,点 A,B,C 分别是 EF,ED,FD 的中点,那么 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 证明如下.

$\because \triangle DEF$ 是等边三角形,

$\therefore \angle E=\angle D=\angle F=60°, EF=ED=DF$.

又$\because$ 点 A,B,C 分别是 EF,ED,FD 的中点,

$\therefore EA=EB=FA=FC=BD=CD$.

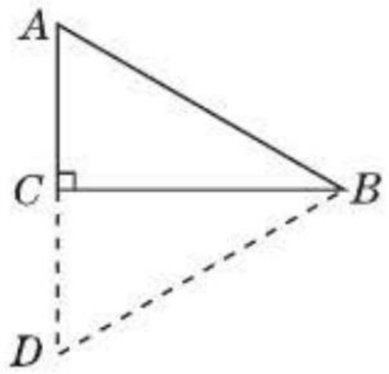
$\therefore \triangle EAB, \triangle FAC, \triangle BCD$ 都是等边三角形(有一个角为 $60°$ 的等腰三角形为等边三角形),且它们全等(SAS).

$\therefore AB=AC=BC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

※4. 已知:如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°, AB=2AC$. 求证:$\angle B=30°$.

证明:如图,延长 AC 到 D,使 $CD=AC$,连接 BD,则 BC 为 AD 的垂直平分线.



(第4题)

$\therefore AB=BD$.

又$\because AB=2AC, AD=2AC$,

$\therefore AB=BD=AD$.

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle ABC=90°-60°=30°$.

※5. 解: $\angle ADG=15°$,证明如下.

由题易知,在 $\mathrm{Rt}\triangle A'CD$ 中,$CD=\frac{1}{2}A'D$,

$\therefore \angle CA'D=30°$(在直角三角形中,如果一条直角边等于斜边的一半,那么这条直角边所对的锐角等于 $30°$).

$\because A'C/\!/AD, \therefore \angle CA'D=\angle A'DA=30°$.

又$\because \triangle A'GD$ 与 $\triangle AGD$ 关于直线 GD 对称,

$\therefore \angle A'DG=\angle ADG$.

$\therefore \angle ADG=\frac{1}{2}\angle A'DA=15°$.

2 直角三角形

▶随堂练习(教材第16页)

1. 解:$\because \angle A=\angle B=45°$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

$\therefore AC=BC=3$.

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=3\sqrt{2}$.

2. 证法一:如图所示.

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 10=5(\mathrm{cm})$.

在 $\triangle ABD$ 中,$\because AB=13\ \mathrm{cm}$, $AD=12\ \mathrm{cm}, BD=5\ \mathrm{cm}$,

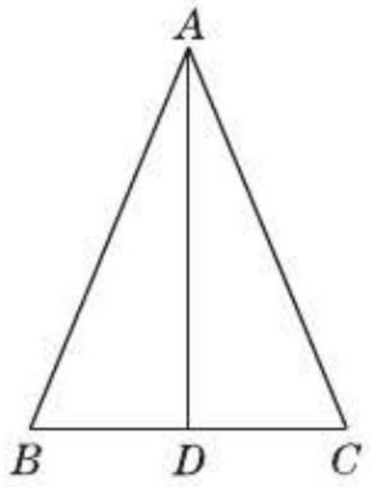
$\therefore AB^2=AD^2+BD^2$.

$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形,且 $\angle ADB=90°$.

$\therefore AD\perp BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13(\mathrm{cm})$,

$\therefore AB=AC$.



(第2题)

证法二:如图,$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 10=5(\mathrm{cm})$.

在 $\triangle ABD$ 中,$\because AB=13\ \mathrm{cm}, AD=12\ \mathrm{cm}, BD=5\ \mathrm{cm}$,

$\therefore AB^2=AD^2+BD^2$.

$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形,且 $\angle ADB=90°$.

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,$\begin{cases} AD=AD, \\ \angle ADB=\angle ADC, \\ BD=CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD(\mathrm{SAS})$.

$\therefore AB=AC$.

3. 解:(1)逆命题:多边形是四边形. 原命题真,逆命题假.

(2)逆命题:同旁内角互补,两直线平行. 原命题真,逆命题真.

(3)逆命题:如果 $a=0, b=0$,那么 $ab=0$. 原命题假,逆命题真.

点拨:任何命题都有逆命题,但它与原命题的真假性不一定一致. 判断一个命题是假命题,最简单的方法是举反例.

习题 1.5

1. 解:$\because AB/\!/CD$,

$\therefore \angle BAE+\angle EAD+\angle ADE+\angle CDE=180°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle BAE=25°$, $\angle CDE=65°$,

∴ $\angle EAD+\angle ADE=90°$.

∴ $\triangle AED$ 为直角三角形, $\angle AED=90°$.

∵ $AE=2$, $DE=3$,

∴ $AD=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

2. 解: 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,∵ $\angle A=30°$,

∴ $\angle B=60°$, $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5(\mathrm{m})$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1C$ 中,∵ $\angle B=60°$,∴ $\angle BCB_1=30°$.

∴ $BB_1=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 5=2.5(\mathrm{m})$.

∴ $AB_1=10-2.5=7.5(\mathrm{m})$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中,∵ $\angle A=30°$,

∴ $B_1C_1=\frac{1}{2}AB_1=\frac{1}{2}\times 7.5=3.75(\mathrm{m})$.

答: BC 的长是 5 m, B_1C_1 的长是 3.75 m.

3. 解: 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中,∵ $\angle BDE=30°$,

∴ $BD=2BE$.

又∵ $DE=30$ m, $BD^2=DE^2+BE^2$,

∴ $BE=10\sqrt{3}$ m.

∴ $BE+AD=10\sqrt{3}+1.52\approx 18.8(\mathrm{m})$.

∴ 大树的高度约为 18.8 m.

4. 解: 没有一条边线为东西向. 若长 70 m 的边线为东西向,则这个三角形的斜边长为 45 m,小于直角边,不合实际. 若长 45 m 的边线为东西向,则这个三角形的斜边长为 70 m,但以 60 m,45 m 为直角边长的直角三角形的斜边长为 75 m,不等于 70 m,故没有一条边线为东西向.

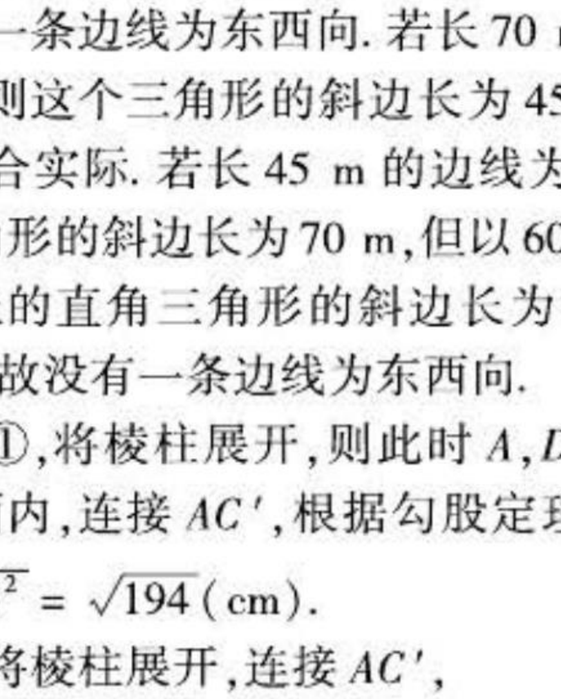
5. 解: 如图①,将棱柱展开,则此时 A, D' 和 C' 在同一个平面内,连接 AC',根据勾股定理,得 $AC'=\sqrt{13^2+5^2}=\sqrt{194}(\mathrm{cm})$.

如图②,将棱柱展开,连接 AC',

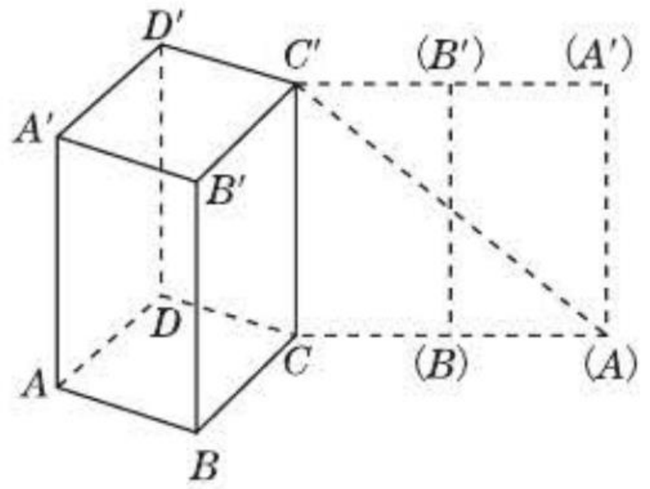
则 $AC'=\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}(\mathrm{cm})$.

∵ $\sqrt{194}>\sqrt{164}$,

∴ 以图②的形式展开路径最短,最短路径的长为 $2\sqrt{41}$ cm.



①



②

(第 5 题)

点拨: 将立体图形展开为平面图形是解决这类问题常用的方法. 本题值得注意的是,正四棱柱有两种符合题意的展开图,不要漏掉任何一种.

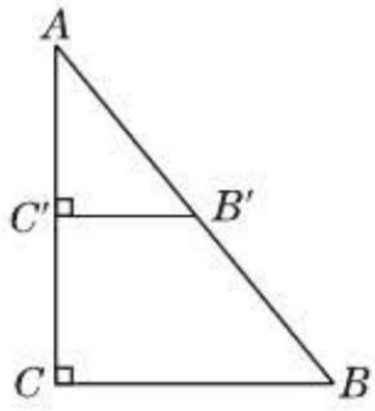
▶随堂练习(教材第 20 页)

1. 解: (1)假.

理由:如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AB'C'$ 中,

$\angle A=\angle A$, $\angle AB'C'=\angle B$,

但 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AB'C'$ 不全等.



[第 1(1)题]

(2)真. 理由:因为该命题满足“AAS”定理的条件.

(3)真. 理由:因为该命题满足“SAS”定理的条件.

(4)真. 理由:先利用“HL”定理得到另一条直角边的一半相等,即该直角边相等,再根据“SAS”定理可判定两个三角形全等.

2. 解: 两个木桩离旗杆底部的距离相等. 理由如下.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ACO$ 中,

$\begin{cases} AB=AC, \\ AO=AO, \end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABO\cong\mathrm{Rt}\triangle ACO(\mathrm{HL})$.

∴ $BO=CO$.

故两个木桩离旗杆底部的距离相等.

习题 1.6

1. 证明: ∵ $DE\perp AC$, $DF\perp AB$,

∴ $\angle DFB=\angle DEC=90°$.

∵ D 是 BC 的中点,

∴ $BD=CD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△BDF 和 Rt△CDE 中,

$\begin{cases} BD = CD, \\ DF = DE, \end{cases}$

∴ Rt△BDF≌Rt△CDE(HL).

∴ ∠B = ∠C(全等三角形的对应角相等).

∴ $AB = AC$(等角对等边).

∴ △ABC 是等腰三角形.

2. 证明:(1)在 Rt△CDE 和Rt△ABF中,

$\begin{cases} CD = AB, \\ DE = BF, \end{cases}$

∴ Rt△CDE≌Rt△ABF(HL).

∴ $CE = AF$, ∠C = ∠A(全等三角形的对应边相等,对应角相等).

∴ $CE - EF = AF - EF$,即 $AE = CF$.

(2)由(1)知∠C = ∠A,

∴ AB // CD(内错角相等,两直线平行).

3. 证明:∵ $PM \perp OM$, $PN \perp ON$,

∴ △MOP 与△NOP 均为直角三角形.

在 Rt△MOP 和 Rt△NOP 中,

$\begin{cases} OM = ON, \\ OP = OP, \end{cases}$

∴ Rt△MOP≌Rt△NOP(HL).

∴ ∠AOP = ∠BOP.

∴ 射线 OP 是∠AOB 的平分线.

4. 解:(1)假. 因为可能是一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的两条直角边分别相等.

(2)假. 因为可能是一个直角三角形的一条直角边与另一个直角三角形的斜边相等.

5. (1)**解:** $AE = BE$, $AD = DB$,

∠B = ∠DAE, ∠ADE = ∠BDE,

∠AED = ∠BED.

(2)**证明:**∵ ∠B = 30°, ∠C = 90°,

∠B = ∠DAE,

∴ ∠DAE = 30°, ∠CAB = 60°.

∴ ∠CAD = 30°.

∴ ∠CAD = ∠DAE.

∵ ∠AED = ∠DEB, ∠AED + ∠DEB = 180°,

∴ ∠AED = ∠DEB = 90°.

在△ACD 和△AED 中,

$\begin{cases} \angle C = \angle AED = 90°, \\ \angle CAD = \angle EAD, \\ AD = AD, \end{cases}$

∴ △ACD≌△AED(AAS).

(3)**解:**不能.

3 线段的垂直平分线

▶**随堂练习(教材第 23 页)**

证明:∵ AB 是线段 CD 的垂直平分线,

∴ $EC = ED$, $FC = FD$.

在△ECF 和△EDF 中, $\begin{cases} EC = ED, \\ EF = EF, \\ FC = FD, \end{cases}$

∴ △ECF≌△EDF(SSS).

∴ ∠ECF = ∠EDF.

习题 1.7

1. 解:∵ $AB = AC$, ∠BAC = 120°,

∴ ∠B = ∠C = 30°.

∵ EF 垂直平分 AB,

∴ $AF = BF$.

∴ ∠BAF = ∠B = 30°.

∴ ∠AFC = ∠BAF + ∠B = 60°.

2. 解:以线段 AB 为底边的所有等腰三角形的另一个顶点都在线段 AB 的垂直平分线上.

3. 解:∵ DE 垂直平分线段 AB,

∴ $EB = EA$.

∵ △BCE 的周长等于 50,

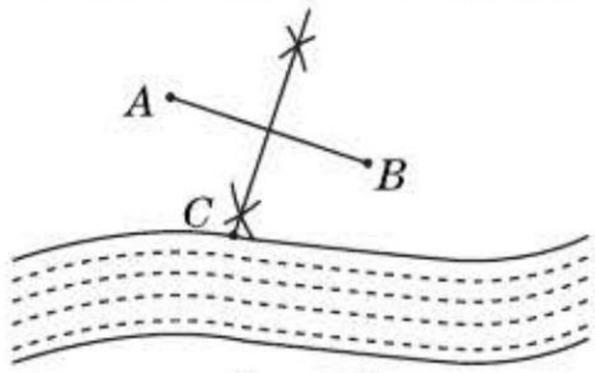
∴ $BE + EC + BC = 50$.

∴ $AE + EC + BC = 50$,

即 $AC + BC = 50$.

又∵ $AC = 27$, ∴ $BC = 50 - 27 = 23$.

4. 解:连接 AB,作线段 AB 的垂直平分线,交河岸于点 C,则码头应建在点 C 的位置处(如图).



(第4题)

▶**随堂练习(教材第 26 页)**

解: $BE = AE$, $AF = CF$.

△AEF 的周长为 $AE + EF + AF = BE + EF + FC = BC = 2$.

习题 1.8

1. 解:(1)作射线 BM,并在 BM 上截取$BC = a$;

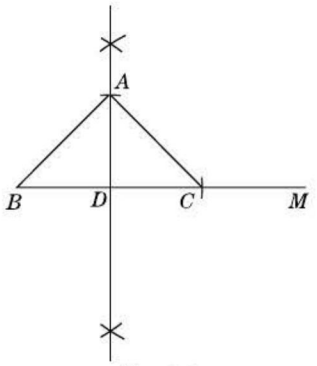
(2)作 BC 的垂直平分线,交 BC 于 D 点;

(3)在 BC 的垂直平分线上截取 $AD = \frac{1}{2}a$;

(4)连接 AB, AC,则△ABC 即为所求,如图所示.

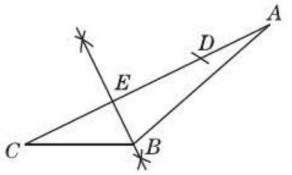
这个等腰三角形是一个等腰直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



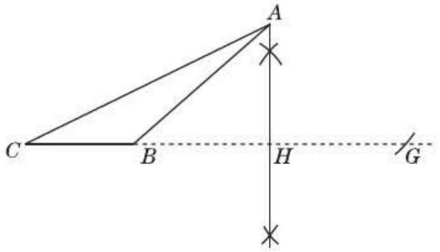
(第1题)

2. 解:(1)①在 AC 上取一点 D,使 $BD=BC$;
②作 CD 的垂直平分线,交 CD 于 E 点;
③BE 即为所求,如图所示.



[第2(1)题]

(2)①延长 CB,在 CB 的延长线上取一点 G,使 $AG=AB$;
②作 BG 的垂直平分线,交 BG 于 H 点;
③AH 即为所求,如图所示.



[第2(2)题]

3. 解:(1)(2)都作△PQR 两边的垂直平分线,其交点即为体育中心 G 的位置,画图略.(3)略.
点拨:锐角三角形三边垂直平分线的交点在三角形内部,钝角三角形三边垂直平分线的交点在三角形外部.

4. 解:设等边三角形的边长为 a,则第一种方案中光缆长度为 $AB+BC=2a$,第二种方案中,$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,光缆长度为 $AD+BC=a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$,
第三种方案中,易得 $AO=BO=CO=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,光缆长度为 $OA+OB+OC=\sqrt{3}a$. 经比较易发现第三种方案铺设的光缆长度最短,故应选第三种方案.

4 角平分线

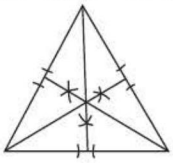
▶**随堂练习(教材第29页)**

1. 解:$AD\perp AE$.
点拨:互为邻补角的两个角的平分线互相垂直.

2. 解:设公路、铁路的交点为 O. 在A区内作角的平分线 OB,在 OB 上截取 $OC=2.5$ cm,则点 C 即为所求. 画图略.
点拨:从此题可以看出,作到两直线距离相等的点,应考虑作这两条直线夹角的平分线,这是几何作图题中常见的模式.

习题1.9

1. 解:如图. 发现三角形三个内角的平分线交于一点,并且这个点到三角形三边的距离相等.



(第1题)

2. 证明:∵ AD 平分∠BAC,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,
∴ $DE=DF$.
又∵ $BD=CD$,
∴ Rt△BDE≌Rt△CDF.
∴ $EB=FC$.

3. 证法一:∵ ∠$C=90°$,∠$A=30°$,
∴ ∠$ABC=60°$.
∵ DE 垂直平分 AB,∴ $BE=AE$.
∴ ∠ABE=∠$A=30°$.
∴ ∠EBC=∠ABC−∠$ABE=60°-30°=30°$.
∴ ∠ABE=∠EBC.
∴ BE 平分∠ABC.
证法二:∵ DE 垂直平分 AB,
∴ ∠$BDE=90°$,$AD=BD=\frac{1}{2}AB$.
在Rt△ABC 中,∵ ∠$A=30°$,
∴ $AB=2BC$.
∴ $BD=BC$.
在Rt△BDE 和Rt△BCE 中,$\begin{cases}BD=BC,\\BE=BE,\end{cases}$
∴ Rt△BDE≌Rt△BCE(HL).
∴ ∠DBE=∠EBC(全等三角形的对应角相等).
∴ BE 平分∠ABC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证法三:∵ DE 垂直平分 AB,

∴ $\angle ADE=90°, AE=BE, AD=BD=\frac{1}{2}AB$.

在Rt△ABC中,∵ $\angle A=30°$,

∴ $BC=\frac{1}{2}AB$.

∴ $AD=BC$.

在 Rt△ADE 和Rt△BCE中, $\begin{cases}AD=BC,\\AE=BE,\end{cases}$

∴ Rt△ADE≌Rt△BCE(HL).

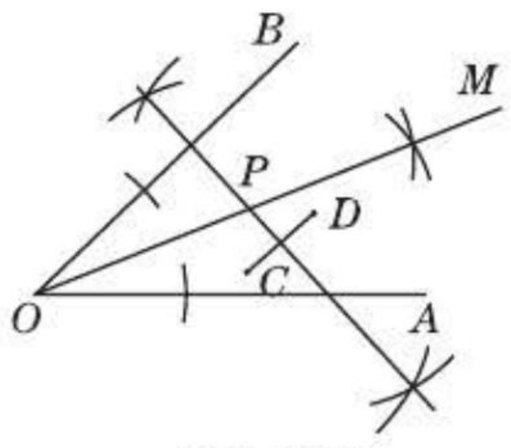
∴ $\angle EBC=\angle A=30°$.

∴ $\angle ABE=90°-\angle A-\angle EBC=30°$.

∴ $\angle EBC=\angle ABE$,

即 BE 平分 $\angle ABC$.

4. 解:作法如图所示.



(第4题)

(1)作 $\angle AOB$ 的平分线 OM;

(2)连接 CD;

(3)作 CD 的垂直平分线交 OM 于 P 点,则 P 点即为所求.

▶随堂练习(教材第31页)

证明:连接 BF,由题意易知 BF 为 $\angle ABC$ 的平分线,则 $FM=FN$.

在 Rt△ABC 中,∵ $\angle ABC=60°$,

∴ $\angle BAC=30°$. ∴ $\angle DAB=\frac{1}{2}\angle BAC=15°$.

∴ $\angle FDN=\angle DAB+\angle ABC=75°$, $\angle FEM=\angle BAC+\angle ACE=30°+\frac{1}{2}\angle ACB=30°+45°=75°$.

∴ $\angle FEM=\angle FDN$.

在△FEM 与△FDN 中, $\begin{cases}\angle FEM=\angle FDN,\\\angle EMF=\angle DNF=90°,\\FM=FN,\end{cases}$

∴ △FEM≌△FDN(AAS).

∴ $FE=FD$.

习题 1.10

1. 证明:∵ $\angle C=90°, \angle B=30°$,

∴ $\angle BAC=60°$.

∵ AD 平分 $\angle BAC$,

∴ $\angle DAC=\angle BAD=30°$.

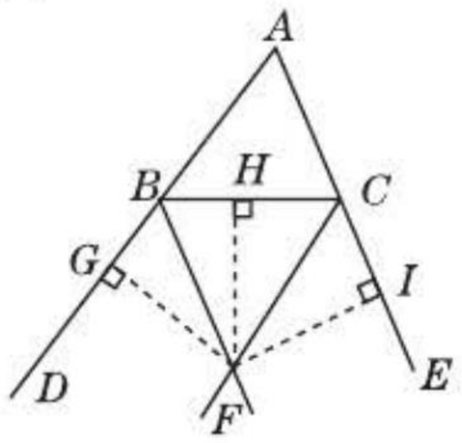
∴ $\angle B=\angle BAD$.

∴ $BD=AD$.

∵ $\angle C=90°, \angle DAC=30°$,

∴ $AD=2CD$. ∴ $BD=2CD$.

2. 证明:如图,过点 F 分别作 BD, BC, CE 的垂线段,垂足分别为 G, H, I.



(第2题)

∵ BF 平分 $\angle CBD$, ∴ $FG=FH$.

∵ CF 平分 $\angle ECB$, ∴ $FI=FH$.

∴ $FG=FI$.

∴ 点 F 在 $\angle DAE$ 的平分线上.

3. 证明:(1)∵ OP 平分 $\angle AOB$, $PC\perp OA$, $PD\perp OB$,

∴ $PC=PD$.

又∵ $OP=OP$,

∴ Rt△OCP≌Rt△ODP(HL).

∴ $OC=OD$.

(2)∵ $OC=OD$(已证), $PC=PD$,

∴ O, P 两点都在线段 CD 的垂直平分线上.

∴ OP 是线段 CD 的垂直平分线.

4. 解:(1)要求油库到两条公路 AB, AC 的距离都相等,则油库的位置应选在 $\angle BAC$ 的平分线上.

(2)要求油库到三条公路的距离都相等,则油库的位置应选在三条公路所形成的 △ABC 的三个内角平分线的交点上.

复习题

1. 已知;两直线平行,内错角相等;已知;两直线平行,同位角相等;等量代换

2. 证明:∵ $AD\parallel CB$,

∴ $\angle BCA=\angle DAC$.

又∵ $CB=AD, CA=AC$,

∴ △ABC≌△CDA(SAS).

3. 证明:(1)∵ $AB=AC$,

∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

又∵ $\angle ABD=\angle ACE$,

∴ $\angle OBC=\angle OCB$.

∴ $OB=OC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由(1)可知,$\angle ABC=\angle ACB$,$\angle DBC=\angle ECB$.

在$\triangle BEC$和$\triangle CDB$中,$\begin{cases}\angle EBC=\angle DCB,\\ BC=CB,\\ \angle ECB=\angle DBC,\end{cases}$

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle CDB(\mathrm{ASA})$.

$\therefore BE=CD$.

4. 证法一:$\because BD\perp AC$,$CE\perp AB$,

$\therefore \angle BDC=\angle CEB=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BEC$和$\mathrm{Rt}\triangle CDB$中,$\begin{cases}CE=BD,\\ BC=CB,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BEC\cong\mathrm{Rt}\triangle CDB(\mathrm{HL})$.

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore AB=AC$(等角对等边).

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

证法二:$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

又$\because CE=BD$,

$\therefore AB=AC$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

5. 解:$\because \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$,

$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$,

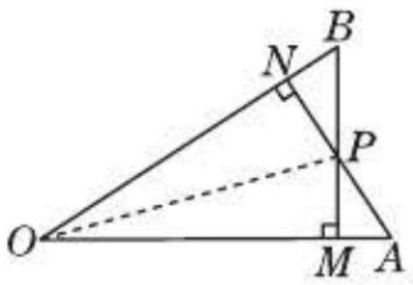
$\therefore \angle A=30^\circ$,$\angle C=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\because \angle A=30^\circ$,

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$.

6. 证明:连接OP,如图所示.



(第6题)

$\because PN\perp OB$,$PM\perp OA$,

$\therefore \angle PNO=\angle PMO=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PNO$与$\mathrm{Rt}\triangle PMO$中,

$\begin{cases}OP=OP,\\ ON=OM,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PNO\cong\mathrm{Rt}\triangle PMO(\mathrm{HL})$.

$\therefore PN=PM$.

7. 证明:(1)$\because$点C,D在线段AB的垂直平分线上,

$\therefore AC=BC$,$AD=BD$.

$\therefore \triangle ABC$,$\triangle ABD$是等腰三角形.

(2)由(1)知,$AC=BC$,$AD=BD$,

$\therefore \angle CAB=\angle CBA$,$\angle DAB=\angle DBA$.

若点C,D在AB的两侧,如图①,

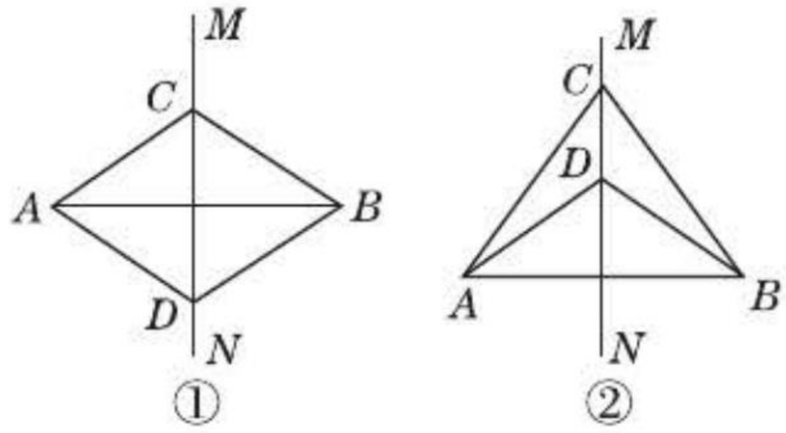
则$\angle CAB+\angle DAB=\angle CBA+\angle DBA$,

即$\angle CAD=\angle CBD$.

若点C,D在AB的同侧(不妨取$\angle CAB>\angle DAB$),如图②,

则$\angle CAB-\angle DAB=\angle CBA-\angle DBA$,

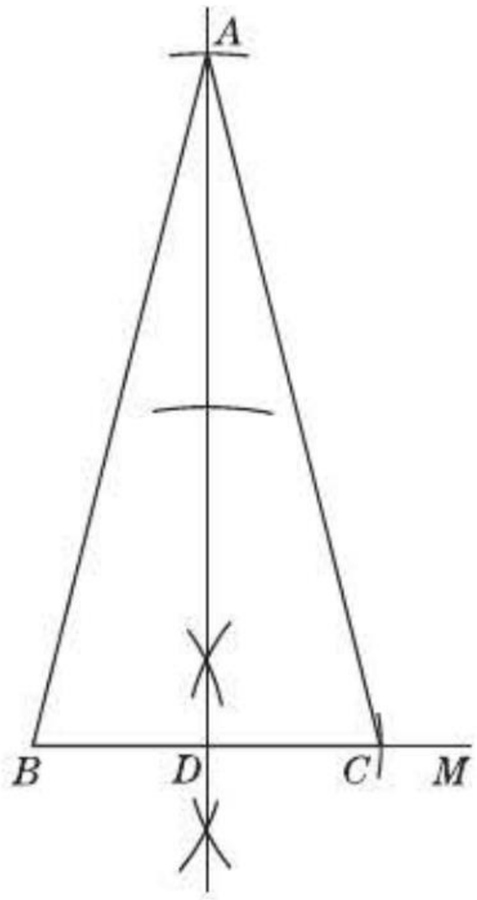
即$\angle CAD=\angle CBD$.



(第7题)

点拨:本题主要利用线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等来解答.

8. 解:如图所示.



(第8题)

(1)作射线BM,在BM上截取线段$BC=a$;

(2)作线段BC的垂直平分线交BC于点D;

(3)在垂直平分线上截取$AD=2a$;

(4)连接AB,AC,则$\triangle ABC$即为所求.

9. 解:在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\because AB=AC=a$,$\therefore BC=\sqrt{2}a$.

$\because AB=AC$,$AD\perp BC$,

$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\because AD\perp BC$,$\angle B=45^\circ$,

$\therefore AD=BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:从此题可看出等腰直角三角形的一些特殊性质,如斜边(底边)上的中线(高)等于斜边(底边)的一半,同时这条中线(高)把原三角形又分成两个全等的等腰直角三角形.

10. 解:①Rt△AEO≌Rt△ADO.

证明:在 Rt△AEO 和 Rt△ADO 中,∵ $AO=AO$,

$OE=OD$,

∴ Rt△AEO≌Rt△ADO(HL).

②Rt△BEO≌Rt△CDO.

证明:∵ $\angle BEO=\angle CDO=90°$, $OE=OD$,

$\angle BOE=\angle COD$(对顶角相等),

∴ Rt△BEO≌Rt△CDO(ASA).

③Rt△BOM≌Rt△COM.

证明:∵ Rt△AEO≌Rt△ADO,

∴ $\angle AOE=\angle AOD$.

又∵ $\angle AOE=\angle COM$, $\angle AOD=\angle BOM$(对顶角相等),∴ $\angle BOM=\angle COM$.

∵ Rt△BEO≌Rt△CDO,∴ $OB=OC$.

又∵ $OM=OM$,

∴ △BOM≌△COM(SAS).

∴ $\angle OMB=\angle OMC$.

又∵ $\angle OMB+\angle OMC=180°$,

∴ $\angle OMB=\angle OMC=90°$.

∴ Rt△BOM≌Rt△COM.

④Rt△ABM≌Rt△ACM.

证明:由①知 Rt△AEO≌Rt△ADO,

∴ $\angle BAM=\angle CAM$.

又∵ $\angle AMB=\angle AMC=90°$, $AM=AM$,

∴ Rt△ABM≌Rt△ACM(ASA).

⑤Rt△ABD≌Rt△ACE.

证明:∵ $OD=OE$, $OB=OC$,∴ $BD=CE$.

又∵ $\angle BAD=\angle CAE$, $\angle ADB=\angle AEC=90°$,

∴ Rt△ABD≌Rt△ACE(AAS).

⑥Rt△BCE≌Rt△CBD.

证明:在 Rt△BCE 和 Rt△CBD 中,∵ $BD=CE$, $BC=CB$,

∴ Rt△BCE≌Rt△CBD(HL).

11. 证明:连接 BE,∵ DE 垂直平分 AB,

∴ $AE=BE$, $\angle A=\angle DBE=30°$.

∴ $\angle EBC=90°-\angle A-\angle DBE=90°-30°-30°=30°$.

在 Rt△BEC 中,∵ $\angle EBC=30°$,

∴ $BE=2CE$.∴ $AE=2CE$.

12. 解:在 Rt△AED 中,

∵ $\angle A=90°-\angle B=30°$,∴ $AD=2DE=2$.

∴ $AC=AD+CD=4$.

在 Rt△ABC 中,∵ $\angle A=30°$,

∴ $AB=2BC$.

∵ $AB^2=BC^2+AC^2$, $AC=4$,

∴ $BC=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

∴ Rt△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

13. 解:添加 $AC=BD$.

证明:在 Rt△ACB 和 Rt△BDA 中,

$\begin{cases}AC=BD,\\AB=BA,\end{cases}$

∴ Rt△ACB≌Rt△BDA(HL).

点拨:答案不唯一.

14. 证明:假设等腰三角形的底角为直角或钝角.当等腰三角形的底角为直角时,两底角和为180°.又∵ 三角形的内角和为180°,∴ 顶角的度数为0°.这与顶角的度数大于0°相矛盾,∴ 等腰三角形的底角不为直角.当等腰三角形的底角为钝角时,两底角和大于180°,这与三角形的内角和为180°相矛盾,∴ 等腰三角形的底角不为钝角.

∴ 假设不成立.∴ 等腰三角形的底角必为锐角.

15. 解:△AFD 为直角三角形.理由如下.

∵ $AB=AD$, $\angle B=64°$,

∴ $\angle BAD=52°$.

又∵ $\angle BAC=72°$,

∴ $\angle DAF=\angle BAC-\angle BAD=20°$.

∵ $AD=DE$, $\angle E=55°$,

∴ $\angle ADE=70°$.∴ $\angle AFD=90°$.

∴ △AFD 为直角三角形.

16. 解:∵ △BCE 的周长为8,

∴ $BC+CE+BE=8$.

∵ DE 垂直平分 AB,

∴ $EA=EB$.∴ $BC+CE+EA=8$,

即 $AC+BC=8$.

∵ $AC-BC=2$,∴ $AC=5$, $BC=3$.

∵ $AB=AC$,∴ $AB=5$.

17. 证明:∵ △ABC 是等边三角形,

∴ $AB=BC=AC$, $\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

∵ $AD=BE=CF$,∴ $DB=EC=FA$.

在△DBE 和△ECF 中,$\begin{cases}BE=CF,\\\angle B=\angle C,\\DB=EC,\end{cases}$

∴ △DBE≌△ECF(SAS).

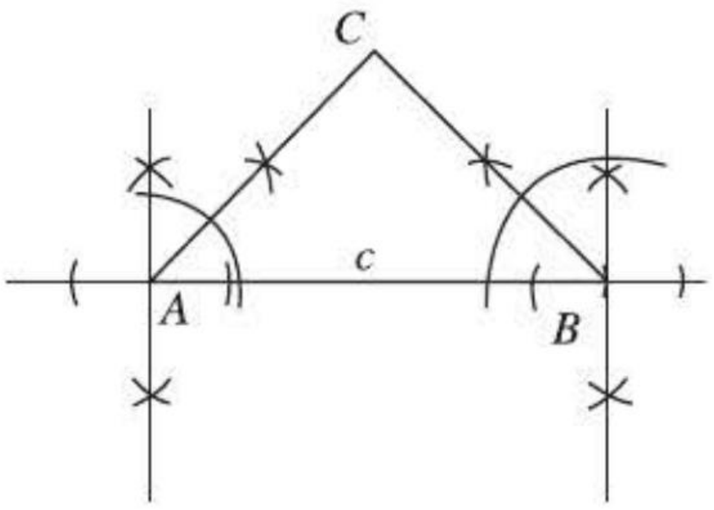
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DE = EF$.

同理可证 $EF = FD$. $\therefore DE = EF = FD$.

故 $\triangle DEF$ 是等边三角形.

18. 解:如图所示,$\triangle ABC$ 即为所求.



(第 18 题)

19. 解:设此等腰三角形为 $\triangle ABC$.

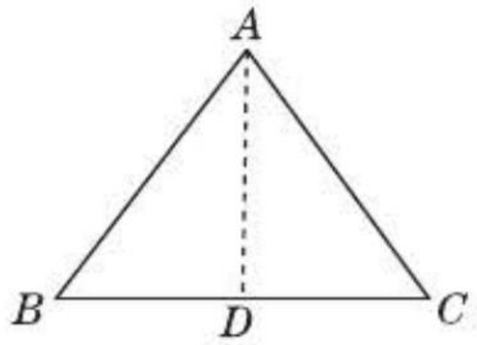
如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC = 5$,$BC = 6$.

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D,

则 $BD = 3$,$AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$.

即这个等腰三角形的面积为 12.



(第 19 题)

第二章 一元一次不等式与一元一次不等式组

1 不等关系

▶随堂练习(教材第 38 页)

1. 略.

2. 解:(1)$a \geqslant 0$;

(2)$c > a$,$c > b$;

(3)$x + 17 < 5x$;

(4)$x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

习题 2.1

1. 解:(1)$3x + 8 > 5x$;

(2)$x^2 \geqslant 0$;

(3)$S_1 > S_2$(S_1 表示地球上海洋面积,S_2 表示地球上陆地面积);

(4)$x > 2y$(x 表示老师的年龄,y 表示“我”的年龄);

(5)$a > b$(a 表示铅球的质量,b 表示篮球的质量).

2. 解:(1)小明有 x 支铅笔,小红有 y 支铅笔,他俩的铅笔总数量不超过 5 支.

(2)一个等腰三角形的腰长为 x cm,底边长为 1 cm,这个三角形的周长不小于 3 cm.

(答案不唯一)

3. 解:(1)根据题意,得 $600x + 100(10 - x) \geqslant 4\,200$.

(2)根据题意,得 $8x + 4(10 - x) \leqslant 72$.

点拨:(1)中注意“至少”的意思是“大于或等于”;(2)中原料的费用 = 原料的质量 × 原料价格.

4. 解:$x \leqslant 5$,$y \leqslant 10$.

2 不等式的基本性质

▶随堂练习(教材第 41 页)

1. 解:(1)根据不等式的基本性质 1,两边都加 1,得 $x - 1 + 1 > 2 + 1$,即 $x > 3$;

(2)根据不等式的基本性质 3,两边都除以 -1,得 $x > -\frac{5}{6}$;

(3)根据不等式的基本性质 2,两边都乘 2,得 $x < 6$.

2. 解:(1)不成立;(2)不成立;(3)成立;(4)成立.

习题 2.2

1. (1) $<$ (2) $<$ (3) $>$ (4) $<$

2. 解:(1)根据不等式的基本性质 1,两边都减 3,得 $x < -4$;

(2)根据不等式的基本性质 2,两边都除以 3,得 $x > 9$;

(3)根据不等式的基本性质 3,两边都乘 -3,得 $x < -15$;

(4)根据不等式的基本性质 1,两边都减 $4x$,得 $x < -6$.

3. 解:(1)$a < a + 2$.

(2)当 $a > 0$ 时,$2 < 2 + a$;

当 $a = 0$ 时,$2 = 2 + a$;

当 $a < 0$ 时,$2 > 2 + a$.

※(3)当 $a > 0$ 时,$a < 2a$;

当 $a = 0$ 时,$a = 2a = 0$;

当 $a < 0$ 时,$a > 2a$.

点拨:在(2)(3)题中,应考虑 a 的正负,a 的正负与不等号的方向有关.

4. 解:不等式的两边都乘(或除以)同一个负数,不等号的方向改变,而等式两边都乘(或除以)同一个负数,等式仍然成立.

例如,若 $3x < 6$,则 $(-2) \times 3x > (-2) \times 6$,即 $-6x > -12$;若 $3x = 6$,则 $-6x = -12$.

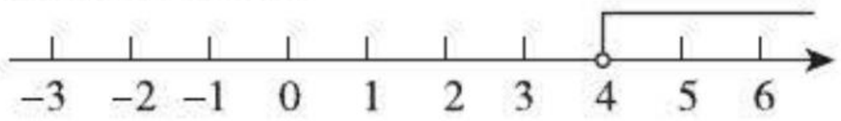
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 不等式的解集

▶随堂练习(教材第44页)

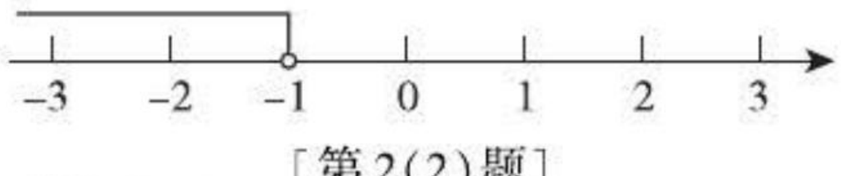
1. (1)√ (2)×

2. 解:(1)如图所示.



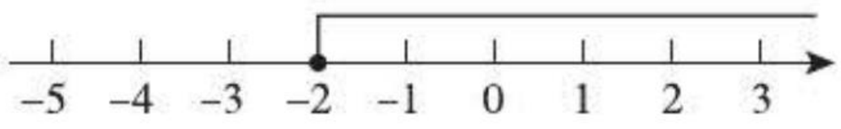
[第2(1)题]

(2)如图所示.



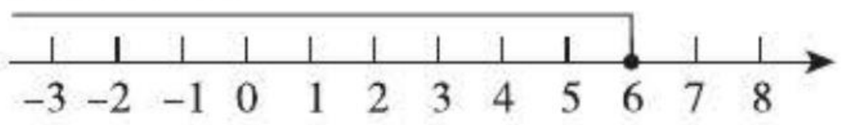
[第2(2)题]

(3)如图所示.



[第2(3)题]

(4)如图所示.

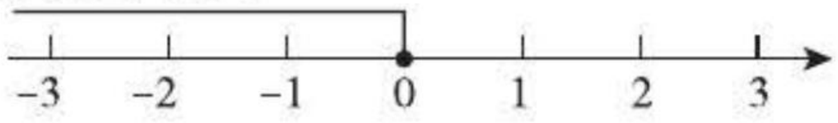


[第2(4)题]

习题2.3

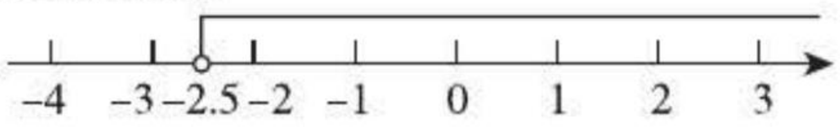
1. $-4;0,-4,3,-3,\frac{1}{5},4;-5,-10$

2. 解:(1)如图所示.



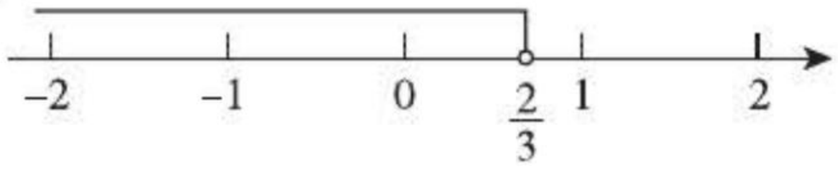
[第2(1)题]

(2)如图所示.



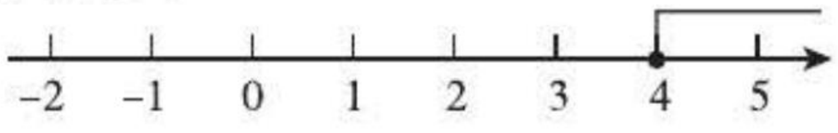
[第2(2)题]

(3)如图所示.



[第2(3)题]

(4)如图所示.



[第2(4)题]

点拨:在数轴上表示不等式的解集时,要注意实心圆点与空心圆圈的区别.

3. 解:(1)不等式 $x<\frac{10}{3}$ 有无数个解. 如 $x=2,0,-1,-\frac{7}{2}$ 等.

(2)不等式 $x<\frac{10}{3}$ 有3个正整数解. $x=1,2,3$.

4. 解:设这个物体的重力为 x N,则 $x>50$.

点拨:弹簧没有恢复原状,说明物体的重力超过了弹簧测力计的测量范围.

4 一元一次不等式

▶随堂练习(教材第47页)

1. 解:(1)两边都除以5,得 $x<40$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第1(1)题]

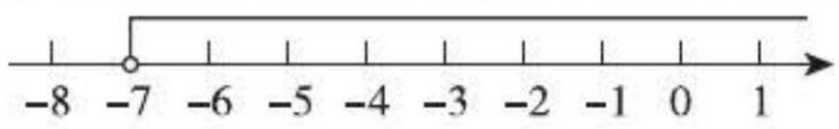
(2)去分母,得 $-(x+1)<6$.

去括号,得 $-x-1<6$.

移项、合并同类项,得 $-x<7$.

两边都乘 -1,得 $x>-7$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



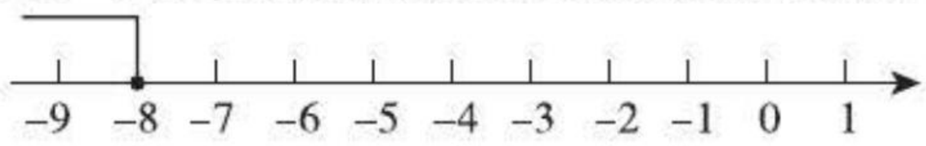
[第1(2)题]

(3)去括号,得 $x-4\geqslant 2x+4$.

移项、合并同类项,得 $-x\geqslant 8$.

两边都除以 -1,得 $x\leqslant -8$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第1(3)题]

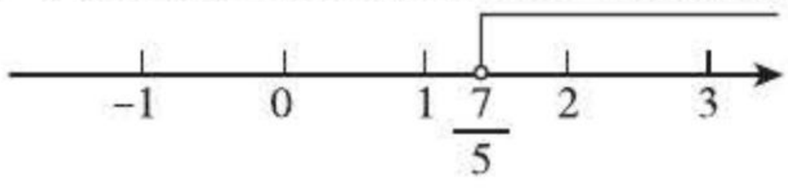
(4)去分母,得 $3(x-1)<2(4x-5)$.

去括号,得 $3x-3<8x-10$.

移项、合并同类项,得 $-5x<-7$.

两边都除以 -5,得 $x>\frac{7}{5}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第1(4)题]

2. 解:去括号,得 $4x+4\leqslant 24$.

移项、合并同类项,得 $4x\leqslant 20$.

两边都除以4,得 $x\leqslant 5$.

∴不等式的正整数解为 $x=1,2,3,4,5$.

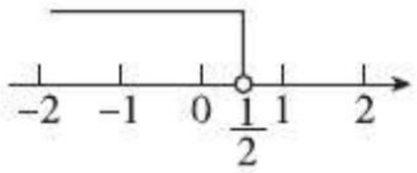
习题2.4

1. 解:(1)移项、合并同类项,得 $-8x>-4$.

两边都除以 -8,得 $x<\frac{1}{2}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



[第1(1)题]

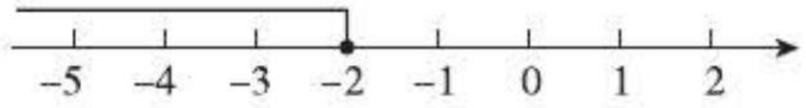
(2)去分母,得 $2(1-2x)\geqslant 4-3x$.

去括号,得 $2-4x\geqslant 4-3x$.

移项、合并同类项,得 $-x\geqslant 2$.

两边都除以 -1,得 $x\leqslant -2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



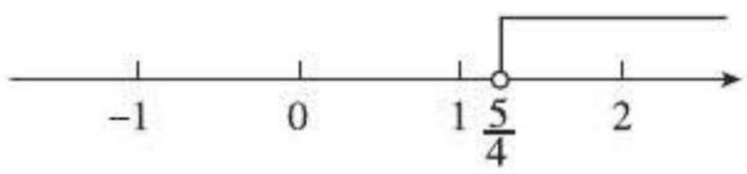
[第1(2)题]

(3)去分母,得 $x+5<5x$.

移项、合并同类项,得 $-4x<-5$.

两边都除以 -4,得 $x>\frac{5}{4}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



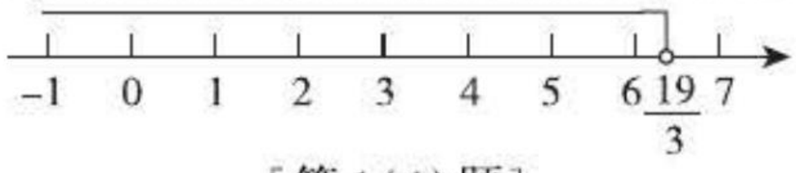
[第1(3)题]

(4)去分母,得 $x+3>7x-35$.

移项、合并同类项,得 $-6x>-38$.

两边都除以 -6,得 $x<\frac{19}{3}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.

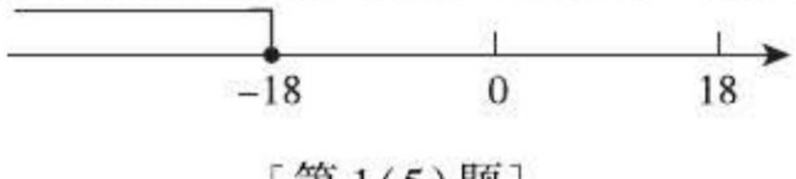


[第1(4)题]

(5)去分母,得 $3x+12\leqslant 2x-6$.

移项、合并同类项,得 $x\leqslant -18$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



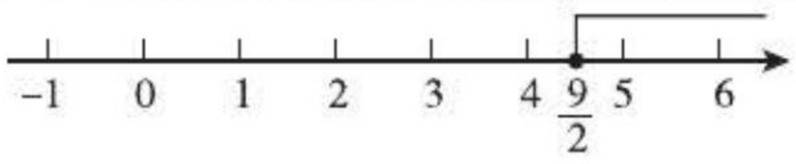
[第1(5)题]

(6)去括号,得 $6x-6\geqslant 3+4x$.

移项、合并同类项,得 $2x\geqslant 9$.

两边都除以2,得 $x\geqslant\frac{9}{2}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第1(6)题]

点拨:解不等式时一定要注意,移项要变号,去分母时不要漏乘没有分母的项,当不等式两边都乘(或除以)同一个负数时,不等号的方向改变.

2. 解:设三个连续正偶数中间的数为 x,则另外两个分别为 $x-2$,$x+2$.

根据题意,得 $x-2+x+x+2<19$.

解这个不等式,得 $x<\frac{19}{3}$.

∵ x 为三个连续正偶数中间的数,

∴ x 的值为4或6.

∴ 这样的正偶数组共有两组,分别为2,4,6或4,6,8.

3. 解:他的解法有错误. 错误之处:(1)去分母时,公分母2漏乘"-1"项;(2)两边都除以 -2 后,不等号的方向没有改变.

▶随堂练习(教材第49页)

1. 解:设打 x 折出售.

根据题意,得 $500\times\frac{x}{10}\geqslant 400(1+10\%)$.

解这个不等式,得 $x\geqslant 8.8$.

∴ 要保持利润率不低于10%,至多可打八八折.

2. 解:设他还能买 x 根火腿肠.

根据题意,得 $2x+3\times 5\leqslant 26$.

解这个不等式,得 $x\leqslant\frac{11}{2}$.

∵ x 只能取正整数,

∴ 他最多还能买5根火腿肠.

点拨:解本题应先列出不等式,再求出解集,从解集中找到符合条件的未知数的值即可.

习题2.5

1. 解:(1)去分母,得 $x-5+2>2(x-3)$.

去括号,得 $x-5+2>2x-6$.

移项、合并同类项,得 $-x>-3$.

两边都除以 -1,得 $x<3$.

(2)去分母,得 $-3x+x\leqslant -15$.

合并同类项,得 $-2x\leqslant -15$.

两边都除以 -2,得 $x\geqslant\frac{15}{2}$.

(3)去分母,得 $5x-30<15-3x$.

移项、合并同类项,得 $8x<45$.

两边都除以8,得 $x<\frac{45}{8}$.

(4)去括号,得 $x-3x+1\leqslant x+2$.

移项、合并同类项,得 $-3x\leqslant 1$.

两边都除以 -3,得 $x\geqslant -\frac{1}{3}$.

点拨:去分母时,不要漏乘没有分母的项,两边都乘(或除以)同一个负数时,不要忘记改变不等号的方向.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解:设还能买 x 本辞典.

根据题意,得 $40x+65\times20\leqslant2\ 000$.

解这个不等式,得 $x\leqslant17\ \frac{1}{2}$.

$\because x$ 为整数,$\therefore$ 最多还能买 17 本辞典.

3. 解:设她还能买 x 支笔.

根据题意,得 $3x+2.2\times2\leqslant21$.

解这个不等式,得 $x\leqslant5\ \frac{8}{15}$.

$\because x$ 为正整数,$\therefore$ 她还可能买 1 支、2 支、3 支、4 支或 5 支笔.

4. 解:设需要 x 名八年级学生参加活动,则需要 $(60-x)$ 名七年级学生参加活动.

根据题意,得 $20x+(60-x)\times15\geqslant1\ 000$.

解得 $x\geqslant20$.

$\therefore$ 至少需要 20 名八年级学生参加活动.

点拨:准确理解题中关键词语的内在含义是解答此类题的关键,如"不少于""至少""最多"等.

5 一元一次不等式与一次函数

▶随堂练习(教材第 50 页)

解:$y_1>y_2$,即 $-x+3>3x-4$,解得 $x<\frac{7}{4}$.

$\therefore$ 当 $x<\frac{7}{4}$ 时,$y_1>y_2$.

习题 2.6

1. 解:$y_1<y_2$,即 $-x+3<3x-4$,解得 $x>\frac{7}{4}$.

$\therefore$ 当 $x>\frac{7}{4}$ 时,$y_1<y_2$.

2. 解:由图象可以看出,当该产品的销售量达到 4 t 以上时,生产该产品才能赢利.

点拨:当 x 为 4 时,销售收入与销售成本相等. 当 $x>4$ 时,销售收入大于销售成本,即生产该产品赢利.

3. 解:(1)观察图象可知,行驶 20 km,甲共用了 0.6 h,乙共用了 0.5 h,$\therefore$ 乙摩托车的速度较快.

(2)设 l_1 的函数关系式为 $s=kt(k\neq0)$.

由图象可知 l_1 过点 $(0.6,20)$.

将点 $(0.6,20)$ 的坐标代入 $s=kt$,得 $20=0.6k$.

解得 $k=\frac{100}{3}$. $\therefore s=\frac{100}{3}t$.

设 l_2 的函数关系式为 $s=at+b$. 由图象可知 l_2 过点 $(0,20)$ 和 $(0.5,0)$. 将点 $(0,20)$ 和 $(0.5,0)$ 的坐标代入 $s=at+b$,得 $\begin{cases}b=20,\\0.5a+b=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-40,\\b=20.\end{cases}$ $\therefore s=-40t+20$.

解方程组 $\begin{cases}s=\frac{100}{3}t,\\s=-40t+20,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}t=\frac{3}{11},\\s=\frac{100}{11}.\end{cases}$

$\therefore l_1$ 和 l_2 的交点坐标为 $\left(\frac{3}{11},\frac{100}{11}\right)$.

$\therefore$ 当 $0\leqslant t<\frac{3}{11}$ 时,甲摩托车离 A 地的距离小于乙摩托车离 A 地的距离,即甲摩托车离 B 地的距离大于乙摩托车离 B 地的距离.

4. 解:小明和小新同时去上学,从家到学校的距离都是 2 km,小明走路去学校,走路的速度为 6 km/h,小新跑步去学校,跑步的速度为 10 km/h. 当小新到达学校时,小明至少还需要多长时间才能到达学校?

设小明还需要 x h 才能到达学校.

根据题意,得 $6\times\left(x+\frac{2}{10}\right)\geqslant2$,解得 $x\geqslant\frac{2}{15}$.

$\frac{2}{15}$ h = 8 min.

$\therefore$ 小明至少还需要 8 min 才能到达学校.

(答案不唯一)

▶随堂练习(教材第 52 页)

解:设公司有女员工 x 名,则男员工有 $(40-x)$ 名,购买团体票所需的费用为 y_1 元,购买妇女节活动票所需的费用为 y_2 元.

则 $y_1=30\times40\times0.8=960$.

$y_2=30\times0.5x+30\times(40-x)=1\ 200-15x$.

由 $y_1=y_2$,得 $960=1\ 200-15x$,

解得 $x=16$;

由 $y_1>y_2$,得 $960>1\ 200-15x$,

解得 $x>16$;

由 $y_1<y_2$,得 $960<1\ 200-15x$,

解得 $x<16$.

$\therefore$ 当 $x=16$ 时,两种方案同样优惠;

当 $x>16$ 时,选择购买妇女节活动票更优惠;

当 $x<16$ 时,选择购买团体票更优惠.

习题 2.7

1. 解:设制作 x 份材料时,甲公司收费 y_1 元,乙公司收费 y_2 元.

根据题意,得 $y_1=20x+3\ 000$,$y_2=30x$.

(1)由 $y_1<y_2$,得 $20x+3\ 000<30x$,

解得 $x>300$.

$\therefore$ 当制作 300 份以上时,选择甲公司比较合算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)由 $y_1 > y_2$,得 $20x + 3\ 000 > 30x$,

解得 $x < 300$.

∴ 当制作 300 份以下时,选择乙公司比较合算.

(3)由 $y_1 = y_2$,得 $20x + 3\ 000 = 30x$,

解得 $x = 300$.

∴ 当制作 300 份时,两公司的收费相同.

2. 解:设购买 x 台电脑时,选择甲商场花费 y_1 元,选择乙商场花费 y_2 元.

则 $y_1 = 6\ 000 + 6\ 000 \times (1 - 25\%)(x - 1) = 1\ 500 + 4\ 500x$;

$y_2 = 6\ 000 \times (1 - 20\%)x = 4\ 800x$.

(1)由 $y_1 < y_2$,得 $1\ 500 + 4\ 500x < 4\ 800x$,

解得 $x > 5$.

∴ 当购买 5 台以上时,到甲商场购买更优惠.

(2)由 $y_1 > y_2$,得 $1\ 500 + 4\ 500x > 4\ 800x$,

解得 $x < 5$.

∴ 当购买 5 台以下时,到乙商场购买更优惠.

(3)由 $y_1 = y_2$,得 $1\ 500 + 4\ 500x = 4\ 800x$,

解得 $x = 5$.

∴ 当购买 5 台时,两家商场的收费相同.

3. 解:(1)$y_1 = 0.58x$,$y_2 = 600 + 0.28x$.

(2)由 $1\ 500 = 0.58x$,得 $x \approx 2\ 586$.

由 $1\ 500 = 600 + 0.28x$,得 $x \approx 3\ 214$.

∴ 当公司只支出运费 1 500 元时,选用公路运输方式运送的牛奶多.

当 $x = 1\ 500$ 时,$0.58x = 870$,$600 + 0.28x = 1\ 020$.

∴ 当公司运送1 500 kg牛奶时,选用铁路运输方式所需费用较少.

6 一元一次不等式组

▶随堂练习(教材第 55 页)

1. 解:(1)$\begin{cases} 2x > 1, & ① \\ x - 3 < 0. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x > \frac{1}{2}$.

解不等式②,得 $x < 3$.

∴ 原不等式组的解集是 $\frac{1}{2} < x < 3$.

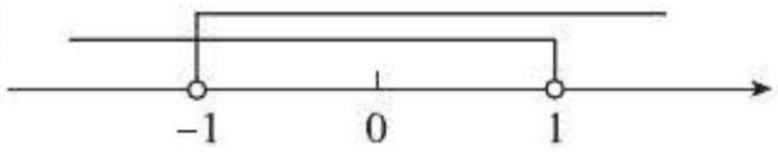
(2)$\begin{cases} x - 2 > -1, & ① \\ 3x + 1 < 8. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x > 1$.

解不等式②,得 $x < \frac{7}{3}$.

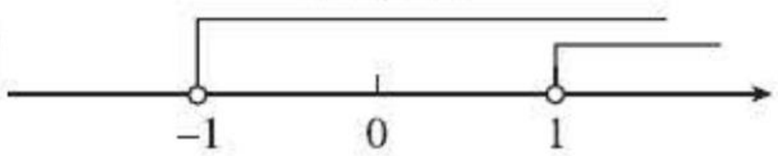
∴ 原不等式组的解集是 $1 < x < \frac{7}{3}$.

2.(1)



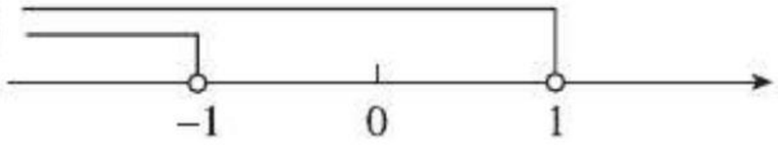
$-1 < x < 1$

(2)



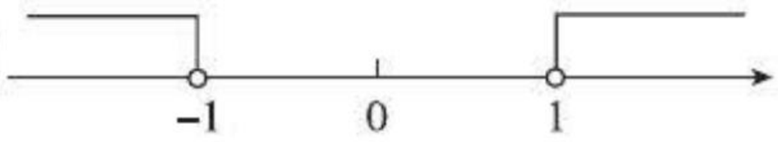
$x > 1$

(3)



$x < -1$

(4)



无解

习题 2.8

1. 解:(1)$\begin{cases} x - 5 < 1, & ① \\ 2x > 3. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x < 6$.

解不等式②,得 $x > \frac{3}{2}$.

∴ 原不等式组的解集是 $\frac{3}{2} < x < 6$.

(2)$\begin{cases} 2x - 5 > 0, & ① \\ 3 - x < -1. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x > \frac{5}{2}$.

解不等式②,得 $x > 4$.

∴ 原不等式组的解集是 $x > 4$.

(3)$\begin{cases} 3x - 1 > 5, & ① \\ 2x < 6. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x > 2$.

解不等式②,得 $x < 3$.

∴ 原不等式组的解集是 $2 < x < 3$.

(4)$\begin{cases} \frac{1}{2}x > \frac{1}{3}x, & ① \\ 4x - 3 \geqslant 1. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x > 0$.

解不等式②,得 $x \geqslant 1$.

∴ 原不等式组的解集是 $x \geqslant 1$.

(5)$\begin{cases} -2x \geqslant 0, & ① \\ 3x + 5 \leqslant 0. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x \leqslant 0$.

解不等式②,得 $x \leqslant -\frac{5}{3}$.

∴ 原不等式组的解集是 $x \leqslant -\frac{5}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(6) $\begin{cases}\frac{x+1}{2}>1, & ①\\ 7x-8<9x. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>1$.

解不等式②,得 $x>-4$.

∴ 原不等式组的解集是 $x>1$.

点拨:可以利用下面的口诀确定不等式组的解集:同大取大;同小取小;大小小大中间找;大大小小无处找.

2. 解:不等式组 $\begin{cases}3x-7>x,\\ 2-5x<2x\end{cases}$ 的解集既是 $3x-7>x$ 的解集的一部分,又是 $2-5x<2x$ 的解集的一部分.

不等式 $3x-7>x$ 的解集和不等式 $2-5x<2x$ 的解集的公共部分是不等式组 $\begin{cases}3x-7>x,\\ 2-5x<2x\end{cases}$ 的解集.

※3. 解:∵ 一元一次不等式组 $\begin{cases}x>3,\\ x>a\end{cases}$ 的解集为 $x>3$,

∴ $a\leqslant 3$,即 a 的取值范围为 $a\leqslant 3$.

※4. 解:设这台装载机大约要用 x h 才能将这堆石料装完.

根据题意,得 $\begin{cases}50x\geqslant 1\,800, & ①\\ 50x\leqslant 2\,200. & ②\end{cases}$

由①,得 $x\geqslant 36$.

由②,得 $x\leqslant 44$.

∴ 该不等式组的解集为 $36\leqslant x\leqslant 44$.

答:这台装载机要用 36 ~ 44 h 才能将这堆石料装完.

▶随堂练习(教材第 58 页)

1. 解:(1) $\begin{cases}x+3<5, & ①\\ 3x-1>8. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<2$.

解不等式②,得 $x>3$.

∴ 原不等式组无解.

(2) $\begin{cases}\frac{x}{2}+1<2(x-1), & ①\\ \frac{x}{3}>\frac{x+2}{5}. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>2$.

解不等式②,得 $x>3$.

∴ 原不等式组的解集是 $x>3$.

2. 解: $\begin{cases}4(x+5)>100, & ①\\ 4(x-5)<68. & ②\end{cases}$

由①,得 $x>20$.

由②,得 $x<22$.

∴ 原不等式组的解集是 $20<x<22$.

答:该校计划每月烧煤超过 20 t,但不足 22 t.

习题 2.9

1. 解:(1) $\begin{cases}x-1>2x, & ①\\ \frac{x}{2}+3<-2. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<-1$.

解不等式②,得 $x<-10$.

∴ 原不等式组的解集是 $x<-10$.

(2) $\begin{cases}2x+5\leqslant 3(x+2), & ①\\ \frac{x-1}{2}<\frac{x}{3}. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\geqslant -1$.

解不等式②,得 $x<3$.

∴ 原不等式组的解集是 $-1\leqslant x<3$.

(3) $\begin{cases}0.2x>0.3x+1, & ①\\ 0.5x-1<0.2. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<-10$.

解不等式②,得 $x<2.4$.

∴ 原不等式组的解集是 $x<-10$.

(4) $\begin{cases}x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{4}, & ①\\ \frac{x}{3}+\frac{x}{2}\geqslant -1. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\leqslant\frac{3}{4}$.

解不等式②,得 $x\geqslant -\frac{6}{5}$.

∴ 原不等式组的解集是 $-\frac{6}{5}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$.

2. 解:依题意,得 $\begin{cases}3<1-a, & ①\\ 1-a<1-2a. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $a<-2$.

解不等式②,得 $a<0$.

∴ a 的取值范围为 $a<-2$.

3. 解:(答案不唯一)不等式组为 $\begin{cases}-2x\leqslant 0, & ①\\ x+1\leqslant 9. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\geqslant 0$.

解不等式②,得 $x\leqslant 8$.

∴ 原不等式组的解集为 $0\leqslant x\leqslant 8$.

4. 解: $\begin{cases}2x-a<1, & ①\\ x-2b>3. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<\frac{a+1}{2}$.

解不等式②,得 $x>2b+3$.

∵ 不等式组的解集为 $-1<x<1$,

∴ $\begin{cases}\frac{a+1}{2}=1,\\ 2b+3=-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore (a+1)(b-1)=(1+1)\times(-2-1)=2\times(-3)=-6.$

复习题

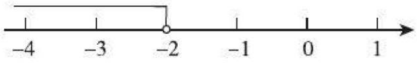
1. $a>0;a<0$

2. 解:(1)移项,得 $2x<-1-3$.

合并同类项,得 $2x<-4$.

两边都除以 2,得 $x<-2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



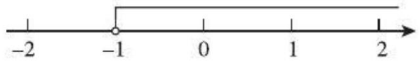
[第 2(1)题]

(2)移项,得 $-2x-x<4-1$.

合并同类项,得 $-3x<3$.

两边都除以 -3,得 $x>-1$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 2(2)题]

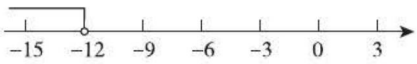
(3)去括号,得 $-6+2x>3x+6$.

移项,得 $2x-3x>6+6$.

合并同类项,得 $-x>12$.

两边都除以 -1,得 $x<-12$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



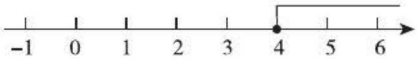
[第 2(3)题]

(4)去分母,得 $3x-2(x-1)\geqslant 6$.

去括号,得 $3x-2x+2\geqslant 6$.

移项、合并同类项,得 $x\geqslant 4$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 2(4)题]

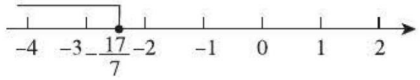
(5)去分母,得 $2(2x+1)\leqslant -3(x+5)$.

去括号,得 $4x+2\leqslant -3x-15$.

移项、合并同类项,得 $7x\leqslant -17$.

两边都除以 7,得 $x\leqslant -\frac{17}{7}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



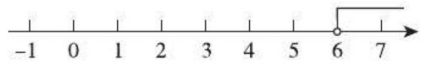
[第 2(5)题]

(6)去分母,得 $6x+3x+2x>66$.

合并同类项,得 $11x>66$.

两边都除以 11,得 $x>6$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 2(6)题]

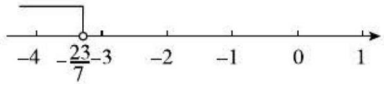
(7)去分母,得 $7x+5-14>14(x+1)$.

去括号,得 $7x+5-14>14x+14$.

移项、合并同类项,得 $-7x>23$.

两边都除以 -7,得 $x<-\frac{23}{7}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 2(7)题]

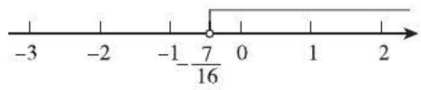
(8)去分母,得 $5(1+2x)-2(1-3x)>-4$.

去括号,得 $5+10x-2+6x>-4$.

移项、合并同类项,得 $16x>-7$.

两边都除以 16,得 $x>-\frac{7}{16}$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 2(8)题]

3. 解:(1)$x+1<0$;

(2)$x^2\geqslant 0$;

(3)$2x-(-3)<0$;

(4)$10\leqslant 5a-3\leqslant 20$.

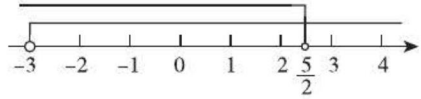
4. 解:(1)不等式组可化为 $\begin{cases}2x+1>-5, & ①\\ 2x+1<6. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>-3$.

解不等式②,得 $x<\frac{5}{2}$.

$\therefore$ 原不等式组的解集是 $-3<x<\frac{5}{2}$.

这个不等式组的解集在数轴上的表示如图所示.



[第 4(1)题]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

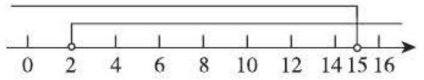
(2)不等式组可化为$\begin{cases}1-\frac{1}{5}x>-2, & ①\\ 1-\frac{1}{5}x<\frac{3}{5}. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x<15$.

解不等式②,得$x>2$.

∴ 原不等式组的解集是$2<x<15$.

这个不等式组的解集在数轴上的表示如图所示.



[第4(2)题]

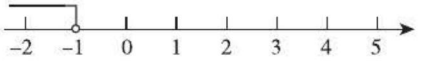
(3)$\begin{cases}8x+5>9x+6, & ①\\ 2x-1<7. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x<-1$.

解不等式②,得$x<4$.

∴ 原不等式组的解集是$x<-1$.

这个不等式组的解集在数轴上的表示如图所示.



[第4(3)题]

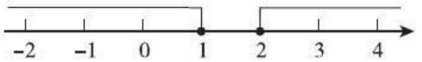
(4)$\begin{cases}2x+3\leqslant 5, & ①\\ 3x-2\geqslant 4. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x\leqslant 1$.

解不等式②,得$x\geqslant 2$.

∴ 原不等式组无解.

在数轴上的表示如图所示.



[第4(4)题]

5. 解:(1)当$y>0$时,$3x+5>0$,

解得$x>-\frac{5}{3}$.

∴ 当$x>-\frac{5}{3}$时,$y>0$.

(2)当$y=0$时,$3x+5=0$,

解得$x=-\frac{5}{3}$.

∴ 当$x=-\frac{5}{3}$时,$y=0$.

(3)当$y<0$时,$3x+5<0$,

解得$x<-\frac{5}{3}$.

∴ 当$x<-\frac{5}{3}$时,$y<0$.

6. 解:去括号,得$5x-10\leqslant 28+2x$.

移项、合并同类项,得$3x\leqslant 38$.

两边都除以3,得$x\leqslant\frac{38}{3}$.

∵ 小于或等于$\frac{38}{3}$的正整数有1,2,3,…,12,

∴ 原不等式的正整数解是$x=1,2,3,\cdots,12$.

7. 解:(1)$\begin{cases}\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\leqslant 1, & ①\\ 5x-1<3(x+1). & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x\geqslant -1$.

解不等式②,得$x<2$.

∴ 原不等式组的解集为$-1\leqslant x<2$.

(2)$\begin{cases}2x-7<3(x-1), & ①\\ \frac{4}{3}x+3\geqslant 1-\frac{2}{3}x. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x>-4$.

解不等式②,得$x\geqslant -1$.

∴ 原不等式组的解集为$x\geqslant -1$.

8. (1)√ (2)√ (3)√ (4)√ (5)× (6)×

9. (1)> (2)< (3)< (4)> (5)< (6)<

※10. B **点拨:**由$x+8<4x-1$,得$x>3$. ∵ 不等式组$\begin{cases}x+8<4x-1,\\ x>m\end{cases}$的解集是$x>3$,∴ $m\leqslant 3$.

※11. (1)< (2)> (3)>

12. 解:设甲旅行社收费为y_1元,乙旅行社收费为y_2元.

由题意,得$y_1=500\times 2+500\times 0.7x$,

即$y_1=350x+1\,000$.

$y_2=(500\times 0.8)(x+2)$,

即$y_2=400x+800$.

当$y_1>y_2$时,$350x+1\,000>400x+800$,

解得$x<4$(x为正整数);

当$y_1=y_2$时,$350x+1\,000=400x+800$,

解得$x=4$;

当$y_1<y_2$时,$350x+1\,000<400x+800$,

解得$x>4$(x为正整数).

∴ 当$x=4$时,选择两家旅行社均可;

当$x>4$时,应选择甲旅行社;

当$x<4$时,应选择乙旅行社.

13. 解:设这批水果的质量为x,进价为y.

(1)由题意可得这批水果的成本为$x\cdot y$. 若在进价的基础上提高5%作为售价,运输过程中质量损失5%,则全部售出共收入$(1-5\%)x\cdot(1+5\%)y=0.997\,5xy<xy$,∴ 超市亏本.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设这种水果的售价提高的百分比为 a,

则 $(1-5\%)x\cdot(1+a)y\geqslant(1+20\%)xy$.

解得 $a\geqslant\frac{5}{19}\approx26.4\%$.

∴ 这种水果的售价最低应提高 26.4%.

14. **解**:解方程 $3x+a=x-7$,得 $x=\frac{-a-7}{2}$.

根据题意,得 $\frac{-a-7}{2}>0$,解得 $a<-7$.

15. **解**:设招聘 A 工种工人 x 人,则招聘 B 工种工人 $(150-x)$ 人.

由题意得 $150-x\geqslant2x$,解得 $x\leqslant50$.

设每月所付的工资总额为 y 元,则 $y=1\,500x+3\,000(150-x)=450\,000-1\,500x$.

随着 x 值的增大,y 值将减小.

∴ 当 $x=50$ 时,每月所付的工资总额最少.

答:招聘 A 工种工人 50 人时,可使每月所付的工资总额最少.

16. **解**:(1) $>$; $=$; $>$; $=$

(2)任意两个数的平方和大于或等于这两个数乘积的 2 倍. 用含有字母 a,b 的式子表示为 $a^2+b^2\geqslant2ab$.

例如,$3^2+4^2>2\times3\times4$,$5^2+5^2=2\times5\times5$.

(举例不唯一,合理即可)

※(3)∵ $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant0$,

∴ $a^2+b^2\geqslant2ab$.

第三章 图形的平移与旋转

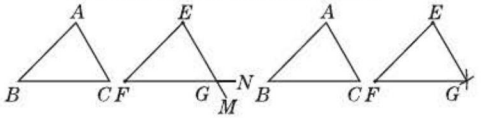
1 图形的平移

▶随堂练习(教材第 67 页)

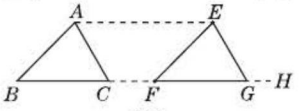
解:平移线段 AB 可以使 AB 与 CD 重合;平移线段 AB 不能使 AB 与 EF 重合.

习题 3.1

1. **解**:**画法一** 分别过点 E,F 作与 AC 平行、与 BC 共线的射线 EM,FN,两条射线相交于点 G,则 $\triangle EFG$ 就是所求作的三角形,如图(1).



(1) (2)



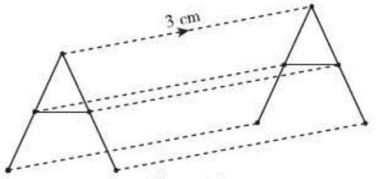
(3)

(第 1 题)

画法二 分别以点 E,F 为圆心,以线段 AC,BC 的长为半径画弧,两弧在 EF 的右侧相交于点 G,连接 EG,FG,则 $\triangle EFG$ 即为所求作的三角形,如图(2).

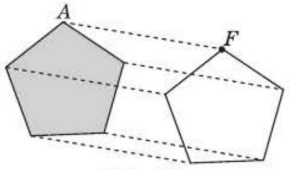
画法三 连接 AE,过点 C 作射线 CH,使 $CH\parallel AE$,在射线 CH 上截取 $CG=AE$,连接 EG,FG,则 $\triangle EFG$ 就是所求作的三角形,如图(3).

2. **解**:如图,在字母 A 上找出关键的 5 个点,分别以这 5 个点为端点,按箭头所指的方向作长 3 cm 的线段,得到各关键点的对应点. 按原来的方式连接相应的点,即可得到字母 A 平移后的图形.



(第 2 题)

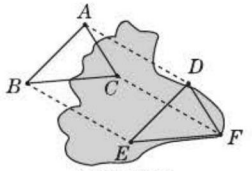
3. **解**:如图所示.



(第 3 题)

4. **解**:不是平移,因为不符合平移的概念和特征.

5. **解**:如图所示.



(第 5 题)

▶随堂练习(教材第 70 页)

1. **解**:(1) $A_1(6,3)$,$B_1(3,0)$,$C_1(6,-3)$,$D_1(9,0)$.

点拨:将四边形 $ABCD$ 向右平移 6 个单位长度后,各顶点的纵坐标不变,横坐标增加 6 即可.

(2) $A_2(6,9)$,$B_2(3,6)$,$C_2(6,3)$,$D_2(9,6)$.

点拨:将四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 向上平移 6 个单位长度后,各顶点的横坐标不变,纵坐标增加 6 即可.

2. **解**:(1)将四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 向左平移 4 个单位长度,得到四边形 $A_3B_3C_3D_3$,形状、大小未发生变化.

(2)将四边形 $A_3B_3C_3D_3$ 向下平移 4 个单位长度,得到四边形 $A_4B_4C_4D_4$,形状、大小未发生变化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 3.2

1. 解:图略. 与原图形相比,各"顶点"的纵坐标不变,横坐标分别加 3,即是将原图形向右平移了 3 个单位长度,形状、大小未发生变化;原图形各"顶点"的横坐标不变,纵坐标分别加 3,即是将原图形向上平移了 3 个单位长度,形状、大小未发生变化.

2. 解:将第 1 题中的原图形向下平移 3 个单位长度,各顶点的坐标分别是(0,0),(1,−2),(3,−3),(1,−4),(0,−6),(−1,−4),(−3,−3),(−1,−2),(0,0);

将原图形向左平移3 个单位长度,各顶点的坐标分别是(−3,3),(−2,1),(0,0),(−2,−1),(−3,−3),(−4,−1),(−6,0),(−4,1),(−3,3).

3. 解:(1)∵ 平移后,"顶点"$A(4,4)$的对应点是$A'(4,0)$,

∴ 此平移是将原图形向下平移 4 个单位长度.

另外 6 个"顶点"坐标分别是(7,2),(6,2),(6,0),(2,0),(2,2),(1,2),平移后的对应"顶点"的坐标分别是(7,−2),(6,−2),(6,−4),(2,−4),(2,−2),(1,−2).

(2)题图(2)与题图(1)对应"顶点"的坐标之间的关系:横坐标不变,纵坐标相差 5.

将题图(1)向下平移 5 个单位长度得到题图(2).

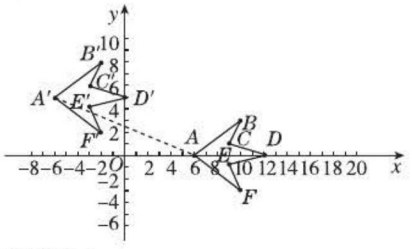
(3)题图(3)与题图(1)对应"顶点"的坐标之间的关系:纵坐标不变,横坐标相差 8.

将题图(1)向左平移 8 个单位长度得到题图(3).

4. 解:四边形的顶点坐标平移后可能得到四个对应顶点$A'(1,5)$,$B'(0,3)$,$C'(3,1)$,$D'(3,4)$;不可能得到四个对应顶点$A'(8,8)$,$B'(7,6)$,$C'(9,4)$,$D'(3,7)$.

▶随堂练习(教材第 73 页)

解:(1)如图所示.



(2)如图所示.

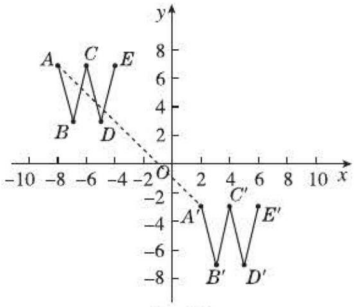
(3)如图,连接AA',易知$AA'=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$.

因此,将(1)中所画图形沿A到A'的方向平移 13 个单位长度即可得到(2)中所画图形.

平移后的横坐标等于平移前的横坐标减 12,平移后的纵坐标等于平移前的纵坐标加 5.

习题 3.3

1. 解:(1)如图所示.



(第 1 题)

(2)如图所示.

(3)如图,连接AA',由图可知$AA'=\sqrt{10^2+(-10)^2}=10\sqrt{2}$.

因此,将(1)中所画图形沿A到A'的方向平移$10\sqrt{2}$个单位长度即可得到(2)中所画图形.

平移后的横坐标等于平移前的横坐标加 10,平移后的纵坐标等于平移前的纵坐标减 10.

2. 解:第二次平移后四个对应顶点的坐标分别是(3,4),(7,4),(5,1),(1,1).

3. 解:平移后其他对应顶点的坐标分别是$B'(7,1)$,$C'(9,4)$,$D'(11,4)$,$E'(13,7)$.

点拨:平移后,各点的横坐标加 10,纵坐标加 4.

4. 解:题图(1)各"顶点"的横坐标分别减 5,纵坐标分别加 4,就得到题图(2)的对应"顶点"的坐标.

将题图(1)先向左平移 5 个单位长度,再向上平移 4 个单位长度就得到题图(2).(第二问答案不唯一)

5. 解:(1)不正确.

(2)$A'(0,0)$,$B'(-1,-3)$,$C'(1,-3)$或$A'(-1,0)$,$B'(-2,-3)$,$C'(0,-3)$或$A'(1,0)$,$B'(0,-3)$,$C'(2,-3)$.

2 图形的旋转

▶随堂练习(教材第 77 页)

1. 解:(1)旋转中心为A;旋转角有$\angle BAD$,$\angle CAE$,$\angle DAF$.

(2)相等的线段:$AB=AD$,$AC=AE$,$AD=AF$,$BC=DE$,$CD=EF$,$AB=AF$.

相等的角:$\angle BAC=\angle DAE$,$\angle BAD=\angle CAE=\angle DAF$,$\angle CAD=\angle EAF$,$\angle ABC=\angle ADE$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle ADC = \angle AFE$, $\angle BCD = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle DEA$, $\angle ACD = \angle AEF$.

2. 解：不能，不符合旋转的概念和特征.

习题 3.4

1. 解：旋转中心是点 B，旋转角是 40°.

2. 解：(1)旋转中心为吊扇中间转盘的中心.

(2)当第一个叶片转动到第二个叶片的位置时，它转过了 120°，转动到第三个叶片的位置时，它转过了 240°.

(3)在转动过程中，叶片的大小和形状都没有发生变化.

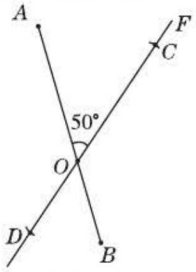
3. 解：不都一样.

4. 解：转动的飞机螺旋桨，排气扇的转动，手表上分针、秒针的转动.(答案不唯一)

5. 解：题图(3)可以由四边形 $ABCD$ 经过平移得到，题图(2)可以由四边形 $ABCD$ 经过旋转得到.

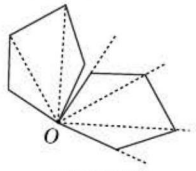
▶随堂练习(教材第 79 页)

1. 解：如图，过 O 在 AB 右侧作 $\angle AOF = 50°$，在 OF 上截取 $OC = OA$，延长 FO，在 FO 的延长线上截取 $OD = OB$，线段 CD 就是线段 AB 绕点 O 按顺时针方向旋转 50°后的线段.



(第 1 题)

2. 解：过点 O 分别作各个顶点与点 O 连线的垂线，并在每条垂线上截取与相应线段相等的线段，得到各个顶点绕点 O 按顺时针方向旋转 90°后的对应点，然后按原来的方式连接相应的顶点即可得到旋转后的图形(如图).

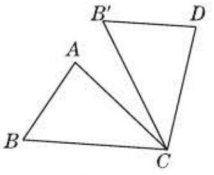


(第 2 题)

习题 3.5

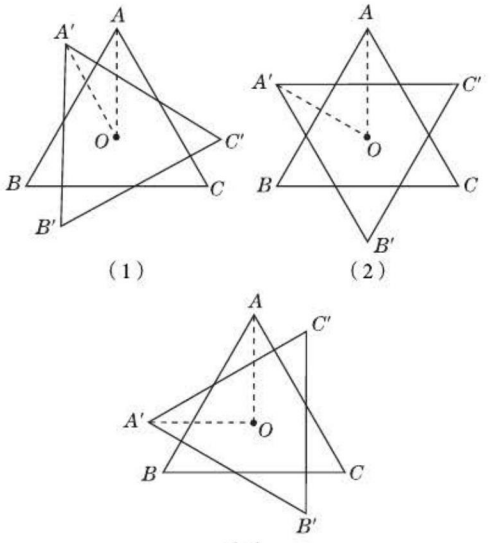
1. 解：(1)旋转角为 $\angle ACD$.

(2) $\triangle DB'C$ 即为 $\triangle ABC$ 旋转后的三角形，如图所示.



(第 1 题)

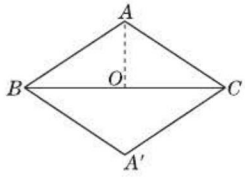
2. 解：$\triangle ABC$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 30°，60°，90°所得图形分别为图(1)(2)(3).



(第 2 题)

3. 解：将(甲)图案沿由 A 到 B 方向平移，使 A 与 B 重合；再将所得图案以 B 为旋转中心，按顺时针方向旋转 90°即可与(乙)图案重合.

4. 解：四边形 $ABA'C$ 如图所示.



(第 4 题)

变化过程如下：如图，过点 A 作 BC 边上的垂线交 BC 于点 O，以 O 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 按顺时针方向旋转 180°即可得到 $\triangle A'CB$.

(答案不唯一)

3 中心对称

▶随堂练习(教材第 83 页)

1. 解：中心对称图形有(1)(2)(3).

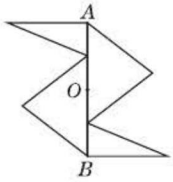
2. 解：第一张和第三张牌的牌面是中心对称图形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 3.6

1. 解:H,I,N,O,S,X,Z 是中心对称图形.

2. 解:如图所示.



(第 2 题)

3. 解:是轴对称图形但不是中心对称图形的有等腰三角形、正五边形、等腰梯形、五角星;既是轴对称图形又是中心对称图形的有正方形、长方形、圆.(答案不唯一)

4. 略.

4 简单的图案设计

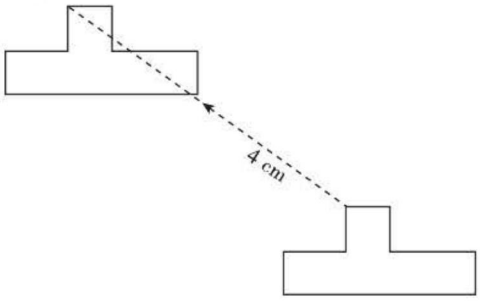
习题 3.7

1. 解:题图中的(1)(3)(4)可以看成是图案的$\frac{1}{2}$绕整个图案的中心旋转 180°,由旋转前后的图形共同形成;(2)可以看成是图案的三分之一绕整个图案的中心按同一方向分别旋转 120°,240°,由旋转前后的图形共同形成. 设计徽标略.

2. 略. **3.** 略.

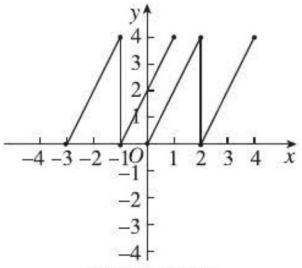
复习题

1. 解:如图所示.



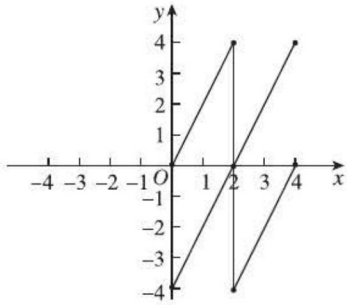
(第 1 题)

2. 解:(1)如图所示.



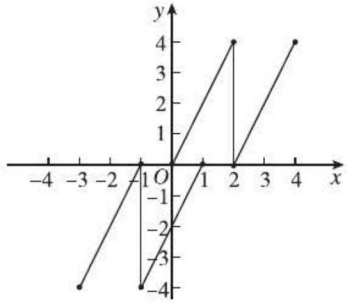
[第 2(1)题]

(2)如图所示.



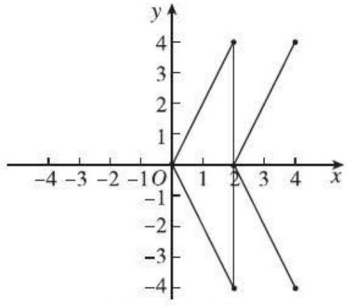
[第 2(2)题]

(3)如图所示.



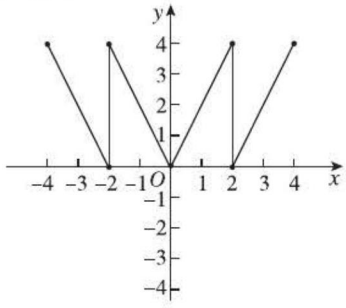
[第 2(3)题]

(4)如图所示.



[第 2(4)题]

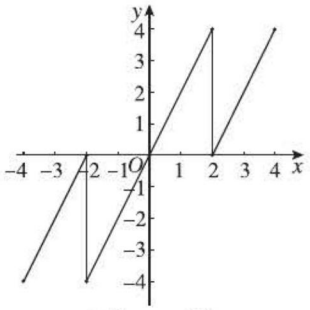
(5)如图所示.



[第 2(5)题]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(6)如图所示.



[第2(6)题]

3. 解:(1)图略. 所得的图案是由原图案向右平移5个单位长度得到的.

(2)图略. 所得的图案是由原图案向上平移7个单位长度得到的.

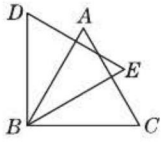
(3)图略. 所得的图案是由原图案先向右平移7个单位长度,再向上平移5个单位长度得到的.

(4)图略. 所得的图案与原图案关于纵轴对称.

(5)图略. 所得的图案与原图案关于横轴对称.

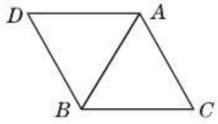
(6)图略. 所得的图案与原图案关于原点中心对称.

4. 解:(1)如图,$\triangle DBE$ 就是正三角形 ABC 绕顶点 B 按逆时针方向旋转30°后的图形.



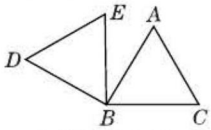
[第4(1)题]

(2)如图,$\triangle DBA$ 就是正三角形 ABC 绕顶点 B 按逆时针方向旋转60°后的图形.

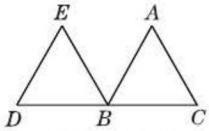


[第4(2)题]

(3)如图,$\triangle DBE$ 就是正三角形 ABC 绕顶点 B 按逆时针方向旋转90°后的图形.



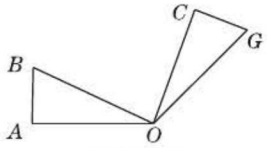
[第4(3)题]



[第4(4)题]

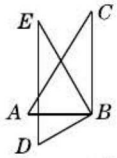
(4)如图,$\triangle DBE$ 就是正三角形 ABC 绕顶点 B 按逆时针方向旋转120°后的图形.

5. 解:如图,连接 OG,以 OA 为一边作 $\angle AOC$,使得 $\angle AOC=\angle BOG$,在射线 OC 上截取 $OC=OA$,连接 CG,则 $\triangle COG$ 就是 $\triangle AOB$ 绕点 O 旋转后的三角形.



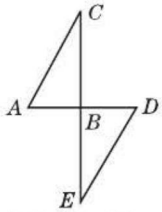
(第5题)

6. 解:(1)如图,以 AB 为一边,在 $\triangle ABC$ 的下方作 $\angle DBA=30°$,过点 B 作 $BE\perp BD$,使射线 BE 与边 AC 相交,在 BD,BE 上截取 $BD=AB$,$BE=BC$,连接 DE,则 $\triangle DBE$ 就是 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心,按逆时针方向旋转30°后的三角形.



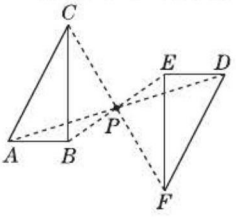
[第6(1)题]

(2)如图,分别延长边 AB,CB 到点 D,E,使 $BD=BA$,$BE=BC$,连接 DE,则 $\triangle DBE$ 就是 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心,按逆时针方向旋转180°后的三角形.

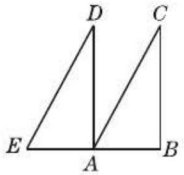


[第6(2)题]

(3)如图,分别连接 AP,BP,CP 并延长到点 D,E,F,使 $PD=PA$,$PE=PB$,$PF=PC$,连接 DE,EF,FD,则 $\triangle DEF$ 就是 $\triangle ABC$ 以点 P 为旋转中心,按逆时针方向旋转180°后的三角形.



[第6(3)题]

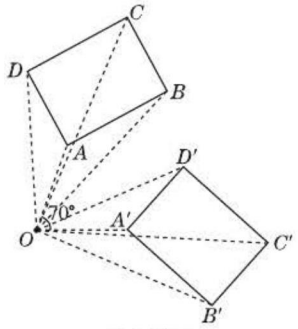


[第6(4)题]

(4)如图,按照 BC 的方向作线段 $AD\parallel BC$,且 $AD=BC$,延长 BA 到点 E,使 $AE=BA$,连接 ED,则 $\triangle EAD$ 就是 $\triangle ABC$ 平移后的三角形.

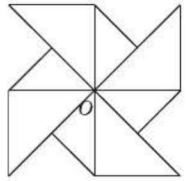
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:如图所示.



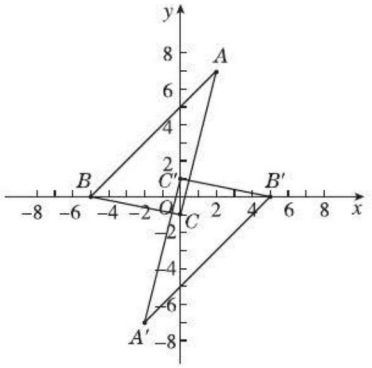
(第7题)

8. 解:如图所示.



(第8题)

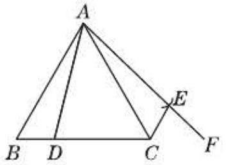
9. 解:如图,$\triangle A'B'C'$即为以原点为对称中心与$\triangle ABC$成中心对称的图形.



(第9题)

10. 解:不可以看成是平移,因为不符合平移的概念和特征.

11. 解:(1)在线段AD所在直线的右侧,作$\angle DAF = \angle BAC$,在射线AF上截取$AE = AD$,连接CE,则$\triangle ACE$就是$\triangle ABD$绕点A旋转后的图形,如图所示.



(第11题)

(2)∵ $\triangle ABC$为等边三角形,且直线$l // AB$,

∴ $AB = AC$,$\angle B = \angle BAC = \angle ACE = 60°$.

又∵ $BD = CE$,

∴ $\triangle ACE \cong \triangle ABD$,即$\triangle ACE$与$\triangle ABD$的大小和形状完全相同.

∴ $\triangle ACE$为旋转后的图形.

12. 解:$\triangle ABD$与$\triangle ACE$可以通过以点A为旋转中心的旋转变换相互得到,旋转角度为42°.

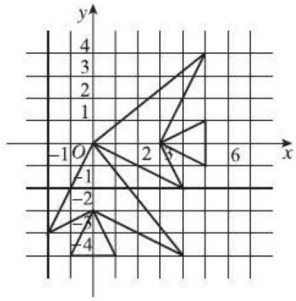
※13. 解:连接AA',BB',分别作AA'和BB'的垂直平分线l,l',且l与l'交于点O,点O即为所求的旋转中心. 图略.

点拨:旋转中心到两个对应点的距离相等.

14. (1)√ (2)× (3)× (4)√

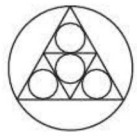
***15. 解**:(1)如图所示.

(2)旋转后新"鱼"各"顶点"的坐标分别为(0,0),(4,−5),(0,−3),(1,−5),(−1,−5),(0,−3),(−2,−4),(0,0).



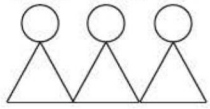
(第15题)

16. 解:如图所示,表示一个装饰灯.(答案不唯一)



(第16题)

17. 解:如图,一顶王冠.(答案不唯一)

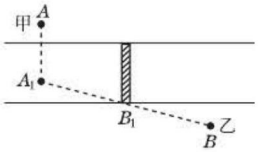


(第17题)

※18. 解:设甲、乙两个单位所处的位置分别为A,B.

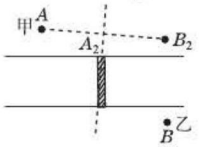
(1)如图,将点A沿竖直向下的方向平移到点A_1处,平移的距离等于街道宽,连接A_1B,与街道靠近B的一侧交于点B_1,过点B_1建桥即可.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



[第18(1)题]

(2)如图,作点 B 关于街道中心线的对称点 B_2,连接 AB_2,作 AB_2 的垂直平分线,与街道靠近 A 的一侧相交于点 A_2,过点 A_2 建桥即可.



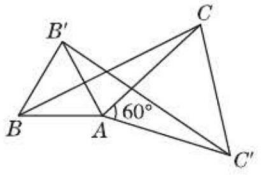
[第18(2)题]

19. 解:如图,将点 A 和点 B 沿相同的方向平移相同的距离,得到点 A',B',连接 $A'B'$,则 A',B' 之间的距离即为 A,B 之间的距离,隧道开凿的方向为射线 $A'B'$(或 $B'A'$)的方向.



(第19题)

20. 解:如图所示.



(第20题)

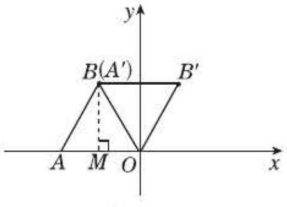
$\triangle ABB'$ 是等边三角形,$\triangle ACC'$ 是等边三角形.

21. 解:(1)如图,过 B 作 $BM \perp OA$ 于 M,

则 $OM = \frac{1}{2}OA = 1$.

$\therefore BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$\therefore \triangle OAB$ 各顶点的坐标分别是 $O(0,0)$,$A(-2,0)$,$B(-1,\sqrt{3})$.



(第21题)

(2)$\triangle OA'B'$ 的位置如图所示.

$A'(-1,\sqrt{3})$,$B'(1,\sqrt{3})$.

第四章 因式分解

1 因式分解

▶**随堂练习(教材第93页)**

1. 解:$9-25x^2$ 连$(3-5x)(3+5x)$;

x^2+6x+9连$(x+3)^2$;

$xy-y^2$ 连$y(x-y)$.

点拨:利用整式乘法是因式分解的逆过程来判断.

2. 解:(2)(4)是因式分解. 因为只有(2)(4)是把一个多项式化成几个整式的积的形式.

习题 4.1

1. 解:x^2+4x+4 连$(x+2)^2$;

x^2-2x+1 连$(x-1)^2$;

$4x^2-1$ 连$(2x-1)(2x+1)$;

x^2-4 连$(x+2)(x-2)$.

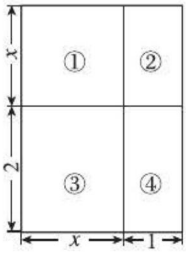
2. 解:(2)(3)是因式分解.

3. 解:$\because IR_1+IR_2+IR_3 = I(R_1+R_2+R_3)$,

$\therefore$ 当 $R_1=24.2$,$R_2=36.4$,$R_3=39.4$,$I=2.5$时,

原式 $= 2.5\times(24.2+36.4+39.4) = 2.5\times 100 = 250$.

4. 解:如图所示.



(第4题)

多项式的因式分解:$x^2+x+2x+2 = (x+2)(x+1)$.

5. 解:(1)$\because 1\,999^2+1\,999 = 1\,999\times(1\,999+1) = 1\,999\times 2\,000$,

$\therefore 1\,999^2+1\,999$能被 1 999 整除,也能被2 000整除.

(2)$\because 16.9\times\frac{1}{8}+15.1\times\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\times(16.9+15.1) = \frac{1}{8}\times 32 = 4$,

$\therefore 16.9\times\frac{1}{8}+15.1\times\frac{1}{8}$能被4整除.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 提公因式法

▶随堂练习(教材第96页)

解:(1)$ma+mb=m(a+b)$;

(2)$5y^3+20y^2=5y^2(y+4)$;

(3)$6x-9xy=3x(2-3y)$;

(4)$a^2b-5ab=ab(a-5)$;

(5)$4m^3-6m^2=2m^2(2m-3)$;

(6)$a^2b-5ab+9b=b(a^2-5a+9)$;

(7)$-a^2+ab-ac=-a(a-b+c)$;

(8)$-2x^3+4x^2-6x=-2x(x^2-2x+3)$.

习题4.2

1. 解:(1)$2x^2-4x=2x(x-2)$;

(2)$8m^2n+2mn=2mn(4m+1)$;

(3)$a^2x^2y-axy^2=axy(ax-y)$;

(4)$3x^3-3x^2+9x=3x(x^2-x+3)$;

(5)$-24x^2y-12xy^2-28y^3=-(24x^2y+12xy^2+28y^3)=-4y(6x^2+3xy+7y^2)$;

(6)$-4a^3b^3+6a^2b-2ab=-(4a^3b^3-6a^2b+2ab)=-2ab(2a^2b^2-3a+1)$;

(7)$-2x^2-12xy^2+8xy^3=-(2x^2+12xy^2-8xy^3)=-2x(x+6y^2-4y^3)$;

(8)$-3ma^3+6ma^2-12ma=-(3ma^3-6ma^2+12ma)=-3ma(a^2-2a+4)$.

2. 解:(1)$mR_1^2+mR_2^2+mR_3^2=m(R_1^2+R_2^2+R_3^2)=3.14\times(20^2+16^2+12^2)=2\,512$.

(2)$xz-yz=(x-y)z=(17.8-28.8)\times\frac{7}{11}=-7$.

(3)$a^2b+ab^2=ab(a+b)=7\times6=42$.

3. 解:(1)不正确,因为公因式应为n;

(2)不正确,因为公因式含有“-”,多项式的各项都要变号;

(3)正确,因为$x(x-y)-y(x-y)=(x-y)(x-y)=(x-y)^2$;

(4)不正确,因为结果没有化为乘积的形式.

▶随堂练习(教材第98页)

解:(1)$x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$;

(2)$3a(x-y)-(x-y)=(x-y)(3a-1)$;

(3)$6(p+q)^2-12(q+p)=6(p+q)(p+q-2)$;

(4)$a(m-2)+b(2-m)=a(m-2)-b(m-2)=(m-2)(a-b)$;

(5)$2(y-x)^2+3(x-y)=2(x-y)^2+3(x-y)=(x-y)[2(x-y)+3]=(x-y)(2x-2y+3)$;

(6)$mn(m-n)-m(n-m)^2=mn(m-n)-m(m-n)^2=m(m-n)[n-(m-n)]=m(m-n)(n-m+n)=m(m-n)(2n-m)$.

习题4.3

1. 解:(1)$7(a-1)+x(a-1)=(a-1)(7+x)$;

(2)$3(a-b)^2+6(b-a)=3(a-b)^2-6(a-b)=3(a-b)(a-b-2)$;

(3)$2(m-n)^2-m(m-n)=(m-n)[2(m-n)-m]=(m-n)(m-2n)$;

(4)$x(x-y)^2-y(y-x)^2=x(x-y)^2-y(x-y)^2=(x-y)^2(x-y)=(x-y)^3$;

(5)$m(a^2+b^2)+n(a^2+b^2)=(a^2+b^2)(m+n)$;

(6)$18(a-b)^3-12b(b-a)^2=18(a-b)^3-12b(a-b)^2=6(a-b)^2[3(a-b)-2b]=6(a-b)^2(3a-5b)$;

(7)$(2a+b)(2a-3b)-3a(2a+b)=(2a+b)(2a-3b-3a)=(2a+b)(-a-3b)=-(2a+b)(a+3b)$;

(8)$x(x+y)(x-y)-x(x+y)^2=x(x+y)[x-y-(x+y)]=x(x+y)(-2y)=-2xy(x+y)$.

2. 解:(1)$4x(m-2)-3x(m-2)^2=x(m-2)[4-3(m-2)]=x(m-2)(10-3m)$.

当$x=1.5$,$m=6$时,原式$=1.5\times(6-2)\times(10-18)=-48$.

(2)$(a-2)^2-6(2-a)=(a-2)^2+6(a-2)=(a-2)(a-2+6)=(a-2)(a+4)$.

当$a=-2$时,原式$=(-2-2)\times(-2+4)=-8$.

3. 解:这三块草坪的总面积为$(a+b)^2+a(a+b)+(a+b)b=(a+b)(a+b+a+b)=2(a+b)^2(\mathrm{m}^2)$.

3 公式法

▶随堂练习(教材第100页)

1. (1)× (2)√ (3)× (4)×

2. 解:(1)$a^2b^2-m^2=(ab+m)(ab-m)$.

(2)$(m-a)^2-(n+b)^2=[(m-a)+(n+b)]\cdot[(m-a)-(n+b)]=(m-a+n+b)(m-a-n-b)$.

(3)$x^2-(a+b-c)^2=[x+(a+b-c)][x-(a+b-c)]=(x+a+b-c)(x-a-b+c)$.

(4)方法一 $-16x^4+81y^4=-(16x^4-81y^4)=-(4x^2+9y^2)(4x^2-9y^2)=-(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$;

方法二 $-16x^4+81y^4=81y^4-16x^4=(9y^2+4x^2)(9y^2-4x^2)=(9y^2+4x^2)(3y+2x)(3y-2x)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 中的“a”,“b”既可以是具体的数,又可以是含字母的式子.

3. 解:剩余部分的面积为 $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)\ \text{cm}^2$.

当 $a=3.6, b=0.8$ 时,剩余部分的面积为 $a^2-4b^2=(3.6+1.6)\times(3.6-1.6)=5.2\times2=10.4(\text{cm}^2)$.

习题 4.4

1. 解:(1)$a^2-81=(a+9)(a-9)$;

(2)$36-x^2=(6+x)(6-x)$;

(3)$1-16b^2=(1+4b)(1-4b)$;

(4)$m^2-9n^2=(m+3n)(m-3n)$;

(5)$0.25q^2-121p^2=(0.5q+11p)(0.5q-11p)$;

(6)$169x^2-4y^2=(13x+2y)(13x-2y)$;

(7)$9a^2p^2-b^2q^2=(3ap+bq)(3ap-bq)$;

(8)$\frac{49}{4}a^2-x^2y^2=\left(\frac{7}{2}a+xy\right)\left(\frac{7}{2}a-xy\right)$.

2. 解:(1)$(m+n)^2-n^2=(m+n+n)(m+n-n)=m(m+2n)$;

(2)$49(a-b)^2-16(a+b)^2=[7(a-b)]^2-[4(a+b)]^2=[7(a-b)+4(a+b)][7(a-b)-4(a+b)]=(7a-7b+4a+4b)(7a-7b-4a-4b)=(11a-3b)(3a-11b)$;

(3)$(2x+y)^2-(x+2y)^2=[(2x+y)+(x+2y)][(2x+y)-(x+2y)]=(2x+y+x+2y)(2x+y-x-2y)=(3x+3y)(x-y)=3(x+y)(x-y)$;

(4)$(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$;

(5)$3ax^2-3ay^4=3a(x^2-y^4)=3a(x+y^2)(x-y^2)$;

(6)$p^4-1=(p^2+1)(p^2-1)=(p^2+1)(p+1)(p-1)$.

3. 解:它们所围成的环形的面积为 $\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)\ \text{cm}^2$.

当 $R=8.45, r=3.45$ 时,原式 $=3.14\times(8.45+3.45)\times(8.45-3.45)=3.14\times11.9\times5=186.83(\text{cm}^2)$.

点拨:在实际计算中,能分解因式的先分解因式,然后再代入数据计算.

▶随堂练习(教材第 102 页)

1. 解:(1)是,$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$;

(2)不是;

(3)是,$\frac{1}{4}m^2+3mn+9n^2=\left(\frac{1}{2}m+3n\right)^2$;

(4)不是.

2. 解:(1)$x^2-12xy+36y^2=(x-6y)^2$;

(2)$16a^4+24a^2b^2+9b^4=(4a^2+3b^2)^2$;

(3)$-2xy-x^2-y^2=-(2xy+x^2+y^2)=-(x^2+2xy+y^2)=-(x+y)^2$;

(4)$4-12(x-y)+9(x-y)^2=[3(x-y)-2]^2=(3x-3y-2)^2$.

习题 4.5

1. 解:(1)$x^2y^2-2xy+1=(xy-1)^2$;

(2)$9-12t+4t^2=(3-2t)^2$;

(3)$y^2+y+\frac{1}{4}=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$;

(4)$25m^2-80m+64=(5m-8)^2$;

(5)$\frac{x^2}{4}+xy+y^2=\left(\frac{x}{2}+y\right)^2$;

(6)$a^2b^2-4ab+4=(ab-2)^2$.

2. 解:(1)$(x+y)^2+6(x+y)+9=(x+y+3)^2$;

(2)$a^2-2a(b+c)+(b+c)^2=[a-(b+c)]^2=(a-b-c)^2$;

(3)$4xy^2-4x^2y-y^3=-(y^3-4xy^2+4x^2y)=-y(y^2-4xy+4x^2)=-y(y-2x)^2$;

(4)$-a+2a^2-a^3=-(a^3-2a^2+a)=-a(a^2-2a+1)=-a(a-1)^2$.

3. 解:满足条件的单项式可以是 $2x$.(答案不唯一)

4. 解:能.

设两个连续奇数为 $2n-1$ 和 $2n+1$(n 为正整数),则 $(2n+1)^2-(2n-1)^2=[(2n+1)+(2n-1)][(2n+1)-(2n-1)]=4n\cdot2=8n$,

∴ 两个连续奇数的平方差能被 8 整除.

点拨:要判断一个多项式能否被正整数 a 整除,只要将这个多项式分解因式,看分解因式的结果中能否产生因数 a 即可.

复习题

1. 解:(1)$7x^2-63=7(x^2-9)=7(x+3)(x-3)$;

(2)$a^3-a=a(a^2-1)=a(a+1)(a-1)$;

(3)$3a^2-3b^2=3(a^2-b^2)=3(a+b)(a-b)$;

(4)$y^2-9(x+y)^2=y^2-[3(x+y)]^2=y^2-(3x+3y)^2=[y+(3x+3y)][y-(3x+3y)]=(3x+4y)(-3x-2y)=-(3x+4y)(3x+2y)$;

(5)$a(x-y)-b(y-x)+c(x-y)=a(x-y)+b(x-y)+c(x-y)=(x-y)(a+b+c)$;

(6)$x(m+n)-y(n+m)+(m+n)=(m+n)(x-y+1)$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(7)$(x+y)^2-16(x-y)^2=(x+y)^2-[4(x-y)]^2=[(x+y)+4(x-y)][(x+y)-4(x-y)]=(5x-3y)(-3x+5y)=(5x-3y)(5y-3x)$;

(8)$a^2(a-b)^2-b^2(a-b)^2=(a-b)^2(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)(a-b)=(a-b)^3(a+b)$;

(9)$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2=[(x+y+z)+(x-y-z)][(x+y+z)-(x-y-z)]=2x(2y+2z)=4x(y+z)$;

(10)$(x+y)^2-14(x+y)+49=[(x+y)-7]^2=(x+y-7)^2$.

2. 解: (1)$a^2b^2-0.01=(ab)^2-0.1^2=(ab+0.1)(ab-0.1)$;

(2)$x^2y-2xy^2+y^3=y(x^2-2xy+y^2)=y(x-y)^2$;

(3)$16-(2a+3b)^2=[4+(2a+3b)][4-(2a+3b)]=(4+2a+3b)(4-2a-3b)$;

(4)$(a^2+4)^2-16a^2=(a^2+4)^2-(4a)^2=(a^2+4+4a)(a^2+4-4a)=(a+2)^2(a-2)^2$;

(5)$x^2-xy+\frac{1}{4}y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$;

(6)$a^2x^2+16ax+64=(ax+8)^2$;

(7)$a^4-8a^2b^2+16b^4=(a^2-4b^2)^2=[(a+2b)(a-2b)]^2=(a+2b)^2(a-2b)^2$;

(8)$9+6(a+b)+(a+b)^2=[(a+b)+3]^2=(a+b+3)^2$.

3. 解: (1)$9x^2+12xy+4y^2=(3x+2y)^2$.

当$x=\frac{4}{3}$,$y=-\frac{1}{2}$时,原式$=\left[3\times\frac{4}{3}+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2=(4-1)^2=9$.

(2)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=ab$.

当$a=-\frac{1}{8}$,$b=2$时,原式$=-\frac{1}{8}\times2=-\frac{1}{4}$.

4. 解: (1)$2x^2+2x+\frac{1}{2}=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$;

(2)$(x+1)(x+2)+\frac{1}{4}=x^2+3x+2+\frac{1}{4}=x^2+3x+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$.

5. 解:$25^7-5^{12}=5^{2\times7}-5^{2\times6}=(5^7)^2-(5^6)^2=(5^7+5^6)(5^7-5^6)=5^6\times6\times5^6\times4=120\times5^{11}$.

$\therefore 25^7-5^{12}$能被120整除.

点拨: 欲说明25^7-5^{12}能被120整除,只要将25^7-5^{12}分解因式,使结果中含有因数120即可.

※6. 解:$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)=\frac{1}{2}(x+y)^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$.

7. 解: (1)$3^{2014}-3^{2013}=3^{2013}(3-1)=2\times3^{2013}$;

(2)$(-2)^{101}+(-2)^{100}+2^{99}=2^{99}\times(-2^2+2+1)=-2^{99}$.

8. 解:$\left[\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\cdot l=\frac{1}{4}\pi l(D^2-d^2)=\frac{1}{4}\pi l(D+d)(D-d)$.

当$D=75$ cm,$d=45$ cm,$l=300$ cm时,原式$=\frac{1}{4}\times3.14\times300\times(75+45)\times(75-45)=847\,800(\text{cm}^3)\approx0.85(\text{m}^3)$.

答: 浇制一节这样的管道约需要0.85 m^3的混凝土.

9. 解:$9x^2+6xy+y^2=(3x+y)^2$,

$\therefore$该正方形的边长为$3x+y$.

※10. 解:$\because x^2+2x+1=(x+1)^2$,$(x+1)^2\geqslant0$,

$\therefore x^2+2x+1$的最小值为0.

当$(x+1)^2=0$时,$x+1=0$,解得$x=-1$.

$\therefore$当$x=-1$时,多项式x^2+2x+1取得最小值.

※11. 解: 设正方形Ⅰ的边长为a cm,正方形Ⅱ的边长为b cm.

由题意,得$\begin{cases}4a-4b=96, & ①\\ a^2-b^2=960. & ②\end{cases}$

由①,得$a-b=24$.

由②,得$(a+b)(a-b)=960$.

$\therefore(a+b)\times24=960$,即$a+b=40$.

解方程组$\begin{cases}a+b=40,\\ a-b=24,\end{cases}$得$\begin{cases}a=32,\\ b=8.\end{cases}$

答: 这两个正方形的边长分别为32 cm,8 cm.

※12. 解:$\triangle ABC$是等腰三角形.

由$a^2-b^2+ac-bc=0$,得$(a+b)(a-b)+c(a-b)=0$,即$(a-b)(a+b+c)=0$.

$\because a,b,c$是$\triangle ABC$的三边,

$\therefore a>0,b>0,c>0$.

$\therefore a+b+c>0$.

$\therefore a-b=0$,即$a=b$.

$\therefore\triangle ABC$是等腰三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解:由题意,得 $100x^2-kxy+49y^2=(10x\pm7y)^2$,

即 $100x^2-kxy+49y^2=100x^2\pm140xy+49y^2$.

$\therefore k=\pm140$.

※14. 解:$\because 2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)=(2^{24}+1)\cdot(2^{12}+1)(2^{12}-1)=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)=(2^{24}+1)(2^{12}+1)\times65\times63$,

$\therefore$ 这两个数为 63 和 65.

※15. 解:(1)$\frac{3}{4}$ (2)$\frac{2}{3}$ (3)$\frac{5}{8}$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{4^2-1}{4^2}\times\cdots\times\frac{9^2-1}{9^2}\times\frac{10^2-1}{10^2}\times\cdots\times\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\times\cdots\times\frac{(9-1)(9+1)}{9^2}\times\frac{(10-1)(10+1)}{10^2}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{2n}.$$

第五章 分式与分式方程

1 认识分式

▶随堂练习(教材第 109 页)

1. 解:(1)由 $x-1\neq0$,得 $x\neq1$.

$\therefore$ 当 $x\neq1$ 时,分式 $\frac{8}{x-1}$ 有意义.

(2)由 $x^2-9\neq0$,得 $x\neq\pm3$.

$\therefore$ 当 $x\neq\pm3$ 时,分式 $\frac{1}{x^2-9}$ 有意义.

点拨:解答有关分式有意义的问题,只要使分母不等于 0 即可.

2. 解:当 $x=0$ 时,$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$;

当 $x=-2$ 时,$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2\times(-2)-1}{3\times(-2)+2}=\frac{5}{4}$;

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2\times\frac{1}{2}-1}{3\times\frac{1}{2}+2}=0$.

3. 解:$1\times\frac{x}{x+y}=\frac{x}{x+y}$ kg.

答:调制 1 kg 这种混合饮料需 $\frac{x}{x+y}$ kg 甲种饮料.

习题 5.1

1. 解:(1)是分式;(2)是整式;(3)是分式;(4)是整式.

2. 解:(1)由 $2x-3=0$,得 $x=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时,分式 $\frac{x}{2x-3}$ 无意义.

(2)由 $5x+10=0$,得 $x=-2$.

$\therefore$ 当 $x=-2$ 时,分式 $\frac{x-1}{5x+10}$ 无意义.

点拨:当一个分式的分母等于 0 时,分式无意义.

3. 解:当 $a=-1$,$b=\frac{2}{3}$ 时,$\frac{a-b}{4a+3b}=\frac{-1-\frac{2}{3}}{4\times(-1)+3\times\frac{2}{3}}=\frac{5}{6}$.

4. 解:$a\div(m-n)=\frac{a}{m-n}$(元).

答:这箱橘子的零售价至少应定为每千克 $\frac{a}{m-n}$ 元.

点拨:一箱橘子的成本为 a 元,橘子的质量为 $(m-n)$ kg,所以零售价至少为每千克 $\frac{a}{m-n}$ 元.

5. 解:(1)这两块棉田平均每公顷的棉产量是 $\frac{m+n}{x+y}$ kg.

(2)这种商品每件的成本是 $\frac{x}{1+a\%}$ 元.

点拨:第(1)题中,总产量除以总公顷数就等于平均每公顷的棉产量;第(2)题中,售价除以 $(1+a\%)$ 就是成本.

▶随堂练习(教材第 112 页)

1. (1)$2x(x+y)$ (2)$y-2$

2. 解:(1)$\frac{-14mn^2k}{4m^2n}=\frac{-7nk}{2m}\cdot\frac{2mn}{2mn}=-\frac{7nk}{2m}$;

(2)$\frac{x-y}{(x-y)^3}=\frac{1}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{x-y}=\frac{1}{(x-y)^2}$;

(3)$\frac{4-x^2}{x^2-2x}=\frac{-(x+2)}{x}\cdot\frac{x-2}{x-2}=-\frac{x+2}{x}$.

习题 5.2

1. 解:(1)$\frac{12x^2y^3}{9x^3y^2}=\frac{3x^2y^2}{3x^2y^2}\cdot\frac{4y}{3x}=\frac{4y}{3x}$;

(2)$\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x-1}$;

(3)$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)$\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

$=\frac{(x-4)^2}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{x-4}{x+4}$.

当 $x=100$ 时,原式 $=\frac{100-4}{100+4}=\frac{12}{13}$.

(2)$\frac{x^2-2x}{2y-xy}=\frac{x(x-2)}{y(2-x)}=-\frac{x}{y}$.

当 $x=-6$,$y=28$ 时,原式 $=-\frac{-6}{28}=\frac{3}{14}$.

3. 解:(1)$\frac{b}{2b}=\frac{b\div b}{2b\div b}=\frac{1}{2}$;

(2)$\frac{b}{x^2y}=\frac{b\cdot x}{x^2y\cdot x}=\frac{bx}{x^3y}$;

(3)$\frac{ab}{4a^2b}=\frac{ab\div ab}{4a^2b\div ab}=\frac{1}{4a}$;

(4)$\frac{y}{2x}=\frac{y\cdot ab}{2x\cdot ab}=\frac{aby}{2abx}(ab\neq 0)$.

4. 解:分式可为 $\frac{x^2-9}{x+3}$.

$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=x-3$.(答案不唯一)

2 分式的乘除法

▶随堂练习(教材第115页)

解:(1)$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a^2}=\frac{1}{a}$;

(2)$(a^2-a)\div\frac{a}{a-1}=a(a-1)\cdot\frac{(a-1)}{a}=(a-1)^2$;

(3)$\frac{x^2-1}{y}\div\frac{x+1}{y^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{y}\cdot\frac{y^2}{x+1}=y(x-1)$;

(4)$\frac{x^2+2x}{x^2-6x+9}\div\frac{x^2-4}{x^2-3x}$

$=\frac{x(x+2)}{(x-3)^2}\cdot\frac{x(x-3)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x^2}{(x-3)(x-2)}$.

习题5.3

1. 解:(1)$\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{2a}{b^2c}=\frac{2}{ab}$;

(2)$\frac{b}{a^2-9}\cdot\frac{a+3}{b^2-b}$

$=\frac{b}{(a+3)(a-3)}\cdot\frac{a+3}{b(b-1)}$

$=\frac{1}{(a-3)(b-1)}$;

(3)$\frac{x^2+xy}{x-y}\div\frac{xy}{x-y}=\frac{x(x+y)}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}=\frac{x+y}{y}$;

(4)$\frac{a}{a-b}\cdot\left(\frac{b-a}{b}\right)^2=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2}{b^2}=\frac{a(a-b)}{b^2}$.

2. 解:(1)$\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a^4-a^2b^2}{a^2-ab}$

$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a^2(a^2-b^2)}{a(a-b)}$

$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a^2(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$

$=a(a-b)$;

(2)$\frac{4x^2-4xy+y^2}{2x+y}\div(4x^2-y^2)$

$=\frac{(2x-y)^2}{2x+y}\div[(2x+y)(2x-y)]$

$=\frac{(2x-y)^2}{2x+y}\cdot\frac{1}{(2x+y)(2x-y)}$

$=\frac{2x-y}{(2x+y)^2}$;

(3)$\left(\frac{y}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{2y}=\frac{y^3}{x^3}\cdot\frac{1}{2y}=\frac{y^2}{2x^3}$.

3. 解:不正确.因为分式的乘除混合运算应当按照从左到右的顺序依次计算,即 $a\div b\cdot\frac{1}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b^2}$.

4. 解:火车的速度是 $\frac{s}{a}$ km/h,汽车的速度是 $\frac{ms}{b}$ km/h,

$\therefore\frac{s}{a}\div\frac{ms}{b}=\frac{s}{a}\cdot\frac{b}{ms}=\frac{b}{am}$,

即火车的速度是汽车速度的 $\frac{b}{am}$ 倍.

3 分式的加减法

▶随堂练习(教材第118页)

1. 解:(1)不正确,正确的解法为 $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$;

(2)不正确,正确的解法为 $\frac{a}{x-y}-\frac{a}{y-x}=\frac{a}{x-y}+\frac{a}{x-y}=\frac{2a}{x-y}$;

(3)不正确,正确的解法为 $1+\frac{1}{a}=\frac{a}{a}+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$;

(4)正确.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)$\frac{2}{a}-\frac{5}{a}=\frac{2-5}{a}=-\frac{3}{a}$;

(2)$\frac{3b}{x}-\frac{b}{x}=\frac{3b-b}{x}=\frac{2b}{x}$;

(3)$\frac{2a}{2a-b}+\frac{b}{b-2a}=\frac{2a}{2a-b}-\frac{b}{2a-b}=\frac{2a-b}{2a-b}=1$.

习题 5.4

1. 解:(1)$\frac{m-1}{x}+\frac{n-m}{x}=\frac{m-1+n-m}{x}=\frac{n-1}{x}$;

(2)$\frac{1}{m}+\frac{3}{m}-\frac{5}{m}=\frac{1+3-5}{m}=-\frac{1}{m}$.

2. 解:(1)$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2+2ab}{a+b}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{a+b}=$

$a+b$;

(2)$\frac{x-2y}{2x-y}-\frac{x+y}{2x-y}=\frac{x-2y-x-y}{2x-y}=-\frac{3y}{2x-y}$;

(3)$\frac{m+2n}{n-m}+\frac{n}{n-m}-\frac{2n}{n-m}$

$=\frac{m+2n+n-2n}{n-m}=\frac{m+n}{n-m}$;

(4)$\frac{x^2-5}{x-2}-\frac{x}{x-2}-\frac{1+x}{2-x}$

$=\frac{x^2-5}{x-2}-\frac{x}{x-2}+\frac{1+x}{x-2}$

$=\frac{x^2-5-x+1+x}{x-2}$

$=\frac{x^2-4}{x-2}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=x+2$.

3. 解:$\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=\frac{x^2+1-2}{x+1}$

$=\frac{x^2-1}{x+1}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$

$=x-1$.

当 $x=\frac{1}{100}$时,原式 $=\frac{1}{100}-1=-\frac{99}{100}$.

4. 解:$\frac{3\,000}{a}-\frac{3\,000}{3a}=\frac{3\,000}{a}-\frac{1\,000}{a}=\frac{2\,000}{a}$(h).

答:他录入 3 000 字文稿比手抄少用$\frac{2\,000}{a}$ h.

▶随堂练习(教材第 121 页)

1. 解:(1)$\frac{x-1}{3x^2}=\frac{a(x-1)}{3ax^2}$,$\frac{2}{ax}=\frac{2\cdot 3x}{ax\cdot 3x}=\frac{6x}{3ax^2}$;

(2)$\frac{3a}{2a-b}=\frac{3a}{2a-b}$,$-\frac{1}{b-2a}=\frac{1}{2a-b}$;

(3)$\frac{1}{a^2-9}=\frac{a+3}{(a+3)^2(a-3)}$,

$\frac{2}{a^2+6a+9}=\frac{2(a-3)}{(a+3)^2(a-3)}$;

(4)$\frac{1}{x^2-4}=\frac{2}{2(x+2)(x-2)}$,

$\frac{x}{4-2x}=\frac{-x(x+2)}{2(x-2)(x+2)}$.

2. 解:(1)$\frac{b}{3a}+\frac{a}{2b}=\frac{2b^2}{6ab}+\frac{3a^2}{6ab}=\frac{2b^2+3a^2}{6ab}$;

(2)$\frac{1}{a-1}-\frac{2}{1-a^2}=\frac{1}{a-1}+\frac{2}{a^2-1}$

$=\frac{a+1}{(a-1)(a+1)}+\frac{2}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a+1+2}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a+3}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a+3}{a^2-1}$.

习题 5.5

1. 解:(1)$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{bx+ay}{ab}$;

(2)$\frac{1}{a^2b}-\frac{b}{ab^2}=\frac{b}{a^2b^2}-\frac{ab}{a^2b^2}=\frac{b-ab}{a^2b^2}=\frac{b(1-a)}{a^2b^2}=\frac{1-a}{a^2b}$;

(3)$\frac{a+b}{ab}-\frac{b+c}{bc}=\frac{ac+bc}{abc}-\frac{ab+ac}{abc}=$

$\frac{ac+bc-ab-ac}{abc}=\frac{bc-ab}{abc}=\frac{c-a}{ac}$;

(4)$\frac{3x}{(x-3)^2}-\frac{x}{3-x}=\frac{3x}{(x-3)^2}+\frac{x}{x-3}$

$=\frac{3x+x(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{3x+x^2-3x}{(x-3)^2}$

$=\frac{x^2}{(x-3)^2}$.

2. 解:(1)$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy}-\frac{x^2+y^2}{xy}=$

$\frac{x^2-y^2-x^2-y^2}{xy}=\frac{-2y^2}{xy}=-\frac{2y}{x}$;

(2)$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}$

$=\frac{x-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$=\frac{x-1+1}{(x-1)^2}$

$=\frac{x}{x^2-2x+1}$.

3. 解:方法一 $\left(\frac{3x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{x}$

$=\frac{3x}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x}-\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}$

$=\frac{3x}{x-2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}-\frac{x}{x+2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}$

$=3(x+2)-(x-2)$

$=2x+8.$

方法二 $\left(\frac{3x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{x}$

$=\left[\frac{3x(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}\right]\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}$

$=\frac{3x^2+6x-x^2+2x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}$

$=\frac{2x^2+8x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}$

$=2x+8.$

4. 解:表格内依次填1,1.

(1)输出的结果都为1.

(2)能,因为$\frac{x^2+x}{x^2}-\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=1.$

5. 解:根据题意,得$\frac{3\,000}{x-3}-\frac{3\,000}{x}=$

$\frac{3\,000x-3\,000x+9\,000}{x(x-3)}=\frac{9\,000}{x(x-3)}$(元),

∴包车租金不变时,甲厂为员工支付的人均车费可比原来少$\frac{9\,000}{x(x-3)}$元.

▶随堂练习(教材第123页)

1. 解:(1)$\frac{2}{x-1}-1=\frac{2}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}=\frac{2-x+1}{x-1}=\frac{3-x}{x-1}$;

(2)$\frac{n-1}{m+1}-n+1=\frac{n-1}{m+1}-(n-1)$

$=\frac{n-1}{m+1}-\frac{(n-1)(m+1)}{m+1}$

$=\frac{(n-1)[1-(m+1)]}{m+1}$

$=\frac{m-mn}{m+1}$;

(3)$\frac{1}{a^2-a}+\frac{a-3}{a^2-1}$

$=\frac{a+1}{(a^2-a)(a+1)}+\frac{a(a-3)}{a(a^2-1)}$

$=\frac{a+1+a^2-3a}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)(a-1)}$

$=\frac{(a-1)^2}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a-1}{a(a+1)}=\frac{a-1}{a^2+a}.$

2. 解:(1)$\frac{a+1}{a^2-1}-\frac{a+1}{1-a}=\frac{a+1}{(a+1)(a-1)}+\frac{a+1}{a-1}=$

$\frac{1}{a-1}+\frac{a+1}{a-1}=\frac{a+2}{a-1}.$

当$a=\frac{1}{10}$时,原式$=\frac{\frac{1}{10}+2}{\frac{1}{10}-1}=-\frac{7}{3}.$

(2)$\frac{4xy}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{x-y}=\frac{4xy}{x^2-y^2}-\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}=$

$\frac{-(x-y)^2}{x^2-y^2}=-\frac{x-y}{x+y}.$

当$x=3y$时,原式$=-\frac{3y-y}{3y+y}=-\frac{2y}{4y}=-\frac{1}{2}.$

习题5.6

1. 解:(1)$\frac{2}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}=\frac{2(x+3)}{x^2-9}-\frac{6}{x^2-9}=$

$\frac{2x+6-6}{x^2-9}=\frac{2x}{x^2-9}$;

(2)$1+\frac{1}{x-3}+\frac{1-x}{3-x}=\frac{x-3}{x-3}+\frac{1}{x-3}+\frac{x-1}{x-3}=$

$\frac{x-3+1+x-1}{x-3}=\frac{2x-3}{x-3}$;

(3)$\frac{1}{x}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3x-2}=\frac{3(3x-2)}{3x(3x-2)}-\frac{2(3x-2)}{3x(3x-2)}+$

$\frac{x\cdot 3x}{3x(3x-2)}=\frac{9x-6-6x+4+3x^2}{9x^2-6x}=\frac{3x^2+3x-2}{9x^2-6x}$;

(4)$\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}+\frac{m^2}{n^2-m^2}$

$=\frac{m(n-m)}{n^2-m^2}+\frac{n(n-m)}{n^2-m^2}+\frac{m^2}{n^2-m^2}$

$=\frac{mn-m^2+n^2-mn+m^2}{n^2-m^2}$

$=\frac{n^2}{n^2-m^2}.$

2. 解:(1)$\frac{2r+2}{r^2+2r+1}+\frac{r-1}{r+1}+r$

$=\frac{2(r+1)}{(r+1)^2}+\frac{r-1}{r+1}+r$

$=\frac{2+r-1}{r+1}+r=\frac{r+1}{r+1}+r$

$=r+1.$

当$r=100$时,原式$=100+1=101.$

(2)$\frac{2n}{m+2n}+\frac{m}{2n-m}+\frac{4mn}{4n^2-m^2}$

$=\frac{2n(2n-m)}{4n^2-m^2}+\frac{m(2n+m)}{4n^2-m^2}+\frac{4mn}{4n^2-m^2}$

$=\frac{4n^2-2mn+2mn+m^2+4mn}{4n^2-m^2}$

$$=\frac{(2n+m)^2}{(2n+m)(2n-m)}=\frac{2n+m}{2n-m}.$$

当 $m=\frac{1}{5}n$ 时,原式 $=\frac{2n+\frac{1}{5}n}{2n-\frac{1}{5}n}=\frac{11}{9}$.

3. 解:根据题意,得 $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{1}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{ab}{a+b}$(h).

∴ 甲、乙两人一起完成这项工程需要 $\frac{ab}{a+b}$ h.

4. 解:由题意,得 $p-\frac{ap}{a+b}=\frac{bp}{a+b}$(h).

∴ 如果 A,B 两个水管同时开放,那么能提前 $\frac{bp}{a+b}$ h 将该蓄水池注满.

※5. 解:设这杯糖水的质量为 b g,其中含糖 a g,往杯中加入 c g 糖后全部溶解,则此时糖水的含糖量为 $\frac{a+c}{b+c}$.

$$\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{(a+c)b-a(b+c)}{b(b+c)}=\frac{bc-ac}{b(b+c)}=\frac{(b-a)c}{b(b+c)}.$$

∵ $a<b, c>0$, ∴ $\frac{(b-a)c}{b(b+c)}>0$,

即 $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$.

∴ 现在糖水的含糖量比原来高了.

4 分式方程

▶随堂练习(教材第 125 页)

1. 略

2. 解:满足题意的分式方程为 $\frac{10+x}{80-x}=\frac{5}{7}$.

习题 5.7

1. 解:满足题意的分式方程为 $\frac{12\ 000}{x}=\frac{14\ 000}{x+1\ 500}$.

2. 解:满足题意的分式方程为 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{x}}=1$,

即 $\frac{6x}{6+x}=1$ 为所求分式方程.

3. 解:满足题意的分式方程为 $\frac{480}{x}-\frac{600}{2x}=45$.

▶随堂练习(教材第 128 页)

1. 解:(1)方程两边都乘 $x(x-1)$,得 $3x=4(x-1)$.

解这个方程,得 $x=4$.

检验:将 $x=4$ 代入原方程,得左边 $=1=$ 右边.

∴ $x=4$ 是原方程的根.

(2)方程两边都乘 $2x-3$,得 $x-5=4(2x-3)$.

解这个方程,得 $x=1$.

检验:将 $x=1$ 代入原方程,得左边 $=4=$ 右边.

∴ $x=1$ 是原方程的根.

2. 解:方程两边都乘 $x(x+20)$,得 $4\ 800(x+20)=5\ 000x$.

解这个方程,得 $x=480$.

检验:将 $x=480$ 代入原方程,得左边 $=10=$ 右边.

∴ $x=480$ 是所列方程的根.

习题 5.8

1. 解:(1)方程两边都乘 $x(x+1)$,得 $6x=x+5$.

解得 $x=1$.

检验:将 $x=1$ 代入原方程,得左边 $=3=$ 右边.

∴ $x=1$ 是原方程的根.

(2)方程两边都乘 $x-4$,得 $3-x-1=x-4$.

解这个方程,得 $x=3$.

检验:将 $x=3$ 代入原方程,得左边 $=1=$ 右边.

∴ $x=3$ 是原方程的根.

(3)方程两边都乘 $y-3$,得 $y-2=2(y-3)+1$.

解这个方程,得 $y=3$.

检验:将 $y=3$ 代入原方程,方程没有意义.

∴ $y=3$ 是原方程的增根.

故原方程无解.

2. 解:不对.

∵ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$2x-1=0$,

即分母为 0,分式无意义.

∴ $x=\frac{1}{2}$ 不是方程 $\frac{x-2}{2x-1}+1=\frac{1.5}{1-2x}$ 的根,而是方程的增根.

点拨:解分式方程必须进行检验.

3. 解:设原计划每天铺设 x m 管道.

根据题意,得 $\frac{3\ 000}{x}-\frac{3\ 000}{(1+25\%)x}=30$.

解这个方程,得 $x=20$.

经检验,$x=20$ 是所列方程的根.

这时 $(1+25\%)x=(1+25\%)\times 20=25$,

∴ 实际每天铺设 25 m 管道.

点拨:本题中的等量关系为原计划所用时间减去实际所用时间等于 30 天.

4. 解:设甲厂产品的合格率为 $x\%$,则乙厂产品的合格率为 $x\%-5\%$.

根据题意,得 $\frac{48}{x\%}=\frac{45}{x\%-5\%}$.

解这个方程,得 $x=80$.

经检验,$x=80$ 是所列方程的根.

∴ 甲厂产品的合格率为 80%.

▶**随堂练习(教材第 129 页)**

解:设这种文学书的价格为 x 元/本,则这种科普书的价格为 $1.5x$ 元/本.

根据题意,得 $\frac{15}{x}-1=\frac{15}{1.5x}$.

解这个方程,得 $x=5$.

经检验,$x=5$ 是所列方程的根.

∴ $1.5x=7.5$.

答:这种文学书的价格是 5 元/本,这种科普书的价格是 7.5 元/本.

习题 5.9

1. 解:设甲种原料的单价为 $2x$ 元,则乙种原料的单价为 $3x$ 元.

根据题意,得 $\frac{2\,000}{2x}+\frac{1\,000}{3x}=\frac{2\,000+1\,000}{9}$.

解这个方程,得 $x=4$.

经检验,$x=4$ 是所列方程的根.

∴ $2x=8$.

答:甲种原料的单价为 8 元.

2. 解:设这种服装的成本价为 x 元.

根据题意,得 $\frac{150-x}{x}=25\%$.

解这个方程,得 $x=120$.

经检验,$x=120$ 是所列方程的根.

答:这种服装的成本价是 120 元.

点拨:解答本题的关键是理解“售价”“成本价”“利润”的含义及它们之间的关系.

3. 解:设乙每时加工 x 个这种零件,则甲每时加工 $(x+10)$ 个这种零件.

根据题意,得 $\frac{150}{x+10}=\frac{120}{x}$,

解这个方程,得 $x=40$.

经检验,$x=40$ 是所列方程的根.

∴ $x+10=40+10=50$.

答:甲、乙两人每时各加工 50 个、40 个这种零件.

复习题

1. 解:(1) $\frac{-2ac^2}{14a^2bc}=-\frac{2ac\cdot c}{2ac\cdot 7ab}=-\frac{c}{7ab}$;

(2) $\frac{4-a^2}{a^2-2a}=\frac{(2+a)(2-a)}{a(a-2)}=-\frac{a+2}{a}$;

(3) $\frac{x^2-16}{2x+8}=\frac{(x+4)(x-4)}{2(x+4)}=\frac{x-4}{2}$.

2. 解:(1) $\frac{5x}{y}\cdot\frac{y}{15x^2}=\frac{5x\cdot y}{y\cdot 15x^2}=\frac{1}{3x}$;

(2) $\frac{2a^2b}{x}\div(-2xb)=\frac{2a^2b}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2xb}\right)$

$=-\frac{2a^2b\cdot 1}{x\cdot 2xb}=-\frac{a^2}{x^2}$;

(3) $\frac{5x-5y}{3x^2y}\cdot\frac{9xy^2}{x^2-y^2}$

$=\frac{5(x-y)\cdot 9xy^2}{3x^2y\cdot(x+y)(x-y)}$

$=\frac{15y}{x(x+y)}=\frac{15y}{x^2+xy}$;

(4) $\frac{a^2-b^2}{4a^2+12ab}\div\frac{a-b}{a+3b}$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{4a(a+3b)}\cdot\frac{a+3b}{a-b}=\frac{a+b}{4a}$.

3. 解:(1) $\frac{c}{ab}-\frac{a}{bc}=\frac{c^2}{abc}-\frac{a^2}{abc}=\frac{c^2-a^2}{abc}$;

(2) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{3+x}=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{x+3-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{6}{x^2-9}$;

(3) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{3a+1}{a^2-1}+\frac{2a+3}{1-a^2}$

$=\frac{a}{a^2-1}+\frac{3a+1}{a^2-1}-\frac{2a+3}{a^2-1}$

$=\frac{a+3a+1-2a-3}{a^2-1}$

$=\frac{2a-2}{a^2-1}$

$=\frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a+1}$;

(4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

$=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\div\frac{a^2-b^2}{ab}$

$=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a+b}{a^2b-ab^2}$;

(5) $m-1+\frac{2m-6}{m^2-9}\div\frac{2m+2}{m+3}$

$=m-1+\frac{2(m-3)}{(m+3)(m-3)}\cdot\frac{m+3}{2(m+1)}$

$=m-1+\frac{1}{m+1}$

$=\frac{(m-1)(m+1)}{m+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{m^2}{m+1}$;

(6) $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right)\div\left(\frac{m^2+n^2}{n}-5n\right)\cdot\left(\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}+2\right)$

$=\frac{2n-m}{mn}\div\frac{m^2+n^2-5n^2}{n}\cdot\frac{m^2+4n^2+4mn}{2mn}$

$=\frac{2n-m}{mn}\cdot\frac{n}{(m+2n)(m-2n)}\cdot\frac{(m+2n)^2}{2mn}$

$=-\frac{m+2n}{2m^2n}$.

4. 解:(1)方程两边都乘 x^2-1,得 $x+1=1$.

解这个方程,得 $x=0$.

检验:将 $x=0$ 代入原方程,得左边 $=-1=$ 右边.

$\therefore x=0$ 是原方程的根.

(2)方程两边都乘 $x-2$,得 $1+3(x-2)=x-1$.

解这个方程,得 $x=2$.

检验:当 $x=2$ 时,$x-2=0$,分式方程无意义.

$\therefore x=2$ 是原方程的增根,故原方程无解.

(3)方程两边都乘 $2(x+3)$,得 $2(2-x)=(x+3)+2$.

解这个方程,得 $x=-\frac{1}{3}$.

检验:将 $x=-\frac{1}{3}$ 代入原方程,得左边 $=\frac{7}{8}=$ 右边.

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 是原方程的根.

※5. 解:(1)设 $m=5k(k\neq0)$,则 $n=3k$,

$\therefore\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m-n}-\frac{n^2}{m^2-n^2}$

$=\frac{m(m-n)}{m^2-n^2}+\frac{m(m+n)}{m^2-n^2}-\frac{n^2}{m^2-n^2}$

$=\frac{2m^2-n^2}{m^2-n^2}=\frac{2\times(5k)^2-(3k)^2}{(5k)^2-(3k)^2}$

$=\frac{50k^2-9k^2}{25k^2-9k^2}=\frac{41k^2}{16k^2}=\frac{41}{16}$.

(2)$\because x+\frac{1}{x}=2,\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2^2-2=2$.

(3)$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$.

$\because\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$,

$\therefore 3x-4=(A+B)x+(-2A-B)$.

$\therefore\begin{cases}A+B=3,\\-2A-B=-4.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}A=1,\\B=2.\end{cases}$

6. 解:(1)由 $1-x\neq0$,得 $x\neq1$.

$\therefore$ 当 $x\neq1$ 时,分式有意义.

(2)由 $(1-x)^2\neq0$,得 $x\neq1$.

$\therefore$ 当 $x\neq1$ 时,分式有意义.

(3)当 $x\neq0$ 时,分式有意义.

点拨:要使分式有意义,只需考虑分母不等于零即可.

7. 解:不对.

使分式 $\frac{x^2}{x}$ 有意义的条件是 $x\neq0$.

8. 解:$\because\frac{a-b}{a+1}=0,\therefore\begin{cases}a-b=0,\\a+1\neq0.\end{cases}$

解得 $a=b$ 且 $a\neq-1$.

点拨:讨论分式等于 0 时,不能漏掉分母不等于 0 这一条件.

9. 解:(1)该商品的原价为 $\frac{a}{1-x\%}$ 元.

(2)此人平均每次中靶的环数为 $\frac{ma+nb}{m+n}$.

10. 解:设长途客运车原来的平均车速为 x km/h,则新修的高速公路开通后,长途客运车的平均车速为 1.5x km/h.

根据题意,得 $\frac{360}{1.5x}+2=\frac{360}{x}$.

解得 $x=60$.

经检验,$x=60$ 是所列方程的根.

答:长途客运车原来的平均车速为60 km/h.

点拨:准确表示时间之间的关系是解答本题的关键.

11. 解:设慢车的速度为 x km/h,则快车的速度为 1.2x km/h.

根据题意,得 $\frac{120}{x}-\frac{120}{1.2x}=0.5$.

解得 $x=40$.

经检验,$x=40$ 是所列方程的根.

答:慢车的速度是 40 km/h.

12. 解:设采用新工艺前每时加工 x 个零件,则采用新工艺后每时加工1.3x个零件.

根据题意,得 $\frac{1\,300}{x}-\frac{1\,300}{1.3x}=10$.

解得 $x=30$.

经检验,$x=30$ 是所列方程的根.

$\therefore 1.3x=1.3\times30=39$.

答:采用新工艺前、后每时分别加工 30 个、39 个零件.

13. 解:(1)这个学校八年级的学生总数大于240人而小于或等于300人.

(2)设这个学校八年级学生有 x 人.

根据题意,得 $\frac{120}{x}\times 300=\frac{120}{x+60}\times 360$.

解这个方程,得 $x=300$.

经检验,$x=300$ 是所列方程的根.

答:这个学校八年级学生有300人.

14. 解:设第一批购进这种衬衫 x 件,则第二批购进这种衬衫 $2x$ 件.

根据题意,得 $\frac{176\,000}{2x}-\frac{80\,000}{x}=4$.

解这个方程,得 $x=2\,000$.

经检验,$x=2\,000$ 是所列方程的根.

∴ 这两次共购进这种衬衫的数量为 $x+2x=3x=3\times 2\,000=6\,000$.

销售完这两批衬衫后的总售价为 $58\times(6\,000-150)+58\times 80\%\times 150=346\,260$(元).

在这两笔生意中,商厦共赢利 $346\,260-80\,000-176\,000=90\,260$(元).

答:在这两笔生意中,商厦共赢利90 260元.

点拨:欲求赢利多少元,应先求出其销售量,再由销售量确定出总售价,最后用总售价减去总成本即可.

※15. 解:(1) $t=\frac{l}{x+n}+\frac{l}{x-n}=\frac{l(x-n)+l(x+n)}{(x+n)(x-n)}=\frac{2lx}{x^2-n^2}$(s).

(2)由(1)得 $t=\frac{2lx}{x^2-n^2}$,两边都乘 x^2-n^2,再都除以 $2x$,得 $l=\frac{t(x^2-n^2)}{2x}$.

※16. 解:设商品的成本为 x.

∵ $x(1+p\%)\cdot(1-d\%)=x$,

∴ $1-\frac{d}{100}=\frac{1}{1+\frac{p}{100}}$.

∴ $\frac{d}{100}=1-\frac{100}{100+p}$.

∴ $d=\frac{100p}{100+p}$.

点拨:标价比成本高 $p\%$ 的含义是标价=成本×$(1+p\%)$,降价幅度最多为 $d\%$ 的含义是最低价=标价×$(1-d\%)$.

※17. 解:甲所购饲料的平均单价是 $\frac{1\,000m+1\,000n}{1\,000\times 2}=\frac{m+n}{2}$(元/kg);

乙所购饲料的平均单价是 $\frac{800\times 2}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$(元/kg).

$\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{m^2+n^2+2mn-4mn}{2(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$,

∵ $m>0,n>0,m\neq n$,

∴ $\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$.

∴ $\frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$.

∴ 乙所购饲料的平均单价较低.

18. 解:(1)增大了.

∵ $\frac{a}{b}-\frac{a+1}{b+1}=\frac{a(b+1)-b(a+1)}{b(b+1)}=\frac{a-b}{b(b+1)}$,

$b>a>0$,

∴ $a-b<0,b(b+1)>0$.

∴ $\frac{a-b}{b(b+1)}<0$,

即 $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$.

(2)结果仍是增大了.

(3) $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}(c>0)$.

理由:$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}$.

∵ $b>a>0,c>0$,

∴ $c(a-b)<0,b(b+c)>0$.

∴ $\frac{c(a-b)}{b(b+c)}<0$,

即 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

点拨:本题采用作差法比较大小.

第六章 平行四边形

1 平行四边形的性质

▶**随堂练习(教材第137页)**

1. 解:能确定其他内角的度数.理由:由平行四边形的定义和定理,得平行四边形邻角互补,对角相等,因此只要知道平行四边形一个内角的度数,就可确定其他内角的度数.

2. 解:(1)∵ $\angle B=56°$,且平行四边形的对角相等,邻角互补,

∴ $\angle ADC=56°$,$\angle BCD=180°-56°=124°$.

(2)∵ $CD=25$,$AD=30$,且平行四边形的对边相等,∴ $AB=25$,$BC=30$.

习题 6.1

1. 解:在$\square ABCD$中,$\angle C=\angle A=48°$,$AD=BC=3$ cm.

∵ $AD\parallel BC$,∴ $\angle A+\angle B=180°$.

∴ $\angle B=180°-48°=132°$.

2. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel CD$,$\angle ABC=\angle ADC=125°$.

∴ $\angle BAD+\angle ADC=180°$.

∴ $\angle BAD=180°-125°=55°$.

又∵ $\angle CAD=21°$,

∴ $\angle CAB=\angle BAD-\angle CAD=55°-21°=34°$.

3. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $\angle B=\angle D$,$AB=CD$.

在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中,$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS).

4. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $\angle ABC=\angle ADC$,$BC=DA$,$\angle C=\angle A$,$DC=AB$.

∵ BE 平分$\angle ABC$,DF 平分$\angle ADC$,

∴ $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle FDA=\frac{1}{2}\angle ADC$.

∴ $\angle EBC=\angle FDA$.

在$\triangle EBC$和$\triangle FDA$中,$\begin{cases}\angle EBC=\angle FDA,\\ BC=DA,\\ \angle C=\angle A,\end{cases}$

∴ $\triangle EBC\cong\triangle FDA$(ASA).

∴ $EC=FA$.

又∵ $AB=DC$,

∴ $AB-FA=DC-EC$.

∴ $BF=DE$.

▶**随堂练习(教材第 139 页)**

解:∵ 平行四边形的对角线互相平分,

∴ $AC=2OA=6$,$BD=2OB=8$.

又∵ $OA^2+OB^2=3^2+4^2=5^2=AB^2$,

∴ $AC\perp BD$.

由勾股定理,可得 $AD^2=OA^2+OD^2$,

而 $OD=OB$,∴ $AD^2=3^2+4^2$.

∴ $AD=5$.

同理可得 $DC=5$,$BC=5$.

习题 6.2

1. 解:根据已知,得$\square ABCD$的周长是 50 m,$AD=BC=16$ m,

则 $AB=DC=\frac{1}{2}\times(50-16-16)=9$(m).

2. 解:在$\triangle ABD$中,∵ $BD\perp AD$,

∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

∴ $\square ABCD$的面积为 $6\times8=48$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OB=\frac{1}{2}BD=3$.

3. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB=DC$,$AB\parallel DC$.

∴ $\angle EBO=\angle FDO$.

∵ O 为 BD 的中点,∴ $BO=DO$.

又∵ EF 与 BD 相交于点 O,

∴ $\angle BOE=\angle DOF$.

∴ $\triangle BOE\cong\triangle DOF$.

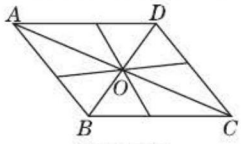
∴ $BE=DF$.

∵ $AB=DC$,∴ $BE-AB=DF-DC$.

∴ $AE=CF$.

4. 解:(1)如图,这些直线都过平行四边形两条对角线的交点 O,可以看到,过点 O 的任意一条直线都可将平行四边形分成全等的两部分.

(2)被过点 O 的直线分成的全等的两部分,可通过绕点 O 按逆(或顺)时针方向旋转 180°而相互重合.



(第 4 题)

2 平行四边形的判定

▶**随堂练习(教材第 142 页)**

1. 解:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

因为由平移的性质可知,BC,AD 是四边形 $ABCD$ 的一组平行且相等的对边.

2. 解:$AB\parallel CD$,$CD\parallel EF$,$AC\parallel BD$,$CE\parallel DF$,$AB\parallel EF$.

因为两组对边分别相等的四边形是平行四边形,平行四边形的对边平行,平行于同一直线的两条直线平行.

习题 6.3

1. 解:四边形 $ABDE$、四边形 $BCDE$ 是平行四边形.

因为在四边形 $ABDE$ 中,$AB=DE$;

在四边形 $BCDE$ 中,$BC=DE$.

2. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AB \parallel CD. \therefore BE \parallel DF.$
又∵ $BE = DF$,
∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

3. 证明:∵ $\angle 1 = \angle 2, \therefore AB \parallel CD.$
$\therefore \angle BAD + \angle D = 180°.$
又∵ $\angle B = \angle D$,
$\therefore \angle BAD + \angle B = 180°.$
$\therefore BC \parallel AD.$
∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

4. 解:由题意及平移的性质可知,$A_1B_1 \parallel AB$,
$A_1B_1 = AB, \therefore$ 四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.

▶**随堂练习(教材第 144 页)**

解:四边形 $BFDE$ 是平行四边形.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore OB = OD, OA = OC.$
又∵ E, F 分别是 OA 和 OC 的中点,
$\therefore OE = OF.$
∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

习题 6.4

1. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AB = CD, AB \parallel CD.$
$\therefore \angle BAM = \angle DCN.$
又∵ $BM \perp AC, DN \perp AC$,
$\therefore \angle BMA = \angle DNC = 90°.$
$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CDN$(AAS).
$\therefore BM = DN.$
∵ $BM \perp AC, DN \perp AC$,
$\therefore BM \parallel DN.$
∴ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

2. 解:(1)当 $BE = DF$ 时,四边形 $AECF$ 是平行四边形.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore OA = OC, OB = OD.$
又∵ $BE = DF$,
$\therefore OE = OF.$
∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.
(2)当 $\angle AEB = \angle CFD$ 时,四边形 $AECF$ 是平行四边形.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AB = CD, AB \parallel CD.$
$\therefore \angle ABE = \angle CDF.$
又∵ $\angle AEB = \angle CFD, AB = CD$,
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$(AAS).
$\therefore AE = CF.$
∵ $\angle AEB = \angle CFD$,
$\therefore \angle AEO = \angle CFO.$
$\therefore AE \parallel CF.$
∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

3. 解:(1)四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore OA = OC, OB = OD.$
又∵ $AE = \frac{1}{2}AO, BF = \frac{1}{2}BO, CG = \frac{1}{2}CO$,
$DH = \frac{1}{2}DO$,
$\therefore AE = CG, BF = DH.$
$\therefore OE = OG, OF = OH.$
∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
(2)四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore OA = OC, OB = OD.$
又∵ $AE = \frac{1}{3}AO, BF = \frac{1}{3}BO, CG = \frac{1}{3}CO$,
$DH = \frac{1}{3}DO$,
$\therefore AE = CG, BF = DH.$
$\therefore OE = OG, OF = OH.$
∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
(3)成立.

▶**随堂练习(教材第 147 页)**

解:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AD \parallel BC, \angle ABC = \angle ADC.$
$\therefore ED \parallel BF.$
又∵ $BE \parallel DF$,
∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.
$\therefore \angle EBF = \angle FDE.$
∵ $\angle ABC = 70°$, BE 平分 $\angle ABC$,
$\therefore \angle EBF = \frac{1}{2}\angle ABC = 35°.$
$\therefore \angle FDE = 35°.$
∵ $\angle ABC = \angle ADC$,
$\therefore \angle CDF = \angle ADC - \angle FDE = 35°.$

习题 6.5

1. 证明:连接 AC.
∵ $AB \parallel CD$,
$\therefore \angle BAC = \angle ACD.$
又∵ $\angle B = \angle D$,
$\therefore \angle ACB = \angle CAD.$
$\therefore AD \parallel BC.$
∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. 证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB \parallel CD$.

又∵ $AE = CF$, ∴ $BE \parallel DF$.

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

∴ $ED \parallel FB$.

又∵ M, N 分别是 DE 和 BF 的中点,

∴ $ME \parallel NF$.

∴ 四边形 $ENFM$ 是平行四边形.

3. 证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB // CD$.

又∵ E, F 分别是边 CD 和 AB 上的点,

∴ $AF // CE$.

又∵ $AE // CF$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∴ $AF = CE$. ∴ $BF = DE$.

又∵ $BF // DE$,

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

∴ $HE // GF$.

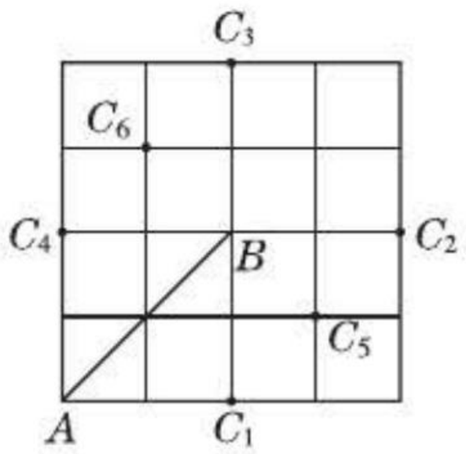
又∵ $EG // FH$,

∴ 四边形 $FHEG$ 是平行四边形.

∴ $EG = FH$.

4. 解: 因为曲尺的两边是互相垂直的,若两把曲尺的一边紧靠木板的边缘,则它们的另外一边是互相平行的. 若刻度相等,则根据一组对边平行且相等的四边形为平行四边形,可得曲尺与木板的两边构成了平行四边形,故木板相对的两个边缘平行;若刻度不相等,则不平行.

5. 解: 如图,$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 均满足条件,故满足条件的点 C 有 6 个.



(第 5 题)

3 三角形的中位线

▶ **随堂练习(教材第 152 页)**

1. 解: 以各边中点为顶点的三角形的周长为 $\frac{1}{2} \times (8 + 10 + 12) = 15(\text{cm})$.

2. 解: 由题意可知,MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线, ∴ $AB = 2MN$. ∴ 测出 MN 的长,就可知道 A, B 间的距离.

习题 6.6

1. 证明: ∵ D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 的中点,

∴ $DE = \frac{1}{2}AB = FB$, $DF = \frac{1}{2}AC = EC$.

∵ $AB = AF + FB$, $AC = AE + EC$,

∴ 四边形 $AFDE$ 的周长等于 $AB + AC$.

2. 解: 已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中,DE 是一条中位线,AF 是一条中线. 求证:DE 与 AF 互相平分.

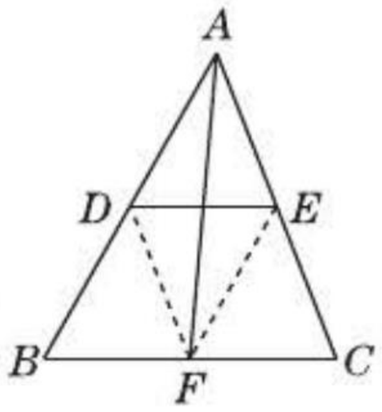
证明:如图,连接 DF, EF.

由题意易知 $AD = BD$, $AE = CE$, $BF = CF$,

∴ $DF // AE$, $EF // AD$.

∴ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

∴ DE 与 AF 互相平分.



(第 2 题)

3. 解: 四边形 $EGFH$ 是平行四边形.

证明: ∵ E, F, G, H 分别是 AB, CD, AC, BD 的中点, ∴ $GE \parallel \frac{1}{2}BC$, $FH \parallel \frac{1}{2}BC$.

∴ $GE \parallel FH$.

∴ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形.

4. 解: 取 CM, CN 的中点,分别为 P, Q,连接 PQ,测出 PQ 的长度,则 $MN = 2PQ$, $AB = 2MN = 4PQ$.

4 多边形的内角和与外角和

▶ **随堂练习(教材第 154 页)**

解: 不正确. 假设是正 n 边形,由多边形的内角和定理,得 $(n-2) \times 180° = n \times 145°$,解得 $n = \frac{72}{7}$,不是整数, ∴ 不正确.

习题 6.7

1. 解: 这个多边形是七边形,它的内角和是 $(7-2) \times 180° = 900°$.

2. 解: 设它是 n 边形,则 $(n-2) \times 180° = 1\,080°$,解得 $n = 8$,即它是八边形.

3. 解: 这种多边形是六边形.

设这种正多边形的一个内角为 x,

由题图,得 $3x = 360°$,解得 $x = 120°$.

设这种正多边形为 n 边形,

根据多边形的内角和公式,得 $n \times 120° = (n-2) \times 180°$,解得 $n = 6$.

∴ 这种多边形是六边形.

4. 解: 方法不唯一,例如,在四边形的纸片上,分别撕下每个内角,再把它们的顶点拼在一起(顶点重合),即可得一个周角,从而说明四边形的内角和是 360°.

▶随堂练习(教材第156页)

解:设它是 n 边形,根据题意,得 $(n-2)\times180°=360°\times2$,解得 $n=6$.

∴ 它是六边形.

∵ $360°\times2\div6=120°$,

∴ 如果这个多边形的每个内角都相等,那么每个内角等于120°.

习题6.8

1. 解:这个多边形是四边形,它的每个外角是90°.

2. 解:存在. 假设存在这样的多边形,设它的一个外角的度数为 $x°$,则与这个外角相邻的内角为 $(180-x)°$.

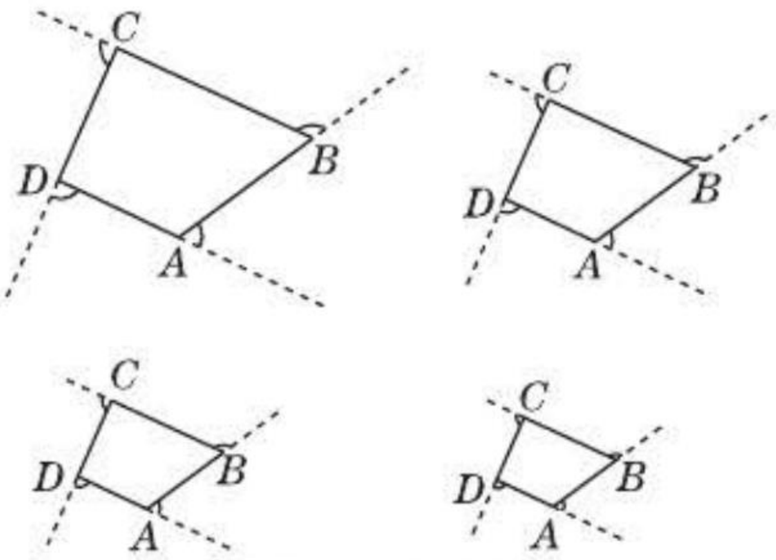
根据题意,得 $\frac{1}{5}(180-x)=x$. 解得 $x=30$.

∴ 这个多边形每个外角都等于30°,是正多边形.

∴ 这个多边形的边数为 $360°\div30°=12$.

3. 解:内角和相差180°,外角和相等.

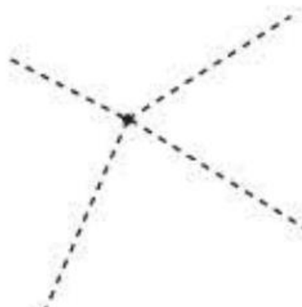
4. 解:(1)如图所示.



[第4(1)题]

(2)在缩小的过程中,四边形对应的各个外角的大小没有发生变化.

(3)最终的形状如图,原四边形的四条边交于一点,根据周角的有关知识可得四边形的外角和为360°.



[第4(3)题]

(4)五边形、六边形……一般多边形的外角和都为360°.

※5. 解:最多能有三个钝角,最多能有三个锐角.

复习题

1. 解:由题意,得 $\frac{2}{7}(12+2BC)=BC$,解得 $BC=8$.

2. 解:∵ $\angle A=30°$, $\angle B=150°$, $\angle C=30°$,

∴ $\angle A+\angle B=180°$, $\angle B+\angle C=180°$.

∴ $AD\parallel BC$, $AB\parallel CD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∴ $DC=AB=2$.

3. 解:图中共有9个平行四边形.

4. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel CD$.

∴ $\angle ABE=\angle CDF$.

∵ $AE\perp BD$, $CF\perp BD$,

∴ $\angle AEB=\angle CFD=90°$.

由三角形内角和为180°,得 $\angle BAE=\angle DCF$.

5. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD\fallingdotseq BC$.

又∵ E 在 BC 的延长线上,

∴ $AD\parallel CE$.

又∵ $AD=BC=CE$,

∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形.

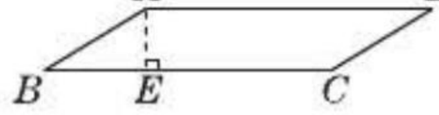
6. 解:$AB=CD$.

7. 解:如图,过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,

则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,∵ $\angle B=30°$,

∴ $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times4=2(\mathrm{cm})$.

∴ $S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=9\times2=18(\mathrm{cm}^2)$.



(第7题)

8. 略.

9. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD\fallingdotseq CB$.

∴ $\angle ADP=\angle CBQ$.

∵ $BP=DQ$,∴ $BD-BP=BD-DQ$,

即 $DP=BQ$.

∴ $\triangle ADP\cong\triangle CBQ(\mathrm{SAS})$.

∴ $AP=QC$, $\angle APD=\angle CQB$.

∴ $AP\parallel QC$. ∴ $AP\fallingdotseq QC$.

10. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD\parallel BC$, $AB=CD$.

∴ $\angle AEB=\angle EBC$, $\angle DFC=\angle FCB$.

∵ BE 平分 $\angle ABC$, CF 平分 $\angle DCB$,

∴ $\angle ABE=\angle EBC$, $\angle DCF=\angle FCB$.

∴ $\angle AEB=\angle ABE$, $\angle DFC=\angle DCF$.

∴ $AB=AE$, $DC=DF$.

∵ $AB=CD$,

∴ $AE=DF$.

∴ $AE-FE=DF-FE$,

即 $AF=DE$.

11. 解:∵ $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c,

∴ 连接各边中点得到的三角形的三边长分别是 $\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}c$.

∴ 此三角形的周长为 $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

同理,再次得到的小三角形的周长为 $\frac{1}{4}(a+b+c)$.

点拨:因为三角形的中位线等于第三边的一半,所以每次取各边中点得到的三角形的周长都是原三角形周长的一半.

12. 解:多边形的内角和依次填写:180°,360°,540°,720°,…. 正多边形内角的度数依次填写:60°,90°,108°,120°,….

13. 解:这个多边形是九边形.

14. 解:正方形.

15. 证明:连接 AC. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AF/\!/EC$,AC 与 BD 互相平分.

∴ BD 的中点 O 也是 AC 的中点.

∵ $AF/\!/EC$,$AE/\!/FC$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∴ EF 与 AC 互相平分.

∴ EF 经过点 O.

16. 证明:∵ $\angle ADB=\angle CBD$,∴ $AD/\!/CB$.

∴ $\angle DAE=\angle BCF$.

∵ $DE\perp AC$,$BF\perp AC$,

∴ $\angle DEA=\angle BFC$.

又∵ $DE=BF$,∴ $\triangle DAE\cong\triangle BCF$.

∴ $AD=CB$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

17. 解:$DE\parallel BF$,$DE\parallel FC$,$BF=FC$. 证明略.

18. 解:题图中有 6 个平行四边形,分别是 $\square ABCO$,$\square BCDO$,$\square CDEO$,$\square DEFO$,$\square EFAO$,$\square FABO$.

证明:∵ $AB=OF$,$AF=BO$,

∴ 四边形 $FABO$ 是平行四边形.(答案不唯一)

19. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD/\!/BC$.

∴ $EA/\!/FC$.

∵ $AC/\!/MN$,∴ $AC/\!/EF$.

∴ 四边形 $EFCA$ 是平行四边形. ∴ $EF=AC$.

∵ $AB/\!/CD$,∴ $AG/\!/CH$.

∵ $AC/\!/MN$,∴ $AC/\!/GH$.

∴ 四边形 $AGHC$ 是平行四边形.

∴ $GH=AC$.

∴ $EF=GH$.

20. 解:长度分别为 3 cm,5 cm,3 cm,5 cm 的木条可以组成一个平行四边形木框. 因为两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

21. 解:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\triangle CDE$ 是等边三角形,

∴ $AD\parallel BC$,$\angle B=\angle B'=\angle D=\angle DEC=60°$.

∴ $\angle BCB'=\angle DEC=60°$.

由对折知 $\angle BCA=\angle B'CA$,∴ $\angle BCA=30°$.

又∵ $\angle B=60°$,∴ $\angle BAC=90°$.

∴ $AB=\frac{1}{2}BC$. ∴ $AD=BC=2AB=6$ cm.

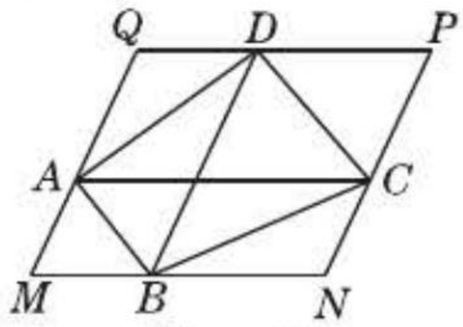
(2)易得 $\triangle AB'E$ 为等边三角形,

过点 A 作 $AG\perp B'C$ 于点 G,∴ $\angle AGB'=90°$.

∵ $\angle B'=60°$,$AB'=AB=3$ cm,∴ $B'G=\frac{3}{2}$ cm.

∴ $AG=\sqrt{AB'^2-B'G^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm. ∴ $S_{重叠}=\frac{1}{2}EC\cdot AG=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

22. 解:能. 如图,连接 AC,BD,分别过点 A,C 作 BD 的平行线,再分别过点 B,D 作 AC 的平行线,交点分别为 M,N,P,Q,则平行四边形 $MNPQ$ 即为所求.(作法不唯一)



(第 22 题)

总复习

1. 解:由题意易得 $180°-\angle B=2\angle AA_1B=4\angle A_1A_2C=8\angle A_2A_3D=16\angle A_4$. ∵ $\angle B=20°$,∴ $180°-20°=16\angle A_4$. 解得 $\angle A_4=10°$.

2. 解:∵ $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$,

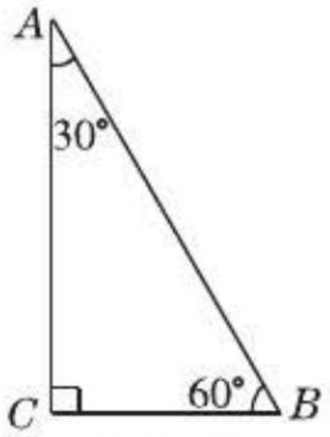
∴ 根据三角形内角和为 180°,

可得 $\angle A=30°$,$\angle B=60°$,

$\angle ACB=90°$.

如图,在 Rt$\triangle ACB$ 中,∵ $BC=4$,∴ $AB=8$.

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4\sqrt{3}$.



(第 2 题)

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AC=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

3. 证明:∵ AO 平分 $\angle BAC$,∴ $\angle OAE=\angle OAD$.

∵ $CE\perp AB$,$BD\perp AC$,

∴ $\angle AEO=\angle ADO=90°$.

又∵ $AO=AO$,∴ $\triangle AEO\cong\triangle ADO$(AAS).

∴ $OE=OD$.

在$\triangle BEO$和$\triangle CDO$中,

∵ $\angle BEO=\angle CDO=90°$, $OE=OD$, $\angle EOB=\angle DOC$,

∴ $\triangle BEO\cong\triangle CDO$(ASA).

∴ $OB=OC$.

4. 解:∵ DE垂直平分AB,

∴ $AE=BE$.

∴ $\angle BAE=\angle B=30°$.

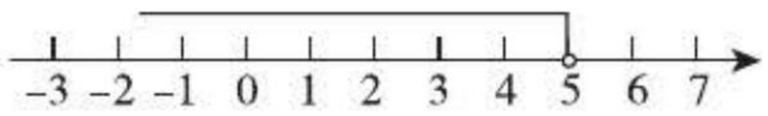
∵ AE平分$\angle BAC$,∴ $\angle CAE=\angle BAE$.

∴ $\angle BAC=2\angle BAE=60°$.

∵ $\angle B+\angle BAC+\angle C=180°$,

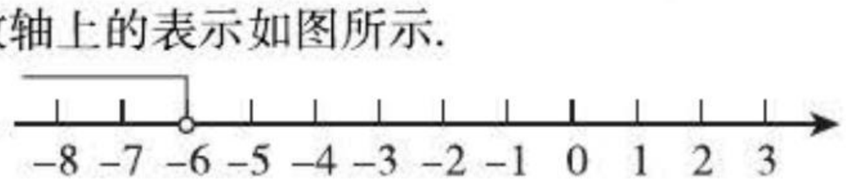
∴ $\angle C=90°$.

5. 解:(1)合并同类项,得$x<5$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第5(1)题]

(2)移项,得$x-2x>6$. 合并同类项,得$-x>6$. 两边都除以-1,得$x<-6$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



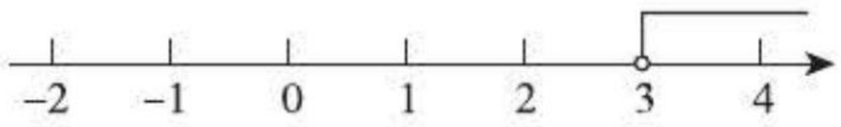
[第5(2)题]

(3)去分母,得$3x>2x$. 移项、合并同类项,得$x>0$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



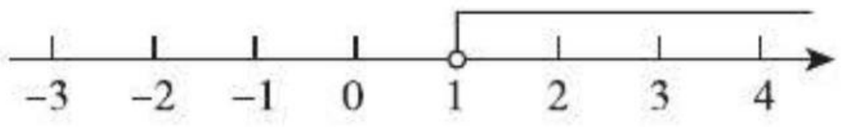
[第5(3)题]

(4)移项,得$2x+2x>5+7$. 合并同类项,得$4x>12$. 两边都除以4,得$x>3$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



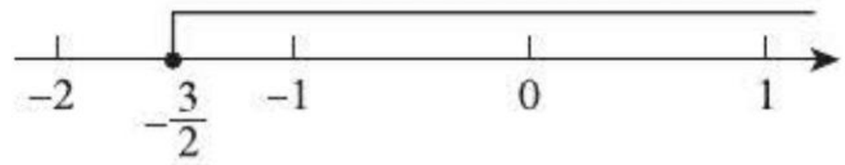
[第5(4)题]

(5)去分母,得$1-3x>2(1-2x)$. 去括号,得$1-3x>2-4x$. 移项、合并同类项,得$x>1$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第5(5)题]

(6)去括号,得$x-2x+\frac{1}{2}\leqslant 2$. 移项、合并同类项,得$-x\leqslant\frac{3}{2}$. 两边都除以$-1$,得$x\geqslant-\frac{3}{2}$. 这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第5(6)题]

(7)去分母,得$2(x-1)+4\geqslant x$.

去括号,得$2x-2+4\geqslant x$.

移项、合并同类项,得$x\geqslant-2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



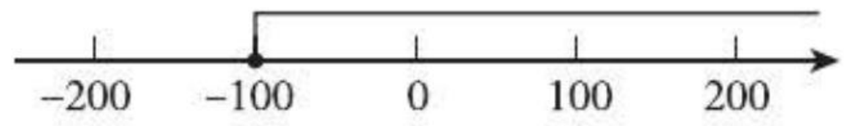
[第5(7)题]

(8)移项,得$0.01x-0.02x\leqslant 1$.

合并同类项,得$-0.01x\leqslant 1$.

两边都除以-0.01,得$x\geqslant-100$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图所示.



[第5(8)题]

6. 解:(1)$\begin{cases}1+2x>3+x, & ①\\ 5x\leqslant 4x-1. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x>2$.

解不等式②,得$x\leqslant-1$.

∴ 原不等式组无解.

(2)$\begin{cases}2-x\leqslant-1, & ①\\ 3<x-1. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x\geqslant 3$.

解不等式②,得$x>4$.

∴ 原不等式组的解集是$x>4$.

(3)$\begin{cases}3(x-1)<4x-2, & ①\\ \frac{-x}{5}>\frac{x+1}{2}. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x>-1$.

解不等式②,得$x<-\frac{5}{7}$.

∴ 原不等式组的解集是$-1<x<-\frac{5}{7}$.

(4)$\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{2x}{3}\leqslant\frac{-x}{2}+\frac{5}{3}, & ①\\ 3(x-1)<x-5. & ②\end{cases}$

解不等式①,得$x\leqslant 1$.

解不等式②,得$x<-1$.

∴ 原不等式组的解集是$x<-1$.

(5)$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+3)<2, & ①\\ \frac{x+2}{2}>\frac{x+3}{3}. & ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<1$.

解不等式②,得 $x>0$.

∴ 原不等式组的解集是 $0<x<1$.

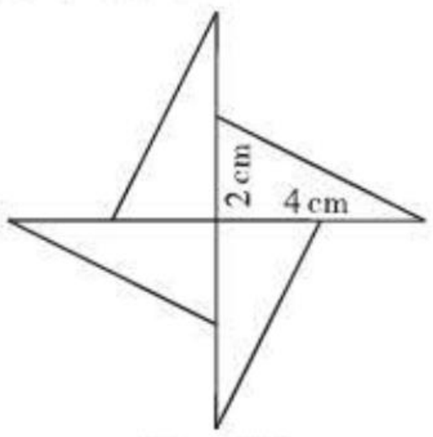
(6) $\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant 4, & ① \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1. & ② \end{cases}$

解不等式①,得 $x\leqslant 1$.

解不等式②,得 $x<4$.

∴ 原不等式组的解集是 $x\leqslant 1$.

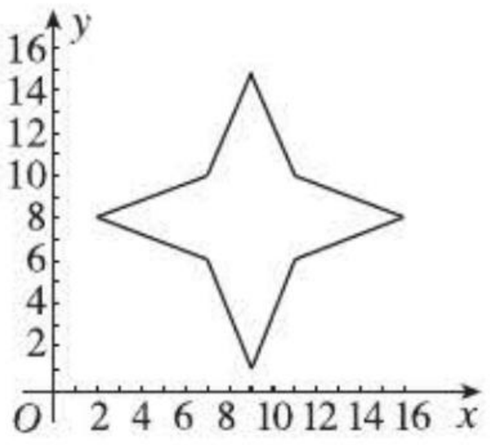
7. 解:(1)按逆时针方向连续旋转三次(每次旋转90°)所得图形如图所示.



(第7题)

(2)把所得的所有三角形看成一个图形,将得到一个“风车”图形.

8. 解:(1)如图,它像“四角星”,它既是轴对称图形,也是中心对称图形.



(第8题)

(2)得到的图形与(1)中的图形关于 y 轴对称,它既是轴对称图形,也是中心对称图形.

(3)得到的图形与(1)中的图形关于坐标原点中心对称,它既是轴对称图形,也是中心对称图形.

(4)与原图形相比,整个图形被向左平移了2个单位长度,向下平移了1个单位长度,它既是轴对称图形,也是中心对称图形.

9. 解:第一个图案三对对应点分别是(5,6)与(−2,2),(6,2)与(−1,−2),(1,2)与(−6,−2).其中,后者与前者相比,横坐标减小7,纵坐标减小4.

第二个图案三对对应点分别是(4,1)与(4,−1),(3,3)与(3,−3),(−5,1)与(−5,−1).各对应点横坐标相同,纵坐标互为相反数.

(选择对应点不唯一,符合题意即可)

10. 解:(1) $xy(x-y)-x(x-y)^2$

$=x(x-y)[y-(x-y)]$

$=x(x-y)(2y-x)$;

(2) $-a^2+1.96b^2=(1.4b)^2-a^2$

$=(1.4b+a)(1.4b-a)$;

(3) $-12xy+x^2+36y^2$

$=x^2-12xy+(6y)^2$

$=(x-6y)^2$;

(4) $\dfrac{1}{4}+a^2+a^4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+a^2+(a^2)^2$

$=\left(\dfrac{1}{2}+a^2\right)^2$;

(5) $a^2-8ab+16b^2=a^2-8ab+(4b)^2$

$=(a-4b)^2$.

点拨:根据多项式的项数及各项的结构特点选择合适的方法分解因式.

11. 解:(1) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(2ab)^2$

$=(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)$

$=(a+b)^2(a-b)^2$;

(2) $\left(\dfrac{1}{36}a-\dfrac{1}{3}\right)a+1=\dfrac{1}{36}a^2-\dfrac{1}{3}a+1$

$=\left(\dfrac{1}{6}a\right)^2-\dfrac{1}{3}a+1^2=\left(\dfrac{1}{6}a-1\right)^2$.

12. 解:(1) $2(a-1)^2-12(a-1)+18$

$=2[(a-1)^2-6(a-1)+9]$

$=2(a-1-3)^2=2(a-4)^2$;

(2) $(x^2-2xy+y^2)+(-2x+2y)+1$

$=(x^2-2xy+y^2)-2(x-y)+1$

$=(x-y)^2-2(x-y)+1=(x-y-1)^2$.

13. 解:∵ $3x^2+12xy+12y^2$

$=3(x^2+4xy+4y^2)=3(x+2y)^2$,

而 $x+y=0.2$, $x+3y=1$,

∴ $x+y+x+3y=2x+4y=2(x+2y)=1.2$.

∴ $x+2y=0.6$.

∴ $3x^2+12xy+12y^2=3(x+2y)^2=3\times 0.6^2=1.08$.

14. 解:(1) $\dfrac{(x+2)(x^2-6x+9)}{x^2-4}=$

$\dfrac{(x+2)(x-3)^2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{(x-3)^2}{x-2}$.

当 $x=3$ 时,原式 $=\dfrac{(3-3)^2}{3-2}=0$.

(2) $\dfrac{x^2-4x}{x^2-8x+16}=\dfrac{x(x-4)}{(x-4)^2}=\dfrac{x}{x-4}$.

当 $x=5$ 时,原式 $=\dfrac{5}{5-4}=5$.

15. **解**:(1)方程两边都乘 x^2-16,得 $x+4=4$.

解这个方程,得 $x=0$.

检验:将 $x=0$ 代入原方程,得左边 $=-\frac{1}{4}=$右边.

$\therefore x=0$ 是原方程的根.

(2)方程两边都乘 $x(x-1)$,得 $3x-(x+2)=0$.

解这个方程,得 $x=1$.

检验:当 $x=1$ 时,$x(x-1)=0$.

$\therefore x=1$是原方程的增根,故原方程无解.

(3)方程两边都乘 $x-3$,得$2-x-1=x-3$.

解这个方程,得 $x=2$.

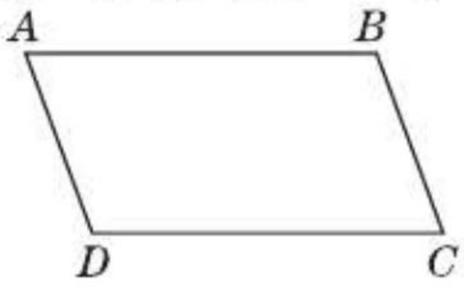
检验:将$x=2$ 代入原方程,得左边 $=1=$右边.

$\therefore x=2$ 是原方程的根.

点拨:解分式方程时,检验是一个不可省略的步骤.

16. **解**:是平行四边形.

证明:如图,$\because \angle A$ 与$\angle C$,$\angle B$ 与$\angle D$ 是相等的对角,而四边形的内角和为360°,



(第16题)

$\therefore \angle A+\angle B=180°=\angle A+\angle D$.

$\therefore AD/\!/BC$,$AB/\!/DC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

点拨:平行四边形的判定方法有以下几种.

①两组对边分别平行;②两组对边分别相等;③一组对边平行且相等;④两条对角线互相平分;⑤两组对角分别相等.

17. **解**:BE 与 CF 相等.

易证四边形$ABCD$是长方形,四边形 $AEFD$ 是平行四边形,$\therefore AD=BC$,$AD=EF$.

$\therefore BC=EF$.

$\therefore BC-EC=EF-EC$,即 $BE=CF$.

18. **证明**:如图,易知$\angle 1=\angle 3$,$\angle 2=\angle 4$.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle A+\angle B=360°$,

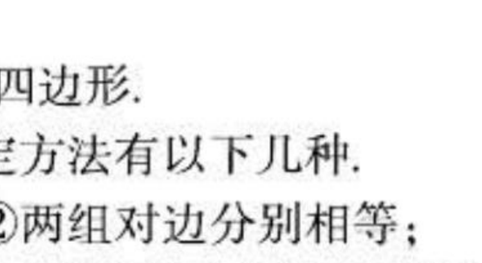
$\angle A+\angle B=180°$,

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$.

$\therefore \angle 3+\angle 4=90°$.

又$\because \angle 3+\angle 4+\angle DMC=180°$,

$\therefore \angle DMC=90°$,即 $DM\perp MC$.



(第18题)

19. **解**:设点 B,C,D,M 的对应点分别为 B',C',D',M',则它们的坐标分别为 $B'(5,5)$,$C'(7,4)$,$D'(9,5)$,$M'(7,5)$.

20. **解**:存在两个全等的三角形,即 $\triangle CDF\cong\triangle CBE$. 其中一个三角形能够通过旋转另外一个三角形而得到.

21. **解**:(1)这四部分的形状和大小完全相同.

(2)这四部分的形状和大小完全相同. 说明略.

22. **解**:(1)略.

(2)"分割线"都过方格纸的中心,且"分割线"都成中心对称.

23. **证明**:$(n+7)^2-(n-5)^2=[(n+7)+(n-5)][(n+7)-(n-5)]=12(2n+2)=24(n+1)$.

$\because n$ 为自然数,

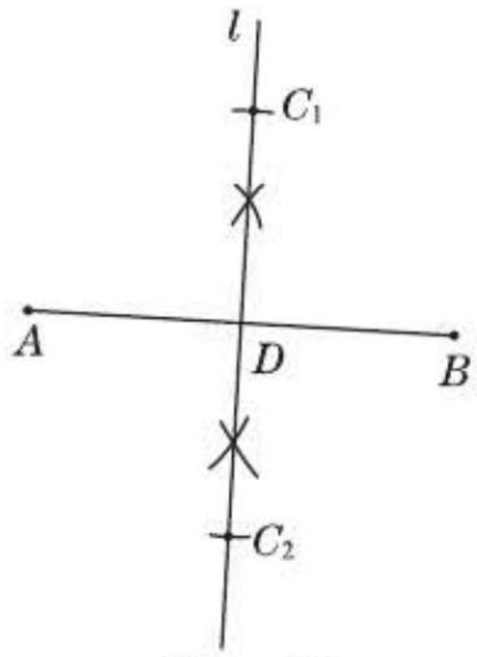
$\therefore 24(n+1)$能被 24 整除,

即$(n+7)^2-(n-5)^2$ 能被 24 整除.

点拨:欲证$(n+7)^2-(n-5)^2$ 能被 24 整除,只要将其分解因式,变为含有 24 的几个因式的积的形式即可.

24. **解**:这样的点 C 有两个.

点拨:如图,连接 AB,作 AB 的垂直平分线 l,与 AB 相交于点 D. 以点 D 为圆心,DA 长为半径画弧,与 l 相交于 C_1,C_2 两点,则 C_1,C_2 即为满足条件的点.



(第24题)

25. **解**:$\triangle ABC$ 平移的距离相当于 B,C 两点间的距离,即$\triangle ABC$ 平移的距离为 2.

由题意,得$\angle DCE=\angle DEC=\angle CDE=60°$,

$BC=CD=2$.

$\therefore \angle DBC=\angle BDC$.

$\because \angle DCE=\angle DBC+\angle BDC$,

$\therefore \angle BDC=30°$.

$\therefore \angle BDE=\angle BDC+\angle CDE=90°$.

$\therefore BD=\sqrt{BE^2-DE^2}=2\sqrt{3}$.

※**26. 解**：设该种植物种在距山脚的垂直距离为 x m 的部分比较适宜.

根据题意，得 $16 \leqslant 22 - \frac{x}{100} \times 0.55 \leqslant 20$，

$\therefore\ -6 \leqslant -\frac{55x}{10\,000} \leqslant -2$，

即 $2 \leqslant \frac{55x}{10\,000} \leqslant 6$. $\therefore\ \frac{4\,000}{11} \leqslant x \leqslant \frac{12\,000}{11}$.

答：该种植物种在距山脚的垂直距离为 $\frac{4\,000}{11}$ m ~ $\frac{12\,000}{11}$ m 的部分为宜.

27. 解：设最小的自然数为 x，则第二个自然数为 $x+1$，第三个自然数为 $x+2$.

由题意，得 $x + (x+1) + (x+2) < 15$.

解这个不等式，得 $x < 4$.

又∵ x 为自然数，

$\therefore\ x$ 的值可以为 0，1，2，3.

故这样的自然数组共有四组，它们分别是 0，1，2；1，2，3；2，3，4；3，4，5.

28. 解：设团体人数为 x. 选择甲旅行社时，所需的费用为 y_1 元；选择乙旅行社时，所需的费用为 y_2 元.

当 $x \geqslant 4$ 时，$y_1 = 4 \times 100 + 50(x-4)$，

即 $y_1 = 50x + 200$.

$y_2 = \frac{3}{4} \times 100x$，即 $y_2 = 75x$.

由 $y_1 = y_2$，得 $50x + 200 = 75x$，解得 $x = 8$；

由 $y_1 > y_2$，得 $50x + 200 > 75x$，解得 $x < 8$；

由 $y_1 < y_2$，得 $50x + 200 < 75x$，解得 $x > 8$.

当 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 时，显然 $y_1 > y_2$.

因此，当人数少于 8 时，乙旅行社的收费更优惠；当人数等于 8 时，两家旅行社的收费一样；当人数多于 8 时，甲旅行社的收费更优惠.

点拨：要知道哪家旅行社的收费更优惠，只要分别列出两家旅行社所需费用 y_1（元），y_2（元）与人数 x 的函数关系式，再通过比较 y_1 与 y_2 的大小，即可作出判断.

※**29. 解**：由 $100(a+t-8) = 270 - 3a$，

得 $103a = 270 + 800 - 100t$.

$\therefore\ a = \frac{1\,070 - 100t}{103}$.

根据题意，得 $6 \leqslant \frac{1\,070 - 100t}{103} \leqslant 10$.

$\therefore\ 618 \leqslant 1\,070 - 100t \leqslant 1\,030$.

$\therefore\ 40 \leqslant 100t \leqslant 452$，$\therefore\ 0.4 \leqslant t \leqslant 4.52$.

$\therefore$ 政府补贴至少应为 0.4 元/kg.

30. 解：(1) 设该校参加春游的人数为 x.

根据题意，得 $\left(\frac{x}{45} - 1\right) \times 60 = x + 30$.

解得 $x = 270$.

$\therefore$ 该校参加春游的人数为 270.

※(2) 设租用 45 座客车 y 辆，则租用 60 座客车 $(y+1)$ 辆. 根据题意，得

$$\begin{cases} 45y + 60(y+1) \geqslant 270, \\ 250y + 300(y+1) < \frac{270}{45} \times 250. \end{cases}$$

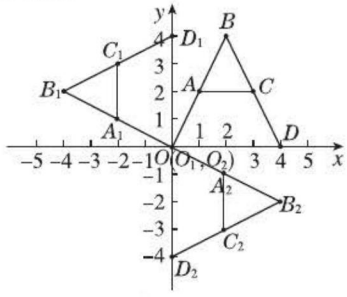
解得 $2 \leqslant y < \frac{24}{11}$.

$\therefore\ y = 2$.

$\therefore\ 250 \times 2 + 300 \times 3 = 1\,400$（元）.

$\therefore$ 本次春游所需车辆的租金为 1 400 元.

***31. 解**：如图所示.



（第 31 题）

(1) 得到一个“A”字图形.

(2) 填表如表 1，描点如图. 得到的图形相当于将 (1) 中的图形绕点 O 逆时针旋转 90°.

表 1

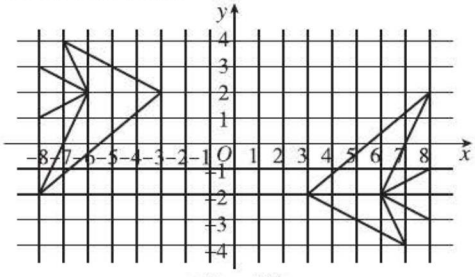
(x,y)	$O(0,0)$	$A(1,2)$	$B(2,4)$	$C(3,2)$	$D(4,0)$
$(-y,x)$	$O_1(0,0)$	$A_1(-2,1)$	$B_1(-4,2)$	$C_1(-2,3)$	$D_1(0,4)$

(3) 填表如表 2，描点如图. 得到的图形相当于将 (1) 中的图形绕点 O 顺时针旋转 90°.

表 2

(x,y)	$O(0,0)$	$A(1,2)$	$B(2,4)$	$C(3,2)$	$D(4,0)$
$(y,-x)$	$O_2(0,0)$	$A_2(2,-1)$	$B_2(4,-2)$	$C_2(2,-3)$	$D_2(0,-4)$

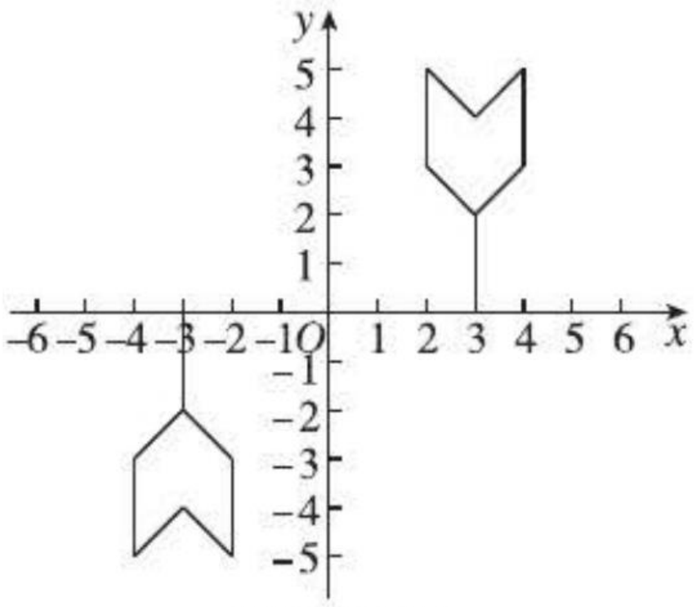
***32. 解**：(1) 如图所示.



（第 32 题）

(2)新“鱼”各顶点的坐标分别为(-3,2),(-8,-2),(-6,2),(-8,1),(-8,3),(-6,2),(-7,4),(-3,2).

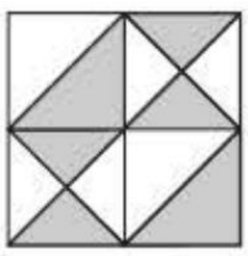
*33. 解:如图所示.



(第33题)

所得的图形与原图形的大小、形状都一样,两图形关于原点成中心对称.

34. 解:如图所示为“基本图案”,只需通过平移即可得到更加美丽、更大的图案.



(第34题)

图略(答案不唯一).

35. 解:当 $d=0.22\ \text{mm}=0.022\ \text{cm}$, $C=80\ \text{cm}$ 时,

$$y=\frac{C}{2\pi d}=\frac{80}{2\pi\times 0.022}\approx 579.$$

$1\ 982-579=1\ 403$.

∴ 该地发生地震的大致年代为1403年.

36. 解:$\dfrac{960}{\dfrac{960}{m}+40}=\dfrac{960}{\dfrac{960+40m}{m}}=\dfrac{960m}{960+40m}=\dfrac{24m}{24+m}$(天).

∴ 实际$\dfrac{24m}{24+m}$天完成了任务.

37. 解:由题意,得$\dfrac{m}{a}-\dfrac{m}{a+d}=\dfrac{md}{a(a+d)}$(t).

∴ 每天应节约用煤$\dfrac{md}{a(a+d)}$ t.

38. 解:设原计划 x 天完成C检.

根据题意,得$\dfrac{1+30\%}{x}=\dfrac{1}{x-5}$.

解这个方程,得 $x=21\dfrac{2}{3}$.

经检验,$x=21\dfrac{2}{3}$是所列方程的根.

$21\dfrac{2}{3}\approx 22$,∴ 原计划约22天完成C检.

39. 证明:把$(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$移项、展开、整理,得$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$.

∵ $(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(a-c)^2\geqslant 0$,

∴ $(a-b)^2=0,(b-c)^2=0,(a-c)^2=0$.

∴ $a-b=0,b-c=0,a-c=0$.

∴ $a=b,b=c,a=c$.

∴ $a=b=c$.

∴ 这个三角形是等边三角形.

40. (1)证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel CD$.

又∵ $AM=\dfrac{1}{2}AB,CN=\dfrac{1}{2}CD$,

∴ $AM\parallel CN$.

∴ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2)解:是.

(3)解:是.

结论:当 $AM=\dfrac{1}{m}AB,CN=\dfrac{1}{m}CD(m>1)$时,四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

41. 解:(1)假.

逆命题:相邻的两个角都相等的四边形是平行四边形. 为真命题.

(2)假.

逆命题:平行四边形的一组对边平行,另一组对边相等. 为真命题.

42. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD/\!/BC$.

∴ $AE/\!/CF$.

∴ $\angle AEF=\angle CFE$.

∵ $\angle CFE=\angle AFE$,

∴ $\angle AEF=\angle AFE$.

∴ $AF=AE$.

∵ $AF=CF$,

∴ $AE=CF$.

∴ $AE\parallel CF$.

∴ 四边形 $AFCE$ 为平行四边形.

43. 解:小明的考虑不全面.

因为 A,B,E 三点及 D,C,F 三点不一定共线.

我认为四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

证明:∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFC$ 均为平行四边形,

∴ $AD\parallel BC,BC\parallel EF$.

∴ $AD\parallel EF$.

∴ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



封面题字：沈　鹏

荣德基官方网站：http://www.rulder.com.cn

荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

客服热线：182 1039 5892

荣德基初中频道

ISBN 978-7-5450-7169-6

定价：42.80元