特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法57招·七八九年级共439招



八年级 数学(下) (HS版)

赠教材习题答案

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

八年级 数学 下 （HS版）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第16章 分式

知识点64个 必得分

		页码
1	分式的概念	2
2	分式有意义和无意义的条件	3
3	分式值为0的条件	4
4	分式的基本性质	5
5	分式的约分	7
6	分式的通分	8
7	分式的乘法	14
8	分式的除法	15
9	分式的乘方	15
10	分式的乘方、乘除混合运算	16
11	同分母分式的加减法	22
12	异分母分式的加减法	23
13	分式的混合运算	24
14	分式方程的概念	29
15	分式方程的解法	30
16	含字母的分式方程的解法	31
17	分式方程的应用	32
18	零指数幂	40
19	负整数指数幂	40
20	科学记数法	41

考向点87个 速提分

		页码
1	利用分式的定义识别分式	2
2	利用分式有意义和无意义的条件确定字母的值或取值范围	3
3	利用分式值为0的条件求字母的值	4
4	利用分式的基本性质对分式进行变形	5
5	利用分式的乘除运算及乘方法则进行分式的混合运算	16
6	利用分式的意义法选取分式的化简求值中字母的值	18
7	利用同分母分式的加减法法则计算	22
8	利用异分母分式的加减法法则计算	23
9	利用分式的混合运算顺序进行计算	24
10	利用对应项系数相等法巧求分式中待定字母的值	25
11	利用建立模型法用分式解实际问题	25
12	利用拆项法巧求分式的值	26
13	利用去分母法解含字母的分式方程	31
14	利用建立分式方程的模型解决实际问题	32
15	利用分组通分法巧解复杂的分式方程	34
16	利用分式方程的解的范围列不等式法求字母的取值范围	35
17	利用类比法探究分式方程的解与分式方程之间的关系	36
18	利用科学记数法解科学记数法表示的数与原数的关系问题	42
19	利用等底法求负整数指数幂中字母的值	43
20	利用化负为正法化简含有负整数指数幂的式子	43

第17章 函数及其图象

知识点64个 必得分

		页码
1	常量与变量	57
2	函数	58
3	函数自变量的取值范围与函数值	58
4	函数关系式	59
5	平面直角坐标系	65
6	点的坐标	65
7	象限的划分及点的坐标特征	67
8	特殊位置的点的坐标特征	68
9	函数的图象	70
10	一次函数	78
11	一次函数的图象	79
12	一次函数图象的平移	80
13	一次函数的性质	81
14	用待定系数法确定一次函数表达式	82
15	建立一次函数的模型解实际应用题	83
16	反比例函数的定义	95
17	反比例函数的图象	96
18	反比例函数的性质	97
19	建立反比例函数模型解实际问题	98
20	一次函数与二元一次方程组	106
21	一次函数与一元一次方程	107
22	一次函数与一元一次不等式	108
23	实际问题中的近似函数关系	109

考向点87个 速提分

		页码
1	利用常量与变量的定义进行辨识	57
2	利用自变量取值范围、函数值的定义进行相关计算	59
3	利用实际问题和几何问题中的数量关系建立函数表达式	60
4	利用可变性识别函数	61
5	利用数形结合法解与函数有关的几何问题	61
6	利用建模思想解与函数有关的生活问题	62
7	利用点的位置特征求字母的值（取值范围）	67
8	利用特殊位置点的坐标特征解决问题	69
9	利用等积法求平面直角坐标系中点的坐标	73
10	利用图象信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用	74
11	利用情境信息法获取两个变量的函数关系确定其图象	74
12	利用一次函数图象的平移规律求函数表达式	81
13	利用一次函数的图象与性质解相关应用	82
14	利用分类法求涉及三角形面积的一次函数表达式	86
15	利用图象信息法解双图象问题的实际应用题	88
16	利用反比例函数的定义识别反比例函数	95
17	利用反比例函数的性质解与求字母值有关的应用	97
18	利用增减性法比较函数值的大小	101
19	利用一次函数与二元一次方程组的关系解相关应用	106
20	利用一次函数与一元一次方程的关系解与方程的解相关问题	107
21	利用一次函数图象法解一元一次不等式	109
22	利用图象法确定近似函数关系的函数表达式	109
23	利用数形结合法解函数、方程、几何综合问题	111
24	利用建模思想解决函数应用题	112

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点57个 得高分

		页码
1	判断一个式子是否是分式的方法	2
2	求分式有意义时字母的取值范围	3
3	求分式值为0的字母值的方法	4
4	利用分式的基本性质化系数为整数的方法	6
5	确定最简公分母的一般方法	8
6	换元法	10
7	分式乘除、乘方混合运算的解题步骤	17
8	利用倒数法求分式值的思路	26
9	拆项法	26
10	判断一个方程是不是分式方程的方法	29
11	分组通分法	34
12	根据分式方程的解的范围求字母取值范围的思路	35
13	底倒指反法	41
14	用科学记数法表示绝对值小于1的数的思路	42
1	求函数值的一般步骤	59
2	确定函数关系式的方法	59
3	确定点的坐标的方法	66
4	根据点的坐标描点的方法	66
5	几何图形中建立适当的平面直角坐标系的方法	69
6	利用方程思想解关于坐标系中对称点的思路	70
7	结合实际问题判断函数图象的方法	72
8	求解从函数图象中获取信息问题的思路	72
9	判断函数是否为一次函数的方法	78
10	已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积，求直线对应的函数表达式的方法	86
11	用一次函数解决实际问题的策略	88
12	判断多种函数图象共存问题的技巧	100
13	求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法	103
14	用图象法解二元一次方程组的基本方法	106
15	求不等式解集的方法	109
16	利用方程（组）、不等式（组）求解方案类问题的策略	117

考法点54个 争满分

		页码
1	利用分式有意义的条件求字母的取值范围	10
2	分式值为零的条件	11
3	分式的基本性质	11
4	约分	11
5	利用整式、分式的运算法则进行辨析	19
6	利用分式的乘除法法则解游戏问题	19
7	利用已知结论进行分式除法计算	20
8	利用分式的加减法运算法则进行分式加减运算	27
9	利用分式的混合运算求值	27
10	利用分式方程的解的定义求字母的值	36
11	利用分式方程的解满足的条件求字母的值	37
12	利用分式方程增根的定义求字母的值	37
13	分式方程的应用	38
14	负整数指数幂的运算	44
15	利用科学记数法解实际应用问题	44
1	根据实际问题列函数关系式	63
2	利用定义法求自变量的取值范围	63
3	利用函数关系式及自变量的取值范围求函数值	63
4	利用象限角的符号特征确定点的位置	75
5	利用函数关系式确定函数的图象	75
6	利用函数图象确定函数表达的几何意义	75
7	利用式子有意义的条件解一次函数图象的位置问题	89
8	利用一次函数的图象和性质求含绝对值的函数的性质	89
9	利用一次函数的图象的特征解点的坐标问题	90
10	利用一次函数的模型解实际应用问题	91
11	利用一次函数的性质解实际应用问题	91
12	利用反比例关系及自变量、函数值的范围解实际中图象应用问题	102
13	利用反比例函数的性质与三角形的性质求待定系数的范围	103
14	反比例函数与一次函数的综合问题	103
15	利用一次函数的交点坐标解不等式	118
16	利用解二元一次方程组解两直线的交点坐标问题	118
17	利用解方程（组）解一次函数的实际应用	119

第16章 分式

第17章 函数及其图象

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第18章 平行四边形

知识点64个 必得分

		页码
1	平行四边形	137
2	平行四边形的边、角性质	138
3	两条平行线之间的距离	139
4	平行四边形的对角线性质	140
5	平行四边形的判定	148

考向点87个 速提分

		页码
1	利用平行四边形的边角性质解证明计算问题	139
2	利用两条平行线间的距离的性质说明面积相等	140
3	利用平行四边形的对角线性质解与平行四边形有关的问题	140
4	利用全等法解平行四边形问题	141
5	利用作差法判断平行四边形中线段间的关系	142
6	利用构造对角线法证平行四边形中线段相等	143
7	利用等腰三角形的性质求平行四边形中的角的度数	143
8	利用面积法解与平行四边形相关的应用问题	143
9	利用平行四边形的判定解有关四边形的应用	149
10	利用一题多解法判定平行四边形	150
11	利用平行四边形法解几何问题	151
12	利用构造平行四边形法解几何问题	151
13	利用“动中求静”法探究动点问题	152

第19章 矩形、菱形与正方形

知识点64个 必得分

		页码
1	矩形的定义及其性质	166
2	矩形的判定	167
3	菱形的定义及其性质	175
4	菱形的判定	177
5	正方形的定义	185
6	正方形的性质	186
7	正方形的判定	187

考向点87个 速提分

		页码
1	利用矩形的定义与性质解相关问题	166
2	利用折叠法解矩形中的计算问题	169
3	利用逆向思维法解确定矩形条件问题	170
4	利用菱形的判定定理判定菱形	178
5	利用面积法求菱形中线段的长	179
6	利用对称性求菱形的最值	180
7	利用动中取静法探究构成特殊四边形的条件	180
8	利用正方形的性质解与三角形有关应用	186
9	利用线段代换法求正方形中三角形的周长	188
10	利用角度代换法求正方形中的角	188
11	利用执果索因法判定正方形	189
12	利用特殊位置法探求正方形中旋转变换的定值	189
13	利用构造法在正方形中构造全等三角形	190
14	利用截长补短法证明正方形中的和差关系	191

第20章 数据的整理与初步处理

知识点64个 必得分

		页码
1	平均数	209
2	用计算器求平均数	210
3	加权平均数	210
4	中位数	218
5	众数	219
6	平均数、中位数和众数的选用	220
7	方差	228
8	用计算器求方差	229
9	极差、平均差、标准差	230

考向点87个 速提分

		页码
1	利用平均数的定义求字母值	209
2	利用计算器求平均数	210
3	利用加权平均数的定义求加权平均数	211
4	利用新数据法求平均数	212
5	利用排除极端值法求平均数	213
6	利用整体代入法求平均数	213
7	利用方程思想求平均数中的相关数据	214
8	利用中位数的定义找中位数	218
9	利用众数的定义识别众数	219
10	利用平均数、中位数和众数的关系解实际应用问题	220
11	利用“三数特点法”对数据进行分析	221
12	利用三数分析数据进行决策	223
13	利用方差分析数据	228
14	利用计算器求数据的方差	229
15	利用标准差的公式进行计算	230
16	利用“三数、方差”分析数据	231

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点57个 得高分

		页码
1	分类法数几何图形的个数	138
2	全等法	141
3	证明角相等的常用方法	142
4	作差法	142
5	构造对角线法	143
6	求线段或角的常用方法	143
7	面积法	143
8	由边的关系判定平行四边形的方法	149
9	证明两条线段（或两角）相等的常用方法	151
10	倍长中线法	151
1	判定矩形的常见思路	168
2	证明一个平行四边形为矩形的两种方法	168
3	解决矩形折叠问题的方法	169
4	证明一个四边形是菱形的方法	178
5	探求点的位置的方法	179
6	求线段和的最小值的方法	180
7	判定四边形是正方形的方法	188
8	特殊位置法	189
9	构造法	190
10	截长补短法	191
11	整体思想	192
1	用权重解决实际问题的策略	211
2	新数据法求平均数的步骤	212
3	比较两组数据稳定性的方法	229
4	最优决策型问题的解题思路	229
5	根据方差大小进行决策的方法	232
6	统计思想	242

考法点54个 争满分

		页码
1	利用平行四边形的性质解全等三角形问题	145
2	利用线段垂直平分线性质解平行四边形的周长问题	145
3	利用平行四边形的性质证明线段相等	146
4	利用全等三角形判定平行四边形	153
5	利用平行四边形的性质和判定解与勾股定理综合问题	153
6	利用平行四边形的判定和性质解与等腰三角形、勾股定理综合问题	154
1	利用矩形的性质解决图形折叠问题	172
2	利用矩形的判定和性质探求矩形的条件	172
3	利用菱形的判定定理证明四边形是菱形	181
4	利用整体思想求菱形的面积	182
5	利用作图信息求菱形中的角	182
6	利用三角形三边关系解正方形中的裁剪问题	192
7	利用整体思想解正方形中的线段的求和问题	192
8	利用三角形、菱形性质解判定正方形的条件问题	193
9	利用比例关系求角解判定正方形问题	194
1	利用平均数解实际中的售价问题	214
2	利用平均数作决策	215
3	利用众数的定义求平均数	224
4	利用中位数、众数的定义求平均数	224
5	利用三数的定义分析数据	224
6	利用各数据的定义识别各数据	233
7	利用数的特征作决策	234

第18章 平行四边形

第19章 矩形、菱形与正方形

第20章 数据的整理与初步处理

注：“提分攻略　学霸图谱”中，所列“考向点”“方法点”为重要条目，全书不仅限于此.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法
巧求分式值的方法…… 51

看微课
分式的定义…… 2
分式的基本性质…… 5
分式方程的定义…… 29
整数指数幂…… 40

学方法
待定系数法…… 82

看微课
特殊位置的点的坐标…… 68
一次函数…… 78
一次函数图象的画法…… 80
反比例函数的定义…… 95
反比例函数的性质…… 97

观动画
一次函数的图象…… 79

学方法
平行四边形的判定方法……148

看微课
平行四边形的定义……137
平行四边形的性质……138

第16章 分式

16.1 分式及其基本性质 …… 2
16.2 分式的运算 …… 14
16.2.1 分式的乘除 …… 14
16.2.2 分式的加减 …… 22
16.3 可化为一元一次方程的分式方程 …… 29
16.4 零指数幂与负整数指数幂 …… 40

素养提分

行动篇：类比·探索 ☞ P13
技巧篇：分式运算中的常用技巧与方法 ☞ P46
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P48

第17章 函数及其图象

17.1 变量与函数 …… 57
17.2 函数的图象 …… 65
17.3 一次函数 …… 78
17.4 反比例函数 …… 95
17.5 实践与探索 …… 106

素养提分

行动篇：“待定系数法”的解读与延伸 ☞ P92
类型篇：一次函数表达式的常见题型 ☞ P122
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P124

第18章 平行四边形

18.1 平行四边形的性质 …… 137
18.2 平行四边形的判定 …… 148

素养提分

技巧篇：构造平行四边形证题的技巧 ☞ P157
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P159

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 19 章 矩形、菱形与正方形

19.1 矩形 …… 166

19.2 菱形 …… 175

19.3 正方形 …… 185

素养提分

技巧篇：特殊平行四边形的特殊解题技巧 ☞ P197

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P199

看微课

矩形的性质……166

矩形的判定……167

菱形的性质……175

菱形的判定……177

第 20 章 数据的整理与初步处理

20.1 平均数 …… 209

20.2 数据的集中趋势 …… 218

20.3 数据的离散程度 …… 228

素养提分

应用篇：平均数、众数、中位数的应用 ☞ P237

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P240

看微课

算术平均数和加权平均数…210

众数、中位数……219

参考答案及点拨（单独成册）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

2. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想. 它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

3. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

4. **分类讨论思想**：把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

5. **函数思想**：是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题的一种思想.

6. **建模思想**：建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段. 使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

7. **数形结合思想**：是指在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法. 数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

8. **换元法**：所谓换元法，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，使它简化，使问题易于解决.

9. **裂项相消法**：裂项相消法的实质是将所要求和的代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.

10. **类比法**：类比法是根据两个对象之间在某些方面的相同或相似，从而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种推理方法. 因此，类比是从特殊到特殊的推理. 通过类比，可以发现新旧知识的相同点，利用已有的旧知识，来认识新知识.

11. **定义法**：定义法就是直接利用数学定义解题的一种方法. 从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的. 因此，用定义法解题，是最直接的方法.

12. **排除法**：充分运用选择题答案的唯一性，把选择题所给结论逐一分析，推理、计算、判断、排除错误选项，确定正确答案.

13. **待定系数法**：待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数表达式.

14. **图象法**：利用图象这种特殊且形象的数学语言工具，来表达各种现象的过程和规律，这种方法称为图象法.

15. **特殊值法**：又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，从而通过简单的运算，得出最终答案的一种方法. 这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要跟最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干包含的等量关系中是一个不可或缺的量.

16. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁. 其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法. 主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

微信公众号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

再次领略数式的飞跃

再次领略数式的飞跃











第16章 分式

核心考点

你将见到的

- 分式的基本性质
- 分式的运算
- 分式方程的解法
- 分式方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 换元法
- 倒数法
- 拆项法
- 底倒指反法
- 类比法
- 裂项相消法
- 整体思想
- 方程思想
- 转化思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.1 分式及其基本性质

核心知识
- 分式的概念
- 分式的基本性质
- 约分
- 通分

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的概念

1. 定义： 形如$\frac{A}{B}$（A、B是整式，且B中含有字母，$B\neq 0$）的式子，叫做分式．其中A叫做分式的分子，B叫做分式的分母．

分式的“三要素”：（1）形如$\frac{A}{B}$的式子；（2）A，B为整式；（3）分母B中含有字母．

2. 分式与分数、整式的关系：

（1）分式中分母含有字母．由于字母可以表示不同的数，所以分式比分数更具有一般性；分数是分式中字母取特定值时的特殊情况．

（2）分式与整式的根本区别就是分式的分母中含有字母．

3. 有理式： 整式和分式统称有理式，即

有理式$\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}$



拨考向 利用分式的定义识别分式

例1 下列各式中，哪些是分式？哪些是整式？

$\frac{4}{m}$，$-2x^2$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{\sqrt{x}}{2x^3+3}$，$\frac{3a+b}{2\pi}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$．

解题秘方： 利用分式的三要素判断即可．

解： 分式有$\frac{4}{m}$，$\frac{3}{5+y}$，$\frac{p^2}{p}$，$\frac{a-b}{a+b+c}$；

整式有$-2x^2$，$\frac{2}{5}$，$\frac{x^2+y^2}{6}$，$\frac{1}{4}(3x-y)$，$\frac{3a+b}{2\pi}$．

方法点拨： 判断一个式子是否是分式的方法：

首先判断是不是具有$\frac{A}{B}$的形式，其次判断A，B是不是整式，最后看分母中是不是含有字母．分式只注重形式而不注重结果，分母中含有字母是判断分式的必要条件．

提分·必记

特别解读

1. 分式可看成是两个整式的商，它的分子是被除式，分母是除式，分数线相当于除号，分数线还具有**括号作用**和**整体作用**．
2. 判断一个式子是否是分式，不能将原式子进行变形后再判断，而必须按照本来“面目”进行判断．如：$\frac{3a^2}{a}$是分式．

提分·秘诀

特别警示

1. 由于$\frac{p^2}{p}$约分后为p，所以容易误认为其是整式．
2. $\frac{\sqrt{x}}{2x^3+3}$中，尽管分母中含有字母x，但分子$\sqrt{x}$不是整式，所以它既不是整式，也不是分式．
3. π是常数，不能当字母看，所以$\frac{3a+b}{2\pi}$是整式．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 2 分式有意义和无意义的条件

1. 分式有意义的条件：

分式的分母表示除数，由于除数不能为 0，所以分式的分母不能为 0，即当 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义.

2. 分式无意义的条件：

分式的分母为 0，即当 $B=0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 无意义.

核心考向▶ 利用分式有意义和无意义的条件确定字母的值或取值范围

题型 1：分式有意义的条件在求字母范围中的应用

例 2 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？

（1）$\frac{2x+1}{5x-3}$；　　（2）$\frac{2}{|x|-1}$；

（3）$\frac{x+1}{x^2+3}$；　　（4）$\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$.

解题秘方：分母的值不等于 0 时，分式有意义.

解：（1）当 $5x-3 \neq 0$，即 $x \neq \frac{3}{5}$ 时，分式 $\frac{2x+1}{5x-3}$ 有意义；

（2）当 $|x|-1 \neq 0$，即 $x \neq \pm 1$ 时，分式 $\frac{2}{|x|-1}$ 有意义；

（3）∵不论 x 取什么值，都有 $x^2+3 > 0$，

∴ x 取任何实数，分式 $\frac{x+1}{x^2+3}$ 都有意义；

（4）当 $(x-2)(x+4) \neq 0$，即 $x \neq 2$ 且 $x \neq -4$ 时，分式 $\frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$ 有意义.

题型 2：分式无意义的条件在求字母值中的应用

例 3 分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 中的字母满足什么条件时，分式无意义？

解题秘方：分母的值等于 0 时，分式无意义.

解：要使分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 无意义，

则分母 $x^2-16=0$，

即 $x^2=16$，解得 $x=\pm 4$.

∴当 $x=\pm 4$ 时，分式 $\frac{x-4}{x^2-16}$ 无意义.

提分·必记

特别提醒

- 分母不为 0，并不是说分母中的字母不能为 0，而是表示分母的整式的值不能为 0.
- 分式是否有意义，只与分式的分母是否为 0 有关，而与分式的分子是否为 0 无关.

提分·秘诀

解法提醒

求分式有意义时字母的取值范围：

根据“分式有意义的条件：分式的分母不等于 0”列不等式求解.

警示误区

只能对原分母进行讨论，不能先约分化简，否则会使取值范围扩大，如此题中，若约去 $x-2$，易错得当 $x \neq -4$ 时，分式有意义.

方法点拨

当分式无意义时，利用分母等于 0 的条件构造出方程求解即可.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 3 分式值为 0 的条件

1. 分式的值为 0 的条件：

当分式的分子等于 0 且分母不等于 0 时，分式的值为 0.

即：对于分式 $\frac{A}{B}$，当 $A=0$ 且 $B\neq 0$ 时，$\frac{A}{B}=0$.

2. 常见的几种特殊分式值的讨论：

（1）若 $\frac{A}{B}$ 的值为正数，则 $\begin{cases}A>0,\\B>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A<0,\\B<0;\end{cases}$

（2）若 $\frac{A}{B}$ 的值为负数，则 $\begin{cases}A>0,\\B<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}A<0,\\B>0;\end{cases}$

（3）若 $\frac{A}{B}$ 的值为 1，则 $A=B$，且 $B\neq 0$；

（4）若 $\frac{A}{B}$ 的值为 -1，则 $A=-B$，且 $B\neq 0$.

提分·必记

特别提醒

- 分式的值是在分式有意义的前提下才考虑的，所以分式 $\frac{A}{B}$ 的值为 0 的条件：$A=0$ 且 $B\neq 0$，二者缺一不可.
- 对于分式的几种特殊值的讨论既要考虑分子，又要考虑分母.

拔考向 ▸ 利用分式值为 0 的条件求字母的值

例 4 当 x 取何值时，下列分式的值为 0？

（1）$\frac{x+2}{2x-3}$；　　（2）$\frac{|x|-2}{x+2}$；

（3）$\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$；　　（4）$\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$.

解题秘方：分式的值为 0 的条件：分子为 0，分母不为 0.

解：（1）由 $\begin{cases}x+2=0,\\2x-3\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-2$，

∴当 $x=-2$ 时，分式 $\frac{x+2}{2x-3}$ 的值为 0.

（2）由 $\begin{cases}|x|-2=0,\\x+2\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=2$，

∴当 $x=2$ 时，分式 $\frac{|x|-2}{x+2}$ 的值为 0.

（3）由 $\begin{cases}3-|x|=0,\\(x-3)(x+1)\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=-3$，

若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$

∴当 $x=-3$ 时，分式 $\frac{3-|x|}{(x-3)(x+1)}$ 的值为 0.

（4）由 $\begin{cases}(x-1)(x-3)=0,\\x^2-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x=3$，

若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$

∴当 $x=3$ 时，分式 $\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$ 的值为 0.

提分·秘诀

教你一招

求分式值为 0 的字母值的方法：

1. 解题时可以先求出使分子为 0 的字母的值，再检验这个值是否使分母的值为 0，当分母的值不为 0 时，这个值就是所要求的字母的值. 切记使分母为 0 的值必须舍去.
2. 若有多个值使分式的值为 0，则这几个值之间用“或”连接.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 4 分式的基本性质

1. 分式的基本性质：

分式的分子与分母都乘以（或都除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变.

用字母表示为$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$（$C\neq 0$），其中$A$，$B$，$C$是整式. 分式的基本性质是分式变形的理论依据.

2. 分式的符号法则：

分式的分子、分母与分式本身的符号，同时改变其中两个，分式的值不变.

用字母表示为

（1）$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$；

（2）$-\frac{A}{B}=-\frac{-A}{-B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$.


分式的基本性质

提分·必记

特别解读

1. $B\neq 0$是已知中隐含的条件，$C\neq 0$是在解题过程中另外附加的条件，在运用此性质时，必须重点强调$C\neq 0$这个前提.
2. 应用性质时，要理解“同”的含义：一是要同时做“乘法”（或“除法”）运算；二是“乘以”（或“除以”）的对象必须是同一个不等于0的整式.
3. 运用分式的基本性质进行分式的变形是恒等变形，它不改变分式值的大小，只改变其形式.

核心考向▶ 利用分式的基本性质对分式进行变形

类型1：分式的基本性质在分式变形中的应用

例5 写出下列等式中未知的分子或分母：

（1）$\frac{15x^2y}{25xy^2}=\frac{3x}{(\quad)}$；

（2）$\frac{a+2b}{ab^2}=\frac{(\quad)}{a^2b^2}$；

（3）$\frac{3x}{x^2-xy}=\frac{3}{(\quad)}$.

解题秘方：观察等号两边已知的分子或分母发生了什么样的变化，再根据分式的基本性质用相同的变化确定所要填的式子.

解：（1）中，右边的分子$3x$是由左边的分子$15x^2y$除以$5xy$得到的，所以右边的分母可以由左边的分母$25xy^2$除以$5xy$得到，因此结果是$5y$；

（2）中，右边的分母a^2b^2是由左边的分母ab^2乘以a得到的，所以右边的分子可以由左边的分子$a+2b$乘以a得到，因此结果是a^2+2ab；

（3）中，右边的分子3是由左边的分子$3x$除以x得到的，所以右边的分母可以由左边的分母x^2-xy除以x得到，因此结果是$x-y$.

答案：（1）$5y$

（2）a^2+2ab

（3）$x-y$

提分·秘诀

解法提醒

解决与分式的恒等变形有关的填空题时，一般从分子或分母的已知部分入手，先观察等号两边的分子或分母发生了怎样的变化，再通过对分母或分子进行相同的变形得到未知项.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：分式的基本性质在改变分式的符号中的应用

例 6 不改变分式的值，使下列各分式的分子与分母都不含“−”号.

（1）$\frac{-4x}{-7y}$；（2）$\frac{-3n}{8m}$；（3）$\frac{c}{-a-b}$；（4）$-\frac{-x+y}{xy}$.

解题秘方：分式的分子、分母及分式本身这三处的符号，同时改变两处，分式的值不变.

解：（1）$\frac{-4x}{-7y}=\frac{4x}{7y}$；（2）$\frac{-3n}{8m}=-\frac{3n}{8m}$；

（3）$\frac{c}{-a-b}=-\frac{c}{a+b}$；（4）$-\frac{-x+y}{xy}=\frac{x-y}{xy}$.

类型 3：分式中字母的取值变化在对分式的值的影响中的应用

例 7 把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的 2 倍　　B. 不变

C. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$　　D. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$

解题秘方：将分式中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，再代入原分式，利用分式的基本性质变形.

解：把分式$\frac{2n}{3m^2-n^2}$中的 m 和 n 同时扩大为原来的 2 倍，

可将分式变为$\frac{2\cdot 2n}{3(2m)^2-(2n)^2}=\frac{4n}{4(3m^2-n^2)}=\frac{n}{3m^2-n^2}$，

因此分式的值缩小为原来的$\frac{1}{2}$.

答案：C

类型 4：分式的基本性质在化系数为整数中的应用

例 8 不改变分式的值，把下列各式的分子和分母中的各项系数都化为整数.

（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}$；（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}$.

解题秘方：利用分式的基本性质将分子、分母同时乘以同一个数，使系数都化为整数.

解：（1）$\frac{0.01a-0.5b}{0.3a-0.04b}=\frac{(0.01a-0.5b)\times 100}{(0.3a-0.04b)\times 100}=\frac{a-50b}{30a-4b}$；

（2）$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\times 12}{\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y\right)\times 12}=\frac{6x+4y}{3x-4y}$.

警示误区

当分子、分母是多项式时，应将其看成一个整体，若分子或分母的首项系数是负数，应先提取“−”号并添加括号，注意此时多项式中的每一项都要变号，然后改变分式的符号.

方法点拨

解答此类问题，应先求出变化后的分式，然后运用分式的基本性质化简，再与原分式进行比较即可.

教你一招

利用分式的基本性质化系数为整数的方法：

若各项系数都是小数，则分子、分母同乘以 10 的正整数倍；若各项系数都是分数，则分子、分母同乘以分子和分母中所含分数的分母的最小公倍数；若各项系数既有小数又有分数，则要先统一成小数或者分数，然后化为整数. 注意将系数化为整数的过程中不要漏项.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 5 分式的约分

1. 分式的约分： 利用分式的基本性质，把一个分式的分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分.

2. 找公因式的方法：

（1）当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公约数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式；

（2）当分子、分母都是多项式时，先把多项式分解因式，再按（1）中的方法找公因式.

3. 约分的方法：

（1）若分式的分子、分母都是单项式，就直接约去分子、分母的公因式；

（2）若分子或分母含有多项式，应先分解因式，再确定公因式并约去.

4. 最简分式： 分子与分母没有公因式的分式称为最简分式.

提分·必记

特别解读

1. 约分的依据是分式的基本性质，关键是确定分子和分母的公因式.
2. 约分是针对分式的分子和分母整体进行的，而不是针对其中的某些项，因此约分前一定要确认分子和分母都是乘积的形式.
3. 约分一定要彻底，其结果必须是最简分式或整式.

核考向▶ 利用分式约分的方法对分式约分

类型 1：分式的约分在化简中的应用

例 9 约分：

（1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}$；（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}$；（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}$.

解题秘方： （1）中的分子、分母都是单项式，可以直接约分；（3）中的分子、分母都是多项式，先将分子、分母分解因式，再进行约分.

解： （1）$\frac{-21a^3b^5c}{56a^2b^{10}d}=-\frac{7a^2b^5\cdot 3ac}{7a^2b^5\cdot 8b^5d}=-\frac{3ac}{8b^5d}$；

（2）$\frac{x-y}{(x-y)^3}=\frac{(x-y)\cdot 1}{(x-y)(x-y)^2}=\frac{1}{(x-y)^2}$；

（3）$\frac{a^2-5a}{25-a^2}=\frac{a(a-5)}{(5+a)(5-a)}=\frac{a(a-5)}{-(5+a)(a-5)}=-\frac{a}{5+a}$.

类型 2：最简分式的定义在识别最简分式中的应用

例 10 下列各式中，最简分式为_____.

$\frac{y}{2x}$，$\frac{m+n}{m^2-n^2}$，$\frac{9x+y}{45xy^2}$，$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$.

解题秘方： 根据最简分式的定义识别.

解： $\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{m+n}{(m+n)(m-n)}=\frac{1}{m-n}$；

$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}$. ∴最简分式为$\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$.

答案： $\frac{y}{2x}$和$\frac{9x+y}{45xy^2}$

提分·秘诀

特别提醒

约分时需要注意的问题：

- 注意发现分式的分子和分母的一些隐含的公因式（如互为相反数的式子）；
- 当分式的分子或分母的系数是负数时，可利用分式的基本性质，把负号提到分式的前面.

知识储备

最简分式是约分后的形式，所以判断最简分式的**唯一标准就是分式的分子与分母没有公因式**.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 6 分式的通分

1. 分式的通分：

分式的通分，即要求把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母的分式.

2. 最简公分母：

确定几个分式的公分母，通常取各分母所有因式的最高次幂的积作公分母，叫做最简公分母.

3. 通分的一般步骤：

（1）确定最简公分母；

（2）用最简公分母分别除以各分母求商；

（3）用所得的商分别乘以各分式的分子、分母得出同分母分式.

拔考向 ▸ 利用通分的方法步骤对分式进行通分

例 11 把下列各组分式通分：

（1）$\frac{5}{6x^2yz^3}$和$\frac{3}{4x^3y^2z}$；

（2）$\frac{1}{x+1}$和$\frac{1}{x-1}$；

（3）$\frac{a}{x-y}$，$\frac{b}{3y-3x}$，$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}$.

解题秘方：先确定最简公分母，然后再通分.

解：（1）最简公分母是$12x^3y^2z^3$，

$$\frac{5}{6x^2yz^3}=\frac{5\cdot 2xy}{6x^2yz^3\cdot 2xy}=\frac{10xy}{12x^3y^2z^3},$$

$$\frac{3}{4x^3y^2z}=\frac{3\cdot 3z^2}{4x^3y^2z\cdot 3z^2}=\frac{9z^2}{12x^3y^2z^3}.$$

（2）最简公分母是$(x+1)(x-1)$，

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1},$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x^2-1}.$$

（3）最简公分母是$3(x-y)^2$，

$$\frac{a}{x-y}=\frac{a\cdot 3(x-y)}{(x-y)\cdot 3(x-y)}=\frac{3a(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{b}{3y-3x}=-\frac{b}{3(x-y)}=-\frac{b\cdot(x-y)}{3(x-y)\cdot(x-y)}=-\frac{b(x-y)}{3(x-y)^2},$$

$$\frac{c}{x^2-2xy+y^2}=\frac{c}{(x-y)^2}=\frac{c\cdot 3}{(x-y)^2\cdot 3}=\frac{3c}{3(x-y)^2}.$$

提分·必记

特别解读

约分与通分的联系与区别：

- 约分与通分都是对分式进行恒等变形，即变形之后每个分式的值都不变.
- 约分是针对一个分式来说的，约分可使分式得以化简，而通分是针对两个或两个以上的分式来说的，通分可使异分母的分式化为同分母的分式.

提分·秘诀

方法点拨

确定最简公分母的一般方法：

1. 如果各分母都是单项式，那么最简公分母就由
   （1）各分母系数的最小公倍数；
   （2）各分母相同字母的最高次幂；
   （3）各分母所有不同字母及其指数的乘积这三部分组成；
2. 如果各分母中有多项式，就先把分母是多项式的分解因式，再按照分母都是单项式时求最简公分母的方法，从系数、相同因式、不同因式三个方面去确定.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的值讨论分式的值与字母值的关系

挑战·高分

类型1：分式的值为1或-1在求字母值中的应用

例12 （1）当 $x=$_____时，分式 $\frac{x-3}{3-2x}$ 的值为1；

（2）当 $x=$_____时，分式 $\frac{x-3}{3-2x}$ 的值为 -1.

解题秘方：根据分式的值为 ±1 的条件列出方程，求出字母的值.

解：（1）∵分式 $\frac{x-3}{3-2x}$ 的值为1，∴ $x-3=3-2x$，解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$3-2x=3-4=-1\neq0$.

（2）∵分式 $\frac{x-3}{3-2x}$ 的值为 -1，

∴ $(x-3)+(3-2x)=0$，解得 $x=0$.

当 $x=0$ 时，$3-2x=3-0=3\neq0$.

答案：（1）2　（2）0

方法点拨

分式的值为1或-1满足的条件是分子和分母相等或互为相反数.由此可列出方程，求分式中字母的取值，同时要注意分母不为0这一隐含条件.

类型2：分式的值为正或负在求字母的取值范围中的应用

例13 当 x 为何值时，分式 $\frac{x+2}{x-3}$ 的值为负数？

解题秘方：若要使分式的值为负数，则分子、分母异号.

解：由分式的值为负数，得 $\begin{cases}x+2>0,\\x-3<0,\end{cases}$ ①或 $\begin{cases}x+2<0,\\x-3>0.\end{cases}$ ②

解不等式组①，得 $-2<x<3$.

解不等式组②，无解.

∴当 $-2<x<3$ 时，分式 $\frac{x+2}{x-3}$ 的值为负数.

思路点拨

求解分式值为负数时字母取值范围的思路：

当分式的值为负数时，分式的分子和分母异号，也就是分子为正、分母为负或分子为负、分母为正，利用这两种情况分别列不等式组，解不等式组确定字母的取值范围.

类型3：分式的值为整数在求字母值中的应用

例14 若分式 $\frac{4x-8}{x^2-4}$ 的值为整数，求整数 x 的值.

解题秘方：先化简分式，再由分子能被分母整除求出整数 x 的值.

解：$\frac{4x-8}{x^2-4}=\frac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x+2}$.

∵分式的值为整数，x 为整数，

∴ $x+2$ 可取整数 -4，-2，-1，1，2，4.

∴ x 可取整数 -6，-4，-3，-1，0，2.

又 $x^2-4\neq0$，∴ $x\neq\pm2$.

∴整数 x 可取的值为 -6，-4，-3，-1，0.

方法点拨

若使分式的值为整数，则分式的分子是分母的整数倍.化简后形如 $\frac{n}{x+a}$（n 为非零整数，x，a 为整数）的分式的值为整数，$x+a$ 为 n 的因数.求得 x 的值要代入原分式检验，保证原分式有意义.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用分式的基本性质求分式的值

类型 1：分式的基本性质在求值中的应用

例 15 已知$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，求分式$\frac{x^2-3xy+2y^2}{2x^2-3xy+y^2}$的值.

解题秘方：由条件可知 $y\neq 0$，根据分式的基本性质将所求分式的分子和分母同时除以 y^2 转化为含$\frac{x}{y}$的式子，再代入即可求值.

解：由条件可知 $y\neq 0$，因此 $y^2\neq 0$，

$$\text{原式}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+2}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+1}=-4.$$

挑战·高分

技巧点拨

本题运用了整体思想求值. 关键是将所求分式利用分式的基本性质化为含条件中的式子的形式，再将条件式子整体代入求值.

类型 2：设比值在求分式的值中的应用

例 16 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$（其中 $x\neq 0$），求分式$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}$的值.

解题秘方：因为条件是以比相等的形式出现，所以可考虑设比值为 k，把待求式子转化为关于 k 的式子求值.

解：设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$（$k\neq 0$），则$\frac{x}{2}=k$，$\frac{y}{3}=k$，$\frac{z}{4}=k$，

$\therefore x=2k$，$y=3k$，$z=4k$，

$$\therefore \frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}=\frac{4k+9k-12k}{4k-9k+12k}=\frac{k}{7k}=\frac{1}{7}.$$

解法提醒

本题运用了换元法求值. 当数学问题中出现或隐含比值相等的条件时，设比值为一个新字母，把问题转化为新字母的问题求解，往往可得到意想不到的效果.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是分式有意义或无意义的条件、分式的值为 0 的条件、分式的基本性质，这也是近年中考的热点，题目难度较小，多以选择题、填空题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用分式有意义的条件求字母的取值范围

例 17 [中考·武汉]若分式$\frac{1}{x+2}$在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是（　　）

A. $x>-2$　　B. $x<-2$

C. $x=-2$　　D. $x\neq -2$

试题评析：本题考查了分式有意义的条件，解题的关键是理解分式的分母不等于零.

解：由题意可得 $x+2\neq 0$，$\therefore x\neq -2$.

答案：D

冲刺·满分

考法点评

分式有意义的条件是分母不等于 0，利用解分母不等于 0 的不等式求字母的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 分式值为零的条件

例 18 [中考·新疆]已知分式$\frac{x-1}{x+1}$的值是 0，则 x 的值是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

试题评析：分式的值为 0，则分子等于 0，同时分母不为 0，求出 x 的值即可.

解：要使分式的值为 0，则 $x-1=0$，解得 $x=1$，当 $x=1$ 时，分母 $x+1\neq0$，所以 x 的值为 1.

答案：C

考法点评

考查分式值为零的条件，把握两点：

一是解分子为零的方程；

二是验证分母不为零.

考法 3 分式的基本性质

例 19 [中考·金华]若$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，则$\frac{a+b}{b}=$_____.

试题评析：本题考查分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键.

思路点拨

分式的基本性质是分式约分和通分的依据，求分式的值时，若无法求出分式中字母的值，则可利用代入法，将分子、分母换一个字母，利用分式的基本性质求解.

解：方法一　$\because\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

$\therefore\frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$.

方法二　$\because\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，$\therefore\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$.

设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=k\ (k\neq0)$，则 $a=2k$，$b=3k$，

$\therefore\frac{a+b}{b}=\frac{2k+3k}{3k}=\frac{5}{3}$.

答案：$\frac{5}{3}$

考法 4 约分

例 20 [中考·孝感]如图 16.1-1，图①是一个边长为 a 的正方形剪去一个边长为 1 的小正方形，图②是一个边长为 $(a-1)$ 的正方形，记图①，图②中阴影部分的面积分别为 S_1，S_2，则$\frac{S_1}{S_2}$可化简为_____.

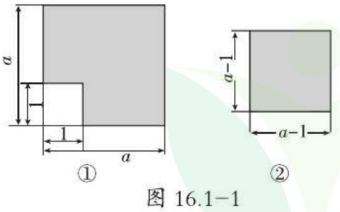


图 16.1-1

试题评析：本题主要考查的是分式的化简，依据题意列出式子是解题的关键.

解：由题可得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2-1}{(a-1)^2}=\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}$.

答案：$\frac{a+1}{a-1}$

考法点评

化简分式的关键就是约分，而约分的关键是找公因式，确定公因式的关键是对分子、分母进行因式分解.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见249页

1. [中考·温州]若分式$\frac{x-2}{x+5}$的值为0，则x的值是（　　）

A. 2　　B. 0　　C. −2　　D. −5

2. [中考·滨州]下列分式中，最简分式是（　　）

A. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$　　B. $\frac{x+1}{x^2-1}$

C. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy}$　　D. $\frac{x^2-36}{2x+12}$

3. 把分式$\frac{x}{x+y}$（$x\neq 0$，$y\neq 0$）中的x，y同时扩大为原来的3倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的3倍　　B. 缩小为原来的$\frac{1}{3}$

C. 扩大为原来的6倍　　D. 不改变

4. 有一捆粗细均匀的电线，现要确定它的长度. 从中先取出1 m长的电线，称出它的质量为a，再称出其余电线的总质量为b，则这捆电线的总长度是（　　）

A. $(ab+1)$ m　　B. $\left(\frac{b}{a}-1\right)$ m

C. $\left(\frac{b}{a}+1\right)$ m　　D. $\left(\frac{b+a}{a}+1\right)$ m

5. 下列式子：

①$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y}$；②$\frac{b-a}{c-a}=\frac{a-b}{a-c}$；

③$\frac{|b-a|}{a-b}=-1$；④$\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{x-y}{x+y}$.

其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

6. 已知分式$\frac{x+1}{2-x}$，当x取a时，该分式的值为0；当x取b时，该分式无意义，则a^b的值等于（　　）

A. −2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 若分式$\frac{1}{x^2-m}$不论x取任何实数总有意义，则m的取值范围是_____.

8. 当x取何值时，下列分式的值是零？

（1）$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$；（2）$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$.

9. 约分：

（1）$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}$；（2）$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

10. 通分：

（1）$\frac{3}{4a^2b}$，$-\frac{5}{6b^2c}$，$\frac{1}{2ac^2}$；

（2）$\frac{x+2}{2x+2}$，$\frac{x}{x^2-x-2}$，$\frac{3}{8-4x}$；

（3）$\frac{a}{a^2+3a+2}$，$\frac{2}{a^2+2a+1}$，$\frac{1}{-3a-6}$.

11. （1）分式$\frac{-x^2}{1-5x}$的值为负，求x的取值范围；

（2）当x满足什么条件时，分式$\frac{x+1}{2x+4}$的值为正？　　【导学号：9877429】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 某商场文具专柜以每支 a 元（a 为正整数）的价格购进一批“英雄”牌钢笔，决定每支加价 2 元销售，由于这种品牌的钢笔价格低、质优、外观美，很快就销售一空，结账时，售货员发现这批钢笔的销售总额为（$399a+805$）元，你能根据上面提供的信息求出商场文具专柜共购进了多少支这种钢笔吗？每支钢笔的进价是多少元呢？

13. [**模拟 · 莒县**]阅读下面的解题过程：

已知：$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$，求$\frac{x^2}{x^4+1}$的值.

解：由$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$知 $x\neq 0$，$\therefore \frac{x^2+1}{x}=3$，即 $x+\frac{1}{x}=3$.

$\therefore \frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$.

故$\frac{x^2}{x^4+1}$的值为$\frac{1}{7}$.

该题的解法叫做“倒数法”，请你利用“倒数法”解决下面的题目：

已知：$\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$，求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

素养提分 行动篇

类比 · 探索

学习一元一次不等式的解法，是与解一元一次方程对比进行的. 由于两者标准形式类似（$ax+b=0$ 与 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$）；解的依据是类似的基本性质. 因此，在学过一元一次方程的解法后，很容易通过类比，去研究一元一次不等式的解法.

分式与分数分别是整式与整数相除的表述形式，当分式中分子与分母以数值代替字母时，它就是分数. 这样可以通过与分数类比，来学习分式的性质与运算.

两类事物具有相同的结构、特征，当我们已经了解其中一类事物的某些属性后，往往可去认识、猜想另一类事物是否也具有类似的属性，这种思考问题的方法称为类比.

类比和归纳一样，也是科学研究中常用的方法，比如在人类对太空的探求中，发射探测器登陆火星，任务之一是了解火星上是否曾经有水的存在. 因为火星与地球是同在太阳系中的行星，地球上有生物，火星上是否也有呢？而从地球上知道水是生命之源，如果火星上有过水，可推测火星上可能存在过生物.

类比可启发我们去猜想、去思考，因此，我们要学会用类比的思想方法去发现新问题、探索新规律.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.2 分式的运算

16.2.1 分式的乘除

核心知识

- 分式的乘除
- 分式的乘方
- 分式乘除、乘方混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 分式的乘法

1. 分式的乘法法则： 分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母．如果得到的不是最简分式，应该通过约分进行化简．

用字母表示为：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

2. 法则的运用方法：

（1）若分子、分母都是单项式，可直接利用乘法法则运算后再约分；

（2）若分子、分母中有多项式，可先对分子、分母因式分解，约分后，再进行乘法运算；

（3）若分式乘整式，可把整式看成分母为 1 的“分式”参与运算．

拨考向 利用分式的乘法法则进行分式乘法计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}$；　　（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)$；

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}$.

解题秘方： 利用分式的乘法法则进行计算．

解：（1）$\frac{x^2}{3y}\cdot\frac{15y^2}{4x^3}=\frac{15x^2y^2}{12x^3y}=\frac{5y}{4x}$；

（2）$\frac{6x^2}{5y}\cdot(-4xy^2)=-\frac{6x^2}{5y}\cdot4xy^2=-\frac{24x^3y}{5}$；

（3）$\frac{ab+b^2}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{4ab^2}\cdot\frac{6a^2b}{(a+b)(a-b)}=\frac{3a}{2(a-b)}$.

提分·必记

特别解读

分式乘法运算的基本步骤：

第一步：确定积的符号，写在积中分式的前面．

第二步：运用法则，将分子与分母分别相乘，多项式的要带括号．

第三步：约分，将结果化成最简分式或整式．

提分·秘诀

解法提醒

对于分式的结果，要注意以下两点：

- 结果必须是最简分式或整式；
- 不能把 $\frac{b}{-a}$ 作为结果，要运用分式的符号法则写成 $-\frac{b}{a}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式的除法

1. 分式的除法法则： 分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

用字母表示为：$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

2. 法则的运用方法：

（1）分式的除法需转化成乘法，再利用分式乘法法则计算；

（2）当除式是整式时，可以将整式看成分母是 1 的“分式”进行运算.

拔考向▶ 利用分式的除法法则进行分式除法计算

例 2 计算：

（1）$\frac{ab^3}{2c^2} \div \frac{-5a^2b^2}{4cd}$；　（2）$\frac{2x^2}{3y} \div (-2xy^2)$；

（3）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2} \div \frac{a^2-1}{a^2+2a}$.

解题秘方： 运用分式的除法法则将分式的除法运算转化为分式的乘法运算.

解：（1）$\frac{ab^3}{2c^2} \div \frac{-5a^2b^2}{4cd} = \frac{ab^3}{2c^2} \cdot \frac{4cd}{-5a^2b^2} = \frac{2bd}{-5ac} = -\frac{2bd}{5ac}$；

（2）$\frac{2x^2}{3y} \div (-2xy^2) = \frac{2x^2}{3y} \cdot \frac{1}{-2xy^2} = -\frac{2x^2}{6xy^3} = -\frac{x}{3y^3}$；

（3）$\frac{-1+2a-a^2}{a+2} \div \frac{a^2-1}{a^2+2a}$

$= \frac{-(a-1)^2}{a+2} \cdot \frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)}$

$= \frac{-a(a-1)}{a+1} = -\frac{a^2-a}{a+1}$.

点知识▶ 3 分式的乘方

1. 分式的乘方法则： 分式乘方要把分子、分母分别乘方.

用字母表示为：$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$（$n$ 为正整数）.

2. 分式乘方的方法：

（1）分式乘方时，确定乘方结果符号的方法与有理数乘方确定结果符号的方法相同；

（2）分式乘方时，一定要将分式的分子、分母分别乘方，不能将$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$错写成$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b}$；

（3）分式乘方时，若分式的分子与分母是多项式，应把分子、分母分别看成一个整体乘方，避免出现$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$的错误.

提分·必记

特别提醒

分式除法运算的基本步骤：

第 1 步：将分子、分母是多项式的进行因式分解，并约分；

第 2 步：将除法转化成乘法；

第 3 步：利用分式的乘法法则计算.

提分·秘诀

特别提醒

1. 分式的除法与分数的除法类似，可类比分数的除法学习.
2. 分式的除法法则是数学转化思想的具体体现，即把除法运算转化为乘法运算.
3. 运算的结果应为最简分式或整式.

提分·必记

特别解读

1. 分式乘方是分式乘法中因式相同时的一种特殊情况，因此分式乘方都可转化为分式乘法进行计算.
2. 学习了分式乘方法则后，直接可用法则进行计算，在计算时先确定结果的符号，再把分子、分母分别乘方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用分式的乘方法则进行分式乘方运算

例 3 计算：

(1) $\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4$；　(2) $\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3$；

(3) $\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3$；　(4) $\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$.

解题秘方：先运用分式乘方的法则将分子、分母分别乘方，再运用幂的乘方和积的乘方的性质计算.

解：(1) $\left(\frac{2x^2y}{-z^2}\right)^4=\frac{(2x^2y)^4}{(-z^2)^4}=\frac{16x^8y^4}{z^8}$；

(2) $\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}=-\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$；

(3) $\left(\frac{xy}{x-y}\right)^3=\frac{(xy)^3}{(x-y)^3}=\frac{x^3y^3}{(x-y)^3}$；

(4) $\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2$

$=\frac{[(a+b)(a-b)]^2}{(ab)^2}$

$=\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2b^2}$.

提分·秘诀

特别警示

在进行乘方运算时，必须将分子、分母整体分别乘方，当分式中含有“-”号时，要特别注意符号问题.

误答 1

$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{-3c^2}$

$=-\frac{a^{12}b^6}{3c^2}$

忘记将分母乘方

误答 2

$\left(\frac{a^4b^2}{-3c^2}\right)^3=\frac{(a^4b^2)^3}{(-3c^2)^3}$

$=\frac{a^{12}b^6}{27c^6}$.

负数的奇次方为负，结果应为负

知识▶4 分式的乘方、乘除混合运算

1. 分式的乘除混合运算：

在运算时，乘除是同一级运算，若没有其他附加条件（如括号等），则应按照从左到右的顺序进行计算，若有括号，则先算括号里面的. 一般地，乘除混合运算可以统一为乘法运算.

2. 分式的乘除、乘方混合运算：

分式的乘除、乘方混合运算顺序与分数的乘除、乘方混合运算顺序相同，即先乘方，再乘除，有括号的先算括号里面的.

提分·必记

知识链接

1. **分式的乘除、乘方混合运算关键有两点：**一是正确选择运算顺序；二是正确运用运算法则.
2. 运算的结果应化为最简分式或整式.

考向▶利用分式的乘除运算及乘方法则进行分式的混合运算

类型 1：分式的乘除法则在乘除混合运算中的应用

例 4 计算：

(1) $\frac{8xy}{9a^2b}\div\frac{2x}{3b}\cdot\frac{3ab^2}{2x^3y}$；

(2) $\frac{3x-12}{1-2x+x^2}\div(x+1)\cdot\frac{x^2-1}{4-x}$.

提分·秘诀

技巧提醒

分式乘除混合运算的解题步骤：

在分式的乘除混合运算中，一定要先将乘除混合运算统一成乘法运算，再按

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：将分式乘除混合运算统一为分式乘法运算．

解：（1）$\dfrac{8xy}{9a^2b} \div \dfrac{2x}{3b} \cdot \dfrac{3ab^2}{2x^3y}$

$= \dfrac{8xy}{9a^2b} \cdot \dfrac{3b}{2x} \cdot \dfrac{3ab^2}{2x^3y}$

$= \dfrac{2b^2}{ax^3}$；

（2）$\dfrac{3x-12}{1-2x+x^2} \div (x+1) \cdot \dfrac{x^2-1}{4-x}$

$= \dfrac{3x-12}{1-2x+x^2} \cdot \dfrac{1}{x+1} \cdot \left(-\dfrac{x^2-1}{x-4}\right)$

$= -\dfrac{3(x-4)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-4)}$

$= -\dfrac{3}{x-1}$．

分式乘法法则进行计算，能分解因式的，要分解因式，这样便于约分，计算结果应是最简分式或整式．

类型 2：分式的乘除、乘方法则在乘除、乘方混合运算中的应用

例 5 计算：

（1）$\left(\dfrac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2 \div \left(\dfrac{1}{ab}\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{3c}{2a}\right)^3$；

（2）$\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2 \cdot \dfrac{xy}{(y-x)^2} \div \left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3$．

解法提醒

分式乘除、乘方混合运算的解题步骤：

在分式乘除、乘方的混合运算中，先计算乘方，再计算乘除；乘、除是同一级运算，要按照从左到右的运算顺序计算；当分式中的分子、分母是多项式且能分解因式时，还要分解因式，从达到约分的目的．

解题秘方：先乘方，再乘除，有括号的先算括号里面的．

解：（1）$\left(\dfrac{2c^3}{-3ab^2}\right)^2 \div \left(\dfrac{1}{ab}\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{3c}{2a}\right)^3$

$= \dfrac{4c^6}{9a^2b^4} \div \dfrac{1}{a^3b^3} \cdot \left(-\dfrac{27c^3}{8a^3}\right)$

$= \dfrac{4c^6}{9a^2b^4} \cdot a^3b^3 \cdot \left(-\dfrac{27c^3}{8a^3}\right)$

$= -\dfrac{3c^9}{2a^2b}$；

（2）$\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\right)^2 \cdot \dfrac{xy}{(y-x)^2} \div \left(\dfrac{x+y}{x}\right)^3$

$= \dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \dfrac{xy}{(y-x)^2} \div \dfrac{(x+y)^3}{x^3}$

$= \dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \dfrac{xy}{(y-x)^2} \cdot \dfrac{x^3}{(x+y)^3}$

$= \dfrac{x^2}{xy+y^2}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分式的意义法选取分式的化简求值中字母的值

例 6 先化简，再求值：$\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$，选一个合适的数作为 a 的值代入求值.

解题秘方：利用分式的乘除法则进行化简，再取适合字母的值代入.

解：$\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a^2-4a}{a^2-4}\div\frac{a}{a^2-1}$

$=\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{2a(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a}$

$=2a+2$.

取 $a=3$，原式 $=2\times3+2=8$.

挑战·高分

特别警示

对于字母开放式取值，不能只关注化简结果的式子有意义，还应该关注原式有意义，在原式中，既要注意不能使各个分式的分母为0，也不能使除式$\frac{a}{a^2-1}$的值为0，故 a 不能取 -2，-1，0，1，2.

拔尖角度 2 利用建立分式的模型法对实际应用进行说理

例 7 为了美化环境，需要在某块空地上种植 m 棵树，若甲队单独植树，需要 n（$n>1$）天才能完成，若乙队单独植树，则乙队完成这项工程的时间比甲队的 2 倍多 1 天，则甲队每天植树的棵数是乙队的 3 倍吗？请说明理由.

解题秘方：利用分式表示甲、乙两队每天植树的棵数，再用除法求出甲队每天植树的棵数是乙队的几倍，然后进行判断.

解：甲队每天植树的棵数不是乙队的 3 倍. 理由如下：

由题意可知，甲队每天植树的棵数为$\frac{m}{n}$，乙队每天植树的棵数为$\frac{m}{2n+1}$，则$\frac{m}{n}\div\frac{m}{2n+1}=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n+1}{m}=\frac{2n+1}{n}$.

$\because n>1$，$\therefore 2n+1<3n$. $\therefore\frac{2n+1}{n}<\frac{3n}{n}$，即$\frac{2n+1}{n}<3$.

挑战·高分

方法点拨

若实际问题中的某些量都是用分式表示的，则这些量之间的倍数关系应用分式的除法结果来揭示.

详解

$\because n>1$，

$\therefore 1+2n<n+2n$，即 $1+2n<3n$.

拔尖角度 3 利用字母取值法说明分式的乘方、乘除运算中的现象

例 8 在解答题目“已知 $x=2\,021$，求$\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2$的值”时，小明误将 $x=2\,021$ 看成了 $x=2\,020$，但算出的结果仍然正确，你能解释原因吗？

解题秘方：先化简，然后观察化简结果.

解：$\frac{x^2-9}{x-3}\div\frac{x^2+3x}{2x^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\cdot\frac{2x^3}{x(x+3)}\cdot\frac{1}{x^2}=2$.

因为原式化简后的结果是常数 2，与 x 的值无关，因此小明误将 $x=2\,021$ 看成了 $x=2\,020$，其结果仍然是正确的.

挑战·高分

方法点拨

一般情况下，分式的值与分式中字母的取值有关，若字母取不同的值，分式的值仍然相同，则化简的式子中不含字母. 若字母取的值互为相反数，分式的值仍然相同，则化简结果可能有两种情况：一是含字母的幂是偶次幂，二是不含字母.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查分式的乘除、乘方的混合运算，在中考中，题目主要有分式的计算和分式的化简求值两种，简单的分式计算题以选择题形式考查，化简求值题以解答题形式考查.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用整式、分式的运算法则进行辨析

例9 [中考·山西]下列运算正确的是(　　)

A. $(-a^3)^2=-a^6$　　B. $2a^2+3a^2=6a^2$

C. $2a^2\cdot a^3=2a^6$　　D. $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3=-\frac{b^6}{8a^3}$

思路点拨：整式与分式的运算有很多类似的地方，考查时经常在一起考查，解决问题的关键都是运算法则的正确应用.

试题评析：本题主要考查整式与分式的运算，解题的关键是掌握幂的乘方、合并同类项法则、同底数幂的乘法及分式的乘方的运算法则.

解：A. $(-a^3)^2=a^6$，此选项错误；B. $2a^2+3a^2=5a^2$，此选项错误；C. $2a^2\cdot a^3=2a^5$，此选项错误；D. $\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3=-\frac{b^6}{8a^3}$，此选项正确. 故选D.

答案：D

考法2 利用分式的乘除法法则解游戏问题

例10 [中考·河北]老师设计了接力游戏，用合作的方式完成分式化简，规则是：每人只能看到前一人给的式子，并进行一步计算，再将结果传递给下一人，最后完成化简. 过程如图16.2-1：

思路点拨：根据分式的乘除运算步骤和运算法则逐一计算即可判断.

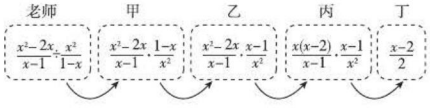


图16.2-1

接力中，自己负责的一步出现错误的是(　　)

A. 只有乙　　B. 甲和丁　　C. 乙和丙　　D. 乙和丁

试题评析：本题主要考查分式的乘除法运算，解题的关键是掌握分式乘除法运算法则.

解：$\because\frac{x^2-2x}{x-1}\div\frac{x^2}{1-x}$

$=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x^2}$

$=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x^2}$,

$\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x(x-2)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-2}{x}$,

$\therefore$出现错误的是乙和丁.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用已知结论进行分式除法计算

例 11 [中考·滨州](1)计算:$(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(2)利用所学知识以及(1)所得等式,化简式子$\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}\div\frac{m^2-n^2}{m^2+2mn+n^2}$.

试题评析:本题主要考查多项式乘多项式及分式的除法,根据多项式乘法得出立方差公式是解题的关键.

解:(1)原式$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$;

(2)原式$=\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{m^2+mn+n^2}\cdot\frac{(m+n)^2}{(m+n)(m-n)}$

$=(m-n)\cdot\frac{m+n}{m-n}$

$=m+n$.

思路点拨

- 根据多项式乘多项式法则计算即可;
- 利用(1)中的结果及已学知识将(2)中原式的分子、分母因式分解,再约分即可.

两年模拟兵法 答案见 250 页

1. [中考·江西]计算$(-a)^2\cdot\frac{b}{a^2}$的结果为(　　)

A. b　　B. $-b$　　C. ab　　D. $\frac{b}{a}$

2. [中考·济南]化简$\frac{2}{x^2-1}\div\frac{1}{x-1}$的结果是(　　)

A. $\frac{2}{x+1}$　　B. $\frac{2}{x}$

C. $\frac{2}{x-1}$　　D. $2(x+1)$

3. [中考·曲靖]下列计算正确的是(　　)

A. $a^2\cdot a=a^2$　　B. $a^6\div a^2=a^3$

C. $a^2b-2ba^2=-a^2b$　　D. $\left(-\frac{3}{2a}\right)^3=-\frac{9}{8a^3}$

4. 若式子$\frac{x+1}{x+2}\div\frac{x+3}{x+4}$有意义,则$x$的取值范围是_____.

5. 已知分式$\frac{x^2-y^2}{x}$乘一个分式后结果为$-\frac{(x-y)^2}{x^2}$,则所乘分式为_____.

6. 计算:

(1)$\frac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\frac{5m^2n}{4xy^2}\div\frac{5xym}{3n}$;

(2)$\frac{a+2}{a^2-1}\cdot\frac{a-1}{a^2+4a+4}\div\frac{1}{a+2}$;

(3)$\frac{1}{x-1}\div(x+2)\cdot\frac{x-1}{x+2}$.

7. 计算:

(1)$\left(-\frac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\frac{b}{a^2}\right)^3\div\left(-\frac{1}{ab}\right)^3$;

(2)$\frac{m^2-n^2}{(m-n)^2}\cdot\left(\frac{n-m}{mn}\right)^2\div\frac{m+n}{m}$;

(3)$\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2\div(x+y)^2\cdot\left(\frac{x}{x-y}\right)^3$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 甲、乙两个工程队合修一条公路，已知甲工程队每天修 (a^2-4) 米，乙工程队每天修 $(a-2)^2$ 米（其中 $a>2$），则甲工程队修 900 米所用时间是乙工程队修 600 米所用时间的多少?

9. 有这样一道题："计算 $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\dfrac{2x-2}{x+1}$ 的值，其中 $x=2\,019$". 甲同学把"$x=2\,019$"错抄成"$x=2\,091$"，但他的计算结果也正确，你说这是怎么回事?

10. 已知 $a^2+b^2-4a+6b+13=0$，求 $\dfrac{a^2-6a+9}{4-b^2}\div\dfrac{3-a}{2+b}\cdot\dfrac{a^2}{3a-9}$ 的值. 【导学号：9877429】

11. 化简 $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}\div\dfrac{x-1}{x}$，并判断当 x 满足不等式组 $\begin{cases}x+2<1,\\2(x-1)>-6\end{cases}$ 时该式的符号.

12. 已知一列分式：

$\dfrac{x^3}{y}$，$-\dfrac{x^5}{y^2}$，$\dfrac{x^7}{y^3}$，$-\dfrac{x^9}{y^4}$，…，其中 $xy\neq 0$.

（1）从第 2 个分式开始，用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式，你发现了什么规律?

（2）根据你发现的规律，试写出第 7 个分式.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

16.2.2 分式的加减

核心知识
- 分式的加减法
- 分式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 同分母分式的加减法

1. 同分母分式的加减法法则：

同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减.

用字母表示为 $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$.

2. 同分母分式相加减的一般步骤：

（1）分母不变，把分子相加减；

（2）分子相加减时，应先去括号，再合并同类项；

（3）结果应化成最简分式或整式.

提分·必记

特别解读

“分子相加减”就是把各个分式的分子整体相加减，在计算时，各分子都应用括号括起来，若分子是系数为正的单项式，括号可以省略；若分子是多项式，且分子相减时，括号不能省略，否则容易出现符号错误.

拨考向 利用同分母分式的加减法法则计算

例 1 计算：

（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}$；

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}$；

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}$.

解题秘方：按照同分母分式的加减法法则进行计算即可，结果要化为最简分式或整式.

解：（1）$\frac{x-y}{2xy^2}-\frac{x+y}{2xy^2}=\frac{(x-y)-(x+y)}{2xy^2}=\frac{-2y}{2xy^2}=-\frac{1}{xy}$；

（2）$\frac{4x-6y}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{4x-4y}{x^2-y^2}=\frac{4(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{4}{x+y}$；

（3）$\frac{a+2b}{b-a}+\frac{b}{a-b}-\frac{2a}{b-a}=\frac{a+2b}{b-a}-\frac{b}{b-a}-\frac{2a}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1$.

提分·秘诀

警示误区

同分母分式相加减的三大易错点：

1. 当分母不是相同而是相反数时，不能直接相加减，将分母变成相同时，中间的运算符号随之改变：“+”号变“−”号，“−”号变“+”号；
2. 当分子是多项式时，对分子进行加减时，要先带括号，再去括号；
3. 加减运算后，对运算的结果要化简，最后的结果应是最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 异分母分式的加减法

1. 异分母分式的加减法法则：

异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减．

用字母表示为 $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$．

2. 异分母分式相加减的一般步骤：

（1）**通分**：将异分母分式转化为同分母分式；

（2）**加减**：按照同分母分式加减运算的一般步骤进行计算．注意异分母分式加减运算的关键是通分．

提分·必记

特别解读

通分的关键是确定最简公分母，分式与分式相加减时的最简公分母是各分母的所有因式的最高次幂的积．

拔考向▶ 利用异分母分式的加减法法则计算

例 2 计算：

（1）$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$；　　（2）$a+2-\frac{a^2}{a-2}$．

解题秘方：异分母分式相加减，先找最简公分母，进行通分，变为同分母分式，再按照同分母分式的加减法法则进行计算．

解：（1）$\frac{24}{x^2-16}+\frac{3}{4-x}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3}{x-4}$

$=\frac{24}{(x+4)(x-4)}-\frac{3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{24-3(x+4)}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3x+12}{(x+4)(x-4)}$

$=\frac{-3(x-4)}{(x+4)(x-4)}$

$=-\frac{3}{x+4}$；

（2）$a+2-\frac{a^2}{a-2}$

在通分时，整式看成分母是1，整式作为分子的“分式”，若是多项式，则看成一个整体；通分时要带上括号．

$=\frac{(a+2)(a-2)}{a-2}-\frac{a^2}{a-2}$

$=\frac{a^2-4-a^2}{a-2}$

$=-\frac{4}{a-2}$．

提分·秘诀

特别提醒

1. 通分时，若要改变某个因式的符号，一定要按照分子、分母及分式前面运算符号的变化规律进行变换，如本题，将分母“4-x”变为“x-4”，提出的“-”号放在分式的前面，使本来的“+”号变为“-”号．
2. 类似同分母相加减，分子是多项式的注意带上括号．
3. 最后运算的结果应是最简分式或整式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 分式的混合运算

1. 分式的混合运算顺序：

分式与分数的混合运算有相同的运算顺序，即先乘方，再乘除，然后加减．有括号时，先做括号内的运算，按照小括号、中括号、大括号的顺序进行，对于同级运算，按从左到右的顺序进行．

2. 分式混合运算的方法：

（1）进行分式混合运算时，可以根据需要合理地运用运算律来简化运算，此时先将分式的乘除法统一成乘法，分式的加减法统一成加法，才能使用乘法运算律、加法运算律简化运算．

（2）运算过程中及时约分化简，有时可使解题过程简单．

（3）运算结果应是最简分式或整式．

提分·必记

特别提醒

- 分式混合运算要注意运算顺序和解题步骤，把好符号关．
- 分式除法只有转化为乘法后才能运用乘法分配律进行计算．

拔考向▶ 利用分式的混合运算顺序进行计算

例 3 计算：

（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$；

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$．

解题秘方：在进行分式的混合运算时，应先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号时要先算括号里面的．

解：（1）$\dfrac{a^2+2a}{a^2-4}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\left(\dfrac{2a}{a-2}\right)^2$

$=\dfrac{a(a+2)}{(a+2)(a-2)}-\dfrac{a-2}{a}\cdot\dfrac{4a^2}{(a-2)^2}$

$=\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{4a}{a-2}$

$=-\dfrac{3a}{a-2}$．

（2）$\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-2ab}\div\left(\dfrac{5b^2}{a-2b}-a-2b\right)$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\left[\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}\right]$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\div\dfrac{9b^2-a^2}{a-2b}$

$=\dfrac{(a-3b)^2}{a(a-2b)}\cdot\dfrac{a-2b}{(3b-a)(3b+a)}$

$=-\dfrac{a-3b}{a^2+3ab}$．

提分·秘诀

详解剖析

- 若将 a 与 2b 单独通分，则形式为 $\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{a(a-2b)}{a-2b}-\dfrac{2b(a-2b)}{a-2b}$．
- 若将 a 与 2b 的运算看成一整体进行通分，则形式为 $\dfrac{5b^2}{a-2b}-(a+2b)=\dfrac{5b^2}{a-2b}-\dfrac{(a+2b)(a-2b)}{a-2b}$．

方法点拨

1. 有理数的运算顺序及运算律对分式运算同样适用，当某一项是整式时，可将此项看作分母为 1 的式子；
2. 分式的混合运算中要注意各分式中分子、分母符号的处理，结果中分子或分母的系数是负数的，要把“−”号提到分式的前面；
3. 所有的分式运算，结果必须化到最简．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用对应项系数相等法巧求分式中待定字母的值

例 4 已知$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$，则 $A=$_____，$B=$_____，$C=$_____.

解题秘方：先利用分式的加减法运算进行恒等变形，再求待定字母的值.

解：$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}=\frac{4}{x(x^2+4)}$. ∵左右两边恒等且分母相同，故分子也应相等，即 $(A+B)x^2+Cx+4A=4$，∴$\begin{cases}A+B=0,\\C=0,\\4A=4.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}A=1,\\B=-1,\\C=0.\end{cases}$

答案：1；−1；0

挑战·高分

方法点拨

1. 解这类题首先左、右两边通分，并各自进行加减运算，发现通分后左、右两边的分母相同，所以左、右两边的分子相等，构造方程或方程组来确定待定字母的值；
2. 解这类题也可利用恒等式的定义，任取x的三个值（使分式有意义），列出方程组，求出A,B,C的值.

拔尖角度 2 利用建立模型法用分式解实际问题

例 5 甲、乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料. 两次购买饲料的价格略有变化，两位采购员的购货方式也不同，其中，甲每次购买 1 000 千克，而乙每次用去 800 元，不管购买多少饲料. 设两次购买饲料的价格分别为 m 元/千克和 n 元/千克（m，n 是正数，且 $m\neq n$），那么甲、乙两次购买饲料的平均价格各是多少？哪一个较低？

解题秘方：分别求出甲、乙两次购买饲料的平均价格，作差进行比较.

解：∵甲每次购买 1 000 千克，两次购买饲料的价格分别为 m 元/千克和 n 元/千克，

∴甲的平均价格为$\frac{1\,000m+1\,000n}{2\,000}=\frac{m+n}{2}$（元/千克）.

而乙每次用去 800 元，两次购买饲料的价格分别为 m 元/千克和 n 元/千克，

∴乙的平均价格为$\frac{1\,600}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$（元/千克）.

∴$\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m+n)^2-4mn}{2(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$.

∵m，n 是正数，且 $m\neq n$，∴$\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$. ∴$\frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$.

答：甲两次购买饲料的平均价格是 $\frac{m+n}{2}$ 元/千克，乙两次购买饲料的平均价格是 $\frac{2mn}{m+n}$ 元/千克，乙两次购买饲料的平均价格较低.

挑战·高分

知识储备

作差法：作差法是比较两个数或两个式子的大小的常用方法.

当$a-b>0$时，$a>b$；

当$a-b=0$时，$a=b$；

当$a-b<0$时，$a<b$.

详解

由题意可知，甲两次购买饲料一共用去$(1\,000m+1\,000n)$元，购买饲料总质量为$1\,000\times2=2\,000$(千克)，故平均价格为$\frac{1\,000m+1\,000n}{2\,000}$元/千克.

详解

由题意可知，乙两次购买饲料共用去$2\times800=1\,600$(元)，购买饲料总质量为$\left(\frac{800}{m}+\frac{800}{n}\right)$千克，故平均价格为$\frac{1\,600}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}$元/千克.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用倒数法巧求分式的值

挑战·高分

例 6 已知 a，b，c 为实数，且 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$，$\frac{ac}{c+a}=\frac{1}{5}$，求 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值.

解题秘方：先对三个等式分别取倒数，相加后通分，再取倒数即得结果.

解：$\because \frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$，

$\therefore a$，b 均不为 0，且 $\frac{a+b}{ab}=3$.

$\therefore \frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=3$，即 $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=3$ ①.

同理可得 $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=4$ ②，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=5$ ③.

①+②+③，得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=12$.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$，即 $\frac{bc+ca+ab}{abc}=6$.

$\therefore \frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{6}$.

技巧点拨

利用倒数法求分式值的思路：

涉及分式的分子是单项式，分母是多项式的求值问题时，直接求解往往有困难，可考虑求它的倒数，将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的加减法综合题目条件求解.

拔尖角度▸ 4 利用拆项法巧求分式的值

挑战·高分

例 7 [中难题] (1) 由 $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，…，你能总结出 $\frac{1}{n(n+1)}$（n 为正整数）的结果吗?

(2) 化简：$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+8)(x+9)}$.

解题秘方：从数的运算猜想到式的规律，利用分式的加减法进行规律论证和运用.

解：(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

(2) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+8)(x+9)}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+9}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}$

$=\frac{9}{x^2+9x}$.

解法提醒

- 拆项法是把一个常数（或分式）拆为两个数（或分式）的和或差的形式，从而使问题得以解决的方法. 本题是逆用分式减法进行拆项.
- 本题体现了“从特殊到一般”探究规律的过程，注意猜想的结果要用所学的知识论证，本题得到的结论：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 可以用分式的减法转化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节重点考查分式的加减法及分式的混合运算，在中考中，主要有分式的计算和分式的化简求值，其中分式的化简求值是中考的热点，多以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法1 利用分式的加减法运算法则进行分式加减运算

例8 [中考·吉林]某学生化简分式$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}$出现了错误，解答过程如下：

$$\text{原式}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第一步})$$
$$=\frac{1+2}{(x+1)(x-1)}\ (\text{第二步})$$
$$=\frac{3}{x^2-1}.\ (\text{第三步})$$

（1）该学生解答过程是从第_____步开始出错的，其错误原因是_____；

（2）请写出此题正确的解答过程.

试题评析：本题主要考查了分式的加减法运算，正确掌握分式的加减法法则是解题的关键.

解：（1）一；分式的基本性质用错

（2）原式$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}$.

考法2 利用分式的混合运算求值

例9 [中考·北京]如果$a-b=2\sqrt{3}$，那么式子$\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-b\right)\cdot\frac{a}{a-b}$的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

试题评析：本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

解：原式$=\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-\frac{2ab}{2a}\right)\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{2a}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{a-b}{2}$,

当$a-b=2\sqrt{3}$时，原式$=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

答案：A

冲刺·满分

考法点评

考查分式的加减法，先分清是同分母还是异分母，其中分母互为相反数可变为同分母，若是异分母，必须先通分，然后运用同分母分式加减法的法则进行化简.

解法提醒

分式的化简求值一般是先化简再求值.化简的过程就是分式的混合运算，求值的过程就是求式子值的过程，若已知的是字母关系式的值时，则可考虑用整体代入求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·攀枝花]化简$\frac{m^2}{m-n}+\frac{n^2}{n-m}$的结果是(　　)

A. $m+n$　　B. $n-m$

C. $m-n$　　D. $-m-n$

2. [中考·威海]化简$\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}$的结果是(　　)

A. $\frac{1}{x-3}$　　B. $\frac{1}{x+3}$

C. $\frac{1}{3-x}$　　D. $\frac{3x+3}{x^2-9}$

3. 化简$\left(1+\frac{4}{a-2}\right)\div\frac{a}{a-2}$的结果是(　　)

A. $\frac{a+2}{a}$　　B. $\frac{a}{a+2}$

C. $\frac{a-2}{a}$　　D. $\frac{a}{a-2}$

4. [中考·河北]若$\frac{3-2x}{x-1}=(\quad)+\frac{1}{x-1}$,则(　　)中的数是(　　)

A. -1　　B. -2

C. -3　　D. 任意实数

5. [中考·包头]化简:$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cdot ab$,其结果是(　　)

A. $\frac{a^2b^2}{a-b}$　　B. $\frac{a^2b^2}{b-a}$

C. $\frac{1}{a-b}$　　D. $\frac{1}{b-a}$

6. 已知$\frac{ab}{a+b}=1$,$\frac{bc}{b+c}=2$,$\frac{ca}{a+c}=3$,则c的值等于(　　)

A. 12　　B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{5}{12}$　　D. -12

7. [中考·孝感]已知$x+y=4\sqrt{3}$,$x-y=\sqrt{3}$,则式子$\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$的值是(　　)

A. 48　　B. $12\sqrt{3}$

C. 16　　D. 12

8. [中考·南充]已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$,则式子$\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y}$的值是(　　)

A. $-\frac{7}{2}$　　B. $-\frac{11}{2}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

9. 若$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$,则$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$的值为_____.

10. 设a,b是实数,且$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$,则$\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}$的值是_____.

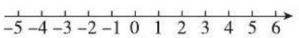
11. [中考·重庆]计算:

$$\left(a+2-\frac{3a-4}{a-2}\right)\div\frac{a^2-6a+9}{a-2}.$$

12. [中考·达州]设$A=\frac{a-2}{1+2a+a^2}\div\left(a-\frac{3a}{a+1}\right)$.

(1) 化简A;

(2) 当$a=3$时,记此时A的值为$f(3)$;当$a=4$时,记此时A的值为$f(4)$;…解关于x的不等式:$\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant f(3)+f(4)+\cdots+f(11)$,并将解集在数轴(如图)上表示出来.



(第12题)

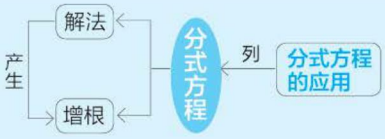
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

16.3 可化为一元一次方程的分式方程

核心知识

- 分式方程
- 分式方程的解法
- 增根
- 分式方程的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 分式方程的概念

1. 分式方程：

方程中含有分式，并且分母中含有未知数，像这样的方程叫做分式方程.

2. 判断一个方程是分式方程的条件：

（1）是方程；

（2）含有分母；

（3）分母中含有未知数.

以上三者缺一不可.



拨考向▸利用分式方程的概念识别分式方程

例 1 判断下列方程是不是分式方程，并说明理由.

（1）$\frac{2x+3}{2}=8$；

（2）$\frac{3}{4-x}=\frac{4}{x+2}$；

（3）$\frac{x^2}{x}=1$；

（4）$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{y-3}$；

（5）$\frac{x}{a}-2=x$（a 为非零常数）.

解题秘方：利用判别分式方程的依据——分母中含有未知数进行识别.

解：（1）不是分式方程，因为分母中不含有未知数.

（2）是分式方程，因为分母中含有未知数.

（3）是分式方程，因为分母中含有未知数.

（4）是分式方程，因为分母中含有未知数.

（5）不是分式方程，因为分母虽然含有字母 a，但 a 为非零常数，不是未知数.

提分·必记

特别解读

- 分母中是否含有未知数是区分分式方程和整式方程的依据.
- 识别分式方程时，不能对方程进行约分或通分变形，更不能用等式的性质变形.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个方程是不是分式方程的方法：

根据分式方程定义中的条件，判断方程中分母是否含有未知数（注意仅仅是字母不行，必须是表示未知数的字母），如果含有未知数，那么这个方程就是分式方程，否则就不是分式方程.

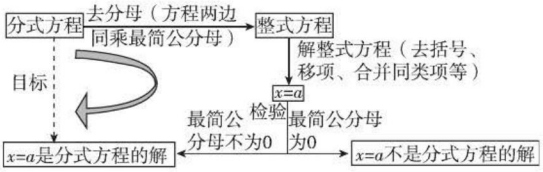
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 分式方程的解法

1. 解分式方程的基本思路：

去分母，把分式方程转化为整式方程.

2. 解分式方程的一般步骤：



3. 增根：

在将分式方程变形为整式方程时，方程两边同乘以一个含有未知数的整式，并约去了分母，有时可能产生不适合原分式方程的解（或根），这种根通常称为增根.

4. 检验方程根的方法：

一般地，解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为 0，因此应做如下检验：

（1）将整式方程的解代入最简公分母，若最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解.

（2）也可以将整式方程的解代入原分式方程，这种方法不仅能检验出该解是否适合原分式方程，还能检验所得的解是否正确.

拔考向▶ 利用解分式方程的步骤解分式方程

例 2 解下列方程：

（1）$\frac{x}{x-4}=\frac{x+2}{x-6}$；　　（2）$\frac{2-x}{x-3}=\frac{1}{3-x}-2$；

（3）$\frac{4x+6}{3x-3}-\frac{5x-4}{x-1}=1$；　　（4）$\frac{4}{x^2+2x}+\frac{7}{x^2-4}=\frac{6}{x^2-2x}$.

解题秘方：将分式方程转化为整式方程，通过求整式方程的解并检验，从而得到分式方程的解.

解：（1）方程两边乘 $(x-4)(x-6)$，

得 $x(x-6)=(x+2)(x-4)$. 解得 $x=2$.

当 $x=2$ 时，$(x-4)(x-6)\neq 0$.

∴原分式方程的解为 $x=2$.

（2）方程两边乘 $(x-3)$，得 $2-x=-1-2(x-3)$.

解得 $x=3$.

当 $x=3$ 时，$x-3=0$，

∴ $x=3$ 不是原分式方程的解.

∴原分式方程无解.

提分·必记

特别解读

1. 解分式方程的关键是去分母. 去分母时不要漏乘不含分母的项，当分子是多项式时要用括号括起来.
2. 解分式方程一定要检验，对于增根必须舍去.
3. **对增根的理解：**
   （1）增根一定是分式方程化为整式方程的解；
   （2）若分式方程有增根，则必是使最简公分母为 0 时未知数的值.

提分·秘诀

特别警示

解分式方程时易错点归纳：

去分母时常见三种典型错误：

(1) 分母与最简公分母中的因式不是相同而是相反时，去分母后注意改变符号，如例2(2)最简公分母是(x-3)，而 $\frac{1}{3-x}$ 的分母是(3-x)，去分母后是"-1"而不是"1"；

(2) 分子是多项式的，去分母后要带上括号，如例2(3)中 $\frac{5x-4}{x-1}$，去分母后为3(5x-4)；

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（3）方程两边乘 $3(x-1)$，

得 $4x+6-3(5x-4)=3(x-1)$.

解得 $x=\frac{3}{2}$.

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$3(x-1)\neq 0$.

∴原分式方程的解为 $x=\frac{3}{2}$.

（4）原方程可化为 $\frac{4}{x(x+2)}+\frac{7}{(x+2)(x-2)}=\frac{6}{x(x-2)}$.

方程两边乘 $x(x+2)(x-2)$，

得 $4(x-2)+7x=6(x+2)$.

解得 $x=4$.

当 $x=4$ 时，$x(x+2)(x-2)\neq 0$.

∴原分式方程的解为 $x=4$.

(3)不含分母的项易漏乘最简公分母，且最简公分母是多项式的也要带上括号.

●验根这一步是必不可少的步骤.

知识▶3 含字母的分式方程的解法

1. 含字母的分式方程：

若分式方程中除了含有表示未知数的字母外，还含有表示已知数的字母，则该方程是含字母的分式方程.

2. 含字母的分式方程的解法：

与一般分式方程的解法相同，含字母的分式方程求解时也是去分母、解整式方程、检验这三个步骤. 需要注意的是，要找准哪个字母表示未知数，哪个字母表示已知数，同时还要注意题目中所给的限制条件.

提分·必记

知识链接

1. 含有字母的分式方程一般都指出了未知数. 如："关于 x 的分式方程"表示只有 x 是未知数，其他字母都是已知数.
2. 解含字母的分式方程时，有时需分类讨论或结合题目对字母系数进行限制.

技考向▶利用去分母法解含字母的分式方程

例 3 解关于 x 的方程：$\frac{1}{a}-\frac{a}{x}=\frac{1}{b}-\frac{b}{x}$（$a\neq b$，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）.

解题秘方： 此题已明确 x 为未知数，a，b 均为已知数，先找出最简公分母，然后去分母，化成整式方程求解.

解： 方程两边乘 abx，得 $bx-a^2b=ax-ab^2$.

整理得 $(a-b)x=-ab(a-b)$.

∵ $a\neq b$，∴ $a-b\neq 0$.

方程两边除以 $(a-b)$，得 $x=-ab$.

检验：当 $x=-ab$ 时，最简公分母 $abx=-a^2b^2\neq 0$.

∴ $x=-ab$ 是原分式方程的解.

提分·秘诀

特别警示

方程两边除以(a-b)前，要注意讨论a-b是不是等于0.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点知识▶ 4 分式方程的应用

1. 列分式方程常用的等量关系：

（1）**行程问题**：速度 × 时间 = 路程.

（2）**利润问题**：利润 = 售价 − 进价；利润率 = 利润 ÷ 进价 ×100%.

（3）**工程问题**：工作量 = 工作时间 × 工作效率；总工作量 = 各个分工作量之和.

（4）**储蓄问题**：本息和 = 本金 + 利息.

2. 列分式方程解应用题的一般步骤：

（1）**审**：即审题，根据题意找出已知量和未知量，并找出等量关系.

（2）**设**：即设未知数，设未知数的方法有直接设和间接设，注意单位要统一，选择一个未知量用未知数表示，并用含未知数的式子表示相关量.

（3）**列**：即列方程，根据等量关系列出分式方程.

（4）**解**：即解所列的分式方程，求出未知数的值.

（5）**验**：即验根，既要检验所求的未知数的值是否适合分式方程，还要检验此解是否符合实际意义.

（6）**答**：即写出答案，注意单位和答案要完整.

提分·必记

特别解读

1. 审题时，先寻找题目中的关键词，然后借助列表、画图等方法准确找出相等关系. 当题目中包含多个相等关系时，要选择一个能够体现全部（或大部分）数量的相等关系列方程.
2. 设未知数时，一般题中问什么就设什么，即设直接未知数；若设直接未知数难以列方程，则可设另一个相关量为未知数，即设间接未知数；有时设一个未知数无法表示等量关系，可设多个未知数，即设辅助未知数.
3. 应用题中解分式方程同样要验根.

拔考向▶ 利用建立分式方程的模型解决实际问题

类型 1：行程问题

例 4 为加快城市群的建设与发展，要在 A，B 两城市间新建一条城际铁路，建成后，铁路运行里程由现在的 120 km 缩短至 114 km，城际铁路的设计平均时速要比现行的平均时速快 110 km，运行时间仅是现行时间的 $\frac{2}{5}$，求建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间.

解题秘方：根据题意中的两个等量关系，一个用来列式子，一个用来列方程解决问题.

1. 设计平均时速比现行平均时速快 110 km；
2. 设计运行时间是现行运行时间的 $\frac{2}{5}$

解：设建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间为 x h，则现行的运行时间为 $\frac{5}{2}x$ h.

根据题意，得 $\frac{114}{x}-\frac{120}{\frac{5}{2}x}=110$.

解得 $x=0.6$.

当 $x=0.6$ 时，$\frac{5}{2}x\neq 0$，且符合题意.

∴原分式方程的解为 $x=0.6$.

答：建成后的城际铁路在 A，B 两城市间的运行时间为 0.6 h.

提分·秘诀

另解

本题也可以采用**设间接未知数的方法**进行求解.

设城际铁路的现行平均速度是 x km/h，则城际铁路的设计平均速度是（x+110）km/h.

根据题意，得

$$\frac{120}{x}\times\frac{2}{5}=\frac{114}{x+110}.$$

解得 x=80.

经检验，x=80 是原分式方程的解，且符合题意.

$$\therefore\frac{120}{80}\times\frac{2}{5}=0.6\text{（h）}.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：工程问题

例 5 ［中考·德阳］为配合“一带一路”国家倡议，某铁路货运集装箱物流园区正式启动了 2 期扩建工程. 一项地基基础加固处理工程由 A，B 两个工程公司承担建设，已知 A 工程公司单独建设完成此项工程需要 180 天，A 工程公司单独施工 45 天后，B 工程公司参与合作，两工程公司又共同施工 54 天后完成了此项工程.

（1）求 B 工程公司单独建设完成此项工程需要多少天.

（2）由于受工程建设工期的限制，物流园区管委会决定将此项工程划包成两部分，要求两工程公司同时开工，A 工程公司建设其中一部分用了 m 天完成，B 工程公司建设另一部分用了 n 天完成，其中 m，n 均为正整数，且 $m<46$，$n<92$，求 A，B 两个工程公司各施工建设了多少天.

解题秘方：利用一项工程分几部分完成，各部分工作量之和等于工作总量列出方程解决问题.

解：（1）设 B 工程公司单独完成需要 x 天，

根据题意得 $45\times\frac{1}{180}+54\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{x}\right)=1$，解得 $x=120$，

经检验，$x=120$ 是分式方程的解，且符合题意，

答：B 工程公司单独建设完成此项工程需要 120 天；

（2）根据题意得 $m\times\frac{1}{180}+n\times\frac{1}{120}=1$，

整理得 $n=120-\frac{2}{3}m$，$\because m<46$，$n<92$，$\therefore 120-\frac{2}{3}m<92$，

解得 $42<m<46$，$\because m$ 为正整数，$\therefore m=43$，44 或 45.

又 $\because n=120-\frac{2}{3}m$ 为正整数，$\therefore m=45$，$n=90$.

答：A，B 两个工程公司各施工建设了 45 天和 90 天.

类型 3：销售问题

例 6 某超市用 3 000 元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨 9 000 元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了 20%，购进干果的质量比第一次的质量的 2 倍还多 300 千克. 若超市按每千克 9 元的价格出售，当大部分干果售出后，余下的 600 千克按售价的 8 折售完.

（1）该种干果第一次的进价是多少元/千克?

（2）超市销售这种干果共盈利多少元?

解题秘方：（1）根据等量关系“第二次购进干果的质量 =2× 第一次购进干果的质量 +300 千克”列方程进行求解；（2）根据“盈利 = 销售额 − 成本”列式进行计算.

解法提醒

- 将工作量看作“1”时，完成任务的天数与工作效率互为倒数.
- 在工程问题中，无论工作过程是怎样的，等量关系都是：甲完成的工作量 + 乙完成的工作量 +…= 总工作量. 当总工作量没有给出时，一般记为整体“1”.

知识储备

利润问题的相关公式及基本数量关系：

1. 相关公式：

售价 = 进价 ×（1+ 利润率）；

售价 = 标价 × 折扣；

利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$.

2. 基本数量关系：

利润 = 售价 − 进价；

利润 = 进价 × 利润率；

销售额 = 销售量 × 销售单价；

进价 ×（1+ 利润率）= 标价 × 折扣.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设该种干果第一次的进价是 x 元/千克，则第二次的进价为 $(1+20\%)x$ 元/千克.

根据题意，得 $\frac{9\,000}{(1+20\%)x}=2\times\frac{3\,000}{x}+300$，解得 $x=5$.

当 $x=5$ 时，$(1+20\%)x\neq 0$ 且符合题意.

所以原分式方程的解为 $x=5$.

答：该种干果第一次的进价为 5 元/千克.

（2）根据题意，盈利为

$$\left[\frac{3\,000}{5}+\frac{9\,000}{5\times(1+20\%)}-600\right]\times 9+600\times 9\times 80\%-(3\,000+9\,000)=(600+1\,500-600)\times 9+4\,320-12\,000=5\,820\text{（元）}.$$

答：超市销售这种干果共盈利 5 820 元.

详解

由题意可知，按每千克9元的价格出售的干果的质量等于两次购进的干果的总质量减去600千克.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用分组通分法巧解复杂的分式方程

挑战·高分

例 7 解方程：$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.

解题秘方：分析四个分式中分母之间的数量关系，利用分组通分的方式来解方程.

解：**方法一** 方程两边分别通分后相加，

得 $\frac{2x+11}{(x+4)(x+7)}=\frac{2x+11}{(x+5)(x+6)}$.

∵无论 x 为何值时，$(x+4)(x+7)=x^2+11x+28$，$(x+5)(x+6)=x^2+11x+30$，两个分母都不可能相等，

∴要使两个分式的值相等，则分子相等，且都为 0.

∴ $2x+11=0$，∴ $x=-\frac{11}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

∴ $x=-\frac{11}{2}$ 是原方程的根.

方法二 移项得 $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$，

方程两边分别通分后相减，

得 $\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

∵两个分式分子相同，分式值相同，∴分式的分母相同.

∴ $(x+4)(x+5)=(x+6)(x+7)$，∴ $-4x-22=0$，∴ $x=-\frac{11}{2}$.

检验：当 $x=-\frac{11}{2}$ 时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

∴ $x=-\frac{11}{2}$ 是原方程的根.

技巧点拨

一个复杂的分式方程，直接去分母时，计算相当麻烦，观察分式的结构特征可采取**分组通分法**，达到以下两种结果：

1. 左右两边分子相同，分母一定不相等，则只有分子的值为 0 时，分式方程才成立.
2. 左右两边分子是一个相等的非零常数，则只有分母相等时，分式方程才成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类法求分式方程无解时字母的值

挑战·高分

例 8 若关于 x 的分式方程 $2-\frac{1-kx}{x-2}=\frac{1}{2-x}$ 无解，求 k 的值.

解题秘方：根据分式方程无解的两种情况：（1）求出的整式方程的解使最简公分母为 0；（2）分式方程所化成的整式方程无解进行分类讨论，确定字母的值.

解：方程两边乘最简公分母（$x-2$），

得 $2(x-2)-(1-kx)=-1$，

即 $(2+k)x=4$ ①.

分两种情况讨论：

（1）当 $2+k\neq 0$，即 $k\neq -2$ 时，$x=\frac{4}{2+k}$.

∵原方程无解，

∴ $x-2=0$，即 $x=2$.

把 $x=2$ 代入①，得 $k=0$.

（2）当 $2+k=0$，即 $k=-2$ 时，方程①无解，

则原分式方程也无解.

综上，k 的值为 0 或 -2.

方法点拨

导致分式方程无解的情况有两种：

1. 由整式方程无解导致分式方程无解：将分式方程通过去分母变成整式方程后，整式方程是 $ax=b$（$a=0$，$b\neq 0$）的形式；
2. 由增根导致分式方程无解：求得的分式方程化成的整式方程的根是原分式方程的增根.

拔尖角度▸ 3 利用分式方程的解的范围列不等式法求字母的取值范围

挑战·高分

例 9 关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-3}=1$ 的解是正数，求 a 的取值范围.

解题秘方：先将分式方程化为整式方程，再用含待定字母的式子表示方程的解，然后根据解的情况，确定待定字母的取值范围.

解：方程两边乘（$x-3$），得 $2x+a=x-3$.

解得 $x=-3-a$.

∵原方程的解是正数，

∴ $-3-a>0$，

∴ $a<-3$.

又 $x-3\neq 0$，

∴ $-3-a-3\neq 0$，

解得 $a\neq -6$.

∴ $a<-3$ 且 $a\neq -6$.

特别提示

若“解是正数”即 x-3 可能为 0，则可能产生增根 x=3；若“解是负数”即 x-3 不可能为 0，则不可能产生增根.

方法点拨：根据分式方程的解的范围求字母取值范围的思路：

先把分式方程去分母后求出整式方程的解，再列出不等式（组）求出字母的取值范围，最后判断在字母的取值范围内是否可能产生增根，若可能，排除产生增根时字母的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用类比法探究分式方程的解与分式方程之间的关系

挑战·高分

例 10 阅读下列材料：

关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{1}{c}$；$x-\frac{1}{x}=c-\frac{1}{c}$，即 $x+\left(-\frac{1}{x}\right)=c+\left(-\frac{1}{c}\right)$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=-\frac{1}{c}$；

$x+\frac{2}{x}=c+\frac{2}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{2}{c}$；

$x+\frac{3}{x}=c+\frac{3}{c}$ 的解是 $x_1=c$，$x_2=\frac{3}{c}$；…．

（1）请观察上述方程解的特征，比较关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$（$m\neq 0$）与它们的关系，猜想它的解是 $x_1=$_____，$x_2=$_____；

（2）利用上述结论求关于 x 的方程 $x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$ 的解．（不用进行检验）

解题秘方：根据题目所给的几个方程的解，找出解与方程之间的规律，然后将待解方程变形为已知方程的结构形式求解．

解法提醒

- 仿照已知几个方程左右两边及其解之间的关系，得出一般结论．
- 将(2)小题的分式方程变形，得到类似于(1)小题中方程的结构，利用整体思想解方程．

解：（1）c；$\frac{m}{c}$

（2）原方程可化为 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$，

仿照（1）的结论可知：$x-1=a-1$ 或 $x-1=\frac{2}{a-1}$，解得 $x_1=a$，$x_2=\frac{a+1}{a-1}$．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是解分式方程、列分式方程解应用题．其中解分式方程是中考考查的热点，考查形式有选择题、填空题和解答题，难度一般不大；列分式方程解应用题是中考考查的重点，常常考查行程问题、工程问题和销售问题等，难度中等，且在今后的中考中仍是考查的重点．

三年中考兵法

考法 1 利用分式方程的解的定义求字母的值

冲刺·满分

思路点拨

先利用方程解的定义，把 x=4 代入原分式方程，就得到一个关于 a 的新分式方程，解这个新分式方程，求出 a 的值并检验．

例 11 ［中考·株洲］关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$ 的解为 $x=4$，则常数 a 的值为（　　）

A. $a=1$　　B. $a=2$　　C. $a=4$　　D. $a=10$

试题评析：本题考查分式方程解的概念及分式方程的解法，解答本题的关键是明确分式方程的解是使方程两边相等的未知数的值．

解：把 $x=4$ 代入方程 $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-a}=0$，得 $\frac{2}{4}+\frac{3}{4-a}=0$，

解得 $a=10$．经检验，当 $a=10$ 时，$x=4$ 是原方程的解．

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分式方程的解满足的条件求字母的值

例 12 [中考·重庆]若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{1+x}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$ 有且只有四个整数解，且使关于 y 的方程 $\dfrac{y+a}{y-1}+\dfrac{2a}{1-y}=2$ 的解为非负数，则符合条件的所有整数 a 的和为（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

试题评析：此题考查了解分式方程，以及解一元一次不等式组，熟练掌握解法是解本题的关键.

解：将不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}<\dfrac{1+x}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}x<5,\\ x\geqslant\dfrac{a+2}{4}.\end{cases}$

由不等式组有且只有四个整数解，得 $0<\dfrac{a+2}{4}\leqslant 1$，

解得 $-2<a\leqslant 2$，即整数 $a=-1$，0，1 或 2.

将分式方程 $\dfrac{y+a}{y-1}+\dfrac{2a}{1-y}=2$ 去分母，得 $y+a-2a=2(y-1)$，

解得 $y=2-a$，

由分式方程的解为非负数以及分式有意义的条件，得 $a\leqslant 2$ 且 $a\neq 1$.

综上，整数 a 为 -1，0 或 2，故符合条件的所有整数 a 的和为 1.

答案：C

解法提醒

表示出不等式组的解集，由不等式组有且只有四个整数解确定出 a 的值，再由分式方程的解为非负数以及分式有意义的条件求出满足题意的整数 a 的值，进而求出和.

考法 3 利用分式方程增根的定义求字母的值

例 13 [中考·巴中]若分式方程 $\dfrac{3x-a}{x^2-2x}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x}$ 有增根，则实数 a 的取值是（　　）

A. 0 或 2　　B. 4　　C. 8　　D. 4 或 8

试题评析：本题考查的是分式方程的增根. 增根的定义：在分式方程变形时，有可能产生不适合原方程的根，即能满足去掉分母后的整式方程，但代入原分式方程则无意义，我们把这样的根叫做原分式方程的增根.

解：方程两边同乘 $x(x-2)$，

得 $3x-a+x=2(x-2)$，

由题意得，分式方程的增根为 $x=0$ 或 $x=2$，

当 $x=0$ 时，$-a=-4$，

解得 $a=4$；

当 $x=2$ 时，$6-a+2=0$，

解得 $a=8$.

答案：D

知识储备

在分式方程化为整式方程的过程中，若整式方程的解使最简公分母的值为 0，则这个解叫做原分式方程的增根；反之，若分式方程有增根，则必是使最简公分母为 0 时未知数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 分式方程的应用

例 14 [中考·宜宾]用 A，B 两种机器人搬运大米，A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 20 袋大米，A 型机器人搬运 700 袋大米与 B 型机器人搬运 500 袋大米所用时间相等. 求 A，B 型机器人每小时分别搬运多少袋大米.

试题评析：本题考查分式方程的应用，认真阅读，仔细分析题意，找出题中的等量关系是解题的关键.

解：设 A 型机器人每小时搬运 x 袋大米，则 B 型机器人每小时搬运 $(x-20)$ 袋大米.

根据题意，得 $\frac{700}{x}=\frac{500}{x-20}$，

解得 $x=70$.

经检验，$x=70$ 是原分式方程的解，且符合题意.

由 $x=70$ 得 $x-20=50$.

答：A 型机器人每小时搬运 70 袋大米，B 型机器人每小时搬运 50 袋大米.

考法点评

解分式方程的应用题，假解一般方程的应用题步骤一样，设未知数→列方程→解方程→答. 由于解分式方程要验根，所以解分式方程的应用题既要检验未知数的值是否是方程的解，还要检验是否符合问题的实际意义.

两年模拟兵法 ☞答案见 251 页

1. 下列方程不是分式方程的是（　　）

A. $\frac{1}{x}+x=2$　　B. $\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{1+x}-\frac{1}{1+x}=2$　　D. $\frac{5}{x}=\frac{7}{x-7}$

2. 解分式方程 $\frac{1}{x-2}-3=\frac{4}{2-x}$ 时，去分母可得（　　）

A. $1-3(x-2)=4$　　B. $1-3(x-2)=-4$

C. $1-3(2-x)=-4$　　D. $1-3(2-x)=4$

3. [中考·成都]分式方程 $\frac{3}{2x}=\frac{1}{x-1}$ 的解为（　　）

A. $x=1$　　B. $x=2$

C. $x=3$　　D. $x=4$

4. [中考·内江]甲、乙两人同时分别从 A，B 两地沿同一条公路骑自行车到 C 地. 已知 A，C 两地间的距离为 110 km，B，C 两地间的距离为 100 km. 甲骑自行车的平均速度比乙快 2 km/h. 结果两人同时到达 C 地，求两人的平均速度，为解决此问题，设乙骑自行车的平均速度为 x km/h. 由题意列出方程. 其中正确的是（　　）

A. $\frac{110}{x+2}=\frac{100}{x}$　　B. $\frac{110}{x}=\frac{100}{x+2}$

C. $\frac{110}{x-2}=\frac{100}{x}$　　D. $\frac{110}{x}=\frac{100}{x-2}$

5. [中考·聊城]如果解关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2}-\frac{2x}{2-x}=1$ 时出现增根，那么 m 的值为（　　）

A. -2　　B. 2

C. 4　　D. -4

6. [中考·兰州]关于 x 的分式方程 $\frac{2x+a}{x+1}=1$ 的解为负数，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>1$

B. $a<1$

C. $a<1$ 且 $a\neq -2$

D. $a>1$ 且 $a\neq 2$

7. 当 $x=$_____时，分式 $\frac{4}{x-4}$ 与 $\frac{3}{x-1}$ 的值相等.

8. 对于非零的两个实数 a，b，规定 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，若 $2\oplus(2x-1)=1$，则 x 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 方程 $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$ 的解为 $x=1$；方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$ 的解为 $x=2$；方程 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}$ 的解为 $x=3$；…；按此规律，解为 $x=6$ 的方程应表示为_____.

10. 解分式方程：

（1）[**中考·金华**] $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$；

（2）$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$.

11. [**中考·黄冈**] 黄麻中学为了创建全省“最美书屋”，购买了一批图书，其中科普类图书平均每本的价格比文学类图书平均每本的价格多5元. 已知学校用12 000元购买的科普类图书的本数与用9 000元购买的文学类图书的本数相等，求学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格各是多少元.

【导学号：9877429】

12. [**中考·吉林**] 如图是学习分式方程应用时，老师板书的问题和两名同学所列的方程.

15.3 分式方程

甲、乙两个工程队，甲队修路400米与乙队修路600米所用的时间相等，乙队每天比甲队多修20米，求甲队每天修路的长度.

冰冰：$\frac{400}{x}=\frac{600}{x+20}$

庆庆：$\frac{600}{y}-\frac{400}{y}=20$

（第12题）

根据以上信息，解答下列问题.

（1）冰冰同学所列方程中的 x 表示_____，庆庆同学所列方程中的 y 表示_____；

（2）两个方程中任选一个，并写出它的等量关系；

（3）解（2）中你所选择的方程，并回答老师提出的问题.

13. 已知关于 x 方程 $\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$ 的解是正数，求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.4 零指数幂与负整数指数幂

核心知识
- 整数指数幂
- 科学记数法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 零指数幂

零指数幂：任何不等于零的数的零次幂都等于 1. 即 $a^0=1$（$a\neq 0$）.

（1）零指数幂的运算法则可以由同底数幂的除法法则推导，$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$，而被除数和除数相等时，商为 1，故 $a^0=1$.

（2）$a^0=1$（$a\neq 0$），a 可以是一个数，也可以是一个含有字母的式子，但无论是数还是含有字母的式子都不为 0.

提分·必记

特别解读

零指数幂要抓住三点：

1. 底数不为零；
2. 指数为零；
3. 结果等于 1.

拔考向▸利用零指数幂的运算法则计算

例 1 计算：（1）$(-1)^{2021}+(\pi-3.14)^0$；（2）$(a-b)^0$（$a\neq b$）.

解题秘方：紧扣零指数幂的运算法则进行计算.

解：（1）$\because \pi\approx 3.142$，$\therefore \pi-3.14\neq 0$.

$\therefore (-1)^{2021}+(\pi-3.14)^0=-1+1=0$.

（3）$\because a\neq b$，$\therefore a-b\neq 0$.

$\therefore (a-b)^0=1$.

提分·秘诀

方法点拨

对于零指数幂的运算，要先弄清底数是否为0，只有当底数不为0时，这个零指数幂才等于1.

点知识▸2 负整数指数幂

1. 负整数指数幂：任何不等于零的数的 $-n$（n 为正整数）次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数，即 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（$a\neq 0$，n 是正整数）.

2. 整数指数幂的运算性质：

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m，n 是整数）；

（2）$(a^m)^n=a^{mn}$（m，n 是整数）；

（3）$(ab)^n=a^nb^n$（n 是整数）；

（4）$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$a\neq 0$，m，n 是整数）；

（5）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$（$a\neq 0$，$b\neq 0$，$n$ 是整数）.



提分·必记

特别解读

1. 负整数指数幂的运算，既可以等于正整数指数幂的倒数，也可以等于倒数的正整数指数幂，即 $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^p$.
2. 当指数为负整数或 0 时，一定要保证底数不为 0.
3. 整数指数幂的运算结果要化成正整数指数幂的形式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用整数指数幂的运算法则进行幂的计算

类型1：整数指数幂的运算法则在数的运算中的应用

例2 ［中考·攀枝花］计算：$\sqrt{9}+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$_____.

解题秘方：根据实数的各个运算法则的意义进行计算.

解：$\sqrt{9}+|-4|+(-1)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$=3+4+1-2$

$=6.$

答案：6

类型2：整数指数幂的运算法则在式子的化简中的应用

例3 计算：

（1）$(2a^{-2})^3b^2\div4a^{-8}b^3$；

（2）$(3x^2y^{-1})^{-2}\cdot(2x^{-2}y^3)^2$；

（3）$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^{-3}\div\left(-\frac{y}{x}\right)^{-4}$.

解题秘方：按照先乘方，再乘除的顺序进行计算.

解：（1）$(2a^{-2})^3b^2\div4a^{-8}b^3=8a^{-6}b^2\div4a^{-8}b^3=2a^2b^{-1}=\frac{2a^2}{b}$；

（2）$(3x^2y^{-1})^{-2}\cdot(2x^{-2}y^3)^2=\frac{1}{9}x^{-4}y^2\cdot4x^{-4}y^6=\frac{4}{9}x^{-8}y^8=\frac{4y^8}{9x^8}$；

（3）$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^{-3}\div\left(-\frac{y}{x}\right)^{-4}=x^{-4}y^2\cdot y^{-6}x^3\div x^4y^{-4}$

$=x^{-4}y^2\cdot x^3y^{-6}\cdot x^{-4}y^4=x^{-5}y^0=\frac{1}{x^5}$.

提分·秘诀

解法提醒

对于底数是分数的负整数指数幂，我们可采用底倒指反法，将其转化为这个数的倒数的正整数指数幂，即$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

方法点拨

1. 幂的运算法则针对任何整数指数幂都适用.
2. 计算底数是分式的幂时，先将分式形式的幂改写，分子的指数不变，分母的指数改为相反数，例如$\left(\frac{a}{b}\right)^n=a^nb^{-n}$，然后再按幂的运算法则计算.
3. 运算的结果有负指数的，再改写成分式的形式.

知识点▶3 科学记数法

1. 用科学记数法表示数：利用10的正整数指数幂，把一个绝对值较大的数表示成$a\times10^n$的形式，其中n是正整数，$1\leqslant|a|<10$；类似地，利用10的负整数指数幂，也可以用科学记数法表示一些绝对值较小的数，即将它们表示成$a\times10^{-n}$的形式，其中n是正整数，$1\leqslant|a|<10$.

2. 用科学记数法表示小于1的正数的一般步骤：

（1）确定a：a是大于或等于1且小于10的数.

（2）确定n：确定n的方法有两个，即

①n等于原数中左起第一个非0数前0的个数（包括小数点前的那个0）；

②小数点向右移到第一个非0的数后，小数点移动了几位，n就等于几.

（3）将原数用科学记数法表示为$a\times10^{-n}$（其中n是正整数，$1\leqslant a<10$）.

提分·必记

特别提醒

- 对于大于-1的负数也可以类似地用科学记数法表示成$a\times10^{-n}$的形式（其中n是正整数，$1\leqslant|a|<10$），也就是说可以用科学记数法表示绝对值小于1的数.
- 用科学记数法表示绝对值小于1的数时，10的指数是负数，一定不要忘记指数n前面的“-”号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用科学记数法解科学记数法表示的数与原数的关系问题

类型1：科学记数法在表示数中的应用

例4 用科学记数法表示下列各数：

（1）0.000 003；（2）−0.000 020 8；（3）0.000 000 004 67.

解题秘方：按照科学记数法的要求，将各数写成 $\pm a\times10^{-n}$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 是正整数.

解：（1）$0.000\ 003=3\times10^{-6}$；

3 前面有 6 个 0

（2）$-0.000\ 020\ 8=-2.08\times10^{-5}$；

2 前面有 5 个 0

（3）$0.000\ 000\ 004\ 67=4.67\times10^{-9}$.

4 前面有 9 个 0

类型2：科学记数法表示的数在还原成原数中的应用

例5 将下列用科学记数法表示的数还原成原数.

（1）6×10^{-4}；（2）-7.2×10^{-5}；（3）5.68×10^{-6}.

解题秘方：把用科学记数法表示的绝对值小于 1 的数还原时，指数的绝对值是几，小数点就向左移几位.

解：（1）$6\times10^{-4}=0.000\ 6$；

（2）$-7.2\times10^{-5}=-0.000\ 072$；

（3）$5.68\times10^{-6}=0.000\ 005\ 68$.

教你一招：将用科学记数法表示的数还原的思路：

把 $a\times10^{-n}$（其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是正整数）还原成原数时，只要把 a 的小数点向左移动 n 位即可.

类型3：科学记数法表示的数在计算中的应用

例6 计算：

（1）$(3\times10^{-4})^2\times(2\times10^{-6})^3$；

（2）$(8\times10^{-7})^2\div(2\times10^{-3})^3$.

解题秘方：先计算乘方，再计算乘除.

解：（1）$(3\times10^{-4})^2\times(2\times10^{-6})^3$

$=9\times10^{-8}\times8\times10^{-18}$

$=(9\times8)\times(10^{-8}\times10^{-18})$

$=7.2\times10^{-25}$；

（2）$(8\times10^{-7})^2\div(2\times10^{-3})^3$

$=(64\times10^{-14})\div(8\times10^{-9})$

$=(64\div8)\times(10^{-14}\div10^{-9})$

$=8\times10^{-5}$.

提分·秘诀

教你一招

用科学记数法表示绝对值小于1的数的思路：

用科学记数法表示绝对值小于1的数时，一般形式为 $a\times10^{-n}$，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 由原数左起第一个不为0的数字前面0的个数所决定.

知识储备

将一个用科学记数法表示的数（$a\times10^n$）还原成原数时，要先判断指数的正负.n 为正数时，小数点向右移动 n 位；n 为负数时，小数点向左移动 $|n|$ 位，不足的数位用“0”补齐.

解法提醒

计算用科学记数法表示的数时，乘方运算用积的乘方法则，乘除运算用单项式乘除法法则，计算的结果也应该用科学记数法形式表示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等底法求负整数指数幂中字母的值

挑战·高分

例 7 已知 $3^m=\frac{1}{27}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^n=16$，求 m^n 的值.

解题秘方：将等式两边都用幂的形式表示，对比底数和指数求值.

解：$\because 3^m=\frac{1}{27}=3^{-3}$，

$\therefore m=-3$.

$\because \left(\frac{1}{2}\right)^n=16=2^4=\frac{1}{2^{-4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$，

$\therefore n=-4$.

$\therefore m^n=(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$.

教你一招

运用负整数指数幂解决这类题目时，要先从不含待定字母的一边入手变形，将两边化为同底数或同指数的形式，然后构造方程，并通过解方程确定指数或底数中的待定字母的值.

拔尖角度 2 利用化负为正法化简含有负整数指数幂的式子

挑战·高分

例 8 计算下列各式：

(1) $\frac{(2x^2y^2)^2\cdot(-3x^{-1}y^3)}{6x^{-2}y^{-3}\cdot(3x^2y^3)}$；

(2) $\left(\frac{x^2+xy}{x}\right)^{-1}\div\left(\frac{x-y}{x}\cdot\frac{x}{y-x}\right)^{-5}$.

解题秘方：用化负为正法，即将负整数指数幂转化成原底数的倒数的正整数指数幂进行计算.

解：(1) $\frac{(2x^2y^2)^2\cdot(-3x^{-1}y^3)}{6x^{-2}y^{-3}\cdot(3x^2y^3)}$

$=\frac{4x^4y^4\cdot(-3y^3)\cdot x^2y^3}{6x\cdot(3x^2y^3)}$

$=\frac{-12x^6y^{10}}{18x^3y^3}$

$=-\frac{2x^3y^7}{3}$；

(2) $\left(\frac{x^2+xy}{x}\right)^{-1}\div\left(\frac{x-y}{x}\cdot\frac{x}{y-x}\right)^{-5}$

$=\frac{x}{x(x+y)}\cdot\left[\frac{x-y}{x}\cdot\frac{x}{-(x-y)}\right]^5$

$=-\frac{1}{x+y}$.

解法提醒

将负整数指数幂先化成正整数指数幂，再计算.

方法点拨

化简含有负整数指数幂的式子时，根据题目的结构和自身的习惯采用合适的方法解决，但结果中一般不含有负整数指数幂.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查零指数幂、负整数指数幂及用科学记数法表示小于1的正数，其中用科学记数法表示小于1的正数是中考考查的热点，一般以选择题或填空题的形式出现；零指数幂和负整数指数幂在中考中可能以简单计算的形式出现在填空题或选择题中，也可能作为计算的一部分出现在解答题中.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 负整数指数幂的运算

例9 [中考·济宁]计算$(a^2)^3+a^2\cdot a^3-a^2\div a^{-3}$，结果是(　　)

A. $2a^5-a$　　B. $2a^5-\frac{1}{a}$　　C. a^5　　D. a^6

试题评析：本题考查了幂的乘方和同底数幂的乘除法，解题的关键是掌握幂的乘方和同底数幂的乘除法的运算法则.

解：$(a^2)^3+a^2\cdot a^3-a^2\div a^{-3}=a^6+a^5-a^5=a^6$，故选D.

答案：D

考法点评

进行整数指数幂的运算时，要注意两点：一是运算顺序，二是运算法则，运算结果要化为整数指数幂的形式.

考法2 利用科学记数法解实际应用问题

例10 [中考·邵阳]据《经济日报》2018年5月21日报道：目前，世界集成电路生产技术水平最高已达到7 nm(1 nm=10^{-9} m)，主流生产线的技术水平为14~28 nm，中国大陆集成电路生产技术水平最高为28 nm. 将28 nm用科学记数法可表示为(　　)

A. 28×10^{-9} m　　B. 2.8×10^{-8} m

C. 28×10^{9} m　　D. 2.8×10^{8} m

试题评析：本题考查了用科学记数法表示小于1的正数的方法及科学记数法的计算，解题的关键是掌握科学记数法表示数的方法.

解：28 nm=28×10^{-9} m=2.8×10^{-8} m.

答案：B

思路点拨

绝对值小于1的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为$a\times10^{-n}$，与较大数的科学记数法表示不同的是其所使用的是负整数指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定.

两年模拟兵法

☞答案见252页

1. [中考·潍坊]计算2^{-2}=(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $-\frac{1}{4}$　　D. 4

2. [中考·苏州]肥皂泡的泡壁厚度大约是0.000 7 mm，0.000 7用科学记数法表示为(　　)

A. 0.7×10^{-3}　　B. 7×10^{-3}

C. 7×10^{-4}　　D. 7×10^{-5}

3. [中考·威海]下列运算正确的是(　　)

A. $3x^2+4x^2=7x^4$　　B. $2x^3\cdot3x^3=6x^3$

C. $a\div a^{-2}=a^3$　　D. $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{6}a^6b^3$

4. 若$a=0.3^2$，$b=-3^{-2}$，$c=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$，$d=\left(-\frac{1}{3}\right)^0$，则$a$，$b$，$c$，$d$的大小关系是(　　)

A. $a<b<c<d$　　B. $b<a<d<c$

C. $a<d<c<b$　　D. $c<a<d<b$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 若 $(x-3)^0+\left(\frac{x}{3x-6}\right)^{-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x\neq 3$ 且 $x\neq 2$

B. $x\neq 3$ 或 $x\neq 2$

C. $x\neq 3$ 或 $x\neq 2$ 或 $x\neq 0$

D. $x\neq 3$ 且 $x\neq 2$ 且 $x\neq 0$

6. 计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+(1-\sqrt{2})^0=$_____.

7. 已知 $2^x=\frac{1}{32}$，则 $x=$_____.

8. 计算：$(2-\sqrt{3})^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$.

9. 化简：

（1）$(xy^{-1})^n\div(-x^2y^{-n})^2$（$n$ 是整数）；

（2）$(x^{-2}y^3)^2\cdot(x^{-1}y)^{-2}\div(xy^{-2})^3$.

10. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$，其中 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+1$.　　【导学号：9877429】

11. 已知 $(2x-1)^{x-2}=1$，求整数 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分式运算中的常用技巧与方法



在分式的运算中，若能认真观察题目的结构特征，灵活运用解题技巧，选择恰当的运算方法，常常会得到事半功倍的效果.

技巧一 整体通分法

例1 化简：$\frac{a^2}{a-1}-a-1$.

解题秘方：将后两项看成一个整体，则可以整体通分进行求解.

解：$\frac{a^2}{a-1}-a-1=\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$

$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}=\frac{a^2-(a^2-1)}{a-1}$

$=\frac{1}{a-1}$.

方法点拨：运用整体通分法计算时，看成一个整体的部分要用括号括起来，运用添括号法则时，如果前面是“−”号，注意要变号.

技巧二 逐项通分法

例2 计算：

$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$.

解题秘方：若全部通分，最简公分母好确定，但分子的计算量太大，观察分母发现，从前到后逐项通分时，分母都构成平方差形式.

解：原式$=\frac{(a+b)-(a-b)}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{2b(a^2+b^2)-2b(a^2-b^2)}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=\frac{4b^3}{a^4-b^4}-\frac{4b^3}{a^4-b^4}$

$=0$.

技巧三 先约分，后通分

例3 计算：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$.

解题秘方：先不要盲目通分，观察后发现每个分式都可以约分，所以先将分子、分母分解因式，约分后再通分计算.

解：$\frac{a^2+6a}{a^2+2a}-\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$

$=\frac{a(a+6)}{a(a+2)}-\frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)^2}$

$=\frac{a+6}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}$

$=\frac{a^2-2a+6a-12}{a^2-4}-\frac{a^2+4a+4}{a^2-4}$

$=\frac{-16}{a^2-4}=-\frac{16}{a^2-4}$.

方法点拨：先约分的目的是为了简化最简公分母，使在运算过程中分子的计算量减少.

技巧四 整体代入法

例4 已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，求$\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}$的值.

解题秘方：一个条件无法求出两个未知数的值，所以只能考虑整体代入求值.

解：**方法一** $\because\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，$\therefore xy\neq 0$.

$\therefore\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{\frac{2}{y}-5+\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}+2+\frac{1}{x}}$

$=\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-5}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2}=\frac{2\times 5-5}{5+2}=\frac{5}{7}$.

方法二 $\because\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，

$\therefore\frac{x+y}{xy}=5$，$\therefore x+y=5xy$且$xy\neq 0$.

$\therefore\frac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2(x+y)-5xy}{(x+y)+2xy}$

$=\frac{2\times 5xy-5xy}{5xy+2xy}=\frac{5xy}{7xy}=\frac{5}{7}$.

方法点拨：用整体代入法求分式的值是最常

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

用的方法，原因是分式可以约分，当不能求出分式中各个字母的值时，可以考虑利用整体代入法，虽然分子和分母中都含有字母，但通过约分可以求出其值.

技巧五 运用公式变形法

例 5 已知 $a^2-5a+1=0$，计算：$a^4+\frac{1}{a^4}$.

解题秘方：借用整式的乘法公式解决分式的求值问题，关键是找准公式的基本模型.

解：由已知条件可得 $a\neq 0$，$\therefore a+\frac{1}{a}=5$.

$$\therefore a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$$

$$=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right]^2-2=(5^2-2)^2-2=527.$$

方法点拨：运用乘法公式变形求分式的值，避免了求出分式中字母的值. 其中互为倒数的两个式子的和在运用完全平方公式时，积的 2 倍等于 2.

技巧六 设辅助参数法

例 6 已知 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$，计算：$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

解题秘方：利用设参数进行转化，从而求出待定字母的值.

解：设 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则 $b+c=ak$，$a+c=bk$，$a+b=ck$.

把这 3 个等式相加得：$2(a+b+c)=(a+b+c)k$，

若 $a+b+c=0$，即 $a+b=-c$，则 $k=-1$.

若 $a+b+c\neq 0$，则 $k=2$.

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{ck\cdot ak\cdot bk}{abc}=k^3.$$

当 $k=-1$ 时，原式 $=-1$.

当 $k=2$ 时，原式 $=8$.

方法点拨：设辅助参数，利用整体代入法将要求的分式转化为以辅助参数为字母的分式，利用约分可求出其值.

技巧七 应用倒数变换法

例 7 已知 $\frac{a}{a^2-a+1}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$ 的值.

解题秘方：将已知的分式和要求的分式的分子和分母都颠倒，对比其结构求值.

解：由条件知 $a\neq 0$，

$$\therefore \frac{a^2-a+1}{a}=7，即\ a+\frac{1}{a}=8,$$

$$\therefore \frac{a^4+a^2+1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+1=63,\ \therefore \frac{a^2}{a^4+a^2+1}=\frac{1}{63}.$$

方法点拨：本题将分式的分子和分母颠倒，然后转化为用技巧五中的公式变形法求值. 注意对于要求的分式的值要倒过来还原.

技巧八 把未知数当成已知数法

例 8 已知 $3a-4b-c=0$，$2a+b-8c=0$，$c\neq 0$. 计算：$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}$.

解题秘方：确定一个字母为已知数，利用解二元一次方程组求出方程组的解，再代入待求式子求值.

解：把 c 当作已知数，用 c 表示 a 和 b，得 $a=3c$，$b=2c$. 又 $c\neq 0$.

$$\therefore \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}=\frac{14c^2}{11c^2}=\frac{14}{11}.$$

技巧九 特殊值法

例 9 已知 $abc=1$，求 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$ 的值.

解题秘方：由已知条件无法求出 a,b,c 的值，可根据已知条件取字母的一些特殊值，然后代入求值.

解：令 $a=1$，$b=1$，$c=1$，则

$$原式=\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}+\frac{1}{1\times 1+1+1}=1.$$

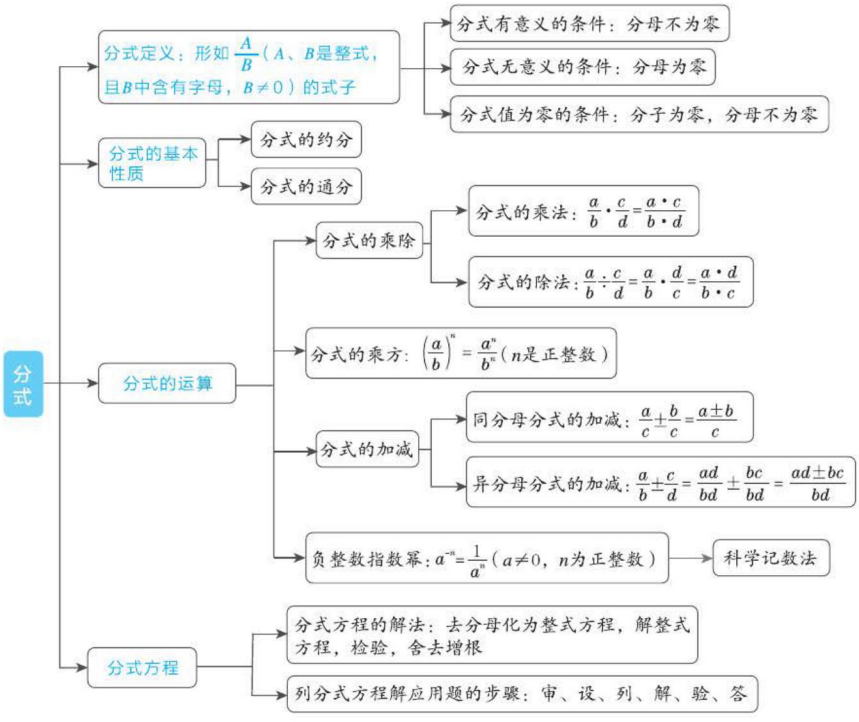
方法点拨：特殊值法要求所取的特殊值必须符合题目中给出的已知条件，运用特殊值法可准确、迅速地求出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

—— 核心结构专题 ——

结构必知



核心必读

1. 形如$\frac{A}{B}$（A、B是整式，且B中含有字母，$B\neq0$）的式子叫做分式，$B\neq0$是分式有意义的条件；$A=0$，$B\neq0$是分式的值为零的条件.

2. **分式的基本性质：**分式的分子和分母同时乘或除以同一个不为0的整式，分式的值不变. 根据分式的基本性质可以将分式进行通分或者约分.

3. 分式的运算包括乘方、乘除和加减这几则运算，乘除法运算关键是约分，加减法运算关键是通分，运算的最后结果一定要是最简分式或整式.

4. 一个数的负整数指数幂等于这个数的正整数指数幂的倒数，利用负整数指数幂的形式可以将一个绝对值小于1的数用科学记数法的形式表示出来.

5. 解分式方程关键就是利用等式的性质将方程的两边乘最简公分母，将分式方程转化成整式方程，然后解整式方程. 解完整式方程后一定要注意检验. 若使最简公分母的值为零，则该根为增根.

6. 列分式方程解应用题时，应先分析题意，准确找出题中的相等关系，然后设出恰当的未知数，列出方程，解方程，最后一定要检验，既要检验是否为所列方程的解，又要检验是否符合题意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 分式的相关概念

链接中考» 在分式的相关概念中，分式有意义的条件及分式值为0的条件最为重要，也是中考中热门的考点，一般都是以填空题、选择题的形式出现.

例1 （1）[中考·常州]要使分式$\frac{3}{x-2}$有意义，则x的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x\neq -2$　　D. $x\neq 2$

（2）[中考·衡阳]若分式$\frac{x-2}{x+1}$的值为0，则x的值为（　　）

A. 2或-1　　B. 0

C. 2　　D. -1

解题秘方：利用分式有意义及分式的值为0的条件解决问题.

解：（1）根据分式有意义的条件可知：$x-2\neq 0$，$\therefore x\neq 2$.

（2）由题意可知$x-2=0$，得$x=2$. 由$x+1\neq 0$，得$x\neq -1$，$\therefore x=2$.

答案：（1）D　　（2）C

方法点拨：分式的值为0需要同时具备两个条件：一是分子等于0，二是分母不等于0，二者缺一不可.

专题二 分式的运算

链接中考» 分式的运算是本章的重点，它的关键是分式的运算顺序以及分式的运算法则，中考中考查的形式主要是化简求值，属中档题目.

例2 先化简：$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\frac{x^2}{x^2+2x+1}$，再代入一个合适的$x$的值求值.

解题秘方：利用分式的运算法则进行化简，选择一个使原式有意义的值代入求值.

解：原式$=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^2}$

$=\frac{(x+1)^2}{x^2}-\frac{x+1}{x^2}$

$=\frac{x^2+x}{x^2}$

$=\frac{x+1}{x}$.

取$x=2$，则原式$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$.

方法点拨：对于分式化简求值问题没有捷径，需要掌握因式分解和代入求值的方法等知识，分式问题中还需注意分式有意义的条件. 如本题代入x的值必须使原式有意义，不能是0和-1.

专题三 科学记数法

链接中考» 利用负整数指数幂的形式将一个绝对值小于1的数用科学记数法的形式表示出来，一般这个数据都是生活中出现的数据，体现了数学应用于生活，考查时一般以选择题的形式出现，在中考中也是考查的热点.

例3 [中考·邵阳]英国和新加坡研究人员制造出观测极限为0.000 000 05米的光学显微镜（如图16-1），其中0.000 000 05米用科学记数法表示正确的是（　　）

A. 0.5×10^{-9}米　　B. 5×10^{-8}米

C. 5×10^{-9}米　　D. 5×10^{-7}米

解题秘方：利用科学记数法的表示方法表示提供的数据.


图16-1

解：0.000 000 05是绝对值小于1的数，这类数用科学记数法表示的方法是写成$a\times10^{-n}$（其中$1\leqslant|a|<10$，n为正整数）的形式，关键是确定$-n$，先确定n的值，$-n$的值就确定了. 确定方法是：n的值等于原数中左起第一个非零数字前零的个数（含整数数位上的零）.

由于数0.000 000 05，非0数字5前面共有8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

个 0，因此 $0.000\,000\,05=5\times10^{-8}$.

答案：B

方法点拨：把一个数写成 $a\times10^n$ 的形式（其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为非零整数），这种记数法称为科学记数法，其方法是：

（1）确定 a，a 是整数数位只有一位的数；

（2）确定 n，当原数的绝对值 $\geqslant 10$ 时，n 为正整数，n 等于原数的整数位数减 1；当原数的绝对值 <1 时，n 为负整数，n 的绝对值等于原数中左起第一个非零数字前零的个数（含整数数位上的零）.

专题四 解分式方程

链接中考» 解分式方程关键就是将分式方程转化为整式方程来解决，解分式方程一定要注意检验. 解方程是中考中的热门考点，一般都是直接考查解分式方程.

例 4 解方程：$\dfrac{x}{3x-1}=2-\dfrac{1}{1-3x}$.

解题秘方：利用解分式方程的步骤解分式方程，注意验根.

解：去分母，得 $x=2(3x-1)+1$，

去括号，得 $x=6x-2+1$，

移项、合并同类项，得 $5x=1$，

系数化为 1，得 $x=\dfrac{1}{5}$，

经检验，$x=\dfrac{1}{5}$ 是原分式方程的解.

方法点拨：分式方程 $\xrightarrow[\text{转化为}]{\text{去分母}}$ 整式方程 $\longrightarrow$ 解整式方程 $\longrightarrow$ 检验根 $\longrightarrow$ 确定原方程的根.

专题五 分式方程的应用

链接中考» 分式方程的应用是分式方程作用的关键体现，都是以解决生活问题为目的，所以考查分式方程的应用时，问题的背景都是现实生活中的热点问题，解决问题的关键是寻找等量关系. 在中考中单独考查时一般以解答题的形式出现.

例 5 2019 年 5 月，某县突降暴雨，造成山体滑坡，桥梁垮塌，房屋大面积受损，该省民政厅急需将一批帐篷送往灾区. 现有甲、乙两种货车，已知甲种货车比乙种货车每辆车多装 20 件帐篷，且甲种货车装运 1 000 件帐篷所用车辆与乙种货车装运 800 件帐篷所用车辆相等.

（1）求甲、乙两种货车每辆车可装多少件帐篷；

（2）如果这批帐篷有 1 490 件，用甲、乙两种货车共 16 辆装运，甲种货车刚好装满，乙种货车最后一辆只装了 50 件，其他装满，求甲、乙两种货车各有多少辆.

解题秘方：找出题目中的等量关系列出分式方程解决问题.

解：（1）设甲种货车每辆车可装 x 件帐篷，则乙种货车每辆车可装 $(x-20)$ 件帐篷，

由题意，得 $\dfrac{1\,000}{x}=\dfrac{800}{x-20}$，

解得 $x=100$.

经检验，$x=100$ 是原方程的解，且符合题意.

$\therefore x-20=80$.

答：甲种货车每辆车可装 100 件帐篷，乙种货车每辆车可装 80 件帐篷.

（2）设甲种货车有 m 辆，乙种货车有 n 辆，由题意，得

$$\begin{cases}m+n=16,\\100m+80(n-1)+50=1\,490,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}m=12,\\n=4.\end{cases}$

答：甲种货车有 12 辆，乙种货车有 4 辆.

Ⅱ 方法必会

专题六 利用整体思想求分式的值

专题解读» 解决某些数学问题时，把一组数或一个式子看成一个整体进行处理，不仅可以简化解题过程，而且还能拓宽思路，培养创新意识，体现了数学中的一种重要思想——整体思想. 这一思想在整式的乘法的运算中体现明显，在解题中应用较多，要引起重视.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例6: [中考·河北] 若 $a=2b\neq 0$，则 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$ 的值为_____.

解题秘方：利用整体代入法，将分式的分子、分母用同一个字母表示，再利用分式的基本性质求值.

解：$\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$

$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}$

$=\dfrac{a+b}{a}$

$=\dfrac{2b+b}{2b}$

$=\dfrac{3}{2}$.

答案：$\dfrac{3}{2}$

方法点拨：本题运用了整体思想求值. 整体思想就是在研究和解决有关数学问题时，利用问题的整体形式、整体结构、整体特征等，对问题整体处理的解题方法. 整体思想的表现形式有：整体代入、整体加减、整体补形、整体变换等.

专题七 倒数法求分式的值

专题解读» 有些分式求值问题直接求解困难时，可考虑求它的倒数，将问题转化为方便求解的问题，这类问题中分式的形式通常是分子是单项式，分母是多项式，此时将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的基本性质，结合题目条件就方便获解了.

例7 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，求 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

解题秘方：颠倒所求分式的分子和分母位置可得 $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$，利用分式的基本性质得 $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$，再将条件等式两边平方即可获解.

解：$\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$,

$\because x+\dfrac{1}{x}=3$,

$\therefore\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3^2$,

$\therefore x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=9$,

$\therefore x^2+1+\dfrac{1}{x^2}=8$,

$\therefore\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=8$,

因此 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{8}$.



方法点拨：倒数法是处理分式问题的常用方法，对于分式求值问题，要仔细研究式子的特征，灵活运用倒数法.

专题八 裂项相消法解分式方程

专题解读» 裂项相消法，可使出现多个分式的加减或相关的分式方程问题，通过变形将一部分项相互抵消，转化为常见的分式加减或常见的相关的分式方程，变复杂为简单，变难为易，不失为一种巧妙的解题方法.

例8 解方程：$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{x+3}$.

解题秘方：观察可以发现等号左边每个分式的分母中的两个因式相差 1，因此可逆向运用异分母分式的加减法法则进行裂项，相消后化为常见的分式方程求解.

解：原方程可变形为 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}$,

整理，得 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+3}=0$,

去分母，得 $x+3-2x=0$,

解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的解.

方法点拨：当涉及的分式方程有多个分式且分母与分子有某种规律时，常常通过裂项相消的方法把方程化为熟悉的分式方程求解，体现了转化思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见253页

题型1：利用分式的基本性质求值

1. 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$，求$\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}$的值.

2. 已知$a+b+c=0$，求$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$的值.

3. 已知$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}\neq 0$，求$\frac{3a-2b+5c}{a+b+c}$的值.

4. 已知$3x-4y-z=0$，$2x+y-8z=0$，$z\neq 0$，求$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+2xz}$的值.

题型2：分式的化简求值

5. 先化简，再求值：$\left(\frac{6}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}\right)\div\frac{3x+2}{x-1}$，其中$x=2$.

6. 先化简，再求值：$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\div\frac{2x-y}{x^2-y^2}$，其中$x$、$y$满足$|x-2|+(2x-y-3)^2=0$.

7. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\div\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{x}{x+1}$，其中$x$满足$x^2-x-1=0$.

8. 先化简，再求值：$\frac{x^2-4x+4}{2x}\div\frac{x^2-2x}{x^2}+1$，在0，1，2三个数中选一个合适的数代入求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：分式方程的解法

9. 解方程：$\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{3x+3}+1$.

10. 解方程：$\frac{2+x}{2-x}+\frac{16}{x^2-4}=-1$.

11. 解方程：$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$.

题型 4：分式方程解的情况

12. 当 m 为何值时，关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ 会产生增根?

13. 已知关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$ 的解小于 3，求 a 的取值范围.

题型 5：分式方程的应用

14. 西南真正意义上的第一条高铁——贵阳至广州高速铁路开始运行. 从贵阳到广州，乘特快列车的行程约为 1 800 km，高铁开通后，高铁列车的行程约为 860 km，运行时间比特快列车所用的时间减少了 16 h. 若高铁列车的平均速度是特快列车平均速度的 2.5 倍，求特快列车的平均速度.

15. 华昌中学开学初在金利源商场购进 A，B 两种品牌的足球，购买 A 品牌足球花费了 2 500 元，购买 B 品牌足球花费了 2 000 元，且购买 A 品牌足球数量是购买 B 品牌足球数量的 2 倍，已知购买一个 B 品牌足球比购买一个 A 品牌的足球多花 30 元.

（1）求购买一个 A 品牌、一个 B 品牌的足球各需多少元；

（2）华昌中学为响应习总书记“足球进校园”的号召，决定再次购进 A，B 两种品牌足球共 50 个. 恰逢金利源商场对两种品牌足球的售价进行调整，A 品牌足球售价比第一次购买时提高了 8%，B 品牌足球按第一次购买时售价的 9 折出售. 如果这所中学此次购买 A，B 两种品牌足球的总费用不超过 3 260 元，那么华昌中学此次最多可购买多少个 B 品牌足球?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 16 章测试卷

答案见 254 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 若分式$\frac{x}{x-2}$有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x=2$　　D. $x\neq 2$

2. 分式 $\frac{2}{3x}$，$\frac{x+1}{-2x^2}$，$\frac{2x-1}{4x^3}$ 的最简公分母是（　　）

A.12　　B.$24x^6$　　C.$12x^6$　　D.$12x^3$

3. 下列变形正确的是（　　）

A. $\frac{b+1}{a+1}=\frac{b}{a}$　　B. $\frac{a+b}{a+b}=0$

C. $\frac{0.1a-0.3b}{0.2a+b}=\frac{a-3b}{2a+b}$　　D. $\frac{-a+b}{a-b}=-1$

4. 已知 $a=2^{-2}$，$b=(\sqrt{3}-1)^0$，$c=(-1)^3$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A.$a>b>c$　　B.$b>a>c$

C.$c>a>b$　　D.$b>c>a$

5. 花粉的质量很小，一粒某种植物花粉的质量约为 0.000 037 毫克，已知 1 克 = 1 000 毫克，那么 0.000 037 毫克可以用科学记数法表示为（　　）

A.3.7×10^{-5} 克　　B.3.7×10^{-6} 克

C.3.7×10^{-7} 克　　D.3.7×10^{-8} 克

6. 若$\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot w=1$，则 $w=$（　　）

A.$a+2$　　B.$-a+2$

C.$a-2$　　D.$-a-2$

7. 甲种污水处理器处理 25 吨的污水与乙种污水处理器处理 35 吨的污水所用时间相同，已知乙种污水处理器每小时比甲种污水处理器多处理 20 吨的污水，求两种污水处理器的污水处理效率．设甲种污水处理器的污水处理效率为 x 吨／小时，依题意列方程正确的是（　　）

A. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x-20}$　　B. $\frac{25}{x}=\frac{35}{x+20}$

C. $\frac{25}{x-20}=\frac{35}{x}$　　D. $\frac{25}{x+20}=\frac{35}{x}$

8. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2}=3$ 的解是正数，则 m 的取值范围为（　　）

A.$m<-6$　　B.$m>-6$

C.$m>-6$ 且 $m\neq-4$　　D.$m\neq-4$

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 如果分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 的值为 0，那么 x 的值为_____.

10. 计算：$(-2xy^{-1})^{-3}=$_____.

11. 若 $(x-y-2)^2+|xy-3|=0$，则 $\left(\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{x-y}\right)\div\frac{1}{y}$ 的值是_____.

12. 某中学图书馆添置图书，用 240 元购进一种科普书，同时用 200 元购进一种文学书．由于科普书的单价比文学书的单价高出一半，因此学校所购买的文学书比科普书多 4 本，则这种文学书的单价为_____元.

三、解答题（共 52 分）

13.（6 分）化简：$\frac{2a}{a+1}-\frac{2a-4}{a^2-1}\div\frac{a-2}{a^2-2a+1}$.

14.（6 分）先化简，再求值：$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$，其中 $x=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.（10分）解方程：

（1）$\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}=3$；

（2）$\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{1-x}=-1$.

16.（8分）先化简 $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\div\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)$，再从不等式 $2x-3<7$ 的正整数解中选一个使原式有意义的数代入求值.

17.（10分）一项工程，甲队单独做需40天完成，若乙队先做30天后，甲、乙两队一起合做20天恰好完成任务，请问：

（1）乙队单独做需要多少天才能完成任务?

（2）现将该工程分成两部分，甲队做其中一部分工程用了 x 天，乙队做另一部分工程用了 y 天，若 x，y 都是正整数，且甲队做的时间不到15天，乙队做的时间不到70天，则甲、乙两队实际各做了多少天?

18.（12分）杨梅是漳州的特色时令水果，杨梅一上市，某水果店的老板用1 200元购进一批杨梅，很快售完. 老板又用2 500元购进第二批杨梅，所购件数是第一批的2倍，但进价比第一批每件多了5元.

（1）第一批杨梅每件进价为多少元?

（2）老板以每件150元的价格销售第二批杨梅，售出80%后，为了尽快售完，决定打折促销. 要使第二批杨梅的销售利润不少于320元，剩余的杨梅每件售价最多打几折?（利润 = 售价 − 进价）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

赏析数形结合体

赏析数形结合体



第17章 函数及其图象









核心考点

你将见到的

- 变量与函数
- 函数图象
- 一次函数的图象及性质
- 反比例函数的图象及性质
- 函数的应用

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 待定系数法
- 数形结合思想
- 分类讨论思想
- 方程思想
- 建模思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.1 变量与函数

核心知识

- 常量与变量
- 函数的定义
- 函数自变量的取值范围

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 常量与变量

1. 定义：

在某一变化过程中，可以取不同数值的量，叫做变量，取值始终保持不变的量，我们称之为常量.

说明：（1）“常量”是已知数，是指在整个变化过程中保持不变的量；但“常量”不等于“常数”，它可以是数值不变的字母. 如在匀速运动中的速度 v 就是一个常量.

（2）变量与常量是相对的，前提是“在一个变化过程中”，一个量在一个变化过程中是常量，而在另一个变化过程中，它可能是变量. 如在 $s=vt$ 中，当 s 一定时，v，t 为变量，s 为常量；当 t 一定时，s，v 为变量，t 为常量.

2. 判断一个量是常量还是变量的方法：

看这个量在某一变化过程中的数值是否发生改变（或者说是否会取不同的数值），若在变化过程中此量的数值不变，则此量是常量，若此量可以取不同的数值，则此量是变量.

注意：（1）常量与变量只与在某一个变化过程中的数值是否发生改变有关，与个数没有关系.

（2）变量、常量与字母的指数没有关系，如 $y=100-2x^2$ 中，x，y 是变量，而不能说 x^2 是变量.

提分·必记

特别提醒

1. 判断一个量是常量还是变量，应先看它是否在一个变化过程中，若在，则看它在这个变化过程中数值是否发生改变.
2. 指出一个变化过程中的常量时，应连同它前面的符号.

拨考向▸ 利用常量与变量的定义进行辨识

例 1 分别指出下列关系中的变量和常量：

（1）圆的面积公式 $S=\pi r^2$（S 表示面积，r 表示半径）；

（2）若等腰三角形底角度数值为 x，则顶角度数值 y 与 x 的关系式是 $y=-2x+180$；

（3）在 $\triangle ABC$ 中，它的底边长 a 一定，底边上的高是 h，则三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ah$.

解题秘方：紧扣“常量与变量”的定义进行辨识.

解：（1）r，S 是变量，π 是常量；

（2）x，y 是变量，-2，180 是常量；

（3）S，h 是变量，$\frac{1}{2}$，a 是常量.

提分·秘诀

特别警示

常量与变量是从某一变化过程中该量的数值是否发生改变，即该量是否会取不同的数值作为识别标准的. 不要误认为常量为常数，表示不变量的字母，也可以作为常量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 函数

1. 函数的定义：

一般地，如果在一个变化过程中，有两个变量，例如 x 和 y，对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与之对应，我们就说 x 是自变量，y 是因变量，此时也称 y 是 x 的函数.

说明：（1）函数是一个变量相对于另一个变量而言的，如对于两个变量 x 与 y，y 是 x 的函数，不能说成 y 是函数.

（2）函数不是数，函数的实质是两个变量的对应关系.

2. 判断一个关系是否是函数关系的方法：

一看是否在一个变化过程中；

二看是否存在两个变量；

三看对于其中一个变量每取一个确定的值，另一个变量是否都有唯一确定的值与其对应，以上三者（简称“三要素”）缺一不可.

提分·必记

特别提醒

函数的定义中包括了对应值的存在性和唯一性两重意思，即对自变量的每一个确定的值，函数有且只有一个值与之对应，对自变量 x 的不同值，y 的值可以相同，如：函数 $y=x^2$，当 x=1 和 x=-1 时，y 的对应值都是 1.

技考向▶ 利用函数的定义判定两变量的函数关系

例 2 判断下列变量之间是否是函数关系，若是，请指出自变量与自变量的函数，若不是，请说明理由.

（1）$y=\pm x$；　（2）$y=x^3$；　（3）$2x^2+y^2=10$；　（4）$y=|x|$.

解题秘方：紧扣函数定义的特征进行解答.

解：（1）不是函数关系，因为 x 每取一个值时，y 有两个对应值，不满足唯一确定；

（2）是函数关系，因为每一个 x 的值都有唯一的 y 值与之对应；其中 x 是自变量，y 是自变量的函数；

（3）不是函数关系，例如当 $x=1$ 时，y 有两个对应值，不满足唯一确定；

（4）是函数关系，因为每一个 x 的值都有唯一的 y 值与之对应；其中 x 是自变量，y 是自变量的函数.

提分·秘诀

特别提醒

判断两个变量是否具有函数关系，只需看它是否符合定义中“三要素”即可，但要注意两点：

- 对于自变量 x 取不同的值，与之对应的 y 的值不一定不同；只要有唯一值与之对应即可.
- 不能只看是否有关系式存在，有些函数关系是没有关系式的（如心电图中的时间与生物电流的关系）.

点知识▶ 3 函数自变量的取值范围与函数值

1. 自变量的取值范围：

（1）**定义**：使函数有意义的自变量取值的全体实数叫做自变量的取值范围.

（2）**确定自变量取值范围的方法**：其一，要使函数关系式有意义；其二，对实际问题中的函数关系，还应该使得实际问题有意义.

注意：自变量的取值范围可以是无限的，也可以是有限的，甚至可以是几个数或单独一个数.

2. 函数值：

（1）**定义**：对于一个函数，当自变量 $x=a$ 时，我们可以求出与它对应的 y 的值，我们就说这个值是 $x=a$ 时的函数值.

提分·必记

特别提醒

1. 函数与函数值的区别：函数表示的是两个变量之间的一种对应关系，而函数值是一个数值.
2. 一个函数的函数值是随着自变量的变化而变化的，故在求函数值时，一定要指明自变量为多少时的函数值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）**求函数值及自变量值的方法：**

①当已知关系是函数关系时，求函数值实质就是利用代入法求代数式的值.

②当自变量的值确定时，函数值是唯一确定的；当函数值确定时，求相应的自变量的值，就是解方程，对应的自变量的值可以不止一个，如 $y=x^2-1$ 中，当 $y=0$ 时，$x=\pm 1$.

3. 对于实际问题中的函数关系，函数值与自变量的值都要使实际问题有意义.

核心考向▶利用自变量取值范围、函数值的定义进行相关计算

题型1：自变量取值范围的定义在求函数关系式中自变量取值范围中的应用

例3 求下列函数中自变量 x 的取值范围.

（1）$y=3x+7$；　　（2）$y=\sqrt{x-4}$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$；　　（4）$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$.

解题秘方：紧扣“确定自变量取值范围的方法”求解.

解：（1）函数式右边是整式，所以 x 的取值范围为一切实数；

（2）由 $x-4\geqslant 0$，得 $x\geqslant 4$，所以 x 的取值范围是 $x\geqslant 4$；

（3）由 $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}$ 得 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$，所以 x 的取值范围是 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$；

（4）由 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 1-2x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$，所以 x 的取值范围是 $x=\dfrac{1}{2}$.

提分·秘诀

解法提醒

常见函数自变量取值范围的确定

类型	取值范围
整式型	全体实数
分式型	使分母不为0的实数
偶次根式型	使根号下的式子的值大于或等于0的实数
零次型	使幂的底数不为0的实数
综合型	使各部分都有意义的实数的公共部分

题型2：函数值的定义在求函数关系式中变量的值中的应用

例4 已知函数 $y=13-4x$.

（1）当 $x=3$ 时，对应的函数值是多少？

（2）当 x 为何值时，函数值为2？

解题秘方：紧扣“求函数值及自变量值的方法”求解.

解：（1）当 $x=3$ 时，$y=13-4\times 3=1$.

（2）当 $y=2$ 时，$2=13-4x$，解得 $x=\dfrac{11}{4}$.

解法提醒

求函数值的一般步骤：

1. 明确自变量的取值；
2. 将自变量的取值代入函数表达式；
3. 按照函数表达式指明的运算顺序进行计算.

知识点▶4 函数关系式

1. 定义：

用来表示函数关系的等式叫做函数关系式（也叫表达式）.

2. 特点：

（1）函数关系式是等式.

（2）函数关系式中指明了哪个是自变量，哪个是因变量，通常等式右边的代数式中的变量是自变量，等式左边的变量表示因变量.

提分·必记

特别提醒

确定函数关系式的方法：

1. 认真审题，根据题意找出相等关系；
2. 按相等关系写出含有两个变量的等式；
3. 将等式变形为用含有自变量的式子表示函数的形式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）书写函数的关系式是有顺序的，$y=2x-1$ 表示 y 是 x 的函数，若 $x=2y-1$，则表示 x 是 y 的函数，即求 y 关于 x 的函数关系式时，必须用含 x 的代数式表示 y，也就是等式左边是一个变量 y，右边是一个含 x 的代数式．

注意：在确定实际问题的函数关系式时，一定不能忽略自变量的取值范围．

考向▶利用实际问题和几何问题中的数量关系建立函数表达式

题型1：函数关系式在实际问题中的应用

例5 弹簧挂上物体后在弹性限度内（不超过 100 kg）会伸长，测得一弹簧的长度 y（cm）与所挂物体的质量 x（kg）有如下关系：

x（kg）	0	1	2	3	4	5	6	7	…
y（cm）	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	…

弹簧的长度 y（cm）可以看成是所挂物体质量 x（kg）的函数吗？若可以，写出函数表达式．

解题秘方：紧扣表格中给出的两个变量之间的数据获得相关信息解决问题．

解：弹簧的长度 y（cm）可以看成是所挂物体质量 x（kg）的函数．

由上表可知，弹簧的原长为 12 cm，以后每增加 1 kg 的物体，弹簧就伸长 0.5 cm．

所以函数表达式为 $y=12+0.5x$（$0 \leqslant x \leqslant 100$）．

提分·秘诀

特别提醒

确定实际问题中自变量的取值范围时，要在认真审题的基础上进行分析，实际问题中的量往往取非负数，以及不会超过某个值，或者是不小于某个值等．本题易忽略称量物体的质量不超过 100 kg．

题型2：函数关系式在几何问题中的应用

例6 等腰三角形 ABC 的周长为 10 cm，底边 BC 的长为 y cm，腰 AB 的长为 x cm．

（1）写出 y 关于 x 的函数关系式；

（2）求 x 的取值范围．

解题秘方：紧扣“函数关系式的特点”结合几何相关性质求解．

解：（1）由题意可得 $2x+y=10$，所以 y 关于 x 的函数关系式为 $y=10-2x$．

（2）由 x，y 均为线段长，可得 $x>0$，$y>0$，即 $10-2x>0$．

再由三角形三边关系，得 $2x>y$，即 $2x>10-2x$，

所以自变量 x 应满足 $\begin{cases} x>0, \\ 10-2x>0, \\ 2x>10-2x, \end{cases}$

解这个不等式组，得 $\frac{5}{2}<x<5$．

所以 x 的取值范围为 $\frac{5}{2}<x<5$．

方法点拨

1. 求几何问题的函数关系式，实质上是建立几何中两个变量之间的数量关系，要熟悉一些常用的几何关系式．如：周长与半径，正方体的体积与棱长等．
2. 确定自变量的取值范围时，一方面要考虑使函数关系式有意义，另一方面还要注意使几何问题有意义．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用观察法识别常量与变量

例7 [期末·临城县]小邢到单位附近的加油站加油，如图17.1-1是小邢所用的加油机上的数据显示牌，则数据中的变量是(　　)

A. 金额　　B. 数量

C. 单价　　D. 金额和数量



图 17.1-1

解题秘方：紧扣“常量与变量的意义”，结合图中的数据变化与否进行识别.

解：常量是固定不变的量，变量是变化的量，单价是不变的量，而金额是随着数量的变化而变化，故选D.

答案：D

挑战·高分

解法提醒

本题的变化过程是指：每升单价为6.48元时加油机数据显示牌的数据变化过程；

识别：不变的数据表示的量是常量，不断变化的数据表示的量是变量.

拔尖角度 2 利用可变性识别函数

例8 [期中·滦南县]在圆的周长公式 $C=2\pi r$ 中，下列说法错误的是(　　)

A. C，π，r 是变量，2是常量

B. C，r 是变量，2π 是常量

C. r 是自变量，C 是 r 的函数

D. 将 $C=2\pi r$ 写成 $r=\dfrac{C}{2\pi}$，则可看成 C 是自变量，r 是 C 的函数

解题秘方：紧扣“函数的表达形式”进行解答.

解：在圆的周长公式 $C=2\pi r$ 中，C 是 r 的函数，C，r 是变量，2π 是常量，将 $C=2\pi r$ 写成 $r=\dfrac{C}{2\pi}$，则可看成 C 是自变量，r 是 C 的函数，故说法错误的是A.

答案：A

挑战·高分

解法提醒

函数是相对于自变量而言的，而对于两个变量x和y，谁是谁的函数，要看其表达形式，处于主动变化的量是自变量，处于被动变化的量是自变量的函数，注意：“C是r的函数”不能简单说：“C是函数”.

拔尖角度 3 利用数形结合法解与函数有关的几何问题

例9 如图17.1-2，已知正方形 $ABCD$ 的边长为1，E 为 CD 的中点，P 为正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的动点，动点 P 从点 B 向点 C 运动. 设 BP 的长度为 x，阴影部分△ APE 的面积为 y.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 当点 P 运动的路程为多少时，△ APE 的面积为 $\dfrac{1}{4}$？

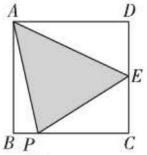


图 17.1-2

解题秘方：用“作差法”求出表示阴影部分面积的关系式.

挑战·高分

解法提醒

对于点运动所构成的图形的周长或面积相关问题的求解，一般先根据图形的形状来确定函数关系式(随着点运动范围不同，有时需要分类讨论，建立不同的函数关系式)，再结合函数关系式进行相关计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）因为正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E 为 CD 的中点，

所以 $AB=BC=CD=AD=1$，$CE=DE=\frac{1}{2}$.

因为 BP 的长度为 x，所以 $CP=1-x$.

所以 $S_{\triangle APE}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABP}-S_{\triangle CPE}-S_{\triangle ADE}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(1-x)\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1$，即 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

详解

此处 $BP\geqslant0$，$PC\geqslant0$，即 $x\geqslant0$，$1-x\geqslant0$，所以自变量 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant1$.

（2）因为△ APE 的面积为 $\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 解得 $x=1$.

也就是当点 P 与点 C 重合，点 P 运动的路程为 1 时，△ APE 的面积为 $\frac{1}{4}$.

拔尖角度▶ 4 利用建模思想解与函数有关的生活问题

挑战·高分

例 10 某实验中学组织学生到距学校 6 km 的光明科技馆去参观，学生王琳因有事没能乘上学校的校车，于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆. 出租车的收费标准如下：

路程（km）	费用（元）
3 km 以内（含 3 km）	8.00
3 km 以外，每增加 1 km	1.80

（1）写出乘出租车的费用 y（元）与出租车行驶的路程 x（km）之间的函数关系式；

（2）王琳身上仅有 14 元，乘出租车到光明科技馆的车费够不够？

解题秘方：用“分类思想”列出不同路程的计费函数关系式.

解：（1）当 $0<x\leqslant3$ 时，$y=8$；

当 $x>3$ 时，$y=1.8(x-3)+8=1.8x+2.6$.

乘出租车费用 = 起步价（3 km 以内）+ 单价 × 超过 3 km 部分的里程，即 $y=8+1.8(x-3)$.

即 $y=\begin{cases}8(0<x\leqslant3),\\1.8x+2.6(x>3).\end{cases}$

（2）当 $x=6$ 时，$y=1.8x+2.6=1.8\times6+2.6=13.4<14$.

所以乘出租车到光明科技馆的车费够.

解法提醒

分段计费在生活中比较常见，对于具体的数学问题的解决，既需要相关的生活经验，还需要分类讨论的思想，至于函数求值，只需要选择正确的关系式和已知变量的值，代入之后通过解方程即可算出未知量.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考点有：求函数关系式及确定函数关系式中自变量的取值范围及确定函数值，试题类型多以选择题、填空题的形式出现，难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 根据实际问题列函数关系式

例11 [中考·广州]一司机驾驶汽车从甲地去乙地，他以80千米/时的平均速度用了4时到达乙地，当他按原路匀速返回时，汽车的速度v（千米/时）与时间t（时）之间的函数关系式是（　　）

A.$v=320t$　　B.$v=\dfrac{320}{t}$　　C.$v=20t$　　D.$v=\dfrac{20}{t}$

试题评析：本题主要考查结合实际问题列函数关系式．解题的关键是根据已知关系列出等式，然后整理出函数关系式．

解：先确定甲、乙两地的路程为$80\times4=320$（千米），再根据行程问题中各量之间的关系列出等式$vt=320$，整理成函数关系式为$v=\dfrac{320}{t}$．

答案：B

方法点拨

根据实际问题情境列函数关系式，关键是从已知条件中寻找两个变量之间的等量关系，得到等式，再整理成函数关系式．

考法2 利用定义法求自变量的取值范围

例12 [中考·恩施州]函数$y=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{x-1}$的自变量$x$的取值范围是（　　）

A.$x\geqslant1$　　B.$x\geqslant1$且$x\neq3$　　C.$x\neq3$　　D.$1\leqslant x\leqslant3$

试题评析：本题考查了函数自变量的取值范围，明确被开方数是非负数，分母不能为零是解题的关键．

解：由题意，得$x-1\geqslant0$且$x-3\neq0$，解得$x\geqslant1$且$x\neq3$.

答案：B

解法提醒

求自变量取值范围的过程，其实就是解不等式（组）的过程，当函数关系式中含有分式或二次根式时，要注意分母不为零或被开方数为非负数．

考法3 利用函数关系式及自变量的取值范围求函数值

例13 [中考·重庆]根据如图17.1-3所示的程序计算函数y的值，若输入的x值是4或7时，输出的y值相等，则b等于（　　）

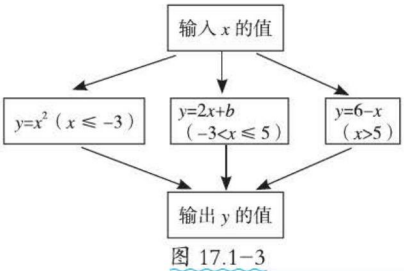


图17.1-3

A.9　　B.7　　C.−9　　D.−7

试题评析：本题考查了利用给出的函数关系式求函数值，解题的关键是掌握函数值的计算方法．

解：∵当$x=7$时，$y=6-7=-1$.

当$x=4$时，$y=2\times4+b=-1$，

∴$b=-9$.

答案：C

考题剖析

本题是以程序图的形式展示函数关系式，根据自变量的取值范围选择函数关系式，故在求函数值时先根据已知自变量的值选择函数关系式再代入求值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见255页

1. [模拟·长乐市]在△ABC中，它的底边是a，底边上的高是h，则三角形面积$S=\frac{1}{2}ah$，当a为定长时，在此式中（　　）

A.S，h是变量，$\frac{1}{2}$，a是常量

B.S，h，a是变量，$\frac{1}{2}$是常量

C.a，h是变量，$\frac{1}{2}$，S是常量

D.S是变量，$\frac{1}{2}$，a，h是常量

2. [期末·天桥]弹簧挂重物会伸长，测得弹簧长度y（cm）最长为20cm，与所挂重物质量x（kg）间有下面的关系.

	0	1	2	3	4	…
y(cm)	8	8.5	9	9.5	10	…

下列说法不正确的是（　　）

A.x与y都是变量，x是自变量，y是因变量

B. 所挂重物为6 kg，弹簧长度为11 cm

C. 在弹簧弹性限度内，重物每增加1 kg，弹簧长度就增加0.5 cm

D. 挂30 kg重物时，弹簧长度比原长增加15 cm

3. 下列关系中，y不是x的函数关系的是（　　）

A. 长方形的长一定时，其面积y与宽x

B. 高速公路上匀速行驶的汽车，其行驶的路程y与行驶的时间x

C.$y=|x|$

D.$|y|=x$

4. 某油箱容量为60 L的汽车，加满汽油后行驶了100 km时，油箱中的汽油大约消耗了$\frac{1}{5}$，如果加满汽油后汽车行驶的路程为x km，油箱中剩油量为y L，则y与x之间的函数关系式和自变量取值范围分别是（　　）

A.$y=0.12x$，$x>0$

B.$y=60-0.12x$，$x>0$

C.$y=0.12x$，$0\leqslant x\leqslant 500$

D.$y=60-0.12x$，$0\leqslant x\leqslant 500$

5. 若函数$y=\begin{cases}x^2+2\ (x\leqslant 2),\\ 2x\ (x>2),\end{cases}$则当函数值$y=8$时，自变量$x$的值是（　　）

A.$\pm\sqrt{6}$　　B.4

C.$\pm\sqrt{6}$或4　　D.4或$-\sqrt{6}$

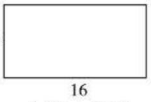
6. 如图，长方形的长是16，宽为x，周长为y，面积为S.

（1）写出y与x之间的函数关系式；

（2）写出S与x之间的函数关系式；

（3）当$S=160$时，x等于多少？y等于多少？

（4）当x增加2时，y增加多少？S增加多少？



（第6题）

7. 如图，等腰直角三角形ABC的直角边长与正方形$MNPQ$的边长均为12 cm，AC与MN在同一直线上，开始时A点与M点重合，让△ABC沿直线MN向右运动，最后A点与N点重合.

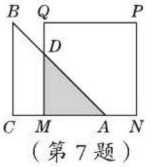
（1）试写出重叠部分面积y（cm^2）与MA的长度x（cm）之间的函数关系式.

（2）当$MA=4$ cm时，重叠部分的面积是多少？

（3）当MA的长度是多少时，四边形$BCMD$的面积与重叠部分的面积的比是5∶4？

（4）若等腰直角三角形ABC开始时A点与M点重合，已知向右移动的速度是1 cm/s，运动停止时边BC与PN重合，探究重叠部分面积y（cm^2）与运动时间t（s）的函数关系式.

【导学号：9877429】



（第7题）

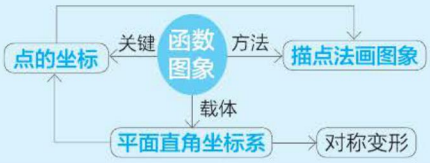
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.2 函数的图象

核心知识

- 平面直角坐标系
- 点的坐标
- 对称变换的点的坐标特征
- 函数图象

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 平面直角坐标系

平面直角坐标系：

1. **定义**：在平面上画两条原点重合、互相垂直且具有相同单位长度的数轴，这就建立了平面直角坐标系.

2. **相关概念**：通常把其中水平的数轴叫做 x 轴或横轴，取向右为正方向；铅直的数轴叫做 y 轴或纵轴，取向上为正方向；两条数轴的交点 O 叫做坐标原点.

提分·必记

特别解读

一般情况下两坐标轴的单位长度是一致的，在有些实际问题中，两坐标轴的的单位长度可以不同，但在同一坐标轴上的单位长度必须相同.

拨考向▸利用平面直角坐标系的定义识别

例1 如图 17.2-1 所示选项中，平面直角坐标系的画法正确的是（　　）

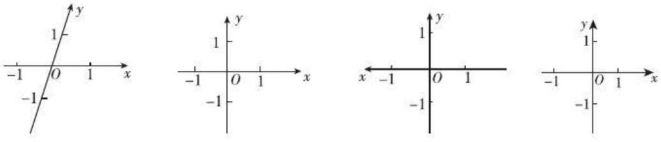


图 17.2-1

解题秘方：根据平面直角坐标系的定义去识别.

解：A 中两条坐标轴不是互相垂直的；C 中的横轴的正方向不符合规定，应取向右为正方向；D 中横轴的单位长度不一致. 故选 B.

答案：B

提分·秘诀

特别提醒

辨识平面直角坐标系的"三要素"：
1. 两条数轴；
2. 共原点；
3. 互相垂直.
注意：一般取向上、向右为正方向.

点知识▸2 点的坐标

1. 定义：在平面直角坐标系中，任意一点都可以用一对有序实数来表示.

对于平面直角坐标系中任意一点 P，从点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为点 M 和点 N，点 M 在 x 轴上对应的数 a，称为点 P 的横坐标；点 N 在 y 轴上对应的数为 b，称为点 P 的纵坐标，依次写出点 P 的横坐标和纵坐标，得到一对有序实数（a，b），称为点 P 的坐标，这时点 P 可记作 $P(a, b)$.

提分·必记

特别解读

1. **点的坐标是有序数对，有序要求**：横坐标在前，纵坐标在后.
2. 根据点的坐标的定义，已知点的位置可以读出点的坐标，反之已知点的坐

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

特别提醒：（1）在写点的坐标时，必须先写横坐标，再写纵坐标，中间用逗号隔开，最后用小括号把它们括起来；

（2）点的坐标是有序数对，（a，b）和（b，a）虽然数字相同，但由于顺序不同，表示的位置就不同，即当 $a \neq b$ 时，这两个坐标表示的是两个不同的点．

2. 平面直角坐标系内的点与有序实数对的一一对应关系：

（1）坐标平面内的任意一个点，都有唯一的一个有序实数对（点的坐标）与它对应．

（2）任意一个有序实数对（点的坐标）在坐标平面内都有唯一的一个点和它对应．

考向▶利用点的坐标的定义解决问题

类型 1：利用点的坐标的定义表示点的坐标

例 2 如图 17.2−2，写出点 A，B，C，D，E，F，G，O 的坐标．

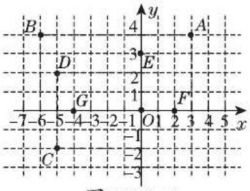


图 17.2−2

解题秘方：紧扣点的坐标的定义，利用过点向两坐标轴作垂线，用读垂足表示的数求点的坐标．

解：$A(3, 4)$，$B(-6, 4)$，$C(-5, -2)$，$D(-5, 2)$，$E(0, 3)$，$F(2, 0)$，$G(-4, 0)$，$O(0, 0)$．

类型 2：已知点的坐标在平面直角坐标系中描点

例 3 请你在如图 17.2−3 所示的平面直角坐标系中，描出以下各点：$A(3, 2)$，$B(0, 3)$，$C(-1, -2)$，$D(2, -1)$．

解题秘方：紧扣点的坐标的意义，利用数轴上表示点的坐标的数作垂线，用两垂线的交点法求点．

解：描出的点 A，B，C，D 如图 17.2−3 所示．

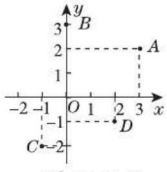


图 17.2−3

类型 3：利用点到坐标轴的距离确定点的坐标

例 4 已知点 P 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 1．如果过点 P 作两坐标轴的垂线，垂足分别在 x 轴的正半轴上和 y 轴的负半轴上，那么点 P 的坐标是（　　）

A.（2，−1）　　B.（1，−2）　　C.（−2，−1）　　D.（1，2）

解题秘方：紧扣点的坐标与点到两坐标轴的距离的意义之间的关系解答．

标可以在平面直角坐标系中标出点的位置．

提分·秘诀

方法点拨

确定点的坐标的方法：

首先确定横坐标，方法是从该点向 x 轴作垂线，垂足在 x 轴上表示的数为该点的横坐标；

再从该点向 y 轴作垂线，垂足在 y 轴上表示的数为该点的纵坐标；

最后用有序数对将点的坐标表示出来．

方法点拨

根据点的坐标描点的方法：

假设点 P 的坐标为（a，b），先在 x 轴上找到表示的数为 a 的点 A，在 y 轴上找到表示的数为 b 的点 B，再过点 A 作 x 轴的垂线，过点 B 作 y 轴的垂线，两垂线的交点就是所要描出的点 P．

特别警示

本例的易错点有三处：

1. 混淆距离与坐标之间的区别；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：由点 P 到 x 轴的距离为 2，可知点 P 的纵坐标的绝对值为 2，由点 P 到 y 轴的距离为 1，可知点 P 的横坐标的绝对值为 1，

又因为垂足分别在 x 轴的正半轴上和 y 轴的负半轴上，

所以横坐标为 1，纵坐标为 -2.

故点 P 的坐标是（1，-2）.

答案：B

2. 不知道“点P到x轴的距离”对应的是纵坐标的绝对值，“点P到y轴的距离”对应的是横坐标的绝对值；
3. 忽略坐标的符号.

点知识▶ 3 象限的划分及点的坐标特征

1. 象限的划分：

提分·必记

在平面直角坐标系中，两条坐标轴把平面分成如图 17.2−4 所示的 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个区域，分别称为第一、二、三、四象限，坐标轴上的点不属于任何一个象限.

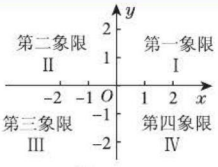


图 17.2−4

特别提醒

- 象限的划分是从“右上”开始的，按“逆时针”方向依次排列为第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 各象限的名称是一种规定，不能随意更改.
- 坐标原点既在x轴上，又在y轴上，它是两条坐标轴唯一的公共点.

2. 平面直角坐标系中各区域的点的坐标的特征：

点 $M(x, y)$ 所处的位置		坐标特征
象限内的点	点 M 在第一象限	M（正，正）
	点 M 在第二象限	M（负，正）
	点 M 在第三象限	M（负，负）
	点 M 在第四象限	M（正，负）
坐标轴上的点	点 M 在 x 轴上	在 x 轴正半轴上：M（正，0）
		在 x 轴负半轴上：M（负，0）
	点 M 在 y 轴上	在 y 轴正半轴上：M（0，正）
		在 y 轴负半轴上：M（0，负）

拔考向▶ 利用点的位置特征求字母的值（取值范围）

例 5 已知点 P 的坐标为（$a+3$，$b-1$）.

（1）若点 P 在 x 轴上，则 $b=$_____；

（2）若点 P 在 y 轴上，则 $a=$_____；

（3）若点 P 在第三象限，则 a 的取值范围为_____，b 的取值范围为_____；

（4）若点 P 在第四象限，则 a 的取值范围为_____，b 的取值范围为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣 x 轴、y 轴上及象限内点的坐标特征解答．

解：（1）∵点 P 在 x 轴上，

∴ $b-1=0$，解得 $b=1$.

（2）∵点 P 在 y 轴上，

∴ $a+3=0$，解得 $a=-3$.

（3）∵ 点 P 在第三象限，

∴ $a+3<0$，$b-1<0$，∴ $a<-3$，$b<1$.

（4）∵ 点 P 在第四象限，

∴ $a+3>0$，$b-1<0$，∴ $a>-3$，$b<1$.

答案：（1）1　（2）-3　（3）$a<-3$；$b<1$

（4）$a>-3$；$b<1$

提分·秘诀

解法提醒

x 轴上的点的纵坐标是 0，y 轴上的点的横坐标是 0，第三象限内点的横、纵坐标都是负数，第四象限内点的横坐标为正数，纵坐标为负数．

点知识 4 特殊位置的点的坐标特征

1. 两坐标轴夹角平分线上的点的坐标特征：

（1）第一、三象限的角平分线上的点的横、纵坐标相等；

（2）第二、四象限的角平分线上的点的横、纵坐标互为相反数．

2. 平行于 x 轴、y 轴的直线上的点的坐标特征：

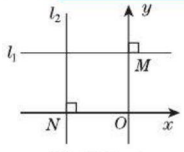


图 17.2−5

特殊位置的点的坐标

如图 17.2−5 所示，直线 $l_1 /\!/ x$ 轴，$l_2 /\!/ y$ 轴，因为由 l_1 上的任意一点向 y 轴作垂线，垂足都是同一个点 M，所以 l_1 上所有点的纵坐标都相同；因为由 l_2 上的任意一点向 x 轴作垂线，垂足都是同一个点 N，所以 l_2 上所有点的横坐标都相同．

3. 若两个点的横坐标相同，则这两个点之间的距离为纵坐标差的绝对值；若两个点的纵坐标相同，则这两个点之间的距离为横坐标差的绝对值．

4. 对称点的坐标特征

（1）点 $P(x, y)$ 关于 x 轴对称的点 P' 的坐标为 $(x,-y)$，即横坐标相同，纵坐标互为相反数；

（2）点 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称的点 P' 的坐标为 $(-x,y)$，即横坐标互为相反数，纵坐标相同．

（3）点 $P(x, y)$ 关于原点对称的点 P' 的坐标为 $(-x,-y)$，即横、纵坐标分别互为相反数．

提分·必记

特别解读

- 若 AB // x 轴，则 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) 的横坐标不相等，纵坐标相等且不为 0，即 $x_1 \neq x_2$，$y_1=y_2 \neq 0$；反之，若 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)，且 $x_1 \neq x_2$，$y_1=y_2 \neq 0$，则 AB // x 轴．
- 若 CD // y 轴，则 C(m_1, n_1)，D(m_2, n_2) 的横坐标相等且不为 0，纵坐标不相等，即 $m_1=m_2 \neq 0$，$n_1 \neq n_2$；反之，若 C(m_1, n_1)，D(m_2, n_2)，且 $m_1=m_2 \neq 0$，$n_1 \neq n_2$，则 CD // y 轴．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用特殊位置点的坐标特征解决问题

题型1：利用特殊位置点的坐标的特征求值

例6 已知平面直角坐标系内不同两点$A(3, a-1)$，$B(b+1, -2)$，

（1）若点A在第一、三象限的角平分线上，求a的值；

（2）若点B在第二、四象限的角平分线上，求b的值；

（3）若直线AB平行于x轴，求a，b的值或取值范围；

（4）若直线AB平行于y轴，且$AB=5$，求a，b的值.

解题秘方：分别根据特殊位置点的坐标特征列出以a，b为未知数的方程，求出a，b的值.

解：（1）∵点A在第一、三象限的角平分线上，

∴ $a-1=3$，∴ $a=4$；

（2）∵点B在第二、四象限的角平分线上，∴ $b+1=2$，∴ $b=1$；

（3）∵直线AB平行于x轴，∴ $a-1=-2$，$b+1\neq 3$.

∴ $a=-1$，$b\neq 2$.

（4）∵直线AB平行于y轴，且$AB=5$，

∴ $b+1=3$，$|(a-1)-(-2)|=5$.

∴ $b=2$，$a=4$或-6.

题型2：利用建立适当的坐标系解决几何图形顶点坐标问题

例7 如图17.2-6，长方形$ABCD$的长$AB=5$，宽$BC=3$，请建立适当的平面直角坐标系，写出长方形的顶点A，B，C，D的坐标.

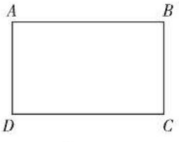


图17.2-6

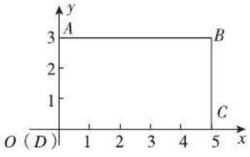


图17.2-7

解题秘方：建立适当的平面直角坐标系，然后根据长方形的长$AB=5$，宽$BC=3$，写出四个顶点的坐标.

解：（建立的平面直角坐标系不唯一）建立平面直角坐标系如图17.2-7所示，$A(0, 3)$，$B(5, 3)$，$C(5, 0)$，$D(0, 0)$.

方法点拨：几何图形中建立适当的平面直角坐标系的方法

（1）使图形中尽量多的点在坐标轴上；

（2）以某些特殊线段所在的直线为x轴或y轴；

（3）若图形被一条直线分得的两部分形状、大小相同，则可以将此直线作为x轴或y轴；

（4）以某已知点为原点，使它的坐标为$(0, 0)$.

提分·秘诀

特别警示

- 两点确定的直线平行于坐标轴，既要考虑一个坐标相等，又要考虑另一个坐标不能相等，否则两个点重合不能确定一条直线；
- 已知两点之间的距离求点的坐标时，要带上绝对值，即求出的点的坐标不止一个.

另解1

建立平面直角坐标系如图17.2-8所示，$A(-5, 3)$，$B(0, 3)$，$C(0, 0)$，$D(-5, 0)$.

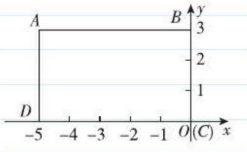


图17.2-8

另解2

建立平面直角坐标系如图17.2-9所示，$A(-2.5, 3)$，$B(2.5, 3)$，$C(2.5, 0)$，$D(-2.5, 0)$.

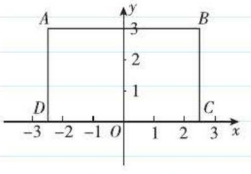


图17.2-9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：利用轴对称变换的点的坐标特征求值

例 8 已知点 $A(2a+b,\ 5+a)$，$B(2b-1,\ -a+b)$.

（1）若点 A，B 关于 x 轴对称，求 a，b 的值；

（2）若点 A，B 关于 y 轴对称，求 $(4a+4b)^{2021}$ 的值.

解题秘方：根据关于坐标轴对称的点的坐标规律列出方程组求解即可.

解：（1）∵点 A，B 关于 x 轴对称，

$$\therefore \begin{cases} 2a+b=2b-1, \\ 5+a-a+b=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-3, \\ b=-5. \end{cases}$$

（2）∵点 A，B 关于 y 轴对称，

$$\therefore \begin{cases} 2a+b+2b-1=0, \\ 5+a=-a+b, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-\dfrac{7}{4}, \\ b=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

$\therefore (4a+4b)^{2021}=(-7+6)^{2021}=(-1)^{2021}=-1.$

教你一招

利用方程思想解关于坐标系中对称点的思路：

运用方程思想，根据题意列出方程（组）是关键.

若点 $P_1(a_1,\ b_1)$，$P_2(a_2,\ b_2)$ 关于 x 轴对称，则 $a_1=a_2$，$b_1+b_2=0$；

若点 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,\ b_2)$ 关于 y 轴对称，则 $a_1+a_2=0$，$b_1=b_2$.

点知识 ▶ 5 函数的图象

1. 定义：

一般来说，函数的图象是由平面直角坐标系中一系列的点组成的. 图象上每一点的坐标 $(x,\ y)$ 代表了函数的一对对应值，它的横坐标 x 表示自变量的某一个值，纵坐标 y 表示与该自变量对应的函数值.

提分·必记

特别提醒

1. 函数图象上的任意点 $P(x,y)$ 中的 x,y 都满足函数关系式.
2. 满足函数关系的任意一对有序实数对 (x,y) 所对应的点一定在函数的图象上.
3. 函数图象上的所有点与函数关系式中的两个变量的关系是一一对应的. 它们是函数中的两个变量间的关系的两种不同（一种是“数”，一种是“形”）的呈现方式.

2. 函数图象的画法步骤：

（1）**列表**：列表给出一些自变量和函数的对应值.

（2）**描点**：以表中各组对应值为坐标，在坐标平面内描出相应的点.

（3）**连线**：按照自变量由小到大的顺序，把所描各点用平滑的曲线依次连起来.

注意：（1）在描点的时候应尽可能地多选几个点，使图象更准确；

（2）在画图象时，应考虑自变量的取值范围.

拔考向 ▶ 利用函数的图象与点的坐标的关系解相关问题

题型 1：函数的图象与点的坐标间的关系在求字母值中的应用

例 9 已知函数 $y=2x-1$.

（1）试判断点 $A(-1,\ 3)$ 和点 $B\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$ 是否在此函数的

提分·秘诀

特别提醒

函数图象上点的坐标与函数表达式中两个变量的一一对应关系：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图象上；

（2）已知点 $C(a,\ a+1)$ 在此函数的图象上，求 a 的值．

解题秘方：紧扣函数图象上的所有点与函数表达式中两个变量的一一对应关系进行解答．

解：（1）∵当 $x=-1$ 时，$y=2\times(-1)-1=-3\neq 3$，

∴点 A 不在函数 $y=2x-1$ 的图象上．

∵当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=2\times\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$，

∴点 B 在函数 $y=2x-1$ 的图象上．

（2）∵点 $C(a,\ a+1)$ 在函数 $y=2x-1$ 的图象上，

∴把 $x=a$，$y=a+1$ 代入 $y=2x-1$，得 $a+1=2a-1$．

解得 $a=2$．

1. 横轴所表示的量是自变量，纵轴所表示的量是自变量的函数．
2. 函数图象上每一点的横坐标、纵坐标一定是这个函数的自变量和函数的一组对应值．
3. 以自变量的一个值和函数的对应值为坐标的点必在这个函数的图象上．

题型 2：函数的图象上的点的坐标与函数关系式中两个变量的一一对应关系在作图中的应用

例 10 （1）画出函数 $y=2x-1$ 的图象；

（2）判断点（5，9），（7，15）是否在此函数的图象上．

解题秘方：紧扣“画函数图象的画法步骤”进行作图．

解：（1）列表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−7	−5	−3	−1	1	3	5	…

描点、连线就得到函数 $y=2x-1$ 的图象（如图 17.2−10）．

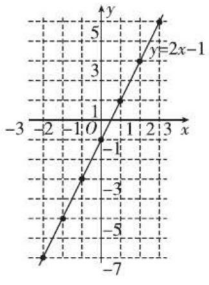


图 17.2−10

（2）当 $x=5$ 时，$y=2\times5-1=9$，所以点（5,9）在此函数的图象上．

当 $x=7$ 时，$y=2\times7-1=13\neq15$，所以点（7,15）不在此函数的图象上．

作法提醒

1. 列表时要根据自变量的取值范围取值，从小到大或自中间向两边取值，取值要有代表性，使画出的函数图象能反映出函数的全貌．
2. 描点体现了“数”与“形”的联系，是数形结合思想的体现，描点是要从表中每对对应值为坐标，点描得越多，图象就越精确．
3. 连线时要用平滑的曲线将所描的点依次连起来．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：根据实际问题的情境判断函数的图象

例 11 小刚以 400 米/分的速度骑行 5 分后，在原地休息了 6 分，然后以 500 米/分的速度骑回出发地，s（千米）表示距出发地的距离，v（千米/分）表示速度，t（分）表示时间，则下列函数图象能表示这一过程的是图 17.2–11 中的（　　）

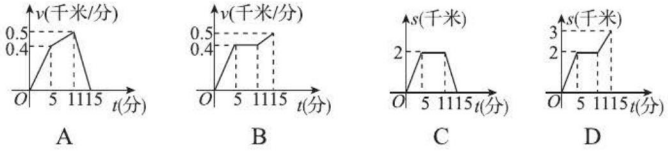


图 17.2–11

解题秘方：紧扣两坐标轴表示的意义，并结合 s，v，t 之间的关系即可判断.

解：前 5 分，s（千米）随时间 t（分）的增大而增大至距离出发地 $400\times5=2000$（米）$=2$（千米），这一时间段内函数图象是由左至右呈上升趋势的一条线段，线段末端点的坐标为（5，2）；

原地休息的 6 分都是距离出发地 2 千米（即纵坐标为 2 不变），这一时间段内函数图象是平行于 t 轴的一条线段，线段末端点的坐标为（11，2）；

11 分之后，s（千米）随时间 t（分）的增大而减小至距离出发地为 0（回到原地），这一时间段内函数图象是由左至右呈下降趋势的一条线段，线段末端点的坐标为（15，0），综上，选项 C 正确.

答案：C

重点点拨

结合实际问题判断函数图象的方法

解决此类函数图象的判断问题，其关键是理解实际问题中函数的增减情况与函数图象变化的对应关系，即：当函数图象从左到右逐渐上升时，对应的函数值随自变量的增大而增大；当函数图象从左到右逐渐降低时，对应的函数值随自变量的增大而减小；当函数图象平行于 x 轴时，对应的函数值不随自变量的变化而变化.

易错警示

注意原地休息时，不变的是距离，变的是时间.

题型 4：从函数图象中获取信息

例 12 小明同学骑自行车去郊外春游，骑行 1 h 后，自行车出现故障，维修好后继续骑行，他离家的距离 y（km）与所用的时间 x（h）之间的函数关系如图 17.2–12 所示，根据图象回答：

（1）小明到达离家最远的地方用了多长时间？此时离家多远？

（2）小明出发 2.5 h 离家多远？

（3）小明出发多长时间离家 12 km？

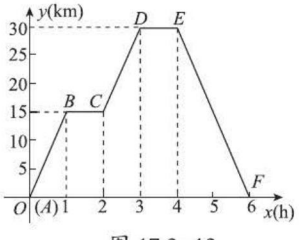


图 17.2–12

解题秘方：紧扣两坐标轴表示的意义，根据图象反映的信息解决问题.

思路点拨

求解从函数图象中获取信息问题的思路

从函数图象中获取信息时要做到：①看清横轴纵轴分别表示哪个量；②从左向右，分析每段函数图象上自变量的取值和函数值如何变化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）小明到达离家最远的地方用了 3 h，此时离家 30 km.

（2）由图 17.2−12 可知，当 $x=2$ 时，$y=15$，当 $2<x\leqslant 2.5$ 时，小明的骑行速度 $v=\dfrac{30-15}{3-2}=15$（km/h），所以当 $x=2.5$ 时，$y=15+15\times(2.5-2)=22.5$，即小明出发 2.5 h 离家 22.5 km.

（3）分两种情况：

①小明出发时离家 12 km.

AB 段的速度为 $\dfrac{15-0}{1}=15$（km/h），$\dfrac{12}{15}=0.8$（h），即小明出发 0.8 h 离家 12 km.

②小明返回时离家 12 km.

EF 段的速度为 $\dfrac{30}{6-4}=15$（km/h），$4+\dfrac{30-12}{15}=5.2$（h），即小明出发 5.2 h 离家 12 km.

综上所述，小明出发 0.8 h 或 5.2 h 离家 12 km.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用等积法求平面直角坐标系中点的坐标

挑战·高分

例 13 已知：三角形 ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(2,3)$.

（1）在图 17.2−13 所给的平面直角坐标系中画出三角形 ABC，并求三角形 ABC 的面积；

（2）若点 P 在 y 轴上，且三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积，求点 P 的坐标.

解题秘方：利用点的坐标求出三角形的一边长及此边上的高，结合三角形的面积公式计算.

解：（1）在平面直角坐标系中画出三角形 ABC 如图 17.2−13 所示，三角形 ABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 2=3$.

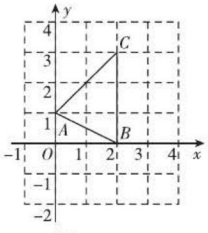


图 17.2−13

（2）设点 P 的坐标为 $(0,y)$.

由三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积可得 $\dfrac{1}{2}|y-1|\times 2=3$，

即 $|y-1|=3$，

$\therefore y-1=3$ 或 $y-1=-3$，

解得 $y=4$ 或 $y=-2$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-2)$.

图解

点 P 的位置如图 17.2−14 所示.

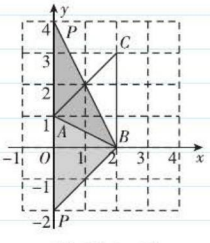


图 17.2−14

当点 P 的坐标为（0，4）时，三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积；

当点 P 的坐标为（0，−2）时，三角形 ABP 的面积等于三角形 ABC 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用图象信息法获取函数关系中两变量的数据解实际应用

例 14 某仓库调拨一批物资，调进物资共用 8 小时，调进物资 4 小时后同时开始调出物资（调进与调出物资的速度均保持不变），该仓库库存物资 w（吨）与时间 t（小时）之间的函数关系如图 17.2−15 所示，则这批物资从开始调进到全部调出所需要的时间是（　　）

A. 8.4 小时　　B. 8.6 小时　　C. 8.8 小时　　D. 9 小时

解题秘方：紧扣“图象上特殊点的坐标表示的两变量的数据”信息，进行相关计算.

解：由图 17.2−15 可知 4 小时调进物资共 60 吨，平均每小时调进 15 吨，所以 8 小时共调进物资 120 吨；而 4 小时 ~8 小时时间段内共调出物资 120−20=100（吨），平均每小时调出 25 吨，从而求得调出剩余的 20 吨物资还需要 $20\div25=0.8$（小时），故这批物资从开始调进到全部调出所需要的时间是 8.8 小时.

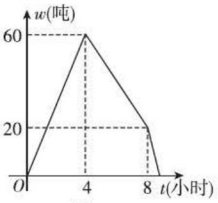


图 17.2−15

答案：C

挑战·高分

解法提醒

本题需要先读懂题意，结合图象从两点的坐标中找出两个等量关系：

由 4 小时一共调进物资 60 吨，算出调进物资的速度，从而可知，8 小时调进物资共 120 吨且在 4 小时~8 小时时间段内调出物资 120−20=100（吨），然后通过计算算出调出物资的速度，即可轻松地解决问题.

拔尖角度 3 利用情境信息法获取两个变量的函数关系确定其图象

例 15 如图 17.2−16 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，P 为正方形边上一动点，沿 $A\to D\to C\to B\to A$ 的路线匀速移动，设 P 点经过的路线长为 x，$\triangle APD$ 的面积为 y，则能大致反映 y 与 x 的函数关系的是图 17.2−17 中的（　　）

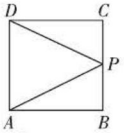


图 17.2−16

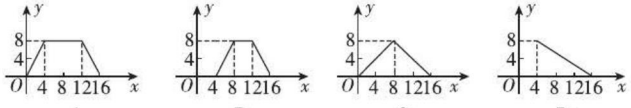


图 17.2−17

解题秘方：紧扣动点 P 运动路线长 x 与面积 y 的变化规律信息，结合各选项的图象进行辨识.

解：当动点 P 从点 A 向 D 运动时，点 A，D，P 在一条线上，即 $y=0$；当点 P 在 DC 上运动时，$\triangle ADP$ 的底 AD 不变，y 随着 x 的增大而增大；当点 P 在 CB 上运动时，根据“同底等高的三角形面积相等”，知 y 不变；当点 P 在 BA 上运动时，$\triangle ADP$ 的底 AD 不变，y 随着 x 的增大而减小，据此应选 B.

答案：B

挑战·高分

技巧点拨

判断函数图象时应从以下几方面分析：

1. 看图象的升降趋势，当函数随着自变量的增加而增加时，图象呈上升趋势，反之，呈下降趋势；
2. 看图象的曲直，函数随着自变量的变化而均匀变化的，图象是直线，函数随着自变量的变化而不均匀变化的，图象是曲线；
3. 表示函数不随自变量的变化而变化时，函数图象与横轴平行（或在横轴上）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节中确定点的位置、由点所在的象限确定字母的取值、特殊的几类对称点、函数图象的画法、利用函数图象解决实际问题等知识点都是中考常考的内容，多以选择题、填空题形式出现，难度不大，也与其他知识综合考查，以解答题的形式出现，难度适中.

三年中考兵法

考法 1 利用象限角的符号特征确定点的位置

例 16 [中考·贵港]在平面直角坐标系中，点 $P(m-3, 4-2m)$ 不可能在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

试题评析：本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解题的关键.

解：①当 $m-3>0$，即 $m>3$ 时，由题易知 $-2m<-6$，$4-2m<-2$，

所以点 $P(m-3, 4-2m)$ 在第四象限；

②当 $m-3<0$，即 $m<3$ 时，由题易知 $-2m>-6$，$4-2m>-2$，

所以点 $P(m-3, 4-2m)$ 可能在第二或第三象限，

综上所述，点 P 不可能在第一象限.

答案：A

考法 2 利用函数关系式确定函数的图象

例 17 [中考·牡丹江]如图 17.2-18，能反映等腰三角形顶角 y(度)与底角 x(度)之间的函数关系的是(　　)

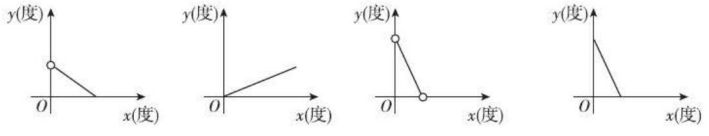


图 17.2-18

试题评析：本题考查了三角形内角和定理，一次函数的实际应用及其图象画法，熟练掌握等腰三角形的性质及一次函数图象的画法是解题的关键.

解：由等腰三角形的性质知 $y=180-2x$，且 $0<x<90$.

答案：C

考法 3 利用函数图象确定函数表达式的几何意义

例 18 [中考·绍兴]均匀地向一个容器内注水，最后把容器注满，在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图 17.2-19 所示(图中 $OABC$ 为折线)，这个容器的形状可以是图 17.2-20 中的(　　)

冲刺·满分

另解

分点 P 的纵坐标是正数和负数两种情况讨论求解.

(1)当 $4-2m>0$ 时，易知 $m<2$.

所以 $m-3<-1$.

所以点 $P(m-3, 4-2m)$ 在第二象限.

(2)当 $4-2m<0$ 时，

易知 $m>2$.

所以 $m-3>-1$.

所以点 $P(m-3, 4-2m)$ 可能在第三或第四象限.

综上可知，点 P 不可能在第一象限.

解法提醒

等腰三角形的两个底角相等，由内角和定理可知：$x+x+y=180$，从而得 $y=180-2x$，由 $y>0$ 得 $x<90$，又 $x>0$，故 $0<x<90$，据此可得答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

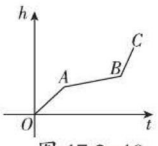


图 17.2−19

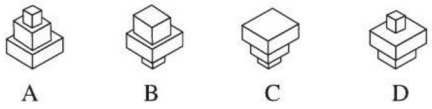


图 17.2−20

思路点拨

认识图象的信息要明确：
1. 匀速对应的是直线；
2. 变速对应的是曲线；
3. 由快变慢上升幅度逐渐平缓，由慢变快上升幅度逐渐陡峭.

试题评析：此题考查函数图象的应用，需注意容器粗细和水面高度变化的关联.

解：注水量一定，函数图象的走势是稍陡、平、陡；那么速度就相应地变化，跟所给容器的粗细有关，则相应的顺序就为 D.

答案：D

两年模拟兵法

答案见 256 页

1. [中考·重庆]在平面直角坐标系中，若点 P 的坐标为（−3，2），则点 P 所在的象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 在平面直角坐标系中，点 P（−3，4）到 x 轴的距离为（　　）

A.3　　B.−3　　C.4　　D.−4

3. 点 P（3，−5）关于原点对称的点的坐标为（　　）

A.（−3，−5）　　B.（−3，5）

C.（3，5）　　D.（−5，3）

4. 过 A（4，−2）和 B（−2，−2）两点的直线一定（　　）

A. 垂直于 x 轴　　B. 平行于 x 轴

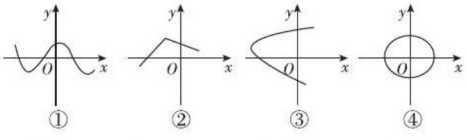
C. 经过原点　　D. 以上都不对

5. 若点 P（x，y）的坐标满足 $xy=0$，则点 P 的位置是（　　）

A. 在 x 轴上　　B. 在 y 轴上

C. 在坐标原点　　D. 在坐标轴上

6. 下列图象中，表示 y 是 x 的函数的个数是（　　）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 在平面直角坐标系中，点（m，$-2m+1$）在第二象限，则 m 的取值范围是（　　）

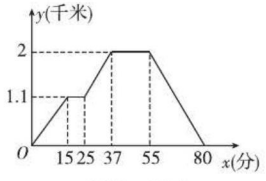
A.$m<0$　　B.$m>\frac{1}{2}$

C.$m<-\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{2}<m<0$

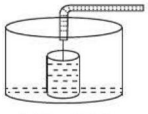
8. [中考·邵阳]如图所示的函数图象反映的过程是：小徐从家去菜地浇水，又去玉米地除草，然后回家. 其中 x（分）表示时间，y（千米）表示小徐离他家的距离，读图可知菜地离小徐家的距离为（　　）

A.1.1 千米　　B.2 千米

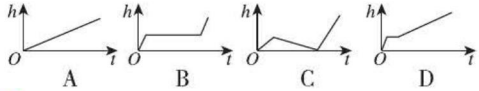
C.15 千米　　D.37 千米



（第 8 题）


（第 9 题）

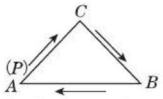
9. [中考·淄博]小明做了一个数学实验：将一个圆柱形的空玻璃杯放入形状相同的无水鱼缸内，看成一个容器. 然后，小明对准玻璃杯口匀速注水，如图所示，在注水过程中，杯底始终紧贴鱼缸底部. 则下面可以近似地刻画出容器最高水位 h 与注水时间 t 之间的变化情况的是（　　）



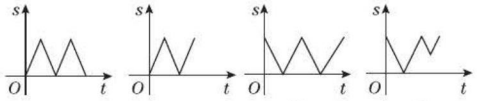
10. [中考·广安]如图，在△ABC 中，$AC=BC$，有一动点 P 从点 A 出发，沿 $A\to C\to B\to A$ 匀

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

速运动，则 CP 的长度 s 与时间 t 之间的函数关系用图象描述大致是（　　）



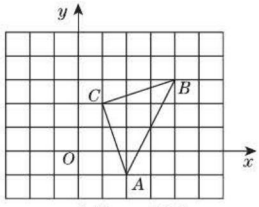
（第 10 题）



A　　B　　C　　D

11. 在平面直角坐标系中，点 $P(m^2+2, -4)$ 一定在第_____象限.

12. 在如图所示的平面直角坐标系中，三角形 ABC 的顶点都在网格格点上，其中 A 点坐标为 $(2,-1)$，则三角形 ABC 的面积为_____.



（第 12 题）

13. 已知点 $M(3a-9, a-1)$，

（1）若点 M 在 y 轴上，求点 M 的坐标；

（2）若点 M 到两坐标轴的距离相等，求点 M 的坐标；

（3）若点 N 的坐标为 $(3, -6)$，且直线 $MN \parallel x$ 轴，求点 M 的坐标.

14. 在平面直角坐标系中画出函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图象.　　【导学号：9877429】

15. 在平面直角坐标系中描出下列各点，并将各点用线段依次连结起来：$(-2, -1)$，$(4, -1)$，$(2, 3)$，$(0, 3)$，$(-2, -1)$.

（1）所得图形是什么图形？

（2）求出图形的面积.

16. 一个小球由静止开始从一个斜坡上向下滚动，滚动的距离 s（m）与时间 t（s）之间的函数关系式为 $s=2t^2$（$t \geqslant 0$）. 通过仪器观察得到小球滚动的距离 s（m）与时间 t（s）的数据如下表：

时间 t（s）	0	1	2	3	…
距离 s（m）					…

（1）根据关系式完成上表，并画出函数图象.

（2）当小球滚动 6.5 s 时，其滚动的距离是多少？

（3）经过多少秒时，小球滚动 128 m？

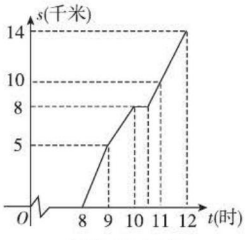
17. 一位旅行者在早晨 8 点从城市出发去乡村，刚开始 1 小时走了 5 千米，然后他上坡 1 小时走了 3 千米，之后休息了 30 分，休息后平均每小时走 4 千米，在中午 12 时到达乡村，他离开城市的距离 s（千米）与时间 t（时）之间的函数关系如图所示，根据图象回答：

（1）该旅行者 9 时、10 时 30 分、11 时离开城市的距离分别是多少千米？

（2）他停下来休息时，离开城市的距离是多少千米？

（3）乡村离城市有多少千米的路程？

（4）求旅行者离开城市 6 千米时的时间.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.3 一次函数

核心知识

- 一次函数的定义
- 一次函数的图象
- 一次函数的性质
- 求一次函数的表达式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数

1. 定义: 一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数，叫做一次函数.

特别地，当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx$（常数 $k\neq 0$）也叫做正比例函数.

2. 一次函数与正比例函数的关系:

（1）正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）是一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）中 $b=0$ 的特例，即正比例函数都是一次函数，但一次函数不一定是正比例函数.

（2）若已知 y 与 x 成正比例，则可设函数表达式为 $y=kx$（$k\neq 0$）；若已知 y 是 x 的一次函数，则可设函数表达式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）.

拔考向 利用一次函数定义解涉及一次函数的应用

题型 1：一次函数的定义在辨识中的应用

例 1 下列函数中，哪些是一次函数？哪些又是正比例函数？

（1）$y=-2x^2$；（2）$y=\dfrac{x+1}{2}$；（3）$y=3x^2-x(3x-2)$；

（4）$x^2+y=1$；（5）$y=-\dfrac{3}{x}$.

解题秘方： 紧扣一次函数定义的结构特征进行识别.

解：（1）因为 x 的次数是 2，所以 $y=-2x^2$ 不是一次函数.

（2）因为 $y=\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$k=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$，

所以 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 是一次函数，但不是正比例函数.

（3）因为 $y=3x^2-x(3x-2)=2x$，$k=2$，$b=0$，

所以它是一次函数，也是正比例函数.

（4）$x^2+y=1$，即 $y=1-x^2$. 因为 x 的次数是 2，所以 $x^2+y=1$ 不是一次函数.

（5）因为 $y=-\dfrac{3}{x}$ 中 $-\dfrac{3}{x}$ 不是整式，不符合 $y=kx+b$ 的形式，所以它不是一次函数.

提分·必记

特别提醒

- 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的结构特征：
  (1) $k\neq 0$；
  (2) 自变量 x 的次数是 1；
  (3) 常数项 b 可以是任意实数.
- 函数是一次函数⇔函数表达式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）.

提分·秘诀

技巧点拨

判断函数是否为一次函数的方法：

先看函数表达式是否是整式的形式，再将函数表达式进行恒等变形，然后看它是否符合一次函数表达式 $y=kx+b$ 的结构特征：

(1) $k\neq 0$；
(2) 自变量 x 的次数为 1；
(3) 常数项 b 可以为任意实数.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：一次函数的定义在求字母值中的应用

例 2 ［原创易错题］已知函数 $y=(n^2-4)x^2+(2n-4)x^{m-2}-(m+n-8)$.

（1）当 m，n 为何值时，函数是一次函数？

（2）如果函数是一次函数，计算当 $x=1$ 时的函数值.

解题秘方：紧扣一次函数定义的三个特征及函数值的求法进行求解.

解：（1）由题意，得 $\begin{cases} n^2-4=0, \\ m-2=1, \\ 2n-4\neq 0. \end{cases}$ ∴ $m=3$，$n=-2$.

∴当 $m=3$，$n=-2$ 时，函数是一次函数.

（2）由（1）得此一次函数表达式为 $y=-8x+7$.

当 $x=1$ 时，$y=-8\times 1+7=-1$.

特别提醒

根据一次函数定义求待定字母的值时，要注意：

- 函数表达式是自变量的一次式，若含有一次以上的项，则其系数必为 0；
- 注意隐含条件：一次项的系数不为 0.

点知识▶ 2 一次函数的图象

1. 一次函数的图象：

一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象是一条直线，通常也称为直线 $y=kx+b$. 特别地，正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象是经过原点（0，0）的一条直线.

2. 一次函数的图象与正比例函数的图象的关系：

一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象可以看成由正比例函数 $y=kx$（$k\neq 0$）的图象向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位得到.

3. 一次函数图象的画法

（1）**两点法**：由于两点确定一条直线，所以一般选取直线 $y=kx+b$ 与两坐标轴的交点，即（0，b）与（$-\frac{b}{k}$，0）画直线.

（2）**平移法**：一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象，是由直线 $y=kx$ 沿 y 轴向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位得到，反之，直线 $y=kx$ 也可以通过沿 y 轴平移直线 $y=kx+b$ 得到.

提分·必记

特别提醒

$|k|$ 的大小与直线 $y=kx+b$（$k\neq 0$）倾斜度间的关系：

$|k|$ 的大小决定直线 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的倾斜程度：$|k|$ 越大，直线与 x 轴相交所成的锐角越大，直线越陡；$|k|$ 越小，直线与 x 轴相交所成的锐角越小，直线越缓.


一次函数的图象

拔考向▶ 利用一次函数图象及作法解直线问题

题型 1：“两点法”在画一次函数图象中的应用

例 3 在同一平面直角坐标系中，作出下列函数的图象：

（1）$y_1=2x-1$；（2）$y_2=2x$；（3）$y_3=2x+2$.

然后观察图象，你能得到什么结论？

解题秘方：按“两点法”的作图步骤作图.

解：列表如下：

x	0	1
y_1	−1	1

x	0	1
y_2	0	2

x	0	1
y_3	2	4

提分·秘诀

解法提醒

画一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象，若 $b\neq 0$，通常选取该直线与 y 轴的交点（横坐标为 0 的点）和与 x 轴的交点（纵坐标为 0 的点），由两点确定一条直线得一次函数的图象.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

描点、连线，即可得到它们的图象，如图 17.3−1.

从图象中我们可以看出：它们是一组互相平行的直线，原因是这组函数的表达式中 k 的值都是 2.

结论：一次函数中的 k 值相等（b 值不相等）时，其图象是一组互相平行的直线，它们可以通过互相平移得到.

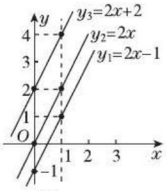


图 17.3−1



题型 2：一次函数的图象在求面积中的应用

例 4 设直线 $y=-\frac{x}{2}-3$ 与 x 轴的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，画出函数图象并求 $S_{\triangle AOB}$.

解题秘方：紧扣直线与两坐标轴的交点进行解答.

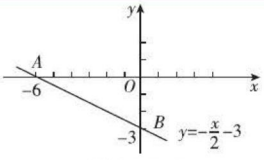


图 17.3−2

解：当 $x=0$ 时，$y=-3$，

$\therefore$ 点 B 的坐标为（0，−3）；

当 $y=0$ 时，$x=-6$，

$\therefore$ 点 A 的坐标为（−6，0）.

画出函数图象如图 17.3−2.

由图象可知，$OA=|-6|=6$，$OB=|-3|=3$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$.

方法提醒

直角坐标系中图形面积的计算方法：

计算直角坐标系中图形面积的方法是先利用点的坐标求出线段的长，然后根据面积公式求图形的面积.

知识 3 一次函数图象的平移

1. 上、下平移：

直线 $y=kx+b$ 向上平移 n（$n>0$）个单位得到直线 $y=kx+b+n$；直线 $y=kx+b$ 向下平移 n（$n>0$）个单位得到直线 $y=kx+b-n$，简记为：上加下减（只改变 b）.

2. 左、右平移：

直线 $y=kx+b$ 向左平移 m（$m>0$）个单位得到直线 $y=k(x+m)+b$；直线 $y=kx+b$ 向右平移 m（$m>0$）个单位得到直线 $y=k(x-m)+b$，简记为：左加右减（只改变 x）.

3. 拓展：

（1）当直线平行于 x 轴且与 y 轴交点的纵坐标为 b 时，这条直线的函数表达式为 $y=b$.

（2）当直线平行于 y 轴且与 x 轴交点的横坐标为 a 时，这条直线的函数表达式为 $x=a$.

（3）x 轴、y 轴分别表示为直线 $y=0$、直线 $x=0$.

综上所述，坐标平面内任意一条直线都可以用函数表达式表示.

提分·必记

特别提醒

平面直角坐标系中两直线的位置关系：

k_1，k_2，b_1，b_2 的关系	l_1 与 l_2 的关系
$k_1\neq k_2$	l_1 与 l_2 相交
$k_1\neq k_2$，$b_1=b_2$	l_1 与 l_2 相交于 y 轴上的同一点（0，b_1）或（0，b_2）
$k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	l_1 与 l_2 平行
$k_1=k_2$，$b_1=b_2$	l_1 与 l_2 重合

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用一次函数图象的平移规律求函数表达式

提分·秘诀

详解

“左加右减(只改变x)”即向左平移1个单位,只需将x变成(x+1),其余都不变.

例5 [模拟·陕西]在平面直角坐标系中,将直线l_1:$y=-3x-2$向左平移1个单位,再向上平移3个单位得到直线l_2,则直线l_2的表达式为(　　)

A.$y=-3x-9$　　B.$y=-3x-2$

C.$y=-3x+2$　　D.$y=-3x+9$

解题秘方:紧扣“平移规律:上加下减、左加右减”进行求解.

解:将直线$y=-3x-2$向左平移1个单位得

直线$y=-3(x+1)-2$,即$y=-3x-5$,

再向上平移3个单位,即将直线$y=-3x-5$向上平移3个单位,得直线$y=-3x-5+3$,即$y=-3x-2$.

答案:B

详解

“上加下减(只改变b)”即向上平移3个单位,只需将b加3,题中的(-5+3),其余都不变.

注:上述两次平移可合写一步为:$y=-3(x+1)-2+3$,即$y=-3x-2$.

特别警示:“上加下减(只改变b),左加右减(只改变x)”这种平移规律,是函数表达式的变化规律,不要将其与点的坐标的平移规律相混淆,而点的坐标的平移规律是:上加下减,左减右加.

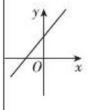
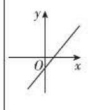
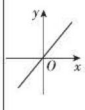
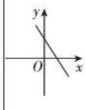
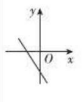
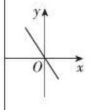
点知识▶4 一次函数的性质

提分·必记

特别提醒

- 由k,b的符号可以确定直线$y=kx+b$(k,b是常数,$k\neq0$)所经过的象限;反之,由直线$y=kx+b$(k,b是常数,$k\neq0$)所经过的象限也可以确定k,b的符号.
- k决定一次函数$y=kx+b$(k,b是常数,$k\neq0$)的增减性,b决定函数图象与y轴的交点位置.

一次函数$y=kx+b$(k,b是常数且$k\neq0$)的性质和k,b的符号的关系:

一次函数	$y=kx+b$(k,b是常数且$k\neq0$)					
k,b的符号	$k>0$			$k<0$		
	$b>0$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$b<0$	$b=0$
图象的位置						
增减性	y随x的增大而增大			y随x的增大而减小		
与y轴交点的位置	正半轴	负半轴	原点	正半轴	负半轴	原点

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用一次函数的图象与性质解相关应用

题型1：一次函数的增减性在比较函数值大小中的应用

例6 已知直线 l_1 和直线 l_2 在同一平面直角坐标系中的位置如图 17.3−3，点 $P_1(x_1, y_1)$ 在直线 l_1 上，点 $P_3(x_3, y_3)$ 在直线 l_2 上，点 $P_2(x_2, y_2)$ 为直线 l_1，l_2 的交点，其中 $x_2<x_1$，$x_2<x_3$，则（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$　　C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

解题秘方：紧扣函数的增减性求解.

解：观察直线 l_1，知 y 随 x 的增大而减小.

$\because x_2<x_1$，$\therefore y_2>y_1$.

观察直线 l_2，知 y 随 x 的增大而增大.

$\because x_2<x_3$，$\therefore y_2<y_3$，$\therefore y_1<y_2<y_3$.

答案：A

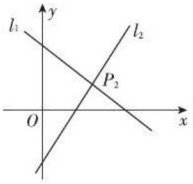


图 17.3−3

题型2：一次函数的增减性及图象与 y 轴的交点位置在求字母取值范围中的应用

例7 已知一次函数 $y=(6+3m)x+(m-4)$，y 随 x 的增大而增大，函数的图象与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上，求 m 的取值范围.

解题秘方：紧扣“k，b 的符号与函数的增减性及图象的位置关系”解答.

解：根据题意，得 $\begin{cases}6+3m>0,\\ m-4<0.\end{cases}$ 解得 $-2<m<4$.

所以 m 的取值范围是 $-2<m<4$.

点知识▶5 用待定系数法确定一次函数表达式

1. 定义：

先设待求的函数表达式（其中含有待定系数），再根据条件列出方程或方程组，求出待定系数，从而得到所求结果的方法叫做待定系数法.

2. 一般步骤：

（1）**设**：设出含有待定系数的函数表达式；

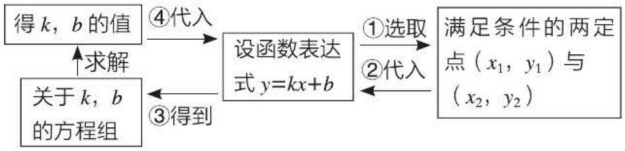
（2）**代**：把已知条件中的自变量的值与函数的对应值代入函数表达式，列出关于待定系数的方程（组）；

（3）**解**：解方程（组），求出待定的系数；

（4）**代回**：将求得的待定系数的值代回所设的表达式.



上面的步骤可表示如下：

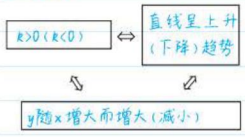


提分·秘诀

解法提醒

对于一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）来说：

k 的符号，函数图象的上升或下降趋势，函数的增减性这三者有如影随形的关系，知其一，便可知其他两种的特性. 即：



详解

由 y 随 x 的增大而增大可得 $k>0$，即 $6+3m>0$.

由函数的图象与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴上可知 $b<0$，即 $m-4<0$.

注：以上情况，反之亦成立.

提分·必记

特别提醒

- 用待定系数法求函数表达式时，要先判断函数是哪一类函数，然后才能设出所求函数的表达式.
- 在正比例函数 $y=kx$ 中，只有一个待定系数 k，只需要一个除 $(0,0)$ 外的条件即可求出 k 的值；在一次函数 $y=kx+b$ 中，有两个待定系数 k，b，因而需要两个条件才能求出 k 和 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核考向▶待定系数法在求一次函数表达式中的应用

例8 [中考·陕西]根据下表中一次函数的自变量x与函数值y的对应值，可得p的值为（　　）

x	-2	0	1
y	3	p	0

A.1　　B.-1　　C.3　　D.-3

解题秘方：紧扣待定系数法求函数表达式的步骤求解.

解：设一次函数表达式为$y=kx+b$，由表中对应值可知，当$x=-2$时，$y=3$，当$x=1$时，$y=0$，

由此得到$\begin{cases}-2k+b=3,\\k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

∴一次函数表达式为$y=-x+1$.

当$x=0$时，$y=(-1)\times0+1=1$，即p的值为1.

答案：A

提分·秘诀

解法提醒

确定一次函数的表达式除了用待定系数法(点的坐标与表达式的关系法)外，还可以通过平移法(两直线的位置关系法)求解，即通过平移，说明k相等，及平移规律确定k,b的值.

点知识▶6 建立一次函数的模型解实际应用题

利用一次函数解决实际问题，关键是找到题目中的两个变量之间的数量关系，把实际问题抽象、升华为一次函数模型，即建模，再利用一次函数的相关性质解决实际问题，常见类型如下：

（1）题目中已知一次函数的表达式，可直接运用一次函数的性质求解.

（2）题目中没有给出一次函数的表达式，而是通过语言、表格和图象给出一次函数的情境，这时需要先根据题目给出的信息求出一次函数的表达式，再利用一次函数的性质解决实际问题.

提分·必记

特别提醒

应用一次函数解决实际问题的关键是建立一次函数模型，同时注意实际问题中自变量的取值范围要使实际问题有意义.

核考向▶利用建立一次函数的模型解生活中的实际应用题

题型1：建立一次函数的模型在表格情境中的应用

例9 世界上大部分国家都使用摄氏温度（℃）计量法，但极少数的国家的天气预报仍然使用华氏温度（℉）计量法，两种计量法之间有如下的对应关系：

x（℃）	0	10	20	30	40	50
y（℉）	32	50	68	86	104	122

（1）猜想y与x之间的函数关系.

（2）确定y与x之间的函数表达式，并加以检验.

（3）0 ℉时的温度对应多少摄氏度?

（4）华氏温度的值与对应的摄氏温度的值有相等的可能吗? 如果没有相等的可能，请说明理由，如果有相等的可能，请写出此时的值.

解题秘方：紧扣一次函数的性质及待定系数法求表达式的方法求解.

提分·秘诀

解法提醒

在利用一次函数解决实际问题时，要先判断问题中的两个变量之间是不是一次函数关系，若是一次函数关系，再根据表格中提供的信息确定出函数表达式，并解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）观察表格中的对应数据的特征可知：摄氏温度每增加10℃，华氏温度就增加18°F，因此猜想 y 与 x 之间是一次函数关系.

（2）设 $y=kx+b$（$k\neq0$），由题意，得 $\begin{cases}b=32,\\10k+b=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{9}{5},\\b=32,\end{cases}$ 所以 $y=\dfrac{9}{5}x+32$. 经检验，其他4组 x，y 的对应值均能满足上述表达式，所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\dfrac{9}{5}x+32$.

（3）当 $y=0$ 时，$\dfrac{9}{5}x+32=0$，解得 $x=-\dfrac{160}{9}$，

所以0°F时的温度对应 $-\dfrac{160}{9}$℃.

（4）有. 当 $y=x$ 时，$x=\dfrac{9}{5}x+32$，得 $x=-40$.

所以当华氏温度为 -40°F时，摄氏温度为 -40℃.

另解

根据表中的数据特点建立适当的平面直角坐标系.

如图17.3-4所示，从表中对应值为坐标的点大致分布在一条直线上，据此，可猜想 y 与 x 之间的函数关系为一次函数关系.

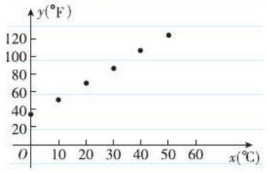


图 17.3-4

题型2：建立一次函数的模型在语言情境中的应用

例10 在正常情况下，一个人在运动时所能承受的每分钟心跳的最高次数 s（次）是这个人年龄 n（岁）的一次函数.

（1）根据图17.3-5①中所提供的信息，求在正常情况下，s 关于 n 的函数表达式.

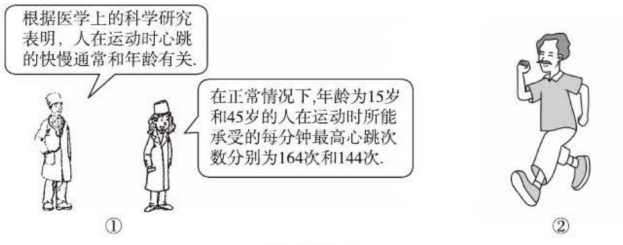


图 17.3-5

（2）如图17.3-5②所示，若一位63岁的老人在跑步，医生在途中给他测得10秒钟的心跳为26次，问：他此时是否有危险？为什么？

解题秘方：紧扣待定系数法求表达式的方法及自变量值与函数值的关系求解.

解：（1）设 s 关于 n 的函数表达式为 $s=kn+b$（$k\neq0$）.

由题意，得 $\begin{cases}15k+b=164,\\45k+b=144,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{2}{3},\\b=174.\end{cases}$

所以 s 关于 n 的函数表达式为 $s=-\dfrac{2}{3}n+174$.

（2）有危险，理由如下：当 $n=63$ 时，$s=-\dfrac{2}{3}\times63+174=132$.

而现在这位老人每分钟的心跳是 $26\div10\times60=156$（次）>132 次. 因此，他此时有危险.

解法提醒

- 利用待定系数法确定函数表达式，当已知自变量的取值时，利用函数表达式便可求出相对应的函数值.
- 将实际问题抽象成数学问题，用数学知识解决身边的实际问题，体现了学以致用的理念.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：建立一次函数的模型在图象情境中的应用

例 11 在一条直线上依次有 A，B，C 三个海岛，某海巡船从 A 海岛出发沿直线匀速经 B 海岛驶向 C 海岛，执行海巡任务，最终到达 C 海岛，设该海巡船行驶 x（h）后，与 B 海岛的距离为 y（km），y 与 x 的函数关系如图 17.3-6 所示.

（1）A，C 两海岛间的距离为_____km，a=_____；

（2）求 y 与 x 的函数关系式，并解释图中点 P 的坐标所表示的实际意义；

（3）在 B 海岛有一不间断发射信号的信号发射台，发射的信号覆盖半径为 15 km，求该海巡船能接收到该信号的时间有多长.

解题秘方：结合图象信息用待定系数法求函数的关系式.

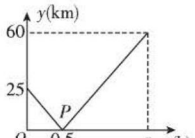


图 17.3-6

解：（1）由图 17.3-6 可知，A，B 两海岛间的距离为 25km，B，C 两海岛间的距离为 60km，

∴ A，C 两海岛间的距离为 25+60=85（km），

海巡船的速度为 25÷0.5=50（km/h），

∴ a=85÷50=1.7.

答案：85；1.7

（2）当 $0 \leqslant x \leqslant 0.5$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

∵函数图象经过点（0，25），（0.5，0），

$$\therefore \begin{cases} b=25, \\ 0.5k+b=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-50, \\ b=25, \end{cases}$$

∴ $y=-50x+25$.

当 $0.5<x \leqslant 1.7$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=mx+n$，

∵函数图象经过点（0.5，0），（1.7，60），

$$\therefore \begin{cases} 0.5m+n=0, \\ 1.7m+n=60, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=50, \\ n=-25, \end{cases}$$

∴ $y=50x-25$.

综上，$y=\begin{cases} -50x+25\ (0 \leqslant x \leqslant 0.5), \\ 50x-25\ (0.5<x \leqslant 1.7). \end{cases}$

点 P 的坐标所表示的实际意义为经过 0.5h 海巡船到达 B 海岛.

（3）由 $-50x+25=15$，解得 $x=0.2$.

由 $50x-25=15$，解得 $x=0.8$.

0.8−0.2=0.6（h）.

∴该海巡船能接收到该信号的时间为 0.6h.

技巧点拨

对于有关一次函数图象的应用问题，信息量比较大，因此要从图象中提取出有用信息，过滤掉没用的信息，从中找到求关系式所用的条件，一般采用待定系数法求出一次函数的关系式.

特别警示

在不同自变量取值范围内求出函数关系式后，不要忘了综合在一起.

特别提醒

注意正确理解题意，所求时间应为（0.8−0.2）h，而不是 0.8h.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用排除法确定一次函数的图象

挑战·高分

例 12 两个一次函数 $y_1=ax+b$（$a\neq0$）与 $y_2=bx+a$（$b\neq0$），它们在同一平面直角坐标系中的图象可能是图 17.3–7 中的（　　）

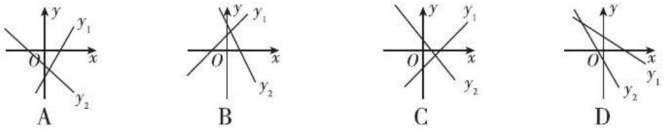


图 17.3–7

解题秘方：紧扣“k，b 的符号与一次函数图象的关系”求解.

解：选项 A 中，根据 y_1 的图象可知 $a>0$，$b<0$，因此 y_2 的图象应过第一、二、四象限，故选项 A 错误；

选项 B 中，根据 y_1 的图象可知 $a>0$，$b>0$，因此 y_2 的图象应过第一、二、三象限，故选项 B 错误；

选项 D 中，根据 y_1 的图象可知 $a<0$，$b>0$，因此 y_2 的图象应过第一、三、四象限，故选项 D 错误，所以选 C.

答案：C

解题通法

两个一次函数图象识别的关键：

求解同一直角坐标系中两个一次函数的图象识别问题的关键是由其中一个函数图象的位置确定待定系数的正负，据此判断另一个函数的图象的位置.

拔尖角度▸ 2 利用分类法求涉及三角形面积的一次函数表达式

挑战·高分

例 13 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(3,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，O 为坐标原点，若 $\triangle AOB$ 的面积为 6，试求这个一次函数的表达式.

技巧点拨

已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积，求直线对应的函数表达式的方法：

先设出直线对应的函数表达式，

再用待定字母表示出直线与两坐标轴的交点坐标（注：这一步中要考虑直线与 x 轴、y 轴相交时的位置的不同情况），

然后利用已知三角形的面积求出待定字母的值，

最后代回所设函数表达式即可.

解题秘方：紧扣点 B 的位置的不确定（在 y 轴正半轴还是负半轴不确定）性进行分类求解.

解：∵ $A(3,0)$，∴ $OA=3$.

∵直线 $y=kx+b$ 与 y 轴交于点 $B(0,b)$，∴ $OB=|b|$，

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times3\cdot|b|=6$，∴ $b=\pm4$.

∴点 $B(0,4)$ 或 $B(0,-4)$.

故直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,4)$ 两点或 $(3,0)$，$(0,-4)$ 两点.

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,4)$ 时，

得直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$；

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$，$(0,-4)$ 时，

得直线 AB 对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{3}x-4$.

综上可知，符合条件的一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 或 $y=\frac{4}{3}x-4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用分类法解涉及函数增减性的问题

挑战·高分

例 14 [中考·自贡]一次函数 $y=kx+b$，当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$3 \leqslant y \leqslant 6$，则 $\frac{b}{k}$ 的值是_____.

解题秘方：紧扣“一次函数的增减性”进行分类求解.

解：由于 k 的符号不能确定，故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行解答.

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\because$ 当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$3 \leqslant y \leqslant 6$，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=4$ 时，$y=6$，

$\therefore \begin{cases} k+b=3, \\ 4k+b=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=2. \end{cases}$ $\therefore \frac{b}{k}=2.$

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$\because$ 当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$3 \leqslant y \leqslant 6$，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y=6$；当 $x=4$ 时，$y=3$，

$\therefore \begin{cases} k+b=6, \\ 4k+b=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=7. \end{cases}$ $\therefore \frac{b}{k}=-7.$

答案：2 或 -7

特别警示

一次函数的增减性与 k 的正负性有关，若 k 的正负性无法确定，则必须分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况讨论，不要漏解.

拔尖角度▸ 4 利用比较法解一次函数实际应用题

挑战·高分

例 15 甲、乙两个商场出售相同的某种商品，每件售价均为 3 000 元，并且多买都有一定的优惠，甲商场的优惠条件是：第一件按原售价收费，其余每件优惠 30%；乙商场的优惠条件是：每件优惠 25%. 设所买商品为 x 件时，甲商场收费为 y_1 元，乙商场收费为 y_2 元.

（1）分别求出 y_1，y_2 与 x 之间的关系式；

（2）当甲、乙两个商场的收费相同时，所买的商品为多少件？

（3）当所买商品为 5 件时，选择哪个商场更优惠？请说明理由.

解题秘方：紧扣等量关系求出两个函数，用比较函数值法解答相关问题.

解：（1）$y_1=3\,000\times(1-30\%)(x-1)+3\,000=2\,100x+900$；

$y_2=3\,000\times(1-25\%)x=2\,250x$.

（2）当 $y_1=y_2$ 时，即 $2\,100x+900=2\,250x$，解得 $x=6$.

所以当甲、乙两个商场的收费相同时，所买的商品为 6 件.

（3）选择乙商场更优惠，理由如下：

当 $x=5$ 时，$y_1=2\,100\times5+900=11\,400$.

$y_2=2\,250\times5=11\,250$，$11\,250<11\,400$，

所以当所买商品为 5 件时，选择乙商场更优惠.

详解

本题的等量关系是商场收费=商品价格×所买商品的件数.

对于甲商场，商品价格为第一件 3 000 元，其余每件 3 000×(1-30%) 元，则收费 $y_1=3\,000\times(1-30\%)(x-1)+3\,000=2\,100x+900$；

对于乙商场，商品价格为每件 3 000×(1-25%) 元，则收费 $y_2=3\,000\times(1-25\%)x=2\,250x$.

特别警示

本题容易出错的地方是求 y_1 时，易忽视 x 减去 1 或者加上 3 000，导致整个解题过程错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 5 利用图象信息法解双图象问题的实际应用题

挑战·高分

例16 某单位准备印制一批证书，现有甲、乙两个印刷厂可供选择，甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，乙厂直接按印刷数量收取印刷费，甲、乙两厂的印刷费用 y（千元）与证书数量 x（千个）的函数关系分别如图 17.3-8.

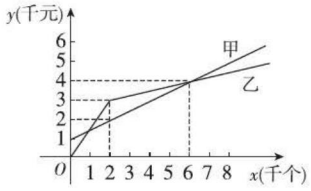


图 17.3-8

（1）请你直接写出甲厂的制版费及 $y_{甲}$ 与 x 的函数表达式，并求出其证书印刷单价.

（2）当印刷证书 8 千个时，选择哪个印刷厂更节省费用，节省费用多少元?

（3）如果甲厂想把 8 千个证书的印刷工作承揽下来，在不降低制版费的前提下，每个证书的印刷费最少降低多少元?

解题秘方：紧扣图象的基本信息结合待定系数法求分段函数.

解：（1）甲厂的制版费为 1 千元，$y_{甲}=\frac{1}{2}x+1$（$x\geqslant 0$），证书印刷单价为 0.5 元.

（2）当 $x\geqslant 2$ 时，由图象可设 $y_{乙}$ 与 x 的函数表达式为 $y_{乙}=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$），将（2，3），（6，4）两点的坐标代入 $y_{乙}=kx+b$，得 $\begin{cases}2k+b=3,\\6k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{4},\\b=\frac{5}{2}.\end{cases}$

所以 $y_{乙}=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$.

当 $x=8$ 时，$y_{甲}=\frac{1}{2}\times 8+1=5$，

$y_{乙}=\frac{1}{4}\times 8+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$，$5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$（千元）$=500$ 元.

故当印刷证书 8 千个时，选择乙厂更节省费用，节省费用 500 元.

（3）设甲厂每个证书的印刷费最少降低 a 元，

由题意，得 $8\,000a=500$.

所以 $a=0.062\,5$.

故每个证书的印刷费最少降低 0.062 5 元.

解法提醒

用一次函数解决实际问题的策略：

一要利用好图表中的信息；

二要采用待定系数法求出函数表达式；

三要注意分段函数的应用；

四要注意自变量在不同阶段的取值范围.

详解

如何求甲厂的制版费？

甲厂费用分为制版费和印刷费两部分，当印刷证书数量 $x=0$ 时，印刷费为 0，所以甲厂制版费等于印刷证书数量 $x=0$ 时 $y_{甲}$ 的值，观察图象可知，当 $x=0$ 时，$y_{甲}=1$，所以甲厂的制版费为 1 千元.

详解

如何求证书印刷单价？

观察图象可知，当 $x=2$ 时，$y_{甲}=2$，而甲厂的制版费为 1 千元，所以印 2 千个证书的印刷费为（2-1）千元，所以证书的印刷单价为 $\frac{2-1}{2}=0.5$（元）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的考点主要有：（1）一次函数的图象及性质，主要考查根据函数图象判断系数的取值范围或根据系数确定函数图象，题型有选择题、填空题和解答题；（2）确定函数的表达式，主要考查待定系数法求一次函数的表达式，题型有选择题、填空题和解答题；（3）一次函数的实际应用，主要考查综合运用一次函数的图象和性质解决实际问题，题型以解答题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用式子有意义的条件解一次函数图象的位置问题

例 17 [中考·雅安]若式子$\sqrt{k-1}+(k-1)^0$有意义，则一次函数 $y=(1-k)x+k-1$ 的图象可能是图 17.3-9 中的（　　）

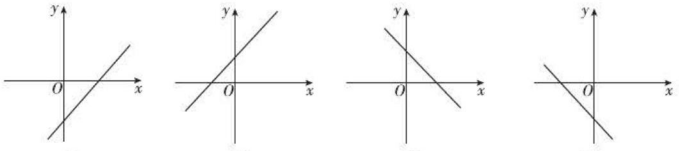


图 17.3-9

试题评析：本题考查的是一次函数的图象，熟知一次函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

解：∵式子$\sqrt{k-1}+(k-1)^0$有意义，

∴$\begin{cases}k-1\geqslant 0,\\ k-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $k>1$.

∴ $1-k<0$，$k-1>0$.

∴一次函数 $y=(1-k)x+k-1$ 的图象过一、二、四象限.

答案：C

解法提醒

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象的位置是由 k，b 的符号决定的，因此先求出 k 的取值范围，再判断出 $1-k$ 及 $k-1$ 的符号，进而可得出结论.

考法 2 利用一次函数的图象和性质求含绝对值的函数的性质

例 18 [中考·咸宁]小慧根据学习函数的经验，对函数 $y=|x-1|$ 的图象与性质进行了探究，下面是小慧的探究过程，请补充完成：

（1）函数 $y=|x-1|$ 的自变量 x 的取值范围是_____；

（2）列表，找出 y 与 x 的几组对应值.

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	b	1	0	1	2	…

其中，b=_____；

（3）在平面直角坐标系 xOy 中（如图 17.3-10），描出以上表中各对对应值为坐标的点，并画出该函数的图象；

解法提醒

解答本题也可以根据绝对值的意义，将函数 $y=|x-1|$ 转化为 $y=\begin{cases}x-1(x\geqslant 1),\\ -x+1(x<1)\end{cases}$ 这样的分段函数来解答，即将含绝对值的函数的问题转化为一次函数问题来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）写出该函数的一条性质：_____.

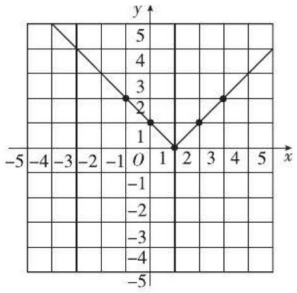


图 17.3−10

试题评析：本题考查的是含绝对值的函数的性质，画函数的图象，利用数形结合思想求解是解此题的关键.

解：（1）∵ x 无论为何值，函数均有意义，∴ x 为任意实数.

答案：任意实数

（2）∵当 $x=-1$ 时，$y=|-1-1|=2$，∴ $b=2$.

答案：2

（3）如图 17.3−10 所示.

（4）由函数图象可知，函数的最小值为 0，

答案：函数的最小值为 0（答案不唯一）

考法 3 利用一次函数的图象的特征解点的坐标问题

例 19 ［中考·泰州］平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为（$m+1$，$m-1$）.

（1）试判断点 P 是否在一次函数 $y=x-2$ 的图象上，并说明理由；

（2）如图 17.3−11，一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图象与 x 轴，y 轴分别相交于点 A，B，若点 P 在△ AOB 的内部，求 m 的取值范围.

试题评析：本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，一次函数的性质，图象上的点的坐标是否适合表达式. 解答本题的关键是弄清点的坐标、函数的表达式、函数的图象三者的关系.

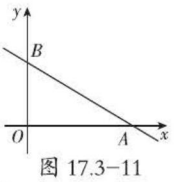


图 17.3−11

解：（1）∵当 $x=m+1$ 时，$y=m+1-2=m-1$，

∴点 P（$m+1$，$m-1$）在一次函数 $y=x-2$ 的图象上.

（2）∵一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图象与 x 轴，y 轴分别相交于点 A，B，

∴ A（6，0），B（0，3），

∵点 P 在△ AOB 的内部，

∴ $0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$.

∴ $1<m<\frac{7}{3}$.

思路点拨

- 要判断点（$m+1$，$m-1$）是否在函数图象上，只要把这个点的坐标代入函数表达式，观察等式是否成立即可.
- 根据题意得出 $0<m+1<6$，$0<m-1<3$，$m-1<-\frac{1}{2}(m+1)+3$，解不等式组即可求得.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用一次函数的模型解实际应用问题

例 20 [中考·永州]永州市是一个降水丰富的地区，今年 4 月初，某地连续降雨导致该地某水库水位持续上涨，下表是该水库 4 月 1 日～4 月 4 日的水位变化情况：

日期 x	1	2	3	4
水位 y（米）	20.00	20.50	21.00	21.50

（1）请建立该水库水位 y 与日期 x 之间的函数模型；

（2）请用求出的函数表达式预测该水库今年 4 月 6 日的水位；

（3）你能用求出的函数表达式预测该水库今年 12 月 1 日的水位吗？

试题评析：本题考查了一次函数的应用，能够求出一次函数的表达式是解题的关键.

解：（1）水库的水位 y 随日期 x 的变化是均匀的，所以 y 与 x 之间的函数关系为一次函数关系，设 $y=kx+b$，

把 $x=1$，$y=20.00$ 和 $x=2$，$y=20.50$ 分别代入得 $\begin{cases}k+b=20.00,\\2k+b=20.50.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=0.5,\\b=19.5.\end{cases}$

$\therefore y=0.5x+19.5.$

（2）当 $x=6$ 时，$y=0.5\times6+19.5=22.5.$

∴预测该水库今年 4 月 6 日的水位为 22.5 米.

（3）不能，理由如下：

∵ 12 月远远超过 4 月，

∴用所建立的函数模型进行预测是不可靠的.

思路点拨

1. 由给出的表可知水库水位 y 与日期 x 之间的函数关系为一次函数关系，设 $y=kx+b$，把 $x=1$，$y=20.00$ 和 $x=2$，$y=20.50$ 分别代入求出 k，b 的值即可.
2. 把 $x=6$ 代入(1)中的函数表达式即可得到今年 4 月 6 日的水位.
3. 不能，因为根据已知数据建立的函数模型只能预测短期内的情况，不能预测较长时期的情况.

考法 5 利用一次函数的性质解实际应用问题

例 21 [中考·天津]用 A4 纸复印文件，在甲复印店不管一次复印多少页，每页收费 0.1 元，在乙复印店复印同样的文件，一次复印页数不超过 20 时，每页收费 0.12 元；一次复印页数超过 20 时，超过部分每页收费 0.09 元.

设在同一家复印店一次复印文件的页数为 x（x 为非负整数）.

（1）根据题意，填写下表：

一次复印页数	5	10	20	30	…
甲复印店收费（元）	0.5	＿＿	2	＿＿	…
乙复印店收费（元）	0.6	＿＿	2.4	＿＿	…

（2）设在甲复印店复印收费 y_1 元，在乙复印店复印收费 y_2 元，分别写出 y_1，y_2 关于 x 的函数关系式（直接写出）；

（3）当 $x>70$ 时，顾客在哪家复印店复印花费少？请说明理由.

思路点拨

1. 根据收费标准，列代数式求得即可；
2. 根据收费等于每页收费乘页数即可求得 $y_1=0.1x(x\geqslant0)$；当一次复印页数不超过 20 时，根据收费等于每页收费乘页数即可求得 $y_2=0.12x$，当一次复印页数超过 20 时，根据题意求得 $y_2=0.09x+0.6$；
3. 设 $y=y_1-y_2$，得到 y 与 x 的函数关系式，根据 y 与 x 的函数关系式即可进行判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了一次函数的应用，读懂题目信息，列出函数关系式是解题的关键.

解：（1）当 $x=10$ 时，

甲复印店收费为 $0.1\times10=1$（元）；

乙复印店收费为 $0.12\times10=1.2$（元）；

当 $x=30$ 时，甲复印店收费为 $0.1\times30=3$（元）；

乙复印店收费为 $0.12\times20+0.09\times(30-20)=3.3$（元）.

答案：1；3；1.2；3.3

（2）$y_1=0.1x\ (x\geqslant0)$；

$$y_2=\begin{cases}0.12x\ (0\leqslant x\leqslant20),\\0.09x+0.6\ (x>20).\end{cases}$$

（3）顾客在乙复印店复印花费少.

当 $x>70$ 时，$y_1=0.1x$，$y_2=0.09x+0.6$，

$\therefore y_1-y_2=0.1x-(0.09x+0.6)=0.01x-0.6.$

设 $y=0.01x-0.6$，由 $0.01>0$，知 y 随 x 的增大而增大，

当 $x=70$ 时，$y=0.1$，$\therefore$ 当 $x>70$ 时，$y>0.1$，$\therefore y_1>y_2$，

$\therefore$ 当 $x>70$ 时，顾客在乙复印店复印花费少.

方法点拨

利用一次函数的性质解决实际问题时，首先要求出一次函数的表达式，然后再运用一次函数中函数值随自变量值的增减变化情况进行分析并解决问题.

素养提分 行动篇

“待定系数法”的解读与延伸

我们在求一次函数的表达式时，第一次接触待定系数法，此后在学习二次函数时，会经常应用这个数学方法.但是，待定系数法的应用不仅仅局限于求函数的表达式.

如果一个多项式的系数和常数项不全已知，但这个多项式满足若干条件，那么我们便用字母表示这些未知的系数，根据这个多项式所满足的条件，把问题化归为解方程或方程组，方程中的未知数就是待定系数.因此，独立的条件的个数应与待定系数的个数相同.应用待定系数法构建已知与未知的关系，可用于解决许多其他问题.

（1）**多项式恒等的条件**：两个多项式当且仅当同次项的系数对应相等时恒等.恒等就是多项式中字母取任何实数时，它们的值都相等.

例如：若代数式 $(2x^2+ax-y+b)-(2bx^2+3x+5y+1)$ 的值与字母 x 的取值无关，求字母 a，b 的值.

整式的运算，因式分解，分式的运算，方程的解等知识都涉及恒等式.

（2）**若 p 是有理数，a 是无理数，则 $p+a$ 是无理数**.

这也容易证明：若 $p+a$ 是有理数，记作 q，则 $p+a=q$，$a=q-p$，这个等式右边是有理数，左边是无理数，所以不可能相等.

由此可知，当 $\sqrt{a}$ 是无理数时，若有理数 p，q，m，n 能使 $p+q\sqrt{a}=m+n\sqrt{a}$ 成立，那么 $p=m$，$q=n$.

例如：已知 m，n 是有理数，且 $(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，求 m，n 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [模拟·长安区]下列函数中，是一次函数的有（　　）

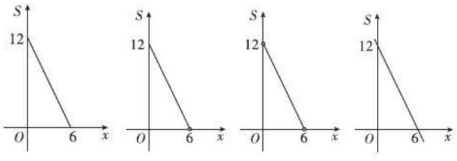
（1）$y=\pi x$；（2）$y=2x-1$；（3）$y=\frac{1}{x}$；

（4）$y=2-3x$；（5）$y=x^2-1$

A.4个　　B.3个

C.2个　　D.1个

2. [中考·齐齐哈尔]点$P(x,y)$在第一象限内，且$x+y=6$，点A的坐标为$(4,0)$，设$\triangle OPA$的面积为S，则下列图象中，能正确反映面积S与x之间的函数关系式的是（　　）



A　　B　　C　　D

3. [中考·营口]若一次函数$y=ax+b$的图象经过第一、二、四象限，则下列不等式一定成立的是（　　）

A.$a+b<0$　　B.$a-b>0$

C.$ab>0$　　D.$\frac{b}{a}<0$

4. 已知一次函数$y=kx-m-2x$的图象与y轴的负半轴相交，且函数值y随自变量x的增大而减小，则下列结论正确的是（　　）

A.$k<2$，$m>0$　　B.$k<2$，$m<0$

C.$k>2$，$m>0$　　D.$k>2$，$m<0$

5. [中考·大庆]对于函数$y=2x-1$，下列说法正确的是（　　）

A. 它的图象过点$(1,0)$

B. y值随着x值的增大而减小

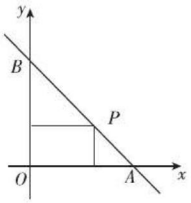
C. 它的图象经过第二象限

D. 当$x>1$时，$y>0$

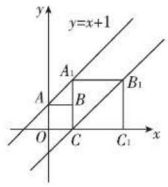
6. [中考·温州]如图，一直线与两坐标轴的正半轴分别交于A，B两点，P是线段AB上任意一点（不包括端点），过P分别作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形的周长为10，则该直线对应的函数表达式是（　　）

A.$y=x+5$　　B.$y=x+10$

C.$y=-x+5$　　D.$y=-x+10$



（第6题）



（第7题）

7. [模拟·碑林区]将正方形$AOCB$和$A_1CC_1B_1$按如图所示方式放置，点$A(0,1)$和点A_1在直线$y=x+1$上，点C，C_1在x轴上，若平移直线$y=x+1$至经过点B_1，则直线$y=x+1$向右平移的距离为（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

8. 已知一次函数$y=(m+2)x+(3-n)$，求：

（1）m，n为何值时，y随x的增大而减小？

（2）m，n为何值时，函数的图象经过原点？

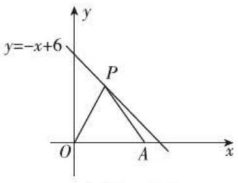
（3）若函数图象经过第二、三、四象限，求m，n的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [期中·汝州]如图，在平面直角坐标系中，点 $P(m, n)$ 在第一象限，且在直线 $y=-x+6$ 上，点 A 的坐标为 $(5, 0)$，O 是坐标原点，$\triangle PAO$ 的面积是 S.

(1) 求 S 与 m 的函数关系式，并画出函数 S 的图象；

(2) 小杰认为 $\triangle PAO$ 的面积可以为 15，你认为呢?



(第 9 题)

10. [期末·邢台]已知一次函数的图象经过点 $(-2, -2)$ 和点 $(2, 4)$.

(1) 求这个函数的表达式；

(2) 判断点 $P(1, 1)$ 是否在此函数图象上，并说明理由.

(3) 求这个函数的图象与坐标轴围成的面积.

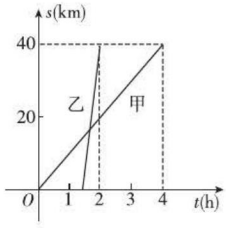
11. A，B 两地相距 40km，甲、乙两人沿同一路线从 A 地到 B 地，甲骑自行车先出发，1.5 h 后乙乘坐公共汽车出发，两人匀速行驶的路程 s(km) 与时间 t(h) 的关系如图所示.

(1) 求甲、乙两人的速度；

(2) 若乙到达 B 地后，立即以原速返回 A 地.

①画出乙返程中与 A 地的距离 y(km) 与时间 t(h) 的函数图象，并求出此时 y 关于 t 的函数表达式；

②求甲在离 B 地多远处与返程中的乙相遇.



(第 11 题)

12. 已知直线 $y=-x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A 和点 B，另一直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 经过点 $C(1, 0)$，且把 $\triangle AOB$ 分成两部分.

(1) 若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等，求 k 和 b 的值；

(2) 若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积之比为 1∶5，求 k 和 b 的值.　【导学号：9877429】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.4 反比例函数

核心知识
- 反比例函数的表达式
- 反比例函数的图象及性质
- 反比例函数的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 反比例函数的定义

1. 定义： 一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数. 反比例函数中，自变量的取值范围是不等于 0 的一切实数.

2. 反比例函数的三种形式

① $y=\frac{k}{x}$，② $y=kx^{-1}$，③ $xy=k$.（其中 k 为常数，$k\neq 0$）

特别提醒： 形如 $y=\frac{1}{x}+1$，$(x+1)y=3$，$y=(x+1)^{-1}$ 等都不是反比例函数.


反比例函数的定义

拨考向▸ 利用反比例函数的定义识别反比例函数

例 1 下列函数中：

① $y=\sqrt{2}x^{-1}$；② $y=\frac{4}{x}$；③ $xy=8$；④ $y=\frac{4}{x}+1$；⑤ $y=\frac{3}{x-1}$；⑥ $y=\frac{x}{3}$；⑦ $y=-\frac{1}{2x}$；⑧ $y=\frac{a-2}{x}$（$a\neq 2$，且 a 为常数）.

其中，y 是 x 的反比例函数的有_____.（填写序号）

解题秘方： 紧扣反比例函数的定义及其“三种形式”进行识别.

解： ①即为 $y=\frac{\sqrt{2}}{x}$，是反比例函数；②是反比例函数；③即为 $y=\frac{8}{x}$，是反比例函数；④⑤不符合反比例函数的定义；⑥是正比例函数；⑦是反比例函数；⑧中，因为 $a\neq 2$，且 a 为常数，所以 $a-2$ 是不等于 0 的常数，所以该函数是反比例函数.

答案： ①②③⑦⑧

提分·必记

特别提醒

反比例函数的表达式 $y=\frac{k}{x}$ 中无论变量 x，y 怎样变化，k 的值始终等于 x 与 y 的乘积，因此人们习惯上称 k 为比例系数. 若 $k=0$，则 $y=\frac{k}{x}=0$ 恒成立，为一常数函数，失去了反比例函数 x，y 成反比例的意义，所以 $k\neq 0$

提分·秘诀

方法提醒

判断一个函数是不是反比例函数的方法：

1. 按照反比例函数的**定义**判断；
2. 看两个变量的关系是否符合反比例函数的**三种形式**中的一种.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 反比例函数的图象

1. 图象的画法（描点法）

（1）**列表**：先取一些自变量的值，在原点的两边取三对或三对以上互为相反数的值，如 1 和 −1，2 和 −2，3 和 −3 等．求 y 值时，只需计算原点一侧的函数值，另一侧的函数值可以随之得出．

（2）**描点**：根据表中提供的数据，即点的坐标，在平面直角坐标系中描出对 应的点．

（3）**连线**：用平滑的曲线顺次把这些点连起来并延伸，注意双曲线的两支是断开的，延伸部分有逐渐靠近坐标轴的趋势，但永远不与坐标轴相交．

2. 图象的特点

（1）反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象是双曲线．

（2）反比例函数图象的两支分别位于第一、第三象限或第二、第四象限．

（3）双曲线的两支都无限接近坐标轴，但永远不与坐标轴相交．

（4）双曲线既是中心对称图形（对称中心是原点），又是轴对称图形（对称轴是直线 $y=x$ 或直线 $y=-x$）．

示图（如图 17.4−1）．

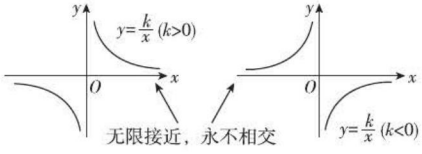


图 17.4−1

拔考向▶ 利用反比例函数图象的特点用描点法作图象

例 2 在同一平面直角坐标系中画出反比例函数 $y=\dfrac{5}{x}$ 和 $y=-\dfrac{5}{x}$ 的图象．

解题秘方：紧扣画图象的“一列、二描、三连”的步骤作图．

解：（1）列表．

x	…	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5	…
$y=\dfrac{5}{x}$	…	−1	$-\dfrac{5}{4}$	$-\dfrac{5}{3}$	$-\dfrac{5}{2}$	−5	5	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{5}{4}$	1	…
$y=-\dfrac{5}{x}$	…	1	$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{5}{2}$	5	−5	$-\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{5}{3}$	$-\dfrac{5}{4}$	−1	…

提分·必记

特别提醒

- 由于反比例函数图象的两个分支关于原点对称，所以只要画出它在一个象限内的分支，就可以对称地画出另一个分支．
- 画实际问题中的反比例函数的图象时，要考虑自变量取值范围的限制，一般地，实际问题的图象是反比例函数图象在第一象限内的一支或其中一部分．

提分·秘诀

技巧点拨

列表时，自变量的值可以以 0 为中心，在 0 的两边选择绝对值相等而符号相反的值，既可简化运算又便于描点；列表时，要尽量多取一些数据，多描一些点，方便连线．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）描点、连线得到如图 17.4−2 所示的图象．

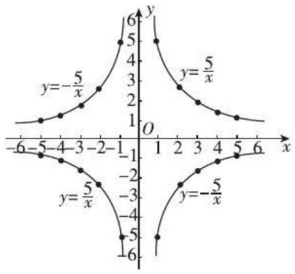


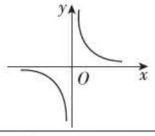
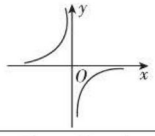
图 17.4−2

活学巧记

点越多，越精确，
平滑曲线把点过，
两个分支不能少，
对称关系很奇妙．

知识点 3 反比例函数的性质

反比例函数的性质主要研究它的图象的位置和函数值的增减情况，如下表所示．

反比例函数	$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$	
k 的符号	$k>0$	$k<0$
图象		
图象位置	第一、第三象限	第二、第四象限
增减性	在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小．	在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大．

提分·必记

特别提醒

在描述反比例函数的增减性时，必须指明是“在每一个象限内”．因为当 $k>0$（$k<0$）时，整个函数不是 y 随 x 的增大而减小（增大），而是函数在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小（增大），所以笼统地说“对于函数 $y=\frac{1}{x}$，y 随 x 的增大而减小”是错误的．

考向 利用反比例函数的性质解与求字母值有关的应用

例 3 已知反比例函数 $y=\frac{m^2}{x}(m\neq 0)$ 的图象过点 $(-3,-12)$，且反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第二、第四象限．

（1）求 m 的值；

（2）对于 $y=\frac{m}{x}$，当 $x>2$ 时，求 y 的取值范围．

解题秘方：紧扣“k 的符号、双曲线的位置、函数值的增减性三者相互依存，知一推二”这一规律解题．

解：（1）把点 $(-3,-12)$ 的坐标代入 $y=\frac{m^2}{x}$ 中，

得 $-12=\frac{m^2}{-3}$，$\therefore m^2=36$，$\therefore m=\pm 6$．

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第二、第四象限，

$\therefore m<0$．$\therefore m=-6$．

提分·秘诀

技巧点拨

由双曲线的位置可确定比例系数的正负，反之亦成立；实际上，在比例系数的正负、双曲线的位置、函数值的增减性这三者中，它们是“相互依存、知一推二”的关系．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）由 $m=-6$ 知反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∵ $x>2$，∴此部分图象在第四象限.

当 $x=2$ 时，$y=-\frac{6}{2}=-3$.

∵在第四象限内，y 随 x 的增大而增大，

∴当 $x>2$ 时，$-3<y<0$.

活学巧记

反比例函数两性质，
掌握性质要记清；
k 正图象在一三，
k 负图象在二四，
图象一三函数减，
图象二四函数增.

点知识▶4 建立反比例函数模型解实际问题

提分·必记

1. 在生活与生产中，如果某些问题的两个量成反比例关系，那么可以根据这种关系建立反比例函数模型，再利用反比例函数的有关知识解决实际问题.

运用反比例函数解决实际问题时常用的两种思路：

（1）通过问题提供的信息，明确变量之间的函数关系，设出相应的函数表达式，再根据题目条件确定函数表达式中的待定系数的值；

（2）已知反比例函数模型的表达式，运用反比例函数的图象及性质解决问题.

2. 求反比例函数表达式常用的两种方法：

（1）**待定系数法**：若题目提供的信息中明确此函数是反比例函数，则设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$），再求出 k 的值；

（2）**列方程法**：若题目所给的信息中两个变量之间的函数关系不明确，通常列出关于两个变量的方程，通过变形得到反比例函数表达式.

3. 用反比例函数解决实际问题的一般步骤：

（1）**审**：审清题意，找出题目中的常量、变量；

（2）**设**：根据常量、变量间的关系，设出函数表达式，待定的系数用字母表示；

（3）**列**：由题目中的已知条件列出方程，求出待定系数；

（4）**写**：写出函数表达式，并注意表达式中自变量的取值范围；

（5）**解**：用函数的图象和性质去解决实际问题.

特别提醒

利用反比例函数解决实际问题时应注意：
1. 要理清题目中的常量与变量及其基本数量关系，将实际问题抽象成数学问题，建立数学模型；
2. 要分清自变量和因变量，从便写出正确的函数表达式，结合问题的实际意义，确定自变量的取值范围；
3. 要熟练掌握反比例函数的意义、图象和性质，特别是图象，要做到数形结合，这样有利于分析和解决问题.

拔考向▶利用建立反比例函数模型解实际问题

题型 1：求反比例函数表达式在求值中的应用

例 4 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=3$ 时，$y=6$.

（1）写出 y 关于 x 的函数表达式；

（2）当 $x=-2$ 时，求 y 的值；

（3）若 $y=4.5$，求 x 的值.

解题秘方：紧扣反比例函数表达式用待定系数法求解.

提分·秘诀

解法提醒

已知 y 是 x 的反比例函数，即 x，y 满足表达式 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$），因此要求出此反比例函数表达式，只需求出 k 即可，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题意，设反比例函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$），把 $x=3$，$y=6$ 代入表达式，得 $6=\frac{k}{3}$，$k=3\times6=18$，所以 y 关于 x 的函数表达式是 $y=\frac{18}{x}$.

（2）把 $x=-2$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，得 $y=\frac{18}{-2}=-9$.

（3）把 $y=4.5$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，得 $4.5=\frac{18}{x}$，解得 $x=4$.

而求 k 的值，只需将 x，y 的一对对应值代入表达式就可求出.

题型 2：待定系数法求函数表达式在实际中的应用

例 5 一台印刷机每年可印刷的书本数量 y（万册）与它的使用时间 x（年）成反比例关系，当 $x=2$ 时，$y=20$，则 y 与 x 的函数图象大致是图 17.4-3 中的（　　）

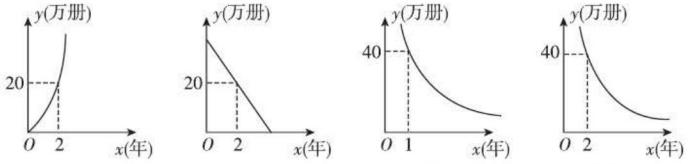


图 17.4-3

解题秘方：紧扣反比例函数的一般形式用待定系数法确定反比例函数表达式，并根据图象上点的坐标与函数表达式的关系确定图象.

解：设 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$），

∵当 $x=2$ 时，$y=20$，∴ $k=40$，∴ $y=\frac{40}{x}$（$x>0$）.

又当 $x=1$ 时，$y=40$，∴ y 与 x 的函数图象是双曲线的一支（在第一象限），且经过点（1，40）.

答案：C

另解

用排除法解.

∵由于 y 与 x 成反比例关系，

∴排除 A 和 B.

∵当 $x=2$ 时，$y=20$，

∴ $k=40$，若图象过点（2，40），则 $k=2\times40=80\neq40$，

∴排除 D，选 C.

知识储备

反比例函数的图象是双曲线，在实际问题中，反比例函数图象一般是双曲线的一支.

题型 3：列方程法求函数表达式在实际中的应用

例 6 某机床加工一批机器零件，如果每小时加工 30 个，那么 12 小时可以完成.

（1）设每小时加工 x 个零件，所需时间为 y 小时，写出 y 关于 x 的函数表达式；

（2）若要在一个工作日（8 小时）内完成，则每小时要比原来多加工几个零件？

解题秘方：紧扣工程问题中“工作总量与工作时间、工作效率”间的关系列方程，变形求出函数表达式.

知识储备

工程问题中的反比例函数关系：

工作总量 = 工作效率 × 工作时间，即当工作总量一定时，工作时间与工作效率成反比例.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题意得，$xy=30\times12=360$，

所以函数表达式为 $y=\dfrac{360}{x}$（$x>0$）.

（2）当 $y=8$ 时，代入得 $8=\dfrac{360}{x}$，

解得 $x=45$.

所以 $45-30=15$（个）.

所以若要在一个工作日（8 小时）内完成，则每小时要比原来多加工 15 个零件.

方法点拨

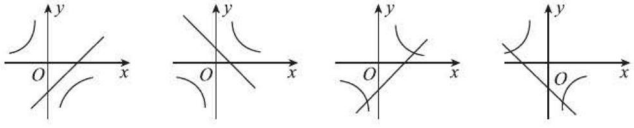
当实际问题中没有以明显的形式给出反比例函数关系时，可通过列方程的方法，经过变形求出反比例函数表达式，再解决其他相关问题.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用排除法解决一次函数与反比例函数的图象共存问题

挑战·高分

例 7 [中考·潍坊]已知一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\dfrac{a-b}{x}$，其中 $ab<0$，a,b 为常数，它们在同一坐标系中的图象可以是图 17.4-4 中的（　　）



A　　B　　C　　D

图 17.4-4

技巧点拨

判断多种函数图象共存问题的技巧

在判断函数图象共存问题时，可先选其中一个图象作为参考，然后判断另一个图象是否符合题意，另外还可以选取特殊点进行排除解题.

解题秘方：紧扣图象共存的意义，由一种图象成立推断另一种图象是否成立进行解答.

解：由一次函数图象过第一、三、四象限，得 $a>0$，$b<0$，满足 $ab<0$，∴ $a-b>0$，∴反比例函数 $y=\dfrac{a-b}{x}$ 的图象应在第一、三象限，故选项 A 不正确，选项 C 正确；

由一次函数图象过第一、二、四象限，得 $a<0$，$b>0$，满足 $ab<0$，∴ $a-b<0$，∴反比例函数 $y=\dfrac{a-b}{x}$ 的图象应在第二、四象限，故选项 B 不正确.

由一次函数图象过第二、三、四象限得 $a<0$，$b<0$，不满足 $ab<0$，故选项 D 不正确.

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用增减性法比较函数值的大小

例 8 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）的图象上有三点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$P_3(x_3, y_3)$，若 $x_1<x_2<0<x_3$，则下列结论正确的是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_1<y_3<y_2$

解题秘方：紧扣“反比例函数的增减性及不同象限的函数值的关系”比较大小.

解：因为 $k<0$，所以反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、第四象限，且在每个象限内，y 随 x 的增大而增大.

因为 $x_1<x_2<0$，所以 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 都在第二象限内，所以 $0<y_1<y_2$.

因为 $x_3>0$，所以 $P_3(x_3, y_3)$ 在第四象限内.

所以 $y_3<0$，所以 $y_3<y_1<y_2$.

答案：B

解题通法：利用反比例函数的增减性比较函数值大小的求解思路

比较反比例函数的函数值的大小时，在同一分支上的点可以通过比较其横坐标的大小来判断函数值的大小，不在同一分支上的点，依据与 x 轴的相对位置来进行函数值大小的比较. 另外，图象法和特殊值法也是解决此类问题的常用方法，图象法形象直观，特殊值法简单直接.

挑战·高分

另解

方法一　图象法

因为 $k<0$，所以反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、第四象限，如图 17.4-5 所示. 在图中描出符合条件的三个点，观察图象可知 $y_3<y_1<y_2$.

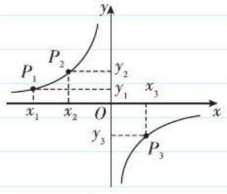


图 17.4-5

方法二　特殊值法

设该反比例函数表达式为 $y=-\frac{2}{x}$. 取满足 $x_1<x_2<0<x_3$ 的三个特殊值 $x_1=-2$，$x_2=-1$，$x_3=1$，则 $y_1=1$，$y_2=2$，$y_3=-2$，所以 $y_3<y_1<y_2$.

拔尖角度▸ 3 利用对称法求与对称点坐标有关的式子的值

例 9 如图 17.4-6 所示，直线 $y=kx$（$k<0$）与双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点，则 $3x_1y_2-8x_2y_1$ 的值为（　　）

A. -5　　B. -10　　C. 5　　D. 10

解题秘方：紧扣“反比例函数与正比例函数图象的交点关于原点对称”这一特征求解.

解：根据对称性，当正比例函数的图象和反比例函数的图象相交时，交点关于原点对称，而关于原点对称的两点的坐标分别为 (x, y) 和 $(-x, -y)$，

$\therefore x_1=-x_2$，$y_1=-y_2$.

又 $\because x_2y_2=-2$，

$\therefore 3x_1y_2-8x_2y_1=3\cdot(-x_2)\cdot y_2-8x_2\cdot(-y_2)=5x_2y_2=5\times(-2)=-10$.

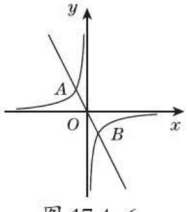


图 17.4-6

答案：B

挑战·高分

解法提醒

反比例函数的图象关于原点对称，正比例函数的图象关于原点对称，因此反比例函数的图象和正比例函数的图象相交时，其交点关于原点对称. 所以这两个交点的坐标分别为 (x, y) 和 $(-x, -y)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用分类验证法解反比例函数应用方案问题

挑战·高分

例 10 如图 17.4-7，科技小组准备用材料围建一个面积为 60 m^2 的长方形科技园 $ABCD$，其中一边 AB 靠墙，墙长为 12 m. 设 AD 的长为 x m，DC 的长为 y m.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）若围成的长方形科技园 $ABCD$ 的三边材料总长不超过 26 m，边 AD 和 DC 的长都是整数，求出满足条件的所有围建方案.

解题秘方：紧扣“几何相关性质、公式”建立模型，求反比例函数关系式；用“分类验证法”求围建方案.

解：（1）由题意，得 $xy=60$，即 $y=\frac{60}{x}$.

$\therefore$ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{60}{x}$.

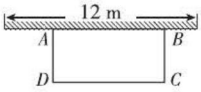


图 17.4-7

（2）$\because$ $y=\frac{60}{x}$，且 x，y 都是正整数，

$\therefore$ x 可取 1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60.

$\because$ $2x+y \leqslant 26$，$0 < y \leqslant 12$，

$\therefore$ 符合条件的有：$x=5$ 时，$y=12$；$x=6$ 时，$y=10$；$x=10$ 时，$y=6$.

$\therefore$ 满足条件的围建方案有：$AD=5$ m，$DC=12$ m 或 $AD=6$ m，$DC=10$ m 或 $AD=10$ m，$DC=6$ m.

思路点拨

根据几何公式确定反比例函数关系式的思路：

当问题中涉及几何图形时，可根据图形的面积公式或体积公式列出等式，通过变形得到反比例函数关系式，并运用其性质解决问题，但要注意自变量的取值范围.

特别提醒

避免因对 60 的所有因数列举不全而产生漏解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

与反比例函数有关的问题是中考的必考内容.（1）对于反比例函数的概念、性质的考查常以选择题和填空题为主；（2）求实际问题中的反比例函数关系、用待定系数法确定反比例函数关系式的题目常以解答题为主；（3）综合题中常有反比例函数与一次函数相结合的形式.

三年中考兵法

考法 1 利用反比例关系及自变量、函数值的范围解实际中图象应用问题

冲刺·满分

例 11 [中考·宜昌] 某学校要种植一块面积为 100 m^2 的长方形草坪，要求相邻两边长均不小于 5 m，则草坪的一边长 y（单位：m）随其邻边长 x（单位：m）的变化而变化的图象可能是图 17.4-8 中的（　　）

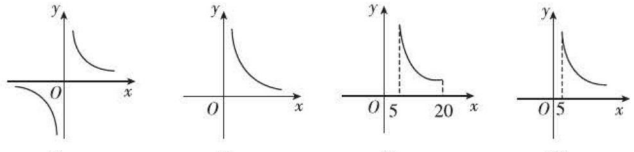


图 17.4-8

解法提醒

判定实际应用中的反比例函数图象要注意：

- 图象分支的个数；
- 图象分支中的端点的位置，即需求出自变量、函数值的范围；由 $x \geqslant 5$，$y \geqslant 5$ 及 $y=\frac{100}{x}$，可求出 $5 \leqslant x \leqslant 20$，$5 \leqslant y \leqslant 20$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查反比例函数的应用，根据反比例函数表达式确定 y 的取值范围，即可求得 x 的取值范围，熟练掌握实际问题中的反比例函数图象是解题的关键.

解：∵草坪面积为 100 m^2，∴ $y=\frac{100}{x}$.

∵相邻两边长均不小于 5 m，∴ $x\geqslant 5$，$y\geqslant 5$，则 $5\leqslant x\leqslant 20$.

答案：C

考法 2 利用反比例函数的性质与三角形的性质求待定系数的范围

例12 [中考·海南]如图 17.4-9，△ABC的三个顶点分别为$A(1,2)$，$B(4,2)$，$C(4,4)$. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$在第一象限内的图象与△ABC有交点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $1\leqslant k\leqslant 4$　　B. $2\leqslant k\leqslant 8$

C. $2\leqslant k\leqslant 16$　　D. $8\leqslant k\leqslant 16$

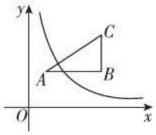


图 17.4-9

试题评析：本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数图象上点的坐标特点是解答此题的关键.

解：由题易知△ABC是直角三角形，

∴当反比例函数 $y=\frac{k}{x}$经过点 A 时 k 最小，经过点 C 时 k 最大，

∴ $k_{最小}=1\times 2=2$，$k_{最大}=4\times 4=16$，∴ $2\leqslant k\leqslant 16$.

答案：C

解法提醒

由于△ABC为直角三角形，且两直角边BC，AB分别与x轴，y轴垂直，所以△ABC边上所有点中，点A的横、纵坐标的积最小，点C的横、纵坐标的积最大.

考法 3 反比例函数与一次函数的综合问题

例13 [中考·遂宁]已知：如图 17.4-10，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象与一次函数 $y=x+b$ 的图象交于点 $A(1,4)$，点 $B(-4,n)$.

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）求△OAB的面积；

（3）直接写出一次函数值大于反比例函数值时自变量 x 的取值范围.

试题解析：本题主要考查反比例函数与一次函数的综合问题，正确运用交点坐标是解题的关键.

解：（1）把点 $A(1,4)$ 的坐标分别代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，一次函数 $y=x+b$，得 $\frac{k}{1}=4$，$1+b=4$.

解得 $k=4$，$b=3$.

∴反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$，

一次函数的表达式是 $y=x+3$.

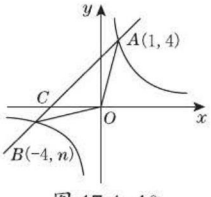


图 17.4-10

方法解读

求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法：

一般可采用**割补法**将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解，因为三角形一边在坐标轴上时，这边的长易求，这边上的高则为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值，所以求面积的实质就是求点的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）在 $y=x+3$ 中，当 $x=-4$ 时，$y=-1$，

$\therefore B(-4,-1)$.

设直线 AB 与 x 轴的交点为 C.

当 $y=0$ 时，$x+3=0$，$\therefore x=-3$. $\therefore C(-3,0)$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{15}{2}$.

（3）当 $x>1$ 或 $-4<x<0$ 时，

一次函数值大于反比例函数值.

方法解读

一次函数图象在反比例函数图象上方时 x 的取值范围就是使一次函数的函数值大于反比例函数的函数值的自变量的取值范围.

两年模拟兵法

☞答案见 258 页

1. [中考·凉山州]已知函数 $y=(m+1)\cdot x^{m^2-5}$ 是反比例函数，且图象在第二、四象限内，则 m 的值是（　　）

A. 2　　B. -2　　C. ±2　　D. $-\frac{1}{2}$

2. [中考·阜新]反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(3,-2)$，下列各点在图象上的是（　　）

A. $(-3,-2)$　　B. $(3,2)$

C. $(-2,-3)$　　D. $(-2,3)$

3. [中考·黑龙江]关于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列说法正确的是（　　）

A. 图象过（1，2）点

B. 图象在第一、三象限

C. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小

D. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

4. 若点 $A(-5,y_1)$，$B(-3,y_2)$，$C(2,y_3)$ 在反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_3<y_2$　　B. $y_1<y_2<y_3$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

5. [中考·黑龙江]已知反比例函数 $y=\frac{5}{x}$，当 $1<x\leqslant4$ 时，y 的最大整数值是（　　）

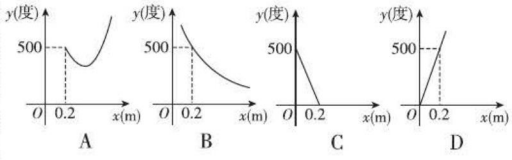
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

6. [月考·隆回县]某工厂现有原材料 100 吨，每天平均用去 x 吨，这批原材料能用 y 天，则 y 与 x 之间的函数表达式为（　　）

A. $y=100x$　　B. $y=\frac{100}{x}$

C. $y=\frac{x}{2}+100$　　D. $y=100-x$

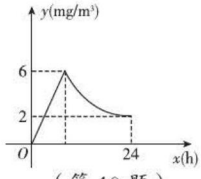
7. [模拟·和平区]科学证实：近视眼镜的度数 y（度）与镜片焦距 x（m）成反比例关系，如果 500 度近视镜片的焦距为 0.2m，则表示 y 与 x 函数关系的图象大致是（　　）



8. [中考·南京]已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-3,-1)$，则 $k=$_____.

9. [中考·上海]已知反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$（k 是常数，$k\neq1$）的图象有一支在第二象限，那么 k 的取值范围是_____.

10. 每年春季为预防流感，某校利用休息日对教室进行药熏消毒，已知药物燃烧过程及燃烧完后空气中的含药量 y（mg/m^3）与时间 x（h）之间的关系如图所示，根据消毒要求，空气中的含药量不低于 3 mg/m^3 且持续时间不能低于 10 h. 请你帮助计算一下，当空气中的含药量不低于 3 mg/m^3 时，持续时间可以达到_____h.



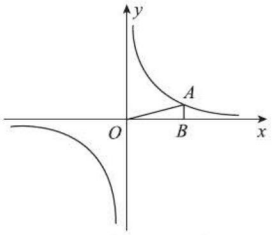
（第 10 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. [中考·常德]如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(4, m)$，$AB \perp x$ 轴，且 $\triangle AOB$ 的面积为 2.

（1）求 k 和 m 的值；

（2）若点 $C(x, y)$ 也在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，当 $-3 \leqslant x \leqslant -1$ 时，求函数值 y 的取值范围.

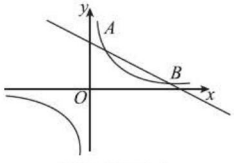


（第 11 题）

12. 如图，反比例函数 $y=\frac{m}{x}$（$m \neq 0$）的图象与一次函数 $y=kx+b$（$k \neq 0$）的图象交于 A，B 两点，点 A 的坐标为（2，6），点 B 的坐标为（n，1）.

（1）求反比例函数与一次函数的表达式；

（2）点 E 为 y 轴上一个动点，若 $S_{\triangle AEB}=5$，求点 E 的坐标. 【导学号：9877429】



（第 12 题）

13. 某地区上一年度每度电价格为 0.8 元，年用电量为 1 亿度，本年度计划将电价调到 0.55~0.75 元（不包括端点值）. 经测算，若电价调至 x 元，则本年度新增用电量 y（亿度）与（$x-0.4$）（元）成反比例，且当 $x=0.65$ 时，$y=0.8$.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式.

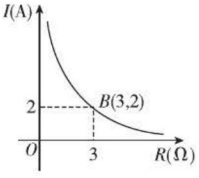
（2）若每度电的成本价为 0.3 元，当电价调至 0.72 元时，本年度电力部门的收益是多少元？[收益 = 用电量 ×（实际电价 − 成本价）]

14. 某闭合电路中，其电压恒定，电流 I（A）与电阻 R（Ω）成反比例函数关系，其图象如图所示，根据图象回答下列问题.

（1）写出电流 I 与电阻 R 之间的函数关系式；

（2）如果一个用电器的电阻为 5 Ω，其允许通过的最大电流是 1 A，那么这个用电器接在这个闭合电路中，会不会被烧毁？请说明理由；

（3）若允许通过的电流不超过 4 A，那么电阻 R 的取值应该控制在什么范围？



（第 14 题）

15. 某地计划用 120~180 天（含 120 与 180）的时间建设一项水利工程，工程需要运送的土石方总量为 360 万米^3.

（1）写出运输公司完成任务所需的时间 y（单位：天）与平均每天的工作量 x（单位：万米^3）之间的函数表达式，并给出自变量 x 的取值范围.

（2）由于工程进度的需要，实际平均每天运送土石方比原计划多 5 000 米^3，工期比原计划减少了 24 天，原计划和实际平均每天运送土石方各是多少万米^3？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.5 实践与探索

核心知识

- 一次函数与二元一次方程组
- 一次函数与一元一次方程
- 一次函数与一元一次不等式
- 实际问题中的近似函数关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一次函数与二元一次方程组

1. 一次函数与二元一次方程组的对应关系：

二元一次方程组 $\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$ 两个一次函数 $\overset{\text{对应}}{\Leftrightarrow}$ 两条直线；

二元一次方程组的解 $\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$ 两个一次函数值相等时的自变量值及函数值 $\overset{\text{即为}}{\Leftrightarrow}$ 两条直线的交点坐标.

2. 两直线交点个数与二元一次方程组解的个数的关系：

两条直线有交点（相交）⇔方程组只有一组解；

两条直线无交点（平行）⇔方程组无解；

两条直线是同一直线（重合）⇔方程组有无数组解.

3. 用图象法求二元一次方程组的解的一般步骤：

（1）**变函数**：把方程组 $\begin{cases}k_1x-y+b_1=0,\\k_2x-y+b_2=0\end{cases}$ 化为一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$；

（2）**画图象**：建立平面直角坐标系，画出两个一次函数的图象；

（3）**找交点**：由图象确定两直线交点的坐标；

（4）**写结论**：依据点的坐标写出方程组的解.

拔考向 利用一次函数与二元一次方程组的关系解相关应用

题型 1：图象法在解二元一次方程组中的应用

例 1 利用图象法解二元一次方程组：$\begin{cases}3x-y=2,\\x+y=2.\end{cases}$

解题秘方：紧扣“用图象法求二元一次方程组解的步骤”求解.

解：原方程组可转化为 $\begin{cases}y=3x-2,\\y=2-x.\end{cases}$

如图 17.5−1，在同一平面直角坐标系中分别画出函数 $y=3x-2$ 和函数 $y=2-x$ 的图象，

由图象知，两条直线交点的坐标为（1，1），

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

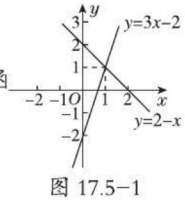


图 17.5−1

提分·必记

特别提醒

- 用图象法求出的二元一次方程组的解往往是近似值，而用解方程组的方法求出的解是准确值.
- 利用图象法求出的方程组的解是否准确，取决于所画的图象是否准确，判断图象法求方程组所得到的解是否准确，可以将得到的解代入方程组中进行检验，如果方程组中的两个方程同时成立，则得到的解是准确的.

提分·秘诀

技巧点拨

用图象法解二元一次方程组的基本方法：

1. 将方程组中的两个方程转化成一次函数 $y=kx+b$ 的形式；
2. 在同一直角坐标系中画出两函数的图象；
3. 利用图象的直观性确定交点坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：交点坐标的意义在求函数表达式中的应用

例 2 已知一次函数 $y=ax+2$ 与 $y=kx+b$ 的图象如图 17.5−2，两直线的交点为 A，且方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 点 B 为直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点，点 B 的坐标为（0，−1），请你确定这两个一次函数的表达式.

解题秘方：紧扣“交点坐标的意义”求解.

解：因为方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

所以交点 A 的坐标为（2，1），所以 $2a+2=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

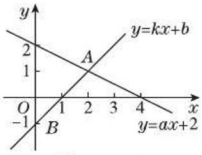


图 17.5−2

又因为函数 $y=kx+b$ 的图象过交点 A（2，1）和点 B（0，−1），

所以 $\begin{cases}2k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$

所以这两个一次函数的表达式分别为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，$y=x-1$.

解法提醒

此类问题的解题规律是明确方程组的解就是两条相应直线的交点坐标，再利用待定系数法求解. 本题中确定这两个函数的表达式的关键是确定 a,k,b 的值.

点知识 ▶ 2 一次函数与一元一次方程

1. 一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）与一元一次方程 $kx+b=0$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）的关系：

数：函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y=0$ 时自变量 x 的值是方程 $kx+b=0$ 的解.

形：函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标是方程 $kx+b=0$ 的解.

2. 一次函数图象法解一元一次方程的步骤：

（1）**转化**：将一元一次方程转化为一次函数；

（2）**画图象**：画出一次函数的图象；

（3）**找交点**：找出一次函数图象与 x 轴的交点，交点的横坐标即为一元一次方程的解.

提分·必记

特别提醒

- 求一次函数图象与 x 轴交点的横坐标的实质就是解一元一次方程；也就是说，“数”题可用“形”解，“形”题也可用“数”解.
- 对于一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$，k，b 为常数），已知 x 的值求 y 的值，或已知 y 的值求 x 的值时，就是把问题转化为关于 y 或 x 的一元一次方程来求解.

拔考向 ▶ 利用一次函数与一元一次方程的关系解与方程的解相关问题

题型 1：一次函数的图象在解一元一次方程中的应用

例 3 利用函数图象解方程 $3x-2=x+4$.

解题秘方：紧扣“一次函数图象法解一元一次方程的步骤”求解.

解：由 $3x-2=x+4$ 得 $2x-6=0$，

令 $y=2x-6$，画函数 $y=2x-6$ 的图象，如图 17.5−3 所示，

由图 17.5−3 可知，直线 $y=2x-6$ 与 x 轴的交点坐标为（3，0），所以 $x=3$.

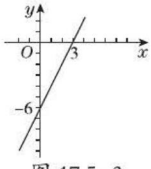


图 17.5−3

提分·秘诀

解法提醒

利用函数图象解一元一次方程时，一般需将方程变形为 $kx+b=0$（$k\neq 0$，k，b 为常数）的形式，然后令 $y=kx+b$ 并画出其图象，通过观察直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标确定方程的解，此求解方法对作图的准确性要求较高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：解一元一次方程在确定一次函数图象与坐标轴交点坐标中的应用

例 4 如图 17.5−4，一次函数 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$ 的图象过直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A，试确定 b 的值，并计算两条直线与 y 轴的交点 B，C 和点 A 构成的三角形的面积.

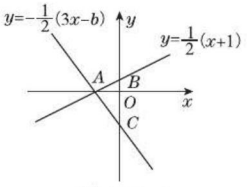


图 17.5−4

解题秘方：紧扣“一元一次方程和一次函数间的关系”求解.

解：对于直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$，设 $y=0$，则 $\frac{1}{2}(x+1)=0$，解得 $x=-1$.

因此直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A 的坐标是 $(-1,0)$.

把 $(-1,0)$ 代入函数表达式 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$，则 $-\frac{1}{2}\times[3\times(-1)-b]=0$. 解得 $b=-3$. 所以 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)=-\frac{1}{2}(3x+3)$.

直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 y 轴的交点 B 的坐标是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

直线 $y=-\frac{1}{2}(3x+3)$ 与 y 轴的交点 C 的坐标是 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，

因此 BC 的长度是 $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$.

又易知 $OA=1$，所以 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

解法提醒

- 一次函数的图象与坐标轴交点的坐标求法：令 $y=0$，解方程即得与 x 轴的交点的横坐标；令 $x=0$，解方程即得与 y 轴的交点的纵坐标.
- 同一坐标轴上两点的距离即是横坐标或者是纵坐标差的绝对值.

点知识 3 一次函数与一元一次不等式

1. **一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）与一元一次不等式 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$）（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的关系：**

数：函数 $y=kx+b$ 中，函数值 $y>0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集；函数值 $y<0$ 时自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

形：函数 $y=kx+b$ 的图象中，位于 x 轴上方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b>0$ 的解集；位于 x 轴下方的部分对应的自变量 x 的取值范围是不等式 $kx+b<0$ 的解集.

2. **拓展：**

直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与直线 $y_2=k_2x+b_2$ 的交点的横坐标即为方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$（或 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$）的解集就是直线 $y_1=k_1x+b_1$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2$ 上（或下）方部分对应的 x 的取值范围.

示例：如图 17.5−5 所示，方程 $k_1x+b_1=k_2x+b_2$ 的解为 $x=a$；不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2$ 的解集为 $x>a$；不等式 $k_1x+b_1<k_2x+b_2$ 的解集为 $x<a$.

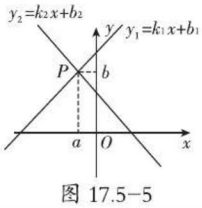


图 17.5−5

提分·必记

特别提醒

利用图象法解一元一次不等式的一般步骤：

1. 将不等式转化为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$（$a\neq0$）的形式；
2. 画出函数图象并确定函数图象与坐标轴的交点坐标；
3. 根据函数图象确定对应不等式的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技考向▶利用一次函数图象法解一元一次不等式

例5 如图 17.5−6，直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx+6$ 交于点 $P(3,5)$，则关于 x 的不等式 $x+b>kx+6$ 的解集是_____.

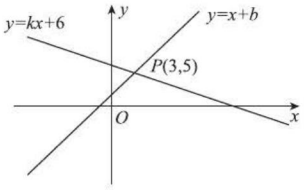


图 17.5−6

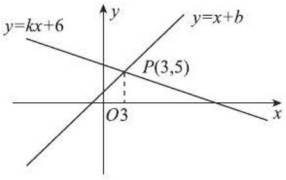


图 17.5−7

解题秘方：紧扣不等式的解集与一次函数图象之间的关系，从交点的左右两侧观察判断.

解：如图 17.5−7，过点 P 作 x 轴的垂线，与 x 轴的交点的横坐标为 3，所以函数 $y=x+b$ 的图象在函数 $y=kx+6$ 的图象上方部分所对应 x 的取值范围为 $x>3$，即不等式 $x+b>kx+6$ 的解集为 $x>3$.

答案：$x>3$

方法点拨：求不等式解集的方法

求解不等式的解集一般有两种方法：代数法和图象法. 在利用图象法求解不等式的解集时，准确画出函数的图象及把握两直线的位置关系是解题的关键.

提分·秘诀

另解

将点 $P(3,5)$ 的坐标代入 $y=x+b$，得 $3+b=5$，解得 $b=2$；

将点 $P(3,5)$ 的坐标代入 $y=kx+6$，得 $3k+6=5$，解得 $k=-\frac{1}{3}$，所以不等式为 $x+2>-\frac{1}{3}x+6$，解得 $x>3$.

点知识▶4 实际问题中的近似函数关系

现实生活中的数量关系是错综复杂的，在实践中得到一些变量的对应值，有时很难精确地判断它们有怎样的函数关系，需要我们根据经验分析，进行近似计算和修正，列出比较接近的函数表达式.

具体的做法：

（1）把实践中得到的一些变量的对应值作为点的坐标，在平面直角坐标系中描出各点；

（2）根据描出的点在平面直角坐标系中的位置和变化趋势等判断变量之间近似地符合哪一种函数关系；

（3）设出函数表达式，用待定系数法确定近似函数表达式.

提分·必记

特别解读

当由一些变量值无法判断函数类型时，通常先画图象，通过图象确定比较接近的函数关系.

技考向▶利用图象法确定近似函数关系的函数表达式

例6 随着我国人口增长速度的放缓，小学入学儿童的数量有所减少. 下表中的数据近似地呈现了某地区入学儿童人数的变化趋势，请你运用所学的函数知识，解决下列问题：

年份（x）	2010	2011	2012	2013	…
入学儿童人数（y）	2 520	2 329	2 140	1 951	…

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）求入学儿童人数 y（人）与年份 x（年）的函数关系式；

（2）利用所求的函数关系式，预测该地区从哪一年起入学儿童人数不超过 1 000.

解题秘方：紧扣函数的三种表示方式，由图象确定近似函数关系的函数类型，利用待定系数法确定函数关系式.

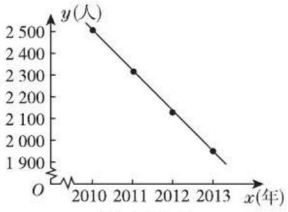


图 17.5-8

解：（1）将表中所给四对数据作为点的坐标在平面直角坐标系中描出相应的点，如图 17.5-8，观察点的位置，我们发现它们大致位于一条直线上，所以 y 与 x 近似地符合一次函数关系.

设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$）. 把 $x=2\,010$，$y=2\,520$ 和 $x=2\,012$，$y=2\,140$ 分别代入，

得$\begin{cases}2\,520=2\,010k+b,\\2\,140=2\,012k+b.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-190,\\b=384\,420.\end{cases}$

所以 $y=-190x+384\,420$（x 为正整数）.

经检验，其他两组 x,y 的值也基本符合 $y=-190x+384\,420$（x 为正整数）.

所以 y 与 x 的函数关系式是 $y=-190x+384\,420$（x 为正整数）.

（2）当 $y\leqslant 1\,000$ 时，$-190x+384\,420\leqslant 1\,000$，解得 $x\geqslant 2\,018$.

所以预测该地区从 2018 年起入学儿童人数不超过 1 000.

提分·秘诀

方法点拨

因为题目中没有指明 y 与 x 之间是哪种函数关系，所以我们要根据 x,y 的对应值在平面直角坐标系中描出相应点的位置来猜测其函数关系，并通过计算、检验说明猜想的正确性，从而得出 y 与 x 之间的函数关系式.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用图象法解含绝对值的二元一次方程组

例 7 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$.

（1）求直线 AB 对应的函数表达式；

（2）在直角坐标系中，画出函数 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图象，并根据图象写出方程组$\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

解题秘方：紧扣图象法解方程组的步骤求解.

解：（1）∵一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$，

$\therefore\begin{cases}-k+b=2,\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

故直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

利用图象法解决二元一次方程组相关问题的关键：

一是根据相关条件求出一次函数表达式；

二是结合所作的一次函数图象与二元一次方程组间的关系求解相关问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）作 $y=|x|$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的图象，如图 17.5−9 所示，

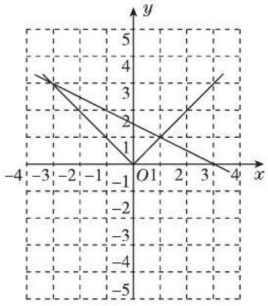


图 17.5−9

根据图象可得方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=-3,\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$

特别提醒

$y=|x|$ 的图象是一条折线.

拔尖角度 2 利用数形结合法解函数、方程、几何综合问题

挑战·高分

例 8 如图 17.5−10，直线 $y=kx-1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B，C 两点，且 $3OB-\frac{1}{2}OC=1$.

（1）求点 B 的坐标及 k 的值.

（2）若点 $A(x,y)$ 是直线 $y=kx-1$ 在第一象限内的一个动点. 在点 A 的运动过程中，试写出 $\triangle AOB$ 的面积 S 与 x 之间的函数表达式.

（3）探索：

①当点 A 运动到什么位置时，$\triangle AOB$ 的面积是 $\frac{1}{4}$？

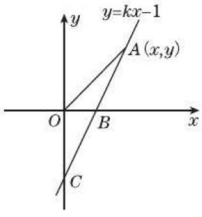


图 17.5−10

②在①成立的情况下，在两条坐标轴上是否存在一点 P，使 $\triangle POA$ 是等腰直角三角形？若存在，请写出满足条件的所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

思路点拨

1. 确定一次函数 $y=kx-1$ 的图象与 y 轴交点的坐标，根据线段 OB，OC 的长度关系，确定直线 $y=kx-1$ 与 x 轴交点的坐标进而求出 k 的值；
2. 运用三角形面积计算方法建立函数关系；
3. 根据 S 与 x 之间的函数表达式，确定点 A 的坐标，根据点 A 的坐标特征以及等腰直角三角形的判定，确定所有点 P 的坐标.

解题秘方：紧扣题中的数量关系结合直角坐标系中图象位置情况，用数形结合法求解.

解：（1）∵直线 $y=kx-1$ 与 y 轴相交于点 C，

∴点 C 的坐标是 $(0,-1)$，∴ $OC=1$.

∵ $3OB-\frac{1}{2}OC=1$，∴ $OB=\frac{1}{2}$，

∴点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

把点 B 的坐标 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 代入 $y=kx-1$，得 $k=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∵ $S=\frac{1}{2}OB\cdot y$，$y=2x-1$，

∴ $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(2x-1)$，∴ $S=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

（3）①当 $S=\frac{1}{4}$ 时，$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，解得 $x=1$.

∴ $y=2x-1=2\times1-1=1$.

∴当点 A 的坐标为（1，1）时，$\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{4}$.

②存在．满足条件的所有点 P 的坐标为（1，0），（2，0），（0，1），（0，2）.

特别提醒

如果没有点A在第一象限这个条件，那么(3)①中A点就不止一个；另外在(3)②中，要按OA为斜边、直角边两种情况进行分类，并分别向两侧作图，否则易产生漏解情况．

拔尖角度▶ 3 利用建模思想解决函数应用题

挑战·高分

题型1：省钱方案

例9 ［中考·襄阳］某社区活动中心为鼓励居民加强体育锻炼，准备购买10副某种品牌的羽毛球拍，每副球拍配 $x(x\geqslant2)$ 个羽毛球，供社区居民免费借用．该社区附近A，B两家超市都有这种品牌的羽毛球拍和羽毛球出售，且每副球拍的标价均为30元，每个羽毛球的标价均为3元，目前两家超市同时在做促销活动：

A超市：所有商品均打九折（按标价的90%）销售；

B超市：买一副羽毛球拍送2个羽毛球．

设在A超市购买羽毛球拍和羽毛球的费用为 y_A 元，在B超市购买羽毛球拍和羽毛球的费用为 y_B 元．请解答下列问题：

（1）分别写出 y_A 和 y_B 与 x 之间的函数表达式．

（2）若该活动中心只在一家超市购买，你认为在哪家超市购买更划算？

（3）若每副球拍配15个羽毛球，请你帮助该活动中心设计出最省钱的购买方案．

技巧点拨

解一次函数与方程、不等式综合实际应用问题的方法：

先读懂题意，理解题干的条件和各个问题的关系，并利用题目中的信息建立函数模型，根据函数值的大小关系，建立方程、不等式模型，

再分类讨论，确定不同情况下自变量的取值范围及对应的函数值范围，从而得出不同范围内的方案．

本例的解答运用了分类讨论思想，解答的关键是建立函数模型．

解题秘方：紧扣标价与打折间的数量关系建立一次函数表达式的模型，用方程、不等式进行分类讨论．

解：（1）由题意得 $y_A=(10\times30+10\times3x)\times0.9=27x+270(x\geqslant2)$，

$y_B=10\times30+10\times3(x-2)=30x+240(x\geqslant2)$.

（2）当 $y_A=y_B$ 时，$27x+270=30x+240$，得 $x=10$；

当 $y_A>y_B$ 时，$27x+270>30x+240$，得 $x<10$；

当 $y_A<y_B$ 时，$27x+270<30x+240$，得 $x>10$.

∴当 $2\leqslant x<10$ 时，在B超市购买更划算；

当 $x=10$ 时，在两家超市购买费用一样；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $x > 10$ 时，在 A 超市购买更划算.

（3）由题意，若“只在一家超市购买”，由于 $x=15 > 10$，则到 A 超市购买较省钱，此时 $y_A=27x+270=27\times15+270=675$.

注意本问中没有限制条件“只在一家超市购买”，因此先在 B 超市购买 10 副羽毛球拍，送 20 个羽毛球，然后在 A 超市购买剩下的羽毛球，需 $(10\times15-20)\times3\times0.9=351$（元），共需费用 $10\times30+351=651$（元）.

$\because 651 < 675$，

$\therefore$ 最省钱的方案是先在 B 超市购买 10 副羽毛球拍，送 20 个羽毛球，然后在 A 超市购买 130 个羽毛球.

题型 2：生产方案

例 10 [中考·佳木斯]为了推动“龙江经济带”建设，我省某蔬菜企业决定通过加大种植面积、增加种植种类，促进经济发展.2017 年春，预计种植西红柿、马铃薯、青椒共 100 公顷（三种蔬菜的种植面积均为整数），青椒的种植面积是西红柿种植面积的 2 倍，经预算，种植西红柿的利润可达 1 万元/公顷，青椒 1.5 万元/公顷，马铃薯 2 万元/公顷，设种植西红柿 x 公顷，总利润是 y 万元.

（1）求总利润 y（万元）与种植西红柿的面积 x（公顷）之间的关系式.

（2）若预计总利润不低于 180 万元，西红柿的种植面积不低于 8 公顷，有多少种种植方案?

（3）在（2）的前提下，该企业决定投资不超过获得最大利润的 $\frac{1}{8}$ 在冬季同时建造 A，B 两种类型的温室大棚，开辟新的经济增长点，经测算，投资 A 种类型的大棚 5 万元/个，B 种类型的大棚 8 万元/个，请直接写出有哪几种建造方案?

解题秘方：紧扣总利润与各部分利润之间的关系列函数关系式，结合方程、不等式求解.

解：（1）由题意得 $y=x+1.5\times2x+2(100-3x)=-2x+200$.

（2）由题意得 $-2x+200\geqslant180$，解得 $x\leqslant10$.

又 $x\geqslant8$，$\therefore 8\leqslant x\leqslant10$.

$\because x$ 为整数，$\therefore x$ 可取 8，9，10.

$\therefore$ 有三种种植方案.

方案一：种植西红柿 8 公顷、马铃薯 76 公顷、青椒 16 公顷.

方案二：种植西红柿 9 公顷、马铃薯 73 公顷、青椒 18 公顷.

方案三：种植西红柿 10 公顷、马铃薯 70 公顷、青椒 20 公顷.

（3）$\because y=-2x+200$，$-2<0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x=8$ 时，利润最大，最大利润为 184 万元.

特别提醒

本题涉及函数关系式与不等式(组)的关系，解决这类问题，先要把实际问题转化为一次函数问题，然后利用一次函数的增减性及自变量的取值范围来解决.当所列不等式是二元一次不等式时，可以通过对其中一个未知数取一个满足题意的自然数值代入不等式中，再解关于另一个未知数的一元一次不等式，并求出它的满足题意的自然数解，从而获得相应的方案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设投资 A 种类型的大棚 a 个，B 种类型的大棚 b 个，

由题意得 $5a+8b \leqslant \frac{1}{8} \times 184$,

$\therefore 5a+8b \leqslant 23$,

$\therefore a=1$，$b=1$ 或 2；$a=2$，$b=1$；$a=3$，$b=1$.

∴可以投资 A 种类型的大棚 1 个，B 种类型的大棚 1 个；

或投资 A 种类型的大棚 1 个，B 种类型的大棚 2 个；

或投资 A 种类型的大棚 2 个，B 种类型的大棚 1 个；

或投资 A 种类型的大棚 3 个，B 种类型的大棚 1 个.

特别警示

解答本题时，容易忽视“同时建造 A，B 两种类型的温室大棚”而产生不符合题意的建造方案：

$a=0$，$b=0$ 或 1 或 2；

$a=1$，$b=0$；

$a=2$，$b=0$；

$a=3$，$b=0$；

$a=4$，$b=0$.

题型 3：调运方案

例 11 某县区大力发展猕猴桃产业，预计今年 A 地将采摘 200 吨，B 地将采摘 300 吨. 若要将这些猕猴桃运到甲、乙两个冷藏仓库，已知甲仓库可储存 240 吨，乙仓库可储存 260 吨，从 A 地运往甲、乙两仓库的费用分别为每吨 20 元和 25 元，从 B 地运往甲、乙两仓库的费用分别为每吨 15 元和 18 元. 设从 A 地运往甲仓库的猕猴桃为 x 吨，A，B 两地运往两仓库的猕猴桃运输费用分别为 y_A 元和 y_B 元.

（1）分别求出 y_A，y_B 与 x 之间的函数关系式；

（2）试讨论 A，B 两地的运费哪个较少；

（3）考虑 B 地的经济承受能力，B 地的猕猴桃运费不得超过 4 830 元，在这种情况下，请问怎样调运才能使两地运费之和最少？求出最少运费.

解法提醒

当调运方案中涉及两个函数关系式时，要比较费用的大小，一般要分三种情况利用不等式或方程讨论求解；而要求得最省钱调运方案时，一般先根据数量之间的关系建立函数，然后利用一次函数的增减性确定出符合要求的最佳方案.

解题秘方：紧扣“调运过程中费用间的关系”列出一次函数关系式，用比较法求解.

解：（1）由题意得，从 A 地运往乙仓库的猕猴桃为（200−x）吨，从 B 地运往甲仓库的猕猴桃为（240−x）吨，从 B 地运往乙仓库的猕猴桃为（60+x）吨. 则 $y_A=20x+25(200-x)=-5x+5\,000$，$y_B=15(240-x)+18(60+x)=3x+4\,680$.

（2）因为 $y_A-y_B=(-5x+5\,000)-(3x+4\,680)=-8x+320$，

所以当 $-8x+320>0$，即 $x<40$ 时，B 地的运费较少；

当 $-8x+320=0$，即 $x=40$ 时，两地的运费一样多；

当 $-8x+320<0$，即 $x>40$ 时，A 地的运费较少.

技巧点拨

求解调运方案问题，常借助表格来分析问题，如本题，调运情况如下表.

	甲	乙	总计
A	x 吨	（200−x）吨	200 吨
B	（240−x）吨	（60+x）吨	300 吨
总计	240 吨	260 吨	500 吨

（3）设两地运费之和为 W 元，

则 $W=y_A+y_B=(-5x+5\,000)+(3x+4\,680)=-2x+9\,680$，由 $3x+4\,680 \leqslant 4\,830$，解得 $x \leqslant 50$，所以 W 的最小值为 $-2\times50+9\,680=9\,580$. 故当 A 地运往甲、乙两仓库的猕猴桃分别为 50 吨、150 吨，B 地运往甲、乙两仓库的猕猴桃分别为 190 吨、110 吨时，才能使两地运费之和最少，最少运费是 9 580 元.

特别警示

由 $W=-2x+9\,680$ 可知，W 随 x 的增大而减小，切忌忽略第（3）问对 x 取值范围的限制，认为 $x=200$ 时满足题意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 4：支付方案

例 12 某公司推销一种产品，设 x（件）是推销产品的数量，y（元）是付给推销员的推销费，图 17.5-11 表示公司每月付给推销员的推销费的两种方案，根据图象解答下列问题．

（1）分别求 y_1，y_2 关于 x 的函数表达式．

（2）解释图中表示的两种方案是如何付推销费的？

（3）如果你是推销员，应如何选择付费方案？

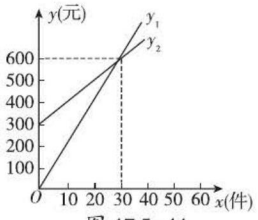


图 17.5-11

解题秘方：从图象中获取求函数表达式的信息并通过图象信息选择付费方案．

解：（1）设这两个函数的表达式分别为 $y_1=k_1x$（$k_1\neq 0$），$y_2=k_2x+b$（$k_2\neq 0$）．

由 y_1 关于 x 的函数图象经过点（30，600），得 $600=30k_1$，解得 $k_1=20$，所以 y_1 关于 x 的函数表达式为 $y_1=20x$（$x\geqslant 0$）．

由 y_2 关于 x 的函数图象经过点（0，300），点（30，600），得 $b=300$，$600=30k_2+b$，解得 $k_2=10$，所以 y_2 关于 x 的函数表达式为 $y_2=10x+300$（$x\geqslant 0$）．

（2）y_1 的付费方案是不推销产品没有推销费，每推销 10 件产品得推销费 200 元；y_2 的付费方案是保底工资 300 元，每推销 10 件产品再得推销费 100 元．

（3）如果业务能力强，平均每月能保证推销多于 30 件产品，那么选择 y_1 的付费方案，否则，选择 y_2 的付费方案．

题型 5：销售方案

例 13 某商店销售 10 台 A 型和 20 台 B 型电脑的利润为 4 000 元，销售 20 台 A 型和 10 台 B 型电脑的利润为 3 500 元．

（1）求每台 A 型电脑和 B 型电脑的销售利润；

（2）该商店计划一次购进两种型号的电脑共 100 台，其中 B 型电脑的进货量不超过 A 型电脑的 2 倍．设购进 A 型电脑 x 台，这 100 台电脑的销售总利润为 y 元．

①求 y 关于 x 的函数关系式；

②该商店购进 A 型、B 型电脑各多少台，才能使销售总利润最大？

（3）实际进货时，厂家对 A 型电脑出厂价下调 m（$0<m<100$）元，且限定商店最多购进 A 型电脑 70 台．若商店保持两种电脑的售价不变，请你根据以上信息及（2）中的条件，设计出使这 100 台电脑销售总利润最大的进货方案．

思路点拨

1. 由待定系数法结合特殊点求解即可；
2. 根据两直线与 y 轴的交点，结合实际进行分析；
3. 根据业务能力，结合(2)中两种方案的付费方式进行解答．

解法提醒

在商品经营活动中，经常会遇到求最大利润、最大销量等问题，解此类问题的关键是通过题意，确定出函数的关系式，然后根据函数的增减性确定其最大值，且要注意自变量的取值范围和问题的实际意义．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：从列方程组求方程组解中获取求一次函数关系式的数据，并根据一次函数的信息求方案.

解：（1）设每台A型电脑的销售利润为a元，每台B型电脑的销售利润为b元，则有$\begin{cases}10a+20b=4\,000,\\20a+10b=3\,500,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=100,\\b=150.\end{cases}$

即每台A型电脑的销售利润为100元，每台B型电脑的销售利润为150元.

（2）①根据题意得$y=100x+150(100-x)$，即$y=-50x+15\,000$.

②根据题意得$100-x\leqslant 2x$，解得$x\geqslant 33\frac{1}{3}$.

$\because y=-50x+15\,000$中，$-50<0$，$\therefore y$随x的增大而减小.

$\because x$为正整数，

$\therefore$当$x=34$时，y取得最大值，此时$100-x=66$. 即商店购进A型电脑34台，B型电脑66台，才能使销售总利润最大.

（3）根据题意得$y=(100+m)x+150(100-x)$.

即$y=(m-50)x+15\,000\left(33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 70\right)$.

当$0<m<50$时，$m-50<0$，y随x的增大而减小.

$\therefore$当$x=34$时，y取得最大值.

即商店购进34台A型电脑和66台B型电脑才能获得最大利润；

当$m=50$时，$m-50=0$，$y=15\,000$.

即商店购进A型电脑数量满足$33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 70$的整数时，获得利润都相同；

当$50<m<100$时，$m-50>0$，y随x的增大而增大.

$\therefore$当$x=70$时，y取得最大值.

即商店购进70台A型电脑和30台B型电脑才能获得最大利润.

详解

根据“销售10台A型和20台B型电脑的利润为4 000元”可得$10a+20b=4\,000$；“销售20台A型和10台B型电脑的利润为3 500元”可得$20a+10b=3\,500$.

详解

$y=(100+m)x+150(100-x)$
$=(100+m)x+15\,000-150x$
$=(100+m-150)x+15\,000$
$=(m-50)x+15\,000$.

特别警示

本题(3)中，容易忽视一次函数随m值变化，其增减性也发生变化，不会利用分类讨论求解而产生错误.

题型6：利润方案

例14 [中考·郴州]某工厂有甲种原料130kg，乙种原料144kg，现用这两种原料生产出A，B两种产品共30件，已知生产每件A产品需甲种原料5kg，乙种原料4kg，且每件A产品可获利700元；生产每件B产品需甲种原料3kg，乙种原料6kg，且每件B产品可获利900元，设生产A产品x件（产品件数为整数），根据以上信息解答下列问题：

（1）生产A，B两种产品的方案有哪几种？

（2）设生产这30件产品可获利y元，写出y关于x的函数表达式，写出（1）中利润最大的方案，并求出最大利润.

解题秘方：从列不等式组求其解集中获取数据制定方案；由函数的增

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

减性确定利润最大的方案.

解：（1）由30件产品中有x件A产品，知B产品有（$30-x$）件，

由题意可得$\begin{cases}5x+3(30-x)\leqslant 130,\\4x+6(30-x)\leqslant 144,\end{cases}$

解得$18\leqslant x\leqslant 20$.

∵产品件数为整数，∴$x=18$或$x=19$或$x=20$，

∴生产A，B两种产品的方案有如下三种：

方案一：A产品18件，B产品12件；

方案二：A产品19件，B产品11件；

方案三：A产品20件，B产品10件.

（2）由题意可得$y=700x+900(30-x)=-200x+27\,000$，

∵$-200<0$，∴y随x的增大而减小，

又$18\leqslant x\leqslant 20$，∴当$x=18$时，$y$有最大值，

$y_{最大}=-200\times 18+27\,000=23\,400$.

答：（1）中利润最大的是方案一，即：A产品18件，B产品12件，最大利润为23 400元.

解法提醒

利用方程(组)、不等式(组)求解方案类问题的策略：

求解方案类问题时，应先正确建立函数模型，确定自变量的取值范围，然后可利用函数的性质求最大（小）值；或计算出各种方案的值进行大小比较，注意自变量的整数取值问题.

题型7：双函数的应用问题

例15 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个程序，即需要将材料煅烧到800℃，然后停止煅烧进行锻造操作.如图17.5-12所示，煅烧时，温度y（℃）与时间x（min）成一次函数关系；锻造时，温度y（℃）与时间x（min）成反比例函数关系，已知该材料初始温度是32℃，第8min时，材料温度降为600℃.

（1）分别求出材料煅烧和锻造时y与x的函数关系式，并且写出自变量x的取值范围；

（2）根据工艺要求，锻造期间当材料温度低于480℃时，须停止操作，那么锻造的操作时间有多长？

解题秘方：（1）根据点C的坐标可求得锻造阶段的函数关系式，进而可确定点B的坐标，根据点A，B的坐标可求得线段AB所在直线的函数关系式；

（2）求当材料温度为480℃时的时间与最高温度时的时间的差.

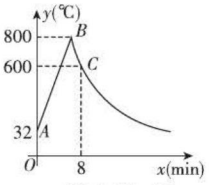


图17.5-12

解：（1）设锻造时的函数关系式为$y=\dfrac{k}{x}$，

则$600=\dfrac{k}{8}$，∴$k=4\,800$，∴$y=\dfrac{4\,800}{x}$.

当$y=800$时，$x=6$.

∴锻造时的函数关系式为$y=\dfrac{4\,800}{x}(x\geqslant 6)$，点$B$的坐标为$(6,\ 800)$.

解法提醒

反比例函数与其他函数的综合，往往涉及函数关系式的求解、交点坐标以及面积等问题，在解决此类问题时，要注意以下几点：

- 对于特殊的点，如两个函数图象的交点、函数图象与坐标轴的交点等，通常需要先求出交点坐标；
- 反比例函数与一次函数相关的问题，通常要先求出反比例函数的关系式，然后利用其关系式求出特殊点的坐标，进而求出一次函数的关系式，再利用它们的性质解决相关问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设煅烧时的函数关系式为 $y=ax+b$，

则 $\begin{cases}b=32,\\6a+b=800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=128,\\b=32.\end{cases}$

∴煅烧时的函数关系式为 $y=128x+32$（$0\leqslant x<6$）.

（2）在 $y=\dfrac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$）中，当 $y=480$ 时，$x=\dfrac{4\,800}{480}=10$，

$10-6=4$（min）. ∴锻造的操作时间有 4 min.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的考点主要是利用一次函数的图象解方程（组）或不等式，它体现了用函数的观点看待方程（组）或不等式的思想，对该思想的考查近年来在中考中有所加强，尤其是实际应用问题，背景新颖，主要考查利用一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式的关系解决实际问题，难度中等偏上.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用一次函数的交点坐标解不等式

例 16 [中考·菏泽]如图 17.5-13，函数 $y_1=-2x$ 与 $y_2=ax+3$ 的图象相交于点 $A(m,2)$，则关于 x 的不等式 $-2x>ax+3$ 的解集是(　　)

A. $x>2$　　B. $x<2$　　C. $x>-1$　　D. $x<-1$

试题评析：此题主要考查了一次函数与一元一次不等式，关键是求出 A 点坐标.

解：∵函数 $y_1=-2x$ 过点 $A(m,2)$，

∴ $-2m=2$，解得 $m=-1$. ∴ $A(-1,2)$.

∴不等式 $-2x>ax+3$ 的解集为 $x<-1$.

答案：D

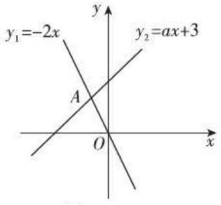


图 17.5-13

思路点拨

首先利用待定系数法求出 A 点坐标，再从交点为分界，结合图象写出不等式 $-2x>ax+3$ 的解集即可.

考法 2 利用解二元一次方程组解两直线的交点坐标问题

例 17 [中考·陕西]如图 17.5-14，已知直线 l_1：$y=-2x+4$ 与直线 l_2：$y=kx+b$（$k\neq 0$）在第一象限交于点 M，若直线 l_2 与 x 轴的交点为 $A(-2,0)$，则 k 的取值范围是(　　)

A. $-2<k<2$　　B. $-2<k<0$　　C. $0<k<4$　　D. $0<k<2$

试题评析：此题主要考查了两条直线的相交问题，以及一次函数图象的点的特征，要熟练掌握.

解：∵直线 l_2 与 x 轴的交点为 $A(-2,0)$，

∴ $-2k+b=0$. ∴ $b=2k$.

∴ $\begin{cases}y=-2x+4,\\y=kx+2k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4-2k}{k+2},\\y=\dfrac{8k}{k+2}.\end{cases}$

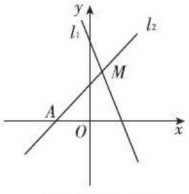


图 17.5-14

思路点拨

首先根据直线 l_2 与 x 轴的交点为 A(-2, 0)，求出 k、b 的关系；然后求出直线 l_1、直线 l_2 的交点坐标，根据直线 l_1、直线 l_2 的交点的横坐标、纵坐标都大于 0，求出 k 的取值范围即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵直线 l_1：$y=-2x+4$ 与直线 l_2：$y=kx+b$（$k\neq0$）的交点在第一象限，

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{4-2k}{k+2}>0,\\ \dfrac{8k}{k+2}>0,\end{cases}$$ 解得 $0<k<2$.

答案：D

考法 3 利用解方程（组）解一次函数的实际应用

例 18 ［中考·衡阳］为响应绿色出行号召，越来越多市民选择租用共享单车出行，已知某共享单车公司为市民提供了手机支付和会员卡支付两种方式，如图 17.5-15 描述了两种方式应支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）之间的函数关系，根据图象回答下列问题：

（1）求手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式；

（2）李老师经常骑行共享单车，请根据不同骑行时间帮他确定选择哪种支付方式比较合算.

试题评析：本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，求出相应的函数关系式，利用数形结合的思想和一次函数的性质解答，这是一道典型的方案选择问题.

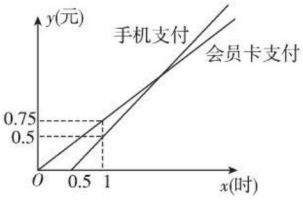


图 17.5-15

解：（1）当 $0\leqslant x<0.5$ 时，$y=0$.

当 $x\geqslant0.5$ 时，设手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式是 $y=kx+b$（$k\neq0$），

由图象可得$\begin{cases}0.5k+b=0,\\ 1\times k+b=0.5,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\ b=-0.5.\end{cases}$

即当 $x\geqslant0.5$ 时，手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式是 $y=x-0.5$.

由上可得，手机支付金额 y（元）与骑行时间 x（时）的函数关系式是

$$y=\begin{cases}0\ (0\leqslant x<0.5),\\ x-0.5\ (x\geqslant0.5).\end{cases}$$

（2）设会员卡支付对应的函数关系式为 $y=ax$，

则 $0.75=a\times1$，解得 $a=0.75$，

即会员卡支付对应的函数关系式为 $y=0.75x$.

令 $0.75x=x-0.5$，解得 $x=2$.

由图象可知，当 $0\leqslant x<2$ 时，李老师选择手机支付方式比较合算，

当 $x=2$ 时，李老师选择两种支付方式一样，

当 $x>2$ 时，李老师选择会员卡支付方式比较合算.

解法提醒

求解一次函数应用于最优方案问题，一般先利用条件求出函数的关系式，再根据条件借助不等式或图象分类讨论.

技巧点拨

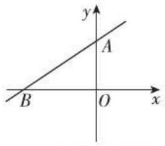
结合图象求解实际最优方案问题时，求出函数图象交点是常用的技巧，也是分析很多问题的桥梁.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

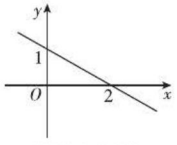
1. [中考·桂林]如图，直线 $y=ax+b$ 过点 $A(0,2)$ 和点 $B(-3,0)$，则方程 $ax+b=0$ 的解是（　　）

A. $x=2$　　B. $x=0$

C. $x=-1$　　D. $x=-3$



（第1题）



（第2题）

2. [中考·乌鲁木齐]一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的图象如图所示，则不等式 $kx+b>0$ 的解集是（　　）

A. $x<2$　　B. $x<0$

C. $x>0$　　D. $x>2$

3. [期末·泰兴市]一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）中变量 x 与 y 的部份对应值如下表：

x	…	−1	0	1	2	3	…
y	…	8	6	4	2	0	…

下列结论：

① y 随 x 的增大而减小；

② $x=2$ 是方程 $(k-1)x+b=0$ 的解；

③当 $x<2$ 时，$(k-1)x+b<0$.

其中正确的个数为（　　）

A.0　　B.1

C.2　　D.3

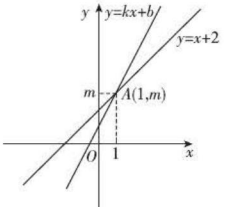
4. [期末·宝丰县]用图象法解关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}kx-y+b=0\\x-y+2=0\end{cases}$ 时，小英所画图象如图所示，则方程组的解为（　　）

A. $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

B. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=1\\y=2.5\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

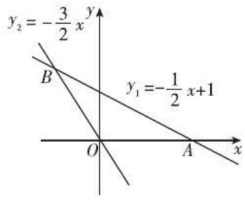


（第4题）

5. [中考·曲靖]如图，已知直线 $y_1=-\frac{1}{2}x+1$ 与 x 轴交于点 A，与直线 $y_2=-\frac{3}{2}x$ 交于点 B.

（1）求△AOB 的面积；

（2）求 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围.

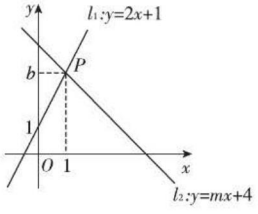


（第5题）

6. [中考·台州]如图，直线 l_1：$y=2x+1$ 与直线 l_2：$y=mx+4$ 相交于点 $P(1,b)$.

（1）求 b，m 的值；

（2）垂直于 x 轴的直线 $x=a$ 与直线 l_1，l_2 分别交于点 C，D，若线段 CD 长为2，求 a 的值.



（第6题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 已知在平面直角坐标系中，直线 l_1 对应的函数表达式为 $y=2x-1$，直线 l_2 过原点且与直线 l_1 交于点 $P(-2, a)$.

(1) 试求 a 的值.

(2) 点 $P(-2, a)$ 的横、纵坐标可以看成是哪个二元一次方程组的解?

(3) 设直线 l_1 与 x 轴交于点 A，你能求出 $\triangle APO$ 的面积吗? 试试看.

(4) 在直线 l_1 上是否存在点 M，使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等? 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

8. [中考·莱芜]某网店销售甲、乙两种防雾霾口罩，已知甲种口罩每袋的售价比乙种口罩多 5 元，小丽从该网店网购 2 袋甲种口罩和 3 袋乙种口罩共花费 110 元.

(1) 该网店甲、乙两种口罩每袋的售价各多少元?

(2) 根据消费者需求，网店决定用不超过 10 000 元购进甲、乙两种口罩共 500 袋，且甲种口罩的数量大于乙种口罩的 $\frac{4}{5}$，已知甲种口罩每袋的进价为 22.4 元，乙种口罩每袋的进价为 18 元，请你帮助网店计算有几种进货方案? 若使网店获利最大，应该购进甲、乙两种口罩各多少袋，最大获利多少元?

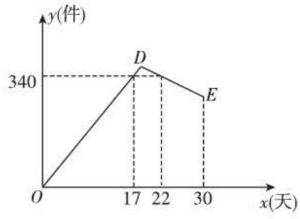
9. [中考·咸宁]某公司开发出一款新的节能产品，该产品的成本价为 6 元/件，该产品在正式投放市场前通过代销点进行了为期一个月(30 天)的试销售，售价为 8 元/件，工作人员对销售情况进行了跟踪记录，并将记录情况绘成图象，图中的折线 ODE 表示日销售量 y(件)与销售时间 x(天)之间的函数关系，已知线段 DE 表示的函数关系中，时间每增加 1 天，日销售量减少 5 件.

(1) 第 24 天的日销售量是_____件，日销售利润是_____元.

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围;

(3) 日销售利润不低于 640 元的天数共有多少天? 试销售期间，日销售最大利润是多少元?

【导学号：9877429】



(第 9 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一次函数表达式的常见题型

荣老师告诉你 表达式是函数三种表示方法中最常用的方法，求函数表达式也是函数问题中的重要问题，下面将求一次函数的表达式几种常见类型归纳如下：

题型一 定义型

例 1 已知函数 $y=(m-3)x^{m^2-8}+3$ 是一次函数，求其表达式.

解题秘方：根据一次函数的定义，自变量的指数为 1，系数不等于 0，求出待定字母的值.

解：由一次函数定义知$\begin{cases}m^2-8=1,\\ m-3\neq 0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m=\pm 3,\\ m\neq 3.\end{cases}$

$\therefore m=-3.$

故一次函数的表达式为 $y=-6x+3$.

方法点拨：利用一次函数的定义中自变量的指数要求可以求出待定字母的值，当系数也含有待定字母时，取值的时候要考虑系数不能为零.

题型二 一点型

例 2 已知一次函数 $y=kx-3$ 的图象过点 $(2,-1)$，求这个函数的表达式.

解题秘方：直接将 $x=2$，$y=-1$ 代入表达式中求出待定的字母 k 的值即可.

解：∵一次函数 $y=kx-3$ 的图象过点 $(2,-1)$，

$\therefore -1=2k-3$，即 $k=1$.

故这个一次函数的表达式为 $y=x-3$.

题型三 两点型

例 3 已知某个一次函数的图象与 x 轴、y 轴的交点坐标分别是 $(-2,0)$，$(0,4)$，求这个函数的表达式.

解题秘方：先用待定系数法设出一次函数的表达式，然后将两个点的坐标代入即可.

解：设一次函数的表达式为 $y=kx+b$，

由题意得$\begin{cases}0=-2k+b,\\ b=4,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}k=2,\\ b=4.\end{cases}$

故这个一次函数的表达式为 $y=2x+4$.

题型四 图象型

例 4 已知某个一次函数的图象如图 1 所示，求这个函数的表达式.

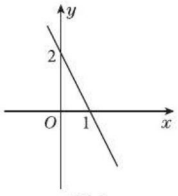


图 1

解题秘方：点的坐标是通过图象标出的，直接观察图象可知，图象上两个点的坐标为 $(1,0)$ 和 $(0,2)$. 然后利用例 3 的方法步骤解决.

解：设一次函数的表达式为 $y=kx+b$，

由图 17−1 可知一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $(1,0)$，$(0,2)$，

$\therefore\begin{cases}0=k+b,\\ 2=0+b\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}k=-2,\\ b=2.\end{cases}$

故这个一次函数的表达式为 $y=-2x+2$.

题型五 平行型

例 5 已知直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，且与 y 轴相交于点 $(0,2)$，求直线的函数表达式.

解题秘方：先根据与直线 $y=-2x$ 平行确定 k 的值，再根据直线与 y 轴的交点坐标确定 b 的值.

解：∵直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=-2x$ 平行，

$\therefore k=-2$.

又∵直线 $y=kx+b$ 与 y 轴相交于点 $(0,2)$，

$\therefore b=2$.

故直线的函数表达式为 $y=-2x+2$.

方法点拨：两条直线 l_1：$y=k_1x+b_1$；l_2：$y=k_2x+b_2$. 当 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$ 时，$l_1\parallel l_2$. 直线与 y 轴交点的纵坐标就是函数表达式中 b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型六 ▶ 平移型

例6 把直线 $y=2x+1$ 先向右平移 2 个单位，再向下平移 2 个单位得到的图象对应的函数表达式为_____.

解题秘方：直线左右平移时，图象上所有点的横坐标发生变化，但纵坐标不变；直线上下平移时，图象上所有点的横坐标不变，但纵坐标发生变化.

解：先将直线 $y=2x+1$ 向右平移 2 个单位，则所有点的横坐标都增加 2，纵坐标不变，即表达式为 $y=2(x-2)+1$；再将直线向下平移 2 个单位，则所有点的横坐标都不变，纵坐标都减小 2，即表达式为 $y=2(x-2)+1-2$，所以表达式为 $y=2x-5$.

答案：$y=2x-5$

题型七 ▶ 实际应用型

例7 某油箱中存油 20 升，油从管道中匀速流出，流速为 0.2 升/分钟，则油箱中剩油量 Q（升）与流出时间 t（分钟）的函数关系式为_____.

解题秘方：由题意得 $Q=20-0.2t$，即 $Q=-0.2t+20$，

$\because 0\leqslant Q\leqslant 20$，$\therefore 0\leqslant t\leqslant 100$.

故所求函数的关系式为 $Q=-0.2t+20$ $(0\leqslant t\leqslant 100)$.

答案：$Q=-0.2t+20$ $(0\leqslant t\leqslant 100)$

方法点拨：在实际问题中列函数关系式，关键就是抓住两个变量之间的等量关系. 求实际应用型问题的函数关系式要写出自变量的取值范围.

题型八 ▶ 面积型

例8 已知直线 $y=kx-4$ 与两坐标轴所围成的三角形面积等于 4，则直线的函数表达式为_____.

解：易求得直线与 x 轴交点为 $\left(\frac{4}{k},0\right)$，与 y 轴交点为 $(0,-4)$，所以 $4=\frac{4}{|k|}\times 4\times\frac{1}{2}$，所以 $|k|=2$，即 $k=\pm 2$，故直线的函数表达式为 $y=2x-4$ 或 $y=-2x-4$.

答案：$y=2x-4$ 或 $y=-2x-4$

方法点拨：直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,b)$，但表示线段长时，若不知 k，b 的正负性，则必须带上绝对值，以保证线段的长度为正.

题型九 ▶ 对称型

例9 若直线 l 与直线 $y=2x-1$ 关于 y 轴对称，则直线 l 的函数表达式为_____.

解题秘方：先在直线 $y=2x-1$ 上任意取两个点的坐标，然后求出这两个点关于 y 轴的对称点的坐标，然后利用“两点型”求表达式.

解：直线 $y=2x-1$ 经过 $(1,1)$ 和 $(0,-1)$ 这两个点，这两个点关于 y 轴的对称点为 $(-1,1)$ 和 $(0,-1)$，

设直线 l 的函数表达式为 $y=kx+b$，

易知直线 l 过点 $(-1,1)$ 和点 $(0,-1)$，

$$\therefore\begin{cases}-k+b=1,\\ b=-1,\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}k=-2,\\ b=-1.\end{cases}$$

$\therefore$ 直线 l 的函数表达式为 $y=-2x-1$.

答案：$y=-2x-1$

方法点拨：若直线 l 与直线 $y=kx+b$ 关于

（1）x 轴对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=-kx-b$；

（2）y 轴对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=-kx+b$；

（3）直线 $y=x$ 对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}$；

（4）直线 $y=-x$ 对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=\frac{1}{k}x+\frac{b}{k}$；

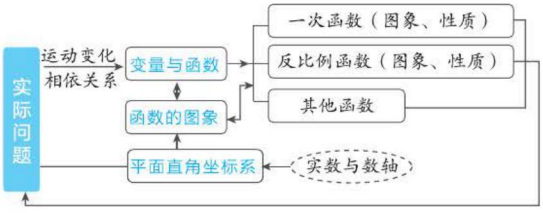
（5）原点对称，则直线 l 的函数表达式为 $y=kx-b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两个变量 x，y，当 x 取一个值时，y 有唯一值与它对应，x 是自变量，y 是 x 的函数.

2. **点的坐标特点：** 设点 $P(m, n)$，有：（1）若点 P 在 x 轴上，则 $n=0$；（2）若点 P 在 y 轴上，则 $m=0$；（3）若点 P 在第一象限，则 $m>0$，$n>0$；（4）若点 P 在第二象限，则 $m<0$，$n>0$；（5）若点 P 在第三象限，则 $m<0$，$n<0$；（6）若点 P 在第四象限，则 $m>0$，$n<0$.

3. **函数有三种表示方法**

（1）**列表法：** 列出有限的对应值；

（2）**图象法：** 将每对对应值作为一个点的坐标在平面直角坐标系中标出；

（3）**解析法：** 将两个变量之间的数量关系用一个式子表示出来.

4. **一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象是一条直线.** 当 $b=0$ 时，一次函数为正比例函数，当 $k>0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大，当 $k<0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小；当 $b>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的上方；当 $b<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的下方.

5. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象是双曲线，图象上的点（x，y）的横、纵坐标的积是定值 k，即 $xy=k$.

6. **反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的基本性质**

当 $k>0$ 时，图象分别位于第一、三象限，每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；

当 $k<0$ 时，图象分别位于第二、四象限，每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.

7. **双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 中 k 的几何性质：** 设 P 是双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上任意一点，过 P 向 x、y 轴作垂线，垂足分别为 H，G，连结 PO（O 为坐标原点），则 $S_{\triangle POH}=\dfrac{|k|}{2}$，$S_{矩形PHOG}=|k|$.

8. 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）从“数”的角度看是二元一次方程；从“形”的角度看是直线. 一次函数与二元一次方程（组）、一元一次不等式之间的关系都是数形结合思想的体现.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识方法专题

知识必学

专题一 平面直角坐标系与点的坐标

链接中考≫ 在平面直角坐标系中，点的坐标是核心，在特殊位置的点的坐标的特征是中考考查的热点，一般都是以选择题形式出现.

例1 [中考·威海]若点 $A(a+1, b-2)$ 在第二象限，则点 $B(-a, b+1)$ 在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题秘方：依题意，点 A 在第二象限，则有 $a+1<0$，$b-2>0$，从而有 $-a>0$，$b+1>0$，于是可以确定点 B 所在的象限.

解：∵ 点 $A(a+1, b-2)$ 在第二象限，∴ $a+1<0$，$b-2>0$，解得 $a<-1$，$b>2$，∴ $-a>0$，$b+1>0$，∴ 点 $B(-a, b+1)$ 在第一象限，故应选 A.

答案：A

方法点拨：对于点 $P(a, b)$ 来说，点的位置与坐标的特征的关系：

点的位置		坐标特征
象限内的点	点 P 在第一象限	$a>0$，$b>0$
	点 P 在第二象限	$a<0$，$b>0$
	点 P 在第三象限	$a<0$，$b<0$
	点 P 在第四象限	$a>0$，$b<0$
坐标轴上的点	点 P 在 x 轴正半轴上	$a>0$，$b=0$
	点 P 在 x 轴负半轴上	$a<0$，$b=0$
	点 P 在 y 轴正半轴上	$a=0$，$b>0$
	点 P 在 y 轴负半轴上	$a=0$，$b<0$
两坐标轴夹角平分线上的点	点 P 在第一、三象限角平分线上	$a=b$
	点 P 在第二、四象限角平分线上	$a+b=0$

专题二 函数图象

链接中考≫ 理解函数图象的意义是解决函数问题的根本，利用函数图象解决几何图形中的动点问题或者解决生活实际问题，都离不开对关键点的意义的理解.其根本就是在于函数图象是数形相结合的产物.对函数图象的考查是中考的热门考点，常见的考查形式是选择题.

例2 [中考·聊城]小亮家与姥姥家相距 24 km. 小亮 8：00 从家出发，骑自行车去姥姥家，妈妈 8：30 从家出发，乘车沿相同路线去姥姥家. 在同一直角坐标系中，小亮和妈妈的行进路程 s（km）与北京时间 t（时）的函数图象如图 17-1 所示. 根据图象得到下列结论，其中错误的是（　　）

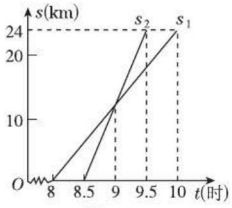


图 17-1

A. 小亮骑自行车的平均速度是每小时 12 km

B. 妈妈比小亮提前 0.5 小时到达姥姥家

C. 妈妈在距家 12 km 处追上小亮

D. 9：30 妈妈追上小亮

解题秘方：明确 s_1 是小亮行进路程与时间的函数图象，s_2 是妈妈行进路程与时间的函数图象. 图象 s_1 与 s_2 的交点的横坐标表示妈妈追上小亮的时刻，可以利用待定系数法求出各自的函数表达式.

解：从图象 s_1 可以看出，小亮走 24 km 用了 2 小时，所以平均速度为每小时 12 km，故 A 正确；从图象可以看出，小亮 10：00 到达姥姥家，妈妈 9：30 到达姥姥家，故妈妈提前 0.5 小时到达，B 正确；设 $s_1=k_1x+b_1$，把（8，0）和（10，24）分别代入 $s_1=k_1x+b_1$ 得，$\begin{cases}0=8k_1+b_1,\\24=10k_1+b_1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=12,\\b_1=-96,\end{cases}$

所以 $s_1=12x-96$，

同理 $s_2=24x-204$，联立可得方程组

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases}s=12x-96,\\ s=24x-204,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=12,\\ x=9,\end{cases}$

即妈妈在 9：00，距家 12 km 处追上小亮，故 C 正确，D 错误.

答案：D

方法点拨：利用函数图象解决实际问题，其关键在于正确理解函数图象横、纵坐标表示的意义，理解问题的发展过程. 解答此类问题一般需要用待定系数法确定函数图象对应的表达式，计算函数图象交点坐标，或已知某点的一个坐标计算另一个坐标，从而获取实际问题答案. 一般解题过程为将实际问题抽象为数学问题、解这个数学问题、回归解答实际问题.

专题三 函数自变量的取值范围

链接中考≫ 函数自变量的取值范围表面形式是考查函数知识，其实是考查自变量出现的形式—整式、分式等知识. 关键是几种形式组合时，要综合考查几个方面. 考查的形式也都是选择题.

例 3 [中考·黔南州] 函数 $y=\sqrt{3-x}+\frac{1}{x-4}$ 的自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x\leqslant 3$　　B. $x\neq 4$

C. $x\geqslant 3$ 且 $x\neq 4$　　D. $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 4$

解题秘方：先分别求出使 $\sqrt{3-x}$ 与 $\frac{1}{x-4}$ 有意义的条件，再合并求公共部分.

解：要使函数有意义，必须满足 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x-4\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 3$.

答案：A

方法点拨：确定自变量的取值范围，应注意以下几种情况：（1）如果函数的表达式中含自变量的部分是整式，那么自变量的取值范围是全体实数；（2）如果函数的表达式中含自变量的部分是分式，那么自变量的取值范围是使分母不为零的实数；（3）在实际问题中，函数自变量的取值必须使实际问题有意义.

专题四 一次函数的图象与性质

链接中考≫ 一次函数的图象是一条直线，它在平面直角坐标系中的位置是由函数表达式中的 k 和 b 决定的. 对这个知识点的考查在中考中出现的频率较高. 一般都是以填空题、选择题形式出现.

例 4 [中考·枣庄] 已知直线 $y=kx+b$，若 $k+b=-5$，$kb=6$，则此直线不经过的象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

解题秘方：先根据已知判断出 k，b 的符号，再根据 k，b 的符号确定直线经过的象限，从而解决问题.

解：因为 $kb=6>0$，

所以 k，b 同号.

又因为 $k+b=-5$，

所以 $k<0$，$b<0$.

所以一次函数的图象经过第二、三、四象限，因此图象不经过第一象限.

答案：A

方法点拨：一次函数 $y=kx+b$ 中，k 决定了直线的走向，b 决定了直线与 y 轴的交点，因此由 k 和 b 的值可以确定出直线经过的象限，具体为：①当 $k>0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、三象限；②当 $k>0$，$b<0$ 时，函数图象经过第一、三、四象限；③当 $k<0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、四象限；④当 $k<0$，$b<0$ 时，函数图象经过第二、三、四象限；⑤当 $k>0$，$b=0$ 时，函数图象经过第一、三象限；⑥当 $k<0$，$b=0$ 时，函数图象经过第二、四象限.

专题五 一次函数与方程（组）或不等式之间的关系

链接中考≫ 一次函数与二元一次方程（组）或一元一次不等式之间的关系关键体现的是几个交点：（1）函数图象与两坐标轴的交点；（2）两个函数图象的交点. 函

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数图象与方程和不等式之间的关系就是数形结合的体现．中考考查的形式多样化，填空题、选择题和解答题都有涉及．

例5 ［中考·济南］如图17-2，一次函数$y_1=x+b$与一次函数$y_2=kx+4$的图象交于点$P(1,3)$，则关于x的不等式$x+b>kx+4$的解集是（　　）

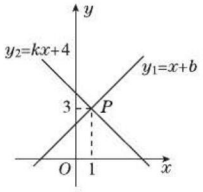


图17-2

A.$x>-2$　　B.$x>0$

C.$x>1$　　D.$x<1$

解：由点P的横坐标为1，可得关于x的不等式$x+b>kx+4$的解集为$x>1$.

答案：C

方法点拨：求解此类问题时，一是要明确一次函数与一元一次不等式的关系；二是要能发挥数形结合的作用．

专题六 反比例函数的图象与性质

链接中考» 利用反比例函数的性质主要解决一些函数值的大小比较问题，中考中以选择题和填空题为主，有时也与不等式结合在一起命题．

例6 ［中考·遵义］在函数$y=\frac{1}{x}$的图象上有三个点的坐标分别为$(1,y_1)$，$\left(\frac{1}{2},y_2\right)$，$(-3,y_3)$，函数值$y_1$，$y_2$，$y_3$的大小关系是（　　）

A.$y_1<y_2<y_3$　　B.$y_3<y_2<y_1$

C.$y_2<y_1<y_3$　　D.$y_3<y_1<y_2$

解：对于反比例函数$y=\frac{1}{x}$，在每一象限内，y随x的增大而减小，对于点$(1,y_1)$，$\left(\frac{1}{2},y_2\right)$，$\because 1>\frac{1}{2}$，$\therefore y_1<y_2$．而点$(1,y_1)$在第一象限，点$(-3,y_3)$在第三象限，显然，$y_3<y_1$.

答案：D

方法点拨：运用反比例函数的性质时，一定要紧扣在同一象限．不在同一象限的，分象限确定正负；在同一象限的，利用增减性比较大小．

专题七 反比例函数与一次函数的综合

链接中考» 解答反比例函数与其他函数结合在一起的综合题时，要挖掘题目中的条件，并结合图象找出图象中的关键点，求出函数表达式，并根据题中数量之间的关系，列出所需要的方程或关系式进行解答．

例7 ［中考·黄冈］如图17-3，反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象过点$A(-1,4)$，直线$y=-x+b$（$b\neq 0$）与双曲线$y=\frac{k}{x}$在第二、四象限分别相交于P，Q两点，与x轴、y轴分别相交于C，D两点．

（1）求k的值；

（2）当$b=-2$时，求$\triangle OCD$的面积；

（3）连结OQ，是否存在实数b，使得$S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$？若存在，请求出$b$的值；若不存在，请说明理由．

解题秘方：（1）把点A的坐标代入反比例函数的表达式即可求出k的值；

（2）利用一次函数的表达式求出直线与x轴、y轴的交点坐标，即可得到线段OC，OD的长度，进而可求出$\triangle OCD$的面积；

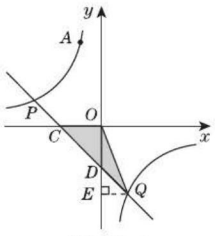


图17-3

（3）假设存在实数b，对字母b的范围分类讨论，根据两个三角形的面积相等构建关于字母b的方程求解，然后进行取舍．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵ $A(-1, 4)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，

∴ $k=-1\times4=-4$.

（2）∵ $b=-2$，

∴直线 CD 的表达式为 $y=-x-2$.

∴ $C(-2, 0)$，$D(0, -2)$.

∴ $CO=2$，$DO=2$.

∴ $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO=2$.

（3）存在．理由如下：

如图 17-3，过 Q 作 $QE\perp y$ 轴，垂足为 E.

①当 $b<0$ 时，由 $y=-x+b$，可得 $C(b, 0)$，$D(0, b)$，∴ $OC=-b$，$OD=-b$.

∴ $OC=OD$.

∴ $\angle OCD=\angle ODC=45°$.

∴ $\angle EDQ=\angle DQE=45°$. ∴ $DE=EQ$.

∵ $S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$，

∴ $\frac{1}{2}DO\cdot CO=\frac{1}{2}DO\cdot QE$.

∴ $CO=QE$. ∴ $Q(-b, 2b)$.

∵点 Q 在双曲线 $y=\frac{-4}{x}$ 上，

∴ $-b\cdot2b=-4$.

∴ $b^2=2$. ∴ $b=\pm\sqrt{2}$.

∵ $b<0$，∴ $b=-\sqrt{2}$.

②当 $b>0$ 时，$S_{\triangle OCD}<S_{\triangle ODQ}$.

综上所述，当 $b=-\sqrt{2}$ 时，$S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$.

方法点拨：（1）求函数表达式一般采用待定系数法．用待定系数法解题，首先要设出待定系数．再根据题目中的已知条件求出待定系数．对反比例函数而言，因为只有一个待定系数，所以只要将一个点的坐标代入函数表达式，就可以求出待定系数；若是一次函数，则一般需要两个独立的条件．

（2）求坐标平面内图形的面积，往往转化为三角形的面积，并将在坐标轴上的边或者与坐标轴平行的边作为三角形面积公式中的“底”，这样计算会容易一些．

专题八 利用函数的图象与性质解决实际问题

链接中考≫ 从函数图象中得到需要的信息，再求出函数关系式进而解决实际问题，是一次函数应用价值的重要体现，这类题通常与生活中的一些热点问题结合，考查学生综合分析问题、解决问题的能力．

例 8 ［**中考·威海**］为绿化校园，某校计划购进 A，B 两种树苗，共 21 棵．已知 A 种树苗每棵 90 元，B 种树苗每棵 70 元．设购买 B 种树苗 x 棵，购买两种树苗所需费用为 y 元．

（1）y 与 x 的函数关系式为_____；

（2）若购买 B 种树苗的数量少于 A 种树苗的数量，请给出一种费用最省的方案，并求出该方案所需费用．

解题秘方：根据所需费用＝购进 A，B 两种树苗的费用和，列出函数关系式，进而利用函数的性质求解．

解：（1）$y=-20x+1\,890$

（2）由题意，得 $x<21-x$，解得 $x<10.5$，

又∵ $x\geqslant1$ 且 x 为整数，

∴ $1\leqslant x<10.5$ 且 x 为整数．

由（1）中一次函数 $y=-20x+1\,890$ 的性质，得当 $x=10$ 时，y 有最小值为 $-20\times10+1\,890=1\,690$，

∴费用最省的方案是购买 B 种树苗 10 棵，A 种树苗 11 棵，所需费用为 1 690 元．

方法点拨：此类问题一般先根据数量之间的关系确定函数关系式，然后根据题意转化为不等式求出自变量的取值范围，最后利用一次函数的性质得出答案．

例 9 ［**中考·乐山**］某蔬菜生产基地在气温较低时，用装有恒温系统的大棚栽培一种新品种蔬菜，如图 17-4 是试验阶段的某天恒温系统从开启到关闭后，大棚内的温度 y（℃）与时间 x（h）之间的函数关系，其中线段 AB，BC 表示恒温系统开启阶段，双曲线的一部分 CD 表示恒温系统关闭阶段．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

请根据图中信息解答下列问题：

（1）求这天的温度 y 与时间 $x(0\leqslant x\leqslant 24)$ 的函数关系式；

（2）求恒温系统设定的恒定温度；

（3）若大棚内的温度低于 10 ℃时，蔬菜会受到伤害．问这天内，恒温系统最多可以关闭多少小时，才能使蔬菜避免受到伤害？

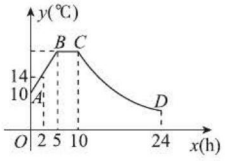


图 17-4

解题秘方：紧扣函数图象提供的数据信息，求函数关系式以及两个变量的值．

解：（1）设线段 AB 的关系式为 $y=k_1x+b$ $(k\neq 0)$，

∵线段 AB 过点（0，10），（2，14），

$$\therefore\begin{cases}b=10,\\2k_1+b=14,\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}k_1=2,\\b=10.\end{cases}$$

∴线段 AB 的关系式为 $y=2x+10\ (0\leqslant x<5)$．

∵点 B 在线段 AB 上，当 $x=5$ 时，$y=20$．

∴点 B 的坐标为（5，20）．

∴线段 BC 的关系式为 $y=20\ (5\leqslant x<10)$．

设双曲线 CD 段的关系式为 $y=\dfrac{k_2}{x}(k_2\neq 0)$，

易知 C 点的坐标为（10，20），∴ $k_2=200$．

∴双曲线 CD 段的关系式为 $y=\dfrac{200}{x}(10\leqslant x\leqslant 24)$．

∴ y 关于 x 的函数关系式为

$$y=\begin{cases}2x+10\ (0\leqslant x<5),\\20\ (5\leqslant x<10),\\\dfrac{200}{x}\ (10\leqslant x\leqslant 24).\end{cases}$$

（2）由（1）知恒温系统设定的恒定温度为 20℃．

（3）把 $y=10$ 代入 $y=\dfrac{200}{x}$ 中，解得 $x=20$．

$20-10=10$（h）．

∴恒温系统最多可以关闭 10 h，才能使蔬菜避免受到伤害．

方法点拨：根据函数图象解题的关键先弄清横轴、纵轴分别代表哪个变量，然后观察图象，从图象中获取相关信息，最后依据函数值随自变量的变化：增大、减小或呈规律性地起伏，得出合理的结论．

方法必会

专题九 待定系数法

专题解读≫ 先设出函数表达式，再根据条件确定表达式中未知的系数，从而得出函数表达式的方法叫做待定系数法．运用待定系数法的关键就是找对应值或函数图象上点的坐标．

例 10 小聪和小明沿同一条路同时从学校出发到图书馆查阅资料，学校与图书馆的路程是 4 千米，小聪骑自行车，小明步行，当小聪从原路回到学校时，小明刚好到达图书馆，图 17-5 中折线 O—A—B—C 和线段 OD 分别表示两人离学校的路程 s（千米）与所经过的时间 t（分钟）之间的函数关系，请根据图象回答下列问题：

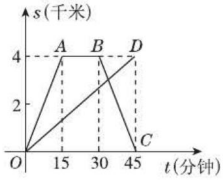


图 17-5

（1）小聪在图书馆查阅资料的时间为_____分钟，小聪返回学校的速度为_____千米/分钟；

（2）请你求出小明离学校的路程 s（千米）与所经过的时间 t（分钟）之间的函数表达式；

（3）当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是多少千米？

解题秘方：（1）图象所示 AB 段为小聪查阅资料时间．线段 BC 表示小聪返回学校时的图象．（2）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

可设 $s=kt$，将（45，4）代入求出 k 即可．（3）先求出直线 BC 对应的函数表达式，再求出 BC 与 OD 的交点．

解：（1）15；$\frac{4}{15}$

（2）根据图象设所求的函数表达式为 $s=kt$（$k\neq0$）．将（45，4）代入，得 $4=45k$ 解得 $k=\frac{4}{45}$．

∴所求函数表达式为 $s=\frac{4}{45}t$（$0\leqslant t\leqslant45$）．

（3）由图象可知，小聪在 $30\leqslant t\leqslant45$ 的时段内与小明迎面相遇．

设直线 BC 对应的函数表达式为 $s=mt+n$（$m\neq0$），将（30，4），（45，0）代入，得 $\begin{cases}30m+n=4,\\45m+n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{4}{15},\\n=12.\end{cases}$

∴ $s=-\frac{4}{15}t+12$（$30\leqslant t\leqslant45$），令 $-\frac{4}{15}t+12=\frac{4}{45}t$，解得 $t=\frac{135}{4}$．

当 $t=\frac{135}{4}$ 时，$s=\frac{4}{45}\times\frac{135}{4}=3$．

答：当小聪与小明迎面相遇时，他们离学校的路程是 3 千米．

方法点拨：本题主要考查函数图象的识别与一次函数表达式的求法，求函数表达式的一般方法是待定系数法，函数是中考的必考知识点，应引起足够重视．

专题十 分类讨论思想

专题解读≫ 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的性质由 k 的正负性决定，若条件中无法确定 k 的正负性，而又要运用其性质解决方案优化问题，则必须对 k 的正负进行分类讨论，使所有问题做到不遗漏．

例 11 ［中考·济宁］小明到服装店参加社会实践活动，服装店经理让小明帮助解决以下问题：

服装店准备购进甲、乙两种服装，甲种每件进价 80 元，售价 120 元；乙种每件进价 60 元，售价 90 元．计划购进两种服装共 100 件，其中甲种服装不少于 65 件．

（1）若购进这 100 件服装的费用不得超过 7 500 元，则甲种服装最多购进多少件？

（2）在（1）的条件下，该服装店对甲种服装以每件优惠 a（$0<a<20$）元的价格进行促销活动，乙种服装价格不变，那么该服装店应如何调整进货方案才能获得最大利润？

解题秘方：（1）设购进甲种服装 x 件，根据“购进服装的费用不得超过 7 500 元”列出不等式求解；（2）设总利润为 w 元，根据“总利润 = 甲种服装的利润 + 乙种服装的利润”求得函数表达式，再根据 a 的取值以及 x 的范围讨论．

解：（1）设购进甲种服装 x 件，由题意可知：

$80x+60(100-x)\leqslant7\,500$，解得 $x\leqslant75$，

∵甲种服装不少于 65 件，即 $x\geqslant65$．

∴ $65\leqslant x\leqslant75$，

∴甲种服装最多购进 75 件．

（2）设总利润为 w 元，由（1）知 $65\leqslant x\leqslant75$，

∴ $w=(40-a)x+30(100-x)=(10-a)x+3\,000$．

当 $0<a<10$ 时，$10-a>0$，w 随 x 的增大而增大，

∴当 $x=75$ 时，w 有最大值，则购进甲种服装 75 件，乙种服装 25 件才能获得最大利润；

当 $a=10$ 时，$w=3\,000$．

∴购进甲种服装件数满足 $65\leqslant x\leqslant75$ 的整数时，获得利润都相同；

当 $10<a<20$ 时，$10-a<0$，

w 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=65$ 时，w 有最大值，则购进甲种服装 65 件，乙种服装 35 件才能获得最大利润．

方法点拨：解此类题的关键是理清各种数量关系，会利用等量关系列出函数表达式，能利用不等关系列不等式（组），会利用不等式（组）的整数解设计可行的方案，会利用函数的性质求最值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见261页

题型1　巧用函数的图象与性质求字母的取值范围

1. 已知函数 $y=(2m+1)x+m-3$.

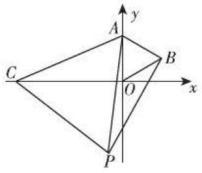
（1）若这个函数是一次函数，且 y 随 x 的增大而减小，求 m 的取值范围；

（2）若这个函数是一次函数，且图象过第一、二、三象限，求 m 的取值范围.

3. 如图，在直角坐标系中，点 A 的坐标是（0，3），点 C 是 x 轴上的一个动点，点 C 在 x 轴上移动时，始终保持△ ACP 是等边三角形. 当点 C 移动到点 O 时，得到等边三角形 AOB（此时点 P 与点 B 重合）.

（1）点 C 在移动的过程中，当等边三角形 ACP 的顶点 P 在第三象限时（如图所示），求证：△ AOC ≌△ ABP. 由此你发现什么结论?

（2）求点 C 在 x 轴上移动时，点 P 所在函数图象的表达式.



（第3题）

题型2　巧用待定系数法求函数表达式

2. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 $x+1$ 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且 $x=1$ 时，$y=0$；$x=4$ 时，$y=9$.

（1）求 y 与 x 的函数表达式；

（2）求当 $x=-1$ 时，y 的值.

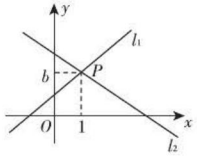
题型3　巧用函数的图象解方程、不等式有关问题

4. 如图，直线 l_1：$y=x+1$ 与直线 l_2：$y=mx+n$ 相交于点 $P(1,\ b)$.

（1）求 b 的值.

（2）不解关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} y=x+1, \\ y=mx+n, \end{cases}$ 请你直接写出它的解.

（3）直线 l_3：$y=nx+m$ 是否也经过点 P？请说明理由.



（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

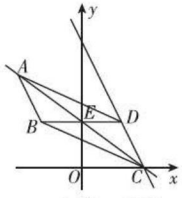
5. 试用图象法解不等式组 $\begin{cases}2x+3<5,\\ \dfrac{1}{2}x-8>-6.\end{cases}$

题型 4　巧用函数图象及性质求解面积问题

6. 如图，O 为原点，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，C 为 x 轴上的一点．点 E 为对角线 AC 与 BD 的交点，且在 y 轴上．另外，BD 与 x 轴平行，直线 AC 的表达式为 $y=ax+3$（a 为常数），直线 DC 的表达式为 $y=-2x+8$.

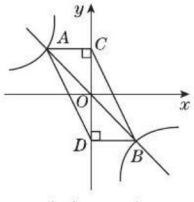
（1）求 a 的值；

（2）求平行四边形 $ABCD$ 的面积是 $\triangle EOC$ 面积的多少倍．



（第 6 题）

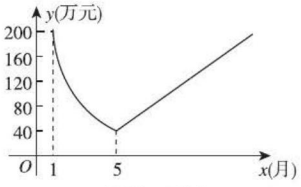
7. 如图，函数 $y=-x$ 与函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，过 A，B 两点分别作 y 轴的垂线，垂足分别为点 C，D，求四边形 $ACBD$ 的面积．



（第 7 题）

题型 5　巧用函数的性质解决实际问题

8. 保护生态环境，建设绿色社会已经从理念变为人们的行动．某化工厂 2019 年 1 月的利润为 200 万元．设 2019 年 1 月为第 1 个月，第 x 个月的利润为 y 万元．由于排污超标，该厂从 2019 年 1 月底起适当限产，并投入资金进行治污改造，导致月利润明显下降，从 1 月到 5 月，y 与 x 成反比例．到 5 月底，治污改造工程顺利完工，从这时起，该厂每月的利润比前一个月增加 20 万元（如图）．



（第 8 题）

（1）分别求该化工厂治污期间及治污改造工程完工后 y 与 x 之间对应的函数关系式．

（2）治污改造工程完工后经过几个月，该厂月利润才能达到 2019 年 1 月的水平？

（3）当月利润少于 100 万元时为该厂资金紧张期，问该厂资金紧张期共有几个月？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 17 章测试卷 ☞答案见 262 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 直线 $y=2x-4$ 与 y 轴的交点坐标是（　　）

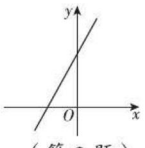
A.（4，0）　　B.（0，4）

C.（−4，0）　　D.（0，−4）

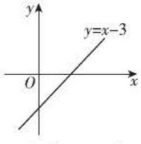
2. 已知点 $A(-2, y_1)$ 和点 $B(1, y_2)$ 是如图所示的一次函数 $y=2x+b$ 图象上的两点，则 y_1 与 y_2 的大小关系是（　　）

A.$y_1 < y_2$　　B.$y_1 > y_2$

C.$y_1=y_2$　　D.$y_1 \geqslant y_2$



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图是一次函数 $y=x-3$ 的图象，点 $P(2, m)$ 在该图象的上方，则 m 的取值范围是（　　）

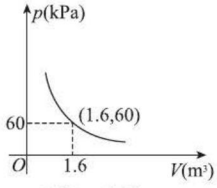
A.$m>-3$　　B.$m>-1$

C.$m>0$　　D.$m < 3$

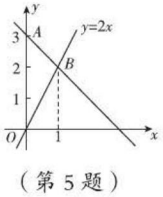
4. 某种气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p(kPa)是气球体积 V(m^3)的反比例函数，其图象如图，当气球内的气压大于 120 kPa 时，气球将爆炸，为了安全起见，气体的体积应该（　　）

A. 不大于$\frac{5}{4}$ m^3　　B. 小于$\frac{5}{4}$ m^3

C. 不小于$\frac{4}{5}$ m^3　　D. 小于$\frac{4}{5}$ m^3



（第 4 题）



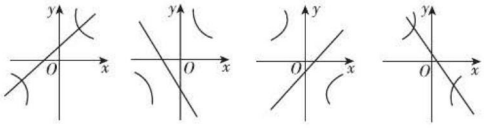
（第 5 题）

5. 如图，过 A 点的一次函数的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象相交于点 B，则这个一次函数的表达式是（　　）

A.$y=2x+3$　　B.$y=x-3$

C.$y=2x-3$　　D.$y=-x+3$

6. 已知 $(-m, -n)$ 在第二象限，则一次函数 $y=mx+n$ 与反比例函数 $y=\frac{mn}{x}$ 的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

7. 在平面直角坐标系中，将直线 l_1：$y=-2x-2$ 平移后，得到直线 l_2：$y=-2x+4$，则下列平移作法正确的是（　　）

A. 将 l_1 向右平移 3 个单位

B. 将 l_1 向右平移 6 个单位

C. 将 l_1 向上平移 2 个单位

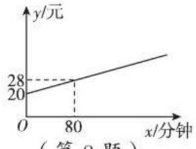
D. 将 l_1 向上平移 4 个单位

8. 某通讯公司提供了两种移动电话收费方式：方式一，收月基本费 20 元，再以每分钟 0.1 元的价格按通话时间计费；方式二，收月基本费 20 元，送 80 分钟通话时间，超过 80 分钟的部分，以每分钟 0.15 元的价格计费．

下列结论：

①如图描述的是方式一的收费方式；

②若月通话时间少于 240 分钟，则选择方式二省钱；



（第 8 题）

③若月通讯费为 50 元，则方式一比方式二的通话时间多；

④若方式一比方式二的通讯费多 10 元，则方式一比方式二的通话时间多 100 分钟．

其中正确的是（　　）

A. 只有①②　　B. 只有③④

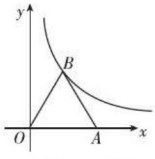
C. 只有①②③　　D. ①②③④

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

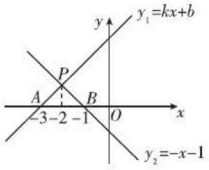
二、填空题（每题4分，共16分）

9. 函数 $y=\sqrt{2-3x}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

10. 如图，点 A 的坐标是（2，0），$\triangle ABO$ 是等边三角形，点 B 在第一象限. 若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过点 B，则 k 的值是_____.



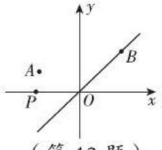
（第10题）



（第11题）

11. 如图，直线 $y_1=kx+b$ 与 $y_2=-x-1$ 交于点 P，它们分别与 x 轴交于点 A，B，且 B，P，A 三点的横坐标分别为 -1，-2，-3，则满足 $y_1<y_2$ 的 x 的取值范围是_____.

12. 如图，定点 $A(-2,1)$，点 B 在直线 $y=x$ 上，且横坐标为2，动点 P 在 x 轴上运动，当线段 $PA+PB$ 最短时，点 P 的坐标为_____.



（第12题）

三、解答题（共52分）

13.（8分）已知反比例函数 $y=\dfrac{m-8}{x}$（m 为常数）.

（1）若函数图象经过点 $A(-1,6)$，求 m 的值；

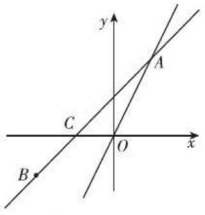
（2）若函数图象在第二、四象限，求 m 的取值范围；

（3）若 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小，求 m 的取值范围.

14.（10分）如图，正比例函数 $y=2x$ 的图象与一次函数 $y=kx+b$ 的图象交于点 $A(m,2)$，一次函数的图象经过点 $B(-2,-1)$，与 x 轴的交点为 C.

（1）求一次函数的表达式；

（2）求 $\triangle AOC$ 的面积.



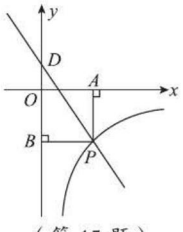
（第14题）

15.（10分）如图，一次函数 $y=kx+3$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$（$x>0$）的图象交于点 P，$PA\perp x$ 轴于点 A，$PB\perp y$ 轴于点 B. 一次函数的图象交 y 轴于点 D，且 $S_{\triangle DBP}=27$，$\dfrac{OD}{AP}=\dfrac{1}{2}$.

（1）求点 D 的坐标；

（2）求一次函数与反比例函数的表达式；

（3）根据图象写出当 x 取何值时，一次函数的值小于反比例函数的值.



（第15题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.（12 分）水产公司有一种海产品共 2 104 千克，为寻求合适的销售价格，进行了 8 天试销，试销情况如下：

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天
销售价格 x（元 / 千克）	400	300	250	240	200	150	125	120
销售量 y（千克）	30	40	48	50	60	80	96	100

观察表中数据，发现可以用反比例函数刻画这种海产品的每天销售量 y（千克）与销售价格 x（元 / 千克）之间的关系. 现假定在这批海产品的销售中，每天的销售量 y（千克）与销售价格 x（元 / 千克）之间都满足这一关系.

（1）写出这个反比例函数的表达式；

（2）在试销 8 天后，公司决定将这种海产品的销售价格定为 150 元 / 千克，并且每天都按这个价格销售，那么余下的这些海产品预计再用多少天可以全部售出？

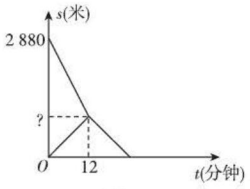
（3）在按（2）中定价继续销售 15 天后，公司发现剩余的这些海产品必须在不超过 2 天内全部售出，此时需要重新确定一个销售价格，使后面两天都按新的价格销售，那么新确定的价格最高不超过每千克多少元才能完成销售任务？

17.（12 分）五一假期过后，小明到校后发现忘记带数学课本. 一看手表，离上课还有 20 分钟，他立刻步行返回家中取书，同时，他的父亲也发现小明忘记带数学课本，带上课本立刻以小明步行速度的 2 倍骑车赶往学校；父子在途中相遇，小明拿到课本后马上按原速步行返回学校，到校后发现迟到了 4 分钟. 如图是父子俩离学校的路程 s（米）与所用时间 t（分钟）之间的函数关系，请结合图象，回答下列问题：

（1）两人相遇处离学校的距离是多少米？

（2）试求小明的父亲在赶往学校的过程中，路程 s 与时间 t 之间的函数表达式.

（3）假如小明父子相遇拿到课本后，改由他的父亲骑车搭他到学校，他会迟到吗？如果会，迟到几分钟；如果不会，能提前几分钟到校？



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



几何图形性质的探秘

第18章 平行四边形









核心考点

你将见到的

- 平行四边形的性质
- 平行四边形的判定
- 两条平行线间的距离

核心方法

我们为你提供的

- 分类法
- 作差法
- 面积法
- 构造法
- 方程思想
- 转化思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.1 平行四边形的性质

核心知识

- 平行四边形的定义
- 平行四边形的性质
- 两条平行线之间的距离

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行四边形

1. 定义：

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

2. 表示方法：

平行四边形用符号“$\square$”表示，如图 18.1-1，平行四边形 $ABCD$ 记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”.

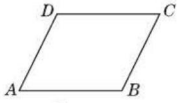


图 18.1-1

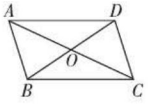

平行四边形的定义

注意：

（1）平行四边形的表示一定要按顺时针或逆时针依次注明各顶点，不能打乱顺序.

（2）“$\square$”作为表示平行四边形的符号，不可单独使用它来代替“平行四边形”.

3. 平行四边形的基本元素：

基本元素		主要内容	图示
边	邻边	AD 和 AB，AD 和 DC，DC 和 BC，BC 和 AB，共有四对.	
	对边	AB 和 DC，AD 和 BC，共有两对.	
角	邻角	$\angle BAD$ 和 $\angle ADC$，$\angle ADC$ 和 $\angle DCB$，$\angle DCB$ 和 $\angle ABC$，$\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，共有四对.	
	对角	$\angle BAD$ 和 $\angle BCD$，$\angle ADC$ 和 $\angle ABC$，共有两对.	
对角线		AC 和 BD，共有两条.	

提分·必记

特别提醒

- 平行四边形的定义有两个要素：
  (1) 是四边形；
  (2) 两组对边分别平行.
  作为四边形，平行四边形具有一般四边形的一切性质，如有四条边，四个内角，两条对角线，内角和为 360°，外角和为 360°等.
  作为平行四边形，它区别于其他一般四边形的特殊性质为：平行四边形的两组对边分别平行.
- 平行四边形的定义既是它的一个性质，又是它的一种判定方法：
  ∵四边形 ABCD 是平行四边形，∴ $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ AD \parallel BC; \end{cases}$
  反过来，∵ $\begin{cases} AB \parallel CD, \\ AD \parallel BC, \end{cases}$
  ∴四边形 ABCD 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用平行四边形的定义判定平行四边形

题型1：平行四边形的定义的判定功能在找平行四边形中的应用

例1 如图18.1-2，在$\square ABCD$中，过点P作直线EF，GH分别平行于AB，BC，那么图中共有_____个平行四边形.

解题秘方：紧扣平行四边形定义中的“两要素”进行识别.

解：在$\square ABCD$中，$\because EF \parallel AB$，$GH \parallel BC$，

$\therefore EF \parallel AB \parallel CD$，$GH \parallel AD \parallel BC$.

$\therefore$单独一个四边形是平行四边形的有4个：$\square DEPH$，$\square EAGP$，$\square HPFC$，$\square PGBF$；由两个四边形组成的平行四边形有4个：$\square DEFC$，$\square EABF$，$\square DAGH$，$\square HGBC$；由四个四边形组成的平行四边形有1个：$\square ABCD$.

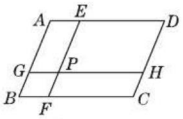


图18.1-2

$\therefore$图中共有9个平行四边形.

答案：9

题型2：平行四边形的定义的双重功能在判定平行四边形中的应用

例2 如图18.1-3，在$\square ABCD$中，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

解题秘方：紧扣平行四边形的定义中的双重功能：“性质功能和判定功能”进行证明.

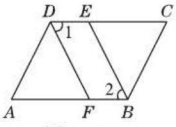


图18.1-3

证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore CD \parallel AB$（平行四边形的两组对边分别平行），即$DE \parallel BF$，

$\therefore \angle 1 = \angle DFA$.

$\because \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle 2 = \angle DFA$.

$\therefore DF \parallel BE$.

$\therefore$四边形$BEDF$是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

点知识▶2 平行四边形的边、角性质

1. 平行四边形的性质定理1：平行四边形的对边相等.

数学表达式：如图18.1-4，

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AD=BC$.

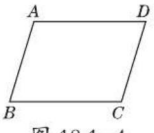


图18.1-4

2. 平行四边形的性质定理2：平行四边形的对角相等.

数学表达式：如图18.1-4，

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore \angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$.



提分·秘诀

方法点拨

分类法数几何图形的个数：

数几何图形的个数时，往往带有很大的盲目性，结果不是多数了就是漏数了.若将几何图形分类（按顺序或大小）数，就能将问题简化，如例1，将平行四边形分为分别由一个、两个、四个四边形组成的平行四边形，这样就能做到**不重不漏**.

解法提醒

当题目的条件中有平行四边形时，应立即想到两组对边分别平行；当题目的结论要证平行四边形时，首先应联想到它的两组对边是否分别平行.逆向利用及正向利用平行四边形的定义是后面学习平行四边形的性质及判定的主要依据.

提分·必记

特别提醒

由于组成平行四边形的元素有边和角，因此讨论其性质也应从边和角这两个方面去看.

- 从边看：平行四边形的对边平行且相等；
- 从角看：平行四边形的对角相等、邻角互补.

注意：已知平行四边形得出什么性质，要根据推理证明的需要，合理选用需要的性质.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核考向▶利用平行四边形的边角性质解证明计算问题

例 3 如图 18.1-5 所示，在 $\square ABCD$ 中，$AB=5$ cm，$BC=4$ cm，则 $\square ABCD$ 的周长为_____cm.

解题秘方：紧扣“平行四边形的边的性质”进行解答.

解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $CD=AB=5$ cm，$AD=BC=4$ cm.

∴ $\square ABCD$ 的周长

$=2(AB+BC)$

$=2\times(5+4)=18$(cm).

答案：18

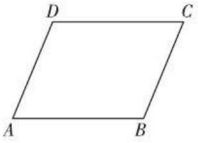


图 18.1-5

提分·秘诀

解法提醒

平行四边形的边角性质、平行线的性质、全等三角形的判定和性质在有关平行四边形的问题中，常**融合在一起综合应用**，而利用平行四边形的边角性质、平行线的性质获得三角形全等的条件是解题的关键.

点知识▶3 两条平行线之间的距离

1. 定义：

两条直线平行，其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

三种距离之间的区别与联系

类别	两点间的距离	点到直线的距离	两条平行线间的距离
区别	连结两点的线段的长度	点到直线的垂线段的长度	两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的垂线段的长度
联系	最后都归结为两点间的一条线段的长度		

2. 性质：

平行线之间的距离处处相等.

数学表达式：如图 18.1-6，A，C 是 l_1 上任意两点，∵ $l_1 /\!/ l_2$，$AB\perp l_2$，$CD\perp l_2$，∴ $AB=CD$.

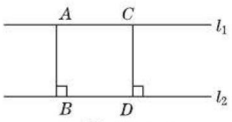


图 18.1-6

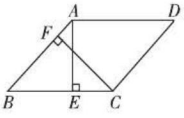


图 18.1-7

3. 拓展：

（1）夹在两条平行线间的任何平行线段都相等.

（2）等底等高的平行四边形的面积相等.

（3）平行四边形的面积 = 底 × 高 $=ah$（其中 a 是平行四边形的任意一条边长，h 必须是边长为 a 的边与它的对边之间的距离）. 如图 18.1-7 所示，在 $\square ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于点 E，$CF\perp AB$ 于点 F，则 $S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=AB\cdot CF$.

提分·必记

特别提醒

1. 距离是指垂线段的长度，它是正值；
2. 当两条平行线确定后，它们之间的距离是一定值，不随位置的不同而改变；
3. 平行线间的距离处处相等，因此在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置；
4. 任何两条平行线间的距离都是存在的、唯一的，都是两条平行线间最短线段的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用两条平行线间的距离的性质说明面积相等

例 4 如图 18.1−8，直线 $a \parallel b$，点 A，E，F 在直线 a 上，点 B，C，D 在直线 b 上，$BC=EF$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等吗？为什么？

解题秘方：紧扣“等底等高的三角形面积相等”作三角形的高进行说明.

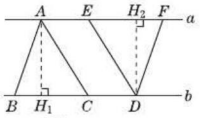


图 18.1−8

解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等. 理由如下：

如图 18.1−8，过点 A 作 $AH_1 \perp$ 直线 b，垂足为点 H_1，

过点 D 作 $DH_2 \perp$ 直线 a，垂足为点 H_2.

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，

$\therefore S_1=\frac{1}{2}BC \cdot AH_1$，$S_2=\frac{1}{2}EF \cdot DH_2$.

$\because$ 直线 $a \parallel b$，$AH_1 \perp$ 直线 b，$DH_2 \perp$ 直线 a，$\therefore AH_1=DH_2$.

又 $\because BC=EF$，$\therefore S_1=S_2$，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

提分·秘诀

解法提醒

- 由平行线间的距离处处相等，可知顶点都在两平行线上的三角形的高相等.
- 解顶点在两平行线上的三角形的面积问题常作高（两平行线间的垂线段）进行解答.

点知识▶4 平行四边形的对角线性质

1. 平行四边形的性质定理 3：平行四边形的对角线互相平分.

数学表达式：如图 18.1−9，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.

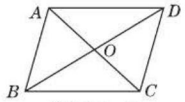


图 18.1−9

2. 拓展性质：

（1）平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分，两条对角线将平行四边形分成面积相等的四部分.

（2）若一条直线过平行四边形两条对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积.

提分·必记

图示

如图 18.1−10，$\because$ 直线 EF 过平行四边形 $ABCD$ 两对角线的交点 O，

$\therefore AE+AB+BF=FC+CD+DE=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$，

$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

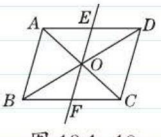


图 18.1−10

拔考向▶利用平行四边形的对角线性质解与平行四边形有关的问题

题型 1：平行四边形对角线的性质在求边长中的应用

例 5 如图 18.1−11，已知$\square ABCD$ 的周长是 60，对角线 AC，BD 相交于点 O. 若 $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长长 8，求这个平行四边形各边的长.

解题秘方：紧扣“平行四边形对角线、边的性质”进行解答.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

$\because AB+BC+CD+DA=60$，

$OA+AB+OB-(OB+BC+OC)=8$，

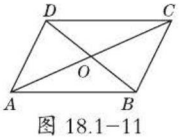


图 18.1−11

$\therefore AB+BC=30$，$AB-BC=8$. $\therefore AB=CD=19$，$BC=AD=11$.

即这个平行四边形各边的长分别为 19，11，19，11.

提分·秘诀

规律点拨

“平行四边形的对角线互相平分”可以得出“平行四边形被它的两条对角线分成四个小三角形，相邻两个小三角形的周长之差等于平行四边形中对应的两邻边之差”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：平行四边形对角线分四边形面积的性质在说明面积关系中的应用

例 6 如图 18.1−12，在$\square ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，过点O作直线EF，分别交AD，BC于点E，F. 判断四边形$ABFE$的面积与四边形$FCDE$的面积有何关系？试说明理由.

解题秘方：紧扣平行四边形的对角线性质、全等三角形的性质进行解答.

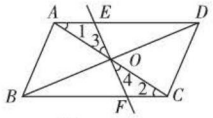


图 18.1−12

解：$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}$. 理由如下：

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$AD \parallel BC$.

∴ $\angle 1=\angle 2$.

又∵$\angle 3=\angle 4$，∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴ $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$BC=DA$，$\angle ABC=\angle CDA$.

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. ∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CDA}$.

∵ $S_{四边形ABFE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle COF}+S_{\triangle AOE}=S_{\triangle ABC}$，

$S_{四边形FCDE}=S_{\triangle CDA}-S_{\triangle AOE}+S_{\triangle COF}=S_{\triangle CDA}$，

∴ $S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}$.

特别提醒

这是平行四边形对角线性质的两个拓展结论，即

- 平行四边形的一条对角线将平行四边形分成两个面积相等的三角形.
- 过平行四边形的两对角线交点的一条直线将平行四边形分成两个面积相等的图形.

本例的实质是对知识点中的两条拓展性质的部分结论的证明过程.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用全等法解平行四边形问题

挑战·高分

题型 1：全等法在平行四边形中证线段相等的应用

例 7 如图 18.1−13 所示，在$\square ABCD$中，平行于对角线AC的直线MN分别交DA，DC的延长线于点M，N，交BA，BC于点P，Q. 求证：$MP=QN$.

解题秘方：紧扣全等三角形对应边相等结合平行四边形定义的双重功能进行证明.

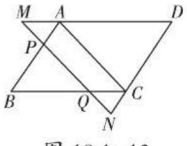


图 18.1−13

证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，

∴ $\angle MPA=\angle N$，$\angle MAP=\angle D$，$\angle D=\angle QCN$，

∴ $\angle MAP=\angle QCN$.

∵ $MN \parallel AC$，$AM \parallel CQ$，

∴四边形$AMQC$是平行四边形，

∴ $MA=CQ$，

∴ $\triangle MAP \cong \triangle QCN$，∴ $MP=QN$.

解法提醒

证明线段相等，通常利用平行四边形的性质，转化为证三角形全等；有时也可直接利用平行四边形的性质去证明.

注意：本例也可先证$MQ=PN$，结合等式的性质可证$MP=QN$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：全等法在平行四边形中证角相等的应用

例 8 如图 18.1−14，在▱$ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，点 F 在 BC 的延长线上，且 $BE=CF$. 求证：$\angle BAE=\angle CDF$.

解题秘方：紧扣全等三角形对应角相等结合平行四边形的定义和性质进行证明.

证明：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AB=DC$，$AB\parallel DC$.

$\therefore \angle B=\angle DCF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中，$AB=DC$，$\angle B=\angle DCF$，$BE=CF$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DCF$，

$\therefore \angle BAE=\angle CDF$.

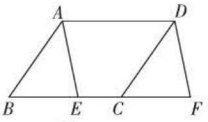


图 18.1−14

解题通法

证明角相等的常用方法

1. 对顶角相等；
2. 一个三角形中等边对等角；
3. 两直线平行，内错角相等（同位角相等）；
4. 全等三角形对应角相等；
5. 同角或等角的补角相等；
6. 同角或等角的余角相等；
7. 平行四边形的对角相等.

拔尖角度 ▶ 2 利用作差法判断平行四边形中线段间的关系

例 9 如图 18.1−15 所示，在▱$ABCD$ 中，AE，BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，且分别交 CD 于点 E，F，AE，BF 相交于点 M.

（1）求证：$AE\perp BF$；

（2）判断线段 DF 与 CE 的大小关系，并说明理由.

解题秘方：紧扣“等量减等量差相等”结合平行四边形的性质进行解答.

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$. $\therefore \angle DAB+\angle ABC=180^\circ$.

∵ AE，BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，

$\therefore 2\angle EAB+2\angle FBA=180^\circ$. $\therefore \angle EAB+\angle FBA=90^\circ$.

$\therefore \angle AMB=90^\circ$，即 $AE\perp BF$.

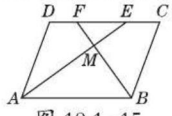


图 18.1−15

（2）**解**：$DF=CE$. 理由如下：

在▱$ABCD$ 中，$CD\parallel AB$，$AD=BC$. $\therefore \angle DEA=\angle EAB$.

又∵ AE 平分 $\angle DAB$，$\therefore \angle DAE=\angle EAB$.

$\therefore \angle DEA=\angle DAE$. $\therefore DE=AD$.

同理可得 $CF=BC$.

∵ $AD=BC$，$\therefore DE=CF$.

$\therefore DE-EF=CF-EF$，即 $DF=CE$.

方法点拨：1. 判断两线段的位置关系，其实质是判断两线段所在直线的位置关系. 两直线的位置关系有相交和平行两种情况，其中相交又有垂直和斜交两种情况；

2. 两线段的大小关系有大于、小于、相等这三种情况，它们的证明途径有利用全等三角形的性质，平行四边形的性质，等式的性质等.

挑战·高分

另解

如图 18.1−16 所示，分别延长 BC，AE 交于点 P.

在▱$ABCD$ 中，

$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle DAP=\angle P$.

∵ AE 平分 $\angle DAB$，

$\therefore \angle DAP=\angle PAB$.

$\therefore \angle PAB=\angle P$，

$\therefore BA=BP$.

∵ BF 平分 $\angle ABC$，

$\therefore BM\perp AP$，即 $AE\perp BF$.

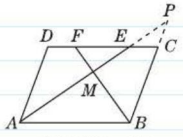


图 18.1−16

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用构造对角线法证平行四边形中线段相等

例 10 如图 18.1−17，已知$\square ABCD$的顶点A，C与$\square EBFD$的顶点E，F在一条直线上，求证：$AE=CF$.

解题秘方：紧扣“平行四边形对角线的性质”构造对角线证明对角线上的线段相等.

证明：如图 18.1−17，连结BD交AC于点O.

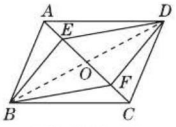


图 18.1−17

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $OA=OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵四边形$EBFD$是平行四边形，

∴ $OE=OF$（平行四边形的对角线互相平分）.

∴ $OA-OE=OC-OF$，即$AE=CF$（等式的性质）.

挑战·高分

特别提醒

本例易受全等三角形思维定式的影响，欲证的两线段相等且又属于不同的三角形，习惯上就联想到证这两个三角形全等，这样虽然能达到证明的目的，却忽视了平行四边形特有的性质，易走弯路. 因此在解决平行四边形的有关问题中，应注意灵活运用平行四边形的性质.

拔尖角度 4 利用等腰三角形的性质求平行四边形中的角的度数

例 11 如图 18.1−18，在$\square ABCD$中，点E是AD的中点，延长CE交BA的延长线于点F. 若$BC=2AB$，$\angle FBC=70°$，求$\angle EBC$的度数.

解题秘方：紧扣“等腰三角形三线合一”的性质展开计算求解.

解：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

∴ $AB=DC$，$DC\parallel AB$，

∴ $\angle ECD=\angle F$.

又∵ $DE=AE$，$\angle DEC=\angle AEF$，

∴ $\triangle DEC\cong\triangle AEF$.

∴ $CE=FE$，$DC=AF$.

∴ $AB=AF$. ∴ $BF=2AB$.

∵ $BC=2AB$，∴ $BC=BF$.

又∵ $CE=FE$，

∴ $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC=\frac{1}{2}\times 70°=35°$.

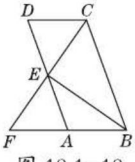


图 18.1−18

挑战·高分

方法规律

求线段或角的常用方法：

1. 利用等量代换；
2. 利用整体与部分之间的关系；
3. 利用角平分线的性质及判定；
4. 利用线段垂直平分线的性质及判定；
5. 利用等腰三角形的性质及判定；
6. 利用全等三角形的性质；
7. 利用面积（等底等高等积）；
8. 利用平行四边形的性质.

拔尖角度 5 利用面积法解与平行四边形相关的应用问题

题型 1：平行四边形的面积性质在求距离中的应用

例 12 如图 18.1−19，在$\square ABCD$中，对角线$BD=8$ cm，$AE\perp BD$，垂足为E，且$AE=3$ cm，$BC=4$ cm，则AD与BC之间的距离为_____.

解题秘方：紧扣“平行四边形的面积性质”进行计算.

解：∵四边形$ABCD$为平行四边形，

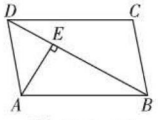


图 18.1−19

挑战·高分

解法提醒

在三角形或平行四边形中，根据面积为定值，用不同的边为底边和对应的高表示面积，可以得到不同的底和高之间

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴△ABD与△CDB的面积相等.

∵$AE \perp BD$，$AE=3$ cm，$BD=8$ cm，

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD \cdot AE=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$（cm^2）.

∴$S_{四边形ABCD}=2S_{\triangle ABD}=24$ cm^2. 设AD与BC之间的距离为h cm，

∵$BC=4$ cm，∴$S_{四边形ABCD}=BC \cdot h=4h$ cm^2，∴$4h=24$，解得$h=6$.

答案：6 cm

数量的相等关系，从而转化为解方程使问题获解.

题型 2：平行四边形的面积性质在设计方案中的应用

例 13 张大伯承包了一个呈四边形的池塘，如图 18.1−20 所示，它的四个角A，B，C，D处均有一棵大树，张大伯今年养鱼喜获丰收，明年准备把池塘面积扩大一倍，但又不想毁掉这四棵大树，并且扩建后的池塘呈平行四边形形状. 张大伯这一设想是否能实现？请你帮助他解决一下，并画出草图.

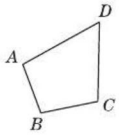


图 18.1−20

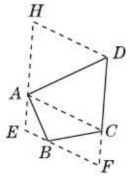


图 18.1−21

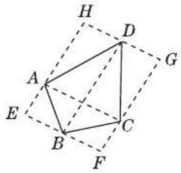


图 18.1−22

解题秘方：紧扣平行四边形中的面积性质进行方案设计.

解：张大伯能实现这一设想. 有多种设计方案，现列举两种如下：

方案一：如图 18.1−21，连结AC. 过点D作$DH \parallel AC$，且使$DH=AC$，连结HA，过点B作AC的平行线，延长HA，DC，分别交过点B且平行于AC的直线于点E，F，则▱$EFDH$即为扩建成的平行四边形.

方案二：如图 18.1−22，连结AC，BD. 分别过点B，D作AC的平行线，分别过点A，C作BD的平行线，这两组平行线的交点分别为点E，F，G，H，则▱$EFGH$即为扩建成的平行四边形.

技巧提醒

解此题的关键是设计图形，利用平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分设计图形. 设计图形时还可以把原来的图形分为四个三角形，再扩大四个相应等大的三角形.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容是中考考查的重点，也是热点，主要考查平行四边形定义和性质的应用，多以选择题、填空题或解答题的形式出现；也有一些创新题型，如开放探索题、操作题等，考查学生的数学思维能力和探索创新能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用平行四边形的性质解全等三角形问题

例 14 [中考·湘潭]如图 18.1-23，在$\square ABCD$中，$DE=CE$，连结AE并延长交BC的延长线于点F.

（1）求证：$\triangle ADE \cong \triangle FCE$；

（2）若$AB=2BC$，$\angle F=36°$，求$\angle B$的度数.

试题评析：此题主要考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质、三角形内角和定理；熟练掌握平行四边形的性质，证明三角形全等是解决问题的关键.

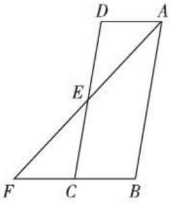


图 18.1-23

（1）**证明**：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$，$AD=BC$，

$\therefore \angle D=\angle ECF$.

在$\triangle ADE$和$\triangle FCE$中，$\begin{cases}\angle D=\angle ECF,\\ DE=CE,\\ \angle AED=\angle FEC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$（A.S.A.）.

（2）**解**：∵$\triangle ADE \cong \triangle FCE$，$\therefore AD=FC$，

∵$AD=BC$，$AB=2BC$，$\therefore AB=FB$.

$\therefore \angle BAF=\angle F=36°$.

$\therefore \angle B=180°-2\times 36°=108°$.

考法 2 利用线段垂直平分线性质解平行四边形的周长问题

例 15 [中考·贵阳]如图 18.1-24，在$\square ABCD$中，对角线AC的垂直平分线分别交AD、BC于点E、F，连结CE，若$\triangle CED$的周长为 6，则$\square ABCD$的周长为（　　）

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

试题评析：本题考查了平行四边形的性质、线段垂直平分线的性质、三角形周长的计算；熟练掌握平行四边形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

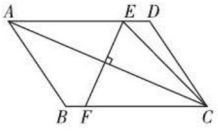


图 18.1-24

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore DC=AB$，$AD=BC$.

∵AC的垂直平分线交AD于点E，$\therefore AE=CE$，

$\therefore \triangle CDE$的周长$=DE+CE+DC=DE+AE+DC=AD+DC=6$，

$\therefore \square ABCD$的周长$=2\times 6=12$.

答案：B

冲刺·满分

思路点拨

- 利用平行四边形的性质得出AD∥BC，AD=BC，证出∠D=∠ECF，由A.S.A.即可证出△ADE≌△FCE；
- 证出AB=FB，由等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可得出答案.

解法提醒

由平行四边形的性质得出$DC=AB$，$AD=BC$，由线段垂直平分线的性质得出$AE=CE$，从而得出$\triangle CDE$的周长$=AD+DC$，即可得出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用平行四边形的性质证明线段相等

例 16 [中考·淮安]如图 18.1-25，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，过点O的直线分别交AD、BC于点E、F，求证：$AE=CF$.

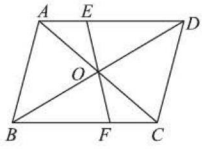


图 18.1-25

试题评析：本题主要考查了平行四边形两条对角线互相平分的性质，利用此性质证明三角形全等是解题关键.

证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD \parallel BC$，$OA=OC$.

∴$\angle OAE=\angle OCF$，$\angle AEO=\angle CFO$.

∴$\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴$AE=CF$.

方法点拨

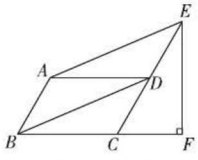
平行四边形是中心对称图形，经过对称中心的任何一条直线与一组对边(或延长线)相交，交点也是一对对称点，利用中心对称的性质可以得到很多线段相等的结论.

两年模拟兵法

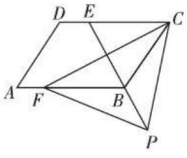
☞答案见 263 页

1. [中考·辽阳]如图，在▱$ABCD$中，$\angle BAD=120°$，连结BD，作$AE \parallel BD$交CD的延长线于点E，过点E作$EF \perp BC$交BC的延长线于点F，且$CF=1$，则AB的长是(　　)

A.2　　B.1　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{2}$



(第 1 题)



(第 3 题)

2. [中考·黑龙江]在平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线把BC边分成长度是 3 和 4 的两部分，则平行四边形$ABCD$的周长是(　　)

A.22　　B.20　　C.22 或 20　　D.18

3. [中考·泰安]如图，四边形$ABCD$是平行四边形，点E是边CD上一点，且$BC=EC$，$CF \perp BE$交AB于点F，P是EB延长线上一点，下列结论：

① BE平分$\angle CBF$；② CF平分$\angle DCB$；

③ $BC=FB$；④ $PF=PC$.

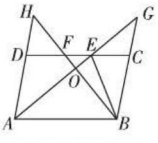
其中正确结论的个数为(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

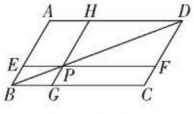
4. [中考·威海]如图，在▱$ABCD$中，$\angle DAB$的平分线交CD于点E，交BC的延长线于点G，$\angle ABC$的平分线交CD于点F，交AD的延长线于点H，AG与BH交于点O，连结BE，下列结论错误的是(　　)

A.$BO=OH$　　B.$DF=CE$

C.$DH=CG$　　D.$AB=AE$



(第 4 题)

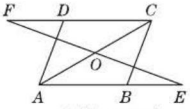


(第 5 题)

5. [中考·南充]如图，在▱$ABCD$中，过对角线BD上一点P作$EF \parallel BC$，$GH \parallel AB$，且$CG=2BG$，$S_{\triangle BPG}=1$，则$S_{\square AEPH}=$_____.

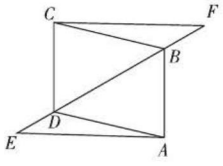
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·山西]已知：如图，在$\square ABCD$中，延长AB至点E，延长CD至点F，使得$BE=DF$，连结EF，与对角线AC交于点O.
求证：$OE=OF$.



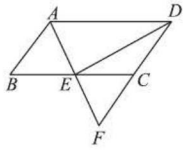
（第6题）

7. [中考·铜仁]如图，已知点E，F分别是平行四边形$ABCD$对角线BD所在直线上的两点，连结AE，CF，请你添加一个条件，使得$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，并证明.



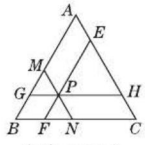
（第7题）

8. 如图，在$\square ABCD$中，E是BC的中点，连结AE并延长交DC的延长线于点F.
（1）求证：$AB=CF$；
（2）连结DE，若$AD=2AB$，求证：$DE \perp AF$.



（第8题）

9. 如图，$\triangle ABC$是边长为a的等边三角形，P是$\triangle ABC$内的任意一点，过点P作$EF \parallel AB$分别交AC，BC于点E，F，作$GH \parallel BC$分别交AB，AC于点G，H，作$MN \parallel AC$分别交AB，BC于点M，N，猜想$EF+GH+MN$的值是多少，其值是否随点P位置的改变而改变？并说明理由.　【导学号：9877429】



（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.2 平行四边形的判定

核心知识

- 边的关系判定平行四边形
- 角的关系判定平行四边形
- 对角线的关系判定平行四边形

知识链接

平行四边形 判定 → 边的关系 / 角的关系 / 对角线关系

点知识·拨考向 速提分

点知识 平行四边形的判定

1. 判定方法

判定平行四边形可以从对边、对角和对角线三个方面进行，如图18.2-1，在$\square ABCD$中，AC，BD相交于点O，具体方法如下表所示.

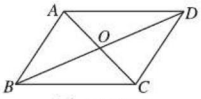


图 18.2-1

平行四边形的判定方法

条件类型	判定方法	数学表达式
对边关系	两组对边分别平行的四边形是平行四边形.	$\because AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$， $\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.
	两组对边分别相等的四边形是平行四边形.	$\because AD=BC$，$AB=CD$， $\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.
	一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.	$\because AD \overset{=}{\parallel} BC$（或$AB \overset{=}{\parallel} CD$）， $\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.
对角关系	两组对角分别相等的四边形是平行四边形.	$\because \angle DAB=\angle DCB$， $\angle ABC=\angle ADC$， $\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.
对角线关系	对角线互相平分的四边形是平行四边形.	$\because OA=OC$，$OB=OD$， $\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.

2. 灵活选择平行四边形判定定理的方法

（1）已知一组对边平行，可证明该组对边相等或证明另一组对边平行.

（2）已知一组对边相等，可证明该组对边平行或证明另一组对边相等.

（3）已知条件与对角线有关，可证明对角线互相平分.

（4）已知条件与角有关，可证明两组对角分别相等或证明对边之间的关系.

提分·必记

特别提醒

1. 平行四边形的判定定理和性质定理是互逆定理，解题时要注意区别，不能混淆.
(1) 由平行四边形这一条件得到边、角、对角线关系是性质；
(2) 由边、角、对角线关系得到平行四边形是判定.
2. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形.
3. 两组邻边分别相等的四边形不一定是平行四边形.

方法提醒

判定平行四边形的方法选择

已知条件	证明思路
一组对边相等	1. 另一组对边相等
	2. 该组对边平行
一组对边平行	1. 另一组对边平行
	2. 该组对边相等
对角线相交	对角线互相平分
角	两组对角分别相等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用平行四边形的判定解有关四边形的应用

题型1：边的关系在判定平行四边形中的应用

例1 如图18.2-2，已知$BE \parallel DF$，$\angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，求证：四边形$DEBF$是平行四边形.

解题秘方：紧扣“$BE \parallel DF$”需说明“$BE=DF$”或“$DE \parallel BF$”即可得到四边形$DEBF$是平行四边形.

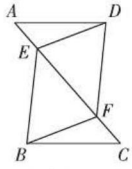


图18.2-2

证明：$\because BE \parallel DF$，

$\therefore \angle AFD=\angle CEB$，

$\because \angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$，

$\therefore DF=BE$.

又$\because BE \parallel DF$，

$\therefore$四边形$DEBF$是平行四边形.

解题通法：由边的关系判定平行四边形的方法

1. 若已知一组对边平行，则可采用证这组对边相等或另一组对边平行这两种方法说明平行四边形.

2. 若已知一组对边相等，则可采用证这组对边平行或另一组对边相等这两种方法说明平行四边形.

题型2：角的关系在判定平行四边形中的应用

例2 如图18.2-3，在$\square ABCD$中，BE平分$\angle ABC$，交AD于点E，DF平分$\angle ADC$，交BC于点F，那么四边形$BFDE$是平行四边形吗？为什么？

解题秘方：针对条件中与角有关条件居多这一特点，紧扣“两组对角相等”来证明平行四边形.

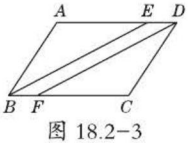


图18.2-3

解：四边形$BFDE$是平行四边形.

理由：在$\square ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$.

$\because BE$平分$\angle ABC$，DF平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle CDF=\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$，

$\therefore \angle CDF=\angle ADF=\angle ABE=\angle CBE$.

$\because \angle DFB=\angle C+\angle CDF$，$\angle BED=\angle ABE+\angle A$，

$\therefore \angle DFB=\angle BED$，

$\therefore$四边形$BFDE$是平行四边形.

题型3：对角线关系在判定平行四边形中的应用

例3 [中考·徐州]已知：如图18.2-4，在平行四边形$ABCD$中，点E，F在AC上，且$AE=CF$. 求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

提分·秘诀

另解

$\because BE \parallel DF$，

$\therefore \angle AFD=\angle CEB$.

$\because \angle ADF=\angle CBE$，$AF=CE$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$，

$\therefore \angle A=\angle C$，$AD=CB$.

又$AF=CE$，$\therefore AE=CF$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$，

$\therefore \angle AED=\angle CFB$，

$\therefore \angle DEF=\angle BFE$，

$\therefore DE \parallel BF$.

又$BE \parallel DF$，

$\therefore$四边形$DEBF$是平行四边形.

解法提醒

当已知条件出现所要说明的四边形的角时，则需从角的关系中考虑判定平行四边形的方法，因此可选择两组对角分别相等的四边形是平行四边形来判定.

解法提醒

当条件出现在所要说明的四边形的对角线上时，需从对角线的关

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：由于条件都与四边形的对角线相关，因此需紧扣对角线关系判定平行四边形.

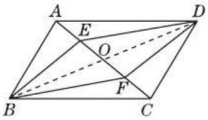


图 18.2-4

证明：如图 18.2-4，连结 BD，设对角线 AC，BD 交于点 O.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $OA=OC$，$OB=OD$.

又∵ $AE=CF$，∴ $OA-AE=OC-CF$，即 $OE=OF$.

∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

系判定平行四边形，而从对角线的角度判定平行四边形，一般结合已知平行四边形的性质，利用已知平行四边形的对角线的性质去判定要说明的四边形是平行四边形.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用一题多解法判定平行四边形

例 4 如图 18.2-5，在四边形 $ABCD$ 中，$AE \perp BD$ 于 E，$CF \perp BD$ 于 F，$AE=CF$，$BF=DE$，四边形 $ABCD$ 是不是平行四边形？为什么？

解题秘方：紧扣平行四边形的判定定理从不同的角度判定平行四边形.

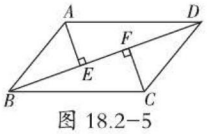


图 18.2-5

解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，理由如下：

方法一：两组对边平行法（定义法）.

∵ $BF=DE$，∴ $BF-EF=DE-EF$，即 $BE=DF$.

∵ $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，∴ $\angle AEB=\angle CFD=90°$.

又∵ $AE=CF$，∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$. ∴ $\angle ABE=\angle CDF$.

∴ $AB \parallel CD$.

同理可证 $AD \parallel BC$.

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法二：两组对边相等法.

由方法一知 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$. ∴ $AB=CD$.

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle CFB$ 中，∵ $AE=CF$，$\angle AED=\angle CFB$，$DE=BF$，

∴ $\triangle AED \cong \triangle CFB$. ∴ $AD=CB$.

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法三：两组对角相等法.

由方法一知 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$，

∴ $\angle ABE=\angle CDF$，$\angle BAE=\angle DCF$.

由方法二知 $\triangle AED \cong \triangle CFB$，

∴ $\angle CBF=\angle ADE$，$\angle DAE=\angle BCF$.

∴ $\angle ABC=\angle CDA$，$\angle BAD=\angle DCB$.

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

挑战·高分

另解 1

一组对边平行且相等法.

由方法 1 知

$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，

∴ $AB=CD$，

$\angle ABE=\angle CDF$.

∴ $AB \parallel CD$.

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

另解 2

对角线互相平分法.

如图 18.2-6，连结 AC，交 BD 于点 O，

∵ $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，

∴ $\angle AEO=\angle CFO=90°$.

又∵ $AE=CF$，

$\angle AOE=\angle COF$，

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴ $AO=CO$，$EO=FO$.

又∵ $BF=DE$，

∴ $BF-FO=DE-EO$，

即 $BO=DO$.

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

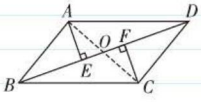


图 18.2-6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用平行四边形法解几何问题

题型 1：平行四边形法在证明线段相等中的应用

例 5 如图 18.2-7，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \parallel AB$，在 AB 上截取 BF，使 $BF=AE$，求证：$EF=BD$.

解题秘方：由于要证的线段是四边形的对边，因此需将证明线段相等问题转化为证明平行四边形问题来解.

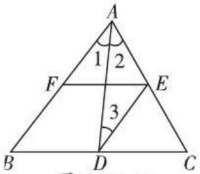


图 18.2-7

证明：如图 18.2-7，$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又 $\because DE \parallel AB$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$. $\therefore AE=DE$.

$\because BF=AE$，$\therefore DE=BF$.

又 $\because DE \parallel BF$，$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形.

$\therefore EF=BD$.

题型 2：平行四边形法在说明线段关系中的应用

例 6：如图 18.2-8，在 $\square ABCD$ 中，延长 AB 到 E，延长 CD 到 F，使得 $BE=DF$，试猜测 AC 与 EF 有什么关系，并加以证明.

解题秘方：结合图形进行猜测：AC、EF 互相平分. 紧扣平行四边形“对角线互相平分”这一特征，将证明线段互相平分问题转化为证明平行四边形问题来解.

解：AC 与 EF 互相平分，证明如下：

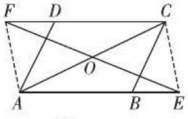


图 18.2-8

如图 18.2-8，连结 AF，CE，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore DC \parallel AB$，$DC=AB$.

$\because DF=BE$，$\therefore CF=AE$.

$\because CF \parallel AE$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

$\therefore AC$ 与 EF 互相平分.

另解

$\because$ 四边形 ABCD 为平行四边形，

$\therefore DC=AB$，$CF \parallel AE$，

$\therefore \angle CFE=\angle AEF$.

$\because DF=BE$，$\therefore CF=AE$.

$\because EF=FE$，

$\therefore \triangle CFE \cong \triangle AEF$.

$\therefore \angle CEF=\angle AFE$，$CE \parallel AF$，

$\therefore$ 四边形 AECF 是平行四边形.

拔尖角度▸ 3 利用构造平行四边形法解几何问题

例 7 如图 18.2-9，已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 为 AC 上一点，连结 BE 交 AD 于点 F，且 $AE=FE$.

求证：$BF=AC$.

解题秘方：利用构造平行四边形法将分散的两要证的线段（BF，AC）集中到同一个三角形中去，从而将证边相等的问题转化为证角相等的问题来解.

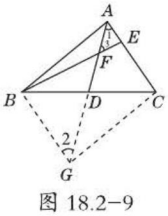


图 18.2-9

挑战·高分

解法提醒

证明两条线段（或两角）相等的常用方法：

1. 线段垂直平分线的判定和性质；
2. 角平分线的判定和性质；
3. 等腰三角形的判定和性质；
4. 全等三角形的性质；
5. 平行四边形的性质.

知识储备

两条线段的数量关系有相等或倍分，位置关系有平行或相交，而相交的特殊情况有垂直、互相平分.

挑战·高分

解法提醒

当题中有三角形中线时，常用倍长中线法构造平行四边形，然后利用平行四边形的性质推出线段相等或平行以及角相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：如图 18.2−9，延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连结 BG，CG.

∵ $DG=AD$，$BD=DC$，∴四边形 $ABGC$ 是平行四边形.

∴ $AC \parallel BG$. ∴ $\angle 1=\angle 2$.

又∵ $AE=FE$，∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ $\angle 2=\angle 3=\angle BFG$，∴ $BG=BF$.

又∵ $BG=AC$，∴ $BF=AC$.

拔尖角度▶ 4 利用“动中求静”法探究动点问题

挑战·高分

例 8 如图 18.2−10，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BC=18$ cm，$CD=15$ cm，$AD=10$ cm，$AB=12$ cm，动点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 3 cm/s 的速度由 C 向 B 运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动.

（1）几秒时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长；

（2）几秒时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长.

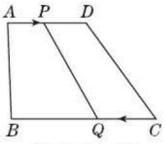


图 18.2−10

解题秘方：紧扣条件中有“一组对边平行”，由平行四边形的判定只需补充这组对边相等这一条件即可，再由运动的路程、速度、时间的关系表示出相关线段的长度，从而可列出方程进行求解.

解：（1）设 x s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，则 $10-2x=3x$，解得 $x=2$.

所以 2 s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，

此时四边形 $PDCQ$ 的周长是 $3\times2\times2+15\times2=42$（cm）.

（2）设 y s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，

则 $2y=18-3y$，解得 $y=3.6$.

所以 3.6 s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，

此时四边形 $ABQP$ 的周长是 $3.6\times2\times2+12\times2=38.4$（cm）.

解法提醒

解决动点问题的基本思路就是变“动”为“静”，要用“静”去理解“动”. 本例中，若运动的时间为 t s，则 $AP=2t$ cm，$CQ=3t$ cm，即 $2t$，$3t$ 表示线段的长，利用平行四边形的性质列方程即可求得 t 的值.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

平行四边形的判定定理是中考的重要内容，命题形式灵活多样，既有选择题、填空题，又有综合题，还常与平行四边形的性质定理综合在一起进行考查，在近几年的中考中，和平行四边形有关的开放题、探索题逐渐成为中考的热点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用全等三角形判定平行四边形

例 9 [中考·咸宁]如图 18.2-11，点 B、E、C、F 在一条直线上，$AB=DF$，$AC=DE$，$BE=FC$.

（1）求证：$\triangle ABC \cong \triangle DFE$；

（2）连结 AF，BD，求证：四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

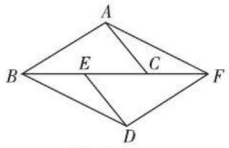


图 18.2-11

试题评析：本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定与性质、平行线的判定. 熟练掌握平行四边形的判定方法，证明三角形全等是解决问题的关键.

证明：（1）$\because BE=FC$，$\therefore BC=EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，$\begin{cases} AB=DF, \\ AC=DE, \\ BC=EF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE$（S.S.S.）.

（2）由（1）知 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$，

$\therefore \angle ABC=\angle DFE$，$\therefore AB \parallel DF$.

$\because AB=DF$，$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

冲刺·满分

思路点拨

- 由 S.S.S. 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ 即可；
- 由全等三角形的性质得出 $\angle ABC=\angle DFE$，证出 $AB \parallel DF$，即可得出结论.

考法 2 利用平行四边形的性质和判定解与勾股定理综合问题

例 10 [中考·鄂州]如图 18.2-12，$\square ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A，C 两点作 $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为 E，F，延长 AE，CF 分别交 CD，AB 于 M，N.

（1）求证：四边形 $CMAN$ 是平行四边形.

（2）已知 $DE=4$，$FN=3$，求 BN 的长.

试题评析：本题考查平行四边形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是记住平行四边形的判定方法和性质，正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

（1）**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore CD \parallel AB$.

$\because AM \perp BD$，$CN \perp BD$，$\therefore AM \parallel CN$，

$\therefore$ 四边形 $CMAN$ 是平行四边形.

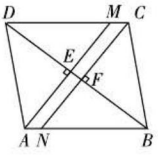


图 18.2-12

（2）**解**：$\because$ 四边形 $CMAN$ 是平行四边形，

$\therefore CM=AN$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore CD=AB$，$CD \parallel AB$，

$\therefore DM=BN$，$\angle MDE=\angle NBF$，

思路点拨

- 只要证明 $CM \parallel AN$，$AM \parallel CN$ 即可.
- 先证明 $\triangle MDE \cong \triangle NBF$，可得 $ME=NF$，再在 $Rt\triangle DEM$ 中，利用勾股定理即可解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ MDE 和△ NBF 中，

$$\begin{cases}\angle MDE=\angle NBF,\\ \angle DEM=\angle BFN=90^\circ,\\ DM=BN,\end{cases}$$

$\therefore$ △ $MDE\cong$△ NBF. $\therefore ME=NF=3$.

在 Rt △ DME 中，$\because\angle DEM=90^\circ$，$DE=4$，$ME=3$，

$\therefore DM=\sqrt{DE^2+ME^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore BN=DM=5$.

考法 3 利用平行四边形的判定和性质解与等腰三角形、勾股定理综合问题

例 11 [中考·大庆]如图 18.2-13，以 BC 为底边的等腰△ ABC，点 D，E，G 分别在 BC，AB，AC 上，且 $EG\parallel BC$，$DE\parallel AC$，延长 GE 至点 F，使得 $BE=BF$.

（1）求证：四边形 $BDEF$ 为平行四边形；

（2）当 $\angle C=45^\circ$，$BD=2$ 时，求 D，F 两点间的距离.

试题评析：本题考查了平行四边形的判定与性质、等腰三角形的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理等知识；熟练掌握平行四边形的判定与性质和勾股定理是解决问题的关键.

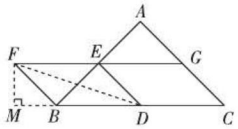


图 18.2-13

（1）**证明**：$\because$△ ABC 是等腰三角形，

$\therefore\angle ABC=\angle C$.

$\because EG\parallel BC$，$DE\parallel AC$，

$\therefore\angle AEG=\angle ABC=\angle C$，四边形 $CDEG$ 是平行四边形.

$\therefore\angle DEG=\angle C$.

$\because BE=BF$，$\therefore\angle BFE=\angle BEF=\angle AEG$，

$\therefore\angle BFE=\angle DEG$. $\therefore BF\parallel DE$.

又$\because FE\parallel BD$，$\therefore$四边形 $BDEF$ 为平行四边形.

（2）**解**：$\because DE\parallel AC$，$\angle C=45^\circ$，

$\therefore\angle BDE=\angle C=\angle ABC=\angle BFE=\angle BEF=45^\circ$.

$\therefore$△ BDE、△ BEF 是等腰直角三角形.

$\therefore BF=BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$.

作 $FM\perp BD$ 交 DB 的延长线于 M，连结 DF，如图 18.2-13 所示.

则△ BFM 是等腰直角三角形，

$\therefore FM=BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BF=1$，$\therefore DM=3$.

在 Rt △ DFM 中，由勾股定理得 $DF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

即 D，F 两点间的距离为$\sqrt{10}$.

思路点拨

由等腰三角形的性质得出∠ABC=∠C，证出∠AEG=∠ABC=∠C，四边形CDEG是平行四边形，得出∠DEG=∠C，证出∠BFE=∠DEG，得出BF∥DE，即可得出结论；

证出△BDE、△BEF是等腰直角三角形，由勾股定理得出$BF=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\sqrt{2}$，作FM⊥BD交DB的延长线于M，连结DF，则△BFM是等腰直角三角形，由勾股定理得出$FM=BM=\frac{\sqrt{2}}{2}BF=1$，得出DM=3，在Rt△DFM中，由勾股定理求出DF即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

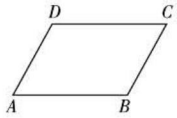
1. [中考·衡阳]如图，在四边形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，要使四边形$ABCD$是平行四边形，可添加的条件不正确的是（　　）

A.$AB=CD$

B.$BC \parallel AD$

C.$\angle A=\angle C$

D.$BC=AD$



（第1题）

2. [中考·黔西南州]四边形$ABCD$中，$AB=CD$，$AB \parallel CD$，则下列结论中错误的是（　　）

A.$\angle A=\angle C$　　B.$AD \parallel BC$

C.$\angle A=\angle B$　　D. 对角线互相平分

3. 已知四边形的四条边长分别为a，b，c，d，其中a，b为对边，且满足$a^2+b^2+c^2+d^2=2ab+2cd$，则此四边形一定是（　　）

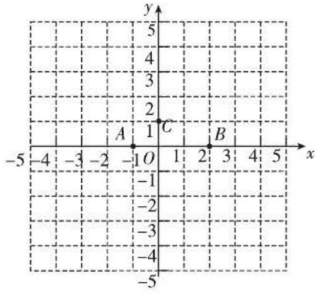
A. 正方形

B. 对角线相等的四边形

C. 对角线互相垂直且相等的四边形

D. 平行四边形

4. [模拟·桥西区]如图，在平面直角坐标系中，以$A(-1, 0)$，$B(2, 0)$，$C(0, 1)$为顶点构造平行四边形，下列不能作为平行四边形顶点坐标的是（　　）



（第4题）

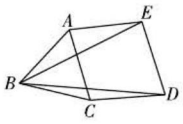
A.$(3, 1)$　　B.$(-4, 1)$

C.$(1, -1)$　　D.$(-3, 1)$

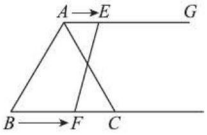
5. [中考·黄石]如图，已知凸五边形$ABCDE$的边长均相等，且$\angle DBE=\angle ABE+\angle CBD$，$AC=1$，则$BD$必定满足（　　）

A.$BD<2$　　B.$BD=2$

C.$BD>2$　　D. 以上情况均有可能



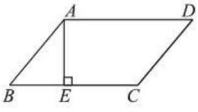
（第5题）



（第6题）

6. 如图，在等边三角形ABC中，$BC=6$ cm，射线$AG \parallel BC$，点E从点A出发沿射线AG以1 cm/s的速度运动，点F从点B出发沿射线BC以2 cm/s的速度运动. 如果点E，F同时出发，设运动时间为t s. 当$t=$_____时，以A，C，E，F为顶点的四边形是平行四边形.

7. 小明家承包了一块如图的土地，经过测量得$AD=BC=30$ m，$AB=CD=20$ m，又量得当$AE \perp BC$时，AE的长为15 m，求该地的面积.

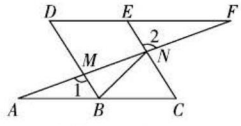


（第7题）

8. [中考·镇江]如图，点B、E分别在AC、DF上，AF分别交BD、CE于点M、N，$\angle A=\angle F$，$\angle 1=\angle 2$.

（1）求证：四边形$BCED$是平行四边形；

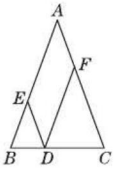
（2）已知$DE=2$，连结BN，若BN平分$\angle DBC$，求CN的长.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知：如图，在△ABC中，$AB=AC=10$，D是BC边上不同于B，C两点的任意一点，过点D分别作$DF\parallel AB$，交AC于点F，$DE\parallel AC$，交AB于点E，求$DE+DF$的值.



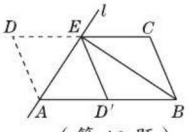
（第9题）

10. [中考·扬州]如图，将▱$ABCD$沿过点A的直线l折叠，使点D落到AB边上的点D'处，折痕l交CD边于点E，连结BE.

（1）求证：四边形$BCED'$是平行四边形；

（2）若BE平分$\angle ABC$，求证：$AB^2=AE^2+BE^2$.

【导学号：9877429】

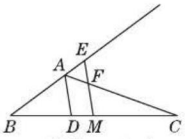


（第10题）

11. [中考·淄博]如图，已知△ABC，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，BC的中点为M，$ME\parallel AD$，交BA的延长线于点E，交AC于点F.

（1）求证：$AE=AF$；

（2）求证：$BE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

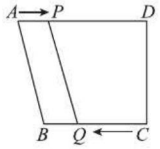


（第11题）

12. 如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，且$AD=8$ cm，$BC=6$ cm，P，Q分别从A、C同时出发，P以1 cm/s的速度由A向D运动，Q以2 cm/s的速度由C向B运动.

（1）几秒后，四边形$ABQP$是平行四边形？

（2）几秒后，四边形$PQCD$是平行四边形？



（第12题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

构造平行四边形证题的技巧

荣老师告诉你 在证明某些几何问题时，若能根据图形的特征，添加恰当的辅助线构造出平行四边形，并利用其性质可使问题化难为易，化繁为简.

技巧一 构造平行四边形证两线段平行

例1 已知：如图1，平行四边形$ABCD$的对角线AC和BD交于点O，E，F分别为OB，OD的中点，过点O任作一直线，分别交AB，CD于点G，H.

求证：$GF \parallel EH$.

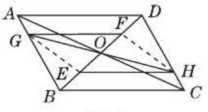


图1

解题秘方：连结GE，FH，GF和EH是四边形$GEHF$的一组对边，若能判定四边形$GEHF$是平行四边形，问题可证.

证明：如图1，连结GE，FH.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$OA=OC$，$OB=OD$，$AB \parallel CD$.

∴$\angle BAO=\angle DCO$.

又$\angle AOG=\angle COH$，

∴$\triangle AOG \cong \triangle COH$.

∴$OG=OH$.

∵E，F分别为OB，OD的中点，

∴$OE=OF$.

∴四边形$GEHF$是平行四边形.

∴$GF \parallel EH$.

方法点拨：证明两条线段平行，可以以这两条线段为一组对边构造平行四边形，利用平行四边形的判定与性质证明.

技巧二 构造平行四边形证两线段相等

例2 如图2，在$\triangle ABC$中，点D在AB上，点E在AC的延长线上，$BD=CE$，连结DE，交BC于点F，$\triangle ABC$的外角$\angle CAH$的平分线交BC的延长线于点G，且$AG \parallel DE$.

求证：$BF=CF$.

解题秘方：过点C作$CM \parallel AB$，交DE于点M，可以证明$BD=CM$，连结CD，BM，然后利用平行四边形的判定与性质得到$BF=CF$.

证明：如图2，过点C作$CM \parallel AB$，交DE于点M，连结BM，CD，则$\angle CME=\angle ADE$.

∵$AG \parallel DE$，

∴$\angle ADE=\angle 1$，$\angle E=\angle 2$.

∵$\angle 1=\angle 2$，

∴$\angle CME=\angle E$，

∴$CM=CE=BD$. ∵$BD \parallel CM$，

∴四边形$BMCD$为平行四边形.

故$BF=CF$.

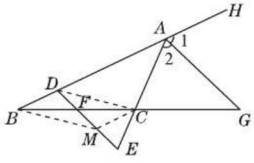


图2

方法点拨：证明在同一条直线上且有公共端点的两条线段相等，可以构造以这两条线段和为对角线的平行四边形，利用“平行四边形的两条对角线互相平分”来证明两条线段相等.

技巧三 构造平行四边形证线段的不等关系

例3 如图3，AD是$\triangle ABC$的边BC上的中线，求证：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

解题秘方：欲证$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$，即要证$2AD<AB+AC$，设法将$2AD$，AB，AC归结到一个三角形中，利用三角形任意两边之和大于第三边

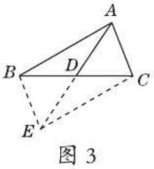


图3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

来证明．注意到 AD 为△ ABC 的中线，故可考虑延长 AD 到 E，使 $DE=AD$，连结 BE，CE，则四边形 $ABEC$ 为平行四边形．从而问题得证．

证明：如图 3，延长 AD 到 E，使 $DE=AD$，连结 BE，EC.

∵ $AD=DE$，$BD=DC$，

∴四边形 $ABEC$ 是平行四边形．

∴ $BE=AC$.

在△ ABE 中，$AE<AB+BE$，

即 $2AD<AB+AC$，

∴ $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

方法点拨：如果条件中出现三角形的中线，那么用倍长中线法将中线延长一倍，利用对角线互相平分的四边形是平行四边形就构造出了平行四边形．

技巧四 ▶ 构造平行四边形证线段的倍分关系

例 4 如图 4，分别以△ ABC 的边 AB，AC 为边向外作正方形 $ABEF$ 和正方形 $ACGH$，M 是 BC 的中点，求证：$FH=2AM$.

证明：如图 4，延长 AM 到 D，使 $MD=AM$，连结 BD，CD.

∵ M 是 BC 的中点，

∴ $BM=CM$，

∴四边形 $ABDC$ 为平行四边形．

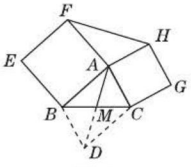


图 4

∴ $\angle BAC+\angle ABD=180°$，$AC=BD$.

∵ $\angle FAB=\angle HAC=90°$，

∴ $\angle FAH+\angle BAC=180°$．

∴ $\angle FAH=\angle ABD$.

又 $AF=BA$，$AH=AC=BD$，

∴△ FAH ≌△ ABD.

∴ $FH=AD$. ∴ $FH=2AM$.

方法点拨：证明一条线段等于另一条线段的 2 倍，可将较短的线段延长一倍，构造平行四边形，然后利用三角形全等证明与另一条线段相等．

技巧五 ▶ 构造平行四边形证两线段互相平分

例 5 △ ACE，△ ABD，△ BCF 均为等边三角形，且两两共用一个顶点，如图 5 所示，求证：CD 与 EF 互相平分．

解题秘方：要证 CD 与 EF 互相平分，可连结 DE，DF，证四边形 $DECF$ 是平行四边形．

证明：如图 5，连结 DE，DF，AF，

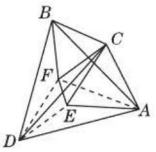


图 5

∵ $AD=AB=BD$，$BF=BC$，$\angle DBF=60°-\angle FBA=\angle ABC$，

∴△ ABC ≌△ DBF.

∴ $DF=AC=EC$.

又 $AE=AC$，$AD=AB$，

$\angle DAE=60°-\angle EAB=\angle BAC$，

∴△ ADE ≌△ ABC.

∴ $DE=BC=FC$.

∴四边形 $DECF$ 是平行四边形．

∴ CD 与 EF 互相平分．

方法点拨：证明两条线段互相平分，可以以这两条线段为对角线构造平行四边形，利用平行四边形的性质证明．

技巧六 ▶ 构造平行四边形证线段的和差关系

例 6 如图 6，在△ ABC 中，点 E，F 在边 AB 上，$AE=BF$，$ED\parallel AC\parallel FG$. 求证：$ED+FG=AC$.

证明：如图 6，过 E 作 $EH\parallel BC$，交 AC 于点 H.

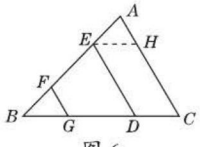


图 6

∵ $EH\parallel BC$，$ED\parallel AC$，

∴四边形 $CHED$ 为平行四边形．

∴ $ED=HC$.

∵ $EH\parallel BC$，$FG\parallel AC$，

∴ $\angle AEH=\angle B$，$\angle A=\angle BFG$.

又 $AE=BF$，

∴△ AEH ≌△ FBG.

∴ $AH=FG$.

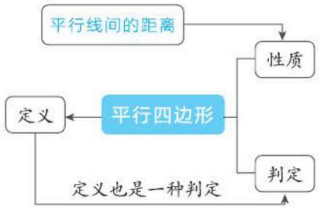
∴ $ED+FG=HC+AH=AC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. **平行四边形的定义：**两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

2. **平行四边形的性质：**

对称性：平行四边形是中心对称图形，对角线的交点就是对称中心.

边：①对边平行；②对边相等（性质定理 1）.

角：①对角相等（性质定理 2）；②邻角互补.

对角线：对角线互相平分（性质定理 3）.

3. 平行线间的距离处处相等.

4. **平行四边形的判定定理：**

定义判定：两组对边分别平行.

判定定理 1：两组对边分别相等.

判定定理 2：一组对边平行且相等.

判定定理 3：对角线互相平分.

拓展：两组对角分别相等.

知识方法专题

知识必学

专题一 平行四边形的性质及其应用

链接中考≫ 平行四边形是特殊的四边形，它的两组对边分别平行且相等，对角相等，对角线互相平分.另外，平行四边形还具有十分和谐的对称美，它是中心对称图形，对角线的交点就是它的对称中心.平行四边形在数学或实际生活中应用很广泛，许多问题都可以借助平行四边形的性质解决.

例 1 [中考·曲靖]如图 18-1，在平行四边形 $ABCD$ 的边 AB，CD 上截取 AF，CE，使得 $AF=CE$，连结 EF，点 M，N 是线段 EF 上两点，且 $EM=FN$，连结 AN，CM.

（1）求证：$\triangle AFN \cong \triangle CEM$；

（2）若 $\angle CMF=107°$，$\angle CEM=72°$，求 $\angle NAF$ 的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

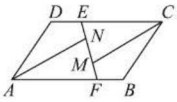


图 18−1

∴ $CD \parallel AB$，

∴ $\angle AFN = \angle CEM$.

∵ $FN=EM$，$AF=CE$，

∴ $\triangle AFN \cong \triangle CEM$（S.A.S.）.

（2）**解**：∵ $\angle CMF = \angle CEM + \angle MCE$，

∴ $107° = 72° + \angle MCE$，

∴ $\angle MCE = 35°$.

∵ $\triangle AFN \cong \triangle CEM$，

∴ $\angle NAF = \angle MCE = 35°$.

专题二 平行四边形的判定

链接中考≫ 利用平行四边形的判定方法证明平行四边形是常见的基础几何证明，它涉及利用三角形全等证明边或角相等，是中考的核心考题，题型以选择题和证明题两种形式为主.

例 2 ［中考·安徽］$\square ABCD$ 中，E，F 是对角线 BD 上不同的两点，下列条件中，不能得出四边形 $AECF$ 一定为平行四边形的是（　　）

A. $BE=DF$　　B. $AE=CF$

C. $AF \parallel CE$　　D. $\angle BAE = \angle DCF$

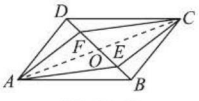


图 18−2

解题秘方：紧扣平行四边形的判定方法逐一添加辨析.

解：如图 18−2，连结 AC，与 BD 相交于点 O.

在 $\square ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$.

∵ $BE=DF$，

∴ $OE=OF$，

∴四边形 $AECF$ 为平行四边形，

∴选项 A 不符合题意.

当 $AE=CF$ 时，不能得出四边形 $AECF$ 为平行四边形，∴选项 B 符合题意.

∵ $AF \parallel CE$，

∴ $\angle FAO = \angle ECO$.

又∵ $OA=OC$，$\angle FOA = \angle EOC$，

∴ $\triangle AOF \cong \triangle COE$，∴ $OF=OE$，

∴四边形 $AECF$ 为平行四边形，

∴选项 C 不符合题意.

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle BAC = \angle DCA$.

∵ $\angle BAE = \angle DCF$，

∴ $\angle OAE = \angle OCF$.

又∵ $OA=OC$，$\angle AOE = \angle COF$，

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$，

∴ $OE=OF$，

∴四边形 $AECF$ 为平行四边形，

∴选项 D 不符合题意.

答案：B

解法归纳：判定平行四边形时，一般以容易得到的一组判定条件为基础，设法寻找与其搭配的另一组判定条件：

一组对边平行 {证另一组对边平行，证这组对边相等；

一组对边相等 {证另一组对边相等，证这组对边平行；

一组对角相等——证另一组对角相等；

图中有对角线——证对角线互相平分.

专题三 平行四边形的性质与判定

链接中考≫ 平行四边形的性质与判定是证明线段相等或角相等的重要方法之一，同时也是学习特殊平行四边形的基础，因此，学好平行四边形的性质与判定尤为重要. 平行四边形有多种判定方法，应根据题目条件灵活选择.

例 3 ［中考·恩施州］

如图 18−3，点 B，F，C，E 在一条直线上，$FB=CE$，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$，

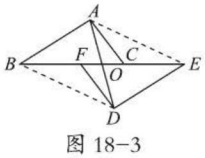


图 18−3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

AD 交 BE 于 O. 求证：AD 与 BE 互相平分.

解题秘方：利用平行四边形的性质及判定进行推理论证.

证明：如图 18−3，连结 BD，AE.

$\because AB \parallel ED$,

$\therefore \angle ABC = \angle DEF$.

$\because AC \parallel FD$,

$\therefore \angle ACB = \angle DFE$.

$\because FB = CE$,

$\therefore FB+CF = CE+CF$,

$\therefore BC = EF$.

在△ ACB 和△ DFE 中，

$$\begin{cases} \angle ABC = \angle DEF, \\ BC = EF, \\ \angle ACB = \angle DFE, \end{cases}$$

$\therefore$ △ ACB ≌△ DFE（A.S.A.）.

$\therefore AB = DE$.

$\because AB \parallel ED$,

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

$\therefore AD$ 与 BE 互相平分.

Ⅱ 方法必会

专题四 转化思想

专题解读≫ 转化思想是解决数学问题的一种重要思想，通过转化可以将复杂的、生疏的问题转化为简单的、熟悉的问题，从而使问题得到解决. 平行四边形可被其对角线分成几个三角形，在解决有关的计算题与证明题时，常将四边形中的问题转化到三角形中，然后用三角形的知识来解决.

例 4 如图 18−4，在▱ $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线交 AD 于点 E，交 BC 于点 F. 若▱ $ABCD$ 的面积为 30 cm^2，求阴影部分的面积.

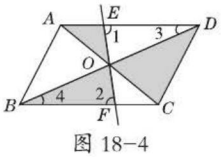


图 18−4

解题秘方：运用全等三角形的性质将 $S_{\triangle BOF}$ 转化为 $S_{\triangle DOE}$，从而使三块阴影部分构成一个三角形，然后用其与平行四边形的关系求面积.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = CB$，$DC = BA$.

又 $\because AC = CA$,

$\therefore$ △ CDA ≌△ ABC.

$\therefore S_{\triangle CDA} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} \times 30 = 15$（$cm^2$）.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OD = OB$，$AD \parallel BC$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

$\therefore$ △ DOE ≌△ BOF.

$\therefore S_{\triangle DOE} = S_{\triangle BOF}$.

$\therefore S_{阴影} = S_{\triangle BOF} + S_{\triangle AOE} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle DOE} + S_{\triangle AOE} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle CDA} = 15\ cm^2$.

专题五 方程思想

专题解读≫ 当直接求平行四边形的角或线段长等未知量有困难时，可通过设未知数用方程思想来求解.

例 5 如图 18−5，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，如果△ AOB 和△ AOD 的周长之差为 8，而 AB ∶ $AD = 3$ ∶ 2，求▱ $ABCD$ 的周长.

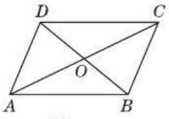


图 18−5

解题秘方：要求▱ $ABCD$ 的周长，只需求出 AB，AD 的长，其和的 2 倍就是▱ $ABCD$ 的周长，为此可设 $AB = 3x$，$AD = 2x$.

解：在▱ $ABCD$ 中，$OB = OD$. 设 $AB = 3x$，$AD = 2x$，依题意得 $(3x+AO+OB)-(2x+AO+OD) = 3x-2x = 8$，$\therefore x = 8$.

$\therefore AB = 3x = 3 \times 8 = 24$，$AD = 2x = 2 \times 8 = 16$.

$\therefore$▱ $ABCD$ 的周长 $= 2 \times (24 + 16) = 80$.

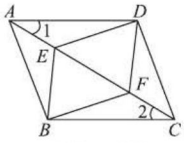
方法点拨：当题目的条件中出现边之间的数量关系时，常设未知数构造方程解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见265页

题型1　选择合理的方法证明平行四边形

1. 如图所示，在$\square ABCD$中，点E，F在对角线AC上，且$AF=CE$. 求证：四边形$BEDF$是平行四边形.



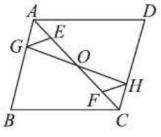
（第1题）

题型2　平行四边形的性质与判定的综合应用

2. 如图所示，在$\square ABCD$中，点E，F在AC上，且$AF=CE$，点G，H分别在AB，CD上，且$AG=CH$，AC与GH相交于点O.

求证：（1）$EG \parallel FH$；

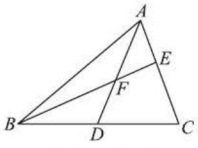
（2）GH，EF互相平分.



（第2题）

题型3　利用三角形的中线构造平行四边形解题

3. 如图所示，已知AD为$\triangle ABC$的中线，E为AC上一点，连结BE，交AD于F，且$AE=EF$，求证：$AC=BF$.



（第3题）

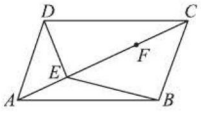
题型4　关于平行四边形的开放题

4. 如图所示，在$\square ABCD$中，点E，F在对角线AC上，且$AE=CF$，请你以F为一端点，和图中已标明字母的某一点连成一条新线段，猜想并证明它和图中已有的某一条线段相等（只需证明一组线段相等即可）.

（1）连结_____，

（2）猜想：_____.

（3）证明.



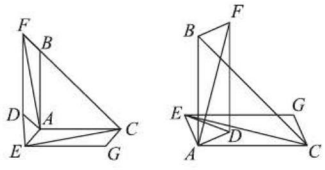
（第4题）

题型5　平行四边形与动点的探究题

5. $\triangle ABC$与$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，分别作$\square ABFD$与$\square ACGE$，连结$AF$，$CE$.

（1）如图①所示，当点D在$\triangle ABC$外时，求证：$AF=CE$，$AF \perp CE$.

（2）如图②所示，当点D在$\triangle ABC$内时，（1）中的结论是否成立？若成立，给出证明；若不成立，说明理由.



（第5题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 18 章测试卷 ☞答案见 266 页

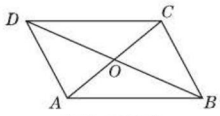
（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

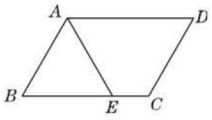
1. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，下列结论正确的是（　　）

A. $S_{\square ABCD}=4S_{\triangle AOB}$　　B. $AC=BD$

C. $AC \perp BD$　　D. $\square ABCD$ 是轴对称图形



（第 1 题）



（第 3 题）

2. 将一张平行四边形的纸片折一次，使得折痕平分这个平行四边形的面积，则这样的折纸方法共有（　　）

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 4 种　　D. 无数种

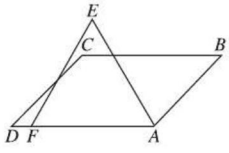
3. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，且 $AE=BE$，则 $\angle BCD$ 的度数为（　　）

A. 30°　　B. 60° 或 120°

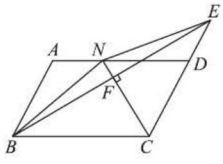
C. 60°　　D. 120°

4. 平行四边形 $ABCD$ 与等边三角形 AEF 如图放置，若 $\angle B=45°$，则 $\angle BAE$ 的大小是（　　）

A. 75°　　B. 70°　　C. 65°　　D. 60°



（第 4 题）



（第 5 题）

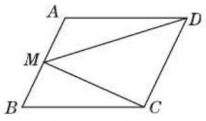
5. 如图所示，在 $\square ABCD$ 中，$\angle BCD$ 的平分线 CN 交 $\square ABCD$ 的边 AD 于点 N，$BF \perp CN$，交 CN 于点 F，交 CD 的延长线于点 E，连结 BN，NE. 若 $BN=6$，$BC=8$，则 $\triangle DNE$ 的周长为（　　）

A. 14　　B. 11　　C. 9　　D. 12

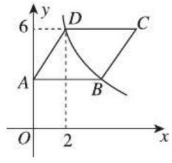
6. 如图，M 是 $\square ABCD$ 的边 AB 上任意一点，如果 $\triangle CDM$ 的面积为 S，$\triangle CBM$ 的面积为 S_1，$\triangle ADM$ 的面积为 S_2，则下列 S_1，S_2，S 的关系中正确的是（　　）

A. $S_1+S_2<S$　　B. $S_1+S_2>S$

C. $S_1+S_2=S$　　D. $S+S_1=S_2$



（第 6 题）



（第 7 题）

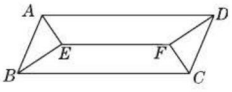
7. 如图所示，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 B，D 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象上，点 D 的坐标为（2，6），AB 平行于 x 轴，点 A 的坐标为（0，3），将这个平行四边形向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度后点 C 的坐标为（　　）

A.（1，3）　　B.（4，3）

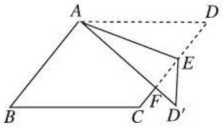
C.（1，4）　　D.（2，4）

8. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AB=10$，$BC=26$，$\angle BAD$ 与 $\angle ABC$ 的平分线交于点 E，$\angle BCD$ 与 $\angle CDA$ 的平分线交于点 F，则 EF 等于（　　）

A. 10　　B. 16　　C. 26　　D. 18



（第 8 题）



（第 9 题）

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

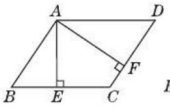
9. 如图所示，在 $\square ABCD$ 中，E 为边 CD 上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠至 $\triangle AD'E$ 处，AD' 与 CE 交于点 F. 若 $\angle B=52°$，$\angle DAE=20°$，则 $\angle FED'$ 的大小为_____.

10. [中考·连云港] 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AE \perp BC$ 于点 E，$AF \perp CD$ 于点 F，若

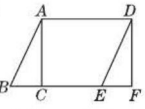
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle EAF=56°$，则$\angle B=$_____.

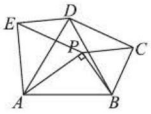
11. 如图，面积为 12 cm^2 的$\triangle ABC$沿BC方向平移至$\triangle DEF$的位置，平移的距离是BC的 3 倍，则图中四边形$ACED$的面积为_____.



（第 10 题）



（第 11 题）

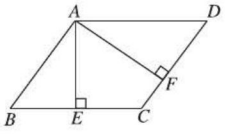


（第 12 题）

12. 如图所示，在$\triangle APB$中，$AB=2$，$\angle APB=90°$，在AB的同侧作正三角形ABD、正三角形APE和正三角形BPC，则四边形$PCDE$面积的最大值是_____.

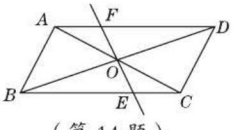
三、解答题（共 52 分）

13.（8 分）如图所示，四边形$ABCD$是平行四边形，$AE\perp BC$于点E，$AF\perp CD$于点F，$AE=20$，$AF=24$，四边形$ABCD$的周长为 110，求AB，BC的长.



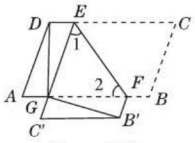
（第 13 题）

14.（10 分）如图，在$\square ABCD$中，$AC=2$，$AB=1$，$BC=\sqrt{5}$，对角线AC，BD相交于点O. 将直线AC绕点O顺时针旋转，分别交BC，AD于点E，F. 当旋转角为多少度时，四边形$ABEF$是平行四边形?



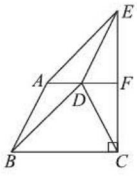
（第 14 题）

15.（10 分）如图，在$\square ABCD$中，点E，F分别在边DC，AB上，$DE=BF$. 把平行四边形沿直线EF折叠，使得点B，C分别落在B'，C'处，线段EC'与线段AF交于点G，连结DG，$B'G$. 求证：（1）$\angle 1=\angle 2$；（2）$DG=B'G$.



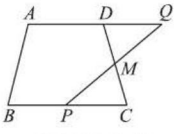
（第 15 题）

16.（12 分）如图是某城市部分街道示意图，$AF\parallel BC$，$EC\perp BC$，$BA\parallel DE$，$BD\parallel AE$，$EF=FC$. 甲、乙两人同时从B站乘车到F站，甲乘 1 路车，路线是$B\to A\to E\to F$；乙乘 2 路车，路线是$B\to D\to C\to F$，假设两车速度相同，途中耽误时间相同，那么谁先到达F站? 请说明理由.



（第 16 题）

17.（12 分）如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AD=5$，$BC=8$，M是CD的中点，P是BC边上的一个动点（点P与点B，C不重合），连结PM并延长交AD的延长线于点Q，问：当BP取何值时，四边形$ABPQ$是平行四边形? 请说明理由.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特殊平行四边形的性质探究

特殊平行四边形的性质探究











第19章 矩形、菱形与正方形

核心考点

你将见到的

- 矩形的判定与性质
- 菱形的判定与性质
- 正方形的判定与性质

核心方法

我们为你提供的

- 分类讨论思想
- 数形结合思想
- 转化思想
- 方程思想
- 构造法
- 演绎推理法

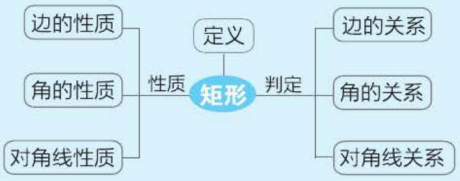
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.1 矩形

核心知识

- 矩形的定义
- 矩形的性质
- 矩形的判定

知识链接

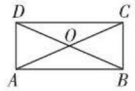


点知识·拨考向 速提分

点知识 1 矩形的定义及其性质

1. **定义**：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

2. **性质**：矩形的性质如下表：

图形	性质	数学表达式
	矩形的四个角都是直角.	∵四边形 $ABCD$ 是矩形， ∴∠ DAB= ∠ DCB= ∠ ADC= ∠ ABC=90° .
	矩形的对角线相等.	∵四边形 $ABCD$ 是矩形， ∴ AC=BD，AO=OC=OB=OD.
	矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形.	

特别提醒：1. 利用矩形的性质可以证明线段相等或倍分关系、直线平行、角相等等.

2. 矩形的一条对角线把矩形分成两个直角三角形，矩形的两条对角线将矩形分成两对全等的等腰三角形，分成四个面积相等的等腰三角形，因此有关矩形的计算问题经常转化到直角三角形和等腰三角形中来解决.

提分·必记

特别提醒

- 矩形必须具备两个条件：
  (1)它是一个平行四边形；
  (2)它有一个角是直角，这两个条件缺一不可.
- 由矩形的定义知，矩形一定是平行四边形，但平行四边形不一定是矩形. 矩形的定义可以作为判定一个四边形是矩形的一种方法.



拔考向 利用矩形的定义与性质解相关问题

题型 1：矩形的定义在判定矩形中的应用

例 1 如图 19.1-1 所示，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别为 BC 边上的点，且 BE=CF，AF=DE，求证：▱$ABCD$ 是矩形.

解题秘方：紧扣矩形定义的“两个条件”进行证明.

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ AB=CD，∠ B+ ∠ C = 180° .

∵ BE=CF，∴ BE+EF=CF+EF，即 BF=CE.

又∵ AF=DE，∴△ ABF ≌△ DCE.

∴∠ B= ∠ C=90° . ∴▱$ABCD$ 是矩形.

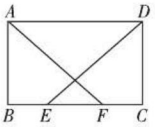


图 19.1-1

提分·秘诀

解法提醒

由定义来判定矩形，要在平行四边形的前提下，证明有一个角是90°，若在四边形的前提下，则需先证明平行四边形，再证明有一个角是90°，矩形的定义既是矩形的性质，也是矩形的判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：矩形的性质在计算中的应用

例 2 如图 19.1−2 所示，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AE \perp BD$ 于点 E.

（1）若 $\angle BOC=120°$，$AB=6$，求对角线的长；

（2）若 $\angle DAE : \angle BAE=2 : 1$，求 $\angle EAC$ 的度数.

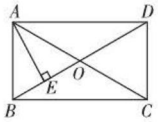


图 19.1−2

解题秘方：紧扣矩形的“角、对角线的性质”进行计算.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC=BD$，$OA=OC=OB=OD$.

又∵ $\angle BOC=120°$，

∴ $\angle AOB=60°$，

∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形，

∴ $OA=AB=6$，

∴ $BD=AC=2OA=2\times6=12$.

（2）∵ $\angle BAD=90°$，$\angle DAE : \angle BAE=2 : 1$，

∴ $2\angle BAE+\angle BAE=90°$，

∴ $\angle BAE=30°$.

又∵ $AE \perp BD$，∴ $\angle AEB=90°$.

∴ $\angle ABE=60°$.

∵ $OA=OB$，∴ $\angle BAO=\angle ABD=60°$.

∴ $\angle EAC=\angle BAO-\angle BAE=30°$.

解法提醒

- 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.
- 矩形的两条对角线把矩形分成四个等腰三角形；另外，矩形的对角线与两邻边构成四个直角三角形，矩形中的有关计算通常需要利用等腰三角形的性质或直角三角形的有关知识来解决.

知识 2 矩形的判定

1. 判定定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形.

数学表达式：如图 19.1−3，

在四边形 $ABCD$ 中，

$\angle A=\angle B=\angle C=90°$，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形.



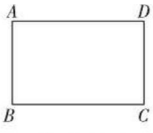


图 19.1−3

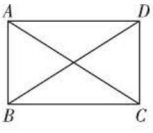


图 19.1−4

2. 判定定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形.

数学表达式：如图 19.1−4，在▱$ABCD$ 中，$AC=BD$，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形.

提分·必记

特别提醒

1. 矩形的判定定理和性质定理互为逆定理.
2. 矩形判定的常见思路

利用角证明：

（1）四边形 —有三个直角→ 矩形；

（2）平行四边形 —有一个直角→ 矩形.

利用对角线证明：

（1）平行四边形 —对角线相等→ 矩形；

（2）四边形 —对角线互相平分且相等→ 矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用矩形的判定方法判定矩形

题型1：角的关系在判定矩形中的应用

例3 如图19.1-5，$\square ABCD$的四个内角的平分线分别相交于点E，F，G，H.

求证：四边形$EFGH$是矩形.

解题秘方：题中条件是建立在平行四边形基础上，且都与角相关，可从证直角入手.

证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB \parallel CD$，

∴$\angle ABC+\angle BCD=180°$.

∵BG平分$\angle ABC$，CG平分$\angle BCD$，

∴$\angle GBC+\angle GCB=$

$\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

∴$\angle BGC=90°$.

同理可得$\angle AFB=\angle AED=90°$，

∴$\angle GFE=\angle FEH=\angle FGH=90°$，

∴四边形$EFGH$是矩形.

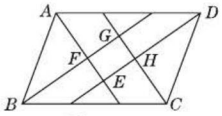


图19.1-5

题型2：对角线的关系在判定矩形中的应用

例4 如图19.1-6，在四边形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，E，F两点在边BC上，$AB \parallel DE$，$AF \parallel DC$，且四边形$AEFD$是平行四边形.

（1）AD与BC有何数量关系？请说明理由.

（2）当$AB=DC$时，求证：$\square AEFD$是矩形.

解题秘方：紧扣“平行四边形”这一前提，从“对角线相等”入手（或“有一直角”入手）进行证明.

（1）**解**：$BC=3AD$. 理由如下：

∵$AD \parallel BC$，$AB \parallel DE$，$AF \parallel DC$，

∴四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形，

∴$AD=BE$，$AD=FC$.

又∵四边形$AEFD$是平行四边形，∴$AD=EF$，

∴$AD=BE=EF=FC$，∴$BC=3AD$.

（2）**证明**：∵四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形，

∴$DE=AB$，$AF=DC$.

又∵$AB=DC$，∴$DE=AF$.

又∵四边形$AEFD$是平行四边形，

∴四边形$AEFD$是矩形.

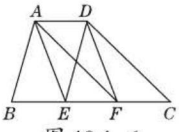


图19.1-6

提分·秘诀

思路点拨

判定矩形的常见思路：

要判定一个四边形是矩形，通常选用“三个角是直角的四边形是矩形”来证明；也可以先判定它是平行四边形，再根据平行四边形成为矩形应满足的条件，证明有一个角是直角或对角线相等.

方法点拨

证明一个平行四边形为矩形的两种方法：

一种是证明有一个角是直角，另一种是证明两条对角线相等.

本例采用的是证明对角线相等的方法. 若采用证明有一个角是直角的方法，可证$DE=DC$，$EF=FC$，利用等腰三角形“三线合一”可得$\angle DFE=90°$. 用这种方法证明请读者独立完成.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用折叠法解矩形中的计算问题

例 5 如图 19.1−7 所示，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，点 C 的对应点为点 C'，BC' 与 AD 交于点 E. 若 AD=8cm，AB=4cm，求△ BDE 的面积.

解题秘方：先将求面积问题转化为求 DE 的长的问题，再紧扣折叠的性质，根据三角形的边角关系将求 DE 的长转化成求 BE 的长，这样就将要求的边与已知边都集中在同一个直角三角形中.

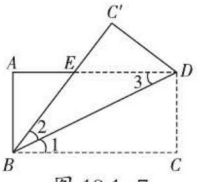


图 19.1−7

解：设 $DE=x$cm，则 $AE=(8-x)$ cm.

由折叠的性质知△ BCD 与△ $BC'D$ 全等，则∠ 1= ∠ 2.

在矩形 $ABCD$ 中，∵ $AD \parallel BC$，∴ ∠ 1= ∠ 3，

∴ ∠ 2= ∠ 3，∴ $BE=DE=x$ cm.

在 Rt △ ABE 中，由勾股定理，

得 $BE^2=AB^2+AE^2$，

即 $x^2=4^2+(8-x)^2$，解得 $x=5$.

尽量将要求的边和已知边集中到同一个直角三角形中利用勾股定理列方程求解.

∴△ BDE 的面积为 $\frac{1}{2}DE \cdot AB=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10\ (\text{cm}^2)$.

挑战·高分

解法提醒

解决矩形折叠问题的方法

1. 利用折叠的性质：折叠前后的图形能够完全重合，折叠前后的图形对应边相等，对应角相等.
2. 此类问题往往通过图形间的折叠找出折叠部分与原图形中线段或角的关系，从而得到折叠部分与原图形或其他图形中线段或角的关系.

拔尖角度▸ 2 利用计算法判定图形的形状

例 6 [探究题]如图 19.1−8，在矩形 $ABCD$ 中，AB=2，BC=5，E，P 分别在 AD，BC 上，且 $DE=BP=1$，AP，BE 相交于点 H，CE，DP 相交于点 F.

（1）判断△ BEC 的形状，并说明理由；

（2）判断四边形 $EFPH$ 是什么特殊四边形，并证明你的判断.

解题秘方：紧扣勾股定理的逆定理，通过计算得出三角形三边平方关系，从而得出∠ BEC=90° .

解：（1）△ BEC 是直角三角形，且∠ BEC=90° .

理由：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ ∠ ADC= ∠ EAB=90 °，$AD=BC$=5，$CD=AB$=2.

∵ DE=1，∴ AE=4.

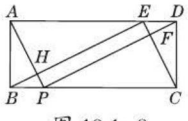


图 19.1−8

由勾股定理得 $CE^2=CD^2+DE^2$=5，$BE^2=AB^2+AE^2$=20，

∴ CE^2+BE^2=5+20=25.

∵ $BC^2=5^2$=25，∴ $BE^2+CE^2=BC^2$，

挑战·高分

思路点拨

- 根据矩形的性质得出 AD=5，CD=2，根据勾股定理求出 CE^2 和 BE^2，进而求出 CE^2+BE^2，BC^2，根据勾股定理的逆定理判断即可；
- 根据矩形的性质和平行四边形的判定，推出四边形 DEBP 和四边形 AECP 都是平行四边形，进而推出四边形 EFPH 是平行四边形，再根据矩形的判定即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle BEC$ 是直角三角形，且$\angle BEC=90°$.

（2）四边形 $EFPH$ 为矩形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD=BC$，$AD \parallel BC$.

$\therefore DE \parallel BP$.

$\because DE=BP$，$\therefore$ 四边形 $DEBP$ 是平行四边形，

$\therefore BE \parallel DP$.

$\because AD=BC$，$AD \parallel BC$，$DE=BP$，$\therefore AE=CP$，$AE \parallel CP$，

$\therefore$ 四边形 $AECP$ 是平行四边形，

$\therefore AP \parallel CE$，$\therefore$ 四边形 $EFPH$ 是平行四边形.

$\because \angle BEC=90°$，

$\therefore$ 四边形 $EFPH$ 是矩形.

拔尖角度▸ 3 利用逆向思维法解确定矩形条件问题

挑战·高分

例 7 如图 19.1-9，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 AC 边上一动点，过点 O 作直线 $MN \parallel BC$，设 MN 交 $\angle BCA$ 的平分线于点 E，交 $\angle ACH$ 的平分线于点 F.

（1）证明：$EO=FO$；

（2）当点 O 运动到何处时，四边形 $AECF$ 是矩形？简要说明理由.

解法提醒

求点O运动到何处时四边形AECF是矩形，可以先把矩形当作已知条件，求出O点与AC的位置关系，然后将这个位置关系作为需添加的条件，经过说理，证明四边形AECF是矩形.这种逆向思维的方法是条件探索题的一般解题思路.

解题秘方：（1）紧扣“等腰三角形的边角关系”说明 OE，OF 都等于 OC 即可；

（2）紧扣“$OE=OF$”这一条件，只需说明 $OA=OC$ 即可得出平行四边形，结合矩形的定义解答.

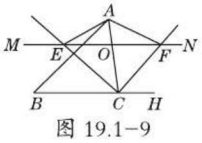


图 19.1-9

（1）**证明**：$\because MN \parallel BC$，

$\therefore \angle CEO=\angle ECB$.

$\because CE$ 是 $\angle BCA$ 的平分线，

$\therefore \angle ECO=\angle ECB$，$\therefore \angle CEO=\angle ECO$，

$\therefore EO=OC$，同理 $FO=OC$. $\therefore EO=FO$.

（2）**解**：当点 O 运动到 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下：

由（1）知 $OE=OF$.

$\because AO=CO$，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because OE=OC$，$\therefore AC=EF$，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用数形结合法解动点问题

挑战·高分

例 8 如图 19.1−10 ①所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=24$ cm，$BC=10$ cm，点 P 从 A 开始沿 AB 边以 4 cm/s 的速度运动，点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 2 cm/s 的速度运动，如果点 P，Q 分别从 A，C 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动，设运动时间为 t s.

（1）当 $t=2$ 时，求 P，Q 两点之间的距离.（精确到 0.1 cm）

（2）当 t 为何值时，线段 AQ 与 DP 互相平分？

（3）当 t 为何值时，四边形 $APQD$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{8}$？

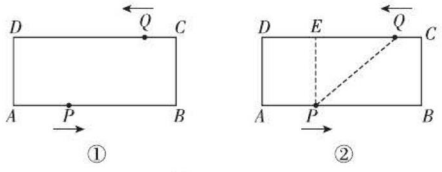


图 19.1−10

解题秘方：将运动过程中某一时刻动点的运动距离转化为几何图形的条件或满足几何图形条件时动点需运动的距离作为条件进行解答.

解：（1）如图 19.1−10 ②所示，连结 PQ，过点 P 作 $PE\perp DQ$ 于点 E，则 $DE=AP$，$PE=BC$.

∵点 P 从 A 开始沿 AB 边以 4cm/s 的速度运动，点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 2cm/s 的速度运动，

∴当 $t=2$ 时，$QC=4$cm，$AP=8$cm.

在矩形 $ABCD$ 中，$DC=AB=24$ cm，

∴ $DQ=DC-QC=20$cm，则 $EQ=12$cm，

∴ $PQ=\sqrt{QE^2+PE^2}=\sqrt{12^2+10^2}=\sqrt{244}\approx 15.6$（cm）.

（2）$AP=4t$ cm，$DQ=(24-2t)$ cm，

当线段 AQ 与 DP 互相平分时，四边形 $APQD$ 为矩形，

则 $AP=DQ$，即 $4t=24-2t$，解得 $t=4$.

故当 t 为 4 时，线段 AQ 与 DP 互相平分.

（3）∵ $S_{四边形APQD}=\frac{1}{2}(AP+DQ)\cdot AD=\frac{1}{2}(4t+24-2t)\times 10=(10t+120)$（cm^2）$(0<t\leqslant 6)$，$S_{矩形ABCD}=10\times 24=240$（cm^2），

∴ $10t+120=\frac{5}{8}\times 240$，解得 $t=3$，

∴当 t 为 3 时，四边形 $APQD$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{8}$.

解法提醒

解决动态几何探究题的关键：

抓住点在运动过程中的一个瞬间（或一个确定的位置），动中取静，如本例(1)求PQ的长时，可构造直角三角形，利用勾股定理求解.(2)中AQ与DP互相平分，只需保证四边形APQD是平行四边形即可，结合四边形ABCD是矩形可判断此时四边形APQD是矩形，用含t的式子分别表示AP，DQ的长，列出方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用矩形的性质和判定解决问题是中考命题的重点，题型较全，有难度不大的选择题、填空题，也有与其他知识相结合的证明题、解答题.

三年中考兵法

考法 1 利用矩形的性质解决图形折叠问题

例 9 [中考·怀化]把一张矩形纸片（矩形 $ABCD$）按如图 19.1−11 所示的方式折叠，使点 B 和点 D 重合，折痕为 EF，若 $AB=3$，$BC=5$，求重叠部分（$\triangle DEF$）的面积.

试题评析：本题主要考查矩形的性质及勾股定理，利用折叠及矩形的性质，在直角三角形中运用勾股定理，求出关键线段的长是解决问题的关键.

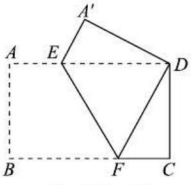


图 19.1−11

解：由折叠的性质得 $AE=A'E$，$AB=A'D$，$\angle A=\angle A'$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD=BC$，$\angle A=90°$.

设 $AE=A'E=x$，则 $DE=5-x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'ED$ 中，$A'E=x$，$A'D=AB=3$，$DE=5-x$.

$\therefore x^2+9=(5-x)^2$，解得 $x=1.6$.

$\therefore DE=3.4$.

$\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot AB=\frac{1}{2}\times 3.4\times 3=5.1$.

考法 2 利用矩形的判定和性质探求矩形的条件

例 10 [中考·徐州]如图 19.1−12，在 $\square ABCD$ 中，点 O 是边 BC 的中点，连结 DO 并延长，交 AB 的延长线于点 E，连结 BD，EC.

（1）求证：四边形 $BECD$ 是平行四边形；

（2）若 $\angle A=50°$，则当 $\angle BOD=$_____° 时，四边形 $BECD$ 是矩形.

试题评析：此题主要考查了矩形的判定、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识；熟练掌握平行四边形的判定与性质是解决问题的关键.

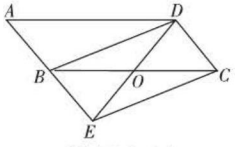


图 19.1−12

（1）**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AB\parallel DC$，$AB=CD$，$\therefore \angle OEB=\angle ODC$.

又 $\because O$ 为 BC 的中点，$\therefore BO=CO$.

冲刺·满分

方法点拨

求解与矩形有关的折叠问题的思路：

求解与矩形有关的折叠问题时，通常先设出未知数，一般设要求的线段或与要求的问题有关的线段的长为未知数，然后用未知数表示出相关线段的长，并找出一个直角三角形，在这个直角三角形中利用勾股定理列出方程，从而求出未知数.

思路点拨

- 由 A.A.S. 证明△BOE≌△COD，得出 OE=OD，即可得出结论；
- 由平行四边形的性质得出∠BCD=∠A=50°，由三角形的外角性质求出∠ODC=∠BCD，得出 OC=OD，证出 DE=BC，即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△BOE和△COD中，$\begin{cases}\angle OEB=\angle ODC,\\ \angle BOE=\angle COD,\\ BO=CO,\end{cases}$

∴△BOE≌△COD（A.A.S.）. ∴$OE=OD$,

∴四边形$BECD$是平行四边形.

（2）**解**：若$\angle A=50°$，则当$\angle BOD=100°$时，四边形$BECD$是矩形，理由如下：

∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$\angle BCD=\angle A=50°$.

∵$\angle BOD=\angle BCD+\angle ODC$，$\angle BOD=100°$，

∴$\angle ODC=100°-50°=50°=\angle BCD$，∴$OC=OD$.

∵$BO=CO$，$OD=OE$，∴$DE=BC$.

∵四边形$BECD$是平行四边形，∴四边形$BECD$是矩形.

答案：100

两年模拟兵法 ☞答案见268页

1.［**期末·马山**］矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是（　　）

A. 对角相等　　B. 对边相等

C. 对角线相等　　D. 对角线互相平分

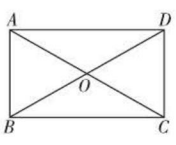
2.［**中考·上海**］已知平行四边形$ABCD$，AC、BD是它的两条对角线，那么下列条件中，能判断这个平行四边形为矩形的是（　　）

A. $\angle BAC=\angle DCA$　　B. $\angle BAC=\angle DAC$

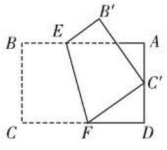
C. $\angle BAC=\angle ABD$　　D. $\angle BAC=\angle ADB$

3.［**中考·怀化**］如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$\angle AOB=60°$，$AC=6$cm，则AB的长是（　　）

A.3cm　　B.6cm　　C.10cm　　D.12cm



（第3题）

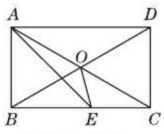


（第4题）

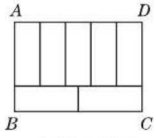
4.［**中考·葫芦岛**］如图，将矩形纸片$ABCD$沿直线EF折叠，使点C落在AD边的中点C'处，点B落在点B'处，其中$AB=9$，$BC=6$，则FC'的长为（　　）

A. $\frac{10}{3}$　　B.4　　C.4.5　　D.5

5. 如图，在矩形$ABCD$中，AC，BD相交于点O，AE平分$\angle BAD$交BC于点E，若$\angle CAE=15°$，则$\angle BOC=$_____.



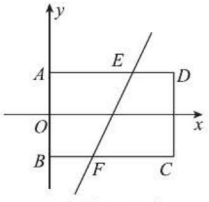
（第5题）



（第6题）

6. 如图，周长为68的矩形$ABCD$被分成7个全等的小矩形，则矩形$ABCD$的面积为_____.

7. 如图，已知矩形$ABCD$，AB在y轴上，$AB=2$，$BC=3$，点A的坐标为$(0,1)$，在AD边上有一点$E$$(2,1)$，过点$E$的直线与$BC$交于点$F$，若$EF$平分矩形$ABCD$的面积，则直线$EF$的函数表达式为_____.



（第7题）

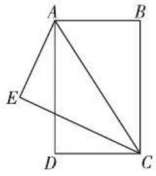
8.［**中考·日照**］如图，已知$BA=AE=DC$，$AD=EC$，$CE\perp AE$，垂足为E.

（1）求证：△DCA≌△EAC；

（2）只需添加一个条件，即_____，可使

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

四边形 $ABCD$ 为矩形，请加以证明．

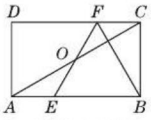


（第 8 题）

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 上的点，$AE=CF$，连结 EF，BF，EF 与对角线 AC 交于点 O，且 $BE=BF$，$\angle BEF=2\angle BAC$.

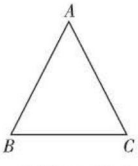
（1）求证：$OF=OE$；

（2）若 $FC=2$，求 AB 的长．



（第 9 题）

10. 如图是一块等腰三角形的小钢板下脚料，其中 $AB=AC$，工人师傅要将它进行适当的切割，重新拼接后焊成一个面积与原下脚料面积相等的矩形工件，请根据上述要求，设计出将这块下脚料分割成两块或三块两种不同的拼接方案（在图中用虚线画出切割线，并画出拼接后得到的矩形，保留拼接的痕迹）．　**【导学号：9877429】**

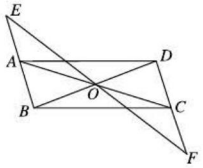


（第 10 题）

11. 如图，$\square ABCD$ 中，点 O 是 AC 与 BD 的交点，过点 O 的直线与 BA，DC 的延长线分别交于点 E，F.

（1）求证：$\triangle AOE\cong\triangle COF$.

（2）请连结 EC，AF，则 EF 与 AC 满足什么条件时，四边形 $AECF$ 是矩形？并说明理由．

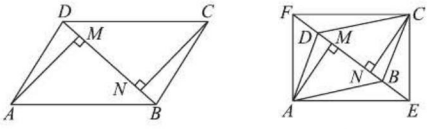


（第 11 题）

12. 如图①，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，BD 是它的一条对角线，过点 A，C 分别作 $AM\perp BD$，$CN\perp BD$，M，N 为垂足．

（1）求证：$AM=CN$；

（2）如图②，在对角线 DB 的延长线及反向延长线上分别取点 E，F，使 $BE=DF$，连结 AE，CF，EC，AF，试探究：当 EF 满足什么条件时，四边形 $AECF$ 是矩形？并加以证明．



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.2 菱形

核心知识

- 菱形的定义
- 菱形的性质
- 菱形的判定

知识链接

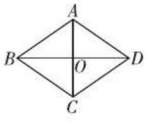


点知识·拨考向 速提分

点知识 1 菱形的定义及其性质

1. **定义**：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

2. **性质如下表**：

图形	性质	数学表达式
	菱形的四条边都相等.	∵四边形 $ABCD$ 是菱形， ∴ $AB=BC=CD=AD$.
	菱形的对角线互相垂直.	∵四边形 $ABCD$ 是菱形， ∴ $BD \perp AC$.
	菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形.	

特别提醒：（1）菱形的性质可以用来证明线段相等，角相等，直线平行、垂直以及进行相关的计算.

（2）菱形的性质与勾股定理联系，可得对角线与边之间的关系，即边长的平方等于两条对角线长一半的平方和.

（3）如果菱形的一个内角为 $60°$，那么菱形的两条边与较短的对角线构成的三角形为等边三角形.

（4）菱形的面积 = 底 × 高 = 两条对角线长乘积的一半.

3. **矩形与菱形的区别**：

（1）矩形和菱形都是建立在平行四边形的基础上，矩形是附加一直角，而菱形是附加一组邻边相等；

（2）矩形的两条对角线把矩形分割成四个面积相等的等腰三角形，而菱形的两条对角线把菱形分割成四个全等的直角三角形；

（3）矩形的对称轴是过两组对边中点的两条直线，而菱形的对称轴是两条对角线所在的直线.

提分·必记

特别提醒

- 菱形必须满足两个条件：一是平行四边形；二是一组邻边相等. 二者必须同时具备，缺一不可.
- 菱形的定义既是菱形的基本性质，也是菱形的基本判定方法.


菱形的性质

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用菱形的定义和性质解相关问题

题型1：菱形的定义在判定菱形中的应用

例1 已知：如图19.2-1，在△ABC中，CD平分∠ACB交AB于点D，DE∥AC交BC于点E，DF∥BC交AC于点F.四边形$DECF$是菱形吗？为什么？

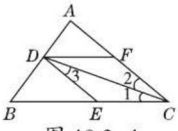


图19.2-1

解题秘方：紧扣定义中“两个条件”进行判断.

解：四边形$DECF$是菱形.

理由如下：

∵ DE∥FC，DF∥EC，

∴四边形$DECF$为平行四边形.

∵ AC∥DE，

∴∠2=∠3.

∵ CD平分∠ACB，∴∠1=∠2，

∴∠1=∠3，

∴ DE=EC，

∴平行四边形$DECF$为菱形（有一组邻边相等的平行四边形是菱形）.

题型2：菱形的性质在求角中的应用

例2 已知，如图19.2-2，在菱形$ABCD$中，E，F分别是BC，CD上的点，且∠B=∠EAF=60°，∠BAE=18°，求∠CEF的度数.

解题秘方：紧扣菱形的性质、三角形外角的性质求解.

解：如图19.2-2，连结AC.

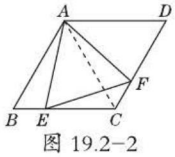


图19.2-2

∵四边形$ABCD$是菱形，∠B=60°，

∴ AB=BC=CD=DA，∠D=∠B=60°，

∴△ABC和△ACD为等边三角形，

∴ AB=AC，∠B=∠ACF=∠BAC=60°.

∵∠EAF=60°，∴∠BAE=∠CAF，

∴△ABE≌△ACF（A.S.A.），

∴ AE=AF.

又∵∠EAF=60°，

∴△EAF是等边三角形，

∴∠AEF=60°.

又∵∠AEC=∠B+∠BAE=∠AEF+∠CEF，

∴60° +18° =60° +∠CEF，

∴∠CEF=18°.

在菱形中如果出现30°角、60°角、120°角、一边等于较短对角线时，往往都指向等边三角形，我们可用等边三角形的知识来解决.

提分·秘诀

解法提醒

菱形的定义既是菱形的性质，也是菱形的一种判定方法.

在用菱形的定义判定一个四边形是菱形时，首先判定这个四边形是平行四边形，再证一组邻边相等.

技巧点拨

在求有关菱形的角的问题时，由于菱形的每条对角线把菱形分成两个全等的等腰三角形，因此通常通过连结**对角线**，把四边形问题**转化**为特殊三角形（等边三角形）问题来解答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：菱形的性质在求线段长中的应用

例 3 如图 19.2−3，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 DB 相交于点 O. 已知该菱形的周长为 8，$\angle DAB : \angle ABC=1 : 2$，求 AC，BD 的长.

解题秘方：紧扣菱形的边、对角线的性质，在等边三角形和直角三角形中解决问题.

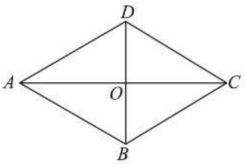


图 19.2−3

解：由四边形 $ABCD$ 是菱形，得 $AD \parallel BC$，$AB=BC=CD=DA$，$AO=CO$，$DO=BO$，

$\therefore \angle BAD+\angle ABC=180°$.

又 $\because \angle DAB : \angle ABC=1 : 2$，$\therefore \angle DAB=60°$.

$\because AB=AD$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. $\therefore BD=AD=8\div 4=2$.

$\therefore OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 2=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，由勾股定理，得 $AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore AC=2OA=2\sqrt{3}$.

解法提醒

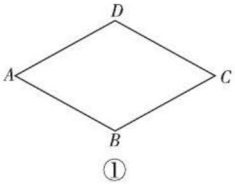
- 若菱形中出现 60° 角、120° 角，或边长等于较短的对角线长，则通常利用等边三角形的性质解决相关问题.
- 菱形的对角线互相垂直，可构成直角三角形，从而可以利用勾股定理求边长.

知识 2 菱形的判定

1. 判定定理 1：四条边都相等的四边形是菱形.

数学表达式：如图 19.2−4 ①，在四边形 $ABCD$ 中，

$\because AB=BC=CD=DA$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.



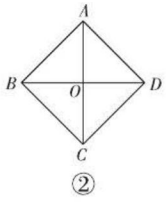


图 19.2−4

2. 判定定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

数学表达式：如图 19.2−4 ②，在$\square ABCD$ 中，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC \perp BD$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

注意：（1）判定定理 2 必须满足两个条件：一是对角线互相垂直，二是必须是平行四边形，两者缺一不可. 也就是说，利用这一方法判定一个四边形是菱形时，应先证明这个四边形是平行四边形，然后证明它的对角线互相垂直.

（2）判定定理 2 等价于“对角线互相平分且垂直的四边形是菱形”.

提分·必记

特别提醒

- 菱形的判定定理和性质定理是互逆定理.
- 判定菱形的常见思路

四边形
- 四条边都相等→菱形
- 对角线互相垂直且平分→菱形
- 平行四边形
  - 对角线互相垂直→菱形
  - 有一组邻边相等→菱形

可依据题目特点选取不同的方法.


菱形的判定

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用菱形的判定定理判定菱形

题型1：边的关系在判定菱形中的应用

例4 将三角形纸片 ABC（$AB>AC$）沿过点 A 的直线折叠，使得 AC 落在 AB 边上，折痕为 AD，展平纸片，如图 19.2−5 ①所示；再次折叠该三角形纸片，使得点 A 与点 D 重合，折痕为 EF，再次展平后连结 DE，DF，如图 19.2−5 ②所示，求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.

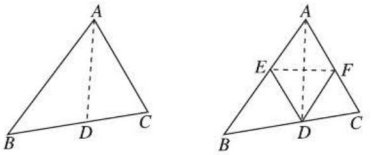


图 19.2−5

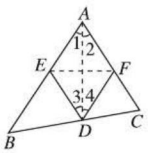


图 19.2−6

解题秘方：紧扣菱形的判定定理 1，从已知条件中挖掘出边相等，从而判定菱形.

证明：如图 19.2−6 所示，由第一次折叠可知 $\angle 1=\angle 2$.

由第二次折叠可知，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，从而可得 $\angle 3=\angle 4$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中，$\begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\ AD=AD\text{（公共边）},\\ \angle 3=\angle 4,\end{cases}$

$\therefore \triangle AED\cong\triangle AFD$. $\therefore AE=AF$，$DE=DF$.

又由第二次折叠可知 $AE=DE$，$\therefore AE=DE=DF=AF$.

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形（四条边都相等的四边形是菱形）.

题型2：对角线关系在判定菱形中的应用

例5 如图 19.2−7，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线 $EF\perp BD$，分别交 AD，BC 于点 E 和点 F，连结 BE，DF. 求证：四边形 $BEDF$ 是菱形.

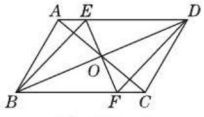


图 19.2−7

解题秘方：紧扣“对角线垂直”这一条件，从判定平行四边形入手判定菱形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB=OD$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle EDO=\angle FBO$，$\angle OED=\angle OFB$.

$\therefore \triangle OED\cong\triangle OFB$. $\therefore DE=BF$.

又 $\because DE\parallel BF$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\because EF\perp BD$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

提分·秘诀

思路提醒

由折叠的性质可知 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，$AE=DE$，从而得到 $\angle 3=\angle 4$，可证得 $\triangle AED\cong\triangle AFD$，得到 $AE=AF$，$DE=DF$，从而证明四条边都相等.

方法点拨

当一个四边形出现两组邻边相等时，既可以先证明这个四边形是平行四边形，利用定义来判定菱形，也可以再证一组邻边相等，利用判定定理 1 来证明.

解法点拨

证明一个四边形是菱形的方法：

若已知要证的四边形的对角线互相垂直，则要考虑证明这个四边形是平行四边形，用“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”进行证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用面积法求菱形中线段的长

例6 如图19.2-8，在$\square ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$AB=5$，$AC=6$，$BD=8$.

（1）求证：四边形$ABCD$是菱形；

（2）过点A作$AH\perp BC$于点H，求AH的长.

解题秘方：紧扣菱形的面积等于底与高的乘积或两条对角线长的乘积的一半进行解答.

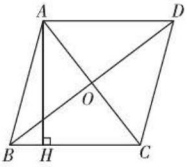


图19.2-8

（1）**证明**：∵在$\square ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$AC=6$，$BD=8$，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=3$，$BO=\frac{1}{2}BD=4$.

∵$AB=5$，且$3^2+4^2=5^2$，$\therefore AO^2+BO^2=AB^2$.

$\therefore\triangle AOB$是直角三角形，且$\angle AOB=90^\circ$. $\therefore AC\perp BD$.

∴四边形$ABCD$是菱形.

（2）**解**：∵四边形$ABCD$是菱形，$\therefore BC=AB=5$，

$\because S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=BC\cdot AH$，即$\frac{1}{2}\times 6\times 8=5\times AH$，

$\therefore AH=\frac{24}{5}$.

挑战·高分

解法提醒

判断已知条件中涉及对角线关系的平行四边形是菱形问题，一般都采用证其对角线互相垂直的方法来判定菱形，而用勾股定理的逆定理是证明对角线互相垂直的常用方法.

拔尖角度 2 利用特殊位置法确定点的位置

例7 [中考·泰安]如图19.2-9，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$CB=CD$，E是CD上一点，BE交AC于F，连结DF.

（1）求证：$\angle BAC=\angle DAC$，$\angle AFD=\angle CFE$；

（2）若$AB\parallel CD$，试证明：四边形$ABCD$是菱形；

（3）在（2）的条件下，试确定E点的位置，使$\angle EFD=\angle BCD$，并说明理由.

解题秘方：用特殊位置法（E为垂足或中点）探求E点的位置：E点为$BE\perp CD$时的垂足.

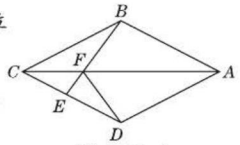


图19.2-9

（1）**证明**：在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$，$\therefore\angle BAC=\angle DAC$.

在$\triangle ABF$和$\triangle ADF$中，$\begin{cases}AB=AD,\\\angle BAF=\angle DAF,\\AF=AF,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABF\cong\triangle ADF$，$\therefore\angle AFB=\angle AFD$.

又∵$\angle AFB=\angle CFE$，$\therefore\angle AFD=\angle CFE$.

挑战·高分

技巧点拨

探求点的位置的方法.

1. 特殊位置法：

倍分点法（含中点）和垂足法，并分别用这些点作为条件进行推理，从而找出符合条件的点.

2. 逆向思维法：

将结论作为已知条件，结合其他已知条件，推理出与要探求条件相关的结论，并用这个结论作为确定点的位置的方法.

如：本例中，（3）的结论为$\angle EFD=\angle BCD$，若将它作为条件，结合

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）**证明**：∵ $AB \parallel CD$，∴ $\angle BAC=\angle ACD$.

又∵ $\angle BAC=\angle DAC$，∴ $\angle DAC=\angle ACD$，∴ $AD=CD$.

又∵ $AB=AD$，$CB=CD$，∴ $AB=CB=CD=AD$，

∴四边形 $ABCD$ 是菱形.

（3）**解**：当 $BE \perp CD$ 时，$\angle EFD=\angle BCD$.

理由如下：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴由菱形的轴对称性得 $\angle CBF=\angle CDF$.

∵ $BE \perp CD$，∴ $\angle BEC=\angle DEF=90°$，

∴ $\angle EFD=\angle BCD$.

$\angle CDF=\angle CBF$，很容易得出 $\angle CEB=\angle DEF$，因此需 $BE \perp CD$.

拔尖角度 3 利用对称性求菱形的最值

挑战·高分

例 8 如图 19.2−10，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，面积为 12，点 E 是 BC 边上的动点，点 P 是对角线 BD 上的动点，若使 $PC+PE$ 的值最小，则这个最小值为_____.

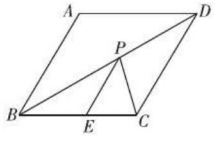


图 19.2−10

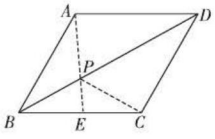


图 19.2−11

解法提醒

求线段和的最小值的方法：先要通过轴对称将同侧两点转化为异侧两点，再通过两点间线段最短求得两线段和的最小值.

解题秘方：将菱形中的最值问题，转化为求“两点一线”的最值问题，结合菱形的对称性求解.

解：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ A，C 关于直线 BD 对称.

如图 19.2−11，连结 AE 交 BD 于点 P，连结 PC，

则 $PE+PC=PE+AP=AE$，

当 $AE \perp BC$ 时，AE 取得最小值，

∵菱形的边长为 4，面积为 12，

∴ $AE=12\div 4=3$.

答案：3

详解

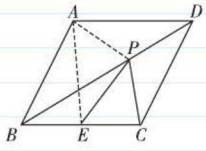


图 19.2−12

如图，连结 AP，AE，在 △APE 中，PE+AP>AE，因此当点 A，P，E 三点共线时，PE+AP 取得最小值，此时 PE+AP=AE.

拔尖角度 4 利用动中取静法探究构成特殊四边形的条件

例 9 如图 19.2−13，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$cm，$BC=8$cm，点 P 从点 D 出发向点 A 运动，运动到点 A 立即停止；同时点 Q 从点 B 出发向点 C 运动，运动到点 C 立即停止，点 P，Q 的速度都是 1 cm/s，连结 PQ，AQ，CP，设点 P，Q 运动的时间为 t s.

（1）当 t 为何值时，四边形 $ABQP$ 是矩形？

（2）当 t 为何值时，四边形 $AQCP$ 是菱形？

（3）求出（2）中菱形 $AQCP$ 的周长和面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：解动态条件的几何题，常用逆向思维法来做，即交换问题中的条件与结论的呈现方式，进行解答．如将“当 t 为何值时，四边形 $ABQP$ 是矩形”改为“当四边形 $ABQP$ 是矩形时，t 的值是多少”求出 t 的值即可．

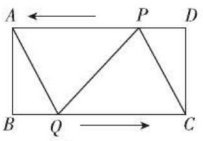


图 19.2-13

挑战·高分

特别提醒

方程中左边的 8−t 表示的是 AP 的长为(8−t) cm，右边的 t 表示的是 BQ 的长为 t cm.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD \parallel BC$，$\angle ABC=90°$ ．

∴要使四边形 $ABQP$ 是矩形，只需满足 $AP=BQ$，即 $8-t=t$，解得 $t=4$.

∴当 $t=4$ 时，四边形 $ABQP$ 是矩形．

（2）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD \parallel BC$.

∴要使四边形 $AQCP$ 是菱形，只需满足 $AP=CP=CQ$，

由题意可知，$DP=t$ cm，则 $AP=CP=(8-t)$ cm，

∵ $DP^2+CD^2=CP^2$，

∴ $t^2+16=(8-t)^2$，解得 $t=3$，

∴当 $t=3$ 时，四边形 $AQCP$ 是菱形．

（3）由（2）得菱形的边长为 5cm，∴菱形 $AQCP$ 的周长 $=5\times4=20$（cm），菱形 $AQCP$ 的面积 $=5\times4=20$（cm^2）．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考的热点，常与其他知识综合考查，多以解答题的形式出现．有时也单独考查菱形的性质或判定，多以选择题、填空题、解答题的形式出现，在解决相关问题时，注意与前面所学的三角形全等、勾股定理和平行四边形等知识的联系．

三年中考兵法

冲刺·满分

方法点拨

当要证明的特殊平行四边形与已知的平行四边形共顶点时，一般先证明该四边形为平行四边形，再从对角线的方向去寻找突破口．

考法 1 利用菱形的判定定理证明四边形是菱形

例 10 ［中考·遂宁］如图 19.2-14，在□$ABCD$ 中，E，F 分别是 AD，BC 上的点，且 $DE=BF$，$AC \perp EF$，求证：四边形 $AECF$ 是菱形．

试题评析：本题主要考查了菱形的判定，解决此类问题的关键是综合应用平面几何的知识，结合菱形的判定定理寻找解题的突破口．

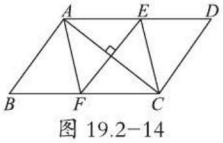


图 19.2-14

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD \parallel BC$.

∵ $DE=BF$，∴ $AE=CF$.

∵ $AE \parallel CF$，∴四边形 $AECF$ 是平行四边形．

又 $AC \perp EF$，∴四边形 $AECF$ 是菱形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用整体思想求菱形的面积

例 11 [中考·南充]已知菱形的周长为 $4\sqrt{5}$，两条对角线的和为 6，则菱形的面积为（　　）

A.2　　B. $\sqrt{5}$　　C.3　　D.4

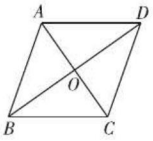


图 19.2−15

试题评析：本题考查菱形的性质、勾股定理；解题的关键是记住菱形的面积公式，记住菱形的对角线互相垂直，属于中考常考题型.

解：如图 19.2−15，∵四边形 $ABCD$ 是菱形，且周长为 $4\sqrt{5}$，

$\therefore AB=\sqrt{5}$，$AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$，

$\because AC+BD=6$，$\therefore AO+BO=3$.

$\therefore (AO+BO)^2=9$，

$\therefore AO^2+2AO\cdot BO+BO^2=9$，

又 $\because AO^2+BO^2=AB^2=(\sqrt{5})^2=5$，

$\therefore 2AO\cdot BO=4$.

$\therefore$ 菱形的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2AO\cdot BO=4$.

答案：D

思路点拨

由菱形的性质和勾股定理得出 $AO+BO=3$，$(AO+BO)^2=9$，$AO^2+BO^2=AB^2$，求出 $2AO\cdot BO=4$，即可得出答案.

考法 3 利用作图信息求菱形中的角

例 12 [中考·滨州]如图 19.2−16，在 $\square ABCD$ 中，以点 A 为圆心，AB 长为半径画弧交 AD 于点 F，再分别以点 B，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BF$ 的相同长为半径画弧，两弧交于点 P，连结 AP 并延长交 BC 于点 E，连结 EF，则所得四边形 $ABEF$ 是菱形.

（1）根据以上尺规作图的过程，求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

（2）若菱形 $ABEF$ 的周长为 16，$AE=4\sqrt{3}$，求 $\angle C$ 的大小.

试题评析：本题考查菱形的判定和性质、平行四边形的性质、基本作图等知识，属于中考常考题型.

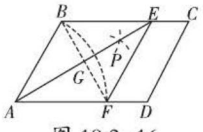


图 19.2−16

（1）**证明**：由作图过程可知 $AB=AF$，AE 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle EAB=\angle EAF$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$. $\therefore \angle EAF=\angle AEB=\angle EAB$.

$\therefore BE=AB=AF$.

$\because AF\parallel BE$，$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

$\because AB=BE$，$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形.

（2）**解**：如图 19.2−16，连结 BF，交 AE 于 G.

思路点拨

- 由作图过程知 $AB=AF$，$\angle EAB=\angle EAF$，由 $AD\parallel BC$，推出 $\angle EAF=\angle AEB=\angle EAB$，得到 $BE=AB=AF$，由此即可证明；
- 连结 BF，交 AE 于 G，先根据菱形的性质得出 $AB=4$，$AG=\frac{1}{2}AE=2\sqrt{3}$，$BG=\frac{1}{2}BF$，$AE\perp BF$，然后求出 $BG=2$，即可求出 $BF=4$，可推出 $\triangle ABF$ 为等边三角形，因此 $\angle BAF=60°$，再根据平行四边形的对角相等即可求出 $\angle C=\angle BAF=60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵菱形 $ABEF$ 的周长为 16，$AE=4\sqrt{3}$，

∴ $AB=BE=EF=AF=4$，$AG=\frac{1}{2}AE=2\sqrt{3}$，$BG=\frac{1}{2}BF$，$AE\perp BF$.

在 Rt△ABG 中，∵∠$AGB=90°$，

∴ $BG^2=AB^2-AG^2$，即 $BG^2=4^2-(2\sqrt{3})^2=2^2$，

∴ $BG=2$，∴ $BF=4$.

∴△ABF 是等边三角形．∴∠$BAF=60°$．

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴∠$C=$∠$BAF=60°$．

两年模拟兵法

☞答案见 269 页

1. [**中考·河北**]求证：菱形的两条对角线互相垂直．

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 交于点 O.

求证：$AC\perp BD$.

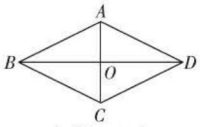
以下是排乱的证明过程：

①又 $BO=DO$；

② ∴ $AO\perp BD$，即 $AC\perp BD$；

③∵四边形 $ABCD$ 是菱形；

④∴ $AB=AD$.



（第 1 题）

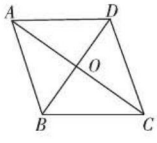
证明步骤正确的顺序是（　　）

A. ③→②→①→④　　B. ③→④→①→②

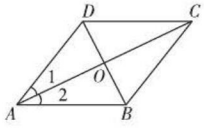
C. ①→②→④→③　　D. ①→④→③→②

2. [**中考·海南**]如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AC=8$，$BD=6$，则△ABC 的周长是（　　）

A.14　　B.16　　C.18　　D.20



（第 2 题）



（第 3 题）

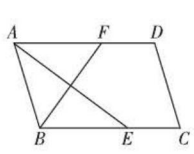
3. [**中考·河南**]如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，添加下列条件不能判定▱$ABCD$ 是菱形的只有（　　）

A.$AC\perp BD$　　B.$AB=BC$

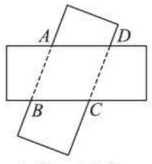
C.$AC=BD$　　D.∠$1=$∠2

4. [**期末·蒙阴**]如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，∠BAD 的平分线交 BC 于点 E，∠ABC 的平分线交 AD 于点 F，若 $BF=12$，$AB=10$，则 AE 的长为（　　）

A.10　　B.12　　C.16　　D.18



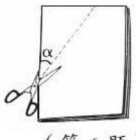
（第 4 题）



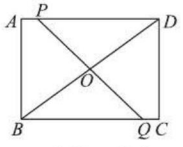
（第 5 题）

5. 如图，用完全相同的两张矩形纸片交叉叠放得到四边形 $ABCD$，则四边形 $ABCD$ 的形状是____.

6. 如图，把一张长方形纸片对折两次，然后剪下一个角，为了得到一个锐角为 60° 的菱形，剪口与折痕所成的∠ α 的度数应为_____.



（第 6 题）



（第 7 题）

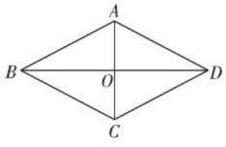
7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=32$ cm，$AB=24$ cm，点 P 是线段 AD 上一动点，O 为 BD 的中点，PO 的延长线交 BC 于 Q. 若 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度向 D 运动（不与 D 重合），设点 P 的运动时间为 t s，则当 $t=$_____时，以点 A，B，C，D 中的两个点及点 P、Q 为顶点的四边形是菱形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考·贺州]如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，BD 平分 $\angle ABC$，$AC\perp BD$，垂足为点 O.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）若 $CD=3$，$BD=2\sqrt{5}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

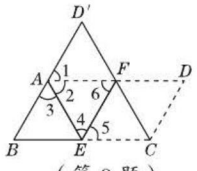


（第 8 题）

9. 将平行四边形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠，使点 C 与点 A 重合，点 D 落到点 D' 处，折痕为 EF.

（1）求证：$\triangle ABE\cong\triangle AD'F$；

（2）连结 CF，四边形 $AECF$ 是什么特殊四边形？并说明理由.

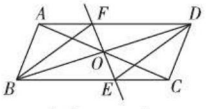


（第 9 题）

10. 如图所示，在$\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，将直线 AC 绕点 O 顺时针旋转，分别交 BC，AD 于点 E，F，连结 BF，DE.

（1）试证明在旋转过程中，线段 AF 与 EC 总保持相等；

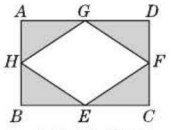
（2）在旋转过程中，四边形 $BEDF$ 可能是菱形吗？请说明理由.



（第 10 题）

11. 矩形、菱形由于其特殊的性质，为拼图提供了方便，因而墙面瓷砖一般设计为矩形，图案也以菱形居多. 如图是一种长 30 cm，宽 20 cm 的矩形瓷砖，E，F，G，H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，阴影部分为淡黄色，中间部分为白色，现有一面长 4.2 m，宽 2.8 m 的墙壁准备贴瓷砖.

问：这面墙壁最少要贴这种瓷砖多少块？全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现多少个最小的面积相等的菱形？其中淡黄色的菱形有多少个？

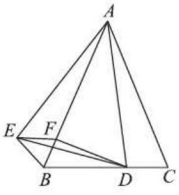


（第 11 题）

12. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC$，设 $\angle BAC=\alpha$（$\alpha<60°$），D 是 BC 边上的一点，连结 AD，线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 α 到 AE，过点 E 作 BC 的平行线，交 AB 于点 F，连结 DE，BE，DF.

（1）求证：$BE=CD$；

（2）若 $AD\perp BC$，试判断四边形 $BDFE$ 的形状，并给出证明.　　【导学号：9877429】



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.3 正方形

核心知识

- 正方形的定义
- 正方形的性质
- 正方形的判定
- 特殊四边形间的关系

知识链接



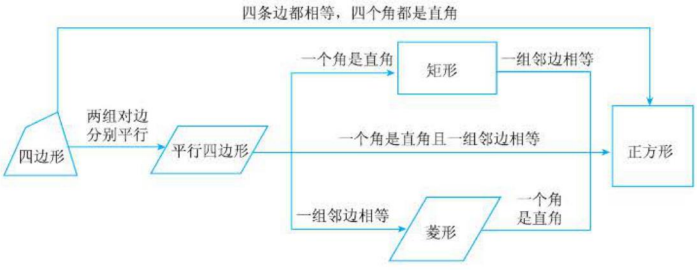
点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正方形的定义

1. 正方形的定义

四条边都相等，四个角都是直角的四边形叫做正方形.

2. 特殊四边形定义间的关系



拨考向 利用正方形的定义判定正方形

例 1 如图 19.3-1 所示，在△ABC中，$\angle ABC=90°$，BD平分$\angle ABC$，$DE\perp BC$于点E，$DF\perp AB$于点F，求证：四边形$BEDF$是正方形.

解题秘方：紧扣定义中“四条边都相等，四个角都是直角”进行判定.

证明：$\because DE\perp BC$，$DF\perp AB$，$\therefore \angle DEB=\angle BFD=90°$. $\because \angle ABC=90°$，$\therefore \angle EDF=90°$.

$\therefore \angle DEB=\angle EBF=\angle BFD=\angle EDF=90°$.

又$\because BD$平分$\angle ABC$，$DE\perp BC$，$DF\perp AB$，

$\therefore DE=DF$，$\angle EBD=\angle FBD=45°$.

又$\because \angle DEB=\angle DFB=90°$，

$\therefore \angle FDB=\angle FBD=\angle EBD=\angle EDB=45°$.

$\therefore BF=DF$，$BE=DE$. $\therefore DE=DF=BF=BE$.

$\therefore$四边形$BEDF$是正方形.

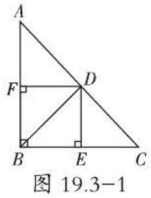


图 19.3-1

提分·必记

特别提醒

1. 正方形必须具备的两个条件：
（1）四条边相等.
（2）四个角是直角.
2. 正方形的四条边都相等，说明正方形既是平行四边形，又是菱形；正方形的四个角都是直角，说明正方形是矩形，即正方形不仅是平行四边形，也是矩形和菱形.

提分·秘诀

解法提醒

利用正方形定义判定正方形，是建立在四边形的基础上，因此，既要有四条边相等，又要有四个角是直角，两者缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 正方形的性质

1. 正方形的性质：

具有矩形、菱形、平行四边形的一切性质，即：

（1）**边**：四条边相等，邻边垂直，对边平行．

（2）**角**：四个角都是直角．

（3）**对角线**：对角线相等且互相垂直平分，每条对角线平分一组对角．

（4）**对称性**：是轴对称图形，有 4 条对称轴；是中心对称图形，对称中心是对角线交点．

（5）**面积**为边长的平方或对角线平方的一半．

2. 特殊四边形的性质间的关系：

类型		平行四边形	矩形	菱形	正方形
边	共性	对边平行且相等			
	特性			四条边都相等	
角	共性	对角相等且邻角互补			
	特性		四个角都是直角		四个角都是直角
对角线	共性	对角线互相平分			
	特性		对角线相等	对角线互相垂直	对角线相等且互相垂直

提分·必记

特别提醒

1. 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们之间的关系如图 19.3-2 所示．

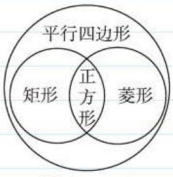


图 19.3-2

2. 正方形的特殊性质：

（1）正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形；两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形．

（2）周长相等的四边形中，正方形的面积最大．

拔考向▶利用正方形的性质解与三角形有关应用

提分·秘诀

解法提醒

由于正方形的性质较多，解题时需要根据题中已知条件，结合要证明的结论，选择证明结论成立所必须的性质，使解题思路更简洁．

例 2 如图 19.3-3 所示，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 上一点，F 为 BC 延长线上一点，$CE=CF$.

（1）求证：$\triangle BCE \cong \triangle DCF$；

（2）若 $\angle BEC=60°$，求 $\angle EFD$ 的度数．

解题秘方：从正方形中获取边、角相等的信息．

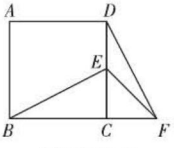


图 19.3-3

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC=DC$，$\angle BCE=\angle DCF=90°$．

又∵ $CE=CF$，

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$.

（2）**解**：∵ $\triangle BCE \cong \triangle DCF$，

$\angle BEC=60°$，

$\therefore \angle DFC=\angle BEC=60°$．

∵ $CE=CF$，$\angle ECF=90°$，

$\therefore \angle CFE=45°$．

$\therefore \angle EFD=\angle DFC-\angle CFE=60°-45°=15°$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 正方形的判定

1. 判定方法：

（1）**从四边形出发**：①有四条边相等，四个角都是直角的四边形是正方形；②对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形；

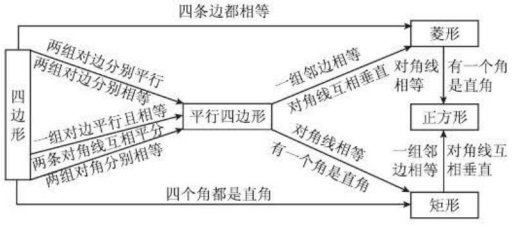
（2）**从平行四边形出发**：①有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形；②对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形；

（3）**从矩形出发**：①有一组邻边相等的矩形是正方形；②对角线互相垂直的矩形是正方形；

（4）**从菱形出发**：①有一个角是直角的菱形是正方形；②对角线相等的菱形是正方形．

2. 四边形间的关系：

四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的转化关系如下所示．



提分·必记

特别提醒

常见的判定思路：

利用边证明：

矩形 —邻边相等→ 正方形；

利用角证明：

菱形 —有一个角是直角→ 正方形；

利用对角线证明：

(1) 矩形 —对角线互相垂直→ 正方形；

(2) 菱形 —对角线相等→ 正方形；

(3) 平行四边形 —对角线相等且互相垂直→ 正方形；

(4) 四边形 —对角线相等且互相垂直平分→ 正方形．

拔考向▶利用正方形的判定判定正方形

例 3 如图 19.3-4 所示，点 A'，B'，C'，D' 分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA'=BB'=CC'=DD'$，求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形．

解题秘方：紧扣“先判定它是一种特殊的四边形，再加上边或角或对角线的条件”判定正方形．

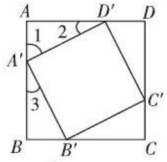


图 19.3-4

证明：∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $BC=CD=DA=AB$，

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$．

又∵ $AA'=BB'=CC'=DD'$，

∴ $D'A=A'B=B'C=C'D$，

∴ $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'\cong\triangle CC'B'\cong\triangle DD'C'$（S.A.S.）．

∴ $D'A'=A'B'=B'C'=C'D'$，$\angle 2=\angle 3$．

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为菱形．

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$．

∴ $\angle D'A'B'=180°-(\angle 1+\angle 3)=90°$．

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为正方形．

提分·秘诀

另解

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AD=AB$，$\angle A=\angle B=90°$．

又 $DD'=AA'$，∴ $AD'=BA'$．

在 $\triangle AA'D'$ 和 $\triangle BB'A'$ 中，

$$\begin{cases} AD'=BA', \\ \angle A=\angle B, \\ AA'=BB', \end{cases}$$

∴ $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'$．

∴ $\angle 2=\angle 3$，$A'D'=B'A'$．

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$，

∴ $\angle D'A'B'=90°$，

同理可得 $\angle A'B'C'=\angle B'C'D'=90°$，

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为矩形．

又 $A'D'=B'A'$，

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为正方形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教你一招：判定四边形是正方形的方法

1. 如果已知条件是平行四边形，需证它既是矩形又是菱形；

2. 如果已知条件是四边形，若按边角关系 证明，则需证它的四条边相等，四个角是直角；若按特殊四边形证明，则要先证它是平行四边形，再证它既是矩形又是菱形；

3. 如果已知条件是矩形，需证它的邻边相等或对角线互相垂直；

4. 如果已知条件是菱形，需证它有一个角是直角或对角线相等．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用线段代换法求正方形中三角形的周长

挑战·高分

解法提醒

在正方形中出现以正方形的一边为直角边的直角三角形时，我们经常通过延长或旋转作辅助线，目的是通过证明三角形全等，得到需要的边、角关系．

例 4 如图 19.3–5，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E，F 分别在边 AD，CD 上，若 $\angle EBF=45°$，则 $\triangle EDF$ 的周长等于____．

解题秘方：将三角形的边转移到正方形的边上．

解：如图 19.3–5，延长 FC 到 G，使 $CG=AE$，连结 BG．

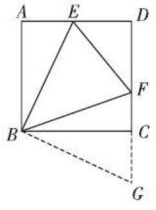


图 19.3–5

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=CB$，$\angle A=\angle ABC=\angle BCD=90°$．

$\therefore \angle A=\angle BCG=90°$．$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBG$．

$\therefore \angle ABE=\angle CBG$，$BE=BG$．

$\therefore \angle ABE+\angle EBC=\angle CBG+\angle EBC$，

$\therefore \angle EBG=\angle ABC=90°$．

$\because \angle EBF=45°$，$\therefore \angle GBF=\angle EBF=45°$．

在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle BGF$ 中，$\begin{cases} BE=BG, \\ \angle EBF=\angle GBF, \\ BF=BF, \end{cases}$

将三角形的三边进行转化，利用等量代换进行求解．

$\therefore \triangle BEF\cong\triangle BGF$．$\therefore EF=FG=FC+CG=FC+AE$．

$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $DE+DF+EF=DE+DF+AE+CF=AD+CD=4$．

答案：4

拔尖角度 2 利用角度代换法求正方形中的角

挑战·高分

解题流程

正方形及等边三角形的性质

↓

$\angle ABF$，$\angle BAF$ 的度数

↓

$\angle AFD$ 的度数

例 5 如图 19.3–6，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，BD 与 CE 相交于点 F，连结 AF，求 $\angle AFD$ 的度数．

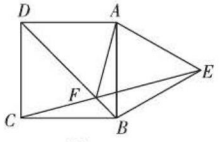


图 19.3–6

解题秘方：紧扣三角形的内外角性质将所求的角转化为可利用特殊三角形的内角进行求解．

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，$\therefore \angle ABC=90°$，$\angle CBF=\angle ABF=45°$，$\angle ABE=60°$，$BC=AB=BE$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle CBE=150°$，$\angle BCE=\angle BEC$，$\therefore \angle BCE=\angle BEC=15°$.

$\because$直线 BD 是正方形 $ABCD$ 的对称轴，$\therefore \angle BAF=\angle BCE=15°$.

又$\because \angle ABF=45°$，且$\angle AFD$ 为$\triangle AFB$ 的外角，

$\therefore \angle AFD=\angle ABF+\angle BAF=45°+15°=60°$.

拔尖角度▸ 3 利用执果索因法判定正方形

例 6 如图 19.3-7，点 E 是正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，$EF \perp AB$，$EG \perp BC$，垂足分别为 F，G，若正方形 $ABCD$ 的周长是 40cm.

（1）求证：四边形 $BFEG$ 是矩形；

（2）求四边形 $BFEG$ 的周长；

（3）当 AF 的长为多少时，四边形 $BFEG$ 是正方形？

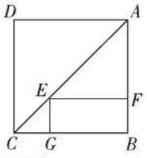


图 19.3-7

解题秘方：紧扣在矩形的基础上判定正方形需补充的条件探寻四边形为正方形的条件.

（1）**证明**：$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore \angle B=90°$.

$\because EF \perp AB$，$EG \perp BC$，$\therefore \angle BFE=\angle BGE=90°$，

$\therefore$四边形 $BFEG$ 是矩形.

（2）**解**：$\because$正方形 $ABCD$ 的周长是 40cm，$\therefore AB=40\div4=10$（cm）.

易知$\triangle AEF$ 为等腰直角三角形，$\therefore AF=EF$.

$\because$四边形 $BFEG$ 为矩形，

$\therefore BF=EG$，$EF=BG$.

$\therefore$四边形 $BFEG$ 的周长为 $2(EF+BF)=2(AF+BF)=2\times10=20$（cm）.

（3）**解**：若要使四边形 $BFEG$ 是正方形，只需 $EF=BF$.

$\because AF=EF$，$AB=10$cm，

$\therefore$当 $AF=\dfrac{1}{2}AB=5$cm 时，四边形 $BFEG$ 是正方形.

挑战·高分

解法提醒

若四边形是矩形，要探寻其为正方形，有两种思路：

1. 从边出发，需一组邻边相等；
2. 从对角线出发，需对角线互相垂直.

技巧点拨

矩形的判定方法比较多，要依据已知条件灵活选取，此处四边形 BFEG 中，已经有一个$\angle B$为直角，所以可考虑利用“有三个角是直角的四边形是矩形”来证明.

拔尖角度▸ 4 利用特殊位置法探求正方形中旋转变换的定值

例 7 如图 19.3-8，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 也是正方形 $A'B'C'O$ 的一个顶点，如果两个正方形的边长都等于 1，那么当正方形 $A'B'C'O$ 绕顶点 O 转动时，两个正方形重叠部分的面积大小有什么规律？请说明理由.

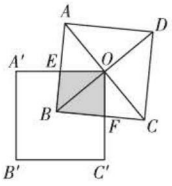


图 19.3-8

解题秘方：将正方形 $A'B'C'O$ 旋转到 OA' 与 OA 重合或 $OA' \perp AB$ 的位置，易得出两个正方形重叠部分面积大小的规律，再利用正方形的性质和全等三角形的判定与性质进行证明即可.

解：两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是$\dfrac{1}{4}$，理由如下：

挑战·高分

技巧点拨

特殊位置法

求证在某种规律变化的条件下，有着不变的结论产生（如定值、定点、定长等），这类问题统称为几何定值问题，解决几何定值问题通常用特殊位置法，如本题可将正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转到 $OA' \perp AB$ 的特殊位置，易发现

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC=90°$.

∵四边形 $A'B'C'O$ 是正方形，

∴ $\angle EOF=90°$，∴ $\angle BOC=\angle EOF$.

∴ $\angle BOC-\angle BOF=\angle EOF-\angle BOF$，即 $\angle COF=\angle BOE$.

又∵ $OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF$，∴ $\triangle BOE\cong\triangle COF$.

∴ $S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$. ∴两个正方形重叠部分的面积等于 $S_{\triangle BOC}$.

∵ $S_{正方形ABCD}=1\times1=1$，∴ $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}$.

∴两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

$S_{正方形EBFO}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$，然后根据该结论进行一般性验证即可.

拔尖角度▸ 5 利用构造法在正方形中构造全等三角形

挑战·高分

例 8 如图 19.3-9 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，菱形 $EFGH$ 的三个顶点 E，G，H 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB，CD，DA 上，且 $AH=2$，连结 CF.

（1）当 $DG=2$ 时，求证：菱形 $EFGH$ 为正方形；

（2）设 $DG=x$，试用含 x 的代数式表示 $\triangle FCG$ 的面积.

解题秘方：紧扣三角形的面积公式，作 $\triangle FCG$ 的边 CG 上的高构造 $\triangle MFG$ 与 $\triangle AHE$ 全等，求出 FM 的长，即可用含 x 的代数式表示 $S_{\triangle FCG}$.

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle D=\angle A=90°$.

∵四边形 $EFGH$ 是菱形，∴ $HG=EH$.

∵ $DG=AH=2$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$，

∴ $\angle DHG=\angle AEH$.

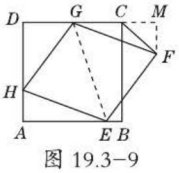


图 19.3-9

∵ $\angle AEH+\angle AHE=90°$，∴ $\angle DHG+\angle AHE=90°$，

∴ $\angle GHE=90°$，∴菱形 $EFGH$ 为正方形.

（2）**解**：过 F 作 $FM\perp CD$，交 DC 的延长线于 M，连结 GE，如图 19.3-9 所示.

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $CD\parallel AB$，∴ $\angle AEG=\angle MGE$.

∵四边形 $EFGH$ 为菱形，∴ $FG=HE$，$GF\parallel HE$，

∴ $\angle HEG=\angle FGE$，∴ $\angle AEH=\angle MGF$.

在 $\triangle AHE$ 和 $\triangle MFG$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle M=90°,\\ \angle AEH=\angle MGF,\\ HE=FG,\end{cases}$$

∴ $\triangle AHE\cong\triangle MFG$，∴ $MF=AH=2$.

∵ $DG=x$，∴ $CG=6-x$，∴ $S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}CG\cdot MF=6-x$.

解法提醒

解答本题采用了演绎推理和构造法，(1)中由于四边形EFGH为菱形，只需再证有一个内角是直角即可；(2)中解题的关键是作辅助线：过F作FM⊥DC，交DC的延长线于M，连结GE，构造全等三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

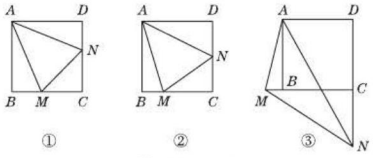
拔尖角度▸ 6 利用截长补短法证明正方形中的和差关系

挑战·高分

例 9 已知：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB，DC（或它们的延长线）于点 M，N. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时（如图 19.3-10①），易证 $BM+DN=MN$.

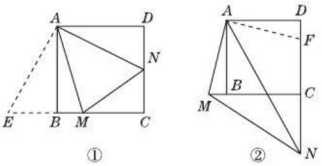
（1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时（如图 19.3-10②），线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明.

（2）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 19.3-10③的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？请写出猜想，并加以证明.



① ② ③

图 19.3-10



① ②

图 19.3-11

解题秘方：用“截长补短法”将分散的求和中的两条线段集中成一条线段，再证明这条线段等于长线段.

解：（1）$BM+DN=MN$.

证明如下：如图 19.3-11①，在 MB 的延长线上截取 BE，使 $BE=DN$，连结 AE.

易得 $\triangle ABE\cong\triangle ADN$，$\therefore AE=AN$，$\angle EAB=\angle NAD$.

$\because\angle BAD=90°$，$\angle NAM=45°$，$\therefore\angle BAM+\angle NAD=45°$，

$\therefore\angle EAB+\angle BAM=45°$，$\therefore\angle EAM=\angle NAM$.

又 AM 为公共边，$\therefore\triangle AEM\cong\triangle ANM$，$\therefore ME=MN$.

$\because ME=BE+BM=DN+BM$，

$\therefore BM+DN=MN$.

（2）$DN-BM=MN$.

证明如下：如图 19.3-11②，在 DC 上截取 DF，使 $DF=BM$，连结 AF.

易知 $AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore\triangle ABM\cong\triangle ADF$，

$\therefore AM=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$，

$\therefore\angle MAB+\angle BAF=\angle FAD+\angle BAF=90°$，

即 $\angle MAF=\angle BAD=90°$.

又 $\angle MAN=45°$，$\therefore\angle FAN=\angle MAN=45°$.

又 $\because AN=AN$，$\therefore\triangle MAN\cong\triangle FAN$，$\therefore MN=FN$.

$\because FN=DN-DF=DN-BM$，$\therefore DN-BM=MN$.

方法点拨

截长补短法是证明线段的和、差关系中常用的一种基本方法，有两种思路：

截长法—在长线段上截取一线段使它等于两相加线段中一线段，并证明长线段中余下线段等于两相加线段中的另一线段.

补短法—延长两相加线段中一线段使延长部分等于两相加线段中的另一线段，并证明延长后的这条线段等于长线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考探秘 运用正方形的性质与判定方法解决有关问题是中考的主要考点，经常与其他特殊四边形的性质和判定及全等三角形等知识结合在一起考查，多以选择题、证明题的形式出现，有时也会出现在阅读理解题中，在今后的中考中，本节内容仍是考查的重点.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用三角形三边关系解正方形中的裁剪问题

例10 [中考·河北]如图19.3-12是边长为10cm的正方形铁片，过两个顶点剪掉一个三角形，以下四种剪法中（如图19.3-13），裁剪线所标的数据（单位：cm）不正确的是（　　）

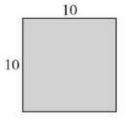


图19.3-12

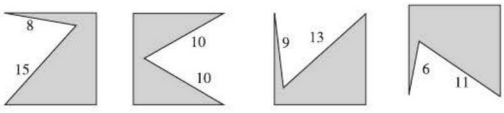


图19.3-13

试题评析：本题考查正方形的性质、勾股定理等知识，解题的关键是利用勾股定理求出正方形的对角线的长.

解：∵正方形的边长为10 cm，∴对角线长为$10\sqrt{2}$ cm.

∵$15>10\sqrt{2}$，∴A不可能存在.

答案：A

思路点拨

由于剪掉的三角形三边长没有具体要求，因此裁剪线所标的数据正确与否，只需考虑最大的数据小于或等于正方形的对角线长度即可.

考法2 利用整体思想解正方形中的线段的求和问题

例11 [中考·绍兴]如图19.3-14为某城市部分街道示意图，四边形$ABCD$为正方形，点G在对角线BD上，$GE\perp CD$，$GF\perp BC$，AD=1500m，小敏行走的路线为$B\to A\to G\to E$，小聪行走的路线为$B\to A\to D\to E\to F$. 若小敏行走的路程为3100m，则小聪行走的路程为_____m.

试题评析：本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定和性质、矩形的性质及等腰三角形的性质，解决本题的关键是证明$AG=EF$，$DE=GE$.

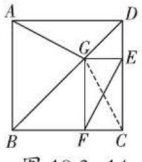


图19.3-14

解：如图19.3-14，连结GC.

∵四边形$ABCD$为正方形，

∴$AD=DC$，$\angle ADB=\angle CDB=45°$.

∵$\angle CDB=45°$，$GE\perp DC$，

∴$\triangle DEG$是等腰直角三角形，

∴$DE=GE$.

思路点拨

连结CG，由正方形的对角线平分一组对角，GE⊥DC，易得DE=GE，由三角形全等可得AG=CG. 在矩形GECF中，EF=CG，即可得AG=EF，从而根据小敏行走的路程可求出小聪行走的路程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△AGD和△CGD中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADG=\angle CDG,\\ DG=DG,\end{cases}$

∴△AGD≌△CGD. ∴$AG=CG$.

易得四边形$GECF$为矩形，

∴$EF=CG$. ∴$EF=AG$.

∵小敏行走的路程为$BA+AG+GE=3100$（m），

∴小聪行走的路程为$BA+AD+DE+EF=AD+BA+GE+AG=1500+3100=4600$（m）.

答案：4600

考法3 利用三角形、菱形性质解判定正方形的条件问题

例12 [中考·青岛]已知：如图19.3-15，在菱形$ABCD$中，点E，O，F分别为AB，AC，AD的中点，连结CE，CF，OE，OF.

（1）求证：△BCE≌△DCF；

（2）当AB与BC满足什么关系时，四边形$AEOF$是正方形？请说明理由.

试题评析：本题考查了正方形的判定、菱形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识，熟练掌握菱形的性质和全等三角形的判定是解决问题的关键.

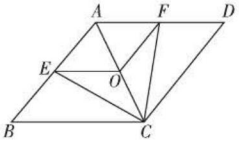


图19.3-15

（1）**证明**：∵四边形$ABCD$是菱形，

∴$\angle B=\angle D$，$AB=BC=DC=AD$.

∵点E，F分别为AB，AD的中点，

∴$BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AD$，∴$BE=DF$.

在△BCE和△DCF中，$\begin{cases}BE=DF,\\ \angle B=\angle D,\\ BC=DC,\end{cases}$

∴△BCE≌△DCF（S.A.S.）.

（2）**解**：当$AB\perp BC$时，四边形$AEOF$是正方形，理由如下：

∵点E，O，F分别为AB，AC，AD的中点，

∴$EO=\frac{1}{2}BC$，$OF=\frac{1}{2}CD$，$AE=\frac{1}{2}AB$，$AF=\frac{1}{2}AD$.

$OE\parallel BC$，∴$AE=OE=OF=AF$，

∴四边形$AEOF$是菱形.

∵$AB\perp BC$，$OE\parallel BC$，∴$OE\perp AB$，

∴$\angle AEO=90°$，

∴四边形$AEOF$是正方形.

思路点拨

- 由菱形的性质得出∠B=∠D，AB=BC=DC=AD，由已知可得出$BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AD$，即可得出BE=DF，由S.A.S.证明△BCE≌△DCF即可；
- 由已知和三角形中位线定理易得出AE=OE=OF=AF，证出四边形AEOF是菱形，再证出∠AEO=90°，则四边形AEOF是正方形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用比例关系求角解判定正方形问题

例 13 [中考·上海]已知：如图 19.3-16，四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=CD$，E 是对角线 BD 上一点，且 $EA=EC$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）如果 $BE=BC$，且 $\angle CBE:\angle BCE=2:3$，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

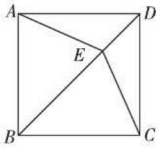


图 19.3-16

试题评析：本题主要考查了正方形与菱形的判定及性质，熟练掌握相关定理是解答此题的关键.

证明：（1）在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases} AD=CD, \\ DE=DE, \\ EA=EC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$，$\therefore \angle ADE=\angle CDE$.

$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle ADE=\angle CBD$，

$\therefore \angle CDE=\angle CBD$，$\therefore BC=CD$.

$\because AD=CD$，$\therefore BC=AD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$\because AD=CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

（2）$\because BE=BC$，

$\therefore \angle BCE=\angle BEC$.

$\because \angle CBE:\angle BCE=2:3$，

$\therefore \angle CBE=180^\circ \times \dfrac{2}{2+3+3}=45^\circ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle ABE=45^\circ$，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

思路点拨

- 首先证得 $\triangle ADE \cong \triangle CDE$，由全等三角形的性质可得 $\angle ADE=\angle CDE$，由 $AD \parallel BC$ 可得 $\angle ADE=\angle CBD$，因此 $\angle CDB=\angle CBD$，可得 $BC=CD$，即可得 $AD=BC$，利用平行四边形的判定定理可得四边形 ABCD 为平行四边形，由 $AD=CD$ 可得四边形 ABCD 是菱形；
- 由 $BE=BC$ 可得 $\angle BCE=\angle BEC$，利用三角形的内角和定理可得 $\angle CBE=180^\circ \times \dfrac{2}{8}=45^\circ$，易得 $\angle ABE=45^\circ$，可得 $\angle ABC=90^\circ$，由正方形的判定定理可得四边形 ABCD 是正方形.

两年模拟兵法

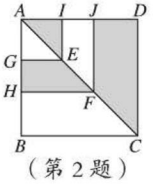
答案见 270 页

1. [期末·内乡]用两块完全相同的直角三角形拼下列图形：①平行四边形；②矩形；③菱形；④正方形；⑤等腰三角形；⑥等边三角形，一定能拼成的图形是（　　）

A. ①④⑤　　B. ②⑤⑥

C. ①②③　　D. ①②⑤

2. [中考·宜昌]如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E，F 是对角线 AC 上的两点，$EG \perp AB$，$EI \perp AD$，$FH \perp AB$，$FJ \perp AD$，垂足分别为 G，I，H，J. 则图中阴影部分的面积等于（　　）



（第 2 题）

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

3. [模拟·天门]如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，DE，DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高，得到下面四个结论：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

① $OA=OD$；

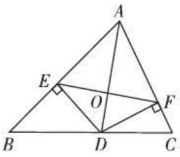
② $AD \perp EF$；

③当$\angle BAC=90°$时，四边形$AEDF$是正方形；

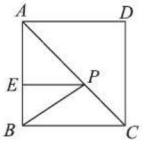
④ $AE^2+DF^2=AF^2+DE^2$，

其中正确的是（　　）

A. ②③　　B. ②④　　C. ②③④　　D. ①③④



（第3题）



（第5题）

4. [中考·武汉]以正方形$ABCD$的边AD为边作等边△ADE，则$\angle BEC$的度数是_____.

5. 如图，在正方形$ABCD$中，E是AB上一点，$BE=2$，$AE=3$，P是AC上一动点，则$PB+PE$的最小值是_____.

6. [中考·兰州]在平行四边形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，要使四边形$ABCD$是正方形，还需添加一组条件，下面给出了四组条件：

① $AB \perp AD$，且$AB=AD$；

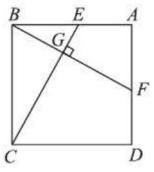
② $AB=BD$，且$AB \perp BD$；

③ $OB=OC$，且$OB \perp OC$；

④ $AB=AD$，且$AC=BD$.

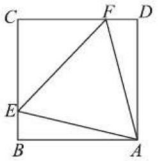
其中正确的序号是_____.

7. [中考·广安]如图，四边形$ABCD$是正方形，E，F分别是AB，AD上的一点，且$BF \perp CE$，垂足为G，求证：$AF=BE$. 【导学号：9877429】



（第7题）

8. [中考·舟山]如图，等边三角形AEF的顶点E，F在矩形$ABCD$的边BC，CD上，且$\angle CEF=45°$. 求证：矩形$ABCD$是正方形.



（第8题）

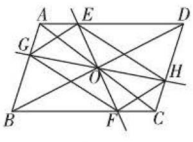
9. 在▱$ABCD$中，AC，BD交于点O，过点O作直线EF，GH分别交平行四边形的四条边于E，F，G，H四点，连结EG，GF，FH，HE.

（1）如图①所示，四边形$EGFH$的形状是_____；

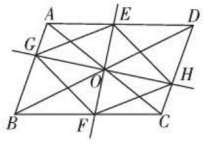
（2）如图②所示，当$EF \perp GH$时，四边形$EGFH$的形状是_____；

（3）如图③所示，在（2）的条件下，若$AC=BD$，则四边形$EGFH$的形状是_____；

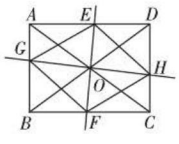
（4）如图④所示，在（3）的条件下，若$AC \perp BD$，试判断四边形$EGFH$的形状，并说明理由.



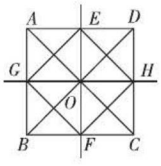
①



②



③



④

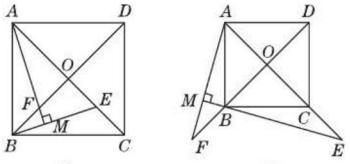
（第9题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图①，已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 AC 上一点，连结 EB，过点 A 作 $AM \perp BE$，垂足为 M，AM 交 BD 于点 F.

（1）求证：$OE=OF$；

（2）如图②，若点 E 在 AC 的延长线上，$AM \perp BE$ 交 EB 的延长线于点 M，交 DB 的延长线于点 F，其他条件不变，则结论 $OE=OF$ 还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.



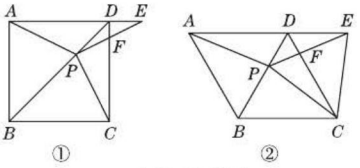
（第 10 题）

11. [中考·荆州]如图①，在正方形 $ABCD$ 中，P 是 BD 上的一点，点 E 在 AD 的延长线上，且 $PA=PE$，PE 交 CD 于 F.

（1）求证：$PC=PE$；

（2）求 $\angle CPE$ 的度数；

（3）如图②，把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$，其他条件不变，当 $\angle ABC=120°$ 时，连结 CE，试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系，并说明理由.



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特殊平行四边形的特殊解题技巧

荣老师告诉你 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们具有平行四边形的所有性质．因此在解决矩形、菱形和正方形的问题时，可以仿照平行四边形的做法，通过巧添辅助线，将特殊四边形问题转化为三角形问题解决．

技巧一 巧添对角线，将四边形问题转化为三角形问题

例 1 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=CB$，P 是 BD 上一点，$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，垂足分别为点 E，F．求证：$PA=EF$．

解题秘方：紧扣矩形对角线的性质将四边形问题转化为三角形问题来解决．

证明：如图 1，连结 PC．

$\because PE\perp BC$，$PF\perp CD$，$\angle ECF=90°$，

$\therefore \angle PEC=\angle PFC=\angle ECF=90°$．

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 是矩形．

$\therefore PC=EF$．

在$\triangle ABP$ 和$\triangle CBP$ 中，

$$\begin{cases} AB=CB, \\ \angle ABP=\angle CBP, \\ BP=BP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBP$（S.A.S.）．

$\therefore PA=PC$．$\therefore PA=EF$．

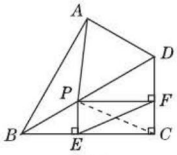


图 1

方法点拨：本题运用转化思想将四边形问题转化到三角形中，通过等式的传递性证明两条线段相等．

技巧二 巧用旋转添全等求线段长

例 2 如图 2，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3，E，F 分别是 AB，BC 边上的点，且 $\angle EDF=45°$．将$\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°，得到$\triangle DCM$．若 $AE=1$，求 FM 的长．

解题秘方：利用旋转，构造全等三角形进行线段间的转化，将零散的线段集中，从而建立数量关系，结合特殊四边形的性质解决问题．

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

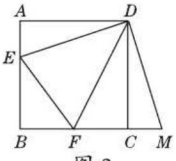


图 2

$\therefore \angle ADE+\angle EDF+\angle CDF=90°$．

$\because \angle EDF=45°$，$\therefore \angle ADE+\angle CDF=45°$．

$\because$ 将$\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°，得到$\triangle DCM$，$\therefore \angle ADE=\angle CDM$，$DE=DM$，

$AE=CM=1$，

$\therefore \angle CDM+\angle CDF=\angle MDF=45°$，

$\therefore \angle EDF=\angle MDF$．

$\because DF=DF$，$\therefore \triangle DEF\cong\triangle DMF$，

$\therefore EF=FM$．

设 $EF=FM=x$，则 $FC=x-1$，

$\because BC=AB=3$，

$\therefore BE=AB-AE=2$，$BF=BC-FC=3-(x-1)=4-x$．

在 Rt$\triangle EBF$ 中，$BE^2+BF^2=EF^2$，

即 $2^2+(4-x)^2=x^2$，解得 $x=\dfrac{5}{2}$．

故 FM 的长为 $\dfrac{5}{2}$．

方法点拨：题中将$\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 实际上揭示一种常见的通过旋转来构造全等三角形的方法，只不过要根据不同的题目来确定旋转的角度；涉及求直角三角形的边长时，经常需要根据勾股定理列出方程来进行求解．

技巧三 巧用作垂线添全等探究线段之间的关系

例 3 现有正方形 $ABCD$ 和一个以 O 为直角顶点的三角尺，移动三角尺，使三角尺两直角边所在直线分别与直线 BC，CD 交于点 M，N．

（1）如图 3①，若点 O 与点 A 重合，则 OM 与 ON 的数量关系是_____．

（2）如图 3②，若点 O 在正方形的中心（即两条对角线的交点），则（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由．

（3）如图 3③，若点 O 在正方形的内部（含

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

边界），当 $OM=ON$ 时，请探究点 O 在移动过程中可形成什么图形．

（4）如图 3④是点 O 在正方形外部的一种情况．

当 $OM=ON$ 时，请你就“点 O 的位置在各种情况下（含外部）移动所形成的图形”提出一个正确的结论（不必说明理由）．

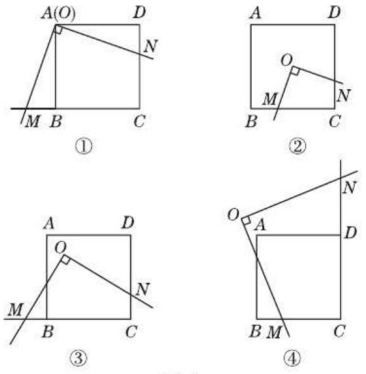


图 3

解题秘方：紧扣图①中两个三角形全等的模型，通过作垂线在图②③④中构造与图①类似的两个全等的三角形，进行探究解决问题．

解：（1）$OM=ON$

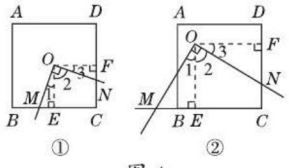


图 4

（2）$OM=ON$ 仍然成立；

如图 4①，过 O 作 $OE\perp BC$ 于 E，$OF\perp CD$ 于 F，

$\therefore\angle OEM=\angle OFN=90^\circ$．

$\because O$ 是正方形 $ABCD$ 的中心，$\therefore OE=OF$．

易知 $\angle EOF=90^\circ$，$\therefore\angle 2+\angle 3=90^\circ$．

$\because\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\therefore\angle 1=\angle 3$，

$\therefore\triangle OEM\cong\triangle OFN$，$\therefore OM=ON$．

（3）如图 4②，过 O 作 $OE\perp BC$ 于 E，$OF\perp CD$ 于 F，

$\therefore\angle OEM=\angle OFN=\angle OEC=\angle OFC=90^\circ$．

$\because\angle C=90^\circ$，$\therefore\angle 2+\angle 3=90^\circ$．

$\because\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\therefore\angle 1=\angle 3$．

$\because OM=ON$，$\therefore\triangle OEM\cong\triangle OFN$，

$\therefore OE=OF$，$\therefore$ 点 O 在 $\angle BCD$ 的平分线上，

$\therefore$ 点 O 在正方形的内部（含边界）移动过程中所形成的图形是对角线 AC．

（4）所形成的图形为直线 AC．

方法点拨：本题的难度其实并不是很大，可以看出（2）（3）（4）的思路其实与（1）是一脉相承的．

技巧四 ▶ 巧借特殊四边形的对称性解题

例 4 如图 5，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120^\circ$，点 E，F 分别在边 AB，BC 上，$\triangle BEF$ 与 $\triangle GEF$ 关于直线 EF 对称，点 B 的对称点是点 G，且点 G 在边 AD 上．若 $EG\perp AC$，$AB=2$，求线段 FG 的长．

解题秘方：先说明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 都是等边三角形，再说明 GF 是菱形的高，同时也等于 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高，把求 GF 转化为求 $\triangle ABC$ 的高．

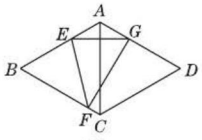


图 5

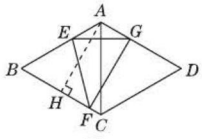


图 6

解：如图 6，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=120^\circ$，

$\therefore AB=BC=CD=AD$，$\angle CAB=\angle CAD=60^\circ$，$AD\parallel BC$，

$\therefore\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 是等边三角形．

$\because EG\perp AC$，$\therefore AE=AG$，

$\therefore\angle AEG=\angle AGE=30^\circ$．

易知 $\angle EGF=\angle B=60^\circ$，

$\therefore\angle AGF=90^\circ$，$\therefore GF\perp AD$．

又 $\because AD\parallel BC$，$AH\perp BC$，

$\therefore GF\parallel AH$．$\therefore GF=AH$．

在 Rt $\triangle ABH$ 中，$AB=2$，

$$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB=1.$$

$$\therefore AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{3},\ \therefore FG=\sqrt{3}.$$

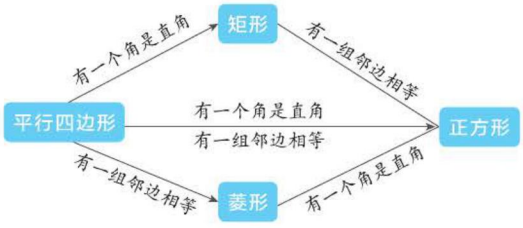
方法点拨：特殊图形的特殊性质是解题的法宝，用好菱形的对称性、成轴对称的两个图形的性质是将已知条件与待求问题建立联系的核心．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 特殊平行四边形的性质定理和判定定理都是互逆定理，它们分别从边的关系、角的关系、对角线的关系等角度考虑；在利用判定定理进行判定时还要考虑是建立在什么四边形的基础上的.

2. 各种特殊平行四边形的性质

	边	角	对角线
矩形	对边平行、相等	四个角都是直角	对角线互相平分且相等
菱形	对边平行，四条边相等	对角相等	对角线互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角
正方形	对边平行，四条边相等	四个角都是直角	对角线互相垂直平分且相等，每一条对角线平分一组对角

知识方法专题

知识必学

专题一 矩形的性质与判定

链接中考≫ 矩形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊点：一是内角是直角；二是对角线相等.考查矩形的性质和判定时，也主要紧扣这两个特殊点进行考查.

例 1 [中考·北京]如图 19-1，在 $\square ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E，点 F 在边 CD 上，$DF=BE$，连结 AF，BF.

（1）求证：四边形 $DEBF$ 是矩形；

（2）若 $CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF 平分 $\angle DAB$.

解题秘方：紧扣矩形判定的基本思路，先证明平行四边形，再证明一个内角是直角或两条对角线相等.

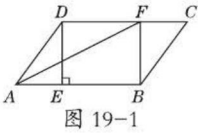


图 19-1

证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $DC \parallel AB$.

又∵ $DF=BE$，

∴四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

∵ $DE \perp AB$，∴ $\angle DEB=90°$，

∴四边形 $DEBF$ 是矩形.

（2）∵四边形 $DEBF$ 是矩形，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BFC=90°$.

$\because CF=3$, $BF=4$, $\therefore$ 由勾股定理得 $BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=BC=5$.

又 $\because DF=5$, $\therefore AD=DF$,

$\therefore \angle DAF=\angle DFA$.

$\because DC \parallel AB$,

$\therefore \angle DFA=\angle FAB$,

$\therefore \angle DAF=\angle FAB$, 即 AF 平分 $\angle DAB$.

专题二 菱形的性质与判定

链接中考≫ 菱形是特殊的平行四边形,主要有两个特殊点:一是四边相等;二是对角线互相垂直.考查菱形的性质和判定时,也主要从这两个方面考查.

例 2 [中考·安顺]如图 19-2,已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上,$DE \parallel AC$ 交 AB 于 E,$DF \parallel AB$ 交 AC 于 F.

(1) 求证:$AE=DF$;

(2) 若 AD 平分 $\angle BAC$,试判断四边形 $AEDF$ 的形状,并说明理由.

解题秘方:紧扣菱形判定的基本思路,先证明是平行四边形,再证一组邻边相等或对角线互相垂直.

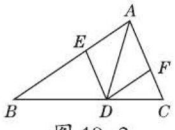


图 19-2

(1) **证明**:$\because DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

$\therefore AE=DF$.

(2) **解**:若 AD 平分 $\angle BAC$,则四边形 $AEDF$ 是菱形.

理由如下:$\because DF \parallel AB$,

$\therefore \angle EAD=\angle FDA$.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle EAD=\angle DAF$,

$\therefore \angle DAF=\angle FDA$, $\therefore AF=DF$.

由(1)知四边形 $AEDF$ 为平行四边形,

$\therefore$ 平行四边形 $AEDF$ 为菱形.

专题三 正方形的性质与判定

链接中考≫ 正方形既是矩形又是菱形,它具有矩形和菱形的所有性质,判定正方形的思路主要有两种:一种是先证明是矩形,再证明邻边相等或对角线互相垂直;另一种是先证明是菱形,再证明有一个内角是直角或对角线相等.在中考中一般以简单的解答题形式考查.

例 3 [中考·凉山州]如图 19-3,在正方形 $ABCD$ 中,G 是 BC 上任意一点,连结 AG,$DE \perp AG$ 于 E,$BF \parallel DE$ 交 AG 于 F,探究线段 AF,BF,EF 三者之间的数量关系,并说明理由.

解题秘方:紧扣正方形的边角性质,通过证明三角形全等得出线段之间的数量关系.

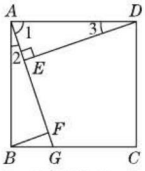


图 19-3

解:线段 AF,BF,EF 之间的数量关系是:$AF=BF+EF$.

理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AB=AD$, $\angle BAD=\angle 1+\angle 2=90°$.

$\because DE \perp AG$, $\therefore \angle DEA=90°$,

$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$, $\therefore \angle 2=\angle 3$.

又 $\because \angle DEF=90°$, $BF \parallel DE$,

$\therefore \angle BFA=\angle DEF=90°$.

$\therefore \angle DEA=\angle AFB$.

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$$\begin{cases}\angle DEA=\angle AFB,\\ \angle 3=\angle 2,\\ DA=AB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ABF$ (A.A.S.),

$\therefore AE=BF$,

$\therefore AF=AE+EF=BF+EF$.

专题四 特殊四边形中的折叠问题

链接中考≫ 折叠变换是全等变换,与特殊四边形有关的折叠问题,关键是根据折叠的性质得到线段或角的关系.解决问题

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

时既要用到特殊四边形的性质与判定，又要用到全等三角形的性质与判定.

例4 [中考·龙东]如图19-4，四边形$ABCD$是正方形，点E在直线BC上，连结AE，将$\triangle ABE$沿AE所在直线折叠，点B的对应点是点B'，再展开，连结AB'，$B'E$并延长AB'交直线DC于点F.

（1）当点F与点C重合时，如图19-4①，易证：$DF+BE=AF$（不需证明）.

（2）当点F在DC的延长线上时，如图19-4②，当点F在CD的延长线上时，如图19-4③，线段DF，BE，AF有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想，并选择其中一种情况给予证明.

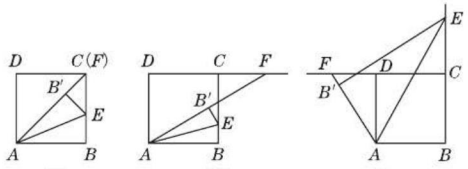


图19-4

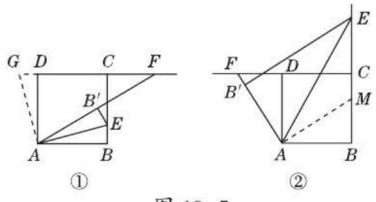


图19-5

解题秘方：从（1）的基本图形中分析出证明方法和思路，当图形中某些点和线段的位置发生改变时，证明的思路和方法不变.

解：（2）图19-4②的结论：$DF+BE=AF$；图19-4③的结论：$BE-DF=AF$.

选择图19-4②证明：如图19-5①，延长CD到点G，使$DG=BE$，连结AG，

∵在正方形$ABCD$中，

$AB=AD$，$\angle ABE=\angle ADG=90°$，

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ADG$（S.A.S.），

$\therefore\angle AEB=\angle G$，$\angle EAB=\angle GAD$.

∵$CB\parallel AD$，$\therefore\angle AEB=\angle EAD$，

$\therefore\angle G=\angle EAD$.

由折叠可知$\angle BAE=\angle B'AE$，

$\therefore\angle B'AE=\angle GAD$，$\therefore\angle GAF=\angle EAD$，

$\therefore\angle G=\angle GAF$，$\therefore GF=AF$.

∵$GF=DF+DG=DF+BE$.

$\therefore DF+BE=AF$.

选择图19-4③证明：如图19-5②，在BC上取点M，使$BM=DF$，连结AM，

∵在正方形$ABCD$中，

$AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore\triangle ABM\cong\triangle ADF$（S.A.S.），

$\therefore MA=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$.

由折叠可知$\angle BAE=\angle EAB'$，

$\therefore\angle MAE=\angle DAE$.

∵$AD\parallel BE$，$\therefore\angle AEM=\angle DAE$，

$\therefore\angle MAE=\angle AEM$，

$\therefore ME=MA=AF$.

∵$EM=BE-BM=BE-DF$.

$\therefore BE-DF=AF$.

方法点拨：此题属于几何综合证明题，题中包含了较多的基本图形，思考问题的过程中要善于发现这些基本图形带来的基本结论，以便迅速得到线索，使思路清晰.此题中的基本图形如图19-6中的阴影部分.

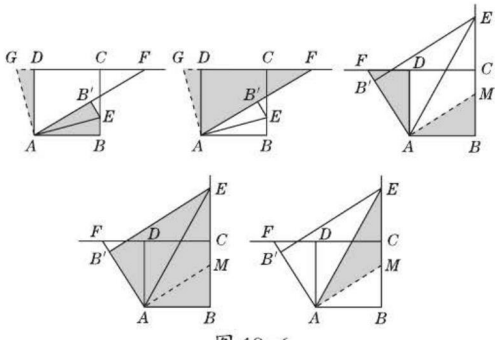


图19-6

Ⅱ 方法必会

专题五 分类讨论思想

专题解读≫ 有些问题的答案不止一种，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

尤其是题目中没有给出图形的几何题，这时需要把问题分为几种可能的情况，然后针对每一种情况给出解答，要求思考问题必须严谨、细致.

例5 [中考·南京]如图19-7，在边长为4的正方形$ABCD$中，请画出以A为一个顶点，另外两个顶点在正方形$ABCD$的边上，且含边长为3的所有大小不同的等腰三角形.(要求：只要画出示意图，并在所画等腰三角形长为3的边上标注数字3)

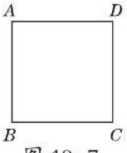


图19-7

解题秘方：本题应分类讨论，按3为底边长或腰长进行分类，不论3为底边长还是腰长，都应考虑A点为顶角的顶点和底角的顶点两种情况.

解：满足条件的三角形有五种情形，如图19-8.

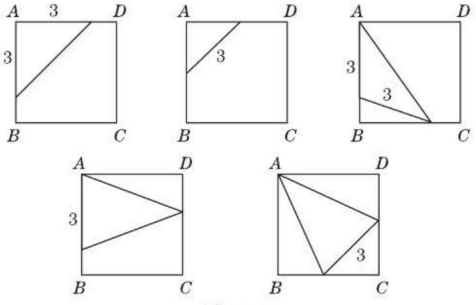


图19-8

方法点拨：当一条线段作为等腰三角形的一边时，需要分情况讨论，当它作为等腰三角形的底时，可以利用尺规作该线段的垂直平分线产生等腰三角形顶角的顶点；当它作为等腰三角形的腰时，可以利用尺规画圆产生等腰三角形底角的顶点.

专题六 数形结合思想

专题解读≫数形结合思想就是把数、式与图形结合起来考虑，用几何图形直观地反映和描述数量关系，用代数方法来分析几何图形中蕴含的数量关系，从而使问题巧妙快速地得到解决.

例6 [中考·滨州]如图19-9，在平面直角坐标系中，将矩形$AOCD$沿直线AE折叠(点E在边DC上)，折叠后顶点D恰好落在边OC上的点F处.若点D的坐标为(10，8)，则点E的坐标为_____.

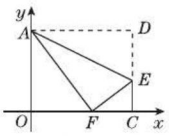


图19-9

解题秘方：由折叠前后的两个图形是全等图形可实现线段之间的转化，得出$AF=AD=10$，$DE=EF$.在Rt△CEF中，边CF的长易求，又知$CE+EF=8$，故可设未知数，利用勾股定理建立方程求解.

解：∵点D的坐标为(10，8)，∴$OA=DC=8$，$AD=OC=10$.根据折叠的性质知，$AF=AD=10$，$DE=EF$.在Rt△AOF中，$OF=\sqrt{AF^2-OA^2}=6$，

∴$CF=OC-OF=4$.

设$CE=x$，则$EF=DE=8-x$，

则在Rt△CEF中，$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得$x=3$.

∴点E的坐标为(10，3).

答案：(10，3)

方法点拨：在直角三角形中，若已知两边的长度，可直接利用勾股定理求第三边的长度；若已知一边的长度，又知三边之间的数量关系，可设未知数利用勾股定理建立方程求解另两边的长度.

专题七 逆向思维法

专题解读≫逆向思维是解决条件探索题常用的方法，从结论出发，分析结论成立的条件，然后再根据已有条件，找出需添加的条件，从而进行推理论证.解有关特殊四边形的条件探索题，要紧扣特殊四边形的性质与判定.

例7 [中考·武威]如图19-10，在平行四边形$ABCD$中，$AB=3$ cm，$BC=5$ cm，∠$B=60°$，G是CD的中点，E是边AD上的动点，EG的延长线与BC的延长线交于点F，连结CE，DF.

(1)求证：四边形$CEDF$是平行四边形；

(2)①当$AE=$_____cm时，四边形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$CEDF$ 是矩形；

②当 $AE=$_____cm 时，四边形 $CEDF$ 是菱形．

（直接写出答案，不需要说明理由）

解题秘方：紧扣解决条件探索题的基本方法，从结论入手，逆向推理分析出条件，再结合条件解决问题．

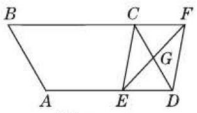


图 19-10

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CF \parallel ED$，∴ $\angle FCG=\angle EDG$.

∵ G 是 CD 的中点，∴ $CG=DG$.

在△ FCG 和△ EDG 中，

$$\begin{cases}\angle FCG=\angle EDG,\\ CG=DG,\\ \angle CGF=\angle DGE,\end{cases}$$

∴△ $FCG\cong$△ EDG（A.S.A.），

∴ $FG=EG$.

又∵ $CG=DG$，

∴四边形 $CEDF$ 是平行四边形．

（2）①3.5

点拨：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle CDA=\angle B=60°$，$DC=AB=3$ cm，$BC=AD=5$ cm. ∵ $CG=DG$，∴ $DG=1.5$ cm.

∵ $AE=3.5$ cm，∴ $DE=1.5$ cm，∴ $DE=DG$，

∴△ DEG 是等边三角形，

∴ $EG=DE=1.5$ cm.

又∵ $FG=EG$，

∴ $EF=3$ cm.

∴ $EF=CD$.

∵四边形 $CEDF$ 是平行四边形，

∴四边形 $CEDF$ 是矩形．

②2

点拨：∵ $AD=5$ cm，$AE=2$ cm，

∴ $DE=3$ cm，

∵ $CD=3$ cm，$\angle CDE=60°$，

∴△ CDE 是等边三角形，∴ $CE=DE$.

又∵四边形 $CEDF$ 是平行四边形，

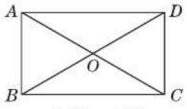
∴四边形 $CEDF$ 是菱形．

方法点拨：解决条件探索题，先将结论作为条件分析出此结论成立时应具备的条件，然后补充此条件，推理证明此结论成立．

好题必解 ☞答案见 271 页

题型 1　巧用特殊平行四边形求角的度数

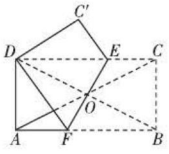
1. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，若 $AB=AO$，求$\angle ABD$ 的度数．



（第 1 题）

题型 2　巧用特殊平行四边形求面积

2. 如图所示，有矩形纸片 $ABCD$，AC，BD 相交于点 O，且 $AC=4\sqrt{5}$．若 $AD:AB=1:2$，将纸片折叠使 B 与 D 重合，求折叠后纸片重叠部分的面积．

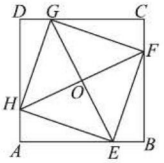


（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3　巧用特殊平行四边形判定图形形状

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 上的点，且 $HA=EB=FC=GD$，连结 EG，FH 交于点 O，连结 EF，FG，GH，HE，判断四边形 $EFGH$ 的形状，并证明你的结论.



（第 3 题）

题型 4　巧用特殊平行四边形证线段和差关系

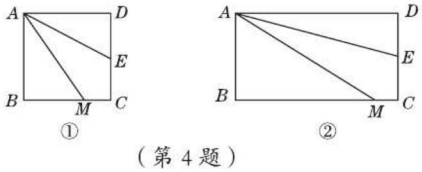
4. 问题情境：如图①，四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 边上的一点，E 是 CD 边的中点，AE 平分 $\angle DAM$.

探究展示：

（1）求证：$AM=AD+MC$.

（2）$AM=DE+BM$ 是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

（3）若四边形 $ABCD$ 是长与宽不相等的矩形，其他条件不变，如图②，探究展示（1）（2）中的结论是否成立. 请分别作出判断，不需要证明.



（第 4 题）

题型 5　与正方形有关的动点型问题

5. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 AB 延长线上一点，直角三角尺的一条直角边经过点 D，且直角顶点 E 在 AB 边上滑动（点 E 不与点 A，B 重合），另一条直角边与 $\angle CBM$ 的平分线 BF 相交于点 F.

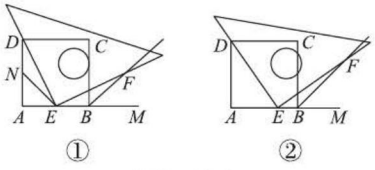
（1）如图①，点 E 在 AB 边的中点位置，点 N 为 AD 的中点，连结 EN.

①猜想 DE 与 EF 满足的数量关系是 _____；

②猜想 NE 与 BF 满足的数量关系是 _____；

③请证明上述两个猜想.

（2）如图②，当点 E 在 AB 边上的任意位置时，请你在 AD 边上找一点 N，使得 $NE=BF$，并猜想此时 DE 与 EF 有怎样的数量关系（无需证明）.



（第 5 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 19 章测试卷 ☞答案见 273 页

（100 分 60 分钟）

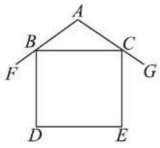
一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 如图，一张矩形纸片，剪去部分后得到一个三角形，则图中∠ 1+ ∠ 2 的度数是（　　）

A.30°　　B.60°　　C.90°　　D.120°



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某市新农村建设推动了农村住宅旧貌变新颜，如图为一农村住宅侧面截图，屋坡 AF，AG 分别架在墙体的点 B，点 C 处，且 $AB=AC$，侧面四边形 $BDEC$ 为矩形，若测得 $\angle FAG=110°$，则 $\angle FBD=$（　　）

A.55°　　B.65°　　C.75°　　D.85°

3. 下列判断错误的是（　　）

A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

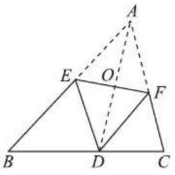
B. 四个内角都相等的四边形是矩形

C. 四条边都相等的四边形是菱形

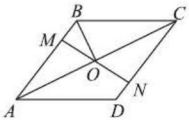
D. 两条对角线垂直且平分的四边形是正方形

4. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，将 $\triangle ABC$ 折叠使点 A 落在点 D 处，折痕为 EF，与 AD 交于点 O，则四边形 $AEDF$ 一定是（　　）

A. 矩形　　B. 菱形　　C. 正方形　　D. 梯形



（第 4 题）



（第 5 题）

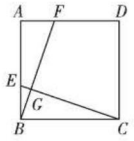
5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，M，N 分别在 AB，CD 上，且 $AM=CN$，MN 与 AC 交于点 O，连结 BO，若 $\angle DAC=28°$，则 $\angle OBC$ 的度数为（　　）

A.28°　　B.52°　　C.62°　　D.72°

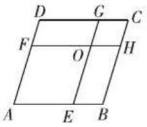
6. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 AB，AD 上，且 $BE=AF$，连结 CE，BF 相交于点 G，则下列结论不正确的是（　　）

A.$BF=CE$　　B. $\angle AFB= \angle ECD$

C.$BF \perp CE$　　D. $\angle AFB+ \angle BEC=90°$



（第 6 题）



（第 7 题）

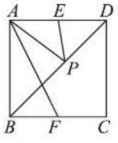
7. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=8$，点 E，F 分别在 AB，AD 上，且 $AE=AF$，过点 E 作 $EG \parallel AD$ 交 CD 于点 G，过点 F 作 $FH \parallel AB$ 交 BC 于点 H，EG 与 FH 交于点 O. 当四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 的周长之差为 12 时，AE 的长为（　　）

A.6.5　　B.5.5

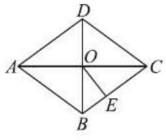
C.6　　D.5

8. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AD，BC 的中点，P 为对角线 BD 上的一个动点，则下列线段的长等于 $AP+EP$ 最小值的是（　　）

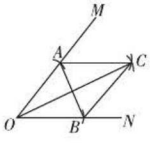
A.AB　　B.DE　　C.BD　　D.AF



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

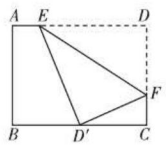
9. 如图所示，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC=8$，$BD=6$，$OE \perp BC$，垂足为点 E，则 $OE=$_____.

10. 如图，在 $\angle MON$ 的两边上分别截取 OA，OB，使 $OA=OB$；分别以点 A，B 为圆心，OA 长为半径作弧，两弧交于点 C；连结 AC，BC，AB，OC. 若 $AB=2$ cm，四边形 $OACB$ 的面积

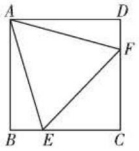
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为 4 cm^2，则 OC 的长为_____cm.

11. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使 D 点与 BC 边的中点 D' 重合．若 $BC=8$，$CD=6$，则 $CF=$_____.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 BC，CD 上，且 $AE=EF=FA$. 有下列结论：

①△ ABE ≌△ ADF；

② $CE=CF$；

③∠ $AEB=75°$；

④ $BE+DF=EF$；

⑤ $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle CEF}$.

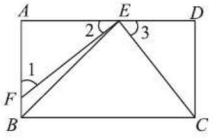
其中正确的是_____（只填写序号）.

三、解答题（共 52 分）

13.（8 分）如图所示，E，F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AD，AB 上的点，若 $EF=EC$，且 $EF \perp EC$.

（1）求证：$AE=DC$；

（2）已知 $DC=\sqrt{2}$，求 BE 的长.

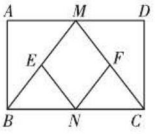


（第 13 题）

14.（10 分）已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，M，N 分别是边 AD，BC 的中点，E，F 分别是线段 BM，CM 的中点.

（1）求证：△ ABM ≌△ DCM；

（2）填空：当 AB ∶ $AD=$_____时，四边形 $MENF$ 是正方形.

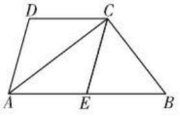


（第 14 题）

15.（10 分）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，AC 平分∠ BAD，$CE \parallel AD$ 交 AB 于点 E.

（1）求证：四边形 $AECD$ 是菱形；

（2）若点 E 是 AB 的中点，试判断△ ABC 的形状，并说明理由.



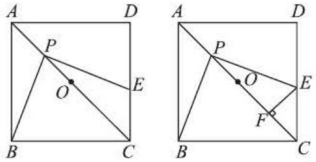
（第 15 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. （12分）如图①，在正方形$ABCD$中，点O是对角线AC的中点，点P是线段AO上（不与A，O重合）的一个动点，过点P作$PE \perp PB$，交CD于点E.

（1）求证：$PB = PE$；

（2）过点E作$EF \perp AC$于点F，如图②，若正方形$ABCD$的边长为2，则在点P运动的过程中，PF的长度是否发生变化？若不变，请求出这个不变的值；若变化，请说明理由.



（第16题）

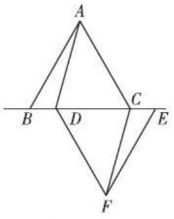
17. （12分）如图，已知△ABC和△DEF是两个边长为10 cm的等边三角形，且点B，D，C，E在同一条直线上，连结AD，CF.

（1）求证：四边形$ADFC$是平行四边形；

（2）若BD=3 cm，△ABC沿着BE的方向以1 cm/s的速度运动，设△ABC运动的时间为t s.

①当t为何值时，▱$ADFC$是菱形？请说明理由；

②▱$ADFC$有可能是矩形吗？若可能，求出t的值；若不可能，请说明理由.



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

体验数据的奥秘



第20章 数据的整理与初步处理









核心考点

你将见到的

- 平均数与加权平均数
- 中位数与众数
- 方差

核心方法

我们为你提供的

- 新数据法
- 观察法
- 统计思想
- 整体思想
- 方程思想
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.1 平均数

核心知识

- 平均数
- 用计算器求平均数
- 加权平均数

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平均数

1. 定义： 一般地，对于 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，我们把 $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这 n 个数的算术平均数，简称平均数，记作“$\bar{x}$”，读作：“x 拔”，即 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

2. 计算方法：

（1）**定义法**：求平均数，只要把所有数据加起来求出总和再除以数据的总个数即可，即：如果有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，那么 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；

（2）**新数据法**：当所给的数据较大，且所给数据大部分都在某一个常数 a 附近上、下波动时，可计算各数据与 a 的差：$x_1-a=x_1'$，$x_2-a=x_2'$，…，$x_n-a=x_n'$，则 $\bar{x}=a+\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')$.

3. 性质：

若 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，则：

（1）nx_1，nx_2，…，nx_n 的平均数为 $n\bar{x}$；

（2）x_1+b，x_2+b，…，x_n+b 的平均数为 $\bar{x}+b$；

（3）nx_1+b，nx_2+b，…，nx_n+b 的平均数为 $n\bar{x}+b$.

提分·必记

特别提醒

1. 一组数据的平均数是唯一的，它不一定是这组数据中的某个数据；
2. 算术平均数的大小与一组数据里的每个数据都有关，其中任何一个数据的变动都会引起算术平均数的变动；
3. 如果所给的数据带有单位，那么这组数据的算术平均数也要带单位，并且算术平均数所带单位与这组数据的单位一致.

拨考向 利用平均数的定义求字母值

例 1 [中考·鞍山]一组数据 2，4，3，x，4 的平均数是 3，则 x 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解题秘方： 紧扣“平均数的定义”求解.

解： 根据题意，得 $\frac{2+4+3+x+4}{5}=3$，解得 $x=2$.

答案： B

提分·秘诀

解法提醒

$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 的实质是数据总和除以数据总个数，它的作用：

（1）用来求平均数，

（2）用来求数据.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 用计算器求平均数

1. 当数据个数很多时，用计算器求平均数显得非常简便．我们只要按照指定的顺序按键，便可得到计算结果．

2. 用计算器求平均数的按键顺序如下：

（1）开机，打开计算器；

（2）菜单 2 1，启动“单变量统计”计算功能；

（3）x_1 = x_2 = x_3 = ⋯⋯ x_n = AC，输入所有数据；

（4）OPTN 2，即可获得这组数据的统计值，其中平均数为 $\bar{x}$．

提分·必记

特别提醒

注意不同品牌型号的计算器按键顺序有可能不同，因此在使用计算器前应详细参阅说明书．

拔考向▶ 利用计算器求平均数

例 2 用计算器计算数据 13.49，13.53，14.07，13.51，13.84，13.98，14.67，14.80，14.61，14.60，14.41，14.31，14.38，14.02，14.17 的平均数约为（　　）

A.14.15　　B.14.16　　C.14.17　　D.14.20

解：借助计算器，先按 开机 打开计算器，再按 菜单 2 1，然后把你要求平均数的数据输进去，之后按 AC 键，再按 OPTN 2，即可获得这组数据的统计值，其中平均数 $\bar{x}\approx 14.16$.

答案：B

提分·秘诀

方法点拨

熟练利用计算器求平均数是解题的关键，应注意按键顺序及输入数据时不能出错．

点知识▶ 3 加权平均数

1. 定义：

（1）一般地，若 n 个数 x_1，x_2，⋯，x_n 的权分别是 w_1，w_2，⋯，w_n，则 $\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ 叫做这 n 个数的加权平均数；

（2）在求 n 个数的平均数时，如果 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，⋯，x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么这 n 个数的平均数 $\bar{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$ 也叫做 x_1，x_2，⋯，x_k 这 k 个数的加权平均数，其中 f_1，f_2，⋯，f_k 分别叫做 x_1，x_2，⋯，x_k 的权．

2. 算术平均数与加权平均数的联系与区别：

（1）**联系**：算术平均数实质上是加权平均数的一种特殊情况，即各项的权相等，算术平均数也是加权平均数．

（2）**区别**：加权平均数不一定是算术平均数，若一组数据较小，可用算术平均数描述数据的集中变化趋势；若一组数据中的某些数据重复出现或各个数据的重要程度不同时，可用加权平均数描述数据的集中变化趋势．


算术平均数和加权平均数

提分·必记

特别提醒

1. 权能够反映某个数据的重要程度，权越大，该数据所占的比重越大，反之越小．

2. 权不一定都是以数据出现的次数的形式出现的，有时也以数据所占的百分比或数据所占的比例形式出现的，即权的表现形式为：
(1)数据的个数；
(2)数据的百分比；
(3)数据的比例关系．

3. 数据分组后，常用各组的组中值即这个组中两个端点的数的平均数代表实际数据，这时“权”就是各组数据的频数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用加权平均数的定义求加权平均数

题型1：权为数据的个数在求加权平均数中的应用

例3 [中考·大连]在一次“爱心互助”捐款活动中，某班第一小组8名同学捐款的金额如下表所示：

金额（元）	5	6	7	10
人数	2	3	2	1

这8名同学捐款的平均金额为（　　）

A.3.5元　　B.6元　　C.6.5元　　D.7元

解题秘方：紧扣“定义（2）的公式”进行计算.

解：$\bar{x}=\dfrac{5\times2+6\times3+7\times2+10\times1}{8}=6.5$（元）.

答案：C

题型2：权为百分比在求加权平均数中的应用

例4 某校为了提升初中学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，举办“玩转数学”比赛，现有甲、乙、丙三个小组进入决赛，评委从研究报告、小组展示、答辩三个方面为各小组打分，各项成绩均按百分制记录.甲、乙、丙三个小组各项得分如下表：

小组	研究报告	小组展示	答辩
甲	91	80	78
乙	81	74	85
丙	79	83	90

（1）计算各小组的平均成绩，并从高分到低分确定各小组的排名顺序；

（2）如果按照研究报告占40%、小组展示占30%、答辩占30%计算各小组的成绩，哪个小组的成绩最高？

解题秘方：紧扣算术平均数和加权平均数的公式进行计算，然后比较大小.

解：（1）$\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{3}(91+80+78)=\dfrac{1}{3}\times249=83$；

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{1}{3}(81+74+85)=\dfrac{1}{3}\times240=80$；

$\bar{x}_{丙}=\dfrac{1}{3}(79+83+90)=\dfrac{1}{3}\times252=84$.

∵ 84>83>80，∴从高分到低分各小组的排名顺序为丙、甲、乙.

（2）根据题意，得甲小组的成绩$=\dfrac{91\times40\%+80\times30\%+78\times30\%}{40\%+30\%+30\%}=83.8$.

提分·秘诀

解法提醒

权数以个数的形式出现时，一般都以表格或条形图的形式呈现，求平均数时每个数据都乘权数（个数），这时的加权平均数也是算术平均数.

知识储备

加权平均数中权的作用：

加权平均数不仅与每个数据的大小有关，而且受每个数据的权的影响，权越大，对平均数的影响就越大，反之就越小.

特别提醒

各项的百分比之和为1.

技巧点拨

用权重解决实际问题的策略：

本题中，利用算术平均数计算得出丙小组的成绩最高，当给定了不同的权重后，甲小组的成绩最高，结果不同，体现了权重在实际生活中的作用，因此，在实际生活中，当需要在某个方面要求比较高的时候，往往可以加大这方面的权重从达到预期的结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

乙小组的成绩 $=\dfrac{81\times40\%+74\times30\%+85\times30\%}{40\%+30\%+30\%}=80.1$；

丙小组的成绩 $=\dfrac{79\times40\%+83\times30\%+90\times30\%}{40\%+30\%+30\%}=83.5$.

由以上数据可知，甲小组的成绩最高.

题型 3：权为频率在求加权平均数中的应用

例 5 植树节期间，东方红中学组织师生开展植树造林活动，为了了解全校 800 名学生的植树情况，随机抽取了 50 名学生的植树情况，制成如下统计表和如图 20.1−1 所示的条形统计图（均不完整）.

植树数量（棵）	频数	频率
3	5	0.1
4	20	0.4
5		
6	10	0.2
合计	50	1

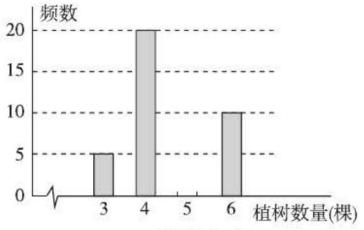


图 20.1−1

（1）将统计表和条形统计图补充完整；

（2）求抽取的 50 名学生植树数量的平均数.

解题秘方：（1）用总人数分别减去植树数量为 3 棵、4 棵和 6 棵的人数即可求得植树数量为 5 棵的人数，即植树数量为 5 棵的频数，将所求频数除以总人数即可得到植树数量为 5 棵的频率；（2）根据加权平均数的计算公式可以求得抽取的 50 名学生植树数量的平均数.

解：（1）统计表补充如下，条形统计图补充如图 20.1−2.

植树数量（棵）	频数	频率
3	5	0.1
4	20	0.4
5	15	0.3
6	10	0.2
合计	50	1

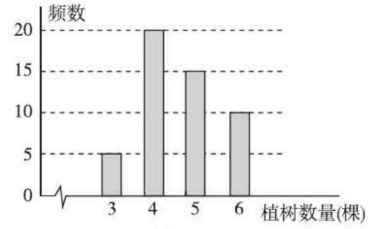


图 20.1−2

（2）抽取的 50 名学生植树数量的平均数是 $3\times0.1+4\times0.4+5\times0.3+6\times0.2=4.6$（棵）.

解法提醒

本题中的频数是指各项数据的人数，而频率是各项数据的人数与总人数的比值.

详解

植树数量为 5 棵的人数为 50−5−20−10=15，频率为 15÷50=0.3.

另解

也可根据频数求平均数，即 $\dfrac{3\times5+4\times20+5\times15+6\times10}{50}=4.6$（棵）.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用新数据法求平均数

挑战·高分

例 6 在一次数学考试中，抽取了 20 名学生的试卷进行分析. 这 20 名学生的数学成绩分别为（单位：分）87，85，68，72，58，100，93，97，96，83，51，84，92，62，83，79，74，72，65，79［注：这份试卷满分 100 分，60 分以上（含 60 分）为合格］.

（1）求这 20 名学生的平均成绩；

解法提醒

新数据法求平均数的步骤：

1. 确定一个常数（这组数据在这个常数附近上下波动）；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）求这 20 名学生的合格率.

解题秘方：通过观察确定一个常数（这组数据在这个常数附近上下波动），再按新数据法的公式进行计算.

解：（1）将原数据都减去 80，得到新数据为 7，5，−12，−8，…，−15，−1.

所以新数据的平均数

$\overline{x'}=[7+5+(-12)+(-8)+\cdots+(-15)+(-1)]\div 20=-1.$

所以原数据的平均数$\overline{x}=\overline{x'}+80=-1+80=79$，

即这 20 名学生的平均成绩为 79 分.

（2）这 20 名学生的合格率为$\frac{18}{20}\times 100\%=90\%.$

2. 用每个数据减去这个常数得到一组新数据，并求出这组新数据的平均数；
3. 原数据的平均数等于新数据的平均数加上这个常数.

拔尖角度▸ 2 利用排除极端值法求平均数

挑战·高分

特别提醒

算术平均数是利用全部数据信息反映一组数据的集中趋势，它是一组数据的“重心”. 若需要了解一组数据的平均水平，则计算这组数据的算术平均数即可. 但算术平均数容易受极端值的影响，有时它不能代表一组数据的平均水平，因此，在解答与平均数相关问题时，常去掉极端值，使数据趋于合理.

例 7 某校举行元旦文艺演出，由参加演出的 10 个班各推举出一名同学担任评委，给表演的每个节目打分，每个节目演出后的得分取各评委所给的平均分数，下面是各评委对某班的一个节目打的分：

评委编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分数	7.20	7.00	7.25	7.10	10.00	7.30	7.20	7.10	6.20	7.15

（1）你对 5 号评委和 9 号评委的给分有何感想？

（2）该节目的得分是多少？此得分能否反映出该节目的实际水平？

（3）如果去掉一个最高分，去掉一个最低分后，再计算平均分应该是多少？这个平均分能否反映出该节目的实际水平？

解题秘方：从表格中获取信息进行解答.

解：（1）5 号太高，9 号太低，反映了一种极端.

（2）该节目的得分为$\frac{1}{10}(7.20+7.00+7.25+7.10+10.00+7.30+7.20+7.10+6.20+7.15)=7.35$，此得分不能反映出该节目的实际水平.

（3）该节目的得分为$\frac{1}{8}(7.20+7.00+7.25+7.10+7.30+7.20+7.10+7.15)\approx 7.16$，这个平均分能反映出该节目的实际水平.

拔尖角度▸ 3 利用整体代入法求平均数

挑战·高分

技巧提醒

本题看似无法求解，但通过运用平均数的定义列出相关等式，进而利用整体思想，用整体代入法求值，可使问题简捷获解.

例 8 已知一组数据 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的平均数为 8，则另一组数据 a_1+10，a_2-10，a_3+10，a_4-10，a_5+10 的平均数为（　　）

A.6　　B.8　　C.10　　D.12

解题秘方：用整体代入法求平均数.

解：∵数据 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的平均数为 8，

∴ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=40.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴另一组数据 a_1+10，a_2-10，a_3+10，a_4-10，a_5+10 的平均数为 $\frac{1}{5}$

$(a_1+10+a_2-10+a_3+10+a_4-10+a_5+10)=\frac{1}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+10)=$

$\frac{1}{5}\times(40+10)=10$.

答案：C

拔尖角度 4 利用方程思想求平均数中的相关数据

例 9 某校为灾区开展了“献出我们的爱”赈灾捐款活动. 八年级某班 50 名同学积极参加了这次赈灾捐款活动，下表是小明制作的全班同学捐款情况的统计表：

捐款（元）	10	15	30		50	60
人数	3	6	11		13	6

因两处不慎被墨水污染，已无法看清，但已经知道全班平均每人捐款 38 元.

根据以上信息，请你帮助小明计算出被污染的数据，并写出解答过程.

解题秘方：紧扣加权平均数的公式，用方程思想建立方程组求解.

解：设被墨水污染部分的人数为 x，捐款数为 y. 由题意，得

$$\begin{cases}3+6+11+13+6+x=50,\\ \frac{1}{50}(xy+10\times3+15\times6+30\times11+50\times13+60\times6)=38.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=11,\\ y=40.\end{cases}$

所以被污染的数据中人数为 11，捐款数为 40.

挑战·高分

解法提醒

本例根据捐款总人数等于各部分人数之和、加权平均数公式建立方程组，求出未知量. 方程思想是解与平均数有关的实际应用问题的一种常用的思想方法.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 平均数是反映数据集中趋势的一个重要的量，利用它来解决以图表信息为背景的实际问题，是历年中考命题的热点，题型以填空题、选择题为主，也有与其他知识综合的解答题，难度适中.

三年中考兵法

考法 1 利用平均数解实际中的售价问题

例 10 [中考·聊城]为了满足顾客的需求，某商场将 5 kg 奶糖，3 kg 酥心糖和 2 kg 水果糖混合成什锦糖出售. 已知奶糖的售价为每千克 40 元，酥心糖为每千克 20 元，水果糖为每千克 15 元，混合后什锦糖的售价为每千克（　　）

A.25 元　　B.28.5 元　　C.29 元　　D.34.5 元

冲刺·满分

思路点拨

先求出买 5kg 奶糖，3kg 酥心糖和 2kg 水果糖的总钱数，再除以总的千克数，即可得出混合后什锦糖每千克的售价.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：此题考查了加权平均数，掌握加权平均数的计算公式是解题的关键.

解：根据题意得：

$(40\times5+20\times3+15\times2)\div(5+3+2)=29$（元）.

答案：C

考法 2 利用平均数作决策

例 11 ［中考·甘孜州］某校学生会决定从三名学生会干事中选拔一名干事，对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试和面试，三人的测试成绩如下表所示：

测试项目	测试成绩（分）		
	甲	乙	丙
笔试	75	80	90
面试	93	70	68

根据录用程序，学校组织 200 名学生采用投票推荐的方式，对三人进行民主评议，三人得票率（没有弃权，每名学生只能推荐 1 人）如图 20.1-3 所示，每得一票记 1 分.

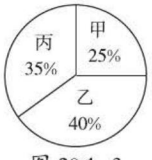


图 20.1-3

（1）分别计算三人民主评议的得分；

（2）根据实际需要，学校将笔试、面试、民主评议三项得分按 4∶3∶3 的比例确定个人成绩，三人中谁的得分最高？

试题评析：此题主要考查了加权平均数的含义和求法，要熟练掌握；此题还考查了统计表和扇形统计图的应用，要熟练掌握，注意从中获取信息，并能利用获取的信息解决实际问题.

解：（1）甲民主评议的得分是：$200\times25\%=50$（分）；

乙民主评议的得分是：$200\times40\%=80$（分）；

丙民主评议的得分是：$200\times35\%=70$（分）.

（2）甲的成绩是：

$(75\times4+93\times3+50\times3)\div(4+3+3)=729\div10=72.9$（分）；

乙的成绩是：

$(80\times4+70\times3+80\times3)\div(4+3+3)=770\div10=77$（分）；

丙的成绩是：

$(90\times4+68\times3+70\times3)\div(4+3+3)=774\div10=77.4$（分）.

$\because 77.4>77>72.9$，

$\therefore$ 三人中丙的得分最高.

思路点拨

- 分别用 200 乘三人的得票率，求出三人民主评议的得分各是多少即可；
- 首先根据加权平均数的计算方法列式计算，分别求出三人的得分各是多少；然后比较大小，判断出三人中谁的得分最高即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·六盘水]国产大飞机C919用数学建模的方法预测的价格是(单位:美元):5 098,5 099,5 001,5 002,4 990,4 920,5 080,5 010,4 901,4 902,这组数据的平均数是(　　)

A.5 000.3　　B.4 999.7

C.4 997　　D.5 003

2. 若数据m,2,5,7,1,4,n的平均数为4,则m,n的平均数为(　　)

A.7.5　　B.5.5

C.2.5　　D.4.5

3. 已知数据x_1,x_2,x_3,x_4的平均数是2,则x_1+3,x_2+3,x_3+3,x_4+3的平均数为(　　)

A.2　　B.2.75

C.2.5　　D.5

4. 某小组中10名学生的平均成绩是x分,如果本组余下的5名学生平均每人得84分,那么整个组15名学生的平均成绩是(　　)

A. $\frac{x+84}{2}$分　　B. $\frac{10x+420}{15}$分

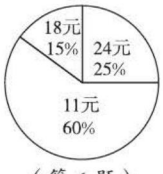
C. $\frac{10x+84}{15}$分　　D. $\frac{x+420}{15}$分

5. [中考·潍坊]超市决定招聘广告策划人员一名,某应聘者三项素质测试的成绩如下表:

测试项目	创新能力	综合知识	语言表达
测试成绩(分)	70	80	92

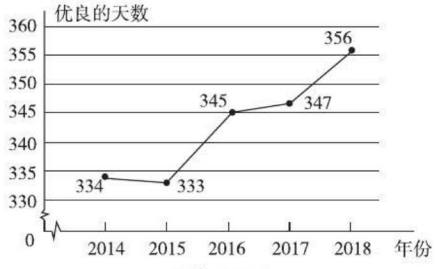
将创新能力、综合知识和语言表达三项测试成绩按5∶3∶2的比例计入总成绩,则该应聘者的总成绩是_____分.

6. [中考·青海]某水果店销售11元,18元,24元三种价格的水果,根据水果店一个月这三种水果销售量的统计图(如图)可计算出该店当月销售出水果的平均价格是_____元.



(第6题)

7. 某市努力改善空气质量,近年来空气质量明显好转,根据该市环保局公布的2014~2018年这五年每年的空气质量为优良的天数,绘制成如图所示的折线统计图,则这五年平均每年的优良天数为_____.



(第7题)

8. 雾霾天气的多次出现,引起了各地环保部门的高度重视.某市环保局对该市市区的空气质量状况进行检测,下面是一天每隔2小时测得的大气飘尘数据(单位:g/m^3):

0.03　0.04　0.03　0.02　0.04　0.01

0.03　0.03　0.04　0.05　0.01　0.03

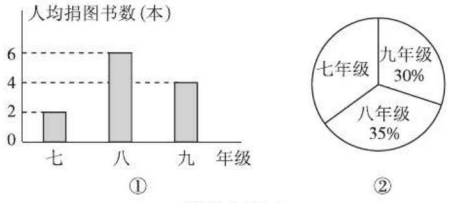
这天该市市区的大气飘尘数据的平均值是多少?　　【导学号:9877429】

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. 每年的 4 月 23 日是“世界读书日”，2018 年的这一天，向阳中学学生会组织了一次捐书活动. 图①是学生捐图书给图书馆的条形统计图，图②是该校学生人数的比例分布图. 已知该校学生共有 1 000 人.

（1）求该校学生捐图书的总本数；

（2）问该校学生平均每人捐图书多少本?



（第 9 题）

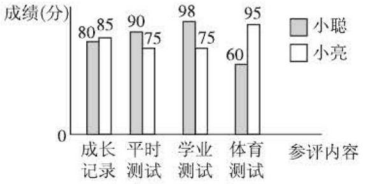
10. 某公司招聘一名部门经理，对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试和面试，甲、乙、丙三人的笔试成绩分别为 95 分、94 分和 94 分，他们的面试成绩（单位：分）如下表：

候选人	评委 1	评委 2	评委 3
甲	94	89	90
乙	92	90	94
丙	91	88	94

（1）分别求出甲、乙、丙三人的面试成绩的平均分$\bar{x}_{甲}$、$\bar{x}_{乙}$、$\bar{x}_{丙}$；

（2）若按笔试成绩的 40%与面试成绩的 60%的和作为综合成绩，综合成绩高者被录用，请你通过计算判断谁将被录用.

11. 某市为了全面推进素质教育，努力提高学生的综合素质，改革中考评价方式，每一位学生的毕业成绩由四个部分组成：成长记录成绩、平时测试成绩、学业测试成绩、体育测试成绩（满分均为 100 分）. 小聪、小亮的四项成绩如图所示：



（第 11 题）

（1）分别计算小聪和小亮的平均成绩；

（2）若学校将成长记录、平时测试、学业测试、体育测试按 2 ∶ 3 ∶ 3 ∶ 2 的比例计算毕业成绩，毕业成绩达到 80 分以上（含 80 分）为“优秀毕业生”. 小聪和小亮谁能达到“优秀毕业生”的水平? 哪位同学的毕业成绩更好些?

（3）小聪和小亮升入高中后，请你对他俩今后的发展给每人提一条建议.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.2 数据的集中趋势

核心知识
- 中位数
- 众数
- “三数”关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 中位数

1. 定义：

将一组数据按照由小到大（或由大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则称处于中间位置的数为这组数据的中位数；如果数据的个数是偶数，则称中间两个数据的平均数为这组数据的中位数.

2. 求中位数的方法（如图 20.2-1）：

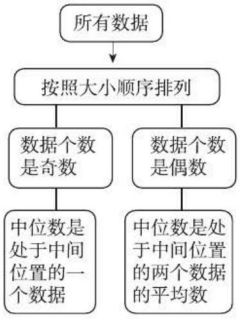


图 20.2-1

拔考向▸利用中位数的定义找中位数

例 1 如图 20.2-2 是杭州市某天六个整点时的气温绘制成的统计图，则这六个整点时气温的中位数是_____℃.

解题秘方：紧扣“中位数的定义”解答.

解：把这些数据从小到大排列为：4.5，10.5，15.3，15.9，19.6，20.1，

∵这组数据有 6 个，

∴最中间的两个数的平均数是（15.3+15.9）÷2=15.6，

∴这六个整点时气温的中位数是 15.6 ℃.

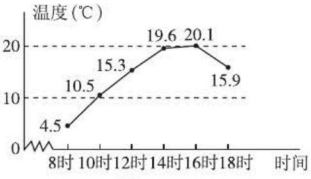


图 20.2-2

答案：15.6

提分·必记

特别提醒

1. 一组数据的中位数是唯一的，它可能是这组数据中的某个数，也可能不是这组数据中的数.
2. 中位数是刻画一组数据的“中等水平”的一个代表，反映了一组数据的集中趋势，它只与数据的排列位置有关.
3. 用中位数作为一组数据的代表，可靠性比较差，因为它不能充分利用所有的数据信息，但它不受极端值的影响，当一组数据中有个别数据变动较大时，可用中位数来描述这组数据的集中趋势.

提分·秘诀

解法提醒

根据中位数的定义，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数或最中间两个数的平均数求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 众数

1. 定义：

一组数据中出现次数最多的数据称为这组数据的众数.

说明：（1）一组数据的众数的大小只与这组数据中的个别数据有关，它一定出现在这组数据中；

（2）众数是描述一组数据集中趋势的量，众数只与数据出现的频数有关，不受个别数据影响，有时是我们最为关心的统计数据.

2. 确定众数的方法：

（1）**排列**：将数据按照大小顺序排列；

（2）**确定众数**：先数出这组数据中各数据出现的次数；再找出这组数据中出现次数最多的数据.

在一组数据中，当出现次数最多的数据只有一个时，这个数据就是众数；当出现次数最多的数据不止一个时，这几个数据都是众数；当每个数据出现的次数都相同时，这组数据没有众数.

提分·必记

特别提醒

- 一组数据的众数不一定唯一，可能有一个或几个，也可能没有；
- 众数是一组数据中出现次数最多的数据，而不是数据出现的次数.



拔考向▶利用众数的定义识别众数

提分·秘诀

解法提醒

本题中没有全部呈现出不同分数所对应的人数，因此先确定 x 的值，才能确定众数.

例2 下表是某学习小组一次数学测验的成绩统计表：

分数(分)	70	80	90	100
人数	1	3	x	1

已知该小组本次数学测验的平均分是 85 分，则该小组测验成绩的众数是（　　）

A.80 分　　B.85 分　　C.90 分　　D.80 分和 90 分

解题秘方：紧扣众数的定义：先求出各个数据出现的次数，再确定众数.

解：由平均数的定义可知

$70\times1+80\times3+90x+100\times1=85(1+3+x+1)$，

即 $410+90x=425+85x$，解得 $x=3$，

从而可知这组数据中 80 和 90 出现的次数最多，都是 3 次，故众数有两个，80 分和 90 分.

答案：D

方法点拨：众数是在一组数据中出现次数最多的数据，因此要确定众数，首先要找出各个数据出现的次数，再根据定义确定出现次数最多的数据就是众数.

注意：众数的单位与原数据的单位一致.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 平均数、中位数和众数的选用

平均数、中位数和众数的优、缺点及联系

类别	优点	缺点	联系
平均数	平均数能充分利用各数据提供的信息，在实际生活中较为常用，可用样本的平均数估计总体的平均数（以后将学）	在计算平均数时，所有的数据都参与运算，所以它易受极端值的影响	（1）平均数、中位数和众数都能反映一组数据的集中趋势，刻画一组数据的“一般水平”； （2）实际问题中求得的平均数、中位数和众数的单位与原数据的单位一致
中位数	中位数不受个别偏大或偏小数据的影响，当一组数据中的个别数据变动较大时，一般用中位数来描述这组数据的集中趋势	不能充分地利用各数据的信息	
众数	众数考察的是各数据所出现的次数，其大小只与部分数据有关，当一组数据中某些数据多次重复出现时，众数往往更能反映问题的实质	当各数据重复出现的次数大致相等时，它往往就没有什么特别的意义	

提分·必记

特别提醒

1. 它们从不同的角度反映数据的集中趋势，在实际应用中，需要依具体情况选择适当的量来分析数据.
2. 特殊情况下，平均数、中位数和众数可能是同一个数据.

拔考向▶利用平均数、中位数和众数的关系解实际应用问题

例3 某中学篮球队有10名队员，在一次投篮训练中，这10名队员各投篮50次的进球情况如下：

进球数	42	32	26	20	19	18	15	14
人数	1	1	1	1	2	1	2	1

根据上面的信息，请解答下列问题：

（1）求这10名队员进球数的平均数、中位数和众数；

（2）求这支球队整体的投篮命中率（投篮命中率$=\dfrac{\text{进球数}}{\text{投篮总次数}}\times 100\%$）；

（3）若队员小华的投篮命中率为40%，请你分析一下小华在这支球队中的投篮水平.

解题秘方：紧扣“平均数需计算，中位数、众数需排序查找”，并结合“三数”的特点进行解答.

提分·秘诀

技巧点拨

平均数、中位数和众数都是用来代表一组数据的集中趋势的量，但有不同的倾向，平均数反映了一组数据的“平均水平”，中位数反映了一组数据的“中等水平”，众数反映了一组数据的“多数水平”.最终选用哪一个量来代表这组数据，应结合实际情况来确定.

解：（1）平均数$=\dfrac{1}{10}(42+32+26+20+19\times 2+18+15\times 2+14)=22$；

中位数：19；众数：15，19.

（2）投篮命中率为$\dfrac{22\times 10}{50\times 10}\times 100\%=44\%$.

（3）虽然小华的投篮命中率为40%，低于整体投篮命中率44%，但小华投50个球进了20（$50\times 40\%=20$）个球，大于中位数19个球，事实上全队有6人低于这个水平，所以小华在这支球队中的投篮水平属于中等以上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用“三数特点法”对数据进行分析

挑战·高分

例4 公园里有甲、乙两队游客在做团体游戏，两队游客的年龄如下（单位：岁）：

甲队：13，13，14，15，15，15，15，16，17，17；

乙队：5，6，6，7，7，8，8，8，46，49.

（1）分别求出两队游客年龄的平均数、众数和中位数.

（2）甲、乙两队游客年龄的平均数能代表他们各自的年龄特征吗？如果不能，哪个数据能代表？

解题秘方：紧扣“三数确定法”确定三数，用三数的特点分析数据.

解：（1）甲队游客年龄的平均数为$\frac{1}{10}$（13+13+14+15+15+15+15+16+17+17）=15（岁），

众数为15岁，中位数为15岁；

乙队游客年龄的平均数为$\frac{1}{10}$（5+6+6+7+7+8+8+8+46+49）=15（岁），众数为8岁，中位数为7.5岁.

（2）甲队游客年龄的平均数能代表他们的年龄特征，乙队游客年龄的平均数不能代表他们的年龄特征，对于乙队游客而言，10人中有8人的年龄在9岁以下，而说他们的平均年龄是15岁，会让人误认为这队游客的年龄都在15岁左右，所以乙队游客年龄的平均数不能代表该队游客年龄的特征，可选用中位数或众数来代表乙队游客的年龄特征.

技巧点拨：选择合适的一个数来代表一组数据的方法

平均数、中位数、众数都是数据的代表，它们从不同的方面刻画了一组数据的集中趋势，具体情况应该具体分析、选择，并结合实际情况来确定.

解法提醒

1. 将两组数据分别代入平均数计算公式计算；根据中位数和众数的定义来分别确定甲、乙两队游客年龄的中位数和众数；
2. 要判断平均数能否代表他们各自的年龄特征，就要看平均数是否与各组数据反映的实际意义相吻合，要说明数据的代表性，就要从平均数、中位数、众数等多方面、多角度进行分析得出结论.

特别提醒

当一组数据中出现过大或过小的数据时，平均数就不能代表该组数据的一般水平.

拔尖角度 2 利用分析法解中位数、众数问题

挑战·高分

例5 五名学生投篮球，规定每人投20次，统计他们每人投中的次数，得到五个数据，若这五个数据的中位数是6，唯一的众数是7，设另外两个数据分别为a，b，则$a+b$的值不可能是（　　）

A.1　　B.5　　C.9　　D.10

解题秘方：紧扣中位数、众数的定义，用分析法求解.

解：由题意可知五个数据中的三个数据一定是6，7，7.

另外两个数据分别为a，b，设$a<b$，则$0 \leqslant a \leqslant 4$，$1 \leqslant b \leqslant 5$，所以$1 \leqslant a+b \leqslant 9$，即$a+b$的值不可能是10.

答案：D

技巧点拨

本题由中位数是6，唯一的众数是7，根据中位数、众数的定义先确定其中三个数是6，7，7，这是解题的关键，也是解题的突破口.再说明另外两个数的取值范围，最后得出$a+b$的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用综合法用三数分析数据

例 6 甲、乙两校参加区教育局举办的学生英语口语竞赛，两校参赛人数相等．比赛结束后，发现学生成绩分别为 7 分，8 分，9 分，10 分（满分为 10 分）．依据统计数据绘制了如图 20.2-3 所示尚不完整的统计图及下表．

甲校成绩统计表

分数	7 分	8 分	9 分	10 分
人数	11	0		8

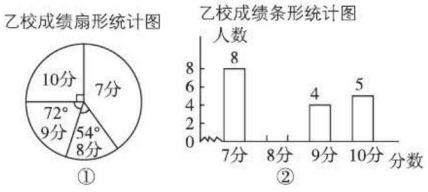


图 20.2-3

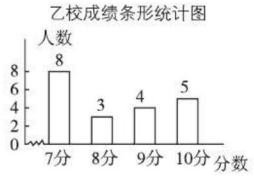


图 20.2-4

（1）在图 20.2-3①中，“7 分”所在扇形的圆心角等于_____°；

（2）请你将图 20.2-3②补充完整；

（3）经计算，乙校成绩的平均数是 8.3 分，中位数是 8 分，请写出甲校成绩的平均数、中位数，并从平均数和中位数的角度分析哪所学校成绩较好；

（4）如果该教育局要组织 8 人的代表队参加市级团体赛，为便于管理，决定从这两所学校中的一所挑选参赛选手，请你分析，应选哪所学校？

解题秘方：针对题中的数据特征，紧扣“三数”的特点进行数据分析．

解：（1）144

（2）$90\div360\times100\%=25\%$，

$5\div25\%=20$，

$20-8-4-5=3$．

补图如图 20.2-4 所示．

（3）由于两校参赛人数相等，因此甲校的参赛人数也为 20，所以得 9 分的有 1 人，则甲校成绩的平均数为 $(7\times11+8\times0+9\times1+10\times8)\times\frac{1}{20}=8.3$（分），中位数为 7 分．

两所学校成绩的平均数一样，则只能从中位数的角度进行考虑．

因为乙校成绩的中位数为 8 分，大于甲校成绩的中位数，所以乙校的成绩较好．

（4）因为该教育局要组织 8 人的代表队参赛，甲校的前 8 名都是 10 分，而乙校的前 8 名中只有 5 人是 10 分，所以应选甲校．

挑战·高分

知识储备

1. 扇形统计图能清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比，但是不能清楚地表示出每个项目的具体数目以及事物的变化情况；
2. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目，但是不能清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比以及事物的变化情况．

综上，在实际统计中，常将两图综合使用，这样就能满足人们不同的数据需求．

详解

扇形统计图中“7 分”所在扇形的圆心角的度数等于圆周角 360° 减去其余已知角的度数，即 $360°-(90°+72°+54°)=144°$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 4 利用三数分析数据进行决策

挑战·高分

例 7 在喜迎建党九十周年之际，某校举办校园唱红歌比赛，选出 10 名同学担任评委，并事先拟定从如下四种方案中选择合理方案来确定演唱者的最后得分（每个评委打分最高为 10 分）.

方案 1：所有评委打分的平均分；

方案 2：在所有评委打分中，去掉一个最高分和一个最低分，再计算平均分；

方案 3：所有评委打分的中位数；

方案 4：所有评委打分的众数.

为了探究上述方案的合理性，先对某名同学的演唱成绩进行统计试验，如图 20.2–5 是这名同学的得分统计图：

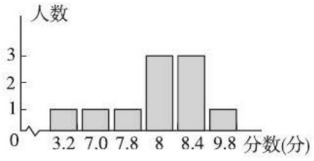


图 20.2–5

（1）分别按上述四种方案计算这名同学演唱的最后得分；

（2）根据（1）中的结果，请用统计的知识说明哪些方案不适合作为确定这名同学演唱的最后得分的方案.

解题秘方：紧扣“三数”各自的特点进行计算并分析数据作决策.

解：（1）方案 1 最后得分：

$\frac{1}{10}\times(3.2+7.0+7.8+3\times8+3\times8.4+9.8)=7.7$（分）；

方案 2 最后得分：$\frac{1}{8}\times(7.0+7.8+3\times8+3\times8.4)=8$（分）；

方案 3 最后得分：8 分；

方案 4 最后得分：8 分或 8.4 分.

（2）因为方案 1 中的平均数受极端数值的影响，不能反映这组数据的“平均水平”，所以方案 1 不适合作为确定这名同学演唱的最后得分的方案.

因为方案 4 中的众数有两个，众数失去了实际意义，所以方案 4 不适合作为确定这名同学演唱的最后得分的方案.

解法提醒

解决统计问题时，要读懂统计图的横、纵轴所表示的实际意义；区分加权平均数和算术平均数；计算中位数时要排序；众数有时不止一个；利用“三数”反映“一般水平”时，除了看是否受极端值的影响，还要考虑实际意义.

特别警示

本题易错之处：

- 计算平均数时没有给 8 和 8.4 分别乘 3，众数写了一个；
- 选择方案没有考虑极端值影响和实际意义.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

本节的考点主要有：中位数和众数，主要考查中位数和众数的概念及其实际应用，题型主要有选择题、填空题、与其他知识综合的解答题、图表信息题，其中以实际问题为背景的应用题成为命题热点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用众数的定义求平均数

例8 [中考·黑龙江]一组从小到大排列的数据：a，3，4，4，6（a为正整数），唯一的众数是4，则该组数据的平均数是（　　）

A.3.6　　B.3.8

C. 3.6或3.8　　D.4.2

试题评析：本题主要考查了众数与平均数的定义，根据众数是一组数据中出现次数最多的数得出a的值是解题的关键.

解：由题意可得a=1或2.

当a=1时，平均数为$\frac{1+3+4+4+6}{5}$=3.6；

当a=2时，平均数为$\frac{2+3+4+4+6}{5}$=3.8.

答案：C

解法提醒

紧扣众数、平均数的定义用分类思想求解.

根据众数的定义得出正整数a的值，再根据平均数的定义求解即可.

考法2 利用中位数、众数的定义求平均数

例9 [中考·牡丹江]一组数据1,5,7，x的众数与中位数相等，则这组数据的平均数是（　　）

A.6　　B.5　　C.4.5　　D.3.5

试题评析：本题考查了众数、中位数及平均数，根据众数的可能情况分类讨论是解题的关键.

解：若众数为1，则数据为1，1，5，7，此时中位数为3，不符合题意；

若众数为5，则数据为1，5，5，7，中位数为5，符合题意，此时平均数为$\frac{1+5+5+7}{4}$=4.5；

若众数为7，则数据为1，5，7，7，中位数为6，不符合题意.

答案：C

解法提醒

分别假设众数为1,5,7分类讨论，用计算验证法找出符合题意的x的值；再根据平均数的定义求解即可.

考法3 利用三数的定义分析数据

例10 [中考·南京]某公司共有25名员工，下表是他们月收入的资料.

月收入（元）	45 000	18 000	10 000	5 500	4 800	3 400	3 000	2 200
人数	1	1	1	3	6	1	11	1

（1）该公司员工月收入的中位数是_____元，众数是_____元.

（2）根据上表，可以算得该公司员工月收入的平均数为6 276元，你认为用平均数、中位数和众数中的哪一个反映该公司全体员工月收入水平较为合适？并说明理由.

思路点拨

- 根据中位数的定义把这组数据按从小到大的顺序排列起来，找出最中间的一个数即可；根据众数的定义找出出现次数最多的数据即可；
- 根据平均数、中位数和众数的意义回答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：此题考查了中位数、众数、平均数，掌握中位数、众数、平均数的定义是解题的关键.

解：（1）该公司共有 25 名员工，将这组数据按从小到大的顺序排列，中位数是第 13 个数，则中位数是 3 400 元；

3 000 元出现了 11 次，出现的次数最多，则众数是 3 000 元.

答案：3 400；3 000

（2）用中位数或众数反映该公司全体员工月收入水平较为合适，理由：平均数受极端值的影响，只有 3 个人的工资达到了 6 276 元，不合适.

两年模拟兵法

☞答案见 275 页

1. [**中考·黄石**]下表是某位男子马拉松长跑运动员近 6 次的比赛成绩（单位：分钟），

第几次	1	2	3	4	5	6
比赛成绩	145	147	140	129	136	125

则这组成绩的中位数和平均数分别为（　　）

A.137 分钟、138 分钟　B.138 分钟、137 分钟

C.138 分钟、138 分钟　D.137 分钟、139 分钟

2. [**中考·河北**]甲、乙两组各有 12 名学生，组长绘制了本组 5 月份家庭用水量的统计图（如图）表，

甲组 12 户家庭用水量统计表

用水量（吨）	4	5	6	9
户数	4	5	2	1

乙组 12 户家庭用水量统计图



（第 2 题）

比较 5 月份两组家庭用水量的中位数，下列说法正确的是（　　）

A. 甲组比乙组大　B. 甲、乙两组相同

C. 乙组比甲组大　D. 无法判断

3. [**中考·镇江**]根据表格信息解决问题：

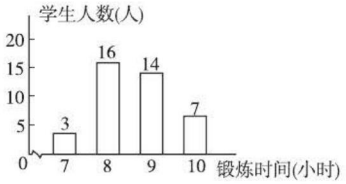
数据	37	38	39	40	41
频数	8	4	5	a	1

若该组数据的中位数不大于 38，则符合条件的正整数 a 的取值共有（　　）

A.3 个　B.4 个

C.5 个　D.6 个

4. [**中考·安顺**]如图是根据某班 40 名同学一周的体育锻炼情况绘制的条形统计图，那么该班 40 名同学一周参加体育锻炼时间的众数、中位数分别是（　　）



（第 4 题）

A.16 小时，10.5 小时　B.8 小时，9 小时

C.16 小时，8.5 小时　D.8 小时，8.5 小时

5. [**中考·盘锦**]一组数据 3，2，4，a，8 的平均数是 4，则这组数据的众数是（　　）

A.2　B.3

C. 4　D.8

6. [**中考·眉山**]下列说法错误的是（　　）

A. 给定一组数据，那么这组数据的平均数一定只有一个

B. 给定一组数据，那么这组数据的中位数一定只有一个

C. 给定一组数据，那么这组数据的众数一定只有一个

D. 如果一组数据存在一个众数，那么该众数一定是这组数据中的某一个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·荆州]为了解某班学生双休户外活动情况，对部分学生参加户外活动的时间进行抽样调查，结果如下表：

户外活动的时间（小时）	1	2	3	6
学生人数（人）	2	2	4	2

则关于“户外活动时间”这组数据的众数、中位数、平均数分别是（　　）

A.3 小时、3 小时、3 小时

B.6 小时、2 小时、3 小时

C.3 小时、3 小时、2 小时

D.3 小时、2 小时、3 小时

8. [中考·北京]某工厂甲、乙两个部门各有员工400人，为了解这两个部门员工的生产技能情况，进行了抽样调查，过程如下，请补充完整.

收集数据

从甲、乙两个部门各随机抽取20名员工，进行了生产技能测试，测试成绩（百分制）如下：

甲　78　86　74　81　75　76　87　70
　　75　90　75　79　81　70　74　80
　　86　69　83　77

乙　93　73　88　81　72　81　94　83
　　77　83　80　81　70　81　73　78
　　82　80　70　40

整理、描述数据

按如下分数段整理、描述这两组数据：

人数 / 成绩 x / 部门	$40 \leqslant x \leqslant 49$	$50 \leqslant x \leqslant 59$	$60 \leqslant x \leqslant 69$	$70 \leqslant x \leqslant 79$	$80 \leqslant x \leqslant 89$	$90 \leqslant x \leqslant 100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙						

（说明：成绩80分及以上为生产技能优秀，70~79分为生产技能良好，60~69分为生产技能合格，60分以下为生产技能不合格）

分析数据

两组数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

部门	平均数	中位数	众数
甲	78.3	77.5	75
乙	78	80.5	81

得出结论：

a. 估计乙部门生产技能优秀的员工人数为_____；

b. 可以推断出_____部门员工的生产技能水平较高，理由为_____

_____.

（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

9. 某校八年级（1）班50名学生参加某次数学考试，全班学生的成绩统计如下表：

成绩（分）	71	74	78	80	82	83	85	86	88	90	91	92	94
人数	1	2	3	5	4	5	3	7	8	4	3	3	2

请根据表中提供的信息解答下列问题：

（1）该班学生考试成绩的众数是_____分.

（2）该班学生考试成绩的中位数是_____分.

（3）该班张华同学在这次考试中的成绩是83分，能不能说张华同学的成绩处于全班中游偏上水平？试说明理由.　　【导学号：9877429】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 为了普及环保知识，增强环保意识，某中学组织了环保知识竞赛活动，初中各年级根据初赛成绩分别选出了 10 名同学参加决赛，这些选手的决赛成绩（满分为 100 分）如下表所示：

	决赛成绩（分）
七年级	80 86 88 80 88 99 80 74 91 89
八年级	85 85 87 97 85 76 88 77 87 88
九年级	82 80 78 78 81 96 97 88 89 86

（1）请你填写下表：

	平均数（分）	众数（分）	中位数（分）
七年级	85.5		87
八年级	85.5	85	
九年级			84

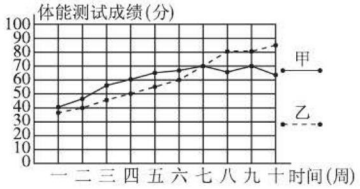
（2）请从以下两个不同的角度对三个年级的决赛成绩进行分析：

①从平均数和众数相结合看，哪个年级成绩更好一些？

②从平均数和中位数相结合看，哪个年级成绩更好一些？

（3）如果在每个年级参加决赛的选手中分别选出 3 人参加总决赛，你认为哪个年级的实力更强一些？并说明理由．

11. 如图所示是连续十周测试甲、乙两名运动员体能情况的折线统计图，规定：体能测试成绩 70 分以上（包括 70 分）为合格．



（第 11 题）

（1）请从下面两个不同的角度对运动员体能测试结果进行判断：

①依据平均数与成绩合格的次数比较甲和乙，_____的体能测试成绩较好；

②依据平均数与中位数比较甲和乙，_____的体能测试成绩较好．

（2）依据折线统计图和成绩合格的次数，可以得出_____运动员体能训练的效果较好．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.3 数据的离散程度

核心知识
- 方差
- 用计算器求方差
- 方差的作用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 方差

1. 定义： 设有 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$，我们用这些值的平均数来衡量这组数据波动的大小，并把它叫做这组数据的方差，记作 s^2.

2. 公式： 若 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.

3. 求方差的步骤：

第一步： 先求原始数据的平均数；

第二步： 求原始数据中各数据与平均数的差；

第三步： 求所得各个差数的平方；

第四步： 求所得各平方数的平均数.

提分·必记

特别提醒

1. 方差是用来描述一组数据中每一个数据与这组数据的平均数的偏离程度的量，在实际生活中，经常用方差的大小来判断数据的稳定性；
2. 方差的大小与数据本身的大小无关，可能一组数据比较小，但方差较大，也可能一组数据比较大，但方差较小.

拔考向 利用方差分析数据

题型 1：方差公式在求方差中的应用

例 1 [中考·自贡]一组数据 6，4，a，3，2 的平均数是 5，这组数据的方差为（　　）

A. 8　　B. 5　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

解题秘方： 紧扣方差公式求方差.

解： ∵ 6，4，a，3，2 的平均数是 5，

∴ $(6+4+a+3+2)\div 5=5$，

解得 $a=10$.

则这组数据的方差

$s^2=\frac{1}{5}[(6-5)^2+(4-5)^2+(10-5)^2+(3-5)^2+(2-5)^2]=8$.

答案： A

提分·秘诀

视野拓展

一般地，设 n 个数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，数据的波动越大，方差越小，数据的波动越小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：方差在作决策中的应用

例 2 某射击队为从甲、乙两名运动员中选拔一人参加全国比赛，对他们进行了 8 次测试，测试成绩（单位：环）如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次
甲	10	8	9	8	10	9	10	8
乙	10	7	10	10	9	8	8	10

（1）根据表格中的数据，计算出甲的平均成绩是_____环，乙的平均成绩是_____环；

（2）分别计算甲、乙两名运动员 8 次测试成绩的方差；

（3）根据（1）（2）计算的结果，你认为推荐谁参加全国比赛更合适？并说明理由．

解题秘方：紧扣方差公式及方差的稳定性解答．

解：（1）9；9

（2）甲的方差：$s_{甲}^2=\frac{1}{8}[(10-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(10-9)^2+(9-9)^2+(10-9)^2+(8-9)^2]=0.75$，

乙的方差：$s_{乙}^2=\frac{1}{8}[(10-9)^2+(7-9)^2+(10-9)^2+(10-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(8-9)^2+(10-9)^2]=1.25$．

（3）推荐甲参加全国比赛更合适．理由如下：

甲、乙的平均成绩相等，说明其实力相当，但甲 8 次测试成绩的方差比乙小，说明甲发挥比较稳定，故推荐甲参加全国比赛更合适．

解法提醒

比较两组数据稳定性的方法：

在比较两组数据的稳定性时，一般先看平均数，在平均数相同或相近的情况下，再分析稳定性问题，而方差是反映数据的波动大小的量，因此可以通过比较方差的大小来解决问题．

技巧点拨

最优决策型问题的解题思路：

对于此类问题的求解，一方面要正确理解平均数、方差的概念，另一方面要熟练记忆并正确运用平均数、方差的计算公式，根据平均数与方差的意义作出最优选择．

知识▶ 2 用计算器求方差

提分·必记

用计算器求方差的按键顺序为：

（1）[开机]，打开计算器；

（2）[菜单] [2] [1]，启动“单变量统计”计算功能；

（3）[x_1] [=] [x_2] [=] [x_3] [=] ⋯⋯ [x_n] [=] [AC]，输入所有数据；

（4）[OPTN] [2]，即可获得这组数据的统计值，其中方差为 $\sigma^2 x$．

特别提醒

利用计算器可以快捷地计算出一组数据的方差，不同型号计算器按键顺序可能不同．

技考向▶ 利用计算器求数据的方差

例 3 某校八年级进行了一次数学测试，为了了解甲、乙两班学生的测试情况，从每班抽取 10 名学生的成绩进行分析（单位：分）：

甲：86，78，80，86，92，85，85，87，86，88；

乙：78，91，87，82，85，89，81，86，76，87．

用计算器分别计算它们的方差，并根据计算结果说明哪个班的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

测试成绩比较整齐.

解题秘方：按用科学计算器求方差的步骤依次输入即可求出方差，再根据方差越小越稳定得出哪个班的成绩比较整齐.

解：第一步，按 [开机]，打开计算器；

第二步，依次按 [菜单] [2] [1]，启动“单变量统计”计算功能；

第三步：依次按 [x_1] [=] [x_2] [=] [x_3] [=] …… [x_n] [=] [AC]，输入所有数据；

第四步：依次按 [OPTN] [2]，得到其方差，分别求出甲班 10 名学生成绩的方差是 13.81，乙班 10 名学生成绩的方差是 20.96. 因为甲班 10 名学生成绩的方差小于乙班 10 名学生成绩的方差，所以甲班的成绩比较整齐.

提分·秘诀

方法点拨

不同型号的计算器操作步骤可能不同，应根据计算器说明书进行操作.

点知识▶ 3 极差、平均差、标准差（拓展点）

提分·必记

1. 极差：

一组数据中最大值与最小值的差称为这组数据的极差；即：极差 = 最大值 − 最小值.

2. 平均差：

一组数据中各个数据与其平均数的差的绝对值的平均数叫做这组数据的平均差；

即：平均差 $=\dfrac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n}$.

3. 标准差： 标准差是方差的算术平方根，

即：$s=\sqrt{\dfrac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$.

特别提醒

- 极差能够反映数据的变化范围，但受极端值的影响较大.
- 标准差（平均差）与方差一样反映的是数据在平均数附近的波动情况：标准差（平均差）越大，数据的波动越大；标准差（平均差）越小，数据的波动越小.

拔考向▶ 利用标准差的公式进行计算

提分·秘诀

解法提醒

先根据平均数的计算公式，求出丙的得分，再根据标准差公式进行计算即可得出答案.

例 4 [中考·衢州改编]一次数学测试，某小组五名同学的成绩如下表所示（有两个数据被遮盖）.

组员	甲	乙	丙	丁	戊	标准差	平均成绩
得分	81	79	■	80	82	■	80

那么被遮盖的两个数据依次是（　　）

A.80，2　　B.80，$\sqrt{2}$　　C.78，2　　D.78，$\sqrt{2}$

解题秘方：紧扣“标准差公式”求解.

解：$80\times5-(81+79+80+82)=78$，

标准差为 $\sqrt{\dfrac{(81-80)^2+(79-80)^2+\cdots+(82-80)^2}{5}}=\sqrt{2}$.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平均数、方差进行规律探究

例5 （1）观察下列各组数据并填空：

A：1，2，3，4，5. $\bar{x}_A$=_____，s_A^2=_____；

B：11，12，13，14，15. $\bar{x}_B$=_____，s_B^2=_____；

C：10，20，30，40，50. $\bar{x}_C$=_____，s_C^2=_____；

D：3，5，7，9，11. $\bar{x}_D$=_____，s_D^2=_____.

（2）比较 A 与 B，C，D 的计算结果，你能发现什么规律？

（3）若已知一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，那么另一组数据 $3x_1-2$，$3x_2-2$，…，$3x_n-2$ 的平均数是_____，方差是_____.

解题秘方：分别求平均数与方差，寻找它们之间的规律，然后根据规律解决问题.

解：（1）3；2；13；2；30；200；7；8

（2）A 与 B 比较，B 组中各数据比 A 组中对应各数据多 10，所以 $\bar{x}_B=\bar{x}_A+10=13$，而方差不变，即 $s_B^2=s_A^2=2$.

A 与 C 比较，C 组中各数据为 A 组中对应各数据的 10 倍，所以 $\bar{x}_C=10\times\bar{x}_A=30$，$s_C^2=10^2\times s_A^2=200$.

A 与 D 比较，D 组中各数据比 A 组中对应各数据的 2 倍多 1，所以 $\bar{x}_D=2\bar{x}_A+1=2\times3+1=7$，$s_D^2=2^2\times s_A^2=4\times2=8$.

（3）$3\bar{x}-2$；$9s^2$

挑战·高分

方法点拨

1. 将一组数据都加上或减去同一个数，则新数据的平均数在原数据的平均数的基础上加上或减去这个数，方差不变.
2. 将一组数据都乘（或除以）同一个不为 0 的数，则新数据的平均数在原数据的平均数的基础上乘（或除以）这个数，方差乘（或除以）这个数的平方.

拔尖角度 2 利用“三数、方差”分析数据

例6 [中考·扬州]为声援扬州“运河申遗”，某校举办了一次运河知识竞赛，满分 10 分，学生得分均为整数，成绩达到 6 分以上（包含 6 分）为合格，达到 9 分以上（包含 9 分）为优秀. 这次竞赛中甲、乙两组学生成绩分布的条形统计图如图 20.3-1 所示.

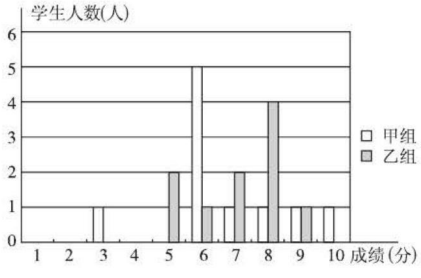


图 20.3-1

挑战·高分

解法提醒

不能只通过某一个统计量去判断成绩的优劣，而应该从多个角度来分析成绩的情况，平均数、众数、中位数描述了一组数据的集中趋势，方差较为精确地反映了一组数据相对于平均数的偏离程度，是一个被广泛用来描述数据离散程度的量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）完成下面的成绩统计分析表：

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.7		3.41	90%	20%
乙组		7.5	1.69	80%	10%

（2）小明同学说："这次竞赛我得了7分，在我们小组中排名属中游略偏上！"观察上表可知，小明是_____组的学生；（填"甲"或"乙"）

（3）甲组同学说他们组的合格率、优秀率均高于乙组，所以他们组的成绩好于乙组．但乙组同学不同意甲组同学的说法，认为他们组的成绩要好于甲组．请你给出两条支持乙组同学观点的理由．

解题秘方：紧扣从多角度分析数据的方法进行数据分析，并进行决策．

解：（1）填表如下：

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.7	6	3.41	90%	20%
乙组	7.1	7.5	1.69	80%	10%

（2）甲

（3）（答案不唯一）乙组的平均数高于甲组，方差小于甲组，故乙组成绩好于甲组．

方法点拨

根据方差大小进行决策的方法：

在实际生活中，方差大与小都有其各自的用途，并不是所有的统计中，都是方差越小越好，还要看这组数据所反映的实际问题，若是表示一个机器加工的几个零件的直径，方差越小表示零件越标准，因此是方差越小越好；但若是为了参加体育比赛而统计的数据，在平均值相同的情况下，则应选取数据波动较大且有上升趋势的那一组数据的参赛者参赛．

拔尖角度 3 利用数据分析法作决策

例7 甲、乙两名队员参加射击训练，成绩分别被制成两个统计图（如图20.3-2）．

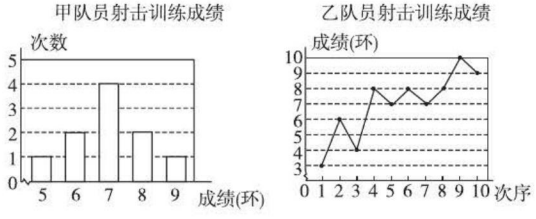


图 20.3-2

根据以上信息，整理分析数据如下表：

	平均数（环）	中位数（环）	众数（环）	方差
甲	a	7	7	1.2
乙	7	b	8	c

挑战·高分

特别警示

通常情况下，方差越小越好，但也有例外，如本题中乙成绩的方差虽然较大，但由于他的成绩呈上升趋势，所以他的训练成绩较好，解答本题时容易出现根据方差大小来确定，得到选甲队员的错误．

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（1）求出表格中 a，b，c 的值；

（2）分别运用上表中的四个统计量，简要分析这两名队员的射击训练成绩．若选派其中一名队员参加某次比赛，你认为应选哪名队员？

解题秘方：根据实际中不同的需要，结合不同的数据特点，选取“三数或方差”作为依据进行决策．

解：（1）观察甲队员射击训练成绩统计图，可知 $a=\frac{1}{10}\times(5\times1+6\times2+7\times4+8\times2+9\times1)=\frac{1}{10}\times70=7$.

观察乙队员射击训练成绩统计图可知，乙的 10 次射击训练成绩分别为 3，6，4，8，7，8，7，8，10，9，

按从小到大的顺序排列为 3，4，6，7，7，8，8，8，9，10，

其中最中间的两个数分别为 7 和 8，故 $b=\frac{7+8}{2}=7.5$.

$c=\frac{1}{10}\times[(3-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+2\times(7-7)^2+3\times(8-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2]=4.2$.

（2）根据表中数据可知，甲和乙的平均数相等，乙的中位数大于甲的中位数，乙的众数大于甲的众数，说明乙的成绩好于甲的成绩；虽然乙的方差大于甲的方差，但乙的成绩呈上升趋势，故应选乙队员．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

方差与生产、生活联系密切，是中考的必考内容，主要考查方差的计算及利用方差解决实际问题，题型以选择题、填空题为主，有时也以解答题的形式出现，涉及方案设计、策略制定等开放性问题．

三年中考兵法

考法 1 利用各数据的定义识别各数据

例 8 ［中考·荆门］李老师为了了解学生暑期在家的阅读情况，随机调查了 20 名学生某一天的阅读时间，具体情况统计如下表：

阅读时间（小时）	2	2.5	3	3.5	4
学生人数	1	2	8	6	3

则关于这 20 名学生这一天的阅读时间的说法正确的是（　　）

A. 众数是 8 小时　　B. 中位数是 3 小时

C. 平均数是 3 小时　　D. 方差是 0.34

试题评析：此题主要考查众数、中位数、加权平均数、方差，熟练掌握

冲刺·满分

思路点拨

A. 根据众数的定义找出出现次数最多的数；

B. 根据中位数的定义将这组数据从小到大排列，求出最中间的 2 个数的平均数即可得出中位数．

C. 根据加权平均数公式代入计算可得；

D. 根据方差公式计算即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基本概念及计算公式是解题的关键.

解：A. 由统计表得：众数为 3 小时，不是 8 小时，所以此选项不正确；

B. 中位数是$\frac{3+3}{2}$=3（小时），所以此选项正确；

C. 平均数 = $\frac{1\times2+2\times2.5+3\times8+6\times3.5+4\times3}{20}$ =3.2（小时），所以此选项不正确；

D. $s^2=\frac{1}{20}\times[(2-3.2)^2+2\times(2.5-3.2)^2+8\times(3-3.2)^2+6\times(3.5-3.2)^2+3\times(4-3.2)^2]=\frac{5.2}{20}$=0.26，所以此选项不正确.

答案：B

考法 2 利用数的特征作决策

例 9 [中考·潍坊]甲、乙、丙、丁四名射击运动员在选拔赛中，每人射击了 10 次，甲、乙两人的成绩如下表所示，丙、丁两人的成绩如图 20.3-3 所示，欲选一名运动员参赛，从平均数与方差两个因素分析，应选（　　）

	甲	乙
平均数	9	8
方差	1	1

A. 甲　　B. 乙

C. 丙　　D. 丁

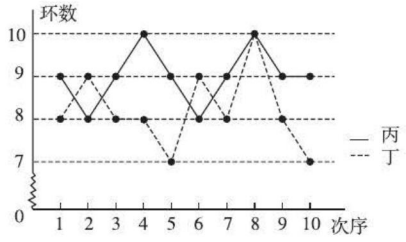


图 20.3-3

试题评析：本题考查方差、平均数、折线统计图等知识，解题的关键是记住平均数、方差的公式，属于基础题.

解：丙的平均数 = $\frac{9+8+9+10+9+8+9+10+9+9}{10}$ =9，

丙的方差 = $\frac{1}{10}\times[(9-9)^2+(8-9)^2+\cdots+(9-9)^2+(9-9)^2]$=0.4.

丁的平均数 = $\frac{8+9+8+8+7+9+8+10+8+7}{10}$ =8.2，

丁的方差 = $\frac{1}{10}\times[(8-8.2)^2+(9-8.2)^2+\cdots+(8-8.2)^2+(7-8.2)^2]$ = 0.76.

∵甲和丙的平均数相等且最高，但丙的方差比甲小，

∴丙的成绩最好，即应选丙参赛.

答案：C

解法提醒

利用统计量分析数据，当平均数相同或接近时，往往考虑利用方差来确定数据的稳定性，从而作出决策；但有时还需要根据数据的变化趋势，综合各方面的因素来作出决策.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·毕节]对一组数据：−2，1，2，1，下列说法不正确的是（　　）

A. 平均数是1　　B. 众数是1

C. 中位数是1　　D. 极差是4

2. [中考·兴安盟]一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋30双，各种尺码的鞋销售量如下表：

尺码（厘米）	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量（双）	1	2	5	11	7	3	1

鞋店老板比较关注哪种尺码的鞋最畅销，也就是关注卖出鞋的尺码组成的一组数据的（　　）

A. 平均数　　B. 中位数

C. 众数　　D. 方差

3. [中考·常德]从甲、乙、丙、丁四人中选一人参加诗词大会比赛，经过三轮初赛，她们的平均成绩都是86.5分，方差分别是$s_{甲}^2=1.5$，$s_{乙}^2=2.6$，$s_{丙}^2=3.5$，$s_{丁}^2=3.68$，你认为派谁去参赛更合适（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

4. 某校将举办一场“中国汉字听写大赛”，要求各班推选一名同学参加比赛，为此，九年级（1）班组织了五轮班级选拔赛，在这五轮选拔赛中，甲、乙两名同学的平均分都是96分，甲的成绩的方差是0.2，乙的成绩的方差是0.8，根据以上数据，下列说法正确的是（　　）

A. 甲的成绩比乙的成绩稳定

B. 乙的成绩比甲的成绩稳定

C. 甲、乙两人的成绩一样稳定

D. 无法确定甲、乙的成绩谁更稳定

5. 10名同学分成甲、乙两队进行篮球比赛，他们的身高（单位：cm）如下表：

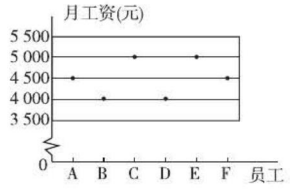
队员	队员1	队员2	队员3	队员4	队员5
甲队	177	176	175	172	175
乙队	170	175	173	174	183

设两队队员身高的平均数分别为$\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，身高的方差分别为$s_{甲}^2$，$s_{乙}^2$，则下列关系中完全正确的是（　　）

A. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$　　B. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$

C. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$　　D. $\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$

6. [中考·宁德]某创意工作室6位员工的月工资如图所示，因业务需要，现决定招聘一名新员工，若新员工的月工资为4 500元，则下列关于现在7位员工月工资的平均数和方差的说法正确的是（　　）



（第6题）

A. 平均数不变，方差变大

B. 平均数不变，方差变小

C. 平均数不变，方差不变

D. 平均数变小，方差不变

7. 已知一组数据x_1，x_2，…，x_n的平均数是$\bar{x}$，方差是s^2，设另一组数据$x_1'=ax_1+b$，$x_2'=ax_2+b$，…，$x_n'=ax_n+b$的平均数是$\overline{x'}$，方差是s'^2．请说明以下等式成立的理由：

（1）$\overline{x'}=a\bar{x}+b$；（2）$s'^2=a^2s^2$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 张老师为了从甲、乙两位同学中选拔一人参加某数学邀请赛，对两位同学进行了辅导，并在辅导期间进行了10次测验，两位同学的测验成绩（单位：分）如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
甲	68	80	78	79	81	77	78	84	83	92
乙	86	80	75	83	85	77	79	80	80	75

利用表中提供的数据，解答下列问题.

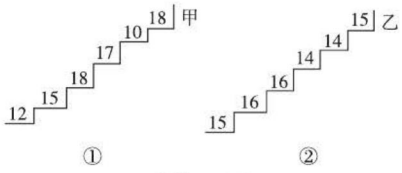
（1）填写下表：

	平均数（分）	中位数（分）	众数（分）
甲		79.5	
乙	80		80

（2）张老师已经根据测验成绩表中的数据算出甲10次测验成绩的方差 $s_{甲}^2=33.2$，请你帮助张老师计算乙10次测验成绩的方差 $s_{乙}^2=$_____；

（3）请你运用所学的统计知识，帮助张老师从甲、乙两位同学中选出一人参加该数学邀请赛，并简要说明理由.　　**【导学号：9877429】**

9. 公园内有一假山，假山上有一条台阶小路，其中有甲、乙两段台阶的高度分别如图①和图②所示（图中的数字表示每一级台阶的高度，单位：cm），请你运用所学的统计知识，解决以下问题：



（第9题）

（1）把每一级台阶的高度作为数据，请从统计知识方面（平均数、中位数）分析这两组数据有哪些相同点和不同点？

（2）在甲、乙两段台阶上行走，哪段会比较舒服？你能用所学知识说明原因吗？

（3）为方便行走，公园决定整修这两段台阶，在不改变台阶数量的前提下，应该怎样整修会比较好？并说明你的方案的设计思路.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平均数、众数、中位数的应用

荣老师告诉你 平均数、众数、中位数都是反映一组数据集中趋势的量．在当今信息社会和市场经济的背景下，我们经常会遇到与平均数、众数、中位数有关的实际问题．

应用一 判断是非

例 1 在一次中学生田径运动会上，根据参加男子跳高初赛的运动员的成绩（单位：m），绘制出如图 1 所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：

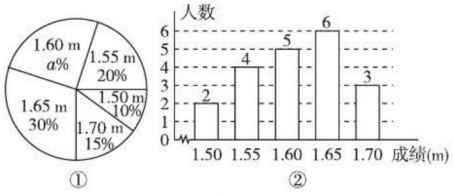


图 1

（1）图 1①中 a 的值为_____；

（2）求统计的这组初赛成绩的平均数、众数和中位数；

（3）根据这组初赛成绩，由高到低确定 9 人能进入复赛，请直接写出初赛成绩为 1.65 m 的运动员能否进入复赛．

解题秘方：解题的关键是能够结合两个统计图找到进一步解题的有关信息．

（1）用整体 1 减去其他所占的百分比，即可求出 a 的值；

（2）根据平均数、众数和中位数的定义分别进行解答即可；

（3）结合条形统计图可直接判断出该运动员能否进入复赛．

解：（1）25

（2）$\because \overline{x}=\dfrac{1.50\times2+1.55\times4+\cdots+1.70\times3}{2+4+5+6+3}=1.61$（m），

$\therefore$ 这组初赛成绩的平均数是 1.61 m．

$\because$ 在这组初赛成绩中，1.65 m 出现了 6 次，出现的次数最多，

$\therefore$ 这组初赛成绩的众数为 1.65 m．

$\because$ 将这组初赛成绩按从小到大的顺序排列，处于中间的两个成绩都是 1.60 m，且 $\dfrac{1.60+1.60}{2}=1.60$（m），

$\therefore$ 这组初赛成绩的中位数为 1.60 m．

（3）能．

方法点拨：平均数、中位数和众数都反映数据的集中趋势，但各自都有自己的代表性，利用三个数据各自的特征可以进行是非判断．

应用二 估算结果

例 2 某县教育局为了解该县八年级学生参加社会实践活动的情况，随机抽查了该县部分八年级学生第一学期参加社会实践活动的天数，并用得到的数据绘制了如图 2 所示两幅不完整的统计图．

请根据图中提供的信息，回答下列问题：

（1）在扇形统计图中，a=_____，并写出该扇形所对圆心角的度数为_____，请补全条形图．

（2）在这次抽样调查中，众数和中位数分别是多少？

（3）如果该县共有八年级学生 2 000 人，请你估计“活动时间不少于 7 天”的学生人数大约有多少人？

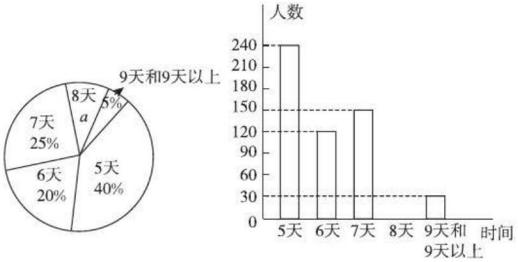


图 2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）根据各部分所占的百分比的和等于1列式计算即可求出a，再用360°乘a即可求出该扇形所对圆心角的度数，然后用被抽查的学生人数乘8天所占的百分比求出8天对应的人数，补全条形图即可.（2）用众数和中位数的定义解答.（3）用总人数乘“活动时间不少于7天”的百分比，计算即可得解.

解：（1）$a=1-(40\%+20\%+25\%+5\%)=1-90\%=10\%$，

该扇形所对圆心角的度数为$360°\times10\%=36°$，

被抽查的学生人数：$240\div40\%=600$，

8天对应的人数：$600\times10\%=60$，补全条形图如图3.

答案：10%；36°

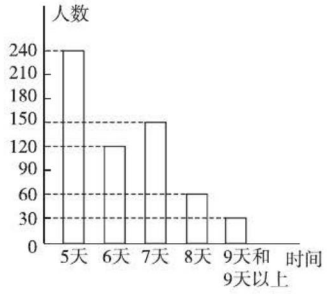


图3

（2）参加社会实践活动5天的人数最多，所以众数是5天.

600人中，按照参加社会实践活动的天数从少到多排列，第300人和第301人都是6天，所以中位数是6天.

（3）$2\,000\times(25\%+10\%+5\%)=2\,000\times40\%=800$（人）.

应用三 ▶ 设计方案

例3 某文具店王经理统计了2018年1至5月A、B、C这三种型号的钢笔平均每月的销售量，并绘制出图4①（不完整）.销售这三种型号钢笔平均每月获得的总利润为600元，其中每种型号钢笔获得的利润分布情况如图4②.已知A、B、C这三种型号钢笔每支的利润分别是0.5元、0.6元、1.2元.请你结合图中的信息，解答下列问题.

（1）求出C型号钢笔平均每月的销售量，并将图4①补充完整；

（2）王经理计划6月份购进A、B、C这三种型号钢笔共900支.请你结合1至5月的销售情况（不考虑其他因素），设计一个方案，使获得的利润最大，并说明理由.

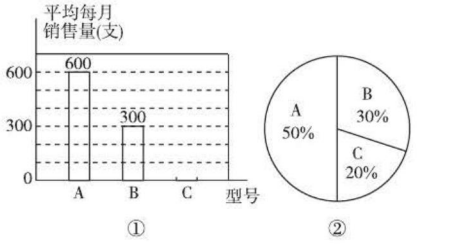


图4

解题秘方：（1）C型号钢笔平均每月的利润为$600\times20\%=120$（元），则C型号钢笔平均每月的销售量为$120\div1.2=100$（支）；

（2）利润大的应尽可能多进货，才可能获得最大利润，所以A、B、C这三种型号钢笔分别进500支、300支、100支.

解：（1）C型号钢笔平均每月的销售量为$600\times20\%\div1.2=120\div1.2=100$（支）；补图如图5：

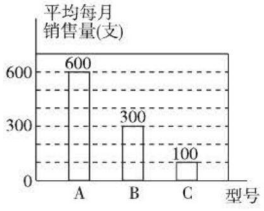


图5

（2）利润最大的C型号钢笔进能销售的最大量100支，其次B型号钢笔进能销售的最大量300支，余下的500支进A型号钢笔.

即A、B、C这三种型号钢笔分别进500支、300支、100支.

理由：利润大的应尽可能多进货，才可能获得最大利润.

方法点拨：本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用.读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键，条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

总体的百分比大小.

应用四 ▶ 综合运用

例 4 为了从甲、乙两名选手中选拔一名参加射击比赛，现对他们进行一次测验，两个人在相同条件下各射靶 10 次，为了比较两个人的成绩，制作了如下的统计表和如图 6 所示的统计图.

甲、乙射击成绩统计表

	平均数	中位数	方差	命中 10 环的次数
甲	7			0
乙				1

甲、乙射击成绩折线统计图

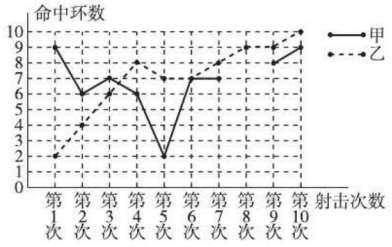


图 6

(1) 请补全上述图表.

(2) 如果规定成绩较稳定者胜出，你认为谁应胜出？请说明你的理由.

(3) 如果在 (2) 中希望另一名选手胜出，根据图表中的信息，应该制定怎样的评判规则？为什么？

解题秘方：(1) 根据折线统计图列举出甲、乙的成绩，结合统计表计算出甲第 8 次射击的成绩，进而计算出甲的中位数和方差，以及乙的平均数、中位数及方差，补全图表即可.

(2) 根据计算出的甲、乙两人的方差即可作出判断.

解：(1) 甲第 8 次射击成绩为 $7\times10-(9+6+7+6+2+7+7+8+9)=9$,

所以甲的射击成绩分别为 9，6，7，6，2，7，7，9，8，9.

中位数为 7.

方差为 $\frac{1}{10}\times[(9-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(2-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2]=4$.

乙的射击成绩分别为 2，4，6，8，7，7，8，9，9，10，

平均数为 $\frac{1}{10}\times(2+4+6+8+7+7+8+9+9+10)=7$.

中位数为 7.5.

方差为 $\frac{1}{10}\times[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2]=5.4$.

补全统计表如下，统计图如图 7.

甲、乙射击成绩统计表

	平均数	中位数	方差	命中 10 环的次数
甲	7	7	4	0
乙	7	7.5	5.4	1

甲、乙射击成绩折线统计图

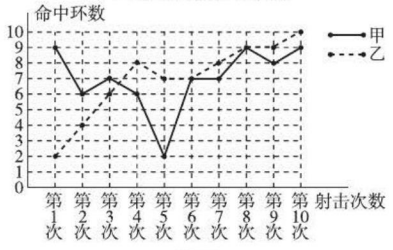


图 7

(2) 由甲的方差小于乙的方差，得甲的成绩比较稳定，故甲胜出.

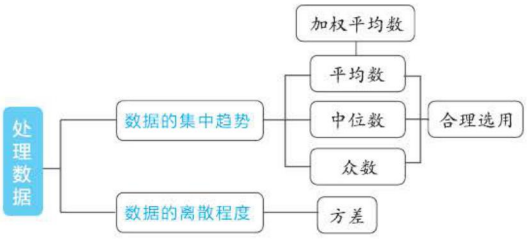
(3) (评判规则不唯一) 如果希望乙胜出，应该制定如下评判规则：平均成绩高的胜出；若平均成绩相同，则随着射击次数的增加，发挥越来越好者或命中满环 (10 环) 次数多者胜出. 因为甲、乙的平均成绩相同，乙只有第 5 次射击比第 4 次射击少命中 1 环，且命中 1 次 10 环，而甲第 2 次比第 1 次、第 4 次比第 3 次、第 5 次比第 4 次、第 9 次比第 8 次命中的环数都低，且命中 10 环的次数为 0 次，即随着射击次数的增加，乙的射击成绩越来越好.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. n 个数 x_1，x_2，…，x_n 的平均数是 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；若 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次，且 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，则这 n 个数的平均数是 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$；

2. **中位数的求法**：将数据从大到小或从小到大排好顺序，若数据为偶数个，则最中间的两个数的平均数即为中位数；若数据为奇数个，则最中间的一个数为中位数；

3. **众数的求法**：一组数据中，出现次数最多的数就是这组数据的众数；

4. **方差**：若数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 m，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2]$. 在平均数相同的条件下，方差越小，数据越整齐，稳定性越好.

知识方法专题

知识必学

专题一 “三数”与“三差”的计算

链接中考≫“三数”是平均数、中位数和众数，“三差”是极差、方差和标准差，对于数据的分析关键要看这六个数据，所以对这六个数据的考查是中考考查的重点，解答此类题的关键就是扣住定义.

例 1 [中考·鄂州]为了解某社区居民的用电情况，随机对该社区 10 户居民进行调查，下表是这 10 户居民 2015 年 4 月份用电量的调查结果：

居民（户）	1	2	3	4
月用电量（度）	30	42	50	51

那么关于这 10 户居民月用电量情况，下列说法错误的是（　　）

A. 中位数是 50 度　B. 众数是 51 度

C. 方差是 42　D. 极差是 21 度

解题秘方：根据中位数、众数、方差、极差的定义进行判断.

解：由题意可知排序后第 5，6 户居民的月用电量都是 50 度，故中位数是 50 度；月用电量为 51 度的户数有 4 户，出现次数最多，故众数是 51 度；极差是 51−30=21（度），排除 A、B、D 选项，只能选 C.

也可以代入方差计算公式进行计算，求出方差.

答案：C

方法点拨：此题考查了众数、中位数、方差、极差，掌握众数、中位数、方差、极差的定义是解

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题的关键，众数是一组数据中出现次数最多的数，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（或最中间两个数的平均数），可用方差公式求方差.

专题二 加权平均数

链接中考≫ 加权平均数的计算是本章的重点，特别是对权的三种不同形式的考查是中考命题的热点．一般以填空题、选择题的形式出现．

例2 （1）[中考·河南]小王参加某企业招聘测试，他的笔试、面试、技能操作得分分别为85分，80分，90分，若依次按照2∶3∶5的比例确定成绩，则小王的成绩是（　　）

A.255分　　B.84分

C.84.5分　　D.86分

（2）[中考·玉林]学校抽查了30名学生参加“学习雷锋社会实践”的活动次数，并根据数据绘制了条形统计图（如图20-1），则这30名学生参加活动的平均次数是（　　）

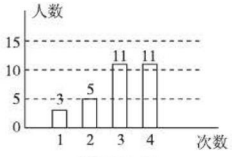


图20-1

A.2　　B.2.8　　C.3　　D.3.3

解：（1）把2，3，5分别看成是85分，80分和90分的权，按加权平均数的计算公式计算即可.

$$\because \bar{x}=\frac{85\times2+80\times3+90\times5}{2+3+5}=86\text{（分）},$$

∴小王的成绩为86分．故选D.

（2）观察条形统计图，可知30名学生中，参加活动次数为1的有3人，参加活动次数为2的有5人，参加活动次数为3的有11人，参加活动次数为4的有11人，据此可计算平均次数.

30名学生参加活动的平均次数是 $\frac{1\times3+2\times5+3\times11+4\times11}{30}=\frac{90}{30}=3$，故选C.

答案：（1）D　（2）C

方法点拨：一般地，如果在n个数据中，x_1出现f_1次，x_2出现f_2次，…，x_k出现f_k次，且$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，那么$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$为这组数据的加权平均数.

专题三 “三数”与“三差”的应用

链接中考≫ 平均数的计算要用到所有的数据，它表示所有的数据信息的平均水平；众数是当一组数据中某些数据多次重复出现时，人们往往关心的一个量；中位数可以代表一组数据的中间水平；方差反映一组数据的波动大小，即方差越大，波动越大；方差越小，波动越小．做题时应该选择合适的统计量来描述数据.

例3 在“全民读书月”活动中，小明调查了班级里40名同学本学期计划购买课外书的花费情况，并将结果绘制成如图20-2所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：（直接填写结果）

（1）本次调查获取的这些数据的众数是_____；

（2）本次调查获取的这些数据的中位数是_____；

（3）若该校共有学生1 000人，根据调查的数据，估计本学期计划购买课外书花费50元的学生有_____人.

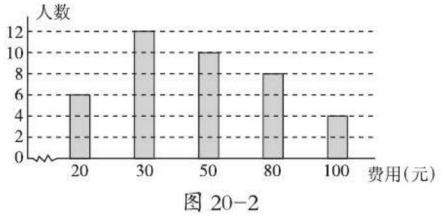


图20-2

解：（1）找到出现次数最多的数，即为众数；

（2）把调查数据按从小到大（或从大到小）的顺序排列，处于中间位置的一个数或两个数的平均数即为中位数；

（3）先算出本学期计划购买课外书花费50元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的学生人数占调查总人数的百分比，然后用该校学生总人数 1 000 乘所得的百分比即可求解.

答案：（1）30　（2）50　（3）250

例 4　［中考·河北］某厂生产 A，B 两种产品，其单价随市场变化而进行相应调整. 营销人员根据前三次单价的变化情况，绘制了如下统计表及不完整的折线图（如图 20–3）.

A，B 产品单价变化统计表

	第一次	第二次	第三次
A 产品单价（元）	6	5.2	6.5
B 产品单价（元）	3.5	4	3

A，B 产品单价变化折线图

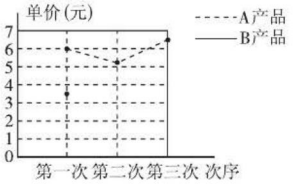


图 20–3

并求得了 A 产品三次单价的平均数和方差：$\overline{x}_A = 5.9$ 元；$s_A^2 = \frac{1}{3}[(6-5.9)^2+(5.2-5.9)^2+(6.5-5.9)^2] = \frac{43}{150}$.

（1）补全图 20–3 中 B 产品单价变化的折线图. B 产品第三次的单价比上一次的单价降低了_____%；

（2）求 B 产品三次单价的方差，并比较哪种产品的单价波动小；

（3）该厂决定第四次调价，A 产品的单价仍为 6.5 元，B 产品的单价比 3 元上调 $m\%$（$m>0$），使得 A 产品这四次单价的中位数是 B 产品这四次单价中位数的 2 倍少 1 元，求 m 的值.

解题秘方：（1）根据统计表提供的数据可补全折线图；（2）比较方差即可；（3）首先确定 A 产品这四次单价的中位数，然后确定 B 产品第四次单价的范围，最后根据“A 产品这四次单价的中位数是 B 产品这四次单价中位数的 2 倍少 1 元”列式求 m 即可.

解：（1）如图 20–4 所示；25

A，B 产品单价变化折线图

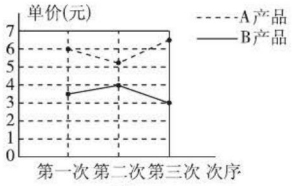


图 20–4

（2）$\overline{x}_B = \frac{1}{3} \times (3.5+4+3) = 3.5$（元）.

$s_B^2 = \frac{(3.5-3.5)^2+(4-3.5)^2+(3-3.5)^2}{3} = \frac{1}{6}$.

$\because \frac{1}{6} < \frac{43}{150}$,

$\therefore$ B 产品的单价波动小.

（3）第四次调价后，

对于 A 产品，这四次单价的中位数为 $\frac{6+6.5}{2} = \frac{25}{4}$（元）；

对于 B 产品，$\because m>0$,

$\therefore$ 第四次单价大于 3 元.

又 $\because \frac{3.5+4}{2} \times 2-1 = \frac{13}{2} > \frac{25}{4}$,

$\therefore$ 第四次单价小于 4 元.

$\therefore \frac{3(1+m\%)+3.5}{2} \times 2-1 = \frac{25}{4}$,

$\therefore m=25$.

方法点拨：此题考查了统计的有关知识，主要包括平均数、中位数、方差的意义. 它们各有局限性，因此要对统计量进行合理的选择和恰当的运用.

Ⅱ 方法必会

专题四 统计思想

专题解读≫运用统计思想，就是考查统计的有关知识，主要包括平均数、中位数和众数的意义，方差对数据决策的影响等，在中考中常以解答题形式出现.

例 5　6 月 5 日是世界环境日，某校组织了一次环保知识竞赛，每班选 25 名同学参加比赛，成绩分为 A，B，C，D 四个等级，其中相应等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

级的得分依次记为100分、90分、80分、70分，学校将某年级的一班和二班的成绩整理并绘制成统计图如图20-5所示：

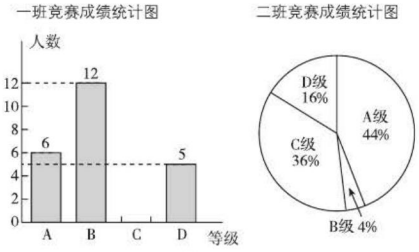


图20-5

根据以上提供的信息解答下列问题：

（1）把一班竞赛成绩统计图补充完整；

（2）求出下表中a，b，c的值：

	平均数（分）	中位数（分）	众数（分）
一班	a	b	90
二班	87.6	80	c

（3）请从以下给出的三个方面中任选一个对这次竞赛成绩的结果进行分析：

①从平均数和中位数方面比较一班和二班的成绩；

②从平均数和众数方面比较一班和二班的成绩；

③从B级以上（包括B级）的人数方面比较一班和二班的成绩.

解题秘方：（1）题求出一班中C级有多少人即可；（2）题根据平均数，中位数，众数的定义解答；（3）题任选一个即可.

解：（1）一班中C级有25-6-12-5=2（人）.故补全统计图如图20-6.

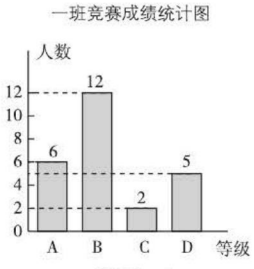


图20-6

（2）$a=(6\times100+12\times90+2\times80+70\times5)\div25=87.6$；$b=90$；$c=100$.

（3）（任选一个）①从平均数和中位数方面比较，一班的成绩较好；

②从平均数和众数方面比较，二班的成绩较好；

③从B级以上（包括B级）的人数方面比较，一班的成绩较好.

专题五 数形结合思想

专题解读≫ 在确定“三数”和“三差”时，一般需要从统计图中准确提取信息，运用数形结合思想对统计图中的数据进行恰当的分析.这种解决问题的思想方法在中考中运用较广泛.

例6 随着我市社会经济的发展和交通状况的改善，我市的旅游业得到了高速发展，某旅游公司对我市一企业个人旅游年消费情况进行问卷调查，随机抽查部分员工，记录每个人年消费金额，并将调查数据适当整理，绘制成如下尚不完整的表和图（如图20-7）：

组别	个人年消费金额x（元）	频数（人数）	百分比
A	$x\leqslant2\,000$	18	15%
B	$2\,000<x\leqslant4\,000$	a	b
C	$4\,000<x\leqslant6\,000$		
D	$6\,000<x\leqslant8\,000$	24	20%
E	$x>8\,000$	12	10%
	合计	c	100%

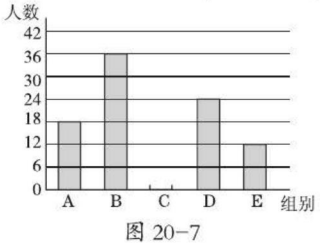


图20-7

根据以上信息回答下列问题：

（1）$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，并将条形统计图补充完整；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）这次调查中，个人年消费金额的中位数出现在_____组；

（3）若这个企业有3 000名员工，请你估计个人旅游年消费金额在6 000元以上的人数．

解题秘方：（1）由统计图中的B组人数得到a，由统计表的A组数据得到c，再根据百分比＝频数÷总数×100%，得到b，最后求出C组人数，从而可将条形统计图补充完整．

（2）这次共调查了120人，其中A组18人，B组36人，C组30人，D组24人，E组12人，中位数应是第60个数与第61个数的平均数，这两个数据都在C组，故个人年消费金额的中位数出现在C组．

（3）个人旅游年消费金额在6 000元以上，是指D、E两组，它们的百分比分别为20%和10%，

由此可知样本数据中，个人旅游年消费金额在6 000元以上的百分比为30%，进而由总人数乘30%可求得结果．

解：（1）36；30%；120

C组人数为120−18−36−24−12=30. 补充条形统计图如图20−8所示：

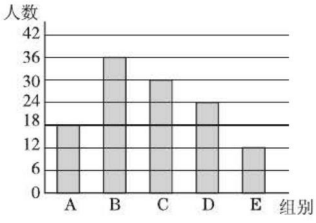


图20−8

（2）C

（3）估计个人旅游年消费金额在6 000元以上的人数为3 000×（20%+10%）=900.

方法点拨：将一组数据按大小顺序排列，如果数据的个数是奇数，那么处于中间位置的数叫做这组数据的中位数，如果数据的个数是偶数，那么处于中间位置的两个数的平均数叫做这组数据的中位数．

好题必解 ☞答案见276页

题型1　平均数的应用

1. 张老师买了一辆启辰R50X汽车，为了掌握车的油耗情况，在连续两次加油时做了如下工作：

①把油箱加满油；

②记录了两次加油时的累计里程（注：“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程），以下是张老师连续两次加油时的记录：

加油时间	加油量（L）	加油时的累计里程（km）
2018年4月28日	18	6 200
2018年5月16日	30	6 600

则在这段时间内，该车每100 km的平均耗油量为（　　）

A.3 L　　B.5 L　　C.7.5 L　　D.9 L

2. 某校广播站要招聘1名记者，小亮和小丽报名参加了三项素质测试，成绩如下：

	写作能力	普通话水平	计算机水平
小亮	90分	75分	51分
小丽	60分	84分	72分

将写作能力、普通话水平、计算机水平这三项按3∶5∶2的比例计算平均成绩，变成按5∶3∶2的比例计算平均成绩，平均成绩变化情况是（　　）

A. 小丽增加了　　B. 小亮增加了

C. 两人平均成绩不变化　　D. 变化情况无法确定

题型2　平均数与中位数的应用

3. 某公司有15名员工，他们所在的部门及相应每人所创的年利润如下表：

部　门	A	B	C	D	E	F	G
人　数	1	1	2	4	2	2	3
每人所创的年利润（万元）	20	5	2.5	2.1	1.5	1.5	1.2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据表中提供的信息填空：

（1）该公司每人所创年利润的平均数是_____万元；

（2）该公司每人所创年利润的中位数是_____万元；

（3）你认为应该使用平均数和中位数中的哪一个来描述该公司每人所创年利润的一般水平？

题型 3　中位数与众数的应用

4. 某家电商场的一个柜组出售容积分别为 268 升、228 升、185 升、182 升四种型号同一品牌的冰箱，每卖出一台冰箱，售货员就在一张纸上写出它的容积作为原始记录，到月底，柜组长清点原始记录，得到一组由 10 个 182、18 个 185、66 个 228 和 16 个 268 组成的数据．

（1）这组数据的平均数有实际意义吗？

（2）这组数据的中位数、众数分别等于多少？

（3）这个商场总经理关心的是中位数还是众数？说明理由．

题型 4　平均数、中位数与众数的应用

5. 某质量检测部门对甲、乙、丙三家公司销售的某产品的使用寿命进行了跟踪调查，统计结果如下（单位：年）：

甲公司：4，5，5，5，5，7，9，12，13，15；

乙公司：6，6，8，8，8，9，10，12，14，15；

丙公司：4，4，4，6，7，9，13，15，16，16．

请回答下列问题：

（1）在该产品的销售中，甲、乙、丙三家公司都声称其销售的该产品的使用寿命是 8 年，你如何理解这三家公司的宣传？（请用已学的统计量加以说明）

（2）如果你是顾客，你将选购哪家公司销售的该产品，为什么？

（3）如果你是丙公司的推销员，结合上述数据，你将如何对本公司的产品进行推销？

题型 5　方差的应用

6. 在某旅游景区上山的一条小路上，有一些断断续续的台阶．如图是其中的甲、乙两段台阶路的示意图．请你用所学过的有关统计知识（平均数、中位数、方差和极差）回答下列问题：

（1）两段台阶路有哪些相同点和不同点？

（2）哪段台阶路走起来更舒服一些？为什么？

（3）为方便游客行走，需要重新整修上山的小路．对于这两段台阶路，在台阶数不变的情况下，请你提出合理的整修建议．

图中的数字表示每一级台阶的高度（单位：cm），并且数据 15，16，16，14，14，15 的方差 $s_{甲}^2=\frac{2}{3}$，数据 11，15，18，17，10，19 的方差 $s_{乙}^2=\frac{35}{3}$．



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 20 章测试卷 ☞答案见 277 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 某市五月份第二周连续七天的空气质量指数分别为 111，96，47，68，70，77，105，则这七天空气质量指数的平均数是（　　）

A.71.8　　B.77　　C.82　　D.95.7

2. 某专卖店专营某品牌的衬衫，店主对上一周中不同尺码的衬衫销售情况统计如下：

尺码	39	40	41	42	43
平均每天销售数量（件）	10	12	20	12	12

该店主决定本周进货时，增加一些 41 码的衬衫，影响该店主决策的统计量是（　　）

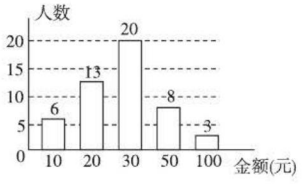
A. 平均数　　B. 方差

C. 众数　　D. 中位数

3. 7 名评委给一名演讲者打分（满分 10 分）如下（单位：分）：9，8，9，10，10，7，9，若去掉一个最高分和一个最低分，这名演讲者的最后平均得分是（　　）

A.7 分　　B.8 分　　C.9 分　　D.10 分

4. 随着智能手机的普及，抢微信红包成了春节期间人们最喜欢的活动之一．某中学九年级（5）班班长对全班 50 名学生在春节期间所抢的红包金额进行统计，并绘制成了统计图（如图）．根据图中提供的信息，红包金额的众数和中位数分别是（　　）



（第 4 题）

A.20 元，20 元　　B.30 元，20 元

C.30 元，30 元　　D.20 元，30 元

5. 学校组织领导、教师、学生、家长对教师的教学质量进行综合评分，满分为 100 分，张老师得分的情况如下：领导平均给分 80 分，教师平均给分 76 分，学生平均给分 90 分，家长平均给分 84 分，如果按照 1 ∶ 2 ∶ 4 ∶ 1 的权进行计算，那么张老师的综合评分为（　　）

A.83.5 分　　B.84.5 分

C.85.5 分　　D.86.35 分

6. 某小组同学在一周内参加家务劳动时间与人数情况如下表所示：

劳动时间（小时）	2	3	4
人数	3	2	1

下列关于“劳动时间”这组数据叙述正确的是（　　）

A. 中位数是 2 小时　　B. 众数是 2 小时

C. 平均数是 3 小时　　D. 方差是 0

7. 若一组数据 3，4，x，5，6，8 的平均数是 5，则这组数据的中位数是（　　）

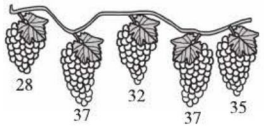
A.4　　B.4.5　　C.5　　D.6

8. 如果一组数据 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的方差为 2，那么数据 $3a_1$，$3a_2$，$3a_3$，…，$3a_n$ 的方差为（　　）

A.2　　B.6　　C.12　　D.18

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 一条葡萄藤上结有五串葡萄，每串葡萄的粒数如图所示（单位：粒），则这组数据的中位数为_____.



（第 9 题）

10. 跳远训练时，甲、乙两名同学在相同条件下各跳了 10 次，统计他们的平均成绩相同，且方差为 $s_{甲}^2=0.3$，$s_{乙}^2=0.4$，则成绩较稳定的是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 已知一组数据 0，2，x，4，5 的众数是 4，那么这组数据的中位数是_____.

12. 某公司销售部有五名销售员，2019 年平均每人每月的销售额分别是（单位：万元）6，8，11，9，8. 现公司需增加一名销售员，有甲、乙、丙三人应聘，试用三个月，平均每人每月的销售额分别为：甲是上述数据的平均数，乙是中位数，丙是众数. 最后正式录用三人中平均月销售额最高的人是_____.

三、解答题（共 52 分）

13. （8 分）老师计算学生的学期总评成绩时按照如下的标准：平时作业占 10%，单元测验占 30%，期中考试占 25%，期末考试占 35%. 小丽和小明的成绩如下表所示：（单位：分）

学生	平时作业	单元测验	期中考试	期末考试
小丽	80	75	71	88
小明	76	80	70	90

请你通过计算，比较谁的学期总评成绩高.

14. （10 分）有甲、乙、丙三种糖果混合而成的什锦糖 100 千克，其中各种糖果的单价和质量如下表所示，商家用加权平均数来确定什锦糖的单价.

	甲种糖果	乙种糖果	丙种糖果
单价（元/千克）	15	25	30
质量（千克）	40	40	20

（1）求该什锦糖的单价；

（2）为了使什锦糖的单价每千克至少降低 2 元，商家计划在什锦糖中加入甲、丙两种糖果共 100 千克，问其中最多可加入丙种糖果多少千克？

15. （10 分）甲、乙两家电子厂在广告中都声称，其销售的某种电子产品在正常情况下的使用寿命都是 5 年. 质检部门对这两家销售的产品的使用寿命进行了跟踪调查，统计结果如下：（单位：年）

甲厂：3，4，5，6，7

乙厂：4，4，5，6，6

（1）分别求出甲厂、乙厂的该种电子产品在正常情况下的使用寿命的平均数和方差；

（2）如果你是顾客，你会选购哪家电子厂的产品？说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.（12分）在对全市初中生进行的体质健康测试中，青少年体质研究中心随机抽取的10名学生的坐位体前屈的成绩（单位：厘米）如下：

11.2　10.5　11.4　10.2　11.4

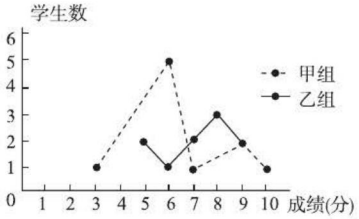
11.4　11.2　9.5　12.0　10.2

（1）通过计算，可知调查数据（10名学生的成绩）的平均数是10.9厘米，中位数是_____厘米，众数是_____厘米.

（2）一名学生的成绩是11.3厘米，你认为他的成绩如何？请说明理由.

（3）研究中心确定了一个标准成绩，等于或大于标准成绩的学生该项素质被评定为“优秀”. 如果全市有一半左右的学生能够达到“优秀”，你认为标准成绩是多少？请说明理由.

17.（12分）[**中考·通辽**]某校举办了一次成语知识竞赛，满分10分，学生得分均为整数，成绩达到6分及6分以上为合格，达到9分或10分为优秀，这次竞赛中甲、乙两组学生成绩分布的折线统计图如图所示和成绩统计分析表如下所示.



（第17题）

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.8	a	3.76	90%	30%
乙组	b	7.5	1.96	80%	20%

（1）求出成绩统计分析表中a，b的值；

（2）小英同学说：“这次竞赛我得了7分，在我们小组中排名属中游略偏上！”观察上面表格，判断小英是甲、乙哪个组的学生；

（3）甲组同学说他们组的合格率、优秀率均高于乙组，所以他们组的成绩好于乙组，但乙组同学不同意甲组同学的说法，认为他们组的成绩要好于甲组，请你给出两条支持乙组同学观点的理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第16章 分式

16.1 分式及其基本性质

【两年模拟兵法】

1. A　2. A

3. D　**点拨**：由题意可得$\frac{3x}{3x+3y}=\frac{3x}{3(x+y)}=\frac{x}{x+y}$，因此分式的值不改变，应选 D. 解答本题的关键是根据题意列出满足条件的分式，再利用分式的基本性质化简，将化简结果与原分式进行对比来确定正确选项.

4. C　**点拨**：∵ 1 m 长的电线的质量为 a，其余电线的总质量为 b，∴ 其余电线长$\frac{b}{a}$ m，∴ 这捆电线的总长度为$\left(\frac{b}{a}+1\right)$m.

5. C　**点拨**：①中分子、分母同时约去 $x-y$，正确；②中分式的分子、分母同时除以 -1，正确；③中因为 $b-a$ 的正负不确定，当 $b-a>0$ 时，结果为 -1，当 $b-a<0$ 时，结果为 1，错误；④正确.

6. C

7. $m<0$

8. **解**：(1) 由题意，可得 $|x|-1=0$，

∴ $x=\pm1$.

把 $x=1$ 代入 x^2+2x-3，得 $1+2-3=0$，不合题意，舍去.

把 $x=-1$ 代入 x^2+2x-3，得 $(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$，∴ 当 $x=-1$ 时，$\frac{|x|-1}{x^2+2x-3}$的值为零.

(2) 由题意，得 $x-2=0$ 或 $x-1=0$，

∴ $x=2$ 或 $x=1$，

∵ $|x|-1\neq0$，∴ $x\neq\pm1$，

∴ 当 $x=2$ 时，$\frac{(x-2)(x-1)}{|x|-1}$的值为零.

9. **解**：(1) $\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$.

(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$

$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}$

$=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

10. **解**：(1) 最简公分母是 $12a^2b^2c^2$. $\frac{3}{4a^2b}=\frac{9bc^2}{12a^2b^2c^2}$，$-\frac{5}{6b^2c}=-\frac{10a^2c}{12a^2b^2c^2}$，$\frac{1}{2ac^2}=\frac{6ab^2}{12a^2b^2c^2}$.

(2) 最简公分母是 $4(x+1)(x-2)$.

$\frac{x+2}{2x+2}=\frac{2(x+2)(x-2)}{4(x+1)(x-2)}$，

$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{4x}{4(x+1)(x-2)}$，

$\frac{3}{8-4x}=\frac{-3(x+1)}{4(x+1)(x-2)}$.

(3) $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$，$a^2+2a+1=(a+1)^2$，$-3a-6=-3(a+2)$，可知三个分式的最简公分母为 $-3(a+1)^2(a+2)$.

$\frac{a}{a^2+3a+2}=\frac{a}{(a+1)(a+2)}=\frac{-3a(a+1)}{-3(a+1)^2(a+2)}$，

$\frac{2}{a^2+2a+1}=\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{-6(a+2)}{-3(a+1)^2(a+2)}$，

$\frac{1}{-3a-6}=\frac{1}{-3(a+2)}=\frac{(a+1)^2}{-3(a+1)^2(a+2)}$.

11. **解**：(1) ∵ $\frac{-x^2}{1-5x}$的值为负，

∴ $\begin{cases}-x^2<0,\\1-5x>0,\end{cases}$ ∴ $x<\frac{1}{5}$且 $x\neq0$.

(2) 当$\begin{cases}x+1>0,\\2x+4>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1<0,\\2x+4<0\end{cases}$时，分式$\frac{x+1}{2x+4}$的值为正.

解这两个不等式组，得 $x>-1$ 或 $x<-2$.

∴ 当 $x>-1$ 或 $x<-2$ 时，原分式的值为正.

点拨：(2) 题中根据同号相除得正的法则易知，当分式的分子、分母的值同时为正或同时为负时，分式的值都为正，要考虑两种情况.

12. **解**：设商场文具专柜共购进了 y 支这种钢笔，

则 $y=\frac{399a+805}{a+2}=\frac{399(a+2)+7}{a+2}=399+\frac{7}{a+2}$，

因为 a 为正整数，y 为正整数，

所以 $a+2$ 是 7 的约数，

所以 $a+2=7$ 或 $a+2=1$，

所以 $a=5$ 或 $a=-1$（不合题意，舍去）.

当 $a=5$ 时，$y=400$.

所以商场文具专柜共购进了 400 支这种钢笔，每支钢笔的进价是 5 元.

13. **解**：由$\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$知 $x\neq0$，

∴ $\frac{x^2-3x+1}{x}=5$，即 $x+\frac{1}{x}=8$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+1=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1=63$,

故$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{63}$.

16.2 分式的运算

16.2.1 分式的乘除

【两年模拟兵法】

1. A **2.** A **3.** C

4. $x\neq -2$ 且 $x\neq -3$ 且 $x\neq -4$

点拨: $\because \dfrac{x+1}{x+2}\div\dfrac{x+3}{x+4}=\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+4}{x+3}$, $\therefore$ 要使原式子有意义,则必须 $x+2\neq 0$ 且 $x+3\neq 0$ 且 $x+4\neq 0$,因此$x\neq -2$且 $x\neq -3$ 且 $x\neq -4$. 分式的分母不能为0,同时含有除法运算时,除式不能为0.

5. $\dfrac{y-x}{x(x+y)}$

6. **解:** (1)原式 $=\dfrac{2x^2y}{3mn^2}\cdot\dfrac{5m^2n}{4xy^2}\cdot\dfrac{3n}{5xym}$

$=\dfrac{5xm}{6yn}\cdot\dfrac{3n}{5xym}=\dfrac{1}{2y^2}$.

(2)原式 $=\dfrac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\dfrac{a-1}{(a+2)^2}\cdot(a+2)$

$=\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}\cdot(a+2)$

$=\dfrac{1}{a+1}$.

(3)原式 $=\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{x-1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

7. **解:** (1)原式 $=\left(-\dfrac{b^2}{2a}\right)\div\left(-\dfrac{b^3}{a^6}\right)\div\left(-\dfrac{1}{a^3b^3}\right)$

$=\left(-\dfrac{b^2}{2a}\right)\cdot\left(-\dfrac{a^6}{b^3}\right)\cdot(-a^3b^3)$

$=\dfrac{a^5}{2b}\cdot(-a^3b^3)$

$=-\dfrac{a^8b^2}{2}$.

(2)原式 $=\dfrac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}\cdot\dfrac{(n-m)^2}{m^2n^2}\cdot\dfrac{m}{m+n}$

$=\dfrac{m-n}{mn^2}$.

(3)原式 $=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{1}{(x+y)^2}\cdot\dfrac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\dfrac{(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{x^3}{(x-y)^3}$

$=\dfrac{x}{y^2(x-y)}$

$=\dfrac{x}{xy^2-y^3}$.

8. **解:** 由题意可知甲工程队修900米所用时间为$\dfrac{900}{a^2-4}$天,乙工程队修600米所用时间为$\dfrac{600}{(a-2)^2}$天.

$\dfrac{900}{a^2-4}\div\dfrac{600}{(a-2)^2}=\dfrac{900}{(a+2)(a-2)}\cdot\dfrac{(a-2)^2}{600}=\dfrac{3(a-2)}{2(a+2)}=\dfrac{3a-6}{2a+4}$.

答:甲工程队修900米所用时间是乙工程队修600米所用时间的$\dfrac{3a-6}{2a+4}$.

9. **解:** $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\dfrac{2x-2}{x+1}=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{x+1}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2}$,因此,不管$x$取何值,这个式子的值都是$\dfrac{1}{2}$.

点拨: 解答本题的关键是对原式化简,通过化简结果是否与x有关来说明是怎么回事就容易多了.

10. **解:** 由 $a^2+b^2-4a+6b+13=0$,

得$(a-2)^2+(b+3)^2=0$.

根据非负数的性质,可得 $a=2$, $b=-3$.

原式 $=\dfrac{(a-3)^2}{-(b+2)(b-2)}\cdot\dfrac{b+2}{-(a-3)}\cdot\dfrac{a^2}{3(a-3)}$

$=\dfrac{a^2}{3(b-2)}=\dfrac{a^2}{3b-6}$.

当 $a=2$, $b=-3$ 时,原式 $=\dfrac{2^2}{3\times(-3)-6}=-\dfrac{4}{15}$.

11. **解:** $\begin{cases}x+2<1, ①\\ 2(x-1)>-6, ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x<-1$,

解不等式②,得 $x>-2$.

$\therefore$ 原不等式组的解集是 $-2<x<-1$.

$\therefore x+1<0$, $x+2>0$.

$\therefore \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}\div\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x+1}{x+2}<0$,即该式的符号为负.

12. **解:** (1)$\because -\dfrac{x^5}{y^2}\div\dfrac{x^3}{y}=\dfrac{x^7}{y^3}\div\left(-\dfrac{x^5}{y^2}\right)=-\dfrac{x^9}{y^4}\div\dfrac{x^7}{y^3}=\cdots=-\dfrac{x^2}{y}$,

$\therefore$ 从第2个分式开始,用任意一个分式除以紧邻它的前面的那个分式的结果恒等于$-\dfrac{x^2}{y}$.

(2)由已知的一列分式可知分式的分母的指数依次增加1,分子的指数是分母指数的2倍加1,并且

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分母的指数是偶数的分式带有“-”号，所以第7个分式应该是$\frac{x^{15}}{y^7}$.

16.2.2 分式的加减

【两年模拟兵法】

1. A

2. B **点拨：**$\frac{2x}{x^2-9}+\frac{1}{3-x}=\frac{2x}{(x+3)(x-3)}-\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+3}$.

3. A **点拨：**原式$=\left(\frac{a-2}{a-2}+\frac{4}{a-2}\right)\cdot\frac{a-2}{a}=\frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{a-2}{a}=\frac{a+2}{a}$. 故选A. 分式混合运算，先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的先算括号里面的. 当异分母分式相加减时，要先通分，转化为同分母分式相加减；而对于分式的除法运算，都是转化为乘法后再计算.

4. B **点拨：**$\frac{3-2x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-2x}{x-1}=\frac{2(1-x)}{x-1}=-2$.

5. B **点拨：**原式$=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot ab=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(b+a)(b-a)}\cdot ab=\frac{a^2b^2}{b-a}$. 故选B.

6. D **点拨：**$\because\frac{ab}{a+b}=1$，$\therefore a,b$均不为0，且$\frac{a+b}{ab}=1$，

$\therefore\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=1$，即$\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=1$ ①.

同理可得$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ ②. $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$ ③.

由①+②+③，得$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{11}{6}$，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{12}$ ④.

由④-①，得$\frac{1}{c}=-\frac{1}{12}$，

$\therefore c=-12$. 故选D.

7. D **8.** D

9. 5 **点拨：**先将条件等式两边同时乘$(m+n)$，再通过拆分得到结果. $\because\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$，两边同时乘$(m+n)$，得$\frac{m+n}{m}+\frac{m+n}{n}=7$，$\therefore 1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+1=7$，因此$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=5$. 故答案为5. 对于此类问题，往往需要对条件式进行变形，当待求式含有两个字母时，还要注意利用整体思想去求解.

10. 3 **点拨：**$\because\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$，

$\therefore\frac{1+b-(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$，

$\therefore\frac{b-a}{(1+a)(1+b)}=\frac{1}{b-a}$，

$\therefore(1+a)(1+b)=(b-a)^2$，

因此$a^2+b^2=1+a+b+3ab$.

$\therefore\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+a}{1+b}=\frac{(1+b)^2+(1+a)^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{1+2b+b^2+1+2a+a^2}{1+a+b+ab}=\frac{3+3a+3b+3ab}{1+a+b+ab}=3$.

11. **解：**原式$=\frac{(a+2)(a-2)-(3a-4)}{a-2}\cdot\frac{a-2}{(a-3)^2}=\frac{a^2-3a}{a-2}\cdot\frac{a-2}{(a-3)^2}=\frac{a}{a-3}$.

12. **解：**(1)$A=\frac{a-2}{1+2a+a^2}\div\left(a-\frac{3a}{a+1}\right)=\frac{a-2}{(a+1)^2}\div\frac{a(a+1)-3a}{a+1}=\frac{a-2}{(a+1)^2}\cdot\frac{a+1}{a^2-2a}=\frac{a-2}{(a+1)^2}\cdot\frac{a+1}{a(a-2)}=\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a^2+a}$.

(2)$\because\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant f(3)+f(4)+\cdots+f(11)$，

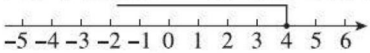
即$\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{11\times12}$，

$\therefore\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$，

$\therefore\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$，

$\therefore\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant\frac{1}{4}$，解得$x\leqslant4$，

$\therefore$原不等式的解集是$x\leqslant4$，在数轴上表示如图.



(第12题)

16.3 可化为一元一次方程的分式方程

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C **4.** A

5. D **点拨：**由$\frac{m}{x-2}-\frac{2x}{2-x}=\frac{m}{x-2}+\frac{2x}{x-2}=\frac{2x+m}{x-2}=1$可得$x=-2-m$. $\because$原分式方程出现增根时$x=2$，$\therefore-2-m=2$，$\therefore m=-4$.

6. D

7. -8 **点拨：**本题可根据两分式的值相等列分式

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方程求解. 由题意,得$\frac{4}{x-4}=\frac{3}{x-1}$,去分母,得$4(x-1)=3(x-4)$,去括号,得$4x-4=3x-12$,移项、合并同类项,得$x=-8$. 经检验,$x=-8$是原分式方程的解. 本题运用了方程思想求值. 当文字题中出现值相等,和、差是多少等关键语句时,往往可以构造方程求解.

8. $\frac{5}{6}$ **点拨:**根据新定义把$2\oplus(2x-1)$用含x的式子表示出来,列出方程后求解.

$\because a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,

$\therefore 2\oplus(2x-1)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}$,

故有$\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}=1$,

$\therefore \frac{1}{2x-1}=\frac{3}{2}$,解之得$x=\frac{5}{6}$.

经检验,$x=\frac{5}{6}$是原方程的根.

9. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$ **导引:**观察已知的分式方程可知,分式方程中的左右两边都有两个分式,且分子都是1;左边两个分式的分母依次小1,右边第一个分式的分母比左边第二个分式的分母小2,右边第二个分式的分母比右边第一个分式的分母小1;左边第一个分式中的分母与对应方程的解的和为$x+2$,从而可得解为$x=6$的分式方程的左边第一个分式的分母应为$x-4$,因此对应的方程应为$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-8}$.

点拨:解答本题的关键是根据题目中已有的方程去找到相应的规律,然后运用这个规律来解决相应的问题.

10. 解:(1)方程两边同乘以$(x+1)(x-1)$,得$2(x-1)=x+1$,解这个一元一次方程,得$x=3$,经检验,$x=3$是原分式方程的根,所以原分式方程的根是$x=3$.

(2)去分母得$(x-2)^2-16=(x+2)^2$,去括号得$x^2-4x+4-16=x^2+4x+4$,解得$x=-2$. 经检验,$x=-2$是增根,所以原分式方程无解.

11. 解:设科普类图书平均每本的价格为x元,则文学类图书平均每本的价格为$(x-5)$元,由题意得$\frac{12\ 000}{x}=\frac{9\ 000}{x-5}$,解得$x=20$.

经检验,$x=20$是所列方程的解,且符合题意.

则$x-5=15$.

答:学校购买科普类图书和文学类图书平均每本的价格各是20元、15元.

12. 解:(1)甲队每天修路的长度;甲队修路400米所用时间或乙队修路600米所用时间

(2)冰冰用的等量关系是:甲队修路400米所用时间=乙队修路600米所用时间;

庆庆用的等量关系是:乙队每天修路的长度-甲队每天修路的长度=20米(选择一个即可).

(3)选冰冰的方程:$\frac{400}{x}=\frac{600}{x+20}$,

去分母,得$400x+8\ 000=600x$.

解得$x=40$.

检验:当$x=40$时,x与$x+20$均不为零,

$\therefore x=40$是原方程的解,且符合题意.

答:甲队每天修路的长度为40米.

选庆庆的方程:$\frac{600}{y}-\frac{400}{y}=20$,

去分母,得$600-400=20y$.

解得$y=10$.

检验:当$y=10$时,分母y不为0,

$\therefore y=10$是原方程的解,且符合题意,

$\therefore \frac{400}{y}=40$.

答:甲队每天修路的长度为40米.

13. 解:由$\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{a}{(x+1)(x-2)}$得

$x(x-2)-(x-1)(x+1)=a$,

$\therefore x=\frac{1-a}{2}$.

$\because$原方程有增根时$x=-1$或$x=2$,

当$x=-1$时,$a=3$;

当$x=2$时,$a=-3$,

$\therefore$当$a\neq\pm3$时,$x=\frac{1-a}{2}$才是原方程的解.

又$\because x>0$,

$\therefore \frac{1-a}{2}>0$,解得$a<1$.

$\therefore a$的取值范围为$a<1$且$a\neq-3$.

点拨:在求分式方程中字母参数的取值范围时,通常是把分式方程去分母后求出整式方程的解,再列出不等式(组)求出字母参数的取值范围,同时要注意排除产生增根的字母参数的取值.

16.4 零指数幂与负整数指数幂

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C

3. C **点拨:**$3x^2+4x^2=7x^2$,故A不正确,$2x^3\cdot3x^3=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$6x^6$,故 B 不正确,$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3=-\frac{1}{8}a^6b^3$,故 D 不正确.

4. B　**点拨:**本题综合考查各种整数指数幂的运算,由已知条件可得 $a=0.09$,$b=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}$,$c=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=9$,$d=1$. $\because -\frac{1}{9}<0.09<1<9$,

$\therefore b<a<d<c$.

5. D　**点拨:**由条件可得 $x-3\neq0$ 且 $3x-6\neq0$ 且 $x\neq0$,因此 $x\neq3$ 且 $x\neq2$ 且 $x\neq0$,因此选 D. 零指数幂底数不能为 0,负整数指数幂底数不能为 0,分式的分母不能为 0.

6. 3

7. -5　**点拨:**此类题目可利用逆向思维求解.

$\because \frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=2^{-5}$,$\therefore x=-5$.

8. 解:原式 $=1-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$.

9. 解:(1)原式 $=x^ny^{-n}\div x^4y^{-2n}=x^{n-4}y^{-n+2n}=x^{n-4}y^n$;

(2)原式 $=x^{-4}y^6\cdot x^2y^{-2}\div x^3y^{-6}=x^{-4+2-3}y^{6-2-(-6)}=x^{-5}y^{10}=\frac{y^{10}}{x^5}$.

10. 解:$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x+2}{x-1}$.

当 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+1=3+1=4$ 时,

原式 $=\frac{4+2}{4-1}=2$.

点拨:负整数指数幂的运算按“底倒指反”的法则进行.

11. 解:①当 $x-2=0$ 且 $2x-1\neq0$ 时,解得 $x=2$;

②当 $2x-1=1$ 时,解得 $x=1$;

③当 $2x-1=-1$ 且 $x-2$ 为偶数时,解得 $x=0$.

综上,整数 x 的值为 2 或 1 或 0.

方法规律:本题运用分类讨论思想求解,注意考虑问题要全面. 本题分三种情况讨论:①当指数为 0,底数不为 0 时,结果为 1;②当底数为 1 时,结果为 1;③当底数为 -1,指数为偶数时,结果为 1.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:显然 $xy\neq0$. 将待求分式的分子、分母同时除以 xy,得 $\frac{3x+5xy-3y}{y-3xy-x}=\frac{-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+5}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)-3}=\frac{-3\times5+5}{5-3}=-5$.

2. 解:原式 $=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$.

$\because a+b+c=0$,

$\therefore b+c=-a$,$a+c=-b$,$a+b=-c$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$.

3. 解:令 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq0)$,则 $a=2k$,$b=3k$,$c=4k$,代入原式,得原式 $=\frac{3\times2k-2\times3k+5\times4k}{2k+3k+4k}=\frac{20k}{9k}=\frac{20}{9}$.

4. 解:以 x、y 为主元,解方程组 $\begin{cases}3x-4y-z=0,\\2x+y-8z=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3z,\\y=2z.\end{cases}$

又 $z\neq0$,$\therefore$ 原式 $=\frac{(3z)^2+(2z)^2+z^2}{3z\cdot2z+2z\cdot z+2\times3z\cdot z}=\frac{14z^2}{14z^2}=1$.

5. 解:原式 $=\frac{6(x+1)+4}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{3x+2}=\frac{6x+10}{(x+1)(3x+2)}$.

当 $x=2$ 时,原式 $=\frac{12+10}{24}=\frac{11}{12}$.

6. 解:$\because |x-2|+(2x-y-3)^2=0$,

$\therefore \begin{cases}x-2=0,\\2x-y-3=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

$\therefore$ 原式 $=\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{2x-y}$

$=\frac{2x}{2x-y}$.

当 $x=2$,$y=1$ 时,原式 $=\frac{4}{3}$.

7. 解:原式 $=\frac{x-1}{x+2}\div\frac{x-1}{x(x+2)}-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=x-\frac{x}{x+1}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{x^2}{x+1}$.

$\because x^2-x-1=0, \therefore x^2=x+1$.

$\therefore$ 原式 $=1$.

8. 解: 原式 $=\frac{(x-2)^2}{2x}\cdot\frac{x^2}{x(x-2)}+1$

$=\frac{x-2}{2}+1$

$=\frac{x}{2}$.

当 $x=1$ 时,原式 $=\frac{1}{2}$. (注意:x 不能取 0 和 2)

9. 解: 方程两边同乘以 $3(x+1)$,得 $3x=2x+3(x+1)$,

解得 $x=-\frac{3}{2}$.

检验:当 $x=-\frac{3}{2}$ 时,$3(x+1)\neq 0$,

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 是原方程的解.

10. 解: 原方程可化为 $\frac{x+2}{x-2}-\frac{16}{x^2-4}=1$.

方程的两边同乘以 $(x+2)(x-2)$,

得 $(x+2)^2-16=(x+2)(x-2)$.

整理,得 $4x=8$,解得 $x=2$.

检验:当 $x=2$ 时,$(x+2)(x-2)=0$,

$\therefore x=2$ 是原方程的增根,$\therefore$ 原方程无解.

11. 解: 方程两边分别通分后相减得:

$\frac{(x-5)-(x-4)}{(x-4)(x-5)}=\frac{(x-8)-(x-7)}{(x-7)(x-8)}$,

即 $\frac{-1}{x^2-9x+20}=\frac{-1}{x^2-15x+56}$,

$\therefore x^2-9x+20=x^2-15x+56$,

解得 $x=6$.

经检验,$x=6$ 是原分式方程的解.

12. 解: 原方程去分母并整理得:$(m-2)x=5+m$,

假设产生增根 $x=1$,则有 $m-2=m+5$,方程无解,

$\therefore$ 不存在 m 的值,使原方程产生增根 $x=1$;

假设产生增根 $x=-1$,则有 $2-m=5+m$,

解得 $m=-\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 当 $m=-\frac{3}{2}$ 时,关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x^2-1}$ 会产生增根.

13. 解: $\because \frac{x+1}{x+2}-\frac{x+2+a}{(x-1)(x+2)}=1$,

$\therefore (x-1)(x+1)-(x+2+a)$

$=(x-1)(x+2)$,

$\therefore x^2-1-x-2-a=x^2+x-2$.

解得 $x=-\frac{a+1}{2}$.

$\because$ 方程的解小于 3 且 $x=-\frac{a+1}{2}$ 不能为增根,

$\therefore -\frac{a+1}{2}<3$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq 1$ 且 $-\frac{a+1}{2}\neq -2$.

解得 $a>-7$ 且 $a\neq \pm 3$.

14. 解: 设特快列车的平均速度为 x km/h,

根据题意可列出方程为 $\frac{1\,800}{x}=\frac{860}{2.5x}+16$,

解得 $x=91$.

检验:当 $x=91$ 时,$2.5x\neq 0$.

$\therefore x=91$ 是方程的根,且符合题意.

答: 特快列车的平均速度为 91 km/h.

15. 解: (1) 设购买一个 A 品牌足球需 x 元,

则购买一个 B 品牌足球需 $(x+30)$ 元,

根据题意得 $\frac{2\,500}{x}=\frac{2\,000}{x+30}\times 2$,解得 $x=50$.

经检验,$x=50$ 是原方程的解,且符合题意.

$\therefore x+30=80$.

答: 购买一个 A 品牌足球需 50 元,购买一个 B 品牌足球需 80 元.

(2) 设此次购买 a 个 B 品牌足球,则购买 A 品牌足球 $(50-a)$ 个,

根据题意得 $50\times(1+8\%)(50-a)+80\times 0.9a\leqslant 3\,260$,解得 $a\leqslant 31\frac{1}{9}$.

$\because a$ 取正整数,

$\therefore a$ 的最大值为 31.

答: 华昌中学此次最多可购买 31 个 B 品牌足球.

【第 16 章测试卷】

一、**1.** D **2.** D **3.** D **4.** B **5.** D **6.** D **7.** B **8.** C

二、**9.** -1 **10.** $-\frac{y^3}{8x^3}$ **11.** $\frac{3}{2}$ **12.** 10

三、**13. 解:** 原式 $=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{a-2}$

$=\frac{2a}{a+1}-\frac{2(a-1)}{a+1}$

$=\frac{2}{a+1}$.

14. 解: 原式 $=\frac{x-1-1}{x-1}\div\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{x+1}{x-2}$.

当 $x=3$ 时，原式 $=\frac{3+1}{3-2}=4$.

15. 解：(1)方程两边乘 $(x+2)(x-2)$，

得 $3x(x-2)+2(x+2)=3(x+2)(x-2)$.

化简得 $-4x=-16$. 解得 $x=4$.

经检验，$x=4$ 是原方程的解.

∴ 原方程的解是 $x=4$.

(2)方程两边乘 $(x+1)(x-1)$，

得 $4-(x+1)(x+2)=-(x+1)(x-1)$.

解得 $x=\frac{1}{3}$.

经检验，$x=\frac{1}{3}$ 是原方程的解.

∴ 原方程的解是 $x=\frac{1}{3}$.

16. 解：原式 $=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\div\frac{x-3-1}{x-3}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x-3}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-4)}$.

不等式 $2x-3<7$ 的解集为 $x<5$，其正整数解为 1，2，3，4.

∵ x 不能取 3 和 4，

∴ 当 $x=1$ 时，原式 $=\frac{1}{4}$(或当 $x=2$ 时，原式 $=0$).

17. 解：(1)设乙队单独做需要 m 天才能完成任务，

由题意得 $\frac{30}{m}+\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{m}\right)\times 20=1$.

解得 $m=100$.

经检验，$m=100$ 是原方程的解，且符合题意.

答：乙队单独做需要 100 天才能完成任务.

(2)由题意得 $\frac{x}{40}+\frac{y}{100}=1$，$x<15$，$y<70$，

且 x，y 为正整数，

则 $y=100-\frac{5}{2}x<70$，

则 $x>12$.

∴ $x=13$ 或 14.

当 $x=13$ 时，$y=100-\frac{5}{2}x$ 不是整数，应舍去；

当 $x=14$ 时，$y=100-\frac{5}{2}x=65$，符合条件.

∴ 甲队做了 14 天，乙队做了 65 天.

答：甲、乙两队实际分别做了 14 天和 65 天.

18. 解：(1)设第一批杨梅每件进价为 x 元.

则 $\frac{1\ 200}{x}\times 2=\frac{2\ 500}{x+5}$.

解得 $x=120$.

经检验，$x=120$ 是原分式方程的解，且符合题意.

答：第一批杨梅每件进价为 120 元.

(2)设剩余的杨梅每件售价打 y 折.

则 $\frac{2\ 500}{125}\times 150\times 80\%+\frac{2\ 500}{125}\times 150\times(1-80\%)\times 0.1y-2\ 500\geqslant 320$.

解得 $y\geqslant 7$.

答：剩余的杨梅每件售价最多打 7 折.

第17章 函数及其图象

17.1 变量与函数

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** D **4.** D **5.** D

6. 解：(1)由长方形的周长公式，得

$y=2(x+16)$，即 $y=2x+32$.

(2)由长方形的面积公式，得 $S=16x$.

(3)当 $S=160$ 时，$x=10$，$y=52$.

(4)因为 $y=2x+32$，所以当 x 增加 2 时，y 增加 4；因为 $S=16x$，所以当 x 增加 2 时，S 增加 32.

点拨：解决该题的关键是根据长方形的周长公式和面积公式写出 y 与 x，S 与 x 之间的函数关系式.

7. 解：(1)由题意得 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{1}{2}x^2$，其中 $0\leqslant x\leqslant 12$.

(2)当 $x=4$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$，

即当 $MA=4$ cm 时，重叠部分的面积是 8 cm^2.

(3)当四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4 时，即等腰直角三角形 ABC 与重叠部分的三角形的面积的比是 9:4.

因为等腰直角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}\times 12\times 12=72(cm^2)$，

所以重叠部分的面积是 $\frac{4}{9}\times 72=32(cm^2)$.

因为函数关系式是 $y=\frac{1}{2}x^2$，

所以有 $\frac{1}{2}x^2=32$，所以 $x^2=64$.

由于 $x\geqslant 0$，因此只取 x 的正数值 8，即当 MA 的长度是 8 cm 时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)由于不同情况下重叠部分的形状发生了变化,故应分情况讨论.

①当$0 \leqslant t \leqslant 12$时,重叠部分是三角形,所以函数关系式是$y = \frac{1}{2}t^2$.

②当$12 < t \leqslant 24$时,重叠部分是直角梯形,面积是$\triangle ABC$的面积与右侧小直角三角形面积的差.因为$\triangle ABC$的面积是$72\ cm^2$,小直角三角形的面积是$\frac{1}{2}(t-12)^2\ cm^2$,所以重叠部分的面积是$\left[72-\frac{1}{2}(t-12)^2\right] cm^2$,因此函数关系式是$y = 72-\frac{1}{2}(t-12)^2$.

17.2 函数的图象

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**在平面直角坐标系中,点的横、纵坐标共同决定点所在的象限,(+,+),(−,+),(−,−),(+,−)分别表示在第一、二、三、四象限的点的符号特征,故选B.

2. C **点拨:**点P到x轴的距离为该点纵坐标的绝对值.

3. B **点拨:**关于原点对称的两点,横、纵坐标分别互为相反数.

4. B **点拨:**A,B两点的纵坐标相等,横坐标不相等,所以过A,B两点的直线一定平行于x轴.故选B.

5. D **点拨:**$\because xy=0$,$\therefore x=0$或$y=0$或$x=0$且$y=0$.当$x=0$时,点P在y轴上;当$y=0$时,点P在x轴上;当$x=0$且$y=0$时,点P为坐标原点.故选D.

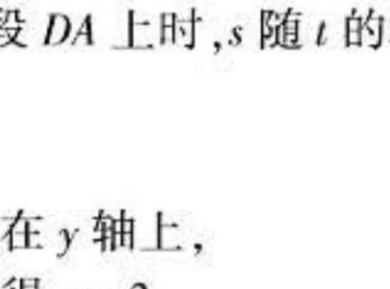
6. B **点拨:**由函数的定义可知,图①②对任意一个x的值,y都有唯一确定的值与之对应,所以图①②表示y是x的函数;而图③④对可取范围内x的值,y与之对应的值不唯一,所以图③④不能表示y是x的函数.所以表示y是x的函数的个数是2.

7. A **点拨:**根据第二象限内点的坐标特征列出关于m的不等式组.

8. A

9. D **点拨:**向玻璃杯内匀速注水,水面在逐渐升高,当玻璃杯中水满后,水开始向鱼缸内流,这时最高水位不变,当鱼缸水面高度与玻璃杯高度一样后,继续注水,最高水位再次升高,但升高的速度比开始慢.故符合以上内容的图象是选项D.

10. D **点拨:**该题属于分段函数问题:如图,过点C作$CD \perp AB$于点D.



(第10题)

$\because$在$\triangle ABC$中,$AC=BC$,

$\therefore AD=BD$.

①当点P在边AC上时,s随t的增大而减小.故A、B错误;

②当点P在边CB上时,s随t的增大而增大;

③当点P在线段BD上时,s随t的增大而减小,当点P与点D重合时,s最小,但是不等于零.故C错误;

④当点P在线段DA上时,s随t的增大而增大.故D正确.

11. 四 **12.** 5

13. **解:**(1)$\because$点M在y轴上,

$\therefore 3a-9=0$,解得$a=3$,

$\therefore a-1=2$,

$\therefore$点M的坐标为$(0,2)$.

(2)当点M在坐标轴上时显然不满足题意,下面分两种情况讨论:

①当点M位于第一或第三象限时,$3a-9=a-1$,解得$a=4$,

$\therefore 3a-9=3$,$a-1=3$,

$\therefore$点M的坐标为$(3,3)$.

②当点M位于第二或第四象限时,

$3a-9+a-1=0$,

解得$a=2.5$,

$\therefore 3a-9=-1.5$,$a-1=1.5$,

$\therefore$点M的坐标为$(-1.5,1.5)$.

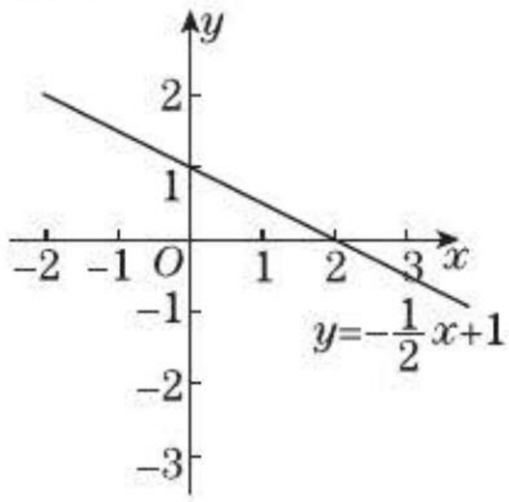
综上可知,点M的坐标为$(3,3)$或$(-1.5,1.5)$.

(3)$\because$点N的坐标为$(3,-6)$,且直线$MN \parallel x$轴,$\therefore a-1=-6$,解得$a=-5$,

$\therefore 3a-9=-24$,

$\therefore$点M的坐标为$(-24,-6)$.

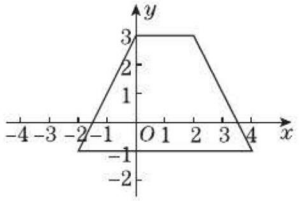
14. **解:**如图所示.



(第14题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 解：如图所示.

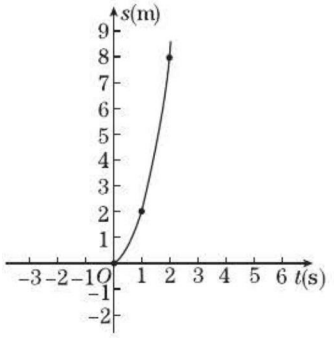


（第 15 题）

（1）所得图形是等腰梯形.

（2）由于图形是等腰梯形，且易知上底长为 2，下底长为 6，高为 4，因此，图形的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+6)\times4=16$.

16. 解：（1）依次填：0，2，8，18，图象如图所示.



（第 16 题）

（2）当 $t=6.5$ 时，$s=2\times6.5^2=84.5$，即当小球滚动 6.5 s 时，其滚动的距离是 84.5 m.

（3）当 $s=128$ 时，$t=8$，即经过 8 s 时，小球滚动 128 m.

17. 解：（1）距离分别为 5 千米、8 千米、10 千米.

（2）他停下来休息时，离开城市的距离是 8 千米.

（3）乡村离城市有 14 千米的路程.

（4）观察图象可知 9 时到 10 时所走的路程为 $8-5=3$（千米），所以旅行者在 9 时到 10 时的速度为 $3\div1=3$（千米/时），当旅行者离开城市 6 千米时，上坡路走了 $6-5=1$（千米），此时走上坡路所用的时间为 $1\div3\times60=20$（分），所以旅行者离开城市 6 千米时的时间为 9 时 20 分.

17.3 一次函数

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**：（1）$y=\pi x$ 是一次函数；

（2）$y=2x-1$ 是一次函数；

（3）$y=\frac{1}{x}$ 不是一次函数；

（4）$y=2-3x$ 是一次函数；

（5）$y=x^2-1$ 不是一次函数.

是一次函数的有 3 个. 故选 B.

2. C **3. D** **4. A** **5. D** **6. C**

7. C **点拨**：根据正方形的性质、一次函数图象上点的坐标特征结合点 A 的坐标可得出点 A_1，B_1 的坐标，即可得出直线平移的距离.

8. 解：（1）由题意得：$m+2<0$，$\therefore m<-2$.

$\therefore$ 当 $m<-2$ 且 n 为任意实数时，y 随 x 的增大而减小.

（2）由题意得：$m+2\neq0$ 且 $3-n=0$，

$\therefore m\neq-2$ 且 $n=3$.

$\therefore$ 当 $m\neq-2$ 且 $n=3$ 时，函数的图象经过原点.

（3）由题意可得 $\begin{cases}m+2<0,\\3-n<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m<-2,\\n>3.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $m<-2$ 且 $n>3$ 时，函数的图象经过第二、三、四象限.

9. 解：（1）$\because P(m,n)$ 在直线 $y=-x+6$ 上，且在第一象限，

$\therefore n=-m+6$，点 P 到 x 轴距离为 $-m+6$.

$\because$ 点 A 坐标为 $(5,0)$，$\therefore OA=5$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times5\times(-m+6)=-\frac{5}{2}m+15$.

画图略.

（2）若 $S=15$，即 $-\frac{5}{2}m+15=15$，解得 $m=0$.

此时点 P 的坐标为 $(0,6)$.

$\because$ 点 P 在第一象限，

$\therefore$ $\triangle PAO$ 的面积不可以为 15.

10. 解：（1）设一次函数的表达式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$，

将点 $(-2,-2)$，$(2,4)$ 的坐标代入 $y=kx+b$ 中，

得 $\begin{cases}-2=-2k+b,\\4=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{2},\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 这个函数的表达式为 $y=\frac{3}{2}x+1$.

（2）当 $x=1$ 时，$y=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$，

$\because \frac{5}{2}\neq1$，$\therefore$ 点 $P(1,1)$ 不在此函数图象上.

（3）当 $x=0$ 时，$y=1$，

$\therefore$ 该函数图象与 y 轴交点坐标为 $(0,1)$；

当 $y=0$ 时，$\frac{3}{2}x+1=0$，解得 $x=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 该函数图象与 x 轴交点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

$\therefore$ 这个函数的图象与坐标轴围成的面积 $S=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

11. **解:**(1)由题图可知,甲 4 h 行驶了 40 km,则甲行驶的速度为 $40\div4=10$(km/h);乙 0.5 h 行驶了 40 km,则乙行驶的速度为 $40\div0.5=80$(km/h). 即甲、乙两人的速度分别是 10 km/h,80 km/h.

(2)①乙返程中与 A 地的距离 y(km)与时间 t(h)的函数图象如图所示.

设乙返程中与 A 地的距离 y(km)关于时间 t(h)的函数表达式为 $y=kt+b(k\neq0)$,

∵ 点(2,40),(2.5,0)在此函数的图象上,

$\therefore\begin{cases}2k+b=40,\\2.5k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-80,\\b=200.\end{cases}$

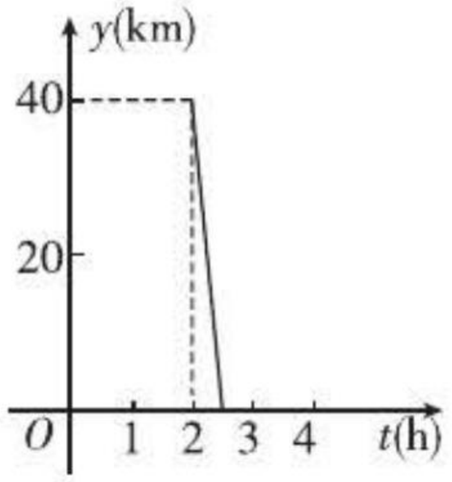
即乙返程中与 A 地的距离 y(km)关于时间 t(h)的函数表达式是 $y=-80t+200(2\leqslant t\leqslant2.5)$.

②设甲行驶的路程 s_1 关于时间 t 的函数表达式为 $s_1=mt$,则由 $40=4m$,得 $m=10$. 令 $10t=-80t+200$,解得 $t=\frac{20}{9}$,

$\therefore10\times\frac{20}{9}=\frac{200}{9}$(km),

$\therefore40-\frac{200}{9}=\frac{160}{9}$(km),

即甲在离 B 地 $\frac{160}{9}$ km 处与返程中的乙相遇.



(第 11 题)

12. **解:**(1)如图①所示,依题意,得 $A(2,0)$,$B(0,2)$.

因为 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等,且易知 C 为 OA 的中点,所以 $S_{\triangle BOC}=S_{\triangle ABC}$.

(第 12 题)

所以直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 过点 B.

由直线 $y=kx+b$ 过点 $C(1,0)$ 和点 $B(0,2)$,

易得 $k=-2$,$b=2$.

(2)设直线 $y=kx+b$ 与 OB 交于点 $M(0,h)$,此时分 $\triangle AOB$ 的面积之比为 1:5,如图②所示.

易得 $S_{\triangle OMC}=\frac{1}{6}S_{\triangle AOB}$,即 $\frac{1}{2}\times1\times h=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times2\times2$,所以 $h=\frac{2}{3}$. $\therefore M\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

过点 M 作直线 $MN\parallel OA$,交 AB 于点 N,设 $N\left(a,\frac{2}{3}\right)$,连结 CN,则 $S_{\triangle OMC}=S_{\triangle CAN}$.

因为点 $N\left(a,\frac{2}{3}\right)$ 在直线 $y=-x+2$ 上,

所以 $a=\frac{4}{3}$.

所以点 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

所以直线 $y=kx+b$ 经过 $M\left(0,\frac{2}{3}\right)$,$C(1,0)$ 或 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$,$C(1,0)$.

所以 $\begin{cases}b=\frac{2}{3},\\k+b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{4}{3}k+b=\frac{2}{3},\\k+b=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=2,\\b=-2.\end{cases}$

17.4 反比例函数

【两年模拟兵法】

1. B

2. D **点拨:**反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(3,-2)$,

$\therefore xy=k=-6$.

对于 A,$(-3,-2)$,此时 $xy=-3\times(-2)=6$,不合题意;

对于 B,$(3,2)$,此时 $xy=3\times2=6$,不合题意;

对于 C,$(-2,-3)$,此时 $xy=-2\times(-3)=6$,不合题意;

对于 D,$(-2,3)$,此时 $xy=-2\times3=-6$,符合题意. 故选 D.

3. D

4. D **点拨:**∵ 反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象在第一、三象限,在每个象限内,y 随 x 的增大而减小,又点 $A(-5,y_1)$,$B(-3,y_2)$ 在第三象限,且 $-5<-3$,$\therefore y_2<y_1<0$. 又点 $C(2,y_3)$ 在第一象限,$\therefore y_3>0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore y_2 < y_1 < y_3$.

5. A　**6.** B　**7.** B

8. 3　**点拨:** ∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-3, -1)$,

$\therefore -1 = \frac{k}{-3}$,解得 $k = 3$.

9. $k < 1$　**点拨:** ∵ 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$(k 是常数,$k \neq 1$)的图象有一支在第二象限,

$\therefore k - 1 < 0$,解得 $k < 1$.

10. 12　**点拨:** 首先根据已知点的坐标确定反比例函数的表达式,然后确定两个函数交点的横坐标,从而确定正比例函数的表达式,最后令两个函数值等于 3 求得时间,相减即可.

11. **解:** (1) ∵ $\triangle AOB$ 的面积为 2,$AB \perp x$ 轴,点 $A(4, m)$ 在第一象限,$\therefore k = 2 \times 2 = 4$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$,

$\therefore m = \frac{4}{4} = 1$.

(2) 当 $x = -3$ 时,$y = -\frac{4}{3}$;当 $x = -1$ 时,$y = -4$.

∵ 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 在 $x < 0$ 时,y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $-3 \leqslant x \leqslant -1$ 时,y 的取值范围为 $-4 \leqslant y \leqslant -\frac{4}{3}$.

12. **解:** (1) 把点 $A(2,6)$ 的坐标代入 $y = \frac{m}{x}$,得 $m = 12$,即反比例函数的表达式为 $y = \frac{12}{x}$.

把点 $B(n,1)$ 的坐标代入 $y = \frac{12}{x}$,得 $n = 12$,即点 B 的坐标为 $(12,1)$.

由直线 $y = kx + b$ 过点 $A(2,6)$,$B(12,1)$,

得 $\begin{cases} 2k + b = 6, \\ 12k + b = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b = 7, \end{cases}$

即一次函数的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

(2) 设直线 AB 与 y 轴的交点为 P,点 E 的坐标为 $(0,a)$.

将 $x = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 7$,得 $y = 7$,即点 P 的坐标为 $(0,7)$,

$\therefore PE = |a - 7|$.

∵ $S_{\triangle AEB} = S_{\triangle BEP} - S_{\triangle AEP} = 5$,

$\therefore \frac{1}{2} \times |a - 7| \times (12 - 2) = 5$,

$\therefore |a - 7| = 1$,$\therefore a = 6$ 或 8,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(0,6)$ 或 $(0,8)$.

13. **解:** (1) 设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = \frac{k}{x - 0.4}(k \neq 0)$.

因为当 $x = 0.65$ 时,$y = 0.8$,

所以 $k = (x - 0.4)y = (0.65 - 0.4) \times 0.8 = 0.2$.

所以 $y = \frac{0.2}{x - 0.4}$,

即 $y = \frac{1}{5x - 2}(0.55 < x < 0.75)$.

(2) 当电价调至 0.72 元时,新增用电量 $y = \frac{1}{5 \times 0.72 - 2} = \frac{1}{1.6} = 0.625$(亿度),

则本年度用电量为 $1 + 0.625 = 1.625$(亿度) $= 1.625 \times 10^8$(度).

所以 $(0.72 - 0.3) \times 1.625 \times 10^8 = 6.825 \times 10^7$(元).

所以当电价调至 0.72 元时,本年度电力部门的收益是 6.825×10^7 元.

14. **解:** (1) 设 $I = \frac{k}{R}$,由图象过点 $(3,2)$,

得 $2 = \frac{k}{3}$,解得 $k = 6$.

即函数关系式为 $I = \frac{6}{R}$.

(2) 会被烧毁. 由 (1) 知,闭合电路的电压恒为 6 V,将电阻为 5 Ω 的用电器接到这个闭合电路中,通过的电流为 $\frac{6}{5} = 1.2$(A),大于此用电器允许通过的最大电流 1 A,所以该用电器接在这个电路中会被烧毁.

(3) 由 $I = \frac{6}{R}$,可知当 $I = 4$ 时,$R = 1.5$,

所以电阻至少应是 1.5 Ω.

15. **解:** (1) 由题意得 $y = \frac{360}{x}$.

把 $y = 120$ 代入 $y = \frac{360}{x}$,得 $x = 3$,

把 $y = 180$ 代入 $y = \frac{360}{x}$,得 $x = 2$,

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围为 $2 \leqslant x \leqslant 3$.

$\therefore y = \frac{360}{x}(2 \leqslant x \leqslant 3)$.

(2) 设原计划平均每天运送土石方 a 万米^3,则

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

实际平均每天运送土石方$(a+0.5)$万米^3. 根据题意得$\frac{360}{a}-\frac{360}{a+0.5}=24$.

解得$a=2.5$或$a=-3$.

经检验,$a=2.5$和$a=-3$均为原方程的根,但$a=-3$不符合题意,故舍去.

即原计划平均每天运送土石方2.5万米^3,实际平均每天运送土石方3万米^3.

17.5 实践与探索

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** C **4.** D

5. 解:(1)由$y_1=-\frac{1}{2}x+1$,

可知当$y=0$时,$x=2$,$\therefore$点A的坐标是$(2,0)$.

$\therefore AO=2$.

$\because$直线$y_1=-\frac{1}{2}x+1$与直线$y_2=-\frac{3}{2}x$交于点B,

$\therefore$易求得B点的坐标是$(-1,1.5)$.

$\therefore\triangle AOB$的面积$=\frac{1}{2}\times2\times1.5=1.5$.

(2)由函数图象可知$y_1>y_2$时$x>-1$.

6. 解:(1)$\because$点$P(1,b)$在直线$l_1:y=2x+1$上,

$\therefore b=2\times1+1=3$.

$\because$点$P(1,3)$在直线$l_2:y=mx+4$上,

$\therefore 3=m+4$,$\therefore m=-1$.

(2)当$x=a$时,$y_C=2a+1$;

当$x=a$时,$y_D=4-a$.

$\because CD=2$,$\therefore|2a+1-(4-a)|=2$,

解得$a=\frac{1}{3}$或$a=\frac{5}{3}$.

$\therefore a$的值为$\frac{1}{3}$或$\frac{5}{3}$.

7. 解:(1)把$(-2,a)$代入$y=2x-1$,得$-4-1=a$,

解得$a=-5$.

(2)由(1)知点$P(-2,-5)$,

则直线l_2对应的函数表达式是$y=\frac{5}{2}x$,

因此点$P(-2,a)$的横、纵坐标可以看成是二元一次方程组$\begin{cases}y=2x-1,\\y=\frac{5}{2}x\end{cases}$的解.

(3)易知直线l_1与x轴交于点$A\left(\frac{1}{2},0\right)$,

所以$S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{4}$.

(4)存在点M,使点M到x轴和y轴的距离相等.

设点M的坐标为(m,b).

①当$m=b$时,点M的坐标为(m,m),代入$y=2x-1$得$2m-1=m$,$m=1$,即点M的坐标为$(1,1)$;

②当$m=-b$时,点M的坐标为$(m,-m)$,代入$y=2x-1$得$2m-1=-m$,$m=\frac{1}{3}$,即点M的坐标为$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

综上所述,存在符合条件的点M,其坐标为$(1,1)$或$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

8. 解:(1)设该网店甲种口罩每袋的售价为x元,乙种口罩每袋的售价为y元,

根据题意得$\begin{cases}x-y=5,\\2x+3y=110,\end{cases}$

解这个方程组得$\begin{cases}x=25,\\y=20.\end{cases}$

故该网店甲种口罩每袋的售价为25元,乙种口罩每袋的售价为20元;

(2)设该网店购进甲种口罩m袋,则购进乙种口罩$(500-m)$袋,

根据题意,得$\begin{cases}m>\frac{4}{5}(500-m),\\22.4m+18(500-m)\leqslant10\,000,\end{cases}$

解这个不等式组得:$222\frac{2}{9}<m\leqslant227\frac{3}{11}$.

因m为整数,故有5种进货方案,分别是:

购进甲种口罩223袋,乙种口罩277袋;

购进甲种口罩224袋,乙种口罩276袋;

购进甲种口罩225袋,乙种口罩275袋;

购进甲种口罩226袋,乙种口罩274袋;

购进甲种口罩227袋,乙种口罩273袋;

设网店获利w元,则有$w=(25-22.4)m+(20-18)(500-m)=0.6m+1\,000$,

故当$m=227$时,w最大,

$w_{最大}=0.6\times227+1\,000=1\,136.2$.

故该网店购进甲种口罩227袋,购进乙种口罩273袋,获利最大,最大获利1 136.2元.

9. 解:(1)330;660

(2)设线段OD所表示的y与x之间的函数关系式为$y=kx$,将$(17,340)$代入$y=kx$中,

$340=17k$,解得$k=20$.

$\therefore$线段OD所表示的y与x之间的函数关系式为$y=20x$.

根据题意得:线段DE所表示的y与x之间的函数关系式为$y=340-5(x-22)=-5x+450$.

联立两线段所表示的函数关系式成方程组,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得$\begin{cases}y=20x,\\y=-5x+450,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=18,\\y=360.\end{cases}$

∴交点 D 的坐标为(18,360),

∴y 与 x 之间的函数关系式为

$y=\begin{cases}20x(0\leqslant x\leqslant 18)\\-5x+450(18<x\leqslant 30)\end{cases}$.

(3)当 $0\leqslant x\leqslant 18$ 时,

根据题意得:$(8-6)\times 20x\geqslant 640$,解得 $x\geqslant 16$.

当 $18<x\leqslant 30$ 时,

根据题意得$(8-6)\times(-5x+450)\geqslant 640$,

解得 $x\leqslant 26$. ∴$16\leqslant x\leqslant 26$.

$26-16+1=11$(天),

∴日销售利润不低于 640 元的天数共有 11 天,

∵点 D 的坐标为(18,360),

∴日最大销售量为 360 件.

∵$360\times 2=720$(元),

∴试销售期间,日销售最大利润是 720 元.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)∵$y=(2m+1)x+m-3$ 是一次函数,且 y 随 x 的增大而减小,

∴$2m+1<0$,解得 $m<-\frac{1}{2}$.

(2)∵图象过第一、二、三象限,

∴$\begin{cases}2m+1>0,\\m-3>0,\end{cases}$解得 $m>3$.

2. 解:(1)根据题意,设 $y_1=k_1(x+1)$,$y_2=\frac{k_2}{x}$,

所以 $y=k_1(x+1)+\frac{k_2}{x}$.

把 $x=1$,$y=0$;$x=4$,$y=9$ 分别代入,得

$\begin{cases}2k_1+k_2=0,\\5k_1+\frac{k_2}{4}=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=2,\\k_2=-4.\end{cases}$

所以 $y=2(x+1)-\frac{4}{x}$.

(2)当 $x=-1$ 时,$y=2\times(-1+1)-\frac{4}{-1}=4$.

3. 解:(1)证明:∵$\triangle AOB$ 与 $\triangle ACP$ 都是等边三角形,

∴$AO=AB$,$AC=AP$,$\angle CAP=\angle OAB=60°$.

∴$\angle CAP+\angle PAO=\angle OAB+\angle PAO$,

即$\angle CAO=\angle PAB$.

∴$\triangle AOC\cong\triangle ABP$.

结论:点 P 在过点 B 且与 AB 垂直的直线上或 $PB\perp AB$或$\angle ABP=90°$.

(2)点 P 所在函数图象是过点 B 且与 AB 垂直的直线.

∵$\triangle AOB$ 是等边三角形,$A(0,3)$,

∴$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

当点 C 移动到使点 P 在 y 轴上时,得 $P(0,-3)$.

设点 P 所在直线的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

把 B,P 两点的坐标代入,得$\begin{cases}b=-3,\\\frac{3\sqrt{3}}{2}k+b=\frac{3}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\sqrt{3},\\b=-3.\end{cases}$

所以点 P 所在函数图象的表达式为 $y=\sqrt{3}x-3$.

4. 解:(1)∵点 $P(1,b)$ 在直线 $y=x+1$ 上,

∴当 $x=1$ 时,$b=1+1=2$.

(2)方程组的解是$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

(3)直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P. 理由如下:将点(1,2)代入 $y=mx+n$,得 $m+n=2$. 将 $x=1$ 代入 $y=nx+m$,得 $y=2$.

∴直线 $l_3:y=nx+m$ 也经过点 P.

5. 解:原不等式组可化为$\begin{cases}2x-2<0,\\\frac{1}{2}x-2>0.\end{cases}$

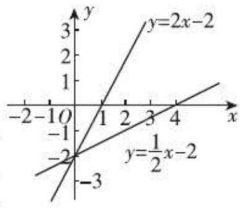
在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=2x-2$ 和 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图象如图所示.

∵$x<1$ 时,$2x-2<0$,

$x>4$ 时,$\frac{1}{2}x-2>0$,

∴原不等式组无解.

点拨:先将不等式组转化为大于或小于 0 的形式,再画出所对应的函数图象,最后通过函数图象找出不等式组的解集.



(第 5 题)

6. 解:(1)因为直线 DC 的表达式为 $y=-2x+8$,

令 $y=0$,得 $x=4$,即点 C 的坐标为(4,0).

把点 C 的坐标(4,0)代入 $y=ax+3$,

得 $0=4a+3$,∴$a=-\frac{3}{4}$.

(2)由(1)得直线 AC 的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

令 $x=0$,得 $y=3$,∴点 E 的坐标为(0,3).

∵BD 与 x 轴平行,∴$y_B=y_D=y_E$,即点 D 的纵坐

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

标为3,令$3=-2x+8$,得$x=\frac{5}{2}$.$\therefore DE=\frac{5}{2}$.

易得$S_{\square ABCD}=4S_{\triangle CDE}=4\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times3=15$.

又$S_{\triangle EOC}=\frac{1}{2}\times OC\times OE=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

$\therefore$平行四边形$ABCD$的面积是$\triangle EOC$面积的$\frac{5}{2}$倍.

7. 解:由题意,易得出$S_{\triangle ODB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times|-4|=2$. 易知$OC=OD$,$AC=BD$,所以$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ODA}=S_{\triangle ODB}=S_{\triangle OBC}=2$. 所以四边形$ACBD$的面积为$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle ODA}+S_{\triangle ODB}+S_{\triangle OBC}=2\times4=8$.

8. 解:(1)①当$1\leqslant x\leqslant5$时,设$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$,把(1,200)代入,得$k=200$,即$y=\frac{200}{x}$;

②易知当$x=5$时,$y=40$,所以当$x>5$时,$y=40+20(x-5)=20x-60$.

综上可知,y与x之间对应的函数关系式为

$$y=\begin{cases}\frac{200}{x}(1\leqslant x\leqslant5),\\20x-60(x>5).\end{cases}$$

(2)当$y=200$时,$20x-60=200$,解得$x=13$,所以治污改造工程顺利完工后经过$13-5=8$(个)月,该厂月利润才能达到2019年1月的水平.

(3)对于$y=\frac{200}{x}$,当$y=100$时,$x=2$;对于$y=20x-60$,当$y=100$时,$x=8$. 所以该厂资金紧张期为3,4,5,6,7月. 所以该厂资金紧张期共有5个月.

【第17章测试卷】

一、1. D **2.** A **3.** B **4.** C **5.** D **6.** C **7.** A **8.** C

二、9. $x\leqslant\frac{2}{3}$ **10.** $\sqrt{3}$

11. $x<-2$ **12.** $(-\frac{2}{3},0)$

三、13. 解:(1)$\because$函数图象经过点$A(-1,6)$,

$\therefore m-8=xy=-1\times6=-6$,解得$m=2$.

(2)$\because$函数图象在第二、四象限,

$\therefore m-8<0$,解得$m<8$.

(3)$\because$当$x>0$时,y随x的增大而减小,

$\therefore m-8>0$,解得$m>8$.

14. 解:(1)$\because$正比例函数$y=2x$的图象经过点$A(m,2)$,

$\therefore 2=2m$,$\therefore m=1$.

$\because$一次函数的图象经过点$A(1,2)$,$B(-2,-1)$,

$\therefore\begin{cases}k+b=2,\\-2k+b=-1.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$一次函数的表达式为$y=x+1$.

(2)当$y=0$时,$x+1=0$,$x=-1$,

$\therefore C(-1,0)$.$\therefore OC=1$.

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

15. 解:(1)$\because$一次函数$y=kx+3$的图象与y轴相交于点D,

$\therefore$可令$x=0$,得$y=3$,因此可得$D(0,3)$.

(2)$\because\frac{OD}{AP}=\frac{1}{2}$,$OD=3$,$\therefore AP=6$.$\therefore OB=6$.

$\therefore DB=9$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DBP$中,$S_{\triangle DBP}=\frac{DB\cdot BP}{2}=27$,

$\therefore BP=6$.$\therefore P(6,-6)$.

把$(6,-6)$代入$y=kx+3$中,得$k=-\frac{3}{2}$.

$\therefore$一次函数的表达式为$y=-\frac{3}{2}x+3$.

把$(6,-6)$代入$y=\frac{m}{x}$中,得$m=-36$.

$\therefore$反比例函数的表达式为$y=-\frac{36}{x}$.

(3)根据图象可得,当$x>6$时,一次函数的值小于反比例函数的值.

16. 解:(1)函数表达式为$y=\frac{12\ 000}{x}(x>0)$.

(2)$2\ 104-(30+40+48+50+60+80+96+100)=1\ 600$(千克).

当$x=150$时,$y=\frac{12\ 000}{150}=80$.

$1\ 600\div80=20$(天).

答:余下的这些海产品预计再用20天可以全部售出.

(3)$1\ 600-80\times15=400$(千克).

$400\div2=200$(千克).

即如果正好用2天售完,那么平均每天需要售出200千克.

当$y=200$时,$x=\frac{12\ 000}{200}=60$.

答:新确定的价格最高不超过60元/千克才能完成销售任务.

17. 解:(1)在图象中可以看出,从出发到父子相遇花费了12分钟.

设小明步行速度为x米/分钟,则小明父亲骑车

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

速度为 $2x$ 米/分钟，根据题意，得

$12x+12\times2x=2\ 880$. 解得 $x=80$.

∴ 两人相遇处离学校的距离是 $80\times12=960$(米).

(2)设小明的父亲在赶往学校的过程中，路程 s 与时间 t 之间的函数表达式为 $s=kt+b$.

把(0,2 880)和(12,960)分别代入，得

$\begin{cases}2\ 880=b,\\960=12k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-160,\\b=2\ 880.\end{cases}$

∴ $s=-160t+2\ 880$.

(3)在 $s=-160t+2\ 880$ 中，

令 $s=0$，得 $0=-160t+2\ 880$.

解得 $t=18$. ∴ $20-18=2$(分钟).

答：如果由他的父亲骑车搭他到学校，他不会迟到，能提前 2 分钟到校.

第18章 平行四边形

18.1 平行四边形的性质

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. D **点拨：**∵ $BC=EC$，∴ $\angle CEB=\angle CBE$，

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $DC/\!/AB$，

∴ $\angle CEB=\angle EBF$，∴ $\angle CBE=\angle EBF$，

∴ BE 平分 $\angle CBF$，①正确；

∵ $BC=EC$，$CF\perp BE$，∴ $\angle ECF=\angle BCF$，

∴ CF 平分 $\angle DCB$，②正确；

∵ $DC/\!/AB$，∴ $\angle DCF=\angle CFB$，

∵ $\angle ECF=\angle BCF$，∴ $\angle CFB=\angle BCF$，

∴ $BF=BC$，③正确；

∵ $FB=BC$，$CF\perp BE$，∴ BE 垂直平分 FC，

∴ $PF=PC$，④正确. 故选 D.

4. D **点拨：**∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AH/\!/BG$，$AD=BC$，∴ $\angle H=\angle HBG$，

∵ $\angle HBG=\angle HBA$，∴ $\angle H=\angle HBA$，

∴ $AH=AB$，同理可证 $BG=AB$，∴ $AH=BG$，

∵ $AD=BC$，∴ $DH=CG$，故 C 正确，

∵ $AH=AB$，$\angle OAH=\angle OAB$，

∴ $OH=OB$，故 A 正确.

∵ $DF/\!/AB$，∴ $\angle DFH=\angle ABH$，

∵ $\angle H=\angle ABH$，∴ $\angle H=\angle DFH$，

∴ $DF=DH$，同理可证 $EC=CG$，

∵ $DH=CG$，∴ $DF=CE$，故 B 正确.

无法证明 $AB=AE$，故选 D.

5. 4 **点拨：**∵ $EF/\!/BC$，$GH/\!/AB$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ 四边形 $HPFD$、$BEPG$、$AEPH$、$CFPG$ 为平行四边形，

∴ $S_{\triangle PEB}=S_{\triangle BGP}$，$S_{\triangle PHD}=S_{\triangle DFP}$，$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CDB}$，

∴ $S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PEB}-S_{\triangle PHD}=S_{\triangle CDB}-S_{\triangle BGP}-S_{\triangle DFP}$，

即 $S_{四边形AEPH}=S_{四边形PFCG}$.

∵ $CG=2BG$，$S_{\triangle BPG}=1$，

∴ $S_{四边形AEPH}=S_{四边形PFCG}=4$.

故答案为 4.

6. **证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB/\!/CD$，$AB=CD$.

∵ $BE=DF$，∴ $AB+BE=CD+DF$，即 $AE=CF$.

∵ $AB/\!/CD$，∴ $AE/\!/CF$.

∴ $\angle EAO=\angle FCO$，$\angle E=\angle F$.

∴ $\triangle AOE\cong\triangle COF$. ∴ $OE=OF$.

7. **解：**添加的条件是 $DE=BF$，

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AB/\!/CD$，∴ $\angle EBA=\angle FDC$.

∵ $DE=BF$，∴ $BE=DF$.

∵ 在$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AB=CD,\\\angle EBA=\angle FDC,\\BE=DF,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

点拨：本题考查了平行四边形的性质和全等三角形的判定，通过做此题培养了学生分析问题和解决问题的能力，也培养了学生的发散思维能力，题目比较好，是一道开放性的题目，答案不唯一.

8. **证明：**(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB/\!/DF$，∴ $\angle ABE=\angle FCE$.

∵ E 为 BC 的中点，∴ $BE=CE$.

在$\triangle ABE$ 与$\triangle FCE$ 中，$\angle ABE=\angle FCE$，$BE=CE$，$\angle AEB=\angle FEC$，

∴ $\triangle ABE\cong\triangle FCE$. ∴ $AB=CF$.

(2)∵ $AB=CF$，$AB=CD$，

∴ $2AB=DF$.

∵ $AD=2AB$，∴ $AD=DF$.

∴ $\triangle ADF$ 是等腰三角形.

∵ $\triangle ABE\cong\triangle FCE$，∴ $AE=EF$.

∴ E 是 AF 的中点. ∴ $DE\perp AF$.

9. **解：**$EF+GH+MN=2a$，$EF+GH+MN$ 的值不随点 P 位置的改变而改变. 理由如下：

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=60°$.

∵ $GH/\!/BC$，

∴ $\angle AGH=\angle B=60°$，$\angle AHG=\angle C=60°$.

∴ $\triangle AGH$ 是等边三角形.

∴ $GH=AG=AM+MG$. ①

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同理可得$\triangle BMN$是等边三角形,

$\therefore MN = MB = MG + GB$. ②

$\because MN // AC, EF // AB$,

$\therefore$ 四边形$AMPE$是平行四边形,$\therefore PE = AM$.

同理可得四边形$BFPG$是平行四边形. $\therefore PF = GB$. $\therefore EF = PE + PF = AM + GB$. ③

①+②+③,得$EF + GH + MN = (AM + GB) + (AM + MG) + (MG + GB) = 2(AM + MG + GB) = 2AB = 2a$.

点拨:解本题的技巧1:把三条线段EF, MN, GH放到平行四边形或等边三角形中;技巧2:利用等量代换将线段EF, MN, GH转移到同一条边AB上.

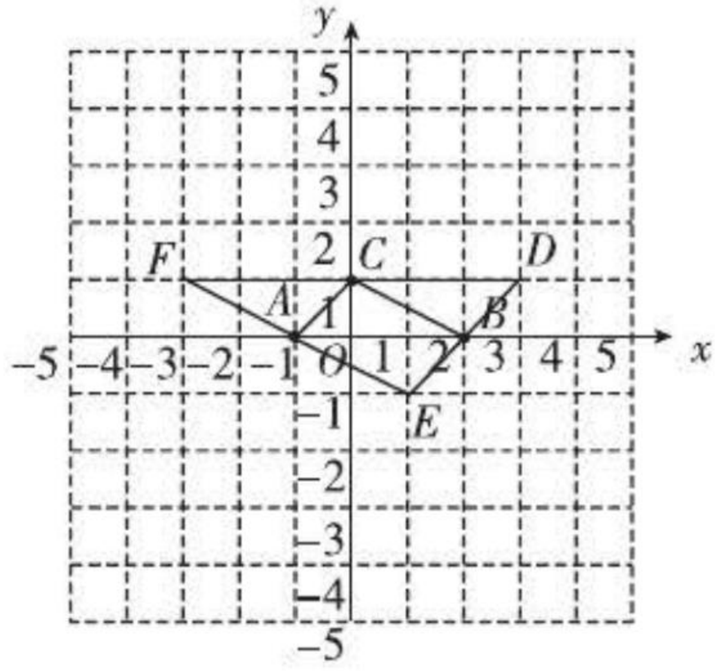
18.2 平行四边形的判定

【两年模拟兵法】

1. D **2**. C

3. D **点拨**:由$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ab + 2cd$,得$a^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2cd + d^2 = 0$,即$(a - b)^2 + (c - d)^2 = 0$,$\therefore a = b, c = d$,由"两组对边分别相等的四边形是平行四边形"可知这个四边形是平行四边形,故选D.

4. B **点拨**:如图所示:



(第4题)

①以AC为对角线,可以画出$\square AFCB$,$F(-3,1)$;

②以AB为对角线,可以画出$\square ACBE$,$E(1,-1)$;

③以BC为对角线,可以画出$\square ACDB$,$D(3,1)$.

故选B.

5. A

6. 2或6 **点拨**:①当点F在点C的左侧时,根据题意,得$AE = t$ cm, $BF = 2t$ cm,则$CF = BC - BF = (6 - 2t)$ cm. $\because AG // BC$,$\therefore$ 当$AE = CF$时,四边形$AECF$是平行四边形,即$t = 6 - 2t$,解得$t = 2$;②当点F在点C的右侧时,根据题意,得$AE = t$ cm,$BF = 2t$ cm,则$CF = BF - BC = (2t - 6)$ cm. $\because AG // BC$,$\therefore$ 当$AE = CF$时,四边形$AEFC$是平行四边形,即$t = 2t - 6$,解得$t = 6$. 综上所述,当$t = 2$或6时,以A, C, E, F为顶点的四边形是平行四边形.

7. **解**:由$AD = BC, AB = CD$,可得四边形$ABCD$为平行四边形,又因为$AE \perp BC$,所以$\square ABCD$的面积为$BC \cdot AE = 30 \times 15 = 450(m^2)$,即该地的面积为450 m^2.

点拨:要求该地的面积,通过分析可以得出该地为平行四边形形状的,应用平行四边形的面积公式,问题便得以解决.

8. (1)**证明**:$\because \angle A = \angle F$,$\therefore DE // BC$.

$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 1 = \angle DMF$,

$\therefore \angle DMF = \angle 2$,$\therefore DB // EC$,

$\therefore$ 四边形$BCED$为平行四边形.

(2)**解**:由(1)知四边形$BCED$为平行四边形,

$\therefore BC = DE$. $\because BN$平分$\angle DBC$,$\therefore \angle DBN = \angle CBN$.

$\because EC // DB$,$\therefore \angle CNB = \angle DBN$,

$\therefore \angle CNB = \angle CBN$,$\therefore CN = BC = DE = 2$.

点拨:此题考查了平行四边形的判定,熟练掌握平行四边形的判定是解本题的关键.

9. **解**:$\because DE // AC, DF // AB$,

$\therefore$ 四边形$AEDF$是平行四边形.

$\therefore DE = AF$.

$\because AB = AC = 10$,$\therefore \angle B = \angle C$.

$\because DF // AB$,$\therefore \angle CDF = \angle B$.

$\therefore \angle CDF = \angle C$. $\therefore DF = CF$.

$\therefore DE + DF = AF + CF = AC = 10$,

即$DE + DF$的值是10.

10. **证明**:(1)$\because$将$\square ABCD$沿过点A的直线l折叠,使点D落到AB边上的点D'处,

$\therefore \angle DAE = \angle D'AE, \angle DEA = \angle D'EA, \angle D = \angle AD'E$.

$\because DE // AD'$,$\therefore \angle DEA = \angle D'AE$.

$\therefore \angle DAE = \angle D'AE = \angle DEA = \angle D'EA$.

$\therefore \angle DAD' = \angle DED'$.

$\therefore$ 四边形$DAD'E$是平行四边形. $\therefore DE = AD'$.

$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore AB \parallel DC$. $\therefore CE \parallel D'B$.

$\therefore$ 四边形$BCED'$是平行四边形.

(2)$\because BE$平分$\angle ABC$,$\therefore \angle CBE = \angle EBA$.

$\because AD // BC$,$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180°$.

$\because \angle DAE = \angle EAB$,

$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90°$.

$\therefore \angle AEB = 90°$. $\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$.

11. **证明**:(1)$\because AD$平分$\angle BAC$,$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

$\because AD // EM$, $\therefore \angle BAD = \angle AEF$, $\angle CAD =$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle AFE$.

$\therefore \angle AEF = \angle AFE$. $\therefore AE = AF$.

(2)如图,作 $CG \parallel EM$,交 BA 的延长线于 G.

$\because EF \parallel CG$, $\therefore \angle G = \angle AEF$, $\angle ACG = \angle AFE$.

$\because \angle AEF = \angle AFE$,

$\therefore \angle G = \angle ACG$,

$\therefore AG = AC$.

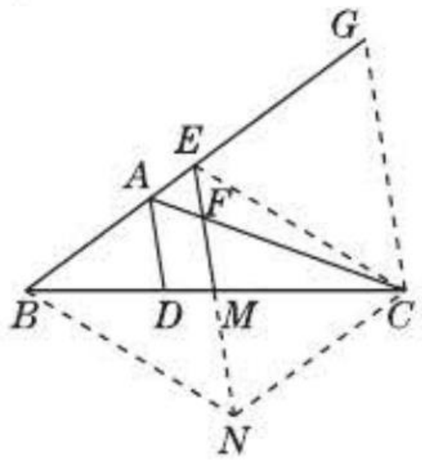
延长 EM 至 N,

使 $MN = EM$,

连结 NC, BN, EC.

$\because M$ 为 BC 的中点,

$\therefore MB = MC$.



(第 11 题)

$\therefore$ 四边形 $BNCE$ 是平行四边形.

$\therefore NC \parallel BE$, $NC = BE$. $\therefore NC \parallel EG$.

又$\because EM \parallel CG$, $\therefore$ 四边形 $NCGE$ 是平行四边形.

$\therefore NC = EG$. $\therefore BE = EG$.

$\therefore BE = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}(AB + AG) = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

12. 解:(1)设 x s 后,四边形 $ABQP$ 是平行四边形,

由题意得 $AP = x$ cm, $CQ = 2x$ cm.

$\because BC = 6$ cm, $\therefore QB = (6 - 2x)$ cm.

当 $AP \parallel BQ$ 时,四边形 $ABQP$ 是平行四边形.

$\therefore x = 6 - 2x$,解得 $x = 2$.

当 $x = 2$ 时, $AP = BQ = 2$ cm $< BC$,符合题意.

故 2 s 后,四边形 $ABQP$ 是平行四边形.

(3)设 y s 后,四边形 $PQCD$ 是平行四边形,由题意得 $AP = y$ cm, $CQ = 2y$ cm,

$\because AD = 8$ cm, $\therefore PD = (8 - y)$ cm.

当 $DP \parallel CQ$ 时,四边形 $PQCD$ 是平行四边形,

$\therefore 2y = 8 - y$,解得 $y = \frac{8}{3}$.

当 $y = \frac{8}{3}$ 时, $DP = CQ = \frac{16}{3}$ cm $< BC$,符合题意.

故 $\frac{8}{3}$ s 后,四边形 $PQCD$ 是平行四边形.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 证法 1:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because AF = CE$, $\therefore AE = CF$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$, $\therefore DE = BF$.

同理 $BE = DF$.

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

证法 2:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because AF = CE$, $\therefore AE = CF$, $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$,

$\therefore DE = BF$, $\angle AED = \angle CFB$,

$\therefore \angle DEF = \angle BFE$, $\therefore DE \parallel BF$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

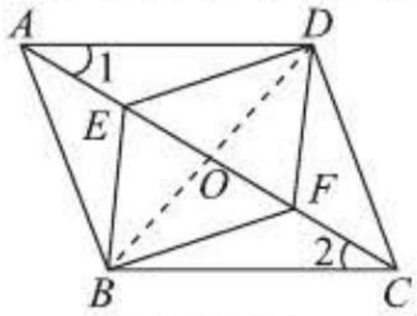
证法 3:如图所示,连结 BD,交 AC 于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

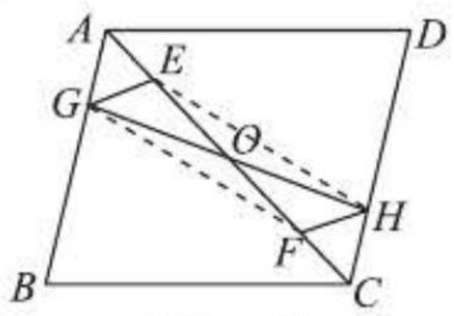
$\therefore AO = CO$, $BO = DO$.

又$\because AF = CE$, $\therefore EO = FO$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 证明:(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$. $\therefore \angle BAC = \angle DCA$.

$\because AF = CE$, $\therefore AE = CF$.

又$\because AG = CH$, $\therefore \triangle AGE \cong \triangle CHF$.

$\therefore \angle AEG = \angle CFH$.

$\therefore \angle GEO = \angle HFO$(等角的补角相等).

$\therefore EG \parallel FH$(内错角相等,两直线平行).

(2)如图所示,连结 GF, EH.

$\because \triangle AGE \cong \triangle CHF$,

$\therefore GE = HF$.

又$\because GE \parallel FH$,

$\therefore$ 四边形 $GFHE$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

$\therefore GH, EF$ 互相平分(平行四边形的对角线互相平分).

3. 证明:如图所示,延长 AD 到点 G,使 $DG = AD$,连结 BG, CG.

$\because DG = AD$, $BD = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形),

$\therefore AC \parallel BG$, $AC = BG$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

又$\because AE = FE$,

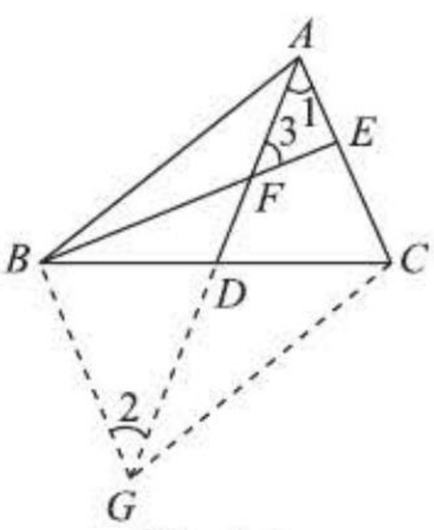
$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \angle 2 = \angle 3 = \angle BFG$,

$\therefore BG = BF$.

又$\because BG = AC$,

$\therefore AC = BF$.



(第 3 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:如图所示.

(1) DF

(2) $DF = BE$

(3) 证明:连结 BD, BF, BD 交 AC 于点 O.

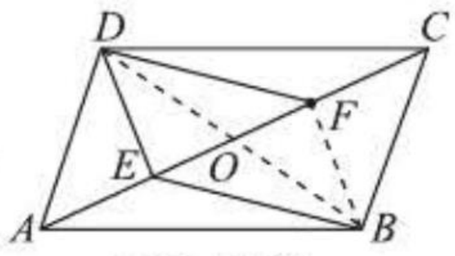
因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $OD = OB$, $OA = OC$.

又因为 $AE = CF$,所以 $OA - AE = OC - CF$,即 $OE = OF$.

在四边形 $EBFD$ 中,因为 $OE = OF$, $OB = OD$,

所以四边形 $EBFD$ 是平行四边形,所以 $DF = BE$.

点拨:本题答案不唯一,也可以连结 BF,得到 $BF = DE$.



(第4题)

5. (1) **证明**:∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形,

∴ $AB = AC$, $AD = AE$.

∵ 四边形 $ABFD$ 是平行四边形,

∴ $AD = BF$, $AD \parallel BF$.

∴ $BF = AE$, $\angle DAB + \angle FBA = 180°$.

∵ $\angle DAE = \angle BAC = 90°$,

∴ $\angle DAB + \angle EAC = 180°$,

∴ $\angle EAC = \angle FBA$.

在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle FBA$ 中,

∵ $AE = BF$, $\angle EAC = \angle FBA$, $AC = AB$,

∴ $\triangle EAC \cong \triangle FBA$,

∴ $CE = AF$, $\angle AEC = \angle AFB$.

如图①所示,延长 FA,交 EC 于点 G,

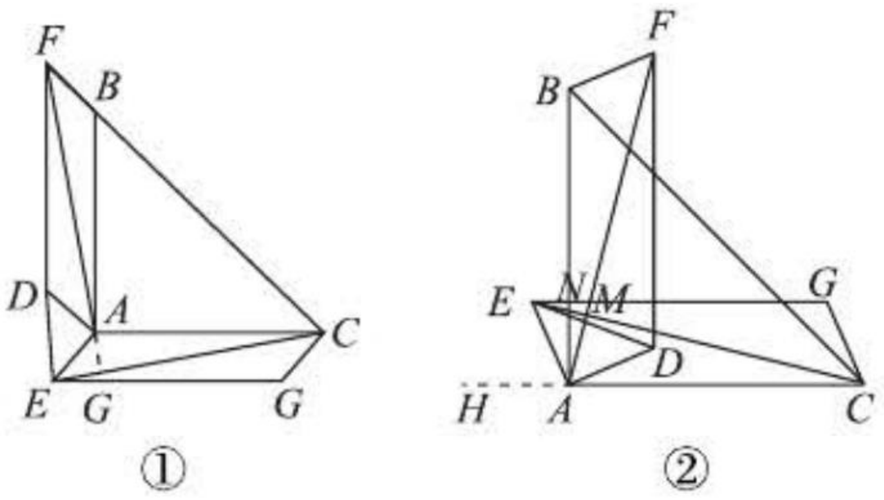
∵ $AD \parallel FB$,∴ $\angle AFB = \angle DAF$.

∴ $\angle DAF = \angle AEC$.

∵ $\angle DAE = 90°$,∴ $\angle DAF + \angle EAG = 90°$,

∴ $\angle AEC + \angle EAG = 90°$,∴ $\angle AGE = 90°$,

∴ $AF \perp CE$.



(第5题)

(2) **解**:结论仍然成立.

易得 $AB = AC$, $BF = AE$.

如图②所示,延长 CA 至点 H,

则 $\angle HAE + \angle EAC = 180°$.

∵ $BF \parallel AD$,∴ $\angle FBA + \angle BAD = 180°$.

∵ $\angle BAH = \angle EAD = 90°$,

∴ $\angle HAE + \angle EAB = 90°$, $\angle BAD + \angle EAB = 90°$,

∴ $\angle HAE = \angle BAD$.

∴ $\angle EAC = \angle FBA$(等角的补角相等).

∴ $\triangle EAC \cong \triangle FBA$,

∴ $EC = AF$, $\angle ECA = \angle BAF$.

设 CE 与 AB 交于点 N, AF 与 CE 交于点 M,

∵ $\angle BAC = 90°$,

∴ $\angle ECA + \angle ANC = 90°$,

∴ $\angle BAF + \angle ANC = 90°$,

∴ $\angle AME = 90°$,∴ $AF \perp CE$.

【第18章测试卷】

一、**1.** A

2. D **点拨**:只要是过对角线交点的直线都可以,故有无数种. 故选 D.

3. D **点拨**:∵ AE 平分 $\angle BAD$,

∴ $\angle BAE = \angle EAD$.

∵ $AD \parallel BC$,∴ $\angle EAD = \angle BEA$.

∴ $\angle BAE = \angle BEA$.

又∵ $AE = BE$,∴ $\angle BAE = \angle B$.

∴ $\angle BAE = \angle AEB = \angle B = 60°$.

则 $\angle BCD = 180° - \angle B = 120°$. 故选 D.

4. A **点拨**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD \parallel BC$,

∴ $\angle BAD = 180° - \angle B = 180° - 45° = 135°$.

∵ $\triangle AEF$ 是等边三角形,∴ $\angle EAF = 60°$,

∴ $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAF = 135° - 60° = 75°$.

5. A **点拨**:如图所示,

∵ $BF \perp CN$,

∴ $\angle EFC = \angle BFC = 90°$.

∵ $\angle BCD$ 的平分线 CN 交 $\square ABCD$ 的边 AD 于点 N,

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD \parallel BC$,∴ $\angle 1 = \angle 3$.

∴ $\angle 2 = \angle 3$,∴ $DN = DC$.

在 $\triangle CFE$ 和 $\triangle CFB$ 中, $\angle EFC = \angle BFC$, $FC = FC$, $\angle 1 = \angle 2$,

∴ $\triangle CFE \cong \triangle CFB$,

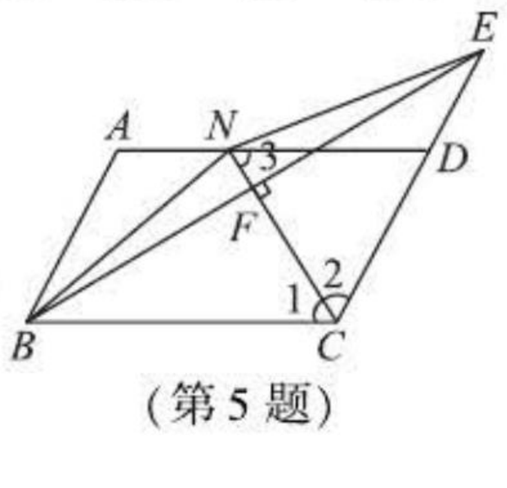
∴ $BF = EF$, $BC = CE = 8$,

∴ $DN + ED = CD + ED = 8$.

又∵ $BF \perp CN$, $BF = EF$,

∴ CN 垂直平分线段 BE,∴ $BN = NE = 6$.

∴ $\triangle DNE$ 的周长为 $NE + DN + ED = 6 + 8 = 14$.



(第5题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. C　**点拨：**$S=\frac{1}{2}S_{□ABCD}$，$S_1+S_2=S_{□ABCD}-S=\frac{1}{2}S_{□ABCD}$. 故 $S=S_1+S_2$. 故选 C.

7. B　**点拨：**∵ 点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，点 D 的坐标为 $(2,6)$，

∴ $k=xy=2\times6=12$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}$.

∵ 点 A 的坐标为 $(0,3)$，∴ 点 B 的纵坐标为 3，

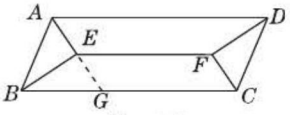
∴ $3=\frac{12}{x}$，解得 $x=4$，∴ $B(4,3)$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ 点 $C(4+2,6)$，即 $C(6,6)$，

∴ 将这个平行四边形向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度后点 C 的坐标为 $(6-2,6-3)$，即 $(4,3)$.

8. B　**点拨：**易得 $\angle AEB=90°$，如图，延长 AE 交 BC 于点 G，易得 $BG=AB$，则 $GC=BC-BG=BC-AB=16$. 易知四边形 $EFCG$ 是平行四边形，则 $EF=GC=16$. 故选 B.



（第 8 题）

二、9. 36°　**点拨：**因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\angle B=52°$，所以 $\angle D=\angle B=52°$. 由折叠可得 $\angle AED=\angle AED'$. 因为 $\angle AEF=20°+52°=72°$，所以 $\angle AED=\angle AED'=108°$，所以 $\angle FED'=\angle AED'-\angle AEF=108°-72°=36°$.

10. 56°

11. 60 cm²　**点拨：**由于 $\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 平移得到的，所以 $AD/\!/CF$，$AD=CF$，所以四边形 $ACFD$ 是平行四边形. 由已知条件易求得 $S_{□ACFD}=72\ \text{cm}^2$，进而可求出四边形 $ACED$ 的面积.

12. 1　**点拨：**如图所示，延长 EP 交 BC 于点 F.

∵ $\angle APB=90°$，$\angle APE=\angle BPC=60°$，

∴ $\angle EPC=150°$，

∴ $\angle CPF=180°-150°=30°$，

∴ PF 平分 $\angle BPC$.

又∵ $PB=PC$，∴ $PF\perp BC$，$BF=CF$.

在 Rt$\triangle ABP$ 中，设 $AP=a$，$BP=b$，则 $a^2+b^2=2^2=4$.

∵ $AE=AP$，$AD=AB$，$\angle EAP=\angle DAB=60°$，

∴ $\angle EAD=\angle PAB$，∴ $\triangle EAD\cong\triangle PAB$，

∴ $ED=PB=CP$. 同理可得 $\triangle APB\cong\triangle DCB$，

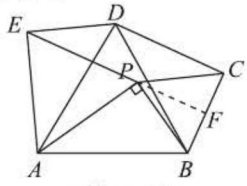
∴ $AP=CD$. ∵ $AP=EP$，∴ $EP=CD$.

∴ 四边形 $PCDE$ 是平行四边形，

∴ $S_{四边形PCDE}=EP\times CF=a\times\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}ab$.

又∵ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geqslant0$，

∴ $2ab\leqslant a^2+b^2=4$，∴ $\frac{1}{2}ab\leqslant1$，即四边形 $PCDE$ 面积的最大值为 1.



（第 12 题）

三、13. **解：**设 $AB=x$，$BC=y$.

因为 $S_{□ABCD}=BC\cdot AE=CD\cdot AF$，$2(AB+BC)=110$，且 $CD=AB=x$.

所以 $\begin{cases}24x=20y,\\2(x+y)=110,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=25,\\y=30.\end{cases}$

即 $AB=25$，$BC=30$.

点拨：在几何图形中求线段的长，如果涉及的未知数有两个，为了简便，多数情况下采用方程思想进行求解.

14. **解：**∵ 在$□ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，∴ $AF/\!/BE$.

∴ 要使四边形 $ABEF$ 是平行四边形，

只需 $AB/\!/EF$，这时 $\angle AOF=\angle BAC$.

∵ $AB^2+AC^2=5$，$BC^2=5$，

∴ $AB^2+AC^2=BC^2$. ∴ $\angle BAC=90°$.

∴ 当 $\angle AOF=90°$ 时，四边形 $ABEF$ 是平行四边形. ∴ 当旋转角为 90° 时，四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

15. **证明：**(1) ∵ 在$□ABCD$ 中，$DC/\!/AB$，

∴ $\angle2=\angle FEC$. 由折叠的性质，

知 $\angle1=\angle FEC$，∴ $\angle1=\angle2$.

(2) ∵ $\angle1=\angle2$，∴ $EG=FG$.

∵ $AB/\!/DC$，∴ $\angle DEG=\angle EGF$.

易知 $EC'/\!/B'F$，

∴ $\angle B'FG=\angle EGF$. ∴ $\angle DEG=\angle B'FG$.

由折叠的性质，知 $BF=B'F$，

∵ $DE=BF$，∴ $DE=B'F$.

∴ $\triangle DEG\cong\triangle B'FG$. ∴ $DG=B'G$.

16. **解：**甲、乙两人同时到达 F 站，理由如下：

∵ $BA/\!/DE$，$BD/\!/AE$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

∴ $AB=ED, BD=AE$.

∵ $BC\perp EC, AF/\!/BC$, ∴ $AF\perp EC$.

又∵ $EF=FC$, ∴ $DE=DC$.

∴ $BA+AE+EF=BD+DC+CF$,

∴ 两人同时到达 F 站.

17. **解**:当 $BP=\frac{13}{2}$ 时,四边形 $ABPQ$ 是平行四边形,

理由如下:

设 $PC=x$,所以 $BP=BC-PC=8-x$.

因为 M 是 DC 的中点,所以 $DM=MC$.

因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle Q=\angle QPC$.

又因为 $\angle DMQ=\angle PMC$,所以 $\triangle DMQ\cong\triangle CMP$,

所以 $DQ=PC=x$,所以 $AQ=AD+DQ=5+x$.

当四边形 $ABPQ$ 是平行四边形时,$AQ=BP$,则

$8-x=5+x$,解得 $x=\frac{3}{2}$,所以 $BP=8-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$.

故当 $BP=\frac{13}{2}$ 时,四边形 $ABPQ$ 是平行四边形.

第19章 矩形、菱形与正方形

19.1 矩形

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** A

4. D **点拨**:设 $FC'=x$,根据矩形的性质和折叠的性质即可得出 $C'D=3$, $FD=9-x$,在 $\mathrm{Rt}\triangle FC'D$ 中,利用勾股定理即可得出关于 x 的方程,解之即可得出结论.

5. 120° **点拨**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $\angle BAD=90°, AO=BO$. ∵ $\angle CAE=15°$, AE 平分 $\angle BAD$,

∴ $\angle BAO=45°+15°=60°$.

又∵ $AO=BO$,

∴ $\triangle ABO$ 为等边三角形.

∴ $\angle AOB=60°$.

∴ $\angle BOC=180°-60°=120°$.

6. 280 **点拨**:等量关系为:5 个小矩形的宽等于 2 个小矩形的长;6 个小矩形的宽加 1 个小矩形的长等于大矩形周长的一半.

7. $y=2x-3$ **点拨**:∵ $AB=2$,点 A 的坐标为(0, 1), ∴ $OB=1$.

∵ 点 E 的坐标为(2,1), ∴ $AE=2$.

∵ 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=BC=3$,

∴ $ED=AD-AE=1$.

∵ EF 平分矩形 $ABCD$ 的面积, ∴ $BF=DE=1$,

∴ 点 F 的坐标为(1, −1).

设直线 EF 的函数表达式为 $y=kx+b$,则 $\begin{cases}2k+b=1,\\ k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-3,\end{cases}$

∴ 直线 EF 的函数表达式为 $y=2x-3$.

8. (1) **证明**:在 $\triangle DCA$ 和 $\triangle EAC$ 中, $\begin{cases}DC=EA,\\ AD=CE,\\ AC=CA,\end{cases}$

∴ $\triangle DCA\cong\triangle EAC$(S. S. S.).

(2) **解**: $AD=BC$

证明如下:

∵ $AB=DC, AD=BC$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∵ $CE\perp AE$, ∴ $\angle E=90°$.

由(1)得 $\triangle DCA\cong\triangle EAC$, ∴ $\angle D=\angle E=90°$,

∴ 四边形 $ABCD$ 为矩形.

((2)题答案不唯一)

9. (1) **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $CD/\!/AB$, ∴ $\angle FCO=\angle EAO$.

在 $\triangle FCO$ 与 $\triangle EAO$ 中, $\begin{cases}\angle FOC=\angle EOA,\\ \angle FCO=\angle EAO,\\ CF=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle FCO\cong\triangle EAO$, ∴ $OF=OE$.

(2) **解**:如图,连结 OB,

∵ $\angle BEF=2\angle BAC$,

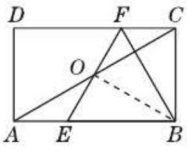
$\angle BEF=\angle BAC+\angle AOE$,

∴ $\angle BAC=\angle AOE$,

∴ $AE=OE$.

∵ $\triangle FCO\cong\triangle EAO$,

∴ $CF=OF=OE=AE$.



(第 9 题)

又∵ $BE=BF$, ∴ BO 垂直平分 EF.

易知 $\mathrm{Rt}\triangle BCF\cong\mathrm{Rt}\triangle BOF\cong\mathrm{Rt}\triangle BOE$.

又∵ $\angle ABC=90°$,

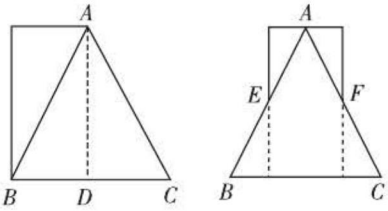
∴ $\angle CBF=\angle OBF=\angle OBE=30°$.

∴ $\angle EBF=60°$, ∴ $\triangle BEF$ 是等边三角形.

∴ $BE=EF=2FC=2\times2=4$.

∴ $AB=AE+BE=CF+BE=2+4=6$.

10. **解**:如图所示.(答案不唯一)



(第 10 题)

11. (1) **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OA=OC, AB\parallel CD.\therefore \angle E=\angle F.$

又$\because \angle AOE=\angle COF,$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF.$

(2)**解**:如图,EF 与 AC 满足 $EF=AC$ 时四边形 $AECF$ 是矩形. 理由如下:

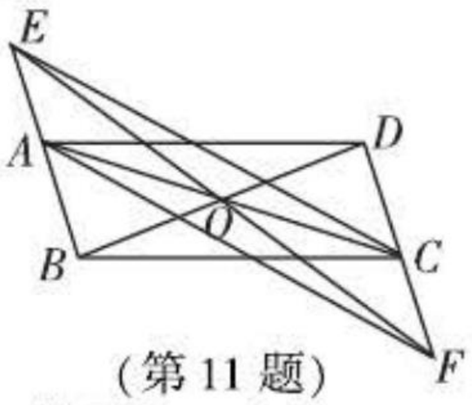
由(1)知$\triangle AOE\cong\triangle COF,$

$\therefore OE=OF.$

$\because OA=OC,$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because EF=AC,\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.



(第11题)

12. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=BC, AD\parallel CB,$

$\therefore \angle ADM=\angle CBN.$

$\because AM\perp BD, CN\perp BD,$

$\therefore \angle AMD=\angle CNB=90^\circ,$

在$\triangle AMD$ 和$\triangle CNB$ 中,

$\because \angle ADM=\angle CBN, \angle AMD=\angle CNB, AD=CB,$

$\therefore \triangle AMD\cong\triangle CNB,\therefore AM=CN,$

(2)**解**:当 $EF=AC$ 时,四边形 $AECF$ 是矩形,证明如下:

连结 AC,由(1)知$\triangle AMD\cong\triangle CNB,$

$\therefore DM=BN.$

$\because BE=DF,$

$\therefore DM+DF=BN+BE,$即 $MF=NE.$

在$\triangle AMF$ 和$\triangle CNE$ 中,

$\because MF=NE, \angle AMF=\angle CNE, AM=CN,$

$\therefore \triangle AMF\cong\triangle CNE,\therefore AF=CE, \angle AFE=\angle CEF,\therefore AF\parallel CE,$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

又 $EF=AC$,所以四边形 $AECF$ 是矩形.

19.2 菱形

【两年模拟兵法】

1. B **2**. C **3**. C

4. C **点拨**:如图,连结 EF,设 AE, BF 交于点 $O.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD\parallel BC,$

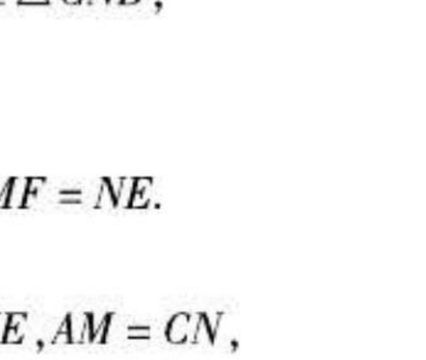
$\therefore \angle DAE=\angle BEA.$

$\because \angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 $E,$

$\therefore \angle DAE=\angle BAE,\therefore \angle BAE=\angle BEA,$

$\therefore AB=BE,$同理可得 $AB=AF,\therefore AF=BE.$

又$\because AD\parallel BC,\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.



(第4题)

$\because AB=AF,\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形,

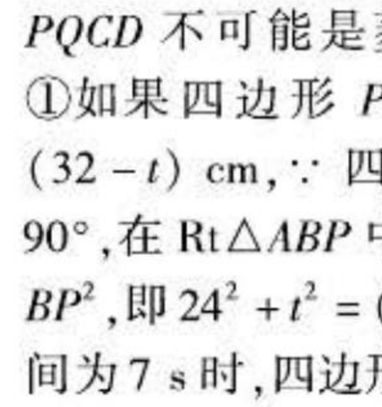
$\therefore AE\perp BF, OA=OE, OB=OF=\frac{1}{2}BF=6,$

$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8,$

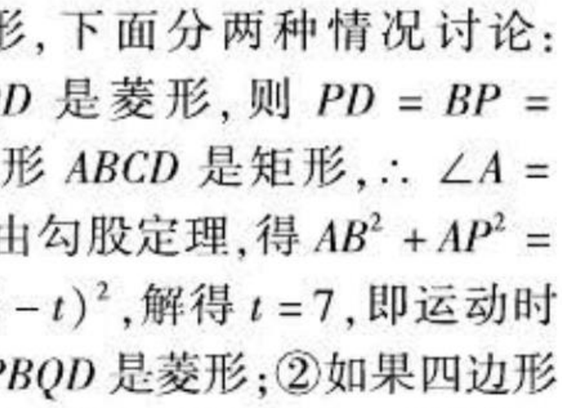
$\therefore AE=2OA=16.$

故选 C.

5. 菱形 **点拨**:$\because$ 两张纸片都是矩形,$\therefore AB\parallel CD, BC\parallel AD,\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 如图,过点 A 作 $AE\perp DC$ 于点 $E, AF\perp BC$ 于点 $F.\because$ 两张矩形纸片的宽度相等,$\therefore AE=AF.$ 又$\because S_{\square ABCD}=DC\cdot AE=BC\cdot AF,\therefore DC=BC,\therefore \square ABCD$ 为菱形.



(第5题)



(第6题)

6. 30°或 60° **点拨**:如图所示,四边形 $ABCD$ 即为剪得的菱形,则 $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD, AD\parallel BC,\because \angle ABC=60^\circ,\therefore \angle BAD=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ, \angle ABD=30^\circ,\therefore \angle BAC=60^\circ,\therefore$ 剪口与折痕所成的 $\angle\alpha$ 的度数应为 30°或 60°.

7. 7 或 25 **点拨**:显然四边形 $ABQP$ 和四边形 $PQCD$ 不可能是菱形,下面分两种情况讨论:①如果四边形 $PBQD$ 是菱形,则 $PD=BP=(32-t)$ cm,$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,$\therefore \angle A=90^\circ$,在 Rt$\triangle ABP$ 中,由勾股定理,得 $AB^2+AP^2=BP^2$,即 $24^2+t^2=(32-t)^2$,解得 $t=7$,即运动时间为 7 s 时,四边形 $PBQD$ 是菱形;②如果四边形 $APCQ$ 是菱形,则 $AP=AQ=CQ=t.\because$ 四边形 $ABCD$是矩形,$\therefore \angle ABQ=90^\circ$,在 Rt$\triangle ABQ$ 中,由勾股定理,得 $AB^2+BQ^2=AQ^2$,即 $24^2+(32-t)^2=t^2$,解得 $t=25$,即运动时间为 25 s 时,四边形 $APCQ$ 是菱形. 综上,$t=7$ 或 25.

8. (1)**证明**:$\because AB=AD,\therefore \angle ABD=\angle ADB.$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC,\therefore \angle ABD=\angle CBD,$

$\therefore \angle ADB=\angle CBD.$

$\because AB=AD, AC\perp BD,\therefore BO=DO,$

在$\triangle AOD$ 与$\triangle COB$ 中,$\begin{cases}\angle AOD=\angle COB,\\ OD=OB,\\ \angle ADO=\angle CBO,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$,

$\therefore AO = OC$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because AC \perp BD$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{5}$,$\therefore OC = \sqrt{CD^2 - OD^2} = 2$,

$\therefore AC = 4$,$\therefore S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 4\sqrt{5}$.

9. (1)**证明**:由折叠的性质,得 $\angle D = \angle D'$,

$CD = AD'$,$\angle D'AE = \angle DCE$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle B = \angle D$,$AB = CD$,$\angle BCD = \angle BAD$.

$\therefore \angle B = \angle D'$,$AB = AD'$,$\angle D'AE = \angle BAD$,

即 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$,$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AD'F$.

(2)**解**:四边形 $AECF$ 是菱形. 理由如下:

由折叠的性质,得 $AE = EC$,$\angle 4 = \angle 5$,$AF = FC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD /\!/ BC$,

$\therefore \angle 6 = \angle 5 = \angle 4$,$\therefore AF = AE = FC = EC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

10. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AO = CO$,$AD /\!/ BC$,$\therefore \angle FAO = \angle ECO$.

又 $\angle AOF = \angle COE$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE$,$\therefore AF = EC$.

(2)**解**:四边形 $BEDF$ 可能是菱形,理由如下:

由(1)知,$\triangle AOF \cong \triangle COE$,$\therefore OE = OF$,

易得 $OB = OD$,$\therefore EF$ 与 BD 互相平分.

当 $EF \perp BD$ 时,四边形 $BEDF$ 为菱形.

11. **解**:4.2 m = 420 cm,2.8 m = 280 cm,

$420 \div 30 = 14$(块),$280 \div 20 = 14$(块),

$14 \times 14 = 196$(块);

由题意易得四边形 $EFGH$ 是菱形且 4 块瓷砖可以拼成一个与白色菱形面积相等的淡黄色菱形.

$\therefore$ 当这面墙壁贴的瓷砖是 14 行 14 列时最小的面积相等的菱形最多,此时白色菱形有 196 个,淡黄色菱形有 $(14-1) \times (14-1) = 169$(个).

$\therefore$ 最小的面积相等的菱形最多有

$196 + 169 = 365$(个).

答:这面墙壁最少要贴这种瓷砖 196 块,全部贴满瓷砖后,这面墙壁最多会出现 365 个最小的面积相等的菱形,其中淡黄色的菱形有 169 个.

12. (1)**证明**:由题意,知 $AE = AD$,$AB = AC$,$\angle BAC = \angle EAD$.

$\because \angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$,$\angle EAD = \angle BAD + \angle EAB$,

$\therefore \angle EAB = \angle DAC$.

又 $AE = AD$,$AB = AC$,

$\therefore \triangle EAB \cong \triangle DAC$,

$\therefore BE = CD$.

(2)**解**:四边形 $BDFE$ 是菱形,证明如下:

$\because AB = AC$,$AD \perp BC$,$\therefore BD = CD$,$\angle ABC = \angle C$.

$\because BE = CD$,$\therefore BE = BD$.

由(1)知 $\triangle EAB \cong \triangle DAC$,$\therefore \angle EBF = \angle C$.

$\because \angle ABC = \angle C$,$\therefore \angle EBF = \angle ABC$.

又$\because BF = BF$,$\therefore \triangle EBF \cong \triangle DBF$,

$\therefore EF = DF$.

$\because EF /\!/ BC$,$\therefore \angle EFB = \angle FBD$,

$\therefore \angle EFB = \angle EBF$,$\therefore EF = EB$,

$\therefore BD = BE = EF = FD$,

$\therefore$ 四边形 $BDFE$ 是菱形.

19.3 正方形

【两年模拟兵法】

1. D

2. B **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore$ 直线 AC 是正方形 $ABCD$ 的对称轴.

$\because EG \perp AB$,$EI \perp AD$,$FH \perp AB$,$FJ \perp AD$,垂足分别为 G,I,H,J,$\therefore$ 根据对称性可知四边形 $EFHG$ 的面积与四边形 $EFJI$ 的面积相等.

$\therefore S_{阴影} = \frac{1}{2}S_{正方形ABCD} = \frac{1}{2}$.

3. C

4. 30°或 150° **点拨**:如图①,$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore AB = CD = AD = AE = DE$,$\angle BAD = \angle ADC = 90°$,$\angle ADE = \angle DAE = \angle AED = 60°$,

$\therefore \angle BAE = \angle CDE = 150°$.

又 $AB = AE$,$DC = DE$,

$\therefore \angle AEB = \angle CED = 15°$,

则 $\angle BEC = \angle AED - \angle AEB - \angle CED = 30°$.

如图②,$\because \triangle AED$ 是等边三角形,$\therefore AD = DE$,$\angle AED = \angle ADE = 60°$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = DC$,$\angle ADC = 90°$,$\therefore DE = DC$,

$\angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 90° - 60° = 30°$,

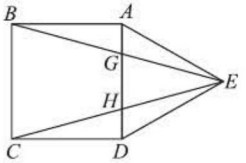
$\therefore \angle CED = \angle ECD = \frac{1}{2} \times (180° - 30°) = 75°$.

同理 $\angle BEA = 75°$.

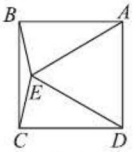
$\therefore \angle BEC = 360° - 75° \times 2 - 60° = 150°$.

$\therefore \angle BEC = 30°$或 $150°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



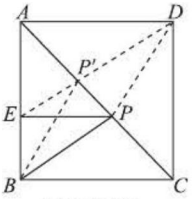
①



②

（第4题）

5. $\sqrt{34}$　**点拨：**如图，连结 DE，交 AC 于点 P'，连结 BP'，PD.



（第5题）

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ B，D 关于直线 AC 对称，∴ $PB=PD$，∴ $PB+PE=PD+PE$，∴ 当 P 与 P' 重合时，$PB+PE$ 的值最小，此时 $PB+PE=DE$. ∵ $BE=2$，$AE=3$，∴ $AD=AB=5$，∴ $DE=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$，故 $PB+PE$ 的最小值是 $\sqrt{34}$.

6. ①③④

7. **证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB=BC$，$\angle A=\angle CBE=90°$，∴ $\angle ABF+\angle CBF=90°$.

∵ $BF\perp CE$，∴ $\angle BCE+\angle CBG=90°$.

∴ $\angle BCE=\angle ABF$.

在△BCE 和△ABF 中，$\begin{cases}\angle BCE=\angle ABF,\\ BC=AB,\\ \angle CBE=\angle A,\end{cases}$

∴ △BCE≌△ABF，∴ $BE=AF$.

8. **证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle B=\angle D=\angle C=90°$.

∵ △AEF 是等边三角形，∴ $AE=AF$，$\angle AEF=\angle AFE=60°$.

∵ $\angle CEF=45°$，∴ $\angle CFE=\angle CEF=45°$，∴ $\angle AFD=\angle AEB=180°-45°-60°=75°$，∴ △$AEB$≌△$AFD$(A. A. S.)，∴ $AB=AD$，∴ 矩形 $ABCD$ 是正方形.

9. **解：**(1)平行四边形　(2)菱形　(3)菱形　(4)四边形 $EGFH$ 是正方形.

理由如下：∵ $AC=BD$，∴ □$ABCD$ 是矩形.

又∵ $AC\perp BD$，∴ □$ABCD$ 是正方形，∴ $\angle BOC=90°$，$\angle GBO=\angle FCO=45°$，$OB=OC$.

∵ $EF\perp GH$，∴ $\angle GOF=90°$，∴ $\angle BOG=\angle COF$，∴ △BOG≌△COF.

∴ $OG=OF$. 易知 $OG=OH$，$OE=OF$，∴ $GH=EF$.

由(3)知四边形 $EGFH$ 是菱形，∴ 四边形 $EGFH$ 是正方形.

10. (1)**证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle BOE=\angle AOF=90°$，$OB=OA$.

又∵ $AM\perp BE$，∴ $\angle BEO+\angle MAE=90°=\angle AFO+\angle MAE$，∴ $\angle BEO=\angle AFO$，∴ △BOE≌△AOF，∴ $OE=OF$.

(2)**解：**$OE=OF$ 还成立.

证明如下：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle BOE=\angle AOF=90°$，$OB=OA$.

又∵ $AM\perp BE$，∴ $\angle F+\angle MBF=90°=\angle E+\angle OBE$.

又∵ $\angle MBF=\angle OBE$，∴ $\angle E=\angle F$，∴ △BOE≌△AOF，∴ $OE=OF$.

11. (1)**证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP$.

又∵ $DP=DP$，∴ △ADP≌△CDP，∴ $PA=PC$.

又∵ $PA=PE$，∴ $PC=PE$.

(2)**解：**由(1)知△ADP≌△CDP，∴ $\angle DAP=\angle DCP$.

∵ $PA=PE$，∴ $\angle DAP=\angle E$，∴ $\angle FCP=\angle E$.

又∵ $\angle PFC=\angle DFE$，$\angle EDF=90°$，∴ $\angle CPE=\angle EDF=90°$.

(3)**解：**$AP=CE$. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP$.

又∵ $DP=DP$，∴ △ADP≌△CDP.

∴ $PA=PC$，$\angle DAP=\angle DCP$.

又∵ $PA=PE$，∴ $PC=PE$，$\angle DAP=\angle DEP$，∴ $\angle DCP=\angle DEP$.

又∵ $\angle PFC=\angle DFE$，∴ $\angle CPF=\angle EDF$.

∵ 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，∴ $\angle ADC=120°$，∴ $\angle EDC=60°$.

∴ $\angle CPE=\angle EDF=60°$.

又∵ $PC=PE$，∴ △PCE是等边三角形，∴ $PE=CE$.

又∵ $PA=PE$，∴ $AP=CE$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解：**∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$. ∴ $AO=BO$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AB=AO$,∴ $AB=AO=BO$.

∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形. ∴ $\angle ABD=60°$.

2. 解:设 $AD=x$,则 $AB=2x$. 在矩形 $ABCD$ 中,

$CD=AB=2x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AC=4\sqrt{5}$,

∴ $x^2+(2x)^2=(4\sqrt{5})^2$,

解得 $x=4$(负值舍去),即 $AD=4$,$AB=8$.

在矩形 $ABCD$ 中,$OD=OB$,$ED/\!/BF$,

∴ $\angle EDO=\angle FBO$,$\angle DEO=\angle BFO$,

∴ $\triangle DOE\cong\triangle BOF$,∴ $DE=BF$.

由折叠可知 $DF=BF$,∴ $DF=DE$.

设 $DF=DE=y$,则 $AF=8-y$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,$4^2+(8-y)^2=y^2$,解得 $y=5$.

∴ $DE=5$.

∴ $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot AD=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.

3. 解:四边形 $EFGH$ 是正方形,证明如下:

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$,$AB=BC=CD=DA$.

∵ $HA=EB=FC=GD$,

∴ $AE=BF=CG=DH$,

∴ $\triangle AEH\cong\triangle BFE\cong\triangle CGF\cong\triangle DHG$,

∴ $HE=EF=FG=HG$,∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

∵ $\triangle DHG\cong\triangle AEH$,∴ $\angle DHG=\angle AEH$.

∵ $\angle AEH+\angle AHE=90°$,

∴ $\angle DHG+\angle AHE=90°$,

∴ $\angle GHE=90°$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

4. (1)**证明:**延长 AE,BC 交于点 N,如图①所示.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $AD/\!/BC$,所以 $\angle DAE=\angle CNE$.

因为 AE 平分 $\angle DAM$,

所以 $\angle DAE=\angle MAE$,

所以 $\angle CNE=\angle MAE$,

所以 $AM=MN$.

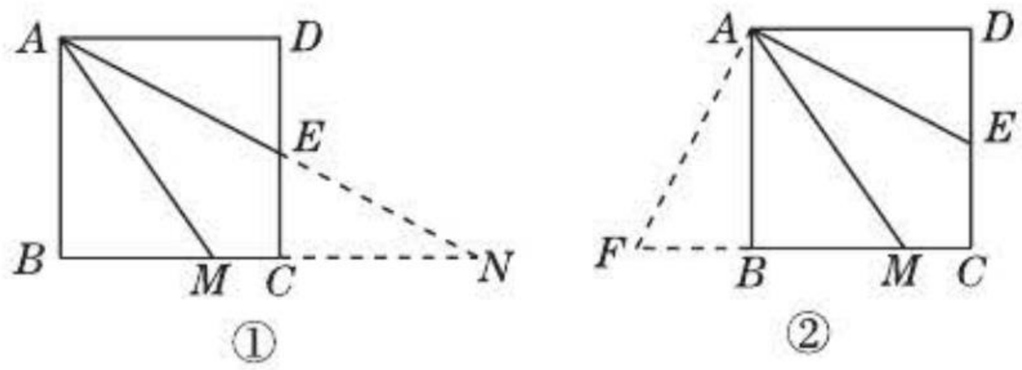
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle NCE$ 中,

$$\begin{cases}\angle DAE=\angle CNE,\\ \angle AED=\angle NEC,\\ DE=CE,\end{cases}$$

所以 $\triangle ADE\cong\triangle NCE$(A. A. S.),

所以 $AD=NC$,

所以 $AM=MN=NC+MC=AD+MC$.



(第4题)

(2)**解:**$AM=DE+BM$ 成立.

证明如下:过点 A 作 $AF\perp AE$,交 CB 的延长线于点 F,如图②所示,因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $\angle BAD=\angle D=\angle ABC=90°$,$AB=AD$,

$AB/\!/DC$,

所以 $\angle ABF=\angle D=90°$.

因为 $AF\perp AE$,所以 $\angle FAE=90°$,

所以 $\angle FAB=90°-\angle BAE=\angle DAE$.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ADE$ 中,$\begin{cases}\angle FAB=\angle EAD,\\ AB=AD,\\ \angle ABF=\angle D=90°,\end{cases}$

所以 $\triangle ABF\cong\triangle ADE$(A. S. A.),

所以 $BF=DE$,$\angle F=\angle AED$.

因为 $AB/\!/DC$,所以 $\angle AED=\angle BAE$,

因为 $\angle FAB=\angle EAD=\angle EAM$,

所以 $\angle AED=\angle BAE=\angle BAM+\angle EAM=\angle BAM+\angle FAB=\angle FAM$,

所以 $\angle F=\angle FAM$,所以 $AM=FM$,

所以 $AM=FB+BM=DE+BM$.

(3)**解:**结论 $AM=AD+MC$ 仍然成立;

结论 $AM=DE+BM$ 不成立.

5. (1)①$DE=EF$

②$NE=BF$

③**证明:**∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle A=\angle ABC=90°$,$AB=AD$.

由 N,E 分别为 AD,AB 的中点,知 $DN=AN=\frac{1}{2}AD$,$AE=EB=\frac{1}{2}AB$,

∴ $DN=EB$,$AN=AE$,

∴ $\angle ANE=45°$,∴ $\angle DNE=180°-45°=135°$.

∵ BF 平分 $\angle CBM$,∴ $\angle CBF=45°$,

∴ $\angle EBF=\angle EBC+\angle CBF=90°+45°=135°$.

∴ $\angle DNE=\angle EBF$.

∵ $\angle DEF=90°$,∴ $\angle BEF+\angle DEA=90°$.

∵ $\angle NDE+\angle DEA=90°$. ∴ $\angle NDE=\angle BEF$.

∴ $\triangle DNE\cong\triangle EBF$,∴ $DE=EF$,$NE=BF$.

(2)**解:**在 DA 边上截取 $DN=EB$(或截取 $AN=AE$),连结 NE,则点 N 为所求的点,此时 $DE=EF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

【第19章测试卷】

一、1. C

2. A　**点拨**：因为 $AB=AC$，所以 $\angle ABC=\angle ACB$. 由 $\angle FAG=110°$ 和三角形内角和为 $180°$，得 $\angle ABC=\frac{1}{2}(180°-\angle FAG)=35°$.

在矩形 $BDEC$ 中，$\angle DBC=90°$.

又因为 $\angle ABF=180°$，所以 $\angle FBD=55°$.

3. D

4. B　**点拨**：将 $\triangle ABC$ 折叠使点 A 落在点 D 处，折痕为 EF，

$\therefore \angle EAD=\angle EDA$，$\angle FAD=\angle FDA$，$AE=ED$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle EAD=\angle FAD$，

$\therefore \angle FDA=\angle EAD=\angle FAD=\angle EDA$，

$\therefore AE/\!/DF$，$DE/\!/AF$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

又$\because AE=ED$，

$\therefore$ 平行四边形 $AEDF$ 是菱形.

5. C　**点拨**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore AB/\!/CD$，$AB=BC$，$BC/\!/AD$.

$\therefore \angle MAO=\angle NCO$，$\angle AMO=\angle CNO$.

在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle CNO$ 中，$\begin{cases}\angle MAO=\angle NCO,\\ AM=CN,\\ \angle AMO=\angle CNO,\end{cases}$

$\therefore \triangle AMO\cong\triangle CNO$，$\therefore AO=CO$.

$\because AB=BC$，$\therefore BO\perp AC$，$\therefore \angle BOC=90°$.

$\because \angle DAC=28°$，$\therefore \angle BCA=\angle DAC=28°$，

$\therefore \angle OBC=90°-28°=62°$.

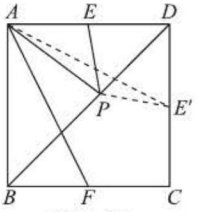
6. D　7. B

8. D　**点拨**：如图，取 CD 的中点 E'，连结 AE'，PE'.

由正方形的轴对称性，知 $EP=E'P$，$AF=AE'$，

$\therefore AP+EP=AP+E'P$，

$\therefore AP+EP$ 的最小值是线段 AE' 的长.



（第8题）

$\therefore AP+EP$ 的最小值是线段 AF 的长.

二、9. $\frac{12}{5}$　**点拨**：$\because AC=8$，$BD=6$，$\therefore OC=4$，$OB=3$.

在菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC\perp BD$，$\therefore BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because OE\perp BC$，垂足为点 E，$\therefore \frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}OE\cdot BC$，$\therefore OE=\frac{OB\cdot OC}{BC}=\frac{12}{5}$.

10. 4　11. $\frac{5}{3}$　12. ①②③⑤

三、13. (1) **证明**：在矩形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle D=90°$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$.

$\because EF\perp EC$，$\therefore \angle FEC=90°$，

$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DCE$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ \angle 1=\angle 3,\\ EF=EC,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DCE$，$\therefore AE=DC$.

(2) **解**：由(1)得 $AE=DC$，

$\therefore AE=DC=\sqrt{2}$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=CD=\sqrt{2}$，

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$AB^2+AE^2=BE^2$，

即 $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=BE^2$，$\therefore BE=2$.

14. (1) **证明**：在矩形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$\angle A=\angle D=90°$，

又$\because M$ 是 AD 的中点，$\therefore AM=DM$.

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle DCM$(S. A. S.).

(2) 1∶2

15. (1) **证明**：$\because AB/\!/CD$，$CE/\!/AD$，

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形，$\angle CAE=\angle DCA$.

$\because AC$ 平分 $\angle BAD$，$\therefore \angle DAC=\angle CAE$.

$\therefore \angle DAC=\angle DCA$. $\therefore AD=DC$.

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是菱形.

(2) **解**：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

理由：$\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形，

$\therefore AE=EC$. $\therefore \angle CAE=\angle ACE$.

$\because AE=EB$，$\therefore EB=EC$.

$\therefore \angle BCE=\angle B$.

又$\because$ 三角形内角和为 $180°$，

$\therefore \angle CAE+\angle ACE+\angle BCE+\angle B=180°$.

$\therefore \angle ACB=\angle ACE+\angle BCE=90°$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

16. (1) **证明**：如图①，过点 P 作 $MN/\!/AD$，交 AB 于点 M，交 CD 于点 N.

$\because PB\perp PE$，$\therefore \angle BPE=90°$，

$\therefore \angle MPB+\angle EPN=90°$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

$\therefore \angle BAD=\angle D=\angle ABC=90°$.

$\because AD/\!/MN$.

$\therefore \angle BMP=\angle BAD=\angle PNE=\angle D=90°$，

$\therefore \angle MPB+\angle MBP=90°$，

$\therefore \angle EPN=\angle MBP$.

在 Rt$\triangle PNC$ 中，$\angle PCN=45°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

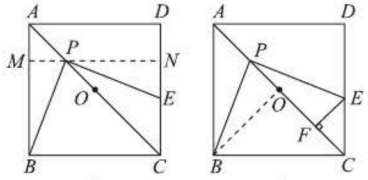
∴ △PNC 是等腰直角三角形,∴ $PN=CN$.

∵ $\angle BMP=\angle PNC=\angle ABC=90°$.

∴ 四边形 $MBCN$ 是矩形.

∴ $BM=CN$,∴ $BM=PN$,

∴ △BMP≌△PNE,∴ $PB=PE$.



(第 16 题)

(2)**解**:在点 P 运动的过程中,PF 的长度不会发生变化.

如图②,连结 OB.

∵ 点 O 是正方形 $ABCD$ 对角线 AC 的中点,

∴ $OB\perp AC$. ∴ $\angle AOB=90°$,

∴ $\angle AOB=\angle EFP=90°$,$\angle OBP+\angle BPO=90°$.

∵ $\angle BPE=90°$,

∴ $\angle BPO+\angle OPE=90°$,

∴ $\angle OBP=\angle OPE$.

由(1)得 $PB=PE$,∴ △OBP≌△FPE,

∴ $OB=PF$.

∵ $AB=2$,△ABO 是等腰直角三角形,

∴ $AB^2=OA^2+OB^2=2OB^2$. ∴ $OB=\sqrt{2}$.

∴ $PF=OB=\sqrt{2}$,即这个不变的值是$\sqrt{2}$.

17. (1)**证明**:∵ △ABC 和△DEF 是两个边长为 10 cm的等边三角形,

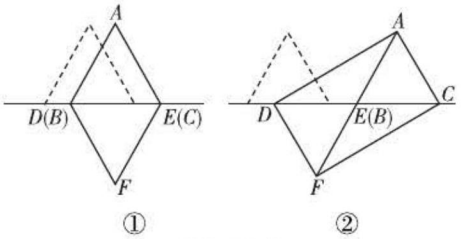
∴ $AC=DF$,$\angle ACD=\angle FDE=60°$. ∴ $AC/\!/DF$.

∴ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形.

(2)**解**:①如图①,当 $t=3$ 时,□$ADFC$ 是菱形.

理由:∵ $t=3$,∴ 点 B 与点 D 重合,点 C 与点 E 重合. 又∵ △ABC 和△DEF 是两个边长为10 cm的等边三角形,

∴ $AD=DF=FE=EA$. ∴ □$ADFC$ 是菱形.



(第 17 题)

②□$ADFC$ 有可能是矩形.

如图②,∵ □$ADFC$ 是矩形,∴ $\angle DAC=90°$.

又∵ $\angle ACD=60°$,∴ $\angle ADC=30°$.

易得 $DC=2AC=20$ cm.

∴ $t=(20+3-10)\div 1=13$(s).

第20章 数据的整理与初步处理

20.1 平均数

【两年模拟兵法】

1. A **2**. D

3. D **点拨**:由平均数的定义,知 $x_1+x_2+x_3+x_4=4\times 2=8$,则$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4+4\times 3)=\frac{1}{4}\times(8+12)=5$,故选 D. 关于平均数的计算有规律:若$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$,则数据 ax_1+b,ax_2+b,…,ax_n+b 的平均数是 $a\bar{x}+b$.

4. B **点拨**:因为 10 名学生的平均成绩是 x 分,所以 10 名学生的总成绩是 $10x$ 分,故整个组 15 名学生的平均成绩是$\frac{10x+84\times 5}{15}=\frac{10x+420}{15}$(分).

5. 77.4

6. 15.3 **点拨**:该店当月销售出水果的平均价格是 $11\times 60\%+18\times 15\%+24\times 25\%=15.3$(元).

7. 343

8. **解**:由题意,得

$$\bar{x}=\frac{0.01\times 2+0.02\times 1+0.03\times 5+0.04\times 3+0.05\times 1}{2+1+5+3+1}$$

$=0.03$(g/m^3).

所以这天该市市区的大气飘尘数据的平均值是 0.03 g/m^3.

9. **解**:(1)九年级捐图书数为 $1\ 000\times 30\%\times 4=1\ 200$(本),

八年级捐图书数为 $1\ 000\times 35\%\times 6=2\ 100$(本),

七年级捐图书数为 $1\ 000\times(1-30\%-35\%)\times 2=700$(本),

∴ 该校学生捐图书的总本数为 $1\ 200+2\ 100+700=4\ 000$(本).

(2)$4\ 000\div 1\ 000=4$(本),

∴ 该校学生平均每人捐图书 4 本.

10. **解**:(1)$\bar{x}_{甲}=(94+89+90)\div 3=273\div 3=91$(分),

$\bar{x}_{乙}=(92+90+94)\div 3=276\div 3=92$(分),

$\bar{x}_{丙}=(91+88+94)\div 3=273\div 3=91$(分),

∴ 甲的面试成绩的平均分$\bar{x}_{甲}$是 91 分,乙的面试成绩的平均分$\bar{x}_{乙}$是 92 分,丙的面试成绩的平均分$\bar{x}_{丙}$是 91 分;

(2)甲的综合成绩 $=40\%\times 95+60\%\times 91=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

38 + 54.6 = 92.6(分),
乙的综合成绩 = 40% × 94 + 60% × 92 = 37.6 + 55.2 = 92.8(分),
丙的综合成绩 = 40% × 94 + 60% × 91 = 37.6 + 54.6 = 92.2(分).
∵ 92.8 > 92.6 > 92.2, ∴ 乙将被录用.

11. **解**:(1)小聪的平均成绩是:
(80 + 90 + 98 + 60) ÷ 4 = 82(分),
小亮的平均成绩是:
(85 + 75 + 75 + 95) ÷ 4 = 82.5(分).
(2)小聪的毕业成绩是:
(80 × 2 + 90 × 3 + 98 × 3 + 60 × 2) ÷ (2 + 3 + 3 + 2) = 84.4(分),
小亮的毕业成绩是:
(85 × 2 + 75 × 3 + 75 × 3 + 95 × 2) ÷ (2 + 3 + 3 + 2) = 81(分),
84.4 > 81 > 80,
故小聪和小亮都达到了"优秀毕业生"的水平;小聪的毕业成绩更好些.
(3)(答案不唯一)小聪要加强体育锻炼,注意培养综合素质;小亮在学习文化知识方面还要努力,成绩有待进一步提高.

方法规律:当数据信息以表格或统计图的形式呈现时,要结合条件读懂表格或统计图,并从中获取有用的信息. 此题从条形统计图中得出每人各项成绩后计算平均成绩,再根据不同的权重计算两人的毕业成绩,充分体现了数形结合思想.

20.2 数据的集中趋势

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨**:本题主要考查中位数和扇形统计图,根据扇形统计图中各项目的圆心角度数求得其户数是解题的关键.

3. C **4.** B **5.** B **6.** C

7. A **点拨**:中位数 = (3 + 3) ÷ 2 = 3(小时);
平均数 = (1 × 2 + 2 × 2 + 3 × 4 + 6 × 2) ÷ 10 = 3(小时);
众数为 3 小时;故选 A.

8. **解**:填表如下:

人数 成绩 x / 部门	$40 \leqslant x \leqslant 49$	$50 \leqslant x \leqslant 59$	$60 \leqslant x \leqslant 69$	$70 \leqslant x \leqslant 79$	$80 \leqslant x \leqslant 89$	$90 \leqslant x \leqslant 100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙	1	0	0	7	10	2

a. 240
b. (答案不唯一,理由合理即可)
甲:①甲部门生产技能测试中,平均分较高,表示甲部门员工的生产技能水平较高;
②甲部门生产技能测试中,没有技能不合格的员工,表示甲部门员工的生产技能水平较高

9. **解**:(1)88 (2)86
(3)不能,因为全班学生成绩的中位数是 86 分,所以张华同学的成绩处于中游偏下水平.
(或者指出高于 83 分的有 30 名学生,而低于 83 分的仅有 15 名学生,所以张华同学的成绩处于中游偏下水平)

10. **解**:(1)填表如下:

	平均数(分)	众数(分)	中位数(分)
七年级	85.5	80	87
八年级	85.5	85	86
九年级	85.5	78	84

(2)①∵ 平均数都相同,八年级成绩的众数最高,
∴ 八年级的成绩更好一些;
②∵ 平均数都相同,七年级成绩的中位数最高,
∴ 七年级的成绩更好一些.
(3)∵ 七、八、九各年级前 3 名学生决赛成绩的平均数分别是 93 分、91 分、94 分,
∴ 从各年级参加决赛的选手中分别选出 3 人参加总决赛,九年级的实力更强一些.

11. (1)①乙 ②甲 (2)乙
点拨:此题重点考查了理解统计图的能力. 由题图可知甲、乙成绩的平均数相当. 但乙的合格次数比甲多,甲成绩的中位数大于乙成绩的中位数,据此进行判断.

20.3 数据的离散程度

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** A

4. A **点拨**:∵ $s_{甲}^2 = 0.2$, $s_{乙}^2 = 0.8$, ∴ $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$,
∴ 甲的成绩比乙的成绩稳定.

5. B

6. B **点拨**:由题意得,原来 6 位员工的月工资平均数为 4 500 元,因为新员工的月工资为 4 500 元,所以现在 7 位员工月工资的平均数是 4 500 元,由方差公式可知,7 位员工月工资的方差变小,故选 B.

7. **解**:由题意可知 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.

$(1)\bar{x'}=\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')$

$=\frac{1}{n}[(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots+(ax_n+b)]$

$=\frac{1}{n}[a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nb]$

$=a\bar{x}+b$.

$(2)s'^2=\frac{1}{n}[(x_1'-\bar{x'})^2+(x_2'-\bar{x'})^2+\cdots+(x_n'-\bar{x'})^2]$

$=\frac{1}{n}[(ax_1+b-a\bar{x}-b)^2+(ax_2+b-a\bar{x}-b)^2+\cdots+(ax_n+b-a\bar{x}-b)^2]$

$=\frac{1}{n}[a^2(x_1-\bar{x})^2+a^2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\bar{x})^2]$

$=a^2s^2$.

8. 解:(1)

	平均数(分)	中位数(分)	众数(分)
甲	80	79.5	78
乙	80	80	80

(2)13

(3)选乙同学. 理由:从平均数看,两人成绩相同,从中位数看,乙好于甲,从众数看,乙好于甲,从方差看,乙比甲稳定,故选乙同学参加该数学邀请赛.

9. 解:(1)将甲、乙两段台阶的高度值从小到大排列如下,

甲:10,12,15,17,18,18;乙:14,14,15,15,16,16.

甲的中位数是$(15+17)\div2=16$,平均数是$\frac{1}{6}\times(10+12+15+17+18+18)=15$.

乙的中位数是$(15+15)\div2=15$,平均数是$\frac{1}{6}\times(14+14+15+15+16+16)=15$.

故甲、乙两段台阶高度的平均数相同,中位数不同.

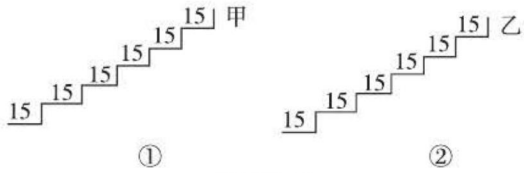
$(2)s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[(10-15)^2+(12-15)^2+(15-15)^2+(17-15)^2+(18-15)^2+(18-15)^2]=\frac{28}{3}$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[(14-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(15-15)^2+(16-15)^2+(16-15)^2]=\frac{2}{3}$.

$\because s_{乙}^2<s_{甲}^2$,

$\therefore$ 在乙台阶上行走会比较舒服.

(3)如图①和图②所示,为使游客在两段台阶上行走比较舒服,需使方差尽可能小,最理想应为0,同时不能改变台阶数量和台阶总体高度,故可使每个台阶高度均为15 cm(原平均数),使得方差为0.



(第9题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. C　**点拨:**由题意可得,两次加油间耗油30 L,行驶的路程为6 600 - 6 200 = 400(km),所以该车每100 km的平均耗油量为$30\div(400\div100)=7.5$(L). 故选C.

2. B

3. 解:(1)3.2　(2)2.1

(3)应该使用中位数来描述该公司每人所创年利润的一般水平.

4. 解:(1)这组数据的平均数没有实际意义.

(2)这组数据共有110个数据,中位数应是从小到大排列后第55个和第56个数据的平均数,这两个数据都是228,这组数据中228出现的次数最多,所以这组数据的中位数、众数都是228.

(3)商场总经理关心的是众数. 理由:众数是228,表明容积为228升的冰箱的销量最大,它能为商场带来较多的利润,因此,这种型号的冰箱要多进货,其他的型号则要少进货.

5. 解:(1)甲公司销售的该产品使用寿命的平均数为$\frac{1}{10}\times(4+5+5+5+5+7+9+12+13+15)=8$(年),众数为5年,中位数为6年;

乙公司销售的该产品使用寿命的平均数为$\frac{1}{10}\times(6+6+8+8+8+9+10+12+14+15)=9.6$(年),众数为8年,中位数为8.5年;

丙公司销售的该产品使用寿命的平均数为$\frac{1}{10}\times(4+4+4+6+7+9+13+15+16+16)=9.4$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(年),众数为4年,中位数为8年.

综上可知,甲公司宣传时用的是平均数,乙公司宣传时用的是众数,丙公司宣传时用的是中位数.

(2)乙公司.理由如下:分别从平均数、众数和中位数三项指标来看,乙公司的产品都比其他两个公司的要好,所以可以认为乙公司的产品质量较高,可以选购乙公司销售的该产品.

(3)可从以下两点对本公司的产品进行推销:①丙公司的该产品使用寿命的平均数和中位数都比甲公司的高;②从产品使用寿命的最高年限考虑,若购买丙公司产品,则其使用寿命比较高的机会比乙公司的大一些.

6. **解**:(1)因为 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(15+16+16+14+14+15)=15$;

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{6}\times(11+15+18+17+10+19)=15$.

甲路段的中位数为15;乙路段的中位数为16.

甲路段极差为16-14=2;乙路段极差为19-10=9.

$s_{甲}^2=\frac{2}{3}$,$s_{乙}^2=\frac{35}{3}$.

所以相同点:两段台阶路每一级台阶高度的平均数相同.不同点:两段台阶路每一级台阶高度的中位数、方差和极差不同.

(2)甲段台阶路走起来更舒服一些,因为它的每一级台阶高度的方差小.

(3)每一级台阶高度均整修为15 cm(原数据的平均数),使得方差为0,此时游客行走最方便.

【第20章测试卷】

一、**1.** C **2.** C **3.** C **4.** C **5.** B **6.** B **7.** B **8.** D

二、**9.** 35 **10.** 甲 **11.** 4 **12.** 甲

三、**13.** **解**:小丽的学期总评成绩是80×10%+75×30%+71×25%+88×35%=79.05(分),小明的学期总评成绩是76×10%+80×30%+70×25%+90×35%=80.6(分),79.05<80.6,所以小明的学期总评成绩高.

14. **解**:(1)$\frac{15\times40+25\times40+30\times20}{100}$

=22(元/千克).

答:该什锦糖的单价是22元/千克.

(2)设加入丙种糖果x千克,则加入甲种糖果$(100-x)$千克,根据题意,得

$\frac{30x+15(100-x)+22\times100}{200}\leqslant20$,解得$x\leqslant20$.

答:最多可加入丙种糖果20千克.

15. **解**:(1)$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(3+4+5+6+7)=5$(年),

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2]=2$,

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(4+4+5+6+6)=5$(年),

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(4-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(6-5)^2]=0.8$.

(2)由(1)知,甲厂、乙厂的该种电子产品在正常情况下的使用寿命平均数都是5年,

又∵$s_{甲}^2>s_{乙}^2$,∴会选购乙厂的产品.

16. **解**:(1)11.2;11.4

(2)方法一:(利用中位数说明)根据(1)中得到的调查数据的结论,可以估计在这次坐位体前屈的测试中,全市大约有一半学生的成绩大于或等于11.2厘米,大约有一半学生的成绩小于11.2厘米.这名学生的成绩是11.3厘米,大于中位数11.2厘米,所以可以推测他的成绩比一半以上学生的成绩好.

方法二:(利用平均数说明)根据(1)中得到的调查数据的结论,可以估计在这次坐位体前屈的测试中,全市学生的平均成绩是10.9厘米.这名学生的成绩是11.3厘米,大于平均成绩10.9厘米,所以可以推测他的成绩比全市学生的平均成绩好.

(3)如果全市有一半左右的学生被评定为"优秀",则标准成绩应定为"11.2厘米"(中位数).因为从调查情况来看,成绩在11.2厘米以上(含11.2厘米)的学生占总人数的一半左右,所以如果标准成绩定为11.2厘米,全市将有一半左右的学生能够被评定为"优秀".

17. **解**:(1)由折线统计图可知,甲组学生成绩从小到大排列为3,6,6,6,6,6,7,9,9,10,∴其中位数$a=6$,乙组学生成绩的平均数$b=\frac{5\times2+6\times1+7\times2+8\times3+9\times2}{10}=7.2$.

(2)∵甲组的中位数为6,乙组的中位数为7.5,而小英的成绩位于他们小组中游略偏上,∴小英是甲组的学生.

(3)①乙组的平均分高于甲组,即乙组的总体平均水平高;

②乙组的方差比甲组小,即乙组的成绩比甲组的成绩稳定.(答案不唯一)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第16章 分式

16.1 分式及其基本性质

练习

1. 解: 小华打靶的总环数是$(9m+7n)$环,共打了$(m+n)$发,所以小华的平均成绩是每发$\frac{9m+7n}{m+n}$环. **点拨:** 解题时,首先根据题意求出总环数及打靶的总次数,再用前者除以后者即可求出平均成绩.

2. 解: (1) $\frac{2ax^2y}{3axy^2}=\frac{2x}{3y}$. (2) $\frac{x^2-4}{xy+2y}=\frac{(x+2)(x-2)}{y(x+2)}=\frac{x-2}{y}$. (3) $\frac{2ab-2a^2}{3ab-3b^2}=\frac{2a(b-a)}{3b(a-b)}=-\frac{2a}{3b}$. **点拨:** 以上均为对分式约分的考查,其依据是分式的基本性质. 分子、分母中出现多项式时,要先分解因式,再约分.

3. 解: (1) $\frac{1}{3x^2}$与$\frac{5}{12xy}$的最简公分母是$12x^2y$,所以$\frac{1}{3x^2}=\frac{4y}{3x^2\cdot 4y}=\frac{4y}{12x^2y}$;$\frac{5}{12xy}=\frac{5\cdot x}{12xy\cdot x}=\frac{5x}{12x^2y}$. (2) $\frac{1}{x^2+x}$与$\frac{1}{x^2-x}$的最简公分母是$x(x+1)(x-1)$,所以$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^3-x}$;$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{x^3-x}$.

点拨: 进行分式通分时,找出最简公分母是关键. 分母为多项式时,应先将分母分解因式,再通分.

习题 16.1

1. (1) $\frac{400}{a-b}$ (2) $\frac{ma+nb}{m+n}$

2. 解: 整式有$\frac{1}{2}(x+y)$,$\frac{x}{3}$,$\frac{4x+9y}{13}$;分式有$\frac{1}{x}$,$\frac{2}{m-x}$,$\frac{x}{x-3}$.

点拨: 分母中是否含有字母(分母不为零)是判断其是否为分式的根本依据.

3. 解: (1) $x\neq 0$. (2) $x\neq -2$. (3) $x\neq -\frac{1}{4}$. (4) $x\neq\frac{5}{3}$.

点拨: 根据分式的分母不能为零,分别求解即可.

4. 解: (1) $\frac{(a-x)^2}{(x-a)^3}=\frac{(x-a)^2}{(x-a)^3}=\frac{1}{x-a}$.

(2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$.

5. 解: (1) 最简公分母为abc,$\frac{c}{ab}=\frac{c^2}{abc}$;$\frac{a}{bc}=\frac{a^2}{abc}$;$\frac{b}{ac}=\frac{b^2}{abc}$.

(2) 最简公分母为$x(x+1)^2$,$\frac{1}{x^2+x}=\frac{x+1}{x(x+1)^2}$;$\frac{-1}{x^2+2x+1}=\frac{-x}{x(x+1)^2}=-\frac{x}{x(x+1)^2}$.

点拨: 本题考查分式的通分,正确找出最简公分母是解题的关键. 若分子、分母为多项式,应先分解因式.

6. 解: 设锻造后的圆钢长l厘米. 根据题意,得$10a\cdot\pi\cdot r^2=l\cdot\pi\cdot a^2$. 解得$l=\frac{10r^2}{a}$.

答: 锻造后的圆钢长$\frac{10r^2}{a}$厘米.

点拨: 根据锻造前后圆钢的体积不变解题.

16.2 分式的运算

练习

1. 解: (1) $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$. (2) $\frac{x^2-4y^2}{3xy^2}\cdot\frac{xy}{x+2y}=\frac{(x+2y)(x-2y)\cdot xy}{3xy\cdot y(x+2y)}=\frac{x-2y}{3y}$. (3) $\frac{3y}{10x}\div\frac{6y^2}{5x^2}=\frac{3y\cdot 5x^2}{10x\cdot 6y^2}=\frac{x}{4y}$. (4) $\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{x^2}=\frac{(x+1)\cdot x\cdot x}{(x+1)(x-1)\cdot x\cdot x}=\frac{1}{x-1}$.

点拨: 进行分式的乘除法运算时,应严格依照运算法则进行. 分子、分母中含有多项式时,要先分解因式,再进行计算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解:(1) $\left(\frac{y}{-2x}\right)^2=\frac{y^2}{(-2)^2\cdot x^2}=\frac{y^2}{4x^2}$.

(2) $\left(\frac{-2a}{c^2}\right)^3=\frac{(-2)^3a^3}{(c^2)^3}=-\frac{8a^3}{c^6}$.

点拨:本题考查分式的乘方,依据分式乘方的法则,把分子、分母分别乘方. 乘方过程中注意符号的确定.

练习

1. 解:(1) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=\frac{1+2}{a}=\frac{3}{a}$.

(2) $\frac{10}{ab}-\frac{6}{ab}=\frac{10-6}{ab}=\frac{4}{ab}$.

(3) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$.

(4) $\frac{b}{a-b}+\frac{a}{b-a}=\frac{b}{a-b}-\frac{a}{a-b}=\frac{b-a}{a-b}=-1$.

2. 解:(1) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{v}{uv}+\frac{u}{uv}=\frac{u+v}{uv}$.

(2) $\frac{b}{a}-\frac{b}{4a^2}=\frac{4ab}{4a^2}-\frac{b}{4a^2}=\frac{4ab-b}{4a^2}$.

(3) $\frac{4}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}=\frac{4}{(a+1)(a-1)}-\frac{2}{a(a+1)}=\frac{4a-2(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a^2-a}$.

(4) $\frac{4}{a+2}+a-2=\frac{4}{a+2}+\frac{(a+2)(a-2)}{a+2}=\frac{4+a^2-4}{a+2}=\frac{a^2}{a+2}$.

点拨:以上题目均属于异分母分式的加减法运算,计算时应先通分,再按同分母分式的加减法法则进行计算. 解题时还应掌握技巧,如(4)题中,把$(a-2)$看成一个整体来计算较为简便.

习题 16.2

1. 解:(1) $\frac{ny}{mx}\cdot\frac{my}{nx}=\frac{mny^2}{mnx^2}=\frac{y^2}{x^2}$.

(2) $\frac{12x}{7y}\div 8x^2y=\frac{12x}{7y}\cdot\frac{1}{8x^2y}=\frac{12x}{56x^2y^2}=\frac{3}{14xy^2}$.

(3) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{x-1}=x$.

(4) $\left(-\frac{3b}{2a}\right)^2=(-1)^2\cdot\frac{3^2b^2}{2^2a^2}=\frac{9b^2}{4a^2}$.

2. 解:(1) $\frac{b-c}{a}+\frac{b+c}{a}=\frac{b-c+b+c}{a}=\frac{2b}{a}$.

(2) $\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{bc}{ab}-\frac{ac}{ab}=\frac{bc-ac}{ab}$.

(3) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{1-x^2}$.

(4) $\frac{x^2}{x-1}-x-1=\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\frac{1}{x-1}$.

点拨:进行分式加减法运算时,不是同分母分式的要先通分,化为同分母分式,再按同分母分式的加减法法则进行计算.

3. 解:(1) $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot x^3=\frac{1}{x^3}\cdot x^3-\frac{1}{x^2}\cdot x^3+\frac{1}{x}\cdot x^3=1-x+x^2$.

(2) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{2x}-x-y\right)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x+y}{2x}+\frac{1}{x+y}\cdot(x+y)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}+1=1$.

4. 解:$\frac{a}{b-c}-\frac{a}{b}=\frac{ab-ab+ac}{b(b-c)}=\frac{ac}{b(b-c)}$(千米).

答:爸爸每分钟比林林多骑$\frac{ac}{b(b-c)}$千米.

5. 解:由题意知,甲种苹果的单价为$\frac{a}{m}$元,乙种苹果的单价为$\frac{b}{n}$元,所以倍数为$\frac{a}{m}\div\frac{b}{n}=\frac{an}{bm}$.

答:甲种苹果的单价是乙种苹果单价的$\frac{an}{bm}$倍.

点拨:求倍数关系,需用除法. 本题中的分式除法运算,应按其运算法则进行计算.

16.3 可化为一元一次方程的分式方程

练习

1. 解:(1)方程两边都乘$(x-1)$,约去分母,得$4=x-1$. 解得$x=5$. 经检验,$x=5$是原方程的解.

(2)方程两边都乘$(x+1)(x+3)$,约去分母,得$3(x+3)=5(x+1)$,即$2x=4$. 解得$x=2$. 经检验,$x=2$是原方程的解.

2. 解:(1)方程两边都乘$(x-1)(2x+1)$,得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2(2x+1)=3(x-1)$,即 $x=-5$. 经检验,$x=-5$ 是原方程的解.

(2)原方程变形为 $\frac{1+3(x-2)}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}$,即 $\frac{3x-5}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}$. 方程两边都乘 $(x-2)$,得 $3x-5=x-1$. 解得 $x=2$. 经检验,$x=2$ 是原方程的增根,故原方程无解.

点拨:解可化为一元一次方程的分式方程时,首先应将方程两边都乘最简公分母,然后解一元一次方程,最后将解代入最简公分母中检验.

3. 解:设从 A 市开往乙地列车的速度为 x 千米/时,则从 A 市开往甲地列车的速度为 $(x+15)$ 千米/时,由题意,得 $\frac{400}{x+15}=\frac{350}{x}$. 解得 $x=105$. 经检验,$x=105$ 是原方程的解,且符合题意.

$105+15=120$(千米/时).

答:从 A 市开往甲、乙两地列车的速度分别为 120 千米/时,105 千米/时.

4. 解:设原来每天能装配机器 x 台. 由题意,得 $\frac{6}{x}+\frac{30-6}{2x}=3$. 解此方程,得 $x=6$. 经检验,$x=6$ 是原方程的解,且符合题意.

答:原来每天能装配机器 6 台.

点拨:在实际问题的解决过程中,求出的解不仅要满足所列方程,而且必须符合实际意义,因此检验时必须考虑到这一点. 常见的有时间、线段长等为正值,机器台数、人数为自然数等.

习题 16.3

1. 解:(1)方程两边都乘以 $x(x+1)$,约去分母,得 $2(x+1)=3x$. 解得 $x=2$. 经检验,$x=2$ 是原方程的解.

(2)方程两边都乘以 $(x-2)$,约去分母,得 $x-1=1$. 解得 $x=2$. 经检验,$x=2$ 是原方程的增根,所以原方程无解.

(3)方程两边都乘以 $(x-6)(x-3)$,约去分母,得 $x(x-3)=(x-2)(x-6)$,即 $x^2-3x=x^2-8x+12$. 解得 $x=\frac{12}{5}$. 经检验,$x=\frac{12}{5}$ 是原方程的解.

(4)方程两边都乘以 $(2x+5)(5x-2)$,约去分母,得 $2x(5x-2)+5(2x+5)=(2x+5)(5x-2)$,即 $6x+25=21x-10$. 解得 $x=\frac{7}{3}$. 经检验,$x=\frac{7}{3}$ 是原方程的解.

2. 解:设摩托车的速度为 x 千米/时,则抢修车的速度为 1.5x 千米/时. 根据题意,得 $\frac{30}{x}-\frac{30}{1.5x}=\frac{15}{60}$. 解得 $x=40$. 经检验,$x=40$ 是原方程的解,且符合题意. 所以 $1.5x=60$.

答:摩托车的速度为 40 千米/时,抢修车的速度为 60 千米/时.

3. 解:设该长途汽车在原来国道上行驶的速度为 x 千米/时,则 $\frac{1}{2}\times\frac{200+20}{x}=\frac{200}{x+45}$. 解得 $x=55$. 经检验,$x=55$ 是原方程的解,且符合题意.

答:该长途汽车在原来国道上行驶的速度为 55 千米/时.

16.4 零指数幂与负整数指数幂

练习

1. 解:(1)$(-0.1)^0=1$. (2)$\left(\frac{1}{2\,012}\right)^0=1$. (3)$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$. (4)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$.

点拨:在保证 $a\neq0$ 的条件下,$a^0=1$ 均成立;负整数指数幂可以转化成正整数指数幂的倒数,即 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$($a\neq0$,n 为正整数). 抓住这两条,即可轻松解决零指数幂与负整数指数幂的问题.

2. (1)10^{-6} (2)10^{-6} (3)10^{-6} (4)10^{-3} (5)10^{-4} (6)10^{-6}

点拨:对于生活和科学技术中常用的计量单位,不仅要能用科学记数法的形式表示,还应准确记忆和掌握,为以后的相关计算奠定基础.

3. 解:(1)$0.000\,03=3\times10^{-5}$.

(2)$-0.000\,006\,4=-6.4\times10^{-6}$.

(3)$0.000\,031\,4=3.14\times10^{-5}$.

(4)$2\,013\,000=2.013\times10^6$.

点拨:用科学记数法表示数就是把数写成 $a\times10^n$ 的形式,其中 $1\leqslant|a|<10$,n 为整

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数，对于绝对值小于 1 的数，n 等于左起第一个不为零的数字前所有零的个数（包括小数点前的零）的相反数.

4. 解：（1）$(a^{-3})^2(ab^2)^{-3}=a^{-6}\cdot a^{-3}\cdot b^{-6}=a^{-9}\cdot b^{-6}=\dfrac{1}{a^9b^6}$.

（2）$(2mn^2)^{-2}(m^{-2}n^{-1})^{-3}=2^{-2}m^{-2}\cdot n^{-4}\cdot m^6\cdot n^3=2^{-2}\cdot m^4\cdot n^{-1}=\dfrac{m^4}{4n}$.

点拨：负整数指数幂的乘、除、乘方的运算法则与正整数指数幂的运算法则完全相同，即 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$(a^m)^n=a^{mn}$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$，其中 $a\neq0$，最后只要把结果按 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（$a\neq0$，n 是正整数）化为正整数指数幂的形式即可.

习题 16.4

1. 解：（1）$5^{10}\div25^4=5^{10}\div(5^2)^4=5^{10-8}=5^2=25$.

（2）$(-117)^0=1$.

（3）$4^{-2}=\dfrac{1}{16}$.

（4）$\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=16$.

点拨：本题包含了同底数幂的除法、零指数幂、负整数指数幂的运算，可参照对应的运算法则运算.

2. 解：（1）$(x^{-3}yz^{-2})^2=x^{-6}\cdot y^2\cdot z^{-4}=\dfrac{y^2}{x^6z^4}$.

（2）$(a^3b^{-1})^{-2}(a^{-2}b^2)^2=a^{-6}\cdot b^2\cdot a^{-4}\cdot b^4=a^{-10}b^6=\dfrac{b^6}{a^{10}}$.

（3）$(2m^2n^{-3})^3\cdot(-mn^{-2})^{-2}=2^3m^6\cdot n^{-9}\cdot(-1)^{-2}\cdot m^{-2}\cdot n^4=8m^4n^{-5}=\dfrac{8m^4}{n^5}$.

点拨：按照同底数幂乘法的运算法则及负整数指数幂的运算法则进行计算即可.

3. 解：$0.001\ 239\ \text{g/cm}^3=1.239\times10^{-3}\ \text{g/cm}^3$.

点拨：用科学记数法表示时，指数的负号不要丢掉.

复习题

A 组

1. （1）$\dfrac{n}{m}$　（2）$\dfrac{bn}{a(a-n)}$

（3）6.63×10^{-34}

（4）$0.000\ 04$　（5）3.5×10^{-8}

2. 解：（1）$\left(-1\dfrac{1}{7}\right)^0=1$.

（2）$0.01^{-1}=(1\times10^{-2})^{-1}=1\times10^2=100$.

（3）$5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$.

（4）$(-0.1)^{-2}=(-1\times10^{-1})^{-2}=10^2=100$.

3. 解：（1）$100\ 000=1\times10^5$.

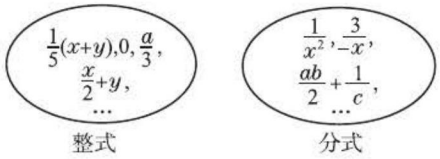
（2）$0.000\ 01=1\times10^{-5}$.

（3）$-112\ 000=-1.12\times10^5$.

（4）$-0.000\ 112=-1.12\times10^{-4}$.

点拨：绝对值较大、较小的数，均可以用科学记数法表示为 $a\times10^n$ 的形式，其中 a 的取值范围相同，都是 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数，注意 n 的值的符号.

4. 解：



整式　　分式

点拨：整式与分式的根本区别在于分母，分母中不含字母的为整式，分母中含有字母的为分式，但应注意分母不能为零.

5. 解：（1）等式右边分子、分母都乘 $(x+1)$，得 $\dfrac{1-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{?\cdot(x+1)}{(x+1)^2}$，两边的分子都约去 $(x+1)$，?为 $1-x$.

（2）等式右边分子、分母都乘 c，得 $\dfrac{?}{c^2+7c}=\dfrac{c}{c^2+7c}$，? 为 c.

（3）等式右边分子、分母都乘 $(a-2)$，得 $\dfrac{a-2}{?}=\dfrac{a-2}{2a^2+3a-14}$，? 为 $2a^2+3a-14$.

（4）等式左边分子、分母都乘 $(3x-2)$，得 $\dfrac{9x^2-6x}{6x^2+5x-6}=\dfrac{9x^2-6x}{?}$，? 为 $6x^2+5x-6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)$\frac{ab}{2a^2}=\frac{b}{2a}$.

(2)$\frac{-3x^2y}{9xyz}=-\frac{x}{3z}$.

(3)$\frac{x^2-3}{2x^3-6x}=\frac{x^2-3}{2x(x^2-3)}=\frac{1}{2x}$.

(4)$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x+y}$.

点拨:(1)(2)题直接进行约分即可;(3)(4)题约分前要先分解因式.

7. 解:(1)$\frac{1}{ax}$与$\frac{1}{bx}$的最简公分母是abx,所以$\frac{1}{ax}=\frac{b}{abx}$,$\frac{1}{bx}=\frac{a}{abx}$.

(2)$\frac{b}{a-x}$与$\frac{c}{ay-xy}$的最简公分母是$y(a-x)$,所以$\frac{b}{a-x}=\frac{by}{y(a-x)}=\frac{by}{ay-xy}$.

(3)$\frac{2}{x+1}$与$\frac{3}{x+2}$的最简公分母是$(x+1)(x+2)$,所以$\frac{2}{x+1}=\frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\frac{2x+4}{x^2+3x+2}$,$\frac{3}{x+2}=\frac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{3x+3}{x^2+3x+2}$.

(4)$\frac{1}{2x+5}$与$\frac{2}{4x^2-25}$的最简公分母是$(2x+5)(2x-5)$,所以$\frac{1}{2x+5}=\frac{2x-5}{(2x+5)(2x-5)}=\frac{2x-5}{4x^2-25}$.

点拨:通分的关键是找到最简公分母.

8. 解:(1)$\frac{xy(x+y)}{(x-y)^2}\cdot\frac{x-y}{xy+y^2}=\frac{xy(x+y)(x-y)}{(x-y)^2\cdot y(x+y)}=\frac{x}{x-y}$.

(2)$\left(\frac{y}{6x^2}\right)^2\div\left(-\frac{y^2}{4x}\right)^2=\frac{y^2}{36x^4}\div\frac{y^4}{16x^2}=\frac{y^2}{36x^4}\cdot\frac{16x^2}{y^4}=\frac{4}{9x^2y^2}$.

(3)$\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-2ab-a^2+b^2}{ab}=\frac{2b^2-2ab}{ab}=\frac{2b-2a}{a}$.

(4)$\frac{3}{a-1}-\frac{2}{2-a}=\frac{3}{a-1}+\frac{2}{a-2}=\frac{3(a-2)+2(a-1)}{(a-1)(a-2)}=\frac{3a-6+2a-2}{(a-1)(a-2)}=\frac{5a-8}{a^2-3a+2}$.

点拨:分式的运算,先依据分式的基本性质,对分式进行通分或约分,再进行运算. 注意化简后的结果必须是最简形式,即分子、分母中不再含有公因式.

9. 解:(1)方程两边都乘$6(x+1)$,约去分母,得$6+3(x+1)=5(x+1)$,即$6+3x+3=5x+5$. 解得$x=2$. 经检验,$x=2$是原方程的解.

(2)方程两边都乘$(x-2)(x-3)$,约去分母,得$2(x-2)=3(x-3)$. 解得$x=5$. 经检验,$x=5$是原方程的解.

(3)方程两边都乘$(x^2+5x-6)(x^2+x+6)$,约去分母,得$x^2+x+6=x^2+5x-6$,解得$x=3$. 经检验,$x=3$是原方程的解.

点拨:解分式方程时必须进行检验,因为约去分母时有可能在两边都乘零,这样就会产生增根,所以求出分式方程的根后,应将根代入原方程或代入最简公分母中加以验证,若是增根,则应舍去.

10. 解:这n名学生的平均成绩为$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

点拨:求平均成绩就是用总成绩除以总人数.

11. 解:设乙车的速度为x千米/时,则甲车的速度为$(x+10)$千米/时. 根据题意,得$\frac{450}{x+10}=\frac{400}{x}$. 解得$x=80$. 经检验,$x=80$是原方程的解,且符合题意,可得$x+10=90$.

答:乙车的速度为80千米/时,甲车的速度为90千米/时.

点拨:根据题意可直接设出乙车的速度,间接得到甲车的速度,再根据时间关系列出方程并求解.

B组

12. 解:(1)$\frac{a^2}{a-b}-a-b=\frac{a^2}{a-b}-\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=\frac{b^2}{a-b}$.

(2)$\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^2\div\frac{x-1}{x+1}=\left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^2\div\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x+1}$.

(3)$\frac{2ab}{(a-b)(a-c)}+\frac{2bc}{(a-b)(c-a)}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{2ab-2bc}{(a-b)(a-c)}=\frac{2b}{a-b}$.

(4) $\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\div\frac{xy}{x^2-y^2}=\frac{x+y+x-y}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{xy}=\frac{2}{y}$.

点拨:(1)中把 $-a-b$ 变成 $-(a+b)$,将 $a+b$ 当成一个整体进行计算;

(2)(4)都要按运算顺序先算括号里面的,以便产生可约去的公因式;

(3)中注意把分母化为相同的,即 $c-a=-(a-c)$.

13. 解:设原计划每天能完成 x 套校服,则实际每天完成 $(1+20\%)x$ 套校服. 根据题意,得

$\frac{3\,000}{x}-\frac{3\,000}{(1+20\%)x}=4$.

解得 $x=125$.

经检验,$x=125$ 是原方程的解,且符合实际意义.

答:原计划每天能完成 125 套校服.

14. 解:设上山的路程为 s 千米,则上山所用的时间为 $\frac{s}{a}$ 小时,下山所用的时间为 $\frac{s}{b}$ 小时,则货车上、下山的平均速度为 $\frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$(千米/时).

答:货车上、下山的平均速度为 $\frac{2ab}{a+b}$ 千米/时.

C 组

15. 解:(1)由 $a+\frac{1}{a}=2$,得 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=4$,即 $a^2+2+\frac{1}{a^2}=4$. 所以 $a^2+\frac{1}{a^2}=2$.

(2)由 $a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$,得 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\frac{9}{4}$,即 $a^2-2+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{4}$. 所以 $a^2+\frac{1}{a^2}=\frac{17}{4}$.

16. 解:(1) $\frac{-2x^2}{x}=-2x$,$\frac{4x^3}{-2x^2}=-2x$,$\frac{-8x^4}{4x^3}=-2x$,$\frac{16x^5}{-8x^4}=-2x$,…. 发现:一般地,如果 n 是正整数,那么第 n 个单项式可表示为 $(-2)^{n-1}\cdot x^n$.

(2)第 10 个单项式为 $(-2)^{10-1}\cdot x^{10}=-512x^{10}$.

第 17 章 函数及其图象

17.1 变量与函数

练习

1. 解:一辆轿车以 80 km/h 的速度在高速公路上行驶,行驶的路程 s(km)与行驶的时间 t(h)之间的函数关系式为 $s=80t(t\geqslant 0)$;秀水村的耕地面积是 10^6 m^2,则这个村人均占有的耕地面积 A(m^2)与人数 x(人)之间的函数关系式为 $A=\frac{10^6}{x}$(x 为大于 0 的自然数);圆柱的底面半径为 5 m,其体积 V(m^3)与高 h(m)之间的函数关系式为 $V=25\pi h(h>0)$. **点拨**:此题具有开放性,同学们的答案只要符合题意即可.

2. 解:(1)平均身高是 155 cm.

(2)约从 11 岁开始增加特别迅速.

(3)反映了该市中小学男学生的平均身高和年龄这两个变量之间的关系,其中年龄是自变量,平均身高是因变量.

点拨:要善于从表中获取信息,并且掌握自变量和因变量的定义.

3. 解:(1) $C=2\pi r(r>0)$.

(2) $s=60t(t\geqslant 0)$.

(3) $S=(n-2)\times 180°(n>2,n$ 为整数).

练习

1. 解:(1)当 $x=-2$ 时,$y=\frac{5\times(-2)+7}{2}=-\frac{3}{2}$;当 $x=3$ 时,$y=\frac{5\times 3+7}{2}=11$.

(2)当 $x=-2$ 时,$y=(-2)^2-(-2)-2=4$;当 $x=3$ 时,$y=3^2-3-2=4$.

2. 解:(1) $y=0.50x$,x 为任意非负数.

(2) $y=\frac{40}{x}$,x 可取任意正数.

(3) $S=100\pi-\pi r^2$,r 的取值范围是 $0<r<10$.

点拨:要注意分清常量和变量,并掌握自变量的取值范围的求法.

3. 解:当 $t=8$ 时,$s=10t+2t^2=10\times 8+2\times 8^2=208$,所以坡长为 208 米.

点拨:把 $t=8$ 代入函数关系式即可求出坡长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 17.1

1. 解:(1)$S=\frac{5}{2}h$,$h>0$.

(2)$\beta=90°-\alpha$,$0°<\alpha<90°$.

(3)$y=1.50x$,$x\geqslant 0$ 且 x 为整数.

2. 解:(1)$y=12-4x$,$0<x<3$.

(2)$y=0.80n$,n 为不小于 0 的整数.

(3)$S=x(6-x)$,$0<x<6$.

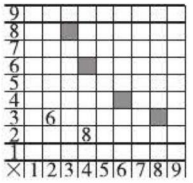
点拨:注意实际问题中自变量的取值范围.

3. 解:(1)当 $x=2$ 时,$y=(2+1)\times(2-2)=0$;当 $x=-3$ 时,$y=(-3+1)\times(-3-2)=10$.

(2)当 $x=2$ 时,$y=2\times 2^2-3\times 2+2=4$;当 $x=-3$ 时,$y=2\times(-3)^2-3\times(-3)+2=29$.

(3)当 $x=2$ 时,$y=\frac{2+2}{2-1}=4$;当 $x=-3$ 时,$y=\frac{-3+2}{-3-1}=\frac{1}{4}$.

4. 解:填表略. 涂黑部分如图所示. y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{24}{x}$,$x=3,4,6,8$.



(第 4 题图)

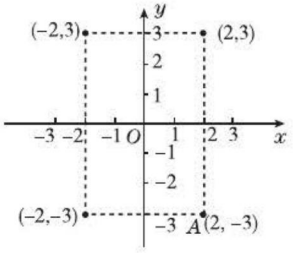
点拨:明确 $xy=24$ 是解此题的关键,注意自变量的取值范围.

17.2 函数的图象

练习

1. 解:如图所示,这些点的坐标分别是(2,3),(−2,−3),(−2,3).

点拨:善于利用直角坐标系来求解,掌握对称点坐标的特征.

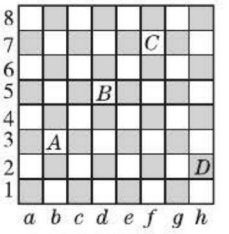


(第 1 题图)

2. 解:关于 x 轴对称的两点的横坐标相同,纵坐标互为相反数;关于 y 轴对称的两点的横坐标互为相反数,纵坐标相同;关于原点对称的两点的横、纵坐标分别互为相反数.

点拨:此题的结论很重要,同学们应该记住.

3. 解:A、B、C、D 四点的位置如图所示.



(第 3 题图)

点拨:此题是直角坐标系在实际生活中的应用.

4. 解:电影院的座位、地图上某点的经、纬度等.

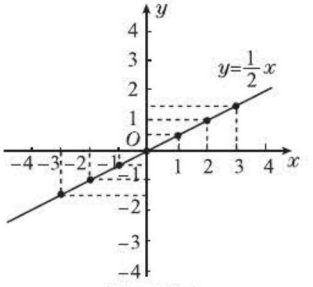
点拨:此题答案不唯一,符合题意即可.

练习

1. 解:

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	$-\frac{3}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…

描点、连线,函数图象如图所示.

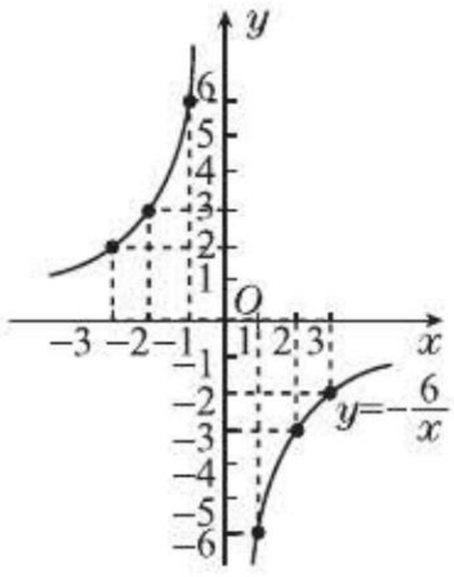


(第 1 题图)

2. 解:列表如下:

x	−3	−2	−1	1	2	3
y	2	3	6	−6	−3	−2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第2题图）

描点、连线，函数的图象如图所示.

点拨：此题是利用描点法画函数的图象，注意函数 $y=-\frac{6}{x}$ 中的自变量 $x\neq0$，描点要准确，连线要光滑.

练习

1. 解：(1)世界总人口数呈逐年增长的趋势.

(2)略.

点拨：从图象中获取对我们有用的信息是大家应该具备的技能.

2. 解：(3). **点拨**：注意自变量 t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant4$，h 的取值是随着 t 的增大而减小的.

3. 解：小明先走了3分，到达离家250米处的一个公共阅报栏前看了5分的报纸，又向前走了2分，到达离家450米处后返回，走了6分到家.

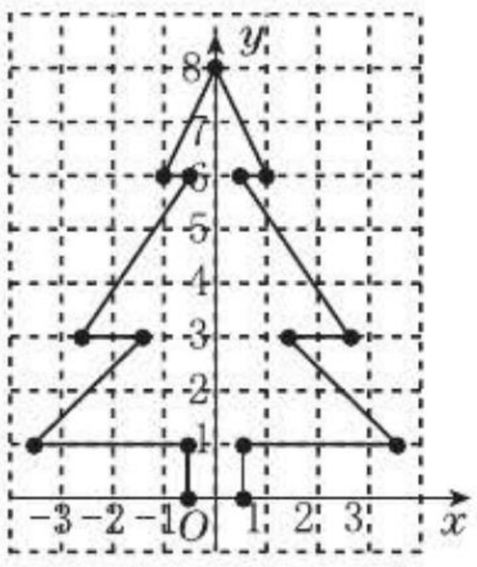
点拨：此题是与实际生活相联系的问题，可见本节知识的应用很广泛.

习题 17.2

1. 解：(1)不正确. (2)正确. (3)正确. (4)正确.

点拨：(1)中(2,3)和(3,2)表示的是不同的点；(2)关于原点对称的两点的横、纵坐标分别互为相反数；(3)在 x 轴上的点的纵坐标为0，在 y 轴上的点的横坐标为0，坐标原点为(0,0)；(4)第一象限内的点的横坐标和纵坐标均大于0.

2. 解：一棵树，如图所示.



（第2题图）

3. 解：题图中左下角的一个棋子的位置可以表示为(6,十三)；

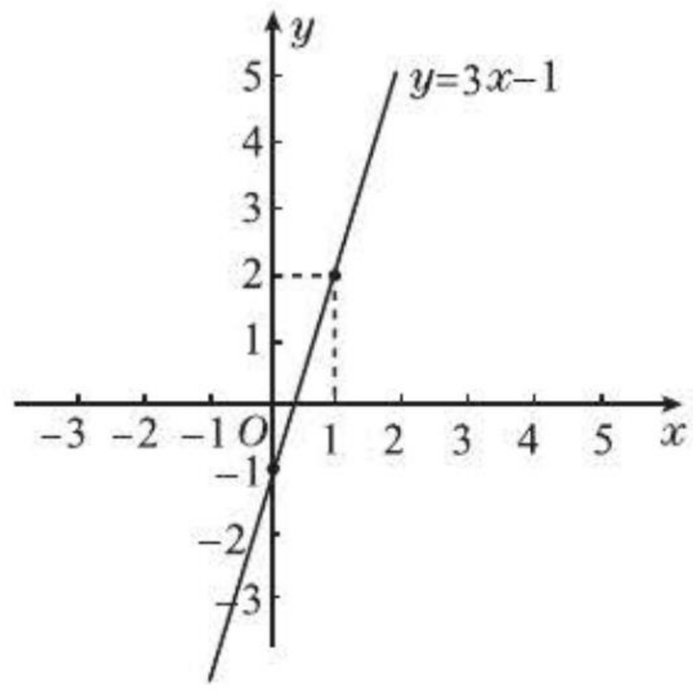
题图中右上角的一个棋子的位置可以表示为(12,八)；

题图中左上角的一个棋子的位置可以表示为(6,八)；

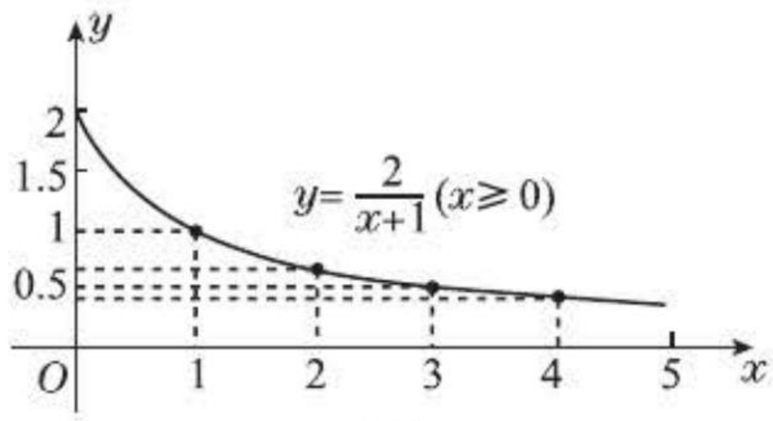
题图中最上面的一个棋子的位置可以表示为(9,六).(所选棋子不唯一)

4. 解：(1)画函数的图象如图(1)所示；点(0,−1)，(−2,−7)和(2.5,6.5)在函数的图象上，点(1,−2)不在函数的图象上.

(2)画函数的图象如图(2)所示；点(0,2)和 $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ 在函数的图象上，点(3,1)不在函数的图象上.



(1)



(2)

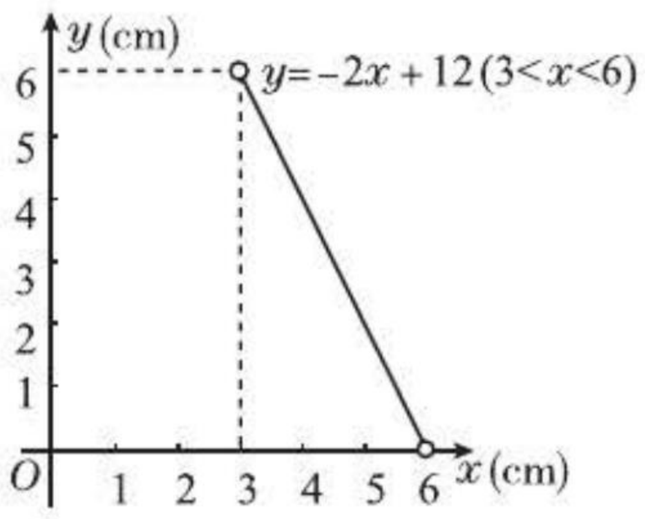
（第4题图）

点拨：要判断点是否在图象上，即判断点的坐标是否满足函数关系式.

5. 解：(1) y 与 x 的函数关系式为 $y=-2x+12$；(2)因为 $2x+y=12$，从而 $y=12-2x$，又三角形两边之和大于第三边，则 $2x>y$，所以 $2x>12-2x$. 解得 $x>3$. 又因为 $y>0$，所以 $-2x+12>0$，从而 $x<6$. 综上所述，自变量 x 的取值范围为 $3<x<6$；(3)函数 $y=-2x+12(3<x<6)$ 的图象如图所示.

点拨：根据等腰三角形的底边长等于周长减去两腰长列出函数关系式，求自变量的取值范围时，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第5题图)

由 $y>0$,即 $12-2x>0$,得出 $x<6$,由 $2x>12-2x$,得出 $x>3$. 所以 $3<x<6$.

6. 解:(1)14 时到达离家最远的地方.

(2)10 时至 11 时第一次休息.

(3)11 时到 12 时,小李骑了 5 千米.

(4)$\frac{30}{16-14}=15$(千米/时),所以返回时,小李的平均车速是 15 千米/时.

17.3 一次函数

练习

1. 解:仓库内余下的粉笔盒数 Q 与星期数 t 之间的函数关系式为 $Q=400-36t$. 当 $t=11$ 时,仓库内余下的粉笔盒数为 4,小于 36,因此,自变量 t 的取值范围为 $0\leqslant t\leqslant 11$,且 t 为整数.

2. 解:设 n 年后树高 h 米,则 $h=1.80+0.35n$ (n 取不超过 10 的非负整数). 当 $n=4$ 时,$h=1.80+0.35\times 4=3.20$,即 4 年后这些树约有 3.20 米高.

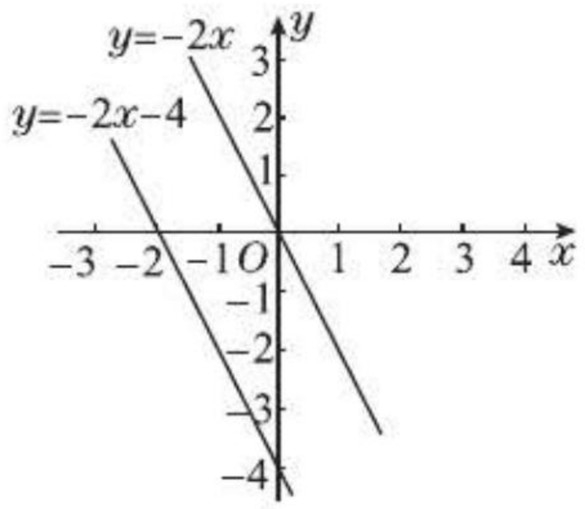
3. 解:设 x 个月后存款数为 y 元,则 $y=10\ 000+500x$. 当 $y=30\ 000$ 时,$10\ 000+500x=30\ 000$,解得 $x=40$,即 40 个月后可存满全额.

点拨:上述三道题都是求实际问题中的函数关系式,特别要注意自变量的取值范围.

4. 解:以上 3 道题中的函数均为一次函数. 因为它们都符合一次函数的定义.

练习

1. 解:如图,两条直线互相平行,直线 $y=-2x-4$ 可以看成是由直线 $y=-2x$ 向下平移 4 个单位得到的.



(第1题图)

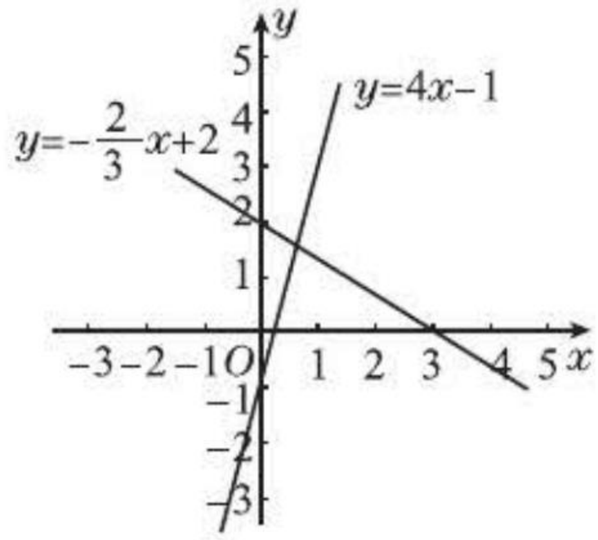
2. (1)$y=3x-2$ (2)$y=-x$

点拨:直线 $y=kx+b$ 平行于直线 $y=kx$. 当 $b>0$ 时,把直线 $y=kx$ 向上平移 b 个单位可得直线 $y=kx+b$;当 $b<0$ 时,把直线 $y=kx$ 向下平移 $|b|$ 个单位可得直线 $y=kx+b$ (k,b 是常数,$k\neq 0$).

练习

1. 解:(1)直线 $y=4x-1$ 与 x 轴的交点是点 $\left(\frac{1}{4},0\right)$,与 y 轴的交点是点 $(0,-1)$.

(2)直线 $y=-\frac{2}{3}x+2$ 与 x 轴的交点是点 $(3,0)$,与 y 轴的交点是点 $(0,2)$. 它们的图象如图所示.



(第1题图)

点拨:图象与 x 轴的交点的纵坐标为 0,代入函数关系式即可求出横坐标;图象与 y 轴的交点的横坐标为 0,代入函数关系式即可求出纵坐标.

2. 解:汽车在高速公路上行驶 4 小时后,小明距北京还有 190 千米的路程.

练习

1. 解:(1)当 $m-3>0$,即 $m>3$ 时,y 随 x 的增大而增大.

(2)当 $m-3<0$,即 $m<3$ 时,y 随 x 的增大而减小.

点拨:一次函数 $y=kx+b$($k\neq 0$,k,b 为常

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数),当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小.

2. 解:3 种. 方法 1:把点 $(-1,a)$ 的坐标代入函数关系式 $y=\frac{2}{3}x+3$,求得 $a=2\frac{1}{3}$. 把点 $\left(\frac{1}{2},b\right)$ 的坐标代入函数关系式 $y=\frac{2}{3}x+3$,求得 $b=3\frac{1}{3}$. 所以 $a<b$.

方法 2:因为 $\frac{2}{3}>0$,所以 y 随 x 的增大而增大. 因为 $-1<\frac{1}{2}$,所以 $a<b$.

方法 3:通过画图象,并在图象上描出这两点,比较这两点位置的高低可知 $a<b$.

练习

1. 解:设一次函数的表达式为 $y=kx+b$(k,b 为常数,$k\neq0$). 把点 $(2,0)$ 和点 $(0,-3)$ 的坐标分别代入函数表达式,求得 $k=\frac{3}{2}$,$b=-3$. 所以所求函数的表达式为 $y=\frac{3}{2}x-3$.

点拨:利用待定系数法求函数的表达式.

2. 解:若设满足条件的函数关系式为 $y=kx+b$(k,b 为常数,$k\neq0$),则 k,b 满足 $-2k+b=3$,这样的 k,b 值有无数对,所以满足题意的一次函数有无数个,如 $y=x+5$,$y=\frac{1}{2}x+4$ 等.

点拨:此题是一道开放题,列出满足条件的函数关系式即可.

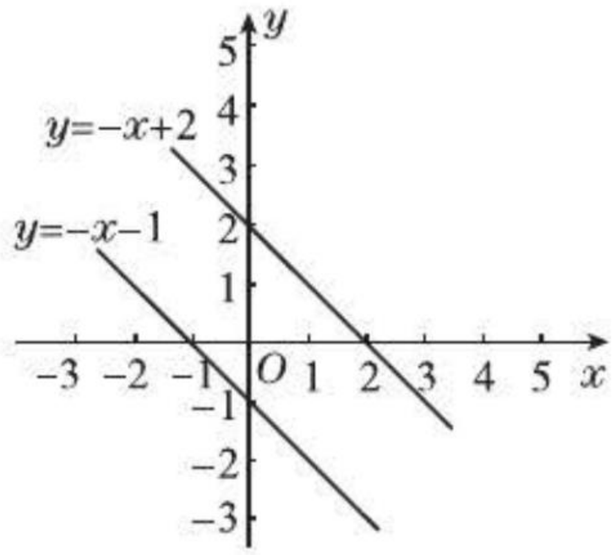
习题 17.3

1. 解:$y=9-\frac{x}{2}$,$0<x<9$.

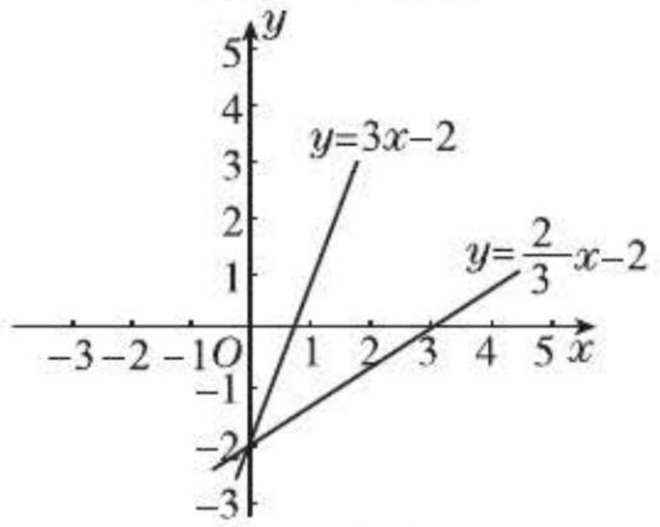
2. 解:①当 $0<s\leqslant3$ 时,$P=8$;②当 $s>3$ 时,$P=8+1.60(s-3)$. 当 $s=2.5$ 时,$P=8$;当 $s=7$ 时,$P=14.4$. 即当路程为 2.5 千米时应付车费 8 元,当路程为 7 千米时应付车费 14.4 元. **点拨**:列函数关系式时,注意自变量的取值范围,已知自变量的值求函数值时,代入即可.

3. (1) $\frac{3}{4}$;-3 (2) 6;2 **点拨**:把已知的横坐标或纵坐标代入函数关系式求解即可.

4. 解:(1) 如图①所示. 直线 $y=-x+2$ 与直线 $y=-x-1$ 平行,把直线 $y=-x+2$ 向下平移 3 个单位,即可得到直线 $y=-x-1$.



(第 4 题图①)

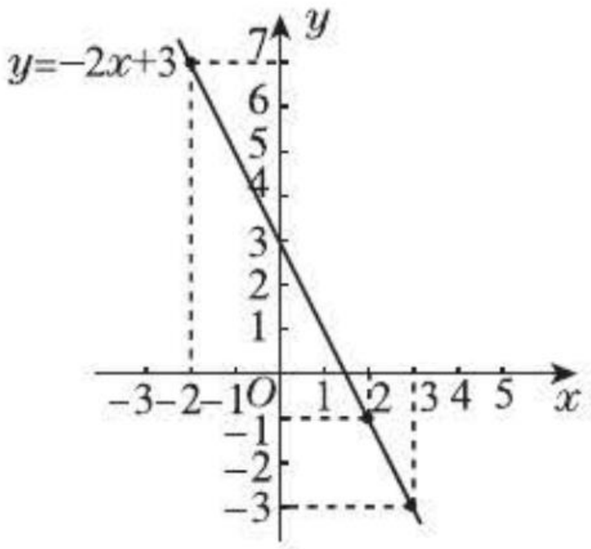


(第 4 题图②)

(2) 如图②所示. 直线 $y=3x-2$ 与直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 交于 y 轴上一点 $(0,-2)$.

点拨:(1) 题考查一次函数的图象和性质及直线的平移;(2) 题中点 $(0,-2)$ 的坐标同时满足两个函数关系式.

5. 解:如图. (1) $(2,-1)$;(2) $(3,-3)$;(3) $(2,-1)$,$(-2,7)$.



(第 5 题图)

6. 解:若旅客携带的行李不超过 40 千克,则不收费;若超过 40 千克,则超过部分按每千克 1 元收费. 当 $x>40$ 时,$y=x-40$;当 $0\leqslant x\leqslant40$ 时,$y=0$.

点拨:与实际问题相联系时,注意自变量的取值范围.

7. 解:(1) $k<0$,$b>0$,y 随 x 的增大而减小. (2) $k>0$,$b>0$,y 随 x 的增大而增大.

8. 解:(1) 将点 $(-2,-1)$ 的坐标代入 $y=kx+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5,得 $-1=-2k+5$. 解得 $k=3$. 所以所求函数表达式为 $y=3x+5$.

(2)设一次函数的表达式为 $y=kx+b$. 由题意,得 $\begin{cases}k+b=3,\\-k+b=7.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=5.\end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y=-2x+5$.

点拨:利用待定系数法即可解答.

9. 解:$T=34-0.008h$,当温度为 29.6 ℃时,则有 $34-0.008h=29.6$. 解得 $h=550$. 所以山高 550 m.

17.4 反比例函数

练习

1. 解:(1)$y=\frac{2S}{x}(x>0)$,反比例函数.

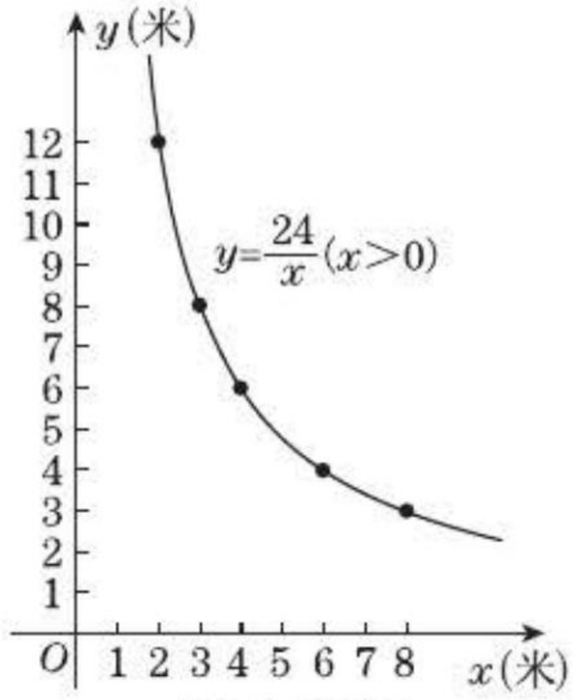
(2)$t=\frac{15\ 000}{Q}(Q>0)$,反比例函数.

点拨:此题考查反比例函数的定义.

2. 解:问题 2 的函数关系式为 $y=\frac{24}{x}(x>0)$,列表如下:

x	2	3	4	6	8
y	12	8	6	4	3

描点、连线,函数图象如图所示.



(第 2 题图)

练习

1. 解:(1)$y=2x(x\geqslant 0)$,是正比例函数.

(2)$S=\frac{100}{h}(h>0)$,是反比例函数.

(3)$y=x(25-x)=-x^2+25x(0<x<25)$,既不是正比例函数,也不是反比例函数.

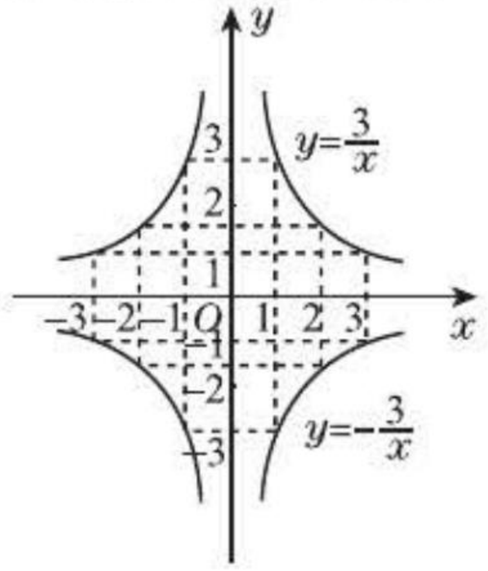
(4)$y=100-10x(0\leqslant x\leqslant 10)$,既不是正比例函数,也不是反比例函数.

点拨:此题考查正比例函数和反比例函数的定义. 一般地,形如 $y=kx$(k 是常数,$k\neq 0$)的函数叫做正比例函数;形如 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq 0$)的函数叫做反比例函数.

2. 解:列表如下:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y=\frac{3}{x}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	3	$\frac{3}{2}$	1
$y=-\frac{3}{x}$	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1

描点、连线,函数图象如图所示.



(第 2 题图)

点拨:画函数的图象时,注意自变量的取值范围,描点要准确,连线要平滑.

习题 17.4

1. 略.

2. 解:(1)设函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq 0$). 把 $x=\frac{3}{2}$,$y=\frac{4}{3}$ 代入函数的表达式,得 $k=2$. 所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

(2)设函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq 0$). 因为图象经过点 $(-3,2)$,所以有 $2=\frac{k}{-3}$,即 $k=-6$,所以此反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

3. 略.

4. 解:(1)设 y 和 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq 0$). 把 $x=3$,$y=8$ 代入函数表达式,得 $k=24$. 所以 y 和 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{24}{x}$.

(2)把 $x=2\frac{2}{3}$ 代入 $y=\frac{24}{x}$,解得 $y=9$.

(3)把 $y=\frac{3}{2}$ 代入 $y=\frac{24}{x}$,解得 $x=16$.

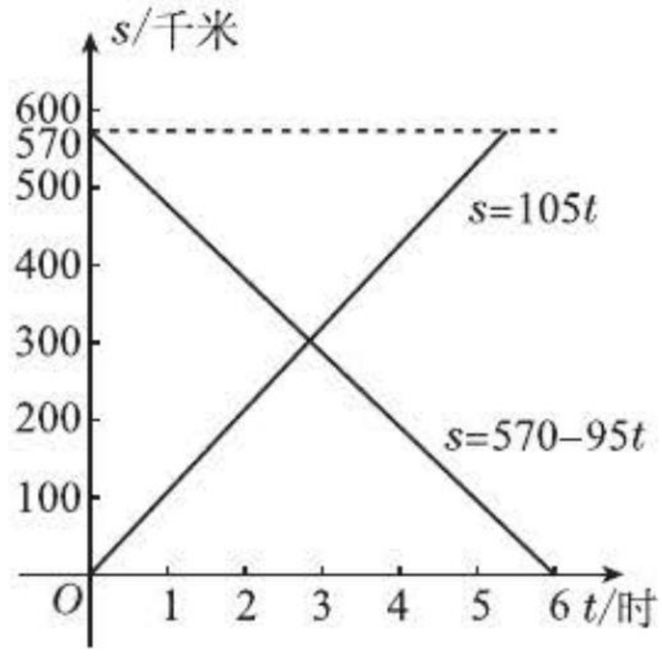
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:(1)题利用待定系数法求解;(2)题已知自变量的值求函数值,将自变量的值代入函数表达式求解即可;(3)题已知函数值求自变量的值,将函数值代入函数表达式求解即可.

17.5 实践与探索

练习

1. 解:如图所示,交点的横坐标表示两车在途中相遇的时间,纵坐标表示相遇时距北京的路程.

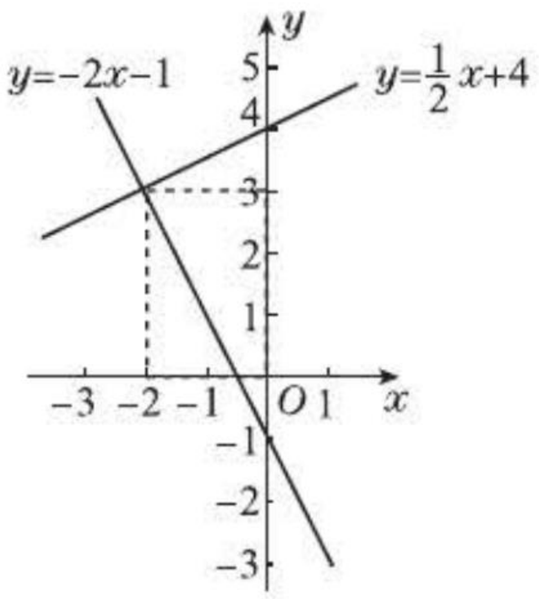


(第1题图)

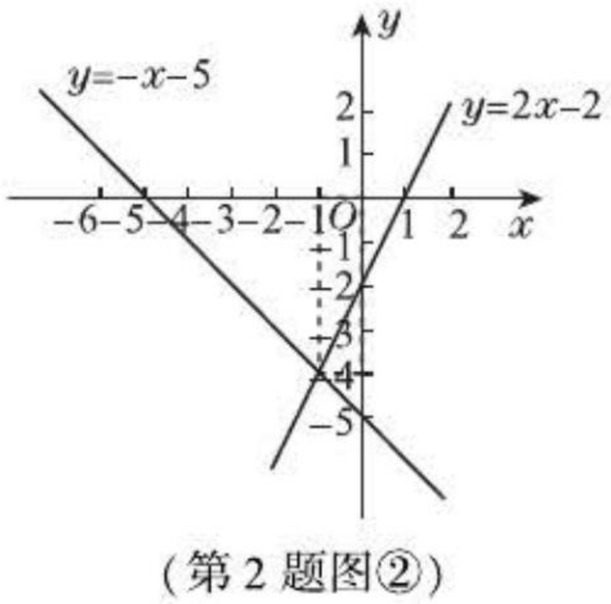
点拨:两个图象的交点坐标同时满足两个函数的关系式.

2. 解:(1)在同一直角坐标系内作出函数 $y=-2x-1$ 与 $y=\frac{1}{2}x+4$ 的图象,如图①所示,得到它们的交点坐标为 $(-2,3)$. 故方程组的解为 $\begin{cases}x=-2,\\y=3.\end{cases}$

(2)原方程组可变形为 $\begin{cases}y=2x-2,\\y=-x-5.\end{cases}$ 在同一直角坐标系内作出函数 $y=2x-2$ 与 $y=-x-5$ 的图象,如图②所示,同(1)可知方程组的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=-4.\end{cases}$



(第2题图①)



(第2题图②)

点拨:两个图象的交点坐标即为两个函数的关系式所组成的方程组的解.

练习

1. 解:不等式 $\frac{3}{2}x+3\leqslant 0$ 的解集,就是函数 $y=\frac{3}{2}x+3$ 的图象在 x 轴下方及与 x 轴相交时所对应的 x 的值.

点拨:此题所表现的是不等式的解集与一次函数图象之间的关系.

2. 略.

练习

解:在平面直角坐标系中描出相应的四个点,发现这些点大致位于一条直线上,可知 y 与 x 近似符合一次函数关系. 取第一、三组对应值用待定系数法求得近似的一次函数关系式为 $y=1.6x+10.8$,将第二、四组对应值代入检验,得到结果也十分相近.

点拨:实际生活中存在的数量关系是错综复杂的,在实践中得到一些变量的对应值,有时很难精确地判断它们之间是什么关系,因此需要根据经验分析,并进行近似计算和修正,建立比较接近的函数关系式进行研究.

习题 17.5

1. 解:(1)当 $k>0$ 时,图象经过第一、三象限;当 $k<0$ 时,图象经过第二、四象限.

(2)当 $k>0,b>0$ 时,图象不经过第四象限;当 $k>0,b<0$ 时,图象不经过第二象限.

2. 解:由 $\begin{cases}y=2x+1,\\y=3x+b,\end{cases}$ 得两直线的交点坐标为 $(1-b,3-2b)$,再由第三象限内点的横、纵坐标均为负数,得 $b>\frac{3}{2}$. 所以可取 $b=2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

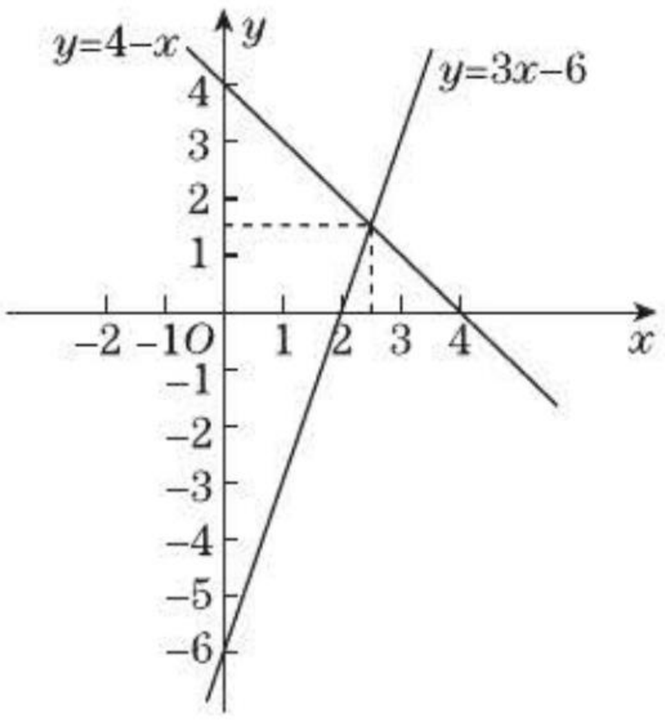
或 $b=\frac{5}{2}$.

点拨:根据点在第三象限的坐标特征求解 b 的取值范围. b 的取值不唯一.

3. 解:根据第四象限内点的坐标特征列不等式组 $\begin{cases}x>0,\\4x-3<0.\end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{3}{4}$. 故当 $0<x<\frac{3}{4}$ 时,函数的图象在第四象限.

4. 解:在同一平面直角坐标系中画出直线 $y=3x-6$ 和直线 $y=4-x$,如图所示,由图象得所求方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

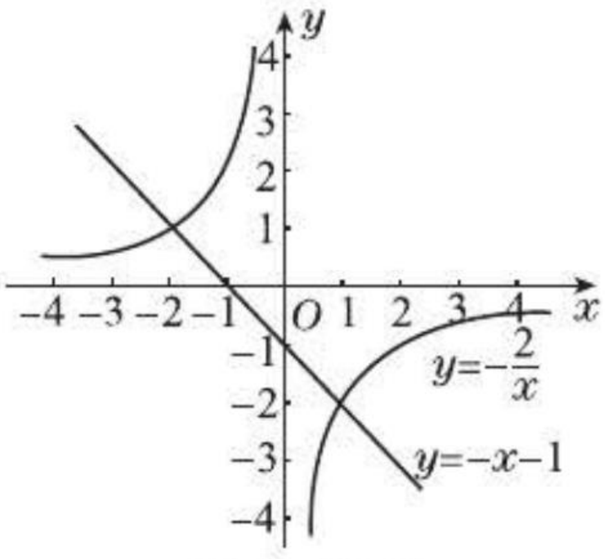
点拨:两个函数图象交点的坐标就是两个函数关系式所组成的方程组的解.



(第4题图)

5. 解:(1)设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq0$). 因为图象过点 $P(-2,1)$,所以 $1=\frac{k}{-2}$,即 $k=-2$. 所以反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$. 又因为图象过点 $Q(1,m)$,所以 $m=-\frac{2}{1}$,即 $m=-2$. 设一次函数的表达式为 $y=ax+b$(a、b 是常数,$a\neq0$). 因为点 $P(-2,1)$,$Q(1,-2)$ 都在一次函数的图象上,所以 $\begin{cases}-2a+b=1,\\a+b=-2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1.\end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2)两函数的图象如图所示. 由图象可知,当 $x<-2$ 或 $0<x<1$ 时,一次函数的值大于反比例函数的值.



(第5题图)

6. 解:(1)服药后 3 小时血液中药物浓度最高.

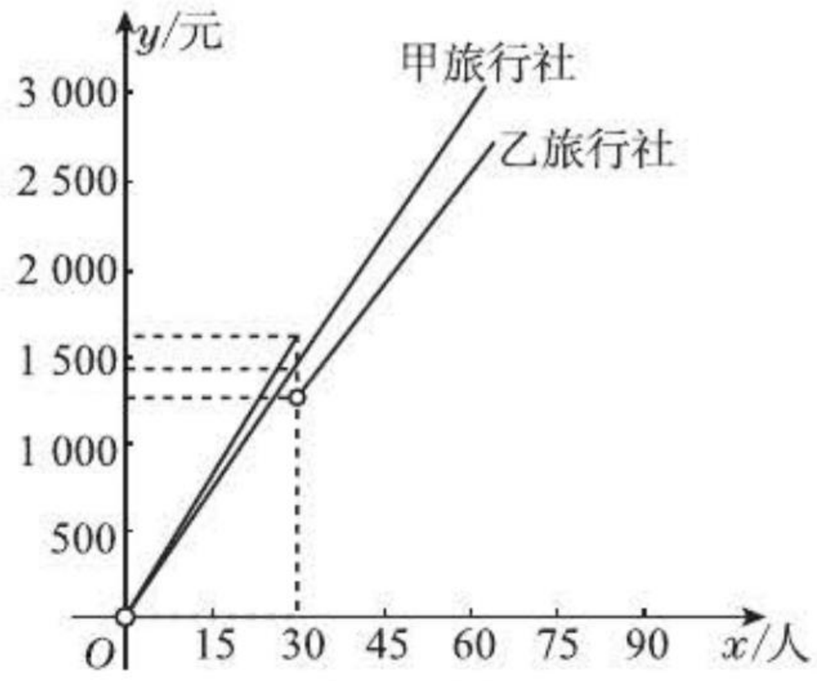
(2)由图象过点(0,0),(3,8),(14,0)知浓度上升阶段 $y=\frac{8}{3}x(0\leqslant x\leqslant3)$,浓度下降阶段 $y=-\frac{8}{11}x+\frac{112}{11}(3<x\leqslant14)$.

点拨:(1)从图象中可以观察出服药后 3 小时血液中药物浓度最高;(2)根据图象中点的坐标,利用待定系数法列出方程(组)便可求得 y 与 x 之间的函数关系式.

7. 解:(1)设甲、乙两家旅行社实际收取的总费用分别为 y_1 元、y_2 元,则 $y_1=48x$(x 为正整数),

$y_2=\begin{cases}54x & (0<x\leqslant30,\text{且 }x\text{ 为整数}),\\42x & (x>30,\text{且 }x\text{ 为整数}).\end{cases}$

(2)不超过 30 人时,甲旅行社较优惠;超过 30 人时,乙旅行社较优惠.



(第7题图)

(3)两个函数的图象是由如图所示的射线或线段上的整数点(空心圆圈表示不包括该点)组成的. 由图象知,当 $0<x\leqslant30$ 时,$y_1<y_2$,表示甲旅行社比乙旅行社实际收取的总费用低;当 $x>30$ 时,$y_1>y_2$,表示甲旅行社比乙旅行社实际收取的总费用高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

复习题

A 组

1. (1)B　(2)B　(3)D

点拨:(1)横坐标为 0 的点在 y 轴上;

(2)第二象限内的点的横坐标小于 0,纵坐标大于 0,所以 $2m-1<0$,即 $m<\frac{1}{2}$;

(3)仔细分析题意即可得到答案.

2. 解:(1)$s=60t$,正比例函数,$t\geqslant 0$.

(2)$y=\frac{64}{x}$,反比例函数,$0<x<8$.

点拨:根据题中描述的情况列出函数关系式,再根据正比例函数和反比例函数的定义判断,注意实际问题中自变量的取值范围.

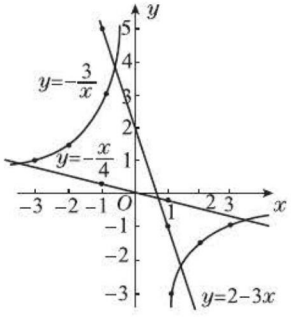
3. (1)$\frac{3}{5}$　(2)5;5

点拨:把已知量代入函数关系式即可求出未知量.

4. 解:列表如下:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y=-\frac{x}{4}$			$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		
$y=2-3x$			5	-1		
$y=-\frac{3}{x}$	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1

描点、连线,函数图象如图.

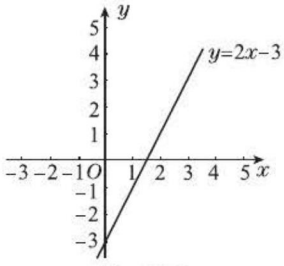


(第 4 题图)

5. 解:(1)因为 $x=-4$,所以 $y=-\frac{1}{2}x+3=-\frac{1}{2}\times(-4)+3=5$. 所以横坐标是 -4 的点的坐标为$(-4,5)$.

(2)因为$|y|=2$,所以 $y=\pm 2$. 所以当 $y=2$ 时,$x=2$;当 $y=-2$ 时,$x=10$. 所以和 x 轴的距离是 2 个单位的点的坐标是$(2,2)$,$(10,-2)$.

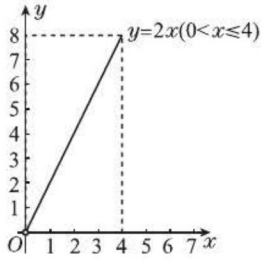
6. 解:设一次函数的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$. 把 $x=3,y=3$ 和 $x=1,y=-1$ 分别代入 $y=kx+b(k\neq 0)$ 中,得 $\begin{cases}3=3k+b,\\-1=k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-3.\end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y=2x-3$,其图象如图所示.



(第 6 题图)

点拨:利用待定系数法求之即可.

7. 解:因为 $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}DP\cdot AD$,且 $S_{\triangle APD}=y$,$DP=x$,$AD=4$,所以 $y=2x$,其中 $0<x\leqslant 4$. 其图象如图所示.



(第 7 题图)

8. 解:当 $x=7$ 时,$y=35x+20=35\times 7+20=265$;当 $x=10$ 时,$y=35x+20=35\times 10+20=370$;当 $x=15$ 时,$y=35x+20=35\times 15+20=545$.

答:略.

点拨:把自变量的值分别代入函数关系式中求解即可.

9. 解:设酒精的体积 y(升)与温度 x(℃)之间的一次函数关系式为 $y=kx+b(k,b$ 为常数,$k\neq 0)$. 当 $x=0$ 时,$y=5.250$;当 $x=40$ 时,$y=5.481$,则 $\begin{cases}5.250=b,\\5.481=40k+b.\end{cases}$ 解得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases} b=5.250, \\ k=0.005\ 775. \end{cases}$ 所以 $y=0.005\ 775x+5.250$. 当 $x=10$ 时, $y=0.005\ 775x+5.250=0.005\ 775\times10+5.250=5.307\ 75$; 当 $x=30$ 时, $y=0.005\ 775x+5.250=0.005\ 775\times30+5.250=5.423\ 25$.

答: 略.

点拨: 根据已知求函数关系式是解题的关键.

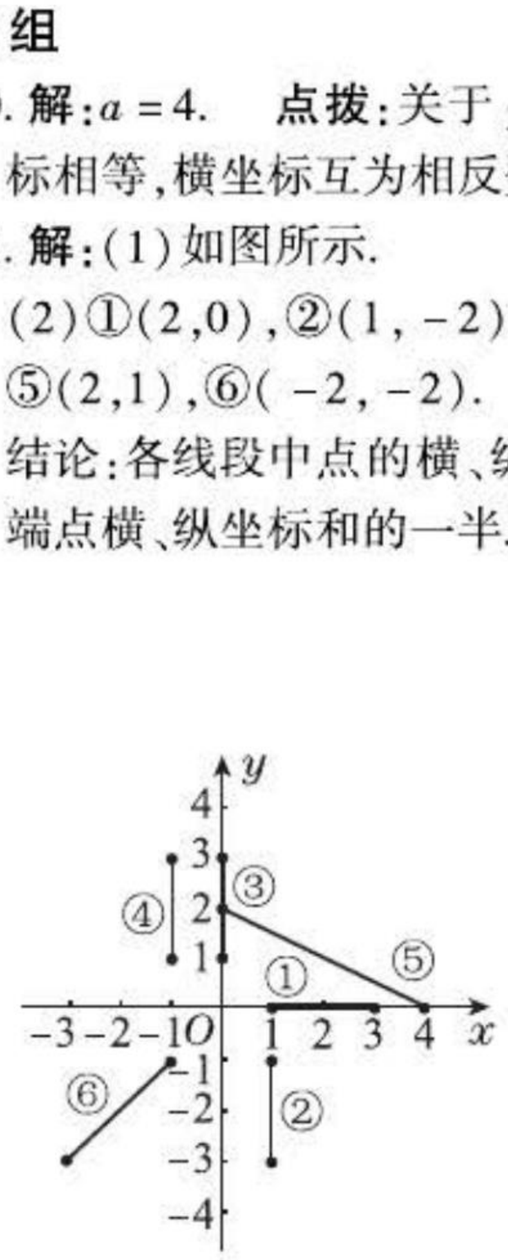
B 组

10. 解: $a=4$. **点拨:** 关于 y 轴对称的两点的纵坐标相等,横坐标互为相反数.

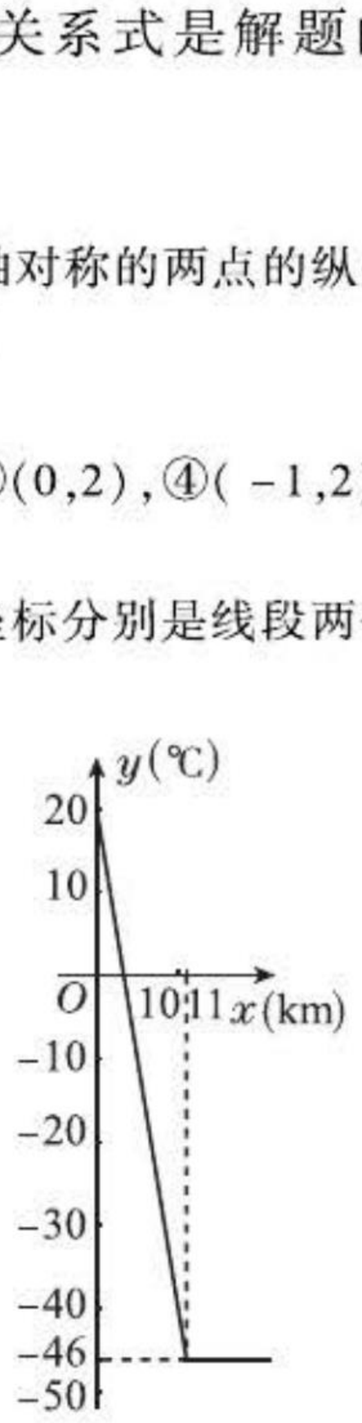
11. 解: (1)如图所示.

(2)①(2,0),②(1,−2),③(0,2),④(−1,2),⑤(2,1),⑥(−2,−2).

结论:各线段中点的横、纵坐标分别是线段两个端点横、纵坐标和的一半.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12. 解: (1)当 $0\leqslant x\leqslant11$ 时, $y=-6x+20$.

(2)所画图象如图所示.

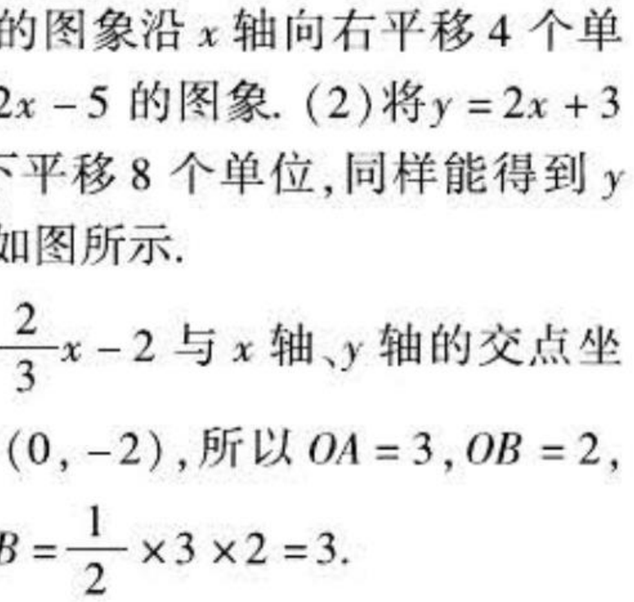
(3)当 $x=4.5$ 时, $y=20-6x=20-6\times4.5=-7$; 当 $x=11$ 时, $y=20-6\times11=20-66=-46$. 根据题意,当 $x=13$ 时, $y=-46$. 所以该处在离地面 4.5 km 及 13 km 处的气温分别是 −7 ℃ 和 −46 ℃.

点拨: 利用题中描述的关系列出函数关系式,当 $0\leqslant x\leqslant11$ 时,已知 x 求 y,代入关系式即可得到;当 $x>11$ 时, $y=-46$.

C 组

13. B **点拨:** 从图象中获取信息,1 月至 3 月图象呈上升趋势,4、5 两月月产量保持不变,所以只有 B 选项正确.

14. 解: 设经过平移后的直线所对应的函数关系式为 $y=2x+b$,由于它经过点(2,−1),把 $x=2$, $y=-1$ 代入函数关系式中,得 $b=-5$,故 $y=2x-5$,该直线与两坐标轴的交点坐标分别为 $(0,-5)$, $\left(\frac{5}{2},0\right)$,因此,平移方法为:

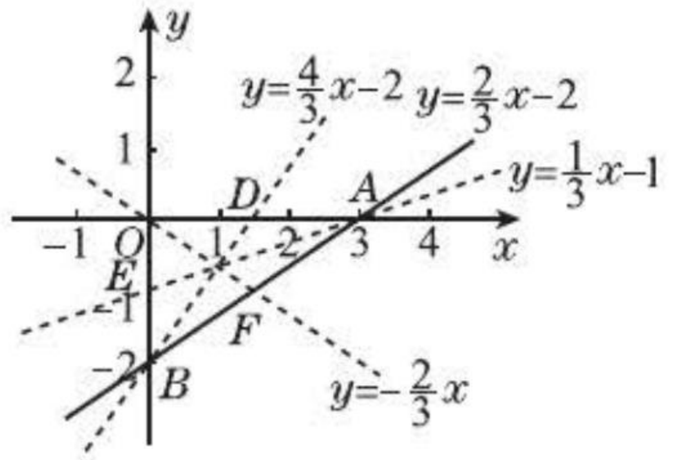


(第 14 题图)

(1)将 $y=2x+3$ 的图象沿 x 轴向右平移 4 个单位,得到函数 $y=2x-5$ 的图象. (2)将 $y=2x+3$ 的图象沿 y 轴向下平移 8 个单位,同样能得到 $y=2x-5$ 的图象. 如图所示.

15. 解: (1)直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为 (3,0), (0,−2),所以 $OA=3$, $OB=2$, $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times3\times2=3$.

(2)能,可以画三条. 如图所示,①取 OA 的中点 $D(1.5,0)$, BD 将 $\triangle AOB$ 的面积二等分. 由 $B(0,-2)$, $D(1.5,0)$ 易得直线 BD 所对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{3}x-2$;②取 OB 的中点 $E(0,-1)$, AE 将 $\triangle AOB$ 的面积二等分. 由 $A(3,0)$, $E(0,-1)$ 易得直线 AE 所对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{3}x-1$;③取 AB 的中点 $F\left(\frac{3}{2},-1\right)$, OF 将 $\triangle AOB$ 的面积二等分. 由 $O(0,0)$, $F\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 易得直线 OF 所对应的函数表达式为 $y=-\frac{2}{3}x$.



(第 15 题图)

点拨: 要想求 $\triangle AOB$ 的面积应先求出 OA、OB 的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

长，再根据三角形面积公式可求出 $\triangle AOB$ 的面积.

第18章 平行四边形

18.1 平行四边形的性质

练习

1. **解**：在 $\square ABCD$ 中，$\angle A = 120°$，所以 $\angle C = \angle A = 120°$. 又因为 $AD \parallel BC$，所以 $\angle A + \angle B = 180°$. 所以 $\angle B = 60°$. 所以 $\angle D = \angle B = 60°$.

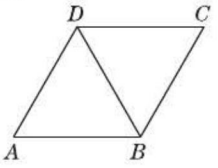
2. **解**：理由：因为 $l_1 \parallel l_2$，所以 l_1 与 l_2 之间的距离处处相等，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 底边 BC 上的高相等. 又因为底边 BC 相等，所以 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle DBC$ 的面积相等. 能. 画图略.

3. **解**：有3种情况：①平行四边形的边长分别为3 cm，15 cm，3 cm，15 cm，②6 cm，12 cm，6 cm，12 cm，③9 cm，9 cm，9 cm，9 cm.

练习

1. **解**：因为该平行四边形的对边相等，相邻两边的长相等，所以该平行四边形每条边的长度相等. 又因为该平行四边形的周长是32 cm，所以该平行四边形各边的长都为8 cm.

2. **解**：如图，在 $\square ABCD$ 中，$AB = CD, AD = BC$，$\because AB = AD = BD = 4$ cm，



（第2题图）

$\therefore AB = AD = CD = BC = BD = 4$ cm.

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 是等边三角形. $\therefore \angle C = \angle A = 60°$.

$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\therefore \angle A + \angle ADC = 180°$.

$\therefore \angle ADC = 120°$.

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 120°$.

3. **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AD \parallel BC$. $\therefore \angle DAB + \angle CBA = 180°$.

又 $\because AE$ 平分 $\angle DAB$，BE 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle EAB = \frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle EBA = \frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90°$. $\therefore \angle AEB = 180° - (\angle EAB + \angle EBA) = 90°$，即 $AE \perp BE$.

练习

1. **解**：图中相等的线段有 $AB = CD, BC = AD, OA = OC, OB = OD$.

点拨：平行四边形的对边相等，对角线互相平分，由此可以得到所有的相等线段.

2. **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore OB = OD$.

又 $\because BE \perp AC, DF \perp AC$，$\therefore \angle OEB = \angle OFD = 90°$.

在 $\triangle OEB$ 和 $\triangle OFD$ 中，

$$\begin{cases} \angle OEB = \angle OFD = 90°\text{（已证）}, \\ \angle EOB = \angle FOD\text{（对顶角相等）}, \\ OB = OD\text{（已证）}, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OEB \cong \triangle OFD$. $\therefore OE = OF$.

3. **解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore BC = AD = 3, CD = AB = 4, OB = OD, AB \parallel CD$.

$\therefore \angle OFD = \angle OEB, \angle ODF = \angle OBE$.

在 $\triangle OEB$ 和 $\triangle OFD$ 中，

$$\begin{cases} \angle OEB = \angle OFD, \\ \angle OBE = \angle ODF, \\ OB = OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OEB \cong \triangle OFD$. $\therefore BE = DF, OE = OF$，

则四边形 $BCFE$ 的周长 $= BC + CF + OF + OE + BE = BC + CF + DF + OE + OF = 3 + 4 + 1.3 + 1.3 = 9.6$.

练习

1. **解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AD = BC = 6$ cm，$OB = OD$. $\because \triangle AOB$ 的周长 $= OA + OB + AB = 18$ cm，$\therefore OA + OB = 18 - 8 = 10$（cm），则 $\triangle AOD$ 的周长 $= OA + OD + AD = OA + OB + AD = 10 + 6 = 16$（cm）.

2. **解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore OB = OD$. 又 $\because \triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 的周长之差为8，$\therefore AO + OB + AB - (AO + OD + AD) = 8$，即 $AB - AD = 8$. $\because AB : AD = 3 : 2$，$\therefore$ 设 $AB = 3x, AD = 2x$，则 $3x - 2x = 8$. $\therefore x = 8$，则 $AB = 24, AD = 16$，$\square ABCD$ 的周长 $= 2(AB + AD) = 2 \times (24 + 16) = 80$.

3. 略.

习题 18.1

1. **解**：在 $\square ABCD$ 中，$\angle D = \angle B = 55°$. 在 $\triangle AED$ 中，$\angle AED = 90°$，$\angle DAE = 90° - \angle D = 90° - 55° = 35°$. 所以 $\angle D$ 与 $\angle DAE$ 分别等于55°和35°.

点拨：由平行四边形的对角相等，得出 $\angle D$ 的度数，由直角三角形中两锐角互余，得出 $\angle DAE$ 的度数.

2. **解**：在 $\square ABCD$ 中，$OC = \frac{1}{2}AC$，$OD = \frac{1}{2}BD$，由 $AC + BD = 22$ 厘米，得 $OC + OD = \frac{1}{2}(AC + BD) =$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11 厘米. 所以 $\triangle OCD$ 的周长为 $OC + OD + CD = 11 + 5 = 16$(厘米).

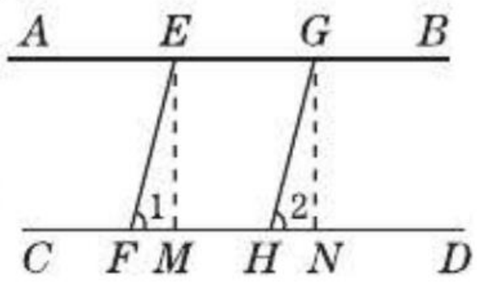
点拨:本题应用了"平行四边形的对角线互相平分"这一性质.

3. 解:设 $\angle A = 2x$,则 $\angle B = 3x$. 因为 $AD \parallel BC$,所以 $\angle A + \angle B = 180°$,即 $2x + 3x = 180°$. 解得 $x = 36°$. 所以 $\angle A = \angle C = 72°$,$\angle B = \angle D = 108°$.

点拨:平行四边形对角相等,对边平行.

4. 解:$\because$ $\triangle AOB$ 的周长与 $\triangle AOD$ 的周长之和为 11.4 cm,$\therefore$ $OA + OB + AB + OA + OD + AD = 11.4$ cm,即 $AB + AD + AC + BD = 11.4$ cm. 由题意,得 $AC + BD = 7$ cm,$\therefore$ $AB + AD = 11.4 - 7 = 4.4$(cm),则这个平行四边形的周长 $= 2 \times (AB + AD) = 2 \times 4.4 = 8.8$(cm).

5. 解:已知:如图,$AB \parallel CD$,点 E,G 在直线 AB 上,点 F,H 在直线 CD 上,且 $EF \parallel GH$,求证:$EF = GH$.



(第5题图)

证明:如图,过点 E 作 $EM \perp CD$ 于 M,过点 G 作 $GN \perp CD$ 于 N,根据平行线之间的距离处处相等可得 $EM = GN$. $\because$ $EF \parallel GH$,$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

又$\because$ $EM \perp CD$ 于 M,$GN \perp CD$ 于 N,

$\therefore$ $\angle EMF = \angle GNH = 90°$.

在 $\triangle EMF$ 和 $\triangle GNH$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ \angle EMF = \angle GNH = 90°, \\ EM = GN, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle EMF \cong \triangle GNH$. $\therefore$ $EF = GH$.

6. 证明:$\because$ 点 E 是 CD 的中点,$\therefore$ $CE = ED$.

在 $\square ABCD$ 中,$AD = BC$,$AD \parallel BC$,

$\therefore$ $\angle F = \angle EBC$.

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle F = \angle EBC, \\ \angle DEF = \angle CEB, \\ DE = CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle DEF \cong \triangle CEB$. $\therefore$ $BE = EF$,$BC = DF$.

$\therefore$ $AD = DF$,则点 E 是 BF 的中点,点 D 是 AF 的中点.

18.2 平行四边形的判定

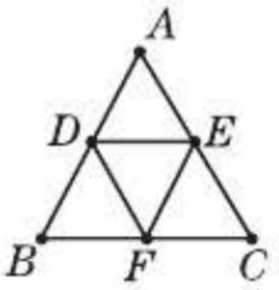
练习

1. 解:以格点为顶点,能画出三个平行四边形,如图,有 $\square ADFE$,$\square BFED$,$\square DECF$.

2. 证明:在 $\square ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,$AB = CD$. $\because$ 点 E,F 分别是边 AB 和 CD 的中点,

$\therefore$ $BE = \frac{1}{2}AB$,$CF = \frac{1}{2}CD$.

$\therefore$ $BE = CF$. 又$\because$ $AB \parallel CD$,即 $BE \parallel CF$,$\therefore$ 四边形 $BEFC$ 为平行四边形. $\therefore$ $EF = BC$.



(第1题图)

3. 解:四边形 $BNDM$ 也是平行四边形.

证明:方法1:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB \parallel CD$,$AB = CD$. 因为 M,N 分别是 AB,DC 的中点,所以 $BM = \frac{1}{2}AB$,$DN = \frac{1}{2}CD$. 所以 $BM = DN$. 又因为 $BM \parallel DN$,所以四边形 $BNDM$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

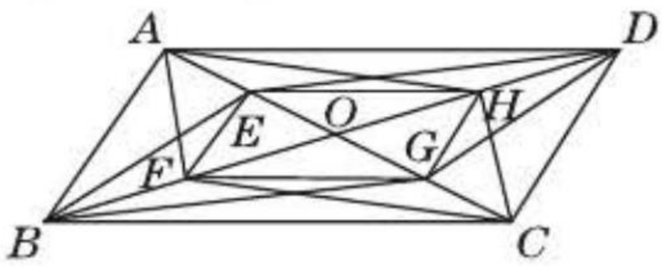
方法2:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD = BC$,$AB = CD$,$\angle A = \angle C$. 因为 M,N 分别是 AB,DC 的中点,所以 $AM = BM = \frac{1}{2}AB$,$CN = DN = \frac{1}{2}CD$. 所以 $AM = BM = CN = DN$. 在 $\triangle MAD$ 和 $\triangle NCB$ 中,$\begin{cases} AD = CB, \\ \angle A = \angle C, \\ AM = CN, \end{cases}$ 所以 $\triangle MAD \cong \triangle NCB$. 所以 $MD = NB$. 又因为 $BM = DN$,所以四边形 $BNDM$ 是平行四边形.

练习

1. 解:四边形 $ABEC$ 是平行四边形. 因为 AD 是 BC 边上的中线,所以 $BD = CD$. 又因为 $DE = AD$,所以四边形 $ABEC$ 是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形).

点拨:此题主要运用"对角线互相平分的四边形是平行四边形"这一判定方法.

2. 解:如图所示,可画出三个平行四边形:$\square EFGH$,$\square DEBG$,$\square AFCH$.



(第2题图)

点拨:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以对角线互相平分,即 $OA = OC$,$OB = OD$,又因为 E,F,G,H 分别是 AO,BO,CO,DO 的中点,所以 $OE = OG$,$OF = OH$. 连结 EF,FG,GH,EH,根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得出四边形 $EFGH$ 是平行

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

四边形. 同理可得四边形 $AFCH$, 四边形 $DEBG$ 也是平行四边形. 解答此题的重要依据是:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. 证明: $\because AB \parallel CD, \therefore \angle EBO = \angle FDO$. 在 $\triangle OEB$ 和 $\triangle OFD$ 中, $\begin{cases} \angle EBO = \angle FDO, \\ \angle BOE = \angle DOF, \\ OE = OF, \end{cases}$ $\therefore \triangle OEB \cong \triangle OFD$. $\therefore OB = OD$. 同理可证得 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, $\therefore OA = OC$. 又 $\because OB = OD$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

练习

1. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AD \parallel BC$, 即 $AF \parallel CE$. 又 $\because AE \parallel CF$, $\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形. $\therefore AE = CF$.

2. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle A = \angle C$,

$\angle B = \angle D$.

$\because E, F, G, H$ 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点,

$\therefore AE = GC, AH = CF$.

$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CGF$.

$\therefore EH = GF$. 同理可证 $EF = HG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

3. 证明: 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A = \angle C, AD = BC$,

$\because DE = BG$,

$\therefore AD - DE = BC - BG$, 即 $AE = CG$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CGH$ 中, $\begin{cases} AF = CH, \\ \angle A = \angle C, \\ AE = CG, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CGH$. $\therefore EF = GH$. 同理可得 $\triangle EDH \cong \triangle GBF$, $\therefore EH = FG$. 又 $\because EF = GH$, $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形. $\therefore EG$ 和 HF 互相平分.

练习

1. 证明: $\because AB \parallel CD, \therefore \angle B + \angle C = 180°$. 又 $\because \angle B = \angle D, \therefore \angle C + \angle D = 180°$. $\therefore AD \parallel BC$. 又 $\because AB \parallel CD, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, AD = BC$. $\therefore \angle ADB = \angle CBD$. 又 $\because \angle ADE + \angle ADB = 180°, \angle CBD + \angle CBF = 180°, \therefore \angle ADE = \angle CBF$. $\because AE \parallel CF$,

$\therefore \angle AED = \angle CFB$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$\begin{cases} \angle AED = \angle CFB, \\ \angle ADE = \angle CBF, \\ AD = CB, \end{cases}$ $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$.

$\therefore AE = CF$. 又 $\because AE \parallel CF, \therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

3. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB = CD, AB \parallel CD$. $\therefore \angle OAE = \angle OCF$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF, \\ OA = OC, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$ $\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore OE = OF$. 同理可得 $\triangle OAG \cong \triangle OCH$,

$\therefore OG = OH$. 又 $\because OE = OF, \therefore$ 四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

习题 18.2

1. 略.

2. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD, AB = CD$. $\therefore \angle BAE = \angle DCF$.

$\because BE \perp AC$ 于点 $E, DF \perp AC$ 于点 F,

$\therefore \angle BEA = \angle DFC = 90°$. 在 $\triangle EAB$ 和 $\triangle FCD$ 中,

$\begin{cases} \angle BEA = \angle DFC, \\ \angle BAE = \angle DCF, \\ AB = CD, \end{cases}$ $\therefore \triangle EAB \cong \triangle FCD$. $\therefore AE = CF$. 连结 BD, 交 AC 于点 O, 则 $OB = OD, OA = OC, \therefore OA - AE = OC - CF$, 即 $OE = OF$. 又 $\because OB = OD, \therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

3. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD, AB = CD$. $\because E, F$ 分别是 AB, CD 的中点, $\therefore BE = \frac{1}{2}AB, DF = \frac{1}{2}CD$. $\therefore BE = DF$. 又 $\because AB \parallel CD$, 即 $BE \parallel DF, \therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形. $\therefore ED \parallel BF$. $\therefore EG \parallel HF$. 同理可得 $EH \parallel GF, \therefore$ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

4. 证明: 因为 $\angle C = \angle CBE$, 所以 $AB \parallel DC$(内错角相等,两直线平行).

又因为 $AB = DC$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形). 所以 $AD = BC$(平行四边形的对边相等).

点拨: 通过此题,我们知道除了利用三角形全等证明两条线段相等外,利用平行四边形的性质也可证明两条线段相等.

5. 证明: 连结 DM. $\because AM, BD$ 互相平分, $\therefore$ 四边形 $ABMD$ 是平行四边形. $\therefore AD \parallel BM$, $\because M$ 是边 BC 的中点, $\therefore BM = CM$. $\therefore CM = AD$. 又 $\because AD \parallel BM$, 即 $AD \parallel MC, \therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形. $\therefore AM \parallel DC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

复习题

A 组

1. (1)√

(2)× **点拨:**平行四边形的对角相等.

(3)√ (4)√

(5)× **点拨:**在$\square ABCD$中,$AD \parallel BC$,$\therefore \angle A + \angle B = 180°$. $\therefore \angle B = 180° - \angle A = 180° - 40° = 140°$.

2. **解:**图中的平行四边形有$\square AGPE$,$\square EPHD$,$\square GBFP$,$\square PFCH$,$\square AGHD$,$\square GBCH$,$\square ABFE$,$\square EFCD$,$\square ABCD$.

3. **解:**在$\square ABCD$中,$AB \parallel CD$,$AD \parallel BC$,$\therefore \angle ACD = \angle BAC = 68°$,$\angle CAD = \angle ACB = 36°$. $\therefore \angle D = 180° - \angle CAD - \angle ACD = 180° - 36° - 68° = 76°$. $\because AD \parallel BC$,$\therefore \angle D + \angle BCD = 180°$. $\therefore \angle BCD = 180° - \angle D = 180° - 76° = 104°$.

4. **解:**在$\square ABCD$中,$\angle A = \angle C$,$\angle B = \angle D$,$AB \parallel CD$,$\because \angle A + \angle C = 140°$,$\therefore \angle A = \angle C = 70°$.

$\because AB \parallel CD$,$\therefore \angle B + \angle C = 180°$.

$\therefore \angle B = 180° - \angle C = 180° - 70° = 110°$.

$\therefore \angle D = \angle B = 110°$.

5. **解:**$\because$ 平行四边形中相邻两边的长度的比是3∶4,其中较长的边长是6 cm,$\therefore$ 较短的边长是$\frac{3}{4} \times 6 = 4.5$(cm),根据平行四边形的性质可得周长$= 2 \times (4.5 + 6) = 21$(cm).

6. **证明:**$\because \angle 1 = \angle 2$,$\therefore AB \parallel CD$. $\therefore \angle BAD + \angle D = 180°$. 又$\because \angle B = \angle D$,$\therefore \angle BAD + \angle B = 180°$.

$\therefore AD \parallel BC$. 又$\because AB \parallel CD$,$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

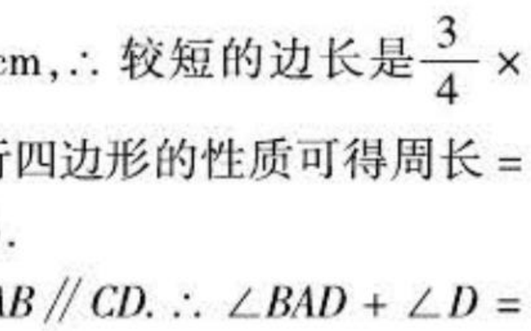
7. **证明:**$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore AD \parallel BC$,$AD = BC$,$AB = CD$. 又$\because BE = BA$,$DF = DC$,

$\therefore BE = DF$. $\therefore AD + DF = BC + BE$,即$AF = CE$.

又$\because AD \parallel BC$,即$AF \parallel CE$,$\therefore$ 四边形$AECF$是平行四边形.

$\therefore AE = CF$.

8. **解:**已知:如图,在$\square ABCD$中,对角线AC,BD交于点O,$OE \perp CD$于E,$OF \perp AB$于F,求证:$OE = OF$.



(第8题图)

证明:在$\square ABCD$中,$OA = OC$,$\because OE \perp CD$于E,$OF \perp AB$于F,$\therefore \angle OEC = \angle OFA = 90°$.

在$\triangle OEC$和$\triangle OFA$中,

$$\begin{cases} \angle OEC = \angle OFA, \\ \angle EOC = \angle FOA, \\ OC = OA, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OEC \cong \triangle OFA$. $\therefore OE = OF$.

B 组

9. **解:**在$\square ABCD$中,$AB \parallel DC$,$\therefore \angle BAE = \angle F = 60°$. 又$\because AB = BE$,$\therefore \triangle ABE$是等边三角形. $\therefore \angle B = 60°$. $\therefore \angle D = \angle B = 60°$. $\because AB \parallel DC$,$\therefore \angle BAD + \angle D = 180°$. $\therefore \angle BAD = 180° - 60° = 120°$. $\therefore \angle BCD = \angle BAD = 120°$.

10. **证明:**在$\square ABCD$中,$AD \parallel BC$,$\therefore \angle MDF = \angle EBN$. 又$\because DM = BN$,$BE = DF$,$\therefore \triangle MDF \cong \triangle NBE$. $\therefore MF = NE$,$\angle MFD = \angle NEB$. 又$\because \angle MFE + \angle MFD = 180°$,$\angle NEF + \angle NEB = 180°$,$\therefore \angle MFE = \angle NEF$. $\therefore MF \parallel NE$. $\therefore$ 四边形$MENF$是平行四边形.

11. **解:**$AB = DE + DF$. 理由:$\because DE \parallel AB$,$DF \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形$AFDE$是平行四边形. $\therefore DE = AF$.

$\because \triangle ABC$是等腰三角形,$\therefore \angle B = \angle C$. 由$DF \parallel AC$,得$\angle FDB = \angle C$. $\therefore \angle FDB = \angle B$. $\therefore BF = DF$.

$\therefore AB = AF + BF = DE + DF$.

12. **证明:**连结BD. 在$\square ABCD$中,有$AD \parallel BC$,$AD = BC$,所以$\angle ADB = \angle DBC$. 因为$\triangle ADE$和$\triangle BCF$都是正三角形,所以$\angle ADE = \angle CBF = 60°$,$ED = AD = BC = FB$. 所以$\angle ADE + \angle ADB = \angle CBF + \angle DBC$,即$\angle EDB = \angle FBD$,所以$ED \parallel FB$(内错角相等,两直线平行). 又有$ED = FB$,所以四边形$DEBF$是平行四边形.

13. **证明:**在$\square ABCD$中,有$AO = CO$,$BO = DO$. 因为$AE = CF$,$BG = DH$,所以$EO = FO$,$GO = HO$. 所以四边形$EGFH$是平行四边形. 所以$GF = HE$.

点拨:因为E,F在AC上,G,H在BD上,所以利用对角线互相平分证平行四边形很容易.

14. **证明:**连结AC. 由题意得AC过点O,且$OA = OC$. 在$\square ABCD$中,$AB \parallel CD$,$\therefore \angle AEO = \angle CFO$. 在$\triangle OEA$和$\triangle OFC$中,$\angle AEO = \angle CFO$,$\angle EOA = \angle FOC$,$OA = OC$,$\therefore \triangle OEA \cong \triangle OFC$. $\therefore AE = FC$. 又$\because$ 在$\square ABCD$中,$AB = CD$,$\therefore AB + AE = CD + FC$,即$BE = DF$. 又$\because BE \parallel DF$,$\therefore$ 四边形$BFDE$是平行四边形.

15. **证明:**在$\square ABCD$中,$OA = OC$,$OB = OD$,$AB \parallel CD$,$\therefore \angle EBO = \angle FDO$. 在$\triangle OEB$和$\triangle OFD$中,

$$\begin{cases} \angle EBO = \angle FDO, \\ OB = OD, \\ \angle BOE = \angle DOF, \end{cases} \quad \therefore \triangle OEB \cong \triangle OFD.$$

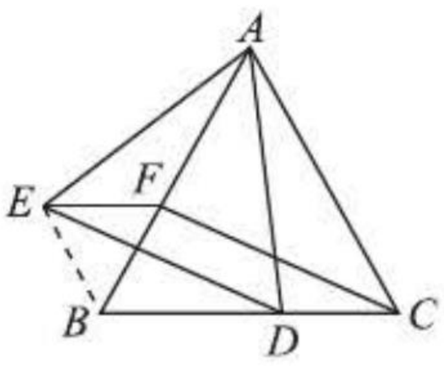
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OE = OF$. 又$\because$ G, H 分别是 OA, OC 的中点，$OA = OC$. $\therefore OG = OH$. $\therefore$ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

16. 略.

C 组

17. 证明：如图，连结 BE. 在等边三角形 ABC 和等边三角形 AED 中，有 $AB = AC, AE = AD, \angle EAD = \angle BAC = 60°$，所以 $\angle EAB = \angle DAC = 60° - \angle BAD$. 所以 $\triangle EAB \cong \triangle DAC$. 所以 $BE = CD, \angle EBA = \angle DCA = 60°$. 因为 $CD = BF$，所以 $BF = BE$. 所以 $\triangle BEF$ 是等边三角形. 所以 $CD = EF, \angle BFE = \angle ABC = 60°$. 所以 $BC \parallel EF$，即有 $CD \parallel EF$. 所以四边形 $CDEF$ 是平行四边形.



（第 17 题图）

点拨：当已知与未知很难沟通，图中各部分的关系也不明显时，就要考虑添加辅助线. 要证的是四边形 $CDEF$ 是平行四边形，有 $CD = BF$，需 $CD = EF$. 因此，想到证三角形全等，而 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ADC$ 又不可能全等，猜想是否可连结 BE. 通过与已知的两个等边三角形联系，发现这是一条有用的辅助线，可以很容易证得结论.

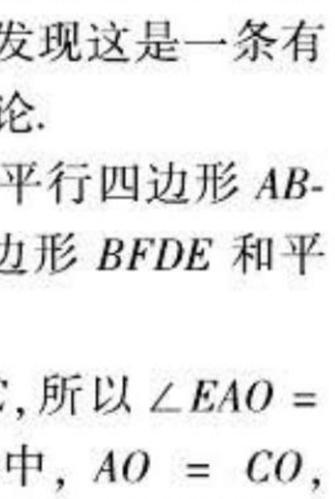
18. 解：有四个平行四边形. 分别是平行四边形 $ABCD$、平行四边形 $AFCE$、平行四边形 $BFDE$ 和平行四边形 $EGFH$.

理由：在$\square ABCD$ 中，有 $AD \parallel BC$，所以 $\angle EAO = \angle FCO$. 在 $\triangle EAO$ 和 $\triangle FCO$ 中，$AO = CO$，$\angle AOE = \angle COF$，$\angle EAO = \angle FCO$，所以 $\triangle EAO \cong \triangle FCO$. 所以 $EO = FO$. 所以四边形 $AFCE$ 是平行四边形. 所以 $AE \parallel FC$. 所以 $ED \parallel BF$. 所以四边形 $BFDE$ 也是平行四边形. 所以 $AF \parallel EC, BE \parallel DF$. 所以四边形 $EGFH$ 也是平行四边形，即连同已知的共有四个平行四边形.

19. 解：增加条件 $DG = AE$.

理由：如图，连结 AD, EG. $\because DF \parallel AB, DG = AE$，$\therefore$ 四边形 $AEGD$ 是平行四边形. $\therefore AG$ 与 ED 互相平分.

点拨：本题增加的条件不唯一，同学们可以试着增加其他条件，使得 AG 与 ED 互相平分.



（第 19 题图）

第 19 章 矩形、菱形与正方形

19.1 矩 形

练习

1. 解：相等的线段：$AB = CD, BC = AD, BD = AC, OA = OC = OB = OD$.

相等的角：$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB$，$\angle OBA = \angle OAB = \angle ODC = \angle OCD$，$\angle OAD = \angle ODA = \angle OBC = \angle OCB$，$\angle BOC = \angle AOD$，$\angle AOB = \angle COD$.

点拨：利用矩形的两组对边分别相等，矩形的对角线互相平分且相等得到相等的线段；利用矩形的四个角都是直角、平行线的性质、等腰三角形的性质等得到相等的角.

2. 证明：在矩形 $ABCD$ 中，$AC = BD$，$OA = OC = \frac{1}{2}AC$，$OB = OD = \frac{1}{2}BD$，所以 $OA = OB$. 又因为 $\angle AOD = 120°$，所以 $\angle AOB = 180° - \angle AOD = 60°$，则 $\triangle OAB$ 是等边三角形，即 $AB = OA = \frac{1}{2}AC$. 所以 $AC = 2AB$. **点拨：**本题应用了“矩形的对角线互相平分且相等”“有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形”等知识来解题.

3. 解：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $\angle BAD = 90°$. 由折叠的性质知，$\angle DAE = \angle EAF$. 又因为 $\angle BAF = 60°$，$\angle BAF + \angle DAE + \angle EAF = 90°$，所以 $\angle DAE = 15°$.

练习

1. 解：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD \parallel BC, AB \perp BC$. 所以 AD 与 BC 间的距离处处相等且都等于 AB. 所以 $\triangle BCE$ 的底边 BC 上的高等于 AB 的长. 所以 $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}BC \cdot AB$. 又 $S_{矩形ABCD} = BC \cdot AB$，所以 $\triangle BCE$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 面积的一半.

点拨：利用矩形的性质及矩形与三角形的面积公式解题.

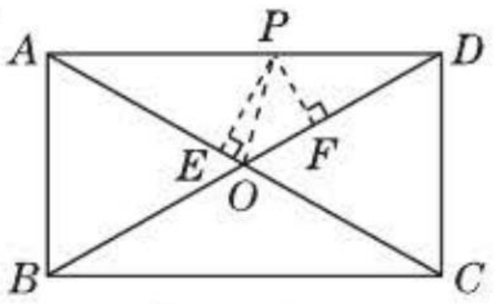
2. 解：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AC = BD$，且 $AO = \frac{1}{2}AC$. $BO = \frac{1}{2}BD$. 所以 $AO = BO$. 因为 $\angle AOB = 60°$，所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形. 所以 $AO = AB = 3.6$. 所以 $AC = 2AO = 7.2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得 $AB^2 + AD^2 = BD^2$，即 3.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$6^2+AD^2=7.2^2$,即 $AD^2=38.88$. 所以 $AD\approx6.2$.

点拨:本题考查了矩形的性质及勾股定理的应用.

3. 解:如图,过点 P 作 $PE\perp AC$ 于点 E,$PF\perp BD$ 于点 F,则 $PE+PF$ 即为所求. 设 AC,BD 交于点 O,连结 OP. 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=90°$,



(第3题图)

$OA=\frac{1}{2}AC$, $OD=\frac{1}{2}BD$, $AC=BD$, 所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17$. 所以 $OA=OD=\frac{17}{2}$. 因为 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle DOP}$, 所以 $\frac{1}{4}AB\cdot BC=\frac{1}{2}OA\cdot PE+\frac{1}{2}OD\cdot PF$,

即 $\frac{1}{4}\times8\times15=\frac{1}{2}\times\frac{17}{2}(PE+PF)$. 所以 $PE+PF=\frac{120}{17}$.

答:点 P 到矩形的两条对角线 AC 和 BD 的距离之和为 $\frac{120}{17}$.

练习

1. 解:四边形 $ACBD$ 是矩形. 证明:因为 AB,CD 是 $\odot O$ 的直径,所以 $AO=BO$, $CO=DO$. 所以四边形 $ACBD$ 是平行四边形. 又因为 $AB=CD$,所以平行四边形 $ACBD$ 是矩形.

点拨:同圆的半径相等,所以能证明四边形 $ACBD$ 是平行四边形. 同圆的直径也相等,所以平行四边形 $ACBD$ 是矩形.

2. 解:四边形 $ABCD$ 是矩形.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $AO=\frac{1}{2}AC$, $BO=\frac{1}{2}BD$.

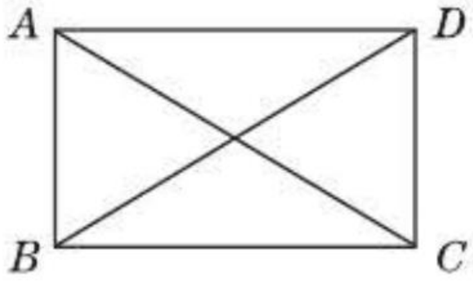
因为 $\angle1=\angle2$,所以 $AO=BO$. 所以 $AC=BD$. 所以平行四边形 $ABCD$ 是矩形(对角线相等的平行四边形是矩形).

3. 证明:因为 AC 和 EF 互相平分并交于点 O,所以 $AO=OC$, $OF=OE$. 又因为 $\angle AOF=\angle COE$,所以 $\triangle AOF\cong\triangle COE$. 所以 $AF=EC$, $\angle OAF=\angle OCE$. 又因为 $AB=AF+BF$, $DC=DE+EC$, $BF=DE$,所以 $AB=CD$. 因为 $\angle OAF=\angle OCE$,所以 $AB\parallel CD$. 所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 又因为 $\angle B=90°$,所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

练习

1. 证明:因为 AD,AE 分别是 $\angle BAC$, $\angle BAF$ 的平分线,所以 $\angle BAD=\angle DAC$, $\angle BAE=\angle EAF$. 又因为 $\angle BAC+\angle BAF=180°$,所以 $\angle BAD+\angle BAE=90°$,即 $\angle DAE=90°$. 因为 $BE\perp AE$, $DA\perp BC$,所以 $\angle AEB=\angle ADB=90°$. 所以四边形 $AEBD$ 是矩形.

2. 解:已知:如图,在四边形 $ABCD$ 中,每个顶点到其他三个顶点的距离之和相等,求证:四边形 $ABCD$ 是矩形.



(第2题图)

证明:因为 $AB+AD+AC=BC+CD+AC$,所以 $AB+AD=BC+CD$. ①

因为 $AB+BD+BC=AD+BD+CD$,所以 $AB+BC=AD+CD$. ②

由①-②,得 $AD-BC=BC-AD$. 所以 $AD=BC$. 又由①得 $AB=CD$.

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

因为 $AB+BD+BC=BC+CD+AC$,所以 $AC=BD$. 所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

3. 证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB\parallel CD$, $AB=DC$. 又因为 $CE=DC$,所以 $AB=CE$. 因为点 E 在 DC 的延长线上,所以 $AB\parallel CE$.

所以四边形 $ABEC$ 是平行四边形. 所以 $CF=\frac{1}{2}BC$, $EF=\frac{1}{2}AE$. 因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle BCE=\angle D$. 因为 $\angle AFC=2\angle D$, $\angle AFC=\angle FEC+\angle FCE$,所以 $\angle FEC=\angle D$. 所以 $\angle FEC=\angle FCE$.

所以 $EF=CF$. 所以 $\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AE$,即 $BC=AE$.

所以四边形 $ABEC$ 是矩形.

习题 19.1

1. (1)**证明**:因为 $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$,所以 $AB^2=36$, $BC^2=64$, $AC^2=100$. 所以 $AB^2+BC^2=AC^2$. 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle ABC=90°$. 又因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

(2)**解**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $BD=AC=10$.

2. 证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB\parallel CD$, $AD\parallel BC$. 所以 $\angle OCD=\angle BOC$, $\angle ODC=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle AOD$. 又因为 $\angle AOD = \angle BOC$, 所以 $\angle OCD = \angle ODC$. 所以 $OD = OC$. 因为点 O 是边 AB 的中点, 所以 $AO = OB$. 在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 中,

$$\begin{cases} AO = OB, \\ \angle AOD = \angle BOC, \\ OD = OC, \end{cases}$$

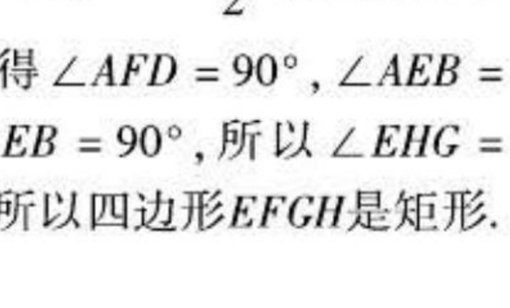
所以 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$. 所以 $\angle DAO = \angle OBC$. 因为 $AD // BC$, 所以 $\angle DAO + \angle OBC = 180°$. 所以 $\angle DAO = \angle OBC = 90°$. 所以平行四边形 $ABCD$ 是矩形.

3. **证明**: 因为 $AE // BD, AB // DE$, 所以四边形 $ABDE$ 是平行四边形. 所以 $AE = BD, AB = DE$. 因为点 D 是边 BC 的中点, 所以 $BD = DC$. 所以 $AE = DC$. 又因为 $AE // DC$, 所以四边形 $ADCE$ 是平行四边形. 因为 $AB = AC, AB = DE$, 所以 $AC = DE$. 所以四边形 $ADCE$ 是矩形.

4. **证明**: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AB // CD, AD // BC$. 所以 $\angle ABC + \angle BCD = 180°$, $\angle BAD + \angle ADC = 180°$, $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. 因为 AF, BH, CH, DF 分别是 $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ 与 $\angle CDA$ 的平分线, 所以 $\angle HBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle HCB = \frac{1}{2}\angle BCD$, $\angle FAD = \frac{1}{2}\angle BAD$, $\angle ADF = \frac{1}{2}\angle ADC$, $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAD$. 在 $\triangle BHC$ 中, $\angle BHC = 180° - (\angle HBC + \angle HCB) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = 90°$, 同理可得 $\angle AFD = 90°$, $\angle AEB = 90°$. 因为 $\angle FEH = \angle AEB = 90°$, 所以 $\angle EHG = \angle EFG = \angle FEH = 90°$. 所以四边形 $EFGH$ 是矩形. 所以 $EG = FH$.

5. **证明**: 因为 $AB = AC, AE = AF, \angle EAB = \angle FAC$, 所以 $\triangle AEB \cong \triangle AFC$. 所以 $EB = FC$, $\angle ABE = \angle ACF$. 因为 $EF = BC, EB = FC$, 所以四边形 $EBCF$ 是平行四边形. 所以 $BE // FC$. 所以 $\angle EBC + \angle FCB = 180°$. 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB$. 又因为 $\angle ABE = \angle ACF$, 所以 $\angle EBC = \angle FCB = 90°$. 所以四边形 $EBCF$ 是矩形.

6. **解**: 如图, 过点 G 作 $GE \perp BD$ 于 E, 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $\angle A = 90°$. 所以沿 DG 折叠, 点 A 与点 E 重合. 设 $AG = x$, 由折叠的性质知, $DE = AD = BC = 1$, $GE = AG = x$. 因为 $\angle A = 90°$, $AB = 2$, $AD = 1$, 所以 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5}$. 所以 $BE = \sqrt{5} - 1$. 在 Rt $\triangle GEB$ 中, $BG = 2 - x$, $BE = \sqrt{5} - 1$, $GE = x$. 根据勾股定理, 得 $BG^2 = GE^2 + BE^2$, 即 $(2 - x)^2 = x^2 + (\sqrt{5} - 1)^2$. 解得 $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.62$, 即 $AG \approx 0.62$.



(第6题图)

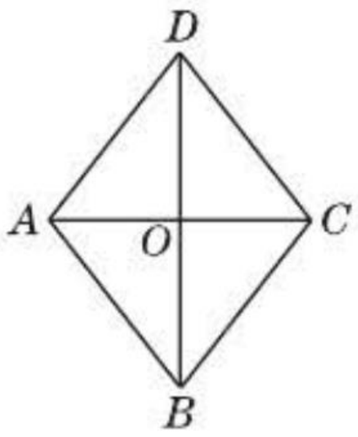
19.2 菱 形

练习

1. **解**: 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = DA$, 所以菱形 $ABCD$ 的周长 $= 4AB = 20$. 因为 $AC \perp BD$, 在 Rt $\triangle ABO$ 中, 由勾股定理, 可得 $BO = 3$. 因为 $AO = CO, BO = DO$, 所以 $AC = 8, BD = 6$. 所以菱形的周长为 20, 两条对角线的长分别为 8 和 6.

点拨: 利用"菱形的四条边相等""菱形的两条对角线互相垂直平分"来解题.

2. **解**: 如图所示, 在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, $S_{菱形ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot DO + \frac{1}{2}AC \cdot BO = \frac{1}{2}AC \cdot (DO + BO) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, 即菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半.



(第2题图)

点拨: 对角线互相垂直的四边形的面积等于两条对角线长的乘积的一半.

3. **解**: 在菱形 $ABCD$ 中, 设 AC 与 BD 相交于点 O, 则 $AO = OC, OB = OD = \frac{1}{2}BD = 6, AC \perp BD$. 根据勾股定理, 得 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. 所以 $AC = 2OA = 16$. 所以 $S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$.

练习

1. **解**: 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = DA$, 所以菱形 $ABCD$ 的周长 $= 4AB = 4 \times 5 = 20$(cm). 设 AC, BD 相交于点 O, 则 $AC \perp BD, AO = CO = \frac{1}{2}AC = 3$ cm, $BO = DO$. 在 Rt $\triangle ABO$ 中, $BO^2 = AB^2 - AO^2 = 25 - 9 = 16$, 所以 $BO = 4$ cm. 所以 $BD = 8$ cm. 所以 $S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 =$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$24(\mathrm{cm}^2)$.

2. 解:在菱形 $ABCD$ 中,$AB = AD$. 又因为 $BD = AB$,所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形. 所以 $\angle A = 60°$. 所以 $\angle C = \angle A = 60°$. 因为 $DC \parallel AB$,所以 $\angle A + \angle ADC = 180°$. 所以 $\angle ADC = 120°$,从而 $\angle ABC = \angle ADC = 120°$. 所以菱形各内角的度数为 $60°$,$120°$,$60°$,$120°$.

点拨:解本题的关键是得出 $\triangle ABD$ 是等边三角形.

3. 解:(1)连结 BD. $\because E$ 是 AB 的中点,且 $DE \perp AB$,$\therefore AE = BE$,$\angle AED = \angle BED = 90°$. 在 $\triangle AED$ 与 $\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases} DE = DE, \\ \angle AED = \angle BED, \\ AE = BE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle BED$.

$\therefore AD = BD$. 又 $AD = AB$,$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle DAB = 60°$. $\because AD \parallel BC$,$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180°$. $\therefore \angle ABC = 180° - \angle DAB = 120°$.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,易得 $AD = 4$,$AE = 2$,

$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{菱形ABCD} = AB \cdot DE = 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \approx 13.9$.

练习

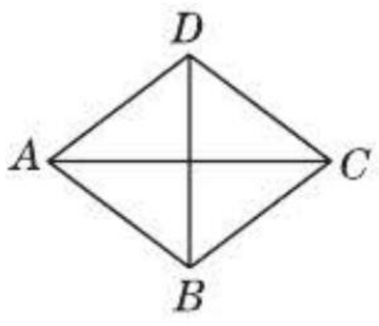
1. 解:因为虚线是四条相等的边,根据四条边都相等的四边形是菱形,可知剪下的四边形是菱形.

2. 证明:因为 $AD \parallel BC$,所以 $\angle DAE = \angle AEB$. 因为 AE 平分 $\angle BAD$,所以 $\angle BAE = \angle DAE$. 所以 $\angle BAE = \angle AEB$. 所以 $AB = BE$. 又因为 $AB = AD$,所以 $AD = BE$. 由 $AD \parallel BC$ 可知 $AD \parallel BE$,所以四边形 $ABED$ 是平行四边形. 所以 $AB = ED$. 所以 $AB = BE = ED = AD$. 所以四边形 $ABED$ 是菱形.

3. 解:$\square ABCD$ 是菱形. 理由如下:因为 $PE \perp AB$,$PF \perp AD$,$PE = PF$,所以点 P 在 $\angle DAB$ 的平分线上. 所以 $\angle DAC = \angle BAC$. 在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB = CD$,$AD = BC$,$AB \parallel CD$,所以 $\angle DCA = \angle BAC$. 所以 $\angle DAC = \angle DCA$. 所以 $AD = CD$. 所以 $AB = BC = CD = AD$. 所以 $\square ABCD$ 是菱形.

练习

1. 解:如图所示,作法:①作 $AC = 8$ cm,②作 $BD = 6$ cm,且 $AC \perp BD$,AC,BD 互相平分,则四边形 $ABCD$ 就是所求作的菱形. 理由如下:因为 AC,BD 互相平分,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又因为 $AC \perp BD$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形.



(第1题图)

2. 证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以对角线 AC 与 BD 的交点 O 是 $\square ABCD$ 的对称中心. 因为点 E,G 分别在 AD,BC 上,且 EG 过点 O,所以 $OE = OG$. 同理可得 $OF = OH$,则四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 又因为 $EG \perp FH$,所以四边形 $EFGH$ 是菱形.

3. 略.

习题 19.2

1. 解:$S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ (cm^2),设 AC,BD 相交于点 O,因为 $AC \perp BD$,且 $AO = CO = \frac{1}{2}AC = 3$ cm,$BO = DO = \frac{1}{2}BD = 4$ cm,所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中,$AB^2 = OA^2 + OB^2$,即 $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. 所以 $AB = 5$ cm. 所以菱形 $ABCD$ 的周长为 $5 \times 4 = 20(\mathrm{cm})$.

点拨:主要利用"菱形的两条对角线互相垂直平分"来解题.

2. 证明:因为 $DE \parallel AC$,$DF \parallel AB$,所以 $\angle ADE = \angle DAF$,四边形 $AEDF$ 是平行四边形. 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线,所以 $\angle EAD = \angle DAF$. 所以 $\angle ADE = \angle EAD$. 所以 $AE = ED$. 所以四边形 $AEDF$ 是菱形.

点拨:先证四边形是平行四边形,再由有一组邻边相等的平行四边形是菱形进行判定.

3. 证明:因为 AD 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle EAD = \angle FAD$. 设 EF 与 AD 相交于点 O. 因为 EF 垂直平分 AD,所以 $AO = OD$,$\angle AOE = \angle AOF$. 在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle AFO$ 中,$\begin{cases} \angle EAO = \angle FAO, \\ AO = AO, \\ \angle AOE = \angle AOF, \end{cases}$ 所以 $\triangle AEO \cong \triangle AFO$. 所以 $EO = FO$. 又因为 $AO = OD$,所以四边形 $AEDF$ 是平行四边形. 因为 $AD \perp EF$,所以四边形 $AEDF$ 是菱形.

4. 证明:因为 $DG \perp AB$,$DE \perp AC$,所以 $\angle DGB = \angle DEC = 90°$. 因为点 D 是 BC 的中点,所以 $BD = DC$. 因为 $AB = AC$,所以 $\angle B = \angle C$. 所以 $\triangle BGD \cong \triangle CED$. 所以 $GD = DE$. 因为 $DG \perp AB$,$EK \perp AB$,所以 $DG \parallel EK$,即 $DG \parallel EF$. 因为 $DE \perp AC$,$GH \perp AC$,所以 $DE \parallel GH$,即 $DE \parallel GF$. 所以四边形 $DEFG$ 是平行四边形. 又因为 $GD = DE$,所以四边形 $DEFG$ 是菱形. 所以 GE 与 FD 互相垂直平分.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. 解：因为菱形的周长为 $2p$，所以 $BC=\frac{1}{4}\cdot 2p=\frac{1}{2}p$. 在 Rt $\triangle BOC$ 中，有 $BC^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2+\left(\frac{1}{2}AC\right)^2$，即 $\left(\frac{1}{2}p\right)^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2+\left(\frac{1}{2}AC\right)^2$，$p^2=BD^2+AC^2$，$p^2=(BD+AC)^2-2BD\cdot AC$. 又因为 $BD+AC=q$，所以 $BD\cdot AC=\frac{1}{2}(q^2-p^2)$. 又因为 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC$，所以 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{4}(q^2-p^2)$.

点拨：这里求菱形的面积，采用两条对角线长的乘积的一半，因此，只要根据已知的数据及勾股定理求出两对角线长的乘积，就可以了.

6. 证明：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\parallel BC$. 所以 $AE\parallel CF$，$\angle EAO=\angle FCO$. 因为直线 l 垂直平分线段 AC，所以 $OA=OC$. 又因为 $\angle AOE=\angle COF$. 所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$，所以 $OE=OF$. 又因为 $OA=OC$，所以四边形 $AFCE$ 是平行四边形. 又因为 $AC\perp EF$，所以四边形 $AFCE$ 为菱形.

19.3 正方形

练习

1. 解：因为一组邻边相等的矩形是正方形.

2. 解：(1) 正确. (2) 正确. (3) 正确. (4) 正确.

3. 解：(1) 有 5 个正方形，9 个矩形.

(2) 有 14 个正方形，36 个矩形.

4. 解：正方形的周长 $=4\times 2=8$(cm)；$AC^2=BD^2=2^2+2^2=8$，所以对角线 $AC=BD=2\sqrt{2}\approx 2.8$(cm)；正方形的面积 $=2\times 2=4$(cm^2).

习题 19.3

1. 证明：在正方形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle D=\angle ABC=\angle BAD=90°$. 因为 $EA\perp AF$，所以 $\angle FAE=90°$. 所以 $\angle FAB+\angle BAE=90°$. 又因为 $\angle BAE+\angle EAD=90°$，所以 $\angle FAB=\angle EAD$. 因为 $\angle ABC=90°$，所以 $\angle ABF=90°$. 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases}\angle FAB=\angle EAD,\\ AB=AD,\\ \angle ABF=\angle ADE,\end{cases}$$ 所以 $\triangle ABF\cong\triangle ADE$.

所以 $DE=BF$.

2. 证明：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BC=CD$，$\angle B=\angle BCD=90°$. 因为 $CE\perp DF$，所以 $\angle ECD+\angle FDC=90°$. 又因为 $\angle BCE+\angle ECD=90°$，所以 $\angle BCE=\angle FDC$. 所以 $\triangle BCE\cong\triangle CDF$，所以 $CE=DF$.

3. 解：过点 P 作 $PE\perp BC$ 于 E，$PF\perp CD$ 于 F. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $BC=CD=1$，$\angle BCD=90°$. 所以四边形 $PECF$ 是矩形，所以 $PF=EC$. 又因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形，所以 $PB=PC=BC$. 所以 $BE=EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$(等腰三角形三线合一). 所以 $PF=EC=\frac{1}{2}$. 在 Rt$\triangle PEC$中，$PE=\sqrt{PC^2-CE^2}=\sqrt{BC^2-CE^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $S_{\triangle BPD}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}-S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot PE+\frac{1}{2}CD\cdot PF-\frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}\approx 0.18$.

复习题

A 组

1. (1) 矩　(2) 菱　(3) 正方

点拨：先画出草图，再针对提出的问题进行判定. (1) 在 $\triangle ABD$ 中，两个锐角互余，所以 $\angle BAD=90°$. 故平行四边形 $ABCD$ 是矩形. (2) $\angle AOB$ 和 $\angle AOD$ 互补且相等，故 $\angle AOB=\angle AOD=90°$，即 $AC\perp BD$，所以平行四边形 $ABCD$ 是菱形. (3) 由 $AC=BD$，得平行四边形 $ABCD$ 是矩形，又 $AB=BC$，进而得到是正方形.

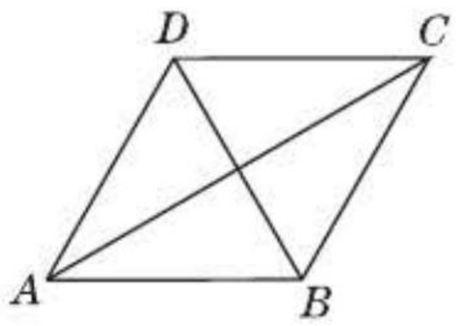
2. 解：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle BAD=\angle B=90°$. 因为 AE 平分 $\angle BAD$，所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$. 所以 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形. 所以 $BE=AB=15$ cm，$CE=BC-BE=AD-BE=25-15=10$(cm).

3. 解：设正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 x cm，则根据题意，有 $x^2+x^2=4^2$. 解得 $x=\sqrt{8}\approx 2.8$ 或 $x=-\sqrt{8}\approx -2.8$(舍去)，则 $x^2=8$. 故正方形纸片 $ABCD$ 的边长约为2.8 cm，面积为 8 cm^2.

4. 解：如图，菱形 $ABCD$ 的周长为 20 cm，$\angle BAD:\angle ADC=1:2$，$AC$，$BD$ 为对角线，由图可知 $BD<AC$. 设 $\angle BAD=x°$，则 $\angle ADC=2x°$，有 $x+2x=$

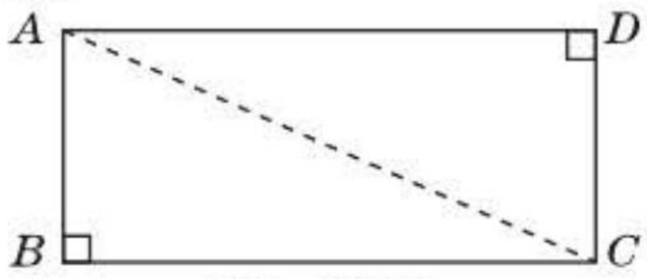
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

180,解得 $x=60$,即 $\angle BAD=60°$. 又 $AB=AD$,所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形. 所以 $BD=AB=20\div4=5$(cm). 故较短的对角线长为 5 cm.



(第 4 题图)

5. 证明:如图,连结 AC. 因为 $\angle B=\angle D=90°$,所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都为直角三角形. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDA$ 中,$\begin{cases}AB=CD,\\AC=CA,\end{cases}$ 所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle CDA$. 所以 $\angle BAC=\angle DCA$. 因为 $\angle BAC+\angle ACB=90°$,所以 $\angle ACD+\angle ACB=90°$,即 $\angle BCD=90°$. 又 $\angle B=\angle D=90°$,所以四边形 $ABCD$ 是矩形.



(第 5 题图)

点拨:已知四边形中有两个角是直角,要证这个四边形是矩形,再证出一个角是直角就可以了. 不要忘记在解四边形的题目时,常作的辅助线就是连结对角线.

6. 证明:在正方形 $ABDE$ 和正方形 $AGFC$ 中,有 $AE=AB$,$AC=AG$,$\angle EAB=\angle CAG=90°$,所以 $\angle EAB-\angle CAB=\angle CAG-\angle CAB$,即 $\angle EAC=\angle BAG$. 所以 $\triangle EAC\cong\triangle BAG$. 所以 $BG=EC$.

点拨:不难发现,要证的线段 EC 和 BG 分别在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle BAG$ 中,证它们全等即可.

7. 证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB\parallel CD$,$AB=CD$. 因为 E,F 分别是 AB,CD 的中点,所以 $AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD=DF$. 所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形. 因为 $AB=2AD$,$AB=2AE$,所以 $AE=AD$. 又因为 $\angle DAB=60°$,所以 $\triangle ADE$ 是等边三角形. 所以 $DE=AE=EB$. 所以四边形 $DEBF$ 是菱形.

B 组

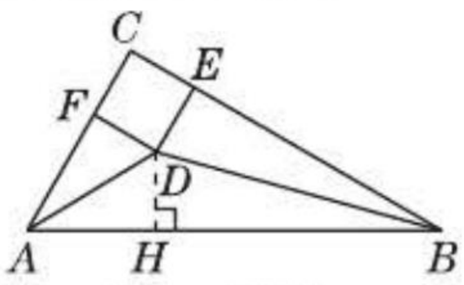
8. 证明:因为 $\triangle ABC$,$\triangle BDE$ 是等边三角形,所以 $AB=CB$,$EB=DB$,$\angle EBD=\angle ABC=60°$. 所以 $\angle EBD-\angle ABD=\angle ABC-\angle ABD$,即 $\angle EBA=\angle DBC$. 所以 $\triangle EBA\cong\triangle DBC$. 所以 $AE=CD$,$\angle AEB=\angle CDB$,$\angle EAB=\angle C=60°$. 所以 $\angle EAB=\angle ABF$. 所以 $EA\parallel BF$. 因为 D 是 AC 的中点,F 是 BC 的中点,所以 $CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC=BF$,所以 $AE=BF$. 所以四边形 $AEBF$ 是平行四边形. 又因为 $AD=CD$,$AB=BC$,所以 $BD\perp AC$. 所以 $\angle CDB=90°$. 所以 $\angle AEB=90°$. 所以四边形 $AEBF$ 为矩形.

点拨:本题通过证三角形全等得到对应边相等、对应角相等,再证得四边形 $AEBF$ 是平行四边形,最后利用有一个角是直角的平行四边形是矩形证得结论.

9. (1) **证明**:因为 $DE\parallel CA$,$AE\parallel BD$,所以四边形 $AODE$ 是平行四边形. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AO=OD$. 所以四边形 $AODE$ 是菱形.

(2) **解**:四边形 $AODE$ 是矩形,证明如下:因为 $DE\parallel CA$,$AE\parallel BD$,所以四边形 $AODE$ 是平行四边形. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AO\perp OD$,即 $\angle AOD=90°$. 所以四边形 $AODE$ 是矩形.

10. 证明:(1) 因为 $DE\perp BC$,$DF\perp AC$,所以 $\angle CED=\angle CFD=90°$. 又因为 $\angle C=90°$,所以四边形 $CFDE$ 是矩形.



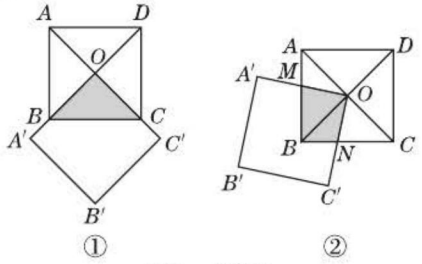
(第 10 题图)

(2) 如图,过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H. 易得 $\angle BED=\angle AFD=\angle C=90°$,所以 $DE\parallel AC$,$DF\parallel BC$. 所以四边形 $CFDE$ 是平行四边形. 因为 BD 平分 $\angle ABC$,$DE\perp BC$,$DH\perp AB$,所以 $DE=DH$. 同理可得 $DF=DH$,所以 $DF=DE$. 所以四边形 $CFDE$ 是菱形.

11. 解:正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转的过程中,当两个正方形重叠的部分为三角形时(如图①中阴影部分),此时重叠部分的面积 $S=\frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$;当两个正方形重叠的部分为四边形时(如图②中阴影部分). 设 OC' 与 BC 交于点 N,OA' 与 AB 交于点 M. 因为 $\angle CON+\angle BON=90°$,$\angle MOB+\angle NOB=90°$,所以 $\angle MOB=\angle NOC$. 在 $\triangle MOB$ 与 $\triangle NOC$ 中,$\begin{cases}\angle MOB=\angle NOC,\\OB=OC,\\\angle MBO=\angle NCO,\end{cases}$ 所以 $\triangle MOB\cong\triangle NOC$. 所以 $S_{\text{四边形}MBNO}=S_{\triangle BOC}$. 又 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$,所以 $S_{\text{四边形}MBNO}=\frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$. 故正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 无论怎样旋转,两个正方形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

重叠部分的面积总等于一个正方形面积的四分之一.

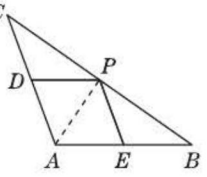


(第11题图)

12. 略.

C组

13. **解**:存在,P 为 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 的交点,此时四边形 $ADPE$ 为菱形.



(第13题图)

理由如下:如图,作 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 P. 因为 $PD \parallel AB$, $PE \parallel AC$,所以四边形 $ADPE$ 为平行四边形, $\angle DPA = \angle PAB$. 因为 AP 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle DAP = \angle PAB$. 所以 $\angle DAP = \angle DPA$. 所以 $AD = DP$. 所以四边形 $ADPE$ 为菱形.

14. **解**:(1)四边形 $ADFE$ 为平行四边形.

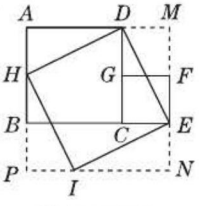
(2)不一定存在 $\square ADFE$. 理由如下:当 $\angle BAC = 60°$ 时, $\angle EAB + \angle BAC + \angle DAC = 180°$,所以 $\angle EAD = 180°$,此时不存在四边形 $ADFE$,即不存在 $\square ADFE$.

(3)当 $\triangle ABC$ 满足 $\angle BAC = 150°$ 时,四边形 $ADFE$ 是矩形.

(4)当 $\triangle ABC$ 满足 $AB = AC$ 且不是等边三角形时,四边形 $ADFE$ 是菱形.

(5)当 $\triangle ABC$ 满足 $AB = AC$,且 $\angle BAC = 150°$ 时,四边形 $ADFE$ 是正方形.

15. **证明**:如图,延长 AD,交 EF 的延长线于点 M,过点 I 作 BE 的平行线交 AB 的延长线于点 P,交 FE 的延长线于点 N,则四边形 $APNM$ 和四边形 $DCEM$ 都为矩形.



(第15题图)

因为 $\angle ADH + \angle MDE = 90°$, $\angle MDE + \angle MED = 90°$,所以 $\angle ADH = \angle MED$. 在 $\triangle ADH$ 与 $\triangle MED$ 中, $\angle A = \angle M = 90°$, $\angle ADH = \angle MED$, $HD = DE$,所以 $\triangle ADH \cong \triangle MED$. 同理可得 $\triangle ADH \cong \triangle PHI \cong \triangle NIE$,所以 $DM = EN = CE$. 所以 $S_{矩形APNM} = 4S_{\triangle DME} + S_{正方形HIED} = 4 \times \frac{1}{2} DM \cdot ME + DE^2 = 2CE \cdot CD + DE^2$. ① 又 $S_{矩形APNM} = S_{正方形ABCD} + S_{正方形CGFE} + S_{矩形BPNE} + S_{矩形GFMD} = CD^2 + CE^2 + NE \cdot (BC + CE) + DM \cdot (ME - EF) = CD^2 + CE^2 + CE \cdot (CD + CE) + CE \cdot (CD - CE) = CD^2 + CE^2 + 2CE \cdot CD$,② 由①②可得 $2CE \cdot CD + DE^2 = CD^2 + CE^2 + 2CE \cdot CD$. 所以 $CD^2 + CE^2 = DE^2$.

第20章 数据的整理与初步处理

20.1 平均数

练习

1. **解**:设乙校学生平均每人要捐书 x 本. 根据题意,得 $(800 - 80)x = 800 \times 4.5$. 解得 $x = 5$.

答:乙校学生平均每人要捐书5本.

点拨:运用列方程可以有效地解决这一问题,且思路清晰,方法简捷.

2. 略.

练习

1. **解**:(1)6.7. (2)5.167 575. (3)43.

2. **解**:(1)正确. (2)不正确. 举反例略.

点拨:通过一些具体的数据来验证.

练习

1. **解**:估计5包饼干的平均价格小于2元. $\frac{1}{5} \times (2.20 \times 2 + 1.80 \times 3) = 1.96$(元).

答:5包饼干的平均价格是1.96元.

点拨:因为有2包饼干的单价为2.20元,2包饼干的单价为1.80元,恰好这4包饼干的平均价格为2元. 可是还有1包饼干的单价为1.80元,所以这5包饼干的平均价格应小于2元.

2. **解**:$11 \times 80 + 2 \times 70 = 1\,020$(千克). 因为 $1\,020 > 1\,000$,所以他们不能一起安全地搭乘这架电梯. $1\,020 \div 13 \approx 78.5$(千克),所以他们的平均体重约是78.5千克.

3. **解**:(1) $\frac{3}{10} \times 3 + \frac{3}{10} \times 4 + \frac{4}{10} \times 5 = \frac{9}{10} + \frac{12}{10} +$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\frac{20}{10}=\frac{41}{10}=4.1$(元).

答:混合馄饨每碗的定价应是4.1元.

(2)$\frac{3}{10}\times3+\frac{2}{10}\times4+\frac{5}{10}\times5=\frac{9}{10}+\frac{8}{10}+\frac{25}{10}=\frac{42}{10}=4.2$(元).

答:混合馄饨每碗的定价应是4.2元.

(3)$\frac{1}{5}\times3+\frac{1}{5}\times4+\frac{3}{5}\times5=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{15}{5}=\frac{22}{5}=4.4$(元).

答:混合馄饨每碗的定价应是4.4元.

(4)如果混合馄饨的定价为3.8元,可以搭配为:每碗4个菜馅馄饨,4个鸡蛋馅馄饨,2个肉馅馄饨.(答案不唯一)

习题20.1

1. 解:这20件圆柱形机器零件外径的平均值为56 mm. 有三种不同的算法:

第一种是利用计算器,求得这20个数据的算术平均数为56,即这20件圆柱形机器零件外径的平均值为56 mm;第二种是以56为标准,则这20个数据与56的差分别为:0.1,-0.1,-0.1,0,-0.2,0.1,-0.3,-0.4,0.3,0.2,0.2,-0.3,0.3,0.1,0.2,0.2,-0.1,-0.2,0,0. 求出这些数据的算术平均数是0,所以这20件圆柱形机器零件外径的平均值是56 mm;第三种是利用加权平均数公式计算.

点拨:一般在求平均数的时候,我们可以利用计算器求解,但对于一组比较大的数据,我们可以利用第二种算法来求解.

2. 解:第一组数据的平均数为$\frac{10+10}{2}=10$;

第二组数据的平均数为$\frac{20+20+20}{3}=20$;

第三组数据的平均数为$\frac{30+30+30+30+30}{5}=30$.

将这三组数据合成一组新的数据,这组新数据的平均数为$\frac{1}{10}\times(10+10+20+20+20+30+30+30+30+30)=23$.

点拨:这组新数据的平均数也可以利用加权平均数公式来计算,即$\frac{2}{10}\times10+\frac{3}{10}\times20+\frac{5}{10}\times30=2+6+15=23$.

由此我们可以发现在一组数据中,如果重复出现的数据比较多,那么就可以用加权平均数公式计算这组数据的平均数.

3. 略.

点拨:从图中挖掘相关信息是一种解题技巧,也是数学学习中必备的一种能力.

4. 解:若该同学五次测验成绩的平均数恰好达到85分,则第五次测验成绩为$85\times5-(93+82+76+88)=86$(分). 所以这次测验她至少要考86分.

点拨:此题考查了平均数公式的逆用.

5. 解:甲错,因为数据的个数是10,不是9,0也是一个数据;乙错,因为3出现了3次,也就是说有三个数据都是3,所以不应该只算一次;丙对,因为$3+3+3=3\times3$.

点拨:在求一组数据的平均数时,如果这组数据中有0,那么0也是一个数据;如果这组数据中有重复出现的数,那么出现几次就应该算几次,而不能只算一次.

6. 解:(1)选手甲的最终成绩为$\frac{2}{10}\times80+\frac{3}{10}\times80+\frac{3}{10}\times90+\frac{2}{10}\times82=83.4$,

选手乙的最终成绩为$\frac{2}{10}\times85+\frac{3}{10}\times82+\frac{3}{10}\times85+\frac{2}{10}\times82=83.5$.

因为$83.4<83.5$,

所以选手乙的最终成绩高.

(2)选手甲的最终成绩为$\frac{2}{10}\times80+\frac{2}{10}\times80+\frac{3}{10}\times90+\frac{3}{10}\times82=83.6$,

选手乙的最终成绩为$\frac{2}{10}\times85+\frac{2}{10}\times82+\frac{3}{10}\times85+\frac{3}{10}\times82=83.5$.

因为$83.6>83.5$,

所以选手甲的最终成绩高.

7. 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.2 数据的集中趋势

练习

1. 解:这 10 箱苹果质量的平均数$\bar{x}=\frac{1}{10}\times$(4.8+5.0+5.1+4.8+4.9+4.8+5.1+4.9+4.7+4.7)=4.88(千克);将这 10 箱苹果质量从小到大排列为(单位:千克):4.7,4.7,4.8,4.8,4.8,4.9,4.9,5.0,5.1,5.1,因此这 10 箱苹果质量的中位数是 4.85 千克;这 10 箱苹果质量的众数是 4.8 千克.

2. (1)√ (2)√ (3)× (4)√ (5)× (6)×

点拨:(3)众数是指一组数据中出现次数最多的数,有时有多个,有时没有,有时有一个;

(5)一组数据 2,3,4,21 的中位数是 3.5,并不是 11.5;

(6)如果在给定的一组数据中找不到众数,那么这组数据就没有众数.

3. 解:将这 6 辆车的速度从小到大排列为(单位:千米/时):54,57,58,66,69,71,因此这 6 辆车的速度的中位数是$\frac{58+66}{2}=62$(千米/时),这 6 辆车的速度没有众数.

练习

解:合适.

习题 20.2

1. 解:

数据	平均数	中位数	众数
20,20,21,24,27,30,32	24.9	24	20
0,2,3,4,5,5,10	4.1	4	5
−2,0,3,3,3,8	2.5	3	3
−6,−4,−2,2,4,6	0	0	不存在

2. 解:(1)略.

(2)学生上学单程所花时间的平均数为$\frac{1}{30}\times(5\times3+10\times3+15\times6+20\times12+25\times2+30\times2+35\times1+45\times1)\approx19$(分),中位数是 20 分,众数是 20 分.

(3)老师最可能得到的回答是 20 分.

点拨:求平均数可用一般公式,也可用变形公式,即学生上学单程所花时间的平均数为$20+\frac{1}{30}\times(-15\times3-10\times3-5\times6+0\times12+5\times2+10\times2+15\times1+25\times1)\approx19$(分).

3. 解:(1)不一定. 因为平均值是介于最大值与最小值之间的一个数,所以河水的最小深度可能比 1.5 米还小,所以一个身高 1.5 米但不会游泳的人下水后不一定会被淹死.

(2)不一定. 因为平均值是介于最大值与最小值之间的一个数,所以该校录取新生的最低分可能低于或等于 531 分. 所以他可能被这个学校录取.

(3)考分为 73 的学生在平均分之上,因为平均分为 71.8;他在 5 人中考分不属于“中上”水平,因为 73 比中位数 78 小.

(4)鞋厂最不感兴趣的是平均数,最感兴趣的是众数. 理由略.

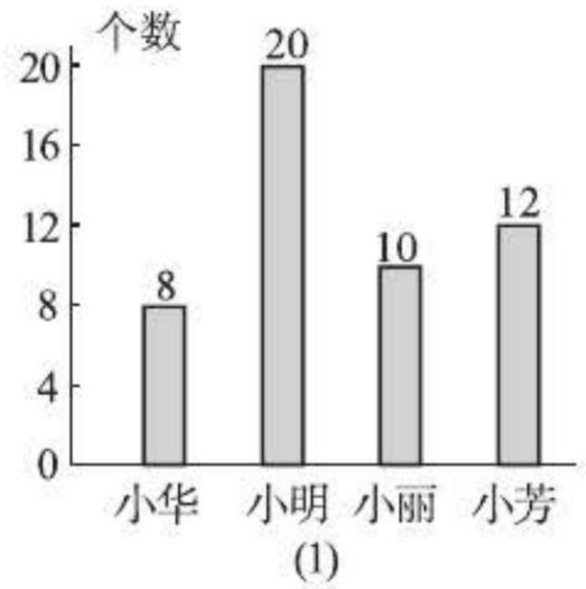
点拨:求解此题必须对平均数、中位数、众数的意义熟悉,熟练掌握求三个统计量的方法.

4. 解:(1)不正确. 例如:一组数据 1,2,3,4,5 的平均数是 3,若新添入一个数据 3,这组新数据的平均数还是 3.

(2)不正确. 例如:一组数据 1,2,3,4,5 的中位数是 3. 若把 5 变为 6,这组新数据的中位数仍是 3.

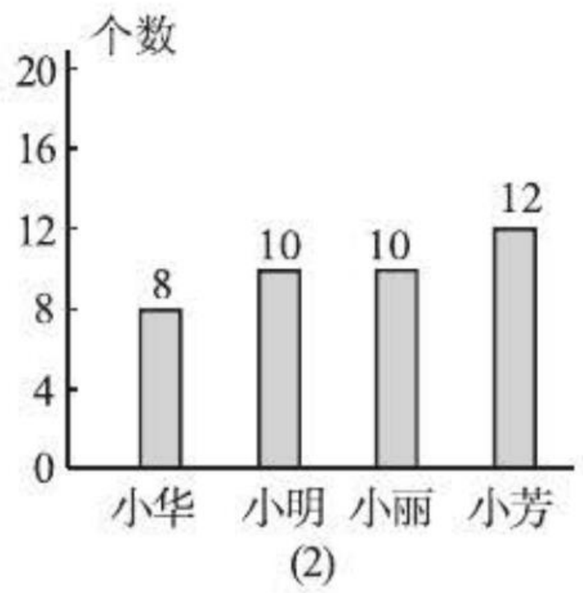
5. 解:条形统计图如图(1)(2)所示.

第(2)种用平均数代表学生每人送的桃子数较为合理. 因为学生们送的桃子数都在平均数附近.



(1)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(2)

(第5题图)

20.3 数据的离散程度

练习

1. **解**:A组数据的平均数为5;B组数据的平均数为5.

$s_A^2=\frac{1}{10}\times[(0-5)^2+(10-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2]=5$;

$s_B^2=\frac{1}{10}\times[(4-5)^2+(6-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2+(2-5)^2+(8-5)^2+(1-5)^2+(9-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2]=6$.

A组数据比B组数据的方差小.

2. **解**:2001年,上海市2月下旬每日最高气温的平均值为$\frac{1}{8}\times(12+13+14+22+6+8+9+12)=12$(℃);

2002年,上海市2月下旬每日最高气温的平均值为$\frac{1}{8}\times(13+13+12+9+11+16+12+10)=12$(℃).

2001年,上海市2月下旬每日最高气温的方差:$s_1^2=\frac{1}{8}\times[(12-12)^2+(13-12)^2+(14-12)^2+(22-12)^2+(6-12)^2+(8-12)^2+(9-12)^2+(12-12)^2]=20.75$;

2002年,上海市2月下旬每日最高气温的方差:$s_2^2=\frac{1}{8}\times[(13-12)^2+(13-12)^2+(12-12)^2+(9-12)^2+(11-12)^2+(16-12)^2+(12-12)^2+(10-12)^2]=4$.

答:2001年上海市2月下旬每日最高气温的离散程度较大,和从教材中的图20.3.1中直观看出的结果一致.

练习

解:这两种股票收盘价格的平均数和方差如下:

A股票:$\bar{x}_A=\frac{1}{15}\times(11.59+11.17+11.15+11.62+11.51+11.39+11.94+12.29+12.02+12.02+11.95+11.97+11.89+11.59+11.76)=11.724$(元);

$s_A^2=\frac{1}{15}\times[(11.59-11.724)^2+(11.17-11.724)^2+(11.15-11.724)^2+(11.62-11.724)^2+(11.51-11.724)^2+(11.39-11.724)^2+(11.94-11.724)^2+(12.29-11.724)^2+(12.02-11.724)^2+(12.02-11.724)^2+(11.95-11.724)^2+(11.97-11.724)^2+(11.89-11.724)^2+(11.59-11.724)^2+(11.76-11.724)^2]=0.101\,544$;

B股票:$\bar{x}_B=\frac{1}{15}\times(13.49+13.53+13.51+14.07+13.84+13.98+14.67+14.80+14.61+14.60+14.41+14.31+14.38+14.02+14.17)\approx14.16$(元);

$s_B^2\approx\frac{1}{15}\times[(13.49-14.16)^2+(13.53-14.16)^2+(13.51-14.16)^2+(14.07-14.16)^2+(13.84-14.16)^2+(13.98-14.16)^2+(14.67-14.16)^2+(14.80-14.16)^2+(14.61-14.16)^2+(14.60-14.16)^2+(14.41-14.16)^2+(14.31-14.16)^2+(14.38-14.16)^2+(14.02-14.16)^2+(14.17-14.16)^2]\approx0.175$.

因为0.101 544<0.175,所以$s_A^2<s_B^2$.

因此B种股票在这段时间内的涨跌变化幅度较大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 20.3

1. 解:(1)填表如下:

	甲			乙		
	每次成绩	每次成绩 - 平均成绩	(每次成绩 - 平均成绩)^2	每次成绩	每次成绩 - 平均成绩	(每次成绩 - 平均成绩)^2
1	9	1.4	1.96	2	-4.4	19.36
2	6	-1.6	2.56	4	-2.4	5.76
3	7	-0.6	0.36	6	-0.4	0.16
4	6	-1.6	2.56	8	1.6	2.56
5	8	0.4	0.16	7	0.6	0.36
6	7	-0.6	0.36	7	0.6	0.36
7	7	-0.6	0.36	8	1.6	2.56
8	9	1.4	1.96	6	-0.4	0.16
9	8	0.4	0.16	9	2.6	6.76
10	9	1.4	1.96	7	0.6	0.36
总计	76		12.4	64		38.4
平均	7.6		1.24	6.4		3.84

(2)甲的平均成绩高.

(3)甲的成绩较为稳定,因为甲的成绩的方差较小.

2. 解:$\bar{x}_{初}=\frac{1}{5}\times(0.400+0.400+0.533+0.500+0.560)=0.478\ 6$,

$s^2_{初}=\frac{1}{5}\times[(0.400-0.478\ 6)^2\times2+(0.533-0.478\ 6)^2+(0.500-0.478\ 6)^2+(0.560-0.478\ 6)^2]\approx0.004\ 48$;

$\bar{x}_{后}=\frac{1}{5}\times(0.500+0.494+0.500+0.495+0.500)=0.497\ 8$,

$s^2_{后}=\frac{1}{5}\times[(0.500-0.497\ 8)^2\times3+(0.494-0.497\ 8)^2+(0.495-0.497\ 8)^2]\approx0.000\ 007$.

因为 $0.004\ 48>0.000\ 007$,

所以 $s^2_{初}>s^2_{后}$.

所以最后 5 个频率表现得更为稳定.

3. 解:甲、乙两名运动员在 10 次百米跑测试中的平均成绩及方差如下:

$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(10.8+10.9+11.0+10.7+11.2+11.1+10.8+11.0+10.7+10.9)$

$=10.91$(秒),

$s^2_{甲}=\frac{1}{10}\times[(10.8-10.91)^2+(10.9-10.91)^2+\cdots+(10.9-10.91)^2]$

$=0.024\ 9$;

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(10.9+10.9+10.8+10.8+11.0+10.9+10.8+11.1+10.9+10.8)$

$=10.89$(秒),

$s^2_{乙}=\frac{1}{10}\times[(10.9-10.89)^2+(10.9-10.89)^2+\cdots+(10.8-10.89)^2]$

$=0.008\ 9$.

显然,从平均成绩上看,两名运动员相差无几,但 $s^2_{乙}<s^2_{甲}$,故乙运动员的成绩较稳定,因此选乙运动员比较合适.

点拨:当平均成绩相等或相差无几时,我们应用方差来衡量一组数据的稳定程度,方差越小,成绩越稳定.

复习题

A 组

1. 解:这次考试全班学生成绩的平均数约是 82.5,中位数是 83.5,众数是 84,90,78 三个数据,方差约是 89.5.(计算过程略)

点拨:(1)这次考试全班学生成绩的平均数是 30 个数据之和的$\frac{1}{30}$;(2)求这次考试全班学生成绩的中位数时,把这 30 个数据从小到大(或从大到小)排列,第 15、16 两个数据的平均值即是中位数;(3)出现次数最多的数据是这次考试全班学生成绩的众数;(4)求方差直接运用方差公式计算即可.

2. 解:第一组数据的平均数为$\frac{1}{5}\times(1+3+5+7+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$9)=5$,

第二组数据的平均数为$\frac{1}{7}\times(21+23+25+27+29+31+33)=27$,

合并后这组数据的平均数为$\frac{1}{12}\times(1+3+5+7+9+21+23+25+27+29+31+33)\approx17.83$.

因为$\frac{5+27}{2}=16$,$16\neq17.83$,所以合并后这组数据的平均数不是前两个平均数的平均数.

点拨:求由两组数据或两组以上的数据合并成的一组新数据的平均数时,不能用原两组数据或两组以上的数据的平均数直接平均得到平均数.

3. **解**:通过观察,猜测该校九年级同学的平均身高较高,且方差较大.

$\bar{x}_{六年级}=\frac{1}{20}\times(164+165+153+146+148+154+152+156+158+150+156+160+163+156+146+150+157+148+156+142)=154$(厘米),

$s^2_{六年级}=\frac{1}{20}\times[(164-154)^2+(165-154)^2+\cdots+(142-154)^2]=38$;

$\bar{x}_{九年级}=\frac{1}{20}\times(165+164+162+151+155+169+158+173+159+156+166+154+154+153+163+152+151+158+179+166)=160.4$(厘米),

$s^2_{九年级}=\frac{1}{20}\times[(165-160.4)^2+(164-160.4)^2+\cdots+(166-160.4)^2]=56.54$.

显然,$\bar{x}_{六年级}<\bar{x}_{九年级}$,$s^2_{六年级}<s^2_{九年级}$,故该校九年级同学的平均身高较高,且方差较大,与预期的答案一致.

点拨:平均数的计算公式为$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$. 方差的计算公式为$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2]$. 熟记这两个公式是解决此类问题的关键.

4. **解**:根据题意,得$\frac{1}{10}\times(5\times4+7\times2+10\times3+11\times1)=7.5$(米).

答:这10天中该工程队平均每天修建道路7.5米.

B组

5. **解**:(1)正确.

(2)不正确. 例如:一组数据4,5,6,7的平均数是5.5.

(3)正确.

(4)不正确. 例如:一组数据4,5,6,7的中位数是5.5.

(5)正确.

(6)正确.

点拨:此题考查平均数、中位数、众数三个统计量的含义.

6. 略.

7. **解**:因为将11,12,13,14,15依次重复了18遍,没有其他数据加入进来,所以平均数依然是这5个数据的平均数,故这组新数据的平均数仍为13.

这组新数据共有90个数,且90为偶数,故把这90个数从小到大排列,第45、46个数的平均数为中位数,所以中位数是13. 每个数都出现了18次,所以没有众数. 所以这组新数据的平均数是13,中位数也是13,没有众数.

C组

8. 略.

9. **解**:(1)增大a一定会对平均数产生影响;若$a>11$,则会对中位数产生影响;若a增大到0或11或31,就会对众数产生影响,这时候就会出现两个众数.

(2)若去掉b,平均数就由原来的11变为13.2;中位数由原来的14变为17;众数不变,仍是17.

(3)若去掉c,平均数不变,仍是11;中位数由原来的14变为17;众数不变,仍是17.

(4)若去掉d,平均数由原来的11变为9.8;中位数由原来的14变为11;没有众数.

点拨:本题直接利用平均数、中位数、众数的概念及其计算公式解题,因此,这些概念及其计算公式是我们必须掌握的知识.

10. **解**:师生购买午餐费用的平均数为$\frac{1}{10\,400}\times(10\,400\times65\%\times5+10\,400\times20\%\times4+10\,400\times15\%\times6)=4.95$(元).

结合题中的扇形统计图可知,师生购买午餐费用的中位数和众数都是5元.

11. **解**:题图(1)中数据的平均数较大,且方差较大.

点拨:显然题图(1)中的平均数较大,题图(2)中有一部分数据偏离平均数较小,波动小,故整体上,题图(2)中数据的波动较小,故方差较小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



责任编辑：朱　林
封面题字：沈　鹏
封面设计：典点瑞泰

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

荣德基初中频道

ISBN 978-7-5383-9322-4

定价：40.80元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料