特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法61招·七八九年级共338招



八年级 数学(下) (XJ版)

赠教材习题答案

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识·方法·素养

《点拨》
因此温暖而美丽

点点见真情·处处暖人心

流水潺潺，心韵悠悠
全书方法索引，引你进入**点拨**世界
时光静寂，美妙邂逅
荣德基老师引领你与**方法**结缘

云儿轻轻，流水静静
使用说明书，携你共探幽径
峰回路转，柳暗花明
方法总览简释，助你速查方法内涵

学生之家，在线移动家教服务
点拨方法之树，助你理清思路
对着错题独自哀愁，谁愿为你解忧
方法跷跷板，帮你玩转错题，让你赢

操千曲而后晓声，观千剑而后识器
《**点拨**》中**方法之练**就用《典中点》

闭上双眼，用心感受《点拨》一路相随的暖意

八年级 数学 下
（XJ版）

总 主 编：荣德基
本册主编：李 霞

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS



第1章 直角三角形

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ) …… 2

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ) …… 13

1.3 直角三角形全等的判定 …… 30

1.4 角平分线的性质 …… 35

数学素养提升 “面积法”的思考与延伸(18)

倒过来想(40)

中考提分专题篇 章末整合与拔高 …… 43

第2章 四边形

2.1 多边形 …… 51

2.2 平行四边形 …… 59

2.2.1 平行四边形的性质 …… 59

2.2.2 平行四边形的判定 …… 69

2.3 中心对称和中心对称图形 …… 78

2.4 三角形的中位线 …… 86

2.5 矩 形 …… 93

2.6 菱 形 …… 102

2.7 正方形 …… 112

数学素养提升 解密中考——“习题改造”(119)

中考提分专题篇 章末整合与拔高 …… 122

二维码索引

观动画：

勾股定理的证明 …… 14

看微课：

勾股定理 …… 13

勾股定理的逆定理 …… 21

斜边、直角边(HL) …… 30

学方法：

平行四边形的判定方法 …… 71

看微课：

平行四边形的性质 …… 60

矩形的判定 …… 96

菱形的判定 …… 105

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3章　图形与坐标

3.1　平面直角坐标系 …… 132

3.2　简单图形的坐标表示 …… 143

3.3　轴对称和平移的坐标表示 …… 148

数学素养提升　笛卡儿的《几何学》(140)

中考提分专题篇　章末整合与拔高 …… 157

第4章　一次函数

4.1　函数和它的表示法 …… 163

4.2　一次函数 …… 174

4.3　一次函数的图象 …… 180

4.4　用待定系数法确定一次函数表达式 …… 190

4.5　一次函数的应用 …… 198

数学素养提升　“待定系数法”的解读与延伸(193)

中考提分专题篇　章末整合与拔高 …… 213

第5章　数据的频数分布

5.1　频数与频率 …… 223

5.2　频数直方图 …… 227

中考提分专题篇　章末整合与拔高 …… 235

参考答案及点拨(单独成册)

二维码索引

观动画：

平面内点的位置的确定 …… 135

看微课：

点的坐标特征 …… 136

图形的平移 …… 151

学方法：

函数的三种表示方法 …… 166

待定系数法 …… 190

观动画：

一次函数的图象 …… 183

看微课：

一次函数 …… 174

一次函数图象的画法 …… 184

看微课：

画频数直方图 …… 230

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错点索引

第1章 直角三角形

1. 两个锐角互余是直角三角形特有的性质，没有“在直角三角形中”这一前提，结论不成立[知1] /2
2. 运用时要注意“直角三角形”这一前提条件，切不可忽略前提条件而在其他任意三角形中生搬硬套[知3] /5
3. 运用勾股定理时，一定要分清哪条边是斜边，在分不清哪条边是斜边时，要分类讨论，写出所有可能的情况，以免漏解或错解[知1] /13
4. $a^2+b^2=c^2$ 只是一种表现形式，不能认为：若 $a^2+b^2\neq c^2$，则这个三角形就不是直角三角形[知3] /21
5. 勾股数必须同时满足两个条件：(1)三个数都是正整数；(2)两个较小数的平方和等于最大数的平方[知4] /24
6. “HL”是直角三角形全等所独有的判定定理，对于一般三角形不成立[知] /30
7. 易找错距离，误以为角平分线上的点到角的两边的距离就是角平分线上的点与角两边上任意点间的距离[知1] /35

第2章 四边形

1. 平行四边形的表示要按一定的方向依次表示各个顶点[知1] /59
2. “平行且相等”指的是同一组对边，而不是一组对边相等，另一组对边平行[知1] /69
3. “一组对边平行，且另一组对边相等的四边形是平行四边形”是假命题[知2] /71
4. 三角形的中位线是与三角形的第三边产生的数量与位置关系[知2] /87
5. 有一个角是直角的四边形不一定是矩形，两条对角线相等的四边形也不一定是矩形，都必须加上“平行四边形”这个条件才是矩形[知2] /96
6. 菱形和矩形都是建立在平行四边形的基础上，矩形是附加一直角；而菱形是附加一组邻边相等[知1] /102

第3章 图形与坐标

1. 不知道与“点 P 到 x 轴的距离”对应的是纵坐标，与“点 P 到 y 轴的距离”对应的是横坐标[知3 考3] /135
2. 平面直角坐标系变化时，坐标平面内的各点坐标也发生变化，但各点之间的相对位置不会发生变化[知5] /137

第4章 一次函数

1. 常量与变量不是绝对的，而是对一个变化过程而言的[知1] /163
2. 对于自变量 x 取不同的数值，与之对应的 y 的值不一定不同，只要是有唯一值与之对应即可[知2] /164
3. 自变量的取值可以是无限的，也可以是有限的，还可以是几个数或单独一个数[知3] /165
4. 一次函数表达式 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的条件 $k\neq0$ 千万不能忽视[知1] /174
5. 画函数图象时要考虑自变量的取值范围[知2] /182
6. 对两直线交点与二元一次方程组的解的关系理解不透彻而出错[知3] /203

第5章 数据的频数分布

1. 在两组数据中，某两个对象的频数相等，频率不一定相等，频数大，不一定频率大.在同一组数据中，某两个对象的频数相等，频率也相等；频数大，频率也大[知] /223
2. (1)直方图中的各小长方形之间没有空隙；(2)一般情况下，相邻各分点的归宿：“上限不在内”[知2] /228

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拓展点索引

第1章 直角三角形

1. 如果三角形中有一条边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形[知3] / 5
2. 在直角三角形中，若一直角边等于斜边的一半，则该直角边所对的角为30°[知4] / 6
3. 若最长边的平方比较短两边的平方和大，则三角形为钝角三角形；若最长边的平方比较短两边的平方和小，则三角形为锐角三角形[知3] / 21
4. 利用旋转作辅助线解决勾股定理及其逆定理的问题[拔3] / 27
5. 三角形的三条内角平分线相交于一点，该交点到三角形三边的距离相等[知2] / 37

第2章 四边形

1. 从n边形的一个顶点出发，可以引$(n-3)$条对角线，这些对角线把n边形分成$(n-2)$个三角形；n边形的对角线条数为$\frac{n(n-3)}{2}$[知1] / 51
2. (1)多边形的内角和随边数的变化而变化，边数每增加1，内角和就增加180°；
   (2)正n边形的每个内角的度数为$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$[知3] / 54
3. 等底等高的三角形的面积相等[知2] / 60
4. (1)平行四边形的两条对角线把它分割成四个面积相等的三角形；
   (2)若一条直线过平行四边形两条对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积[知3] / 63
5. (1)两个等底平行四边形(三角形)面积的比等于它们高的比；
   (2)两个等高平行四边形(三角形)面积的比等于它们底的比[知4] / 64
6. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形[知3] / 72
7. 利用矩形的判定方法解决矩形有关的动态探索题[拔3] / 99
8. 菱形的每一条对角线平分一组对角[知1] / 102

第3章 图形与坐标

1. 当两点的纵坐标相同时，这两点的连线平行于x轴(或与x轴重合)，垂直于y轴，两点之间的距离等于横坐标差的绝对值；当两点的横坐标相同时，这两点的连线平行于y轴(或与y轴重合)，垂直于x轴，两点之间的距离等于纵坐标差的绝对值[知4] / 136
2. 利用不同定位方式确定同一位置[拔2] / 139
3. 利用平面直角坐标系探究动点问题[拔3] / 140
4. 作一个图形关于x轴(或y轴)的对称图形[知1] / 148
5. 变换的方法：一次平移的方向是由原图形上的点到平移后图形上的对应点的方向.若沿x轴方向平移的距离为a，沿y轴方向平移的距离为b，则图形经过一次平移的距离为$\sqrt{a^2+b^2}$[知3] / 151
6. 利用图形的变换特征探究图形变换后点的坐标[拔4] / 154

第4章 一次函数

1. 利用函数表达式解决规律探究问题[拔3] / 171
2. 在几何问题中建立一次函数模型解决问题[拔3] / 177
3. 直线$y=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$与$y=k_2x+b_2(k_2\neq 0)$的位置关系[知3] / 183
4. 利用几何图形的性质求一次函数表达式[拔3] / 195
5. 一次函数与一元一次不等式的关系[知4] / 206

第5章 数据的频数分布

1. 频数直方图与条形统计图的区别与联系[知2] / 228
2. 频数直方图与其他统计图的综合应用[拔2] / 231

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法.

2. **定义法**：所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法. 从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的. 因此用定义法解题，是最直接的方法.

3. **分类讨论思想**：把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

4. **建模思想**：建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段. 使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

5. **数形结合思想**：数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法. 数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

6. **面积法**：运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解线段长度或得到线段之间数量关系目的的一种方法.

7. **转化思想**：转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

8. **从特殊到一般的思想**：从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.

9. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则图形转化为规则图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答. 有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的.

10. **演绎推理法**：演绎推理法就是从一般性的前提出发，通过推导即“演绎”，得出具体陈述或个别结论的一种方法.

11. **截长补短法**：是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想. 所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一条线段与已知的另一条线段相等. 所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长与另一条已知的较短的线段长度相等的一段，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系.

12. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁，其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法，主要包括构造方程法、构造图形法（全等、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

13. **排除法**：排除法是一种把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉的方法. 它是一种解答选择题的技巧方法，通过已知条件来确定结论（答案）的范围，把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉.

14. **观察法**：观察法是指研究者根据一定的研究目的、研究提纲或观察表，用自己的感官和辅助工具去直接观察被研究对象，从而获得资料的一种方法.

15. **函数思想**：函数思想是指用函数的概念和性质分析问题、解决问题的思维策略.

16. **待定系数法**：待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求待定系数的值，从而确定函数表达式，这种方法叫作待定系数法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1章

直角三角形

感悟直角三角形的性质

数学点拨



你将学到的核心考点

- 直角三角形的性质 □
- 直角三角形的判定 □
- 直角三角形全等的判定 □
- 角平分线的性质及判定 □

我们为你提供的核心方法

- 方程思想 □
- 分类讨论思想 □
- 数形结合思想 □
- 定义法 □
- 建模思想 □
- 转化思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

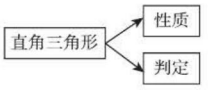
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ)

热门话题
- 直角三角形两锐角互余
- 有两个角互余的三角形是直角三角形
- 直角三角形斜边上中线的性质
- 直角三角形中30°角的性质

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点1 直角三角形的两个锐角互余

点知识

1. **性质**:直角三角形的两个锐角互余.

要点精析

(1)性质的结论是根据三角形内角和定理得出的;

(2)性质的条件是直角三角形;

(3)运用此性质可解决求直角三角形某个锐角的度数问题.

2. **易错警示**:

(1)互余关系是指两个锐角之和等于90°,要注意区别“互余”与“互补”这两个概念;

(2)两个锐角互余是直角三角形特有的性质,没有“在直角三角形中”这一前提,结论不成立.

拨考向

考查角度1:利用方程思想求直角三角形的锐角的度数

例1 已知△ABC中,$\angle C=90°$,$\angle A-\angle B=20°$,求$\angle A$与$\angle B$的度数.

导引:根据直角三角形的两个锐角互余及$\angle A-\angle B=20°$,建立方程组求解.

▶解:∵ $\angle A$与$\angle B$是Rt△ABC的两个锐角,

∴ $\angle A+\angle B=90°$,

∴ $\begin{cases}\angle A-\angle B=20°,\\ \angle A+\angle B=90°.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\angle A=55°,\\ \angle B=35°.\end{cases}$

∴ $\angle A$的度数为55°,$\angle B$的度数为35°.

同类变式 (答案见241页) **练一练**

1. 已知在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$\angle A:\angle B=1:2$,则$\angle A=$_____,$\angle B=$_____.

点方法

本题主要考查了直角三角形的两个锐角的互余关系. 解题过程中运用了**方程思想**,根据直角三角形的性质及已知条件,建立方程组求解. 这种利用代数方法解决几何问题的方法值得我们借鉴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用直角三角形两锐角互余进行推理

例2 在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$交AB于点D，如图1.1-1.

求证：$\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$.

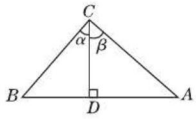


图1.1-1

导引：利用“同角的余角相等”进行证明.

▶证明：∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle ADC=\angle BDC=90°$，

∴ △ACD与△BCD都是直角三角形，

∴ $\angle A+\angle\beta=90°$，$\angle B+\angle\alpha=90°$.

又∵ 在Rt△ABC中，$\angle A+\angle B=90°$，

∴ $\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$.

考查角度3：利用直角三角形的两个锐角互余求角的度数

例3 如图1.1-2，在△ABC中，$\angle A=30°$，$\angle B=70°$，CE平分$\angle ACB$，$CD\perp AB$于D，$DF\perp CE$于F.

(1)试说明$\angle BCD=\angle ECD$；

(2)请找出图中所有与$\angle B$相等的角.

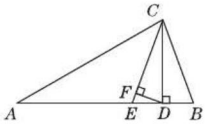


图1.1-2

导引：(1)根据直角三角形的两锐角互余求出$\angle BCD$的度数，再利用三角形内角和定理求出$\angle ACB$的度数，然后根据角平分线的定义求出$\angle BCE$的度数，从而可以求出$\angle ECD$的度数，进而得到结论；

(2)根据三角形的角度关系，找出度数是70°的角即可.

▶解：(1)∵ $\angle B=70°$，$CD\perp AB$于D，

∴ $\angle BCD=90°-70°=20°$.

在△ABC中，∵ $\angle A=30°$，$\angle B=70°$，

∴ $\angle ACB=180°-30°-70°=80°$.

∵ CE平分$\angle ACB$，

∴ $\angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB=40°$.

∴ $\angle ECD=\angle BCE-\angle BCD=40°-20°=20°$.

∴ $\angle BCD=\angle ECD$.

(2)∵ $CD\perp AB$于D，$DF\perp CE$于F，

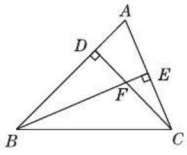
∴ $\angle CED=90°-\angle ECD=90°-20°=70°$，

$\angle CDF=90°-\angle ECD=90°-20°=70°$，

∴ 与$\angle B$相等的角有$\angle CED$和$\angle CDF$.

同类变式 (答案见241页) 练一练

3. 如图，在△ABC中，已知$\angle ACB=67°$，BE是AC边上的高，CD是AB边上的高，F是BE和CD的交点，$\angle DCB=45°$. 求$\angle ABE$的度数.



(第3题图)

点方法

直角三角形的两锐角互余的本质是三角形内角和定理的一种简化应用，利用这一性质，在直角三角形中已知一锐角可求另一锐角.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 有两个角互余的三角形是直角三角形(重点)

点知识

判定:有两个角互余的三角形是直角三角形.

要点精析

(1)"直角三角形的两个锐角互余"及"有两个角互余的三角形是直角三角形"都可以利用三角形的内角和定理推出.

(2)在判定一个三角形是直角三角形时,除利用直角三角形的定义外,还可找出有两个锐角互余,从而直接判定其为直角三角形.

拨考向

考查角度 1:根据条件判定三角形的形状

例 4 在△ABC中,$\angle A=\angle C-\angle B$,试判断△$ABC$的形状.

导引:根据条件可以求出$\angle A+\angle B=90°$,从而确定三角形的形状.

▶解:在△ABC中,∵ $\angle A=\angle C-\angle B$,

∴ $\angle C=\angle A+\angle B$.

又∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,

∴ $2(\angle A+\angle B)=180°$,

∴ $\angle A+\angle B=90°$. ∴ △ABC是直角三角形.

拨技巧

要判定一个三角形是直角三角形,既可以根据**定义法**(有一个内角是直角)来证明(或证明两边相互垂直),也可以证明两个锐角互余.

考查角度 2:直角三角形的判定

例 5 如图 1.1-3,已知$AB\parallel CD$,直线EF分别交AB,CD于点E,F,$\angle BEF$的平分线与$\angle DFE$的平分线相交于点P. 试说明△EFP为直角三角形.

导引:判定△EFP为直角三角形有两种方法:有一内角是直角或两锐角互余,即要说明$\angle EPF=90°$或$\angle EFP+\angle FEP=90°$.

▶解:∵ $AB\parallel CD$, ∴ $\angle BEF+\angle DFE=180°$.

∵ EP为$\angle BEF$的平分线,FP为$\angle EFD$的平分线,

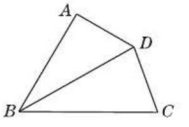
∴ $\angle PEF=\frac{1}{2}\angle BEF$, $\angle PFE=\frac{1}{2}\angle DFE$.

∴ $\angle PEF+\angle PFE=\frac{1}{2}(\angle BEF+\angle DFE)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

∴ △EFP为直角三角形.

同类变式 (答案见 241 页) 练一练

5. 如图,BD平分$\angle ABC$,$\angle ADB=60°$,$\angle BDC=80°$,$\angle C=70°$. 试判断△ABD的形状.



(第 5 题图)

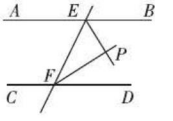


图 1.1-3

点方法

"有一个角是直角的三角形是直角三角形"是直角三角形的定义,据此可判定直角三角形;"有两个角互余的三角形是直角三角形"是直角三角形的判定,由三角形内角和定理可知第三个角是直角,因此它的实质还是直角三角形的定义. 本题主要根据平行线的性质与角平分线的定义计算三角形中两个内角的和等于 90°.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点3 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半(重难点)

点知识

1. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半(斜边上的中线是指直角顶点与斜边中点的连线).

数学表达式:如图1.1-4,

$\because \angle ACB=90°, AD=BD,$

$\therefore CD=\frac{1}{2}AB$(或 $CD=AD=BD$).

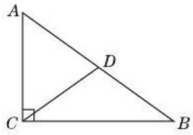


图1.1-4

要点精析 ///

(1)本性质的前提条件是直角三角形;

(2)本性质揭示的是线段之间的数量关系.

2. **拓展**:如果三角形中有一条边上的中线等于这条边的一半,那么这个三角形是直角三角形.本结论可以作为判定三角形是直角三角形的方法之一,在叙述时要准确,不能出现"斜边上的中线等于斜边的一半的三角形是直角三角形"的错误说法.

3. **易错警示**:运用时要注意"直角三角形"这一前提条件,切不可忽略前提条件而在其他任意三角形中生搬硬套.

拓考向

考查角度1:利用直角三角形斜边上的中线的性质求线段长

例6 [中考·福建] 如图1.1-5,Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°, AB=6, D$ 是 AB 的中点,则 $CD=$_____.

导引:根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半解答.

$\because$ Rt$\triangle ABC$ 的斜边 $AB=6$,点 D 是 AB 的中点,$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=3$.

▶答案:3

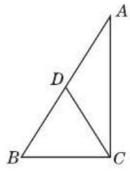


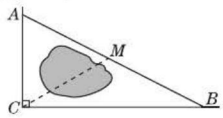
图1.1-5

方法

在直角三角形中,若在斜边和斜边上的中线中已知任何一个量,那么很容易求出另外一个量.若已知斜边上的中线长是 m,那么斜边长 $c=2m$;若已知斜边长为 c,则斜边上的中线长 $m=\frac{c}{2}$.

同类变式 (答案见241页) 练一练

6. [中考·北京] 如图,公路 AC,BC 互相垂直,公路 AB 的中点 M 与点 C 被湖隔开,若测得 AM 的长为1.2 km,则 M,C 两点间的距离为(　　)



(第6题图)

A. 0.5 km　　B. 0.6 km

C. 0.9 km　　D. 1.2 km

考查角度2:利用直角三角形斜边上的中线的性质求角的度数

例7 如图1.1-6,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,D 在 BC 上,E 为 AB 的中点,AD,CE 相交于点 F,且 $AD=DB$. 若 $\angle B=20°$,则 $\angle DFE$ 等于_____°.

导引:$\because E$ 为 AB 的中点,$\angle ACB=90°$,$\angle B=20°$,

$\therefore \angle BAC=70°, CE=AE=BE$,

$\therefore \angle ECA=\angle EAC=70°$.

$\because AD=DB, \therefore \angle BAD=\angle B=20°, \therefore \angle FAC=50°$.

$\therefore$ 在 $\triangle ACF$ 中,$\angle AFC=180°-70°-50°=60°$,

$\therefore \angle DFE=\angle AFC=60°$.

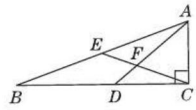


图1.1-6

▶答案:60

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

在直角三角形中，斜边上的中线把直角三角形分割为两个等腰三角形. 如本例中，$\triangle ACE$ 与 $\triangle BCE$ 均为等腰三角形.

考查角度 3：利用直角三角形斜边上的中线性质证明线段的位置关系

例 8 如图 1. 1-7，BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高，M，N 分别是 BC，DE 的中点. 求证：$MN \perp DE$.

导引：如图 1. 1-7，连接 EM，DM，由 CE 与 BD 为 $\triangle ABC$ 的两条高，可得 $\triangle BEC$ 与 $\triangle BDC$ 均为直角三角形，根据 M 为 BC 的中点，利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 EM 为 BC 的一半，DM 也为 BC 的一半，通过等量代换可得 $EM = DM$，又因为 N 为 DE 的中点，所以 $MN \perp DE$.

▶证明：连接 EM，DM，如图 1. 1-7.

$\because BD$，CE 为 $\triangle ABC$ 的两条高，

$\therefore BD \perp AC$，$CE \perp AB$，

$\therefore \angle BEC = \angle BDC = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中，M 为斜边 BC 的中点，

$\therefore EM = \frac{1}{2}BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，M 为斜边 BC 的中点，

$\therefore DM = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore EM = DM$.

又 N 为 DE 的中点，$\therefore MN \perp DE$.

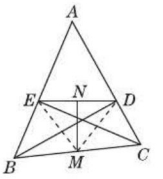
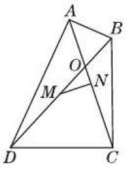


图 1. 1-7

同类变式 (答案见 241 页) 练一练

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB = \angle DCB = 90°$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，M，N 分别是 BD，AC 的中点. 求证：$MN \perp AC$.



(第 8 题图)

拨技巧

若题目中出现了一边的中点，往往需要用到中线，若又有直角，往往需要用到直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

知识点 4 直角三角形中 30°角的性质(重难点)

点知识

1. **性质**：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

要点精析

(1) 适用条件——含 30°角的直角三角形；

(2) 揭示的关系——30°角所对的直角边与斜边的关系.

2. **作用**：应用于证线段的倍数关系和计算角度.

3. **拓展**：

(1) 在直角三角形中，若一直角边等于斜边的一半，则该直角边所对的角为 30°.

(2) 有些题目中，所给出的角为 15°角时，往往运用一个外角等于和它不相邻的两内角和，将 15°的角转化为 30°的角后，再利用这个性质解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1：利用直角三角形中30°角的性质求线段长

例9 如图1.1-8，△ABC中，$AC=BC=10$ cm，$\angle B=15°$，$AD\perp BC$交BC的延长线于点D，则AD的长为(　　)

A. 3 cm　　B. 4 cm　　C. 5 cm　　D. 6 cm

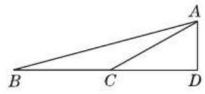


图1.1-8

导引：∵ $AC=BC$，∴ $\angle B=\angle BAC=15°$，

∴ $\angle ACD=\angle B+\angle BAC=15°+15°=30°$.

∵ $AD\perp BC$，∴ $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times10=5$(cm).

▶答案：C

点方法

本题根据等边对等角得出角的度数，再利用三角形外角的性质得到$\angle ACD=30°$，最后利用直角三角形中30°角的性质求出AD的长.

考查角度2：利用直角三角形中30°角的性质证明线段的位置关系

例10 如图1.1-9，在△ABC中，$\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，M，D分别为AB，MB的中点.

求证：$CD\perp AB$.

导引：由$\angle ACB=90°$，M为AB的中点，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得到$CM=\frac{1}{2}AB=BM$，再根据在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半得到$CB=\frac{1}{2}AB=BM$，则$CM=CB$，而D为MB的中点，根据等腰三角形三线合一的性质即可得到结论.

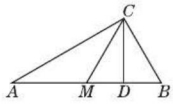


图1.1-9

▶证明：∵ $\angle ACB=90°$，M为AB的中点，

∴ $CM=\frac{1}{2}AB=BM$.

∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

∴ $CB=\frac{1}{2}AB=BM$，∴ $CM=CB$.

又∵ D为MB的中点，

∴ $CD\perp BM$，即$CD\perp AB$.

点技巧

在直角三角形中，出现30°要联想到30°角的性质，出现中点，要联想到斜边中点的性质，在等腰三角形中，出现中点要联想到“三线合一”.

考查角度3：利用含30°角的直角三角形的性质证明线段的倍数关系

例11 如图1.1-10，在等边三角形ABC中，$AE=CD$，AD，BE相交于点P，$BQ\perp AD$于Q，求证：$BP=2PQ$.

导引：由于$BQ\perp AD$，要证$BP=2PQ$，只需证$\angle PBQ=30°$，根据已知可证△ABE≌△CAD，故$\angle CAD=\angle ABE$，结合等边三角形的每个内角等于60°可证$\angle BPQ=60°$.

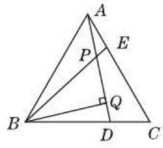


图1.1-10

▶证明：在等边三角形ABC中，$AB=AC$，$\angle BAE=\angle C=60°$.

又∵ $AE=CD$，∴ △ABE≌△CAD，

∴ $\angle ABE=\angle CAD$，

∴ $\angle BPQ=\angle ABE+\angle BAP=\angle CAD+\angle BAP=\angle BAE=60°$.

∵ $BQ\perp AD$，∴ $\angle PBQ=30°$，∴ $BP=2PQ$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4：由等腰三角形的形状不确定进行分类讨论(易错点)

例12 已知△ABC为等腰三角形，由A点所作的BC边上的高恰好等于BC边长的一半，则$\angle BAC$等于(　　)

A. 75°　　B. 90°

C. 75°或90°　　D. 15°或75°或90°

同类变式 (答案见241页) 练一练

12. 若等腰三角形的腰长为8，腰上的高为4，则此三角形的顶角是(　　)

A. 30°　　B. 30°或120°

C. 150°　　D. 30°或150°

导引：分三种情况：(1) $AB = BC$，$AD \perp BC$，AD在△ABC的内部，如图1.1-11①. 由题意知，$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$，$\therefore \angle B = 30°$，$\therefore \angle BAC = \angle C = \frac{1}{2}(180° - \angle B) = 75°$.

(2) $AC = BC$，$AD \perp BC$，AD在三角形ABC的外部，如图1.1-11②. 由题意知，$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$，$\therefore \angle ACD = 30° = \angle B + \angle CAB$，$\because \angle B = \angle CAB$，$\therefore \angle BAC = 15°$.

(3) $AC = AB$，$AD \perp BC$，BC边为等腰三角形的底边，如图1.1-11③.

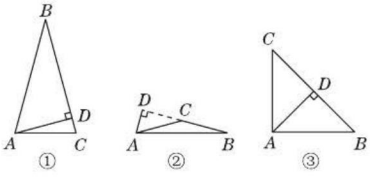


图1.1-11

点方法

本题的解答采用了**分类讨论思想**，没有给出相应的图形时，要考考虑各种可能的情形，根据题意可知存在三种情况，讨论应做到不重不漏.

由等腰三角形的底边上的高与底边上的中线、顶角的平分线重合知，点D为BC的中点，由题意知，$AD = \frac{1}{2}BC = CD = BD$，$\therefore$ △ABD，△ADC均为等腰直角三角形，$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 45°$，$\therefore \angle BAC = 90°$. 综上可知，$\angle BAC$的度数为90°或75°或15°.

▶答案：D

考查角度5：含30°锐角的直角三角形的性质在实际问题中的应用

例13 某校在一块如图1.1-12所示的三角形空地上种植某种草皮以美化环境，已知这种草皮每平方米a元，则购买这种草皮至少要_____元.

导引：作△ABC的高AD，如图1.1-12，$\because \angle ABC = 150°$，$\therefore \angle ABD = 30°$，

$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 20 = 10(\text{m})$.

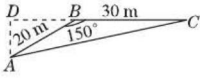


图1.1-12

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 30 \times 10 = 150(\text{m}^2)$.

$\because$ 这种草皮每平方米a元，$\therefore$ 购买这种草皮至少要$150a$元.

▶答案：$150a$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 直角三角形中高与角平分线的综合

例14 如图1.1-13,在△ABC中,$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$于点D,$\angle ABC$的平分线BE交AD于F.求证:$AE=AF$.

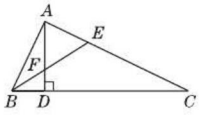


图1.1-13

导引:根据角平分线的定义证出$\angle ABE=\angle CBE$,再利用$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$于点D及对顶角相等推出$\angle AEF=\angle AFE$,然后根据等角对等边的性质即可得证.

▶证明:∵ BE平分$\angle ABC$,

∴ $\angle CBE=\angle ABE$,

∵ $\angle BAC=90°$,∴ $\angle ABE+\angle AEF=90°$,

∵ $AD\perp BC$,∴ $\angle CBE+\angle BFD=90°$,

∴ $\angle AEF=\angle BFD$.

又∵ $\angle BFD=\angle AFE$,

∴ $\angle AEF=\angle AFE$,

∴ $AE=AF$.

点方法

此题利用直角三角形中角的关系,证明线段相等.如果两条线段在同一个三角形中,通常都是根据已知条件,先证明线段所在的三角形中的两角相等,再利用等角对等边求证.

拨尖角度2 利用含30°角的直角三角形的性质巧求等腰三角形的面积

例15 如图1.1-14,在△ABC中,$AC=BC=2$,$\angle ABC=15°$,求△ABC的面积.

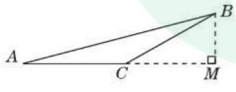


图1.1-14

导引:已知三角形ABC是等腰三角形,腰长是2,所以只需求出腰上的高线长度,再利用三角形面积公式进行计算即可,因此可作出腰AC上的高,构造出含30°角的直角三角形,进而求出高线的长度.

▶解:如图1.1-14,过B作$BM\perp AC$,交AC的延长线于点M.∵ $BC=AC$,$\angle ABC=15°$,

∴ $\angle A=\angle ABC=15°$,

∴ $\angle BCM=\angle A+\angle ABC=15°+15°=30°$.

又∵ $BC=2$,△BCM是直角三角形,

∴ $BM=\frac{1}{2}BC=1$,

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BM=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

拨技巧

求顶角为150°的等腰三角形的面积时,巧妙地利用一腰上的高与另一腰所在的三角形是含30°角的直角三角形,建立高与腰之间的关系,从而求出三角形的面积.

拨尖角度3 直角三角形的性质与判定的结合

例16 在Rt△ABC中,$\angle BAC=90°$,BD平分$\angle ABC$,M为直线AC上一点(异于点D),$ME\perp BC$,垂足为E,$\angle AME$的平分线交直线AB于点F.

(1)如图1.1-15①,M为边AC上一点,则BD,MF的位置关系是什么?请你进行证明.

(2)如图1.1-15②,M为边AC反向延长线上一点,则BD,MF的位置关系是什么?请你进行证明.

(3)如图1.1-15③,M为边AC延长线上一点,则BD,MF的位置关系是什么?请你进行证明.

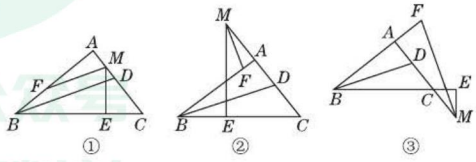


图1.1-15

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)$BD \parallel MF$.

证明:$\because \angle BAC=90°$,$\therefore \angle ABC+\angle C=90°$.

$\because ME \perp BC$,$\therefore \angle MEC=90°$,

$\therefore \angle AME=\angle MEC+\angle C=90°+\angle C$,

$\therefore \angle ABC+\angle AME=\angle ABC+\angle C+90°=180°$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,MF 平分 $\angle AME$,

$\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle AMF=\frac{1}{2}\angle AME$.

$\therefore \angle ABD+\angle AMF=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle AME)=90°$.

又$\because \angle AFM+\angle AMF=90°$,

$\therefore \angle ABD=\angle AFM$,$\therefore BD \parallel MF$.

(2)$BD \perp MF$.

证明:延长 MF 交 BD 于点 H.

$\because \angle BAC=90°$,$ME \perp BC$,

$\therefore \angle ABC+\angle C=\angle AME+\angle C=90°$,

$\therefore \angle ABC=\angle AME$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,MF 平分 $\angle AME$,

$\therefore \angle ABD=\angle AMF$.

$\because \angle ABD+\angle ADB=90°$,

$\therefore \angle AMF+\angle ADB=90°$,

$\therefore \angle MHD=90°$.$\therefore BD \perp MF$.

(3)$BD \perp MF$.

证明:延长 BD 交 MF 于点 N.

$\because \angle BAC=90°$,$ME \perp BC$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=\angle AME+\angle MCE=90°$,

又$\because \angle ACB=\angle MCE$,

$\therefore \angle ABC=\angle AME$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,MF 平分 $\angle AME$,

$\therefore \angle ABD=\angle AMF$.

$\because \angle AMF+\angle F=90°$,$\therefore \angle ABD+\angle F=90°$,

$\therefore \angle BNF=90°$.$\therefore BD \perp MF$.

拔尖角度4 构造直角三角形解决测量问题

例17 如图 1.1-16,一艘轮船由南向北航行,在 A 处测得小岛 P 在西偏北 75°方向上,2 小时后,轮船在 B 处测得小岛 P 在西偏北 60°方向上,在小岛周围 18 海里内有暗礁,若轮船仍按 15 海里/时的速度向北航行,有无触礁的危险?并说明理由.

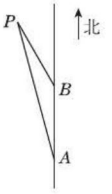


图 1.1-16

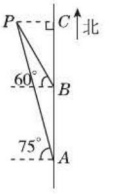


图 1.1-17

▶解:有触礁的危险.理由如下:

如图 1.1-17,过 P 点作 $PC \perp AB$,垂足为 C.

$\because$ 轮船的速度是 15 海里/时,从 A 处到 B 处的时间是 2 小时,

$\therefore AB=15\times 2=30$(海里).

$\because$ 在 A 处测得小岛 P 在西偏北 75°方向上,2 小时后,轮船在 B 处测得小岛 P 在西偏北 60°方向上,$\therefore \angle PAB=15°$,$\angle PBC=30°$,

$\therefore \angle APB=\angle PBC-\angle PAB=15°$,

$\therefore \angle PAB=\angle APB$,

$\therefore PB=AB=30$ 海里,

$\because \angle PBC=30°$,$\therefore PC=15$ 海里,

$\because 15<18$,

$\therefore$ 该轮船继续向北航行有触礁的危险.

点方法

(1)在解决有关方向角的问题时,一般要根据题意理清图形中各角的关系,有时所给的方向角并不一定在直角三角形中,需要转化为所需要的角.(2)把斜三角形的问题转化为直角三角形的问题,只要弄清题意,理解关键字词的含义,把实际问题转化为数学问题,正确作出辅助线,构造直角三角形求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

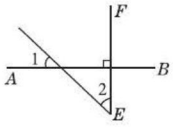
Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 （答案见241页）

基础巩固练

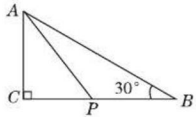
1. 如图，$EF \perp AB$，若$\angle 1 = 45°$，则$\angle 1$与$\angle 2$的大小关系是（　　）

A. $\angle 1 < \angle 2$　　B. $\angle 1 = \angle 2$

C. $\angle 1 > \angle 2$　　D. 无法确定



（第1题图）



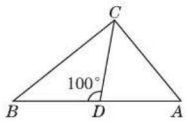
（第2题图）

2. ［中考·贵阳］如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$，$\angle B = 30°$，点P是BC边上的动点，则AP的长不可能是（　　）

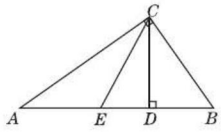
A. 3.5　　B. 4.2　　C. 5.8　　D. 7

3. 如图，CD是$\triangle ABC$的中线，$\angle ACB = 90°$，$\angle CDB = 100°$，则$\angle A$等于（　　）

A. 20°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 80°



（第3题图）



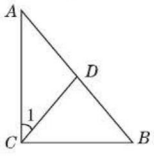
（第4题图）

4. ［中考·扬州］如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$于D，CE平分$\angle ACD$交AB于E，则下列结论一定成立的是（　　）

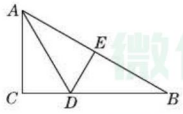
A. $BC = EC$　　B. $EC = BE$

C. $BC = BE$　　D. $AE = EC$

5. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$，$\angle B = 50°$，CD是斜边上的中线，则$\angle 1 =$ _____°.　【导学号：8564979】



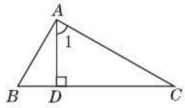
（第5题图）



（第6题图）

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\angle B = 30°$，AD是$\angle BAC$的平分线，$DE \perp AB$，垂足为E，则$\angle ADE$的度数是_____.

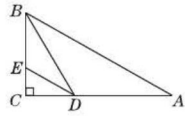
7. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，垂足为D，$\angle 1 = \angle B$. 求证：$\triangle ABC$是直角三角形.



（第7题图）

8. 已知三角形的两边长分别为5和12，若这两边的夹角是30°，求三角形的面积.

9. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，BD平分$\angle ABC$交AC边于点D，DE平分$\angle BDC$交BC边于点E. 求$BE : EC$的值.

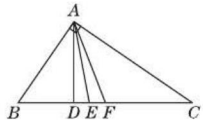


（第9题图）

10. ［探究题］如图，在直角三角形ABC中，AD为斜边上的高，AE为角平分线，AF为中线.

(1) 证明：$AF = BF = CF$；

(2) 探究$\angle FAE$和$\angle DAE$的关系，并证明你的结论.



（第10题图）

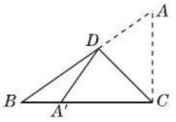
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

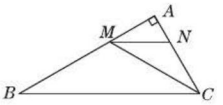
能力提升练

11. 如图，Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=55°$，将其折叠，使点 A 落在边 CB 上 A' 处，折痕为 CD，则 $\angle A'DB=$（　　）

A. 40°　　B. 30°　　C. 20°　　D. 10°



（第 11 题图）



（第 12 题图）

12. ［中考 · 淄博］如图，在 Rt△ABC 中，CM 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 M，过点 M 作 $MN\parallel BC$ 交 AC 于点 N，且 MN 平分 $\angle AMC$，若 $AN=1$，则 BC 的长为（　　）

A. 4　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

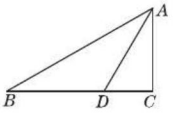
13. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，且 $2DC=BD$，则 $\angle B$ 满足（　　）

A. $0°<\angle B<15°$

B. $\angle B=15°$

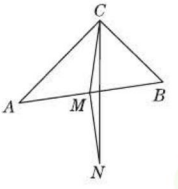
C. $15°<\angle B<30°$

D. $\angle B=30°$



（第 13 题图）

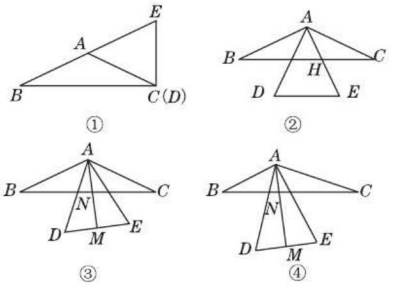
14. 如图，在直角三角形 ABC 中，CM 是斜边 AB 上的中线，$MN\perp AB$，$\angle ACB$ 的平分线 CN 交 MN 于 N，求证：$CM=MN$.



（第 14 题图）

思维拓展练

15. 如图①，有一张直角三角形纸片 BCE，设点 A 是斜边 BE 上的一点，连接 AC，现沿 AC 将纸片剪开，并将纸片 ADE 绕点 A 顺时针旋转摆放成图②、图③或图④的样子.



（第 15 题图）

（1）如图②，当点 A 是中点，且 $DE\parallel BC$ 时，AE 与 BC 相交于点 H，求 $\angle BAE$ 的度数；

（2）如图③，当点 A 是中点，但 DE 不平行于 BC 时，设 M 是 DE 的中点，连接 AM 交 BC 于点 N，求证：$\angle ANB+\angle BAE=180°$；

（3）如图④，当 $AB<AE$ 时，设 M 是 DE 上的一点，连接 AM 交 BC 于点 N，若 $\angle ANB+\angle BAE=180°$，那么点 M 在 DE 上的位置满足什么条件？

我的错题笔记

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ)

热门话题
- 勾股定理
- 勾股定理的应用
- 勾股定理的逆定理

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 勾股定理(重点)

点知识

1. **勾股定理**:直角三角形两直角边 a,b 的平方和,等于斜边 c 的平方. $a^2+b^2=c^2$.


勾股定理

数学表达式:在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AB=c$,$AC=b$,$BC=a$,则 $a^2+b^2=c^2$.

要点精析

(1)勾股定理适用于任何一个直角三角形;

(2)勾股定理的内容描述的是直角三角形三边之间的数量关系,已知其中任意两边可以求出第三边;

(3)**勾股定理的变形公式**:$a^2=c^2-b^2$,$b^2=c^2-a^2$;

(4)运用勾股定理时,要分清斜边、直角边.

2. **勾股定理的证明**:验证勾股定理的方法很多,其中大多数是利用面积拼补的方法,我们可以将勾股定理理解为分别以两条直角边为边的正方形的面积之和等于以斜边为边的正方形的面积,因此,验证勾股定理的关键是想办法把以两条直角边为边的两个正方形作等面积变形,使它们能拼出以斜边为边的正方形.

3. **易错警示**:运用勾股定理时,一定要分清哪条边是斜边,在分不清哪条边是斜边时,要分类讨论,写出所有可能的情况,以免漏解或错解.

拨考向

考查角度1:利用勾股定理求能确定斜边的直角三角形的第三边

例1 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 的对边分别是 a,b,c.

(1)已知 $a=b=6$,求 c;(2)已知 $c=3$,$b=2$,求 a;

(3)已知 $a:b=2:1$,$c=5$,求 b.

导引:因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,a,b,c 分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边,分清了斜边和直角边,所以可以用勾股定理解决问题.

▶解:(1)∵ $\angle C=90°$,$a=b=6$,

∴ 由勾股定理,得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$.

(2)∵ $\angle C=90°$,$c=3$,$b=2$,∴ 由勾股定理,得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

(3)∵ $\angle C=90°$,$a:b=2:1$,$c=5$,∴ $a=2b$. 由勾股定理,得 $(2b)^2+b^2=5^2$. 解得 $b=\sqrt{5}$.

同类变式 (答案见242页) 练一练

1. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,内角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c.

(1)若 $a=6$,$b=8$,则 $c=$_____;

(2)若 $b=5$,$c=13$,则 $a=$_____;

(3)若 $c=34$,$a:b=8:15$,则 $a=$_____,$b=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

利用勾股定理求直角三角形边长的方法：一般都要经过“一分二代三化简”这三步. 即一分：分清哪条边是斜边、哪些边是直角边；二代：代入 $a^2+b^2=c^2$ 及两边之间的关系式；三化简.

考查角度 2：利用勾股定理求不能确定斜边的直角三角形的第三边

例 2 已知直角三角形的两边长分别为 3，4，求第三边的长.

导引：由于习惯了“勾三股四弦五”的说法，故将题意理解为两直角边长分别为 3 和 4，于是斜边长为 5. 但这一理解的前提是 3，4 为直角边长，而题中并未加以任何说明，因而所求的第三边可能为斜边，也可能为直角边. 所以需要分情况求解.

▶解：(1) 当两直角边长分别为 3 和 4 时，第三边的长为 $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$；

(2) 当斜边长为 4，一直角边长为 3 时，第三边的长为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.

同类变式 (答案见 242 页) 练一练

2. (1) 已知一直角三角形的两边长分别为 8，15，则第三边长为_____；

(2) 已知一直角三角形的两边长分别为 2 和 4，则第三边长的平方为_____.

点方法

运用勾股定理求第三边的长时，一般都经过“一分二代三化简”这三步；若题目中的条件找不到斜边，则需要运用**分类讨论思想**求解.

考查角度 3：勾股定理的证明

例 3 图 1.2-1 是用硬纸板做成的四个两直角边长分别是 a，b，斜边长为 c 的全等的直角三角形和一个边长为 c 的正方形，请你将它们拼成一个能证明勾股定理的图形.

(1) 画出拼成的这个图形的示意图；(2) 证明勾股定理.

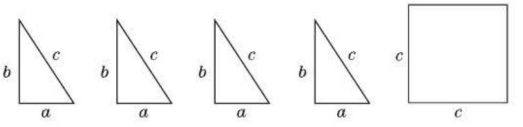


图 1.2-1

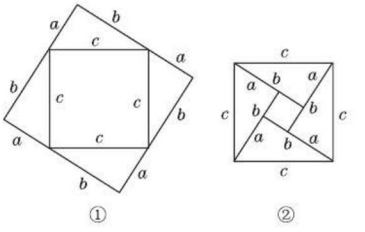


图 1.2-2

导引：可以以边长为 c 的正方形为基础，一在形外补拼（不重叠）成新的正方形；二在形内叠合成新的正方形.


勾股定理的证明

▶解：方法一（补拼法）：(1) 如图 1.2-2①.

(2) 证明：因为大正方形的面积可以表示为 $(a+b)^2$，也可表示为 $c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，

所以 $(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，$a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$，

所以 $a^2+b^2=c^2$. 即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二(叠合法):(1)如图 1.2-2②.

(2)证明:因为大正方形的面积可以表示为 c^2,也可以表示为 $\frac{1}{2}ab\times4+(b-a)^2$,

所以 $c^2=\frac{1}{2}ab\times4+(b-a)^2$,$c^2=2ab+b^2-2ab+a^2$,

所以 $a^2+b^2=c^2$. 即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

点方法

勾股定理的证明主要是通过**拼图法**利用面积的关系完成的,拼图又常以**补拼法**和**叠合法**两种方式拼图;补拼时要无重叠,叠合时要无空隙;而用面积法验证勾股定理的关键是要找到一些特殊图形(如直角三角形、正方形、梯形)的面积之和等于整个图形的面积,从而达到验证的目的.

知识点 2 勾股定理的应用

点知识

勾股定理是一个重要的数学定理,它将图形(直角三角形)与数量关系(三边关系)有机地结合起来,在几何及日常生活中都有着广泛的应用. 由于勾股定理应用的前提条件是直角三角形,因此在应用时,对于非直角三角形的几何问题及生活实际问题都要将它们建模成直角三角形问题. 常见应用主要有如下类型:

(1)已知直角三角形的两边求第三边;

(2)已知直角三角形的一边确定另两边的关系;

(3)证明含有平方关系的几何问题;

(4)作长为 $\sqrt{n}$($n\geqslant1$,且 n 为整数)的线段;

(5)对于一些非直角三角形的几何问题、实际应用问题,首先要将它们建立直角三角形模型,然后利用勾股定理构建方程或方程组解决.

要点精析 ///

对勾股定理的应用一定要灵活,根据直角三角形的三边关系 $a^2+b^2=c^2$,可以得到以下几个变式:①$a^2=c^2-b^2$;②$b^2=c^2-a^2$;③$c=\sqrt{a^2+b^2}$;④$a=\sqrt{c^2-b^2}$;⑤$b=\sqrt{c^2-a^2}$.

拔考向

考查角度 1:勾股定理在网格中的应用

例 4 如图 1.2-3,每个小正方形的边长为 1,$\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 的大小关系是(　　)

A. $a<c<b$

B. $a<b<c$

C. $c<a<b$

D. $c<b<a$

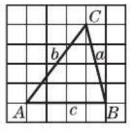


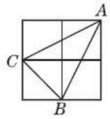
图 1.2-3

导引:易得 $c=4$,利用勾股定理可分别求出 b,a,然后比较三边长的大小即可.

$\because b=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}$,$a=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$,$c=4=\sqrt{16}$,$\therefore b>a>c$,即 $c<a<b$. ▶答案:C

同类变式 (答案见 242 页) |练一练|

4. 如图,小正方形的边长为 2,在 $\triangle ABC$ 中,AC 边上的高是(　　)



(第 4 题图)

A. $\frac{3}{2}\sqrt{5}$　　B. $\frac{3}{10}\sqrt{5}$

C. $\frac{6}{5}\sqrt{5}$　　D. $\frac{8}{5}\sqrt{5}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:利用勾股定理求线段长度

类型一:计算直角三角形中线段的长

例5 如图1.2-4,在△ABC中,$AB=AC$,$\angle C=30°$,$DA\perp AB$于点A,若$BC=6$ cm,求AB的长.

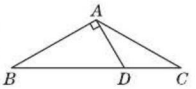


图1.2-4

导引:在Rt△BAD中,运用勾股定理求AB的长,必须要知道BD,AD的长.充分挖掘已知条件,分析△ABC和△ADC,从角的关系中得到边的关系,易知△ABD是含30°角的直角三角形,可得边的倍数关系,从而使问题得解.

▶解:∵ $AB=AC$,$\angle C=30°$,∴ $\angle B=30°$,∴ $\angle BAC=120°$.

又∵ $DA\perp AB$,∴ $\angle BAD=90°$,∴ $\angle DAC=\angle C=30°$,∴ $AD=DC$. ∴ $BD=2AD=2DC$.

设$AD=x$ cm,则$BD=2x$ cm,$CD=x$ cm.

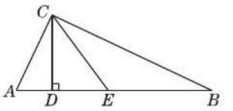
∵ $BC=6$ cm,$BD+DC=BC$,∴ $3x=6$,∴ $x=2$,$2x=4$.

∴ $BD=4$ cm,$AD=2$ cm.

由勾股定理,得$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$(cm).

同类变式 (答案见242页) 练一练

5. [中考·黄冈]如图,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,CD为AB边上的高,CE为AB边上的中线,$AD=2$,$CE=5$,则$CD=$(　　)



(第5题图)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

点方法

本例虽然有直角三角形,但已知线段的长不是直角三角形的边,我们可以设出直角三角形的边,结合图形的其他性质,通过构建方程解答.

特别提醒:涉及30°角的直角三角形要记住30°角所对的直角边等于斜边的一半.

类型二:构造直角三角形求线段的长

例6 如图1.2-5,在△ABC中,$\angle C=60°$,$AB=14$,$AC=10$.求BC的长.

导引:题中没有直角三角形,可以通过作高构建直角三角形,过点A作$AD\perp BC$于D,图中会出现两个直角三角形——Rt△ACD和Rt△ABD,这两个直角三角形有一条公共边AD,借助这条公共边,可建立起直角三角形之间的联系.

▶解:如图1.2-5,过点A作$AD\perp BC$于D.

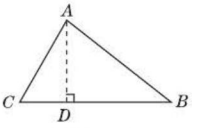


图1.2-5

∵ $\angle ADC=90°$,$\angle C=60°$,∴ $\angle CAD=30°$,∴ $CD=\frac{1}{2}AC=5$.

在Rt△ACD中,$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$.

在Rt△ABD中,$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{14^2-(5\sqrt{3})^2}=11$.

∴ $BC=BD+CD=11+5=16$.

点技巧

利用勾股定理求非直角三角形中线段的长的方法:作三角形一边上的高,将其转化为两个直角三角形,然后利用勾股定理并结合已知条件,采用推理或列方程的方法解决问题.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3：利用勾股定理求面积

类型一：求直角三角形与其他规则图形面积关系问题

例7 观察如图1.2-6所示的图形，回答问题：

(1)如图1.2-6①，$\triangle DEF$为直角三角形，正方形P的面积为9，正方形Q的面积为15，则正方形M的面积为_____；

(2)如图1.2-6②，分别以直角三角形ABC的三边长为直径向三角形外作三个半圆，则这三个半圆形的面积之间的关系式是_____；(用图中字母表示)

(3)如图1.2-6③，如果直角三角形两直角边的长分别为3和4，分别以直角三角形的三边长为直径作半圆，请你利用(2)中得出的结论求阴影部分的面积.

导引：(1)根据正方形的面积公式结合勾股定理可得$DF^2=DE^2+EF^2$，即正方形M的面积$=9+15=24$；

(2)$S_1=\pi\cdot\left(\frac{AC}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$，$S_2=\pi\cdot\left(\frac{BC}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$，$S_3=\pi\cdot\left(\frac{AB}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$，另外由勾股定理可知$AC^2+BC^2=AB^2$，所以$S_1+S_2=S_3$；

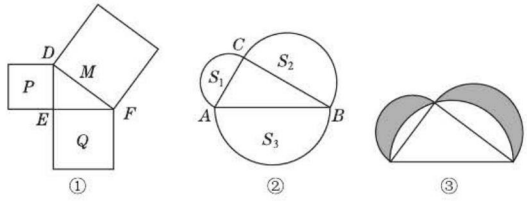


图1.2-6

(3)阴影部分的面积＝两个小半圆形的面积和＋直角三角形的面积－大半圆形的面积，由(2)可知两个小半圆形的面积和＝大半圆形的面积，所以阴影部分的面积＝直角三角形的面积.

▶解：(1)24

(2)$S_1+S_2=S_3$

(3)设两个小半圆形的面积分别为S_1，S_2，大半圆形的面积为S_3，三角形的面积为$S_\triangle$，

则$S_{阴影}=S_1+S_2+S_\triangle-S_3=S_\triangle=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

探规律

与直角三角形三边相连的正方形、半圆形及正多边形、圆都具有相同的结论：两直角边上图形面积的和等于斜边上的图形面积. 本例考查了勾股定理及正方形的面积公式，半圆形面积的求法，解答此类题目的关键是仔细观察所给图形，面积与边长、直径有平方关系，就很容易联想到勾股定理.

类型二：求不规则图形的面积问题

例8 如图1.2-7，已知$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=4$，$CD=2$. 求四边形$ABCD$的周长和面积.

导引：要求四边形$ABCD$的周长和面积，而此四边形又是不规则的四边形，根据四边形中有直角及60°角，因此可通过作辅助线将四边形问题转化为“含30°角的直角三角形”问题来求解.

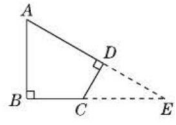


图1.2-7

▶解：如图1.2-7，延长AD，BC相交于点E.

$\because\angle A=60°$，$\angle B=90°$，$\therefore\angle E=30°$，$\therefore AE=2AB=8$.

又$\because\angle ADC=90°$，$\therefore\angle CDE=90°$，$\therefore CE=2CD=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$BE^2=AE^2-AB^2=8^2-4^2=48$，$\therefore BE=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$DE^2=CE^2-CD^2=4^2-2^2=12$，$\therefore DE=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

$\therefore DA=AE-DE=8-2\sqrt{3}$，$BC=BE-CE=4\sqrt{3}-4$.

$\therefore C_{四边形ABCD}=AB+BC+CD+DA=4+(4\sqrt{3}-4)+2+(8-2\sqrt{3})=10+2\sqrt{3}$，

$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}CD\cdot DE=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

点拨 技巧

求不规则图形的面积的方法：首先通过添加辅助线，用补形法将不规则图形转化为规则图形（如直角三角形、长方形等），然后利用规则图形的特殊性质（如本例中含 30°角的直角三角形的性质、勾股定理等）求出相应线段的长，最后求出面积. 在求不规则图形面积时，有时也可采用分割法化不规则图形为规则图形来解.

数学素养提升

"面积法"的思考与延伸

平面图形的面积是同学们最熟悉的概念之一，而且经常用图形割补的方法求一些不规则平面图形的面积，除此之外，面积还可以作为几何证明的工具，这就是面积法. 我们把改变平面图形的形状和位置但不改变其面积大小的几何变换叫作面积变换. 对勾股定理的证明是面积变换最常见的例证. 勾股定理是在直角三角形的三边外作三个正方形，其实将三个正方形换成等边三角形，半圆等都可以.

面积变换是利用图形的面积关系揭示图形性质的方法，面积变换的基本依据是以下几条性质：

①全等三角形的面积相等；相似三角形的面积比等于相似比的平方；

②同底（或等底）等高的两个三角形的面积相等.

③两个三角形的面积比，等于它们各自的底与高之积的比. 特别地，当两个三角形的高相等时，面积比等于底边的比；底相等时，面积比等于高的比；

④两个三角形有一个内角相等（或互补）时，它们的面积比等于夹这个角的两边之积的比.

下面介绍几种"面积法"的典型应用：

1. 求证：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

导引：如图 1.2-8，根据三角形的面积公式：三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$底$\times$高求得 $S_{\triangle ABD}$、$S_{\triangle ACD}$、$S_{\triangle ABC}$；

由图易知，$S_{\triangle ABD}$，$S_{\triangle ACD}$，$S_{\triangle ABC}$ 的底、高分别为 AB 和 DE，AC 和 DF，AB 和 CG，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，分析到这里，问题就迎刃而解了.

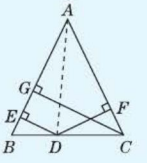


图 1.2-8

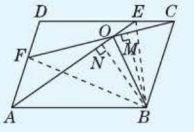


图 1.2-9

2. 如图 1.2-9，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 CD 上一点，F 是 AD 上一点，AE 与 CF 相交于点 O，且 $AE=CF$，求证：OB 平分 $\angle AOC$.

导引：连接 BE，BF，作 $BM\perp CF$ 于 M，$BN\perp AE$ 于 N，由于 $\triangle CBF$ 的面积 = 平行四边形 $ABCD$ 面积的一半，$\triangle ABE$ 的面积 = 平行四边形 $ABCD$ 面积的一半，所以可得 $\triangle CBF$ 的面积 = $\triangle ABE$ 的面积，可得 $CF\cdot BM=AE\cdot BN$，下面问题易解.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4：利用勾股定理证明线段平方关系

类型一：有直角三角形的平方关系

例9 如图1.2-10，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，AM是中线，$MN\perp AB$，垂足为点N. 求证：$AN^2-BN^2=AC^2$.

导引：因为线段AN，BN，AC不构成直角三角形，所以不能直接利用勾股定理，故考虑转化. 由于$AC^2=AM^2-MC^2$，而$MC=MB$，故只需说明$AN^2-BN^2=AM^2-MB^2$即可.

▶证明：∵ $MN\perp AB$，

∴ $AN^2+MN^2=AM^2$，$BN^2+MN^2=MB^2$.

∴ $AN^2-BN^2=AM^2-MB^2$.

∵ AM是中线，

∴ $MB=MC$.

在Rt△AMC中，$AM^2-MC^2=AC^2$.

∴ $AN^2-BN^2=AM^2-MB^2=AM^2-MC^2=AC^2$.

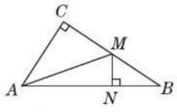
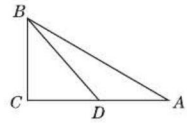


图1.2-10

同类变式 （答案见242页） 练一练

9. 如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，D为AC上一点，AB^2-BD^2与AC^2-DC^2有怎样的关系？并加以证明.



（第9题图）

点方法

证明线段的平方关系的方法：对带有平方运算的问题，主要思路是找出直角三角形，利用勾股定理结合等量代换和代数中的恒等变形进行转化.

类型二：没有直角三角形的平方关系

例10 如图1.2-11，已知AD是△ABC的中线.

求证：$AB^2+AC^2=2(AD^2+DC^2)$.

导引：结论中涉及线段的平方，而题中没有直角三角形，因此可以考虑作$AE\perp BC$于点E，在△ABC中构造直角三角形，利用勾股定理进行证明.

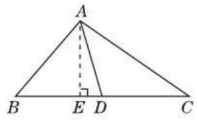


图1.2-11

▶证明：如图1.2-11，过点A作$AE\perp BC$于点E.

在Rt△ACE，Rt△ABE和Rt△ADE中，

$AB^2=AE^2+BE^2$，$AC^2=AE^2+CE^2$，

$AE^2=AD^2-ED^2$，

∴ AB^2+AC^2

$=(AE^2+BE^2)+(AE^2+CE^2)$

$=2(AD^2-ED^2)+(DB-DE)^2+(DC+DE)^2$

$=2AD^2-2ED^2+DB^2-2DB\cdot DE+DE^2+DC^2+2DC\cdot DE+DE^2$

$=2AD^2+DB^2+DC^2+2DE(DC-DB)$.

又∵ AD是△ABC的中线，

∴ $DB=DC$，∴ $AB^2+AC^2=2AD^2+2DC^2=2(AD^2+DC^2)$.

拨技巧

本例证线段的平方关系，但无直角三角形，因此构造直角三角形，利用勾股定理把需要证明的线段联系起来. 一般地，涉及线段之间的平方关系问题时，通常利用这个思路去分析问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度5：利用勾股定理作长为$\sqrt{n}$($n>1$且n为整数)的线段

例11 如图1.2-12，已知线段AB的长为a，请作出长为$\sqrt{5}a$的线段.（保留作图痕迹，不写作法）

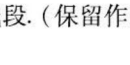


图1.2-12

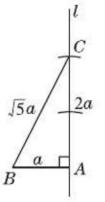


图1.2-13

导引：利用$\sqrt{5}a=\sqrt{a^2+(2a)^2}$可以作出.

如图1.2-13，先作出与已知线段AB垂直，且过已知线段的端点A的直线l，在直线l上以A为端点截取长为$2a$的线段AC，连接BC，则线段BC即为所求.

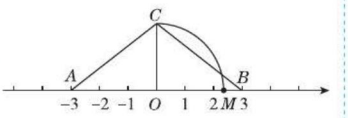
▶解：如图1.2-13，BC就是所求作的线段.

点方法

这类问题中要作的线段一般是直角三角形的斜边，根据勾股定理由要作的线段确定两直角边的长是解题的关键.

同类变式 (答案见242页) 练一练

11. [中考 · 烟台] 如图，O为数轴原点，A，B两点分别对应-3，3，作腰长为4的等腰三角形ABC，连接OC，以O为圆心，OC长为半径画弧交数轴于点M，则点M对应的实数为_____.



（第11题图）

考查角度6：利用勾股定理解决实际问题

例12 [中考 · 西宁] 课间，小明拿着老师的等腰三角板玩，不小心掉到两墙之间，如图1.2-14所示.

(1)求证：$\triangle ADC\cong\triangle CEB$；

(2)从三角板的刻度可知$AC=25$ cm，请你帮小明求出砌墙砖块的厚度a的大小(每块砖的厚度相等).

导引：(1)根据题意可得$AC=CB$，$\angle ACB=90°$，$AD\perp DE$，$BE\perp DE$，进而得到$\angle ADC=\angle CEB=90°$，再根据同角的余角相等可得$\angle BCE=\angle CAD$，再证明$\triangle ADC\cong\triangle CEB$即可.

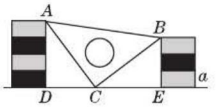


图1.2-14

(2)由题意可得：$AD=4a$，$BE=3a$，根据全等三角形的性质可得$CD=BE=3a$，根据勾股定理可得$AD^2+CD^2=AC^2$，即$(4a)^2+(3a)^2=25^2$，求解即可.

(1)▶证明：由题意可得$AC=CB$，$\angle ACB=90°$，

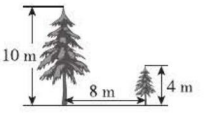
$AD\perp DE$，$BE\perp DE$，

$\therefore\angle ADC=\angle CEB=90°$. $\therefore\angle ACD+\angle BCE=90°$，

$\angle ACD+\angle CAD=90°$，$\therefore\angle BCE=\angle CAD$.

同类变式 (答案见242页) 练一练

12. 如图，有两棵树，一棵高10 m，另一棵高4 m，两棵树相距8 m，一只小鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢，小鸟至少要飞行多少米？



（第12题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ADC和△CEB中，

$$\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB,\\ \angle CAD=\angle BCE,\\ AC=CB,\end{cases}$$

∴ △ADC≌△CEB(AAS).

(2)▶解：由题意可得

$AD=4a$，$BE=3a$，

由(1)得△ADC≌△CEB，

∴ $CD=BE=3a$.

在Rt△ACD中，$AD^2+CD^2=AC^2$，

∴ $(4a)^2+(3a)^2=25^2$，解得 $a=5$.

答：砌墙砖块的厚度 a 为 5 cm.

点方法

生活中的一些实际问题常常通过构建数学模型(直角三角形)来求解，勾股定理在生活中应用面广，建立的模型有时并不是已知两边求第三边，而只是告诉了其中的一些关系，一般可设未知数，用未知数表示它们之间的关系，然后根据勾股定理列方程解决问题.

知识点3 勾股定理的逆定理(重点)

点知识

1. **勾股定理的逆定理**：如果三角形的三条边长 a，b，c 满足关系：$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形.


勾股定理的逆定理

要点精析

(1)勾股定理的逆定理是判定直角三角形的方法，在没有确定直角三角形时，只能说三角形的边，不能说斜边或直角边；

(2)如果三角形的三边长 a，b，c 满足 $a^2-b^2=c^2$，那么这个三角形同样是直角三角形，只是这时 a 为斜边.

2. **利用勾股定理的逆定理判定直角三角形的步骤**：

(1)比较三边 a，b，c 的大小，找出最长边.

(2)计算两较短边的平方和，看它是否与最长边的平方相等，若相等，则是直角三角形，且最长边所对的角是直角；若不相等，则此三角形不是直角三角形.

3. **勾股定理与其逆定理间的区别与联系**：

联系：

(1)两者都与三角形三边的数量关系有关；

(2)两者都与直角三角形有关；

(3)两者都是数形结合思想的典范.

区别：

(1)勾股定理是由“直角三角形”这个“形”得到三角形“三边的数量关系”这个“数”，它是直角三角形的一条重要性质；

(2)勾股定理的逆定理是由三角形“三边的数量关系”这个“数”得到“直角三角形”这个“形”，它是直角三角形的一种重要判定方法.

4. **拓展**：若最长边的平方比较短两边的平方和大，则三角形为钝角三角形；若最长边的平方比较短两边的平方和小，则三角形为锐角三角形.

5. **易错警示**：

(1)$a^2+b^2=c^2$ 只是一种表现形式，不能认为：若 $a^2+b^2\neq c^2$，则这个三角形就不是直角三角形. 如 $a=3$，$b=5$，$c=4$，它同样是直角三角形；只有当两较短边的平方和不等于最长边的平方时，它才不是直角三角形.

(2)只考虑直角三角形而忽视等腰三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度1:利用勾股定理的逆定理进行判断

例13 判断满足下列条件的三角形是不是直角三角形:

(1)在$\triangle ABC$中,$AC=12$,$AB=20$,$BC=16$;

(2)一个三角形的三边长a,b,c满足$b^2-a^2=c^2$;

(3)一个三角形的三边长a,b,c满足$a:b:c=1:2:\sqrt{5}$.

导引:判断一个三角形是不是直角三角形,若条件与边有关,则考虑用勾股定理的逆定理判断.

▶解:(1)在$\triangle ABC$中,$\because AC^2+BC^2=12^2+16^2=20^2=AB^2$,

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形,且$\angle C$为直角.

(2)$\because$三角形的三边长满足$b^2-a^2=c^2$,即$b^2=a^2+c^2$,

$\therefore$此三角形是直角三角形,且b是斜边长.

(3)设$a=x$,则$b=2x$,$c=\sqrt{5}x$.

$\because x^2+(2x)^2=(\sqrt{5}x)^2$,即$a^2+b^2=c^2$,$\therefore$此三角形是直角三角形.

同类变式 (答案见242页) 练一练

13. 在解答"判断由长为$\frac{6}{5}$,2,$\frac{8}{5}$的线段组成的三角形是不是直角三角形"一题中,小明是这样做的.

解:设$a=\frac{6}{5}$,$b=2$,$c=\frac{8}{5}$,因为$a^2+b^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2+2^2=\frac{136}{25}\neq\frac{64}{25}=c^2$,

所以由a,b,c组成的三角形不是直角三角形,你认为小明的解答正确吗?请说明理由.

点方法

1. **判断一个三角形是不是直角三角形的方法:** 若已知条件与边有关,一般通过计算得出三边的数量关系来判断,看是否符合较短两边的平方和等于最长边的平方.

2. **已知三角形三边的比例关系判断三角形形状的方法:** 先设出参数,表示出三条边的长,再用勾股定理的逆定理判断其是否是直角三角形.

考查角度2:利用三角形三边的数量关系判断三角形的形状

例14 [易错题]已知a,b,c为$\triangle ABC$的三边长,且满足$a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$,试判断$\triangle ABC$的形状.

导引:先将等式两边同时分解因式,然后通过对分解后的式子的讨论,得出$\triangle ABC$的形状.

▶解:$\because a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$,

$\therefore c^2(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.

即$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$.

(1)当$a^2-b^2\neq0$时,则有$c^2=a^2+b^2$.

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

(2)当$a^2-b^2=0$,即$a=b$时,

若$a^2+b^2-c^2\neq0$,则$\triangle ABC$是等腰三角形.

若$a^2+b^2-c^2=0$,则$\triangle ABC$是等腰直角三角形.综上所述,$\triangle ABC$是直角三角形或等腰三角形或等腰直角三角形.

误区

两个因式的积为0,有只有一个因式为0和两个因式都为0两种情况;判断三角形形状时,不仅要考虑直角三角形,还要考虑等腰三角形.本题易丢掉情况(2),在化简过程中没有考虑到$a^2-b^2=0$的情况就直接在等式两边除以一个可能为零的式子,从而导致了错误.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3：利用勾股定理的逆定理说明线段的垂直关系

例15 如图1.2-15，E,F 分别是正方形 $ABCD$ 中 BC 和 CD 边上的点，且 $AB=4$，$CE=\frac{1}{4}BC$，F 为 CD 的中点，连接 AF,AE,EF，试判断 AF 与 EF 的位置关系，并说明理由.

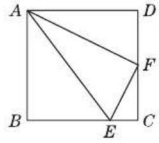


图1.2-15

导引：本题由“$AB=4$，$CE=\frac{1}{4}BC$，F 为 CD 的中点”，可以很容易用勾股定理经过计算求出 AF,EF,AE 的长，然后比较 EF^2+AF^2 与 AE^2 的大小关系，从而得到 $\angle AFE=90°$，即 $AF\perp EF$.

▶解：$AF\perp EF$. 理由：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AD=CD=AB=BC=4$，$\angle B=\angle D=\angle C=90°$.

∵ $CE=\frac{1}{4}BC$，F 为 CD 的中点，

∴ $CE=1$，$BE=BC-CE=3$，$CF=DF=2$，

∴ $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

又∵ $(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=5^2$，

∴ $EF^2+AF^2=AE^2$，

∴ $\angle AFE=90°$. ∴ $AF\perp EF$.

点方法

利用勾股定理的逆定理说明两线段垂直的方法： 判断两条线段长度的平方和是否等于所在三角形第三边的平方. 若等于，则该三角形是以这两条线段为直角边的直角三角形，即这两条线段垂直；否则，不垂直.

考查角度4：勾股定理及其逆定理的综合应用

例16 如图1.2-16，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=17$，$BC=16$，BC 边上的中线 $AD=15$，试说明 $AB=AC$.

导引：易知 $\triangle ABD$ 的三边长分别是8，15，17，从而可根据勾股定理的逆定理先说明 $\triangle ABD$ 是直角三角形，即 $AD\perp BC$，然后在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中利用勾股定理求出 AC 的长，即可说明 $AB=AC$.

▶解：∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

∴ $BD=\frac{1}{2}BC=8$.

在 $\triangle ABD$ 中，∵ $AB=17$，$BD=8$，$AD=15$，

∴ $AB^2=17^2=289$，$BD^2+AD^2=8^2+15^2=64+225=289$，

∴ $BD^2+AD^2=AB^2$，∴ $\triangle ABD$ 为直角三角形，且 $\angle ADB=90°$，

∴ $\triangle ADC$ 是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{15^2+8^2}=17$，∴ $AB=AC$.

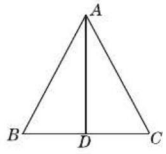


图1.2-16

点方法

利用勾股定理的逆定理构建直角三角形解决问题的方法： 先通过勾股定理的逆定理证明一个三角形是直角三角形，然后利用直角得到另一个直角三角形，在另一个直角三角形中运用勾股定理求边长，这是勾股定理及其逆定理常用的综合解题思路，这种方法常用在具有公共直角或者两直角互为邻补角的两个直角三角形的图形中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度 5：勾股定理及其逆定理的实际应用

例 17 某校把一块三角形的废地开辟为植物园，如图 1.2-17，测得 $AC=80$ m，$BC=60$ m，$AB=100$ m.

(1)若入口 E 在边 AB 上，且与 A，B 的距离相等，求从入口 E 到出口 C 的最短路线的长；

(2)若线段 CD 是一条水渠，且点 D 在边 AB 上，点 D 距点 A 多远时，水渠的长度最短？

▶解：(1)$\because AC=80$ m，$BC=60$ m，$AB=100$ m，

$AC^2+BC^2=80^2+60^2=6\,400+3\,600=100^2=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形且 AB 为斜边.

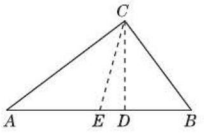


图 1.2-17

由题意知点 E 为斜边 AB 的中点，如图 1.2-17，取 AB 的中点 E，连接 CE，由“两点之间，线段最短”知 CE 为最短路线.

易得 $CE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 100=50(\text{m})$.

即从入口 E 到出口 C 的最短路线的长为 50 m.

(2)如图 1.2-17，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，此时水渠的长度最短.

$\because \angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 100\times CD=\frac{1}{2}\times 80\times 60$. $\therefore CD=48(\text{m})$.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，$\because AC^2=AD^2+CD^2$，

$\therefore 80^2=AD^2+48^2$，$\therefore AD=64(\text{m})$.

即点 D 距点 A 64 m 时，水渠的长度最短.

点拨 技巧

用几何知识解决实际生活问题的关键是：**建模思想**，即将实际问题转化为数学问题. 这里要特别注意弄清文字语言与数学语言间的关系. 如本例中，“点与点之间的最短路线”就是“连接这两点的线段”，“点与直线的最短距离”就是“点到直线的垂线段的长”.

知识点 4 勾股数

点!知识

1. **勾股数**：满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数称为勾股数.

要点精析

(1)勾股数有无数组；

(2)一组勾股数中的各数都乘以相同的倍数可以得到一组新的勾股数：如 3，4，5 是勾股数，则 6，8，10 和 9，12，15 也是勾股数，即如果 a，b，c 是一组勾股数，那么 na，nb，nc(n 为正整数)也是一组勾股数.

2. **判断勾股数的方法**：

(1)确定是否是三个正整数；

(2)确定最大数；

(3)**计算**：看较小两数的平方和是否等于最大数的平方.

3. **易错警示**：

勾股数必须同时满足两个条件：

(1)三个数都是正整数；

(2)两个较小数的平方和等于最大数的平方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1：利用勾股数的概念识别勾股数

例18 下面四组数中是勾股数的一组是(　　)

A. 6,7,8　　B. 5,8,13　　C. 1.5,2,2.5　　D. 21,28,35

导引：根据勾股数的定义：满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数 a,b,c 称为勾股数. A. $6^2+7^2\neq8^2$，不能构成勾股数，故错误；B. $5^2+8^2\neq13^2$，不能构成勾股数，故错误；C. 1.5 和 2.5 不是正整数，所以不能构成勾股数，故错误；D. $21^2+28^2=35^2$，能构成勾股数，故正确. 故选 D. ▶答案：D

点方法

确定勾股数的方法：首先看这三个数是否是正整数，然后看较小的两个数的平方和是否等于最大数的平方，记住常见的勾股数(3，4，5；5，12，13；8，15，17；7，24，25)可以提高解题速度.

考查角度2：利用乘法公式探索勾股数的规律

例19 观察下面的表格中给出的三个数 a,b,c，其中 $a<b<c$.

3,4,5	$3^2+4^2=5^2$
5,12,13	$5^2+12^2=13^2$
7,24,25	$7^2+24^2=25^2$
9,40,41	$9^2+40^2=41^2$
…	…
a,b,c	$a^2+b^2=c^2$

(1)试找出它们的共同点，并证明你的结论；

(2)当 $a=21$ 时，求 b,c 的值.

导引：只要能够发现每组三个数之间的规律即可，这就需要从不同的角度去观察、分析，运用从特殊到一般的思想来解答.

▶解：(1)各组数的共同点是：

①各组数均满足 $a^2+b^2=c^2$；

②最小数 a 是正奇数，其余的两个数 b,c 是连续的正整数；

③最小正奇数的平方等于另外两个连续正整数的和.

由以上特点可猜想并说明这样一个结论：设 x 为大于 1 的奇数，将 x^2 拆分为两个连续正整数之和，即 $x^2=y+(y+1)$，则 $x,y,y+1$ 就能构成一组勾股数.

证明：$\because x^2=y+(y+1)$(x 为大于 1 的奇数)，

$\therefore x^2+y^2=y+(y+1)+y^2=y^2+2y+1=(y+1)^2$.

$\therefore x,y,y+1$ 是一组勾股数.

(2)运用以上结论，当 $a=21$ 时，$21^2=441=220+221$，

$\therefore b=220,c=221$.

点拨技巧

寻找与大于1的奇数组成的勾股数的一种方法：先选一个大于1的奇数，然后把这个数的平方写成两个连续正整数的和，则这个奇数和分成的两个连续正整数就构成了一组勾股数，如 $45^2=2\,025=1\,012+1\,013$，则 45，1 012，1 013 就是一组勾股数，运用此法可以得到许多组勾股数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拨尖角度 1 巧借勾股定理列方程解决折叠问题

例 20 [图形操作题] 如图 1.2-18,将长方形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠,点 C 落在点 C' 处,BC' 交 AD 于点 E,若 $AD=8$,$AB=4$,求 $S_{\triangle BDE}$.

导引:要求 $S_{\triangle BDE}$,可根据 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BAD}-S_{\triangle ABE}$ 计算.

∵ $S_{\triangle BAD}$ 是很容易求出的,

∴ 只要再求出 $S_{\triangle ABE}$ 就可以了.

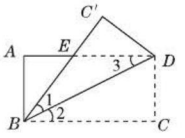


图 1.2-18

▶解:如图 1.2-18,∵ $\triangle BDC'$ 是由 $\triangle BDC$ 折叠得来的,∴ $\angle 1=\angle 2$. ∵ $AD\parallel BC$,∴ $\angle 3=\angle 2$,∴ $\angle 1=\angle 3$,∴ $BE=DE$. 设 $AE=x$,则 $DE=8-x$,∴ $BE=8-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$AB^2+AE^2=BE^2$,即 $4^2+x^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$,即 $AE=3$. ∴ $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BAD}-S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times 4\times 8-\frac{1}{2}\times 4\times 3=16-6=10$.

点方法

本题运用了**方程思想**解答,关于折叠问题要紧扣折叠前后的对应边相等,对应角相等,其解题步骤为①利用重合的图形传递数据(一般不用重合的图形进行计算);②选择直角三角形,这个直角三角形一般已知一边,另两边可通过重合图形找到数量关系,便能利用勾股定理列方程求解.

拨尖角度 2 利用勾股定理解决路径最短问题

例 21 如图 1.2-19,长方体的高为 4 cm,底面是长为 5 cm,宽为 3 cm 的长方形. 一只蚂蚁从顶点 A 出发沿长方体的表面爬到顶点 B. 求:

(1)蚂蚁经过的最短路程;

(2)蚂蚁沿着棱爬行(不能重复爬行同一条棱)的最长路程.

导引:(1)蚂蚁爬行的最短路线可放在平面内,根据"两点之间,线段最短"去求,而与顶点 A,B 相关的两个面展开共有三种方式,根据勾股定理求出每一种方式下蚂蚁爬行的最短路程,从而可知蚂蚁经过的最短路程.

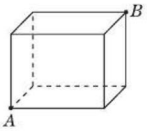


图 1.2-19

(2)最长路线可以是依次经过长为 5 cm,4 cm,5 cm,4 cm,3 cm,4 cm,5 cm 的棱,路线不唯一.

▶解:(1)将长方体与顶点 A,B 相关的两个面展开,共有三种方式,如图 1.2-20 所示.

若蚂蚁沿侧面爬行,如图 1.2-20①,则爬行的最短路程为 $\sqrt{(5+3)^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$(cm);若蚂蚁沿侧面和上面爬行,如图 1.2-20②③,则爬行的最短路程分别为 $\sqrt{(4+5)^2+3^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$(cm),$\sqrt{(4+3)^2+5^2}=\sqrt{74}$(cm).

因为 $\sqrt{74}<4\sqrt{5}<3\sqrt{10}$,所以蚂蚁经过的最短路程是 $\sqrt{74}$ cm.

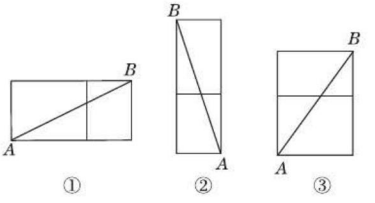


图 1.2-20

(2)$5+4+5+4+3+4+5=30$(cm),所以蚂蚁沿着棱爬行的最长路程是 30 cm.

点方法

解决几何体表面上两点间的最短路程问题的方法是将几何体表面展开,将立体几何问题转化为平面几何问题,利用"两点之间,线段最短"去确定路线,最后利用勾股定理计算. 此题运用了**化折为直**的思想方法.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拨尖角度3　利用旋转作辅助线解决勾股定理及其逆定理的问题(拓展点)

例22　请阅读下面的材料：

问题：如图1.2-21①，在等边三角形ABC内有一点P，且$PA=2$，$PB=\sqrt{3}$，$PC=1$，求$\angle BPC$的度数和等边三角形ABC的边长.

李明同学的解题思路是：将$\triangle BPC$绕点B逆时针旋转60°，画出旋转后的图形如图1.2-21②所示，连接PP'，可得$\triangle P'PB$是等边三角形，而$\triangle PP'A$又是直角三角形(由勾股定理的逆定理可证)，所以$\angle BP'A=150°$，所以$\angle BPC=\angle BP'A=150°$，进而可求出等边三角形$ABC$的边长为$\sqrt{7}$，问题得到解决.

请你参考李明同学的解题思路，探究并解决下面的问题：如图1.2-21③，在正方形$ABCD$内有一点P，且$PA=\sqrt{5}$，$BP=\sqrt{2}$，$PC=1$，求$\angle BPC$的度数和正方形$ABCD$的边长.

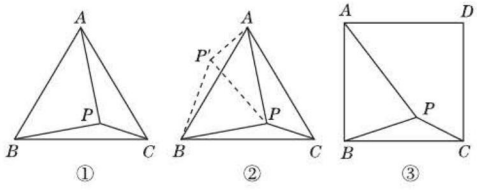


图1.2-21

导引：参照题目给出的解题思路，可将$\triangle BPC$绕点B逆时针旋转90°，得到$\triangle BP'A$，连接PP'，则$\triangle BPC\cong\triangle BP'A$，进而可判断出$\triangle BPP'$是等腰直角三角形，可得$\angle BP'P=45°$；然后根据$AP'$，$PP'$，$PA$的长，利用勾股定理的逆定理可得到$\triangle APP'$是直角三角形，且$\angle AP'P=90°$，即可求得$\angle BP'A$的度数，进而可得$\angle BPC$的度数.

过点B作AP'的垂线，交AP'的延长线于点E，易知$\triangle BEP'$是等腰直角三角形，即可得到$P'E$，BE的长，进而可在Rt$\triangle ABE$中，利用勾股定理求得正方形的边长.

▶解：如图1.2-22，将$\triangle BPC$绕点B逆时针旋转90°，得到$\triangle BP'A$，

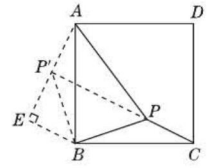


图1.2-22

则$\triangle BPC\cong\triangle BP'A$，$\angle PBP'=90°$，

$\therefore AP'=CP=1$，$BP'=BP=\sqrt{2}$，$\angle BP'A=\angle BPC$.

连接PP'，在Rt$\triangle BP'P$中，

$\because BP=BP'=\sqrt{2}$，$\angle PBP'=90°$，

$\therefore PP'=\sqrt{2+2}=2$，$\angle BP'P=45°$.

在$\triangle AP'P$中，$\because AP'^2+PP'^2=1^2+2^2=5=(\sqrt{5})^2=PA^2$，

$\therefore\triangle AP'P$是直角三角形，且$\angle AP'P=90°$，

$\therefore\angle BP'A=90°+45°=135°$，

$\therefore\angle BPC=\angle BP'A=135°$.

过点B作$BE\perp AP'$，交AP'的延长线于点E，则$\angle EP'B=180°-\angle BP'A=45°$，

$\therefore EP'=BE$.

又$\because EP'^2+BE^2=BP'^2$，

$\therefore EP'=1$，

$\therefore AE=AP'+EP'=1+1=2$.

在Rt$\triangle ABE$中，由勾股定理，得$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{5}$.

$\therefore$正方形$ABCD$的边长为$\sqrt{5}$.

探规律

本例采用了**旋转变换法**，将分散的三条已知线段集中起来，然后运用勾股定理及其逆定理判断三角形的形状，并求出相关线段的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见242页)

基础巩固练

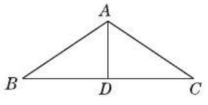
1. [中考 · 毕节]下列各组数据中三个数作为三角形的边长,其中能构成直角三角形的是(　　)

A. $\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5}$　　B. $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$

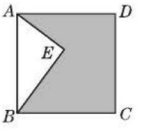
C. $6,7,8$　　D. $2,3,4$

2. [中考 · 荆门]如图,$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,已知 $AB=5$,$AD=3$,则 BC 的长为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10



(第2题图)



(第3题图)

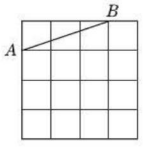
3. [中考 · 资阳]如图,点 E 在正方形 $ABCD$ 内,满足 $\angle AEB=90°$,$AE=6$,$BE=8$,则阴影部分的面积是(　　)

A. 48　　B. 60　　C. 76　　D. 80

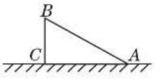
4. 如图,在 4×4 方格中作以 AB 为一边的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$,要求点 C 也在格点上,这样的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 能作出(　　) 【导学号:8564979】

A. 2个　　B. 3个

C. 4个　　D. 6个



(第4题图)



(第5题图)

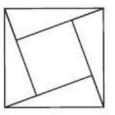
5. 如图,一棵树在一次强台风中,从离地面 5 m 的 B 处折断,树顶端的着地点 A 离树根底部 C 的距离为 $5\sqrt{3}$ m,则这棵树在折断前的高度是(　　)

A. 10 m　　B. 15 m

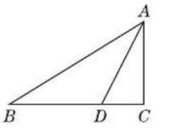
C. 5 m　　D. 20 m

6. [中考 · 泸州]"赵爽弦图"巧妙地利用面积关系证明了勾股定理,是我国古代数学的骄傲. 如图所示的"赵爽弦图"是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形. 设直角三角形较长直角边长为 a,较短直角边长为 b,若 $ab=8$,大正方形的面积为25,则小正方形的边长为(　　)

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 3



(第6题图)



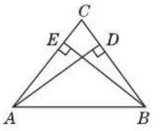
(第7题图)

7. [中考 · 大连]如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=2$,点 D 在 BC 上,$\angle ADC=2\angle B$,$AD=\sqrt{5}$,则 BC 的长为(　　)

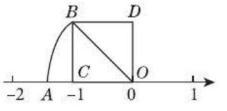
A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$

C. $\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}+1$

8. [中考 · 桂林]如图,在 $\triangle ABC$ 中,$CA=CB$,$AD\perp BC$ 于点 D,$BE\perp AC$ 于点 E,$AB=5$,$AD=4$,则 $AE=$_____.



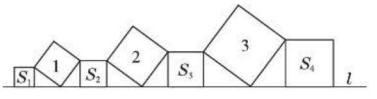
(第8题图)



(第9题图)

9. 如图,正方形 $ODBC$ 中,$OC=1$,$OA=OB$,则数轴上点 A 表示的数是_____.

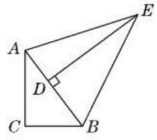
10. 在直线 l 上依次摆放着七个正方形(如图). 已知斜放置的三个正方形的面积分别是1,2,3,正放置的四个正方形的面积依次是 S_1,S_2,S_3,S_4,则 $S_1+S_2+S_3+S_4=$_____.



(第10题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

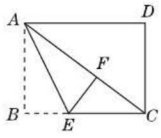
11. 如图，在△ABC中，$AC=8$，$BC=6$，在△ABE中，DE为AB边上的高，$DE=12$，$S_{\triangle ABE}=60$，求$S_{\triangle ABC}$.



（第11题图）

能力提升练

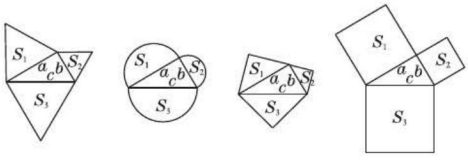
12. 如图，长方形纸片$ABCD$中，已知$AD=8$，折叠纸片使AB边与对角线AC重合，点B落在点F处，折痕为AE，且$EF=3$，则AB的长为（　　）



（第12题图）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

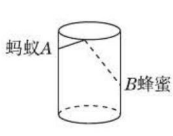
13. 如图，以直角三角形a，b，c为边，向外作等边三角形、半圆、等腰直角三角形和正方形，上述四种情况的面积关系满足$S_1+S_2=S_3$的图形个数有（　　）



（第13题图）

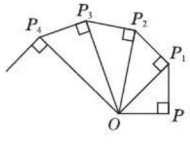
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

14. ［中考·黄冈］如图，圆柱形玻璃杯高为14 cm，底面周长为32 cm，在杯内壁离杯底5 cm的点B处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿3 cm与蜂蜜相对的点A处，则蚂蚁从外壁A处到内壁B处的最短距离为_____cm（杯壁厚度不计）.



（第14题图）

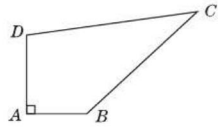
15. 如图，$OP=1$，过P作$PP_1\perp OP$且$PP_1=1$，得$OP_1=\sqrt{2}$；再过P_1作$P_1P_2\perp OP_1$且$P_1P_2=1$，得$OP_2=\sqrt{3}$；又过P_2作$P_2P_3\perp OP_2$且$P_2P_3=1$，得$OP_3=2$；…，依此法继续作下去，得$OP_{2\,018}=$_____.



（第15题图）

16. 在△ABC中，$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，其中m，n是正整数，且$m>n$，试判断△ABC是否是直角三角形.

17. 已知某开发区有一块四边形的空地$ABCD$，如图，现计划在空地上种植草皮，经测量$\angle A=90°$，$AB=3$ m，$BC=12$ m，$CD=13$ m，$DA=4$ m，若每平方米草皮需要200元，问要多少投入？



（第17题图）

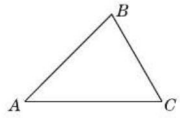
思维拓展练

18. ［中考·东营］定义：若三角形三个内角的度数分别是$x°$，$y°$和$z°$，且满足$x^2+y^2=z^2$，则称这个三角形为勾股三角形.

（1）根据上述定义判断命题“直角三角形是勾股三角形”的真假；

（2）已知一个勾股三角形三个内角从小到大依次为$x°$，$y°$和$z°$，且$xy=2\,160$. 求$x+y$的值；

（3）如图，在△ABC中，$AB=\sqrt{6}$，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，求证：△ABC是勾股三角形.



（第18题图）

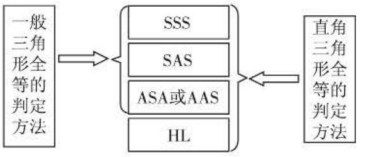
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3 直角三角形全等的判定

热门话题

- 直角三角形全等的判定方法——HL

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 斜边、直角边定理(重点)

点知识

1. 斜边、直角边定理:斜边和一**条直角边**对应相等的两个直角三角形全等(可以简写成"斜边、直角边"或"HL").
2. (1) **书写格式**:如图 1.3-1,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 中,$\begin{cases}AB=A'B',\\AC=A'C'(\text{或 }BC=B'C'),\end{cases}$
$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

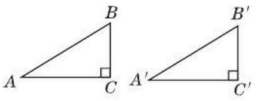


图 1.3-1



(2) **注意**:书写时必须强调**直角三角形**.

3. **易错警示**:
(1)"HL"是直角三角形全等所独有的判定定理,对于一般三角形不成立,这个定理的条件实际就是已知两边和其中一边的对角对应相等,具备这样条件的两个一般三角形不一定全等. 与一般三角形一样,只有三个角对应相等的两个直角三角形不一定全等.
(2) 对于直角三角形全等的判定,要善于利用从一般到特殊的学习方法来研究. 判定三角形全等有"SSS""SAS""ASA""AAS"共四种方法,判定直角三角形全等除"HL"外,以上四种方法也均适用.

拨考向

考查角度 1:运用"HL"证明两个直角三角形全等

例 1 已知:如图 1.3-2,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中,$AC\perp BC$,$AD\perp BD$,垂足分别为 C,D,$AD=BC$. 求证:$\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

导引:由已知可知 $\angle C=\angle D=90°$,即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 都是直角三角形,再由已知 $AD=BC$,且 AB 是公共边,故可根据"HL"判定 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle BAD$.

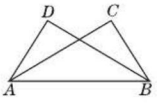


图 1.3-2

▶证明:$\because AC\perp BC$,$AD\perp BD$,$\therefore \angle C=\angle D=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BAD$ 中,$\begin{cases}AB=BA,\\BC=AD,\end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle BAD(\mathrm{HL})$.

点方法

运用"HL"证明两个三角形全等的前提是这两个三角形是直角三角形,书写时,两个三角形符号前要加上"Rt".本题首先要根据垂直关系证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 是直角三角形,这是证明过程中必不可少的步骤.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2："HL"在直角三角形中的计算

例2 如图1.3-3，点D,A,E在直线l上，$AB=AC$，$BD\perp l$于点D，$BD/\!/CE$，且$BD=AE=2$，$CE=3$. 求线段DE的长.

导引：由$BD\perp l$不难得到$\triangle ABD$是直角三角形，如果证得$\triangle ACE$也是直角三角形，就可以利用"HL"证明这两个三角形全等，从而得出$AD=CE$，于是问题即可解决.

▶解：$\because BD\perp l$，$BD/\!/CE$，

$\therefore CE\perp l$，$\therefore \angle ADB=\angle AEC=90°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$与$\mathrm{Rt}\triangle CAE$中，$\begin{cases}AB=AC,\\BD=AE,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle CAE(\mathrm{HL})$.

$\therefore AD=CE=3$，$\therefore DE=AD+AE=3+2=5$.

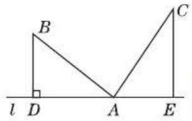
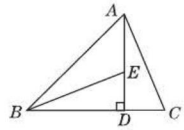


图1.3-3

同类变式 （答案见244页） 练一练

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于点D，E为AD上一点，$BE=AC$，$\angle ABD=\angle BAD$，$BC=10$，$AE=4$. 求BD与CD的长.



（第2题图）

考查角度3：利用三角形全等证明线段的垂直关系

例3 如图1.3-4，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CA=CB$，D是AC上一点，E在BC的延长线上，且$AE=BD$，BD的延长线与AE交于点F. 求证：$BF\perp AE$.

▶证明：$\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ACE=\angle BCD=90°$.

又$\because BC=AC$，$BD=AE$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDC\cong\mathrm{Rt}\triangle AEC(\mathrm{HL})$，$\therefore \angle CBD=\angle CAE$.

又$\because \angle CAE+\angle E=90°$，$\therefore \angle EBF+\angle E=90°$.

$\therefore \angle BFE=90°$，即$BF\perp AE$.

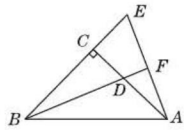


图1.3-4

点拨 方法

用三角形全等探求线段的特殊位置关系的方法：线段的特殊位置关系常见的有平行和垂直. 一般先运用三角形全等证明出相等的两角，然后利用三角形内角和定理、等角的余角相等、邻补角的定义等将其转化为具有特殊位置关系的两个角的关系，从而判断两条线段所在直线的位置关系，最后确定两条线段的位置关系.

考查角度4：作直角三角形

例4 如图1.3-5，已知线段a，求作直角三角形，使一直角边长为a，斜边长为$3a$.（不写作法，保留作图痕迹）



图1.3-5

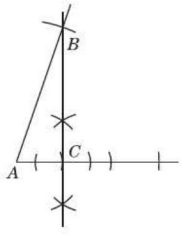


图1.3-6

点拨 方法

已知直角边和斜边作直角三角形的实质是运用"HL"判定两个直角三角形全等.

▶解：如图1.3-6，$\triangle ABC$即为所求作的直角三角形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 综合运用三角形全等的判定方法证明直角三角形全等

例5 如图1.3-7,已知 $AB=AC$,$CD\perp AB$ 于点 D,$BE\perp AC$ 于点 E,CD,BE 相交于点 O,求证:AO 平分 $\angle BAC$.

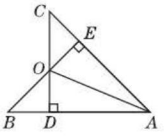


图1.3-7

导引:要证 AO 平分 $\angle BAC$,即证 $\angle BAO=\angle CAO$,可证 $\triangle ADO$ 与 $\triangle AEO$ 全等,已有一对直角和公共边 OA,不可能再找到角相等作为条件,于是可证 $AD=AE$,即需先证 $\triangle AEB\cong\triangle ADC$.

▶证明:$\because CD\perp AB$,$BE\perp AC$,

$\therefore \angle AEB=\angle ADC=90°$.

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ADC$ 中,$\begin{cases}\angle AEB=\angle ADC,\\ \angle BAE=\angle CAD,\\ AB=AC,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle ADC$(AAS),

$\therefore AE=AD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中,$\begin{cases}AO=AO,\\ AE=AD,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEO\cong\mathrm{Rt}\triangle ADO$(HL),

$\therefore \angle DAO=\angle EAO$.

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$.

点方法

由于直角三角形有一特殊条件——直角,因此遇到以下情况要注意:(1)有一个锐角和一条边对应相等的两个直角三角形全等;(2)两条直角边对应相等的两个直角三角形全等,所以在遇到直角三角形的全等问题时,同学们不要忘记隐含的条件——直角相等.

拨尖角度2 与直角三角形判定有关的条件探究题

例6 如图1.3-8,有一直角三角形 ABC,$\angle C=90°$,$AC=10$ cm,$BC=5$ cm,一条线段 $PQ=AB$,P,Q 两点分别在 AC 上和过 A 点且垂直于 AC 的射线 AQ 上运动,问:点 P 运动到 AC 上什么位置时,$\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等?

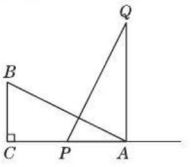


图1.3-8

导引:本题要分情况讨论:①$\mathrm{Rt}\triangle QPA\cong\mathrm{Rt}\triangle ABC$,此时 $AP=BC=5$ cm,可据此求出 P 点的位置;

②$\mathrm{Rt}\triangle PQA\cong\mathrm{Rt}\triangle ABC$,此时 $AP=AC$,点 P 和点 C 重合.

▶解:①当点 P 运动到 $AP=BC$ 时,

$\because \angle C=\angle QAP=90°$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle QPA$ 中,$\begin{cases}BC=PA,\\ AB=QP,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle QPA$(HL).

此时 $AP=BC=5$ cm,$\because AC=10$ cm,

$\therefore AP=\frac{1}{2}AC$,$\therefore$ 当点 P 运动到 AC 的中点时,$\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等.

②当点 P 运动到与点 C 重合时,$AP=AC$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle PQA$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\begin{cases}AP=CA,\\ PQ=AB,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PQA\cong\mathrm{Rt}\triangle ABC$(HL).

$\therefore$ 当点 P 运动到与点 C 重合时,$\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等.

探规律

本题考查三角形全等的判定方法和全等三角形的性质,判定两个三角形全等的一般方法有:SSS,SAS,ASA,AAS,HL.由于本题没有说明全等三角形的对应边和对应角,因此要**分类讨论**,以免漏解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度3 利用直角三角形的判定说明两直线的位置关系

例7 (1)如图1.3-9①,点A,C,D在同一条直线上,$AB\perp AD$,$ED\perp AD$,$AB=CD$,$BC=CE$,试说明$BC\perp CE$的理由;

(2)如图1.3-9②,$AB\perp AD$,$ED\perp AD$,$AB=CD$,$BD=CE$,探索$BD\perp CE$的结论是否成立,并说明理由.

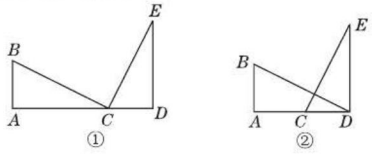


图1.3-9

导引:(1)根据"HL"可得$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DCE$,根据全等三角形的对应角相等,再结合已知不难求得结论.

(2)根据"HL"可得$Rt\triangle ABD\cong Rt\triangle DCE$,根据全等三角形的对应角相等,再结合已知不难求得结论.

▶解:(1)$\because AB\perp AD$,$ED\perp AD$,

$\therefore\angle A=\angle D=90°$.

又$\because AB=CD$,$BC=CE$,

$\therefore Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle DCE$(HL),

$\therefore\angle B=\angle DCE$.$\because\angle B+\angle ACB=90°$,

$\therefore\angle ACB+\angle DCE=90°$,

$\therefore\angle BCE=90°$,即$BC\perp CE$.

(2)成立.理由如下:$\because AB\perp AD$,$ED\perp AD$,

$\therefore\angle A=\angle CDE=90°$.

又$\because AB=CD$,$BD=CE$,

$\therefore Rt\triangle ABD\cong Rt\triangle DCE$(HL),

$\therefore\angle B=\angle DCE$.

$\because\angle B+\angle ADB=90°$,

$\therefore\angle ADB+\angle DCE=90°$,

$\therefore BD\perp CE$.

拔技巧

两条线段的关系包括数量关系和位置关系两种.数量关系有相等或倍数关系;位置关系一般有平行或垂直.这两种关系的证明一般都通过证明三角形全等实现.

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 (答案见244页)

基础巩固练

1. 下列条件,不能判定两个直角三角形全等的是(　　)

A.斜边和一直角边对应相等

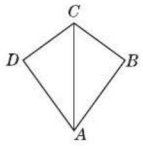
B.两个锐角对应相等

C.一锐角和斜边对应相等

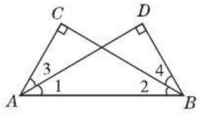
D.两条直角边对应相等

2. 如图,在四边形$ABCD$中,$CB=CD$,$\angle ABC=\angle ADC=90°$,$\angle BAC=35°$,则$\angle BCD$的度数为(　　)

A.145°　　B.130°　　C.110°　　D.70°



(第2题图)



(第3题图)

3. 如图,$\angle C=\angle D=90°$,补充下列条件后不能直接判定$\triangle ABC\cong\triangle BAD$的是(　　)

A.$\angle1=\angle2$　　B.$\angle3=\angle4$

C.$AC=BD$　　D.$AD=BC$

4. 如图,把一张长方形纸片$ABCD$沿对角线BD折叠,BC交AD于O.给出下列结论:

①BC平分$\angle ABD$;

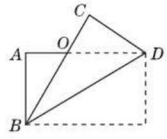
②$\triangle ABO\cong\triangle CDO$;

③$\angle AOC=120°$;

④$\triangle BOD$是等腰三角形.

其中正确的结论有(　　)

A.①③　　B.②④　　C.①②　　D.③④



(第4题图)

5. 利用尺规作图,下列条件中,不能作出唯一直角三角形的是(　　)

A.已知斜边和一锐角

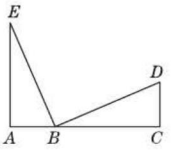
B.已知一直角边和一锐角

C.已知斜边和一直角边

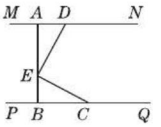
D.已知两个锐角

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. [中考 · 绥化] 如图，A,B,C 三点在同一条直线上，$\angle A=\angle C=90°$，$AB=CD$，请添加一个适当的条件：_____，使得 $\triangle EAB\cong\triangle BCD$.



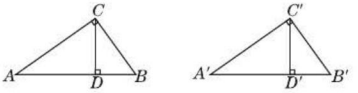
（第 6 题图）



（第 7 题图）

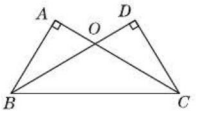
7. 如图，$MN/\!/PQ$，$AB\perp PQ$，点 A,D 和点 B,C 分别在直线 MN 与 PQ 上，点 E 在 AB 上，$AD+BC=7$，$AD=BE$，$DE=EC$，则 $AB=$_____.

8. 如图，已知 CD，$C'D'$ 分别是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 的斜边上的高，且 $CB=C'B'$，$CD=C'D'$. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.



（第 8 题图）

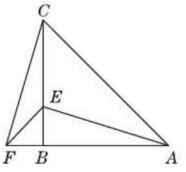
9. [中考 · 泰州] 如图，$\angle A=\angle D=90°$，$AC=DB$，AC，DB 相交于点 O. 求证：$OB=OC$.



（第 9 题图）

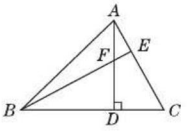
能力提升练

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=CB$，$\angle ABC=90°$，F 为 AB 延长线上一点，点 E 在 BC 上，且 $AE=CF$.
(1) 求证：$\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBF$；
(2) 若 $\angle CAE=30°$，求 $\angle ACF$ 的度数.



（第 10 题图）

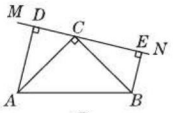
11. 如图，AD 为 $\triangle ABC$ 的高，E 为 AC 上一点，BE 交 AD 于点 F，且 $BF=AC$，$FD=CD$. 判断 BE 与 AC 有怎样的位置关系，并说明理由.



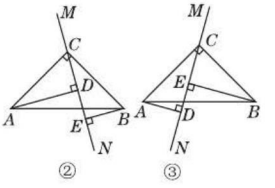
（第 11 题图）

思维拓展练

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，直线 MN 经过点 C，且 $AD\perp MN$ 于 D，$BE\perp MN$ 于 E.



①



② ③

（第 12 题图）

(1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图①的位置时，求证：①$\triangle ADC\cong\triangle CEB$；
②$DE=AD+BE$；
(2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图②的位置时，求证：$DE=AD-BE$；
(3) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图③的位置时，试问 DE，AD，BE 具有怎样的数量关系？请写出这个数量关系，并给出证明.

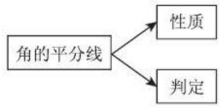
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.4 角平分线的性质

热门话题
- 角平分线的性质定理
- 角平分线的性质定理的逆定理

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 角平分线的性质定理(重难点)

点知识

1. **性质**:角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

要点精析

(1)点一定要在角平分线上.

(2)点到角两边的距离是指点到角两边垂线段的长度.

(3)角平分线的性质可用来证明两条线段相等.

2. **书写格式**:如图1.4-1,∵ OP 平分∠AOB,$PD\perp OA$ 于点 D,$PE\perp OB$ 于点 E,∴ $PD=PE$.

3. **易错警示**:易找错距离,误以为角平分线上的点到角的两边的距离就是角平分线上的点与角两边上任意点间的距离.

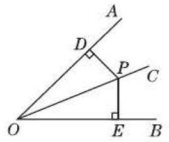


图1.4-1

拨考向

考查角度1:利用角平分线的性质求点到直线的距离

例1 [中考·聊城]如图1.4-2,在△ABC中,∠$C=90°$,BD是∠ABC的平分线,若 $DC=6$,则点 D 到 AB 的距离是_____.

导引:根据角的平分线上的点到角的两边的距离相等,得到点 D 到 AB 的距离等于 DC.

▶答案:6

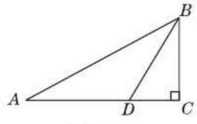


图1.4-2

点方法

求某点到一条直线的距离,若条件中有角平分线,则联想到角平分线的性质,转化为求该点到另一边的距离.

考查角度2:利用角平分线的性质证明线段相等

例2 如图1.4-3,已知 AC 平分∠BAD,$CE\perp AB$ 于 E,$CF\perp AD$ 于 F,且 $BC=DC$. 求证:$BE=DF$.

导引:欲证 $BE=DF$,只需证△BCE≌△DCF,两个直角三角形中已有一斜边相等,只需再证 $CE=CF$ 即可,这可由 AC 平分∠BAD 及 $CE\perp AB$,$CF\perp AD$ 证得.

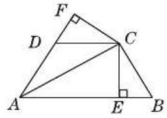
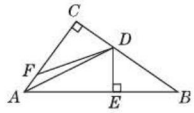


图1.4-3

▶证明:∵ AC 平分∠BAD,$CE\perp AB$ 于 E,$CF\perp AD$ 于 F,∴ ∠F=∠CEB=90°,$CE=CF$. 在 Rt△BCE 和 Rt△DCF 中,$\begin{cases}CE=CF,\\BC=DC,\end{cases}$ ∴ Rt△BCE≌Rt△DCF. ∴ $BE=DF$.

同类变式 (答案见245页) 练一练

2. 如图,在△ABC中,∠$C=90°$,AD平分∠CAB,$DE\perp AB$于E,F在AC上,$BE=FC$. 求证:$BD=FD$.



(第2题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

运用角平分线的性质证明线段相等，是证明两条线段相等的又一思路，它可以直接得出，不需证明三角形全等，但它为证明其他三角形全等提供了线段相等的条件.

考查角度3：利用角平分线的性质求三角形的周长

例3 如图1.4-4，在△ABC中，$\angle C=90°$，$BC=AC$，AD是$\angle BAC$的平分线，$DE\perp AB$于点E. 若$AB=10$ cm，求△DBE的周长.

导引：要求△DBE的周长，也就是求$BE+DE+BD$的长，而题中已知$AB=10$ cm，因此需证$DE+BD=AE$. 由AD是角平分线及垂直条件知$DE=CD$，因此需证$BC=AE$. 由$BC=AC$，因此只需证$AC=AE$，它可由Rt△ACD≌Rt△AED得出.

▶解：∵ AD平分$\angle CAB$，且$\angle C=90°$，$DE\perp AB$，∴ $DC=DE$.

又∵ $\angle C=\angle DEA=90°$，$AD=AD$，

∴ Rt△ACD≌Rt△AED，

∴ $AC=AE$.

又∵ $AC=BC$，∴ $AE=BC$.

∴ $DE+EB+BD=DC+EB+BD=BC+EB=AE+EB=AB$.

又∵ $AB=10$ cm，∴ △DBE的周长为10 cm.

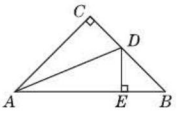
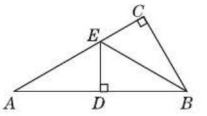


图1.4-4

同类变式 (答案见245页) 练一练

3. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，BE平分$\angle ABC$，$ED\perp AB$于D，如果$AC=3$ cm，那么$AE+DE$等于_____.



（第3题图）

点方法

利用角平分线的性质结合三角形全等的性质将两条线段转化为一条线段，并与已知线段建立关系，从而求得三角形的周长.

考查角度4：利用角平分线的性质解决面积问题

例4 ［中考 · 连云港］如图1.4-5，在△ABC中，$AB=4$，$AC=3$，AD是△ABC的角平分线，则△ABD与△ACD的面积之比是_____.

导引：如图1.4-5，过点D作$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，E，F为垂足.

因为点D为$\angle BAC$平分线上一点，所以$DE=DF$.

由$AB=4$，$AC=3$，△ABD的面积为$\frac{1}{2}AB\cdot DE$，△ACD的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot DF$，得到△ABD与△ACD的面积之比，

即AB与AC之比，故答案为4∶3.

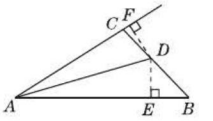


图1.4-5

▶答案：4∶3

拓技巧

(1)高相等的两个三角形的面积之比等于底边的比；(2)三角形的一条内角平分线将三角形分成的两个三角形的面积之比等于这个内角相邻两边的长度之比.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度5：与角平分线有关的作图（易错点）

例5 如图1.4-6，直线a，b，c表示三条相互交叉而建的公路，现在要建立一个货物中转站，要求它到三条公路的距离相等，则可供选择的地址有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

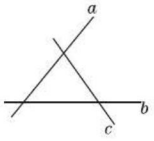


图1.4-6

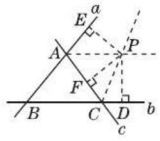


图1.4-7

导引：∵ $\triangle ABC$的内角平分线的交点到三角形的三边的距离相等，

∴ $\triangle ABC$的内角平分线的交点满足条件；如图1.4-7，点P是$\triangle ABC$的两条外角平分线的交点，

过点P作$PE\perp AB$，$PD\perp BC$，$PF\perp AC$，垂足分别为E，D，F，∴ $PE=PF$，$PF=PD$，

∴ $PE=PF=PD$，∴ 点P到$\triangle ABC$的三边的距离相等，

∴ $\triangle ABC$的两条外角平分线的交点到其三边的距离也相等，满足条件的点有3个；

综上，到三条公路的距离相等的点有4个，∴ 可供选择的地址有4个.　　▶答案：D

点方法

此题考查了角平分线的性质. 注意掌握角平分线上的点到角两边的距离相等，到三条两两相交的直线的距离相等的点有四个，注意**数形结合思想**的应用.

知识点2 角平分线的性质定理的逆定理（重难点）

点知识 ▶▶▶

1. **角平分线的性质定理的逆定理**：角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

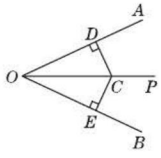


图1.4-8

2. **书写格式**：如图1.4-8，∵ $CD\perp OA$，$CE\perp OB$，且$CD=CE$，∴ 点C在$\angle AOB$的平分线上.

3. 角平分线的性质定理与其逆定理可以概括为“角平分线是角的内部到角两边的距离相等的所有点的集合”. 包含两层意思：①角平分线上的每一点到角的两边的距离（点到直线的距离）都相等；

②角的内部到角两边的距离相等的所有点都在角的平分线上.

4. 角平分线的性质定理与其逆定理的区别：

(1) 角平分线的性质定理是由角之间的数量关系得到线段之间的数量关系，因此角平分线的性质定理常用于证明线段相等；

(2) 角平分线的性质定理的逆定理是由线段之间的数量关系得到角之间的数量关系，因此角平分线的性质定理的逆定理常用于证明角相等.

5. **拓展**：三角形的三条内角平分线相交于一点，该交点到三角形三边的距离相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度1：利用角平分线的判定定理证明角平分线

例6 如图1.4-9，$BE=CF$，BF 和 CE 相交于点 D，$DF\perp AC$ 于点 F，$DE\perp AB$ 于点 E.

求证：AD 平分 $\angle BAC$.

导引：要证 AD 平分 $\angle BAC$，已知条件中有两个垂直，即有点到角的两边的距离，再证这两个距离相等即可证明结论，证这两条垂线段相等，可通过证明 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 全等来完成.

▶证明：$\because DF\perp AC$ 于点 F，$DE\perp AB$ 于点 E，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90°$.

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases}\angle BDE=\angle CDF,\\ \angle DEB=\angle DFC,\\ BE=CF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$(AAS)，

$\therefore DE=DF$.

又$\because DF\perp AC$ 于点 F，$DE\perp AB$ 于点 E，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.

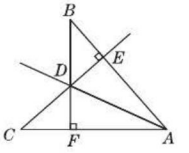
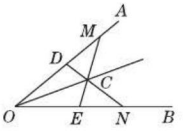


图1.4-9

同类变式 (答案见245页) 练一练

6. 如图，在 $\angle AOB$ 的两边 OA，OB 上分别取 $OM=ON$，$OD=OE$，DN 和 EM 相交于点 C. 求证：OC 平分 $\angle AOB$.



(第6题图)

点方法

判定角平分线的两步：(1)找出与角的两边都垂直的垂线段；(2)证明两条垂线段相等.

考查角度2：利用角平分线的性质定理与判定定理证明角平分线

例7 如图1.4-10，AP，CP 分别是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle MAC$ 和 $\angle NCA$ 的平分线，它们交于点 P，$PD\perp BM$ 于 D，$PF\perp BN$ 于 F. 求证：BP 为 $\angle MBN$ 的平分线.

导引：本题主要考查角平分线的判定方法. 本题只要证明出点 P 到 BM，BN 的距离相等即可，而点 P 是 $\angle MAC$ 与 $\angle NCA$ 的平分线的交点，故 P 到 AM，AC 的距离相等，到 CA，CN 的距离也相等，从而可证明 $PD=PF$.

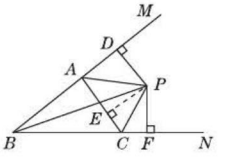


图1.4-10

▶证明：过 P 作 $PE\perp AC$ 于点 E，如图1.4-10所示.

$\because AP$ 平分 $\angle MAC$，$PD\perp AM$，$PE\perp AC$，$\therefore PD=PE$，

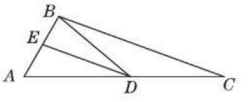
$\because CP$ 平分 $\angle ACN$，$PF\perp CN$，$PE\perp AC$，

$\therefore PE=PF$，$\therefore PD=PF$，

$\therefore P$ 在 $\angle MBN$ 的平分线上，即 BP 为 $\angle MBN$ 的平分线.

同类变式 (答案见245页) 练一练

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=100°$，$\angle ACB=20°$，点 E 在 $\angle ACB$ 的平分线上，D 是 AC 上一点，若 $\angle CBD=20°$，求 $\angle ADE$ 的度数.



(第7题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3：利用角平分线的性质定理及其逆定理解决与面积有关的问题

例8 如图1.4-11，在△ABC中，请证明：

(1)若AD为∠BAC的平分线，则$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB:AC$；

(2)设D为BC上的一点，连接AD，若$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB:AC$，则$AD$为∠$BAC$的平分线.

▶证明：如图1.4-11，过D作$DE\perp AB$于点E，$DF\perp AC$于点F.

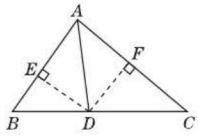


图1.4-11

(1)∵AD平分∠BAC，且$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，∴$DE=DF$.

$$\therefore S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=\left(\frac{1}{2}AB\cdot DE\right):\left(\frac{1}{2}AC\cdot DF\right)=AB:AC.$$

(2)∵$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB:AC$，

$$\therefore \left(\frac{1}{2}AB\cdot DE\right):\left(\frac{1}{2}AC\cdot DF\right)=AB:AC.\ \therefore DE=DF.$$

又∵$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，∴AD为∠BAC的平分线.

点方法

运用角平分线解与面积有关的问题的方法：首先运用三角形的面积公式将面积关系转化为线段关系，结合角平分线的性质进一步转化为三角形边长之间的关系，从而把两者联系起来，结合已知条件可解决问题.

考查角度4：证明三条直线相交于一点

例9 如图1.4-12，已知：△ABC中，F点到直线AE，AD，BC的距离都相等.

求证：F点在∠DAE，∠CBD，∠BCE的平分线上.

导引：方法一：如图1.4-12，连接AF，CF，BF，过F作$FG\perp AE$于G，$FM\perp AD$于M，$FH\perp BC$于H，由已知可知$GF=FM$，又$AF=AF$，则可利用“HL”判定Rt△AGF≌Rt△AMF，从而可得到∠FAG=∠FAM，同理可得到∠FCG=∠FCH，∠FBH=∠FBM，即F点在∠DAE，∠CBD，∠BCE的平分线上；

方法二：根据角平分线的性质定理的逆定理，点F到AE，AD的距离相等，则点F在∠DAE的平分线上，同理可得点F在∠CBD，∠BCE的平分线上.

▶证明：方法一：如图1.4-12，连接AF，CF，BF，过F作$FG\perp AE$于G，$FM\perp AD$于M，$FH\perp BC$于H，则∠AGF=∠AMF=90°.

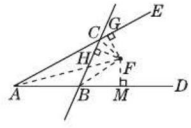


图1.4-12

∵F点到直线AE，AD的距离相等，∴$FG=FM$.

在Rt△AGF和Rt△AMF中，$\begin{cases}FG=FM,\\AF=AF,\end{cases}$

∴Rt△AGF≌Rt△AMF，∴∠FAG=∠FAM.

同理可证Rt△FGC≌Rt△FHC，Rt△FHB≌Rt△FMB，

∴∠FCG=∠FCH，∠FBH=∠FBM.∴F点在∠DAE，∠CBD，∠BCE的平分线上.

方法二：如图1.4-12，过F作$FG\perp AE$，$FH\perp BC$，$FM\perp AD$，垂足分别是G，H，M.

∵F点到直线AE，AD，BC的距离都相等，∴$FG=FM=FH$.

由$FG=FH$，可得点F在∠BCE的平分线上，由$FH=FM$，可得点F在∠CBD的平分线上；

由$FG=FM$，可得点F在∠DAE的平分线上.

综上可知：F点在∠DAE，∠CBD，∠BCE的平分线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

倒过来想

宋朝有个历史学家叫司马光，他不仅因编著《资治通鉴》而流芳百世，而且他在小时候砸缸救人的故事至今仍广为流传.

司马光有一次跟一群小伙伴玩耍，其中一个小孩不小心跌入储满水的大缸里，由于缸太高，同伴们无法救出这个孩子，大家都慌了神，这时司马光把缸砸破，这样人便得救了.

在“让人离开水”有困难时，司马光设法“让水离开人”，这就是司马光的聪明所在.

倒过来想，就是逆向思考，这是数学中一种常用的思维方式，比如本章中对“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”进行逆向思考，经过证明就得到它的逆定理：“角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上”；类似的例子还有很多，如之前学到的“线段垂直平分线定理”与“线段垂直平分线定理的逆定理”；又如对整式乘法法则和乘法公式进行逆向思考，就得到了多项式因式分解的方法；再如，探求证明的途径时，如果不能顺利地从条件出发推出结论，不妨逆向思考，即从结论出发，寻找使结论成立的条件，往往能找到证明的途径.

学会“倒过来想”有助于同学们不断地提高自己提出问题和解决问题的能力.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拔尖角度 1 利用添加辅助线解决与角平分线有关的角的和的问题

例 10 如图 1.4-13，$\angle 1=\angle 2$，P 为 BN 上一点，且 $PD\perp BC$ 于 D，$AB+BC=2BD$，求证：$\angle BAP+\angle BCP=180°$.

导引：要证明两个角的和是 180°，可把它们移到一起，证它们是邻补角.

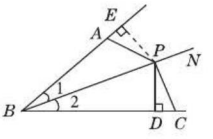


图 1.4-13

▶证明：方法一：过 P 作 $PE\perp BA$ 于 E，如图 1.4-13 所示.

$\because PD\perp BC$，$PE\perp BA$，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore PE=PD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BPD$ 中，

$$\begin{cases} BP=BP,\\ PE=PD,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BPE\cong\mathrm{Rt}\triangle BPD(\mathrm{HL})$. $\therefore BE=BD$.

$\because AB+BC=2BD$，$BC=CD+BD$，$AB=BE-AE$，$\therefore AE=CD$.

$\because PE\perp BE$，$PD\perp BC$，

$\therefore \angle PEB=\angle PDC=90°$.

在 $\triangle PEA$ 和 $\triangle PDC$ 中，$\begin{cases} PE=PD,\\ \angle PEA=\angle PDC,\\ AE=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle PEA\cong\triangle PDC(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle EAP=\angle BCP$.

$\because \angle BAP+\angle EAP=180°$，

$\therefore \angle BAP+\angle BCP=180°$.

方法二：在 BC 上截取 $BF=BA$，连接 PF，如图 1.4-14 所示.

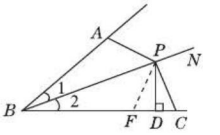


图 1.4-14

$\because AB+BC=2BD$，

即 $BC-BD=BD-BF$，

$\therefore CD=FD$.

在 $\triangle PDF$ 和 $\triangle PDC$ 中，$\begin{cases} DF=DC,\\ \angle PDF=\angle PDC=90°,\\ PD=PD,\end{cases}$

$\therefore \triangle PDF\cong\triangle PDC(\mathrm{SAS})$.

$\therefore \angle PFD=\angle PCB$.

在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle BFP$ 中，$\begin{cases} BA=BF,\\ \angle 1=\angle 2,\\ BP=BP,\end{cases}$

$\therefore \triangle BAP\cong\triangle BFP(\mathrm{SAS})$.

$\therefore \angle BAP=\angle BFP$.

$\because \angle BFP+\angle PFC=180°$，

$\therefore \angle BAP+\angle BCP=180°$.

点方法

解与角平分线的性质和判定有关的综合题时，应注重分析题目特点，通过适当添加辅助线，挖掘其中隐含的条件，从而解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2 利用面积法解决与角平分线有关的问题

例11 [探究题]如图1.4-15,在$\triangle ABC$中,$\angle B=90°$,$AB=7$,$BC=24$,$AC=25$. $\triangle ABC$内是否有一点到各边的距离相等?如果有,请作出这一点,并说明理由,求出这点到各边的距离.

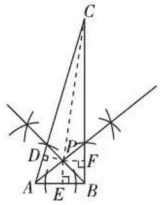


图1.4-15

导引:$\triangle ABC$三个内角的平分线的交点到各边的距离相等. $\triangle ABC$三个内角的平分线将$\triangle ABC$分成三个小三角形,根据这三个小三角形的面积和等于$\triangle ABC$的面积即可求出这点到各边的距离.

▶解:有. 过点A作$\angle BAC$的平分线,再过点B作$\angle ABC$的平分线,它们的交点P即为符合要求的点. 如图1.4-15.

理由:如图1.4-15,过点P分别向$\triangle ABC$的三边作垂线,垂足分别为E,F,D.

$\because AP$平分$\angle BAC$,$PD\perp AC$,$PE\perp AB$,

$\therefore PD=PE$.

$\because BP$平分$\angle ABC$,$PE\perp AB$,$PF\perp BC$,

$\therefore PE=PF$. $\therefore PD=PE=PF$.

连接CP,设$PD=PE=PF=x$.

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APC}$,

即$\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot x+\frac{1}{2}BC\cdot x+\frac{1}{2}AC\cdot x$,

$\therefore 7\times24=(7+24+25)x$.

解得$x=3$,即这点到各边的距离为3.

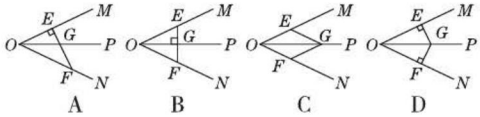
点拨 方法

本题运用了**面积法**,三角形三条内角平分线的交点到三边的距离相等是三角形的一个重要特性,该交点与三角形三个顶点的连线形成三个等高的三角形,若已知三角形的三边和面积,根据大三角形的面积等于三个小三角形的面积和能计算出这个距离.

III 练基础·练方法·练技巧 (答案见245页)

基础巩固练

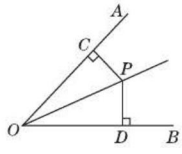
1. 下列各图中,OP是$\angle MON$的平分线,点E,F,G分别在射线OM,ON,OP上,则可以解释定理"角的平分线上的点到角的两边的距离相等"的图形是(　　)



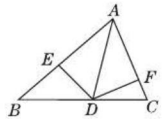
2. [中考·怀化]如图,OP为$\angle AOB$的平分线,$PC\perp OA$,$PD\perp OB$,垂足分别是C,D,则下列结论错误的是(　　)

A. $PC=PD$　　B. $\angle CPO=\angle DOP$

C. $\angle CPO=\angle DPO$　　D. $OC=OD$



(第2题图)

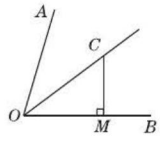


(第3题图)

3. 如图,AD是$\triangle ABC$中$\angle BAC$的平分线,$DE\perp AB$交AB于点E,$DF\perp AC$交AC于点F. 若$S_{\triangle ABC}=5.1$,$DE=1.5$,$AB=4$,则AC的长是(　　)

A. 4　　B. 2.8　　C. 3　　D. 5

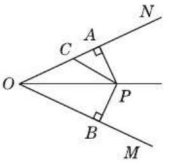
4. [中考·德州]如图,OC为$\angle AOB$的平分线,$CM\perp OB$,$OC=5$,$OM=4$,则点C到射线OA的距离为_____.



(第4题图)

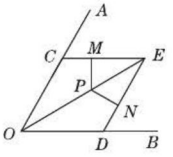
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. 如图，已知 $PA \perp ON$ 于 A，$PB \perp OM$ 于 B，且 $PA = PB$，$\angle MON = 50°$，$\angle OPC = 30°$，求 $\angle PCA$ 的大小.



（第 5 题图）

6. [易错题] 如图，已知 OE 平分 $\angle AOB$，在 OA，OB 上取 $OC = OD$，$PM \perp CE$ 于点 M，$PN \perp DE$ 于点 N. 线段 PM 与 PN 有什么数量关系？证明你的结论.

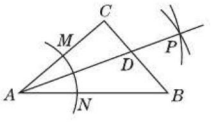


（第 6 题图）

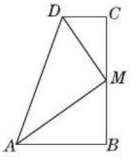
能力提升练

7. [中考 · 枣庄] 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，以顶点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，AB 于点 M，N，再分别以 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 BC 于点 D，若 $CD = 4$，$AB = 15$，则 $\triangle ABD$ 的面积为（　　）

A. 15　　B. 30　　C. 45　　D. 60



（第 7 题图）

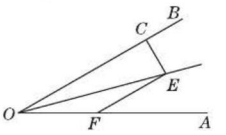


（第 8 题图）

8. [中考 · 大庆] 如图，$\angle B = \angle C = 90°$，$M$ 是 BC 的中点，DM 平分 $\angle ADC$，且 $\angle ADC = 110°$，则 $\angle MAB =$（　　）

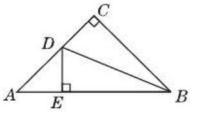
A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°

9. [中考 · 广安] 如图，$\angle AOE = \angle BOE = 15°$，$EF // OB$，$EC \perp OB$ 于 C，若 $EC = 1$，则 $OF =$ _____.



（第 9 题图）

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = BC$，BD 平分 $\angle CBA$，$DE \perp AB$ 于点 E，试探究 AD，DE，BE 有什么数量关系？



（第 10 题图）

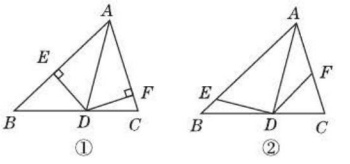
思维拓展练

11. 在 $\triangle ABC$ 中，若 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，点 E 和点 F 分别在 AB 和 AC 上，且 $DE \perp AB$，垂足为 E，$DF \perp AC$，垂足为 F（如图①），则可以得到以下两个结论：①$\angle AED + \angle AFD = 180°$；②$DE = DF$.

那么在 $\triangle ABC$ 中，仍然有条件“AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，点 E 和点 F 分别在 AB 和 AC 上”，请探究以下两个问题：

(1) 若 $\angle AED + \angle AFD = 180°$（如图②），则 DE 与 DF 是否仍相等？若仍相等，请证明；否则，请举出反例.

(2) 若 $DE = DF$，则 $\angle AED + \angle AFD = 180°$ 是否成立？（只写出结论，不证明）



（第 11 题图）

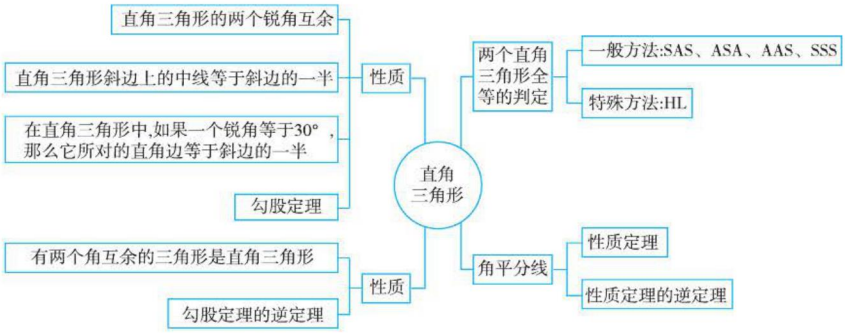
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. **直角三角形的性质与判定**:**性质**:①直角三角形的两个锐角互余;②在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半;③直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半;④直角三角形中,有一条直角边等于斜边的一半,那么它所对的锐角是30°;⑤勾股定理:直角三角形两直角边 a,b 的平方和,等于斜边 c 的平方.

   判定:①有两个角互余的三角形是直角三角形;②勾股定理的逆定理:如果三角形的三条边长 a,b,c 满足关系:$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

2. 直角三角形的判定方法:$\xrightarrow{\text{特殊方法}}$HL.

3. **角平分线的性质定理及其逆定理**:

   性质定理:角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

   性质定理的逆定理:角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

专题解码

知识专题

专题一 直角三角形的性质

链接中考>> 直角三角形的性质:角的性质,即"两锐角互余",常用它来求角的度数;边角的关系,即"30°角所对的直角边等于斜边的一半";边的关系,有两个,"斜边上的中线等于斜边的一半"和"勾股定理———两直角边的平方和等于斜边的平方".这些性质是证明角相等、线段相等或成倍数关系的主要依据,当题目中出现直角三角形时,要联想到这些性质.

例1 如图1,在△ABC中,$AD\perp BC$,D点为垂足,$BE\perp AC$,E点为垂足,M点为AB边的中点,连接ME,MD,ED.

(1)求证:△MED与△BMD都是等腰三角形;

(2)求证:$\angle EMD=2\angle DAC$.

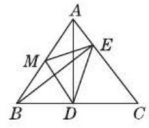


图1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引:(1)根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求出 $ME=MD$,$MD=MB$,从而得到△MED 和△BMD 都是等腰三角形;

(2)根据等边对等角的性质可得∠MAE=∠MEA,再根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和得到∠BME=2∠MAE,同理求出∠BMD=2∠MAD,然后根据∠EMD=∠BME−∠BMD 整理即可得解.

▶证明:(1)∵ M 点为 AB 边的中点,$AD\perp BC$,$BE\perp AC$,

$\therefore MD=\frac{1}{2}AB$,$BM=\frac{1}{2}AB$,$ME=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore ME=MD$,$MD=MB$,

$\therefore$ △MED 与△BMD 都是等腰三角形.

(2)∵ $ME=\frac{1}{2}AB=MA$,

$\therefore$ ∠MAE=∠MEA,

$\therefore$ ∠BME=2∠MAE.

∵ $MD=\frac{1}{2}AB=MA$,

$\therefore$ ∠MAD=∠MDA,

$\therefore$ ∠BMD=2∠MAD,

$\therefore$ ∠EMD=∠BME−∠BMD=2∠MAE−2∠MAD=2∠DAC.

例2 如图 2,在 Rt△ABC 中,∠ABC=90°,AB=16 cm,正方形 $BCEF$ 的面积为 144 cm^2,$BD\perp AC$ 于点 D,求 BD 的长.

导引:由正方形 $BCEF$ 的面积可求出 BC 的长;又已知 AB 的长,利用勾股定理可求出 AC 的长;然后由面积公式即可求出斜边上的高 BD 的长.

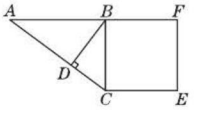


图 2

▶解:∵ $S_{正方形BCEF}=144$ cm^2,即 $BC^2=144$,

$\therefore BC=12$ cm.

在 Rt△ABC 中,由勾股定理,

得 $AC^2=AB^2+BC^2=16^2+12^2=400$.

$\therefore AC=20$ cm.

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot BC$,

$\therefore \frac{1}{2}\times 20\times BD=\frac{1}{2}\times 16\times 12$.

$\therefore BD=9.6$ cm.

专题二 直角三角形的判定

链接中考>> 判断一个三角形是不是直角三角形可从两个方面(角、边)来考虑,角可通过直角三角形的定义或两锐角互余来说明,边可通过勾股定理的逆定理来说明,勾股定理的逆定理通过“数转化为形”来确定三角形的形状,在证明中常用到这一定理.

例3 如图 3,在四边形 $ABCD$ 中,∠B=90°,$AB=BC=4$,$CD=6$,$DA=2$. 求∠DAB 的度数.

导引:连接 AC,易知△ABC 是等腰直角三角形,∠BAC=45°,由勾股定理可知 AC 的长;在△ADC 中,由勾股定理的逆定理可知∠DAC=90°,从而可求出∠DAB 的度数.

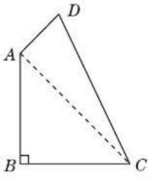


图 3

▶解:如图 3,连接 AC.

∵ ∠B=90°,$AB=BC=4$,∴ $AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,∠$BAC$=∠$ACB$=45°.

∵ $(4\sqrt{2})^2+2^2=6^2$,∴ $AC^2+DA^2=CD^2$.

∴ △ACD 是直角三角形.

∵ ∠DAC 是 CD 所对的角,

∴ ∠DAC=90°.

∴ ∠DAB=∠DAC+∠BAC=90°+45°=135°.

点方法

证明一个角等于 90°的方法: 要证明一个角等于 90°,可将这个角放到一个三角形中,然后利用勾股定理的逆定理来说明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题三　直角三角形全等的判定

链接中考>>　直角三角形全等的判定，关键是看条件，如果有直角，优先考虑用 HL 证明全等. 在中考中一般不会单独考查，它会和全等三角形的性质综合考查.

例 4　如图 4，$CD \perp AD$，$CB \perp AB$，$AB = AD$，求证：$CD = CB$.

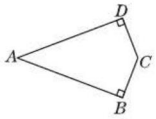


图 4

▶证明：连接 AC，

$\because CD \perp AD$，$CB \perp AB$，

$\therefore \angle D = \angle B = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because \begin{cases} AC = AC, \\ AD = AB, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADC \cong \mathrm{Rt}\triangle ABC(\mathrm{HL})$.

$\therefore CD = CB$.

点方法

本题主要考查了全等三角形的证明，能够想到连接 AC，构造全等三角形是解决本题的关键.

专题四　勾股定理的应用

链接中考>>　勾股定理作为直角三角形中最重要的性质之一，描述了直角三角形三边之间的关系，主要用来求线段的长度，在实际生活中，当我们遇到求距离、高度、宽度、长度等可以转化为求线段长度的问题时，首先看所求线段能否看成某直角三角形的一边，若不能，可以先构造直角三角形，然后再利用勾股定理求解.

例 5　如图 5，某人从 A 点出发欲横渡一条河，由于水流的影响，实际上岸地点 C 偏离欲到达地点 B 有 50 m 远，结果他在水中实际游的路程比河的宽度多 10 m，则该河的宽度为多少米？

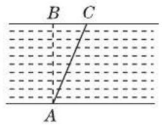


图 5

▶解：设该河的宽度为 x m，根据题意可知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle ABC = 90°$，则 $AC^2 = AB^2 + BC^2$，即 $(x + 10)^2 = x^2 + 50^2$，解得 $x = 120$，

所以该河的宽度为 120 m.

专题五　角平分线的性质与判定

链接中考>>　角平分线的性质与判定都与点到直线的距离有关，也就是图中出现垂线，或者高线. 运用角平分线的性质可以证明两条线段相等. 在中考中单独考查时，一般都是以填空题、选择题的形式出现的.

例 6　［中考·来宾］如图 6，在 $\triangle ABC$ 中，CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp BC$ 于点 F，且 $BC = 4$，$DE = 2$，则 $\triangle BCD$ 的面积是_____.

导引：先利用角平分线的性质求出 DF 的长度，再根据三角形的面积公式即可求出 $\triangle BCD$ 的面积.

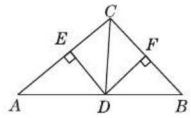


图 6

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp BC$ 于点 F，且 $DE = 2$，

$\therefore DF = 2$.

$\therefore \triangle BCD$ 的面积为 $2 \times 4 \div 2 = 4$.　▶答案：4

点方法

角平分线的性质定理单独看是证明两段距离相等，但放在三角形中是证明两条高相等.

思想方法专题

专题六　分类讨论思想

专题解读>>　当被研究的问题包含多种情形，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情形来分类讨论，得出各种情形下相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想.

例 7　在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 2\sqrt{5}$，$AC = 4$，$BC = 2$，以 AB 为边向 $\triangle ABC$ 外作 $\triangle ABD$，使 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，求线段 CD 的长.

导引：根据题中的 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，显然应分为三种情况：$\angle ABD = 90°$，$\angle BAD = 90°$，$\angle ADB = 90°$，然后巧妙作出辅助线，出现全等三角形和直角三角形，利用全等三角形的判定和性质和勾股定理进行求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:∵ $AC=4, BC=2, AB=2\sqrt{5}$,

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$,

∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形,且$\angle ACB=90°$.

分三种情况:(1) $\angle ABD=90°, AB=BD$. 如图7①,过点 D 作 $DE\perp CB$,交 CB 的延长线于点 E.

∴ $\angle BED=\angle ACB=90°$,

∴ $\angle CAB+\angle CBA=90°$.

∵ $\angle ABD=90°$,

∴ $\angle CBA+\angle EBD=90°$,

∴ $\angle CAB=\angle EBD$.

在 $\triangle ACB$ 与 $\triangle BED$ 中,∵ $\angle ACB=\angle BED, \angle CAB=\angle EBD, AB=BD$,

∴ $\triangle ACB\cong\triangle BED$(AAS),

∴ $BE=AC=4, DE=BC=2$,∴ $CE=6$.

在 Rt$\triangle CDE$ 中,根据勾股定理得 $CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=2\sqrt{10}$.

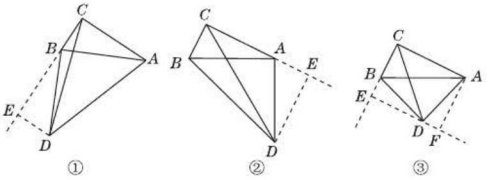


图7

(2) $\angle BAD=90°, AB=AD$. 如图7②,过点 D 作 $DE\perp CA$,交 CA 的延长线于点 E.

∴ $\angle AED=\angle ACB=90°$.

∴ $\angle EAD+\angle EDA=90°$.

∵ $\angle BAD=90°$,

∴ $\angle BAC+\angle EAD=90°$,

∴ $\angle BAC=\angle EDA$.

在 $\triangle ACB$ 与 $\triangle DEA$ 中,∵ $\angle ACB=\angle AED, \angle BAC=\angle EDA, AB=AD$,

∴ $\triangle ACB\cong\triangle DEA$,

∴ $DE=AC=4, AE=BC=2$,∴ $CE=6$.

在 Rt$\triangle CDE$ 中,根据勾股定理得 $CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=2\sqrt{13}$.

(3) $\angle ADB=90°, DB=AD$. 如图7③,过点 D 作 $DE\perp CB$,交 CB 的延长线于点 E,过点 A 作 $AF\perp DE$,交 ED 的延长线于点 F.

∵ $\angle ADB=90°$,∴ $\angle DAB+\angle DBA=90°$.

∵ $CE\perp EF, AF\perp EF$,∴ $CE/\!/AF$,

∴ $\angle EBA+\angle FAB=180°$,

∴ $\angle EBD+\angle DAF=90°$.

∵ $\angle DAF+\angle ADF=90°$,

∴ $\angle DBE=\angle ADF$.

又∵ $\angle BED=\angle AFD=90°, DB=AD$,

∴ $\triangle AFD\cong\triangle DEB$. ∴ $AF=ED, DF=BE$.

易知四边形 $ACEF$ 为长方形,

∴ $AF=CE=2+BE, AC=EF=ED+DF$,

∴ $AC=2+BE+BE=4$,

∴ $BE=1$,∴ $CE=3, ED=3$,易得 $CD=3\sqrt{2}$.

点方法

对于角的一边不确定,三角形形状不确定,等腰三角形腰或顶角不确定,直角三角形斜边不确定等问题,都需要我们正确地运用**分类讨论思想**进行解决. 分类讨论思想不仅可以使我们有效地解决一些问题,同时还可以培养我们的观察能力和全面思考问题的能力.

专题七 方程思想

专题解读>> 在三角形的有关计算中,往往需要先设未知数,再根据三角形中的特殊等量关系列出方程,最后通过解方程达到求解的目的.

例8 如图8,沿 AE 所在直线折叠长方形纸片 $ABCD$,使点 D 落在 BC 边上的点 F 处,若 $AB=8$,且$\triangle ABF$ 的面积为24,求 CE 的长.

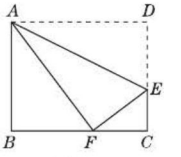


图8

导引:根据 $\triangle ABF$ 的面积求得 BF 的长,根据勾股定理求得 AF 的长,结合折叠的性质,得出 AD 的长,根据长方形的对边相等,从而求得 CD 和 CF 的长. 在Rt$\triangle CEF$中,设 $CE=x$,根据折叠的性质,得 $EF=DE=8-x$,根据勾股定理列方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：∵ $S_{\triangle ABF}=24$，$AB=8$，∴ $BF=6$.

∴ $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=10=AD$.

由四边形 $ABCD$ 是长方形，可知 $CD=AB=8$，$BC=AD=10$，∴ $CF=4$.

设 $CE=x$，则 $EF=DE=8-x$.

在 Rt△CEF 中，根据勾股定理，得 $CF^2+CE^2=EF^2$，即 $16+x^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$.

即 $CE=3$.

点方法

利用方程思想解几何计算问题一般先设要求的线段的长度或角的度数为未知数，设法把其他有关的量用含未知数的代数式表示出来，然后把它们代入到等量关系式中，建立方程或方程组，最后通过解方程或方程组得到所要求的结果.

专题八　转化思想

专题解读>> 转化思想是将未知的问题转化为已知的问题，将复杂的问题转化为简单的问题，将抽象的问题转化为具体的问题，将实际问题转化为数学问题，我们也常常将不同的数学问题进行互相转化，最终转化为容易解决的问题.

例9 如图9，在△ABC 中，$AB=6$，$AC=2\sqrt{13}$，$\angle B=60°$，求△ABC 的面积.

导引：可通过构建直角三角形来求解. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，AD 是公共直角边，因此先求出 AD 是解题的关键，在 Rt△ABD 中，已知 AB 的长，$\angle B$ 的度数，可以求出 BD 和 AD 的长；在 Rt△ADC 中，求出了 AD 的长，已知 AC 的长，根据勾股定理可求出 CD 的长，由 BD，CD 的长，即可求出 BC 的长，从而可求得△ABC 的面积.

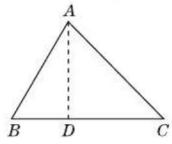


图9

▶解：如图9，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D.

在 Rt△ABD 中，

∵ $\angle ADB=90°$，$\angle B=60°$，

∴ $\angle BAD=30°$.

∴ $BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times6=3$.

∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=3\sqrt{3}$.

在 Rt△ADC 中，$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-(3\sqrt{3})^2}=5$，

∴ $BC=BD+DC=8$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times8\times3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

点方法

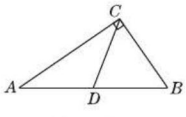
解本题的关键是通过作高构造直角三角形，从而将斜三角形转化为直角三角形求解.

好题必练

（答案见246页）

选择题

1. [中考·湖州] 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，CD 是 AB 边上的中线，则 CD 的长是(　　)



（第1题图）

A. 20　　B. 10

C. 5　　D. $\frac{5}{2}$

2. 在△ABC 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 a，b，c，下列说法错误的是(　　)

A. 如果 $\angle C-\angle B=\angle A$，那么△$ABC$ 是直角三角形

B. 如果 $c^2=b^2-a^2$，那么△ABC 是直角三角形，且 $\angle C=90°$

C. 如果 $(c+a)(c-a)=b^2$，那么△ABC 是直角三角形

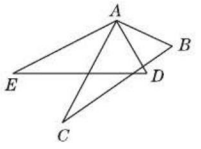
D. 如果 $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，那么△$ABC$ 是直角三角形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

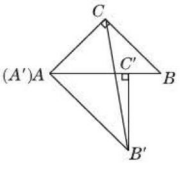
3. 如图，已知 $\angle BAC = \angle DAE = 90°$，$AB = AD$，下列条件能使 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ 的是(　　)

A. $\angle E = \angle C$　　B. $AE = AC$

C. $BC = DE$　　D. 以上均可



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. [中考 · 陕西] 如图，将两个大小、形状完全相同的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 拼在一起，其中点 A' 与点 A 重合，点 C' 落在边 AB 上，连接 $B'C$. 若 $\angle ACB = \angle AC'B' = 90°$，$AC = BC = 3$，则 $B'C$ 的长为(　　)

A. $3\sqrt{3}$　　B. 6

C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{21}$

5. [中考 · 长沙] 我国南宋著名数学家秦九韶的著作《数书九章》里记载有这样一道题目："问有沙田一块，有三斜，其中小斜五里，中斜十二里，大斜十三里，欲知为田几何？"这道题讲的是：有一块三角形沙田，三条边长分别为 5 里、12 里、13 里，问这块沙田面积有多大？题中的"里"是我国市制长度单位，1 里 = 500 米，则该沙田的面积为(　　)

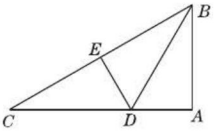
A. 7.5 平方千米　　B. 15 平方千米

C. 75 平方千米　　D. 750 平方千米

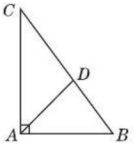
6. [中考 · 常德] 如图，已知 BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，ED 是 BC 的垂直平分线，$\angle BAC = 90°$，$AD = 3$，则 CE 的长为(　　)

A. 6　　B. 5

C. 4　　D. $3\sqrt{3}$



(第 6 题图)



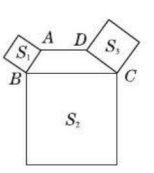
(第 7 题图)

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，$AB = 3$，$AC = 4$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，则 BD 的长为(　　)

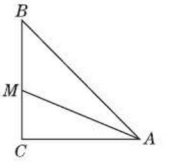
A. $\frac{15}{7}$　　B. $\frac{12}{5}$　　C. $\frac{20}{7}$　　D. $\frac{21}{5}$

8. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ABC + \angle DCB = 90°$，且 $BC = 2AD$，以 AB，BC，DC 为边向外作正方形，其面积分别为 S_1，S_2，S_3，若 $S_1 = 3$，$S_3 = 9$，则 S_2 的值为(　　)

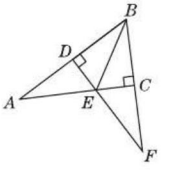
A. 12　　B. 18　　C. 24　　D. 48



(第 8 题图)



(第 9 题图)



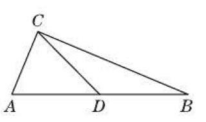
(第 10 题图)

填空题

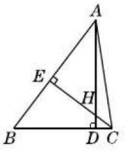
9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，AM 平分 $\angle CAB$，$CM = 20$ cm，则点 M 到 AB 的距离是_____.

10. [中考 · 泰安] 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 E，交 BC 的延长线于 F，若 $\angle F = 30°$，$DE = 1$，则 BE 的长是_____.

11. [中考 · 益阳] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC = 5$，$BC = 12$，$AB = 13$，CD 是 AB 边上的中线，则 $CD =$ _____.



(第 11 题图)



(第 13 题图)

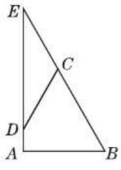
12. [中考 · 襄阳] 已知 CD 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高，若 $CD = \sqrt{3}$，$AD = 1$，$AB = 2AC$，则 BC 的长为_____.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$CE \perp AB$ 于点 E，AD，CE 交于点 H. 已知 $EH = EB = 3$，$AE = 4$，则 CH 的长是_____.

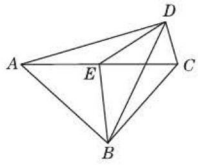
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

14. 在△ABC中，$\angle C=90°$，$BC=4$ cm，$\angle BAC$的平分线交BC于D，且$BD:DC=5:3$，则D到AB的距离为_____.

15. ［中考·常德］如图，已知Rt△ABE中$\angle A=90°$，$\angle B=60°$，$BE=10$，D是线段AE上的一动点，过D作CD交BE于C，并使得$\angle CDE=30°$，则CD长度的取值范围是_____.　【导学号:8564979】



（第15题图）

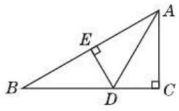


（第16题图）

16. ［中考·青岛］如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$E$为对角线$AC$的中点，连接$BE$，$ED$，$BD$，若$\angle BAD=58°$，则$\angle EBD$的度数为_____.

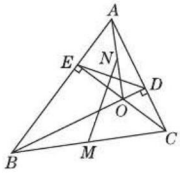
解答题

17. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，AD是$\angle BAC$的平分线，$DE\perp AB$于E. 求证：A点在$\angle CDE$的平分线上.



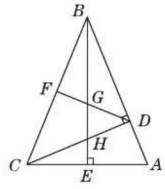
（第17题图）

18. 如图，已知BD，CE是△ABC的两条高，M，N分别为BC，AO的中点.
求证：MN垂直平分DE.



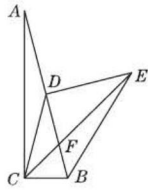
（第18题图）

19. ［中考·泰安］如图，在△ABC中，$\angle ABC=45°$，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为点D，E，F为BC的中点，BE与DF，CD分别交于点G，H，$\angle ABE=\angle CBE$.
（1）线段HB与AC相等吗？若相等，请给予证明，若不相等，请说明理由.
（2）求证：$BG^2-GE^2=EA^2$.



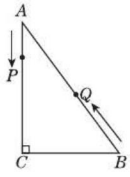
（第19题图）

20. 如图，已知△ABC的周长是$4+2\sqrt{6}$，$AB=4$，$AC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.
（1）判断△ABC的形状；
（2）若CD是AB边上的中线，$DE\perp AB$，$\angle ACB$的平分线交DE于E，交AB于F，连接BE. 试说明$DC=DE$，并求△DBE的面积.



（第20题图）

21. 如图，在Rt△ABC中，$AC=8$，$BC=6$，一个运动的点P从点A出发，以每秒1个单位的速度向点C运动，同时一个运动的点Q从点B出发，以每秒2个单位的速度向点A运动，当一个点到达终点时另一个点也随之停止. 设运动的时间为t秒.
（1）用含t的代数式表示线段AQ和CP的长；
（2）t为何值时，$AP=AQ$？
（3）t为何值时，$AP=BP$？



（第21题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2章

四边形

几何图形性质的探秘

数学点拨

你将学到的核心考点

- 多边形 □
- 平行四边形的性质与判定 □
- 中心对称和中心对称图形 □
- 三角形的中位线定理 □
- 特殊平行四边形——矩形、菱形、正方形的性质与判定 □

我们为你提供的核心方法

- 从特殊到一般的思想 □
- 转化思想 □
- 方程思想 □
- 建模思想 □
- 割补法 □
- 演绎推理法 □

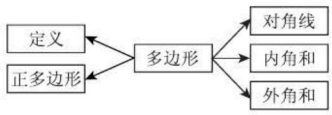
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1 多边形

热门话题
- 多边形
- 正多边形
- 多边形的内角和
- 多边形的外角和

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 多边形及其相关概念

点知识

1. **多边形的定义**：在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的封闭图形叫作多边形. 如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形叫作 n 边形.

   组成多边形的各条线段叫作多边形的边，相邻两条边的公共端点叫作多边形的顶点.

要点精析

(1) 组成多边形的条件：

①组成多边形的线段在“同一个平面内”；②线段“不在同一直线上”且条数要不少于3条；③首尾顺次相接.

(2) **多边形的表示法**：表示多边形时，先写出多边形的名称，后面依次写出多边形的顶点字母.

2. **多边形的有关概念**：

(1) **内角**：相邻两边组成的角叫作多边形的内角，简称多边形的角.

(2) **对角线**：连接不相邻的两个顶点的线段叫作多边形的对角线.

3. **凸多边形**：画出多边形的任何一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一旁，那么这个多边形就是凸多边形，否则就是凹多边形. 本节及以后所介绍的多边形都是指凸多边形.

4. **拓展**：从 n 边形的一个顶点出发，可以引 $(n-3)$ 条对角线，这些对角线把 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形；n 边形的对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$.

拨考向

考查角度1：利用多边形的相关定义进行辨析

例1 下列说法中，正确的有(　　)

(1) 三角形是边数最少的多边形；

(2) 由 n 条线段连接起来组成的图形叫多边形；

(3) n 边形有 n 条边、n 个顶点、$2n$ 个内角和外角；

(4) 多边形分为凹多边形和凸多边形.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

点方法

(1) 理解多边形的定义，要从多边形的几个条件入手.

(2) 一个 n 边形，它的顶点数、内角的个数都是 n 个，只有外角有 $2n$ 个.

导引：(2) 的说法不严密，应点明三点：其一，“不在同一直线上”的线段；其二，是“平面图形”；其三，“线段首尾顺次连接”；(3) n 边形有 n 个内角和 $2n$ 个外角，即外角的个数是内角个数的2倍. (1)(4) 说法正确.

▶答案：B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用多边形的边数与对角线的条数之间的关系解决问题

类型一：已知边数求对角线的条数

例2 (1)四边形从一个顶点可引出几条对角线？共有几条对角线？五边形呢？

(2)n 边形从一个顶点可引出几条对角线？共有几条对角线？请说明理由.

导引：根据多边形的定义画出图形，再运用图形可直观地解决问题.

▶解：(1)如图2.1-1①，四边形从一个顶点可引出1条对角线，共有2条对角线；如图2.1-1②，五边形从一个顶点可引出2条对角线，共有5条对角线.

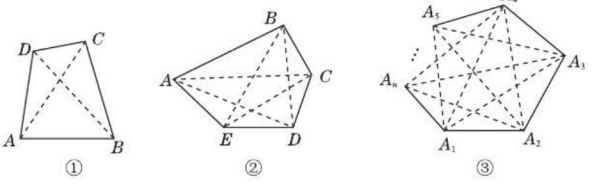


图2.1-1

(2)n 边形从一个顶点可引出$(n-3)$条对角线，共有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线.

理由：如图2.1-1③，以顶点A_1为例，由定义可知，共有三个点(本身与相邻两点，即顶点A_1，A_2，A_n)不能与A_1连成对角线，所以从顶点A_1引出的对角线有$(n-3)$条. 其他顶点以此类推. n 边形有n个顶点，若用$n(n-3)$计算，通过观察图形可知，每条对角线都重复了一次，即$n(n-3)$是所有对角线条数的2倍，因此n边形共有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线.

探规律

本题利用了**从特殊到一般的思想**. 从n边形的一个顶点出发可以作$(n-3)$条对角线，n边形被分成$(n-2)$个三角形，一个n边形一共可以作$\frac{1}{2}n(n-3)$条对角线.

同类变式 (答案见247页) 练一练

2. [一题多解]若一个多边形的对角线的条数恰好为边数的3倍，则这个多边形的边数为(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

类型二：已知边数求对角线的条数的实际应用

例3 某学校八年级六个班举行篮球比赛，比赛采用单循环积分制(即每两个班都进行一场比赛)，你能算出一共需进行多少场比赛吗？

导引：可参照多边形对角线条数的求法，总场数即为多边形的对角线条数加边数，如图2.1-2所示.



图2.1-2

▶解：共需比赛$\frac{6\times(6-3)}{2}+6=15$(场).

同类变式 (答案见247页) 练一练

3. 20年前的初中八年级的25名同学相聚，每两名老同学握手一次，那么共握手多少次？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

本例将六个班看成六边形的六个顶点，单循环比赛的场次看成六边形的对角线条数加边数，建立起数学模型：已知六边形，求这个六边形的对角线的条数和边数的和；求多边形对角线的条数可用公式：对角线的总条数 $=\frac{n(n-3)}{2}$ 来求.

警示：注意区别求对角线的总条数与从一个顶点出发的对角线的条数.

类型三：已知多边形的对角线的条数求边数

例4 若从一个多边形的一个顶点出发，最多可以引 10 条对角线，则它是(　　)

A. 十三边形　　B. 十二边形　　C. 十一边形　　D. 十边形

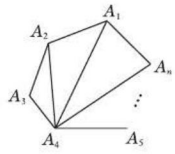


图 2.1-3

导引：如图 2.1-3，从 n 边形的一个顶点出发作对角线时，与该顶点本身及其相邻的两个顶点不能作，与其余的 $(n-3)$ 个顶点每个顶点相连都可以作一条对角线，故从 n 边形的一个顶点出发共可以引 $(n-3)$ 条对角线，所以 $n-3=10$，所以 $n=13$.

▶答案：A

点方法

当已知多边形从一个顶点出发的对角线条数求边数时，用 $n-3=$ 对角线条数去求；当已知一个多边形的对角线总条数求边数时，用 $\frac{n(n-3)}{2}=$ 对角线总条数去求；当已知多边形从一个顶点出发引出的对角线将多边形分成的三角形个数求边数时，用 $n-2=$ 三角形个数去求.

知识点 2 正多边形

点知识 ▶▶▶

正多边形：在平面内，边相等、角也都相等的多边形叫作正多边形.

要点精析 /// 正多边形有两个条件：(1) 边相等；(2) 角相等. 二者缺一不可，若一个多边形的各角都相等或各边都相等，则它不一定是正多边形.

拨考向 ▶▶▶

考查角度：利用正多边形的定义识别正多边形

例5 下列说法：(1) 等腰三角形是正多边形；(2) 等边三角形是正多边形；(3) 长方形是正多边形；(4) 正方形是正多边形. 其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

导引：紧扣正多边形的概念识别：

(1) 等腰三角形的底边与腰不一定相等，所以不一定是正多边形；

(2) 等边三角形三条边都相等，三个角都相等，是正多边形；

(3) 长方形的四个角都相等，但长与宽不一定相等，所以不一定是正多边形.

(4) 正方形的四条边都相等，四个角都相等，是正多边形.

点方法

识别正多边形的关键是要扣住正多边形的两个关键特征. 两者缺一不可.

▶答案：B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 3 多边形的内角和

点知识

1. n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.

证明多边形内角和公式:

方法: (1) 如图 2.1-4,从 n 边形的一个顶点出发作对角线;

(2) 如图 2.1-5,在 n 边形的一条边上取一点与其他的顶点相连;

(3) 如图 2.1-6,在 n 边形内任取一点与 n 个顶点相连.

2. **思路:** 把多边形内角和的问题转化为三角形内角和的问题,即把 n 边形分成几个三角形,利用三角形内角和定理推导.

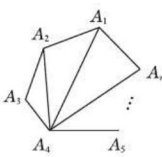


图 2.1-4

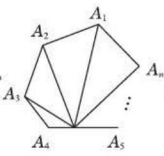


图 2.1-5

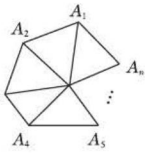


图 2.1-6

3. **拓展:**

(1) 多边形的内角和随边数的变化而变化,边数每增加 1,内角和就增加 180°;

(2) 正 n 边形的每个内角的度数为 $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

拓考向

考查角度 1: 已知多边形的边数求内角和

例 6 在四边形 $ABCD$ 中,如果 $\angle A+\angle C+\angle D=280°$,则 $\angle B$ 的度数是(　　)

A. 80°　　B. 90°　　C. 170°　　D. 20°

导引: ∵ 四边形的内角和为 $(4-2)\times 180°=360°$,

∴ $\angle B=360°-(\angle A+\angle C+\angle D)=360°-280°=80°$.

▶答案: A

点方法

已知边数求内角和可直接代入内角和公式: n 边形内角和等于 $(n-2)\times 180°$ 求解.

考查角度 2: 利用多边形内角和公式求边数

例 7 [中考 · 呼和浩特] 已知一个多边形的内角和为 1 080°,则这个多边形是(　　)

A. 九边形　　B. 八边形　　C. 七边形　　D. 六边形

导引: 设这个多边形的边数为 n,

由题意得 $(n-2)\times 180°=1\,080°$,

解得 $n=8$.

▶答案: B

同类变式 (答案见 247 页) 练一练

7. [中考 · 丽水] 一个多边形的每个内角均为 120°,则这个多边形是(　　)

A. 四边形　　B. 五边形

C. 六边形　　D. 七边形

点方法

(1) **已知多边形的内角和求边数 n 的方法:** 根据多边形内角和公式列方程: $(n-2)\times 180°=$ 内角和,解方程求出 n,即得多边形的边数.

(2) **已知正多边形每个内角的度数 k 求边数 n 的方法:** 根据多边形内角和公式列方程: $(n-2)\times 180°=kn$,解方程求出 n,即得多边形的边数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3：利用多边形的内角和公式求不规则图形中多个角的度数和

例8 如图2.1-7，求$\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$的度数.

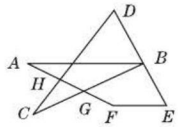


图2.1-7

导引：要求不规则图形中多个角的度数和，就是想办法在不规则图形中找规则图形，然后把不规则图形的角通过已学的相关知识（本例中为三角形外角的性质）转移到规则的图形中去，即把所求的六个角的和转移到四边形$BEFG$中去.

▶解：∵ $\angle EBG=\angle C+\angle D$，$\angle BGF=\angle A+\angle ABC$，

∴ $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=\angle BGF+\angle EBG+\angle E+\angle F=360°$.

点方法

（1）化不规则为规则是**转化思想**中一种常见的方法，它主要经历了两步：第一步找规则图形，第二步将不规则图形的角转化到规则图形中；关键是找规则图形. 这类题一般有不同的解法，如本例还可以将四边形$DEFH$作为基础四边形，请读者自己完成其解法.

（2）若图中没有已知的规则图形，则需通过作辅助线构造规则图形.

知识点4 多边形的外角和

点知识

1. **多边形的外角及外角和定义：**

（1）**外角**：多边形的内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫作这个多边形的一个外角.

（2）**外角和**：在多边形的每个顶点处取一个外角，它们的和叫作这个多边形的外角和.

2. **外角和定理**：任意多边形的外角和等于360°.

要点精析 ///

（1）多边形的外角和与多边形的边数无关，它始终为360°；

（2）正n边形每一个外角的度数为$\frac{360°}{n}$.

拨考向

考查角度1：用多边形外角和定理求内（外）角或边数

例9 已知四边形的四个外角度数比为1∶2∶3∶4，求各外角的度数.

导引：由四边形外角和定理和各外角之间的比例关系可求出各外角.

▶解：设四边形的最小外角为$x°$，则其他三个外角分别为$2x°$，$3x°$，$4x°$.

根据四边形外角和等于360°，得$x°+2x°+3x°+4x°=360°$.

所以$x°=36°$，$2x°=72°$，$3x°=108°$，$4x°=144°$.

所以四边形各外角的度数分别为36°，72°，108°，144°.

探规律

（1）用多边形外角和定理求内（外）角或求正多边形的边数，一般可利用**方程思想**通过列方程解决，都是列出外角和的字母表达式：各个外角的和（如本例）或边数×正多边形每个外角的度数，再说明它们等于360°，即可求出；

（2）由于多边形的外角和等于360°，因此有些正多边形的内角问题也可以转化为外角问题来解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:根据多边形的内、外角和的关系求边数

例10 一个多边形的内角和比它的外角和的3倍少180°,则这个多边形的边数是(　　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

导引:先列出以边数为未知量的内角和的表达式,再通过内、外角和的关系列方程,求出方程的解,即为所求的边数.设多边形的边数为n.∵多边形的外角和等于360°,∴$(n-2)\times180°=360°\times3-180°$,解得$n=7$.

同类变式 (答案见247页) 练一练

10. [中考·临沂]一个多边形的内角和是外角和的2倍,这个多边形是(　　)

A.四边形　　B.五边形

C.六边形　　D.八边形

▶答案:C

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 利用多边形的内角和及某个内角的取值范围求多边形对角线条数

例11 [中考·莱芜]一个多边形除一个内角外其余内角的和为1 510°,则这个多边形对角线的条数是(　　)

A.27　　B.35　　C.44　　D.54

导引:要求多边形对角线的条数,先求多边形的边数,已知条件中知道除一个内角外的内角和的度数,可设出边数和除掉的内角的度数,根据多边形的每个内角的度数的取值范围可列出不等式来解决问题.

设这个内角度数为x,边数为n,

∴$(n-2)\times180°-x=1\,510°$,

∴$x=(n-2)\times180°-1\,510°$,

∵$0°<x<180°$,

∴$0°<(n-2)\times180°-1\,510°<180°$,

∴$\frac{151}{18}<n-2<\frac{169}{18}$,

∵n是自然数,∴$n-2=9$,

∴$n=11$,

∴$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{11\times8}{2}=44$.

▶答案:C

点方法

(1)本题由多边形的内角大于0°而小于180°,可列出关于多边形边数的不等式,通过解不等式确定取值范围,进而得到整数解.

(2)本题还可以用多边形的内角和能被180°整除这一特性来解决.读者可自己完成.

拨尖角度2 利用多边形的外角和的不变性巧求线段的和

例12 如图2.1-8,小亮从A点出发,沿直线前进10米后向左转30°,再沿直线前进10米,又向左转30°,…,照这样走下去,小亮第一次回到出发点A时,他一共走了_____米.

导引:由题意知,当小亮第一次回到出发点A时,所走过的路线构成一个边长为10米,每个外角都是30°的正多边形.由多边形的外角和定理知这个多边形的边数是$360°\div30°=12$,所以小亮一共走了$12\times10=120$(米).

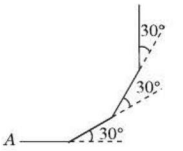


图2.1-8

▶答案:120

拨技巧

本题运用了**建模思想**,从“转弯”的实际问题中抽象出正多边形的数学问题是解题的关键,然后利用多边形的外角和定理进行解答.多边形的外角和是定值360°这一特性,在解决涉及多边形外角的问题中经常遇到.

拨尖角度3 利用多边形内角和探究多边形的截角问题

例13 一个多边形截去一个角后,形成的一个新多边形的内角和是2 520°,那么原多边形的边数是多少?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：设截成的多边形的边数是 n，根据内角和公式得关于 n 的方程，从而求得 n 的值. 一个多边形截去一个角后，会出现三种情况（以四边形为例）：(1) 边数减少 1，如图 2. 1-9①；(2) 边数不变，如图 2. 1-9②；(3) 边数增加 1，如图 2. 1-9③.

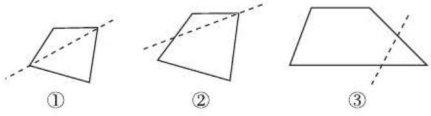


图 2. 1-9

▶解：设新截成的多边形的边数是 n，根据内角和公式，得 $(n-2)\times 180°=2\ 520°$，解得 $n=16$. 把一个多边形的一个角截去后，所得新多边形的边数可能不变，可能减少 1，也可能增加 1，所以原多边形的边数为 15 或 16 或 17.

珍 误区

解答本例的关键是探究截去一个角的不确定性，应用分类思想分清问题中可能出现的三种截法，其他问题便迎刃而解了.

拔尖角度 4 多边形内角和的综合应用

例 14 如图 2. 1-10，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，CF 平分 $\angle BCD$. 若 $AE\parallel CF$，试判断 AE 是否平分 $\angle BAD$，并说明理由.

导引：由四边形内角和公式求 $\angle BAD$ 与 $\angle BCD$ 的关系，由平行线的性质可得 $\angle DEA=\angle DCF$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中确定 $\angle DAE$ 与 $\angle AED$ 的关系，结合 CF 平分 $\angle BCD$ 判断 $\angle DAE$ 与 $\angle BAD$ 的关系.

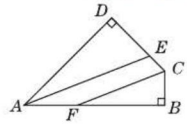


图 2. 1-10

▶解：AE 平分 $\angle BAD$. 理由如下：

$\because\ \angle B=\angle D=90°$，四边形 $ABCD$ 的内角和为 $360°$，

$\therefore\ \angle DCB+\angle DAB=360°-90°-90°=180°$.

$\because\ AE\parallel CF$，$\therefore\ \angle DEA=\angle DCF$.

$\because\ CF$ 平分 $\angle BCD$，$\therefore\ \angle DCF=\angle BCF$.

$\therefore\ \angle DEA=\dfrac{1}{2}\angle BCD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEA$ 中，$\angle DAE=90°-\angle DEA=90°-\dfrac{1}{2}\angle BCD=90°-\dfrac{1}{2}(180°-\angle BAD)=\dfrac{1}{2}\angle BAD$，$\therefore\ AE$ 平分 $\angle BAD$.

点 方法

用多边形的内角和公式结合其他条件可综合判断直线的位置关系及有关求角的度数等问题.

III 练基础 · 练方法 · 练技巧 （答案见 248 页）

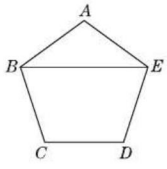
基础巩固练

1. 一个多边形的外角中，钝角的个数不可能是（　　）

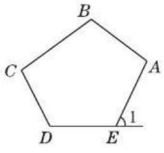
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. [中考 · 苏州] 如图，在正五边形 $ABCDE$ 中，连接 BE，则 $\angle ABE$ 的度数为（　　）

A. 30°　　B. 36°　　C. 54°　　D. 72°



（第 2 题图）



（第 4 题图）

3. 若在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C$，且与 $\angle D$ 相邻的外角为 78°，这个外角与 $\angle E$ 互余，则 $\angle B$ 的度数是（　　）

A. 142°　　B. 140°　　C. 130°　　D. 150°

4. [中考 · 南京] 如图，$\angle 1$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角，若 $\angle 1=65°$，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=$ _____°.

5. [中考 · 怀化] 一个多边形的每一个外角都是 36°，则这个多边形的边数是_____.

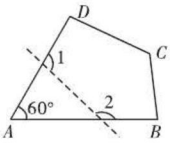
6. 已知一个多边形的每一个外角都相等，一个内角与一个外角的度数之比为 9∶2，则这个多边形的边数为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考 · 青海]平面上,将边长相等的正三角形、正方形、正五边形、正六边形的一边重合并叠在一起,如图,则 $\angle 3+\angle 1-\angle 2=$ _____.



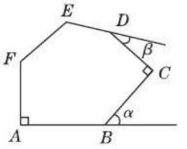
(第7题图)



(第8题图)

8. [中考 · 广安]如图,在四边形 $ABCD$ 中,若去掉一个 $60°$ 的角得到一个五边形,则 $\angle 1+\angle 2=$ _____°.

9. 如图,在六边形 $ABCDEF$ 中,$AB\perp AF$,$BC\perp DC$,$\angle E+\angle F=260°$,求两外角和 $\angle\alpha+\angle\beta$ 的度数.

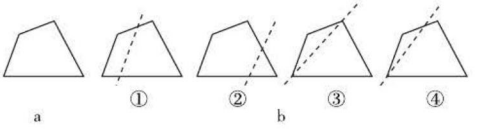


(第9题图)

能力提升练

10. [中考 · 宜昌]如图a,将一张四边形纸片沿直线剪开,如果剪开后的两个图形的内角和相等,下列四种剪法中(如图b),符合要求的是(　　)

A. ①②　B. ①③　C. ②④　D. ③④



(第10题图)

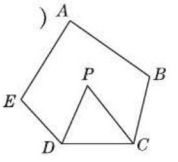
11. [中考 · 济宁]如图,在五边形 $ABCDE$ 中,$\angle A+\angle B+\angle E=300°$,$DP$,$CP$ 分别平分 $\angle EDC$,$\angle BCD$,则 $\angle P=$(　　)

A. 50°

B. 55°

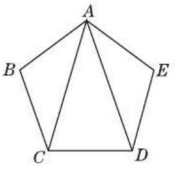
C. 60°

D. 65°



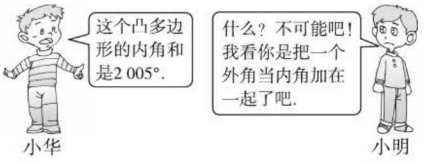
(第11题图)

12. 如图,五边形 $ABCDE$ 的内角都相等,且 $\angle BAC=\angle BCA$,$\angle EAD=\angle EDA$. 求 $\angle CAD$ 的度数.



(第12题图)

13. 如图是小华与小明的对话.



(第13题图)

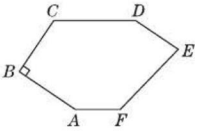
(1)内角和是2 005°,小明为什么说不可能?

(2)小华求的是几边形的内角和?

(3)请你求出错把外角当内角的那个外角的度数.

思维拓展练

14. 如图,在六边形 $ABCDEF$ 中,$CD\parallel AF$,$\angle CDE=\angle BAF$,$AB\perp BC$,$\angle C=124°$,$\angle E=80°$. 求 $\angle F$ 的度数.



(第14题图)

我的错题笔记

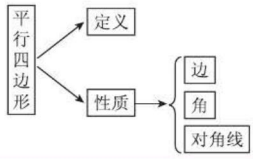
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2.2 平行四边形

2.2.1 平行四边形的性质

热门话题
- 平行四边形的定义
- 平行四边形的性质

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 平行四边形的定义

点知识

1. **定义**:两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.
2. **表示方法**:平行四边形用符号“□”表示,如图2.2-1,平行四边形$ABCD$记作“□$ABCD$”,读作“平行四边形$ABCD$”.

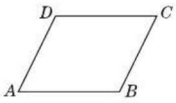


图2.2-1

要点精析

(1) **平行四边形的定义有两个要素**:①是四边形;②两组对边分别平行.作为四边形,平行四边形具有一般四边形的一切性质,如有四条边,四个内角,两条对角线,内角和为360°,外角和为360°等.

(2) **平行四边形的定义既是它的一个性质,又是它的一种判定方法**:∵四边形$ABCD$是平行四边形,∴$\begin{cases}AB\parallel CD,\\AD\parallel BC;\end{cases}$反过来,∵$\begin{cases}AB\parallel CD,\\AD\parallel BC,\end{cases}$∴四边形$ABCD$是平行四边形.

3. **易错警示**:平行四边形的表示要按一定的方向依次表示各个顶点,它既可以按顺时针方向排列字母顺序,也可以按逆时针方向排列字母顺序,但不能打乱顺序.

拨考向

考查角度1:利用平行四边形的定义识别平行四边形

例1 如图2.2-2,在□$ABCD$中,过点P作直线EF,GH分别平行于AB,BC,那么图中共有_____个平行四边形.

导引:根据平行四边形的定义,知$AB\parallel CD$,$AD\parallel BC$,由已知条件可知,$EF\parallel AB$,$GH\parallel BC$,所以根据平行四边形的定义可以判定四边形$ABFE$和四边形$GBCH$都是平行四边形,同理可判定四边形$EFCD$、四边形$AGHD$、四边形$AGPE$、四边形$EPHD$、四边形$GBFP$、四边形$PFCH$都是平行四边形,最后还要加上□$ABCD$,即共有9个平行四边形.

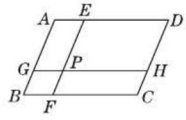


图2.2-2

▶答案:9

点方法

对于几何计数问题,要按照一定的顺序(如从小到大等)分类计数,做到不重复不遗漏.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用平行四边形的定义证明平行四边形

例2 如图2.2-3，在$\square ABCD$中，$\angle 1=\angle 2$.

求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

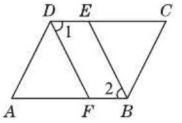


图2.2-3

导引：要证四边形$BEDF$是平行四边形，由定义知需证：$DE\parallel BF$及$DF\parallel BE$，其中$DE\parallel BF$可由$\square ABCD$的性质直接得出，而$DF\parallel BE$可通过同位角相等推出.

▶证明：∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $CD\parallel AB$(平行四边形的两组对边分别平行)，

即$DE\parallel BF$，∴ $\angle 1=\angle DFA$.

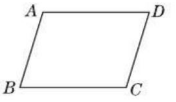
∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle 2=\angle DFA$，∴ $DF\parallel BE$，

∴ 四边形$BEDF$是平行四边形(两组对边分别平行的四边形是平行四边形).

同类变式 (答案见248页) 练一练

2. 如图，在四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$\angle C+\angle D=180°$，

求证：四边形$ABCD$是平行四边形.



(第2题图)

点方法

当题目的条件中有平行四边形时，应立即想到两组对边分别平行；当题目的结论中有要证的平行四边形时，首先应联想到它的两组对边是否分别平行. 逆向利用及正向利用平行四边形的定义是后面学习平行四边形的性质及判定的主要依据.

知识点2 平行四边形的边、角性质(重点)

点知识

1. **边的性质**：平行四边形的对边平行；平行四边形的对边相等.

数学表达式：如图2.2-4，

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

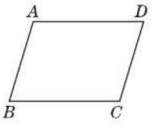


图2.2-4



2. **角的性质**：平行四边形的对角相等；平行四边形的邻角互补.

数学表达式：如图2.2-4，

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle A+\angle B=180°$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle C+\angle D=180°$，$\angle A+\angle D=180°$.

要点精析 ///

由于组成平行四边形的元素有边和角，因此讨论其性质也应从边和角这两个方面去看.

(1) **从边看**：平行四边形的对边平行且相等；

(2) **从角看**：平行四边形的对角相等、邻角互补.

3. 夹在两条平行线间的平行线段相等，也就是说两条平行线间的距离处处相等.

要点精析 ///

因为平行线间的距离处处相等，所以在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置；(注：平行线的这一性质常用来解决三角形中同底等高的问题)

4. **拓展**：等底等高的三角形的面积相等.

5. **易错警示**：已知平行四边形得出什么性质，要根据推理证明的需要，合理选用需要的性质.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向

考查角度1：利用平行四边形的性质计算

类型一：边的计算

例3 ［中考·玉林］如图2.2-5，在$\square ABCD$中，BM是$\angle ABC$的平分线，交CD于点M，且$MC=2$，$\square ABCD$的周长是14，则DM等于(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

导引：根据BM平分$\angle ABC$和$AB\parallel CD$可以判定$\angle CMB=\angle CBM$，从而得到$BC=MC=2$，再由$\square ABCD$的周长是14得到CD的长，进而得到DM的长. 具体过程如下：

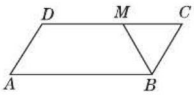


图2.2-5

∵ 在$\square ABCD$中，$AB\parallel CD$，BM是$\angle ABC$的平分线，

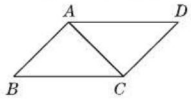
∴ $\angle CBM=\angle ABM=\angle CMB$，∴ $BC=MC=2$.

又∵ $\square ABCD$的周长是14，∴ $CD=5$，∴ $DM=3$.

▶答案：C

同类变式 (答案见248页) 练一练

3. ［中考·丽水］如图，在$\square ABCD$中，连接AC，$\angle ABC=\angle CAD=45°$，$AB=2$，则$BC$的长是(　　)



(第3题图)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

点方法

当题目中平行线和角平分线同时出现时，极有可能出现等腰三角形，如本题中由$AB\parallel CD$和BM平分$\angle ABC$就得到$\triangle BCM$是等腰三角形；在平行四边形的边的计算中，“平行四边形相邻的两边之和等于它的周长的一半”会经常用到.

类型二：角的计算

例4 如图2.2-6，在$\square ABCD$中，已知$\angle A+\angle C=120°$，求$\square ABCD$各角的度数.

导引：由平行四边形的对角相等，得$\angle A=\angle C$，结合已知条件$\angle A+\angle C=120°$，即可求出$\angle A$和$\angle C$的度数，再根据平行线的性质，进而求出$\angle B$，$\angle D$的度数.

▶解：在$\square ABCD$中，

$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

$\angle A+\angle D=180°$.

∵ $\angle A+\angle C=120°$，

∴ $\angle A=\angle C=60°$.

∵ $\angle D=180°-\angle A=180°-60°=120°$，

∴ $\angle B=\angle D=120°$.

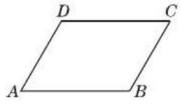
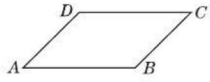


图2.2-6

同类变式 (答案见248页) 练一练

4. 如图，已知在$\square ABCD$中，$\angle A:\angle B=1:3$，求$\angle D$的度数.



(第4题图)

点方法

求平行四边形中有关角度的基本方法是利用平行四边形的对角相等、邻角互补的性质，并且已知一个角或已知两邻角的关系可求出未知角的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:利用平行四边形的性质进行证明

例5 [中考 · 来宾]如图2.2-7,在$\square ABCD$中,E,F为对角线AC上的两点,且$AE=CF$,连接DE,BF.

(1)写出图中所有的全等三角形;

(2)求证:$DE/\!/BF$.

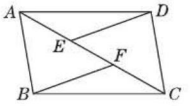


图2.2-7

导引:(1)根据平行四边形的性质得出对应的边、角相等,从而判断哪两个三角形是全等三角形;

(2)根据平行四边形的性质得出$AB/\!/CD$,且$AB=CD$,从而得出$\angle BAF=\angle DCE$,再由$AE=CF$得出$AF=CE$.从而证明出$\triangle ABF\cong\triangle CDE$.从而得出$\angle BFA=\angle DEC$.最终得出$DE/\!/BF$.

(1)▶解:所有的全等三角形有:$\triangle ABF\cong\triangle CDE$,$\triangle AED\cong\triangle CFB$,$\triangle ADC\cong\triangle CBA$.

(2)▶证明:∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

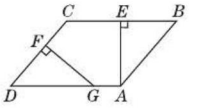
∴ $AB/\!/CD$,且$AB=CD$. ∴ $\angle BAF=\angle DCE$.

∵ $AE=CF$,∴ $AE+EF=CF+EF$,即$AF=CE$.

∴ $\triangle ABF\cong\triangle CDE$. ∴ $\angle BFA=\angle DEC$. ∴ $DE/\!/BF$.

同类变式 (答案见248页) 练一练

5. [中考 · 吉林]如图,在$\square ABCD$中,$AE\perp BC$,交边BC于点E,点F为CD上一点,且$DF=BE$.过点F作$FG\perp CD$,交边AD于点G.求证:$DG=DC$.



(第5题图)

点方法

平行四边形的定义、平行线的性质、全等三角形的判定和性质在有关平行四边形的证明中,常融合在一起综合应用,而利用平行四边形的定义、平行线的性质获得三角形全等的条件是解题的关键.

考查角度3:利用两条平行线间的距离说明面积相等

例6 如图2.2-8,直线$a/\!/b$,点A,E,F在直线a上,点B,C,D在直线b上,$BC=EF$.$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积相等吗?为什么?

▶解:$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积相等.理由如下:

如图2.2-8,过点A作$AH_1\perp$直线b,垂足为点H_1,

过点D作$DH_2\perp$直线a,垂足为点H_2.

设$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的面积分别为S_1和S_2,

∴ $S_1=\frac{1}{2}BC\cdot AH_1$,$S_2=\frac{1}{2}EF\cdot DH_2$.

∵ 直线$a/\!/b$,$AH_1\perp$直线b,$DH_2\perp$直线a,

∴ $AH_1=DH_2$.

又∵ $BC=EF$,

∴ $S_1=S_2$,

即$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积相等.

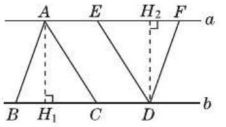


图2.2-8

点方法

解答本例的关键是找两三角形等高这一条件.等底等高的三角形面积相等,今后可作为定理直接应用.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点3 平行四边形的对角线的性质(重点)

点知识

1. **对角线的性质**:平行四边形的对角线互相平分.

数学表达式:如图2.2-9,∵四边形$ABCD$是平行四边形,对角线AC,BD相交于点O,∴$OA=OC$,$OB=OD$.

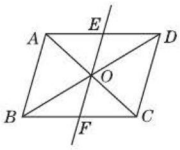


图2.2-9

2. **拓展**:(1)平行四边形的两条对角线把它分割成四个面积相等的三角形;

数学表达式:如图2.2-9,∵四边形$ABCD$是平行四边形,对角线AC,BD相交于点O,∴$S_{\triangle ABO}=S_{\triangle BCO}=S_{\triangle CDO}=S_{\triangle ADO}$.

(2)若一条直线过平行四边形两条对角线的交点,则该直线平分平行四边形的周长和面积.

数学表达式:如图2.2-9,

∵直线EF过平行四边形$ABCD$两对角线的交点O,∴$AE+AB+BF=FC+CD+DE=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$,$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

点考向

考查角度1:利用对角线的性质求线段的长

例7 如图2.2-10,已知$\square ABCD$的周长是60,对角线AC,BD相交于点O.若$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长长8,求这个平行四边形各边的长.

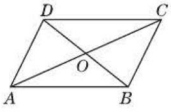


图2.2-10

导引:由平行四边形对边相等可知,$2AB+2BC=60$,所以$AB+BC=30$.又由$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长长8,可知$AB-BC=8$,联立以上两式,即可求出各边的长.

▶解:∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$OA=OC$,$AB=CD$,$AD=BC$.

∵$AB+BC+CD+DA=60$,

$OA+AB+OB-(OB+BC+OC)=8$,

∴$AB+BC=30$,$AB-BC=8$.

∴$AB=CD=19$,$BC=AD=11$.

即这个平行四边形各边的长分别为19,11,19,11.

点方法

由“平行四边形的对角线互相平分”可以得出“平行四边形被它的两条对角线分成四个小三角形,相邻两个小三角形的周长之差等于平行四边形中对应的两邻边之差”.

考查角度2:利用平行四边形对角线的性质证明

例8 如图2.2-11,已知$\square ABCD$的顶点A,C与$\square EBFD$的顶点E,F在一条直线上,求证:$AE=CF$.

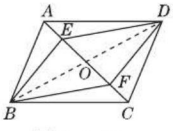


图2.2-11

导引:证明AE与CF相等,可以直接证明$\triangle ADE$和$\triangle CBF$全等;也可以连接BD,利用平行四边形的对角线的性质证明.

▶证明:如图2.2-11,连接BD交AC于点O.

∵四边形$ABCD$是平行四边形,∴$OA=OC$.

∵四边形$EBFD$是平行四边形,∴$OE=OF$,

∴$OA-OE=OC-OF$,即$AE=CF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

诊误区

本例易受全等三角形思维定式的影响，欲证的两线段相等且又属于不同的三角形，习惯上就联想到证这两个三角形全等，这样虽然能达到证明的目的，却忽视了平行四边形特有的性质，易走弯路. 因此在解决平行四边形的有关问题中，应注意灵活运用平行四边形的性质.

知识点 4 平行四边形的周长与面积

点知识

1. **面积公式**：
   平行四边形的面积 = 底 × 高(底为平行四边形的任意一条边，高为这条边与其对边间的距离).
2. 等底等高的平行四边形的面积相等.

要点精析

(1) 求面积时，底和高一定要对应，必须是底边上的高；

(2) 等底等高的平行四边形与三角形面积间的关系：
等底等高的三角形面积 = 等底等高的平行四边形面积的一半.

3. **拓展**：
   (1) 两个等底平行四边形(三角形)面积的比等于它们高的比；
   (2) 两个等高平行四边形(三角形)面积的比等于它们底的比.
4. 根据平行四边形的两组对边分别相等，可得平行四边形的周长等于两邻边和的 2 倍.
5. 平行四边形的一条对角线将平行四边形分成面积相等的两部分，两条对角线将平行四边形分成面积相等的四部分.

拨考向

考查角度 1：利用平行四边形的周长公式求周长

例 9 [中考 · 福州] 如图 2.2-12，在 $\square ABCD$ 中，DE 平分 $\angle ADC$，$AD=6$，$BE=2$，则 $\square ABCD$ 的周长是_____.

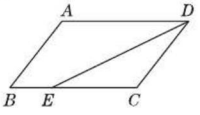


图 2.2-12

导引：求 $\square ABCD$ 的周长，已知一条边 $AD=6$，只需求出 AD 的邻边 AB 或 CD 的长即可.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AD=6$，$BE=2$，

$\therefore AD=BC=6$，

$\therefore EC=BC-BE=6-2=4$.

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle ADE=\angle DEC$，

$\because DE$ 平分 $\angle ADC$，$\therefore \angle ADE=\angle EDC$，

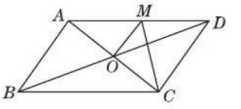
$\therefore \angle EDC=\angle DEC$. $\therefore DC=EC=4$.

$\therefore \square ABCD$ 的周长是 $2\times(4+6)=20$.

▶答案：20

同类变式 (答案见 248 页) 练一练

9. [中考 · 衡阳] 如图，$\square ABCD$ 的对角线相交于点 O，且 $AD\neq CD$，过点 O 作 $OM\perp AC$，交 AD 于点 M. 如果 $\triangle CDM$ 的周长为 8，那么 $\square ABCD$ 的周长是_____.



(第 9 题图)

点方法

根据平行四边形边的性质可知平行四边形的周长等于相邻两边和的 2 倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用平行四边形面积公式求平行四边形的面积

例10 ［中考·本溪］如图2.2-13，在$\square ABCD$中，$AB=4$，$BC=6$，$\angle B=30°$，则此平行四边形的面积是(　　)

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

导引：过点A作$AE\perp BC$于点E，根据含30°角的直角三角形的性质可求出$AE=2$，再利用平行四边形的面积公式可求出$\square ABCD$的面积为$BC\cdot AE=6\times 2=12$.

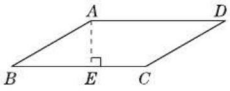


图2.2-13

▶答案：B

点方法

求平行四边形的面积时，根据平行四边形的面积公式，要知道平行四边形的一边长及这边上的高. 平行四边形的高不一定是过顶点的垂线段，因为平行线间的距离处处相等.

考查角度3：利用平行四边形的面积求线段的长

例11 如图2.2-14，$\square ABCD$中$AD:AB=5:4$，过点A作$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，垂足分别为E，F两点，$AE=4$ cm，求AF的长.

导引：平行四边形的面积是$S=ah$. $\because AD:AB=5:4$，$AB=CD$，$AD=BC$，$S_{\square ABCD}=CD\cdot AF=BC\cdot AE$，$\therefore AF:AE=5:4$. 又$\because AE=4$ cm，$\therefore AF=5$ cm.

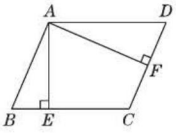


图2.2-14

▶解：$\because S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=CD\cdot AF$. $AB=CD$，$AD=BC$，

$\therefore AD\cdot AE=AB\cdot AF$，$\therefore AD:AB=AF:AE$.

$\because AD:AB=5:4$，$\therefore AF:AE=5:4$，即$AF=\frac{5}{4}AE=\frac{5}{4}\times 4=5$(cm).

拨技巧

在三角形或平行四边形中，根据面积为定值，用不同的边为底边和对应的高来表示面积，可以得到不同的底和高之间的关系. 解本例的技巧在于将平行四边形的邻边之比转化为对应的高之比.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拔尖角度1 利用平行四边形的性质进行线段或角的计算

例12 如图2.2-15，在$\square ABCD$中，点E是AD的中点，延长CE交BA的延长线于点F. 若$BC=2AB$，$\angle FBC=70°$，求$\angle EBC$的度数.

导引：由$\square ABCD$得$AB=DC$，再由$\triangle DEC\cong\triangle AEF$，可得$DC=AF$，从而可得$AB=AF$. 然后由$BC=2AB$，可得$BC=BF$，最后利用等腰三角形的性质可得$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC=35°$.

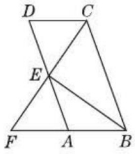


图2.2-15

▶解：$\because$四边形$ABCD$为平行四边形，

$\therefore AB=DC$，$DC\parallel AB$. $\therefore\angle ECD=\angle F$.

又$\because DE=AE$，$\angle DEC=\angle AEF$，

$\therefore\triangle DEC\cong\triangle AEF$. $\therefore CE=FE$，$DC=AF$.

$\therefore AB=AF$. $\therefore BF=2AB$.

$\because BC=2AB$，$\therefore BC=BF$.

又$\because$点E为CF的中点，

$\therefore\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC=\frac{1}{2}\times 70°=35°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

求线段或角的常用方法：(1)利用等量代换；(2)利用整体与部分之间的关系；(3)利用角平分线的性质及判定；(4)利用线段垂直平分线的性质与判定；(5)利用等腰三角形的性质及判定；(6)利用全等三角形的性质；(7)利用面积(等底等高等积)；(8)利用平行四边形的性质.

拔尖角度2 利用平行四边形的性质进行证明

例13 如图 2.2-16，在 $\square ABCD$ 中，AE，BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，且分别交 CD 于点 E，F，AE，BF 相交于点 M.

(1)求证：$AE \perp BF$；

(2)判断线段 DF 与 CE 的大小关系，并说明理由.

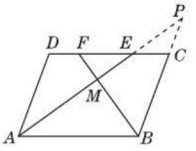


图 2.2-16

导引：(1)要证 $AE \perp BF$，只需证 $\angle AMB = 90°$. 在 $\triangle ABM$ 中，利用平行四边形邻角互补及角平分线的定义证明 $\angle MAB + \angle MBA = 90°$ 即可，此为证法一；由条件“平分”及结论“垂直”联想到构造等腰三角形，再利用等腰三角形“三线合一”的性质即可证明，此为证法二.

(2)DF 和 CE 均不在独立的三角形或常见的四边形中，利用 EF 将其转化为证明 $DE = CF$，即可利用平行四边形和三角形的有关知识来证明.

(1)▶证明：方法一

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD /\!/ BC$.

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180°$.

$\because AE$，BF 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$，

$\therefore 2\angle MAB + 2\angle MBA = 180°$.

$\therefore \angle MAB + \angle MBA = 90°$.

$\therefore \angle AMB = 90°$，即 $AE \perp BF$.

方法二

如图 2.2-16，延长 BC，AE 交于点 P.

在 $\square ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$\therefore \angle DAP = \angle P$.

$\because AE$ 平分 $\angle DAB$，$\therefore \angle DAP = \angle PAB$.

$\therefore \angle PAB = \angle P$. $\therefore BA = BP$.

$\because BF$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore BM \perp AP$，即 $AE \perp BF$.

(2)▶解：$DF = CE$. 理由如下：

在 $\square ABCD$ 中，$CD /\!/ AB$，$\therefore \angle DEA = \angle EAB$.

又$\because AE$ 平分 $\angle DAB$，$\therefore \angle DAE = \angle EAB$.

$\therefore \angle DEA = \angle DAE$. $\therefore DE = AD$.

同理可得 $CF = BC$.

$\because AD = BC$，$\therefore DE = CF$.

$\therefore DE - EF = CF - EF$，即 $DF = CE$.

点方法

(1)判断两线段的位置关系，其实质是判断两线段所在直线的位置关系. 两直线的位置关系有相交和平行两种情况，其中相交又有垂直和斜交两种情况；(2)两线段的大小关系有大于、小于、相等这三种情况，两线段相等的证明途径可考虑例题中的方法.

拔尖角度3 利用平行四边形的性质进行方案设计

例14 张大伯承包了一个呈四边形的池塘，如图 2.2-17，它的四个角 A，B，C，D 处均有一棵大树，张大伯今年养鱼喜获丰收，明年准备把池塘面积扩大一倍，但又不想毁掉这四棵大树，并且扩建后的池塘呈平行四边形形状. 张大伯这一设想是否能实现？请你帮助他解决一下，并画出草图.

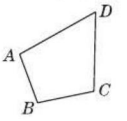


图 2.2-17

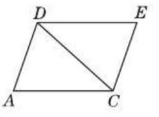


图 2.2-18

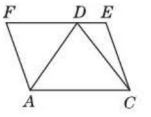


图 2.2-19

导引：张大伯的设想：(1)面积扩大一倍；(2)不毁掉这四棵大树；(3)形状为平行四边形. 要直接把四边形的面积扩大一倍，难度较大. 我们可以把四边形分成两个三角形，然后分别把这两个三角形的面积扩大一倍，也就是把四边形的面积扩大了一倍. 如图 2.2-18，根据平行四边形的性质可知 $\square ACED$ 的面积是 $\triangle ACD$ 的面积的 2 倍. 如图 2.2-19，$\square ACEF$ 的面积是 $\triangle ACD$ 的面积的 2 倍. 因此连接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，然后过点 D 作 AC 的平行线，过点 A 作 CD 的平行线，构成一个平行四边形即可把 $\triangle ACD$ 的面积扩大一倍. 用图 2.2-19 的方法也可以把 $\triangle ABC$ 的面积扩大一倍.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：张大伯能实现这一设想. 有多种设计方案，现列举两种如下：

方案一：如图 2.2-20，连接 AC. 过点 D 作 AC 的平行线，过点 A 作 CD 的平行线，两平行线交于点 H，过点 B 作 AC 的平行线，与线段 DC 的延长线交于点 F，与直线 HA 交于点 E. 则 $\square EFDH$ 即为扩建后的平行四边形.

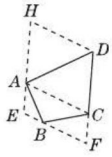


图 2.2-20

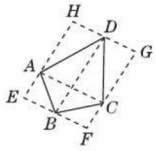


图 2.2-21

方案二：如图 2.2-21，连接 AC，BD. 分别过点 B，D 作 AC 的平行线，分别过点 A，C 作 BD 的平行线，这两组平行线的交点分别为点 E，F，G，H，则 $\square EFGH$ 即为扩建后的平行四边形.

点方法

解此题的关键是设计图形，利用平行四边形的对角线将平行四边形分成面积相等的两部分来设计图形，问题就简单了. 设计图形时还可以把原来的图形变为四个三角形，再扩大四个相应等大的三角形，则张大伯的设想就实现了.

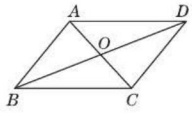
Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 （答案见 248 页）

基础巩固练

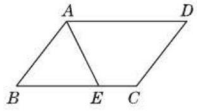
1. 如图，已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，则下列说法一定正确的是（　　）

A. $AO = OD$　　B. $AO \perp OD$

C. $AO = OC$　　D. $AO \perp AB$



（第 1 题图）



（第 2 题图）

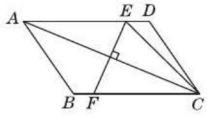
2. ［中考 · 本溪］如图，已知 $\square ABCD$ 的周长为 20 cm，AE 平分 $\angle BAD$，若 $CE = 2$ cm，则 AB 的长度是（　　）

A. 10 cm　　B. 8 cm　　C. 6 cm　　D. 4 cm

3. ［中考 · 贵阳］如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线分别交 AD，BC 于点 E，F，连接 CE，若 $\triangle CED$ 的周长为 6，则 $\square ABCD$ 的周长为（　　）

A. 6　　B. 12

C. 18　　D. 24



（第 3 题图）

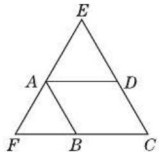
4. 一个平行四边形的一边长是 10，一条对角线长是 8，则它的另一条对角线长 x 的取值范围为_____.

5. 在 $\square ABCD$ 中，$\angle A = 30°$，$AB = 7$ cm，$AD = 6$ cm，则 $S_{\square ABCD} =$ _____.

6. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\angle EAD = \angle BAF$.

（1）求证：$\triangle CEF$ 是等腰三角形.

（2）$\triangle CEF$ 的哪两边长度之和等于 $\square ABCD$ 的周长？为什么？

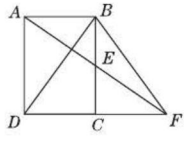


（第 6 题图）

7. ［中考 · 南通］如图，$\square ABCD$ 中，点 E 是 BC 的中点，连接 AE 并延长交 DC 延长线于点 F.

（1）求证：$CF = AB$；

（2）连接 BD，BF，当 $\angle BCD = 90°$ 时，求证：$BD = BF$.



（第 7 题图）

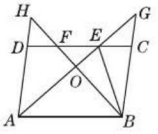
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

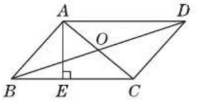
8. [中考 · 威海] 如图,在$\square ABCD$中,$\angle DAB$的平分线交CD于点E,交BC的延长线于点G,$\angle ABC$的平分线交CD于点F,交AD的延长线于点H,AG与BH交于点O,连接BE. 下列结论错误的是(　　)

A. $BO = OH$　　B. $DF = CE$

C. $DH = CG$　　D. $AB = AE$



(第8题图)



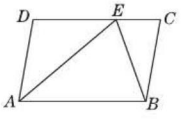
(第9题图)

9. [中考 · 青岛] 如图,$\square ABCD$的对角线AC与BD相交于点O,$AE \perp BC$,垂足为E,$AB = \sqrt{3}$,$AC = 2$,$BD = 4$,则AE的长为(　　)

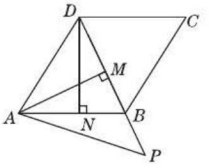
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

10. [中考 · 武汉] 如图,在$\square ABCD$中,$\angle D = 100°$,$\angle DAB$的平分线AE交DC于点E,连接BE. 若$AE = AB$,则$\angle EBC$的度数为_____.



(第10题图)



(第11题图)

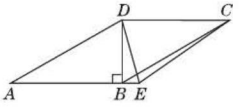
11. [中考 · 株洲] 如图,在平行四边形$ABCD$中,连接BD,且$BD = CD$,过点A作$AM \perp BD$于点M,过点D作$DN \perp AB$于点N,且$DN = 3\sqrt{2}$,在DB的延长线上取一点P,满足$\angle ABD = \angle MAP + \angle PAB$,则$AP =$_____.

12. [中考 · 襄阳] 在$\square ABCD$中,$AD = BD$,BE是AD边上的高,$\angle EBD = 20°$,则$\angle A =$_____.

13. 如图,在$\square ABCD$中,对角线$BD \perp AB$,$\angle A = 30°$,DE平分$\angle ADC$交AB的延长线于点E,连接CE.

(1)求证:$AD = AE$;

(2)若$AD = 12$,连接AC交BD于点O. 画出图形,并求AC的长.

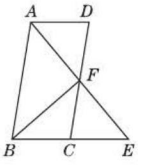


(第13题图)

14. [中考 · 永州] 如图,四边形$ABCD$为平行四边形,$\angle BAD$的对角线AE交CD于点F,交BC的延长线于点E.

(1)求证:$BE = CD$;

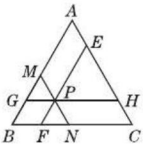
(2)连接BF,若$BF \perp AE$,$\angle E = 60°$,$AB = 4$,求$\square ABCD$的面积.



(第14题图)

思维拓展练

15. 如图,$\triangle ABC$是边长为a的等边三角形,P是$\triangle ABC$内的任意一点,过点P作$EF \parallel AB$分别交AC,BC于点E,F,作$GH \parallel BC$分别交AB,AC于点G,H,作$MN \parallel AC$分别交AB,BC于点M,N,猜想$EF + GH + MN$的值是多少,其值是否随点P位置的改变而改变? 并说明理由.



(第15题图)

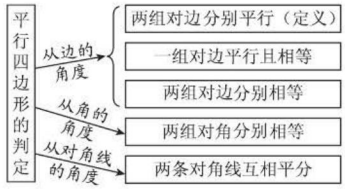
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2.2.2 平行四边形的判定

热门话题

- 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形
- 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
- 两组对角分别相等的四边形是平行四边形
- 对角线互相平分的四边形是平行四边形

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 平行四边形的判定定理1（重点）

点知识

1. **平行四边形的判定定理1**：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

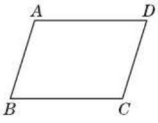


图2.2-22

符号语言：如图2.2-22，在四边形$ABCD$中，

$\because AB\parallel CD, AB=CD$，

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

要点精析

判定定理1中的“一组对边”满足两个关系：①位置关系：平行；②数量关系：相等.

2. **易错警示**：(1)运用平行四边形的判定定理1时要注意定理中的“平行且相等”；

(2)“平行且相等”指的是同一组对边，而不是一组对边相等，另一组对边平行；“平行且相等”用符号“$\parallel\!\!=$”表示.

拨考向

考查角度1：直接利用判定定理1证明四边形是平行四边形

例1 [中考·黄冈]如图2.2-23，在四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，E，F为对角线AC上两点，且$AE=CF$，$DF\parallel BE$. 求证：四边形$ABCD$为平行四边形.

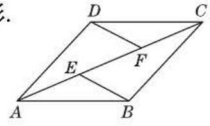


图2.2-23

导引：先证明$\triangle AEB\cong\triangle CFD$，得到$AB=CD$，再结合已知条件$AB\parallel CD$，得到四边形$ABCD$为平行四边形.

▶证明：$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle EAB=\angle FCD$.

$\because BE\parallel DF$，$\therefore \angle BEF=\angle DFE$. $\therefore \angle AEB=\angle CFD$.

在$\triangle AEB$和$\triangle CFD$中，$\angle AEB=\angle CFD$，$AE=CF$，$\angle EAB=\angle FCD$，

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle CFD$. $\therefore AB=CD$.

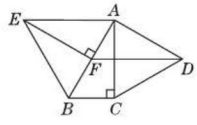
又$\because AB\parallel CD$，$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

同类变式 (答案见249页) 练一练

1. [中考·凉山州]如图，分别以Rt$\triangle ABC$的直角边AC及斜边AB向外作等边三角形ACD、等边三角形ABE. 已知$\angle BAC=30°$，$EF\perp AB$，垂足为F，连接DF.

求证：(1)$AC=EF$；

(2)四边形$ADFE$是平行四边形.



(第1题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

要证四边形是平行四边形，已知有一组对边平行，联想的思路有两种：一是证明另一组对边平行；二是证明平行的这组对边相等. 而用三角形全等证明边相等这条思路较常见.

考查角度 2：利用平行四边形的判定定理 1 证明线段相等

例 2 如图 2. 2-24，已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，$CN \parallel AB$，DN 交 AC 于点 M，$MA = MC$，求证：$CD = AN$.

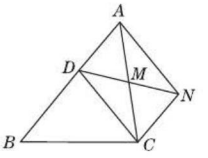


图 2. 2-24

导引：根据已知利用 ASA 证明 $\triangle AMD \cong \triangle CMN$，则 $AD = CN$.

已知 $AD \parallel CN$，则四边形 $ADCN$ 是平行四边形，则 $CD = AN$.

▶证明：$\because AB \parallel CN$，$\therefore \angle CAD = \angle ACN$.

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMN$ 中，$\begin{cases} \angle MAD = \angle MCN, \\ AM = CM, \\ \angle AMD = \angle CMN, \end{cases}$

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle CMN$(ASA). $\therefore AD = CN$.

又 $\because AD \parallel CN$，$\therefore$ 四边形 $ADCN$ 是平行四边形. $\therefore CD = AN$.

考查角度 3：利用平行四边形的判定定理 1 探究四边形是平行四边形的条件

例 3 如图 2. 2-25，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $AD > BC$，$BC = 6$ cm，P，Q 分别从 A，C 同时出发，P 以 1 cm/s的速度由 A 向 D 运动，Q 以2 cm/s的速度由 C 向 B 运动，几秒后四边形 $ABQP$ 是平行四边形？

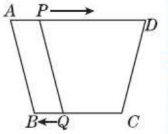


图 2. 2-25

导引：设运动 x s 后四边形 $ABQP$ 是平行四边形，则 $AP = x$ cm，$QC = 2x$ cm，由 $AP = BQ$，可得方程 $x = 6 - 2x$，求解即可.

▶解：设运动 x s 后四边形 $ABQP$ 是平行四边形，

则 $AP = x$ cm，$QC = 2x$ cm，

$\therefore BQ = BC - QC = (6 - 2x)$ cm.

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore$ 当 $AP = BQ$ 时，四边形 $ABQP$ 是平行四边形，

$\therefore x = 6 - 2x$，

解得 $x = 2$.

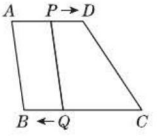
即 2 s 后四边形 $ABQP$ 是平行四边形.

同类变式 (答案见 250 页) 练一练

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BC = 18$ cm，$CD = 15$ cm，$AD = 10$ cm，$AB = 12$ cm，动点 P，Q 分别从 A，C 同时出发，点 P 以2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 3 cm/s的速度由 C 向 B 运动.

(1) 几秒后，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长；

(2) 几秒后，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长.



(第 3 题图)

点方法

此题运用了**方程思想**，有关动点问题常常是根据“路程 = 速度 × 时间”用含有未知数的代数式表示相关线段，然后根据已知条件列方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 平行四边形的判定定理2(重点)

点知识

1. **平行四边形的判定定理2:**
两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

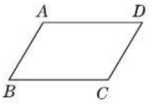


图2.2-26

符号语言:如图2.2-26,
在四边形$ABCD$中,
$\because AB=CD, AD=BC$,
$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.



2. **易错警示:**
(1)平行四边形的判定定理2是从两组对边的数量关系的角度判定一个四边形是平行四边形.
(2)"一组对边平行,且另一组对边相等的四边形是平行四边形"是假命题. 如图2.2-27, $AD/\!/BC, AB=DC$,但四边形$ABCD$不是平行四边形.

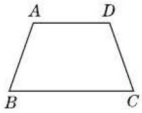


图2.2-27

拨考向

考查角度1:直接运用判定定理2证明四边形是平行四边形

例4 如图2.2-28,分别以$\triangle ABC$的三边为一边,在BC的同侧作等边三角形ABD、等边三角形BCE、等边三角形ACF,连接DE, EF. 求证:四边形$ADEF$是平行四边形.

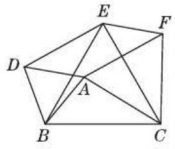


图2.2-28

▶证明:$\because \triangle ABD, \triangle BCE, \triangle ACF$都为等边三角形,
$\therefore DB=AB=AD, BE=BC, AC=AF, \angle DBA=60°, \angle EBC=60°$.
$\therefore \angle DBE=60°-\angle EBA$,
$\angle ABC=60°-\angle EBA$.
$\therefore \angle DBE=\angle ABC$.
$\therefore \triangle DBE\cong\triangle ABC$. $\therefore DE=AC$.
又$\because AC=AF$, $\therefore AF=DE$.
同理可证$\triangle ABC\cong\triangle FEC$,
$\therefore AB=FE$. $\therefore FE=AD$. $\therefore$ 四边形$ADEF$是平行四边形.

引思路
由等边三角形的性质可以得到线段相等,角相等,进而可以通过全等三角形证明四边形$ADEF$的两组对边分别相等,最后根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形进行判定.

考查角度2:判定定理2与代数知识综合

例5 在四边形$ABCD$中,$AB=a, BC=b, CD=c, AD=d$,且$|a-c|+\sqrt{b^2-2bd+d^2}=0$. 那么四边形$ABCD$的形状是_____.

导引:显然$\sqrt{b^2-2bd+d^2}=\sqrt{(b-d)^2}=|b-d|$.
由非负数的性质可知:$|a-c|\geqslant 0, |b-d|\geqslant 0$,
又$|a-c|+\sqrt{b^2-2bd+d^2}=0$,
$\therefore |a-c|+|b-d|=0$,
$\therefore a-c=0, b-d=0$,即$a=c, b=d$.
$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

▶答案:平行四边形

同类变式 (答案见250页) 练一练

5. 在四边形$ABCD$中,$AB=a, BC=b, CD=c, AD=d$,且满足$a^2+b^2+c^2+d^2=2ac+2bd$. 试判断四边形$ABCD$的形状.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 3 平行四边形的判定定理 3(重点)

点知识

1. **平行四边形的判定定理 3**:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

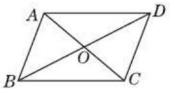


图 2.2-29

符号语言:如图 2.2-29,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,$\because AO = CO, BO = DO$,
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

要点精析

(1)这个定理是从对角线的角度入手判定一个四边形是平行四边形.

(2)要理解"互相平分",即当一条对角线平分另一条对角线的同时,另一条对角线也平分这一条对角线,而只有一条对角线平分,另一条对角线不平分不能判定这个四边形是平行四边形.

2. **拓展**:

(1)两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

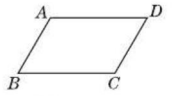


图 2.2-30

符号语言:如图 2.2-30,在四边形 $ABCD$ 中,
$\because \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$,
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2)平行四边形的判定方法较多,大致可分为三类:①根据边判定;②根据角判定;③根据对角线判定. 根据角的关系判定在教材中没有作为基本定理,可将角的关系转化为对边平行,进而运用定义判定,具体选择方法见右表.

3. **易错警示**:注意平行四边形判定定理与性质定理的条件和结论,避免混淆:

平行四边形 性质 ⟶ / 判定 ⟵
- 两组对边分别平行
- 两组对边分别相等
- 一组对边平行且相等
- 两组对角分别相等
- 对角线相互平分

已知条件		选择的判定方法	
边	一组对边相等	判定定理 1	判定定理 2
	一组对边平行	定义	判定定理 1
角	一组对角相等	两组对角分别相等的四边形是平行四边形.	
对角线		判定定理 3	

拔考向

考查角度 1:直接运用判定定理 3 证明四边形是平行四边形

例 6 如图 2.2-31,已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,在 AC,BD 上分别取点 E,G 和 M,N,使 $AE = CG$,$BM = DN$. 求证:四边形 $EMGN$ 是平行四边形.

导引:根据平行四边形的性质可得对角线互相平分,根据对角线互相平分的四边形是平行四边形,可证明结论.

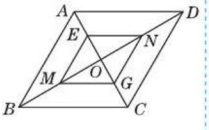
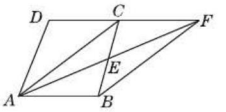


图 2.2-31

▶证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore OA = OC, OB = OD$. 又 $\because AE = CG, BM = DN$,$\therefore OA - AE = OC - CG, OB - BM = OD - DN$,即 $OE = OG, OM = ON$.
$\therefore$ 四边形 $EMGN$ 是平行四边形.

同类变式 (答案见 250 页) 练一练

6. [中考 · 张家界] 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,E 是 BC 的中点,直线 AE 交 DC 的延长线于点 F. 试判断四边形 $ABFC$ 的形状,并证明你的结论.



(第 6 题图)

点方法

从对角线的角度判定平行四边形,一般结合已知平行四边形的性质,利用已知平行四边形的对角线的性质去判定未知四边形是平行四边形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：运用两组对角分别相等判定四边形是平行四边形

例7 如图2.2-32，在$\square ABCD$中，BE平分$\angle ABC$，交AD于点E，DF平分$\angle ADC$，交BC于点F，那么四边形$BFDE$是平行四边形吗？为什么？

导引：利用平行四边形对角相等的性质可得$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$，然后再依据角平分线的定义和三角形外角的性质证出四边形$BFDE$的两组对角分别相等，于是可得出结论.

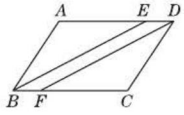


图2.2-32

▶解：四边形$BFDE$是平行四边形.

理由：在$\square ABCD$中，$\angle ABC=\angle ADC$，$\angle A=\angle C$.

$\because BE$平分$\angle ABC$，DF平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle CDF=\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$.

$\therefore \angle CDF=\angle ADF=\angle ABE=\angle CBE$.

$\because \angle DFB=\angle C+\angle CDF$，$\angle BED=\angle ABE+\angle A$，

$\therefore \angle DFB=\angle BED$.

$\therefore$四边形$BFDE$是平行四边形.

点方法

当已知条件出现所要说明的四边形的角时，可选择“两组对角分别相等的四边形是平行四边形”来判定.

考查角度3：利用平行四边形的判定方法进行证明

例8 [中考·仙桃]如图2.2-33，已知四边形$ABCD$是平行四边形，E，F为对角线AC上两点，连接ED，EB，FD，FB. 给出以下条件：①$BE\parallel DF$；②$BE=DF$；③$AE=CF$. 请你从中选取一个条件，使$\angle 1=\angle 2$成立，并给出证明.

导引：欲证明$\angle 1=\angle 2$，只需证得四边形$BFDE$是平行四边形或$\triangle ABF\cong\triangle CDE$即可.

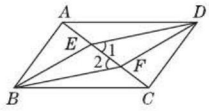


图2.2-33

▶解：方法一：选条件①$BE\parallel DF$.

证明：如图2.2-33，$\because BE\parallel DF$，

$\therefore \angle BEC=\angle DFA$. $\therefore \angle BEA=\angle DFC$.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$. $\therefore \angle BAE=\angle DCF$.

在$\triangle ABE$与$\triangle CDF$中，$\begin{cases}\angle BEA=\angle DFC,\\ \angle BAE=\angle DCF,\\ AB=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF(\mathrm{AAS})$. $\therefore BE=DF$.

又$\because BE\parallel DF$，$\therefore$四边形$BFDE$是平行四边形.

$\therefore ED\parallel BF$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

方法二：选条件③$AE=CF$.

证明：$\because AE=CF$，$\therefore AF=CE$.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$. $\therefore \angle BAF=\angle DCE$.

在$\triangle ABF$与$\triangle CDE$中，$\begin{cases}AF=CE,\\ \angle BAF=\angle DCE,\\ AB=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CDE(\mathrm{SAS})$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

点方法

平行四边形的判定方法共有五种，主要从边、角、对角线三个方面来入手，要选择条件进行证明时，也只能从这三个方面来考虑.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拨尖角度 1 综合利用平行四边形的判定和性质进行证明

例 9 如图 2.2-34，已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 为 AC 上一点，连接 BE 交 AD 于点 F，且 $AE=FE$. 求证：$BF=AC$.

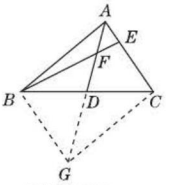


图 2.2-34

导引：要证明 BF 与 AC 相等，可转化为证角相等，但边、角关系联系不到一块，这就需要构造图形把已知条件联系起来. 由点 D 是 BC 的中点，可把点 D 看成平行四边形一条对角线的中点，因此只要把另一条对角线作出来，就能构成平行四边形，由此该题便得以解决.

▶证明：如图 2.2-34，延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连接 BG，CG.

$\because DG=AD$，$BD=DC$，

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形.

$\therefore AC\parallel BG$. $\therefore \angle EAF=\angle BGD$.

又 $\because AE=FE$，$\therefore \angle EAF=\angle EFA$.

$\therefore \angle BGD=\angle EFA=\angle BFG$. $\therefore BG=BF$.

又 $\because BG=AC$，$\therefore BF=AC$.

点方法

（1）**证明两条线段（或两角）相等的常用方法：**①线段垂直平分线的判定和性质；②角平分线的判定和性质；③等腰三角形的判定和性质；④全等三角形的判定和性质；⑤平行四边形的判定和性质.

（2）当题中有三角形中线时，常加倍中线构造平行四边形，然后利用平行四边形的性质推出线段相等或平行以及角相等.

拨尖角度 2 与平行四边形有关的探究题

例 10 如图 2.2-35，$\angle ABM$ 为直角，点 C 为线段 BA 的中点，点 D 是射线 BM 上的一个动点（不与点 B 重合），连接 AD，作 $BE\perp AD$，垂足为 E，连接 CE，过点 E 作 $EF\perp CE$，交 BD 于点 F.

（1）求证：$BF=FD$；

（2）点 D 在运动过程中能否使得四边形 $ACFE$ 为平行四边形？如果不能，请说明理由；如果能，求出此时 $\angle A$ 的度数.

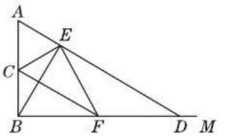


图 2.2-35

导引：（1）欲证 $BF=FD$，可证 $BF=EF$，$FD=EF$. 欲证 $BF=EF$，在 $\triangle BEF$ 中，可证 $\angle BEF=\angle EBF$，因为 CE 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 斜边 AB 上的中线，所以 $CE=CB$，根据等边对等角，得出 $\angle CEB=\angle CBE$，又 $\angle CEF=\angle CBF=90°$，由等角的余角相等得出 $\angle BEF=\angle EBF$；欲证 $FD=EF$，在 $\triangle FED$ 中，可证 $\angle FED=\angle EDF$，由于 $\angle BEF+\angle FED=90°$，$\angle EBD+\angle EDB=90°$，而 $\angle BEF=\angle EBF$，因此 $\angle FED=\angle EDF$.

（2）假设点 D 在运动过程中能使四边形 $ACFE$ 为平行四边形，则 $AC\parallel EF$，$AC=EF$，由（1）知 $AC=CB=\frac{1}{2}AB$，$EF=BF=\frac{1}{2}BD$，则 $BC=EF=BF$，即 $BA=BD$，$\angle A=45°$.

（1）▶证明：$\because BE\perp AD$，$\therefore \angle AEB=90°$，即 $\triangle AEB$ 是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 中，$\because C$ 为 AB 的中点，

$\therefore AC=BC$，$CE=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore CB=CE$，$\therefore \angle CEB=\angle CBE$.

$\because \angle CEF=\angle CBF=90°$，

$\therefore \angle BEF=\angle EBF$，$\therefore EF=BF$.

$\because \angle BEF+\angle FED=90°$，$\angle EBD+\angle EDB=90°$，

$\therefore \angle FED=\angle EDF$，

$\therefore EF=FD$，$\therefore BF=FD$.

（2）▶解：能. 若四边形 $ACFE$ 为平行四边形，则 $AC\parallel EF$，$AC=EF$.

由（1）得 $BF=EF$，$EF=FD$，$\therefore AC=BF$.

又易知 $BC=AC$，$\therefore BC=BF$. $\therefore BA=BD$.

又 $\because \angle ABD=90°$，$\therefore \angle A=45°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

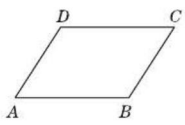
Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 （答案见250页）

基础巩固练

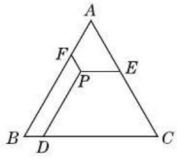
1. [中考·衡阳] 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，要使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可添加的条件不正确的是（　　）

A. $AB = CD$　　B. $BC = AD$

C. $\angle A = \angle C$　　D. $BC \parallel AD$



（第1题图）



（第3题图）

2. 把两个全等三角形按不同的方法拼成四边形，则这些四边形中平行四边形有（　　）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

3. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 P 是三角形内的任意一点，$PD \parallel AB$，$PE \parallel BC$，$PF \parallel AC$，若 $\triangle ABC$ 的周长为12，则 $PD + PE + PF$ 等于（　　）

A. 8　　B. 6

C. 4　　D. 3

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 7$，$AC = 5$，AD 是边 BC 上的中线，那么 AD 的取值范围是（　　）

A. $0 < AD < 12$　　B. $2 < AD < 12$

C. $0 < AD < 6$　　D. $1 < AD < 6$

5. 根据下列条件，能作出平行四边形的是（　　）

A. 两组对边长分别是3 cm和7 cm

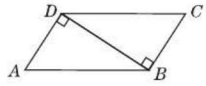
B. 相邻两边的边长分别是2 cm和4 cm，一条对角线长是7 cm

C. 一条对角线长为6 cm，另一条对角线长为10 cm，一条边长为8 cm

D. 一条边长为7 cm，两条对角线长为6 cm和8 cm

6. [开放题] 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$，若再添加一个条件，能使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形，则这个条件可以是_____.（写出一个条件即可，不再添加辅助线）

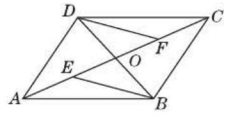
7. 如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 $BD \perp AD$，$DB \perp BC$，$AD = 11 - x$，$BC = x - 5$，则当 $x =$ _____时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



（第7题图）

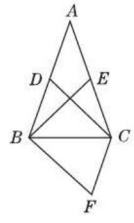
8. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，现给出下列4个条件：①$OA = OC$；②$AB = CD$；③$\angle BAD = \angle DCB$；④$AD \parallel BC$，从中任意选取2个，能说明四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是_____（填写序号即可）.

9. [中考·大连] 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在 AC 上，且 $AF = CE$. 求证：$BE = DF$.



（第9题图）

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D，E 分别是 AB，AC 的中点，连接 BE，将 $\triangle EBC$ 沿 BC 折叠得到 $\triangle FBC$，连接 CD. 求证：四边形 $DBFC$ 是平行四边形.



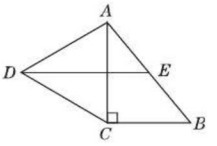
（第10题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. [中考 · 莱芜]如图,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,以AC为一边向△ABC外作等边三角形ACD,点E为AB的中点,连接DE.

(1)证明$DE\parallel CB$;

(2)探索AC与AB满足怎样的数量关系时,四边形$DCBE$是平行四边形.

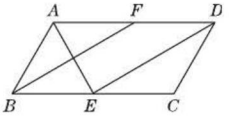


(第11题图)

12. 如图,在▱$ABCD$中,$\angle ABC=60°$,$BC=2AB$,点E,F分别是BC,AD的中点,连接AE,DE,BF.

(1)求证:$AE=CD$;

(2)若$BF=6$,求DE的长.



(第12题图)

能力提升练

13. 已知四边形$ABCD$,AC与BD相交于点O,如果只给出条件$AB\parallel CD$,那么还不能判定四边形$ABCD$为平行四边形,以下四种说法正确的是(　　)

①如果再加上条件$BC=AD$,那么四边形$ABCD$一定是平行四边形;

②如果再加上条件$\angle BAD=\angle BCD$,那么四边形$ABCD$一定是平行四边形;

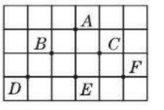
③如果再加上条件$AO=CO$,那么四边形$ABCD$一定是平行四边形;

④如果再加上条件$\angle DBA=\angle CAB$,那么四边形$ABCD$一定是平行四边形.

A. ①②　　B. ①③④

C. ②③　　D. ②③④

14. 如图,在格点图中,以格点A,B,C,D,E,F为顶点,你能画出_____个平行四边形.

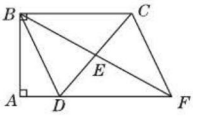


(第14题图)

15. [中考 · 宿迁]如图,在四边形$ABCD$中,$\angle A=\angle ABC=90°$,$AD=1$,$BC=3$,E是边CD的中点,连接BE并延长与AD的延长线相交于点F.

(1)求证:四边形$BDFC$是平行四边形;

(2)若△BCD是等腰三角形,求四边形$BDFC$的面积.



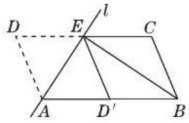
(第15题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

16. [中考·扬州]如图,将$\square ABCD$沿过点A的直线l折叠,使点D落到AB边上的点D'处,折痕l交CD边于点E,连接BE.

(1)求证:四边形$BCED'$是平行四边形;

(2)若BE平分$\angle ABC$,求证:$AB^2 = AE^2 + BE^2$.

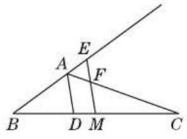


(第16题图)

17. [中考·淄博]如图,已知$\triangle ABC$,AD平分$\angle BAC$交BC于点D,BC的中点为M,$ME \parallel AD$,交BA的延长线于点E,交AC于点F.

(1)求证:$AE = AF$;

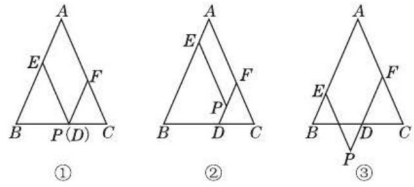
(2)求证:$BE = \frac{1}{2}(AB + AC)$.



(第17题图)

思维拓展练

18. [一题多变题]在$\triangle ABC$中,$AB = AC$,点P为$\triangle ABC$所在平面内的一点,过点P分别作$PE \parallel AC$交AB于点E,$PF \parallel AB$交BC于点D,交AC于点F.如图①,若点P在BC边上,此时$PD = 0$,猜想PD,PE,PF与AB满足的数量关系,然后证明你的猜想.



(第18题图)

(1)一变:如图②,若点P在$\triangle ABC$内,猜想PD,PE,PF与AB满足的数量关系,然后证明你的猜想.

(2)二变:如图③,若点P在$\triangle ABC$外,猜想PD,PE,PF与AB满足的数量关系.(不用说明理由) 【导学号:8564979】

我的错题笔记

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2.3 中心对称和中心对称图形

热门话题
- 中心对称
- 中心对称的性质
- 中心对称图形

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 中心对称

点知识

1. **定义**:在平面内,把一个图形上的每一个点 P 对应到它在绕点 O 旋转 $180°$ 下的像 P',这个变换称为关于点 O 中心对称,点 O 叫作**对称中心**. 这两个图形在旋转后能重合的对应点叫作关于对称中心的对称点.

要点精析

(1) 中心对称是特殊的旋转,其旋转角为 $180°$;

(2) 中心对称是指两个图形的位置关系,必须涉及两个图形,其中一个图形绕对称中心旋转 $180°$ 后一定能与另一个图形重合;

(3) 成中心对称的两个图形,只有一个对称中心,这个对称中心可能在每个图形的外部,也可能在每个图形的内部或边上,但对称点一定在对称中心的两侧或与对称中心重合.

2. **中心对称与轴对称的异同**:

相同点:都是两个图形之间的关系,并且变换前、后的两个图形全等.

不同点:轴对称是一个图形沿着一条直线翻折得到另一个图形;

中心对称是一个图形绕一点旋转 $180°$ 得到另一个图形.

拨考向

考查角度 1:利用中心对称的概念识别中心对称

例 1 如图 2.3-1 所示的图形中成中心对称的有_____组.



图 2.3-1

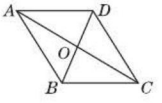
导引:利用中心对称的定义解答. ▶答案:3

点方法

根据中心对称的定义,看左边的图形能否绕一点旋转 $180°$ 后与右边的图形重合,能则成中心对称,否则就不成.

同类变式 (答案见 252 页) 练一练

1. 如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,对角线 AC,BD 相交于点 O,图中哪些三角形关于点 O 成中心对称?



(第 1 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：利用中心对称的概念进行辨析

例2 下列说法正确的是(　　)

A. 全等的两个图形成中心对称　　B. 成中心对称的两个图形必须重合

C. 成中心对称的两个图形全等　　D. 绕某点旋转后能够重合的两个图形成中心对称

导引：全等的两个图形不一定成中心对称，故A错；成中心对称的两个图形不一定重合，故B错；成中心对称的两个图形旋转180°后一定能重合，而能重合的图形必全等，所以C正确；旋转后能够重合的两个图形不一定成中心对称，关键是要旋转180°后能重合，故D错. ▶答案：C

点拨 技巧

成中心对称的两个图形必定全等，但全等的两个图形不一定成中心对称；两个全等的图形也可能由平移、翻折得到.

知识点2 中心对称的性质(重难点)

点知识

1. **性质**：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

要点精析

(1)中心对称的两个图形是**全等图形**，对应角相等，对应线段平行(或在同一条直线上)且相等；

(2)如果两个图形的对应点所连线段都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形关于这点中心对称.

2. **确定成中心对称的两个图形的对称中心的方法**：

(1)连接任意一对对应点，取这条线段的中点，这个中点就是对称中心；

(2)连接任意两对对应点，两条线段的交点就是对称中心.

点考向

考查角度1：利用中心对称的性质找关系

例3 如图2.3-2，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于点O成中心对称，你能从图中找出哪些相等的线段、相等的角、全等的三角形以及有特殊位置关系的线段？

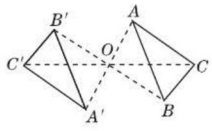


图2.3-2

导引：根据中心对称的性质可知：如果两个图形关于某点成中心对称，那么对应点所连线段都经过对称中心而且被对称中心平分，而且这两个图形是全等图形，对应边平行(或共线)且相等.

▶解：可以找到：$OA=OA'$，$OB=OB'$，$OC=OC'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$AB\parallel A'B'$，$AC\parallel A'C'$，$BC\parallel B'C'$等.

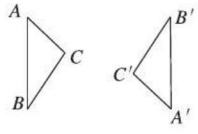
同类变式 (答案见252页) 练一练

3. 如图，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$成中心对称，请找出对称中心O，并回答下列问题：

(1)点A的对应点是_____，点B的对应点是_____.

(2)点A，O，A'三点是否共线？若是，还有其他三点共线吗？

(3)AO与$A'O$相等吗？若相等，还有其他相等线段吗？



(第3题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用中心对称的性质作图

例4 如图2.3-3，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.

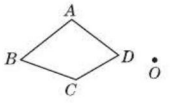


图2.3-3

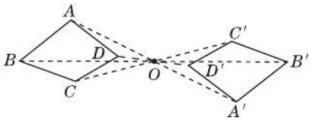


图2.3-4

导引：要画四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，只要作出点 A,B,C,D 关于点 O 的对称点，然后顺次连接即可.

▶解：(1)连接 AO 并延长 AO 到 A'，使 $OA'=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对称点 A'.

(2)同样画出点 B,C 和点 D 关于点 O 的对称点 B',C' 和 D'.

(3)顺次连接 $A'B',B'C',C'D',D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求作的图形. 如图2.3-4所示.

点方法

根据中心对称的性质作与已知图形关于某点成中心对称的图形的关键是作出某些特殊点的对称点. 作图步骤：(1)连接原图形上的特殊点和对称中心；(2)再将以上各线段延长找对称点，使得特殊点与对称中心的距离和其对称点与对称中心的距离相等；(3)将对称点按原图形的形状连接起来，即可得出与原图形关于某点成中心对称的图形.

考查角度3：利用中心对称的性质找对称中心

例5 如图2.3-5，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 成中心对称，试画出它们的对称中心 O，并简要说明理由.

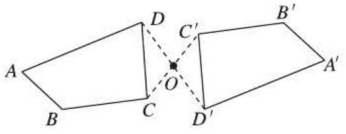


图2.3-5

导引：根据中心对称的性质可知，对称中心应该在对称点连线上并且平分对称点所连线段，只需连接对称点，这些连线的交点即为对称中心.

▶解：如图2.3-5所示.

理由：成中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心平分.

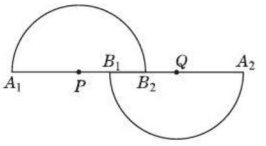
点方法

(1)**找对称中心的方法**：本例的方法是连接两对对称点，其交点即为对称中心，还可以连接任意一对对称点，这条线段的中点即为对称中心.

(2)确定两个图形是否成中心对称，只需看其所有对应点的连线是否过同一点，并且被这点平分即可.

同类变式 (答案见252页) 练一练

5. 如图，两个半圆分别以 P,Q 为圆心，它们的半径相等，A_1,P,B_1,B_2,Q,A_2 在同一条直线上. 这个图形中的两个半圆是否成中心对称？如果是，请找出对称中心 O.



(第5题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4：利用中心对称性质解决几何问题

例6 如图2.3-6，在Rt△ABC中，$\angle A=90°$，D为BC的中点，$DE\perp DF$，DE交AB于E，DF交AC于F，试写出线段BE，EF，FC之间的关系，并写出理由.

导引：要探索线段BE，EF，FC之间的关系，而这三条线段的位置较分散，因此需要想办法将其集中到同一个三角形中，由于D为BC的中点，它为中心对称的变换创造了条件.

▶解：$FC^2+BE^2=EF^2$. 理由如下：

∵ D为BC中点，∴ $BD=CD$.

作△BDE关于点D成中心对称的△CDM，连接FM，如图2.3-6，∴ $CM=BE$，$MD=ED$，$\angle DCM=\angle B$.

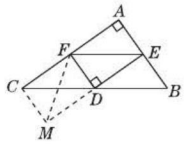


图2.3-6

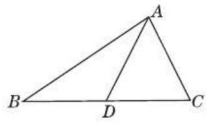
又∵ $\angle B+\angle ACB=90°$，

∴ $\angle DCM+\angle ACB=90°$，即$\angle FCM=90°$.

∵ $MD=ED$，$FD\perp ME$，∴ $FM=FE$. 又∵ $FC^2+CM^2=FM^2$，∴ $FC^2+BE^2=EF^2$.

同类变式 （答案见252页） 练一练

6. 如图，在△ABC中，AD为BC边上的中线，$AB=5$，$AC=3$，求AD的长的取值范围.



（第6题图）

探规律

通过几何图形的中心对称变换，可以将线段进行等长的位置转移，使分散的几何元素（线段或角）集中到同一个图形中，这种由“分散”到“集中”的**转化思想**在解决有关中点的问题中经常使用.

知识点3 中心对称图形

点知识

1. **定义**：如果一个图形绕一个点O旋转**180°**，所得到的像与**原来的图形**互相重合，那么这个图形叫作中心对称图形，这个点O叫作它的**对称中心**.

要点精析 ///

（1）中心对称图形的对称中心一定在图形上或其内部；

（2）中心对称图形是针对一个图形而言的；

（3）中心对称图形上所有的点关于对称中心的对称点都在这个图形本身上.

2. **特殊的中心对称图形**：

（1）线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心；

（2）平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

3. **性质**：过中心对称图形对称中心的直线将图形分成全等的两部分.

要点精析 ///

若把中心对称图形相互对称的两部分看成两个图形，则它们成中心对称；若把成中心对称的两个图形看成一个整体，则为中心对称图形.

4. **中心对称与中心对称图形的区别与联系**：

	中心对称	中心对称图形
区别	（1）针对两个图形而言的 （2）指两个图形的位置关系 （3）对应点分别在两个图形上 （4）对称中心在两个图形之间	（1）针对一个图形而言的 （2）指具有某种性质的一个图形 （3）对应点在一个图形上 （4）对称中心在图形上或其内部
联系	若把成中心对称的两个图形视为一个整体，则成为中心对称图形；若把中心对称图形的两部分（形状和大小均相同）看成两个图形，则它们成中心对称	

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨考向

考查角度1：利用中心对称图形的定义识别常见图形

例7 ［中考 · 广东］下列所述图形中，是中心对称图形的是(　　)

A. 直角三角形　　B. 平行四边形　　C. 正五边形　　D. 正三角形

导引：解题的关键是理解中心对称图形的定义. 根据中心对称图形的定义对各选项进行逐一判断识别.

根据中心对称图形的定义，只有平行四边形绕着其对角线的交点旋转180°后与原图形重合，符合中心对称图形的定义，故选择B. ▶答案：B

点方法

判断一个图形是不是轴对称图形，就看是否存在一条直线(对称轴)，使得这个图形沿这条直线对折后两边能完全重合；判断一个图形是不是中心对称图形，可以把纸倒过来看(相当于旋转180°)，如果看到的图形与原来的图形完全相同，就是中心对称图形，否则就不是.

考查角度2：利用中心对称图形的定义识别图案

例8 ［中考 · 白银］如图2.3-7所示的图形中，是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

图2.3-7

同类变式 (答案见252页)　练一练

8. ［中考 · 济宁］下列图形是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

导引：解题的关键是能抓住中心对称图形的定义进行判断；中心对称图形是指把一个图形绕某个点旋转180°，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫作中心对称图形，依据中心对称图形的定义逐一判断即可. A选项中的图形绕着中间圆的圆心旋转180°之后能与原来的图形重合，B，C，D选项中的图形均不具有这一特点，故选择A. ▶答案：A

点方法

解决此类问题应先从一般几何图形入手，熟练掌握常见的几何图形的对称性，如圆、正方形等这些既是中心对称图形又是轴对称图形的特例，还要抓住有奇数个角的图案一定不是中心对称图形等快速判断. 辨别时，既要关注局部又要关注整体.

考查角度3：画中心对称图形

例9 ［中考 · 枣庄］在方格纸中，选择标有序号①②③④中的一个小正方形涂黑，与图2.3-8中阴影部分构成中心对称图形，该小正方形的序号是_____.

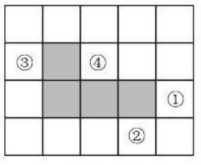


图2.3-8

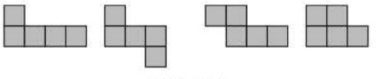


图2.3-9

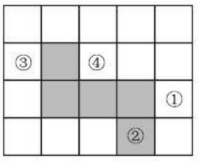


图2.3-10

导引：先分别作出选择①②③④四种情况的图形，再运用中心对称图形的定义加以识别. 根据题意，可作出四种形状的图形如图2.3-9，其中旋转180°后能与自身重合的只有第2个图形，所以将②涂黑能构成中心对称图形，如图2.3-10. ▶答案：②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4：利用中心对称图形的性质等分不规则图形

例10 有一块如图2.3-11所示的钢板，工人师傅想把它分成面积相等的两部分，请你在图中画出分割方法.

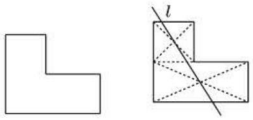
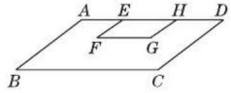


图2.3-11　　图2.3-12

▶解：钢板可看成由上、下两个长方形构成，长方形是中心对称图形，过对称中心的任一直线把长方形分成全等的两部分，自然平分其面积，而长方形的对称中心是两条对角线的交点，因此先找出两长方形的对称中心，然后过这两个对称中心作直线l，如图2.3-12所示.（画法不唯一）

同类变式（答案见252页）　练一练

10. 如图是一块平行四边形土地$ABCD$，后来在其边缘挖了一个小平行四边形水塘$EFGH$，现准备将剩余的地分成两块，并使其满足：两块地的面积相等，分割线恰好做成水渠，便于灌溉，请你在图中画出分割线（保留作图痕迹）.



（第10题图）

点方法

过中心对称图形的对称中心的任一直线将中心对称图形分割成全等的两部分是平分面积的常用方法，而本例的图形不是中心对称图形，我们可以利用**转化思想**将其转化成两个中心对称图形，再利用中心对称图形的性质来解决分割问题.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 利用中心对称的性质进行几何证明

例11 如图2.3-13，线段AC，BD相交于点O，$AB\parallel CD$，$AB=CD$. 线段AC上的两点E，F关于点O中心对称. 求证：$BF\parallel DE$.

导引：连接AD，BC，根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明四边形$ABCD$是平行四边形，再根据平行四边形的对角线互相平分可得$BO=DO$，根据E，F关于点O中心对称可得$OE=OF$，然后利用“边角边”证明$\triangle BOF$和$\triangle DOE$全等，根据全等三角形对应角相等可得$\angle OBF=\angle ODE$，进而推出$BF\parallel DE$.

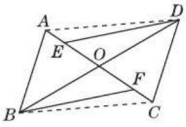


图2.3-13

▶证明：如图2.3-13，连接AD，BC，

$\because AB\parallel CD$，$AB=CD$，

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore BO=DO$.

$\because$ 点E，F关于点O中心对称，

$\therefore OF=OE$.

在$\triangle BOF$和$\triangle DOE$中，$\begin{cases} BO=DO, \\ \angle BOF=\angle DOE, \\ OF=OE, \end{cases}$

$\therefore \triangle BOF\cong\triangle DOE$.

$\therefore \angle OBF=\angle ODE$. $\therefore BF\parallel DE$.

点方法

本题通过作辅助线构造平行四边形，然后得到$BO=DO$是证明三角形全等的关键，也是解决本题的难点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨尖角度2 利用中心对称图形的性质巧解实际问题

例12 [趣味题]甲、乙两人轮流往一个圆形桌面上平放同样大小的硬币,每次只能放一枚,但不允许任何两枚硬币有重叠部分,规定谁放下最后一枚,并使得对方没有再放的位置,就算谁获胜. 假如甲、乙两人都是内行,试问是先放者获胜,还是后放者获胜?怎样放才能稳操胜券?

导引:桌面是否呈圆形并不重要,只要是中心对称图形就可以. 因为中心对称图形上的每一点(对称中心除外)都有一个关于对称中心对称的对称点,所以先放者占据对称中心后,后放者每放一点,总可以找到与它对称的另一点,由此显然先放者必胜.

▶解:先放者获胜. 操作办法:第一枚硬币要放在桌面中心处,然后每次都往对方所放硬币位置关于桌面中心的对称位置处放硬币.

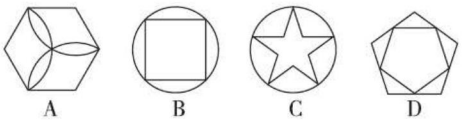
拨 技巧

任何一个中心对称图形只有对称中心是唯一的,其他的任何点都能找到对称点.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见252页)

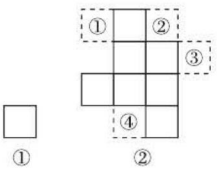
基础巩固练

1. [中考 · 达州]下列图形中是中心对称图形的是(　　)



2. [中考 · 河北]图①和图②中所有的小正方形都全等,将图①的正方形放在图②中①②③④的某一位置,使它与原来7个小正方形组成的图形是中心对称图形,这个位置是(　　)

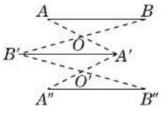
A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④



(第2题图)

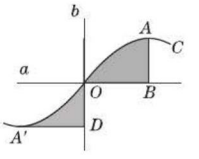
3. 一辆汽车车牌的最后两个数字刚好组成一个中心对称图形,并且这两个数字不相等,则这两个数字的和是_____.

4. 如图,线段 AB 关于点 O(不在直线 AB 上)的对称线段是 $A'B'$;线段 $A'B'$ 关于点 O'(不在直线 $A'B'$ 上)的对称线段是 $A''B''$,线段 AB 与 $A''B''$ 不在同一条直线上. 那么线段 AB 与线段 $A''B''$ 的关系是_____.

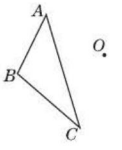


(第4题图)

5. [中考 · 乐山]如图,直线 a,b 垂直相交于点 O,曲线 C 关于点 O 成中心对称,点 A 的对称点是点 A',$AB \perp a$ 于点 B,$A'D \perp b$ 于点 D,若 $OB=3$,$OD=2$,则阴影部分的面积之和为_____.



(第5题图)



(第6题图)

6. 如图,已知△ABC 和点 O.

(1) 在图中画出 △$A'B'C'$,使 △$A'B'C'$ 与 △ABC 关于点 O 中心对称;(不必写出画法)

(2) 以点 A,B,C,A',B',C' 中的四个点为顶点的平行四边形有_____.

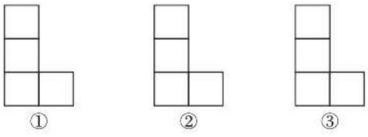
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

7. 如图是由4个全等的正方形组成的L形图案，请按下列要求画图：

(1) 在图案①中添加1个正方形，使它成为轴对称图形(不能是中心对称图形)；

(2) 在图案②中添加1个正方形，使它成为中心对称图形(不能是轴对称图形)；

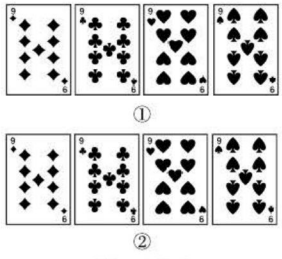
(3) 在图案③中改变1个正方形的位置，从而得到一个新图形，使它既是中心对称图形，又是轴对称图形.



(第7题图)

能力提升练

8. 四张扑克牌如图①所示放在桌子上，小敏把其中一张旋转180°后得到图②，则她所旋转的牌从左数起是(　　)



(第8题图)

A. 第一张　　B. 第二张

C. 第三张　　D. 第四张

9. [探究题] 有一组数排成方阵，如图所示，试计算这组数的和. 小明想了想，方阵如同正方形，正方形是轴对称图形，也是中心对称图形，能否利用轴对称或中心对称的思想来解决方阵的计算问题呢？小明试了试，竟得到了非常巧妙的方法，你知道小明怎么做的吗？

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9

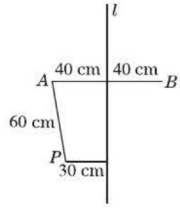
(第9题图)

思维拓展练

10. 如图，现有石头A和石头B关于竹竿l对称，石头A和石头B相距80 cm. 一只电子青蛙位于点P，与石头A相距60 cm，与竹竿l相距30 cm，它按照如下指令跳动：第一跳落点为P_1，P与P_1关于点A成中心对称；第二跳落点为P_2，P_2与P_1关于竹竿l成轴对称；第三跳落点为P_3，P_3与P_2关于点B成中心对称；第四跳落点为P_4，P_4与P_3关于竹竿l成轴对称；以此方法跳下去，每25跳可以休息一次.

(1) 画出这只电子青蛙前四跳运动的路线图，并求点P_4与点P_1间的距离.

(2) 求电子青蛙第三次休息点与点P的距离.



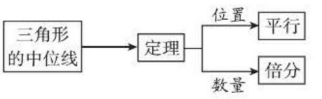
(第10题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4 三角形的中位线

热门话题
- 三角形中位线的定义
- 三角形的中位线定理

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 三角形中位线的概念(重点)

点知识

定义:连接三角形两边中点的线段叫作三角形的中位线.

数学表达式:如图 2.4-1,

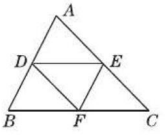


图 2.4-1

$\because AD = BD, AE = CE$,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

要点精析

(1)一个三角形有三条中位线,三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形;如图 2.4-1 所示.

(2)**三角形的中位线与三角形的中线的区别**:三角形的中线是连接一顶点和它的对边中点的线段,而三角形的中位线则是连接两边中点的线段.

(3)三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

拨考向

考查角度:利用中位线的定义识别三角形的中位线

例 1 如图 2.4-2,在 $\triangle ABC$ 中,D, E 分别是 AB, AC 边的中点,则下列线段中为 $\triangle ABC$ 的中位线的是(　　)

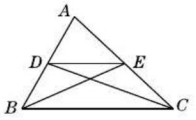


图 2.4-2

A. 线段 CD　　B. 线段 BE

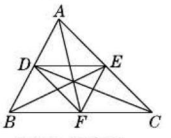
C. 线段 DE　　D. 线段 AE

导引:三角形的中位线是连接三角形两边中点的线段,运用时要注意找到两边的中点,而三角形的中线只过一边的中点.

▶答案:C

同类变式 (答案见 253 页) 练一练

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,D, E, F 分别是边 AB, AC, BC 的中点,则图中中位线有(　　)



(第 1 题图)

A. 3 条　　B. 6 条

C. 9 条　　D. 12 条

点方法

理解三角形中位线的概念是正确识别中位线的关键,注意区分三角形的中线和中位线.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点2 三角形的中位线定理(重难点)

点知识

1. **三角形的中位线定理**:三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半.

数学表达式:如图2.4-3,

$\because AD = BD, AE = EC,$

$\therefore DE \parallel BC$,且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

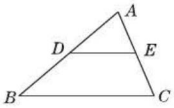


图2.4-3

要点精析 /// 三角形的中位线定理反映了三角形的中位线与第三边的双重关系:一是位置关系,可以用来证两直线平行;二是数量关系,可以用来证线段的倍分关系.

2. **易错警示**:三角形的中位线是与三角形的第三边产生的数量与位置关系.

拨考向

考查角度1:利用三角形中位线定理求线段长

例2 如图2.4-4,在$\triangle ABC$中,D,E分别是BC,AC的中点,BF平分$\angle ABC$,交DE于点F,若$BC=6$,则DF的长是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 4

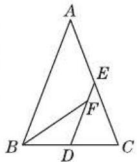


图2.4-4

导引:因为D,E分别是BC,AC的中点,所以DE是$\triangle ABC$的中位线,根据中位线定理可知$DE \parallel AB$,所以$\angle BFD = \angle ABF$.又因为BF平分$\angle ABC$,所以$\angle ABF = \angle CBF$,所以$\angle BFD = \angle CBF$,所以$BD = DF$.又因为D为BC的中点,所以$DF = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

▶答案:B

同类变式 (答案见253页) 练一练

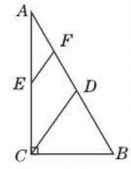
2. [中考·南充]如图,在Rt$\triangle ABC$中,$\angle ACB = 90°$,$\angle A = 30°$,D,E,F分别为AB,AC,AD的中点,若$BC=2$,则EF的长度为(　　)

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. $\sqrt{3}$



(第2题图)

点方法

运用三角形中位线定理求线段长的方法: 当题中有中点,特别是一个三角形中出现两边中点时,我们常常考虑运用三角形的中位线来解决问题.首先证明出它是三角形的中位线,然后利用中位线构造线段之间的关系,并由此建立待求线段与已知线段的联系,从而求出线段的长.

考查角度2:利用三角形中位线定理求角度

例3 [中考·昆明]如图2.4-5,在$\triangle ABC$中,点D,E分别是AB,AC的中点,$\angle A = 50°$,$\angle ADE = 60°$,则$\angle C$的度数为(　　)

A. 50°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

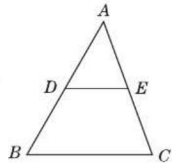


图2.4-5

导引:先在$\triangle ADE$中利用内角和定理求出$\angle AED$的度数,然后判定$DE \parallel BC$,利用平行线的性质可得出$\angle C$的度数.由题意得,$\angle AED = 180° - \angle A - \angle ADE = 70°$.

$\because$点D,E分别是AB,AC的中点,

$\therefore DE$是$\triangle ABC$的中位线.

$\therefore DE \parallel BC$. $\therefore \angle C = \angle AED = 70°$.

▶答案:C

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3：利用三角形中位线定理证明线段的倍分关系

例4 如图2.4-6，已知 E 为 $\square ABCD$ 中 DC 边延长线上一点，且 $CE=DC$，连接 AE，分别交 BC,BD 于点 F,G，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OF,BE. 求证：$AB=2OF$.

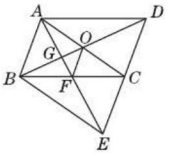


图2.4-6

导引：点 O 是 $\square ABCD$ 两条对角线的交点，所以点 O 是线段 AC 的中点，要证明 $AB=2OF$，我们只需证明点 F 是线段 BC 的中点，即证明 OF 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AB\parallel CD, AB=CD, OA=OC$.

∵ E 为 $\square ABCD$ 中 DC 边延长线上一点，且 $CE=DC$，

∴ $AB\parallel CE, AB=CE$. ∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

∴ 点 F 是 BC 的中点.

又∵ $OA=OC$，∴ OF 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

∴ $AB=2OF$.

点方法

证明线段倍分关系的方法： 由于三角形的中位线的长等于三角形第三边长的一半，因此当需要证明某一线段是另一线段的一半或两倍，且题中出现中点时，常考虑用三角形中位线定理.

考查角度4：利用三角形中位线定理判定平行四边形

例5 如图2.4-7，在 $\triangle ABC$ 中，D,E 分别是 AB,AC 的中点，F 是 CB 延长线上一点，且 $FB=\frac{1}{2}BC$.

求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

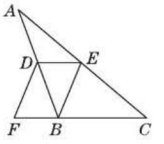


图2.4-7

导引：由三角形中位线定理可得 $DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$，所以 $DE\parallel FB$. 因为 $FB=\frac{1}{2}BC$，所以 $DE=FB$，根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形可证.

▶证明：∵ D,E 分别是边 AB,AC 的中点，

∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

∴ $DE\parallel BC, DE=\frac{1}{2}BC$.

又∵ $FB=\frac{1}{2}BC$，

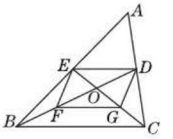
∴ $DE=FB$.

又∵ $DE\parallel FB$，

∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

同类变式 (答案见253页) 练一练

5. 如图，$\triangle ABC$ 的中线 BD,CE 交于点 O,F,G 分别是 OB,OC 的中点. 求证：四边形 $DEFG$ 是平行四边形.



（第5题图）

点方法

当出现一个三角形两边的中点时，可考虑用三角形的中位线定理，得到两条线段的位置关系和数量关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度5：利用三角形中位线定理判断三角形的形状

例6 如图2.4-8，在四边形$ABCD$中，$AD=BC$，点P是对角线BD的中点，点M，N分别是边CD和AB的中点，问$\triangle PMN$是什么三角形？为什么？

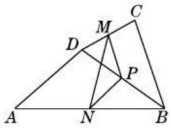


图2.4-8

导引：根据点P，M，N分别是BD，DC，AB的中点，可利用三角形中位线定理，并结合$BC=AD$，得到$PM=PN$.

▶解：$\triangle PMN$是等腰三角形. 理由如下：

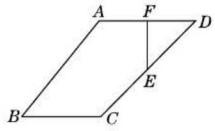
$\because$ 点P是BD的中点，点M是CD的中点，

$\therefore PM=\frac{1}{2}BC$. 同理可得$PN=\frac{1}{2}AD$.

$\because BC=AD$，$\therefore PM=PN$. $\therefore \triangle PMN$是等腰三角形.

同类变式 （答案见253页） 练一练

6. 如图，在四边形$ABCD$中，E，F分别为CD，DA的中点，$AD\parallel BC$，$AB=10$，$BC=6$，$EF=4$. 试问$\triangle DEF$是什么三角形？请你给出正确的判断，并说明理由.



（第6题图）

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 构造中位线解决线段的取值范围问题

例7 如图2.4-9，已知：四边形$ABCD$中，$AB=2$，$CD=3$，M，N分别是AD，BC的中点，则线段MN的取值范围是（　　）

A. $1<MN<5$　　B. $1<MN\leqslant 5$

C. $\frac{1}{2}<MN<\frac{5}{2}$　　D. $\frac{1}{2}<MN\leqslant\frac{5}{2}$

导引：如图2.4-9，连接BD，取BD的中点G，连接NG，MG.

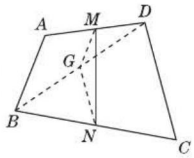


图2.4-9

又$\because M$是边AD的中点，

$\therefore MG$是$\triangle ABD$的中位线. $\therefore MG=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1$.

$\because N$是BC的中点，$BG=GD$，

$\therefore NG$是$\triangle BCD$的中位线.

$\therefore NG=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$.

在$\triangle MNG$中，由三角形三边关系可知$\frac{3}{2}-1<MN<\frac{3}{2}+1$，

$\therefore \frac{1}{2}<MN<\frac{5}{2}$.

当$MN=MG+NG$，即$MN=\frac{5}{2}$时，四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$.

故线段MN的取值范围是$\frac{1}{2}<MN\leqslant\frac{5}{2}$.

▶答案：D

点方法

解答此题的关键是根据题意作出辅助线构造三角形的中位线，利用三角形中位线定理及三角形三边关系解答.

拨尖角度2 利用构造中位线法解决问题

例8 如图2.4-10，在$\triangle ABC$中，点M为BC的中点，AN平分$\angle BAC$，$AN\perp BN$，求证：$MN\parallel AC$.

导引：延长BN交AC于点E，由三角形全等可得到$BN=EN$，再结合点M为BC的中点，得到MN是$\triangle BEC$的中位线. 因此$MN\parallel AC$.

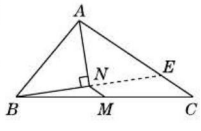


图2.4-10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶证明:如图 2.4-10,

延长 BN 交 AC 于点 E.

$\because AN$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAN = \angle EAN$.

$\because AN \perp BN$,$\therefore \angle BNA = \angle ENA = 90°$.

又$\because AN = AN$,$\therefore \triangle ABN \cong \triangle AEN$.

$\therefore BN = EN$,即点 N 是 BE 的中点.

又$\because$ 点 M 为 BC 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle BEC$ 的中位线.

$\therefore MN // CE$,即 $MN // AC$.

点方法

证明两直线平行的常用方法:

①利用同平行(垂直)于第三条直线;

②利用同位角、内错角相等,同旁内角互补;

③利用平行四边形的性质;

④利用三角形的中位线定理.

拔尖角度 3 利用三角形的中位线定理研究操作类问题

例 9 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = 12$,$AC = 10$,$BC = 9$,AD 是 BC 边上的高. 将 $\triangle ABC$ 按如图 2.4-11 所示的方式折叠,使点 A 与点 D 重合,折痕为 EF,则 $\triangle DEF$ 的周长为(　　)

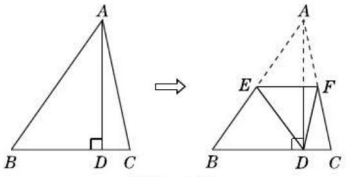


图 2.4-11

A. 9.5　　B. 10.5　　C. 11　　D. 15.5

导引:$\because \triangle DEF$ 是 $\triangle AEF$ 折叠以后形成的图形,$\therefore \triangle DEF \cong \triangle AEF$.

$\therefore \angle DEF = \angle AEF$,$DE = AE$.

易得 $EF // BC$,

$\therefore \angle AEF = \angle B$,$\angle BDE = \angle DEF$.

$\therefore \angle B = \angle BDE$. $\therefore BE = DE$.

$\therefore AE = EB$. 同理,$AF = CF$.

$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\because \triangle DEF$ 的周长 $= \triangle AEF$ 的周长,

$\therefore \triangle DEF$ 的周长 $= AE + EF + AF = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2} \times (12 + 9 + 10) = 15.5$.

▶答案:D

探规律

本题考查了三角形中位线定理,涉及图形的折叠,认识到图形折叠后所形成的 $\triangle DEF$ 与 $\triangle AEF$ 全等是解题的关键. 本题借助求 $\triangle AEF$ 的周长达到求 $\triangle DEF$ 的周长的目的,体现了**转化思想**. 注意折叠图形中隐含的中位线.

拔尖角度 4 利用中位线定理解决规律探索问题

例 10 如图 2.4-12,在 $\triangle ABC$ 中,$BC = 15$,$B_1, B_2, \cdots, B_9, C_1, C_2, \cdots, C_9$ 分别是 AB,AC 的 10 等分点,则 $B_1C_1 + B_2C_2 + \cdots + B_9C_9$ 的值是(　　)

A. 45　　B. 55　　C. 67.5　　D. 135

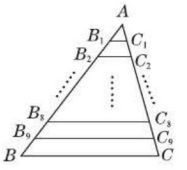


图 2.4-12

导引:当 B_1, C_1 分别是 AB,AC 的中点时,$B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$;

当 B_1, B_2, C_1, C_2 分别是 AB,AC 的三等分点时,$B_1C_1 + B_2C_2 = \frac{1}{3}BC + \frac{2}{3}BC; \cdots$;

当 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 分别是 AB,AC 的 n 等分点时,$B_1C_1 + B_2C_2 + \cdots + B_{n-1}C_{n-1} = \frac{1}{n}BC + \frac{2}{n}BC + \cdots + \frac{n-1}{n}BC = \frac{n(n-1)}{2n}BC = 7.5(n-1)$;

当 $n = 10$ 时,$7.5(n-1) = 67.5$,故 $B_1C_1 + B_2C_2 + \cdots + B_9C_9$ 的值是 67.5.

▶答案:C

探规律

解答本题运用了**从特殊到一般的思想**,解答此类规律型问题,通常要根据简单的例子找出一般性的规律,然后根据规律来求特定的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

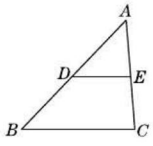
Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 （答案见253页）

基础巩固练

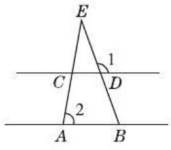
1. 如图，已知 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，若 BC 的长为 3 cm，则 DE 的长是（　　）

A. 2 cm　　B. 1.5 cm

C. 1.2 cm　　D. 1 cm



（第1题图）



（第2题图）

2. 如图，C，D 分别为 EA，EB 的中点，$\angle E = 30°$，$\angle 1 = 110°$，则 $\angle 2$ 的度数为（　　）

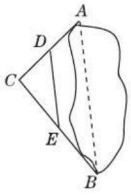
A. 80°　　B. 90°　　C. 100°　　D. 110°

3. ［中考·德阳］如果三角形的两边长分别为 3 和 5，那么连接这个三角形三边中点所得三角形的周长可能是（　　）

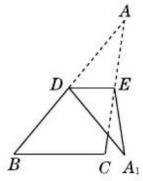
A. 5.5　　B. 5　　C. 4.5　　D. 4

4. ［中考·宜昌］如图，要测定被池塘隔开的 A，B 两点的距离，可以在 AB 外选一点 C，连接 AC，BC，并分别找出它们的中点 D，E，连接 DE. 现测得 $AC = 30$ m，$BC = 40$ m，$DE = 24$ m，则 $AB =$（　　）

A. 50 m　　B. 48 m　　C. 45 m　　D. 35 m



（第4题图）



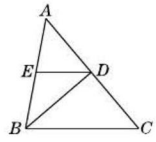
（第5题图）

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是边 AB，AC 的中点，$\angle B = 50°$. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠，点 A 落在三角形所在平面内的点 A_1 处，则 $\angle BDA_1 =$ _____.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = BC = 12$ cm，$\angle ABC = 80°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE \parallel BC$.

求：(1) $\angle EDB$ 的度数；

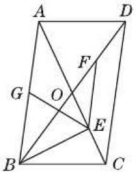
(2) DE 的长.



（第6题图）

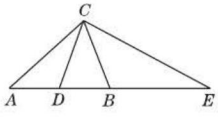
7. 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$BD = 2AD$，E，F，G 分别是 OC，OD，AB 的中点.

求证：(1) $BE \perp AC$；(2) $EG = EF$.



（第7题图）

8. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，CD 是 AB 边上的中线，延长 AB 到 E，使 $BE = AB$，连接 CE，请判断 CD 与 CE 的长度有何关系，并证明你的结论.



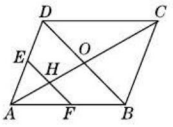
（第8题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

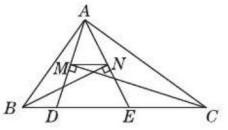
能力提升练

9. [中考 · 绥化] 如图,在$\square ABCD$中,对角线AC,BD相交于点O,点E,F分别是边AD,AB的中点,EF交AC于点H,则$\frac{AH}{HC}$的值为(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$



(第9题图)

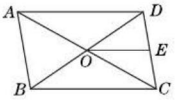


(第10题图)

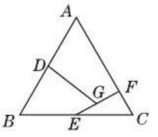
10. [中考 · 达州] 如图,$\triangle ABC$的周长为19,点D,E在边BC上,$\angle ABC$的平分线垂直于AE,垂足为N,$\angle ACB$的平分线垂直于AD,垂足为M,若$BC=7$,则MN的长度为(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

11. [中考 · 烟台] 如图,已知$\square ABCD$的周长为36,对角线AC,BD相交于点O,点E是CD的中点,$BD=12$,则$\triangle DOE$的周长为_____.



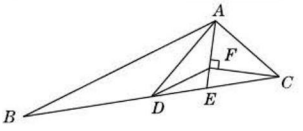
(第11题图)



(第12题图)

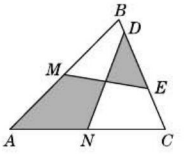
12. [中考 · 天津] 如图,在边长为4的等边三角形ABC中,D,E分别为AB,BC的中点,$EF\perp AC$于点F,G为EF的中点,连接DG,则DG的长为_____.

13. [中考 · 乌鲁木齐] 如图,在$\triangle ABC$中,AD是中线,AE是角平分线,$CF\perp AE$于F,$AB=5$,$AC=2$,则$DF=$_____.



(第13题图)

14. 如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,M,N分别是AB,AC的中点,D,E为BC上的点,连接DN,EM.若$AB=13$ cm,$BC=10$ cm,$DE=5$ cm,试求图中阴影部分的面积.



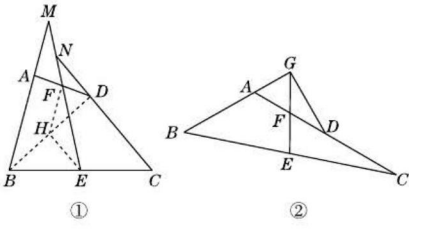
(第14题图)

思维拓展练

15. 如图①,在四边形$ABCD$中,$AB=CD$,E,F分别是BC,AD的中点,连接EF并延长,分别与BA,CD的延长线交于点M,N,则$\angle BME=\angle CNE$.

小明的思路:在图①中,连接BD,取BD的中点H,连接HE,HF,根据三角形中位线定理和平行线的性质,可证得$\angle BME=\angle CNE$.

问题:如图②,在$\triangle ABC$中,$AC>AB$,D点在AC上,$AB=CD$,E,F分别是BC,AD的中点,连接EF并延长,与BA的延长线交于点G,$\angle EFC=60°$,连接GD,判断$\triangle AGD$的形状并证明.



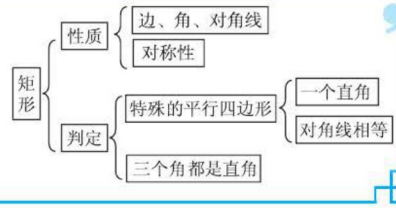
(第15题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2.5 矩 形

热门话题
- 矩形的定义
- 矩形的性质
- 矩形的判定

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 矩形的定义及性质(重点)

点知识

1. **定义**:**有一个角是直角**的平行四边形叫作矩形,也称为长方形.

要点精析

(1)矩形一定是平行四边形,但平行四边形不一定是矩形.

(2)矩形必须具备两个条件:①它是一个平行四边形;②它有一个角是直角,这两个条件缺一不可.

2. **性质**:

(1)矩形的四个角都是**直角**,对边相等,对角线互相平分;

(2)矩形是中心对称图形,对角线的交点是它的对称中心;

(3)矩形的对角线**相等**;

(4)矩形是轴对称图形,过每一组对边中点的直线都是矩形的对称轴.

要点精析

(1)**从边看**:对边相等;

(2)**从角看**:四个角都是直角;

(3)**从对角线看**:对角线相等且互相平分;

(4)**对称性**:既是轴对称图形,又是中心对称图形;

(5)**面积**:矩形的面积 = 长 × 宽 = 被对角线分成的四个等积的小三角形面积之和,注:这四个小三角形是两对全等的等腰三角形.

拨考向

考查角度1:利用矩形的性质求线段长

例1 如图2.5-1,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,已知 $AC=6$,$\angle BOC=120°$,求矩形 $ABCD$ 的面积.

导引:要求矩形 $ABCD$ 的面积,则要求 AB,BC 的长,AB 的长可由矩形的性质及等边三角形的性质求出,而 BC 的长可由勾股定理求出.

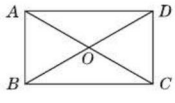
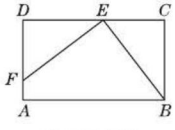


图2.5-1

同类变式 (答案见255页) 练一练

1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$EF\perp EB$,$EF=EB$,矩形 $ABCD$ 的周长为22,$CE=3$,求 DE 的长.



(第1题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AC=BD, OA=OC, OB=OD$. (矩形的对角线相等且互相平分)

$\therefore OA=OB=\frac{1}{2}AC$.

$\because \angle BOC=120°, \therefore \angle AOB=60°, \therefore \triangle OAB$ 为等边三角形, $\therefore AB=OA=\frac{1}{2}AC$.

$\because AC=6, \therefore AB=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=6, \therefore BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.

$\therefore S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=3\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

点拨 技巧

因为矩形的对角线相等且互相平分,所以矩形的对角线将矩形分成了四个等腰三角形,再由特殊角可得到特殊的三角形——等边三角形,利用等边三角形的性质即可求解. 注意:本例亦可通过 $\angle BOC=120°$, $OB=OC$, 得 $\angle BCA=30°$, 再由含 30°角的直角三角形的性质求 AB, BC 的长将更简便,请读者试一试.

考查角度 2:利用矩形的性质求角度

例 2 如图 2.5-2,在矩形 $ABCD$ 中, $AE\perp BD$ 于点 E, $\angle DAE:\angle BAE=3:1$,求 $\angle BAO$ 和 $\angle EAO$ 的度数.

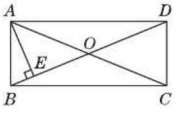


图 2.5-2

导引:由 $\angle DAE$ 与 $\angle BAE$ 之和为矩形的一个内角及两角之比即可求出 $\angle DAE$ 和 $\angle BAE$ 的度数,从而得出 $\angle ABE$ 的度数,由矩形的性质易得 $\angle BAO=\angle ABE$,即可求出 $\angle BAO$ 的度数,再由 $\angle EAO=\angle BAO-\angle BAE$ 可得 $\angle EAO$ 的度数.

▶解:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle DAB=90°, AO=\frac{1}{2}AC, BO=\frac{1}{2}BD, AC=BD$,

$\therefore \angle BAE+\angle DAE=90°, AO=BO$.

又∵ $\angle DAE:\angle BAE=3:1$,

$\therefore \angle BAE=22.5°, \angle DAE=67.5°$.

$\because AE\perp BD$,

$\therefore \angle ABE=90°-\angle BAE=90°-22.5°=67.5°$.

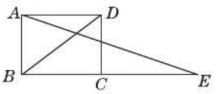
$\because AO=BO$,

$\therefore \angle BAO=\angle ABE=67.5°$,

$\therefore \angle EAO=\angle BAO-\angle BAE=67.5°-22.5°=45°$.

同类变式 (答案见 255 页) 练一练

2. 如图,延长矩形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E,使 $CE=BD$,连接 AE,如果 $\angle ADB=38°$,则 $\angle E$ 的值是(　　)



(第 2 题图)

A. 19°　　B. 18°

C. 20°　　D. 21°

点拨 方法

矩形的每条对角线把矩形分成两个直角三角形,矩形的两条对角线将矩形分成四个等腰三角形,因此有关矩形的计算问题经常通过转化到直角三角形和等腰三角形中来解决.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3：利用矩形的性质进行证明

例3 如图2.5-3，已知四边形$ABCD$是矩形，$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，且点P在矩形上方，点Q在矩形内.

求证：(1)$\angle PBA=\angle PCQ=30°$；(2)$PA=PQ$.

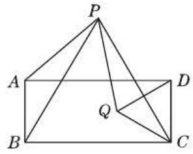


图2.5-3

导引：(1)矩形的四个内角都等于90°，再利用$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，容易求得$\angle PBA$和$\angle PCQ$的度数，从而得证；(2)利用(1)的结论以及矩形和等边三角形的性质进一步证明$\triangle PAB\cong\triangle PQC$，从而证得$PA=PQ$.

▶证明：(1)∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$\angle ABC=\angle BCD=90°$.

∵$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，

∴$\angle PBC=\angle PCB=\angle QCD=60°$，

∴$\angle PBA=\angle ABC-\angle PBC=30°$，

$\angle PCD=\angle BCD-\angle PCB=30°$.

∴$\angle PCQ=\angle QCD-\angle PCD=30°$，

故$\angle PBA=\angle PCQ=30°$.

(2)∵四边形$ABCD$是矩形，∴$AB=DC$.

∵$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，∴$PB=PC$，$AB=DC=QC$.

又由(1)知$\angle PBA=\angle PCQ$，∴$\triangle PAB\cong\triangle PQC$(SAS)，∴$PA=PQ$.

点方法

解涉及矩形问题的命题，常与全等三角形和特殊三角形等知识融为一体进行探索. 利用矩形的性质，可以得到许多的结论，在解题时，针对问题列出有用的结论作论据即可.

考查角度4：利用矩形的对称求面积

例4 如图2.5-4，直线EF过矩形$ABCD$对角线的交点O，分别交AB，CD于点E，F，若$AB=3$，$BC=4$，那么阴影部分的面积为_____.

导引：由题意易得到$\triangle OEB\cong\triangle OFD$，将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积进行计算.

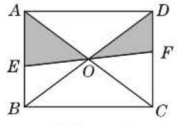


图2.5-4

在矩形$ABCD$中，$OB=OD$，$\angle EBO=\angle FDO$.

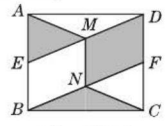
在$\triangle OEB$与$\triangle OFD$中，$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle EOB=\angle FOD,\end{cases}$

∴$\triangle OEB\cong\triangle OFD$，

∴$S_{阴影部分}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3$.

同类变式 (答案见255页) 练一练

4. [中考·江西]如图，在矩形$ABCD$中，点E，F分别是AB，CD的中点，连接DE和BF，分别取DE，BF的中点M，N，连接AM，CN，MN，若$AB=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，则图中阴影部分的面积为_____.



(第4题图)

▶答案：3

点方法

矩形既是轴对称图形又是中心对称图形，根据对称性将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积求解. 体现了**转化思想**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 矩形的判定定理(重点)

点知识

1. **矩形的判定定理:**



定义法:有一个角是直角的平行四边形是矩形;

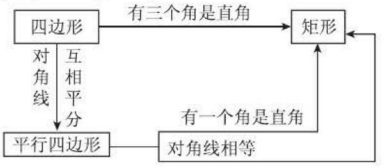
判定定理 1:有三个角是直角的四边形是矩形;

判定定理 2:对角线相等的平行四边形是矩形,或对角线相等且互相平分的四边形是矩形.

要点精析 ///

(1) 矩形的判定定理与性质定理是互逆定理;

(2) 判定矩形的常见思路如下:



2. **易错警示:**

(1) 用定义判定一个四边形是矩形必须满足两个条件:一是有一个角是直角,二是四边形是平行四边形. 也就是说有一个角是直角的四边形不一定是矩形,必须加上"平行四边形"这个条件它才是矩形;

(2) 用对角线相等的平行四边形是矩形判定一个四边形是矩形必须满足两个条件:一是对角线相等,二是四边形是平行四边形. 也就是说两条对角线相等的四边形不一定是矩形,必须加上"平行四边形"这个条件它才是矩形.

点考向

考查角度 1:利用矩形的定义判定矩形

例 5 [中考 · 南宁] 如图 2.5-5,在$\square ABCD$中,E,F分别是AB,DC边上的点,且$AE=CF$,

(1) 求证:$\triangle ADE\cong\triangle CBF$;

(2) 若$\angle DEB=90°$,求证:四边形$DEBF$是矩形.

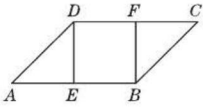


图 2.5-5

导引: (1) 由平行四边形的性质可知:$\angle A=\angle C, AD=BC$,再结合已知的$AE=CF$,则可根据"边角边"证明三角形全等;

(2) 先利用平行四边形的性质及已知条件证得:$BE\parallel DF$,得四边形$DEBF$是平行四边形,再结合条件$\angle DEB=90°$,即可证明四边形$DEBF$是矩形.

▶证明:(1)∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

∴ $\angle A=\angle C, AD=BC$,

在$\triangle ADE$和$\triangle CBF$中,

∵ $AD=CB, \angle A=\angle C, AE=CF$,

∴ $\triangle ADE\cong\triangle CBF$(SAS);

(2)∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

∴ $AB\parallel CD$,

又∵ $AE=CF$,

∴ $AB-AE=CD-CF$,∴ $BE=DF$,∴ $BE\parallel DF$,

∴ 四边形$DEBF$是平行四边形.

又∵ $\angle DEB=90°$,∴ 四边形$DEBF$是矩形.

点方法

矩形的定义表明,判定一个四边形是矩形,先判定这个四边形是平行四边形,然后再证明这个四边形有一个内角是直角.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2:利用判定定理1证明一个四边形是矩形

例6 如图2.5-6,$\square ABCD$的四个内角的平分线分别相交于点E,F,G,H.

求证:四边形$EFGH$是矩形.

导引:要证明四边形$EFGH$是矩形,由于已知$\square ABCD$的四个内角的平分线分别相交于点E,F,G,H,因此可选用"有三个角是直角的四边形是矩形"来证明.

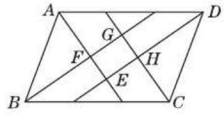


图2.5-6

▶证明:∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD, \therefore \angle ABC + \angle BCD = 180°$.

∵ BG平分$\angle ABC$,CG平分$\angle BCD$,

$\therefore \angle GBC + \angle GCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$,

$\therefore \angle BGC = 90°$.

同理可得$\angle AFB = \angle AED = 90°$,

$\therefore \angle GFE = \angle FEH = \angle FGH = 90°$,

$\therefore$ 四边形$EFGH$是矩形.

点方法

本题目中的图形是建立在四边形基础上,而条件中又涉及角的关系,一般采用"角的方法"来判定矩形.

考查角度3:利用判定定理2证明一个四边形是矩形

例7 如图2.5-7,在四边形$ABCD$中,$AD \parallel BC$,E,F两点在边BC上,$AB \parallel DE$,$AF \parallel DC$,且四边形$AEFD$是平行四边形.

(1)AD与BC有何数量关系?请说明理由.

(2)当$AB = DC$时,求证:$\square AEFD$是矩形.

导引:(1)由$AD \parallel BC$,$AB \parallel DE$,$AF \parallel DC$,可判定四边形$ABED$,四边形$AFCD$都是平行四边形,又因为四边形$AEFD$是平行四边形,根据平行四边形对边相等可知$AD = BE = EF = FC$,所以$BC = 3AD$;

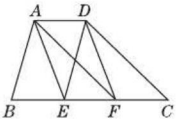


图2.5-7

(2)要证明四边形$AEFD$是矩形,已知这个四边形是平行四边形,只需证明两条对角线相等,即$AF = DE$即可.

(1)▶解:$BC = 3AD$. 理由如下:∵ $AD \parallel BC$,$AB \parallel DE$,$AF \parallel DC$,

$\therefore$ 四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形,$\therefore AD = BE$,$AD = FC$.

又∵ 四边形$AEFD$是平行四边形,$\therefore AD = EF$,

$\therefore AD = BE = EF = FC, \therefore BC = 3AD$.

(2)▶证明:∵ 四边形$ABED$和四边形$AFCD$都是平行四边形,$\therefore DE = AB$,$AF = DC$.

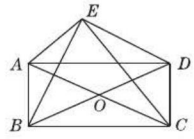
又∵ $AB = DC, \therefore DE = AF$.

又∵ 四边形$AEFD$是平行四边形,$\therefore$ 四边形$AEFD$是矩形.

同类变式 (答案见255页) 练一练

7. 如图,点E为$\square ABCD$外一点,$AE \perp EC$,$BE \perp ED$,对角线AC,BD相交于点O.

求证:$\square ABCD$是矩形.



(第7题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

证明一个平行四边形为矩形的两种方法：一种是证明有一个角是直角，另一种是证明两条对角线相等. 本例的证法采用的是对角线相等的方法. 若采用有一个角是直角的方法，可证：$DE = DC$，$EF = FC$，利用等腰三角形“三线合一”可得$\angle DFE = 90°$. 用这种方法证明请读者独立完成.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拔尖角度 1 利用矩形的性质解决矩形中的折叠问题

例 8 如图 2. 5-8，纸片 $ABCD$ 为平行四边形纸片. 把纸片$ABCD$折叠，使点 B 恰好落在 CD 边上的 E 处，折痕为 AF. 已知 $AB = 10$，$AD = 8$，$DE = 6$.

(1)求证：平行四边形 $ABCD$ 是矩形；

(2)求 BF 的长；

(3)求折痕 AF 的长.

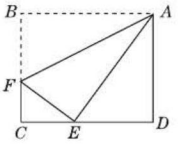


图 2. 5-8

导引：(1)根据翻折变换的对称性可知 $AE = AB$，在$\triangle ADE$ 中，利用勾股定理的逆定理证明$\triangle ADE$ 为直角三角形，且$\angle D = 90°$，再根据有一个角是直角的平行四边形是矩形证明平行四边形 $ABCD$ 是矩形即可；

(2)设 $BF = x$，在 Rt$\triangle EFC$ 中利用勾股定理列方程求解即可；

(3)在 Rt$\triangle ABF$ 中，利用勾股定理求解即可.

(1)▶证明：∵ 把纸片 $ABCD$ 折叠，点 B 恰好落在 CD 边上的 E 处，

$\therefore AE = AB = 10$，

即 $AE^2 = 10^2 = 100$.

又∵ $AD^2 + DE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$，

$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2$，

$\therefore$ $\triangle ADE$ 是直角三角形，且$\angle D = 90°$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形(有一个角是直角的平行四边形是矩形).

(2)▶解：设 $BF = x$，则 $EF = BF = x$，$EC = CD - DE = AB - DE = 10 - 6 = 4$，$FC = BC - BF = AD - BF = 8 - x$.

在 Rt$\triangle EFC$ 中，$EC^2 + FC^2 = EF^2$，

即 $4^2 + (8 - x)^2 = x^2$，

解得 $x = 5$，

故 $BF = 5$.

(3)▶解：在 Rt$\triangle ABF$ 中，由勾股定理得，

$AB^2 + BF^2 = AF^2$.

∵ $AB = 10$，$BF = 5$，

$\therefore AF = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$.

点方法

翻折问题常常在四边形中出现，翻折前后的两个图形是全等图形，利用翻折求线段长时，一般都利用勾股定理建立方程解决问题.

拔尖角度 2 矩形的性质与判定的综合

例 9 [探究题] 如图 2. 5-9，在矩形 $ABCD$中，$AB = 2$，$BC = 5$，E，P 分别在 AD，BC 上，且 $DE = BP = 1$，AP，BE 相交于点 H，CE，DP 相交于点 F.

(1)判断$\triangle BEC$ 的形状，并说明理由；

(2)判断四边形 $EFPH$ 是什么特殊四边形，并证明你的判断.

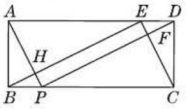


图 2. 5-9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引:(1)根据矩形性质得出 $CD=2$,根据勾股定理求出 CE 和 BE,进而求出 CE^2+BE^2,BC^2,根据勾股定理的逆定理判断即可;

(2)根据矩形的性质和平行四边形的判定,推出四边形 $DEBP$ 和四边形 $AECP$ 都是平行四边形,进而推出四边形 $EFPH$ 是平行四边形,再根据矩形的判定即可得出结论.

▶解:(1)$\triangle BEC$ 是直角三角形,且 $\angle BEC=90°$.

理由:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $\angle ADC=\angle EAB=90°$,$AD=BC=5$,

$CD=AB=2$,

由勾股定理得:$CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

同理可得 $BE=2\sqrt{5}$,

∴ $CE^2+BE^2=5+20=25$.

∵ $BC^2=5^2=25$,

∴ $BE^2+CE^2=BC^2$,

∴ $\triangle BEC$ 是直角三角形,且 $\angle BEC=90°$.

(2)四边形 $EFPH$ 为矩形.

证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AD=BC$,$AD\parallel BC$.

∴ $DE\parallel BP$,

∵ $DE=BP$,

∴ 四边形 $DEBP$ 是平行四边形,

∴ $BE\parallel DP$.

∵ $AD=BC$,$AD\parallel BC$,$DE=BP$,

∴ $AE=CP$,$AE\parallel CP$,

∴ 四边形 $AECP$ 是平行四边形,

∴ $AP\parallel CE$,

∴ 四边形 $EFPH$ 是平行四边形.

∵ $\angle BEC=90°$,

∴ 平行四边形 $EFPH$ 是矩形.

点方法

本题综合考查了勾股定理及其逆定理,矩形、平行四边形的性质和判定等知识,主要培养学生分析问题和解决问题的能力.

拔尖角度3 利用矩形的判定方法解决矩形有关的动态探索题(拓展点)

例10 如图2.5-10,在 $\triangle ABC$ 中,点 O 是 AC 边上一动点,过点 O 作直线 $MN\parallel BC$,设 MN 交 $\angle BCA$ 的平分线于点 E,交 $\angle ACH$ 的平分线于点 F.

(1)证明:$EO=FO$;

(2)当点 O 运动到何处时,四边形 $AECF$ 是矩形?简要说明理由.

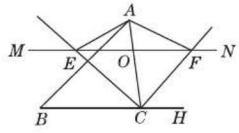


图2.5-10

导引:(1)根据条件证明 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OCF$ 都是等腰三角形,即 $OE=OC=OF$;(2)由(1)知 $OE=OC=OF$,只要 $OA=OC$,即当点 O 为 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 就是矩形.

(1)▶证明:∵ $MN\parallel BC$,

∴ $\angle CEO=\angle ECB$,$\angle CFO=\angle FCH$.

∵ CE,CF 分别是 $\angle BCA$,$\angle ACH$ 的平分线,

∴ $\angle ECO=\angle ECB$,$\angle FCO=\angle FCH$,

∴ $\angle CEO=\angle ECO$,$\angle CFO=\angle FCO$,

∴ $EO=OC$,$FO=OC$,

∴ $EO=FO$.

(2)▶解:当点 O 运动到 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下:由(1)知 $OE=OF$.

又∵ $AO=CO$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∵ $OE=OC$,

∴ $AC=EF$,

∴ 四边形 $AECF$ 是矩形.

点方法

求点 O 运动到何处时四边形 $AECF$ 是矩形,可以先把矩形当作已知条件,求出 O 点与 AC 的位置关系,然后添加条件,经过说理,证明四边形 $AECF$ 是矩形.这是条件探索题的一般思路.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见255页)

基础巩固练

1. 下列条件中,能判定四边形是矩形的是(　　)

A. 对角线互相平分

B. 对角线互相垂直平分

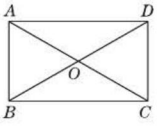
C. 对角线互相平分且相等

D. 对角线相等

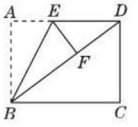
2. [中考 · 怀化]如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O, $\angle AOB = 60°$, $AC = 6$ cm,则 AB 的长是(　　)

A. 3 cm　　B. 6 cm

C. 10 cm　　D. 12 cm



(第2题图)



(第3题图)

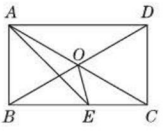
3. [中考 · 宜宾]如图,在长方形 $ABCD$ 中, $BC = 8$, $CD = 6$,将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠,使点 A 恰好落在对角线 BD 上 F 处,则 DE 的长是(　　)

A. 3　　B. $\frac{24}{5}$

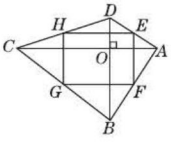
C. 5　　D. $\frac{89}{16}$

4. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 E,若 $\angle CAE = 15°$,则 $\angle BOC = $(　　)

A. 100°　B. 120°　C. 135°　D. 150°



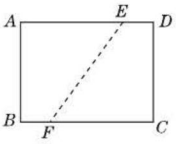
(第4题图)



(第5题图)

5. [中考 · 呼和浩特]如图,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 $AC \perp BD$,垂足为 O,点 E, F, G, H 分别为边 AD, AB, BC, CD 的中点. 若 $AC = 8$, $BD = 6$,则四边形 $EFGH$ 的面积为_____.

6. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$,将矩形折叠,使 C 点和 A 点重合,再展开,求折痕 EF 的长.

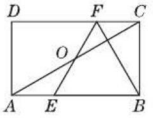


(第6题图)

7. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, CD 上的点, $AE = CF$,连接 EF, BF, EF 与对角线 AC 交于点 O,且 $BE = BF$, $\angle BEF = 2\angle BAC$.

(1)求证: $OF = OE$;

(2)若 $FC = 2$,求 AB 的长.

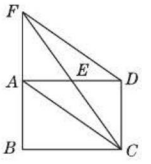


(第7题图)

8. [中考 · 连云港]如图,矩形 $ABCD$ 中, E 是 AD 的中点,延长 CE, BA 交于点 F,连接 AC, DF.

(1)求证:四边形 $ACDF$ 是平行四边形;

(2)当 CF 平分 $\angle BCD$ 时,写出 BC 与 CD 的数量关系,并说明理由.



(第8题图)

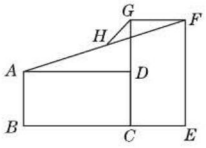
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

能力提升练

9. 由矩形的一个顶点向其所对的对角线引垂线，该垂线分直角为1∶3两部分，则该垂线与另一条对角线的夹角为(　　)

A. 22.5°　　B. 45°　　C. 30°　　D. 60°

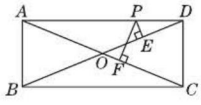
10. [中考·威海]矩形 $ABCD$ 与矩形 $CEFG$ 如图放置，点 B,C,E 共线，点 C,D,G 共线，连接 AF，取 AF 的中点 H，连接 GH. 若 $BC=EF=2$，$CD=CE=1$，则 $GH=$(　　)



(第10题图)

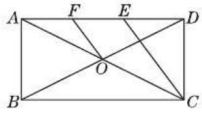
A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

11. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AD=12$，$AB=5$，P 是 AD 边上任意一点，AC 与 BD 交于点 O，$PE\perp BD$，$PF\perp AC$，E,F 分别是垂足，求 $PE+PF$ 的值.



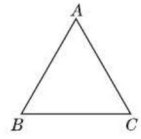
(第11题图)

12. 如图，已知在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 交于点 O，$CE=AE$，F 是 AE 的中点，$AB=4$，$BC=8$. 求线段 OF 的长.



(第12题图)

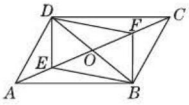
13. 工人师傅要把一块三角形的铁片经过切割后，再焊接成一个与其面积相等的矩形，这块铁片如图，请你帮他在图中画出切割线和焊接线，并说明理由.



(第13题图)

思维拓展练

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，若 E,F 是 AC 上的两个动点，分别从 A,C 两点以相同的速度向 C,A 运动，其速度为1 cm/s. 【导学号:8564979】



(第14题图)

(1)当 E 与 F 不重合时，四边形 $DEBF$ 是平行四边形吗？请说明理由；

(2)若 $BD=12$ cm，$AC=16$ cm，当运动时间为多少时，以 D,E,B,F 为顶点的四边形是矩形？

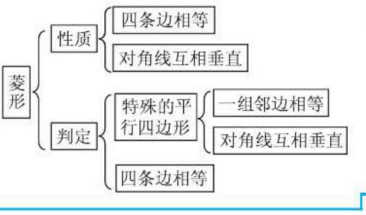
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.6 菱 形

热门话题
- 菱形的定义
- 菱形的性质
- 菱形的判定

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 菱形的定义与性质(重点)

点知识

1. **定义**:一组邻边相等的平行四边形叫作菱形.

要点精析

(1)菱形必须满足两个条件:一是平行四边形;二是一组邻边相等. 二者必须同时具备,缺一不可.

(2)菱形的定义既是菱形的基本性质,也是菱形的基本判定方法.

2. **性质**:

(1)菱形的四条边都**相等**,对角相等,对角线互相平分;

(2)菱形的对角线**互相垂直**;

(3)菱形是中心对称图形,对角线的交点是它的对称中心;

(4)菱形是轴对称图形,两条对角线所在的直线是它的对称轴.

3. **菱形的面积计算**:

(1)菱形的面积等于底乘高;

(2)菱形的面积等于对角线乘积的一半,对于对角线互相垂直的四边形的面积都可以用两条对角线乘积的一半来进行计算.

4. **拓展**:菱形的每一条对角线平分一组对角.

5. **易错警示**:

(1)菱形和矩形都是建立在平行四边形的基础上,矩形是附加一直角;而菱形是附加一组邻边相等;

(2)矩形的两条对角线把矩形分割成四个面积相等的等腰三角形,而菱形的两条对角线把菱形分割成四个全等的直角三角形;

(3)菱形的对称轴是两条对角线所在的直线,不要误认为两条对角线是它的对称轴.

拨考向

考查角度 1:利用菱形的性质求角的度数

例 1 已知,如图 2.6-1,在菱形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 BC,CD 上的点,且 $\angle B=\angle EAF=60°$,$\angle BAE=18°$,求 $\angle CEF$ 的度数.

导引:要求 $\angle CEF$ 的度数,由图可知 $\angle CEF+\angle AEF=\angle B+\angle BAE=60°+18°$,因此需求 $\angle AEF$ 的度数;由 $\angle EAF=60°$,猜想 $\triangle AEF$ 为等边三角形,所以只需证 $\triangle AEF$ 中有两边相等即可.

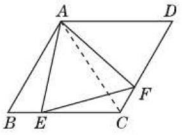
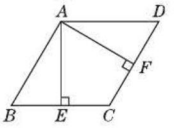


图 2.6-1

同类变式 (答案见 257 页) 练一练

1. 如图,菱形 $ABCD$ 中,$AE\perp BC$,垂足为 E,$AF\perp CD$,垂足为 F,且 $BE=EC$,$CF=DF$,求 $\angle EAF$ 的度数.



(第 1 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解：如图 2.6-1，连接 AC.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle B=60°$，

∴ $AB=BC=CD=DA$，$\angle D=\angle B=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 为等边三角形，

∴ $AB=AC$，$\angle B=\angle ACD=\angle BAC=60°$.

∵ $\angle EAF=60°$，

∴ $\angle BAE=\angle CAF$，

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$(ASA)，

∴ $AE=AF$.

又∵ $\angle EAF=60°$，

∴ $\triangle EAF$ 是等边三角形，

∴ $\angle AEF=60°$.

又∵ $\angle AEC=\angle B+\angle BAE=\angle AEF+\angle CEF$，

∴ $60°+18°=60°+\angle CEF$，

∴ $\angle CEF=18°$.

点 方法

在求有关菱形的角的问题时，由于菱形的对角线互相垂直且平分一组对角，因此通常通过连接对角线，把四边形问题转化为特殊三角形(等边三角形、直角三角形)问题来解答. 在菱形中如果出现“30°”“60°”“120°”“一边等于最短对角线”这些词语时，往往都指向等边三角形，我们则需用等边三角形知识来解决.

考查角度 2：利用菱形的性质求线段长

例 2 [中考·淮安] 如图 2.6-2，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 的长分别为 6 和 8，则这个菱形的周长是(　　)

A. 20　　B. 24　　C. 40　　D. 48

导引：因为菱形的四条边都相等，所以要求其周长就要先求出其边长. 由菱形的性质可知，其对角线互相垂直平分，因此可以在直角三角形中利用勾股定理来进行计算.

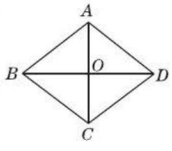


图 2.6-2

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵ $AC=6$，$BD=8$，

∴ $AO=3$，$BO=4$.

在 Rt$\triangle ABO$ 中，由勾股定理，得

$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

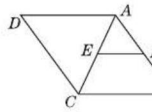
∴ 菱形的周长 $=4AB=4\times5=20$.

▶答案：A

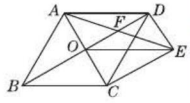
同类变式 (答案见 257 页)　练一练

2-1. [中考·贵阳] 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 是 AC 的中点，$EF\parallel CB$，交 AB 于点 F，如果 $EF=3$，那么菱形 $ABCD$ 的周长为(　　)

A. 24　　B. 18　　C. 12　　D. 9



(第 2-1 题图)



(第 2-2 题图)

2-2. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，过点 D 作 $DE\parallel AC$，且 $DE=\frac{1}{2}AC$，连接 CE，OE，连接 AE，交 OD 于点 F. 若 $AB=2$，$\angle ABC=60°$，则 AE 的长为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

点 方法

菱形的对角线将菱形分成四个全等的直角三角形，我们通常将菱形问题中求相关线段的长转化为求直角三角形中相关线段的长，再利用勾股定理来计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3：利用菱形的性质求面积

例3 [易错题] 如图2.6-3，在菱形$ABCD$中，$\angle BAD=120°$，$AC=6$ cm. 求此菱形的周长和面积.

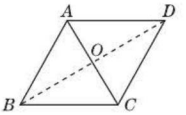


图2.6-3

导引：要求菱形的周长，需先求菱形的边长，而边长可通过菱形的性质和已知条件求出. 而要求菱形的面积，可以通过求菱形的对角线长，并利用菱形面积等于对角线乘积的一半求出.

▶解：如图2.6-3，连接BD，交AC于点O.

∵ 四边形$ABCD$是菱形，$\angle BAD=120°$，

∴ $AB=BC$，$\angle BAC=60°$，$AC\perp BD$，$AO=OC$，$BO=OD$，

∴ $\triangle ABC$是等边三角形.

∵ $AC=6$ cm，∴ $AB=BC=AC=6$ cm，

∴ 菱形的周长为$6\times4=24$(cm).

在$Rt\triangle ABO$中，$AB=6$ cm，$AO=\frac{1}{2}AC=3$ cm，

∴ $BO=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$(cm)，

∴ $BD=2BO=6\sqrt{3}$ cm，

∴ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$(cm^2).

同类变式 (答案见257页) 练一练

3. 菱形的周长为4，两个相邻内角的度数的比为1∶2，则该菱形的面积为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

点方法

求菱形面积的三种方法：

(1)将其看成平行四边形，用底与高的积来求；(2)利用对角线分得的四个全等直角三角形面积之和来求；(3)利用两条对角线乘积的一半来求.

说明：读者可利用(1)(2)两种方法试一试；注意应用(3)这种方法时不要忽视“一半”.

考查角度4：利用菱形的性质证明

例4 如图2.6-4①，在菱形$ABCD$中，E，F分别是CB，CD上的点，且$BE=DF$.

(1)求证：$AE=AF$.

(2)若$\angle B=60°$，点E，F分别是BC，CD的中点(如图2.6-4②)，求证：$\triangle AEF$为等边三角形.

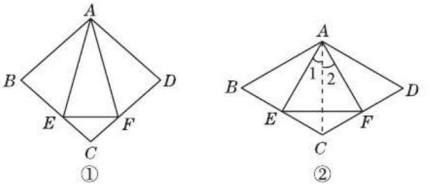
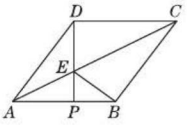


图2.6-4

同类变式 (答案见257页) 练一练

4. 如图，在菱形$ABCD$中，P是AB上的一个动点(不与A，B重合)，连接DP交对角线AC于点E，连接EB. 求证：$\angle APD=\angle EBC$.



(第4题图)

导引：(1)要证$AE=AF$，只需证$\triangle AEB\cong\triangle AFD$，由$BE=DF$及菱形的相关性质进行证明即可.

(2)如图2.6-4②，要证$\triangle AEF$为等边三角形，由$AE=AF$知，只需证$\angle EAF=60°$即可，要证$\angle EAF=60°$，只需证$\angle1=\angle2=30°$即可，这可由菱形及等边三角形相关知识证出.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶证明:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AB=AD$,$\angle B=\angle D$.

又∵ $BE=DF$,∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADF$,∴ $AE=AF$.

(2)如图 2.6-4②,连接 AC.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AB=BC$.

又∵ $\angle B=60°$,∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形,

∴ $\angle BAC=60°$.

又∵ E 为 BC 的中点,∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$.

同理可得 $\angle 2=30°$,∴ $\angle EAF=60°$.

又∵ $AE=AF$,∴ $\triangle AEF$ 为等边三角形.

点方法

菱形的每条对角线把菱形分成两个全等的等腰三角形(特殊时为两个全等的等边三角形),两条对角线把菱形分成四个全等的直角三角形.所以有关菱形的一些证明与计算问题常常与特殊三角形的有关问题综合在一起.

知识点 2 菱形的判定(重点)

点知识

判定方法:

(1)定义法:一组邻边相等的平行四边形是菱形.

(2)判定定理 1:四条边都相等的四边形是菱形;

判定定理 2:对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

菱形的判定

要点精析

(1)判断菱形时,一定要明确前提条件是从“四边形”出发的,还是从“平行四边形”出发的:

①若从“四边形”出发,则还需四条边相等;

②若从“平行四边形”出发,则还需一组邻边相等或对角线互相垂直.

(2)**判定菱形的方法**:①若用对角线进行判定:先证明四边形是平行四边形,再证明对角线互相垂直,或直接证明四边形的对角线互相垂直平分;②若用边进行判定:先证明四边形是平行四边形,再证明一组邻边相等,或直接证明四边形的四条边都相等.

拓考向

考查角度 1:利用定义判定菱形

例 5 已知:如图 2.6-5,在 $\triangle ABC$ 中,CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D,$DE\parallel AC$ 交 BC 于点 E,$DF\parallel BC$ 交 AC 于点 F.四边形 $DECF$ 是菱形吗?为什么?

导引:因为 $DE\parallel FC$,$DF\parallel EC$,所以四边形 $DECF$ 为平行四边形,再根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形求证即可.

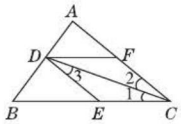


图 2.6-5

▶解:四边形 $DECF$ 是菱形.

理由如下:∵ $DE\parallel FC$,$DF\parallel EC$,

∴ 四边形 $DECF$ 为平行四边形.

由 $AC\parallel DE$,知 $\angle 2=\angle 3$.

∵ CD 平分 $\angle ACB$,∴ $\angle 1=\angle 2$,∴ $\angle 1=\angle 3$,∴ $DE=EC$,

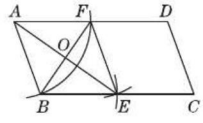
∴ 平行四边形 $DECF$ 为菱形.

同类变式 (答案见 257 页) 练一练

5. 如图,在 $\square ABCD$ 中,用直尺和圆规作 $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E,连接 EF.

(1)求证:四边形 $ABEF$ 为菱形;

(2)AE,BF 相交于点 O,若 $BF=6$,$AB=5$,求 AE 的长.



(第 5 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

菱形的定义也可以作为菱形的判定方法. 例题是在任意一个三角形中截取菱形的方法；变式题是在平行四边形中截取菱形的方法.

考查角度 2：利用四边都相等的四边形判定菱形

例 6 如图 2.6-6，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = CD$，点 E,F,G,H 分别是 AD,BD,BC,AC 的中点. 试说明：四边形 $EFGH$ 是菱形.

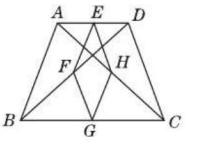


图 2.6-6

导引：由点 E,F,G,H 分别是 AD,BD,BC,AC 的中点，可知 EH,HG,GF,FE 分别是 $\triangle ACD$，$\triangle ABC$，$\triangle BCD$，$\triangle ABD$ 的中位线，∵ $AB = CD$，∴ $EH = HG = GF = FE$，根据“四条边相等的四边形是菱形”可得四边形 $EFGH$ 是菱形.

▶解：∵ 点 E,H 分别为 AD,AC 的中点，

∴ EH 为 $\triangle ACD$ 的中位线，

∴ $EH = \frac{1}{2}CD$.

同理可得：$EF = \frac{1}{2}AB$，$FG = \frac{1}{2}CD$，$HG = \frac{1}{2}AB$.

∵ $AB = CD$，∴ $EH = EF = FG = HG$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

点方法

有较多线段相等的条件时，我们可考虑通过证明四条边相等来证明这个四边形是菱形. 注意：本例也可以通过先证四边形 $EFGH$ 是平行四边形，再证一组邻边相等，只不过步骤复杂一点，读者不妨试一试.

考查角度 3：利用对角线互相垂直的平行四边形判定菱形

例 7 如图 2.6-7，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线 $EF \perp BD$，分别交 AD,BC 于点 E 和点 F，连接 BE,DF. 求证：四边形 $BEDF$ 是菱形.

导引：由 $EF \perp BD$ 可知，若要证明四边形 $BEDF$ 是菱形，需要先证明四边形 $BEDF$ 是平行四边形，而由题意易知 $DE \parallel BF$，只需要证明 $DE = BF$，即可判定四边形 $BEDF$ 是平行四边形，证明 $DE = BF$ 可通过证明 $\triangle OED \cong \triangle OFB$ 来实现.

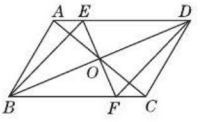


图 2.6-7

▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OB = OD$，$AD \parallel BC$，

∴ $\angle EDO = \angle FBO$，$\angle OED = \angle OFB$，

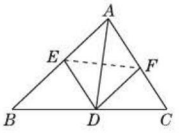
∴ $\triangle OED \cong \triangle OFB$，∴ $DE = BF$.

又∵ $DE \parallel BF$，∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

∵ $EF \perp BD$，∴ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

同类变式 (答案见 257 页) 练一练

7. [中考 · 淮安] 如图，在三角形纸片 ABC 中，AD 平分 $\angle BAC$，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 A 与点 D 重合，展开后折痕分别交 AB,AC 于点 E,F，连接 DE,DF. 求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.

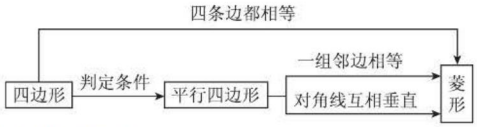


(第 7 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

(1)判定菱形的常见思路:



(2)**判定一个四边形是菱形的方法:** 若已知邻边相等要证明一个四边形是菱形,有两条路可走:①证明四条边都相等,利用四条边相等的四边形是菱形;②证明是平行四边形,利用邻边相等的平行四边形是菱形.若条件中出现两条对角线,要证明一个四边形是菱形,可考虑利用:①对角线互相垂直平分的四边形是菱形;②对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拔尖角度1 菱形的性质与判定的综合

例8 [中考·泰安]如图2.6-8,在四边形$ABCD$中,$AB=AD$,$CB=CD$,E是CD上一点,BE交AC于F,连接DF.

(1)证明:$\angle BAC=\angle DAC$,$\angle AFD=\angle CFE$;

(2)若$AB\parallel CD$,试证明:四边形$ABCD$是菱形;

(3)在(2)的条件下,试确定E点的位置,使$\angle EFD=\angle BCD$,并说明理由.

导引:(1)首先利用三边对应相等的两三角形全等证明$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,可得$\angle BAC=\angle DAC$,再证明$\triangle ABF\cong\triangle ADF$,可得$\angle AFD=\angle AFB$.进而得到$\angle AFD=\angle CFE$;

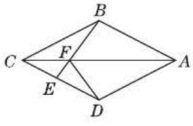


图2.6-8

(2)首先证明$\angle CAD=\angle ACD$,再根据等角对等边可得$AD=CD$,然后由条件$AB=AD$,$CB=CD$可得$AB=CB=CD=AD$,进而可得四边形$ABCD$是菱形;

(3)当$BE\perp CD$时,首先证明$\triangle BCF\cong\triangle DCF$,可得$\angle CBF=\angle CDF$,再根据$BE\perp CD$可得$\angle BEC=\angle DEF=90°$,进而得到$\angle EFD=\angle BCD$.

(1)▶证明:在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中,

$$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$,$\therefore\angle BAC=\angle DAC$.

在$\triangle ABF$和$\triangle ADF$中,$\begin{cases}AB=AD,\\\angle BAF=\angle DAF,\\AF=AF,\end{cases}$

$\therefore\triangle ABF\cong\triangle ADF$,$\therefore\angle AFB=\angle AFD$.

又$\because\angle AFB=\angle CFE$,$\therefore\angle AFD=\angle CFE$.

(2)▶证明:$\because AB\parallel CD$,$\therefore\angle BAC=\angle ACD$.

又$\because\angle BAC=\angle DAC$,$\therefore\angle DAC=\angle ACD$,

$\therefore AD=CD$.又$\because AB=AD$,$CB=CD$,

$\therefore AB=CB=CD=AD$,

$\therefore$四边形$ABCD$是菱形.

(3)▶解:当$BE\perp CD$时,$\angle EFD=\angle BCD$.

理由:$\because$四边形$ABCD$为菱形,

$\therefore\angle BCF=\angle DCF$.

在$\triangle BCF$和$\triangle DCF$中,$\begin{cases}CB=CD,\\\angle BCF=\angle DCF,\\CF=CF,\end{cases}$

$\therefore\triangle BCF\cong\triangle DCF$,$\therefore\angle CBF=\angle CDF$.

$\because BE\perp CD$,$\therefore\angle BEC=\angle DEF=90°$,

$\therefore\angle EFD=\angle BCD$.

点方法

此题主要考查了菱形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质,这些都是证明线段和角相等的重要工具.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拔尖角度2 巧借图形的全等变换判定菱形

例9 将平行四边形纸片 $ABCD$ 按如图2.6-9所示的方式折叠，使点 C 与点 A 重合，点 D 落到点 D' 处，折痕为 EF.

(1)求证：$\triangle ABE \cong \triangle AD'F$；

(2)连接 CF，判断四边形 $AECF$ 是什么特殊四边形？并说明理由.

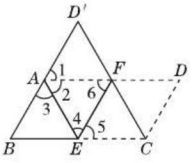


图2.6-9

导引：(1)由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，结合折叠前后的图形，容易得到 $\angle B = \angle D'$，$AB = AD'$，$\angle 3 = \angle 1$，这样可证明 $\triangle ABE \cong \triangle AD'F$；(2)结合(1)的结论，利用“四条边相等的四边形是菱形”解决问题.

(1)▶证明：由折叠的性质，得 $\angle D = \angle D'$，$CD = AD'$，$\angle D'AE = \angle DCE$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle B = \angle D$，$AB = CD$，$\angle BCD = \angle BAD$.

∴ $\angle B = \angle D'$，$AB = AD'$，$\angle D'AE = \angle BAD$，

即 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$，

∴ $\angle 1 = \angle 3$，

∴ $\triangle ABE \cong \triangle AD'F$.

(2)▶解：四边形 $AECF$ 是菱形. 理由如下：

由折叠的性质，得 $AE = EC$，$\angle 4 = \angle 5$，$AF = FC$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$，

∴ $\angle 6 = \angle 5 = \angle 4$，

∴ $FC = AF = AE = EC$，

∴ 四边形 $AECF$ 是菱形.

点方法

将图形进行折叠后就会出现一些相等的线段与相等的角(折痕是角平分线)，从而为证明线段、角的相等创造了条件.

拔尖角度3 矩形与菱形之间的规律探究

例10 矩形、菱形由于其特殊的性质，为拼图提供了方便，因而墙面瓷砖一般设计为矩形，图案也以菱形居多. 如图2.6-10是一种长30 cm，宽20 cm的矩形瓷砖，E，F，G，H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，阴影部分为淡黄色，中间部分为白色，现有一面长4.2 m，宽2.8 m的墙壁准备贴瓷砖.

问：这面墙壁最少要贴这种瓷砖多少块？全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现多少个最小的面积相等的菱形？其中淡黄色的菱形有多少个？

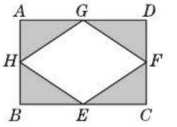


图2.6-10

导引：根据墙壁的长与宽以及矩形瓷砖的长与宽进行计算，求出所需要贴的瓷砖的行数与列数，然后进行计算即可得解；得到的菱形有白色的菱形与淡黄色的菱形两种，求出个数即可得解.

▶解：4.2 m = 420 cm，2.8 m = 280 cm，

$420 \div 30 = 14$，$280 \div 20 = 14$，

$14 \times 14 = 196$(块)；

由题意易得 $EF = FG = GH = HE$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

∵ 每一块瓷砖都有1个白色菱形，

∴ 白色菱形有196个.

∵ E，F，G，H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，

∴ 淡黄色菱形有 $(14-1)\times(14-1) = 169$(个)，且易知淡黄色菱形与白色菱形面积相等，

∴ 最多会出现最小的面积相等的菱形：

$196 + 169 = 365$(个).

答：这面墙壁最少要贴这种瓷砖196块，全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现365个最小的面积相等的菱形，其中淡黄色的菱形有169个.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 （答案见257页）

基础巩固练

1. [中考·十堰]菱形不具备的性质是(　　)

A. 四条边都相等

B. 对角线一定相等

C. 是轴对称图形

D. 是中心对称图形

2. [中考·河北]求证:菱形的两条对角线互相垂直.

已知:如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,对角线 AC,BD 交于点 O. 求证:$AC\perp BD$.

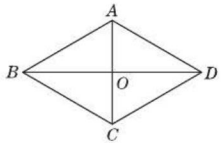
以下是排乱的证明过程:①又 $BO=DO$,②$\therefore AO\perp BD$,即$AC\perp BD$.③$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,④$\therefore AB=AD$. 证明步骤正确的顺序是(　　)

A. ③→②→①→④

B. ③→④→①→②

C. ①→②→④→③

D. ①→④→③→②

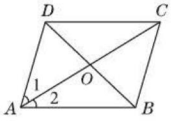


(第2题图)

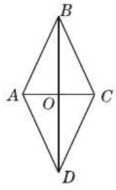
3. [中考·河南]如图,在$\square ABCD$中,对角线 AC,BD 相交于点 O,添加下列条件不能判定$\square ABCD$是菱形的只有(　　)

A. $AC\perp BD$　　B. $AB=BC$

C. $AC=BD$　　D. $\angle 1=\angle 2$



(第3题图)



(第4题图)

4. [中考·孝感]如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,$AC=10$,$BD=24$,则菱形 $ABCD$ 的周长为(　　)

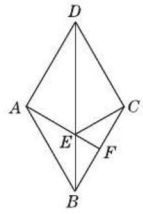
A. 52　　B. 48　　C. 40　　D. 20

5. [中考·菏泽]在菱形 $ABCD$ 中,$\angle A=60°$,其周长为 24 cm,则菱形的面积为_____cm^2.

6. [中考·贵阳]已知:如图,在菱形 $ABCD$ 中,F 是 BC 上任意一点,连接 AF 交对角线 BD 于点 E,连接 EC.

(1)求证:$AE=EC$;

(2)当$\angle ABC=60°$,$\angle CEF=60°$时,点 F 在线段 BC 上的什么位置?说明理由.

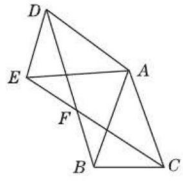


(第6题图)

7. [中考·毕节]如图,已知$\triangle ABC$中,$AB=AC$,把$\triangle ABC$绕 A 点沿顺时针方向旋转得到$\triangle ADE$,连接 BD,CE 交于点 F.

(1)求证:$\triangle AEC\cong\triangle ADB$;

(2)若 $AB=2$,$\angle BAC=45°$,当四边形 $ADFC$ 是菱形时,求 BF 的长.



(第7题图)

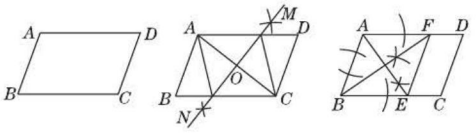
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

8. [中考 · 玉林] 如图,在给定的一张平行四边形纸片 $ABCD$ 上作一个菱形. 甲、乙两人的作法如下:

甲:连接 AC,作 AC 的垂直平分线 MN,分别交 AD,AC,BC 于 M,O,N,连接 AN,CM,则四边形 $ANCM$ 是菱形.

乙:分别作 $\angle BAD$,$\angle ABC$ 的平分线 AE,BF,分别交 BC,AD 于 E,F,连接 EF,则四边形 $ABEF$ 是菱形. 根据两人的作法可判断(　　)



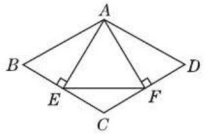
(第 8 题图)

A. 甲正确,乙错误　　B. 乙正确,甲错误

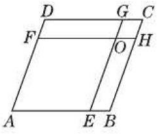
C. 甲、乙均正确　　D. 甲、乙均错误

9. [中考 · 兰州] 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$\angle B=60°$,$AE\perp BC$,$AF\perp CD$,垂足分别为 E,F,连接 EF,则 $\triangle AEF$ 的面积是(　　)

A. $4\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$



(第 9 题图)

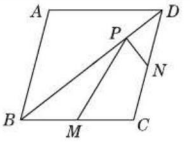


(第 10 题图)

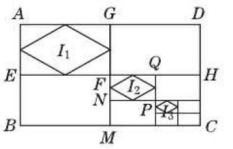
10. [中考 · 台州] 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AB=8$,点 E,F 分别在 AB,AD 上,且 $AE=AF$,过点 E 作 $EG\parallel AD$ 交 CD 于点 G,过点 F 作 $FH\parallel AB$ 交 BC 于点 H,EG 与 FH 交于点 O. 当四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 的周长之差为 12 时,AE 的值为(　　)

A. 6.5　　B. 6　　C. 5.5　　D. 5

11. [中考 · 内江] 如图,已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线长分别为 6 和 8,M,N 分别是边 BC,CD 的中点,P 是对角线 BD 上一点,则 $PM+PN$ 的最小值是_____.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

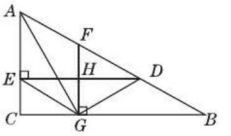
12. [中考 · 本溪] 如图,已知矩形 $ABCD$ 相邻两边的长分别为 a,b. 连接其对边中点,得到四个矩形,顺次连接矩形 $AEFG$ 各边中点,得到菱形 I_1;连接矩形 $FMCH$ 对边中点,又得到四个矩形,顺次连接矩形 $FNPQ$ 各边中点,得到菱形 I_2;…. 如此操作下去,得到菱形 I_n,则 I_n 的面积是_____.

13. [中考 · 泰安] 如图,$\triangle ABC$ 中,D 是 AB 上一点,$DE\perp AC$ 于点 E,F 是 AD 的中点,$FG\perp BC$ 于点 G,与 DE 交于点 H,若 $FG=AF$,AG 平分 $\angle CAB$,连接 GE,GD.

(1) 求证:$\triangle ECG\cong\triangle GHD$;

(2) 小亮同学经过探究发现:$AD=AC+EC$. 请你帮助小亮同学证明这一结论.

(3) 若 $\angle B=30°$,判定四边形 $AEGF$ 是否为菱形,并说明理由.



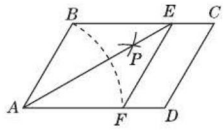
(第 13 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. [中考·滨州]如图,在$\square ABCD$中,以点A为圆心,AB长为半径画弧交AD于点F,再分别以点B,F为圆心,大于$\frac{1}{2}BF$的相同长为半径画弧,两弧交于点P;连接AP并延长交BC于点E,连接EF,则所得四边形$ABEF$是菱形.

(1)根据以上尺规作图的过程,求证:四边形$ABEF$是菱形;

(2)若菱形$ABEF$的周长为16,$AE=4\sqrt{3}$,求$\angle C$的大小.



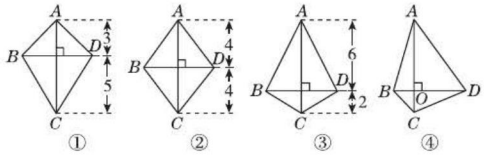
(第14题图)

15. 已知线段$AC=8$,$BD=6$.

(1)已知线段$AC\perp BD$. 设图①②③中的四边形$ABCD$的面积分别为S_1,S_2和S_3,则$S_1=$_____,$S_2=$_____,$S_3=$___;

(2)如图④,对于线段AC与线段BD垂直相交(垂足O不与点A,C,B,D重合)的任意情形,请你就四边形$ABCD$面积的大小提出猜想,并证明你的猜想;

(3)当线段BD与AC(或CA)的延长线垂直相交于点O时,猜想顺次连接点A,B,C,D,A所围成的封闭图形的面积是多少. 直接写出你的猜想,不必证明你的猜想.



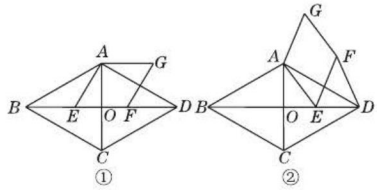
(第15题图)

思维拓展练

16. [中考·辽宁]在菱形$ABCD$中,$\angle ABC=60°$,对角线AC,BD相交于点O,点E是线段BD上一动点(不与点B,D重合),连接AE,以AE为边在AE的右侧作菱形$AEFG$,且$\angle AEF=60°$.

(1)如图①,若点F落在线段BD上,则线段FE与线段FD的数量关系为_____.

(2)如图②,若点F不在线段BD上,连接FD,(1)中的结论是否成立?若成立,请证明;若不成立,请说明理由.



(第16题图)

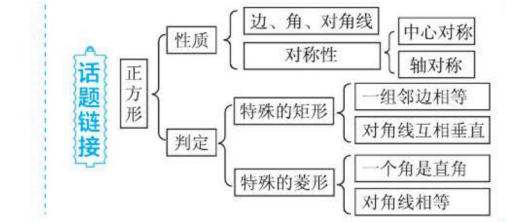
我的错题笔记

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2.7 正方形

热门话题
- 正方形的性质
- 正方形的判定

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 正方形的定义及性质(重点)

点知识

1. **正方形的定义**:我们把有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形叫作正方形.

要点精析

正方形的四条边相等,说明正方形是特殊的菱形;正方形的四个角都是直角,说明正方形是特殊的矩形,即:正方形既是特殊的矩形,又是特殊的菱形.

2. **正方形的性质**:

(1)具有矩形、菱形、平行四边形的一切性质,即:①正方形的四条边都相等,四个角都是直角;②正方形的对角线相等,且互相垂直平分;③正方形是中心对称图形,对角线的交点是它的对称中心;④正方形是轴对称图形,两条对角线所在直线,以及过每一组对边中点的直线都是它的对称轴.

(2)**正方形的特殊性质**:①正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形,两条对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形;②周长相等的四边形中,正方形的面积最大.

拨考向

考查角度 1:利用正方形的性质计算线段的长

例 1 如图 2.7-1,正方形 $ABCD$ 的边长为 1 cm,AC 为对角线,AE 平分 $\angle BAC$,$EF \perp AC$,垂足为 F,求 BE 的长.

导引:线段 BE 是 $Rt\triangle ABE$ 的一边,但由于 AE 未知,不能直接用勾股定理求 BE,由条件可证 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$,问题转化为求 EF 的长,结合已知条件易获解.

解:∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,∴ $\angle B = 90°$,$\angle ACB = 45°$,$AB = BC = 1$ cm.

∵ $EF \perp AC$,∴ $\angle EFA = \angle EFC = 90°$.

又∵ $\angle ECF = 45°$,∴ $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形,∴ $EF = FC$.

∵ $\angle BAE = \angle FAE$,$\angle B = \angle EFA = 90°$,$AE = AE$,∴ $\triangle ABE \cong \triangle AFE$,

∴ $AB = AF = 1$ cm,$BE = EF$,∴ $FC = BE$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$(cm),

∴ $FC = AC - AF = (\sqrt{2} - 1)$ cm,∴ $BE = (\sqrt{2} - 1)$ cm.

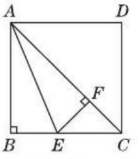


图 2.7-1

点方法

正方形的对角线将正方形分成的都是等腰直角三角形,在正方形中求线段长,一般都用到直角三角形的性质——勾股定理.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：利用正方形的性质证明线段之间的关系

例2 已知：如图2.7-2，在正方形$ABCD$中，对角线AC与BD的交点为O，E是OB上的一点，$DG\perp AE$于G，DG交AO于F，求证：$EF/\!/AB$.

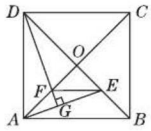


图2.7-2

导引：要证$EF/\!/AB$，由于$\angle OBA=45°$，即需证$\angle OEF=45°$，由于$\angle EOF=90°$，即要证明$OE=OF$，而$OE=OF$可通过证明$\triangle AEO\cong\triangle DFO$获得.

▶证明：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle AOE=\angle DOF=90°$，$AO=DO$，$\angle OBA=45°$.

又∵$DG\perp AE$，

∴$\angle EAO+\angle AEO=\angle EDG+\angle GED=90°$.

∵$\angle AEO=\angle GED$，∴$\angle EAO=\angle FDO$，

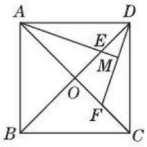
∴$\triangle AEO\cong\triangle DFO$(ASA)，

∴$OE=OF$，∴$\angle OEF=45°$，

∴$\angle OEF=\angle OBA$，∴$EF/\!/AB$.

同类变式 (答案见259页) 练一练

2. 如图，在正方形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，E，F分别在OD，OC上，且$DE=CF$，连接DF，AE，AE的延长线交DF于点M. 求证：$AM\perp DF$.



（第2题图）

拨技巧

通过证明三角形全等得到边和角相等，再进一步得到平行或垂直，这种方法是有关正方形中证边或角相等的最常用的方法，而正方形的性质为证明三角形全等提供了条件.

考查角度3：利用正方形的性质求面积

例3 ［中考·山西］如图2.7-3，点E在正方形$ABCD$的对角线AC上，且$EC=2AE$，直角三角形FEG的两直角边EF，EG分别交BC，DC于点M，N. 若正方形$ABCD$的边长为a，则重叠部分四边形$EMCN$的面积为(　　)

A. $\frac{2}{3}a^2$　　B. $\frac{1}{4}a^2$　　C. $\frac{5}{9}a^2$　　D. $\frac{4}{9}a^2$

导引：过点E作$EP\perp BC$于点P，$EQ\perp CD$于点Q，易得$\triangle EPM\cong\triangle EQN$，利用四边形$EMCN$的面积等于正方形$PCQE$的面积求解.

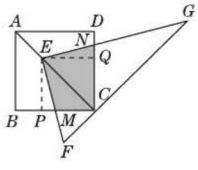


图2.7-3

如图2.7-3，过点E作$EP\perp BC$于点P，$EQ\perp CD$于点Q，

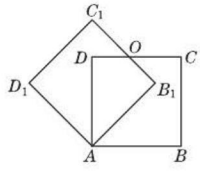
∵四边形$ABCD$是正方形，∴$\angle BCD=90°$.

又∵$\angle EPM=\angle EQN=90°$，∴$\angle PEQ=90°$，

∴$\angle PEM+\angle MEQ=90°$.

同类变式 (答案见259页) 练一练

3. ［中考·枣庄］如图，边长为1的正方形$ABCD$绕点A逆时针旋转45°得到正方形$AB_1C_1D_1$，边B_1C_1与CD交于点O，则四边形AB_1OD的面积是(　　)



（第3题图）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{7}{16}$

C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 三角形 FEG 是直角三角形，

∴ $\angle NEF=\angle NEQ+\angle MEQ=90°$，∴ $\angle PEM=\angle NEQ$.

∵ CA 是 $\angle BCD$ 的平分线，$\angle EPC=\angle EQC=90°$，∴ $EP=EQ$，

∴ 四边形 $PCQE$ 是正方形.

在 $\triangle EPM$ 和 $\triangle EQN$ 中，$\begin{cases}\angle PEM=\angle QEN,\\ EP=EQ,\\ \angle EPM=\angle EQN,\end{cases}$

∴ $\triangle EPM\cong\triangle EQN$(ASA)，

∴ $S_{\triangle EQN}=S_{\triangle EPM}$，

∴ 四边形 $EMCN$ 的面积等于正方形 $PCQE$ 的面积.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a，

∴ $AC=\sqrt{2}a$，

∵ $EC=2AE$，∴ $EC=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$，

∴ $EP=PC=\frac{2}{3}a$，

∴ 正方形 $PCQE$ 的面积 $=\frac{2}{3}a\times\frac{2}{3}a=\frac{4}{9}a^2$，

∴ 四边形 $EMCN$ 的面积 $=\frac{4}{9}a^2$. ▶答案：D

点方法

本例解法在于巧用**割补法**，将分散的图形拼合在一起，将不规则图形的面积集中到一个规则的图形中，利用了正方形及三角形全等的判定与性质求解，解答过程体现了**转化思想**.

考查角度 4：利用正方形的对称性解决两线段和的最小值问题

例 4 [中考 · 安顺] 如图 2.7-4，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 BC 上的一点，$BE=1$，F 为 AB 上的一点，$AF=2$，P 为 AC 上一个动点，则 $PF+PE$ 的最小值为_____.

导引：找到点 F 关于 AC 的对称点 M，连接 EM，计算 EM 的长即可.

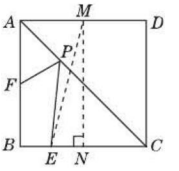


图 2.7-4

解题过程如下：

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，$BE=1$，$AF=2$，

∴ 如图 2.7-4，在 AD 上取一点 M，使 $AM=2$，

点 M 即为点 F 关于 AC 的对称点.

连接 EM，过 M 点作 $MN\perp BC$ 于 N，

由题意可知 $EN=BN-BE=AM-BE=2-1=1$，

又∵ $MN=4$，∴ $EM=\sqrt{EN^2+MN^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$. ▶答案：$\sqrt{17}$

点方法

正方形是特殊的平行四边形，正方形关于它的对角线所在直线对称. 求两线段和的最小值，往往要通过轴对称的方式将同侧两点转化为异侧两点，通过两点间线段最短求得两线段和的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 正方形的判定(难点)

点知识

1. **判定方法**:
   (1)从四边形出发:①有四条边相等,四个角都是直角的四边形是正方形;②对角线互相平分、垂直且相等的四边形是正方形.
   (2)从平行四边形出发:①有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形;②对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形.
   (3)从矩形出发:①有一组邻边相等的矩形是正方形;②对角线互相垂直的矩形是正方形.
   (4)从菱形出发:①有一个角是直角的菱形是正方形;②对角线相等的菱形是正方形.
2. **所学四边形间的关系**:(1)四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的包含关系如图2.7-5.



图2.7-5

(2)四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的转化关系如图2.7-6.

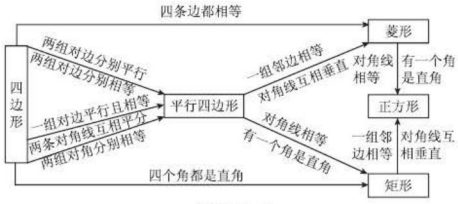


图2.7-6

点考向

考查角度1:利用矩形与正方形的关系证明正方形

例5 [中考·铁岭]如图2.7-7,在△ABC中,$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,点O为AB的中点,连接DO并延长到点E,使$OE=OD$,连接AE,BE.

(1)求证:四边形$AEBD$是矩形;

(2)当△ABC满足什么条件时,矩形$AEBD$是正方形?并说明理由.

导引:(1)利用平行四边形的判定方法首先得出四边形$AEBD$是平行四边形,进而由等腰三角形的性质得出$\angle ADB=90°$,即可证得结论;(2)当$\angle BAC=90°$时,利用等腰直角三角形的性质得出$AD=BD=CD$,进而利用正方形的判定方法得出矩形$AEBD$是正方形.

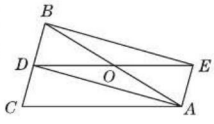


图2.7-7

(1)▶证明:∵点O为AB的中点,$OE=OD$,

∴四边形$AEBD$是平行四边形.

∵$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,

∴$AD\perp BC$,∴$\angle ADB=90°$,∴平行四边形$AEBD$是矩形.

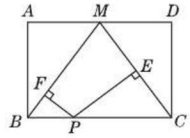
(2)▶解:当$\angle BAC=90°$时,矩形$AEBD$是正方形.

理由:∵$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,∴$AD=BD=CD$,

∵由(1)得四边形$AEBD$是矩形,∴矩形$AEBD$是正方形.

同类变式 (答案见259页) 练一练

5. 如图,点M是矩形$ABCD$的边AD的中点,点P是BC边上的一动点,$PE\perp CM$,$PF\perp BM$,垂足分别为E,F.
   (1)当矩形$ABCD$的长与宽满足什么条件时,四边形$PEMF$为矩形?试说明理由.
   (2)在(1)中,当点P运动到什么位置时,矩形$PEMF$为正方形?试说明理由.



(第5题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

本题运用**演绎推理法**解答，根据对角线互相平分判定四边形 $AEBD$ 是平行四边形，再由等腰三角形三线合一的性质证直角，从而判定四边形 $AEBD$ 是矩形，添加条件后可证得矩形的一组邻边相等，即可判定该四边形是正方形.

考查角度 2：利用菱形与正方形的关系证明正方形

例 6 如图 2.7-8，在$\square ABCD$中，对角线 AC，BD 交于点 O，E 是 BD 的延长线上的点，且 $EA=EC$.

(1)求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2)若$\angle DAC=\angle EAD+\angle AED$，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

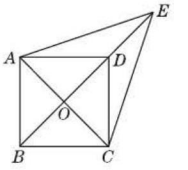


图 2.7-8

导引：(1)首先根据平行四边形的性质可得 $AO=CO$，再由 $EA=EC$ 可得$\triangle EAC$是等腰三角形，然后根据等腰三角形三线合一的性质可得 $EO\perp AC$，根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形可证出结论；

(2)首先根据角的关系得出 $AO=DO$，进而得到 $AC=BD$，再根据对角线相等的菱形是正方形可得到结论.

▶证明：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AO=CO$.

∵ $EA=EC$，∴ $EO\perp AC$，即 $BD\perp AC$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)∵ $\angle ADO=\angle EAD+\angle AED$，

$\angle DAC=\angle EAD+\angle AED$，

∴ $\angle ADO=\angle DAC$，∴ $AO=DO$，

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC=2AO$，$BD=2DO$，

∴ $AC=BD$，∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

点方法

要证$\square ABCD$是正方形，有三种途径可走：即在平行四边形、菱形、矩形的基础上，找各需补充的对角线的条件进行证明；若要证明$\square ABCD$是菱形，由于题中条件与对角线相关，则需证 $AC\perp BD$.

考查角度 3：利用中位线定理判定四边形形状

例 7 如图 2.7-9，在四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$，$AC=BD$，E，F，G，H 分别为 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

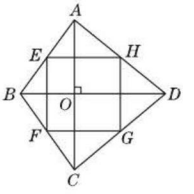


图 2.7-9

导引：要证四边形 $EFGH$ 是正方形，以四边形、平行四边形、矩形、菱形为基础都可以证出所要证的结论；若以四边形为基础，则只需证明四条边相等，四个角是直角即可.

▶证明：∵ E，F，G，H 分别为四边形 $ABCD$ 各边的中点，

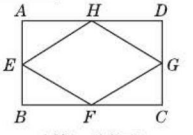
∴ $EF/\!/GH/\!/AC$，$FG/\!/EH/\!/BD$，且$EF=GH=\frac{1}{2}AC$，$FG=EH=\frac{1}{2}BD$.

又∵ $AC\perp BD$，$AC=BD$，∴ $\angle HEF=\angle EFG=\angle GHE=\angle FGH=90°$，$EF=FG=GH=HE$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

同类变式 (答案见 259 页) 练一练

7. [中考 · 无锡] 如图，已知矩形 $ABCD$ 的对角线长为 8 cm，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，则四边形 $EFGH$ 的周长等于_____cm.



(第 7 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

几种常见的中点四边形的命题：

(1)连接四边形各边中点的四边形是平行四边形；(2)连接对角线互相垂直的四边形各边中点的四边形是矩形；(3)连接对角线相等的四边形各边中点的四边形是菱形；(4)连接平行四边形各边中点的四边形是平行四边形；(5)连接矩形各边中点的四边形是菱形；(6)连接菱形各边中点的四边形是矩形.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 巧借正方形的性质证明线段的和差关系

例8 已知：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB，DC（或它们的延长线）于点 M，N. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时（如图2.7-10①），易证 $BM+DN=MN$.

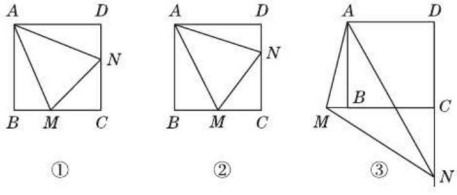


图2.7-10

(1)当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时（如图2.7-10②），线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明.

(2)当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图2.7-10③的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？请写出猜想，并加以证明.

导引：(1) $BM+DN=MN$. 证得 $\triangle AEM\cong\triangle ANM$，从而证得 $ME=MN$，再进一步可得出 $BM+DN=MN$. (2) $DN-BM=MN$. 证明方法与(1)类似.

▶解：(1) $BM+DN=MN$. 证明：

如图2.7-11①，在 MB 的延长线上截取 BE，使 $BE=DN$，连接 AE.

易证：$\triangle ABE\cong\triangle ADN$，

$\therefore AE=AN$，$\angle EAB=\angle NAD$.

$\because \angle BAD=90°$，$\angle NAM=45°$，

$\therefore \angle BAM+\angle NAD=45°$，

$\therefore \angle EAB+\angle BAM=45°$，

$\therefore \angle EAM=\angle NAM$.

又$\because AM$ 为公共边，

$\therefore \triangle AEM\cong\triangle ANM$，

$\therefore ME=MN$，$\therefore ME=BE+BM=DN+BM$，

$\therefore BM+DN=MN$.

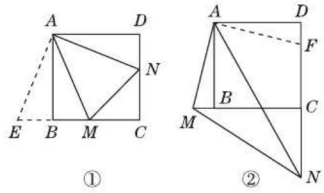


图2.7-11

(2) $DN-BM=MN$. 证明：

如图2.7-11②，在 DC 上截取 DF，使 $DF=BM$，连接 AF.

$\because AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle ADF$（SAS），

$\therefore AM=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$，

$\therefore \angle MAB+\angle BAF=\angle FAD+\angle BAF=90°$，

即 $\angle MAF=\angle BAD=90°$.

又$\because \angle MAN=45°$，

$\therefore \angle NAF=\angle MAN=45°$.

又$\because AN=AN$，

$\therefore \triangle MAN\cong\triangle FAN$，$\therefore MN=FN$，

$\therefore MN=DN-DF=DN-BM$，即 $DN-BM=MN$.

点方法

证明线段的和、差问题的基本方法是**截长补短法**，即在长的线段上截取，将短的线段延长，转化为线段相等的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2 正方形的性质与判定的综合

例9 如图2.7-12,正方形$ABCD$的边长为6.菱形$EFGH$的三个顶点E,G,H分别在正方形$ABCD$的边AB,CD,DA上,且$AH=2$,连接CF.

(1)当$DG=2$时,求证:菱形$EFGH$为正方形;

(2)设$DG=x$,试用含x的代数式表示$\triangle FCG$的面积.

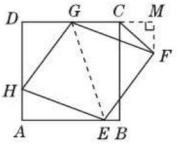


图2.7-12

导引:(1)由于四边形$ABCD$为正方形,四边形$EFGH$为菱形,因此$\angle D=\angle A=90°$,$HG=HE$,而$AH=DG=2$,易证$\triangle DGH\cong\triangle AHE$,从而有$\angle DHG=\angle AEH$,等量代换可得$\angle AHE+\angle DHG=90°$,易证四边形$EFGH$为正方形;(2)欲求$\triangle FCG$的面积,由已知易求得$CG$的长,只需求出$GC$边上的高即可.

(1)▶证明:∵四边形$ABCD$是正方形,

∴$\angle D=\angle A=90°$.

∵四边形$EFGH$是菱形,∴$HG=EH$.

∵$DG=AH=2$,∴$\mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$,

∴$\angle DHG=\angle AEH$.

∵$\angle AEH+\angle AHE=90°$,

∴$\angle DHG+\angle AHE=90°$,

∴$\angle GHE=90°$,

∴菱形$EFGH$为正方形.

(2)▶解:过F作$FM\perp CD$,交DC的延长线于M,连接GE,如图2.7-12所示.

∵$CD/\!/AB$,∴$\angle AEG=\angle MGE$.

∵$GF/\!/HE$,∴$\angle HEG=\angle FGE$,

∴$\angle AEH=\angle FGM$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AHE$和$\mathrm{Rt}\triangle MFG$中,

∵$\begin{cases}\angle A=\angle M=90°,\\ \angle AEH=\angle MGF,\\ HE=FG,\end{cases}$

∴$\mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle MFG$,

∴$MF=AH=2$.

∵$DG=x$,∴$CG=6-x$,

∴$S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}CG\cdot MF=6-x$.

点拨 方法

解答本题采用了**演绎推理法**和**构造法**,(1)由于四边形$EFGH$为菱形,只需再证有一个内角是直角即可;(2)解题的关键是作辅助线:过F作$FM\perp DC$,交DC的延长线于M,连接GE,构造全等三角形.

拔尖角度3 与正方形有关的规律探究

例10 [中考·湛江]如图2.7-13,设四边形$ABCD$是边长为1的正方形,以对角线AC为边作第二个正方形$ACEF$,再以对角线AE为边作第三个正方形$AEGH$,…,如此下去,若正方形$ABCD$的边长记为a_1,按上述方法所作的正方形的边长依次为$a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n$,则$a_n=$_____.

导引:由勾股定理可计算出部分正方形的边长,从而发现其中的规律,进行解答.

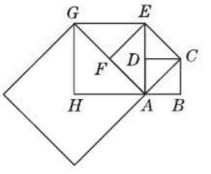


图2.7-13

由勾股定理得,$a_2=\sqrt{2}=(\sqrt{2})^1$,$a_3=2=(\sqrt{2})^2$,$a_4=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$,发现规律,得到一般性结论:$a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$.

▶答案:$(\sqrt{2})^{n-1}$

点拨 方法

这是一道规律探究题,主要考查了学生的观察、分析、计算、归纳能力,找到规律是解答本题的关键.**从特殊到一般**进行规律探究.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

数学素养提升

解密中考——"习题改造"

习题展示

例1 如图2.7-14，四边形$ABCD$是正方形，点E是边BC的中点，$\angle AEF=90°$，且EF交正方形外角的平分线CF于点F. 求证：$AE=EF$.（提示：取AB的中点M，连接EM.）

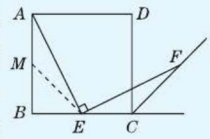


图2.7-14

【关键点】关键条件：外角平分线，$\angle AEF=90°$；关键思路：取AB中点M，连接ME，证明$\triangle AME\cong\triangle ECF$.

改造展示

改造一：变特殊为一般

例2 ［中考·黄石］如图2.7-15，四边形$ABCD$是正方形，点E是BC边上任意一点，$\angle AEF=90°$，且EF交正方形外角的平分线CF于点F.

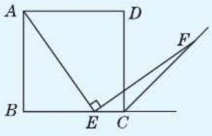


图2.7-15

求证：$AE=EF$.

【改造点】将"点E为BC的中点"这一特殊条件改造为"点E是BC边上任意一点"的一般条件.

改造二：改变条件的呈现方式

例3 ［中考·黄冈］如图2.7-16，两个全等的正方形的其中一边CD完全重合，点M是BC边的中点，连接AM，且$\angle AMN=90°$，交CE于N.

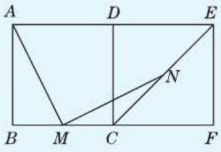


图2.7-16

求证：$CN=EN$.

【改造点】将"外角平分线"这一条件呈现的方式改为"正方形的对角线".

改造三：改变问题呈现的背景

例4 ［中考·乌鲁木齐］如图2.7-17，边长为5的正方形$OABC$的顶点O在坐标原点处，点A，C分别在x轴，y轴的正半轴上，点E是OA边上的点（不与点A重合），$EP\perp CE$，且与正方形外角平分线AG交于点P，

（1）当点E坐标为$(3,0)$时，试证明：$CE=EP$.

（2）如果将上述条件"点E坐标为$(3,0)$"改为"点E坐标为$(t,0)$（$t>0$）"，结论$CE=EP$是否仍然成立？请说明理由.

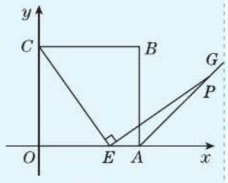


图2.7-17

（3）在y轴上是否存在点M，使得四边形$BMEP$是平行四边形？若存在，用t表示M的坐标；若不存在，请说明理由

【改造点】将整个问题由孤立的背景改为在平面直角坐标系中结合坐标去解决问题.

改造四：留其灵魂，换其躯壳

例5 ［中考·无锡］(1) 如图2.7-18①，在正方形$ABCD$中，M是BC边（不含端点B，C）上任意一点，P是BC延长线上一点，N是$\angle DCP$的平分线上一点. 若$\angle AMN=90°$，求证：$AM=MN$.

下面给出一种证明的思路，你可以按这一思路证明，也可以选择其他方法证明.

证明：在边AB上截取$AE=MC$，连接ME. 正方形$ABCD$中，$\angle B=\angle BCD=90°$，$AB=BC$.

$\therefore\angle NMC=180°-\angle AMN-\angle AMB=180°-\angle B-\angle AMB=\angle MAB=\angle MAE$.

（下面请你完成余下的证明过程）

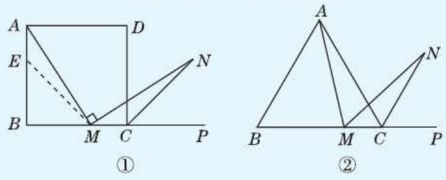


图2.7-18

(2) 若将(1)中的"正方形$ABCD$"改为"正三角形ABC"（如图2.7-18②），N是$\angle ACP$的平分线上一点，则当$\angle AMN=60°$时，结论$AM=MN$是否还成立？请说明理由.

(3) 若将(1)中的"正方形$ABCD$"改为"正n边形$ABCD\cdots\cdots X$"，请你作出猜想：当$\angle AMN=$_____°时，结论$AM=MN$仍然成立.（直接写出答案，不需要证明）

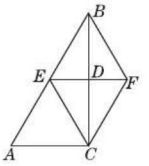
【改造点】去掉"正方形"的外壳，保留"外角平分线"的灵魂.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见259页)

基础巩固练

1. [中考 · 威海] 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 D,交 AB 于点 E,且 $BE = BF$. 添加一个条件,仍不能证明四边形 $BECF$ 为正方形的是(　　)



(第1题图)

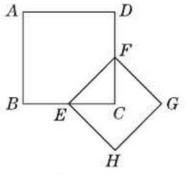
A. $BC = AC$　　B. $CF \perp BF$

C. $BD = DF$　　D. $AC = BF$

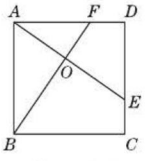
2. [中考 · 广东] 如图,正方形 $ABCD$ 的面积为1,则以相邻两边中点连线 EF 为边的正方形 $EFGH$ 的周长为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}+1$　　D. $2\sqrt{2}+1$



(第2题图)

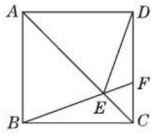


(第3题图)

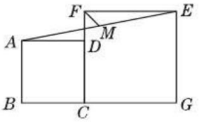
3. 如图,E,F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD,AD 上的点,且 $CE = DF$,AE,BF 相交于点 O,下列结论:①$AE = BF$;②$AE \perp BF$;③$AO = OE$;④$S_{\triangle AOB} = S_{四边形DEOF}$,其中正确的有(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

4. [中考 · 黄冈] 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 F 为 CD 上一点,BF 与 AC 交于点 E,若 $\angle CBF = 20°$,则 $\angle AED$ 等于_____度.



(第4题图)



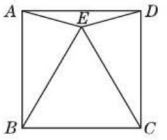
(第5题图)

5. 如图,正方形 $ABCD$ 和正方形 $CGEF$ 的边长分别是2和3,且点 B,C,G 在同一直线上,M 是线段 AE 的中点,连接 MF,则 MF 的长为_____.

6. [中考 · 怀化] 如图,四边形 $ABCD$ 是正方形,$\triangle EBC$ 是等边三角形.

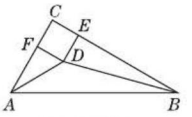
(1)求证:$\triangle ABE \cong \triangle DCE$;

(2)求 $\angle AED$ 的度数.



(第6题图)

7. 如图,在 Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$\angle CAB$,$\angle CBA$ 的平分线交于点 D. 过 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E,$DF \perp AC$ 于点 F. 求证:四边形 $CEDF$ 是正方形.

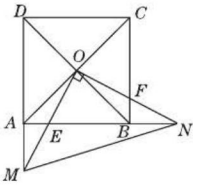


(第7题图)

8. [中考 · 遵义] 如图,正方形 $ABCD$ 的对角线交于点 O,点 E,F 分别在 AB,BC 上($AE < BE$),且 $\angle EOF = 90°$,OE,DA 的延长线交于点 M,OF,AB 的延长线交于点 N,连接 MN.

(1)求证:$OM = ON$.

(2)若正方形 $ABCD$ 的边长为4,E 为 OM 的中点,求 MN 的长.



(第8题图)

能力提升练

9. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,$AB = 6$,点 E 在边 CD 上,且 $CD = 3DE$. 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠至 $\triangle AFE$,延长 EF 交 BC 于点 G,连接 AG,CF. 给出下列结论:

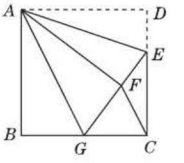
①$\triangle ABG \cong \triangle AFG$;

②$BG = GC$;

③$AG // CF$;

④$\angle GAE = 45°$.

其中正确结论的个数是(　　)



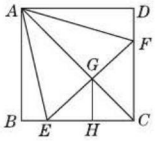
(第9题图)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

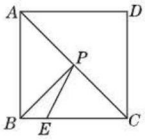
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. [中考·攀枝花]如图,正方形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别在 BC,CD 上,$\triangle AEF$ 是等边三角形,连接 AC 交 EF 于点 G,过点 G 作 $GH\perp CE$ 于点 H,若 $S_{\triangle EGH}=3$,则 $S_{\triangle ADF}=$(　　)

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2



(第10题图)



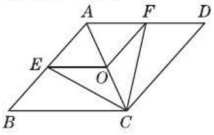
(第11题图)

11. [中考·天水]如图,正方形 $ABCD$ 的边长为4,E 是边 BC 上的一点且 $BE=1$,P 为对角线 AC 上的一动点,连接 PB,PE,当点 P 在 AC 上运动时,$\triangle PBE$ 周长的最小值是_____.

12. [中考·青岛]已知:如图,在菱形 $ABCD$ 中,点 E,O,F 分别为 AB,AC,AD 的中点,连接 CE,CF,OE,OF.

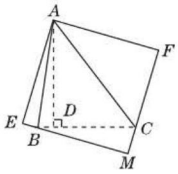
(1)求证:$\triangle BCE\cong\triangle DCF$;

(2)当 AB 与 BC 满足什么关系时,四边形 $AEOF$ 是正方形?请说明理由.



(第12题图)

13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=45°$,$AD\perp BC$ 于点 D. 将 $\triangle ABD$ 沿 AB 所在直线折叠,使点 D 落在点 E 处,将 $\triangle ACD$ 沿 AC 所在直线折叠,使点 D 落在点 F 处,分别延长 EB,FC,使其交于点 M. 判断四边形 $AEMF$ 的形状并给予证明.

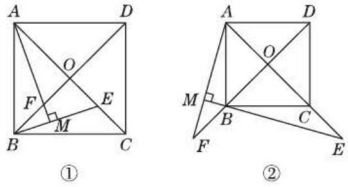


(第13题图)

14. 如图①,已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,E 是 AC 上一点,连接 EB,过点 A 作 $AM\perp BE$,垂足为 M,AM 交 BD 于点 F.

(1)求证:$OE=OF$;

(2)如图②,若点 E 在 AC 的延长线上,$AM\perp BE$ 交 EB 的延长线于点 M,交 DB 的延长线于点 F,其他条件不变,则结论"$OE=OF$"还成立吗?如果成立,请给出证明;如果不成立,请说明理由.



(第14题图)

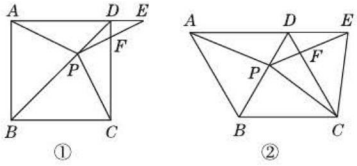
思维拓展练

15. [中考·荆州]如图①,在正方形 $ABCD$ 中,P 是 BD 上的一点,点 E 在 AD 的延长线上,且 $PA=PE$,PE 交 CD 于 F.

(1)证明:$PC=PE$;　　【导学号:8564979】

(2)求 $\angle CPE$ 的度数;

(3)如图②,把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$,其他条件不变,当 $\angle ABC=120°$ 时,连接 CE,试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系,并说明理由.



(第15题图)

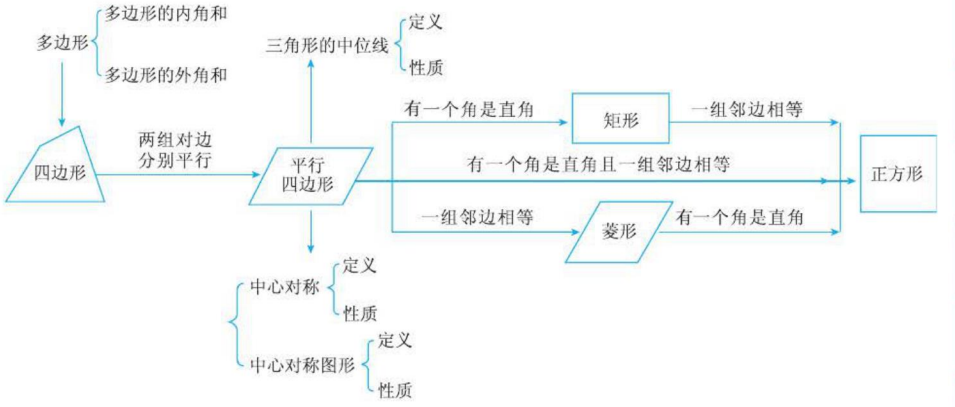
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，外角和等于 $360°$.

2. **平行四边形的性质**：(1) 边：两组对边平行且相等；(2) 角：对角相等，邻角互补；(3) 对角线：两条对角线互相平分.

3. (1) 中心对称与中心对称图形的共同特征是绕某个点旋转 $180°$ 后重合，只不过中心对称是一个与另一个重合，而中心对称图形是与自身重合.
   (2) 成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.
   (3) 平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

4. **三角形的中位线定理**：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

5. **平行四边形的判定**：(1) 定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；(2) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；(3) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形；(4) 两组对角分别相等的四边形是平行四边形；(5) 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形.

6. **特殊平行四边形的性质**：矩形的性质：矩形的对边平行且相等，四个角都是直角，对角线相等且互相平分；菱形的性质：菱形的对边平行且四边相等，对角相等，对角线互相垂直平分. 正方形既具有矩形的性质又具有菱形的性质.

7. **特殊平行四边形的判定**：矩形的判定方法：①有一个角是直角的平行四边形是矩形；②有三个角是直角的四边形是矩形；③对角线相等的平行四边形是矩形；菱形的判定方法：①一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四条边都相等的四边形是菱形；③对角线互相垂直的平行四边形是菱形. 正方形的判定方法的两种思路：①有一个角是直角的菱形是正方形；②有一组邻边相等的矩形是正方形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题解码

知识专题

专题一 多边形的角的定理

链接中考>> 与多边形有关的角的定理有多边形的内角和定理和外角和定理. 在中考中单独考查时,一般都是选择题. 考查的形式有两种:一种是已知多边形的边数求内角和;另一种是已知内角和求多边形的边数.

例1 [中考·眉山]一个多边形的外角和是内角和的$\frac{2}{5}$,这个多边形的边数为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

▶答案:C

点方法

多边形内角和与外角和:多边形内角和为$(n-2)\times180°$(n为多边形边数);任意多边形外角和均为360°.

专题二 平行四边形的性质与判定

链接中考>> 平行四边形的性质与判定都涉及边和角相等,这与全等三角形的性质与判定相吻合,所以平行四边形的性质与判定通常与三角形的全等联合考查.

例2 [中考·桂林]如图1,在$\square ABCD$中,E,F分别是AB,CD的中点.

(1)求证:四边形$FBED$为平行四边形;

(2)对角线AC分别与DE,BF交于点M,N,

求证:$\triangle ABN\cong\triangle CDM$.

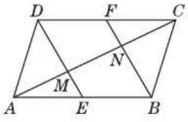


图1

导引:(1)可以根据"一组对边平行且相等的四边形是平行四边形"来证明;(2)因为$AB=CD$,$\angle CAB=\angle ACD$,所以只需要再证明一组对应角相等即可.

▶证明:(1)∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$AB\parallel CD$,

∵E,F分别是AB,CD的中点,

∴$BE=\frac{1}{2}AB$,$DF=\frac{1}{2}DC$,

∴$BE\parallel DF$,

∴四边形$FBED$为平行四边形.

(2)∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$AB\parallel CD$,

∴$\angle CAB=\angle ACD$.

∵四边形$FBED$为平行四边形,

∴$\angle ABN=\angle CDM$,

又∵$AB=CD$,

∴$\triangle ABN\cong\triangle CDM$(ASA).

点方法

平行四边形的性质与判定是互逆命题,综合考查时衔接点都是边和角.

专题三 中心对称与中心对称图形

链接中考>> 中心对称图形的识别是中考的一个热门考点,常与轴对称图形一起考查,一般将生活中的热点图案、数学中的基本图形以及文字、字母等作为背景材料进行考查,属于简单题,以选择题的形式考查为主.

例3 [中考·济南]如图2所示的图标中既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)


A　　B　　C　　D

图2

导引:A选项是轴对称图形,B选项是中心对称图形,D选项既不是轴对称图形,又不是中心对称图形,故选择C.　▶答案:C

拓技巧

判断图形是否为中心对称图形时,可以用**倒置观察法**看图形是否保持不变.判断图形是否为轴对称图形时,可以用**反面观察法**看图形是否保持不变.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专题四 三角形的中位线

链接中考>> 三角形的中位线具有两方面的性质:一是位置关系,即三角形的中位线平行于三角形的第三边;二是数量关系,即三角形的中位线等于第三边的一半. 因此,若题目中给出三角形两边的中点时,则直接作出中位线,若题目中给出一边的中点时,则可以先取另一边的中点,再构造出中位线.

例4 如图3,在四边形 $ABCD$ 中,$AB=CD$,AB 与 CD 不平行,M,N 分别是 AD,BC 的中点. AB 与 MN 的大小关系是(　　)

A. $AB>MN$　　B. $AB=MN$

C. $AB<MN$　　D. $AB\leqslant MN$

导引:如图3,取 BD 的中点 E,连接 ME,NE.

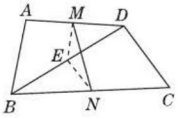


图3

因为 M,N,E 分别是 AD,BC,BD 的中点,

所以 $ME\parallel AB$,$ME=\frac{1}{2}AB$,$NE\parallel CD$,$NE=\frac{1}{2}CD$.

因为 $AB=CD$,AB 与 CD 不平行,

所以 $ME+NE=AB$,M,N,E 三点不共线.

根据三角形的三边关系,得

$ME+NE>MN$,即 $AB>MN$.　　▶答案:A

点方法

此题考查了三角形的中位线定理以及三角形的三边关系,能够巧妙构造三角形的中位线是解决此题的关键.

专题五 矩形的性质与判定

链接中考>> 矩形是特殊的平行四边形,主要有两个特殊点:一是内角是直角;二是对角线相等. 考查矩形的性质和判定时,也是主要扣住这两个特殊点进行考查.

例5 [中考 · 北京]如图4,在 $\square ABCD$ 中,过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E,点 F 在边 CD 上,$DF=BE$,连接 AF,BF.

(1)求证:四边形 $DEBF$ 是矩形;

(2)若 $CF=3$,$BF=4$,$DF=5$,求证:AF 平分 $\angle DAB$.

导引:对于(1),可以分两步,先证明四边形 $DEBF$ 是平行四边形,再证明其有一个角是直角即可;对于(2),在(1)的基础上不难发现 $\triangle BCF$ 是直角三角形,因此可以根据勾股定理求出 BC 的长,再结合 $DF=5$ 及 $AD=BC$ 判断出 $DA=DF$,得到 $\angle DAF=\angle DFA$ 这一关键的结论,从而使问题获解.

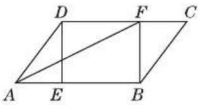


图4

▶证明:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $DC\parallel AB$,又∵ $DF=BE$,

∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

∵ $DE\perp AB$,

∴ $\angle DEB=90°$,∴ 四边形 $DEBF$ 是矩形.

(2)∵ 四边形 $DEBF$ 是矩形,

∴ $\angle BFC=90°$,已知 $CF=3$,$BF=4$,由勾股定理得 $BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

∴ $AD=BC=5$,∴ $AD=DF$,∴ $\angle DAF=\angle DFA$.

∵ 在平行四边形 $ABCD$ 中,$DC\parallel AB$,∴ $\angle DFA=\angle FAB$,∴ $\angle DAF=\angle FAB$,即 AF 平分 $\angle DAB$.

专题六 菱形的性质与判定

链接中考>> 菱形是特殊的平行四边形,主要有两个特殊:一是四边相等;二是对角线互相垂直. 考查菱形的性质和判定时,也是主要从这两个方面考查.

例6 [中考 · 巴彦淖尔]如图5,在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E,F,G,H 分别在边 AB,BC,CD,DA 上,$AE=CG$,$AH=CF$,且 EG 平分 $\angle HEF$.

(1)求证:四边形 $EFGH$ 是菱形;

(2)若 $EF=4$,$\angle HEF=60°$,求 EG 的长.

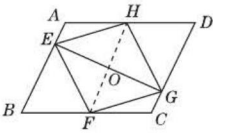


图5

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引:(1)通过证两次三角形全等,分别得到 $EH=FG$,$EF=GH$,所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形,则 $GH\parallel EF$,那么 $\angle HGE=\angle FEG$,而 EG 平分 $\angle HEF$,得 $\angle HEG=\angle FEG$,根据等量代换可得 $\angle HEG=\angle HGE$,从而有 $HE=HG$,从而可证四边形 $EFGH$ 是菱形;(2)连接 FH 交 EG 于 O,在 $\mathrm{Rt}\triangle EOF$ 中,利用勾股定理即可求解.

(1)▶证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,∴ $\angle A=\angle C$,

在 $\triangle AEH$ 与 $\triangle CGF$ 中,$\begin{cases}AE=CG,\\ \angle A=\angle C,\\ AH=CF,\end{cases}$

∴ $\triangle AEH\cong\triangle CGF(\mathrm{SAS})$. ∴ $EH=FG$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB=CD$,$AD=BC$,$\angle B=\angle D$.

又∵ $AE=CG$,$AH=CF$,

∴ $BE=DG$,$BF=DH$,

在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle DGH$ 中,$\begin{cases}BE=DG,\\ \angle B=\angle D,\\ BF=DH,\end{cases}$

∴ $\triangle BEF\cong\triangle DGH(\mathrm{SAS})$,

∴ $EF=GH$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

∴ $HG\parallel EF$,∴ $\angle HGE=\angle FEG$,

∵ EG 平分 $\angle HEF$,∴ $\angle HEG=\angle FEG$,

∴ $\angle HEG=\angle HGE$,∴ $HE=HG$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

(2)▶解:如图5,连接 HF 交 EG 于 O.

∵ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

∴ $EG\perp FH$,$\angle FEO=\frac{1}{2}\angle HEF=30°$,

∵ $EF=4$,∴ $OF=2$,

∴ $OE=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,

∴ $EG=2EO=4\sqrt{3}$.

点方法

本题考查了全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、菱形的判定. 解本题的关键是掌握两组对边分别相等的四边形是平行四边形,一组邻边相等的平行四边形是菱形.

专题七 正方形的性质与判定

链接中考>> 正方形既是矩形又是菱形,它具有矩形和菱形的所有的性质,判定正方形的思路主要有两种:一种是先判定是矩形,再证明邻边相等或对角线互相垂直;另一种是先证明是菱形,再证明一个内角是直角或对角线相等. 在中考中一般以简单的简答题形式考查.

例7 [中考·凉山州]如图6,在正方形 $ABCD$ 中,G 是 BC 上任意一点,连接 AG,$DE\perp AG$ 于 E,$BF\parallel DE$ 交 AG 于 F,探究线段 AF,BF,EF 三者之间的数量关系,并说明理由.

导引:首先根据正方形的性质和已知条件得到一些线段和角之间的等量关系,然后根据AAS判定两个三角形全等,从而根据全等三角形的性质得到三条线段之间的数量关系.

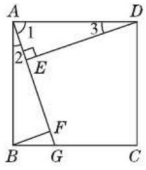


图6

▶解:线段 AF,BF,EF 之间的数量关系是 $AF=BF+EF$.

理由如下:∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

∴ $AB=AD$,$\angle BAD=\angle 1+\angle 2=90°$,

∵ $DE\perp AG$,∴ $\angle DEA=90°$,

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$,∴ $\angle 2=\angle 3$.

又∵ $\angle DEF=90°$,$BF\parallel DE$,

∴ $\angle BFA=90°$.

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle ABF$ 中,$\begin{cases}\angle DEA=\angle AFB,\\ \angle 3=\angle 2,\\ DA=AB,\end{cases}$

∴ $\triangle DAE\cong\triangle ABF(\mathrm{AAS})$,

∴ $AE=BF$,

∴ $AF=AE+EF=BF+EF$.

专题八 特殊平行四边形的探索题

链接中考>> 与特殊四边形有关的实践探索题,关键是将特殊四边形进行折叠变换,而折叠变换就是全等变换,解决问题时既要运用到特殊四边形的性质与判定,又要运用到全等三角形的性质与判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 8 [中考 · 龙东] 如图 7，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 在直线 BC 上，连接 AE. 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 所在直线折叠，点 B 的对应点是点 B'，再展开，连接 AB' 并延长交直线 DC 于点 F.

(1) 当点 F 与点 C 重合时如图 7①，易证：$DF+BE=AF$(不需证明).

(2) 当点 F 在 DC 的延长线上时如图 7②，当点 F 在 CD 的延长线上时如图 7③，线段 DF，BE，AF 有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想，并选择其中一种情况给予证明.

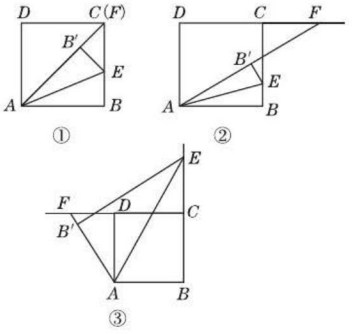


图 7

导引：对于图 7①，由折叠可得 $AB=AB'$，$BE=B'E$，再根据四边形 $ABCD$ 是正方形，易证 $B'E=B'F$，即可证明 $DF+BE=AF$；对于图 7②和图 7③，先从直观上判断，得到结论：$DF+BE=AF$ 和 $BE-DF=AF$，在图 7②中，延长 CD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，得图 8①，易证 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$，根据 $CB\parallel AD$，得 $\angle AEB=\angle EAD$，易得 $\angle B'AE=\angle DAG$，则 $\angle GAF=\angle DAE$，则 $\angle G=\angle GAF$，则 $GF=AF$，即可得出答案 $DF+BE=AF$. 图 7③的证明与图 7②的证明类似.

▶解：(2) 图 7②的结论：$DF+BE=AF$；图 7③的结论：$BE-DF=AF$；

图 7②的证明：如图 8①，延长 CD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，

∵ 在正方形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$，$\angle ABE=\angle ADG=90°$，

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADG$(SAS)，

∴ $\angle AEB=\angle G$，$\angle EAB=\angle GAD$.

∵ $CB\parallel AD$，∴ $\angle AEB=\angle EAD$，

∴ $\angle G=\angle EAD$.

∵ $\angle BAE=\angle B'AE$，∴ $\angle B'AE=\angle GAD$，

∴ $\angle GAF=\angle DAE$，

∴ $\angle G=\angle GAF$，

∴ $GF=AF$，∴ $DF+BE=AF$.

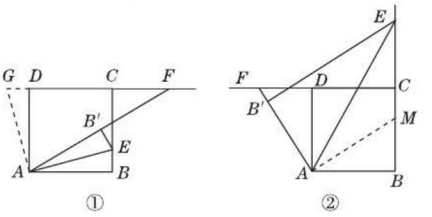


图 8

图 7③的证明：如图 8②，在 BC 上取点 M，使 $BM=DF$，连接 AM，

∵ 在正方形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

∴ $\triangle ABM\cong\triangle ADF$(SAS)，

∴ $MA=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$，

由折叠知 $\angle BAE=\angle EAB'$，

∴ $\angle MAE=\angle DAE$，

∵ $AD\parallel BE$，∴ $\angle AEM=\angle DAE$，

∴ $\angle MAE=\angle AEM$，∴ $ME=MA=AF$，

∴ $BE-DF=AF$.

点方法

此题属于几何综合证明题，题中包含了较多的基本图形，思考问题的过程中要善于发现这些基本图形带来的基本结论，以便迅速得到线索，使思路清晰. 如图 9 所示.

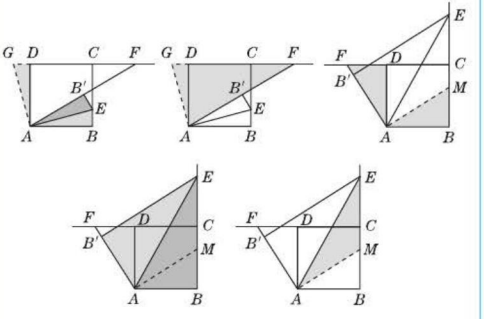


图 9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

思想方法专题

专题九 转化思想

专题解读>> 转化思想是解决数学问题的一种重要思想，通过转化可以将复杂的、生疏的问题转化为简单的、熟悉的问题，从而使问题得到解决. 平行四边形可被其对角线分成几个三角形，在解决有关的计算题与证明题时，常将四边形中的问题转化到三角形中，然后用三角形的知识来解决.

例9 如图10，在$\square ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，且$AC=4$，$BD=2\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{7}$.

(1)AC与BD有怎样的位置关系？

(2)$\square ABCD$是菱形吗？请说明理由.

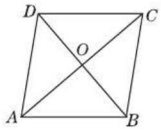


图10

导引：(1)AC与BD的位置关系根据图形可以猜想是垂直，不可能是平行，题目中给出了线段的长，因此考虑利用勾股定理的逆定理来判定.

(2)由(1)的结论可知$AC\perp BD$，根据菱形的判定定理“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”来证明即可.

▶解：(1)∵四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC=2$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$.

∵$OA^2+OB^2=4+3=7$，而$AB^2=(\sqrt{7})^2=7$，

$\therefore OA^2+OB^2=AB^2$，

$\therefore \triangle AOB$是直角三角形，且$\angle AOB=90°$.

$\therefore AC$与BD垂直.

(2)$\square ABCD$是菱形. 理由如下：

∵四边形$ABCD$是平行四边形，AC，BD为其对角线，

由(1)知$AC\perp BD$，

$\therefore \square ABCD$是菱形.

点方法

本题运用了**转化思想**，先将四边形问题转化为三角形的问题，再利用勾股定理将几何问题转化为代数问题来解决.

专题十 数形结合思想

专题解读>> 数形结合思想就是把数、式与图形结合起来考虑，用几何图形直观地反映和描述数量关系，用代数方法来分析几何图形中蕴含的数量关系，从而使问题巧妙快速地得到解决.

例10 如图11，四边形$ABCD$是平行四边形，$AE\perp BC$于点E，$AF\perp CD$于点F，$AE=4$ cm，$AF=5$ cm，四边形$ABCD$的周长为36 cm. 求AB，BC的长.

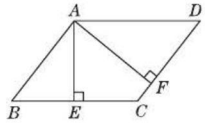


图11

导引：根据平行四边形的周长，可得关于平行四边形两邻边的一个方程；又根据两邻边上的高及面积公式，可得另一个方程，从而组成方程组，使问题得解.

▶解：设$AB=x$ cm，$BC=y$ cm.

∵$S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=CD\cdot AF$，

$\therefore 5x=4y$.

∵$2(AB+BC)=36$，

$\therefore 2(x+y)=36$.

$\therefore \begin{cases}5x=4y,\\2(x+y)=36.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=8,\\y=10.\end{cases}$

$\therefore AB$，BC的长分别为8 cm，10 cm.

点方法

利用方程将几何问题转化为代数问题起到事半功倍的效果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必练

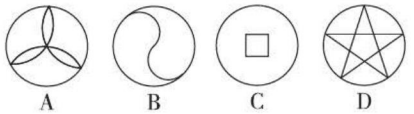
(答案见261页)

选择题

1. [中考 · 北京]若正多边形的一个外角是60°,则该正多边形的内角和为(　　)

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

2. [中考 · 襄阳]下列图形中,既是中心对称图形又是轴对称图形的是(　　)

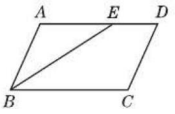


A　　B　　C　　D

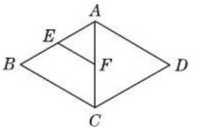
3. 如图,在$\square ABCD$中,$AD=5$,$AB=3$,BE平分$\angle ABC$交AD边于点E,则线段AE,ED的长度分别为(　　)

A. 2和3　　B. 3和2

C. 4和1　　D. 1和4



(第3题图)



(第5题图)

4. [中考 · 益阳]下列判断错误的是(　　)

A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

B. 四个内角都相等的四边形是矩形

C. 四条边都相等的四边形是菱形

D. 两条对角线垂直且平分的四边形是正方形

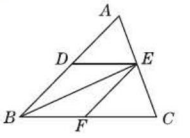
5. 如图,在菱形$ABCD$中,E,F分别是AB,AC的中点,如果$EF=2$,那么菱形$ABCD$的周长是(　　)

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 16

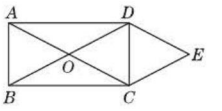
6. [中考 · 聊城]如图,$\triangle ABC$中,$DE\parallel BC$,$EF\parallel AB$,要判定四边形$DBFE$是菱形,还需要添加的条件是(　　)

A. $AB=AC$　　B. $AD=BD$

C. $BE\perp AC$　　D. BE平分$\angle ABC$



(第6题图)



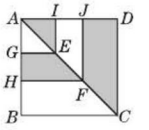
(第7题图)

7. [中考 · 兰州]如图,矩形$ABCD$的对角线AC与BD相交于点O,$CE\parallel BD$,$DE\parallel AC$,$AD=2\sqrt{3}$,$DE=2$,则四边形$OCED$的面积为(　　)

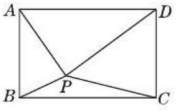
A. $2\sqrt{3}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

8. [中考 · 宜昌]如图,正方形$ABCD$的边长为1,点E,F分别是对角线AC上的两点,$EG\perp AB$,$EI\perp AD$,$FH\perp AB$,$FJ\perp AD$,垂足分别为G,I,H,J. 则图中阴影部分的面积等于(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$



(第8题图)



(第9题图)

9. [中考 · 杭州]如图,已知点P是矩形$ABCD$内一点(不含边界),设$\angle PAD=\theta_1$,$\angle PBA=\theta_2$,$\angle PCB=\theta_3$,$\angle PDC=\theta_4$,若$\angle APB=80°$,$\angle CPD=50°$,则(　　)

A. $(\theta_1+\theta_4)-(\theta_2+\theta_3)=30°$

B. $(\theta_2+\theta_4)-(\theta_1+\theta_3)=40°$

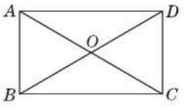
C. $(\theta_1+\theta_2)-(\theta_3+\theta_4)=70°$

D. $(\theta_1+\theta_2)+(\theta_3+\theta_4)=180°$

填空题

10. 若从多边形的一个顶点引对角线,把多边形分成6个三角形,则这个多边形的内角和是_____.

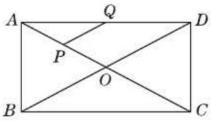
11. 如图,在矩形$ABCD$中,对角线AC,BD相交于点O,若$\angle AOB=60°$,$AB=4$ cm,则AC的长为_____cm.



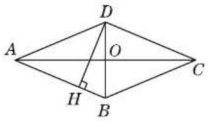
(第11题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. [中考·株洲]如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$AC=10$,P,Q 分别为 AO,AD 的中点,则 PQ 的长度为_____.



(第12题图)



(第14题图)

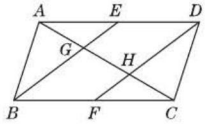
13. [中考·兰州]在平行四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,要使四边形 $ABCD$ 是正方形,还需添加一组条件. 下面给出了四组条件:①$AB\perp AD$,且 $AB=AD$;②$AB=BD$,且 $AB\perp BD$;③$OB=OC$,且 $OB\perp OC$;④$AB=AD$,且 $AC=BD$,其中正确的序号是_____(写出所有正确的序号).

14. [中考·孝感]如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC=24$,$BD=10$,$DH\perp AB$ 于点 H,则线段 BH 的长为_____.

15. [中考·武汉]以正方形 $ABCD$ 的边 AD 作等边三角形 ADE,则 $\angle BEC$ 的度数是_____.

解答题

16. [中考·黄冈]如图,在 $\square ABCD$ 中,E,F 分别为边 AD,BC 的中点,对角线 AC 分别交 BE,DF 于点 G,H. 求证:$AG=CH$.

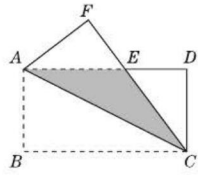


(第16题图)

17. [中考·鄂州]如图,将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折,点 B 落在点 F 处,FC 交 AD 于 E.

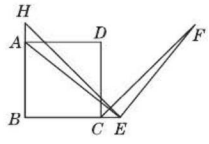
(1)求证:$\triangle AFE\cong\triangle CDE$;

(2)若 $AB=4$,$BC=8$,求图中阴影部分的面积.



(第17题图)

18. 如图,一个含45°角的三角板 HBE 的两条直角边与正方形 $ABCD$ 的两邻边重合,过 E 点作 $EF\perp AE$ 交 $\angle DCE$ 的平分线于 F 点,试探究线段 AE 与 EF 的数量关系,并说明理由.



(第18题图)

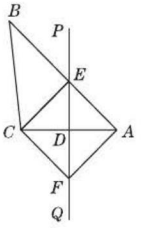
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

19. 如图，已知△ABC，直线 PQ 垂直平分 AC，与边 AB 交于点 E，连接 CE，过点 C 作 CF 平行于 BA 交 PQ 于点 F，连接 AF.

(1) 求证：△AED≌△CFD.

(2) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形.

(3) 若 $AD=3$，$AE=5$，则菱形 $AECF$ 的面积是多少？

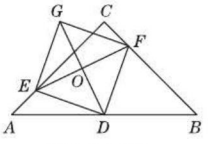


(第 19 题图)

20. [中考 · 玉林] 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，D 是 AB 的中点，E，F 分别是 AC，BC 上的点(点 E 不与端点 A，C 重合)，且 $AE=CF$，连接 EF 并取 EF 的中点 O，连接 DO 并延长至点 G，使 $GO=OD$，连接 DE，DF，GE，GF.

(1) 求证：四边形 $EDFG$ 是正方形；

(2) 当点 E 在什么位置时，四边形 $EDFG$ 的面积最小？并求四边形 $EDFG$ 面积的最小值.



(第 20 题图)

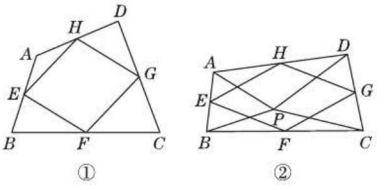
21. [中考 · 德州] 我们给出如下定义：顺次连接任意一个四边形各边中点所得的四边形叫作中点四边形.

(1) 如图①，四边形 $ABCD$ 中，点 E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

(2) 如图②，点 P 是四边形 $ABCD$ 内一点，且满足 $PA=PB$，$PC=PD$，$\angle APB=\angle CPD$. 点 E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点. 猜想中点四边形 $EFGH$ 的形状，并证明你的猜想.

(3) 若改变(2)中的条件，使 $\angle APB=\angle CPD=90°$，其他条件不变，直接写出中点四边形 $EFGH$ 的形状.(不必证明)



(第 21 题图)

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3章

图形与坐标

飞跃一维到二维

数学点拨

你将学到的核心考点

平面直角坐标系 □

简单图形的坐标表示 □

用坐标表示图形的平移和轴对称 □

我们为你提供的核心方法

排除法 □ 分类讨论思想 □

方程思想 □ 转化思想 □

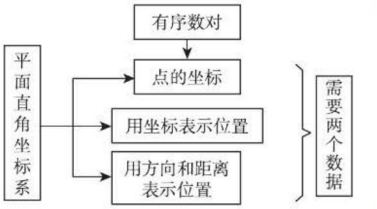
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.1 平面直角坐标系

热门话题
- 有序数对
- 平面直角坐标系及点的坐标
- 用坐标表示位置
- 用方向和距离表示位置

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 有序实数对

点知识

定义:有**顺序**的两个数 a 与 b 组成的数对,叫作有序数对,记作(a,b).

要点精析

(1)有序数对的含义有两层:"有序"和"数对",其中"**有序**"是指两个数的排列有先后顺序,"**数对**"是指两数成对出现.

(2)若 $a\neq b$,则有序数对(a,b)与(b,a)表示的是两个不同位置的点.

拨考向

考查角度:利用有序数对在平面上找对应的点的位置

例 1 如图 3.1-1 是某教室学生座位的平面图.



图 3.1-1

(1)请说出王明和陈帅的座位位置.

(2)若用(3,2)表示第 3 排第 2 列的位置,那么(5,5)表示什么位置?王明和陈帅的座位位置可以怎样表示?

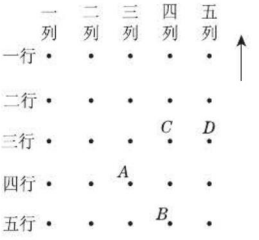
(3)在(2)的条件下,请说出(3,3)和(4,8)表示哪两位同学的座位位置.

(4)在(2)的条件下,(2,3)和(3,2)表示的座位位置相同吗?一般地,若$a\neq b$,(a,b)与(b,a)表示的座位位置相同吗?

导引:平面上确定物体的位置有多种方法,但基本上都需要两个数据,本题可以通过排数和列数来确定位置,即先确定有序实数对的第一个数,再确定第二个数.

同类变式 (答案见 262 页) 练一练

1. 如图,一方队正沿箭头所指的方向前进,点 A 的位置为三列四行,表示为(3,4),那么:



(第 1 题图)

(1)点 B 的位置表示为_____;

(2)点 D 的位置表示为_____;

(3)(4,3)表示的是_____;

(4)(3,4)和(4,3)表示的位置相同吗?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解:(1)王明的座位位置是第1排第2列,陈帅的座位位置是第5排第4列.

(2)(5,5)表示的位置是第5排第5列,王明的座位位置可以表示为(1,2),陈帅的座位位置可以表示为(5,4).

(3)(3,3)表示张军的座位位置,(4,8)表示夏凡的座位位置.

(4)(2,3)表示的是第2排第3列的座位位置,(3,2)表示的是第3排第2列的座位位置,所以它们表示的座位位置不相同.

一般地,若$a\neq b$,(a,b)与(b,a)表示的座位位置不相同.

点方法

用有序实数对来描述物体(点)的位置,其中"有序"是指$(a,b)(a\neq b)$与(b,a)中a与b的前后顺序不同,描述的位置就不同,例如题中的(3,2)和(2,3)表示不同的位置."实数对"是指必须由两个实数才能确定某点的位置.

知识点2 平面直角坐标系(重点)

点知识

定义:在平面内画两条互相垂直的数轴,其中一条叫横轴(通常称为x轴),另一条叫纵轴(通常称为y轴),它们的交点O是这两条数轴的原点.通常,我们取横轴向右为正方向,纵轴向上为正方向,横轴与纵轴的单位长度通常取成一致(有时也可以不一致),这样建立的两条数轴构成平面直角坐标系,记作Oxy.

要点精析

(1)一般情况下,平面直角坐标系的两条坐标轴的单位长度是一致的,但在实际问题中,受两轴表示的实际意义的影响,两坐标轴的单位长度可以有所不同.

(2)4个半轴根据实际问题的需要,可画得长些或短些,但原点必须画出.

拨考向

考查角度:利用平面直角坐标系的定义进行判断

例2 如图3.1-2所示的四个图形中,是平面直角坐标系的是(　　)

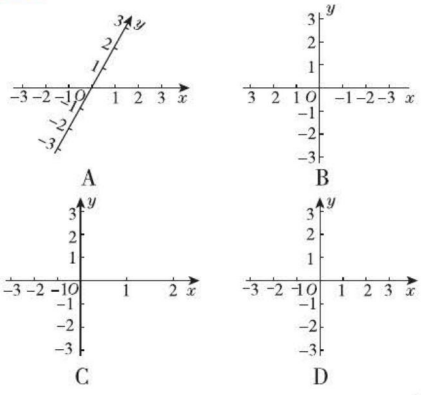


图3.1-2

点方法

本题利用**排除法**解题.平面直角坐标系具备:①由两条数轴组成;②这两条数轴有公共原点且互相垂直;③通常取横轴向右为正方向,纵轴向上为正方向;④横轴取相同的单位长度,纵轴取相同的单位长度.

导引:根据平面直角坐标系的定义进行判断,构成平面直角坐标的两条数轴要互相垂直,故选项A错误;平面直角坐标必须由数轴构成,且横轴向右为正方向,故选项B错误;选项C中横轴上的单位长度不统一,故错误;故选D.

▶答案:D

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 3 点的坐标(难点)

点知识

1. **定义**:如图 3.1-3,通常当平面直角坐标系中有一点 A,过点 A 作横轴的**垂线**,垂足为点 C,横轴上点 C 表示 a,过点 A 作纵轴的**垂线**,垂足为点 D,纵轴上点 D 表示 b,有序实数对 (a,b) 叫作点 A 的坐标,其中 a 叫**横坐标**,b 叫**纵坐标**. 这里的两个数据的绝对值,一个表示原点在水平方向上与 A 点的距离,另一个表示原点在竖直方向上与 A 点的距离.

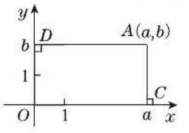


图 3.1-3

要点精析

(1)记一个点的坐标时,一定要横坐标在前,纵坐标在后,中间用逗号隔开.

(2)点的坐标是有序数对,(a,b) 和 (b,a) 尽管数字相同,但由于顺序不同,因此当 $a\neq b$ 时这两个坐标表示的是两个不同的点.

(3)点 (a,b) 到 x 轴与 y 轴的距离分别是 $|b|$ 与 $|a|$.

2. **求一个点的坐标的方法**:

(1)过点向两坐标轴作垂线,并读出垂足在两坐标轴上的坐标;

(2)写出坐标:横坐标在前,纵坐标在后,中间用逗号隔开,再用小括号括起来;

(3)原点 O 的坐标是 $(0,0)$,x 轴上的点的坐标为 $(a,0)$,y 轴上的点的坐标为 $(0,b)$.

3. **平面直角坐标系内的点与有序实数对的关系**:坐标平面内的任意一点,都有唯一的一个有序实数对(点的坐标)与它对应. 任意一个有序实数对(点的坐标)在坐标平面内都有唯一的一个点和它对应,即坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的.

点考向

考查角度 1:利用点的坐标的定义确定平面直角坐标系内点的坐标

例 3 如图 3.1-4,写出点 A,B,C,D,E,F,G,O 的坐标.

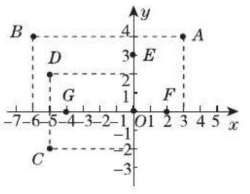


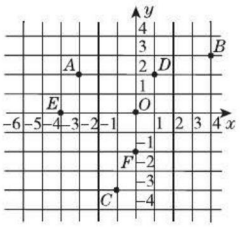
图 3.1-4

导引:如图 3.1-4,先从该点向 x 轴作垂线,垂足在 x 轴上对应的数为该点的横坐标,如点 A 的横坐标为 3;再从该点向 y 轴作垂线,垂足在 y 轴上对应的数为该点的纵坐标,如点 A 的纵坐标为 4,其他各点类似可得.

▶解:$A(3,4)$,$B(-6,4)$,$C(-5,-2)$,$D(-5,2)$,$E(0,3)$,$F(2,0)$,$G(-4,0)$,$O(0,0)$.

同类变式 (答案见 262 页) 练一练

3. 如图,写出点 A,B,C,D,E,F,O 的坐标.



(第 3 题图)

点方法

确定点的坐标的方法:首先确定横坐标,方法是从该点向 x 轴作垂线,垂足在 x 轴上对应的数为该点的横坐标;再从该点向 y 轴作垂线,垂足在 y 轴上对应的数为该点的纵坐标;最后用有序实数对将它表示出来,即横坐标在前,纵坐标在后,中间用逗号隔开,再用小括号括起来.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：利用点的坐标的定义在平面直角坐标系内描点

例4 请你在如图3.1-5所示的平面直角坐标系中，描出以下各点：$A(3,2)$，$B(0,3)$，$C(-1,-2)$，$D(2,-1)$.

导引：若想描出点$A(3,2)$，可先在x轴上找出表示3的点，并过该点作x轴的垂线；然后在y轴上找出表示2的点，并过该点作y轴的垂线，两条垂线的交点即为点A. 利用同样的方法，可以描出点B，C，D.

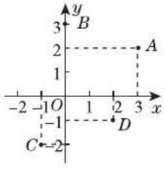


图3.1-5


平面内点的位置的确定

点方法

根据点的坐标描点的方法：假设点P的坐标为(a,b)，先在x轴上找到对应的数为a的点A，在y轴上找到对应的数为b的点B，再分别过点A，点B作x轴、y轴的垂线，两垂线的交点就是所要描出的点P.

▶解：描出的点A，B，C，D如图3.1-5所示.

考查角度3：由点到坐标轴的距离确定点的坐标（易错点）

例5 已知点P到x轴的距离为2，到y轴的距离为1. 如果过点P作两条坐标轴的垂线，垂足分别在x轴的正半轴上和y轴的负半轴上，那么点P的坐标是(　　)

A. $(2,-1)$　B. $(1,-2)$　C. $(-2,-1)$　D. $(1,2)$

同类变式（答案见262页）｜练一练｜

5. 已知点M到x轴的距离为2，到y轴的距离为1，则M点的坐标为_____.

导引：由点P到x轴的距离为2，可知点P的纵坐标的绝对值为2，又因为垂足在y轴的负半轴上，则纵坐标为-2；由点P到y轴的距离为1，可知点P的横坐标的绝对值为1，又因为垂足在x轴的正半轴上，则横坐标为1. 故点P的坐标是$(1,-2)$.

▶答案：B

误区

本题的易错点有三处：(1)混淆距离与坐标之间的区别；(2)不知道与“点P到x轴的距离”对应的是纵坐标，与“点P到y轴的距离”对应的是横坐标；(3)忽略坐标的符号而出错. 若本例只知距离而无附加条件，则点P的坐标有四种情况.

考查角度4：利用点的坐标作图

例6 在平面直角坐标系中描出下列两组点，并用线段顺次连接起来：

(1)$(-9,0)$，$(-9,3)$，$(-10,3)$，$(-6,5)$，$(-2,3)$，$(-3,3)$，$(-3,0)$，$(-9,0)$；

(2)$(3,0)$，$(3,3)$，$(0,3)$，$(2,5)$，$(1,5)$，$(3,7)$，$(2,7)$，$(3.5,9)$，$(5,7)$，$(4,7)$，$(6,5)$，$(5,5)$，$(7,3)$，$(4,3)$，$(4,0)$，$(3,0)$. 这幅图画，你觉得像什么？

导引：在平面直角坐标系中描出各点，并用线段顺次连接起来.

▶解：如图3.1-6所示. 这幅图画像一栋“房子”，旁边有一棵“大树”，其中第(1)组点连成一栋“房子”，第(2)组点连成一棵“大树”.

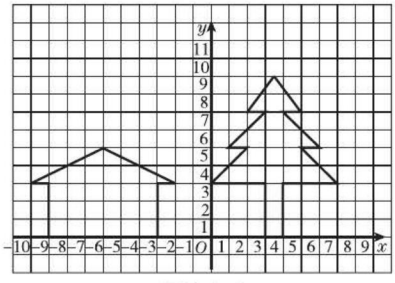


图3.1-6

点方法

解答本题一定要注意“顺次连接”，就是将每一组中的各点按一定顺序连接起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 4 平面直角坐标系中点的坐标特征(重点)

点知识

1. **象限的划分**:如图 3.1-7,建立平面直角坐标系后,平面被两条坐标轴分成四个区域,分别叫**第一象限、第二象限、第三象限、第四象限**,坐标轴上的点不属于**任何一个象限**.

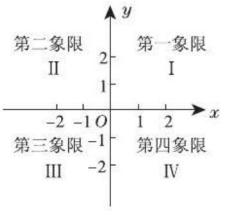


图 3.1-7

要点精析 ///

(1)"象限"的划分是从"右上"起,按"逆时针"方向排列的;

(2)坐标轴不属于任何象限.



2. **特殊位置上某点的坐标的特征**:

点 $M(x,y)$ 所处的位置		坐标特征
象限内的点	点 M 在第一象限	M(正,正)
	点 M 在第二象限	M(负,正)
	点 M 在第三象限	M(负,负)
	点 M 在第四象限	M(正,负)

续表

点 $M(x,y)$ 所处的位置		坐标特征
坐标轴上的点	点 M 在 x 轴上	在 x 轴正半轴上:M(正,0)
		在 x 轴负半轴上:M(负,0)
坐标轴上的点	点 M 在 y 轴上	在 y 轴正半轴上:M(0,正)
		在 y 轴负半轴上:M(0,负)
象限角平分线上的点	点 M 在一、三象限角平分线上	$x=y$,即横坐标与纵坐标相等
	点 M 在二、四象限角平分线上	$x=-y$,即横、纵坐标互为相反数

3. **拓展**:当两点的纵坐标相同时,这两点的连线平行于 x 轴(或与 x 轴重合),垂直于 y 轴,两点之间的距离等于横坐标差的绝对值;当两点的横坐标相同时,这两点的连线平行于 y 轴(或与 y 轴重合),垂直于 x 轴,两点之间的距离等于纵坐标差的绝对值.

拓考向

考查角度 1:利用点的坐标确定点的位置

例 7 (1)[中考 · 大连]在平面直角坐标系中,点(-3,2)所在的象限是(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

(2)[中考 · 贵港]在平面直角坐标系中,点 $P(m-3,4-2m)$ 不可能在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

导引:(1)根据平面直角坐标系中四个象限内的点的坐标符号的特征进行对照,即可确定点的位置;(2)需分成两种情况讨论,①当 $m-3>0$,即 $m>3$ 时,$-2m<-6$,$4-2m<-2$,所以点 P 不可能在第一象限;②当 $m-3<0$,即 $m<3$ 时,$-2m>-6$,$4-2m>-2$,点 P 可能在第二或第三象限,综上所述,点 P 不可能在第一象限.

▶答案:(1)B　(2)A

点方法

由点的坐标确定点的位置的方法: 方法一是由点的坐标的符号确定点的位置,即(+,+)的点在第一象限,(-,+)的点在第二象限,(-,-)的点在第三象限,(+,-)的点在第四象限;方法二是分别过两坐标轴上表示该点的横、纵坐标的点作两坐标轴的垂线,这两条垂线的交点位置即为该点的位置.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2:利用点的特殊位置确定点的坐标(易错点)

例8 已知点$A(x^2-2,1-x)$在y轴的正半轴上,求A点的坐标.

导引:根据点在y轴正半轴上的坐标特征:横坐标为0,纵坐标为正数,可求出x的值,然后再确定A点的坐标.

▶解:因为A点在y轴上,所以$x^2-2=0$,

所以$x=\pm\sqrt{2}$. 当$x=\sqrt{2}$时,$1-x=1-\sqrt{2}<0$,

不符合A点在y轴的正半轴上,所以舍去.

当$x=-\sqrt{2}$时,$1-x=1+\sqrt{2}>0$,符合题意.

所以A点的坐标为$(0,1+\sqrt{2})$.

同类变式 (答案见262页) 练一练

8. 已知点$M(3a-8,a-1)$,分别根据下列条件求出点M的坐标.
(1)点M在y轴上;
(2)点M在第二、四象限的角平分线上;
(3)点N的坐标为$(3,-6)$,直线$MN//x$轴.

知识点5 用坐标表示物体的位置(重点)

点知识

1. **利用平面直角坐标系表示地理位置的方法:**
(1)建立平面直角坐标系,选择一个适当的参照点为**原点**,确定x轴、y轴的**正方向**;
(2)根据具体问题确定适当的**单位长度**;
(3)在坐标平面内描出这些点,写出各点的**坐标**和各个地点的**名称**.

要点精析 (1)建立平面直角坐标系的方法不是唯一的,建立直角坐标系的方法不同,解题的繁简程度也不同,因此建立直角坐标系时,要本着方便、简单、美观等原则;
(2)选取坐标原点要"适当",一般要么取比较有名的地点,要么是所要绘制的区域内较居中的位置;
(3)在地点比较集中,坐标平面又较小时,各地点的名称在图上可以用代号标出,在图外另附名称.

2. **易错警示:**平面直角坐标系变化时,坐标平面内的各点坐标也发生变化,但各点之间的相对位置不会发生变化.

拓考向

考查角度:利用坐标表示地理位置

例9 根据下面的条件画一幅示意图,并在图中标出各个景点的位置和坐标.

菊花园:从中心广场向北走150 m,再向东走150 m;

湖心亭:从中心广场向西走150 m,再向北走100 m;

松风亭:从中心广场向西走100 m,再向南走50 m;

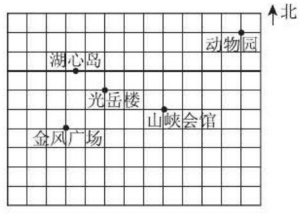
育德泉:从中心广场向北走200 m.

导引:各个景点的位置均是以中心广场为参照点来描述的,故选中心广场为原点,取东西方向为x轴方向(向东为正方向),南北方向为y轴方向(向北为正方向),建立直角坐标系,并规定一个单位长度代表50 m长,根据行走方向和距离确定各景点的位置,标上坐标和名称.

▶解:如图3.1-8,选中心广场所在位置为原点,分别以正东、正北方向为x轴、y轴正方向建立平面直角坐标系,规定一个单位长度代表50 m长.

同类变式 (答案见262页) 练一练

9. 如图是某市市区几个旅游景点的示意图(图中每个小正方形的边长都为1个单位长度),请以某景点为坐标原点,建立平面直角坐标系,并用坐标表示下列景点的位置:光岳楼、金凤广场、动物园.



(第9题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

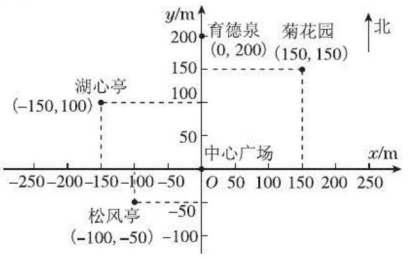


图 3.1-8

点方法

建立平面直角坐标系描述物体的位置时，建立的平面直角坐标系不同，各个点的坐标一般也不同；建立的坐标系在符合题意的基础上，应尽量使较多的点落在坐标轴上.

知识点 6 用方位角和距离确定位置

点知识

1. **定义**：确定平面内一个物体位置的问题，可以选择一个**参照物**，然后用方位角和距离来表示物体的位置，这种表示物体位置的方法称为方位角距离定位法.
2. **方法**：(1)取某个点为参照点，过参照点画出表示东西和南北方向的直线；
   (2)用量角器量出点 M 相对于参照点的方位角；
   (3)用刻度尺量出点 M 与参照点之间的距离，并利用比例尺计算出点 M 与参照点之间的实际距离；
   (4)用方位角和距离表示点 M 的位置.

要点精析

(1)用方位角和距离表示平面内点的位置时，需要两个数据：①该点相对于参照点的方位角；②该点与参照点之间的实际距离.

(2)用方位角和距离表示平面内点的位置和地图上的方向一样，按上北下南，左西右东划分，处于四个直角平分线上的方向分别是东南、东北、西南、西北.

(3)方位角具有**规定性**，以正北或正南为基准，以向东或向西偏离的角度表示方位，共有四种形式：北偏东 × ×°，北偏西 × ×°，南偏东 × ×°，南偏西 × ×°.

点考向

考查角度：利用方位角和距离表示位置

例 10 小明在光明广场(O 点)绘制了市内的几所学校相对于光明广场的位置简图(如图3.1-9，1 cm表示5 km).

东方红中学在光明广场的正南方向，测得 $OA = 1.7$ cm，$OB = 2$ cm，$OC = 2$ cm，$OD = 1.4$ cm，$\angle AOC = 123°18'$，$\angle AOB = 68°24'$，$\angle AOD = 88°28'$. 如何确定每所学校的具体位置？

导引：要确定每所学校的具体位置，应以光明广场为参照物，然后通过计算确定各学校所在位置的方位角，最后用方位角和各学校到光明广场的实际距离来表示各学校的位置.

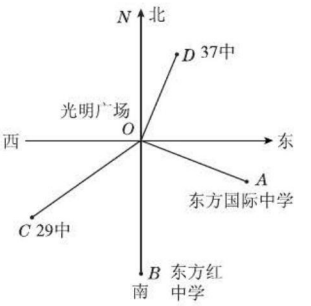


图 3.1-9

▶解：$\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 123°18' - 68°24' = 54°54'$，$\angle NOD = 180° - \angle AOB - \angle AOD = 180° - 68°24' - 88°28' = 23°8'$.

相对于光明广场来说，东方国际中学在南偏东 $68°24'$ 的方向，距离为8.5 km处；东方红中学在正南方向，距离为 10 km 处；29 中在南偏西 $54°54'$ 的方向，距离为 10 km 处；37 中在北偏东 $23°8'$ 的方向，距离为 7 km 处.

点方法

用方位角和距离来确定物体的位置时，方位角、距离这两个数据缺一不可. 在描述位置时，一般先指出方位角，再指出距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 用割补法求图形的面积

例11 如图3.1-10，四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-2,2)$，$B(2,1)$，$C(4,-2)$，$D(-3,-2)$，求四边形$ABCD$的面积.

导引：四边形$ABCD$是不规则的四边形，要求其面积，可将该四边形的面积转化为两个直角三角形的面积和一个梯形的面积的和来计算.

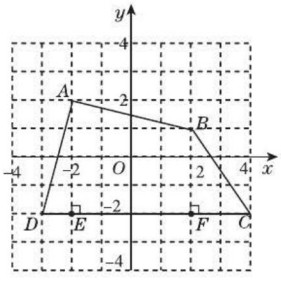


图3.1-10

▶解：如图3.1-10，过点A作$AE\perp CD$于点E，过点B作$BF\perp CD$于点F，则$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ADE}+S_{梯形AEFB}+S_{\triangle BCF}$. 由$A,B,C,D$各点坐标，易得$DE=1$，$AE=EF=4$，$BF=3$，$FC=2$，所以$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=2$，$S_{梯形AEFB}=\frac{1}{2}(BF+AE)\cdot EF=14$，$S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}BF\cdot FC=3$，

所以$S_{四边形ABCD}=2+14+3=19$.

点方法

对于直角坐标系内不规则的四边形的面积的计算，可将求不规则的四边形的面积转化为求规则图形的面积的和(或差)来计算.

拨尖角度2 利用不同定位方式确定同一位置(拓展点)

例12 如图3.1-11，一个正方形被等分成4行4列.

(1)若点A用(1,1)表示，点B用(2,2)表示，点C用(0,0)表示，请在图中标出点C的位置；

(2)若点A用$(-3,1)$表示，点B用$(-2,2)$表示，点D用(0,0)表示，请标出点D的位置，并说明(1)中点C应如何表示.

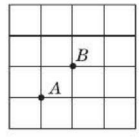


图3.1-11

导引：确定位置的方式是多样的，要能灵活地运用不同的方式确定物体的位置. 由于同一位置上的点的坐标发生了变化，因此它的定位方式也发生了变化，因而点C、点D的位置也不相同.

▶解：(1)点C的位置如图3.1-12①所示.

(2)点D的位置如图3.1-12②所示，点C可表示为$(-4,0)$.

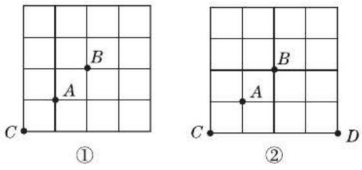


图3.1-12

点方法

根据已知点的坐标特征确定坐标原点的方法：若点A的坐标是(a,b)，其中$a>0$，$b>0$，则原点的位置是从点A向左移动a个单位长度，向下移动b个单位长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨尖角度3 利用平面直角坐标系探究动点问题(拓展点)

例13 如图3.1-13,动点P在平面直角坐标系中按箭头所示方向运动,第1次从原点运动到点(1,1),第2次接着运动到点(2,0),第3次接着运动到点(3,2)……按这样的运动规律,经过第2 019次运动后,动点P的坐标是_____.

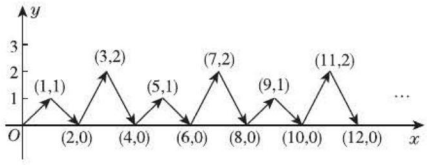


图3.1-13

导引:根据如图3.1-13所示的点P的坐标变化规律,可以看出:①点P的横坐标依次为1,2,3,4,…,即点P的横坐标等于运动的次数,所以第2 019次运动后,点P的横坐标是2 019;

②点P的纵坐标依次是1,0,2,0,1,0,2,0,…,即每运动四次一个循环,因为2 019÷4=504……3,所以运动第2 019次后,点P的纵坐标与第3次运动后的纵坐标相同.所以经过第2 019次运动后,点P的坐标为(2 019,2).

▶答案:(2 019,2)

探规律

本题的解题规律在于观察图中点的坐标的变化情况,因为点P的横、纵坐标变化情况不相同,所以应对点P的横、纵坐标变化情况分别进行分析,其中能找到点P的纵坐标按照一定的周期循环是解题的关键.

数学素养提升

笛卡儿的《几何学》

笛卡儿生于法国的一个贵族家庭,从小好奇心强,勤奋好学,自学了大量的数学,哲学方面的书籍,这些积累成为他数学和哲学思想的主要来源.笛卡儿毕业于法国巴黎普瓦捷大学,获法律学位.毕业两年后,他不满足于书本知识,决心走向社会,"去读世界这本大书".于是他入伍随军远游,但他始终在专心思考着数学与哲学问题.笛卡儿认为,希腊人的综合几何只研究一些非常抽象,而看起来无用的问题,过于依赖图形,束缚了人的想象力;而对于当时流行的代数,他认为过于强调法则和公式,不能成为一门有利于增进智力的科学;他对于三段论逻辑也有看法,认为不产生任何新的结果,因此,笛卡儿对逻辑学,几何学和代数学进行了系统的思考,从而建立了一种"普遍的数学".

《几何学》是笛卡儿唯一公开发表的数学著作.这本书的发表,标志着解析几何学的诞生,是数学史上划时代的光辉著作.笛卡儿首先建立了坐标思想,引入坐标和变量的概念,使变量数学开始登上历史舞台,从而使数学的两大基本要素"数"与"形"统一起来,也就是说,可以用代数方法研究几何问题,也可以运用几何方法解决代数问题,对于后来牛顿,莱布尼茨建立微积分理论起到关键的作用,为当时科学的发展提供了数学工具,推动了17世纪以来数学的大发展.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 （答案见263页）

基础巩固练

1. 气象台为了预报台风，首先要确定台风中心的位置，则下列说法能确定台风中心的位置的是（　　）

A. 西太平洋　　B. 北纬26°，东经35°

C. 距台湾300海里　　D. 台湾附近

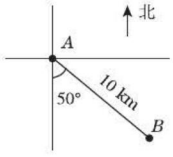
2. 如图，关于点B的位置下列说法准确的是（　　）

A. 点B在距离点A 10 km处

B. 点B在点A的南偏东50°方向上

C. 点B在点A的南偏东50°方向10 km处

D. 以上说法都不对



（第2题图）

3. 若按照排号在前，列号在后编号，甲同学的位置是(3,6)，乙同学的位置是第3列第6排，则甲、乙两同学（　　）

A. 在同一列　B. 在同一位置

C. 在同一排　D. 不在同一列且不在同一排

4. [中考·东营]在平面直角坐标系中，若点$P(m-2,m+1)$在第二象限，则m的取值范围是（　　）

A. $m<-1$　　B. $m>2$

C. $-1<m<2$　　D. $m>-1$

5. [中考·扬州]在平面直角坐标系的第二象限内有一点M，点M到x轴的距离为3，到y轴的距离为4，则点M的坐标是（　　）

A. $(3,-4)$　　B. $(4,-3)$

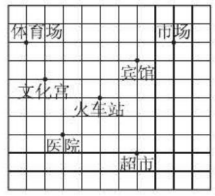
C. $(-4,3)$　　D. $(-3,4)$

6. [中考·甘肃]已知点$P(0,m)$在y轴的负半轴上，则点$M(-m,-m+1)$在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

7. 如图是某市部分简图，小方格边长均为1，请以火车站为坐标原点建立平面直角坐标系，并分别写出各地的坐标.



（第7题图）

能力提升练

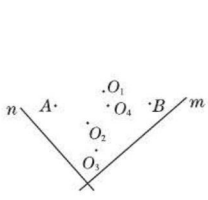
8. 若$xy>0$，且$x+y>0$，则点$P(x,y)$在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

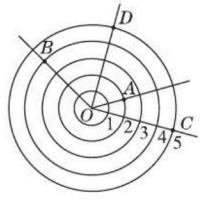
C. 第三象限　　D. 第四象限

9. [中考·北京]如图，直线$m\perp n$，在某平面直角坐标系中，x轴$/\!/m$，y轴$/\!/n$，点A的坐标为$(-4,2)$，点B的坐标为$(2,-4)$，则坐标原点为（　　）

A. O_1　　B. O_2　　C. O_3　　D. O_4



（第9题图）



（第12题图）

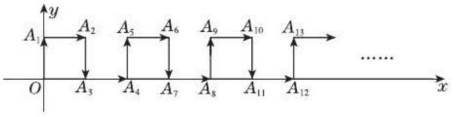
10. 在平面直角坐标系中，点$P(m^2+2,-4)$一定在第_____象限.

11. 已知$A(1,2)$，$B(x,y)$，$AB/\!/x$轴，且B到y轴的距离为2，则点B的坐标是_____.

12. 如图，已知$\angle AOC=30°$，$\angle BOC=150°$，OD为$\angle BOA$的平分线，则$\angle DOC=$_____. 若A点表示为$(2,30°)$，B点表示为$(4,150°)$，则D点表示为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. [中考 · 聊城] 如图,在平面直角坐标系中,一动点从原点 O 出发,按向上、向右、向下、向右的方向依次不断地移动,每次移动一个单位长度,得到点 $A_1(0,1)$,$A_2(1,1)$,$A_3(1,0)$,$A_4(2,0)$,…,那么点 A_{4n+1}(n 为自然数)的坐标为_____(用 n 表示).



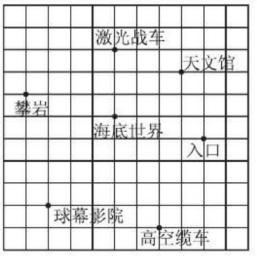
(第 13 题图)

14. 小杰与同学去游乐城游玩,他们准备根据游乐城平面示意图(如图)安排游玩顺序.

(1)如果用(8,5)表示入口的位置,(6,1)表示高空缆车的位置,那么攀岩的位置如何表示?(4,6)表示哪个地点?

(2)你能找出哪个游乐设施离入口最近,哪个游乐设施离入口最远吗?

(3)请你帮小杰设计一条游玩路线.



(第 14 题图)

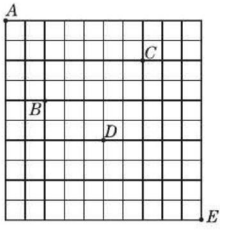
思维拓展练

15. 如图,一只甲虫在 10×10 的方格(每个小方格边长为 1)纸上沿着网格线运动,它从 C 处出发想去看望 A,B,D,E 处的其他甲虫,规定:向下向左走为正,向上向右走为负. 则从 C 到 B 记为 $C\to B(+5,+2)$(第一个数表示左、右方向,第二个数表示上、下方向).

(1)填空:$C\to D$(____,____);$C\to A$(____,____);$D\to$____$(+5,-6)$;$E\to$____(____,-4).

(2)若这只甲虫的行走路线是 $C\to A\to B\to D\to E$,请计算该甲虫走过的路程.

(3)这只甲虫去另一只甲虫家 P 处的行走路线依次为$(-2,+2)$,$(+3,-4)$,$(-4,+2)$,$(+7,+3)$,请在图上描出这只甲虫的行走路线并标出 P 点的位置,想一想,有没有简便的方法?



(第 15 题图)

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2 简单图形的坐标表示

热门话题
- 建立平面直角坐标系确定点的坐标
- 求几何图形的面积.

话题链接
简单图形的坐标表示 → 平面直角坐标系的建立；求简单几何图形的面积

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点 简单图形的坐标表示(重点)

点知识

平面直角坐标系的构建不同,则点的坐标也不同,在建立平面直角坐标系时,应使点的坐标简明.

要点精析

(1)根据已知条件建立直角坐标系的原则是尽量使计算简便,根据实际情况建立直角坐标系通常有以下几种:①以其中一个已知点为原点;②以图形中某条线段所在直线为 x 轴(或 y 轴);③以已知线段中点为原点;④以两直线交点为原点;⑤利用图形的轴对称性,以对称轴为坐标轴.

(2)选择的坐标系的原点不同,建立的直角坐标系也不同,得到的点的坐标也不同.

(3)无论怎么选择坐标原点,虽然得到的点的坐标不同,但它们的相对位置始终不变.

拨考向

考查角度1:根据几何图形顶点坐标建立适当的坐标系

例1 如图3.2-1,长方形 $ABCD$ 的宽 AB 为4,长 BC 为6,按下列要求分别建立平面直角坐标系:

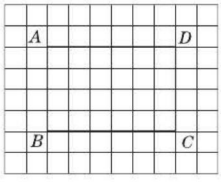


图3.2-1

(1)使点 D 的坐标为(6,4);

(2)使点 D 的坐标为(0,4);

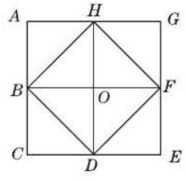
(3)使点 B 的坐标为(−3,−2);

(4)使点 B 的坐标为(−3,−4).

导引:(1)先找到坐标原点,因为点 D 的坐标为(6,4),所以坐标原点在点 D 左边6个单位长度,下边4个单位长度处,即点 B,以点 B 为原点,BC,AB 所在直线分别为 x 轴和 y 轴,建立平面直角坐标系.(2)(3)(4)建立平面直角坐标系的方法同(1).

同类变式 (答案见263页) 练一练

1. 如图,四边形 $ACEG$ 和四边形 $BDFH$ 都是正方形,B,D,F,H 分别是正方形 $ACEG$ 各边的中点,BF 的长为6,建立适当的平面直角坐标系,写出点 A,B,C,D,E,F,G,H 的坐标.



(第1题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)如图 3.2-2①所示. (2)如图 3.2-2②所示.
(3)如图 3.2-2③所示. (4)如图 3.2-2④所示.

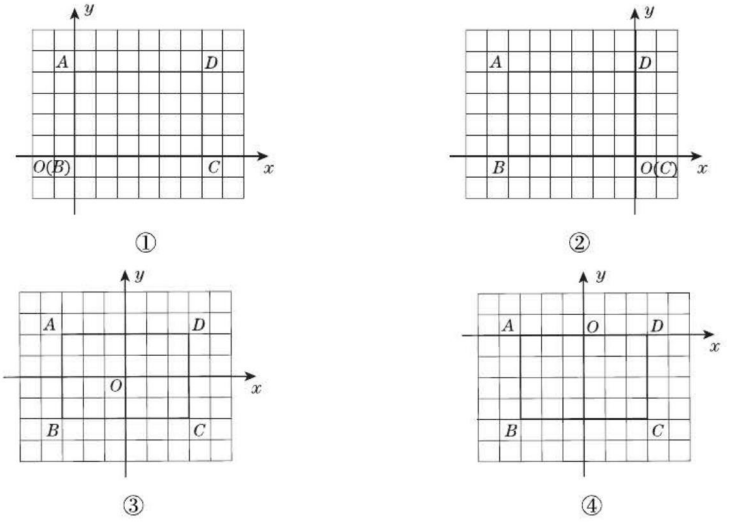


图 3.2-2

点方法

在几何图形中建立适当的坐标系的一般方法:(1)使图形中尽量多的点在坐标轴上;(2)以某些特殊线段所在直线为 x 轴或 y 轴;(3)若某图形被一条直线分得的两部分形状、大小相同,则可以将此直线作为 x 轴或 y 轴;(4)以某已知点为原点,使它的坐标为(0,0).

考查角度 2:在平面直角坐标系中求几何图形的面积

例 2 已知在平面直角坐标系中,四边形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(0,0)$,$B(2,3)$,$C(5,2)$,$D(3,0)$,试画出四边形 $ABCD$,并求出四边形 $ABCD$ 的面积.

导引:先根据点的坐标描出点的位置,然后通过作垂线,将不规则图形转化为规则图形,再利用规则图形面积公式求解.

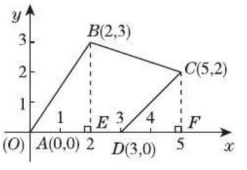


图 3.2-3

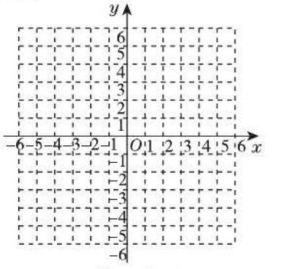
▶解:四边形 $ABCD$ 如图 3.2-3 所示.

分别过点 B,C 向 x 轴作垂线,垂足分别为点 E,F,则 $AE=2$,$BE=3$,$DF=2$,$CF=2$,$EF=3$,

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{梯形BCFE}-S_{\triangle CFD}=\frac{1}{2}AE\cdot BE+\frac{1}{2}(BE+CF)\cdot EF-\frac{1}{2}DF\cdot FC=\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{1}{2}\times(3+2)\times3-\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{17}{2}$.

同类变式 (答案见 263 页) 练一练

2. 已知:$A(0,1)$,$B(2,0)$,$C(4,3)$.
(1)在坐标系中(如图)描出各点,画出 $\triangle ABC$;
(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.



(第 2 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

解答此类题目的关键是找出不规则图形与规则图形之间的关系，通常是向 x 轴或 y 轴作垂线进行分割，即把不规则的图形的面积转化为规则图形面积的和或差来求解，这样运算更简便.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 图形中的整点问题

例3 [中考·无锡] 已知点 $A(0,0)$，$B(0,4)$，$C(3,t+4)$，$D(3,t)$. 记 $N(t)$ 为 $\square ABCD$ 内部(不含边界)整点的个数，其中整点是指横坐标和纵坐标都是整数的点，则 $N(t)$ 所有可能的值为(　　)

A. 6,7　　B. 7,8

C. 6,7,8　　D. 6,8,9

导引：当 t 不同时，$\square ABCD$ 的形状不同，根据图 3.2-4 可得出答案.

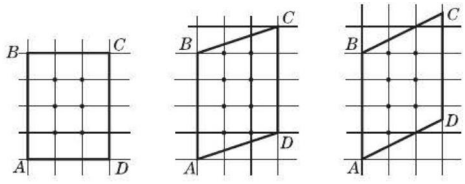


图 3.2-4

▶答案：C

点方法

本题利用**分类讨论思想**，画出 t 不同时的平行四边形是解题的关键.

拨尖角度2 与坐标有关的综合题

例4 如图 3.2-5，$A(-1,0)$，$C(1,4)$，点 B 在 x 轴上，且 $AB=3$.

(1)求点 B 的坐标；

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积；

(3)在 y 轴上是否存在点 P，使以 A，B，P 三点为顶点的三角形的面积为 10？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

导引：(1)分点 B 在点 A 的左边和右边两种情况解答；

(2)利用三角形的面积公式列式计算；

(3)利用三角形的面积公式列式求出点 P 到 x 轴的距离，然后分两种情况写出点 P 的坐标即可.

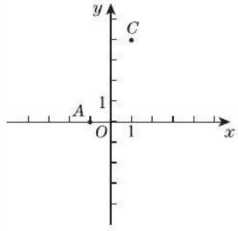


图 3.2-5

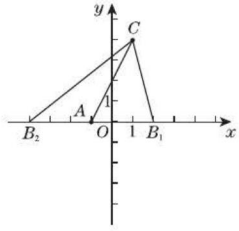


图 3.2-6

▶解：(1)如图 3.2-6，

当点 B 在点 A 的右边时，$-1+3=2$，当点 B 在点 A 的左边时，$-1-3=-4$，所以 B 的坐标为 $(2,0)$ 或 $(-4,0)$.

(2)$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$.

(3)设点 P 到 x 轴的距离为 h，则 $\frac{1}{2}\times 3h=10$，解得 $h=\frac{20}{3}$，

点 P 在 y 轴正半轴时，$P\left(0,\frac{20}{3}\right)$，

点 P 在 y 轴负半轴时，$P\left(0,-\frac{20}{3}\right)$，

综上所述，点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{20}{3}\right)$ 或 $\left(0,-\frac{20}{3}\right)$.

点方法

x 轴上两点之间的距离可以用右边点的横坐标减去左边点的横坐标计算，所以根据 AB 的长度，分两种情况确定点 B 的位置. 同样根据三角形的面积公式计算出三角形的高，再根据点在 y 轴的正半轴或负半轴上确定点的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度3 创新题

例5 【阅读】在平面直角坐标系中，以任意两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$为端点的线段的中点坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

【运用】(1)如图3.2-7，矩形$ONEF$的对角线交于点M，ON，OF分别在x轴和y轴上，O为坐标原点，点E的坐标为$(4,3)$，则点M的坐标为_____；

(2)在直角坐标系中，有$A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$三点，另有一点D与点A，B，C构成平行四边形的顶点，求点D的坐标.

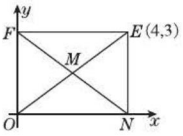


图3.2-7

导引：(1)理解好线段中点坐标公式，代入计算即可；(2)分类讨论点D的坐标有三种情况，可构成$\square ACDB$，$\square ABCD$，$\square ACBD$，即分别以BC，AC，AB为对角线，先求出对角线的中点坐标，再运用线段中点坐标公式，求点D的坐标.

▶解：(1)$\left(2,\frac{3}{2}\right)$

(2)设点D的坐标为(x,y)，若以AB为对角线，AC，BC为邻边构成平行四边形，则AB，CD的中点重合，

$$\therefore \begin{cases}\frac{1+x}{2}=\frac{-1+3}{2},\\ \frac{4+y}{2}=\frac{2+1}{2},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$$

若以BC为对角线，AB，AC为邻边构成平行四边形，则AD，BC的中点重合，

$$\therefore \begin{cases}\frac{-1+x}{2}=\frac{1+3}{2},\\ \frac{2+y}{2}=\frac{4+1}{2},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=5,\\ y=3.\end{cases}$$

若以AC为对角线，AB，BC为邻边构成平行四边形，则BD，AC的中点重合，

$$\therefore \begin{cases}\frac{3+x}{2}=\frac{-1+1}{2},\\ \frac{1+y}{2}=\frac{2+4}{2},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=-3,\\ y=5.\end{cases}$$

综上可知，点D的坐标为$(1,-1)$或$(5,3)$或$(-3,5)$.

点方法

本题利用**分类讨论思想**，正确理解线段的中点坐标公式，当平行四边形的某一顶点不确定时要分类讨论，根据三角形的三条边分别为对角线为依据来确定某一顶点的位置，是常采用的方法.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见263页)

基础巩固练

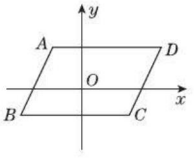
1. 如图，$AD\parallel BC\parallel x$轴，下列说法正确的是(　　)

A. A与D的横坐标相同

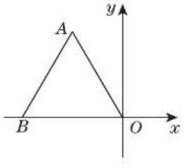
B. C与D的横坐标相同

C. B与C的纵坐标相同

D. B与D的纵坐标相同



(第1题图)



(第3题图)

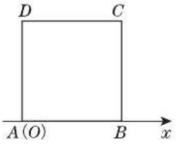
2. 在平面直角坐标系中，若菱形$MNPO$的顶点P的坐标是$(3,4)$，则顶点M，N的坐标可以分别是(　　)

A. $(5,0)$，$(8,4)$　　B. $(4,0)$，$(8,4)$

C. $(5,0)$，$(7,4)$　　D. $(4,0)$，$(7,4)$

3. 如图，等边三角形ABO的边长为3，则点A的坐标是_____.

4. 如图，正方形$ABCD$的边长为6. 若以点A为原点，AB所在的直线为x轴，建立平面直角坐标系，则y轴是哪条线？并写出正方形的顶点A，B，C，D的坐标.



(第4题图)

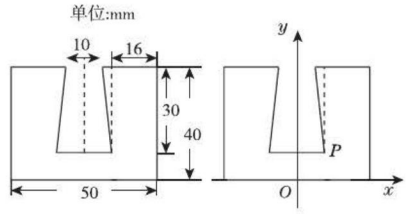
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

5. [中考·金华]小明为画一个零件的轴截面,以该轴截面底边所在的直线为 x 轴,对称轴为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系.若坐标轴的单位长度取 1 mm,则图中转折点 P 的坐标表示正确的是(　　)

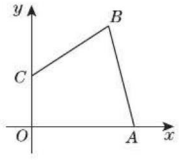
A. (5,30)　　B. (8,10)

C. (9,10)　　D. (10,10)

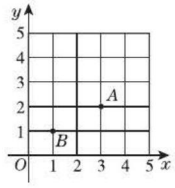


(第5题图)

6. 如图,在平面直角坐标系中,点 $A(4,0)$,$B(3,4)$,$C(0,2)$,则四边形 $ABCO$ 的面积 = _____.



(第6题图)

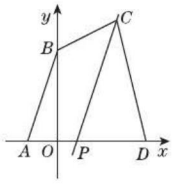


(第8题图)

7. 已知点 $A(a,0)$ 和点 $B(0,5)$,且直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积等于 10,则 a 的值是_____.

8. 如图,在直角坐标系中,$\triangle ABC$ 的面积为 2,三个顶点的坐标分别为 $A(3,2)$,$B(1,1)$,$C(a,b)$,且 a,b 均为正整数,则点 C 的坐标为_____.

9. 如图,点 $A(-1,0)$,点 $B(0,3)$,点 $C(2,4)$,点 $D(3,0)$,点 P 是 x 轴上一动点,若直线 CP 将四边形 $ABCD$ 的面积分成 1∶2 两部分,则点 P 的坐标为_____.

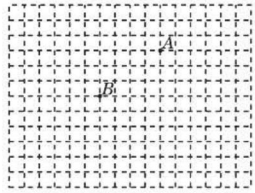


(第9题图)

10. 如图是由边长为 1 的小正方形组成的方格图.

(1)请在方格图中建立平面直角坐标系,使点 A 的坐标为(3,3),点 B 的坐标为(-1,0);

(2)在 x 轴上作出点 C,使 $\triangle ABC$ 是以 AB 为腰的等腰三角形,并写出所有满足条件的点 C 的坐标.(不写作法,保留作图痕迹)



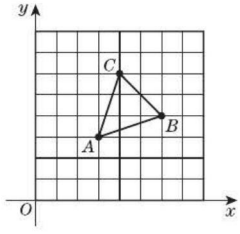
(第10题图)

思维拓展练

11. 如图,A,B,C 为一个平行四边形的三个顶点,且 A,B,C 三点的坐标分别为(3,3)、(6,4)、(4,6).

(1)请直接写出这个平行四边形第四个顶点的坐标;

(2)求这个平行四边形的面积.



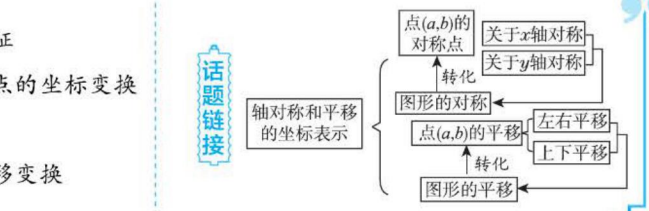
(第11题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3.3 轴对称和平移的坐标表示

热门话题
- 对称点的坐标特征
- 用图形的对称与点的坐标变换
- 用坐标表示平移
- 在坐标系中的平移变换

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 轴对称的坐标表示(重点)

点知识

1. 在平面直角坐标系中,点(a,b)关于x轴的对称点的坐标为$(a,-b)$;关于y轴的对称点的坐标为$(-a,b)$.
2. 平面直角坐标系中关于坐标轴轴反射的点的坐标有以下特征:关于x轴轴反射的点的横坐标不变,关于y轴轴反射的点的纵坐标不变,简记口诀为:关谁谁不变.
3. **在平面直角坐标系中作轴对称图形**:作一个图形关于x轴(或y轴)对称的图形的步骤:(1)求出特殊点关于x轴(或y轴)对称的点的坐标;(2)描点;(3)依次连接所描的点.
4. **拓展**:作一个图形关于x轴(或y轴)的对称图形:
   (1)横坐标保持不变,纵坐标乘-1,所得图形与原图形关于x轴对称;
   (2)横坐标乘-1,纵坐标保持不变,所得图形与原图形关于y轴对称.

拨考向

考查角度1:求关于x轴对称的点的坐标

例1 [中考·武汉]点$A(2,-5)$关于x轴对称的点的坐标是(　　)

A. $(2,5)$　　B. $(-2,5)$

C. $(-2,-5)$　　D. $(-5,2)$

导引:∵关于x轴对称的两个点的横坐标相同,纵坐标互为相反数,

∴点$A(2,-5)$关于x轴对称的点的坐标是$(2,5)$.

▶答案:A

同类变式 (答案见264页) 练一练

1. 已知点$A(a-1,5)$和点$B(2,b-1)$关于x轴对称,则$(a+b)^{2\,019}$的值为(　　)

A. 0　　B. -1

C. 1　　D. $-2\,019$

点方法

平面直角坐标系中,点$A(a,b)$关于x轴的对称点的坐标是$(a,-b)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：求关于 y 轴对称的点的坐标

例2 如图3.3-1，在平面直角坐标系 Oxy 中，点 $P(-3,5)$ 关于 y 轴的对称点的坐标为(　　)

A. $(-3,-5)$　　B. $(3,5)$

C. $(3,-5)$　　D. $(5,-3)$

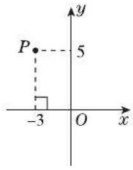


图3.3-1

导引：∵ 关于 y 轴对称的两个点的纵坐标相同，横坐标互为相反数，

∴ 点 $P(-3,5)$ 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(3,5)$.

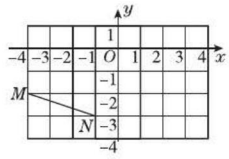
▶答案：B

点方法

关于 y 轴对称的两个点的坐标之间的关系是：横坐标互为相反数，纵坐标不变.

同类变式 (答案见264页)　练一练

2. 线段 MN 在直角坐标系中的位置如图所示，线段 M_1N_1 与 MN 关于 y 轴对称，则点 M 的对应点 M_1 的坐标为_____.



(第2题图)

考查角度3：利用关于坐标轴对称的点的坐标的特征求待定字母的值

例3 已知点 $A(m+2,3)$，$B(-5,n+6)$ 关于 y 轴对称，则 $m=$_____，$n=$_____.

导引：由关于 y 轴对称的点的坐标特征得 $m+2=5$，$n+6=3$，解得 $m=3$，$n=-3$. ▶答案：3；-3

点方法

本题运用了**方程思想**，根据题意列出方程是解题的关键. 关于 x 轴对称的点的坐标的特征是纵坐标互为相反数、横坐标相等；关于 y 轴对称的点的坐标的特征是横坐标互为相反数、纵坐标相等.

考查角度4：利用轴对称变换特征在平面直角坐标系中画关于坐标轴对称的图形

例4 如图3.3-2，在平面直角坐标系中，已知点 $A(0,3)$，$B(2,4)$，$C(4,0)$，$D(2,-3)$，$E(0,-4)$. 写出 B,C,D 关于 y 轴对称的点 H,G,F 的坐标，画出 H,G,F 点，并顺次连接点 A,B,C,D,E,F,G,H,A.

导引：方法一：点 (x,y) 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(-x,y)$，作点 B,C,D 关于 y 轴对称的点的关键是确定各对称点的坐标；

方法二：利用轴对称先作出 B,C,D 关于 y 轴对称的点 H,G,F，再直观判断 H,G,F 的坐标.

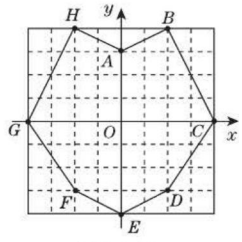


图3.3-2

▶解：方法一：点 B,C,D 关于 y 轴对称的点的坐标分别为 $H(-2,4)$，$G(-4,0)$，$F(-2,-3)$，根据坐标描出点 H,G,F，并顺次连接点 A,B,C,D,E,F,G,H,A，如图3.3-2所示.

方法二：先作出点 B,C,D 关于 y 轴对称的点 H,G,F，观察得出 $H(-2,4)$，$G(-4,0)$，$F(-2,-3)$，再顺次连接点 A,B,C,D,E,F,G,H,A，如图3.3-2所示.

拨技巧

在平面直角坐标系中作关于坐标轴对称的图形时，先根据轴对称变换的特征找出对称点的位置，然后依次补全即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 平移的坐标表示(重点)

点知识

1. **点在坐标系中的平移**:在平面直角坐标系中,某个点经过平移后,其位置发生了变化,其坐标也发生了变化.
2. **点的平移与坐标变化的关系**:根据点的平移情况可以得到平移后点的坐标变化情况;反过来,根据点的坐标变化情况,可以得到点的平移情况,即:$(x,y)\xrightarrow[\text{向左平移 } a \text{ 个单位长度}]{\text{向右平移 } a \text{ 个单位长度}}(x+a,y)$;$(x,y)\xrightarrow[\text{向下平移 } b \text{ 个单位长度}]{\text{向上平移 } b \text{ 个单位长度}}(x,y+b)$.

要点精析 ///

(1)将点左右平移,纵坐标不变;上下平移,横坐标不变;

(2)将点向右(上)平移几个单位长度,其横(纵)坐标就加几;

(3)将点向左(下)平移几个单位长度,其横(纵)坐标就减几.

拨考向

考查角度 1:利用点的平移方式求点的坐标

例 5 [中考 · 长沙]在平面直角坐标系中,将点 $A(-2,3)$ 向右平移 3 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度,那么平移后对应的点 A' 的坐标是_____.

导引:由题意知:A 的横坐标加 3,纵坐标减 2,即可求出平移后的坐标,∴ 平移后对应的点 A' 的坐标为(1,1).

▶答案:(1,1)

点方法

知平移求坐标口诀: 左右平移,横坐标左减右加;上下平移,纵坐标上加下减.

考查角度 2:利用点的坐标变化确定点的平移方式

例 6 [中考 · 绍兴]在如图 3.3-3 所示的平面直角坐标系内,画在透明胶片上的平行四边形 $ABCD$,点 A 的坐标是(0,2).现将这张胶片平移,使点 A 落在点 $A'(5,-1)$ 处,则点 A 的平移情况是(　　)

A. 先向右平移 5 个单位长度,再向下平移 1 个单位长度

B. 先向右平移 5 个单位长度,再向下平移 3 个单位长度

C. 先向右平移 4 个单位长度,再向下平移 1 个单位长度

D. 先向右平移 4 个单位长度,再向下平移 3 个单位长度

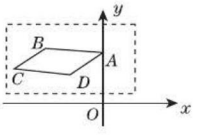


图 3.3-3

导引:由点 $A(0,2)$ 平移到点 $A'(5,-1)$,可得出平移方向与距离,即先向右平移 5 个单位长度,再向下平移 3 个单位长度.

▶答案:B

同类变式 (答案见 264 页) 练一练

6. 在平面直角坐标系中,将一个点的纵坐标减去 3,横坐标保持不变,所得的点与原来的点相比,(　　)

A. 向右平移 3 个单位长度

B. 向左平移 3 个单位长度

C. 向上平移 3 个单位长度

D. 向下平移 3 个单位长度

拨技巧

由点的坐标变化确定点的平移的方法: 在判断点的平移时,终点与始点的横坐标之差即为沿 x 轴的平移情况,若差值为正,则表示向右平移;若差值为负,则表示向左平移.同理,终点与始点的纵坐标之差即为沿 y 轴的平移情况,若差值为正,则表示向上平移;若差值为负,则表示向下平移.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点3 用点的坐标表示图形的平移

点知识

1. **图形在坐标平面中的平移**是指在坐标系中，在保持坐标轴不动的情况下，图形的整体移动. 图形在坐标平面中平移变换的实质：(1)图形的位置及表示位置的坐标发生变化；(2)图形的形状、大小、方向不变.
2. **图形的平移与图形上各点的坐标变化的关系**：
   (1)因为图形的平移是图形的整体平移，所以已知图形的平移情况，即可得到图形上各点坐标的变化情况；
   (2)平移时，因为图形上各点的变化情况相同，所以已知图形上某点的坐标变化情况，即可知道图形的变化情况.

要点精析

(1)图形的平移首先应转化为图形顶点的平移，再按照点的平移规律进行平移；
(2)一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到.


图形的平移

3. **拓展**：
变换的方法：一次平移的方向是由原图形上的点到平移后图形上的对应点的方向. 若沿 x 轴方向平移的距离为 a，沿 y 轴方向平移的距离为 b，则图形经过一次平移的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}$.

拓考向

考查角度1：由点的坐标变化确定平移情况

例7 如图3.3-4，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-4,-4)$，$B(-2,-3)$，$C(-3,-1)$.

(1)将 $\triangle ABC$ 三个顶点的横坐标都加上5，纵坐标不变，分别得到点 A_1，B_1，C_1，依次连接 A_1，B_1，C_1 各点，所得 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 在大小、形状和位置上有什么关系？

(2)将 $\triangle ABC$ 三个顶点的纵坐标都加上4，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，依次连接 A_2，B_2，C_2 各点，所得 $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 在大小、形状和位置上有什么关系？

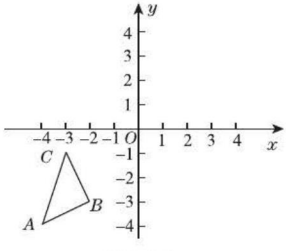


图3.3-4

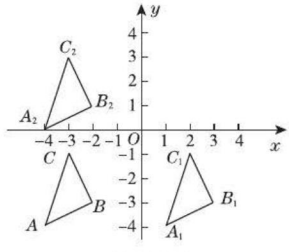


图3.3-5

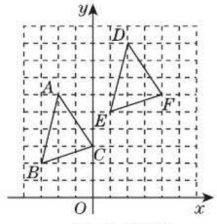
▶解：变化后的图形如图3.3-5所示.

(1)所得 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的大小、形状完全相同，$\triangle A_1B_1C_1$ 可以看作是将 $\triangle ABC$ 向右平移5个单位长度得到的.

(2)$\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的大小、形状完全相同，$\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是将 $\triangle ABC$ 向上平移4个单位长度得到的.

同类变式 (答案见264页) 练一练

7. 如图，$\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为 $A(-2,6)$，$B(-3,2)$，$C(0,3)$，将 $\triangle ABC$ 中各点的横坐标先加4，再把各点的纵坐标加3，得到 $\triangle DEF$.
   (1)分别写出 $\triangle DEF$ 各顶点的坐标；
   (2)如果将 $\triangle DEF$ 看成是由 $\triangle ABC$ 经过一次平移得到的，请指出这一平移的平移方向和平移距离.



(第7题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出对这个图形进行了怎样的平移；横坐标的变化决定图形左右平移，纵坐标的变化决定图形上下平移.

考查角度2：利用图形的平移情况确定点的坐标

例8 如图3.3-6，一小船，将其先向左平移6个单位长度，再向下平移5个单位长度，试确定A,B,C,D,E,F,G平移后对应点的坐标，并画出平移后的图形.

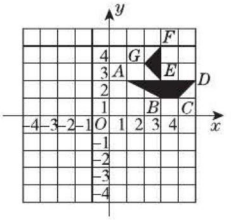


图3.3-6

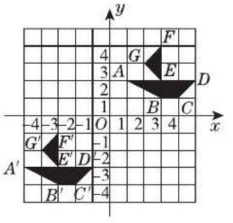


图3.3-7

点方法

本例为图形的平移问题，在平面直角坐标系中，画平移后的图形的实质是：先根据平移的特征确定特殊点平移后的坐标，然后再描点画出图形.

导引：把小船先向左平移6个单位长度，再向下平移5个单位长度，先确定关键点A,B,C,D,E,F,G，并把关键点分别向左平移6个单位长度，再分别向下平移5个单位长度. 根据点的坐标的变化规律，由$A(1,2),B(3,1),C(4,1),D(5,2),E(3,2),F(3,4),G(2,3)$，可确定平移后各对应点的坐标，根据原图的连接方式连接即可得到平移后的图形.

▶解：A,B,C,D,E,F,G平移后对应点的坐标分别为$A'(-5,-3),B'(-3,-4),C'(-2,-4),D'(-1,-3),E'(-3,-3),F'(-3,-1),G'(-4,-2)$，描出这些对应点并按原来的顺序连接起来，可得平移后的图形，如图3.3-7.

Ⅱ 点方法 · 拔技巧 · 探规律

拔尖角度1 平移和轴对称的综合运用

例9 如图3.3-8，$\triangle ABC$在平面直角坐标系中的第二象限内，顶点A的坐标是$(-2,3)$，先把$\triangle ABC$向右平移4个单位长度得到$\triangle A_1B_1C_1$（点A,B,C的对应点分别为A_1,B_1,C_1），再作$\triangle A_1B_1C_1$关于x轴对称的图形$\triangle A_2B_2C_2$（点A_1,B_1,C_1的对应点分别为A_2,B_2,C_2），则顶点A_2的坐标是(　　)

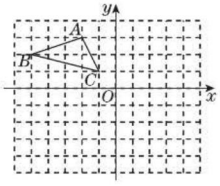


图3.3-8

A. $(-3,2)$　　B. $(2,-3)$

C. $(1,-2)$　　D. $(3,-1)$

导引：顶点A的坐标是$(-2,3)$，$\triangle ABC$向右平移4个单位长度后得到$\triangle A_1B_1C_1$，则顶点A_1的坐标是$(2,3)$，$\triangle A_1B_1C_1$关于x轴对称的图形为$\triangle A_2B_2C_2$，则顶点A_2的坐标是$(2,-3)$.

▶答案：B

探规律

解决本题的关键是掌握好平移的特点：左右移，纵不变，横减加；上下移，横不变，纵加减. 对称点的坐标规律：关于x轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2 平面直角坐标系中轴对称的综合应用

例10 如图3.3-9，四边形$OABC$是一张放在平面直角坐标系中的长方形纸片，O为原点，点A在x轴的正半轴上，点C在y轴的正半轴上，$OA=10$，$OC=8$，在OC边上取一点D，将纸片沿AD翻折，使点O落在BC边上的点E处，求D，E两点的坐标.

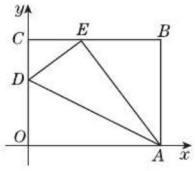


图3.3-9

导引：先根据勾股定理求出BE的长，进而可得出CE的长，求出E点坐标.

在$\mathrm{Rt}\triangle DCE$中，由$DE=OD$及勾股定理可求出OD的长，进而得出D点坐标.

▶解：由题意可知，折痕AD所在直线是四边形$OAED$的对称轴，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中，$AE=AO=10$，$AB=8$，

$BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

$\therefore CE=4$，$\therefore E(4,8)$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DCE$中，$DC^2+CE^2=DE^2$，

又$\because DE=OD$，

$\therefore (8-OD)^2+4^2=OD^2$，

$\therefore OD=5$，

$\therefore D(0,5)$.

探规律

图形的折叠是轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等. 本题考查了翻折变换(折叠问题图)、坐标与图形性质、勾股定理等知识，解题关键是运用折叠的性质，得到相等的线段，再运用**方程思想**，根据勾股定理建立方程求解.

拔尖角度3 根据平移求坐标

例11 已知：如图3.3-10，在平面直角坐标系中，正三角形OAB的顶点B的坐标为(2，0)，点A在第一象限内.

(1)求点A的坐标；

(2)将$\triangle OAB$沿O到A的方向平移4个单位长度至$\triangle O'A'B'$的位置，即$AA'=4$，求点B'的坐标.

(3)将$\triangle OAB$沿O到A的方向平移n个单位长度至$\triangle O'A'B'$的位置，若平移后的点B'的横坐标为2 019，求n的值.

导引：(1)作$AM\perp x$轴于点M. 根据等边三角形的性质得出$OA=OB=2$，$\angle AOB=60°$，在$\mathrm{Rt}\triangle OAM$中利用含30°角的直角三角形的性质及勾股定理求出OM及AM的长，即可求出点A的坐标.

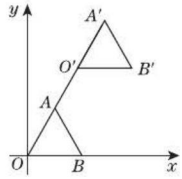


图3.3-10

(2)根据平移的性质可知当$AA'=4$时，$OO'=4$，连接$O'B$，由$OA=O'A=AB=2$，得出$\angle O'BO=90°$，求出$O'B$的长，进而求出点B'的坐标.

(3)过O'作x轴的垂线，垂足为P. 根据直角三角形中30°角的性质可得$OP=\frac{1}{2}OO'=\frac{1}{2}n$，根据平移后的点$B'$的横坐标为2 019，列出方程$\frac{1}{2}n+2=2\,019$求解.

▶解：(1)如图3.3-11①，作$AM\perp x$轴于点M.

$\because \triangle AOB$为正三角形，且顶点B的坐标为(2，0)，

$\therefore OA=OB=2$，$\angle AOB=60°$，

$\therefore OM=\frac{1}{2}OB=1$，$\therefore AM=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore A(1,\sqrt{3})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)当 $AA'=4$ 时,$OO'=4$,连接 $O'B$,如图 3.3-11②.

$\because OA=O'A=AB=2$,

$\therefore \angle O'BO=90°$,

$\therefore O'B=\sqrt{OO'^2-OB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(2+2,2\sqrt{3})$,即 $(4,2\sqrt{3})$.

(3)如图 3.3-11③,将 $\triangle OAB$ 沿 O 到 A 的方向平移 n 个单位长度至 $\triangle O'A'B'$ 的位置,即 $AA'=n$,则 $OO'=n$.

过 O' 作 x 轴的垂线,垂足为 P,

在 $\triangle OO'P$ 中,$\because \angle O'PO=90°$,$\angle OO'P=30°$,$OO'=n$,

$\therefore OP=\frac{1}{2}OO'=\frac{1}{2}n$.

$\because$ 平移后的点 B' 的横坐标为 2 019,$O'B'=2$,

$\therefore \frac{1}{2}n+2=2\,019$,

$\therefore n=4\,034$.

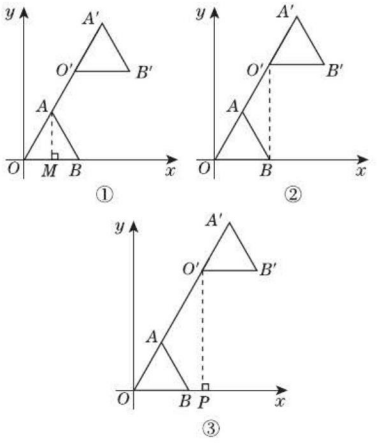


图 3.3-11

拔技巧

在平面直角坐标系中,图形的平移与图形上某点的平移相同. 平移中点的变化规律是:横坐标右移加,左移减;纵坐标上移加,下移减.

拔尖角度 4 利用图形的变换特征探究图形变换后点的坐标(拓展点)

例 12 如图 3.3-12,在平面直角坐标系中,第一次将三角形 OAB 变换成三角形 OA_1B_1,第二次将三角形 OA_1B_1 变换成三角形 OA_2B_2,第三次将三角形 OA_2B_2 变换成三角形 OA_3B_3……已知 $A(1,3)$,$A_1(2,3)$,$A_2(4,3)$,$A_3(8,3)$,$B(2,0)$,$B_1(4,0)$,$B_2(8,0)$,$B_3(16,0)$.

(1)观察每次变换前后的三角形有何变化,按照变换规律再将三角形 OA_3B_3 变换成三角形 OA_4B_4,则 A_4 的坐标是_____,B_4 的坐标是_____;

(2)若按(1)找到的规律将三角形 OAB 进行了 n 次变换,得到三角形 OA_nB_n,则 A_n 的坐标是_____,B_n 的坐标是_____.

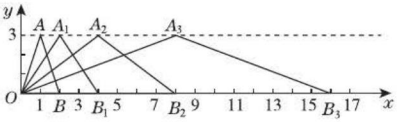


图 3.3-12

导引:只要注意比较横、纵坐标中变化的量以及不变的量,就可推测出坐标变化规律为:A_n 的横坐标是按 2^n 变化的,纵坐标不变;而 B_n 的横坐标是按 2^{n+1} 变化的,纵坐标不变,所以点 A_4 的坐标是(16,3),点 B_4 的坐标是(32,0),进一步求得点 A_n 的坐标是 $(2^n,3)$,点 B_n 的坐标是 $(2^{n+1},0)$.

▶答案:(1)(16,3);(32,0)

(2)$(2^n,3)$;$(2^{n+1},0)$

探规律

点的坐标发生变化,图形将会发生变化,图形变换有位置变换和大小变换,若是平移变换则只是位置发生改变,形状和大小不变. 本题最初的三个点中只有两个点的坐标发生了变化,所以图形的大小就发生了变化,探究时一定要注意.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

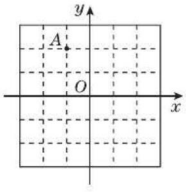
Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 （答案见265页）

基础巩固练

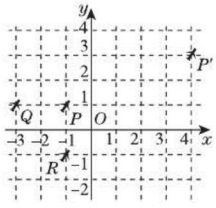
1. [中考·湘潭]如图，点A的坐标为$(-1,2)$，点A关于y轴的对称点的坐标为(　　)

A. $(1,2)$　　B. $(-1,-2)$

C. $(1,-2)$　　D. $(2,-1)$



（第1题图）



（第4题图）

2. 将$\triangle ABC$的三个顶点的横坐标乘-1，纵坐标不变，则所得图形(　　)

A. 与原图形关于y轴对称

B. 与原图形关于x轴对称

C. 与原图形关于原点对称

D. 向x轴的负方向平移了一个单位长度

3. 已知$A(2,3)$，其关于x轴的对称点是B，B关于y轴的对称点是C，那么将A平移到C的过程是(　　)

A. 向左平移4个单位长度，再向上平移6个单位长度

B. 向左平移4个单位长度，再向下平移6个单位长度

C. 向右平移4个单位长度，再向上平移6个单位长度

D. 向右平移4个单位长度，再向下平移6个单位长度

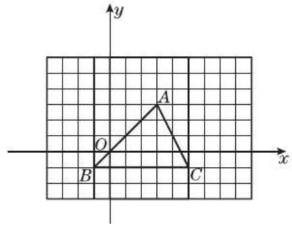
4. [中考·邵阳]如图，三架飞机P，Q，R保持编队飞行，某时刻在坐标系中的坐标分别为$(-1,1)$，$(-3,1)$，$(-1,-1)$. 30 s后，飞机P飞到$P'(4,3)$的位置，则飞机Q，R的位置Q'，R'分别为(　　)

A. $Q'(2,3)$，$R'(4,1)$　　B. $Q'(2,3)$，$R'(2,1)$

C. $Q'(2,2)$，$R'(4,1)$　　D. $Q'(3,3)$，$R'(3,1)$

5. [中考·南京]在平面直角坐标系中，点A的坐标是$(-1,2)$，作点A关于y轴的对称点，得到点A'，再将点A'向下平移4个单位长度，得到点A''，则点A''的坐标是(_____，_____). 【导学号:8564979】

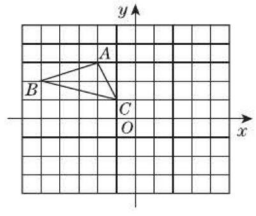
6. 如图，方格纸中的每个小格子都是边长为1个单位长度的正方形，我们把顶点在格点上的三角形叫作“格点三角形”，图中的$\triangle ABC$就是格点三角形，在建立平面直角坐标系以后，点B的坐标为$(-1,-1)$，把$\triangle ABC$向左平移3个单位长度后得到$\triangle A_1B_1C_1$，画出$\triangle A_1B_1C_1$，并分别写出A_1，B_1，C_1的坐标.



（第6题图）

能力提升练

7. [中考·海南]如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$位于第二象限，点A的坐标是$(-2,3)$，先把$\triangle ABC$向右平移4个单位长度得到$\triangle A_1B_1C_1$，再作与$\triangle A_1B_1C_1$关于x轴对称的$\triangle A_2B_2C_2$，则点A的对应点A_2的坐标是(　　)



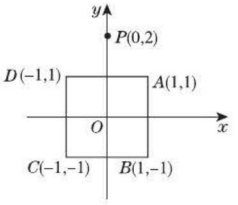
（第7题图）

A. $(-3,2)$　　B. $(2,-3)$

C. $(1,-2)$　　D. $(-1,2)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图,在平面直角坐标系中,正方形的顶点坐标分别为 $A(1,1)$,$B(1,-1)$,$C(-1,-1)$,$D(-1,1)$,y 轴上有一点 $P(0,2)$. 作点 P 关于点 A 的对称点 P_1,作点 P_1 关于点 B 的对称点 P_2,作点 P_2 关于点 C 的对称点 P_3,作点 P_3 关于点 D 的对称点 P_4,作点 P_4 关于点 A 的对称点 P_5,作点 P_5 关于点 B 的对称点 P_6,…,按此操作下去,则点 $P_{2\,019}$ 的坐标为(　　)



(第 8 题图)

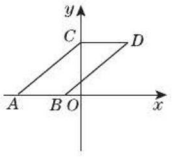
A. (0,2)　　B. (2,0)

C. (0,-2)　　D. (-2,0)

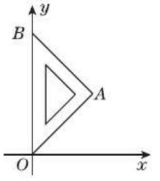
9. [中考 · 贵港] 若点 $A(1+m,1-n)$ 与点 $B(-3,2)$ 关于 y 轴对称,则 $m+n$ 的值是(　　)

A. -5　　B. -3　　C. 3　　D. 1

10. 如图,点 $A(-4,0)$,$B(-1,0)$,将线段 AB 平移后得到线段 CD,点 A 的对应点 C 恰好落在 y 轴上,且四边形 $ABDC$ 的面积为 9,则 D 点坐标为_____.



(第 10 题图)



(第 11 题图)

11. [中考 · 株洲] 如图,O 为坐标原点,$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形,$\angle OAB=90°$,点 B 的坐标为 $(0,2\sqrt{2})$,将该三角形沿 x 轴向右平移得到 $\mathrm{Rt}\triangle O'A'B'$,此时点 B' 的坐标为 $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$,则线段 OA 在平移过程中扫过部分的图形面积为_____.

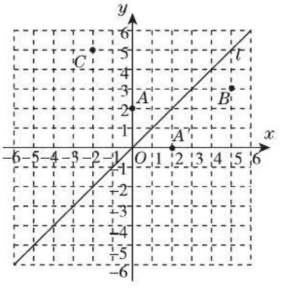
12. 小明是个爱动脑筋的人. 他发明了一个"魔术盒",把平面直角坐标系中的任意一点 (a,b) 放入其中后,这个点会平移到一个新的位置,其坐标是 $(a+b,ab)$. 例如:把 $(3,-2)$ 放入其中,会平移到 $(1,-6)$ 的位置. 现将点 $A(-3,1)$ 放入其中后,会平移到什么位置? 是怎样平移的?

思维拓展练

13. [探究题] 如图,在平面直角坐标系中,l 是第一、三象限的角平分线.

(1)实验与探究:

由图观察易知 $A(0,2)$ 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标为 $(2,0)$,请在图中分别标明 $B(5,3)$,$C(-2,5)$ 关于直线 l 的对称点 B',C' 的位置,并写出点 B',C' 的坐标;



(第 13 题图)

(2)归纳与发现:

结合图形观察以上三组点的坐标,你会发现:坐标平面内任一点 $P(m,n)$ 关于第一、三象限的角平分线 l 的对称点 P' 的坐标为_____.

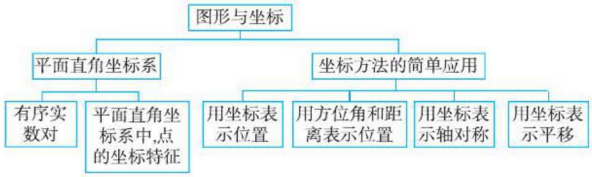
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 由两条共原点且互相垂直的数轴构成平面直角坐标系，在坐标系中，每一个点的坐标都是一对有序实数对.
2. 平面直角坐标系内点(m,n)的坐标特征为：第一象限$(+,+)$，即$m>0,n>0$；第二象限$(-,+)$，即$m<0,n>0$；第三象限$(-,-)$，即$m<0,n<0$；第四象限$(+,-)$，即$m>0,n<0$；x轴正半轴上的点，$m>0,n=0$；x轴负半轴上的点，$m<0,n=0$；y轴正半轴上的点，$m=0,n>0$；y轴负半轴上的点，$m=0,n<0$；反之亦成立.
3. 用坐标表示轴对称：点(a,b)关于x轴对称的点的坐标是$(a,-b)$；点(a,b)关于y轴对称的点的坐标是$(-a,b)$.
4. 点的平移与其坐标变化的规律是：上加下减，右加左减，即向上平移a个单位长度，纵坐标加a，向下平移a个单位长度，纵坐标减a；向右平移a个单位长度，横坐标加a，向左平移a个单位长度，横坐标减a.

专题解码

知识专题

专题一 平面直角坐标系与点的坐标

链接中考>> 在平面直角坐标系中，点的坐标是核心，在特殊位置的点的坐标的特征是中考考查的热点，一般都是以选择题形式出现.

例1 [中考·威海]若点$A(a+1,b-2)$在第二象限，则点$B(-a,b+1)$在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

导引：∵ 点$A(a+1,b-2)$在第二象限，

∴ $a+1<0,b-2>0$，

解得$a<-1,b>2$，

∴ $-a>0,b+1>0$，即点$B(-a,b+1)$在第一象限，故应选A.　　▶答案：A

点方法

对于点$P(a,b)$来说，点的位置与坐标的特征的关系：

	点的位置	坐标特征
象限内的点	点P在第一象限	$a>0,b>0$
	点P在第二象限	$a<0,b>0$
	点P在第三象限	$a<0,b<0$
	点P在第四象限	$a>0,b<0$
坐标轴上的点	点P在x轴正半轴上	$a>0,b=0$
	点P在x轴负半轴上	$a<0,b=0$
	点P在y轴正半轴上	$a=0,b>0$
	点P在y轴负半轴上	$a=0,b<0$
两坐标轴夹角平分线上的点	点P在第一、三象限角平分线上	$a=b$
	点P在第二、四象限角平分线上	$a+b=0$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二　用坐标表示地理位置

链接中考>> 学习坐标的目的就是表示地理位置，这是中考命题的宗旨——运用知识解决实际问题. 这一考点考查的形式也简单，主要以选择题形式出现.

例2 [中考 · 北京] 如图1是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建筑分布图，若这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，表示太和门的点的坐标为(0，−1)，表示九龙壁的点的坐标为(4，1)，则表示下列宫殿的点的坐标正确的是(　　)

A. 景仁宫(4，2)　B. 养心殿(−2，3)

C. 保和殿(1，0)　D. 武英殿(−3.5，−4)

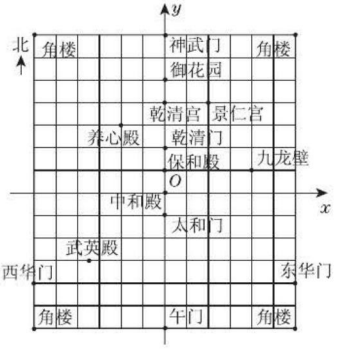


图1

导引：先根据两个已知点建立平面直角坐标系如图1，再找出四个选项中宫殿所在位置的坐标即可.

∵ 表示太和门的点的坐标为(0，−1)，表示九龙壁的点的坐标为(4，1)，∴ 建立平面直角坐标系如图1所示. 由图可知，表示景仁宫的点的坐标为(2，4)，表示养心殿的点的坐标为(−2，3)，表示保和殿的点的坐标为(0，1)，表示武英殿的点的坐标为(−3.5，−3)，四个选项中只有B正确，故选B.　▶答案：B

点方法

利用坐标表示某区域内有关建筑物(地点)的地理位置，即把建筑物(地点)看成一个点，确定它在坐标系中的位置，根据坐标系中的位置确定出它的坐标.

专题三　点的坐标的变化规律

链接中考>> 点的坐标的变化规律是图形变化规律的关键，图形的变化主要有平移、对称和旋转几种，每种变化坐标都有规律，在中考中是热门考点，一般都是以选择题形式出现.

例3 [中考 · 聊城] 在如图2所示的直角坐标系中，每个小方格都是边长为1的正方形，△ABC 的顶点均在格点上，点 A 的坐标是(−3，−1).

(1) 将△ABC 沿 y 轴正方向平移3个单位长度得到△$A_1B_1C_1$，画出△$A_1B_1C_1$，并写出点 B_1 的坐标；

(2) 画出△$A_1B_1C_1$ 关于 y 轴对称的△$A_2B_2C_2$，并写出点 C_2 的坐标.

导引：(1) 根据网格结构分别找出点 A，B，C 向上平移3个单位长度后的对应点 A_1，B_1，C_1 的位置，然后顺次连接即可；(2) 根据网格结构分别找出与点 A_1，B_1，C_1 关于 y 轴对称的点 A_2，B_2，C_2 的位置，然后顺次连接可得△$A_2B_2C_2$，例如，点 $C(-1，-2)$ $\xrightarrow{\text{向上平移3个单位长度}}$ 点 $C_1(-1，1)$ $\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}}$ 点 $C_2(1，1)$.

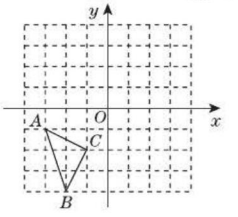


图2

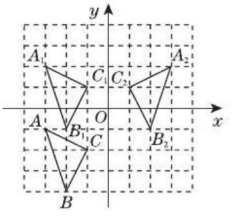


图3

▶解：(1) △$A_1B_1C_1$ 的位置如图3所示.

点 B_1 的坐标是(−2，−1).

(2) △$A_2B_2C_2$ 的位置如图3所示.

点 C_2 的坐标是(1，1).

探规律

坐标系中的点$(x，y)$向左(或右)平移 a 个单位长度，横坐标减去(或加上)a；坐标系中的点$(x，y)$向上(或下)平移 b 个单位长度，纵坐标加上(或减去)b；点关于 x 轴对称横坐标不变，纵坐标变为相反数；点关于 y 轴对称横坐标变为相反数，纵坐标不变；关于原点对称的点的坐标特征：横、纵坐标都变为原来的相反数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

思想方法专题

专题四 分类讨论思想

专题解读>> 分类讨论思想是在解决问题中出现不确定情况时的有效方法. 因为情况不确定,所以需要我们正确地运用分类讨论思想解决问题. 分类讨论思想不仅可以有效地解决一些问题,同时还可以培养同学们的观察能力和全面思考问题的能力.

例4 如图4,A,B 都是 x 轴上的点,直线 l 过点 $M(2,0)$ 且与 x 轴垂直,点 P 是直线 l 上的一点. 若 $\triangle PAB$ 的面积为4,请你求出点 P 的坐标.

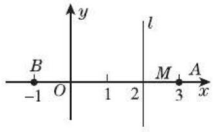


图4

导引:根据直线 l 过点 $M(2,0)$ 且与 x 轴垂直,可知点 P 的横坐标为2,由于点 P 的纵坐标的绝对值即为 $\triangle PAB$ 的边 AB 上的高,于是根据 $\triangle PAB$ 的面积可求得点 P 的坐标.

▶解:根据题意,得 $A(3,0)$,$B(-1,0)$,则 $AB=3-(-1)=4$.

$\because$ 直线 l 过点 $M(2,0)$ 且与 x 轴垂直,

$\therefore$ 直线 $l\parallel y$ 轴.

$\because$ 点 P 是直线 l 上的点,

$\therefore$ 设点 $P(2,h)$.

$\therefore S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot|h|=4$,

即 $\frac{1}{2}\times4\times|h|=4$,解得 $|h|=2$.

当点 P 在 x 轴上方时,$h=2$,点 $P(2,2)$;

当点 P 在 x 轴下方时,$h=-2$,点 $P(2,-2)$.

综上所述,点 P 的坐标为 $(2,2)$ 或 $(2,-2)$.

诊 误区

本题容易出现的错误是丢解,即由 $\triangle PAB$ 的面积求 AB 上的高为2时,只考虑到点 P 在第一象限的情况,而丢掉了点 P 在第四象限的情况,其原因是混淆了点的纵坐标与点到 x 轴的距离.

专题五 割补法、转化思想

专题解读>> 不规则图形的面积求解策略:利用"分割"或"补形"将不规则图形的面积转化为规则图形的面积的和或差的形式,把所要解决的问题转化为另一个较容易解决的问题来解决. 这种求不规则图形面积的方法叫割补法,指导思想是化不规则为规则、化难为易的转化思想.

例5 如图5所示的平面直角坐标系中,四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(0,0)$,$B(9,0)$,$C(7,5)$,$D(2,7)$,试求四边形 $ABCD$ 的面积.

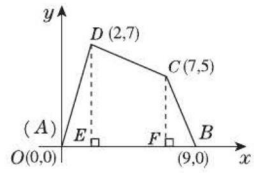


图5

导引:由于该图形不是规则的图形,因此可以考虑把它分割成三角形和梯形来解决.

▶解:如图5,分别过点 D,C 向 x 轴作垂线,垂足分别是 E,F,则四边形 $ABCD$ 被分割为 $\triangle AED$、梯形 $EFCD$、$\triangle CFB$.

由各点的坐标可得 $AE=2$,$DE=7$,

$FB=2$,$CF=5$,$EF=5$.

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle AED}+S_{梯形EFCD}+S_{\triangle CFB}$

$=\frac{1}{2}\times AE\times DE+\frac{1}{2}\times(CF+DE)\times EF+\frac{1}{2}\times CF\times FB$

$=\frac{1}{2}\times2\times7+\frac{1}{2}\times(5+7)\times5+\frac{1}{2}\times5\times2$

$=42$.

探 规律

在平面直角坐标系中求不规则图形的面积,一般采用**割补法**,将不规则图形割补为规则且易求面积的图形,从而求出整个图形的面积.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

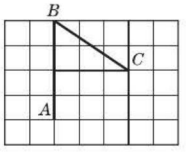
好题必练

(答案见265页)

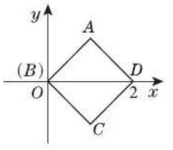
选择题

1. 在点(0,0),(1,0),(0,2),(1,2),(−1,2),(−2,3)中,不属于任何象限的有(　　)
A. 2个　B. 3个　C. 4个　D. 5个

2. 如图是在方格纸上画出的小旗图案,若用(0,0)表示点A,(0,4)表示点B,那么点C的位置可表示为(　　)
A. (0,3)　B. (2,3)
C. (3,2)　D. (3,0)



(第2题图)



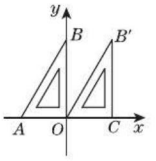
(第3题图)

3. 如图,在平面直角坐标系内,正方形$ABCD$中的顶点B,D的坐标分别是(0,0),(2,0),且A,C两点关于x轴对称,则C点对应的坐标是(　　)
A. (1,1)　B. (1,−1)
C. (1,−2)　D. (2,−2)

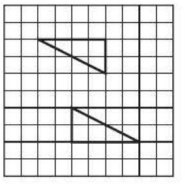
4. [中考 · 攀枝花]若点$A(a+1,b-2)$在第二象限,则点$B(-a,1-b)$在(　　)
A. 第一象限　B. 第二象限
C. 第三象限　D. 第四象限

5. [中考 · 枣庄]在平面直角坐标系中,将点$A(-1,-2)$向右平移3个单位长度得到点B,则点B关于x轴的对称点B'的坐标为(　　)
A. (−3,−2)　B. (2,2)
C. (−2,2)　D. (2,−2)

6. [中考 · 温州]如图,已知一个直角三角板的直角顶点与原点重合,另两个顶点A,B的坐标分别为$(-1,0)$,$(0,\sqrt{3})$. 现将该三角板向右平移使点A与点O重合,得到$\triangle OCB'$,则点B的对应点B'的坐标是(　　)
A. (1,0)　B. $(\sqrt{3},\sqrt{3})$
C. $(1,\sqrt{3})$　D. $(-1,\sqrt{3})$

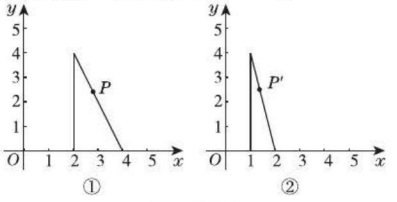


(第6题图)


(第7题图)

7. 如图,在正方形网格中有两个三角形,把其中一个三角形先横向平移x格,再纵向平移y格,就能与另一个三角形拼合成一个四边形,那么$x+y$(　　)
A. 有一个确定的值　B. 有两个不同的值
C. 有三个不同的值　D. 有无数个不同的值

8. 点P是图①中三角形上一点,坐标为(a,b),图①经过变化形成图②,则点P在图②中的对应点P'的坐标为(　　)



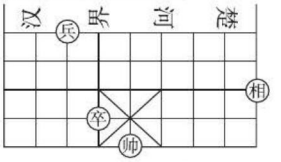
(第8题图)

A. $\left(\frac{1}{2}a,b\right)$　B. $(a-1,b)$
C. $(a-2,b)$　D. $\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$

填空题

9. 已知点$M(a,b)$的坐标满足方程$(a+b-2)^2+\sqrt{b-2a+3}=0$,则点$M$在第_____象限.

10. [中考 · 绵阳]如图,在中国象棋的残局上建立平面直角坐标系,如果“相”和“兵”的坐标分别是(3,−1)和(−3,1),那么“卒”的坐标为_____.



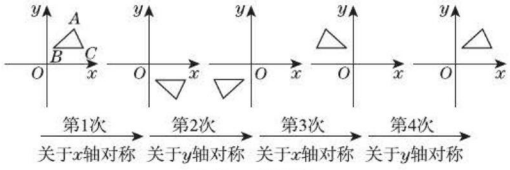
(第10题图)

11. 已知$AB\parallel x$轴,点A的坐标为(2,3),并且$AB=3$,则点B的坐标为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

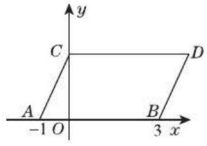
12. 若点 $P(x,y)$ 在第四象限，且点 P 到 x 轴的距离为3，到 y 轴的距离为2，则点 P 的坐标是_____.

13. 如图，在平面直角坐标系中，对 $\triangle ABC$ 进行循环往复的轴对称变换，若原来点 A 的坐标是 (a,b)，则经过第2 019次变换后所得的点 A 的坐标是_____.



（第13题图）

14. 如图，在平面直角坐标系中，点 A,B 的坐标分别为 $(-1,0),(3,0)$，现同时将点 A,B 分别向上平移2个单位长度，再向右平移1个单位长度，分别得到点 C,D，连接 AC,BD，在 y 轴上存在点 P，使 $\triangle PCD$ 的面积为四边形 $ABDC$ 面积的一半，则点 P 的坐标为_____.

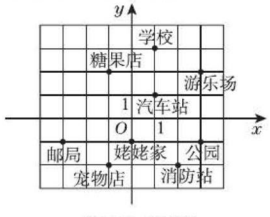


（第14题图）

解答题

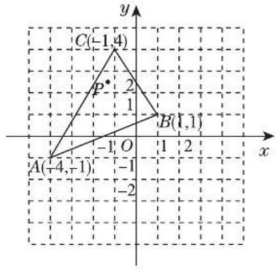
15. 已知：$P(4x,x-3)$ 在平面直角坐标系中.
(1) 若点 P 在第三象限的角平分线上，求 x 的值；
(2) 若点 P 在第四象限，且到两坐标轴的距离之和为9，求 x 的值.

16. 图中标明了小英家附近的一些地方. 以小英家为坐标原点，建立如图所示的坐标系.
(1) 写出汽车站和消防站的坐标；
(2) 某星期日早晨，小英同学从家里出发，沿 $(3,2),(3,-1),(0,-1),(-1,-2),(-3,-1)$ 的路线转了一下，又回到家里，写出路上她经过的地方.



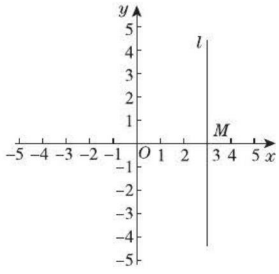
（第16题图）

17. 在如图所示的直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别是 $A(-4,-1),B(1,1),C(-1,4)$；点 $P(x_1,y_1)$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，当点 $P(x_1,y_1)$ 平移到点 $P'(x_1+4,y_1+1)$ 时.
(1) 请写出平移后新 $\triangle A_1B_1C_1$ 三个顶点的坐标；
(2) 求 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积.



（第17题图）

18. 如图，在平面直角坐标系中，直线 l 过点 $M(3,0)$，且平行于 y 轴.
(1) 如果 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-2,0),B(-1,0),C(-1,2)$，$\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形是 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$ 关于直线 l 的对称图形是 $\triangle A_2B_2C_2$，写出 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个顶点的坐标；
(2) 如果点 P 的坐标是 $(-a,0)$，其中 $0<a<3$，点 P 关于 y 轴的对称点是 P_1，点 P_1 关于直线 l 的对称点是 P_2，求 PP_2 的长.



（第18题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4章

一次函数

赏析数形结合体

数学点拨

你将学到的核心考点

- 函数的三种表示方法 □
- 正比例函数的图象与性质 □
- 一次函数的图象与性质 □
- 确定一次函数表达式 □
- 一次函数的应用 □

我们为你提供的核心方法

排除法	□	数形结合思想	□
函数思想	□	分类讨论思想	□
图象法	□	待定系数法	□

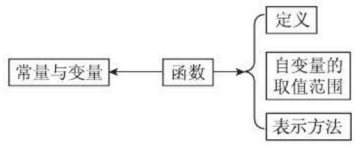
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.1 函数和它的表示法

热门话题
- 变量与常量
- 函数的定义
- 函数自变量的取值范围
- 函数的表示方法

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 变量与常量

点知识

1. **变量与常量**:在讨论的问题中,取值会发生变化的量称为变量,取值固定不变的量称为常量(或常数).

要点精析

(1)"常量"是已知数,是指在整个变化过程中保持不变的量;但"常量"不等于"常数",它可以是数值不变的字母.如在匀速运动中的速度 v 就是一个常量.

(2)变量与常量是相对的,前提条件是"在一个变化过程中",一个量在某一变化过程中是常量,而在另一个变化过程中,它可能是变量.如在 $s=vt$ 中,当 s 一定时,v,t 为变量,s 为常量;当 t 一定时,s,v 为变量,t 为常量.

2. **易错警示**:

(1)判断一个量是常量还是变量,应先看它是否在一个变化过程中,若在,则看它在这个变化过程中数值是否发生改变;

(2)常量与变量不是绝对的,而是对一个变化过程而言的;

(3)指出一个变化过程中的常量时,应连同它前面的符号.

拨考向

考查角度:利用常量与变量的定义进行识别

例1 已知三角形的一边长为12,这边上的高是 h,则三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 12\cdot h$,即 $S=6h$.在这个式子中常量和变量分别是什么?

导引:根据常量和变量的定义分析.三角形的面积是一边与该边上的高的长度的乘积的一半,已知一边长,可以得出常量是该边长的一半,变量是高和面积.

▶解:常量是6,变量是 h 和 S.

同类变式 (答案见266页) 练一练

1. 分别指出下列各式中的常量与变量:

(1)球的表面积 S 与球的半径 r 关系式是 $S=4\pi r^2$;

(2)以固定的速度 v_0 向上抛一个小球,小球的高度 h 与小球运动的时间 t 的关系式是 $h=v_0t-4.9t^2$.

拨技巧

判断一个量是常量还是变量的方法: 看在这个量所在的变化过程中,该量的值是否发生改变(或者说是否会取不同的数值),其中在变化过程中不变的量是常量,可以取不同数值的量是变量.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 2 函数(重点)

点知识

1. **函数**:一般地,如果变量 y 随着变量 x 而变化,并且对于 x 取的每一个值,y 都有唯一的一个值与它对应,那么称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,这时把 x 叫作自变量,把 y 叫作因变量.

要点精析 ///

理解函数的定义应注意以下三点:

(1)有两个变量;

(2)一个变量的数值随着另一个变量数值的变化而变化;

(3)对于自变量的每一个确定的值,函数有且只有一个值与之对应.

2. **函数值**:对于自变量 x 取的每一个值 a,因变量 y 的对应值称为函数值,记作 $f(a)$.

要点精析 ///

(1)函数表示的是两个变量之间的一种关系,而函数值是一个数值.

(2)一个函数的函数值是随着自变量的变化而变化的,故在求函数值时,一定要指明是自变量为多少时的函数值.

3. **易错警示**:

(1)对于自变量 x 取不同的数值,与之对应的 y 的值不一定不同,只要是有唯一值与之对应即可;

(2)判断两个变量是否具有函数关系,不能只看是否有关系式存在,有些函数关系是没有关系式的(如心电图中的时间与心脏部位的生物电流的关系).

拓考向

考查角度 1:利用函数的定义判断两个变量之间是否是函数关系

例 2 判断下面各量之间的关系是不是函数关系,若是,请指出自变量与因变量.

(1)长方形的宽 b 一定时,其长 a 与周长 C,其中 $C=2(a+b)$;

(2)$y=|x|$ 中的 x 与 y;

(3)小刚计划用 20 元购买本子,所能购买的本子数 n(本)与单价 a(元),其中 $n=\dfrac{20}{a}$.

导引:运用函数的定义进行辨析,注意从函数与自变量对应值的唯一性方面考虑.

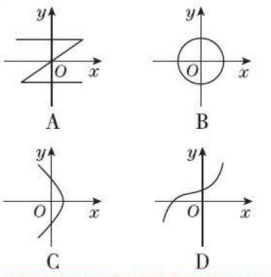
▶解:(1)长方形的周长 $C=2(a+b)$,当宽 b 一定时,其长 a 所取的每一个确定的值,周长 C 都有唯一的值与它对应,所以 C 是 a 的函数. 自变量是 a,因变量是 C.

(2)在 $y=|x|$ 中,对于每一个 x 值,y 都有唯一的值与它对应,所以 y 是 x 的函数. 自变量是 x,因变量是 y.

(3)购买的本子数 $n=\dfrac{20}{a}$,a 每取一个确定的值,n 都有唯一的值与它对应,所以 n 是 a 的函数. 自变量是 a,因变量是 n.

同类变式 (答案见 266 页) 练一练

2. [中考 · 南宁]下列各曲线中表示 y 是 x 的函数的是(　　)



点方法

判断一个关系是不是函数关系的方法: 一看是否存在一个变化过程;二看变化过程中是否存在两个变量;三看对于一个变量每取一个确定的值,另一个变量是否都有唯一确定的值与之对应,三者必须同时满足. 解同类变式第 2 题的技巧在于过 x 轴上任意一点作 x 轴的垂线,若垂线与曲线交于两点或多点,说明 x 取一个值,有两个或多个 y 值与其对应,则 y 不是 x 的函数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：利用求函数值的方法求函数值

例3 根据如图4.1-1所示的程序计算函数值，若输入的x的值为$\frac{5}{2}$，则输出的函数值为(　　)

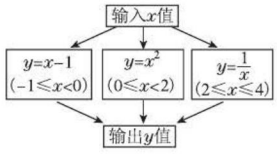


图4.1-1

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{4}{25}$　　D. $\frac{25}{4}$

导引：由题意知，当$x=\frac{5}{2}$时，y与x满足的关系式为$y=\frac{1}{x}$，把$x=\frac{5}{2}$代入，得$y=\frac{2}{5}$. ▶答案：B

同类变式 (答案见266页) 练一练

3. (1) 已知$y=\frac{x^2+5}{3-x}$，当$x=2$时，$y=$_____.

(2) 当$x=\frac{1}{2}$时，函数$y=\sqrt{4x+22}$的值为_____.

点方法

求函数值时，要注意函数的对应关系，代入自变量的值计算时，要按照函数中关于自变量的数学式子指明的运算顺序计算，并结合相应的运算法则，使运算简便；说函数值时，要说明自变量是多少时的函数值，如本例中，当$x=\frac{5}{2}$时，函数$y=\frac{1}{x}$的值为$\frac{2}{5}$.

知识点3 自变量的取值范围(难点)

点知识 ▶▶▶

1. **自变量取值范围的确定**：要确定函数自变量的取值范围，可以从以下两个方面去考虑：①自变量的取值必须使含有自变量的代数式有意义；②自变量的取值必须使实际问题有意义. 确定方法：
   (1) 当代数式是整式时，自变量为全体实数；
   (2) 当代数式是分式时，自变量的取值必须保证分母不为0；
   (3) 当代数式是二次根式时，其自变量的取值范围必须使被开方数为非负实数；
   (4) 当代数式有零指数幂(或负整数指数幂)时，其自变量应使相应的底数不为0；
   (5) 当函数表示实际问题时，其自变量必须有实际意义；
   (6) 当代数式是复合形式时，则需列不等式组，使所有式子同时有意义.
2. **易错警示**：
   (1) 如果是由实际问题得出的函数，那么自变量的取值范围，既要使函数关系式有意义，还必须使实际问题有意义；
   (2) 自变量的取值可以是无限的，也可以是有限的，还可以是几个数或单独一个数.

拓考向 ▶▶▶

考查角度：利用式子有意义的条件求自变量的取值范围

例4 求下列函数中自变量x的取值范围.

(1) $y=3x+7$；(2) $y=\frac{1}{3x-2}$；(3) $y=\sqrt{x-4}$；

(4) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x}$；(5) $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$.

导引：结合各个式子的特点，按自变量取值范围的确定方法求出.

同类变式 (答案见266页) 练一练

4. [中考·娄底] 函数$y=\frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$中自变量x的取值范围是(　　)

A. $x>2$　　B. $x\geqslant 2$

C. $x\geqslant 2$且$x\neq 3$　　D. $x\neq 3$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)函数式右边是整式,所以 x 的取值范围为一切实数;

(2)由 $3x-2\neq0$,得 $x\neq\frac{2}{3}$,所以 x 的取值范围为 $x\neq\frac{2}{3}$;

(3)由 $x-4\geqslant0$,得 $x\geqslant4$,所以 x 的取值范围是 $x\geqslant4$;

(4)由 $\begin{cases}x+2\geqslant0,\\x\neq0\end{cases}$ 得 $x\geqslant-2$ 且 $x\neq0$,所以 x 的取值范围是 $x\geqslant-2$ 且 $x\neq0$;

(5)由 $\begin{cases}2x-1\geqslant0,\\1-2x\geqslant0\end{cases}$ 得 $x=\frac{1}{2}$,所以 x 的取值范围是 $x=\frac{1}{2}$.

点方法

求自变量的取值范围,应按给出的各种式子存在意义的条件求出. 当给出的式子是复合形式时,应先列不等式组再求其解集.

知识点 4 函数的表示方法(重难点)

点知识

1. **函数的三种表示方法:**

表示方法	定义	优点	缺点
公式法	用式子表示函数关系的方法称为公式法,这样的式子称为函数的表达式	能准确地反映整个变化过程中自变量与因变量的内在联系,便于分析变量间的数量关系	由于比较抽象,因此并不是所有的函数都能列出表达式,有些实际问题不一定能用表达式表达出来
列表法	列一张表,第一行表示自变量取的各个值,第二行表示相应的函数值(即因变量的对应值),这种表示函数关系的方法称为列表法	由表中已有的自变量的每一个值,可以直接得出相应的函数值	有局限性,有的函数的自变量的值不能够一一列出,也不容易看出自变量与因变量之间的对应关系
图象法	用图象来表示函数关系的方法叫作图象法	比较形象直观,通过图象可以发现变量之间的对应关系以及变化发展趋势	观察图象只能得到近似的数量关系

要点精析

(1)函数的三种表示方法可以互相转化,在应用中,要根据三种表示方法的特点,选用适当的表示方法,或者三种方法结合起来使用.

(2)公式法应用较多,有的函数图象可以用三种方法中的任意一种表示,而有的只能用其中的一种或者两种方法表示. 如某地某天的气温与时间的关系,很难用公式法进行描述.

2. **易错警示:**对图象中反映的信息理解不完整,易出现表述错误.


函数的三种表示方法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1：从表格中获取信息

例5 弹簧挂上物体后会伸长，已知一弹簧的长度(cm)与所挂物体的质量(kg)之间的关系如下表：

物体的质量/kg	0	1	2	3	4	5
弹簧的长度/cm	10	12.5	15	17.5	20	22.5

点方法
已知表格中的自变量与函数的对应值，观察对应数组之间的联系可确定函数的变化规律，再结合数值可确定函数表达式.

下列说法错误的是(　　)

A. 在没挂物体时，弹簧的长度为10 cm

B. 弹簧的长度随物体的质量的变化而变化，物体的质量是函数，弹簧的长度是自变量

C. 若物体的质量为 m kg($0\leqslant m\leqslant 5$)，弹簧的长度为 y cm，则 $y=2.5m+10$

D. 在弹簧能承受的范围内，当物体的质量为4 kg时，弹簧的长度为20 cm

导引：根据表格中给出的有限对应值，以及每组对应值所表示的实际意义逐一判断. ▶答案：B

考查角度2：利用图象解决问题

类型一：识别函数图象

例6 [中考·十堰]如图4.1-2，一只蚂蚁从 O 点出发，沿着扇形 AOB 的边缘匀速爬行一周，当蚂蚁运动的时间为 t 时，蚂蚁与 O 点的距离为 s，则 s 关于 t 的函数图象大致是图4.1-3中的(　　)

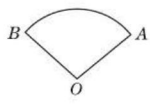


图4.1-2

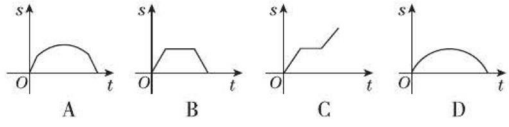


图4.1-3

导引：本题考查了动点问题的函数图象、分段函数、排除法，解题的关键是抓住运动不同阶段的特点，运用排除法确定函数的图象.

由蚂蚁的运动路线可以得出函数应该分为三部分，而且第三部分随着时间的推移，蚂蚁与 O 点的距离应该逐步变小，直至为0，所以排除C. 当蚂蚁在扇形的弧 AB 段上运动时，到 O 点的距离应该是不变的，所以排除A，D，故选择B. ▶答案：B

点拨技巧

1. 判断函数图象时应从以下几方面分析：

①看图象的升降趋势，当函数随着自变量的增加而增加时，图象呈上升趋势，反之，呈下降趋势；②看图象的曲直，函数随着自变量的变化而均匀变化的，图象是直线，函数随着自变量的变化而不均匀变化的，图象是曲线；③表示函数不随自变量的变化而变化，函数图象与横轴平行(或在横轴上).

2. **排除法**是指从题设条件入手，结合选项，通过观察、分析、比较，从四个选项中把不正确的一一排除的方法. 排除法是解答选择题的一种方法，它常常令解题思路柳暗花明，彰显出它的独特魅力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型二:利用函数图象识别几何图形

例7 [中考 · 济宁]匀速地向一个容器内注水,最后把容器注满. 在注水过程中,水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图 4.1-4 所示(图中 $OABC$ 为一折线). 这个容器的形状是图 4.1-5 中的(　　)

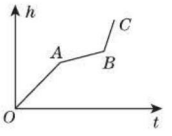


图 4.1-4

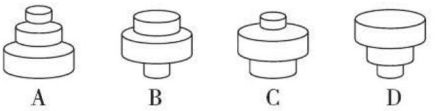


图 4.1-5

导引:根据每一段函数图象的倾斜程度,判断水面上升速度的快慢,再观察容器的粗细,作出判断. 注水量一定,函数图象的走势是稍陡,平,陡,那么速度就相应地变化,跟所给容器的粗细有关,则从下往上容器的粗细相应的排列顺序就为稍粗、粗、细,故选择 C. ▶答案:C

点方法

图象反映的信息要明确:(1)匀速对应的是直线;(2)变速对应的是曲线;(3)由快变慢曲线上升幅度逐渐平缓,由慢变快曲线上升幅度逐渐陡峭.

类型三:从函数图象中获取信息解决实际问题

例8 小李与小陆从 A 地出发,骑自行车沿同一条路行驶到 B 地,他们离出发地的距离 s(单位:km)和行驶时间 t(单位:h)之间的函数关系的图象如图 4.1-6,根据图中提供的信息,有下列说法:

①他们都行驶了 20 km;

②小陆全程共用了 1.5 h;

③小李与小陆相遇后,小李的速度小于小陆的速度;

④小李在途中停留了 0.5 h.

其中正确的有(　　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

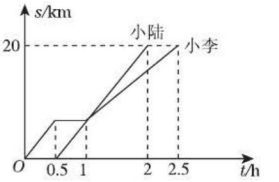


图 4.1-6

导引:从图象中可以看出,①图象的终止点处对应的纵坐标是 20,所以都行驶了 20 km,正确;②小陆行驶总路程的对应时间段是 0.5 h ~ 2 h,所以全程共用了 2 − 0.5 = 1.5(h),正确;③小李与小陆相遇后小陆行驶路程对应的直线在小李的上方,所以小陆的速度快,正确;④小李行驶路程对应的直线在 0.5 h ~ 1 h 内是水平线,代表停留了 0.5 h,正确. 4 个都正确,故选 A. ▶答案:A

拨技巧

(1)从函数图象中获取信息时要做到:①看清横、纵坐标各表示哪个量,这一变化过程属于哪种变化;②从左向右,分析每段图象上,自变量和函数值如何变化;③平行于横轴的线段,自变量在变,函数值不变. (2)从函数图象中获取信息时应注意三点:其一是函数的最大值或最小值;其二是随着自变量逐渐增加时函数值是增加了,减少了,还是不变(变化趋势);其三是观察图象是否是几种变化情况的组合,以便分情况讨论变化规律.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度3：利用函数三种表示方法之间的关系进行相互转化

例9 某年初，我国西南部分省市遭遇了严重干旱. 某水库的蓄水量随着时间的增加而减小，蓄水量 V（万立方米）与干旱持续时间 t（天）的变化情况如图4.1-7所示，根据图象回答问题：

（1）这个图象反映了哪两个变量之间的关系？

（2）根据图象填表：

干旱持续时间 t/天	0	10	20	30	40	50	60
蓄水量 V/万立方米							

（3）当 t 取0天至60天之间的任一值时，对应几个 V 值？

（4）V 可以看作 t 的函数吗？若可以，写出函数表达式.

导引：（1）通过读图可知，横坐标表示干旱持续时间，纵坐标表示水库蓄水量，因此它表示的是水库蓄水量与干旱持续时间之间的关系；

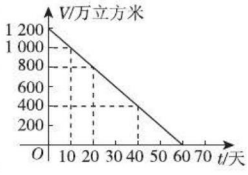


图4.1-7

（2）根据图象信息确定每个特殊点的坐标即可；

（3）观察图象可得；

（4）可根据函数的定义来判断.

▶解：（1）图象反映了水库蓄水量与干旱持续时间之间的关系.

（2）填表如下：

干旱持续时间 t/天	0	10	20	30	40	50	60
蓄水量 V/万立方米	1 200	1 000	800	600	400	200	0

（3）当 t 取0至60天之间的任一值时，对应着一个 V 值.

（4）V 可以看作 t 的函数.

根据图象可知，该水库初始蓄水量为1 200万立方米，干旱每持续10天，蓄水量相应减少200万立方米，

由此可得出函数表达式为 $V=1\,200-\frac{200}{10}t=-20t+1\,200(0\leqslant t\leqslant 60)$.

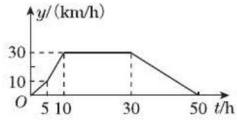
点方法

本例通过“形”，即图象中的信息，用列表及表达式这些“数”来表示，说明三种函数表示方法是可以相互转化的，体现了**数形结合思想**的应用.

同类变式 （答案见266页） 练一练

9. 某气象中心观测一场沙尘暴从发生到结束的全过程，绘制了风速 y（km/h）与时间 t（h）之间的关系如图所示.

（1）这个图反映了_____与_____之间的关系.



（第9题图）

（2）根据此图填写下面的表格：

时间 t/h	0	5	10	30	50
风速 y/(km/h)					

（3）当 t 取0 h到50 h之间的一个确定的值时，相应的风速_____确定（填“能”或“不能”）.

（4）风速 y 可以看作时间 t 的函数吗？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拨尖角度 1 利用函数图象解决几何动态问题

例 10 [中考 · 广安] 如图 4.1-8，在 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，有一动点 P 从点 A 出发，沿 $A \to C \to B \to A$ 匀速运动. 则 CP 的长度 s 与时间 t 之间的函数关系用图象描述大致是图 4.1-9 中的(　　)

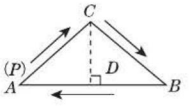


图 4.1-8

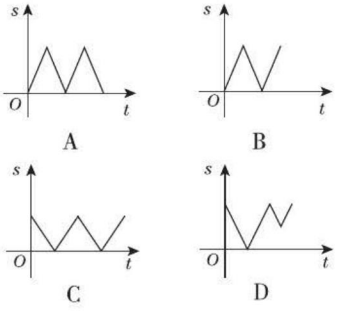


图 4.1-9

导引：该题属于分段函数问题：如图 4.1-8，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D.

∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，

∴ $AD = BD$.

①点 P 在边 AC 上时，s 随 t 的增大而减小. 故 A，B 错误；

②当点 P 在边 BC 上时，s 随 t 的增大而增大；

③当点 P 在线段 BD 上时，s 随 t 的增大而减小，当点 P 与点 D 重合时，s 最小，但是不等于零. 故 C 错误；

④当点 P 在线段 AD 上时，s 随 t 的增大而增大. 故 D 正确.

▶答案：D

点方法

利用函数图象表示几何动态问题，关键扣住两点：一是图象的转折点；二是每段图象的特点(即增减性).

拨尖角度 2 巧用自变量的取值范围刻画图形的运动问题

例 11 如图 4.1-10，等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 12 cm，AC 与 MN 在同一直线上，开始时 A 点与 M 点重合，让 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 向右运动，最后 A 点与 N 点重合.

(1)试写出重叠部分面积 $y(\text{cm}^2)$ 与 MA 的长度 $x(\text{cm})$ 之间的函数表达式.

(2)当 $MA = 4$ cm 时，重叠部分的面积是多少？

(3)当 MA 的长度是多少时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4？

(4)已知向右移动的速度是 1 cm/s，若运动停止时边 BC 与 PN 重合，探究重叠部分面积 $y(\text{cm}^2)$ 与运动时间 $t(\text{s})$ 的函数表达式.

▶解：(1)由题意得 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 12$.

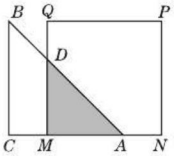


图 4.1-10

(2)当 $x = 4$ 时，$y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$，即当 $MA = 4$ cm 时，重叠部分的面积是 8 cm^2.

(3)当四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5:4 时，等腰直角三角形 ABC 与重叠部分的三角形的面积的比是 9:4.

因为等腰直角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72(\text{cm}^2)$，所以重叠部分的面积是 $\frac{4}{9} \times 72 = 32(\text{cm}^2)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为函数表达式是 $y=\frac{1}{2}x^2$，

所以 $\frac{1}{2}x^2=32$. 所以 $x^2=64$.

因为 $x\geqslant 0$，所以 $x=8$，即当 MA 的长度是 8 cm 时，四边形 $BCMD$ 的面积与重叠部分的面积的比是 5∶4.

(4) 由于不同情况下重叠部分的形状发生了变化，故应分情况讨论.

①当 $0\leqslant t\leqslant 12$ 时，重叠部分是三角形，

所以函数表达式是 $y=\frac{1}{2}t^2$.

②当 $12<t\leqslant 24$ 时，重叠部分是直角梯形，面积是 $\triangle ABC$ 的面积与右侧小直角三角形面积的差.

因为 $\triangle ABC$ 的面积是 72 cm^2，小直角三角形的面积是 $\frac{1}{2}(t-12)^2$ cm^2，

所以重叠部分的面积是 $\left[72-\frac{1}{2}(t-12)^2\right]$ cm^2.

因此函数表达式是 $y=72-\frac{1}{2}(t-12)^2$.

故 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2(0\leqslant t\leqslant 12),\\ 72-\frac{1}{2}(t-12)^2(12<t\leqslant 24).\end{cases}$

点方法

解决几何图形以及图形变换构造的函数问题的方法：把几何图形信息转换为数字以及式子信息，运用几何图形的有关性质建立函数模型，有时需要分类讨论，得出不同情况下的函数表达式.

拨尖角度3 利用函数表达式解决规律探究问题(拓展点)

例12 如图4.1-11，结合表格中的数据回答问题：

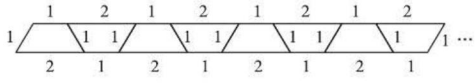


图4.1-11

梯形个数	1	2	3	4	5	…
图形周长	5	8	11	14	17	…

(1) 设图形的周长为 l，梯形的个数为 n，试写出 l 与 n 的函数表达式；

(2) 求当 $n=11$ 时的图形的周长；

(3) 求当 $l=302$ 时，梯形的个数.

导引：(1) 观察图形可以发现，每增加一个梯形，周长就增加 3.

当有 1 个梯形时，周长为 5；当有 2 个梯形时，即增加 1 个梯形，周长增加 3，为 $5+3=8$；

当有 3 个梯形时，即增加 2 个梯形，周长增加 3×2，为 $5+3\times 2=11$；

当有 4 个梯形时，即增加 3 个梯形，周长增加 3×3，为 $5+3\times 3=14$；

⋮

当有 n 个梯形时，即增加 $(n-1)$ 个梯形，周长增加 $3\times(n-1)$，为 $5+3\times(n-1)=3n+2$，即 $l=3n+2$.

(2) 把 $n=11$ 代入(1)中的表达式求出 l.

(3) 把 $l=302$ 代入(1)中的表达式，求出 n.

▶解：(1) l 与 n 的函数表达式为 $l=3n+2$.

(2) 把 $n=11$ 代入 $l=3n+2$，

得 $l=3\times 11+2=35$.

所以当 $n=11$ 时，图形周长为 35.

(3) 把 $l=302$ 代入 $l=3n+2$，

得 $302=3n+2$，所以 $n=100$，

即当 $l=302$ 时，梯形的个数为 100.

点方法

对于探索图形规律问题，解决的思路有两种：一种是数图形，将图形转化为数字规律，再用**函数思想**、**观察法**解决；另一种是通过图形的直观性，从图形中直接寻找规律，常用“**拆图法**”解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见267页)

基础巩固练

1. 某型号的汽车在路面上的制动距离 $s=\frac{v^2}{256}$，其中变量是(　　)

A. s,v　　B. s,v^2　　C. s　　D. v

2. 下列关系式中，y 不是 x 的函数的是(　　)

A. $y=x^2$　　B. $|y|=x$

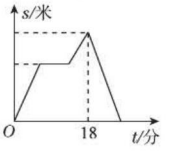
C. $y=x^2+1$　　D. $y=\frac{8}{x}$

3. 小亮因感冒发烧住院治疗，护士为了较直观地了解小亮这天24小时的体温和时间的关系，应该选择的比较好的方式是(　　)

A. 列表法　　B. 图象法

C. 公式法　　D. 以上三种方式均可

4. 一天晚饭后，小明陪妈妈从家里出去散步，下图描述了他们散步过程中离家的距离 s(米)与散步时间 t(分)之间的函数关系，下面的描述符合他们散步情景的是(　　)



(第4题图)

A. 从家出发，到了一家书店，看了一会儿书就回家了

B. 从家出发，到了一家书店，看了一会儿书，继续向前走了一段

C. 从家出发，一直散步(没有停留)，然后回家了

D. 从家出发，散了一会儿步，到了一家书店，看了一会儿书，继续向前走了一段，离家18分钟后开始返回

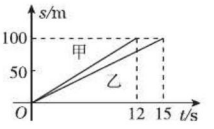
5. [中考 · 黄冈] 函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 1$　　B. $x\geqslant -1$

C. $x\neq 1$　　D. $-1\leqslant x<1$

6. 已知函数 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 中，当 $x=a$ 时的函数值为1，则 a 的值是_____.

7. 假定甲、乙两人在一次赛跑中，所跑路程 s 与所用时间 t 之间的关系如图，那么由图象可知：



(第7题图)

(1)这是一次_____ m赛跑；

(2)甲、乙两人中先到达终点的是_____；

(3)乙在这次赛跑中的速度是_____ m/s.

8. 写出下列问题中的函数表达式，并指出其自变量的取值范围：

(1)多边形内角和 α 与边数 n 之间的关系；

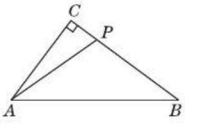
(2)拖拉机的油箱最多可装80 kg油，装满油后犁地，平均每时耗油4 kg. 油箱中剩余油量 Q(kg)与犁地时间 t(h)之间的关系；

(3)梯形的面积为100 cm^2，上底是下底的 $\frac{1}{3}$，高 y 与下底 x 之间的关系.

9. 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，设点 P 为边 BC 上一动点，点 P 不与点 B,C 重合，且 $CP=x$，若 $y=S_{\triangle APB}$.

(1)求 y 与 x 之间的函数表达式；

(2)求自变量 x 的取值范围.



(第9题图)

能力提升练

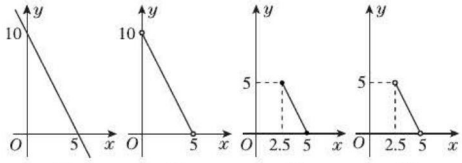
10. 若函数 $y=\begin{cases}x^2+2, x\leqslant 2,\\ 2x, x>2,\end{cases}$ 则当函数值 $y=8$ 时，自变量 x 的值是(　　)

A. $\pm\sqrt{6}$　　B. 4

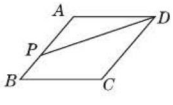
C. $\pm\sqrt{6}$ 或4　　D. 4或 $-\sqrt{6}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

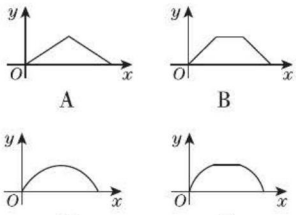
11. [中考·齐齐哈尔]已知等腰三角形的周长是10,底边长y是腰长x的函数,则下列图象中,能正确反映y与x之间函数关系的图象是(　　)　【导学号:8564979】



12. [中考·广东]如图,点P是菱形$ABCD$边上的一动点,它从点A出发沿$A\to B\to C\to D$路径匀速运动到点D,设$\triangle PAD$的面积为y,P点的运动时间为x,则y关于x的函数图象大致为(　　)



(第12题图)



13. [中考·咸宁]甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行2 400米,先到终点的人原地休息. 已知甲先出发4分钟,在整个步行过程中,甲、乙两人的距离y(米)与甲出发的时间t(分)之间的关系如图所示,下列结论:

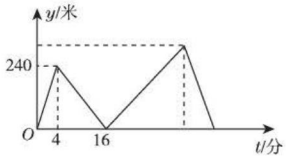
①甲步行的速度为60米/分;

②乙走完全程用了32分钟;

③乙用16分钟追上甲;

④乙到达终点时,甲离终点还有300米.

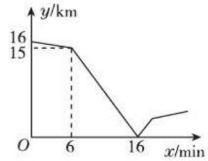
其中正确的结论有(　　)



(第13题图)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

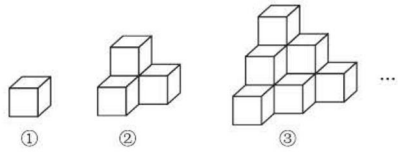
14. [中考·重庆]甲、乙两人在一条笔直的道路上相向而行,甲骑自行车从A地到B地,乙驾车从B地到A地,他们分别以不同的速度匀速行驶,已知甲先出发6 min后,乙才出发. 在整个过程中,甲、乙两人的距离y(km)与甲出发的时间x(min)之间的关系如图所示. 当乙到达终点A时,甲还需_____ min到达终点B.



(第14题图)

思维拓展练

15. 如图①是棱长为a的小正方体,图②和图③是由这样的小正方体摆放而成的,按照这样的方法继续摆放,自上而下分别叫第一层,第二层,…,第n层,第n层的小正方体的个数记为s,解答下列问题:



(第15题图)

(1)填表:

n	1	2	3	4	…
s	1	3	6		…

(2)当$n=10$时,$s=$_____;

(3)根据上表中的数据,把s作为纵坐标,n作为横坐标,在平面直角坐标系中描出相应的各点;

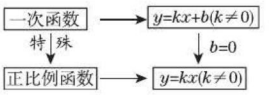
(4)请你猜一猜上述各点会在某一个函数的图象上吗? 如果在某一函数的图象上,求出该函数的表达式.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4.2 一次函数

热门话题
- 一次函数、正比例函数的概念
- 一次函数的模型

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 一次函数、正比例函数的概念(重点)

点知识

1. **定义**:如果函数的表达式是关于自变量的一次式,那么这样的函数称为一次函数,它的一般形式是 $y=kx+b(k,b$ 为常数,$k\neq0)$.
特别地,当 $b=0$ 时,一次函数 $y=kx(k$ 为常数,$k\neq0)$ 也叫作正比例函数,其中 k 叫作比例系数.

要点精析

(1)一次函数的特征:一次函数的自变量 x 的次数是 1,一次项的系数 k 必须是不为零的常数,b 可以是任意常数.

(2)正比例函数的特征:等式右边是含自变量的单项式;自变量的次数是 1;比例系数 k 不等于 0.

(3)正比例函数是特殊的一次函数.

(4)一次函数的自变量的取值范围是一切实数,但在实际问题中要根据函数的实际意义来确定.

(5)要判断一个函数是不是一次函数:一要看表达式是否为整式,二要看自变量的最高次数是否为 1,三要看自变量的系数是否为 0.


一次函数

2. **一次函数与正比例函数的区别与联系**:
区别:正比例函数是一次函数,但一次函数不一定是正比例函数.
联系:当 $b=0$ 时,一次函数可以转化为正比例函数,因此正比例函数是一次函数的特例.

3. **易错警示**:一次函数表达式 $y=kx+b(k,b$ 为常数,$k\neq0)$ 的条件 $k\neq0$ 千万不能忽视,如果 $k=0,y=b$ 就不是一次函数.

拨考向

考查角度 1:利用一次函数的定义识别一次函数

例 1 下列函数中,哪些是一次函数,哪些又是正比例函数?

$(1)y=-2x^2$;$(2)y=\dfrac{x+1}{2}$;$(3)y=3x^2-x(3x-2)$;$(4)x^2+y=1$;$(5)y=-\dfrac{3}{x}$.

导引:先看函数表达式是否为整式,再经过恒等变形进行化简,然后根据一次函数和正比例函数的定义进行判断.

▶解:(1)因为 x 的次数是 2,所以 $y=-2x^2$ 不是一次函数.

(2)因为 $y=\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$,$k=\dfrac{1}{2}$,$b=\dfrac{1}{2}$,所以 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 是一次函数,但不是正比例函数.

(3)因为 $y=3x^2-x(3x-2)=2x$,$k=2$,$b=0$,所以它是一次函数,也是正比例函数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(4)$x^2+y=1$,即$y=1-x^2$. 因为x的次数是2,所以$x^2+y=1$不是一次函数.

(5)因为$y=-\frac{3}{x}$中$-\frac{3}{x}$不是整式,不符合$y=kx+b$的形式,所以它不是一次函数.

拨技巧

判断函数是否为一次函数的方法: 先看函数表达式是否是整式的形式,再将函数表达式进行恒等变形,然后看它是否符合一次函数表达式$y=kx+b$的结构特征:(1)$k\neq0$;(2)自变量x的次数为1;(3)常数项b可以为任意实数.

考查角度2:利用一次函数的定义求字母的值或取值范围

例2 已知函数$y=(m-5)x^{m^2-24}+m+1$.

(1)若它是关于x的一次函数,求m的值;

(2)若它是关于x的正比例函数,求m的值.

导引:(1)要使函数是一次函数,根据一次函数的定义x的指数$m^2-24=1$,且一次项系数$m-5\neq0$求解.(2)要使函数是正比例函数,除了满足(1)的条件外,还需加上$m+1=0$这个条件.

▶解:(1)因为$y=(m-5)x^{m^2-24}+m+1$是一次函数,

所以$m^2-24=1$,$m-5\neq0$.

所以$m=\pm5$,$m\neq5$,所以$m=-5$.

所以当$m=-5$时,函数$y=(m-5)x^{m^2-24}+m+1$是一次函数.

(2)因为$y=(m-5)x^{m^2-24}+m+1$是正比例函数,

所以$m^2-24=1$,$m-5\neq0$,$m+1=0$.

所以$m=\pm5$,$m\neq5$,$m=-1$,所以这样的m不存在.

所以函数$y=(m-5)x^{m^2-24}+m+1$不可能为正比例函数.

同类变式 (答案见267页) 练一练

2. 关于x的函数$y=(m-1)x^{|m|}+n-3$.

(1)当m和n取何值时,它是关于x的一次函数?

(2)当m和n取何值时,它是关于x的正比例函数?

点方法

由一次函数、正比例函数的定义求字母的值的方法: 对于形如$y=kx^a+b$(k,b为常数)的函数,若它是一次函数,则有$k\neq0$,$a=1$,若它是正比例函数,则有$k\neq0$,$a=1$,$b=0$. 一定不能忽略条件$k\neq0$.

知识点2 建立一次函数模型(难点)

点知识

1. 根据实际问题中的两个变量满足条件"因变量随自变量的变化是均匀的",确定这两个变量之间是一次函数的关系,从而可以列出一次函数表达式或正比例函数表达式,这时应用的是数学建模思想,在解决实际问题中,将实际问题抽象为纯数学问题是建模的关键.

2. **建立一次函数模型的一般步骤:**

(1)认真审题,根据题意找出等量关系;

(2)按照等量关系写出含有两个变量的等式;

(3)将等式变形为含有自变量的代数式表示函数关系的式子.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度:利用一次函数模型解决简单的实际问题

例3 A 市和 B 市分别有某种库存机器12台和6台,现决定支援 C 村10台,D 村8台. 已知从 A 市调运一台机器到 C 村和 D 村的运费分别是400元和800元,从 B 市调运一台机器到 C 村和 D 村的运费分别是300元和500元.

(1)设 B 市运往 C 村机器 x 台,求总运费 W(元)关于 x(台)的函数表达式.

(2)当总运费为9 000元时,从 A 市运往 C 村和 D 村的机器分别为几台?

导引:由已知条件分析得下表:

	库存机器	支援 C 村	支援 D 村
B 市	6台	x 台	$(6-x)$ 台
A 市	12台	$(10-x)$ 台	$[8-(6-x)]$ 台

▶解:(1)根据题意,得到 $W=300x+500(6-x)+400(10-x)+800[8-(6-x)]=200x+8\,600(0\leqslant x\leqslant 6)$.

所以 W 关于 x 的函数表达式为 $W=200x+8\,600(0\leqslant x\leqslant 6)$.

(2)由 $200x+8\,600=9\,000$,得 $x=2$.

所以 $10-x=10-2=8$(台),$8-(6-x)=8-6+2=4$(台).

答:从 A 市运往 C 村、D 村的机器分别为8台、4台.

同类变式 (答案见267页) 练一练

3. 小丁每天从某报社以每份0.5元的价格买进报纸200份,然后以每份1元的价格卖给读者,报纸卖不完,当天可退回报社,但报社只按每份0.2元的价格退钱给小丁,如果小丁平均每天卖出报纸 x 份,纯收入为 y 元.

(1)求 y 与 x 之间的函数表达式(要求写出自变量 x 的取值范围);

(2)如果每月以30天计算,小丁每天至少要卖多少份报纸才能保证每月纯收入不低于2 000元?

点方法

实际问题中,自变量的取值范围要符合实际,如本题中,B 市库存机器为6台,所以从 B 市运往 C 村机器的台数 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 6$.

Ⅱ 点方法 · 拔技巧 · 探规律

拔尖角度1 利用一次函数和正比例函数的概念判断函数关系

例4 已知 $y+a$ 与 $x+b$ 成正比例(其中 a,b 都是常数).

(1)试说明 y 是 x 的一次函数.

(2)在什么条件下,y 是 x 的正比例函数?

导引:由 $y+a$ 与 $x+b$ 成正比例,设比例系数为 $k(k\neq 0)$,列等式后变形为一次函数的一般形式来说明.

▶解:(1)∵ $y+a$ 与 $x+b$ 成正比例,

∴ 设比例系数为 $k(k\neq 0)$,则 $y+a=k(x+b)$,

整理得 $y=kx+kb-a$.

∵ k,a,b 均为常数,

∴ k 与 $kb-a$ 为常数,

∴ y 是 x 的一次函数.

(2)若 $y=kx+kb-a$ 是正比例函数,则必须有 $kb-a=0$,

即当 $kb-a=0$ 时,y 是 x 的正比例函数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

(1)要把两个变量 $x+b$,$y+a$ 看成两个整体,它们之间成正比例关系,可以先设它们的比例系数为 k,从而可以表示为 $y+a=k(x+b)$ 的形式.

(2)正比例函数的定义是从表达式的角度出发的,注意定义中对比例系数的要求:k 是常数,$k\neq0$,k 可以是正数也可以是负数.

拔尖角度2 在分段计费问题中建立函数表达式

例5 某实验中学组织学生到距学校6 km的光明科技馆去参观,学生王琳因有事没能乘上学校的校车,于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆.出租车的收费标准如下:

路程/km	费用/元
3 km以下(含3 km)	8.00
3 km以上,每增加1 km	1.80

(1)写出乘出租车的费用 y(元)与出租车行驶的路程 x(km)之间的函数表达式;

(2)王琳身上仅有14元,乘出租车到光明科技馆的车费够不够?

导引:(1)写函数表达式时,要分3 km以下(含3 km)和3 km以上两种情况讨论:路程未超过3 km时的费用为8.00元;路程超过3 km时的费用为$[(x-3)\times1.8+8]$元;

(2)由 $y=14$ 求出 x 的值,再与6比较大小,或由 $x=6$ 求出 y 的值,再与14比较大小.

▶解:(1)当 $0<x\leqslant3$ 时,$y=8$;

当 $x>3$ 时,

$y=1.8(x-3)+8=1.8x+2.6$.

即 $y=\begin{cases}8(0<x\leqslant3),\\1.8x+2.6(x>3).\end{cases}$

(2)方法一:当 $y=14$ 时,$14=1.8x+2.6$,

解得 $x=6\frac{1}{3}$.

因为 $6\frac{1}{3}>6$,所以车费够.

方法二:当 $x=6$ 时,$y=1.8x+2.6=1.8\times6+2.6=13.4<14$.

所以车费够.

点方法

出租车问题是我们在日常生活中常遇到的问题,也是中考的热点问题.解答此类问题的方法一般是结合题目中所有信息分类讨论,在不同的条件下建立相应的函数表达式,再根据自变量所在的取值范围,代入对应的函数表达式求值.

拔尖角度3 在几何问题中建立一次函数模型解决问题(拓展点)

例6 如图4.2-1,正方形 $ABCD$ 的边长为4,P 为正方形边上一动点,运动路线是 $A\to D\to C\to B\to A$,运动到点 A 时停止,设点 P 经过的路程为 x,以点 A,P,D 为顶点的三角形的面积是 y,确定 y 与 x 之间的函数关系式.

▶解:当点 P 在 AD 上($0\leqslant x\leqslant4$)时,A,P,D 三点不能组成三角形;当点 P 在 CD 上($4<x<8$)时,A,P,D 三点能组成三角形,且其面积 $y=\frac{1}{2}\times4\times(x-4)=2(x-4)$,

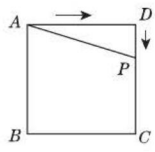


图4.2-1

即 $y=2x-8$;当点 P 在 BC 上($8\leqslant x<12$)时,A,P,D 三点能组成三角形,且其面积 $y=\frac{1}{2}\times4\times4=8$;当点 P 在 AB 上($12\leqslant x<16$)时,A,P,D 三点能组成三角形,且其面积 $y=\frac{1}{2}\times4\times(16-x)=2(16-x)$,即 $y=32-2x$;当 $x=16$ 时,点 P 恰好回到点 A,此时 A,P,D 三点不能组成三角形.因此 y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}2x-8 & (4<x<8),\\8 & (8\leqslant x<12),\\32-2x & (12\leqslant x<16).\end{cases}$$

点方法

本题在求函数关系式时,运用了**分类讨论思想**.如果当自变量取不同值时,对应不同的函数关系式,那么就要对自变量的取值分类讨论,分别求对应的函数关系式,最后再综合在一起即可.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见267页)

基础巩固练

1. 现有下列函数:①$y=x$;②$y=2x^2$;③$y=\frac{1}{x}$;④$y=-2x+1$,其中一次函数有(　　)

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

2. 下列函数中,既是一次函数,又是正比例函数的是(　　)

A. $y=-x^2$　B. $y=2x(x+1)-2x^2$

C. $y=\frac{3}{2x}$　D. $y=3x-1$

3. 下列说法正确的是(　　)

A. 一次函数是正比例函数

B. 正比例函数为一次函数

C. 正比例函数不是一次函数

D. 正比例函数不一定是一次函数

4. [中考 · 德州]公式$L=L_0+KP$表示重力为P的物体作用在弹簧上时弹簧的长度,L_0代表弹簧的初始长度,用厘米(cm)表示,K表示单位重力物体作用在弹簧上时弹簧拉伸的长度,用厘米(cm)表示.下面给出的四个公式中,表明这是一个短而硬的弹簧的是(　　)

A. $L=10+0.5P$　B. $L=10+5P$

C. $L=80+0.5P$　D. $L=80+5P$

5. 求当m,n为何值时,$y=(m-1)x^{m^2}+n$,

(1)是关于x的一次函数;

(2)是关于x的正比例函数.

6. 小明去照相馆拍照,看见墙上价格表的部分内容如下表所示,现小明准备拍一寸照片x张,且需要的照片超过8张,因此还需要加洗若干张,求小明应付的费用y(元)与照片张数x之间的函数表达式,并写出x的取值范围.

尺寸	价格	张数	加洗
一寸	6元	8	0.4元/张
二寸	10元	4	0.8元/张

能力提升练

7. 已知函数$y=(m^2+2m)x^{m^2+m-1}+(2m-3)$是关于$x$的一次函数,则常数$m$的值为(　　)

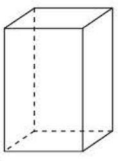
A. -2　B. 1

C. -2或1　D. 2或-1

8. 若$y=2x^{m^2-8}+m^2-2m-15$是关于x的正比例函数,则m的值为(　　)

A. ±3　B. 3　C. -3　D. 无法确定

9. [中考 · 绍兴]实验室里有一个水平放置的长方体容器,从内部量得它的高是15 cm,底面的长是30 cm,宽是20 cm,容器内的水深为x cm.现往容器内放入如图的长方体实心铁块(铁块一面平放在容器底面),过顶点A的三条棱的长分别是10 cm,10 cm,y cm($y\leqslant15$),当铁块的顶部高出水面2 cm时,x,y满足的关系式是_____.



(第9题图)

10. 已知$y=y_1-2y_2$,其中y_1与x成正比例,y_2与$x+1$成正比例,且当$x=1$时,$y=3$;当$x=2$时,$y=5$,求y与x之间的函数关系式.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

11. [中考·南京]张老师计划到超市购买甲种文具100个,他到超市后发现还有乙种文具可供选择,如果调整文具的购买品种,每减少购买1个甲种文具,需增加购买2个乙种文具.设购买x个甲种文具时,需购买y个乙种文具.

(1)①当减少购买1个甲种文具时,$x=$_____,$y=$_____;

②求y与x之间的函数表达式.

(2)已知甲种文具每个5元,乙种文具每个3元,张老师购买这两种文具共用去540元,则甲、乙两种文具各购买了多少个?

12. 十一期间,李老师组织学生去某风景区旅游,已知门票的收费标准是20人以内(含20人),每人20元,超过20人,超过部分每人10元.

(1)分别写出应收门票费y(元)与参加旅游人数x(人)($x>20$且x为整数及$0<x\leqslant 20$且x为整数)之间的函数表达式;

(2)利用(1)中的表达式计算:李老师若带领52名学生去旅游,购买门票需花多少钱?

13. 我们知道,海拔高度每上升1千米,温度下降6 ℃.某时刻,益阳地面温度为20 ℃,设高出地面x千米处的温度为y ℃.

(1)写出y与x之间的函数表达式.

(2)已知益阳某山高出地面约500米,求这时山顶的温度大约是多少.

(3)此刻,有一架飞机飞过益阳上空,若机舱内仪表显示飞机外面的温度为-34 ℃,求飞机离地面的高度为多少千米.

思维拓展练

14. 为表彰在"缔造完美教师"活动中表现积极的同学,老师决定购买文具盒与钢笔作为奖品.已知5个文具盒、2支钢笔共需100元,4个文具盒、7支钢笔共需161元.

(1)每个文具盒、每支钢笔各多少元?

(2)时逢五一,商店举行"优惠促销"活动,具体办法如下:文具盒九折优惠,钢笔超过10支的部分八折优惠,未超过的部分不优惠.若买x个文具盒需要y_1元,买x支钢笔需要y_2元,求y_1,y_2关于x的函数表达式.

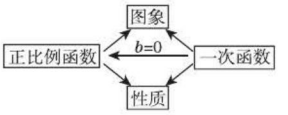
(3)若购买同一种奖品,并且该奖品的数量超过10件,请你分析买哪种奖品省钱.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4.3 一次函数的图象

热门话题
- 函数图象的画法
- 正比例函数的图象与性质
- 一次函数的图象与性质

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 正比例函数的图象(重点)

点知识

1. **用描点法画函数图象的一般步骤**:
   (1)**列表**:在自变量取值范围内有代表性地取值,并求出相应的函数值;
   (2)**描点**:一对对应值即一个坐标,一个坐标确定一个点;
   (3)**连线**:按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑的曲线连接起来.

要点精析

(1)列表时要根据自变量的取值范围取值,从小到大或自中间向两边选取,取值要有代表性,尽量使画出的函数的图象能反映函数的全貌.
(2)描点时要以表中每对对应值为坐标,在平面直角坐标系中准确描点.
(3)连线时要用平滑的曲线将所描的点顺次连接起来.

2. **正比例函数图象的画法**:因为两点确定一条直线,而正比例函数 $y=kx$(k 为常数,$k\neq0$)的图象是一条经过原点的直线,所以画图象时,除了原点(0,0)外,只需另取一个点,如(1,k),将它们相连所得的直线即为正比例函数的图象.
3. **易错警示**:
   (1)函数图象上的任意一点 $P(x,y)$ 的坐标都满足函数表达式;
   (2)满足函数表达式的任意一对 x,y 的值,所对应的点一定在函数图象上.

拨考向

考查角度 1:利用画函数图象的步骤画正比例函数的图象

例 1 在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=\frac{1}{5}x$,$y=x$,$y=5x$ 的图象,然后比较哪一个函数的图象与 x 轴正方向所成的锐角最小,由此你得到什么猜想?再选几个函数的图象验证你的猜想.

导引:先分别求出函数 $y=\frac{1}{5}x$,$y=x$,$y=5x$ 的图象上除点(0,0)以外的某一点的坐标,画出各函数的图象,再根据函数的图象直接解答.

▶解:(1)列表:

x	…	0	1	5	…
$y=\frac{1}{5}x$	…	0		1	…
$y=x$	…	0	1		…
$y=5x$	…	0	5		…

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)描点:以表中各组对应值作为点的坐标,在平面直角坐标系中描出相应的点.

(3)连线:把这些点依次连接起来,如图4.3-1,由以上三个函数的图象可知函数 $y=\frac{1}{5}x$ 的图象与 x 轴正方向所成的锐角最小,由此猜想:正比例函数 $y=kx(k>0)$ 中,k 越小,图象与 x 轴正方向所成的锐角越小.

再画出函数 $y=\frac{1}{2}x$ 与函数 $y=2x$ 的图象进行验证(如图4.3-2).

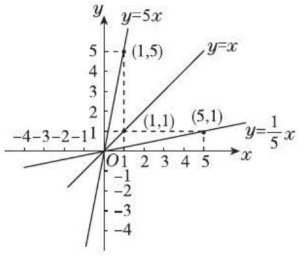


图4.3-1

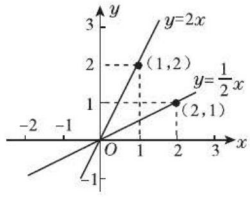


图4.3-2

点方法

正比例函数 $y=kx$ (k 是常数,且 $k\neq0$)的图象是一条经过原点及点 $(1,k)$ 的直线,通常作正比例函数的图象是过 $(0,0)$ 和 $(1,k)$ 两点画直线,但也可以变通,选点应以便于计算和描点为原则.

考查角度2:判断点是否在正比例函数图象上

例2 下列各点中,在正比例函数 $y=-2x$ 图象上的是(　　)

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,-2)$

C. $(2,-1)$　　D. $(1,-2)$

导引:选项A:因为当 $x=-2$ 时,$y=(-2)\times(-2)=4\neq-1$,所以此点不在正比例函数 $y=-2x$ 的图象上,故本选项错误;

选项B:因为当 $x=-1$ 时,$y=(-2)\times(-1)=2\neq-2$,所以此点不在正比例函数 $y=-2x$ 的图象上,故本选项错误;

选项C:因为当 $x=2$ 时,$y=(-2)\times2=-4\neq-1$,所以此点不在正比例函数 $y=-2x$ 的图象上,故本选项错误;

选项D:因为当 $x=1$ 时,$y=(-2)\times1=-2$,所以此点在正比例函数 $y=-2x$ 的图象上,故本选项正确.

▶答案:D

同类变式 (答案见268页) 练一练

2. 下列四组点中,可以在同一个正比例函数图象上的一组点是(　　)

A. $(2,-3),(-4,6)$

B. $(-2,3),(4,6)$

C. $(-2,-3),(4,-6)$

D. $(2,3),(-4,6)$

点方法

判断点(x,y)是否在函数图象上的方法: 将点(x,y)的坐标代入函数表达式,若满足函数表达式,这个点就在函数的图象上;若不满足函数表达式,这个点就不在函数的图象上.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 2 正比例函数的图象的性质(重点)

点知识

1. **性质**:当 $k>0$ 时,直线 $y=kx$ 经过第三、一象限从左向右上升,y 随 x 的增大而增大;当 $k<0$ 时,直线 $y=kx$ 经过第二、四象限从左向右下降,y 随 x 的增大而减小.

要点精析

(1)若某函数图象是直线且经过原点(坐标轴除外),则它对应的函数是正比例函数.

(2)正比例函数的图象的位置、函数的增减性由比例系数 k 的符号决定;反过来也成立.

(3)讨论函数的图象与性质时,一般从图象的形状、位置及 x,y 间的变化规律等方面去研究. 其中,图象的形状、位置是函数的几何性质,x,y 间的变化规律是函数的代数性质,其实质是从"形""数"两个方面去研究它的性质.

2. **易错警示**:

(1)弄清正比例函数图象、性质与 k 的关系;

(2)画函数图象时要考虑自变量的取值范围.

点考向

考查角度 1:利用图象经过的象限确定比例系数 k 的取值范围

例 3 若正比例函数 $m:y=(3k-5)x$ 及 $n:y=(5k-3)x$ 的图象如图 4.3-3 所示,则 k 的取值范围是_____.

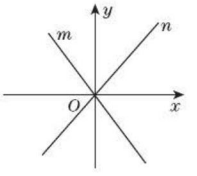


图 4.3-3

导引:由正比例函数的图象及性质知:$3k-5<0$,即 $k<\frac{5}{3}$;$5k-3>0$,即 $k>\frac{3}{5}$.

综上可得 $\frac{3}{5}<k<\frac{5}{3}$.

▶答案:$\frac{3}{5}<k<\frac{5}{3}$

点方法

正比例函数中比例系数 k 的取值范围确定函数图象所经过的象限,反之已知函数图象所经过的象限,可以确定正比例函数中比例系数 k 的取值范围.

考查角度 2:利用正比例函数的图象与性质比较函数值的大小

例 4 [中考 · 珠海]已知函数 $y=3x$ 的图象经过点 $A(-1,y_1)$,点 $B(-2,y_2)$,则 y_1 _____ y_2(填">""<"或"=").

导引:方法一:把点 A、点 B 的坐标分别代入 $y=3x$,求出 y_1,y_2 的值比较大小即可.

方法二:画出正比例函数 $y=3x$ 的图象,在函数图象上标出点 A、点 B,利用数形结合思想来比较 y_1,y_2 的大小. 如图 4.3-4,观察图象,显然可得 $y_1>y_2$.

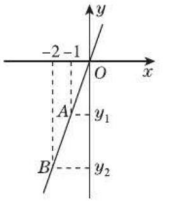


图 4.3-4

方法三:根据正比例函数的增减性来比较函数值的大小. 根据正比例函数的性质,当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大,即可得 $y_1>y_2$.

▶答案:>

同类变式 (答案见 268 页) 练一练

4. $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 是正比例函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图象上的两点,则下列判断正确的是(　　)

A. $y_1>y_2$

B. $y_1<y_2$

C. 当 $x_1<x_2$ 时,$y_1>y_2$

D. 当 $x_1<x_2$ 时,$y_1<y_2$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

正比例函数图象上两点的纵坐标的大小与比例系数及自变量的大小有关；比例系数是正数时，函数值随自变量的增大而增大；比例系数是负数时，函数值随自变量的增大而减小. 本例的求解方法中，方法一是利用求值比较法；方法二是利用**数形结合思想**，用“形”上的点的位置来比较“数”的大小；方法三是利用函数的增减性来比较大小.

考查角度3：利用正比例函数的图象比较比例系数 k 的大小

例5 已知正比例函数 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x$ 的图象如图4.3-5，比较 k_1 与 k_2 的大小.

导引：两个函数的自变量取相同的数值，当所取的数是正数时，比较两个函数值的大小即可得 k_1，k_2 的大小.

▶解：如图4.3-5，在正比例函数 $y=k_1x$ 图象位于第一象限的射线上取一点 A，设点 A 的坐标是 (a,k_1a)，过点 A 引 x 轴的垂线交正比例函数 $y=k_2x$ 的图象于一点 B，x 轴上的垂足是 H，所以点 B 的坐标是 (a,k_2a). 由于 $k_1a>k_2a$，且 $a>0$，因此 $k_1>k_2$.

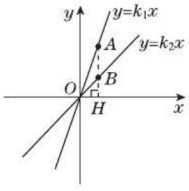
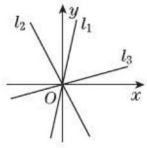


图4.3-5

同类变式 (答案见268页) 练一练

5. 如图，函数 $y_1=k_1x$，$y_2=k_2x$，$y_3=k_3x$ 的图象分别是直线 l_1，l_2，l_3，则 k_1，k_2，k_3 的大小关系是_____.



（第5题图）

点方法

利用正比例函数的图象比较比例系数的大小：①可以在一条直线上取一点 A，通常使得这点的横坐标是1，过这点引 x 轴的垂线，交另一直线于一点 B，比较 A，B 两点纵坐标的大小即可. ②直接观察图象与 y 轴的夹角，夹角越小，$|k|$ 越大.

知识点3 一次函数的图象

点知识

1. 一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的图象是一条直线，它与正比例函数 $y=kx$ 的图象平行，一次函数 $y=kx+b$ 的图象可以看作由直线 $y=kx$ 沿 y 轴平移 $|b|$ 个单位长度而得到.

2. **一次函数图象的画法：**

(1) **两点法**：由于两点确定一条直线，因此在平面直角坐标系中画一次函数的图象时，先描出适合表达式的两点，再过这两点作直线即可. 通常选取点 $(0,b)$ 和 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$，即与两坐标轴相交的两点.

(2) **平移法**：直线 $y=kx+b$ 可以看作由直线 $y=kx$ 平移得到：①当 $b>0$ 时，把直线 $y=kx$ 向上平移 b 个单位长度得到直线 $y=kx+b$；

②当 $b<0$ 时，把直线 $y=kx$ 向下平移 $|b|$ 个单位长度得到直线 $y=kx+b$.

用一句话来表述就是“上加下减”，上、下是“形”的平移，加、减是“数”的变化.


一次函数的图象

3. **拓展**：直线 $y=k_1x+b_1(k_1\neq0)$ 与 $y=k_2x+b_2$ $(k_2\neq0)$ 的位置关系：

(1) 两直线平行 $\Leftrightarrow k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$；

(2) 两直线相交 $\Leftrightarrow k_1\neq k_2$；

(3) 两直线重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$，且 $b_1=b_2$；

(4) 两直线垂直 $\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1：利用"两点法"画一次函数图象

例6 在同一平面直角坐标系中，作出下列函数的图象：

(1) $y_1=2x-1$；(2) $y_2=2x$；(3) $y_3=2x+2$.

然后观察图象，你能得到什么结论？

导引：(1) 可取(0，−1)及(1，1)两点；(2) 可取(0，0)及(1，2)两点；(3) 可取(0，2)及(1，4)两点，分别作直线即可得到它们的图象，再通过观察图象，得出结论.

一次函数图象的画法

▶解：列表如下：

x	0	1
y_1	−1	1

x	0	1
y_2	0	2

x	0	1
y_3	2	4

描点、连线，即可得到它们的图象，如图4.3-6.

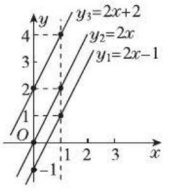


图4.3-6

从图象中我们可以看出：它们是一组互相平行的直线，原因是这组函数的表达式中 k 的值都是2.

点方法

画一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象，若 $b\neq0$，通常选取该直线与 y 轴的交点(横坐标为0的点)和与 x 轴的交点(纵坐标为0的点)，由两点确定一条直线得一次函数的图象.

结论：一次函数中的 k 值相等(b 值不相等)时，其图象是一组互相平行的直线. 它们可以通过互相平移得到.

考查角度2：利用正比例函数图象和一次函数图象之间的平行关系解决问题

例7 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象平行且经过点 $A(1,-2)$，求 kb 的值.

导引：先由两直线平行求得 k，再把点 $A(1,-2)$ 的坐标代入 $y=kx+b$ 可求得 b 的值.

▶解：∵ 直线 $y=2x$ 与直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 平行，

∴ $k=2$.

∵ 直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 经过点 $A(1,-2)$，

∴ $2+b=-2$，∴ $b=-4$. ∴ $kb=2\times(-4)=-8$.

同类变式 (答案见268页) 练一练

7. 把函数 $y=x$ 的图象向上平移3个单位长度，下列在该平移后的直线上的点是(　　)

A. (2，2)　　B. (2，3)

C. (2，4)　　D. (2，5)

拨技巧

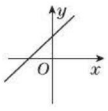
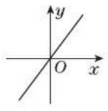
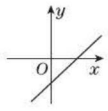
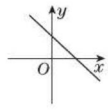
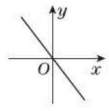
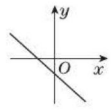
1. 若两个一次函数图象互相平行，则对应两个一次函数表达式中 k 相等.
2. 一次函数图象的平移法则：左加右减，上加下减.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点4 一次函数的图象的性质

点知识

直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 的位置是由 k 和 b 的符号决定的，它们的关系如下表：

k 的符号	$k>0$			$k<0$		
b 的符号	$b>0$	$b=0$	$b<0$	$b>0$	$b=0$	$b<0$
图象经过的象限	一、二、三	一、三	一、三、四	一、二、四	二、四	二、三、四
一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$ 图象的示意图						
性质	y 的值随着 x 值的增大而增大			y 的值随着 x 值的增大而减小		

拨考向

考查角度1：由一次函数的图象位置判断函数表达式中字母的值或取值范围

例8 已知直线 $y=(1-3k)x+2k-1$.

(1) k 为何值时，直线与 y 轴交点的纵坐标是 -2？

(2) k 为何值时，直线经过第二、三、四象限？

(3) k 为何值时，已知直线与直线 $y=-3x-5$ 平行？

导引：(1) 可令 $2k-1=-2$ 或将 $(0,-2)$ 代入函数表达式即可求得 k 值；

(2) 直线经过第二、三、四象限，说明 $\begin{cases}1-3k<0,\\2k-1<0,\end{cases}$ 解不等式组求出 k 的取值范围即可；

(3) 两直线若平行，则它们的自变量的系数应相等，所以 $1-3k=-3$ 且 $2k-1\neq-5$，可求出 k 值.

▶解：(1) 当 $x=0$ 时，$y=-2$，即当 $2k-1=-2$，$k=-\frac{1}{2}$ 时，直线与 y 轴交点的纵坐标是 -2.

(2) 当 $\begin{cases}1-3k<0,\\2k-1<0,\end{cases}$ 即当 $\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$ 时，直线经过第二、三、四象限.

(3) 当 $1-3k=-3$ 且 $2k-1\neq-5$，即 $k=\frac{4}{3}$ 时，已知直线与直线 $y=-3x-5$ 平行.

同类变式 (答案见268页) 练一练

8. [中考·攀枝花] 当 $kb<0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 的图象一定经过(　　)

A. 第一、三象限

B. 第一、四象限

C. 第二、三象限

D. 第二、四象限

点方法

直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限与不经过第一象限的区别是：经过第二、三、四象限时函数表达式中 b 不能等于0；不经过第一象限时函数表达式中的 b 可能等于0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：根据一次函数的增减性比较大小

例9 点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$是一次函数$y=kx+1$($k<0$)图象上两点，且$x_1>x_2$，则y_1与y_2的大小关系是(　　)

A. $y_1>y_2$　B. $y_1=y_2$　C. $y_1<y_2$　D. 不能确定

导引：由$k<0$确定一次函数的增减性，再结合横坐标的大小来确定函数值的大小关系.

∵ 一次函数$y=kx+1(k<0)$，∴ 此函数中y随x的增大而减小.

又∵ $x_1>x_2$，∴ $y_1<y_2$.

▶答案：C

同类变式 (答案见268页) 练一练

9. [中考 · 昆山] 已知点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在直线$y=kx+b$上，且直线经过第一、二、四象限，当$x_1<x_2$时，y_1与y_2的大小关系为_____.

考查角度3：利用一次函数的图象和性质求字母的取值范围

例10 已知一次函数$y=(6+3m)x+(n-4)$，y随x的增大而增大，函数的图象与y轴的交点在y轴的负半轴上，求m，n的取值范围.

导引：根据一次函数的性质可知，$6+3m>0$，$n-4<0$，从而求解即可.

▶解：根据题意，得$6+3m>0$，$n-4<0$.

解得$m>-2$，$n<4$.

同类变式 (答案见268页) 练一练

10. [中考 · 常德] 若一次函数$y=(k-2)x+1$的函数值y随x的增大而增大，则(　　)

A. $k<2$　B. $k>2$

C. $k>0$　D. $k<0$

拨技巧

对于一次函数$y=kx+b(k\neq0)$，(1)判断k值符号的方法：①性质法：当y随x增大而增大时，$k>0$；当y随x增大而减小时，$k<0$. ②直线升降法：当直线从左向右上升时，$k>0$；当直线从左向右下降时，$k<0$. ③经过象限法：当直线经过第一、三象限时，$k>0$；当直线经过第二、四象限时，$k<0$. (2)**判断b值符号的方法：**与y轴交点法，即若直线$y=kx+b$与y轴交于正半轴，则$b>0$；与y轴交于负半轴，则$b<0$；与y轴交于原点，则$b=0$.

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拔尖角度1 利用正比例函数图象比较函数值的大小

例11 已知正比例函数$y=-kx$的图象经过第一、三象限，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$三点在函数$y=(k-2)x$的图象上，且$x_1>x_3>x_2$，则y_1,y_2,y_3的大小关系为(　　)

A. $y_1>y_3>y_2$

B. $y_1>y_2>y_3$

C. $y_1<y_3<y_2$

D. $y_3>y_2>y_1$

导引：由$y=-kx$的图象经过第一、三象限，可知$-k>0$，即$k<0$，

所以$k-2<0$.

所以$y=(k-2)x$的函数值y随x的增大而减小.

则由$x_1>x_3>x_2$得$y_1<y_3<y_2$.

▶答案：C

点方法

在比较函数值的大小时，借助**图象法**来比较较直观，即在坐标系中，按x从左到右取值，看函数值(纵坐标)是增大还是减小来比较.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨尖角度2 利用正比例函数、一次函数的图象与性质解决同一平面直角坐标系内图象共存问题

例12 如图4.3-7，一次函数 $y=mx+n$ 与 $y=mnx(mn\neq0)$，在同一平面直角坐标系内的图象是(　　)

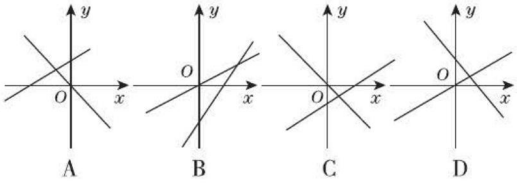


图4.3-7

导引：①当 $m>0,n>0$ 时，$mn>0$，一次函数 $y=mx+n$ 的图象过第一、二、三象限，正比例函数 $y=mnx$ 的图象过第一、三象限，无符合项；②当 $m>0,n<0$ 时，$mn<0$，一次函数 $y=mx+n$ 的图象过第一、三、四象限，正比例函数 $y=mnx$ 的图象过第二、四象限，C选项选合；③当 $m<0,n<0$ 时，$mn>0$，一次函数 $y=mx+n$ 的图象过第二、三、四象限，正比例函数 $y=mnx$ 的图象过第一、三象限，无符合项；④当 $m<0,n>0$ 时，$mn<0$，一次函数 $y=mx+n$ 的图象过第一、二、四象限，正比例函数 $y=mnx$ 的图象过第二、四象限，无符合项，故选C.

▶答案：C

点方法

解决这类问题往往采用**排除法**，根据图象得到函数表达式的各个参数的正负或取值范围，最后根据结论是否有矛盾得到正确答案.

拨尖角度3 利用一次函数的图象与性质解决实际问题

例13 一辆客车从甲地开往乙地，一辆出租车从乙地开往甲地，两车同时出发，若两车之间的距离 s 关于客车行驶时间 x 的函数表达式为：当 $0\leqslant x<\frac{15}{4}$ 时，$s=-160x+600$；当 $\frac{15}{4}\leqslant x<6$ 时，$s=160x-600$；当 $6\leqslant x\leqslant10$ 时，$s=60x$，设客车离甲地的距离为 y_1（千米），出租车离甲地的距离为 y_2（千米），y_1,y_2 与 x 的函数关系图象可能是如图4.3-8所示中的(　　)

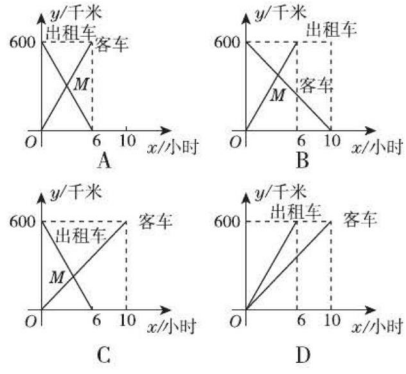


图4.3-8

导引：∵ 一辆客车从甲地开往乙地，一辆出租车从乙地开往甲地，∴ 两车相向运动，D图象不符合.

∵ 当 $0\leqslant x<\frac{15}{4}$ 时，$s=-160x+600$，当 $\frac{15}{4}\leqslant x<6$ 时，$s=160x-600$，∴ 两车速度和为160千米/时.

又∵ 当 $6\leqslant x\leqslant10$ 时，$s=60x$，

∴ 当 $x=6$ 时，快车已经到达目的地，慢车的速度为60千米/时，快车的速度为100千米/时，根据客车距甲地的距离越来越远可知C正确，故选C.

▶答案：C

点方法

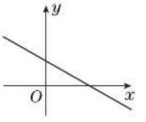
以实际问题为背景找相应的函数图象，先要弄清题意所反映的问题可分为几段，以及在这个过程中变化的量及不变的量，再确定大致图象.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见269页)

基础巩固练

1. [中考 · 沈阳]在平面直角坐标系中,一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示,则 k 和 b 的取值范围是(　　)



(第1题图)

A. $k>0,b>0$

B. $k>0,b<0$

C. $k<0,b>0$

D. $k<0,b<0$

2. [中考 · 大庆]对于函数 $y=2x-1$,下列说法正确的是(　　)

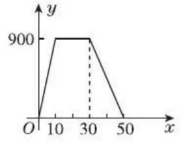
A. 它的图象过点(1,0)

B. y 值随着 x 值的增大而减小

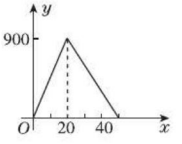
C. 它的图象经过第二象限

D. 当 $x>1$ 时,$y>0$

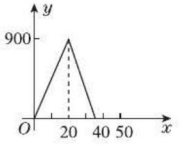
3. 小明从家走了10分后到达一个离家900米的报亭,看了10分的报纸,然后用了15分沿原路回家,下面的图象中能表示小明离家的距离 y(米)与时间 x(分)的关系的是(　　)



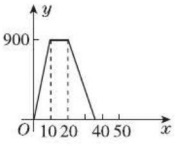
A



B



C



D

4. [中考 · 毕节]把直线 $y=2x-1$ 向左平移1个单位长度,平移后直线的关系式为(　　)

A. $y=2x-2$　　B. $y=2x+1$

C. $y=2x$　　D. $y=2x+2$

5. [中考 · 济宁]在平面直角坐标系中,已知一次函数 $y=-2x+1$ 的图象经过 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 两点,若 $x_1<x_2$,则 y_1 _____ y_2.(填">""<"或"=")

6. [中考 · 上海]同一温度的华氏度数 y(°F)与摄氏度数 x(°C)之间的函数关系是 $y=\frac{9}{5}x+32$,如果某一温度的摄氏度数是25°C,那么它的华氏度数是_____°F.

7. 画出一次函数 $y=4x+3$ 的图象,判断下列各点是否在函数的图象上:(0,3),(−1,−1),$\left(\frac{1}{2},5\right)$,(1,7),$\left(-\frac{3}{2},3\right)$.

8. 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=-3x$ 与 $y=-3x-6$ 的图象,并比较两个函数图象的位置有什么关系.

能力提升练

9. [中考 · 泰安]已知一次函数 $y=kx-m-2x$ 的图象与 y 轴的负半轴相交,且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小,则下列结论正确的是(　　)

A. $k<2,m>0$　　B. $k<2,m<0$

C. $k>2,m>0$　　D. $k<0,m<0$

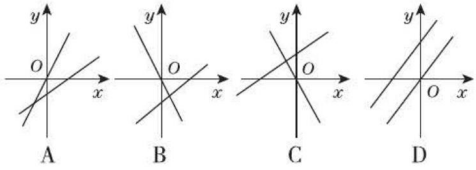
10. 若函数 $y=(1-k)x^{2|k|-3}$ 是正比例函数,且 y 随 x 的增大而减小,则 $(k-3)^{2\,020}$ 的值为(　　)

A. 2 020　　B. −2 020

C. 1　　D. −1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

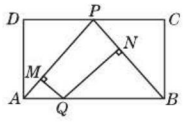
11. 直线 $y=-kx+k-3$ 与直线 $y=kx$ 在同一坐标系中的大致图象可能是(　　)



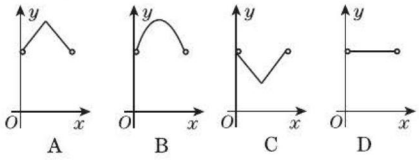
12. 在平面直角坐标系中,已知直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A,B 两点,点 $C(0,n)$ 是 y 轴正半轴上一点. 把坐标平面沿直线 AC 折叠,使点 B 刚好落在 x 轴上,则点 C 的坐标是(　　)

A. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ B. $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ C. $(0,3)$ D. $(0,4)$

13. 如图,长方形 $ABCD$ 中,P 为 CD 的中点,点 Q 为 AB 上的动点(不与 A,B 重合). 过点 Q 作 $QM\perp PA$ 于 M,$QN\perp PB$ 于 N. 设 AQ 的长度为 x,QM 与 QN 的长度和为 y,则能大致表示 y 与 x 之间的函数关系的图象是(　　)



(第13题图)



14. 已知正比例函数 $y=(2m-1)x^{3m^2-2}$ 的图象过第二、四象限.

(1)求 m 的值;

(2)若 $A(3,a)$,$B(\sqrt{5},b)$ 是图象上的两点,求 a,b 的值.

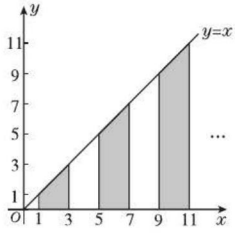
15. 已知点 $P(x,y)$ 是第一象限内的点,且 $x+y=8$,点 A 的坐标为 $(10,0)$,设 $\triangle OAP$ 的面积为 S.

(1)求 S 关于 x 的函数表达式,并写出自变量的取值范围;

(2)画出此函数的图象.

思维拓展练

16. [探究题]如图,一系列"黑色梯形"是由 x 轴、直线 $y=x$ 和过 x 轴上的正奇数 1,3,5,7,9,…所对应的点且与 y 轴平行的直线围成的. 从左到右将其面积依次记为 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n$,则 $S_1=$_____,$S_n=$_____.



(第16题图)

我的错题笔记

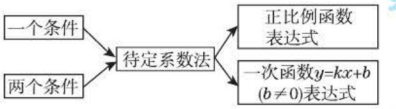
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4.4 用待定系数法确定一次函数表达式

热门话题

- 用待定系数法确定一次函数表达式

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 用待定系数法确定一次函数表达式

点知识

1. **定义**:通过先设定函数表达式(确定函数模型),再根据条件确定表达式中的未知系数,从而求出函数的表达式的方法称为待定系数法.
2. **一般步骤**:
   (1)**设出**:设出含有待定系数的函数表达式;
   (2)**代入**:把已知条件中的自变量与函数的对应值代入函数表达式,得到关于待定系数的方程(组);
   (3)**解**:解方程(组),求出待定系数;
   (4)**代回**:将求得的待定系数的值代回所设的表达式.


待定系数法

拨考向

考查角度1:利用一对对应值求正比例函数的表达式

例1 已知一个正比例函数的图象经过点$(-1,2)$.

(1)求这个正比例函数的表达式;

(2)请你判断点$(2,-5)$是否在此函数的图象上,并说明理由.

导引:(1)把点$(-1,2)$的坐标代入$y=kx(k\neq0)$中得到一个方程,求出该方程的解即可;(2)将点$(2,-5)$的坐标代入函数表达式,看能否满足正比例函数表达式,继而可作出判断.

▶解:(1)设正比例函数的表达式为$y=kx(k\neq0)$,把点$(-1,2)$的坐标代入$y=kx$中,得$-k=2$,即$k=-2$,故这个正比例函数的表达式为$y=-2x$.

(2)点$(2,-5)$不在此函数的图象上.理由如下:将点$(2,-5)$的坐标代入此函数的表达式,左边$=-5$,右边$=-4$,左边$\neq$右边,故点$(2,-5)$不在此函数的图象上.

考查角度2:利用图象上两个点的坐标求一次函数的表达式

例2 如图4.4-1,直线l是一次函数$y=kx+b(k\neq0)$的图象.

求:(1)直线l对应的函数表达式;(2)当$y=2$时,x的值.

导引:(1)根据一次函数图象上两点的坐标,可列出方程组,解出k,b的值即可.(2)把$y=2$代入所求出的函数表达式即可得到x的值.

▶解:(1)由图4.4-1可知,直线l经过点$(-2,0)$和点$(0,3)$,将其坐标代入函数表达式$y=kx+b$,得到$\begin{cases}-2k+b=0,\\b=3,\end{cases}$

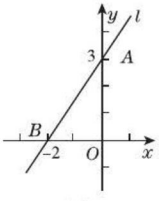


图4.4-1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得$\begin{cases}k=\frac{3}{2},\\ b=3,\end{cases}$则直线 l 对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x+3$.

(2)当 $y=2$ 时,有 $2=\frac{3}{2}x+3$,解得 $x=-\frac{2}{3}$.

点方法

求一次函数的表达式都要经过设、列、解、还原四步,设都相同,就是设出一次函数的表达式;列就是把已知两点的坐标代入所设表达式,列出一个二元一次方程组;解这个方程组,回代所设表达式即得表达式.

考查角度3:已知一次函数图象过一点及相关条件求一次函数表达式

例3 根据下列条件,求一次函数的表达式.

(1)一次函数的图象与直线 $y=2x-5$ 平行且与 x 轴交于点 $(-2,0)$;

(2)一次函数的图象经过 A,B 两点,且点 A 与点 $C(3,-1)$ 关于 x 轴轴反射,点 B 与点 $D(4,-3)$ 关于 y 轴轴反射.

导引:(1)由题意知 k 的值为2,把点 $(-2,0)$ 的坐标代入 $y=2x+b$ 中求出 b 的值.

(2)先求出点 A,B 的坐标,然后用待定系数法求函数表达式.

▶解:设一次函数的表达式为 $y=kx+b$.

(1)因为一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-5$ 平行,所以 $k=2$.

又因为直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于点 $(-2,0)$,

所以 $-2\times2+b=0$,所以 $b=4$. 所以一次函数的表达式为 $y=2x+4$.

(2)因为点 A 与点 $C(3,-1)$ 关于 x 轴轴反射,所以点 A 的坐标是 $(3,1)$.

因为点 B 与点 $D(4,-3)$ 关于 y 轴轴反射,所以点 B 的坐标是 $(-4,-3)$.

根据题意,得$\begin{cases}3k+b=1,\\ -4k+b=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\frac{4}{7},\\ b=-\frac{5}{7}.\end{cases}$

所以一次函数的表达式为 $y=\frac{4}{7}x-\frac{5}{7}$.

同类变式 (答案见269页) 练一练

3. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $(-2,5)$,并且与 y 轴交于点 P. 直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 与 y 轴交于点 Q,点 Q 恰与点 P 关于 x 轴对称. 求这个一次函数的表达式.

拨技巧

利用**待定系数法**确定函数表达式时,应注意结合题目信息,根据不同情况选择相应方法:

(1)如果已知图象经过的点的坐标,那么可直接构造方程(组)求解;

(2)当直线经过的点的坐标未知时,结合题意,先确定直线经过的点的坐标,再构造方程(组)求解;

(3)若直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=mx+n$ 平行,则 $k=m,b\neq n$;

(4)关于 x 轴轴反射的点横坐标相等,纵坐标互为相反数;关于 y 轴轴反射的点纵坐标相等,横坐标互为相反数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4:已知一次函数的图象与两坐标轴围成的三角形的面积求表达式

例4 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(3,0)$,与 y 轴交于点 B,O 为坐标原点,若 $\triangle AOB$ 的面积为6,试求这个一次函数的表达式.

导引:由已知条件可先画出草图,如图4.4-2.因为 $\triangle AOB$ 的面积、点 A 已确定,所以点 B 有两种可能,由 $\triangle AOB$ 的面积求得点 B 的坐标,再用待定系数法求出一次函数的表达式.

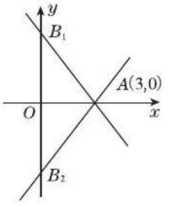


图4.4-2

▶解:由于直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(3,0)$,$B(0,b)$,

所以 $OA=3$,$OB=|b|$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times 3\cdot|b|=6$,

所以 $|b|=4$,即 $b=\pm 4$.

所以点 B 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$.

故直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$,$(0,4)$ 两点或 $(3,0)$,$(0,-4)$ 两点.

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$,$(0,4)$ 两点时,$3k+b=0$,$4=b$,解得 $k=-\frac{4}{3}$,$b=4$.

所以一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$.

当直线 $y=kx+b$ 过 $(3,0)$,$(0,-4)$ 两点时,$3k+b=0$,$-4=b$,解得 $k=\frac{4}{3}$,$b=-4$.

所以一次函数的表达式为 $y=\frac{4}{3}x-4$.

综上可知,符合条件的一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 或 $y=\frac{4}{3}x-4$.

同类变式 (答案见270页) 练一练

4. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $(3,-3)$,且与直线 $y=4x-3$ 的交点在 x 轴上.
   (1)求这个一次函数的表达式.
   (2)此函数的图象经过哪几个象限?
   (3)求此函数的图象与坐标轴所围成的直角三角形的面积.

点拨 技巧

本题未明确点 B 在 y 轴的正半轴上还是负半轴上,因此需要运用**分类讨论思想**加以讨论.

已知直线与两坐标轴所围成的三角形的面积,求直线所对应的函数表达式时,先设出直线所对应的函数表达式,再用待定字母表示出直线与两坐标轴的交点的坐标(注:这步中要考虑直线与 x 轴、y 轴相交的位置的不同情况),然后利用已知的三角形的面积求出待定字母的值,最后代回所设函数表达式即可.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度5：根据实际问题求一次函数的表达式

例5 ［中考·湘潭］莲城超市以10元/件的价格调进一批商品. 根据前期销售情况，每天销售量y(件)与该商品定价x(元/件)是一次函数关系，如图4.4-3所示.

(1)求每天的销售量y与定价x之间的函数表达式；

(2)如果超市将该商品的销售价定为13元/件，不考虑其他因素，求超市每天销售这种商品所能获得的利润.

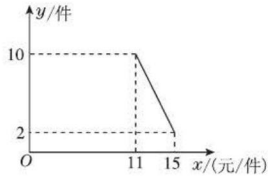


图4.4-3

导引：(1)由待定系数法可求一次函数的表达式；(2)将$x=13$代入(1)中的函数表达式，求出每天的销售量y，再求出利润即可.

▶解：(1)设y与x之间的函数表达式为$y=kx+b$，

则$\begin{cases}11k+b=10,\\15k+b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=32,\end{cases}$

∴每天的销售量y与定价x之间的函数表达式为$y=-2x+32$.

(2)当$x=13$时，$(13-10)y=(13-10)\times(-2\times13+32)=18$(元).

∴超市每天销售这种商品所能获得的利润为18元.

数学素养提升

"待定系数法"的解读与延伸

我们在求一次函数的表达式时，第一次接触待定系数法，此后在学习二次函数时，更经常地应用这个数学方法. 但是，待定系数法的应用不仅仅局限于求函数的表达式.

如果一个多项式的系数和常数项不全已知，但这个多项式满足若干条件，那么我们便用字母表示这些未知的数，根据这个多项式所满足的条件，把问题化归为解方程或方程组，方程中的未知数就是待定系数. 因此，独立的条件的个数应与待定系数的个数相同. 应用待定系数法构建已知与未知的关系，可用于解决许多其他问题.

(1)多项式恒等的条件：两个一元多项式，当且仅当同次项的系数对应相等时恒等. 恒等就是多项式中字母取任何实数时，它们的值都相等.

例如：若代数式$(2x^2+ax-y+b)-(2bx^2+3x+5y+1)$的值与字母$x$的取值无关，求字母$a,b$的值.

整式的运算，因式分解，分式的运算，方程的解等知识都涉及恒等式.

(2)若p是有理数，a是无理数，则$p+a$是无理数.

这也容易证明：若$p+a$是有理数，记作q，则$p+a=q$，$a=q-p$，这个等式右边是有理数，不可能与无理数相等.

由此可知，当$\sqrt{a}$是无理数时，若有理数p,q,m,n能使$p+q\sqrt{a}=m+n\sqrt{a}$成立，那么$p=m$，$q=n$.

例如：已知m,n是有理数，且$(\sqrt{5}+2)m+(3-2\sqrt{5})n+7=0$，求$m,n$的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

拨尖角度1 利用一次函数的性质求一次函数的表达式

例6 [中考 · 自贡]一次函数 $y=kx+b$，当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，则 $\frac{b}{k}$ 的值是_____.

导引：由于 k 的符号不能确定，故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行解答.

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵ 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，

∴ 当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=4$ 时，$y=6$.

$$\therefore \begin{cases} k+b=3, \\ 4k+b=6, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=1, \\ b=2. \end{cases} \therefore \frac{b}{k}=2.$$

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

∵ 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，

∴ 当 $x=1$ 时，$y=6$；当 $x=4$ 时，$y=3$.

$$\therefore \begin{cases} k+b=6, \\ 4k+b=3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-1, \\ b=7. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{b}{k}=-7.$$

▶答案：2 或 −7

误区

一次函数的增减性与 k 的正负性有关，若 k 的正负性无法确定，则必须分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况讨论.

拨尖角度2 通过求函数表达式解决分段函数问题

例7 [中考 · 日照]如图 4.4-4①所示，某乘客乘高速列车从甲地经过乙地到丙地，列车匀速行驶，图②为列车离乙地路程 y（千米）与行驶时间 x（小时）之间的函数关系图象.

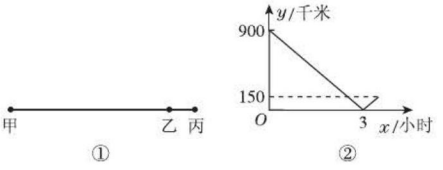


图 4.4-4

(1)填空：甲、丙两地相距_____千米；

(2)求高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数表达式，并写出 x 的取值范围.

导引：(1)根据函数图象可得，甲、丙两地距离为 $900+150=1\,050$（千米）；

(2)分两种情况：当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$，把 $(0,900)$，$(3,0)$ 代入得到方程组，即可解答；根据题意确定高速列车的速度为 300 千米/时，从而确定点 A 的坐标为 $(3.5,150)$（如图 4.4-5），当 $3<x\leqslant 3.5$ 时，设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数表达式为 $y=k_1x+b_1$，把 $(3,0)$，$(3.5,150)$ 代入得到方程组，即可解答.

▶解：(1)1 050

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$，

把 $(0,900)$，$(3,0)$ 代入得 $\begin{cases} b=900, \\ 3k+b=0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-300, \\ b=900. \end{cases} \therefore y=-300x+900.$

高速列车的速度为 $900\div 3=300$（千米/时），

$150\div 300=0.5$（小时），

$3+0.5=3.5$（小时）.

如图 4.4-5，点 A 的坐标为 $(3.5,150)$.

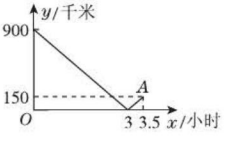


图 4.4-5

当 $3<x\leqslant 3.5$ 时，设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数表达式为 $y=k_1x+b_1$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

把（3，0），（3.5，150）代入得

$$\begin{cases}3k_1+b_1=0,\\3.5k_1+b_1=150,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k_1=300,\\b_1=-900.\end{cases}$

$\therefore y=300x-900.$

$$\therefore y=\begin{cases}-300x+900(0\leqslant x\leqslant 3),\\300x-900(3<x\leqslant 3.5).\end{cases}$$

点方法

在解决问题时，有时需要按照一定的标准，把研究对象分为几个不同的类别，逐一加以研究，分别得到各种情况下的结论，最后加以综合. 在讨论时，要注意做到不重不漏. 要特别注意自变量取值范围的划分，既要科学合理，又要符合实际.

拔尖角度3 利用几何图形的性质求一次函数表达式（拓展点）

例8 已知直线 $y=-x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A 和点 B，另一直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 经过点 $C(1,0)$，且把 $\triangle AOB$ 分成两部分.

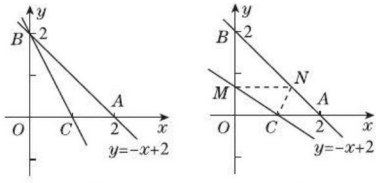
(1)若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等，求 k 和 b 的值；

(2)若 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积之比为1:5，求 k 和 b 的值.

导引：要求 k,b 的值，已知点 $C(1,0)$，关键是再求一个符合条件的点的坐标.

▶解：(1)如图 4.4-6①所示，依题意，得 $A(2,0)$，$B(0,2)$.

因为 $\triangle AOB$ 被分成的两部分面积相等，且 C 为 OA 的中点，



① ②

图 4.4-6

所以直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 过点 B.

由直线 $y=kx+b$ 过点 $C(1,0)$ 和点 $B(0,2)$，易得 $k=-2,b=2$.

(2)设直线 $y=kx+b$ 与 OB 交于点 $M(0,h)$，此时分 $\triangle AOB$ 的面积之比为 1:5，如图 4.4-6②所示.

因为 $S_{\triangle OMC}=\frac{1}{6}S_{\triangle AOB}$，即 $\frac{1}{2}\times 1\times h=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2$，所以 $h=\frac{2}{3}$. $\therefore M\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

过点 M 作直线 $MN\parallel OA$，交 AB 于点 $N\left(a,\frac{2}{3}\right)$，连接 CN，则 $S_{\triangle OMC}=S_{\triangle CAN}$.

因为点 $N\left(a,\frac{2}{3}\right)$ 在直线 $y=-x+2$ 上，

所以 $a=\frac{4}{3}$.

所以点 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

所以直线 $y=kx+b$ 经过 $M\left(0,\frac{2}{3}\right)$，$C(1,0)$ 或 $N\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，$C(1,0)$.

$$\text{所以}\begin{cases}b=\frac{2}{3},\\k+b=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{4}{3}k+b=\frac{2}{3},\\k+b=0.\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}k=-\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3}\end{cases}\text{或}\begin{cases}k=2,\\b=-2.\end{cases}$$

点方法

用**待定系数法**求直线 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的表达式时常用到直线上两点的坐标. 线段长度是联系坐标和面积的桥梁，要结合条件利用**分类讨论思想**进行讨论，验证取舍.

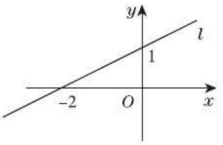
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见270页)

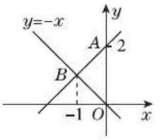
基础巩固练

1. [中考 · 枣庄] 如图,直线 l 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象,若点 $A(3,m)$ 在直线 l 上,则 m 的值是(　　)

A. -5　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 7



(第1题图)



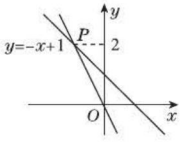
(第2题图)

2. 如图,一次函数图象经过点 A,且与正比例函数 $y=-x$ 的图象交于点 B,则该一次函数的表达式为(　　)

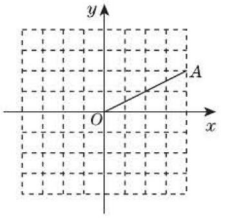
A. $y=-x+2$　　B. $y=x+2$

C. $y=x-2$　　D. $y=-x-2$

3. [中考 · 青岛] 如图,一个正比例函数的图象与一次函数 $y=-x+1$ 的图象相交于点 P,则这个正比例函数的表达式是_____.



(第3题图)



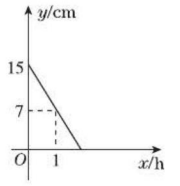
(第4题图)

4. [中考 · 昆明] 如图,点 A 的坐标为(4,2). 将点 A 绕坐标原点 O 旋转90°后,再向左平移1个单位长度得到点 A',则过点 A' 的正比例函数的表达式为_____.

5. 如图是某根蜡烛在燃烧过程中高度 y(cm)与时间 x(h)之间的函数关系的图象,由图象解答下列问题:

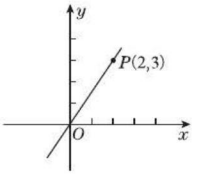
(1)此蜡烛燃烧1 h后,高度为_____cm;经过_____h燃烧完毕;

(2)求这根蜡烛在燃烧过程中高度 y(cm)与时间 x(h)之间的函数表达式.



(第5题图)

6. 如图,正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 P,将该函数的图象向上平移3个单位长度,求平移后所得图象对应的函数表达式.

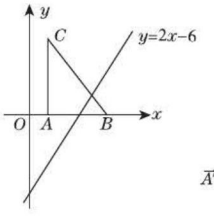


(第6题图)

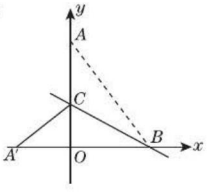
能力提升练

7. [中考 · 广元] 如图,把 Rt△ABC 放在直角坐标系内,其中 $\angle CAB=90°$,$BC=5$,点 A,B 的坐标分别为(1,0),(4,0),将△ABC 沿 x 轴向右平移,当点 C 落在直线 $y=2x-6$ 上时,线段 BC 扫过的面积为(　　)

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. $8\sqrt{2}$



(第7题图)



(第8题图)

8. 如图,在平面直角坐标系中,已知点 $A(0,4)$,$B(3,0)$,连接 AB. 将△AOB 沿过点 B 的直线折叠,使点 A 落在 x 轴上的点 A' 处,折痕所在的直线交 y 轴正半轴于点 C,则直线 BC 对应的函数表达式为_____.

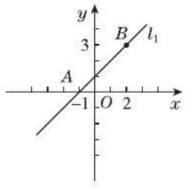
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. [中考·西宁]若点 $A(m,n)$ 在直线 $y=kx$ $(k\neq0)$ 上，当 $-1\leqslant m\leqslant1$ 时，$-1\leqslant n\leqslant1$，则这条直线对应的函数表达式为_____.

10. 如图，已知直线 l_1 经过点 $A(-1,0)$ 与点 $B(2,3)$，另一条直线 l_2 经过点 B，且与 x 轴交于点 $P(m,0)$.

(1)求直线 l_1 对应的函数表达式；

(2)若 $\triangle APB$ 的面积为3，求 m 的值.

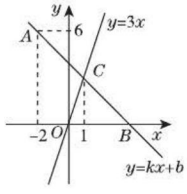


(第10题图)

11. [中考·淮安]如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(-2,6)$，且与 x 轴相交于点 B，与正比例函数 $y=3x$ 的图象交于点 C，点 C 的横坐标为1. 【导学号:8564979】

(1)求 k,b 的值；

(2)若点 D 在 y 轴负半轴上，且满足 $S_{\triangle COD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BOC}$，求点 D 的坐标.



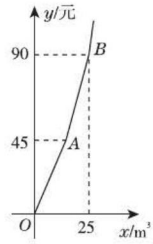
(第11题图)

12. [中考·徐州]为加强公民的节水意识，合理利用水资源，某市对居民用水实行阶梯水价. 居民家庭每月用水量划分为三个阶梯，一、二、三级阶梯用水的单价之比等于1∶1.5∶2. 如图中折线表示实行阶梯水价后每月水费 y(元)与用水量 $x(m^3)$ 之间的函数关系. 其中线段 AB 表示第二级阶梯时 y 与 x 之间的函数关系.

(1)写出点 B 的实际意义.

(2)求线段 AB 所在直线的表达式.

(3)某户5月份按照阶梯水价应缴水费102元，其相应用水量为多少立方米？



(第12题图)

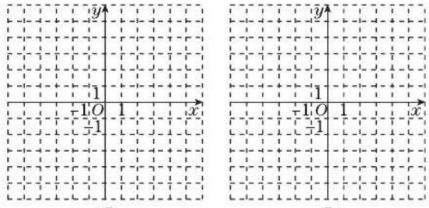
思维拓展练

13. (1)在如图①所示的平面直角坐标系中画出点 $A(2,3)$，再画出点 A 关于 y 轴的对称点 A'，则点 A' 的坐标为_____；

(2)在图①中画出过点 A 和原点 O 的直线 l，则直线 l 对应的函数表达式为_____；再画出直线 l 关于 y 轴对称的直线 l'，则直线 l' 对应的函数表达式为_____；

(3)在图②中画出直线 $y=2x+4$(即直线 m)，再画出直线 m 关于 y 轴对称的直线 m'，则直线 m' 对应的函数表达式为_____；

(4)请你根据自己在解决以上问题的过程中所获得的经验回答：直线 $y=kx+b$ $(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 关于 y 轴对称的直线对应的函数表达式为_____.



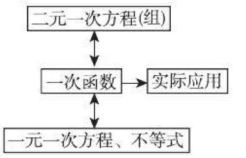
(第13题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.5 一次函数的应用

热门话题
- 一次函数的实际应用
- 一次函数与一元一次方程的关系
- 一次函数与二元一次方程(组)的关系
- 一次函数与一元一次不等式的关系

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 利用一次函数解决实际问题(重点)

点知识

1. 利用一次函数解决实际问题,关键是分析题中的数量关系,联系实际生活及以前学过的内容,将实际问题抽象、升华为一次函数模型,即建模,再利用一次函数的性质解决问题. 一次函数的应用主要有两种类型:
   (1)给出了一次函数表达式,直接应用一次函数的性质解决问题;
   (2)只用语言叙述或用表格、图象提供一次函数的情境时,先求出表达式,进而利用一次函数的性质解决问题.

要点精析

"建模"可以把实际问题转化为关于一次函数的数学问题,它的关键是确定一次函数表达式,并确定实际问题中自变量的取值范围.

2. 给定部分因变量随自变量均匀变化的数据信息,可以建立一次函数模型,利用求得的函数表达式,可以对数据的邻近区域进行预测. 但是预测只能在邻近数据区域,远离已知数据作预测是不可靠的.

拨考向

考查角度 1:利用表格或图象获取信息解决实际问题

例 1 已知某山区的平均气温与该山区的海拔关系如下表:

海拔/米	0	100	200	300	400	…
平均气温/℃	22	21.5	21	20.5	20	…

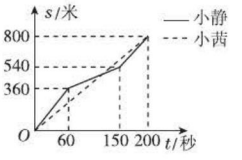
(1)若海拔用 x(米)表示,平均气温用 y(℃)表示,试写出 y 与 x 之间的函数表达式;

(2)若某种植物适宜生长在 18 ℃ ~ 20 ℃(含 18 ℃和 20 ℃)的山区,请问该植物适宜种植在海拔为多少米的山区?

导引:观察、分析表中数据可知,海拔每增加 100 米,平均气温就要下降 0.5 ℃. 这符合一次函数的特征,因此可以建立一次函数的模型解题. (1)从表格中获取两对 x, y 的对应值(便于计算),利用待定系数法求一次函数表达式;(2)将问题转化为一次函数问题,即求已知函数值所

同类变式 (答案见 271 页) 练一练

1. [中考 · 重庆]为增强学生体质,某中学在体育课中加强了学生的长跑训练,在一次女子 800 米耐力测试中,小静和小茜在校园内 200 米的环形跑道上同时起跑,同时到达终点,所跑的路程 s(米)与所用时间 t(秒)之间的函数图象如图所示,则她们第一次相遇的时间是起跑后的第_____秒.



(第 1 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

对应的自变量 x 的值.

▶解:(1)观察表格可知某山区的平均气温与该山区的海拔是一次函数关系,

∴设所求函数表达式为 $y=kx+b(x\geqslant 0)$.

∵当 $x=0$ 时,$y=22$;当 $x=200$ 时,$y=21$,

∴$\begin{cases}21=200k+b,\\22=b,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}k=-\dfrac{1}{200},\\b=22.\end{cases}$ ∴所求函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{200}x+22(x\geqslant 0)$.

(2)由(1)知 $y=-\dfrac{1}{200}x+22(x\geqslant 0)$,令 $y=18$,得 $x=800$. 令 $y=20$,得 $x=400$.

∴当 $18\leqslant y\leqslant 20$ 时,$400\leqslant x\leqslant 800$. ∴该植物适宜种植在海拔为 400 米~800 米的山区.

考查角度2:利用分段函数的表达式解决实际问题

例2 某市移动电话采用分段计费的方法来计算话费,月通话时间 x(min)与相应话费 y(元)之间的函数图象如图 4.5-1.

(1)分别求出当 $0\leqslant x<100$ 和 $x\geqslant 100$ 时,y 与 x 之间的函数表达式.

(2)月通话时间为 280 min 时,应交话费多少元?

导引:本题是一道和话费有关的分段函数问题,观察图象可知,当 $0\leqslant x<100$ 时,y 与 x 之间是正比例函数关系;当 $x\geqslant 100$ 时,y 与 x 之间是一次函数关系,分别用待定系数法可求得它们的表达式.

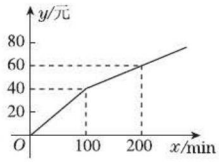


图 4.5-1

▶解:(1)当 $0\leqslant x<100$ 时,设 $y=k_1x$,

将(100,40)代入,得 $100k_1=40$,解得 $k_1=\dfrac{2}{5}$,

所以 $y=\dfrac{2}{5}x(0\leqslant x<100)$;

当 $x\geqslant 100$ 时,设 $y=k_2x+b$,

将(100,40)及(200,60)分别代入,得$\begin{cases}100k_2+b=40,\\200k_2+b=60.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=\dfrac{1}{5},\\b=20.\end{cases}$

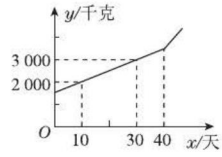
所以 $y=\dfrac{1}{5}x+20(x\geqslant 100)$. 所以 $y=\begin{cases}\dfrac{2}{5}x(0\leqslant x<100),\\\dfrac{1}{5}x+20(x\geqslant 100).\end{cases}$

(2)因为 $280>100$,所以将 $x=280$ 代入 $y=\dfrac{1}{5}x+20$ 中,得 $y=\dfrac{1}{5}\times 280+20=76$.

即月通话时间为 280 min 时,应交话费 76 元.

同类变式 (答案见271页) 练一练

2. 某块试验田里的农作物每天的需水量 y(千克)与生长时间 x(天)之间的关系如图所示. 这些农作物在第 10 天、第 30 天的需水量分别为 2 000 千克、3 000 千克,在第 40 天后每天的需水量比前一天增加 100 千克.



(第2题图)

(1)分别求出 $0\leqslant x\leqslant 40$ 和 $x>40$ 时,y 与 x 之间的函数表达式;

(2)如果这些农作物每天的需水量大于或等于4 000千克时需要进行人工灌溉,那么应从第几天开始进行人工灌溉?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨 技巧

分段函数中，自变量在不同的取值范围内的表达式不同，在解决问题时，要特别注意自变量的取值范围的变化. 分段函数在水费、电费、商品促销等领域都有广泛应用. 本题考查一次函数及识图能力，体现了**数形结合思想**. 解决问题的关键是由图象挖掘出有用的信息，利用**待定系数法**先求出函数表达式，再解决问题.

考查角度 3：利用一次函数作决策

例 3 [中考 · 山西]某校实行学案式教学，需印制若干份数学学案. 印刷厂有甲、乙两种收费方式，除按印刷份数收取印刷费外，甲种方式还需收取制版费而乙种不需要. 两种印刷方式的费用 y(元)与印刷份数 x(份)之间的函数关系如图 4. 5-2 所示：

(1)填空：甲种收费方式的函数表达式是_____；乙种收费方式的函数表达式是_____.

(2)该校某年级每次需印制 100～450(含 100 和 450)份学案，选择哪种收费方式较合算？

导引：从图象中确定两点的坐标进而确定一次函数的表达式，再根据两函数表达式建立不等式，通过解不等式求得最佳印刷方式.

▶解：(1)$y=0.1x+6$；$y=0.12x$

(2)由 $0.1x+6>0.12x$，得 $x<300$，由 $0.1x+6=0.12x$，得 $x=300$，由 $0.1x+6<0.12x$，得 $x>300$，

由此可知：当 $100\leqslant x<300$ 时，选择乙种收费方式较合算；

当 $x=300$ 时，选择甲乙两种收费方式都可以；当 $300<x\leqslant 450$ 时，选择甲种收费方式较合算.

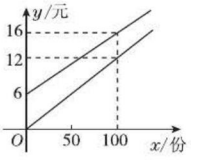


图 4. 5-2

点拨 方法

本题应用**待定系数法**求一次函数的表达式，比较两种收费方式的优劣需要借助不等式.

考查角度 4：利用一次函数对邻近数据作预测

例 4 随着人们对优生优育思想认识的进一步提高，我国人口增长呈减慢趋势，其中表现在小学入学儿童数量有所减少，下表中的数据近似地呈现了某地入学儿童人数的变化趋势：

年份	2016	2017	2018
入学儿童人数 y/人	2 520	2 330	2 140

(1)求入学儿童人数 y(人)与从 2016 年起增加的年份 x(年)之间的函数表达式.

(2)能用求出的表达式预测 2050 年该地区入学儿童人数的变化趋势吗？

导引：(1)由表中数据可知，y 是随 x 均匀变化的，所以设 $y=kx+b$，利用表中数据即可列方程组，从而可求函数表达式. (2)由 2016 年到 2050 年，增加了 34 年，远离了已知数据，因此不能作出有效的预测.

▶解：(1)从表中数据可知，y 随 x 均匀变化，所以设 $y=kx+b$. 任取表中两对值代入，得 $\begin{cases}2\,520=k\times 0+b,\\2\,330=k\times 1+b,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}k=-190,\\b=2\,520,\end{cases}$ 故 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-190x+2\,520$.

(2)不能用求出的表达式预测 2050 年该地区入学儿童人数的变化趋势.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 一次函数与一元一次方程的关系

点知识

1. **一次函数与一元一次方程的关系：**

一般地，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标是一元一次方程 $kx+b=0$ 的解. 任何一个一元一次方程 $kx+b=0$ 的解，就是一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标.

要点精析 ///

(1) 可利用一次函数的图象求解一元一次方程. 求一次函数图象与 x 轴交点的横坐标的实质就是解一元一次方程，也就是说，“数”题可用“形”解，“形”题也可用“数”解.

①关于 x 的方程 $ax+b=0(a\neq0)$ 的解⇔直线 $y=ax+b(a\neq0,a,b$ 为常数$)$ 与 x 轴的交点的横坐标；

②关于 x 的方程 $ax+b=n(a\neq0)$ 的解⇔直线 $y=ax+b(a\neq0,a,b$ 为常数$)$ 与直线 $y=n(n$ 为常数$)$ 的交点的横坐标；

③关于 x 的方程 $ax+b=cx+d(a\neq0,c\neq0)$ 的解⇔直线 $y=ax+b(a\neq0,a,b$ 为常数$)$ 与直线 $y=cx+d(c\neq0,c,d$ 为常数$)$ 的交点的横坐标.

(2) 对于一次函数 $y=ax+b(a\neq0,a,b$ 为常数$)$，已知 x 的值求 y 的值，或已知 y 的值求 x 的值时，就是把问题转化为关于 y 或 x 的一元一次方程来求解.

2. **利用一次函数图象解一元一次方程的步骤：**

(1) **转化**：将一元一次方程转化为一次函数；

(2) **画图象**：画出一次函数的图象；

(3) **找交点**：找出一次函数图象与 x 轴的交点，交点的横坐标即为一元一次方程的解.

拨考向

考查角度1：利用一次函数图象解一元一次方程

例5 利用函数图象，解方程 $3x-2=x+4$.

导引：先将方程化为 $ax+b=0$ 的形式，再在坐标系中画出函数 $y=ax+b$ 的图象，然后观察出直线 $y=ax+b$ 与 x 轴的交点坐标，从而确定所求 x 的值.

▶解：由 $3x-2=x+4$ 得 $2x-6=0$，画函数 $y=2x-6$ 的图象，如图4.5-3所示，

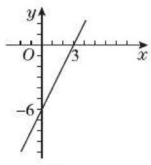


图4.5-3

由图可知，直线 $y=2x-6$ 与 x 轴的交点坐标为$(3,0)$，所以 $x=3$.

同类变式 (答案见272页) 练一练

5. 已知一次函数 $y=ax+b(a,b$ 是常数，且$a\neq0)$，x 与 y 的部分对应值如下表：

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	-2	-4

求关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解.

小明先用待定系数法求出函数 $y=ax+b$ 的表达式是_____，再画函数_____的图象，该图象与 x 轴交于点_____，所以方程 $ax+b=0$ 的解是_____.

点方法

利用函数图象解一元一次方程时，一般需将方程变形为 $ax+b=0(a\neq0,a,b$ 为常数$)$ 的形式，然后通过观察直线 $y=ax+b$ 与 x 轴的交点坐标确定方程的解，此求解方法对作图的准确性要求较高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用解一元一次方程确定一次函数图象与坐标轴的交点坐标

例6 如图4.5-4，一次函数 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$ 的图象过直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A，试确定 b 的值，并计算两条直线与 y 轴的交点 B，C 和点 A 构成的三角形的面积.

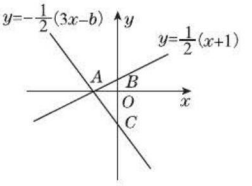


图4.5-4

导引：根据题意，先求出直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A 的坐标，代入函数表达式 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$，确定 b 的值，从而可求出两条直线与 y 轴交点的纵坐标，则 BC 的长度可求，再根据三角形的面积的计算方法求三角形的面积.

▶解：对于直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$，设 $y=0$，则 $\frac{1}{2}(x+1)=0$，

解得 $x=-1$.

因此直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 x 轴的交点 A 的坐标是 $(-1,0)$.

把 $(-1,0)$ 代入函数表达式 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)$，

得 $-\frac{1}{2}\times[3\times(-1)-b]=0$. 解得 $b=-3$.

所以 $y=-\frac{1}{2}(3x-b)=-\frac{1}{2}(3x+3)$.

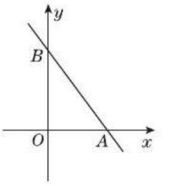
直线 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ 与 y 轴的交点 B 的坐标是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，直线 $y=-\frac{1}{2}(3x+3)$ 与 y 轴的交点 C 的坐标是 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，

因此 BC 的长度是 $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$.

又 $OA=1$，所以 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

同类变式 (答案见272页) 练一练

6. 在平面直角坐标系中，一次函数的图象与坐标轴围成的三角形叫作此一次函数的坐标三角形. 例如，图中的一次函数的图象与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，则 $\triangle OAB$ 为此函数的坐标三角形.



(第6题图)

(1) 求函数 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 的图象与坐标轴围成的三角形的面积；

(2) 若函数 $y=-\frac{3}{4}x+b$（b 为常数）的坐标三角形的两直角边的和为14，求此三角形的面积.

点方法

(1) **一次函数的图象与坐标轴交点的坐标求法：** 令 $y=0$，解方程即得与 x 轴的交点的横坐标；令 $x=0$，即得与 y 轴的交点的纵坐标.

(2) 同一坐标轴上两点的距离即是横坐标或者是纵坐标差的绝对值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 一次函数与二元一次方程(组)

点知识

1. **一次函数与二元一次方程:**

由于任意一个二元一次方程都可以转化为 $y=kx+b(k,b$ 是常数,$k\neq0)$ 的形式,因此有:

(1)二元一次方程 $\overset{对应}{\Leftrightarrow}$ 一次函数 $\overset{对应}{\Leftrightarrow}$ 一条直线;

(2)二元一次方程的解 $\overset{即为}{\Leftrightarrow}$ 一次函数两变量的值 $\overset{即为}{\Leftrightarrow}$ 直线上的点的坐标.

2. **一次函数与二元一次方程组:**

(1)**二元一次方程组与一次函数的对应关系:**

二元一次方程组 $\overset{对应}{\Leftrightarrow}$ 两个一次函数 $\overset{对应}{\Leftrightarrow}$ 两条直线;

二元一次方程组的解 $\overset{即为}{\Leftrightarrow}$ 两个一次函数值相等时的自变量值及函数值 $\overset{即为}{\Leftrightarrow}$ 两条直线的交点坐标.

(2)**两直线交点个数与二元一次方程组解的个数的关系:**

两条直线有交点(相交)$\Leftrightarrow$ 方程组只有一组解;

两条直线无交点(平行)$\Leftrightarrow$ 方程组无解;

两条直线是同一直线(重合)$\Leftrightarrow$ 方程组有无数组解.

(3)**用一次函数图象解二元一次方程组的步骤:**

①将方程组中每个方程分别转化成一次函数表达式;

②在同一坐标系中分别画出转化后的两个一次函数的图象;

③根据两个函数图象的交点坐标写出方程组的解.

3. **易错警示:**对两直线交点与二元一次方程组的解的关系理解不透彻而出错.

拨考向

考查角度1:利用一次函数图象与二元一次方程之间的关系确定方程的解

例7 [中考·呼和浩特]如图4.5-5所示的四条直线,其中直线上每个点的坐标都是二元一次方程 $x-2y=2$ 的解的是(　　)

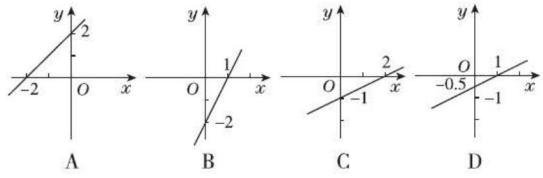


图4.5-5

同类变式 (答案见272页) 练一练

7. 一次函数 $y=3x+7$ 的图象与 y 轴的交点坐标是二元一次方程 $-2x+by=18$ 的一个解,则 $b=$ _____.

导引:对于二元一次方程 $x-2y=2$,当 $x=0$ 时,$y=-1$;当 $y=0$ 时,$x=2$,故直线 $x-2y=2$ 与两坐标轴的交点是 $(0,-1)$,$(2,0)$,对照四个选项中的直线,可知选C. ▶答案:C

点方法

直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点的横坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中,当 $y=0$ 时 x 的值;直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点的纵坐标即是二元一次方程 $y=kx+b$ 中,当 $x=0$ 时 y 的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2:利用图象法解二元一次方程组

例8 利用图象法解二元一次方程组:$\begin{cases}3x-y=2,\\x+y=2.\end{cases}$

▶解:原方程组可转化为$\begin{cases}y=3x-2,\\y=2-x.\end{cases}$列表:

x	0	1
$y=3x-2$	-2	1
$y=2-x$	2	1

过点(0,−2)和(1,1)画出直线l_1,再过点(0,2)和(1,1)画出直线l_2,如图4.5-6,

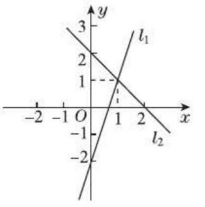


图4.5-6

由图象知,两条直线交点的坐标为(1,1),

∴方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

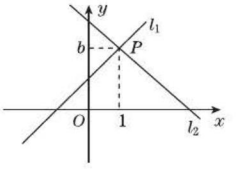
同类变式 (答案见272页) 练一练

8. 如图,直线$l_1:y=x+1$与直线$l_2:y=mx+n$相交于点$P(1,b)$.

(1)求b的值;

(2)不解关于x,y的方程组$\begin{cases}y=x+1,\\y=mx+n,\end{cases}$请你直接写出它的解;

(3)直线$l_3:y=nx+m$是否也经过点P?请说明理由.



(第8题图)

技巧

用图象法解二元一次方程组的基本方法:(1)将方程组中的两个方程转化成一次函数$y=kx+b$的形式;(2)在同一直角坐标系中画出两函数的图象;(3)利用图象的直观性确定交点坐标.

考查角度3:利用交点坐标的意义求函数表达式

例9 已知一次函数$y=ax+2$与$y=kx+b$的图象如图4.5-7,且方程组$\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$点$B$的坐标为(0,−1),请你确定这两个一次函数的表达式.

导引:要确定这两个一次函数的表达式,需确定交点A的坐标,而交点A的坐标即为方程组的解.因此用待定系数法可求得k,b,a的值,进而确定两个一次函数的表达式.

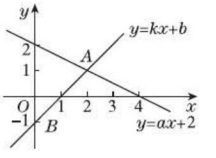


图4.5-7

▶解:因为方程组$\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

所以交点A的坐标为(2,1),所以$2a+2=1$,解得$a=-\frac{1}{2}$.

又因为函数$y=kx+b$的图象过交点$A(2,1)$和点$B(0,-1)$,

所以$\begin{cases}2k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$所以这两个一次函数的表达式分别为$y=-\frac{1}{2}x+2$,$y=x-1$.

方法

此类问题的解题关键是明确方程组的解就是两条相应直线的交点坐标,再利用**待定系数法**求解.本题中确定这两个函数的表达式的关键是确定a,k,b的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4:利用函数图象交点的意义解决实际问题

例10 如图4.5-8,l_1,l_2 分别表示一种白炽灯和一种节能灯的费用 y(费用=灯的售价+电费,单位:元)与照明时间 x(h)的函数关系.假设两种灯的使用寿命都是2 000 h,照明效果一样.

(1)根据图象分别求出直线 l_1,l_2 对应的函数表达式.

(2)当照明时间为多少时,两种灯的费用相等?

(3)小亮的房间计划照明2 500 h,他买了一只白炽灯和一只节能灯,请你帮他设计最省钱的用灯方案.(直接给出方案,不必写出解答过程)

导引:(1)用待定系数法求直线 l_1,l_2 对应的函数表达式;

(2)所求的照明时间就是直线 l_1,l_2 交点的横坐标;

(3)因为2 500 h大于两种灯的使用寿命,所以前2 000 h的照明选择节能灯,后500 h选择白炽灯所需费用最低.

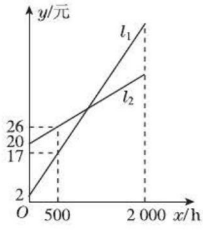


图4.5-8

▶解:(1)设 l_1 对应的函数表达式为 $y=k_1x+2$,

l_2 对应的函数表达式为 $y=k_2x+20$.

因为直线 l_1 过点(500,17),l_2 过点(500,26),

所以 $17=500k_1+2$,$26=500k_2+20$.

解得 $k_1=0.03$,$k_2=0.012$.

所以 l_1 对应的函数表达式为 $y=0.03x+2(0\leqslant x\leqslant 2\,000)$,

l_2 对应的函数表达式为 $y=0.012x+20(0\leqslant x\leqslant 2\,000)$.

(2)令 $0.03x+2=0.012x+20$.

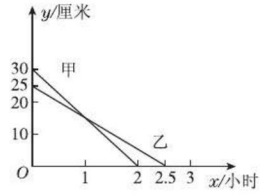
解得 $x=1\,000$.

故当照明时间为1 000 h时,两种灯的费用相等.

(3)先使用2 000 h节能灯,再使用500 h白炽灯.

同类变式 (答案见272页) 练一练

10. 在一次蜡烛燃烧试验中,甲、乙两根蜡烛燃烧时剩余部分的高度 y(厘米)与燃烧时间 x(小时)之间的关系如图所示,请根据图象所提供的信息解答下列问题:



(第10题图)

(1)甲、乙两根蜡烛燃烧前的高度分别是_____,从点燃到燃尽所用的时间分别是_____;

(2)当燃烧多少小时时,甲、乙两根蜡烛的高度相等,是多少厘米?

拨技巧

解一次函数与方程(组)综合应用题的一般步骤:

(1)根据题意建立函数的模型;

(2)求出两个函数中函数值相同时自变量的值(或求两个函数表达式组成的方程组的解);

(3)利用这个数值结合图象进行比较,根据自变量的取值得出符合题意的答案.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 4 一次函数与一元一次不等式的关系(拓展点)

点知识

1. **一次函数和一元一次不等式的联系**:任何一个以 x 为未知数的一元一次不等式都可以变形为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0(a\neq0)$ 的形式,所以解一元一次不等式可以看成是求一次函数 $y=ax+b$ 的函数值大于 0 或小于 0 时,自变量 x 的取值范围;反映在图象上,就是直线 $y=ax+b$ 在 x 轴上方的部分或在 x 轴下方的部分对应的自变量 x 的取值范围.
2. 利用一次函数的图象解一元一次不等式,反过来利用一元一次不等式确定相应的函数值对应的自变量的取值范围,其实质是"数"题"形"解,"形"题"数"解. 其具体对应关系如下:

①关于 x 的不等式 $kx+b>0(k\neq0)$ 的解集⇔直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 在 x 轴上方的部分所对应的 x 的所有值;

②关于 x 的不等式 $kx+b<0(k\neq0)$ 的解集⇔直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 在 x 轴下方的部分所对应的 x 的所有值;

③关于 x 的不等式 $kx+b>a(k\neq0)$ 的解集⇔直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 在直线 $y=a$ 上方的部分所对应的 x 的所有值;

④关于 x 的不等式 $kx+b<a(k\neq0)$ 的解集⇔直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 在直线 $y=a$ 下方的部分所对应的 x 的所有值;

⑤关于 x 的不等式 $k_1x+b_1>k_2x+b_2(k_1k_2\neq0)$ 的解集⇔直线 $y_1=k_1x+b_1(k_1\neq0)$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2(k_2\neq0)$ 上方的部分所对应的 x 的所有值;

⑥关于 x 的不等式 $k_1x+b_1<k_2x+b_2(k_1k_2\neq0)$ 的解集⇔直线 $y_1=k_1x+b_1(k_1\neq0)$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2(k_2\neq0)$ 下方的部分所对应的 x 的所有值.

拓考向

考查角度 1:利用一次函数图象解一元一次不等式

例 11 已知一次函数 $y_1=2x-5$,$y_2=3-2x$,求当 x 取何值时,(1)$y_1>y_2$;(2)$y_1=y_2$;(3)$y_1<y_2$.

导引:解这类题目的关键,是要将比较函数值的大小的问题转化成解不等式的问题.

▶解:方法一:代数法.

(1)$y_1>y_2$,即 $2x-5>3-2x$,解得 $x>2$;

(2)$y_1=y_2$,即 $2x-5=3-2x$,解得 $x=2$;

(3)$y_1<y_2$,即 $2x-5<3-2x$,解得 $x<2$.

方法二:图象法.

在同一直角坐标系内画出一次函数 $y_1=2x-5$ 和 $y_2=3-2x$ 的图象,如图 4.5-9 所示.

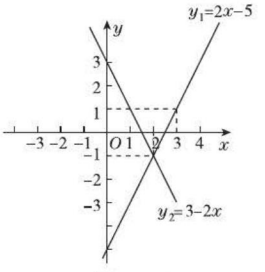


图 4.5-9

由图象知,两直线的交点坐标为(2,−1).

观察图象可知,(1)当 $x>2$ 时,$y_1>y_2$;

(2)当 $x=2$ 时,$y_1=y_2$;

(3)当 $x<2$ 时,$y_1<y_2$.

点方法

根据问题可寻找**代数法**和**图象法**两种途径,用代数法将其转化为解不等式,用图象法确定一元一次不等式的解集的方法是:先找出直线与坐标轴的交点,画出函数的图象,再观察图象,确定两条直线的交点坐标,最后观察图象交点两侧直线的位置,直接得出不等式的解集.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：利用一次函数图象交点的意义及函数的增减性确定不等式的解集

例12 如图4.5-10，直线 $y_1=x+b$ 与 $y_2=kx-1$ 相交于点 P，点 P 的横坐标为 -1，则关于 x 的不等式 $x+b>kx-1$ 的解集在数轴上表示正确的是图4.5-11中的(　　)

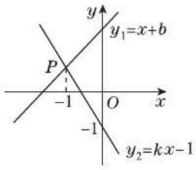


图4.5-10

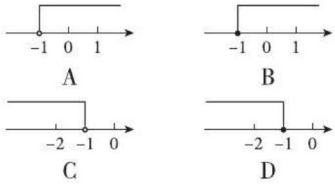


图4.5-11

点方法

若已知函数表达式，则可以用**代数法**或**图象法**，若函数表达式待定，则只能根据交点的意义及函数的增减性确定不等式的解集.

导引：观察函数图象得到当 $x>-1$ 时，函数 $y_1=x+b$ 的图象都在函数 $y_2=kx-1$ 的图象上方，所以不等式 $x+b>kx-1$ 的解集为 $x>-1$. 根据用数轴表示不等式解集的方法对各选项进行判断，可知选A. ▶答案：A

II 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 运用函数图象解方程组

例13 已知函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$.

(1)求直线 AB 对应的函数表达式；

(2)在图4.5-12给出的直角坐标系中，画出 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图象，并根据图象写出方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

导引：(1)把点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$ 的坐标代入函数表达式，即可得关于 k,b 的方程组，解方程组即可；(2)画出函数 $y=|x|$ 和 $y=kx+b$ 的图象，两函数图象的交点坐标就是方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解.

▶解：(1)∵ 函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(-1,2)$，$B(3,0)$，

$$\therefore \begin{cases}-k+b=2,\\3k+b=0,\end{cases} \text{解得} \begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=\frac{3}{2},\end{cases}$$

故直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

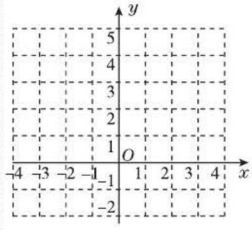


图4.5-12

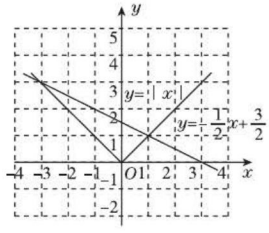


图4.5-13

(2)作 $y=|x|$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的图象，如图4.5-13所示，

根据图象可得方程组 $\begin{cases}y=|x|,\\y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$ 的解是

$$\begin{cases}x=-3,\\y=3\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$$

点方法

此题主要考查用**待定系数法**求一次函数表达式，以及方程组与函数图象的关系，解决问题的关键是掌握方程组与函数图象的关系，方程组的解就是两函数图象的交点坐标.

警示：$y=|x|$ 的图象是一条折线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2 利用一次函数求最值

例14 在某次抗震救灾中，某县粮食局为了保证库存粮食的安全，决定将甲、乙两个仓库的粮食，全部转移到具有较强抗震功能的A、B两仓库. 已知甲仓库有粮食100吨，乙仓库有粮食80吨，而A仓库的容量为70吨，B仓库的容量为110吨. 从甲、乙两仓库到A，B两仓库的路程和运费如下表.（表中“元/吨·千米”表示每吨粮食运送1千米所需钱数）

	路程/千米		运费/(元/吨·千米)	
	甲仓库	乙仓库	甲仓库	乙仓库
A仓库	20	15	12	12
B仓库	25	20	10	8

(1)若甲仓库运往A仓库x吨粮食，请写出将粮食运往A，B两仓库的总运费y(元)与x(吨)之间的函数表达式；

(2)当甲、乙两仓库各运往A，B两仓库多少吨粮食时，总运费最省？最省的总运费是多少？

导引：本题有四个未知量：“甲仓库运多少粮食去A仓库”“甲仓库运多少粮食去B仓库”“乙仓库运多少粮食去A仓库”“乙仓库运多少粮食去B仓库”，如果甲仓库运x吨粮食去A仓库，那么用含x的式子表示其他未知量如下表.

	甲仓库	乙仓库
A仓库	x吨	$(70-x)$吨
B仓库	$(100-x)$吨	$(10+x)$吨

然后写出y与x之间的函数表达式.

▶解：(1)$y=12\times20x+10\times25(100-x)+12\times15(70-x)+8\times20(10+x)=-30x+39\,200$，

因为x表示甲仓库运往A仓库粮食的吨数，所以$0\leqslant x\leqslant70$.

故所求函数表达式为$y=-30x+39\,200$ $(0\leqslant x\leqslant70)$.

(2)在$y=-30x+39\,200$中，因为$-30<0$，所以y随x的增大而减小，即当x取最大值时，y有最小值.

又因为$0\leqslant x\leqslant70$，

所以当$x=70$时，总运费最省，最省的总运费为$-30\times70+39\,200=37\,100$(元).

答：当甲仓库运往A仓库70吨粮食，运往B仓库30吨粮食，乙仓库运往B仓库80吨粮食时，总运费最省，最省的总运费是37 100元.

点方法

当解决含有多个变量的问题时，可以分析这些变量之间的关系，从中选取有代表性的变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际的函数，以此作为解决问题的数学模型.

拔尖角度3 利用一次函数进行方案优化

例15 小明购买了一部手机，到某通信公司咨询移动电话资费情况，准备办理入网手续，该通信公司工作人员向他介绍了两种不同的资费方案：

方案代号	月租费/元	免费时间/min	超过免费时间的通话费/(元/min)
一	10	0	0.20
二	30	80	0.15

(1)分别写出方案一、二中，月话费(月租费与通话费的总和)y(元)与通话时间x(min)之间的函数关系式；

(2)画出(1)中两个函数的图象；

(3)如果小明月通话时间为200 min，那么选择哪种资费方案较省钱.

导引：(1)根据题意可直接写出方案一、方案二两种入网方式的月话费(月租费与通话费的总和)y(元)与通话时间x(min)之间的函数关系式. (2)利用描点法即可画出这两个函数的图象. (3)利用(1)中的相关条件，通过代数计算求得.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)方案一:$y_1=0.2x+10(x\geqslant 0)$;

方案二:$y_2=\begin{cases}30(0\leqslant x\leqslant 80),\\0.15(x-80)+30=0.15x+18(x>80).\end{cases}$

(2)如图4.5-14所示.

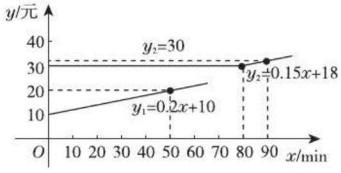


图4.5-14

(3)当 $x=200$ 时,$y_1=0.2\times 200+10=50$(元),$y_2=0.15\times 200+18=48$(元),

$\because 50>48$,

$\therefore$ 选择方案二较省钱.

点方法

本题考查了一次函数的应用,解决此类题目的关键是依据表格信息建立一次函数模型,用一次函数的知识解决.

拔尖角度4 一次函数、方程(组)与几何的综合探究

例16 如图4.5-15,直线 $y=kx-1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B,C 两点,且 $3OB-\frac{1}{2}OC=1$.

(1)求点 B 的坐标及 k 的值.

(2)若点 $A(x,y)$ 是直线 $y=kx-1$ 在第一象限内的一个动点.在点A的运动过程中,试写出 $\triangle AOB$ 的面积 S 与 x 之间的函数表达式.

(3)探索:

①当点 A 运动到什么位置时,$\triangle AOB$ 的面积是$\frac{1}{4}$?

②在①成立的情况下,在两条坐标轴上是否存在一点 P,使 $\triangle POA$ 是等腰直角三角形?若存在,请写出满足条件的所有点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

导引:(1)确定一次函数 $y=kx-1$ 的图象与 y 轴交点的坐标,根据线段 OB,OC 的长度关系,确定直线 $y=kx-1$ 与 x 轴交点的坐标,进而求出 k 的值;

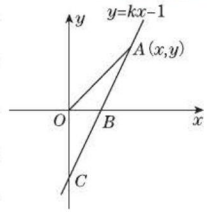


图4.5-15

(2)运用三角形面积计算方法建立函数关系;

(3)构造方程求三角形的高,确定点 A 的坐标,根据点 A 的坐标特征以及等腰直角三角形的判定,确定所有点 P 的坐标.

▶解:(1)$\because$ 直线 $y=kx-1$ 与 y 轴相交于点 C,$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0,-1)$,$\therefore OC=1$.

$\because 3OB-\frac{1}{2}OC=1$,$\therefore OB=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.把点 B 的坐标 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 代入 $y=kx-1$,得 $k=2$.

(2)$\because S=\frac{1}{2}OB\cdot y$,$y=2x-1$,

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(2x-1)$,即 $S=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

(3)①当 $S=\frac{1}{4}$ 时,$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

解得 $x=1$,$\therefore y=2x-1=2\times 1-1=1$.

$\therefore$ 当点 A 的坐标为 $(1,1)$ 时,$\triangle AOB$ 的面积为$\frac{1}{4}$.

②存在.满足条件的所有点 P 的坐标为 $(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)$.

点方法

1. 一次函数和方程(组)与几何图形的综合问题,常结合几何图形的性质,寻找图象上的已知点坐标,运用等量关系,构造方程进行有关计算,探究满足某种条件的点的坐标.

2. 如果没有点 A 在第一象限这个条件,那么(3)①中 A 点就不止一个;另外在(3)②中,要按 OA 为斜边、直角边两种情况进行**分类讨论**,并分别向两侧作图,否则易产生漏解情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见272页)

基础巩固练

1. 一次函数 $y=2x-6$ 的图象与 x 轴的交点坐标为(　　)

A. $(3,0)$　　B. $(0,3)$

C. $(-3,0)$　　D. $(0,-3)$

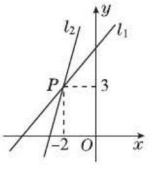
2. 两直线 $l_1:y=2x-1$ 与 $l_2:y=x+1$ 的交点坐标为(　　)

A. $(-2,3)$　　B. $(2,-3)$

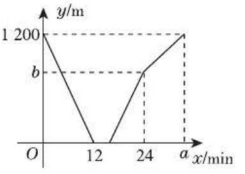
C. $(-2,-3)$　　D. $(2,3)$

3. [中考 · 贵阳] 如图,一次函数 $y=k_1x+b_1$ 的图象 l_1 与一次函数 $y=k_2x+b_2$ 的图象 l_2 相交于点 P,则方程组 $\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2\end{cases}$ 的解是(　　)

A. $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$



(第3题图)



(第4题图)

4. [中考 · 辽阳] 甲、乙两人分别从 A,B 两地同时出发,相向而行,匀速前往 B 地、A 地,两人相遇时停留了 4 min,又各自按原速前往目的地,甲、乙两人之间的距离 y(m)与甲所用时间 x(min)之间的函数关系如图所示,有下列说法:

①A、B 之间的距离为 1 200 m;

②乙行走的速度是甲的 1.5 倍;

③$b=960$;

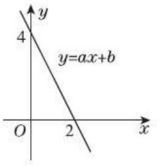
④$a=34$.

以上结论正确的有(　　)

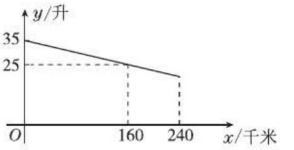
A. ①②　　B. ①②③

C. ①③④　　D. ①②④

5. [中考 · 邵阳] 如图,一次函数 $y=ax+b$ 的图象与 x 轴相交于点 $(2,0)$,与 y 轴相交于点 $(0,4)$. 结合图象可知,关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解是_____.



(第5题图)



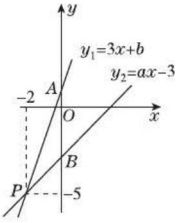
(第6题图)

6. [中考 · 上海] 李老师开车从甲地到相距 240 千米的乙地,如果油箱剩余油量 y(升)与行驶里程 x(千米)之间是一次函数关系,其图象如图所示,那么到达乙地时油箱剩余油量是_____升.

7. 如图,已知函数 $y_1=3x+b$ 和 $y_2=ax-3$ 的图象交于点 P,且分别交 y 轴于点 A,B.

(1)根据图象分别求出 a,b 的值;

(2)求 $\triangle APB$ 的面积.



(第7题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. [中考·天津]用A4纸复印文件,在甲复印店不管一次复印多少页,每页收费0.1元,在乙复印店复印同样的文件,一次复印页数不超过20时,每页收费0.12元;一次复印页数超过20时,超过部分每页收费0.09元.

设在同一家复印店一次复印文件的页数为x(x为非负整数).

(1)根据题意,填写下表:

一次复印页数/页	5	10	20	30	…
甲复印店收费/元	0.5		2		…
乙复印店收费/元	0.6		2.4		…

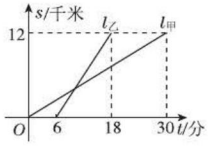
(2)设在甲复印店复印收费y_1元,在乙复印店复印收费y_2元,分别写出y_1,y_2关于x的函数关系式;

(3)当$x>70$时,顾客在哪家复印店复印花费少?请说明理由.

能力提升练

9. 若直线$y=3x+m$与两坐标轴围成的三角形的面积是6,则m的值为_____.

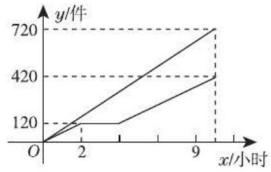
10. [中考·丽水]甲、乙两人以相同路线前往离学校12千米的地方参加植树活动,图中$l_{甲}$、$l_{乙}$分别表示甲、乙两人前往目的地所行驶的路程s(千米)随时间t(分)变化的函数图象,则每分乙比甲多行驶_____千米.



(第10题图)

11. [中考·鄂州]在平面直角坐标系中,已知点$A(2,3)$,$B(4,7)$,直线$y=kx-k(k\neq0)$与线段AB有交点,则k的取值范围为_____.

12. [中考·长春]甲、乙两车间同时开始加工一批服装.从开始加工到加工完这批服装甲车间工作了9小时,乙车间在中途停工一段时间维修设备,然后按停工前的工作效率继续加工,直到与甲车间同时完成这批服装的加工任务为止.设甲、乙两车间各自加工服装的数量为y(件).甲车间加工的时间为x(小时),y与x之间的函数图象如图所示.



(第12题图)

(1)甲车间每小时加工服装件数为_____件,这批服装的总件数为_____件;

(2)求乙车间维修设备后,乙车间加工服装数量y与x之间的函数关系式;

(3)求甲、乙两车间共同加工完1 000件服装时甲车间所用的时间.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

13. [中考 · 湘西州]某商店销售 A 型和 B 型两种电脑,其中 A 型电脑每台的利润为400元,B 型电脑每台的利润为500元.该商店计划再一次性购进两种型号的电脑共100台,其中 B 型电脑的进货量不超过 A 型电脑的2倍,设购进 A 型电脑 x 台,这100台电脑的销售总利润为 y 元.

(1)求 y 关于 x 的函数关系式;

(2)该商店购进 A 型、B 型电脑各多少台,才能使销售总利润最大,最大利润是多少?

(3)实际进货时,厂家对 A 型电脑出厂价下调 $a(0<a<200)$ 元,且限定商店最多购进 A 型电脑60台,若商店保持同种电脑的售价不变,请你根据以上信息,设计出使这100台电脑销售总利润最大的进货方案.

14. 在平面直角坐标系中,直线 l_1 对应的函数表达式为 $y=2x-1$,直线 l_2 过原点且与直线 l_1 交于点 $P(-2,a)$.

(1)试求 a 的值.

(2)点 $P(-2,a)$ 的横纵坐标可以看成是哪个二元一次方程组的解?

(3)设直线 l_1 与 x 轴交于点 A,你能求出 $\triangle APO$ 的面积吗?试试看.

(4)[易错题]在直线 l_1 上是否存在点 M,使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等?若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,说明理由.

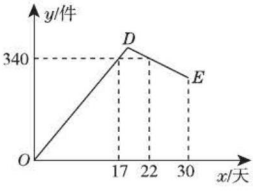
思维拓展练

15. [中考 · 咸宁]某公司开发出一款新的节能产品,该产品的成本价为6元/件,该产品在正式投放市场前通过代销点进行了为期一个月(30天)的试销售,售价为8元/件,工作人员对销售情况进行了跟踪记录,并将记录情况绘成图象,如图,图中的折线 ODE 表示日销售量 y(件)与销售时间 x(天)之间的函数关系,已知线段 DE 表示的函数关系中,时间每增加1天,日销售量减少5件. 【导学号:8564979】

(1)第24天的日销售量是_____件,日销售利润是_____元;

(2)求 y 与 x 之间的函数关系式,并写出 x 的取值范围;

(3)日销售利润不低于640元的天数共有多少天?试销售期间,日销售最大利润是多少元?



(第15题图)

我的错题笔记

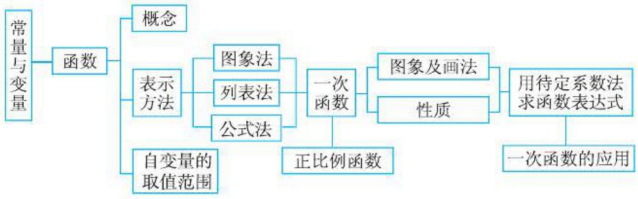
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 两个变量 x,y,当 x 取一个值时,y 有唯一值与它对应,x 是自变量,y 是 x 的函数.
2. 函数有三种表示方法:
   (1)图象法:将每对对应值作为一个点的坐标在平面直角坐标系中标出;
   (2)列表法:列出有限的对应值;
   (3)公式法:将两个变量之间的数量关系用一个式子表示出来.
3. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象是一条直线. (1)当 $b=0$ 时,一次函数为正比例函数,①当 $k>0$ 时,正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第一、三象限,y 随 x 的增大而增大;②当 $k<0$ 时,正比例函数 $y=kx$ 的图象经过第二、四象限,y 随 x 的增大而减小. (2)当 $b>0$ 时,直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的上方;(3)当 $b<0$ 时,直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点在 x 轴的下方.
4. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 从“数”的角度看是二元一次方程,从“形”的角度看是直线. 一次函数与一元一次方程、二元一次方程(组)之间的关系都是数形结合思想的体现.

专题解码

知识专题

专题一 函数自变量的取值范围

链接中考>> 函数自变量的取值范围表面上是考查函数知识,其实是考查自变量出现的形式——整式、分式等. 关键是几种形式组合时,要综合考虑. 考查的形式一般是选择题.

例1 [中考·黔南州]函数 $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x-4}$ 的自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x\leqslant3$　　B. $x\neq4$

C. $x\geqslant3$ 且 $x\neq4$　　D. $x\leqslant3$ 且 $x\neq4$

导引:先分别求出使 $\sqrt{3-x}$ 与 $\dfrac{1}{x-4}$ 有意义的条件,再合并求公共部分.

要使函数有意义,必须满足 $\begin{cases}3-x\geqslant0,\\x-4\neq0,\end{cases}$

解得 $x\leqslant3$.　　▶答案:A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

确定自变量的取值范围，应注意以下几种情况：(1)如果函数的表达式中含自变量的部分是整式，那么自变量的取值范围是全体实数；(2)如果函数的表达式中含自变量的部分是分式，那么自变量的取值范围是使分母不为零的实数；(3)在实际问题中，函数自变量的取值必须使实际问题有意义.

专题二　函数图象的意义

链接中考>> 理解函数图象的意义是解决函数问题的根本，利用函数图象解决几何图形中的动点问题或者解决生活实际问题，都离不开对关键点的意义的理解，其根本在于函数图象是数形相结合的产物. 对函数图象的考查是中考的热门考点，常见的考查形式是选择题.

例2 [中考 · 贵阳]星期六早晨，蕊蕊妈妈从家里出发去观山湖公园锻炼，她连续匀速走了 60 min 后回到家，图 1 中的折线 $OA-AB-BC$ 是她出发后所在位置离家的距离 s(km)与行走时间 t(min)之间的函数关系. 则图 2 中可以大致描述蕊蕊妈妈行走路线的是(　　)

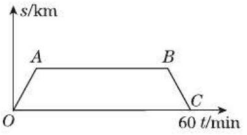


图 1

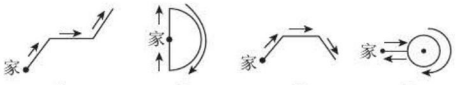


图 2

导引：解题的关键是能直观地分析各个图形对应的函数图象增减变化情况. 由图象知，随着 t 的增大，s 的值的变化趋势为增→不变→减.

对于选项 A，随着 t 的增大，s 的值的变化趋势为增→增→增，故此选项错误；

对于选项 B，随着 t 的增大，s 的值的变化趋势为增→不变→减，故此选项正确；

对于选项 C，随着 t 的增大，s 的值的变化趋势为增→增→增，故此选项错误；

对于选项 D，随着 t 的增大，s 的值的变化趋势为增→增→减→减，故此选项错误.

故选 B.　▶答案：B

点方法

解决动点的分段函数图象问题，一是要注意分段的“段数”，二是要注意从何时起分段，该段到何时结束，三是要注意在每个分段上函数的具体变化情况. 特别要抓住图象中的转折点及拐点，这些点往往是运动状态发生改变或者相互的数量关系发生改变的地方.

专题三　一次函数的图象

链接中考>> 一次函数的图象是一条直线，它在平面直角坐标系中的位置是由函数表达式中的 k 和 b 决定的. 对这个知识点的考查在中考中出现的频率较高. 一般都是以填空题、选择题形式出现.

例3 [中考 · 枣庄]已知直线 $y=kx+b$，若 $k+b=-5$，$kb=6$，则此直线不经过的象限是(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

导引：先根据已知判断出 k，b 的符号，再根据 k，b 的符号确定直线经过的象限，从而解决问题.

因为 $kb=6>0$，所以 k，b 同号. 又因为 $k+b=-5$，所以 $k<0$，$b<0$. 所以一次函数的图象经过第二、三、四象限，因此图象不经过第一象限.　▶答案：A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

一次函数 $y=kx+b$ 中，k 决定了直线的走向，b 决定了直线与 y 轴的交点，因此由 k 和 b 的值可以确定出直线经过的象限，具体为：①当 $k>0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、三象限；②当 $k>0$，$b<0$ 时，函数图象经过第一、三、四象限；③当 $k<0$，$b>0$ 时，函数图象经过第一、二、四象限；④当 $k<0$，$b<0$ 时，函数图象经过第二、三、四象限；⑤当 $k>0$，$b=0$ 时，函数图象经过第一、三象限；⑥当 $k<0$，$b=0$ 时，函数图象经过第二、四象限.

专题四 一次函数的性质

链接中考>> 对于一次函数 $y=kx+b(k,b$ 是常数，且 $k\neq0)$，当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 因此，利用一次函数的性质，已知 k 的符号时，可判断两函数值 y_1,y_2 的大小（对应的 x_1,x_2 的大小已知）；已知 y_1,y_2 的大小（对应的 x_1,x_2 的大小已知）时，也可判断 k 的符号.

例4 A,B 两点在一次函数图象上的位置如图3，两点的坐标分别为 $A(x+a,y+b)$，$B(x,y)$，下列结论正确的是(　　)

A. $a>0$　　B. $a<0$

C. $b=0$　　D. $ab<0$

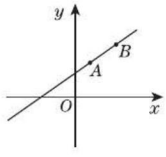


图3

导引：根据函数的图象，可知 y 随 x 的增大而增大，$y+b<y$，$x+a<x$，得出 $b<0$，$a<0$，故选 B.

▶答案：B

专题五 用待定系数法确定一次函数表达式

链接中考>> 根据不同的条件确定一次函数的表达式是中考的重点. 解决这类问题主要是利用待定系数法，通过列方程（组）求出 k,b. 考查形式很多，填空题、选择题和解答题都会出现.

例5 [中考·包头] 如图4，已知一条直线经过点 $A(0,2)$，点 $B(1,0)$，将这条直线向左平移与 x 轴，y 轴分别交于点 C，点 D. 若 $DB=DC$，则直线 CD 对应的函数表达式为_____.

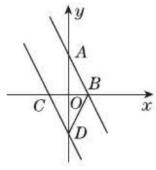


图4

导引：方法一：在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中，$CD=BD$，$OD=OD$，$\therefore\ \mathrm{Rt}\triangle COD\cong\mathrm{Rt}\triangle BOD$，$\therefore CO=BO$，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-1,0)$. 由 ASA 可证 $\triangle AOB\cong\triangle DOC$，$\therefore OD=OA$，$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0,-2)$. 设直线 CD 对应的函数表达式为 $y=kx+b$，将 $(-1,0)$ 和 $(0,-2)$ 代入，得 $\begin{cases}0=-k+b,\\-2=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=-2.\end{cases}$ $\therefore$ 直线 CD 对应的函数表达式为 $y=-2x-2$.

方法二：本题还可以用平移法来求解. 由题中条件知直线 CD 是由直线 AB 向左平移得到的，因此可先求出直线 AB 对应的函数表达式：$y=-2x+2$，再求出点 $C(-1,0)$ 或点 $D(0,-2)$，用平移法来求直线 CD 对应的函数表达式. (1) 若求点 $C(-1,0)$，由 $B(1,0)\rightarrow C(-1,0)$，说明直线 AB 向左平移 2 个单位后得到直线 CD，因此可采用“左加右减”法求直线 CD 对应的函数表达式，“左”表示向左平移，“加”表示将自变量加，即由 $y=-2x+2$ 得 $y=-2(x+2)+2=-2x-2$；(2) 若求点 $D(0,-2)$，由 $A(0,2)\rightarrow D(0,-2)$，说明直线 AB 向下平移 4 个单位长度得到直线 CD，因此可采用“上加下减”法求直线 CD 对应的函数表达式，“下”表示向下平移，“减”表示将直线与 y 轴交点的纵坐标 b 减去平移的单位长度数，即由 $y=-2x+2$ 得 $y=-2x+(2-4)=-2x-2$.

▶答案：$y=-2x-2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

求一次函数的表达式的问题主要有两种类型：一是在实际问题中求表达式（直接找出两个变量之间的等量关系即可）；二是根据函数图象求表达式（主要有两种方法——**待定系数法**和**平移法**）.

专题六　一次函数的实际应用

链接中考>> 一次函数的应用主要有两种形式：一是根据实际问题建立函数模型；二是利用函数的性质确定最佳方案. 这两种形式的纽带是函数自变量的取值范围. 它是中考的热门考点，一般都是以解答题形式出现.

例6 ［中考 · 威海］为绿化校园，某校计划购进 A，B 两种树苗，共21棵. 已知 A 种树苗每棵90元，B 种树苗每棵70元. 设购买 B 种树苗 x 棵，购买两种树苗所需费用为 y 元.

(1) y 与 x 的函数关系式为_____；

(2) 若购买 B 种树苗的数量少于 A 种树苗的数量，请给出一种费用最省的方案，并求出该方案所需费用.

导引：根据所需费用 = 购进 A，B 两种树苗的费用和，列出函数关系式，进而利用函数的性质求解.

▶解：(1) $y = -20x + 1\,890$

(2) 由题意，得 $x < 21 - x$，解得 $x < 10.5$，又∵ $x \geqslant 1$ 且 x 为整数，∴ $1 \leqslant x < 10.5$ 且 x 为整数. 由(1)中一次函数 $y = -20x + 1\,890$ 的性质，得当 $x = 10$ 时，y 有最小值，为 $-20 \times 10 + 1\,890 = 1\,690$，∴ 费用最省的方案是购买 B 种树苗10棵，A 种树苗11棵，所需费用为1 690元.

点方法

此类问题一般先根据数量之间的关系确定函数关系式，然后根据题意转化为不等式求出自变量的取值范围，最后利用一次函数的性质得出答案.

专题七　一次函数与一元一次方程、二元一次方程(组)的关系

链接中考>> 一次函数与一元一次方程、二元一次方程(组)的综合常常是利用一次函数的图象与性质结合方程知识解决相关问题. 中考考查的形式多样化，填空题、选择题和解答题都有涉及.

例7 如图5，直线 $y = ax + b$ 过点 $A(0, 2)$ 和点 $B(-3, 0)$，则方程 $ax + b = 0$ 的解是(　　)

A. $x = 2$

B. $x = 0$

C. $x = -1$

D. $x = -3$

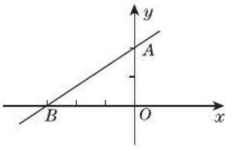


图5

导引：方程 $ax + b = 0$ 的解即为函数 $y = ax + b$ 的图象与 x 轴交点的横坐标. ∵ 直线 $y = ax + b$ 过点 $B(-3, 0)$，∴ 方程 $ax + b = 0$ 的解是 $x = -3$. 故选D. ▶答案：D

点方法

任何一元一次方程都可以转化为 $ax + b = 0$ (a，b 为常数，$a \neq 0$)的形式，所以解一元一次方程可转化为：当某个一次函数的值为0时，求相应的自变量的值，从图象上看，相当于已知直线 $y = ax + b$ 确定它与 x 轴的交点的横坐标.

思想方法专题

专题八　分类讨论思想

专题解读>> 分类讨论思想是指当数学对象所包含的情况不止一种，不能一概而论时，在对其进行分类的过程中寻求答案的一种数学思想方法. 分类的目的是使问题条理化、具体化、简单化. 对于题意复杂，包含情况多或题设交代笼统或图形位置不确定等类型的问题，通常需要进行分类讨论. 分类既不能重复，也不能遗漏，最后一般要做全面总结.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例8 已知一次函数 $y=kx+b$，当自变量 x 的取值范围是 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 时，相应的函数值 y 的取值范围是 $-2\leqslant y\leqslant 4$，求一次函数的表达式.

导引：根据函数的增减性可知有图象经过 $(-1,-2)$，$(3,4)$ 两点或图象经过 $(-1,4)$，$(3,-2)$ 两点两种情况.

▶解：若 $y=kx+b$ 的图象经过 $(-1,-2)$，$(3,4)$ 两点，则有 $\begin{cases}-k+b=-2,\\3k+b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{2},\\b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$；

若 $y=kx+b$ 的图象经过 $(-1,4)$，$(3,-2)$ 两点，则有 $\begin{cases}-k+b=4,\\3k+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{3}{2},\\b=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

所以 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$.

综上所述，一次函数的表达式为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 或 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$.

点方法

一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，且 $k\neq 0)$ 因 k 的符号不同，其增减性也不同，题干中没有明确 k 的符号，所以解答本题时应进行分类讨论.

专题九 数形结合思想

专题解读>> 数形结合就是把抽象的数学语言、数量关系与直观的几何图形、位置关系结合起来，通过“以形助数”或“以数解形”，即抽象思维与形象思维的结合，将复杂问题简单化，抽象问题具体化，从而达到优化解题途径的目的.

例9 如图6，在平面直角坐标系中，平行四边形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴上，顶点 B 的坐标为 $(6,4)$. 若直线 l 经过点 $(1,0)$，且将平行四边形 $OABC$ 分割成面积相等的两部分，则直线 l 对应的函数表达式是(　　)

A. $y=x+1$

B. $y=\dfrac{1}{3}x+1$

C. $y=3x-3$

D. $y=x-1$

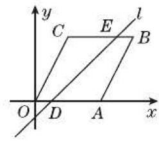


图6

导引：如图6，设直线 l 与 x 轴的交点为 D，与 BC 的交点为 E，则 D 点的坐标为 $(1,0)$.

因为直线 l 经过点 $D(1,0)$，且将平行四边形 $OABC$ 分割成面积相等的两部分，

所以 $OD=BE=1$.

因为顶点 B 的坐标为 $(6,4)$，

所以点 E 的坐标是 $(5,4)$.

设直线 l 对应的函数表达式是 $y=kx+b$，

因为直线 l 过 $D(1,0)$，$E(5,4)$，

所以 $\begin{cases}k+b=0,\\5k+b=4.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$

所以直线 l 对应的函数表达式是 $y=x-1$. 故选 D. ▶答案：D

点方法

运用**数形结合思想**时，要根据数学问题的题设和结论之间的内在联系，分析变量之间的数量关系，并联系其几何意义，将数量关系和几何图形巧妙地结合起来，建立函数模型，并运用已知条件，确定函数表达式，进行有关计算.

专题十 函数思想

专题解读>> 函数思想就是用运动和变化的观点，去观察，分析具体问题中的数量关系，通过函数形式，把这种数量关系表示出来并加以研究，从而使问题获得解决. 在解决问题时，根据问题的条件去构造函数关系，并借助已知函数的性质和图象，获得解决问题的途径.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例10 随着教学手段不断更新，要求计算器进入课堂，某电子厂家经过市场调查，发现某种计算器的供应量 x_1（万个）与价格 y_1（万元）之间的关系如图 7 中供应线所示，而需求量 x_2（万个）与价格 y_2（万元）之间的关系如图 7 中需求线所示. 如果你是这个电子厂的经理，应计划生产这种计算器多少个，每个售价多少元，才能使市场达到供需平衡？

导引：供应线、需求线所表示的函数都是一次函数；达到平衡时，供应量等于需求量.

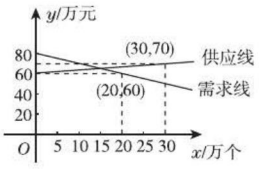


图 7

▶解：设供应线的函数表达式为 $y_1 = k_1x + b_1$，

由图象知，其图象过点 $(0,60)$，$(30,70)$，

所以 $\begin{cases}60 = 0 \cdot k_1 + b_1,\\70 = 30 \cdot k_1 + b_1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1 = \dfrac{1}{3},\\b_1 = 60.\end{cases}$

所以 $y_1 = \dfrac{1}{3}x + 60 (x \geqslant 0)$.

设需求线的函数表达式为 $y_2 = k_2x + b_2$.

由图象知，其图象过点 $(0,80)$，$(20,60)$，

所以 $\begin{cases}80 = 0 \cdot k_2 + b_2,\\60 = 20 \cdot k_2 + b_2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2 = -1,\\b_2 = 80.\end{cases}$

所以 $y_2 = -x + 80 (x \geqslant 0)$.

令 $y_1 = y_2$，即 $\dfrac{1}{3}x + 60 = -x + 80$，解得 $x = 15$. 当 $x = 15$ 时，$y_1 = y_2 = 65$. $65 \div 15 = \dfrac{13}{3}$（元）.

应计划生产这种计算器 15 万个，每个售价 $\dfrac{13}{3}$ 元，才能使市场达到供需平衡.

点方法

本题是一次函数在经济领域中的应用，立意新颖. 应正确理解“供需平衡”，关键是运用函数思想去分析问题，建立数学模型，使问题在函数关系中实现转化，从而使问题得以解决.

专题十一 方程思想

专题解读>> 方程思想是指对所求问题通过列方程（组）使问题得解的方法. 在一次函数及其图象中，方程思想的应用主要体现在运用待定系数法确定函数表达式.

例11 如图 8，设函数 $y = x + 4$ 的图象与 y 轴交于 A 点，函数 $y = -3x - 6$ 的图象与 y 轴交于 B 点，两个函数的图象交于 C 点，求经过线段 AB 的中点 D 及 C 点的直线对应的函数表达式.

导引：首先求出直线 $y = x + 4$ 与直线 $y = -3x - 6$ 的交点 C 的坐标，再求出直线 $y = x + 4$ 与 $y = -3x - 6$ 分别与 y 轴的交点的坐标，最后用待定系数法求出经过线段 AB 的中点 D 及 C 点的直线对应的函数表达式.

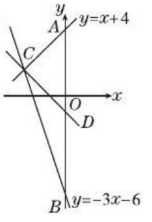


图 8

▶ 解：解方程组 $\begin{cases}y = x + 4,\\y = -3x - 6,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x = -\dfrac{5}{2},\\y = \dfrac{3}{2}.\end{cases}$ 所以 C 点的坐标为 $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. 对于 $y = x + 4$，令 $x = 0$，则 $y = 4$，所以 A 点的坐标为 $(0,4)$. 对于 $y = -3x - 6$，令 $x = 0$，则 $y = -6$，

所以点 B 的坐标为 $(0, -6)$.

所以线段 AB 的中点 D 的坐标为 $(0, -1)$. 设直线 CD 对应的函数表达式为 $y = kx + b$，把点 C，D 的坐标分别代入表达式中，得

方程组 $\begin{cases}-\dfrac{5}{2}k + b = \dfrac{3}{2},\\b = -1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k = -1,\\b = -1.\end{cases}$

因此经过线段 AB 的中点 D 及 C 点的直线对应的函数表达式为 $y = -x - 1$.

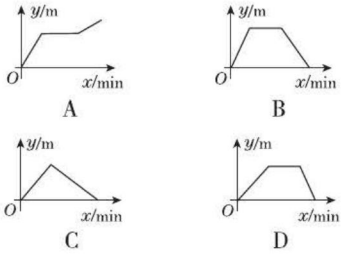
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必练

（答案见274页）

选择题

1. [中考·巴中]小张的爷爷每天坚持体育锻炼，星期天爷爷从家里跑步到公园，打了一会儿太极拳，然后沿原路慢步走到家，下面能反映当天爷爷离家的距离 y(m)与时间 x(min)之间关系的大致图象是(　　)



2. [中考·成都]一次函数 $y=2x+1$ 的图象不经过(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. [中考·黄冈]在函数 $y=\frac{\sqrt{x+4}}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x>0$　　B. $x\geqslant -4$

C. $x\geqslant -4$ 且 $x\neq 0$　　D. $x>0$ 且 $x\neq -4$

4. 小明在劳动技术课中要制作一个周长为80 cm的等腰三角形，则底边长 y(cm)与腰长 x(cm)之间的函数表达式和自变量 x 的取值范围分别是(　　)

A. $y=2x(x<40)$

B. $y=80-2x(x<40)$

C. $y=2x(20<x<40)$

D. $y=80-2x(20<x<40)$

5. [中考·湘西州]一次函数 $y=x+2$ 的图象与 y 轴的交点坐标是(　　)

A. $(0,2)$　　B. $(0,-2)$

C. $(2,0)$　　D. $(-2,0)$

6. [中考·滨州]若点 $M(-7,m)$，$N(-8,n)$ 都在函数 $y=-(k^2+2k+4)x+1$(k 为常数)的图象上，则 m 和 n 的大小关系是(　　)

A. $m>n$　　B. $m<n$

C. $m=n$　　D. 不能确定

7. [中考·鄂州]小东家与学校之间是一条笔直的公路，早饭后，小东步行前往学校，途中发现忘带画板，停下给妈妈打电话，妈妈接到电话后，带上画板马上赶往学校，同时小东沿原路返回，两人相遇后，小东立即赶往学校，妈妈沿原路返回16 min到家，再过5 min小东到达学校. 小东始终以100 m/min的速度步行，小东和妈妈的距离 y(单位：m)与小东打完电话后的步行时间 t(单位：min)之间的函数关系如图所示，下列四种说法：

①打电话时，小东和妈妈的距离是1 400 m；

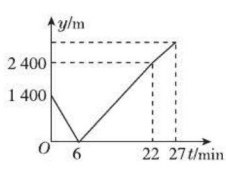
②小东与妈妈相遇后，妈妈回家的速度是50 m/min；

③小东打完电话后，经过27 min到达学校；

④小东家离学校的距离为2 900 m.

其中正确的个数是(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

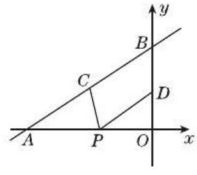


(第7题图)

8. [中考·枣庄]如图，直线 $y=\frac{2}{3}x+4$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A 和点 B，点 C，D 分别为线段 AB，OB 的中点，点 P 为 OA 上一动点，当 $PC+PD$ 最小时，点 P 的坐标为(　　)

A. $(-3,0)$　　B. $(-6,0)$

C. $\left(-\frac{3}{2},0\right)$　　D. $\left(-\frac{5}{2},0\right)$



(第8题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 一家游泳馆的游泳收费标准为30元/次，若购买会员年卡，可享受如下优惠：

会员年卡类型	办卡费用/元	每次游泳收费/元
A 类	50	25
B 类	200	20
C 类	400	15

例如，购买 *A* 类会员年卡，一年内游泳20次，消费 $50+25\times20=550$(元)，若一年内在该游泳馆游泳的次数介于45～55次之间，则最省钱的方式为(　　)

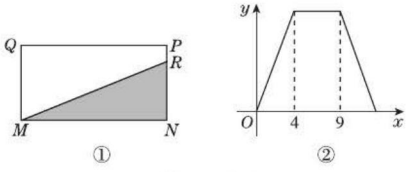
A. 购买 *A* 类会员年卡

B. 购买 *B* 类会员年卡

C. 购买 *C* 类会员年卡

D. 不购买会员年卡

10. [中考 · 黔南州] 如图①，在矩形 *MNPQ* 中，动点 *R* 从点 *N* 出发，沿 $N\to P\to Q\to M$ 方向运动至点 *M* 处停止. 设点 *R* 运动的路程为 x，$\triangle MNR$ 的面积为 y，若 y 关于 x 的函数图象如图②所示，则当 $x=9$ 时，点 *R* 应运动到(　　)



(第10题图)

A. *M* 处　B. *N* 处　C. *P* 处　D. *Q* 处

填空题

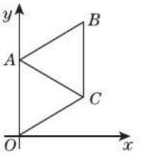
11. 若 $\sqrt{3k-2}$ 有意义，则函数 $y=kx-1$ 的图象不经过第_____象限.

12. [中考 · 广州] 某水库的水位在5小时内持续上涨，初始的水位高度为6米，水位以每小时0.3米的速度匀速上升，则水库的水位高度 y 米与时间 $x(0\leqslant x\leqslant5)$ 小时的函数关系式为_____.

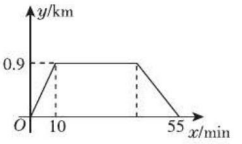
13. [中考 · 娄底] 将直线 $y=2x+1$ 向下平移3个单位长度后所得直线表达式是_____.

14. [中考 · 天津] 若一次函数 $y=2x+b$(b 为常数)的图象经过点(1,5)，则 b 的值为_____.

15. [中考 · 郴州] 如图，在平面直角坐标系中，菱形 *OABC* 的一个顶点在原点 *O* 处，且 $\angle AOC=60°$，*A* 点的坐标是(0,4)，则直线 *AC* 的表达式是_____.



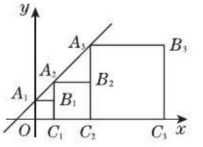
(第15题图)



(第16题图)

16. [中考 · 南充] 小明从家到图书馆看报然后返回，他离家的距离 y 与离家的时间 x 之间的对应关系如图所示，如果小明在图书馆看报30 min，那么他离家50 min时离家的距离为_____ km.

17. [中考 · 衡阳] 正方形 $A_1B_1C_1O$，$A_2B_2C_2C_1$，$A_3B_3C_3C_2$，…按如图所示放置，点 A_1，A_2，A_3，…和点 C_1，C_2，C_3，…分别在直线 $y=x+1$ 和 x 轴上，则点 $B_{2\,018}$ 的纵坐标是_____.



(第17题图)

解答题

18. [中考 · 杭州] 在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$(k，b 都是常数，且 $k\neq0$)的图象经过点(1,0)和(0,2).

(1) 当 $-2<x\leqslant3$ 时，求 y 的取值范围；

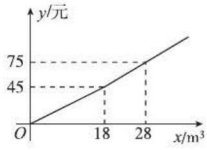
(2) 已知点 $P(m,n)$ 在该函数的图象上，且 $m-n=4$，求点 *P* 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. [中考·绍兴]某市规定了每月用水18 m^3以内(含18 m^3)和用水18 m^3以上两种不同的收费标准. 该市的用户每月应交水费y(元)是用水量x(m^3)的函数,其图象如图所示.

(1)若某月用水量为18 m^3,则应交水费多少元?

(2)求当$x>18$时,y关于x的函数表达式. 若小敏家某月交水费81元,则这个月用水量为多少立方米?



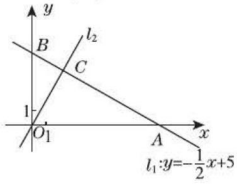
(第19题图)

20. [中考·河北]如图,直角坐标系xOy中,一次函数$y=-\frac{1}{2}x+5$的图象l_1分别与x,y轴交于A,B两点,正比例函数的图象l_2与l_1交于点$C(m,4)$.

(1)求m的值及l_2的表达式;

(2)求$S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}$的值;

(3)一次函数$y=kx+1$的图象为l_3,且l_1,l_2,l_3不能围成三角形,直接写出k值.



(第20题图)

21. [中考·山西]我省某苹果基地销售优质苹果,该基地对需要送货且购买量在2 000 kg~5 000 kg(含2 000 kg和5 000 kg)的客户有两种销售方案(客户只能选择其中一种方案):

方案A:每千克5.8元,由基地免费送货.

方案B:每千克5元,客户需支付运费2 000元.

(1)请分别写出按方案A,方案B购买这种苹果的应付款y(元)与购买量x(kg)之间的函数表达式;

(2)求购买量x在什么范围时,选用方案A比方案B付款少;

(3)某水果批发商计划用20 000元,选用这两种方案中的一种,购买尽可能多的这种苹果,请直接写出他应选择哪种方案.

22. [中考·通辽]光明文具厂工人的工作时间:每月26天,每天8小时. 待遇:按件计酬,多劳多得,每月另加福利工资920元,按月结算. 该厂生产A,B两种型号零件,工人每生产一件A种型号零件,可得报酬0.85元,每生产一件B种型号零件,可得报酬1.5元,下表记录的是工人小王的工作情况:

生产A种型号零件/件	生产B种型号零件/件	总时间/分钟
2	2	70
6	4	170

根据上表提供的信息,请回答如下问题:

(1)小王每生产一件A种型号零件、每生产一件B种型号零件,分别需要多少分钟?

(2)设小王某月生产A种型号零件x件,该月工资为y元,求y与x的函数关系式;

(3)如果生产两种型号零件的数目没有限制,那么小王该月的工资数目最多为多少?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第5章

数据的频数分布

让我们走入数据世界

数学点拨



你将学到的核心考点

频数与频率 □

频数直方图 □

我们为你提供的核心方法

定义法 □　数形结合思想 □

统计思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.1 频数与频率

热门话题
- 频数与频率的概念
- 频数与频率之间的关系

话题链接：频数 ⟷ 频率

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点 频数与频率

点知识

1. **频数**：我们把在不同小组中的数据个数称为频数.

要点精析

在统计频数多少的时候，我们一般通过数“正”字笔画的方法累计，这样既不重复，也不遗漏.

2. **频率**：我们把每一组的频数与数据总数的比叫作这一组数据的频率.
3. **频率的意义**：一般地，如果重复进行 n 次试验，某个试验结果出现的次数 m 称为这个试验结果在这 n 次试验中出现的频数，而频数与试验总次数的比 $\frac{m}{n}$ 称为这个试验结果在这 n 次试验中出现的频率.
4. **频数与频率之间的关系**：
   (1) $\frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}=\text{频率}$，由此可推导出关系式：$\frac{\text{频数}}{\text{频率}}=\text{数据总数}$，频数 = 频率 × 数据总数；
   (2) 各试验结果的频数之和等于试验的总次数；
   (3) 各试验结果的频率之和等于 1.
5. **易错警示**：
   (1) 频率是个比值，它可以用小数、百分数、真分数来表示，但当结果不能除尽时，只能选择用真分数来表示；
   (2) 在两组数据中，某两个对象的频数相等，频率不一定相等，频数大，不一定频率大. 在同一组数据中，某两个对象的频数相等，频率也相等；频数大，频率也大.

拨考向

考查角度 1：频数与频率

例 1 frequency 和 relative frequency 中，频数最大的各是哪个字母？它们的频数和频率各是多少？

导引：数出各字母出现的次数即为频数，而字母出现的频率 $=\frac{\text{字母出现的频数}}{\text{所有字母的总个数}}$.

▸解：在 frequency 中，频数最大的是 e，e 的频数是 2，频率是 $\frac{2}{9}$. 在 relative frequency 中，频数最大的是 e，e 的频数是 4，频率是 $\frac{4}{17}$.

同类变式 (答案见 274 页) 练一练

1. 对某校八年级(1)班 50 名学生的年龄进行调查，其中 15 岁的有 2 人，14 岁的有 45 人，13 岁的有 3 人，则 14 岁的频数为_____，频率为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

本题利用了**定义法**，在解决问题的过程中有时不是单纯使用“频率 = $\frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}$”这个公式，而是使用变形后的公式进行计算，例如利用“数据总数 = $\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$”“频数 = 数据总数 × 频率”进行计算.

考查角度 2：表格中的频数与频率

例 2 某中学八年级同学就每年过生日时，你是否会向母亲道一声“谢谢”这个问题对本年级 66 名同学进行了调查. 调查结果如下：

否	否	否	有时	否	否	否	是	否	有时	有时	否
否	有时	有时	否	否	有时	否	否	有时	有时	否	有时
否	否	有时	有时	有时	否	否	否	有时	有时	是	是
有时	有时	否	否	是	否	否	否	是	否	否	否
否	否	否	否	否	有时	否	是	否	否	否	否
是	是	是	否	是	否						

请你整理上述数据，填写下表：

回答内容	频数	频率
是		
有时		
否		

导引：首先从表格中找出对应的频数，然后根据频率 = 频数 ÷ 总数计算填表.

▶解：

回答内容	频数	频率
是	10	$\frac{5}{33}$
有时	17	$\frac{17}{66}$
否	39	$\frac{13}{22}$

考查角度 3：利用频数与频率的关系求频数与频率

例 3 某校为了了解毕业年级男生的体能情况，从中抽取若干名男生进行铅球测试. 把所得数据(精确到0.1 m)进行整理后分成 6 组，从左到右前 5 个小组的频率分别为 0.04，0.10，0.14，0.28，0.30，第 6 小组的频数是 7.

(1)第 6 小组的频率是多少？

(2)参加这次测试的男生有多少人？

导引：(1)根据“各小组频率之和等于 1”求出第 6 小组的频率；(2)已知第 6 小组的频数和频率，根据“总人数 = $\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$”，求出参加这次测试的男生总人数.

▶解：第 6 小组的频率是 $1-(0.04+0.10+0.14+0.28+0.30)=0.14$.

(2)参加这次测试的男生有 $\frac{7}{0.14}=50$(人).

同类变式 (答案见 274 页) 练一练

3. 将一组数据分成 6 组，其中前 3 组的频率之和是 0.65，后两组的频率之和是 0.32，那么第 4 小组的频率是(　　)

A. 0.02　　B. 0.01

C. 0.03　　D. 0.04

点方法

各试验结果的频数之和等于试验的总次数；各试验结果的频率之和等于 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拔尖角度1 利用频数与频率解决生活中的问题

例4 现在有些学校试行了分班制，就是将年级中学习成绩比较接近的同学分在一个班上课. 对学校的这一做法，学校“少代会”对全校每名同学进行了调查，发现有 a 名同学投赞同票，b 名同学投反对票，还有 c 名同学弃权，如果全校学生共有 d 名.

(1)为了检查调查结果 a,b,c 是否统计无误，可以首先核对是否有等式_____成立；

(2)“赞同票”出现的频数是_____，频率是_____；

(3)“反对票”出现的频数是_____，频率是_____；

(4)在已经求出了“赞同票”以及“反对票”出现的频率之后，如何求“弃权票”出现的频率比较简便？

导引：每名同学有三种选择：投赞同票，投反对票，或弃权.

故这三种情况的频数和应为总人数，而这三种情况的频率和一定等于1.

▶解：(1) $a+b+c=d$

(2) a；$\frac{a}{d}$

(3) b；$\frac{b}{d}$

(4)“弃权票”出现的频率等于 $1-\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$.

点方法

调查结果是否真实可靠，必须建立在正确无误的统计数据基础之上. 故在实际问题中，常常需要验证统计结果的正确性.

拔尖角度2 利用频数与频率作决策

例5 某运动鞋经销商调查某校20名女生的运动鞋号，结果如下：

鞋的号码	35.5	36	36.5	37	37.5
频数	2	3	8	6	1

现在该经销商要去进200双上述五种号码的女运动鞋，你认为应该怎样安排进货比较合理？

导引：根据调查得到的各种鞋的号码的频数求出频率，从而计算出进200双鞋时各种不同号码的鞋的数量.

▶解：由调查结果可以确定35.5,36,36.5,37,37.5五种号码的鞋的频率分别为 $\frac{2}{20},\frac{3}{20},\frac{8}{20},\frac{6}{20},\frac{1}{20}$,

所以进200双鞋时，号码为35.5的鞋进货数量为 $200\times\frac{2}{20}=20$(双)；

号码为36的鞋进货数量为 $200\times\frac{3}{20}=30$(双)；

号码为36.5的鞋进货数量为 $200\times\frac{8}{20}=80$(双)；

号码为37的鞋进货数量为 $200\times\frac{6}{20}=60$(双)；

号码为37.5的鞋进货数量为 $200\times\frac{1}{20}=10$(双)；

即35.5,36,36.5,37,37.5号码的鞋分别进20双,30双,80双,60双,10双比较合理.

点方法

本题的关键是利用调查所得的数据求出频率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见274页)

基础巩固练

1. 在3.141 592 653 589 7中,频数最大的数字是(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 9

2. 已知数据:$\frac{1}{3}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,π,-2,其中无理数出现的频率为(　　)

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

3. [中考 · 贵阳]某班50名学生在2018年适应性考试中,数学成绩在100~110分这个分数段的频率为0.2,则该班在这个分数段的学生为_____人.

4. [中考 · 益阳]学习委员调查本班学生课外阅读情况,对学生喜爱的书籍进行分类统计,其中"古诗词类"的频数为12人,频率为0.25,那么被调查的学生人数为_____.

5. 在前100个正整数中,3的倍数出现的频数是_____,其频率是_____,4的倍数出现的频率是_____.

6. 小明抛硬币的过程见下表,阅读并回答问题:

抛掷总次数	10	50	500	5 000
出现正面次数	3	24	258	2 498
出现正面的频率	30%	48%	51.6%	49.96%

(1)从表中可知,当抛完10次时正面出现3次,正面出现的频率为30%,那么,小明抛完10次时,得到_____次反面,反面出现的频率是_____;

(2)当他抛完5 000次时,反面出现的次数是_____,反面出现的频率是_____;

(3)通过上面我们可以知道,正面出现的频数和反面出现的频数之和等于_____,正面出现的频率和反面出现的频率之和等于_____.

能力提升练

7. 将一组数据分成三组,其中第一、二组的频数分别是6,10,第三组的频率是20%,则第三组的频数是(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 一个样本分成5组,第一、二、三组共有160个数据,第三、四、五组共有260个数据,并且第三组的频率是0.20,则第三组的频数是(　　)

A. 50　　B. 60　　C. 70　　D. 80

9. 德国有个叫鲁道夫的人,他用毕生的精力,把圆周率π算到小数点后面35位.

3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88

(1)用画"正"字的方法记录圆周率的上述近似值中各数字出现的频数,完成下表;

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
画"正"字										
频数										

(2)在这串数字中,"3""6""9"出现的频率各是多少?

思维拓展练

10. 下表是根据七(1)班的50名同学平时最爱吃的食物的种类进行的问卷调查绘制成的统计表,请完成表格并回答后面的问题.

	肉类	蔬菜类	瓜果类	水产类
男生	22	1	2	
女生		4	5	3
频率	64%		14%	12%

(1)选择适当的统计图表示男生平时最爱吃的食物的种类情况;

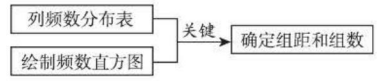
(2)就给出的七(1)班的同学平时最爱吃的食物的种类情况,请你结合自己的年龄特点简略谈谈自己的看法.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5.2 频数直方图

热门话题
- 频数分布表
- 频数直方图

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 频数分布表

点知识

1. **相关概念**:

(1)**组距**:把所有数据分成若干组,每个小组的两个端点数据之间的距离称为**组距**.

(2)**组数**:把数据分成若干组,分成组的个数叫组数.

要点精析

(1)组距可以相同,也可以不同,为研究方便,本节中我们作等距分组.

(2)数据所分组数没有明确要求,一般根据数据的多少,常分成5~12组.

(3)为了使数据"不重不漏",分组时常采用"上限不在内"的原则.如:149~152包含149,但不包括152,即$149 \leqslant x < 152$.

2. **频数分布表**:

(1)**定义**:统计每组中的数据的个数(频数),为避免数据的重复和遗漏,采用"画记"的方法,得到频数分布表.频数分布表反映了数据落在各个小组内的频数,从而反映了一组数据中各数据的分布情况.

(2)**制作步骤**:

①**算**:计算该组数据中最大值与最小值的差,得到这组数据的变化范围;

②**定**:根据数据的个数与数据的变化范围,确定组距、组数,一般分5~12组为宜;

③**画**:利用画记的方法累计落在各组内的数据个数,得到各组的频数;

④**列**:根据上述过程列频数分布表;频数分布表一般由分组、画记、频数三部分组成.

拨考向

考查角度1:利用组数和组距的关系确定组数

例1 有60个数据,其中最大的数据是187,最小的数据是140,如果分组时的组距为6,那么这组数据应分为(　　)

A.7组　　B.$7\frac{5}{6}$组

C.8组　　D.10组

导引:因为这组数据的最大值是187,最小值是140,最大值与最小值的差是47,且$\frac{47}{6}=7\frac{5}{6}$,所以应分为8组.　▶答案:C

点方法

确定组数的方法:若最大值与最小值的差除以组距所得的商是整数,则这个商即为组数;若最大值与最小值的差除以组距所得的商是小数,则这个商的整数部分+1即为组数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度 2:利用频数分布表解决问题

例 2 七年级某班 20 名男生某次投掷标枪的测试成绩如下(单位:m):25,21,23,25,27,29,25,28,28,29,26,24,25,27,26,22,24,25,26,28.

(1)将这 20 名男生的测试成绩按从小到大的顺序排列,统计出每种成绩的数值出现的频数,并制成频数分布表.

(2)根据频数分布表回答:①成绩小于 25 m 的同学有几人?占总人数的百分之几?

②成绩大于 27 m 的同学有几人?占总人数的百分之几?

导引:(1)根据要求,先将成绩按从小到大的顺序排列,然后制作频数分布表;

(2)根据所列表格回答问题.

▶解:(1)这 20 名男生的测试成绩按从小到大的顺序排列如下(单位:m):21,22,23,24,24,25,25,25,25,25,26,26,26,27,27,28,28,28,29,29. 频数分布表如下:

测试成绩(单位:m)	21	22	23	24	25	26	27	28	29
画记	一	一	一	丅	正	下	丅	下	丅
频数	1	1	1	2	5	3	2	3	2

(2)由频数分布表可知:①成绩小于 25 m 的同学有 5 人,占总人数的 25%. ②成绩大于 27 m 的同学有 5 人,占总人数的 25%.

知识点 2 频数直方图

点知识 ▶▶▶

1. **频数直方图**:为了更直观地反映一组数据的分布情况,可以以频数分布表为基础,绘制频数直方图(简称直方图). 在直角坐标系中,以组距为宽,频数为高作小矩形,就可以得到直方图.

2. **频数直方图中各部分的意义如下**:
   (1)**横轴**:直方图的横轴表示分组的情况;
   (2)**纵轴**:直方图的纵轴表示频数;
   (3)**条形图**:直方图的主体部分是条形图,每一条是立于横轴之上的一个矩形.

要点精析 ///

纵轴也可表示$\frac{\text{频数}}{\text{组距}}$,那么小矩形的面积 = 组距 × $\frac{\text{频数}}{\text{组距}}$ = 频数.

3. **作频数直方图的步骤**:
   (1)计算出数据中最大值与最小值的差;
   (2)确定组距与组数:先确定组距,再根据组距求组数;
   (3)列出频数分布表;
   (4)由频数分布表画出频数直方图.

4. **拓展**:频数直方图与条形统计图的区别与联系:

	条形统计图	频数直方图
区别	(1)条形统计图各个"条形"之间有间隙; (2)条形统计图用横向指标表示考察对象的类别,用纵向指标表示不同对象的数量特征.	(1)频数直方图各个"条形"之间没有间隙; (2)频数直方图用横向指标表示考察对象数据的变化范围,用纵向指标表示相应范围内的频数.
联系	条形统计图、频数直方图能从不同的角度直观、形象地描述、分析数据,频数直方图是特殊的条形统计图.	

5. **易错警示**:
   (1)直方图中的各小长方形之间没有空隙;
   (2)一般情况下,相邻各分点的归宿:"**上限不在内**".

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1：利用频数直方图获取相关信息

例3 某中学部分同学参加全国初中数学竞赛，取得了优异的成绩，指导老师统计了所有参赛同学的成绩（成绩都是整数，试题满分为120分），并且绘制了如图5.2-1所示的频数直方图（每组中含最低分数，但不含最高分数），请回答：

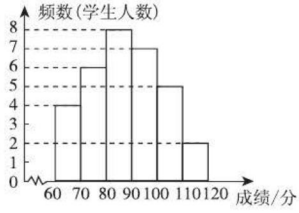


图5.2-1

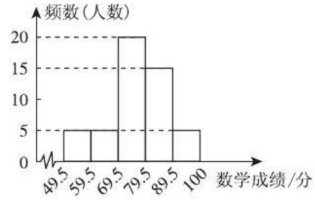
（1）该中学参加本次数学竞赛的共有多少人？

（2）如果成绩在90分以上（含90分）的同学获奖，那么该中学参赛同学的获奖率是多少？

（3）图中还提供了其他信息，例如该中学没有获得满分的同学等，请再写出两条信息.

同类变式 （答案见275页） 练一练

3. 某班50名学生期末考试数学成绩（单位：分）的频数直方图如图所示（成绩均为整数）. 对图中提供的信息作出如下判断，其中不正确的是（　　）



（第3题图）

A. 成绩在49.5～59.5分的频数和在89.5～100分的频数相等

B. 成绩在60分以上（含60分）的频数比成绩在70分以上（含70分）的频数小

C. 成绩在80分以上（含80分）的频数为20

D. 各组频数之比依次为1∶1∶4∶3∶1

导引：在（1）中，根据频数直方图，可以读出各分数段的人数，其和即为参加本次数学竞赛的人数；在（2）中，先计算出成绩在90分以上（含90分）的人数，结合（1）即可得出获奖率；（3）答案不唯一，合理即可.

▶解：（1）由频数直方图知，从左到右各分数段的人数分别为4，6，8，7，5，2.

4+6+8+7+5+2=32（人），所以该中学参加本次数学竞赛的共有32人.

（2）90分以上（含90分）的同学有7+5+2=14（人），所以该中学参赛同学的获奖率是$\frac{14}{32}\times 100\%=43.75\%$.

（3）该中学参赛同学的成绩均不低于60分；成绩在80～90分（含80分，但不含90分）的人数最多.（答案不唯一，合理即可）

点方法

根据频数直方图获取信息时，要注意三点：①理解横轴、纵轴分别表示的意义；②注意题目中的关键词语，如“每组中含最低分数，但不含最高分数”等；③在累计总数时不要出现遗漏或重复等错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:利用数据信息绘制直方图

例4 为了解某地区八年级学生的身高情况,随机抽取了60名男生,测得他们的身高(单位:cm)分别是:

156	162	163	172	160	141	152	173	180	174
157	174	145	160	153	165	156	167	161	172
178	156	166	155	140	157	167	156	168	150
164	163	155	162	160	168	147	161	157	162
165	160	166	164	154	161	158	164	151	169
169	162	158	163	159	164	162	148	170	161



(1)将数据适当分组,并绘制相应的频数直方图;

(2)如果身高在155 cm~170 cm(含155 cm,不含170 cm)的学生为正常,试求身高正常的学生所占的百分比.

导引:先确定最大值与最小值的差为180−140=40(cm),故可将数据按组距为5 cm分组,可分40÷5=8(组).

▶解:(1)计算这组数据的最大值与最小值的差为180−140=40(cm).

确定组数与组距,将数据按组距为5 cm分组,可分为40÷5=8(组),即每个小组的范围分别是$140\leqslant x<145$,$145\leqslant x<150$,$150\leqslant x<155$,$155\leqslant x<160$,$160\leqslant x<165$,$165\leqslant x<170$,$170\leqslant x<175$,$175\leqslant x\leqslant 180$.

列频数分布表如下:

分组	画记	频数
$140\leqslant x<145$	丅	2
$145\leqslant x<150$	下	3
$150\leqslant x<155$	正	5
$155\leqslant x<160$	正正丅	12
$160\leqslant x<165$	正正正正	20
$165\leqslant x<170$	正正	10
$170\leqslant x<175$	正一	6
$175\leqslant x\leqslant 180$	丅	2
合计	60	60

画频数直方图如图5.2-2所示:

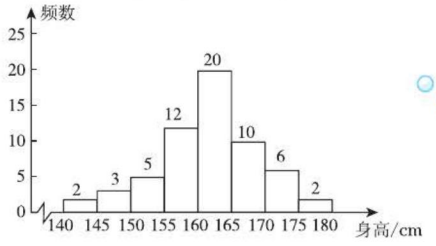


图5.2-2

点方法

作频数直方图要按步骤进行操作,其关键是列频数分布表;频数分布表和频数直方图都表示数据落在各小组的个数;绘制频数直方图是为了把表中的结果直观地表示出来,它们是频数分布的“数”与“形”的两种不同形式,互相补充.

(2)由图可知,身高在正常范围内的学生有12+20+10=42(名),其所占的百分比是$\frac{42}{60}\times 100\%=70\%$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

拨尖角度1 从频数直方图中获取信息

例5 青少年“心理健康”问题越来越引起社会的关注，某中学为了了解学校600名学生的心理健康状况，举行了一次“心理健康”知识测试，并随机抽取了部分学生的成绩（得分取正整数，满分为100分）作为样本，绘制了下面尚未完成的频数（率）分布表和频数直方图（如图5.3-3）.

分组	频数	频率
50.5～60.5	4	0.08
60.5～70.5	14	0.28
70.5～80.5	16	
80.5～90.5		
90.5～100.5	10	0.20
合计		1.00

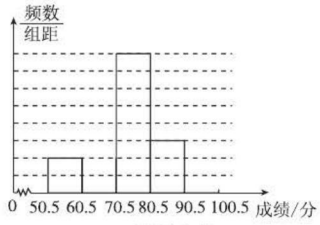


图5.2-3

请解答下列问题：

（1）将表格填写完整，并补全频数直方图；

（2）若成绩在70分以上（不含70分）为心理健康状况良好，同时，若心理健康状况良好的人数占总人数的70%以上，就表示该校学生的心理健康状况正常，否则就需要加强心理辅导. 请根据上述数据分析该校学生是否需要加强心理辅导，并说明理由.

导引：（1）因为数据总数＝频数÷频率，所以抽取的总人数为4÷0.08＝50（人）；再利用频率＝频数÷数据总数，频数＝数据总数×频率分别计算出所缺数据，补充好频数（率）分布表及频数直方图；（2）把成绩在70分以上的频率加起来，与70%比较，即可看出是否需要加强心理辅导.

▶解：（1）频数：6；50　频率：0.32；0.12

补全频数直方图如图5.2-4所示.

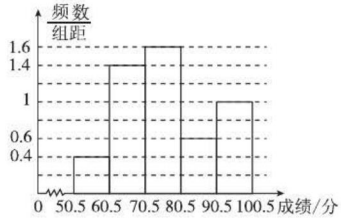


图5.2-4

（2）该校学生需要加强心理辅导.

理由如下：0.32＋0.12＋0.20＝0.64＜70%，说明该校的学生心理健康状况不正常，需要加强心理辅导.

误区

利用频数直方图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，理解频数直方图横轴、纵轴表示的意义，才能作出正确的判断和解决问题，注意：此题的纵轴表示$\frac{\text{频数}}{\text{组距}}$，而非频数.

拨尖角度2 频数直方图与其他统计图的综合应用（拓展点）

例6 今年，某教育局大力推动“中华优秀传统文化进校园”活动，某校组织全校2 000名学生参与了“爱我中华知识竞赛”活动. 为了了解本次知识竞赛的成绩分布情况，随机抽取了部分学生的得分进行统计. 请根据如图5.2-5所示的统计图回答下列问题：

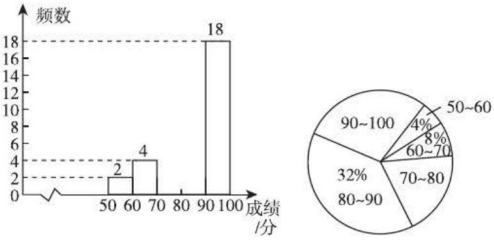


图5.2-5

（1）求被抽取的学生人数；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)求扇形统计图中“90～100”分数段所在扇形的圆心角度数;

(3)补全频数直方图;

(4)试估计该校此次参加竞赛的学生的平均成绩.

导引:(1)结合频数直方图、扇形统计图可知,被抽取的学生人数等于“60～70”分数段的人数4除以该分数段所占的百分比8%.

(2)利用“90～100”分数段所在扇形的圆心角=360°×该分数段的频率可求得答案;

(3)结合两个统计图可分别求出每个分数段的人数.

(4)可借助每组的组中值来代表本组的分数,再用总分数除以总人数即可得样本的平均成绩,也就是该校此次参加竞赛的学生的平均成绩.

▶解:(1)被抽取的学生人数为4÷8%=50(人).

(2)“90～100”分数段所在扇形的圆心角的度数为$360°\times\frac{18}{50}=129.6°$.

(3)“80～90”分数段的人数为50×32%=16(人);“70～80”分数段的人数为50−2−4−16−18=10(人).补全频数直方图如图5.2-6所示.

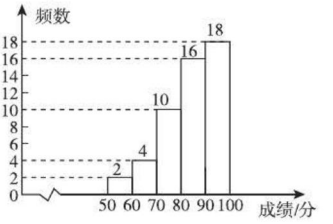


图5.2-6

(4)估计该校此次参加竞赛的学生的平均成绩为$(55\times2+65\times4+75\times10+85\times16+95\times18)\div50=83.8$(分).

探规律

对于双统计图问题,综合利用各个统计图的信息是解题的关键;对于扇形统计图,一般有两种形式:一种是百分比的形式,在扇形统计图中,各部分扇形所占的百分比总和等于1,这样,用1减去其他百分比,即可算出某一扇形所占的百分比;另外一种是度数的形式,根据圆心角的度数除以360°,可算出该扇形所占的百分比.要根据题目的特点灵活应用.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见275页)

基础巩固练

1. 一组数据的最大值与最小值之差为80,若取组距为9,则分成的组数应是(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 12

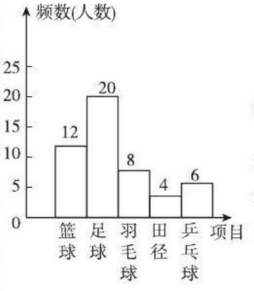
2. [中考 · 江西]某班组织了针对全班同学关于“你最喜欢的一项体育活动”的问卷调查后,绘制出频数直方图,由图可知,下列结论正确的是(　　)

A. 最喜欢篮球的人数最多

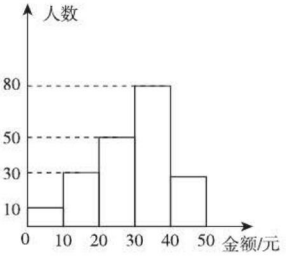
B. 最喜欢羽毛球的人数是最喜欢乒乓球人数的两倍

C. 全班共有50名学生

D. 最喜欢田径的人数占总人数的10%



(第2题图)

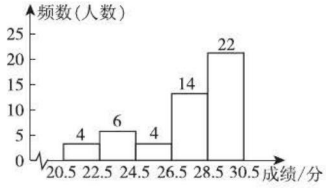


(第3题图)

3. [中考 · 上海]某校学生自主建立了一个学习用品义卖平台,已知九年级200名学生义卖所得金额的频数直方图如图所示,那么20～30元这个小组的频率是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·黄石]九年级(3)班共有 50 名同学,如图是该班一次体育模拟测试成绩的频数直方图(满分为 30 分,成绩均为整数). 若将不低于 23 分的成绩评为合格,则该班此次成绩达到合格的同学占全班人数的百分比是_____.



(第 4 题图)

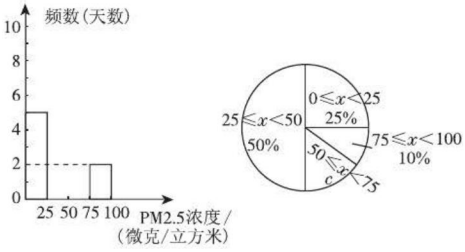
5. 国家环保部发布的《环境空气质量标准》规定:居民区的 PM 2.5 的年平均浓度不得超过 35 微克/立方米,PM 2.5 的 24 小时平均浓度不得超过 75 微克/立方米. 某市环保部门随机抽取了一居民区去年若干天 PM 2.5 的 24 小时平均浓度的监测数据,并统计得如下图表:

PM 2.5浓度 x/(微克/立方米)	频数
$0 \leqslant x < 25$	5
$25 \leqslant x < 50$	a
$50 \leqslant x < 75$	b
$75 \leqslant x < 100$	2

根据图表中的信息回答下面的问题:

(1) a = _____, b = _____, c = _____%;

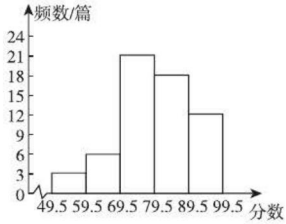
(2)补全频数直方图.



(第 5 题图)

能力提升练

6. 某校在“创新素质实践行”活动中组织学生进行社会调查,并对学生的调查报告进行了评比. 如图是将某年级 60 篇学生调查报告进行整理,分成 5 组画出的频数直方图. 已知从左到右 5 个小长方形的高的比为 1∶2∶7∶6∶4,那么在这次评比中被评为优秀(分数大于或等于 80 分为优秀,且分数为整数)的调查报告有(　　)

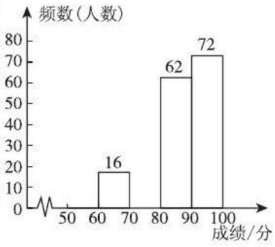


(第 6 题图)

A. 30 篇　　B. 24 篇　　C. 18 篇　　D. 27 篇

7. 某区八年级的学生参加了“爱我中华知识竞赛”活动. 为了了解本次知识竞赛的成绩分布情况,从中抽取了 200 名学生的成绩进行统计,得到如下图表:

成绩 x/分	频数
$50 \leqslant x < 60$	10
$60 \leqslant x < 70$	16
$70 \leqslant x < 80$	a
$80 \leqslant x < 90$	62
$90 \leqslant x < 100$	72



(第 7 题图)

根据图表中提供的信息,解答下列问题:

(1) a = _____,并补全频数直方图;

(2)若将成绩转化为等级,规定 $50 \leqslant x < 60$ 评为“D”,$60 \leqslant x < 70$ 评为“C”,$70 \leqslant x < 90$ 评为“B”,$90 \leqslant x < 100$ 评为“A”. 这次抽查的学生中,有多少人的参赛成绩被评为“B”?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考 · 临沂]某地某月 1 ~ 20 日中午 12 时的气温(单位:℃)如下:

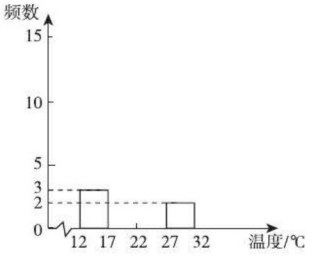
22 31 25 15 18 23 21 20 27
17 20 12 18 21 21 16 20 24
26 19

(1)将下列频数分布表补充完整:

气温分组	画记	频数
$12 \leqslant x < 17$	下	3
$17 \leqslant x < 22$		
$22 \leqslant x < 27$		
$27 \leqslant x < 32$	下	2

(2)补全频数直方图;

(3)根据频数分布表或频数直方图,分析数据的分布情况.



(第 8 题图)

思维拓展练

9. [中考 · 湖州]为积极创建全国文明城市,某市对某路口的行人交通违章情况进行了 20 天的调查,将所得数据绘制成如图①②所示的统计图(图②不完整):

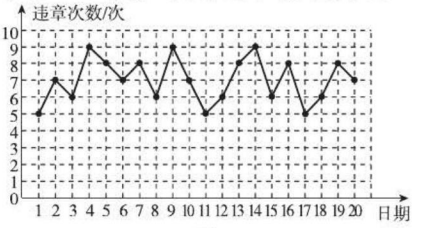
请根据所给信息,解答下列问题:

(1)第 7 天,这一路口的行人交通违章次数是多少次?这 20 天中,行人交通违章 6 次的有多少天?

(2)请把图②的频数直方图补充完整;

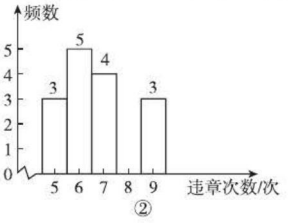
(3)通过宣传教育后,行人的交通违章次数明显减少,经过这一路口的再次调查发现,平均每天的行人交通违章次数比第一次调查时减少了 4 次,求通过宣传教育后,这一路口平均每天还出现多少次行人的交通违章? 【导学号:8564979】

某路口20天内行人交通违章次数的统计图



①

某路口20天内行人交通违章次数的频数直方图



②

(第 9 题图)

我的错题笔记

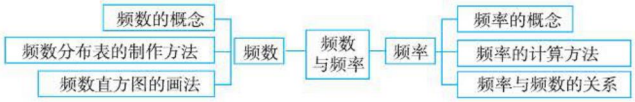
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. **频数**:我们把在不同小组中的数据个数称为频数;
   频率:我们把每一组的频数与数据总数的比叫作这一组数据的频率.
2. **列频数分布表的步骤**:分组、画记、列频数分布表.
3. **频数与频率的关系**:频率 $=\frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}$;频数是一个具体的数字,而频率是一个比值;各试验结果的频数之和等于试验的总次数,各试验结果的频率之和等于1.
4. **绘制频数直方图的步骤**:分组、画记、列频数分布表、绘制频数直方图.

专题解码

知识专题

专题一 频数与频率

链接中考>> 频数与频率的计算在中考中经常出现,理解频数、频率的概念是解题的关键,题型多以选择题、填空题为主.

例1 自来水公司为了解居民某月用水量,随机抽取了20户居民的月用水量x(单位:立方米),绘制出表格如下,则月用水量$x<3$的频率是_____.

月用水量x/立方米	频数
$0\leqslant x<0.5$	1
$0.5\leqslant x<1$	2
$1\leqslant x<1.5$	3
$1.5\leqslant x<2$	4
$2\leqslant x<2.5$	3
$2.5\leqslant x<3$	3
$3\leqslant x<3.5$	2
$3.5\leqslant x<4$	1
$4\leqslant x<4.5$	1

导引:通过表格可以得出:月用水量$x<3$的总户数为$1+2+3+4+3+3=16$,则频率$=\frac{16}{20}=0.8$. ▶答案:0.8

点方法

频数、频率的计算是统计中的一种常见计算,常用的计算公式有频率$=\frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}$,频数=数据总数×频率,数据总数$=\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$,各组频数之和等于数据总数,各组频率之和等于1.

专题二 绘制频数直方图

链接中考>> 补全频数分布表和频数直方图要善于抓住统计图表之间已知数据信息的联系,并进行信息互相补充.要将统计图表对照,先求出其中的一个关键的数据,再将其他的数据求出来.在中考中,此类问题的考查频繁出现,题型以填空题和解答题为主.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

例2 某班一次数学竞赛成绩(单位:分)如下:

77,74,65,53,95,87,75,82,71,67,85,88,90,86,81,87,70,70,89,69,61,94,79,81,76,67,80,63,84,91,53,69,81,61,69,91,78,75,81,87

(1)将数据适当分组,并绘制相应的频数直方图.

(2)从直方图中你能得到什么信息?

导引:制作频数直方图首先将数据进行分组,统计每个分数段的人数,列出频数分布表,再根据频数分布表绘制频数直方图.

▶解:(1)先将成绩按组距为10分进行分组,统计出每个分数段学生出现的频数,如下表:

成绩 x/分	画记	频数
$50 \leqslant x < 60$	丅	2
$60 \leqslant x < 70$	正丅	9
$70 \leqslant x < 80$	正正	10
$80 \leqslant x < 90$	正正丅	14
$90 \leqslant x < 100$	正	5

根据上表绘制直方图,如图1所示.

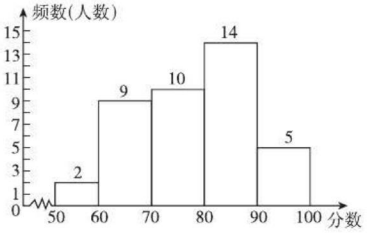


图1

(2)从图中可以清楚地看出$80 \leqslant x < 90$这个分数段的学生最多,60分以下的学生最少.(答案不唯一,合理即可)

点方法

频数直方图与以往所画的条形统计图不同,频数直方图中各个"条形"之间是连续的,没有间隔.

专题三 频数直方图与其他统计图的综合应用

链接中考>> 统计主要研究日常生活中的数据,统计数据可以了解情况、发现规律、作出判断,并能根据具体情况选择适当的统计图描述数据.此类问题是中考中的必考内容,考查形式以解答题为主.

例3 [中考·牡丹江]为了解某中学七年级学生1分钟跳绳情况,随机抽查了七年级部分学生1分钟跳绳的次数,并绘制成如下不完整的统计表和统计图(如图2).请根据图表信息,解答下列问题:

(1)这次共抽查了_____名学生,d = _____,请补全频数直方图;

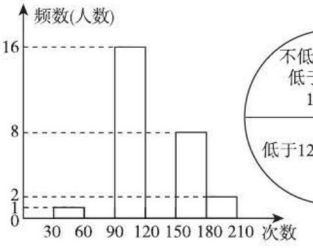
(2)在扇形统计图中,1分钟跳绳次数低于120次所在扇形的圆心角是_____°;

(3)若该校七年级有750名学生,请通过计算估计该校七年级学生中1分钟跳绳次数不低于175次的有多少名.

被抽查学生1分钟跳绳次数的频数分布表

跳绳次数	频数	百分比
$30 \leqslant x < 60$	1	2%
$60 \leqslant x < 90$	a	6%
$90 \leqslant x < 120$	16	32%
$120 \leqslant x < 150$	b	c
$150 \leqslant x < 180$	8	d
$180 \leqslant x < 210$	2	4%

被抽查学生1分钟跳绳次数的频数直方图



被抽查学生1分钟跳绳次数的扇形统计图

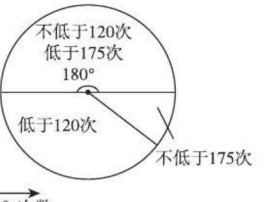


图2

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：(1)利用 $30 \leqslant x < 60$ 的有 1 名学生，所占的比例是 2%，可求出这次共抽查了 $1 \div 2\% = 50$(名)学生；再根据频率 $= \frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}$，可求出 $d = \frac{8}{50} = 16\%$，补全频数直方图；

(2)求得 1 分钟跳绳次数低于 120 次的百分比为 $2\% + 6\% + 32\% = 40\%$，然后用 360° 乘对应的百分比即可，$360° \times 40\% = 144°$；

(3)首先求得所占的比例，然后乘总人数 750 即可得解.

▶解：(1)50；16%

补全频数直方图如图 3 所示：

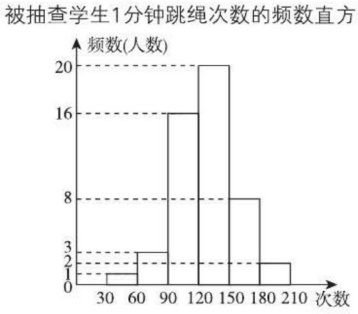


图 3

(2)144

(3)$750 \times (1 - 50\% - 40\%) = 75$(名).

答：估计该校七年级学生中 1 分钟跳绳次数不低于 175 次的有 75 名.

思想方法专题

专题四　数形结合思想

专题解读>>　统计研究的对象可分为数和形两大部分，数与形是有联系的，这个联系称为数形结合. 数形结合包括两个方面：第一种情形是“以数解形”，第二种情形是“以形助数”. 涉及有关统计图表的问题时，需要从统计图表中准确提取信息，恰当分析统计图表中数据的含义.

例 4　如图 4 是某单位职工年龄(取正整数)的频数直方图，根据图中提供的信息，回答下列问题：

(1)该单位有职工多少人？

(2)不小于 38 岁但小于或等于 43 岁的职工人数占职工总人数的百分比是多少？(结果精确到 0.1%)

(3)如果 42 岁的职工有 4 人，那么年龄在 42 岁以上的职工有多少人？

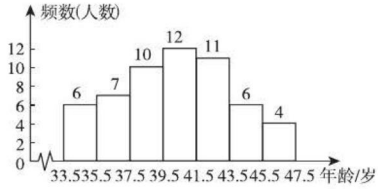


图 4

导引：本题考查频数直方图的意义，仔细观察图形，从中获取解题信息.

▶解：(1)该单位有职工 $6 + 7 + 10 + 12 + 11 + 6 + 4 = 56$(人).

(2)不小于 38 岁但小于或等于 43 岁的职工人数占职工总人数的百分比是 $(10 + 12 + 11) \div 56 \times 100\% \approx 58.9\%$.

(3)年龄在 42 岁和 42 岁以上的职工有 $11 + 6 + 4 = 21$(人)，所以年龄在 42 岁以上的职工有 $21 - 4 = 17$(人).

点方法

理解频数直方图的意义，从中获取信息，解决实际问题.

专题五　统计思想

专题解读>>　我们的生活、工作离不开数据，要做到心中有数、用数据说话是信息社会对人的基本要求，而统计学是一门研究如何收集、整理、分析数据，并在此基础上作出推断的科学. 可用样本的某种特征去估计总体的相应特征，用样本的平均水平、波动情况、分布规律等特征估计总体的平均水平、波动情况和分布规律.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例5 [中考 · 陕西] 养成良好的早锻炼习惯,对学生的学习和生活都非常有益. 某中学为了了解七年级学生的早锻炼情况,校政教处在七年级随机抽取了部分学生,并对这些学生通常情况下一天的早锻炼时间 x(分钟)进行了调查. 现把调查结果分成 A、B、C、D 四组,如下表所示,同时,将调查结果绘制成下面两幅不完整的统计图(如图5).

分组	早锻炼时间/分钟
A	$0 \sim 10$
B	$10 \sim 20$
C	$20 \sim 30$
D	$30 \sim 40$

所抽取七年级学生早锻炼时间统计图

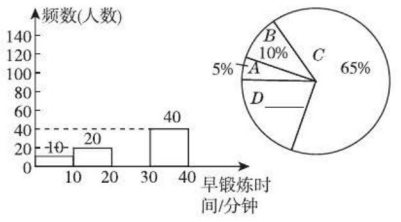


图5

请你根据以上提供的信息,解答下列问题:

(1)补全频数直方图和扇形统计图;

(2)所抽取的七年级学生早锻炼时间的中位数落在_____区间内;

(3)已知该校七年级共有 1 200 名学生,请你估计这个年级学生中约有多少人一天早锻炼的时间不少于 20 分钟. (早锻炼:指学生在早晨 7:00 ~ 7:40 之间的锻炼)

导引:(1)先根据 A 区间人数及其百分比求得总人数,再根据各区间人数之和等于总人数、百分比之和为 1 求得 C 区间人数及 D 区间百分比可得答案;

(2)根据中位数的定义求解可得;

(3)利用样本估计总体思想求解可得.

▶解:(1)补全图形如图6.

所抽取七年级学生早锻炼时间统计图

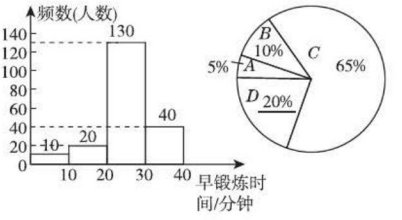


图6

(2)C

(3)$1\,200 \times (65\% + 20\%) = 1\,020$(人),

答:估计这个年级学生中约有 1 020 人一天早锻炼的时间不少于 20 分钟.

好题必练

(答案见 276 页)

选择题

1. 下列说法错误的是(　　)

A. 在频数直方图中,频数之和为数据个数

B. 频率等于频数与组距的比值

C. 在频数分布表中,频率之和为 1

D. 频率等于频数与样本容量的比值

2. 将 50 个数据分成五组,编成组号为①~⑤的五个组,频数分布如下表:

组号	①	②	③	④	⑤
频数	8	■	15	10	11

那么第②组的频数为(　　)

A. 0.12　　B. 0.6　　C. 6　　D. 12

3. 有 40 个数据,共分成 6 组,第 1 ~ 4 组的频数分别是 10,5,7,6,第 5 组占 10%,则第 6 组占(　　)

A. 25%　　B. 30%　　C. 15%　　D. 20%

4. 一个容量为 80 的样本中的最大值是 143,最小值是 50,取组距为 10,则可以分成(　　)

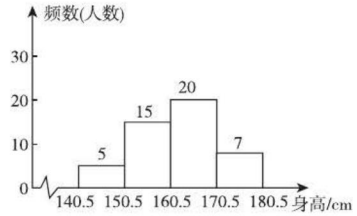
A. 10 组　　B. 9 组　　C. 8 组　　D. 7 组

5. 在样本的频数直方图中,共有 11 个小长方形,若中间的小长方形的面积等于其他 10 个小长方形面积之和的 $\frac{1}{4}$,且样本容量是 60,则中间组的频数为(　　)

A. 12　　B. 0.2　　C. 40　　D. 0.25

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

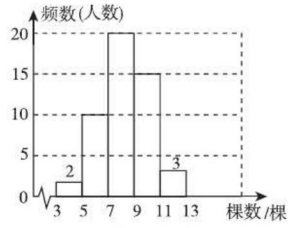
6. 某校测量了九(1)班学生的身高(精确到1 cm),按10 cm为一段进行分组,得到如图所示的频数直方图,则下列说法正确的是(　　)



(第6题图)

A. 该班人数最多的身高段的学生数为7人
B. 该班身高最高段的学生数为7人
C. 该班身高最高段的学生数为20人
D. 该班身高低于160.5 cm的学生为15人

7. 某单位在植树节派出50名员工植树造林,统计每个人植树的棵数之后,绘制如图所示的频数直方图(图中分组含最低值,不含最高值),则植树7棵以上的人数占总人数的(　　)

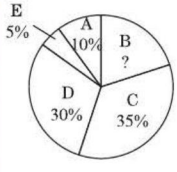


(第7题图)

A. 40%　　B. 70%　　C. 76%　　D. 96%

8. 自来水公司调查了若干用户的月用水量x(单位:吨),按月用水量将用户分成A,B,C,D,E五组进行统计,并制作了如图所示的扇形统计图. 已知除B组以外,参与调查的用户共64户,则所有参与调查的用户中月用水量在6吨以下的共有(　　)

组别	月用水量x/吨
A	$0 \leqslant x < 3$
B	$3 \leqslant x < 6$
C	$6 \leqslant x < 9$
D	$9 \leqslant x < 12$
E	$x \geqslant 12$



(第8题图)

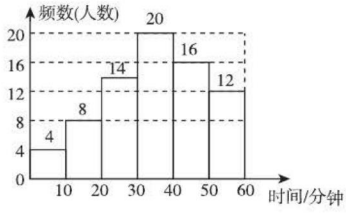
A. 18户　　B. 20户　　C. 22户　　D. 24户

填空题

9. [中考·常德]某校对初一全体学生进行了一次视力普查,得到如下统计表,则视力在$4.9 \leqslant x < 5.5$这个范围的频率为_____.

视力x	频数
$4.0 \leqslant x < 4.3$	20
$4.3 \leqslant x < 4.6$	40
$4.6 \leqslant x < 4.9$	70
$4.9 \leqslant x < 5.2$	60
$5.2 \leqslant x < 5.5$	10

10. 小文同学统计了他所在小区居民每天微信阅读的时间,并绘制了如图所示的频数直方图.



(第10题图)

①小文同学一共统计了60人;
②每天微信阅读不足20分钟的人数有8人;
③每天微信阅读30~40分钟的人数最多;
④每天微信阅读0~10分钟的人数最少.
根据图中信息,上述说法中正确的是_____.(填序号)

解答题

11. 为了调查七年级男生的身高,随机抽取了25名七年级男生,其身高情况如下(单位:cm):168,172,164,167,171,162,164,165,168,166,169,165,168,163,157,159,167,160,166,170,174,171,155,163,165.
将上述数据分成如下五组:154.5~158.5,158.5~162.5,162.5~166.5,166.5~170.5,170.5~174.5.
(1)列出频数分布表;
(2)画出频数直方图.

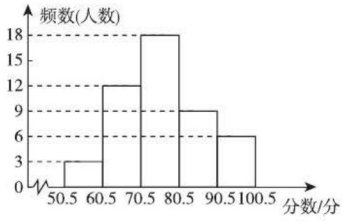
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. 12月4日是国家“宪法日”，某地区随机抽取了一部分市民进行了宪法知识测试，将测试成绩(得分取整数)进行整理后分成五组，并绘制频数直方图如图所示.

(1)这次测试活动抽取的人数是多少?

(2)测试成绩在哪个分数段的人数最多?

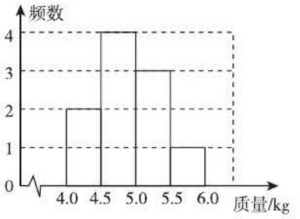
(3)若成绩在80分以上(不含80分)为优秀，则优秀率是多少?



(第12题图)

13. [中考 · 杭州]某校积极参与垃圾分类活动，以班级为单位收集可回收垃圾，下面是七年级各班一周收集的可回收垃圾的质量的频数表和频数直方图(每组含前一个边界值，不含后一个边界值).

某校七年级各班一周收集的可回收垃圾的质量的频数直方图



(第13题图)

某校七年级各班一周收集的可回收垃圾的质量的频数表

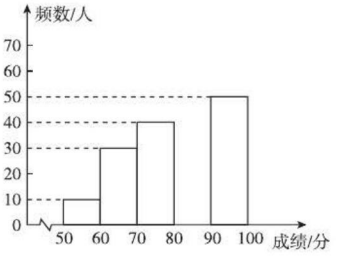
组别/kg	频数
4.0~4.5	2
4.5~5.0	a
5.0~5.5	3
5.5~6.0	1

(1)求a的值;

(2)已知收集的可回收垃圾以0.8元/kg被回收，该年级这周收集的可回收垃圾被回收后所得金额能否达到50元?

14. [中考 · 酒泉]中华文明，源远流长；中华汉字，寓意深广. 为传承中华优秀传统文化，某校团委组织了一次全校3 000名学生参加的“汉字听写”大赛. 为了解本次大赛的成绩，校团委随机抽取了其中200名学生的成绩(成绩x取整数，总分100分)作为样本进行统计，制成如下不完整的统计图表：

频数直方图



(第14题图)

频数(频率)分布表

成绩x/分	频数/人	频率
$50\leqslant x<60$	10	0.05
$60\leqslant x<70$	30	0.15
$70\leqslant x<80$	40	n
$80\leqslant x<90$	m	0.35
$90\leqslant x\leqslant 100$	50	0.25

根据所给信息，解答下列问题：

(1)$m=$_____，$n=$_____；

(2)补全频数直方图；

(3)这200名学生成绩的中位数会落在_____分数段；

(4)若成绩在90分以上(包括90分)为“优”等，请你估计该校参加本次比赛的3 000名学生中成绩是“优”等的约有多少人?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1章 直角三角形

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ)

Ⅰ. 同类变式

1. 30°;60° **点拨:** 设$\angle A=x$,则$\angle B=2x$,又$\angle A+\angle B=90°$,$\therefore x+2x=90°$,解得$x=30°$,即$\angle A=30°$,$\angle B=60°$.

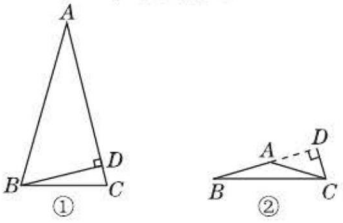
3. **解:** $\because CD$是AB边上的高,
$\therefore \angle DBC=90°-\angle DCB=90°-45°=45°$,
$\because BE$是AC边上的高,
$\therefore \angle EBC=90°-\angle ECB=90°-67°=23°$,
$\therefore \angle ABE=\angle ABC-\angle EBC=45°-23°=22°$.

5. **解:** 在$\triangle DBC$中,$\angle DBC=180°-\angle BDC-\angle C=180°-80°-70°=30°$,$\because BD$平分$\angle ABC$,$\therefore \angle ABD=\angle DBC=30°$,在$\triangle ABD$中,$\angle ADB+\angle ABD=60°+30°=90°$,
$\therefore \triangle ABD$是直角三角形.

6. D

8. **证明:** 连接AM,MC. 在$\triangle DCB$和$\triangle BAD$中,$\angle DCB=\angle DAB=90°$,$M$是$BD$的中点,
$\therefore MC=AM=\frac{1}{2}BD$.
又$\because N$是AC的中点,$\therefore MN\perp AC$.

12. D **点拨:** 如图①,$\because$腰长$AB=8$,高$BD=4$,$\therefore \angle A=30°$,即顶角是30°.

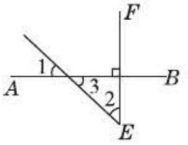


(第12题图)

如图②,$\because$腰长$AC=8$,高$CD=4$,$\therefore \angle CAD=30°$,$\therefore \angle BAC=180°-30°=150°$,$\therefore$此三角形的顶角是30°或150°.
故选D.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B **点拨:** 如图,$\because \angle 1=45°$,$\therefore \angle 3=\angle 1=45°$,$\because EF\perp AB$,$\therefore \angle 2=90°-\angle 3=90°-45°=45°$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.



(第1题图)

2. D **点拨:** 由题意知$AB=2AC=6$,故$3\leqslant AP\leqslant 6$.

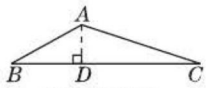
3. C **点拨:** $\because CD$是Rt$\triangle ABC$斜边上的中线,$\therefore CD=\frac{1}{2}AB$,
$\because AD=\frac{1}{2}AB$,$\therefore AD=CD$. $\therefore \angle A=\angle ACD=\frac{180°-\angle ADC}{2}=\frac{100°}{2}=50°$.

4. C **5.** 40

6. 60° **点拨:** $\because \angle C=90°$,$\angle B=30°$,
$\therefore \angle BAC=60°$,$\because AD$是$\angle BAC$的平分线,
$\therefore \angle EAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$,
$\because DE\perp AB$,
$\therefore \angle ADE=90°-30°=60°$.

7. **证明:** $\because AD\perp BC$,$\therefore \angle BAD+\angle B=90°$.
$\because \angle 1=\angle B$,
$\therefore \angle 1+\angle BAD=\angle BAC=90°$,
$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

8. **解:** 如图,$\triangle ABC$中,$AB=5$,$BC=12$,$\angle B=30°$. 过点A作$AD\perp BC$于D,



(第8题图)

$\because AB=5$,$\angle B=30°$,
$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$,
$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{5}{2}=15$.

9. **解:** 在$\triangle ABC$中,因为$\angle C=90°$,$\angle A=30°$,所以$\angle ABC=60°$.
因为BD平分$\angle ABC$.
所以$\angle CBD=\angle DBA=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$,
所以$\angle BDC=60°$.
因为DE平分$\angle BDC$,
所以$\angle CDE=\angle BDE=30°$,
所以$CE=\frac{1}{2}DE$,$\angle BDE=\angle CBD$,
所以$BE=DE$,所以$BE:EC=2:1$.

10. (1) **证明:** $\because$在直角三角形ABC中,AF为BC上的中线,$\therefore BF=CF$,$AF=\frac{1}{2}BC$,
$\therefore AF=BF=CF$.
(2) **解:** $\angle FAE=\angle DAE$.
证明:$\because \angle BAC=90°$,$AD\perp BC$,$\therefore \angle C=\angle BAD$,$\because AF=BF=CF$,$\therefore \angle BAD=\angle C=\angle FAC$,$\because AE$为角平分线,$\therefore \angle BAE=\angle EAC$,$\therefore \angle FAE=\angle DAE$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:(1)由三角形 ABC 是直角三角形,AF 为 BC 上的中线,即可推出结论;(2)由 $AD \perp BC$,$AF = BF = CF$ 可知,$\angle BAD = \angle C = \angle FAC$,结合 AE 为角平分线,即可推出 $\angle FAE = \angle DAE$.

11. C　**点拨**:在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$\angle A = 55°$,$\therefore \angle B = 90° - 55° = 35°$,
由折叠可得 $\angle CA'D = \angle A = 55°$,
又$\because \angle CA'D$ 为 $\triangle A'BD$ 的外角,
$\therefore \angle CA'D = \angle B + \angle A'DB$,
则 $\angle A'DB = 55° - 35° = 20°$.

12. B　**点拨**:$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,CM 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 M,$MN // BC$,MN 平分 $\angle AMC$,$\therefore \angle NMC = \angle AMN = \angle B$,$\angle NCM = \angle BCM = \angle NMC$,$\therefore \angle ACB = 2\angle B$,$NM = NC$,$\therefore \angle B = 30°$,$\therefore \angle AMN = 30°$,$\because AN = 1$,$\therefore MN = 2$,$\therefore AC = AN + NC = 3$,$\therefore BC = 6$. 故选 B.

13. D

14. **证明**:$\because CM$ 是斜边 AB 上的中线,$\therefore AM = CM$,$\therefore \angle A = \angle ACM$,$\because CN$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,$\angle ACB = 90°$,$\therefore \angle ACN = 45°$,$\therefore \angle MCN = 45° - \angle ACM$. $\because \angle CMB$ 是 $\triangle AMC$ 的外角,$\therefore \angle CMB = \angle A + \angle ACM = 2\angle ACM$,$\because MN \perp AB$,$\therefore \angle CMN = 90° + 2\angle ACM$,$\because \angle CMN + \angle N + \angle MCN = 180°$,$\therefore \angle N = 45° - \angle ACM$,$\therefore \angle MCN = \angle N$,$\therefore CM = MN$.

15. (1)**解**:$\because \angle ECB = 90°$,$\therefore \angle B + \angle E = 90°$,$\because DE // BC$,$\therefore \angle AHB = \angle E$,$\therefore \angle B + \angle AHB = 90°$. $\therefore \angle BAE = 180° - 90° = 90°$.
(2)**证明**:$\because A$ 是斜边 BE 的中点,$\therefore AB = AC = AE$,$\therefore \angle B = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle DAE$,同时 $AD = AE$,$\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形,$\therefore$ 中线 AM 也是角平分线,$\therefore \angle MAE = \angle DAM = \angle B$,又 $\angle BAN + \angle ANB + \angle B = 180°$,$\therefore \angle ANB + \angle MAE + \angle BAN = 180°$,即 $\angle ANB + \angle BAE = 180°$.
(3)**解**:$\because \angle ANB + \angle BAE = \angle ANB + \angle BAN + \angle MAE = 180°$,且在 $\triangle ABN$ 中,$\angle ANB + \angle BAN + \angle B = 180°$,$\therefore \angle B = \angle MAE$,同时 $\angle E$ 是原来直角三角形里的另一个锐角,就是 $\angle B$ 的余角,$\therefore \angle E + \angle MAE = \angle E + \angle B = 90°$,$\therefore \angle AME = 90°$. 结论:点 M 在 DE 上的位置满足 $AM \perp DE$.

1.2　直角三角形的性质和判定(Ⅱ)

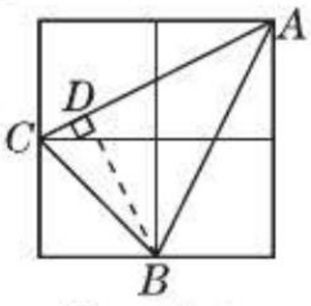
Ⅰ. 同类变式

1. (1)10　(2)12　(3)16;30

点拨:(1)已知两直角边 a,b,由勾股定理得 $c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100$,得 $c = 10$;(2)已知直角三角形的斜边 c 和一条直角边 b,则 $a^2 = c^2 - b^2$,得 $a = 12$;(3)因为 $a : b = 8 : 15$,所以可设 $a = 8k$,$b = 15k$($k > 0$),又因为 $\angle C = 90°$,$c = 34$,所以 $c^2 = a^2 + b^2$,即 $34^2 = (8k)^2 + (15k)^2$,解得 $k = 2$. 所以 $a = 16$,$b = 30$.

2. (1)17 或 $\sqrt{161}$　(2)20 或 12

4. C　**点拨**:如图,过 B 点作 $BD \perp AC$ 于点 D. $\because$ 小正方形的边长为 2,$\therefore AC = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$,又$\because S_{\triangle ABC} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 6$,$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times BD = 6$,解得 $BD = \frac{6}{5}\sqrt{5}$. 故选 C.



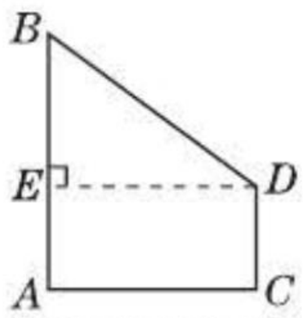
(第4题图)

5. C

9. **解**:$AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$. 证明如下:
$\because \angle C = 90°$,
$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle BCD$ 中,由勾股定理,得 $BC^2 = AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$,
$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$.
点拨:证明线段的平方关系的方法:首先考虑运用勾股定理,从题图中寻找或构造包含所证线段的直角三角形,结合等量代换和代数中的恒等变换进行论证.

11. $\sqrt{7}$

12. **解**:由题意可画出如图所示的图形,过点 D 作 $DE \perp AB$,垂足为点 E,则 $\angle BED = 90°$,$AE = CD$,$DE = AC$,其中 $AB = 10$ m,$AC = 8$ m,$CD = 4$ m. $\therefore BE = AB - AE = AB - CD = 10 - 4 = 6$(m). 在 Rt$\triangle BDE$ 中,由勾股定理,得 $BD^2 = BE^2 + DE^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.
$\therefore BD = 10$ m,$\therefore$ 小鸟至少要飞行 10 m.



(第12题图)

13. **解**:小明的解答不正确.
理由是:$\because \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2^2$,
$\therefore$ 三角形是直角三角形.

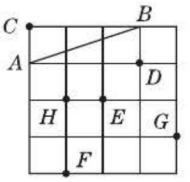
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B　**2**. C

3. C　**点拨**:$\because \angle AEB = 90°$,$AE = 6$,$BE = 8$,
$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABE$ 中,$AB^2 = AE^2 + BE^2 = 100$,
$\therefore S_{阴影部分} = S_{正方形ABCD} - S_{\triangle ABE} = AB^2 - \frac{1}{2}AE \cdot BE = 100 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 76$. 故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. D　**点拨**：如图，当 AB 是斜边时，则第三个顶点所在的位置有：C，D，E，H 四个；当 AB 是直角边，A 是直角顶点时，第三个顶点是 F 点；当 AB 是直角边，B 是直角顶点时，第三个顶点是 G，因而共有 6 个满足条件的顶点. 故选 D.



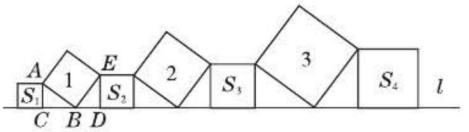
（第 4 题图）

5. B　**点拨**：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CB=5$ m，$AC=5\sqrt{3}$ m，$\therefore AB=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}=10$(m)，$\therefore$ 这棵树在折断前的高度为 $10+5=15$(m).

6. D　**7.** D　**8.** 3

9. $-\sqrt{2}$　**点拨**：本题运用了数形结合思想. $\because OB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. $\therefore OA=OB=\sqrt{2}$. $\because$ 点 A 在数轴上原点的左边，$\therefore$ 点 A 表示的数是 $-\sqrt{2}$.

10. 4　**点拨**：如图，$\because AB=BE$，$\angle ACB=\angle BDE=\angle ABE=90°$，$\therefore \angle ABC+\angle BAC=90°$，$\angle ABC+\angle EBD=90°$，$\therefore \angle BAC=\angle EBD$，$\therefore \triangle ABC\cong\triangle BED$，$\therefore AC=BD$，$BC=DE$，则 S_1+S_2 为直角三角形的两条直角边的平方和，根据勾股定理，得 $S_1+S_2=1$，同理 $S_3+S_4=3$. 则 $S_1+S_2+S_3+S_4=1+3=4$.



（第 10 题图）

11. **解**：$\because S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=60$，$DE=12$，

$\therefore \frac{1}{2}\times AB\times 12=60$，解得 $AB=10$.

$\because AC^2+BC^2=8^2+6^2=100=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle C=90°$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$.

点拨：本题要先根据题意判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，再求面积.

12. D　**点拨**：设 $AB=x$，则 $AF=x$，易得 $\triangle ABE\cong\triangle AFE$，$\therefore \angle AFE=\angle B=90°$，$BE=EF$，$\therefore EC=BC-BE=8-3=5$. 在 Rt$\triangle EFC$ 中，由勾股定理可得 $FC=4$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$x^2+8^2=(x+4)^2$，解得 $x=6$. 即 AB 的长为 6.

13. D　**点拨**：(1) $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，$\therefore S_1+S_2=S_3$.

(2) $S_1=\frac{\pi}{8}a^2$，$S_2=\frac{\pi}{8}b^2$，$S_3=\frac{\pi}{8}c^2$，

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore \frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2=\frac{\pi}{8}c^2$，

$\therefore S_1+S_2=S_3$.

(3) $S_1=\frac{1}{4}a^2$，$S_2=\frac{1}{4}b^2$，$S_3=\frac{1}{4}c^2$，

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore \frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}c^2$，

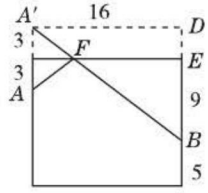
$\therefore S_1+S_2=S_3$.

(4) $S_1=a^2$，$S_2=b^2$，$S_3=c^2$，

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore S_1+S_2=S_3$.

综上，可得面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的图形有 4 个. 故选 D.

14. 20　**点拨**：如图(单位：cm)，将杯子侧面展开，作 A 关于 EF 的对称点 A'，连接 $A'B$，则 $A'B$ 即为最短距离，$A'B=\sqrt{A'D^2+BD^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20$(cm).



（第 14 题图）

15. $\sqrt{2\,019}$　**点拨**：由勾股定理得：$OP_4=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，…，以此类推可得 $OP_n=\sqrt{n+1}$，

$\therefore OP_{2\,018}=\sqrt{2\,019}$.

16. **解**：$\because m$，n 是正整数，且 $m>n$，

$\therefore c>b$，$c>a$.

$\therefore a^2+b^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4$.

又$\because c^2=(m^2+n^2)^2=m^4+2m^2n^2+n^4$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$. $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

17. **解**：连接 BD，

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$BD^2=AB^2+AD^2=3^2+4^2=5^2$，

在$\triangle CBD$ 中，$CD^2=13^2$，$BC^2=12^2$，

而 $12^2+5^2=13^2$，即 $BC^2+BD^2=CD^2$，

$\therefore \angle DBC=90°$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB+\frac{1}{2}DB\cdot BC=\frac{1}{2}\times 4\times 3+\frac{1}{2}\times 12\times 5=36$(m^2).

$\therefore$ 要投入 $36\times 200=7\,200$(元).

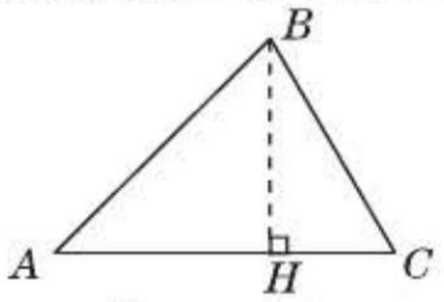
18. (1) **解**：命题“直角三角形是勾股三角形”是假命题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**:由题意可得$\begin{cases}x+y+z=180,\\xy=2\ 160,\\x^2+y^2=z^2,\end{cases}$

解得 $x+y=102$.

(3)**证明**:如图,过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H.



(第18题图)

设 $AH=x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中,$BH=\sqrt{6-x^2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBH$ 中,$(\sqrt{6-x^2})^2+[(1+\sqrt{3})-x]^2=2^2$,解得 $x=\sqrt{3}$,

$\therefore AH=BH=\sqrt{3}$,$HC=1$,

$\therefore \angle A=\angle ABH=45°$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle HBC$ 中,$HC=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore \angle HBC=30°$,$\therefore \angle BCH=60°$,$\angle ABC=75°$.

$\because 45^2+60^2=75^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是勾股三角形.

1.3 直角三角形全等的判定

Ⅰ. 同类变式

2. **解**:$\because AD\perp BC$ 于点 D,$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$. $\because \angle ABD=\angle BAD$,$\therefore AD=BD$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BDE$和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$\begin{cases}BE=AC,\\BD=AD,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC(\mathrm{HL})$,$\therefore DE=CD$.

又$\because BC=BD+CD=10$,$AE=AD-DE=4$,

$\therefore BD=7$,$CD=3$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B

2. C **点拨**:$\because \angle ABC=\angle ADC=90°$,$\therefore \triangle ADC$ 与 $\triangle ABC$ 都是直角三角形,又$\because CB=CD$,$AC=AC$,$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADC\cong\mathrm{Rt}\triangle ABC$,

$\therefore \angle ACD=\angle ACB=90°-\angle BAC=55°$,

$\therefore \angle BCD=110°$.

3. B

4. B **点拨**:$\because$ 把一张长方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠,$\therefore \angle C=\angle A=90°$,$AB=CD$. 又$\because \angle AOB=\angle COD$,$\therefore \triangle ABO\cong\triangle CDO$,$\therefore OB=OD$,$\therefore \triangle BOD$ 是等腰三角形. 其他结论无法证明.

5. D

6. $EB=BD$(答案不唯一)

7. 7 **点拨**:由已知易证 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle BEC$(HL),$\therefore AE=BC$,$\because AD=BE$,$AD+BC=7$,$\therefore AB=AE+BE=BC+AD=7$.

8. **证明**:$\because CD\perp AB$,$C'D'\perp A'B'$,$\therefore \triangle CDB$ 和 $\triangle C'D'B'$都是直角三角形,在 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle C'D'B'$中,$\begin{cases}CD=C'D',\\BC=B'C',\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CDB\cong\mathrm{Rt}\triangle C'D'B'(\mathrm{HL})$,

$\therefore \angle B=\angle B'$. $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$都是直角三角形. $\therefore \angle ACB=\angle A'C'B'=90°$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$中,

$\begin{cases}\angle ACB=\angle A'C'B',\\BC=B'C',\\\angle B=\angle B',\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'(\mathrm{ASA})$.

9. **证明**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DCB$ 中,

$\begin{cases}AC=BD,\\CB=BC,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle DCB(\mathrm{HL})$.

$\therefore \angle OBC=\angle OCB$.

$\therefore OB=OC$.

10. (1)**证明**:$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle CBF=\angle ABE=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CBF$ 中,$\begin{cases}AE=CF,\\AB=BC,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBF(\mathrm{HL})$.

(2)**解**:$\because AB=BC$,$\angle ABC=90°$,

$\therefore \angle CAB=\angle ACB=45°$,$\therefore \angle BAE=\angle CAB-\angle CAE=45°-30°=15°$. 由(1)知 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBF$,$\therefore \angle BCF=\angle BAE=15°$,$\therefore \angle ACF=\angle BCF+\angle ACB=15°+45°=60°$.

11. **解**:$BE\perp AC$. 理由:

因为 $AD\perp BC$,

所以 $\angle BDF=\angle ADC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$\begin{cases}BF=AC,\\FD=CD,\end{cases}$

所以 $\mathrm{Rt}\triangle BDF\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC(\mathrm{HL})$.

所以 $\angle BFD=\angle C$.

又因为 $\angle FBD+\angle BFD=90°$,

所以 $\angle FBD+\angle C=90°$,

所以 $\angle BEC=180°-\angle FBD-\angle C=90°$,

所以 $BE\perp AC$.

12. (1)**证明**:①$\because \angle ADC=\angle ACB=\angle BEC=90°$,$\therefore \angle CAD+\angle ACD=90°$,$\angle ACD+\angle BCE=90°$,$\therefore \angle CAD=\angle BCE$. 又$\because AC=BC$,$\therefore \triangle ADC\cong\triangle CEB$. ②$\because \triangle ADC\cong\triangle CEB$,$\therefore AD=CE$,$CD=BE$,$\therefore DE=CE+CD=AD+BE$.

(2)**证明**:$\because \angle ADC=\angle CEB=\angle ACB=90°$,$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90°$,$\angle BCE+\angle CBE=90°$,$\therefore \angle ACD=\angle CBE$,又$\because AC=BC$,$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE$,$\therefore AD=CE$,$CD=BE$,$\therefore DE=CE-CD=AD-BE$.

(3)**解**:DE,AD,BE 具有的数量关系是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$DE = BE - AD$. 证明如下：∵ $\angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90°$，∴ $\angle ACD + \angle BCE = 90°$，$\angle BCE + \angle CBE = 90°$，∴ $\angle ACD = \angle CBE$，又∵ $AC = BC$，∴ $\triangle ACD \cong \triangle CBE$，∴ $AD = CE$，$CD = BE$，∴ $DE = CD - CE = BE - AD$.

1.4 角平分线的性质

Ⅰ. 同类变式

2. 证明：∵ AD 平分 $\angle CAB$，$DE \perp AB$ 于 E，$\angle C = 90°$，∴ $\angle DEB = \angle C = 90°$，$DE = DC$.

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle FDC$ 中，$\begin{cases} DE = DC, \\ \angle DEB = \angle C, \\ BE = FC, \end{cases}$

∴ $\triangle BDE \cong \triangle FDC$. ∴ $BD = FD$.

点拨：要证 $BD = FD$，可考虑证两线段所在的 $\triangle BDE$ 和 $\triangle FDC$ 全等，两个三角形中已有一角和一边相等，只要再证 $DE = DC$ 即可，这可由 AD 平分 $\angle CAB$ 及垂直条件证得. 由角平分线的性质不用证全等可以直接得线段相等，这是证线段相等的一个简捷方法.

3. 3 cm

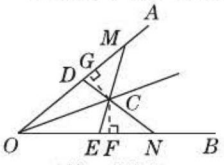
6. 证明：过点 C 作 $CG \perp OA$ 于 G，$CF \perp OB$ 于 F，如图，在 $\triangle MOE$ 和 $\triangle NOD$ 中，$OM = ON$，$\angle MOE = \angle NOD$，$OE = OD$，

∴ $\triangle MOE \cong \triangle NOD$(SAS).

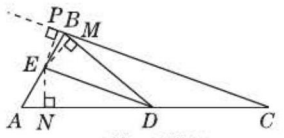
∴ $S_{\triangle MOE} = S_{\triangle NOD}$，∴ $S_{\triangle MOE} - S_{四边形ODCE} = S_{\triangle NOD} - S_{四边形ODCE}$，即 $S_{\triangle MDC} = S_{\triangle NEC}$.

∵ $OM = ON$，$OD = OE$，∴ $MD = NE$，又由三角形面积公式得：$\frac{1}{2}DM \cdot CG = \frac{1}{2}EN \cdot CF$，∴ $CG = CF$. 又∵ $CG \perp OA$，$CF \perp OB$，

∴ OC 平分 $\angle AOB$.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 解：如图，过 E 作 $EN \perp CA$ 于点 N，$EM \perp BD$ 于点 M，$EP \perp CB$ 交 CB 的延长线于点 P，

因为 $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 100° - 20° = 80°$，$\angle PBA = 180° - 100° = 80°$，

所以 $\angle PBA = \angle ABD$.

因为 $EM \perp BD$ 于点 M，$EP \perp CB$ 于点 P，

所以 $EP = EM$.

又因为点 E 在 $\angle ACB$ 的平分线上，$EN \perp CA$，$EP \perp CB$，所以 $EN = EP$，所以 $EN = EM$，

所以 DE 平分 $\angle ADB$.

因为 $\angle ADB = \angle ACB + \angle CBD = 40°$，

所以 $\angle ADE = \frac{1}{2}\angle ADB = \frac{1}{2} \times 40° = 20°$.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D **2.** B

3. B **点拨**：由角平分线的性质易知 $DE = DF = 1.5$. ∵ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$，

∴ $\frac{1}{2} \times 4 \times 1.5 + \frac{1}{2} \times AC \times 1.5 = 5.1$，

∴ $AC = 2.8$.

4. 3

5. 解：∵ $PA \perp ON$，$PB \perp OM$，$PA = PB$，

$\angle MON = 50°$，∴ $\angle AOP = \frac{1}{2}\angle MON = 25°$.

又∵ $\angle OPC = 30°$，

∴ $\angle PCA = \angle AOP + \angle OPC = 55°$.

6. 解：$PM = PN$.

证明如下：∵ OE 平分 $\angle AOB$，

∴ $\angle COE = \angle DOE$.

在 $\triangle COE$ 和 $\triangle DOE$ 中，$\begin{cases} OE = OE, \\ \angle COE = \angle DOE, \\ OC = OD, \end{cases}$

∴ $\triangle COE \cong \triangle DOE$. ∴ $\angle CEO = \angle DEO$.

又∵ $PM \perp CE$，$PN \perp DE$，∴ $PM = PN$.

点拨：题中虽有角平分线和两条垂线段，但垂线段不和已知角平分线的角的两边垂直，因此不能直接用角平分线的性质判定 PM，PN 的数量关系，本题的易错之处是直接运用角平分线的性质.

7. B

8. B **点拨**：作 $MN \perp AD$ 于 N，

∵ $\angle B = \angle C = 90°$，∴ $AB \parallel CD$.

∴ $\angle DAB = 180° - \angle ADC = 70°$.

∵ DM 平分 $\angle ADC$，$MN \perp AD$，$MC \perp CD$，

∴ $MN = MC$，

∵ M 是 BC 的中点，

∴ $MC = MB$，

∴ $MN = MB$，又 $MN \perp AD$，$MB \perp AB$，

∴ AM 是 $\angle DAB$ 的平分线，

∴ $\angle MAB = \frac{1}{2}\angle DAB = 35°$.

故选 B.

9. 2 **点拨**：作 $EH \perp OA$ 于 H，

∵ $\angle AOE = \angle BOE = 15°$，$EC \perp OB$，$EH \perp OA$，

∴ $EH = EC = 1$，$\angle AOB = 30°$，

∵ $EF \parallel OB$，

∴ $\angle EFH = \angle AOB = 30°$，$\angle FEO = \angle BOE$，

∴ $EF = 2EH = 2$，$\angle FEO = \angle FOE$，

∴ $OF = EF = 2$.

10. 解：∵ BD 平分 $\angle CBA$，$DE \perp AB$，$\angle C = 90°$，∴ $\angle DEB = \angle C = 90°$，$CD = DE$. ∴ $AD + DE = AD + CD = AC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AC = BC, \therefore AD + DE = BC.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEB$ 中，$\begin{cases} CD = ED, \\ BD = BD, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DCB \cong \mathrm{Rt}\triangle DEB.$

$\therefore BC = BE. \therefore AD + DE = BE.$

点拨：本题体现了转化思想，用角的平分线的性质把 DE 转化成 CD，用全等三角形的性质把 BE 转化成 BC.

11. **解**：(1)相等. 证明：

过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M，$DN \perp AC$ 于点 N，则 $\angle EMD = \angle FND = 90°$.

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore DM = DN.$

$\because \angle AED + \angle AFD = 180°, \angle DFN + \angle AFD = 180°,$

$\therefore \angle AED = \angle DFN.$

在 $\triangle DEM$ 和 $\triangle DFN$ 中，

$\begin{cases} \angle EMD = \angle FND, \\ \angle MED = \angle DFN, \\ DM = DN, \end{cases}$

$\therefore \triangle DEM \cong \triangle DFN. \therefore DE = DF.$

(2)不一定成立.

中考提分专题篇

好题必练

1. C **2.** B

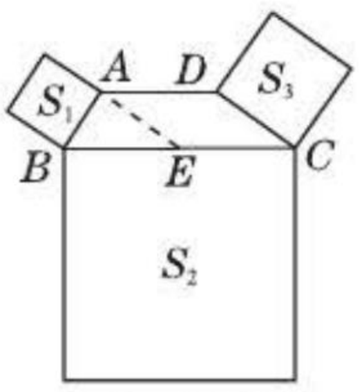
3. D **点拨**：添加 A 选项中条件可用“AAS”判定两个三角形全等；添加 B 选项中条件可用“SAS”判定两个三角形全等；添加 C 选项中条件可用“HL”判定两个三角形全等. 故选 D.

4. A **点拨**：$\because \angle ACB = \angle AC'B' = 90°, AC = BC = 3, \therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}, \angle CAB = 45°, \because \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 大小、形状完全相同，$\therefore \angle C'AB' = \angle CAB = 45°, AB' = AB = 3\sqrt{2}, \therefore \angle CAB' = 90°, \therefore B'C = \sqrt{CA^2 + B'A^2} = 3\sqrt{3}$，故选 A.

5. A **6.** D

7. A **点拨**：$\because \angle BAC = 90°, AB = 3, AC = 4, \therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \therefore BC$ 边上的高 $= 3 \times 4 \div 5 = \frac{12}{5}. \because AD$ 平分 $\angle BAC, \therefore$ 点 D 到 AB, AC 的距离相等，设为 h，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3h + \frac{1}{2} \times 4h = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{12}{5}$，解得 $h = \frac{12}{7}, \therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{12}{7} = \frac{1}{2} BD \times \frac{12}{5}$，解得 $BD = \frac{15}{7}$. 故选 A.

8. D **点拨**：$\because S_1 = 3, S_3 = 9, \therefore AB = \sqrt{3}, CD = 3$，如图，过 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于 E，则 $\angle AEB = \angle DCB, \because AD \parallel BC, \therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形. $\therefore CE = AD, AE = CD = 3.$



(第8题图)

$\because \angle ABC + \angle DCB = 90°, \therefore \angle AEB + \angle ABC = 90°, \therefore \angle BAE = 90°.$

$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 2\sqrt{3}.$

$\because BC = 2AD, \therefore BC = 2BE = 4\sqrt{3}, \therefore S_2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$，故选 D.

9. 20 cm

10. 2 **点拨**：$\because \angle ACB = 90°, FD \perp AB, \therefore \angle ACB = \angle FDB = 90°, \because \angle F = 30°, \therefore \angle A = \angle F = 30°$(同角的余角相等). 又 AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 $E, \therefore \angle EBA = \angle A = 30°, \therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DBE$ 中，$BE = 2DE = 2.$

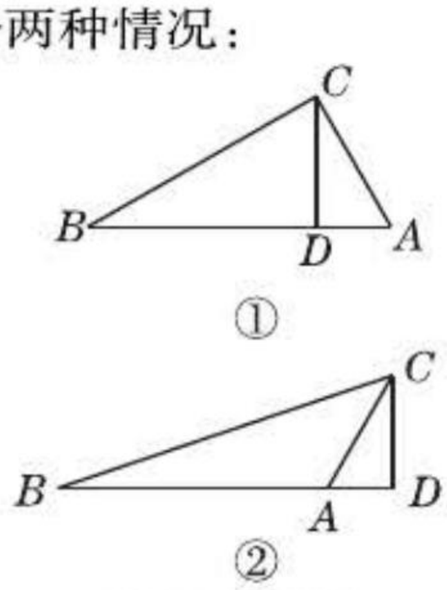
11. 6.5

12. $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$ **点拨**：分两种情况：

①当高 CD 在 $\triangle ABC$ 内部时，如图①.

$\because CD \perp AB, \therefore \angle CDA = 90°.$

$\because CD = \sqrt{3}, AD = 1, \therefore AC = 2, \because AB = 2AC, \therefore AB = 4, \therefore BD = 4 - 1 = 3, \therefore BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}.$



(第12题图)

②当高 CD 在 $\triangle ABC$ 外部时，如图②.

同理得：$AC = 2, AB = 4. \therefore BD = 4 + 1 = 5. \therefore BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 5^2} = 2\sqrt{7}.$

综上所述，BC 的长为 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$.

13. 1 **点拨**：$\because CE \perp AB, AD \perp BC, \therefore \angle BEC = \angle AEC = \angle ADB = 90°. \therefore \angle BAD + \angle B = \angle BCE + \angle B = 90°. \therefore \angle BAD = \angle BCE.$ 又 $\because \angle AEH = \angle CEB = 90°, EH = EB, \therefore \triangle AEH \cong \triangle CEB. \therefore CE = AE = 4. \therefore CH = CE - EH = 4 - 3 = 1.$

14. 1.5 cm

15. $0 < CD \leqslant 5$ **点拨**：当点 D 与点 E 重合时，$CD = 0$，此时 $\angle CDE = 30°$ 不成立，当点 D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

与点 A 重合时，∵ $\angle BAE=90°$，$\angle B=60°$，∴ $\angle E=30°$，∵ $\angle CDE=30°$，∴ $\angle CDE=\angle E$，$\angle CDB=60°$，∴ $CE=CD$，$\angle CDB=\angle B$，∴ $CD=CB$，∴ $CD=\frac{1}{2}BE=5$，∴ $0<CD\leqslant 5$.

16. 32°

17. **证明**：∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$，$\angle C=90°$，∴ $DE=DC$，$\angle EAD=\angle CAD$.
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\angle EAD=\angle CAD$，$\angle AED=\angle C=90°$，$DE=DC$，
∴ $\triangle AED\cong\triangle ACD$. ∴ $AE=AC$.
又∵ $AE\perp DE$，$\angle C=90°$，
∴ A 点在 $\angle CDE$ 的平分线上.

18. **证明**：连接 EM，DM，EN，DN.
∵ BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高，
∴ $BD\perp AC$，$CE\perp AB$，
∴ $\angle ADB=\angle CDB=\angle AEC=\angle BEC=90°$，
在 Rt$\triangle ADO$ 中，N 为斜边 AO 的中点，
∴ $DN=\frac{1}{2}AO$.
在 Rt$\triangle AEO$ 中，N 为斜边 AO 的中点，
∴ $EN=\frac{1}{2}AO$，∴ $EN=DN$.
∴ N 在 DE 的垂直平分线上.
在 Rt$\triangle BCD$ 中，M 为斜边 BC 的中点，
∴ $DM=\frac{1}{2}BC$.
在 Rt$\triangle BCE$ 中，M 为斜边 BC 的中点，
∴ $EM=\frac{1}{2}BC$，∴ $DM=EM$，
∴ M 在 DE 的垂直平分线上，
∴ MN 垂直平分 DE.

19. (1)**解**：相等.
证明如下：因为 $CD\perp AB$，$BE\perp AC$，所以 $\angle BDC=\angle BEA=\angle CDA=90°$. 又因为 $\angle ABC=45°$，所以 $\angle BCD=45°=\angle ABC$. 所以 $DB=DC$. 因为 $\angle A+\angle DCA=90°$，$\angle A+\angle ABE=90°$，所以 $\angle DCA=\angle ABE$. 在 $\triangle DBH$ 和 $\triangle DCA$ 中，因为 $\angle DBH=\angle DCA$，$DB=DC$，$\angle BDH=\angle CDA$，所以 $\triangle DBH\cong\triangle DCA$，所以 $HB=AC$.
(2)**证明**：连接 CG. 因为 F 为 BC 的中点，$DB=DC$，所以 DF 垂直平分 BC. 所以 $BG=CG$. 因为 $BE\perp AC$，所以 $\angle AEB=\angle CEB=90°$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中，因为 $\angle AEB=\angle CEB$，$BE=BE$，$\angle ABE=\angle CBE$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle CBE$. 所以 $EA=EC$.
在 Rt$\triangle CGE$ 中，由勾股定理得 $CG^2-GE^2=EC^2$，所以 $BG^2-GE^2=EA^2$.

20. **解**：(1)∵ $\triangle ABC$ 的周长是 $4+2\sqrt{6}$，$AB=4$，$AC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，∴ $BC=(4+2\sqrt{6})-4-(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. ∵ $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4^2$，∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.
(2)过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M. ∵ $DE\perp AB$，∴ $CM\parallel DE$，∴ $\angle DEF=\angle MCF$. 又∵ $\angle ACB=90°$，CD 是 AB 边上的中线，∴ $AD=CD$，∴ $\angle A=\angle ACD$，易知 $\angle BCM=\angle A$，∴ $\angle ACD=\angle BCM$. ∵ CE 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle ACE=\angle BCE$，∴ $\angle DCF=\angle MCF$，∴ $\angle DCF=\angle DEF$，∴ $DC=DE$. ∵ $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle ACB=90°$，CD 是 AB 边上的中线，∴ $DE=CD=DB=\frac{1}{2}AB=2$，∴ $\triangle DBE$ 的面积 $=2\times 2\div 2=2$.

21. **解**：(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，∵ $AC=8$，$BC=6$，∴ $AB=10$，∴ $AQ=10-2t$，$CP=8-t$.
(2)∵ $AP=t$，$AQ=10-2t$，令 $t=10-2t$，解得 $t=\frac{10}{3}$，∴ 当 $t=\frac{10}{3}$ 时，$AP=AQ$.
(3)假设存在 t 值. ∵ 在 Rt$\triangle PCB$ 中，$\angle PCB=90°$，∴ $CP^2+BC^2=BP^2$.
∵ $CP=8-t$，$BC=6$，$BP=AP=t$，
∴ $6^2+(8-t)^2=t^2$，解得 $t=\frac{25}{4}$，
又∵ $AQ=10-2t\geqslant 0$，∴ $t\leqslant 5$，
∴ 不存在使 $AP=BP$ 的 t 值.

第2章 四边形

2.1 多边形

Ⅰ. 同类变式

2. D　**点拨**：方法一：排除法，把 6，7，8，9 分别代入 $\frac{n(n-3)}{2}$，只有 $n=9$ 时符合题意；
方法二：方程思想：设边数为 n，则 $\frac{n(n-3)}{2}=3n$，∵ $n\neq 0$，∴ $n-3=6$，∴ $n=9$.

3. **解**：由题意可知，n 名同学握手次数就是 n 边形的对角线条数和边数的和. 依题意有共握手次数为
$\frac{n(n-3)}{2}+n=\frac{n(n-1)}{2}$.
把 $n=25$ 代入 $\frac{n(n-1)}{2}$，得
共握手 $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{25\times(25-1)}{2}=300$(次).

7. C　**10.** C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D　**点拨**：∵ 多边形的外角和是360°，∴ 钝角最多只能有3个.

2. B　**3.** A　**4.** 425　**5.** 10

6. 11　**点拨**：设一个内角的度数为$9x$，一个外角的度数为$2x$，则$9x+2x=180°$，解得$x=\left(\frac{180}{11}\right)°$. 所以一个外角的度数为$\left(\frac{360}{11}\right)°$，这个多边形的边数为$360°\div\left(\frac{360}{11}\right)°=11$.

7. 24°　**点拨**：正三角形的每个内角是$180°\div3=60°$，正方形的每个内角是$360°\div4=90°$，正五边形的每个内角是$(5-2)\times180°\div5=3\times180°\div5=540°\div5=108°$.

正六边形的每个内角是$(6-2)\times180°\div6=4\times180°\div6=720°\div6=120°$.

则$\angle3+\angle1-\angle2=(90°-60°)+(120°-108°)-(108°-90°)=30°+12°-18°=24°$.

8. 240　**点拨**：本题运用了整体思想，根据四边形的内角和求$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$的度数和；把$\angle1+\angle2$看成一个整体，根据五边形的内角和求$\angle1+\angle2$的度数.

9. 解：∵ $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle CDE+\angle E+\angle F=(6-2)\times180°=720°$，∴ $\angle CDE+\angle ABC=720°-\angle A-\angle C-\angle E-\angle F=720°-90°-90°-260°=280°$.

∴ $\angle\alpha+\angle\beta=2\times180°-(\angle CDE+\angle ABC)=360°-280°=80°$.

10. B　**11.** C

12. 解：由题意得$\angle B=\angle E=\angle BAE=\frac{(5-2)\times180°}{5}=108°$. 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\angle BCA=\frac{180°-108°}{2}=36°$，在$\triangle AED$中，$\angle EAD=\angle EDA=\frac{180°-108°}{2}=36°$，

∴ $\angle CAD=\angle BAE-\angle BAC-\angle EAD=108°-36°-36°=36°$.

13. 解：(1)因为2 005不是180的整数倍，所以小明说不可能.

(2)设这个多边形的边数为x，由题意得$2\,005°-180°<(x-2)\times180°<2\,005°$，解得$12\frac{5}{36}<x<13\frac{5}{36}$.

因为x为不小于3的自然数，所以小华求的是十三边形的内角和.

(3)十三边形的内角和是$(13-2)\times180°=1\,980°$，错把外角当内角的那个外角的度数是$2\,005°-1\,980°=25°$.

14. 解：连接AC. ∵ $CD\parallel AF$，

∴ $\angle DCA+\angle CAF=180°$.

∵ $AB\perp BC$，∴ $\angle BCA+\angle BAC=90°$.

∴ $\angle BCD+\angle BAF=\angle BCA+\angle DCA+\angle BAC+\angle CAF=270°$.

∴ $\angle BAF=270°-\angle BCD=270°-124°=146°$.

∵ $\angle CDE=\angle BAF$，∴ $\angle CDE=146°$.

∵ 六边形的内角和为$(6-2)\times180°=720°$，

∴ $\angle F=720°-2\times146°-90°-124°-80°=134°$.

点拨：本题运用整体思想把$\angle BCD$与$\angle BAF$，$\angle CAF$与$\angle DCA$，$\angle BCA$与$\angle BAC$分别看成一个整体是解题的关键.

2.2 平行四边形

2.2.1 平行四边形的性质

Ⅰ. 同类变式

2. 证明：∵ $\angle C+\angle D=180°$，∴ $BC\parallel AD$. 又∵ $AB\parallel CD$，∴ 四边形$ABCD$是平行四边形.

3. C

4. 解：在$\square ABCD$中，$\angle D=\angle B$，$\angle A+\angle B=180°$. ∵ $\angle A:\angle B=1:3$，∴ $\angle B=135°$.

∴ $\angle D=\angle B=135°$.

5. 证明：∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$\angle B=\angle D$.

∵ $AE\perp BC$，$FG\perp CD$，

∴ $\angle AEB=\angle GFD=90°$.

又∵ $BE=DF$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle GDF$(ASA).

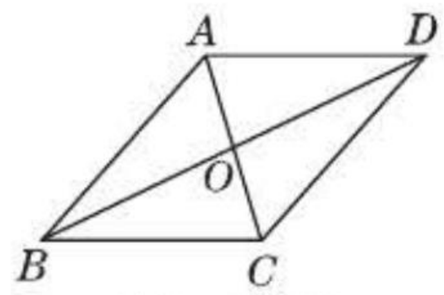
∴ $AB=DG$，∴ $DG=DC$.

9. 16

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C　**2.** D　**3.** B

4. $12<x<28$　**点拨**：如图，在平行四边形$ABCD$中，$AB=10$，$AC=8$，由题意得，$BD=2OB$，$AC=2OA=8$，∴ $OB=\frac{1}{2}BD$，$OA=4$. ∵ 在$\triangle AOB$中，$AB-OA<OB<AB+OA$，∴ $6<OB<14$，∴ $12<BD<28$，即$12<x<28$.



(第4题图)

5. 21 cm²　**点拨**：根据直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半，可求出AB(或AD)边上的高.

6. (1)证明：∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

∴ $\angle BAF=\angle E$，$\angle EAD=\angle F$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

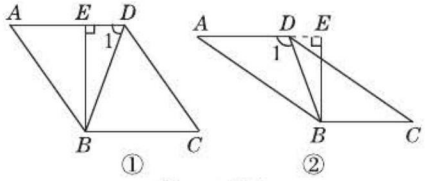
又∵ $\angle EAD = \angle BAF$，∴ $\angle E = \angle F$.
∴ $\triangle CEF$ 是等腰三角形.
(2)**解**：在 $\triangle CEF$ 中，CE 与 CF 的长度之和等于 $\square ABCD$ 的周长.
理由：由(1)知，$\angle EAD = \angle E$，$\angle BAF = \angle F$，
∴ $AD = DE$，$BF = AB$.
∴ $AB + BC + CD + AD = BF + BC + CD + DE = CF + CE$.

7. 证明：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AB \parallel CD$. ∴ $\angle ABE = \angle FCE$.
∵ 点 E 是 BC 的中点，∴ $BE = CE$.
又∵ $\angle AEB = \angle FEC$，∴ $\triangle ABE \cong \triangle FCE$.
∴ $CF = AB$.
(2)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AB = CD$. 又∵ $CF = AB$，∴ $CD = CF$.
∵ $\angle BCD = 90°$，∴ $BD = BF$.

8. D　**9.** D　**10.** 30°

11. 6　**点拨**：∵ $BD = CD$，$AB = CD$，∴ $BD = BA$. 又∵ $AM \perp BD$，$DN \perp AB$，∴ $DN = AM = 3\sqrt{2}$. 又∵ $\angle ABD = \angle MAP + \angle PAB$，$\angle ABD = \angle P + \angle BAP$，∴ $\angle P = \angle PAM$，∴ $\triangle APM$ 是等腰直角三角形，∴ $AP = \sqrt{2}AM = 6$.

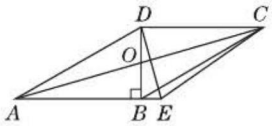
12. 55°或35°　**点拨**：如图①，当 BE 在 $\triangle ABD$ 的内部时，$\angle 1 = 90° - \angle EBD = 90° - 20° = 70°$. ∵ $AD = BD$，∴ $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}(180° - \angle 1) = 55°$.



(第12题图)

如图②，当 BE 在 $\triangle ABD$ 的外部时，$\angle 1 = 90° + \angle EBD = 90° + 20° = 110°$.
∵ $AD = BD$，∴ $\angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}(180° - \angle 1) = 35°$. 故答案为55°或35°.

13. (1)**证明**：∵ 在 $\square ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle A = 30°$，∴ $\angle ADC = 180° - \angle A = 150°$.
∵ DE 平分 $\angle ADC$，∴ $\angle ADE = \frac{1}{2}\angle ADC = 75°$. ∴ $\angle AED = 180° - \angle A - \angle ADE = 75°$. ∴ $\angle ADE = \angle AED$. ∴ $AD = AE$.
(2)**解**：如图.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $OB = OD = \frac{1}{2}BD$，$OA = OC = \frac{1}{2}AC$.
∵ $\angle BAD = 30°$，$\angle ABD = 90°$，
∴ $BD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.
∴ $OB = 3$.
在 Rt $\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得 $AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得 $OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 3^2} = 3\sqrt{13}$，∴ $AC = 2OA = 6\sqrt{13}$.



(第13题图)

14. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
∴ $AB = CD$，$AD \parallel BE$.
∴ $\angle DAE = \angle E$. 又∵ AE 平分 $\angle BAD$，
∴ $\angle DAE = \angle BAE$. ∴ $\angle BAE = \angle E$.
∴ $BE = AB$. 又∵ $AB = CD$，∴ $BE = CD$.
(2)**解**：∵ $BE = AB$，$BF \perp AE$，∴ $AF = EF$.
∵ $AD \parallel BE$，
∴ $\angle D = \angle FCE$，$\angle DAF = \angle E$.
∴ $\triangle ADF \cong \triangle ECF$(AAS).
∴ $S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABE}$.
∵ $BE = AB$，$\angle E = 60°$，
∴ $\triangle ABE$ 为等边三角形. 易得 $BF = 2\sqrt{3}$.
∴ $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. ∴ $S_{\square ABCD} = 4\sqrt{3}$.

15. 解：$EF + GH + MN = 2a$，$EF + GH + MN$ 的值不随点 P 位置的改变而改变. 理由如下：
∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，
∴ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
∵ $GH \parallel BC$，∴ $\angle AGH = \angle B = 60°$，$\angle AHG = \angle C = 60°$. ∴ $\triangle AGH$ 是等边三角形，
∴ $GH = AG = AM + MG$. ①
同理可得 $\triangle BMN$ 是等边三角形，
∴ $MN = MB = MG + GB$. ②
∵ $MN \parallel AC$，$EF \parallel AB$，
∴ 四边形 $AMPE$ 是平行四边形.
∴ $PE = AM$. 同理可得四边形 $BFPG$ 是平行四边形. ∴ $PF = GB$. ∴ $EF = PE + PF = AM + GB$. ③
① + ② + ③，得 $EF + GH + MN = (AM + GB) + (AM + MG) + (MG + GB) = 2(AM + MG + GB) = 2AB = 2a$.
即 $EF + GH + MN$ 的值为 $2a$，其值不随点 P 位置的改变而改变.

2.2.2　平行四边形的判定

Ⅰ. 同类变式

1. 证明：(1)∵ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 30°$，∴ $AB = 2BC$.
又∵ $\triangle ABE$ 是等边三角形，$EF \perp AB$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AB=2AF, AE=BA. \therefore AF=BC.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCA$ 中，$\begin{cases}AF=BC,\\AE=BA,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AFE\cong\mathrm{Rt}\triangle BCA(\mathrm{HL}). \therefore AC=EF.$

(2)$\because$ $\triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DAC=60°, AC=AD.$

又$\because$ $\angle BAC=30°$，

$\therefore \angle DAB=\angle DAC+\angle BAC=90°.$

$\because EF\perp AB, \therefore \angle AFE=90°.$

$\therefore \angle DAB=\angle AFE. \therefore EF/\!/AD.$

$\because AC=EF, AC=AD, \therefore EF=AD.$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

3. **解**：(1)设 x s 后，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，所以 $AP=BQ$，则 $2x=18-3x$，解得 $x=3.6$. 即 3.6 s 后，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，此时四边形 $ABQP$ 的周长是 $3.6\times2\times2+12\times2=38.4(\mathrm{cm})$.

(2)设 y s 后，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，所以 $PD=QC$，则 $10-2y=3y$，解得 $y=2$. 即 2 s 后，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，此时四边形 $PDCQ$ 的周长是 $3\times2\times2+15\times2=42(\mathrm{cm})$.

5. **解**：$\because a^2+b^2+c^2+d^2=2ac+2bd,$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd=0.$

$\therefore (a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bd+d^2)=0,$

即 $(a-c)^2+(b-d)^2=0.$

$\therefore (a-c)^2=0$ 且 $(b-d)^2=0,$

$\therefore a=c, b=d.$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

6. **解**：四边形 $ABFC$ 是平行四边形；理由如下：$\because AB/\!/CD, \therefore \angle BAE=\angle CFE,$

$\because E$ 是 BC 的中点，$\therefore BE=CE.$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FCE$ 中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle CFE,\\\angle AEB=\angle FEC,\\BE=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FCE(\mathrm{AAS});$

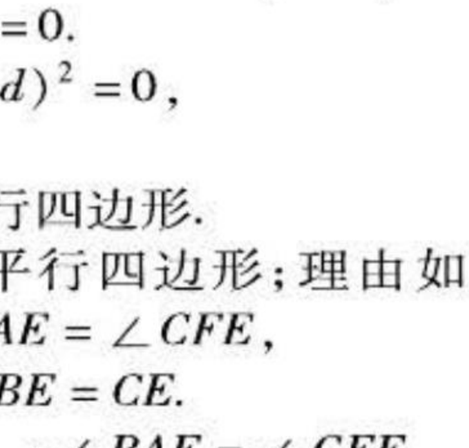
$\therefore AE=EF$，又$\because BE=CE,$

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

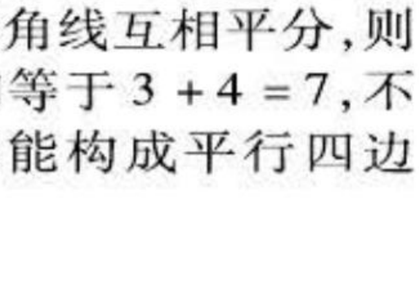
1. B **2.** C

3. C **点拨**：解答本题采用了转化思想，根据平行四边形的判定及性质，找出相等的边，利用等边三角形的性质把 PD，PE，PF 的长度和转化为已知的长度去解题. 如图所示，延长 EP，FP 分别交 AB，BC 于 G，H，则由 $PD/\!/AB$，$PE/\!/BC$，$PF/\!/AC$，可得四边形 $PGBD$，四边形 $EPHC$ 均是平行四边形，$\therefore PG=BD$，$PE=HC$，又 $\triangle ABC$ 是等边三角形，易得 $\triangle PFG$，$\triangle PDH$ 均是等边三角形，$\therefore PF=PG=BD$，$PD=DH$，又 $\triangle ABC$ 的周长为 12，$\therefore PD+PE+PF=DH+HC+BD=BC=\frac{1}{3}\times12=4.$



(第3题图)

4. D **点拨**：如图所示，延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 CE，BE. $\because AD$ 是边 BC 上的中线，$\therefore BD=CD$，$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形. $\therefore CE=AB=7.$ 在 $\triangle ACE$ 中，$CE-AC<AE<CE+AC$，即 $2<2AD<12$，$\therefore 1<AD<6.$



(第4题图)

5. A **点拨**：A. 可以作出平行四边形. B. $2+4=6<7$，由于平行四边形中两组对边相等，则相邻的两边与对角线必须能组成三角形，而这个条件不能满足三角形三边关系，故不能. C. 对角线的一半分别为 3 和 5，与边长 8 不能组成三角形，故不能. D. 根据平行四边形的对角线互相平分，则两条对角线的一半的和等于 $3+4=7$，不能构成三角形，也就不能构成平行四边形. 故选 A.

6. $AD=BC$(答案不唯一)

7. 8 **点拨**：$\because BD\perp AD, DB\perp BC, \therefore AD/\!/BC,$ 当 $AD=BC$ 时，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $11-x=x-5$，解得 $x=8.$

8. ①④，③④

9. **证明**：连接 DE，BF.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC, OB=OD.$

$\because AF=CE, \therefore AF-OA=CE-OC$，即 $OF=OE,$

又$\because OB=OD, \therefore$ 四边形 $BEDF$ 为平行四边形.

$\therefore BE=DF.$

10. **证明**：$\because AB=AC$，D，E 分别是 AB，AC 的中点，$\therefore BD=CE$，$\angle ABC=\angle ACB$，又 $BC=CB, \therefore \triangle BEC\cong\triangle CDB, \therefore BE=CD$，由折叠知，$BE=BF$，$CE=CF, \therefore BF=CD$，$CF=BD,$

$\therefore$ 四边形 $DBFC$ 是平行四边形.

11. (1)**证明**：连接 CE.

$\because$ 点 E 为 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 的斜边 AB 的中点，

$\therefore CE=\frac{1}{2}AB=AE.$

$\because$ $\triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore AD=CD, \angle ADC=\angle ACD=60°.$

$\because$ 在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CDE$ 中，$\begin{cases}AD=DC,\\DE=DE,\\AE=CE,\end{cases}$

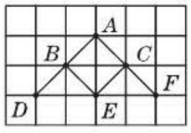
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE$(SSS),
$\therefore \angle ADE = \angle CDE = 30°$.
$\because \angle DCB = \angle ACD + \angle ACB = 150°$,
$\therefore \angle CDE + \angle DCB = 180°$. $\therefore DE // CB$.
(2)**解**:$\because \angle DCB = 150°$,
若四边形 $DCBE$ 是平行四边形,则 $DC // BE$,$\therefore \angle DCB + \angle B = 180°$. $\therefore \angle B = 30°$.
$\therefore$ 在 Rt$\triangle ACB$ 中,$AC = \frac{1}{2}AB$,
即当 $AC = \frac{1}{2}AB$ 时,四边形 $DCBE$ 是平行四边形.

12. (1)**证明**:$\because BC = 2AB$,点 E 是 BC 的中点,$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = AB$. 又$\because \angle ABC = 60°$,
$\therefore \triangle ABE$是等边三角形. $\therefore AE = AB$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AB = CD$. $\therefore AE = CD$.
(2)**解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore BC = AD$,$BC // AD$,$\because$ 点 E,F 分别是 BC,AD 的中点,$\therefore BE = DF$,又 $BE // DF$,
$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,$\therefore DE = BF = 6$.

13. C　**点拨**:根据已知,结合选项,画出图形,再根据平行四边形的判定定理,逐一判断即可.

14. 3　**点拨**:如图所示,有 3 个平行四边形,分别是$\square ABEC$、$\square BCFE$、$\square BCED$.

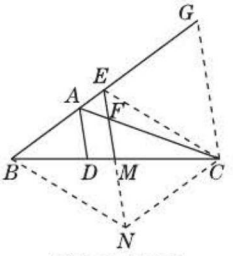


(第 14 题图)

15. (1)**证明**:$\because \angle A = \angle ABC = 90°$,
$\therefore AF // BC$.
$\therefore \angle CBE = \angle DFE$,$\angle BCE = \angle FDE$.
$\because E$ 是边 CD 的中点,$\therefore CE = DE$.
在$\triangle BCE$ 和$\triangle FDE$ 中,$\begin{cases}\angle CBE = \angle DFE,\\ \angle BCE = \angle FDE,\\ CE = DE,\end{cases}$
$\therefore \triangle BCE \cong \triangle FDE$(AAS),$\therefore BE = EF$.
又$\because CE = DE$,
$\therefore$ 四边形 $BDFC$ 为平行四边形.
(2)**解**:若$\triangle BCD$ 是等腰三角形,
①若 $BD = BC$,在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$,
$\therefore$ 四边形 $BDFC$ 的面积 $= 2\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2}$;
②若 $BD = DC$,过 D 作 BC 的垂线,则垂足为 BC 的中点,不可能;
③若 $BC = CD$,过 D 作 $DG \perp BC$,垂足为 G,则 $BG = AD = 1$,$\therefore CG = 2$.
在 Rt$\triangle CDG$ 中,$DG = \sqrt{DC^2 - CG^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$,
$\therefore$ 四边形 $BDFC$ 的面积 $= 3\sqrt{5}$.

16. **证明**:(1)$\because$ 将$\square ABCD$ 沿过点 A 的直线 l 折叠,使点 D 落到 AB 边上的点 D'处,
$\therefore \angle DAE = \angle D'AE$,$\angle DEA = \angle D'EA$,$\angle D = \angle AD'E$.
$\because DE // AD'$,$\therefore \angle DEA = \angle D'AE$.
$\therefore \angle DAE = \angle D'AE = \angle DEA = \angle D'EA$.
$\therefore \angle DAD' = \angle DED'$.
$\therefore$ 四边形 $DAD'E$ 是平行四边形.
$\therefore DE = AD'$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AB \parallel DC$. $\therefore CE \parallel D'B$.
$\therefore$ 四边形 $BCED'$是平行四边形.
(2)$\because BE$ 平分$\angle ABC$,$\therefore \angle CBE = \angle EBA$.
$\because AD // BC$,$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180°$.
$\because \angle DAE = \angle EAB$,
$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90°$.
$\therefore \angle AEB = 90°$. $\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$.

17. **证明**:(1)$\because AD$ 平分$\angle BAC$,
$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.
$\because AD // EM$,
$\therefore \angle BAD = \angle AEF$,$\angle CAD = \angle AFE$.
$\therefore \angle AEF = \angle AFE$. $\therefore AE = AF$.
(2)如图,作 $CG // EM$,交 BA 的延长线于 G.

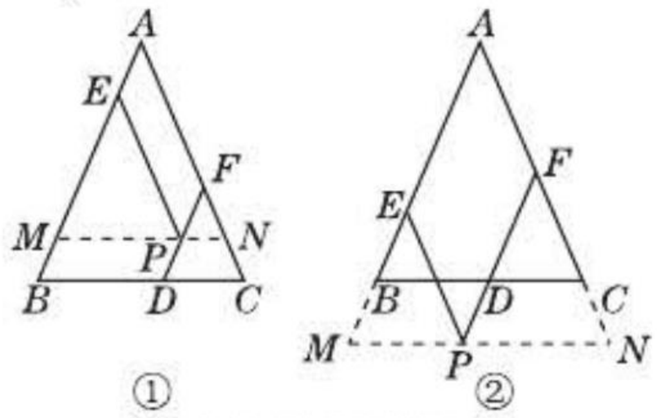


(第 17 题图)

$\because EF // CG$,
$\therefore \angle G = \angle AEF$,$\angle ACG = \angle CFM = \angle AFE$.
$\because \angle AEF = \angle AFE$,$\therefore \angle G = \angle ACG$,
$\therefore AG = AC$.
延长 EM 至 N,使 $MN = EM$,连接 NC,BN,EC.
$\because M$ 为 BC 的中点,$\therefore MB = MC$.
$\therefore$ 四边形 $BNCE$ 是平行四边形.
$\therefore NC // BE$,$NC = BE$. $\therefore NC // EG$.
又$\because EM // CG$,
$\therefore$ 四边形 $NCGE$ 是平行四边形.
$\therefore NC = EG$. $\therefore BE = EG$.
$\therefore BE = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}(AB + AG) = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 解:猜想:$PD+PE+PF=AB$.
证明:$\because PE\parallel AC, PF\parallel AB$,
$\therefore$ 四边形 $PEAF$ 是平行四边形,
$\therefore PF=AE$,
$\because AB=AC, \therefore \angle B=\angle C$,
$\because PE\parallel AC, \therefore \angle EPB=\angle C$,
$\therefore \angle B=\angle EPB, \therefore PE=BE$,
$\because AE+BE=AB, \therefore PE+PF=AB$,
$\because PD=0, \therefore PD+PE+PF=AB$.



(第18题图)

(1)猜想:$PD+PE+PF=AB$.
证明:过点 P 作 $MN\parallel BC$,分别交 AB, AC 于 M, N 两点,如图①所示.
同上得:$PE+PF=AM$,
易证四边形 $BDPM$ 是平行四边形,
$\therefore MB=PD$,
$\therefore PD+PE+PF=AM+MB=AB$.
(2)猜想:$PE+PF-PD=AB$.
点拨:(1)证明四边形 $PEAF$ 是平行四边形,推出 $PF=AE$,根据等腰三角形的性质及平行线的性质推出 $\angle B=\angle C=\angle EPB$,再推出 $PE=BE$ 即可;(2)过点 P 作 $MN\parallel BC$,分别交 AB, AC 于 M, N 两点,推出 $PE+PF=AM$,再推出 $MB=PD$ 即可;(3)如图②所示,过点 P 作 $MN\parallel BC$,分别交 AB, AC 的延长线于 M, N 两点,推出 $PE+PF=AM$,再推出 $MB=PD$ 即可.

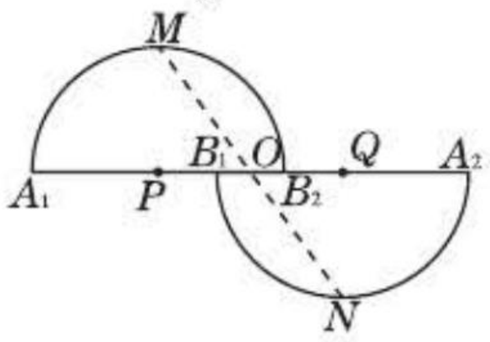
2.3 中心对称和中心对称图形

Ⅰ. 同类变式

1. 解:$\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$;$\triangle OAD$ 与 $\triangle OCB$;$\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$;$\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$.

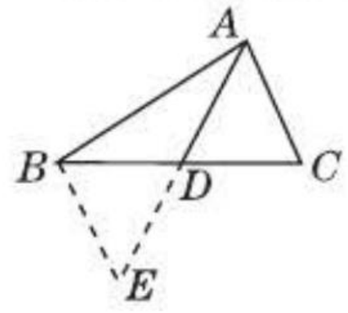
3. 解:连接 AA', BB', CC',三条线段相交于点 O,点 O 即为对称中心.(图略)
(1)点 A';点 B'
(2)是.点 B, O, B' 三点共线,点 C, O, C' 三点共线.
(3)$AO=A'O$.其他相等的线段有 $BO=B'O$, $CO=C'O, AB=A'B', BC=B'C', AC=A'C'$.

5. 解:成中心对称,设弧 A_1B_2 和弧 B_1A_2 的中点分别为点 M, N,连接 MN,与 PQ 交于点 O.对称中心为点 O,如图.

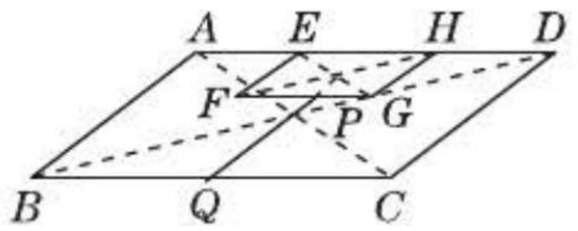


(第5题图)

6. 解:$\because AD$ 为 BC 边上的中线,$\therefore BD=CD$.
作 $\triangle ADC$ 关于点 D 成中心对称的 $\triangle EDB$,如图,则 $DE=AD, BE=AC=3$.在 $\triangle ABE$ 中,由三角形三边关系得 $AB-BE<AE<AB+BE$,即 $2<AE<8$.
又$\because AE=2AD, \therefore 1<AD<4$.



(第6题图)



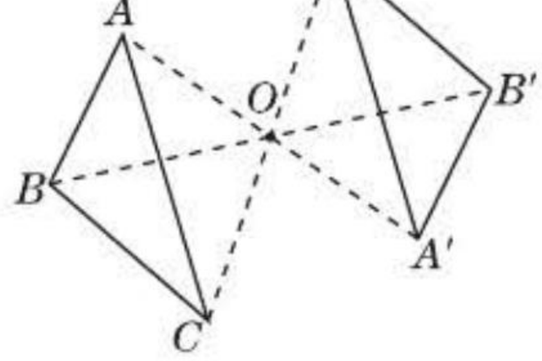
(第10题图)

8. C

10. 解:如图,PQ 为所求.
点拨:将中心对称图形的面积平分的直线必过图形的对称中心.

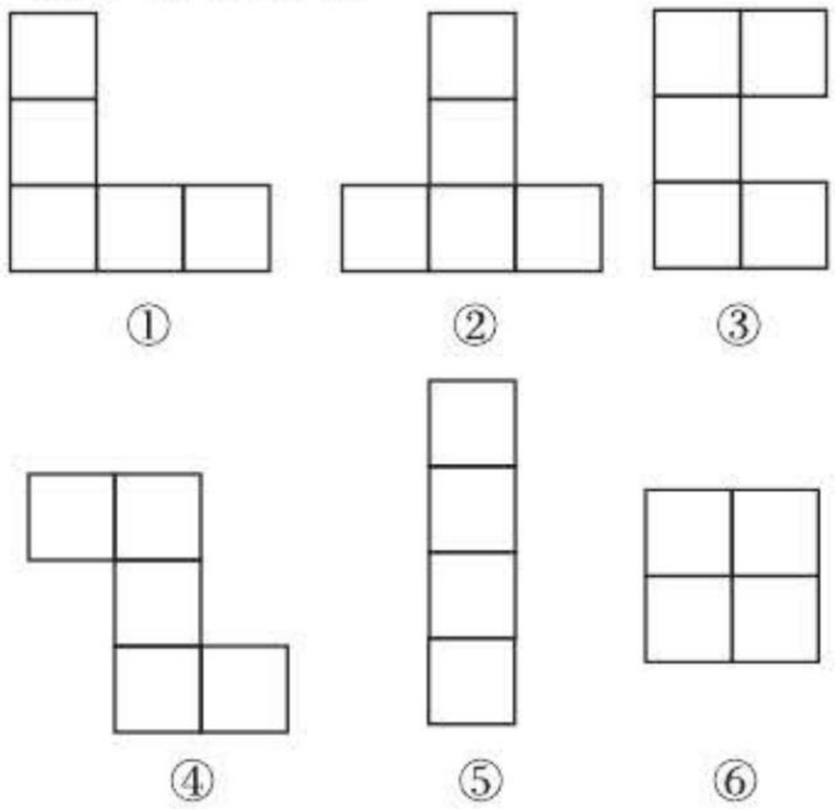
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **2.** C
3. 15 **点拨**:这两个数字为 9 和 6.
4. 平行且相等 **5.** 6
6. 解:(1)画出的 $\triangle A'B'C'$ 如图所示.
(2)$\square ABA'B', \square BCB'C', \square CA'C'A$



(第6题图)

7. 解:(1)如图①②③所示;
(2)如图④所示;
(3)如图⑤⑥所示.



(第7题图)

8. A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

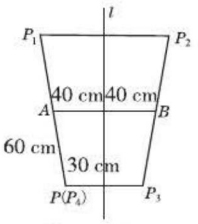
9. 解：$5\times5\times10\div2=125$.

点拨：绕方阵中心旋转 180°，则每个小方格中对应两个数的和为 10，共有 $5\times5=25$（个）小方格，$25\times10=250$，再除以 2 即可.

10. 解：（1）路线图如图所示.

∵ 点 P_4 与 P 重合，

∴ 点 P_4 与点 P_1 间的距离是 $60+60=120$(cm).



（第 10 题图）

（2）∵ $25\div4=6\cdots\cdots1$，∴ 第一次休息点在 P_1，第二次休息点在 P_2，第三次休息点在 P_3，点 P_3 与点 P 间的距离是 $30+30=60$(cm)，即电子青蛙第三次休息点与点 P 间的距离是 60 cm.

2.4 三角形的中位线

Ⅰ. 同类变式

1. C **2.** B

5. 证明：∵ BD，CE 均为 $\triangle ABC$ 的中线，

∴ D，E 分别为 AC，AB 的中点.

∴ DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

∴ $ED\parallel BC$ 且 $ED=\frac{1}{2}BC$.

∵ F，G 分别是 OB，OC 的中点，

∴ FG 为 $\triangle OBC$ 的中位线.

∴ $FG\parallel BC$ 且 $FG=\frac{1}{2}BC$.

∴ $ED\parallel FG$ 且 $ED=FG$.

∴ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

6. 解：$\triangle DEF$ 是直角三角形. 理由如下：

如图，连接 AC.

∵ E，F 分别为 CD，DA 的中点，

∴ $AC=2EF$，$EF\parallel AC$.

∵ $EF=4$，∴ $AC=8$.

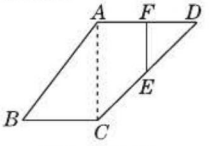
∵ $AB=10$，$BC=6$，∴ $AC^2+BC^2=AB^2$.

∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ACB=90°$.

∵ $AD\parallel BC$，∴ $\angle CAD=\angle ACB=90°$.

∵ $EF\parallel AC$，∴ $\angle EFD=\angle CAD=90°$.

∴ $\triangle DEF$ 是直角三角形.



（第 6 题图）

Ⅱ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **2.** A **3.** A **4.** B

5. 80° **点拨**：∵ D，E 分别是边 AB，AC 的中点，∴ $DE\parallel BC$. ∴ $\angle ADE=\angle B=50°$.

又∵ $\angle ADE=\angle A_1DE$，∴ $\angle A_1DA=2\angle B$.

∴ $\angle BDA_1=180°-\angle A_1DA=180°-2\angle B=80°$.

6. 解：（1）∵ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，

∴ $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC$.

∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\angle EDB=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=40°$.

（2）∵ $AB=BC$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，∴ D 为 AC 的中点，$\angle ABD=\angle DBC$，$\angle A=\angle C$.

∵ $DE\parallel BC$，∴ $\angle ADE=\angle C$，$\angle EDB=\angle DBC$. ∴ $\angle A=\angle ADE$，$\angle ABD=\angle EDB$.

∴ $AE=DE=EB$，即 E 为 AB 的中点.

∴ $DE=\frac{1}{2}BC=6$ cm.

7. 证明：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$BD=2BO$.

∵ $BD=2AD$，∴ $BO=BC$.

又∵ E 是 OC 的中点，

∴ $BE\perp OC$，即 $BE\perp AC$.

（2）由 $BE\perp AC$，G 是 AB 的中点，知 EG 是 Rt$\triangle ABE$ 斜边上的中线.

∴ $EG=\frac{1}{2}AB$.

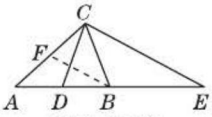
又∵ EF 是 $\triangle OCD$ 的中位线，

∴ $EF=\frac{1}{2}CD$.

又∵ $AB=CD$，∴ $EG=EF$.

点拨：（1）由已知条件易证 $\triangle OBC$ 是等腰三角形，又因为 E 是 OC 的中点，根据等腰三角形中底边上的高与中线合一的性质知 $BE\perp OC$，即 $BE\perp AC$；（2）利用直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半及三角形的中位线定理可证 $EG=EF$.

8. 解：$CD=\frac{1}{2}CE$. 证明如下：如图，作 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的中线 BF，因为 $BE=AB$，所以 BF 是 $\triangle ACE$ 的中位线. 所以 $BF=\frac{1}{2}CE$. 因为 $AB=AC$，CD，BF 分别是 AB，AC 上的中线，所以 $AD=AF$. 又因为 $\angle A=\angle A$，$AC=AB$，所以 $\triangle ACD\cong\triangle ABF$. 所以 $CD=BF$. 又因为 $BF=\frac{1}{2}CE$，所以 $CD=\frac{1}{2}CE$.



（第 8 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. C　**点拨**：由点 E,F 分别是边 AD,AB 的中点，易知 $AH=HO$.

$\because$ $\square ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O，

$\therefore AO=CO.\ \therefore CH=3AH.\ \therefore \dfrac{AH}{HC}=\dfrac{1}{3}$.

10. C　**点拨**：$\because$ BN 平分 $\angle ABC$，$BN\perp AE$，

$\therefore \angle NBA=\angle NBE,\angle BNA=\angle BNE$.

在 $\triangle BNA$ 和 $\triangle BNE$ 中，

$$\begin{cases}\angle ABN=\angle EBN\\ BN=BN\\ \angle ANB=\angle ENB\end{cases}$$

$\therefore \triangle BNA\cong\triangle BNE,\therefore BA=BE$，

$\therefore \triangle BAE$ 是等腰三角形，

同理 $\triangle CAD$ 是等腰三角形，

$\therefore$ 点 N 是 AE 中点，点 M 是 AD 中点（三线合一），

$\therefore MN$ 是 $\triangle ADE$ 的中位线，

$\because BE+CD=AB+AC=19-BC=19-7=12$，

$\therefore DE=BE+CD-BC=5$，

$\therefore MN=\dfrac{1}{2}DE=\dfrac{5}{2}$. 故选 C.

11. 15　**点拨**：$\because$ $\square ABCD$ 的周长为 36，

$\therefore 2(BC+CD)=36.\ \therefore BC+CD=18$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC,BD 相交于点 $O,BD=12$，

$\therefore OD=OB=\dfrac{1}{2}BD=6$.

又$\because$ 点 E 是 CD 的中点，

$\therefore OE$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线.

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}CD,OE=\dfrac{1}{2}BC$.

$\therefore OD+OE+DE=6+\dfrac{1}{2}(BC+CD)=6+9=15$，即 $\triangle DOE$ 的周长为 15.

12. $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$　**点拨**：连接 DE，

$\because$ 在边长为 4 的等边三角形 ABC 中，D,E 分别为 AB,BC 的中点，

$\therefore DE$ 是三角形 ABC 的中位线，

$\therefore DE=2$，且 $DE/\!/AC,BD=BE=EC=2$.

$\because EF\perp AC$ 于点 $F,\angle C=60°$，

$\therefore \angle FEC=30°,\angle DEF=\angle EFC=90°$，

$\therefore FC=\dfrac{1}{2}EC=1$，

故 $EF=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\because G$ 为 EF 的中点，$\therefore EG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore DG=\sqrt{DE^2+EG^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

13. $\dfrac{3}{2}$　**点拨**：如图，延长 CF，交 AB 于点 G.

在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle AFC$ 中，$\angle GAF=\angle CAF$，

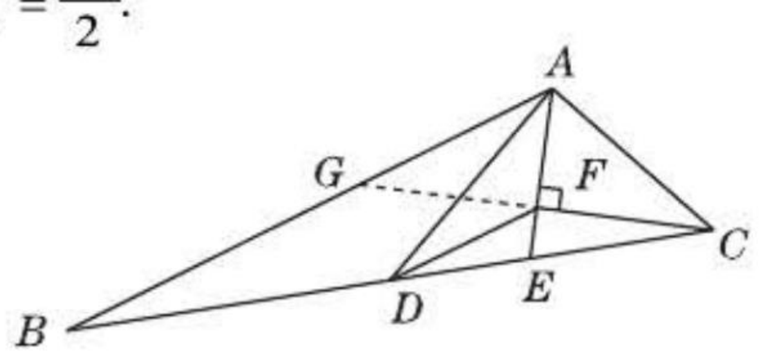
$AF=AF,\angle AFG=\angle AFC$，

$\therefore \triangle AFG\cong\triangle AFC.\ \therefore AG=AC,GF=CF$.

又$\because$ 点 D 是 BC 的中点，

$\therefore DF$ 是 $\triangle CBG$ 的中位线.

$\therefore DF=\dfrac{1}{2}BG=\dfrac{1}{2}(AB-AG)=\dfrac{1}{2}(AB-AC)=\dfrac{3}{2}$.



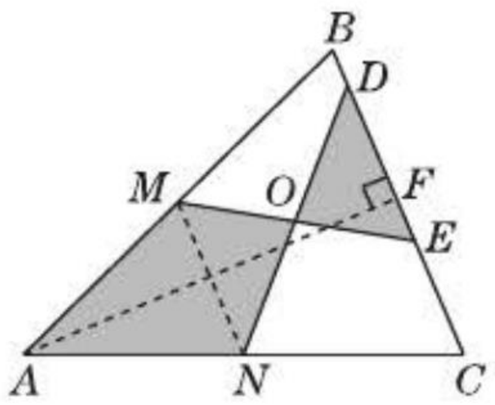
（第 13 题图）

解答本题的关键是作出辅助线. 一般出现既有角平分线又有高的情况时，我们就需要寻找等腰三角形.

14. **解**：如图，设 ME 与 ND 交于点 O，连接 MN，则 MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线，因此 $MN=\dfrac{1}{2}BC=5$ cm. 过点 A 作 $AF\perp BC$ 于 F，

$\because AB=AC,\therefore BF=\dfrac{1}{2}BC=5$ cm.

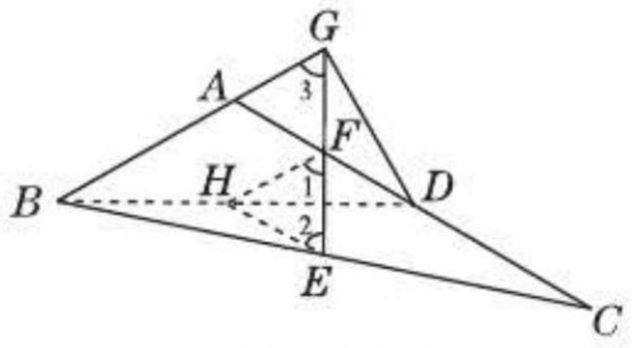
$\therefore AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$（cm）. $\therefore S_{阴影}=S_{\triangle AMN}+S_{\triangle MNO}+S_{\triangle DEO}=\dfrac{1}{2}\times5\times12=30$（$cm^2$）.



（第 14 题图）

15. **解**：$\triangle AGD$ 是直角三角形.

证明：如图，连接 BD，取 BD 的中点 H，连接 HF,HE.



（第 15 题图）

$\because F$ 是 AD 的中点，H 是 BD 的中点，

$\therefore HF/\!/AB,HF=\dfrac{1}{2}AB,AF=FD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle 1=\angle 3$. 同理，$HE\parallel CD$，$HE=\frac{1}{2}CD$.

$\therefore \angle 2=\angle EFC$.

$\because AB=CD$，$\therefore HF=HE$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because \angle EFC=60°$，

$\therefore \angle 3=\angle 60°$，$\angle AFG=60°$，$\angle GFD=120°$. $\therefore \triangle AGF$为等边三角形.

$\because AF=FD$，$\therefore GF=FD$.

$\therefore \angle FGD=\angle FDG=\frac{1}{2}(180°-\angle GFD)=30°$. $\therefore \angle AGD=90°$，即$\triangle AGD$是直角三角形.

2.5 矩 形

Ⅰ. 同类变式

1. **解**：$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore \angle D=\angle C=90°$，

$\therefore \angle CEB+\angle CBE=90°$.

$\because EF\perp EB$，$\therefore \angle FEB=90°$，

$\therefore \angle DEF+\angle CEB=90°$，

$\therefore \angle DEF=\angle CBE$.

在$\triangle DEF$和$\triangle CBE$中，$\begin{cases}\angle D=\angle C,\\ \angle DEF=\angle CBE,\\ EF=BE,\end{cases}$

$\therefore \triangle DEF\cong\triangle CBE$，$\therefore DE=CB$.

$\because$ 矩形$ABCD$的周长为22，

$\therefore 2(BC+DE+CE)=22$，

$\therefore DE+DE+3=11$，$\therefore DE=4$.

2. A　**点拨**：连接AC，

$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AD\parallel BE$，$AC=BD$，且$\angle ADB=\angle CAD=38°$，$\therefore \angle E=\angle DAE$，

又$\because BD=CE$，$\therefore CE=CA$，

$\therefore \angle E=\angle CAE$，

$\therefore \angle CAD=\angle CAE+\angle DAE$，

$\therefore \angle E+\angle E=38°$，即$\angle E=19°$.

4. $2\sqrt{6}$　**点拨**：$\because$ 点E，F分别是AB，CD的中点，M，N分别为DE，BF的中点，$\therefore$ 阴影部分的面积等于空白部分的面积，$\therefore$ 阴影部分的面积$=\frac{1}{2}\times$矩形$ABCD$的面积.

$\because AB=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，$\therefore$ 阴影部分的面积$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$，故答案为$2\sqrt{6}$.

7. **证明**：如图，连接EO.

$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

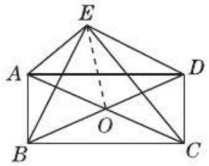
$\therefore OA=OC$，$OB=OD$.

又$\because AE\perp EC$，$BE\perp ED$，

$\therefore AC=2OE$，$BD=2OE$，

$\therefore AC=BD$，

$\therefore \square ABCD$是矩形.



（第7题图）

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C　**2.** A　**3.** C

4. B　**点拨**：$\because \angle CAE=15°$，AE平分$\angle BAD$，

$\therefore \angle BAO=45°+15°=60°$，

又$\because AO=BO$，$\therefore \triangle ABO$为等边三角形，

$\therefore \angle AOB=60°$，

$\therefore \angle BOC=180°-60°=120°$.

5. 12

6. **解**：如图，连接AC，AF，设AC与EF交于点O.

易知EF垂直平分AC，

$\therefore AF=CF$，$AO=CO$，

$\angle FOC=90°$.

$\because$ 四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore \angle B=90°$.

设$CF=x$，则$AF=x$，$BF=4-x$，

在Rt$\triangle ABC$中，

由勾股定理得$AC^2=BC^2+AB^2=5^2$，

$\therefore AC=5$. 又$\because O$为AC的中点，

$\therefore OC=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$.

$\because AB^2+BF^2=AF^2$，

$\therefore 3^2+(4-x)^2=x^2$，解得$x=\frac{25}{8}$.

$\because \angle FOC=90°$，$\therefore OF^2=FC^2-OC^2$，

$\therefore OF=\frac{15}{8}$.

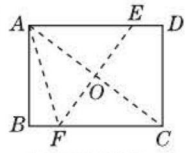
$\because$ 四边形$ABCD$为矩形，$\therefore AD\parallel BC$，

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

又$\because AO=CO$，$\angle AOE=\angle COF$，

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$，

$\therefore OE=OF=\frac{15}{8}$，$\therefore EF=OE+OF=\frac{15}{4}$.



（第6题图）

7. (1) **证明**：$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore CD\parallel AB$，$\therefore \angle FCO=\angle EAO$.

在$\triangle FCO$与$\triangle EAO$中，$\begin{cases}\angle FOC=\angle EOA,\\ \angle FCO=\angle EAO,\\ CF=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle FCO\cong\triangle EAO$，$\therefore OF=OE$.

(2) **解**：如图，连接OB，

$\because \angle BEF=2\angle BAC$，

$\angle BEF=\angle BAC+\angle AOE$，

$\therefore \angle BAC=\angle AOE$，

$\therefore \triangle EAO$为等腰三角形，

$\therefore AE=OE$.

$\because \triangle FCO\cong\triangle EAO$，

$\therefore \triangle FCO$为等腰三角形，

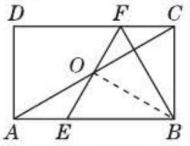
$\therefore CF=OF=OE=AE$.

又$\because BE=BF$，$\therefore BO$垂直平分EF.

易知Rt$\triangle BCF\cong$Rt$\triangle BOF\cong$Rt$\triangle BOE$.

又$\because \angle ABC=90°$，

$\therefore \angle CBF=\angle OBF=\angle OBE=30°$.



（第7题图）

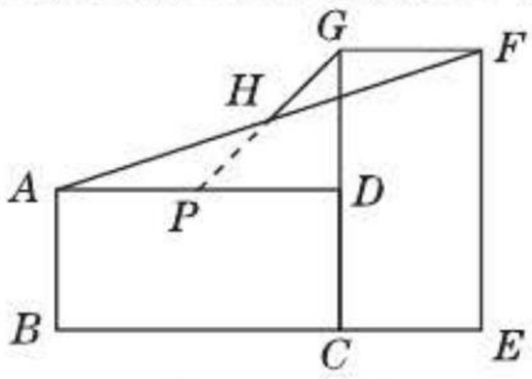
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△BCF 中，$\angle CBF=30°$，$CF=2$，
∴ $BF=4$，
∴ $AB=AE+BE=CF+BF=2+4=6$.

8. (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，
所以 $AB\parallel CD$，所以 $\angle FAE=\angle CDE$.
因为 E 是 AD 的中点，所以 $AE=DE$.
又因为 $\angle FEA=\angle CED$，
所以 $\triangle FAE\cong\triangle CDE$，
所以 $CD=FA$.
又因为 $CD\parallel AF$，
所以四边形 $ACDF$ 是平行四边形.
(2) **解**：$BC=2CD$. 证明如下：
因为 CF 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle DCE=45°$.
因为 $\angle CDE=90°$，
所以 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形，
所以 $CD=DE$.
因为 E 是 AD 的中点，所以 $AD=2CD$.
因为 $AD=BC$，所以 $BC=2CD$.

9. B

10. C　**点拨**：如图，延长 GH 交 AD 于点 P，



（第 10 题图）

∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是矩形，
∴ $\angle ADC=\angle ADG=\angle CGF=90°$，$AD=BC=2$，$GF=CE=1$，
∴ $AD\parallel GF$，∴ $\angle GFH=\angle PAH$，
又∵ H 是 AF 的中点，∴ $AH=FH$，
在 $\triangle APH$ 和 $\triangle FGH$ 中，

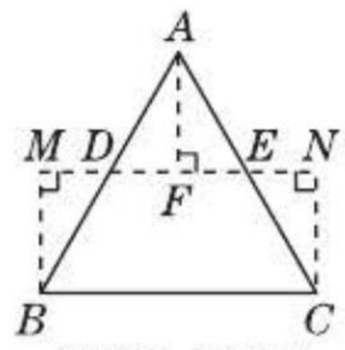
$$\because \begin{cases}\angle PAH=\angle GFH,\\ AH=FH,\\ \angle AHP=\angle FHG,\end{cases}$$

∴ $\triangle APH\cong\triangle FGH$(ASA)，
∴ $AP=GF=1$，$GH=PH=\frac{1}{2}PG$，
∴ $PD=AD-AP=1$，
∵ $CG=2$，$CD=1$，∴ $DG=1$，
则 $GH=\frac{1}{2}PG=\frac{1}{2}\times\sqrt{PD^2+DG^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
故选 C.

11. **解**：易知 $AO=DO$，连接 OP，过 A 作 $AG\perp BD$ 于 G，
则 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\cdot OD\cdot AG$，$S_{\triangle AOP}+S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot PF+\frac{1}{2}\cdot DO\cdot PE=\frac{1}{2}\cdot DO\cdot(PE+PF)$，
∵ $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle POD}$，
∴ $AG=PE+PF$，
∵ $AD=12$，$AB=5$，
∴ $BD=\sqrt{12^2+5^2}=13$，
∴ $AG=\frac{12\times5}{13}=\frac{60}{13}$，∴ $PE+PF=\frac{60}{13}$.

12. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle ADC=90°$，$AD=BC=8$，$CD=AB=4$.
设 $DE=x$，那么 $CE=AE=8-x$，
∵ 在 Rt△DEC 中，$CE^2=DE^2+CD^2$，
∴ $(8-x)^2=x^2+4^2$，∴ $x=3$，
∴ $CE=8-x=5$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
∴ O 为 AC 的中点.
又∵ F 是 AE 的中点，∴ $OF=\frac{1}{2}CE=\frac{5}{2}$.
点拨：要想求 OF 的长，只需求出 CE 的长，若设 $DE=x$，则 $CE=AE=8-x$，在 Rt△DEC 中，$CE^2=DE^2+CD^2$，代入即可求出 DE 和 CE 的长，继而求出答案.

13. **解**：如图，分别取 AB，AC 的中点 D，E，连接 DE，过点 A 作 $AF\perp DE$ 于点 F. 其中 AF，DE 就是切割线，把 $\triangle ADF$ 和 $\triangle AEF$ 分别补在 BD，CE 的外侧，即可得到所要焊接成的矩形，其中线段 BD，CE 为焊接线.
理由：过点 B 作 $BM\perp DE$，交 ED 的延长线于点 M，过点 C 作 $CN\perp DE$，交 DE 的延长线于点 N，∴ $BM\parallel CN$.
∵ D，E 分别为 AB，AC 的中点，
∴ $DE\parallel BC$，即 $MN\parallel BC$，
∴ 四边形 $MBCN$ 是平行四边形.
又∵ $\angle BMN=90°$，
∴ 四边形 $MBCN$ 是矩形.
由 $BM\perp DE$，$AF\perp DE$，可得 $\angle BMD=\angle AFD$.
由 D 为 AB 的中点，可得 $AD=BD$.
又∵ $\angle BDM=\angle ADF$，
∴ $\triangle BDM\cong\triangle ADF$.
同理可证 $\triangle CEN\cong\triangle AEF$.
∴ 按上面的方法可焊接得到一个与原三角形面积相等的矩形.



（第 13 题图）

14. **解**：(1) 当 E 与 F 不重合时，四边形 $DEBF$ 是平行四边形，理由：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $OA=OC$，$OB=OD$.
∵ E，F 两个动点分别从 A，C 两点以相同的速度向 C，A 运动，
∴ $AE=CF$，∴ $OE=OF$，
∴ BD，EF 互相平分，
∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

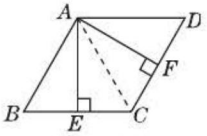
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形，
∴ 当 $BD=EF$ 时，四边形 $DEBF$ 是矩形.
∵ $BD=12$ cm，∴ $EF=12$ cm，
∴ $OE=OF=6$ cm.
∵ $AC=16$ cm，∴ $OA=OC=8$ cm，
∴ $AE=2$ cm 或 $AE=14$ cm.
∵ 两个动点运动的速度都是 1 cm/s，
∴ 当运动时间为 2s 或 14s 时，以 D,E,B,F 为顶点的四边形是矩形.
点拨：在(2)题中，根据条件不难得出 $AE=2$ cm 或 $AE=14$ cm，进而可以求出对应的时间，本题在求解时要注意分类讨论思想与数形结合思想的运用.

2.6 菱 形

Ⅰ. 同类变式

1. 解：如图，连接 AC，
由 $AE\perp BC, BE=EC$，
可得 $AB=AC$.
∵ 菱形的四条边都相等，
∴ $BC=AB=AC$，
∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，
∴ $\angle ACB=60°$.
又∵ $AE\perp BC$，
∴ $\angle CAE=90°-60°=30°$.
同理可得 $\angle CAF=30°$，
∴ $\angle EAF=\angle CAE+\angle CAF=60°$.

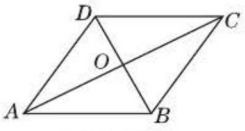


(第 1 题图)

2-1. A

2-2. C　**点拨**：在菱形 $ABCD$ 中，$OC=\frac{1}{2}AC$，$AC\perp BD$，∴ 由题意知 $DE=OC$，
∵ $DE\parallel AC$，
∴ 四边形 $OCED$ 是平行四边形，
∵ $AC\perp BD$，
∴ 平行四边形 $OCED$ 是矩形，
∵ 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，
∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形，
∴ $AD=AB=AC=2, OA=\frac{1}{2}AC=1$，
在矩形 $OCED$ 中，由勾股定理得 $CE=OD=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，
在 Rt $\triangle ACE$ 中，由勾股定理得 $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，故选 C.

3. A　**点拨**：如图，$AB=4\div4=1$，
∵ 两个相邻内角的度数的比为 1∶2，
∴ $\angle BAD=\frac{1}{1+2}\times180°=60°$，
∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形，
∴ $BD=AB=1$，
∴ $BO=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$，
在 Rt $\triangle ABO$ 中，$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $AC=2AO=\sqrt{3}$，
∴ 菱形的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



(第 3 题图)

4. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴ $AB\parallel DC, BC=CD, CA$ 平分 $\angle BCD$，
∴ $\angle BCE=\angle DCE$.
在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCE$ 中，$\begin{cases}CB=CD,\\ \angle BCE=\angle DCE,\\ CE=CE,\end{cases}$
∴ $\triangle BCE\cong\triangle DCE$，∴ $\angle EBC=\angle EDC$.
∵ $AB\parallel DC$，∴ $\angle APD=\angle EDC$，
∴ $\angle APD=\angle EBC$.

5. (1)**证明**：由尺规作 $\angle BAD$ 的平分线的过程及角平分线的定义可知，
$AB=AF$，且 $\angle BAE=\angle FAE$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD\parallel BC$，∴ $\angle FAE=\angle AEB$，
∴ $\angle BAE=\angle AEB$，∴ $AB=BE$，∴ $BE=FA$，
∴ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形.
又∵ $AB=AF$，
∴ 四边形 $ABEF$ 为菱形.
(2)**解**：∵ 四边形 $ABEF$ 为菱形，
∴ $AE\perp BF, OB=\frac{1}{2}BF=3, AE=2AO$.
在 Rt $\triangle AOB$ 中，
$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.
∴ $AE=2AO=8$.

7. 证明：设 EF 与 AD 相交于点 O.
∵ AD 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle BAD=\angle CAD$.
由题意易知 $EF\perp AD$，∴ $\angle AOE=\angle AOF=90°$.
∵ 在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle AFO$ 中，
$\begin{cases}\angle EAO=\angle FAO,\\ AO=AO,\\ \angle AOE=\angle AOF,\end{cases}$
∴ $\triangle AEO\cong\triangle AFO$(ASA)，∴ $EO=FO$，
即 EF 与 AD 互相平分，
∴ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.
又∵ $EF\perp AD$，∴ 平行四边形 $AEDF$ 为菱形.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B　**2.** B　**3.** C　**4.** A　**5.** $18\sqrt{3}$

6. (1)**证明**：如图，连接 AC，
∵ AC, BD 是菱形 $ABCD$ 的对角线，
∴ BD 垂直平分 AC，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AE = EC$.

(2)**解**:点 F 是线段 BC 的中点.

理由如下:在菱形 $ABCD$ 中,$AB = BC$,

又$\because \angle ABC = 60°$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BAC = 60°$,

$\because AE = EC, \angle CEF = 60°$,

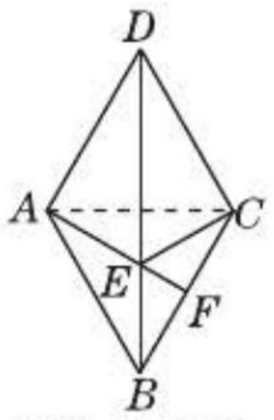
$\therefore \angle EAC = \angle ECA = \frac{1}{2}\angle CEF = 30°$,

$\therefore AF$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

$\because AF$ 交 BC 于 F,

$\therefore AF$ 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线,

$\therefore$ 点 F 是线段 BC 的中点.



(第 6 题图)

7. (1)**证明**:$\because \triangle ABC$ 绕 A 点旋转得到 $\triangle ADE, AB = AC$,

$\therefore AB = AD = AC = AE, \angle BAC = \angle DAE$.

$\therefore \angle BAC + \angle BAE = \angle DAE + \angle BAE$.

$\therefore \angle EAC = \angle DAB$. $\therefore \triangle AEC \cong \triangle ADB$.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $ADFC$ 是菱形,

且 $\angle BAC = 45°, \therefore BD // AC$.

$\therefore \angle DBA = \angle BAC = 45°$.

又$\because AB = AD, \therefore \angle DBA = \angle BDA = 45°$.

$\therefore \triangle BAD$ 是等腰直角三角形.

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$.

$\therefore BD = 2\sqrt{2}$.

$\because$ 四边形 $ADFC$ 是菱形,

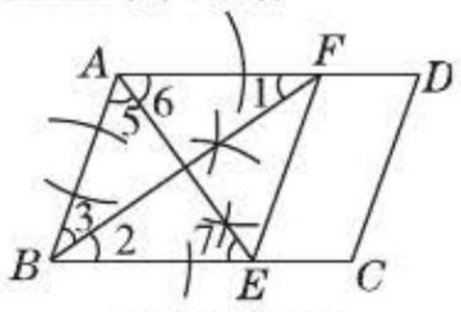
$\therefore AD = DF = FC = AC = AB = 2$.

$\therefore BF = BD - DF = 2\sqrt{2} - 2$.

8. C **点拨**:甲的作法正确.$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD // BC, \therefore \angle DAC = \angle ACN$.$\because MN$ 是 AC 的垂直平分线,$\therefore AO = CO$,在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle CON$ 中,

$$\begin{cases} \angle MAO = \angle NCO, \\ AO = CO, \\ \angle AOM = \angle CON, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle CON$ (ASA),$\therefore MO = NO$,



(第 8 题图)

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 是平行四边形,$\because AC \perp MN$,$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 是菱形;乙的作法正确.如图.$\because AD // BC, \therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 6 = \angle 7$,$\because BF$ 平分 $\angle ABC$,AE 平分 $\angle BAD$,$\therefore \angle 2 = \angle 3, \angle 5 = \angle 6, \therefore \angle 1 = \angle 3, \angle 5 = \angle 7, \therefore AB = AF, AB = BE, \therefore AF = BE$.$\because AF // BE, \therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.$\because AB = AF, \therefore$ 平行四边形 $ABEF$ 是菱形.

9. B **10**. C **11**. 5 **12**. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} ab$

13. (1)**证明**:$\because AF = FG$,

$\therefore \angle FAG = \angle FGA$.

$\because AG$ 平分 $\angle CAB, \therefore \angle CAG = \angle FAG$,

$\therefore \angle CAG = \angle FGA, \therefore AC // FG$.

$\because DE \perp AC, \therefore FG \perp DE$.

$\because FG \perp BC, \therefore DE // BC, \therefore AC \perp BC$,

$\therefore \angle C = \angle DHG = 90°, \angle CGE = \angle GED$.

$\because F$ 是 AD 的中点,$FG // AE$,

$\therefore H$ 是 ED 的中点,

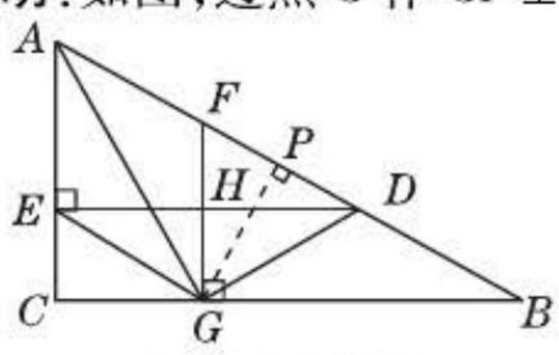
$\therefore FG$ 是线段 ED 的垂直平分线,

$\therefore GE = GD, \angle GDE = \angle GED$,

$\therefore \angle CGE = \angle GDE$,

$\therefore \triangle ECG \cong \triangle GHD$.

(2)**证明**:如图,过点 G 作 $GP \perp AB$ 于 P,



(第 13 题图)

$\therefore GC = GP$,而 $AG = AG$,

$\therefore \triangle CAG \cong \triangle PAG, \therefore AC = AP$,

由(1)可得 $EG = DG$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ECG \cong \mathrm{Rt}\triangle DPG$,

$\therefore EC = PD$,

$\therefore AD = AP + PD = AC + EC$.

(3)**解**:四边形 $AEGF$ 是菱形,

理由如下:$\because \angle B = 30°, \therefore \angle ADE = 30°$,

$\therefore AE = \frac{1}{2}AD, \therefore AE = AF = FG$,

由(1)得 $AE // FG$,

$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是菱形.

14. (1)**证明**:由作图过程可知,$AB = AF$,AE 平分 $\angle BAD, \therefore \angle EAB = \angle EAF$,

$\because AD // BC, \therefore \angle EAF = \angle AEB = \angle EAB$,

$\therefore BE = AB = AF$.

$\because AF // BE$,

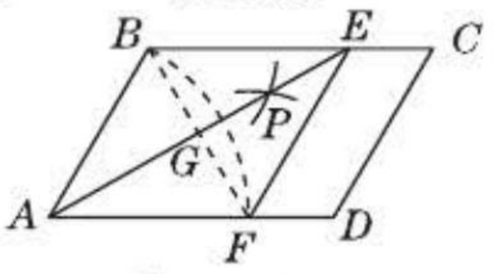
$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

$\because AB = BE, \therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形.

(2)**解**:如图,连接 BF 交 AE 于点 G.

$\because$ 菱形 $ABEF$ 的周长为 16,$AE = 4\sqrt{3}$,

$\therefore AB = BE = EF = AF = 4, AG = \frac{1}{2}AE = 2\sqrt{3}, \angle BAF = 2\angle BAE, AE \perp BF$.



(第 14 题图)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中,$\because \angle AGB = 90°$,

$\therefore BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = 2$,

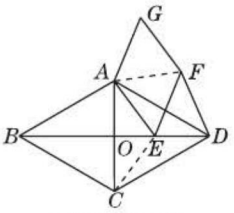
$\therefore \angle BAG = 30°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAF = 2\angle BAE = 60°$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore \angle C = \angle BAF = 60°$.

15. **解**：(1)24；24；24
(2)对于线段 AC 与线段 BD 垂直相交(垂足 O 不与点 A, C, B, D 重合)的任意情形，四边形 $ABCD$ 的面积为定值 24.
证明如下：
$\because AC \perp BD$，$\therefore S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB$，
$S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD$，
$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{\triangle BAC} + S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$.
(3)顺次连接点 A, B, C, D, A 所围成的封闭图形的面积仍为 24.

16. **解**：(1) $FE = FD$
(2)成立.
证明如下：如图，连接 CE, AF.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，四边形 $AEFG$ 是菱形，
$\therefore AD = CD$，$AE = FE$，BD 垂直平分 AC，$\angle ABC = \angle ADC = 60°$.



(第 16 题图)

$\therefore \angle ADC = \angle AEF = 60°$.
$\therefore \triangle ACD$ 和 $\triangle AEF$ 都是等边三角形.
$\therefore AC = AD$，$EA = AF = FE$，$\angle CAD = \angle EAF = 60°$. $\therefore \angle CAE = \angle DAF$.
$\because$ 在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ADF$ 中，
$\begin{cases} AC = AD, \\ \angle CAE = \angle DAF, \\ AE = AF, \end{cases}$
$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ADF$. $\therefore EC = FD$.
$\because BD$ 垂直平分 AC，
$\therefore EC = EA$. $\therefore FE = FD$.

2.7 正方形

Ⅰ. 同类变式

2. **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
$\therefore OA = OD = OC$.
又$\because DE = CF$，$\therefore OD - DE = OC - CF$，
即 $OE = OF$.
在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle DOF$ 中，
$\begin{cases} AO = DO, \\ \angle AOE = \angle DOF = 90°, \\ OE = OF, \end{cases}$
$\therefore \triangle AOE \cong \triangle DOF$，$\therefore \angle OAE = \angle ODF$.
$\because \angle OAE + \angle AEO = 90°$，
$\angle AEO = \angle DEM$，
$\therefore \angle ODF + \angle DEM = 90°$，
$\therefore \angle AMD = 90°$，$\therefore AM \perp DF$.

3. D

5. **解**：(1)当 $AD = 2AB$ 时，四边形 $PEMF$ 为矩形
理由：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，
$\therefore \angle A = \angle D = 90°$.
$\because$ 点 M 是 AD 的中点，
$\therefore AM = DM = \frac{1}{2}AD$.
又$\because AD = 2AB = 2CD$，
$\therefore AB = AM = DM = CD$.
$\therefore \angle ABM = \angle AMB = 45°$，
$\angle DCM = \angle DMC = 45°$.
$\therefore \angle BMC = 180° - 45° - 45° = 90°$.
$\because PE \perp CM$，$PF \perp BM$，
$\therefore \angle MEP = \angle MFP = 90°$.
$\therefore$ 四边形 $PEMF$ 为矩形，
即当 $AD = 2AB$ 时，四边形 $PEMF$ 为矩形.
(2)当点 P 运动到 BC 的中点时，矩形 $PEMF$ 为正方形.
理由如下：$\because PE \perp CM$，$PF \perp BM$，
$\therefore \angle PFB = \angle PEC = 90°$.
$\because P$ 是 BC 的中点，$\therefore BP = CP$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90°$.
由(1)知，$\angle ABM = 45°$，$\angle DCM = 45°$，
$\therefore \angle FBP = 45°$，$\angle ECP = 45°$.
$\therefore \angle FBP = \angle ECP$.
在 $\triangle BFP$ 和 $\triangle CEP$ 中，$\begin{cases} \angle FBP = \angle ECP, \\ \angle PFB = \angle PEC, \\ BP = CP, \end{cases}$
$\therefore \triangle BFP \cong \triangle CEP$. $\therefore PF = PE$.
$\therefore$ 矩形 $PEMF$ 是正方形，
即当点 P 运动到 BC 的中点时，矩形 $PEMF$ 为正方形.

7. 16

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D　**点拨**：$\because EF$ 垂直平分 BC，
$\therefore BE = EC$，$BF = CF$，
$\because BE = BF$，$\therefore BE = EC = CF = BF$，
$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是菱形. 当 $BC = AC$ 时，
$\because \angle ACB = 90°$，
$\therefore \angle A = \angle ABC = 45°$，
$\because$ 四边形 $BECF$ 是菱形，
$\therefore \angle EBF = 2\angle EBC = 2 \times 45° = 90°$，
$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是正方形；当 $CF \perp BF$ 时，$\angle BFC = 90°$，$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是正方形；
当 $BD = DF$ 时，$\because$ 四边形 $BECF$ 是菱形，
$\therefore BC = 2BD$，$EF = 2DF$，$\therefore BC = EF$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 四边形 $BECF$ 是正方形；当 $AC=BF$ 时，无法得出四边形 $BECF$ 是正方形. 故选 D.

2. B **3.** D **4.** 65 **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $AB=BC=CD$，$\angle ABC=\angle DCB=90°$.
∵ $\triangle EBC$ 是等边三角形，
∴ $EB=BC=EC$，$\angle EBC=\angle ECB=60°$.
∴ $\angle EBA=\angle ECD=30°$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中，
$\begin{cases} AB=DC, \\ \angle EBA=\angle ECD, \\ EB=EC. \end{cases}$
∴ $\triangle ABE\cong\triangle DCE$.
(2) **解**：由(1)可知，$AB=BE$，$\angle ABE=30°$，
∴ $\angle BAE=\angle BEA=75°$.
同理 $\angle CDE=\angle CED=75°$.
∴ $\angle AED=360°-75°-75°-60°=150°$.

7. **证明**：过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G.
因为 $\angle C=90°$，$DE\perp BC$，$DF\perp AC$，
所以 $\angle DEC=\angle DFC=90°=\angle C$，
所以四边形 $CEDF$ 是矩形.
因为 BD 平分 $\angle CBA$，$DG\perp AB$，$DE\perp BC$，
所以 $DE=DG$. 同理可证 $DG=DF$，
所以 $DE=DF$，
所以四边形 $CEDF$ 是正方形.

8. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $OA=OB$，$\angle DAO=45°$，$\angle OBA=45°$，
∴ $\angle OAM=\angle OBN=135°$，
∵ $\angle EOF=90°$，$\angle AOB=90°$，
∴ $\angle AOM=\angle BON$，
∴ $\triangle OAM\cong\triangle OBN$，
∴ $OM=ON$.
(2) **解**：过点 O 作 $OH\perp AD$ 于点 H，
∵ 正方形的边长为 4，
∴ $OH=HA=2$，
∵ E 为 OM 的中点，
∴ $HM=4$，
则 $OM=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，
∴ $MN=\sqrt{2}OM=2\sqrt{10}$.

9. A **点拨**：根据正方形的性质可得 $AB=AD=DC=6$，$\angle B=\angle D=90°$，因为 $CD=3DE$，所以 $DE=2$，$CE=4$，由折叠的性质可知 $AF=AD$，$\angle AFE=\angle D=90°$，则 $AF=AB$，$\angle AFG=\angle B=90°$，又 $AG=AG$，则根据 HL 推出 $\mathrm{Rt}\triangle ABG\cong\mathrm{Rt}\triangle AFG$，则 $BG=FG$，$\angle BAG=\angle FAG$，$\angle AGB=\angle AGF$. 设 $BG=x$，则 $CG=BC-BG=6-x$，$GE=FG+EF=BG+DE=x+2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ECG$ 中，由勾股定理得 $(6-x)^2+4^2=(x+2)^2$，解得 $x=3$，则 $BG=FG=CG$，进而得出 $\angle AGB=\angle FCG$，推出 $AG\parallel CF$，由折叠的性质得出 $\angle DAE=\angle FAE$，又 $\angle BAG=\angle FAG$，故 $\angle GAE=\angle FAE+\angle FAG=45°$.

10. A **11.** 6

12. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴ $AB=BC=CD=DA$，$\angle B=\angle D$，
∵ 点 E，F 分别为 AB，AD 的中点，
∴ $BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AD$，∴ $BE=DF$.
在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCF$ 中，$\begin{cases} BC=DC, \\ \angle B=\angle D, \\ BE=DF, \end{cases}$
∴ $\triangle BCE\cong\triangle DCF$(SAS).
(2) **解**：$AB\perp BC$，理由如下：
∵ 点 E，O，F 分别为 AB，AC，AD 的中点，
∴ $OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=AF$，
同理可证：$OF=AE=\frac{1}{2}AB$，
∴ $OE=OF=AF=AE$，
∴ 四边形 $AEOF$ 是菱形，
∵ $AB\perp BC$，又易知 $OE\parallel BC$，∴ $AE\perp OE$.
∴ 四边形 $AEOF$ 是正方形.

13. **解**：四边形 $AEMF$ 是正方形. 证明如下：
∵ $AD\perp BC$，$\triangle AEB$ 是由 $\triangle ADB$ 折叠所得，
∴ $\angle EAB=\angle BAD$，$\angle E=\angle ADB=90°$，$AE=AD$. 又∵ $\triangle AFC$ 是由 $\triangle ADC$ 折叠所得，∴ $\angle CAF=\angle CAD$，$\angle F=\angle ADC=90°$，$AF=AD$，∴ $AE=AF$. ∵ $\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC=45°$，∴ $\angle EAB+\angle CAF=45°$，∴ $\angle BAD+\angle CAD+\angle EAB+\angle CAF=90°$，即 $\angle EAF=90°$，∴ 四边形 $AEMF$ 是矩形. 又∵ $AE=AF$，∴ 四边形 $AEMF$ 是正方形.

14. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $\angle BOE=\angle AOF=90°$，$OB=OA$.
又∵ $AM\perp BE$，
∴ $\angle MEA+\angle MAE=90°=\angle AFO+\angle MAE$，
∴ $\angle MEA=\angle AFO$，∴ $\triangle BOE\cong\triangle AOF$，
∴ $OE=OF$.
(2) **解**：$OE=OF$ 还成立.
证明如下：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $\angle BOE=\angle AOF=90°$，$OB=OA$.
又∵ $AM\perp BE$，
∴ $\angle F+\angle MBF=90°=\angle E+\angle OBE$.
又∵ $\angle MBF=\angle OBE$，∴ $\angle E=\angle F$，
∴ $\triangle BOE\cong\triangle AOF$，∴ $OE=OF$.

15. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP$，
又∵ $DP=DP$，∴ $\triangle ADP\cong\triangle CDP$，
∴ $PA=PC$. 又∵ $PA=PE$，∴ $PC=PE$.
(2) **解**：由(1)知 $\triangle ADP\cong\triangle CDP$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle DAP = \angle DCP$. $\because PA = PE$, $\therefore \angle DAP = \angle E$, $\therefore \angle FCP = \angle E$.

又$\because \angle PFC = \angle DFE$, $\angle EDF = 90°$,

$\therefore \angle CPE = \angle EDF = 90°$.

(3)**解**:$AP = CE$. 理由如下:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AD = CD$, $\angle ADP = \angle CDP$, 又$\because DP = DP$, $\therefore \triangle ADP \cong \triangle CDP$. $\therefore PA = PC$, $\angle DAP = \angle DCP$. 又$\because PA = PE$, $\therefore PC = PE$, $\angle DAP = \angle DEP$, $\therefore \angle DCP = \angle DEP$, 又$\because \angle PFC = \angle DFE$, $\therefore \angle CPF = \angle EDF$. $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 120°$, $\therefore \angle ADC = 120°$, $\therefore \angle EDC = 60°$. $\therefore \angle CPE = \angle EDF = 60°$, 又$\because PC = PE$, $\therefore \triangle PCE$ 是等边三角形, $\therefore PE = CE$. 又$\because PA = PE$, $\therefore AP = CE$.

中考提分专题篇

好题必练

1. C **2**. C **3**. B **4**. D

5. D **6**. D **7**. A **8**. B

9. A **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore \angle PAB + \angle PAD = 90°$, 即 $\angle PAB = 90° - \angle PAD$.

$\because \angle APB = 80°$,

$\therefore \angle PAB + \angle PBA = 180° - 80° = 100°$.

$\therefore 90° - \angle PAD + \angle PBA = 100°$, 即 $\angle PBA - \angle PAD = 10°$①.

同理可得 $\angle PDC - \angle PCB = 180° - 50° - 90° = 40°$②,

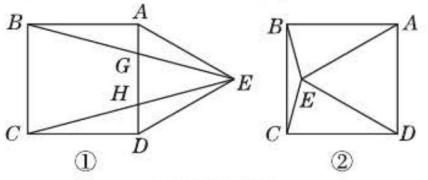
由② − ①得 $\angle PDC - \angle PCB - (\angle PBA - \angle PAD) = 30°$,

$\therefore (\theta_1 + \theta_4) - (\theta_2 + \theta_3) = 30°$.

10. 1 080° **11**. 8 **12**. 2.5

13. ①③④ **14**. $\frac{50}{13}$

15. 30°或 150° **点拨**:如图①,



(第 15 题图)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\triangle ADE$ 为等边三角形,

$\therefore AB = BC = CD = AD = AE = DE$, $\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90°$, $\angle AED = \angle ADE = \angle DAE = 60°$,

$\therefore \angle BAE = \angle CDE = 150°$, 又 $AB = AE$, $DC = DE$,

$\therefore \angle AEB = \angle CED = 15°$,

则 $\angle BEC = \angle AED - \angle AEB - \angle CED = 30°$.

如图②,

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore AD = DE$, $\angle ADE = 60°$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ADC = 90°$, $AD = DC$, $\therefore DE = DC$,

$\therefore \angle CED = \angle ECD$,

$\therefore \angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 90° - 60° = 30°$,

$\therefore \angle CED = \angle ECD = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$,

同理可得 $\angle ABE = \angle AEB = 75°$,

$\therefore \angle BEC = 360° - 75° \times 2 - 60° = 150°$,

故答案为 30°或 150°.

16. **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle HCF = \angle GAE$.

又$\because E, F$ 分别为边 AD, BC 的中点,

$\therefore AE = FC$, $DE = BF$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

$\therefore \angle BED = \angle BFD$. $\therefore \angle AEG = \angle HFC$.

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle CHF$, $\therefore AG = CH$.

17. (1)**证明**:由翻折的性质可得 $AF = AB$, $\angle F = \angle B$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore AB = CD$, $\angle B = \angle D = 90°$.

$\therefore AF = CD$, $\angle F = \angle D$,

又$\because \angle AEF = \angle CED$,

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CDE$(AAS).

(2)**解**:$\because \triangle AFE \cong \triangle CDE$,

$\therefore AE = CE$, $EF = ED$.

根据翻折的性质可知 $FC = BC = 8$.

在 Rt$\triangle AFE$ 中, $AE^2 = AF^2 + EF^2$,

即 $(8 - EF)^2 = 4^2 + EF^2$,

解得 $EF = 3$, $\therefore AE = 5$.

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}AE \cdot CD = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$.

18. **解**:$AE = EF$. 理由如下:

$\because \triangle HBE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore HB = EB$, $\angle H = 45°$.

又$\because CF$ 平分 $\angle DCE$,

$\therefore \angle FCE = 45°$, $\therefore \angle H = \angle FCE$.

又$\because \angle HAE = 90° + \angle AEB$,

$\angle CEF = 90° + \angle AEB$,

$\therefore \angle HAE = \angle CEF$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB = BC$,

$\therefore HB - AB = EB - BC$, $\therefore HA = CE$,

$\therefore \triangle HAE \cong \triangle CEF$(ASA). $\therefore AE = EF$.

19. (1)**证明**:由题意,得 PQ 为线段 AC 的垂直平分线, $\therefore CD = AD$.

$\because CF \parallel AB$, $\therefore \angle FCD = \angle EAD$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFD$ 中, $\begin{cases} \angle EAD = \angle FCD, \\ AD = CD, \\ \angle EDA = \angle FDC, \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD$.

(2)**证明**:$\because \triangle AED \cong \triangle CFD$,$\therefore DE = DF$.

又$\because AD = CD$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

又$\because EF \perp AC$,$\therefore$ $\square AECF$ 是菱形.

(3)**解**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

由菱形的性质,得 $AC = 2AD = 2 \times 3 = 6$,

$EF = 2DE = 2 \times 4 = 8$.

$\therefore$ 菱形 $AECF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$.

20. (1)**证明**:连接 CD.

$\because O$ 是 EF 的中点,$\therefore OE = OF$.

又$\because OD = OG$,

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 为平行四边形.

$\because AC = BC$,D 为 AB 的中点,$\angle ACB = 90°$,

$\therefore AD = DC$,$\angle A = \angle FCD = 45°$,$CD \perp AB$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFD$ 中,$AE = CF$,$\angle A = \angle FCD$,$AD = CD$,$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD$.

$\therefore DE = DF$,$\angle ADE = \angle CDF$.

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 为菱形.

$\because CD \perp AD$,$\therefore \angle ADE + \angle EDC = 90°$.

$\therefore \angle EDC + \angle CDF = 90°$,即 $\angle EDF = 90°$.

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 为正方形.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $EDFG$ 为正方形,

$\therefore$ 当正方形的边长 DE 最短时,正方形的面积最小.

$\because$ 垂线段最短,

$\therefore$ 当 $DE \perp AC$ 时,四边形 $EDFG$ 的面积最小. $\because AD = DC$,$DE \perp AC$,

$\therefore AE = EC$,$DE = \frac{1}{2}AC = 2$.

$\therefore$ 当 E 为 AC 的中点时,四边形 $EDFG$ 的面积最小,四边形 $EDFG$ 的面积的最小值为 $2^2 = 4$.

21. (1)**证明**:如图①,连接 BD.

$\because E$,H 分别是 AB,AD 的中点,

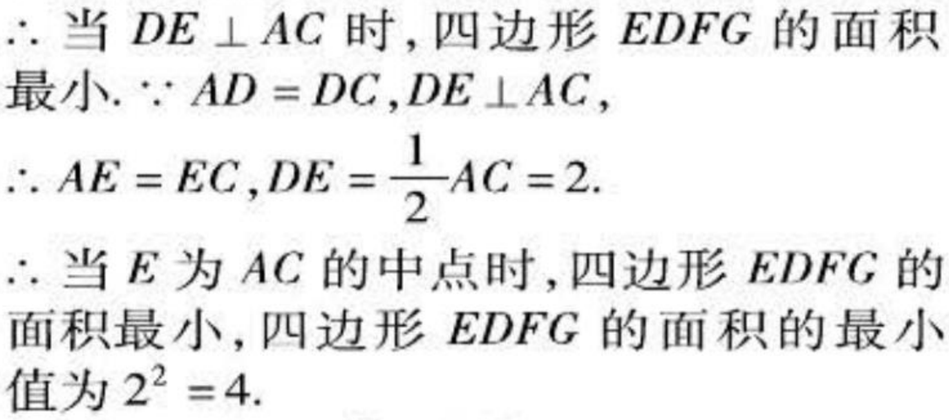
$\therefore EH = \frac{1}{2}BD$,$EH /\!/ BD$.

$\because F$,G 分别是 BC,CD 的中点,

$\therefore FG = \frac{1}{2}BD$,$FG /\!/ BD$.

$\therefore EH = FG$,$EH /\!/ FG$.

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



(第21题图)

(2)**解**:四边形 $EFGH$ 是菱形. 证明如下:

如图②,连接 AC,BD.

$\because \angle APB = \angle CPD$,

$\therefore \angle APB + \angle APD = \angle CPD + \angle APD$.

即:$\angle BPD = \angle APC$.

又$\because PA = PB$,$PC = PD$,

$\therefore \triangle APC \cong \triangle BPD$. $\therefore AC = BD$.

$\because$ 点 E,F,G 分别为边 AB,BC,CD 的中点.

$\therefore EF = \frac{1}{2}AC$,$FG = \frac{1}{2}BD$. $\therefore EF = FG$.

由(1)知中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$\therefore$ 中点四边形 $EFGH$ 是菱形.

(3)**解**:当 $\angle APB = \angle CPD = 90°$ 时,

中点四边形 $EFGH$ 是正方形.

第3章 图形与坐标

3.1 平面直角坐标系

1. 同类变式

1. **解**:(1)(4,5) (2)(5,3) (3)点 C (4)不同.

3. **解**:$A(-3,2)$,$B(4,3)$,$C(-1,-4)$,$D(1,2)$,$E(-4,0)$,$F(0,-2)$,$O(0,0)$.

方法总结:已知坐标平面内的点,求其坐标的方法:先由已知点分别向 x 轴、y 轴作垂线,设垂足分别为 A,B,再求出垂足 A 在 x 轴上对应的数 a 和垂足 B 在 y 轴上对应的数 b,最后按顺序写成 (a,b) 的形式即可.

5. $(1,2)$ 或 $(-1,2)$ 或 $(-1,-2)$ 或 $(1,-2)$

点拨:此题运用了分类讨论思想,点 M 到 x 轴的距离为 2 即点 M 纵坐标的绝对值为 2,点 M 到 y 轴的距离为 1 即点 M 横坐标的绝对值为 1,所以有四种情况.

8. **解**:(1)因为点 M 在 y 轴上,所以 $3a - 8 = 0$,$a = \frac{8}{3}$,所以点 M 的坐标为 $\left(0, \frac{5}{3}\right)$.

(2)因为点 M 在第二、四象限的角平分线上,所以点 M 的横、纵坐标互为相反数,

所以 $3a - 8 + a - 1 = 0$,解得 $a = \frac{9}{4}$,

所以点 M 的坐标为 $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

(3)因为 $MN /\!/ x$ 轴,所以点 N 的纵坐标与点 M 的纵坐标相同. 所以 $a - 1 = -6$. 解得 $a = -5$,所以点 M 的坐标为 $(-23,-6)$.

9. **解**:答案不唯一. 若以光岳楼为坐标原点,取正东方向为 x 轴正方向,正北方向为 y 轴正方向,则光岳楼的位置是 $(0,0)$,金风广场的位置是 $(-2,-2)$,动物园的位置是 $(7,3)$,画图略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

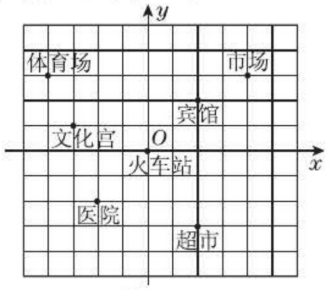
1. B　**2.** C

3. D　**点拨**：(3,6)表示第3排第6列，而第3排第6列与第3列第6排表示的位置不同.

4. C　**5.** C　**6.** A

7. 解：建立平面直角坐标系，如图所示.

火车站(0,0)，医院(−2,−2)，文化宫(−3,1)，体育场(−4,3)，宾馆(2,2)，市场(4,3)，超市(2,−3).



(第7题图)

8. A　**9.** A

10. 四　**点拨**：因为 $m^2+2>0$，$-4<0$，所以点 $P(m^2+2,-4)$ 一定在第四象限.

11. (−2,2)或(2,2)　**12.** 90°；(5,90°)

13. (2n,1)　**点拨**：$A_1(0,1)$，$A_5(2,1)$，$A_9(4,1)$，$A_{13}(6,1)$，这些点的横坐标都是2的整数倍，纵坐标是1，因此 A_{4n+1} 的坐标为(2n,1).

14. 解：(1)攀岩(0,7)，(4,6)表示海底世界；

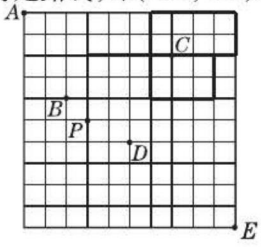
(2)天文馆离入口最近，攀岩离入口最远.

(3)从高空缆车到球幕影院，再到海底世界，攀岩，激光战车，天文馆，最后到入口.(答案不唯一)

15. 解：(1) +2；+4；+7；−2；A；D；+5

(2)7+2+2+4+3+2+5+4=29.

(3)如图，简便方法：行走路线的第一个数与第二个数分别相加，所得结果即为 C 到 P 的行走路线，即(+4,+3).



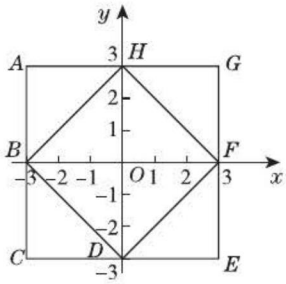
(第15题图)

3.2　简单图形的坐标表示

Ⅰ. 同类变式

1. 解：本题答案不唯一. 以 BF，DH 的交点 O 为坐标原点，分别以 BF，DH 所在直线为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系，如图所示.

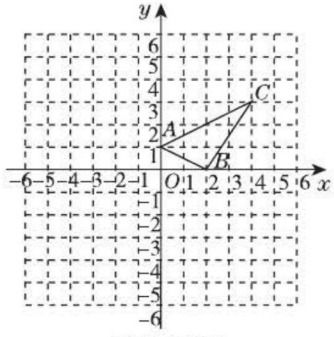
故 A(−3,3)，B(−3,0)，C(−3,−3)，D(0,−3)，E(3,−3)，F(3,0)，G(3,3)，H(0,3).



(第1题图)

2. 解：(1)描点，画出△ABC，如图所示.

(2) $S_{\triangle ABC}=3\times4-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3=4$.

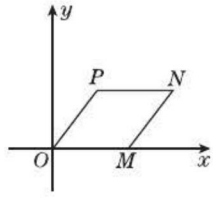


(第2题图)

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C

2. A　**点拨**：如图，根据勾股定理可得 $PO=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以菱形的边 NP = OM = OP = 5，若点 M 的坐标为(5,0)，则 N 的坐标为(3+5,4)，即(8,4)，故选A.



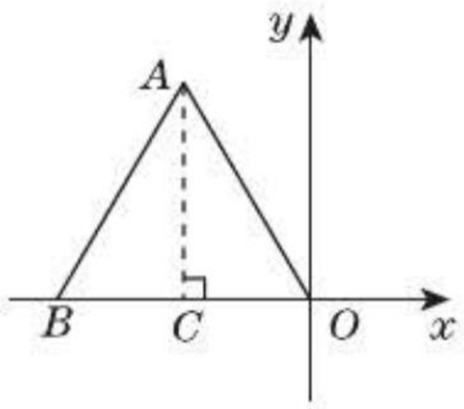
(第2题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. $\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

点拨：如图，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C. ∵ $\triangle AOB$ 是等边三角形，$AC\perp OB$，$OB=3$，∴ $OC=BC=\frac{3}{2}$，

在 Rt $\triangle AOC$ 中，∵ $OA=3$，∴ $AC=\sqrt{AO^2-OC^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴ $A\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.



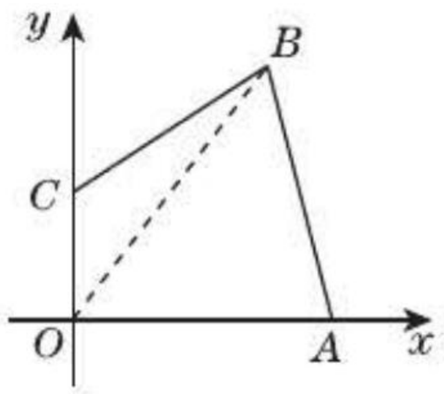
（第3题图）

4. 解：AD 所在直线.

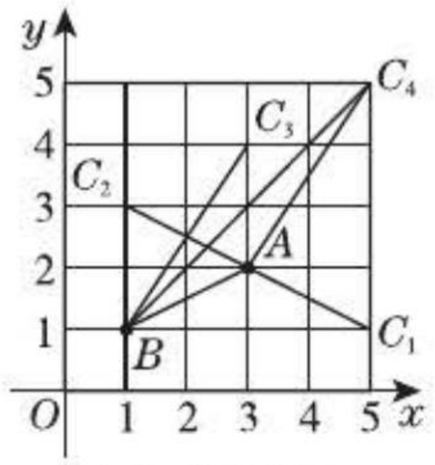
$A(0,0)$；$B(6,0)$；$C(6,6)$；$D(0,6)$.

5. C

6. 11　**点拨**：如图，连接 OB. ∵ 点 $A(4,0)$，$B(3,4)$，$C(0,2)$，∴ $S_{四边形ABCO}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times2\times3=11$.



（第6题图）



（第8题图）

7. 4 或 −4　**点拨**：由直线 AB 与坐标轴围成的三角形的面积等于 10，可知 $\frac{1}{2}OA\cdot OB=10$，即 $\frac{1}{2}|a|\times5=10$，所以 $|a|=4$. 即 $a=4$ 或 $a=-4$.

8. (5,1)，(1,3)，(3,4)，(5,5)

点拨：如图，因为 a,b 均为正整数，点 C 的坐标为(5,1)，(1,3)(3,4)，(5,5).

9. $(-0.5,0)$或$(1.25,0)$　**点拨**：如图，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，

则 $AO=1$，$OB=3$，$OE=2$，$CE=4$，$DE=1$，

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle AOB}+S_{梯形OBCE}+S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times(3+4)\times2+\frac{1}{2}\times1\times4=10.5$，

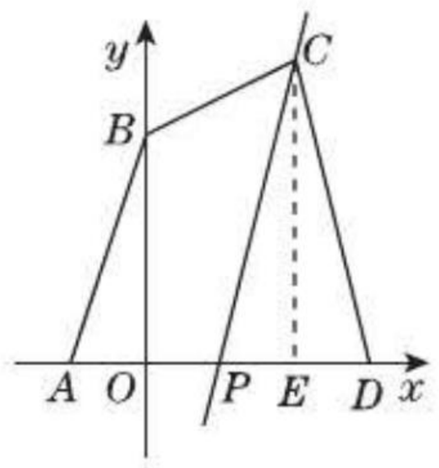
设点 $P(x,0)$，则 $PD=3-x$，

由直线 CP 将四边形 $ABCD$ 的面积分成 1∶2两部分知 $S_{\triangle CPD}=3.5$ 或 $S_{\triangle CPD}=7$，

则 $\frac{1}{2}\times(3-x)\times4=3.5$ 或 $\frac{1}{2}\times(3-x)\times4=7$，

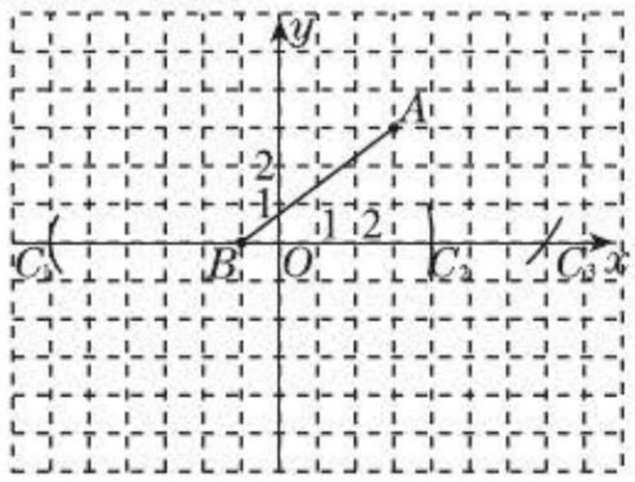
解得 $x=1.25$ 或 $x=-0.5$，

即点 P 的坐标为 $(-0.5,0)$或$(1.25,0)$.



（第9题图）

10. 解：(1) 如图所示.



（第10题图）

(2) 如图，满足条件的点为 C_1，C_2，C_3，其中 $C_1(-6,0)$，$C_2(4,0)$，$C_3(7,0)$

11. 解：(1) BC 为对角线时，第四个顶点坐标为(7,7)；AB 为对角线时，第四个顶点坐标为(5,1)；AC 为对角线时，第四个顶点坐标为(1,5).

(2) 图中三角形 ABC 的面积 $=3\times3-\frac{1}{2}\times(1\times3+1\times3+2\times2)=4$，所以平行四边形的面积 $=2\times$ 三角形 ABC 的面积 $=8$.

点拨：(1) 本题应从 BC 为对角线、AC 为对角线、AB 为对角线三种情况入手讨论，即可得出第四个顶点的坐标；(2) 先求出三角形 ABC 的面积，乘 2 即为平行四边形的面积. 本题利用分类讨论思想和数形结合思想，先画出平行四边形然后确定第四个顶点的坐标.

3.3　轴对称和平移的坐标表示

Ⅰ. 同类变式

1. B　**点拨**：∵ 点 $A(a-1,5)$ 和点 $B(2,b-1)$ 关于 x 轴对称，

∴ $a-1=2$，$b-1=-5$，

解得 $a=3$，$b=-4$，

∴ $(a+b)^{2019}=(3-4)^{2019}=-1$.

2. $(4,-2)$　**点拨**：根据直角坐标系写出点 M 的坐标，再根据关于 y 轴对称的点的坐标特点：纵坐标相等，横坐标互为相反数，即可得出 M_1 的坐标.

6. D

7. 解：(1) ∵ $A(-2,6)$，$B(-3,2)$，$C(0,3)$，将 $\triangle ABC$ 中各点的横坐标先加 4，再把各

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点的纵坐标加3，得到$\triangle DEF$，则$\triangle DEF$各顶点的坐标为$D(2,9)$，$E(1,5)$，$F(4,6)$.

(2)连接AD.

由题图可知，$AD=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴如果将$\triangle DEF$看成是由$\triangle ABC$经过一次平移得到的，那么这一平移的平移方向是由A到D的方向，平移的距离是5个单位长度.

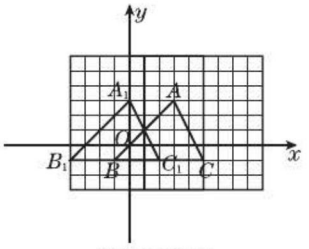
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A

2. A　**点拨**：根据轴对称的性质，知将$\triangle ABC$的三个顶点的横坐标乘-1，就是把横坐标变成相反数，纵坐标不变，因而是把三角形的三个顶点以y轴为对称轴进行轴对称变换，所得图形与原图形关于y轴对称.

3. B　**4.** A　**5.** 1；-2

6. **解**：$A_1(0,3)$，$B_1(-4,-1)$，$C_1(2,-1)$，顺次连接这三个点即可得到$\triangle A_1B_1C_1$，如图所示.



(第6题图)

点拨：由题图可知A点的坐标为$(3,3)$，B点的坐标为$(-1,-1)$，C点的坐标为$(5,-1)$，图形向左平移3个单位长度，则原图形中各点的纵坐标都不变，横坐标都减去3，即可求得平移后各对应点的坐标. 在平面直角坐标系中，点的平移对应的坐标变化规律为：左、右平移，纵坐标不变，横坐标减加；上、下平移，横坐标不变，纵坐标加减.

7. B

8. D　**点拨**：由题意知，$P_1(2,0)$，$P_2(0,-2)$，$P_3(-2,0)$，$P_4(0,2)$，$P_5(2,0)$，…，P_5与P_1重合，从P_5开始出现循环，$2\,019\div4=504\cdots\cdots3$，∴$P_{2\,019}$与$P_3$重合，∴$P_{2\,019}$的坐标为$(-2,0)$.

9. D

10. $(3,3)$　**点拨**：∵$A(-4,0)$，$B(-1,0)$，∴$AB=3$，$AO=4$.

设点C的纵坐标为a，∵四边形$ABDC$的面积为9，∴$3a=9$，∴$a=3$.

∴$C(0,3)$，∴平移的方式为右移4个单位长度、上移3个单位长度，

则点D的坐标为$(-1+4,0+3)$，

即$(3,3)$.

11. 4　**点拨**：∵点B的坐标为$(0,2\sqrt{2})$，将该三角形沿x轴向右平移得到$\mathrm{Rt}\triangle O'A'B'$，此时点$B'$的坐标为$(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$，

∴$AA'=BB'=2\sqrt{2}$.

∵$\triangle OAB$是等腰直角三角形，

∴$A(\sqrt{2},\sqrt{2})$，∴AA'对应的高为$\sqrt{2}$，

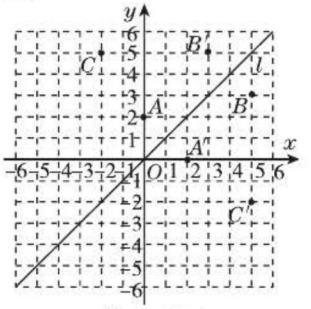
∴线段OA在平移过程中扫过部分的图形面积为$2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$.

12. **解**：根据题意，知点A平移后的横坐标为$-3+1=-2$，纵坐标为$-3\times1=-3$，因此将点$A(-3,1)$放入“魔术盒”中，点A会平移到$(-2,-3)$的位置. 点A先向右平移1个单位长度，再向下平移4个单位长度.

点拨：本题以“魔术盒”的形式给出，有利于激发学生做题的兴趣. 解答本题的关键是正确理解点(a,b)放入“魔术盒”后得到的新的点的坐标是$(a+b,ab)$.

13. **解**：(1)如图，$B'(3,5)$，$C'(5,-2)$.

(2)(n,m)



(第13题图)

方法规律：本题运用了从特殊到一般的思想，通过具体的A，B，C三点与其关于直线l的对称点的坐标间的关系，推测出一般的点与其关于直线l的对称点的坐标间关系的规律.

中考提分专题篇

好题必练

1. B

2. C　**点拨**：用$(0,0)$表示点A，$(0,4)$表示点B，则以点A为坐标原点，AB所在直线为y轴，向上为正方向，x轴是过点A的水平直线，向右为正方向. 所以点C的位置可表示为$(3,2)$.

3. B　**点拨**：∵A，C两点关于x轴对称，∴AC和BD互相垂直平分. ∵$BD=2$，∴$AC=2$. ∵点C在第四象限，∴点C的坐标为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(1,-1)$.

4. D　**点拨**:由题意知 $a+1<0, b-2>0$,

$\therefore a<-1, b>2$,

则 $-a>1, 1-b<-1$,$\therefore$ 点 $B(-a, 1-b)$ 在第四象限.

5. B　**6**. C

7. B　**点拨**:(1)当两斜边重合的时候可组成一个矩形,此时 $x=2, y=4, x+y=6$;(2)当两直角边重合时有两种情况:①短边重合,此时 $x=2, y=4, x+y=6$;②长边重合,此时 $x=2, y=6, x+y=8$. 综上可得 $x+y=6$ 或 $x+y=8$.

8. A　**点拨**:根据题意得(2,0)变化后的坐标为(1,0),(4,0)变化后的坐标为(2,0),所以点 P 在图②中的对应点 P' 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}a, b\right)$.

9. 一　**点拨**:根据题意得:$\begin{cases}a+b-2=0,\\ b-2a+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{5}{3},\\ b=\frac{1}{3},\end{cases}$ 故点 M 在第一象限.

10. $(-2,-2)$

11. $(-1,3)$或$(5,3)$

12. $(2,-3)$

13. $(-a,b)$　**点拨**:由题图可知,4 次变换为一个循环组依次循环.

$\because 2\,019\div 4=504\cdots\cdots 3$,$\therefore$ 第 2 019 次变换后点 A 在第二象限,坐标为 $(-a,b)$.

14. (0,0)或(0,4)　**点拨**:由平移可得,$C(0,2), D(4,2)$,$\therefore CD=AB=4, CD\parallel AB$,$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 为平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 的面积 $=4\times 2=8$.

又$\because$ $\triangle PCD$ 的面积为四边形 $ABDC$ 面积的一半,$\therefore$ $\triangle PCD$ 的面积为 4,

即 $\frac{1}{2}\times CD\times CP=4$,$\therefore CP=2$.

$\therefore$ 当点 P 在 CD 下方时,$P(0,0)$;当点 P 在 CD 上方时,$P(0,4)$.

15. **解**:(1)由题意,得 $4x=x-3$,解得 $x=-1$,

$\therefore$ 点 P 在第三象限的角平分线上时,$x=-1$.

(2)由题意,得 $4x+[-(x-3)]=9$,则 $3x=6$,解得 $x=2$,

$\therefore$ 当点 P 在第四象限,且到两坐标轴的距离之和为 9 时,$x=2$.

16. **解**:(1)汽车站(1,1),消防站(2,−2).

(2)小英路上经过的地方:游乐场,公园,姥姥家,宠物店,邮局.

17. **解**:(1)$\because P(x_1, y_1)$ 平移到点 $P'(x_1+4, y_1+1)$,

$\therefore$ 平移的规律为:向右平移 4 个单位长度,向上平移 1 个单位长度,

$\therefore A_1(0,0), B_1(5,2), C_1(3,5)$;

(2)$S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}=5\times 5-\frac{1}{2}\times 3\times 5-\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 5=\frac{19}{2}$.

18. **解**:(1)$\triangle A_2B_2C_2$ 的三个顶点的坐标分别是 $A_2(4,0), B_2(5,0), C_2(5,2)$.

(2)如图,当 $0<a<3$ 时,

$\because P$ 与 P_1 关于 y 轴对称,$P(-a,0)$,

$\therefore P_1(a,0)$.

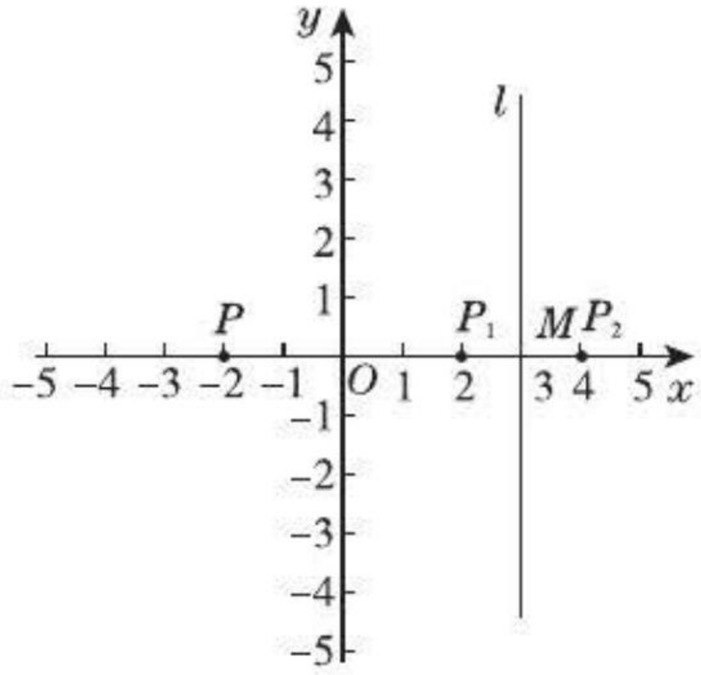
又$\because P_1$ 与 P_2 关于 l:直线 $x=3$ 对称,

设 $P_2(x,0)$,可得 $\frac{x+a}{2}=3$,

即 $x=6-a$,

$\therefore P_2(6-a,0)$,

则 $PP_2=6-a-(-a)=6-a+a=6$.



(第 18 题图)

第4章 一次函数

4.1 函数和它的表示法

Ⅰ. 同类变式

1. **解**:(1)变量:S, r;常量:4,π.

(2)变量:h, t;常量:v_0,-4.9.

2. D　**3**. (1)9　(2)$2\sqrt{6}$　**4**. C

9. **解**:(1)风速;时间

(2)0;10;30;30;0

(3)能

(4)风速 y 可以看作时间 t 的函数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. A　**点拨**：∵ 制动距离 $s=\frac{v^2}{256}$，

∴ s 随着 v 的变化而变化，∴ 变量是 s，v.

2. B　**3.** B　**4.** D　**5.** A　**6.** 3

7. (1) 100　(2) 甲　(3) $\frac{20}{3}$

8. **解**：(1) $\alpha=(n-2)\cdot 180°$，$n\geqslant 3$，且 n 为整数.

(2) $Q=80-4t$，$0\leqslant t\leqslant 20$.

(3) $y=\frac{150}{x}$，$x>0$.

9. **解**：(1) $y=\frac{1}{2}\cdot(8-x)\cdot 6=24-3x$.

(2) $0<x<8$.

10. D

11. D　**点拨**：由题意得，$2x+y=10$，所以 $y=-2x+10$，由三角形的三边关系得，$\begin{cases}2x>-2x+10①,\\ x-(-2x+10)<x②,\end{cases}$

解不等式①得，$x>2.5$，

解不等式②得，$x<5$，

所以不等式组的解集是 $2.5<x<5$，

正确反映 y 与 x 之间函数关系的图象是 D 选项图象，故选 D.

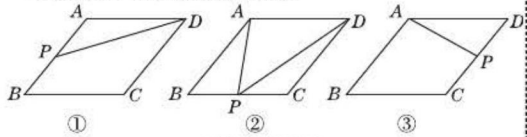
12. B　**点拨**：分三种情况：

①当 P 在 AB 边上时，如图①，

设菱形的高为 h，$y=\frac{1}{2}AP\cdot h$.

∵ AP 随 x 的增大而增大，h 不变，

∴ y 随 x 的增大而增大.



(第 12 题图)

②当 P 在边 BC 上时，如图②，

$y=\frac{1}{2}AD\cdot h$，AD 和 h 都不变，

∴ 在这个过程中，y 不变.

③当 P 在边 CD 上时，如图③，

$y=\frac{1}{2}PD\cdot h$，

∵ PD 随 x 的增大而减小，h 不变，

∴ y 随 x 的增大而减小，

∵ P 点从点 A 出发沿 $A\to B\to C\to D$ 路径匀速运动到点 D，

∴ P 在三条线段上运动的时间相同.

故选 B.

13. A　**点拨**：由题图可得，

甲步行的速度为 $240\div 4=60$(米/分)，故①正确；

乙走完全程用的时间为 $2\ 400\div(16\times 60\div 12)=30$(分钟)，故②错误；

乙追上甲用的时间为 $16-4=12$(分钟)，故③错误；

乙到达终点时，甲离终点距离是 $2\ 400-(4+30)\times 60=360$(米)，故④错误；

故选 A.

14. 78

15. **解**：(1) 10　(2) 55　(3) 略.

(4) 上述各点在某一个函数的图象上，该函数的表达式是 $s=\frac{n(n+1)}{2}$.

4.2　一次函数

Ⅰ. 同类变式

2. **解**：(1) 由一次函数的概念，知 $\begin{cases}|m|=1,①\\ m-1\neq 0.②\end{cases}$

由①式，得 $m=\pm 1$.

将 $m=\pm 1$ 代入②式检验，得 $m=-1$.

所以当 $m=-1$ 且 n 取任意值时，函数 y 是关于 x 的一次函数.

(2) 由正比例函数的概念，知 $\begin{cases}|m|=1,\\ m-1\neq 0,\\ n-3=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-1,\\ n=3.\end{cases}$

所以当 $m=-1$，$n=3$ 时，函数 y 是关于 x 的正比例函数.

3. **解**：(1) $y=(1-0.5)x+(0.2-0.5)(200-x)=0.8x-60$ ($0\leqslant x\leqslant 200$，$x$ 为整数).

(2) 根据题意得 $30(0.8x-60)\geqslant 2\ 000$，

解得 $x\geqslant 158\frac{1}{3}$.

∴ 小丁每天至少要卖 159 份报纸才能保证每月纯收入不低于 2 000 元.

点拨：(1) 因为小丁每天买进报纸 200 份，故卖出报纸的份数不大于 200 份，即 $0\leqslant x\leqslant 200$. 根据“纯收入 = 卖出报纸的利润 + 退回报纸的利润”即可列出 y 与 x 之间的函数表达式.

(2) 每月纯收入不低于 2 000 元，即 $30y\geqslant 2\ 000$，解不等式即可.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C　**点拨**：①和④是一次函数.

2. B　**点拨**：$y=2x(x+1)-2x^2$，化简后的结果为 $y=2x$.

3. B　**4.** A

5. **解**：(1) 由题意得 $m^2=1$，$m-1\neq 0$，解得 $m=-1$，n 为任意实数；(2) $m=-1$，$n=0$.

6. **解**：$y=0.4(x-8)+6=0.4x+2.8$ ($x>8$，且 x 为整数).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. B　**点拨**:由题意得$\begin{cases}m^2+m-1=1,\\m^2+2m\neq0,\end{cases}$

解得 $m=1$.

8. C

9. $y=\frac{6x+10}{5}\left(0<x\leqslant\frac{65}{6}\right)$或$y=\frac{120-15x}{2}(6\leqslant x<8)$

点拨:①当长方体实心铁块的棱长为10 cm和 y cm 的那一面平放在长方体的容器底面时,则铁块浸在水中的高度为 8 cm,此时,水位上升了$(8-x)$cm$(x<8)$,铁块浸在水中的体积为 $10\times8\times y=80y(\text{cm}^3)$,

$\therefore 80y=30\times20\times(8-x)$,

$\therefore y=\frac{120-15x}{2}$,$\because y\leqslant15$,$\therefore x\geqslant6$,

即 $y=\frac{120-15x}{2}(6\leqslant x<8)$.

②当长方体实心铁块的棱长为 10 cm 和 10 cm 的那一面平放在长方体的容器底面时,

同①的方法得,$y=\frac{6x+10}{5}\left(0<x\leqslant\frac{65}{6}\right)$,

故答案为:$y=\frac{6x+10}{5}\left(0<x\leqslant\frac{65}{6}\right)$或 $y=\frac{120-15x}{2}(6\leqslant x<8)$

10. **解**:设 $y_1=k_1x$,$y_2=k_2(x+1)$,则 $y=k_1x-2k_2(x+1)$.

根据题意得$\begin{cases}3=k_1-4k_2,\\5=2k_1-6k_2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=1,\\k_2=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore y=x-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)$,

即 $y=2x+1$.

点拨:由 y_1 与 x 成正比例,可设$y_1=k_1x$,由 y_2 与 $x+1$ 成正比例,可把$x+1$看成一个整体,设 $y_2=k_2(x+1)$,然后利用待定系数法求解.

11. **解**:(1)①99　2

②由题意得 $y=2(100-x)=-2x+200$,$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x+200$.

(2)由题意得$\begin{cases}y=-2x+200,\\5x+3y=540,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=60,\\y=80.\end{cases}$

答:甲、乙两种文具各购买了 60 个和 80 个.

12. **解**:(1)当 $0<x\leqslant20$,x 为整数时,$y=20x$;当$x>20$,x 为整数时,$y=20\times20+(x-20)\times10$,即 $y=10x+200$.

所以 $y=\begin{cases}20x(0<x\leqslant20,x\text{ 为整数}),\\10x+200(x>20,x\text{ 为整数}).\end{cases}$

(2)当 $x=52+1=53$ 时,$53>20$,所以 $y=10\times53+200=730$,所以购买门票需花 730 元.

点拨:先求出 y 与 x 之间的函数表达式,然后代入求值即可.

13. **解**:(1)$y=20-6x(x>0)$.

(2)500 米 $=0.5$ 千米,将 $x=0.5$ 代入$y=20-6x$ 得 $y=17$,即这时山顶的温度大约是 17 ℃.

(3)当 $y=-34$ 时,$-34=20-6x$,解得 $x=9$,所以飞机离地面的高度为 9 千米.

14. **解**:(1)设每个文具盒 a 元,每支钢笔 b 元,列方程组得

$\begin{cases}5a+2b=100,\\4a+7b=161,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=14,\\b=15.\end{cases}$

所以每个文具盒 14 元,每支钢笔 15 元.

(2)由题意知,y_1 关于 x 的函数表达式是 $y_1=14\times90\%\,x$,即 $y_1=12.6x$.

由题意知,买钢笔 10 支以下(含 10 支)没有优惠,故此时的函数表达式为 $y_2=15x$,当买 10 支以上时,超出的部分有优惠,故此时的函数表达式为 $y_2=15\times10+15\times80\%\,(x-10)$,即 $y_2=12x+30$. 综上,$y_2=\begin{cases}15x(0<x\leqslant10),\\12x+30(x>10).\end{cases}$

(3)当 $y_1<y_2$,即 $12.6x<12x+30$ 时,解得 $x<50$;当 $y_1=y_2$,即 $12.6x=12x+30$ 时,解得 $x=50$;当 $y_1>y_2$,即 $12.6x>12x+30$ 时,解得 $x>50$.

综上所述,当购买奖品超过 10 件但少于 50 件时,买文具盒省钱;当购买奖品 50 件时,买文具盒和买钢笔的钱数相等;当购买奖品超过 50 件时,买钢笔省钱.

4.3　一次函数的图象

Ⅰ. 同类变式

2. A　**点拨**:正比例函数的一般形式是 $y=kx$(k 为常数,$k\neq0$),因此在正比例函数图象上的点的纵坐标与横坐标的比值是定值,四个选项中只有 A 选项的两个点的纵坐标与横坐标的比值相等,因此选 A.

4. C　**点拨**:根据正比例函数的性质,在 $y=kx$ 中,当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,可得当 $x_1<x_2$ 时,$y_1>y_2$.

5. $k_2<k_3<k_1$　**点拨**:根据函数图象经过的象限,以及函数值随着自变量变化的规律比较大小.

7. D　**8.** B　**9.** $y_1>y_2$　**10.** B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C **2.** D **3.** D

4. B **点拨**:根据题意,将直线 $y=2x-1$ 向左平移 1 个单位长度后得到的直线表达式为 $y=2(x+1)-1$,即 $y=2x+1$,故选 B.

5. > **6.** 77

7. **解**:画图略,点(0,3),(-1,-1),$\left(\frac{1}{2},5\right)$,(1,7)在函数图象上,点 $\left(-\frac{3}{2},3\right)$不在函数图象上.

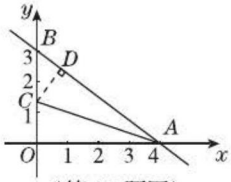
8. **解**:画图略,两直线互相平行.

9. A

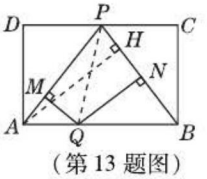
10. C **点拨**:依题意有:$2|k|-3=1$,解得 $k=\pm2$,又 y 随 x 的增大而减小,所以 $1-k<0$,即 $k>1$,所以 $k=2$,所以 $(k-3)^{2\,020}=1$.

11. B **点拨**:A. $y=kx$ 过第一、三象限,则 $k>0$,所以 $y=-kx+k-3$ 过第二、四象限,所以 A 选项错误;B. $y=kx$ 过第二、四象限,则 $k<0$,$-k>0$,$k-3<0$,所以 $y=-kx+k-3$ 过第一、三象限,与 y 轴的交点在 x 轴下方,所以 B 选项正确;C. $y=kx$ 过第二、四象限,则 $k<0$,$-k>0$,$k-3<0$,所以 $y=-kx+k-3$ 过第一、三象限,与 y 轴的交点在 x 轴下方,所以 C 选项错误;D. $y=kx$ 过第一、三象限,则 $k>0$,所以 $y=-kx+k-3$ 过第二、四象限,所以 D 选项错误. 故选 B.

12. B **点拨**:过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,如图,对于 $y=-\frac{3}{4}x+3$,令 $x=0$,得 $y=3$,令 $y=0$,得 $x=4$,$\therefore A,B$ 两点的坐标分别为 $A(4,0)$,$B(0,3)$,即 $OA=4$,$OB=3$,$\therefore BC=3-n$,$AB=5$. 又∵ 把坐标平面沿直线 AC 折叠,使点 B 刚好落在 x 轴上,$\therefore AC$ 平分 $\angle OAB$,$\therefore CD=CO=n$,$DA=OA=4$,$\therefore DB=5-4=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,$DC^2+BD^2=BC^2$,$\therefore n^2+1^2=(3-n)^2$,解得 $n=\frac{4}{3}$,$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(0,\frac{4}{3}\right)$. 故选 B.



(第 12 题图)



(第 13 题图)

13. D **点拨**:如图,连接 PQ,作 $AH\perp BP$ 于 H. ∵ $S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle ABP}$,$\therefore \frac{1}{2}AP\cdot MQ+\frac{1}{2}BP\cdot QN=\frac{1}{2}BP\cdot AH$. ∵ $AP=BP$,$\therefore MQ+NQ=AH$. $\therefore y=AH$. 故选 D.

14. **解**:(1)∵ 正比例函数 $y=(2m-1)x^{3m^2-2}$ 的图象过第二、四象限,

$\therefore 2m-1<0$ 且 $3m^2-2=1$,解得 $m=-1$.

(2)由(1)得正比例函数为 $y=-3x$.

∵ $A(3,a)$,$B(\sqrt{5},b)$ 是图象上两点,

$\therefore a=-9$,$b=-3\sqrt{5}$.

15. **解**:(1)∵ 点 $P(x,y)$ 在第一象限,

$\therefore x>0$,$y>0$. 作 $PM\perp OA$ 于 M,则 $PM=y$,

又∵ $x+y=8$,$\therefore PM=8-x$,

$\therefore S=\frac{1}{2}OA\cdot PM=\frac{1}{2}\times10(8-x)$,

即 $S=-5x+40$. ∵ $x+y=8$,

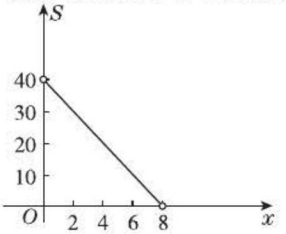
$\therefore y=8-x>0$,$\therefore x<8$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $0<x<8$.

(2)画出图象如图.

点拨:(1)三角形的底边是 OA,高是点 P 的纵坐标,代入面积公式整理即可;

(2)先求出函数图象与坐标轴的交点,再根据两点确定一条直线作出图象. 正确找出三角形的高是求解本题的关键.



(第 15 题图)

16. 4;4(2n-1) **点拨**:由题图可得,

$S_1=\frac{(1+3)\times2}{2}=4=4\times(2\times1-1)$,

$S_2=\frac{(5+7)\times2}{2}=12=4\times(2\times2-1)$,

$S_3=\frac{(9+11)\times2}{2}=20=4\times(2\times3-1)$,

…,$\therefore S_n=4(2n-1)$.

4.4 用待定系数法确定一次函数表达式

Ⅰ. 同类变式

3. **解**:∵ 点 Q 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 与 y 轴的交点,

$\therefore$ 点 Q 的坐标为(0,3).

又∵ 点 P 与点 Q 关于 x 轴对称,$\therefore$ 点 P 的坐标为(0,-3).

$\therefore$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图象过(-2,5),(0,-3)两点,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases} 5=-2k+b, \\ -3=b, \end{cases} \therefore \begin{cases} k=-4, \\ b=-3. \end{cases}$

∴ 这个一次函数的表达式为 $y=-4x-3$.

4. 解:(1)对于一次函数 $y=4x-3$,当 $y=0$ 时,$x=\frac{3}{4}$.

所以它与 x 轴交点的坐标为 $\left(\frac{3}{4},0\right)$.

由题意得,直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3,-3)$ 和 $\left(\frac{3}{4},0\right)$,

所以 $\begin{cases} 3k+b=-3, \\ \frac{3}{4}k+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-\frac{4}{3}, \\ b=1. \end{cases}$

所以一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+1$.

(2)因为 $k=-\frac{4}{3}<0, b=1>0$,

所以一次函数 $y=-\frac{4}{3}x+1$ 的图象经过第一、二、四象限.

(3)对于 $y=-\frac{4}{3}x+1$,当 $x=0$ 时,$y=1$;

当 $y=0$ 时,$x=\frac{3}{4}$.

所以该一次函数的图象与坐标轴围成的直角三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C **点拨**:将 $(-2,0)$,$(0,1)$ 代入,得 $\begin{cases} -2k+b=0, \\ b=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=\frac{1}{2}, \\ b=1, \end{cases}$

∴ $y=\frac{1}{2}x+1$. 将点 $A(3,m)$ 的坐标代入,得 $\frac{3}{2}+1=m$,即 $m=\frac{5}{2}$,故选 C.

2. B **点拨**:设一次函数的表达式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$,由一次函数图象经过点 A,且与正比例函数 $y=-x$ 的图象交于点 B,可得 $\begin{cases} 2=b, \\ 1=-k+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=2, \\ k=1, \end{cases}$

所以该一次函数的表达式为 $y=x+2$. 故选 B. 本题要注意利用数形结合思想,求出点 A,B 的坐标是解题的关键.

3. $y=-2x$ **点拨**:对于直线 $y=-x+1$,在 $y=2$ 时,有 $-x+1=2$,得 $x=-1$,∴ $P(-1,2)$. 设正比例函数的表达式为 $y=kx$,∵ 点 P 是正比例函数 $y=kx$ 的图象和一次函数 $y=-x+1$ 的图象的交点,

∴ $2=k\times(-1)$,得 $k=-2$,∴ 正比例函数的表达式为 $y=-2x$.

4. $y=-\frac{4}{3}x$ 或 $y=-4x$ **点拨**:①当点 A 绕坐标原点 O 逆时针旋转 90°,再向左平移 1 个单位长度得到点 A' 时,

由题意得 $A'(-3,4)$.

设过点 A' 的正比例函数的表达式为:$y=kx$,则 $4=-3k$,解得 $k=-\frac{4}{3}$,

则过点 A' 的正比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x$,

②当点 A 绕坐标原点 O 顺时针旋转 90°,再向左平移 1 个单位长度得到点 A' 时,由题意可得 $A'(1,-4)$,

则过点 A' 的正比例函数的表达式为 $y=-4x$.

5. 解:(1)7;$\frac{15}{8}$

(2)设所求函数表达式为 $y=kx+b$.

∵ 点 $(0,15)$,$(1,7)$ 在此函数图象上,

∴ $\begin{cases} 15=b, \\ 7=k+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-8, \\ b=15. \end{cases}$ ∴ 所求函数表达式为 $y=-8x+15\left(0\leqslant x\leqslant\frac{15}{8}\right)$.

点拨:(1)根据图象提供的信息,易知此蜡烛燃烧 1 h 后,高度为 7 cm,经过 $15\div(15-7)=\frac{15}{8}$(h)燃烧完毕;(2)由函数图象上的两点 $(0,15)$,$(1,7)$ 即可确定该一次函数的表达式.

6. 解:由正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 $P(2,3)$,可得 $k=\frac{3}{2}$,所以这个正比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{2}x$. 将该函数的图象向上平移 3 个单位长度后,得到的图象对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x+3$.

7. C

8. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ **点拨**:∵ $A(0,4)$,$B(3,0)$,∴ $OA=4$,$OB=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中,$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$.

∵ $\triangle OAB$ 沿过点 B 的直线折叠,点 A 落在 x 轴上的点 A' 处,

∴ $BA'=BA=5$,$CA'=CA$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OA' = BA' - OB = 5 - 3 = 2.$

设 $OC = t$，则 $CA = CA' = 4 - t.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OA'C$ 中，$\because OC^2 + OA'^2 = CA'^2$，

$\therefore t^2 + 2^2 = (4 - t)^2$，解得 $t = \frac{3}{2}$，

$\therefore C$ 点坐标为 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

设直线 BC 对应的函数表达式为 $y = kx + b$，

把 $B(3,0)$，$C\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入 $y = kx + b$，得 $\begin{cases} 3k + b = 0, \\ b = \frac{3}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{3}{2}. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 对应的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

9. $y = x$ 或 $y = -x$　**点拨**：$\because$ 点 $A(m,n)$ 在直线 $y = kx\ (k \neq 0)$ 上，且 $-1 \leqslant m \leqslant 1$ 时，$-1 \leqslant n \leqslant 1$，$\therefore$ 点 $(-1,-1)$ 或 $(-1,1)$ 在直线上，$\therefore k = -1$ 或 1，$\therefore y = x$ 或 $y = -x$.

10. **解**：(1) 设直线 l_1 对应的函数表达式为 $y = kx + b$，将 $A(-1,0)$，$B(2,3)$ 两点的坐标代入得 $\begin{cases} -k + b = 0, \\ 2k + b = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1, \\ b = 1. \end{cases}$ 所以直线 l_1 对应的函数表达式为 $y = x + 1$.

(2) 当点 P 在点 A 的右侧时，$AP = m - (-1) = m + 1$，有 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times (m + 1) \times 3 = 3$，解得 $m = 1$；当点 P 在点 A 的左侧时，$AP = -1 - m$，有 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times (-1 - m) \times 3 = 3$，解得 $m = -3$.

综上所述，m 的值为 1 或 -3.

点拨：(1) 可利用待定系数法求得直线对应的函数表达式. (2) 由于直线 l_2 的位置不确定，因此需分 l_2 与 x 轴的交点在点 A 的右侧和左侧两种情况进行讨论.

11. **解**：(1) 当 $x = 1$ 时，$y = 3x = 3$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(1,3)$.

将 $A(-2,6)$，$C(1,3)$ 的坐标代入 $y = kx + b$，得 $\begin{cases} -2k + b = 6, \\ k + b = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1, \\ b = 4. \end{cases}$

(2) 当 $y = 0$ 时，有 $-x + 4 = 0$，解得 $x = 4$，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4,0)$.

设点 D 的坐标为 $(0,m)\ (m < 0)$.

$\because S_{\triangle COD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BOC}$，即 $-\frac{1}{2}m = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3$，

解得 $m = -4$. $\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0,-4)$.

12. **解**：(1) 图中点 B 的实际意义表示当用水 25 m^3 时，所缴水费为 90 元.

(2) 设第一阶梯用水的单价为 z 元/m^3，则第二阶梯用水的单价为 $1.5z$ 元/m^3.

设 $A(a,45)$，则 $\begin{cases} az = 45, \\ az + 1.5z(25 - a) = 90. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 15, \\ z = 3. \end{cases}$ $\therefore A(15,45)$.

设线段 AB 所在直线的表达式为 $y = kx + b$，则 $\begin{cases} 45 = 15k + b, \\ 90 = 25k + b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \frac{9}{2}, \\ b = -\frac{45}{2}. \end{cases}$

$\therefore$ 线段 AB 所在直线的表达式为 $y = \frac{9}{2}x - \frac{45}{2}$.

(3) 设该户 5 月份用水量为 x m^3 $(x > 25)$，由 (2) 知第二阶梯水的单价为 4.5 元/m^3，第三阶梯水的单价为 6 元/m^3.

根据题意，得 $90 + 6(x - 25) = 102$.

解得 $x = 27$.

答：该用户 5 月份用水量为 27 m^3.

13. **解**：(1) 画图略. $(-2,3)$

(2) 画图略. $y = \frac{3}{2}x$；$y = -\frac{3}{2}x$

(3) 画图略. $y = -2x + 4$

(4) $y = -kx + b$ (k，b 为常数，$k \neq 0$)

点拨：求表达式通常用待定系数法；点关于 y 轴对称，则纵坐标不变，横坐标互为相反数；两条直线关于 y 轴对称，则 k 互为相反数，b 不变.

4.5　一次函数的应用

Ⅰ. 同类变式

1. 120

2. **解**：(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 40$ 时，设 $y = kx + b$，根据题意，

可得 $\begin{cases} 2\,000 = 10k + b, \\ 3\,000 = 30k + b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 50, \\ b = 1\,500. \end{cases}$

即当 $0 \leqslant x \leqslant 40$ 时，y 与 x 之间的函数表达式为 $y = 50x + 1\,500$.

当 $x = 40$ 时，$y = 50 \times 40 + 1\,500 = 3\,500$.

当 $x > 40$ 时，依题意，得

$y = 100(x - 40) + 3\,500 = 100x - 500$，

即当 $x > 40$ 时，y 与 x 之间的函数表达式为 $y = 100x - 500$.

(2) 因为当 $0 \leqslant x \leqslant 40$ 时，$y = 50x + 1\,500$，y 随 x 增大而增大，所以当 $x = 40$ 时，y 取得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

最大值,为 3 500.

故 $y \geqslant 4\ 000$ 时对应的函数表达式是 $y = 100x - 500(x > 40)$.

解不等式 $100x - 500 \geqslant 4\ 000$,得 $x \geqslant 45$.

所以,应从第 45 天开始进行人工灌溉.

5. $y = -2x + 2$;$y = -2x + 2$;$(1,0)$;$x = 1$

6. **解**:(1)令 $x = 0$,则 $y = -\frac{3}{4} \times 0 + 3 = 3$. 令 $y = 0$,则 $0 = -\frac{3}{4}x + 3$,解得 $x = 4$. 所以函数 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 的图象与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为 $(4,0)$,$(0,3)$,所以该函数的图象与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

(2)由题意得函数 $y = -\frac{3}{4}x + b$ 的图象与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为 $\left(\frac{4}{3}b, 0\right)$,$(0,b)$. 所以 $\left|\frac{4}{3}b\right| + |b| = 14$,所以 $|b| = 6$. 所以坐标三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}b^2 = 24$.

7. $\frac{18}{7}$

8. **解**:(1)∵ 点 $(1,b)$ 在直线 $y = x + 1$ 上,

$\therefore b = 1 + 1 = 2$.

(2)由(1)知 $P(1,2)$,

∴ 方程组 $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = mx + n \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

(3)直线 $l_3: y = nx + m$ 也经过点 P.

理由如下:∵ 点 $P(1,2)$ 在直线 $y = mx + n$ 上,

$\therefore m + n = 2$,$\therefore 2 = n \times 1 + m$,这说明直线 $y = nx + m$ 也经过点 P.

10. **解**:(1)30 厘米,25 厘米;2 小时,2.5 小时

(2)设 $y_{甲} = k_1 x + b_1$,$y_{乙} = k_2 x + b_2$,由图象得 $\begin{cases} 30 = b_1, \\ 0 = 2k_1 + b_1, \end{cases}$ $\begin{cases} 25 = b_2, \\ 0 = 2.5k_2 + b_2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k_1 = -15, \\ b_1 = 30, \end{cases}$ $\begin{cases} k_2 = -10, \\ b_2 = 25. \end{cases}$

$\therefore y_{甲} = -15x + 30(0 \leqslant x \leqslant 2)$,$y_{乙} = -10x + 25(0 \leqslant x \leqslant 2.5)$.

当 $y_{甲} = y_{乙}$ 时,$-15x + 30 = -10x + 25$,解得 $x = 1$,此时 $y_{甲} = y_{乙} = 15$. 故燃烧 1 小时时,甲、乙两根蜡烛的高度相等,是 15 厘米.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. A **2.** D **3.** A

4. D **点拨**:①当 $x = 0$ 时,$y = 1\ 200$,

$\therefore A$,B 之间的距离为 1 200 m,结论①正确;②乙的速度为 $1\ 200 \div (24 - 4) = 60$(m/min),甲的速度为 $1\ 200 \div 12 - 60 = 40$(m/min),$60 \div 40 = 1.5$,∴ 乙行走的速度是甲的 1.5 倍,结论②正确;③$b = (60 + 40) \times (24 - 4 - 12) = 800$,结论③错误;④$a = 1\ 200 \div 40 + 4 = 34$,结论④正确. 故选 D.

5. $x = 2$

6. 20 **点拨**:结合题图,设一次函数表达式为 $y = kx + 35$,将点 $(160,25)$ 的坐标代入,得 $k = -\frac{1}{16}$,则 $y = -\frac{1}{16}x + 35$. 再将 $x = 240$ 代入,得 $y = 20$.

7. **解**:(1)∵ 函数 $y_1 = 3x + b$ 和 $y_2 = ax - 3$ 的图象交于点 $P(-2,-5)$,

$\therefore 3 \times (-2) + b = -5$,$-2a - 3 = -5$,

解得 $b = 1$,$a = 1$.

(2)∵ $b = 1$,$a = 1$,

$\therefore y_1 = 3x + 1$,$y_2 = x - 3$,

$\therefore A(0,1)$,$B(0,-3)$,$\therefore AB = 4$,

$\therefore \triangle APB$ 的面积是 $\frac{1}{2} \times AB \times 2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$.

8. **解**:(1)1;3;1.2;3.3

(2)$y_1 = 0.1x(x \geqslant 0)$;

$y_2 = \begin{cases} 0.12x(0 \leqslant x \leqslant 20), \\ 0.09x + 0.6(x > 20). \end{cases}$

(3)顾客在乙复印店复印花费少. 理由如下:

当 $x > 70$ 时,$y_1 = 0.1x$,$y_2 = 0.09x + 0.6$,

$\therefore y_1 - y_2 = 0.1x - (0.09x + 0.6) = 0.01x - 0.6$,

设 $y = 0.01x - 0.6$,

由 $0.01 > 0$,有 y 随 x 的增大而增大,

又 $x = 70$ 时,$y = 0.1$.

$\therefore x > 70$ 时,$y > 0.1$,即 $y > 0$.$\therefore y_1 > y_2$,

∴ 当 $x > 70$ 时,顾客在乙复印店复印花费少.

9. ±6 **点拨**:当 $x = 0$ 时,$y = m$;当 $y = 0$ 时,$x = -\frac{m}{3}$,所以 $\frac{1}{2}|m| \cdot \left|-\frac{m}{3}\right| = 6$,

所以 $m^2 = 36$,所以 $m = \pm 6$.

10. 0.6 **点拨**:由题图可知,甲 30 分行驶 12 千米,其速度为 $12 \div 30 = 0.4$(千米/分),乙 12 分行驶 12 千米,其速度为 $12 \div 12 = 1$(千米/分),∴ 每分乙比甲多行驶 $1 - 0.4 = 0.6$(千米).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. $\frac{7}{3}\leqslant k\leqslant 3$　**点拨**：∵ $y=kx-k$，∴ $x=1$ 时，$y=0$，即直线 $y=kx-k$ 过定点(1,0).
∵ 直线 $y=kx-k(k\neq 0)$ 与线段 AB 有交点，
∴ 当直线 $y=kx-k$ 过点 $B(4,7)$ 时，k 值最小，此时，$4k-k=7$，解得 $k=\frac{7}{3}$；当直线 $y=kx-k$ 过点 $A(2,3)$ 时，k 值最大，此时，$2k-k=3$，解得 $k=3$，
∴ k 的取值范围为 $\frac{7}{3}\leqslant k\leqslant 3$.

12. **解**：(1)80；1 140
(2)乙车间每小时加工服装件数为 $120\div 2=60$(件)，
乙车间修好设备的时间为 $9-(420-120)\div 60=4$(小时).
∴ 乙车间维修设备后，乙车间加工服装数量 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=120+60(x-4)=60x-120(4\leqslant x\leqslant 9)$.
(3)甲车间加工服装数量 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=80x$，
当 $80x+60x-120=1\ 000$ 时，解得 $x=8$.
答：甲、乙两车间共同加工完 1 000 件服装时甲车间所用的时间为 8 小时.

13. **解**：(1)根据题意，得 $y=400x+500(100-x)=-100x+50\ 000$.
(2)∵ $100-x\leqslant 2x$，∴ $x\geqslant\frac{100}{3}$.
∵ $-100<0$，
∴ y 随 x 的增大而减小，
∵ x 为整数，
∴ $x=34$ 时，y 取得最大值，最大值为 46 600，
答：该商店购进 A 型电脑 34 台、B 型电脑 66 台，才能使销售总利润最大，最大利润是 46 600 元.
(3)根据题意得，$y=(400+a)x+500(100-x)$，即 $y=(a-100)x+50\ 000\left(33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 60\text{ 且 }x\text{ 为整数}\right)$.
①当 $0<a<100$ 时，y 随 x 的增大而减小，
∴ 当 $x=34$ 时，y 取最大值，
即商店购进 34 台 A 型电脑和 66 台 B 型电脑的销售利润最大.
②当 $a=100$ 时，$a-100=0$，$y=50\ 000$，
即商店购进 A 型电脑数量满足 $33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 60$ 的整数时，均获得最大利润；
③当 $100<a<200$ 时，$a-100>0$，y 随 x 的增大而增大，
∴ 当 $x=60$ 时，y 取得最大值.
即商店购进 60 台 A 型电脑和 40 台 B 型电脑的销售利润最大.

14. **解**：(1)把 $(-2,a)$ 代入 $y=2x-1$，得 $-4-1=a$，解得 $a=-5$.
(2)由(1)知点 $P(-2,-5)$，
则直线 l_2 对应的函数表达式是 $y=\frac{5}{2}x$，
因此点 $P(-2,a)$ 的横纵坐标可以看成是二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\ y=\frac{5}{2}x\end{cases}$ 的解.
(3)易知直线 l_1 与 x 轴交于点 $A\left(\frac{1}{2},0\right)$，
所以 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{4}$.
(4)存在点 M，使点 M 到 x 轴和 y 轴的距离相等. 设点 M 的坐标为 (m,b).
①当 $m=b$ 时，点 M 的坐标为 (m,m)，代入 $y=2x-1$，得 $2m-1=m$，解得 $m=1$，即点 M 的坐标为(1,1)；
②当 $m=-b$ 时，点 M 的坐标为 $(m,-m)$，代入 $y=2x-1$，得 $2m-1=-m$，解得 $m=\frac{1}{3}$，即点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.
综上所述，存在符合条件的点 M，其坐标为(1,1)或 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

15. **解**：(1)330；660
(2)设线段 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx$，
将(17,340)代入 $y=kx$ 中，得
$340=17k$，解得 $k=20$.
∴ 线段 OD 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=20x$.
根据题意得：线段 DE 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=340-5(x-22)=-5x+450$，
联立两线段所表示的函数关系式成方程组，得 $\begin{cases}y=20x,\\ y=-5x+450,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=18,\\ y=360,\end{cases}$
∴ 交点 D 的坐标为(18,360)，
∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\begin{cases}20x(0\leqslant x\leqslant 18),\\ -5x+450(18<x\leqslant 30).\end{cases}$
(3)当 $0\leqslant x\leqslant 18$ 时，根据题意，得 $(8-6)\times 20x\geqslant 640$，解得 $x\geqslant 16$；
当 $18<x\leqslant 30$ 时，根据题意，得 $(8-6)\times(-5x+450)\geqslant 640$，解得 $x\leqslant 26$.
∴ $16\leqslant x\leqslant 26$，$26-16+1=11$(天)，
∴ 日销售利润不低于 640 元的天数共有 11 天.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 点 D 的坐标为(18,360),
∴ 日最大销售量为 360 件,
$360\times2=720$(元),
∴ 试销售期间,日销售最大利润是 720 元.

中考提分专题篇

好题必练

1. B **2**. D **3**. C **4**. D **5**. A
6. B **7**. D **8**. C **9**. C **10**. D
11. 二 **12**. $y=0.3x+6$ **13**. $y=2x-2$
14. 3 **15**. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$
16. 0.3 **17**. $2^{2\,017}$
18. **解**:将(1,0),(0,2)代入 $y=kx+b$,得
$\begin{cases}k+b=0,\\b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=2.\end{cases}$
∴ 一次函数表达式为 $y=-2x+2$.
(1)把 $x=-2$ 代入 $y=-2x+2$,得 $y=6$,
把 $x=3$ 代入 $y=-2x+2$,得 $y=-4$,
∴ y 的取值范围是 $-4\leqslant y<6$.
(2)∵ 点 $P(m,n)$在该函数的图象上,∴ $n=-2m+2$,∵ $m-n=4$,∴ $m-(-2m+2)=4$,解得 $m=2$,∴ $n=-2$,∴ 点 P 的坐标为(2,−2).
19. **解**:(1)应交水费 45 元.
(2)设当 $x>18$ 时,y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx+b$,
将(18,45),(28,75)分别代入函数表达式,得
$\begin{cases}18k+b=45,\\28k+b=75,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=3,\\b=-9,\end{cases}$
∴ $y=3x-9(x>18)$.
将 $y=81$ 代入 $y=3x-9$,得 $3x-9=81$,
解得 $x=30$.
答:这个月用水量为 30 m^3.
20. **解**:(1)把 $C(m,4)$代入 $y=-\frac{1}{2}x+5$,得 $m=2$.
设 l_2 的表达式为 $y=kx$,
把 $C(2,4)$代入 $y=kx$,得 $k=2$,
∴ l_2 的表达式为 $y=2x$.
(2)把 $x=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+5$,得 $y=5$,
即 $B(0,5)$,
把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+5$,得 $x=10$,即 $A(10,0)$,
∴ $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times5\times2=5$,$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times10\times4=20$,
∴ $S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}=20-5=15$.
(3)①l_3 过点 C 时,$k=\frac{3}{2}$;
②l_3 与 l_1 平行时,$k=-\frac{1}{2}$;
③l_3 与 l_2 平行时,$k=2$.
21. **解**:(1)方案 A:$y=5.8x$.
方案 B:$y=5x+2\,000$.
(2)令 $5.8x<5x+2\,000$,
得 $x<2\,500$.
∴ 当购买量 x 的取值范围为 $2\,000\leqslant x<2\,500$ 时,选用方案 A 比方案 B 付款少.
(3)他应选择方案 B.
22. **解**:(1)设小王每生产一件 A 种型号零件用 a 分钟,每生产一件 B 种型号零件用 b 分钟,
根据题意,得$\begin{cases}2a+2b=70,\\6a+4b=170,\end{cases}$
解得$\begin{cases}a=15,\\b=20.\end{cases}$
答:分别需要 15 分钟和 20 分钟.
(2)$y=0.85x+\frac{26\times8\times60-15x}{20}\times1.5+920$.
即 $y=-0.275x+1\,856$(或 $y=-\frac{11}{40}x+1\,856$).
(3)因为 $-0.275<0$,所以 y 随 x 的增大而减小.
又生产 A,B 两种型号的零件数目没有限制,所以当 $x=0$ 时,y 取得最大值,$y_{最大}=1\,856$.
即小王该月全部生产时间用来生产 B 种型号零件,最高工资为1 856 元.

第5章 数据的频数分布

5.1 频数与频率

Ⅰ. 同类变式
1. 45;0.9 **3**. C
Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧
1. C **2**. C **3**. 10 **4**. 48
5. 33;0.33;0.25 **点拨**:在前 100 个正整数中,3 的倍数共有 33 个,4 的倍数共有 25 个.
6. (1)7;70% (2)2 502;50.04%
(3)抛掷总次数;1
7. B **点拨**:∵ 第一组与第二组的频率和为 $1-20\%=80\%$,∴ 该组数据总数为$(6+10)\div80\%=20$,
∴ 第三组的频数是 $20\times20\%=4$.
故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

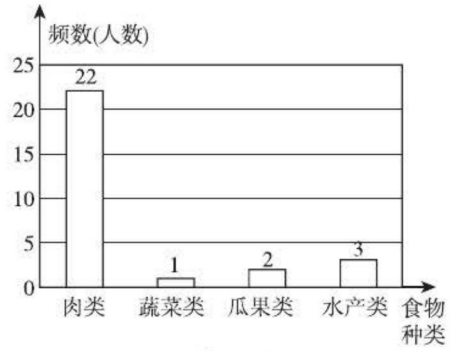
8. C

9. 解：(1)一；丅；正；正丅；下；丌；下；丅；正；丌；1；2；5；7；3；4；3；2；5；4.

(2)“3”“6”“9”出现的频率分别是 $7\div36=\frac{7}{36}$，$3\div36=\frac{1}{12}$，$4\div36=\frac{1}{9}$.

10. 解：10；10%；3

(1)如图所示：



(第 10 题图)

(2)建议同学们多吃蔬菜、水果、水产，补充各种维生素，为了身体的健康应少吃肉类食品(答案不唯一).

5.2 频数直方图

Ⅰ. 同类变式

3. B

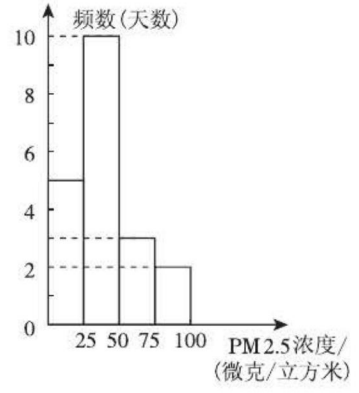
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C　点拨：$\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}}=8\frac{8}{9}$，所以应分成 9 组.

2. C　3. 0.25　4. 92%

5. 解：(1)10；3；15

(2)补全频数直方图如图所示.

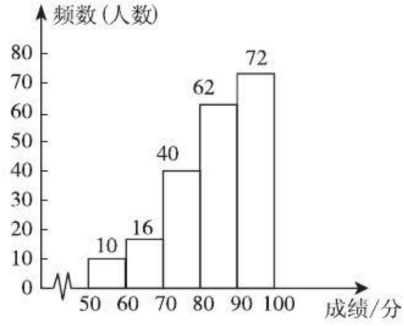


(第 5 题图)

6. A

7. 解：(1)40

补全频数直方图如图所示.



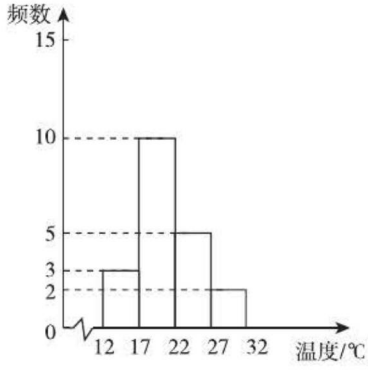
(第 7 题图)

(2)这次抽查的学生中，有 40 + 62 = 102(人)的参赛成绩被评为“B”.

8. 解：(1)补全表格如下：

气温分组	画记	频数
$12\leqslant x<17$	下	3
$17\leqslant x<22$	正正	10
$22\leqslant x<27$	正	5
$27\leqslant x<32$	丅	2

(2)补全频数直方图如图：



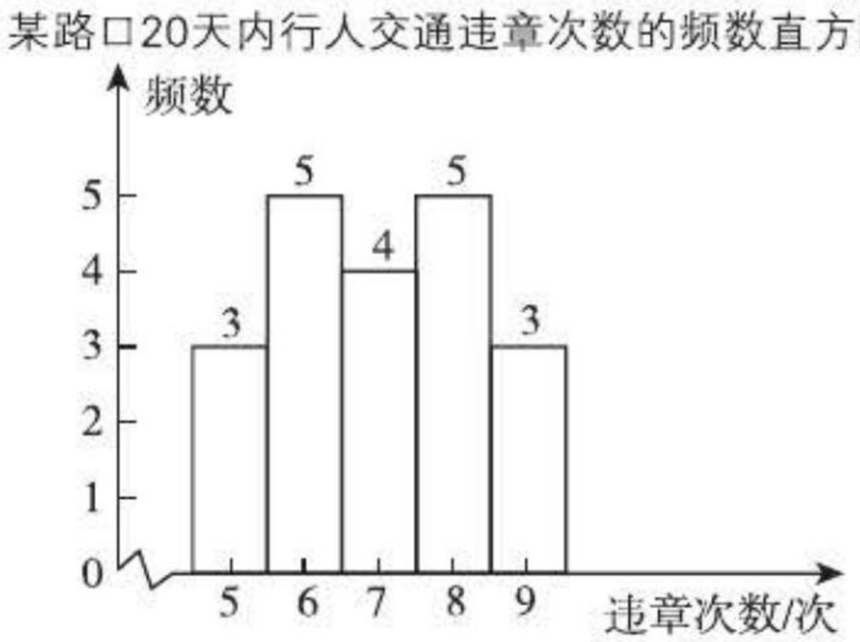
(第 8 题图)

(3)由频数直方图知，$17\leqslant x<22$ 时天数最多，有 10 天.(答案不唯一)

9. 解：(1)第 7 天，这一路口的行人交通违章次数是 8 次. 这 20 天中，行人交通违章 6 次的有 5 天.

(2)补全频数直方图如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第9题图)

(3)第一次调查,平均每天的行人交通违章次数为 $\frac{5\times3+6\times5+7\times4+8\times5+9\times3}{20}=7$(次),

∵ 7 − 4 = 3(次),

∴ 通过宣传教育后,这一路口平均每天还出现3次行人的交通违章.

中考提分专题篇

好题必练

1. B **2.** C **3.** D **4.** A **5.** A **6.** B

7. C **点拨**:植树7棵以上的人数是20 + 15 + 3 = 38(人),则植树7棵以上的人数占总人数的百分比是 $\frac{38}{50}=76\%$,故选C.

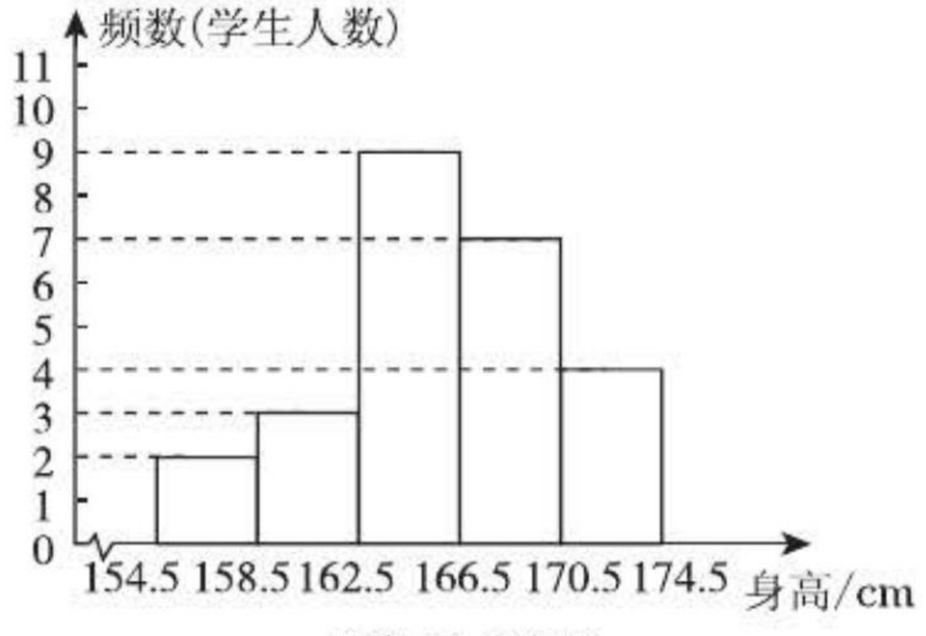
8. D **9.** 0.35

10. ③④ **点拨**:①小文同学一共统计了4 + 8 + 14 + 20 + 16 + 12 = 74(人),故题干说法错误;②每天微信阅读不足20分钟的人数有4 + 8 = 12(人),故题干说法错误;③每天微信阅读30 ~ 40分钟的人数最多,故题干说法正确;④每天微信阅读0 ~ 10分钟的人数最少,故题干说法正确. 故选③④.

11. **解**:(1)列频数分布表如下:

组别	154.5 ~ 158.5	158.5 ~ 162.5	162.5 ~ 166.5	166.5 ~ 170.5	170.5 ~ 174.5
画记	丅	下	正丅	正丅	丅
频数	2	3	9	7	4

(2)根据上表绘制频数直方图,如图所示.



(第11题图)

12. **解**:根据频数直方图可知:第1小组有3人,第2小组有12人,第3小组有18人,第4小组有9人,第5小组有6人,所以:

(1)这次测试活动抽取的人数是3 + 12 + 18 + 9 + 6 = 48(人).

(2)测试成绩在70.5 ~ 80.5分的人数最多.

(3)若成绩在80分以上(不含80分)为优秀,则优秀率是 $\frac{9+6}{48}\times100\%=31.25\%$.

13. **解**:(1)由频数直方图可知4.5 ~ 5.0的频数 $a=4$.

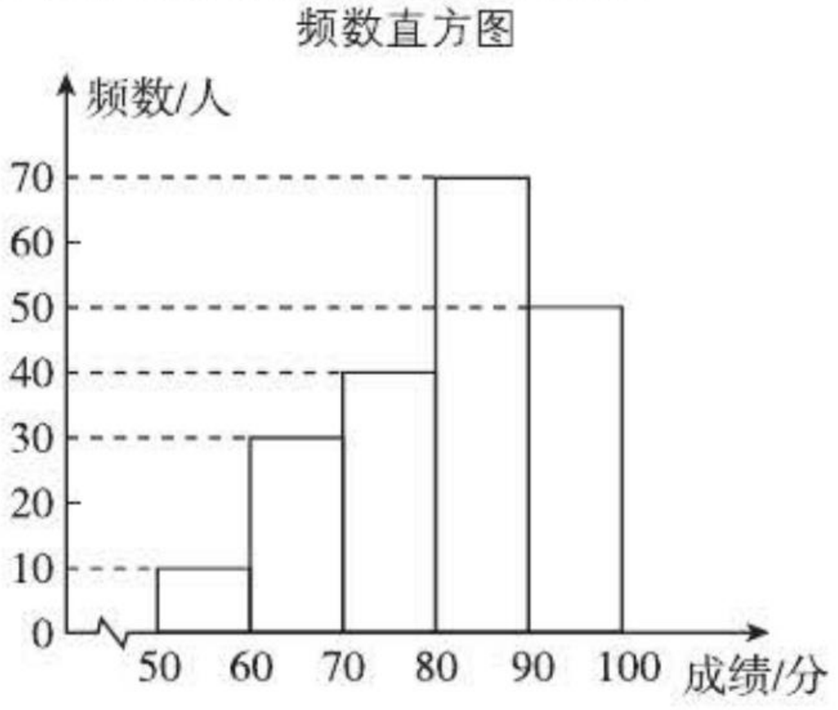
(2)∵ 该年级这周收集的可回收垃圾的质量小于4.5 × 2 + 5 × 4 + 5.5 × 3 + 6 = 51.5(kg),

∴ 该年级这周收集的可回收垃圾被回收后所得金额小于51.5 × 0.8 = 41.2(元),

∴ 该年级这周收集的可回收垃圾被回收后所得金额不能达到50元.

14. **解**:(1)70;0.2

(2)补全频数直方图如图所示:



(第14题图)

(3)80 ≤ x < 90

(4)估计该校参加本次比赛的3 000名学生中成绩是“优”等的约有3 000 × 0.25 = 750(人).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第1章 直角三角形

1.1 直角三角形的性质和判定(Ⅰ)

练习

1. **解**:∵ CD 是 Rt△ABC 斜边 AB 上的中线,∴ $CD=\frac{1}{2}AB$. 又∵ $CD=2.5$ cm,∴ $AB=2CD=5$ cm.

2. **解**:△AHC 是直角三角形. ∵ $AB\parallel CD$,∴ $\angle CAB+\angle ACD=180°$. ∵ AH 平分 $\angle CAB$,CH 平分 $\angle ACD$,∴ $\angle HAC+\angle ACH=90°$. ∴ △$AHC$ 是直角三角形,且 $\angle AHC=90°$. 又∵ E 为 AC 的中点,$EH=2$,∴ $AC=2EH=4$.

点拨:要证明三角形是直角三角形,只需证明三角形的两锐角互余即可.

练习

1. **解**:能. 在 Rt△ABC 中,因为 $\angle BAC=30°$,所以 $AB=2BC=12$ m.

答:电梯 AB 的长度是 12 m.

点拨:在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

2. **证明**:∵ $\angle ACB=90°$,$\angle A=30°$,∴ $AB=2BC$,$\angle B=60°$. ∵ CD 垂直于 AB,∴ $\angle BDC=90°$,∴ $\angle BCD=30°$,∴ $BC=2BD$,∴ $AB=4BD$.

习题1.1

A组

1. **解**:∵ CD 是 Rt△ABC 斜边上的中线,∴ $CD=\frac{1}{2}AB=DB$. ∵ $\angle CDA=120°$,∴ $\angle CDB=180°-\angle CDA=60°$. ∴ △$BCD$ 是等边三角形,∴ $\angle B=60°$.

2. (1)**证明**:∵ $\angle B=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{3}\angle C$,∴ $\angle A=2\angle B$,$\angle C=3\angle B$. ∴ $\angle A+\angle B+\angle C=2\angle B+\angle B+3\angle B=6\angle B=180°$,∴ $\angle B=30°$,∴ $\angle C=3\angle B=90°$,∴ △ABC 为直角三角形.

(2)**解**:由(1)知,AB 是 Rt△ABC 的斜边,∴ AB 边上的中线长 $=\frac{1}{2}AB=4$ cm.

3. **解**:在 △ADC 和 △EDB 中,∵ $CD=BD$,$\angle ADC=\angle EDB$,$AD=ED$,∴ △$ADC\cong$△EDB. ∴ $\angle EAC=\angle E$. ∵ $CA\perp AE$,∴ $\angle EAC=90°$,∴ $\angle E=90°$. 在 Rt△AEB 中,∵ $\angle 1=30°$,∴ $EB=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$ cm.

4. (1)**解**:在 Rt△ABC 中,∵ CD 是斜边 AB 上的中线,∴ $CD=\frac{1}{2}AB=1$.

(2)**证明**:∵ CE 是 Rt△ABC 的高,∴ $\angle CED=90°$,即 △CED 是直角三角形. ∵ F 是 CD 的中点,∴ 在 Rt△CED 中,$EF=\frac{1}{2}CD=FD$. 由(1)知 $CD=\frac{1}{2}AB=DB$,∴ $\angle DCB=\angle B=30°$,∴ $\angle CDE=\angle DCB+\angle B=60°$,即 $\angle FDE=60°$. ∴ △EDF 为等边三角形.

5. **解**:因为 $BC\perp AC$,$\angle ABC=60°$,所以 $\angle A=30°$,所以 $BC=\frac{1}{2}AB=4$ m.

因为 D 为 AB 的中点,所以 $CD=\frac{1}{2}AB=4$ m.

因为 $DE\perp AC$,所以 $\angle DEA=90°$. 在 Rt△AED 中,因为 $\angle A=30°$,所以 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{4}AB=2$ m.

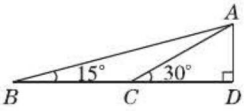
点拨:遇到已知条件中有 60° 或 30° 的角时,一般要考虑"直角三角形中,30° 角所对的直角边等于斜边的一半"这一性质.

B组

6. **解**:在 Rt△ABC 中,∵ $\angle C=90°$,∴ $\angle A+\angle ABC=90°$. ∵ ED 是线段 AB 的垂直平分线,∴ $\angle A=\angle ABE$. 又∵ $\angle 1=\frac{1}{3}\angle ABC$,∴ $\angle ABE=\angle A=\frac{2}{3}\angle ABC$,∴ $\frac{2}{3}\angle ABC+\angle ABC=90°$,即 $\angle ABC=54°$,∴ $\angle A=36°$.

7. **解**:在 Rt△ABC 中,∵ $\angle B=30°$,∴ $AC=\frac{1}{2}AB=7$ cm. 由 △AED 是等腰直角三角形,易知△ACF 也是等腰直角三角形,∴ $CF=AC=7$ cm,∴ 阴影部分 △ACF 的面积 $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}AC\cdot CF=24\frac{1}{2}$ cm^2.

8. **解**:能. 如图,$\angle B=15°$,$\angle ACD=30°$,所以 $\angle BAC=15°$,所以 $AC=BC=400$ m.



(第8题图)

在 Rt△ACD 中,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle ACD = 30°$,所以 $AD = \frac{1}{2}AC = 200$ m.

又因为小芳的眼睛离地面 1.6 m,所以这个电视塔塔尖离地面的高度是 201.6 m.

1.2 直角三角形的性质和判定(Ⅱ)

练习

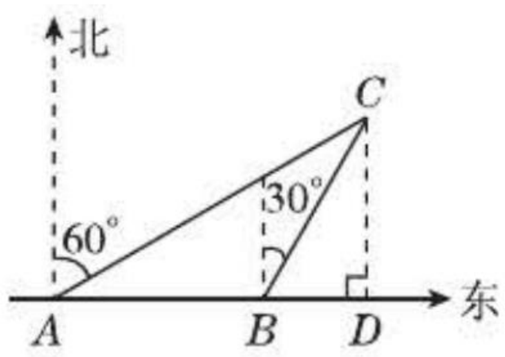
解:(1)由勾股定理得,$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25^2 + 15^2} = \sqrt{850} \approx 29.15$;

(2)由勾股定理得,$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56} \approx 7.48$;

(3)由勾股定理得,$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} \approx 14.14$.

练习

1. 解:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D. 易知 $\angle CAD = 30°$,$\angle BCD = 30°$,$\angle ABC = 90° + 30° = 120°$,



(第1题图)

所以 $\angle ACB = 180° - \angle CAB - \angle ABC = 30°$,所以 $\angle ACB = \angle CAB$,所以 $BC = AB = 30 \times \frac{2}{3} = 20$(海里). 在 Rt$\triangle BCD$ 中,

因为 $\angle BCD = 30°$,所以 $BD = \frac{1}{2}BC = 10$ 海里,所以 $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$(海里). 因为 $10\sqrt{3} > 10$,所以这艘渔船继续向东追赶鱼群没有触礁的危险.

2. 解:过点 D 作 $DF \perp AE$,垂足为 F. 由题意知,$\triangle BCD$ 为直角三角形,且 $\angle BCD = 60°$,$\therefore \angle BDC = 90° - \angle BCD = 30°$. 在Rt$\triangle BCD$ 中,设 $BC = x$ m,则 $CD = 2x$ m,由勾股定理,得 $x^2 + 6^2 = (2x)^2$,解得 $x = 2\sqrt{3}$,$\therefore CD = 4\sqrt{3}$ m. 易知 $\triangle DEF$ 是直角三角形,$EF = AE - AF = AE - BD = 6$ m,$DF = AB = 8$ m. 在 Rt$\triangle DEF$ 中,由勾股定理,得 $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = 10$ m. $\therefore$ 电线 CDE 的总长 $L = CD + DE = (4\sqrt{3} + 10)$ m.

练习

1. 解:(1)$\because 8^2 + 15^2 = 289$,$17^2 = 289$,$\therefore 8^2 + 15^2 = 17^2$. $\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

(2)$\because 10^2 + 24^2 = 676$,$25^2 = 625$,$\therefore 10^2 + 24^2 \neq 25^2$. $\therefore$ 这个三角形不是直角三角形.

(3)$\because 4^2 + 5^2 = 41$,$(\sqrt{41})^2 = 41$,$\therefore 4^2 + 5^2 = (\sqrt{41})^2$. $\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

2. 证明:在正方形 $ABCD$ 中,有 $AB = BC = CD = DA$.

$\because F$ 为 CD 的中点,$\therefore DF = CF = \frac{1}{2}CD$.

$\because EC = \frac{1}{4}BC$. $\therefore BE = \frac{3}{4}BC$.

由勾股定理得,$AF^2 + EF^2 = AD^2 + DF^2 + CF^2 + EC^2 = AB^2 + 2DF^2 + EC^2 = AB^2 + 2\left(\frac{1}{2}DC\right)^2 + \left(\frac{1}{4}BC\right)^2 = AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{16}BC^2 = AB^2 + \frac{9}{16}BC^2 = AB^2 + BE^2 = AE^2$,

$\therefore \triangle AEF$是直角三角形.

习题 1.2

A 组

1. (1)15　(2)26

2. 解:(1)$\because 5^2 + 7^2 = 74$,$8^2 = 64$,$\therefore 5^2 + 7^2 \neq 8^2$. $\therefore$ 这个三角形不是直角三角形.

(2)$\because 5^2 + 12^2 = 169$,$13^2 = 169$,$\therefore 5^2 + 12^2 = 13^2$. $\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

(3)$\because 20^2 + 21^2 = 841$,$29^2 = 841$,

$\therefore 20^2 + 21^2 = 29^2$.

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

(4)$\because (3n)^2 + (4n)^2 = 25n^2$,$(5n)^2 = 25n^2$,$\therefore (3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$.

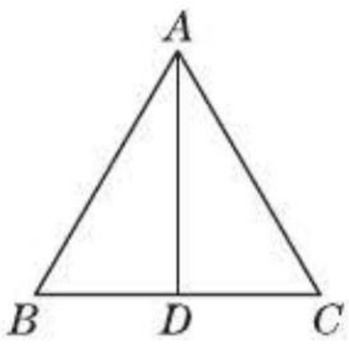
$\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

3. 解:在 Rt$\triangle ACD$ 中,由 $AD^2 = AC^2 + DC^2$,得 $AC^2 = AD^2 - DC^2 = 13^2 - 12^2 = 25$,

所以$AC = 5$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,由 $AC^2 = AB^2 + BC^2$,得 $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 25 - 9 = 16$,

所以$AB = 4$.

4. 解:(1)如图,$\triangle ABC$ 为等边三角形,AD 为 BC 边上的中线. 由等边三角形的性质可得,$DA \perp BC$,$BD = DC = \sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle ABD$ 中,由勾股定理得 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 3$.



(第4题图)

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot BC = 3\sqrt{3}$.

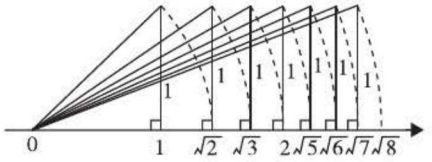
(2)如图,$\triangle ABC$ 为等边三角形,AD 为角平分线,且 $AD = \sqrt{3}$,由等边三角形的性质可得,$AD \perp BC$,$BD = DC$,$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$. 设 $BD = x$,则 $AB = 2x$. 在 Rt$\triangle ABD$ 中,由勾股定理,得 $AB^2 = AD^2 + BD^2$,即 $4x^2 = (\sqrt{3})^2 + x^2$,所以 $x = 1$.

所以 $AB = 2$.

点拨:将问题转化为直角三角形问题,借助勾股定理来解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解：如图所示.



（第5题图）

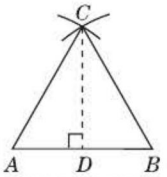
6. 解：这种“张绳法”能得到一个直角三角形. 设绳子每段的长为1，则12段可以分为3段，4段，5段，摆成三角形的形状，此时三角形三边长分别为3，4，5，且 $3^2+4^2=25=5^2$，所以这个三角形是一个直角三角形.

B 组

7. 证明：$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=2ab+b^2-2ab+a^2=b^2+a^2$.

点拨：边长为 c 的大正方形的面积等于4个全等的直角三角形的面积加上中间小正方形的面积.

8. 解：以直角三角形三条边为直径向外作半圆，半圆形面积 $S=\frac{1}{2}\pi r^2$（r 为半圆形的半径），则题中 $S_1=\frac{\pi}{8}a^2$，$S_2=\frac{\pi}{8}b^2$，$S_3=\frac{\pi}{8}c^2$. $\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore S_1+S_2=S_3$.



（第8题图）

作等边三角形 ABC，如图所示. 过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，易知 $AD=\frac{1}{2}AB$. 设 $AB=m$，则 $AD=\frac{1}{2}m$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{m^2-\left(\frac{1}{2}m\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$.

$\therefore$ 题中 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore S_1+S_2=S_3$.

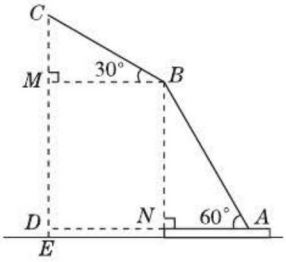
9. 解：如图，过点 B 分别作 $BM\perp CD$，$BN\perp AD$，垂足分别为 M，N.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BMC$ 中，$CM=\frac{1}{2}BC=15$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BNA$ 中，$\angle ABN=90°-\angle BAN=30°$，

$\therefore AN=\frac{1}{2}AB=20$ cm，由勾股定理，得 $BN=\sqrt{AB^2-AN^2}=\sqrt{40^2-20^2}=20\sqrt{3}$（cm）. 由题意易知 $MD=BN=20\sqrt{3}$ cm.

$\therefore CE=CM+MD+DE=15+20\sqrt{3}+2=17+20\sqrt{3}\approx51.6$（cm）.



（第9题图）

1.3 直角三角形全等的判定

练习

1. 解：(1)不正确，两个锐角对应相等的两个直角三角形的形状一样，但大小不一定一样，故不一定全等；

(2)正确. 根据“SAS”定理.

2. 解：$\triangle ABD\cong\triangle CDB$. 理由：$\because\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 都是直角，$\therefore\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 都是直角三角形. $\because AD=CB$，$BD=DB$，$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle CDB$.

习题 1.3

A 组

1. 证明：$\because CB\perp AB$，$CD\perp AD$，$\therefore\angle B=\angle D=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\because AB=AD$，$AC=AC$，$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$（HL），$\therefore\angle1=\angle2$.

2. 解：$\because D$ 为 BC 的中点，$\therefore BD=CD$.

$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore\angle BED=\angle CFD=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CFD$ 中，$\because BD=CD$，$DE=DF$，$\therefore\mathrm{Rt}\triangle BED\cong\mathrm{Rt}\triangle CFD$，$\therefore\angle B=\angle C$，$\therefore AB=AC$.

3. 证明：$\because$ 点 C 为 AD 的中点，$\therefore AC=DC$.

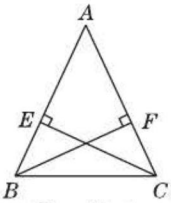
$\because BE\perp AD$，$\therefore\angle ACB=\angle DCE=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中，$\because AB=DE$，$AC=DC$，$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle DEC$（HL），$\therefore\angle A=\angle D$，$\therefore AB/\!/ED$.

4. 略.

B 组

5. 解：已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$CE\perp AB$ 于点 E，$BF\perp AC$ 于点 F，且 $CE=BF$. 求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明：在 $\triangle ABC$ 中，$\because CE\perp AB$，$BF\perp AC$，$\therefore\angle AEC=$



（第5题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle AFB=90°$.

在$\triangle ACE$和$\triangle ABF$中,

$\because \angle A=\angle A, \angle AEC=\angle AFB, CE=BF$.

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle ABF, \therefore AC=AB$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

6. 证明:连接AB. $\because BD\perp AD, AC\perp BC$, $\therefore \angle D=\angle C=90°$,即$\triangle ABD$和$\triangle BAC$都是直角三角形. $\because AB=BA, BD=AC$, $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle BAC. \therefore AD=BC$.

1.4 角平分线的性质

练习

1. 解:过点O作$\angle AOB$的平分线OC,交直线MN于点P,则点P即为所求. 图略.

2. 证明:$\because AD$平分$\angle BAC, DE\perp AB, DF\perp AC, \therefore DE=DF, \angle BED=\angle CFD=90°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle EBD$和$\mathrm{Rt}\triangle FCD$中,$\because DE=DF, BD=CD, \therefore \mathrm{Rt}\triangle EBD\cong\mathrm{Rt}\triangle FCD, \therefore \angle B=\angle C. \therefore AB=AC$.

练习

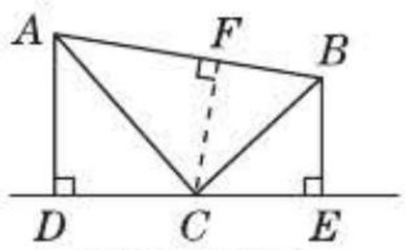
1. 证明:(1)$\because OE$是$\angle AOB$的平分线,$EC\perp OA$, $ED\perp OB, \therefore EC=ED, \therefore \angle ECD=\angle EDC$.

(2)$\because EC\perp OA, ED\perp OB, \therefore \angle OCE=\angle ODE=90°. \therefore \angle OCE-\angle ECD=\angle ODE-\angle EDC$,即$\angle OCD=\angle ODC, \therefore OC=OD$.

2. 证明:如图,作$CF\perp AB$,垂足为F.

$\because AC$平分$\angle BAD, CD\perp AD, CF\perp AB$,

$\therefore CD=CF, \angle ADC=\angle AFC=90°$.



(第2题图)

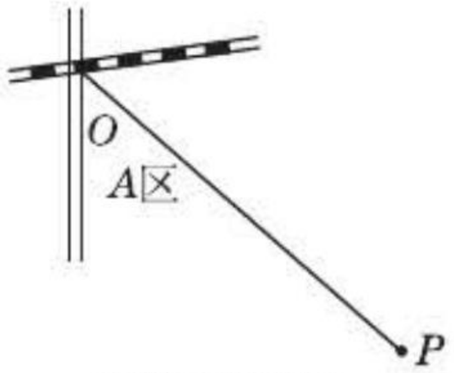
在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$和$\mathrm{Rt}\triangle AFC$中,$\because AC=AC, DC=FC, \therefore \mathrm{Rt}\triangle ADC\cong\mathrm{Rt}\triangle AFC, \therefore AD=AF$. 同理$BE=BF$. $\therefore AB=AF+BF=AD+BE$.

习题 1.4

A 组

1. 解:如图,作公路、铁路夹角的平分线,在角平分线上截取$OP=2.5$ cm,点P即为工厂的位置.

点拨:利用角平分线的性质解题.



(第1题图)

2. 解:过点D作$DE\perp AB$,垂足为E. $\because BD$平分$\angle ABC, DC\perp BC, \therefore DC=DE$. 又$\because DC=\frac{1}{2}AD, \therefore DE=\frac{1}{2}AD, \therefore AC=AD+CD=2DE+DE=3DE, \because AC=8$ m,

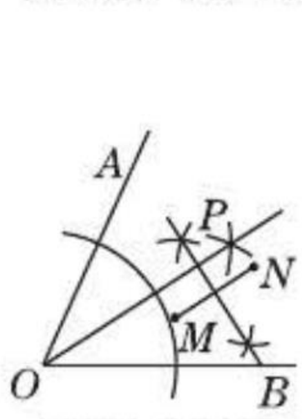
$\therefore DE=\frac{8}{3}$ m,即D到AB的距离是$\frac{8}{3}$ m.

3. 证明:$\because BD$平分$\angle ABC, \therefore \angle ABD=\angle CBD$,在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中,$\because BA=BC, \angle ABD=\angle CBD, BD=BD, \therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD, \therefore \angle ADB=\angle CDB$,即$DB$平分$\angle ADC$. 又$\because PM\perp AD, PN\perp CD$,

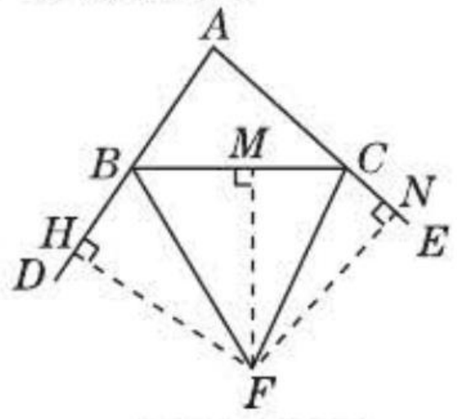
$\therefore PM=PN$.

B 组

4. 解:如图,连接MN,作MN的垂直平分线,然后作$\angle AOB$的平分线,交MN的垂直平分线于点P,则点P即为所求.



(第4题图)



(第5题图)

5. 解:如图,过点F作$FH\perp AD, FM\perp BC, FN\perp AE$,垂足分别为$H, M, N$.

$\because BF$是$\angle CBD$的平分线,且$FH\perp BD, FM\perp BC, \therefore FH=FM$. 同理$FM=FN$.

$\therefore FH=FN$. 又$FH\perp AD, FN\perp AE, \therefore$点$F$在$\angle A$的平分线上.

复习题 1

A 组

1. 解:$\because CD$是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边AB上的中线,

$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=AD, \therefore \angle DCA=\angle A=20°$,

$\therefore \angle BDC=\angle DCA+\angle A=20°+20°=40°$.

2. 解:$\because AB=8, D$为AB的中点,$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=4$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$中,$\angle A=30°, \therefore DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times4=2$.

3. 解:由勾股定理,得$x=\sqrt{2.5^2+4.2^2}\approx4.9$(m).

$x=\sqrt{1.39^2-0.91^2}\approx1.1$(m).

4. 解:(1)$\because 15^2+8^2=289, 17^2=289, \therefore 15^2+8^2=17^2, \therefore$这个三角形是直角三角形.

(2)$\because \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{13}{16}, 1^2=1$,

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\neq1^2, \therefore$这个三角形不是直角三角形.

(3)$\because 1.5^2+2^2=6.25, 2.5^2=6.25, \therefore 1.5^2+2^2=2.5^2, \therefore$这个三角形是直角三角形.

5. 解:由题意知,$OA=15\times2=30$(km), $OB=10\times2=20$(km), $\angle AOB=90°$. 在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中,由勾股定理,得$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{30^2+20^2}=10\sqrt{13}$(km),即

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

它们离开港口 2 h 后，相距10 $\sqrt{13}$ km.

6. 证明：∵ $BE = FC$，∴ $BE + EC = CF + EC$，即 $BC = FE$. 在 Rt△ABC和Rt△DFE中，∵ $AB = DF$，$BC = FE$，∴ Rt△ABC≌Rt△DFE(HL)，∴ $\angle ACB = \angle DEF$.

7. 解：过点 P 作 OA 的平行线，交 OD 于点 E. ∵ $CP \parallel OB$，∴ $\angle CPO = \angle POE$. ∵ $OA \parallel PE$，∴ $\angle COP = \angle OPE$. ∵ OP 平分 $\angle AOB$，∴ $\angle AOP = \angle BOP$，∴ $\angle CPO = \angle EPO$.

又 $OP = OP$，∴ △CPO≌△EPO，∴ $PE = PC = 4$. ∵ P 是 $\angle AOB$ 平分线上一点，∴ $\angle COP = \angle POE = \frac{1}{2}\angle AOB = 15°$. 在 Rt△$PED$ 中，$\angle PED = \angle POE + \angle OPE = 30°$，∴ $PD = \frac{1}{2}PE = 2$.

B 组

8. 解：设这棵树有 x m 高. 则根据题意得 $\sqrt{15^2 + x^2} + (x - 5) = 15 + 5$，解得 $x = 8$.

答：这棵树有 8 m 高.

9. 解：设直角三角形两直角边的长分别为 a，b，则$a + b = \sqrt{6}$，$a^2 + b^2 = 4$，∴ $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)] = \frac{1}{2}[(\sqrt{6})^2 - 4] = 1$，

∴ 直角三角形的面积 $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

10. 解：在△ABC 中，$\angle C = 90°$，即 $BC \perp AC$. ∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，且 $DC \perp AC$，$DE \perp AB$，∴ $CD = DE$. 在 Rt△ACD 和 Rt△AED 中，∵ $CD = ED$，$AD = AD$，∴ Rt△ACD≌Rt△AED，∴ $AC = AE$. 又 $AC = BC$，∴ $BC = AE$. ∴ △DEB 的周长 $= DE + DB + BE = CD + DB + BE = CB + BE = AE + BE = AB = 12$ cm.

C 组

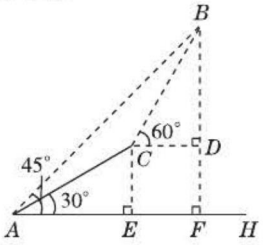
11. 解：如图，过点 B 作 $BF \perp AH$，垂足为点 F，过点 C 作 $CE \perp AF$，$CD \perp BF$，垂足分别为 E，D. 易知 $DF = CE$. 由 $BF \perp AF$ 知 $\angle AFB = 90°$，∴ $\angle ABF = 90° - \angle BAF = 90° - 45° = 45°$. 由 $CD \perp BF$，$\angle BCD = 60°$，知 $\angle CBD = 90° - 60° = 30°$，∴ $\angle CAE = \angle CBD$，

∴ $\angle BAF - \angle CAE = \angle ABF - \angle CBD$，即 $\angle BAC = \angle ABC$，∴ $AC = BC = 2$ km.

∵ $CE \perp AF$，∴ △ACE 是直角三角形，∵ $\angle CAE = 30°$，∴ $CE = \frac{1}{2}AC = 1$ km.

即 $DF = 1$ km.

在 Rt△BCD 中，$\angle CBD = 30°$，∴ $CD = \frac{1}{2}BC = 1$ km，由勾股定理，得 $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ (km). ∴ $BF = BD + DF = \sqrt{3} + 1$(km). ∴ 主峰的高度是 $(\sqrt{3} + 1)$ km.



(第 11 题图)

12. 解：如图，过点 A 作 $AD \perp OD$，垂足为 D.

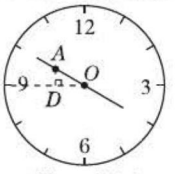
由题意易知 $OA = 16 - 10 = 6$ (cm)，$\angle AOD = 30°$，

当钟面显示 3 点 50 分时，A 点距离桌面的高度 $= (AD + 16)$ cm.

∵ $AD \perp OD$，∴ △ADO 是直角三角形，

∵ $\angle AOD = 30°$，∴ $AD = \frac{1}{2}AO = 3$ cm.

∴ 当钟面显示 3 点 50 分时，A 点距桌面的高度为 $3 + 16 = 19$(cm).



(第 12 题图)

第 2 章 四边形

2.1 多边形

练习

1. 解：(1) 正十二边形的内角和是 $(12 - 2) \times 180° = 1\,800°$，所以每一个内角是 $\frac{1\,800°}{12} = 150°$. (2) 设多边形的边数为 n，则 $(n - 2) \cdot 180° = 1\,800°$，解得 $n = 12$. 因此这个多边形是十二边形.

2. 解：设多边形的边数为 n，则 $n - 2 = 10$，解得 $n = 12$. 因此这个多边形是十二边形.

练习

1. 解：$360° \div 45° = 8$，$180° - 45° = 135°$，所以这个多边形是八边形，它的每一个内角是 135°.

2. 解：根据多边形的外角和等于 360° 可得 $3x° + 2 \times 90° = 360°$，解得 $x = 60$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:伸缩衣帽架等利用了四边形的不稳定性.

习题 2.1

A 组

1. 解:(1)设多边形的边数为 n,则$(n-2)\cdot 180°=1\ 440°$,解得 $n=10$. 因此这个多边形是十边形.

(2)设多边形的边数为 n,由题意,得$(n-2)\cdot 180°=108°\cdot n$,解得 $n=5$. 因此这个多边形是五边形.

2. 解:(1)$360°\div 36°=10$,所以这个多边形是十边形.

(2)设多边形的边数为 n,则它的内角和是$(n-2)\cdot 180°$,由题意,得$(n-2)\cdot 180°=360°\times 2$,解得 $n=6$,因此这个多边形是六边形.

3. 解:由题意,得 $5x°=360°$,解得 $x=72$.

4. 解:设这个多边形的每一个外角是 $x°$. 根据题意,得 $x=180-x$,解得 $x=90$,$360\div 90=4$. 所以这个多边形的每一个外角是 90°,这个多边形是四边形.

点拨:本题考查多边形每个内角与其相邻外角的关系.

B 组

5. 解:在四边形的 4 个内角中,最多能有 3 个钝角,最多能有 3 个锐角.

点拨:本题利用四边形的内角和等于 360° 解题. 若一个四边形有 4 个角是钝角,则四边形的内角和大于 360°;若一个四边形有 4 个角是锐角,则四边形的内角和小于 360°,这与四边形的内角和为 360° 矛盾.

6. 解:(1)设这两个多边形的边数分别为 n,$n+1$,则$(n+1-2)\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°=180°$.

答:这两个多边形的内角和相差 180°.

(2)这两个多边形的外角和相等.

点拨:多边形的外角和与它的边数无关.

7. 解:由题意,知 $PB=PC$. $\because\ \angle BPC=120°$,$\therefore\ \angle PBC=\angle PCB=30°$,即正 n 边形的外角是 30°,$\therefore\ n=360°\div 30°=12$.

2.2 平行四边形

练习

1. 解:$\because\ \angle BCD+\angle DCE=180°$,$\angle DCE=38°$,$\therefore\ \angle BCD=180°-38°=142°$. 由平行四边形的定义及性质知,$AB\parallel CD$,$\angle A=\angle BCD=142°$,$\angle B=\angle D$. 由 $AB\parallel CD$,知 $\angle D=\angle B=\angle DCE=38°$.

2. 解:(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore\ \angle D=\angle ABC=68°$,$\angle A=\angle C$,$AD\parallel BC$,$\therefore\ \angle A+\angle ABC=180°$,$\therefore\ \angle A=180°-\angle ABC=180°-68°=112°$,$\therefore\ \angle C=\angle A=112°$.

(2)由 $AD\parallel BC$ 知,$\angle AEB=\angle CBE$. $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,$\therefore\ \angle ABE=\angle CBE$,$\therefore\ \angle ABE=\angle AEB$,$\therefore AB=AE$,$\therefore AD=AE+ED=AB+ED=2+1=3$(cm). $\therefore$ $\square ABCD$ 的周长为 $2(AB+AD)=2\times(2+3)=10$(cm).

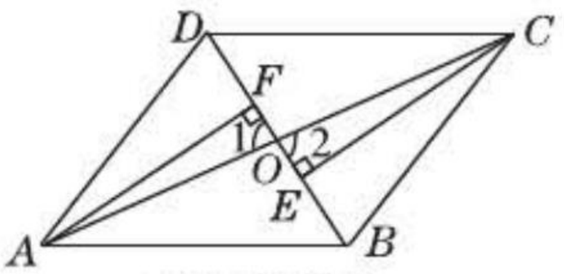
练习

1. 解:(1)因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,且 $BD=14$ cm,$AC=8$ cm,所以 $DO=\frac{1}{2}BD=7$ cm,$AO=\frac{1}{2}AC=4$ cm,$AD=BC=10$ cm.

所以 $\triangle AOD$ 的周长 $=AO+DO+AD=21$ cm.

(2)因为 $AB=CD$,$BD>AC$,所以 $AB+BC+AC<BC+CD+BD$,所以 $\triangle ABC$ 的周长小于 $\triangle BCD$ 的周长,即 $\triangle BCD$ 的周长长. $\triangle BCD$ 的周长比 $\triangle ABC$ 的周长长 $BD-AC=6$ cm.

2. 解:相等. 已知:如图,在 $\square ABCD$ 中,BD,AC 相交于点 O,$CE\perp BD$ 于点 E,$AF\perp BD$ 于点 F. 求证:$CE=AF$.



(第 2 题图)

证明:如图,在 $\square ABCD$ 中,因为 $CE\perp BD$,$AF\perp BD$,所以 $\angle AFO=\angle CEO=90°$.

又 $\angle 1=\angle 2$,$AO=CO$,

所以 $\triangle AOF\cong\triangle COE$. 所以 $AF=CE$.

因此命题成立.

点拨:本题利用平行四边形的性质推出三角形全等来证明,也可利用三角形的面积相等,底相同则高必相等来证明.

练习

1. 证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB\parallel CD$. $\because AE=CF$,$\therefore AB-AE=CD-CF$,即 $BE=DF$. 又$\because BE\parallel DF$,$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

2. 解:四边形 $ABCD$ 是平行四边形,理由:$\because AD=BC$,$AB=DC$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

四边形 $ABEF$ 是平行四边形,理由:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD=BC$,$AD\parallel BC$. $\because E$,F 分别是边 BC,AD 的中点,$\therefore AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=BE$. $\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

四边形 $EFDC$ 是平行四边形,理由同上,略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

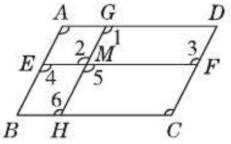
1. 证明：∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，∴ $BD = CD$.
又∵ $DE = AD$，∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

2. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB \parallel CD$，$AO = CO$. ∴ $\angle BAO = \angle DCO$.
在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle CON$ 中，∵ $\angle MAO = \angle NCO$，$AO = CO$，$\angle AOM = \angle CON$，
∴ $\triangle AOM \cong \triangle CON$，∴ $OM = ON$. ∵ $OA = OC$，∴ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

习题 2.2

A 组

1. 解：图中有 9 个平行四边形. 如图，与 $\angle A$ 相等的角有 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$，$\angle C$.



（第 1 题图）

2. 解：因为 AB，CD 都是 l_1 与 l_2 的公垂线段，即 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，所以 $AB \parallel CD$，又 $l_1 \parallel l_2$，所以四边形 $ABDC$ 为平行四边形. 所以 $AB = CD$. 因为 AB，CD 是任意的两条公垂线段，所以两平行线的所有公垂线段都相等.

3. 证明：连接 AC，DE. ∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AD \parallel\!\!= BC$. 又∵ C 为 BE 的中点，∴ $BC = CE$，∴ $AD \parallel\!\!= CE$，∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，∴ $AF = EF$.

4. 解：根据题意，$\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 平移得到的，所以 $AD \parallel BE \parallel CF$，$AC \parallel DF$，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，所以图中的平行四边形有四边形 $ADFC$、四边形 $BEDA$、四边形 $BEFC$（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.
点拨：平移三角形得到平行线段，两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

5. 解：（1）四边形 $ABDC$ 是平行四边形.
理由：由题意知 $AB = AC = DB = DC$.
∴ $AB = DC$，$AC = DB$，∴ 四边形 $ABDC$ 是平行四边形.
（2）四边形 $AEBC$ 不是平行四边形. 理由：由题意知 $\angle EAC = 2\angle BAC$，$\angle EBC = 2\angle ABC$，又∵ $AB = AC > BC$，∴ $\angle BAC \neq \angle ABC$，∴ $\angle EAC \neq \angle EBC$. ∴ 四边形 $AEBC$ 不是平行四边形.

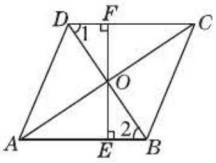
6. 证明：连接 BD，与 AC 交于点 O. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $BO = DO$，$AO = CO$. ∵ $AE = CF$，∴ $AO - AE = CO - CF$，即 $EO = FO$. ∴ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

B 组

7. 解：由平行四边形的性质可知，$S_{\text{红色部分}} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.

8. 解：（1）因为 $DE \parallel AC$，$FE \parallel AB$，$DF \parallel BC$，所以平行四边形有：四边形 $ADEF$，四边形 $DBEF$，四边形 $DECF$.
点拨：利用“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”来判断.
（2）因为 $\triangle DEF$ 在三个平行四边形中，即 $\square ADEF$、$\square DBEF$、$\square DECF$，所以 $\angle DEF = \angle A$，$\angle FDE = \angle C$，$\angle DFE = \angle B$.
点拨：根据“平行四边形的对角相等”来判断.
（3）由（1）可知，四边形 $ADEF$、四边形 $DBEF$、四边形 $DECF$ 均为平行四边形，所以 $EF = AD = BD$，$DF = BE = EC$，$DE = FC = AF$. 所以点 D，E，F 分别是 AB，BC，CA 的中点.
点拨：利用“平行四边形的对边相等”来说明.

9. 证明：如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 分别作 $OE \perp AB$，$OF \perp DC$，垂足分别为 E，F.



（第 9 题图）

在 $\square ABCD$ 中，根据对角线的性质，得 $DO = BO$，
由 $AB \parallel DC$，得 $\angle 1 = \angle 2$.
又因为 $OE \perp AB$，$OF \perp DC$，
所以 $\angle DFO = \angle BEO = 90°$.
所以 $\triangle OEB \cong \triangle OFD$. 所以 $OE = OF$. 同理可证：平行四边形对角线的交点 O 到另一组对边 AD，BC 的距离相等. 因此命题成立.
点拨：利用平行四边形的对角线互相平分及对边平行的性质来证两个三角形全等，进而得对应边相等.

10. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB = CD$，$AB \parallel CD$，∴ $\angle ABD = \angle CDB$. ∵ $AE \perp BD$，$CF \perp BD$，∴ $AE \parallel CF$，$\angle AEB = \angle CFD = 90°$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，∵ $\angle AEB = \angle CFD$，$\angle ABE = \angle CDF$，$AB = CD$，∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$，∴ $AE = CF$. ∵ $AE \parallel CF$，∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

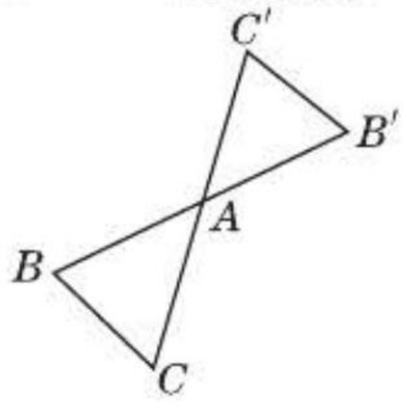
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 中心对称和中心对称图形

练习

1. (1)√ (2)×

2. 解:如图,$\triangle A'B'C'$即为所求.



(第2题图)

3. 解:连接 CC',DD',交于点 O,点 O 即为对称中心. 图略.

练习

1. 略.

2. 解:(1)是中心对称图形,对称中心是各对应点所连线段的交点.

(2)是中心对称图形,对称中心是圆的圆心.

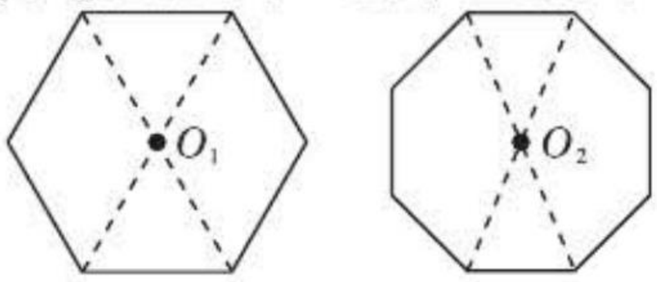
(3)不是中心对称图形.

习题 2.3

A 组

1. 略.

2. 解:正三角形不是中心对称图形. 正六边形和正八边形是中心对称图形,如图所示,O_1,O_2 点分别是它们的对称中心.



(第2题图)

B 组

3. A

4. 解:$\square ABCD$ 绕其对称中心旋转 180°,点 D 所转过的路径为以 O 点为圆心,OD 为半径的一个半圆弧,即点 D 转过的路径长为 $\frac{1}{2}\times\pi\times2\times\frac{4}{2}=2\pi(\text{cm})$.

2.4 三角形的中位线

练习

1. 解:根据三角形中位线的性质,得 $\frac{1}{2}\times(3+3.4+4)=\frac{1}{2}\times10.4=5.2(\text{cm})$.

所以 $\triangle DEF$ 的周长为 5.2 cm.

点拨:根据三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半,求得 $\triangle DEF$ 的各边长均为 $\triangle ABC$ 对应边的长的一半.

2. 解:(1)是. 因为 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 的中点,所以 $AF=\frac{1}{2}AC=ED$,$AD=\frac{1}{2}AB=EF$. 所以四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

点拨:利用平行四边形的判定及三角形中位线的性质解决问题.

(2)四边形 $ADEF$ 的周长等于 $AB+AC$. 由(1)及已知,易知 $AF=DE=\frac{1}{2}AC$,$AD=EF=\frac{1}{2}AB$. 所以 $AD+AF+ED+EF=2\times\frac{1}{2}AC+2\times\frac{1}{2}AB=AC+AB$,即四边形 $ADEF$ 的周长等于 $AB+AC$.

点拨:利用平行四边形的对边相等来推出四边形 $ADEF$ 的周长与三角形的两边 AB 和 AC 的关系.

习题 2.4

A 组

1. 证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,O 点为对角线的交点,所以 $OD=OB$,$AO=CO$. 因为 E,F,M,N 分别是 OA,OB,OC,OD 的中点,所以 $ON=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}OB=OF$,$OM=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}OA=OE$. 所以四边形 $EFMN$ 是平行四边形.

点拨:利用"对角线互相平分的四边形是平行四边形"来证明.

2. 解:∵ 点 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 三边的中点,∴ $DE=\frac{1}{2}AC$,$DF=\frac{1}{2}BC$,$EF=\frac{1}{2}AB$.

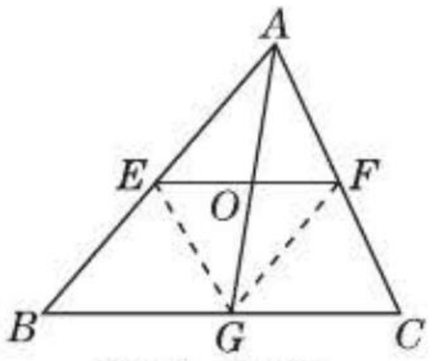
∴ $AC+BC+AB=2(DE+DF+EF)=2\times10=20$,即 $\triangle ABC$ 的周长为 20.

3. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,∴ $BO=OD$,即点 O 是 BD 的中点. 在 $\triangle ABD$ 中,∵ O,E 分别是边 BD,AB 的中点,∴ $OE=\frac{1}{2}AD$. ∵ $OE=3$ cm,∴ $AD=2OE=6$ cm.

B 组

4. 解:互相平分. 已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中,EF 为 $\triangle ABC$ 的一条中位线,AG 是 BC 边上的中线.

求证:AG 与 EF 互相平分.



(第4题图)

证明:设 AG,EF 相交于点 O,连接 EG,FG.

因为 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线,所以点 E,F 分别是 AB,AC 的中点. 又因为 AG 是 BC 边上的中线,所以点 G 为 BC 的中点.

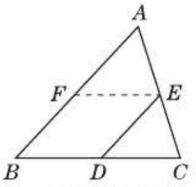
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以 $EG=\frac{1}{2}AC=AF$，$FG=\frac{1}{2}AB=AE$.

所以四边形 $AEGF$ 为平行四边形. 又因为 AG 与 EF 是平行四边形 $AEGF$ 的对角线，所以 AG 与 EF 互相平分，即三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

点拨：利用三角形中位线的性质得到四边形 $AEGF$ 的两组对边分别相等，证得平行四边形. 再根据平行四边形的对角线互相平分，证得命题.

5. **解**：已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\parallel AB$ 交 AC 于 E. 求证：DE 平分 AC.



（第5题图）

证明：过 E 作 $EF\parallel BC$ 交 AB 于 F.

因为 $EF\parallel BD$，$DE\parallel BF$，所以四边形 $BDEF$ 是平行四边形. 所以 $EF=BD$. 又因为 $BD=\frac{1}{2}BC$，所以 $EF=\frac{1}{2}BC$，所以 EF 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线，所以点 E 是 AC 的中点. 即 DE 平分 AC. 所以命题成立.

6. **解**：∵ 点 E，F 分别是 AB，BD 的中点，

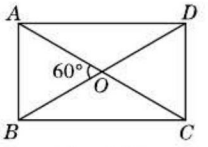
∴ $EF\parallel AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$. 同理 $GH\parallel AD$，$GH=\frac{1}{2}AD$，∴ $EF\parallel GH$，且 $EF=GH$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形. ∵ $AD=6$，∴ $EF=3$. ∵ 点 F，G 分别是 BD，CD 的中点，∴ $FD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 4=2$，$DG=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$. ∵ $BD\perp CD$，∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DFG$ 中，由勾股定理，得 $FG=\sqrt{FD^2+DG^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$. ∴ 四边形 $EFGH$ 的周长为 $2(EF+FG)=2\times\left(3+\frac{5}{2}\right)=11$.

2.5 矩 形

练习

1. **解**：如图，因为四边形 $ABCD$ 为矩形，$AC=2$ cm，所以 $AC=BD$，$OA=\frac{1}{2}AC$，$OB=\frac{1}{2}BD$. 所以 $OA=OB=1$ cm. 因为 $\angle AOB=60°$，所以 $\triangle AOB$ 是等边三角形. 所以 $AB=OA=1$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm).

所以矩形的各边长分别为 1 cm，$\sqrt{3}$ cm，1 cm，$\sqrt{3}$ cm.



（第1题图）

2. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，∴ $AC=BD$，$BO=OD$. ∴ $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$. 即直角三角形 ABC 斜边 AC 上的中线 BO 等于斜边的一半.

练习

1. **证明**：∵ 四边形的内角和为 360°，∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$. ∵ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$，∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle A=360°$，得 $\angle A=90°$，即 $\angle B=\angle C=\angle D=90°$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

2. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=4$，∴ $AO=CO=\frac{1}{2}AC=2$. ∵ $AB=2$，$AO=2$，$\angle AOB=60°$，∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形. ∴ $BO=AO$. ∴ $BD=AC$. ∴ $\square ABCD$ 是矩形. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. ∴ $\square ABCD$ 的面积 $=AB\cdot BC=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

习题 2.5

A 组

1. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle A=\angle D=90°$. ∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，$\angle CFD+\angle DCF=90°$. ∵ $EF\perp FC$，∴ $\angle EFC=90°$. ∴ $\angle CFD+\angle AFE=90°$. ∴ $\angle AFE=\angle DCF$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DFC$ 中，

∵ $\angle A=\angle D$，$\angle AFE=\angle DCF$，$EF=FC$，

∴ $\triangle AEF\cong\triangle DFC$. ∴ $AE=DF=4$ cm.

2. **解**：它们都是矩形. 因为矩形是轴对称图形，根据轴对称图形的性质可以判断.

3. **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB\parallel CD$，$AB=CD$. ∴ $\angle A+\angle D=180°$，$\angle ABC+\angle DCB=180°$. ∵ M 为 AD 的中点，∴ $AM=DM$. 在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 中，∵ $AB=DC$，$AM=DM$，$BM=CM$，∴ $\triangle ABM\cong\triangle DCM$. ∴ $\angle A=\angle D$，$\angle ABM=\angle DCM$. ∵ $\angle A+\angle D=180°$，∴ $\angle A=\angle D=90°$. ∵ $BM=CM$，∴ $\angle MBC=\angle MCB$. ∴ $\angle ABM+\angle MBC=\angle DCM+\angle MCB$，即 $\angle ABC=\angle DCB$. ∵ $\angle ABC+\angle DCB=180°$，∴ $\angle ABC=\angle DCB=90°$. ∴ $\angle A=\angle D=\angle ABC=\angle DCB=90°$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. **证明**：∵ BO 是三角形 ABC 中斜边 AC 上的中线，∴ $AO = CO$. ∵ $OB = OD$，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. ∵ $\angle ABC = 90°$，∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

B 组

5. **解**：连接 BE，∵ O 是 BD 的中点，
∴ $BO = DO$.
∵ $EF \perp BD$，∴ $\angle EOB = \angle EOD = 90°$. 在 $\triangle EOB$ 和 $\triangle EOD$ 中，∵ $BO = DO$，$EO = EO$，$\angle EOB = \angle EOD$，∴ $\triangle EOB \cong \triangle EOD$. ∴ $EB = ED$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle A = 90°$. 在 Rt$\triangle AEB$ 中，设$AE = x$ cm，则 $EB = ED = (4 - x)$ cm，由勾股定理，得 $3^2 + x^2 = (4 - x)^2$，解得 $x = \frac{7}{8}$. ∴ $AE = \frac{7}{8}$ cm.

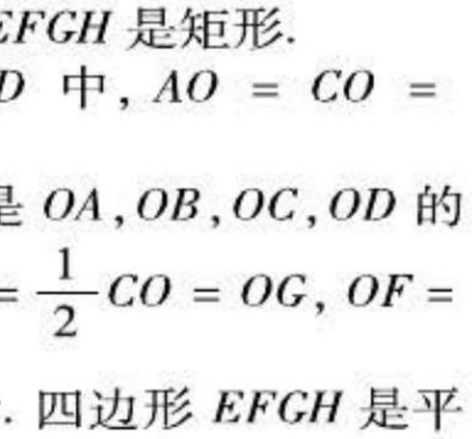
6. **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB // CD$，$AD // BC$. ∴ $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. ∵ AF，BH 分别是 $\angle BAD$，$\angle ABC$ 的平分线，∴ $\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$. ∴ $\angle BAE + \angle ABE = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 90°$. ∴ $\angle AEB = 180° - 90° = 90°$，即 $\angle HEF = 90°$. 同理可证 $\angle H = \angle F = 90°$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

7. **证明**：在矩形 $ABCD$ 中，$AO = CO = BO = DO$.
∵ 点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点，∴ $OE = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}CO = OG$，$OF = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OD = OH$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形，且 $EG = OE + OG = 2 \times \frac{1}{2}AO = AO$，$FH = OF + OH = 2 \times \frac{1}{2}OB = OB$，即 $EG = FH$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

2.6 菱 形

练习

1. **解**：如图，因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC \perp BD$，



（第 1 题图）

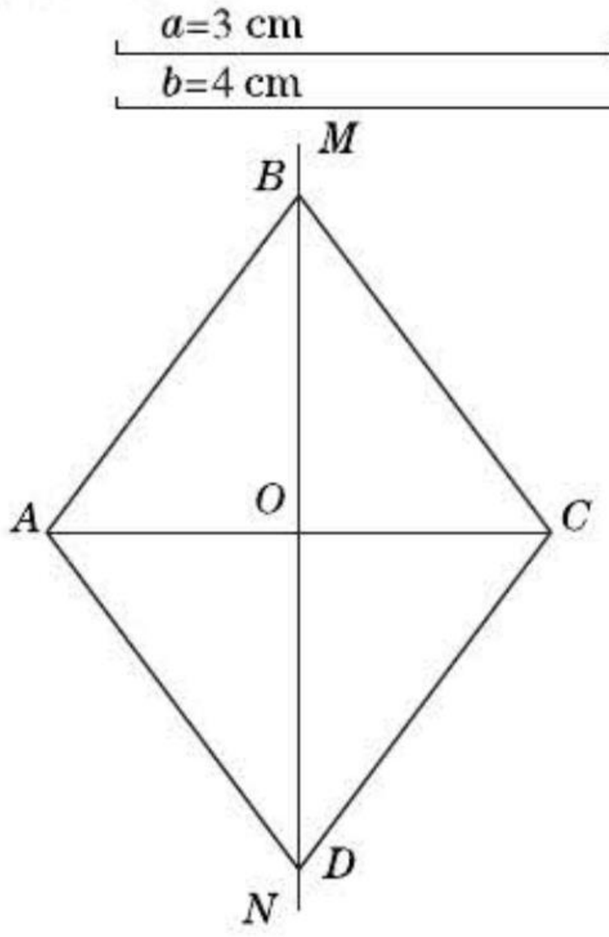
$OA = \frac{1}{2}AC$，
$OB = \frac{1}{2}BD$.
在 Rt $\triangle AOB$ 中，$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$(cm)，所以 $AC = 2OA = 8$ cm，$BD = 2OB = 6$ cm. 所以 $S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$(cm^2).

点拨：本题关键是把菱形的性质和勾股定理结合起来应用. 同时，用菱形的对角线表示面积时不要漏掉乘“$\frac{1}{2}$”.

2. **解**：过点 P 作 $PF \perp AB$，垂足为 F. 在菱形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle DAB$.
∵ $PE \perp AD$，$PF \perp AB$，
∴ $PF = PE = 4$ cm. 即点 P 到 AB 的距离是 4 cm.

练习

1. **解**：已知：线段 $a = 3$ cm，$b = 4$ cm，求作：菱形$ABCD$，使 $AC = a$，$BD = b$.
作法：如图，
(1) 作线段 $AC = a$；
(2) 作线段 AC 的垂直平分线 MN，垂足为 O；
(3) 分别在射线 OM，ON 上截取 $OB = OD = 2$ cm；
(4) 连接 AB，BC，CD，DA. 四边形 $ABCD$ 为所求作的菱形.



（第 1 题图）

点拨：对于较复杂的作图问题，往往先画草图分析，然后按照合理顺序画图.

2. **证明**：在 $\square ABCD$ 中，$AD // BC$，$AD = BC$，$OB = OD$. ∵ $AD // BC$，∴ $\angle ADO = \angle CBO$. ∵ $MN \perp BD$，∴ $\angle DOM = \angle BON = 90°$. 在 $\triangle DOM$ 和 $\triangle BON$ 中，∵ $\angle DOM = \angle BON$，$DO = BO$，$\angle MDO = \angle NBO$，∴ $\triangle DOM \cong \triangle BON$. ∴ $DM = BN$. ∵ $DM // BN$，∴ 四边形 $BNDM$ 是平行四边形. ∵ $MN \perp BD$，∴ 四边形 $BNDM$ 是菱形.

习题 2.6

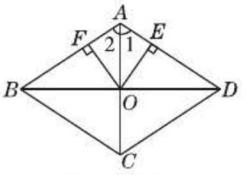
A 组

1. **解**：相等. 如图，已知：菱形 $ABCD$，对角线 AC，BD 交于点 O，$OE \perp AD$，$OF \perp BA$，垂足

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分别为 E,F，求证：$OE=OF$.

证明：在菱形 $ABCD$ 中，$\angle 1=\angle 2$. 因为 $OE\perp AD$，$OF\perp BA$，所以 $\angle OEA=\angle OFA=90°$. 又因为 $OA=OA$，所以 $\triangle AOE\cong\triangle AOF$. 所以 $OE=OF$.



（第1题图）

2. 解：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，$AB=AD$. 因为 $\angle BAD=60°$，所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形. 所以 $BD=AB=2$ cm. 所以 $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 2=1$(cm).

在 Rt $\triangle AOB$ 中，$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm)，所以 $AC=2OA=2\sqrt{3}$(cm). 所以 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$(cm^2).

点拨：本题由 $\angle BAD=60°$，结合菱形的性质易得到 $\triangle ABD$ 是等边三角形，确定 BD 的长度，运用勾股定理及菱形的性质计算另一条对角线的长，再计算菱形的面积.

3. (1)**证明**：∵ E,F 分别是 BC,AC 边的中点，∴ $EF//AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$. ∵ D,F 分别是 AB，AC 的中点，∴ $AD=\frac{1}{2}AB$，$AF=\frac{1}{2}AC$.

∴ $AD=EF$. 又∵ $AD//EF$，∴ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形. ∵ $AB=AC$，∴ $AD=AF$.

∴ 四边形 $ADEF$ 是菱形.

(2)**解**：∵ $AB=12$ cm，

∴ $EF=\frac{1}{2}AB=6$ cm.

∴ 菱形 $ADEF$ 的周长 $=4EF=4\times 6=24$(cm).

4. 解：四边形 $ADBC$ 一定是菱形. 理由：由作图步骤知，$AC=AD=BC=BD$，所以四边形 $ADBC$ 是菱形.

5. 解：(1) $\triangle AOB$ 是直角三角形. 因为 $OA^2+OB^2=3^2+2^2=13$，$AB^2=(\sqrt{13})^2=13$，所以 $OA^2+OB^2=AB^2$. 所以 $\triangle AOB$ 是直角三角形.

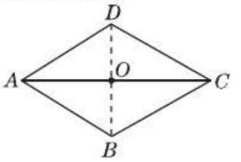
(2) $\square ABCD$ 是菱形. 由(1)题的结论知：$AC\perp BD$，因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $\square ABCD$ 是菱形.

B 组

6. 解：在菱形 $ABCD$ 中，$AD=DC$. ∵ 点 E,F 是边 AD,CD 的中点，∴ $ED=\frac{1}{2}AD$，$FD=\frac{1}{2}CD$. ∴ $ED=FD$. 在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDE$ 中，∵ $AD=CD$，$\angle D=\angle D$，$DF=DE$，∴ $\triangle ADF\cong\triangle CDE$. ∴ $AF=CE$. ∵ $AF=3$ cm，∴ $CE=3$ cm.

7. 证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=AD$，$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 120°=60°$. 所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形. 又因为 $BE\perp AD$，所以 $AE=DE$.

8. 解：四边形 $ABCD$ 是菱形. 如图，连接 BD，由中心对称图形的性质易知 B,O,D 三点共线，且 $OA=OC$，$OB=OD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因为 $AB=BC$，所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

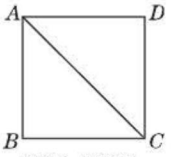


（第8题图）

2.7 正方形

练习

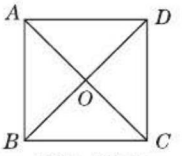
1. 解：如图，因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC$，$\angle B=90°$. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，因为 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $2AB^2=16$，$AB^2=8$. 所以 $AB=2\sqrt{2}$ cm. $S_{正方形ABCD}=AB^2=8$(cm^2).



（第1题图）

点拨：在解决有关正方形的问题时，往往把它和直角三角形的有关知识联系起来.

2. 解：一定是正方形. 如图，∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AO=BO=DO$. ∵ $AC\perp BD$，∴ $AB^2=AO^2+BO^2$，$AD^2=AO^2+DO^2$. ∴ $AB^2=AD^2$，即 $AB=AD$. ∴ 矩形 $ABCD$ 是正方形.



（第2题图）

习题 2.7

A 组

1. 解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AD=DC=CB$，$\angle ADC=\angle BCD=90°$.

又 $\triangle DCE$ 是等边三角形，∴ $DC=DE=CE$，$\angle CDE=\angle DEC=\angle ECD=60°$.

∴ $AD=DE$，$BC=EC$，$\angle ADE=\angle BCE=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

150°. ∴ $\angle DEA = \angle BEC = 15°$.
∴ $\angle AEB = \angle DEC - \angle DEA - \angle CEB = 30°$.

2. 证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形, ∴ $AB = AD$, $\angle BAD = \angle HAE = \angle HDG = 90°$. ∵ $AH = BE$, ∴ $AD + AH = AB + BE$, 即 $HD = AE$. 在 $\triangle HDG$ 和 $\triangle EAH$ 中, ∵ $DG = AH$, $\angle HDG = \angle EAH$, $HD = EA$, ∴ $\triangle HDG \cong \triangle EAH$. ∴ $HG = EH$. 同理可证 $HE = EF = FG$, ∴ $HG = EH = EF = FG$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形. ∵ $\triangle HDG \cong \triangle EAH$, ∴ $\angle DHG = \angle AEH$. ∴ $\angle DHG + \angle EHA = \angle AEH + \angle EHA = 90°$. ∴ $\angle EHG = 90°$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

B 组

3. 证明: 过点 O 作 $OH \perp AB$, 垂足为 H, ∵ AD, BE 分别是 $\angle BAC$, $\angle ABC$ 的平分线, 且 $OH \perp AB$, $OF \perp AC$, $OG \perp BC$, ∴ $OF = OH$, $OG = OH$. ∴ $OF = OG$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$, 又 ∵ $OF \perp AC$, $OG \perp BC$, ∴ $\angle OFC = \angle OGC = \angle C = 90°$. ∴ 四边形 $OGCF$ 是矩形. 又 ∵ $OF = OG$, ∴ 四边形 $OGCF$ 是正方形.

复习题 2

A 组

1. 解: (1) 存在. (2) 不存在.
点拨: 由(1)易得每个外角是 36°, 又因为 360°能被 36°整除, 所以这个多边形存在; 由(2)易得每个外角是 144°, 而 360°不能被 144°整除, 所以这个多边形不存在.

2. 略.

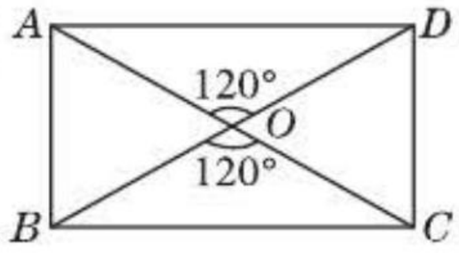
3. 解: 在 $\square ABCD$ 中, $AB = CD$, $AB \parallel CD$, ∴ $\angle BAC = \angle DCA$. ∵ $CE = AF$, ∴ $CF = CE - EF = AF - EF = AE$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中, ∵ $AB = CD$, $\angle BAE = \angle DCF$, $AE = CF$, ∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$. ∴ $BE = DF$, $\angle BEA = \angle DFC$. ∴ $\angle BEF = \angle DFE$. ∴ $BE \parallel DF$.

4. 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AD \parallel BC$, $OB = OD$. 所以 $\angle ODE = \angle OBF$. 因为 $\angle DOE = \angle BOF$,
所以 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$. 所以 $OE = OF$.
因为 M, N 分别为 OB, OD 的中点,
所以 $OM = \frac{1}{2}OB$, $ON = \frac{1}{2}OD$,
所以 $OM = ON$.
所以四边形 $EMFN$ 是平行四边形.
点拨: 本题考查平行四边形的判定, 结合已知条件, 利用"对角线互相平分的四边形是平行四边形"这一判定较简便. 除此之外, 同学们也可以尝试运用其他方法进行判定.

5. 略. **6.** C

7. 解: ∵ P 是 AC 的中点, E 是 AD 的中点,
∴ $EP = \frac{1}{2}CD$. 又 ∵ F 是 BC 的中点,
∴ $FP = \frac{1}{2}AB$. ∵ $AB = DC$, ∴ $EP = FP$.
∴ $\angle PFE = \angle PEF = 18°$. ∴ $\angle EPF = 180° - \angle PFE - \angle PEF = 144°$.

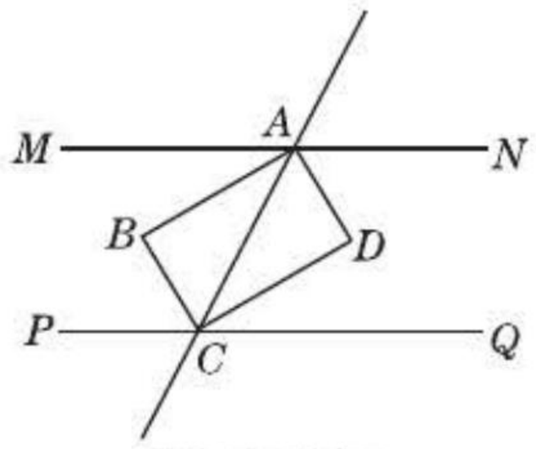
8. 解: 如图. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AC = BD$, $OA = \frac{1}{2}AC$, $OD = \frac{1}{2}BD$, $\angle BAD = 90°$.



(第 8 题图)

所以 $OA = OD$.
所以 $\angle OAD = \angle ODA$.
因为 $\angle AOD = 120°$, 所以 $\angle ODA = \frac{180° - \angle AOD}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2 = 1(\mathrm{cm})$, $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}(\mathrm{cm})$. 所以矩形的周长 $= 2(AB + AD) = 2 \times (1 + \sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3}(\mathrm{cm})$.
点拨: 解决有关矩形的问题往往和等腰三角形, 直角三角形的有关性质结合起来.

9. 解: 是矩形.
如图, 因为 $MN \parallel PQ$, 所以 $\angle MAC + \angle ACP = 180°$. 因为 AB, CB 分别平分 $\angle MAC$, $\angle ACP$, 所以 $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MAC$, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ACP$.
所以 $\angle BAC + \angle ACB = 90°$. 所以 $\angle B = 90°$.
同理, $\angle BAD = \angle BCD = \angle D = 90°$.
所以四边形 $ABCD$ 为矩形.



(第 9 题图)

10. 解: (1) 四边形 $ABCD$ 是菱形.
理由: 由中心对称定义, 得 $OB = OD$.
因为 O 为 AC 的中点, 所以 $OA = OC$.
所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
因为三角形 ABC 是等边三角形,
所以 $AB = BC$. 所以四边形 $ABCD$ 是菱形.
(2) 由(1)知, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AC \perp BD$. 因为三角形 ABC 是等边三

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

角形，所以 $AC=2$ cm，$OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2=1$(cm)，$OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm)．所以 $BD=2OB=2\sqrt{3}$(cm)．即两条对角线的长度分别为 $AC=2$ cm，$BD=2\sqrt{3}$ cm．

(3)由(1)(2)，得 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\text{cm}^2)$．

11. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle EBC$ 是等边三角形，∴ $\angle ABC=\angle DCB=90°$，$\angle EBC=\angle ECB=\angle BEC=60°$，$AB=BC=CD$，$BE=CE=BC$．∴ $\angle ABE=30°$，$AB=BE$．∴ $\angle BAE=\angle BEA=75°$．同理 $\angle CED=75°$，∴ $\angle AED=360°-\angle BEA-\angle BEC-\angle CED=150°$．

B 组

12. D

13. **解**：互相平分．因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB\parallel DC$．因为 $BE=DF$，所以 $AB-BE=DC-DF$，即 $AE=CF$．

所以四边形 $AECF$ 和四边形 $DEBF$ 都是平行四边形．所以 $CE\parallel AF$，$DE\parallel BF$．

所以四边形 $MENF$ 是平行四边形．

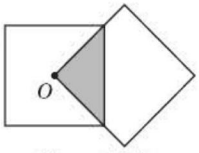
所以 EF 与 MN 互相平分．

点拨：欲说明 EF 与 MN 互相平分，只需说明四边形 $MENF$ 是平行四边形即可．

14. **证明**：∵ 矩形 $ABCD$ 和矩形 $A'B'C'D$ 关于点 D 成中心对称，∴ 点 A 和点 A'，点 C 和点 C' 关于点 D 成中心对称．∴ $AD=A'D$，$CD=C'D$．∴ 四边形 $ACA'C'$ 是平行四边形．又∵ $AA'\perp CC'$，∴ 四边形 $ACA'C'$ 是菱形．

15. **解**：当两个正方形按如图所示重叠时，阴影部分的面积与题图中一样，

∴ $S_{阴影部分}=\frac{1}{4}S_{正方形}=\frac{1}{4}\times 2\times 2=1$．



(第 15 题图)

16. **解**：四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

理由：连接 BD．

∵ E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 各边的中点，

∴ $EH=\frac{1}{2}BD$，$EH\parallel BD$，$FG=\frac{1}{2}BD$，$FG\parallel BD$．∴ $EH=FG$，$EH\parallel FG$．

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

当四边形 $ABCD$ 是矩形时，四边形 $EFGH$ 是菱形．

理由：连接 AC．易知四边形 $EFGH$ 是平行四边形．∵ E,F,H 分别是 AB,BC,AD 的中点，

∴ $EF=\frac{1}{2}AC$，$EH=\frac{1}{2}BD$．∵ $AC=BD$，

∴ $EF=EH$．∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形．

当四边形 $ABCD$ 是菱形时，四边形 $EFGH$ 是矩形．

理由：易知四边形 $EFGH$ 是平行四边形．∵ E,F,H 分别是 AB,BC,AD 的中点，∴ $EF\parallel AC$，$EH\parallel BD$．∵ $AC\perp BD$，∴ $EH\perp EF$，即 $\angle FEH=90°$．∴ 四边形 $EFGH$ 是矩形．

当四边形 $ABCD$ 是正方形时，四边形 $EFGH$ 是正方形．

理由：易知四边形 $EFGH$ 是菱形，∵ E,F,H 分别是 AB,BC,AD 的中点，∴ $EF\parallel AC$，$EH\parallel BD$．∵ $AC\perp BD$，∴ $EH\perp EF$，即 $\angle FEH=90°$．∴ 四边形 $EFGH$ 是正方形．

C 组

17. **解**：能．由题意知，P,A 分别为 BE,EF 的中点，∴ 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，$PA=\frac{1}{2}BE$，在 $\triangle EBF$ 中，$PA=\frac{1}{2}BF$，∴ $BE=BF$．

∴ $\triangle EBF$ 是等腰三角形．

又∵ $\angle EAB=90°$，∴ $\angle FAB=90°$．在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 和 $\text{Rt}\triangle BAF$ 中，∵ $AE=AF$，$BE=BF$，∴ $\text{Rt}\triangle BAE\cong\text{Rt}\triangle BAF$(HL)．

∴ $\angle EBA=\angle ABF$．

又∵ $2\angle EBA+\angle ABF=90°$，∴ $\angle EBA=30°$．

∴ $\angle EBF=2\angle EBA=60°$．

∴ $\triangle EBF$ 是等边三角形．

第 3 章 图形与坐标

3.1 平面直角坐标系

练习

1. **解**：(1)$A(3,3)$，$B(-5,2)$，$C(-4,-3)$，$D(4,-3)$，$E(5,0)$．

(2)描点略，点 P 在第三象限，点 Q 在第四象限，点 S 在第一象限，点 T 在第二象限．

2. $(3,-2)$

练习

1. **解**：以大门所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，建立平面直角坐标系(图略)，规定一个方格的边长代表 1 个单位长度，则大门的位置为(0，0)，猴山的位置为$(-6,3)$，百鸟园的位置为$(5,3)$，狮子馆的位置为$(-2,7)$，大象馆的位置为$(3,11)$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:建立不同的直角坐标系,相应点的坐标也就不同,本题答案不唯一.

2. 略.

3. **解**:点 A 在点 O 南偏东 45°的方向,距点 O 300 m 的位置,点 B 在点 O 北偏东 60°的方向,距点 O 300 m 的位置;点 C 在点 O 北偏东 45°的方向,距点 O 200 m 的位置;点 D 在点 O 南偏西 60°的方向,距点 O 200 m 的位置;点 E 在点 O 北偏西 30°的方向,距点 O 500 m 的位置.

习题 3.1

A 组

1. **解**:所求各点的坐标为 $A(5,2)$,$B(0,4)$,$C(-3,3)$,$D(-5,0)$,$E(-3,-4)$,$F(4,-3)$.

2. **解**:建立坐标系、描点略. 点 A 在第一象限,点 B 在第二象限,点 C 在第四象限,点 D 在第三象限,点 E 在 x 轴上,点 F 在 y 轴上.

3. C **点拨**:根据"帅"、"象"的位置确定出原点,就可以确定"炮"的位置了.

4. **解**:以恐龙岛所在位置为原点,分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向,建立平面直角坐标系(图略),规定一个方格的边长代表 1 个单位长度,则恐龙岛的位置为(0,0),公园入口的位置为(5,-1),维苏火山的位置为(8,1),海螺湾的位置为(-1,2),过山车的位置为(3,3),电影魔术馆的位置为(7,6),星际航班的位置为(0,6),双层转马的位置为(4,7).
点拨:建立不同的直角坐标系,相应的点的坐标也就不同,本题答案不唯一.

5. 略.

6. 略.

B 组

7. **解**:因为 $-1-a^2<0$,$3+b^2>0$,所以点 $A(-1-a^2,3+b^2)$ 是第二象限的点.

8. **解**:与 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 全等且与其共 OB 边的三角形的顶点坐标分别为(-4,0),(0,0),(0,3)或(4,3),(0,0),(0,3)或(-4,3),(0,0),(0,3).

3.2 简单图形的坐标表示

练习

1. **解**:以点 B 为坐标原点,分别以 BC,AB 所在直线为 x 轴,y 轴,建立平面直角坐标系(图略),规定 1 个单位长度为 1,则点 B 的坐标为(0,0),点 C 的坐标为(5,0),点 A 的坐标为(0,6).
点拨:建立不同的直角坐标系,相应的点的坐标也就不同,本题答案不唯一.

2. **解**:设 GE 的延长线与 BC 交于点 O,以点 O 为原点,分别以 BC,GO 所在直线为 x 轴,y 轴,建立平面直角坐标系(图略),规定一个方格的边长为 1,则 $A(-4,2)$,$B(-2,0)$,$C(2,0)$,$D(4,2)$,$E(0,2)$,$F(2,3)$,$G(0,7)$.
点拨:建立不同的直角坐标系,相应点的坐标也就不同,本题答案不唯一.

习题 3.2

A 组

1. **解**:过点 A 作 BC 的垂线,垂足为点 O,以点 O 为原点,分别以 BC,AO 所在直线为 x 轴,y 轴,建立平面直角坐标系(图略),规定 1 个单位长度为 1. 易知 $BO=CO=3$,所以 $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=4$,可得点 A,B,C 的坐标分别为 $A(0,4)$,$B(-3,0)$,$C(3,0)$.
点拨:建立不同的直角坐标系,相应点的坐标也就不同,本题答案不唯一.

2. 略.

B 组

3. **解**:(1)过点 B 作 $BE\perp BC$,以点 B 为原点,分别以 BC,BE 所在直线为 x 轴,y 轴,建立平面直角坐标系(图略). 规定 1 个单位长度为 1,点 A,B,C,D 的坐标为 $A(3\sqrt{2},3\sqrt{2})$,$B(0,0)$,$C(6,0)$,$D(3\sqrt{2}+6,3\sqrt{2})$.
点拨:建立不同的直角坐标系,相应点的坐标也就不同,本题答案不唯一.
(2)易知点 A 的纵坐标即为点 A 到 BC 的距离,也就是菱形 $ABCD$ 中 BC 边上的高,所以 $S_{\text{菱形}ABCD}=6\times3\sqrt{2}=18\sqrt{2}$.

4. **解**:不能. 点 $G(0,-1)$ 需要变化,改为点 $J(5,4)$.

3.3 轴对称和平移的坐标表示

练习

1. (1)(2,3) (2)(5,3)

2. **解**:矩形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标分别为 $A'(7,-2)$,$B'(7,-5)$,$C'(3,-5)$,$D'(3,-2)$.

3. (1)2 (2)1

练习

1. (1)(1,2) (2)(2,-5)

2. **解**:(1)点 $A'(-2,-5)$,点 $B'(2,-1)$;
(2)像点 C' 与点 C 的坐标之间的关系为 $\begin{cases}x'=x,\\y'=y-3.\end{cases}$

3. **解**:将正方形 $ABCD$ 向左平移 4 个单位长度,则正方形 $ABCD$ 上每一个点都向左平移了 4 个单位长度,由 A,B,C,D 的坐标可知其像的顶点坐标是 $A'(-2,2)$,$B'(-2,-2)$,$C'(2,-2)$,$D'(2,2)$,作图略.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

练习

解：菱形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标分别为(4,4),(2,1),(4,−2),(6,1). 菱形 $A''B''C''D''$ 的顶点坐标分别为(−2,4),(−4,1),(−2,−2),(0,1). 作图略.

习题 3.3

A 组

1. (1)(5,3)　(2)(−3,2)　(3)(−3,7)　(4)(−6,5)

2. 解：Rt△ABC 的顶点坐标分别为(−6,−2),(−2,−4),(−2,−2),其像的顶点坐标分别为(−6,2),(−2,4),(−2,2). 作图略.

3. 解：三架飞机在新位置的坐标分别为 A'(4,7),B'(2,4),C'(6,4).

4. 解：矩形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标分别为 A'(3,1),B'(5,−1),C'(6,0),D'(4,2). 作图略.

B 组

5. 解：△$A'B'C'$ 的顶点坐标为 A'(3,4),B'(2,2),C'(7,2).

6. 解：四边形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为(−5,4),(−6,2),(−2,2),(−3,4),四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标分别为(2,−2),(1,−4),(5,−4),(4,−2),则将四边形 $ABCD$ 先向右平移 7 个单位长度,再向下平移 6 个单位长度即可得到四边形 $A'B'C'D'$.

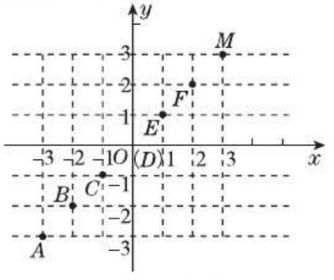
令四边形 $ABCD$ 上的一个点的坐标为(x,y),平移后对应的点的坐标为(x',y'),

则它们的坐标之间的关系是 $\begin{cases} x' = x + 7, \\ y' = y - 6. \end{cases}$

复习题 3

A 组

1. 解：如图,这些点都在一条直线上,类似的点如点 M(3,3)等.



(第 1 题图)

2. 解：以书店所在位置为原点,分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向,建立平面直角坐标系(图略),规定一个方格的边长代表 1 个单位长度,则书店的位置为(0,0),人民医院的位置为(8,1),第一中学的位置为(−3,2),体育馆的位置为(2,3),地铁站的位置为(4,5),电影院的位置为(9,5),银行的位置为(−4,6),邮局的位置为(0,7),百货商场的位置为(6,8)(答案不唯一).

3. (1)45;1 400　(2)45;2 100
(3)79;2 500

4. 解：(1)点 C(5,−3),点 D(5,5),点 P(−3,0),点 Q(5,0),点 R(0,5),点 S(0,−3).

(2)因为 $AB = RS = DC = 8$,$AR = BS = 3$,$RD = SC = 5$,所以 $C_{长方形ABSR} - C_{长方形RSCD} = (8+3)\times 2 - (8+5)\times 2 = -4$.

5. 略.

6. 略.

7. 解：△$A'B'C'$ 的顶点坐标分别为(−3,6),(−5,5),(−3,2). 作图略.

B 组

8. 解：过 A 点作 BC 边的垂线,交 BC 的延长线于点 D. 由题图可知,$AD = 3$,$BC = 6$,

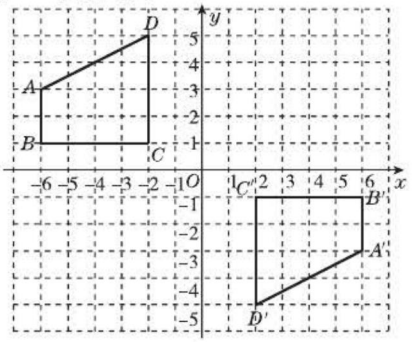
所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\times 3\times 6 = 9$.

9. 解：(1)3 个.

(2)平行四边形第四个顶点的坐标可以是 D_1(6,5),D_2(0,5),D_3(2,−3),其中 D_1 点在第一象限,D_2 点在 y 轴上,D_3 点在第四象限.

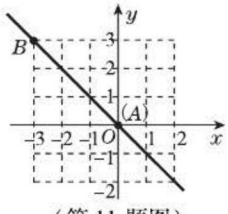
C 组

10. 解：如图所示,四边形 $A'B'C'D'$ 即为变化后的图形,变化后的图形与原图形关于原点中心对称. 这一个过程可以看作是一个中心对称变换.



(第 10 题图)

11. 解：如图. 令点 C 的坐标为(x,y),则 $x = -y$.



(第 11 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4章 一次函数

4.1 函数和它的表示法

练习

1. 解:(1)行驶的路程 s 随着行驶时间 t 的变化而变化.

(2)圆的面积 S 随着圆的半径 r 的变化而变化.

(3)银行的存款利率 P 随着存期 t 的变化而变化.

2. 解:(1)水深 h 是时间 t 的函数.

点拨:在这一天内,给定一个时间,就有唯一的水深与其对应,所以 h 是 t 的函数.

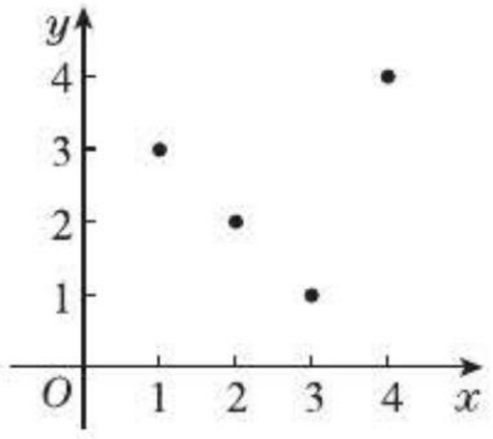
(2)当 $t=4$ 时,$h=5$;当 $t=10$ 时,$h=7$;当 $t=17$ 时,$h=5$.

练习

1. 解:填表如下:

x	1	2	3	4
y	3	2	1	4

图象如图所示. 它的图象由 4 个点组成.



(第1题图)

2. 解:$y=180°-2x(0°<x<90°)$

3. 解:(1)这一天中的最高气温是 24 ℃,在下午时段.

(2)$24-8=16$(℃)

答:最高气温与最低气温相差 16 ℃.

(3)从 2 时到 14 时气温在逐渐升高,从 14 时到 24 时和从 0 时到 2 时气温在逐渐降低.

习题 4.1

A 组

1. 解:(1)$y=40-2x$,其中常量是 40,2,变量是底边 BC 的长 y 和腰 AB 的长 x. 自变量是腰 AB 的长 x,因变量是底边 BC 的长 y. 自变量的取值范围是 $10<x<20$.

(2)当 $x=15$ 时,$y=40-2\times15=10$,所以底边 BC 的长为 10 cm.

2. 解:n 边形的内角和 S 是边数 n 的函数.

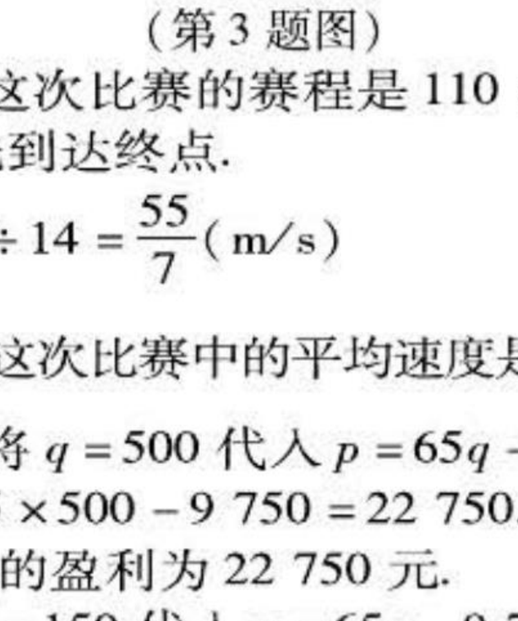
$S=180°\times(n-2)$(n 为整数且 $n>2$).

3. 解:(1)

n	1	2	3	4	5	…
y	4	7	10	13	16	…

(2)$y=3n+1$(n 为正整数).

(3)如图.



(第3题图)

4. 解:(1)这次比赛的赛程是 110 m.

(2)甲先到达终点.

(3)$110\div14=\frac{55}{7}$(m/s)

答:乙在这次比赛中的平均速度是 $\frac{55}{7}$ m/s.

5. 解:(1)将 $q=500$ 代入 $p=65q-9\,750$ 中,得 $p=65\times500-9\,750=22\,750$.

答:该月的盈利为 22 750 元.

(2)将 $q=150$ 代入 $p=65q-9\,750$ 中,得 $p=65\times150-9\,750=0$.

答:该玩具店未盈利.

B 组

6. B

7. 解:(1)时间 t 是自变量,温度 T 是因变量.

(2)A 型保温杯保温效果好.

4.2 一次函数

练习

1. 解:$y=7-x$,$y=-4x$,$y=2x-3$ 是一次函数;$y=-4x$ 是正比例函数.

2. 解:$y=350+0.7x(x\geqslant0)$.

当 $y=455$ 时,$455=350+0.7x$,解得 $x=150$.

点拨:根据题意可得表达式 $y=350+0.7x$ $(x\geqslant0)$,再将 $y=455$ 代入其中,即可求出 x 的值.

习题 4.2

A 组

1. B **2.** B

3. 解:$y=1\,000+1\,000\times0.16\%\times x=1\,000+1.6x$($x$ 为正整数),y 是关于 x 的一次函数.

4. 解:$y=12-0.3x(0\leqslant x\leqslant40)$.

B 组

5. 解:(1)随着 x 的逐渐变大,h 也逐渐变大.

(2)估计当 $x=350$ 时,h 的值为 7,通过观察题中的表格可知,h 的值是 x 的 $\frac{1}{50}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3) $h=\frac{1}{50}x$.

6. 解:(1) y 与 x 之间的函数关系式为:$y=12\times25-12x(0\leqslant x\leqslant25)$,即 $y=300-12x$ $(0\leqslant x\leqslant25)$;

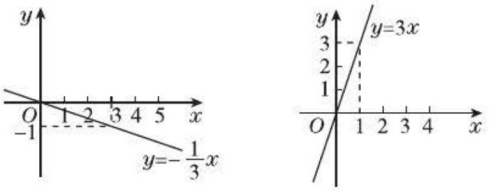
(2) 当 $x=10$ 时,$y=300-12x=300-120=180$. 所以销售 10 天后,这种家电产品还有 180 件.

点拨:分析题意,寻找等量关系,依据等量关系确定函数表达式.

4.3 一次函数的图象

练习

1. 解:对于 $y=-\frac{1}{3}x$,当 $x=0$ 时,$y=0$;当 $x=3$ 时,$y=-1$. 经过原点(0,0)和点(3,-1)作直线,则这条直线就是 $y=-\frac{1}{3}x$ 的图象(如图①所示),图象经过第二、四象限. 对于 $y=3x$,当 $x=0$ 时,$y=0$;当 $x=1$ 时,$y=3$. 经过原点(0,0)和点(1,3)作直线,则这条直线就是 $y=3x$ 的图象(如图②所示),图象经过第一、三象限.

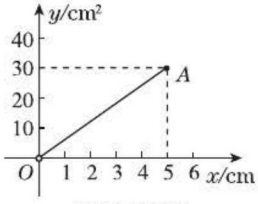


(第 1 题图)

点拨:应按画一次函数图象的步骤画出 $y=-\frac{1}{3}x$ 与 $y=3x$ 的图象,并观察画出的图象,可知它们各经过哪些象限.

2. 解:(1) 由矩形的面积 = 长 × 宽,可知 $y=6x(x>0)$.

(2) 当 $x=0$ 时,$y=0$;当 $x=5$ 时,$y=30$,在平面直角坐标系中描出两点 $O(0,0)$,$A(5,30)$,过这两点作射线 OA,射线 OA(不包括 O 点)即为函数 $y=6x$ 的图象,如图.



(第 2 题图)

点拨:注意 x 的取值范围.

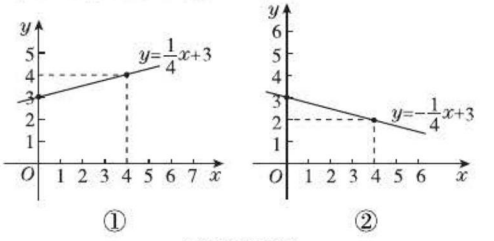
(3) 当 $x=3$ 时,$y=6\times3=18$;当 $x=4$ 时,$y=6\times4=24$;当 $x=5$ 时,$y=6\times5=30$.

点拨:分别把 $x=3$,$x=4$,$x=5$ 代入 $y=6x$ 中,计算即可.

练习

1. (1) $y=3x-2$ (2) $y=-x$

2. 解:对于 $y=\frac{1}{4}x+3$,当 $x=0$ 时,$y=3$;当 $x=4$ 时,$y=4$. 经过点(0,3)和点(4,4)作直线,则这条直线就是 $y=\frac{1}{4}x+3$ 的图象(如图①所示),从图象中可以看出,函数值随自变量的增大而增大. 对于 $y=-\frac{1}{4}x+3$,当 $x=0$ 时,$y=3$;当 $x=4$ 时,$y=2$. 经过点(0,3)和点(4,2)作直线,则这条直线就是 $y=-\frac{1}{4}x+3$ 的图象(如图②所示),从图象中可以看出,函数值随自变量的增大而减小.

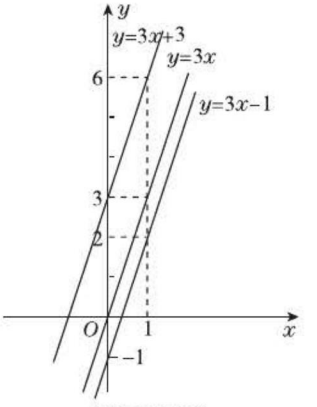


(第 2 题图)

习题 4.3

A 组

1. 解:(1) 对于 $y=3x$,当 $x=0$ 时,$y=0$;当 $x=1$ 时,$y=3$. 经过点(0,0)和(1,3)作直线,则该直线就是 $y=3x$ 的图象(如图所示).



(第 1 题图)

(2) 对于 $y=3x+3$,当 $x=0$ 时,$y=3$;当

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

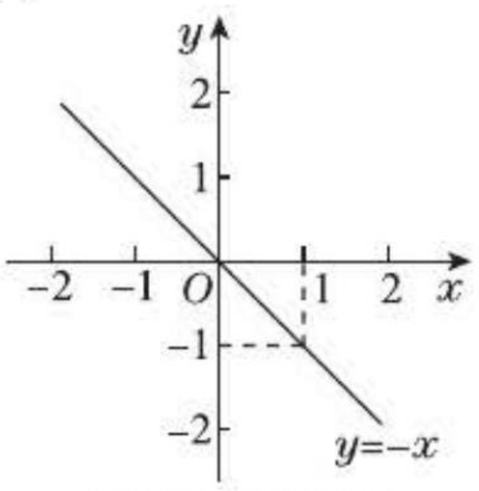
$x=1$时，$y=6$. 经过点(0,3)和(1,6)作直线，则该直线就是 $y=3x+3$ 的图象(如图所示).

(3)对于 $y=3x-1$，当 $x=0$ 时，$y=-1$；当 $x=1$ 时，$y=2$. 经过点(0，-1)和(1,2)作直线，则该直线就是 $y=3x-1$ 的图象(如图所示).

这三个函数的图象互相平行，且将 $y=3x$ 的图象向上平移 3 个单位长度，便得到 $y=3x+3$ 的图象；将 $y=3x$ 的图象向下平移 1 个单位长度，便得到 $y=3x-1$ 的图象.

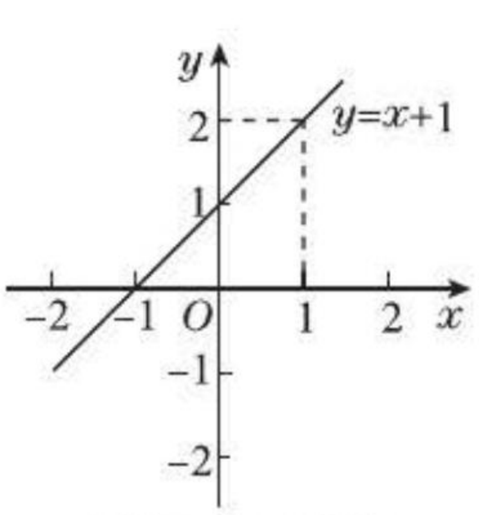
点拨：由本题可知，函数 $y=kx+b$ 的图象是由函数 $y=kx$ 的图象向上(或向下)平移 $|b|$ 个单位长度得到的.

2. 解：(1)对于 $y=-x$，当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=1$ 时，$y=-1$. 经过点(0,0)和(1，-1)作直线，则该直线就是 $y=-x$ 的图象，如图所示，由图象可知，函数值随自变量的增大而减小.



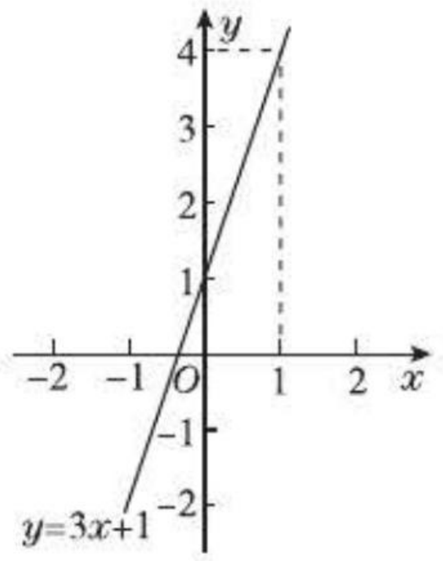
(第2(1)题图)

(2)对于 $y=x+1$，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=1$时，$y=2$. 经过点(0,1)和(1,2)作直线，则该直线就是 $y=x+1$ 的图象，如图所示，由图象可知，函数值随自变量的增大而增大.



(第2(2)题图)

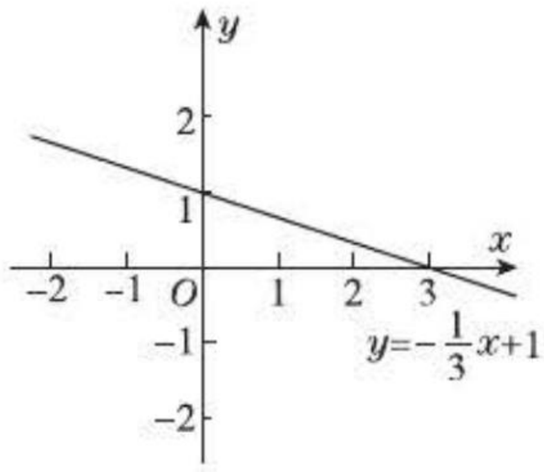
(3)对于 $y=3x+1$，当 $x=0$ 时，$y=1$，当 $x=1$时，$y=4$. 经过点(0,1)和(1,4)作直线，则该直线就是 $y=3x+1$ 的图象，如图所示，由图象可知，函数值随自变量的增大而增大.



(第2(3)题图)

(4)对于 $y=-\frac{1}{3}x+1$，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=3$ 时，$y=0$. 经过点(0,1)和(3,0)作直线，则该直线就是 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 的图象，如图所示，由图象可知，函数值随自变量的增大而减小.

点拨：分析函数表达式，选取两个简单的点作图象.



(第2(4)题图)

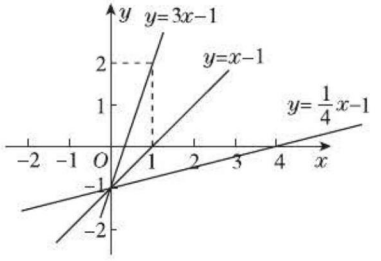
3. 解：图象(D)表示父亲离家后的时间与距离之间的关系，图象(B)表示母亲的行走过程.

B 组

4. 解：对于 $y=x-1$，当 $x=0$ 时，$y=-1$；当 $x=1$ 时，$y=0$. 经过(0，-1)和(1,0)两点作直线，则该直线就是 $y=x-1$ 的图象. 对于 $y=\frac{1}{4}x-1$，当 $x=0$ 时，$y=-1$；当$x=4$时，$y=0$. 经过点(0，-1)和点(4,0)作直线，则该直线就是 $y=\frac{1}{4}x-1$ 的图象. 对于$y=3x-1$，当 $x=0$ 时，$y=-1$；当$x=1$时，$y=2$. 经过点(0，-1)和点(1,2)作直线，则该直线就是 $y=3x-1$ 的图象. 如图，由图象可知，直线 $y=3x-1$ 的“坡度比较陡”.

点拨：由此题可知，直线 $y=kx+b(k\neq0)$，$|k|$越大，其“坡度就越陡”，即函数值随自变量的增大而增大(或减小)得越快.

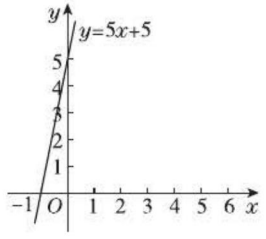
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第4题图）

5. 解：对于 $y=5x+5$，当 $x=0$ 时，$y=5$；当 $x=-1$ 时，$y=0$. 经过点 $(0,5)$ 和点 $(-1,0)$ 作直线，则这条直线就是 $y=5x+5$ 的图象（如图）.

直线 $y=5x+5$ 与 x 轴的交点的坐标为 $(-1,0)$，与 y 轴的交点的坐标为 $(0,5)$.

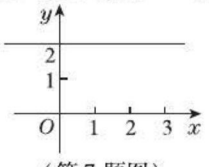


（第5题图）

点拨：本题还可以根据函数表达式通过计算求得. 令 $x=0$，则 $y=5$；令 $y=0$，即 $0=5x+5$，所以 $x=-1$. 所以直线 $y=5x+5$ 与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,5)$.

6. A

7. 解：如图所示即为函数 $y=2$ 的图象.



（第7题图）

4.4 用待定系数法确定一次函数表达式

练习

1. 解：因为摄氏温度与华氏温度之间的函数表达式为 $C=\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}$，所以当 $F=84$ 时，$C=\frac{5}{9}\times 84-\frac{160}{9}=\frac{260}{9}$，所以把 84°F 换算成摄氏温度为 $\frac{260}{9}$ ℃.

点拨：根据摄氏温度与华氏温度的函数关系换算温度时，要看准由哪一种温度换算成哪一种温度. 此题很容易把数值代错位置.

2. 解：设一次函数的表达式为 $y=kx+b$，由于一次函数的图象经过两点 $A(-1,3)$，$B(2,-5)$，将这两点的坐标代入表达式，得 $\begin{cases}-k+b=3,\\2k+b=-5.\end{cases}$ 解得 $k=-\frac{8}{3}$，$b=\frac{1}{3}$.

所以 $y=-\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}$.

点拨：一次函数表达式有两个待定系数 k 和 b，需知道图象上两个点的坐标才能将其求出.

3. 解：设体积与温度之间在一定范围内的函数表达式为 $y=kx+b$（体积为 y L，温度为 x ℃）. 因为一定量的酒精在 0 ℃时的体积为 5.250 L，在 40 ℃时的体积为 5.481 L，所以 $\begin{cases}b=5.250,\\40k+b=5.481,\end{cases}$ 解得 $k=0.005\ 775$，$b=5.250$. 于是 $y=0.005\ 775x+5.250$. 当 $x=10$ 时，$y\approx 5.308$；当 $x=30$ 时，$y\approx 5.423$. 所以这些酒精在 10 ℃时体积约为 5.308 L，在30 ℃时体积约为5.423 L.

习题 4.4

A 组

1. 解：设正比例函数的表达式为 $y=kx$，由于点 $M(-1,5)$ 在该函数图象上，因此 $5=k\cdot(-1)$，所以 $k=-5$. 因此所求函数的表达式为 $y=-5x$.

点拨：因为本题中函数为正比例函数，所以可以设其表达式为 $y=kx$.

2. 解：（1）设这个一次函数的表达式为 $y=kx+b$，因为当 $x=4$ 时，$y=9$；当 $x=6$ 时，$y=-1$，所以有 $\begin{cases}4k+b=9,\\6k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $k=-5$，$b=29$. 所以 $y=-5x+29$.

（2）当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+29=\frac{63}{2}$.

（3）当 $y=7$ 时，$-5x+29=7$，解得 $x=\frac{22}{5}$.

3. 解：（1）设在正常情况下，S 关于 n 的函数表达式为 $S=kn+b$. 由已知条件，得 $\begin{cases}15k+b=164,\\45k+b=144,\end{cases}$ 解得 $k=-\frac{2}{3}$，$b=174$.

所以 $S=-\frac{2}{3}n+174$.

（2）$24\times\frac{60}{10}=144$（次），因为在正常情况下，当 $n=63$ 时，$S=-\frac{2}{3}\times 63+174=132$，$144>132$，所以他心跳不正常.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

B 组

4. **解**:(1)设 $y-3=kx$,因为当 $x=2$ 时,$y=7$,所以 $7-3=2k$,解得 $k=2$. 所以 $y=2x+3$.

(2)当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,$y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3=2$.

(3)设平移后图象的表达式为 $y=2x+3+h$,因为它过点 $(2,-1)$,所以 $-1=2\times2+3+h$,所以 $h=-8$,所以 $y=2x-5$.

5. **解**:(1)由图象可以看出,小李在没有销售量时的收入是 400 元.

(2)设小李的月收入 y(元)关于月销售量 x(件)的函数表达式为 $y=kx+b$. 因为点 $(0,400)$ 和点 $(200,1\ 000)$ 在它的图象上,所以 $\begin{cases}b=400,\\200k+b=1\ 000,\end{cases}$ 解得 $k=3$,$b=400$.

所以 $y=3x+400$.

(3)当 $x=250$ 时,$y=3\times250+400=1\ 150$. 所以小李 4 月份的收入为 1 150 元.

4.5 一次函数的应用

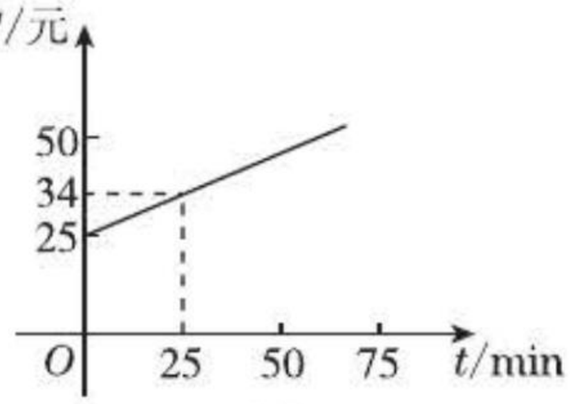
练习

1. **解**:由题意知,当 $0<t\leqslant2$ 时,$y=0.8t$;当 $t>2$ 时,$y=0.8\times2+0.5(t-2)=0.6+0.5t$.

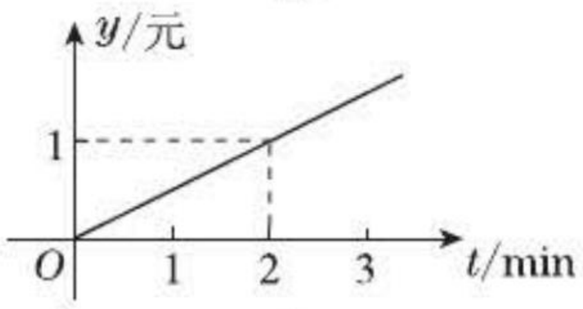
2. **解**:(1)A 方案:$y=25+0.36t(t\geqslant0)$;

B 方案:$y=0.5t(t\geqslant0)$.

(2)对于 $y=25+0.36t(t\geqslant0)$,当 $t=0$ 时,$y=25$;当 $t=25$ 时,$y=34$. 以点 $(0,25)$ 为端点,过点 $(25,34)$ 作射线,这条射线就是 $y=25+0.36t(t\geqslant0)$ 的图象(如图①). 对于 $y=0.5t(t\geqslant0)$,当 $t=0$ 时,$y=0$;当 $t=2$ 时,$y=1$. 以点 $(0,0)$ 为端点,过点 $(2,1)$ 作射线,这条射线就是 $y=0.5t(t\geqslant0)$ 的图象(如图②).



①



②

(第 2 题图)

(3)A 方案:当 $t=300$ 时,$y=25+0.36\times300=133$(元);

B 方案:当 $t=300$ 时,$y=0.5\times300=150$(元).

因为 $150>133$,所以他选择 A 方案比较合算.

练习

1. **解**:(1)设这种蟋蟀 1 min 所叫次数为 y,当地气温为 x(℃),该一次函数的表达式为 $y=kx+b$. 由题意,得 $\begin{cases}84=15k+b,\\98=17k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=7,\\b=-21.\end{cases}$

所以 $y=7x-21$. 将 $x=20$ 代入上式,得 $y=119$,故 $y=7x-21$ 即为所求表达式.

(2)令 $y=63$,则 $7x-21=63$,解得 $x=12$,所以该地当时的气温大约为 12 ℃.

(3)不能. **点拨**:用所建立的函数模型作预测,只能对邻近数据作预测,否则所作的预测是不可靠的.

2. **解**:(1)能. 设销售纯净水的数量为 y(瓶),时间(日期)为 x,y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$,由题意得 $\begin{cases}k+b=160,\\2k+b=165,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5,\\b=155,\end{cases}$ 所以 $y=5x+155$. 易知 $x=3$,$y=170$ 满足上式. 所以销售纯净水的数量 y(瓶)与时间(日期)x 之间的函数表达式为 $y=5x+155$.

(2)当 $x=5$ 时,$y=5x+155=5\times5+155=180$. 所以预测今年 7 月 5 日该商店销售纯净水 180 瓶.

练习

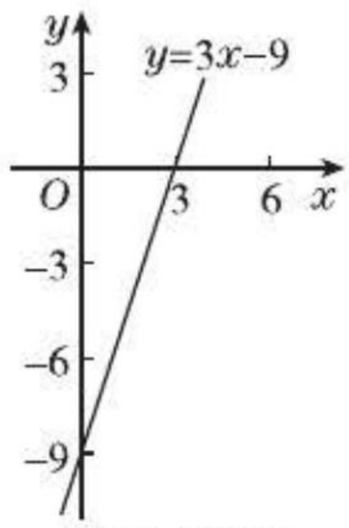
1. **解**:(1)$3x+y=7$ 改写成 $y=-3x+7$.

(2)$3x+4y=13$ 改写成 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$.

2. **解**:令 $y=0$,则 $3x+9=0$,解得 $x=-3$.

所以当 $x=-3$ 时,$y=0$.

3. **解**:令 $y=3x-9$,画出它的图象(如图),从图中可以看出,一次函数 $y=3x-9$ 的图象与 x 轴的交点为点 $(3,0)$. 这就是说,当 $y=0$ 时,$x=3$,即 $x=3$ 是方程 $3x-9=0$ 的解.



(第 3 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 4.5

A 组

1. 解：(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 时，$y = 20x$；当 $x > 5$ 时，$y = 100 + 20 \times 70\% (x - 5) = 14x + 30$.

(2) 当 $x = 4$ 时，$y = 20 \times 4 = 80$；当 $x = 6$ 时，$y = 30 + 14 \times 6 = 114$. 即当 $x = 4$，$x = 6$ 时，货款分别为 80 元、114 元.

点拨：本题的函数表达式还可以写成：$y = \begin{cases} 20x (0 \leqslant x \leqslant 5), \\ 30 + 14x (x > 5), \end{cases}$ 注意不要漏掉 $y = 20x$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$ 的情况.

2. 解：(1) 甲方案：$y = 9x (x \geqslant 3\,000)$；乙方案：$y = 8x + 5\,000 (x \geqslant 3\,000)$.

(2) 若购买量为 4 500 kg，选择甲方案付款少；若购买量为 5 100 kg，选择乙方案付款少.

理由如下：当购买量为 4 500 kg 时，甲方案应付款额 $y = 4\,500 \times 9 = 40\,500$（元），乙方案应付款额 $y = 8 \times 4\,500 + 5\,000 = 41\,000$（元），所以选择甲方案付款少；

当购买量为 5 100 kg 时，甲方案应付款额 $y = 5\,100 \times 9 = 45\,900$（元），乙方案应付款额 $y = 8 \times 5\,100 + 5\,000 = 45\,800$（元），所以选择乙方案付款少.

3. 解：(1) 能. 因为 x 每增加 0.05，y 都增加 0.1，所以 y 可以看成是 x 的一次函数. 设 $y = kx + b$，把点 (1，1) 和点 (1.10，1.20) 的坐标分别代入，

得 $\begin{cases} k + b = 1, \\ 1.10k + b = 1.20, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = -1, \end{cases}$ 所以 $y = 2x - 1$，验证可知：$x = 1.05$，$y = 1.10$；$x = 1.15$，$y = 1.30$；$x = 1.20$，$y = 1.40$ 均满足上式. 所以函数表达式为 $y = 2x - 1$.

(2) 当 $x = 1.08$ 时，$y = 2x - 1 = 2 \times 1.08 - 1 = 2.16 - 1 = 1.16$.

(3) 当 $x = 1.25$ 时，$y = 2x - 1 = 2 \times 1.25 - 1 = 1.50$.

点拨：因为 1.25 与 1.2 邻近，所以能用所求出的函数表达式作预测.

4. 解：(1) 能. 由于表中每一个月都比上一个月成绩提高了 0.2 s，若设成绩为 y(s)，时间(月份)为 x，则可以把 y 看成 x 的一次函数.

设 $y = kx + b$，由题意得 $\begin{cases} k + b = 15.6, \\ 2k + b = 15.4, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -0.2, \\ b = 15.8. \end{cases}$ 于是 $y = -0.2x + 15.8$.

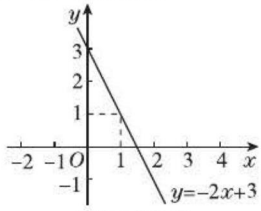
(2) 当 $x = 6$ 时，$y = -0.2 \times 6 + 15.8 = 14.6$. 所以预测小明今年 6 月份的 100 m 短跑成绩为 14.6 s.

(3) 不能，因为远离已知数据作预测是不可靠的.

点拨：建立函数模型时，只要是因变量随自变量均匀变化的，都可以建立一次函数模型.

5. 解：对于 $y = -2x + 3$，当 $x = 0$ 时，$y = 3$；当 $x = 1$ 时，$y = 1$. 过点 (0，3) 和 (1，1) 作直线，这条直线就是 $y = -2x + 3$ 的图象，如图所示. 从图中可以看出，一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象与 x 轴的交点为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，

所以当 $y = 0$ 时，$x = \frac{3}{2}$. 所以 $x = \frac{3}{2}$ 是方程 $-2x + 3 = 0$ 的解.



(第 5 题图)

B 组

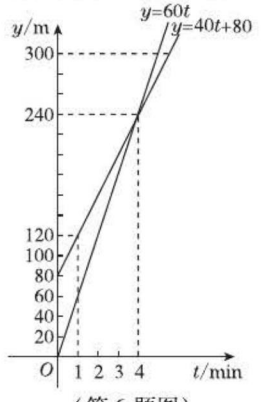
6. 解：(1) 小刚、小强离 A 地的距离 y(m) 与行走时间 t(min) 之间的函数表达式分别为 $y = 40t + 80 (t \geqslant 0)$，$y = 60t (t \geqslant 0)$.

(2) 对于 $y = 60t (t \geqslant 0)$，当 $t = 0$ 时，$y = 0$；当 $t = 1$ 时，$y = 60$. 以点 (0，0) 为端点，过点 (1，60) 作射线，则该射线就是 $y = 60t (t \geqslant 0)$ 的图象. 对于 $y = 40t + 80 (t \geqslant 0)$，当 $t = 0$ 时，$y = 80$；当 $t = 1$ 时，$y = 120$. 以点 (0，80) 为端点，过点 (1，120) 作射线，则该射线就是 $y = 40t + 80 (t \geqslant 0)$ 的图象. 如图所示.

(3) 由图象可知，在出发后 4 min 小强追上小刚.

(4) 由图象可知，小强先到达与 A 地相距 300 m 的 B 地.

点拨：注意在画实际问题中的函数图象时，纵、横坐标的单位长度可以不一样. 本题所画的图象中，两射线的交点的横坐标就是小强追上小刚所用的时间.



(第 6 题图)

7. 解：(1) $y = 8\,000 - 500 (x - 60)$，即 $y =$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-500x+38\ 000(x\geqslant 60)$.

(2)当 $x=70$ 时,$y=-500\times 70+38\ 000=3\ 000$. 即当价格为 70 元时,这种商品的需求量是 3 000 件.

(3)令 $y=0$,即 $-500x+38\ 000=0$,解得 $x=76$. 即当价格提高到 76 元时,这种商品就卖不出去了.

点拨:"商品卖不出去"就是商品的需求量是 0,即 $y=0$.

8. 解:(1)$y=20t$.

(2)由题意可知单件产品的销售利润与上市时间的关系为:$y=\begin{cases}3t(0\leqslant t<20),\\60(20\leqslant t\leqslant 30).\end{cases}$

所以若设这家公司的市场日销售利润为 r(元),则 $r=\begin{cases}60t^2(0\leqslant t<20),\\1\ 200t(20\leqslant t\leqslant 30).\end{cases}$ 所以当 $t=30$,即第 30 天时,这家公司的市场日销售利润最大,最大日销售利润为 $1\ 200\times 30=36\ 000$(元),即 3.6 万元.

复习题 4

A 组

1. 解:(1)对;(2)对;(3)不对;(4)对. 理由略.

点拨:给自变量一个值,因变量有唯一一个值与其对应,这是判断是否为函数关系的依据.

2. 解:(1)自变量是 r,因变量是 C;

(2)自变量是 x,因变量是 S;

(4)自变量是 i,因变量是 r.

3. 解:$y=0.1x$;是正比例函数;图象略.

点拨:此函数符合 $y=kx(k\neq 0)$ 的形式,所以它是正比例函数.

4. 解:(1)$y=0.7(x-35)+2.5$,即 $y=0.7x-22(35\leqslant x\leqslant 42)$;是一次函数;图象略.

(2)当 $x=37$ 时,$y=0.7\times 37-22=3.9$;

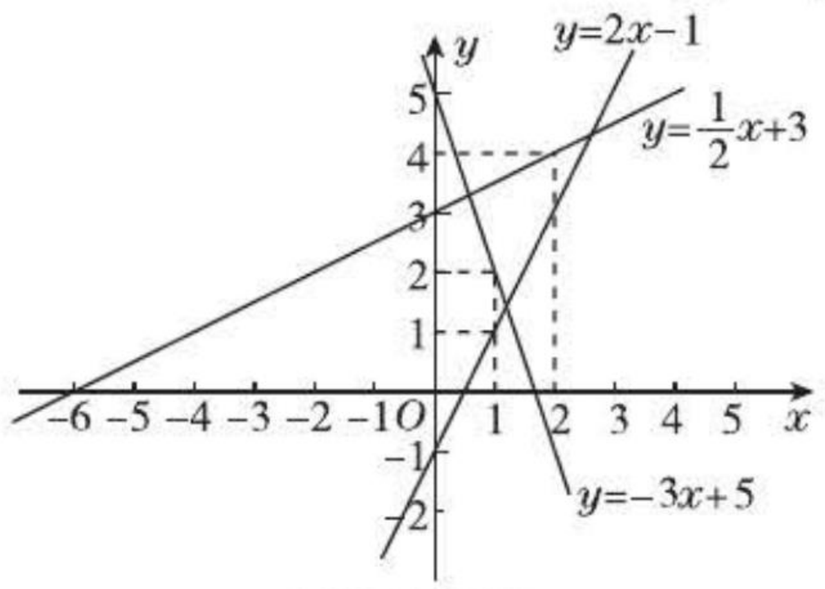
当 $x=38.6$ 时,$y=0.7\times 38.6-22=5.02$.

即当体温为 37 ℃时,水银柱长 3.9 cm;当体温为 38.6 ℃时,水银柱长 5.02 cm.

5. 解:(1)对于 $y=\frac{1}{2}x+3$,当 $x=0$ 时,$y=3$;当 $x=2$ 时,$y=4$. 过点(0,3)和(2,4)作直线,这条直线即为 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的图象(如图). 图象法:观察图象可知其与 x 轴的交点为点(−6,0). 公式法:令 $y=0$,则 $x=-6$,得该函数图象与 x 轴的交点为点(−6,0).

(2)对于 $y=2x-1$,当 $x=0$ 时,$y=-1$;当 $x=1$ 时,$y=1$. 过点(0,−1)和(1,1)作直线,这条直线即为 $y=2x-1$ 的图象(如图). 图象法:观察图象可知其与 x 轴的交点为点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$. 公式法:令 $y=0$,则 $x=\frac{1}{2}$,得该函数图象与 x 轴的交点为点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(3)对于 $y=-3x+5$,当 $x=0$ 时,$y=5$;当 $x=1$ 时,$y=2$. 过点(0,5)和(1,2)作直线,这条直线即为 $y=-3x+5$ 的图象(如图). 图象法:由图象知其与 x 轴的交点为点 $\left(\frac{5}{3},0\right)$. 公式法:令 $y=0$,则 $x=\frac{5}{3}$,得该函数图象与 x 轴的交点为点 $\left(\frac{5}{3},0\right)$.



(第 5 题图)

6. 解:(1)当 $x\leqslant 2$ 时,设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$. 由题图可知,图象经过(0,0)和(2,6)两点,可得 $\begin{cases}b=0,\\2k+b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=3,\\b=0,\end{cases}$ 所以 $y=3x(x\leqslant 2)$;当 $x>2$ 时,设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=k_1x+b_1$,图象经过(2,6)和(8,0)两点,可得 $\begin{cases}2k_1+b_1=6,\\8k_1+b_1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\b_1=8,\end{cases}$ 所以 $y=-x+8(x>2)$.

(2)由题图可以看出,当 $y=3(x\leqslant 2)$ 时,$x=1$,所以当成人每毫升血液中含药量为 3 微克以上时,他服药已经 1 h 以上了.

(3)由题图可知,当 $x=4$ 时,$y=4$,所以当服药4 h后,血液中含药量为 4 微克.

(4)由题图可知,当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时,$y\geqslant 3$,而 $5-1=4$(h),所以有效时间为 4 h.

(5)由题图可知,当 $x=8$ 时,$y=0$,所以服药后经过 8 h,人体内无药量.

7. 解:(1)由题意可得 $y_1=2x(x\geqslant 0)$,$y_2=800+1.2x(x\geqslant 0)$.

(2)要使租用乙公司的汽车较合算,则 $y_1>y_2$,即 $2x>800+1.2x$,解得 $x>1\ 000$.

所以,在 1 个月内,当汽车行驶路程超过 1 000 km时,租用乙公司的汽车较合算.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 解:(1)能. 题图中每一年销售数量比上一年销售数量增加了 8 百万台,可以建立一次函数模型.

用 t 表示从 2004 年起增加的年份,那么全球 DVD 的销售数量 y(百万台)与 t 之间的函数表达式可以设为 $y=kt+b$.

由于 $t=0$(即 2004 年)时,销售数量为 11 百万台;$t=1$(即 2005 年)时,销售数量为 19 百万台,因此 $\begin{cases}b=11,\\k+b=19.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=11,\\k=8,\end{cases}$

于是 $y=8t+11$. ① 当 $t=2$ 时,$y=27$,这说明 2006 年的 DVD 销售数量也符合公式①.

公式①就是全球 DVD 销售数量 y 与时间 t 之间的函数表达式.

(2)当 $t=3$(即 2007 年)时,$y=35$. 与 2007 年全球 DVD 的销售量 3 450 万台基本吻合.

(3)不能.

B 组

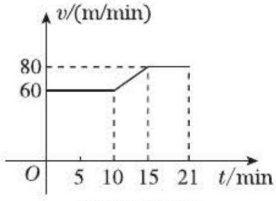
9. 解:对于 $y=kx+6$,当 $x=0$ 时,$y=6$;当 $y=0$ 时,$x=\dfrac{-6}{k}$. 因为直线 $y=kx+6$ 与两坐标轴所围成的三角形面积是 24,所以 $\dfrac{1}{2}\times 6\cdot\left|\dfrac{-6}{k}\right|=24$,所以 $k=\pm\dfrac{3}{4}$.

10. 解:(1)由题意知四边形 $ABPD$ 的面积 = 正方形 $ABCD$ 的面积 − 三角形 BCP 的面积,即 $y=2\times 2-\dfrac{1}{2}\times 2\times x=4-x(0\leqslant x<2)$.

(2)令 $y=1.5$,则 $4-x=1.5$,解得 $x=2.5$. 因为 $x<2$,所以不存在点 P,使四边形 $ABPD$ 的面积为 1.5.

11. 解:如图所示.

点拨:纵轴表示因变量,横轴表示自变量.



(第 11 题图)

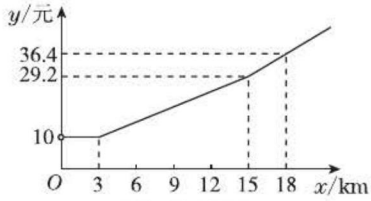
C 组

12. 解:(1)面积 S 分别增大了:1.040 − 1 = 0.040;1.082 − 1.040 = 0.042;1.124 − 1.082 = 0.042;1.166 − 1.124 = 0.042.

(2)略.

13. 解:(1)$y=\begin{cases}10(0<x<3),\\1.6x+5.2(3\leqslant x<15),\\2.4x-6.8(x\geqslant 15).\end{cases}$

(2)这个函数的图象如图所示.



(第 13 题图)

(3)当 $x=30$ 时,$y=2.4x-6.8=2.4\times 30-6.8=65.2$. 所以,当行驶路程为 30 km 时,车费是 65.2 元.

点拨:本题所列出的函数为分段函数,画函数图象取点时,应选取临界点.

第 5 章 数据的频数分布

5.1 频数与频率

练习

解:(1)成绩统计表如下表所示:

成绩	不达标	良	优
频数	1	12	27
频率	0.025	0.3	0.675

(2)$\dfrac{12+27}{40}\times 100\%=97.5\%$.

练习

略. **点拨**:根据试验结果填表,绘制折线统计图即可.

习题 5.1

A 组

1. 解:(1)

得票人	C	P	H	T
频数	8	11	9	12
频率	0.2	0.275	0.225	0.3

(2)汤伟会当选.

2. 解:

颜色	黄	红	绿
频数	6	6	6
频率	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

3. 解:(1)$(40\times 20+45\times 30+48\times 40+50\times 10+52\times 10)\div(20+30+40+10+10)\approx 46$(km/h),这些车的平均车速约是 46 km/h.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)以 48 km/h 的速度行驶的车辆最多.
(40 + 30 + 20) ÷ (40 + 30 + 20 + 10 + 10) × 100% ≈ 81.8%,
以低于 50 km/h 的速度行驶的汽车约占总监测量的 81.8%.
(3)略. **点拨**:答案不唯一,合理即可.

B 组

4. 解:(1)84;0.33
(2)文学类读物最受学生欢迎,艺术类读物受欢迎程度最少.
(3)略. **点拨**:答案不唯一,合理即可.

5. 略.

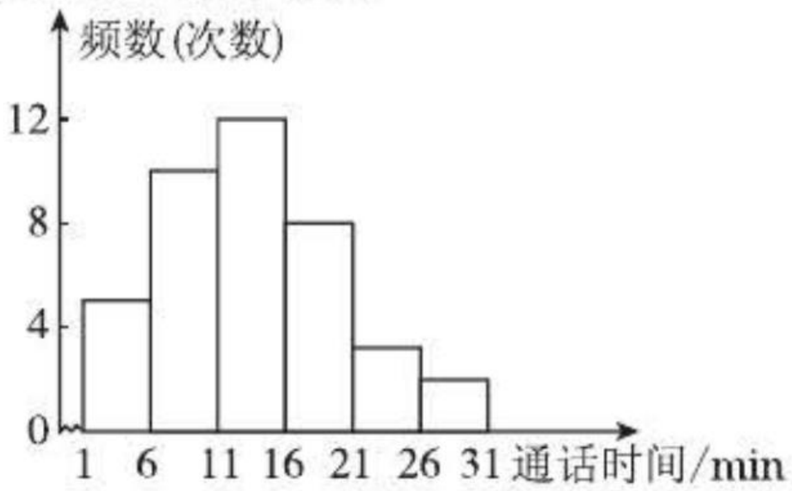
5.2 频数直方图

练习

解:(1)在样本数据中,最大值是 30,最小值是 1,它们的差为 29. 取组距为 5 min,则 $\frac{29}{5}=5.8$,可分为6 组,即 $1\leqslant x<6$, $6\leqslant x<11$, $11\leqslant x<16$, $16\leqslant x<21$, $21\leqslant x<26$, $26\leqslant x<31$. 列频数分布表如下:

分组	画记	频数
$1\leqslant x<6$	正	5
$6\leqslant x<11$	正正	10
$11\leqslant x<16$	正正丅	12
$16\leqslant x<21$	正下	8
$21\leqslant x<26$	下	3
$26\leqslant x<31$	丅	2

频数直方图如图所示.



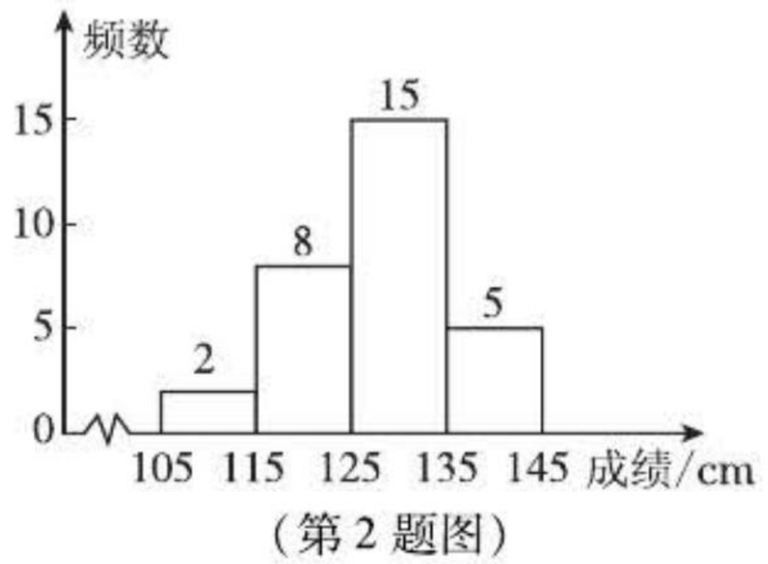
(2)美玲的通话时间在 11 ~ 16 min 内最多. 她通话时间的平均值在这个范围内.

习题 5.2

A 组

1. 解:(1)图略. **点拨**:观察频数直方图可知,30 ~ 40 min 的频数为 50 − 8 − 24 − 13 − 2 = 3,所以画 30 ~ 40 min 的矩形的高为 3 即可.
(2)10 ~ 20 min.
(3)(3 + 2) ÷ 50 × 100% = 10%.

2. 解:如图,应选 135 cm $\leqslant x<$ 145 cm 范围内的学生参赛.



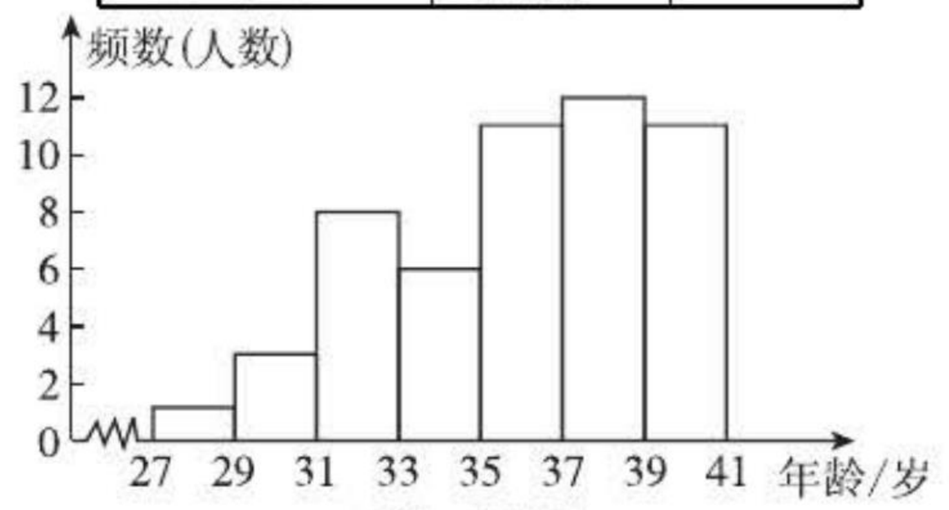
(第 2 题图)

B 组

3. 解:这组数据的最小值为 28,最大值为 40,因此取 27,41 为下、上限,取组距为 2,可分为(41 − 27) ÷ 2 = 7(组),即 $27\leqslant x<29$, $29\leqslant x<31$, $31\leqslant x<33$, $33\leqslant x<35$, $35\leqslant x<37$, $37\leqslant x<39$, $39\leqslant x<41$.
列频数分布表及频数直方图如下(如图).

截至 2 010 年菲尔兹奖得主获奖时的年龄频数分布表

分组	画记	频数
$27\leqslant x<29$	一	1
$29\leqslant x<31$	下	3
$31\leqslant x<33$	正下	8
$33\leqslant x<35$	正一	6
$35\leqslant x<37$	正正一	11
$37\leqslant x<39$	正正丅	12
$39\leqslant x<41$	正正一	11



(第 3 题图)

从频数直方图中可以看出,37 ~ 39 岁的数学家获奖人数最多.

4. 略.

复习题 5

A 组

1. 解:(1)

出生月份	1	2	3	4	5	6
频数	2	3	4	2	4	4
频率	0.05	0.075	0.1	0.05	0.1	0.1
出生月份	7	8	9	10	11	12
频数	4	5	2	3	3	4
频率	0.1	0.125	0.05	0.075	0.075	0.1

(2)这个班 8 月份出生的人数最多,1 月份、4 月份和 9 月份出生的人数最少.
(3)上半年出生的有 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 4 = 19(人),下半年出生的有 4 + 5 + 2 + 3 + 3 + 4 =

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21(人). 因为 19 < 21,所以这个班下半年出生的人数多.

2. 略.

3. **解**:(1)5 + 9 + 20 + 16 = 50(名).

答:该班共有 50 名学生参加比赛.

(2)(20 + 16) ÷ 50 = 72%.

答:垫球数 30 次以上的学生占总人数的百分比是 72%.

4. **解**:在已知数据中,最大值是 26,最小值是 18,它们的差是 8,取组距为 2 本,则 $\frac{8}{2}$ = 4,可分为 5 组,即 $18 \leqslant x < 20$,$20 \leqslant x < 22$,$22 \leqslant x < 24$,$24 \leqslant x < 26$,$26 \leqslant x < 28$.

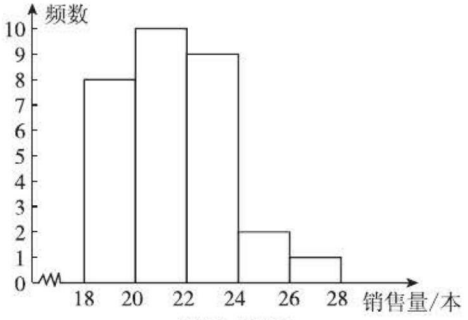
列频数分布表如下:

分组	画记	频数
$18 \leqslant x < 20$	正下	8
$20 \leqslant x < 22$	正正	10
$22 \leqslant x < 24$	正丌	9
$24 \leqslant x < 26$	丅	2
$26 \leqslant x < 28$	一	1

根据上表绘制频数直方图,如图.

从频数直方图中可以看出,销售量为 20 ~ 22 本的星期数最多,销售量为 26 ~ 28 本的星期数最少.

点拨:答案不唯一,合理即可.

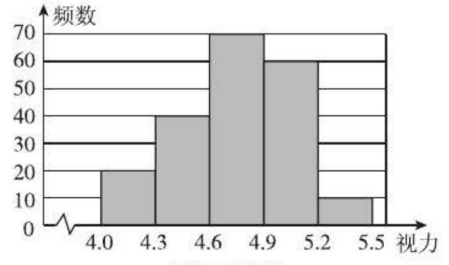


(第 4 题图)

B 组

5. **解**:(1)60;0.05

(2)如图.



(第 5 题图)

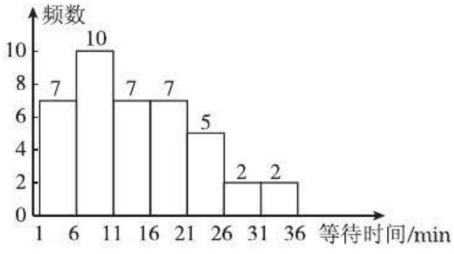
(3)甲同学的视力情况在 4.6 ~ 4.9 这个范围内.

(4)0.3 + 0.05 = 0.35 = 35%.

答:视力正常的人数占被调查人数的 35%.

6. **解**:(1)从题中数据可以得知,最大值为 35,最小值为 2,它们的差为 35 − 2 = 33,取组距为 5 min,则 $\frac{33}{5}$ = 6.6,可分为 7 组,即 $1 \leqslant x < 6$,$6 \leqslant x < 11$,$11 \leqslant x < 16$,$16 \leqslant x < 21$,$21 \leqslant x < 26$,$26 \leqslant x < 31$,$31 \leqslant x < 36$.

频数直方图如图.

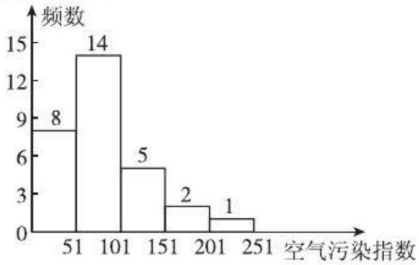


(第 6 题图)

(2)这 40 名顾客的平均等待时间是 14.275 min. 等待时间在 $6 \leqslant x < 11$ min 这一范围内的人数最多. 建议略.(建议合理即可,答案不唯一)

C 组

7. **解**:(1)从题中数据可知,最大值为 201,最小值为 30,根据环境空气质量标准分为 5 组,即 $0 \leqslant x < 51$,$51 \leqslant x < 101$,$101 \leqslant x < 151$,$151 \leqslant x < 201$,$201 \leqslant x < 251$. 绘制频数直方图如图.



(第 7 题图)

(2)$\frac{8+14}{30} \times 365 \approx 268$(天),估计该市今年空气质量是优良的天数为 268 天. 评估该市的空气质量水平及与其他城市比较略.

8. **解**:摸到黑球的频率可能较大. 检验略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



责任编辑：朱　林
封面题字：沈　鹏
封面设计：典点瑞泰

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

荣德基初中频道

ISBN 978-7-5383-9326-2
0 6>
9 787538 393262
定价：39.80元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料