目录 CONTENTS



第7章 数据的收集、整理、描述

7.1 普查与抽样调查 …… 2

7.2 统计图的选用 …… 9

7.3 频数和频率 …… 19

7.4 频数分布表和频数分布直方图 …… 23

中考提分专题篇 章末整合与拔高 …… 30

第8章 认识概率

8.1 确定事件与随机事件 …… 37

8.2 可能性的大小 …… 42

8.3 频率与概率 …… 46

中考提分专题篇 章末整合与拔高 …… 53

第9章 中心对称图形——平行四边形

9.1 图形的旋转 …… 58

9.2 中心对称与中心对称图形 …… 67

9.3 平行四边形 …… 74

9.4 矩形、菱形、正方形 …… 87

9.4.1 矩 形 …… 87

9.4.2 菱 形 …… 99

9.4.3 正方形 …… 109

数学素养提升 解密中考——一题多变(115)

9.5 三角形的中位线 …… 118

中考提分专题篇 章末整合与拔高 …… 124

二维码索引

看微课：

普查与抽样调查 …… 2

数据的收集与整理 …… 5

画频数分布直方图 …… 25

看微课：

事件的判断 …… 38

概率的定义 …… 46

用频率估计概率 …… 47

学方法：

平行四边形的判定方法 …… 79

观动画：

旋转的定义 …… 58

看微课：

中心对称图形的识别 …… 69

平行四边形的性质 …… 75

矩形的判定 …… 90

菱形的性质 …… 99

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

第 10 章　分　式

10.1　分　式 …… 134

10.2　分式的基本性质 …… 140

10.3　分式的加减 …… 148

10.4　分式的乘除 …… 155

10.5　分式方程 …… 163

中考提分专题篇　章末整合与拔高 …… 173

第 11 章　反比例函数

11.1　反比例函数 …… 180

11.2　反比例函数的图像与性质 …… 186

数学素养提升　反比例函数中比例系数 k 的妙用(195)

11.3　用反比例函数解决问题 …… 198

中考提分专题篇　章末整合与拔高 …… 206

第 12 章　二次根式

12.1　二次根式 …… 214

12.2　二次根式的乘除 …… 223

12.3　二次根式的加减 …… 236

中考提分专题篇　章末整合与拔高 …… 244

参考答案及点拨(单独成册)

二维码索引

学方法：

巧求分式值的方法 …… 176

看微课：

分式的定义 …… 134

分式的基本性质 …… 140

分式方程的定义 …… 163

看微课：

反比例函数的定义 …… 180

反比例函数的性质 …… 187

比例系数 k 的几何意义 … 189

学方法：

二次根式比较大小的方法 … 232

看微课：

二次根式的定义 …… 214

二次根式的化简 …… 219

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错点索引

第7章 数据的收集、整理、描述

1. 扇形统计图只能看出各个部分占总体的百分比，不能看出各部分的具体数目[知1] / 9
2. 制作条形统计图时，横轴的各个小长方形宽度要一样，间隔要均匀，纵轴一般要从0开始[知2] / 11
3. 频率是个比值，它可以用小数、百分数、分数来表示[知] / 19

第8章 认识概率

1. 判断“不太可能”与“不可能”以及“很有可能”与“必然”时出错[知2] / 38
2. 对于等可能事件我们可以用列举法通过公式求概率和用频率估计概率，对于非等可能事件则只能用频率估计概率[知2] / 47

第9章 中心对称图形——平行四边形

1. 旋转的范围是在平面内，否则就形成立体图形，不是我们研究的范围，因此“在平面内”不可忽略[知1] / 58
2. 画旋转图形时容易忽视对旋转方向的要求[知2] / 59
3. 判定平行四边形需要两个独立条件，但“两组邻边分别相等”、“两组邻角分别相等”、“一组对边平行，另一组对边相等”这三种情况都不能判定平行四边形[知3] / 79
4. 有一个角是直角的四边形不一定是矩形；两条对角线相等的四边形不一定是矩形[知2] / 90
5. 三角形的中位线与三角形的第三条边存在数量与位置关系[知] / 118

第10章 分 式

1. 误认为分母含有π的式子是分式[知1] / 134
2. 求分式的值为0时的字母取值，容易出现只考虑分式分子的值为0的错误，而忽视分母的值不能为0的条件[知3] / 136
3. 乘方时要注意分子、分母中的每一个因式都要乘方，千万不能遗漏[知3] / 157
4. 分式的乘除混合运算要注意分式中分子、分母符号的处理，可先确定积的符号[知4] / 158
5. 分式方程中的分母含有未知数，而不是一般的字母参数[知1] / 163
6. 在求分式方程中字母的取值时，容易漏掉使字母的值不为零的隐含条件[知3] / 166
7. 增根虽不是原分式方程的根，但它却是原分式方程化成的整式方程的根[知3] / 166

第11章 反比例函数

1. 反比例函数的增减性取决于k的正负，反之亦成立；在运用增减性时，一定要注意在同一象限[知2] / 187
2. 在实际问题中，自变量的取值范围往往会受到实际条件的限制，函数图像通常在第一象限，有时会是第一象限中的一部分[知] / 198
3. 两坐标轴上的单位长度一定要根据实际问题来确定，而且两坐标轴上的单位长度可以不一致[知] / 198

第12章 二次根式

1. 二次根式是从形式上定义的，不能从化简结果上判断[知1] / 214
2. 利用性质$\sqrt{a^2}=|a|$化简时，易忽略字母a的取值范围[知3] / 217
3. 积的算术平方根性质中的乘积中的每个因数(式)必须都是非负数，才能运用性质进行化简或计算[知2] / 224
4. 二次根式化简时，容易忽视隐含条件，将负数移到根号外[知5] / 230
5. 判断最简二次根式时是被开方数中不含分母而不是式子不含分母[知5 考1] / 230
6. 判断“同类二次根式”的前提是先化为最简二次根式[知1] / 236

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拓展点索引

第7章 数据的收集、整理、描述

1. 扇形统计图与条形统计图综合[技2] / 14
2. 表格中的频数与频率的计算[技2] / 20
3. 条形统计图与频数分布直方图的关系[知2] / 25

第8章 认识概率

1. 判断随机事件发生的可能性的大小时，先要准确地找出所有可能出现的结果数，然后再分情况，看每种情况包含的结果数与所有可能出现的结果数的比例大小. 比例越大，则这种情况发生的可能性越大[知] / 42
2. 当试验次数很多时，一个事件发生的频率稳定在相应的频率附近[知2] / 47
3. 频率是通过试验得到的一个数据结果，因试验次数的不同而有所改变，是一个实际的具体值. 概率是一个事件发生的可能性大小的理论值，它不因试验次数的改变而变化，是一个常数[知2] / 47
4. 根据频率估算面积[技3] / 50

第9章 中心对称图形——平行四边形

1. 过中心对称图形对称中心的直线将图形分成全等的两部分[知2] / 69
2. 中心对称与函数综合问题[技4] / 72
3. 动点问题[技4] / 84
4. 夹在两条平行线间的任何平行线段都相等[知3] / 93
5. 等底等高的三角形的面积相等[知3] / 93
6. 利用矩形的性质解决矩形折叠问题[技1] / 94
7. 与矩形有关的动态探究题[技3] / 95
8. 根据菱形的对称性求最小值[技2] / 105
9. 巧用正方形性质证明线段的和差关系[技2] / 113
10. 构造三角形中位线解决问题[技3] / 121

第10章 分 式

1. 分式的值为正数、负数的条件[技3] / 138
2. 整体思想巧求分式的值[技2] / 145
3. 求分式运算中的待定系数[技2] / 151
4. 分式方程无解问题[技2] / 170

第11章 反比例函数

1. 若在反比例函数表达式中分母 x 的系数不为1，如：$y=\frac{b}{ax}$，则比例系数 k 为 $\frac{b}{a}$，不可误认为 $k=b$[知1] / 180
2. 如果 $xy=k$（k 是常数，$k\neq0$），那么 x 与 y 这两个量成反比例关系，这里 x，y 可以表示多项式或单项式[知1] / 180
3. 双曲线既是一个轴对称图形，又是一个中心对称图形. 对称轴有两条，分别是直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$；对称中心是坐标原点，任何一条经过原点的直线只要与双曲线有两个交点，则这两个交点关于原点对称[知1] / 186
4. 根据反比例函数对称性求值[技3] / 192
5. 利用分段函数解决实际问题[技3] / 202

第12章 二次根式

1. 几个二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变[知1] / 223
2. 几个二次根式相乘，可利用交换律、结合律使运算简便[知1] / 223
3. 当分母是 $\sqrt{a}$ 或 $b\sqrt{a}$ 的形式时，分子与分母同乘 $\sqrt{a}$[知4] / 228
4. 二次根式中的规律探究[技4] / 233
5. 无理数的整数部分、小数部分问题[技2] / 242

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **定义法：** 所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法. 从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的. 因此，用定义法解题，是最直接的方法.

2. **数形结合思想：** 数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法. 数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

3. **分类讨论思想：** 把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称之为分类讨论思想.

4. **方程思想：** 方程的思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

5. **反证法：** 先假设结论不成立，再从这个假设出发，经过正确的推理，说明假设错误，从而证明原命题成立，这样的证明方法叫做反证法.

6. **转化思想：** 转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

7. **等积法：** 运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程，通过推理、演算以达到求解线段长度或得到线段之间数量关系的目的的一种方法.

8. **构造法：** 构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简捷. 其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法. 主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

9. **截长补短法：** 截长法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想. 所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一条线段相等. 补短法是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想. 所谓“补短”，就是将一个已知的较短的线段延长，使延长部分与另一个已知的较短的线段的长度相等，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系.

10. **类比思想：** 类比思想是根据两个对象之间在某些方面的相同或相似，从而推出它们在其他方面也可能相同或相似的一种思想. 因此，类比是从特殊到特殊的推理. 通过类比，可以发现新旧知识的相同点，利用已有的旧知识，来认识新知识.

11. **待定系数法：** 待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数表达式的方法就叫做待定系数法.

12. **整体思想：** 一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想. 它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

13. **裂项相消法：** 裂项相消法的实质是将所要求和的代数式中的每项分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.

14. **排除法：** 排除法是一种把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉的方法. 它是一种解答选择题的技巧方法，通过已知条件来确定结论（答案）的范围，把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7章 数据的收集、整理、描述

体验数据的奥秘

数学点拨

你将学到的核心考点

普查与抽样调查 □

统计图的制作与运用 □

频数分布直方图 □

我们为你提供的核心方法

定义法 □　　数形结合思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

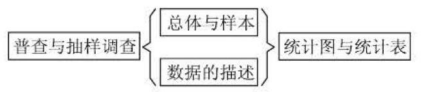
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.1 普查与抽样调查

热门话题
- 普查与抽样调查
- 总体与样本
- 数据的描述

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点1 普查与抽样调查

点知识

1. **普查**：
   （1）**定义**：为一特定目的而对所有考察对象所做的调查叫做普查.
   （2）**适用范围**：调查范围小、调查不具有破坏性、数据要求准确全面.



2. **抽样调查**：
   （1）**定义**：为一特定目的而对部分考察对象所做的调查叫做抽样调查（简称抽样）.
   （2）**适用范围**：调查对象涉及面广，范围大，或受条件限制，或具有破坏性等.

要点精析

（1）普查和抽样调查的优缺点：
普查的优点是调查的结果准确，缺点是花费多，工作量大，难度大，而且有些调查不宜使用普查. 抽样调查的优点是调查的花费较少，工作量较小，便于进行，缺点是样本的抽取是否得当，直接关系到对总体的估计的准确程度.

（2）抽样调查时要注意：①调查对象不宜太少（具有广泛性）；②调查对象应随意抽取（具有代表性）；③调查数据应真实可靠（具有真实性）.

拨考向

典例剖析

考查角度：根据调查对象的特征确定调查方式

例1 下列调查中，哪些适宜用抽样调查，哪些适宜用普查？
（1）调查我市中学生每天做作业的时间；
（2）调查某班学生对“中国梦”的知晓率；
（3）调查一架“歼20”隐形战机各零部件的质量；
（4）调查里约热内卢奥运会100 m跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况.

导引：紧扣普查和抽样调查的优缺点及适用范围进行判断.
（1）中涉及的范围较大，适宜用抽样调查.
（2）中某班学生的人数有限，适宜用普查.

举一反三训练

（答案见249页）

1. [中考 · 重庆] 下列调查中，最适合采用抽样调查的是（　　）
   A. 对某地区现有的16名百岁以上老人睡眠时间的调查
   B. 对“神舟十一号”运载火箭发

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)中考虑到一架“歼20”隐形战机各零部件的数量有限,并且其安全性对质量的要求较高,适宜用普查.

(4)中调查里约热内卢奥运会100 m跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况适宜用普查.

▶解:(1)适宜用抽样调查.(2)(3)(4)适宜用普查.

点方法

(1)**判断一个调查是否适合采用抽样调查的方法:** 先看调查的范围有多大,调查的目的如何,对调查结果的要求是否很高,同时,还要兼顾人力、物力的节省.

(2)选择抽样调查的情况有:①当被调查的对象数目较多时,普查的工作量较大,可选择抽样调查;②当受客观条件限制,无法对所有调查对象进行普查时,可选择抽样调查;③当调查具有破坏性时,可选择抽样调查.

射前零部件质量情况的调查

C. 对某校九年级三班学生视力情况的调查

D. 对市场上某一品牌电脑使用寿命的调查

知识点2 总体与个体

点知识

总体:把所考察对象的全体叫做总体.

个体:把组成总体的每一个考察对象叫做个体.

样本:从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本.

样本容量:样本中个体的数目叫做样本容量.

注意:样本容量没有单位.

要点精析

(1)关于总体和样本,总体包括所有的个体,样本通常只包括一部分个体,样本是总体的一部分,一个总体中可以有许多样本,样本在一定程度上能够反映总体情况,为了使样本能较好地反映总体情况,在选取样本时要注意使其具有一定的代表性.

(2)样本容量是样本中个体的数目,一般地,样本容量越大,通过样本对总体的估计就越精确,在实际研究中,要根据具体情况确定样本容量的大小.样本容量是一个数字,不能有单位.

拓考向

考查角度:总体、样本、个体和样本容量概念辨析(高频考点)

例2 请指出下列抽样调查的总体、个体、样本、样本容量.

(1)为了了解某种家用空调工作1小时的用电量,调查10台该种家用空调每台工作1小时的用电量;

(2)为了了解八年级270名学生的视力情况,从中抽取50名学生进行视力检查.

导引:总体是指考察对象的全体,个体是总体中的每一个考察对象,样本是总体中所抽取的一部分个体,而样本容量则是指样本中个体的数目.我们在区分总体、个体、样本、样本容量这四个概念时,首先找出考察的对象,从而找出总体、个体,再根据被收集数据的这一部分对象找出样本,最后再根据样本确定出样本容量.

2. 为了解一批灯泡的使用寿命,从中抽取20只试验.指出该考察中的总体、个体、样本、样本容量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：(1)总体：该种家用空调工作1小时的用电量；个体：每台该种家用空调工作1小时的用电量；样本：10台该种家用空调每台工作1小时的用电量；样本容量：10；

(2)总体：八年级270名学生的视力情况；个体：每名学生的视力情况；样本：抽取的50名学生的视力情况；样本容量：50.

点方法

样本要指出样本所含考察对象的数量；个体是总体中的每一个考察对象；样本容量是指一个样本中所包含的个体数目，只是一个“数”，没有单位.

知识点3 样本的选取

点知识

为了获得较为准确的调查结果，抽样调查时要注意样本的代表性.

要点精析

在现实生活中，当我们所要考察的总体中包含的个体数很多且总体是由有明显差异的几个部分组成时，我们应注意抽出的样本就必须有较强的代表性，每个部分都应被抽取到，而且应注意各部分的比例. 抽出的样本必须具有尽可能大的代表性，否则将影响到样本对总体估计的精确程度.

拓考向

考查角度：利用抽样调查的特征确定样本的选取是否合理

例3 判断下列调查中样本的选取是否合适，并说明理由.

(1)在网上调查“你对老师讲课时‘拖堂现象’的态度”；

(2)在某一个敬老院里调查我国老年人的寿命情况；

(3)在校园里调查我国青年人上网的时间；

(4)为了了解我校七年级同学看电视的时间，随机选取了100名同学进行调查.

导引：根据抽样调查所需要的条件进行判断分析.

▶解：(1)不合适，因为网上调查只是一部分，不具有广泛性和代表性.

(2)不合适，因为敬老院里的老年人的寿命情况只是所有老年人的寿命情况中的一部分，还有非敬老院中的老年人的寿命情况也应该调查.

(3)不合适，因为校园学生只是青年人的一部分，还有非校园学生的青年人，校园学生上网的时间不代表所有青年人上网的时间.

(4)合适，因为抽样是随机的，样本具有代表性.

3. 下列调查的样本缺乏代表性的是(　　)

A. 为了了解动物园一年中游客的人数，小明利用“十一”长假对7天的进园人数进行调查

B. 为了了解养鸡场中一批种鸡的体重情况，从该养鸡场中随机抽取该种鸡100只进行调查

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

为了使抽取的样本具有代表性，要注意三点：①样本容量适当；②样本具有广泛性，当总体是由有明显差异的几个部分组成时，每个部分都应被抽取到且比例适中；③样本具有随机性，即保证每个个体被抽到的机会相等.

C. 为了了解我市读者到市图书馆借阅图书的情况，从全年的借阅人数中抽查了100天每天到市图书馆借阅图书的人数

D. 调查某电影院单排号的观众，以了解观众们对所看影片的看法

知识点4　数据的收集与描述

点知识

1. **设计调查问卷分以下三步**：①确定调查目的；②选择调查对象；③设计调查问题.

2. **统计调查的一般过程**：

①问卷调查法——收集数据；

②列统计表——整理数据；

③画统计图——描述数据.


数据的收集与整理

要点精析

(1) 收集数据一般可分为六个步骤：明确调查问题；确定调查对象；选择调查方法；展开调查；记录结果；得出结论.

(2) 在统计调查中，我们利用调查问卷收集数据，利用表格整理数据，利用统计图描述数据，通过分析表和图来了解情况.

拓考向

考查角度：设计调查问卷

例4 某学校课外活动小组为了解同学们喜爱的电影类型，设计了如下的调查问卷(不完整)：

调查问卷　　年　月　日
你平时最喜欢的一种电影类型是(　　)(单选)
A.　　B.　　C.　　D. 其他

准备在“①国产片，②科幻片，③动作片，④喜剧片，⑤亿元大片”中选取三个作为该问题的备选答案，选取合理的是(　　)

A. ①②③　　B. ①③⑤　　C. ②③④　　D. ②④⑤

导引：根据调查问卷内容要全面且不能重复即可得出答案.

电影类型包括：科幻片、动作片、喜剧片等，故选取合理的是②③④，故选C.

▶答案：C

点方法

在设计过程中要注意以下几个要点：

(1) 明确调查目的和内容，问卷设计应该以此为基础；

(2) 明确针对人群，问卷设计的语言措辞选择得当；

(3) 在问卷设计的时候，就应该考虑数据统计和分析是否易于操作；

(4) 问题尽量合理化、逻辑化、规范化.

4. 在设计调查问卷时，下面的提问比较恰当的是(　　)

A. 我认为猫是一种很可爱的动物

B. 难道你不认为科幻片比武打片更有意思

C. 你给我回答到底喜不喜欢猫呢

D. 请问你家有哪些使用电池的电器

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：样本的代表性应用

例 5 一家电脑生产厂家在某城市三个经销本厂产品的大商场调查中得出，产品的销量占这三个大商场同类产品销量的 40%．由此在广告中宣传，他们的产品在国内同类产品的销量中占 40%．请你根据所学的统计知识，判断该宣传中的数据是否可靠？理由是什么？

导引：由于选择的样本在一个城市，太片面，所以不具有代表性．数据不可靠．

▶解：不可靠；因为抽样不具有代表性．

点方法

不合理的样本可能导致统计结果的不准确，因而要判断统计结果是否准确，看样本是否具有代表性是重要方法．从本题的解答可以进一步体会到在进行抽样调查时所选取的样本能否反映总体的情况非常重要．

拨尖角度 2：设计调查问卷或调查表

例 6 七年级开设的主要科目有语文、数学、外语，你知道全班同学最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科吗？你知道男生和女生各自最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科吗？

（1）如果想知道这些问题的答案，请你简要说明需要哪些步骤？

（2）就上述问题开展调查，请你设计一个调查问卷．

（3）如果用 A 表示语文，B 表示数学，C 表示外语，那么收集的数据如下：

男生：A B C B A C A B B A B C B B C A B C B B C B A C B B

女生：A C B A C B A C A B A B A B C A C A C B C B A C

请你根据上述数据回答：①全班同学最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科？②男生最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科？③女生最喜爱的主要科目是这三科中的哪一科？

导引：（1）根据数据收集与整理的一般步骤解答即可．

▶解：（1）需要的步骤是：①设计调查问卷；②进行问卷调查；③回收数据；④整理数据；⑤得出结论．

（2）答案不唯一，例如：

调查问卷　年　月　日

你最喜爱的主要科目是（　　）（单选）

A. 语文　　B. 数学　　C. 外语

答卷人性别：男（　　）　女（　　）（在你的性别后面的括号里打“√”）

举一反三训练

（答案见 249 页）

5. 小李同学想了解湖边小区的家庭教育费用支出情况，调查了本校家住湖边小区的 35 名同学的家庭．并把这 35 个家庭的教育费用支出的平均数作为湖边小区家庭教育的平均费用支出的估计，你觉得合理吗？若不合理，请说明理由．并设计一个抽样调查的方案．

6. 小李在家门口进行了一项社会调查，对从家门口经过的车辆进行记录，分析出本地车辆与外地车辆的数据，同时也对汽车牌照的尾号进行了记录．

（1）在这过程中他要收集 _____ 种数据；

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

填完后，请将调查问卷交给班长.

(3)①制作统计表如下：

全班同学最喜爱的主要科目的人数统计表

科目类型	划记	人数	百分比
A	正正正	15	30%
B	正正正正	20	40%
C	正正正	15	30%
合计		50	100%

根据该表可知，全班同学最喜爱的主要科目是数学.

②制作统计表如下：

全班同学中男生最喜爱的主要科目的人数统计表

科目类型	划记	人数	百分比
A	正一	6	23%
B	正正下	13	50%
C	正丁	7	27%
合计		26	100%

根据该表可知，全班同学中男生最喜爱的主要科目是数学.

③制作统计表如下：

全班同学中女生最喜爱的主要科目的人数统计表

科目类型	划记	人数	百分比
A	正丌	9	37.5%
B	正丁	7	29.2%
C	正下	8	33.3%
合计		24	100%

根据该表可知，全班同学中女生最喜爱的主要科目是语文.

(2)怎样设计出记录用的表格，在下面的空白处画出你的设计表格.

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 (答案见249页)

基础巩固练

1. 下列调查中，适合用普查的是(　　)
   A. 了解某班学生“50米跑”的成绩
   B. 了解一批灯泡的使用寿命
   C. 了解一批炮弹的杀伤半径
   D. 了解一批袋装食品是否含有防腐剂
2. 去年某市有7.6万名学生参加初中毕业会考，为了了解这7.6万名考生的数学成绩，从中抽取1 000名考生的数学成绩进行统计分析，以下说法正确的是(　　)
   A. 这1 000名考生是总体的一个样本
   B. 7.6万名考生是总体
   C. 每名考生的数学成绩是个体
   D. 1 000名考生是样本容量
3. 为了了解南京市老年人的健康状况，下列调查方式合适的是(　　)
   A. 在公园调查1 000名老年人在一年中的生病次数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

B. 在医院门诊部与住院部调查 1 000 名老年人在一年中的生病次数

C. 调查自己所在小区的 10 名老年邻居在一年中的生病次数

D. 让全班每一名同学调查各自身边的五名老年邻居在一年中的生病次数

4. 为了解一批鞭炮的质量，适合的调查方式是_____（填“普查”或“抽样调查”）.

5. “建设大美青海，创建文明城市”，西宁市加快了郊区旧房拆迁的步伐. 为了解被拆迁的 236 户家庭对拆迁补偿方案是否满意，小明利用周末调查了其中的 50 户家庭，有 32 户对方案表示满意. 在这一抽样调查中，样本容量是_____.

6. 指出下列问题中的总体、个体、样本.

(1) 为了估计某块玉米试验田里玉米的单株平均产量，从中抽取 100 株进行检测；

(2) 某学校为了了解学生完成课外作业的时间，从中抽样调查了 50 名学生完成课外作业的时间进行分析.

7. 学期结束前，学校想调查八年级学生对数学的喜欢程度，特向八年级 400 名学生做问卷调查，结果如下：

喜欢程度	非常喜欢	喜欢	有一点喜欢	不喜欢
人数	200	160	32	8

(1) 计算出每一个项目对应的人数占总调查人数的百分比；

(2) 请作出反映此调查结果的条形统计图；

(3) 从统计图中你能得出什么结论？

能力提升练

8. 一家手机生产厂家在某城市三个经销本厂产品的商场调查中得出，产品的销量占这三个商场同类产品销量的 50%. 由此在广告中宣传，他们的产品在国内同类产品的销量中占 50%. 请你根据所学的统计知识，判断该宣传中的数据是否可靠：_____，理由是_____.

9. 为了了解某市一年中的空气质量情况，某同学在 30 天里做了如下记录：

污染指数	40	60	80	100	120	140
天数	3	5	10	6	5	1

其中污染指数 $\leqslant 50$ 时空气质量为优，$50 <$ 污染指数 $\leqslant 100$ 时空气质量为良，$100 <$ 污染指数 $\leqslant 150$ 时空气质量为轻度污染，本题中总体是_____，样本是_____；若 1 年按 365 天计算，估计该市在一年中空气质量达到良以上（含良）的天数为_____天.

10. 为了解全校学生的平均身高，小明调查了坐在自己旁边的 3 名同学，把他们身高的平均值作为全校学生平均身高的估计值.

(1) 小明的调查是抽样调查吗？

(2) 如果是抽样调查，指出调查的总体、个体、样本和样本容量；

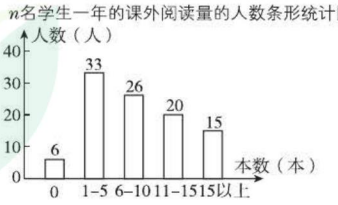
(3) 这个调查的结果能较好地反映总体的情况吗？如果不能，请说明理由.

思维拓展练

11. [中考 · 长春] 某中学为了解该校学生一年的课外阅读量，随机抽取了 n 名学生进行调查，并将调查结果绘制成如图所示的条形统计图，根据统计图提供的信息解答下列问题：

(1) 求 n 的值；

(2) 根据统计结果，估计该校 1 100 名学生中一年的课外阅读量超过 10 本的人数.



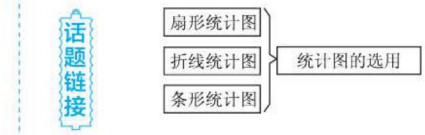
（第 11 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 统计图的选用

热门话题
- 扇形统计图
- 折线统计图
- 条形统计图

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 扇形统计图

点知识

1. 扇形统计图中，整个圆表示统计项目的总体，每一统计项目分别用圆中不同的扇形来表示，扇形面积占圆面积的百分比与各统计项目占总体的百分比相同.
2. 在扇形统计图中，扇形圆心角 = 该统计项目占总体的百分比 × 360°.
3. **制作扇形统计图的步骤**：
   ①先计算各部分占总体的百分比；
   ②再计算出各部分数量对应的扇形的圆心角，扇形圆心角 = 各部分的百分比 × 360°；
   ③选取适当的半径画圆，在圆中画出各个扇形；
   ④在各部分扇形上标明相应名称和百分比.
4. **易错警示**：扇形统计图只能看出各个部分占总体的百分比，不能看出各部分的具体数目.

拨考向

典例剖析

考查角度1：制作扇形统计图

例1 李小林一周内总共花了48元钱，其中交通费12元，购买文具花费8元，午餐花费20元，娱乐消费8元. 请根据所给信息画扇形统计图以直观地表示各项消费金额所占的百分比.

导引：先算出各项消费金额所占的百分比，然后确定扇形的圆心角的度数.

▶解：李小林一周内各项消费金额、所占百分比及对应的扇形圆心角的度数如下表所示：

消费项目	交通	文具	午餐	娱乐	合计
消费金额	12元	8元	20元	8元	48元
所占百分比	25.00%	16.67%	41.66%	16.67%	100%
圆心角	90°	60°	150°	60°	360°

举一反三训练

(答案见250页)

1. 下表是光明中学初一(2)班某位同学对本班60位同学就“父母回家后，你会主动给他们倒一杯水吗”情况调查结果.

调查项目	主动倒水	偶尔倒水	不倒水
人数	27人	18人	15人

(1) 计算各类人数所占百分比及各个扇形圆心角的度数.

(2) 在所画出的圆中(如图)，制作扇形统计图，并标上调查的项目和所占的百分比.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

扇形统计图如图 7. 2-1.



图 7. 2-1

点方法

在制作扇形统计图时，先计算出要统计的各部分占总体的百分比的大小，然后根据这些百分比在圆中利用量角器分割圆心角，再得出相应的扇形，在相应的扇形上标上各部分的名称和百分比，从而得到一个完整的扇形统计图. 其中扇形的圆心角 = 该部分的百分比 × 360°.

考查角度 2：根据扇形统计图计算圆心角的度数

例 2 如图 7. 2-2 的扇形统计图反映了小明家一年的开支情况，则此扇形统计图中“体育”部分所在的扇形的圆心角度数为_____.

导引：首先求得“体育”部分所占的百分比，然后用求得的百分比乘周角即可确定所在扇形的圆心角.

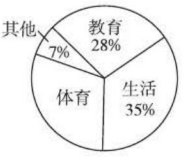


图 7. 2-2

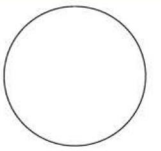
∵“体育”部分所占百分比为：1 − 7% − 28% − 35% = 30%，

∴ 此扇形统计图中“体育”部分所在的扇形的圆心角度数为 30% × 360° = 108°.

▶答案：108°

点方法

计算圆心角的一般方法： 首先确定所对应的百分比，再用求得的百分比乘周角即可确定所在扇形的圆心角.



（第 1 题图）

2. 某校对学生上学方式进行了一次抽样调查，并根据此次调查结果绘制了一个不完整的扇形统计图（如图），其中“其他”部分所对应的圆心角是 36°，则“步行”部分所占百分比是_____.



（第 2 题图）

知识点 2 统计图的选用

点知识

1. 在条形统计图中，用宽度相同的“条形”的高度描述各统计项目的数据.

说明：(1) 条形统计图可以横置或纵置，绘制时将各类别（或组别）放置在横轴（或纵轴）上，用条形的高度（或长度）表示项目的具体数目.

(2) **条形统计图的特点**：①能够显示各组中的具体数量；②易于比较数据之间的差别.

(3) **制作条形统计图的一般步骤**：①画出两条互相垂直的射线分别作为横轴、纵轴，并指明横轴、纵轴所表示的实际意义；②在横轴上，适当分配条形的位置，确定直条的宽度和间隔；③在纵轴上，根据数据大小的具体情况，确定单位长度表示多少；④按照数据大小画出长短不同的直条，并注明数量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 折线统计图用折线描述数据的变化过程和趋势.

说明:(1)**折线统计图的特点**:折线统计图既可以表示出项目的具体数量,又能清楚地反映事物变化的情况.

(2)折线统计图可反映事物变化的规律和趋势,在变化过程中,是递增还是递减及增长的快慢情况一目了然.

(3)**制作折线统计图的一般步骤**:

①画出两条互相垂直的射线分别作为横轴、纵轴,并指明横轴、纵轴所表示的实际意义;②在横轴上等距离取点表示各个项目,在纵轴上取单位长度表示一定数目;③以各个项目的数目作为点的纵坐标描点,并用线段依次连接各点.

3. **统计图的选用**:用统计图描述数据,应根据问题中对描述数据的要求,结合统计图的特点进行选择. 如果要清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比,那么选用扇形统计图;如果要清楚地表示出每个项目的具体数目,那么选用条形统计图;如果要清楚地反映事物的变化情况,那么选用折线统计图.

4. **易错警示**:

制作条形统计图时,横轴的各个小长方形宽度要一样,间隔要均匀,纵轴一般要从0开始.

点考向

考查角度1:根据条形统计图计算

例3 在开展"国学诵读"活动中,某校为了解全校1 200名学生课外阅读的情况,随机调查了50名学生一周的课外阅读时间,并绘制成如图7.2-3所示的条形统计图. 根据图中数据,估计该校1 200名学生一周的课外阅读时间为8小时的人数是_____.

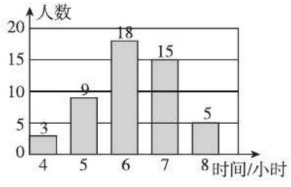


图7.2-3

导引:求出学生一周的课外阅读时间为8小时的人数占的百分比,乘以1 200即可得到结果.

根据题中的数据得:$1\,200\times\frac{5}{3+9+18+15+5}=120$,

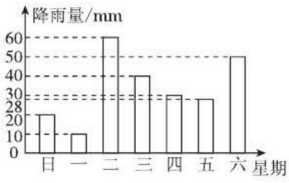
则该校1 200名学生一周的课外阅读时间为8小时的人数是120.

▶答案:120

点方法

条形统计图的特点:(1)能够显示每组中的具体数据;(2)易于比较数据之间的差别.

3. 如图是小明用条形统计图记录的某地一星期的降雨量(单位:mm). 如果日降雨量在25 mm及以上为大雨,那么这个星期下大雨的天数是_____天.



(第3题图)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度 2：根据折线统计图计算

例 4 甲、乙两家汽车销售公司根据近几年的销售量，分别制作了如图 7.2-4 所示的折线统计图，试判断：从 2014 年到 2018 年，这两家公司中销售量增长较快的是_____公司.

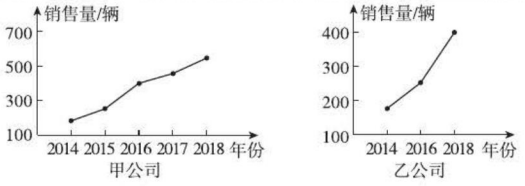


图 7.2-4

导引：结合折线统计图，求出甲、乙各自的增长量即可求出答案.

从折线统计图中可以看出：

甲公司 2014 年的销售量约为 180 辆，2018 年约为 550 辆，则从 2014 年到 2018 年甲公司的销售量约增长了 550 − 180 = 370（辆）；

乙公司 2014 年的销售量约为 180 辆，2018 年的销售量约为400辆，则从 2014 年到 2018 年，乙公司的销售量约增长了 400 − 180 = 220（辆）.

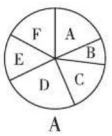
则甲公司销售量增长较快. ▶答案：甲

点方法

折线统计图的特点：既能表示每个项目的具体数量，又能清楚地反映事物的变化情况.

考查角度 3：统计图的选择

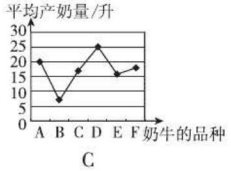
例 5 下列统计图中，用来表示不同品种的奶牛的平均产奶量最为合适的是（　　）



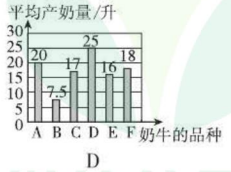
A



B



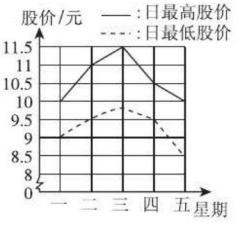
C



D

导引：根据统计图的特点，可知条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目，正符合这道题要把不同品种的奶牛的平均产奶量显示清楚的目的，故选 D. ▶答案：D

4. 如图是某只股票从星期一至星期五每天的最高股价与最低股价的折线统计图，则这五天中最高股价与最低股价之差最大的一天是（　　）



（第 4 题图）

A. 星期二　　B. 星期三

C. 星期四　　D. 星期五

5. 某校七年级二班在订购本班的班服前，按身高型号进行登记，对女生的记录中，身高 150 cm 以下记为 S 号，150 ~ 160 cm 以下记为 M 号，160 ~ 170 cm 以下记为 L 号. 170 cm 及以上记为 XL 号. 若用统计图描述这些数据，合适的统计图是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

统计图是表示数据的有效工具，常用的统计图有条形统计图、扇形统计图和折线统计图. 这几种统计图各有自己的特点，它们可以从不同的角度清楚、有效地描述数据. 反映数据的变化一般用折线统计图，反映每一个项目的具体数据选用条形统计图，反映各部分在总体中所占的百分比选用扇形统计图.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1：选用合适的统计图描述数据

例6 某市一所中学为了解学生每天的消费情况，随机抽取了该校30名学生进行调查，并将调查结果记录如下：0元~5元，有14人，占46.6%；6元~10元，有6人，占_____%；11元~15元，有5人，占16.7%；16元~20元，有_____人，占10%；20元以上(不包括20元)，有2人，占6.7%.

(1)根据题意把题目中所缺数据补充完整；

(2)请选择题中适当数据，设计一个能反映该校学生每天消费情况的统计图；

(3)你从(2)中的统计图中获得了什么信息？(只写一条)

导引：(1)根据题意，已知总人数为30，故6元~10元，有6人，占20%；16元~20元，占10%，有3人；

(2)根据题中所给的数据作出统计图即可；

(3)根据统计图给出合理的叙述即可.

▶解：(1)20；3

(2)选择关于人数的数据，制作条形统计图如图7.2-5(或选择关于百分比的数据，制作扇形统计图).

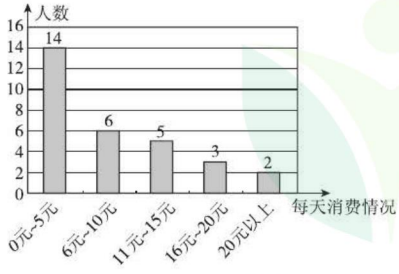


图7.2-5

(3)大多数学生每天的消费情况属正常情况，过高的消费只是个别情况.(答案不唯一，合理即可)

举一反三训练

(答案见250页)

6. 李阿姨开了一家服装店，专卖羽绒服，下表是2016年各月份的销售情况：

月份	1	2	3	4	5	6
销量/件	110	80	40	10	6	4
月份	7	8	9	10	11	12
销量/件	3	5	2	20	70	110

根据上表，回答下列问题：

(1)计算该年各季度的销售情况，并用一个适当的统计图表示出来(只写出用什么统计图表示，不用画图，以下相同)；

(2)计算该年每季度的销量在全年总销量中所占的百分比，并且合理地用统计图表示出来；(除不尽的百分号前精确到百分位)

(3)用一个适当的统计图表示该店每季度销量的变化情况；

(4)从这些统计图表中，你得出了什么结论？你能运用所学的数学知识，为李阿姨提出一些有益的建议吗？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2：扇形统计图与条形统计图综合（拓展点）

例 7 ［中考 · 威海］央视热播节目“朗读者”激发了学生的阅读兴趣. 某校为满足学生的阅读需求，欲购进一批学生喜欢的图书，学校组织学生会成员随机抽取部分学生进行问卷调查，被调查学生要从“文史类、社科类、小说类、生活类”中选择自己喜欢的一类，根据调查结果绘制了如图 7. 2-6 所示的统计图（未完成），请根据图中信息，解答下列问题：

（1）此次共调查了多少名学生？

（2）将条形统计图补充完整；

（3）图②中“小说类”所在扇形的圆心角的度数是多少？

（4）若该校共有学生 2 500 名，估计该校喜欢“社科类”书籍的学生有多少名.

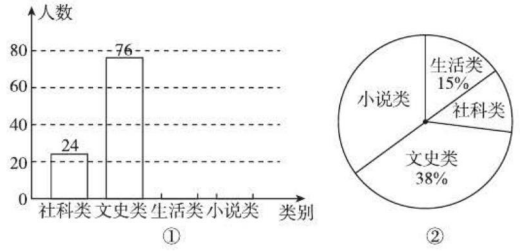


图 7. 2-6

导引：（1）根据“文史类”的人数以及“文史类”所占的百分比即可求出总人数；

（2）根据总人数以及“生活类”所占的百分比即可求出“生活类”的人数，进而求出“小说类”的人数；

（3）求出“小说类”所占的百分比即可求出圆心角的度数；

（4）利用样本中喜欢“社科类”书籍所占的百分比来估计总体中的百分比，从而求出喜欢“社科类”书籍的学生人数.

▶解：（1）∵ 喜欢“文史类”书籍的有 76 名学生，占总人数的 38%，∴ 此次共调查了 $76 \div 38\% = 200$（名）学生.

（2）∵ 喜欢“生活类”书籍的人数占总人数的 15%，

∴ 喜欢“生活类”书籍的人数为：$200 \times 15\% = 30$，

∴ 喜欢“小说类”书籍的人数为：$200 - 24 - 76 - 30 = 70$，如图 7. 2-7 所示.

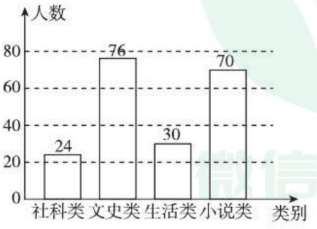
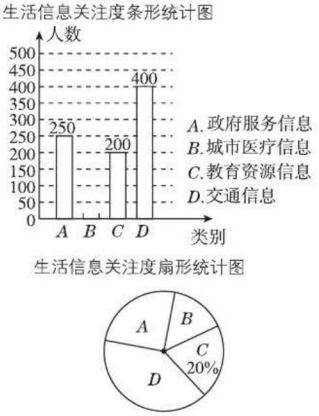


图 7. 2-7

7. ［中考 · 遵义］贵州省是我国首个大数据综合试验区，大数据在推动经济发展、改善公共服务等方面日益显示出巨大的价值. 为创建大数据应用示范城市，我市某机构针对市民最关心的四类生活信息进行了民意调查（被调查者每人限选一项），如图是四类生活信息关注度统计图（未完成），请根据图中提供的信息解答下列问题：



（第 7 题图）

（1）本次参与调查的有_____人；

（2）关注城市医疗信息的有_____人，并补全条形统计图；

（3）扇形统计图中，D 部分的圆心角是_____度；

（4）说一条你从统计图中获取的信息.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)∵ 喜欢“社科类”书籍的人数为:24,

∴ 喜欢“社科类”书籍的人数占总人数的百分比为:$\frac{24}{200}\times 100\% = 12\%$,

∴ 喜欢“小说类”书籍的人数占总人数的百分比为:$100\% - 15\% - 38\% - 12\% = 35\%$,

∴ “小说类”所在扇形的圆心角的度数为:$360^\circ \times 35\% = 126^\circ$.

(4)由(3)可知喜欢“社科类”书籍的人数占总人数的百分比为12%,

∴ 估计该校喜欢“社科类”书籍的学生有$2\,500\times 12\% = 300$(名).

拔尖角度3:扇形统计图与折线统计图综合

例8 [中考·娄底]为给研究制定《中考改革实施方案》提出合理化建议,教研人员对九年级学生进行了随机抽样调查,要求被抽查的学生从物理、化学、政治、历史、生物和地理这六个选考科目中,挑选出一科作为自己的首选科目,将调查数据汇总整理后,绘制出了如图7.2-8的两幅不完整的统计图,请你根据图中信息解答下列问题:

(1)被抽查的学生共有多少人?

(2)将折线统计图补充完整;

(3)我市现有九年级学生约40 000人,请你估计首选科目是物理的学生有多少人.

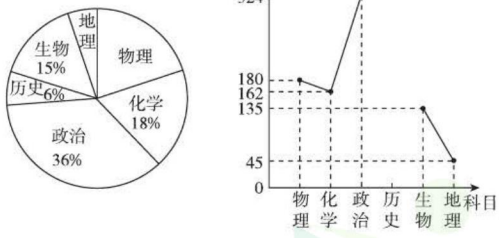


图7.2-8

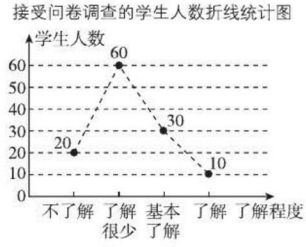
导引:(1)根据政治科目的人数及其所占百分比可得总人数;

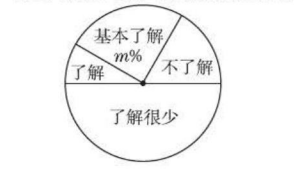
(2)总人数乘历史科目所占的百分比可得其人数,从而补全折线统计图;

(3)总人数乘样本中物理科目所占的百分比即可得出答案.

▶解:(1)由图知把政治作为首选的有324人,占被抽查的学生总人数的百分比为36%,

8. [中考·贵港]在国务院办公厅发布《中国足球发展改革总体方案》之后,某校为了调查本校学生对足球知识的了解程度,随机抽取了部分学生进行一次问卷调查,并根据调查结果绘制了如图的统计图,请根据图中所给的信息,解答下列问题:





(第8题图)

(1)本次接受问卷调查的学生总人数是_____;

(2)扇形统计图中,“了解”所对应扇形的圆心角的度数为_____,m的值为_____;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则被抽查的学生共有 324 ÷ 36% =900(人).

答:被抽查的学生共有 900 人.

(2)本次调查中,首选历史科目的人数为 900×6% =54,

补全折线统计图如图 7.2-9:

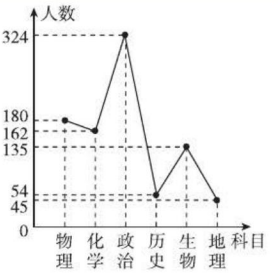


图 7.2-9

(3) $40\ 000 \times \frac{180}{900} \times 100\% =$ 8 000(人).

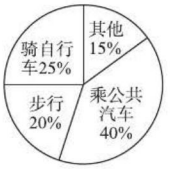
答:估计首选科目是物理的学生有 8 000 人.

(3)若该校共有学生 1 500 名,请根据上述调查结果估算该校学生对足球的了解程度为“基本了解”的人数.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见 250 页)

基础巩固练

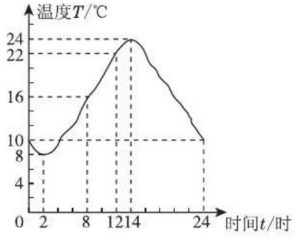
1. [中考 · 温州]某校学生到校方式情况的统计图如图所示,若该校步行到校的学生有 100 人,则乘公共汽车到校的学生有(　　)



(第 1 题图)

A. 75 人　B. 100 人　C. 125 人　D. 200 人

2. 如图是某市某一天内的气温变化情况,则下列说法中错误的是(　　)



(第 2 题图)

A. 这一天中的最高气温是 24 ℃

B. 从 2 时至 14 时,这天的气温在逐渐升高

C. 从 14 时至 24 时,这天的气温在逐渐降低

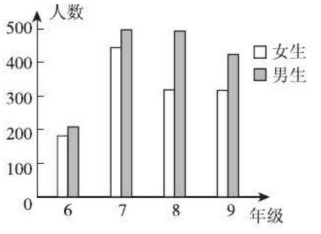
D. 这一天中最高气温与最低气温的差为 15 ℃

3. 某班共有 60 名同学,在统计同学们喜爱的学科时,得到如下数据:语文:50 人,数学:55 人,英语:53 人,物理:48 人,用统计图表示这组数据宜用(　　)

A. 扇形统计图　B. 条形统计图

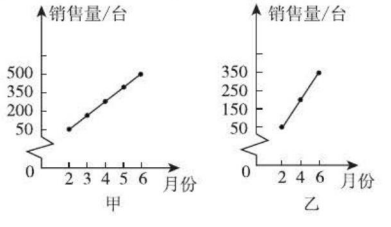
C. 折线统计图　D. 三种统计图均可以

4. 如图所示是某校四个年级男女生人数的条形统计图,则学生最多的年级是_____年级.



(第 4 题图)

5. 甲、乙两个商场从今年 2 月份到 6 月份数码相机的销售情况如图所示,其中销售量增长较快的是_____商场.

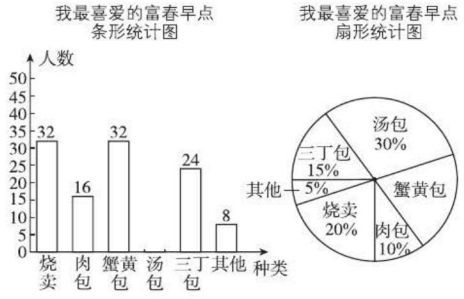


(第 5 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·扬州]“富春包子”是扬州特色早点,富春茶社为了了解顾客对各种早点的喜爱情况,设计了如下的调查问卷,对顾客进行了抽样调查.根据统计数据绘制了如图所示尚不完整的统计图.

下列富春早点中你最喜爱的是(　　)[单选]		
A. 烧卖	B. 肉包	C. 蟹黄包
D. 汤包	E. 三丁包	F. 其他



(第6题图)

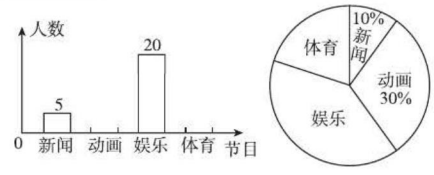
根据以上信息,解决下列问题:

(1)条形统计图中“汤包”的人数是_____,扇形统计图中“蟹黄包”部分的圆心角为_____°;

(2)根据抽样调查结果,请你估计富春茶社1 000名顾客中喜爱“汤包”的有多少人.

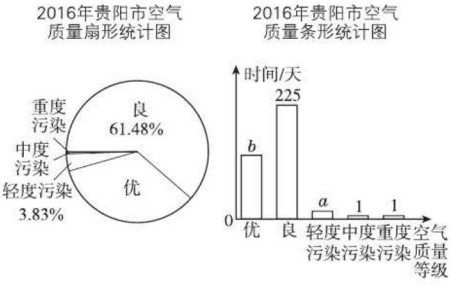
能力提升练

7. [中考·玉林]如图是小强根据全班同学喜爱四类电视节目的人数而绘制的两幅不完整的统计图,则喜爱“体育”节目的有_____人.



(第7题图)

8. [中考·贵阳]2017年6月2日,贵阳市生态委发布了《2016年贵阳市环境状况公报》,公报显示,2016年贵阳市生态环境质量进一步提升,小颖根据公报中的部分数据,制成了如图所示的两幅统计图,请根据图中提供的信息,回答下列问题:



(第8题图)

(1)a的值为_____,b的值为_____;(结果保留整数)

(2)求空气质量等级为“优”在扇形统计图中所占的圆心角的度数;(结果精确到1°)

(3)根据了解,今年1~5月贵阳市空气质量优良天数为142天,优良率为94%,与2016年全年的优良率相比,今年前五个月贵阳市空气质量的优良率是提高还是降低了?请对改善贵阳市空气质量提一条合理化建议.

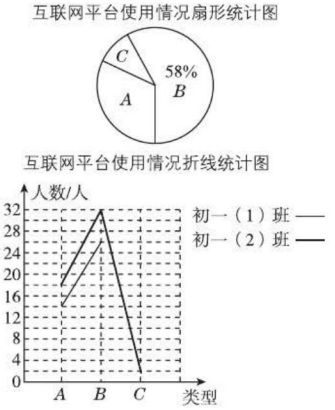
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. ［中考 · 绵阳］绵阳七一中学开通了空中教育互联网在线学习平台，为了解学生使用情况，该校学生会把该平台使用情况分为 A（经常使用）、B（偶尔使用）、C（不使用）三种类型，并设计了调查问卷、先后对该校初一（1）班和初一（2）班全体同学进行了问卷调查，并根据调查结果绘制成如图所示两幅不完整的统计图，请根据图中信息解答下列问题：

（1）求此次被调查的学生总人数；

（2）求扇形统计图中代表类型 C 的扇形的圆心角，并补全折线统计图；

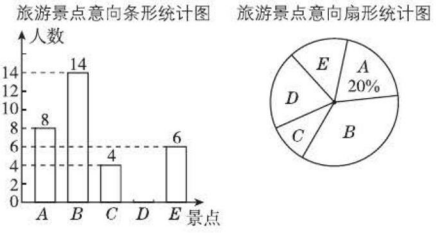
（3）若该校初一年级学生共有 1 000 人，试根据此次调查结果估计该校初一年级中 C 类型学生约有多少人.



（第 9 题图）

思维拓展练

10. ［中考 · 盐城］“大美湿地，水韵盐城”. 某校数学兴趣小组就“最想去的盐城市旅游景点”随机调查了本校部分学生，要求每位同学选择且只能选择一个最想去的景点，如图是根据调查结果进行数据整理后绘制出的不完整的统计图：



（第 10 题图）

请根据图中提供的信息，解答下列问题：

（1）求被调查的学生总人数；

（2）补全条形统计图，并求扇形统计图中表示“最想去景点 D”的扇形的圆心角的度数；

（3）若该校共有 800 名学生，请估计“最想去景点 B”的学生人数.

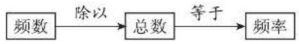
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.3 频数和频率

热门话题
- 频数
- 频率

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点 频数和频率

点知识

1. 在统计数据时，某个对象出现的次数称为该对象的**频数**，频数与总次数的比值称为**频率**.
2. **频数与频率之间的关系**：
   ①$\frac{\text{频数}}{\text{总次数}}$=频率. 由此关系式可导出另一些关系式：$\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$=总次数，频数=频率×总次数.
   ②各试验结果的频数之和等于试验的总次数.
   ③各试验结果的频率之和等于1.
3. **易错警示**：
   (1)频率是个比值，它可以用小数、百分数、分数来表示.
   (2)在两组数据中，某两个对象的频数相等，但频率不一定相等，频数大，不一定频率大. 在同一组数据中，某两个对象的频数相等，频率也相等；频数大，频率也大.

拨考向

典例剖析

考查角度1：求频数、频率

例1 英语单词 frequency 和英语词组 relative frequency 中，频数最大的各是哪个字母？它们的频数和频率各是多少？

导引：数出各字母在单词或词组中出现的次数即为频数，而字母出现的频率=$\frac{\text{字母出现的频数}}{\text{所有字母的总个数}}$.

▶解：在单词 frequency 中，频数最大的字母是 e，它的频数是2，频率是$\frac{2}{9}$. 在词组 relative frequency 中，频数最大的字母是 e，它的频数是4，频率是$\frac{4}{17}$.

点方法

本题运用了**定义法**. 要弄清频数与频率的定义，在解决问题的过程中有时不是直接使用“频率=$\frac{\text{频数}}{\text{总次数}}$”这个公式，而是使用变形以后的公式进行计算，即“总次数=$\frac{\text{频数}}{\text{频率}}$”“频数=总次数×频率”.

举一反三训练

☞(答案见251页)

1. 已知在一个样本中，50个数据分别落在5个组内，第一、二、三、四、五组数据的个数分别是2，8，15，20，5，则第四组的频数为_____，频率为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度 2：利用频率的关系计算

例 2 将一组数据分成 6 组，其中前 3 组的频率之和是 0.65，后两组的频率之和是 0.32，那么第四组的频率是（　　）

A. 0.02　　B. 0.01　　C. 0.03　　D. 0.04

导引：根据各组频率之和等于 1 计算第四组的频率是 $1-0.65-0.32=0.03$.

▶答案：C

2. 把一组数据分成 5 组，若其中前 4 组的频率分别为 0.1，0.3，0.3，0.1，则第 5 组的频率为（　　）

A. 0.1　　B. 0.2

C. 0.3　　D. 0.4

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1：利用频率和频数之间的关系计算

例 3 把 40 个数据分成 6 组，第 1 组到第 4 组的频数分别是 10，5，7，6，第 5 组的频率是 0.1，则第 6 组的频率是_____.

导引：根据题意，得第 1 组到第 4 组的频率之和是 $\frac{10+5+7+6}{40}=0.7$，又第 5 组的频率是 0.1，则第 6 组的频率为 $1-(0.7+0.1)=0.2$.

▶答案：0.2

点方法

首先根据频率 $=\frac{\text{频数}}{\text{总次数}}$，求得前 4 组的频率之和，已知第 5 组的频率，根据各组的频率之和等于 1，即可求得第 6 组的频率.

拔尖角度 2：表格中的频数与频率的计算（拓展点）

例 4 根据下面的统计表可知：$a=$_____，$b=$_____.

等级	频数	频率
一等奖	a	0.1
二等奖	10	0.2
三等奖	b	0.4
优秀奖	15	0.3

导引：根据二等奖的频数及频率求出总次数，再依据频数 = 总次数 × 频率可得 a、b 的值.

∵ 调查的总次数为 $10\div0.2=50$，

∴ $a=50\times0.1=5$，$b=50\times0.4=20$.

▶答案：5；20

举一反三训练

☞（答案见 251 页）

3. 有 50 个数据，把它们分成五组，第一、二、三、四、五组的数据个数分别是 3，7，14，x，6，则第四组的频率为_____.

4. “阅读让自己内心强大，勇敢面对抉择与挑战.”每年的 4 月 23 日被联合国教科文组织确定为“世界读书日”. 某校倡导学生读书，下表是该校八年级学生本学期内阅读课外书籍情况统计表，请你根据统计表中提供的信息，求出表中 a 的值是_____，b 的值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

表格中的频数与频率的计算方法：找出一组频率和频数都已知的数据，计算出数据总数，进而根据频率、频数和数据总数之间的关系填写其他未知数据.

图书种类	频数	频率
科普常识	210	b
名人传记	204	0.34
中外名著	a	0.25
其他	36	0.06

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见251页)

基础巩固练

1. “I am a good student.”这句话中，字母“a”出现的频率是(　　)

A. 2　　B. $\frac{2}{15}$　　C. $\frac{1}{18}$　　D. $\frac{1}{11}$

2. 八年级(1)班55位同学中，9月份生日的频率是0.20，那么该班9月份生日的同学有(　　)

A. 10人　B. 11人　C. 12人　D. 13人

3. 一个样本的50个数据分别落在4个组内，第1、2、3组数据的个数分别是7、8、15，则第4组数据的频率为_____.

4. 某班在一次适应性考试中，分数段在140－150分的频率为0.2，在此分数段共有8人，则该班有_____人.

5. 小亮是位足球爱好者，某次在练习罚点球时，他在10分钟之内罚球20次，共罚进15次，则小亮点球罚进的频数是_____，频率是_____.

6. 小明学完了统计知识后，从“中国环境保护网”上查询到他所居住城市2018年全年的空气质量级别资料，用简单随机抽样的方法选取30天，并列出下表：

空气质量级别	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染
天数	a	15	2	1	0

请你根据以上信息解答下面问题：

(1)这次抽样中“空气质量不低于良”的频率为_____；

(2)根据这次抽样的结果，请你估计2018年全年(共365天)空气质量为优的天数是多少？

7. 在某项针对18～35岁的青年人每天发微博数量的调查中，设一个人的“日均发微博条数”为m，规定：当$m \geqslant 10$时为A级，当$5 \leqslant m < 10$时为B级，当$0 \leqslant m < 5$时为C级. 现随机抽取30个符合年龄条件的青年人开展每人“日均发微博条数”的调查，所抽青年人的“日均发微博条数”的数据如下：

11　10　6　15　9　16　13　12　0　8

2　8　10　17　6　13　7　5　7　3

12　10　7　11　3　6　8　14　15　12

(1)求样本数据中为A级的频率；

(2)试估计1 000个18～35岁的青年人中“日均发微博条数”为A级的人数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

8. 为了了解某中学初三年级 650 名学生升学考试的数学成绩，从中随机抽取了 50 名学生的数学成绩进行分析. 下面是根据抽取的学生的数学成绩制作的统计表：

分组	频数	频率
60.5 ~ 70.5	3	a
70.5 ~ 80.5	6	0.12
80.5 ~ 90.5	9	0.18
90.5 ~ 100.5	17	0.34
100.5 ~ 110.5	b	0.2
110.5 ~ 120.5	5	0.1
合计	50	1

根据题中给出的条件回答下列问题：

（1）表中的数据 a = _____，b = _____；

（2）在这次抽样调查中，样本是_____；

（3）在这次升学考试中，该校初三年级数学成绩在 90.5 ~ 100.5 范围内的人数约为多少人？

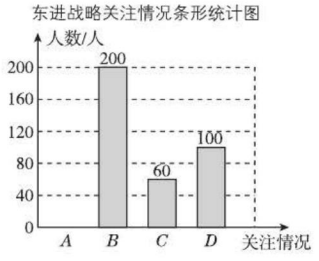
思维拓展练

9. 市政府计划投资 14 万亿元实施东进战略. 为了解市民对东进战略的关注情况，佳佳随机采访部分市民，并对采访情况制作了如下统计表和如图所示的统计图（均不完整）.

关注情况	频数	频率
A 高度关注	m	0.1
B 一般关注	200	0.5
C 不关注	60	n
D 不知道	100	0.25

（1）采访总人数为 _____ 人，m = _____，n = _____；

（2）补全统计图；



（第 9 题图）

（3）估计在 30 000 名市民中高度关注东进战略的人数约为多少人？

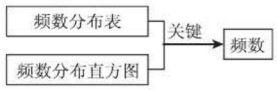
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.4 频数分布表和频数分布直方图

热门话题
- 频数分布表
- 频数分布直方图

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 频数分布表

点知识

1. **相关概念**:(1)**组距**:把所有数据分成若干组,每个小组的两个端点之间的距离(组内数据的取值范围)称为**组距**.

(2)**组数**:把数据分成若干组,分成的组的个数叫组数.

(3)**频数**:对落在各个小组内的数据进行累计,得到各个小组内的数据的个数,这个数叫**频数**.

要点精析

(1)各小组的频数之和等于总数.

(2)组距可以相同,也可以不同;为研究方便,本节中我们进行等距分组.

(3)数据所分组数没有明确要求,一般根据数据多少,常分5~12组;一般地,组数=$\frac{\text{最大值}-\text{最小值}}{\text{组距}}$的整数部分+1(若最大值与最小值的差除以组距的商是整数,则这个商即为组数).

(4)为了使数据"不重不漏",分组时常采用"上限不在内"的原则;如:149~152包含149,但不包含152,即$149\leqslant x<152$.

2. **频数分布表**:

(1)**定义**:根据频数整理得到的表格就是频数分布表.频数分布表反映了数据落在各个小组内的频数,从而反映了一组数据中各数据的分布情况.

(2)**制作步骤**:

①**算**:计算该组数据中最大值与最小值的差,得到这组数据的变化范围;

②**定**:根据数据的个数与数据的变化范围,确定组距、组数,一般分5~12组为宜;

③**划**:利用划记的方法累计落在各组内的数据个数,得到各组的频数;

④**列**:根据上述过程列频数分布表,频数分布表一般由三部分组成.即:

数据分组					…
划记					…
频数					…

3. **易错警示**:

(1)分组时,不能将一个数据分在两个小组中;

(2)组数和组距没有固定的标准,要凭借经验和研究的具体问题来决定.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

典例剖析

考查角度 1：确定组数和组距

例 1 有 60 个数据，其中最大的数据是 187，最小的数据是 140，如果分组时的组距为 6，那么这组数据应分为（　　）

A. 7 组　　B. $7\frac{5}{6}$ 组　　C. 8 组　　D. 10 组

导引：因为这组数据的最大值是 187，最小值是 140，最大值与最小值的差是 47，且 $\frac{47}{6}=7\frac{5}{6}$，所以应分为 8 组. ▶答案：C

点方法

确定组数的方法： 若最大值与最小值的差除以组距所得的商是整数，则这个商即为组数；若最大值与最小值的差除以组距所得的商是小数，则这个商的整数部分 +1 即为组数.

考查角度 2：制作频数分布表

例 2 某校七年级(1)班 30 名男生的身高情况测量如下（单位：cm）：

164　169　170　182　180　169　176　166　162　174
183　170　171　170　173　174　162　174　173　165
167　160　158　175　162　177　173　156　174　175

根据这些数据，列出频数分布表.

导引：按照列频数分布表的步骤进行.

▶解：①求出最大值与最小值的差：最大值为 183，最小值为 156，它们的差为 183 − 156 = 27；

②确定组距与组数：组距定为 5，则组数是 27 ÷ 5 = 5.4 ≈ 6；

③确定分点：155.5 ~ 160.5，160.5 ~ 165.5，165.5 ~ 170.5，170.5 ~ 175.5，175.5 ~ 180.5，180.5 ~ 185.5；

④列频数分布表：

身高分组	划记	频数
155.5 ~ 160.5	下	3
160.5 ~ 165.5	正	5
165.5 ~ 170.5	正下	7
170.5 ~ 175.5	正正	10
175.5 ~ 180.5	下	3
180.5 ~ 185.5	下	2
合计		30

举一反三训练

☞（答案见 252 页）

1. 一个容量为 80 的样本最大值为 143，最小值为 50，取组距为 10，则可以分成_____组.

2. 某校抽检 64 个学生的体重如下，（单位：kg）

38　32　39　40　35　45
37　38　40　29　39　41
37　42　39　34　36　39
33　42　36　44　33　29
40　35　39　37　46　39
31　39　36　42　38　41
36　44　38　34　38　38
41　39　39　34　36　48
30　31　37　42　42　45
34　33　48　43　41　35
39　44　43　44

列出频数分布表.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

利用频数分布表可以清楚地反映出一组数据中的每小组数据出现的频数，从而反映出这些数据的整体分布情况，同时从表中可知，各组频数之和等于样本容量.

知识点2 频数分布直方图

点知识

1. **定义**：根据频数分布表，用横轴表示各组数据，用纵轴表示各组数据的频数，绘制条形统计图，这样的条形统计图直观地呈现了频数的分布特征和变化规律，称为频数分布直方图. 它由横轴、纵轴、条形图三部分组成：
   (1) **横轴**：直方图的横轴表示分组的情况；
   (2) **纵轴**：表示落在各小组的频数；
   (3) **条形图**：直方图的主体部分是条形图，每一条是立于横轴之上的一个长方形.


画频数分布直方图

要点精析

(1) 能够显示数据的分布情况；
(2) 易于显示各组之间的频数的差别.

2. **作频数分布直方图(简称直方图)的步骤**：
   (1) 计算出数据中最大值与最小值的差；
   (2) 确定组距与组数：先确定组距，再根据组距求组数；
   (3) 列出频数分布表；
   (4) 由频数分布表画出频数分布直方图；
   ①在平面上作两条互相垂直的轴：横轴与纵轴；
   ②在横轴上划分一些相互衔接的线段，每条线段表示一组，分别标上分点数；
   ③在纵轴上划分刻度，并用自然数标记；
   ④以横轴上的每条线段为底各作一个长方形立于横轴上，各长方形的高等于相应的频数.

3. **条形统计图与频数分布直方图的关系.(拓展点)**
   不同点：条形统计图用横向指标表示考察对象的类别，频数分布直方图用横向指标表示考察对象数据的变化范围.
   相同点：条形统计图和频数分布直方图都易于比较各数据组与组之间的差别，能够显示每组中的具体数据和频数分布情况.

4. **易错警示**：频数分布直方图中各长方形之间没有空隙.

拓考向

考查角度：绘制频数分布直方图

例3 为了解某地区八年级学生的身高情况，随机抽取了60名男生，测得他们的身高(单位：cm)分别是：

156	162	163	172	160	141	152	173	179	174
157	174	145	160	153	165	156	167	161	172
178	156	166	155	140	157	167	156	168	150
164	163	155	162	160	168	147	161	157	162
165	160	166	164	154	161	158	164	151	169
169	162	158	163	159	164	162	148	170	161

(1) 将数据适当分组，并绘制相应的频数分布直方图；

3. 某学校20名数学教师的年龄(单位：岁)情况如下：29，42，58，37，53，52，49，24，37，46，42，55，40，38，50，26，54，26，44，52.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）如果身高在 155 cm ~ 170 cm（含 155 cm，不含 170 cm）的学生为正常，试求身高正常的学生的百分比.

导引：先确定最大值与最小值的差为 179 − 140 = 39，故可将数据按组距为 5 分组，$39 \div 5 = 7\frac{4}{5}$，可分为 8 组.

▶解：（1）计算这组数据的最大值与最小值的差为 179 − 140 = 39. 确定组数与组距，将数据按组距为 5 分组，可分为 8 组，分别为：139. 5 ~ 144. 5，144. 5 ~ 149. 5，149. 5 ~ 154. 5，154. 5 ~ 159. 5，159. 5 ~ 164. 5，164. 5 ~ 169. 5，169. 5 ~ 174. 5，174. 5 ~ 179. 5.

列频数分布表如下：

分组	划记	频数
139. 5 ~ 144. 5	丅	2
144. 5 ~ 149. 5	下	3
149. 5 ~ 154. 5	正	5
154. 5 ~ 159. 5	正正丅	12
159. 5 ~ 164. 5	正正正正	20
164. 5 ~ 169. 5	正正	10
169. 5 ~ 174. 5	正一	6
174. 5 ~ 179. 5	丅	2
合计		60

画频数分布直方图如图 7. 4-1 所示：

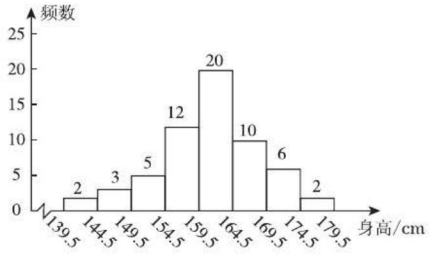


图 7. 4-1

（2）由图可知，身高在正常范围内的学生人数为 12 + 20 + 10 = 42（人），其所占的百分比是 $\frac{42}{60} \times 100\% = 70\%$.

点方法

作频数分布直方图要按步骤进行操作，其关键是列频数分布表；频数分布表和频数分布直方图都表示数据落在各小组的个数；绘制频数分布直方图是为了把表中的结果直观地表示出来，它们是频数分布的“数”与“形”的两种不同形式，互相补充.

（1）填写下面的表格：

分组	频数	频率
19. 5 ~ 29. 5		
29. 5 ~ 39. 5		
39. 5 ~ 49. 5		
49. 5 ~ 59. 5		
合计		

（2）画出频数分布直方图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度：补全残缺的频数分布直方图

例4 ［中考·杭州］为了了解某校九年级学生的跳高水平，随机抽取该年级50名学生进行跳高测试，并把测试成绩绘制成如下所示的频数分布表和如图7.4-2所示的未完成的频数分布直方图(每组含前一个边界值，不含后一个边界值).

某校九年级50名学生跳高测试成绩的频数分布直方图

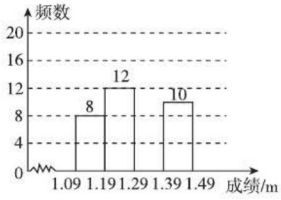


图7.4-2

某校九年级50名学生跳高测试成绩的频数分布表

组别(m)	频数
1.09～1.19	8
1.19～1.29	12
1.29～1.39	a
1.39～1.49	10

(1)求a的值，并把频数分布直方图补充完整；

(2)该年级共有500名学生，估计该年级学生跳高成绩在1.29 m(含1.29 m)以上的人数.

导引：(1)利用总人数减去其他组的人数即可求得a的值；

(2)利用总人数乘以对应的比例即可求解.

▶解：(1)$a=50-8-12-10=20$. 如图7.4-3.

某校九年级50名学生跳高测试成绩的频数分布直方图

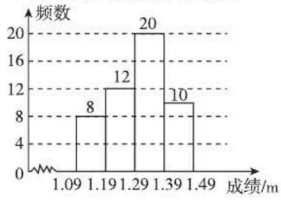


图7.4-3

(2)该年级学生跳高成绩在1.29 m(含1.29 m)以上的人数是：$500\times\dfrac{20+10}{50}=300$(人).

举一反三训练

☞(答案见252页)

4. ［中考·南通］某学校为了解学生的课外阅读情况，随机抽取了50名学生，并统计他们平均每天的课外阅读时间t(单位：min)，然后利用所得数据绘制成如下统计表和如图所示的统计图(均不完整).

课外阅读时间频数分布表

课外阅读时间t	频数	百分比
$10\leqslant t<30$	4	8%
$30\leqslant t<50$	8	16%
$50\leqslant t<70$	a	40%
$70\leqslant t<90$	16	b
$90\leqslant t<110$	2	4%
合计	50	100%

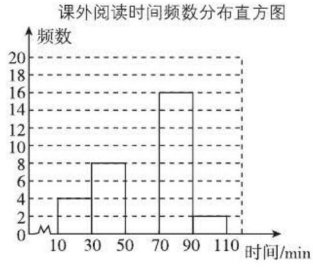
请根据图表中提供的信息回答下列问题：

(1)$a=$_____，$b=$_____；

(2)将频数分布直方图补充完整；

(3)若全校有900名学生，估计该校有多少学生平均每天的课外阅读时间不少于50 min?

课外阅读时间频数分布直方图



(第4题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

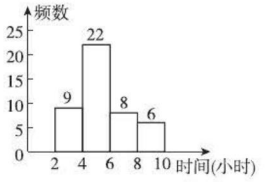
Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 252 页）

基础巩固练

1. 一组数据的最大值与最小值之差为 80，若取组距为 9，则分成的组数应是（　　）

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 12

2. 如图是九（1）班 45 名同学每周课外阅读时间的频数分布直方图（每组含前一个边界值，不含后一个边界值）. 由图可知，课外阅读时间人数最多的一组是（　　）

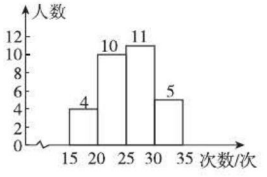


（第 2 题图）

A. 2 ~ 4 小时　　B. 4 ~ 6 小时

C. 6 ~ 8 小时　　D. 8 ~ 10 小时

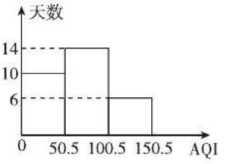
3. 某校为了了解九年级学生的体能情况，随机抽取了 30 名学生测试 1 分钟仰卧起坐的次数，并将统计结果绘制成如图所示的频数分布直方图. 已知该校九年级共有 300 名学生，请据此估计，该校九年级 1 分钟仰卧起坐次数在 30 ~ 35 次之间的学生人数大约是（　　）



（第 3 题图）

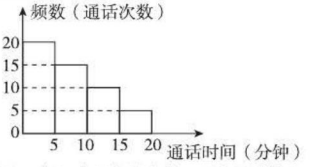
A. 40　　B. 50　　C. 100　　D. 110

4. 空气质量指数，简称 AQI，如果 AQI 在 0 ~ 50 空气质量类别为优，在 51 ~ 100 空气质量类别为良，在 101 ~ 150 空气质量类别为轻度污染，按照某市最近一段时间的 AQI 画出的频数分布直方图如图所示. 已知每天的 AQI 都是整数，那么空气质量类别为优和良的天数占总天数的百分比为_____%.



（第 4 题图）

5. 小明统计了家里 3 月份的电话通话清单，按通话时间画出频数分布直方图（如图所示），则通话时间不足 10 分钟的通话次数的频率是_____.



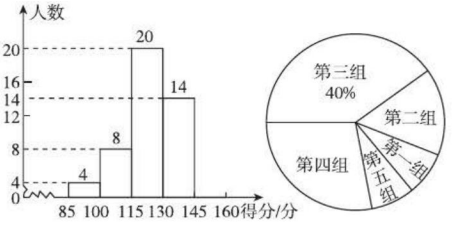
（注：每组内只含最小值，不含最大值）

（第 5 题图）

6. 某公司为了掌握职工的工作成绩，随机抽取了部分职工的平时成绩（得分为整数，满分为 160 分）分为 5 组，第一组 85 ~ 100；第二组 100 ~ 115；第三组 115 ~ 130；第四组 130 ~ 145；第五组 145 ~ 160，统计后得到如图所示的频数分布直方图（每组含最小值，不含最大值）和扇形统计图，观察图中的信息，回答下列问题：

（1）本次调查共抽取的职工人数为_____.

（2）若将得分转化为等级，规定：得分低于 100 分评为“*D*”，100 ~ 130 分评为“*C*”，130 ~ 145 分评为“*B*”，145 ~ 160 分评为“*A*”，求该公司 1 500 名职工中，成绩评为“*B*”的职工大约有多少名.

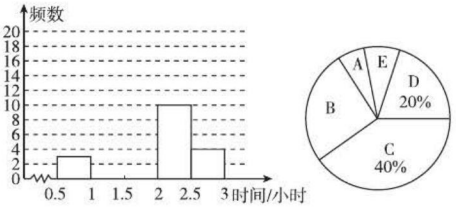


（第 6 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

7. 某校开展了为期一周的“敬老爱亲”社会活动，为了解情况，学生会随机调查了部分学生在这次活动中做家务的时间，并将统计的时间（单位：小时）分成5组，A：$0.5 \leqslant x < 1$，B：$1 \leqslant x < 1.5$，C：$1.5 \leqslant x < 2$，D：$2 \leqslant x < 2.5$，E：$2.5 \leqslant x < 3$，制作成两幅不完整的统计图（如图）.



（第7题图）

请根据图中提供的信息，解答下列问题：

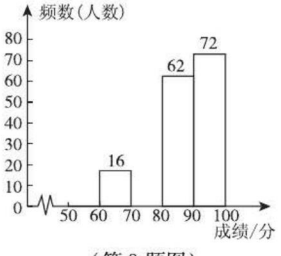
（1）学生会随机调查了_____名学生；

（2）补全频数分布直方图；

（3）若全校有900名学生，估计该校在这次活动中做家务的时间不少于2.5小时的学生有多少名？

8. 某区八年级的学生参加了“爱我中华知识竞赛”活动. 为了了解本次知识竞赛的成绩分布情况，从中抽取了200名学生的成绩进行统计，得到如下统计表和如图所示的统计图：

成绩 x/分	频数
$50 \leqslant x < 60$	10
$60 \leqslant x < 70$	16
$70 \leqslant x < 80$	a
$80 \leqslant x < 90$	62
$90 \leqslant x < 100$	72



（第8题图）

根据图表中提供的信息，解答下列问题：

（1）a = _____，并补全频数分布直方图；

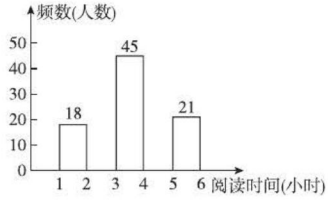
（2）若将成绩转化为等级，规定 $50 \leqslant x < 60$ 评为“D”，$60 \leqslant x < 70$ 评为“C”，$70 \leqslant x < 90$ 评为“B”，$90 \leqslant x < 100$ 评为“A”. 这次抽查的学生中，有多少人的参赛成绩被评为“B”？

思维拓展练

9. [中考·贵港] 在开展“经典阅读”活动中，某学校为了解全校学生利用课外时间阅读的情况，学校团委随机抽取若干名学生，调查他们一周的课外阅读时间，并根据调查结果绘制了如下尚不完整的统计表和统计图（如图）. 根据图表信息，解答下列问题：

【导学号：9937991】

阅读时间（小时）	频数（人数）	频率
$1 \leqslant x < 2$	18	0.12
$2 \leqslant x < 3$	a	m
$3 \leqslant x < 4$	45	0.3
$4 \leqslant x < 5$	36	n
$5 \leqslant x < 6$	21	0.14
合计	b	1



（第9题图）

（1）填空：a = _____，b = _____，m = _____，n = _____；

（2）将频数分布直方图补充完整（画图后请标注相应的频数）；

（3）若该校有3 000名学生，请根据上述调查结果，估算该校学生一周的课外阅读时间不足3小时的人数.

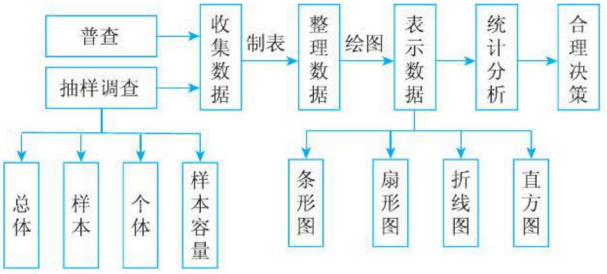
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大时，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查. 选择普查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用.

2. 所要考察对象的全体叫总体；总体中的每一个考察对象叫做个体；从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本；样本中个体的数目叫做样本容量. 样本是总体的一部分，样本通常只包括一部分个体，样本在一定程度上能够反映总体.

3. 统计图中相关量的计算方法：

(1) 条形统计图：一般涉及补图，也就是求未知组的频数，方法如下：

①未知组的频数 = 样本容量 − 已知组的频数之和；

②未知组的频数 = 样本容量 × 该组所占样本的百分比.

(2) 扇形统计图：一般涉及求未知组的百分比或其所占圆心角的度数，方法如下：

①未知组的百分比 = 1 − 已知组的百分比之和；

②未知组的百分比 = $\frac{\text{未知组的频数}}{\text{样本容量}} \times 100\%$；

③若求未知组在扇形统计图中圆心角的度数，利用 360° × 其所占样本的百分比即可.

(3) 统计表：一般涉及求频数和频率（百分比），方法同上.

(4) 折线统计图：一般涉及补图，根据统计表中未知组的数量（或根据题目条件求出未知组的数量），描点即可.

专题解码

知识专题

专题1　普查与抽样调查

链接中考>> 统计调查的常用方法是普查与抽样调查，抽样调查是用样本估计总体的思想，它是统计知识和方法的源头，也是中考命题的热点内容，题型多以选择题为主.

例1 ［中考 · 重庆］下列调查中，最适合采用普查的是（　　）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. 对我市中学生每周课外阅读时间情况的调查

B. 对我市市民知晓“礼让行人”交通新规情况的调查

C. 对我市中学生观看电影《厉害了，我的国》情况的调查

D. 对我国首艘国产航母002型各零部件质量情况的调查

导引：紧扣普查的适用条件进行判断.

A. 对我市中学生每周课外阅读时间情况的调查，人数众多，意义不大，应采用抽样调查，故此选项错误；B. 对我市市民知晓“礼让行人”交通新规情况的调查，人数众多，意义不大，应采用抽样调查，故此选项错误；C. 对我市中学生观看电影《厉害了，我的国》情况的调查，人数众多，意义不大，应采用抽样调查，故此选项错误；D. 对我国首艘国产航母002型各零部件质量情况的调查，意义重大，应采用普查，故此选项正确；故选D. ▶答案：D

点方法

本题考查了抽样调查和普查的适用条件的区别：一般来说，对于具有破坏性的调查、调查范围广、无法进行普查、普查的意义或价值不大时，应选择抽样调查；对于精确度要求高的调查、调查范围比较小、事关重大的调查往往选用普查. 选择普查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用.

专题2　数据的描述——统计图

链接中考>>调查中，收集并整理数据后，可以用统计图来描述数据. 选择正确的统计图来描述数据至关重要，在近几年中考中，以选择题和解答题考查较多.

例2　［中考·无锡］某汽车交易市场为了解二手轿车的交易情况，将本市场去年成交的二手轿车的全部数据，以二手轿车交易前的使用时间为标准分为A、B、C、D、E五类，并根据这些数据由甲，乙两人分别绘制了如图1所示的两幅统计图（图都不完整）.

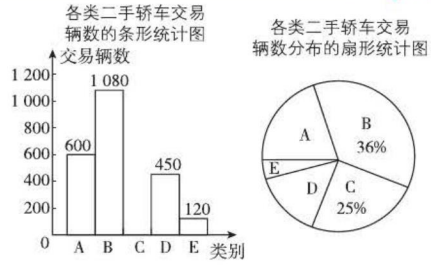


图1

请根据以上信息，解答下列问题：

(1)该汽车交易市场去年共交易二手轿车_____辆.

(2)把这幅条形统计图补充完整.（画图后请标注相应的数据）

(3)在扇形统计图中，D类二手轿车交易辆数所对应扇形的圆心角为多少度？

导引：(1)根据B类的交易辆数及其所占百分比可得总数量；

(2)用总数量乘以C类所占的百分比求得其交易辆数，据此即可补全条形统计图；

(3)用360°乘以D类所占总数量的比例即可得出答案.

▶解：(1)3 000

(2)C类的交易辆数为3 000 × 25% = 750，

补全条形统计图如图2：

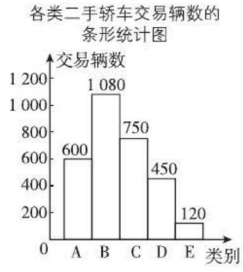


图2

(3)在扇形统计图中，D类二手轿车交易辆数所对应扇形的圆心角为 $360° \times \frac{450}{3\,000} = 54°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题 3　频数分布直方图

链接中考>> 统计主要研究日常生活中的数据，估计数据可以了解情况、发现规律、做出判断. 正确收集数据，并能根据具体情况选择适当的统计图表来描述数据至关重要，在近几年的中考题中，对此类问题的考查频繁出现，题型以填空题和解答题为主.

例 3 ［中考 · 内江］为了掌握八年级数学考试卷的命题质量与难度系数，命题组教师赴外地选取一个水平相当的八年级班级进行预测，将考试成绩分布情况进行处理分析，制成频数分布表如下（成绩得分均为整数）：

组别	成绩分组	频数	频率
1	47.5 ~ 59.5	2	0.05
2	59.5 ~ 71.5	4	0.10
3	71.5 ~ 83.5	a	0.2
4	83.5 ~ 95.5	10	0.25
5	95.5 ~ 107.5	b	c
6	107.5 ~ 120	6	0.15
合计		40	1.00

根据表中提供的信息解答下列问题：

（1）频数分布表中的 a，b，c 的值分别是多少？

（2）已知全区八年级共有 200 个班（平均每班 40 人），用这份试卷检测，108 分及以上为优秀，预计优秀的人数约为多少？72 分及以上为及格，预计及格的人数约为多少？及格的百分比约为多少？

（3）补充完整频数分布直方图（如图 3）.

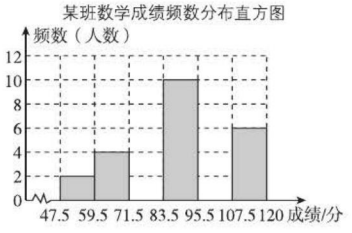


图 3

导引：（1）根据频率 $=\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$ 的关系及各组的频数之和等于总数可分别得出 a、b、c 的值.

（2）根据频率 $=\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$ 的关系可分别求出各答案.

（3）根据（1）中 a、b 的值即可补全图形.

▶解：（1）∵ 被调查的总人数为 $2 \div 0.05 = 40$，

∴ $a = 40 \times 0.2 = 8$，$b = 40 - (2 + 4 + 8 + 10 + 6) = 10$，$c = 10 \div 40 = 0.25$；

（2）预计优秀的人数约为 $200 \times 40 \times 0.15 = 1\,200$，预计及格的人数约为 $200 \times 40 \times (0.2 + 0.25 + 0.25 + 0.15) = 6\,800$，及格的百分比约为 $\frac{6\,800}{200 \times 40} \times 100\% = 85\%$；

（3）补全频数分布直方图如图 4：

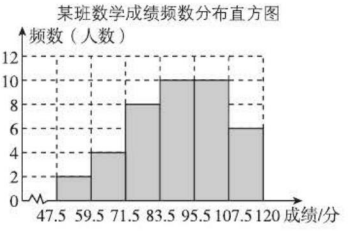


图 4

思想方法专题

专题 4　数形结合思想

专题解读>> 涉及有统计图、表的问题时，需要从统计图、表中准确提取信息，恰当分析统计图、表中数据的含义.

例 4 某同学在学习了统计知识后，就下表所列的 5 类用牙不良习惯对全班每名同学进行了问卷调查（每名被调查的同学必须选择而且只能在 5 类用牙不良习惯中选择一类），调查结果如图 5 所示.

种类	A	B	C	D	E
不良习惯	睡前吃水果喝牛奶	用牙开瓶盖	常喝饮料嚼冰	常吃生冷零食	磨牙

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

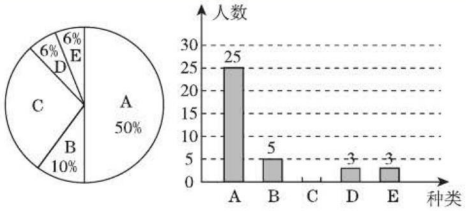


图5

根据以上统计图提供的信息，回答下列问题：

(1)这个班共有多少名学生？

(2)这个班中有C类用牙不良习惯的学生多少名？占全班人数的百分比是多少？

(3)请补全条形统计图.

导引：由统计图可知A类有25名学生，占全班人数的50%，则可求出全班的人数.

▶解：(1)25÷50%=50(名).

∴这个班共有50名学生.

(2)1−50%−10%−6%−6%=28%，50×28%=14(名).

∴这个班中有C类用牙不良习惯的学生14名，占全班人数的28%.

(3)如图6所示.

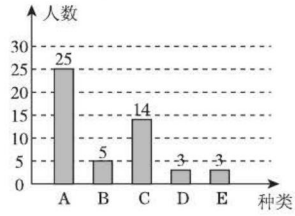


图6

好题必练

(答案见253页)

选择题

1. [中考·西宁]下列调查中，适合采用普查方式的是(　　)

A. 了解西宁电视台“教育在线”栏目的收视率

B. 了解青海湖斑头雁种群数量

C. 了解全国快递包裹产生包装垃圾的数量

D. 了解某班同学“跳绳”的成绩

2. [中考·内江]为了了解内江市2018年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取400名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是指(　　)

A. 400

B. 被抽取的400名考生

C. 被抽取的400名考生的中考数学成绩

D. 内江市2018年中考数学成绩

3. [中考·重庆]为调查某大型企业员工对企业的满意程度，以下样本最具代表性的是(　　)

A. 企业男员工

B. 企业年满50岁及以上的员工

C. 用企业人员名册，随机抽取三分之一的员工

D. 企业新进员工

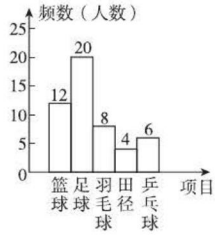
4. [中考·江西]某班组织了针对全班同学关于“你最喜欢的一项体育活动”的问卷调查后，绘制出频数分布直方图(如图)，由图可知，下列结论正确的是(　　)

A. 最喜欢篮球的人数最多

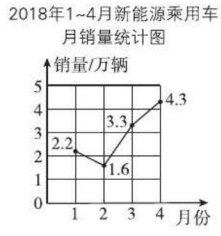
B. 最喜欢羽毛球的人数是最喜欢乒乓球人数的两倍

C. 全班共有50名学生

D. 最喜欢田径的人数占总人数的10%



(第4题图)



(第5题图)

5. [中考·嘉兴]2018年1~4月我国新能源乘用车的月销量情况如图所示，则下列说法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

错误的是(　　)

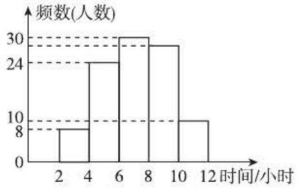
A. 1 月份销量为 2.2 万辆

B. 从 2 月到 3 月的月销量增长最快

C. 4 月份销量比 3 月份增加了 1 万辆

D. 1 ~ 4 月新能源乘用车销量逐月增加

6. [中考 · 安徽] 为了解某校学生今年五一期间参加社团活动时间的情况,随机抽查了其中 100 名学生进行统计,并绘制成如图所示的频数分布直方图,已知该校共有 1 000 名学生,据此估计,该校五一期间参加社团活动时间在 8 ~ 10 小时之间的学生数大约是(　　)



(第 6 题图)

A. 280　　B. 240　　C. 300　　D. 260

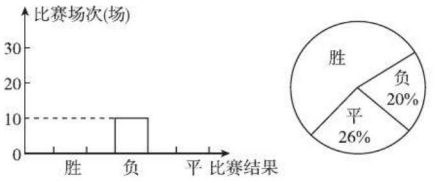
填空题

7. [中考 · 贺州] 为了调查某市中小学生对“营养午餐”的满意程度,适合采用的调查方式是_____.(填“普查”或“抽样调查”)

8. [中考 · 柳州] 某校为了了解本届初三学生体质健康情况,从全校初三学生中随机抽取 46 名学生进行调查,上述抽取的样本容量为_____.

9. [中考 · 南宁] 红树林中学共有学生 1 600 人,为了解学生最喜欢的课外体育运动项目的情况,学校随机抽查了 200 名学生,其中有 85 名学生表示最喜欢的项目是跳绳,则可估计该校学生中最喜欢的课外体育运动项目为跳绳的学生有_____人.

10. [中考 · 毕节] 记录某足球队全年比赛结果(“胜”、“负”、“平”)的条形统计图和扇形统计图(不完整)如图:



(第 10 题图)

根据图中信息,该足球队全年比赛胜了_____场.

解答题

11. [中考 · 扬州] 江苏省第十九届运动会将于 2018 年 9 月在扬州举行开幕式,某校为了了解学生“最喜爱的省运会项目”的情况,随机抽取了部分学生进行问卷调查,规定每人从“篮球”、“羽毛球”、“自行车”、“游泳”和“其他”五个选项中必须选择且只能选择一个,并将调查结果绘制成如下不完整的统计表和统计图(如图).

最喜爱的省运会项目的人数调查统计表

最喜爱的项目	人数
篮球	20
羽毛球	9
自行车	10
游泳	a
其他	b
合计	

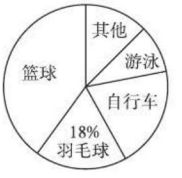
根据以上信息,请回答下列问题:

(1) 这次调查的样本容量是_____,$a+b=$_____.

(2) 扇形统计图中“自行车”对应的扇形的圆心角为_____.

(3) 若该校有 1 200 名学生,估计该校最喜爱的省运会项目是篮球的学生人数.

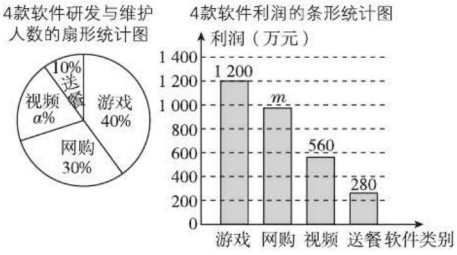
最喜爱的省运会项目的人数分布扇形统计图



(第 11 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. ［中考·泰州］某软件科技公司 20 人负责研发与维护游戏、网购、视频和送餐共 4 款软件，投入市场后，游戏软件的利润占这 4 款软件总利润的 40%．如图是这 4 款软件研发与维护人数的扇形统计图和利润的条形统计图．



（第 12 题图）

根据以上信息，回答下列问题

(1) 直接写出图中 a，m 的值；

(2) 分别求网购与视频软件的人均利润；

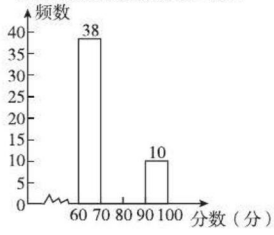
(3) 在总人数和各款软件人均利润都保持不变的情况下，能否只调整网购与视频软件的研发与维护人数，使总利润增加 60 万元？如果能，写出调整方案；如果不能，请说明理由．

13. ［中考·宿迁］某市举行“传承好家风”征文比赛，已知每篇参赛征文成绩记 m 分（$60 \leqslant m \leqslant 100$），组委会从 1 000 篇征文中随机抽取了部分参赛征文，统计了它们的成绩，并绘制了如下不完整的统计表和统计图（如图）．

征文比赛成绩频数分布表

分数段	频数	频率
$60 \leqslant m < 70$	38	0.38
$70 \leqslant m < 80$	a	0.32
$80 \leqslant m < 90$	b	c
$90 \leqslant m \leqslant 100$	10	0.1
合计		1

征文比赛成绩频数分布直方图



（第 13 题图）

请根据以上信息，解决下列问题：

(1) 征文比赛成绩频数分布表中 c 的值是_____；

(2) 补全征文比赛成绩频数分布直方图；

(3) 若 80 分以上（含 80 分）的征文将被评为一等奖，试估计全市获得一等奖征文的篇数．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第8章 认识概率

揭秘事件的公平性

数学点拨



你将学到的核心考点

- 确定事件与随机事件 □
- 可能性的大小 □
- 频率与概率 □

我们为你提供的核心方法

- 定义法 □
- 分类讨论思想 □
- 数形结合思想 □
- 方程思想 □

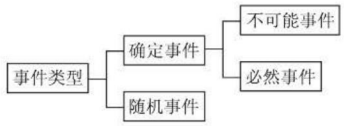
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.1 确定事件与随机事件

热门话题
- 确定事件(重点)
- 随机事件(重点)

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 确定事件

点!知识

1. **不可能事件**:
在一定条件下,有些事情我们事先能肯定它一定不会发生,这样的事情是不可能事件.

2. **必然事件**:
在一定条件下,有些事情我们事先能肯定它一定会发生,这样的事情是必然事件.

3. **必然事件**和**不可能事件**都是确定事件.

拨考向

典例剖析

考查角度1:必然事件的识别

例1 [中考·新疆]下列事件中,是必然事件的是(　　)

A. 购买一张彩票,中奖

B. 通常温度降到0 ℃以下,纯净的水结冰

C. 明天一定是晴天

D. 经过有交通信号灯的路口,遇到红灯

导引:A. 购买一张彩票,中奖是随机事件;

B. 根据物理学可知0 ℃以下,纯净的水结冰是必然事件;

C. 明天是晴天是随机事件;

D. 经过路口遇到红灯是随机事件. 故选B.

▶答案:B

点方法

本题运用了**定义法. 判断一个事件类型的方法:** 要从其定义出发,同时也要联系理论及生活的相关常识来判断. 注意必然事件和不可能事件都是事先可以确定的,一定发生的是必然事件,一定不发生的是不可能事件,否则就是随机事件.

举一反三训练

(答案见253页)

1. [模拟·姜堰区]下列事件中,属于必然事件的是(　　)

A. 随时打开电视机,正在播新闻

B. 优秀射击运动员射击一次,命中靶心

C. 抛掷一枚质地均匀的骰子,出现4点朝上

D. 长度分别是3 cm,5 cm,6 cm的三根木条首尾相接,组成一个三角形

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：不可能事件的识别

例2 下列事件中，是不可能事件的是（　　）

A. 抛掷2枚正方体骰子，都是6点朝上

B. 抛掷2枚硬币，朝上的都是反面

C. 从只装有红球的袋子中摸出白球

D. 从只装有红、蓝球的袋子中摸出蓝球

导引：A. 抛掷2枚正方体骰子，都是6点朝上，是随机事件，不合题意；B. 抛掷2枚硬币，朝上的都是反面，是随机事件，不合题意；C. 从只装有红球的袋子中摸出白球，是不可能事件，符合题意；D. 从只装有红、蓝球的袋子中摸出蓝球，是随机事件，不合题意. 故选C.

▶答案：C

2. 下列事件中，属于不可能事件的是（　　）

A. 从装满红球的袋子中随机摸出一个球，是红球

B. 掷一枚质地均匀的骰子，朝上一面的点数是3

C. 随时打开电视机，正在播新闻

D. 通常情况下，自来水在10 ℃就结冰

知识点2 随机事件

点知识

1. **随机事件：**

在一定条件下，很多事情我们事先无法确定它会不会发生，这样的事情是随机事件.

要点精析

一般地，辨析事件的种类是在一定条件下进行的，不同的条件可能导致不同的事件归类，如：标准大气压下，水加热到100 ℃时沸腾是必然事件，但在气压高于标准大气压时，水加热到100 ℃时沸腾就不是必然事件了（此时沸点提高了）.

2. **事件的分类：**

事件 { 确定事件 { 必然事件 / 不可能事件 } / 随机事件 }


事件的判断

3. **易错警示：**

（1）判断“不太可能”与“不可能”以及“很有可能”与“必然”时出错.

（2）判断一个事件的类型要把握两点：①是否可能发生；②可能发生的情况是否唯一，若唯一则为必然事件，否则为随机事件.

拓考向

考查角度：随机事件的识别

例3 下列四个事件中，是随机事件的是（　　）

A. 颖颖上学经过十字路口时遇到绿灯

B. 不透明袋子装有一个红球和三个黄球，这些球除颜色外都相同，从中摸出两个球，其中有黄球

C. 某试卷共10题，小明正在解答该试卷的第12题

D. 明天某市最高气温为80 ℃

导引：颖颖上学经过十字路口时，可能遇到绿灯，所以A是随机事件；由于摸出的两个球可能是一个红球和一个黄球，也可能是两个黄球，所以B是必然事件；某试卷共10题，小明不可能正在解答该试卷的第12题，所以C是不可能事件；明天某市最高气温不可能为80 ℃，所以D是不可能事件. 故选A.

▶答案：A

3. 下列事件是随机事件的是（　　）

A. 367人中至少有两个人的生日相同

B. 抛掷两枚质地均匀的骰子，向上一面的点数之和不小于2

C. 两个数的和为正数

D. 如果a、b、c为实数，那么$(a+b)+c=a+(b+c)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1:生活中事件类型的识别

例4 小明每天早上要在7:50之前赶到距家1 000米的学校上学.一天,小明以80米/分的速度出发.5分钟后,小明的爸爸发现他忘了带数学书,于是,爸爸立即以100米/分的速度去追赶小明,结果在途中追上了小明,试探究这个事件是什么事件.

导引:列出方程,通过计算来判断事件的类型.

▶解:是不可能事件.理由如下:

设小明的爸爸用x分钟追上小明,则可列方程$80(x+5)=100x$,解得$x=20$.此时$80(x+5)=80\times(20+5)=2\ 000>1\ 000$,这表示小明已经到学校了,故小明的爸爸没有在途中追上小明,所以这个事件是不可能事件.

点方法

判断一个事件的类型,关键看事件发生的可能性.实际问题中事件发生的可能性,要根据事件发生的关键元素(如本例"追上的路程")确定.

拨尖角度2:游戏中事件类型的识别

例5 一个袋子中有除颜色外完全相同的10只球,其中有3只红球、3只白球、4只黑球.下列事件中哪些是必然事件?哪些是不可能事件?哪些是随机事件?

(1)从中摸出1只球,摸到红球;

(2)从中摸出1只球,摸到蓝球;

(3)若一次从中摸出3只球,全是白球;

(4)若一次从中摸出4只球,全是白球;

(5)若一次从中摸出3只球,其中有1只白球,1只红球,1只黑球;

(6)从中任意摸出1只球,是白球或红球或黑球.

导引:(1)袋子中有红球、白球和黑球,那么有可能摸到红球,也有可能摸不到红球;(2)袋子中没有蓝球,那么不可能摸到蓝球;(3)袋子中有3只白球,有可能摸出的3只球都是白球;(4)从袋子中最多只能摸到3只白球,不可能一次摸到4只白球;(5)有可能发生;(6)肯定会发生.

▶解:(6)是必然事件,(2)(4)是不可能事件,(1)(3)(5)是随机事件.

举一反三训练

(答案见253页)

4. 小明购买双色球福利彩票时,两次分别购买了1张和100张,均未获奖,于是他说:"购买1张和100张中奖的可能性相等."小华说:"这两个事件都是不可能事件."他们的说法对吗?请说明理由.

5. 袋中装有4个红球和2个黄球,这些球的形状、大小、质地完全相同,在看不到球的条件下,随机地从袋子中摸出3个球,下列事件是不可能事件的是(　　)

A. 摸出的3个球中至少有1个红球

B. 摸出的3个球中有2个球是黄球

C. 摸出的3个球都是红球

D. 摸出的3个球都是黄球

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

判断从袋子中摸球的游戏事件的类型，主要看袋子中球的种类及每种球的数量，然后分析事件发生的可能性，从而做出判断.

拔尖角度 3：转盘中事件类型的识别

例 6 如图 8.1-1 是芳芳设计的自由转动的转盘，上面写有 10 个有理数.

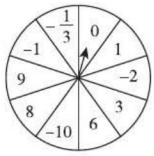


图 8.1-1

想想看，转动一次转盘（若指针落在交界线上，则重转一次），下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件？

（1）指针指向正数；

（2）指针指向有理数；

（3）指针指向绝对值大于 10 的数；

（4）指针指向绝对值大于或等于 8 的数；

（5）指针指向绝对值大于或等于 3 的数.

导引：（1）指针指向的数有可能是正数，也有可能是负数或 0，所以这个事件是随机事件；（2）各个区域中标出的数都是有理数，指针所指的数肯定是有理数，所以这个事件是必然事件；（3）转盘上的有理数的绝对值都不大于 10，即指针所指的数的绝对值都不可能大于 10；（4）9、8、−10 的绝对值都不小于 8，即指针指向的数的绝对值大于或等于 8 是有可能发生的；（5）指针指向的数的绝对值有可能大于或等于 3，也有可能小于 3.

▶解：（1）是随机事件，（2）是必然事件，（3）是不可能事件，（4）是随机事件，（5）是随机事件.

点方法

转动转盘，判断指针指向满足条件的某个数或某类数的事件的类型时，主要取决于给定条件的数在转盘中是否存在，若不存在，则一定是不可能事件.

6. 如图，有一个转盘被分成 6 个相同的扇形区域，颜色分别为红、黄、绿、白四种颜色，指针的位置固定，转动转盘后任其自由停止，如果指针指在等分线上，那么重新转动，直至指针指向某个扇形区域内为止，写出两个随机事件.



（第 6 题图）

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 254 页）

基础巩固练

1. ［中考 · 本溪］下列事件为确定事件的是（　　）

A. 一个不透明的口袋中装有除颜色以外完全相同的 3 个红球和 1 个白球，均匀混合后，从中任意摸出 1 个球是红球

B. 长度分别是 4，6，9 的三条线段能围成一个三角形

C. 本钢篮球队运动员韩德君投篮一次命中

D. 掷 1 枚质地均匀的硬币，落地时正面朝上

2. ［中考 · 齐齐哈尔］下列成语中，表示不可能事件的是（　　）

A. 缘木求鱼　　B. 杀鸡取卵

C. 探囊取物　　D. 日月经天，江河行地

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. “a 是实数，$a^2 \geqslant 0$”这一事件是(　　)
A. 必然事件　　B. 不可能事件
C. 随机事件　　D. 无法确定

4. 下列成语所描述的事件是必然事件的是(　　)
A. 水中捞月　　B. 守株待兔
C. 水涨船高　　D. 画饼充饥

5. “种瓜得瓜，种豆得豆”这一事件是_____(填“必然事件”“不可能事件”“随机事件”).

6. “一个有理数的绝对值是负数”这一事件是_____(填“必然事件”“不可能事件”“随机事件”).

7. 下列事件：(1)从一副洗匀的扑克牌中任意抽出一张，恰好是大王；(2)从装着9个红球、1个白球共10个球的袋中任意摸出2个球，其中一定有红球；(3)任意掷一枚硬币，反面朝上；(4)$2>0$. 是确定事件的是_____.(填序号)

8. 指出下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件，并说明理由.
①任意翻一本日历，在8月份的号数里，是奇数的比是偶数的多；
答：这是_____事件. 因为_____.
②任意掷出一个均匀的骰子(6个面上分别刻有1~6的点数)，朝上的点数是质数；
答：这是_____事件. 因为_____.
③两条线段组成三角形.
答：这是_____事件. 因为_____.

能力提升练

9. 下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件？
(1)打开电视机，正在播新闻；
(2)掷一枚均匀的骰子(6个面上分别刻有1~6的点数)，朝上的点数是7；
(3)在标准大气压下，气温低于0 ℃，水会结冰；
(4)抛出的球会下落；
(5)纸放到火上，纸会被点燃；
(6)放在冰箱里的食物永不变质；
(7)射箭演习时，箭正中靶心；
(8)小明买了一张电影票，座位号恰好是偶数；
(9)买彩票，中了头等奖；
(10)口袋里有一个红球和一个白球，从中摸出两个球，两个球的颜色相同.

10. 抛一枚均匀的骰子(6个面上分别刻有1~6的点数)两次，将朝上的两个点数相加，请问下列事件是随机事件、必然事件，还是不可能事件？(1)和为1.5；(2)和为2；(3)和为偶数；(4)和小于13.

11. 如图是一个由黑白两种颜色组成的可自由转动的转盘. 下列事件哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？请说明理由.
(1)转动转盘，转盘停止转动后，指针指向黑色区域(若指针落在交界线上，则重转一次)；
(2)转动转盘，转盘停止转动后，指针指向白色区域；
(3)转动转盘，转盘停止转动后，指针指向红色区域；
(4)转动转盘，转盘停止转动后，指针指向黑色区域或白色区域.


(第11题图)

12. 现有三个普通的正方体骰子(6个面上分别刻有1~6的点数)，投掷这三个骰子，请写出两个必然事件，两个不可能事件和两个随机事件.

思维拓展练

13. 爱好体育运动的小亮昨天晚上做了一个梦，他梦见天上下起足球雨，自己捡到了一只好大好大的足球……哈，小亮梦见自己被国家队选中了……小亮带球从十几米高的空中踢进对方大门……小亮醒了.
请在小亮的梦中找出必然事件、不可能事件和随机事件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.2 可能性的大小

热门话题

- 确定事件发生的可能性的大小
- 随机事件发生的可能性的大小

话题链接

可能性的大小
- 确定事件的可能性
- 随机事件的可能性

→ 可能性在0和1之间(含0和1)

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 事件发生的可能性的大小

点知识

1. 一般地，随机事件发生的可能性是有大小的，不同的随机事件发生的可能性的大小**有可能不同**.
2. **事件发生的可能性**：
   (1)**必然事件**：试验中必然发生的事件，其发生的可能性为**100%** 或 **1**；
   (2)**不可能事件**：试验中不可能发生的事件，其发生的可能性为 **0**；
   (3)**随机事件**：试验中可能发生也可能不发生的事件，其发生的可能性在 **0** 和 **1** 之间(不含 0 和 1).
3. 描述随机事件发生的可能性大小的常用语："不太可能"、"可能"、"很可能"、"可能性极大"等.
4. **拓展**：判断随机事件发生的可能性的大小时，先要准确地找出所有可能出现的结果数，然后再分情况，看每种情况包含的结果数与所有可能出现的结果数的比例大小. 比例越大，则这种情况发生的可能性越大.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：利用事件发生的可能性的大小描述随机事件

例 1 现有同一品牌工艺品 100 件，其中有 2 件次品. 从中任取一件是次品，这个事件(　　)

A. 必然发生　　B. 不太可能发生

C. 很可能发生　　D. 不可能发生

导引：因为工艺品中次品只有 2 件，比正品的件数少很多，故选 B.

▶答案：B

点方法

求某一事件发生的可能性大小的方法： 可能性大小可以用分数来表示，要求某一事件发生的可能性大小，只需弄清该事件可能发生的结果数和所有可能发生的结果数的比值. 根据比值大小分析可能性，比值大的可能性就大，比值小的可能性就小.

举一反三训练

☞(答案见 254 页)

1. 从一副牌中抽出 5 张红桃、4 张梅花、3 张黑桃放在一起洗匀后，从中一次随机抽出 10 张，恰好红桃、梅花、黑桃 3 种牌都能抽到，这个事件(　　)

A. 不太可能发生

B. 不可能发生

C. 很可能发生

D. 必然发生

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2：利用事件发生的可能性的大小比较可能性的大小

例2 一个不透明袋子中有1个红球，1个绿球和n个白球，这些球除颜色外无其他差别.

(1)当$n=1$时，从袋中随机摸出1个球，摸到红球和摸到白球的可能性是否相同？

(2)当$n>1$时，从袋中随机摸出1个球，摸到绿球和摸到白球的可能性是否相同？

导引：根据各种事件发生的可能性的大小判断可能性是否相同.

▶解：(1)当$n=1$时，红球的个数和白球的个数相等，所以从袋中随机摸出1个球，摸到红球和摸到白球的可能性相同.

(2)当$n>1$时，白球的个数大于绿球的个数，所以从袋中随机摸出1个球，摸到绿球的可能性小于摸到白球的可能性.

点方法

比较随机事件发生的可能性的大小时，先要准确地找出所有可能出现的结果数（数目或面积），然后再分情况，看每种情况包含的结果数（数目或面积）与所有可能出现的结果数（数目或面积）的比的大小，比越大，这种事件发生的可能性就越大.

2. 一枚质地均匀的正六面体骰子六个面分别刻有1到6的点数，掷这枚骰子，前5次朝上的点数恰好是1~5，则第6次朝上的点数是6的可能性(　　)

A. 等于朝上点数为5的可能性

B. 大于朝上点数为5的可能性

C. 小于朝上点数为5的可能性

D. 无法确定

Ⅱ 点方法·拔技巧·探规律

典例剖析

拔尖角度1：利用事件发生的可能性的大小确定随机事件的对象的个数

例3 袋中有红球4个，白球若干个，它们只有颜色上的区别. 从袋中随机地取出一个球，如果取到白球的可能性较大，那么袋中白球的个数可能是(　　)

A. 3个

B. 不足3个

C. 4个

D. 5个或5个以上

导引：∵袋中有红球4个，取到白球的可能性较大，∴袋中的白球数量大于红球数量，即袋中白球的个数可能是5个或5个以上. 故选D.

▶答案：D

举一反三训练

☞(答案见254页)

3. 一只不透明的袋子中装有白、红、黑三种不同的球，其中白球有3个，红球有8个，黑球有m个，这些球除颜色外完全相同. 若从袋子中任意取一个球，摸到黑球的可能性最小，则m的值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

可能性大小的比较方法：只要总情况数目相同，谁包含的情况数目多，谁的可能性较大，反之也成立；若包含的情况数目相等，则它们的可能性相等.

拔尖角度 2：根据可能性的大小决策

例 4 某停车场的出租车有 80% 是红色，20% 是黄色，一名乘客任意选一辆出租车，选择哪种颜色的可能性大？说明理由.

导引：根据题意，分析比较即可.

▶解：选择红色出租车的可能性大. 理由：红色出租车比黄色出租车的数量多.

点方法

在总数相同的情况下，哪类事物数量越多，选到该事物的机会越大；在总数不同的情况下，哪类事物数量占的比例越大，则选到该事物的机会就越大.

拔尖角度 3：利用事件发生的可能性的大小设计方案

例 5 甲袋内装有 99 颗黑棋子，1 颗白棋子，乙袋内装有 49 颗白棋子，1 颗黑棋子，如果黑、白棋子的质地、大小均相同. 问：在袋内随机摸一颗棋子，在哪个袋内摸到黑棋子的可能性大？应如何设计袋内的黑、白棋子颗数，才能使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大？

导引：摸到黑棋子的可能性的大小是由袋内黑棋子颗数与袋内棋子总颗数的比值来确定的. 由题知甲袋内黑棋子有 99 颗，黑、白棋子一共有 100 颗，它们的比值为 $\frac{99}{100}$；而乙袋内黑棋子有 1 颗，黑、白棋子一共有 50 颗，它们的比值为 $\frac{1}{50}$，$\frac{99}{100}>\frac{1}{50}$，显然在甲袋内摸到黑棋子的可能性大.

▶解：在甲袋内摸到黑棋子的可能性大. 要使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大，只需将袋内放置的黑、白棋子颗数一样多.

点方法

判断事件 A 发生的可能性的大小需要明确两点：①事件 A 包含的可能结果数（即事件 A 包含多少种可能情况）；②所有可能的结果数（即一共有多少种可能情况）. 它们的比值大小就反映了事件 A 发生的可能性的大小，这个比值就是我们后面讲到的概率.

4. 一小贩设计一个转盘游戏（如图），2 元玩一次，玩家旋转转盘，当转盘停止时，指针指向的物品即为玩家所获物品，若指针指向分界线，则重玩一次. 小贩这样设计有道理吗？为什么？



（第 4 题图）

5. 现有一只不透明布袋和 6 个球，其中 3 个红球和 3 个蓝球，这些球除颜色外完全相同，请你利用它们设计一个摸球游戏，使得：
   (1) 任意摸出 1 个球，一定是红球；
   (2) 任意摸出 2 个球，一定都不是红球；
   (3) 任意摸出 2 个球，一定是 1 个红球、1 个蓝球；
   (4) 任意摸出 1 个球，可能是红球.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见 254 页)

基础巩固练

1. 下面的三组乒乓球选手对阵中，按中国选手出线的可能性从大到小的顺序排列正确的是(　　)

①两个中国选手；②两个韩国选手；③一个中国选手和一个韩国选手.

A. ①②③　　B. ③①②

C. ①③②　　D. ③②①

2. [中考 · 武汉] 不透明的袋子中装有形状、大小、质地完全相同的 6 个球，其中 4 个黑球、2 个白球，从袋子中一次摸出 3 个球，下列事件是不可能事件的是(　　)

A. 摸出的是 3 个白球

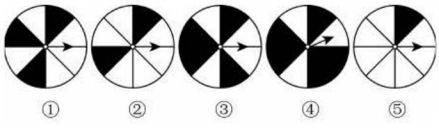
B. 摸出的是 3 个黑球

C. 摸出的是 2 个白球、1 个黑球

D. 摸出的是 2 个黑球、1 个白球

3. 七(4)班共有学生 65 人，其中男生有 31 人，女生有 34 人，若在此班上任意找一名学生，找到男生的可能性比找到女生的可能性_____(填“大”或“小”).

4. 如图，自由转动下列转盘，按转盘停止转动后，指针指向黑色部分的可能性从小到大的顺序排列，序号依次是_____.



(第 4 题图)

5. 一个盒子中装有 m 个红球，n 个黑球，p 个蓝球，从中任意摸出一个球，当 m，n，p 满足_____时，摸到红球、黑球、蓝球的可能性相等.

能力提升练

6. 在一次联欢会上，班长准备了 20 张相同的卡片，上面写有节目类型，分别放入甲、乙两个袋子里，其中甲袋有 2 个 A 类节目，8 个 B 类节目，乙袋有 7 个 A 类节目，3 个 B 类节目，抽到什么卡片就表演相应的节目，小明想表演 B 类节目，那么他应选择在_____袋中抽取卡片.

7. 袋子里装有 4 个白球、8 个红球、m($m>0$)个黑球，每个球除颜色以外完全相同. 从袋中任意摸一个球，若摸到红球的可能性最大，摸到黑球的可能性最小，则 m 的可能取值是多少?

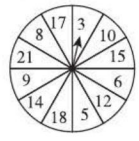
8. 如图，一个转盘被平均分成 12 份，每份上写有不同的数，游戏方法：先猜数再转动转盘，转盘停止转动后，若指针指向的数与所猜的数一致，则猜数者获胜，否则失败. 现提供三种猜数方法：

(1)猜“奇数”，或“偶数”；

(2)猜“大于 10 的数”，或“不大于 10 的数”；

(3)猜“是 3 的倍数”，或“不是 3 的倍数”.

如果你是猜数者，你愿意选择哪一种猜数方法？怎样猜？并说明理由.



(第 8 题图)

我的错题笔记

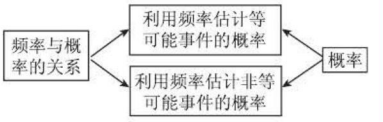
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.3 频率与概率

热门话题

- 概率的定义
- 利用频率估计等可能事件的概率（重点）
- 利用频率估计非等可能事件的概率（重点）

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 概率的定义（重难点）

点知识

1. 随机事件发生的可能性有大有小. 一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件发生的概率.


概率的定义

2. 如果用字母 A 表示一个事件，那么 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率.
3. 通常规定，必然事件 A 发生的概率是 1，记作 $P(A)=1$；不可能事件 A 发生的概率为 0，记作 $P(A)=0$；随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是 0 和 1 之间的一个数，记作 $0<P(A)<1$. 如图 8.3-1 表示三种事件发生的概率：

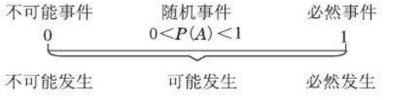


图 8.3-1

4. 对于一个随机事件，它发生的概率是由它自身决定的，并且是客观存在的.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：利用概率的概念表示几种事件类型的概率

例 1 写出下列事件发生的概率的范围或取值：

（1）记“太阳从东方升起”为事件 A，则 $P(A)=$_____；

（2）记“明天会下雨”为事件 B，则 $P(B)$ 的取值范围为_____；

（3）记“地球绕着月亮转”为事件 C，则 $P(C)=$_____.

导引：（1）太阳从东方升起，是必然事件，其发生的概率为 1；（2）明天会下雨，是随机事件，随机事件发生的概率是 0 和 1 之间的一个数；（3）地球绕着月亮转是不可能事件，其发生的概率为 0. ▶答案：（1）1 （2）$0<P(B)<1$ （3）0

举一反三训练

☞（答案见 254 页）

1. 下列事件发生的概率大于 0 且小于 1 的是（　　）

A. 太阳从西方慢慢升起

B. 小树会慢慢长高

C. 水往低处流

D. 某大桥在 20 分钟内通过了 60 辆汽车

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:概率意义的理解

例2 在相同条件下重复试验,若事件A发生的概率是$\frac{7}{100}$,下列陈述中,正确的是(　　)

A. 事件A发生的频率是$\frac{7}{100}$

B. 反复大量做这种试验,事件A只发生了7次

C. 做100次这种试验,事件A一定发生7次

D. 做100次这种试验,事件A可能发生7次

导引:∵事件A发生的概率是$\frac{7}{100}$,不表示事件A发生的频率是$\frac{7}{100}$,∴选项A不正确;∵事件A发生的概率是$\frac{7}{100}$,不表示事件A只发生了7次,可能比7次多,也可能比7次少,∴选项B不正确;∵事件A发生的概率是$\frac{7}{100}$,不表示做100次这种试验,事件A一定发生7次,∴选项C不正确;∵事件A发生的概率是$\frac{7}{100}$,表示做100次这种试验,事件A可能发生7次,∴选项D正确. ▶答案:D

点方法

概率的大小与试验次数无关,是特定事件的固有性质,与具体某一次操作无直接关系.

2. 下列说法正确的是(　　)

A. "明天降雨的概率是60%"表示明天有60%的时间都在降雨

B. "抛一枚硬币正面朝上的概率为$\frac{1}{2}$"表示每抛2次就有一次正面朝上

C. "彩票中奖的概率为1%"表示买100张彩票肯定会中奖

D. "抛一枚正方体骰子,朝上的点数为2的概率为$\frac{1}{6}$"表示随着抛掷次数的增加,"抛出朝上的点数为2"这一事件发生的频率稳定在$\frac{1}{6}$附近

知识点2 频率的定义(重难点)

点知识 ▶▶▶

1. **频率**:试验中,某事件发生的次数与总次数的比值.

2. **用频率估计概率**


用频率估计概率

(1)一般地,在大量重复试验中,如果事件A发生的频率$\frac{m}{n}$**稳定**于某个常数p,那么事件A发生的概率的估计值为p.

(2)适用条件:试验的所有可能结果**不是有限个**或者可能出现的结果发生的可能性**不一定相等**时,都可以通过统计频率来估计概率.

(3)注意:一般地,用频率估计概率时,试验次数应该尽可能多,试验次数**越多**,结果越**接近**事件发生的概率.

(4)概率是通过大量重复试验中频率的稳定性得到的介于0~1的常数,它反映了事件发生的可能性大小.

3. **拓展**:(1)当试验次数很多时,一个事件发生的频率稳定在相应的**概率附近**.

(2)频率是通过试验得到的一个数据结果,因试验次数的不同而有所改变,是一个实际的**具体值**.概率是一个事件发生的可能性大小的**理论值**,它不因试验次数的改变而变化,是一个常数.

4. **易错警示**:(1)对于等可能事件我们可以用列举法通过公式求概率和用频率估计概率.

(2)对于非等可能事件(如投篮命中率等)则只能用频率估计概率.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度：利用频率估计概率

例 3 下表记录了一名球员在罚球线上投篮的结果.

投篮次数 n	100	150	300	500	800	1 000
投中次数 m	60	96	174	302	484	602
投中频率 $\frac{m}{n}$	0.600	0.640	0.580	0.604	0.605	0.602

估计这名球员在罚球线上投篮一次，投中的概率为_____.（结果精确到 0.1）

导引：根据频率估计概率的方法，结合表格数据可得答案.

由表格可知，随着投篮次数越来越大时，频率逐渐稳定在常数 0.6 附近，

∴ 这名球员在罚球线上投篮一次，投中的概率为 0.6. ▶答案：0.6

点方法

用频率估计概率的方法： 大量重复试验时，事件发生的频率在某个常数附近摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据频率的稳定性，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个常数就是这个事件发生的概率的估计值.

3. 某射击运动员在同一条件下的射击成绩记录如下：

射击次数	50	100	200	400	800	1 000
“射中 9 环以上”的次数	38	82	157	317	640	801
“射中 9 环以上”的频率	0.760	0.820	0.785	0.793	0.800	0.801

根据频率的稳定性，估计这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率是_____.（结果保留小数点后一位）

Ⅱ 点方法 · 拔技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1：根据频率的稳定性计算

例 4 在一个不透明的口袋中装有 5 个红球和若干个白球，它们除颜色外其他完全相同，通过多次摸球试验后发现，摸到红球的频率稳定在 0.25 附近，则估计口袋中白球大约有_____个.

导引：在同样条件下，大量反复试验时，随机事件发生的频率逐渐稳定在概率附近，可以从比例关系入手，设未知数列出方程求解.

设白球个数为 x 个，

∵ 摸到红球的频率稳定在 0.25 附近，

∴ 摸到红球的概率为 0.25，

∴ $\frac{5}{x+5}=\frac{1}{4}$，解得：$x=15$，

即白球的个数为 15 个. ▶答案：15

举一反三训练

☞（答案见 254 页）

4. 在一个不透明的口袋中有 3 个红球和若干个白球，它们除颜色外其他完全相同，通过多次摸球试验后发现，摸到红球的频率稳定在 15% 左右，则口袋中的白球大约有_____个.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

解答这类问题的基本思路是根据频率的稳定性列方程解答.

拔尖角度2:根据频率的稳定性设计方案

例5 一个不透明的口袋里装有黑、白两种颜色的球(这些球除颜色不同外,其他都相同)共20个,某学习小组做摸球试验,将球搅匀后从中随机摸出一个球,记下颜色,再把它放回袋中,不断重复.下表是试验中得到的一组统计数据:

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到白球的次数 m	58	96	116	295	484	601
摸到白球的频率 $\frac{m}{n}$	0.58	0.64	0.58	0.59	0.605	0.601

(1)当 n 很大时,摸到白球的频率将会接近_____;

(2)假如你去摸一次,估计摸到白球的概率是_____,摸到黑球的概率是_____;

(3)试估计口袋中黑、白两种颜色的球各有多少个?

(4)解决了上面的问题,小明同学猛然顿悟,过去一个未解决的问题有办法了.这个问题是:在一个不透明的口袋里装有若干个白球,在不允许将球倒出来数的情况下,如何估计白球的个数(可以借助其他工具及用品)?请你应用统计与概率的思想和方法解决这个问题,写出解决这个问题的主要步骤及估算方法.

导引:(2)可用试验获得的频率的稳定值去估计概率;(3)可用摸到白球(或黑球)的概率去估计其在总体中所占的比;(4)是统计思想和概率知识的综合应用.

▶解:(1)0.6

(2)0.6;0.4

(3)因为 $20\times0.6=12$(个),$20\times0.4=8$(个),所以估计口袋中有黑球8个,白球12个.

(4)①先从不透明的口袋里摸出 a 个白球,标上记号,然后放回口袋里,搅拌均匀;②从搅匀后的球中随机摸出一个球看是否有记号,再把它放回口袋中,不断大量重复,记重复次数为 n,摸出有记号的球的频数为 b;③根据用频率估计概率的方法可得出白球的个数为 $\frac{an}{b}$.

5. 解答下列问题:

(1)在一个不透明的口袋中有10个红球和若干个白球,这些球除颜色不同外其他都相同,请通过以下试验估计口袋中白球的个数:从口袋中随机摸出一个球,记下颜色,再把它放回袋中,不断重复上述过程,试验总共摸了200次,其中有50次摸到了红球,那么估计口袋中有白球多少个?

(2)请思考并作答:

在一个不透明的口袋里装有若干个形状、大小完全相同的白球,在不允许将球倒出来数的情况下,如何估计白球的个数(可以借助其他工具及用品)?写出解决问题的主要步骤及估算方法,并求出结果(其中所需数量用 a、b、c 等字母表示).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

用试验估计的概率值一般都是近似值，在相同的条件下做同一个试验，其结果也可能不一样. 其中(4)题答案不唯一.

拔尖角度 3：根据频率估算面积(拓展点)

例 6 小红和小明在操场做游戏，如图 8. 3-2①，他们先在地上画了半径分别为 $OB=2$ m 和 $OA=3$ m 的同心圆，蒙上眼睛在一定距离外向圆内投掷小石子，若掷中阴影，则小红胜，否则小明胜(未掷中圆内不算)

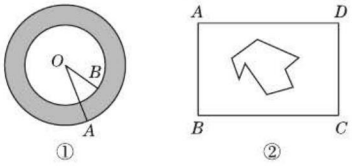


图 8. 3-2

(1)你认为游戏公平吗？为什么？

(2)你能否用频率来估算概率的原理来估算图 8. 3-2② 长方形 $ABCD$ 中的不规则图形的面积？其中 $AB=2$ m，$BC=3$ m(说明设计方案的实施步骤和如何估算不规则图形的面积).

导引：(1)分别求得圆环和小圆的面积即可求得两人各自胜的概率，比较概率即可求解；

(2)向长方形内投掷小石子，分别确定落在不同区域的次数，然后用落在不规则图形里面的次数除以总次数乘以长方形的面积即可求得不规则图形的面积.

▶解：(1)圆环的面积为：$3^2\pi-2^2\pi=5\pi(\text{m}^2)$，

小圆的面积为：$4\pi\ \text{m}^2$，

所以 $P_{\text{小红胜}}=\dfrac{5\pi}{9\pi}=\dfrac{5}{9}$，

$P_{\text{小明胜}}=\dfrac{4\pi}{9\pi}=\dfrac{4}{9}$，

所以游戏不公平；

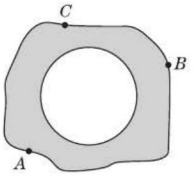
(2)能. 蒙上眼睛在一定距离外向长方形内投掷小石子，落在长方形内 m(尽可能多)次，不规则图形内 n 次，则不规则图形的面积为 $\dfrac{n}{m}\times2\times3=\dfrac{6n}{m}(\text{m}^2)$.

点方法

根据频率估算面积的方法： 根据落在两个区域内的次数比等于两个部分图形的面积之比列方程解答.

6. 小明在操场上做游戏，他发现地上有一个不规则的封闭图形 ABC. 为了知道它的面积，小明在封闭图形内画了一个半径为 1 米的圆，在不远处向封闭图形内掷石子，且记录如下，请你求出封闭图形 ABC 的面积.

掷石子次数	50	150	300
石子落在圆内的次数 m	14	43	93
石子落在阴影内的次数 n	29	85	186



(第 6 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 (答案见255页)

基础巩固练

1. 如果一个事件不发生的概率是99%,那么这个事件(　　)
   A. 必然发生
   B. 不可能发生
   C. 发生的可能性很大
   D. 发生的可能性很小

2. 下列事件中发生的概率大于0且小于1的是(　　)
   A. 任意画一个等边三角形,它不是轴对称图形
   B. 直线 $y=3x+b$ 经过第一象限
   C. 某大桥在20分钟内通过了60辆汽车
   D. 两直线平行,同位角相等

3. 掷一枚正方体骰子,恰好掷得点数为4的概率为$\frac{1}{6}$,它表示(　　)
   A. 掷6次骰子,恰好有一次掷得4点
   B. 掷6次骰子,一定有5次不是4点
   C. 掷6次骰子,一定有一次掷得4点
   D. 若掷骰子若干次,则大约平均每6次有一次掷得骰子的点数是4

4. 小冰的车子坏了,修车人对她说:"三分钟内帮你修好,百分之百没问题",这个"百分之百没问题"指的是三分钟修好车的概率为(　　)
   A. 0　　B. $\frac{1}{2}$
   C. 1　　D. 0和1之间

5. 某事件经过500 000 000次试验,出现的频率是0.3,它的概率估计值是_____.

6. 某农场引进一批新麦种,在播种前做了五次发芽试验,每次任取800粒麦种进行试验.试验结果如表所示(发芽率精确到0.001):

试验的麦种数	800	800	800	800	800
发芽的麦种数	787	779	786	789	782
发芽率	0.984	0.974	0.983	0.986	0.978

在与试验条件相同的情况下,估计种一粒这样的麦种发芽的概率为_____.

7. 在一个不透明的袋子中有10个除颜色外均相同的小球,通过多次摸球试验后,发现摸到白球的概率约为30%,估计袋中白球有_____个.

8. 如图,将下面事件的字母写在最能代表它的概率的点上.
   A. 抛出一枚质地均匀的硬币,得到一个正面;
   B. 在一个小时内,小胖能走80千米;
   C. 给你一个骰子,你掷出了一个"3";
   D. 太阳从东方升起.



(第8题图)

9. 在一个不透明的口袋里装有只有颜色不同的黑、白两种颜色的球共20个,某学习小组做摸球试验,将球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色,再把它放回口袋中,不断重复.下表是活动进行中的一组统计数据:

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到白球的次数 m	59	96	116	290	480	601
摸到白球的频率$\frac{m}{n}$	a	0.64	0.58	b	0.60	0.601

(1)上表中的 $a=$_____,$b=$_____.
(2)"摸到白球"的概率的估计值是_____(精确到0.1);
(3)试估算口袋中黑、白两种颜色的球各有多少个.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

能力提升练

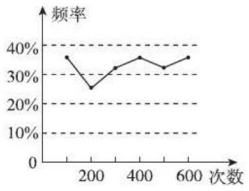
10. 甲、乙两位同学在一次用频率估计概率的试验中统计了某一结果出现的频率，给出的统计图如图所示，则符合这一结果的试验可能是（　　）

A. 掷一枚正六面体的骰子，出现 5 点的概率

B. 掷一枚硬币，出现正面朝上的概率

C. 任意写出一个整数，能被 2 整除的概率

D. 一个袋子中装着只有颜色不同，其他都相同的两个红球和一个黄球，从中任意取出一个是黄球的概率



（第 10 题图）

11. 下列说法正确的是（　　）

A. “投掷一枚硬币，出现正面向上的概率是 0.5”，这句话的意思就是投掷硬币两次，那么一次出现“正面向上”，另一次出现“反面向上”

B. 一个袋子中装有 99 个红球和 1 个白球，我们从中任意取一个球得到白球的概率为 $\frac{1}{100}$，所以从袋中取至少 100 次后，我们必定可以取到白球

C. “我们班上有一名外国学生的概率为 0”表示我们班上没有外国学生

D. 投掷一枚硬币 10 次，10 次都出现反面向上，所以我们说“投掷一枚硬币，出现反面向上的概率为 1”

12. 一个圆形转盘的半径为 2 cm，现将转盘分成若干个扇形，并分别相间涂上红、黄两种颜色. 转盘转动 10 000 次，指针指向红色部分有 2 500 次. 请问指针指向红色的概率的估计值是_____，转盘上黄色部分的面积大约是_____cm^2.

13. 小明和小亮做游戏，他们利用地上的图案（如图），蒙上眼睛在一定距离外向该图案内掷小石子，掷中阴影区域小明赢，否则小亮赢，掷到图案外不算. 下表是游戏中统计的数据. 【导学号：9937991】

石子落在图案内的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
石子落在阴影区域的次数 m	73	114	151	374	601	750
石子落在阴影区域的频率 $\frac{m}{n}$	0.73	0.76	0.755	0.748	0.751	0.75

（1）估计石子落在阴影区域的概率约为多少；

（2）小明和小亮谁获胜的可能性大？

（3）若圆的半径为 1，试估计阴影区域的面积.



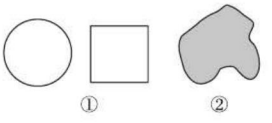
（第 13 题图）

思维拓展练

14. ［方案设计题］小红和小明在操场做游戏，他们分别在地上画了周长为 4 米的圆和正方形（如图①），蒙上眼睛在一定距离外分别向圆和正方形内掷小石子，各掷 100 次，谁投进的次数多谁就胜.

（1）你认为游戏对双方公平吗？为什么？

（2）如图②是一个不规则形状的图形，你能否用频率估计概率的方法，来估算这个不规则图形的面积呢？请你设计方案，解决这一问题.（要求写出设计步骤及计算公式）



（第 14 题图）

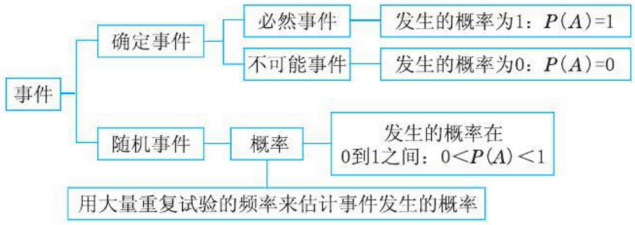
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 事件分为确定事件和随机事件，确定事件中必然事件发生的概率为1，不可能事件发生的概率为0；随机事件发生的概率为0和1之间的一个数.
2. 有些事件发生的结果不能列举，求概率时只能用频率来估计概率.

专题解码

知识专题

专题1 事件类型的判断

链接中考>> 对事件类型的判断，关键是判断事件发生的可能性的大小，此类题即概率的大小. 考查时一般都是以选择题的形式出现.

例1 [中考·凉山州] 指出下列事件中是随机事件的个数(　　)

①投掷一枚硬币正面朝上；

②明天太阳从东方升起；

③五边形的内角和是560°；

④购买一张彩票中奖.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

导引：根据事件发生的可能性大小判断相应事件的类型即可.

掷一枚硬币正面朝上是随机事件；明天太阳从东方升起是必然事件；五边形的内角和是560°是不可能事件；购买一张彩票中奖是随机事件；所以随机事件是2个. 故选C.

▶答案：C

点方法

事件分为确定事件和随机事件，确定事件又分为必然事件和不可能事件，其中，①必然事件发生的概率为1，即P(必然事件)=1；②不可能事件发生的概率为0，即P(不可能事件)=0；③如果A为随机事件，那么$0<P(A)<1$.

专题2 事件发生的可能性的大小

链接中考>> 要想知道事件发生的可能性的大小，首先要确定这个事件是什么事件，必然事件是指一定会发生的事件，其发生的可能性是1；不可能事件是指一定不会发生的事件，其发生的可能性是0；一般地，随机事件发生的可能性在0~1之间，不同的随机事件发生的可能性的大小有可能不同.

例2 一个小球在如图1的地面上随意滚动，小球“停在灰色方块上”与“停在白色方块上”的可能性哪个大？(各方块的大小、质地均相同)

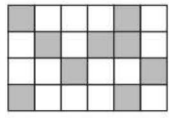


图1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：图中共有 9 块灰色方块、15 块白色方块，所以小球停在白色方块上的可能性大.

专题 3　用频率估计概率

链接中考>> 有些事件的概率无法通过列举法求出，只能通过多次重复试验求出事件发生的频率，然后用频率来估计事件发生的概率. 此类题考查时一般以填空题的形式出现.

例 3 ［中考 · 北京］如图 2 显示了用计算机模拟随机投掷一枚图钉的某次试验的结果.

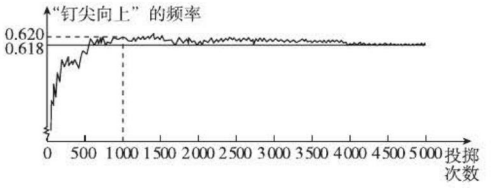


图 2

下面有三个推断：

①当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以“钉尖向上”的概率是 0. 616；

②随着试验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0. 618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0. 618；

③若再次用计算机模拟此试验，则当投掷次数为 1 000 时，“钉尖向上”的频率一定是 0. 620.

其中合理的是（　　）

A. ①　　B. ②　　C. ①②　　D. ①③

导引：根据图形和各个小题的说法可以判断是否正确，从而可以解答本题.

当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以此时“钉尖向上”的频率是：308 ÷ 500 = 0. 616，但“钉尖向上”的概率不一定是 0. 616，故①错误；随着试验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0. 618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0. 618，故②正确；若再次用计算机模拟此试验，则当投掷次数为 1 000 时，“钉尖向上”的频率可能是 0. 620，但不一定是 0. 620，故③错误，故选 B.　　▶答案：B

点方法

大量重复试验时，事件发生的频率在某个常数附近摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据频率的稳定性，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个常数就是这个事件发生的概率的估计值.

思想方法专题

专题 4　分类讨论思想

专题解读>> 当题目中给出的条件不充分时，所求的结论会有多种可能，这时需运用分类讨论思想，分情况进行分析求解，对于求事件发生的可能性大小的题目多用此方法.

例 4 在某班中任选一名同学，选中男生的可能性大还是选中女生的可能性大？

导引：判断事件发生的可能性大小，就要看在这个事件中出现这个结果的机会有多大.

▶解：分三种情况：如果这个班男女生人数一样多，那么选中女生与选中男生的可能性相同；如果这个班男生人数比女生人数多，那么选中男生的可能性大；如果这个班女生人数比男生人数多，那么选中女生的可能性大.

点方法

注意本题没告诉男生与女生的具体人数，因此要分情况讨论.

专题 5　数形结合思想

专题解读>> 数形结合思想是将数量与图形结合起来，对题目中给定的题设和结论从代数和几何的方面进行分析. 本章中常常利用几何图形的面积的大小，确定事件发生的概率，并解决有关的实际问题.

例 5 小朋友玩“扎地皮”游戏，有一个三角形区域为 $\triangle ABC$，如图 3，现将其分成三块：$\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle ACE$，其中 D，E 是 BC 的三等分点，你认为在 $\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle ACE$ 中，扎中哪一个三角形获胜的可能性最大？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：求扎中哪一个三角形获胜的可能性最大，即计算哪一个三角形被扎中的概率最大，也就是计算哪一个三角形的面积最大.

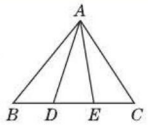


图3

▶解：因为 $\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle ACE$ 的底相等，高相同，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ACE}$，故扎中每个三角形的可能性都相同，所以无论扎中三个三角形中的哪一个，获胜的可能性都相同.

专题6 方程思想

专题解读>> 方程思想就是从问题的数量入手，运用数学语言将问题中的条件转化成数学模型——方程或方程组，通过解方程或方程组，或者运用方程的性质去分析、转化问题，使问题获得解决.

例6 ［中考·锦州］一个口袋中有红球、白球共10个，这些球除颜色外都相同，将口袋中的球搅拌均匀，从中随机摸出一个球，记下它的颜色后再放回口袋中. 不断重复这一过程，共摸了100次球，发现有71次摸到红球. 请你估计口袋中红球的数量为_____个.

导引：根据题意可知多次试验红球出现的频率为 $\frac{71}{100}$，

设红球有 x 个，根据题意，得

$\frac{x}{10}=\frac{71}{100}$.

解得 $x\approx 7$.

所以这个口袋中有红球7个.

▶答案：7

点方法

概率的计算公式为 $P=\frac{m}{n}$，n 为事件可能出现的所有结果数，m 为符合条件的结果数，运用计算公式解决问题时，保证每种结果出现的可能性相同. 用频率估计概率时，注意是用多次试验得出的频率估计概率.

好题必练

（答案见255页）

选择题

1. ［中考·铁岭］下列事件中，不可能事件是(　　)
   A. 抛掷一枚骰子，出现4点向上
   B. 五边形的内角和为540°
   C. 实数的绝对值小于0
   D. 明天会下雨

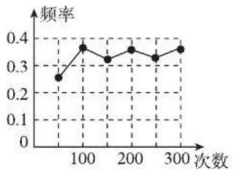
2. ［中考·淄博］下列语句描述的事件中，是随机事件的为(　　)
   A. 水能载舟，亦能覆舟
   B. 只手遮天，偷天换日
   C. 瓜熟蒂落，水到渠成
   D. 心想事成，万事如意

3. ［中考·长沙］下列说法正确的是(　　)
   A. 任意掷一枚质地均匀的硬币10次，一定有5次正面向上
   B. 天气预报说“明天的降雨概率为40%”，表示明天有40%的时间都在降雨
   C. “篮球队员在罚球线上投篮一次，投中”为随机事件
   D. “a 是实数，$|a|\geqslant 0$”是不可能事件

4. ［中考·泰州］小亮是一名职业足球队员，根据以往比赛数据统计，小亮进球率为10%，他明天将参加一场比赛，下面几种说法正确的是(　　)
   A. 小亮明天的进球率为10%
   B. 小亮明天每射球10次必进球1次
   C. 小亮明天有可能进球
   D. 小亮明天肯定进球

5. ［中考·玉林］某小组做“用频率估计概率”的试验时，绘出的某一结果出现的频率折线图如图，则符合这一结果的试验可能是(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 5 题图）

A. 抛一枚硬币，出现正面朝上

B. 掷一个正六面体的骰子，出现 3 点朝上

C. 一副去掉大小王的扑克牌洗匀后，从中任抽一张牌的花色是红桃

D. 从一个装有 2 个红球 1 个黑球的袋子中任取一球，取到的是黑球

填空题

6. ［中考 · 泰州］一只不透明的袋子共装有 3 个小球，它们的标号分别为 1，2，3，从中摸出 1 个小球，标号为“4”，这个事件是_____.（填“必然事件”、“不可能事件”或“随机事件”）

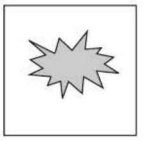
7. ［中考 · 营口］在一个不透明的箱子里装有红色、蓝色、黄色的球共 20 个，除颜色外，形状、大小、质地等完全相同，小明通过多次摸球试验后发现摸到红色、黄色球的频率分别稳定在 10% 和 15%，则箱子里蓝色球的个数很可能是_____个.

8. ［中考 · 淮安］某射手在相同条件下进行射击训练，结果如下：

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1000
击中靶心的频数 m	9	19	37	45	89	181	449	901
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$	0.900	0.950	0.925	0.900	0.890	0.905	0.898	0.901

该射手击中靶心的概率的估计值是_____（精确到 0.01）.

9. ［中考 · 宿迁］如图，为测量平地上一块不规则区域（图中的阴影部分）的面积，画一个边长为 2 m 的正方形，使不规则区域落在正方形内，现向正方形内随机投掷小石子（假设小石子落在正方形内每一点都是等可能的），经过大量重复投掷试验，发现小石子落在不规则区域的频率稳定在常数 0.25 附近，由此可估计不规则区域的面积是_____m^2.


（第 9 题图）

解答题

10. 小颖和小红两位同学在做投掷骰子（质地均匀的正方体）试验，她们共做了 60 次试验，试验的结果如下：

朝上的点数	1	2	3	4	5	6
出现的次数	7	9	6	8	20	10

（1）计算“3 点朝上”的频率和“5 点朝上”的频率.

（2）小颖说：“根据试验得出，出现 5 点朝上的概率最大”；小红说：“如果投掷 600 次，那么出现 3 点朝上的次数正好是 100 次.”小颖和小红的说法正确吗？为什么？

11. 大家看过中央电视台“购物街”节目吗？其中有一个游戏环节是大转轮比赛，转轮上平均分布着 5、10、15、20 一直到 100 共 20 个数字. 选手依次转动转轮，每个人最多有两次机会. 选手转动的数字之和最大不超过 100 者为胜出；若超过 100 则成绩无效，称为“爆掉”.

（1）某选手第一次转到了数字 5，再转第二次，则他两次数字之和为 100 的可能性有多大？

（2）现在某选手第一次转到了数字 65，若再转第二次，则有可能“爆掉”，请你分析“爆掉”的可能性有多大？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9章 中心对称图形——平行四边形

几何图形性质的探秘

数学点拨

你将学到的核心考点

- 图形的旋转 □
- 中心对称与中心对称图形 □
- 平行四边形的性质与判定 □
- 矩形、菱形、正方形的性质与判定 □
- 三角形的中位线定理 □

我们为你提供的核心方法

化不规则为规则法	□	转化思想	□
演绎推理法	□	构造法	□
截长补短法	□	类比思想	□
分类讨论思想	□	数形结合思想	□

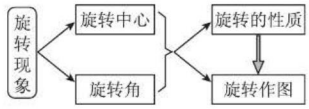
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.1 图形的旋转

热门话题
- 旋转的定义（重点）
- 旋转的性质（难点）
- 旋转作图（关键）

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 旋转的定义

点知识

1. **定义**：将图形绕一个定点旋转一定的角度，这样的图形运动称为图形的旋转. 这一定点叫做**旋转中心**，转动的角叫做**旋转角**.


旋转的定义

要点精析

（1）旋转中心可以在图形的外部，也可以在图形的内部，还可以在图形上.

（2）将一个图形绕一个定点沿某个方向转动一个角度，意味着图形上每一个点同时按相同方向旋转相同的角度.

（3）**旋转的三要素**：**旋转中心**，**旋转角**，**旋转方向**.

2. **相关概念**：旋转得到的图形能与原图形重合，我们把能够重合的点叫**对应点**，能够重合的线段叫**对应线段**，能够重合的角叫**对应角**.

3. **易错警示**：旋转的范围是在平面内，否则就形成立体图形，不是我们研究的范围，因此“在平面内”不可忽略.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：识别旋转现象

例 1 下列现象属于旋转的是（　　）

A. 摩托车在急刹车时向前滑动

B. 飞机起飞后冲向空中的过程

C. 幸运大转盘转动的过程

D. 笔直的铁轨上飞驰而过的火车

导引：根据旋转的定义做出判断.

A. 摩托车在急刹车时向前滑动是平移，故此选项错误；B. 飞机起飞后冲向空中的过程是平移，故此选项错误；C. 幸运大转盘转动的过程是旋转，故此选项正确；D. 笔直的铁轨上飞驰而过的火车是平移，故此选项错误. 故选 C.

▶答案：C

举一反三训练

☞（答案见 255 页）

1. 下列物体的运动不是旋转的是（　　）

A. 坐在摩天轮里的小朋友

B. 正在走动的时针

C. 骑自行车的人

D. 正在转动的风车叶片

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨 技巧

判断一种运动是否属于旋转现象的前提是图形在同一平面内运动，其次要紧扣旋转的“三要素”，看是否同时具有：旋转中心、旋转角、旋转方向.

考查角度2：利用旋转的三要素确定对应关系

例2 如图9.1-1所示，$\triangle ABC$是直角三角形，延长AB到D，使$BD=BC$，在BC上取$BE=AB$，连接DE. $\triangle ABC$旋转后能与$\triangle EBD$重合，那么旋转中心是_____；旋转的角度是_____；AC的对应边是_____；$\angle A$的对应角是_____；点C的对应点是_____.

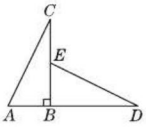
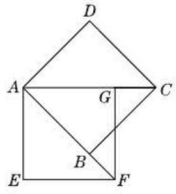


图9.1-1

导引：按照旋转的相关概念进行判断.

▶答案：点B；90°；ED；$\angle BED$；点D

2. 如图所示，正方形$ABCD$经旋转后能与正方形$AEFC$重合，点B在正方形$AEFG$的对角线AF上，哪一点是旋转中心？旋转的角度是多少？点D、C、B的对应点分别是哪个点？线段BC和线段AC的对应线段分别是哪条线段？



（第2题图）

知识点2 旋转的性质

点知识

1. **旋转的性质**：一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心的距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等.

要点精析

(1) 旋转不改变图形的大小和形状，只改变图形的位置，即旋转前后的两个图形一定全等；

(2) 经过旋转，图形上的每一点都绕旋转中心沿相同的方向旋转了相同的角度，任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都是旋转角，对应点到旋转中心的距离相等.

(3) 分析旋转形成的方法：“三个一”，即分析一个中心，一个方向，一个角度.

2. **易错警示**：画旋转图形时容易忽视对旋转方向的要求，除了旋转中心及旋转角之外，还应指明旋转方向是顺时针还是逆时针，若无特别说明，则应考虑两种情况.

点考向

考查角度1：计算旋转角

例3 如图9.1-2，将$\triangle ABC$绕点C按顺时针方向旋转至$\triangle A'B'C$，使点A'落在BC的延长线上，已知$\angle A=30°$，$\angle B=40°$，求旋转角的度数.

3. 如图，$\triangle ABC$绕点B逆时针方向旋转到$\triangle EBD$的位置，若$\angle E=21°$，$\angle C=18°$，点E，B，C在同一直线上，则旋

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

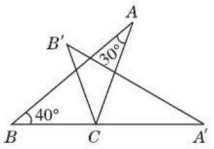


图 9. 1-2

导引：先根据三角形外角的性质求出 $\angle ACA' = 70°$，再由 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转至 $\triangle A'B'C$，得到 $\angle ACA'$ 为旋转角，于是可得旋转角的度数为 70°.

▶解：∵ $\angle A = 30°$，$\angle B = 40°$，∴ $\angle ACA' = \angle A + \angle B = 30° + 40° = 70°$，∵ $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转至 $\triangle A'B'C$，∴ 旋转角的度数为 70°.

点方法

利用旋转求角度的方法： 一般要用到旋转的性质或由旋转而得到的全等关系，以及和角有关的定理（如三角形内角和定理）来解决问题.

考查角度 2：利用旋转的性质计算线段的长

例 4 如图 9. 1-3，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 4$，$BC = 7$，$\angle B = 60°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转一定角度得到 $\triangle ADE$，当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时，则 CD 的长为_____.

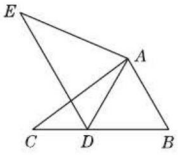


图 9. 1-3

导引：由旋转的性质可证得 $\triangle ABD$ 为等边三角形，则可求得 BD 的长，再利用线段的和差，则可求得答案.

由旋转的性质可得 $AB = AD$，

又∵ $\angle B = 60°$，

∴ $\triangle ABD$ 为等边三角形，

∴ $BD = AB = 4$，

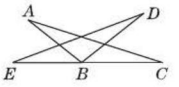
∴ $CD = BC - BD = 7 - 4 = 3$.

▶答案：3

点方法

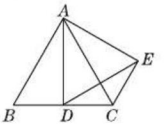
根据旋转的特征，若旋转角为 60°，则一组对应边与旋转角组成的三角形是等边三角形. 然后利用等边三角形的特殊性求线段的长度.

转角的度数是_____.



（第 3 题图）

4. 如图，在等边三角形 ABC 中，$AB = 6$，D 是 BC 的中点，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$，求线段 DE 的长度.



（第 4 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 旋转作图

点知识

1. **作一个图形的旋转图形的依据是旋转的性质**：对应点到**旋转中心**的距离相等，每组**对应点**与旋转中心连线所形成的角都相等.
2. **简单旋转作图的一般步骤**：(1)找出图形的关键点；(2)确定**旋转中心**，**旋转方向**和**旋转角**；(3)将关键点与旋转中心连接起来，然后按旋转方向分别将它们旋转一个角，得到关键点的**对应点**；(4)按照原图形的顺序连接这些对应点，所得到的图形就是旋转后的图形.
3. 画旋转图形时，必须明确：(1)旋转中心；(2)旋转角；(3)旋转方向.

拨考向

考查角度1：旋转作图

例5 如图9.1-4，$\triangle ABC$ 绕点 O 旋转，使点 A 旋转到点 D 处，画出顺时针旋转后的三角形，并写出简要作法.

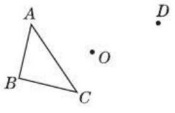


图9.1-4

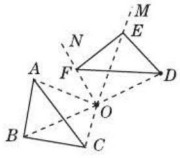


图9.1-5

导引：抓住“关键点”A,B,C,D，旋转中心 O，旋转角这些要素，按步骤“连——转——截——连”即可得出所求作的三角形.

▸解：作法：(1)连接 OA,OB,OC,OD；

(2)分别以 OB,OC 为边作 $\angle BOM=\angle CON=\angle AOD$；

(3)分别在 OM,ON 上截取 $OE=OB,OF=OC$；

(4)依次连接 DE,EF,FD，$\triangle DEF$ 就是所求作的三角形，如图9.1-5所示.

点方法

旋转作图时，要紧扣以下三点：

(1)旋转的方向相同；

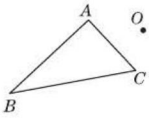
(2)旋转的角度相等；

(3)对应点到旋转中心的距离相等.

考查角度2：直角坐标系中的图形旋转

例6 [中考·山西]如图9.1-6，已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(0,4)$，$B(-1,1)$，$C(-2,2)$，将 $\triangle ABC$ 向右平移4个单位，得到 $\triangle A'B'C'$，点 A,B,C 的对应点分别为 A'、B'、C'，再将 $\triangle A'B'C'$ 绕点 B' 顺时针旋转90°，得到 $\triangle A''B''C''$，点 A'、B'、C' 的对应点分别为 A''、B''、C''，则点 A'' 的坐标为_____.

5. $\triangle ABC$ 绕点 O 顺时针旋转90°得 $\triangle A'B'C'$，请作出 $\triangle A'B'C'$.(不写作法，保留作图痕迹)



(第5题图)

6. [中考·贺州]如图，将线段 AB 绕点 O 顺时针旋转90°得到线段 $A'B'$，那么 $A(-2,5)$ 的对

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

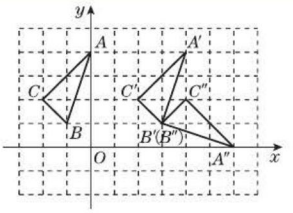


图 9.1-6

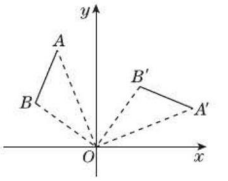
导引：如图 9.1-6 所示，∵ $A(0,4)$，$B(-1,1)$，$C(-2,2)$，将 $\triangle ABC$ 向右平移 4 个单位，得到 $\triangle A'B'C'$，∴ 点 A'，B'，C' 的坐标分别为 $(4,4)$，$(3,1)$，$(2,2)$，再将 $\triangle A'B'C'$ 绕点 B' 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle A''B''C''$，则点 A'' 的坐标为 $(6,0)$.

▶答案：$(6,0)$

点方法

平面直角坐标系内一点 (a,b) 绕原点按逆时针方向旋转 90°，180°，270° 后得到的点的坐标分别为 $(-b,a)$，$(-a,-b)$，$(b,-a)$.

应点 A' 的坐标是（　　）



（第 6 题图）

A. $(2,5)$

B. $(5,2)$

C. $(2,-5)$

D. $(5,-2)$

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1：确定旋转中心

例 7 如图 9.1-7，已知 $\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 经过顺时针旋转而得到的. 试在图中用尺规作图的方法，画出旋转中心 O.

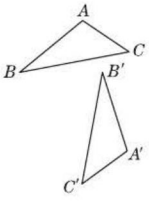


图 9.1-7

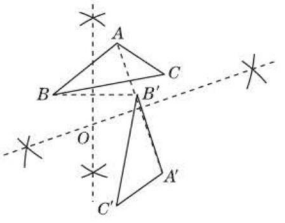


图 9.1-8

导引：根据对应点所连线段的垂直平分线的交点就是旋转中心即可找到旋转中心.

▶解：如图 9.1-8，连接 BB'，AA'，线段 BB'、AA' 的垂直平分线的交点 O 就是旋转中心.

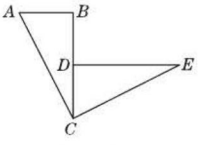
点方法

确定旋转中心的方法： 一般地，图形旋转前后对应点所连线段的垂直平分线交于一点，这点就是旋转中心.

举一反三训练

☞（答案见 256 页）

7. 如图，已知：B、C、D 三点共线，$\angle ABC=\angle CDE=90°$，$\triangle ABC\cong\triangle CDE$，并且 $\triangle CDE$ 可由 $\triangle ABC$ 逆时针旋转而得到. 请你利用尺规作出旋转中心 O（保留作图痕迹，不写作法），并直接写出旋转角的度数.



（第 7 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2：利用旋转的性质求角度

例8　［中考·菏泽］如图9.1-9，将Rt△ABC绕直角顶点C顺时针旋转90°，得到△$A'B'C$，连接AA'，若∠1 = 25°，则∠BAA'的度数是(　　)

A. 55°　　B. 60°　　C. 65°　　D. 70°

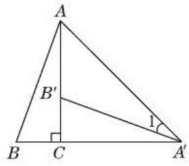


图9.1-9

导引：根据旋转的性质可得$AC = A'C$，∠$A'CB'$ = 90°，然后判断出△ACA'是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可得∠$CA'A$ = ∠CAA' = 45°，再根据∠BAC = ∠$B'A'C$ = 45° − ∠1，∠BAA' = ∠BAC + ∠CAA'可得结果. 具体解题过程如下：

∵ Rt△ABC绕直角顶点C顺时针旋转90°得到△$A'B'C$，

∴ $AC = A'C$，∠$A'CB'$ = 90°，

∴ △ACA'是等腰直角三角形，

∴ ∠$CA'A$ = ∠CAA' = 45°，∴ ∠BAC = ∠$B'A'C$ = 45° − ∠1 = 20°，

∴ ∠BAA' = ∠BAC + ∠CAA' = 20° + 45° = 65°，故选C.

▶答案：C

点方法

在解答旋转问题过程中要紧抓对应点到旋转中心的距离相等，对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角，旋转前、后的图形全等，因而这样的图形中往往存在等腰三角形.

拔尖角度3：利用旋转的性质作图并计算

例9　如图9.1-10，已知△ABC中，∠C = 90°，$AC = BC = \sqrt{2}$，将△ABC绕点A顺时针方向旋转60°到△$AB'C'$的位置，连接$C'B$.

(1)请你在图中把图补画完整；

(2)求$C'B$的长.

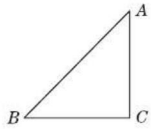


图9.1-10

导引：(1)根据题意作出图形即可；

(2)连接BB'，延长BC'交AB'于点M；根据全等三角形的性质得到∠MBB' = ∠MBA = 30°；求出BM、$C'M$的长，即可解决问题.

▶解：(1)如图9.1-11所示.

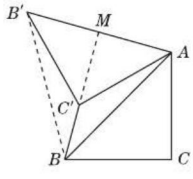
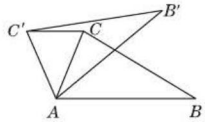


图9.1-11

8. 如图，在△ABC中，∠CAB = 70°，在同一平面内，将△ABC绕点A旋转到△$AB'C'$的位置，使得CC' // AB，则∠BAB' = _____.

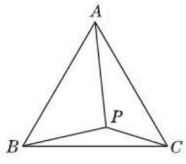


(第8题图)

9. 如图，在等边三角形ABC内有一点P，且$PA = 2$，$PB = \sqrt{3}$，$PC = 1$.

(1)画出△PBC绕点B逆时针旋转60°后的图形(保留作图痕迹，不写画法)；

(2)求∠BPC的度数.



(第9题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图 9. 1-11,连接 BB',延长 BC' 交 AB' 于点 M.

由题意得:$\angle BAB' = 60°$,$BA = B'A$,

$\therefore$ $\triangle ABB'$ 为等边三角形,$\therefore$ $\angle ABB' = 60°$,$AB = B'B$.

在 $\triangle ABC'$ 与 $\triangle B'BC'$ 中,$\begin{cases} AC' = B'C', \\ AB = B'B, \\ BC' = BC', \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABC' \cong \triangle B'BC'$(SSS),

$\therefore$ $\angle MBB' = \angle MBA = 30°$,

$\therefore$ $BM \perp AB'$,且 $AM = B'M$;

由题意得:$AB^2 = 4$,

$\therefore$ $AB' = AB = 2$,$AM = 1$,

$\therefore$ $C'M = \frac{1}{2}AB' = 1$. 由勾股定理可求得 $BM = \sqrt{3}$,

$\therefore$ $C'B = \sqrt{3} - 1$.

点方法

旋转作图的关键是抓住对应点到旋转中心的距离相等，先作图，再截取. 旋转 60°问题是旋转问题中的常考类型，解答这类问题要重点关注旋转 60°问题中的等边三角形.

拔尖角度 4:利用旋转求面积

例 10 如图 9. 1-12(1),把两个全等的等腰直角三角板 ABC 和等腰直角三角板 EFG(其直角边长均为 4)叠放在一起,且使三角板 EFG 的直角顶点 G 与三角板 ABC 的斜边中点 O 重合,现将三角板 EFG 绕点 O 按顺时针方向旋转(旋转角 α 满足条件:$0° < \alpha < 90°$),四边形 $CHGK$ 是旋转过程中两三角板的重叠部分,如图 9. 1-12(2).

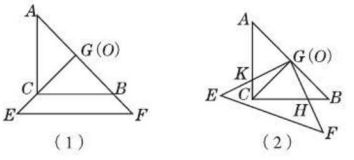


图 9. 1-12

在上述旋转过程中,BH 与 CK 有怎样的数量关系?四边形 $CHGK$ 的面积有何变化?请证明你的结论.

▶解:在上述旋转过程中,$BH = CK$,四边形 $CHGK$ 的面积不变.

证明:$\because$ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,O 为斜边中点,

$\therefore$ $CG = BG$,$CG \perp AB$.

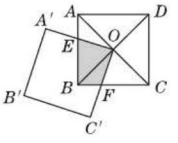
$\therefore$ $\angle ACG = \angle CBG = 45°$.

$\because$ $\angle BGH$ 与 $\angle CGK$ 均为旋转角,$\therefore$ $\angle BGH = \angle CGK$.

$\therefore$ $\triangle CGK$ 可以看成是由 $\triangle BGH$ 绕点 O 顺时针旋转而得到的.

$\therefore$ $BH = CK$,$S_{\triangle CGK} = S_{\triangle BGH}$.

10. 如图,正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,点 O 是正方形 $A'B'C'O$ 的一个顶点,如果两个正方形的边长相等,那么正方形 $A'B'C'O$ 绕顶点 O 无论怎样转动,两个正方形重叠部分(四边形 $EOFB$)的面积总等于一个正方形面积的 $\frac{1}{4}$,你能说明为什么吗?



(第 10 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{四边形CHGK} = S_{\triangle CGK} + S_{\triangle CGH} = S_{\triangle BGH} + S_{\triangle CGH} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4$,

即四边形 $CHGK$ 的面积在旋转过程中没有变化，始终为 4.

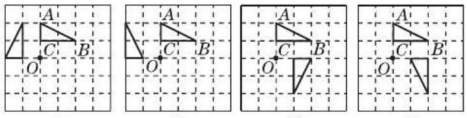
点方法

利用旋转变换的特征，将不规则图形的面积转化为规则图形的面积，即利用**化不规则为规则法**求图形的面积，这种方法在求面积问题时，能将很难甚至不可求的面积巧妙地求出来.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见 256 页)

基础巩固练

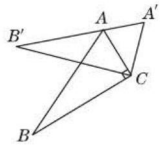
1. 如图，在正方形网格中有 $\triangle ABC$，$\triangle ABC$ 绕 O 点按逆时针旋转 90°后的图案应该是(　　)



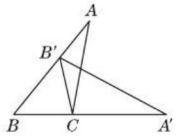
A　　B　　C　　D

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle ABC = 25°$，以点 C 为旋转中心顺时针旋转后得到 $\triangle A'B'C$，且点 A 在边 $A'B'$ 上，则旋转角的度数为(　　)

A. 65°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 40°



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3. [中考 · 聊城] 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，使点 B 落在 AB 边上的点 B' 处，此时，点 A 的对应点 A' 恰好落在 BC 边的延长线上，下列结论错误的是(　　)

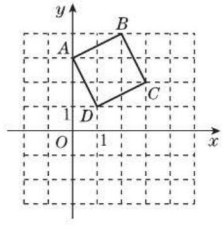
A. $\angle BCB' = \angle ACA'$

B. $\angle ACB = 2\angle B$

C. $\angle B'CA = \angle B'AC$

D. $B'C$ 平分 $\angle BB'A'$

4. 正方形 $ABCD$ 在坐标系中的位置如图所示，将正方形 $ABCD$ 绕 D 点顺时针旋转 90°后，B 点的对应点的坐标为(　　)

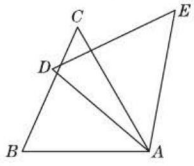


(第 4 题图)

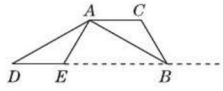
A. $(-2,2)$　　B. $(4,1)$

C. $(3,1)$　　D. $(4,0)$

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 60°$，将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转 40°后得到 $\triangle ADE$，则 $\angle BAE =$ _____.



(第 5 题图)



(第 6 题图)

6. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 120°，得到 $\triangle ADE$. 这时点 D、E、B 恰好在同一直线上，则 $\angle ABC$ 的度数为_____.

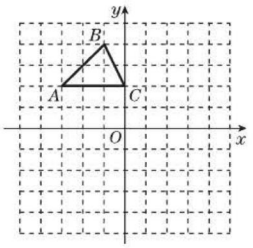
7. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(-3,2)$，$B(-1,4)$，$C(0,2)$.

(1) 将 $\triangle ABC$ 以点 C 为旋转中心旋转 180°，画出旋转后对应的 $\triangle A_1B_1C$；

(2) 平移 $\triangle ABC$，若 A 的对应点 A_2 的坐标为 $(-5,-2)$，画出平移后的 $\triangle A_2B_2C_2$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

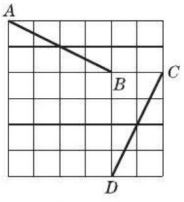
（3）若将 $\triangle A_2B_2C_2$ 绕某一点旋转可以得到 $\triangle A_1B_1C$，请直接写出旋转中心的坐标.



（第 7 题图）

能力提升练

8. 如图，线段 AB 两端点的坐标分别为 $A(-1,5)$、$B(3,3)$，线段 CD 两端点的坐标分别为 $C(5,3)$、$D(3,-1)$，数学课外兴趣小组研究这两线段发现：其中一条线段绕着某点旋转一个角度可得到另一条线段，则旋转中心的坐标为_____.

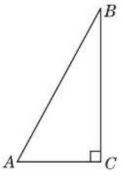


（第 8 题图）

9. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=b$，$BC=a$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 $90°$，点 B 旋转到点 B'，点 A 旋转到点 A'.

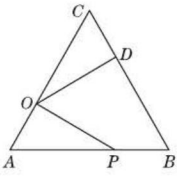
（1）在图中画出旋转后的图形；

（2）连接 BB'，求 $\triangle BB'A'$ 的面积（用含 a、b 的代数式表示）.



（第 9 题图）

10. 如图，在等边三角形 ABC 中，$AC=9$，点 O 在 AC 上，且 $AO=3$，点 P 是 AB 上的一动点，连接 OP，将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 $60°$ 得到线段 OD，要使点 D 恰好落在 BC 上，求 AP 的长.



（第 10 题图）

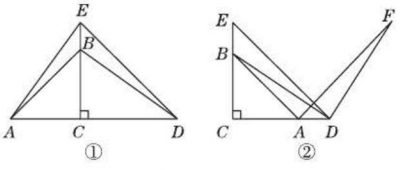
思维拓展练

11. ［中考 · 莱芜］已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 是两个大小不同的等腰直角三角形.

【导学号：9937991】

（1）如图①所示，连接 AE，DB，试判断线段 AE 和 DB 的数量和位置关系，并说明理由；

（2）如图②所示，连接 DB，将线段 DB 绕 D 点顺时针旋转 $90°$ 到 DF，连接 AF，试判断线段 DE 和 AF 的数量和位置关系，并说明理由.



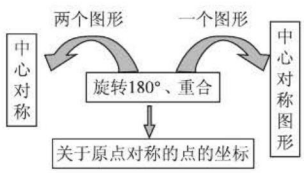
（第 11 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.2 中心对称与中心对称图形

热门话题
- 中心对称(重点)
- 中心对称的性质(重点)
- 中心对称图形(难点)

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 中心对称

点知识

1. **中心对称及相关概念:**

一个图形绕着某一点旋转**180°**,如果它能够与**另一个图形**重合,那么称这两个图形关于这点对称,也称这两个图形成中心对称,这个点叫做**对称中心**.这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的对称点.

要点精析 ///

(1)中心对称是特殊的旋转,其旋转角为180°;

(2)中心对称是指两个图形的位置关系,必须涉及两个图形,其中一个图形绕对称中心旋转180°后一定能与另一个图形重合;

(3)成中心对称的两个图形对称中心可能在每个图形的外部,也可能在每个图形的内部或边上,但对称点一定在对称中心的两侧或与对称中心重合.

2. **中心对称的性质:**

成中心对称的两个图形中,对应点的连线经过**对称中心**,且被对称中心**平分**.

要点精析 ///

(1)成中心对称的两个图形是**全等图形**,对应角相等,对应线段平行(或在同一直线上)且相等.

(2)如果两个图形的所有对应点所连线段都经过某一点,并且被这一点平分,那么这两个图形关于这点成中心对称.

(3)成中心对称的两个图形中,连接任意两对对称点,两条线段的交点就是对称中心.

拨考向

典例剖析

考查角度1:根据中心对称的性质作图

例1 如图9.2-1,已知四边形$ABCD$和点O,画四边形$A'B'C'D'$,使四边形$A'B'C'D'$与四边形$ABCD$关于点O成中心对称.

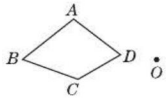
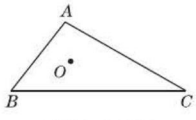


图9.2-1

举一反三训练

(答案见257页)

1. 如图,已知$\triangle ABC$和$\triangle ABC$内一点O.



(第1题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：要作四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，只要作出点 A,B,C,D 关于点 O 的对称点，然后顺次连接即可.

▶解：(1) 连接 AO 并延长 AO 到 A'，使 $OA'=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对称点 A'.

(2) 同样分别画出点 B,C 和点 D 关于点 O 的对称点 B',C' 和 D'.

(3) 顺次连接 $A'B',B'C',C'D',D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求作的图形. 如图 9.2-2 所示.

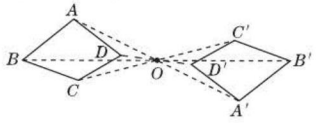


图 9.2-2

点方法

根据中心对称的性质作已知图形关于某点成中心对称的图形的关键是作出某些特殊点的对称点. 作图步骤：（1）连接原图形上的特殊点和对称中心；（2）再将以上各线段延长找对称点，使得特殊点与对称中心的距离和其对称点与对称中心的距离相等；（3）将对称点按原图形的形状连接起来，即可得出原图形关于某点成中心对称的图形.

考查角度 2：根据中心对称的性质找对称中心

例 2 如图 9.2-3，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 成中心对称，试画出它们的对称中心 O，并简要说明理由.

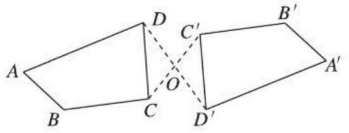


图 9.2-3

导引：根据中心对称的性质知，对称中心应该在对称点连线上并且平分对称点所连线段，只需连接对称点，这些连线的交点即为对称中心.

▶解：如图 9.2-3 所示.

理由：成中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心平分.

点方法

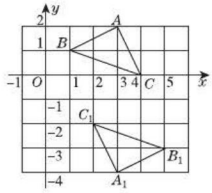
(1) **找对称中心的方法：** 本例的方法是连接两对对称点，其交点即为对称中心，还可以连接任意一对对称点，这条线段的中点即为对称中心.

(2) 确定两个图形是否成中心对称，只需看其所有对应点的连线是否过同一点，并且被这点平分即可.

(1) 求作 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称；

(2) 指出 AB、BC、AC 的对应线段，以及各对应角.

2. 如图，在平面直角坐标系中，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 E 点成中心对称，则对称中心 E 点的坐标是（　　）



（第 2 题图）

A. $(3,-1)$

B. $(0,0)$

C. $(2,-1)$

D. $(-1,3)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 中心对称图形

点知识

1. **定义**:把一个图形绕着某一个点旋转180°,如果旋转后的图形能够与**原来的图形**重合,那么这个图形叫做中心对称图形,这个点就是它的**对称中心**.

要点精析

(1)中心对称图形的对称中心一定在图形内;

(2)中心对称图形是针对一个图形而言的;

(3)中心对称图形上所有的点关于对称中心的对称点都在这个图形上;

(4)中心对称图形一定是旋转对称图形,但旋转对称图形不一定是中心对称图形;

(5)常见的中心对称图形有:平行四边形、矩形、菱形、正方形、圆、线段、边数是偶数的正多边形(矩形、菱形后面学到).


中心对称图形的识别

2. **拓展**:过中心对称图形对称中心的直线将图形分成全等的两部分.

拨考向

考查角度:识别中心对称图形

例3 [中考·德州]下列图形中,既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)


A　　B　　C　　D

导引:根据轴对称图形与中心对称图形的概念判断.

A是中心对称图形;B既是轴对称图形又是中心对称图形;C是轴对称图形;D既不是轴对称图形又不是中心对称图形,故选B.

▶答案:B

点方法

判断一个图形是不是轴对称图形,就看是否存在一条直线(对称轴),使得这个图形沿这条直线对折后两边能完全重合;判断一个图形是不是中心对称图形,可以把纸倒过来看(相当于旋转180°),如果看到的图形与原来的图形完全相同,就是中心对称图形,否则就不是.

3. [中考·泰州]把下列英文字母看成图形,既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)


E　　F　　H　　S
A　　B　　C　　D

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拔尖角度1:利用中心对称的性质等分不规则图形的面积

例4 有一块方角形钢板如图9.2-4所示,如何用一条直线将其分为面积相等的两部分.

举一反三训练

☞(答案见257页)

4. 如图,在平行四边形的纸片上有一个圆洞,请画一条直线把纸片分成

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

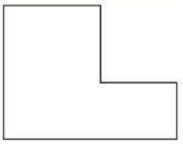


图 9.2-4

导引：思路 1：先将图形分割成两个长方形，分别找出各自的对称中心，过两个对称中心作直线即可；

思路 2：先将图形补充成一个大长方形，分别找出一个正方形和一个长方形各自的对称中心，过两个对称中心作直线即可.

▶解：如图 9.2-5 所示.

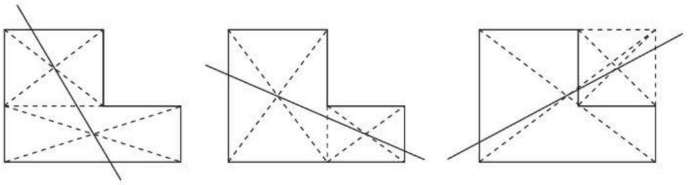


图 9.2-5

点方法

经过中心对称图形的对称中心的直线将中心对称图形分成面积相等的两部分，本题首先将原图形分割成两个中心对称图形，再根据“两点确定一条直线”找出符合条件的直线.

拔尖角度 2：根据轴对称图形和中心对称图形的性质设计图案

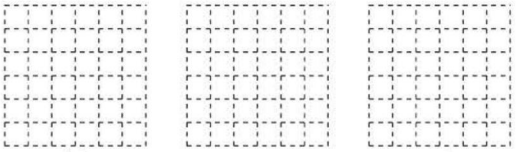
例 5 如图 9.2-6，有四张全等的直角三角形纸片，直角边长分别是 1，2，请利用这四张纸片按下列要求在 6 × 6 的方格纸（每个小正方形的边长为 1）中各拼一个图形，直角顶点在格点上.

（1）图甲中作出是轴对称图形而不是中心对称图形；

（2）图乙中作出是中心对称图形而不是轴对称图形；

（3）图丙中作出既是轴对称图形又是中心对称图形.

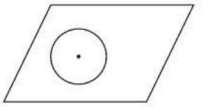




甲　乙　丙

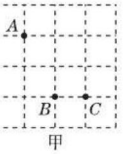
图 9.2-6

面积相等的两部分.

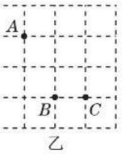


（第 4 题图）

5. 如图，方格纸中有三个点 A，B，C，要求作一个四边形使这三个点在这个四边形的边（包括顶点）上，且四边形的顶点在方格的顶点上.



甲



乙

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：(1)可以把这四个三角形拼成两个等腰三角形，如图甲所示；

(2)可以把这四个三角形拼成一个风车形状，如图乙所示；

(3)可以把这四个三角形拼成一个如图丙所示的图形.

▶解：作图如图9.2-7：(答案不唯一)

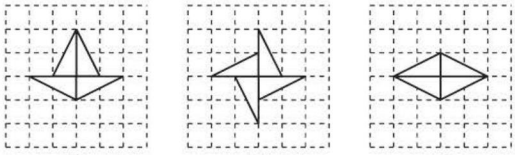


图9.2-7

点方法

本题综合考查了中心对称图形及轴对称图形的性质，解答本题的关键是注意轴对称图形和中心对称图形的区别. 轴对称图形是把其中的一个图形沿着某条直线折叠，能够与原图形重合. 中心对称图形是把一个图形绕着某个点旋转180°能够和原图形重合.

拔尖角度3：根据中心对称图形的性质计算面积

例6 [中考·乐山] 如图9.2-8，直线a、b垂直相交于点O，曲线C关于点O成中心对称，点A的对称点是点A'，$AB\perp a$于点B，$A'D\perp b$于点D. 若$OB=3$，$OD=2$，则阴影部分的面积之和为_____.

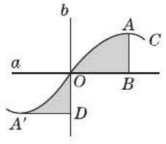


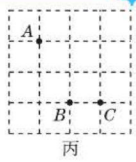
图9.2-8

导引：∵直线a、b垂直相交于点O，曲线C关于点O成中心对称，点A的对称点是点A'，$AB\perp a$于点B，$A'D\perp b$于点D，$OB=3$，$OD=2$，∴$AB=2$，∴阴影部分的面积之和为$3\times2=6$.

▶答案：6

点方法

计算这类不规则图形面积问题的基本思路是转化，即将不规则图形的面积转化为规则图形的面积.



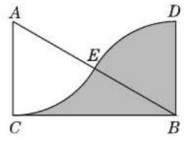
(第5题图)

(1)在甲图中作出的四边形是中心对称图形但不是轴对称图形；

(2)在乙图中作出的四边形是轴对称图形但不是中心对称图形；

(3)在丙图中作出的四边形既是轴对称图形又是中心对称图形.

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$BC=2\sqrt{3}$，$AC=2$，若扇形ACE与扇形BDE关于点E中心对称，则图中阴影部分的面积为_____.



(第6题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨尖角度 4：中心对称与函数综合问题（拓展点）

例 7 如图 9.2-9，已知长方形 $ABCD$ 的各顶点分别为 $A(0,4)$，$B(2,0)$，$C(8,3)$，$D(6,7)$，直线 $y=kx+1$ 平分长方形 $ABCD$ 的面积，求 k 的值.

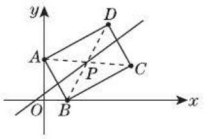


图 9.2-9

▶解：如图 9.2-9，连接 AC，BD，其交点 P 即为长方形 $ABCD$ 的对称中心，易求得点 P 的坐标为 $\left(4,\frac{7}{2}\right)$.

又∵ 直线 $y=kx+1$ 平分长方形 $ABCD$ 的面积，

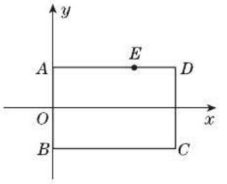
∴ 该直线一定过点 $P\left(4,\frac{7}{2}\right)$.

∴ $4k+1=\frac{7}{2}$，解得 $k=\frac{5}{8}$.

点方法

长方形是中心对称图形，对角线的交点是对称中心；经过对称中心的任何一条直线都将中心对称图形分成面积相等的两部分.

7. 如图，已知长方形 $ABCD$，AB 边在 y 轴上，$AB=2$，$BC=3$，点 A 的坐标为 $(0,1)$，在 AD 边上有一点 $E(2,1)$，过点 E 的直线与 BC 交于点 F. 若 EF 平分长方形 $ABCD$ 的面积，则直线 EF 的表达式为_____.

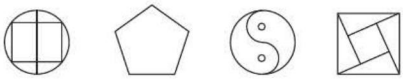


（第 7 题图）

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 258 页）

基础巩固练

1. [中考 · 巴彦淖尔] 下列四个图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）



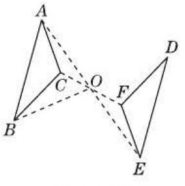
2. 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 关于点 O 对称，相应的对称点如图所示，则下列结论正确的是（　　）

A. $AO=BO$

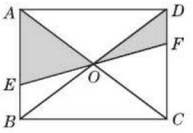
B. $BO=EO$

C. 点 A 关于点 O 的对称点是点 D

D. 点 D 在 BO 的延长线上



（第 2 题图）



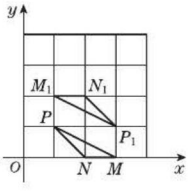
（第 3 题图）

3. 如图所示，EF 过长方形 $ABCD$ 对角线的交点 O，且分别交 AB，CD 于点 E，F，若 $AB=3$，$BC=4$，则阴影部分的面积为（　　）

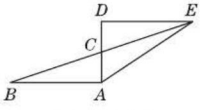
A. 4　　B. 12　　C. 6　　D. 3

4. [中考 · 宜宾] 在平面直角坐标系中，点 $M(3,-1)$ 关于原点的对称点的坐标是_____.

5. 如图，在平面直角坐标系中，点 $P(1,1)$，$N(2,0)$，$\triangle MNP$ 和 $\triangle M_1N_1P_1$ 的顶点都在格点上，$\triangle MNP$ 与 $\triangle M_1N_1P_1$ 是关于某一点中心对称，则对称中心的坐标为_____.



（第 5 题图）

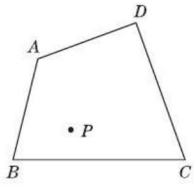


（第 6 题图）

6. 如图，已知 $AB=3$，$AC=1$，$\angle D=90°$，$\triangle DEC$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 C 成中心对称，则 AE 的长是_____.

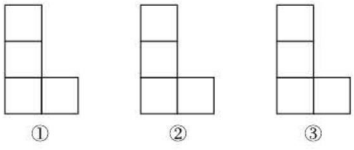
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，已知四边形 $ABCD$ 和点 P，用尺规作出四边形 $ABCD$ 关于点 P 成中心对称的四边形 $A'B'C'D'$（不写作法，保留作图痕迹）.



（第 7 题图）

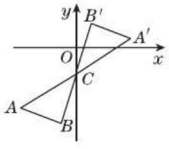
8. 如图，由 4 个全等的正方形组成的 L 形图案，请按下列要求画图：
   （1）在图案①中添加 1 个正方形，使它成为轴对称图形（不能是中心对称图形）；
   （2）在图案②中添加 1 个正方形，使它成为中心对称图形（不能是轴对称图形）；
   （3）在图案③中改变 1 个正方形的位置，从而得到一个新图形，使它既是中心对称图形，又是轴对称图形.



（第 8 题图）

能力提升练

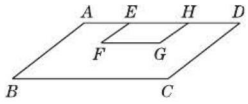
9. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 $C(0,-1)$ 旋转 $180°$ 得到 $\triangle A'B'C$，设点 A' 的坐标为 (a,b)，则点 A 的坐标为（　　）



（第 9 题图）

A. $(-a,-b)$　　B. $(-a,-b-1)$
C. $(-a,-b+1)$　　D. $(-a,-b-2)$

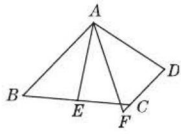
10. 如图是一块平行四边形土地 $ABCD$，后来在其边缘挖了一个小平行四边形水塘 $EFGH$，现准备将剩余的地分成两块，并使其满足：两块地的面积相等，分割线恰好做成水渠，便于灌溉，请你在图中画出分割线（保留作图痕迹）.



（第 10 题图）

思维拓展练

11. ［探究题］如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，E 为 BC 边的中点，$\angle BAE = \angle EAF$，AF 与 DC 的延长线相交于点 F.
   （1）作出 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称的图形；
   （2）探究线段 AB 与 AF，CF 之间的数量关系，并证明你的结论.



（第 11 题图）

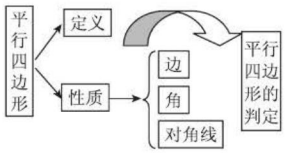
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.3 平行四边形

热门话题
- 平行四边形的定义(关键)
- 平行四边形的性质(重点)
- 平行四边形的判定(重点)

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点1 平行四边形的定义及其表示方法

点知识

1. **定义**：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.
2. **表示方法**：平行四边形用符号“$\square$”表示，如图9.3-1，平行四边形$ABCD$记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形$ABCD$”.

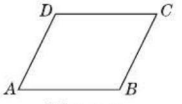


图9.3-1

要点精析 (1) **平行四边形的定义有两个要素**：①定义的对象首先是四边形；②两组对边分别平行.

作为四边形，平行四边形具有一般四边形的一切性质，如有四条边，四个内角，两条对角线，内角和为360°，外角和为360°等.

作为平行四边形，它区别于其他一般四边形的特殊性质为：平行四边形的两组对边分别平行；

(2) **平行四边形的定义既是它的一个性质，又是它的一种判定方法**：∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$\begin{cases}AB\parallel CD,\\AD\parallel BC;\end{cases}$反过来，∵$\begin{cases}AB\parallel CD,\\AD\parallel BC,\end{cases}$

∴四边形$ABCD$是平行四边形.

3. **易错警示**：平行四边形的表示要按一定的方向依次表示各个顶点，它既可以按顺时针方向排列字母顺序，也可以按逆时针方向排列字母顺序，但不能打乱顺序.

拨考向

典例剖析

考查角度1：利用平行四边形的定义识别四边形

例1 如图9.3-2，在$\square ABCD$中，过点P作直线EF，GH分别平行于AB，BC，那么图中共有_____个平行四边形.

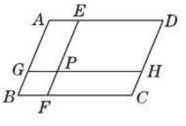


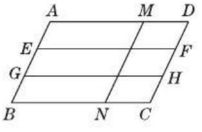
图9.3-2

导引：根据平行四边形的定义，知$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，由已知条件可知，$EF\parallel AB$，$GH\parallel BC$，所以根据平行四边形的定义可以判定四边形$ABFE$和四边形$GBCH$都是平行四边形，同理可判定四边形$EFCD$、四边形$AGHD$、四边形$AGPE$、四边形$EPHD$、四边形$GBFP$、四边形$PFCH$都是平行四边形，最后还要加上$\square ABCD$，即共有9个平行四边形. ▶答案：9

举一反三训练

☞(答案见258页)

1. 如图，在$\square ABCD$中，$EF\parallel GH\parallel BC$，$MN\parallel AB$，则图中平行四边形的个数是(　　)



(第1题图)

A. 13　　B. 14

C. 15　　D. 18

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

对于几何计数问题，要按照一定的顺序（如从小到大等）分类计数，做到不重复不遗漏.

考查角度2：利用平行四边形的定义证明平行四边形

例2 如图9.3-3，在$\square ABCD$中，$\angle 1=\angle 2$，求证：四边形$BEDF$是平行四边形.

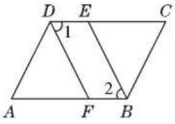


图9.3-3

导引：要证四边形$BEDF$是平行四边形，由定义知需证：$DE\parallel BF$及$DF\parallel BE$，其中$DE\parallel BF$可由$\square ABCD$的性质直接得出，而$DF\parallel BE$可通过证$\angle 2=\angle DFA$推出.

▶证明：∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $CD\parallel AB$（平行四边形的两组对边分别平行），即$DE\parallel BF$.

∴ $\angle 1=\angle DFA$.

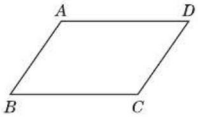
∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle 2=\angle DFA$. ∴ $DF\parallel BE$.

∴ 四边形$BEDF$是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

点方法

当题目的条件中有平行四边形时，应立即想到两组对边分别平行；当题目的结论中有要证的平行四边形时，首先应联想到它的两组对边是否分别平行.

2. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=\angle D$，$AD\parallel BC$，求证：四边形$ABCD$是平行四边形.



（第2题图）

知识点2 平行四边形的性质

点知识

1. **对称性**：平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

2. **边的性质**：平行四边形的对边平行；平行四边形的对边相等.

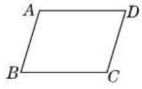


图9.3-4

几何表述：如图9.3-4，

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

3. **角的性质**：平行四边形的对角相等；平行四边形的邻角互补.



几何表述：如图9.3-4，∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle A+\angle B=180°$，$\angle B+\angle C=180°$，$\angle C+\angle D=180°$，$\angle A+\angle D=180°$.

要点精析 ///

由于组成平行四边形的元素有边和角，因此讨论其性质也应从边和角这两个方面去看.

（1）**从边看**：平行四边形的对边平行且相等；

（2）**从角看**：平行四边形的对角相等、邻角互补.

4. **对角线的性质**：平行四边形的对角线互相平分.

几何表述：如图9.3-5，∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，对角线AC，BD相交于点O，∴ $OA=OC$，$OB=OD$.

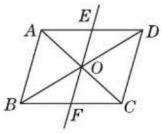


图9.3-5

要点精析 ///

（1）平行四边形的两条对角线把它分割成四个面积相等的三角形；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

几何表述：如图 9.3-5，∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC，BD 相交于点 O，∴ $S_{\triangle ABO}=S_{\triangle BCO}=S_{\triangle CDO}=S_{\triangle ADO}$.

(2) 若一条直线过平行四边形两条对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积.

几何表述：如图 9.3-5，∵ 直线 EF 过平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点 O，

∴ $AE+AB+BF=FC+CD+DE=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$.

$S_{四边形ABFE}=S_{四边形FCDE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

5. **易错警示**：已知平行四边形得出什么性质，要根据推理证明的需要，合理选用需要的性质.

拓考向 ▶▶▶

考查角度 1：利用平行四边形的性质计算线段长

例 3 ［中考 · 铁岭］在 $\square ABCD$ 中，$\angle DAB$ 的平分线交直线 CD 于点 E，且 $DE=5$，$CE=3$，则 $\square ABCD$ 的周长为_____.

导引：本题分两种情况，如图 9.3-6，当点 E 在线段 DC 上和在线段 DC 的延长线上，易证得 $\triangle ADE$ 是等腰三角形，所以可得 $AD=DE$，再求出 DC 的长，继而求得答案.

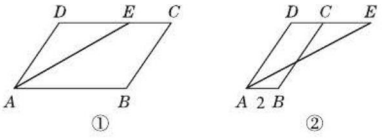


图 9.3-6

具体解题过程如下：

如图 9.3-6①，当点 E 在线段 DC 上时，∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB\parallel DC$，$AB=CD=DE+CE=8$，

∴ $\angle BAE=\angle DEA$，

∵ AE 平分 $\angle BAD$，

∴ $\angle BAE=\angle EAD$，

∴ $\angle DEA=\angle EAD$，

∴ $DE=AD=5$，

∴ $\square ABCD$ 的周长 $=2(AD+AB)=2\times 13=26$.

如图 9.3-6②，当点 E 在 DC 的延长线上时，

易得 $\square ABCD$ 的周长 $=2(AD+AB)=14$，

故答案为：26 或 14.

▶答案：26 或 14

点方法

当平行线、角平分线同时出现时，可以得到等腰三角形，同时本题由于图形没有给出，因而需分类讨论.

3. 已知：平行四边形 $ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于 E，CF 平分 $\angle BCD$ 交 AD 于 F. 若 $AB=3$，$EF=1$，则 $AD=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：根据平行线的性质求角度

例4 如图9.3-7，在$\square ABCD$中，已知$\angle A+\angle C=120°$，求$\square ABCD$各角的度数.

导引：由平行四边形的对角相等，得$\angle A=\angle C$，结合已知条件$\angle A+\angle C=120°$，即可求出$\angle A$和$\angle C$的度数，再根据平行线的性质，进而求出$\angle B$，$\angle D$的度数.

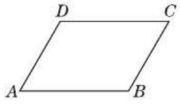


图9.3-7

▶解：在$\square ABCD$中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$\angle A+\angle D=180°$.

$\because \angle A+\angle C=120°$，

$\therefore \angle A=\angle C=60°$.

$\because \angle D=180°-\angle A=180°-60°=120°$，

$\therefore \angle B=\angle D=120°$.

点方法

求平行四边形中有关角度的方法：利用平行四边形的对角相等、邻角互补的性质，在已知一个角的度数或已知两角的度数关系时可求出待求角的度数.

考查角度3：根据平行四边形对角线的性质计算线段的长

例5 如图9.3-8，已知$\square ABCD$的周长是60，对角线AC，BD相交于点O. 若$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长长8，求这个平行四边形各边的长.

导引：由平行四边形对边相等可知，$2AB+2BC=60$，所以$AB+BC=30$. 又由$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长长8，可知$AB-BC=8$，联立以上两式，即可求出各边的长.

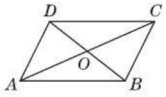


图9.3-8

▶解：$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC$，$AB=CD$，$AD=BC$.

$\because AB+BC+CD+DA=60$，

$OA+AB+OB-(OB+BC+OC)=8$，

$\therefore AB+BC=30$，$AB-BC=8$.

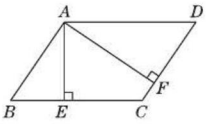
$\therefore AB=CD=19$，$BC=AD=11$.

即这个平行四边形各边的长分别为19，11，19，11.

点方法

在应用平行四边形的性质时，我们应从边、角、对角线这三个方面去考虑，解本例时，我们从“平行四边形的对角线互相平分”中得出“平行四边形被它的两条对角线分成四个小三角形，相邻两个小三角形的周长之差等于平行四边形中对应的两邻边之差”.

4. 如图，在$\square ABCD$中，$AE\perp BC$于点E，$AF\perp CD$于点F，若$\angle EAF=57°$，则$\angle B=$_____°.



（第4题图）

5. 一个平行四边形的周长为50 cm，对角线的交点为O，且$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长大5 cm，则$AB=$_____，$BC=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度 4：根据平行四边形边的性质证明

例 6 如图 9.3-9，在 $\square ABCD$ 中，E，F 为对角线 AC 上的两点，且 $AE = CF$，连接 DE，BF.

（1）写出图中所有的全等三角形；

（2）求证：$DE \parallel BF$.

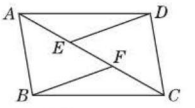


图 9.3-9

导引：（1）根据平行四边形的性质得出对应的边、角相等，从而判断哪两个三角形是全等三角形；

（2）根据平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$，且 $AB = CD$，从而得出 $\angle BAF = \angle DCE$，再由 $AE = CF$ 得出 $AF = CE$. 从而证明出 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$. 从而得出 $\angle BFA = \angle DEC$. 最终得出 $DE \parallel BF$.

（1）▶解：所有的全等三角形有：$\triangle ABF \cong \triangle CDE$，$\triangle AED \cong \triangle CFB$，$\triangle ADC \cong \triangle CBA$.

（2）▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB \parallel CD$，且 $AB = CD$. ∴ $\angle BAF = \angle DCE$. ∵ $AE = CF$，∴ $AE + EF = CF + EF$，即 $AF = CE$. ∴ $\triangle ABF \cong \triangle CDE$. ∴ $\angle BFA = \angle DEC$. ∴ $DE \parallel BF$.

点方法

平行四边形的定义、平行线的性质、全等三角形的判定和性质在有关平行四边形的证明中，常融合在一起综合应用，而利用平行四边形的定义、平行线的性质获得三角形全等是解题的关键.

考查角度 5：根据平行四边形对角线的性质证明

例 7 如图 9.3-10，已知 $\square ABCD$ 的顶点 A，C 与 $\square EBFD$ 的顶点 E，F 在一条直线上，求证：$AE = CF$.

导引：平行四边形的性质提供了边的平行与相等，角的相等与互补，对角线的平分，当所要证明的结论中的线段在对角线上时，往往利用平行四边形的对角线互相平分这一性质进行证明. 因此本例要证对角线上的 $AE = CF$，可考虑利用对角线互相平分这一性质，先连接 BD 交 AC 于点 O，再进行证明.

▶证明：如图 9.3-10，连接 BD 交 AC 于点 O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $OA = OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形，∴ $OE = OF$（平行四边形的对角线互相平分）.

∴ $OA - OE = OC - OF$，即 $AE = CF$（等式的性质）.

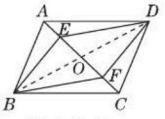
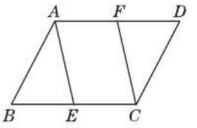


图 9.3-10

点方法

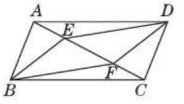
本例易受全等三角形思维定式的影响，欲证的两线段相等且又属于不同的三角形，习惯上就联想到证这两个三角形全等，这样虽然能达到证明的目的，却忽视了平行四边形特有的性质，易走弯路. 因此在解决平行四边形的有关问题中，应注意灵活运用平行四边形的性质.

6. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E、F 分别是边 BC、AD 的中点，求证：$\triangle ABE \cong \triangle CDF$.



（第 6 题图）

7. 如图，E、F 是 $\square ABCD$ 对角线 AC 上的两点，且 $BE \parallel DF$，求证：$BF = DE$.



（第 7 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 平行四边形的判定

点知识

1. **判定方法：**

(1) **从边看：**

方法一：两组对边分别平行的四边形是平行四边形.（定义法）

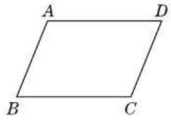


图9.3-11

几何表述：如图9.3-11，

∵ $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法二：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

几何表述：如图9.3-11，∵ $AB \parallel\!\!= CD$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

方法三：两组对边分别相等的四边形是平行四边形.


平行四边形的判定方法

几何表述：如图9.3-11，

∵ $AB = CD$，$AD = BC$，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2) **从对角线看：**

方法四：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

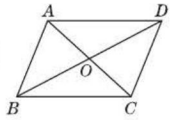


图9.3-12

几何表述：如图9.3-12，

∵ $OA = OC$，$OB = OD$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

要点精析 ///

(1) 判定平行四边形的四种方法各有妙用，应仔细观察题目所给条件，看它与哪种方法接近，灵活选择适合题目的判定方法；

(2) 这四种方法与平行四边形的性质相呼应，要注意它们的区别与联系.

2. **易错警示：**判定平行四边形需要两个独立条件，但“两组邻边分别相等”、“两组邻角分别相等”、“一组对边平行，另一组对边相等”这三种情况都不能判定平行四边形.

拨考向

考查角度1：利用平行四边形数量和位置关系证明平行四边形

❶方法一的应用

例8 如图9.3-13所示，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，DE 平分 $\angle ADC$，交 CB 的延长线于点 E，BF 平分 $\angle ABC$，交 AD 的延长线于点 F.

求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

导引：要证四边形 $BFDE$ 是平行四边形，根据平行四边形的定义可证得 $DF \parallel BE$，再证明 $DE \parallel FB$ 即可.

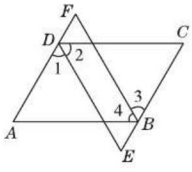


图9.3-13

▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle ADC = \angle ABC$，$AD \parallel CB$. ∴ $DF \parallel BE$.

∵ DE 平分 $\angle ADC$，BF 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

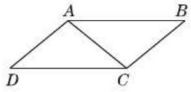
∵ $AD \parallel BC$，∴ $\angle 1 = \angle E$. ∴ $\angle E = \angle 3$. ∴ $DE \parallel FB$，

∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = AC = BC$，$\angle B = \angle D = 40°$.

(1) 求 $\angle DAC$ 的度数；

(2) 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



（第8题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

平行四边形的定义是判定平行四边形的根本方法，当题目中出现平行的线段时，往往借助判定方法一来帮助我们对四边形加以判断.

2 方法二的应用

例 9 已知：如图 9. 3-14，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，E，F 为对角线 AC 上两点，且 $AE = CF$，$DF \parallel BE$. 求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

导引：先证明 $\triangle AEB \cong \triangle CFD$，得到 $AB = CD$，再结合已知条件 $AB \parallel CD$，得到四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

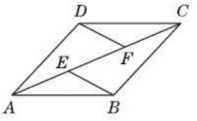


图 9. 3-14

▶证明：$\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle BAE = \angle DCF$.

$\because BE \parallel DF$，$\therefore \angle BEF = \angle DFE$.

$\therefore \angle AEB = \angle CFD$.

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFD$ 中，

$\angle AEB = \angle CFD$，$AE = CF$，$\angle EAB = \angle FCD$，

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD$.

$\therefore AB = CD$.

又 $\because AB \parallel CD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

点方法

要证四边形是平行四边形，已知有一组对边平行，联想的思路有两种：一是证明另一组对边平行；二是证明平行的这组对边相等. 而证明边相等利用三角形全等较常见.

3 方法三的应用

例 10 如图 9. 3-15，分别以 $\triangle ABC$ 的三边为一边，在 BC 的同侧作等边三角形 ABD，等边三角形 BCE，等边三角形 ACF，连接 DE，EF. 求证：四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

导引：由等边三角形的性质可以得到线段相等，角相等，进而可以通过全等三角形证明四边形 $ADEF$ 的两组对边分别相等，最后根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形进行判定.

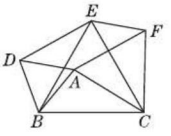


图 9. 3-15

▶证明：$\because \triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle ACF$ 都为等边三角形，

$\therefore DB = AB = AD$，$BE = BC$，$AC = AF$，$\angle DBA = 60°$，$\angle EBC = 60°$.

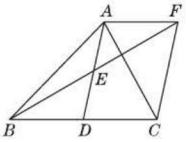
$\therefore \angle DBE = 60° - \angle EBA$，$\angle ABC = 60° - \angle EBA$.

$\therefore \angle DBE = \angle ABC$.

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle ABC$.

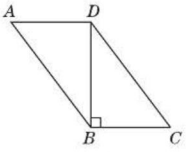
$\therefore DE = AC$.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 的中点，过 A 点作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连接 CF. 试证明：四边形 $ADCF$ 是平行四边形.



（第 9 题图）

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = 5$，$BC = x - 5$，$DC = x - 3$，$AD = 11 - x$，$BD = 4$，$BD \perp BC$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状. 并说明理由.



（第 10 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AC = AF$,

∴ $AF = DE$.

同理可证:$\triangle ABC \cong \triangle FEC$,

∴ $AB = FE$.

∴ $FE = AD$.

∴ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

点方法

解答本题时通过证明三角形全等得到四边形 $ADEF$ 的两组对边分别相等是关键.

考查角度2:利用平行四边形的对角线证明平行四边形

例11 已知:如图9.3-16,在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E,F 在对角线 AC 上,且 $AE = CF$. 求证:四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

导引:先根据平行四边形的性质,可得对角线互相平分,再根据对角线互相平分的四边形是平行四边形,可证明结论.

▶证明:如图9.3-16,连接 BD,设对角线 AC,BD 交于点 O.

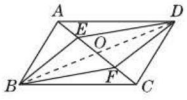


图9.3-16

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OA = OC$,$OB = OD$.

又∵ $AE = CF$,

∴ $OA - AE = OC - CF$,

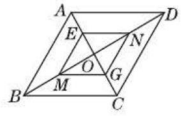
即 $OE = OF$.

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

点方法

从对角线的角度判定平行四边形,一般结合已知平行四边形的性质,利用已知平行四边形的对角线的性质去判定未知四边形是平行四边形.

11. 已知:如图,$\square ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,在 AC,BD 上分别取点 E,G 和 M,N,使 $AE = CG$,$BM = DN$. 请说明四边形 $EMGN$ 是平行四边形.



(第11题图)

知识点4 反证法

点知识

1. 在证明时,不是从已知条件出发直接证明命题的结论成立,而是先提出与结论相反的假设,然后由这个"假设"出发推导出矛盾的结果,说明假设是错误的,因而命题的结论成立,这种证明的方法称为反证法.
2. **作用**:反证法是一种间接的证明方法. 反证法适宜于证明否定性命题、唯一性命题、"至少"命题、"至多"命题和某些逆命题等.
3. **用反证法证明的一般步骤**:

①提出与原来命题结论相反的假设(即假设所证明的结论不成立);

②从假设和已知条件出发,应用正确的逻辑推理得出矛盾. 矛盾的情形比较多,有"与基本事实相矛盾""与定理相矛盾""与已知条件相矛盾""与自身相矛盾"等等;

③结论:说明产生矛盾的原因在于假设不成立,从而肯定了原命题结论成立.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度：利用反证法进行证明

例12 求证：三角形的三个内角中至少有一个大于或等于60°.

导引：本题是文字证明题，因此需要写出已知、求证、画出图形、完成证明过程. 另外，本题直接证明很困难，因此考虑运用反证法进行证明. 用反证法应明确结论的反面是“三角形的三个内角都小于60°”.

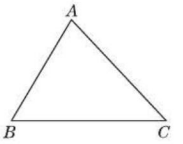


图9.3-17

▶解：如图9.3-17，已知任意的三角形ABC，

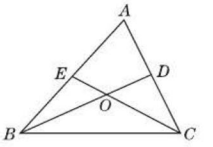
求证：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中至少有一个角大于或等于60°.

▶证明：假设三角形ABC的三个内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$都小于60°，则$\angle A+\angle B+\angle C<180°$，即三个内角的和小于180°，这与“三角形的内角和等于180°”这个定理相矛盾，所以假设不成立. 所以$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中至少有一个角大于或等于60°，即三角形的三个内角中至少有一个大于或等于60°.

点方法

当一个问题直接证明有难度时，可以考虑用**反证法**.

12. 反证法证明：如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在AC、AB上，BD、CE相交于点O. 求证：BD和CE不可能互相平分.



（第12题图）

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度1：根据平行四边形的性质确定范围

例13 如图9.3-18，在平行四边形$ABCD$中，对角线AC和BD相交于点O，如果$AC=10$，$BD=8$，$AB=m$，那么m的取值范围是（　　）

A. $1<m<9$　　B. $2<m<18$

C. $8<m<10$　　D. $4<m<5$

导引：由四边形$ABCD$是平行四边形及平行四边形的对角线互相平分，即可求得OA与OB的值，然后根据三角形三边关系，即可求得m的取值范围.

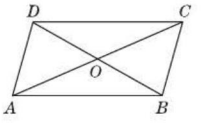


图9.3-18

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times10=5$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times8=4$，

∵ $OA-OB<AB<OA+OB$，

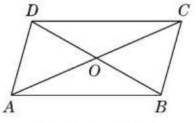
$\therefore 5-4<m<5+4$，

$\therefore m$的取值范围是$1<m<9$. 故选A.　　▶答案：A

举一反三训练

☞（答案见259页）

13. 如图，在平行四边形$ABCD$中，对角线AC和BD相交于点O，如果$AC=12$，$AB=10$，$BD=m$，那么m的取值范围是（　　）



（第13题图）

A. $8<m<32$

B. $2<m<22$

C. $10<m<12$

D. $1<m<11$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

本题通过平行四边形的对角线互相平分，将四边形问题转化为三角形问题，再结合三角形三边关系确定范围.

拨尖角度2：平行四边形的性质与判定的综合运用

例14 如图9.3-19，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AE\perp BD$ 于 E，$CF\perp BD$ 于 F.

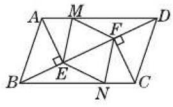


图9.3-19

(1)求证：$BE=DF$；

(2)若 M、N 分别为边 AD、BC 上的点，且 $DM=BN$，试判断四边形 $MENF$ 的形状，并说明理由.

导引：(1)根据平行四边形的性质和已知条件证明 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，从而可得到 $BE=DF$；

(2)根据平行四边形的判定方法：有一组对边平行且相等的四边形为平行四边形判定四边形 $MENF$ 为平行四边形.

(1)▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AB\parallel CD$. ∴ $\angle ABD=\angle CDB$.

∵ $AE\perp BD$ 于 E，$CF\perp BD$ 于 F，

∴ $\angle AEB=\angle CFD=90°$.

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(AAS).

∴ $BE=DF$.

(2)▶解：四边形 $MENF$ 为平行四边形. 理由如下：

由(1)可知：$BE=DF$，∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AD\parallel BC$. ∴ $\angle MDB=\angle NBD$.

又∵ $DM=BN$，∴ $\triangle DMF\cong\triangle BNE$(SAS).

∴ $MF=NE$，$\angle MFD=\angle NEB$. ∴ $\angle MFE=\angle NEF$.

∴ $MF\parallel NE$. ∴ 四边形 $MENF$ 是平行四边形.

点方法

本题考查了平行四边形的性质和平行四边形的判定的综合应用，解答这类题应明确前提和结论，避免出错.

拨尖角度3：构造平行四边形解决问题

例15 如图9.3-20，已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 为 AC 上一点，连接 BE 交 AD 于点 F，且 $AE=FE$. 求证：$BF=AC$.

导引：要证明 BF 与 AC 相等，可转化为证角相等，但边、角关系联系不到一块，这就需要构造图形把已知条件联系起来. 由点 D 是 BC 的中点，可把点 D 看成平行四边形一条对角线的中点，因此只要把另一条对角线作出来，就能构成平行四边形，由此该题便得以解决.

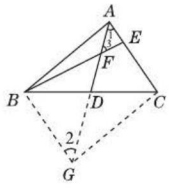
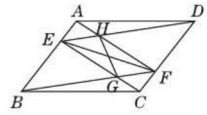


图9.3-20

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 AB、CD 上，$AE=CF$，连接 AF，DE，交于点 H，连接 CE，BF，交于点 G. 求证：



(第14题图)

(1)四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2)EF 与 GH 互相平分.

15. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 O，E、F 分别为 OB、OD 的中点，过点 O 任作一直线分别交 AB、CD 于 G、H. 求证：$GF\parallel EH$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶证明：如图 9. 3-20，延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连接 BG，CG.

$\because DG=AD$，$BD=DC$，

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形.

$\therefore AC/\!/BG$，且 $AC=BG$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

又 $\because AE=FE$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore \angle 2=\angle 3=\angle BFG$.

$\therefore BG=BF$.

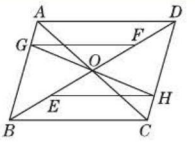
又 $\because BG=AC$，

$\therefore BF=AC$.

点方法

（1）**证明两条线段（或两角）相等的常用方法：**①线段垂直平分线的判定和性质；②角平分线的判定和性质；③等腰三角形的判定和性质；④全等三角形的判定和性质；⑤平行四边形的判定和性质.

（2）当题中有三角形中线时，常用倍长中线法构造平行四边形，然后利用平行四边形的性质推出线段相等或平行以及角相等.



（第 15 题图）

拔尖角度 4：动点问题（拓展点）

例 16 如图 9. 3-21，在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$BC=18$ cm，$CD=15$ cm，$AD=10$ cm，$AB=12$ cm，动点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以3 cm/s 的速度由 C 向 B 运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动.

（1）几秒钟时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长.

（2）几秒钟时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长.

导引：（1）由 $AD/\!/BC$，知只需使 $PD=CQ$，则四边形 $PDCQ$ 为平行四边形.

（2）由 $AD/\!/BC$，知只需使 $AP=BQ$，则四边形 $ABQP$ 为平行四边形.

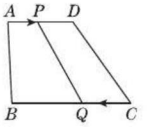


图 9. 3-21

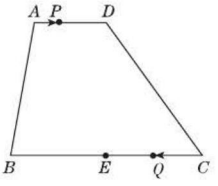
▶解：（1）设 x s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，则 $10-2x=3x$，解得 $x=2$.

所以 2 s 时，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形，此时四边形 $PDCQ$ 的周长是 $3\times2\times2+15\times2=42$（cm）.

（2）设 y s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，则 $2y=18-3y$，解得 $y=3.6$.

所以 3. 6 s 时，四边形 $ABQP$ 为平行四边形，此时四边形 $ABQP$ 的周长是 $3.6\times2\times2+12\times2=38.4$（cm）.

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD=6$，$BC=16$，E 是 BC 的中点. 点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 出发，沿 AD 向点 D 运动；点 Q 同时以每秒 2 个单位长度的速度从点 C 出发，沿 CB 向点 B 运动. 点 P 停止运动时，点 Q 也随之停止运动. 当运动时间为_____秒时，以点 P，Q，E，D 为顶点的四边形是平行四边形.



（第 16 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

解决动点问题的基本思路就是变“动”为“静”，要用“静”去理解“动”. 本题中，若运动的时间为 t s，则 $AP=2t$ cm，$CQ=3t$ cm，利用平行四边形的判定列方程求得 t 的值.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见260页)

基础巩固练

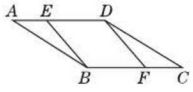
1. [模拟 · 徐州] 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 AD,BC 边上的一点，增加下列条件，不能得出 $BE/\!/DF$ 的是(　　)

A. $AE=CF$

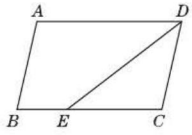
B. $BE=DF$

C. $\angle EBF=\angle FDE$

D. $\angle BED=\angle BFD$



(第1题图)

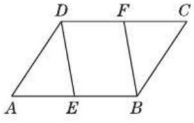


(第2题图)

2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，DE 平分 $\angle ADC$，$AD=8$，$BE=3$，则 $\square ABCD$ 的周长是(　　)

A. 16　　B. 14　　C. 26　　D. 24

3. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AB 和 CD 上，下列条件不能判定四边形 $DEBF$ 一定是平行四边形的是(　　)



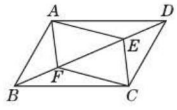
(第3题图)

A. $AE=CF$　　B. $DE=BF$

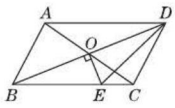
C. $\angle ADE=\angle CBF$　　D. $\angle AED=\angle CFB$

4. 用反证法证明命题：三角形中，至多只有一个角为钝角. 第一步假设：_____.

5. [模拟 · 扬州] 如图，在 $\square ABCD$ 中，E,F 是对角线 BD 上的两点，要使四边形 $AFCE$ 是平行四边形，则需添加的一个条件可以是_____.(只添加一个条件)



(第5题图)



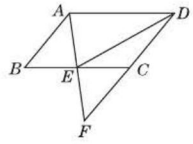
(第6题图)

6. 如图，$\square ABCD$ 的对角线相交于点 O，且 $AB\neq AD$，过点 O 作 $OE\perp BD$ 交 BC 于点 E. 若 $\triangle CDE$ 的周长为 8 cm，则 $\square ABCD$ 的周长为_____cm.

7. 如图，在 $\square ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F.

(1)求证：$AB=CF$；

(2)连接 DE，若 $AD=2AB$，求证：$DE\perp AF$.

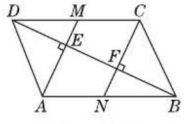


(第7题图)

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A、C 两点作 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E、F，延长 AE、CF 分别交 CD、AB 于 M、N.

(1)求证：四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2)已知 $DE=2$，$FN=1$，求 BN 的长.

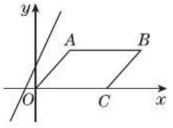


(第8题图)

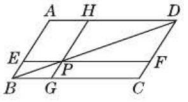
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

9. 如图，在平面直角坐标系中，$\square OABC$ 的边 OC 落在 x 轴的正半轴上，且点 $C(4,0)$，$B(6,2)$，直线 $y=2x+1$ 以每秒 1 个单位长度的速度向下平移，经过_____秒该直线可将 $\square OABC$ 的面积平分.



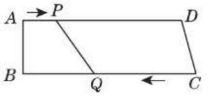
（第 9 题图）



（第 10 题图）

10. ［中考 · 南充］如图，在 $\square ABCD$ 中，过对角线 BD 上一点 P 作 $EF\parallel BC$，$GH\parallel AB$，且 $CG=2BC$，$S_{\triangle BPG}=1$，则 $S_{四边形AEPH}=$_____.

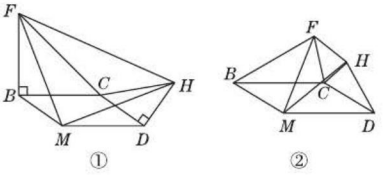
11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=24$ cm，$BC=26$ cm，动点 P 从 A 点开始沿 AD 边以 1 cm/s 的速度向 D 运动，动点 Q 从 C 点开始，沿 CB 边以 3 cm/s 的速度向 B 运动，P、Q 分别从 A、C 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止，设运动时间为 t s，当 t 为何值时，四边形 $PQCD$ 是平行四边形.　【导学号：9937991】



（第 11 题图）

思维拓展练

12. （1）如图①，以 $\square BMDC$ 的两相邻边 CB、CD 为腰，在 $\square BMDC$ 的外侧，作等腰 Rt$\triangle CBF$ 和等腰 Rt$\triangle CDH$，则 $\square BMDC$ 中与顶点 C 相对的顶点 M 与这两个等腰直角三角形的两顶点 F、H 形成一个新的三角形 FMH. 请证明 $\triangle FMH$ 为等腰直角三角形.



（第 12 题图）

（2）如图②，以 $\square BMDC$ 的两相邻边 CB、CD 为腰，在 $\square BMDC$ 的外侧，作等腰 $\triangle CBF$ 和等腰 $\triangle CDH$，使其顶角 $\angle CBF=\angle CDH=\alpha$，则 $\square BMDC$ 中与顶点 C 相对的顶点 M 与两个等腰三角形的两顶点 F、H 形成一个新的三角形 FMH，写出 $\angle FMH$ 的度数，并说明理由.

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.4 矩形、菱形、正方形

9.4.1 矩 形

热门话题
- 矩形的定义(关键)
- 矩形的性质(重点)
- 矩形的判定(难点)
- 两条平行线间的距离(重点)

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 矩形的定义和性质

点知识

1. **定义**:有一个角是直角的平行四边形叫做矩形. 矩形也叫长方形.

要点精析

(1)由矩形的定义知,矩形一定是平行四边形,但平行四边形不一定是矩形.

(2)矩形必须具备两个条件:

①它是一个平行四边形;

②它有一个角是直角,这两个条件缺一不可.

2. **性质**:

(1)矩形具有平行四边形的所有性质.

(2)矩形的对角线**相等**.

(3)矩形的四个角都是**直角**.

(4)矩形是轴对称图形,如图9.4-1所示,邻边不相等的矩形有两条对称轴. 矩形也是中心对称图形.

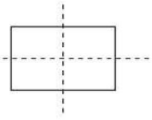


图9.4-1

拨考向

典例剖析

考查角度1:利用矩形的性质求线段的长

例1 如图9.4-2,在矩形$ABCD$中,对角线AC,BD相交于点O,已知$AC=6$,$\angle BOC=120°$,求矩形$ABCD$的面积.

导引:要求矩形$ABCD$的面积,则要求AB,BC的长,AB的长可由矩形的性质及等边三角形的性质求出,而BC的长可由勾股定理求出.

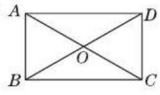


图9.4-2

▶解:∵ 四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore AC=BD$,$OA=OC$,$OB=OD$.(矩形的对角线相等且互相平分)

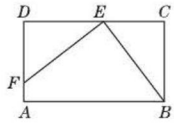
$\therefore OA=OB=\frac{1}{2}AC$.

∵ $\angle BOC=120°$,$\therefore \angle AOB=60°$.

举一反三训练

(答案见261页)

1. 如图,在矩形$ABCD$中,$EF\perp EB$,$EF=EB$,矩形$ABCD$的周长为22,$CE=3$,求DE的长.



(第1题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形.

$\therefore AB = OA = \frac{1}{2}AC.$

$\because AC = 6, \therefore AB = 3.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB = 3, AC = 6,$

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$

$\therefore S_{矩形ABCD} = AB \cdot BC = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$

点拨 技巧

因为矩形的对角线相等且互相平分，所以矩形的对角线将矩形分成了四个等腰三角形，再由特殊角可得到特殊的三角形——等边三角形，利用等边三角形的性质即可求解. 注意：本例亦可通过 $\angle BOC = 120°$，$OB = OC$，得 $\angle BCA = 30°$，再由含 $30°$ 角的直角三角形的性质求 AB，BC 的长将更简便，请读者试一试.

考查角度 2：利用矩形的性质求角度

例 2 如图 9.4-3 所示，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O，$AE \perp BD$ 于点 E，$\angle DAE : \angle BAE = 3 : 1$，求 $\angle BAO$ 和 $\angle EAO$ 的度数.

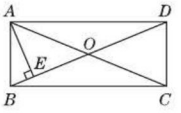


图 9.4-3

导引：由 $\angle DAE$ 与 $\angle BAE$ 之和为矩形的一个内角及两角之比即可求出 $\angle DAE$ 和 $\angle BAE$ 的度数，从而得出 $\angle ABE$ 的度数，由矩形的性质易得 $\angle BAO = \angle ABE$，即可求出 $\angle BAO$ 的度数，再由 $\angle EAO = \angle BAO - \angle BAE$ 可得 $\angle EAO$ 的度数.

▶解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle DAB = 90°, AO = \frac{1}{2}AC, BO = \frac{1}{2}BD, AC = BD.$

$\therefore \angle BAE + \angle DAE = 90°, AO = BO.$

又 $\because \angle DAE : \angle BAE = 3 : 1,$

$\therefore \angle BAE = 22.5°, \angle DAE = 67.5°.$

$\because AE \perp BD,$

$\therefore \angle ABE = 90° - \angle BAE = 90° - 22.5° = 67.5°.$

$\because AO = BO,$

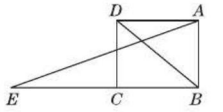
$\therefore \angle BAO = \angle ABE = 67.5°.$

$\therefore \angle EAO = \angle BAO - \angle BAE = 67.5° - 22.5° = 45°.$

点拨 方法

矩形的每条对角线把矩形分成两个直角三角形，矩形的两条对角线将矩形分成四个等腰三角形，因此有关矩形的计算问题经常转化到直角三角形和等腰三角形中解决.

2. 如图，延长矩形 $ABCD$ 的边 BC 至点 E，使 $CE = BD$，连接 AE，如果 $\angle ADB = 40°$，则 $\angle E =$ _____°.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3：利用矩形的性质证明

例3 如图9.4-4，已知四边形$ABCD$是矩形，$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，且点P在矩形上方，点Q在矩形内. 连接PA，PQ.

求证：(1)$\angle PBA=\angle PCQ=30°$；(2)$PA=PQ$.

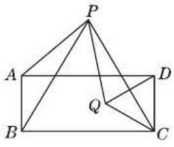


图9.4-4

导引：(1)矩形的四个内角都等于90°. 利用$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，容易求得$\angle PBA$和$\angle PCQ$的度数，从而得证；

(2)利用(1)的结论以及矩形的性质进一步证明$\triangle PAB\cong\triangle PQC$，从而证得$PA=PQ$.

▶证明：(1)∵四边形$ABCD$是矩形，∴$\angle ABC=\angle BCD=90°$.

∵$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，

∴$\angle PBC=\angle PCB=\angle QCD=60°$.

∴$\angle PBA=\angle ABC-\angle PBC=30°$，$\angle PCD=\angle BCD-\angle PCB=30°$.

∴$\angle PCQ=\angle QCD-\angle PCD=30°$.

故$\angle PBA=\angle PCQ=30°$.

(2)∵四边形$ABCD$是矩形，∴$AB=DC$.

∵$\triangle PBC$和$\triangle QCD$都是等边三角形，

∴$PB=PC$，$QC=DC=AB$.

又由(1)知$\angle PBA=\angle PCQ$，∴$\triangle PAB\cong\triangle PQC$(SAS).

∴$PA=PQ$.

点方法

解涉及矩形的题，常与全等三角形和特殊三角形等知识融为一体进行探索. 利用矩形的性质，可以得到许多的结论，在解题时，针对问题列出有用的结论作论据即可.

考查角度4：利用矩形的对称性求面积

例4 [一题多解] 如图9.4-5，直线EF过矩形$ABCD$对角线的交点O，分别交AB、CD于点E、F，若$AB=3$，$BC=4$，那么阴影部分的面积为_____.

导引：由题意易得$\triangle OEB\cong\triangle OFD$，将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积进行计算.

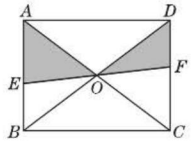


图9.4-5

方法一：∵四边形$ABCD$是矩形，

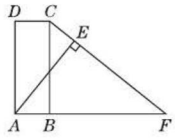
∴由矩形中心对称的性质知$S_{\triangle EBO}=S_{\triangle FDO}$.

∴$S_{阴影部分}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3$.

方法二：在矩形$ABCD$中，$OB=OD$，$\angle EBO=\angle FDO$.

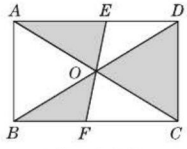
在$\triangle OEB$与$\triangle OFD$中，

3. 如图，已知四边形$ABCD$是矩形，延长AB至点F，连接CF，使得$CF=AF$，过点A作$AE\perp FC$于点E，求证：$AD=AE$.



(第3题图)

4. 如图，矩形$ABCD$的对角线AC和BD相交于点O，过点O的直线分别交AD和BC于点E、F，$AB=5$ cm，$BC=8$ cm，则图中阴影部分的面积为_____cm^2.



(第4题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle EOB=\angle FOD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle OEB\cong\triangle OFD.\ \therefore S_{\triangle OEB}=S_{\triangle OFD}.$

$\therefore S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3.$ ▶答案：3

点方法

本题运用了**转化思想**，将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积求解.

知识点 2 矩形的判定

点知识

1. **矩形的判定：**


矩形的判定

方法一（定义判定）：有一个角是直角的平行四边形是矩形；

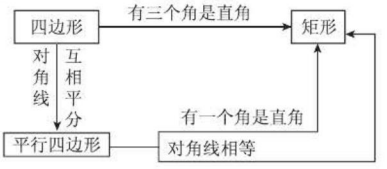
方法二（角判定）：有三个角是直角的四边形是矩形；

方法三（对角线判定）：对角线相等的平行四边形是矩形；或对角线相等且互相平分的四边形是矩形.

要点精析

（1）矩形的判定与性质是互逆定理.

（2）判定矩形的常见思路：



2. **易错警示：**

（1）用定义判定一个四边形是矩形必须满足两个条件：一是有一个角是直角，二是四边形是平行四边形. 也就是说有一个角是直角的四边形不一定是矩形，必须加上“平行四边形”这个条件它才是矩形.

（2）用“对角线相等的平行四边形是矩形”判定一个四边形是矩形必须满足两个条件：一是对角线相等，二是四边形是平行四边形. 也就是说两条对角线相等的四边形不一定是矩形，必须加上“平行四边形”这个条件它才是矩形.

独考向

考查角度 1：利用矩形的定义判定矩形

例 5 如图 9.4-6，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F 为 BC 上两点，且 $BE=CF$，$AF=DE$，求证：

（1）$\triangle ABF\cong\triangle DCE$；

（2）四边形 $ABCD$ 是矩形.

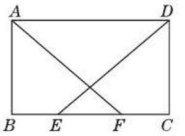


图 9.4-6

导引：（1）根据题中的已知条件我们不难得出：$AB=CD$，$AF=DE$，又因为 $BE=CF$，那么两边都加上 EF 后，$BF=CE$，因此就构成了全等三角形的判定中边边边（SSS）的条件.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，BD 平分 $\angle ABC$. 四边形 $ABED$ 是平行四边形，DE 交 BC 于点 F，连接 CE.

求证：四边形 $BECD$ 是矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由于四边形 $ABCD$ 是平行四边形,只要证明其中一角为直角即可.

▶证明:(1)∵ $BE=CF$, $BF=BE+EF$, $CE=CF+EF$,

∴ $BF=CE$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB=DC$.

在△ABF 和△DCE 中,$\begin{cases}AB=DC,\\BF=CE,\\AF=DE,\end{cases}$

∴ △ABF≌△DCE(SSS).

(2)∵ △ABF≌△DCE,

∴ $\angle B=\angle C$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel CD$.

∴ $\angle B+\angle C=180°$.

∴ $\angle B=\angle C=90°$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

点方法

矩形的定义表明,判定一个四边形是矩形,先判定这个四边形是平行四边形,然后再证明这个四边形有一个内角是直角.

考查角度2:利用对角线特征判定矩形

例6 如图9.4-7,在四边形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,E,F 两点在边 BC 上,$AB\parallel DE$,$AF\parallel DC$,且四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

(1)AD 与 BC 有何数量关系?请说明理由;

(2)当 $AB=DC$ 时,求证:四边形 $AEFD$ 是矩形.

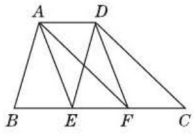


图9.4-7

导引:(1)由 $AD\parallel BC$,$AB\parallel DE$,$AF\parallel DC$,可判定四边形 $ABED$,四边形 $AFCD$ 都是平行四边形,又因为四边形 $AEFD$ 是平行四边形,根据平行四边形对边相等可知 $AD=BE=EF=FC$,所以 $BC=3AD$;(2)要证明四边形 $AEFD$ 是矩形,已知这个四边形是平行四边形,只需证明两条对角线相等即可.

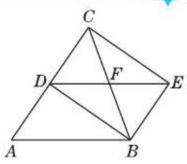
(1)▶解:$BC=3AD$. 理由如下:

∵ $AD\parallel BC$,$AB\parallel DE$,$AF\parallel DC$,

∴ 四边形 $ABED$ 和四边形 $AFCD$ 都是平行四边形.

∴ $AD=BE$, $AD=FC$.

又∵ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,

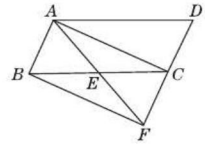


(第5题图)

6. 如图,已知 E 是□$ABCD$ 中 BC 边的中点,AC 是对角线,连接 AE 并延长 AE 交 DC 的延长线于点 F,连接 BF.

(1)求证:四边形 $ABFC$ 是平行四边形;

(2)若 $\angle AEC=2\angle ABC$,求证:四边形 $ABFC$ 为矩形.



(第6题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore AD = EF.$

$\therefore AD = BE = EF = FC.$

$\therefore BC = 3AD.$

(2)▶证明：由(1)可知四边形 $ABED$ 和四边形 $AFCD$ 都是平行四边形，

$\therefore DE = AB, AF = DC.$

又$\because AB = DC$，

$\therefore DE = AF.$

又$\because$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

点方法

证明一个平行四边形为矩形的两种方法：一种是证明有一个角是直角，另一种是证明两条对角线相等. 本例的证法采用的是对角线相等的方法. 若采用证一直角的方法，可证：$DE = DC$，$EF = FC$，利用等腰三角形“三线合一”可得 $\angle DFE = 90°$. 用这种方法证明请读者独立完成.

考查角度 3：利用三个角是直角判定矩形

例 7 如图 9.4-8，$\square ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E, F, G, H. 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

导引：要证明四边形 $EFGH$ 是矩形，由于已知 $\square ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E, F, G, H，因此可选用“有三个角是直角的四边形是矩形”来证明.

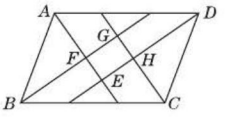


图 9.4-8

▶证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD.$

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180°.$

$\because BG$ 平分 $\angle ABC$，CG 平分 $\angle BCD$，

$\therefore \angle GBC + \angle GCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = \frac{1}{2} \times 180° = 90°.$

$\therefore \angle BGC = 90°.$

同理可得 $\angle AFB = \angle AED = 90°.$

$\therefore \angle GFE = \angle FEH = \angle FGH = 90°.$

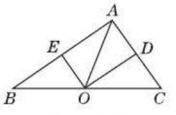
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

点方法

本题目中的图形是建立在四边形的基础上，而条件中又涉及角的关系，一般采用“角的方法”来判定矩形.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，$AB = 8$，$AC = 6$，O 为 BC 的中点，OE 平分 $\angle AOB$，与 AB 相交于点 E，OD 平分 $\angle AOC$，与 AC 相交于点 D.

试说明：四边形 $ADOE$ 为矩形，并求四边形 $ADOE$ 的周长.



（第 7 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 两条平行线之间的距离

点知识

1. **定义**：两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线之间的距离.

要点精析

(1) 点到直线的距离是指这点到这条直线的垂线段的长度；

(2) 三种距离之间的区别与联系

类别	两点间的距离	点到直线的距离	两条平行线间的距离
区别	连接两点的线段的长度	点到直线的垂线段的长度	两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的垂线段的长度
联系	最后都归结为两点间的一条线段的长度		

2. **性质**：如果两条直线平行，那么一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等，即平行线间的距离处处相等.

要点精析

(1) 因为平行线间的距离处处相等，所以在作平行四边形的高时，可根据需要灵活选择位置；(注：平行线的这一性质常用来解决三角形中同底等高的问题)

(2) 平行线的位置确定后，它们之间的距离就是定值(是正值)，不随垂线段位置的改变而改变.

数学表述：

如图9.4-9，A，C 是 l_1 上任意两点，$\because l_1 // l_2$，$AB \perp l_2$ 于 B，$CD \perp l_2$ 于 D，$\therefore AB = CD$.

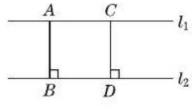


图9.4-9

3. **拓展**：

(1) 夹在两条平行线间的任何平行线段都相等；

(2) 等底等高的三角形的面积相等.

点考向

考查角度：利用平行线间的距离证明面积相等

例8 如图9.4-10，直线 $a // b$，点 A，E，F 在直线 a 上，点 B，C，D 在直线 b 上，$BC = EF$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等吗？为什么？

▶解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

理由如下：

如图9.4-10，过点 A 作 $AH_1 \perp$ 直线 b，垂足为点 H_1，过点 D 作 $DH_2 \perp$ 直线 a，垂足为点 H_2.

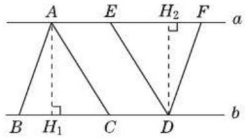


图9.4-10

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot AH_1$，$S_2 = \frac{1}{2} EF \cdot DH_2$.

$\because$ 直线 $a // b$，$AH_1 \perp$ 直线 b，$DH_2 \perp$ 直线 a，

$\therefore AH_1 = DH_2$.

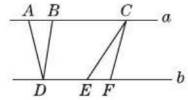
又 $\because BC = EF$，$\therefore S_1 = S_2$，

即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积相等.

点方法

解答本例的关键是找等高这一条件. 等底等高的三角形面积相等，今后可作为定理直接应用.

8. 如图，已知直线 $a // b$，点 A、B、C 在直线 a 上，点 D、E、F 在直线 b 上，$AB = EF = 2$，若 $\triangle CEF$ 的面积为5，则 $\triangle ABD$ 的面积为(　　)



(第8题图)

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：利用矩形的性质解决矩形折叠问题（拓展点）

例 9 如图 9.4-11，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处，EC 交 AD 于 F.

（1）求证：$\triangle AEF \cong \triangle CDF$.

（2）若 $AB=4$，$BC=6$，求图中阴影部分的面积.

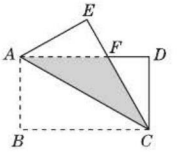


图 9.4-11

导引：（1）根据矩形的性质得到 $AB=CD$，$\angle B=\angle D=90°$，根据折叠的性质得到 $\angle E=\angle B$，$AB=AE$，根据全等三角形的判定定理即可得到结论；

（2）根据全等三角形的性质得到 $AF=CF$，$EF=DF$，根据勾股定理得到 DF 的长，根据三角形的面积公式即可得到结论.

（1）▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB=CD$，$\angle B=\angle D=90°$，

∵ 将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处，

∴ $\angle E=\angle B$，$AB=AE$，

∴ $AE=CD$，$\angle E=\angle D$，

在 $\triangle AEF$ 与 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}\angle E=\angle D,\\ \angle AFE=\angle CFD,\\ AE=CD,\end{cases}$

∴ $\triangle AEF \cong \triangle CDF$（AAS）；

（2）▶解：∵ $AB=4$，$BC=6$，

∴ $CE=AD=6$，$AE=CD=AB=4$，

∵ $\triangle AEF \cong \triangle CDF$，

∴ $AF=CF$，$EF=DF$，

∴ $DF^2+CD^2=CF^2$，

即 $DF^2+4^2=(6-DF)^2$，∴ $DF=\frac{5}{3}$，

∴ 阴影部分的面积 $=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}\times4\times6-\frac{1}{2}\times4\times\frac{5}{3}=\frac{26}{3}$.

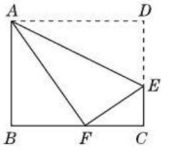
点方法

解答折叠问题关键是抓住折叠前后图形全等，进而根据勾股定理列方程.

举一反三训练

☞（答案见 262 页）

9. 如图所示，折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD 使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知 $AB=DC=8$ cm，$AD=BC=10$ cm，求 EC 的长.



（第 9 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2:矩形的性质及其判定的综合运用

例10 如图9.4-12,在平行四边形$ABCD$中,过点D作$DE\perp AB$于点E,点F在边CD上,$DF=BE$,连接AF,BF.

(1)求证:四边形$BFDE$是矩形.

(2)若AF平分$\angle DAB$,试写出线段CF,BF,DF之间的数量关系,并加以证明.

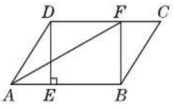


图9.4-12

导引:(1)根据平行四边形的性质得出$DC\parallel AB$,即$DF\parallel BE$,根据平行四边形的判定得出四边形$DEBF$为平行四边形,根据矩形的判定得出即可;

(2)根据角平分线的定义得到$\angle DAF=\angle BAF$,根据平行线的性质得到$\angle DFA=\angle BAF$,等量代换得到$\angle DAF=\angle AFD$,得到$AD=DF$,从而得到$BC=DF$,根据勾股定理即可得到结论.

(1)▶证明:$\because$四边形$ABCD$为平行四边形,

$\therefore DC\parallel AB$,即$DF\parallel BE$,

又$\because DF=BE$,$\therefore$四边形$DEBF$为平行四边形,

又$\because DE\perp AB$,$\therefore\angle DEB=90^\circ$,

$\therefore$四边形$DEBF$为矩形;

(2)▶解:$BF^2+CF^2=DF^2$.

证明:$\because AF$平分$\angle DAB$,$\therefore\angle DAF=\angle BAF$,

$\because AB\parallel CD$,$\therefore\angle DFA=\angle BAF$,

$\therefore\angle DAF=\angle AFD$,$\therefore AD=DF$,

$\because AD=BC$,$\therefore BC=DF$,

$\because$四边形$BFDE$是矩形,$\therefore\angle DFB=90^\circ$,$\therefore\angle BFC=90^\circ$,

$\therefore BF^2+CF^2=BC^2$,$\therefore BF^2+CF^2=DF^2$.

拔尖角度3:与矩形有关的动态探究题(拓展点)

例11 如图9.4-13,在$\triangle ABC$中,点O是AC边上一动点,过点O作直线$MN\parallel BC$,设MN交$\angle BCA$的平分线于点E,交$\triangle ABC$的外角$\angle ACH$的平分线于点F.

(1)证明:$EO=FO$;

(2)当点O运动到何处时,四边形$AECF$是矩形?简要说明理由.

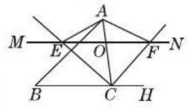


图9.4-13

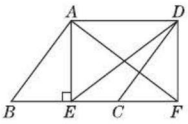
导引:(1)根据条件证明$OE=OC=OF$;(2)由(1)知$OE=OC=OF$,只要$OA=OC$,即当点O为AC的中点时,四边形$AECF$就是矩形.

(1)▶证明:$\because MN\parallel BC$,$\therefore\angle CEO=\angle ECB$,$\angle CFO=\angle FCH$.

$\because CE$,CF分别是$\angle BCA$,$\angle ACH$的平分线,

$\therefore\angle ECO=\angle ECB$,$\angle FCO=\angle FCH$.

10. 如图,在$\square ABCD$中,$AE\perp BC$于点E,延长BC至F点使$CF=BE$,连接AF,DE,DF.

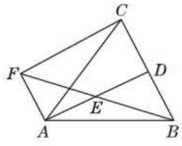


(第10题图)

(1)求证:四边形$AEFD$是矩形;

(2)若$AB=6$,$DE=8$,$BF=10$,求AE的长.

11. 如图,在$\triangle ABC$中,AD是BC边上的中线,E是AD的中点,过点A作BC的平行线交BE的延长线于点F,连接CF.



(第11题图)

(1)求证:$AF=DC$;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle CEO = \angle ECO, \angle CFO = \angle FCO.$

$\therefore EO = OC, FO = OC. \therefore EO = FO.$

(2)▶解：当点 O 运动到 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下：由(1)知 $OE = OF$.

又$\because AO = CO, \therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because OE = OC, \therefore AC = EF$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

拔尖角度 4：平行线之间距离的运用

例 12 如图 9.4-14①，已知直线 $m // n$，点 A、B 在直线 n 上，点 C、P 在直线 m 上；

(1)写出图①中面积相等的各对三角形：_____；

(2)如图①，点 P 在直线 m 上移动到任一位置时，总与 $\triangle ABC$ 的面积相等的是哪个三角形？

(3)如图②，一个五边形 $ABCDE$，你能否过点 E 作一条直线交 BC(或延长线)于点 M，使四边形 $ABME$ 的面积等于五边形 $ABCDE$ 的面积.

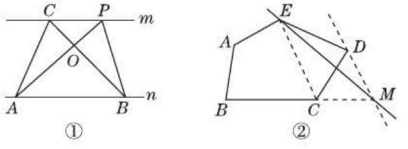


图 9.4-14

导引：(1)找出图①中同底等高的三角形，这些三角形的面积相等；

(2)因为两平行线间的距离是相等的，所以点 C、P 到直线 n 间的距离相等，也就是说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PAB$ 的公共边 AB 上的高相等，所以总有 $\triangle PAB$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等；

(3)只要作一个三角形 CEM 与三角形 CED 的面积相等即可.

▶解：(1) $\triangle CAB$ 与 $\triangle PAB$、$\triangle BCP$ 与 $\triangle APC$，$\triangle ACO$ 与 $\triangle BOP$；

(2)$\because m // n$，

$\therefore$ 点 C、P 到直线 n 间的距离是相等的，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle PAB$ 的公共边 AB 上的高相等，

$\therefore$ 总与 $\triangle ABC$ 的面积相等的三角形是 $\triangle PAB$；

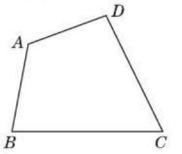
(3)如图 9.4-14②，连接 EC，过点 D 作直线 $DM // EC$ 交 BC 的延长线于点 M，作直线 EM，则直线 EM 即为所求的直线.

点方法

本题主要考查了三角形的面积及平行线的性质，利用“同底等高的三角形面积相等可以进行等积转化”.

(2) $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $ADCF$ 是矩形？并证明你的结论.

12. 如图，已知四边形 $ABCD$，以 AB 为边作 $\triangle ABM$，使 $S_{\triangle ABM} = S_{四边形ABCD}$.



(第 12 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见 262 页)

基础巩固练

1. 矩形具有而平行四边形不一定具有的性质为(　　)

A. 对角线相等

B. 对角相等

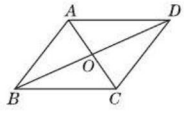
C. 对角线互相平分

D. 对边相等

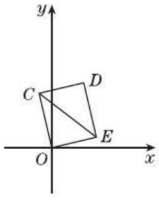
2. 如图,平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,要使它成为矩形,需再添加的条件是(　　)

A. $AO=OC$　　B. $AC=BD$

C. $AC\perp BD$　　D. BD 平分 $\angle ABC$



(第 2 题图)

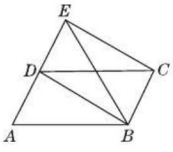


(第 3 题图)

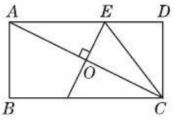
3. 如图,在矩形 $COED$ 中,点 D 的坐标是 $(1,2)$,则 CE 的长是(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

4. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,延长 AD 到点 E,使 $DE=AD$,连接 EB,EC,DB,请你添加一个条件:_____,使四边形 $DBCE$ 是矩形.



(第 4 题图)



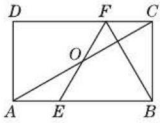
(第 5 题图)

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2,BC=4$,对角线 AC 的垂直平分线分别交 AD、AC 于点 E、O,连接 CE,则 CE 的长为_____.

6. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,CD 上的点,$AE=CF$,连接 EF,BF,EF 与对角线 AC 交于点 O,且 $BE=BF$,$\angle BEF=2\angle BAC$.

(1)求证:$OF=OE$;

(2)若 $FC=2$,求 AB 的长.

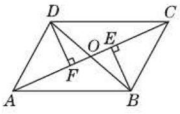


(第 6 题图)

7. 已知:如图,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O,$BE\perp AC$ 于点 E,$DF\perp AC$ 于点 F,点 O 既是 AC 的中点,又是 EF 的中点.

(1)试说明:$\triangle BOE\cong\triangle DOF$;

(2)若 $OA=\frac{1}{2}BD$,则四边形 $ABCD$ 是什么特殊四边形?说明理由.

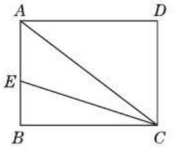


(第 7 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

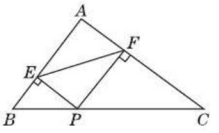
能力提升练

8. ［模拟 · 灌云县］如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$\angle ACB$ 的平分线 CE 与边 AB 交于点 E，则 BE 的长为_____.



（第 8 题图）

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，P 为 BC 上一动点，$PE\perp AB$ 于 E，$PF\perp AC$ 于 F，则 EF 的最小值为_____.



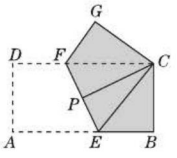
（第 9 题图）

10. 如图，矩形纸片 $ABCD$ 的边长 $AB=4$，$AD=2$. 将矩形纸片沿 EF 折叠，使点 A 与点 C 重合. 【导学号:9937991】

（1）若点 P 为 EF 的中点，求证：$CP\perp EF$；

（2）求 FG 的长；

（3）求阴影部分的面积.



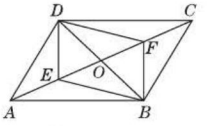
（第 10 题图）

思维拓展练

11. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知对角线 AC、BD 相交于点 O，若 E、F 是 AC 上两动点，分别从 A、C 两点出发以相同的速度向点 C、A 运动，其速度为 1 cm/s.

（1）当点 E 与 F 不重合时，四边形 $DEBF$ 是否是平行四边形？请说明理由；

（2）若 $AC=16$ cm，$BD=12$ cm，点 E，F 在运动过程中，以 D，E，B，F 为顶点的四边形能否为矩形？如能，求出此时的运动时间 t 的值，如不能，请说明理由.



（第 11 题图）

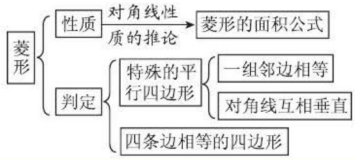
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.4.2 菱 形

热门话题
- 菱形的定义(关键)
- 菱形的性质(重点)
- 菱形的判定(难点)

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 菱形的定义与性质

点知识

1. **定义**:有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

要点精析

(1)菱形必须满足两个条件:一是平行四边形;二是一组邻边相等. 二者必须同时具备,缺一不可.

(2)菱形的定义既是菱形的基本性质,也是菱形的基本判定方法.

2. **性质**:


菱形的性质

(1)菱形的四条边都**相等**.

(2)菱形的两条对角线**互相垂直**,并且每一条对角线**平分**一组对角.

(3)菱形具有平行四边形的一切性质.

(4)菱形既是轴对称图形,也是中心对称图形,对称轴是两条对角线所在的直线.

(5)利用菱形的性质可证线段相等,角相等.

(6)菱形的面积计算:

①菱形的面积等于底乘高.

②菱形的面积等于对角线乘积的一半,对角线互相垂直的四边形的面积都可以用两条对角线乘积的一半来进行计算.

3. **易错警示**:

(1)菱形和矩形都是建立在平行四边形的基础上,矩形是附加一直角,而菱形是附加一组邻边相等;

(2)矩形的两条对角线把矩形分割成四个面积相等的等腰三角形. 而菱形的两条对角线把菱形分割成四个全等的直角三角形;

(3)菱形的对称轴是两条对角线所在的直线,不要误认为两条对角线是它的对称轴.

拨考向

典例剖析

考查角度1:根据菱形的性质求角度

例1 已知,如图9.4-15,在菱形$ABCD$中,E,F分别是BC,CD上的点,且$\angle B=\angle EAF=60°$,$\angle BAE=18°$,求$\angle CEF$的度数.

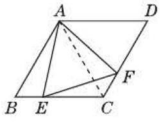


图9.4-15

导引:要求$\angle CEF$的度数,由图可知$\angle CEF+\angle AEF=\angle B+\angle BAE=60°+18°$,因此需求

举一反三训练

(答案见264页)

1. 如图,已知菱形$ABCD$的一个内角$\angle BAD=80°$,对角线AC、BD相交于点O,点E在CD上,且$DE=DO$,则$\angle EOC=$_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\angle AEF$ 的度数；由 $\angle EAF=60°$，猜想 $\triangle AEF$ 为等边三角形，所以只需证 $\triangle AEF$ 中有两边相等即可.

▶解：如图 9.4-15，连接 AC.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle B=60°$，

∴ $AB=BC=CD=DA$，$\angle D=\angle B=60°$.

∴ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 为等边三角形.

∴ $AB=AC$，$\angle B=\angle ACD=\angle BAC=60°$.

∵ $\angle EAF=60°$，∴ $\angle BAE=\angle CAF$.

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$（ASA）. ∴ $AE=AF$.

又∵ $\angle EAF=60°$，∴ $\triangle EAF$ 是等边三角形.

∴ $\angle AEF=60°$.

又∵ $\angle AEC=\angle B+\angle BAE=\angle AEF+\angle CEF$，

∴ $60°+18°=60°+\angle CEF$. ∴ $\angle CEF=18°$.

点方法

在求有关菱形的角的问题时，由于菱形的对角线互相垂直且平分一组对角，因此通常通过连接对角线，把四边形问题转化为特殊三角形（等边三角形、直角三角形）问题来解答. 在菱形中如果出现“30°”“60°”“120°”“一边等于最短对角线”这些词语时，往往都指向等边三角形，我们则需用等边三角形知识来解决.

考查角度 2：根据菱形的性质求线段的长

例 2 如图 9.4-16，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$BD=12$ cm，$AC=6$ cm. 求菱形的周长.

导引：因为菱形的四条边都相等，所以要求其周长就要先求出其边长. 由菱形的性质可知，其对角线互相垂直平分，因此可以在直角三角形中利用勾股定理来进行计算.

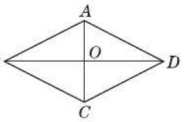


图 9.4-16

▶解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵ $AC=6$ cm，$BD=12$ cm，

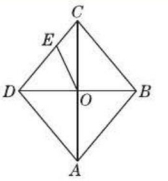
∴ $AO=3$ cm，$BO=6$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$（cm），

∴ 菱形的周长 $=4AB=4\times\sqrt{45}=4\sqrt{45}$（cm）.

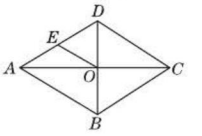
点方法

菱形的两条对角线将菱形分成四个全等的直角三角形，我们通常将菱形问题中求相关线段的长转化为求直角三角形中相关线段的长，再利用勾股定理来计算.



（第 1 题图）

2. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E 为 AD 的中点，若 $OE=5$，则 BC 等于_____.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3：根据菱形的性质求面积

例3 ［易错题］如图9.4-17，在菱形$ABCD$中，$\angle BAD=120°$，$AC=6$ cm. 求此菱形的周长和面积.

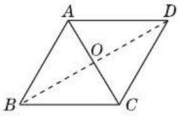


图9.4-17

导引：要求菱形的周长，需先求菱形的边长，而边长可通过菱形一对角线分菱形所得的两等边三角形求出. 而要求菱形的面积，可以通过求菱形的对角线长，并利用菱形面积等于对角线乘积的一半求出.

▶解：如图9.4-17，连接BD，交AC于点O.

∵ 四边形$ABCD$是菱形，$\angle BAD=120°$，

∴ $AB=BC$，$\angle BAC=60°$，$AC\perp BD$，$AO=OC$，$BO=OD$.

∴ $\triangle ABC$是等边三角形.

∵ $AC=6$ cm，∴ $AB=BC=AC=6$ cm.

∴ 菱形$ABCD$的周长为$6\times4=24$(cm).

在$\mathrm{Rt}\triangle ABO$中，$AB=6$ cm，$AO=\frac{1}{2}AC=3$ cm，

∴ $BO=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}$(cm).

∴ $BD=2BO=2\sqrt{27}$ cm.

∴ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{27}=6\sqrt{27}$(cm^2).

点方法

菱形的面积有三种计算方法：（1）将其看成平行四边形，用底与高的积来求；（2）利用两条对角线分得的四个全等直角三角形面积之和来求；（3）利用两条对角线乘积的一半来求.

说明：读者可利用（1）（2）两种方法试一试；注意应用（3）这种方法时不要忽视“一半”.

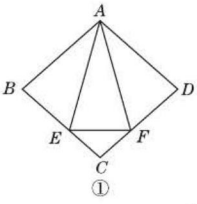
考查角度4：根据菱形的性质证明

例4 如图9.4-18①，在菱形$ABCD$中，E，F分别是CB，CD上的点，且$BE=DF$.

(1)求证：$AE=AF$.

(2)若$\angle B=60°$，点E，F分别是BC，CD的中点，求证：$\triangle AEF$为等边三角形.

导引：(1)要证$AE=AF$，只需证$\triangle AEB\cong\triangle AFD$，由$BE=DF$及菱形的相关性质进行证明即可.



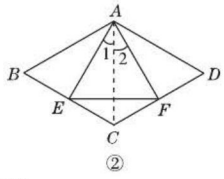


图9.4-18

3. 已知一个菱形的周长是20 cm，两条对角线的比是4:3，则这个菱形的面积是(　　)

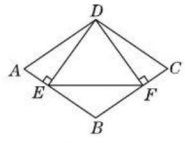
A. 12 cm^2

B. 24 cm^2

C. 48 cm^2

D. 96 cm^2

4. ［中考·沈阳］如图，在菱形$ABCD$中，过点D作$DE\perp AB$于点E，作$DF\perp BC$于点F，连接EF. 求证：(1)$\triangle ADE\cong\triangle CDF$；(2)$\angle BEF=\angle BFE$.



(第4题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）如图 9.4-18②，连接 AC，要证 $\triangle AEF$ 为等边三角形，由 $AE=AF$ 知，只需证 $\angle EAF=60°$ 即可，要证 $\angle EAF=60°$，只需证 $\angle 1=\angle 2=30°$ 即可，这可由菱形及等边三角形的相关知识证出.

▶证明：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=AD$，$\angle B=\angle D$.

又∵ $BE=DF$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADF$. ∴ $AE=AF$.

（2）如图 9.4-18②，连接 AC.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB=BC$.

又∵ $\angle B=60°$，∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形. ∴ $\angle BAC=60°$.

∵ E 为 BC 的中点，∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$.

同理 $\angle 2=30°$，∴ $\angle EAF=60°$.

又∵ $AE=AF$，∴ $\triangle AEF$ 为等边三角形.

点方法

菱形的每条对角线把菱形分成两个全等的等腰三角形（特殊时为两个全等的等边三角形），两条对角线把菱形分成四个全等的直角三角形. 所以有关菱形的一些证明与计算问题常常与特殊的三角形的有关问题综合在一起.

知识点 2 菱形的判定

点知识

判定方法：（1）定义法：有一组邻边相等的平行四边形是菱形；

（2）边：四条边相等的四边形是菱形；

（3）对角线：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

要点精析

（1）判定菱形时，一定要明确前提是从“四边形”出发的，还是从“平行四边形”出发的：

①若从“四边形”出发，则还需四条边相等；

②若从“平行四边形”出发，则还需一组邻边相等或对角线互相垂直.

（2）**判定菱形的方法**：

①用对角线进行判定：先证明四边形是平行四边形，再证明对角线互相垂直，或直接证明四边形的对角线互相垂直平分；

②用边进行判定：先证明四边形是平行四边形，再证明一组邻边相等，或直接证明四边形的四条边都相等.

拓考向

考查角度 1：根据菱形的定义判定菱形

例 5 已知：如图 9.4-19，在 $\triangle ABC$ 中，CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，$DE\parallel AC$ 交 BC 于点 E，$DF\parallel BC$ 交 AC 于点 F. 四边形 $DECF$ 是菱形吗？为什么？

导引：因为 $DE\parallel FC$，$DF\parallel EC$，所以四边形 $DECF$ 为平行四边形，再根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形进行判定.

5. ［模拟 · 秦淮区］如图，在 $\square ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F，连接 EF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：四边形 $DECF$ 是菱形.

理由如下：∵ $DE \parallel FC$，$DF \parallel EC$，

∴ 四边形 $DECF$ 为平行四边形.

由 $AC \parallel DE$，知 $\angle 2 = \angle 3$.

∵ CD 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∴ $\angle 1 = \angle 3$. ∴ $DE = EC$.

∴ 平行四边形 $DECF$ 为菱形（有一组邻边相等的平行四边形是菱形）.

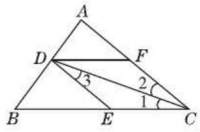


图 9.4-19

点方法

本题考查了菱形的定义，菱形的定义也可以作为菱形的判定方法.

考查角度 2：根据对角线互相垂直判定菱形

例 6 如图 9.4-20，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线 $EF \perp BD$，分别交 AD，BC 于点 E 和点 F，连接 BE，DF. 求证：四边形 $BEDF$ 是菱形.

导引：要证明四边形 $BEDF$ 是菱形，需要先证明四边形 $BEDF$ 是平行四边形，而由题意易知 $DE \parallel BF$，只需要证明 $DE = BF$，即可判定四边形 $BEDF$ 是平行四边形，证明 $DE = BF$ 可通过证明 $\triangle OED \cong \triangle OFB$ 来实现.

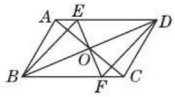


图 9.4-20

▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OB = OD$，$AD \parallel BC$.

∴ $\angle EDO = \angle FBO$，$\angle OED = \angle OFB$.

∴ $\triangle OED \cong \triangle OFB$. ∴ $DE = BF$.

又∵ $DE \parallel BF$，∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

∵ $EF \perp BD$，∴ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

点方法

证明一个四边形是菱形的方法： 若已知要证的四边形的对角线互相垂直，则要考虑证明这个四边形是平行四边形.

考查角度 3：根据四边相等判定菱形

例 7 如图 9.4-21，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle BAC = 60°$，DE 垂直平分 BC，垂足为点 D，交 AB 于点 E，点 F 在 DE 的延长线上，且 $AF = CE$. 求证：四边形 $ACEF$ 是菱形.

导引：由线段垂直平分线的性质得出 $BE = CE$，再得出 $\triangle ACE$ 和 $\triangle AEF$ 都是等边三角形，进而得出四边形 $ACEF$ 是菱形.

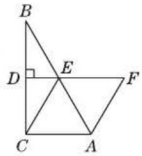
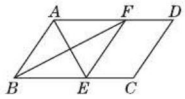


图 9.4-21

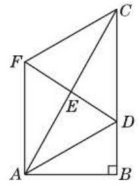
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AE \parallel BC$，$CE \parallel AD$，AE 与 CE 交于点 E. 求证：四边形 $ABEF$ 是菱形.



（第 5 题图）

6. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，点 E 是 AC 的中点，$AC = 2AB$，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D，作 $AF \parallel BC$，连接 DE 并延长交 AF 于点 F，连接 FC.

求证：四边形 $ADCF$ 是菱形.



（第 6 题图）

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，AD 是边 BC 上的中线，点 E，F 分别是 AB，AC 的中点，求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶证明：∵ DE 垂直平分 BC，

∴ $BE = CE$.

∵ $\angle ACB = 90°$，$\angle BAC = 60°$，

∴ $\angle BCE = \angle B = 30°$.

∴ $\angle AEC = 60°$.

∴ $\triangle ACE$ 为等边三角形.

∴ $AE = CE = AC$.

∵ $\angle AEF = \angle BED = 90° - \angle B = 60°$，$AF = CE = AE$，

∴ $\triangle AEF$ 为等边三角形.

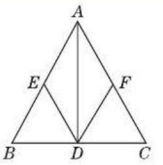
∴ $AE = AF = EF$.

∴ $AC = CE = EF = AF$.

∴ 四边形 $ACEF$ 是菱形（四条边相等的四边形是菱形）.

点方法

有较多线段相等的条件时，我们可考虑通过证明四条边相等来证明这个四边形是菱形. 注意：本例也可以通过先证四边形 $ACEF$ 是平行四边形，再证一组邻边相等，只不过步骤复杂一点，读者不妨试一试.



（第 7 题图）

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：菱形的性质与判定的综合运用

例 8 如图 9.4-22，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = AD$，$CB = CD$，E 是 CD 上一点，BE 交 AC 于 F，连接 DF.

（1）证明：$\angle BAC = \angle DAC$，$\angle AFD = \angle CFE$；

（2）若 $AB \parallel CD$，试证明：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（3）在（2）的条件下，试确定 E 点的位置，使 $\angle EFD = \angle BCD$，并说明理由.

导引：（1）首先利用三边对应相等的两三角形全等证明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$，可得 $\angle BAC = \angle DAC$，再证明 $\triangle ABF \cong \triangle ADF$，可得 $\angle AFD = \angle AFB$. 进而得到 $\angle AFD = \angle CFE$；

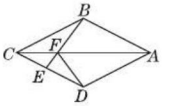


图 9.4-22

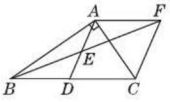
（2）首先证明 $\angle CAD = \angle ACD$，再根据等角对等边可得 $AD = CD$，然后由条件 $AB = AD$，$CB = CD$ 可得 $AB = CB = CD = AD$，进而可得四边形 $ABCD$ 是菱形；

（3）当 $BE \perp CD$ 时，$\angle EFD = \angle BCD$. 说明理由时首先说明 $\triangle BCF \cong \triangle DCF$，可得 $\angle CBF = \angle CDF$，再根据 $BE \perp CD$ 可得 $\angle BEC = \angle DEF = 90°$，进而得到 $\angle EFD = \angle BCD$.

举一反三训练

☞（答案见 264 页）

8. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F.



（第 8 题图）

（1）求证：$\triangle AFE \cong \triangle DBE$；

（2）求证：四边形 $ADCF$ 是菱形；

（3）若 $AC = 4$，$AB = 5$，求菱形 $ADCF$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)▶证明：在△ABC和△ADC中，$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

∴ △ABC≌△ADC. ∴ ∠BAC=∠DAC.

在△ABF和△ADF中，$\begin{cases}AB=AD,\\\angle BAF=\angle DAF,\\AF=AF,\end{cases}$

∴ △ABF≌△ADF. ∴ ∠AFD=∠AFB.

又∵ ∠AFB=∠CFE, ∴ ∠AFD=∠CFE.

(2)▶证明：∵ AB∥CD, ∴ ∠BAC=∠ACD.

又∵ ∠BAC=∠DAC, ∴ ∠DAC=∠ACD.

∴ AD=CD.

又∵ AB=AD, CB=CD, ∴ AB=CB=CD=AD.

∴ 四边形$ABCD$是菱形.

(3)▶解：当BE⊥CD时，∠EFD=∠BCD. 理由：∵ 四边形$ABCD$为菱形, ∴ ∠BCF=∠DCF.

在△BCF和△DCF中，$\begin{cases}CB=CD,\\\angle BCF=\angle DCF,\\CF=CF,\end{cases}$

∴ △BCF≌△DCF. ∴ ∠CBF=∠CDF.

∵ BE⊥CD, ∴ ∠BEC=∠DEF=90°. ∴ ∠EFD=∠BCD.

点方法

此题主要考查了菱形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质，这些都是证明线段和角相等的重要工具.

拨尖角度2：根据菱形的对称性求最小值(拓展点)

例9 菱形$OBCD$在平面直角坐标系中的位置如图9.4-23所示，顶点$B(2\sqrt{3},0)$，∠DOB=60°，点P是对角线OC上一个动点，$E(0,-1)$，求$PE+PB$的最小值.

导引：根据轴对称的性质和最短距离可知，点D和点B关于对角线OC所在的直线对称，连接DE交OC于一点，那么这个点就是使$PE+PB$取最小值的点P的位置，根据勾股定理求出DE的长，则DE的长就是$PE+PB$的最小值.

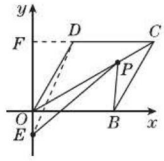
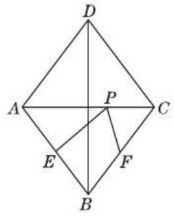


图9.4-23

▶解：如图9.4-23，连接DE，易知DE的长就是$PE+PB$的最小值. 延长CD交y轴于点F，易知CF⊥y轴，则在Rt△ODF中，OD=OB=$2\sqrt{3}$. 又∵ ∠DOF=∠BOF−∠DOB=90°−60°=30°, ∴ DF=$\sqrt{3}$. ∴ OF=3.

9. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC=6，BD=8，点E是边AB的中点，点F、P分别是BC、AC上的动点，则$PE+PF$的最小值是_____.



(第9题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $E(0,-1)$，∴ $EF=4$.

∴ $DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{19}$，即 $PE+PB$ 的最小值为 $\sqrt{19}$.

点方法

当在菱形的对角线上找点求最短距离时，根据菱形的对角线所在的直线是菱形的一条对称轴，且相对的顶点关于对称轴对称，所以直接利用相对的顶点进行转化求最短距离.

拔尖角度 3：操作问题中的菱形问题

例 10 在“做”菱形试验时，先将两张大小相同的矩形纸片完全重叠在一起，然后转动其中一张矩形纸片，如图 9.4-24 所示.

(1) 如图①，四边形 $EFGH$ 为两张矩形纸片的重叠部分. 求证：四边形 $EFGH$ 是菱形；

(2) 如图②，保持矩形纸片 $ABCD$ 不动，转动另一张矩形纸片，使其两个顶点分别落在点 A、C 处. 若 $AM=10$ cm，$\triangle ADN$ 的面积为 24 cm^2，求 $\triangle ADN$ 的周长.

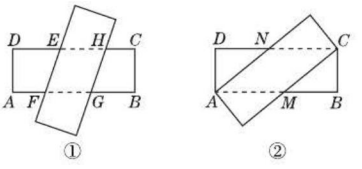


图 9.4-24

导引：(1) 作 $HM\perp AB$ 于 M，$FN\perp GH$ 于 N，由已知得出四边形 $EFGH$ 是平行四边形，根据等积法得出 $FG=HG$，根据菱形的判定得出即可；

(2) 根据菱形的性质求出 $AN=AM=10$ cm，根据勾股定理和三角形的面积得出方程组，求出方程组的解，即可得出答案.

(1) ▶证明：如图 9.4-25，作 $HM\perp AB$ 于 M，$FN\perp GH$ 于 N.

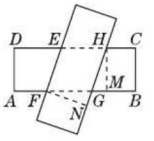


图 9.4-25

∵ 纸条的对边平行，

∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

∵ 纸条等宽，∴ $HM=FN$，

∵ $S_{\square EFGH}=FG\cdot HM=HG\cdot FN$，

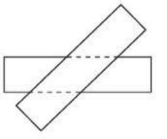
∴ $FG=HG$. ∴ 四边形 $EFGH$ 为菱形；

10. 如图，将两张长为 8，宽为 2 的矩形纸条交叉放置.

(1) 求证：重叠部分的图形是菱形；

(2) 求重叠部分的图形的周长的最大值和最小值.

(要求画图、推理、计算)



(第 10 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)▶解:由(1)知:四边形 $AMCN$ 也是菱形.

$\because AM=10$ cm,$\therefore AN=AM=10$ cm,

设 $AD=x$ cm,$DN=y$ cm,

由勾股定理得:$x^2+y^2=10^2=100$①,

$\because \triangle ADN$ 的面积为 24 cm^2,$\therefore \frac{1}{2}xy=24$②,

解由①②组成的方程组得:$x=8,y=6$ 或 $x=6,y=8$,

则 $\triangle ADN$ 的周长为 $6+8+10=24$(cm).

点方法

问题(1)中菱形的判定除了上述解法中的**等积法**外还可以根据全等证明一组邻边相等.

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见265页)

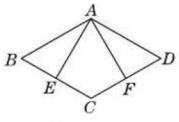
基础巩固练

1. [中考·衡阳]菱形的两条对角线分别是12和16,则此菱形的边长是(　　)

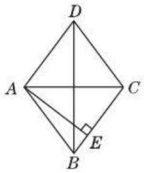
A. 10　　B. 8　　C. 6　　D. 5

2. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AE\perp BC$ 于点 E,$AF\perp CD$ 于点 F,且 E、F 分别为 BC、CD 的中点,则 $\angle EAF$ 等于(　　)

A. 75°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 30°



(第2题图)



(第3题图)

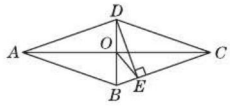
3. 如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的长分别是6 cm、8 cm,$AE\perp BC$ 于点 E,则 AE 的长是(　　)

A. $\frac{48}{5}$ cm　B. $\frac{24}{5}$ cm　C. $\frac{12}{5}$ cm　D. $5\sqrt{3}$ cm

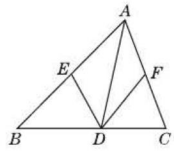
4. 四个点 A,B,C,D 在同一平面内,从①$AB\parallel CD$;②$AB=CD$;③$AC\perp BD$;④$AD=BC$;⑤$AD\parallel BC$,这五个条件中任选三个,能使四边形 $ABCD$ 是菱形的选法有(　　)

A. 1种　　B. 2种　　C. 3种　　D. 4种

5. [中考·十堰]如图,在菱形 $ABCD$ 中,AC 交 BD 于 O,$DE\perp BC$ 于 E,连接 OE,若 $\angle ABC=140°$,则 $\angle OED=$ _____.



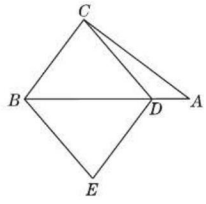
(第5题图)



(第6题图)

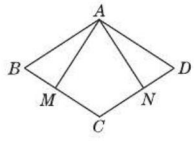
6. 如图,已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,点 E、F 分别是边 AB、AC 的中点,连接 DE、DF,要使四边形 $AEDF$ 成为菱形,还需添加一个条件,这个条件可以是_____.

7. 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=4$,$BC=3$,D 为斜边 AB 上一点,以 CD、CB 为边作平行四边形 $CDEB$,当 $AD=$ _____时,平行四边形 $CDEB$ 为菱形.



(第7题图)

8. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$AM\perp BC$,垂足为 M,$AN\perp DC$,垂足为 N. 若 $\angle BAD=\angle BCD$,$AM=AN$. 求证:四边形 $ABCD$ 是菱形.



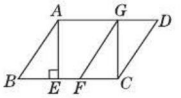
(第8题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE \perp BC$ 于 E，将 $\triangle ABE$ 沿 BC 方向平移，使点 E 与点 C 重合，得 $\triangle GFC$. 【导学号：9937991】

（1）求证：$BE = DG$；

（2）若 $\angle B = 60°$，当 AB 与 BC 满足什么数量关系时，四边形 $ABFG$ 是菱形？证明你的结论.

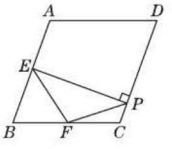


（第 9 题图）

能力提升练

10. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A = 110°$，E，F 分别是边 AB 和 BC 的中点，$EP \perp CD$ 于点 P，则 $\angle FPC$ 的度数为（　　）

A. 55°　B. 50°　C. 45°　D. 35°



（第 10 题图）

11. 在菱形 $ABCD$ 中，AE 为 BC 边上的高，若 $AB = 5$，$AE = 4$，则线段 CE 的长为_____.

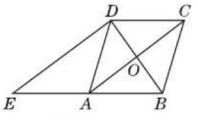
12. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，过点 D 作对角线 BD 的垂线交 BA 的延长线于点 E.

（1）证明：四边形 $ACDE$ 是平行四边形；

（2）若 $AC = 8$，$BD = 6$.

①求 $\triangle ADE$ 的周长；

②在直线 BE 上有一点 P，当 $\triangle PDE$ 为等腰三角形时直接写出线段 PE 的长.

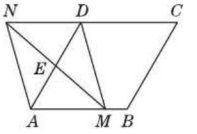


（第 12 题图）

13. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = 2$，$\angle DAB = 60°$，点 E 是 AD 边的中点，点 M 是 AB 边上的一个动点（不与点 A 重合），延长 ME 交 CD 的延长线于点 N，连接 MD，AN.

（1）求证：四边形 $AMDN$ 是平行四边形.

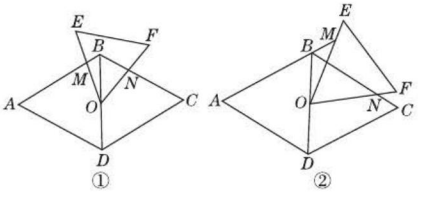
（2）当 AM 的长为何值时，四边形 $AMDN$ 是矩形？请说明理由.



（第 13 题图）

思维拓展练

14. 如图①，已知点 O 为菱形 $ABCD$ 的对角线的交点，$\angle A = 60°$，将等边三角形 OEF 的顶点放在 O 处，直线 OE、OF 分别交直线 AB、BC 于 M、N.



（第 14 题图）

（1）求证：$OM = ON$；

（2）写出线段 BM，BN 与 AB 之间的数量关系并证明；

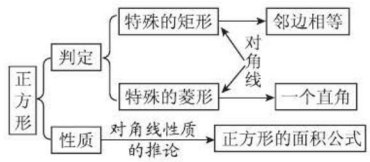
（3）将图①中的 $\triangle OEF$ 绕点 O 顺时针旋转至图②的位置，请直接写出线段 BM，BN 与 AB 之间的数量关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.4.3 正方形

热门话题
- 正方形的判定
- 正方形的性质

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 正方形的定义及其性质

点知识

1. **正方形的定义**：有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

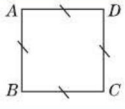
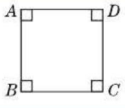
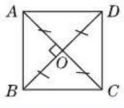
要点精析

平行四边形、矩形、菱形、正方形之间的关系如图9.4-26：



图9.4-26

2. **正方形的性质**

	正方形的性质			
	边	角	对角线	对称性
图形语言				既是轴对称图形，又是中心对称图形.
文字语言	对边平行，四条边都相等.	四个角都是直角.	对角线互相垂直平分且相等.	
符号语言	∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， ∴ $AB\parallel CD, AD\parallel BC$， $AB=BC=CD=AD$.	∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， ∴ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$.	∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， ∴ $AC\perp BD, AC=BD$， $OA=OC, OB=OD$.	

要点精析

1. 正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质.
2. 正方形两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

拨考向

典例剖析

考查角度1：根据正方形的性质计算

例1 如图9.4-27，正方形 $ABCD$ 的边长为1 cm，AC 为对角线，AE 平分 $\angle BAC$，$EF\perp AC$，垂足为 F，求 BE 的长.

举一反三训练

☞(答案见267页)

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，延长 AB 到

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：线段 BE 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 的一边，但由于 AE 未知，不能直接用勾股定理求 BE，由条件可证 $\triangle ABE\cong\triangle AFE$，问题转化为求 EF 的长，结合已知条件易获解.

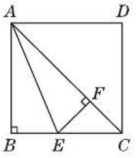


图 9.4-27

▶解：∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $\angle B=90°$，$\angle ACB=45°$，$AB=BC=1$ cm.

∵ $EF\perp AC$，∴ $\angle EFA=\angle EFC=90°$.

易知 $\angle ECF=45°$，∴ $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形.

∴ $EF=FC$.

∵ $\angle BAE=\angle FAE$，$\angle B=\angle EFA=90°$，$AE=AE$，

∴ $\triangle ABE\cong\triangle AFE$.

∴ $AB=AF=1$ cm，$BE=EF$. ∴ $FC=BE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$(cm).

∴ $FC=AC-AF=(\sqrt{2}-1)$ cm. ∴ $BE=(\sqrt{2}-1)$ cm.

点方法

解有关正方形的问题，要充分利用正方形的四边相等、四角相等、对角线互相垂直平分且相等等性质，正方形的性质、等腰直角三角形的特点、勾股定理是解决正方形的相关证明与计算问题的三把钥匙.

考查角度 2：根据正方形的性质证明

例 2 已知：如图 9.4-28，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 的交点为 O，E 是 OB 上的一点，$DG\perp AE$ 于 G，DG 交 AO 于 F，连接 EF，求证：$EF/\!/AB$.

导引：要证 $EF/\!/AB$，由于 $\angle OBA=45°$，$\angle EOF=90°$，需证 $\angle OEF=45°$，即要证明 $OE=OF$，而 $OE=OF$ 可通过证明 $\triangle AEO\cong\triangle DFO$ 获得.

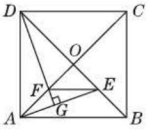


图 9.4-28

▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle AOE=\angle DOF=90°$，$AO=DO$，$\angle OBA=45°$.

又∵ $DG\perp AE$，∴ $\angle EAO+\angle AEO=\angle EDG+\angle GED=90°$.

∵ $\angle AEO=\angle GED$，∴ $\angle EAO=\angle FDO$.

∴ $\triangle AEO\cong\triangle DFO$(ASA).

∴ $OE=OF$. ∴ $\angle OEF=45°$.

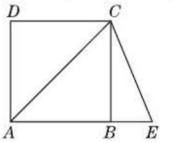
∴ $\angle OEF=\angle OBA$.

∴ $EF/\!/AB$.

拨技巧

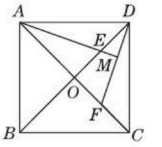
通过证明三角形全等得到边相等，再进一步得到平行或垂直，这种方法是有关正方形证明题中最常用的方法，而正方形的性质为证明三角形全等提供了条件.

E，使 $AE=AC$，则 $\triangle ACE$ 的面积是_____.



（第 1 题图）

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别在 OD，OC 上，且 $DE=CF$，连接 DF，AE，AE 的延长线交 DF 于点 M. 求证：$AM\perp DF$.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 正方形的判定

点知识

方法一(定义判定):有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形;
方法二:有一个角是直角的菱形是正方形;
方法三:有一组邻边相等的矩形是正方形.

要点精析 ///

平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定方法可用如图9.4-29来体现:

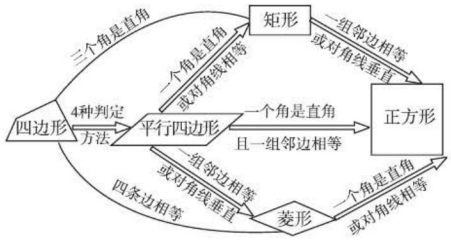


图9.4-29

点考向

考查角度1:先证矩形再证正方形

例3 如图9.4-30,△ABC中,$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,点O为AB的中点,连接DO并延长到点E,使$OE=OD$,连接AE,BE.

(1)求证:四边形$AEBD$是矩形;

(2)当△ABC满足什么条件时,矩形$AEBD$是正方形?并说明理由.

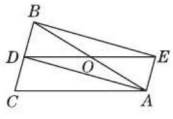


图9.4-30

导引:(1)利用平行四边形的判定方法首先得出四边形$AEBD$是平行四边形,进而由等腰三角形的性质得出$\angle ADB=90°$,即可证得结论;(2)利用等腰直角三角形的性质得出$AD=BD=CD$,进而利用正方形的判定方法即可得出.

(1)▶证明:∵点O为AB的中点,$OE=OD$,

∴四边形$AEBD$是平行四边形.

∵$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,

∴$AD\perp BC$.∴$\angle ADB=90°$.

∴平行四边形$AEBD$是矩形.

(2)▶解:当△ABC满足$\angle BAC=90°$时,矩形$AEBD$是正方形.

理由如下:∵$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,AD是△ABC的角平分线,

∴$AD=BD=CD$.

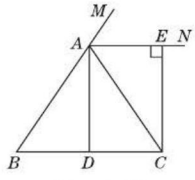
由(1)可知四边形$AEBD$是矩形,

∴矩形$AEBD$是正方形.

点方法

本题运用**演绎推理法**解答,根据对角线互相平分判定四边形$AEBD$是平行四边形,再由等腰三角形三线合一的性质证直角,从而判定四边形$AEBD$是矩形,添加条件后可证得矩形的一组邻边相等,即可判定该四边形是正方形.

3. 如图,在△ABC中,$AB=AC$,$AD\perp BC$,垂足为点D,AN是△ABC外角的平分线,$CE\perp AN$,垂足为点E.



(第3题图)

(1)求证:四边形$ADCE$为矩形;

(2)当△ABC满足什么条件时,四边形$ADCE$为正方形?并给出证明.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度 2：先证菱形再证正方形

例 4 如图 9.4-31，已知在$\square ABCD$中，对角线 AC，BD 交于点 O，E 是 BD 延长线上的一点，且 $EA=EC$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）若 $\angle DAC=\angle EAD+\angle AED$，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

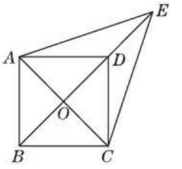


图 9.4-31

导引：（1）首先根据平行四边形的性质可得 $AO=CO$，由 $EA=EC$ 可得$\triangle EAC$是等腰三角形，然后根据等腰三角形三线合一的性质可得 $EO\perp AC$，根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形可证出结论；

（2）首先根据角的关系得出 $AO=DO$，进而得到 $AC=BD$，再根据对角线相等的菱形是正方形可得到结论.

▶证明：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AO=CO$.

∵ $EA=EC$，∴ $\triangle EAC$ 是等腰三角形.

∴ $EO\perp AC$，即 $BD\perp AC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

（2）∵ $\angle ADO=\angle EAD+\angle AED$，$\angle DAC=\angle EAD+\angle AED$，

∴ $\angle ADO=\angle DAC$. ∴ $AO=DO$.

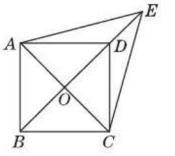
∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC=2AO$，$BD=2DO$.

∴ $AC=BD$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

4. 如图，已知$\square ABCD$中，对角线 AC，BD 交于点 O，E 是 BD 延长线上的一点，且$\triangle ACE$是等边三角形，$\angle AED=2\angle EAD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.



（第 4 题图）

II 点方法 · 拔技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1：正方形的性质及其判定综合运用

例 5 如图 9.4-32 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 6. 菱形 $EFGH$的三个顶点 E，G，H 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB，CD，DA 上，且$AH=2$，连接 CF.

（1）当 $DG=2$ 时，求证：菱形 $EFGH$ 为正方形；

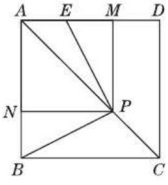
（2）设 $DG=x$，试用含 x 的代数式表示$\triangle FCG$的面积.

导引：（1）由于四边形 $ABCD$ 为正方形，四边形 $EFGH$ 为菱形，因此$\angle D=\angle A=90°$，$HG=HE$，而 $AH=DG=2$，易证 $\mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$，从而有 $\angle DHG=\angle AEH$，等量代换可得 $\angle AHE+\angle DHG=90°$，易证四边形 $EFGH$ 为正方形；（2）欲表示$\triangle FCG$的面积，由已知易求得 CG 的长，只需求出 GC 边上的高即可.

举一反三训练

□（答案见 267 页）

5. 如图，已知正方形$ABCD$，P 是对角线 AC 上任意一点，E 为 AD 上的点，且 $\angle EPB=90°$，$PM\perp AD$，$PN\perp AB$.



（第 5 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)▶证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle D=\angle A=90°$.

∵ 四边形 $EFGH$ 是菱形,∴ $HG=EH$.

∵ $DG=AH=2$,∴ $\mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$.

∴ $\angle DHG=\angle AEH$.

∵ $\angle AEH+\angle AHE=90°$,

∴ $\angle DHG+\angle AHE=90°$. ∴ $\angle GHE=90°$.

∴ 菱形 $EFGH$ 为正方形.

(2)▶解:过 F 作 $FM\perp CD$,交 DC 的延长线于点 M,连接 GE,如图 9.4-32 所示.

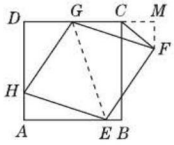


图 9.4-32

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,∴ $CD/\!/AB$,

∴ $\angle AEG=\angle MGE$.

∵ 四边形 $EFGH$ 为菱形,∴ $FG=HE$,$GF/\!/HE$,

∴ $\angle HEG=\angle FGE$.

∴ $\angle AEH=\angle MGF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle MFG$ 中,$\begin{cases}\angle A=\angle M=90°,\\ \angle AEH=\angle MGF,\\ HE=FG,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle MFG$. ∴ $MF=AH=2$.

∵ $DG=x$,∴ $CG=6-x$.

∴ $S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}CG\cdot FM=6-x$.

点方法

解答本题采用了**演绎推理法**和**构造法**,(1)由于四边形 $EFGH$ 为菱形,只需再证有一个内角是直角即可;(2)解题的关键是作辅助线:过 F 作 $FM\perp DC$,交 DC 的延长线于点 M,连接 GE,构造全等三角形.

拨尖角度2:巧用正方形性质证明线段的和差关系(拓展点)

例6 已知:正方形 $ABCD$ 中,$\angle MAN=45°$,$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转,它的两边分别交 CB,DC(或它们的延长线)于点 M,N. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时(如图 9.4-33①),易证 $BM+DN=MN$.

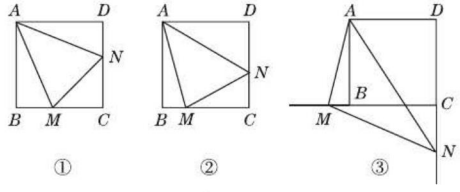


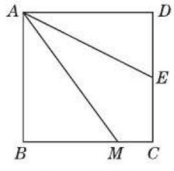
图 9.4-33

(1)当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时(如图 9.4-33②),线段 BM,DN 和 MN 之间有怎样的数量关系?写出猜想,并加以证明.

(1)求证:四边形 $PMAN$ 是正方形;

(2)求证:$EM=BN$.

6. 如图,已知四边形 $ABCD$ 是正方形,M 是 BC 边上一点,E 是 CD 边的中点,AE 平分 $\angle DAM$.



(第6题图)

(1)求证:$AM=AD+MC$;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（2）当∠MAN 绕点 A 旋转到如图 9.4-33③的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并说明理由.

导引：（1）数量关系为 $BM+DN=MN$，构造△ABE，使△ABE≌△ADN，且 BE 在 CB 延长线上，再证△AEM≌△ANM，从而证得 $ME=MN$.（2）$DN-BM=MN$. 说理方法与（1）类似.

▶解：（1）$BM+DN=MN$.

证明如下：如图 9.4-34①，在 MB 的延长线上截得 $BE=DN$，连接 AE. 易证△ABE≌△ADN.

∴ $AE=AN$，∠EAB=∠NAD.

∵ ∠BAD=90°，∠NAM=45°，

∴ ∠BAM+∠NAD=45°.

∴ ∠EAM=∠EAB+∠BAM=45°.

∴ ∠EAM=∠NAM.

又 AM 为公共边，∴ △AEM≌△ANM.

∴ $ME=MN$.

∵ $ME=BE+BM=DN+BM$，

∴ $DN+BM=MN$.

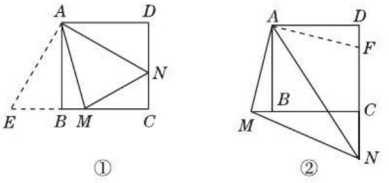


图 9.4-34

（2）$DN-BM=MN$. 理由如下：

如图 9.4-34②，在 DC 上截取 $DF=BM$，连接 AF.

易知 $AB=AD$，∠ABM=∠ADF=90°，

∴ △ABM≌△ADF（SAS）.

∴ $AM=AF$，∠MAB=∠FAD.

∴ ∠MAB+∠BAF=∠FAD+∠BAF=∠BAD=90°，

即∠MAF=∠BAD=90°.

又∠MAN=45°，∴ ∠FAN=∠MAN=45°.

∵ $AN=AN$，∴ △MAN≌△FAN.

∴ $MN=FN$，

即 $MN=FN=DN-DF=DN-BM$.

点方法

证明线段的和、差问题，解决这类问题的基本方法是**截长补短法**，即在长的线段上截取或将短的线段延长，转化为线段相等的问题.

（2）$AM=DE+BM$ 是否成立？请直接判断，不需要证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

解密中考——一题多变

对重点题目的改造是重点知识得以升华的源泉，是中考试题的核心.

【例1】如图 9.4-35，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F.

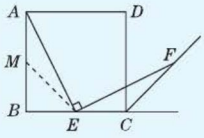


图 9.4-35

求证：$AE=EF$.

【关键点】如图 9.4-35，取 AB 的中点 M，连接 EM. 关键条件：外角平分线，$\angle AEF=90°$；关键思路：证明 $\triangle AME\cong\triangle ECF$.

改造展示

改造一：变特殊为一般

【例2】［中考·黄石］如图 9.4-36，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是 BC 边上任意一点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证：$AE=EF$.

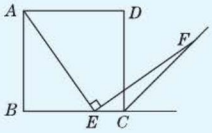


图 9.4-36

【改造点】将“点 E 为 BC 的中点”这一特殊条件改造为“点 E 是 BC 边上任意一点”的一般条件.

改造二：改变条件的呈现方式

【例3】［中考·黄冈］如图 9.4-37，两个全等的正方形的其中一边 CD 完全重合，点 M 是 BC 边的中点，连接 AM，且 $\angle AMN=90°$，交 CE 于 N. 求证：$AM=MN$.

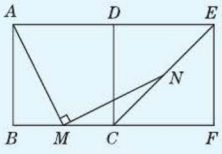


图 9.4-37

【改造点】将“外角平分线”这一条件呈现的方式改为“正方形的对角线”.

改造三：改变问题呈现的背景

【例4】［中考·乌鲁木齐］如图 9.4-38，边长为 5 的正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点处，点 A，C 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，点 E 是 OA 边上的点（不与点 A 重合），$EP\perp CE$，且与正方形外角平分线 AG 交于点 P，

（1）当点 E 的坐标为（3，0）时，试证明：$CE=EP$.

（2）如果将上述条件“点 E 的坐标为(3,0)”改为“点 E 的坐标为$(t,0)$（$t>0$）”，结论 $CE=EP$ 是否仍然成立？请说明理由.

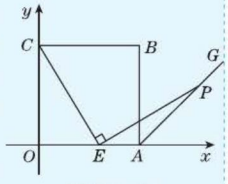


图 9.4-38

（3）在 y 轴上是否存在点 M，使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形？若存在，用 t 表示点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

【改造点】将整个问题由孤立的背景置于平面直角坐标系中结合坐标去解决问题.

改造四：留其灵魂，换其躯壳

【例5】［中考·无锡］(1)如图 9.4-39①，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 边（不含端点 B、C）上任意一点，P 是 BC 延长线上一点，N 是 $\angle DCP$ 的平分线上一点. 若 $\angle AMN=90°$，求证：$AM=MN$.

下面给出一种证明的思路，你可以按这一思路证明，也可以选择另外的方法证明.

证明：如图 9.4-39①，在边 AB 上截取 $AE=MC$，连接 ME. 在正方形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle BCD=90°$，$AB=BC$.

又∵ $\angle AMN=90°$，∴ $\angle NMC=180°-\angle AMN-\angle AMB=180°-\angle B-\angle AMB=\angle MAB=\angle MAE$.

（下面请你完成余下的证明过程）

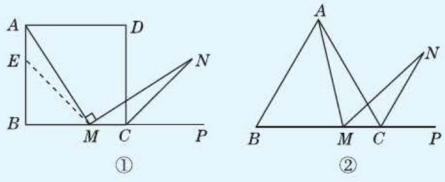


图 9.4-39

(2)若将(1)中的“正方形 $ABCD$”改为“正三角形 ABC”（如图 9.4-39②），N 是 $\angle ACP$ 的平分线上一点，则当 $\angle AMN=60°$ 时，结论 $AM=MN$ 是否还成立？请说明理由.

(3)若将(1)中的“正方形 $ABCD$”改为“正 n 边形 $ABCD\cdots\cdots X$”，请你猜想一下：当 $\angle AMN=$ _____°时，结论 $AM=MN$ 仍然成立.（直接写出答案，不需要证明）

【改造点】去掉“正方形”的外壳，保留“外角平分线”与“两线的夹角”的灵魂.

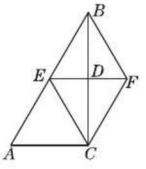
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 268 页）

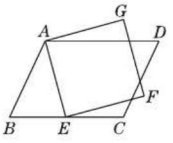
基础巩固练

1. 矩形、菱形、正方形都一定具有的性质是（　　）
   A. 邻边相等
   B. 四个角都是直角
   C. 对角线相等
   D. 对角线互相平分

2. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 D，交 AB 于点 E，且 $BE=BF$. 添加一个条件，仍不能证明四边形 $BECF$ 为正方形的是（　　）
   A. $BC=AC$　　B. $CF\perp BF$
   C. $BD=DF$　　D. $AC=BF$



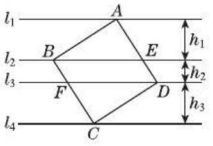
（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，▱$ABCD$ 中，E 为 BC 边上一点，以 AE 为边作正方形 $AEFG$，若 $\angle BAE=40°$，$\angle CEF=15°$，则 $\angle D$ 的度数是（　　）
   A. 65°　　B. 55°　　C. 70°　　D. 75°

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的四个顶点分别在四条平行线 l_1、l_2、l_3、l_4 上，这四条直线中相邻两条之间的距离依次为 h_1、h_2、h_3. 若 $h_1=2$，$h_2=1$，则正方形 $ABCD$ 的面积为（　　）
   A. 9　　B. 10　　C. 13　　D. 25

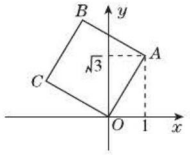


（第 4 题图）

5. ［中考 · 齐齐哈尔］矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，请你添加一个适当的条件：_____，使其成为正方形.（只填一个即可）

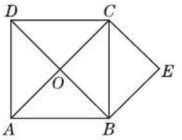
6. 已知正方形 $ABCD$ 中，点 E 为直线 BC 上一点，若 $AE=2BE$，则 $\angle DAE=$ _____.

7. 如图，将正方形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中，O 是原点，A 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$，则点 C 的坐标为_____.



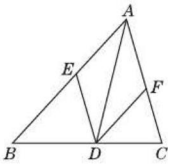
（第 7 题图）

8. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 B 作 AC 的平行线，过点 C 作 DB 的平行线，它们相交于点 E. 求证：四边形 $OBEC$ 是正方形.



（第 8 题图）

9. 已知：如图，△ABC 中，D 是 BC 上任意一点，$DE\parallel AC$，$DF\parallel AB$.　【导学号：9937991】
   （1）试说明四边形 $AEDF$ 的形状，并说明理由.
   （2）连接 AD，当 AD 满足什么条件时，四边形 $AEDF$ 为菱形？为什么？
   （3）在（2）的条件下，当△ABC 满足什么条件时，四边形 $AEDF$ 为正方形，不用说明理由.

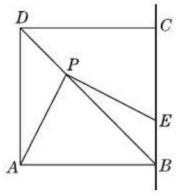


（第 9 题图）

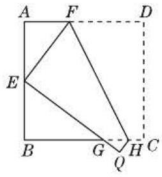
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

10. 如图，在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，点 P 为对角线 BD 上一动点，过点 P 作 $PE \perp PA$，交直线 BC 于点 E，若 $\triangle PBE$ 为等腰三角形，则 PB 的长为_____.



（第 10 题图）



（第 11 题图）

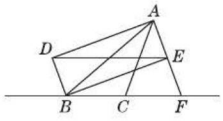
11. [中考·黔西南州] 如图，将边长为 6 cm 的正方形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 D 落在 AB 边的中点 E 处，点 C 落在点 Q 处，折痕为 FH，则线段 AF 的长是_____cm.

12. 如图，BE、BD 是 $\triangle ABC$ 的内、外角平分线，$AD \perp BD$ 于 D，$AE \perp BE$ 于 E，交 BC 的延长线于 F.

(1) 判断四边形 $ADBE$ 的形状，并说明理由.

(2) DE 与 BF 相等吗？为什么？

(3) 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $ADBE$ 是一个正方形？并给出证明.



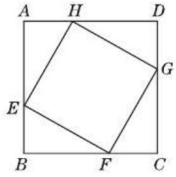
（第 12 题图）

思维拓展练

13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 边上的动点，且 $AE = BF = CG = DH$.

(1) 求证：$\triangle AEH \cong \triangle CGF$；

(2) 在点 E、F、G、H 运动过程中，判断直线 EG 是否经过某一个定点，如果是，请证明你的结论；如果不是，请说明理由.



（第 13 题图）

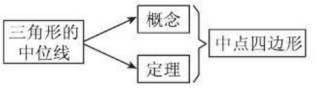
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.5 三角形的中位线

热门话题
- 三角形中位线的概念
- 三角形中位线定理
- 中点四边形

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 三角形中位线

点知识

1. **定义**：连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线.

数学表达式：如图 9.5-1，

∵ $AD=BD$，$AE=EC$，

∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

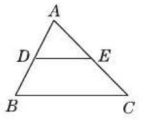


图 9.5-1

要点精析

(1) 一个三角形有三条中位线；

(2) 三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形；

(3) 三角形的中位线与三角形的中线的区别：三角形的中线是连接一顶点和它对边中点的线段，而三角形的中位线则是连接两边中点的线段.

(4) 三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

2. **中位线定理**：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

数学表达式：如图 9.5-1，∵ $AD=BD$，$AE=EC$，∴ $DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

要点精析

三角形的中位线定理反映了三角形的中位线与第三边的双重关系：一是位置关系，可以用来证两直线平行；二是数量关系，可以用来证线段的倍分关系.

3. **易错警示**：三角形的中位线与三角形的第三边存在数量与位置关系.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：利用三角形中位线定理求线段的长

例 1 如图 9.5-2，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点. 若 $\triangle DBE$ 的周长是 6，则 $\triangle ABC$ 的周长是（　　）

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14

导引：先根据已知条件得知 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，得到 DE 与 AC 的数量关系，再结合 BD，BE 与 BA，BC 的数量关系即可求出 $\triangle ABC$ 的周长. 具体解题过程如下：

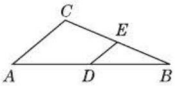


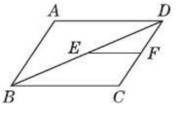
图 9.5-2

因为点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，所以 $BC=2BE$，$BA=2BD$，且 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线. 所以 $AC=2DE$. 所以 $AB+$

举一反三训练

（答案见 269 页）

1. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AD=6$，点 E、F 分别是 BD、CD 的中点，则 $EF=$ _____.



（第 1 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$BC+AC=2BD+2BE+2DE=2(BD+BE+DE)$，即$\triangle ABC$的周长是$\triangle DBE$周长的2倍. 又因为$\triangle DBE$的周长是6，所以$\triangle ABC$的周长是12.

▶答案：C

考查角度2：利用三角形中位线定理证明

例2 如图9.5-3，已知E为平行四边形$ABCD$中DC边的延长线上一点，且$CE=DC$，连接AE，分别交BC，BD于点F，G，连接AC交BD于点O，连接OF. 求证：$AB=2OF$.

导引：点O是平行四边形两条对角线的交点，所以点O是线段AC的中点，要证明$AB=2OF$，我们只需证明OF是$\triangle ABC$的中位线，即证明点F是线段BC的中点.

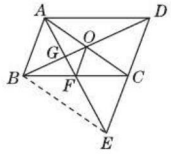


图9.5-3

▶证明：如图9.5-3，连接BE.

∵ 四边形$ABCD$为平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AB=CD$，O为AC的中点.

∵ E为平行四边形$ABCD$中DC边的延长线上一点，且$CE=DC$，

∴ $AB\parallel CE$，$AB=CE$.

∴ 四边形$ABEC$是平行四边形.

∴ 点F是BC的中点.

又∵ 点O是AC的中点，

∴ OF是$\triangle ABC$的中位线.

∴ $AB=2OF$.

点方法

证明线段倍分关系的方法：由于三角形的中位线等于三角形第三边的一半，因此当需要证明某一线段是另一线段的一半或两倍，且题中出现中点时，常考虑三角形中位线定理.

考查角度3：利用三角形中位线定理确定四边形的形状

例3 如图9.5-4所示的四边形$ABCD$中，点E、F、G、H分别是边AB、BC、CD、DA的中点，连接EF、FG、GH、HE，得到四边形$EFGH$，求证：四边形$EFGH$是平行四边形.

导引：如图9.5-4，连接BD，根据题意知，EH是$\triangle ABD$的中位线，FG是$\triangle BCD$的中位线，两个三角形有一条公共边BD，利用三角形中位线定理即可证明.

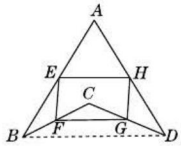
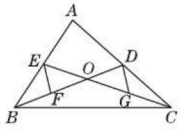


图9.5-4

▶证明：如图9.5-4，连接BD，∵ 点E、H分别是边AB、DA的中点，∴ EH为$\triangle ABD$的中位线. ∴ $EH\parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$. 同理$FG\parallel BD$，$FG=\frac{1}{2}BD$. ∴ $EH\parallel FG$，$EH=FG$. ∴ 四边形$EFGH$是平行四边形.

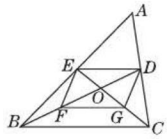
2. $\triangle ABC$的中线BD，CE相交于O，F，G分别是BO，CO的中点，求证：$EF\parallel DG$，且$EF=DG$.



（第2题图）

3. 已知：如图，$\triangle ABC$的中线BD，CE交于点O，F，G分别是OB，OC的中点.

求证：四边形$DEFG$是平行四边形.



（第3题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

几种常见的中点四边形的命题：

（1）连接四边形各边中点的四边形是平行四边形；

（2）连接对角线互相垂直的四边形各边中点的四边形是矩形；

（3）连接对角线相等的四边形各边中点的四边形是菱形；

（4）连接平行四边形各边中点的四边形是平行四边形；

（5）连接矩形各边中点的四边形是菱形；

（6）连接菱形各边中点的四边形是矩形.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1：根据三角形中位线定理计算

例 4 如图 9.5-5，$\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=6$，AD、AE 分别是其角平分线和中线，过点 C 作 $CG\perp AD$ 于 F，交 AB 于 G，连接 EF，求线段 EF 的长.

导引：首先证明 $\triangle AGF\cong\triangle ACF$，则 $AG=AC=6$，$GF=CF$，再证明 EF 是 $\triangle BCG$ 的中位线，利用三角形的中位线定理即可求解.

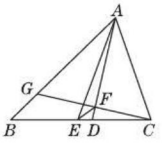


图 9.5-5

▶解：$\because CG\perp AD$，$\therefore \angle AFG=\angle AFC=90°$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle GAF=\angle CAF$.

在 $\triangle AGF$ 和 $\triangle ACF$ 中，$\begin{cases}\angle GAF=\angle CAF,\\ AF=AF,\\ \angle AFG=\angle AFC,\end{cases}$

$\therefore \triangle AGF\cong\triangle ACF(\mathrm{ASA})$，$\therefore AG=AC=6$，$GF=CF$，

$\therefore BG=AB-AG=8-6=2$.

又$\because BE=CE$，$\therefore EF$ 是 $\triangle BCG$ 的中位线，

$\therefore EF=\frac{1}{2}BG=1$.

点方法

本题通过证明三角形全等，找出中点，从而根据三角形中位线定理计算.

拔尖角度 2：根据三角形中位线定理证明线段相等

例 5 如图 9.5-6，在 $\triangle ABC$ 中，D，E，F 分别是 AB，BC，AC 的中点，$AH\perp BC$，垂足为 H.

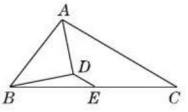
求证：(1) $HD=EF$.

(2) $\angle DHF=\angle DEF$.

举一反三训练

☞（答案见 269 页）

4. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=7$，$AC=11$，AD 平分 $\angle BAC$，$BD\perp AD$，E 是 BC 的中点，那么 $DE=$_____.



（第 4 题图）

5. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在边 AB 上（点 D 与点 A、B 不重合），过点 D 作 $DE\parallel BC$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引:(1)根据直角三角形斜边上中线的性质得到 $DH=\frac{1}{2}AB$,根据三角形中位线定理得到 $EF=\frac{1}{2}AB$,从而证明结论;

(2)证明四边形 $DEFA$ 为平行四边形,根据平行四边形的性质解答.

▶证明:(1)在 $\triangle ABC$ 中,$AH\perp BC$,

$\therefore\angle AHB=90°$,

$\because D$ 为 AB 的中点,$\therefore DH=\frac{1}{2}AB$,

$\because E,F$ 分别为 BC,AC 边的中点,$\therefore EF=\frac{1}{2}AB$,

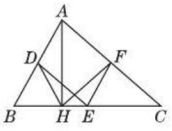


图 9.5-6

$\therefore DH=EF$.

(2)$\because D,E$ 分别为 AB,BC 的中点,

$\therefore DE/\!/AC,DE=\frac{1}{2}AC$,

$\because F$ 为 AC 的中点,$\therefore AF=\frac{1}{2}AC,\therefore DE=AF$,

$\therefore$ 四边形 $DEFA$ 为平行四边形,

$\therefore\angle DEF=\angle BAC$,

$\because DH=\frac{1}{2}AB=AD,\therefore\angle BAH=\angle DHA$,

$\because F$ 为 AC 的中点,$\angle AHC=90°$,

$\therefore FH=\frac{1}{2}AC=AF,\therefore\angle HAC=\angle AHF$,

$\therefore\angle DHA+\angle AHF=\angle DAH+\angle FAH$,

即 $\angle DHF=\angle BAC,\therefore\angle DHF=\angle DEF$.

点方法

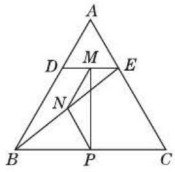
本题将三角形中位线、直角三角形的斜边上中线性质相结合,证明线段相等.

拔尖角度3:构造三角形中位线解决问题(拓展点)

例6 如图 9.5-7,在 $\triangle ABC$ 中,BD、CE 分别平分 $\angle ABC$,$\angle ACB$,$AM\perp CE$ 于点 M,$AN\perp BD$ 于点 N,求证:$MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

导引:要证明 $MN=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$,可找以 MN 为中位线的三角形的第三边,故延长 AM 交 BC 于点 F,延长 AN 交 BC 于点 G,易证明 $2MN=FG$,而 $FG=BG+FC-BC$. 又易证明 $BG=AB$,$FC=AC$,故问题得解.

交 AC 于点 E,连接 BE. M、N、P 分别为 DE、BE、BC 的中点,顺次连接 MN,NP,MP.



(第5题图)

(1)求证:$MN=PN$.

(2)求 $\angle MNP$ 的度数.

6. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$AD<BC$,M,N 分别是对角线 BD,AC 的中点,试探索 MN 与两底的位置关系与数量关系,并说明理由.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶证明：如图 9.5-7，延长 AM，AN 分别交 BC 于点 F，G.

因为 BD 平分 $\angle ABC$，$AN \perp BD$，

所以 $\angle ABN = \angle GBN$，$\angle ANB = \angle GNB = 90°$.

又因为 $BN = BN$，所以 $\triangle ABN \cong \triangle GBN$.

所以 $AN = NG$，$AB = BG$.

同理可得 $AM = MF$，$AC = CF$.

所以 M，N 分别为 AF，AG 的中点.

所以 $MN = \frac{1}{2}FG$.

又因为 $FG = BG + FC - BC = AB + AC - BC$，

所以 $MN = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

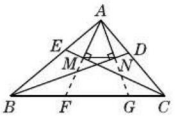
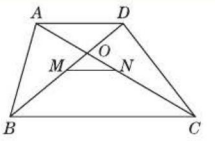


图 9.5-7



（第 6 题图）

点方法

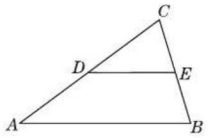
图中不存在中点，但结论与三角形中位线定理很类似，因此应设法寻找中点，再构造三角形的中位线. 本题的证明思路体现了**类比思想**和**转化思想**.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 270 页）

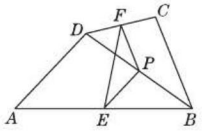
基础巩固练

1. 如图，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 的中点，已知 $DE = 2$，则 AB 等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第 1 题图）



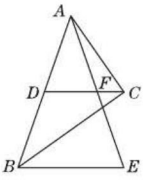
（第 2 题图）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 P 是对角线 BD 的中点，点 E，F 分别是 AB，CD 的中点，$AD = BC$，$\angle PEF = 30°$，则 $\angle PFE$ 的度数是（　　）

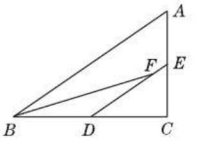
A. 15°　　B. 20°　　C. 25°　　D. 30°

3. ［中考 · 毕节市］如图，Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，斜边 $AB = 9$，D 为 AB 的中点，F 为 CD 上一点，且 $CF = \frac{1}{3}CD$，过点 B 作 $BE \parallel DC$ 交 AF 的延长线于点 E，则 BE 的长为（　　）

A. 6　　B. 4　　C. 7　　D. 12



（第 3 题图）

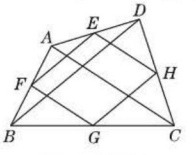


（第 4 题图）

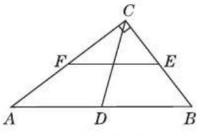
4. 如图，$\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 BC，AC 的中点，BF 平分 $\angle ABC$，交 DE 于点 F，若 $BC = 6$，则 DF 的长是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. 如图，连接四边形 $ABCD$ 各边的中点，得到四边形 $EFGH$，只要添加_____条件，就能保证四边形 $EFGH$ 是菱形.



（第 5 题图）

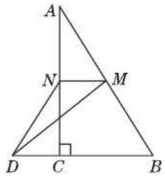


（第 6 题图）

6. 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，D、E、F 分别是 AB、BC、CA 的中点，若 $CD = 3$ cm，则 $EF =$ _____ cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，M、N 分别是 AB、AC 的中点，延长 BC 至点 D，使 $CD=\frac{1}{3}BD$. 连接 DM、DN、MN. 若 $AB=6$，求 DN 的长.

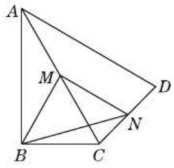


（第 7 题图）

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$AC=AD$，M、N 分别为 AC、CD 的中点，连接 BM、MN、BN.

（1）求证：$BM=MN$.

（2）若 $\angle BAD=60°$，AC 平分 $\angle BAD$，$AC=4$，①求 $\angle BMN$ 的度数；②求 BN 的长.

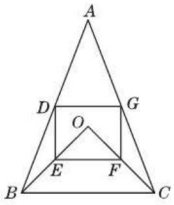


（第 8 题图）

9. 已知△ABC 中，$AB=AC$，点 O 在△ABC 的内部，$\angle BOC=90°$，$OB=OC$，D、E、F、G 分别是 AB、OB、OC、AC 的中点.

（1）求证：四边形 $DEFG$ 是矩形；

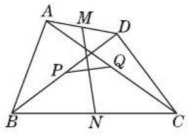
（2）若 $DE=2$，$EF=3$，求△ABC 的面积.



（第 9 题图）

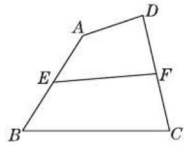
能力提升练

10. ［探究题］如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，点 M、N、P、Q 分别是 AD、BC、BD、AC 的中点，试说明 MN 与 PQ 互相垂直平分.



（第 10 题图）

11. ［探究题］如图，在四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，CD 的中点. 当 $AD\parallel BC$ 时，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$，若 AD 不平行于 BC，EF 与 $\frac{1}{2}(AD+BC)$ 存在怎样的大小关系？请说明理由.

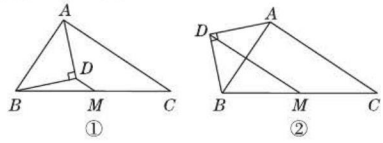


（第 11 题图）

12. 已知点 M 为△ABC 的边 BC 的中点，$AB=12$，$AC=18$，$BD\perp AD$ 于 D，连接 DM.

（1）如图①，若 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，求 MD 的长；

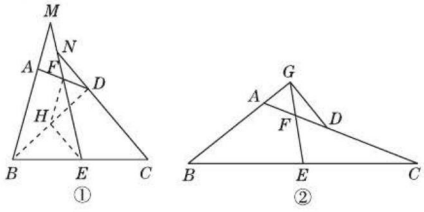
（2）如图②，若 AD 为△ABC 的外角平分线，求 MD 的长.



（第 12 题图）

思维拓展练

13. 如图①，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，E，F 分别是 BC，AD 的中点，连接 EF 并延长，分别与 BA，CD 的延长线交于点 M，N，则 $\angle BME=\angle CNE$（不需证明）. 小明的思路是：在图①中，连接 BD，取 BD 的中点 H，连接 HE，HF，根据三角形的中位线定理和平行线的性质，可证得 $\angle BME=\angle CNE$. 问题：如图②，在△ABC 中，$AC>AB$，D 点在 AC 上，$AB=CD$，E，F 分别是 BC，AD 的中点，连接 EF 并延长，与 BA 的延长线交于点 G，连接 GD，若 $\angle EFC=60°$，判断△AGD 的形状并证明.



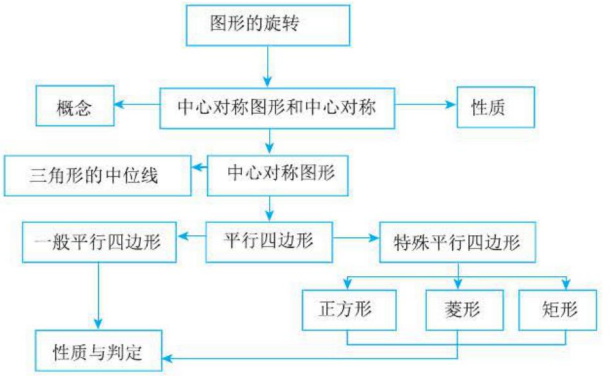
（第 13 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 图形的旋转属于全等变换，即旋转前后的两个图形全等. 也就是对应边相等和对应角相等. 另外旋转自身的性质有：对应点与旋转中心所连线段间的夹角为旋转角，旋转角都相等.
2. 中心对称与中心对称图形的共同特征是绕某个点旋转 180°后重合，只不过中心对称是一个图形与另一个图形重合，而中心对称图形是与自身重合.
3. 平行四边形的性质：
(1) 边：两组对边平行且相等；(2) 角：对角相等，邻角互补；
(3) 对角线：两条对角线互相平分.
4. 平行四边形的判定：
(1) 定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形；
(2) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形；
(3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；
(4) 对角线互相平分的四边形是平行四边形.
5. 特殊平行四边形的性质：矩形的性质：矩形的对边平行且相等，四个角都是直角，对角线相等且互相平分；菱形的性质：菱形的对边平行且四边相等，对角相等，对角线互相垂直平分并且每条对角线平分一组对角. 正方形既具有矩形的性质又具有菱形的性质.
6. 特殊平行四边形的判定：
矩形的判定方法：
①有一个角是直角的平行四边形是矩形；
②有三个角是直角的四边形是矩形；
③对角线相等的平行四边形是矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

菱形的判定方法：

①有一组邻边相等的平行四边形是菱形；②四边相等的四边形是菱形；

③对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

正方形的判定方法的两种思路：

①有一个角是直角的菱形是正方形；②有一组邻边相等的矩形是正方形.

专题解码

知识专题

专题1　旋转的性质

链接中考>>　旋转的性质主要是全等，在考查时往往与全等联系比较紧密，有直接考查的，以填空题或选择题的形式出现，也有渗透到其他知识点中以综合题的形式考查的.

例1　［中考·鞍山］如图1，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，将△ABC绕点A顺时针旋转得到△ADE（其中点B恰好落在AC延长线上的点D处，点C落在点E处），连接BD，则四边形$AEDB$的面积为_____.

导引：通过勾股定理计算出AB的长度，利用旋转性质求出各对应线段长度，利用面积公式解答即可.

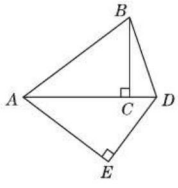


图1

∵ 在△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，

∴ $AB=5$，

∵ 将△ABC绕点A顺时针旋转，使点C落在E处，点B恰好落在AC延长线上的点D处，

∴ $AD=AB=5$，

∴ $CD=AD-AC=1$，

∴ 四边形$AEDB$的面积为$2\times\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{27}{2}$.

▶答案：$\frac{27}{2}$

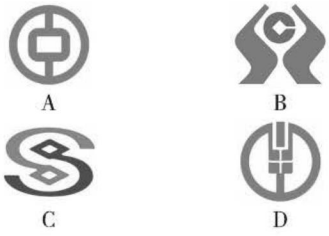
点方法

对于旋转相关问题，要始终注意旋转的性质，即（1）旋转不改变图形的大小与形状，只改变图形的位置，也就是旋转前后的两个图形全等；（2）对应点与旋转中心所连线段间的夹角为旋转角，旋转角都相等.

专题2　轴对称图形与中心对称图形的识别

链接中考>>　轴对称图形与中心对称图形的识别是中考的一个热点，可将生活中的热点图案，数学中的基本图形以及文字、字母等作为背景材料进行考查，属于简单题，以选择题的形式考查为主.

例2　［中考·来宾］下列图案中，是轴对称图形但不是中心对称图形的是（　　）



导引：根据轴对称图形与中心对称图形的概念分别分析得出答案.

A. 是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误；

B. 不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项错误；

C. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；

D. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项正确. 故选D.

▶答案：D

点方法

判断图形是否为中心对称图形时，可以用**倒置观察法**看图形是否保持不变. 判断图形是否为轴对称图形时，可以用**反面观察法**看图形是否保持不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题 3　平行四边形的性质及其判定

链接中考>>　平行四边形的性质与判定都涉及边和角相等，这与全等三角形的性质与判定相吻合，因此平行四边形的性质与判定通常与三角形的全等联合考查.

例 3　［中考 · 镇江］如图 2，点 B、E 分别在 AC、DF 上，AF 分别交 BD、CE 于点 M、N，$\angle A=\angle F$，$\angle 1=\angle 2$.

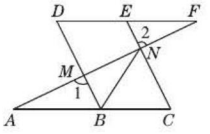


图 2

（1）求证：四边形 $BCED$ 是平行四边形；

（2）已知 $DE=2$，连接 BN，若 BN 平分 $\angle DBC$，求 CN 的长.

导引：（1）由已知角相等，利用对顶角相等，等量代换得到同位角相等，进而得出 DB 与 EC 平行，再由内错角相等两直线平行得到 DE 与 BC 平行，即可得证；

（2）由角平分线得到一对角相等，再由两直线平行内错角相等，等量代换得到一对角相等，再利用等角对等边得到 $CN=BC$，再由平行四边形对边相等即可得出所求.

（1）▶证明：∵ $\angle A=\angle F$，∴ $DE/\!/BC$，

∵ $\angle 1=\angle 2$，且 $\angle 1=\angle DMF$，

∴ $\angle DMF=\angle 2$，

∴ $DB/\!/EC$，

∴ 四边形 $BCED$ 为平行四边形.

（2）▶解：∵ BN 平分 $\angle DBC$，

∴ $\angle DBN=\angle CBN$，

∵ $EC/\!/DB$，

∴ $\angle CNB=\angle DBN$，

∴ $\angle CNB=\angle CBN$，

∴ $CN=BC=DE=2$.

点方法

平行四边形的性质与判定是互逆命题，综合考查时衔接点都是边和角.

专题 4　矩形的性质及其判定

链接中考>>　矩形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊点：一是内角都是直角；二是对角线相等. 考查矩形的性质和判定时，也是主要扣住这两个特殊点进行考查.

例 4　［中考 · 徐州］如图 3，在 $\square ABCD$ 中，点 O 是边 BC 的中点，连接 DO 并延长，交 AB 的延长线于点 E，连接 BD，EC.

（1）求证：四边形 $BECD$ 是平行四边形；

（2）若 $\angle A=50°$，则当 $\angle BOD$ 为多少度时，四边形 $BECD$ 是矩形？

导引：（1）由 AAS 证明 $\triangle BOE\cong\triangle COD$，得出 $OE=OD$，即可得出结论；

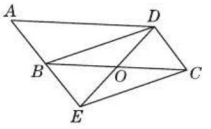


图 3

（2）先利用结论推出 $\angle BOD=100°$，再由平行四边形的性质得出 $\angle BCD=\angle A=50°$，由三角形的外角性质求出 $\angle ODC=\angle BCD$，得出 $OC=OD$，证出 $DE=BC$，即可得出结论.

（1）▶证明：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AB/\!/DC$，$AB=CD$，

∴ $\angle OEB=\angle ODC$，

又∵ O 为 BC 的中点，∴ $BO=CO$，

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COD$ 中，$\begin{cases}\angle OEB=\angle ODC,\\ \angle BOE=\angle COD,\\ BO=CO,\end{cases}$

∴ $\triangle BOE\cong\triangle COD$（AAS），

∴ $OE=OD$，

∴ 四边形 $BECD$ 是平行四边形.

（2）▶解：若 $\angle A=50°$，则当 $\angle BOD=100°$ 时，四边形 $BECD$ 是矩形. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle BCD=\angle A=50°$，

∵ $\angle BOD=\angle BCD+\angle ODC$，

∴ $\angle ODC=100°-50°=50°=\angle BCD$，

∴ $OC=OD$，

∵ $BO=CO$，$OD=OE$，∴ $DE=BC$，

∵ 四边形 $BECD$ 是平行四边形，

∴ 四边形 $BECD$ 是矩形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题5 菱形的性质及其判定

链接中考>> 菱形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊点：一是四边相等；二是对角线互相垂直平分. 考查菱形的性质和判定时，也是主要从这两个方面考查.

例5 [中考·巴中] 如图4，在矩形$ABCD$中，对角线AC的垂直平分线EF分别交AD、AC、BC于点E、O、F，连接CE和AF.

(1)求证：四边形$AECF$为菱形；

(2)若$AB=4$，$BC=8$，求菱形$AECF$的周长.

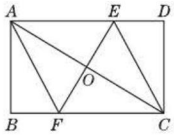


图4

导引：(1)根据ASA推出：$\triangle AEO\cong\triangle CFO$，根据全等得出$OE=OF$，推出四边形是平行四边形，再根据$EF\perp AC$即可推出四边形是菱形；

(2)根据线段垂直平分线性质得出$AF=CF$，设$AF=x$，推出$AF=CF=x$，$BF=8-x$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，由勾股定理得出方程$4^2+(8-x)^2=x^2$，求出x即可求得菱形$AECF$的周长.

(1)▶证明：$\because EF$是AC的垂直平分线，

$\therefore AO=OC$，$\angle AOE=\angle COF=90^\circ$，

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AD/\!/BC$，

$\therefore\angle EAO=\angle FCO$，

在$\triangle AEO$和$\triangle CFO$中，

$$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ AO=CO,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$$

$\therefore\triangle AEO\cong\triangle CFO(\mathrm{ASA})$，

$\therefore OE=OF$，

又$\because OA=OC$，

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形，

又$\because EF\perp AC$，

$\therefore$平行四边形$AECF$是菱形.

(2)▶解：设$AF=x$，

$\because EF$是AC的垂直平分线，

$\therefore AF=CF=x$，

$\therefore BF=8-x$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，由勾股定理得：$AB^2+BF^2=AF^2$，

$\therefore 4^2+(8-x)^2=x^2$，解得$x=5$.

$\therefore AF=5$，

$\therefore$菱形$AECF$的周长为20.

专题6 正方形的性质及其判定

链接中考>> 正方形既是矩形又是菱形，它具有矩形和菱形的所有的性质，判定正方形的思路主要有两种：一种是先判定是矩形，再证明邻边相等或对角线互相垂直；另一种是先证明是菱形，再证明有一个内角是直角或对角线相等. 在中考中一般以简单的简答题形式考查.

例6 [中考·玉林] 如图5，在等腰直角三角形ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=4$，D是AB的中点，E，F分别是AC，BC上的点(点E不与端点A，C重合)，且$AE=CF$，连接EF并取EF的中点O，连接DO并延长至点G，使$GO=OD$，连接DE，DF，GE，GF.

(1)求证：四边形$EDFG$是正方形；

(2)当点E在什么位置时，四边形$EDFG$的面积最小？并求四边形$EDFG$面积的最小值.

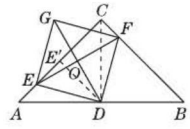


图5

导引：(1)连接CD，根据等腰直角三角形的性质可得出$\angle A=\angle DCF=45^\circ$，$AD=CD$，结合$AE=CF$可证出$\triangle ADE\cong\triangle CDF(\mathrm{SAS})$，根据全等三角形的性质可得出$DE=DF$，$\angle ADE=\angle CDF$，通过角的计算可得出$\angle EDF=90^\circ$，再根据$O$为$EF$的中点，$GO=OD$，即可得出$GD\perp EF$，且$GD=2OD=EF$，由此即可证出四边形$EDFG$是正方形；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）过点 D 作 $DE'\perp AC$ 于 E'，根据等腰直角三角形的性质可得出 DE' 的长度，从而得出 $2\leqslant DE<2\sqrt{2}$，再根据正方形的面积公式即可得出四边形 $EDFG$ 的面积的最小值.

（1）▶证明：连接 CD，如图 5 所示.

$\because\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，D 是 AB 的中点，

$\therefore\angle A=\angle DCF=45°$，$AD=CD$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AE=CF,\\ \angle A=\angle DCF,\\ AD=CD,\end{cases}$

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle CDF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore DE=DF$，$\angle ADE=\angle CDF$.

易得 $\angle ADE+\angle EDC=90°$，

$\therefore\angle EDC+\angle CDF=\angle EDF=90°$，

$\therefore\triangle EDF$ 为等腰直角三角形.

$\because O$ 为 EF 的中点，$GO=OD$，

$\therefore GD\perp EF$，且 $GD=2OD=EF$，

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 是正方形.

（2）▶解：过点 D 作 $DE'\perp AC$ 于 E'，如图 5.

$\because\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，

$\therefore AB=4\sqrt{2}$，点 E' 为 AC 的中点，$\therefore DE'=\frac{1}{2}BC=2$，

$\therefore 2\leqslant DE<2\sqrt{2}$（点 E 与点 E' 重合时取等号）. $\therefore 4\leqslant S_{四边形EDFG}=DE^2<8$.

$\therefore$ 当点 E 为线段 AC 的中点时，四边形 $EDFG$ 的面积最小，该最小值为 4.

专题 7　三角形的中位线

链接中考>> 三角形的中位线具有两方面的性质：一是位置关系，即三角形的中位线平行于三角形的第三边；二是数量关系，即三角形的中位线等于第三边的一半. 因此，若题目中给出三角形两边的中点时，则直接作出中位线，若题目中给出一边的中点时，则可以先取另一边的中点，再构造出中位线.

例 7　［中考 · 天津］如图 6，正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFCG$ 的边长分别为 3 和 1，点 F，G 分别在边 BC，CD 上，P 为 AE 的中点，连接 PG，则 PG 的长为_____.

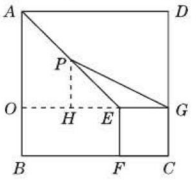


图 6

导引：延长 GE 交 AB 于点 O，作 $PH\perp OE$ 于点 H，则 PH 是 $\triangle OAE$ 的中位线，求得 PH 的长和 HG 的长，在 $\mathrm{Rt}\triangle PGH$ 中利用勾股定理求解. 具体解题过程如下：

如图 6，延长 GE 交 AB 于点 O，作 $PH\perp OE$ 于点 H.

易知 $PH/\!/AB$.

$\because P$ 是 AE 的中点，

$\therefore PH$ 是 $\triangle AOE$ 的中位线，

$\therefore PH=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times(3-1)=1$.

在直角 $\triangle AOE$ 中，易知 $\angle OAE=45°$，

$\because PH/\!/AB$，

$\therefore\angle HPE=\angle OAE=45°$.

$\therefore HE=PH=1$.

$\therefore HG=HE+EG=1+1=2$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PHG$ 中，$PG=\sqrt{PH^2+HG^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.　▶答案：$\sqrt{5}$

点方法

此题考查了三角形的中位线定理以及勾股定理，能够巧妙地构造三角形的中位线是解决此题的关键.

专题 8　特殊平行四边形综合探索题

链接中考>> 与特殊平行四边形有关的实践探索题，关键是将特殊平行四边形进行折叠变换，而折叠变换是全等变换，解决问题时既要运用到特殊平行四边形的性质与判定，又要运用到全等三角形的性质与判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例8　[中考·阜新]在菱形 $ABCD$ 中，点 E 为对角线 BD 上一点，点 F，G 在直线 BC 上，且 $BE=EG$，$\angle AEF=\angle BEG$.

(1)如图7①，求证：$\triangle ABE\cong\triangle FGE$；

(2)如图7②，当 $\angle ABC=120°$ 时，求证：$AB=BE+BF$；

(3)如图7③，当 $\angle ABC=90°$，点 F 在线段 BC 上时，线段 AB，BE，BF 的数量关系如何？并说明理由.

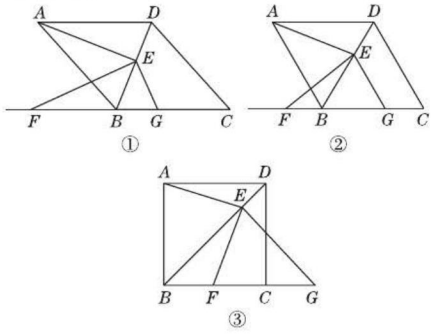


图7

导引：(1)先判断出 $\angle AEB=\angle FEG$，即可得出结论；

(2)先判断出 $BE=BG$，再借助(1)$\triangle ABE\cong\triangle FGE$，即可得出结论；

(3)先判断出 $\angle AEB=\angle FEG$，进而判断出 $\triangle ABE\cong\triangle FGE$(ASA)，再得出 $BG=\sqrt{2}BE$，即可得出结论.

(1)▶证明：∵ BD 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

∴ $\angle ABD=\angle CBD$，

∵ $BE=EG$，

∴ $\angle CBD=\angle BGE$，

∴ $\angle ABD=\angle BGE$.

∵ $\angle AEF=\angle BEG$，∴ $\angle AEB=\angle FEG$，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FGE$ 中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle FEG,\\ BE=GE,\\ \angle ABE=\angle FGE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle FGE$(ASA).

(2)▶证明：∵ BD 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

∴ $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$，

∵ $BE=EG$，

∴ $\triangle BEG$ 是等边三角形，∴ $BE=BG$，

由(1)知，$\triangle ABE\cong\triangle FGE$，

∴ $AB=FG=BF+BG=BF+BE$.

(3)▶解：结论：$AB+BF=\sqrt{2}BE$.

理由如下：∵ $\angle ABC=90°$，

∴ 菱形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB=BC$，

∵ BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线，

∴ $\angle ABD=\angle CBD=45°$，

∵ $BE=EG$，

∴ $\angle G=\angle CBE=45°=\angle ABD$，

∵ $\angle AEF=\angle BEG$，∴ $\angle AEB=\angle FEG$，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FGE$ 中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle FEG,\\ BE=GE,\\ \angle ABE=\angle G,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle FGE$(ASA)，

∴ $AB=FG$，

∵ $AB=BC=BF+FC$，$FG=CF+CG$，

∴ $BF=CG$，

∴ $BG=BC+CG=AB+BF$，

∵ $\angle CBE=\angle G=45°$，

∴ $\angle BEG=90°$，∴ $BG=\sqrt{2}BE$，

∴ $AB+BF=\sqrt{2}BE$.

点方法

此题是四边形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，正方形的性质，菱形的性质，等腰直角三角形的性质，解(1)的关键是判断出 $\angle AEB=\angle FEG$，解(2)的关键是判断出 $BE=BG$，解(3)的关键是判断出 $\angle AEB=\angle FEG$ 和得出 $BG=\sqrt{2}BE$.

思想方法专题

专题9　分类讨论思想

专题解读>>　有些问题的答案不是唯一的，尤其是题目中没有给出图形的几何题，这时需要把问题分为几种可能的情况，然后针对每一种情况给出解答，要求思考问题必须严谨、细致.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 9 ［中考 · 江西］如图 8 是一张长方形纸片 $ABCD$，已知 $AB=8$，$AD=7$，E 为 AB 上一点，$AE=5$，现要剪下一张等腰三角形纸片（$\triangle AEP$），使点 P 落在长方形 $ABCD$ 的某一条边上，则等腰三角形 AEP 的底边长是_____.

导引：分情况讨论：①当 $AP_1=AE=5$ 时，则 $\triangle AEP_1$ 是等腰直角三角形，得出底边 $P_1E=\sqrt{2}AE=5\sqrt{2}$ 即可；

②当 $P_2E=AE=5$ 时，求出 BE，由勾股定理求出 P_2B，再由勾股定理求出底边 AP_2 即可；

③当 $P_3A=P_3E$ 时，底边 $AE=5$，即可得出结论.

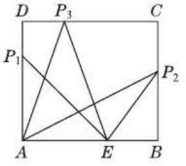


图 8

具体解题过程如下：

如图 8 所示：

①当 $AP_1=AE=5$ 时，

∵ $\angle BAD=90°$，∴ $\triangle AEP_1$ 是等腰直角三角形，∴ 底边 $P_1E=\sqrt{2}AE=5\sqrt{2}$；

②当 $P_2E=AE=5$ 时，

∵ $BE=AB-AE=8-5=3$，$\angle B=90°$，

∴ $P_2B=\sqrt{P_2E^2-BE^2}=4$，

∴ 底边 $AP_2=\sqrt{AB^2+P_2B^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$；

③当 $P_3A=P_3E$ 时，底边 $AE=5$；

综上所述：等腰三角形 AEP 的底边长为 $5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$ 或 5.

▶答案：$5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$ 或 5

点方法

当一条线段作为等腰三角形的一边时，需要分为等腰三角形的底和腰讨论求解；当它作为等腰三角形的底时，可以利用尺规作该线段的垂直平分线产生等腰三角形顶角的顶点；当它作为等腰三角形的腰时，可以利用尺规画圆产生等腰三角形底角的顶点.

专题 10　数形结合思想

专题解读>> 数形结合思想就是把数、式与图形结合起来考虑，用几何图形直观地反映和描述数量关系，用代数方法来分析几何图形中蕴含的数量关系，从而使问题巧妙快速地得到解决.

例 10 ［中考 · 宜宾］如图 9，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=8$，$CD=6$，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠，使点 A 恰好落在对角线 BD 上 F 处，则 DE 的长是（　　）

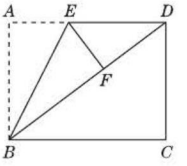


图 9

A. 3　　B. $\frac{24}{5}$　　C. 5　　D. $\frac{89}{16}$

导引：由四边形 $ABCD$ 为矩形，得到 $\angle BAD$ 为直角，且三角形 BEF 与三角形 BAE 全等，利用全等三角形对应角、对应边相等得到 $EF\perp BD$，$AE=EF$，$AB=BF$，利用勾股定理求出 BD 的长，由 $BD-BF$ 求出 DF 的长，在 $\mathrm{Rt}\triangle EDF$ 中，设 $EF=x$，表示出 ED，利用勾股定理列出关于 x 的方程，求出方程的解得到 x 的值，即可确定出 DE 的长. 具体解题过程如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle BAD=90°$，

由折叠可得 $\triangle BEF\cong\triangle BEA$，

∴ $EF\perp BD$，$AE=EF$，$AB=BF$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=CD=6$，$BC=AD=8$，

根据勾股定理得：$BD=10$，

∴ $FD=10-6=4$，

设 $EF=AE=x$，则有 $ED=8-x$，

根据勾股定理得：$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得：$x=3$，

则 $DE=8-3=5$，故选 C.

▶答案：C

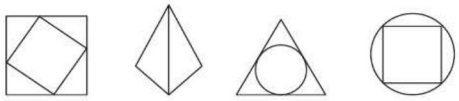
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必练

（答案见271页）

选择题

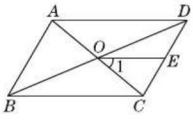
1. ［中考·盐城］下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



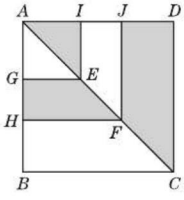
A　　B　　C　　D

2. ［中考·宁波］如图，在▱$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，E是边CD的中点，连接OE. 若$\angle ABC=60°$，$\angle BAC=80°$，则$\angle 1$的度数为(　　)

A. 50°　　B. 40°　　C. 30°　　D. 20°



（第2题图）



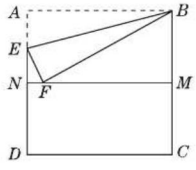
（第3题图）

3. ［中考·宜昌］如图，正方形$ABCD$的边长为1，点E，F分别是对角线AC上的两点，$EG\perp AB$，$EI\perp AD$，$FH\perp AB$，$FJ\perp AD$，垂足分别为G，I，H，J，则图中阴影部分的面积等于(　　)

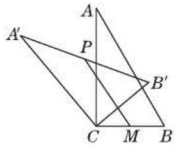
A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

4. ［中考·枣庄］如图，把正方形纸片$ABCD$沿对边中点所在的直线对折后展开，折痕为MN，再过点B折叠纸片，使点A落在MN上的点F处，折痕为BE. 若AB的长为2，则FM的长为(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1



（第4题图）



（第5题图）

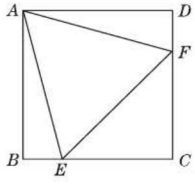
5. ［中考·贵港］如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，将△ABC绕顶点C逆时针旋转得到△$A'B'C$，M是BC的中点，P是$A'B'$的中点，连接PM. 若$BC=2$，$\angle BAC=30°$，则线段PM的最大值是(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

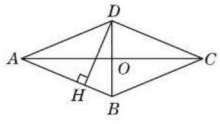
填空题

6. ［中考·眉山］△ABC是等边三角形，点O是三条高的交点. 若△ABC以点O为旋转中心旋转后能与原来的图形重合，则△ABC旋转的最小角度是_____.

7. ［中考·六盘水］如图，在正方形$ABCD$中，等边三角形AEF的顶点E、F分别在边BC和CD上，则$\angle AEB=$_____度.



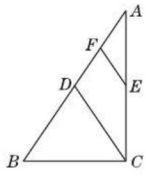
（第7题图）



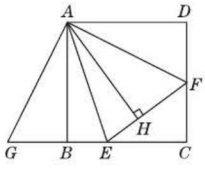
（第8题图）

8. ［中考·孝感］如图，四边形$ABCD$是菱形，$AC=24$，$BD=10$，$DH\perp AB$于点H，则线段BH的长为_____.

9. ［中考·淮安］如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，点D，E分别是AB，AC的中点，点F是AD的中点. 若$AB=8$，则$EF=$_____.



（第9题图）



（第10题图）

10. ［中考·贺州］如图，在正方形$ABCD$内作$\angle EAF=45°$，AE交BC于点E，AF交CD于点F，连接EF，过点A作$AH\perp EF$，垂足为H，将△ADF绕点A顺时针旋转90°得到△ABG，若$BE=2$，$DF=3$，则AH的长为_____.

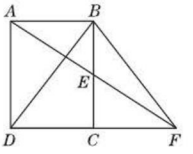
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解答题

11. ［中考 · 南通］如图，$\square ABCD$ 中，点 E 是 BC 的中点，连接 AE 并延长交 DC 延长线于点 F.

(1) 求证：$CF = AB$；

(2) 连接 BD，BF，当 $\angle BCD = 90°$ 时，求证：$BD = BF$.

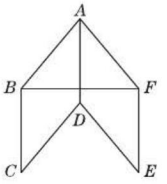


（第 11 题图）

12. ［中考 · 广东］如图所示，已知四边形 $ABCD$，$ADEF$ 都是菱形，$\angle BAD = \angle FAD$，$\angle BAD$ 为锐角.

(1) 求证：$AD \perp BF$；

(2) 若 $BF = BC$，求 $\angle ADC$ 的度数.

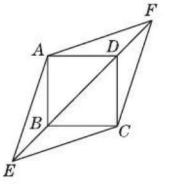


（第 12 题图）

13. ［中考 · 盐城］在正方形 $ABCD$ 中，对角线 BD 所在的直线上有两点 E、F 满足 $BE = DF$，连接 AE、AF、CE、CF，如图所示.

(1) 求证：$\triangle ABE \cong \triangle ADF$；

(2) 试判断四边形 $AECF$ 的形状，并说明理由.

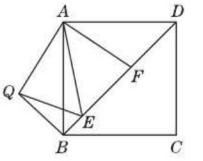


（第 13 题图）

14. ［中考 · 日照］如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 是对角线 BD 上两点，且 $\angle EAF = 45°$，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后，得到 $\triangle ABQ$，连接 EQ，求证：

(1) EA 是 $\angle QED$ 的平分线；

(2) $EF^2 = BE^2 + DF^2$.

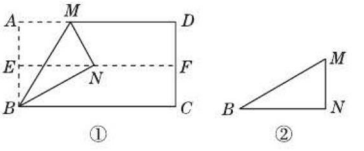


（第 14 题图）

15. ［中考 · 济宁］实验探究：

(1) 如图①，对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF，把纸片展开；再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上，并使折痕经过点 B，得到折痕 BM，同时得到线段 BN，MN. 请你观察图①，猜想 $\angle MBN$ 的度数是多少，并证明你的结论.

(2) 将图①中的三角形纸片 BMN 剪下，如图②，折叠该纸片，探究 MN 与 BM 的数量关系，写出折叠方案，并结合方案证明你的结论.



（第 15 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第10章 分式

再次领略数式的飞跃

数学点拨



你将学到的核心考点

- 分式的基本性质 □
- 分式的运算 □
- 分式方程的解法 □
- 分式方程的应用 □

我们为你提供的核心方法

- 方程思想 □
- 待定系数法 □
- 倒数法 □
- 换元法 □
- 整体思想 □
- 转化思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.1 分　式

热门话题
- 分式的概念
- 分式有意义的条件
- 分式的值

话题链接：分式的概念（分式有意义的条件；分式的值为零的条件）→ 在实际问题中列出分式

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 分式的定义

点知识

1. **定义**：一般地，如果 A、B 表示两个**整式**，并且 B 中含有**字母**，那么代数式 $\frac{A}{B}$ 叫做分式，其中 A 是分式的分子，B 是分式的分母.


分式的定义

要点精析

（1）分式与分数的相同点是：形式相同，都有分子和分母；不同点是：分式的分母含有字母.

（2）**分式与整式的不同点是**：整式的分母不含有字母，分式的分母含有字母.

2. **易错警示**：误认为分母含有 π 的式子是分式.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：分式的识别

例 1 下列各式：$-3a^2$，$\frac{x+2}{2}$，$\frac{2x}{x}$，$\frac{a+2b}{\pi+2}$，3，$\frac{2x}{x+y}$ 中哪些是分式？哪些是整式？

导引：按分式的定义知分母中含有字母的式子是分式，分母中不含有字母的式子是整式.

▶解：分式有 $\frac{2x}{x}$，$\frac{2x}{x+y}$；

整式有 $-3a^2$，$\frac{x+2}{2}$，$\frac{a+2b}{\pi+2}$，3.

点方法

判断一个式子是否是分式的方法： 首先看是否具有 $\frac{A}{B}$ 的形式，其次看 A，B 是否是整式，最后看分母是否含有字母，分母含有字母是判断分式的关键条件.

举一反三训练

（答案见 273 页）

1. 下列各式：$\frac{1}{5}(1-x)$，$\frac{4x}{\pi-3}$，$\frac{x^2-y^2}{2}$，$\frac{5x^2}{x}$，其中分式共有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:构造分式

例2 小明手上有四张卡片,上面分别写着3,-9,$2x$,$x-2$四个式子,若从中抽取两张卡片分别放在分数线的上方和下方,请你写出组成的两个分式:_____.

导引:由分式的定义知放在分数线下方的卡片上写的只能是式子$2x$或$x-2$,否则就是整式.

从$\frac{3}{2x}$,$\frac{-9}{2x}$,$\frac{x-2}{2x}$,$\frac{3}{x-2}$,$\frac{-9}{x-2}$,$\frac{2x}{x-2}$中任选两个即可.

▶答案:$\frac{3}{2x}$,$-\frac{9}{2x}$(答案不唯一)

考查角度3:根据实际问题中的数量关系列分式

例3 某人完成一项工作需要a天,则他工作5天可以完成这项工作的_____.

导引:因为完成一项工作需要a天,所以一天可完成这项工作的$\frac{1}{a}$,所以他工作5天可以完成这项工作的$\frac{5}{a}$.

▶答案:$\frac{5}{a}$

点方法

根据实际意义列分式,为后面学习列分式方程解应用题做准备;工程问题的基本等量关系是工作量=工作效率×工作时间.

2. 有一个关于字母x的分式,两位同学分别说出了它的一个特点,甲同学:分式的值不可能为0;乙同学:当$x=2$时,分式的值为1,请你写出满足上述全部特点的一个分式:_____.

3. 某市对一段全长1 000米的道路进行改造,原计划每天修x米,为了减小施工对城市交通所造成的影响,实际施工时,每天修路比原计划的3倍还多16米,那么修这条路实际上用了_____天.

知识点2 分式有意义、无意义的条件(重点)

点知识

1. 在分式中,当分母的值不为**0**时,分式有意义;当分母的值为**0**时,分式无意义.

要点精析

(1)分母不为0,并不是说分母中的字母不能为0,而是表示分母的整式的值不能为0.

(2)分式是否有意义,只与分式的分母的值是否为0有关,而与分式的分子的值是否为0无关.

2. **条件的求法**:(1)当分式有意义时,根据分式分母的值不为0的条件转化为不等式求解.

(2)当分式无意义时,根据分式分母的值为0的条件转化为方程求解.

3. **易错警示**:当分母出现含字母的式子是平方形式时,容易出现考虑不周的错误.

拓考向

考查角度1:根据分式有意义的条件求字母的取值范围

例4 分式$\frac{2}{x-1}$有意义,则x的取值范围是(　　)

A. $x\neq1$　　B. $x=1$

C. $x\neq-1$　　D. $x=-1$

4. 分式$\frac{5x}{|x|-2}$中的字母满足什么条件时,分式有意义?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：根据分式有意义的条件：分母不等于 0，即可求解.

根据题意得：$x-1\neq0$，解得：$x\neq1$. ▶答案：A

点方法

求分式有意义时字母的取值范围，一般是根据分母不等于 0 构造不等式，求使分式的分母不等于 0 的字母的取值范围.

考查角度 2：根据分式无意义的条件求字母的值

例 5 当 x 取何值时，下列分式无意义？

(1) $\frac{2x-1}{3x}$；　　(2) $\frac{5x+1}{3x^2-27}$.

导引：由分式无意义可得分母的值为 0，从而利用方程求解.

▶解：(1) 当 $3x=0$，即 $x=0$ 时，分式 $\frac{2x-1}{3x}$ 无意义；

(2) 当 $3x^2-27=0$，即 $x=\pm3$ 时，分式 $\frac{5x+1}{3x^2-27}$ 无意义.

点方法

本题运用**方程思想**求解. 利用分式无意义时需分母等于 0 这一条件，构造方程求解.

5. 当 x 取什么值时，下列分式无意义？

(1) $\frac{x}{2x-3}$；

(2) $\frac{x-1}{5x+10}$.

知识点 3 分式的值为 0 的条件（易错点）

点知识 ▶▶▶

1. (1) 在保证分式有意义的情况下，可将字母取适当的值代入到分式中，就可算出分式的值.

(2) 分式的值为 0 的条件：分子为 0，且分母不等于 0. 这两个条件缺一不可.

要点精析 ///

对于分式 $\frac{A}{B}$，若 $\frac{A}{B}=0$，则 $A=0$，$B\neq0$.

2. **易错警示**：求分式的值为 0 时的字母取值，容易出现只考虑分式分子的值为 0 的错误，而忽视分母的值不能为 0 的条件.

点考向 ▶▶▶

考查角度 1：根据分式的值为 0 求字母的值（高频考点）

例 6 若分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为 0，则 x 的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

导引：分式的值为 0 的条件是：分子为 0，且分母不为 0，据此条件解出 x 即可.

由 $x^2-1=0$，得 $x=\pm1$.

当 $x=1$ 时，$x-1=0$，故 $x=1$ 不合题意；

当 $x=-1$ 时，$x-1=-2\neq0$，所以当 $x=-1$ 时，分式的值为 0. ▶答案：C

6. 使分式 $\frac{x+1}{2x-1}$ 的值为零的条件是 $x=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨技巧

求使分式的值为0的字母的值的方法：首先求出使分子的值等于0的字母的值，再检验这个字母的值是否使分母的值等于0，只有当它使分母的值不为0时，才是我们所要求的字母的值.

考查角度2：求分式的值

例7 求下列各分式的值.

(1)$\frac{5x}{3x^2-2}$，其中$x=\frac{1}{2}$；

(2)$\frac{a^2-b^2}{3a-6b}$，其中$a=\frac{5}{6}$，$b=\frac{1}{6}$.

导引：(1)把x的值代入所求的代数式求值；

(2)先把原代数式变形，然后代入求值.

▶解：(1)把$x=\frac{1}{2}$代入$\frac{5x}{3x^2-2}$，得原式$=\frac{5\times\frac{1}{2}}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{5}{4}}=-2$；

(2)∵$a=\frac{5}{6}$，$b=\frac{1}{6}$，∴$a+b=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$，$a-b=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，$a-2b=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$，

∴原式$=\frac{(a+b)(a-b)}{3(a-2b)}=\frac{\frac{2}{3}}{3\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$.

7. 求下列分式的值：

(1)$\frac{11a}{a+8}$，其中$a=3$；

(2)$\frac{x-y}{x+y^2}$，其中$x=2$，$y=-1$.

点方法

当字母的取值为负数、分数时，要注意添加括号.

II 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1：根据字母之间的关系求分式的值

例8 已知实数x、y、z满足$\begin{cases}4x-3y=0,\\3y-2z=0,\end{cases}$试求$\frac{x+2y-z}{2x-y+z}$的值.

导引：先根据x、y、z满足$\begin{cases}4x-3y=0,\\3y-2z=0,\end{cases}$求出$x=\frac{3}{4}y$，$z=\frac{3}{2}y$，然后代入求值即可.

▶解：∵实数x、y、z满足$\begin{cases}4x-3y=0,\\3y-2z=0,\end{cases}$

举一反三训练

(答案见273页)

8. 已知$a=2b$，$c=5a$，求代数式$\frac{6a+2b-c}{a+4b+c}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x=\frac{3}{4}y, z=\frac{3}{2}y,$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{3}{4}y+2y-\frac{3}{2}y}{2\times\frac{3}{4}y-y+\frac{3}{2}y}=\frac{5}{8}.$

点方法

解答这一问题的关键是将其中一个字母看成已知数，表示出其他字母，然后代入求值.

拔尖角度 2：分式的值为整数的条件

例 9 已知 $-\frac{6}{m-6}$ 的值为正整数，求整数 m 的值.

导引：由题易知 $m-6=-6$ 或 -2 或 -3 或 -1，然后解方程即可.

▶解：$\because -\frac{6}{m-6}$ 的值为正整数，

$\therefore m-6=-6$ 或 $m-6=-2$ 或 $m-6=-3$ 或 $m-6=-1$.

解得：$m=0$ 或 $m=4$ 或 $m=3$ 或 $m=5$.

点方法

分式的值为整数，即分子是分母的整数倍，据此列方程求解.

拔尖角度 3：分式的值为正数、负数的条件（拓展点）

例 10 对于分式 $\frac{x-2}{x-3}$.

(1) 当 x 为何值时，分式的值大于零？

(2) 当 x 为何值时，分式的值小于零？

导引：根据“两数相除，同号得正，异号得负”列不等式求解.

▶解：(1) 由分式 $\frac{x-2}{x-3}>0$，可得 $\begin{cases}x-2<0,\\x-3<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2>0,\\x-3>0,\end{cases}$

解得 $x<2$ 或 $x>3$；

(2) 由分式 $\frac{x-2}{x-3}<0$，可得 $\begin{cases}x-2<0,\\x-3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2>0,\\x-3<0,\end{cases}$

解得 $2<x<3$.

故当 $x<2$ 或 $x>3$ 时，分式的值大于零；当 $2<x<3$ 时，分式的值小于零.

点方法

分式的值的正负性由分子分母共同决定，分子分母同号，分式的值为正；分子分母异号，分式的值为负.

9. 若 m 为整数，且分式 $\frac{2}{m-1}$ 为整数，则所有符合条件的 m 的值的和是_____.

10. 当 _____ 时，$\frac{-x^2-1}{-2x-1}$ 为正数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 (答案见273页)

基础巩固练

1. 在代数式 $-\frac{3}{2}x$, $\frac{4x}{x-y}$, $\frac{x+y}{\pi}$, $-\frac{7}{8}$, $\frac{1}{ab}$ 中,分式的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. [中考·北京] 若代数式 $\frac{x}{x-4}$ 有意义,则实数 x 的取值范围是(　　)

A. $x=0$　　B. $x=4$

C. $x\neq0$　　D. $x\neq4$

3. [中考·桂林] 若分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值为0,则 x 的值为(　　)

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. ±2

4. 若 $a^2-2a-3=0$,则代数式 $\frac{1}{a(a-2)}$ 的值是(　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. 3

5. [开放题] 有一个分式含有字母 m,且当 $m=5$ 时,它的值为12,则这个分式可以是_____.(写出一个即可)

6. 当 $x=$_____时,分式 $\frac{x-1}{x+2}$ 无意义.

7. 当 $x=2$, $y=-1$ 时,分别计算下列各式的值.

(1) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$;(2) $\frac{x^2-y}{2y+2}$.

能力提升练

8. 已知分式 $\frac{x+1}{2-x}$,当 x 取 a 时,该分式的值为0;当 x 取 b 时,该分式无意义,则 b^a 的值等于(　　)

A. -2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

9. 若分式 $\frac{1}{x^2+m}$ 不论 x 取任何实数总有意义,则 m 的取值范围是_____.

10. 若 $|x-y+1|+(2x-3)^2=0$,则分式 $\frac{1}{4x-2y}$ 的值为_____.

11. 已知:代数式 $\frac{4}{m-1}$.

(1) 当 m 为何值时,该代数式有意义?

(2) 当 m 为何值时,该代数式的值大于零?

(3) 当 m 为何整数时,该代数式的值为正整数?

12. 一组按规律排列的式子: $-\frac{b^2}{a}$, $\frac{b^5}{a^2}$, $-\frac{b^8}{a^3}$, $\frac{b^{11}}{a^4}$, …($ab\neq0$),分别写出第5个、第8个、第 n 个式子(n 为正整数).

思维拓展练

13. (1) 分式 $\frac{-x^2}{1-5x}$ 的值为负数,求 x 的取值范围;

(2) 当 x 满足什么条件时,分式 $\frac{x+1}{2x+4}$ 的值为正数?

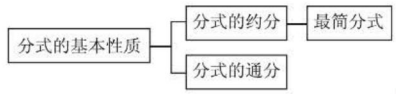
我的错题笔记

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10.2 分式的基本性质

热门话题
- 分式的基本性质
- 分式的约分
- 最简分式
- 分式的通分

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 分式的基本性质（重点）

点知识

1. **分式的基本性质**：分式的分子和分母都乘（或除以）同一个**不等于 0** 的整式，分式的值不变.

即 $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$（其中 C 是不等于 0 的整式）.

要点精析

（1）理解“同一个”“不等于 0”的意义.

（2）运用这个性质对分式进行变形，虽然分式的值不变，但分式中字母的取值范围可能有所改变.

2. **分式的符号法则**：将分式、分子、分母的符号改变其中的任意两个，其结果不变.

即 $\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}=\frac{-a}{-b}$.



拨考向

典例剖析

考查角度 1：利用分式的基本性质对分式变形说理

例 1 下列等式的右边是怎样从左边得到的？

（1）$\frac{a}{2b}=\frac{ac}{2bc}(c\neq 0)$；（2）$\frac{x^2}{xy}=\frac{x}{y}$.

导引：（1）等号左边的分子、分母没有出现 c，右边有 c，说明分式的分子、分母同时乘 c；（2）等号左边的分式中分子、分母都含 x，题中隐含 $x\neq 0$，而右边分母不含 x，说明分式的分子、分母同时除以 x.

▶解：（1）分子、分母同时乘 c.

（2）分子、分母同时除以 x.

点方法

应用分式的基本性质时，一定要确定分式在有意义的情况下才能应用. 应用时要注意是否符合两个“同”：一是要同时进行“乘法”或“除法”运算；二是“乘（或除以）”的对象必须是同一个不等于 0 的整式.

举一反三训练

（答案见 274 页）

1. 下列各式从左到右的变形，不正确的是（　　）

A. $\frac{ac}{abc}=\frac{1}{b}$

B. $\frac{y^2}{x^2}=\frac{ay^2}{ax^2}(a\neq 0)$

C. $\frac{x}{x^2-2x}=\frac{1}{x-2}$

D. $\frac{a-b}{b}=\frac{a^2-b^2}{ab+a^2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用分式的基本性质补全分式变形中的缺项

例2 利用分式的基本性质填写下列各式中未知的分子或分母：

(1) $\frac{a}{a(x+y)}=\frac{1}{(\quad)}$；

(2) $\frac{x^2-2x}{2xy}=\frac{x-2}{(\quad)}$；

(3) $\frac{a+b}{ab}=\frac{(\quad)}{2a^2b}$；

(4) $\frac{x-1}{3x}=\frac{(\quad)}{3xy^2}(y\neq 0)$.

导引：要求未知的分子或分母，必须从已知的分子或分母入手，分析变化过程，再应用分式的基本性质即可求解.

▶答案：(1)$x+y$ (2)$2y$ (3)$2a^2+2ab$ (4)xy^2-y^2

点拨 技巧

本题主要考查分式的基本性质的应用. 在做此类题时，先观察等式左、右两边已给出的分子或分母，找出不同之处，然后填空.

考查角度3：利用分式的基本性质不改变分式的值而改变分式的分子、分母首项的符号

例3 不改变分式$\frac{-x+y}{-x-y}$的值，使分子、分母的第一项系数不含“-”号.

错解：$\frac{-x+y}{-x-y}=\frac{x+y}{x-y}$.

错解解析：上述解法出错的原因是把分子、分母首项的符号当成了分子、分母的符号.

▶正确解法：$\frac{-x+y}{-x-y}$

$=\frac{-(x-y)}{-(x+y)}$

$=\frac{x-y}{x+y}$.

点拨 方法

当分式的分子、分母是多项式时，若分子、分母的首项系数是负数，应先提取“-”号并添加括号，再利用分式的基本性质化成题目要求的结果；变形时要注意不要把分子、分母的第一项的符号误认为是分子、分母的符号.

2. 填空：

(1) $\frac{a+b}{ab}=\frac{(\quad)}{a^2b}$；

(2) $\frac{x}{x(x-y)}=\frac{1}{(\quad)}$.

3. 不改变分式的值，使下列分式中分子和分母的最高次项的系数为正数：

(1) $\frac{7x-x^2+10}{2-x^2}$；

(2) $\frac{1-x^2}{3+2x+5x^2}$；

(3) $\frac{-m^3-n^2}{-m^2+m}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4：利用分式的基本性质将分式的分子、分母中各项系数化为整数

例4 不改变分式的值，把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数：

$$(1)\frac{0.5x-\frac{1}{3}y}{0.25x-0.2y};(2)\frac{\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}y}{\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y}.$$

▶解：(1)根据分式的基本性质，将$\frac{0.5x-\frac{1}{3}y}{0.25x-0.2y}$的分子与分母同乘60，得$\frac{30x-20y}{15x-12y}$.

(2)根据分式的基本性质，将$\frac{\frac{5}{4}x+\frac{2}{3}y}{\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y}$的分子与分母同乘12，得$\frac{15x+8y}{9x-4y}$.

点方法

将分式的分子、分母的各项系数化成整数的方法：第一步：找出分子、分母中各项的系数，确定使系数能化成整数的最小正整数；第二步：分子、分母同时乘这个最小正整数.

4. 不改变分式的值，把下列各式的分子、分母中的各项系数都化为整数.

$$(1)\frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b}{\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b};$$

$$(2)\frac{\frac{4}{5}x+0.25y}{\frac{1}{2}x-0.6y}.$$

知识点2 约分（重点）

点知识

1. **约分**：根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母分别除以它们的公因式，叫做分式的约分.
2. **约分的方法**：约去分式的分子和分母的公因式.

要点精析

(1)约分的关键是找出分子、分母的公因式.

(2)**找公因式的方法**：①当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数（都是整数）的最大公因数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式；②当分子、分母都是多项式时，先把多项式分解因式，再按①中的方法找公因式.

(3)分子、分母都是单项式的分式的约分：约去分子、分母中相同字母的最低次幂，并约去系数（都是整数）的最大公因数.

(4)分子、分母都是多项式的分式的约分：先把分子、分母分解因式，将其转化为因式乘积的形式，然后进行约分.

(5)约分的依据是分式的基本性质中的$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$（其中$C$是不等于0的整式）.

3. **最简分式**：如果一个分式的分子与分母只有公因式1，那么这样的分式叫做最简分式，约分通常要把分式化成最简分式或整式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1：化简分子分母都是单项式的分式

例5 约分：(1)$\frac{12ab}{36a^4b^5}$；(2)$\frac{-3abc}{6a^2b}$.

导引：要先判断分式的符号并找出公因式，然后约分.

▶解：(1)$\frac{12ab}{36a^4b^5}=\frac{12ab}{12ab\cdot 3a^3b^4}=\frac{1}{3a^3b^4}$；

(2)$\frac{-3abc}{6a^2b}=-\frac{c\cdot 3ab}{2a\cdot 3ab}=-\frac{c}{2a}$.

点方法

当分式的分子、分母都是单项式时，约去分子、分母中相同字母的最低次幂，并约去系数的最大公因数.

考查角度2：化简分子分母都是多项式的分式

例6 约分：(1)$\frac{a^2-b^2}{a+b}$；(2)$\frac{4y^2-x^2}{-x^2+4xy-4y^2}$.

导引：先将分式的分子、分母分解因式，再约分.

▶解：(1)$\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$；

(2)$\frac{4y^2-x^2}{-x^2+4xy-4y^2}=\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}=\frac{(x+2y)(x-2y)}{(x-2y)^2}=\frac{x+2y}{x-2y}$.

点方法

当分式的分子与分母都是多项式时，先将分子和分母都因式分解，然后再约去公因式.

考查角度3：识别最简分式

例7 下列各式中，最简分式有(　　)

$\frac{y}{2x}$，$\frac{m+n}{m^2-n^2}$，$\frac{9x+y}{45xy^2}$，$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

导引：本题考查最简分式的概念，正确理解最简分式的概念是解题的关键.

$m+n$与m^2-n^2有公因式$m+n$，所以$\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{1}{m-n}$，$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$，故$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{x-y}$，因此，最简分式有$\frac{y}{2x}$，$\frac{9x+y}{45xy^2}$，共2个.

▶答案：B

点方法

判断最简分式的唯一标准就是分式的分子与分母只有公因式1.

5. 约分：

(1)$\frac{3a^2b}{6ab^2c}$；

(2)$\frac{8m^2n}{2mn^2}$.

6. 约分：

(1)$\frac{2ab+b^2}{4a^2+b^2+4ab}$；

(2)$\frac{m^2-4mn+4n^2}{m^2-4n^2}$.

7. 下列分式中，最简分式是(　　)

A. $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$

B. $\frac{2x+8}{x^2-16}$

C. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

D. $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 通分（重点）

点知识

1. **分式的通分**：根据分式的基本性质，把几个异分母的分式变形成同分母的分式，叫做分式的通分. 变形后的分母叫做这几个分式的公分母.

要点精析

（1）通分的依据是分式的基本性质；

（2）通分的关键是确定几个分式的最简公分母；

（3）分式$\xrightarrow{\text{同除}}$约分，分式$\xrightarrow{\text{同乘}}$通分，

即$\dfrac{A\div C}{B\div C}\xleftarrow{\text{约分}}\dfrac{A}{B}\xrightarrow{\text{通分}}\dfrac{A\times C}{B\times C}(C\neq 0)$.

2. **确定最简公分母的一般方法**：

（1）如果各分母都是单项式，那么最简公分母就是由①各分母系数（都是整数）的最小公倍数；②各分母相同字母的最高次幂；③各分母所有不同字母及其指数的乘积这三部分组成；

（2）如果各分母中有多项式，就先把分母是多项式的分解因式，再按照分母都是单项式时求最简公分母的方法，从系数、相同因式、不同因式三个方面去确定.

点考向

考查角度1：利用通分的方法对分子、分母都是单项式的分式通分

例8 通分$\dfrac{3}{4a^2b}$与$\dfrac{5}{2ab^2c}$.

导引：先确定各分式的最简公分母，再利用分式的基本性质通分.

▶解：因为最简公分母是$4a^2b^2c$，所以$\dfrac{3}{4a^2b}=\dfrac{3\cdot bc}{4a^2b\cdot bc}=\dfrac{3bc}{4a^2b^2c}$，

$\dfrac{5}{2ab^2c}=\dfrac{5\cdot 2a}{2ab^2c\cdot 2a}=\dfrac{10a}{4a^2b^2c}$.

点方法

确定分母都是单项式的分式的最简公分母的方法：（1）系数取各分母系数（都是整数）的最小公倍数；（2）同底数幂取次数最高的作为最简公分母的一个因式；（3）单独出现的字母连同它的指数作为最简公分母的一个因式.

考查角度2：利用通分的方法对分子、分母都是多项式的分式通分

例9 通分$\dfrac{1}{x^2-4}$与$\dfrac{x}{4-2x}$.

导引：由于分母都是多项式，因此先分解因式，再确定最简公分母，然后利用分式的基本性质通分.

▶解：因为最简公分母是$2(x+2)(x-2)$，

所以$\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1\times 2}{(x+2)(x-2)\times 2}=\dfrac{2}{2(x+2)(x-2)}$，$\dfrac{x}{4-2x}=$

8. 通分：$\dfrac{4a}{5b^2c}$，$\dfrac{3c}{10a^2b}$，$\dfrac{5b}{-2ac^2}$.

9. 通分：$\dfrac{1}{x^2-6x+9}$，$\dfrac{2}{x^2-9}$，$\dfrac{1}{3x-9}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\frac{x\cdot(x+2)}{-2(x-2)\cdot(x+2)}=-\frac{x(x+2)}{2(x+2)(x-2)}.$$

点方法

确定分母都是多项式的分式的最简公分母的方法：（1）将各个分母因式分解；（2）找出每个出现的因式的最高次幂，它们的积为最简公分母的因式；（3）若有系数，则所有系数（都是整数）的最小公倍数是最简公分母的系数.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1：比值法巧求分式的值

例10 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$（其中$x\neq0$），求分式$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}$的值.

导引：因为条件是以比相等的形式出现，可考虑设比值为k，把待求的式子转化为关于k的式子求值.

▶解：设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k(k\neq0)$，

则$\frac{x}{2}=k,\frac{y}{3}=k,\frac{z}{4}=k$，

所以$x=2k,y=3k,z=4k$，

因此$\frac{2x+3y-3z}{2x-3y+3z}=\frac{4k+9k-12k}{4k-9k+12k}=\frac{k}{7k}=\frac{1}{7}$.

拨技巧

本题运用了**换元法**. 当数学问题中出现或隐含比值相等的条件时，设比值为一个新字母，把问题转化为新字母的问题求解，往往可得到意想不到的效果.

拔尖角度2：整体思想巧求分式的值（拓展点）

例11 已知$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=3$，求分式$\frac{2a+3ab-2b}{a-ab-b}$的值.

导引：根据分式的基本性质，分式的分子、分母都除以ab，分式的值不变，再把$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$换成3计算即可.

▶解：分式的分子分母都除以ab，得

$$\frac{2a+3ab-2b}{a-ab-b}=\frac{(2a+3ab-2b)\div ab}{(a-ab-b)\div ab}=\frac{\frac{2}{b}+3-\frac{2}{a}}{\frac{1}{b}-1-\frac{1}{a}},$$

举一反三训练

☞（答案见274页）

10. 已知$a:b:c=2:3:5$，求分式$\frac{a-3b+2c}{b-c}$的值.

11. 已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$，求$\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=3, \therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=-3,$

$\therefore$ 原式 $=\frac{2\times(-3)+3}{-3-1}=\frac{3}{4}.$

点方法

解答这类分式求值题的基本方法有多种，常见思路是对条件和结论适当变形，找出它们之间的联系，再整体代入.

拔尖角度 3：利用分式的基本性质求分式的值为整数的条件

例 12 已知分式 $\frac{4a+8}{4-a^2}$ 的值为正整数，求整数 a 的值.

导引：本题综合考查分式的化简、分式有意义的条件以及整除的知识.

▶解：因为 $4-a^2\neq 0$，所以 $\frac{4a+8}{4-a^2}=\frac{4(a+2)}{(2+a)(2-a)}=\frac{4}{2-a}$.

要使分式的值为正整数，且 a 为整数，则 $2-a=1$ 或 $2-a=2$ 或 $2-a=4$.

所以 $a=1$ 或 $a=0$ 或 $a=-2$，

又因为 $a=-2$ 时，分式无意义，所以 $a=-2$ 舍去.

因此 a 的值为 1 或 0.

探规律

求使分式的值为整数的字母取值的方法：一般都是先化简，然后再根据化简后式子的特点，确定出使化简后式子的值为整数的分子或分母的几种取值情况，进而得出所求字母的值. 但所求得的值还需代入原分式中进行检验，舍去使分式无意义的取值.

12. 已知 x 为整数，且分式 $\frac{2(x+1)}{x^2-1}$ 的值为整数，则 x 可取的值为_____.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 274 页）

基础巩固练

1. 下列等式正确的是（　　）

A. $\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$　　B. $\frac{a}{b}=\frac{ab}{a+b}$

C. $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+c}$　　D. $\frac{a}{b}=\frac{ab}{b^2}$

2. 根据分式的基本性质，分式 $\frac{-x}{x-y}$ 可变形为（　　）

A. $\frac{-x}{-x-y}$　　B. $\frac{x}{x-y}$

C. $\frac{x}{y-x}$　　D. $\frac{x}{-y-x}$

3. 下列分式中，最简分式是（　　）

A. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$　　B. $\frac{x+1}{x^2-1}$

C. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy}$　　D. $\frac{x^2-36}{2x+12}$

4. 把分式 $\frac{x}{x+y}(x\neq 0, y\neq 0)$ 中的 x, y 同时扩大为原来的 3 倍，那么分式的值（　　）

A. 扩大为原来的 3 倍　　B. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$

C. 扩大为原来的 6 倍　　D. 不改变

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 若等式$\frac{a^2+2a+1}{a^2+a}=\frac{a+1}{M}$成立，则$M=$_____.

6. 分式$\frac{y}{2x}$，$\frac{x}{3y^2}$，$\frac{1}{4xy}$通分时，最简公分母是_____.

7. 不改变分式的值，使分子、分母的最高次项的系数都是正数.

(1)$\frac{-x^2-3}{4-x}$；　(2)$\frac{x+4}{x-3-x^2}$；

(3)$\frac{-(x^2-x+2)}{3x^2-5x^3-2}$.

8. 不改变分式的值，把下列各式分子、分母中各项系数都化为整数.

(1)$\frac{0.3a+0.5b}{0.2a-b}$；　(2)$\frac{\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b}{\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b}$.

9. 化简：(1)$\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}$；　(2)$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

10. 将下列各式通分：

(1)$\frac{3}{4a^2b}$，$-\frac{5}{6b^2c}$，$\frac{1}{2ac^2}$；

(2)$\frac{x+2}{2x+2}$，$\frac{x}{x^2-x-2}$，$\frac{3}{8-4x}$；

(3)$\frac{a}{a^2+3a+2}$，$\frac{2}{a^2+2a+1}$，$\frac{1}{-3a-6}$.

能力提升练

11. 已知分式$\frac{x+y}{1-xy}$的值是a，若用x、y的相反数代入这个分式所得的值为b，则a、b的关系是(　　)

A. 相等　　B. 互为相反数

C. 互为倒数　　D. 乘积为-1

12. 要使$\frac{x+5}{2x+1}=\frac{(x+5)(3m+2)}{(2x+1)(7-2m)}$成立，则$m=$_____.

13. 已知a,b,c均不为0，且$\frac{a+2b}{5}=\frac{3b-c}{3}=\frac{2c-a}{7}$，求$\frac{c-2b}{2b+3a}$的值.

思维拓展练

14. 已知$x^2-3xy=y^2$，求代数式$\frac{x^2-xy-y^2}{2x^2+xy-2y^2}$的值.

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.3 分式的加减

热门话题
- 同分母分式的加减
- 异分母分式的加减

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 分式的加减（重点）

点知识

1. **分式的加减法法则**：

（1）同分母的分式相加减，**分母**不变，把**分子**相加减. 用字母表示为：$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{\boldsymbol{b\pm c}}{\boldsymbol{a}}$；

（2）异分母的分式相加减，先**通分**，再**加减**. 用字母表示为：$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{d}=\frac{\boldsymbol{bd\pm ac}}{\boldsymbol{ad}}$.

要点精析

（1）“把分子相加减”就是把各个分式的“分子整体”相加减，各分子都应加括号，特别是分式相减，分子是多项式时要注意加括号.

（2）异分母分式的加减运算步骤：

①通分：将异分母分式化成同分母分式；

②写成“分母不变，分子相加减”的形式；

③分子化简：分子去括号、合并同类项；

④约分：结果化为最简分式或整式.

2. **易错警示**：同分母分式相减时，分子相减要加括号，否则当减式的分子是多项式时，容易出现符号错误.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：同分母的分式加减

例 1 计算：（1）$\frac{x^2-y^2}{4xy}-\frac{x^2+y^2}{4xy}$；（2）$\frac{7x-3y}{x^2-y^2}-\frac{4x}{x^2-y^2}$；

（3）$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}+1$.

导引：先看各分式是否是同分母分式，若是同分母分式，则分母不变，把分子相加减；若表面看不是同分母，而分母互为相反数时，则要先化为同分母分式，再进行计算.

▶解：（1）原式 $=\frac{(x^2-y^2)-(x^2+y^2)}{4xy}=\frac{x^2-y^2-x^2-y^2}{4xy}=\frac{-2y^2}{4xy}=-\frac{y}{2x}$.

（2）原式 $=\frac{7x-3y-4x}{x^2-y^2}=\frac{3x-3y}{x^2-y^2}=\frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{3}{x+y}$.

（3）原式 $=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}+1=\frac{a-b}{a-b}+1=1+1=2$.

举一反三训练

（答案见 275 页）

1. 计算：

（1）$\frac{5x+3y}{x^2-y^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}$；

（2）$\frac{x^2}{y-x}-\frac{y^2}{y-x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨技巧

分母相同，而分子是多项式，分子相加减时要把分子看成一个整体，先用括号括起来，再进行加减，最后结果要进行约分化简；相加减的两个分式的分母互为相反数时，可通过添加负号把两个分式变为同分母分式，再按照同分母分式相加减的法则进行计算.

考查角度2：异分母的分式加减

例2 计算：(1)$\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}$；

(2)$\frac{1}{x-3}+\frac{1-x}{6+2x}-\frac{6}{x^2-9}$.

导引：异分母分式相加减，先通分化为同分母分式相加减，再按同分母分式的加减法法则进行计算.

▶解：(1)原式$=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x-(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}$；

(2)原式$=\frac{1}{x-3}+\frac{1-x}{2(x+3)}-\frac{6}{(x+3)(x-3)}=\frac{2(x+3)+(1-x)(x-3)-12}{2(x+3)(x-3)}=\frac{-(x^2-6x+9)}{2(x+3)(x-3)}=\frac{-(x-3)^2}{2(x+3)(x-3)}=-\frac{x-3}{2x+6}$.

点方法

(1)异分母分式相加减，先用通分的方法化异分母为同分母，然后按同分母分式加减法的法则计算；当分母是多项式时，首先要进行因式分解；如果计算结果不是最简的，一定要进行约分将其化为最简分式或整式.

(2)警示：在分式加减运算中，当分子是多项式时，要用括号括起来，才能保证解题准确.

考查角度3：分式与整式的加减运算

例3 [易错题]计算：$\frac{x^3}{x-1}-x^2-x-1$.

导引：将$-x^2-x-1$看成分母为1的分式，然后先通分，再计算.

▶解：原式$=\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2+x+1}{1}=\frac{x^3}{x-1}-\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$.

2. 计算：$\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}+\frac{2}{m+3}$.

3. 计算：

(1)$\frac{x^2}{x-1}-1-x$；

(2)$\frac{x^2}{x+y}-x+y$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

诊误区

分数线除了具有除号的作用外，还具有括号的作用，注意 $-x^2-x-1$ 应该写成 $-\frac{x^2+x+1}{1}$ 的形式，而不是 $-\frac{x^2-x-1}{1}$ 的形式.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1：通分的技巧

技巧 1　分组通分

例 4 计算：$\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

导引：本题是异分母分式的加减，若直接通分，则所有分式的公分母为 $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$，计算将会很繁琐，我们仔细观察可以注意到 $x+1$ 和 $x-1$ 相乘的结果较为简单，$x-2$ 和 $x+2$ 相乘的结果较为简单，因此我们可考虑把分子、分母相关的分式先相加减.

▶ 解：原式 $=\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{2(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-4}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{-4(x^2-4)+4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

技巧 2　先约分再通分

例 5 计算：$\frac{a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3}{a^3b+ab^3+2a^2b^2}-\frac{a^3-ab^2}{a^2b-b^3}$.

导引：直接通分，极其繁琐，观察发现各个分式并非最简分式，可先化简，化简后再计算会方便许多.

▶ 解：$\frac{a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3}{a^3b+ab^3+2a^2b^2}-\frac{a^3-ab^2}{a^2b-b^3}=\frac{a(a+b)^2(a-b)}{ab(a+b)^2}-\frac{a(a^2-b^2)}{b(a^2-b^2)}=\frac{a-b}{b}-\frac{a}{b}=\frac{-b}{b}=-1$.

点方法

异分母分式相加减时，通常是先通分化为同分母分式，再加减，如果其中一个分式的分子、分母有公因式，那么可以先约分再计算，这样可减少运算量.

举一反三训练

☞（答案见 276 页）

4. 计算：$\frac{1}{b-2}-\frac{2}{b+1}+\frac{2}{b-1}-\frac{1}{b+2}$.

5. 计算：$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2b+ab^2}-\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b-ab^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧3 逐步通分

例6 计算：$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}$.

导引：此题若采用各项一起通分后再相加的方法，计算量较大. 注意到前后分母之间存在的关系，可逐步通分达到目的.

▶解：$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}+\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}$.

6. 计算：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$.

技巧4 裂项相消，拆项通分

例7 化简：$\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,019)(x+2\,020)}$.

导引：当分式比较复杂，而且按常规方法通分十分困难时，这时看题中是否隐含着某些规律，当具有以下特征：每一个分式的分母是两个因式之积，而分子又是一个定值时，可将每一个分式先拆成两项之差，前后相抵消后再通分.

▶解：原式$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+2\,019}-\frac{1}{x+2\,020}\right)$

$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2\,020}=\frac{2\,021}{(x-1)(x+2\,020)}$.

7. 计算：$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$.

拨尖角度2：求分式运算中的待定系数（拓展点）

例8 如果$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$恒成立，且$A,B$都是常数，求$A,B$的值.

导引：先对等式的左边进行通分，由等式两边分式的分母相等，得出分子也相等，从而列出方程组求解或者取x的特殊值代入，列方程组解出A,B也可以.

▶解：方法一：因为$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$，

所以$\frac{A(x+1)}{(x-2)(x+1)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$，

即$\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$，

所以$\frac{(A+B)x+(A-2B)}{(x-2)(x+1)}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$，

所以$\begin{cases}A+B=3,\\A-2B=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=2,\\B=1.\end{cases}$

8. 若$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1}$对任意自然数$n$都成立，求$a-b$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二：取 $x=1$ 代入得：$-A+\frac{1}{2}B=-\frac{3}{2}$，取 $x=0$ 代入得：$-\frac{1}{2}A+B=0$.

得到方程组 $\begin{cases}-A+\frac{1}{2}B=-\frac{3}{2},\\-\frac{1}{2}A+B=0,\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}A=2,\\B=1.\end{cases}$

点方法

利用**待定系数法**解题主要有两种技巧：(1)比较系数；(2)取特殊值. 待定系数法是中学阶段一种重要的数学思想方法.

拔尖角度 3：分式加减的实际应用

例 9 甲、乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料. 两次饲料的价格有变化，两位采购员的购货方式也不同，其中，甲每次购买1 000千克，乙每次用去 800 元，而不管购买多少饲料.

(1)甲、乙两次所购买饲料的平均单价各是多少？

(2)谁的购货方式更合算？

导引：(1)由于两次购买饲料的单价有所变化，可设第一次购买的饲料的单价为 m 元，第二次购买的饲料的单价为 n 元，甲、乙所购买饲料的平均单价应为两次所购买饲料的总价除以两次所购买饲料的总质量. (2)比较甲、乙所购买饲料的平均单价，谁所购买饲料的平均单价低，谁的购货方式就更合算，可以用作差法比较平均单价.

▶解：(1)设两次购买的饲料的单价分别为 m 元和 n 元(m,n 是正数，且 $m\neq n$)，

甲两次所购买饲料的平均单价为 $\frac{1\,000m+1\,000n}{1\,000\times2}=\frac{m+n}{2}$(元)，

乙两次所购买饲料的平均单价为 $\frac{800\times2}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$(元).

(2)甲、乙两次所购买饲料的平均单价的差是 $\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m+n)^2}{2(m+n)}-\frac{4mn}{2(m+n)}=\frac{m^2+2mn+n^2-4mn}{2(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$(元)，因为 m,n 是正数，且 $m\neq n$，所以 $\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$ 也是正数，即 $\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}>0$，因此乙的购货方式更合算.

点方法

用字母表示出相应的代数式并能正确运用分式的加减运算法则计算是解决问题的关键.

9. 甲、乙两个小商贩每次都去同一批发商城买白糖，两人同一批次购买的白糖价格相同，甲进货的策略是每次买 1 000 元钱的白糖，乙进货的策略是每次买 1 000 千克白糖，最近他俩同去买进了两次价格不同的白糖，问两人中谁买进的白糖的平均进价低一些.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度4:分式拆分

例10 一般情况下,一个分式通过适当变形,可以化为整式与分式的和的形式,例如:

①$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$;

②$\frac{x^2}{x-2}=\frac{x^2-4+4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2}$.

(1)试将分式$\frac{x-1}{x+2}$化为一个整式与一个分式的和的形式;

(2)如果分式$\frac{2x^2-1}{x-1}$的值为整数,求x的整数值.

导引:(1)根据题意将分式进行变形即可;(2)将该分式化为一个整式与一个分式的和的形式,然后根据题意列出关于x的方程即可求出答案.

▶解:(1)原式$=\frac{(x+2)-3}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$;

(2)原式$=\frac{2x^2-2+1}{x-1}$

$=\frac{2(x+1)(x-1)+1}{x-1}$

$=2(x+1)+\frac{1}{x-1}$,

∵分式的值为整数,且x为整数,

∴$x-1=\pm1$,

∴$x=2$或0.

10. 若x取整数,则使分式$\frac{6x+3}{2x-1}$的值为整数的x的值有(　　)

A. 3个　　B. 4个

C. 6个　　D. 8个

点方法

分式拆分本质上就是逆用分式的加减法对分式加以变形.

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见276页)

基础巩固练

1. [中考·山西]化简$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{x}{x-2}$的结果是(　　)

A. $-x^2+2x$　　B. $-x^2+6x$

C. $-\frac{x}{x+2}$　　D. $\frac{x}{x-2}$

2. 下列运算正确的是(　　)

A. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-a}=1$

B. $\frac{m}{a}-\frac{n}{b}=\frac{m-n}{a-b}$

C. $\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a}=\frac{1}{a}$

D. $\frac{2}{a-b}-\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a-b}$

3. 计算$\frac{x^2}{x-1}-x-1$的结果是(　　)

A. $\frac{2x-1}{x-1}$　　B. $\frac{1}{x-1}$

C. $-\frac{1}{x-1}$　　D. $\frac{x^2-x-1}{x-1}$

4. 若$xy=x-y\neq0$,则分式$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=$(　　)

A. $\frac{1}{xy}$　　B. $y-x$　　C. 1　　D. -1

5. [模拟·武汉]计算:$\frac{x^2}{x-2}-\frac{4}{x-2}=$_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. 已知 $xy=1$，则 $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}=$ _____.

7. 计算：(1) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{4x}{x-2}+\frac{4}{x-2}$；

(2) $\frac{a^2-2a+1}{a-1}-(a-2)$.

8. 已知：$A=\frac{2}{x^2-1}$，$B=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}(x\neq\pm1)$，下面三个结论：①$A$，$B$ 相等；②A，B 互为相反数；③A，B 互为倒数. 请问哪个正确？为什么？

能力提升练

9. 已知 $a^2-3ab+b^2=0$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$ _____.

10. a，b 为实数，且 $ab=1$，设 $P=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$，$Q=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$，则 P _____ Q（填“>”“<”或“=”）.

11. 若 $\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+2}=\frac{5x-4}{x^2-3x-10}$，且 A，B 都是常数，试求 A，B 的值.

思维拓展练

12. 探索：

(1) 若 $\frac{3x+4}{x+1}=3+\frac{m}{x+1}$，则 $m=$ _____；

(2) 若 $\frac{5x-3}{x+2}=5+\frac{m}{x+2}$，则 $m=$ _____；

总结：若 $\frac{ax+b}{x+c}=a+\frac{m}{x+c}$（其中 a、b、c 为常数），则 $m=$ _____；

应用：利用上述结论解决：若代数式 $\frac{4x-3}{x-1}$ 的值为整数，求满足条件的整数 x 的值.

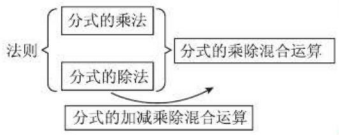
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.4 分式的乘除

热门话题
- 分式的乘除
- 分式的乘除混合运算
- 分式的加减乘除混合运算

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 分式的乘法

点知识

分式乘分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母.

要点精析

(1)用式子表示为：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd}$. 式子中 a,b,c,d 可以是单项式，也可以是多项式，若是多项式，则应先分解因式；

(2)分式乘法运算的结果能约分的一定要进行约分，把分式化为最简分式；

(3)若某一项有“－”号，则按有理数的符号法则先进行符号运算.

拨考向

典例剖析

考查角度1：分子、分母都是单项式的分式乘法

例1 计算：

(1)$\frac{3a^2}{b^4}\cdot\frac{b^3}{6a}$；(2)$8x^2y^3\cdot\frac{-3x}{4y^5}$.

导引：根据分式的乘法，分子乘分子，分母乘分母，再约分可得答案.

▶解：(1)原式$=\frac{a}{2b}$；(2)原式$=-\frac{6x^3}{y^2}$.

点方法

分子分母分别相乘，再约分.

考查角度2：分子、分母都是多项式的分式乘法

例2 计算.

(1)$\frac{(2a-3)^2}{a+3}\cdot\frac{a^2+6a+9}{3-2a}$；

(2)$\frac{2m+4}{m^2-4m+4}\cdot(m^2-4)\cdot\frac{2m-4}{m^2-16}$.

导引：先分解因式再约分.

举一反三训练

(答案见277页)

1. 计算：

(1)$\frac{17x^2y}{54a^2b}\cdot\frac{-9ab^3}{51xy}$；

(2)$\frac{3a^2bx}{4cd^2y}\cdot\frac{-10cy^2}{21ax^3}$.

2. 计算：

(1)$\frac{(x+y)^2}{xy-y^2}\cdot\frac{(y-x)^2}{xy+y^2}$；

(2)$\frac{(1-4x)^2}{2x+3}\cdot\frac{4x^2+12x+9}{4x-1}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：(1) 原式 $=\frac{(2a-3)^2}{a+3}\cdot\frac{(a+3)^2}{-(2a-3)}=-(2a-3)(a+3)=-2a^2-3a+9$.

(2) 原式 $=\frac{2(m+2)}{(m-2)^2}\cdot(m+2)(m-2)\cdot\frac{2(m-2)}{(m+4)(m-4)}=\frac{4(m+2)^2}{m^2-4}$.

点方法

分子分母都是多项式的分式的乘法运算一般先分别对分子分母分解因式，再运用分式的乘法法则计算，最后约分化为最简分式或整式.

知识点 2 分式的除法

点知识 ▶▶▶

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

要点精析 ///

(1) 用式子表示为：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

(2) 分式的除法运算要先转化为乘法运算，转化时把除式的分子变为分母，分母变为分子.

(3) 分式的除法运算，抓住“一变一倒”，即变除法为乘法，把除式的分子、分母的位置颠倒，如果除式是整式时，应把它的分母看作“1”.

(4) 分式的分子、分母都是多项式的分式除法先转化为乘法，然后把多项式进行因式分解，最后约分. 如果除式是整式，则把它的分母看作“1”.

拓考向 ▶▶▶

考查角度 1：分子、分母都是单项式的分式除法

例 3 计算：

(1) $\frac{ab^3}{2c^3}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}$；

(2) $-3xy^2\div\frac{6y^2}{5x}$.

导引：先把除法运算转化为乘法运算，然后再进行计算.

▶解：(1) 原式 $=\frac{ab^3}{2c^3}\cdot\frac{4cd}{-5a^2b^2}=-\frac{2bd}{5ac^2}$；

(2) 原式 $=-3xy^2\cdot\frac{5x}{6y^2}=-\frac{5x^2}{2}$.

点方法

先把除法运算转化为乘法运算，然后运用分式的乘法法则计算，再约分化为最简分式或整式.

3. 计算：

(1) $10x^2y^2\div\frac{15x^2y^4}{-3z^2}$；

(2) $\frac{4a^2b^2}{15m^3}\div\frac{-8ab^2}{35m^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：分子、分母都是多项式的分式除法

例4 计算：

(1)$\frac{9-x^2}{1+x}\div\frac{x+3}{-x-1}$；(2)$\frac{2x-6}{x-2}\div\frac{x-3}{x^2-4x+4}$.

导引：(1)先利用平方差公式分解因式，再转化为乘法，约分即可；

(2)先分解因式，再转化为乘法，约分即可.

▶解：(1)原式$=\frac{(3-x)(3+x)}{1+x}\times\frac{-(x+1)}{x+3}=x-3$；

(2)原式$=\frac{2(x-3)}{x-2}\times\frac{(x-2)^2}{x-3}=2x-4$.

点方法

分式的除法运算的一般步骤：(1)如果分式的分子、分母都为多项式，先要进行因式分解；(2)利用除法法则，将除法运算转化为乘法运算；(3)运用分式的乘法法则计算；(4)约分化简，结果必须化为最简分式或整式.

4. 计算：

(1)$(4x^2-y^2)\div\frac{4x^2-4xy+y^2}{2x-y}$；

(2)$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\frac{x-1}{x^2+x}$.

知识点3 分式的乘方

点知识

1. 分式的乘方，只要把分子、分母分别乘方.

要点精析

用式子表示为：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$($n$为正整数)，公式中的$a$，$b$可以是单项式，也可以是多项式.

2. **易错警示**：乘方时要注意分子、分母中的每一个因式都要乘方，千万不能遗漏.

拨考向

考查角度：分式的乘方

例5 计算下列各式：

(1)$\left(\frac{5xy^3}{-3z^2}\right)^3$；(2)$\left(-\frac{n^2}{m}\right)^2\cdot\left(\frac{m^2}{n}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{mn}\right)^4$.

导引：(1)把分子分母分别乘方即可；(2)先计算乘方，然后利用分式的乘法法则计算，再约分化简.

▶解：(1)原式$=\frac{125x^3y^9}{-27z^6}$；

(2)原式$=\frac{n^4}{m^2}\cdot\frac{m^6}{n^3}\cdot\frac{1}{m^4n^4}=\frac{n^4m^6}{m^6n^7}=\frac{1}{n^3}$.

点方法

分式的乘除和乘方混合运算，应先算乘方再算乘除，结果要化简.

5. 计算：

(1)$\left(\frac{a^2}{-b^3}\right)^4$；

(2)$\left(\frac{a^2b}{-cd^3}\right)^3\div\frac{2a}{d^3}\cdot\left(\frac{c}{2a}\right)^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点4 分式的乘除

点知识

1. **运算法则**：分式的乘除混合运算可以统一为乘法运算.
2. **运算顺序**：分式的乘除混合运算的运算顺序与分数的乘除混合运算的运算顺序相同，即按照从左到右的顺序计算，有括号时先算括号里面的.
3. **易错警示**：
   (1) 分式的乘除混合运算要注意分式中分子、分母符号的处理，可先确定积的符号.
   (2) 分式的乘除混合运算的结果应为最简分式或整式.

拓考向

考查角度1：分式的乘除混合运算

例6 计算：(1) $\frac{3ab^2}{2x^3y}\cdot\left(-\frac{8xy}{9a^2b}\right)\div\frac{3x}{-4b}$；

(2) $\frac{2x+6}{x^2+2x}\div(x+3)\cdot\frac{x^2-2x}{2-x}$.

导引：先将分式乘除混合运算统一成乘法运算，能分解因式的分解因式，再进行计算.

解：(1) 原式 $=\frac{3ab^2}{2x^3y}\cdot\left(-\frac{8xy}{9a^2b}\right)\cdot\frac{-4b}{3x}$

$=\frac{3ab^2\cdot 8xy\cdot 4b}{2x^3y\cdot 9a^2b\cdot 3x}=\frac{16b^2}{9ax^3}$；

(2) 原式 $=\frac{2(x+3)}{x(x+2)}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{x(x-2)}{-(x-2)}$

$=-\frac{2}{x+2}$.

考查角度2：分式的乘除的化简求值

例7 先化简 $\frac{2a-4}{a^2-4}\div\frac{2a}{a+2}$，再用一个你最喜欢的数代替 a 计算结果.

导引：先将第一个分式的分子、分母因式分解，然后再计算，最后取 a 的值代入求值.

解：原式 $=\frac{2(a-2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{a+2}{2a}$

$=\frac{2}{a+2}\cdot\frac{a+2}{2a}$

$=\frac{1}{a}$.

例如，当 $a=1$ 时，原式的值为1.（a 的取值不唯一）

误区

在选择 a 的值时，不能使分式的分母为0，且不能使除式为0，本题中 a 不能取0，2，-2.

6. 计算：

(1) $\frac{3(x-y)^2}{(y-x)^5}\cdot(x-y)^3\div\frac{9}{y-x}$；

(2) $\frac{2x}{5x-3}\div\frac{3}{25x^2-9}\cdot\frac{x}{5x+3}$.

7. [中考 · 百色] 已知 $a=b+2\,018$，求代数式 $\frac{2}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{1}{a^2-b^2}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3:利用分式的乘除解决实际问题

例8 已知a米布料能做b件上衣,$2a$米布料能做$3b$条裤子,求一件上衣用料是一条裤子用料的几倍.

导引:先求出做一件上衣用的布料和做一条裤子用的布料,再把这两个量进行除法运算即可得到一件上衣用料是一条裤子用料的几倍.

▶解:因为a米布料能做b件上衣,

所以做一件上衣用料是$\frac{a}{b}$米;

又因为$2a$米布料能做$3b$条裤子,所以做一条裤子用料是$\frac{2a}{3b}$米.

$\frac{a}{b}\div\frac{2a}{3b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{3b}{2a}=\frac{3}{2}=1.5$.

答:一件上衣用料是一条裤子用料的1.5倍.

8. 甲、乙两地相距s千米,两人分别骑自行车和乘公交车从甲地到乙地,自行车的速度是v千米/时,公交车的速度是自行车速度的3倍,求骑自行车所用的时间是乘公交车所用时间的几倍.

知识点5 分式的混合运算

点知识

1. **分式的混合运算:**

分式的混合运算的顺序是:**先乘方,后乘除,再加减**;若有括号,先算括号**里面**的;同级运算按**从左到右**的顺序进行计算.

要点精析

(1)注意运算顺序和解题步骤,把好符号关.

(2)进行分式混合运算时,可以根据需要合理地运用运算律来简化运算,此时先将分式的乘除法统一成乘法,分式的加减法统一成加法,才能使用乘法运算律、加法运算律简化运算.

(3)运算过程中及时约分化简,有时可使解题过程简单.

(4)运算结果是最简分式或整式.

2. **易错警示:**在分式除法运算中套用乘法分配律而出现错误.

拓考向

考查角度1:分式的混合运算

例9 已知$\frac{|a-2|+(b-3)^2}{a+b}=0$,计算$\frac{a^2+ab}{b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$的值.

导引:先将所求式子进行化简,由分式的值等于0的条件及绝对值、平方的非负性求a,b的值,然后将它们代入化简后的式子中求值.

▶解:$\frac{a^2+ab}{b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a+b)}{b^2}\cdot\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2}{b^2}$.

$\because\frac{|a-2|+(b-3)^2}{a+b}=0$,$\therefore|a-2|+(b-3)^2=0$,且$a+b\neq0$,

即$a-2=0$且$b-3=0$,解得$a=2,b=3$.

此时$a+b=5\neq0$. $\therefore$原式$=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$.

9. 计算:

(1)$\frac{2a+2}{a-1}\div(a+1)-\frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$;

(2)$\left(\frac{3}{a+2}+a-2\right)\div\frac{a^2-2a+1}{a+2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

利用分式的值为0的条件先确定字母的取值，再把它们代入化简后的式子中求出结果，一般不直接代入计算，否则运算量过大易出错.

考查角度2：先化简再求值

例10 [中考·邵阳]先化简，再在$-3,-1,0,\sqrt{2},2$中选择一个合适的x值代入求值.

$$\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-2x}+\frac{x}{x-2}.$$

导引：根据分式的乘法和加法法则可以化简题目中的式子，然后在$-3,-1,0,\sqrt{2},2$中选择一个使原式中各分式有意义的x的值代入即可解答本题.

▶解：原式$=\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}+\frac{x}{x-2}=\frac{x(x-3)}{x-2}+\frac{x}{x-2}=$

$\frac{x^2-3x+x}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}=x$，

当$x=-1$时，原式$=-1$.(x的取值不唯一)

点方法

解答此类题关键是最后的求值，选取数值时要考虑两个因素：一个是分母不能为0，另一个是除式不能为0.

10. [中考·黑龙江]先化简，再求值：$\left(\frac{m}{m-2}-\frac{2m}{m^2-4}\right)\div\frac{m}{m+2}$，请在$2,-2,0,3$当中选一个合适的数代入求值.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1：整体代入法巧求值

例11 [模拟·成都]先化简$\frac{a-1}{3a^2-6a}\div\left(a+2+\frac{3}{a-2}\right)$，再求代数式的值，其中$a$是方程$x^2+x-1=0$的一个根.

导引：先根据分式的运算法则计算，再整体代入求值.

▶解：原式$=\frac{a-1}{3a(a-2)}\div\frac{a^2-1}{a-2}$

$=\frac{a-1}{3a(a-2)}\cdot\frac{a-2}{(a-1)(a+1)}$

$=\frac{1}{3a^2+3a}$.

∵a是方程$x^2+x-1=0$的一个根，∴$a^2+a=1$，即$3a^2+3a=3$.

∴原式$=\frac{1}{3}$.

举一反三训练

(答案见277页)

11. 先化简，再求值：$\left(m+\frac{4m+4}{m}\right)\div\frac{m+2}{m^2}$，其中$m$是方程$2x^2+4x-1=0$的根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

按目前知识计算出方程的解有难度，而整体代入则能化难为易，轻松解题.

拨尖角度2：分式的值为整数的条件的确定

例12 求使$\frac{a^2+ab}{b-ab}\div\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b^2-ab}{a^2-ab}$具有正整数值的所有$a$的整数值.

导引：先化简$\frac{a^2+ab}{b-ab}\div\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b^2-ab}{a^2-ab}$，再根据分式的值为正整数，可得$a$的值.

▶解：$\frac{a^2+ab}{b-ab}\div\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b^2-ab}{a^2-ab}=\frac{a(a+b)}{b(1-a)}\times\frac{2}{a+b}\times\frac{-b(a-b)}{a(a-b)}=\frac{-2}{1-a}$，

∵ 当$\frac{-2}{1-a}$为正整数时，$a=2$或3，

∴ a的整数值为2或3.

点方法

解答这类问题的一般方法是先化简，再对分式的值加以讨论.

拨尖角度3：根据分式的乘除法解决实际问题

例13 果园飘香水果超市运来凤梨和西瓜这两种水果，已知凤梨重$(m-2)^2$ kg，西瓜重(m^2-4) kg，其中$m>2$，售完后，两种水果都卖了540元.

(1)请用含m的代数式分别表示这两种水果的单价；

(2)凤梨的单价是西瓜单价的多少倍？

导引：(1)根据单价等于钱数除以千克数求出各自的单价；

(2)由凤梨的单价除以西瓜的单价即可得到结果.

▶解：(1)根据题意得：凤梨的单价为$\frac{540}{(m-2)^2}$元；西瓜的单价为$\frac{540}{m^2-4}$元；

(2)$\frac{540}{(m-2)^2}\div\frac{540}{m^2-4}=\frac{540}{(m-2)^2}\cdot\frac{(m+2)(m-2)}{540}=\frac{m+2}{m-2}$.

故凤梨的单价是西瓜单价的$\frac{m+2}{m-2}$倍.

点方法

解答这类问题的一般思路是首先根据题意列出式子，再根据分式的除法解决问题.

12. 已知x为整数，且$\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x}$的值为整数，求所有符合条件的$x$的值.

13. 由甲地到乙地的一条铁路全程为v km，火车全程运行时间为a h. 由甲地到乙地的公路全程为这条铁路全程的m倍，汽车全程运行时间为b h. 那么火车的速度是汽车速度的多少倍？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 278 页）

基础巩固练

1. 下列运算结果为 $x-1$ 的是（　　）

A. $1-\frac{1}{x}$　　B. $\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}$

C. $\frac{x+1}{x}\div\frac{1}{x-1}$　　D. $\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

2. 计算 $-\frac{n}{m^2}\div\frac{n^2}{m^3}\div\frac{m}{n^2}$ 的结果为（　　）

A. $\frac{m^2}{n^2}$　　B. $-\frac{m^2}{n^3}$　　C. $-\frac{n}{m^4}$　　D. $-n$

3. 使 $\frac{x^2-y^2}{a^2x-a^2y}\cdot\frac{ax+ay}{(x+y)^2}$ 的值等于 5 的 a 的值是（　　）

A. 5　　B. -5　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}$

4. $\frac{a^2+a-2}{a^2+3a+2}\cdot5(a+1)^2$ 等于（　　）

A. a^2+2a+1　　B. a^2-2a+1

C. $5a^2-1$　　D. $5a^2-5$

5. ［中考 · 咸宁］化简：$\frac{x^2-1}{x}\div\frac{x+1}{x}=$_____.

6. ［中考 · 枣庄］化简：$\frac{x+3}{x^2-2x+1}\div\frac{x^2+3x}{(x-1)^2}$ $=$_____.

7. 计算：

(1) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\div\frac{a+b}{a}$；

(2) $\frac{x^2-2x}{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)$；

(3) $\left(\frac{3a}{a+2}-\frac{a}{a-2}\right)\div\frac{2a}{a^2-4}$；

(4) $\left(\frac{x^2}{x-2}+\frac{4}{2-x}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2x}$.

8. ［中考 · 张家界］先化简 $\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$，再从不等式 $2x-1<6$ 的正整数解中选一个适当的数代入求值.

能力提升练

9. 化简代数式 $\frac{x^2}{x^2+2x}\div\frac{x-1}{x}$，并判断当 x 满足不等式组 $\begin{cases}x+2<1,\\2(x-1)>-6\end{cases}$ 时代数式的符号.

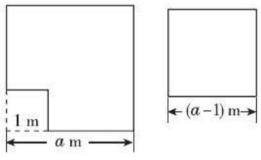
10. 当 x 取何值时，代数式 $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2+4x+4}\cdot\frac{3x+6}{2x^2-8}\div\frac{1}{x^2-4}$ 的值为负数？

思维拓展练

11. 如图，“优选 1 号”水稻的试验田是边长为 a m（$a>1$）的正方形去掉一个边长为 1 m 的正方形蓄水池后余下的部分；“优选 2 号”水稻的试验田是边长为（$a-1$）m 的正方形，两块试验田的水稻都收了 600 kg.

(1) 哪种水稻的单位面积产量高？

(2) “优选 2 号”水稻的单位面积产量是“优选 1 号”水稻的单位面积产量的多少倍？



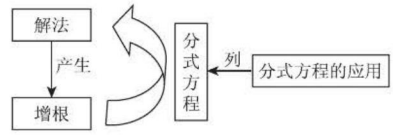
（第 11 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.5 分式方程

热门话题
- 分式方程(重点)
- 分式方程的解法(关键)
- 增根(难点)
- 分式方程的应用(重点)

话题链接



1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 分式方程的定义

点知识

1. **分式方程**:分母中含有**未知数**的方程叫做分式方程.


分式方程的定义

要点精析

(1)分式方程的两个特点:①方程中含有分母;②分母中含有未知数.

(2)分母中是否含有未知数是分式方程与整式方程的根本区别,是区分分式方程和整式方程的依据.

(3)整式方程和分式方程统称为有理方程.

2. **易错警示**:分式方程中的分母含有未知数,而不是一般的字母参数.

拨考向

典例剖析

考查角度1:识别分式方程

例1 下列关于x的方程,是分式方程的是(　　)

A. $\frac{3+x}{2}-3=\frac{2+x}{5}$　　B. $\frac{2x-1}{7}=\frac{x}{2}$

C. $\frac{x}{\pi}+1=\frac{2-x}{3}$　　D. $\frac{1}{2+x}=1-\frac{2}{x}$

导引:依据分式方程的定义进行判断即可.

A. 方程分母中不含未知数,故不是分式方程;B. 方程分母中不含未知数,故不是分式方程;C. 方程分母中不含表示未知数的字母,π是常数,故不是分式方程;D. 方程分母中含未知数x,故是分式方程. 故选D.

▶答案:D

点方法

判断一个方程是不是分式方程的方法: 根据分式方程定义中的条件,判断方程中分母是否含有未知数,如果含有未知数,那么这个方程就是分式方程,否则就不是分式方程.

警示:识别分式方程时,不能对方程进行约分、通分变形,更不能用等式性质变形.

举一反三训练

☞(答案见279页)

1. 下列方程中,哪些是分式方程?哪些是整式方程?

(1)$\frac{x+2}{2}=\frac{x}{5}$;

(2)$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=6$;

(3)$\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x}$;

(4)$\frac{x}{x(x-2)}=1$;

(5)$2x+\frac{x+2}{5}=1$;

(6)$x+\frac{1}{x}=2$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2:根据实际问题列分式方程

例2 [中考·乌鲁木齐]2017年,在创建文明城市的进程中,乌鲁木齐市为美化城市环境,计划种植树木30万棵,由于志愿者的加入,实际每天植树比原计划多20%,结果提前5天完成任务,设原计划每天植树x万棵,可列方程是(　　)

A. $\frac{30}{x}-\frac{30}{(1+20\%)x}=5$　　B. $\frac{30}{x}-\frac{30}{20\%x}=5$

C. $\frac{30}{20\%x}-5=\frac{30}{x}$　　D. $\frac{30}{(1+20\%)x}-\frac{30}{x}=5$

导引:根据题中给出的等量关系即可列出方程.

原计划每天植树x万棵,需要$\frac{30}{x}$天完成,

实际每天植树$(1+20\%)x$万棵,需要$\frac{30}{(1+20\%)x}$天完成,

∵提前5天完成任务,

∴$\frac{30}{x}-\frac{30}{(1+20\%)x}=5$,故选A.　　▶答案:A

点方法

在实际问题中建立分式方程的模型关键是要明确题目中的等量关系,一般会出现"某某相等"或"某某相差多少"等等,可以根据这些等量关系列出方程.

2. [中考·本溪]四月是辽宁省"全面阅读月",学校阅览室将对学生的开放时间由每天4.5 h延长到每天6 h,这样每天可以多安排2个班级阅读.如果每个班级每天的阅读时间相同,且每个时间段只能安排一个班级阅读.设原来每天可以安排x个班级阅读,根据题意列出的方程正确的为(　　)

A. $\frac{4.5}{x}=\frac{6}{x-2}$

B. $\frac{4.5}{x-2}=\frac{6}{x}$

C. $\frac{4.5}{x}=\frac{6}{x+2}$

D. $\frac{4.5}{x+2}=\frac{6}{x}$

知识点2 分式方程的解法

点知识 ▶▶▶

1. **解分式方程的一般步骤:**

①去分母:给方程两边同乘各分式的最简公分母,约去分母,化为整式方程;

②解这个整式方程,得到整式方程的根;

③验根:把整式方程的根代入最简公分母,使最简公分母不等于零的根是原分式方程的根,使最简公分母等于零的根不是原分式方程的根;

④写出分式方程的根.

要点精析 ///

(1)解分式方程的基本思路是转化,即方程两边同时乘各分式的最简公分母,将分式方程转化为整式方程;

(2)确定最简公分母的方法:①如果各分母都是单项式,那么最简公分母就是各系数的最小公倍数,相同字母的最高次幂,所有不同字母都写在积里.②如果各分母都是多项式,就可以将各个分母因式分解,取各分母数字系数的最小公倍数,凡出现的字母(或含字母的整式)为底数的幂的因式都要取最高次幂.

2. **易错警示:**

(1)去分母时容易漏乘不含分母的项;

(2)当分子是多项式时没有用括号括起来;

(3)没有检验.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1:解分式方程

例3 [易错题]解方程:(1)$\frac{x}{2x-3}+\frac{5}{3-2x}=4$;

(2)$\frac{3}{x^2-9}+\frac{x}{x-3}=1$.

导引:解分式方程,先给方程的两边同乘最简公分母,化成整式方程后,解整式方程,得到整式方程的根,再代入原分式方程的最简公分母检验,若不为零,则整式方程的根就是原分式方程的根,否则就不是原分式方程的根.

▶解:(1)方程两边同乘$2x-3$得:

$x-5=4(2x-3)$,

去括号得:$x-5=8x-12$,

移项、合并同类项得:$-7x=-7$,

系数化为1得:$x=1$.

经检验,$x=1$是原分式方程的解.

(2)方程两边同乘$(x+3)(x-3)$得:

$3+x(x+3)=(x+3)(x-3)$,

去括号得:$3+x^2+3x=x^2-9$,

移项、合并同类项得:$3x=-12$,

系数化为1得:$x=-4$.

经检验,$x=-4$是原分式方程的解.

误区

在去分母时,方程两边同乘最简公分母,必须每一项都要乘,不能认为有分母的就要乘,没有分母的就不用乘,而是有几项就要乘几项,不能漏乘.

考查角度2:根据分式方程的解求方程中字母的值

例4 若$x=2$是方程$\frac{x-a}{x+1}=\frac{1}{3}$的解,则$a=$_____.

导引:按照一般步骤解方程,用含有a的代数式表示x,然后根据$x=2$,求得a.具体解题过程如下:

方程两边同乘$3(x+1)$得:$3(x-a)=x+1$,

解得:$x=1.5a+0.5$,

$\because x=2$,$\therefore a=1$.

▶答案:1

方法

解答这类问题也可以直接将方程的解代入原方程,再解方程即可.

3. 解下列分式方程:

(1)$\frac{7-9x}{2-3x}-\frac{4x-5}{2-3x}=1$;

(2)$\frac{1}{x+3}-\frac{2}{3-x}=\frac{12}{x^2-9}$.

4. 若关于x的方程$\frac{2ax+3}{a-x}=\frac{3}{4}$的根是$x=1$,则$a$的值为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点3 分式方程的增根

点知识

1. **增根**:在解分式方程的过程中,为了化分式方程为整式方程,需要在分式方程的两边同乘各分式的最简公分母,若所得的解恰好使最简公分母的值为零,则这个解就是增根.

要点精析

(1)在将分式方程转化为整式方程时,方程的两边乘同一个含未知数的整式,而这个含有未知数的整式有可能等于零,因而就有可能产生增根.

(2)验根的方法:验根的方法有两种,一种是把根代入最简公分母,若值不为零,则所得的根是原方程的根,若值为零,则所得的根为增根;另一种是把根代入原方程,若左、右两边的值相等,说明是原方程的根,否则是原方程的增根.

2. **分式方程无解有两种可能**:

(1)将分式方程转化成整式方程后,整式方程是 $ax=b(a=0,b\neq0)$ 的形式,即整式方程无解.

(2)整式方程求得的根,使得原分式方程的最简公分母等于0,即此根为增根,原方程无解.

3. **易错警示**:

(1)在求分式方程中字母的取值时,容易漏掉使分母的值不为零的隐含条件.

(2)增根虽不是原分式方程的根,但它却是原分式方程化成的整式方程的根.

独考向

考查角度1:确定方程的增根

例5 分式方程 $\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{4}{x^2-1}$ 有增根,则增根是(　　)

A. $x=1$　　B. $x=-1$

C. $x=1$ 或 $x=-1$　　D. $x=0$

导引:去分母将分式方程转化为整式方程,求出整式方程的解得到 x 的值,即可得到分式方程的增根.

去分母得:$(x+1)^2-(x^2-1)=4$,

即 $x^2+2x+1-x^2+1=4$,解得:$x=1$,

经检验,$x=1$ 是分式方程的增根. 故选A. ▶答案:A

点方法

增根必须满足的条件:①增根是转化后的整式方程的解;②增根使最简公分母为0. 这两个条件缺一不可. 要注意使最简公分母为0的根不一定是增根.

考查角度2:已知增根确定字母参数的值

例6 已知关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{mx}{x^2-4}=\frac{2}{x+2}$.

(1)若方程的增根为 $x=2$,求 m 的值;

(2)若方程有增根,求 m 的值.

5. 方程 $\frac{4}{x^2-2x}-\frac{x}{x-2}=0$ 有增根,则增根是(　　)

A. 0或2　　B. 0

C. 2　　D. 1

6. 解关于 x 的方程 $\frac{x-6}{x-5}+1=\frac{m}{x-5}$(其中 m 为常数)产生增根,则常数 m 的值等于_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引:先将分式方程化成整式方程,然后将增根代入整式方程,求出待定的字母 m 的值.

▶解:去分母并整理,得 $mx=-8$.

(1)若原分式方程的增根为 $x=2$,则 $2m=-8$,得 $m=-4$.

(2)若原分式方程有增根,则 $(x+2)(x-2)=0$. 所以 $x=-2$ 或 $x=2$.

当 $x=-2$ 时,$-2m=-8$,得 $m=4$,当 $x=2$ 时,$2m=-8$,得 $m=-4$.

所以若原分式方程有增根,则 $m=\pm4$.

点方法

分式方程有增根,一定存在使最简公分母等于0的未知数的值,解这类题的一般步骤为:①把分式方程化为整式方程;②令最简公分母为0,求出未知数的值,这里要注意:必须验证未知数的值是否是整式方程的根;③把未知数的值代入整式方程,从而求出待定字母的值.

知识点4 分式方程的应用

点知识

1. **列分式方程解应用题的一般步骤**:
   (1)**审**:即审题,根据题意找出已知量和未知量,并找出等量关系.
   (2)**设**:即设未知数,设未知数的方法有直接设和间接设,注意单位要统一,选择一个未知量用未知数表示,并用含未知数的代数式表示相关量.
   (3)**列**:即列方程,根据等量关系列出分式方程.
   (4)**解**:即解所列的分式方程,求出未知数的值.
   (5)**验**:即验根,要检验所求的未知数的值是否适合分式方程,还要检验此解是否符合实际意义.
   (6)**答**:即写出答案,注意单位和答案要完整.
2. **分式方程的应用题主要涉及的类型**:
   (1)**利润问题**:利润=售价-进价,利润率=$\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%$;
   (2)**工程问题**:工作量=工作效率×工作时间;
   (3)**行程问题**:路程=速度×时间.
   说明:列分式方程解应用题时,往往与实数的运算或不等式结合.
3. **易错警示**:列分式方程时单位不统一.

拓考向

考查角度1:利用分式方程解决工程问题

例7 [中考·贺州]政府为了美化人民公园,计划对公园某区域进行改造,这项工程先由甲工程队施工10天完成了工程的$\frac{1}{4}$,为了加快工程进度,乙工程队也加入施工,甲、乙两个工程队合作10天完成了剩余的工程,求乙工程队单独完成这项工程需要几天.

7. [中考·绥化]甲、乙两个工程队计划修建一条长15千米的乡村公路,已知甲工程队每天比乙工程队每天多修路0.5

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引:可设乙工程队单独完成这项工程需要 x 天,根据等量关系:甲、乙两个工程队合作 10 天完成了剩余的工程,即工程总量的 $1-\frac{1}{4}$,依此列出方程求解即可.

▶解:$10\div\frac{1}{4}=40$(天),

设乙工程队单独完成这项工程需要 x 天,依题意有

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{40}\right)\times 10=1-\frac{1}{4}$,解得 $x=20$,

经检验,$x=20$ 是所列方程的解.

答:乙工程队单独完成这项工程需要 20 天.

点方法

解决工程问题的应用题,关键是抓住工程问题中三个量之间的关系列出分式方程解决问题. 特别注意基本步骤中"检验"这一步不能少.

考查角度 2:利用分式方程解决行程问题

例 8 [中考·淄博]某内陆城市为了落实国家"一带一路"倡议,促进经济发展,增强对外贸易的竞争力,把距离港口 420 km 的普通公路升级成了同等长度的高速公路,结果汽车行驶的平均速度比原来提高了 50%,行驶时间缩短了 2 h,求汽车原来的平均速度.

导引:求汽车原来的平均速度,路程为 420 km,一定是根据时间来找等量关系,本题的关键语可转化为:汽车在这段公路上行驶所用的时间缩短了 2 h. 等量关系为:原来用的时间 − 现在用的时间 = 2 h.

▶解:设汽车原来的平均速度是 x km/h,

根据题意得:$\frac{420}{x}-\frac{420}{(1+50\%)x}=2$,解得:$x=70$

经检验,$x=70$ 是所列方程的解.

答:汽车原来的平均速度是 70 km/h.

点方法

解决行程问题的应用题,关键是抓住行程问题中三个量之间的关系列出方程,列方程时特别注意单位要统一.

考查角度 3:利用分式方程解决销售问题

例 9 [中考·辽阳]近年来雾霾天气给人们的生活带来很大影响,空气质量问题倍受人们关注. 某单位计划在室内安装空气净化装置,需购进 A、B 两种设备. 每台 B 种设备价格比每台 A 种设备价格多 0.7 万元,花 3 万元购买 A 种设备和花 7.2 万元购买 B 种设备的数量相同.

千米,乙工程队单独完成修路任务所需天数是甲工程队单独完成修路任务所需天数的 1.5 倍.

(1)求甲、乙两个工程队每天各修路多少千米?

(2)若甲工程队每天的修路费用为 0.5 万元,乙工程队每天的修路费用为 0.4 万元,要使两个工程队修路总费用不超过 5.2 万元,甲工程队至少修路多少天?

8. [中考·通辽]一汽车从甲地出发开往相距 240 km 的乙地,出发后第 1 小时内按原计划的速度匀速行驶,1 小时后比原来的速度加快 $\frac{1}{4}$,比原计划提前 24 min 到达乙地,求汽车出发后第 1 小时内的行驶速度.

9. [中考·河池]某班为满足同学们课外活动的需求,要购排球和足球若干个. 已知足球的单价比排球的单价多 30

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)求A、B两种设备每台各多少万元?

(2)根据单位实际情况,需购进A、B两种设备共20台,总费用不高于15万元,求A种设备至少要购买多少台?

导引:(1)设每台A种设备x万元,则每台B种设备$(x+0.7)$万元,根据数量=总价÷单价,结合花3万元购买A种设备和花7.2万元购买B种设备的数量相同,即可得出关于x的分式方程,解之并检验后即可得出结论;

(2)设购买A种设备m台,则购买B种设备$(20-m)$台,根据总价=单价×数量,结合总费用不高于15万元,即可得出关于m的一元一次不等式,解之即可得出m的取值范围,取最小正整数即可.

▶解:(1)设每台A种设备x万元,则每台B种设备$(x+0.7)$万元,

根据题意得:$\frac{3}{x}=\frac{7.2}{x+0.7}$,解得:$x=0.5$.

经检验,$x=0.5$是原方程的解,

$\therefore x+0.7=1.2$.

答:每台A种设备0.5万元,每台B种设备1.2万元.

(2)设购买A种设备m台,则购买B种设备$(20-m)$台,

根据题意得:$0.5m+1.2(20-m)\leqslant 15$,解得:$m\geqslant\frac{90}{7}$.

$\because m$为整数,$\therefore m\geqslant 13$.

答:A种设备至少要购买13台.

点方法

由实际问题抽象出分式方程,重点在于准确地找出相等关系,找相等关系的方法:应用题中一般有三个量,明显地有一个量是已知量,设一个量,一定是根据第三个量来找相等关系列方程.

元,用500元购得的排球数量与用800元购得的足球数量相等.

(1)排球和足球的单价各是多少元?

(2)若恰好用去1 200元,有哪几种购买方案?

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1:根据分式方程解的情况求字母参数的取值范围

例10 若关于x的分式方程$\frac{x+m}{x-4}+\frac{4m}{4-x}=6$的解为正实数,求实数$m$的取值范围.

导引:利用解分式方程的一般步骤解出方程,根据题意列出不等式,解不等式即可.

举一反三训练

(答案见279页)

10. [中考·荆州]若关于x的分式方程$\frac{k-1}{x+1}=2$的解为负数,则k的取值范围为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解：方程两边同乘 $x-4$ 得，$x+m-4m=6(x-4)$，

解得 $x=\dfrac{24-3m}{5}$，

$\because \dfrac{24-3m}{5}\neq 4$，$\therefore m\neq\dfrac{4}{3}$，

由题意得 $\dfrac{24-3m}{5}>0$，解得 $m<8$.

故答案为：$m<8$ 且 $m\neq\dfrac{4}{3}$.

误区

已知分式方程根的情况，则说明分式方程有根，所以在确定字母参数的取值范围时，不能忽视增根的情况.

拔尖角度 2：分式方程无解问题（拓展点）

例 11 ［中考 · 攀枝花］若关于 x 的分式方程 $\dfrac{7}{x-1}+3=\dfrac{mx}{x-1}$ 无解，则实数 $m=$ _____.

导引：分式方程无解的条件是：去分母后所得整式方程无解，或解这个整式方程得到的解使原方程的分母等于 0.

方程去分母得：$7+3(x-1)=mx$，

整理，得 $(m-3)x=4$，

当整式方程无解时，$m-3=0$，$m=3$；

当整式方程的解为分式方程的增根时，$x=1$，

$\therefore m-3=4$，$m=7$，

$\therefore m$ 的值为 3 或 7.

▶答案：3 或 7

方法

分式方程无解有两种可能：（1）分式方程化成的整式方程无解，则分式方程也无解；（2）化成的整式方程的解都是该分式方程的增根，均被舍掉，则分式方程无解. 因此解这类问题要两者兼顾，不能漏解.

11. 若分式方程：$2-\dfrac{1-kx}{x-2}=\dfrac{1}{2-x}$ 无解，则 $k=$ _____.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 280 页）

基础巩固练

1. 下列方程不是分式方程的是（　　）

A. $\dfrac{1}{x}+x=1$　　B. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{1+x}=2$　　D. $\dfrac{5}{x}=\dfrac{7}{x-7}$

2. ［中考 · 河南］解分式方程 $\dfrac{1}{x-1}-2=\dfrac{3}{1-x}$，去分母得（　　）

A. $1-2(x-1)=-3$　　B. $1-2(x-1)=3$

C. $1-2x-2=-3$　　D. $1-2x+2=3$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [中考·毕节] 关于 x 的分式方程 $\frac{7x}{x-1}+5=\frac{2m-1}{x-1}$ 有增根，则 m 的值为(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. [中考·抚顺] 为了践行“绿色生活”的理念，甲、乙两人每天骑自行车出行，甲匀速骑行 30 公里的时间与乙匀速骑行 25 公里的时间相同，已知甲每小时比乙多骑行 2 公里，设甲每小时骑行 x 公里，根据题意列出的方程正确的是(　　)

A. $\frac{30}{x+2}=\frac{25}{x}$　　B. $\frac{30}{x}=\frac{25}{x+2}$

C. $\frac{30}{x}=\frac{25}{x-2}$　　D. $\frac{30}{x-2}=\frac{25}{x}$

5. 当 $x=$ _____ 时，分式 $\frac{4}{x-4}$ 与 $\frac{3}{x-1}$ 的值相等.

6. 若分式方程 $\frac{x}{2x-3}+\frac{a}{3-2x}=1$ 的解为 $x=0$，则 a 的值是_____.

7. 对于非零的两个实数 a,b，规定 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，若 $2\oplus(2x-1)=1$，则 x 的值为_____.

8. 解下列分式方程：

(1) $\frac{2}{x-1}-1=\frac{x+1}{x-1}$;

(2) $\frac{3x-5}{x-2}=2+\frac{x+1}{2-x}$;

(3) $\frac{y}{y-1}-1=\frac{3}{y^2-1}$;

(4) $\frac{7}{x^2+x}+\frac{3}{x^2-x}=\frac{6}{x^2-1}$.

9. [中考·扬州] 星期天，小明和小芳从同一小区门口同时出发，沿同一路线去离该小区 1 800 米的少年宫参加活动，为响应“节能环保，绿色出行”的号召，两人都步行，已知小明的速度是小芳的速度的 1.2 倍，结果小明比小芳早 6 分钟到达，求小芳的速度.

10. [中考·广州] 甲、乙两个工程队均参与某筑路工程，先由甲队筑路 60 公里，再由乙队完成剩下的筑路工程，已知乙队筑路总公里数是甲队筑路总公里数的 $\frac{4}{3}$ 倍，甲队比乙队多筑路 20 天.

(1) 求乙队筑路的总公里数；

(2) 若甲、乙两队平均每天筑路公里数之比为 5∶8，求乙队平均每天筑路多少公里.

能力提升练

11. [中考·黑龙江] 已知关于 x 的分式方程 $\frac{3x-a}{x-3}=\frac{1}{3}$ 的解是非负数，那么 a 的取值范围是(　　)　　【导学号:9937991】

A. $a>1$　　B. $a\geqslant 1$

C. $a\geqslant 1$ 且 $a\neq 9$　　D. $a\leqslant 1$

12. 关于 x 的方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{kx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ 无解，则 k 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-1}+\frac{mx}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$.

(1)若方程的增根为 $x=1$,求 m 的值;

(2)若方程有增根,求 m 的值;

(3)若方程无解,求 m 的值.

14. [中考 · 牡丹江]“一带一路”倡议为国内许多企业的发展带来了新的机遇,某公司生产 A,B 两种机械设备,每台 B 种设备的成本是 A 种设备的 1.5 倍,公司若投入 16 万元生产 A 种设备,36 万元生产 B 种设备,则可生产两种设备共 10 台. 请解答下列问题:

(1)A、B 两种设备每台的成本分别是多少万元?

(2)若 A,B 两种设备每台的售价分别是 6 万元,10 万元,公司决定生产两种设备共 60 台,计划销售后获利不低于 126 万元,且 A 种设备至少生产 53 台,求该公司有几种生产方案;

(3)在(2)的条件下,销售前公司决定从这批设备中拿出一部分,赠送给“一带一路”沿线的甲国,剩余设备全部售出,公司仍获利 44 万元,赠送的设备采用水路运输和航空运输两种方式,共运输 4 次,水路运输每次运 4 台 A 种设备,航空运输每次运 2 台 B 种设备(运输过程中产生的费用由甲国承担). 求出水路运输的次数.

思维拓展练

15. 阅读理解题:阅读下列材料,关于 x 的方程:$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$ 的解是 $x_1=c$,$x_2=\frac{1}{c}$;$x-\frac{1}{x}=c-\frac{1}{c}$(即 $x+\frac{-1}{x}=c+\frac{-1}{c}$)的解是 $x_1=c$,$x_2=-\frac{1}{c}$;$x+\frac{2}{x}=c+\frac{2}{c}$ 的解是 $x_1=c$,$x_2=\frac{2}{c}$,….

(1)观察上述方程及其解的特征,直接写出关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}(m\neq 0)$ 的解,并利用“方程的解”的概念进行验证;

(2)利用(1)的结论,你能求出关于 x 的方程:$x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$ 的解吗?若能,请求出此方程的解;若不能,请说明理由.

我的错题笔记

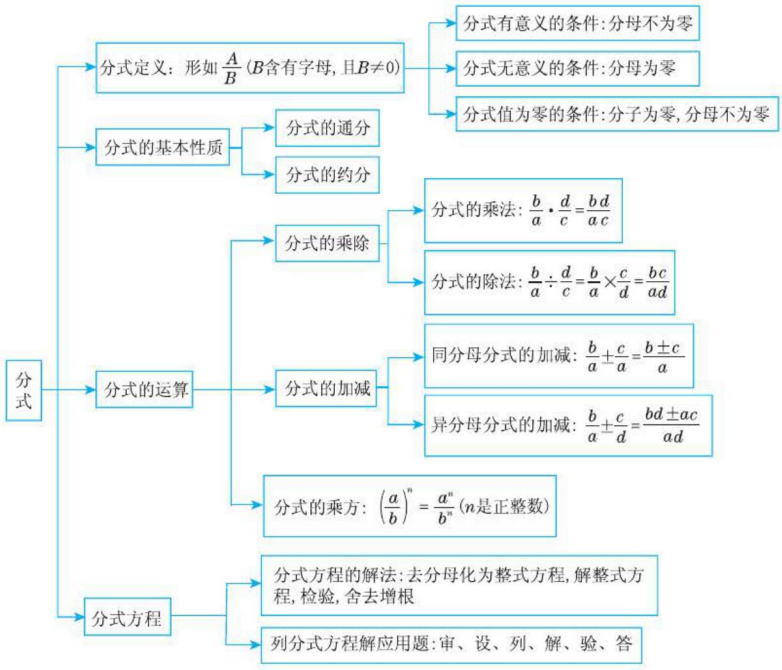
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 形如$\frac{A}{B}$（A，B表示两个整式，B含有字母，且$B\neq0$）的代数式叫做分式，$B\neq0$是分式有意义的条件；$A=0$，$B\neq0$是分式的值为零的条件.
2. 分式的基本性质：分式的分子和分母同时乘或除以同一个不为0的数或整式，分式的值不变. 根据分式的基本性质可以将分式进行通分或者约分.
3. 分式的运算包括乘方、乘除和加减运算，乘除法运算的关键是约分，加减法运算的关键是通分，运算的最后结果一定要是最简分式或整式.
4. 解分式方程关键是利用等式的性质将方程的两边乘最简公分母，将分式方程转化成整式方程，然后解整式方程. 解完整式方程后一定要注意检验，若使最简公分母的值为零，则该根为增根.
5. 在列分式方程解决实际问题时，一是要注意审题，找到题目中的等量关系；二是设未知数，注意根据问题情境灵活选择设法，如直接设，间接设，设多元等；由于列出的是分式方程，所以要从两个方面验根：一看是否为增根，二看是否符合实际意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题解码

知识专题

专题1 分式的相关概念

链接中考>> 在分式的相关概念中，分式有意义的条件及分式值为0的条件最为重要，也是中考中的热门考点，一般都以填空题、选择题的形式出现.

例1 （1）［中考 · 连云港］分式$\frac{1}{x-1}$有意义的x的取值范围为_____.

（2）［中考 · 新疆］已知分式$\frac{x-1}{x+1}$的值是零，那么x的值是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

导引：(1)根据分式有意义的条件即可求出x的范围；(2)分式的值为0的条件是：①分子等于0；②分母不等于0. 两个条件需同时具备，缺一不可.

(1)当分母$x-1\neq0$，即$x\neq1$时，分式$\frac{1}{x-1}$有意义.

(2)若$\frac{x-1}{x+1}=0$，则$x-1=0$且$x+1\neq0$，故$x=1$，故选C.　　▶答案：(1)$x\neq1$　(2)C

点方法

本题考查了分式有意义的条件. 从以下三个方面透彻理解分式的概念：

（1）分式无意义⇔分母为零；

（2）分式有意义⇔分母不为零；

（3）分式值为零⇔分子为零且分母不为零.

专题2 分式的运算

链接中考>> 分式的运算是本章的重点，关键扣住分式的运算顺序以及分式的运算法则，中考中考查的形式主要是化简求值，属中档题目.

例2 ［中考 · 本溪］先化简，再求值：$\left(x-2-\frac{5}{x+2}\right)\cdot\frac{2x+4}{x^2-3x}$，其中$x=(1-\pi)^0-\left|-\frac{1}{2}\right|$.

导引：先化简，再求出x的值，代入即可得解.

▶解：原式$=\frac{(x-2)(x+2)-5}{x+2}\cdot\frac{2(x+2)}{x(x-3)}$

$=\frac{(x+3)(x-3)}{x+2}\cdot\frac{2(x+2)}{x(x-3)}$

$=\frac{2x+6}{x}$.

$\because x=(1-\pi)^0-\left|-\frac{1}{2}\right|=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 原式$=\frac{2x+6}{x}=\frac{2\times\frac{1}{2}+6}{\frac{1}{2}}=14$.

点方法

分式化简求值问题没有捷径，需要掌握因式分解和代入求值的方法等知识，分式问题中还需注意分式有意义的条件. 如本题代入的x值必须使原式有意义，不能是3，0或-2.

专题3 解分式方程

链接中考>> 解分式方程关键是将分式方程转化为整式方程来解决，解分式方程一定要注意检验. 解方程是中考中的热门考点，一般都是直接考查解分式方程.

例3 ［中考 · 朝阳］解分式方程：$\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}=\frac{x+1}{4x^2-1}$.

导引：分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到x的值，经检验即可得到分式方程的解.

▶解：去分母得：$3(2x-1)-2(2x+1)=x+1$，

解得：$x=6$，

经检验$x=6$是分式方程的解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

分式方程 $\xrightarrow[\text{转化为}]{\text{去分母}}$ 整式方程 ⟶ 解整式方程 ⟶ 检验根 ⟶ 确定原方程的根.

专题4 分式方程的应用

链接中考>> 分式方程的应用是分式方程作用的关键体现，都是以解决生活问题为目的. 所以考查分式方程的应用题时，问题的背景都是现实生活中的热点问题，解决问题的关键是寻找等量关系. 在中考中单独考查时一般以解答题的形式出现.

例4 [中考·贵阳]“2017年张学友演唱会”于6月3日在我市观山湖奥体中心举办. 小张去离家2520米的奥体中心看演唱会，到奥体中心后，发现演唱会门票忘带了，此时离演唱会开始还有23分钟，于是他跑步回家，拿到票后立刻找到一辆“共享单车”原路赶回奥体中心，已知小张骑车的时间比跑步的时间少用了4分钟，且骑车的平均速度是跑步的平均速度的1.5倍.

(1)求小张跑步的平均速度；

(2)如果小张在家取票和寻找“共享单车”共用了5分钟，他能否在演唱会开始前赶到奥体中心？说明理由.

导引：(1)设小张跑步的平均速度为 x 米/分钟，则小张骑车的平均速度为 $1.5x$ 米/分钟，根据时间=路程÷速度结合小张骑车的时间比跑步的时间少用了4分钟，即可得出关于 x 的分式方程，解之并检验后即可得出结论；

(2)根据时间=路程÷速度求出小张跑步回家的时间，由骑车与跑步所需时间之间的关系可得出骑车的时间，再加上取票和寻找“共享单车”共用的5分钟即可求出小张赶回奥体中心所需时间，将其与23进行比较后即可得出结论.

▶解：(1)设小张跑步的平均速度为 x 米/分钟，则小张骑车的平均速度为 $1.5x$ 米/分钟，

根据题意得：$\frac{2\,520}{x}-\frac{2\,520}{1.5x}=4$，

解得：$x=210$，

经检验，$x=210$ 是原分式方程的解.

答：小张跑步的平均速度为210米/分钟.

(2)不能. 理由：小张跑步到家所需时间为 $2\,520\div210=12$(分钟)，

小张骑车所用时间为 $12-4=8$(分钟)，

小张从开始跑步回家到赶回奥体中心所需时间为 $12+8+5=25$(分钟)，

∵ $25>23$，

∴ 小张不能在演唱会开始前赶到奥体中心.

点方法

本题考查了分式方程的应用，解题的关键是：(1)根据时间=路程÷速度结合小张骑车的时间比跑步的时间少用了4分钟，列出关于 x 的分式方程；(2)根据数量关系，列式计算.

专题5 分式方程解的讨论

链接中考>> 分式方程解的讨论问题是每年中考常考题型，解答这类问题关键是正确理解增根的概念，同时要考虑到分式的分母不能为0，这类问题一般以选择题或填空题形式出现.

例5 [中考·宿迁]若关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$ 有增根，则实数 m 的值是_____.

导引：分式方程去分母转化为整式方程，由分式方程有增根，得到 $x-2=0$，求出 x 的值，代入整式方程求出 m 的值即可.

去分母，得：$m=x-1-3(x-2)$，

由分式方程有增根，得到 $x-2=0$，即 $x=2$，

把 $x=2$ 代入整式方程可得：$m=1$.

▶答案：1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

此题考查了分式方程的增根，增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

例 6 ［中考 · 泸州］若关于 x 的分式方程 $\frac{x+m}{x-2}+\frac{2m}{2-x}=3$ 的解为正实数，则实数 m 的取值范围是_____.

导引：利用解分式方程的一般步骤解出方程，根据题意列出不等式，解不等式即可.

$\frac{x+m}{x-2}+\frac{2m}{2-x}=3$，

方程两边同乘 $x-2$ 得，

$x+m-2m=3(x-2)$，

解得，$x=\frac{6-m}{2}$，

由 $\frac{6-m}{2}\neq 2$，得 $m\neq 2$，

由题意得，$\frac{6-m}{2}>0$，解得，$m<6$，

故答案为：$m<6$ 且 $m\neq 2$.

▶答案：$m<6$ 且 $m\neq 2$

点方法

解答这类问题的基本思路是先解分式方程，再根据方程解的情况列不等式，同时要注意分式方程分母不能为 0.

思想方法专题

专题 6　整体思想求分式的值

专题解读>> 解决某些数学问题时，把一组数或一个代数式看成一个整体进行处理，不仅可以简化解题过程，而且还能拓宽思路，培养创新意识，体现了数学中的一种重要思想——整体思想. 这一思想在分式的运算中体现明显，在解题中应用较多，要引起重视.

例 7 ［中考 · 齐齐哈尔］先化简，再求值：$\left(1-\frac{2}{x}\right)\div\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}-\frac{x+4}{x+2}$，其中 $x^2+2x-15=0$.

导引：先算括号里面的，再算除法，最后算减法，根据 $x^2+2x-15=0$ 得出 $x^2+2x=15$，代入代数式进行计算即可.

▶解：原式 $=\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+4}{x+2}$

$=\frac{x+2}{x}-\frac{x+4}{x+2}$

$=\frac{4}{x^2+2x}$，

$\because x^2+2x-15=0$，$\therefore x^2+2x=15$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{4}{15}$.

点方法

本题运用了**整体思想**求值. 整体思想就是在研究和解决有关数学问题时，利用问题的整体形式、整体结构、整体特征等，对问题整体处理的解题方法. 整体思想的表现形式有：整体代入、整体加减、整体补形、整体变换等.

专题 7　倒数法求分式的值

专题解读>> 有些分式求值问题直接求解困难时，可考虑求它的倒数，将问题转化为方便求解的问题，这类问题中分式的形式通常是分子是单项式，分母是多项式，此时将分式的分子和分母颠倒位置，再利用分式的加减法，结合题目条件就方便求解了.

例 8 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

导引：颠倒所求分式的分子和分母位置可得 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$，利用分式的基本性质得 $x^2+1+\frac{1}{x^2}$，再将条件等式两边平方即可获解.


巧求分式值的方法

▶解：$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}$.

因为 $x+\frac{1}{x}=3$，所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2$.

所以 $x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$. 所以 $x^2+1+\frac{1}{x^2}=8$.

所以 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=8$. 因此 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{8}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

倒数法是处理分式问题的常用方法，对于分式求值问题，要仔细研究式子的特征，灵活运用倒数法.

专题8 裂项相消法解分式方程

专题解读>> 裂项相消法，可使出现多个分式的加减或相关的分式方程问题，通过变形将一部分项相互抵消，转化为常见的分式加减或常见的相关的分式方程，变复杂为简单，变难为易，不失为一种巧妙的解题方法.

例9 解方程：$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$.

导引：观察可以发现等号左边每个分式的分母中的两个因式相差1，因此可逆向运用异分母分式的减法法则进行裂项，相消后化为常见的分式方程求解.

▶解：原方程变形为 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+3}$，整理，得 $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+3}=0$，去分母，得 $x+3-2x=0$，解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的解.

点方法

当涉及的分式方程有多个分式且分母与分子有某种规律时，常常通过**裂项相消法**把方程化为熟悉的分式方程求解，体现了**转化思想**.

好题必练

（答案见281页）

选择题

1. [中考·金华] 若分式 $\frac{x-3}{x+3}$ 的值为0，则 x 的值为(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 3或-3　　D. 0

2. 将分式 $\frac{x^2y}{x-y}$ 中的 x,y 的值同时扩大为原来的3倍，则分式的值(　　)

A. 扩大为原来的6倍　B. 扩大为原来的9倍

C. 不变　　D. 扩大为原来的3倍

3. [中考·北京] 如果 $a^2+2a-1=0$，那么代数式 $\left(a-\frac{4}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a-2}$ 的值是(　　)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

4. [中考·南充] 已知 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则代数式 $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y}$ 的值是(　　)

A. $-\frac{7}{2}$　　B. $-\frac{11}{2}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. [中考·重庆] 若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{1}{3}x-1\leqslant\frac{1}{2}(x-1),\\2x-a\leqslant3(1-x)\end{cases}$ 有且仅有三个整数解，且使关于 y 的分式方程 $\frac{3y}{y-2}+\frac{a+12}{2-y}=1$ 有整数解，则满足条件的所有 a 的值之和是(　　)

A. -10　　B. -12

C. -16　　D. -18

填空题

6. [中考·自贡] 化简 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}$ 的结果是_____.

7. [中考·黄冈] 已知 $a-\frac{1}{a}=\sqrt{6}$，则 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 的值为_____.

8. [中考·眉山] 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3}-2=\frac{k}{x-3}$ 有一个正数解，则 k 的取值范围为_____.

9. [中考·达州] 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-3}+\frac{3a}{3-x}=2a$ 无解，则 a 的值为_____.

10. 已知 $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$，则 $3A+2B=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 若代数式$\frac{4x+1}{x+1}$的值为整数，则满足条件的整数 x 有_____.

12. ［中考 · 滨州］观察下列各式：

$\frac{2}{1\times3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$；$\frac{2}{2\times4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$；

$\frac{2}{3\times5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$；…

请利用你所得的结论，化简代数式：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$（$n\geqslant3$ 且 n 为整数），其结果为_____.

解答题

13. ［中考 · 眉山］先化简，再求值：$\left(\frac{x-1}{x}-\frac{x-2}{x+1}\right)\div\frac{2x^2-x}{x^2+2x+1}$，其中 x 满足 $x^2-2x-2=0$.

14. ［中考 · 德州］先化简，再求值：$\frac{x-3}{x^2-1}\div\frac{x-3}{x^2+2x+1}-\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$，其中 x 是不等式组$\begin{cases}5x-3>3(x+1),\\ \frac{1}{2}x-1<9-\frac{3}{2}x\end{cases}$的整数解.

15. ［中考 · 西藏］解分式方程：$\frac{2x}{x-1}=\frac{x}{2x-2}+1$.

16. ［中考 · 泰州］为了改善生态环境，某乡村计划植树 4 000 棵，由于志愿者的支援，实际工作效率提高了 20%，结果比原计划提前 3 天完成，并且多植树 80 棵，原计划植树多少天？

17. ［中考 · 宁波］某商场购进甲、乙两种商品，甲种商品共用了 2 000 元，乙种商品共用了 2 400 元. 已知乙种商品每件进价比甲种商品每件进价多 8 元，且购进的甲、乙两种商品件数相同.

(1) 求甲、乙两种商品每件的进价；

(2) 该商场将购进的甲、乙两种商品进行销售，甲种商品的销售单价为 60 元，乙种商品的销售单价为 88 元，销售过程中发现甲种商品销量不好，商场决定：甲种商品销售一定数量后，将剩余的甲种商品按原销售单价的七折销售；乙种商品销售单价保持不变. 要使两种商品全部售完后共获利不少于 2 460 元，问甲种商品按原销售单价至少销售多少件？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第11章 反比例函数

揭示反比例函数的奥秘

数学点拨

你将学到的核心考点

- 反比例函数的定义 □
- 反比例函数的图像 □
- 反比例函数的性质 □
- 实际问题与反比例函数 □

我们为你提供的核心方法

- 待定系数法 □
- 特殊值法 □
- 割补法 □
- 数形结合思想 □
- 分类讨论思想 □
- 化归思想 □

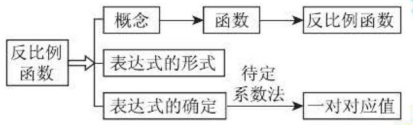
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.1 反比例函数

热门话题
- 反比例函数的定义
- 求反比例函数的表达式

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 反比例函数的定义

点知识

1. **定义**：一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的函数叫做反比例函数，其中 x 是自变量，y 是 x 的函数.

要点精析

（1）判定一个函数为反比例函数的条件：

①所给等式是形如 $y=\frac{k}{x}$ 或 $y=kx^{-1}$ 或 $xy=k$ 的等式；

（2）y 是 x 的反比例函数 $\Leftrightarrow$ 函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$ 或 $y=kx^{-1}$ 或 $xy=k$（k 为常数，$k\neq0$）.



2. **拓展**：（1）若在反比例函数表达式中分母 x 的系数不为 1，如：$y=\frac{b}{ax}$，则比例系数 k 为 $\frac{b}{a}$，不可误认为 $k=b$.

（2）如果 $xy=k$（k 是常数，$k\neq0$），那么 x 与 y 这两个量成反比例关系，这里 x，y 可以表示多项式或单项式，如：若 $y+3$ 与 $x-1$ 成反比例，则 $y+3=\frac{k}{x-1}$，此时 y 与 x 不是反比例函数关系.

（3）在 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）中，自变量 x 是分式 $\frac{k}{x}$ 的分母，当 $x=0$ 时，分式 $\frac{k}{x}$ 无意义，所以 x 的取值范围是 $x\neq0$.

（4）$y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）也可以写成 $xy=k$（$k\neq0$）的形式，用它可以迅速地求出反比例函数表达式中的 k，从而得到反比例函数的表达式. 两个变量的积是一个非零常数（定值），这也是识别两个变量是否成反比例函数关系的关键.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：反比例函数的识别

例 1 下列表达式中，y 是 x 的反比例函数的是_____（填序号）.

①$y=2x-1$；②$y=-\frac{5}{x}$；③$y=\frac{3}{x^2}$；④$y=\frac{1}{2x}$.

举一反三训练

（答案见 282 页）

1. 下列表达式中，哪些是反比例函数？请指出反比例函数表达式中 k 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：根据反比例函数的定义进行判断，看它是否满足反比例函数的三种表现形式.

①$y=2x-1$ 是一次函数；

②$y=-\frac{5}{x}$是反比例函数；

③$y=\frac{3}{x^2}$，y 与 x^2 成反比例，但 y 与 x 不是反比例函数关系；

④$y=\frac{1}{2x}$是反比例函数，可以写成 $y=\frac{\frac{1}{2}}{x}$.　▶答案：②④

诊误区

判断一个函数是不是反比例函数的方法：先看它是否能写成反比例函数的三种表现形式，再看 k 是否为常数且 $k\neq0$.

如 $y=\frac{3}{x^2}$中，y 是 x^2 的反比例函数，不要误认为 y 是 x 的反比例函数.

考查角度 2：利用反比例函数的定义求值

例 2　已知函数 $y=(m^2+2m)x^{m^2-3}$.

(1)若 y 是 x 的正比例函数，求 m 的值；

(2)若 y 是 x 的反比例函数，求 m 的值.

导引：紧扣定义解答.

(1)由正比例函数的定义可知：x 的指数为 1，系数不为零；

(2)由反比例函数的定义可知：x 的指数为 -1，系数不为零.

▶解：(1)依题意得：$m^2-3=1$，且 $m^2+2m\neq0$.

解得：$m=2$.

(2)依题意得：$m^2-3=-1$，且 $m^2+2m\neq0$. 解得：$m=\pm\sqrt{2}$.

诊误区

不管是正比例函数还是反比例函数，都必须关注两点：一是自变量的指数，二是比例系数，不要忽视比例系数 k 不为零这一条件.

①$xy=3$；②$y=\frac{x}{3}$；

③$y=\frac{3}{x}$；④$y=\frac{1}{3x}$；

⑤$y=\frac{1}{x+3}$；

⑥$y=\frac{1}{x}+3$.

2. 已知：$y=(m-2)x^{m^2-5}$是反比例函数，则 $m=$_____.

知识点 2　求反比例函数表达式

点知识

1. 求反比例函数的表达式，就是确定反比例函数表达式 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 中常数 k 的值，它一般需经历：“设→代→求→还原”这四步.

即：(1)**设**：设出反比例函数表达式 $y=\frac{k}{x}$；

(2)**代**：将所给的数据代入函数表达式；

(3)**求**：求出 k 的值；

(4)**还原**：写出反比例函数的表达式.

要点精析

由于反比例函数的表达式中只有一个待定系数 k，因此求反比例函数的表达式只需一组对应值或一个条件即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 确定实际问题中的反比例函数表达式时，应先根据题意寻找等量关系，并列出关于两个变量的方程（等式），再变形为函数表达式，对于实际问题中函数自变量的取值范围，除使表达式有意义外，还要使实际问题有意义.

拨考向

考查角度 1：根据反比例函数定义求函数表达式

例 3 已知 y 与 $2x+3$ 成反比例关系，当 $x=-1$ 时，$y=4$.

(1)求 y 与 x 的函数关系式.

(2)当 $x=1$ 时，求 y 的值.

导引：(1)根据 y 与 $2x+3$ 成反比例关系，且当 $x=-1$ 时，$y=4$ 求出 k 的值，进而可得出函数关系式；

(2)把 $x=1$ 代入求出 y 的值即可.

▶解：(1)∵ y 与 $2x+3$ 成反比例关系，

∴ 设 $y=\dfrac{k}{2x+3}$，

∵ 当 $x=-1$ 时，$y=4$，∴ $4=\dfrac{k}{2\times(-1)+3}$，解得 $k=4$，

∴ y 与 x 的函数关系式为 $y=\dfrac{4}{2x+3}$.

(2)∵ 由(1)知 y 与 x 的函数关系式为 $y=\dfrac{4}{2x+3}$，

∴ 当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{4}{2\times1+3}=\dfrac{4}{5}$.

点方法

确定反比例函数表达式的方法： 在明确两个变量为反比例函数关系的前提下，先设出反比例函数的表达式，然后把满足反比例函数关系的一组对应值代入设出的表达式中构造方程，解方程求出待定系数，从而确定反比例函数的表达式.

考查角度 2：根据实际问题中的等量关系求反比例函数表达式

例 4 列出下列问题中的函数关系式，并判断它们是否为反比例函数.

(1)某农场的粮食总产量为 1 500 t，则该农场人数 y（人）与平均每人占有粮食量 x(t)的函数关系式；

(2)在加油站，加油机显示器上显示的某一种油的单价为每升 4.75 元，总价从 0 元开始随着加油量的变化而变化，则总价 y（元）与加油量 x(L)的函数关系式；

(3)小明完成 100 m 赛跑时，时间 t(s)与他跑步的平均速度 v(m/s)之间的函数关系式.

3. 已知 y 与 $x+1$ 成反比例，并且当 $x=2$ 时，$y=1$.

(1)写出 y 与 x 之间的函数表达式，并判断 y 与 x 之间是否是反比例函数关系；

(2)当 $x=3$ 时，求 y 的值；

(3)当 $y=3$ 时，求 x 的值.

4. 下列关系中，成反比例函数关系的是(　　)

A. 圆的面积 S 与半径 r 的关系

B. 三角形的面积 S 一定，它的底边 a 与这边上的高 h 的关系

C. 人的年龄与身高的关系

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：根据问题的实际意义列出函数表达式，并根据反比例函数的定义做出判断.

▶解：(1) 由平均数的意义，得 $x=\frac{1\,500}{y}$，即 $y=\frac{1\,500}{x}$，是反比例函数.

(2) 由单价乘加油量等于总价，得 $y=4.75x$，不是反比例函数.

(3) 由路程、速度与时间的关系，得 $t=\frac{100}{v}$，是反比例函数.

点方法

用反比例函数的表达式表示实际问题的方法： 通常建立数学模型的过程是先找出两个变量之间的等量关系，然后经过变形即可得出.

注意：实际问题中的反比例函数，自变量的取值范围一般都是大于零的实数.

D. 小明从家到学校，剩下的路程 s 与速度 v 的关系

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：利用正比例函数与反比例函数定义综合解决问题

例 5 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x^2 成正比例函数关系，y_2 与 x 成反比例函数关系，且当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=-1$ 时，$y=1$. 求当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，y 的值.

导引：根据正比例函数和反比例函数的定义，分别设出 y_1，y_2 与 x 之间的函数表达式，然后根据 $y=y_1+y_2$，写出 y 与 x 之间的函数表达式，最后利用已知的对应值求出待定系数的值.

▶解：∵ y_1 与 x^2 成正比例函数关系，y_2 与 x 成反比例函数关系，

$\therefore$ 设 $y_1=k_1x^2$，$y_2=\frac{k_2}{x}$，$\therefore y=k_1x^2+\frac{k_2}{x}$.

把 $x=1$，$y=3$ 和 $x=-1$，$y=1$ 分别代入上式，得 $\begin{cases}3=k_1+k_2,\\1=k_1-k_2,\end{cases}\therefore\begin{cases}k_1=2,\\k_2=1,\end{cases}$

$\therefore y=2x^2+\frac{1}{x}$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$.

举一反三训练

(答案见 282 页)

5. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成反比例，y_2 与 $x-2$ 成正比例. 当 $x=3$ 时，$y=5$；当 $x=1$ 时，$y=-1$. 求 y 与 x 的函数关系式，并求当 $x=6$ 时的函数值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

求函数表达式一般用**待定系数法**，解决这类问题要清楚各种函数的特征；先设出待定系数，然后根据已知的对应值求出待定系数. 特别注意不同的函数关系要用不同的待定系数，如本题正比例函数关系的待定系数用 k_1，反比例函数关系的待定系数用 k_2.

拨尖角度 2：运用反比例函数关系解决实际问题

例 6 将油箱注满 k 升油后，轿车可行驶的总路程 s（单位：千米）与平均耗油量 a（单位：升/千米）之间是反比例函数关系 $s=\frac{k}{a}$（k 是常数，$k\neq0$）. 已知某轿车油箱注满油后，以平均每千米耗油 0.1 升的速度行驶，可行驶 700 千米.

（1）求该轿车可行驶的总路程 s 与平均耗油量 a 之间的函数表达式；

（2）当平均耗油量为 0.08 升/千米时，该轿车可以行驶多少千米？

导引：（1）将 $a=0.1$，$s=700$ 代入函数的表达式 $s=\frac{k}{a}$ 中即可求得 k 的值，从而确定表达式；

（2）将 $a=0.08$ 代入求得的函数表达式即可求得 s 的值.

▶解：（1）将 $a=0.1$，$s=700$ 代入反比例函数表达式 $s=\frac{k}{a}$ 中，得 $700=\frac{k}{0.1}$. 解得 $k=70$.

所以函数表达式为 $s=\frac{70}{a}$.

（2）将 $a=0.08$ 代入 $s=\frac{70}{a}$ 得，$s=\frac{70}{0.08}=875$，

故该轿车可以行驶 875 千米.

点方法

建立反比例函数模型解决实际问题，只需要知道一对变量的值；求出表达式后，已知一个变量的值可求另一个变量的值.

6. 某工人打算利用一根不锈钢钢条加工一个面积为 0.8 m^2 的长方形框架，假设框架的长与宽分别为 y m 与 x m.

（1）请写出 y 关于 x 的函数表达式，并判断变量 y 与 x 之间是什么函数关系.

（2）若想使框架的长是宽的 5 倍，已知这种不锈钢钢条每米 6 元钱，求加工这个框架共需花费多少钱.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 283 页）

基础巩固练

1. 下列函数中，能表示 y 是 x 的反比例函数的是（　　）

A. $y=\frac{x}{2}$　　B. $y=-\frac{2}{x}$

C. $y=\frac{1}{2-x}$　　D. $y=\frac{1}{x}-2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 下列函数中，是反比例函数，且比例系数 k 为$\frac{1}{2}$的是(　　)

A. $y=\frac{1}{2}x$　　B. $y=\frac{1}{2x}$

C. $y=\frac{2}{x}$　　D. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$

3. 如果 z 与 y 成反比例，y 与 x 成反比例，那么 z 与 x 的关系为(　　)

A. 正比例　　B. 反比例

C. 不成比例　　D. 无法判断

4. 下列问题中，两个变量间的函数关系式是反比例函数的是(　　)

A. 小颖每分钟可以制作 2 朵花，x 分钟可以制作 y 朵花

B. 体积为 10 cm^3 的长方体，高为 h cm，底面积为 S cm^2

C. 用一根长 50 cm 的铁丝弯成一个矩形，一边长为 x cm，面积为 S cm^2

D. 汽车油箱中共有油 50 升，设平均每天用油 5 升，x 天后油箱中剩下的油量为 y 升

5. 函数 $y=\frac{k}{x}$，当 $x=4$ 时，$y=5$. 则函数的表达式为_____；当 $x=-2$ 时，$y=$_____.

6. 已知 y 与 $2x+1$ 成反比例，当 $x=1$ 时，$y=4$，则 y 与 x 之间的函数关系式是_____.

7. 已知一菱形的面积为 12 cm^2，对角线长分别为 x cm 和 y cm，则 y 与 x 的函数关系式为_____.

8. 下列关系式中，y 是 x 的反比例函数吗？如果是，比例系数 k 是多少？

(1) $y=\frac{x}{15}$；(2) $y=\frac{2}{x-1}$；(3) $y=-\frac{\sqrt{3}}{x}$；

(4) $y=\frac{1}{x}-3$；(5) $y=\frac{\sqrt{2}+1}{x}$；(6) $y=\frac{-1}{2x}$.

能力提升练

9. 已知函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$，当 m 取何值时，y 是 x 的正比例函数？当 m 取何值时，y 是 x 的反比例函数？

10. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=4$；当 $x=2$ 时，$y=5$.

(1) 求 y 与 x 之间的函数表达式；

(2) 当 $x=4$ 时，求 y 的值.

思维拓展练

11. 某厂从 2014 年起开始投入资金改进技术，经技术改进后，某产品的生产成本不断降低，具体数据如下表：

年度	2014	2015	2016	2017
投入技改资金 x(万元)	2.5	3	4	4.5
产品成本 y(万元/件)	7.2	6	4.5	4

(1) 请你认真分析表中数据，从你所学习过的一次函数、反比例函数中确定哪种函数能表示其变化规律. 说明确定是这种函数而不是其他函数的理由，并求出它的表达式.

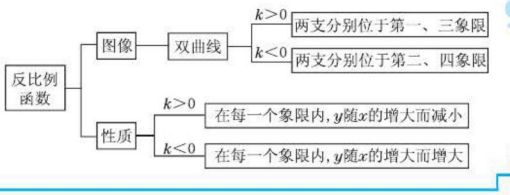
(2) 按照这种变化规律，若 2018 年已投入技改资金 5 万元，预计生产成本每件比 2017 年降低多少万元？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.2 反比例函数的图像与性质

热门话题
- 反比例函数的图像
- 反比例函数中比例系数 k 的几何意义

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 反比例函数的图像

点知识

1. **图像**：(1) 反比例函数的图像是双曲线；
   (2) 画反比例函数的图像要经过“列表、描点、连线”这三个步骤.

要点精析

(1) 双曲线各分支的两端是无限延伸的，画的时候要“出头”.
(2) 画双曲线时，取点越密集，画出的图像就越准确，但计算量会越大，故一般在原点的两侧各取 3 ~ 5 个点即可.
(3) 连线时，要按自变量从小到大（或从大到小）的顺序用平滑的曲线连接. 注意：两个分支不连接.

2. **图像的特点**：(1) 有两个分支，当 $k>0$ 时，函数图像在第一、三象限内；当 $k<0$ 时，函数图像在第二、四象限内.
   (2) 双曲线各分支的延伸部分有逐渐靠近坐标轴的趋势，但永不与坐标轴相交.
3. **拓展**：双曲线既是一个轴对称图形，又是一个中心对称图形. 对称轴有两条，分别是直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$；对称中心是坐标原点，任何一条经过原点的直线只要与双曲线有两个交点，则这两个交点关于原点对称.
   注意：一条曲线不能代表一个反比例函数的图像，它只是反比例函数图像的一个分支.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：画函数图像

例 1 画出反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图像.

导引：按照画函数图像的步骤进行.

解：列表：

x	…	-6	-4	-3	-2	2	3	4	6	…
$y=\frac{12}{x}$	…	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	…

描点、连线，$y=\frac{12}{x}$ 的图像如图 11.2-1 所示.

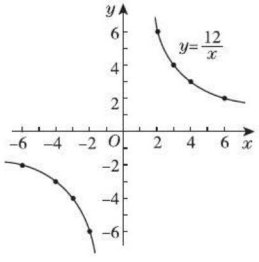


图 11.2-1

举一反三训练

（答案见 284 页）

1. 在同一直角坐标系中，画出反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 和 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨技巧

列表时，自变量的值可以以 0 为中心，在 0 的两边选择绝对值相等而符号相反的值，既可简化运算又便于描点；在列表、描点时要尽量多取一些数据，多描一些点，方便连线.

考查角度 2：判断点在图像上

例 2　［中考·雅安］平面直角坐标系中，点 P,Q 在同一反比例函数图像上的是(　　)

A. $P(-2,-3),Q(3,-2)$　　B. $P(2,-3),Q(3,2)$

C. $P(2,3),Q\left(-4,-\frac{3}{2}\right)$　　D. $P(-2,3),Q(-3,-2)$

导引：根据两点的横纵坐标的乘积是否相等即可得到结论.

A. $(-2)\times(-3)\neq 3\times(-2)$，故点 P,Q 不在同一反比例函数图像上；

B. $2\times(-3)\neq 3\times 2$，故点 P,Q 不在同一反比例函数图像上；

C. $2\times 3=(-4)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$，故点 P,Q 在同一反比例函数图像上；

D. $(-2)\times 3\neq(-3)\times(-2)$，故点 P,Q 不在同一反比例函数图像上. 故选 C.

▶答案：C

点方法

由反比例函数表达式的变形式 $xy=k$ 可知，只要是同一反比例函数图像上的点，横、纵坐标的乘积为定值 k. 因此本例中判断两点是否在同一函数图像上只需看两点的横、纵坐标的积是否相等即可.

2. ［中考·哈尔滨］点 $(2,-4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，则下列各点在此函数图像上的是(　　)

A. $(2,4)$

B. $(-1,-8)$

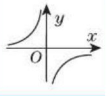
C. $(-2,-4)$

D. $(4,-2)$

知识点 2　反比例函数的性质

点知识

1. **性质**：

反比例函数表达式	图像	位置	增减性
$y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$		第一、三象限	在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小
$y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$		第二、四象限	在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大


反比例函数的性质

2. 反比例函数图像的两个分支关于原点对称.

3. **易错警示**：反比例函数的增减性取决于 k 的正负，反之亦成立；在运用增减性时，一定要注意在同一象限.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度1：根据反比例函数的增减性确定待定系数的取值范围

例3 反比例函数 $y=\frac{k-3}{x}$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k<3$　　B. $k\leqslant 3$

C. $k>3$　　D. $k\geqslant 3$

导引：∵ 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∴ 图像在第四象限.

∴ $k-3<0$. ∴ $k<3$.

▶答案：A

点方法

反比例函数的增减性由比例系数的正负决定，反之亦成立，但一定要注意在同一象限，本题“$x>0$”就是阐明在同一象限.

考查角度2：根据反比例函数的增减性比较大小

例4 一次函数 $y=ax+\frac{1}{2}$ 的图像过一、二、四象限，点 $A(x_1,-2)$、$B(x_2,4)$、$C(x_3,5)$ 为反比例函数 $y=\frac{a-1}{x}$ 图像上的三点，则下列结论正确的是（　　）

A. $x_1>x_2>x_3$　　B. $x_1>x_3>x_2$

C. $x_3>x_1>x_2$　　D. $x_2>x_3>x_1$

导引：根据一次函数 $y=ax+\frac{1}{2}$ 的图像过一、二、四象限推知 $a<0$，所以 $a-1<0$，则反比例函数 $y=\frac{a-1}{x}$ 的图像位于第二、四象限，然后将点 A、B、C 在反比例函数图像上大致标出，根据图像直接得出 $x_1>x_3>x_2$. 具体解题过程如下：

∵ 一次函数 $y=ax+\frac{1}{2}$ 的图像过一、二、四象限，

∴ $a<0$，

∴ $a-1<0$，

∴ 反比例函数 $y=\frac{a-1}{x}$ 的图像位于第二、四象限，其大致图像如图 11.2-2 所示，根据图像知，$x_1>x_3>x_2$，故选 B.

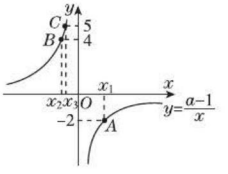


图 11.2-2

▶答案：B

3. 若双曲线 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图像在每个象限内 y 随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k<1$　　B. $k>1$

C. $0<k<1$　　D. $k\leqslant 1$

4. ［中考 · 遂宁］若点 $A(-6,y_1)$，$B(-2,y_2)$，$C(3,y_3)$ 在反比例函数 $y=\frac{a^2+1}{x}$（a 为常数）的图像上，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为（　　）

A. $y_1>y_2>y_3$

B. $y_2>y_3>y_1$

C. $y_3>y_2>y_1$

D. $y_3>y_1>y_2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

根据反比例函数的增减性比较大小的方法：利用反比例函数的增减性来比较自变量的值（或函数值）的大小时，如果给定的两点或几点在同一象限的分支上时，可以直接利用反比例函数的性质解答；如果给定的两点或几点不在同一象限的分支上时，则不能利用反比例函数的性质比较，需要根据函数的图像和点的位置用**数形结合思想**来比较或利用**特殊值法**进行比较.

知识点 3　反比例函数中比例系数 k 的几何意义

点知识

1. **双曲线的几何特性：**过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点向两坐标轴作垂线，与两坐标轴围成的矩形面积等于 $|k|$，连接该点与原点，还可得出两个直角三角形，这两个直角三角形的面积都等于 $\frac{|k|}{2}$.

要点精析

如图 11.2-3，点 P 是双曲线上任意一点，$PA\perp x$ 轴于点 A，$PB\perp y$ 轴于点 B，设点 P 的坐标为 (x,y)，则 $PA=|y|$，$PB=|x|$.

$S_{矩形PAOB}=PB\cdot PA=|x|\cdot|y|=|xy|$.

$\because y=\frac{k}{x}$，$\therefore xy=k$，$\therefore S_{矩形PAOB}=|k|$.

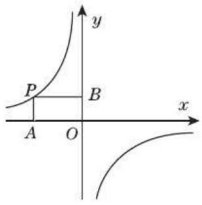


图 11.2-3

比例系数 k 的几何意义

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上任何一点的坐标都可以设为 $\left(x,\frac{k}{x}\right)$.

拓考向

考查角度 1：根据图形的面积确定 k 的值

例 5　［中考·阜新］如图 11.2-4，在平面直角坐标系中，点 P 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 图像上的一点，分别过点 P 作 $PA\perp x$ 轴于点 A，$PB\perp y$ 轴于点 B，若四边形 $PAOB$ 的面积为 6，则 k 的值是(　　)

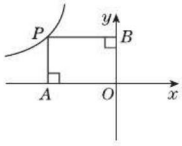


图 11.2-4

A. 12　　B. −12　　C. 6　　D. −6

导引：根据反比例函数的比例系数 k 的几何意义得到 $|k|=6$，然后去绝对值符号得到满足条件的 k 的值.

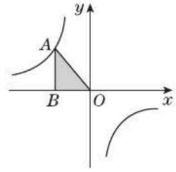
$\because PA\perp x$ 轴于点 A，$PB\perp y$ 轴于点 B，

$\therefore$ 四边形 $PAOB$ 的面积 $=|k|$，即 $|k|=6$，

$\because k<0$，$\therefore k=-6$. 故选 D.

▶答案：D

5. ［中考·永州］如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的图像经过点 A，过 A 点作 $AB\perp x$ 轴，垂足为 B. 若 $\triangle AOB$ 的面积为 1，则 $k=$ _____.



（第 5 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

根据图形面积求表达式的方法：根据反比例函数中比例系数 k 的几何意义列关于 k 的方程，再解方程，但注意确定 k 的值时要考虑函数图像所在的象限.

考查角度 2：根据反比例函数中比例系数 k 的几何意义求几何图形的面积

例 6 如图 11.2-5，点 A 在双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 上，过点 A 作 $AB\parallel x$ 轴交双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 于点 B，作 $AC\parallel y$ 轴交双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 于点 C，连接 OB，OC，求四边形 $OBAC$ 的面积.

导引：如图 11.2-5，根据反比例函数可以得到 $\triangle BOD$、$\triangle COE$、矩形 $AEOD$ 的面积，从而可以得到四边形 $OBAC$ 的面积.

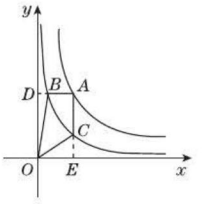


图 11.2-5

▶解：如图 11.2-5，延长 AB 交 y 轴于点 D，延长 AC 交 x 轴于点 E，

∵ 点 A 在双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 上，过点 A 作 $AB\parallel x$ 轴交双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 于点 B，作 $AC\parallel y$ 轴交双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 于点 C，

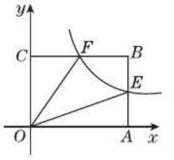
∴ $\triangle BOD$ 的面积是 $\frac{1}{2}$，$\triangle COE$ 的面积是 $\frac{1}{2}$，矩形 $AEOD$ 的面积是 3，

∴ 四边形 $OBAC$ 的面积为：$3-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2$.

点方法

根据反比例函数中比例系数 k 的几何意义求面积的方法：通过图形的割补将所求图形面积转化为易计算的图形面积的和或差的形式，再分别计算各个部分的面积.

6. 如图，在平面直角坐标系中，函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图像经过矩形 $OABC$ 的边 AB、BC 的中点 E、F，则四边形 $OEBF$ 的面积为_____.



（第 6 题图）

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：反比例函数图像与系数的关系

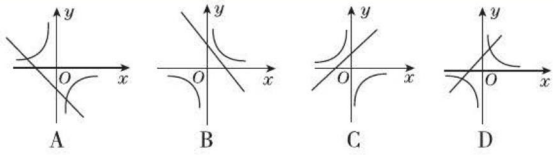
例 7 已知一次函数 $y=mx+n$ 与反比例函数 $y=\frac{n-m}{x}$，其中 m、n 为常数，且 $mn<0$，则它们在同一坐标系中的图像可能是（　　）

举一反三训练

☞（答案见 284 页）

7. 在同一直角坐标系中，函数 $y=kx+1$ 与 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图像大致是（　　）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



导引：根据一次函数的图像确定 m、n 的正负，看是否符合 $mn<0$，若符合，再确定 $m-n$ 的符号，即可确定双曲线的位置.

A. 由一次函数图像过二、四象限，得 $m<0$，一次函数图像与 y 轴交于负半轴，则 $n<0$，此时 $mn>0$，不合题意，故本选项错误；

B. 由一次函数图像过二、四象限，得 $m<0$，一次函数图像与 y 轴交于正半轴，则 $n>0$，满足 $mn<0$，

$\because m<0, n>0, \therefore n-m>0$，

$\therefore$ 反比例函数 $y=\dfrac{n-m}{x}$ 的图像在一、三象限，故本选项正确；

C. 由一次函数图像过一、三象限，得 $m>0$，一次函数图像与 y 轴交于正半轴，则 $n>0$，此时，$mn>0$，不合题意，故本选项错误；

D. 由一次函数图像过一、三象限，得 $m>0$，一次函数图像与 y 轴交于正半轴，则 $n>0$，

此时，$mn>0$，不合题意，故本选项错误. 故选 B.　▶答案：B

点方法

解答这类图像辨析题的一般思路是**排除法**和**分类讨论思想**.

拔尖角度 2：反比例函数中的不等问题

例 8 如图 11.2-6，一次函数 $y_1=k_1x+b$ 的图像和反比例函数 $y_2=\dfrac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(1,2)$，$B(-2,-1)$ 两点，若 $y_1\geqslant y_2$，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant 1$　　B. $x\leqslant -2$

C. $-2\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 1$　　D. $x\leqslant -2$ 或 $0<x\leqslant 1$

导引：$y_1\geqslant y_2$，在图像上表现为直线不在双曲线下方所对应的自变量的取值范围，可将坐标平面分割成若干个区域，分析每个区域两图像的位置关系做出判断.

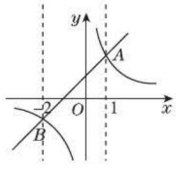
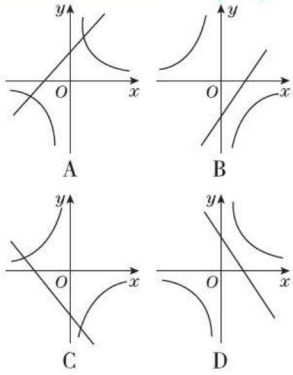
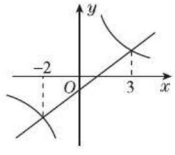


图 11.2-6

如图 11.2-6，过点 A、B 分别作两条垂直于 x 轴的直线，连同 y 轴，三条直线将坐标平面分割成四个部分，观察图像可知：$y_1\geqslant y_2$ 所对应的 x 的取值范围是 $x\geqslant 1$ 或 $-2\leqslant x<0$，故选 C.　▶答案：C



8. 一次函数 $y_1=kx+b$ 和反比例函数 $y_2=\dfrac{m}{x}$ 的图像如图，则使 $y_1>y_2$ 的 x 的范围是(　　)



(第 8 题图)

A. $x<-2$ 或 $x>3$

B. $-2<x<0$ 或 $x>3$

C. $x<-2$ 或 $0<x<3$

D. $-2<x<3$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

解答这类函数不等问题的有效方法就是过关键点作垂直于 y 轴的直线，将坐标平面分割成若干个部分，分析每一部分图像的位置关系，从而找出相应范围.

拔尖角度 3：根据反比例函数对称性求值（拓展点）

例 9 如图 11.2-7 所示，直线 $y=kx(k<0)$ 与双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，则 $3x_1y_2-8x_2y_1$ 的值为（　　）

A. -5　　B. -10　　C. 5　　D. 10

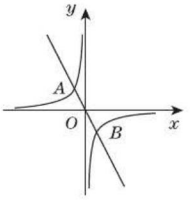


图 11.2-7

导引：当正比例函数图像和反比例函数图像相交时，交点关于原点对称，而关于原点对称的两点的坐标分别为 (x,y) 和 $(-x,-y)$，

所以 $x_1=-x_2$，$y_1=-y_2$，

又因为 $x_2y_2=-2$，

所以 $3x_1y_2-8x_2y_1=3\cdot(-x_2)\cdot y_2-8x_2\cdot(-y_2)=5x_2y_2=5\times(-2)=-10$. 故选 B.

▶答案：B

拔技巧

反比例函数和正比例函数的图像都关于原点对称，当反比例函数图像和正比例函数图像相交时，其交点关于原点对称，因此这两交点坐标分别为 (x,y) 和 $(-x,-y)$.

拔尖角度 4：整体求值

例 10 若函数 $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=x-2$ 的图像的一个交点坐标为 (a,b)，求 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 的值.

导引：根据函数表达式，可得 $b=\frac{1}{a}$，$b=a-2$，在对所求代数式通分的基础上整体代入.

▶解：∵ 函数 $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=x-2$ 的图像的一个交点坐标为 (a,b)，

$\therefore b=\frac{1}{a}$，$b=a-2$，$\therefore ab=1$，$b-a=-2$，

$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{-2}{1}=-2$.

点方法

这类问题中直接计算出字母的值比较困难，可根据点在图像上求出代数式的值，再整体代入求值.

9. 若直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{2}{x}$ 的交点为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则 $2x_1y_2-5x_2y_1$ 的值为_____.

10. ［中考 · 连云港］设函数 $y=\frac{3}{x}$ 与 $y=-2x-6$ 的图像的交点坐标为 (a,b)，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 5：一次函数与反比例函数综合题

例 11 已知：如图 11.2-8，一次函数 $y=x+b$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像交于点 $A(1,4)$、点 $B(-4,n)$，与 x 轴交于点 C.

(1)求反比例函数和一次函数的表达式；

(2)求 $\triangle OAB$ 的面积；

(3)直接写出一次函数值大于反比例函数值时自变量 x 的取值范围.

导引：(1)把点 A 的坐标代入反比例函数表达式求出 k，把点 A 的坐标代入一次函数表达式求出 b 即可；

(2)求出直线 AB 与 x 轴的交点 C 的坐标，求出 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 的面积再相加即可；

(3)根据 A、B 的坐标结合图像即可得出答案.

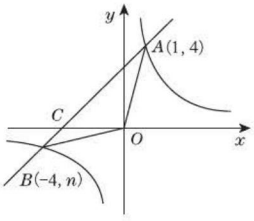


图 11.2-8

▶解：(1)把点 $A(1,4)$ 的坐标分别代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，一次函数 $y=x+b$，

得 $\frac{k}{1}=4$，$1+b=4$，解得 $k=4$，$b=3$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$，

一次函数的表达式是 $y=x+3$.

(2)当 $x=-4$ 时，$y=\frac{4}{-4}=-1$，$\therefore B(-4,-1)$.

当 $y=0$ 时，$x+3=0$，$\therefore x=-3$，$\therefore C(-3,0)$.

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{15}{2}$.

(3)$\because B(-4,-1)$，$A(1,4)$，

$\therefore$ 根据图像可知：当 $x>1$ 或 $-4<x<0$ 时，

一次函数值大于反比例函数值.

点方法

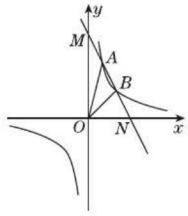
求直线与双曲线的交点和原点形成的三角形面积的方法：求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积时，一般可采用**割补法**将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解，因为三角形一边在坐标轴上时，这边的长易求，这边上的高则为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值，因此求面积的实质就是求点的坐标.

11. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图像交于 $A(m,4)$，$B(2,n)$ 两点，与坐标轴分别交于 M、N 两点.

(1)求一次函数的表达式；

(2)根据图像直接写出 $kx+b-\frac{4}{x}>0$ 中 x 的取值范围；

(3)求 $\triangle AOB$ 的面积.



(第 11 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 6：反比例函数与几何图形综合

例 12 已知如图 11.2-9，点 $(1,3)$ 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上，矩形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上，E 是对角线 BD 的中点，函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像又经过 A、E 两点，点 E 的横坐标为 m，解答下列问题：

（1）求 k 的值；

（2）求点 A 的坐标；（用含 m 的代数式表示）

（3）当 $\angle ABD=45°$ 时，求 m 的值.

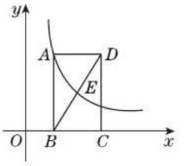


图 11.2-9

导引：（1）把 $(1,3)$ 代入反比例函数表达式即可求出 k；（2）作 $EG\perp BC$，易知 $BG=CG$，求出 AB 即可求出 A 的纵坐标，代入反比例函数表达式即可求出 A 的横坐标；（3）当 $\angle ABD=45°$ 时，$AB=AD$.

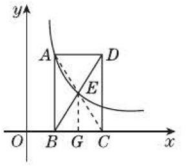


图 11.2-10

▶解：（1）∵ 函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像过点 $(1,3)$，

∴ 把 $(1,3)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，得 $k=3$.

（2）如图 11.2-10，连接 AC，过 E 作 $EG\perp BC$ 交 BC 于点 G.

∵ 点 E 的横坐标为 m，且点 E 在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上，

∴ 点 E 的纵坐标是 $y=\frac{3}{m}$，

∵ E 为 BD 的中点，∴ E 为 AC 与 BD 的交点，

由矩形的性质得 $EB=EC$，

∴ $BG=GC=\frac{1}{2}BC$，∴ $AB=2EG=\frac{6}{m}$，即 A 点的纵坐标是 $\frac{6}{m}$，

代入 $y=\frac{3}{x}$ 得 A 的横坐标是 $\frac{1}{2}m$，∴ $A\left(\frac{1}{2}m,\frac{6}{m}\right)$.

（3）当 $\angle ABD=45°$ 时，$AB=AD$，∵ A 的横坐标为 $\frac{1}{2}m$，E 的横坐标为 m，

∴ $BG=\frac{1}{2}m$，∴ $BC=m$，∴ $AD=m$.

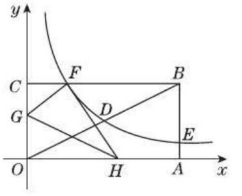
则有 $\frac{6}{m}=m$，即 $m^2=6$，解得 $m_1=\sqrt{6}$，$m_2=-\sqrt{6}$（舍去），

∴ $m=\sqrt{6}$.

点方法

在反比例函数图像上，任何一个点的横坐标与纵坐标的乘积等于 k，则横纵坐标相互都可以用含 k 的代数式表示.

12. ［模拟 · 河南］如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A、C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 D 为对角线 OB 的中点，点 $E(4,n)$ 在边 AB 上，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 在第一象限内的图像经过点 D、E，且 D 点的横坐标是它的纵坐标的 2 倍.



（第 12 题图）

（1）求边 AB 的长；

（2）求反比例函数的表达式和 n 的值；

（3）若反比例函数的图像与矩形的边 BC 交于点 F，将矩形折叠，使点 O 与点 F 重合，折痕分别与 x 轴、y 轴正半轴交于点 H、G，求线段 OG 的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

反比例函数中比例系数 k 的妙用

反比例函数中比例系数 k 对反比例函数起决定性作用，例如：①确定了 k 的值就确定了反比例函数的表达式；②k 的正负性决定双曲线所在的象限；③$|k|$ 越大双曲线离坐标原点越远. 反比例函数的系数 k 还有其他几种妙用，在中考中经常考查.

(1) 比例系数 k 代表两个变量的乘积的定值；反之，若两个变量的乘积是定值，也可断定两个变量是反比例函数关系. 例如：

①［**中考 · 无锡**］若点 $A(3,-4)$、$B(-2,m)$ 在同一个反比例函数的图像上，则 m 的值为(　　)

A. 6　　B. -6　　C. 12　　D. -12

点拨：利用 k 的不变性求解.

②［**中考 · 武汉节选**］科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节，科学家把一种珍奇的植物分别放在不同温度的环境中，经过一天后，测试出这种植物高度的增长情况(如下表)：

温度 x/℃	…	-4	-2	0	2	4	4.5	…
植物每天高度增长量 y/mm	…	41	49	49	41	25	19.75	…

由这些数据，科学家推测出植物每天高度增长量 y 是温度 x 的函数，且这种函数是反比例函数、一次函数和二次函数中的一种. 请你选择一种适当的函数，求出它的函数关系式，并简要说明不选择另外两种函数的理由.

点拨：任取两组对应值，观察乘积是否相等即可判断是否是反比例函数.

(2) 顶点在反比例函数图像上的图形的面积与 k 之间有密切的关系. 如图 11.2-11，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点 $P(x,y)$ 分别作 x 轴、y 轴的垂线段 PM，PN，与两坐标轴围成的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$. $\because y=\frac{k}{x}$，$\therefore xy=k$，$\therefore S=|k|$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线，与两坐标轴围成的矩形面积为 $|k|$；过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点 E 作 EF 垂直于一坐标轴，垂足为 F，连接 EO，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$.

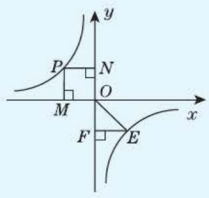


图 11.2-11

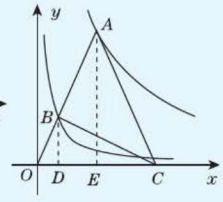


图 11.2-12

①在解决反比例函数图像中图形的面积问题时，通常把它转化为顶点在图像上的三角形或矩形的面积. 例如：

［**中考 · 宁波**］如图 11.2-12，点 A 为函数 $y=\frac{9}{x}(x>0)$ 的图像上一点，连接 OA，交函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图像于点 B，点 C 是 x 轴上一点，且 $AO=AC$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

点拨：如图 11.2-12，分别过点 A，B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 E，D，巧妙利用 k 的几何意义解决.

②已知某个图形的面积求 k 的值时，将这个图形的面积转化为顶点在图像上的几个三角形或矩形的面积之和(差)，然后用含 k 的代数式表示出面积，建立方程求出 k 的值. 例如：

［**中考 · 深圳改编**］如图 11.2-13，Rt$\triangle ABC$ 的直角边 BC 在 x 轴负半轴上，斜边 AC 上的中线 BD 的反向延长线交 y 轴正半轴于点 E，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图像经过点 A，若 $S_{\triangle BEC}=8$，则 k 等于_____.

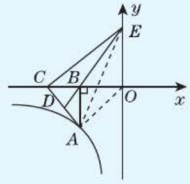


图 11.2-13

点拨：如图 11.2-13，连接 AE，AO，将 $\triangle BEC$ 的面积转化为 $\triangle AOB$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 285 页）

基础巩固练

1. 已知反比例函数 $y=\frac{2}{x}$，下列结论中，不正确的是（　　）

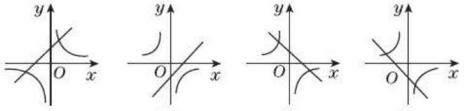
A. 图像必经过点（1，2）

B. y 随 x 的增大而减小

C. 图像在第一、三象限内

D. 若 $x>1$，则 $0<y<2$

2. 一次函数 $y=kx-k$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在同一直角坐标系内的图像大致是（　　）



A　　B　　C　　D

3. 若双曲线 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图像在每个象限内 y 随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是（　　）

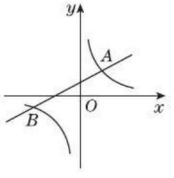
A. $k<1$　　B. $k>1$

C. $0<k<1$　　D. $k\leqslant 1$

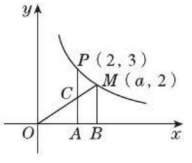
4. 如图，一次函数 $y_1=k_1x+2$ 与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(m,4)$ 和 $B(-8,-2)$ 两点，若 $y_1>y_2$，则 x 的取值范围是（　　）

A. $-8<x<4$　　B. $x<-8$ 或 $0<x<4$

C. $x<-8$ 或 $x>4$　　D. $x>4$ 或 $-8<x<0$



（第 4 题图）



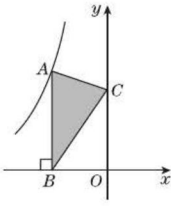
（第 5 题图）

5. 如图，在第一象限内，点 $P(2,3)$，$M(a,2)$ 是双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 上的两点，$PA\perp x$ 轴于点 A，$MB\perp x$ 轴于点 B，PA 与 OM 交于点 C，则 $\triangle OAC$ 的面积为_____.

6. ［模拟 · 东台］若点 $A(-1,a)$ 在反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图像上，则 a 的值为_____.

7. 在反比例函数 $y=\frac{1+2m}{x}$ 的图像上有两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，当 $x_1<0<x_2$ 时，有 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围是_____.

8. 如图，点 A 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图像上的一点，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴，垂足为 B，点 C 为 y 轴上的一点，连接 AC、BC，若 $\triangle ABC$ 的面积为 3，则 k 的值是_____.

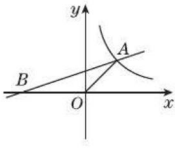


（第 8 题图）

9. ［模拟 · 姜堰区］在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，一次函数 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像交于点 $A(1,m)$，交 x 轴于点 B.

（1）求 k 的值；

（2）求 $\triangle AOB$ 的面积.



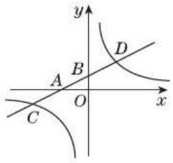
（第 9 题图）

10. 如图，一次函数 $y_1=\frac{1}{2}x+1$ 的图像与 x 轴，y 轴分别相交于 A，B 两点，与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ 的图像相交于 C，D 两点，且 C，D 的横坐标分别为 -4，2.

（1）求点 A 的坐标及 k 的值；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

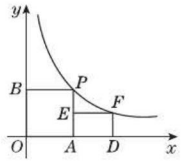
(2)请直接写出当 $y_2 < y_1 < 0$ 时，x 的取值范围.



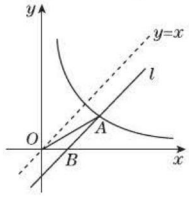
(第 10 题图)

能力提升练

11. 如图，正方形 $OAPB$，矩形 $ADFE$ 的顶点 A，D，B 在坐标轴上，O 为坐标原点，点 E 是 AP 的中点，点 P，F 在函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图像上，则点 F 的坐标是_____.



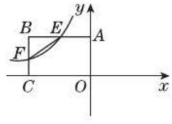
(第 11 题图)



(第 12 题图)

12. 如图，将直线 $y=x$ 向下平移 b 个单位长度后得到直线 l，l 与反比例函数 $y=\frac{5}{x}(x>0)$ 的图像相交于点 A，与 x 轴相交于点 B，则 OA^2-OB^2 的值为_____.

13. 如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x<0)$ 的图像经过矩形 $OABC$ 的边 AB 的中点 E，并与矩形的另一边 BC 交于点 F，若 $S_{\triangle BEF}=1$，则 $k=$_____.

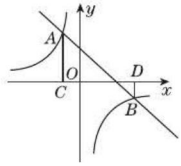


(第 13 题图)

14. [中考·柳州] 如图，直线 $y=-x+2$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像交于 $A(-1,m)$，$B(n,-1)$ 两点，过 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，过 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D，

(1)求 m，n 的值及反比例函数的表达式；

(2)请问：在直线 $y=-x+2$ 上是否存在点 P，使得 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBD}$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(第 14 题图)

思维拓展练

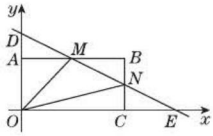
15. 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 A、C 在坐标轴上，点 $B(4,2)$；过点 $D(0,3)$ 和 $E(6,0)$ 的直线分别与 AB、BC 交于点 M、N.

(1)求直线 DE 的函数表达式和点 M、N 的坐标；

(2)若函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0,k$ 为常数$)$ 的图像经过点 M，求该函数的表达式，并判定点 N 是否在该函数图像上；

(3)求 $\triangle OMN$ 的面积 S；

(4)若函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0,k$ 为常数$)$ 的图像与 $\triangle BMN$ 没有交点，请求出 k 的取值范围.



(第 15 题图)

我的错题笔记

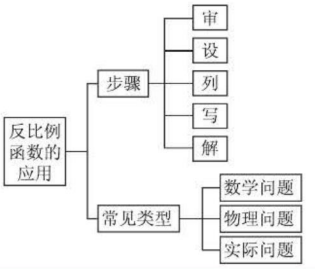
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.3 用反比例函数解决问题

热门话题

- 建立反比例函数模型解决实际问题
- 利用几何图形建立反比例函数关系
- 物理中的反比例函数

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 建立反比例函数模型解决实际问题

点知识

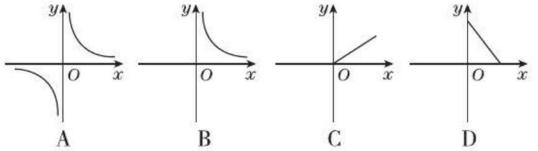
1. **意义**：利用反比例函数解决实际问题要建立数学模型，即把实际问题转化为反比例函数问题，利用题中存在的公式、隐含的规律等相等关系确定函数表达式，再利用函数的图像及性质去研究解决问题.
2. **利用反比例函数解决实际问题的一般步骤**：
   (1) 审题，确定变量间的函数关系；
   (2) 设出含待定系数的函数表达式；
   (3) 把实际问题中的一些数据与点的坐标联系起来；
   (4) 用待定系数法求出函数的表达式；
   (5) 利用反比例函数的图像及性质去分析解决问题.
3. **易错警示**：
   (1) 在实际问题中，自变量的取值范围往往会受到实际条件的限制，函数图像通常在第一象限，有时会是第一象限中的一部分；
   (2) 要注意函数最值（取值范围）受自变量取值范围的影响；
   (3) 两坐标轴上的单位长度一定要根据实际问题来确定，而且两坐标轴上的单位长度可以不一致.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：根据实际问题选择合适的函数图像

例 1 已知矩形的面积为 10，它的一组邻边长分别为 x，y，则 y 与 x 之间的函数关系用图像表示大致是（　　）



导引：根据题意有：$xy=10$，故 y 与 x 之间的函数关系为反比例函数，且根据 x、y 的实际意义知 x、y 应大于 0，其图像应在第一象限.

举一反三训练

☞（答案见 286 页）

1. 一台印刷机每年可印刷的书本数量 y（万册）与它的使用时间 x（年）成反比例关系，当 $x=2$ 时，$y=10$，则 y 与 x 的函数图像大致是（　　）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 矩形的面积为 10，它的一组邻边长分别为 x，y，

∴ $xy=10$，

∴ $y=\frac{10}{x}(x>0)$. 故选 B.　▶答案：B

点拨方法

本题考查根据几何图形的性质确定函数的图像. 要能根据几何图形和图形上的数据分析得出所对应的函数的类型和所需要的条件，结合实际意义画出正确的图像，同时要注意自变量的取值范围.

考查角度 2：根据实际问题列函数表达式解决问题

例 2 去学校食堂就餐，经常会在一个买菜窗口前等待，经调查发现，学生的舒适度指数 y 与等待时间 x（分钟）之间满足反比例函数关系，如下表：

等待时间 x（分钟）	1	2	5	10	20
舒适度指数 y	100	50	20	10	5

已知学生等待时间不超过 30 分钟.

（1）求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围.

（2）若等待时间为 8 分钟，求舒适度指数 y 的值；

（3）舒适度指数不低于 10 时，学生才会感到舒适. 请说明，作为食堂的管理员，让每个在窗口买菜的学生最多等待多长时间？

导引：（1）观察表格发现：$1\times100=2\times50=5\times20=\cdots$，从而确定函数关系式为 $y=\frac{100}{x}$.

（2）已知 $x=8$，代入函数关系式求得 y.

（3）已知 $y\geqslant10$，可以得到关于 x 的不等式，求出 x 的范围.

▶解：（1）观察表格发现：$1\times100=2\times50=5\times20=\cdots$，

∴ $xy=100$，

∴ $y=\frac{100}{x}(0<x\leqslant30)$.

（2）当 $x=8$ 时，舒适度指数 $y=\frac{100}{8}=12.5$.

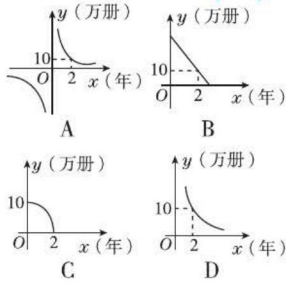
（3）舒适度指数不低于 10，即 $y\geqslant10$，∴ $\frac{100}{x}\geqslant10$，

∴ $x\leqslant10$，又∵ $0<x\leqslant30$，∴ $0<x\leqslant10$.

因此作为食堂的管理员，让每个在窗口买菜的学生最多等待 10 分钟.

点拨方法

本题考查了反比例函数的应用，现实生活中存在大量成反比例函数的两个变量，解答该类问题的关键是根据函数关系及题目的已知条件求解，要注意自变量和函数代表的实际意义.



2. 水果生产基地要将 240 吨的某种水果运往某地销售，某汽车运送公司承办了这次运送任务.

（1）运输公司平均每天运送水果 x 吨，需要 y 天完成运送任务，写出 y 关于 x 的函数关系式；

（2）这个公司计划派出 6 辆卡车运送，每天共运送 60 吨，则需要多少天完成全部运送任务？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度 3：根据反比例函数图像解决生活问题

例 3 一辆汽车匀速通过某段公路，所需时间 t(h)与行驶速度 v(km/h)满足函数关系：$t=\frac{k}{v}$，其图像为如图 11.3-1 所示的一段曲线，且端点为 $A(40,1)$ 和 $B(m,0.5)$.

(1)求 k 和 m 的值；

(2)若行驶速度不得超过 60 km/h，则汽车通过该路段最少需要多长时间？

导引：(1)由 A 点的坐标可以求出反比例函数的表达式，再将 B 点的坐标代入反比例函数表达式求出 m 的值；(2)图像在第一象限，t 随 v 的增大而减小.

▶解：(1)将 $(40,1)$ 代入 $t=\frac{k}{v}$，得 $1=\frac{k}{40}$，解得 $k=40$.

所以函数表达式为 $t=\frac{40}{v}$.

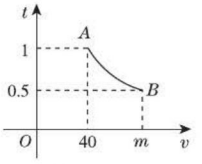


图 11.3-1

将 $(m,0.5)$ 代入 $t=\frac{k}{v}$

得 $0.5=\frac{40}{m}$，解得 $m=80$. 所以 $k=40$，$m=80$.

(2)令 $v=60$，得 $t=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$.

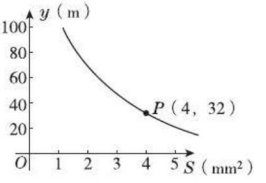
结合函数图像可知，汽车通过该路段最少需要 $\frac{2}{3}$ h.

拨技巧

实际问题中的反比例函数图像一般都在第一象限，所以函数值都随自变量的增大而减小. 当需要确定其中一个变量的最值或取值范围时，可以根据另一个变量的最值或取值范围来确定.

举一反三训练

3. 你吃过拉面吗？实际上做拉面的过程中就渗透着数学知识：一定体积的面团做成拉面，面条的总长度 y(m)是面条的粗细(横截面积) S(mm^2)的反比例函数，其图像如图所示.



(第 3 题图)

(1)写出 y 与 S 的函数关系式：_____.

(2)当面条粗 1.6 mm^2 时，面条总长度是_____m.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：利用表格信息选择函数关系解决实际问题

例 4 某商场出售一批进价为 2 元的贺卡，在市场销售中发现，此商品的日销售单价 x(单位：元)与日销售量 y(单位：张)之间有如下关系：

日销售单价 x/元	3	4	5	6
日销售量 y/张	20	15	12	10

(1)根据表中数据在平面直角坐标系中描出实数对 (x,y) 的对应点；

举一反三训练

(答案见 286 页)

4. 为了筹款支持希望工程，某“爱心”小组决定利用暑假销售一批进价为 10 元的小商品，为寻求合适的销售价格，他们进行了试销，试销情况如下表：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)确定 y 与 x 之间的函数关系式;

(3)设销售此贺卡的日销售利润为 w 元,试求 w 与 x 之间的函数关系式. 若物价局规定该贺卡售价最高不超过 10 元/张,请你求出日销售单价定为多少元时,才能获得最大日销售利润.

导引:(1)根据表格中的数据直接描点即可;(2)要确定 y 与 x 之间的函数关系式,通过观察表中数据,可以发现 x 的值与对应的 y 值的乘积是相同的,都是 60,所以可知 y 与 x 成反比例,用待定系数法求解即可;(3)根据日销售利润 = (日销售单价 − 进价) × 日销售量,可以确定 w 与 x 的函数关系式,然后结合售价最高不超过 10 元/张,求出获得最大日销售利润时的日销售单价.

▶解:(1)如图 11.3-2 所示.

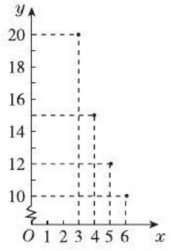


图 11.3-2

(2)设函数关系式为 $y=\frac{k}{x}$($k\neq0$ 且 k 为常数),

把 $x=3, y=20$ 代入 $y=\frac{k}{x}$,得 $k=60$,

将其他三组数据分别代入,均成立.

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{60}{x}$.

(3)$w=(x-2)y=60-\frac{120}{x}(0<x\leqslant10)$.

∵ 当 $x>0$ 时,x 越大,$\frac{120}{x}$就越小,∴ 当 $x>0$ 时,w 随 x 的增大而增大,

∴ 当 $x=10$ 时,w 最大,$w_{最大}=48$.

∴ 日销售单价定为 10 元时,可获得最大日销售利润,为 48 元.

点方法

(1)由表格中的数据确定两个变量之间的函数关系是否为反比例函数关系,其思路是观察对应数据的乘积是否相等,如果乘积相等,则是反比例函数,否则不是反比例函数.

(2)利用表格中的一组数据求出反比例函数的表达式后,还要将其他各组数据代入进行验证.

拔尖角度 2:用反比例函数模型解决物理问题

例 5 某校科技小组进行野外考察,途中遇到一片十几米宽的烂泥湿地. 为了安全、迅速地通过这片湿地,他们沿着前进路线铺了若干块木板,构筑成一条临时通道. 木板对地面的压强 p(单

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	…
日销售单价 x(元)	20	30	40	50	…
日销售量 y(个)	30	20	15	12	…

(1)若 y 是 x 的反比例函数,请求出这个函数关系式;

(2)若该小组计划每天的销售利润为 450 元,则其单价应为多少元?

5. 某气球内充满了一定质量的气体,当温度不变时,气球内气体的气压

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

位：Pa）是木板面积 S（单位：m^2）的反比例函数，其图像如图 11.3-3.

（1）请写出该函数表达式和自变量的取值范围.

（2）当木板面积为 0.2 m^2 时，压强是多少？

（3）如果要求压强不超过 6 000 Pa，木板面积至少要多大？

导引：由木板对地面的压强是木板面积的反比例函数及图像上点的坐标的信息求函数的表达式.

▶解：（1）设函数表达式为 $p=\frac{k}{S}(S>0,k\neq0)$.

将点（1.5，400）的坐标代入上式，得 $400=\frac{k}{1.5}$，解得 $k=600$，

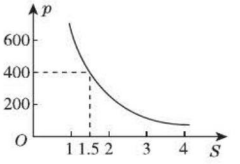


图 11.3-3

$\therefore$ 函数表达式为 $p=\frac{600}{S}(S>0)$.

（2）当 $S=0.2$ 时，$p=\frac{600}{0.2}=3\,000$.

即当木板面积为 0.2 m^2 时，压强是 3 000 Pa.

（3）由题意知，$\frac{600}{S}\leqslant6\,000$，解得 $S\geqslant0.1$.

即如果要求压强不超过 6 000 Pa，木板面积至少要 0.1 m^2.

拓技巧

固体压强（p）$=\frac{\text{压力（}F\text{）}}{\text{受力面积（}S\text{）}}$，当压力（$F$）一定时，固体压强（$p$）与受力面积（$S$）成反比例函数关系.

拔尖角度 3：利用分段函数解决实际问题（拓展点）

例 6 如图 11.3-4，某公司 2018 年 1 月份的月利润达 120 万元. 由于经营不善，公司出现亏损，月利润 y（单位：万元）与时间 x（单位：月）成反比例关系逐渐下降，至 6 月底，月利润降至 20 万元，公司采取措施制止了月利润下滑趋势，使 7 月份的月利润保持与 6 月份相同，以后公司进行了一系列的改革，从 7 月底后，公司每月的利润呈直线上升趋势，8 月份达到 36 万元.

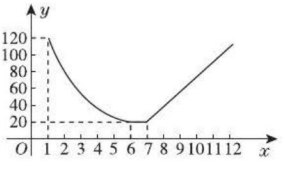
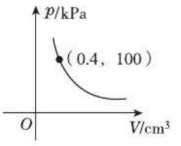


图 11.3-4

p（kPa）是气体体积 V（cm^3）的反比例函数，其图像如图所示，当气球内气压大于 120 kPa 时，气球将爆炸，为了安全，该气球内气体体积 V（cm^3）的取值范围是_____.



（第 5 题图）

6. 为适应日益激烈的市场竞争要求，某工厂从 2018 年 1 月开始限产，并对生产线进行为期 5 个月的升级改造，改造期间的月利润与时间成反比例；到 5 月底开始恢复全面生产后，工厂每月的利润都比前一个月增加 10 万元. 设 2018 年 1 月为第 1 个月，第 x 个月的利润为 y 万元，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)照这样的速度发展,在什么时候公司的月利润会达到 100 万元?

(2)如果公司提前采取措施,在 3 月底就开始整顿,也就是 4 月份的月利润保持与 3 月份相同,以后每月的月利润同样呈直线上升趋势,5 月份的月利润比 4 月份增加 16 万元,那么到 2018 年几月份这个公司的月利润会超过 100 万元?

导引:图像由三部分组成:当 $1\leqslant x\leqslant 6$ 时,图像为双曲线的一部分;当$6\leqslant x\leqslant 7$ 时,图像为一条线段,且其所在直线平行于 x 轴;当 $7\leqslant x\leqslant 12$ 时,图像为一条线段.

▶解:(1)根据题意可知 7 月份的月利润为 20 万元.

设 7 月份后 y 关于 x 的函数表达式为 $y=k_1x+b_1$.

将$\begin{cases}x=7,\\y=20\end{cases}$和$\begin{cases}x=8,\\y=36\end{cases}$分别代入上式,

得$\begin{cases}20=7k_1+b_1,\\36=8k_1+b_1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=16,\\b_1=-92,\end{cases}$

则 $y=16x-92$,当 $y=100$ 时,$x=12$.

即在 2018 年 12 月份公司的月利润会达到 100 万元.

(2)设反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$.

将$\begin{cases}x=1,\\y=120\end{cases}$代入,得 $k=120$,

则其函数表达式为 $y=\dfrac{120}{x}$.

将 $x=3$ 代入 $y=\dfrac{120}{x}$,得 $y=40$,

根据题意可知 4 月份的利润为 40 万元.

设此时 4 月份后 y 关于 x 的函数表达式为$y=k_2x+b_2$,

将$\begin{cases}x=4,\\y=40\end{cases}$和$\begin{cases}x=5,\\y=56\end{cases}$分别代入上式,

得$\begin{cases}40=4k_2+b_2,\\56=5k_2+b_2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=16,\\b_2=-24.\end{cases}$

则 $y=16x-24$.

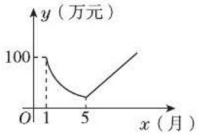
当 $y>100$ 时,即 $16x-24>100$,解得 $x>7.75$.

故到 2018 年 8 月份这个公司的月利润会超过 100 万元.

拨技巧

根据图像和题目给出的数据,求出反比例函数和一次函数的表达式是解题的关键.另外,求表达式之前应先确定这段函数图像是直线还是双曲线,不能单从图像上看,还要根据题中说明的“反比例关系”和“呈直线上升”来判断.

其图像如图所示,试解决下列问题:



(第 6 题图)

(1)分别求该工厂对生产线进行升级改造前后,y 与 x 之间的函数关系式;

(2)到第几个月时,该工厂月利润才能再次达到 100 万元?

(3)当月利润少于 50 万元时,为该工厂的资金紧张期,问该工厂资金紧张期共有几个月?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 287 页）

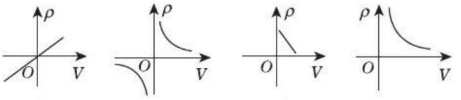
基础巩固练

1. 某厂现有 300 吨煤，这些煤能烧的天数 y 与平均每天烧的吨数 x 之间的函数关系是（　　）

A. $y=\frac{300}{x}(x>0)$　　B. $y=\frac{300}{x}(x\geqslant 0)$

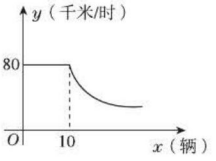
C. $y=300x(x\geqslant 0)$　　D. $y=300x(x>0)$

2. 在一个可以改变容积的密闭容器内，装有 m kg的某种气体，当改变容积 $V(\mathrm{m}^3)$ 时，气体的密度 $\rho(\mathrm{kg/m}^3)$ 也随之改变，ρ 与 V 在一定范围内满足 $\rho=\frac{m}{V}$，当 $m=7$ 时，它的函数图像是（　　）



A　　B　　C　　D

3. 随着私家车的增加，城市的交通也越来越拥堵，通常情况下，某段高架桥上车辆的行驶速度 y（千米/时）与高架桥上每百米车的数量 x（辆）的关系如图所示，当 $x\geqslant 10$ 时，y 与 x 成反比例函数关系，若车的行驶速度低于 20 千米/时，交通就会拥堵，为避免出现交通拥堵，高架桥上每百米车的数量 x 应该满足的范围是（　　）



（第 3 题图）

A. $0<x\leqslant 40$　　B. $x\geqslant 40$

C. $x>40$　　D. $0<x<40$

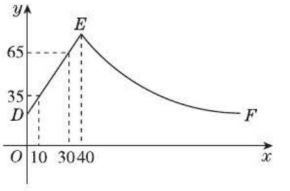
4. 当三角形的面积为 18 cm^2 时，它的底边长 $a(\mathrm{cm})$ 与底边上的高 $h(\mathrm{cm})$ 之间的函数表达式为_____.

5. 收音机刻度盘上的波长 l 和频率 f 分别是用米（m）和千赫兹（kHz）为单位标刻的. 波长 l 和频率 f 满足关系式 $f=\frac{300\,000}{l}$，这说明波长 l 越大，频率 f 就越_____.

6. 某化工车间发生有害气体泄漏，自泄漏开始到完全控制用了 40 min，之后将对泄漏的有害气体进行清理，如图，线段 DE 表示气体泄漏时车间内危险检测表显示数据 y 与时间 $x(\mathrm{min})$ 之间的函数关系（$0\leqslant x\leqslant 40$），反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 对应的曲线 EF 表示气体泄漏控制之后车间危险检测表显示数据 y 与时间 $x(\mathrm{min})$ 之间的函数关系（$40<x\leqslant ?$）. 根据图像解答下列问题：

（1）危险检测表在气体泄漏之初显示的数据是多少？

（2）求反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的关系式，并确定车间内危险检测表恢复到气体泄漏之初显示的数据时对应的 x 值.



（第 6 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

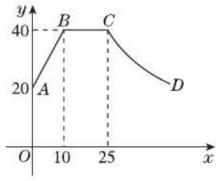
7. 某地上年度电价为 0.8 元，年用电量为 1 亿度，本年度计划将电价调至 0.55～0.75 之间，经测算，若电价调至 x 元，则本年度新增用电量 y（亿度）与（$x-0.4$）（元）成反比例，又当 $x=0.65$ 时，$y=0.8$. 根据 y 与 x 之间的函数关系式，请你预算，如果每度电的成本价为 0.3 元，电价调至 0.6 元时，本年度电力部门的纯收入是_____亿元.

8. 心理学家研究发现，一般情况下，一节课 40 分钟中，学生的注意力随教师讲课的变化而变化. 开始上课时，学生的注意力逐步增强，中间有一段时间学生的注意力保持较为理想的稳定状态，随后学生的注意力开始分散. 经过实验分析可知，学生的注意力指标数 y 随时间 x（分钟）的变化规律如图所示（其中 AB，BC 为线段，CD 为双曲线的一部分）：

（1）分别求出线段 AB 所在直线和曲线 CD 所在双曲线的函数关系式；

（2）开始上课后第 5 分钟与第 30 分钟相比较，何时学生的注意力更集中？

（3）一道数学竞赛题需要讲 19 分钟，为了效果较好，要求学生的注意力指标数最低达到 36，那么经过适当安排，老师能否在学生注意力达到所需的状态下讲解完这道题目？



（第 8 题图）

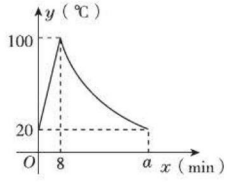
思维拓展练

9. 某小学为每个办公室配备了一种可以自动加热的饮水机，该饮水机的工作程序是：放满水后，接通电源，则自动开始加热，每分钟水温上升 10 ℃，待加热到 100 ℃，饮水机自动停止加热，水温开始下降，水温 y（℃）和通电时间 x（min）成反比例关系，直至水温降至室温，饮水机再次自动加热，重复上述过程. 设某天水温和室温为 20 ℃，接通电源后，水温和时间的关系如图所示，回答下列问题：

（1）分别求出当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 和 $8<x\leqslant a$ 时，y 和 x 之间的关系式；

（2）求出图中 a 的值；

（3）李老师这天早上 7:30 将饮水机电源打开，若他想在早上 8:10 上课前能喝到不超过 40 ℃的开水，问他需要在什么时间段内接水.



（第 9 题图）

我的错题笔记

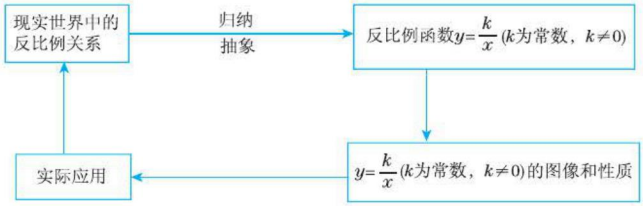
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq0$)的图像是双曲线，图像上的点(x,y)的横纵坐标的积是定值 k，即 $xy=k$.

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq0$)的性质：

当 $k>0$ 时，图像在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；

当 $k<0$ 时，图像在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.

3. 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义：设 P 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点，过点 P 向 x(或 y)轴作垂线，垂足为 H，则 $S_{\triangle POH}=\frac{|k|}{2}$.

4. 用待定系数法求反比例函数的表达式的步骤：

(1)设出反比例函数的表达式 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq0$)；

(2)把已知条件代入表达式，得到关于 k 的方程；

(3)解这个方程，求出待定系数 k；

(4)将待定系数 k 的值代入，得到反比例函数的表达式. 确定反比例函数的表达式时，自变量的取值应使实际问题有意义.

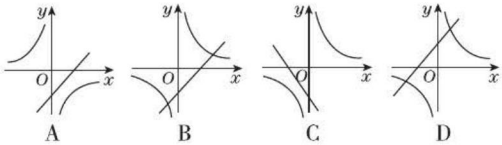
专题解码

知识专题

专题 1　反比例函数的图像

链接中考>> 反比例函数的图像是学好反比例函数的性质的重要基础，也是区别于一次函数的关键所在，因此在中考中占有重要地位. 一般都以选择题形式考查.

例 1 ［中考 · 娄底］在同一平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 与一次函数 $y=kx-1$(k 为常数，且 $k>0$)的图像可能是(　　)



A　B　C　D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：先根据 $k>0$，得到反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像在第一、三象限且一次函数 $y=kx-1$ 的图像经过第一、三象限，再根据一次函数 $y=kx-1$ 的图像与 y 轴交于负半轴，即可得出结果.

当 $k>0$ 时，直线从左往右上升，双曲线在第一、三象限，故 A、C 选项错误；∵ 一次函数 $y=kx-1$ 的图像与 y 轴交于负半轴，∴ D 选项错误，B 选项正确，故选 B. ▶答案：B

点方法

解答这类问题一般采用**排除法**，对各个选项逐个分析，找出符合条件的选项.

专题 2　反比例函数的性质

链接中考>> 利用反比例函数的性质主要解决一些函数值的大小比较问题，中考中以选择题和填空题为主，有时也与不等式结合在一起命题.

例 2 ［中考 · 西藏］若 $A(-3,a)$，$B(-2,b)$ 两点都在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像上，则 a,b 的大小关系是(　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. 无法确定

导引：根据反比例函数图像上点的坐标特征结合点 A、B 的横坐标，求出 a、b 的值，二者进行比较.

∵ $A(-3,a)$，$B(-2,b)$ 两点都在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像上，

∴ $-3\cdot a=1$，$-2\cdot b=1$，解得：$a=-\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$，

∵ $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$，∴ $a>b$. 故选 A. ▶答案：A

点方法

解答这类问题有多种思路：思路 1，计算出函数值再比较大小；思路 2，根据函数的性质比较大小；思路 3，在坐标轴中找出对应的点，再根据点的位置的高低比较大小.

例 3 ［中考 · 新疆］如图 1，它是反比例函数 $y=\frac{m-5}{x}$ 图像的一支，根据图像可知常数 m 的取值范围是_____.

导引：根据图像可知 $m-5>0$，从而可以求得 m 的取值范围. 具体解题过程如下：

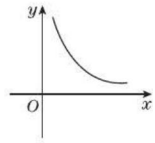


图 1

由图像可知，反比例函数 $y=\frac{m-5}{x}$ 图像的一支在第一象限，∴ $m-5>0$，得 $m>5$. ▶答案：$m>5$

点方法

解答这类问题的基本方法是根据图像的位置列不等式.

专题 3　反比例函数与一次函数结合

链接中考>> 解答反比例函数与其他函数结合在一起的综合题时，要挖掘题目中的条件，并结合图像找出图像中关键的点，求出函数表达式，并根据题中数量之间的关系列出所需要的方程或表达式进行解答.

例 4 ［中考 · 内江］如图 2，已知 $A(-4,2)$、$B(n,-4)$ 两点是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 图像的两个交点.

(1) 求一次函数和反比例函数的表达式；

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积；

(3) 观察图像，直接写出不等式 $kx+b-\frac{m}{x}>0$ 的解集.

导引：(1) 先把点 A 的坐标代入反比例函数表达式，即可得到 $m=-8$，再把点 B 的坐标代入反比例函数表达式，即可求出 $n=2$，然后确定一次函数的表达式；

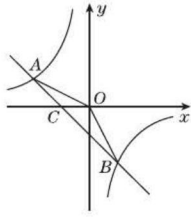


图 2

(2) 先求出直线 $y=-x-2$ 与 x 轴交点 C 的坐标，然后利用 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$ 进行计算；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）观察函数图像得到当 $x<-4$ 或 $0<x<2$ 时，一次函数的图像在反比例函数图像上方，据此可得不等式的解集.

▶解：（1）把 $A(-4,2)$ 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $m=2\times(-4)=-8$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{8}{x}$，

把 $B(n,-4)$ 的坐标代入 $y=-\frac{8}{x}$，得 $-4n=-8$，

解得 $n=2$，

把 $A(-4,2)$ 和 $B(2,-4)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-4k+b=2,\\2k+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-2.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-x-2$；

（2）$y=-x-2$ 中，令 $y=0$，则 $x=-2$，

即直线 $y=-x-2$ 与 x 轴交于点 $C(-2,0)$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times4=6$；

（3）由图像可得，不等式 $kx+b-\frac{m}{x}>0$ 的解集为：$x<-4$ 或 $0<x<2$.

点方法

（1）求函数表达式一般采用**待定系数法**. 用待定系数法解题，首先要设出待定系数，再根据题目中的已知条件求出待定系数，对于反比例函数而言，因为只有一个待定系数，因此只要将一个点的坐标代入函数表达式. 就可以求出待定系数，若是一次函数则需要两个独立的条件.

（2）求坐标平面内图形的面积，往往将在坐标轴上的边或者与坐标轴平行的边作为三角形面积公式中的“底”，这样计算会容易一些.

专题 4　反比例函数的几何意义

链接中考>> 反比例函数的比例系数 k 具有一定的几何意义，k 的绝对值等于反比例函数图像上任意一点向两坐标轴作垂线段与坐标轴围成的长方形的面积. 在反比例函数图像中，涉及三角形和矩形的面积时，常用比例系数 k 的几何意义求解.

例 5 ［中考 · 阿坝州］如图 3，已知点 $P(6,3)$，过点 P 作 $PM\perp x$ 轴于点 M，$PN\perp y$ 轴于点 N，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像交 PM 于点 A，交 PN 于点 B. 若四边形 $OAPB$ 的面积为 12，则 $k=$_____.

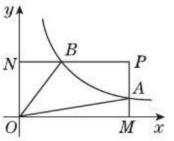


图 3

导引：根据点 $P(6,3)$，可得点 A 的横坐标为 6，点 B 的纵坐标为 3，代入函数表达式分别求出点 A 的纵坐标和点 B 的横坐标，然后根据四边形 $OAPB$ 的面积为 12，列出方程求出 k 的值. 具体解题过程如下：

∵ 点 $P(6,3)$，

∴ 点 A 的横坐标为 6，点 B 的纵坐标为 3，

代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 得，

点 A 的纵坐标为 $\frac{k}{6}$，点 B 的横坐标为 $\frac{k}{3}$，

即 $AM=\frac{k}{6}$，$NB=\frac{k}{3}$，

∵ $S_{四边形OAPB}=12$，

∴ $S_{矩形OMPN}-S_{\triangle OAM}-S_{\triangle NBO}=12$，

∴ $6\times3-\frac{1}{2}\times6\times\frac{k}{6}-\frac{1}{2}\times3\times\frac{k}{3}=12$，解得：$k=6$.

▶答案：6

点方法

解反比例函数图像与几何图形的面积问题一般分为两类：一类是根据面积求一次函数或反比例函数的表达式，另一类是由已知的表达式求几何图形的面积，而求面积时，有时可利用反比例函数比例系数 k 的绝对值，有时则需利用几个几何图形面积的和差来求得.

专题 5　反比例函数的应用

链接中考>> 用反比例函数刻画实际问题中两个变量之间的关系及用反比例函数的性质解决实际问题是中考命题的重点，尤其是用反比

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例函数图像来反映实际问题的变量之间的关系是中考命题的热点. 解决这类问题一是要表示出表达式,二是要注意自变量的取值范围.

例 6　［中考·鄂尔多斯］一般情况下,中学生完成数学家庭作业时,注意力指数 y 随时间 x(分钟)的变化规律如图 4 所示(其中 AB、BC 为线段,CD 为双曲线的一部分).

(1)分别求出线段 AB 和双曲线 CD 的函数关系式;

(2)若学生的注意力指数不低于 40 为高效时间,根据图中信息,求出一般情况下,完成一份数学家庭作业的高效时间是多少分钟.

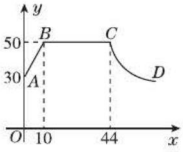


图 4

导引:(1)利用待定系数法分别求出线段 AB 和双曲线 CD 的函数关系式;

(2)将 $y=40$ 分别代入线段 AB 和双曲线 CD 的函数关系式,从而可求得 x 的值,最后可得到完成一份数学家庭作业的高效时间.

▸解:(1)设线段 AB 所在的直线的函数关系式为 $y=k_1x+30$,

把 $B(10,50)$ 的坐标代入得,$k_1=2$,

∴ 线段 AB 的函数关系式为:$y=2x+30$ $(0\leqslant x\leqslant 10)$.

设双曲线 CD 的函数关系式为 $y=\dfrac{k_2}{x}$,

把 $C(44,50)$ 的坐标代入得,$k_2=2\,200$,

∴ 双曲线 CD 的函数关系式为:$y=\dfrac{2\,200}{x}$ $(x\geqslant 44)$;

(2)将 $y=40$ 代入 $y=2x+30$ 得:$2x+30=40$,

解得:$x=5$,

将 $y=40$ 代入 $y=\dfrac{2\,200}{x}$ 得:$x=55$.

$55-5=50$(分钟).

∴ 完成一份数学家庭作业的高效时间是 50 分钟.

点方法

与函数相关的问题,往往涉及**待定系数法**、交点坐标以及面积问题等. 在解决此类问题时,有以下几点需要注意:(1)对于特殊的点,如两个函数图像的交点、函数图像与坐标轴的交点等,通常需要先求出其坐标;(2)反比例函数与一次函数相关问题,通常的做法是先求反比例函数的表达式,然后利用其表达式求出特殊点的坐标.

思想方法专题

专题 6　数形结合思想

专题解读>>　数形结合思想是将数(量)与形(图)结合起来进行分析、研究,从而解决问题的一种思维策略. 反比例函数的图像可以体现反比例函数的性质,所以解决有关反比例函数问题时,可以把函数图像与表达式有机地结合起来,使数学问题更直观,而且要容易解决.

例 7　［中考·深圳］如图 5,一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(x>0)$ 的图像交于 $A(2,4)$,$B(a,1)$,与 x 轴,y 轴分别交于点 C,D.

(1)直接写出一次函数 $y=kx+b$ 的表达式和反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}(x>0)$ 的表达式.

(2)求证:$AD=BC$.

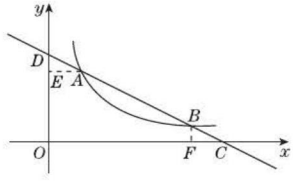


图 5

导引:(1)先确定出反比例函数的表达式,进而求出点 B 的坐标,最后求出一次函数的表达式;

(2)由(1)知,一次函数的表达式,进而求出 C,D 的坐标,构造直角三角形,利用勾股定理即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）▶解：反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$，

一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+5$.

（2）▶证明：∵ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+5$，

∴ $C(10,0)$，$D(0,5)$，

如图 5，过点 A 作 $AE\perp y$ 轴于 E，过点 B 作 $BF\perp x$ 轴于 F，

易得 $E(0,4)$，$F(8,0)$，

∴ $AE=2$，$DE=1$，$BF=1$，$CF=2$，

在 Rt△ADE 中，根据勾股定理得，$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{5}$，

在 Rt△BCF 中，根据勾股定理得，$BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{5}$，

∴ $AD=BC$.

点方法

此题是反比例函数与一次函数交点坐标问题，问题（2）的证明关键是构造直角三角形，是数形结合思想的具体体现.

专题 7　化归思想

专题解读>> 化归思想就是将面临的新问题转化为已经熟悉的规范问题的数学方法，后者具有确定的解法或有确定的求解程序，这是一种具有普遍适用性的数学思想方法. 化归包含三个要素：①化归对象（我们不熟悉的新问题）；②化归的目标（规范问题）；③化归的途径.

例 8 ［中考 · 内江］如图 6，点 A 在双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 上，点 B 在双曲线 $y=\frac{8}{x}$ 上，且 $AB\parallel x$ 轴，则△OAB 的面积等于_____.

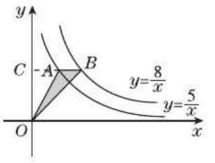


图 6

导引：延长 BA 交 y 轴于点 C，根据反比例函数系数的几何意义求出△BOC 的面积与△AOC 的面积，然后相减即可得解.

如图 6，延长 BA 交 y 轴于点 C.

$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{2}$，$S_{\triangle OCB}=\frac{1}{2}\times8=4$，

则 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCB}-S_{\triangle OAC}=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$.

▶答案：$\frac{3}{2}$

点方法

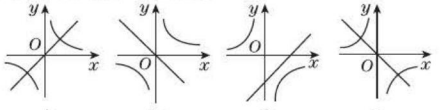
本题考查了反比例函数系数的几何意义，即过双曲线上任意一点引 x 轴、y 轴垂线，所得矩形面积为 $|k|$，是经常考查的一个知识点，本题作辅助线把△OAB 的面积转化为两个三角形的面积的差是解题的关键.

好题必练

（答案见 287 页）

选择题

1. ［中考 · 凉山州］若 $ab<0$，则正比例函数 $y=ax$ 与反比例函数 $y=\frac{b}{x}$ 在同一坐标系中的大致图像可能是（　　）



2. ［中考 · 无锡］已知点 $P(a,m)$，$Q(b,n)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图像上，且 $a<0<b$，则下列结论一定正确的是（　　）

A. $m+n<0$　　B. $m+n>0$

C. $m<n$　　D. $m>n$

3. ［中考 · 威海］若 $(-2,y_1)$，$(-1,y_2)$，$(3,y_3)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

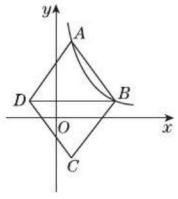
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. $y_1 < y_2 < y_3$　　B. $y_3 < y_2 < y_1$

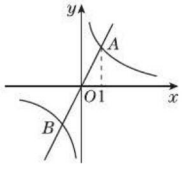
C. $y_2 < y_1 < y_3$　　D. $y_3 < y_1 < y_2$

4. [中考·重庆] 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 的顶点 A，B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0, x>0)$ 的图像上，横坐标分别为 1，4，对角线 $BD \parallel x$ 轴. 若菱形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{45}{2}$，则 k 的值为(　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{15}{4}$　　C. 4　　D. 5



(第 4 题图)



(第 5 题图)

5. [中考·临沂] 如图，正比例函数 $y_1=k_1x$ 与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图像相交于 A、B 两点，其中点 A 的横坐标为 1. 当 $y_1 < y_2$ 时，x 的取值范围是(　　)

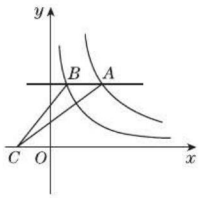
A. $x < -1$ 或 $x > 1$

B. $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$

C. $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$

D. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$

6. [中考·宁波] 如图，平行于 x 轴的直线与函数 $y=\frac{k_1}{x}(k_1>0, x>0)$，$y=\frac{k_2}{x}(k_2>0, x>0)$ 的图像分别相交于 A，B 两点，点 A 在点 B 的右侧，C 为 x 轴上的一个动点，若 $\triangle ABC$ 的面积为 4，则 k_1-k_2 的值为(　　)



(第 6 题图)

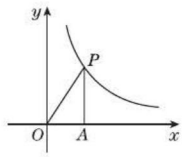
A. 8　　B. -8

C. 4　　D. -4

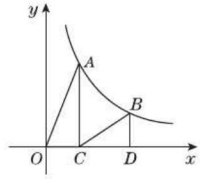
填空题

7. [中考·南京] 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(-3, -1)$，则 $k=$ _____.

8. [中考·娄底] 如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 P 是反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 图像上的一点，$PA \perp x$ 轴于点 A，则 $\triangle POA$ 的面积为 _____.



(第 8 题图)

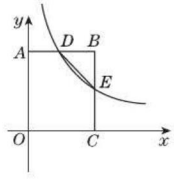


(第 9 题图)

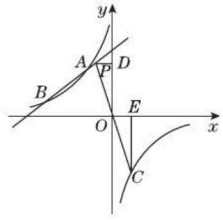
9. [中考·衢州] 如图，点 A，B 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 图像上的两点，过点 A，B 分别作 $AC \perp x$ 轴于点 C，$BD \perp x$ 轴于点 D，连接 OA，BC，已知点 $C(2,0)$，$BD=2$，$S_{\triangle BCD}=3$，则 $S_{\triangle AOC}=$ _____.

10. [中考·宜宾] 已知：点 $P(m,n)$ 在直线 $y=-x+2$ 上，也在双曲线 $y=-\frac{1}{x}$ 上，则 m^2+n^2 的值为 _____.

11. [中考·盐城] 如图，点 D 为矩形 $OABC$ 的 AB 边的中点，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像经过点 D，交 BC 边于点 E. 若 $\triangle BDE$ 的面积为 1，则 $k=$ _____.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12. [中考·威海] 如图，直线 AB 与双曲线 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 交于点 A，B，点 P 是直线 AB

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

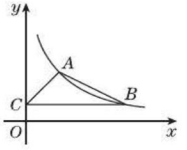
上一动点，且点 P 在第二象限. 连接 PO 并延长交双曲线于点 C. 过点 P 作 $PD \perp y$ 轴，垂足为点 D. 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴，垂足为点 E. 若点 A 的坐标为 $(-2,3)$，点 B 的坐标为 $(m,1)$，设 $\triangle POD$ 的面积为 S_1，$\triangle COE$ 的面积为 S_2，当 $S_1 > S_2$ 时，点 P 的横坐标 x 的取值范围为_____.

解答题

13. ［中考 · 岳阳］如图，某反比例函数图像的一支经过点 $A(2,3)$ 和点 B（点 B 在点 A 的右侧），作 $BC \perp y$ 轴，垂足为点 C，连接 AB，AC.

(1) 求该反比例函数的表达式；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 6，求直线 AB 的表达式.

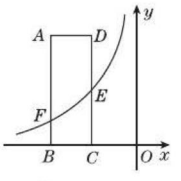


（第 13 题图）

14. ［中考 · 泰安］如图，矩形 $ABCD$ 的两边 AD、AB 的长分别为 3、8，E 是 DC 的中点，反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像经过点 E，与 AB 交于点 F.

(1) 若点 B 的坐标为 $(-6,0)$，求 m 的值及图像经过 A、E 两点的一次函数的表达式.

(2) 若 $AF - AE = 2$，求反比例函数的表达式.



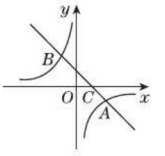
（第 14 题图）

15. ［中考 · 连云港］如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = k_1x + b$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(4,-2)$、$B(-2,n)$ 两点，与 x 轴交于点 C.

(1) 求 k_2，n 的值；【导学号：9937991】

(2) 请直接写出不等式 $k_1x + b < \frac{k_2}{x}$ 的解集；

(3) 将 x 轴下方的图像沿 x 轴翻折，点 A 落在点 A' 处，连接 $A'B$，$A'C$，求 $\triangle A'BC$ 的面积.

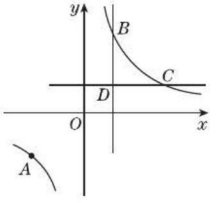


（第 15 题图）

16. ［中考 · 青岛］已知反比例函数的图像经过三个点 $A(-4,-3)$，$B(2m,y_1)$，$C(6m,y_2)$，其中 $m > 0$.

(1) 当 $y_1 - y_2 = 4$ 时，求 m 的值；

(2) 如图，过点 B、C 分别作 x 轴、y 轴的垂线，两垂线相交于点 D，点 P 在 x 轴上，若三角形 PBD 的面积是 8，请写出点 P 的坐标（不需要写解答过程）.



（第 16 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第12章 二次根式

再探从数到式的奥秘

数学点拨

你将学到的核心考点

二次根式有意义的条件 □
二次根式的性质 □
二次根式的运算 □

我们为你提供的核心方法

数形结合思想 □　　分母有理化法 □
探究规律法 □　　整体思想 □

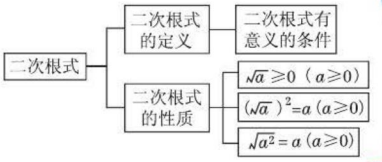
掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.1 二次根式

热门话题
- 二次根式的定义（重点）
- 二次根式有意义的条件（重点）
- 二次根式的性质（难点）

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 二次根式

点知识

1. **定义**：一般地，式子$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）叫做二次根式，a 叫做被开方数.


二次根式的定义

要点精析

（1）二次根式的定义是从式子的结构形式上界定的，必须含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；“$\sqrt{\ }$”的根指数为 2，即$\sqrt[2]{\ }$，“2”一般省略不写.

（2）被开方数 a 可以是一个数，也可以是一个含有字母的式子，但前提是 a 必须大于或等于 0.

（3）在具体问题中，已知二次根式$\sqrt{a}$，就意味着给出了 $a\geqslant 0$ 这一条件.

（4）形如 $b\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子也是二次根式，b 与$\sqrt{a}$是相乘的关系，当 b 为带分数时，要写成假分数的形式.

2. **易错警示**：

（1）二次根式是从形式上定义的，不能从化简结果上判断，如$\sqrt{a^2}$，$\sqrt{0}$，$\sqrt{4}$等都是二次根式.

（2）像$\sqrt{a}+1$（$a\geqslant 0$）这样的式子只能称为含有二次根式的式子，不能称为二次根式.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：二次根式的识别

例 1 判断下列各式是否为二次根式，并说明理由.

（1）$\sqrt{x^2+1}$；（2）$\sqrt{-5a}$；（3）$\sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$；

（4）$\sqrt{-(a-4)^2}$；（5）$\sqrt{x^2+2x+2}$；

导引：判断一个式子是不是二次根式，实质是看它是否具备二次根式定义的条件，紧扣定义进行识别. 一看是否含根号且根指数是否为 2，二看被开方数（式）是否为非负数.

▶解：（1）∵ 无论 x 为何值，都有 $x^2+1>0$，

∴ $\sqrt{x^2+1}$是二次根式.

举一反三训练

（答案见 289 页）

1. 下列各式：$\sqrt{21}$，$\sqrt{x^2+1}$，$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt{-6a}$（$a>0$），其中是二次根式的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) 当 $-5a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$\sqrt{-5a}$ 是二次根式；

当 $a>0$ 时，$-5a<0$，则 $\sqrt{-5a}$ 不是二次根式.

$\therefore$ $\sqrt{-5a}$ 不一定是二次根式.

(3) 当 $x=-3$ 时，$\frac{1}{(x+3)^2}$ 无意义，$\sqrt{\frac{1}{(x+3)^2}}$ 也无意义；

当 $x\neq -3$ 时，$\frac{1}{(x+3)^2}>0$，$\sqrt{\frac{1}{(x+3)^2}}$ 是二次根式.

$\therefore$ $\sqrt{\frac{1}{(x+3)^2}}$ 不一定是二次根式.

(4) 当 $a=4$ 时，$a-4=0$，$\sqrt{-(a-4)^2}$ 是二次根式；

当 $a\neq 4$ 时，$-(a-4)^2<0$，$\sqrt{-(a-4)^2}$ 不是二次根式.

$\therefore$ $\sqrt{-(a-4)^2}$ 不一定是二次根式.

(5) $\because x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1>0$，

$\therefore$ $\sqrt{x^2+2x+2}$ 是二次根式.

点方法

二次根式的识别方法：判断一个式子是否为二次根式，一定要紧扣二次根式的定义，看所给的式子是否同时具备二次根式的两个特征：（1）含根号且根指数为 2（通常省略不写）；（2）被开方数（式）为非负数.

考查角度 2：二次根式在生活中的应用

例 2 已知一个长方形的面积为 12 cm^2，它的长与宽之比为 2:1，则这个长方形的长和宽分别是多少？

导引：设出未知数，利用长方形的面积公式列出方程，然后求出未知数的值.

▶解：设这个长方形的长为 $2x$ cm，则宽为 x cm，

根据题意得：$2x\cdot x=12$.

解得 $x=\pm\sqrt{6}$.

$\because x>0$，

$\therefore x=\sqrt{6}$，$2x=2\sqrt{6}$.

$\therefore$ 这个长方形的长和宽分别是 $2\sqrt{6}$ cm，$\sqrt{6}$ cm.

点方法

利用方程思想以及平方根的性质进行运算，在运算时既要考虑所列式子中字母的数学意义，又要注意所表示的量的实际意义.

2. 一个底面为 3 dm × 4 dm 的长方体玻璃容器中装满水，现将一部分水倒入一个底面为正方形，高为 4 dm 的长方体铁桶中，当铁桶装满水时，容器中的水面下降了 2 dm，铁桶的底面边长是多少分米？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 二次根式有意义的条件

点知识

1. 二次根式有意义的条件是被开方数(式)为非负数,反之也成立,即$\sqrt{a}$有意义$\Leftrightarrow a\geqslant 0$.
2. 二次根式无意义的条件是被开方数(式)为负数,反之也成立,即$\sqrt{a}$无意义$\Leftrightarrow a<0$.

要点精析

(1)如果一个式子含有多个二次根式,那么它有意义的条件是:各个二次根式中的被开方数(式)都必须是非负数.

(2)如果一个式子中既含有二次根式又含有分式,那么它有意义的条件是:二次根式中的被开方数(式)是非负数,分式的分母不等于0.

(3)如果一个式子中含有零指数幂或负整数指数幂,那么它有意义的条件是:底数不为0.

拓考向

考查角度1:利用二次根式有意义的条件确定字母的取值范围

例3 当x取怎样的数时,下列各式在实数范围内有意义?

(1)$\sqrt{-2x-6}+(x+5)^0$;(2)$\sqrt{\dfrac{1}{3x+7}}$;

(3)$\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$;(4)$\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

导引:要使二次根式有意义,则被开方数是非负数,如果同时有分式,那么分式中的分母不能为零.

解:(1)欲使$\sqrt{-2x-6}+(x+5)^0$有意义,则必有$\begin{cases}-2x-6\geqslant 0,\\ x+5\neq 0,\end{cases}$

$\therefore x\leqslant -3$且$x\neq -5$.

(2)欲使$\sqrt{\dfrac{1}{3x+7}}$有意义,则必有$\begin{cases}\dfrac{1}{3x+7}\geqslant 0,\\ 3x+7\neq 0,\end{cases}\therefore x>-\dfrac{7}{3}$.

(3)欲使$\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$有意义,则必有$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 5-x\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore 2\leqslant x\leqslant 5$.

(4)欲使$\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$有意义,则必有$\begin{cases}x+4\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}\therefore x\geqslant -4$且$x\neq 2$.

点方法

求式子有意义时字母的取值范围的方法: 第一步,明确式子有意义的条件,对于单个的二次根式,只需满足被开方数为非负数;对于含有多个二次根式的式子,则必须满足多个被开方数同时为非负数;对于零指数幂,则必须满足底数不能为零;对于含有分式的,则需满足分母不能为零. 第二步,利用式子中所有有意义的条件,建立不等式或不等式组. 第三步,求出不等式或不等式组的解集,即为字母的取值范围.

3. x是怎样的实数时,下列式子有意义?

(1)$\sqrt{4-3x}$;

(2)$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$;

(3)$\sqrt{(x+1)^2}$;

(4)$\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2：利用二次根式有意义的条件求代数式的值

例4 已知$y=2\sqrt{2x-1}+3\sqrt{1-2x}+\frac{1}{3}$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的值.

导引：要求代数式$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的值，必须先求x,y的值. 由于已知条件只有一个等式且没有给出任何字母的值，因此解本题的关键是运用二次根式有意义的条件，结合“由$a\geqslant b$且$a\leqslant b$得到$a=b$”来确定x的值.

▶解：由二次根式的定义，得$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\1-2x\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\geqslant\frac{1}{2},\\x\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$.

将$x=\frac{1}{2}$代入已知等式，得$y=\frac{1}{3}$.

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2+3=5$.

点方法

解这类题的依据是二次根式有意义的条件：被开方数是非负数，它是限制字母取值范围的重要条件，也是易被忽略的隐含条件；而形如$\sqrt{x-a}+\sqrt{a-x}+b$（其中被开方数$x-a$与$a-x$互为相反数）的式子的值是b.

4. 已知$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}-2$，则$x^y$的值为_____.

知识点3 二次根式的性质

点知识

1. **二次根式的性质**：

(1)$\sqrt{a}$中$a\geqslant 0,\sqrt{a}\geqslant 0$，即一个非负数的算术平方根是一个非负数；

(2)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，即一个非负数的算术平方根的平方等于它本身；

(3)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0),\end{cases}$即一个数的平方的算术平方根等于它的绝对值.

要点精析

(1)$\sqrt{a}$具有双重非负性：①$a\geqslant 0$；②$\sqrt{a}\geqslant 0$.

(2)$\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$的区别与联系：

区别：①a的取值范围不同：$\sqrt{a^2}$中a为全体实数，$(\sqrt{a})^2$中$a\geqslant 0$；

②运算顺序不同：$\sqrt{a^2}$是先平方后开方，$(\sqrt{a})^2$是先开方后平方；

③运算结果不同：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0),\end{cases}$ $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$.

联系：$\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$均为非负数，且当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$.

(3)计算$(b\sqrt{a})^2$时，运用$(ab)^2=a^2b^2$这个结论可知，$(b\sqrt{a})^2=b^2a$.

2. **易错警示**：利用性质$\sqrt{a^2}=|a|$化简时，易忽略字母a的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨考向 ▶▶▶

考查角度：利用二次根式的性质计算

例 5 计算：（1）$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$；（2）$\sqrt{(-6)^2}$；（3）$\sqrt{10^{-2}}$；（4）$(-2\sqrt{2})^2$；（5）$\sqrt{(3.14-\pi)^2}$.

导引：（1）可套用性质 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$ 计算.

（2）有两种思路：**思路一**是直接套用性质 $\sqrt{a^2}=|a|$ 计算；**思路二**是先计算 $(-6)^2$，再取其算术平方根.

（3）10^{-2} 是 10^{-1} 的平方，用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简即可.

（4）$(-2\sqrt{2})^2$ 可先运用积的乘方公式 $(ab)^2=a^2b^2$，将式子化为 $(-2)^2\times(\sqrt{2})^2$，然后套用性质 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$ 计算.

（5）直接套用性质 $\sqrt{a^2}=|a|$ 计算.

▶解：（1）$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=\frac{3}{5}$.

（2）$\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$.

（3）$\sqrt{10^{-2}}=\sqrt{(10^{-1})^2}=|10^{-1}|=10^{-1}=\frac{1}{10}$.

（4）$(-2\sqrt{2})^2=(-2)^2\times(\sqrt{2})^2=8$.

（5）$\sqrt{(3.14-\pi)^2}=|3.14-\pi|=\pi-3.14$.

拨技巧

运用 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=|a|$ 进行计算的方法：

（1）计算 $(\sqrt{a})^2$，直接运用 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$.

（2）计算 $\sqrt{a^2}$ 一般有两个步骤：①去掉根号及被开方数的指数，写成绝对值的形式；②去掉绝对值符号，根据绝对值的意义进行化简.

5. 计算：

（1）$(5\sqrt{5})^2$；

（2）$\left(-7\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2$；

（3）$\sqrt{(3-\pi)^2}$；

（4）$\sqrt{1-6x+9x^2}\ \left(x\geqslant\frac{1}{3}\right)$.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1：利用数轴和二次根式的性质化简

例 6 已知实数 a,b 在数轴上对应的点的位置如图 12.1-1 所示，试化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$.

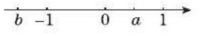
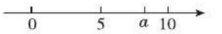


图 12.1-1

举一反三训练

☞（答案见 289 页）

6. 实数 a 在数轴上对应的点的位置如图所示，则 $\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{(a-11)^2}$ 化简后为（　　）



（第 6 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：要化简这个含有几个二次根式的式子，根据其特点，可利用$\sqrt{a^2}=|a|$将原式化简成几个含绝对值符号的式子的和，而要去掉绝对值符号，则需知绝对值符号内各个式子的正、负，这些都可由式子中的字母在数轴上对应的点的位置确定.

▶解：由数轴上点的位置可知：$a>b$，$0<a<1$，$b<-1$，

所以$a-b>0$，$b-1<0$，$a-1<0$.

则$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$

$=|a|+|b|+|a-b|+|b-1|-|a-1|$

$=a-b+a-b+1-b-(1-a)=3a-3b$.


二次根式的化简

点方法

本例属于**数形结合思想**的经典例题，本例是由“形”的位置来确定“数（式）”的符号，这充分体现了“数”与“形”是一个互相依存、不可分割的有机结合体；解答利用二次根式的性质化简题的关键是确保去掉根号后的结果是非负数.

拨尖角度2：利用二次根式的非负性求含字母的式子的值

例7 若$\sqrt{x-2y+9}$与$|x-y-3|$互为相反数，求$x+y$的值.

导引：根据互为相反数的两数之和等于0列式，再根据非负数的性质列出关于x，y的二元一次方程组，求解得到x，y的值，然后代入所求式子进行计算即可得解.

▶解：∵ $\sqrt{x-2y+9}$与$|x-y-3|$互为相反数，

∴ $\sqrt{x-2y+9}+|x-y-3|=0$.

又∵ $\sqrt{x-2y+9}\geqslant 0$，$|x-y-3|\geqslant 0$，

∴ $\begin{cases}\sqrt{x-2y+9}=0,\\ |x-y-3|=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x-2y+9=0,①\\ x-y-3=0.②\end{cases}$

②－①，得$y=12$.

把$y=12$代入②，

得$x-12-3=0$，

解得$x=15$.

∴ $x+y=15+12=27$.

点方法

常见的非负数有三种类型：绝对值、偶次方、二次根式（算术平方根）. 当它们的和为0时，必须满足其中的每一项都等于0.

A. 7

B. -7

C. $2a-15$

D. 无法确定

7. 已知x，y为实数，且满足$4x^2+8x-(y-1)\sqrt{1-y}+4=0$，那么$x^{2\,017}-y^{2\,017}=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨尖角度3：逆用二次根式的性质将一个式子写成平方的形式

例8 将下列各数或式子写成一个非负数的平方的形式：

(1)7；　(2)$\frac{1}{11}$；　(3)x^2+1；　(4)$a-1$.

导引：应用$a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$可将某个非负数写成一个非负数的平方的形式，如果含有字母，要考虑字母的取值范围，如$a-1$要写成一个非负数的平方的形式，就必须满足$a-1\geqslant 0$.

▶解：(1)$7=(\sqrt{7})^2$.

(2)$\frac{1}{11}=\left(\sqrt{\frac{1}{11}}\right)^2$.

(3)$x^2+1=(\sqrt{x^2+1})^2$.

(4)当$a\geqslant 1$时，$a-1=(\sqrt{a-1})^2$；

当$a<1$时，$a-1$不能写成一个非负数的平方的形式.

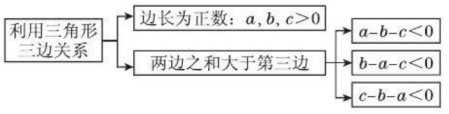
点方法

逆用二次根式的性质时，必须先确定该数为非负数，若无法确定为非负数，则不能进行变形，故一般只对数进行变形，字母必须谨慎.

拨尖角度4：利用三角形三边关系对二次根式进行化简

例9 设a,b,c为一个三角形的三边长，试化简：$\sqrt{(a+b+c)^2}+|a-b-c|+\sqrt{(b-a-c)^2}-\sqrt{(c-b-a)^2}$.

导引：



▶解：∵a,b,c为一个三角形的三边长，

∴$a+b+c>0,a-b-c<0,b-a-c<0,c-b-a<0$.

∴原式$=|a+b+c|+|a-b-c|+|b-a-c|-|c-b-a|$

$=(a+b+c)-(a-b-c)-(b-a-c)+(c-b-a)$

$=a+b+c-a+b+c-b+a+c+c-b-a$

$=4c$.

点方法

运用$\sqrt{a^2}=|a|$进行化简时，其关键步骤是去绝对值符号，而去绝对值符号的关键是判断绝对值符号内的代数式的符号，因此一定要结合具体问题（如数轴、几何图形的特征等）确定其符号，然后进行化简.

8. 在实数范围内分解因式：

(1)$9a^2-5$；

(2)$x^2+2\sqrt{13}x+13$；

(3)x^4-6x^2+9.

9. 已知：a,b,c是$\triangle ABC$的三边长，化简$\sqrt{(a+b+c)^2}-\sqrt{(b+c-a)^2}+\sqrt{(c-b-a)^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度5：化简求值题

例10 已知：$a=\frac{1}{5}$，求$\frac{a^2-1}{a+1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$的值.

导引：由$a=\frac{1}{5}$，可知$0<a<1$，再利用因式分解对原式进行化简，然后根据二次根式的性质化简后约分，再把a的值代入计算即可.

▶解：∵ $a=\frac{1}{5}<1$，

$$\therefore \text{原式}=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}-\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}$$

$$=a-1-\frac{|a-1|}{a(a-1)}$$

$$=a-1+\frac{a-1}{a(a-1)}$$

$$=a-1+\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{5}-1+5$$

$$=4\frac{1}{5}.$$

点方法

二次根式的化简求值，一定要先化简再代入求值.

在运用公式$\sqrt{a^2}=|a|$化简时要注意关注a的正负.

10. 对于题目“化简与求值：$\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+a^2-2}$，其中$a=\frac{1}{5}$”，甲、乙两同学的解答不同：

甲：原式$=\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$…①

$=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-a$…②

$=\frac{2}{a}-a=\frac{49}{5}$…③

乙：原式$=\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$…①

$=\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}$…②

$=a=\frac{1}{5}$…③

谁的解答是错误的？错在哪一步，为什么？

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见289页)

基础巩固练

1. 已知a为任意实数，下列式子一定是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt[3]{a}$　　C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a^2}$

2. 下列计算结果正确的是(　　)

A. $(-\sqrt{5})^2=-5$　　B. $\sqrt{5^{-4}}=5^{-2}$

C. $-(-\sqrt{5})^2=5$　　D. $\sqrt{(-5)^2}=-5$

3. [中考·潍坊] 若代数式$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$有意义，则实数$x$的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant 1$　　B. $x\geqslant 2$

C. $x>1$　　D. $x>2$

4. 若$\sqrt{(x-2)^2}+|3-y|=0$，则$x-y$的正确结果是(　　)

A. -1　　B. 1　　C. -5　　D. 5

5. 若$\sqrt{95-n}$是整数，则自然数n的值有(　　)个.

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

6. 请你写出一个二次根式，要求被开方数只含有字母a，且无论a取任何值时，这个二次根式都有意义，这个二次根式可以是_____.

7. [中考·鄂州] 若$y=\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}-6$，则$xy=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

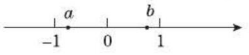
8. 利用二次根式的性质计算：

(1) $2(\sqrt{7})^2$；　(2) $(2\sqrt{7})^2$；

(3) $\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$；　(4) $\sqrt{(-8)^2}$；

(5) $-\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$；　(6) $\sqrt{4\times10^{-4}}$.

9. 实数 a,b 在数轴上对应的点的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$.



（第 9 题图）

10. 已知 a,b 为实数，且 $\sqrt{a-5}+2\sqrt{10-2a}=b+4$，求 a,b 的值.

能力提升练

11. 如果一个三角形的三边长分别为 $1,k,4$，那么化简 $|2k-5|-\sqrt{k^2-12k+36}$ 的结果是(　　)

A. $3k-11$　　B. $k+1$

C. 1　　D. $11-3k$

12. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $\sqrt{c^2-a^2-b^2}+|a-b|=0$，则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.

13. 已知 n 是正整数，$\sqrt{189n}$ 是整数，求 n 的最小正整数值.

14. [易错题] 已知 $|x-1|=2$，求 $\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}$ 的值.

思维拓展练

15. 已知 $-1<a<0$，化简代数式 $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$.

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.2 二次根式的乘除

热门话题
- 二次根式的乘法(重点)
- 二次根式的除法(重点)
- 最简二次根式(关键)

话题链接：二次根式的乘法、二次根式的除法 → 将结果 → 分母有理化 → 最简二次根式

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 二次根式的乘法(重点)

点知识

1. **法则**：两个二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变，即：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

要点精析

(1) 法则中被开方数 a,b 既可以是数，也可以是代数式，但都必须是非负数.

(2) 当二次根式根号外有因数(式)时，可类比单项式乘单项式的法则进行运算，即根号外因数(式)之积作为根号外因数(式)，被开方数之积作为被开方数.

(3) 二次根式相乘的结果是一个二次根式或一个有理式.

2. **拓展**：

(1) 几个二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变，即：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}$ $(a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0)$.

(2) 几个二次根式相乘，可利用交换律、结合律使运算简便.

3. **易错警示**：不要把字母表示正数误认为含该字母的式子的值就是正数.

拨考向

典例剖析

考查角度1：利用二次根式的乘法法则进行二次根式的乘法运算

例1 计算：

(1) $\sqrt{28}\times\sqrt{7}$；　(2) $4\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y}}$ $(x\geqslant 0,y>0)$；

(3) $6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})$.

导引：可类比单项式的乘法的计算方法运用二次根式乘法法则计算，同时注意确定积的符号.

▶解：(1) $\sqrt{28}\times\sqrt{7}=\sqrt{28\times 7}=\sqrt{196}=14$.

(2) $4\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y}}=4\sqrt{xy\cdot\dfrac{1}{y}}=4\sqrt{x}$.

(3) $6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})=6\times(-2)\times\sqrt{27\times 3}=-12\times\sqrt{81}=-12\times 9=-108$.

举一反三训练

(答案见290页)

1. 计算下列各题：

(1) $\sqrt{8}\times\sqrt{\dfrac{1}{2}}$；

(2) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

两个二次根式相乘，被开方数的积中有开得尽方的一定要开方；当二次根式根号外有因数（式）时，将根号外的因数（式）相乘作为积的“系数”，被开方数与被开方数相乘作为积的被开方数.

考查角度 2：利用二次根式的乘法解决实际问题

例 2 洛湾中学要将主席台前的一块长方形土地进行绿化，已知这块长方形土地的长 $a=5\sqrt{10}$ m，宽 $b=4\sqrt{10}$ m.

(1)求该长方形土地的面积；

(2)如果绿化该长方形土地每平方米的造价为 180 元，那么绿化该长方形土地所需资金为多少元？

导引：(1)根据这块长方形土地的长 $a=5\sqrt{10}$ m，宽 $b=4\sqrt{10}$ m，直接计算面积即可；

(2)利用绿化该长方形土地每平方米的造价为 180 元及(1)中求出的面积即可求出绿化该长方形土地所需的资金.

▶解：(1)该长方形土地的面积为

$5\sqrt{10}\times4\sqrt{10}=200(\text{m}^2)$.

(2)$180\times200=36\ 000$(元).

答：绿化该长方形土地所需资金为 36 000 元.

点方法

利用二次根式的乘法解决问题时，问题中的已知量是无理数，在计算时要运用到二次根式的乘法法则.

2. 一个直角三角形的两直角边长分别为 $2\sqrt{2}$ cm 和 $\sqrt{2}$ cm，则它的面积为 _____ cm^2.

知识点 2 积的算术平方根（重点）

点知识

1. **积的算术平方根的性质**：把二次根式的乘法法则反过来，得 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0)$. 这就是积的算术平方根的性质.

文字语言：积的算术平方根等于乘积中各个因式（因式均为非负数）的算术平方根的积.

要点精析

(1)积的算术平方根的性质的实质是逆用二次根式的乘法法则，它对两个以上因数（式）的积的算术平方根同样适用；

(2)应用积的算术平方根的性质的前提是乘积中的每个因数（式）必须是非负数，此性质的作用是化简二次根式；

(3)在进行化简时，先将被开方数（式）进行因数（式）分解，然后将能开得尽方的因数（式）开方后移到根号外.

2. **易错警示**：积的算术平方根性质中的乘积中的每个因式可以是数，也可以是代数式，但无论是数还是代数式，都必须满足因数（式）都是非负数，才能运用性质进行化简或计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▸▸▸

考查角度1：利用积的算术平方根进行化简

例3 ［易错题］化简：

(1) $\sqrt{125}$；　(2) $\sqrt{(-7)\times(-14)}$；

(3) $\sqrt{36^2+48^2}$；　(4) $\sqrt{m^3n^5}(m\geqslant 0,n\geqslant 0)$；

(5) $\sqrt{0.49x^5y^6}(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$；

(6) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

(7) $\sqrt{4y^5-4xy^4+x^2y^3}\left(y\geqslant 0,y>\frac{1}{2}x\right)$.

导引：应用积的算术平方根的性质首先要求被开方数是乘积的形式，若不是，则需将它们转化为乘积的形式，其次是每个因数(式)必须是非负数.(1)(2)(3)中被开方数为数，(4)(5)中被开方数是含有字母的单项式，都可直接或经过变形后利用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$ 和 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$ 进行化简；(6)(7)中被开方数为多项式，化简时要先分解因式.

▸解：(1) $\sqrt{125}=\sqrt{25\times 5}=\sqrt{25}\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$.

(2) $\sqrt{(-7)\times(-14)}=\sqrt{7\times 14}=\sqrt{2\times 7^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{7^2}=7\sqrt{2}$.

(3) $\sqrt{36^2+48^2}=\sqrt{(12\times 3)^2+(12\times 4)^2}=\sqrt{12^2\times(3^2+4^2)}=\sqrt{12^2}\times\sqrt{25}=12\times 5=60$.

(4) $\sqrt{m^3n^5}=\sqrt{m^2n^4\cdot mn}=\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{n^4}\cdot\sqrt{mn}=mn^2\sqrt{mn}$.

(5) $\sqrt{0.49x^5y^6}=\sqrt{0.7^2(x^2)^2(y^3)^2\cdot x}$

$=\sqrt{0.7^2(x^2)^2(y^3)^2}\cdot\sqrt{x}$

$=0.7x^2y^3\sqrt{x}$.

(6) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-a^2+b^2)}$

$=\sqrt{2a^2\cdot 2b^2}=2ab$.

(7) $\sqrt{4y^5-4xy^4+x^2y^3}$

$=\sqrt{y^3(4y^2-4xy+x^2)}$

$=\sqrt{y^3(2y-x)^2}$

$=y(2y-x)\sqrt{y}$.

点方法

在逆用二次根式的乘法法则即积的算术平方根的性质时，要注意以下两点：（1）注意被开方数（式）的范围；（2）注意被开方数（式）一定是乘积的形式，不要出现“$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$”这样的错误.

3. 化简：

(1) $\sqrt{(-49)\times(-81)}$；

(2) $\sqrt{32x^4y^4z}(z\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{36(x-y)^3}(x>y)$；

(4) $-3\sqrt{4m^4+4m^2n^2}$ $(m\geqslant 0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度 2：利用积的算术平方根确定字母的取值范围

例 4 使等式 $\sqrt{(x+1)(x-1)}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ 成立的条件是_____.

导引：根据积的算术平方根的公式成立的条件列不等式组 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$.

▶答案：$x\geqslant 1$

误区

运用积的算术平方根性质时一定要注意公式成立的条件“$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$”，不能出现 $\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$ 的错误.

考查角度 3：利用二次根式的乘法法则进行较复杂的二次根式乘法运算

例 5 计算：

(1) $\sqrt{8}\times\sqrt{15}\times\sqrt{20}$；(2) $-5\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}\times 3\sqrt{54}$；

(3) $\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{\frac{b}{125a}}(a>0,b\geqslant 0)$.

导引：二次根式乘法运算化简的结果应具备：没有二次根式的乘法运算，且将二次根式被开方数（式）中能开得尽方的因数（式）从根号中开出来.

▶解：（1）方法一：$\sqrt{8}\times\sqrt{15}\times\sqrt{20}=\sqrt{8\times15\times20}=\sqrt{2^5\times5^2\times3}=\sqrt{(2^2\times5)^2\times6}=20\sqrt{6}$；

方法二：$\sqrt{8}\times\sqrt{15}\times\sqrt{20}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}=(\sqrt{4}\times\sqrt{4})\times(\sqrt{5}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})=(\sqrt{4})^2\times(\sqrt{5})^2\times\sqrt{2\times3}=4\times5\times\sqrt{6}=20\sqrt{6}$.

（2）$-5\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{1\frac{1}{4}}\times 3\sqrt{54}$

$=-15\sqrt{\frac{8}{27}\times\frac{5}{4}\times54}=-15\sqrt{20}$

$=-15\times\sqrt{2^2\times5}=-30\sqrt{5}$.

（3）$\sqrt{5ab}\cdot\sqrt{\frac{b}{125a}}=\sqrt{5ab\cdot\frac{b}{125a}}=\sqrt{\frac{b^2}{25}}=\frac{b}{5}$.

技巧

二次根式的乘法运算过程的实质是二次根式的乘法法则 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）的正用与逆用的一个综合过程，它不仅能简单地将两个被开方数相乘，而且能将所得的积化简.

4. 若 $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{3+x}$，则 x 的取值范围是_____.

5. 计算：

(1) $-4\sqrt{27}\times\left(-3\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\times 4\sqrt{10}$；

(2) $\frac{1}{3}\sqrt{30}\times 40\sqrt{\frac{1}{2}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$；

(3) $\sqrt{12xy}\cdot\sqrt{\frac{x^2y}{3}}(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 二次根式的除法(重点)

点知识

1. **法则**:两个二次根式相除,把被开方数相除,根指数不变,即$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$.

要点精析

(1)法则中的被开方数a,b既可以是数,也可以是代数式,但都必须是非负的且b不为0;

(2)当二次根式根号外有因数(式)时,可类比单项式除以单项式的法则进行运算,将根号外的因数(式)之商作为商的根号外因数(式),被开方数(式)之商作为被开方数(式).

2. **易错警示**:

(1)在$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$中,特别注意$b>0$,若$b=0$,则式子无意义;

(2)二次根式的运算结果要化到最简;

(3)如果被开方数是带分数,应先将它化成假分数,以免出现类似$\sqrt{4\frac{1}{2}}=\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$这样的错误;

(4)如果是几个二次根式相除,应按除法法则依次计算,也可以把除法转化为乘法来计算.

拨考向

考查角度:利用二次根式的除法法则进行二次根式的除法运算

例6 计算:

(1)$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$;(2)$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$;(3)$\sqrt{4(a-1)^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a-1}{b}}\right)(a>1,b>0)$.

导引:(1)直接利用二次根式的除法法则进行计算;(2)进行计算时需先把带分数化成假分数;(3)要注意结果的符号.

▶解:(1)$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

(2)$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\div\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times 6}=3$.

(3)$\sqrt{4(a-1)^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a-1}{b}}\right)$

$=-\sqrt{4(a-1)^3b\div\frac{a-1}{b}}=-\sqrt{4(a-1)^3b\cdot\frac{b}{a-1}}$

$=-\sqrt{4(a-1)^2b^2}=-2b(a-1)$.

点方法

利用二次根式的除法法则进行计算,被开方数相除时,可以用“除以一个不为零的数等于乘这个数的倒数”进行约分、化简.

6. 计算:

(1)$-\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{5}{54}}$;

(2)$\frac{\sqrt{78a}}{\sqrt{39a}}(a>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点4 商的算术平方根(重点)

点知识

1. 商的算术平方根的性质:把二次根式的除法法则反过来,得:$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$. 这就是商的算术平方根的性质.

语言叙述:商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根(被除式是非负数,除式是正数).

要点精析

(1)商的算术平方根的性质的实质是逆用二次根式的除法法则;

(2)应用商的算术平方根的性质的前提是商中被除式是非负数,除式是正数;

(3)商的算术平方根的性质的作用是化简二次根式,将分母中的根号化去.

2. **拓展**:当分母是$\sqrt{a}$或$b\sqrt{a}$的形式时,分子与分母同乘$\sqrt{a}$.

拓考向

考查角度1:利用商的算术平方根进行二次根式的化简

例7 将下列各式化简:

(1)$\sqrt{1\frac{7}{9}}$; (2)$\sqrt{\frac{1}{32}}$; (3)$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}(a>0)$;

(4)$\frac{xy}{x-y}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}}(x>y>0)$.

导引:(1)先将带分数化为假分数,再应用商的算术平方根的性质化简.(2)需要将分子、分母同乘2,将分母化成一个完全平方数,然后应用商的算术平方根的性质化简.(3)**方法一**:先用商的算术平方根的性质化简,再分母有理化;**方法二**:先将被开方数的分子、分母同乘a,再应用商的算术平方根的性质进行化简.(4)将被开方数的分子分解因式,并且分子、分母同乘xy,确保分母开方后不含根号.

▶解:(1)$\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$.

(2)$\sqrt{\frac{1}{32}}=\sqrt{\frac{2}{64}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

(3)方法一:$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}=a\cdot\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{a^3}}=a\cdot\frac{2\sqrt{7}}{a\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{a}}=\frac{2}{a}\sqrt{7a}$.

方法二:$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}=a\sqrt{\frac{2^2\times 7}{a^2\cdot a}}=a\sqrt{\frac{2^2\times 7\times a}{a^2\cdot a^2}}=a\cdot\frac{2\sqrt{7a}}{a^2}=\frac{2}{a}\sqrt{7a}$.

(4)$\frac{xy}{x-y}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}}=\frac{xy}{x-y}\cdot\sqrt{\frac{xy(x-y)^2}{x^2y^2}}=\frac{xy}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}\sqrt{xy}=\sqrt{xy}$.

7. 化简:

(1)$\sqrt{\frac{2}{5}}$;

(2)$\sqrt{1\frac{1}{7}}$;

(3)$3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

(4)$\sqrt{\frac{b}{2a}}(a>0,b\geqslant 0)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

利用商的算术平方根的性质化简二次根式的方法：（1）若被开方数（式）的分母是一个完全平方数（式），则可以直接利用商的算术平方根的性质，先将分子、分母分别开平方，然后求商；（2）若被开方数（式）的分母不是完全平方数（式），可根据分式的基本性质，先将分式的分子、分母同时乘一个不等于0的数或整式，使分母变成一个完全平方数（式），然后利用商的算术平方根的性质进行化简.

考查角度2：化去分母中的根号

例8 去掉下列分母中的根号：

$(1)\frac{3}{\sqrt{3}}$；$(2)\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}$；$(3)\frac{2}{\sqrt{2ab}}(ab>0)$；$(4)\frac{8}{\sqrt{mn}}(mn>0)$.

导引：要想将分母有理化，其实质是将分子、分母同乘一个适当的数（式），使分母转化为$(\sqrt{a})^2$ $(a\geqslant 0)$或$\sqrt{a^2}$的形式.

(1)分子、分母同乘$\sqrt{3}$；

(2)有多种方法：可以先运用二次根式的除法法则，再把被开方数进行化简，然后进行开方运算；也可以先分别把分子、分母进行化简，再将分子、分母同乘一个适当的数，化去分母中的根式；

(3)分子、分母同乘$\sqrt{2ab}$；

(4)分子、分母同乘$\sqrt{mn}$.

▶解：$(1)\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

(2)方法一：$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{12}{32}}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times 2}{8\times 2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$；

方法二：$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{4\times 3}}{\sqrt{16\times 2}}=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{\sqrt{16}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

$(3)\frac{2}{\sqrt{2ab}}=\frac{2\times\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2ab}}=\frac{2\sqrt{2ab}}{2ab}=\frac{\sqrt{2ab}}{ab}$.

$(4)\frac{8}{\sqrt{mn}}=\frac{8\times\sqrt{mn}}{\sqrt{mn}\cdot\sqrt{mn}}=\frac{8\sqrt{mn}}{mn}$.

点方法

本题运用了**分母有理化法**. 分母有理化一般经历如下三步："一移"，即将分子、分母中能开得尽方的因数（式）开方后移到根号外；"二乘"，即将分子、分母同乘分母的有理化因数（式）；"三化"，即化简计算.

8. 化去下列各式中分母中的根号：

$(1)\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$；$(2)\frac{2}{\sqrt{18}}$；

$(3)\frac{3}{\sqrt{6x}}(x>0)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点5 最简二次根式(重点)

点知识

1. **定义**：如果一个二次根式满足以下三个条件，那么这个二次根式叫做最简二次根式：
   (1)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；
   (2)被开方数中不含分母；
   (3)分母中不含有根号.

要点精析

最简二次根式必须满足：
(1)被开方数中每个因数(式)的指数都小于2，即每个因数(式)的指数都是1；
(2)被开方数不含分母；
(3)分母中不含有根号是指分母是整数或整式.

2. **二次根式化简成最简二次根式的步骤**：
   (1)“一分”，即利用因数(式)分解的方法把被开方数的分子、分母都化成质因数(式)的幂的乘积形式；
   (2)“二移”，即把能开得尽方的因数(式)用它的算术平方根代替，移到根号外，其中把根号内的分母中的因数(式)移到根号外时，要注意应写在分母的位置上；
   (3)“三化”，即化去被开方数中的分母.

3. **易错警示**：
   (1)分母中含有根号的式子不是最简二次根式；
   (2)二次根式化简时，容易忽视隐含条件，将负数移到根号外.

拨考向

考查角度1：识别最简二次根式

例9 下列各式中，哪些是最简二次根式？哪些不是最简二次根式？不是最简二次根式的，请说明理由.

(1)$\sqrt{\frac{1}{3}}$；(2)$\sqrt{x^2+1}$；(3)$\sqrt{0.2}$；(4)$\sqrt{24x}(x\geqslant 0)$；

(5)$\sqrt{x^3+6x^2+9x}(x\geqslant 0)$；(6)$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

导引：根据最简二次根式的定义进行判断.

▶解：(1)不是最简二次根式，因为被开方数中含有分母.

(2)是最简二次根式.

(3)不是最简二次根式，因为被开方数是小数(即含有分母).

(4)不是最简二次根式，因为被开方数$24x$中含有能开得尽方的因数4，$4=2^2$.

(5)不是最简二次根式，因为$x^3+6x^2+9x=x(x^2+6x+9)=x(x+3)^2$，被开方数中含有能开得尽方的因式.

(6)不是最简二次根式，因为分母中含有二次根式.

误区

判断最简二次根式有两大思维误区：(1)是被开方数中不含分母而不是式子不含分母，如$\frac{\sqrt{2}}{3}$有分母但$\frac{\sqrt{2}}{3}$是最简二次根式；(2)是被开方数中不能含有开得尽方的因数或因式而不是不能含有偶次幂，如$\sqrt{x^2+y^2}$是最简二次根式.

9. 在二次根式$\sqrt{48}$，$\sqrt{3m^2}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{a}$，$\sqrt{\frac{x}{9}}$，$\sqrt{x^2+2}$，$\sqrt{a^2-2ab+b^2}$，$\sqrt{\frac{a^2-1}{5}}$中，最简二次根式的个数是(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2:把二次根式化成最简二次根式

例10 把下列各式化成最简二次根式.

(1) $\sqrt{0.3}$; (2) $-3\sqrt{\frac{1}{3}}$; (3) $\sqrt{41^2-40^2}$;

(4) $\sqrt{\frac{a+1}{a^2b}}(a>0,b>0)$.

导引:利用二次根式的性质,将被开方数中的小数(分数)进行转化,且不改变二次根式的值.若被开方数中有字母,要注意字母的取值范围.

▶解:(1) $\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{3\times10}{10\times10}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

(2) $-3\sqrt{\frac{1}{3}}=-3\sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}}=-\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{(41+40)(41-40)}=\sqrt{81}\times\sqrt{1}=9$.

(4)因为 $a>0,b>0$,

所以 $\sqrt{\frac{a+1}{a^2b}}=\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b(a+1)}}{\sqrt{a^2b^2}}=\frac{\sqrt{ab+b}}{ab}$.

点方法

解决此类题目时,根据最简二次根式的概念,先将被开方数中的小数转化成分数,利用分数的基本性质将分母化为完全平方数,再将其算术平方根移到根号外,也可利用二次根式的除法法则直接运算,最后将分母中的二次根式化成整数或整式.

10. 把下列各式化成最简二次根式.

(1) $5\sqrt{12}$;

(2) $6\sqrt{\frac{3}{8}}$;

(3) $\sqrt{50a^2b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$;

(4) $\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}(m<0,n<0)$.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1:利用二次根式的性质把二次根式根号外的因式移到根号内

例11 把下列各式中根号外的因数(式)移到根号内.

(1) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$; (2) $-3\sqrt{2}$; (3) $-2a\sqrt{\frac{1}{2a}}$; (4) $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

导引:将根号外的因数(式)移到根号内时,可以运用 $a=\sqrt{a^2}(a\geqslant0)$ 和 $a=-\sqrt{a^2}(a<0)$,将根号外的因数(式)改写成完全平方的形式作为被开方数(式),然后运用二次根式的乘法法则计算.注意移到根号内的因数(式)必须是非负的,有些字母的取值范围需由隐含条件得出,如(3)(4)两题.

举一反三训练

(答案见291页)

11. 把下列各式中根号外的因数(式)移到根号内.

(1) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$;

(2) $-3\sqrt{\frac{4}{5}}$;

(3) $(2-x)\sqrt{\frac{1}{x-2}}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解：(1)$5\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{5^2\times\frac{3}{5}}=\sqrt{15}$.

(2)$-3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=-\sqrt{3^2\times2}=-\sqrt{18}$.

(3)$\because\frac{1}{2a}>0$，$\therefore a>0$，

$\therefore -2a\sqrt{\frac{1}{2a}}=-\sqrt{(2a)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2a}}=-\sqrt{(2a)^2\cdot\frac{1}{2a}}=-\sqrt{2a}$.

(4)$\because -\frac{1}{a}>0$，$\therefore a<0$，

$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=-\sqrt{-a}$.

易误区

将根号外的因数（式）移到根号内时，应先判断根号外的因数（式）是大于0、等于0还是小于0，若大于或等于0，平方后直接移；若小于0，移后要在根号外加负号. 不要忽视隐含的字母因式为负数的情况，将根号外的负字母因式移到根号内时，要在根号外加“-”号.

拨尖角度2：巧借二次根式的性质比较二次根式的大小

例12 比较大小：

(1)$5\sqrt{3}$与$3\sqrt{5}$；(2)$-2\sqrt{11}$与$-3\sqrt{5}$；

(3)$3-6\sqrt{5}$与$3-5\sqrt{6}$.

导引：利用二次根式的性质和乘法公式先把根号外的因数移到根号内，再比较被开方数的大小.

▶解：(1)$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{75}$，

$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$.

$\because 75>45$，$\therefore\sqrt{75}>\sqrt{45}$. $\therefore 5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$.

(2)$-2\sqrt{11}=-\sqrt{2^2\times11}=-\sqrt{44}$，

$-3\sqrt{5}=-\sqrt{3^2\times5}=-\sqrt{45}$.

$\because 44<45$，$\therefore\sqrt{44}<\sqrt{45}$.

$\therefore -\sqrt{44}>-\sqrt{45}$，即$-2\sqrt{11}>-3\sqrt{5}$.

(3)$3-6\sqrt{5}=3-\sqrt{6^2\times5}=3-\sqrt{180}$，

$3-5\sqrt{6}=3-\sqrt{5^2\times6}=3-\sqrt{150}$.

$\because 180>150$，$\therefore -\sqrt{180}<-\sqrt{150}$.

$\therefore 3-\sqrt{180}<3-\sqrt{150}$，

即$3-6\sqrt{5}<3-5\sqrt{6}$.

二次根式比较大小的方法

12. 比较大小：

(1)$3\sqrt{2}$与$2\sqrt{3}$；

(2)$7-3\sqrt{6}$与$7-6\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拨技巧

比较两个二次根式大小的方法：可以转化成比较两个被开方数的大小，即可以将根号外的正因数平方后移到根号内，计算出被开方数后，再比较被开方数的大小，被开方数大的，其算术平方根也大. 如果是两个正数相比较，也可以采用**平方法**，如（1）题也可采用**平方法**.

拨尖角度3：利用二次根式的乘除运算法则进行二次根式的乘除混合运算

例13 计算：

(1) $-\sqrt{18}\times 2\sqrt{\frac{4}{9}}\div\left(-\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{3}}\right)$；

(2) $\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}\ (a>0,b>0)$.

导引：进行二次根式的乘除混合运算时，可先把除法转化为乘法，再根据二次根式的乘法法则进行计算.

▶解：(1)原式 $=\left(2\div\frac{2}{3}\right)\sqrt{18\times\frac{4}{9}\div\frac{4}{3}}$

$=\left(2\times\frac{3}{2}\right)\sqrt{18\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}}$

$=3\sqrt{6}$.

(2)原式 $=\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$

$=\sqrt{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{ab}=\frac{\sqrt{ab}}{a^2b}$.

点方法

二次根式乘除的混合运算与整式乘除的混合运算方法相同，整式乘除的一些法则、公式在二次根式乘除中同样适用，在运算中要注意符号和顺序.

说明：对于二次根式的乘除混合运算，也可先对每一个二次根式进行化简，再计算，能使计算简便.

拨尖角度4：二次根式中的规律探究（拓展点）

例14 先观察下列等式，再回答问题：

① $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1\frac{1}{2}$；

② $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=1\frac{1}{6}$；

13. 计算：

(1) $\sqrt{2\frac{1}{2}}\div 3\sqrt{28}\times\left(-5\sqrt{2\frac{2}{7}}\right)$；

(2) $2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{6x^2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{3a+3b}}\div\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{b}}\ (a>b>0,x^2>0)$.

14. 观察下列各式及其验证过程：

$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，

验证：

$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\times3+2}{3}}$

$=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$；

$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

③$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=1\frac{1}{12}$.

（1）请根据上面三个等式提供的信息，猜想$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$的结果；

（2）请按照上面各等式反映的规律，试写出用 n（n 为正整数）表示的等式.

导引：由题中给出的三个等式的数字特征，可类比猜想出（1）（2）两题的结果.

▶解：（1）$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}=1\frac{1}{20}$.

（2）$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n(n+1)}$.

探规律

本例利用**探究规律法**将蕴含在数中内在的排列规律，通过猜想、探究，最后将问题的结果用含字母的式子表示出来.

验证：$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times8+3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$.

（1）按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想$\sqrt{4+\frac{4}{15}}$的变形结果并进行验证.

（2）针对上述各式反映的规律，写出用 n（n 为大于 1 的整数）表示的等式并给予验证.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 291 页）

基础巩固练

1. ［中考 · 淮安］下列式子为最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{12}$　　C. $\sqrt{a^2}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{a}}$

2. 下列根式中化简正确的是（　　）

A. $\sqrt{36a}\cdot\sqrt{a}=6a$　　B. $\sqrt{7a^2}=a\sqrt{7a}$

C. $\sqrt{5a^2b^3}=ab\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

3. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{6}{x}}$是整数，那么整数 x 的值是（　　）

A. 6 和 3　　B. 3 和 1

C. 2 和 18　　D. 只有 18

4. 如果$\sqrt{x^3+3x^2}=-x\sqrt{x+3}$，那么 x 的取值范围是（　　）

A. $x\leqslant0$　　B. $x\geqslant-3$

C. $-3\leqslant x\leqslant0$　　D. $x\leqslant-3$ 或 $x\geqslant0$

5. 计算：$3\sqrt{5}\times2\sqrt{10}=$_____.

6. 计算：$\sqrt{45}\div\sqrt{20}=$_____.

7. 化简：（1）$\frac{6}{\sqrt{6}}=$_____；

（2）$\frac{1}{\sqrt{12}}=$_____；

（3）$\frac{10}{3\sqrt{5}}=$_____；

（4）$\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{12ab}}=$_____$(a>0,b>0)$.

8. 计算下列各题：

（1）$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{8}$；（2）$-4\sqrt{15}\times\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$；

（3）$\sqrt{72}\div\sqrt{6}$；（4）$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知三角形的一边长为 $\sqrt{42}$ cm，这边上的高为 $\sqrt{30}$ cm，求此三角形的面积 S.

10. 把下列各式化为最简二次根式：

(1) $\sqrt{4\frac{2}{3}}$；(2) $\sqrt{\frac{5}{2a}}(a>0)$；

(3) $\sqrt{\frac{8y}{25x^2}}(x<0,y\geqslant 0)$；(4) $9\sqrt{\frac{2}{3}}$.

能力提升练

11. 计算 $\sqrt{(-8)^{2\,020}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{2\,019}}=$_____.

12. 能使得 $\sqrt{(3-a)(a+1)}=\sqrt{3-a}\cdot\sqrt{a+1}$ 成立的所有整数 a 的和是_____.

13. 设 $\sqrt{2}=a$，$\sqrt{3}=b$，用含 a，b 的式子表示 $\sqrt{3.375}$ 为_____.

14. 化简二次根式 $\sqrt{-a^3}$ 的正确结果是_____.

15. 计算：

(1) $5\sqrt{\frac{8}{27}}\cdot\sqrt{\frac{8}{27}}\cdot 3\sqrt{54}$；

(2) $2\sqrt{1\frac{1}{2}}\div 5\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{12}$；

(3) $9\sqrt{45}\div 3\sqrt{2\frac{1}{2}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$；

(4) $a^2\sqrt{ab}\cdot b\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{\frac{9b^2}{a}}(a>0,b>0)$.

思维拓展练

16. 已知 $\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$，且 x 为偶数，求 $(1+x)\cdot\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$ 的值.

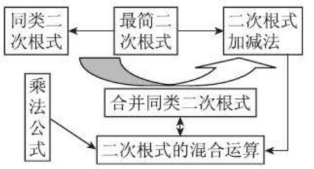
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.3 二次根式的加减

热门话题
- 同类二次根式（关键）
- 二次根式的加减法（重点）
- 二次根式的混合运算（难点）

话题链接



1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 同类二次根式

点知识

1. **同类二次根式的定义**：
经过化简后，被开方数相同的二次根式，叫做同类二次根式.

要点精析

判断同类二次根式的步骤：(1) 先化为最简二次根式；(2) 看被开方数是否相同.

2. **合并同类二次根式的方法**：与合并同类项相类似，将根号外的因数或因式相加，根指数和被开方数不变，

即：$a\sqrt{m}+b\sqrt{m}=(a+b)\sqrt{m}(m\geqslant 0)$.

3. **易错警示**：判断“同类二次根式”的前提是先化为最简二次根式，如$\sqrt{3}$与$\sqrt{12}$，化简后可知它们是同类二次根式.

拨考向

典例剖析

考查角度 1：识别同类二次根式

例 1 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{75}$，$-\sqrt{1\frac{11}{16}}$，$\sqrt{3}$，$x\sqrt{\frac{2x}{y}}(x>0,y>0)$，$3\sqrt{\frac{32}{xy}}(x>0,y>0)$，$\frac{x}{3\sqrt{3}}$，$\frac{1}{3}\sqrt{x^3y}(x>0,y>0)$.

导引：先化二次根式为最简二次根式. 最简二次根式只要被开方数相同，就是同类二次根式，与根号外面的因式无关.

▶解：$2\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$，$-\sqrt{1\frac{11}{16}}=-\sqrt{\frac{27}{16}}=-\frac{3}{4}\sqrt{3}$，$x\sqrt{\frac{2x}{y}}=\frac{x}{y}\sqrt{2xy}$，$3\sqrt{\frac{32}{xy}}=\frac{12}{xy}\sqrt{2xy}$，$\frac{x}{3\sqrt{3}}=\frac{x}{9}\sqrt{3}$，$\frac{1}{3}\sqrt{x^3y}=\frac{1}{3}x\sqrt{xy}$，

$\therefore 2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{75}$，$-\sqrt{1\frac{11}{16}}$，$\sqrt{3}$，$\frac{x}{3\sqrt{3}}$是同类二次根式，

$x\sqrt{\frac{2x}{y}}$，$3\sqrt{\frac{32}{xy}}$是同类二次根式.

举一反三训练

（答案见 292 页）

1. 下列各组里的二次根式是不是同类二次根式？

(1) $\sqrt{63}$，$\sqrt{28}$；

(2) $\sqrt{12}$，$\sqrt{27}$，$4\sqrt{\frac{1}{3}}$；

(3) $\sqrt{4x^3}$，$2\sqrt{2x}(x\geqslant 0)$；

(4) $\sqrt{18}$，$\sqrt{50}$，$2\sqrt{\frac{2}{9}}$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

识别同类二次根式的方法： 先化二次根式为最简二次根式，最简二次根式只要被开方数相同，就是同类二次根式，与根号外面的因式无关.

考查角度2：根据同类二次根式的概念求值

例2 若最简二次根式 $\sqrt{3a-4}$ 和 $\sqrt{a+8}$ 是同类二次根式，则 a 的值是_____.

导引： 由题意可知：$3a-4=a+8$，解得：$a=6$.

▶答案：6

点方法

解答这类问题的一般思路是根据被开方数相同列方程.

考查角度3：合并同类二次根式

例3 计算：

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{12}-\sqrt{48}$；

(2) $\sqrt{8}+3\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

导引： (1) 将原式后两项化为最简二次根式后，合并同类二次根式即可得到结果；(2) 将原式前三项化为最简二次根式后，合并同类二次根式即可得到结果.

▶解：(1) 原式 $=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=4\sqrt{3}$；

(2) 原式 $=2\sqrt{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

诊误区

(1) 合并结果中容易漏掉二次根式部分；(2) 合并后根号外的因数是分数的要写成假分数形式，不能写成带分数形式.

2. 如果最简二次根式 $\sqrt{7a+b}$ 与 $\sqrt[b+3]{6a-b}$ 可以合并，求 a，b 的值.

3. 计算下列各题：

(1) $2\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{48}$；

(2) $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}(x>0)$.

知识点2 二次根式的加减

点知识

1. **法则：** 二次根式加减时，先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

2. **二次根式加减运算的步骤：**

(1) **“化”：** 将每个二次根式都化成最简二次根式；

(2) **“找”：** 找出被开方数相同的最简二次根式；

(3) **“并”：** 将被开方数相同的最简二次根式合并成一项.

3. 整式加、减运算中的交换律、结合律及去括号、添括号法则在二次根式的运算中仍然适用.

4. **易错警示：** (1) 合并同类二次根式时，根号外

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的因数(式)与因数(式)合并,剩下的部分保持不变,一定不要丢掉;(2)二次根式进行加减运算时,不能合并的二次根式不能丢掉,因为它们也是结果的一部分;(3)二次根式根号外的因数是带分数的要化为假分数.

拨考向 ▶▶▶

考查角度 1:计算不含字母的二次根式的加减

例 4 计算:$\left(8\sqrt{1\frac{1}{8}}-2\sqrt{24.5}\right)-\left(3\sqrt{4.5}-2\sqrt{12.5}+3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

导引:题目中的每个二次根式都不是最简二次根式,因此应按化简、去括号、合并的步骤进行.

▶解:原式 $=8\times\frac{3}{4}\sqrt{2}-2\times\frac{7}{2}\sqrt{2}-3\times\frac{3}{2}\sqrt{2}+2\times\frac{5}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$=6\sqrt{2}-7\sqrt{2}-\frac{9}{2}\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$=\left(6-7-\frac{9}{2}+5\right)\sqrt{2}-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$.

点方法

二次根式加减运算的技巧:

(1)将每个二次根式都化为最简二次根式,若被开方数中含有带分数,则要先化成假分数;若含有小数,则要化成分数,进而化为最简二次根式.

(2)原式中若有括号,要先去括号,再应用加法交换律、结合律将被开方数相同的二次根式进行合并.

考查角度 2:计算含字母的二次根式的加减

例 5 计算:$a\sqrt{8a}-2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}}+3\sqrt{2a^3}\ (a>0)$.

导引:先把各二次根式化为最简二次根式,再合并同类二次根式即可.

▶解:原式 $=2a\sqrt{2a}-\frac{1}{2}a\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}$

$=\left(2a-\frac{1}{2}a+3a\right)\sqrt{2a}$

$=\frac{9a}{2}\sqrt{2a}$.

点方法

先把各个二次根式化成最简二次根式,再把被开方数相同的二次根式进行合并,合并方法为系数相加减,根式不变,这是解答此题的关键.但要注意根号外的因数为带分数时要化为假分数.

4. 计算:

(1)$3\sqrt{18}+\frac{1}{5}\sqrt{50}-4\sqrt{\frac{1}{2}}$;

(2)$\sqrt{0.75}-(\sqrt{3}+\sqrt{3.5})$;

(3)$\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{12}-\sqrt{18}\right)$.

5. 计算:

(1)$x\sqrt{\frac{3y}{x}}-\frac{1}{x}\sqrt{27x^3y}+2y\sqrt{\frac{3x}{y}}\ (x>0,y>0)$;

(2)$\left(a\sqrt{\frac{1}{a}}+4\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{\frac{a}{4}}-b\sqrt{\frac{1}{b}}\right)\ (a>0,b>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3：二次根式的加减在生活中的应用

例6 等腰三角形的两条边长分别为$2\sqrt{3}$和$5\sqrt{2}$，求这个三角形的周长.

导引：等腰三角形的边可能是腰，也可能是底边，因而本题应分两种情况：①腰长为$2\sqrt{3}$；②腰长为$5\sqrt{2}$进行讨论，看是否满足三角形的三边关系，不满足的舍去，满足的算出三角形的周长即可.

▶解：①若腰长为$2\sqrt{3}$，则有$2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$，故此情况不合题意，舍去；

②若腰长为$5\sqrt{2}$，则三角形的周长$=5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+2\sqrt{3}=10\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

误区

解决本题的关键是注意对等腰三角形的边进行讨论，还要考虑三角形三边关系.

6. 若长方形相邻两边的长分别是$\sqrt{20}$ cm和$\sqrt{125}$ cm，求它的周长.

知识点3 二次根式的混合运算

点知识

1. **二次根式的混合运算：**

(1) **运算种类：**二次根式的加、减、乘、除、乘方(或开方)的混合运算.

(2) **运算顺序：**先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，如果有括号就先算括号里面的.

要点精析

(1) 二次根式混合运算的结果应写成最简二次根式(或整式)的形式.

(2) 进行二次根式的开方运算时应使开出的因数(式)是非负数(式).

2. **二次根式的运算律：**

(1) 实数运算中的运算律(交换律、结合律、分配律)和整式乘法中的乘法公式(平方差公式和完全平方公式)在二次根式的运算中仍然适用.

(2) 在进行计算时，能用乘法公式的要尽量使用乘法公式，同时注意合理地运用运算律.

3. **易错警示：**

(1) 对同类二次根式理解不透彻导致合并不彻底.

(2) 在计算过程中，忽略已知条件中隐含的字母取值范围，导致符号出现错误.

拨考向

考查角度1：利用二次根式的运算法则进行二次根式的混合运算

例7 计算：

(1) $(\sqrt{6}-2\sqrt{15})\times\sqrt{3}-6\sqrt{\frac{1}{2}}$；

(2) $\sqrt{48}\div\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{12}+\sqrt{24}$；

7. 计算：$\left(\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}\right)\div\sqrt{xy}$ $(x>0,y>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$\left(\sqrt{48}+\frac{1}{5}\sqrt{75}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{27}$.

导引:(1)先利用二次根式的乘法法则运算,然后化简后合并即可;(2)根据二次根式的乘除法法则运算.(3)先化简二次根式,再合并同类二次根式,最后计算除法即可求解.

▶解:(1)原式 $=\sqrt{6\times3}-2\sqrt{15\times3}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}-6\sqrt{5}-3\sqrt{2}=-6\sqrt{5}$;

(2)原式 $=\sqrt{48\div3}-\sqrt{\frac{1}{2}\times12}+2\sqrt{6}=4-\sqrt{6}+2\sqrt{6}=4+\sqrt{6}$;

(3)原式 $=(4\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3})\div3\sqrt{3}=4\sqrt{3}\div3\sqrt{3}=1\frac{1}{3}$.

点方法

学习二次根式的混合运算应注意以下几点:①与有理数的混合运算一致,运算顺序先乘方再乘除,最后加减,有括号的先算括号里面的.②在运算中每个根式可以看成是一个“单项式”.

考查角度 2:利用运算律和乘法公式进行二次根式的混合运算

例 8 计算:

(1)$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$;

(2)$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{3}-2)^2$.

导引:(1)先利用多项式乘法公式展开,然后合并即可;

(2)利用平方差公式和完全平方公式计算.

▶解:(1)原式 $=2\sqrt{6}-6+6-3\sqrt{6}=-\sqrt{6}$;

(2)原式 $=2-1-(3-4\sqrt{3}+4)=1-7+4\sqrt{3}=4\sqrt{3}-6$.

点方法

灵活运用乘法公式和运算律可简化运算步骤,并且运算结果不易出错,这是乘法公式和运算律在二次根式的混合运算中的优势所在.

考查角度 3:二次根式的混合运算在生活中的应用

例 9 已知在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,求:

(1)Rt$\triangle ABC$ 的面积;

(2)斜边 AB 的长.

导引:(1)根据三角形的面积公式可以解答本题;

(2)根据勾股定理可以求得斜边 AB 的长.

8. 计算:

(1)$(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

(2)$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(2\sqrt{6}+5)$.

9. 已知一个长方形的长为$(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm,宽为$(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$ cm,请分别求出它的面积和对角线的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：(1)∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

∴ Rt△ABC 的面积是：$\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2}=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$；

(2)∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

∴ $AB=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}+2}$

$=\sqrt{10}$，

即斜边 AB 的长是 $\sqrt{10}$.

点方法

这类问题需在理解题意的基础上，结合几何知识列出算式，再根据二次根式混合运算的一般步骤进行运算，能运用乘法公式的尽量运用.

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度 1：巧用整体思想求代数式的值

例 10 已知 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，求 x^3y+xy^3 的值.

导引：如果直接将 x，y 的值代入计算，显然比较麻烦，但注意到 x^3y+xy^3 可以化为 $xy[(x+y)^2-2xy]$，将 $x+y$，xy 均作为一个整体代入求值，可简化计算过程.

▶解：∵ $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

∴ $xy=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$，$x+y=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}$.

∴ $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=xy[(x+y)^2-2xy]=1\times[(2\sqrt{3})^2-2\times1]=10$.

点方法

用整体思想求代数式的值的方法： 求关于 x，y 的对称式（即交换两个字母的位置后，代数式不变）的值，一般先求出 $x+y$，xy，$x-y$，$\dfrac{x}{y}$ 等的值，然后将所求对称式进行适当变形，使之成为只含有 $x+y$，xy，$x-y$，$\dfrac{x}{y}$ 等的式子，最后将其值整体代入即可求解.

举一反三训练

☞(答案见 293 页)

10. 已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，试求 $y\sqrt{\dfrac{y}{x}}+x\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2：无理数的整数部分、小数部分问题（拓展点）

例 11 设 $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ 的整数部分是 a，小数部分是 b，求 $a^2+(1+\sqrt{7})ab$ 的值.

导引：首先对 $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ 进行化简，然后求得 a、b 的值，最后代入代数式求值即可.

▶解：$\frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$，它的整数部分是 2，

即 $a=2$，则 $b=\frac{3+\sqrt{7}}{2}-2=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$.

则原式 $=4+(1+\sqrt{7})\times 2\times\frac{\sqrt{7}-1}{2}=4+(1+\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)=4+7-1=10$.

点方法

解答这类问题关键是确定无理数的整数部分，可结合相关运算做出判断，小数部分是原数与整数部分的差.

11. 若 $x=5-\sqrt{7}$，其中 x 的整数部分是 a，小数部分是 b，求 $a^2+(3+\sqrt{7})ab$ 的值.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞（答案见 293 页）

基础巩固练

1. 下列二次根式中，与其他三个不是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{98}$

C. $\sqrt{48}$　　D. $\sqrt{50}$

2. 下列运算正确的是（　　）

A. $\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{7}$

B. $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$

C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{3}+2$

D. $\sqrt{a^2-b^2}=a-b$

3. 等腰三角形的边长分别为 $\sqrt{8}$ 和 $6\sqrt{\frac{1}{2}}$，那么这个三角形的周长为（　　）

A. $8\sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$　　B. $7\sqrt{2}$

C. $5\sqrt{2}$ 或 $6\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{2}$

4. 计算 $(3\sqrt{3}-1)^2$ 的结果为（　　）

A. $28-3\sqrt{3}$　　B. $10-3\sqrt{3}$

C. $28-6\sqrt{3}$　　D. $10-6\sqrt{3}$

5. 已知最简二次根式 $\sqrt{2b+1}$ 和 $\sqrt{7-b}$ 是同类二次根式，那么 $b=$_____.

6. 计算 $\sqrt{54}-6\sqrt{\frac{2}{3}}$ 的结果是_____.

7. 计算：$(\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{3})=$_____.

8. 计算：

(1) $\sqrt{48}\div\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{12}+\sqrt{24}$；

(2) $4\sqrt{24}-6\sqrt{54}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(3) $2b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}-\left(4a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)(a>0,b>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 计算：

(1)$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-1)^2$；

(2)$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$.

能力提升练

10. 已知m为实数，则代数式$\sqrt{m+3}-\sqrt{-m^2}-\sqrt{12-4m}$的值为(　　)

A. 0　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 无法确定

11. 已知$m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，则代数式$\sqrt{m^2+n^2-3mn}$的值为_____.

12. 已知a，b为有理数，m，n分别表示$5-\sqrt{7}$的整数部分和小数部分，且$amn+bn^2=1$，则$2a+b=$_____.

13. 已知$a=\sqrt{7}+2$，$b=\sqrt{7}-2$，求下列各式的值：

(1)a^2b+b^2a；

(2)a^2-ab+b^2；

(3)a^2-b^2.

14. 已知$a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，求$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$的值.

【导学号:9937991】

思维拓展练

15. 先阅读下列的解答过程，然后再解答：

形如$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}$的化简，只要我们找到两个正数a、b，使$a+b=m$，$ab=n$，即$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=m$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{n}$，那么便有：$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a>b>0)$.

例如：化简$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

解：首先把$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$化为$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，这里$m=7$，$n=12$，由于$4+3=7$，$4\times3=12$，即$(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2=7$，$\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$.

$\therefore\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

(1)填空：$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=$_____，

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=$_____.

(2)化简：$\sqrt{19-4\sqrt{15}}$.

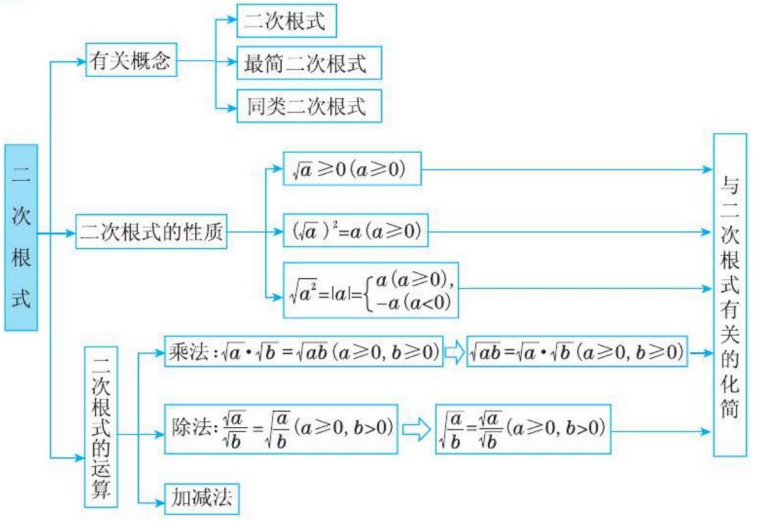
我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末整合与拔高

知识整合

知识结构



核心必知

1. 形如$\sqrt{a}$的二次根式可以看成a的算术平方根，所以被开方数a必须大于或等于0.

2. 二次根式的性质有：①$\sqrt{a}\geqslant 0\,(a\geqslant 0)$；②$\sqrt{a^2}=|a|$；③$(\sqrt{a})^2=a\,(a\geqslant 0)$；④$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；⑤$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geqslant 0,b>0)$.

3. 二次根式乘、除法法则：

(1)二次根式的乘法法则：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，即两个二次根式相乘，根指数不变，相乘的结果是一个二次根式或有理式.

(2)二次根式的除法法则：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,(a\geqslant 0,b>0)$，即二次根式相除，就是把被开方数相除，根指数不变.

4. 二次根式加、减法法则：

先把式子中各二次根式化成最简二次根式，然后再合并同类二次根式.

(1)同类二次根式

一般地，把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式.

(2)合并同类二次根式

把几个同类二次根式合并为一个二次根式就叫做合并同类二次根式.

(3)二次根式加减时，可以先将二次根式化为最简二次根式，再将被开方数相同的进行合并.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题解码

知识专题

专题1 二次根式有意义的条件

链接中考>> 二次根式有意义的条件是二次根式的核心，也是解决很多二次根式问题的隐含条件. 在中考中单独考查较多，有时也与分式进行综合考查. 一般都以选择题形式出现.

例1 [中考·绵阳] 使代数式$\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\sqrt{4-3x}$有意义的整数$x$有(　　)

A. 5个　　B. 4个　　C. 3个　　D. 2个

导引：根据被开方数是非负数，分母不能为零，可得答案.

由题意，得$x+3>0$且$4-3x\geqslant 0$，解得$-3<x\leqslant\frac{4}{3}$，整数有$-2,-1,0,1$，故选B. ▶答案：B

点方法

形如$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子是二次根式，因此二次根式的被开方数a应满足条件$a\geqslant 0$. 解答与二次根式概念有关的问题通常是根据这个条件建立不等式来求.

专题2 二次根式的性质

链接中考>> 二次根式的性质是对二次根式进行化简和计算的关键，特别是二次根式的双重非负性在中考中考查特别多，一般都以填空、选择题的形式出现.

例2 [中考·枣庄] 实数a,b在数轴上对应点的位置如图1所示，化简$|a|+\sqrt{(a-b)^2}$的结果是(　　)

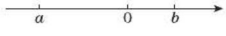


图1

A. $-2a+b$　　B. $2a-b$

C. $-b$　　D. b

导引：直接利用数轴上a,b对应的点的位置得出$a<0,a-b<0$，再利用绝对值以及二次根式的性质化简得出答案. 具体解题过程如下：

由图1可知：$a<0,a-b<0$，则$|a|+\sqrt{(a-b)^2}=-a-(a-b)=-2a+b$. 故选A.

▶答案：A

例3 [中考·荆门] 已知实数m,n满足$|n-2|+\sqrt{m+1}=0$，则$m+2n$的值为_____.

导引：根据非负数的性质即可求出m与n的值.

由题意可知：$n-2=0,m+1=0$，

$\therefore m=-1,n=2$，

$\therefore m+2n=-1+4=3$.

▶答案：3

点方法

初中阶段学习了三个非负数：①$|a|\geqslant 0$；②$a^2\geqslant 0$；③$\sqrt{a}\geqslant 0$（$a\geqslant 0$）. 题目一般是其中两个的和（少数有三个的和）为零，根据非负数的性质，得到方程组，求得方程组的解，再代入求值即可.

专题3 二次根式的运算

链接中考>> 二次根式的运算包括二次根式的加、减、乘、除以及乘方等几种运算，二次根式的运算不仅要考虑运算的法则、运算的顺序和运算律，还要注意与整式的乘法公式相结合应用. 在中考中一般以填空、选择题的形式出现，有的地区也以解答题的形式考查.

例4 [中考·大连] 计算：$(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{48}+2^{-2}$.

▶解：原式$=3+4\sqrt{3}+4-4\sqrt{3}+\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$.

点方法

二次根式的乘法运算中，若式子符合整式的乘法公式的特点，可使用整式的乘法公式，使运算简便.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题4 最简二次根式

链接中考>> 对最简二次根式的识别是最常见的考查形式，关键就是扣住最简二次根式的几个条件. 在中考中一般以选择题的形式出现.

例5 ［中考 · 贵港］下列二次根式中，最简二次根式是(　　)

A. $-\sqrt{2}$　B. $\sqrt{12}$　C. $\sqrt{\frac{1}{5}}$　D. $\sqrt{a^2}$

导引：检查最简二次根式的三个条件是否同时满足，同时满足的就是最简二次根式，否则就不是.

A. 被开方数中不含分母，被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，故A符合题意；B. 被开方数中含能开得尽方的因数或因式，故B不符合题意；C. 被开方数中含分母，故C不符合题意；D. 被开方数中含能开得尽方的因数或因式，故D不符合题意. 故选A.

▶答案：A

点方法

最简二次根式要满足以下几个要求：根号内不含分母，且不含开得尽方的因数或因式，分母中也不含有根号.

思想方法专题

专题5 整体思想

专题解读>> 整体思想就是在数学问题中，对于某些问题，可以从整体角度去思考，即将局部放在整体中去观察分析、探究问题的解决方法，从而使问题得以巧妙地解决. 在二次根式的运算中，凡对称式、倒数式的求值问题经常用到整体思想.

例6 已知 $xy=6, x+y=-5$，求 $x\sqrt{\frac{x}{y}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}$ 的值.

▶解：由题意可知 $x<0, y<0$.

$$\text{原式}=x\cdot\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}+y\cdot\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}}$$

$$=\frac{x\sqrt{xy}}{-y}+\frac{y\sqrt{xy}}{-x}$$

$$=-\sqrt{xy}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$=-\sqrt{xy}\cdot\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}.$$

将 $xy=6, x+y=-5$ 代入，则原式 $=-\frac{13\sqrt{6}}{6}$.

点方法

如果把 $x+y=-5$，$xy=6$ 联立成方程组解出 x，y 的值再代入求解，显然计算相当繁琐，因此可以考虑用**整体思想**求解.

专题6 数形结合思想

专题解读>> 数形结合思想就是根据数学问题的题设和结论之间的内在联系，既分析其数量关系，又揭示其几何意义，使数量关系和几何图形巧妙地结合起来，并充分地利用这种结合，使问题得到解决. 在进行二次根式的化简时，可以借助数轴确定字母的取值范围，然后对式子进行化简.

例7 已知实数 a, b 在数轴上对应点的位置如图2所示，试化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$.

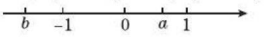


图2

导引：由实数 a, b 在数轴上对应点的位置可判断出 a, b 的大小，从而可根据二次根式的性质及绝对值的有关知识进行化简.

▶解：由实数 a, b 在数轴上对应点的位置可知 $0<a<1, b<-1$.

$\therefore a+b<0, b+1<0, a-1<0$.

$$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$$

$$=|a|+|b|+|a+b|+|b+1|+|a-1|$$

$$=a-b-a-b-b-1+1-a$$

$$=-a-3b.$$

点方法

先将二次根式的问题转化为绝对值的问题，然后根据数轴上各点的位置确定相应代数式的符号，再去绝对值符号进行化简.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必练

（答案见294页）

选择题

1. [中考·扬州] 使$\sqrt{x-3}$有意义的x的取值范围是(　　)

A. $x>3$　　B. $x<3$

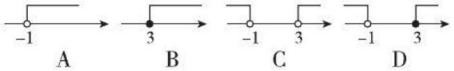
C. $x\geqslant 3$　　D. $x\neq 3$

2. [中考·无锡] 下列等式正确的是(　　)

A. $(\sqrt{3})^2=3$　　B. $\sqrt{(-3)^2}=-3$

C. $\sqrt{3^3}=3$　　D. $(-\sqrt{3})^2=-3$

3. [中考·绵阳] 等式$\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$成立的$x$的取值范围在数轴上可表示为(　　)



4. [中考·泰州] 下列运算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{18}=2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{2}\div\sqrt{\dfrac{1}{2}}=2$

填空题

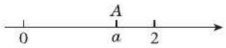
5. [中考·凉州] 使得代数式$\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$有意义的x的取值范围是_____.

6. [中考·武汉] 计算$(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{3}$的结果是_____.

7. [中考·天津] 计算$(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})$的结果等于_____.

8. [中考·广东] 已知$\sqrt{a-b}+|b-1|=0$，则$a+1=$_____.

9. [中考·广州] 如图，数轴上点A表示的数为a，化简：$a+\sqrt{a^2-4a+4}=$_____.



（第9题图）

10. [中考·滨州] 观察下列各式：

$\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}=1+\dfrac{1}{1\times 2}$，

$\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}=1+\dfrac{1}{2\times 3}$，

$\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}=1+\dfrac{1}{3\times 4}$，

……

请利用你所发现的规律，

计算$\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{9^2}+\dfrac{1}{10^2}}$，其结果为_____.

11. [中考·枣庄] 我国南宋著名数学家秦九韶在他的著作《数书九章》一书中，给出了著名的秦九韶公式，也叫三斜求积公式，即如果一个三角形的三边长分别为a，b，c，则该三角形的面积为$S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$. 已知$\triangle ABC$的三边长分别为$\sqrt{5}$，2，1，则$\triangle ABC$的面积为_____.



（第11题图）

解答题

12. [中考·陕西] 计算：$(-\sqrt{2})\times\sqrt{6}+|\sqrt{3}-2|-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$.

13. [中考·盐城] 计算：$(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. ［中考 · 盐城］先化简，再求值：$\frac{x+3}{x-2}\div\left(x+2-\frac{5}{x-2}\right)$，其中 $x=3+\sqrt{3}$.

15. ［中考 · 襄阳］先化简，再求值：$\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)\div\frac{1}{xy+y^2}$，其中 $x=\sqrt{5}+2$，$y=\sqrt{5}-2$.

16. 已知 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 求：

(1) x^2+y^2；

(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值.

17. 阅读下面问题：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{5}-2;$$

…

试求：(1) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ 的值；

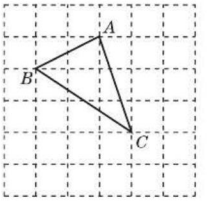
(2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$（$n$ 为正整数）的值；

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ 的值.

18. (1) 如图，若图中小正方形的边长为 1，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

(2) 反思 (1) 的解题过程，解决下面问题：

若 $2\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{9a^2+b^2}$，$\sqrt{25a^2+b^2}$（其中 a，b 均为正数）是一个三角形的三条边长，求此三角形的面积.



（第 18 题图）

19. 观察、思考、解答：

$(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}+1^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$，

反之，$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2$，

$\therefore\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

(1) 化简：$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

(2) 若 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$，则 m、n 与 a、b 的关系是什么？并说明理由.

(3) 已知 $x=\sqrt{4-\sqrt{12}}$，求 $\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{2(x-1)}$ 的值.（结果保留根号）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第7章 数据的收集、整理、描述

7.1 普查与抽样调查

Ⅰ. 举一反三训练

1. D

2. **解**：总体：这批灯泡的使用寿命；
个体：这批灯泡中每只灯泡的使用寿命；
样本：抽取的 20 只灯泡的使用寿命；
样本容量：20.

3. A　4. D

Ⅱ. 举一反三训练

5. **解**：不合理. 因为抽样不具有代表性. 方案：在每栋楼中随机抽取 6 个家庭进行调查（方案不唯一）.

6. **解**：(1)2
(2)略.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A　2. C

3. D　**点拨**：A. 在公园调查，调查的对象不具有代表性；B. 在医院门诊部与住院部调查，调查的对象不具有代表性；C. 调查的人数少，不具有代表性；D. 具有代表性.

4. 抽样调查　**点拨**：了解一批鞭炮的质量情况，调查过程带有破坏性，只能采取抽样调查.

5. 50　**点拨**：样本容量是指样本中所包含个体的数目. 本题中小明调查了 50 户家庭，因而样本容量是 50.

6. **解**：(1)总体是该试验田里玉米的单株产量的全体，个体是该试验田里每株玉米的产量，样本是抽取的 100 株玉米的单株产量.
(2)总体是该学校学生完成课外作业的时间的全体，个体是该学校每名学生完成课外作业的时间，样本是抽样调查的 50 名学生完成课外作业的时间.

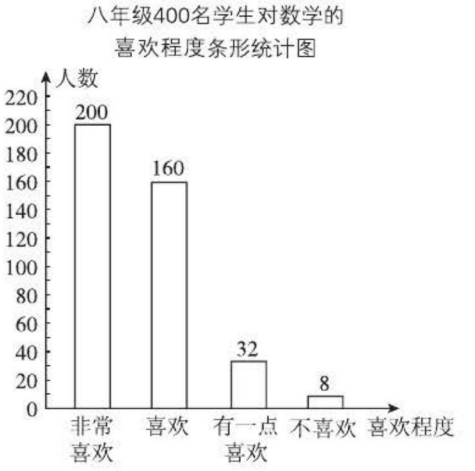
7. **解**：(1)非常喜欢：$\frac{200}{400}\times 100\% = 50\%$；

喜欢：$\frac{160}{400}\times 100\% = 40\%$；

有一点喜欢：$\frac{32}{400}\times 100\% = 8\%$；

不喜欢：$\frac{8}{400}\times 100\% = 2\%$.

(2)所作条形统计图如图所示.



（第 7 题图）

(3)从统计图中可以看出大多数八年级学生喜欢数学（答案不唯一，合理即可）.

8. 不可靠；选取的样本不具有代表性
点拨：抽样调查选取的样本必须具有代表性，该厂家提供的数据是在经销本厂产品的三个商场调查所得的，并不能代表其他商场的销售数据.

9. 一年中该市每天空气质量的全体；该同学记录的 30 天的空气质量；292
点拨：30 天中空气质量达到良以上（含良）的天数为 3 + 5 + 10 + 6 = 24（天），所以估计在一年中空气质量达到良以上（含良）的天数为 $\frac{24}{30}\times 365 = 292$（天）.

10. **解**：(1)小明的调查是抽样调查.
(2)总体是该校学生的身高的全体；个体是该校每名学生的身高；样本是小明调查的 3 名同学的身高；样本容量是 3.
(3)这个调查的结果不能较好地反映总体的情况. 理由：一是样本容量太小，二是坐在一起的同学身高一般都比较接近，所以这样选取的样本缺乏代表性.

11. **解**：(1)根据题意得：$n = 6 + 33 + 26 + 20 + 15 = 100$.
(2)根据题意得：$\frac{20+15}{100}\times 1\ 100 = 385$（人）.
答：估计该校 1 100 名学生中一年的课外阅读量超过 10 本的人数为 385 人.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 统计图的选用

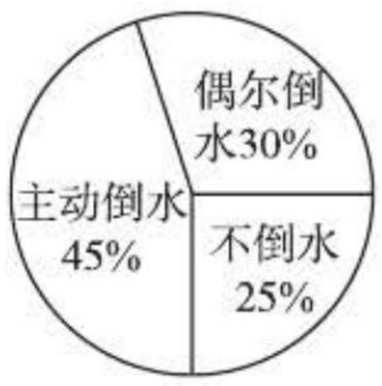
Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:(1)主动倒水:$\frac{27}{60}\times100\%=45\%$,$360°\times45\%=162°$;

偶尔倒水:$\frac{18}{60}\times100\%=30\%$,$360°\times30\%=108°$;

不倒水:$\frac{15}{60}\times100\%=25\%$,$360°\times25\%=90°$.

(2)如图所示.



(第1题图)

2. 40% **点拨:**由题意可得,"其他"部分所占的百分比为:$\frac{36°}{360°}\times100\%=10\%$,∴"步行"部分所占的百分比为:$1-15\%-35\%-10\%=40\%$.

3. 5 **点拨:**由条形统计图可知降雨量在25 mm及以上的有星期二(60 mm),星期三(40 mm),星期四(30 mm),星期五(28 mm),星期六(50 mm),所以这个星期下大雨的天数是5天.

4. B **点拨:**分析折线统计图,计算日最高股价与日最低股价的差,即可做出判断. 星期一为10 − 9 = 1(元),星期二为11 − 9.5 = 1.5(元),星期三约为11.5 − 9.8 = 1.7(元),星期四为10.5 − 9.5 = 1(元),星期五为10 − 8.5 = 1.5(元),故选B.

5. 条形统计图

Ⅱ. 举一反三训练

6. 解:(1)第一季度:110 + 80 + 40 = 230(件);

第二季度:10 + 6 + 4 = 20(件);

第三季度:3 + 5 + 2 = 10(件);

第四季度:20 + 70 + 110 = 200(件).

用条形统计图表示.

(2)全年总销量为110 + 80 + 40 + 10 + 6 + 4 + 3 + 5 + 2 + 20 + 70 + 110 = 460(件),

第一季度:$\frac{230}{460}\times100\%=50\%$;

第二季度:$\frac{20}{460}\times100\%\approx4.35\%$;

第三季度:$\frac{10}{460}\times100\%\approx2.17\%$;

第四季度:$\frac{200}{460}\times100\%\approx43.48\%$.

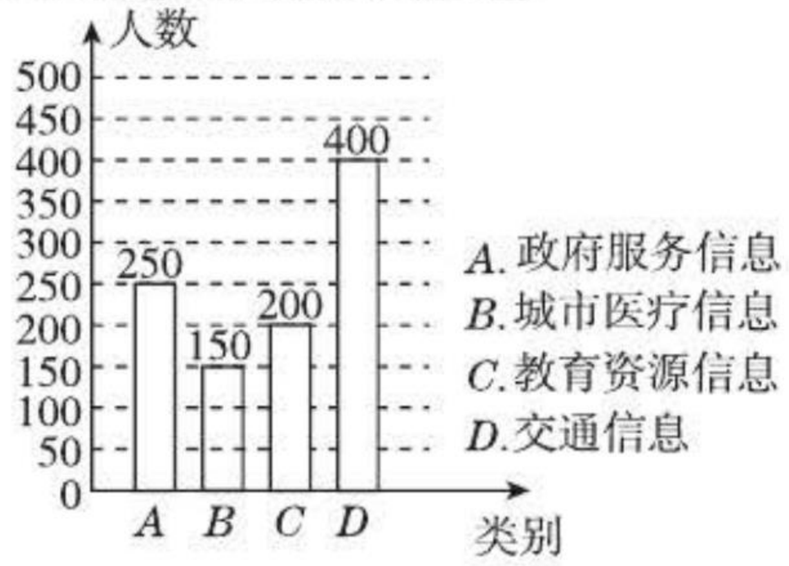
用扇形统计图表示.

(3)用折线统计图表示.

(4)略.

7. 解:(1)1 000

(2)150;补全条形统计图如图:



(第7题图)

(3)144

(4)由条形统计图可知,市民关注交通信息的人数最多(答案不唯一).

8. 解:(1)120

(2)30°;25

(3)若该校共有学生1 500名,则该校学生对足球的了解程度为"基本了解"的人数为1 500 × 25% = 375(名).

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D

2. D **点拨:**从图中可以看出,这一天中的最高气温是24 ℃,从2时至14时,这天的气温在逐渐升高,从14时至24时,这天的气温在逐渐降低,故A,B,C正确,这一天中最高气温是24 ℃,最低气温是8 ℃,这一天中最高气温与最低气温的差为16 ℃,故D错误. 故选D.

3. B **点拨:**条形统计图能很容易看出数量的多少;折线统计图能反映数量的增减变化情况;扇形统计图能反映部分与整体的关系. 由此根据情况选择即可.

4. 7

5. 甲 **点拨:**甲商场今年2月份与6月份数码相机销售的台数相差500 − 50 = 450(台),乙商场今年2月份与6月份数码相机销售的台数相差350 − 50 = 300(台),所以甲商场销售量增长较快.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. 解:(1)48;72

(2)30% ×1 000 =300(人).

故估计富春茶社 1 000 名顾客中喜爱“汤包”的有 300 人.

7. 10

8. 解:(1)14;125

(2)∵ 2016 年全年总天数为:125 + 225 + 14 + 1 + 1 =366(天),∴ $360° \times \frac{125}{366} \approx 123°$,

∴ 空气质量等级为“优”在扇形统计图中所占的圆心角的度数为 123°;

(3) 2016 年贵阳市空气质量的优良率为 $\frac{125+225}{366} \times 100\% \approx 95.6\%$,

∵ 94% <95.6%,

∴ 与 2016 年全年的优良率相比,今年前五个月贵阳市空气质量的优良率降低了,建议:少开空调(建议不唯一).

9. 解:(1)由扇形统计图知 B 类型人数所占的比例为 58%,从折线统计图知 B 类型总人数 =26 + 32 =58(人),

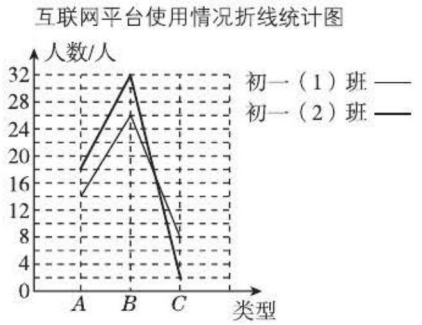
所以此次被调查的学生总人数 =58 ÷58% =100(人);

(2)由折线统计图知 A 类型的人数 =18 +14 =32(人),故 A 类型人数所占的比例 =32 ÷100 × 100% =32%,

所以 C 类型人数所占的比例 =1 -58% -32% =10%,

所以代表类型 C 的扇形的圆心角 =360° × 10% =36°,

初一(1)班 C 类型的人数 =10% ×100 -2 =8(人),补全折线统计图如图:



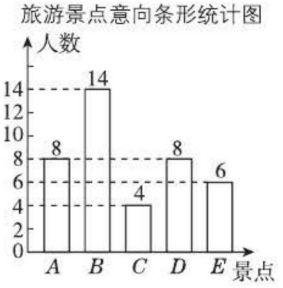
(第 9 题图)

(3)由(2)可得 C 类型人数所占的比例为 10%,所以估计该校初一年级中 C 类型学生约有 1 000 ×10% =100(人).

10. 解:(1)被调查的学生总人数为 8 ÷20% =40;

(2)最想去 D 景点的人数为 40 -8 -14 -4 -6 =8,

补全条形统计图如图:



(第 10 题图)

扇形统计图中表示“最想去景点 D”的扇形的圆心角的度数为 $\frac{8}{40} \times 360° = 72°$;

(3)$800 \times \frac{14}{40} = 280$,所以估计“最想去景点 B”的学生人数为 280.

7.3 频数和频率

Ⅰ. 举一反三训练

1. 20;0.4

2. B **点拨**:根据题意,得第 5 组的频率是 1 -0.1 ×2 -0.3 ×2 =0.2. 故选 B.

Ⅱ. 举一反三训练

3. 0.4 **4.** 150;0.35

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **点拨**:这句话中,15 个字母中 a 出现了 2 次,所以字母“a”出现的频率是 $\frac{2}{15}$. 故选 B.

2. B **点拨**:根据频数 = 总次数 × 频率,计算可得答案.

3. 0.4 **4.** 40

5. 15;0.75 **点拨**:根据频数的定义,知小亮点球罚进的频数,即小亮点球罚进的次数;根据频率 = 频数 ÷ 总次数计算频率.

6. 解:(1)0.9

(2)∵ a =30 -(15 +2 +1) =12,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 365 \times \frac{12}{30} = 146.$

答:2018 年全年(共 365 天)空气质量为优的天数为 146.

7. 解:(1)$m \geqslant 10$ 的人数有 15 人,

则频率 $= \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$;

(2)$1\ 000 \times \frac{1}{2} = 500$(人),

即 1 000 个 18 ~ 35 岁的青年人中"日均发微博条数"为 A 级的人数为 500 人.

8. 解:(1)0.06;10

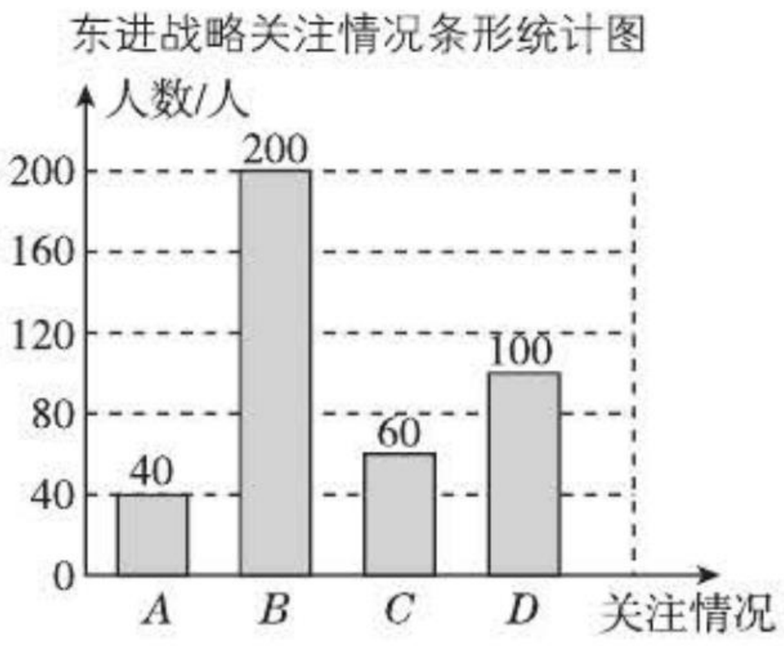
(2)50 名学生的数学成绩

(3)根据题意得:$650 \times 0.34 = 221$(人).

答:该校初三年级数学成绩在 90.5 ~ 100.5 范围内的人数约为 221 人.

9. 解:(1)400;40;0.15

(2)如图所示;



(第 9 题图)

(3)在 30 000 名市民中高度关注东进战略的人数约为 $0.1 \times 30\ 000 = 3\ 000$(人).

7.4 频数分布表和频数分布直方图

Ⅰ. 举一反三训练

1. 10

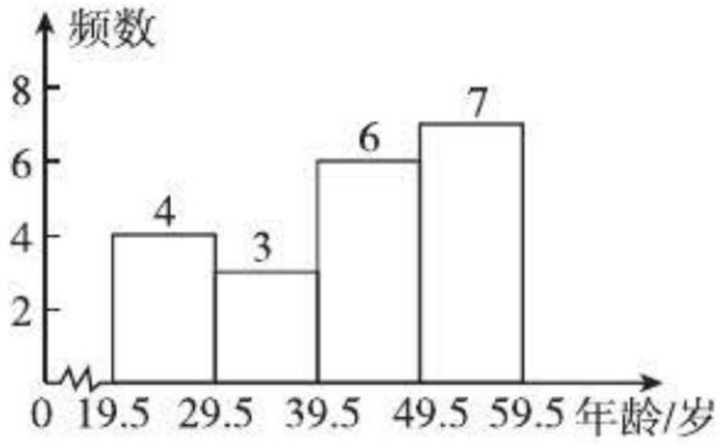
2. 解:最大值是 48,最小值是 29,最大值与最小值的差是 $48 - 29 = 19$,取组距是 5,则可以分为 4 组. 列频数分布表如下:

分组	划记	频数
28.5 ~ 33.5	正丅	9
33.5 ~ 38.5	正正正正丅	22
38.5 ~ 43.5	正正正正正	24
43.5 ~ 48.5	正丅	9

3. 解:(1)

分组	频数	频率
19.5 ~ 29.5	4	0.2
29.5 ~ 39.5	3	0.15
39.5 ~ 49.5	6	0.3
49.5 ~ 59.5	7	0.35
合计	20	1.00

(2)画出频数分布直方图如图:

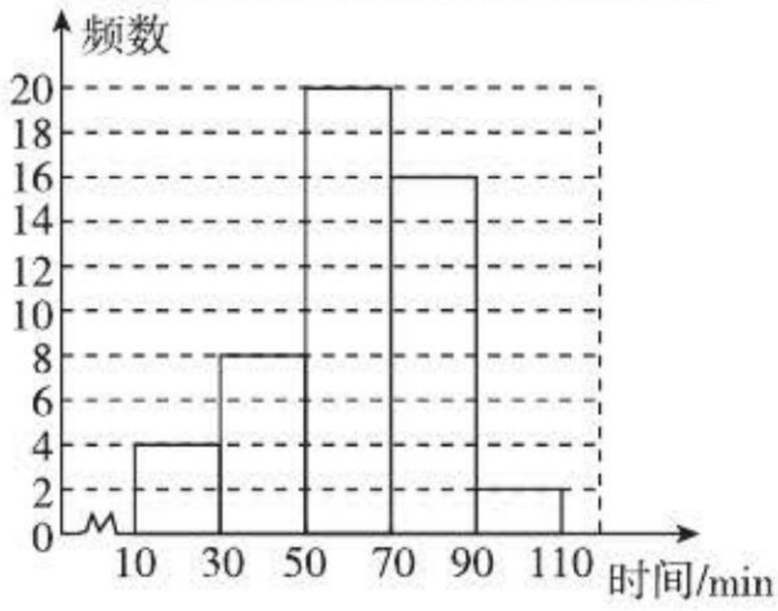


(第 3 题图)

Ⅱ. 举一反三训练

4. 解:(1)20;32%

(2)频数分布直方图如图所示.



(第 4 题图)

(3)$900 \times (40\% + 32\% + 4\%) = 684$(名).

答:估计该校有 684 名学生平均每天的课外阅读时间不少于 50 min.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C **点拨**:因为 $\frac{\text{最大值} - \text{最小值}}{\text{组距}} = 8\frac{8}{9}$,所以应分成 9 组.

2. B **3.** B **4.** 80 **5.** 0.7

6. 解:(1)50 (2)$1\ 500 \times \frac{14}{50} = 420$(名).

答:成绩评为"B"的职工大约有 420 名.

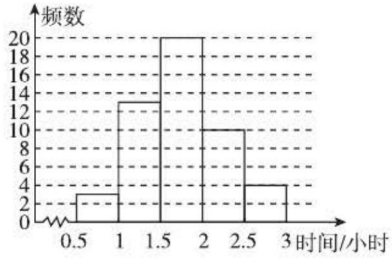
7. 解:(1)50

(2)$\because 1.5 \leqslant x < 2$ 的人数为 $50 \times 40\% = 20$,

$\therefore 1 \leqslant x < 1.5$ 的人数为 $50 - (3 + 20 + 10 + 4) = 13$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

补全频数分布直方图如图：



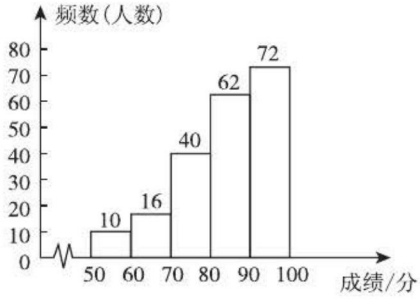
（第7题图）

(3)$900\times\frac{4}{50}=72$(名).

答：估计该校在这次活动中做家务的时间不少于2.5小时的学生有72名.

8. 解：(1)40

补全频数分布直方图如图.

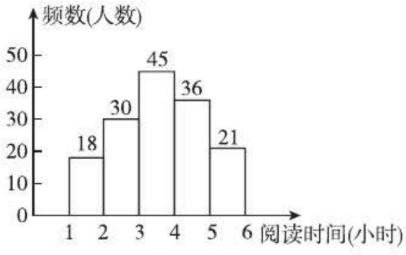


（第8题图）

(2)这次抽查的学生中，有40 + 62 = 102(人)的参赛成绩被评为“B”.

9. 解：(1)30；150；0.2；0.24

(2)如图所示：



（第9题图）

(3)3 000 × (0.12 + 0.2) = 960(人).

答：估算该校学生一周的课外阅读时间不足3小时的人数为960人.

章末整合与拔高

好题必练

1. D　**2.** C　**3.** C　**4.** C　**5.** D　**6.** A

7. 抽样调查　**8.** 46　**9.** 680　**10.** 27

11. 解：(1)50；11

(2)72°

(3)该校最喜爱的省运会项目是篮球的学生人数为：$1\ 200\times\frac{20}{50}=480$(人).

12. 解：(1)$a=20$；$m=960$

(2)网购软件的人均利润为$\frac{960}{20\times30\%}=160$(元)，

视频软件的人均利润为$\frac{560}{20\times20\%}=140$(元)；

(3)能. 设调整后网购的人数为x、视频的人数为$(10-x)$人，

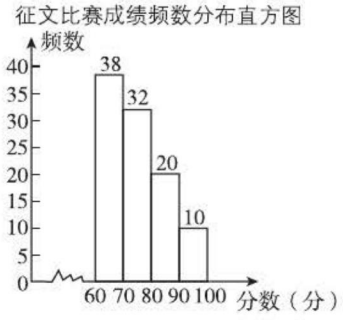
总利润为1 200 ÷ 40% = 3 000(万元).

根据题意，得：1 200 + 280 + 160x + 140(10 − x) = 3 000 + 60，解得：$x=9$，

即安排9人负责网购、安排1人负责视频可以使总利润增加60万元.

13. 解：(1)0.2

(2)10 ÷ 0.1 = 100，100 × 0.32 = 32，100 × 0.2 = 20，补全征文比赛成绩频数分布直方图如图：



（第13题图）

(3)全市获得一等奖征文的篇数为：1 000 × (0.2 + 0.1) = 300(篇).

第8章 认识概率

8.1 确定事件与随机事件

Ⅰ. 举一反三训练

1. D　**2.** D　**3.** C

Ⅱ. 举一反三训练

4. 解：小明的说法错误，因为买100张中奖的可能性比买1张中奖的可能性大. 小华的说法错误，这两个事件都是随机事件，不能因为事件发生的可能性小就认为它是不可能事件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. D

6. **解**:答案不唯一,如随机事件一:转动该转盘一次,指针指在红色区域内;
随机事件二:转动该转盘一次,指针指在绿色区域内.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B 2. A 3. A

4. C **点拨**:A. 水中捞月,是不可能事件;B. 守株待兔,是随机事件;C. 水涨船高,是必然事件;D. 画饼充饥,是不可能事件. 故选 C.

5. 必然事件 6. 不可能事件

7. (2)(4) **点拨**:(1)是随机事件;(2)是必然事件,是确定事件;(3)是随机事件;(4)是必然事件,是确定事件.

8. ①必然;8 月份共有 31 天,奇数号比偶数号多一天
②随机;朝上的点数是质数有可能发生,也有可能不发生
③不可能;三角形有三条边,两条线段不可能组成三角形

9. **解**:(1)是随机事件. (2)是不可能事件.
(3)是必然事件. (4)是必然事件.
(5)是必然事件. (6)是不可能事件.
(7)是随机事件. (8)是随机事件.
(9)是随机事件. (10)是不可能事件.

10. **解**:(1)是不可能事件. (2)是随机事件.
(3)是随机事件. (4)是必然事件.

11. **解**:由于转盘由黑白两种颜色组成,故转动转盘,转盘停止转动后,只有两种结果:指针指向黑色区域和指针指向白色区域. 所以(4)是必然事件,(3)是不可能事件,(1)(2)是随机事件.

12. **解**:必然事件:三个骰子落地后朝上的点数和大于 2,三个骰子落地后朝上的点数和小于 19;
不可能事件:三个骰子落地后朝上的点数和大于 19,三个骰子落地后朝上的点数和小于 2;
随机事件:三个骰子落地后朝上的点数和等于 3,三个骰子落地后朝上的点数和是奇数.
点拨:答案不唯一.

13. **解**:"天上下起足球雨"、"捡到了一只好大好大的足球"、"带球从十几米高的空中踢进对方大门"是不可能事件;"被国家队选中"是随机事件;没有必然事件.

8.2 可能性的大小

Ⅰ. 举一反三训练

1. D 2. A

Ⅱ. 举一反三训练

3. 1 或 2

4. 略.

5. **解**:(1)布袋中放入全是红球;
(2)布袋中放入两个或 3 个蓝球;
(3)布袋中放入两个球且一红一蓝;
(4)两种颜色的球均放入.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C **点拨**:①中都是中国选手,中国选手一定出线;②中没有中国选手,中国选手不可能出线;③中谁都有出线的可能,中国选手出线是随机事件. 所以按中国选手出线的可能性从大到小的顺序排列为①③②.

2. A

3. 小 **点拨**:∵ 男生人数 < 女生人数,∴ 找到男生的可能性比找到女生的可能性小.

4. ⑤②①③④ **点拨**:比较黑色部分的面积即可.

5. $m=n=p$ 6. 甲

7. **解**:要使摸到红球的可能性最大,摸到黑球的可能性最小,只需使红球数目最多,黑球数目最少. 则有 $m<4$,又 $m>0$,所以 m 的可能取值是 1 或 2 或 3.

8. **解**:选择第(3)种猜数方法,猜"是 3 的倍数".
理由:∵ 转盘中,奇数与偶数的个数相同,大于 10 的数与不大于 10 的数的个数也相同,
∴ (1)与(2)的猜数方法中获胜与失败的可能性都相同,而转盘中的数是 3 的倍数的有 7 个,不是 3 的倍数的有 5 个,
∴ 选择第(3)种猜数方法,猜"是 3 的倍数",获胜的机会大.

8.3 频率与概率

Ⅰ. 举一反三训练

1. D 2. D 3. 0.8

Ⅱ. 举一反三训练

4. 17

5. **解**:(1)设口袋中有白球 x 个,
$\therefore \frac{10}{10+x}=\frac{50}{200}$,解得:$x=30$,
∴ 口袋中有白球 30 个;
(2)(答案不唯一)可以拿出 a 个标上记号,然后放回搅匀后再拿出 b 个,带记号的有 c 个,即可估计白球的个数.
设白球的个数为 y,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

则$\frac{b}{y}=\frac{c}{a}$，$\therefore y=\frac{ab}{c}$.

$\therefore$ 白球的个数为$\frac{ab}{c}$.

6. **解**：由表格提供的数据可以看出$\frac{S_{圆}}{S_{阴影}}\approx\frac{1}{2}$，

而$S_{圆}=\pi$平方米，

$\therefore S_{阴影}\approx 2\pi$平方米，

$\therefore S_{封闭图形ABC}\approx\pi+2\pi=3\pi$(平方米).

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D **2.** C **3.** D **4.** C **5.** 0.3 **6.** 0.98 **7.** 3

8. **解**：如图.



(第8题图)

9. **解**：(1)0.59；0.58

(2)0.6

(3)由(2)知摸到白球的概率为0.6，

所以可估计口袋中白球的个数为$20\times0.6=12$(个)，黑球的个数为$20-12=8$(个).

答：黑球有8个，白球有12个.

10. D **11.** C **12.** 25%；3π

13. **解**：(1)0.75

(2)掷中阴影区域的可能性大，所以小明赢的可能性大.

(3)圆的面积为π，$\frac{\pi}{S_{总}}\approx0.25$，解得，$S_{总}\approx4\pi$，

所以$S_{阴影}\approx4\pi-\pi=3\pi$.

14. **解**：(1)游戏对双方不公平. 设圆的半径为r米，正方形的边长为a米，

$\because C_{圆}=4$米，$\therefore 2\pi r=4$，$\therefore r=\frac{2}{\pi}$，

$\therefore S_{圆}=\pi r^2=\pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^2=\frac{4}{\pi}\approx1.27$(平方米).

$\because C_{正方形}=4$米，$\therefore 4a=4$，$\therefore a=1$，

$\therefore S_{正方形}=a^2=1$平方米. $\because S_{圆}>S_{正方形}$，$\therefore$向圆内投进石子的可能性大于向正方形内投进石子的可能性，$\therefore$游戏对双方不公平.

(2)能. ①用可测量的规则图形正方形，将不规则图形围起来，设正方形的面积为S；

②蒙上眼睛向图形中掷小石子；

③当所掷次数充分大时，掷入正方形内m次，其中n次掷入不规则图形内；

④设不规则图形的面积为S'，用频率估计概率可得$S'=\frac{n}{m}S$.(方案不唯一)

章末整合与拔高

好题必练

1. C **2.** D **3.** C **4.** C **5.** D

6. 不可能事件

7. 15 **8.** 0.90 **9.** 1

10. **解**：(1)“3点朝上”的频率为$\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$；

“5点朝上”的频率为$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$；

(2)小颖和小红的说法都错，因为试验是随机的，不能反映事物的概率.

11. **解**：(1)由题意分析可得：要使他两次数字之和为100，则第二次必须转到95，因为总共有20个数字，所以他两次数字之和为100的可能性为$\frac{1}{20}$；

(2)由题意分析可得：转到数字35以上就会“爆掉”，共有13种情况，因为总共有20个数字即20种情况，所以“爆掉”的可能性为$\frac{13}{20}$.

第9章 中心对称图形——平行四边形

9.1 图形的旋转

Ⅰ. 举一反三训练

1. C

2. **解**：旋转中心是点A，旋转的角度是45°，点D、C、B的对应点分别是点G，F，E；

线段BC和线段AC的对应线段分别是线段EF和线段AF.

3. 39°

4. **解**：$\because$在等边三角形ABC中，$\angle B=60°$，$AB=6$，D是BC的中点，

$\therefore AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD=30°$，$BD=3$.

由勾股定理得$AD=3\sqrt{3}$.

由$\triangle ABD$绕点A旋转后得$\triangle ACE$，知$\angle EAD=\angle CAB=60°$，$AD=AE$，

$\therefore\triangle ADE$是等边三角形. $\therefore DE=AD=3\sqrt{3}$，

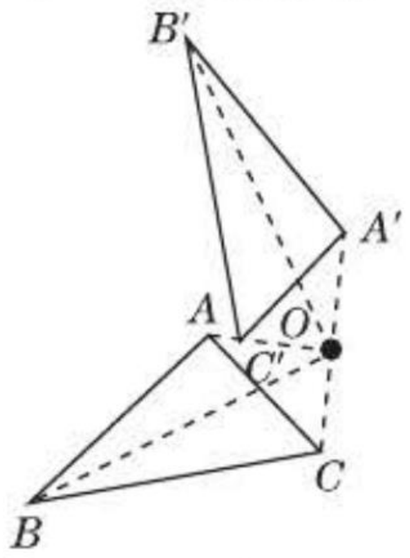
即线段DE的长度为$3\sqrt{3}$.

方法总结：(1)在旋转过程中，图形中的每个点、每条线段都绕着同一个点沿相同的方向旋转

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

相同的角度,且旋转过程中不改变图形的形状和大小,旋转前后的对应线段相等;(2)有关等边三角形问题,旋转角度一般为60°;有关正方形问题,旋转角度一般为90°.

5. 解:如图所示:$\triangle A'B'C'$即为所求.

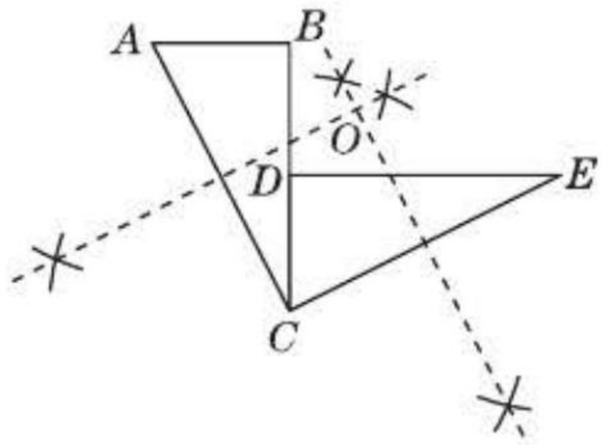


(第5题图)

6. B

Ⅱ. 举一反三训练

7. 解:如图所示:点O即为所求.



(第7题图)

旋转角的度数是90°.

8. 40°

9. 解:(1)如图.

(2)连接PP',$\because BP=BP'$,$\angle PBP'=60°$,

$\therefore \triangle PBP'$为等边三角形,$\therefore \angle PP'B=60°$,

$PP'=PB=\sqrt{3}$,

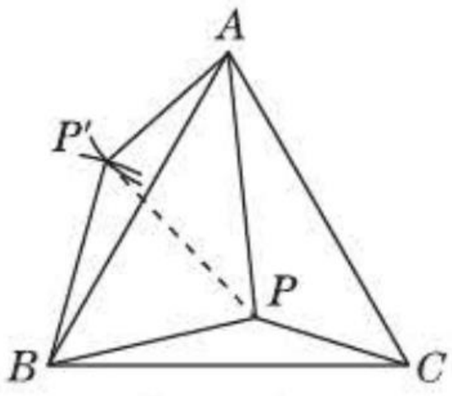
在$\triangle APP'$中,$P'A=PC=1$,$PP'=\sqrt{3}$,$PA=2$,

$\therefore PA^2=P'A^2+PP'^2$,

$\therefore \angle AP'P=90°$,

$\therefore \angle AP'B=150°$,

$\therefore \angle BPC=150°$.



(第9题图)

10. 解:$\because$ 四边形$ABCD$为正方形,

$\therefore \angle OAB=\angle OBF=45°$,$BO\perp AC$,即$\angle AOE+\angle EOB=90°$,

又$\because$ 四边形$A'B'C'O$为正方形,

$\therefore \angle A'OC'=90°$,即$\angle BOF+\angle EOB=90°$,

$\therefore \angle AOE=\angle BOF$,

在$\triangle AOE$和$\triangle BOF$中,$\angle AOE=\angle BOF$,$AO=BO$,$\angle OAE=\angle OBF$,$\therefore \triangle AOE\cong\triangle BOF$,

$\therefore$ 两个正方形重叠部分的面积$=S_{\triangle BOF}+S_{\triangle BOE}=S_{\triangle AEO}+S_{\triangle BOE}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}S_{正方形A'B'C'O}$.

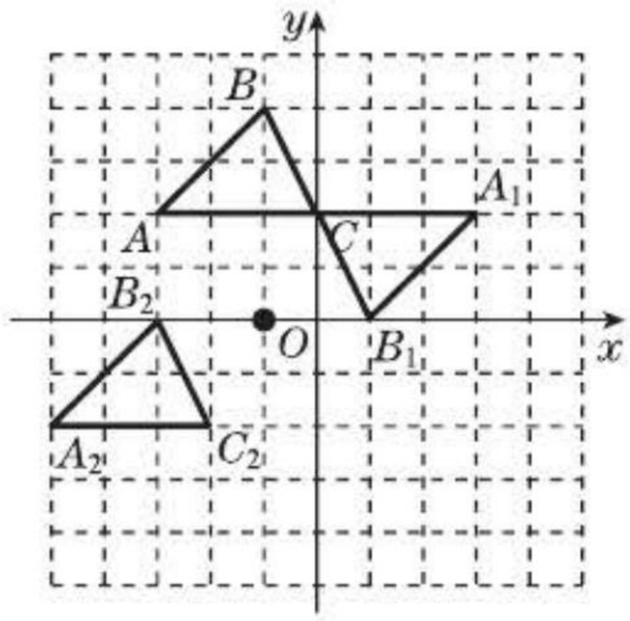
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A **2.** C **3.** C **4.** D **5.** 100° **6.** 30°

7. 解:(1)$\triangle A_1B_1C$如图所示;

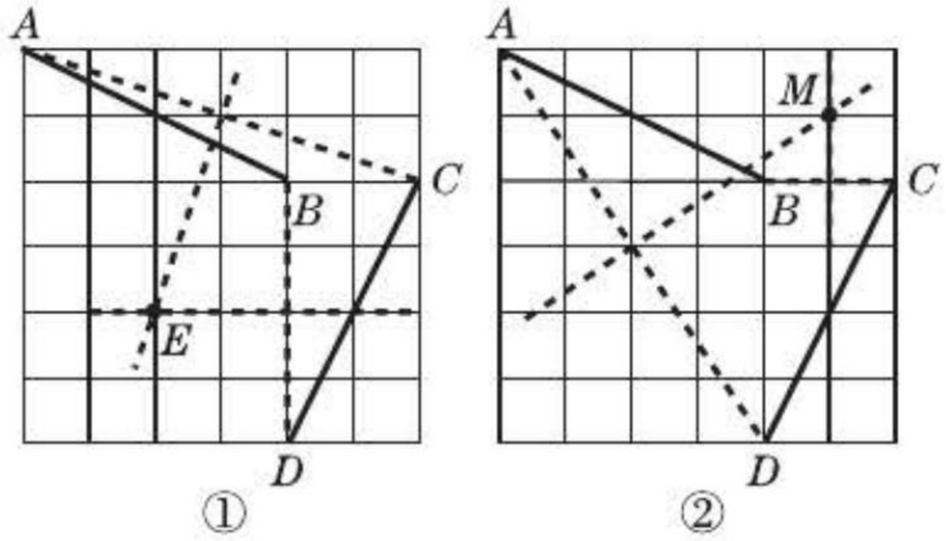
(2)$\triangle A_2B_2C_2$如图所示;

(3)如图所示,旋转中心的坐标为$(-1,0)$.



(第7题图)

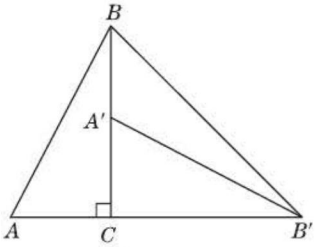
8. (1,1)或(4,4) **点拨:**①当点A的对应点为点C时,连接AC、BD,分别作线段AC、BD的垂直平分线交于点E,如图①所示,$\because A$点的坐标为$(-1,5)$,B点的坐标为$(3,3)$,$\therefore E$点的坐标为$(1,1)$;②当点A的对应点为点D时,连接AD、BC,分别作线段AD、BC的垂直平分线交于点M,如图②所示,$\because A$点的坐标为$(-1,5)$,B点的坐标为$(3,3)$,$\therefore M$点的坐标为$(4,4)$. 综上所述:这个旋转中心的坐标为$(1,1)$或$(4,4)$.



(第8题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. 解:(1)如图,$\triangle CA'B'$为所求作的图形;



(第9题图)

(2)如图,∵ $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转90°得到$\triangle A'B'C$,

∴ $CA'=CA=b$, $CB'=CB=a$, $\angle BCB'=90°$,

∴ $S_{\triangle BB'A'}=S_{\triangle CBB'}-S_{\triangle CA'B'}=\frac{1}{2}a\cdot a-\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab$.

10. 解:如图,

∵ $AC=9$, $AO=3$,

∴ $OC=6$,

∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形,

∴ $\angle A=\angle C=60°$,

∵ 线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 60° 得到线段 OD,

∴ $OD=OP$, $\angle POD=60°$,

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle A=180°$, $\angle 1+\angle 3+\angle POD=180°$,

∴ $\angle 1+\angle 2=120°$, $\angle 1+\angle 3=120°$,

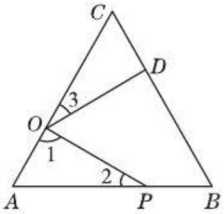
∴ $\angle 2=\angle 3$,

在$\triangle AOP$和$\triangle CDO$中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle C,\\ \angle 2=\angle 3,\\ OP=OD,\end{cases}$$

∴ $\triangle AOP\cong\triangle CDO$,

∴ $AP=CO=6$.



(第10题图)

11. 解:(1)$AE=DB$, $AE\perp DB$,

理由如下:延长 DB 交 AE 于 H,

∵ $\triangle ABC$ 与$\triangle DEC$都是等腰直角三角形,

∴ $AC=BC$, $EC=DC$, $\angle ACE=\angle BCD=90°$,

在$\triangle ACE$和$\triangle BCD$中,

$$\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ CE=CD,\end{cases}$$

∴ $\triangle ACE\cong\triangle BCD$,

∴ $AE=BD$, $\angle AEC=\angle BDC$,

又∵ $\angle BCD=90°$, $\angle EBH=\angle CBD$,

∴ $\angle DHE=90°$,

∴ $AE\perp DB$;

(2)$DE=AF$, $DE\perp AF$,

理由如下:设 DE 与 AF 交于 N,

由题意得,$BE=AD$.

∵ 线段 DB 绕 D 点顺时针旋转 90° 得到 DF,

∴ $BD=DF$, $\angle BDF=90°$.

∵ $\angle EBD=\angle C+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

$\angle ADF=\angle BDF+\angle BDC=90°+\angle BDC$,

∴ $\angle EBD=\angle ADF$,

在$\triangle EBD$和$\triangle ADF$中,

$$\begin{cases}BE=AD,\\ \angle EBD=\angle ADF,\\ DB=DF,\end{cases}$$

∴ $\triangle EBD\cong\triangle ADF$,

∴ $DE=AF$, $\angle E=\angle FAD$,

∵ $\angle E=45°$,

∴ $\angle FAD=45°$,

又∵ $\angle EDC=45°$,

∴ $\angle AND=180°-\angle FAD-\angle EDC=180°-45°-45°=90°$,即 $DE\perp AF$.

9.2 中心对称与中心对称图形

Ⅰ. 举一反三训练

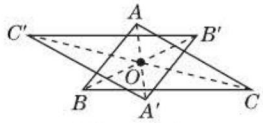
1. 解:(1)如图所示,①连接 AO 并延长至 A',使 $A'O=AO$,

②连接 BO 并延长至 B',使 $B'O=BO$,

③连接 CO 并延长至 C',使 $C'O=CO$,

④连接 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$,

则$\triangle A'B'C'$即为所求作的三角形;



(第1题图)

(2)对应线段:AB 与 $A'B'$, BC 与 $B'C'$, AC 与 $A'C'$,对应角:$\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$, $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$, $\angle ACB$ 与 $\angle A'C'B'$.

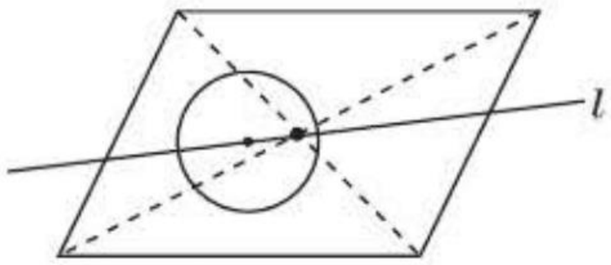
2. A

3. C

Ⅱ. 举一反三训练

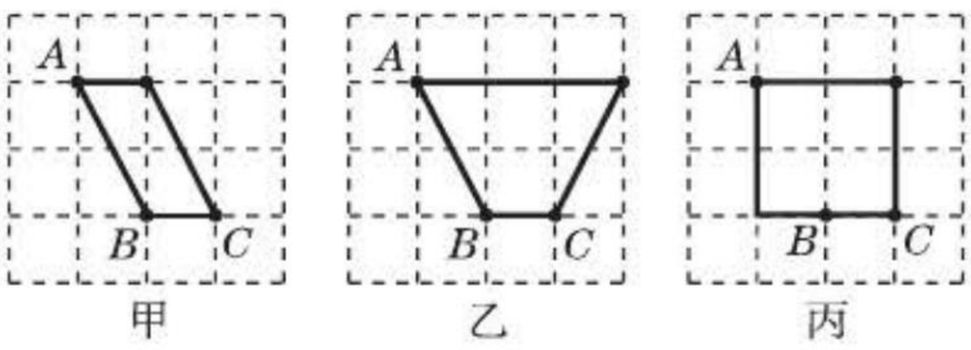
4. 解:如图,直线 l 为所作.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第4题图)

5. 解:(答案不唯一)(1)甲图:平行四边形,
(2)乙图:等腰梯形, (3)丙图:正方形.



(第5题图)

6. $2\sqrt{3}$ **7.** $y=2x-3$

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

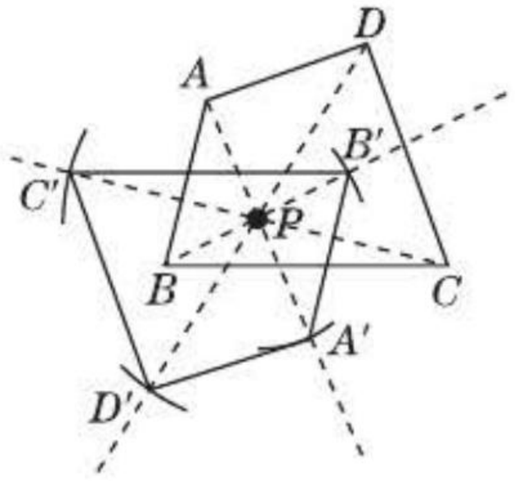
1. A **2.** D **3.** D

4. $(-3,1)$

5. $(2,1)$

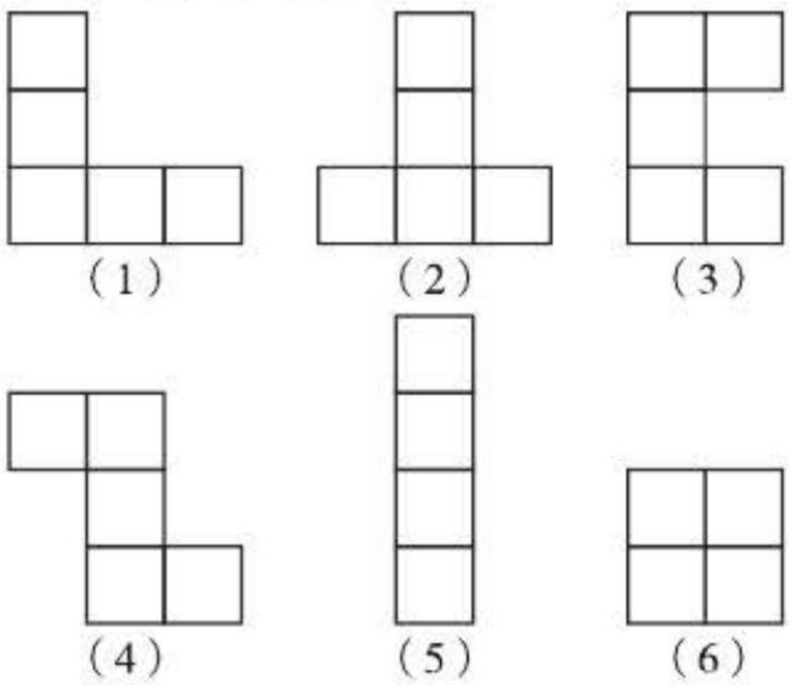
6. $\sqrt{13}$

7. 解:如图所示,四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求.



(第7题图)

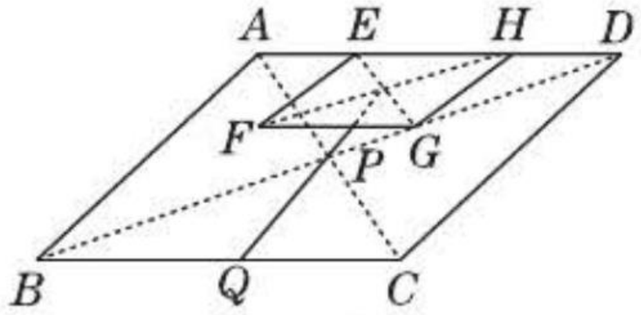
8. 解:(1)如图(1),图(2),图(3)所示;
(2)如图(4)所示;
(3)如图(5),图(6)所示.



(第8题图)

9. D

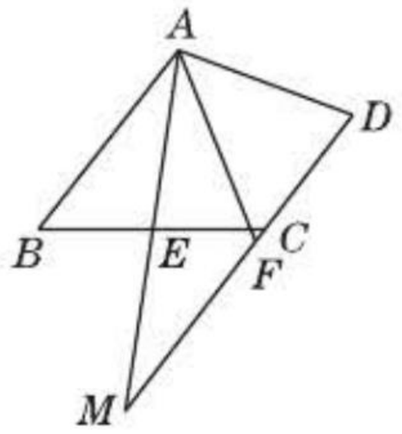
10. 解:如图,PQ 为所求.



(第10题图)

点拨:将中心对称图形的面积平分的直线必过中心对称图形的对称中心.

11. 解:(1)如图. 延长 AE 到点 M,使 $EM=AE$. 连接 CM,则 $\triangle MCE$ 即为所求.



(第11题图)

(2)$AB=AF+CF$. 证明:
$\because$ $\triangle MCE$ 与 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称,$\therefore$ $AB=MC$,
$\angle BAE=\angle M$. $\therefore$ $AB\parallel MC$. 又$\because$ $AB\parallel DC$,$\therefore$ 点 D,C,F,M 共线.
又$\because$ $\angle BAE=\angle EAF$,
$\therefore$ $\angle EAF=\angle M$.
$\therefore$ $MF=AF$.
$\because$ $MC=MF+CF$,
$\therefore$ $AB=AF+CF$.

9.3 平行四边形

Ⅰ. 举一反三训练

1. D

2. 证明:$\because$ $AD\parallel BC$,$\therefore$ $\angle A+\angle B=180°$,
$\because$ $\angle B=\angle D$,$\therefore$ $\angle A+\angle D=180°$,
$\therefore$ $AB\parallel CD$,
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

3. 5或7 **点拨:**如图①,$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore$ $AB=CD=3$,$AD\parallel BC$,
又$\because$ BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于 E,CF 平分 $\angle BCD$ 交 AD 于 F,
$\therefore$ $\angle ABE=\angle CBE=\angle AEB$,$\angle BCF=\angle DCF=\angle CFD$,
$\therefore$ $AB=AE=3$,$DC=DF=3$,
$\because$ $EF=1$,
$\therefore$ $AF=3-1=2$,
$\therefore$ $AD=3+2=5$.
如图②,$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore$ $AB=CD=3$,$AD\parallel BC$,
又$\because$ BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于 E,CF 平分 $\angle BCD$ 交 AD 于 F,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

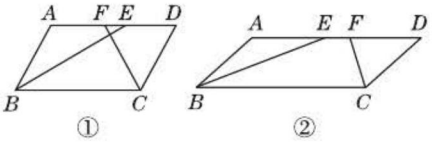
$\therefore \angle ABE = \angle CBE = \angle AEB$, $\angle BCF = \angle DCF = \angle CFD$,

$\therefore AB = AE = 3$, $DC = DF = 3$,

$\because EF = 1$,

$\therefore AD = 3 + 3 + 1 = 7$,

综上所述：AD 的长为 5 或 7.



（第 3 题图）

4. 57　**5.** 15 cm；10 cm

6. **证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$.

$\because$ 点 E、F 分别是边 BC、AD 的中点，

$\therefore BE = \frac{1}{2}BC$, $DF = \frac{1}{2}AD$,

又 $AD = BC$, $\therefore BE = DF$.

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD, \\ \angle B = \angle D, \\ BE = DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$.

7. **证明：**连接 BD，交 AC 于点 O，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BO = DO$,

$\because BE /\!/ DF$,

$\therefore \angle BEO = \angle DFO$,

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle DOF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BOE = \angle DOF, \\ \angle BEO = \angle DFO, \\ BO = DO, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOF$(AAS),

$\therefore EO = FO$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形，

$\therefore BF = DE$.

8. (1) **解：**$\because AD = AC$, $\angle D = 40°$,

$\therefore \angle ACD = 40°$,

$\therefore \angle DAC = 180° - 40° - 40° = 100°$.

(2) **证明：**$\because AC = BC$, $\angle B = 40°$, $\therefore \angle BAC = 40°$,

$\therefore \angle BAC = \angle ACD$,

$\therefore AB /\!/ CD$,

$\because \angle DAB + \angle B = \angle DAC + \angle BAC + \angle B = 180°$,

$\therefore AD /\!/ BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

9. **证明：**$\because AF /\!/ BC$,

$\therefore \angle AFE = \angle EBD$,

$\because E$ 是 AD 的中点，

$\therefore AE = DE$,

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEB$ 中，$\begin{cases} \angle AFE = \angle EBD, \\ \angle AEF = \angle BED, \\ AE = ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB$(AAS),

$\therefore AF = BD$,

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，

$\therefore BD = CD$,

$\therefore AF = DC$.

又 $\because AF /\!/ DC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

10. **解：**四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 理由如下：

$\because BC = x - 5$, $DC = x - 3$, $BD = 4$, $BD \perp BC$,

$\therefore CD^2 - BC^2 = BD^2$，即

$(x-3)^2 - (x-5)^2 = 16$,

解得 $x = 8$,

$\therefore BC = x - 5 = 3$, $DC = x - 3 = 5$, $AD = 11 - x = 3$,

又 $\because AB = 5$,

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

11. **解：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO = CO$, $BO = DO$.

又 $\because AE = CG$, $BM = DN$,

$\therefore EO = GO$, $MO = NO$.

$\therefore$ 四边形 $EMGN$ 是平行四边形.

点拨：根据已知平行四边形的性质得到对角线互相平分，再根据对角线互相平分的四边形是平行四边形来判定平行四边形.

12. **证明：**连接 DE，

假设 BD 和 CE 互相平分，

则四边形 $EBCD$ 是平行四边形，

$\therefore BE /\!/ CD$,

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 AC、AB 上，

$\therefore AC$ 不可能平行于 AB，与已知出现矛盾，

故假设不成立原命题正确，

即 BD 和 CE 不可能互相平分.

Ⅱ. 举一反三训练

13. A

14. **证明：**(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB /\!/ CD$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AE=CF$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2)由(1)得:四边形 $AECF$ 是平行四边形,

∴ $AF\parallel CE$,

∵ $AE=CF$,$AB\parallel CD$,$AB=CD$,

∴ $BE\parallel DF$,$BE=DF$,

∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

∴ $BF\parallel DE$,

∴ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形,

∴ EF 与 GH 互相平分.

15. **证明:**连接 GE、FH. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,∴ $OA=OC$,$\angle BAO=\angle DCO$,

又∵ $\angle AOG=\angle COH$,∴ $\triangle AOG\cong\triangle COH$.

∴ $OG=OH$.

又易得 $OE=OF$,∴ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形. ∴ $GF\parallel EH$.

16. 2 或$\frac{14}{3}$

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **2.** C **3.** B

4. 三角形中,至少有两个角是钝角

5. 答案不唯一,如 $BF=DE$

6. 16

7. **证明:**(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel DF$,

∴ $\angle ABE=\angle FCE$,

∵ E 为 BC 的中点,

∴ $BE=CE$,

在$\triangle ABE$ 与$\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABE=\angle FCE,\\ BE=CE,\\ \angle AEB=\angle CEF,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle FCE$(ASA),

∴ $AB=CF$;

(2)∵ $AD=2AB$,$AB=FC=CD$,

∴ $AD=DF$,

∵ $\triangle ABE\cong\triangle FCE$,

∴ $AE=EF$,

∴ $DE\perp AF$.

8. (1)**证明:**∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $CD\parallel AB$,∴ $CM\parallel AN$,

∵ $AM\perp BD$,$CN\perp BD$,

∴ $AM\parallel CN$,

∴ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2)**解:**∵ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形,

∴ $CM=AN$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $CD=AB$,$CD\parallel AB$,

∴ $DM=BN$,$\angle MDE=\angle NBF$,

在$\triangle MDE$ 和$\triangle NBF$ 中,

$$\begin{cases}\angle MDE=\angle NBF,\\ \angle DEM=\angle NFB=90^\circ,\\ DM=BN,\end{cases}$$

∴ $\triangle MDE\cong\triangle NBF$,

∴ $ME=NF=1$,

在 Rt$\triangle DME$ 中,∵ $\angle DEM=90^\circ$,$DE=2$,$ME=1$,

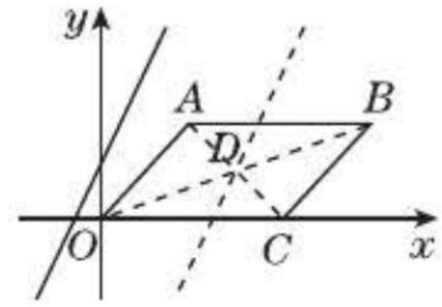
∴ $BN=DM=\sqrt{DE^2+ME^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

9. 6 **点拨:**连接 AC、BO,交于点 D,如图所示:当平移后的直线经过 D 点时,该直线可将$\square OABC$ 的面积平分,∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

∴ $BD=OD$,∵ $B(6,2)$,$O(0,0)$,

∴ $D(3,1)$,设直线 $y=2x+1$ 平移后的直线的表达式为$y=kx+b$,易知 $k=2$,

∵ 平移后的直线过 $D(3,1)$,∴ $y=2x-5$,∴ 直线 $y=2x+1$ 要向下平移 6 个单位长度,∴ 时间为 6 秒.



(第9题图)

10. 4 **点拨:**∵ $EF\parallel BC$,$GH\parallel AB$,∴ 四边形 $HPFD$、$BEPG$、$AEPH$、$CFPG$ 为平行四边形,∴ $S_{\triangle PEB}=S_{\triangle BGP}$,$S_{\triangle PHD}=S_{\triangle DFP}$,$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CDB}$,∴ $S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PEB}-S_{\triangle PHD}=S_{\triangle CDB}-S_{\triangle BGP}-S_{\triangle DFP}$,即 $S_{四边形AEPH}=S_{四边形PFCG}$. ∵ $CG=2BG$,$S_{\triangle BPG}=1$,

∴ $S_{四边形AEPH}=S_{四边形PFCG}=4\times1=4$.

11. **解:**因为 $PD\parallel CQ$,所以当 $PD=CQ$ 时,四边形 $PQCD$ 是平行四边形. 因为 $PD=(24-t)$ cm,$CQ=3t$ cm,所以 $24-t=3t$. 解得 $t=6$. 所以当 $t=6$ 时,四边形 $PQCD$ 是平行四边形.

12. (1)**证明:**延长 BC 交 HM 于 N,设 FM 交 BC 于 O.

∵ 四边形 $BMDC$ 是平行四边形,

∴ $BC=DM$,$BM=CD$,$\angle CBM=\angle MDC$,$BC\parallel DM$,

∵ $BF=BC$,$DC=DH$,$\angle FBC=\angle CDH=90^\circ$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore BF=DM,\angle FBM=\angle MDH,BM=DH,$

$\therefore \triangle FBM\cong\triangle MDH,$

$\therefore FM=MH,\angle BFM=\angle DMH,$

$\because BC/\!/DM,\therefore \angle DMH=\angle MNO,$

$\therefore \angle OFB=\angle ONM,$

又$\because \angle FOB=\angle MON,$

$\therefore \angle OMN=\angle OBF=90°,$

$\therefore \triangle FMH$ 是等腰直角三角形.

(2)**解**:结论:$\angle FMH=\alpha.$

理由:设 BC 交 HM 于 N,FM 交 BC 于 $O.$

$\because$ 四边形 $BMDC$ 是平行四边形,

$\therefore BC=DM,BM=CD,\angle CBM=\angle MDC,BC/\!/DM,$

$\because BF=BC,DC=DH,\angle FBC=\angle CDH,$

$\therefore$ 在$\triangle FBM$ 和$\triangle MDH$ 中,

$$\begin{cases}BF=DM,\\ \angle FBM=\angle MDH,\\ BM=DH,\end{cases}$$

$\therefore \triangle FBM\cong\triangle MDH,$

$\therefore \angle BFM=\angle DMH,$

$\because BC/\!/DM,\therefore \angle DMH=\angle MNO,$

$\therefore \angle OFB=\angle ONM,$

又$\because \angle FOB=\angle MON,$

$\therefore \angle OMN=\angle OBF,$

$\therefore \angle FMH=\alpha.$

9.4 矩形、菱形、正方形

9.4.1 矩 形

1. 举一反三训练

1. 解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle D=\angle C=90°.$

$\therefore \angle CEB+\angle CBE=90°.$

$\because EF\perp EB,\therefore \angle FEB=90°.$

$\therefore \angle DEF+\angle CEB=90°.$

$\therefore \angle DEF=\angle CBE.$

在$\triangle DEF$ 和$\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases}\angle D=\angle C,\\ \angle DEF=\angle CBE,\\ EF=BE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DEF\cong\triangle CBE.$

$\therefore DE=BC.$

$\because$ 矩形 $ABCD$ 的周长为 22,

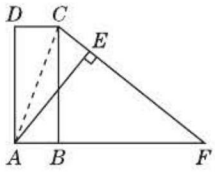
$\therefore 2(BC+DE+CE)=22.$

$\therefore DE+DE+3=11.\therefore DE=4.$

点拨:根据矩形的性质得出 $\angle D=\angle C=90°$,进而得出 $\angle DEF=\angle CBE$,证得 $\triangle DEF\cong\triangle CBE$,推出 $DE=BC$,最后根据已知条件即可求出 DE 的长.

2. 20

3. 证明:连接 AC,如图所示:



(第 3 题图)

$\because CF=AF,$

$\therefore \angle FCA=\angle CAF,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore DC/\!/AB,$

$\therefore \angle DCA=\angle CAF,$

$\therefore \angle FCA=\angle DCA,$

$\because AE\perp FC,$

$\therefore \angle CEA=90°,$

$\therefore \angle CDA=\angle CEA=90°,$

在$\triangle ADC$ 和$\triangle AEC$ 中,

$$\begin{cases}\angle CDA=\angle CEA,\\ \angle DCA=\angle FCA,\\ AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle AEC$ (AAS),

$\therefore AD=AE.$

4. 20

5. 证明:$\because$ 在$\triangle ABC$ 中,$AB=BC,BD$ 平分 $\angle ABC,$

$\therefore AD=CD,\angle CDB=90°.$

又$\because$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形,

$\therefore AD/\!/\!/BE.\therefore CD/\!/\!/BE.$

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是平行四边形.

又$\because \angle CDB=90°,$

$\therefore$ 四边形 $BECD$ 是矩形.

6. 证明:(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB/\!/DC,$

$\therefore \angle ABE=\angle ECF,$

$\because E$ 为 BC 的中点,

$\therefore BE=CE,$

在$\triangle ABE$ 和$\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABE=\angle ECF,\\ BE=CE,\\ \angle AEB=\angle FEC(\text{对顶角相等}),\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FCE$(ASA).

$\therefore AB=CF,$

又$\because AB/\!/CF,$

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 为平行四边形.

(2)易知 $BE=EC,AE=EF,$

$\because \angle AEC$ 为$\triangle ABE$ 的外角,

$\therefore \angle AEC=\angle ABC+\angle EAB,$

又$\because \angle AEC=2\angle ABC,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $\angle ABC = \angle EAB$,

∴ $AE = BE$,

∴ $AE + EF = BE + EC$,即 $AF = BC$,

又∵ 四边形 $ABFC$ 为平行四边形,

∴ 四边形 $ABFC$ 为矩形.

7. **解:**∵ $\angle BAC = 90°$,O 为 BC 的中点,

∴ $OA = \frac{1}{2}BC = OB = OC$,

又∵ OE 平分 $\angle AOB$,OD 平分 $\angle AOC$,

∴ $OE \perp AB$,$AE = BE$,$AD = CD$,$OD \perp AC$,

∴ $\angle AEO = \angle ADO = 90°$,

∴ 四边形 $ADOE$ 为矩形,

∴ $AE = OD$,$AD = OE$,

∵ $AB = 8$,$AC = 6$,

∴ $OD = AE = \frac{1}{2}AB = 4$,$OE = AD = \frac{1}{2}AC = 3$,

∴ 四边形 $ADOE$ 的周长 $= 2(AD + AE) = 2 \times (3 + 4) = 14$.

8. C

Ⅱ. 举一反三训练

9. **解:**设 EC 的长为 x cm,则 $DE = (8 - x)$ cm.

∵ $\triangle ADE$ 折叠后的图形是 $\triangle AFE$,

∴ $AD = AF$,$\angle D = \angle AFE$,$DE = EF$.

∵ $AD = BC = 10$ cm,

∴ $AF = AD = 10$ cm.

在 Rt$\triangle ABF$ 中,根据勾股定理,得 $AB^2 + BF^2 = AF^2$,

∴ $8^2 + BF^2 = 10^2$.

∴ $BF = 6$ cm.

∴ $FC = BC - BF = 10 - 6 = 4$(cm).

在 Rt$\triangle EFC$ 中,根据勾股定理,得:$FC^2 + EC^2 = EF^2$,

∴ $4^2 + x^2 = (8 - x)^2$,

即 $16 + x^2 = 64 - 16x + x^2$,

化简,得 $16x = 48$.

∴ $x = 3$.

故 EC 的长为 3 cm.

10. (1)**证明:**∵ $CF = BE$,

∴ $CF + EC = BE + EC$.

即 $EF = BC$.

∵ 在$\square ABCD$ 中,$AD \parallel BC$ 且 $AD = BC$,

∴ $AD \parallel EF$ 且 $AD = EF$.

∴ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

∵ $AE \perp BC$,

∴ $\angle AEF = 90°$.

∴ 四边形 $AEFD$ 是矩形;

(2)**解:**∵ 四边形 $AEFD$ 是矩形,$DE = 8$,

∴ $AF = DE = 8$.

∵ $AB = 6$,$BF = 10$,

∴ $AB^2 + AF^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BF^2$.

∴ $\angle BAF = 90°$.

∵ $AE \perp BF$,

∴ $\triangle ABF$ 的面积 $= \frac{1}{2}AB \cdot AF = \frac{1}{2}BF \cdot AE$.

∴ $AE = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5}$.

11. (1)**证明:**∵ $AF \parallel BC$,

∴ $\angle AFE = \angle DBE$,

∵ E 为 AD 的中点,

∴ $AE = DE$,

在$\triangle AFE$ 和$\triangle DBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AFE = \angle DBE, \\ \angle AEF = \angle DEB, \\ AE = DE, \end{cases}$$

∴ $\triangle AFE \cong \triangle DBE$(AAS),

∴ $AF = BD$,

又 AD 为 BC 边上的中线,

∴ $BD = CD$,

∴ $AF = CD$;

(2)**解:**当$\triangle ABC$ 是等腰三角形,即 $AC = AB$ 时,四边形 $ADCF$ 是矩形.

证明:∵ $AF = CD$,且 $AF \parallel CD$,

∴ 四边形 $ADCF$ 为平行四边形,

当 $AC = AB$ 时,∵ AD 为 BC 边上的中线,

∴ $AD \perp BC$,即 $\angle ADC = 90°$,

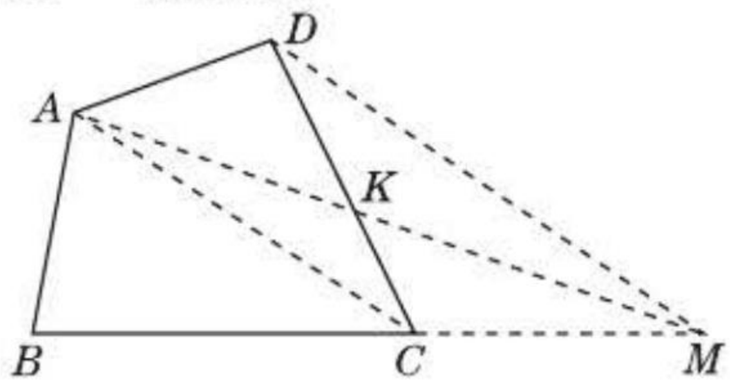
∴ 四边形 $ADCF$ 为矩形.

12. **解:**如图,连接 AC,过点 D 作 $DM \parallel AC$,交 BC 的延长线于 M,连接 AM,交 CD 于 K,

∵ $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ACM}$,

∴ $S_{\triangle ADK} = S_{\triangle KCM}$,

∴ $S_{\triangle ABM} = S_{四边形ABCD}$.



(第12题图)

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A **2.** B **3.** C **4.** $EB = DC$(答案不唯一)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 2.5　**点拨：**∵ EO 是 AC 的垂直平分线，∴ $AE = CE$. 设 $CE = x$，则 $ED = AD - AE = AD - CE = 4 - x$. 在 $Rt\triangle CDE$ 中，$CE^2 = CD^2 + ED^2$，即 $x^2 = 2^2 + (4-x)^2$，解得 $x = 2.5$，即 CE 的长为 2.5.

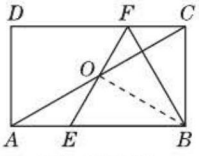
6. (1)**证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $CD // AB$. ∴ $\angle FCO = \angle EAO$.

在 $\triangle FCO$ 与 $\triangle EAO$ 中，$\begin{cases}\angle FOC = \angle EOA,\\ \angle FCO = \angle EAO,\\ CF = AE,\end{cases}$

∴ $\triangle FCO \cong \triangle EAO$. ∴ $OF = OE$.

(2)**解：**如图，连接 OB，



（第 6 题图）

∵ $\angle BEF = 2\angle BAC$，

$\angle BEF = \angle BAC + \angle AOE$，

∴ $\angle BAC = \angle AOE$.

∴ $AE = OE$.

又∵ $AE = CF$，$OF = OE$，

∴ $CF = AE = OE = OF$.

又∵ $BE = BF$，∴ BO 垂直平分 EF.

易知 $Rt\triangle BCF \cong Rt\triangle BOF \cong Rt\triangle BOE$.

∴ $\angle CBF = \angle OBF = \angle OBE$.

又∵ $\angle ABC = 90°$，

∴ $\angle CBF = \angle OBF = \angle OBE = 30°$.

在 $Rt\triangle BCF$ 中，$\angle CBF = 30°$，$CF = 2$，∴ $BF = 4$.

∴ $AB = AE + BE = CF + BF = 2 + 4 = 6$.

7. **解：**(1) ∵ $BE \perp AC$，$DF \perp AC$，∴ $\angle BEO = \angle DFO = 90°$. ∵ 点 O 是 EF 的中点，∴ $OE = OF$.

又∵ $\angle BOE = \angle DOF$，∴ $\triangle BOE \cong \triangle DOF$.

(2)四边形 $ABCD$ 是矩形.

理由如下：∵ $\triangle BOE \cong \triangle DOF$，∴ $OB = OD$.

又∵ $OA = OC$，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∵ $OA = \frac{1}{2}BD$，$OA = \frac{1}{2}AC$，

∴ $BD = AC$. ∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

点拨：此题主要考查了全等三角形的判定与性质以及矩形的判定.

8. $\frac{4}{3}$　**点拨：**如图，作 $EH \perp AC$ 于 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle B = 90°$，∴ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$，在 $\triangle ECH$ 和 $\triangle ECB$ 中，

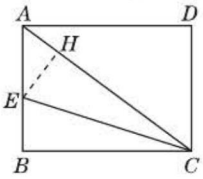
$\begin{cases}\angle EHC = \angle B = 90°,\\ \angle ECH = \angle ECB,\\ EC = EC,\end{cases}$

∴ $\triangle ECH \cong \triangle ECB$，

∴ $BE = EH$，$BC = CH = 4$，∴ $AH = 1$，设 $BE = EH = x$，则 $AE = 3 - x$，

在 $Rt\triangle AEH$ 中，∵ $AE^2 = AH^2 + EH^2$，

∴ $(3-x)^2 = x^2 + 1^2$，∴ $x = \frac{4}{3}$，∴ $BE = \frac{4}{3}$.



（第 8 题图）

9. 2.4　**点拨：**连接 AP，∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 3$，$AC = 4$，$BC = 5$，∴ $AB^2 + AC^2 = BC^2$，∴ $\angle BAC = 90°$. 又∵ $PE \perp AB$ 于 E，$PF \perp AC$ 于 F，∴ 四边形 $AEPF$ 是矩形，∴ $EF = AP$. 因为 AP 的最小值即为直角三角形 ABC 斜边上的高，即 2.4，∴ EF 的最小值为 2.4，

10. (1)**证明：**在矩形 $ABCD$ 中，

$AD = BC$，$\angle A = \angle D = \angle B = \angle BCD = 90°$，

由折叠的性质知，$CG = AD$，$\angle G = \angle D = 90°$，

$\angle GCE = \angle A = 90°$.

∴ $CG = BC$，$\angle G = \angle B$.

∵ $\angle GCF = \angle GCE - \angle ECF$；

$\angle BCE = \angle BCD - \angle ECF$.

∴ $\angle GCF = \angle BCE$.

∴ $\triangle GCF \cong \triangle BCE$.

∴ $CF = CE$.

又∵ 点 P 为 EF 的中点，

∴ $CP \perp EF$；

(2)**解：**由折叠的性质可知 $AD = GC = 2$，$DF = GF$，$\angle G = \angle D = 90°$，设 $DF = x$，则 $FG = x$，$FC = 4 - x$，

在 $Rt\triangle FCG$ 中，$FC^2 = FG^2 + GC^2$，

即 $(4-x)^2 = x^2 + 2^2$，解得 $x = \frac{3}{2}$，

即 $FG = \frac{3}{2}$；

(3)**解：**易知 $CF = AE$，$DF = BE$，

∴ $S_{阴影部分} = S_{四边形BCFE} + S_{\triangle CGF}$，

$= \frac{1}{2}S_{矩形ABCD} + S_{\triangle CGF}$，

$= \frac{1}{2}AB \cdot AD + \frac{1}{2}CG \cdot GF$，

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2}$，

$= 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解:(1)当点 E 与 F 不重合时,四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

理由:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OA=OC$,$OB=OD$.

∵ E、F 是 AC 上两动点,分别从 A、C 两点以相同的速度向 C、A 运动,

∴ $AE=CF$.

∴ $OE=OF$.

∴ BD、EF 互相平分.

∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形;

(2)能.

当 $BD=EF$ 时,以点 D,E,B,F 为顶点的四边形是矩形.

∵ $BD=12$ cm,∴ $EF=12$ cm.

∴ $OE=OF=6$ cm.

∵ $AC=16$ cm,∴ $OA=OC=8$ cm.

∴ $AE=2$ cm 或 14 cm,

由于动点的速度都是 1 cm/s,

∴ $t=2$ s 或 14 s.

故当运动时间 $t=2$ s 或 14 s 时,以 D、E、B、F 为顶点的四边形是矩形.

9.4.2 菱 形

Ⅰ. 举一反三训练

1. 25° **2.** 10 **3.** B

4. 证明:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AD=CD$,$\angle A=\angle C$,

∵ $DE\perp BA$,$DF\perp CB$,

∴ $\angle AED=\angle CFD=90°$,

在△ADE 和△CDF 中,

$$\begin{cases}\angle AED=\angle CFD=90°,\\ \angle A=\angle C,\\ AD=CD,\end{cases}$$

∴ △ADE≌△CDF;

(2)∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $AB=CB$,

∵ △ADE≌△CDF,

∴ $AE=CF$,

∴ $BE=BF$,

∴ $\angle BEF=\angle BFE$.

5. 证明:∵ $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E,

∴ $\angle BAE=\angle EAF$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD/\!/BC$,

∴ $\angle EAF=\angle AEB$,

∴ $\angle BAE=\angle AEB$,

∴ $AB=BE$,

同理,$AB=AF$,∴ $BE=AF$.

∵ $AD/\!/BC$,

∴ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形,

∵ $AB=BE$,∴ □$ABEF$ 是菱形.

6. 证明:∵ $AF/\!/CD$,∴ $\angle AFE=\angle CDE$,

在△AEF 和△CED 中,

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle CDE,\\ \angle AEF=\angle CED,\\ AE=CE,\end{cases}$$

∴ △AEF≌△CED.

∴ $AF=CD$,

又∵ $AF/\!/CD$,

∴ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

由题意知,$AE=AB$,$\angle EAD=\angle BAD$,$AD=AD$,

∴ △AED≌△ABD.

∴ $\angle AED=\angle B=90°$,即 $DF\perp AC$.

∴ 四边形 $ADCF$ 是菱形.

7. 证明:∵ $AD\perp BC$,点 E、F 分别是 AB、AC 的中点,

∴ 在 Rt△ABD 中,$DE=\frac{1}{2}AB=AE$,

在 Rt△ACD 中,$DF=\frac{1}{2}AC=AF$,

又∵ $AB=AC$,点 E、F 分别是 AB、AC 的中点,

∴ $AE=AF$,

∴ $AE=AF=DE=DF$,

∴ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

Ⅱ. 举一反三训练

8. (1)证明:∵ $AF/\!/BC$,∴ $\angle AFE=\angle DBE$,

∵ E 是 AD 的中点,

∴ $AE=DE$,

在△AFE 和△DBE 中,

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE,\\ \angle FEA=\angle BED,\\ AE=DE,\end{cases}$$

∴ △AFE≌△DBE(AAS);

(2)证明:由(1)知,△AFE≌△DBE,则 $AF=DB$.

∵ $DB=DC$,∴ $AF=CD$.

又∵ $AF/\!/BC$,

∴ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

∵ $\angle BAC=90°$,D 是 BC 的中点,

∴ $AD=DC=\frac{1}{2}BC$,

∴ 四边形 $ADCF$ 是菱形;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)**解**:如图,连接 DF,

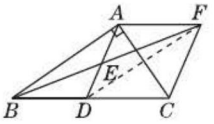
$\because AF \parallel BD, AF = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形,

$\therefore DF = AB = 5$,

$\because$ 四边形 $ADCF$ 是菱形,

$\therefore S_{菱形ADCF} = \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$.



(第 8 题图)

9. $\frac{24}{5}$ **点拨**:如图,作点 E 关于直线 AC 的对称点 E',作 $E'F \perp BC$ 于 F,交 AC 于 P,连接 PE,则 $E'F$ 的长即为 $PE + PF$ 的最小值.

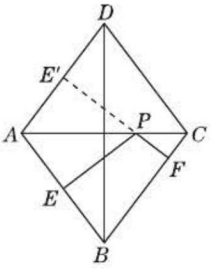
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,对角线 $AC = 6, BD = 8$,

$\therefore AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$\because \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = AD \cdot E'F$,

$\therefore E'F = \frac{24}{5}$,

$\therefore PE + PF$ 的最小值为 $\frac{24}{5}$.



(第 9 题图)

10. (1)**证明**:过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E, $AF \perp CD$ 于 F,如图①.

$\because$ 两张纸条的宽度相同,且对边平行,

$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC, AE = AF$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because S_{\square ABCD} = BC \cdot AE = CD \cdot AF$,

$AE = AF$,

$\therefore BC = CD$,

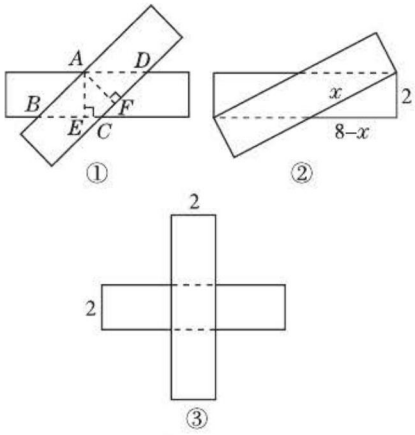
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,即重叠部分的图形是菱形;

(2)**解**:当两张纸条如图②所示放置时,菱形周长最大,设这时菱形的边长为 x,

由勾股定理:$x^2 = (8 - x)^2 + 2^2$,得:$4x = 17$,

即菱形的最大周长为 17.

当两张纸条如图③所示放置时,即是正方形时周长取得最小值为 $2 \times 4 = 8$. 故重叠部分的图形的周长的最大值为 17,最小值为 8.



(第 10 题图)

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A **2.** C **3.** B **4.** D **5.** 20°

6. 答案不唯一,如 $AB = AC$

7. $\frac{7}{5}$

8. **证法一**:$\because AD \parallel BC, \therefore \angle BAD + \angle B = 180°$.

$\because \angle BAD = \angle BCD, \therefore \angle BCD + \angle B = 180°$.

$\therefore AB \parallel DC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\therefore \angle B = \angle D$.

$\because AM = AN, AM \perp BC, AN \perp DC$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABM \cong \mathrm{Rt}\triangle ADN$.

$\therefore AB = AD$.

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

证法二:如图①,连接 BD.

$\because AD \parallel BC, \therefore \angle ADB = \angle DBC$.

$\because \angle BAD = \angle BCD, BD = DB$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB. \therefore AD = CB$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore \angle ABC = \angle ADC$.

$\because AM = AN, AM \perp BC, AN \perp DC$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABM \cong \mathrm{Rt}\triangle ADN$.

$\therefore AB = AD$.

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

证法三:如图②,连接 AC.

$\because AM = AN, AC = AC, AM \perp BC, AN \perp DC$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACM \cong \mathrm{Rt}\triangle ACN$.

$\therefore \angle ACB = \angle ACD$.

$\because AD \parallel BC, \therefore \angle ACB = \angle CAD$.

$\therefore \angle ACD = \angle CAD. \therefore DC = AD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

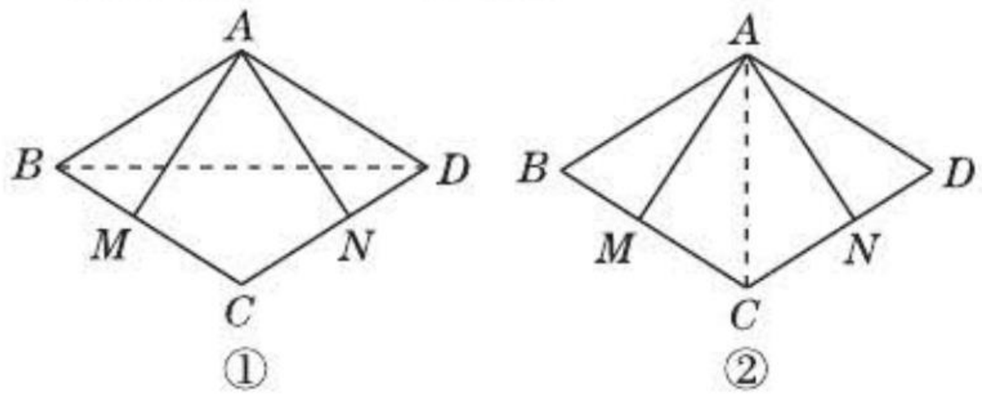
∵ $\angle BAD = \angle BCD$,

∴ $\angle BAC = \angle ACD$.

∴ $AB \parallel DC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∴ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.



(第 8 题图)

9. (1)**证明:**∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD \parallel BC, AB = CD$.

∵ $AE \perp BC$,且 CG 是由 AE 沿 BC 方向平移而成的,

∴ $AE = CG, CG \perp BC$. ∴ $CG \perp AD$.

∴ $\angle AEB = \angle CGD = 90°$.

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE \cong \mathrm{Rt}\triangle CDG$.

∴ $BE = DG$.

(2)**解:**当 $BC = \frac{3}{2}AB$ 时,四边形 $ABFG$ 是菱形.

证明如下:由平移可知 $AB \parallel GF$,又∵ $AG \parallel BF$,

∴ 四边形 $ABFG$ 是平行四边形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$\angle B = 60°$,

∴ $\angle BAE = 30°$.

∴ $BE = \frac{1}{2}AB$(直角三角形中,30° 的角所对的直角边等于斜边的一半).

由平移可知 $BE = CF$. ∵ $BC = \frac{3}{2}AB$,

∴ $BF = BC - FC = \frac{3}{2}AB - \frac{1}{2}AB = AB$.

∴ 四边形 $ABFG$ 是菱形.

10. A **11.** 2 或 8

12. (1)**证明:**∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AB \parallel CD, AC \perp BD$,

∴ $AE \parallel CD, \angle AOB = 90°$,

∵ $DE \perp BD$,即 $\angle EDB = 90°$,

∴ $\angle AOB = \angle EDB$,

∴ $DE \parallel AC$,

∴ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形;

(2)**解:**①∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC = 8$,$BD = 6$,

∴ $AO = 4, DO = 3$, ∴ $AD = CD = 5$,

∵ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形,

∴ $AE = CD = 5, DE = AC = 8$,

∴ $\triangle ADE$ 的周长为 $AD + AE + DE = 5 + 5 + 8 = 18$;

②当 $DE = PE$ 时,$PE = DE = AC = 8$;当 $PD = PE$ 时,点 P 与点 A 重合,$PE = 5$;当 $DE = PD$ 时,$PE = \frac{64}{5}$.

13. (1)**证明:**∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $ND \parallel AM$,

∴ $\angle NDE = \angle MAE, \angle DNE = \angle AME$,

∵ 点 E 是 AD 的中点,

∴ $DE = AE$,

在 $\triangle NDE$ 和 $\triangle MAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle NDE = \angle MAE, \\ \angle DNE = \angle AME, \\ DE = AE, \end{cases}$$

∴ $\triangle NDE \cong \triangle MAE$(AAS),

∴ $ND = MA$,

∴ 四边形 $AMDN$ 是平行四边形;

(2)**解:**$AM = 1$.

理由如下:连接 BD,

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AD = AB = 2$,

∵ $\angle DAB = 60°$,

∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形,

∵ $AM = 1, AB = 2$,

∴ $AM = MB = 1$,

∴ $DM \perp AB$,

即 $\angle DMA = 90°$,

又∵ 四边形 $AMDN$ 是平行四边形,

∴ 四边形 $AMDN$ 是矩形.

14. (1)**证明:**取 BC 的中点 G,连接 OG,如图.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle A = 60°$,

∴ $\angle A = \angle C = \angle CBD = \angle ABD = \angle CDB = 60°$,

$AB = BC = CD = DA$,

∴ $\triangle BCD$ 为等边三角形, ∴ $BD = BC$,

∴ $OB = BG$.

又∵ $\angle OBG = 60°$, ∴ $\triangle BOG$ 为等边三角形,

∴ $OG = OB, \angle BOG = 60°$.

∵ $\triangle OEF$ 是等边三角形,

∴ $\angle EOF = 60°$,

∴ $\angle BOM = \angle NOG$.

在 $\triangle OBM$ 和 $\triangle OGN$ 中,

$$\begin{cases} \angle BOM = \angle NOG, \\ OB = OG, \\ \angle BGO = \angle ABD = 60°, \end{cases}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle OBM \cong \triangle OGN$(ASA),

$\therefore OM = ON$;

(2)**解**:$BN + BM = \frac{1}{2}AB$,证明如下:

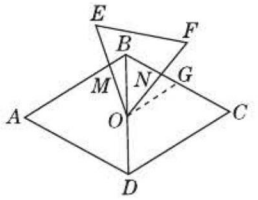
由(1)知$\triangle OBM \cong \triangle OGN$,

$\therefore BM = GN$,

$\therefore BG = BN + NG$,

$\therefore BN + BM = BG = \frac{1}{2}AB$;

(3)**解**:$BN - BM = \frac{1}{2}AB$.



(第14题图)

9.4.3 正方形

Ⅰ. 举一反三训练

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 证明:∵ 四边形$ABCD$是正方形,

$\therefore AO = OD = OC$, $\angle AOE = \angle DOF = 90°$.

又∵ $DE = CF$, $\therefore OD - DE = OC - CF$,

即$OE = OF$.

在$\triangle AOE$和$\triangle DOF$中,

$$\begin{cases} AO = DO, \\ \angle AOE = \angle DOF = 90°, \\ OE = OF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle DOF$. $\therefore \angle OAE = \angle ODF$.

∵ $\angle OAE + \angle AEO = 90°$,

$\angle AEO = \angle DEM$,

$\therefore \angle ODF + \angle DEM = 90°$.

$\therefore \angle AMD = 90°$. $\therefore AM \perp DF$.

3. (1)**证明**:在$\triangle ABC$中,$AB = AC$, $AD \perp BC$,

$\therefore \angle BAD = \angle DAC$,

∵ AN是$\triangle ABC$外角的平分线,

$\therefore \angle MAE = \angle CAE$,

$\therefore \angle DAE = \angle DAC + \angle CAE = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$,

又∵ $AD \perp BC$, $CE \perp AN$,

$\therefore \angle ADC = \angle CEA = 90°$,

$\therefore$ 四边形$ADCE$为矩形.

(2)**解**:当$\triangle ABC$满足$\angle BAC = 90°$时,四边形$ADCE$为正方形.

证明如下:∵ $AB = AC$, $\angle BAC = 90°$,

$\therefore \angle ACB = \angle B = 45°$,

∵ $AD \perp BC$,

$\therefore \angle CAD = \angle ACD = 45°$,

$\therefore DC = AD$,

又∵ 四边形$ADCE$为矩形,

$\therefore$ 矩形$ADCE$是正方形.

4. 证明:∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore AO = CO$.

又∵ $\triangle ACE$是等边三角形,

$\therefore EO \perp AC$,即$DB \perp AC$.

$\therefore \square ABCD$是菱形.

∵ $\triangle ACE$是等边三角形,$\therefore \angle AEC = 60°$.

易得$\angle AEO = \frac{1}{2}\angle AEC = 30°$.

∵ $\angle AED = 2\angle EAD$, $\therefore \angle EAD = 15°$.

$\therefore \angle ADO = \angle EAD + \angle AED = 45°$.

∵ 四边形$ABCD$是菱形,

$\therefore \angle ADC = 2\angle ADO = 90°$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$是正方形.

Ⅱ. 举一反三训练

5. 证明:(1)∵ 四边形$ABCD$是正方形,

$\therefore \angle BAD = 90°$, AC平分$\angle BAD$,

∵ $PM \perp AD$, $PN \perp AB$,

$\therefore PM = PN$, $\angle PMA = \angle PNA = 90°$,

$\therefore$ 四边形$PMAN$是矩形,

∵ $PM = PN$,

$\therefore$ 四边形$PMAN$是正方形.

(2)∵ 四边形$PMAN$是正方形,

$\therefore \angle MPN = 90°$,

∵ $\angle EPB = 90°$,

$\therefore \angle MPE + \angle EPN = \angle NPB + \angle EPN = 90°$,

$\therefore \angle MPE = \angle NPB$,

在$\triangle EPM$和$\triangle BPN$中,

$$\begin{cases} \angle PME = \angle PNB = 90°, \\ PM = PN, \\ \angle MPE = \angle NPB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle EPM \cong \triangle BPN$(ASA),

$\therefore EM = BN$.

6. (1)**证明**:延长AE, BC交于点N,如图所示,

∵ 四边形$ABCD$是正方形,

$\therefore AD // BC$, $\therefore \angle DAE = \angle ENC$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ AE 平分 $\angle DAM$,

∴ $\angle DAE = \angle MAE$,

∴ $\angle ENC = \angle MAE$,

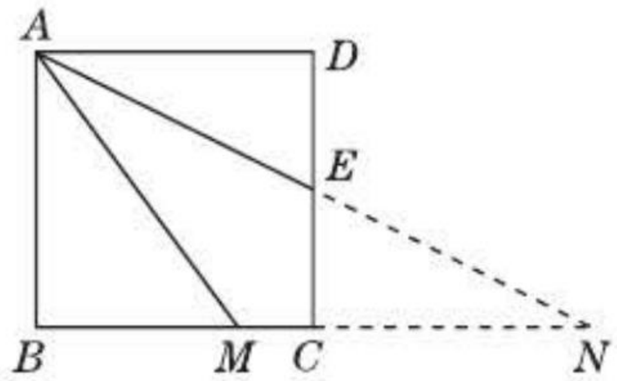
∴ $AM = MN$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle NCE$ 中, $\begin{cases} \angle DAE = \angle CNE, \\ \angle AED = \angle NEC, \\ DE = CE, \end{cases}$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle NCE$(AAS),

∴ $AD = NC$,

∴ $AM = MN = NC + MC = AD + MC$.



(第6题图)

(2) $AM = DE + BM$ 成立.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D

2. D **点拨:** ∵ EF 垂直平分 BC, ∴ $BE = EC$, $BF = CF$. ∵ $BE = BF$, ∴ $BE = EC = CF = BF$. ∴ 四边形 $BECF$ 是菱形. 当 $BC = AC$ 时, ∵ $\angle ACB = 90°$, ∴ $\angle A = \angle ABC = 45°$. ∵ 四边形 $BECF$ 是菱形, ∴ $\angle EBF = 2\angle EBC = 2 \times 45° = 90°$. ∴ 四边形 $BECF$ 是正方形. 当 $CF \perp BF$ 时, $\angle BFC = 90°$, ∴ 四边形 $BECF$ 是正方形. 当 $BD = DF$ 时, ∵ 四边形 $BECF$ 是菱形, ∴ $BC = 2BD$, $EF = 2DF$. ∴ $BC = EF$. ∴ 四边形 $BECF$ 是正方形. 当 $AC = BF$ 时, 无法得出四边形 $BECF$ 是正方形. 故选 D.

3. A **4.** C **5.** $AB = BC$(答案不唯一)

6. 60°或 120° **7.** $(-\sqrt{3}, 1)$

8. **证明:** ∵ $BE // OC$, $CE // OB$,

∴ 四边形 $OBEC$ 是平行四边形,

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $OC = OB$, $AC \perp BD$,

∴ $\angle BOC = 90°$,

∴ 四边形 $OBEC$ 是矩形,

∵ $OC = OB$,

∴ 四边形 $OBEC$ 是正方形.

9. **解:** (1) 四边形 $AEDF$ 为平行四边形, 理由如下:

∵ $DE // AC$, $DF // AB$,

∴ 四边形 $AEDF$ 为平行四边形.

(2) 当 AD 平分 $\angle EAF$ 时, 四边形 $AEDF$ 为菱形.

理由如下: ∵ AD 平分 $\angle EAF$,

∴ $\angle EAD = \angle FAD$.

∵ $AE // DF$,

∴ $\angle EAD = \angle ADF$.

∴ $\angle ADF = \angle FAD$.

∴ $AF = DF$.

又∵ 四边形 $AEDF$ 为平行四边形,

∴ 四边形 $AEDF$ 为菱形.

(3) 当 $\triangle ABC$ 满足 $\angle BAC = 90°$ 时, 四边形 $AEDF$ 为正方形.

10. $\sqrt{2} - 1$ 或 $\sqrt{2}$ **11.** $\frac{9}{4}$

12. **解:** (1) 四边形 $ADBE$ 是矩形.

理由: ∵ BE、BD 是 $\triangle ABC$ 的内、外角平分线,

∴ $\angle DBE = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$,

∵ $AD \perp BD$ 于 D, $AE \perp BE$ 于 E,

∴ $\angle ADB = \angle AEB = 90°$,

∴ $\angle DBE = \angle ADB = \angle AEB = 90°$,

∴ 四边形 $ADBE$ 是矩形.

(2) $DE = BF$.

理由: ∵ $AE \perp BE$ 于点 E, ∴ $\angle BEA = \angle BEF = 90°$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 中,

$\begin{cases} \angle ABE = \angle FBE, \\ BE = BE, \\ \angle BEA = \angle BEF, \end{cases}$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle FBE$(ASA),

∴ $AB = BF$,

∵ 四边形 $ADBE$ 是矩形,

∴ $DE = AB$,

∴ $DE = BF$.

(3) 当 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ABC = 90°$ 时, 四边形 $ADBE$ 是一个正方形.

证明如下: ∵ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90°$,

∴ $\angle ABE = 45°$, 又∵ $AE \perp BE$,

∴ $\angle ABE = \angle BAE = 45°$,

∴ $BE = AE$,

∴ 矩形 $ADBE$ 是正方形.

13. (1) **证明:** ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle A = \angle C = 90°$, $AB = BC = CD = DA$,

∵ $AE = BF = CG = DH$,

∴ $AH = CF$,

在 $\triangle AEH$ 与 $\triangle CGF$ 中,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases} AH = CF, \\ \angle A = \angle C, \\ AE = CG, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CGF(\mathrm{SAS})$.

(2)**解**:直线 EG 经过一个定点,这个定点为正方形的中心.

证明如下:

连接 AC、EG,交点为 O,如图所示.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle OAE = \angle OCG$,

在$\triangle AOE$ 和$\triangle COG$ 中,

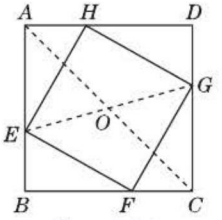
$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCG, \\ \angle AOE = \angle COG, \\ AE = CG, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COG(\mathrm{AAS})$,

$\therefore OA = OC, OE = OG$,

即 O 为 AC 的中点,

$\therefore O$ 为正方形的中心.



(第 13 题图)

9.5 三角形的中位线

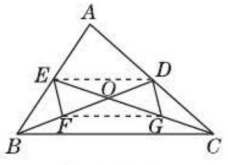
Ⅰ. 举一反三训练

1. 3

2. **证明**:如图,连接 DE, FG,

$\because BD$, CE 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore D$, E 分别是 AC, AB 的中点,



(第 2 题图)

$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$,

同理:$FG \parallel BC, FG = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore DE \parallel FG, DE = FG$,

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形,

$\therefore EF \parallel DG, EF = DG$.

3. **证明**:$\because \triangle ABC$ 的中线 BD, CE 相交于点 O,$\therefore D$, E 分别是 AC, AB 的中点. $\therefore ED \parallel BC$,且 $ED = \frac{1}{2}BC$.

$\because F$, G 分别是 OB, OC 的中点,

$\therefore FG \parallel BC$,且 $FG = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore ED \parallel FG$,且 $ED = FG$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

Ⅱ. 举一反三训练

4. 2

5. (1)**证明**:$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = AC$, $\angle ABC = \angle ACB = 60°$.

$\because DE \parallel AB$,

$\therefore \angle ABC = \angle ADE = 60°$, $\angle ACB = \angle AED = 60°$.

$\therefore \angle ADE = \angle AED = 60°$.

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形.

$\therefore AD = AE$.

$\therefore BD = CE$.

$\because M$、N 分别为 DE、BE 的中点,

$\therefore MN = \frac{1}{2}BD$.

$\because N$、P 分别为 BE、BC 的中点,

$\therefore NP = \frac{1}{2}CE$.

$\because BD = CE$,

$\therefore MN = PN$.

(2)**解**:取 EC 的中点 Q,连接 NQ.

$\because M$, N, Q 分别为 DE, BE, EC 的中点,

$\therefore MN$ 为 $\triangle BDE$ 的中位线,NQ 为 $\triangle BEC$ 的中位线,

$\therefore MN \parallel BD, NQ \parallel BC$.

$\therefore \angle MNE = \angle DBE$, $\angle ENQ = \angle EBC$.

$\because \angle ABC = \angle DBE + \angle EBC = 60°$,

$\therefore \angle MNE + \angle ENQ = \angle MNQ = 60°$.

易得四边形 $NPCQ$ 为平行四边形,

$\therefore \angle PNQ = \angle C = 60°$.

$\therefore \angle MNP = \angle MNQ + \angle PNQ = 120°$.

6. **解**:$MN \parallel BC \parallel AD$, $MN = \frac{1}{2}(BC - AD)$. 理由如下:如图,连接 AM 并延长交 BC 于 H,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle HBD$,

在$\triangle AMD$ 和$\triangle HMB$ 中,

$\begin{cases} \angle ADM = \angle HBM, \\ DM = BM, \\ \angle AMD = \angle HMB, \end{cases}$

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle HMB$,

$\therefore AM = MH, AD = BH$,

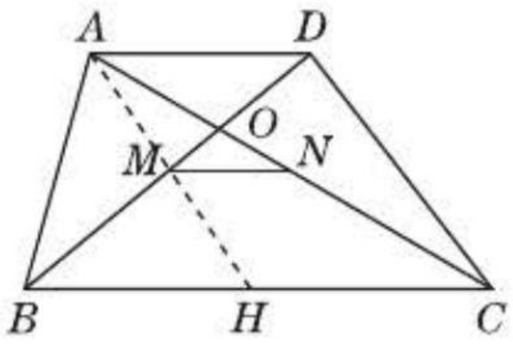
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AM=MH, AN=NC,$

$\therefore MN \parallel HC, MN=\frac{1}{2}HC,$

$\therefore MN \parallel BC \parallel AD,$

$MN=\frac{1}{2}(BC-AD).$



(第6题图)

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D **点拨:** 根据题意知线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,再由三角形的中位线定理知 $AB=2DE=4$,故选 D.

2. D **点拨:** $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中,P 是对角线 BD 的中点,E, F 分别是 AB, CD 的中点,$\therefore PF, PE$ 分别是 $\triangle CDB$ 与 $\triangle DAB$ 的中位线. $\therefore PF=\frac{1}{2}BC$, $PE=\frac{1}{2}AD$. $\because AD=BC, \therefore PF=PE. \therefore \angle PFE=\angle PEF. \because \angle PEF=30°, \therefore \angle PFE=\angle PEF=30°.$

3. A **4.** A **5.** $AC=BD$ **6.** 3

7. **解:** 连接 CM,

$\because \angle ACB=90°, M$ 是 AB 的中点,

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB=3,$

$\because M、N$ 分别是 $AB、AC$ 的中点,

$\therefore MN=\frac{1}{2}BC, MN \parallel BC,$

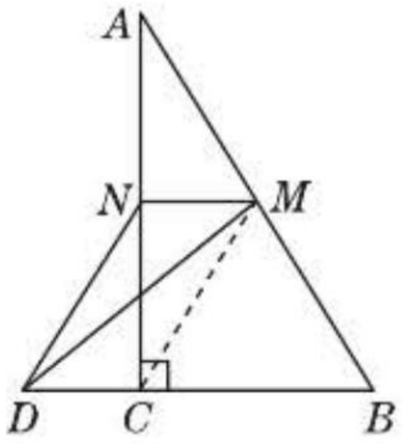
$\because CD=\frac{1}{3}BD,$

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC.$

$\therefore MN=CD$,又 $MN \parallel BC,$

$\therefore$ 四边形 $NDCM$ 是平行四边形,

$\therefore DN=CM=3.$



(第7题图)

8. (1) **证明:** 在 $\triangle CAD$ 中,$\because M、N$ 分别是 $AC、CD$ 的中点,

$\therefore MN \parallel AD, MN=\frac{1}{2}AD,$

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\because M$ 是 AC 的中点,

$\therefore BM=\frac{1}{2}AC,$

$\because AC=AD,$

$\therefore MN=BM.$

(2) **解:** ① $\because \angle BAD=60°, AC$ 平分 $\angle BAD,$

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=30°,$

由(1)可知,$BM=\frac{1}{2}AC=AM=MC,$

$\therefore \angle BMC=\angle BAM+\angle ABM=2\angle BAM=60°,$

$\because MN \parallel AD,$

$\therefore \angle NMC=\angle DAC=30°,$

$\therefore \angle BMN=\angle BMC+\angle NMC=90°;$

② $\because \angle BMN=90°,$

$\therefore BN^2=BM^2+MN^2,$

由(1)可知 $MN=BM=\frac{1}{2}AC=2,$

$\therefore BN=2\sqrt{2}.$

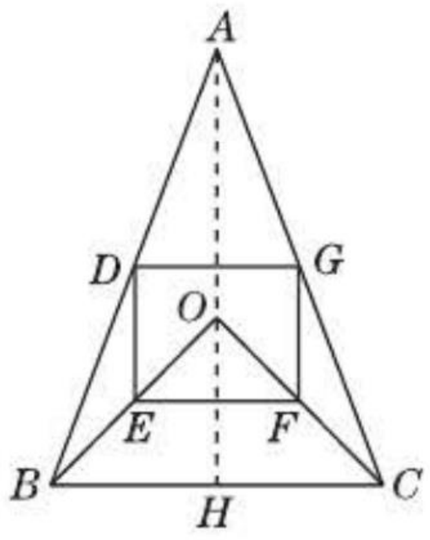
9. (1) **证明:** 连接 AO 并延长交 BC 于 $H,$

$\because AB=AC, OB=OC,$

$\therefore AH$ 是 BC 的中垂线,即 $AH \perp BC$ 于 $H,$

$\because D、E、F、G$ 分别是 $AB、OB、OC、AC$ 的中点,

$\therefore DG \parallel EF \parallel BC, DE \parallel AH \parallel GF, DE=\frac{1}{2}AO.$



(第9题图)

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形,

$\because EF \parallel BC, AH \perp BC,$

$\therefore AH \perp EF,$

又 $\because DE \parallel AH,$

$\therefore EF \perp DE,$

$\therefore$ 平行四边形 $DEFG$ 是矩形.

(2) **解:** 易得 $BC=2EF=2\times3=6,$

$OH=\frac{1}{2}BC=3.$

$\therefore AH=OA+OH=2DE+OH=2\times2+3=7,$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times7=21.$

10. **解:** 连接 PM, MQ, PN, NQ. 因为 $M、P$ 分别是 $AD、BD$ 的中点,所以 PM 是 $\triangle ABD$ 的中位线. 所以 $PM \parallel AB, PM=\frac{1}{2}AB.$ 同理,$NQ \parallel AB, NQ=\frac{1}{2}AB, MQ \parallel CD, MQ=\frac{1}{2}CD.$ 所以 $PM \parallel NQ, PM=NQ.$ 所以四边形 $MPNQ$ 是平行四边形. 又因为 $AB=DC$,所以 $PM=MQ.$ 所以四边形 $MPNQ$ 是菱形. 所以 MN 与 PQ 互相垂直平分.

点拨: 连接 $PM, MQ, PN, NQ.$ 要说明 MN 与 PQ 互相垂直平分,只需说明四边形 $MPNQ$ 为菱形,而 P, M, Q, N 为中点,由此考虑到利用三角形的中

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

位线定理解题.

11. 解:$EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$. 理由如下:连接 BD,取 BD 的中点 M,连接 EM,FM. 因为 E,F 分别是边 AB,CD 的中点,所以 $EM=\frac{1}{2}AD,MF=\frac{1}{2}BC$.

在△EFM 中,因为$EM+MF>EF$,所以$\frac{1}{2}(AD+BC)>EF$,即 $EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$.

12. 解:(1)如图①,延长 BD 交 AC 于 E,

∵ AD 为△ABC 的平分线,$BD\perp AD$,

∴ $BD=DE,AB=AE=12$,

∴ $CE=AC-AE=18-12=6$,

又∵ M 为△ABC 的边 BC 的中点,

∴ DM 是△BCE 的中位线,

∴ $MD=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}\times6=3$.

(2)如图②,延长 BD 交 CA 的延长线于 E,

∵ AD 为△ABC 的外角平分线,$BD\perp AD$,

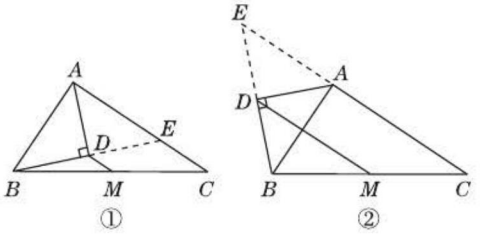
∴ $BD=DE,AB=AE=12$,

∴ $CE=AC+AE=18+12=30$,

又∵ M 为△ABC 的边 BC 的中点,

∴ DM 是△BCE 的中位线,

∴ $MD=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}\times30=15$.



(第 12 题图)

13. 解:△AGD 是直角三角形.

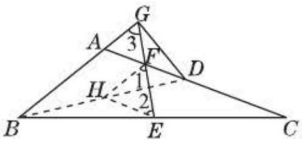
证明如下:如图,连接 BD,取 BD 的中点 H,连接 HF,HE,∵ F 是 AD 的中点,∴ $HF\parallel AB,HF=\frac{1}{2}AB$. ∴ ∠1 = ∠3. 同理,$HE\parallel CD,HE=\frac{1}{2}CD$. ∴ ∠2 = ∠$EFC$. ∵ $AB=CD$,∴ $HF=HE$.

∴ ∠1 = ∠2. ∴ ∠3 = ∠EFC. ∵ ∠$EFC=60°$,

∴ ∠3 = ∠EFC = ∠$AFG=60°$. ∴ ∠$FAG=60°$.

∴ △AGF 为等边三角形. ∴ $AF=GF$. ∵ $AF=FD$,∴ $GF=FD$. ∴ ∠FGD = ∠$FDG=30°$.

∴ ∠$AGD=90°$,即△AGD 是直角三角形.



(第 13 题图)

点拨:参考题目给出的思路,作出辅助线是解答本题的关键.

章末整合与拔高

好题必练

1. D **2.** B **3.** B **4.** B **5.** B

6. 120° **7.** 75 **8.** $\frac{50}{13}$ **9.** 2 **10.** 6

11. 证明:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB\parallel DF$,

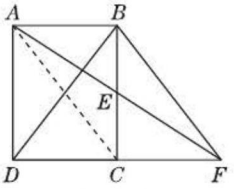
∴ ∠BAE = ∠CFE,

∵ $BE=CE$,∠AEB = ∠FEC,

∴ △AEB≌△FEC,

∴ $AB=CF$.

(2)如图,连接 AC.



(第 11 题图)

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,∠$BCD=90°$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $BD=AC$,

∵ $AB=CF,AB\parallel CF$,

∴ 四边形 $ACFB$ 是平行四边形,

∴ $BF=AC$,

∴ $BD=BF$.

12. (1)**证明:**如图①,连接 DB,DF.

∵ 四边形 $ABCD,ADEF$ 都是菱形,

∴ $AB=BC=CD=DA,AD=DE=EF=FA$.

在△BAD 与△FAD 中,

$$\begin{cases}AB=AF,\\ \angle BAD=\angle FAD,\\ AD=AD,\end{cases}$$

∴ △BAD≌△FAD,

∴ $DB=DF$,

∴ D 在线段 BF 的垂直平分线上,

∵ $AB=AF$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ A 在线段 BF 的垂直平分线上,

∴ AD 是线段 BF 的垂直平分线,

∴ $AD \perp BF$.

(2)**解**:如图②,设 $AD \perp BF$ 于 H,作 $DG \perp BC$ 于 G,易得四边形 $BGDH$ 是矩形,

∴ $DG = BH = \frac{1}{2}BF$.

∵ $BF = BC, BC = CD$,

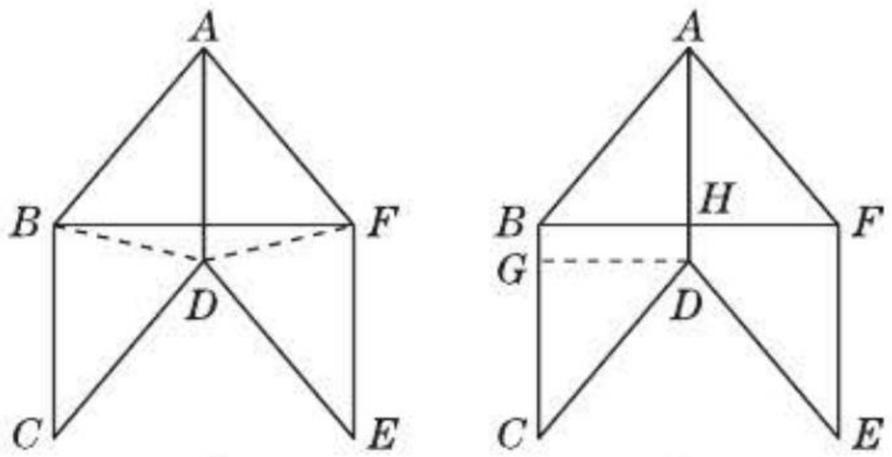
∴ $DG = \frac{1}{2}CD$.

在直角△CDG 中,∵ $\angle CGD = 90°, DG = \frac{1}{2}CD$,

∴ $\angle C = 30°$,

∵ $BC /\!/ AD$,

∴ $\angle ADC = 180° - \angle C = 150°$.



① ②

(第 12 题图)

13. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AB = AD$,

∴ $\angle ABD = \angle ADB$,

∴ $\angle ABE = \angle ADF$,

在△ABE 与△ADF 中,

$$\begin{cases} AB = AD, \\ \angle ABE = \angle ADF, \\ BE = DF, \end{cases}$$

∴ △ABE≌△ADF(SAS).

(2)**解**:四边形 $AECF$ 是菱形.

理由如下:连接 AC,

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $OA = OC, OB = OD, AC \perp EF$,

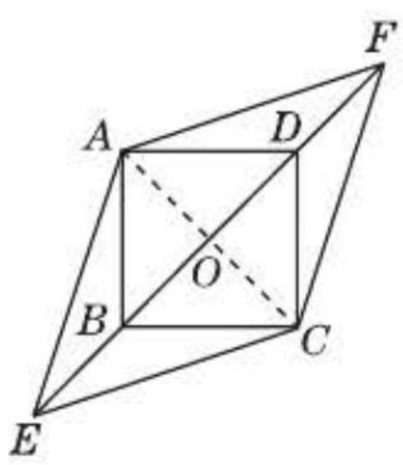
∴ $OB + BE = OD + DF$,

即 $OE = OF$,

∵ $OA = OC, OE = OF$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

∵ $AC \perp EF$,



(第 13 题图)

∴ 四边形 $AECF$ 是菱形.

14. **证明**:(1)∵ 将△ADF 绕点 A 顺时针旋转 90° 后,得到△ABQ,

∴ $QB = DF, AQ = AF, \angle BAQ = \angle DAF, \angle ADF = \angle ABQ$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle BAD = 90°$.

∵ $\angle EAF = 45°$,

∴ $\angle DAF + \angle BAE = 45°$,

∴ $\angle BAQ + \angle BAE = 45°$,即 $\angle QAE = 45°$,

∴ $\angle QAE = \angle FAE$,

在△AQE 和△AFE 中,

$$\begin{cases} AQ = AF, \\ \angle QAE = \angle FAE, \\ AE = AE, \end{cases}$$

∴ △AQE≌△AFE(SAS),

∴ $\angle AEQ = \angle AEF$,

∴ EA 是 $\angle QED$ 的平分线.

(2)由(1)得△AQE≌△AFE,

∴ $QE = EF$,

易知 $\angle ABD + \angle ADB = 90°$.

∴ $\angle ABD + \angle ABQ = 90°$,

即 $\angle QBE = 90°$.

在 Rt△QBE 中,$QB^2 + BE^2 = QE^2$,

又∵ $QB = DF$,

∴ $EF^2 = BE^2 + DF^2$.

15. **解**:(1)猜想:$\angle MBN = 30°$.

证明如下:如图①,连接 AN,∵ EF 是 AB 的垂直平分线,

∴ $NA = NB$,

由折叠可知,$\angle NBM = \angle ABM, BN = AB$,

∴ $AB = BN = AN$,

∴ △ABN 是等边三角形,

∴ $\angle ABN = 60°$,

∴ $NBM = \angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABN = 30°$.

(2)结论:$MN = \frac{1}{2}BM$.

折纸方案:如图②,折叠△BMN,使得点 N 落在 BM 上的 O 处,折痕为 MP,连接 OP.

证明如下:由折叠可知△MOP≌△MNP,

∴ $MN = OM, \angle OMP = \angle NMP = \frac{1}{2}\angle OMN = 30° = \angle B, \angle MOP = \angle MNP = 90°$,

∴ $\angle BOP = \angle MOP = 90°$,

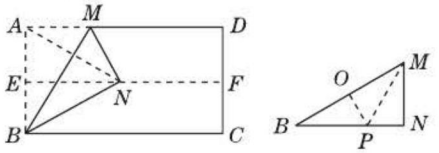
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because OP=OP$,

$\therefore \triangle MOP\cong\triangle BOP$,

$\therefore MO=BO=\frac{1}{2}BM$,

$\therefore MN=\frac{1}{2}BM$.



① ②

(第15题图)

第10章 分 式

10.1 分 式

Ⅰ. 举一反三训练

1. A **点拨:** $\frac{1}{5}(1-x)$是整式,不是分式;$\frac{4x}{\pi-3}$,$\frac{x^2-y^2}{2}$的分母中均不含有字母,因此它们是整式,而不是分式. $\frac{5x^2}{x}$的分母中含有字母,因此是分式. 故选A.

2. $\frac{1}{x-1}$(答案不唯一)

3. $\frac{1\,000}{3x+16}$ **点拨:** 因为原计划每天修x米,实际每天修路比原计划的3倍还多16米,所以实际每天修路$(3x+16)$米,所以修这条路实际上用了$\frac{1\,000}{3x+16}$天.

4. 解: 要使分式有意义,则$|x|-2\neq0$,所以$|x|\neq2$,解得:$x\neq2$且$x\neq-2$.

因此,当$x\neq2$且$x\neq-2$时,分式$\frac{5x}{|x|-2}$有意义.

5. 解: (1)当$2x-3=0$时,$\frac{x}{2x-3}$无意义,解得:$x=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 当$x=\frac{3}{2}$时,$\frac{x}{2x-3}$无意义;

(2)当$5x+10=0$时,$\frac{x-1}{5x+10}$无意义,解得:$x=-2$.

$\therefore$ 当$x=-2$时,$\frac{x-1}{5x+10}$无意义.

6. -1

7. 解: (1)当$a=3$时,原式$=\frac{11\times3}{3+8}=3$;

(2)当$x=2$,$y=-1$时,原式$=\frac{2-(-1)}{2+(-1)^2}=\frac{3}{3}=1$.

Ⅱ. 举一反三训练

8. 解: 由$a=2b$,$c=5a$,可得$c=10b$,故原式$=\frac{12b+2b-10b}{2b+4b+10b}=\frac{1}{4}$.

9. 4 **点拨:** $\because\frac{2}{m-1}$为整数,$\therefore m-1=\pm2$或±1,$\therefore m=-1$或0或2或3,$\therefore$ 所有符合条件的m的值的和为$-1+0+2+3=4$.

10. $x>-\frac{1}{2}$ **点拨:** $\because x^2\geqslant0$,$\therefore -x^2-1<0$,$\because\frac{-x^2-1}{-2x-1}$为正数,$\therefore -2x-1<0$解得:$x>-\frac{1}{2}$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B **点拨:** 分式有$\frac{4x}{x-y}$,$\frac{1}{ab}$,共2个,故应选B.

2. D **3.** C

4. B **点拨:** 移项,得$a^2-2a=3$. $\frac{1}{a(a-2)}=\frac{1}{a^2-2a}=\frac{1}{3}$,故选B.

5. $\frac{24}{m-3}$(答案不唯一)

6. -2

7. 解: (1)$\because x=2$,$y=-1$,

$\therefore x^2=4$,$y^2=1$,$x+y=1$,

$\therefore\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{4+1}{1}=5$,即$\frac{x^2+y^2}{x+y}$的值是5;

(2)$\because x=2$,$y=-1$,

$\therefore 2y+2=0$,

$\therefore\frac{x^2-y}{2y+2}$无意义.

8. B **点拨:** 因为当x取a时,该分式的值为0,所以$\frac{a+1}{2-a}=0$,所以$a+1=0$且$2-a\neq0$,解得$a=-1$;又因为当x取b时,该分式无意义,所以$\frac{b+1}{2-b}$无意义,所以$2-b=0$,解得$b=2$;因此$b^a=2^{-1}=\frac{1}{2}$,故应选B.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. $m>0$ **10.** 1

11. 解:(1)若使该代数式有意义,则必须满足 $m-1\neq0$,即 $m\neq1$;

(2)若使该代数式的值大于零,则 $\frac{4}{m-1}>0$,即 $m-1>0$,所以 $m>1$;

(3)若使该代数式的值为正整数,则 4 能够被 $m-1$ 整除,所以 $m-1$ 的值可以为 1 或 2 或 4,所以 $m=2$ 或 3 或 5.

12. 解:分子的变化规律是 $(-1)^1b^{3\times1-1}$,$(-1)^2b^{3\times2-1}$,$\cdots(-1)^nb^{3n-1}$;

分母的变化规律是 $a^1,a^2,a^3,\cdots a^n$,

∴第 5 个式子是 $\frac{(-1)^5b^{3\times5-1}}{a^5}=-\frac{b^{14}}{a^5}$,

第 8 个式子是 $\frac{(-1)^8b^{3\times8-1}}{a^8}=\frac{b^{23}}{a^8}$,

第 n 个式子是 $\frac{(-1)^nb^{3n-1}}{a^n}$.

13. 解:(1)因为 $\frac{-x^2}{1-5x}$ 的值为负数,所以 $\begin{cases}-x^2<0,\\1-5x>0,\end{cases}$ 所以 $x<\frac{1}{5}$ 且 $x\neq0$.

(2)当 $\begin{cases}x+1>0,\\2x+4>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1<0,\\2x+4<0\end{cases}$ 时,分式 $\frac{x+1}{2x+4}$ 的值为正数.

解这两个不等式组,得 $x>-1$ 或 $x<-2$. 所以当 $x>-1$ 或 $x<-2$ 时,原分式的值为正数.

点拨:(2)题中根据同号相除得正易知,当分式的分子、分母的值同时为正数或同时为负数时,分式的值都为正数,要考虑两种情况.

10.2 分式的基本性质

Ⅰ. 举一反三训练

1. D

2. (1)a^2+ab (2)$x-y$

3. 解:(1)原式 $=\frac{x^2-7x-10}{x^2-2}$;

(2)原式 $=-\frac{x^2-1}{5x^2+2x+3}$;

(3)原式 $=\frac{m^3+n^2}{m^2-m}$.

4. 解:(1)原式 $=\frac{6a+4b}{8a-3b}$;

(2)原式 $=\frac{16x+5y}{10x-12y}$.

5. 解:(1)原式 $=\frac{a}{2bc}$;

(2)原式 $=\frac{4m}{n}$.

6. 解:(1)$\frac{2ab+b^2}{4a^2+b^2+4ab}=\frac{b}{2a+b}$;

(2)$\frac{m^2-4mn+4n^2}{m^2-4n^2}=\frac{m-2n}{m+2n}$.

7. C

8. 解:$\frac{4a}{5b^2c}=\frac{8a^3c}{10a^2b^2c^2}$,

$\frac{3c}{10a^2b}=\frac{3bc^3}{10a^2b^2c^2}$,

$\frac{5b}{-2ac^2}=-\frac{25ab^3}{10a^2b^2c^2}$.

9. 解:它们的最简公分母是 $3(x-3)^2(x+3)$,

$\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3x+9}{3(x-3)^2(x+3)}$,

$\frac{2}{x^2-9}=\frac{6x-18}{3(x-3)^2(x+3)}$,

$\frac{1}{3x-9}=\frac{x^2-9}{3(x-3)^2(x+3)}$.

Ⅱ. 举一反三训练

10. 解:∵ $a:b:c=2:3:5$,

∴设 $a=2k(k\neq0)$,则 $b=3k,c=5k$,

∴ $\frac{a-3b+2c}{b-c}=\frac{2k-9k+10k}{3k-5k}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$,即分式 $\frac{a-3b+2c}{b-c}$ 的值是 $-\frac{3}{2}$.

11. 解:由于 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$,即 $\frac{x+y}{xy}=5$,∴ $x+y=5xy$,

故 $\frac{2x-3xy+2y}{x+2xy+y}=\frac{2(x+y)-3xy}{x+y+2xy}=\frac{7xy}{7xy}=1$.

12. 0,2,3 **点拨:** $\frac{2(x+1)}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}$,∵ $\frac{2(x+1)}{x^2-1}$ 的值为整数,∴ $x-1=1$ 或 2 或 -1 或 -2,①当 $x-1=1$ 时,$x=2$;②当 $x-1=2$ 时,$x=3$;③当 $x-1=-1$ 时,$x=0$;④当 $x-1=-2$ 时,$x=-1$,∵ $x^2-1\neq0$,∴ $x\neq\pm1$,∴ $x=-1$ 不符合题意.

综上可得 x 可取的值为 0,2,3.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D **2.** C **3.** A

4. D **点拨:**由题意可得 $\frac{3x}{3x+3y}=\frac{3x}{3(x+y)}=\frac{x}{x+y}$,因此分式的值不改变,故应选 D. 解答本题的关键是根据题意列出满足条件的分式,再利用分式

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的基本性质化简，将化简结果与原分式进行对比来确定正确选项.

5. a　**点拨：** $\frac{a^2+2a+1}{a^2+a}=\frac{(a+1)^2}{a(a+1)}=\frac{a+1}{a}$，因为 $\frac{a^2+2a+1}{a^2+a}=\frac{a+1}{M}$，所以 $\frac{a+1}{a}=\frac{a+1}{M}$，所以 $M=a$.

6. $12xy^2$

7. 解：(1) $\frac{-x^2-3}{4-x}=\frac{x^2+3}{x-4}$；

(2) $\frac{x+4}{x-3-x^2}=-\frac{x+4}{x^2-x+3}$；

(3) $\frac{-(x^2-x+2)}{3x^2-5x^3-2}=\frac{-(x^2-x+2)}{-(5x^3-3x^2+2)}=\frac{x^2-x+2}{5x^3-3x^2+2}$.

8. 解：(1) $\frac{0.3a+0.5b}{0.2a-b}=\frac{3a+5b}{2a-10b}$；

(2) $\frac{\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b}{\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b}=\frac{6a+8b}{6a-3b}$.

9. 解：(1) $\frac{-35a^4b^3}{21a^2b^4d}=-\frac{5a^2}{3bd}$；

(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

10. 解：(1)最简公分母是 $12a^2b^2c^2$.

$\frac{3}{4a^2b}=\frac{9bc^2}{12a^2b^2c^2}$，

$-\frac{5}{6b^2c}=-\frac{10a^2c}{12a^2b^2c^2}$，

$\frac{1}{2ac^2}=\frac{6ab^2}{12a^2b^2c^2}$.

(2)最简公分母是 $4(x+1)(x-2)$.

$\frac{x+2}{2x+2}=\frac{2(x+2)(x-2)}{4(x+1)(x-2)}$，

$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{4x}{4(x+1)(x-2)}$，

$\frac{3}{8-4x}=\frac{-3(x+1)}{4(x+1)(x-2)}$.

(3)根据 $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$，$a^2+2a+1=(a+1)^2$，$-3a-6=-3(a+2)$，可知三个分式的最简公分母为 $-3(a+1)^2(a+2)$. 所以

$\frac{a}{a^2+3a+2}=\frac{a}{(a+1)(a+2)}=\frac{-3a(a+1)}{-3(a+1)^2(a+2)}$，

$\frac{2}{a^2+2a+1}=\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{-6(a+2)}{-3(a+1)^2(a+2)}$，

$\frac{1}{-3a-6}=\frac{1}{-3(a+2)}=\frac{(a+1)^2}{-3(a+1)^2(a+2)}$.

11. B　**点拨：**根据题意：用 x、y 的相反数代入这个分式，得 $b=\frac{-x-y}{1-(-x)(-y)}=-\frac{x+y}{1-xy}=-a$，所以 a、b 的关系是互为相反数，故选 B.

12. 1

13. 解：∵ $\frac{a+2b}{5}=\frac{3b-c}{3}=\frac{2c-a}{7}$，

∴ 设 $a+2b=5k$①，$3b-c=3k$②，$2c-a=7k$③.

由①+③，得 $2b+2c=12k$，∴ $b+c=6k$④.

由②+④，得 $4b=9k$，∴ $b=\frac{9}{4}k$. 将 $b=\frac{9}{4}k$ 分别代入①、④得 $a=\frac{1}{2}k$，$c=\frac{15}{4}k$.

∴ $\frac{c-2b}{2b+3a}=\frac{\frac{15}{4}k-\frac{9}{2}k}{\frac{9}{2}k+\frac{3}{2}k}=-\frac{1}{8}$.

14. 解：∵ $x^2-3xy=y^2$，

∴ $x^2-y^2=3xy$，

∴ 原式 $=\frac{(x^2-y^2)-xy}{2(x^2-y^2)+xy}=\frac{3xy-xy}{6xy+xy}=\frac{2}{7}$.

10.3　分式的加减

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解：(1)原式 $=\frac{5x+3y-2x}{x^2-y^2}=\frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{3}{x-y}$；

(2)原式 $=\frac{x^2-y^2}{y-x}=\frac{(x-y)(x+y)}{y-x}=\frac{(x-y)(x+y)}{-(x-y)}=-x-y$.

2. 解：原式 $=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2(m+3)}{(m+3)(m-3)}+\frac{2(m-3)}{(m+3)(m-3)}$

$=\frac{12-2(m+3)+2(m-3)}{(m+3)(m-3)}=0$.

3. 解：(1)原式 $=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$；

(2)原式 $=\frac{x^2}{x+y}-(x-y)=\frac{x^2}{x+y}-\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}=\frac{x^2-(x+y)(x-y)}{x+y}=\frac{y^2}{x+y}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ. 举一反三训练

4. 解: 原式 $=\left(\frac{1}{b-2}-\frac{1}{b+2}\right)+\left(\frac{2}{b-1}-\frac{2}{b+1}\right)=$

$\frac{4}{b^2-4}+\frac{4}{b^2-1}=\frac{8b^2-20}{b^4-5b^2+4}$.

5. 解: 原式 $=\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)}-\frac{(a-b)^2}{ab(a-b)}=\frac{a+b}{ab}-$

$\frac{a-b}{ab}=\frac{2b}{ab}=\frac{2}{a}$.

6. 解: 原式 $=\frac{a+b+a-b}{(a-b)(a+b)}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{2a}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{8a^7}{a^8-b^8}$.

7. 解: 原式 $=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=$

$\frac{1}{x-3}$.

8. 解: $\because \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1}=$

$\frac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2n(a+b)+a-b}{(2n-1)(2n+1)}$,

$\therefore 2n(a+b)+a-b=1$, 即 $\begin{cases}a+b=0,\\a-b=1,\end{cases}$ 解得 $a=$

$\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$,

$\therefore a-b=1$.

9. 解: 设两次买进白糖的进价分别是 x 元、y 元(x, y 都是正数, 且 $x\neq y$), A、B 分别是甲、乙两人买进白糖的平均进价,

则根据题意得: $A=\frac{2\times1\,000}{\frac{1\,000}{x}+\frac{1\,000}{y}}=\frac{2xy}{x+y}$, $B=$

$\frac{1\,000x+1\,000y}{2\times1\,000}=\frac{x+y}{2}$,

$\because B-A=\frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y}$

$=\frac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}$

$=\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$,

$\therefore$ 甲买进的白糖的平均进价低一些.

10. B **点拨:** 原式 $=\frac{3(2x-1)+6}{2x-1}=3+\frac{6}{2x-1}$, 要使 $\frac{6x+3}{2x-1}$ 是整数, 必须满足 $\frac{6}{2x-1}$ 是整数, 所以 $2x-1$ 只能取 ±1, ±2, ±3, ±6, 但 $2x-1=\pm2$, $2x-1=\pm6$ 时, x 不是整数, 所以 $2x-1$ 只能取 ±1, ±3, 这时满足条件的 x 有 4 个, 选 B.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C **点拨:** 原式 $=\frac{4x}{(x-2)(x+2)}-\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=$

$\frac{4x-x^2-2x}{(x+2)(x-2)}=-\frac{x}{x+2}$, 故选 C.

2. D **点拨:** 按照分式的加减运算法则进行计算, 可以得出 A、B、C 三个选项的计算结果都是错误的, 只有 D 是正确的.

3. B **点拨:** 把 $-x-1$ 看成 $-\frac{x+1}{1}$, 然后通分、化简.

4. C **点拨:** 原式 $=\frac{x-y}{xy}=1$, 故选 C.

5. $x+2$ **点拨:** $\frac{x^2}{x-2}-\frac{4}{x-2}=\frac{x^4-4}{x-2}=x+2$.

6. 1 **点拨:** 当 $xy=1$ 时, 原式 $=\frac{x}{xy+x}+\frac{y}{xy+y}=$

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{x+1+y+1}{(x+1)(y+1)}=\frac{x+y+2}{xy+x+y+1}=$

$\frac{x+y+2}{x+y+2}=1$.

7. 解: (1) 原式 $=\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$.

(2) 原式 $=\frac{(a-1)^2}{a-1}-(a-2)=a-1-a+2=1$.

点拨: 本题考查整式的因式分解及分式的加减运算, 要注意运算顺序. 有括号的先算括号里的或按照乘法的分配律去括号.

8. 解: ②正确. 因为 $B=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}$, 所以 $A+B=0$, 所以 A, B 互为相反数, 即②正确.

点拨: 把 $B=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1-x}(x\neq\pm1)$ 通分化简后再与 $A=\frac{2}{x^2-1}$ 比较.

9. 3 **点拨:** $\because a^2-3ab+b^2=0$, 两边同时除以 ab,

$\therefore \frac{a}{b}-3+\frac{b}{a}=0$, $\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$.

10. = **点拨:** $P=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}+1}+\frac{b}{b+1}=1$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$Q=\dfrac{1}{\dfrac{1}{b}+1}+\dfrac{1}{b+1}=1.$

11. 解：∵ $\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-5)}{(x-5)(x+2)}=\dfrac{(A+B)x+(2A-5B)}{x^2-3x-10}$，

∴ $(A+B)x+(2A-5B)=5x-4.$

∴ $\begin{cases}A+B=5,\\2A-5B=-4.\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}A=3,\\B=2.\end{cases}$

方法规律：通分后用待定系数法确定字母的值.

12. 解：探索：(1)1

(2) −13

总结：$b-ac$

应用：$\dfrac{4x-3}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+1}{x-1}=4+\dfrac{1}{x-1}$，

∵ x 为整数且 $\dfrac{4x-3}{x-1}$ 为整数，

∴ $x-1=\pm1$，

∴ $x=2$ 或 0.

10.4 分式的乘除

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解：(1)原式 $=-\dfrac{xb^2}{18a}$；

(2)原式 $=-\dfrac{3a^2bx}{4cd^2y}\cdot\dfrac{10cy^2}{21ax^3}=-\dfrac{5aby}{14d^2x^2}.$

2. 解：(1)原式 $=\dfrac{(x+y)^2(x-y)^2}{y(x-y)\cdot y(x+y)}=\dfrac{x^2-y^2}{y^2}$；

(2)原式 $=\dfrac{(1-4x)^2}{2x+3}\cdot\dfrac{(2x+3)^2}{4x-1}=(4x-1)(2x+3)=8x^2+10x-3.$

3. 解：(1)原式 $=10x^2y^2\cdot\dfrac{-3z^2}{15x^2y^4}=-\dfrac{2z^2}{y^2}$；

(2)原式 $=\dfrac{4a^2b^2}{15m^3}\times\left(-\dfrac{35m^2}{8ab^2}\right)=-\dfrac{7a}{6m}.$

4. 解：(1)原式 $=(2x+y)(2x-y)\cdot\dfrac{2x-y}{(2x-y)^2}=2x+y$；

(2)原式 $=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x(x+1)}{x-1}=x.$

5. 解：(1)原式 $=\dfrac{a^8}{b^{12}}$；

(2)原式 $=-\dfrac{a^6b^3}{c^3d^9}\cdot\dfrac{d^3}{2a}\cdot\dfrac{c^2}{4a^2}=-\dfrac{a^3b^3}{8cd^6}.$

6. 解：(1)原式 $=\dfrac{3(x-y)^2}{-(x-y)^5}\cdot(x-y)^3\cdot\dfrac{-(x-y)}{9}=\dfrac{x-y}{3}$；

(2)原式 $=\dfrac{2x}{5x-3}\cdot\dfrac{(5x+3)(5x-3)}{3}\cdot\dfrac{x}{5x+3}=\dfrac{2x^2}{3}.$

7. 解：原式 $=\dfrac{2}{a-b}\times\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}\times(a-b)(a+b)$

$=2(a-b).$

∵ $a=b+2\,018$，

∴ 原式 $=2\times2\,018=4\,036.$

8. 解：骑自行车所用的时间是 $\dfrac{s}{v}$ 时，乘公交车所用的时间是 $\dfrac{s}{3v}$ 时，

$\dfrac{s}{v}\div\dfrac{s}{3v}=\dfrac{s}{v}\cdot\dfrac{3v}{s}=3.$

答：骑自行车所用的时间是乘公交车所用时间的 3 倍.

9. 解：(1)原式 $=\dfrac{2(a+1)}{a-1}\times\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}$

$=\dfrac{2}{a-1}-\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{1-a}{a-1}=-1$；

(2)原式 $=\dfrac{a^2-1}{a+2}\cdot\dfrac{a+2}{(a-1)^2}=\dfrac{a+1}{a-1}.$

10. 解：原式 $=\left[\dfrac{m}{m-2}-\dfrac{2m}{(m-2)(m+2)}\right]\times\dfrac{m+2}{m}$

$=\dfrac{m}{m-2}\times\dfrac{m+2}{m}-\dfrac{2m}{(m-2)(m+2)}\times\dfrac{m+2}{m}$

$=\dfrac{m+2}{m-2}-\dfrac{2}{m-2}$

$=\dfrac{m}{m-2}$，

∵ $m\neq\pm2,0$，

∴ 当 $m=3$ 时，原式 $=3.$

Ⅱ. 举一反三训练

11. 解：原式 $=\dfrac{m^2+4m+4}{m}\cdot\dfrac{m^2}{m+2}$

$=\dfrac{(m+2)^2}{m}\cdot\dfrac{m^2}{m+2}$

$=m^2+2m.$

∵ m 是方程 $2x^2+4x-1=0$ 的根，

∴ $2m^2+4m-1=0.$

∴ $m^2+2m=\dfrac{1}{2}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 原式 $=\frac{1}{2}$.

12. 解: 原式 $=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{2}{x-1}$,

由 x 为整数,原式的值为整数,得 $x-1=\pm1$ 或 $x-1=\pm2$,∴ $x=2,0,3$ 或 -1.

∵ $x^2-1\neq0$ 且 $x\neq0$,

∴ $x\neq-1,1,0$,

∴ $x=2$ 或 3.

13. 解: 火车的速度为 $\frac{v}{a}$ km/h,汽车的速度为 $\frac{mv}{b}$ km/h,$\frac{v}{a}\div\frac{mv}{b}=\frac{v}{a}\cdot\frac{b}{mv}=\frac{b}{am}$.

故火车的速度是汽车速度的 $\frac{b}{am}$ 倍.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B

2. D **点拨:** $-\frac{n}{m^2}\div\frac{n^2}{m^3}\div\frac{m}{n^2}=-\frac{n}{m^2}\cdot\frac{m^3}{n^2}\cdot\frac{n^2}{m}=-n$.

3. C **点拨:** 原式 $=\frac{(x+y)(x-y)}{a^2(x-y)}\cdot\frac{a(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{1}{a}=5$,所以 $a=\frac{1}{5}$. 故选 C.

4. D **点拨:** 原式 $=\frac{(a+2)(a-1)}{(a+2)(a+1)}\cdot5(a+1)^2=5a^2-5$.

5. $x-1$ **点拨:** 原式 $=\frac{(x+1)(x-1)}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=x-1$.

6. $\frac{1}{x}$ **点拨:** $\frac{x+3}{x^2-2x+1}\div\frac{x^2+3x}{(x-1)^2}=\frac{x+3}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)^2}{x(x+3)}=\frac{1}{x}$.

7. 解: (1) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\div\frac{a+b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a-b}{b}$.

(2) $\frac{x^2-2x}{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{x(x-2)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}=x-2$.

(3) $\left(\frac{3a}{a+2}-\frac{a}{a-2}\right)\div\frac{2a}{a^2-4}=\frac{3a(a-2)-a(a+2)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{2a}$

$=\frac{2a^2-8a}{2a}=a-4$.

(4) $\left(\frac{x^2}{x-2}+\frac{4}{2-x}\right)\cdot\frac{1}{x^2+2x}=\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x(x+2)}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{x}$.

点拨: 分式的混合运算是在确定运算顺序的前提下,进行通分与约分两种基本运算,而通分、约分常常需要先对分式的分子与分母进行因式分解.

8. 解: 原式 $=\frac{x-2}{x-1}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{x+1}{x-2}$,

∵ $2x-1<6$,∴ $2x<7$,

∴ $x<\frac{7}{2}$,

把 $x=3$ 代入上式得

原式 $=\frac{3+1}{3-2}=4$.

9. 解: $\frac{x^2}{x^2+2x}\div\frac{x-1}{x}$,

$=\frac{x}{x+2}\times\frac{x}{x-1}$

$=\frac{x^2}{(x+2)(x-1)}$.

∵ x 满足不等式组 $\begin{cases}x+2<1,\\2(x-1)>-6,\end{cases}$

∴ $-2<x<-1$.

则 $x^2>0$,$x+2>0$,$x-1<0$,

故 $(x+2)(x-1)<0$,

则代数式 $\frac{x^2}{x^2+2x}\div\frac{x-1}{x}<0$.

10. 解: 原式 $=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2}\cdot\frac{3(x+2)}{2(x+2)(x-2)}\cdot(x+2)(x-2)=\frac{3x+3}{2}$,

由代数式 $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2+4x+4}\cdot\frac{3x+6}{2x^2-8}\div\frac{1}{x^2-4}$ 的值为负数,得 $3x+3<0$.

解得 $x<-1$,

又∵ $x-2\neq0$ 且 $x+2\neq0$,∴ $x\neq2$ 且 $x\neq-2$.

∴ 当 $x<-1$ 且 $x\neq-2$ 时,代数式 $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2+4x+4}\cdot\frac{3x+6}{2x^2-8}\div\frac{1}{x^2-4}$ 的值为负数.

11. 解: (1) 根据题意得:"优选 1 号"水稻的单位面积产量为 $\frac{600}{a^2-1}$ kg/m²;

"优选 2 号"水稻的单位面积产量为 $\frac{600}{(a-1)^2}$ kg/m².

∵ $\frac{600}{a^2-1}-\frac{600}{(a-1)^2}=600\times\frac{a-1-a-1}{(a+1)(a-1)^2}$

$=600\times\frac{-2}{(a+1)(a-1)^2}<0$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴“优选2号”水稻的单位面积产量高.

(2)$\frac{600}{(a-1)^2}\div\frac{600}{a^2-1}=\frac{1}{(a-1)^2}\cdot(a+1)(a-1)=\frac{a+1}{a-1}$,

则“优选2号”水稻的单位面积产量是“优选1号”水稻的单位面积产量的$\frac{a+1}{a-1}$倍.

10.5 分式方程

Ⅰ. 举一反三训练

1. **解:**(2)(3)(4)(6)是分式方程,(1)(5)是整式方程.

2. C **点拨:**根据“每个班级每天的阅读时间相同,且每个时间段只能安排一个班级阅读”,列出方程$\frac{4.5}{x}=\frac{6}{x+2}$,故选C.

3. **解:**(1)方程两边都乘$2-3x$,得$7-9x-(4x-5)=2-3x$,

解得$x=1$,

检验:把$x=1$代入原方程,左边=右边.

则$x=1$是原方程的根;

(2)方程两边都乘$(x+3)(x-3)$,得$x-3+2(x+3)=12$,

整理,得$3x=9$,

解得$x=3$,

检验:当$x=3$时,$(x+3)(x-3)=0$,

则$x=3$不是原方程的根,应当舍去.

原方程无解.

4. -3 **点拨:**去分母得:$4(2ax+3)=3(a-x)$,去括号、移项、合并同类项得:$(8a+3)x=3a-12$,把$x=1$代入得:$8a+3=3a-12$,解得:$a=-3$.

5. C **点拨:**分式方程$\frac{4}{x^2-2x}-\frac{x}{x-2}=0$的最简公分母是$x(x-2)$,去分母得:$4-x^2=0$,整理得:$x^2=4$,解得:$x=\pm2$,当$x=2$时,$x(x-2)=0$,则$x=2$是原分式方程的增根.故选C.

6. -1 **点拨:**去分母得:$x-6+(x-5)=m$,由分式方程有增根,得到$x-5=0$,即$x=5$,把$x=5$代入整式方程得:$m=-1$.

7. **解:**(1)设甲工程队每天修路x千米,则乙工程队每天修路$(x-0.5)$千米,

根据题意,可列方程:$1.5\times\frac{15}{x}=\frac{15}{x-0.5}$,

解得$x=1.5$,

经检验,$x=1.5$是原方程的解,且$x-0.5=1$.

答:甲工程队每天修路1.5千米,乙工程队每天修路1千米.

(2)设甲工程队修路a天,则乙工程队需要修$(15-1.5a)$千米,

∴乙工程队需要修路$\frac{15-1.5a}{1}=15-1.5a$(天),

由题意可得$0.5a+0.4(15-1.5a)\leqslant5.2$,

解得$a\geqslant8$.

答:甲工程队至少修路8天.

8. **解:**设汽车出发后第1小时内的行驶速度是x km/h,根据题意可得:

$\frac{240}{x}=1+\frac{240-x}{\frac{5}{4}x}+\frac{24}{60}$,

解得:$x=80$,

经检验,$x=80$是原方程的根.

答:汽车出发后第1小时内的行驶速度是80 km/h.

9. **解:**(1)设排球的单价为x元,则足球的单价为$(x+30)$元,由题意得:$\frac{500}{x}=\frac{800}{x+30}$,

解得:$x=50$,

经检验,$x=50$是原分式方程的解,

则$x+30=80$.

答:排球的单价是50元,足球的单价是80元.

(2)设恰好用去1 200元,可购买排球m个,购买足球n个,

由题意得:$50m+80n=1\ 200$,

整理得:$m=24-\frac{8}{5}n$,

∵m、n都是正整数,

∴当$n=5$时,$m=16$,当$n=10$时,$m=8$,

∴有2种方案:

①购买排球16个,购买足球5个;

②购买排球8个,购买足球10个.

Ⅱ. 举一反三训练

10. $k<3$且$k\neq1$ **点拨:**去分母得:$k-1=2(x+1)$,解得:$x=\frac{k-3}{2}$,∵$x+1\neq0$,即$x\neq-1$,∴$\frac{k-3}{2}\neq-1$,∴$k\neq1$.由分式方程的解为负数,得到$\frac{k-3}{2}<0$,解得:$k<3$,∴$k<3$且$k\neq1$.

11. 0或-2 **点拨:**方程两边同乘$x-2$,得$2(x-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2)-(1-kx)=-1,即(2+k)x=4,
当整式方程无解时,k=-2. 当整式方程的解为分式方程的增根时,x=2,把x=2代入2(x-2)-(1-kx)=-1得1-2k=1,∴k=0,综上所述,k=0或-2.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B **点拨:**分母中含有未知数的方程是分式方程,而分母中不含有未知数的方程不是分式方程.

2. A **点拨:**分式方程整理得:$\frac{1}{x-1}-2=-\frac{3}{x-1}$,去分母得:1-2(x-1)=-3,故选A.

3. C **点拨:**方程两边都乘x-1,得7x+5(x-1)=2m-1,∵原方程有增根,∴x-1=0,解得x=1,当x=1时,7=2m-1,解得m=4,故选C.

4. C **点拨:**根据题意可得等量关系:甲匀速骑行30公里的时间=乙匀速骑行25公里的时间,根据等量关系列出方程$\frac{30}{x}=\frac{25}{x-2}$,故选C.

5. -8 **点拨:**本题可根据两个分式的值相等列分式方程求解. 由题意,得$\frac{4}{x-4}=\frac{3}{x-1}$,去分母,得4(x-1)=3(x-4),去括号,得4x-4=3x-12,移项、合并同类项,得x=-8. 经检验,x=-8是原分式方程的解. 本题运用了方程思想求值. 当文字题中出现值相等,和、差是多少等关键语句时,往往可以构造方程求解.

6. 3 **点拨:**把x=0代入分式方程得:$\frac{a}{3}=1$,即a=3.

7. $\frac{5}{6}$ **点拨:**根据新定义把2⊕(2x-1)用含x的代数式表示出来,列出方程后求解.
因为$a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,所以$2\oplus(2x-1)=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}$,故有$\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}=1$,所以$\frac{1}{2x-1}=\frac{3}{2}$,
解之得:$x=\frac{5}{6}$,经检验,$x=\frac{5}{6}$是原方程的根.

8. **解:**(1)去分母得:2-(x-1)=x+1,
解得:x=1,
经检验,x=1是增根,分式方程无解.
(2)去分母得:3x-5=2(x-2)-(x+1),
去括号、移项,合并同类项得:2x=0,
解得:x=0,
经检验,x=0是分式方程的解.
(3)去分母得:y(y+1)-(y²-1)=3,
去括号得:y²+y-y²+1=3,
解得:y=2,
经检验,y=2是分式方程的解.
(4)方程两边同乘x(x+1)(x-1),
得:7(x-1)+3(x+1)=6x.
解这个方程得:x=1,
检验:当x=1时,x(x+1)(x-1)=0,
则x=1是原方程的增根,即原方程无解.

9. **解:**设小芳的速度是x米/分钟,则小明的速度是1.2x米/分钟,根据题意得:
$\frac{1\,800}{x}-\frac{1\,800}{1.2x}=6$,
解得:x=50,
经检验,x=50是原方程的解,
答:小芳的速度是50米/分钟.

10. **解:**(1)$60\times\frac{4}{3}=80$(公里).
答:乙队筑路的总公里数为80公里.
(2)设乙队平均每天筑路8x公里,则甲队平均每天筑路5x公里,
根据题意得:$\frac{60}{5x}-\frac{80}{8x}=20$,
解得:x=0.1,
经检验,x=0.1是原方程的解,
∴8x=0.8.
答:乙队平均每天筑路0.8公里.

11. C **点拨:**去分母得3(3x-a)=x-3,解得$x=\frac{3a-3}{8}$,由题知该分式方程有解,将$x=\frac{3a-3}{8}$代入x-3≠0,得a≠9,∵该方程的解是非负数,∴$\frac{3a-3}{8}\geqslant 0$,∴a≥1,∴a的取值范围为:a≥1且a≠9,故选C.

12. -4或6或1 **点拨:**去分母得:2(x+2)+kx=3(x-2),当k=1时,方程化简得:4=-6,无解,符合题意;当分式方程有增根时,x²-4=0,即x=2或x=-2,把x=2代入整式方程得:8+2k=0,即k=-4;把x=-2代入整式方程得:-2k=-12,即k=6,故答案为:-4或6或1.

13. **解:**方程两边同时乘(x+2)(x-1),
去分母并整理得(m+1)x=-5.
(1)∵x=1是分式方程的增根,
∴1+m=-5,解得m=-6.
(2)∵原分式方程有增根,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ $(x+2)(x-1)=0$,解得 $x=-2$ 或 $x=1$,

当 $x=-2$ 时,$m=1.5$;当 $x=1$ 时,$m=-6$.

(3)当 $m+1=0$ 时,该方程无解,此时 $m=-1$;

当 $m+1\neq0$ 时,要使原分式方程无解,由(2)得 $m=-6$ 或 $m=1.5$,

综上,m 的值为 -1 或 -6 或 1.5.

14. **解**:(1)设 A 种设备每台的成本是 x 万元,B 种设备每台的成本是 $1.5x$ 万元.

根据题意得:$\frac{16}{x}+\frac{36}{1.5x}=10$,

解得:$x=4$,

经检验,$x=4$ 是分式方程的解,

∴ $1.5x=6$.

答:A 种设备每台的成本是 4 万元,B 种设备每台的成本是 6 万元.

(2)设 A 种设备生产 a 台,则 B 种设备生产 $(60-a)$ 台.

根据题意得:

$\begin{cases}(6-4)a+(10-6)(60-a)\geqslant126,\\ a\geqslant53,\end{cases}$

解得:$53\leqslant a\leqslant57$.

∵ a 为整数,

∴ $a=53,54,55,56$ 或 57,

∴ 该公司有 5 种生产方案.

(3)设水路运输 m 次,则航空运输 $(4-m)$ 次,该公司赠送 $4m$ 台 A 种设备,$(8-2m)$ 台 B 种设备,

根据题意得:$6(a-4m)+10[60-a-(8-2m)]-4a-6(60-a)=44$,

整理得:$a+2m-58=0$,

解得:$m=29-\frac{1}{2}a$.

∵ $53\leqslant a\leqslant57$,$0<m<4$,且 a、m 均为正整数,

∴ $m=1$ 或 2.

当 $m=1$ 时,$a=56$,

∴ $60-a=4$,$8-2m=6$.

∵ $4<6$,

∴ $m=1$ 不合适,舍去;

当 $m=2$ 时,$a=54$,

∴ $60-a=6$,$8-2m=4$.

∵ $6>4$,

∴ $m=2$ 符合题意.

∴ 水路运输的次数为 2 次.

15. **解**:(1)$x_1=c$,$x_2=\frac{m}{c}$;

把 $x_1=c$ 代入方程,得

左边 $=c+\frac{m}{c}$,右边 $=c+\frac{m}{c}$,

∴ 左边 = 右边.

把 $x_2=\frac{m}{c}$ 代入方程,得

左边 $=\frac{m}{c}+c$,右边 $=c+\frac{m}{c}$,

∴ 左边 = 右边.

∴ $x_1=c$,$x_2=\frac{m}{c}$ 是关于 x 的方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$ 的解.

(2)能. $x+\frac{2}{x-1}=a+\frac{2}{a-1}$,

两边同时减 1 变形为 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$,

∴ $x-1=a-1$ 或 $x-1=\frac{2}{a-1}$,

∴ $x_1=a$,$x_2=1+\frac{2}{a-1}$,即 $x_2=\frac{a+1}{a-1}$.

章末整合与拔高

好题必练

1. A **2.** B **3.** C **4.** D **5.** B

6. $\frac{1}{x-1}$ **7.** 8 **8.** $k<6$ 且 $k\neq3$ **9.** 1 或 $\frac{1}{2}$ **10.** 7

11. $-4,-2,0,2$

12. $\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$ **点拨**:∵ $\frac{2}{1\times3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$,

$\frac{2}{2\times4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$,

$\frac{2}{3\times5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$,

…

∴ $\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$,

∴ $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$.

13. **解**:原式 $=\left[\frac{x^2-1}{x(x+1)}-\frac{x^2-2x}{x(x+1)}\right]\div\frac{x(2x-1)}{(x+1)^2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{2x-1}{x(x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{x(2x-1)}$

$=\frac{x+1}{x^2}$,

$\because x^2-2x-2=0$,

$\therefore x^2=2x+2=2(x+1)$,

则原式$=\frac{x+1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}$.

14. 解:原式$=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{x-3}-\frac{1+x-1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$,

解不等式组得:$3<x<5$,即不等式组的整数解是$x=4$,

则原式$=\frac{1}{3}$.

15. 解:方程两边都乘$2(x-1)$,得:$4x=x+2(x-1)$,

解得:$x=-2$,

检验:当$x=-2$时,$2(x-1)=2\times(-3)=-6\neq0$,

所以$x=-2$是分式方程的解.

16. 解:设原计划每天植x棵树,则实际每天植$(1+20\%)x$棵,

依题意得:$\frac{4\,000}{x}-\frac{4\,000+80}{(1+20\%)x}=3$,

解得$x=200$,

经检验,$x=200$是原方程的解.

所以$\frac{4\,000}{200}=20$(天).

答:原计划植树20天.

17. 解:(1)设甲种商品每件的进价为x元,则乙种商品每件的进价为$(x+8)$元.

根据题意,得$\frac{2\,000}{x}=\frac{2\,400}{x+8}$,

解得$x=40$.

经检验,$x=40$是原方程的解.

则$40+8=48$(元)

答:甲种商品每件的进价为40元,乙种商品每件的进价为48元.

(2)甲、乙两种商品的数量均为$\frac{2\,000}{40}=50$(件).

设甲种商品按原销售单价销售a件,则

$(60-40)a+(60\times0.7-40)(50-a)+(88-48)\times50\geqslant2460$,

解得$a\geqslant20$.

答:甲种商品按原销售单价至少销售20件.

第11章 反比例函数

11.1 反比例函数

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:①③④是反比例函数,①③中的k是3,④中的k是$\frac{1}{3}$.

2. -2 **点拨**:因为$y=(m-2)x^{m^2-5}$是反比例函数,所以x的指数$m^2-5=-1$,即$m^2=4$,解得:$m=2$或-2;又$m-2\neq0$,所以$m\neq2$,即$m=-2$.

3. 解:(1)设$y=\frac{k}{x+1}$,将$x=2$,$y=1$代入,得$1=\frac{k}{2+1}$,解得$k=3$,所以y与x之间的函数表达式为$y=\frac{3}{x+1}$. y与x之间不是反比例函数关系.

(2)当$x=3$时,$y=\frac{3}{4}$.

(3)当$y=3$时,$x=0$.

4. B **点拨**:A. 圆的面积S与半径r的关系是$S=\pi r^2$,不是反比例函数关系,故此选项错误;B. 三角形的面积S一定,它的底边a与这边上的高h的关系是$S=\frac{1}{2}ah$,即$a=\frac{2S}{h}$,是反比例函数关系,故此选项正确;C. 人的年龄与身高的关系不是函数关系,故此选项错误;D. 小明从家到学校,剩下的路程s与速度v的关系是$s=$总路程$-vt$(t为所用时间),是一次函数关系,故此选项错误. 故选B.

Ⅱ. 举一反三训练

5. 解:根据题意设$y_1=\frac{k}{x}$,$y_2=b(x-2)$,即$y=y_1+y_2=\frac{k}{x}+b(x-2)$,

将$x=3$,$y=5$;$x=1$,$y=-1$分别代入得:

$$\begin{cases}\frac{1}{3}k+b=5,\\ k-b=-1,\end{cases}$$

解得:$k=3$,$b=4$,

则$y=\frac{3}{x}+4(x-2)$,

当$x=6$时,$y=\frac{1}{2}+16=16.5$.

6. 解:(1)由长方形的面积公式可知$xy=0.8$.

$\therefore y$关于x的函数表达式为$y=\frac{0.8}{x}$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore y$ 是 x 的反比例函数.

(2)$\because y$ 是 x 的 5 倍,$\therefore y=5x$.

把 $y=5x$ 代入 $y=\frac{0.8}{x}$,得 $5x=\frac{0.8}{x}$,

$\therefore x^2=0.16$.

$\because x>0$,$\therefore x=0.4$.

$\therefore$ 长方形框架的长为 $5\times0.4=2$(m).

$\therefore$ 长方形框架的周长为 $2\times(0.4+2)=4.8$(m).

$\therefore$ 共需花费 $4.8\times6=28.8$(元).

即加工这个框架共需花费 28.8 元.

方法总结:实际问题中确定两个变量的函数类型的方法:先根据题目中的等量关系,列出关于自变量和函数的方程(或等式),然后化为用自变量表示函数的形式,最后判断函数的类型.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **点拨**:A. $y=\frac{x}{2}$表示 y 是 x 的反比例函数,故此选项错误;B. $y=-\frac{2}{x}$表示 y 是 x 的反比例函数,故此选项正确;C. $y=\frac{1}{2-x}$不能表示 y 是 x 的反比例函数,故此选项错误;D. $y=\frac{1}{x}-2$ 不能表示 y 是 x 的反比例函数,故此选项错误,故选 B.

2. B

3. A **点拨**:$\because z$ 与 y 成反比例,y 与 x 成反比例,$\therefore$ 设 $z=\frac{k_1}{y}(k_1\neq0)$,$y=\frac{k_2}{x}(k_2\neq0)$,$\therefore z=\frac{k_1}{\frac{k_2}{x}}=\frac{k_1}{k_2}x$,$\therefore z$ 是 x 的正比例函数. 故选 A.

4. B **点拨**:A. 根据题意可知,y 与 x 之间的关系式为 $y=2x$,故该选项错误,B. 根据题意可知,S 与 h 之间的关系式为 $S=\frac{10}{h}$,故该选项正确,C. 根据题意可知,S 与 x 之间的关系式为 $S=(25-x)x$,故该选项错误,D. 根据题意可知,y 与 x 之间的关系式为 $y=50-5x$,故该选项错误,故选 B.

5. $y=\frac{20}{x}$;-10 **点拨**:当 $x=4$ 时,$y=5$,所以 $k=5\times4=20$,所以函数的表达式为 $y=\frac{20}{x}$,把 $x=-2$ 代入得 $y=\frac{20}{-2}=-10$.

6. $y=\frac{12}{2x+1}$ **点拨**:由题意设 $y=\frac{k}{2x+1}(k\neq0)$,当 $x=1$ 时,$y=4$,代入解得:$k=12$,$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为:$y=\frac{12}{2x+1}$.

7. $y=\frac{24}{x}$ **点拨**:由题意得:y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{2\times\text{菱形的面积}}{x}=\frac{24}{x}$.

8. **解**:(1)$y=\frac{x}{15}$不是反比例函数.

(2)$y=\frac{2}{x-1}$不是反比例函数.

(3)$y=-\frac{\sqrt{3}}{x}$是反比例函数,比例系数 k 是 $-\sqrt{3}$.

(4)$y=\frac{1}{x}-3$ 不是反比例函数.

(5)$y=\frac{\sqrt{2}+1}{x}$是反比例函数,比例系数 k 是 $\sqrt{2}+1$.

(6)$y=\frac{-1}{2x}$是反比例函数,比例系数 k 是 $-\frac{1}{2}$.

9. **解**:若函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$ 是正比例函数,则需满足 $|2m|-1=1$ 且 $m+1\neq0$,解得 $m=1$,所以当 $m=1$ 时,y 是 x 的正比例函数. 若函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$ 是反比例函数,则需满足 $|2m|-1=-1$ 且 $m+1\neq0$,解得 $m=0$,所以当 $m=0$ 时,y 是 x 的反比例函数.

10. **解**:(1)由题意,设 $y_1=k_1x$,$y_2=\frac{k_2}{x}$,所以 $y=k_1x+\frac{k_2}{x}$. 因为当 $x=1$ 时,$y=4$;当 $x=2$ 时,$y=5$,所以 $\begin{cases}4=k_1+k_2,\\5=2k_1+\frac{k_2}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\k_2=2,\end{cases}$ 所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=2x+\frac{2}{x}$.

(2)把 $x=4$ 代入 $y=2x+\frac{2}{x}$,得 $y=8\frac{1}{2}$.

11. **解**:(1)该函数是反比例函数,

理由:$\because 2.5\times7.2=18$,$3\times6=18$,$4\times4.5=18$,$4.5\times4=18$,

$\therefore$ 该函数是反比例函数,

$\therefore$ 它的函数表达式为:$y=\frac{18}{x}$.

(2)当 $x=5$ 时,$y=\frac{18}{5}=3.6$,$4-3.6=0.4$(万元),

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即预计生产成本每件比2017年降低0.4万元.

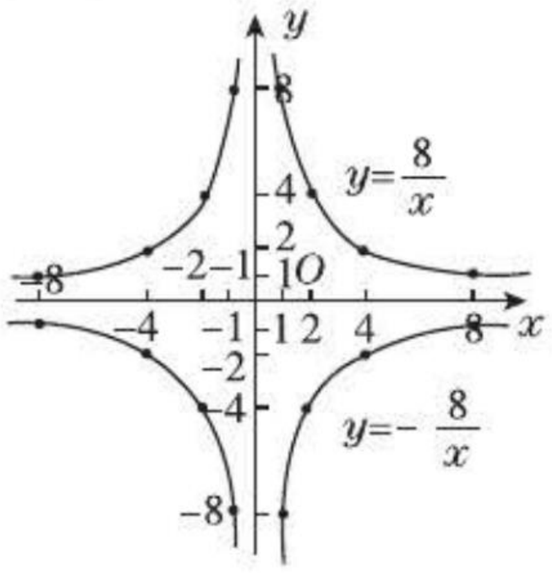
11.2 反比例函数的图像与性质

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:列表:

x	…	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8	…
$y=\frac{8}{x}$	…	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	…
$y=-\frac{8}{x}$	…	1	2	4	8	-8	-4	-2	-1	…

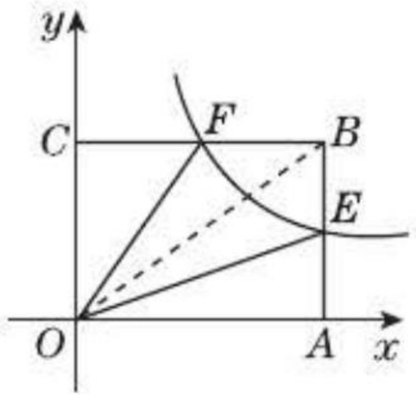
描点、连线,图像如图所示.



(第1题图)

2. D **3.** B **4.** D **5.** -2

6. 2 **点拨:**连接OB,如图,$S_{\triangle OAE}=S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}\times 2=1$,∵点$E$、$F$为矩形$OABC$的边$AB$、$BC$的中点,∴$S_{\triangle OAE}=S_{\triangle OBE}=1$,$S_{\triangle OBF}=S_{\triangle OCF}=1$,∴四边形$OEBF$的面积$=1+1=2$.



(第6题图)

Ⅱ. 举一反三训练

7. A **8.** B

9. 6 **点拨:**由题意知,直线$y=kx(k>0)$过原点和一、三象限,且与双曲线$y=\frac{2}{x}$交于(x_1,y_1),(x_2,y_2)两点,则这两点关于原点对称,∴$x_1=-x_2$,$y_1=-y_2$,又∵点(x_2,y_2)在双曲线$y=\frac{2}{x}$上,∴$x_2y_2=2$,∴原式$=-2x_2y_2+5x_2y_2=3x_2y_2=3\times 2=6$.

10. -2 **点拨:**∵函数$y=\frac{3}{x}$与$y=-2x-6$的图像的交点坐标是(a,b),∴将$x=a$,$y=b$代入$y=\frac{3}{x}$得:$b=\frac{3}{a}$,即$ab=3$,代入$y=-2x-6$得:$b=-2a-6$,即$2a+b=-6$,则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2a+b}{ab}=\frac{-6}{3}=-2$.

11. 解:(1)∵点A在反比例函数$y=\frac{4}{x}$的图像上,

∴$\frac{4}{m}=4$,解得$m=1$,

∴点A的坐标为$(1,4)$,

又∵点B也在反比例函数$y=\frac{4}{x}$的图像上,

∴$\frac{4}{2}=n$,即$n=2$,

∴点B的坐标为$(2,2)$,

又∵点A、B在$y=kx+b$的图像上,

∴$\begin{cases}k+b=4,\\2k+b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=6,\end{cases}$

∴一次函数的表达式为$y=-2x+6$.

(2)x的取值范围为$1<x<2$或$x<0$.

(3)∵直线$y=-2x+6$与x轴的交点为N,

∴点N的坐标为$(3,0)$,

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AON}-S_{\triangle BON}=\frac{1}{2}\times 3\times 4-\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$.

12. 解:(1)如图,过D作$DM\perp x$轴,交x轴于点M,

∵D点的横坐标是它的纵坐标的2倍,即$OM=2DM$,

∴$OA=2AB$,

∵$E(4,n)$,即$OA=4$,

∴$AB=2$.

(2)∵D为OB中点,$B(4,2)$,

∴$D(2,1)$,

把$D(2,1)$的坐标代入$y=\frac{k}{x}$中,得$1=\frac{k}{2}$,即$k=2$,

∴反比例函数的表达式为$y=\frac{2}{x}$,

把$E(4,n)$的坐标代入反比例函数的表达式得$n=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(3)∵$B(4,2)$,∴F点的纵坐标为2,代入$y=\frac{2}{x}$,得F点的横坐标为1,∴$CF=1$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

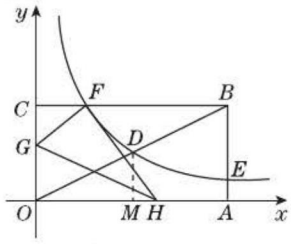
由折叠得 $OG=FG$,

设 $OG=FG=x$,∵ $OC=AB=2$,∴ $CG=2-x$,

在 Rt△CFG 中,由勾股定理得 $FG^2=CG^2+CF^2$,即 $x^2=(2-x)^2+1^2$,

整理得 $4x=5$,

解得 $x=\frac{5}{4}$,则 $OG=\frac{5}{4}$.



(第 12 题图)

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **2.** C **3.** B **4.** D **5.** $\frac{4}{3}$

6. 3 **7.** $m>-\frac{1}{2}$ **8.** -6

9. 解:(1)∵ 一次函数 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 的图像经过点 $A(1,m)$,

∴ $m=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$,

∴ $A(1,1)$,

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像经过点 A,

∴ $k=1\times1=1$.

(2)$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 中,令 $y=0$,则 $x=-2$,

即 $B(-2,0)$,

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

10. 解:(1)由 $y_1=\frac{1}{2}x+1=0$,解得 $x=-2$.

∴ 点 A 的坐标为 $(-2,0)$.

当 $x=-4$ 时,$y_1=\frac{1}{2}x+1=-1$,

∴ 点 C 的坐标为 $(-4,-1)$.

∴ $-1=\frac{k}{-4}$,解得 $k=4$.

(2)由图可得,当 $y_2<y_1<0$ 时,$-4<x<-2$.

11. $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ **点拨:**设点 P 的坐标为 $\left(a,\frac{1}{a}\right)$,

则 $a=\frac{1}{a}$,解得 $a=1$ 或 $a=-1$(舍去),

∴ 点 P 的坐标为 $(1,1)$,∵ 点 E 是 AP 的中点,四边形 $ADFE$ 是矩形,∴ $DF=AE=\frac{1}{2}$,当 $y=\frac{1}{2}$ 时,$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$,解得 $x=2$,∴ 点 F 的坐标为 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

12. 10 **点拨:**易知直线 l 的表达式是 $y=x-b$,代入 $y=\frac{5}{x}$ 得 $x-b=\frac{5}{x}$,即 $x^2-bx=5$. 直线 $y=x-b$ 与 x 轴交点 B 的坐标是 $(b,0)$,设 A 的坐标是 (x,y),∴ $OA^2-OB^2=x^2+y^2-b^2=x^2+(x-b)^2-b^2=2x^2-2xb=2(x^2-xb)=2\times5=10$.

13. -4 **点拨:**设 E 的坐标是 (m,n),则 $k=mn$,B 的坐标是 $(2m,n)$,在 $y=\frac{mn}{x}$ 中,令 $x=2m$,得 $y=\frac{n}{2}$,∵ $S_{\triangle BEF}=1$,∴ $\frac{1}{2}BE\cdot BF=1$,∴ $\frac{1}{2}|m|\cdot\left|n-\frac{n}{2}\right|=1$,即 $|mn|=4$. ∵ $mn<0$,∴ $mn=-4$,∴ $k=mn=-4$.

14. 解:(1)把 $A(-1,m)$、$B(n,-1)$ 的坐标分别代入 $y=-x+2$ 得

$m=1+2$,$-1=-n+2$,

∴ $m=3$,$n=3$,

∴ $A(-1,3)$,$B(3,-1)$,

把 $A(-1,3)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $k=-3$,

∴ $y=-\frac{3}{x}$.

(2)存在. 设 $P(x,-x+2)$,则 P 到 AC、BD 的距离分别为 $|x+1|$、$|x-3|$,

∵ $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBD}$,

∴ $\frac{1}{2}AC\times|x+1|=\frac{1}{2}BD\times|x-3|$,即 $3\times|x+1|=1\times|x-3|$,即 $\frac{|x+1|}{|x-3|}=\frac{1}{3}$,

∴ $\frac{x+1}{x-3}=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{x+1}{x-3}=-\frac{1}{3}$,

解得 $x=-3$ 或 $x=0$,

∴ $P(-3,5)$ 或 $(0,2)$.

15. 解:(1)设直线 DE 的函数表达式是 $y=ax+b$,根据题意得

$\begin{cases}b=3,\\6a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3,\\a=-\frac{1}{2},\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则直线 DE 的函数表达式是 $y=-\frac{1}{2}x+3$,

令 $y=2$,得 $2=-\frac{1}{2}x+3$,解得 $x=2$,则 M 的坐标是(2,2),

令 $x=4$,得 $y=-2+3=1$,则 N 的坐标是(4,1).

(2)把(2,2)代入 $y=\frac{k}{x}$得 $k=4$,则反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$,

当 $x=4$ 时,$y=1$,则 N 在 $y=\frac{4}{x}$的图像上.

(3)$S_{梯形OCBM}=\frac{1}{2}(BM+OC)\cdot BC=\frac{1}{2}(2+4)\times 2=6$,

$S_{\triangle OCN}=\frac{1}{2}OC\cdot CN=\frac{1}{2}\times 4\times 1=2$,

$S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}BN\cdot BM=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$,

则 $\triangle OMN$ 的面积 $S=6-2-1=3$.

(4)经过 M 的双曲线 $y=\frac{4}{x}$同时经过点 N,则

当 $0<k<4$ 时,双曲线与 $\triangle BMN$ 没有交点;

经过点 B 的双曲线是 $y=\frac{8}{x}$,则当 $k>8$ 时,双曲线与 $\triangle BMN$ 没有交点;

当 $k<0$ 时,双曲线在二、四象限,与 $\triangle BMN$ 没有交点.

故 k 的取值范围是 $0<k<4$ 或 $k>8$ 或 $k<0$.

11.3 用反比例函数解决问题

Ⅰ. 举一反三训练

1. D **点拨:**设 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$,∵ 当 $x=2$ 时,$y=10$,

∴ $k=20$,∴ $y=\frac{20}{x}(x>0)$,则 y 与 x 的函数图像大致是 D,故选 D.

2. 解:(1)因为平均每天运送水果的数量 × 天数 = 水果总吨数,

所以 $y=\frac{240}{x}$.

(2)把 $x=60$ 代入 $y=\frac{240}{x}$,得 $y=\frac{240}{60}=4$.

答:需要 4 天完成全部运送任务.

3. (1)$y=\frac{128}{S}$ (2)80 **点拨:**(1)设 y 与 S 的函数关系式为 $y=\frac{k}{S}$,

将 $S=4$,$y=32$ 代入上式,

得 $k=4\times 32=128$,

∴ $y=\frac{128}{S}$.

(2)当 $S=1.6$ 时,$y=\frac{128}{1.6}=80$,

当面条粗 1.6 mm^2 时,面条的总长度是 80 m.

Ⅱ. 举一反三训练

4. 解:(1)由表中数据得:$xy=600$,

所以 $y=\frac{600}{x}$,

所以所求函数关系式为 $y=\frac{600}{x}$.

(2)由题意得 $(x-10)y=450$,

把 $y=\frac{600}{x}$代入得:

$(x-10)\cdot\frac{600}{x}=450$,解得 $x=40$,

经检验,$x=40$ 是原方程的根,且符合题意.

所以若该小组计划每天的销售利润为 450 元,则其单价应为 40 元.

5. $V\geqslant\frac{1}{3}$

6. 解:(1)由题意,可设前 5 个月中 y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{k}{x}$,把 $x=1$,$y=100$ 代入得,$k=100$,

∴ 前 5 个月中 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{100}{x}$,

把 $x=5$ 代入得 $y=\frac{100}{5}=20$,

由题意,可设 5 月以后 y 与 x 的函数关系式为 $y=10x+b$,

把 $x=5$,$y=20$ 代入得,$20=10\times 5+b$,

∴ $b=-30$,

∴ 5 月以后 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x-30$.

(2)把 $y=100$ 代入 $y=10x-30$ 得 $100=10x-30$,解得:$x=13$,

∴ 到第 13 个月时,该工厂月利润才能再次达到 100 万元.

(3)对于 $y=\frac{100}{x}$,当 $y=50$ 时,$x=2$,

∵ $100>0$,∴ y 随 x 的增大而减小,∴ 当 $x>2$ 时,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$y<50$;对于$y=10x-30$,当$y=50$时,$x=8$,

$\because 10>0$,$\therefore y$随x的增大而增大,$\therefore$当$x<8$时,$y<50$,$\therefore$当$2<x<8$时,月利润少于50万元,

$\therefore$该工厂资金紧张期共有5个月.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. A **2.** D **3.** A **4.** $a=\frac{36}{h}$ **5.** 小

6. 解:(1)当$0\leqslant x\leqslant 40$时,设y与x之间的函数关系式为$y=ax+b$,

则$\begin{cases}10a+b=35,\\30a+b=65,\end{cases}$得$\begin{cases}a=1.5,\\b=20,\end{cases}$

$\therefore y=1.5x+20$,

当$x=0$时,$y=1.5\times0+20=20$,

故危险检测表在气体泄漏之初显示的数据是20.

(2)将$x=40$代入$y=1.5x+20$,得$y=80$,

$\therefore$点$E(40,80)$,

$\because$点E在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图像上,

$\therefore 80=\frac{k}{40}$,解得$k=3\ 200$,

即反比例函数关系式为$y=\frac{3\ 200}{x}$,

当$y=20$时,$20=\frac{3\ 200}{x}$,解得$x=160$,

即车间内危险检测表恢复到气体泄漏之初显示的数据时对应的x值是160.

7. 0.6 **点拨:**设$y=\frac{k}{x-0.4}(k\neq0)$,

$\because$当$x=0.65$时,$y=0.8$,

$\therefore 0.8=\frac{k}{0.65-0.4}$,

$\therefore k=0.2$,

$\therefore y=\frac{0.2}{x-0.4}=\frac{1}{5x-2}$,

即y与x之间的函数关系式为$y=\frac{1}{5x-2}$;

把$x=0.6$代入$y=\frac{1}{5x-2}$中,得$y=\frac{1}{5\times0.6-2}=1$,

$\therefore$本年度的用电量为$1+1=2$(亿度),

$(0.6-0.3)\times2=0.6$(亿元).

8. 解:(1)设线段AB所在直线的函数关系式为$y_1=k_1x+20$,

把$B(10,40)$代入得,$k_1=2$,

$\therefore y_1=2x+20$.

设曲线CD所在双曲线的函数关系式为$y_2=\frac{k_2}{x}$,

把$C(25,40)$代入得,$k_2=1\ 000$,

$\therefore y_2=\frac{1\ 000}{x}$.

(2)当$x=5$时,$y_1=2\times5+20=30$,

当$x=30$时,$y_2=\frac{1\ 000}{30}=\frac{100}{3}$,

$\therefore y_1<y_2$

$\therefore$第30分钟注意力更集中.

(3)令$y_1=36$,

$\therefore 36=2x+20$,

$\therefore x=8$

令$y_2=36$,

$\therefore 36=\frac{1\ 000}{x}$,

$\therefore x=\frac{1\ 000}{36}\approx27.8$

$\because 27.8-8=19.8>19$,

$\therefore$经过适当安排,老师能在学生注意力达到所需的状态下讲解完这道题目.

9. 解:(1)当$0\leqslant x\leqslant8$时,设$y=k_1x+b$,

将$(0,20)$,$(8,100)$代入$y=k_1x+b$,

得$k_1=10$,$b=20$,

所以当$0\leqslant x\leqslant8$时,$y=10x+20$;

当$8<x\leqslant a$时,设$y=\frac{k_2}{x}$,

将$(8,100)$代入,得$k_2=800$,

所以当$8<x\leqslant a$时,$y=\frac{800}{x}$.

故当$0\leqslant x\leqslant8$时,$y=10x+20$,

当$8<x\leqslant a$时,$y=\frac{800}{x}$.

(2)将$(a,20)$代入$y=\frac{800}{x}$,解得$a=40$.

(3)8:10−7:30=40 min,

所以$\begin{cases}x<40,\\\frac{800}{x}\leqslant40,\end{cases}$

所以$20\leqslant x<40$.

7:30+20 min=7:50,所以他需要在7:50~8:10时间段内接水.

章末整合与拔高

好题必练

1. B **2.** D **3.** D **4.** D **5.** D **6.** A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

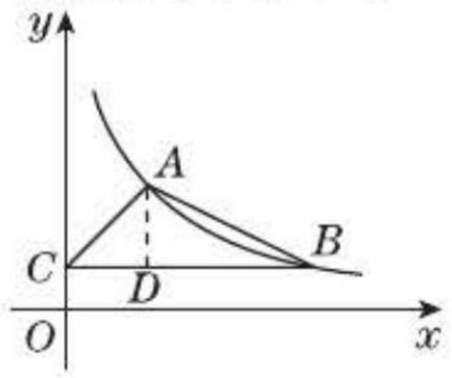
7. 3 **8.** 1 **9.** 5 **10.** 6 **11.** 4

12. $-6<x<-2$

13. 解:(1)设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$,把点 $A(2,3)$ 的坐标代入,得 $3=\frac{k}{2}$,$k=6$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

(2)设 B 点坐标为 (a,b),如图,



(第13题图)

过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则 $D(2,b)$,

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像经过点 $B(a,b)$,

$\therefore b=\frac{6}{a}$,

$\therefore AD=3-\frac{6}{a}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}a\left(3-\frac{6}{a}\right)=6$,解得 $a=6$.

$\therefore b=\frac{6}{a}=1$,

$\therefore B(6,1)$.

设直线 AB 的表达式为 $y=k_1x+b_1$,

将 $A(2,3)$,$B(6,1)$ 的坐标分别代入函数表达式,得

$$\begin{cases}2k_1+b_1=3,\\6k_1+b_1=1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k_1=-\frac{1}{2},\\b_1=4,\end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

14. 解:(1)$\because$ 点 B 的坐标为 $(-6,0)$,$AD=3$,$AB=8$,E 为 CD 的中点,

$\therefore$ 点 $A(-6,8)$,$E(-3,4)$,

$\because$ 反比例函数图像经过 E 点,

$\therefore m=-3\times4=-12$,

设一次函数的表达式为 $y=kx+b$,则

$$\begin{cases}-6k+b=8,\\-3k+b=4,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\b=0.\end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x$.

(2)$\because AD=3$,$DE=4$,

$\therefore AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=5$,

$\because AF-AE=2$,

$\therefore AF=7$,$\therefore BF=1$,

设 E 点坐标为 $(a,4)$,则 F 点坐标为 $(a-3,1)$,

$\because E$,F 两点在函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像上,

$\therefore 4a=a-3$,解得 $a=-1$,

$\therefore E(-1,4)$,

$\therefore m=-1\times4=-4$,

$\therefore y=-\frac{4}{x}$.

15. 解:(1)将 $A(4,-2)$ 的坐标代入 $y=\frac{k_2}{x}$,得 $k_2=-8$.

$\therefore y=-\frac{8}{x}$.

将 $B(-2,n)$ 的坐标代入 $y=-\frac{8}{x}$,

得 $n=4$.

(2)根据函数图像可知:

$-2<x<0$ 或 $x>4$.

(3)将 $A(4,-2)$,$B(-2,4)$ 的坐标分别代入 $y=k_1x+b$,得 $k_1=-1$,$b=2$.

$\therefore$ 一次函数的关系式为 $y=-x+2$.

$\therefore$ 一次函数的图像与 x 轴交于点 $C(2,0)$.

易得 $A'(4,2)$,

$\therefore S_{\triangle A'BC}=(4+2)\times(4+2)\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times2\times2=8$.

$\therefore$ $\triangle A'BC$ 的面积为 8.

16. 解:(1)设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$,

$\because$ 反比例函数的图像经过点 $A(-4,-3)$,

$\therefore k=-4\times(-3)=12$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}$,

$\because$ 反比例函数的图像经过点 $B(2m,y_1)$,$C(6m,y_2)$,

$\therefore y_1=\frac{12}{2m}=\frac{6}{m}$,$y_2=\frac{12}{6m}=\frac{2}{m}$,

$\because y_1-y_2=4$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{6}{m}-\frac{2}{m}=4$,

$\therefore m=1$;

(2)点 P 的坐标为 $(-2m,0)$ 或 $(6m,0)$.

第12章 二次根式

12.1 二次根式

Ⅰ. 举一反三训练

1. B

2. **解:**设铁桶的底面边长为 x dm,

则 $4x^2=3\times4\times2$,解得 $x_1=\sqrt{6}$,$x_2=-\sqrt{6}$(舍去).

答:铁桶的底面边长是 $\sqrt{6}$ dm.

3. **解:**(1)由 $4-3x\geqslant0$,得 $x\leqslant\frac{4}{3}$,

所以当 $x\leqslant\frac{4}{3}$ 时,$\sqrt{4-3x}$ 有意义;

(2)由 $\begin{cases}x-3\geqslant0\\5-x\geqslant0\end{cases}$,得 $3\leqslant x\leqslant5$,

所以当 $3\leqslant x\leqslant5$ 时,$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 有意义;

(3)无论 x 为任何实数,$(x+1)^2$ 都是非负数,

所以当 x 取任何实数时,$\sqrt{(x+1)^2}$ 总有意义;

(4)由 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\x-3>0,\end{cases}$ 得 $x>3$,

所以当 $x>3$ 时,$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$ 有意义.

4. $\frac{1}{9}$

5. **解:**(1)$(5\sqrt{5})^2=125$;

(2)$\left(-7\sqrt{\frac{2}{7}}\right)^2=14$;

(3)$\because\pi>3$,$\therefore3-\pi<0$,

$\therefore\sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3$;

(4)$\because x\geqslant\frac{1}{3}$,$\therefore1-3x\leqslant0$,

$\therefore\sqrt{1-6x+9x^2}=\sqrt{(1-3x)^2}=|1-3x|=3x-1$.

Ⅱ. 举一反三训练

6. A **方法规律:**运用数形结合思想得到 a 的取值范围.$\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{(a-11)^2}=|a-4|+|a-11|$,根据 a 的取值范围去掉绝对值符号,化简得出结果.

7. -2 **点拨:**由 $4x^2+8x-(y-1)\sqrt{1-y}+4=0$ 可得 $4(x^2+2x+1)-(y-1)\sqrt{1-y}=0$,可进一步转化为 $4(x+1)^2+(1-y)\sqrt{1-y}=0$,由此易得 $x=-1$,$y=1$.所以 $x^{2\,017}-y^{2\,017}=(-1)^{2\,017}-1^{2\,017}=-1-1=-2$.

8. **解:**(1)原式 $=(3a)^2-(\sqrt{5})^2=(3a+\sqrt{5})(3a-\sqrt{5})$.

(2)原式 $=x^2+2\sqrt{13}x+(\sqrt{13})^2=(x+\sqrt{13})^2$.

(3)原式 $=(x^2-3)^2=[x^2-(\sqrt{3})^2]^2=(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2$.

点拨:利用 $a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant0)$ 可以把某个非负数转化成一个非负数的平方的形式,从而达到分解因式的目的.

9. **解:**$\because a,b,c$ 分别是 $\triangle ABC$ 的三边长,

$\therefore a+b>c,b+c>a,b+a>c$,

$\therefore$ 原式 $=|a+b+c|-|b+c-a|+|c-b-a|$

$=a+b+c-(b+c-a)+(b+a-c)$

$=a+b+c-b-c+a+b+a-c$

$=3a+b-c$.

10. **解:**乙的解答是错误的.

错在第②步,因为当 $a=\frac{1}{5}$ 时,$a<\frac{1}{a}$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D **点拨:**紧扣二次根式的定义:①含根号且根指数为2(通常省略不写);②被开方数(式)为非负数进行判断.

2. B **3.** B **4.** A **5.** D

6. $\sqrt{a^4}$(答案不唯一) **7.** -3

8. **解:**(1)$2(\sqrt{7})^2=2\times7=14$.

(2)$(2\sqrt{7})^2=2^2\times(\sqrt{7})^2=28$.

(3)$\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=(-2)^2\times\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=2$.

(4)$\sqrt{(-8)^2}=|-8|=8$.

(5)$-\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\left|-\frac{1}{3}\right|=-\frac{1}{3}$.

(6)$\sqrt{4\times10^{-4}}=\sqrt{(2\times10^{-2})^2}=2\times10^{-2}=\frac{1}{50}$.

9. **解:**由题图知 $a<0$,$b>0$,$\therefore a-b<0$.$\therefore\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|-|b|+|a-b|=-a-b-(a-b)=-2a$.

点拨:本题首先利用数轴判断出 a,b 的符号,进一步确定 $a-b$ 的符号,然后利用 $\sqrt{a^2}=|a|=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases} a(a>0), \\ 0(a=0), \\ -a(a<0) \end{cases}$ 化简.

10. 解: 由二次根式有意义可得 $\begin{cases} a-5\geqslant 0, \\ 10-2a\geqslant 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a\geqslant 5, \\ a\leqslant 5, \end{cases}$ $\therefore a=5.\ \therefore b+4=0$, 即 $b=-4$.

11. A **12.** 等腰直角三角形

13. 解: $\because \sqrt{189n}=\sqrt{9\times 21n}$, 且 $\sqrt{189n}$ 是整数, $\therefore n$ 的最小正整数值为 21.

点拨: 如果一个二次根式化简后是整数, 那么其被开方数是完全平方数. 解决本题首先要把被开方数分解因数, 把能化为完全平方数的部分找出来, 然后确定 n 的最小正整数值.

14. 错解: $\because |x-1|=2, \therefore x-1=2, \therefore x=3$.

$\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}=x-4-(2x-1)=x-4-2x+1=-x-3$. 将 $x=3$ 代入得, 原式 $=-6$.

错解分析: ①若 $|x|=a(a\geqslant 0)$, 则 $x=\pm a$, 而不是 $x=a$; ②$\sqrt{a^2}=|a|$, 而不是 $\sqrt{a^2}=a$.

正确解法: $\because |x-1|=2, \therefore x-1=\pm 2$,

$\therefore x=3$ 或 $x=-1$.

$\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}=|x-4|-|2x-1|$.

当 $x=3$ 时, 原式 $=|x-4|-|2x-1|=|-1|-|5|=1-5=-4$;

当 $x=-1$ 时, 原式 $=|x-4|-|2x-1|=|-5|-|-3|=5-3=2$.

方法规律: 本题运用了分类讨论思想. 去绝对值符号常常需要分类讨论: 当绝对值符号内的代数式大于或等于 0 时, 去掉绝对值符号后是它本身; 当绝对值符号内的代数式小于 0 时, 去掉绝对值符号后是它的相反数.

15. 解: $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$

$=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a-\frac{1}{a}\right|+\left|a+\frac{1}{a}\right|$.

$\because -1<a<0, \therefore a+\frac{1}{a}<0, a-\frac{1}{a}>0$.

$\therefore$ 原式 $=a-\frac{1}{a}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-\frac{2}{a}$.

12.2 二次根式的乘除

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解: (1) 原式 $=\sqrt{8\times\frac{1}{2}}=2$.

(2) 原式 $=\sqrt{6\times 10\times 15}=\sqrt{900}=30$.

2. 2

3. 解: (1) $\sqrt{(-49)\times(-81)}=\sqrt{49\times 81}=\sqrt{49}\times\sqrt{81}=7\times 9=63$.

(2) $\sqrt{32x^4y^4z}=\sqrt{32}\cdot\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{y^4}\cdot\sqrt{z}=\sqrt{16\times 2}\cdot x^2\cdot y^2\cdot\sqrt{z}=4x^2y^2\sqrt{2z}$.

(3) $\sqrt{36(x-y)^3}=6(x-y)\sqrt{x-y}$.

(4) $-3\sqrt{4m^4+4m^2n^2}=-3\sqrt{4m^2(m^2+n^2)}=-3\times 2m\sqrt{m^2+n^2}=-6m\sqrt{m^2+n^2}$.

点拨: 化简二次根式常见的方法是分解被开方数(式), 将完全平方数(式)开到根号外, 利用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$ 化简, 注意: 如果被开方数为多项式, 化简时要先进行因式分解.

4. $-3\leqslant x\leqslant 3$

5. 解: (1) 原式 $=-4\times(-3)\times 4\times\sqrt{27\times\frac{1}{6}\times 10}=48\times\sqrt{45}=48\times\sqrt{3^2\times 5}=144\sqrt{5}$.

(2) 原式 $=\frac{1}{3}\times 40\times\frac{3}{2}\times\sqrt{30\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}}=20\times\sqrt{40}=20\times\sqrt{2^2\times 10}=40\sqrt{10}$.

(3) 原式 $=\sqrt{12xy\cdot\frac{x^2y}{3}}=\sqrt{4x^3y^2}=2xy\sqrt{x}$.

6. 解: (1) 原式 $=-\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{54}{5}}=-3\sqrt{2}$;

(2) 原式 $=\sqrt{\frac{78a}{39a}}=\sqrt{2}$.

7. 解: (1) $\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times 5}{5\times 5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$;

(2) $\sqrt{1\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{8}{7}}=\sqrt{\frac{8\times 7}{7\times 7}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$3\sqrt{\frac{1}{3}}=3\sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}}=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$;

(4)$\because a>0,b\geqslant0$,

$\therefore\sqrt{\frac{b}{2a}}=\sqrt{\frac{b\cdot2a}{2a\cdot2a}}=\frac{\sqrt{2ab}}{2a}$.

8. 解:(1)$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$;

(2)$\frac{2}{\sqrt{18}}=\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$;

(3)$\frac{3}{\sqrt{6x}}=\frac{3\cdot\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}\cdot\sqrt{6x}}=\frac{\sqrt{6x}}{2x}$.

9. C　**点拨:**根据最简二次根式的定义知,只有$\sqrt{11}$,$\sqrt{a}$,$\sqrt{x^2+2}$是最简二次根式.

10. 解:(1)$5\sqrt{12}=5\times2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$;

(2)$6\sqrt{\frac{3}{8}}=6\times\sqrt{\frac{6}{16}}=6\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$;

(3)$\sqrt{50a^2b}=5a\sqrt{2b}$;

(4)$\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}}=\frac{n}{m}\times\sqrt{\frac{mn}{n^2}}=-\frac{1}{m}\sqrt{mn}$.

Ⅱ. 举一反三训练

11. 解:(1)$5\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{25}{5}}=\sqrt{5}$;

(2)$-3\sqrt{\frac{4}{5}}=-\sqrt{\frac{36}{5}}$;

(3)$(2-x)\sqrt{\frac{1}{x-2}}=-\sqrt{x-2}$.

12. 解:(1)$(3\sqrt{2})^2=18$,$(2\sqrt{3})^2=12$.$\because18>12$;

$\therefore3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$.

(2)$7-3\sqrt{6}=7-\sqrt{3^2\times6}=7-\sqrt{54}$,$7-6\sqrt{3}=7-\sqrt{6^2\times3}=7-\sqrt{108}$,

$\because54<108$,$\therefore-\sqrt{54}>-\sqrt{108}$,

$\therefore7-\sqrt{54}>7-\sqrt{108}$,

即$7-3\sqrt{6}>7-6\sqrt{3}$.

13. 解:(1)原式$=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{3\sqrt{28}}\times\left(-5\sqrt{\frac{16}{7}}\right)=-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{28}\times\frac{16}{7}}=-\frac{5}{3}\times\frac{1}{7}\sqrt{10}=-\frac{5\sqrt{10}}{21}$.

(2)原式$=2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{6x^2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{3(a+b)}}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{\frac{b}{a-b}}$

$=2\times\frac{5}{4}\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{6x^2}\cdot\frac{x^2}{3(a+b)}\cdot\frac{b}{a-b}}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{b}{18}}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{6}\sqrt{2b}=\frac{5\sqrt{2b}}{12}$.

点拨:注意被开方数是带分数的先化成假分数;进行除法运算时,可利用"除以一个不为零的数等于乘这个数的倒数"进行计算.

14. 解:(1)猜想:$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$,

验证:$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4\times15+4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$.

(2)$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$,

验证:$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. A　**2.** A　**3.** C　**4.** C　**5.** $30\sqrt{2}$

6. $\frac{3}{2}$

7. (1)$\sqrt{6}$　(2)$\frac{\sqrt{3}}{6}$　(3)$\frac{2}{3}\sqrt{5}$　(4)$\frac{\sqrt{b}}{2b}$

8. 解:(1)$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\times8}=\sqrt{4}=2$.

(2)$-4\sqrt{15}\times\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)=(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{15\times5}=2\times5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

(3)$\sqrt{72}\div\sqrt{6}=\sqrt{72\div6}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

(4)$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\div\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times6}=\sqrt{9}=3$.

9. 解:$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{42}\times\sqrt{30}=\frac{1}{2}\times\sqrt{42\times30}=3\sqrt{35}(\text{cm}^2)$.

点拨:本题综合考查了三角形的面积公式和二次根式的乘法运算.

10. 解:(1)原式$=\sqrt{\frac{14}{3}}=\sqrt{\frac{14\times3}{3\times3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$;

(2)原式$=\sqrt{\frac{5\times2a}{2a\cdot2a}}=\frac{\sqrt{10a}}{2a}$;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3)原式 $=\frac{\sqrt{8y}}{\sqrt{25x^2}}=-\frac{2\sqrt{2y}}{5x}$;

(4)$9\sqrt{\frac{2}{3}}=9\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}=9\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{6}$.

11. $2\sqrt{2}$ **12.** 5 **13.** $\frac{3ab}{4}$(答案不唯一)

14. $-a\sqrt{-a}$

15. **解:**(1)原式 $=5\times\frac{8}{27}\times3\times3\sqrt{6}=\frac{40\sqrt{6}}{3}$.

(2)原式 $=2\times\frac{1}{5}\times\sqrt{\frac{3}{2}\times6\times12}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

(3)原式 $=9\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{45\times\frac{2}{5}\times\frac{8}{3}}=18\sqrt{3}$.

(4)原式 $=a^2\cdot b\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{9b^2}}=\frac{a^2b}{3}\sqrt{a}$.

16. **解:**因为 $\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$,所以 $9-x\geqslant0$, $x-7\geqslant0$,即 $7\leqslant x\leqslant9$. 又因为 x 为偶数,所以 $x=8$. 所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1+x)\cdot\sqrt{\frac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)}}\\&=\sqrt{(1+x)^2\cdot\frac{x-4}{x+1}}\\&=\sqrt{(x-4)(x+1)}\\&=\sqrt{(8-4)\times(8+1)}\\&=\sqrt{4\times9}\\&=6.\end{aligned}$$

12.3 二次根式的加减

Ⅰ. 举一反三训练

1. **解:**(1) $\sqrt{63}=\sqrt{7\times9}=3\sqrt{7}$, $\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$,

所以 $\sqrt{63}$, $\sqrt{28}$ 是同类二次根式;

(2) $\sqrt{12}=\sqrt{3\times4}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=\sqrt{3\times9}=3\sqrt{3}$, $4\sqrt{\frac{1}{3}}=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $4\sqrt{\frac{1}{3}}$ 是同类二次根式;

(3) $\sqrt{4x^3}=2x\sqrt{x}$,

所以 $\sqrt{4x^3}$, $2\sqrt{2x}$ 不是同类二次根式;

(4) $\sqrt{18}=\sqrt{2\times9}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{50}=\sqrt{2\times25}=5\sqrt{2}$, $2\sqrt{\frac{2}{9}}=2\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, $2\sqrt{\frac{2}{9}}$ 是同类二次根式.

2. **解:**∵ 最简二次根式 $\sqrt{7a+b}$ 与 $\sqrt[b+3]{6a-b}$ 可以合并,

$\therefore\begin{cases}b+3=2,\\7a+b=6a-b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-1.\end{cases}$

3. **解:**(1)原式 $=2\sqrt{3}\times\sqrt{4}-6\times\frac{\sqrt{3}}{3}+3\times\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+12\sqrt{3}=14\sqrt{3}$;

(2)原式 $=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

4. **解:**(1)原式 $=3\times3\sqrt{2}+\frac{1}{5}\times5\sqrt{2}-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$;

(2)原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{14}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}$;

(3)原式 $=4\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}=\frac{29}{4}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

5. **解:**(1)原式 $=\sqrt{3xy}-3\sqrt{3xy}+2\sqrt{3xy}=(1-3+2)\sqrt{3xy}=0$.

(2)原式 $=\sqrt{a}+4\sqrt{b}-\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{2}+5\sqrt{b}$.

6. **解:**∵ 长方形相邻两边的长分别是 $\sqrt{20}$ cm 和 $\sqrt{125}$ cm,

∴ 它的周长是:$2\times(\sqrt{20}+\sqrt{125})=2\times(2\sqrt{5}+5\sqrt{5})=14\sqrt{5}$(cm).

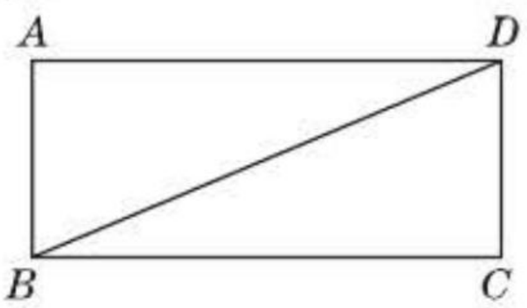
7. **解:**原式 $=\sqrt{\frac{xy^2}{xy}}-\sqrt{\frac{x^2y}{xy}}=\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

8. **解:**(1)原式 $=[(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{2}][(\sqrt{5}-\sqrt{3})-\sqrt{2}]$

$$\begin{aligned}&=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2-2\\&=5-2\sqrt{15}+3-2\\&=6-2\sqrt{15}.\end{aligned}$$

(2)原式 $=(3-2\sqrt{6}+2)(5+2\sqrt{6})=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=25-24=1$.

9. **解:**如图所示:



(第9题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵在 Rt△BCD 中，$BC=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ cm，$CD=(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$ cm，且∠$BCD=90°$，

∴$S_{四边形ABCD}=(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=12-2$

$=10(\text{cm}^2)$.

由勾股定理得：$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{12+4\sqrt{6}+2+12-4\sqrt{6}+2}$

$=2\sqrt{7}$(cm).

答：该长方形的面积和对角线的长分别是 10 cm^2、$2\sqrt{7}$ cm.

Ⅱ. 举一反三训练

10. 解：∵$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，

∴$\frac{y}{x}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})^2$，

$\frac{x}{y}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=(2+\sqrt{3})^2$.

∴$y\sqrt{\frac{y}{x}}+x\sqrt{\frac{x}{y}}$

$=(2-\sqrt{3})\times\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+(2+\sqrt{3})\times\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$

$=(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2$

$=4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3$

$=14$.

11. 解：∵$x=5-\sqrt{7}$，

∴$5-\sqrt{7}$的整数部分是 $a=2$，小数部分是 $b=5-\sqrt{7}-2=3-\sqrt{7}$，

∴$a^2+(3+\sqrt{7})ab$

$=2^2+(3+\sqrt{7})\times2\times(3-\sqrt{7})$

$=4+2\times(9-7)$

$=4+2\times2$

$=4+4$

$=8$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C　**点拨**：化成最简二次根式后即可判断.

2. B　**3.** A　**4.** C　**5.** 2　**6.** $\sqrt{6}$　**7.** $2\sqrt{3}$

8. 解：(1)原式$=\sqrt{\frac{48}{3}}-\sqrt{\frac{12}{2}}+2\sqrt{6}=4-\sqrt{6}+2\sqrt{6}=4+\sqrt{6}$.

(2)原式$=8\sqrt{6}-18\sqrt{6}+3-2=1-10\sqrt{6}$.

(3)原式$=2b\cdot\frac{\sqrt{ab}}{b}+\frac{3}{a}\cdot a\sqrt{ab}-\left(4a\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a}+3\sqrt{ab}\right)=2\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}=-2\sqrt{ab}$.

9. 解：(1)原式$=5-2+3-2\sqrt{3}+1=7-2\sqrt{3}$.

(2)原式$=[\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)][\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)]$

$=3-(\sqrt{2}-1)^2$

$=3-(2-2\sqrt{2}+1)$

$=3-(3-2\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}$.

10. B

11. 3　**点拨**：因为 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$，所以

$\sqrt{m^2+n^2-3mn}$

$=\sqrt{(m+n)^2-2mn-3mn}$

$=\sqrt{(m+n)^2-5mn}$.

由题意可知 $m+n=2$，$mn=-1$，

所以原式$=\sqrt{2^2+5}=\sqrt{9}=3$.

12. 2.5　**点拨**：因为 $2<\sqrt{7}<3$，所以 $2<5-\sqrt{7}<3$，故 $m=2$，$n=5-\sqrt{7}-2=3-\sqrt{7}$. 把 $m=2$，$n=3-\sqrt{7}$代入 $amn+bn^2=1$，化简得$(6a+16b)-(2a+6b)\sqrt{7}=1$，所以 $\begin{cases}6a+16b=1,\\2a+6b=0,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=1.5,\\b=-0.5.\end{cases}$

所以 $2a+b=3-0.5=2.5$.

13. 解：∵$a=\sqrt{7}+2$，$b=\sqrt{7}-2$，

∴$a+b=\sqrt{7}+2+\sqrt{7}-2=2\sqrt{7}$，

$a-b=\sqrt{7}+2-(\sqrt{7}-2)=4$，

$ab=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$.

(1)$a^2b+b^2a=ab(a+b)=3\times2\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

(2)$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=4^2+3=16+3=19$.

(3)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\sqrt{7}\times4=8\sqrt{7}$.

14. 解：∵$a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，

∴$a-c=(a-b)+(b-c)=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}$.

∴$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$

$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(b^2-2bc+c^2)]$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$

$=\frac{1}{2}[(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2]$

$=\frac{1}{2}\times 36=18.$

15. 解:(1)$\sqrt{3}-1$;$\sqrt{5}+2$

(2)原式 $=\sqrt{19-2\sqrt{60}}=\sqrt{(\sqrt{15}-2)^2}=\sqrt{15}-2.$

章末整合与拔高

好题必练

1. C **2.** A **3.** B **4.** D

5. $x>3$ **6.** $\sqrt{2}$ **7.** 3 **8.** 2

9. 2 **10.** $9\frac{9}{10}$ **11.** 1

12. 解:原式 $=-\sqrt{12}+2-\sqrt{3}-2$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=-3\sqrt{3}.$

13. 解:原式 $=9-7+2\sqrt{2}-2=2\sqrt{2}.$

14. 解:原式 $=\frac{x+3}{x-2}\div\left(\frac{x^2-4}{x-2}-\frac{5}{x-2}\right)$

$=\frac{x+3}{x-2}\div\frac{x^2-9}{x-2}$

$=\frac{x+3}{x-2}\cdot\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{1}{x-3}$,

当 $x=3+\sqrt{3}$ 时,原式 $=\frac{1}{3+\sqrt{3}-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

15. 解:原式 $=$

$\left[\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}+\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}\right]\div\frac{1}{y(x+y)}$

$=\frac{2x}{(x+y)(x-y)}\cdot y(x+y)$

$=\frac{2xy}{x-y}$,

当 $x=\sqrt{5}+2$,$y=\sqrt{5}-2$ 时,

原式 $=\frac{2(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

16. 解:(1)原式 $=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}+(5-2\sqrt{6})=10$;

(2)原式 $=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{10}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=10.$

17. 解:(1)原式 $=\frac{1\times(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$;

(2)原式 $=\frac{1\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(3)原式 $=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-1=9.$

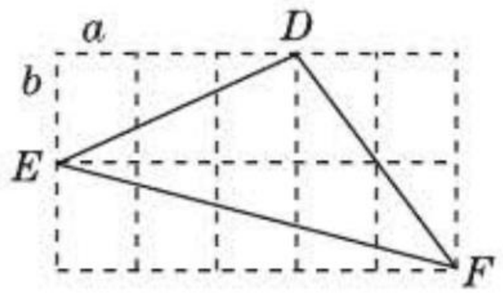
18. 解:(1)$\frac{7}{2}$

(2)如图,

设每个单位矩形的长为 b,宽为 a,则:

$DE=\sqrt{9a^2+b^2}$,$DF=2\sqrt{a^2+b^2}$,$EF=\sqrt{25a^2+b^2}$.

$\therefore S_{\triangle DEF}=5a\times 2b-\frac{1}{2}\times 3a\times b-\frac{1}{2}\times 5a\times b-\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=4ab.$ 即此三角形的面积为 $4ab$.



(第18题图)

19. 解:(1)$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1.$

(2)$a=m+n$,$b=mn$,

理由:$\because\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$,

$\therefore a+2\sqrt{b}=m+2\sqrt{mn}+n$,

$\therefore a=m+n$,$b=mn$.

(3)$\because x=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$,

$\therefore\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{2(x-1)}$

$=\frac{x+2+x-2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-1)}$

$=\frac{2x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-1)}$

$=\frac{x}{x-1}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1-1}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}$

$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$

$=-1-\sqrt{3}.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第7章 数据的收集、整理、描述

7.1 普查与抽样调查

练习

解:(1)普查.

(2)抽样调查. 总体:这批洗衣机的使用寿命的全体;个体:每台洗衣机的使用寿命;样本:抽取的5台洗衣机的使用寿命;样本容量:5.

(3)普查.

(4)抽样调查. 总体:这批食品中含防腐剂的情况的全体;个体:每袋食品中含防腐剂的情况;样本:抽取的10袋食品中含防腐剂的情况;样本容量:10.

练习

略.

习题7.1

1. 解:(1)用抽样调查好,理由:具有破坏性;

(2)用普查好,理由:调查结果准确;

(3)用抽样调查好,理由:工作量小,便于进行.

2. 解:(1)总体:该市八年级学生每天做家庭作业所用的时间的全体;

个体:该市每名八年级学生每天做家庭作业所用的时间;

样本:抽取的100名学生每天做家庭作业所用的时间;

样本容量:100.

(2)总体:这批零件的尺寸与标准尺寸的误差的全体;

个体:每件零件的尺寸与标准尺寸的误差;

样本:抽取的10件零件的尺寸与标准尺寸的误差;

样本容量:10.

3. 略.

4. 略. **点拨**:通过实际调查完成题目.

7.2 统计图的选用

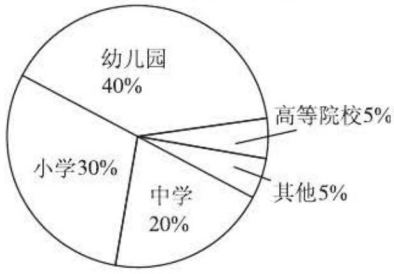
练习

1. 解:(1)如图所示.

(2)40 ÷ 5% = 800(所),800 × 20% = 160(所).

答:该市共有学校800所,中学有160所.

某市各类学校数量分布扇形统计图



(第1题图)

2. 解:表格内依次填:29.4%;20.2%;16.2%;12.0%;9.4%;6.8%;6.0%

扇形统计图如图.

世界七大洲陆地面积分布扇形统计图



(第2题图)

练习

1. 解:(1)画扇形统计图如图所示.

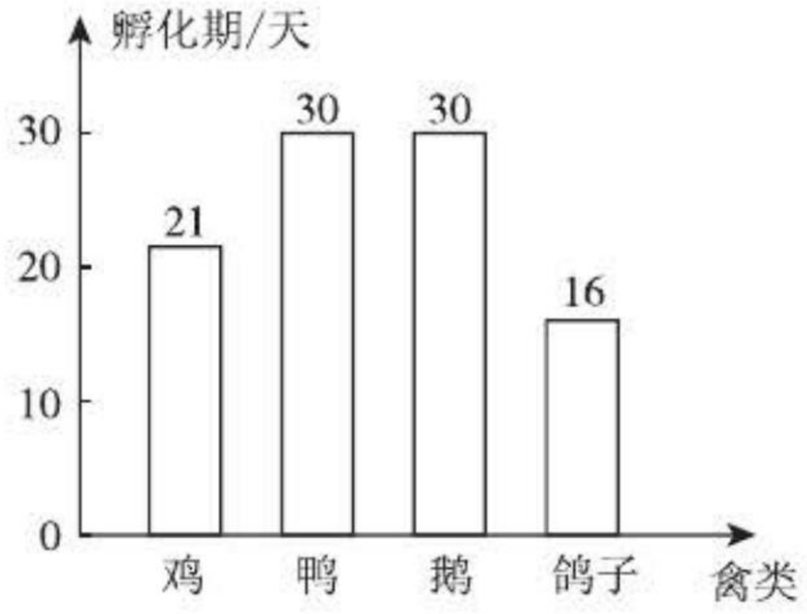
2000年某市平均每人每月消费情况统计图



(第1(1)题图)

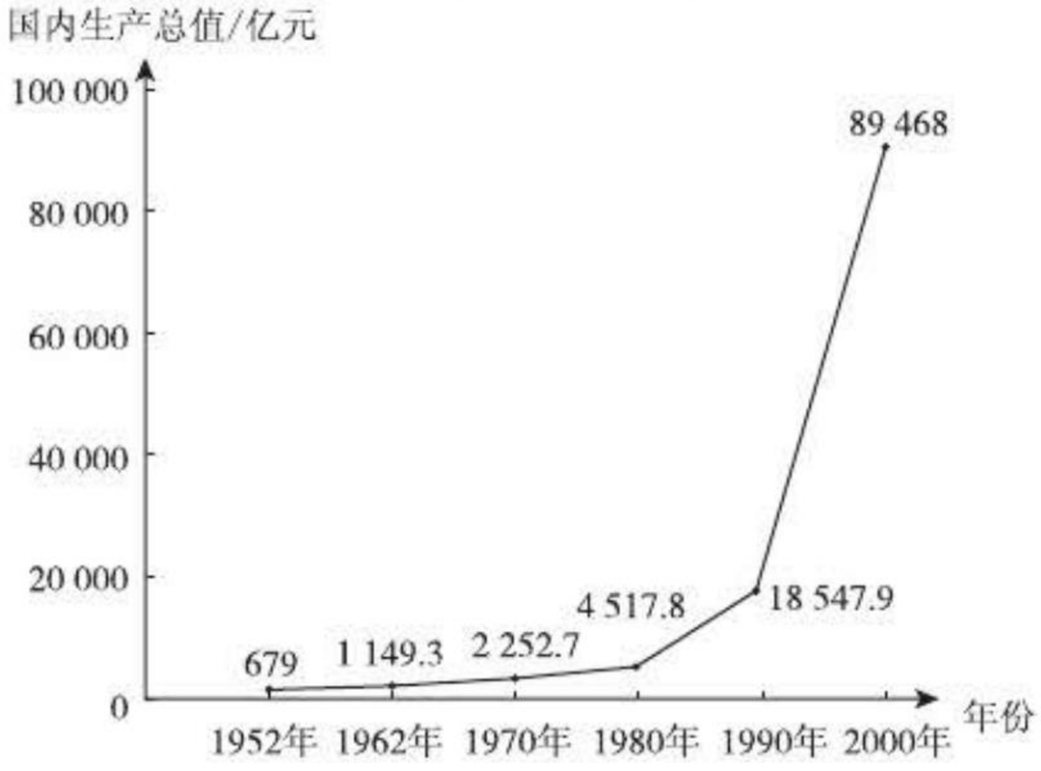
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)画条形统计图如图所示.



(第1(2)题图)

(3)画折线统计图如图所示.



(第1(3)题图)

2. 略.

习题7.2

1. **解**:不能. 理由:题中未说明A,B两校的总人数,无法通过统计图进行比较.

2. **解**:画图略. 我发现:(1),(2)题总人数不同,每项运动最喜欢的人数不同,但每项运动最喜欢的人数占总人数的比例相同.

3. 略. 4. 略.

5. **解**:(1)用条形统计图反映这两支篮球队4场对抗赛的结果比较合适. 画图略.

(2)球队1的成绩越来越好,球队2的成绩虽略有下降,但总体上比较稳定. 如果再进行一场比赛,球队1可能会赢得比赛,因为球队1的成绩越来越好.

点拨:(2)题答案不唯一,合理即可.

7.3 频数和频率

练习

1. **解**:在第2轮投票中,北京得票的频数是56,频率是$56 \div 105 \approx 0.533$.

2. **解**:如下表:

脉搏次数 x(次/分)	$130 \leqslant x < 140$	$140 \leqslant x < 150$	$150 \leqslant x < 160$	$160 \leqslant x < 170$
划 记	一	正	正下	正一
频 数	1	5	8	6
频 率	5%	25%	40%	30%

习题7.3

1. **解**:如下表:

环数	7	8	9	10
频数	6	14	14	6
频率	15%	35%	35%	15%

2. **解**:如下表:

身高/cm	145.5以下	145.5~150.5	150.5~155.5	155.5~160.5	160.5~165.5	165.5~170.5	170.5以上
频数	7	6	11	14	6	4	2
频率	14%	12%	22%	28%	12%	8%	4%

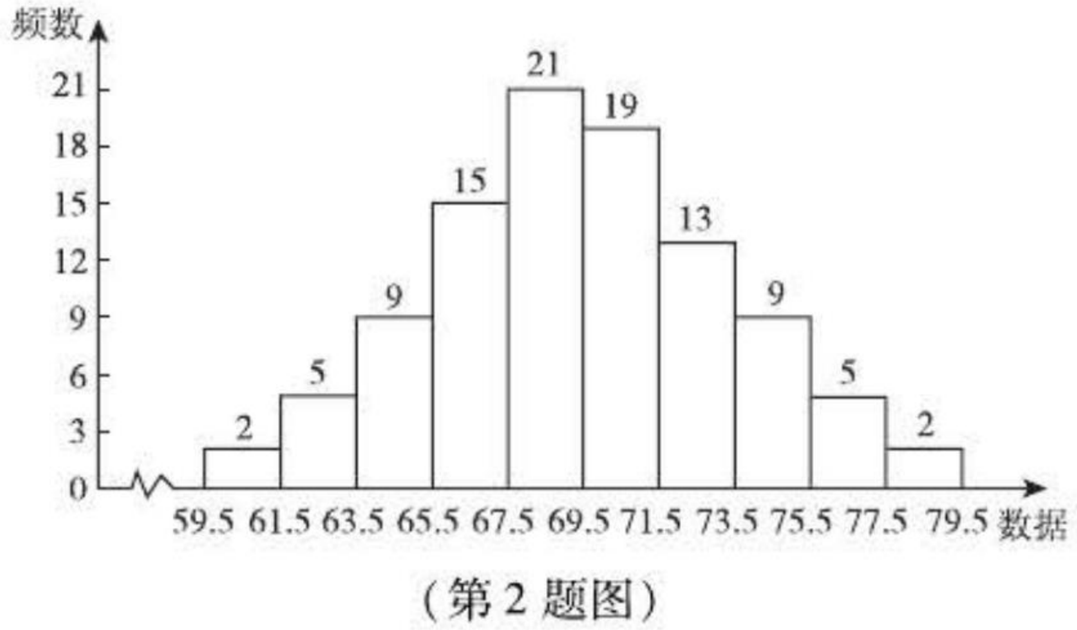
7.4 频数分布表和频数分布直方图

练习

1. **解**:(1)体重在49.5 kg~54.5 kg范围内的人数最多;

(2)$\frac{(5+2)}{40} \times 100\% = 17.5\%$,所以体重超过59.5 kg的学生占全班学生的17.5%.

2. **解**:画出的频数分布直方图如图所示.



(第2题图)

习题7.4

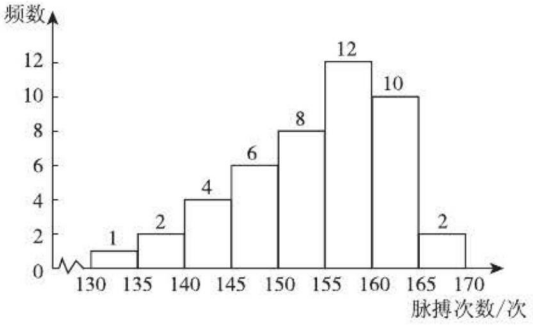
1. **解**:(1)75 dB~80 dB;(2)14个.

2. **解**:(1)列出频数分布表如下表,绘制频数分布

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

直方图如图所示.

脉搏次数/次	130～135	135～140	140～145	145～150	150～155	155～160	160～165	165～170
划记	一	丅	丆	正一	正丅	正正丅	正正	丅
频数	1	2	4	6	8	12	10	2



(第2题图)

(2)学生赛跑后1 min的脉搏次数在155次～160次范围内的人数最多.

点拨:(2)答案不唯一,符合题意即可.

复习题

1. 解:适合普查的有:(2);

适合抽样调查的有:(1)(3)(4). 理由略.

2. 解:(1)$240 \div \frac{2}{10} = 1\ 200$(名),所以这个学校共有1 200名学生.

(2)反对:$\frac{2}{10} \times 360° = 72°$;赞成:$\frac{7}{10} \times 360° = 252°$;无所谓:$\frac{1}{10} \times 360° = 36°$.

3. 解:图略. 由扇形统计图可直观地看出各大洲2050年人口数所占的比例,由条形统计图可直观地看出2050年各大洲的人口数.

4. 解:(1)$(2\ 800\ 000 - 2\ 400\ 000) \div 2\ 400\ 000 \times 100\% \approx 16.7\%$.

(2)2000年男性劳动力人口占50.3% + 14.4% = 64.7%,2010年男性劳动力人口占49.5% + 13.5% = 63%.

(3)增加了$2\ 800\ 000 \times 63\% - 2\ 400\ 000 \times 64.7\% = 211\ 200$(人),百分数没有增加.

5. 略.

6. 解:(1)24 + 16 + 8 + 10 + 16 = 74(次),

所以小明家5月份一共打了74次电话.

(2)24 + 16 + 8 = 48,48 ÷ 74 × 100% ≈ 64.9%,

所以通话时间不超过15 min的频数是48,频率约是64.9%.

7. 解:(1)

年龄/岁	60岁以上	50～60岁(含60岁)	50岁以下(含50岁)
院士人数	8	14	29
百分比(精确到0.1%)	15.7%	27.4%	56.9%

(2)我认为选用扇形统计图反映新增院士的年龄分布情况比较合适. 图略.

8. 解:(1)5 + 6 + 9 + 10 + 13 + 7 = 50(名),

小明共抽样调查了50名旅客.

(2)略.

9. 解:(1)总体:试验田里种植的新品种大麦的麦穗长度的全体;

个体:每个麦穗的长度;

样本:抽取的100个麦穗的长度;

样本容量:100.

(2)略.

(3)略.

10. 略.

11. 解:(1)不能确定哪种品牌方便面的销售量多,因为题中未说明两种方便面2000年的销售量,所以还需要给出两种方便面2000年的销售量是多少.

(2)答案不唯一,如:两种品牌方便面自2000年至2004年销售量一直处于增长状态.

12. 略. **点拨**:根据自己的实际调查结果完成本题即可.

第8章 认识概率

8.1 确定事件与随机事件

练习

1. 解:(1)是不可能事件,(2)是必然事件,(3)(4)(5)(6)(7)(8)是随机事件.

点拨:根据不可能事件、必然事件、随机事件的定义判断即可.

2. 解:(1)是随机事件. 因为第①只袋子中装有3个

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

白球和1个红球,摸出白球和摸出红球这两个事件都是可能发生的,所以是随机事件.

(2)是不可能事件. 因为第②只袋子中没有红球,所以摸出的球不可能是红球.

(3)是随机事件. 因为第③只袋子中装有1个白球,2个红球和1个黑球,摸出白球、摸出红球、摸出黑球这3个事件都是可能发生的,所以是随机事件.

(4)是必然事件. 因为第④只袋子中没有黑球,所以不可能摸出黑球.

(5)是随机事件. 因为从这4只袋子中摸出的4个球的颜色可能相同,也可能不同,而出现2个红球、1个白球、1个黑球是可能发生的,所以是随机事件.

习题8.1

1. **解:**(1)是不可能事件,(4)(6)是必然事件,(2)(3)(5)是随机事件.

2. **解:**(1)向上一面的点数可能是6,不可能是0或8.

(2)向上一面的点数可能是1,2,3,4,5,6,不能事先确定出现哪一种结果.

8.2 可能性的大小

练习

1. **解:**这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列为(1)<(3)<(2)<(4)<(5).

2. **解:**(1)有3种不同的结果:指针指向标有X的区域,指针指向标有M的区域,指针指向标有E的区域;指针指向标有X的区域的可能性最大.

(2)有3种不同的结果:向上一面的数字是3,向上一面的数字是2,向上一面的数字是1. 向上一面的数字是3的可能性最大.

习题8.2

1. **解:**(4)发生的可能性最大,(3)发生的可能性最小;这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列为(3)<(1)<(2)<(4).

2. **解:**①“指针落在红色区域”的可能性是$\frac{1}{4}$,②“指针落在红色区域”的可能性是1,③“指针落在红色区域”的可能性是$\frac{3}{4}$,④“指针落在红色区域”的可能性是$\frac{1}{2}$,⑤“指针落在红色区域”的可能性是0. 排序为:⑤<①<④<③<②.

8.3 频率与概率

练习

解:(1)填表如下:

时间范围	10年内	20年内	30年内	40年内	50年内
新生婴儿数n	55 440	96 070	135 200	171 900	211 030
男婴出生的频数m	28 830	49 700	69 940	88 920	109 160
男婴出生的频率$\frac{m}{n}$(精确到0.001)	0.520	0.517	0.517	0.517	0.517

(2)略.

(3)我认为该地区男婴出生的频率稳定,它会在0.517附近摆动.

练习

解:(1)填表如下:

每批粒数n	100	300	400	600	1 000	2 020	3 000
发芽的频数m	96	283	380	571	948	1 912	2 848
发芽的频率$\frac{m}{n}$(精确到0.001)	0.960	0.943	0.950	0.952	0.948	0.947	0.949

(2)略.

(3)这种油菜籽发芽的概率的估计值是0.95.

习题8.3

1. **解:**(1)填表如下:

射击次数n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心的频数m	9	19	36	44	91	179	454	905
击中靶心的频率$\frac{m}{n}$	0.90	0.95	0.90	0.88	0.91	0.90	0.91	0.91

(2)略.

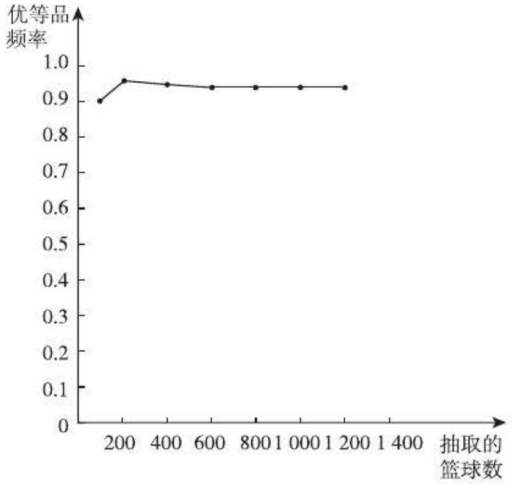
(3)当射击次数很大时,我认为该射手击中靶心的频率稳定,它会在0.91附近摆动.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)填表如下:

抽取的篮球数 n	100	200	400	600	800	1 000	1 200
优等品的频数 m	90	192	380	561	752	941	1 128
优等品的频率 $\frac{m}{n}$	0.90	0.96	0.95	0.94	0.94	0.94	0.94

(2)折线统计图如图所示.



(第 2 题图)

(3)抽取的篮球是优等品的概率的估计值是 0.94.

复习题

1. 解:(1)是必然事件,(3)是不可能事件,(2)(4)是随机事件.

2. 解:排序为(2) < (1) < (4) < (3).

3. 解:(A)描述事件丙;(B)描述事件乙;(C)描述事件甲.

4. 解:这句话不正确. 因为必然事件发生的可能性是 1,即 100%,而不是 200%.

5. 解:(1)填表如下:

抽取的乒乓球数 n	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
优等品的频数 m	48	95	188	471	946	1 426	1 898
优等品的频率 $\frac{m}{n}$(精确到 0.001)	0.960	0.950	0.940	0.942	0.946	0.951	0.949

(2)略.

(3)0.95.

6. 略.

7. 解:(1)不能. (2)我认为摸到红球的概率最大.

(3)白球、黄球、红球各 2 个,这样摸到这三种颜色的球的概率就相等了(答案不唯一).

8. 解:小明的说法不正确,理由略.

9. 略.

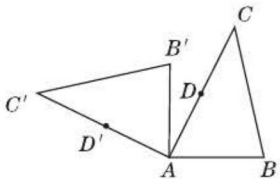
第 9 章 中心对称图形——平行四边形

9.1 图形的旋转

练习

1. 解:点 A 是旋转中心,旋转角的度数为 45°.

2. 解:如图所示.



(第 2 题图)

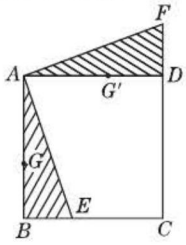
习题 9.1

1. 解:按同一方向绕中心旋转 45°、90°、135°、180°、225°、270°、315°后都能与原来的图案互相重合.

2. 解:(1)旋转中心是点 A.

(2)按逆(顺)时针方向旋转了 90°(270°).

(3)如图所示的点 G' 即为点 G 的对应点.



(第 2 题图)

点拨:直角三角形旋转前、后的对应关系比较明显.

3. 略

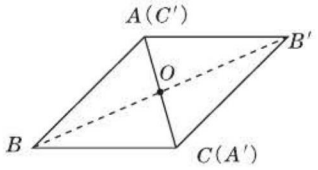
9.2 中心对称与中心对称图形

练习

1. 解:如图所示的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求.

点拨:求作一个图形,使它与已知图形关于某点成中心对称,先画出每个关键点关于点 O 的对称点,再把这些点按原图形状连接即可.

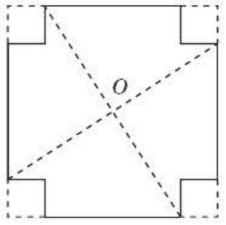
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第1题图)

2. 解:线段是中心对称图形,它的中点就是它的对称中心.

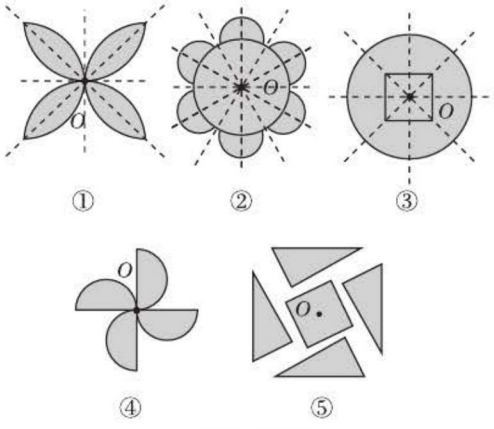
3. 解:剩余部分是中心对称图形,对称中心如图所示的点 O.



(第3题图)

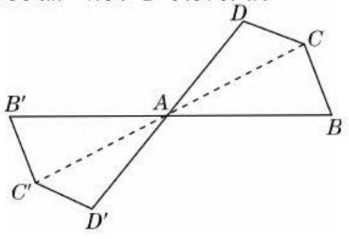
习题 9.2

1. 解:①②③④⑤是中心对称图形,其对称中心分别是如图所示的点 O;①②③是轴对称图形,其对称轴分别是如图所示的虚线.



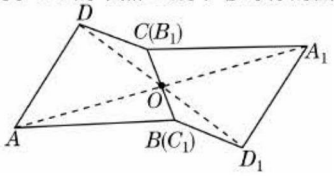
(第1题图)

2. 解:(1)如图所示的四边形 $AB'C'D'$ 就是与四边形 $ABCD$ 关于点 A 成中心对称的图形.



(第2(1)题图)

(2)如图所示的四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是与四边形 $ABCD$ 关于 BC 的中点 O 成中心对称的图形.



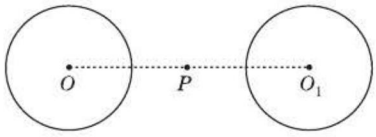
(第2(2)题图)

点拨:线段的两个端点关于其中点成中心对称.

3. 解:(1)圆是中心对称图形,对称中心是它的圆心.

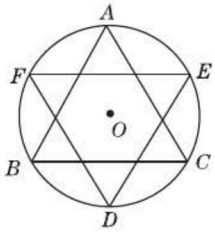
(2)如图所示的圆 O_1 即为所求.

点拨:画一个圆,使其与已知圆关于某点成中心对称,关键是画出已知圆的圆心关于对称中心的对称点,再以对称点为圆心,以已知圆的半径为半径画圆即可.



(第3题图)

4. 解:不是. 如图所示,在圆 O 内再作一个等边三角形 DEF,使 D,E,F 都在圆 O 上,且点 D 与点 A、点 E 与点 B、点 F 与点 C 分别关于圆心 O 成中心对称.



(第4题图)

点拨:本题答案不唯一.

5. 解:点 A_1 与点 A_2 关于点 O 成中心对称. 因为点 A_1 与点 A 关于直线 l_1 对称,所以 $OA = OA_1$. 又点 A_2 与点 A 关于直线 l_2 对称,则 $OA = OA_2$,所以 $OA_1 = OA_2$. 又易知 $\angle A_1OA + \angle A_2OA = 180°$,故点 A_1 与点 A_2 关于点 O 成中心对称.

点拨:本题的理由有多种解答方法,可任选其中一种简单合理的.

9.3 平行四边形

练习

1. 解:在 $\square ABCD$ 中,因为 $\angle B = 50°$,所以 $\angle D =$

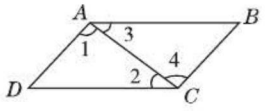
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

50°. 又因为 $AB \parallel CD$，所以 $\angle A + \angle D = 180°$，$\angle B + \angle C = 180°$. 所以 $\angle A = \angle C = 130°$.

2. 解：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD = BC = 7\ \text{cm}$，$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$，$DO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$. 所以 $\triangle AOD$ 的周长为 $AD + AO + DO = 7 + 3 + 5 = 15(\text{cm})$.

练习

1. 解：是. 理由：如图所示，因为 $AB \parallel DC$，所以 $\angle 2 = \angle 3$. 又因为 $\angle DAB = \angle BCD$，所以 $\angle 1 = \angle 4$. 所以 $AD \parallel BC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.



（第 1 题图）

2. 解：不一定是. 如等腰梯形两条腰相等，两条底边平行，但它不是平行四边形.

3. 证明：∵ 在 $\square ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，

∴ $\angle CAD = \angle ACB$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD = BC$，$\angle ABC = \angle ADC$.

∵ $\angle ABC = \angle ADC$，BM 平分 $\angle ABC$，

DN 平分 $\angle ADC$，

∴ $\angle ADN = \angle CBM$.

在 $\triangle ADN$ 和 $\triangle CBM$ 中，

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle ACB, \\ AD = BC, \\ \angle ADN = \angle CBM, \end{cases}$$

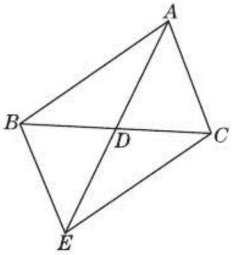
∴ $\triangle ADN \cong \triangle CBM$. ∴ $DN = BM$.

同理 $BN = MD$.

∴ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

练习

1. 解：（1）如图所示；（2）四边形 $ABEC$ 是平行四边形. **证明：**因为由画图可知 $AD = DE$，由 AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线可知 $BD = CD$，所以四边形 $ABEC$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.



（第 1 题图）

2. 证明：因为 E, F, G, H 分别是 OA, OB, OC, OD 的中点，所以 $OE = \frac{1}{2}OA$，$OF = \frac{1}{2}OB$，$OG = \frac{1}{2}OC$，$OH = \frac{1}{2}OD$. 又在 $\square ABCD$ 中，$OA = OC$，$OB = OD$，

所以 $OE = OG$，$OF = OH$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

习题 9.3

1. 解：全等的三角形有四对，分别是：$\triangle ABO \cong \triangle CDO$，$\triangle AOD \cong \triangle COB$，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$\triangle ABD \cong \triangle CDB$. 理由：在 $\square ABCD$ 中，$OA = OC$，$OB = OD$，又 $\angle AOB = \angle COD$，所以 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$. 因为 $\angle AOD = \angle COB$，所以 $\triangle AOD \cong \triangle COB$. 因为 $BC = DA$，$AB = CD$，$AC = CA$，所以 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. 因为 $AB = CD$，$AD = CB$，$BD = DB$，所以 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

2. 证明：因为 BE, DF 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ADC$，所以 $\angle ADF = \frac{1}{2}\angle ADC$，$\angle CBE = \frac{1}{2}\angle CBA$. 因为在 $\square ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ADC = \angle CBA$，所以 $\angle ADF = \angle CBE$，$\angle ADF = \angle DFC$. 所以 $\angle CBE = \angle DFC$. 所以 $BE \parallel DF$.

3. 证明：∵ $ED \parallel BC$，$EF \parallel AC$，

∴ 四边形 $DEFC$ 为平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

∴ $DE = CF$.

又∵ BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

∴ $\angle EBD = \angle DBC$.

由 $ED \parallel BC$ 知 $\angle EDB = \angle DBC$，

∴ $\angle EBD = \angle EDB$.

∴ $BE = DE$.

∴ $BE = CF$.

4. 解：（1）题图中有 6 个平行四边形，分别是：$\square ABCO$，$\square BCDO$，$\square CDEO$，$\square DEFO$，$\square EFAO$，$\square FABO$；（2）略. **点拨：**第（2）小题证法不唯一.

5. 解：四边形 $ABCD$ 是平行四边形. **证明：**因为在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$，所以 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$，$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$. 又因为 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$，所以 $\angle A + \angle B = 180°$，$\angle A + \angle D = 180°$. 所以 $AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$.

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **证明**:设 AC、EF 交于点 O. ∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,∴ $AD \parallel BC$,$AD = BC$(平行四边形的对边平行且相等).

∴ $\angle DAC = \angle BCA$,$\angle AFE = \angle CEF$.

又∵ $DF = BE$,∴ $AD - DF = BC - BE$,即$AF = CE$.

在△AOF 和△COE 中,

$$\begin{cases} \angle FAO = \angle ECO, \\ AF = CE, \\ \angle AFO = \angle CEO, \end{cases}$$

∴ △AOF≌△COE.

∴ $OA = OC$,$OF = OE$.

∴ AC、EF 互相平分.

7. **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB = CD$,$AB \parallel CD$. 所以$\angle ABE = \angle CDF$.

因为 $AE \perp BD$,$CF \perp BD$,所以 $\angle AEB = \angle CFD = 90°$. 在 △$ABE$ 和 △CDF 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle CFD, \\ \angle ABE = \angle CDF, \\ AB = CD, \end{cases}$$

所以△ABE≌△CDF.

所以 $AE = CF$. 因为 $AE \perp BD$,$CF \perp BD$,所以 $AE \parallel CF$. 所以四边形 $AECF$ 是平行四边形.

8. 略.

9. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OB = OD$,$AD \parallel BC$. ∴ $\angle DBC = \angle ADB$.

在△BOE 和△DOF 中,

$$\begin{cases} \angle OBE = \angle ODF, \\ OB = OD, \\ \angle BOE = \angle DOF, \end{cases}$$

∴ △BOE≌△DOF. ∴ $OE = OF$.

又∵ $OG = \frac{1}{2}OB$,$OH = \frac{1}{2}OD$,∴ $OG = OH$.

∴ 四边形 $GEHF$是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形).

9.4 矩形、菱形、正方形

练习

1. **解**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $AC = BD$(矩形的对角线相等).

又∵ $OA = \frac{1}{2}AC$,$OB = \frac{1}{2}BD$,∴ $OA = OB$.

∵ $\angle AOD = 120°$,∴ $\angle AOB = 60°$. ∴ △AOB 是等边三角形. ∴ $OA = AB = 4$ cm.

∴ $AC = BD = 2OA = 8$ cm.

2. **证明**:在矩形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$. 因为 $BD \parallel CE$,$BE \parallel CD$,所以四边形 $BDCE$ 是平行四边形. 所以 $BD = EC$. 又因为在矩形 $ABCD$ 中,$AC = BD$,所以 $AC = EC$.

练习

1. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $AC = BD$,$AO = CO$,$BO = DO$.

∴ $OA = OB = OC = OD$.

又∵ $AE = BF = CG = DH$,∴ $OA - AE = OB - BF = OC - CG = OD - DH$,即 $OE = OF = OG = OH$. ∴ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

点拨:对角线互相平分且相等的四边形是矩形.

2. **解**:①可以测量窗框的三个角,若是直角,则为矩形;②可以测量两组对边的长,若都相等且有 1 个角为直角,则是矩形. **点拨**:本题答案不唯一.

练习

1. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,∴ $\angle BAC = \angle DAC$,$AB = AD$. 又∵ E,H 分别是 AB,AD 边的中点,∴ $AE = \frac{1}{2}AB$,$AH = \frac{1}{2}AD$. ∴ $AE = AH$.

在△AOE 和△AOH 中,

$$\begin{cases} AE = AH, \\ \angle EAO = \angle HAO, \\ AO = AO, \end{cases}$$

∴ △AOE≌△AOH.

∴ $OE = OH$.

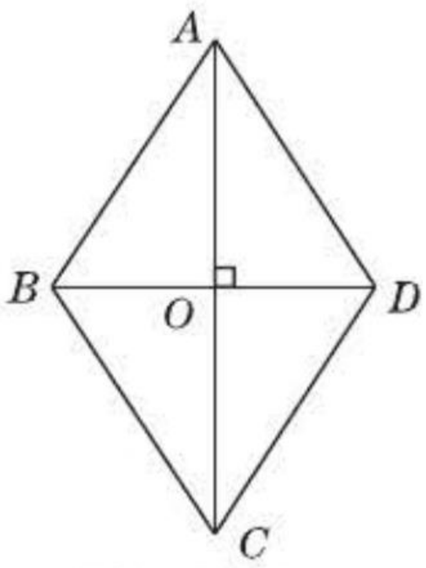
同理可证 $OF = OG$,$OE = OF$.

∴ $OE = OF = OG = OH$.

2. **证明**:如图所示.

∵ $S_{菱形ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot OA + \frac{1}{2}BD \cdot OC = \frac{1}{2}BD(OA + OC) = \frac{1}{2}BD \cdot AC$,即

$S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC$,



(第2题图)

∴ 菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半.

练习

1. **解**:四边形 $EFGH$ 是菱形.

证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$,$AB = DC$,$AD = BC$. 又∵ E、F、G、H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点,∴ $AE = \frac{1}{2}AB$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$AH=\frac{1}{2}AD$, $DG=\frac{1}{2}DC$, $DH=\frac{1}{2}AD$. $\therefore AE=DG$, $AH=HD$.

在$\triangle EAH$和$\triangle GDH$中, $\begin{cases}EA=GD,\\ \angle A=\angle D,\\ AH=DH,\end{cases}$

$\therefore \triangle EAH\cong\triangle GDH$. $\therefore EH=GH$. 同理, $EF=GF$, $EH=EF$. $\therefore EF=FG=GH=HE$. $\therefore$ 四边形$EFGH$是菱形(四边相等的四边形是菱形).

2. 略. **点拨:**根据对角线互相平分且互相垂直的四边形是菱形来作图.

练习

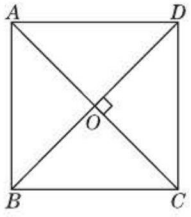
1.

	平行四边形	矩形	菱形	正方形
对边平行且相等	√	√	√	√
四边相等			√	√
四个角都是直角		√		√
对角线互相平分	√	√	√	√
对角线互相垂直			√	√
对角线相等		√		√

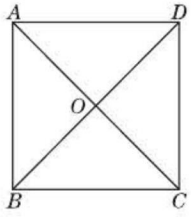
2. **证明:**如图所示,因为四边形$ABCD$是矩形,所以$OA=OC$. 又因为$AC\perp BD$,所以$\angle AOB=\angle BOC$.

在$\triangle AOB$和$\triangle COB$中, $\begin{cases}OA=OC,\\ \angle AOB=\angle COB,\\ OB=OB,\end{cases}$

所以$\triangle AOB\cong\triangle COB$. 所以$AB=BC$. 根据一组邻边相等的矩形是正方形可知,这个矩形一定是正方形.



(第2题图)



(第3题图)

3. **证明:**如图所示,因为四边形$ABCD$是菱形,所以$AB=BC=CD=AD$, $AC\perp BD$, $OB=\frac{1}{2}BD$, $OC=\frac{1}{2}AC$. 又因为$BD=AC$,所以$OB=OC$. 所以$\angle OBC=\angle OCB=45°$. 同理可得$\angle OAB=\angle OBA=45°$, $\angle OAD=\angle ODA=45°$, $\angle ODC=\angle OCD=45°$,所以$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle BAD=90°$. 所以这个菱形一定是正方形.

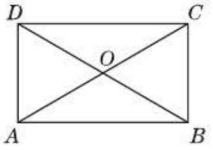
习题9.4

1. **解:**(1)错误. 因为对角线相等的平行四边形才是矩形. (2)正确. (3)错误. 因为对角线互相垂直的平行四边形才是菱形. (4)正确. **点拨:**判定一个四边形是矩形或菱形,一定要看这个四边形是以一般四边形为基础还是以平行四边形为基础,再看附加条件.

2. **解:**与长为6的边相邻的边长为$\frac{48}{6}=8$. 由勾股定理得这个矩形的对角线长为$\sqrt{8^2+6^2}=10$.

3. **解:**(1)$\triangle BEC$是等腰三角形. 证明如下:因为EC平分$\angle BED$,所以$\angle BEC=\angle CED$. 又因为$AD/\!/BC$,所以$\angle CED=\angle ECB$. 所以$\angle BEC=\angle ECB$. 所以$BE=BC$. 即$\triangle BEC$是等腰三角形. (2)因为$\angle ABE=45°$, $\angle A=90°$,所以$\angle AEB=45°$. 所以$AE=AB=1$. 所以$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. 所以$BC=BE=\sqrt{2}$.

4. **证明:**如图所示,在矩形$ABCD$中,两条对角线的交点是O,则BO可看成Rt$\triangle ABC$的斜边AC上的中线,因为四边形$ABCD$是矩形,所以$BO=\frac{1}{2}BD$, $BD=AC$. 所以$BO=\frac{1}{2}AC$,即直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.



(第4题图)

5. **解:**四边形$EFGH$是矩形.

证明:$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore AD/\!/BC$, $AB/\!/CD$, $AB=CD$, $AD=BC$.

$\therefore \angle BAD+\angle ABC=180°$.

又$\because AF$, BE是$\square ABCD$的内角平分线,

$\therefore \angle EAB=\frac{1}{2}\angle BAD$, $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore \angle EAB+\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle ABC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.

$\therefore \angle AEB=180°-(\angle EAB+\angle ABE)=90°$.

同理$\angle DGC=90°$, $\angle AFD=\angle BHC=90°$.

$\therefore \angle HEF=\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=90°$.

$\therefore$四边形$EFGH$是矩形.

6. **证明:**如图所示,连接OE. 在Rt$\triangle AEC$中,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

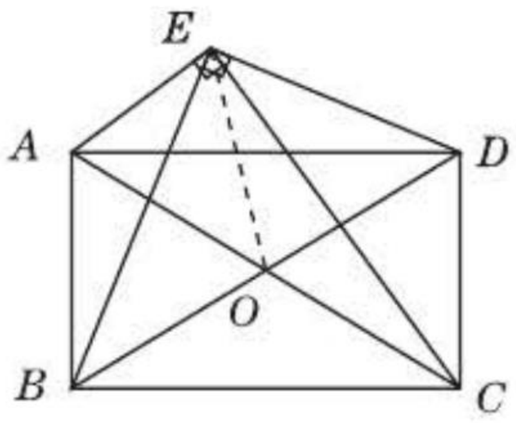
$\because O$ 是 AC 的中点，$\therefore OE=\frac{1}{2}AC=OA=OC$.

在 Rt$\triangle BED$ 中，

$\because O$ 是 BD 的中点，$\therefore OE=\frac{1}{2}BD=OB=OD$.

$\therefore AC=BD$ 且 $OA=OC$，$OB=OD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.



（第6题图）

7. 解：如图所示，连接 BD、AC，BD 与 AC 相交于点 O.

$\because \angle ABC=120°$，$\therefore \angle BAD=60°$.

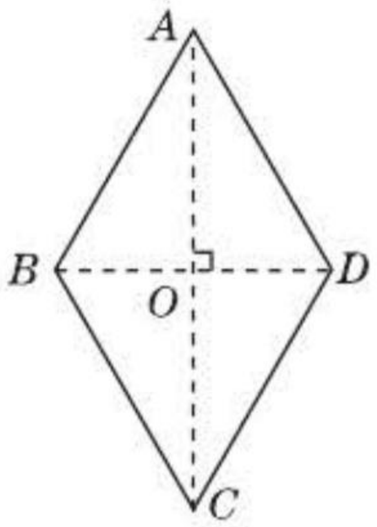
$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore AB=BD=AD=2$.

$\therefore OB=OD=1$. 易知 $AC\perp BD$，$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore AC=2OA=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.



（第7题图）

8. 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore \angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，$AB=AD=CB=CD$.

又$\because AE=AH=CF=CG$，$\therefore BE=BF=DG=DH$.

在$\triangle AEH$ 和$\triangle CFG$ 中，$\begin{cases}AE=CF,\\ \angle A=\angle C,\\ AH=CG,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEH\cong\triangle CFG$. $\therefore EH=FG$.

同理，$EF=HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

又$\because \angle A+\angle B=180°$，$\therefore \angle A+\angle AEH+\angle AHE+\angle B+\angle BEF+\angle BFE=360°=180°+\angle AEH+\angle AHE+\angle BEF+\angle BFE$.

易得 $\angle AEH=\angle AHE$，$\angle BEF=\angle BFE$，

$\therefore 2\angle AEH+2\angle BEF=360°-180°$.

$\therefore \angle AEH+\angle BEF=180°\times\frac{1}{2}=90°$.

$\therefore \angle HEF=180°-\angle AEH-\angle BEF=180°-90°=90°$.

$\therefore$ $\square EFGH$ 是矩形.

9. 证明：因为 $BE\parallel AC$，$CE\parallel DB$，所以四边形 $OBEC$ 是平行四边形. 又因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=OC$. 所以 $\square OBEC$ 是菱形.

10. 证明：设 AE 与 BF 交于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$.

$\therefore \angle AFB=\angle FBE$，$\angle BEA=\angle FAE$.

又$\because BF$，AE 分别是 $\angle ABC$，$\angle BAD$ 的角平分线，

$\therefore \angle ABF=\angle FBE$，$\angle BAE=\angle FAE$.

$\therefore \angle AFB=\angle ABF$，$\angle BEA=\angle BAE$.

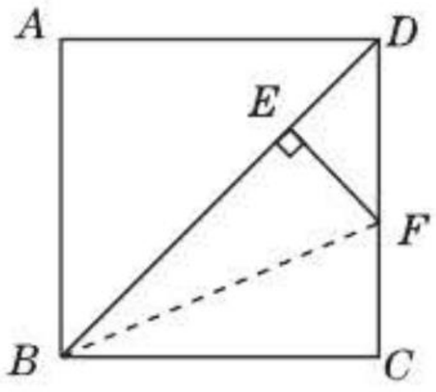
$\therefore AB=AF$，$AB=BE$. $\therefore AF=BE$.

又 $AF\parallel BE$，$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

又 $AB=AF$，$\therefore$ $\square ABEF$ 是菱形.

11. 解：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle ACB=45°$. 因为 $AC=CE$，所以 $\angle CAE=\angle E$. 因为 $\angle ACB=\angle CAE+\angle E$，所以 $\angle E=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times45°=22.5°$.

12. 证明：如图所示，连接 BF. 在 Rt$\triangle BCF$ 和 Rt$\triangle BEF$ 中，$BF=BF$，$BC=BE$，所以 Rt$\triangle BCF\cong$ Rt$\triangle BEF$. 所以 $CF=EF$. 又因为 $\angle BDF=45°$，所以 $\angle DFE=45°$. 所以 $DE=EF$. 所以 $DE=CF$.



（第12题图）

点拨：解决本题的关键是判定两个直角三角形全等.

13. 证明：四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD=DA$，且 $AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$.

$\therefore \angle ADB=\angle CBD=\angle ABD=\angle BDC=45°$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDE$ 中，

$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADE=\angle CDE,\\ DE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDE$.

$\therefore AE=CE$. 同理，$AF=CF$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle ABF$ 中，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases} AD=AB, \\ \angle ADE=\angle ABF, \\ DE=BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABF.$

$\therefore AE=AF.$

$\therefore AE=CE=CF=AF.$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

14. 解:(1)四边形 $AEDF$ 是矩形. 证明略. (2)四边形 $AEDF$ 是菱形. 证明略. (3)四边形 $AEDF$ 是正方形. 证明略. **点拨**:首先根据 $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$ 可知四边形 $AEDF$ 是平行四边形. (1)因为 $\angle BAC=90°$, 所以 $\square AEDF$ 是矩形. (2)因为 AD 平分 $\angle BAC$, 所以 $\angle BAD=\angle CAD$, 由 $DE \parallel AC$ 知 $\angle EDA=\angle DAC$, 所以 $\angle BAD=\angle EDA$. 所以 $AE=DE$. 所以 $\square AEDF$ 是菱形. (3)综合(1)、(2)可知 $\square AEDF$ 是正方形.

9.5 三角形的中位线

练习

1. 解: $\triangle DEF$ 的周长 $=\frac{1}{2}\triangle ABC$ 的周长, $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

证明:$\because D、E、F$ 分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点,

$\therefore DF=\frac{1}{2}BC, EF=\frac{1}{2}AB, DE=\frac{1}{2}AC$(三角形的中位线等于第三边的一半).

$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $DF+EF+DE=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(BC+AB+AC)$. 又$\because \triangle ABC$ 的周长 $=BC+AB+AC$, $\therefore \triangle DEF$ 的周长 $=\frac{1}{2}\triangle ABC$ 的周长.

$\because D、E、F$ 分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点, $\therefore DF \parallel BC$, $EF \parallel AB, DE \parallel AC, BE=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore \angle FDE=\angle BED, DF=BE$.

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle EDB$ 中,

$\begin{cases} DF=EB, \\ \angle FDE=\angle BED, \\ DE=ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle DEF \cong \triangle EDB$.

同理, $\triangle DEF \cong \triangle FAD$, $\triangle DEF \cong \triangle CFE$.

$\therefore S_{\triangle DEF}=S_{\triangle EDB}=S_{\triangle FAD}=S_{\triangle CFE}$.

又$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle EDB}+S_{\triangle FAD}+S_{\triangle CFE}=4S_{\triangle DEF}$, $\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

2. 解:(1)因为 D, E 分别是 AC, BC 的中点, 所以 $DE=\frac{1}{2}AB$.

所以 $AB=2\times 36=72$(m). (2)若 D, E 两点之间还有阻隔, 可以分别取 $\triangle CDE$ 的边 CD, CE 的中点 M, N, 连接 MN, 通过测量 MN 的长来计算.

点拨:本题根据三角形中位线定理解答.

习题 9.5

1. 证明:在 $\triangle ABC$ 中, $\because \angle ACB=90°$, 且 E 为 AB 的中点, $\therefore CE=\frac{1}{2}AB$.

又$\because D、F$ 分别为 $AC、BC$ 的中点, $\therefore DF=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore CE=DF$.

2. 解: AF 与 DE 互相平分.

证明:$\because D、E、F$ 为 $\triangle ABC$ 三边的中点, $\therefore DF \parallel AC, EF \parallel AB$, 即 $DF \parallel AE, EF \parallel AD$. $\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形. $\therefore AF$ 与 DE 互相平分.

3. 解:四边形 $EGFH$ 是菱形.

证明:$\because E、F、G、H$ 分别是 $AD、BC、BD、AC$ 的中点, $\therefore GF=\frac{1}{2}DC, GE=\frac{1}{2}AB$, 且 $GF \parallel DC, EH \parallel DC, GE \parallel AB, FH \parallel AB$. $\therefore GF \parallel EH, GE \parallel FH$. $\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形. 又$\because AB=CD$, $\therefore GF=GE$. $\therefore \square EGFH$ 是菱形.

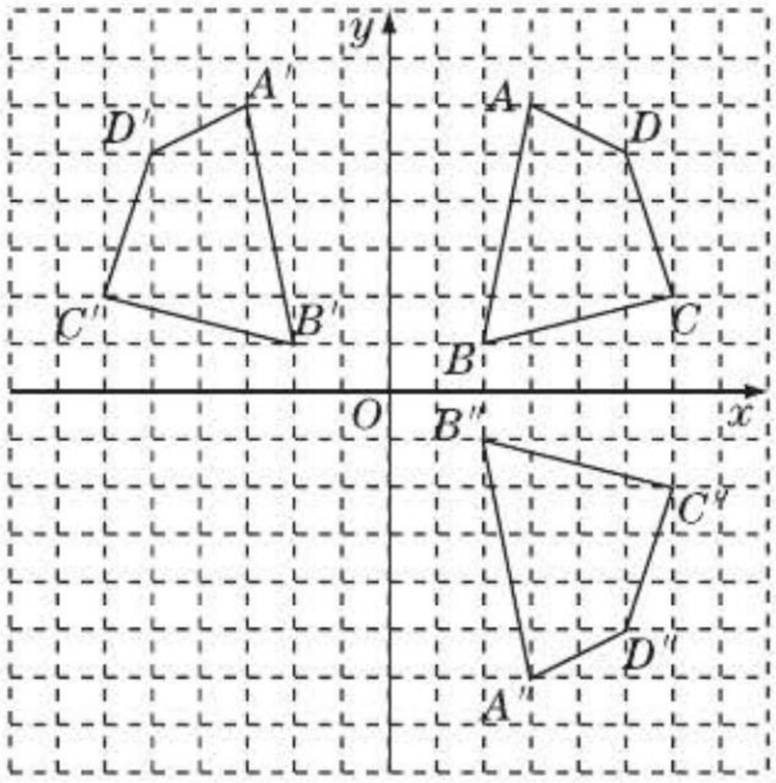
复习题

1. 解:是轴对称图形的有:第一个、第二个和第四个的标志图;是中心对称图形的有:第一个和第四个的标志图.

2. 解:是轴对称图形的有:矩形、菱形、正方形;是中心对称图形的有:平行四边形、矩形、菱形、正方形. **点拨**:此类题应根据图形的特点和轴对称图形、中心对称图形的概念来解答.

3. 解:(1)、(2)如图所示;(3)四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $A''B''C''D''$ 关于点 O 成中心对称, 它们对应顶点的横、纵坐标互为相反数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



(第3题图)

4. 解: $\triangle ACE$ 可以看成是由 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针(顺时针)方向旋转 $45°$($315°$)得到的.

证明略.

点拨: 旋转需注明旋转中心、旋转方向、旋转角度和基本图案.

5. 解: 有 9 对,它们分别是:$\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$,$\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$,$\triangle EOD$ 与 $\triangle FOB$,$\triangle AOD$ 与 $\triangle COB$,$\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$,$\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$,四边形 $ABOE$ 与四边形 $CDOF$,四边形 $ABFE$ 与四边形 $CDEF$,四边形 $ABFO$ 与四边形 $CDEO$.

6. 解: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $\angle B = \angle D = 45°$,$AB \parallel CD$. 所以 $\angle D + \angle BAD = 180°$. 所以 $\angle BAD = 180° - 45° = 135°$. 又因为 $\angle CAD = 30°$,所以 $\angle BAC = 135° - 30° = 105°$.

7. 解: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD = BC = 6$,$AD \parallel BC$. 所以 $\angle AEB = \angle EBC$. 又因为 $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E,所以 $\angle ABE = \angle EBC$. 所以 $\angle ABE = \angle AEB$. 所以 $AE = AB = 4$. 所以 $DE = AD - AE = 6 - 4 = 2$.

点拨: 由平行四边形寻找边、角之间的等量关系.

8. 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore \angle B = \angle D$,$AB \parallel CD$. $\therefore \angle BAE = \angle F = 62°$. $\because AB = BE$,$\therefore \angle BEA = \angle BAE = 62°$. 在 $\triangle ABE$ 中,$\angle B = 180° - 2\angle BAE = 56°$,$\therefore \angle D = \angle B = 56°$.

9. 解: 四边形 ABD_1C_1 是平行四边形.

证明:因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 是有公共边的两个等边三角形,所以 $AB = BC = AC = BD = DC$,$\angle ABC = \angle BCD = 60°$. 因为 $\triangle B_1D_1C_1$ 是由 $\triangle BDC$ 平移得到的,所以 $D_1C_1 = DC = AB$,$\angle D_1C_1B_1 = \angle DCB = 60°$. 所以 $\angle ABC = \angle D_1C_1B_1$. 所以 $AB \parallel D_1C_1$. 所以四边形 ABD_1C_1 是平行四边形.

点拨: 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

10. 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AB = BC$,AC 平分 $\angle BAD$ 和 CA 平分 $\angle BCD$. 因为 $\angle B = 60°$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 所以 $AB = BC = AC$,$\angle ACB = \angle CAB = \angle CAD = 60°$. 所以 $\angle CAD = \angle B$. 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC, \\ \angle CAF = \angle B, \\ AF = BE, \end{cases}$$

所以 $\triangle ACF \cong \triangle BCE$. 所以 $CE = CF$,$\angle ACF = \angle BCE$. 又因为 $\angle BCE + \angle ECA = 60°$,所以 $\angle ECA + \angle ACF = 60°$,即 $\angle ECF = 60°$. 所以 $\triangle ECF$ 是等边三角形.

11. 证明: ①$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD = BC$,$AD \parallel BC$. $\because H$、F 分别是边 AD、BC 的中点,$\therefore AH = \frac{1}{2}AD$,$FC = \frac{1}{2}BC$. $\therefore AH = FC$.

又$\because AH \parallel FC$,$\therefore$ 四边形 $AHCF$ 是平行四边形.

$\therefore AF \parallel CH$,即 $AM \parallel CN$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB = CD$,$AB \parallel CD$. $\because E$、G 分别是边 AB、CD 的中点,$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$,$CG = \frac{1}{2}CD$.

$\therefore AE = CG$. 又$\because AE \parallel CG$,$\therefore$ 四边形 $AECG$ 是平行四边形. $\therefore AG \parallel CE$,即 $AN \parallel CM$. 又$\because AM \parallel CN$,$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

②连接 BD,在 $\triangle ABD$ 中,$\because E$、H 分别是边 AB、AD 的中点,$\therefore EH = \frac{1}{2}BD$,且 $EH \parallel BD$. 同理,在 $\triangle CBD$ 中,$FG = \frac{1}{2}BD$,且 $FG \parallel BD$. $\therefore EH = FG$,且 $EH \parallel FG$. $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

12. 解: (1)四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

证明:$\because F$ 是边 AC 的中点,$\therefore AF = \frac{1}{2}AC$.

$\because D$、E 分别是边 AB、BC 的中点,

$\therefore DE \parallel AC$,且 $DE = \frac{1}{2}AC$.

$\therefore DE \parallel AF$,且 $DE = AF$.

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

(2)①当 $\angle A = 90°$ 时,四边形 $ADEF$ 是矩形.

证明:由(1)的证明可知,四边形 $ADEF$ 是平行四边形. $\because \angle A = 90°$,$\therefore \square ADEF$ 是矩形.

②当 $AB = AC$ 时,四边形 $ADEF$ 是菱形.

证明:由(1)的证明,知四边形 $ADEF$ 是平行四边形. $\because D$、F 分别是边 AB、AC 的中点,$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = AF$. $\therefore \square ADEF$ 是菱形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

③当$\angle A=90°$，且$AB=AC$时，四边形$ADEF$是正方形.

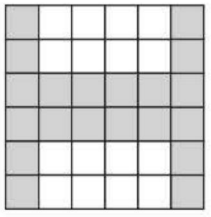
证明：由上面可知，$AB=AC$时四边形$ADEF$是菱形.

$\because \angle A=90°$，$\therefore$菱形$ADEF$是正方形.

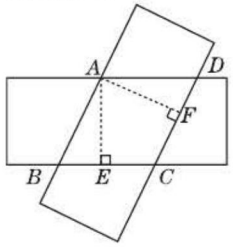
13. 证明：$\because D$是边AB的中点，$\therefore AD=\frac{1}{2}AB$. $\because E$、F分别是边BC、AC的中点，$\therefore EF/\!/AB$且$EF=\frac{1}{2}AB$. $\therefore EF/\!/AD$且$EF=AD$. $\therefore$四边形$ADEF$是平行四边形. $\therefore \angle DAF=\angle DEF$. $\because AH$是高，$\therefore \triangle AHC$和$\triangle AHB$都是直角三角形. $\because F$是边AC的中点，$\therefore HF=\frac{1}{2}AC=AF$. $\therefore \angle HAF=\angle AHF$. 同理，在$\mathrm{Rt}\triangle AHB$中，$DH=\frac{1}{2}AB=AD$，$\therefore \angle HAD=\angle AHD$. 又$\because \angle DHF=\angle AHD+\angle AHF$，$\angle DAF=\angle HAD+\angle HAF$，$\therefore \angle DHF=\angle DAF$. $\because \angle DAF=\angle DEF$，$\therefore \angle DHF=\angle DEF$.

14. 解：(1)“OK”部分的面积为22个平方单位；(2)如图所示的阴影部分的图形即为中心对称图形. 它的面积是20个平方单位.

点拨：(1)直接数小方格的个数即可；(2)答案不唯一，只要是中心对称图形即可.



(第14题图)



(第15题图)

15. 解：四边形$ABCD$是菱形. 证明：如图所示，作$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，垂足分别为E，F.

因为是两个等宽的矩形叠合得到四边形$ABCD$，

所以$AE=AF$，且四边形$ABCD$是平行四边形.

又因为$S_{\square ABCD}=AE\cdot BC=AF\cdot DC$，所以$BC=DC$.

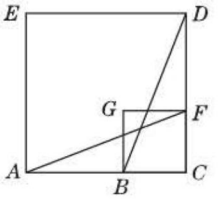
所以$\square ABCD$是菱形.

点拨：利用平行四边形的面积说明问题是常用的技巧.

16. 解：(1)$AF=BD$.

易证$\mathrm{Rt}\triangle ACF\cong\mathrm{Rt}\triangle DCB$，所以$AF=BD$.

(2)如图所示，$AF=BD$仍然成立.



(第16题图)

易证$\mathrm{Rt}\triangle AFC\cong\mathrm{Rt}\triangle DBC$仍然成立，所以$AF=BD$.

17. 解：(1)$OE=OF$. 证明：因为直线$l/\!/BC$，所以$\angle BCE=\angle CEO$，$\angle DCF=\angle OFC$. 因为CE平分$\angle BCO$，CF平分$\angle DCO$，所以$\angle BCE=\angle OCE$，$\angle DCF=\angle FCO$. 所以$\angle OEC=\angle OCE$，$\angle OCF=\angle OFC$. 所以$OE=OC$，$OF=OC$. 所以$OE=OF$.

(2)当点O在AC的中点处时，四边形$AECF$是矩形. 证明：由(1)得$OE=OF$，由点O是AC的中点得$OA=OC$，所以四边形$AECF$是平行四边形.

又因为$\angle ECF=\angle OCE+\angle OCF=\frac{1}{2}\angle BCO+\frac{1}{2}\angle OCD=\frac{1}{2}(\angle BCO+\angle OCD)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，所以$\square AECF$是矩形.

点拨：本题解法应用了几何说明中的两个常用方法：①由平行、平分说明等腰；②互为邻补角的两个角的平分线互相垂直.

18. 证明：因为在$\square ABCD$中，$AD/\!/\!/BC$，所以$\angle ADE=\angle CBF$.

又因为$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，所以$\angle AED=\angle CFB=90°$.

在$\triangle AED$和$\triangle CFB$中，

$$\begin{cases}\angle ADE=\angle CBF,\\ \angle AED=\angle CFB,\\ AD=CB,\end{cases}$$

所以$\triangle AED\cong\triangle CFB$. 所以$AE=CF$，$\angle DAE=\angle BCF$.

因为G，H分别是AD，BC的中点，

所以$AG=DG=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=BH=CH$.

在$\triangle AEG$和$\triangle CFH$中，$\begin{cases}AE=CF,\\ \angle DAE=\angle BCF,\\ AG=CH,\end{cases}$

所以$\triangle AEG\cong\triangle CFH$. 所以$\angle AEG=\angle CFH$，$EG=FH$.

所以$\angle GEF=\angle HFE$. 所以$EG/\!/FH$.

所以四边形$GEHF$是平行四边形(一组对边平

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

行且相等的四边形是平行四边形).

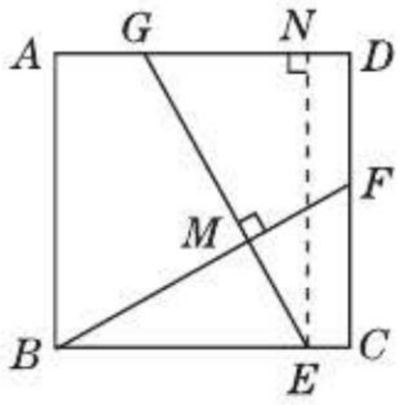
19. **解**:(1) AE 与 BF 相等. 证明:在正方形 $ABCD$ 中,$AB=BC$,$\angle ABE=\angle BCF=90°$,$AB\parallel CD$,所以 $\angle ABM=\angle CFM$. 因为 $AE\perp BF$,所以 $\angle AMB=90°$. 所以 $\angle BAE+\angle ABM=\angle CBF+\angle CFM=90°$. 所以 $\angle BAE=\angle CBF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,$\begin{cases}\angle EAB=\angle FBC,\\ AB=BC,\\ \angle ABE=\angle BCF,\end{cases}$

所以 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$. 所以 $AE=BF$.

(2) GE 与 BF 相等.

证明:如图所示,过点 E 作 $EN\perp AD$ 于点 N,所以 $\angle GNE=90°$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,



(第19(2)题图)

所以 $EN=AB=BC$,$AD\parallel BC$,$\angle BCF=90°$.

所以 $\angle NGE=\angle BEM$,$\angle GNE=\angle BCF$.

因为 $GE\perp BF$,所以 $\angle BME=90°$.

所以 $\angle GEN+\angle NGE=\angle FBC+\angle BEM=90°$.

所以 $\angle GEN=\angle FBC$.

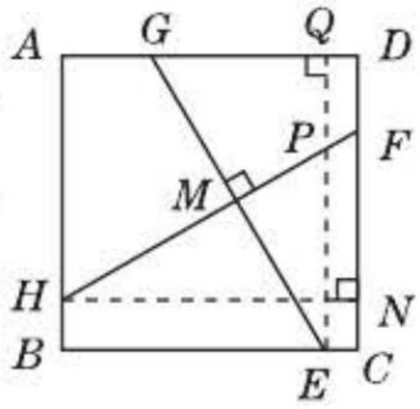
在 $\triangle ENG$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$\begin{cases}\angle GEN=\angle FBC,\\ EN=BC,\\ \angle ENG=\angle BCF,\end{cases}$

所以 $\triangle ENG\cong\triangle BCF$. 所以 $EG=BF$.

(3) GE 与 HF 相等.

证明:如图所示,过点 H,E 分别作 DC,AD 的垂线,垂足分别为 N,Q,且 EQ 交 HF 于点 P,所以 $\angle EQG=\angle HNF=90°=\angle QGE+\angle GEQ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $QE\perp\!\!\!\perp DC$,$NH\perp\!\!\!\perp BC$,$BC=DC$. 所以 $QE=NH$,$\angle HPE=\angle NFH$. 因为 $GE\perp HF$,所以 $\angle GEQ+\angle HPE=90°=\angle QGE+\angle GEQ$. 所以 $\angle QGE=\angle HPE=\angle NFH$.



(第19(3)题图)

在 $\triangle EQG$ 和 $\triangle HNF$ 中,

$\begin{cases}\angle EQG=\angle HNF,\\ \angle QGE=\angle NFH,\\ QE=NH,\end{cases}$

所以 $\triangle EQG\cong\triangle HNF$. 所以 $GE=HF$.

20. **证明**:如图所示,取 BC 的中点 I,连接 EI,FI.

$\because E$、F、I 分别是 AB、CD、BC 的中点,

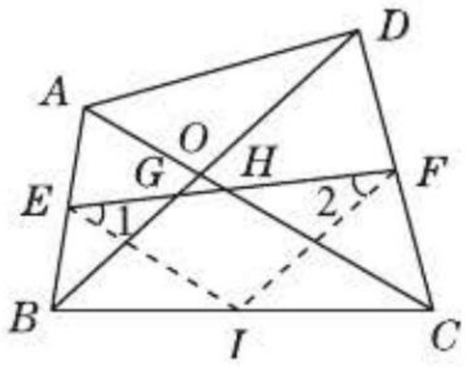
$\therefore EI\parallel AC$,$FI\parallel BD$ 且 $EI=\frac{1}{2}AC$,$FI=\frac{1}{2}BD$.

$\therefore\angle 1=\angle AHE$,$\angle 2=\angle DGF$.

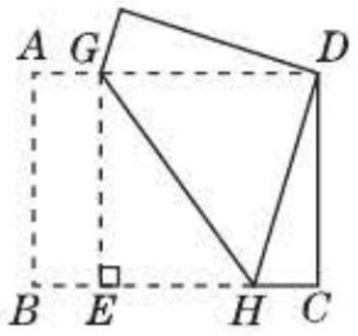
又$\because AC=BD$,$\therefore EI=FI$. $\therefore\angle 1=\angle 2$.

$\therefore\angle AHE=\angle DGF$,

即 $\angle OHG=\angle OGH$. $\therefore OG=OH$.



(第20题图)



(第21题图)

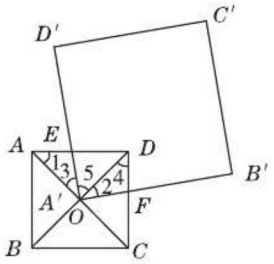
21. **解**:(1) 由题意知,$AB=BE=DC$,$\angle E=\angle A=\angle C=90°$. 在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$\begin{cases}BE=DC,\\ \angle E=\angle C=90°,\\ \angle BFE=\angle DFC,\end{cases}$ 所以 $\triangle BEF\cong\triangle DCF$. 所以 $BF=DF$. 设 $FC=x$,则 $DF=BF=8-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中,由勾股定理得 $(8-x)^2=x^2+6^2$,解得 $x=\frac{7}{4}$. 所以 $BF=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$. (2) 过点 G 作 $GE\perp BC$ 于点 E,如图所示. 由题意知 $BH=DH$,$\angle BHG=\angle DHG$. 又易知 $AD\parallel BC$,所以 $\angle DGH=\angle BHG$. 所以 $\angle DHG=\angle DGH$. 所以 $DG=DH=BH$. 所以 $AG=CH$. 设 $CH=y$,则 $DH=BH=8-y$,在 $\mathrm{Rt}\triangle CDH$ 中,由勾股定理得 $(8-y)^2=y^2+6^2$,解得 $y=\frac{7}{4}$,即 $CH=\frac{7}{4}$. 由作图可知四边形 $AGEB$ 是矩形,所以 $BE=AG=CH$,$GE=AB=6$. 所以在 $\mathrm{Rt}\triangle EGH$ 中,$GH=\sqrt{6^2+\left(8-\frac{7}{4}-\frac{7}{4}\right)^2}=\frac{15}{2}$.

点拨:根据轴对称的性质找出相等的线段,再用勾股定理计算线段的长度.

22. **解**:这两个正方形重合部分的面积不会发生变化. 证明:

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第22题图）

假设正方形$A'B'C'D'$旋转至如图所示的位置.$A'D'$与AD交于点E,$A'B'$与CD交于点F.

∵四边形$ABCD$是正方形,∴$\angle 1=\angle 4=45°$,$OA=OD$,$\angle AOD=\angle COD=90°$.

∵$\angle D'A'B'=90°$,∴$\angle 3+\angle 5=\angle 5+\angle 2=90°$.

∴$\angle 3=\angle 2$.在$\triangle EAO$和$\triangle FDO$中,$\begin{cases}\angle 1=\angle 4,\\ AO=DO,\\ \angle 3=\angle 2,\end{cases}$

∴$\triangle EAO\cong\triangle FDO$.∴$S_{\triangle EAO}=S_{\triangle FDO}$.∴$S_{重合部分}=S_{\triangle OED}+S_{\triangle OFD}=S_{\triangle OED}+S_{\triangle OEA}=S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

∴这两个正方形重合部分的面积不会发生变化,仍为$\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

第10章 分 式

10.1 分 式

练习

1. (1)$\frac{m}{20}$;$\frac{m}{a}$　(2)$\frac{60}{x}$

2. $-\frac{3}{4}$;$-\frac{2}{3}$;$-\frac{1}{2}$;0;无意义;-2;$-\frac{3}{2}$

点拨:注意分母为0时,分式无意义.

3. **解:**(1)当$x\neq 0$时,分式$\frac{2+x}{x}$有意义.

由分子$2+x=0$,得$x=-2$,且当$x=-2$时分母的值为-2不为零,所以当$x=-2$时分式$\frac{2+x}{x}$的值为零.

(2)由分母$4-3x=0$,得$x=\frac{4}{3}$.所以当$x\neq\frac{4}{3}$时,分式$\frac{x}{4-3x}$有意义.

当$x=0$时,分子的值为0,分母的值为4不为零,所以当$x=0$时,分式$\frac{x}{4-3x}$的值为零.

点拨:若分式$\frac{A}{B}$有意义,则分母$B\neq 0$.

习题10.1

1. **解:**(1)由分母$6x-5=0$,得$x=\frac{5}{6}$.所以当$x\neq\frac{5}{6}$时,分式$\frac{2x+1}{6x-5}$有意义.由$2x+1=0$,得$x=-\frac{1}{2}$,且当$x=-\frac{1}{2}$时,分母的值为-8不为零.所以当$x=-\frac{1}{2}$时,分式$\frac{2x+1}{6x-5}$的值为零.

(2)由分母$x^2+1\geqslant 1$知,x为任意实数时,分式$\frac{2x-1}{x^2+1}$有意义.由$2x-1=0$,得$x=\frac{1}{2}$,且当$x=\frac{1}{2}$时,分母的值为$\frac{5}{4}$不为零.所以当$x=\frac{1}{2}$时,分式$\frac{2x-1}{x^2+1}$的值为零.

2. **解:**(1)$a\div b=\frac{a}{b}$(天).即该厂原计划$\frac{a}{b}$天完成生产任务.

(2)$a\div(b+c)=\frac{a}{b+c}$(天).即该厂实际$\frac{a}{b+c}$天完成了生产任务.

点拨:本题属于工作量问题,工作时间=工作量÷工作效率.

3. **解:**$(28x+32y+48z)\div(x+y+z)=\frac{28x+32y+48z}{x+y+z}$(元/千克).即这种"什锦糖"的单价为$\frac{28x+32y+48z}{x+y+z}$元/千克.

点拨:商品单价=商品总价÷商品总质量.

4. **解:**当$a=0.01$时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{0.01}=100$;当$a=0.1$时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{0.1}=10$;当$a=1$时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{1}=1$;当$a=10$时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{10}=0.1$;当$a=100$时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{100}=0.01$.由以上可以看出$\frac{1}{a}$的值随$a$的值的增大而减小($a>0$).

点拨:本题属于探究型题,要从特殊现象中总结出一般规律.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10.2 分式的基本性质

练习

1. (1)$2b$ (2)$3ac$ (3)$a-b$ (4)1

2. 解:$\dfrac{\frac{1}{2}a^2+b^2}{a+b}=\dfrac{\frac{a^2+2b^2}{2}}{a+b}=\dfrac{a^2+2b^2}{2(a+b)}$.

练习

1. 解:(1)$\dfrac{3a^2b}{6ab}=\dfrac{3ab\cdot a}{3ab\cdot 2}=\dfrac{a}{2}$;

(2)$\dfrac{2a(a-1)}{8ab^2(1-a)}=\dfrac{2a(a-1)}{2a(a-1)\cdot(-4b^2)}=-\dfrac{1}{4b^2}$;

(3)$\dfrac{18(b-a)^2}{24(a-b)}=\dfrac{6(a-b)\cdot 3(a-b)}{6(a-b)\cdot 4}=\dfrac{3(a-b)}{4}$.

2. 解:(1)$\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2}=\dfrac{(a-2b)^2}{(a+2b)(a-2b)}=\dfrac{a-2b}{a+2b}$;

(2)$\dfrac{a^4-1}{a^2+2a+1}=\dfrac{(a+1)(a-1)(a^2+1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a-1)(a^2+1)}{a+1}$;

(3)$\dfrac{(x+y)^2-10(x+y)+25}{(x+y)^2-25}=\dfrac{(x+y-5)^2}{(x+y+5)(x+y-5)}=\dfrac{x+y-5}{x+y+5}$.

点拨:先找出分子、分母的公因式,然后再约分.

练习

1. 解:(1)$\dfrac{2}{ac}=\dfrac{2b}{abc}$,$\dfrac{1}{ab}=\dfrac{c}{abc}$;

(2)$\dfrac{2b}{3a^2}=\dfrac{2b^2c}{3a^2bc}$,$\dfrac{a}{bc}=\dfrac{3a^3}{3a^2bc}$.

2. 解:(1)$\dfrac{a}{a-b}=\dfrac{2a}{2(a-b)}$,$\dfrac{3b}{2a-2b}=\dfrac{3b}{2(a-b)}$;

(2)$\dfrac{5}{2(x-1)}=\dfrac{15(x-1)}{6(x-1)^2}$,$\dfrac{2x}{3(1-x)^2}=\dfrac{4x}{6(x-1)^2}$;

(3)$\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{m^2n(m-n)}{mn(m+n)(m-n)}$,$\dfrac{1}{m^2n-mn^2}=\dfrac{m+n}{mn(m+n)(m-n)}$;

(4)$\dfrac{2}{4-9m^2}=-\dfrac{2(3m-2)}{(3m+2)(3m-2)^2}$,$\dfrac{3m}{9m^2-12m+4}=\dfrac{3m(3m+2)}{(3m+2)(3m-2)^2}$.

点拨:先找出最简公分母,再通分.

习题 10.2

1. (1)x^2 (2)$a(a+2)$ (3)$12a$ (4)a^2-b^2

点拨:分式的值不变的前提是:分子和分母同乘(或除以)同一个不等于0的整式.

2. 解:(1)$\dfrac{1-\frac{1}{2}a}{a+1}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}a\right)\times 2}{(a+1)\times 2}=\dfrac{2-a}{2a+2}=-\dfrac{a-2}{2a+2}$;

(2)$\dfrac{a^2-0.2a}{a^2-0.3a^3}=-\dfrac{a^2-0.2a}{0.3a^3-a^2}=-\dfrac{(a^2-0.2a)\times 10}{(0.3a^3-a^2)\times 10}=-\dfrac{10a^2-2a}{3a^3-10a^2}$.

3. 解:(1)$\dfrac{6ab^2}{-2b}=\dfrac{2b\cdot 3ab}{2b\times(-1)}=-3ab$;

(2)$\dfrac{-4a^2b^2}{-8a^3b}=\dfrac{-4a^2b\cdot b}{-4a^2b\cdot 2a}=\dfrac{b}{2a}$;

(3)$\dfrac{a^2+2ab}{a^2b+2ab^2}=\dfrac{a(a+2b)}{ab(a+2b)}=\dfrac{1}{b}$;

(4)$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\dfrac{a-b}{a+b}$.

点拨:约分时,一般先找分子、分母的公因式,再约分.

4. 解:(1)$\dfrac{a+3b}{a^2-9b^2}=\dfrac{a+3b}{(a+3b)(a-3b)}=\dfrac{1}{a-3b}$.

把$a=\dfrac{5}{3}$、$b=\dfrac{2}{9}$代入,得原式$=\dfrac{1}{\frac{5}{3}-3\times\frac{2}{9}}=1$;

(2)$\dfrac{a^3-4ab^2}{a^3-4a^2b+4ab^2}=\dfrac{a(a+2b)(a-2b)}{a(a-2b)^2}=\dfrac{a+2b}{a-2b}$.

把$a=-2$、$b=-0.5$代入,得原式$=\dfrac{-2+2\times(-0.5)}{-2-2\times(-0.5)}=3$.

5. 解:(1)$\dfrac{a}{xy}=\dfrac{az}{xyz}$,$\dfrac{b}{yz}=\dfrac{bx}{xyz}$;

(2)$\dfrac{1}{2a}=\dfrac{5ab}{10a^2b}$,$\dfrac{1}{5a^2b}=\dfrac{2}{10a^2b}$;

(3)$\dfrac{c}{a-b}=\dfrac{(a-b)c}{(a-b)^2}$,$\dfrac{1}{(b-a)^2}=\dfrac{1}{(a-b)^2}$;

(4)$\dfrac{b}{a(b+1)}=\dfrac{b^2}{ab(b+1)}$,$\dfrac{a}{b(b+1)}=\dfrac{a^2}{ab(b+1)}$;

(5)$\dfrac{2a}{2a+1}=\dfrac{2a(2a-1)}{(2a+1)(2a-1)}$,$\dfrac{4(2a-1)}{4a^2-4a+1}=\dfrac{4(2a-1)}{(2a-1)^2}=\dfrac{4}{2a-1}=\dfrac{4(2a+1)}{(2a+1)(2a-1)}$;

(6)$\dfrac{a-1}{(a+1)^2-4}=\dfrac{a-1}{(a-1)(a+3)}=\dfrac{2(a-1)}{2(a+3)(a-1)}$,$\dfrac{1-a}{2-4a+2a^2}=-\dfrac{a-1}{2(a-1)^2}=-\dfrac{1}{2(a-1)}=-\dfrac{a+3}{2(a+3)(a-1)}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.3 分式的加减

练习

1. 解：(1)$\frac{c}{ab^2}+\frac{bc}{ab^2}=\frac{c+bc}{ab^2}$；

(2)$\frac{3}{a}+\frac{a-15}{5a}=\frac{15}{5a}+\frac{a-15}{5a}=\frac{a}{5a}=\frac{1}{5}$；

(3)$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{R_2}{R_1R_2}+\frac{R_1}{R_1R_2}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$；

(4)$\frac{b}{a+b}+\frac{ab}{b^2-a^2}=\frac{b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{ab}{(a+b)(a-b)}=-\frac{b^2}{(a+b)(a-b)}$.

点拨：同分母分式相加减，分母不变，只把分子相加减；异分母分式相加减，先通分，后加减. 注意最终结果要化为最简分式或整式.

2. 解：$\frac{300}{a}-\frac{300}{b}=\frac{300b-300a}{ab}=\frac{300(b-a)}{ab}$(h).

答：行驶 300 km 客车比货车少用$\frac{300(b-a)}{ab}$ h.

点拨：时间 = 路程 ÷ 速度.

习题 10.3

1. 解：(1)$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$；

(2)$\frac{a^2}{(a-b)^2}-\frac{b^2}{(b-a)^2}=\frac{a^2}{(a-b)^2}-\frac{b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}$；

(3)$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$；

(4)$a-b+\frac{2b^2}{a+b}=\frac{a-b}{1}+\frac{2b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{2b^2}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

点拨：分式运算的结果必须化成最简分式或整式.

2. 解：$\frac{10}{a}-\frac{10}{a+5}=\frac{10(a+5)}{a(a+5)}-\frac{10a}{a(a+5)}=\frac{10a+50-10a}{a(a+5)}=\frac{50}{a(a+5)}$(t).

答：喷灌比漫灌平均每天节约用水$\frac{50}{a(a+5)}$t.

3. 解：游轮顺水速度为$(a+b)$ km/h，游轮逆水速度为$(a-b)$ km/h，则$\frac{s}{a-b}-\frac{s}{a+b}=\frac{s(a+b)-s(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2bs}{(a+b)(a-b)}$(h).

答：该游轮往返两港口所需的时间相差$\frac{2bs}{(a+b)(a-b)}$ h.

10.4 分式的乘除

练习

1. 解：(1)$4ab^3\cdot\frac{-3a}{2b^3}=-6a^2$；(2)$\frac{8}{x^3}\div\frac{36}{x^2}=\frac{8}{x^3}\cdot\frac{x^2}{36}=\frac{2}{9x}$；(3)$\frac{a^2-4b^2}{4ab^2}\cdot\frac{ab}{a+2b}=\frac{(a+2b)(a-2b)}{4ab^2}\cdot\frac{ab}{a+2b}=\frac{a-2b}{4b}$；

(4)$\frac{a^2-b^2}{2ab}\div(a+b)=\frac{(a+b)(a-b)}{2ab}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{2ab}$.

点拨：分式的乘除、乘方运算与分数的乘除、乘方运算类似.

2. 解：(1)$(a-4)\cdot\frac{16-a^2}{a^2-8a+16}=(a-4)\cdot\frac{-(a+4)(a-4)}{(a-4)^2}=-(a+4)=-a-4$；

(2)$\frac{a^2-a+\frac{1}{4}}{a-3}\div\frac{2a-1}{a^2-3a}=\frac{(2a-1)^2}{4(a-3)}\cdot\frac{a(a-3)}{2a-1}=\frac{a(2a-1)}{4}$.

练习

解：(1)$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=\frac{a-1+1}{a-1}\cdot\frac{1-a^2}{a^2}=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{-(a+1)(a-1)}{a^2}=-\frac{a+1}{a}$；(2)$\frac{x-2}{x^2}\div\left(1-\frac{2}{x}\right)=\frac{x-2}{x^2}\div\frac{x-2}{x}=\frac{x-2}{x^2}\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x}$；

(3)$\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\div\frac{x-4}{x}=\frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}=\frac{x-4}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}=\frac{1}{(x-2)^2}$；(4)$\frac{1}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}=\frac{1}{x-1}-\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x-3)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-3-x-1}{(x-1)(x-3)}=-\frac{4}{(x-1)(x-3)}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 10.4

1. 解:(1)$\frac{a^2}{b^2c}\cdot\left(-\frac{bc^2}{2a}\right)=-\frac{a^2}{b^2c}\cdot\frac{bc^2}{2a}=-\frac{ac}{2b}$;

(2)$\frac{a-b}{a+b}\div(b-a)=\frac{a-b}{a+b}\cdot\left(-\frac{1}{a-b}\right)=-\frac{1}{a+b}$;

(3)$\frac{5x+2}{25-10x+x^2}\cdot\frac{x^2-25}{25x^2-4}=\frac{5x+2}{(x-5)^2}\cdot\frac{(x+5)(x-5)}{(5x+2)(5x-2)}=\frac{x+5}{(x-5)(5x-2)}$;

(4)$\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div\frac{3-x}{(x-2)(x+3)}=\frac{2(x-3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{(x-2)(x+3)}{-(x-3)}=-\frac{2(x+3)}{x-2}$.

2. 解:(1)$\frac{-3a}{b}\cdot\frac{ab^2}{-a^3b^2}\div\left(-\frac{6b}{a^2}\right)=-\left(\frac{3a}{b}\cdot\frac{ab^2}{a^3b^2}\cdot\frac{a^2}{6b}\right)=-\frac{a}{2b^2}$;

(2)$-\frac{a^2-25}{a^2+10a+25}\div\frac{a^2-1}{a+5}\cdot\frac{a^2+2a+1}{a-5}=-\frac{(a+5)(a-5)}{(a+5)^2}\cdot\frac{a+5}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{(a+1)^2}{a-5}=-\frac{a+1}{a-1}$.

3. 解:(1)$\frac{x-3}{x-2}\div\left(x+2-\frac{5}{x-2}\right)=\frac{x-3}{x-2}\div\frac{x^2-4-5}{x-2}=\frac{x-3}{x-2}\cdot\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+3}$;(2)$1-\frac{a-b}{a-2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}=1-\frac{a-b}{a-2b}\cdot\frac{(a-2b)^2}{(a+b)(a-b)}=1-\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}-\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a+b-a+2b}{a+b}=\frac{3b}{a+b}$.

4. 解:(1)$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-3x}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1+x^2-3x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$. 当 $x=\frac{1}{2}$时,原式$=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{3}$.

(2)$1-\frac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2}\div\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}=1-\frac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=1-(x^2-x+1)=-x^2+x$. 当 $x=-\frac{1}{3}$时,原式$=-\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{9}$.(3)$\frac{2-x}{x^2+x}\div\frac{x^2-3x}{x^2+2x+1}\cdot\frac{9-x^2}{4-2x}=\frac{-(x-2)}{x(x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{x(x-3)}\cdot\frac{-(x+3)(x-3)}{-2(x-2)}=-\frac{(x+1)(x+3)}{2x^2}$. 当 $x=-2$ 时,原式$=-\frac{(-2+1)\times(-2+3)}{2\times(-2)^2}=\frac{1}{8}$.

点拨:解答这类题注意先化简再求值,会使运算简便些.

10.5 分式方程

练习

解:(1)方程两边同乘 $4(10x+4)$,得 $4(40+x)=7(10x+4)$. 解这个方程,得 $x=2$. 把 $x=2$ 代入原方程:左边$=\frac{42}{24}=\frac{7}{4}$,右边$=\frac{7}{4}$,左边=右边. $x=2$ 是原方程的解;

(2)方程两边同乘 $x(x-1)$,得 $9(x-1)=8x$. 解这个方程,得 $x=9$. 把 $x=9$ 代入原方程:左边$=\frac{9}{9}=1$,右边$=\frac{8}{9-1}=1$,左边=右边. $x=9$ 是原方程的解.

(3)方程两边同乘 $3x$,得 $45-15=2x$. 解这个方程,得 $x=15$. 把 $x=15$ 代入原方程:左边$=\frac{15}{15}-\frac{15}{3\times15}=\frac{2}{3}$,右边$=\frac{2}{3}$,左边=右边. $x=15$ 是原方程的解.

(4)方程两边同乘 $2x-5$,得 $x-5=2x-5$. 解这个方程,得 $x=0$. 把 $x=0$ 代入原方程:左边$=0+1=1$,右边$=1$,左边=右边,$x=0$ 是原方程的解.

练习

解:(1)方程两边同乘 $x-1$,得 $4+x-5(x-1)=2x$. 解这个方程,得 $x=\frac{3}{2}$.

检验:当 $x=\frac{3}{2}$时,$x-1=\frac{1}{2}\neq0$,$x=\frac{3}{2}$是原方程的解.

(2)方程两边同乘 $x-2$,得 $1=x-1-3(x-2)$. 解这个方程,得 $x=2$.

检验:当 $x=2$ 时,$x-2=0$,$x=2$ 是增根,原方程无解.

(3)方程两边同乘$(x+1)(x-1)$,得 $3(x-1)=6$. 解这个方程,得 $x=3$.

检验:当 $x=3$ 时,$(x+1)(x-1)=8\neq0$,$x=3$是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

原方程的解.

练习

1. 解: 设原分数的分子为 x,则分母为 $x+5$,根据题意,得 $\frac{x}{x+5}=\frac{1}{\frac{x+14}{x+4}}$,即 $\frac{x}{x+5}=\frac{x+4}{x+14}$. 方程两边都乘 $(x+5)(x+14)$,得 $x(x+14)=(x+5)(x+4)$. 解这个方程,得 $x=4$. 经检验,$x=4$ 是原分式方程的解. 所以原分数为 $\frac{4}{9}$.

2. 解: 设乙机器人每小时检测零件 x 个,则甲机器人每小时检测零件 $(x+10)$ 个. 根据题意,得 $\frac{300}{x+10}=\frac{200}{x}$. 解这个方程,得 $x=20$. 经检验,$x=20$ 是原方程的解. $x+10=20+10=30$.

答: 甲机器人每小时检测零件 30 个,乙机器人每小时检测零件 20 个.

习题 10.5

1. 解: (1) 方程两边同乘 $2(4+x)$,得 $2(3-x)=4+x$. 解这个方程,得 $x=\frac{2}{3}$. 检验:当 $x=\frac{2}{3}$ 时,$2(4+x)=\frac{28}{3}\neq 0$,$x=\frac{2}{3}$ 是原方程的解.

(2) 方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,得 $x-1+x+1=0$. 解这个方程,得 $x=0$. 检验:当 $x=0$ 时,$(x+1)(x-1)=-1\neq 0$,$x=0$ 是原方程的解.

(3) 方程两边同乘 $(x-1)(2x+3)$,得 $(2x-3)(2x+3)=(4x-1)(x-1)$. 解这个方程,得 $x=2$. 检验:当 $x=2$ 时,$(x-1)(2x+3)=7\neq 0$,$x=2$ 是原方程的解.

(4) 方程两边同乘 $2x-1$,得 $x=2(2x-1)+3$. 解这个方程,得 $x=-\frac{1}{3}$. 检验:当 $x=-\frac{1}{3}$ 时,$2x-1=-\frac{5}{3}\neq 0$,$x=-\frac{1}{3}$ 是原方程的解.

2. 解: (1) 方程两边同乘 $x-1$,得 $3x+2=5$. 解这个方程,得 $x=1$. 检验:当 $x=1$ 时,$x-1=0$,$x=1$ 是增根,原方程无解.

(2) 方程两边同乘 $x-7$,得 $x-8+1=8(x-7)$. 解这个方程,得 $x=7$. 检验:当 $x=7$ 时,$x-7=0$,$x=7$ 是增根,原方程无解.

(3) 方程两边同乘 $x-2$,得 $2x-5=3x-3-3(x-2)$. 解这个方程,得 $x=4$. 检验:当 $x=4$ 时,$x-2=2\neq 0$,$x=4$ 是原方程的解.

(4) 方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,得 $(x+1)^2-4=(x+1)(x-1)$. 解这个方程,得 $x=1$. 检验:当 $x=1$ 时,$(x+1)(x-1)=0$,$x=1$ 是增根,原方程无解.

3. 解: 设小丽每小时做 x 朵小红花,则小明每小时做 $(x+2)$ 朵小红花. 根据题意,得 $\frac{100}{x+2}=\frac{90}{x}$. 解这个方程,得 $x=18$. 经检验,$x=18$ 是原分式方程的解.

$x+2=18+2=20$.

答: 小明每小时做小红花 20 朵,小丽每小时做小红花 18 朵.

4. 解: 设原计划每天种树 x 棵,根据题意,得 $\frac{960}{x}=\frac{960}{\frac{4}{3}x}+4$. 解这个方程,得 $x=60$. 经检验,$x=60$ 是原分式方程的解.

答: 原计划每天种树 60 棵.

5. 解: 设原计划完成这项工程需要 x 个月. 根据题意,得 $\frac{1}{x}\times(1+25\%)=\frac{1}{x-6}$. 解这个方程,得 $x=30$. 经检验,$x=30$ 是原方程的解.

答: 原计划完成这项工程需要30 个月.

点拨: 本题属于工程问题,常把工作总量看作单位“1”.

复习题

1. 解: (1) 由分母 $2x+1=0$,得 $x=-\frac{1}{2}$. 所以当 $x\neq -\frac{1}{2}$ 时,分式 $\frac{x+2}{2x+1}$ 有意义;(2) 由分母 $4x^2+3\geqslant 3$ 知当 x 为任意实数时,分式 $\frac{2x-2}{4x^2+3}$ 有意义.

点拨: 分式 $\frac{A}{B}$ 有意义的条件是 $B\neq 0$.

2. 解: (1) $\frac{1-a^2}{a^2-2a+1}=\frac{-(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{-(a+1)}{a-1}=-\frac{a+1}{a-1}$.

(2) $\frac{4a^2b+4ab^2+b^3}{2b^3-8a^2b}=\frac{b(2a+b)^2}{2b(b+2a)(b-2a)}=\frac{2a+b}{2(b-2a)}=\frac{2a+b}{2b-4a}$.

点拨: 化简时要注意先分解因式,再进行约分化简.

3. 解: (1) $\frac{a-c}{a-b}-\frac{c-b}{b-a}=\frac{a-c}{a-b}+\frac{c-b}{a-b}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{(a-c)+(c-b)}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1$;

(2) $\frac{2m}{m^2-4}-\frac{m}{m-2}=\frac{2m}{(m+2)(m-2)}-\frac{m(m+2)}{(m+2)(m-2)}=\frac{2m-m^2-2m}{(m+2)(m-2)}=-\frac{m^2}{(m+2)(m-2)}$;

(3) $\frac{a^2-4}{2ab}\cdot\frac{4a^2b+8ab}{a^2+4a+4}=\frac{(a+2)(a-2)}{2ab}\cdot\frac{4ab(a+2)}{(a+2)^2}=2(a-2)$;

(4) $\frac{a^2}{a+3}\div\frac{6a}{a^2-9}=\frac{a^2}{a+3}\cdot\frac{(a+3)(a-3)}{6a}=\frac{a(a-3)}{6}$;

(5) $\frac{a^2-b^2}{a+b}\div\frac{a^2-ab}{2a+2b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}\div\frac{a(a-b)}{2(a+b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}\cdot\frac{2(a+b)}{a(a-b)}=\frac{2(a+b)}{a}$;

(6) $(a^2-2ab+b^2)\div\frac{ab-b^2}{a+b}=(a-b)^2\cdot\frac{a+b}{ab-b^2}=(a-b)^2\cdot\frac{a+b}{b(a-b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{b}=\frac{a^2-b^2}{b}$.

4. 解: (1) $\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x-1+1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=x+1$;

(2) $\frac{a-1}{a}\div\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{a-1}{a}\div\frac{a^2-1}{a}=\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a}{(a+1)(a-1)}=\frac{1}{a+1}$.

点拨: 进行分式混合运算时,有括号的先算括号里面的.

5. 解: 根据题意,得 $\frac{a}{b-c}-\frac{a}{b}=\frac{ab-a(b-c)}{b(b-c)}=\frac{ac}{b(b-c)}$(天).

答: 实际完成工程的时间比原计划推迟 $\frac{ac}{b(b-c)}$ 天.

点拨: 本题属于工程问题,原计划 $\frac{a}{b}$ 天完成该项工程,实际用了 $\frac{a}{b-c}$ 天完成该项工程.

6. 解: (1) 方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$,得 $2(x-2)=3(x+2)$. 解这个方程,得 $x=-10$. 检验:当 $x=-10$ 时,$(x+2)(x-2)\neq0$,$x=-10$ 是原方程的解;

(2) 方程两边都乘 $2x-1$,得 $x=2x-1+2$. 解这个方程,得 $x=-1$. 检验:当 $x=-1$ 时,$2x-1\neq0$,$x=-1$ 是原方程的解;(3) 方程两边都乘 $x-4$,得 $-3+2(x-4)=1-x$. 解这个方程,得 $x=4$. 检验:当 $x=4$ 时,$x-4=0$,$x=4$ 是增根,原方程无解;(4) 方程两边都乘 $3x-9$,得 $2x+9=3(4x-7)+2(3x-9)$. 解这个方程,得 $x=3$. 检验:当 $x=3$ 时,$3x-9=0$,$x=3$ 是增根,原方程无解.

7. 解: 设甲每小时做 x 个零件,则乙每小时做 $(35-x)$ 个零件. 根据题意,得 $\frac{160}{x}=\frac{120}{35-x}$. 解这个方程,得 $x=20$. 经检验,$x=20$ 是原方程的解. $35-x=15$.

答: 甲每小时做 20 个零件,乙每小时做 15 个零件.

点拨: 本题的基本等量关系为:工作时间 = 工作总量 ÷ 工作效率.

8. 解: 设大队的速度为 x km/h,则先遣队的速度为 $1.2x$ km/h. 根据题意,得 $\frac{15}{x}-\frac{15}{1.2x}=0.5$. 解这个方程,得 $x=5$. 经检验,$x=5$ 是原方程的解. $1.2x=6$.

答: 先遣队的速度为 6 km/h,大队的速度为 5 km/h.

9. 解: 因为 m 是整数,所以 $m-1$ 是整数. 又 $\frac{4}{m-1}$ 是整数,所以 $m-1=\pm1$ 或 ±2 或 ±4,解得 $m=-3$ 或 -1 或 0 或 2 或 3 或 5.

10. 解: $\frac{3-a}{2a-4}\div\left(a+2-\frac{5}{a-2}\right)=\frac{-(a-3)}{2(a-2)}\div\frac{a^2-4-5}{a-2}=\frac{-(a-3)}{2(a-2)}\cdot\frac{a-2}{(a+3)(a-3)}=-\frac{1}{2(a+3)}$. 把 $a=-\frac{1}{2}$ 代入,得原式 $=-\frac{1}{2\times\left(-\frac{1}{2}+3\right)}=-\frac{1}{5}$.

11. 解: $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$. 由 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$,得 $a=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{3}{2}b$. 所以原式 $=\frac{\left(\frac{3}{2}b\right)^2}{\left(\frac{3}{2}b\right)^2-b^2}=\frac{\frac{9}{4}b^2}{\frac{5}{4}b^2}=\frac{9}{5}$.

12. 解：由分子 $x-y=0$，得 $x=y$，由分母 $1+x\neq 0$，得 $x\neq -1$，所以当 $x=y$，且 $x\neq -1$ 时，分式 $\frac{x-y}{1+x}$ 的值为 0.

点拨：若分式 $\frac{A}{B}=0$，则 $A=0$ 且 $B\neq 0$.

13. 解：(1) 方程两边都乘 $x+1$，得 $3x-2=3(x+1)+m$. 解得 $m=-5$；(2) 方程两边都乘 $x+c$，得 $ax+b=a(x+c)+m$. 解得 $m=b-ac$.

14. 解：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

证明如下：右边 $=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=$ 左边.

所以等式成立.

15. 解：(1) 无解. 理由：方程两边都乘 $x-2$，得 $1-x+2(x-2)=-1$. 解这个方程，得 $x=2$. 检验：当 $x=2$ 时，$x-2=0$. 所以 $x=2$ 是分式方程的增根，原方程无解；(2) $\frac{1-x}{x-2}+2-\frac{1}{2-x}=\frac{-x+1}{x-2}+\frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1$. 其结果不可能为 0；(3) 分式方程 $\frac{1-x}{x-2}+2=\frac{1}{2-x}$ 可变形为 $\frac{1-x}{x-2}+2-\frac{1}{2-x}=0$. 想法：分式方程产生增根的原因是去分母时忽略了最简公分母不等于 0.

第 11 章 反比例函数

11.1 反比例函数

练习

1. 解：(1) $y=\frac{5}{2}x$，不是反比例函数. (2) $y=\frac{200}{x}$，是反比例函数. (3) $p=\frac{120}{S}$，是反比例函数.

点拨：一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数.

2. 解：(1) 不是反比例函数；(2) y 是 x 的反比例函数. $xy+2=0$ 可以改写为 $y=-\frac{2}{x}$，$k=-2$.

习题 11.1

1. 解：(1) $h=\frac{10}{S}$，h 是 S 的反比例函数.

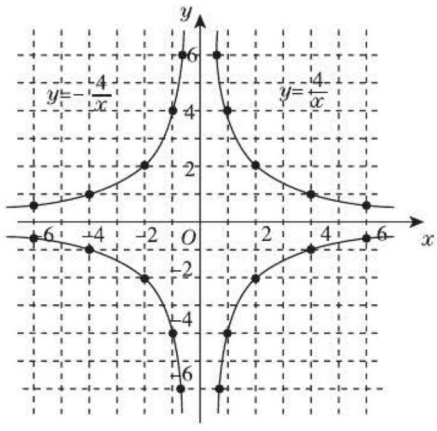
(2) 由题意，得 $n\pi D=1\ 000$，即 $n=\frac{1\ 000}{\pi D}$，n 是 D 的反比例函数. (3) $t=\frac{300}{v}$，t 是 v 的反比例函数.

2. 解：(1) y 是 x 的反比例函数. $xy=4$ 可以改写为 $y=\frac{4}{x}$，$k=4$. (2) y 是 x 的反比例函数. $x=-\frac{5}{y}$ 可以改写为 $y=-\frac{5}{x}$，$k=-5$.

11.2 反比例函数的图像与性质

练习

解：反比例函数 $y=\frac{4}{x}$，$y=-\frac{4}{x}$ 的图像如图所示.



练习

1. (1) ①②④；③ (2) ③ **点拨**：当 $k>0$ 时，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，其图像在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.

2. 解：(1) 设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，因为图像经过点 $A(-6,-3)$，把 $x=-6$，$y=-3$ 代入，得 $-3=\frac{k}{-6}$，解得 $k=18$，所以该反比例函数的表达式为 $y=\frac{18}{x}$. (2) 因为 $k=18>0$，所以这个函数的图像在第一、三象限，在每一个象限内，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

y 随 x 的增大而减小. (3) 当 $x=4$ 时, $y=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$, 即点 $B\left(4,\frac{9}{2}\right)$ 在这个函数的图像上; 当 $x=2$ 时, $y=\frac{18}{2}=9$, 所以点 $C(2,-5)$ 不在这个函数的图像上.

点拨: 用待定系数法求反比例函数的表达式只需知道图像上一个点的坐标即可.

练习

1. **解:** 因为图像在同一象限内, y 随 x 的增大而增大, 所以 $n+3<0$. 解这个不等式, 得 $n<-3$.

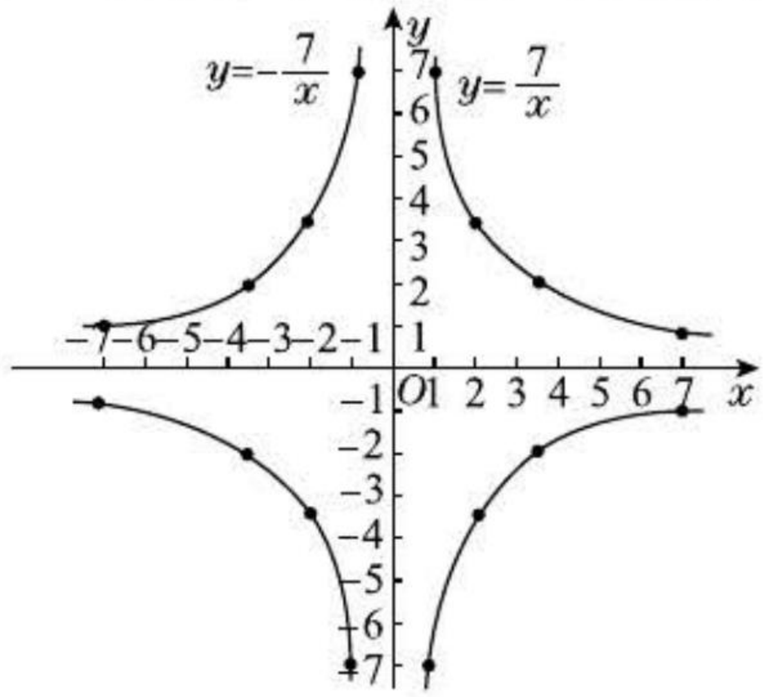
点拨: 对于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像, 在同一象限内, y 随 x 的增大而增大, 则 $k<0$; 在同一象限内, y 随 x 的增大而减小, 则 $k>0$.

2. **解:** 因为点 $A(2,y_1)$、$B(1,y_2)$ 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图像上, 所以点 A、B 在第四象限的一支上, y 随 x 的增大而增大, 所以 $y_2<y_1$.

习题 11.2

1. **解:** (1)(2) 两个函数的图像如图所示.

点拨: 画函数图像的一般步骤是列表、描点、连线.



(第 1 题图)

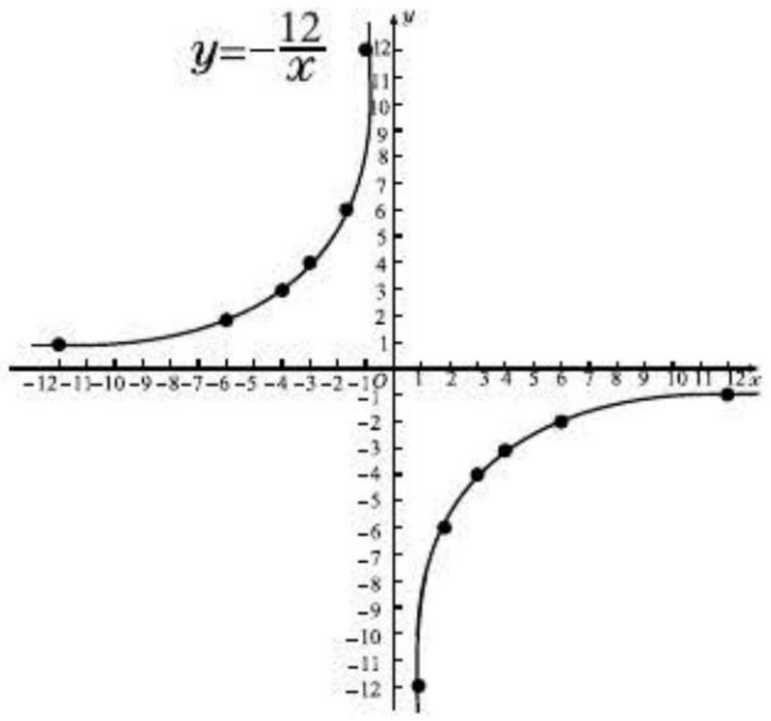
2. **解:** 这个反比例函数的表达式为 $y=-\frac{12}{x}$. 从左到右依次填 4, 12, −6, 4, −2.

点拨: 由表知函数图像经过点 $(-2,6)$, 可利用待定系数法求出其函数表达式.

3. **解:** (1) $y=\frac{24}{x}(x>0)$. (2) 画函数的图像略.

4. **解:** (1) 由函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(2,-6)$, 得 $-6=\frac{k}{2}$, 所以 $k=-12$. 函数的图像如图所示.

(2) 由函数的图像可知, 当 $x>0$ 时, 函数的值小于 0.



(第 4 题图)

点拨: 利用函数图像解决(2)更直观.

5. **解:** (1) 当 $x=2$ 时, $y=2x=4$. 所以函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(2,4)$, 所以 $4=\frac{k}{2}$, 解得 $k=8$. 画函数图像略.

(2) 根据反比例函数的图像可知, 当 $-4<x<-1$ 时, $-8<y<-2$.

点拨: 两函数图像交点的坐标满足两个函数表达式.

11.3 用反比例函数解决问题

练习

1. **解:** $xy=300$, 变形得 $y=\frac{300}{x}$. 当 $x=100$ 时, $y=\frac{300}{100}=3$. 所以, 如果汽车的速度不超过 100 km/h, 那么汽车从 A 地到 B 地至少需要 3 h.

2. **解:** (1) $Vt=4\times10^4$, 变形得 $V=\frac{4\times10^4}{t}$. 平均每天运送的土石方 V 是完成任务所需要的时间 t 的反比例函数.

(2) $V=20\times100=2\times10^3$, 把 $V=2\times10^3$ 代入 $v=\frac{4\times10^4}{t}$, 得 $t=\frac{4\times10^4}{2\times10^3}=20$, 所以需要 20 天才能完成该任务.

根据题意, 得工程进行了 8 天后, 剩余土石方总量为 $4\times10^4-8\times2\times10^3=2.4\times10^4$(立方米). 剩余运输任务必须 $20-8-4=8$(天)完成, 则每天的工作量 $V=\frac{2.4\times10^4}{8}=3\times10^3$(立方米), 共需要卡车 $\frac{3\times10^3}{100}=30$(辆). $30-20=10$(辆), 即该运输公司至少需要增派 10 辆同样的卡车才能按时完成任务.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

1. 解:(1)设 $p=\frac{F}{S}$,把 $p=1\ 000$,$S=0.1$ 代入,得 $1\ 000=\frac{F}{0.1}$,解得 $F=100$,所以 p 与 S 之间的函数表达式是 $p=\frac{100}{S}$.

(2)把 $S=0.4$ 代入 $p=\frac{100}{S}$,得 $p=\frac{100}{0.4}=250$,即该物体所受到的压强为 250 Pa.

2. 解:(1)由题易知 $F=\frac{1\ 600\times0.5}{l}=\frac{800}{l}$. 所以 F 与 l 的函数表达式为 $F=\frac{800}{l}$. 当 $F=500$ 时,$l=\frac{800}{500}=1.6$. 所以他该选择动力臂为 1.6 m 的撬棍才能撬动这块大石头.

(2)由题知,阻力即是地球的重力,假设阻力臂一定,此时,动力 $=\frac{\text{阻力}\times\text{阻力臂}}{\text{动力臂}}$,所以动力是动力臂的反比例函数,且比例系数 $k>0$,所以动力随动力臂的增大而减小,也就是当动力臂足够长,动力能够达到人的承受范围时,就能撬动地球.

习题 11.3

1. 解:(1)$12\times8=96(\text{m}^3)$,$Qt=96$,变形得 $t=\frac{96}{Q}$,即 t 与 Q 之间的函数表达式为 $t=\frac{96}{Q}$.

(2)当 $t=5$ 时,$Q=\frac{96}{t}=\frac{96}{5}=19.2$. 所以,要在 5h 内注满水池,注水速度至少应为 19.2 m^3/h.

点拨:本题中的等量关系为:注水速度 × 注水时间 = 注水总量,其中注水总量是个定值.

2. 解:(1)京乌线全程长 $58\times65=3\ 770(\text{km})$,$vt=3\ 770$,变形得 $t=\frac{3\ 770}{v}$,即 t 与 v 之间的函数表达式为 $t=\frac{3\ 770}{v}$.

(2)把 $v=78$ 代入 $t=\frac{3\ 770}{v}$,得 $t=\frac{3\ 770}{78}\approx48.3$. 即提速后全程运行时间约为 48.3 h. (3)把 $t=40$ 代入 $t=\frac{3\ 770}{v}$,得 $v=\frac{3\ 770}{40}=94.25$. 即提速后的平均速度至少应为 94.25 km/h.

点拨:本题中的等量关系为:路程 = 速度 × 时间,其中路程是个定值.

3. 解:由 $F=pS$,得 $S=\frac{F}{p}$. 把 $F=600$,$p=2\times10^4$ 代入,得 $S=\frac{600}{2\times10^4}=0.03$,即他与沼泽地的接触面积不少于 0.03 m^2 时,才不至于陷入沼泽地.

点拨:物理学中 $F=pS$,本题中 F 是个定值.

4. 解:(1)设 $V=\frac{k}{\rho}$,把 $\rho=1.5$,$V=4$ 代入 $V=\frac{k}{\rho}$,得 $4=\frac{k}{1.5}$,解得 $k=6$. 所以 V 与 ρ 之间的函数表达式为 $V=\frac{6}{\rho}$.

(2)当 $\rho=2.5$ 时,$V=\frac{6}{2.5}=2.4$.

复习题

1. 解:(1)$y=100-x$. (2)$y=8x$. (3)$y=\frac{20}{x}$. (4)$y=\frac{48}{x}$. 其中(3)、(4)是反比例函数.

2. 解:设 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$,把 $y=400$,$x=0.25$ 代入,得 $400=\frac{k}{0.25}$,$k=100$. 所以所求函数表达式为 $y=\frac{100}{x}$.

点拨:本题利用待定系数法求函数表达式.

3. 解:(1)设 V 与 p 的函数表达式为 $V=\frac{k}{p}$,把 $p=50$,$V=200$ 代入,得 $200=\frac{k}{50}$. 解得 $k=10\ 000$. 所以所求函数表达式为 $V=\frac{10\ 000}{p}$.

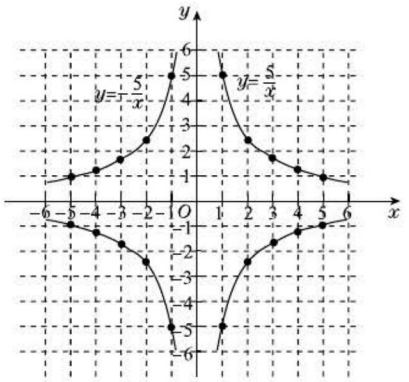
(2)当 $V=100$ 时,$p=\frac{10\ 000}{100}=100$.

4. 解:列表:

x	…	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	…
$y=\frac{5}{x}$	…	-1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	-5	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1	…
$y=-\frac{5}{x}$	…	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	5	-5	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	-1	…

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

描点、连线，如图所示.



(第4题图)

5. 解：(1)因为函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(-2,1)$，把 $x=-2, y=1$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $1=\frac{k}{-2}$，解得 $k=-2$. 所以 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)当 $x=3$ 时，$y=-\frac{2}{3}$.

点拨：用待定系数法求反比例函数的表达式时，只有一个待定系数，因此只需要知道一组 x, y 的对应值或图像上一点的坐标即可.

6. 解：由图像可知 $k_2>0, k_1<0$，所以 $k_1<k_2$.

7. 解：A. 因为在 $p=\frac{F}{S}$ 中，S 一定，所以 p 与 F 成正比例，又因为 $S>0, F\geqslant 0$，所以其图像是一条上升的射线.

8. 解：(1)由图像可知 y 与 x 成反比例，若设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，由函数图像经过点 $(1.5,400)$，得 $400=\frac{k}{1.5}$，$k=400\times 1.5=600$，即这批货物的质量为 600 t. (2) $y=\frac{600}{x}(x>0)$. (3)把 $x=5$ 代入 $y=\frac{600}{x}$，得 $y=120$. 所以，如果以 5 t/min 的速度卸货，那么需要 120 min 才能卸完货物.

点拨：反比例函数是用来解决实际问题的重要数学模型之一，解题的关键是确定其中的定值.

9. 解：D. 因为在 $y=3x$ 中，$k_1=3>0$，函数图像是一条直线，经过第一、三象限；在 $y=-\frac{1}{x}$ 中，$k_2=-1<0$，函数图像是双曲线，在第二、四象限. 故选 D.

10. 解：(1)设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，把 $x=4, y=3$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $3=\frac{k}{4}$，所以 $k=12$. 所以所求函数表达式为 $y=\frac{12}{x}$.

(2)画函数图像略. 根据图像知，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，y 的取值范围是 $4\leqslant y\leqslant 6$.

11. 解：发现过反比例函数的图像上任意一点向两条坐标轴作垂线，它们与坐标轴所围成的矩形面积是一个定值，为 $|k|$. 理由：设反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像上有任意一点 $P(x_0,y_0)$，过点 P 向 x 轴作垂线，垂足为 $A(x_0,0)$；过点 P 向 y 轴作垂线，垂足为 $B(0,y_0)$. 所以 $S_{矩形APBO}=OA\cdot OB=|x_0|\cdot|y_0|=|x_0y_0|=|k|$，所以该矩形的面积是一个定值为 $|k|$.

12. 解：因为 $k=-2<0$，所以反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图像在第二、四象限，且在每个象限内，y 随 x 的增大而增大. 因为 $x_1<x_2$，所以，当 P、Q 在同一象限内时，$y_1<y_2$；当 P、Q 不在同一象限内时，$y_1>y_2$.

13. 解：函数 $y=\frac{2}{x+1}$ 的图像可由 $y=\frac{2}{x}$ 的图像向左平移 1 个长度单位得到.

点拨：$y=\frac{k}{x+a}(a>0, k\neq 0)$ 的图像可由 $y=\frac{k}{x}$ 的图像向左平移 a 个长度单位得到；$y=\frac{k}{x-a}(a>0, k\neq 0)$ 的图像可由 $y=\frac{k}{x}$ 的图像向右平移 a 个长度单位得到.

第12章 二次根式

12.1 二次根式

练习

1. 解：(1)由 $x+5\geqslant 0$，得 $x\geqslant -5$，所以当 $x\geqslant -5$ 时，式子 $\sqrt{x+5}$ 有意义；(2)由 $3x-4\geqslant 0$，得 $x\geqslant \frac{4}{3}$，所以当 $x\geqslant \frac{4}{3}$ 时，式子 $\sqrt{3x-4}$ 有意义；(3)由 $5x+1\geqslant 0$，得 $x\geqslant -\frac{1}{5}$，所以当 $x\geqslant -\frac{1}{5}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

时，式子 $\sqrt{5x+1}$ 有意义；(4) 由 $1-10x\geqslant 0$，得 $x\leqslant\frac{1}{10}$，所以当 $x\leqslant\frac{1}{10}$ 时，式子 $\sqrt{1-10x}$ 有意义；(5) 因为无论 x 为何实数时，$x^2\geqslant 0$，所以无论 x 为何实数，式子 $\sqrt{x^2}$ 都有意义；(6) 由 $-x^2\geqslant 0$，得 $x^2\leqslant 0$，$x=0$，所以当 $x=0$ 时，式子 $\sqrt{-x^2}$ 有意义. **点拨**：此题主要考查二次根式的定义. 二次根式有无意义，主要取决于被开方数. 当被开方数大于或等于 0 时，二次根式有意义，当被开方数小于 0 时，二次根式无意义.

2. 解：(1) $(\sqrt{13})^2=13$；(2) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2=\frac{3}{7}$；

(3) $(\sqrt{8})^2+(\sqrt{2})^2=8+2=10$；

(4) $(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$.

点拨：本题主要考查 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$. 在运算时，一定要注意 $a\geqslant 0$ 这一条件.

练习

1. 解：(1) 成立. (2) 不成立. (3) 成立.

(4) 不成立.

点拨：此题主要考查 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}$ 的应用.

2. 解：(1) $\sqrt{6^2}=6$；(2) $\sqrt{(-5)^2}=5$；(3) 因为 $a\geqslant -1$，所以 $a+1\geqslant 0$，所以 $\sqrt{(a+1)^2}=a+1$；

(4) 因为 $x\leqslant 2$，所以 $x-2\leqslant 0$，所以 $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$. **点拨**：化简形如 $\sqrt{a^2}$ 的式子时，一定要注意 a 的符号，当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$，当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$.

习题 12.1

1. 解：(1) 由 $x-5\geqslant 0$，得 $x\geqslant 5$，所以当 $x\geqslant 5$ 时，式子 $\sqrt{x-5}$ 有意义；

(2) 由 $2x+5\geqslant 0$，得 $x\geqslant -\frac{5}{2}$，所以当 $x\geqslant -\frac{5}{2}$ 时，式子 $\sqrt{2x+5}$ 有意义；(3) 由 $1-3x\geqslant 0$，得 $x\leqslant\frac{1}{3}$，所以当 $x\leqslant\frac{1}{3}$ 时，式子 $\sqrt{1-3x}$ 有意义；

(4) 因为 $x^2+2>0$，所以无论 x 为何实数，式子 $\sqrt{x^2+2}$ 都有意义.

2. 解：(1) $\left(\sqrt{\frac{3}{19}}\right)^2=\frac{3}{19}$；(2) $(2\times\sqrt{3})^2=2^2\times(\sqrt{3})^2=4\times 3=12$；(3) $(-2\times\sqrt{5})^2=(-2)^2\times(\sqrt{5})^2=4\times 5=20$；(4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{(\sqrt{2})^2}{3^2}=\frac{2}{9}$.

点拨：二次根式中乘方运算与有理数中乘方运算一样，各个因数分别乘方，即 $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ (n 是正整数).

3. 解：(1) $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$；(2) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$；(3) $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$；

(4) $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}$，因为 $x\geqslant 2$，所以 $x-2\geqslant 0$，所以原式 $=x-2$.

点拨：化简二次根式时，最好把被开方数化成完全平方的形式，利用 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}$ 进行化简.

4. 解：(1) $a\geqslant 0$；(2) $a\leqslant 0$. **点拨**：(1) 式子 $\sqrt{a^2}$ 中的 a 可为任意数，而 $\sqrt{a}$ 中的 a 必须为非负数.

(2) 式子 $\sqrt{a^2}$ 的结果必是非负数，即 $-a\geqslant 0$，所以 $a\leqslant 0$.

5. 解：错在 $\frac{5}{2}-2=2-\frac{5}{2}$ 这一步，因为 $\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=\left|\frac{5}{2}-2\right|=\frac{5}{2}-2$，$\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\left|2-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}-2$.

点拨：在运用 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}$ 时，注意判断 a 的符号，这样才不至于做错.

12.2 二次根式的乘除

练习

1. 解：(1) $\sqrt{20}\times\sqrt{5}=\sqrt{20\times 5}=\sqrt{100}=10$；

(2) $\sqrt{8}\times\sqrt{18}=\sqrt{8\times 18}=\sqrt{144}=12$；

(3) $\sqrt{48}\times\sqrt{12}=\sqrt{48\times 12}=\sqrt{576}=24$；

(4) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{6a^3}\cdot\sqrt{\frac{3a}{2}}=\sqrt{6a^3\cdot\frac{3a}{2}}=\sqrt{9a^4}=3a^2$.

点拨：本题主要灵活运用 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ($a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$) 这一运算法则进行计算.

2. 解：(1) $\sqrt{16\times 25}=4\times 5=20$；(2) $\sqrt{150}=\sqrt{6\times 25}=5\sqrt{6}$；(3) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{45a}=\sqrt{5a\times 9}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$3\sqrt{5a}$;(4)当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时, $\sqrt{9a^2b^3}=\sqrt{9a^2b^2\cdot b}=3ab\sqrt{b}$;

(5) $\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{(26+10)\times(26-10)}=\sqrt{36\times 16}=6\times 4=24$.

练习

1. 解: 当 $x\geqslant 0$ 时,(1) $\sqrt{x^4+x^2}=\sqrt{x^2(x^2+1)}=x\sqrt{x^2+1}$;(2)当 $x\geqslant 0, x+y\geqslant 0$ 时, $\sqrt{x^3+2x^2y+xy^2}=\sqrt{x(x^2+2xy+y^2)}=\sqrt{x(x+y)^2}$. 因为 $x\geqslant 0, x+y\geqslant 0$,所以原式 $=(x+y)\sqrt{x}$.

2. 解: (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{18}=\sqrt{3\times 18}=\sqrt{3^2\times 6}=3\sqrt{6}$;

(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{12}=\sqrt{\frac{2}{3}\times 12}=\sqrt{8}=\sqrt{2\times 4}=2\sqrt{2}$;(3) $6\sqrt{2}\times 5\sqrt{6}=6\times 5\times\sqrt{2\times 6}=60\sqrt{3}$;

(4) $\sqrt{a^5}\cdot\sqrt{ab}=\sqrt{a^5\cdot ab}=\sqrt{a^6b}$. 因为 $a\geqslant 0$,所以 $a^3\geqslant 0$,又 $b\geqslant 0$,所以原式 $=a^3\sqrt{b}$.

3. 解: $\sqrt{20^2+40^2}=\sqrt{400+1\,600}=\sqrt{2\,000}=\sqrt{400\times 5}=20\sqrt{5}$(cm).

答: 这个矩形的对角线的长是 $20\sqrt{5}$ cm.

4. 解: (1) 当 $a=2\sqrt{3}, b=3\sqrt{2}$ 时, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{12+18}=\sqrt{30}$.

(2)当 $a=3\sqrt{20}, b=-\sqrt{18}$ 时, $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(3\sqrt{20})^2-(-\sqrt{18})^2}=\sqrt{180-18}=\sqrt{162}=\sqrt{81\times 2}=9\sqrt{2}$.

点拨: 此题主要考查计算能力和化简能力,注意符号变化.

练习

1. 解: (1) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{60}{15}}=\sqrt{4}=2$;(2) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$;(3) $\sqrt{18}\div\sqrt{6}=\sqrt{\frac{18}{6}}=\sqrt{3}$;

(4) $\sqrt{8}\div\sqrt{1\frac{1}{3}}=\sqrt{8}\div\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{8\div\frac{4}{3}}=\sqrt{8\times\frac{3}{4}}=\sqrt{6}$.

点拨: 此题主要运用 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0, b>0)$ 这一法则灵活化简,这里需注意带分数要化为假分数,以便于约分.

2. 解: (1) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$;

(2) $\sqrt{3\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$;

(3) $\sqrt{\frac{3}{49}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{3}}{7}$;

(4)当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, c>0$ 时, $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{16c^2}}=\frac{\sqrt{9a^2b^2}}{\sqrt{16c^2}}=\frac{3ab}{4c}$.

点拨: 本题主要考查 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0, b>0)$ 的运用.

练习

1. 解: (1) $\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times 5}{5\times 5}}=\sqrt{\frac{10}{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$;

(2) $\sqrt{3\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{16}{5}}=\sqrt{\frac{16\times 5}{5\times 5}}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$;

(3) 当 $a>0, b\geqslant 0$ 时, $\sqrt{\frac{3b}{5a}}=\sqrt{\frac{3b\cdot 5a}{5a\cdot 5a}}=\frac{\sqrt{15ab}}{5a}$.

2. 解: (1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$;(2) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{8}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$;(3) 当 $a>0, b\geqslant 0$ 时, $\frac{\sqrt{5b}}{\sqrt{12a^3}}=\frac{\sqrt{5b}\cdot\sqrt{3a}}{\sqrt{12a^3}\cdot\sqrt{3a}}=\frac{\sqrt{15ab}}{\sqrt{36a^4}}=\frac{\sqrt{15ab}}{6a^2}$.

习题 12.2

1. 解: (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{3\times 27}=\sqrt{81}=9$;

(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{45}=\sqrt{\frac{1}{5}\times 45}=\sqrt{9}=3$;

(3) 当 $a\geqslant 0$ 时, $\sqrt{18a}\cdot\sqrt{2a}=\sqrt{18a\cdot 2a}=\sqrt{36a^2}=6a$;(4) $2\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=2\sqrt{3\times\frac{1}{3}}=2$.

点拨: 此题是 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$ 的灵活运用.

2. 解: (1) $\sqrt{125}=\sqrt{25\times 5}=5\sqrt{5}$;(2) $\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$;(3) 当 $x\geqslant 0$ 时, $\sqrt{25x^3}=\sqrt{25\cdot x^2\cdot x}=5x\sqrt{x}$;(4) 当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{16a^2b^5}=4ab^2\sqrt{b}$.

3. 解: (1) $\sqrt{15}\times\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{15\times\frac{5}{3}}=\sqrt{25}=5$;

(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{35}=\sqrt{14\times35}=\sqrt{2\times7\times5\times7}=\sqrt{7^2\times2\times5}=7\sqrt{10}$; (3) 当 $a\geqslant0$ 时, $2\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10a}=2\sqrt{5a\cdot10a}=2\sqrt{50a^2}=2\sqrt{25a^2\times2}=10\sqrt{2}a$;

(4) 当 $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ 时, $3a\sqrt{12ab}\cdot\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6b}\right)=3a\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{12ab\cdot6b}=-2a\sqrt{36\times2ab^2}=-12ab\sqrt{2a}$.

点拨: 在进行二次根式的乘法运算时,一定要注意根号外的因式与根号外的因式相乘,被开方数与被开方数相乘,根指数不变.

4. 解: $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{10}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2\times10}=\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times5}=\sqrt{5}(\text{cm}^2)$,所以这个直角三角形的面积为 $\sqrt{5}\,\text{cm}^2$.

点拨: 本题综合考查了直角三角形的面积公式和二次根式的乘法运算.

5. 解: (1) $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{112}{14}}=\sqrt{8}=\sqrt{2\times4}=2\sqrt{2}$;

(2) $\frac{\sqrt{95}}{\sqrt{19}}=\sqrt{\frac{95}{19}}=\sqrt{5}$; (3) $\sqrt{75}\div\sqrt{15}=\sqrt{\frac{75}{15}}=\sqrt{5}$; (4) $\sqrt{4\frac{1}{2}}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{2}}\div\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{9}{2}\div\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{9}{2}\times\frac{4}{9}}=\sqrt{2}$.

6. 解: 由题意得: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{36}}{3}=2(\text{cm})$.

答: 这个矩形的长为 2 cm. **点拨:** 在进行二次根式的除法运算时,注意结果中被开方数应不含能开得尽方的因数或因式.

7. 解: (1) $\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}=\frac{5}{9}$; (2) $\sqrt{3\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}=\frac{7}{4}$; (3) $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) 当 $a\geqslant0$, $b\geqslant0$, $c>0$ 时, $\sqrt{\frac{ab^5}{c^2}}=\frac{\sqrt{ab^5}}{\sqrt{c^2}}=\frac{b^2\sqrt{ab}}{c}$. **点拨:** 本题主要运用 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0, b>0)$ 解题.

8. 解: (1) $\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$; (2) $\sqrt{8\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{49}{6}}=\sqrt{\frac{49\times6}{6\times6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$; (3) 当 $x>0$ 时, $\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1\cdot x}{x\cdot x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$; (4) 当 $a>0$, $b\geqslant0$ 时, $\sqrt{\frac{3b}{2a}}=\sqrt{\frac{3b\cdot2a}{2a\cdot2a}}=\frac{\sqrt{6ab}}{2a}$.

点拨: 在分母不能直接开方的情况下,一般不用 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0, b>0)$,而是采用分数的基本性质将被开方数中的分母化为能开得尽方的因数或因式.

9. 解: (1) $\frac{1}{\sqrt{29}}=\frac{1\times\sqrt{29}}{\sqrt{29}\times\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{29}}{29}$; (2) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{72}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{36\times2}}=\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{6\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{12}$;

(3) 当 $a>0$, $b>0$ 时, $\frac{1}{\sqrt{3ab^3}}=\frac{1}{b\sqrt{3ab}}=\frac{1\cdot\sqrt{3ab}}{b\cdot\sqrt{3ab}\cdot\sqrt{3ab}}=\frac{\sqrt{3ab}}{3ab^2}$; (4) 当 $x\geqslant0$, $y>0$ 时, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{50y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{25\times2y}}=\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{2y}}{5\times\sqrt{2y}\times\sqrt{2y}}=\frac{\sqrt{2xy}}{10y}$.

10. 解: 当 $a=4$, $b=5$, $c=6$ 时, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}\times(4+5+6)=\frac{15}{2}$.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{15}{2}\times\left(\frac{15}{2}-4\right)\times\left(\frac{15}{2}-5\right)\times\left(\frac{15}{2}-6\right)}=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{15^2\times7}{4\times4}}=\frac{15}{4}\sqrt{7}.$$

点拨: 此题主要考查代数式求值问题和二次根式的化简问题.

12.3 二次根式的加减

练习

1. 解: (1) $3\sqrt{6}-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}=\left(3\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)+(2\sqrt{5}-\sqrt{5})+\sqrt{2}=\frac{5}{2}\sqrt{6}+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{5}+\sqrt{2}$;(2) $\sqrt{27}-\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{75}=3\sqrt{3}-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5\sqrt{3}=(3\sqrt{3}+5\sqrt{3})+(-3\sqrt{5}-2\sqrt{5})=8\sqrt{3}-5\sqrt{5}$;(3)当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时, $4\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-\frac{3}{2}\sqrt{ab}-\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-\frac{3}{2}\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}=\left(4+5-\frac{3}{2}-2\right)\sqrt{ab}=\frac{11}{2}\sqrt{ab}$;

(4) $\left(2\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{2}{3}\sqrt{18}\right)-\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}+(-2+2)\sqrt{2}=-\frac{4}{9}\sqrt{3}+0=-\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

点拨:在进行二次根式加减运算时,先化简二次根式,再合并同类二次根式,若有括号应先去括号.

2. 解:(1)由题意得: $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$(cm),所以这两个正方形边长的和为 $3\sqrt{2}$cm. (2)当 $s>0$ 时,由题意得: $\sqrt{s}+\sqrt{4s}=\sqrt{s}+2\sqrt{s}=3\sqrt{s}$(cm),所以这两个正方形边长的和为 $3\sqrt{s}$cm. **点拨**:此题主要考查二次根式的加法运算,注意合并同类二次根式,使结果化为最简形式.

练习

1. 解:(1) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\times\sqrt{6}=\sqrt{3}\times\sqrt{6}+2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{18}+2\sqrt{12}=3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$;(2) $\sqrt{5}\times(\sqrt{10}-\sqrt{5})=\sqrt{5}\times\sqrt{10}-\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\sqrt{50}-\sqrt{25}=5\sqrt{2}-5$;(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1)\times 2\sqrt{3}=\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}+1\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{18}-2\sqrt{9}+2\sqrt{3}=6\sqrt{2}+2\sqrt{3}-6$;(4) $(5-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{2}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=(5\sqrt{3}-2\sqrt{3})+(5\sqrt{2}-3\sqrt{2})=3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

点拨:此题主要考查乘法分配律在实数范围内的应用,注意不要漏乘.

2. 解:(1) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=(\sqrt{5})^2-1^2=5-1=4$;(2)当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$;(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$;(4)当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 时, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$.

点拨:此题主要考查平方差公式、完全平方公式在实数中的应用,根据公式结构特征,套相应的公式,不要弄错公式. 平方差公式为: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,完全平方公式为: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

习题 12.3

1. 解:(1) $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5\sqrt{5}+7\sqrt{3}=(2\sqrt{3}+7\sqrt{3})+(-3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5\sqrt{5})=9\sqrt{3}+\sqrt{5}$;(2) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{20}+\sqrt{50}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+5\sqrt{2}=-\sqrt{3}-2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$;

(3)当 $x\geqslant 0$ 时, $\sqrt{4x}+2\sqrt{2x}-\frac{1}{2}\sqrt{8x}-4\sqrt{x}=2\sqrt{x}+2\sqrt{2x}-\sqrt{2x}-4\sqrt{x}=(2\sqrt{x}-4\sqrt{x})+(2\sqrt{2x}-\sqrt{2x})=-2\sqrt{x}+\sqrt{2x}$;(4) $\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}=-\frac{5}{4}\sqrt{2}$.

2. 解:(1) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{18}-\frac{1}{2}\sqrt{12}\right)-\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{18}-\frac{1}{2}\sqrt{12}-3\sqrt{\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$;

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

点拨:本题考查二次根式的加减混合运算,在运算过程中注意符号的变化.

3. 解:(1) $(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\times\sqrt{12}=(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\times 2\sqrt{3}=(2\sqrt{3})^2-\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}=12-6\sqrt{2}$;

(2) $5\sqrt{3}\times(\sqrt{15}+\sqrt{6})=5\sqrt{3\times 15}+5\sqrt{3\times 6}=15\sqrt{5}+15\sqrt{2}$;(3) $(\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{2})\times 2\sqrt{6}=2\sqrt{18\times 6}-2\sqrt{12\times 6}+2\sqrt{2\times 6}=12\sqrt{3}-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$12\sqrt{2}+4\sqrt{3}=16\sqrt{3}-12\sqrt{2}$.

4. **解**:(1)$(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}-5\sqrt{2}\times\sqrt{3}+5\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6-4\sqrt{6}-5\sqrt{6}+20=26-9\sqrt{6}$;(2)$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\frac{1}{6}\sqrt{6}+1-1-\sqrt{6}=-\frac{5}{6}\sqrt{6}$;(3)$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}=\frac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}{4}+\frac{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{12}{4}=3$;(4)$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{4}\cdot[(\sqrt{5})^2-1]=\frac{1}{4}\times(5-1)=1$. **点拨**:本题考查二次根式的计算,注意灵活运用乘法公式.

5. **解**:(1)$\sqrt{2}$;(2)$2-\sqrt{3}$. **点拨**:答案不唯一,符合题意即可.

复习题

1. **解**:(1)由$6+2x\geqslant0$,得$x\geqslant-3$,所以当$x\geqslant-3$时,式子$\sqrt{6+2x}$有意义;(2)由$2-x\geqslant0$,得$x\leqslant2$,所以当$x\leqslant2$时,式子$\sqrt{2-x}$有意义;(3)因为$(x-1)^2\geqslant0$,所以无论x为何实数,式子$\sqrt{(x-1)^2}$总有意义;(4)由$x+1\geqslant0$,$x\neq0$,得$x\geqslant-1$且$x\neq0$,所以当$x\geqslant-1$且$x\neq0$时,式子$\frac{\sqrt{x+1}}{x}$有意义.

2. **解**:(1)当$a\geqslant0$时,等式$\sqrt{a^2}=a$成立;(2)当$a\geqslant0$,$b\geqslant0$时,等式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$成立;(3)由$x\geqslant0$,$x+1\geqslant0$,得$x\geqslant0$,$x\geqslant-1$,所以当$x\geqslant0$时,等式$\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$成立;(4)当$3-x\geqslant0$,即$x\leqslant3$时,等式$\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$成立.

点拨:此题考查二次根式的性质:$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$,$\sqrt{a^2}=-a(a\leqslant0)$和$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

3. **解**:(1)$\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$;(2)$\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{(25+24)\times(25-24)}=\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$;(3)$\sqrt{6\times12\times18}=\sqrt{6\times6\times2\times9\times2}=\sqrt{6^2\times2^2\times3^2}=6\times2\times3=36$;(4)当$x\geqslant0$,$y\geqslant0$时,$\sqrt{75x^3y^2}=\sqrt{25\times3\cdot x^2\cdot x\cdot y^2}=5xy\sqrt{3x}$.

4. **解**:(1)$2\sqrt{3}+3\sqrt{12}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=4\sqrt{3}$;(2)$\sqrt{8}+3\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}$;(3)$\sqrt{50}-\frac{1}{\sqrt{5}}+2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}-\frac{1}{5}\sqrt{5}+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\left(5\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}\right)=\frac{11}{2}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{5}$;(4)$\sqrt{108}+\sqrt{\frac{3}{25}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{32}=6\sqrt{3}+\frac{1}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\frac{31}{5}\sqrt{3}-\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

点拨:二次根式相加减,先将各个二次根式化简,然后合并同类二次根式.

5. **解**:(1)$\left(2\sqrt{12}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\times\sqrt{6}=2\sqrt{12}\times\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6^2\times2}-3\sqrt{\frac{1}{3}\times6}=12\sqrt{2}-3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$;(2)$\left(\frac{\sqrt{8}}{2}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(5\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)=\sqrt{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{1}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{10}\times\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{5}\sqrt{10}\times\frac{1}{5}\sqrt{5}=5-\frac{1}{5}\sqrt{10}-\sqrt{5}+\frac{1}{5}\sqrt{2}$;

$(3)(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})=(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2=20-18=2$;$(4)(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5})=[\sqrt{3}+(\sqrt{2}+\sqrt{5})][\sqrt{3}-(\sqrt{2}+\sqrt{5})]=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=3-(2+2\sqrt{10}+5)=3-7-2\sqrt{10}=-4-2\sqrt{10}$. **点拨**:本题主要考查乘法运算律和乘法公式在二次根式中的应用. 做题时,要根据题目特点,灵活计算.

6. **解**:由题意知:$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{34-10}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}(\text{cm})$. **点拨**:此题综合考查勾股定理及二次根式的运算.

7. **解法一**:当$x=\sqrt{3}+1$时,

$x^2-2x+1=(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)+1=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times1+1-2\sqrt{3}-2+1=3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}-2+1=3$.

解法二:当$x=\sqrt{3}+1$时,

$x^2-2x+1=(x-1)^2=(\sqrt{3}+1-1)^2=(\sqrt{3})^2=3$.

点拨:本题既可采用直接代入法,也可采用先化简所求代数式,再代入求值的方法来求解.

8. **解**:由题意得:$\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{2.5}{5}}+\sqrt{\frac{3.2}{5}}+\sqrt{\frac{3.6}{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{4}{5}+\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{10}+\frac{11}{10}\sqrt{2}+\frac{4}{5}(\text{s})$.

答:它们落到地面所用时间的总和为$\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}+\frac{11}{10}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\right)$s.

9. **解**:因为$\sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$,所以$a-3=0$,$2-b=0$,即$a=3$,$b=2$. 所以$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$. **点拨**:此题考查非负数之和等于0的问题. 非负数一般有三种形式:(1)算术平方根;(2)偶次方;(3)绝对值.

10. **解**:因为m是$\sqrt{2}$的小数部分,所以$m=\sqrt{2}-1$.

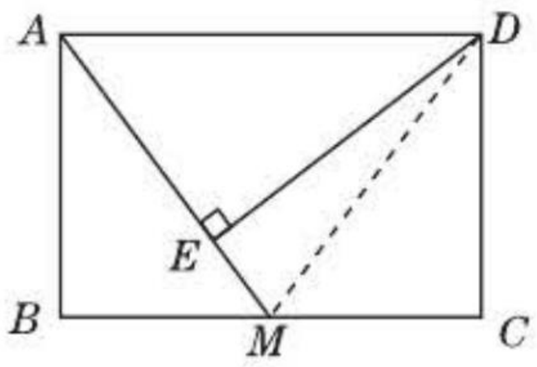
$\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}=\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}$. 当$m=\sqrt{2}-1$时,原式$=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2}=\sqrt{[\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)]^2}=\sqrt{(-2)^2}=2$.

点拨:无理数的整数部分可采用估算法求出,小数部分是这个无理数减去整数部分而得到的.

11. **解**:如图. 连接DM. 因为四边形$ABCD$是矩形,所以$AD=BC=b$. 又因为点M是BC的中点,所以$BM=MC=\frac{b}{2}$. 在Rt$\triangle ABM$中,$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$.

又因为$DE\perp AM$,所以$\frac{1}{2}AM\cdot DE=\frac{1}{2}AD\cdot AB$,所以$AM\cdot DE=AD\cdot AB$. 所以$\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}\cdot DE=b\cdot a$,所以$DE=\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}=\frac{2ab}{4a^2+b^2}\sqrt{4a^2+b^2}$.

点拨:借助面积相等求线段长是几何中求线段长的常用方法之一.



(第11题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料