教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法48招·七八九年级共276招



九年级
数学（上）
荣德基 主编
（JJ版）
赠教材习题答案

陕西新华出版传媒集团　陕西人民教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

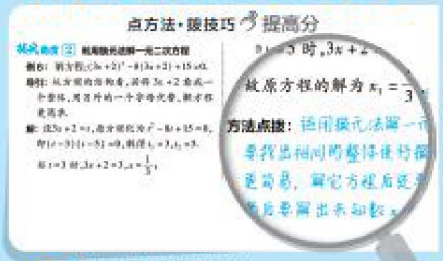
简约的知识梳理总结　　精准的重难疑点点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分



专题得满分

点专题 拨素养 得满分

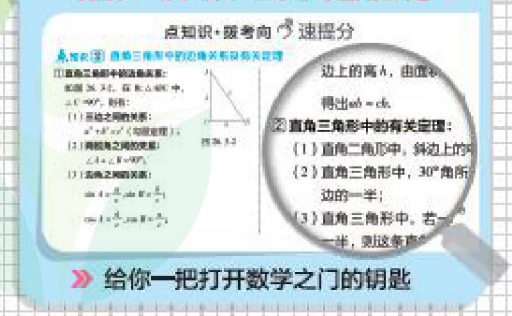


第1步　第2步　第3步

三个维度打造极致

基础速提分

点知识 拨考向 速提分





出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

数学（JJ版） 九年级（上）

主　　编：荣德基
本册主编：宋　剑
路兴平
安存斌



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第二十三章 数据分析

知识点 69 个 必得分

	页码
1 平均数	2
2 加权平均数	4
3 中位数	11
4 众数	13
5 平均数、中位数和众数的选用	14
6 方差	21
7 极差和标准差	24
8 用样本平均数估计总体平均数	30
9 用样本方差估计总体方差	31

考向点 91 个 必抢分

	页码
1 利用定义法求平均数	2
2 利用已知平均数求数据内未知的数据	4
3 利用权数为个数计算加权平均数	5
4 利用权数为百分数计算加权平均数	5
5 利用中位数的定义求中位数	11
6 利用统计图求中位数	12
7 利用中位数和众数求值	13
8 利用方差公式计算方差	22
9 利用平均数、方差作决策	23
10 利用标准差的公式进行计算	24
11 利用样本估计总体解决实际问题	30

第二十四章 一元二次方程

	页码
1 一元二次方程的定义	46
2 建立一元二次方程的模型	47
3 一元二次方程的解（根）	49
4 用直接开平方法解一元二次方程	52
5 用配方法解一元二次方程	53
6 根的判别式	56
7 用公式法解一元二次方程	57
8 用因式分解法解一元二次方程	61
9 一元二次方程的解法的选用	62
10 根与系数的关系	65
11 列一元二次方程解应用题的一般步骤	69
12 建立一元二次方程模型的常见类型	70

	页码
1 利用一元二次方程的定义识别一元二次方程	46
2 利用一元二次方程的一般形式确定各项及其系数	47
3 利用一元二次方程模型解决实际中的代数应用	47
4 利用一元二次方程模型解决实际中的几何应用	48
5 利用方程的解求方程中待定字母的值	49
6 利用直接开平方的意义求值	52
7 利用配方法进行配方	53
8 利用配方法解一元二次方程	54
9 利用根的判别式的概念求根的判别式	56
10 利用根的判别式不解方程判断根的情况	57
11 利用公式法解一元二次方程	58
12 利用公式法将二次三项式因式分解	58
13 利用因式分解的提公因式法解一元二次方程	61
14 利用因式分解的公式法解一元二次方程	61
15 已知方程的各项系数求两根的和与积	65

第二十五章 图形的相似

	页码
1 线段的比和比例线段	82
2 比例的性质及应用	83
3 黄金分割	84
4 平行线分线段成比例的基本事实	89
5 平行线分线段成比例基本事实的推论	90
6 相似三角形的定义	95
7 平行线截三角形相似的定理	97
8 由两角相等判定三角形相似	102
9 由两边对应成比例且夹角相等判定三角形相似	103
10 由三边对应成比例判定三角形相似	106
11 直角三角形相似的判定	107
12 相似三角形对应线段的比等于相似比	112
13 相似三角形周长和面积的比与相似比的关系	113
14 测量物体的高度	118
15 利用相似测量宽度	121
16 相似图形	126
17 相似多边形的定义与性质	127
18 位似图形	129

	页码
1 利用比例的计算求线段的比	82
2 利用成比例线段的定义求未知比例项	83
3 比例的基本性质的应用	84
4 合比性质的应用	84
5 利用黄金分割求有关线段的长	85
6 利用相似三角形的定义判定两个三角形相似	95
7 利用相似三角形的定义确定相似比	96
8 利用平行线识别相似三角形	97
9 利用证相似三角形求线段的长	98
10 利用两角对应相等判定两三角形相似	102
11 利用三角形相似证明等积式	103
12 利用角的两边的对应关系求线段长	104
13 根据相似三角形对应高的比等于相似比解题	112
14 根据相似三角形对应中线的比等于相似比解题	112
15 根据相似三角形的周长的关系解题	113
16 根据两个相似三角形面积的关系解题	114
17 利用三角尺测量物体的高度	120
18 利用相似测量河道宽度	121
19 利用相似图形的定义识别相似图形	126
20 利用相似多边形的性质计算	128
21 利用位似图形的定义判定位似图形	130
22 利用位似图形的性质求位似比	131
23 利用位似图形的性质求点的坐标	133

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点 67 个 得高分

	页码
1 定义法	2
2 新数据法	8
3 方程思想	8
4 求一组数据的中位数的方法	11
5 求一组数据的众数的方法	13
6 选择能代表一组数据特点的数据的方法	16
7 统计思想	32
8 对比法	33
9 数形结合思想	33
1 判定一个方程是一元二次方程的方法	46
2 建模思想	50
3 直接开平方法	52
4 配方法	53
5 判断方程根的情况的方法	57
6 公式法	58
7 因式分解法	61
8 分类讨论思想	63
9 换元法	63
10 已知一元二次方程的一个根求另一个根的方法	66
11 整体代入法	78
12 转化思想	78
1 判断四条线段是否是成比例线段的方法	82
2 利用线段的比例关系求线段的长的方法	83
3 分类讨论思想	85
4 方程思想	85
5 利用平行线分线段成比例的基本事实求线段长的方法	90
6 演绎推理法	92
7 判定相似三角形中比例式成立的方法	96
8 利用相似三角形的定义求一个角的方法	97
9 利用平行线寻找相似三角形的方法	97
10 求线段的长的方法	98
11 建模思想	100
12 判定两直角三角形相似的方法	107
13 三点定型法	108
14 判断两个图形是否是相似图形的方法	126
15 排除法	130
16 数形结合思想	141

考法点 79 个 争满分

	页码
第二十三章 数据分析	
1 利用新数据法求平均数	8
2 利用方程思想解决平均数问题	8
3 与平均数有关的探究问题	8
4 中位数的讨论	17
5 平均数、中位数、众数与方程组的综合	17
6 方案决策设计	18
7 方差的规律探究	26
8 根据方差进行决策	26
9 学科内综合题	27
10 “捕获——再捕获”问题	32
11 综合运用多种指标估计总体	32
12 综合统计图信息分析样本估计总体	33
第二十四章 一元二次方程	
1 根据一元二次方程的概念求有关代数式的值	50
2 利用一元二次方程根的定义求代数式的值	50
3 巧借一元二次方程根的定义构造一元二次方程	50
4 利用配方法求最值	54
5 巧借配方法判断三角形的形状	54
6 利用一元二次方程根的情况判断三角形的形状	59
7 巧借一元二次方程根的情况解决分式有无意义的问题	59
8 分类思想在方程根的情况中的应用	59
9 通过求一元二次方程的根解决几何问题	63
10 利用换元法解一元二次方程	63
11 巧用逆向思维解题	63
12 利用根与系数的关系构造一元二次方程	67
13 利用根的定义及根与系数的关系求非对称代数式的值	67
14 利用根与系数的关系探究存在性问题	67
15 建立一元二次方程模型解决分段收费问题	71
16 巧借一元二次方程的模型解决几何动态问题	72
17 利用一元二次方程探究图形变化的规律	73
第二十五章 图形的相似	
1 利用比例的性质求比值	86
2 黄金分割的拓展	86
3 平行线分线段成比例基本事实与推论的综合运用	92
4 利用平行线分线段成比例证明比例式	92
5 利用相似三角形探究线段的位置关系	99
6 相似三角形的传递性	99
7 应用相似三角形的知识解决实际问题	99
8 相似三角形的判定的综合考查	108
9 利用“三点定型法”找相似的三角形解决问题	108
10 利用相似三角形的判定进行规律探究	108
11 利用相似三角形的性质解决实际问题	115
12 利用相似三角形的性质进行规律探究	116
13 利用相似三角形的性质解决复合影长问题	122
14 利用相似三角形的性质解决盲区问题	122
15 利用相似三角形的性质解决测量不能到达底部的深度问题	123
16 利用图形变换的特征进行图形变换	133
17 利用位似变换的特征解决实际应用问题	134
18 利用相似多边形的性质解决实际生活问题	134



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 69 个 必得分

		页码
第二十六章 解直角三角形	1 正切	146
	2 正弦、余弦	147
	3 特殊角的三角函数值	149
	4 三角函数之间的关系	151
	5 用计算器解决锐角三角函数的计算问题	155
	6 锐角三角函数的增减性	156
	7 解直角三角形	158
	8 直角三角形中的边角关系及有关定理	158
	9 利用解直角三角形解决实际问题	164
	10 利用特殊角解直角三角形解决实际问题	167
第二十七章 反比例函数	1 反比例函数的定义	182
	2 求反比例函数的表达式	183
	3 反比例函数的图像	188
	4 反比例函数的性质	190
	5 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 中比例系数 k 的几何意义	193
	6 建立反比例函数模型解决实际问题	200
第二十八章 圆	1 圆的定义	217
	2 圆的对称性	218
	3 圆的有关概念	219
	4 圆的确定	223
	5 三角形的外接圆和外心	224
	6 圆心角的定义	227
	7 弧、弦、圆心角之间的关系定理及其推论	228
	8 圆周角和圆周角定理及其推论	228
	9 圆内接四边形及其性质	230
	10 垂径定理	236
	11 垂径定理的推论	238
	12 弧长	243
	13 扇形的面积公式	244
	14 圆锥的侧面积和全面积	246

考向点 91 个 必抢分

	页码
1 利用直角三角形的任意两边长求锐角的正切值	146
2 利用锐角的正切值和一条边求另外两条边	147
3 利用中间量转化求锐角的三角函数值	148
4 利用三角函数的意义求三角形的面积	149
5 利用特殊角的三角函数值进行计算	150
6 利用特殊角的三角函数值求特殊角的度数	150
7 利用同角三角函数之间的关系求三角函数值	151
8 利用计算器求已知度数的锐角三角函数值	155
9 利用锐角三角函数的增减性进行化简	156
10 利用直角三角形的边角关系解直角三角形	159
11 利用“构造直角三角形”的方法解斜三角形	160
12 利用解直角三角形解航行问题	164
13 利用视角解直角三角形解决实际问题	167
1 利用反比例函数的定义辨别反比例函数关系	182
2 利用反比例函数的定义求值	183
3 利用已知的一组对应值求反比例函数表达式	183
4 利用反比例函数关系解决实际问题	184
5 利用列表描点法画反比例函数图像	188
6 利用反比例函数图像与点的坐标的关系求点的坐标	189
7 利用反比例函数的增减性确定待定系数的取值范围	190
8 利用表达式中 k 的几何性质求图形的面积	193
9 利用反比例函数建模解决面积或体积问题	200
10 利用反比例函数建模解决物理问题	201
1 利用圆的定义判断有关圆的命题的真假	217
2 利用圆的定义判定点共圆	218
3 利用轴对称图形的特征判断对称轴的条数	219
4 利用圆的相关概念判断命题的真假	220
5 弧和弦之间的条数关系	220
6 利用圆的确定条件分析确定圆的情况	223
7 利用不共线三点确定一个圆作圆	223
8 利用三角形的外接圆确定圆心的位置	224
9 利用圆心角与弧之间的关系解决问题	227
10 利用圆周角的定义识别圆周角	229
11 利用圆周角定理求圆周角或圆心角的度数	229
12 利用圆内接四边形的性质求角的度数	231
13 利用垂径定理判断相等的量	236
14 利用垂径定理进行计算	236
15 利用垂径定理解决实际问题	237
16 利用垂径定理的推论进行计算与证明	239
17 利用弧长公式直接计算弧长	243
18 利用扇形面积公式进行计算	244
19 利用圆锥的相关公式求圆锥中的线段长	246

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点 67 个 得高分

	页码
1 数形结合思想	148
2 参数法	148
3 定义法	148
4 方程思想	148
5 转化思想	151
6 已知两条直角边解直角三角形的方法	159
7 已知一个锐角和一条直角边解直角三角形的方法	159
8 已知一个锐角和斜边解直角三角形的方法	160
9 化斜为直法	174
10 割补法	176
1 判断一个函数是不是反比例函数的方法	182
2 确定反比例函数表达式的方法	184
3 特殊值法	191
4 求两函数的函数值与自变量的值的对应关系的方法	192
5 转化思想	193
6 作差法	193
7 运用图形面积求表达式的方法	194
8 待定系数法	210
9 数形结合思想	211
10 方程思想	212
11 分类讨论思想	213
1 数形结合思想	218
2 排除法	223
3 分类讨论思想	223
4 转化思想	227
5 定义法	229
6 构造圆内接四边形法	231
7 作差法	245
8 割补法	245
9 化零为整法	245

考法点 79 个 争满分

	页码
第二十六章 解直角三角形	
1 利用锐角三角函数的定义求线段长或三角函数值	152
2 利用解一元二次方程解决锐角三角函数问题	152
3 锐角三角函数与几何图形的综合	153
4 利用数形结合思想探究三角函数值的变化规律	156
5 利用解直角三角形求点的坐标	160
6 利用解直角三角形求线段的长	161
7 解直角三角形与仰角、俯角及坡角、坡度问题的综合	169
8 利用方程思想解决解直角三角形的应用题	170
9 利用解直角三角形进行方案选择	170
第二十七章 反比例函数	
1 利用反比例函数与正比例函数的定义解决综合问题	185
2 利用图表信息确定反比例函数表达式	186
3 利用面积法建立反比例函数关系	186
4 利用反比例函数的性质解与一次函数的综合问题	195
5 利用数形结合思想解反比例函数与几何的综合问题	196
6 利用比例系数 k 的几何意义探究点的坐标的变化规律	196
7 利用表格信息选择函数关系解决实际问题	203
8 利用分段函数解决实际问题	204
9 利用反比例函数的性质作决策	205
第二十八章 圆	
1 利用圆的半径的性质进行计算	220
2 利用圆的半径的性质比较大小	221
3 利用圆的对称性判断圆上整数点的个数	221
4 利用圆的确定条件确定圆的个数	225
5 圆与方案设计问题相结合	225
6 利用圆心角、弧、弦之间的等量关系探究它们之间的倍数关系	232
7 利用圆心角、弧、弦之间的关系进行探究性学习	232
8 利用圆内接四边形的性质进行结论探究	233
9 利用垂径定理及圆的对称性求特殊值	240
10 利用垂径定理巧解图形中点的坐标问题	240
11 利用垂径定理与“四量关系定理”综合解题	240
12 利用弧长和扇形面积公式解决动态问题	247
13 利用圆锥的侧面展开图巧解“最短路径”问题	247
14 利用弧长和扇形面积公式进行方案设计	248

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

看微课

算术平均数和加权平均数… 4
众数、中位数…… 13

学方法

配方法…… 53
公式法…… 57
因式分解法…… 61

看微课

一元二次方程的定义…… 46
根的判别式…… 56
利用一元二次方程建模…… 69

学方法

三点定型法……108

观动画

位似图形……129

看微课

成比例线段…… 82
平行线分线段成比例…… 89
推论的应用…… 90
相似三角形的判定……102
相似多边形的性质……127

第二十三章 数据分析

23.1 平均数与加权平均数…… 2
23.2 中位数和众数…… 11
23.3 方 差…… 21
23.4 用样本估计总体…… 30
中考提分专题篇 ☞ P36
数学素养提升：论“决策” ☞ P41

第二十四章 一元二次方程

24.1 一元二次方程…… 46
24.2 解一元二次方程…… 52
24.2.1 配方法…… 52
24.2.2 公式法…… 56
24.2.3 因式分解法…… 61
24.3 一元二次方程根与系数的关系* …… 65
24.4 一元二次方程的应用…… 69
中考提分专题篇 ☞ P75

第二十五章 图形的相似

25.1 比例线段…… 82
25.2 平行线分线段成比例…… 89
25.3 相似三角形…… 95
25.4 相似三角形的判定……102
25.5 相似三角形的性质……112
25.6 相似三角形的应用……118
25.7 相似多边形和图形的位似……126
中考提分专题篇 ☞ P137
数学素养提升：令欧洲人痴迷的比例☞ P87

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十六章 解直角三角形

26.1 锐角三角函数 ……146
26.2 锐角三角函数的计算 ……155
26.3 解直角三角形 ……158
26.4 解直角三角形的应用 ……164
中考提分专题篇 ☞ P174
数学素养提升：化归思想在解直角三角形中的巧用 ☞ P180

学方法
化斜为直法……160

看微课
锐角三角函数的定义……147
解直角三角形的应用……165
方向角问题……167
仰角俯角问题……168

第二十七章 反比例函数

27.1 反比例函数 ……182
27.2 反比例函数的图像和性质 ……188
27.3 反比例函数的应用 ……200
中考提分专题篇 ☞ P208
数学素养提升：反比例函数中比例系数 k 的妙用 ☞ P197

学方法
特殊值法…… 191

看微课
反比例函数的定义……182
用待定系数法求反比例函数表达式……183
反比例函数图像和性质……190
比例系数 k 的几何意义……193

第二十八章 圆

28.1 圆的概念及性质 ……217
28.2 过三点的圆 ……223
28.3 圆心角和圆周角 ……227
28.4 垂径定理* ……236
28.5 弧长和扇形面积的计算 ……243
中考提分专题篇 ☞ P251
数学素养提升：浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题 ☞ P233
这种现象也能建立圆的模型吗 ☞ P255

看微课
弧、弦、圆心角之间的关系…… 228
垂径定理…… 236

参考答案及点拨（单独成册）



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **定义法：**所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的．因此用定义法解题，是最直接的方法．

2. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

3. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法．

4. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

5. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

6. **建模思想：**建模思想是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段．使用数学语言描述的事物就称为数学模型．

7. **换元法：**所谓换元法，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，使它简化，使问题易于解决．

8. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

9. **演绎推理法：**演绎推理法就是从一般性的前提出发，通过推导即“演绎”，得出具体陈述或个别结论的一种方法．

10. **三点定型法：**三点定型法是证明线段等积式或比例式中找相似三角形的最常用且最有效的方法，它就是设法找出比例式或等积式中（或转化后的式子中）所蕴含的几个字母，是否存在可由“三点”确定的两个相似的三角形．

11. **排除法：**排除法是一种把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉的方法．它是一种解答选择题的技巧方法，通过已知条件来确定结论（答案）的范围，把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉．

12. **割补法：**割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则图形转化为规则图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

13. **待定系数法：**待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求待定系数的值，从而确定函数表达式，这种方法叫做待定系数法．

14. **作差法：**通过求两个数的差来比较两数大小的方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十三章 数据分析

体验数据的奥秘

数学点拨

你将学到的核心考点

- 平均数与加权平均数 □
- 中位数和众数 □
- 方差 □
- 用样本估计总体 □

我们为你提供的核心方法

- 新数据法 □
- 对比法 □
- 定义法 □
- 方程思想 □
- 数形结合思想 □
- 统计思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

微信公众号 教辅资料站

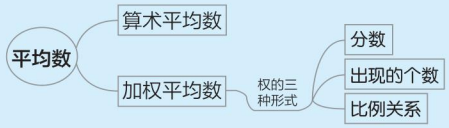
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.1 平均数与加权平均数

核心知识

- 平均数
- 加权平均数
- 权重

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平均数

1 定义： 一般地，我们把 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的和与 n 的比，叫做这 n 个数的算术平均数，简称平均数，记作$\bar{x}$，读作“x 拔”，即$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$.

要点精析///

(1) 一组数据的平均数是唯一的，它不一定是数据中的某个数据；

(2) 平均数是反映数据集中趋势的一个统计量，是反映数据的平均水平（或中等水平）的一个特征量；

(3) 一般情况下，平均数能体现一组数据的整体性质.

2 计算方法：

(1) **定义法：** 求平均数，只要把所有数据加起来求出总和再除以数据的总个数即可，即：如果有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，那么$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；

(2) **新数据法：** 当所给的数据较大，且所给数据大部分都在某一常数 a 附近上、下波动时，可计算各数据与 a 的差：$x_1-a=x'_1$，$x_2-a=x'_2,\cdots,x_n-a=x'_n$，则$\bar{x}=a+\frac{1}{n}(x'_1+x'_2+\cdots+x'_n)$.

3 性质： 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为$\bar{x}$，则：

(1) $nx_1,nx_2,\cdots,nx_n$ 的平均数为 $n\bar{x}$；

(2) $x_1+b,x_2+b,\cdots,x_n+b$ 的平均数为$\bar{x}+b$；

(3) $nx_1+b,nx_2+b,\cdots,nx_n+b$ 的平均数为 $n\bar{x}+b$.

4 易错警示：

(1) 平均数的大小与一组数据里的每个数据都有关系，其中任何一个数据的变动都会引起平均数的变动；

(2) 平均数的缺点是容易受极端数据的影响，有时不能代表数据的平均水平.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用定义法求平均数

例1： ［易错题］某次舞蹈大赛的记分规则为：从七位评委的打分中去掉一个最高分和一个最低分后计算平均分作为最后得分. 下表是该次比赛中七位评委对小菲与小岚的打分（单位：分）：

小菲	80	77	82	83	75	78	89
小岚	79	80	77	76	82	85	81

请通过计算说明谁的最后得分高.

易错警示

当数据信息以图表形式呈现时，要结合条件读懂图表，并从中获取有用的信息，本题要注意去掉一个最高分和一个最低分后，数据的个数也发生了变化，求平均数要牢记是数据总和除以数据总个数.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 此题只需按照题中所给“记分规则”将两人的最后得分计算出来，再进行大小比较即可.

解： 小菲去掉一个最高分89分，去掉一个最低分75分，最后得分为$\frac{80+77+82+83+78}{5}=80$(分).

小岚去掉一个最高分85分，去掉一个最低分76分，最后得分为$\frac{79+80+77+82+81}{5}=79.8$(分).

因为80分>79.8分，所以小菲的最后得分高.

同类变式 (答案见257页)

1. [中考·东营]某学习小组有8人，在一次数学测验中的成绩分别是：102，115，100，105，92，105，85，104，则他们成绩的平均数是_____.

考查角度2 利用平均数的定义进行统计图背景下提供数据的平均数计算

例2： 地球上的淡水资源越来越少，全世界都提倡节约用水，小明把自己家1月份至6月份的用水量绘制成如图23.1-1所示的折线统计图，那么小明家这6个月的月平均用水量是(　　)

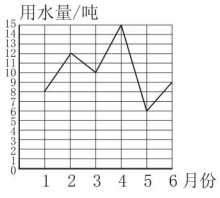


图23.1-1

A. 10吨　　B. 9吨　　C. 8吨　　D. 7吨

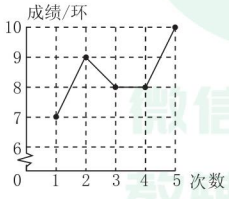
导引： 从图中得到这6个月用水量的相关数据，然后根据平均数的定义计算这6个数据的平均数就可得到月平均用水量.

这6个月的月平均用水量为$(8+12+10+15+6+9)\div6=10$(吨)，故选A.

答案： A

同类变式 (答案见257页)

2. 如图是小敏五次射击成绩的折线统计图，根据图中信息，知这五次成绩的平均数是_____环.



(第2题)

方法点拨

此题主要考查了折线统计图的应用以及平均数的求法，读懂统计图，熟练掌握平均数的计算方法是解题的关键.



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用一组数据的平均数求另一组数据的平均数

例3： 已知一组数据 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的平均数为8，则另一组数据 $a_1+10,a_2-10,a_3+10,a_4-10,a_5+10$ 的平均数为(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

导引： 因为数据 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的平均数为8，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=40$.

所以另一组数据 $a_1+10,a_2-10,a_3+10,a_4-10,a_5+10$ 的平均数为：

$$\frac{1}{5}(a_1+10+a_2-10+a_3+10+a_4-10+a_5+10)$$

$$=\frac{1}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+10)$$

$$=\frac{1}{5}\times(40+10)$$

$$=10.$$

故应选 C.

答案： C

技巧点拨

本题看似无法求解，但通过运用平均数的定义列出相关等式，进而利用整体思想，使问题简捷获解.

考查角度4 利用已知平均数求数据内未知的数据

例4： [中考·沈阳] 一组数据 $2,4,x,-1$ 的平均数为3，则 x 的值是_____.

导引： 根据求平均数的公式，列出算式，即可求出 x 的值.

∵ 数据 $2,4,x,-1$ 的平均数为3，

∴ $(2+4+x-1)\div4=3$，解得：$x=7$.

答案： 7

方法点拨

本题考查了平均数的求法，属于基础题，熟记求平均数的公式是解决本题的关键.

知识2 加权平均数（重点）

1 定义： 已知 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，若 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 为一组正数，则把 $\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ 叫做 n 个数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的加权平均数，$w_1,w_2,\cdots,w_n$ 分别叫做这 n 个数的权重，简称为权.

要点精析

(1) 当一组数据中某些数据重复出现时，一般选用**加权平均数公式**来求平均数.

(2) **在加权平均数公式中：**分子是各数据与其权乘积的和；分母为权的和，不能简单看成数据个数之和.

2 常见的权的形式：

(1) 分数；

(2) 出现的次数（个数）；

(3) 比例关系.

3 算术平均数与加权平均数的联系与区别：

(1) 算术平均数实质上是加权平均数的一种特殊情况，即各项的权相等，算术平均数也是加权平均数，但加权平均数不一定是算术平均数.

(2) 平均数是统计中的一个重要的特征量，它描述一组数据的集中变化趋势. 当一组数据较小时，可直接用算术平均数公式计算；当一组数据中的某些数据重复出现时，可用加权平均数公式计算，要灵活运用公式.


算术平均数和加权平均数

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用权数为个数计算加权平均数

例5： ［中考·大连］在一次“爱心互助”捐款活动中，某班第一小组8名同学捐款的金额如下表所示：

金额/元	5	6	7	10
人数	2	3	2	1

这8名同学捐款的平均金额为(　　)

A. 3.5元　　B. 6元　　C. 6.5元　　D. 7元

导引： 根据加权平均数的计算公式用捐款的总钱数除以8即可得出答案.

根据题意得：$(5\times2+6\times3+7\times2+10\times1)\div8=6.5$(元)，故选C.

答案： C

方法点拨

权数以个数的形式出现时，一般都以表格或条形图的形式呈现，求平均数时每个数据都乘以权数(个数).

考查角度2 利用权数为百分数计算加权平均数

例6： 小明家去年饮食支出为3 600元，教育支出为1 200元，其他支出为7 200元，小明家今年这三项的支出依次比去年增长了9%，30%，6%，小明家今年的总支出比去年增长的百分数是多少？

导引： 由于小明家去年的饮食、教育和其他这三项支出金额不等，所以饮食、教育和其他这三项支出的增长率“地位”不同，则它们对总支出增长率的“影响”不同，不能只简单地求出这三项支出增长率的算术平均数，而应将这三项支出金额3 600元，1 200元，7 200元分别视为三项支出增长率的“权”，通过计算加权平均数来解决.

解： $\dfrac{9\%\times3\,600+30\%\times1\,200+6\%\times7\,200}{3\,600+1\,200+7\,200}=9.3\%$.

因此小明家今年的总支出比去年增长的百分数为9.3%.

▲**同类变式** 答案见257页

6. ［中考·南宁］某校规定学生的学期数学成绩满分为100分，其中研究性学习成绩占40%，期末卷面成绩占60%，小明的两项成绩(百分制)依次是80分，90分，则小明这学期的数学成绩是(　　)

A. 80分　　B. 82分

C. 84分　　D. 86分

考查角度3 利用权数为比例形式计算加权平均数

例7： 某广告公司欲招广告策划人员一名，对甲、乙、丙三名候选人进行三项素质测试，他们的各项测试成绩如下表：

测试项目	测试成绩/分		
	甲	乙	丙
创新能力	72	85	67
综合知识	50	74	70
计算机操作	88	45	67

(1) 如果根据三项测试的平均成绩确定录用人选，那么谁将会被录用？

方法点拨

用权重解决决策问题时，不同的权重，直接影响最后决策的结果.在实际生活中，我们经常会遇到这类问题，当需要在某个方面要求比较高的时候，往往可以加大这方面的权重，从达到预想的结果.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)根据实际需要,公司将创新能力、综合知识、计算机操作三项测试的成绩按 4 ∶ 3 ∶ 1 的比例确定个人的测试成绩,那么谁将会被录用?

导引: (1)利用平均数计算公式即可求出三人的平均成绩;

(2)利用公式$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$可求得.

解: (1)甲的平均成绩是:

$\frac{1}{3}\times(72+50+88)$

$=\frac{1}{3}\times210$

$=70$(分),

乙的平均成绩是:

$\frac{1}{3}\times(85+74+45)$

$=\frac{1}{3}\times204$

$=68$(分),

丙的平均成绩是:

$\frac{1}{3}\times(67+70+67)$

$=\frac{1}{3}\times204$

$=68$(分).

所以候选人甲将会被录用.

(2)甲的测试成绩是:

$\bar{x}_{甲}=\frac{72\times4+50\times3+88\times1}{4+3+1}$

$=\frac{1}{8}\times526$

$=65.75$(分),

乙的测试成绩是:

$\bar{x}_{乙}=\frac{85\times4+74\times3+45\times1}{4+3+1}$

$=\frac{1}{8}\times607$

$=75.875$(分),

丙的测试成绩是:

$\bar{x}_{丙}=\frac{67\times4+70\times3+67\times1}{4+3+1}$

$=\frac{1}{8}\times545$

$=68.125$(分).

所以候选人乙将会被录用.



同类变式 (答案见 257 页)

7. 某单位欲从内部选拔管理人员一名,对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试和面试两项测试,三人的测试成绩如下表所示:

测试项目	测试成绩/分		
	甲	乙	丙
笔试	75	80	90
面试	93	70	68



(第 7 题)



根据录用程序,组织 200 名职工利用投票推荐的方式对三人进行民主评议,三人得票率(没有弃权票,每名职工只能推荐 1 人)如图所示,每得一票记作 1 分.

(1)请算出三人的民主评议得分;

(2)如果根据三项测试的平均成绩确定录用人选,那么谁将被录用(精确到 0.01 分)?

(3)根据实际需要,单位将笔试、面试、民主评议三项测试得分按4 ∶ 3 ∶ 3的比例确定个人成绩,那么谁将被录用?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度4 利用权数为频数的形式计算加权平均数

例8： 为了了解某县八年级女生的身高情况，在该县某校八年级女生中随机抽测了200名女生的身高，统计数据如下：

组别	身高 x/cm	人数/名
第一组	$135 \leqslant x < 145$	50
第二组	$145 \leqslant x < 155$	P
第三组	$155 \leqslant x < 165$	70
第四组	$165 \leqslant x < 175$	Q

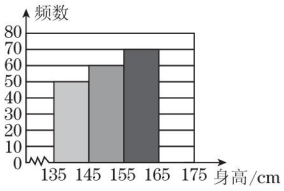


图 23.1-2

请你结合所给数据，回答下列问题：

(1) 表中的 $P =$ _____，$Q =$ _____；

(2) 请把如图23.1-2所示的频数分布直方图补充完整；

(3) 这200名女生的平均身高大约为_____.

导引： (1) 由统计图可以看出：$P = 60$，则 $Q = 200 - 50 - 60 - 70 = 20$；(2) 根据(1)中 Q 的值作图即可；

(3) 分别求出每组的组中值，用每组的组中值近似地作为该组内每名女生的身高，则平均身高为

$$\frac{140 \times 50 + 150 \times 60 + 160 \times 70 + 170 \times 20}{200} = 153(\text{cm}).$$

解： (1) 60；20　(2) 如图23.1-3所示.

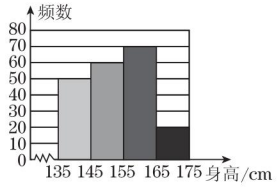
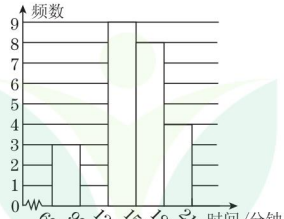


图 23.1-3

(3) 153 cm

同类变式 (答案见257页)

8. 某校为了了解本校八年级学生一天中做作业所用时间的情况，随机抽查了本校八年级的30名学生，并把调查所得的所有数据(时间都为整数)进行整理，分成五组，绘制成频数分布直方图(如图). 请结合图中所提供的信息，回答下列问题：



(第8题)

(1) 被抽查的学生中做作业所用的时间在90.5分钟到120.5分钟范围的人数是多少？

(2) 补全频数分布直方图；

(3) 估计被抽查的学生做作业所用的平均时间(精确到个位).

方法点拨

根据频数分布表或频数分布直方图来计算加权平均数的方法：统计中常用各组数据的组中值代表各组的实际数据，把各组中的频数看成是相应组中值的权来进行计算. 特别说明：数据分组后，一个小组的组中值是指这个小组的两个端点的数的平均数.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用新数据法求平均数

例 9： 在一次数学考试中，抽取了 20 名学生的试卷进行分析. 这 20 名学生的数学成绩（单位：分）分别为 87，85，68，72，58，100，93，97，96，83，51，84，92，62，83，79，74，72，65，79［注：这份试卷满分 100 分，60 分以上（含 60 分）为合格］.

（1）求这 20 名学生的平均成绩；

（2）求这 20 名学生的合格率.

导引：（1）观察所给的 20 个数据可以发现，这些数据都在 80 上下浮动，因此可将原数据都减去 80，求得新数据的平均数，再加上 80 即为原数据的平均数，这样便于计算；（2）20 名学生的合格率 $=\dfrac{\text{合格人数}}{20}\times 100\%$.

解：（1）将原数据都减去 80，得到新数据为 7，5，-12，-8，…，-15，-1.

所以新数据的平均数 $\overline{x'}=[7+5+(-12)+(-8)+\cdots+(-15)+(-1)]\div 20=-1$.

所以原数据的平均数 $\overline{x}=\overline{x'}+80=-1+80=79$，即这 20 名学生的平均成绩为 79 分.

（2）这 20 名学生的合格率为 $\dfrac{18}{20}\times 100\%=90\%$.

技巧点拨： 利用新数据法求平均数的关键是确定好新数据，计算时套用公式即可.

拔尖角度 2 利用方程思想解决平均数问题

例 10： 某校为灾区开展了“献出我们的爱”赈灾捐款活动. 八年级某班 50 名同学积极参加了这次赈灾捐款活动，下表是小明制作的全班同学捐款情况的统计表：

捐款/元	10	15	30		50	60
人数/人	3	6	11		13	6

因两处不慎被墨水污染，已无法看清，但已经知道全班平均每人捐款 38 元.

根据以上信息，请帮助小明计算出被污染的数据.

导引： 由题中所给条件，我们发现设未知数可以使解题过程得到简化. 设被墨水污染部分的人数为 x 人，捐款数为 y 元. 根据全班总人数及平均捐款数可列出方程组，通过解方程组即可得到问题的解.

解： 设被墨水污染部分的人数为 x 人，捐款数为 y 元. 由题意，得

$$\begin{cases}3+6+11+13+6+x=50,\\ \dfrac{xy+10\times 3+15\times 6+30\times 11+50\times 13+60\times 6}{50}=38.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=11,\\ y=40.\end{cases}$

所以被污染的数据为人数 11 人，捐款 40 元.

技巧点拨： 本题实际上仍考查怎样求平均数，是加权平均数公式的一个逆向运用过程，建立相应的方程组后就可以确定其中的某些未知数据.

拔尖角度 3 与平均数有关的探究问题

例 11： 某教育局为了了解本地区八年级学生数学基本功的情况，从两所不同的学校分别抽取一部分学生进行数学基本功比赛. 其中 A 校40 人，平均成绩为 85 分；B 校 50 人，平均成绩为 95 分.

（1）小李认为这两所学校的平均成绩为 $\dfrac{1}{2}\times(85+95)=90$（分）. 他的想法对吗？若不对请写出你认为正确的答案.（保留一位小数）

（2）其他条件不变，当 A 校抽取的人数变为多少人时，所抽取两所学校学生的平均成绩才是90分？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)根据以上的解答回答:已知 $a_1,a_2,\cdots,a_m;b_1,b_2,\cdots,b_n;c_1,c_2,\cdots,c_p;d_1,d_2,\cdots,d_q$. 每一组数据的平均数分别为 a,b,c,d. 问:当 m,n,p,q 满足什么条件时,将这四组数据合并为一组:$a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n,c_1,c_2,\cdots,c_p,d_1,d_2,\cdots,d_q$,它的平均数为 $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$?并说明理由.

导引: (1)应该用加权平均数来解答;(2)可以借助方程思想去解;(3)在前面两小题的基础上,探究何时一组数据的算术平均数与加权平均数相等. 从(1)(2)小题的解答容易发现,四组数据的个数相等即可.

解: (1)小李的想法不对. 正确的答案为:

$$\frac{85\times40+95\times50}{50+40}\approx90.6(\text{分}).$$

(2)设 A 校抽取的人数为 x 人,

由题意可得方程:$95\times50+85x=90(50+x)$,解得 $x=50$.

所以当 A 校抽取的人数也是 50 人时,两校学生的平均成绩才是 90 分.

(3)当四组数据的个数相等,即 $m=n=p=q$ 时,$a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n,c_1,c_2,\cdots,c_p,d_1,d_2,\cdots,d_q$ 的平均数才是 $\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

理由如下:

当 $m=n=p=q$ 时,平均数 $=\frac{am+bn+cp+dq}{m+n+p+q}=\frac{am+bm+cm+dm}{m+m+m+m}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

方法点拨: 本题为探究性问题,这类题能较好地考查学生的探究能力和创新能力,因而备受命题者的青睐,是中考考查的重点和热点.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 257 页)

基础巩固练

1. [中考·淮安]若一组数据 3,4,5,x,6,7 的平均数是 5,则 x 的值是(　　)

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

2. 已知数据 x_1,x_2,x_3,x_4 的平均数是 2,则 x_1+3,x_2+3,x_3+3,x_4+3 的平均数为(　　)

A. 2　　B. 2.75

C. 2.5　　D. 5

3. [中考·资阳]某单位定期对员工的专业知识、工作业绩、出勤情况三个方面进行考核(考核的满分均为 100 分),三个方面的重要性之比依次为 3∶5∶2. 小王经过考核后所得的分数依次为(单位:分):90,88,83,那么小王的最后得分是(　　)

A. 87 分　　B. 87.5 分

C. 87.6 分　　D. 88 分

4. 为建设绿色株洲,某校八年级 0801、0802、0803、0804 四个班同学参加了植树造林活动,每班植树株数如下表,则这四个班平均每班植树_____株.

班次	植树株数
0801	22
0802	25
0803	35
0804	18

5. 雾霾天气的多次出现,引起了各地环保部门的高度重视. 某市环保局对该市市区的空气质量状况进行检测,下面是一天每隔 2 小时测得的大气飘尘数据(单位:g/m^3):

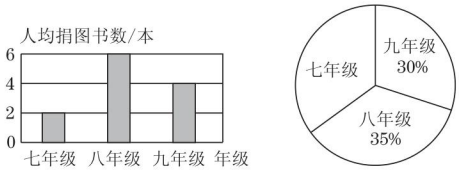
0.03　0.04　0.03　0.02　0.04　0.01

0.03　0.03　0.04　0.05　0.01　0.03

这天该市市区的大气飘尘数据的平均值是多少?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. 每年的4月23日是“世界读书日”,2019年的这一天,向阳中学学生会组织了一次捐书活动. 如图①是学生捐图书给图书馆的条形统计图,图②是该学校学生人数的比例分布图. 已知该校学生共有1 000人.



(第6题)

(1)求该校学生捐图书的总本数;

(2)该校学生平均每人捐图书多少本?

7. [中考·广州]某校为了提升初中学生学习数学的兴趣,培养学生的创新精神,举办“玩转数学”比赛. 现有甲、乙、丙三个小组进入决赛,评委从研究报告、小组展示、答辩三个方面为各小组打分,各项成绩均按百分制记录. 甲、乙、丙三个小组各项成绩如下表:

小组	研究报告	小组展示	答辩
甲	91	80	78
乙	81	74	85
丙	79	83	90

(1)计算各小组的平均成绩,并从高分到低分确定小组的排名顺序;

(2)如果按照研究报告占40%,小组展示占30%,答辩占30%计算各小组的成绩,哪个小组的成绩最高?

能力提升练

8. 某小组中有10名学生的平均成绩是x分,如果本组余下的5名学生平均每人得84分,那么整个组15人的平均成绩是(　　)

A. $\frac{x+84}{2}$分　　B. $\frac{10x+420}{15}$分

C. $\frac{10x+84}{15}$分　　D. $\frac{x+420}{15}$分

9. [中考·株洲]某大学自主招生考试只考数学和物理,计算综合得分时,按数学占60%,物理占40%计算. 已知孔明数学得分为95分,综合得分为93分,那么孔明物理得分是_____分.

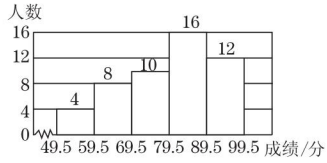
10. 已知两组数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$和$y_1,y_2,\cdots,y_n$,它们的平均数分别是$\bar{x}$和$\bar{y}$,求下列各组新数据的平均数:

(1)$5x_1,5x_2,\cdots,5x_n$;

(2)$x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n$;

(3)$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n$.

11. 对某班全体学生的一次数学测试成绩进行统计分析,各分数段的人数如图所示(分数取正整数),请观察统计图,并回答下列问题:



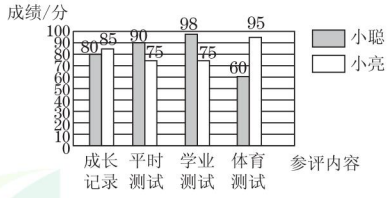
(第11题)

(1)求该班的学生总人数;

(2)你能估算该班这次测试的平均成绩吗?若能,请你算出平均成绩;若不能,请说明理由.

思维拓展练

12. 某市为了全面推进素质教育,努力提高学生的综合素质,改革中考评价方式,每一位学生的毕业成绩由四个部分组成:成长记录成绩、平时测试成绩、学业测试成绩、体育测试成绩(满分均为100分). 小聪、小亮的四项成绩如图所示.



(第12题)

(1)分别计算小聪和小亮的平均成绩;

(2)若学校按2∶3∶3∶2的方法计算毕业成绩,毕业成绩达80分以上(含80分)为“优秀毕业生”. 小聪和小亮谁能达到“优秀毕业生”水平?哪位同学的毕业成绩更好些?

(3)小聪和小亮升入高中后,请你对他俩今后的发展给每人提一条建议.

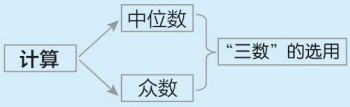
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.2 中位数和众数

核心知识

- 中位数
- 众数
- 平均数、中位数和众数的选用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 中位数（重点）

1 定义： 一般地，将 n 个数据按大小顺序排列，如果 n 为奇数，那么把处于中间位置的数据叫做这组数据的中位数；如果 n 为偶数，那么把处于中间位置的两个数据的平均数叫做这组数据的中位数.

要点精析///

(1) 一组数据的中位数是唯一的，它可能是这组数据中的一个数据，也可能不是，如 9,8,8,8,7,6,5,4 的中位数是 $\frac{7+8}{2}=7.5$；

(2) 中位数与数据的排列位置有关，当一组数据中的个别数据较大时，可用中位数来描述这组数据的集中趋势.

2 求中位数的步骤：

(1) 将数据由小到大（或由大到小）排列；

(2) 数清数据个数是奇数还是偶数，如果数据个数为奇数，则取中间的数据作为中位数；如果数据个数为偶数，则取中间两个数据的平均数作为中位数.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用中位数的定义求中位数

例1： [中考·自贡] 某班七个合作学习小组人数如下：4,5,5,x,6,7,8，已知这组数据的平均数是 6，则这组数据的中位数是(　　)

A. 5　　B. 5.5

C. 6　　D. 7

导引： 根据平均数的定义得，$4+5+5+x+6+7+8=6\times7$，解得 $x=7$. 从小到大排列这组数据为 4,5,5,6,7,7,8，所以中位数是 6.

答案： C

同类变式 （答案见 258 页）

1. [中考·河南] 在一次体育测试中，小芳所在小组 8 人的成绩分别是：46,47,48,48,49,49,49,50，则 8 人体育成绩的中位数是(　　)

A. 47　　B. 48

C. 48.5　　D. 49

方法点拨

求一组数据的中位数的方法：先将数据按照从小到大（或从大到小）的顺序进行排列，然后根据数据的个数确定中位数，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数据为这组数据的中位数；如果数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数为这组数据的中位数，注意，中位数不一定是这组数据中的数据.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用统计表提供的一组数据求中位数

例2： 为了解长城小区“全民健身”活动的开展情况，随机对居住在该小区的40名居民一周的体育锻炼时间进行了统计，结果如下表：

锻炼时间/小时	3	4	5	6	7
人数	6	13	14	5	2

这40名居民一周体育锻炼时间的中位数是(　　)

A. 4小时　　B. 4.5小时　　C. 5小时　　D. 5.5小时

导引： 将一组数据按大小顺序排列，处于中间位置的一个数据或者中间两个数据的平均数是这组数据的中位数. 统计表中的数据是按从小到大的顺序排列的，中间两个人的锻炼时间都是5小时，故中位数是5小时. 故选C.

答案： C

考查角度3 利用统计图求中位数

例3： [中考·杭州]已知杭州市某天六个整点时的气温绘制成的统计图(如图23.2-1)，则这六个整点时气温的中位数是_____℃.

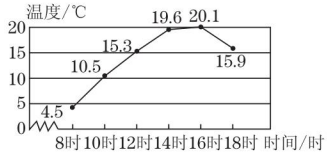


图23.2-1

导引： 根据中位数的定义解答. 将这组数据从小到大重新排列，求出中间两个数据的平均数即可.

把这些数据从小到大排列为(单位：℃)：

4.5，10.5，15.3，15.9，19.6，20.1，

最中间的两个数据的平均数是：

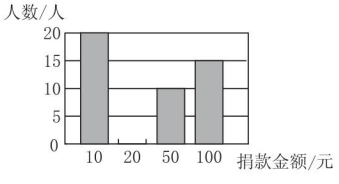
(15.3+15.9)÷2=15.6(℃)，

则这六个整点时气温的中位数是15.6℃.

答案： 15.6

同类变式 (答案见258页)

3. 在某次公益活动中，小明对本班同学的捐款情况进行了统计，绘制成如图所示的不完整的统计图. 其中捐100元的人数占全班总人数的25%，则本次捐款的中位数是_____元.



(第3题)

同类变式 答案见258页

2. [中考·厦门]在一次中学生运动会上，参加男子跳高的15名运动员成绩如下表：

成绩/米	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
人数	2	3	3	2	4	1

则这些运动员成绩的中位数是_____米.

方法点拨

掌握中位数的定义是解答本题的关键，中位数是将一组数据从小到大(或从大到小)重新排列后，中间的那个数据或中间两个数据的平均数.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 众数（重点）

定义：一般地，把一组数据中出现次数最多的那个数据叫做众数.

要点精析：

(1)一组数据的众数一定出现在这组数据中；

(2)一组数据的众数可能不止一个；

(3)一组数据也可能没有众数，因为有可能各数据出现的次数相同；

(4)众数可以在某种意义上代表这组数据的整体情况.


众数、中位数

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用众数的定义确定一组数据的众数

例4：［中考·舟山］在某次体育测试中，九(1)班6位同学的立定跳远成绩(单位：m)分别为：1.71，1.85，1.85，1.95，2.10，2.31，则这组数据的众数是(　　)

A. 1.71 m　　B. 1.85 m　　C. 1.90 m　　D. 2.31 m

导引：根据众数的定义：一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的众数求解即可.

数据1.85 m出现2次，出现次数最多，所以众数是1.85 m.

答案：B

方法点拨

求一组数据的众数的方法：求一组数据的众数，可用观察法；当不易观察时，可用列表的形式把各数据出现的次数全部统计出来，即可得出众数.

同类变式（答案见259页）

4. 在天水市汉字听写大赛中，10名学生得分情况如下表：

人数	3	4	2	1
分数/分	80	85	90	95

那么这10名学生所得分数的中位数和众数分别是(　　)

A. 85分和82.5分　　B. 85.5分和85分

C. 85分和85分　　D. 85.5分和80分

考查角度2 利用中位数和众数求值

例5：下面为某班某次数学测试成绩的统计表. 已知全班共有38人，且这次数学测试成绩的众数为50分，中位数为60分，则x^2-2y的值为(　　)

成绩/分	20	30	40	50	60	70	90	100
人数	2	3	5	x	6	y	3	4

A. 33　　B. 50　　C. 69　　D. 60

导引：全班共有38人，即$2+3+5+x+6+y+3+4=38$，所以$x+y=15$. 又因为众数为50分，所以$x>y$，即$x>15-x$，解得$x>\frac{15}{2}$. 又因为x为整数，所以$x\geqslant 8$.　①

因为中位数为60分，所以$2+3+5+x<6+y+3+4$. 整理，得$x<y+3$，即$x<15-x+3$，解得$x<9$.　②

综合①②，得$x=8$. 所以$y=7$. 所以$x^2-2y=64-14=50$.

答案：B

方法点拨

解本题应抓住两点：(1)众数为50分，说明$x>6$，$x>y$；(2)中位数为60分，说明60分以上(包括60分)的人数大于60分以下的人数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 平均数、中位数和众数的选用（难点）

类别	优点	缺点	联系
平均数	平均数能充分利用各数据提供的信息，在实际生活中较为常用，可用样本的平均数估计总体的平均数	在计算平均数时，所有的数据都参与运算，所以它易受极端值的影响	(1) 平均数、中位数和众数都能反映一组数据的集中趋势，刻画一组数据的“平均水平”； (2) 实际问题中求得的平均数、中位数和众数的单位与原数据的单位一致
中位数	中位数不受个别偏大或偏小数据的影响，当一组数据中有异常值时，一般用中位数来描述集中趋势	不能充分地利用各数据的信息	
众数	众数考察的是各数据所出现的次数，其大小只与部分数据有关，当一组数据中某些数据多次出现时，众数往往更能反映问题的实质	当各数据重复出现的次数大致相等时，它往往就没有什么特别意义了	
解读	平均数、中位数是唯一的，而众数不一定是唯一的，它们从不同的角度反映数据的集中趋势. 在特殊情况下，平均数、中位数和众数可能是同一个数据		

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用表格中的数据确定平均数、中位数和众数

例6： [中考·益阳] 某小组5名同学在一周内参加家务劳动的时间如下表所示，关于“劳动时间”的这组数据，以下说法正确的是(　　)

劳动时间/小时	3	3.5	4	4.5
人数	1	1	2	1

A. 中位数是4小时，平均数是3.75小时

B. 众数是4小时，平均数是3.75小时

C. 中位数是4小时，平均数是3.8小时

D. 众数是2小时，平均数是3.8小时

导引： 找到这组数据中出现次数最多的数据即为众数；把这组数据按从小到大的顺序排列，位于中间的数据是本组数据的中位数；按加权平均数的求法求出平均数.

5名同学“劳动时间”中3小时1名，3.5小时1名，4小时2名，4.5小时1名，所以4小时出现次数最多，所以众数是4小时；将“劳动时间”的这组数据从小到大排列为(单位：小时)：3，3.5，4，4，4.5，位于中间的数据是4小时，所以中位数为4小时；计算“劳动时间”的这组数据的平均数，为 $\frac{1}{5}\times(3+3.5+4\times2+4.5)=3.8$(小时)，所以C正确.

答案： C

技巧点拨

将一组数据从小到大(或从大到小)重新排列后，中间的那个数据或中间两个数据的平均数，叫做这组数据的中位数，如果对中位数的定义掌握得不好，不把数据按大小重新排列，就可能会出错.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用“三数”的意义选择统计量

例7： 一家鞋店在一段时间内销售了某种女鞋30双，各种尺码鞋的销售量如下表所示，你认为商家更应该关注鞋子尺码的_____.（从平均数、中位数和众数中选）

尺码/cm	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25
销售量/双	4	6	6	10	2	1	1

导引： 在商品的销售中，商家最关心的是销售商品的众数，这组数据的众数说明此尺码的鞋比较畅销，应适当多进货.

答案： 众数

同类变式 （答案见259页）

7. 11名同学参加数学竞赛初赛，他们的得分互不相同，按从高分到低分的原则，取前6名同学参加复赛. 现在小明同学已经知道自己的分数，如果他想知道自己能否进入复赛，那他还需知道所有参赛学生成绩的(　　)

A. 平均数　　B. 中位数

C. 众数　　D. 最高分

方法点拨

对于三个统计量——平均数、中位数和众数的选择，关键是看调查者要达到的调查目的.

考查角度3 利用平均数、中位数和众数解决实际问题

例8： 据报道，某公司的33名职工的月工资（单位：元）如下表：

职务	董事长	副董事长	董事	总经理	经理	管理员	职员
人数	1	1	2	1	5	3	20
月工资/元	5 500	5 000	3 500	3 000	2 500	2 000	1 500

（1）求该公司职工月工资的平均数、中位数、众数.（精确到1元）

（2）假设副董事长的月工资从5 000元提升到20 000元，董事长的月工资从5 500元提升到30 000元，其他职工的月工资不变，那么新的平均数、中位数、众数又是多少？（精确到1元）

（3）你认为哪个统计量更能反映这个公司职工的工资水平？结合此问题谈一谈你的看法.

解：（1）平均数为

$$\frac{5\,500+5\,000+3\,500\times2+3\,000+2\,500\times5+2\,000\times3+1\,500\times20}{33}$$

$\approx2\,091$（元），

中位数为1 500元，众数为1 500元.

（2）平均数为

$$\frac{30\,000+20\,000+3\,500\times2+3\,000+2\,500\times5+2\,000\times3+1\,500\times20}{33}$$

$\approx3\,288$（元），

中位数为1 500元，众数为1 500元.

方法点拨

选择一个合适的统计量来代表一组数据的方法：平均数、中位数、众数都是数据的代表，它们从不同的方面刻画了一组数据的集中程度，具体情况应该具体分析、选择，并结合实际情况来确定.警示：当一组数据中出现过大或过小的数据时，平均数就不能代表该组数据的一般水平了.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)中位数或众数均能反映这个公司职工的工资水平.

因为公司中少数人的工资额与大多数人的工资额差别较大,这样导致平均数与大多数人工资额偏差较大,所以平均数不能反映这个公司职工的工资水平.

考查角度4 利用平均数、中位数和众数解决实际中的决策问题

例9: 某公司10名销售员,去年完成的销售额情况如下表:

销售额/万元	3	4	5	6	7	8	10
销售人数	1	3	2	1	1	1	1

(1)求销售额的平均数、众数、中位数.

(2)今年公司为了调动员工积极性,提高年销售额,准备采取超额有奖的措施,请根据(1)中的结果,通过比较,合理确定今年每名销售员统一的销售额标准.

导引: (1)$n=10$,利用公式$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$计算平均数;将10名销售员去年的销售额(单位:万元)按从小到大的顺序排列为3,4,4,4,5,5,6,7,8,10,中间两个数据均为5万元,所以中位数为$\frac{5+5}{2}=5$(万元);出现次数最多的数据为4万元,所以众数为4万元;

(2)制定的标准要使大多数人能够完成,才能起到鼓励作用,因此可考虑用中位数作为销售额标准.

解: (1)平均数$=\frac{1}{10}\times(3+4\times3+5\times2+6+7+8+10)=5.6$(万元),

众数为4万元,中位数为5万元.

(2)若确定以平均数5.6万元为销售额标准,则多数人很难或不可能超额完成,会挫伤员工积极性;

若确定以众数4万元为销售额标准,则绝大多数人不必努力就可以超额完成,不利于提高年销售额;

若确定以中位数5万元为销售额标准,多数人能完成或超额完成,少数人经过努力也能完成,故以5万元为销售额标准较合理.

方法点拨

选择能代表一组数据特点的数据的方法:一般地,对于一组数据,当没有极端值时,用平均数作为这组数据的代表值;当有极端值时,用中位数或众数作为这组数据的代表值.



同类变式 (答案见259页)

9. "十年树木,百年树人",教师的素养关系到国家的未来.某市某区招聘数学教师采用笔试、专业技能测试、说课三种形式进行选拔,这三项的成绩满分均为100分,并按2∶3∶5的比例折合纳入总成绩,最后,按照总成绩的排序从高到低依次录取.该区要招聘2名数学教师,通过笔试、专业技能测试筛

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

选出前6名候选人进入说课环节，这6名候选人的各项成绩（单位：分）见下表：

序号	1	2	3	4	5	6
笔试成绩	66	90	86	64	65	84
专业技能测试成绩	95	92	93	80	88	92
说课成绩	85	78	86	88	94	85

(1)求出说课成绩的中位数、众数.

(2)已知序号为1,2,3,4号候选人的总成绩分别为84.2分，84.6分，88.1分，80.8分，请你判断这6名候选人中序号是多少的候选人将被录用？为什么？

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 中位数的讨论

例10： ［易错题］如果四个整数数据中的三个数据分别是2,4,6，且它们的中位数也是整数，那么它们的中位数是_____.

导引： 设第4个数据为x，分4种情况考虑，

当$x \leqslant 2$时，中位数是$(2+4)\div 2=3$.

当$2<x\leqslant 4$时，中位数为$(x+4)\div 2$，要使中位数为整数，x可取4，则中位数为4.

当$4<x\leqslant 6$时，中位数为$(4+x)\div 2$，要使中位数为整数，x可取6，则中位数为5.

当$x>6$时，中位数为$(4+6)\div 2=5$.

故中位数是3或4或5.

答案： 3或4或5

易错警示： 若数据的个数为偶数时，排序后中间的两个数据的算术平均数为这组数据的中位数，因此求这类问题的中位数的时候，首先要知道中间两个数据是多少，如果不确定，那就需要利用分类讨论思想分情况讨论，不要因考虑不全面而出现漏解.

拔尖角度2 平均数、中位数、众数与方程组的综合

例11： 某校八年级(1)班积极响应校团委的号召，每名同学都向“希望工程”捐献图书，全班40名同学共捐图书320册. 特别值得一提的是李扬、王州两名同学在父母的支持下各捐献了50册图书. 班长统计了全班的捐书情况，如下表（被粗心的马小虎用墨水污染了一部分）所示：

册数/册	4	5	6	7	8	50
人数	6	8	15	[redacted]	[redacted]	2

(1)分别求出该班捐献7册图书和8册图书的人数；

(2)请算出捐书册数的平均数、中位数和众数，并判断其中哪些统计量不能反映该班同学捐书册数的一般情况，说明理由.

导引： 根据已知条件及表格数据信息可知：捐献7册图书的人数+捐献8册图书的人数$=40-(6+8+15+2)$；捐献7册图书和8册图书的人捐书的总册数$=320-(4\times 6+5\times 8+6\times 15+50\times 2)$. 由此可设未知数，列方程组求出捐献7册图书和8册图书的人数，进而计算出平均数、众数和中位数.

解： (1)设该班捐献7册图书的有x人，捐献8册图书的有y人，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=40-(6+8+15+2), \\ 7x+8y=320-(4\times6+5\times8+6\times15+50\times2). \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=6, \\ y=3. \end{cases}$

所以该班捐献 7 册图书的有 6 人，捐献 8 册图书的有3 人.

(2) 捐书册数的平均数为 $320\div40=8$(册)，捐书册数的中位数为 6 册，捐书册数的众数为 6 册.

平均数不能反映该班同学捐书册数的一般情况. 因为有两个极端数据(50 册)，而且多数同学捐书在 6 册左右，而捐书 8 册的只有 3 人.

方法点拨： 确定数据的权的方法：利用题中条件列方程(组)，通过解方程(组)求出某些数据的权.

拔尖角度 3 方案决策设计

例 12： 甲、乙两校参加区教育局举办的学生英语口语竞赛，两校参赛人数相等. 比赛结束后，发现学生成绩分别为 7 分，8 分，9 分，10 分(满分为 10 分). 依据统计数据绘制了如下尚不完整的统计图(如图 23.2-2)及表.

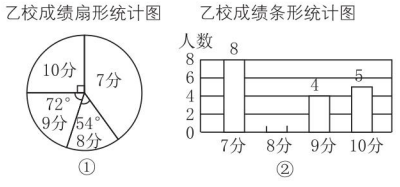


图 23.2-2

甲校成绩统计表

分数	7 分	8 分	9 分	10 分
人数	11	0		8

(1) 在图 23.2-2①中，“7 分”所在扇形的圆心角等于_____°；

(2) 请你将图 23.2-2②补充完整；

(3) 经计算，乙校成绩的平均数是 8.3 分，中位数是 8 分，请写出甲校成绩的平均数、中位数，并从平均数和中位数的角度分析哪个学校成绩较好；

(4) 如果该教育局要组织 8 人的代表队参加市级团体赛，为便于管理，决定从这两所学校中的一所挑选参赛选手，请你分析，应选哪所学校？

导引： (1)、(2)通过乙校成绩的扇形统计图和条形统计图易得到答案；(3)根据甲、乙两校参赛人数相等，可算出甲校成绩的平均数和中位数，然后再比较哪个学校的成绩较好；(4)因为教育局要组织 8 人的代表队，所以应该通过比较两所学校中各自的前 8 名的成绩来作决策.

解： (1)144

(2)补图如图 23.2-3 所示.

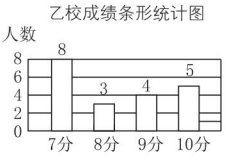


图 23.2-3

(3) 由于两校参赛人数相等，乙校的参赛人数为 $8+3+4+5=20$(人)，因此甲校的参赛人数也为 20 人，所以得 9 分的有 $20-11-8=1$(人)，则甲校成绩的平均数为 $(7\times11+8\times0+9\times1+10\times8)\times\frac{1}{20}=8.3$(分)，中位数为 7 分.

因为两所学校成绩的平均数一样，乙校成绩的中位数为 8 分，大于甲校成绩的中位数，所以乙校的成绩较好.

(4) 因为教育局要组织 8 人的代表队，甲校的前 8 名都是 10 分，而乙校的前 8 名中只有 5 人是 10 分，所以应选择甲校参赛.

技巧点拨： 中位数、众数、平均数是从不同角度反映数据的集中趋势，在作决策时应从多角度比较，突出方案决策的重点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基础巩固练

1. ［中考·随州］某同学连续6次考试的数学成绩分别是85,97,93,79,85,95,则这组数据的众数和中位数分别为(　　)

A. 85和89

B. 85和86

C. 89和85

D. 89和86

2. 某校九年级(1)班学生2019年初中毕业体育学业考试成绩统计如下表：

成绩/分	35	39	42	44	45	48	50
人数/人	2	5	6	6	8	7	6

根据上表中的信息判断,下列结论中错误的是(　　)

A. 该班一共有40名学生

B. 该班学生这次考试成绩的众数是45分

C. 该班学生这次考试成绩的中位数是45分

D. 该班学生这次考试成绩的平均数是45分

3. 已知一组数据:11,15,13,12,15,15,16,15.令这组数据的众数为a,中位数为b,则a _____ b.(填“>”“<”或“=”)

4. “一分钟仰卧起坐”是某市中学生体能测试的项目.为了制定标准,抽取九年级50名女学生进行“一分钟仰卧起坐”测试.测试成绩绘制成表格如下：

次数/次	6	12	15	18	20	25	27	30	32	35	36
人数/人	1	1	7	18	10	5	2	2	1	1	2

这次抽样测试成绩的平均数为20.5次,众数为18次,中位数也为18次.根据这一样本数据的特征,该市中学生女生“一分钟仰卧起坐”合格标准应定为_____次比较合适.

5. 某校八年级(1)班50名学生参加该县2019年数学质量监测考试,全班学生的成绩统计如下表：

成绩/分	71	74	78	80	82	83	85	86	88	90	91	92	94
人数/人	1	2	3	5	4	5	3	7	8	4	3	3	2

请根据表中提供的信息解答下列问题：

(1)该班学生考试成绩的众数是_____分；

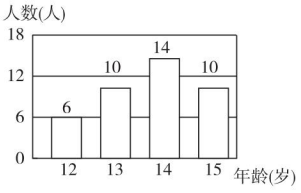
(2)该班学生考试成绩的中位数是_____分；

(3)该班张华同学在这次考试中的成绩是83分,能不能说张华同学的成绩处于全班中游偏上水平？试说明理由.

6. 随机抽查9位学生的鞋码(单位:cm)由小到大是20,21,21,22,22,22,22,23,23,这组数据的中位数、众数、平均数中,哪个指标是鞋厂最关注的？

能力提升练

7. ［中考·南充］某校共有40名初中生参加足球兴趣小组,他们的年龄统计情况如图所示,则这40名学生年龄的中位数是(　　)



(第7题)

A. 12岁　　B. 13岁

C. 14岁　　D. 15岁

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. [中考·随州]某校抽样调查了七年级学生每天体育锻炼时间,整理数据后制成了如下所示的频数分布表,这个样本的中位数在第_____组.

组别	时间 t/小时	频数/人
第1组	$0 \leqslant t < 0.5$	12
第2组	$0.5 \leqslant t < 1$	24
第3组	$1 \leqslant t < 1.5$	18
第4组	$1.5 \leqslant t < 2$	10
第5组	$2 \leqslant t < 2.5$	6

9. 某商场对2019年4月份电脑的销售情况做了调查,情况如下表:

每台价格/元	6 000	4 500	3 800	3 000
销量/台	20	40	60	30

请你回答下列问题:

(1)求2019年4月份所售出电脑价格的平均数、中位数、众数;

(2)如果你是该商场的经理,根据以上信息,应该如何进货?

10. 为了普及环保知识,增强环保意识,某中学组织了环保知识竞赛活动,初中各年级根据初赛成绩分别选出了10名同学参加决赛,这些选手的决赛成绩(满分为100分)如下表所示:

	决赛成绩/分									
七年级	80	86	88	80	88	99	80	74	91	89
八年级	85	85	87	97	85	76	88	77	87	88
九年级	82	80	78	78	81	96	97	88	89	86

(1)请你填写下表:

	平均数/分	众数/分	中位数/分
七年级	85.5		87
八年级	85.5	85	
九年级			84

(2)请从以下两个不同的角度对三个年级的决赛成绩进行分析:

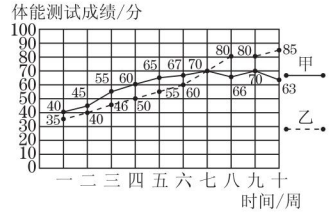
①从平均数和众数相结合看,哪个年级成绩更好一些?

②从平均数和中位数相结合看,哪个年级成绩更好一些?

(3)如果在每个年级参加决赛的选手中分别选出3人参加总决赛,你认为哪个年级的实力更强一些?并说明理由.

思维拓展练

11. 如图所示是连续十周测试甲、乙两名运动员体能训练情况的折线统计图,规定:体能测试成绩70分以上(包括70分)为合格.



(第11题)

(1)请从下面两个不同的角度对运动员体能测试结果进行判断:

①依据平均数与成绩合格的次数比较甲和乙,_____的体能测试成绩较好;

②依据平均数与中位数比较甲和乙,_____的体能测试成绩较好.

(2)依据折线统计图和成绩合格的次数,可以得出_____运动员体能训练的效果较好. 【导学号:3572905】

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

23.3 方　差

核心知识

- 方差
- 方差的作用
- 用样本方差估计总体方差

知识链接



点知识·拨考向　速提分

点知识 1　方差（重点）

1 定义： 设 n 个数据 x_1，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，各个数据与平均数偏差的平方分别是 $(x_1-\bar{x})^2$，$(x_2-\bar{x})^2$，…，$(x_n-\bar{x})^2$. 偏差平方的平均数叫做这组数据的方差，用 s^2 表示，即 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.

要点精析：

(1) 方差是用来衡量一组数据的波动大小的重要量，反映的是数据在平均数附近波动的情况；

(2) 对于同类问题的两组数据，方差越大，数据的波动就越大；方差越小，数据的波动就越小.

2 方差与平均数、中位数、众数的区别：

(1) 平均数、中位数、众数主要是反映数据的集中趋势；

(2) 方差反映的是原数据与平均数的偏离程度，即数据的波动程度.

3 易错警示：

计算一组数据的方差时，要确保不能遗漏和重复任何一个数据.

拨考向　提分·秘诀

考查角度1　利用方差的定义认识方差公式

例1： 某一个样本的方差 $s^2=\frac{1}{5}[(x_1-10)^2+(x_2-10)^2+(x_3-10)^2+(x_4-10)^2+(x_5-10)^2]$ 中，数字 5，10 分别表示这个样本的（　　）

A. 容量，平均数　　B. 平均数，中位数

C. 众数，中位数　　D. 中位数，容量

导引： 方差计算公式：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，其中 n 表示样本容量，$\bar{x}$ 为平均数，根据此公式即可得到答案.

答案： A

技巧点拨

本题考查了对方差的计算公式的认识.

同类变式 （答案见 259 页）

1. 某样本数据（单位：℃）：12，16，−6，11，…. 在计算它的方差时，小明按以下算式进行计算：$s^2=\frac{1}{15}\times[(12-20)^2+(16-20)^2+(-6-20)^2+(11-20)^2+\cdots]$，则算式中的数字 15

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

和 20 分别表示样本的(　　)

A. 众数、中位数　　B. 方差、众数

C. 数据的个数、平均数　　D. 数据的个数、中位数

考查角度2　利用方差公式计算方差

例2： [中考·自贡] 一组数据 6,4,a,3,2 的平均数是 5,这组数据的方差为(　　)

A. 8　　B. 5　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

导引： 根据平均数的计算公式先求出 a 的值,再根据 $s^2=\frac{1}{5}[(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+\cdots+(x_5-5)^2]$,代入数据计算即可.

∵ 6,4,a,3,2 的平均数是 5,∴ $(6+4+a+3+2)\div5=5$,

解得 $a=10$.

则这组数据的方差

$s^2=\frac{1}{5}\times[(6-5)^2+(4-5)^2+(10-5)^2+(3-5)^2+(2-5)^2]=8$.

答案： A

同类变式 (答案见 259 页)

2. [中考·威海] 在某中学举行的演讲比赛中,七年级 5 名参赛选手的成绩如下表所示,请你根据表中提供的数据,计算出这 5 名选手成绩的方差是(　　)

选手	1号	2号	3号	4号	5号	平均成绩
得分	90	95	■	89	88	91

A. 2　　B. 6.8　　C. 34　　D. 93

技巧点拨

一般地,设 n 个数据 x_1,x_2,…,x_n 的平均数为 $\bar{x}$,则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$,它反映了一组数据的波动大小.方差越大,数据的波动越大,反之也成立.

考查角度3　利用方差的意义解决实际问题

例3： [中考·泉州] 甲、乙、丙、丁四人参加体育训练,近期的 10 次百米测试平均成绩都是 13.2 秒,方差如下表:

选手	甲	乙	丙	丁
方差	0.020	0.019	0.021	0.022

则这四人中发挥最稳定的是(　　)

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

导引： 比较甲、乙、丙、丁四人成绩的方差大小,选择其中最小的一个.

∵ 0.019 < 0.020 < 0.021 < 0.022,∴ 乙成绩的方差最小,

即乙的成绩最稳定.

答案： B

技巧点拨

方差越小,数据波动越小,数据越稳定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见259页）

3. 甲、乙两人玩射击游戏，两人在相同条件下各打了6发子弹，命中环数如下：甲：9，8，7，8，7，9；乙：10，8，9，8，7，6. 则两人中发挥较稳定的是（　　）

A. 甲　　B. 乙

C. 甲、乙一样稳定　　D. 无法确定

考查角度4　利用平均数、方差作决策

例4： 某工厂甲、乙两名工人参加操作技能培训. 现分别从他们在培训期间参加的若干次测试成绩（单位：分）中随机抽取8次，记录如下表：

甲	95	82	88	81	93	79	84	78
乙	83	92	80	95	90	80	85	75

（1）请你分别计算这两组数据的平均数.

（2）现要从中选派一人参加操作技能比赛，从统计学的角度考虑，你认为选派哪名工人参加合适？请说明理由.

解：（1）$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{8}\times(95+82+88+81+93+79+84+78)=85$（分），

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{8}\times(83+92+80+95+90+80+85+75)=85$（分），

故这两组数据的平均数都是85分.

（2）选派甲参加合适. 理由如下：

由（1）知$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，

$s_{甲}^2=\frac{1}{8}\times[(95-85)^2+(82-85)^2+(88-85)^2+(81-85)^2+(93-85)^2+(79-85)^2+(84-85)^2+(78-85)^2]=35.5$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{8}\times[(83-85)^2+(92-85)^2+(80-85)^2+(95-85)^2+(90-85)^2+(80-85)^2+(85-85)^2+(75-85)^2]=41$.

因为$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，

所以甲的成绩较稳定，选派甲参加合适.

同类变式（答案见259页）

4. ［中考·河南］下表记录了甲、乙、丙、丁四名跳高运动员最近几次选拔赛成绩的平均数与方差，根据表中数据，要从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛，应该选择（　　）

方法点拨

在比较两组数据的稳定性时，一般先看平均数，在平均数相同或相近的情况下，再分析稳定性问题，而方差是反映数据的波动大小的量，因此可通过比较方差的大小来解决问题.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

	甲	乙	丙	丁
平均数(cm)	185	180	185	180
方差	3.6	3.6	7.4	8.1

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

点知识 2 极差和标准差（拓展点）

1 **极差：** 一组数据中最大值与最小值的差称为这组数据的极差. 即：极差 = 最大值 − 最小值.

2 **标准差：** 标准差是方差的算术平方根.

即：$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$

要点精析

(1) 极差能够反映数据的变化范围.

(2) 标准差与方差一样，反映的是数据在平均数附近的波动情况：标准差越大，数据的波动越大.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用标准差的公式进行计算

例5： 一次数学测试，某小组五名同学的成绩如下表所示(有两个数据被遮盖).

组员	甲	乙	丙	丁	戊	标准差	平均成绩
得分	81	79	■	80	82	■	80

那么被遮盖的两个数据依次是(　　)

A. 80，2　　B. 80，$\sqrt{2}$

C. 78，2　　D. 78，$\sqrt{2}$

导引： 根据题意得：$80\times5-(81+79+80+82)=78$，

标准差为

$$\sqrt{\frac{(81-80)^2+(79-80)^2+(78-80)^2+(80-80)^2+(82-80)^2}{5}}$$

$=\sqrt{2}$.

答案： D

方法点拨

先根据平均数的计算公式，求出丙的得分，再根据标准差公式进行计算即可得出答案.

同类变式 (答案见259页)

5. 某工厂为了选拔1名车工参加直径为5 mm精密零件的加工技术比赛，随机抽取甲、乙两名车工加工的5个零件，现测得的结果如下表(单位：mm)，平均数依次为$\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，标准差依次为$s_{甲}$，$s_{乙}$，则下列关系中完全正确的是(　　)

甲	5.05	5.02	5	4.96	4.97
乙	5	5.01	5	4.97	5.02

A. $\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}<s_{乙}$　　B. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}<s_{乙}$

C. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}>s_{乙}$　　D. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}>s_{乙}$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用标准差作决策

例6： 王大伯几年前承包了甲、乙两片荒山，各栽100棵杨梅树，成活率为98%，果实现已成熟. 为了分析收成情况，他分别从两山上随机各采摘了4棵树上的杨梅，根据每棵树的产量制作出了如图23.3-1所示的折线统计图.

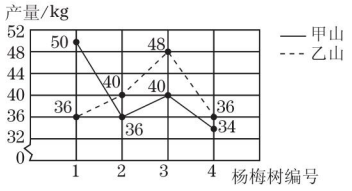


图23.3-1

(1)分析计算甲、乙两山上样本的平均数，并估算出甲、乙两山上杨梅的产量总和.

(2)试通过计算标准差说明，哪个山上的杨梅产量较稳定.

导引： (1)计算易得甲、乙两山上样本的平均数相等，都为40 kg，结合甲、乙两山各栽100棵杨梅树，成活率为98%，进而得出甲、乙两山上杨梅的产量总和约为$2\times100\times98\%\times40=7\,840$(kg)；

(2)由标准差的值的大小比较，得出乙山上的杨梅产量较稳定.

解： (1)因为甲山上4棵杨梅树的产量分别为50 kg、36 kg、40 kg、34 kg，

所以甲山上杨梅产量的样本平均数为

$$\bar{x}_{甲}=\frac{50+36+40+34}{4}=40(\text{kg}).$$

因为乙山上4棵杨梅树的产量分别为36 kg、40 kg、48 kg、36 kg，

所以乙山上杨梅产量的样本平均数为

$$\bar{x}_{乙}=\frac{36+40+48+36}{4}=40(\text{kg}).$$

甲、乙两山上杨梅的产量总和约为$2\times100\times98\%\times40=7\,840$(kg).

(2)$s_{甲}=\sqrt{\frac{1}{4}\times[(50-40)^2+(36-40)^2+(40-40)^2+(34-40)^2]}$

$=\sqrt{38}$，

$s_{乙}=\sqrt{\frac{1}{4}\times[(36-40)^2+(40-40)^2+(48-40)^2+(36-40)^2]}$

$=\sqrt{24}$，

因为$s_{甲}>s_{乙}$，

所以乙山上的杨梅产量较稳定.

方法点拨

在比较两组数据的稳定性时，一般先看平均数，当平均数相同或相近时，可比较两组数据的标准差，标准差越小，数据越稳定.

同类变式 答案见260页

6. 把10盆同一品种的花分成两组，每组5盆，分别用甲、乙两种保花肥，其花期(单位：天)的记录如下：

甲	25	23	28	22	27
乙	27	24	24	27	23

(1)这10盆花的花期最多相差几天？

(2)用哪种保花肥的花平均花期较长？

(3)试通过计算标准差说明用哪种保花肥的效果比较可靠.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 方差的规律探究

例 7：（1）观察下列各组数据并填空：

A：1　2　3　4　5

$\bar{x}_A=$_____，$s_A^2=$_____；

B：11　12　13　14　15

$\bar{x}_B=$_____，$s_B^2=$_____；

C：10　20　30　40　50

$\bar{x}_C=$_____，$s_C^2=$_____；

D：3　5　7　9　11

$\bar{x}_D=$_____，$s_D^2=$_____；

（2）比较 A 与 B，C，D 的计算结果，你能发现什么规律？

（3）若已知一组数据 x_1，x_2，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，那么另一组数据 $3x_1-2$，$3x_2-2$，…，$3x_n-2$ 的平均数是_____，方差是_____.

导引： 分别求平均数与方差，寻找四者之间的规律，然后根据规律解决问题.

解：（1）3；2；13；2；30；200；7；8

（2）A 与 B 比较，B 组中各数据比 A 组中对应各数据多 10，所以 $\bar{x}_B=\bar{x}_A+10=13$，而方差不变，即 $s_B^2=s_A^2$.

A 与 C 比较，C 组各数据为 A 组中对应各数据的 10 倍，所以 $\bar{x}_C=10\times\bar{x}_A=30$，$s_C^2=10^2\times s_A^2=200$.

A 与 D 比较，D 组各数据比 A 组中对应各数据的 2 倍多 1，所以 $\bar{x}_D=2\bar{x}_A+1=2\times3+1=7$，$s_D^2=2^2\times s_A^2=4\times2=8$.

（3）$3\bar{x}-2$；$9s^2$

方法规律： ① 将一组数据都加上或减去同一个数，则新数据的平均数在原数据的平均数基础上加上或减去这个数，方差不变.② 将一组数据都乘以（或除以）同一个不为 0 的数，则新数据的平均数在原数据的平均数基础上乘以（或除以）这个数，方差乘以（或除以）这个数的平方.

拔尖角度 2 根据方差进行决策

例 8： ［表格信息题］今年市运动会前，七年级（2）班的小李和小黄两位同学进行了 8 次立定跳远训练测试，她们的成绩分别如下表：（单位：m）

	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次
小李	1.94	1.86	1.94	1.96	1.94	1.96	1.97	1.95
小黄	1.65	2.08	2.28	1.96	1.69	2.25	1.70	1.91

（1）小李和小黄这 8 次训练测试的平均成绩分别是多少？

（2）分别计算小李和小黄 8 次测试成绩的方差；

（3）根据（1）、（2）计算的结果，你认为推荐谁参加比赛更合适？

导引：（1）、（2）题根据定义计算即可；在平均成绩相同的情况下，小李成绩的方差较小，说明成绩更加稳定，由此可作出决策：推荐小李参加比赛更合适.

解：（1）小李的平均成绩为 $(1.94+1.86+1.94+1.96+1.94+1.96+1.97+1.95)\div8=1.94$（m），

小黄的平均成绩为 $(1.65+2.08+2.28+1.96+1.69+2.25+1.70+1.91)\div8=1.94$（m）；

（2）小李 8 次测试成绩的方差为 $\frac{1}{8}\times[(1.94-1.94)^2+(1.86-1.94)^2+(1.94-1.94)^2+(1.96-1.94)^2+(1.94-1.94)^2+(1.96-1.94)^2+(1.97-1.94)^2+(1.95-1.94)^2]\approx0.001\,0$，

小黄 8 次测试成绩的方差为 $\frac{1}{8}\times[(1.65-1.94)^2+(2.08-1.94)^2+(2.28-1.94)^2+(1.96-1.94)^2+(1.69-1.94)^2+(2.25-1.94)^2+(1.70-1.94)^2+(1.91-1.94)^2]=0.054\,6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)由(1)知,小李和小黄8次训练测试的平均成绩相等.由(2)知小李8次测试成绩的方差小于小黄的,根据方差越小,成绩越稳定,知推荐小李参加比赛更合适.

方法规律: 本题运用定义法和对比法解答,方差是用来衡量一组数据波动大小的量,方差越大,表明这组数据偏离平均数的程度越大,即波动越大,数据越不稳定;反之,方差越小,表明这组数据分布比较集中,各数据偏离平均数的程度越小,即波动越小,数据越稳定.

拔尖角度3 学科内综合题

例9: 一分钟投篮测试规定,得6分及以上为合格,得9分及以上为优秀,甲、乙两组同学的一次测试成绩如下表:

成绩/分	4	5	6	7	8	9
甲组人数	1	2	5	2	1	4
乙组人数	1	1	4	5	2	2

(1)请你根据上述统计数据,把下面的图(如图23.3-2)和表补充完整;

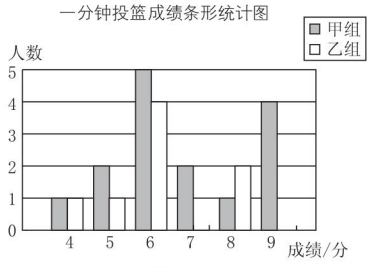


图23.3-2

一分钟投篮成绩统计分析表

统计量	平均数/分	方差	中位数/分	合格率	优秀率
甲组		2.56	6	80.0%	26.7%
乙组	6.8	1.76		86.7%	13.3%

(2)图23.3-3是小明和小聪的一段对话,请你根据(1)中的表,写出两条支持小聪的观点的理由.

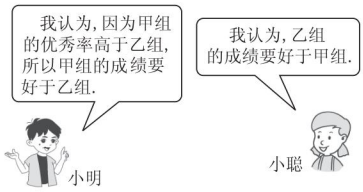


图23.3-3

导引: (1)根据测试成绩表可知乙组成绩为7分和9分的人数,补全统计图,再根据平均数的计算方法和中位数的定义求出甲组成绩的平均数和乙组成绩的中位数,即可补全分析表;(2)根据平均数、方差、中位数、合格率的意义即可写出支持小聪的观点的理由.

解: (1)补全统计图如图23.3-4:

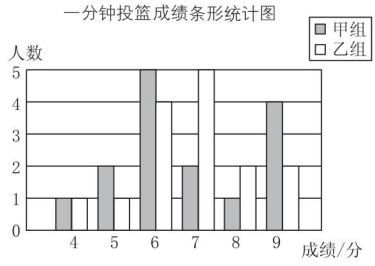


图23.3-4

甲组:平均数为$(4\times1+5\times2+6\times5+7\times2+8\times1+9\times4)\div(1+2+5+2+1+4)=6.8$(分),

乙组:成绩的中位数是第8个数据,是7分.

补全分析表如下:

一分钟投篮成绩统计分析表

统计量	平均数/分	方差	中位数/分	合格率	优秀率
甲组	6.8	2.56	6	80.0%	26.7%
乙组	6.8	1.76	7	86.7%	13.3%

(2)甲、乙两组平均数一样,乙组的方差低于甲组,说明乙组成绩比甲组稳定;又因为乙组合格率比甲组高,所以乙组成绩好于甲组.

点拨: 此题考查学生搜集信息(读图、表)、分析问题和解决问题的能力,解决本题的关键在于准确读懂图、表,获取有关信息.(2)题理由不唯一,合理即可.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见260页）

基础巩固练

1. ［中考·凉山州］教练要从甲、乙两名射击运动员中选一名成绩较稳定的运动员参加比赛. 两人在相同条件下各打了5发子弹，命中环数如下：甲：9，8，7，7，9；乙：10，8，9，7，6. 应该选（　　）参加.

A. 甲　　B. 乙

C. 甲、乙都可以　　D. 无法确定

2. ［中考·恩施州］已知一组数据1，2，3，x，5，它们的平均数是3，则这一组数据的方差为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 某校八年级进行了一次数学测试，为了了解甲、乙两班学生的测试情况，从每班抽取10名学生的成绩进行分析（单位：分）：

甲：86　78　80　86　92　85　85　87　86　88

乙：78　91　87　82　85　89　81　86　76　87

用计算器分别计算甲、乙两班抽取的10名学生成绩的方差，结果正确的是（　　）

A. 13.81；20.96　　B. 17.92；26.75

C. 20.96；13.81　　D. 26.75；17.92

4. ［中考·新疆］甲、乙两班举行电脑汉字输入比赛，参赛学生每分钟输入汉字个数的统计结果如下表：

班级	参赛人数	平均数	中位数	方差
甲班	55	135	149	191
乙班	55	135	151	110

某同学分析该表后得出如下结论：

①甲、乙两班学生的平均成绩相同；

②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数（每分钟输入汉字的个数≥150为优秀）；

③甲班成绩的波动比乙班大.

上述结论中，正确的是（　　）

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ①②③

5. 在甲、乙两名同学中选拔一人参加“中华好诗词”大赛，在相同的测试条件下，两人5次测试成绩（单位：分）如下：

甲：79，86，82，85，83；

乙：88，79，90，81，72.

回答下列问题：

（1）分别计算甲、乙两名同学这5次测试成绩的平均数；

（2）经计算知 $s_{甲}^2=6$，$s_{乙}^2=42$. 你认为选拔谁参加比赛更合适，说明理由.

6. 为了了解市场上甲、乙两种手表日走时误差的情况，从这两种手表中各随机抽取10块进行测试，两种手表日走时误差的数据（单位：秒）如下：

甲种手表：-3，4，2，-1，-2，-2，1，-2，2，1；

乙种手表：-4，2，-3，2，4，2，-3，-1，4，-3.

根据所学方差知识，请你判断哪种手表日走时稳定性好？

能力提升练

7. ［中考·南京］某排球队6名场上队员的身高（单位：cm）是：180，184，188，190，192，194. 现用一名身高为186 cm的队员换下场上身高为192 cm的队员，与换人前相比，场上队员的身高（　　）

A. 平均数变小，方差变小

B. 平均数变小，方差变大

C. 平均数变大，方差变小

D. 平均数变大，方差变大

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 已知一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方差为 $\frac{1}{6}$，则另一组数据 $5x_1-2, 5x_2-2, \cdots, 5x_n-2$ 的方差为_____.

9. 已知一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$，方差是 s^2，设另一组数据 $x_1' = ax_1 + b, x_2' = ax_2 + b, \cdots, x_n' = ax_n + b$ 的平均数是 $\bar{x}'$，方差是 s'^2. 请说明以下等式成立的理由：
(1) $\bar{x}' = a\bar{x} + b$；(2) $s'^2 = a^2 s^2$.

10. 张老师为了从甲、乙两位同学中选拔一人参加某数学邀请赛，对两位同学进行了辅导，并在辅导期间进行了 10 次测验，两位同学测验成绩（单位：分）如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
甲	68	80	84	79	81	92	78	78	83	77
乙	75	77	75	79	80	80	83	80	86	85

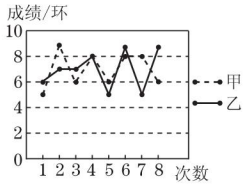
利用表中提供的数据，解答下列问题.
(1) 填写下表：

	平均数/分	中位数/分	众数/分
甲		79.5	
乙	80		80

(2) 张老师已经根据测验成绩表中的数据算出甲 10 次测验成绩的方差 $s_{甲}^2 = 33.2$，请你帮助张老师计算乙 10 次测验成绩的方差 $s_{乙}^2 =$ _____；
(3) 请你运用所学的统计知识，帮助张老师从甲、乙两位同学中选出一人参加该数学邀请赛，并简要说明理由.

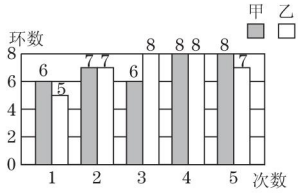
思维拓展练

11. (1) [中考·南通] 甲、乙两人 8 次射击的成绩如图所示. 根据图中的信息判断，这 8 次射击中成绩比较稳定的是_____（填“甲”或“乙”）. 【导学号:3572905】



（第 11(1) 题）

(2) [中考·德阳] 在某次军事夏令营射击考核中，甲、乙两名同学各进行了 5 次射击，射击成绩如图所示，则这两人中发挥较为稳定的是_____同学.



（第 11(2) 题）

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.4 用样本估计总体

核心知识

- 数据的分析
- 用样本的平均数估计总体的平均数
- 用样本的方差估计总体的方差

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用样本平均数估计总体平均数

当所要考察的对象很多，或者对考察对象带有破坏性时，统计中常常通过用样本估计总体的方法来获得对总体的认识. 例如，实际生活中经常用样本的平均数来估计总体的平均数.

要点精析

(1)用样本估计总体时，样本容量越大，样本对总体的估计越准确，相应的工作量及破坏性也越大，因此样本容量的确定，既要考虑问题本身的需要，又要考虑实现的可能性及付出的代价.

(2)抽取的样本要具有一般性和代表性.

拨考向 提分·秘诀

考查角度 利用样本估计总体解决实际问题

例1: 某学校为了了解九年级学生某次体育测试的成绩，现对该年级学生这次体育测试成绩进行抽样调查，结果统计如下，其中扇形统计图中C组所在的扇形圆心角为36°.

根据下图(如图23.4-1)和表提供的信息，回答下列问题:

被抽取学生的体育测试成绩频数分布表

组别	成绩 x/分	频数
A	$20\leqslant x<24$	2
B	$24\leqslant x<28$	3
C	$28\leqslant x<32$	5
D	$32\leqslant x<36$	b
E	$36\leqslant x<40$	20
合计		a

被抽取学生的体育测试成绩扇形统计图

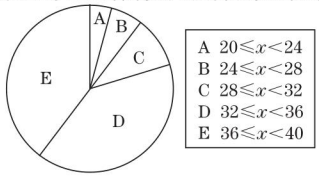


图23.4-1

(1)计算频数分布表中 a 与 b 的值;

(2)根据C组 $28\leqslant x<32$ 的组中值为30，估计C组中所有数据的和为_____分;

(3)请估计该校九年级学生这次体育测试成绩的平均数(结果取整数).

导引: (1)由扇形的圆心角度数除以360°算出C组的频率，由C组的频数除以频率算出总频数 a，D组的频数等于总频数减去A，B，C，E组频数的和;(2)组中值与频数的积为该组

同类变式 答案见261页

1. 某养鱼户经营池塘养鱼. 放养鱼苗20 000尾，其成活率约为70%. 在秋季捕捞时，随意捞出10尾鱼，称得每尾的质量(单位:kg)如下:
0.8，0.9，1.2，1.3，0.8，0.9，1.1，1.0，1.2，0.8.

(1)根据样本平均数估计这塘鱼的总质量是多少千克?

(2)如果把这塘鱼全部卖掉，其市场售价为每千克4元，那么销售额是多少元? 除去投资成本16 000元，卖完这塘鱼所得的利润是多少元?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数据的和，因此估计 C 组中所有数据的和为 $30\times5=150$（分）；(3)根据用样本平均数估计总体平均数的思想求解.

解：(1)由 C 组所在的扇形圆心角为 36°，

可知 $a=5\div\frac{36°}{360°}=50$.

所以 $b=50-(2+3+5+20)=20$.

(2)150

(3)$\bar{x}=(22\times2+26\times3+30\times5+34\times20+38\times20)\div50=34.24$(分)$\approx34$ 分，

即样本平均数约为 34 分. 因此，估计该校九年级学生这次体育测试成绩的平均数为 34 分.

点知识 2 用样本方差估计总体方差（重点）

1 用样本的方差去估计总体的方差也是重要的统计思想.

2 **易错警示：**

由于抽样的任意性，不同的样本的方差一般也不同. 当样本数据较少时，差异可能还很大. 但是，当样本中的数据较多，且具有较好的代表性时，样本的方差趋于稳定，且与总体的方差比较接近. 因此，我们经常用样本的方差估计总体的方差，分析数据后科学决策.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度 利用样本估计总体解决实际问题

例 2：［实际应用题］某班 45 名学生的体重记录如下：(单位：千克)

48,48,42,50,60,44,43,51,46,46,51,46,50,45,52,
54,51,57,55,48,49,48,53,48,56,55,57,52,54,49,
47,60,51,51,44,41,49,53,52,49,61,58,52,54,50.

(1)某人采用随机抽样的方法抽到 5 名学生的体重如下：(单位：千克)

48,51,57,56,58. 请你计算这个样本的平均数和方差；

(2)某人同样用随机抽样的方法抽到 10 名同学的体重如下：(单位：千克)

42,46,51,48,56,49,41,49,50,50.

请你计算出这个样本的平均数和方差；

(3)比较(1)和(2)的结果，你认为采用哪种随机抽样的方式估计总体情况更可靠？

解：(1)样本的平均数为 $\frac{1}{5}\times(48+51+57+56+58)=54$(千克).

样本的方差为 $\frac{1}{5}\times[(48-54)^2+(51-54)^2+(57-54)^2+(56-54)^2+(58-54)^2]=14.8$.

技巧点拨

用样本的平均数、方差估计总体的平均数、方差是抽样调查的重要目的之一.注意样本容量要足够大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)样本的平均数为$\frac{1}{10}\times(42+46+51+48+56+49+41+49+50+50)=48.2$(千克).

样本的方差为$\frac{1}{10}\times[(42-48.2)^2+(46-48.2)^2+\cdots+(50-48.2)^2+(50-48.2)^2]=17.16$.

(3)采用(2)的随机抽样的方式估计总体情况更可靠. 因为(2)中样本容量更大一些.

同类变式 (答案见261页)

2. [表格信息题] 为了比较甲、乙两种水稻秧苗是否出苗整齐,每种秧苗各取5株并量出每株的长度如下表所示(单位:厘米).

	1	2	3	4	5
甲	12	13	15	15	10
乙	13	14	16	12	10

通过计算方差,评价哪种水稻出苗更整齐.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 "捕获——再捕获"问题

例3: [实际应用题] 某养鱼户春季在鱼塘放养鱼苗10万尾,9月份进行了一次试捕,共捕鱼320条,测得其平均质量为0.82千克,给每条鱼做上标记后,放回鱼塘,继续饲养,过了20天,进行第二次试捕,共捕鱼300条,其中仅有1条有标记,这一次测得平均质量是1.02千克.

(1)根据以上数据,估计鱼苗的成活率;

(2)根据以上数据,估计鱼塘中每条鱼日增重多少千克?

(3)再过30天,恰逢节日,鱼价将达到每千克5元,则该养鱼户将所有的鱼一次捕捞上市,估计可以收入多少元?

解: (1)设鱼塘有活鱼x条,则有标记的鱼占的比例为$\frac{320}{x}$.

样本中有标记的鱼占的比例为$\frac{1}{300}$.

$\therefore \frac{1}{300}=\frac{320}{x}$,$x=96\ 000$,

$\therefore$ 鱼苗的成活率$=\frac{96\ 000}{100\ 000}\times100\%=96\%$.

(2)$\frac{1.02-0.82}{20}=0.01$(千克).

$\therefore$ 估计鱼塘中每条鱼日增重0.01千克.

(3)$(1.02+30\times0.01)\times96\ 000\times5=633\ 600$(元).

$\therefore$ 估计可以收入633 600元.

方法点拨: 本题利用方程思想和统计思想解题.用样本中有标记的鱼占的比例估计总体中有标记的鱼占的比例,并列方程,可以近似地计算出鱼塘中活鱼的总数量.这是"捕获——再捕获"理论的方法和目的.

拔尖角度2 综合运用多种指标估计总体

例4: [图表信息题] 为选派一名学生参加全市实践活动技能竞赛,A,B两位同学在学校实习基地现场进行加工直径为20 mm的零件的测试,他俩各加工的10个零件的相关数据依次如下表及图23.4-2所示(单位:mm).

根据测试得到的有关数据,试解答下列问题:

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)考虑平均数与完全符合要求的个数,你认为_____的成绩好些;

(2)计算出 s_B^2 的大小,考虑平均数与方差,说明谁的成绩好些;

(3)考虑图中折线走势及竞赛中加工零件个数远远超过 10 个的实际情况,你认为派谁去参赛较合适?

	平均数/mm	方差	完全符合要求的个数
A	20	0.026	2
B	20	s_B^2	5

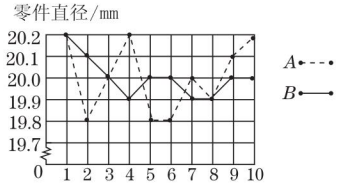


图 23.4-2

导引: (1)两人加工的零件直径的平均数相同,根据表中数据比较两人加工的零件完全符合要求的个数即可.(2)由图 23.4-2 可知 B 同学加工的 10 个零件的相关数据(单位:mm)是 20.0,20.0,19.9,19.9,20.0,20.0,19.9,20.0,20.1,20.2,可利用方差公式计算这 10 个数据的方差,通过样本方差估计总体方差,说明谁的成绩好些.(3)从图中折线走势看数据波动,从而决定人选.

解: (1)B

(2)$\because s_B^2 = \frac{1}{10} \times [5 \times (20-20)^2 + 3 \times (19.9-20)^2 + (20.1-20)^2 + (20.2-20)^2] = 0.008$,且 $s_A^2 = 0.026$,

$\therefore s_A^2 > s_B^2$,在平均数相同的情况下,B 同学加工的零件直径的波动性小,

$\therefore B$ 同学的成绩好些.

(3)从图中折线走势可知,尽管 B 的成绩前面起伏较大,但后来逐渐稳定,误差小,因此可选派 B 去参赛.(答案不唯一,说法合理即可)

方法点拨: 本题运用定义法、对比法和数形结合思想解答,利用平均数和方差的定义求值分析,在实际生活中考察一个研究对象时,并不是仅考虑波动大小,而应从多角度综合考虑.

拔尖角度 3 综合统计图信息分析样本估计总体

例 5: [中考·宜昌]读书决定一个人的修养和品位,在“文明湖北·美丽宜昌”读书活动中,某学习小组开展综合实践活动,随机调查了该校部分学生的课外阅读情况,绘制了平均每人每天课外阅读时间统计图(如图 23.4-3).

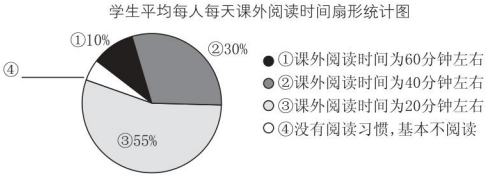


图 23.4-3

(1)补全扇形统计图中横线上缺失的数据;

(2)被调查的学生中,每天课外阅读时间为 60 分钟左右的有 20 人,求被调查的学生的总人数;

(3)请你通过计算估计该校学生平均每人每天课外阅读的时间.

导引: (1)将总体看成单位 1,减去其他部分所占的百分比即可;(2)用每天课外阅读时间为 60 分钟左右的人数除以其所占的百分比即可;(3)计算样本的加权平均数,用样本估计总体.

解: (1)5%

(2)$\because$ 每天课外阅读时间为 60 分钟左右的有 20 人,占总人数的 10%,$\therefore$ 被调查的学生的总人数为 $20 \div 10\% = 200$(人).(3)被调查的学生平均每人每天课外阅读的时间为:$60 \times 10\% + 40 \times 30\% + 20 \times 55\% = 6 + 12 + 11 = 29$(分钟).$\therefore$ 估计该校学生平均每人每天课外阅读的时间为 29 分钟.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见261页）

基础巩固练

1. ［易错题］某学校在开展“节约每一滴水”的活动中，从七年级的200名同学中任选出10名同学，让他们汇报了各自家庭一个月的节水情况，将有关数据整理如下表：

节水量/吨	0.5	1	1.5	2
同学数/名	2	3	4	1

这200名同学的家庭一个月节约用水的总量大约是(　　)

A. 180吨　　B. 200吨

C. 240吨　　D. 360吨

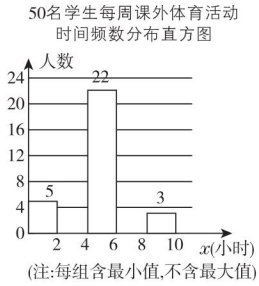
2. ［实际应用题］某油桃种植户今年喜获丰收，他从采摘的一批总质量为900千克的油桃中随机抽取了10个油桃，称得其质量(单位：克)分别为：

106，99，100，113，111，97，104，112，98，110.

(1)估计这批油桃的平均质量；

(2)若质量不小于110克的油桃可定为优级，并假设随机抽取的这10个油桃可以代表这批油桃的总体质量水平，估计这批油桃中，优级油桃占油桃总数的百分之几？达到优级的油桃有多少千克？

3. ［中考·齐齐哈尔］为增强学生体质，各学校普遍开展了阳光体育活动，某校为了解全校1 000名学生每周课外体育活动时间的情况，随机调查了其中的50名学生，对这50名学生每周课外体育活动时间x(单位：小时)进行了统计. 根据所得数据绘制了一幅不完整的统计图(如图)，并知道每周课外体育活动时间在$6 \leqslant x < 8$小时的学生人数占24%. 根据以上信息及统计图解答下列问题：



(第3题)

(1)本次调查属于_____调查，样本容量是_____；

(2)请补全频数分布直方图中空缺的部分；

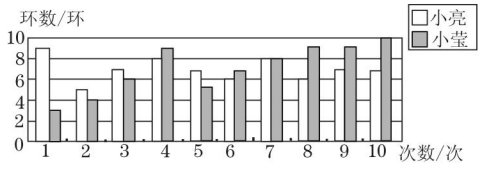
(3)求这50名学生每周课外体育活动时间的平均数；

(4)估计全校学生每周课外体育活动时间不少于6小时的人数.

能力提升练

4. ［中考·临安区］为了估计池塘里有多少条鱼，从池塘里捕捞了1 000条鱼做上标记，然后放回池塘里，经过一段时间，等有标记的鱼完全混合于鱼群中以后，再捕捞200条，若其中有标记的鱼有10条，则估计池塘里有鱼_____条.

5. ［中考·聊城，图表信息题］小亮和小莹自制了一个标靶进行投标比赛，两人各投了10次，如图是他们投标成绩的统计图.



(第5题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)根据图中信息填写下表：

	平均数/环	中位数/环	众数/环
小亮		7	
小莹	7		9

(2)分别用平均数和中位数解释谁的成绩比较好.

6. [实际应用题]经市场调查,某种优质西瓜的质量为(5±0.25)kg的最为畅销.为了控制西瓜的质量,农科所采用A、B两种种植技术进行试验.现从用这两种技术种植的西瓜中各随机抽取20个,记录它们的质量如下(单位:kg):

A:4.1 4.8 5.4 4.9 4.7 5.0 4.9
4.8 5.8 5.2 5.0 4.8 5.2 4.9
5.2 5.0 4.8 5.2 5.1 5.0

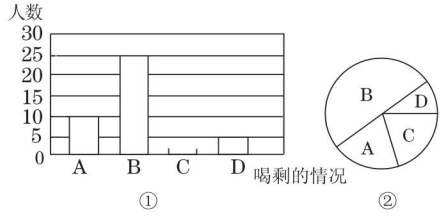
B:4.5 4.9 4.8 4.5 5.2 5.1 5.0
4.5 4.7 4.9 5.4 5.5 4.6 5.3
4.8 5.0 5.2 5.3 5.0 5.3

(1)若质量为(5±0.25)kg的为优等品,根据以上信息完成下表：

	优等品数量/个	平均数/kg	方差
A		4.990	0.103
B		4.975	0.093

(2)请分别从优等品数量、平均数与方差三方面对A、B两种技术进行评价;从市场销售的角度看,你认为推广哪种种植技术较好?

7. [中考·江西,图形信息题]生活中很多矿泉水没有喝完便被扔掉,造成极大的浪费,为此数学兴趣小组的同学对某单位的某次会议所用矿泉水的浪费情况进行调查,为期半天的会议中,每人发一瓶500 mL的矿泉水,会后对所发矿泉水喝的情况进行统计,发现所有矿泉水都被打开,剩余情况大致可分为四种:A.全部喝完;B.喝剩约$\frac{1}{3}$;C.喝剩约一半;D.开瓶但基本未喝.同学们根据统计结果绘制出了如图所示的两个统计图,根据统计图提供的信息,解答下列问题：



(第7题)

(1)参加这次会议的有多少人?图②中D所在扇形的圆心角是多少度?补全条形统计图.

(2)若开瓶但基本未喝算全部浪费,试计算这次会议平均每人浪费的矿泉水约有多少毫升?(计算结果请保留整数)

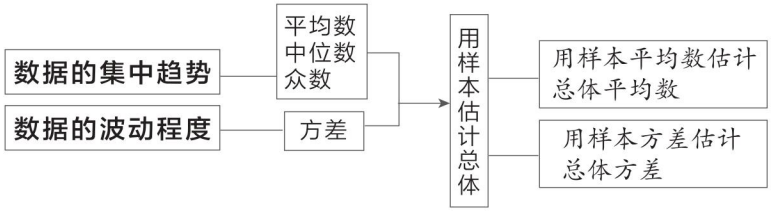
(3)据不完全统计,该单位每年约有此类会议60次,每次会议人数约在40人至60人之间,请用(2)中计算的结果,估计该单位一年中因此类会议浪费的矿泉水(500 mL/瓶)约有多少瓶?(可使用科学计算器)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；若 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，$\cdots$，x_k 出现 f_k 次，且 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，则这 n 个数的平均数是 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$.
2. 中位数的求法：先将数据从大到小或从小到大排好顺序，若数据为偶数个，中间的两个数据的平均数即为中位数；若数据为奇数个，则中间的一个数据为中位数.
3. 众数的求法：一组数据中，出现次数最多的数据就是这组数据的众数.
4. 方差：若数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 m，则方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2]$. 在平均数相同的条件下，方差越小，数据越整齐，稳定性越好.

知识方法专题

知识必学

专题一 “三数”与“三差”的计算

链接中考» “三数”是平均数、中位数和众数，“三差”是极差、方差和标准差，对于数据的分析关键要看这六个统计量，所以对这六个统计量的考查是中考考查的重点，解答此类题的关键就是扣住定义.

例1: 为了解某社区居民的用电情况，随机对该社区 10 户居民进行调查，下表是这 10 户居民 2019 年 4 月份用电量的调查结果：

居民/户	1	2	3	4
月用电量/度	30	42	50	51

那么关于这 10 户居民月用电量情况，下列说法错误的是(　　)

A. 中位数是 50 度　　B. 众数是 51 度

C. 方差是 42　　D. 极差是 21 度

导引: 根据中位数、众数、方差、极差的定义进行判断. 由题意可知排序后第 5,6 户的用电量都是 50 度，故中位数是 50 度；用电量为 51 度的户数最多，故众数是 51 度；极差是 51 − 30 = 21(度)，排除 A,B,D 选项，选 C. 也可代入方差计算公式进行计算，求出方差.

答案: C

方法点拨: 此题考查了众数、中位数、方差、极差，掌握众数、中位数、方差、极差的定义是解题的关键，众数是一组数据中出现次数最多的数据，中位数是将一组数据从小到大(或从大到小)重新排列后，中间的那个数据(或中间两个数据的平均数)，可用方差公式求方差，极差是一组数据中最大值与最小值的差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 加权平均数

链接中考≫加权平均数的计算是本章的重点，特别是对权的三种不同形式的考查是中考命题的热点. 一般以填空题、选择题的形式出现.

例2：（1）［中考·河南］小王参加某企业招聘测试，他的笔试、面试、技能操作得分分别为85分，80分，90分，若依次按照2∶3∶5的比例确定成绩，则小王的成绩是(　　)

A. 255分

B. 84分

C. 84.5分

D. 86分

（2）［中考·玉林防城港］学校抽查了30名学生参加“学习雷锋社会实践”的活动次数，并根据数据绘成了条形统计图（如图23-1），则30名学生参加活动的平均次数是(　　)

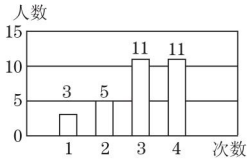


图23-1

A. 2　　B. 2.8

C. 3　　D. 3.3

导引：（1）把2，3，5分别看成是85分，80分和90分的权，按加权平均数的计算公式计算即可.

$\because \bar{x}=\dfrac{85\times2+80\times3+90\times5}{2+3+5}=86$(分)，

∴小王的成绩为86分.

故选D.

（2）观察条形统计图，可知30名学生中，活动次数为1的有3名，活动次数为2的有5名，活动次数为3的有11名，活动次数为4的有11名，据此可计算平均次数.

30名学生参加活动的平均次数是

$\dfrac{1\times3+2\times5+3\times11+4\times11}{30}=\dfrac{90}{30}=3$，

故选C.

答案：（1）D　（2）C

方法点拨：一般地，如果在n个数据中，x_1出现f_1次，x_2出现f_2次，…，x_k出现f_k次，且$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，那么$\bar{x}=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$为这组数据的加权平均数.

专题三 “三数”与“三差”的应用

链接中考≫平均数的计算要用到所有的数据，它表示所有的数据的平均水平；众数是当一组数据中某些数据多次重复出现时，人们往往关心的一个量；中位数可以代表一组数据的中间水平；方差和标准差反映一组数据的波动大小，即方差和标准差越大，波动越大，方差和标准差越小，波动越小；极差反映数据的变化范围. 做题时应该选择合适的统计量来描述数据.

例3：［中考·汕尾］在“全民读书月”活动中，小明调查了班级里40名同学本学期计划购买课外书的花费情况，并将结果绘制成如图23-2所示的统计图，请根据相关信息，解答下列问题：(直接填写结果)

（1）本次调查获取的样本数据的众数是_____；

（2）这次调查获取的样本数据的中位数是_____；

（3）若该校共有学生1 000人，根据样本数据，估计本学期计划购买课外书花费50元的学生有_____人.

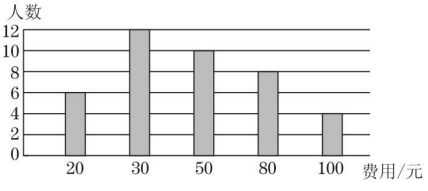


图23-2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引: (1)找到出现次数最多的数据,即为众数.

本学期计划购买课外书的花费为30元的人数最多,有12人,因此样本数据的众数是30元;

(2)把样本数据按从小到大(或从大到小)的顺序排列,处于中间位置的一个数据或两个数据的平均数即为中位数. 将40人本学期计划购买课外书的花费按从高到低(或从低到高)的顺序排列后,中间两个数据都是50元,则样本数据的中位数是50元;

(3)先算出本学期计划购买课外书花费50元的学生人数占调查总人数的比例,然后根据用样本估计总体的思想,用该校学生总人数1 000乘所得的比例即可求解.

估计本学期计划购买课外书的花费为50元的学生有$1\ 000 \times \frac{10}{40} = 250$(人).

答案: (1)30元 (2)50元 (3)250

例4: [中考·河北]某厂生产A,B两种产品,其单价随市场变化而做相应调整. 营销人员根据前三次单价的变化情况,绘制了如下统计表及不完整的折线图(如图23-3).

A,B产品单价变化统计表

	第一次	第二次	第三次
A产品单价/元	6	5.2	6.5
B产品单价/元	3.5	4	3

A,B产品单价变化折线图

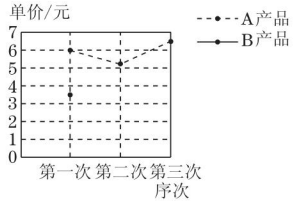


图23-3

并求得了A产品三次单价的平均数和方差:$\bar{x}_A = 5.9$元;$s_A^2 = \frac{1}{3} \times [(6-5.9)^2 + (5.2-5.9)^2 + (6.5-5.9)^2] = \frac{43}{150}$.

(1)补全图23-3中B产品单价变化的折线图. B产品第三次的单价比上一次的单价降低了_____%;

(2)求B产品三次单价的方差,并比较哪种产品的单价波动小;

(3)该厂决定第四次调价,A产品的单价仍为6.5元,B产品的单价比3元上调$m\%$ ($m>0$),使得A产品这四次单价的中位数是B产品四次单价中位数的2倍少1元,求m的值.

导引: (1)根据题目中提供的数据可补全折线图;

(2)分别计算B产品单价的平均数和方差即可;

(3)首先确定这四次单价的中位数,然后确定第四次调价的范围,最后根据"A产品这四次单价的中位数是B产品四次单价中位数的2倍少1元"列式求m的值即可.

解: (1)补全折线图如图23-4所示;

25

A,B产品单价变化折线图

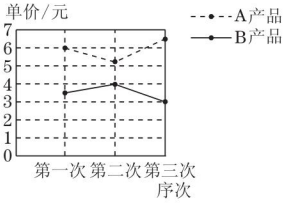


图23-4

(2)$\bar{x}_B = \frac{1}{3} \times (3.5+4+3) = 3.5$(元).

$s_B^2 = \frac{(3.5-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (3-3.5)^2}{3}$

$= \frac{1}{6}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\because \frac{1}{6} < \frac{43}{150}$,

$\therefore$ B 产品的单价波动小.

(3)第四次调价后,

对于 A 产品,这四次单价的中位数为 $\frac{6+6.5}{2}=\frac{25}{4}$(元);

对于 B 产品,$\because m>0$,

$\therefore$ 第四次单价大于3 元.

又$\because \frac{3.5+4}{2}\times 2-1=\frac{13}{2}>\frac{25}{4}$,

$\therefore$ 第四次单价小于4 元.

$\therefore \frac{3(1+m\%)+3.5}{2}\times 2-1=\frac{25}{4}$,

$\therefore m=25$.

方法点拨: 此题考查了统计的有关知识,主要包括平均数、中位数、方差的意义.它们各有局限性,因此要对统计量进行合理的选择和恰当的运用.

Ⅱ思想方法专题

专题四 统计思想

专题解读>>运用统计思想,就是考查统计的有关知识,主要包括平均数、中位数和众数的意义,方差对数据决策的影响等,在中考中常以解答题形式出现.

例5: 6 月 5 日是世界环境日,某校组织了一次环保知识竞赛,每班选 25 名同学参加比赛,成绩分为 A,B,C,D 四个等级,其中相应等级的得分依次记为 100 分、90 分、80 分、70 分,学校将某年级的一班和二班的成绩整理并绘制成统计图,如图 23-5 所示:

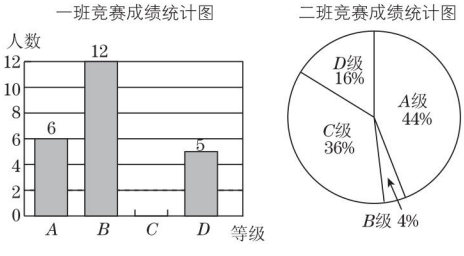


图 23-5

根据以上提供的信息解答下列问题:

(1)把一班竞赛成绩统计图补充完整;

(2)求出下表中 a,b,c 的值:

	平均数/分	中位数/分	众数/分
一班	a	b	90
二班	87.6	80	c

(3)请从以下给出的三个方面中任选一个对这次竞赛成绩的结果进行分析:

①从平均数和中位数方面比较一班和二班的成绩;

②从平均数和众数方面比较一班和二班的成绩;

③从 B 级以上(包括 B 级)的人数方面来比较一班和二班的成绩.

导引: (2)题根据平均数,中位数,众数的定义解答;

(3)题答案不唯一,选择不同的方面,结论可能不同.

解: (1)一班中 C 级有 $25-6-12-5=2$(人).

故补全统计图如图 23-6.

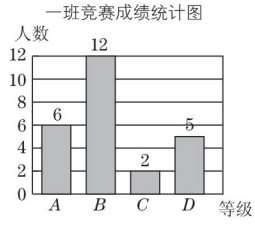


图 23-6

(2)$a=(6\times 100+12\times 90+2\times 80+70\times 5)\div 25=87.6$;

$b=90$;$c=100$.

(3)①从平均数和中位数方面来比较,一班的成绩较好;

②从平均数和众数方面来比较,二班的成绩较好;

③从 B 级以上(包括 B 级)的人数方面来比较,一班的成绩较好.

以上任选一个结论即可.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专题五 数形结合思想

专题解读>>在确定“三数”和“三差”时，一般需要从统计图表中准确提取信息，进行数形结合，对统计图表中的数据进行恰当的分析. 这种解决问题的思想方法在中考中运用较广泛.

例6：［中考·连云港］随着我市社会经济的发展和交通状况的改善，我市的旅游业得到了高速发展，某旅游公司对我市一企业个人旅游年消费情况进行问卷调查，随机抽查部分员工，记录每个人年消费金额，并将调查数据适当整理，绘制成如下两幅尚不完整的表和图（如图23-7）；

组别	个人年消费金额 x/元	频数（人数）	频率
A	$x \leqslant 2\,000$	18	0.15
B	$2\,000 < x \leqslant 4\,000$	a	b
C	$4\,000 < x \leqslant 6\,000$		
D	$6\,000 < x \leqslant 8\,000$	24	0.20
E	$x > 8\,000$	12	0.10
合计		c	1.00

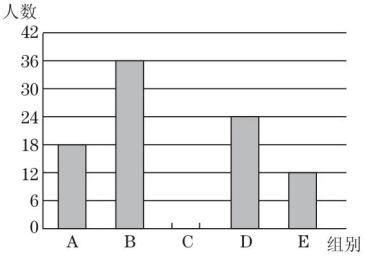


图23-7

根据以上信息回答下列问题：

（1）a = _____，b = _____，c = _____，并将条形统计图补充完整；

（2）这次调查中，个人年消费金额的中位数出现在_____组；

（3）若这个企业有3 000名员工，请你估计个人旅游年消费金额在6 000元以上的人数.

导引：（1）由统计图中的B组人数得到 a，由统计表的A组数据得到总人数 c，再根据频率 = 频数 ÷ 总数，得到 b，求得C组人数，从而可将条形统计图补充完整.

（2）这次共调查了120人，其中A组18人，B组36人，C组30人，D组24人，E组12人，中位数应是第60个数据与第61个数据的平均数，这两个数据都在C组，故个人年消费金额的中位数出现在C组.

（3）个人旅游年消费金额在6 000元以上，是指D，E两组，它们的频率分别为0.20和0.10，由此可知样本数据中，个人旅游年消费金额在6 000元以上的频率为0.30，进而由总人数乘0.30可求得结果.

解：（1）36；0.30；120

C组人数为120 − 18 − 36 − 24 − 12 = 30（人）. 补充完整的条形统计图如图23-8所示：

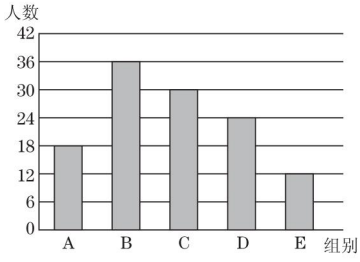


图23-8

（2）C

（3）估计个人旅游年消费金额在6 000元以上的人数为3 000 ×（0.10 + 0.20）= 900（人）.

技巧点拨：频数与总数的比值称为频率；将一组数据按大小顺序排列，如果数据的个数是奇数，那么处于中间位置的数据叫做这组数据的中位数，如果数据的个数是偶数，那么处于中间位置的两个数据的平均数叫做这组数据的中位数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

论“决策”

决策型应用题是中考命题改革以来出现的一种反映时代要求的新题型. 这类题从实际生产和生活中提出，需要先将其抽象为数学问题，再用数学知识和方法加以解决. 它反映了数学应用的广泛性，也考查了学生的创新意识和初步的创新能力. 这类题目一般涉及的数学知识并不复杂，但由于题目文字量大，从中提取有用信息构思解题方案有一定难度. 近年各地中考题中，决策型问题出现越来越多，特别要加强阅读能力的训练，提高、培养快速、准确提取数学信息的能力. 除本章利用统计图表分析数据作决策外，下面还介绍了几种作决策的问题：

一、数与式的应用

例 1　甲、乙两人是好朋友，一个月里两次同时到一家粮油商店去打油，两次的油价有变化. 他们两人的购买方式不一样，其中甲每次总是打一斤油；乙每次只拿出一元钱来打油，而不管能买多少. 问这两种打油方式，哪一种合算？（用两次打油的平均单价为标准来衡量）.

二、方程的应用

例 2　某厂家对一工程建设招标，投标结果是甲、乙两队合做需 6 天完成，承包费为 8 700 元；乙、丙两队合做需 10 天完成，承包费为9 500 元；甲、丙两队合做 5 天完成全部工程的$\frac{2}{3}$，厂家需付 5 500 元. 假如你是厂长，要求在半个月内竣工，雇哪个队单独完成此项工程最合算（假定只考虑工程费用这一项指标）？

三、不等式的应用

例 3　某汽运公司计划装运甲、乙、丙三种蔬菜到外地销售，如下表，其中每辆汽车按规定满载，并且每辆汽车只能装一种蔬菜. 经理决定用 20 辆汽车装运 36 吨蔬菜. 作为技术调度，他可以如何安排？怎样安排可使公司收益最多？

蔬菜种类	甲	乙	丙
每辆汽车能装的吨数	2	1	1.5
每吨蔬菜可获利润（百元）	5	7	4

四、函数的应用

例 4　在某商品的销售过程中，销量y（件）是单价x（元）的一次函数，而售出商品的总成本z（元）又是销量y（件）的一次函数. 现有一组统计数据如下表.

单价 x（元）	120	2 400	…
销量 y（件）	2 400	1 600	…

销量 y（件）	130	1 600	…
成本 z（元）	145 000	105 000	…

根据国家有关税收政策，每售出一件商品要向国家纳税 2 元.

求这种商品单价定为何值时，商家能获得最大销售利润，并求出这个最大销售利润.

五、直线形的应用

例 5　如图 23-9，A，B 两个村子在河 CD 的同侧，它们到河边的距离分别为 AC = 1 km，BD = 3 km，又 CD = 3 km，现要在河边 CD 上建一水厂向 A，B 两村输送自来水，铺设水管的工程费用为每千米 2 万元，请你在 CD 上选择水厂位置 O，使铺设水管的费用最省，最少费用是多少？

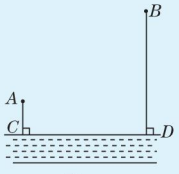


图 23-9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见262页

一、选择题

1. [中考·济宁]在一次数学答题比赛中,五位同学答对题目的个数分别为7,5,3,5,10,则关于这组数据的说法不正确的是(　　)

A. 众数是5　　B. 中位数是5

C. 平均数是6　　D. 方差是3.6

2. [中考·德阳]受央视《朗读者》节目的影响,某校七年级2班近期准备组织一次朗诵活动,语文老师调查了全班学生平均每天的阅读时间,统计结果如下表所示,则在本次调查中,全班学生平均每天阅读时间的中位数和众数分别为(　　)

每天阅读时间(小时)	0.5	1	1.5	2
人数	8	9	10	3

A. 2,1　　B. 1,1.5　　C. 1,2　　D. 1,1

3. [中考·内江]某校有25名同学参加某比赛,预赛成绩各不相同,取前13名参加决赛,其中一名同学已经知道自己的成绩,能否进入决赛,只需要再知道这25名同学成绩的(　　)

A. 最高分　　B. 中位数

C. 方差　　D. 平均数

4. [中考·广安]初三体育素质测试,某小组5名同学成绩如下表所示,有两个数据被遮盖.

编号	1	2	3	4	5	方差	平均成绩
得分	38	34	■	37	40	■	37

那么被遮盖的两个数据依次是(　　)

A. 35,2　　B. 36,4　　C. 35,3　　D. 36,3

5. [中考·福州]下表是某校合唱团成员的年龄分布. 对于不同的x,下列关于年龄的统计量不会发生改变的是(　　)

年龄/岁	13	14	15	16
频数	5	15	x	$10-x$

A. 平均数,中位数　　B. 众数,中位数

C. 平均数,方差　　D. 中位数,方差

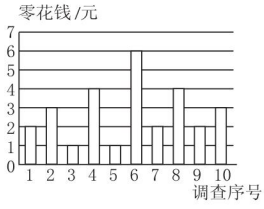
二、填空题

6. 某商店一段时间内销售了各种不同价格的项链75条,其价格和销售数量如下表:

价格/元	20	25	30	35	40	50	70	80	100	150
数量/条	1	3	9	6	7	31	6	6	4	2

下次进货时,你建议该商店应多进价格为_____元的项链.

7. 八年级某班为了引导学生树立正确的消费观,随机调查了10名同学某日除三餐以外的零花钱情况,其统计图如下,据图可知:零花钱在3元(包括3元)以上的学生所占比例为_____,该班学生每日零花钱的平均数大约是_____元.



(第7题)

8. 一组数据3,x,0,-1,-3的平均数是1,则这组数据的极差为_____.

9. [中考·温州]某小组6名同学的体育成绩(满分为40分)分别为:36,40,38,38,32,35,这组数据的中位数是_____分.

10. 为了考察甲、乙两种小麦的长势,分别从中抽取20株测得其高度,并求得它们的方差分别为$s_{甲}^2=3.6$,$s_{乙}^2=15.8$,则_____种小麦长势比较整齐.

三、解答题

11. [中考·温州]有甲、乙、丙三种糖果混合而成的什锦糖100千克,其中各种糖果的单价和千克数如下表所示,商家用加权平均数来确定什锦糖的单价.

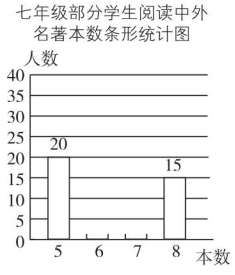
	甲种糖果	乙种糖果	丙种糖果
单价(元/千克)	15	25	30
千克数	40	40	20

(1)求该什锦糖的单价;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

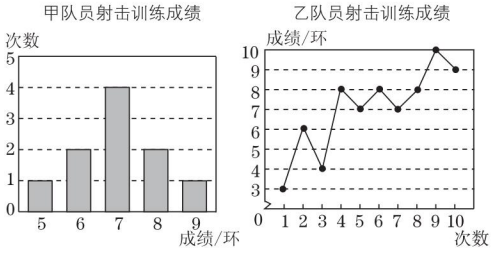
(2)为了使什锦糖的单价每千克至少降低2元,商家计划在什锦糖中加入甲、丙两种糖果共100千克,问其中最多可加入丙种糖果多少千克?

12. 为响应"全民阅读"号召,某校在七年级800名学生中随机抽取100名学生,对该年级学生在2018年全年阅读中外名著的情况进行调查,整理调查结果发现,学生阅读中外名著的本数,最少的有5本,最多的有8本,并根据调查结果绘制了如图所示的不完整的条形统计图,其中阅读了6本的人数占被调查人数的30%,根据图中提供的信息,补全条形统计图并估计该校七年级全体学生在2018年全年阅读中外名著的总本数.



(第12题)

13. [中考·青岛]甲、乙两名队员参加射击训练,成绩分别被制成下列两个统计图:



(第13题)

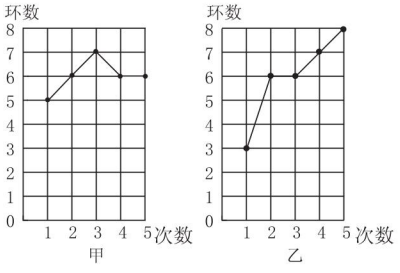
根据以上信息,整理分析数据如下:

	平均成绩/环	中位数/环	众数/环	方差
甲	a	7	7	1.2
乙	7	b	8	c

(1)写出表格中a,b,c的值;

(2)分别运用上表中的四个统计量,简要分析这两名队员的射击训练成绩.若选派其中一名参赛,你认为应选哪名队员?

14. 甲、乙两人在相同的条件下各射靶5次,每次射靶的成绩情况如图所示.



(第14题)

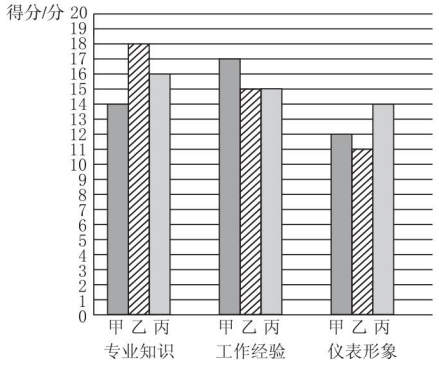
(1)请你根据图中的数据填写下表:

	平均数/环	众数/环	方差
甲		6	
乙	6		2.8

(2)把平均数和方差相结合看,谁的成绩好些? 【导学号:3572905】

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

15. 某单位需招聘一名工作人员，有甲、乙、丙三位候选人进入最后测试，三人的专业知识、工作经验、仪表形象三项得分如下图.（每项成绩满分为 20 分）



（第 15 题）

（1）利用图中提供的信息，在专业知识方面 3 人得分的极差是多少？在工作经验方面 3 人得分的众数是多少？在仪表形象方面谁最有优势？

（2）如果专业知识、工作经验、仪表形象三个方面的重要性之比为 10 ∶ 7 ∶ 3，那么作为人事主管，你应该录用哪一位应聘者？为什么？

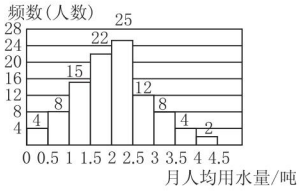
（3）在（2）的条件下，你对落聘者有何建议？

16. 某市为了节约生活用水，计划制定居民统一的月人均用水量标准，然后根据标准，实行分段收费，为此，对居民去年的月人均用水量进行了抽样调查，并根据调查结果绘制了去年月人均用水量的频数分布直方图（如图，图中每组含最小值，不含最大值），请根据图中信息解答下列问题：

（1）本次调查的居民人数为_____人；

（2）本次调查的居民月人均用水量的中位数落在频数分布直方图中的第_____小组内（从左至右数）；

（3）当地政府希望让 85% 左右居民的月人均用水量低于制定的月人均用水量标准，根据上述调查结果，你认为月人均用水量标准（取整数）定为多少吨时较为合适？



（第 16 题）

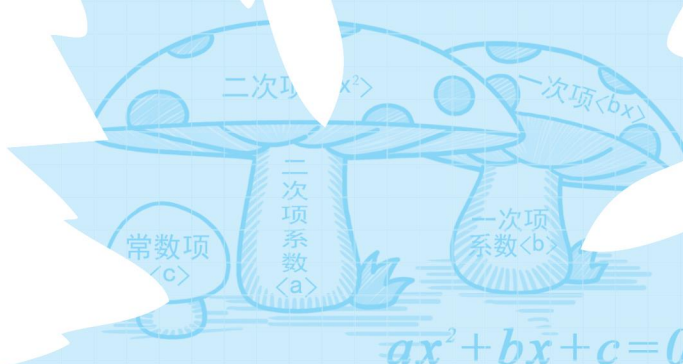
错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十四章 一元二次方程

领会方程的降次思想

数学点拨



你将学到的核心考点

- 一元二次方程及相关概念 □
- 一元二次方程的解法——
  配方法　公式法　因式分解法 □
- 一元二次方程根的判别式 □
- 一元二次方程根与系数的关系 □
- 一元二次方程的应用 □

我们为你提供的核心方法

整体代入法	□	直接开平方法	□
换元法	□	转化思想	□
建模思想	□	分类讨论思想	□

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

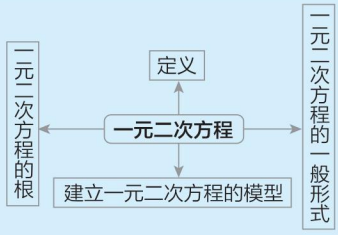
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.1 一元二次方程

核心知识

- 一元二次方程的定义
- 一元二次方程的一般形式
- 建立一元二次方程的模型
- 一元二次方程的根

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元二次方程的定义（重点）

1 定义： 只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程，叫做一元二次方程.

要点精析///

(1) 理解定义，要掌握三个关键点：方程是整式方程；“一元”是指方程中只含有一个未知数；“二次”是指该未知数的最高次数是 2.

(2) **一元二次方程的识别方法：**

整理前：①整式方程，②只含一个未知数；整理后：未知数的最高次数是 2.

2 一元二次方程的一般形式：

一般地，任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都能化成如下形式：$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$. 这种形式叫做一元二次方程的一般形式，其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数，bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项.

要点精析///

(1) $ax^2+bx+c=0$，当 $\boldsymbol{a\neq0}$ 时，方程才是一元二次方程，但 b，c 可以是 0.

(2) 将一个一元二次方程化成一般形式，可以通过**去分母**、**去括号**、**移项**、**合并同类项**等步骤.

(3) 指出一元二次方程的某项时，应连同未知数的系数一起；指出某项系数时应连同它前面的符号一起.

(4) 若已明确指出方程是一元二次方程，则有“二次项系数不为 0”这一条件成立.

3 易错警示：

(1) 忽略一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中二次项系数 $a\neq0$ 的条件.

(2) 确定一元二次方程的各项系数时，不要忽略系数的符号.


一元二次方程的定义

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用一元二次方程的定义识别一元二次方程

例 1： 下列方程：①$x^2+y-6=0$；②$x^2+\frac{1}{x}=2$；③$x^2-x-2=0$；④$x^2-2+5x^3-6x=0$；⑤$2x^2-3x=2(x^2-2)$，是一元二次方程的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

导引： 要判断一个方程是否是一元二次方程，要从原方程及整理后的方程两方面进行判断，看其是否符合一元二次方程的条件. ①中有两个未知数；②不是整式方程；④未知数的最高次数是 3；⑤整理后二次项系数为 0.

答案： A

方法点拨

判定一个方程是一元二次方程的方法：(1) 整理前是整式方程且只含有一个未知数；(2) 整理后未知数的最高次数是 2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用一元二次方程的一般形式确定各项及其系数

例2： 将一元二次方程$(x-2)(x+1)=2x+5$化为一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

导引： 各部分名称是在一般形式下定义的，因此必须先将原方程转化为一般形式再进行回答.

解： 整理方程得：$x^2-3x-7=0$，

所以二次项系数是1，一次项系数是-3，常数项是-7.

考查角度3 利用一元二次方程中二次项系数不为0确定字母系数的值

例3： 关于x的一元二次方程$(a-2)x^2+3x+a^2-4=0$的常数项为0，求a的值.

导引： 根据“常数项为0”这一条件可列出以a为未知数的方程，求出a的值，同时注意二次项的系数不能为0.

解： ∵ 关于x的一元二次方程$(a-2)x^2+3x+a^2-4=0$的常数项为0，

$$\therefore \begin{cases} a-2\neq 0, \\ a^2-4=0, \end{cases}$$

解得$a=-2$.

同类变式 （答案见263页）

3. 已知关于x的方程$(a-4)x^{|a-2|}-2x+3=0$是一元二次方程，则a的值为(　　)

A. 0　　B. 4

C. 0或4　　D. 2

方法点拨

当整理为一般形式后，如果二次项系数是负数，一般要把它转化为正数，若系数是分数，一般要把它转化为整数.

易错警示

在解由一元二次方程的定义求有关待定字母的值的题目时，先要把方程整理成一元二次方程的一般形式，再由题中给出的条件及二次项系数不为0列式求解.

温馨提示：条件中若明确指出该方程是一元二次方程，则隐含“二次项系数不能为0”这一条件，解题时容易漏掉.

知识2 建立一元二次方程的模型

1. **一元二次方程模型：** 一元二次方程是刻画现实世界的一个有效数学模型，它是把实际问题中语言叙述的数量关系通过设未知数用一元二次方程来表达.
2. **建立一元二次方程模型的一般步骤：**
（1）审题，认真阅读题目，弄清未知量和已知量之间的关系；（2）设出合适的未知数，一般设为x；（3）确定等量关系；（4）根据等量关系列出一元二次方程，有时要化为一般形式.
3. **常用一元二次方程来建模的问题有：** 图形的面积问题、增长（利润）率问题、行程问题、工程问题等.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用一元二次方程模型解决实际中的代数应用

例4： [中考·巴中] 某种品牌运动服经过两次降价，每件零售价由560元降为315元. 已知两次降价的百分率相同，求每次降价的百分率. 设每次降价的百分率为x，下面所列的方程中正确的是(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. $560(1+x)^2=315$　　B. $560(1-x)^2=315$

C. $560(1-2x)^2=315$　　D. $560(1+x^2)=315$

导引： 百分率问题的表达式为 $a(1\pm x)^n=b$. 根据题意，得每次降价的百分率为 x，降价的基数 a 是 560，降价后的数量 b 是 315，“两次降价”表明 $n=2$.

根据题意，得 $560(1-x)^2=315$，故选择 B.

答案： B

同类变式 （答案见 264 页）

4. 在圣诞节到来之际，九(四)班所有的同学准备送贺卡相互祝贺，所有同学送完后共送了 1 980 张贺卡，求九(四)班有多少名同学. 设九(四)班有 x 名同学，列出关于 x 的方程，并将方程化成一般形式.

技巧点拨

解决百分率问题，关键是要掌握其表达式 $a(1\pm x)^n=b$. 其中 a 是增长（减少）的基数，b 是增长（减少）后的数量，x 是平均增长（减少）率，n 是增长（减少）的次数.

考查角度2 利用一元二次方程模型解决实际中的几何应用

例5： ［中考·哈尔滨］今年我市计划扩大城区绿地面积，现有一块长方形绿地，它的短边长为 60 m，若将短边增长到与长边相等（长边不变），使扩大后的绿地的形状是正方形，则扩大后的绿地面积比原来增加 1 600 m^2，设扩大后的正方形绿地边长为 x m，下面所列方程正确的是(　　)

A. $x(x-60)=1\,600$　　B. $x(x+60)=1\,600$

C. $60(x+60)=1\,600$　　D. $60(x-60)=1\,600$

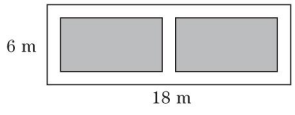
导引： 扩大部分是一个长方形，根据面积 = 长 × 宽，建立方程模型.

扩大后的正方形绿地边长为 x m，则扩大部分长方形的长为 x m，宽为 $(x-60)$ m，根据题意，得 $x(x-60)=1\,600$. 故选 A.

答案： A

同类变式 （答案见 264 页）

5. ［中考·宁夏］如图，某小区有一块长为 18 m，宽为 6 m 的矩形空地，计划在其中修建两块相同的矩形绿地，它们的面积之和为 60 m^2，两块绿地之间及周边留有宽度相等的人行通道. 若设人行通道的宽度为 x m，则可以列出关于 x 的方程是(　　)



（第 5 题）

A. $x^2+9x-8=0$　　B. $x^2-9x-8=0$

C. $x^2-9x+8=0$　　D. $2x^2-9x+8=0$

技巧点拨

- 建立一元二次方程模型解决实际问题时，既要根据题目条件中给出的等量关系，又要抓住题目中隐含的一些常用关系式（如面积公式、体积公式、利润公式等）来列方程.
- 列一元二次方程的一般步骤：① 审题，找未知量与已知量；② 设合适的未知数；③ 确定等量关系；④ 列一元二次方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 一元二次方程的解（根）

1 **定义：** 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元二次方程的解，也叫做这个方程的根.

要点精析///

(1)判断某个数是方程的根的条件：使方程左右两边相等.

(2)根据方程的根的定义可以判断一个数是不是方程的根.

2 若已知一元二次方程的解求方程中待定系数的值，则根据一元二次方程的解的定义，用解替换方程中的未知数，然后通过解方程求出待定系数的值.

3 **易错警示：** 一般地，一元二次方程的根不止一个，只要符合定义都是方程的根.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用一元二次方程根的定义验证解

例6： 下面哪些数是方程 $x^2-x-2=0$ 的根？

$-3,-2,-1,0,1,2,3$

导引： 根据一元二次方程的根的定义，将这些数作为未知数 x 的值分别代入方程中，能够使方程左右两边相等的数就是方程的根.

解： $-1,2$.

技巧点拨

检验一个数是否为方程的解（或根），只要把这个数分别代入方程的左右两边算出数值，看它们是否相等.在找解时注意使一元二次方程左右两边相等的未知数的值不一定只有一个.

同类变式 （答案见264页）

6. 下表是某同学求代数式 x^2-x 的值的情况，根据表格可知方程 $x^2-x=2$ 的根是(　　)

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2-x	…	6	2	0	0	2	6	…

A. $x=-1$　　B. $x=0$

C. $x=2$　　D. $x=-1$ 或 $x=2$

考查角度2 利用方程的解求方程中待定字母的值

例7： ［中考·衡阳］若关于 x 的方程 $x^2+3x+a=0$ 有一个根为 -1，则 a 的值为(　　)

A. -2　　B. 2

C. 4　　D. -3

技巧点拨

方程的根就是使方程左右两边相等的未知数的值，因此求含有字母系数的一元二次方程中的字母的值时，只需把已知方程的根代入原方程就可求出相关的待定字母的值.

导引： 因为 $x=-1$ 是方程的一个根，所以代入方程中肯定是成立的. 此时方程转化为关于 a 的一元一次方程，求解即可得到 a 的值.

把 $x=-1$ 代入方程 $x^2+3x+a=0$ 可得 $(-1)^2+3\times(-1)+a=0$，

解得 $a=2$，故选 B.

答案： B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见264页）

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+m^2-2m=0$ 有一个实根为 -1，求 m 的值.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 根据一元二次方程的概念求有关代数式的值

例8： ［综合题］若方程 $(3m^2+m-4)\cdot x^{|m+1|}-5x=12$ 是关于 x 的一元二次方程，求 m 的值.

导引： 根据一元二次方程的概念可知，未知数的最高次数应是2，且二次项系数不能为0.

解： 由题意知 $|m+1|=2$，且 $3m^2+m-4\neq 0$，解 $|m+1|=2$，得 $m=1$ 或 $m=-3$.

当 $m=1$ 时，$3m^2+m-4=0$；

当 $m=-3$ 时，$3m^2+m-4\neq 0$.

所以满足条件的 m 的值为 -3.

方法点拨： 本题运用建模思想解答，根据一元二次方程满足的条件“① 未知数的最高次数是2；② 二次项系数不为0”建立方程和不等式，求出相关字母的值.

拔尖角度 2 利用一元二次方程根的定义求代数式的值

例9： 已知 a 是方程 $x^2-2\,016x+1=0$ 的解，求 $2a^2-4\,031a+1-\dfrac{2\,016a^2}{a^2+1}$ 的值.

导引： 根据方程的解的定义，将 a 作为未知数的值代入方程中，得到关于 a 的等量关系式，然后分析待求值的式子的结构，直接代入或变形后代入求值.

解： 把 $x=a$ 代入 $x^2-2\,016x+1=0$，得 $a^2-2\,016a+1=0$，

$\therefore a^2-2\,016a=-1$，

即 $2\,016a=a^2+1$，

$\therefore \dfrac{2\,016a^2}{a^2+1}=a$.

$\therefore 2a^2-4\,031a+1-\dfrac{2\,016a^2}{a^2+1}$

$=2(a^2-2\,016a)+a+1-a$

$=2\times(-1)+1$

$=-1$.

方法点拨： 如果 x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，则有式子 $ax_0^2+bx_0+c=0$ 成立.当求含有 x_0 的代数式的值时，找出该代数式与 $ax_0^2+bx_0+c$ 相类似的结构利用整体思想代入求值.

拔尖角度 3 巧借一元二次方程根的定义构造一元二次方程

例10： 已知 $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$ $(a\neq b)$，请构造一个以 a，b 为根的一元二次方程（以 x 为未知数），并求 x^2+3x+2 的值.

导引： 观察两个等式的结构，结合一元二次方程的根的定义可知 a，b 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根. 经过变形可求出要求的代数式的值.

解： 因为 $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$ $(a\neq b)$，

由一元二次方程的根的定义，

可知以 a，b 为根的一元二次方程是 $x^2+3x+1=0$，

所以 x^2+3x+2

$=(x^2+3x+1)+1$

$=1$.

技巧点拨： 根据一元二次方程的根的定义，若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$（$a\neq 0$）.反之结论同样成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见264页）

基础巩固练

1. 下列方程中，是一元二次方程的是（　　）

A. $x-y^2=1$　　B. $\sqrt{x^2-1}=0$

C. $\frac{1}{x^2}-1=0$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{x-1}{3}=0$

2. 将方程 $5x=1-2x^2$ 化为一般形式后（使二次项系数为正数），二次项系数、一次项系数和常数项依次为（　　）

A. 5，1，−2　　B. 2，5，−1

C. 5，2，−1　　D. −2，−5，−1

3. ［中考·南充］若 $2n(n\neq0)$ 是关于 x 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，则 $m-n=$ _____.

4. 若方程 $(m-1)x^2+\sqrt{m}x=1$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的取值范围是_____.

5. 参加聚会的每两人都握一次手，所有人共握手36次，则有多少人参加聚会？设参加聚会的人数为 x，可以列出方程为_____.

6. 先化简，再求值：

$\left(a-\frac{2a}{a+1}\right)\div\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}-a^2$，其中 a 是方程 $x^2-x-\frac{7}{2}=0$ 的根.

7. 关于 x 的方程 $(m^2-8m+19)x^2-2mx-13=0$ 是否是一元二次方程，甲、乙两同学有不同意见.

甲认为：原方程的二次项系数与 m 有关，可能为0，所以不能确定这个方程就是一元二次方程.

乙认为：原方程的二次项系数肯定不会为0，所以可以确定这个方程是一元二次方程.

你认为甲、乙谁正确？证明你的结论.

能力提升练

8. 已知 m,n 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 a 的值等于（　　）

A. −5　　B. 5　　C. −9　　D. 9

9. ［中考·荆门］已知 $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2+(k^2-2)x+2k+4=0$ 的一个根，则 k 的值为_____.

10. 已知关于 x 的一元二次方程的一个根为1，写出一个符合条件的方程：_____.

11. ［阅读题］请阅读下列材料：

问题：已知方程 $x^2+x-3=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的2倍.

解：设所求方程的根为 y，则 $y=2x$.

$\therefore x=\frac{y}{2}$. 把 $x=\frac{y}{2}$ 代入已知方程得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y}{2}-3=0$，化简得 $y^2+2y-12=0$，故所求方程为 $y^2+2y-12=0$.

(1) 已知方程 $x^2+x-1=0$，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的3倍；

(2) 已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等于0的实数根，求一个一元二次方程，使它的根分别是已知方程根的倒数；

(3) 已知关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 有两个同号的实数根，求一个方程，使它的根分别是已知方程根的平方.

12. ［探究题］已知 a 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的一个根，试求 $\frac{a^3-2a^2-5a+1}{a^2+1}$ 的值.

思维拓展练

13. ［中考·襄阳］若正数 a 是一元二次方程 $x^2-5x+m=0$ 的一个根，$-a$ 是一元二次方程 $x^2+5x-m=0$ 的一个根，则 a 的值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

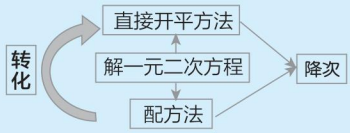
24.2 解一元二次方程

24.2.1 配方法

核心知识

- 直接开平方法解一元二次方程
- 配方法解一元二次方程

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用直接开平方法解一元二次方程（重点）

1 定义： 利用平方根的意义，直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法.

2 直接开平方法求方程的解的方法：

(1) $x^2=p\ (p\geqslant 0)\rightarrow x=\pm\sqrt{p}$；

(2) $(x+a)^2=p(p\geqslant 0)\rightarrow x=\pm\sqrt{p}-a$；

(3) $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0,m\neq 0)\rightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{p}-n}{m}$.

3 易错警示：

直接开平方法利用的是平方根的意义，所以要注意两点：

(1) 不要只取正的平方根而遗漏负的平方根；

(2) 只有非负数才有平方根，所以直接开平方法的前提是 $x^2=p$ 中 $p\geqslant 0$.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用直接开平方的意义求值

例1： ［中考·济宁］若一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，则 $\dfrac{b}{a}=$_____.

导引： 利用直接开平方法得到 $x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，可知方程的两个根互为相反数，故可求出 m 的值. 根据 m 的值再求 $\dfrac{b}{a}$ 的值.

由题意易知 $x^2=\dfrac{b}{a}(ab>0)$，

$\therefore x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，

$\therefore$ 方程的两个根互为相反数.

$\therefore m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$.

$\therefore$ 一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根分别是 2 与 -2.

$\therefore\sqrt{\dfrac{b}{a}}=2$，

$\therefore\dfrac{b}{a}=4$.

答案： 4

方法点拨

用直接开平方法解一元二次方程若方程能化成 $x^2=p$（$p\geqslant 0$）的形式，则方程的两根互为相反数.

同类变式 答案见 264 页

1. 若一元二次方程 $x^2=p-2$ 有实数根，则 p 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用直接开平方法的步骤解一元二次方程

例2： 用直接开平方法解下列方程：

(1) $x^2-81=0$；(2) $4x^2-64=0$；(3) $(x-3)^2=25$；

(4) $(x-5)^2=0$.

导引： 用直接开平方法解一元二次方程，先将方程化成 $x^2=p$ $(p\geqslant 0)$ 或 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0, m\neq 0)$ 的形式，再根据平方根的意义求解.

解： (1) 移项得 $x^2=81$，所以 $x=\pm 9$，即 $x_1=9, x_2=-9$.

(2) 移项得 $4x^2=64$，所以 $x^2=16$，

所以 $x=\pm 4$，即 $x_1=4, x_2=-4$.

(3) $x-3=\pm 5$，所以 $x_1=8, x_2=-2$.

(4) $x-5=0$，所以 $x_1=x_2=5$.

技巧点拨

用直接开平方法解一元二次方程时，首先将方程化成左边是含有未知数的完全平方式，右边是常数项，然后根据平方根的意义求解.当整理后方程的右边为0时，方程有两个相等的实数根.

知识2 用配方法解一元二次方程（重点）

1 配方及配方法

(1) 配方就是将一个多项式配成完全平方的形式.

(2) 配方法：通过配方，把一元二次方程变形为一边为含未知数的一次式的平方，另一边为常数，当常数为非负数时，利用开平方，将一元二次方程转化为两个一元一次方程，从而求出原方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做配方法.


配方法

要点精析///

(1) 对一个二次三项式的配方，关键就是扣住完全平方式的结构特征.

(2) 对一元二次方程配方的步骤是：①化：将方程化成一般形式，并且将二次项系数化为1；②移：将常数项移到方程的另一边；③配：方程两边同时加上一次项系数一半的平方.

2 用配方法解一元二次方程

用配方法解一元二次方程的步骤：(1) 配方，将方程化成 $(x+n)^2=p$ 的形式. (2) 开方，当 $p>0$ 时，方程有两个不相等的实数根：$x_1=-n+\sqrt{p}$，$x_2=-n-\sqrt{p}$；当 $p=0$ 时，方程有两个相等的实数根：$x_1=x_2=-n$；当 $p<0$ 时，方程没有实数根.

3 易错警示： 利用配方法解一元二次方程时，易忘记将二次项系数化为1或方程的两边同时加上一次项系数一半的平方.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用配方法进行配方

例3： 填空：

(1) x^2+10x+_____$=(x+$_____$)^2$；

(2) $x^2+($_____$)x+36=[x+($_____$)]^2$；

(3) $x^2-4x-5=(x-$_____$)^2-$_____.

导引： 配方就是要配成完全平方式，根据完全平方式的结构特征，当二次项系数为1时，常数项是一次项系数一半的平方.

答案： (1) 25；5

(2) ± 12；± 6

(3) 2；9

方法点拨

(1) 当二次项系数为1时，已知一次项的系数，则常数项为一次项系数一半的平方；已知常数项，则一次项系数为常数项的平方根的两倍，注意平方根(0除外)有两个.(2) 当二次项系数不为1时，先化二次项系数为1，然后再配方.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用配方法解一元二次方程

例4： 用配方法解下列方程：

(1)$x^2-4x+2=0$；　　(2)$6x^2-x-12=0$；

(3)$(x+2)^2-2(x+2)=15$.

导引： (1)(2)两题直接根据配方法的步骤解方程；(3)题可以将$x+2$看成一个整体，按照配方法的步骤解方程.

解： (1)配方，得$x^2-4x+(-2)^2=-2+(-2)^2$，$(x-2)^2=2$，由此可得$x-2=\pm\sqrt{2}$，$\therefore x_1=\sqrt{2}+2$，$x_2=-\sqrt{2}+2$.

(2)二次项系数化为1，得$x^2-\frac{1}{6}x-2=0$. 移项，得$x^2-\frac{1}{6}x=2$. 配方，得$x^2-\frac{1}{6}x+\left(-\frac{1}{12}\right)^2=2+\left(-\frac{1}{12}\right)^2$，$\left(x-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{289}{144}$，

由此可得$x-\frac{1}{12}=\pm\frac{17}{12}$，$\therefore x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{4}{3}$.

(3)配方得$(x+2)^2-2(x+2)+1=16$，$(x+2-1)^2=16$，由此可得$x+1=\pm4$，$\therefore x_1=3$，$x_2=-5$.

方法点拨

对于用配方法解一元二次方程，一般地，首先将二次项系数化为1，并将常数项移到方程的右边，再将方程的两边都加上一次项系数一半的平方，然后写成完全平方的形式，用直接开平方法求得方程的两个根.

▲同类变式 答案见264页

4. 解方程：$(x-2)^2=4(x-3)^2$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用配方法求最值

例5： 当x取何值时，代数式$2x^2-6x+7$的值最小？并求出这个最小值.

导引： 求代数式的最小值，要先将代数式配成$a(x+m)^2+n$的形式，然后根据完全平方的非负性求代数式的最小值.

解： $2x^2-6x+7$

$=2(x^2-3x)+7$

$=2\left[x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+7$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant0$，$\therefore 2x^2-6x+7\geqslant\frac{5}{2}$.

即当$x=\frac{3}{2}$时，$2x^2-6x+7$的值最小，最小值为$\frac{5}{2}$.

方法点拨： 代数式$ax^2+bx+c(a\neq0)$配成$a(x+m)^2+n$后，若$a>0$，则当$x=-m$时，代数式取得最小值n；若$a<0$，则当$x=-m$时，代数式取得最大值n.

拔尖角度2 巧借配方法判断三角形的形状

例6： 已知a,b,c是$\triangle ABC$的三边长，且$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，试判断三角形的形状.

导引： 将$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$两边同时乘以2，然后将等式左边配成三个非负数的和的形式.

解： $\because a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$.

$\therefore a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$.

$\therefore (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$.

$\therefore a-b=0$，$a-c=0$，$b-c=0$.

$\therefore a=b=c$.

$\therefore \triangle ABC$为等边三角形.

技巧点拨： 在一个等式中解决多个未知数的问题时，通常将等式通过配方变成几个非负数的和的形式，然后利用“若几个非负数的和等于零，则每个非负数都等于零”的性质解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见265页）

基础巩固练

1. 若代数式 $3x^2-6$ 的值为 21，则 x 的值是（　　）

A. 3　　B. ± 3

C. -3　　D. $\pm\sqrt{3}$

2. ［中考·临沂］一元二次方程 $y^2-y-\frac{3}{4}=0$ 配方后可化为（　　）

A. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$　　B. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$

C. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$　　D. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

3. 方程 $(x-1)^2=4$ 的解是_____.

4. 用适当的数填空：

x^2-4x+_____$=(x-$_____$)^2$；

m^2+（_____）$m+\frac{9}{4}=[m+$（_____）$]^2$.

5. 用直接开平方法解方程：

（1）$2x^2-8=0$；

（2）$(y-5)^2-36=0$；

（3）$(x-1)(x+1)=1$；

（4）$(x-1)^2=(2x+3)^2$.

6. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+4x=0$；

（2）$x^2-2x-2=0$；

（3）$2x^2-3x-6=0$；

（4）$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=0$.

能力提升练

7. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2-3x-a^2+1=0$ 的一个根为 2，则 a 的值是（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

8. 若方程 $4x^2-(m-2)x+1=0$ 的左边是一个完全平方式，则 m 等于（　　）

A. -2　　B. -2 或 6

C. -2 或 -6　　D. 2 或 -6

9. 已知方程 $x^2-6x+q=0$ 可以配方成 $(x-p)^2=7$ 的形式，那么 $x^2-6x+q=2$ 可以配方成（　　）

A. $(x-p)^2=5$　　B. $(x-p)^2=9$

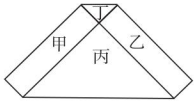
C. $(x-p+2)^2=9$　　D. $(x-p+2)^2=5$

10. ［中考·扬州］已知 $M=\frac{2}{9}a-1$，$N=a^2-\frac{7}{9}a$（a 为任意实数），则 M、N 的大小关系为（　　）

A. $M<N$　　B. $M=N$

C. $M>N$　　D. 不能确定

11. ［中考·台湾］如图所示的六边形是由甲、乙两个长方形和丙、丁两个等腰直角三角形所组成，其中甲、乙的面积和等于丙、丁的面积和. 若丙的一直角边长为 2，且丁的面积比丙的面积小，则丁的一直角边长为（　　）



（第 11 题）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $2-\sqrt{3}$　　D. $4-2\sqrt{3}$

思维拓展练

12. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$.

（1）求 a,b,c 的值；

（2）判断三角形的形状.

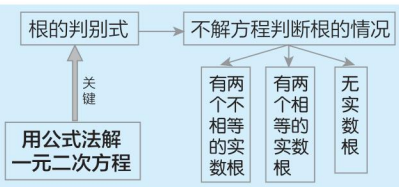
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.2 公式法

核心知识

- 根的判别式
- 利用公式法解一元二次方程

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 根的判别式

1 定义： 我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式，通常用希腊字母“Δ”表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

要点精析///

(1) 在用配方法解一元二次方程的一般形式时，因为 b^2-4ac 的值决定了一元二次方程根的情况，所以将 b^2-4ac 命名为根的判别式.

(2) 计算根的判别式时，先将方程化成一般形式，确定 a,b,c 的值后再计算.

2 一元二次方程的根的个数的判断方法：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不相等的实数根.

(2) 当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实数根.

(3) 当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 无实数根.

要点精析///

(1) 利用根的判别式可以不解方程判断方程根的情况，反之，已知方程根的情况可以确定方程中待定字母系数的取值范围.

根的判别式

(2) 一元二次方程有实数根包括有两个相等的实数根和两个不相等的实数根两种情况，即 $\Delta\geqslant0$.

3 易错警示： 若条件中说方程有两个实数根，则隐含该方程为一元二次方程. 利用根的判别式求待定字母系数的取值范围时，易忽视二次项系数不为 0 的隐含条件.

拨考向

提分·秘诀

考查角度1 利用根的判别式的概念求根的判别式

例1： 求下列一元二次方程的根的判别式的值.

(1) $-\frac{1}{4}x^2-x=1$；(2) $x^2=-\sqrt{2}x-\frac{1}{3}$.

导引： 根的判别式是在一般形式下确定的，因此应先将方程化成一般形式，然后算出根的判别式的值.

解： (1) 原方程化为 $\frac{1}{4}x^2+x+1=0$，

$\Delta=1^2-4\times1\times\frac{1}{4}=0$.

(2) 原方程化为 $x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{3}=0$，

$\Delta=(\sqrt{2})^2-4\times1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

方法点拨

求一元二次方程的根的判别式时应注意两点：一是将方程化成一般形式后才能确定 a,b,c 的值；二是确定 a,b,c 的值时不要漏掉符号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用根的判别式不解方程判断根的情况

例2： 已知一元二次方程 $2x^2-5x+3=0$，则该方程根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法判断

导引： 根据一元二次方程算出 b^2-4ac 的值，根据 b^2-4ac 的值判断根的情况.

$b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=1>0$，

所以方程有两个不相等的实数根. 故选 A.

答案： A

同类变式 (答案见 265 页)

2. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根　　B. 总有实数根

C. 有两个相等的实数根　　D. 没有实数根

方法点拨

判断方程根的情况的方法：在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，① 若左边是一个完全平方式，右边是零，则该方程有两个相等的实数根；② 若方程中 a，c 异号，或 $b\neq0$ 且 $c=0$ 时，则该方程有两个不相等的实数根；③ 当方程中 a，c 同号时，必须通过 Δ 的符号来判断根的情况.

考查角度3 利用根的判别式求待定字母系数的取值范围(或值)

例3： [中考·凉山州] 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2x+1=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m\leqslant3$　　B. $m<3$

C. $m<3$ 且 $m\neq2$　　D. $m\leqslant3$ 且 $m\neq2$

导引： 根据一元二次方程有实数根，可知方程根的判别式大于或等于零，从而建立关于 m 的不等式，再求解即可.

因为一元二次方程有实数根，

所以 $\Delta\geqslant0$，即 $4-4(m-2)\geqslant0$，

解得 $m\leqslant3$，

又因为方程为一元二次方程，所以 $m-2\neq0$，即 $m\neq2$，故选 D.

答案： D

易错警示

- 一元二次方程有实数根，包括有两个不相等的实数根和有两个相等的实数根，即 $\Delta\geqslant0$，易漏掉相等这种情况；
- 求待定系数的取值范围时易忽视方程为一元二次方程的前提：二次项系数不为 0.

知识 2 用公式法解一元二次方程

1 求根公式的定义： 当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实数根可以用 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求出，这个式子叫做一元二次方程的求根公式.

2 公式法的定义： 利用求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法.

注：运用公式法的前提是 $\Delta\geqslant0$.

3 用公式法解一元二次方程的一般步骤：

(1) 把一元二次方程化成一般形式；

(2) 确定 a，b，c 的值；

(3) 求出 b^2-4ac 的值；

(4) 若 $b^2-4ac\geqslant0$，则把 a，b 及 b^2-4ac 的值代入求根公式求解，当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数解.


公式法

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用公式法解一元二次方程

例4： 用公式法解方程：

(1) $3x^2-4x-1=0$；　　(2) $3x^2+1=2\sqrt{3}x$.

导引： 按照用求根公式法解一元二次方程的步骤进行即可.

解： (1)∵ $a=3, b=-4, c=-1$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times(-1)=16+12=28$,

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{4\pm\sqrt{28}}{6}=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$,

即 $x_1=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, x_2=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$.

(2) 原方程化为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$,

∵ $a=3, b=-2\sqrt{3}, c=1$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=12-12=0$,

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

即 $x_1=x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

技巧点拨

公式法适用于所有的一元二次方程（也称之为万能法），在使用公式法之前，一定要把原方程化成一般形式，当二次项系数为分数或负数时，还应化为正整数，从便确定系数，而且在用公式前应先计算出判别式的值，从便判断方程是否有实数解.

考查角度2 利用公式法将二次三项式因式分解

例5： 利用公式法分解因式.

(1) $6x^2-7x+1$；　　(2) $4x^2-x-5$.

导引： 构造一元二次方程 $6x^2-7x+1=0$ 和 $4x^2-x-5=0$，分别求出方程的两个解 x_1 和 x_2，然后将两个解代入 $a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ 中，即可得到因式分解的结果.

解： (1) 构造一元二次方程 $6x^2-7x+1=0$.

∵ $a=6, b=-7, c=1$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=49-4\times6\times1=25>0$.

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{25}}{2\times6}=\dfrac{7\pm5}{12}$, $\therefore x_1=1, x_2=\dfrac{1}{6}$.

∴ 因式分解的结果为 $6x^2-7x+1=6(x-1)\left(x-\dfrac{1}{6}\right)$.

(2) 构造一元二次方程 $4x^2-x-5=0$.

∵ $a=4, b=-1, c=-5$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=1-4\times4\times(-5)=81>0$.

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{81}}{2\times4}=\dfrac{1\pm9}{8}$, $\therefore x_1=\dfrac{5}{4}, x_2=-1$.

∴ 因式分解的结果为 $4x^2-x-5=4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x+1)$.

方法点拨

利用公式法分解因式的理论依据是：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1, x_2，则方程可化为 $a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$ 的形式，因此 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，所以利用公式法进行代数式 ax^2+bx+c（$a\neq0$）的因式分解时，可以先构造一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，然后利用公式法求出一元二次方程的解，再代入 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 完成因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用一元二次方程根的情况判断三角形的形状

例6： 已知 a,b,c 是三角形的三条边长，且关于 x 的方程 $(b+c)x^2+\sqrt{2}(a-c)x-\frac{3}{4}(a-c)=0$ 有两个相等的实数根，试判断三角形的形状.

导引： 根据方程有两个相等的实数根，可列出关于 a,b,c 的等式，经过适当的变形得出三角形三条边长的关系，从而判断三角形的形状.

解： ∵ 方程 $(b+c)x^2+\sqrt{2}(a-c)x-\frac{3}{4}(a-c)=0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore [\sqrt{2}(a-c)]^2-4(b+c)[-\frac{3}{4}(a-c)]=0$，

$\therefore (a-c)(2a+3b+c)=0$.

∵ a,b,c 是三角形的三条边长，

$\therefore 2a+3b+c\neq 0$，

$\therefore a-c=0$，

即 $a=c$，

∴ 此三角形是等腰三角形.

方法点拨： 一般来说，要判断三角形的形状，这个三角形一定是个特殊的三角形，由根的判别式可以得到三角形三边的关系，从边的角度判断，① 当 $a=b$ 或 $a=c$ 或 $b=c$ 时，它是等腰三角形；② 当 $a=b=c$ 时，它是等边三角形；③ 当 $a^2+b^2=c^2$ 或 $a^2+c^2=b^2$ 或 $b^2+c^2=a^2$ 时，它是直角三角形.若同时满足① 和③ 时，它是等腰直角三角形.

拔尖角度 2 巧借一元二次方程根的情况解决分式有无意义的问题

例7： 已知分式 $\frac{x-3}{x^2-5x+a}$，当 $a<6$ 时，使分式无意义的 x 的值有多少个？

导引： 分式无意义即分式的分母等于0，所以此题可转化为判断方程 $x^2-5x+a=0$ 的解的个数问题. 结合 $a<6$ 可判断该方程根的情况.

解： 当 $x^2-5x+a=0$ 时，分式无意义，

∵ $a<6$，

$\therefore 25-4a$ 一定大于零，

∵ 对于方程 $x^2-5x+a=0$，当 $25-4a>0$ 时，有两个不相等的实数根，

∴ 使原分式无意义的 x 的值有2个.

技巧点拨： 分式有无意义，即分式的分母是否等于零，转化为分母等于零的一元二次方程是否有实数根的问题从而根的判别式起到关键的作用.

拔尖角度 3 分类思想在方程根的情况中的应用

例8： 关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，求 m 的取值范围.

导引： 虽然方程有实数根，但无法确定该方程是一元二次方程还是一元一次方程，故分两种情况进行讨论.

解： 当 $m=0$ 时，此方程为一元一次方程，方程有实数根；

当 $m\neq 0$ 时，此方程为一元二次方程.

∵ 方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，

$\therefore (2m+1)^2-4m^2\geqslant 0$，

$\therefore m\geqslant -\frac{1}{4}$.

综上，当 $m\geqslant -\frac{1}{4}$ 时，关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根.

方法规律： 方程有实数根与方程有两个实数根的根本区别是：方程有实数根，此方程不一定是一元二次方程，也可以是一元一次方程；方程有两个实数根，则该方程一定是一元二次方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见265页）

基础巩固练

1. 方程 $x^2-4x=0$ 中，b^2-4ac 的值为（　　）
A. -16　　B. 16　　C. 4　　D. -4

2. ［中考·上海］下列关于 x 的一元二次方程有实数根的是（　　）
A. $x^2+1=0$　　B. $x^2+x+1=0$
C. $x^2-x+1=0$　　D. $x^2-x-1=0$

3. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2+4x+1=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____.

4. 用公式法解方程：
（1）［中考·兰州］$3x^2-2x-2=0$；
（2）$1-x=3x^2$；
（3）$x^2+2=2\sqrt{2}x$.

5. 求证：不论 m 为任何实数，关于 x 的一元二次方程 $x^2+(4m+1)x+2m-1=0$ 总有两个不相等的实数根.

6. 已知关于 x 的方程 $x^2-2(k-3)x+k^2-4k-1=0$.
（1）若这个方程有实数根，求 k 的取值范围；
（2）若这个方程有一个根为1，求 k 的值.

能力提升练

7. ［中考·雅安］已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个实数根为2，则另一实数根及 m 的值分别为（　　）
A. 4，-2　　B. -4，-2
C. 4，2　　D. -4，2

8. ［中考·泰安］一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 根的情况是（　　）
A. 无实数根
B. 有一个正根，一个负根
C. 有两个正根，且都小于3
D. 有两个正根，且有一根大于3

9. ［中考·荆门］已知3是关于 x 的方程 $x^2-(m+1)x+2m=0$ 的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰 $\triangle ABC$ 的两条边的边长，则 $\triangle ABC$ 的周长为（　　）
A. 7　　B. 10　　C. 11　　D. 10或11

10. ［中考·贺州］已知关于 x 的方程 $x^2+(1-m)x+\frac{m^2}{4}=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的最大整数值是_____.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 有两个相等的实数根，求 $\frac{ab^2}{(a-2)^2+b^2-4}$ 的值.

12. ［中考·北京］已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+2k-4=0$ 有两个不相等的实数根.
（1）求 k 的取值范围；
（2）若 k 为正整数，且该方程的根都是整数，求 k 的值.

思维拓展练

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx-2=0$.
（1）若 $x=-1$ 是方程的一个根，求 m 的值和方程的另一个根；
（2）对于任意的实数 m，判断方程的根的情况，并说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.3 因式分解法

核心知识

- 用因式分解法解一元二次方程
- 灵活选择适当的方法解一元二次方程

知识链接

选择合适的方法解一元二次方程
- 规定的解法 → 配方法
- 最直接的方法 → 公式法
- 最灵活的方法 → 因式分解法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用因式分解法解一元二次方程

1 **定义：** 把一元二次方程的一边化为0，另一边分解成两个一次因式的乘积，进而转化为两个一元一次方程，从而求出原方程的根，这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

2 **因式分解法解一元二次方程的一般步骤：**

（1）整理方程，使其右边为0；

（2）将方程左边分解为两个一次式的乘积；

（3）分别令每个一次式为0，得到两个一元一次方程；

（4）分别解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

3 **常用的因式分解的方法：**

（1）提公因式法；

（2）公式法；

（3）$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

因式分解法

4 **易错警示：**

（1）当方程没有化成一般形式时，不能把左边进行因式分解；

（2）不是所有的一元二次方程都适合用因式分解法求解.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用因式分解的提公因式法解一元二次方程

例1： 解下列一元二次方程：

（1）$x^2-5x=0$；

（2）[易错题] $(x-5)(x-6)=(x-5)$.

导引： 先将方程整理，使方程右边等于0，然后利用提公因式法将等式的左边进行因式分解.

解：（1）原方程整理得 $x(x-5)=0$.

$\therefore x=0$，或 $x-5=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=5$.

（2）移项，得 $(x-5)(x-6)-(x-5)=0$.

因式分解，得 $(x-5)(x-7)=0$.

$\therefore x-5=0$，或 $x-7=0$.

$\therefore x_1=5, x_2=7$.

考查角度2 利用因式分解的公式法解一元二次方程

例2： 解方程：$4(x-3)^2-25(x-2)^2=0$.

导引： 方程左边符合平方差公式分解因式的特征，所以可以用平方差公式分解.

易错警示

解方程（2）时千万不能将方程两边同时除以（x-5），否则方程会漏掉一解.

方法点拨

用因式分解法解一元二次方程时，不要急于将方程化成一般形式，要结合方程的特点适当变形，发现并提取公因式或运用公式，将方程化成两个一次因式的积的形式.

技巧点拨

采用因式分解法解一元二次方程的技巧：右化零，左分解，两因式，各求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： $[2(x-3)]^2-[5(x-2)]^2=0$，

$[2(x-3)+5(x-2)][2(x-3)-5(x-2)]=0$，

$(7x-16)(-3x+4)=0$，

$\therefore 7x-16=0$，或 $-3x+4=0$，$\therefore x_1=\frac{16}{7}$，$x_2=\frac{4}{3}$.

考查角度3 用因式分解法解 $x^2+px+q=0$ 型的方程

例3： 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2+2\,015x-2\,016=0$；　　(2) $x^2-6x-16=0$；

(3) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.

导引： (1)设法找到两个数 a，b，使它们的和为 $a+b=2\,015$，积为 $ab=-2\,016$，经过反复试验可发现这两个数分别为 -1，$2\,016$. 所以 $x^2+2\,015x-2\,016=0$ 可转化为 $(x-1)(x+2\,016)=0$；同理，(2)(3)等号的左边也可分解成两个一次因式的乘积.

解： (1)原方程可化为 $(x-1)(x+2\,016)=0$.

$\therefore x-1=0$，或 $x+2\,016=0$，$\therefore x_1=1$，$x_2=-2\,016$.

(2)原方程可化为 $(x-8)(x+2)=0$.

$\therefore x-8=0$，或 $x+2=0$. $\therefore x_1=8$，$x_2=-2$.

(3)原方程可化为 $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$.

$\therefore x-\sqrt{2}=0$，或 $x-\sqrt{3}=0$. $\therefore x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$.

方法点拨

解 $x^2+px+q=0$ 型的方程，当左边的多项式因式分解时，必须保证常数项分解的两个因数的和为一次项系数，两根的符号与两因式的常数项的符号正好相反.

同类变式 （答案见266页）

3. 已知一个三角形的两边长为6和8，第三边长是方程 $x^2-16x+60=0$ 的一个根，则这个三角形的面积为_____.

点知识 2 一元二次方程的解法的选用

1 解一元二次方程的方法：

直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法.

2 解一元二次方程的基本思路是：

将一元二次方程化为一元一次方程，即降次.

3 解一元二次方程方法的选择顺序：

先特殊后一般，即先考虑直接开平方法和因式分解法，不能用这两种方法时，再用公式法；没有特殊要求的，一般不用配方法.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度 选择适当的方法解下列方程

例4： 用适当的方法解下列一元二次方程：

(1) $x^2-2x-3=0$；　　(2) $2x^2-7x-6=0$；

(3) $(x-1)^2-3(x-1)=0$.

导引： 方程(1)选择配方法；方程(2)选择公式法；方程(3)选择因式分解法.

解： (1) $x^2-2x-3=0$，移项，得 $x^2-2x=3$.

配方，得 $(x-1)^2=4$，$x-1=\pm 2$.

$\therefore x_1=3$，$x_2=-1$.

方法点拨

在没有规定方法的前提下解一元二次方程，首先考虑用因式分解法，其次考虑用公式法.系数较大时，一般不适宜用公式法，如果一次项系数是偶数，可选用配方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $2x^2-7x-6=0$,

$\because a=2, b=-7, c=-6$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=97>0$,

$\therefore x_1=\frac{7+\sqrt{97}}{4}, x_2=\frac{7-\sqrt{97}}{4}$.

(3) $(x-1)^2-3(x-1)=0$,

因式分解得 $(x-1)(x-1-3)=0$,

即 $(x-1)(x-4)=0$.

$\therefore x-1=0$, 或 $x-4=0$.

$\therefore x_1=1, x_2=4$.



点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 通过求一元二次方程的根解决几何问题

例 5: 已知等腰三角形的腰和底的长分别是一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 的根, 则该三角形的周长可以是(　　)

A. 5　　B. 7　　C. 5 或 7　　D. 10

导引: 方程可化为 $(x-1)(x-3)=0$, 解得, $x_1=1, x_2=3$. ∵ 当底为 3, 腰为 1 时, 由于 $3>1+1$, 不符合三角形三边关系, 不能构成三角形; ∴ 等腰三角形的底为 1, 腰为 3, ∴ 三角形的周长为 $1+3+3=7$.

答案: B

方法点拨: 解决此类问题, 首先应当选用适当方法求得方程的解, 因为腰和底不明确, 所以进行分类讨论, 即结合三角形三边关系: 三角形任意两边之和大于第三边, 验证该类别是否成立. 可归纳为以下办法: 一解, 二分, 三讨论.

拔尖角度 2 利用换元法解一元二次方程

例 6: 解方程: $(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$.

导引: 从方程的结构看, 若将 $3x+2$ 看成一个整体, 用另外的一个字母代替, 解方程更简单.

解: 设 $3x+2=t$, 原方程化为 $t^2-8t+15=0$, 即 $(t-3)(t-5)=0$, 解得 $t_1=3, t_2=5$.

当 $t=3$ 时, $3x+2=3, x=\frac{1}{3}$;

当 $t=5$ 时, $3x+2=5, x=1$.

故原方程的解为 $x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$.

方法点拨: 运用换元法解一元二次方程时, 先要找出相同的整体进行换元, 使方程变得更简易, 解完方程后还要注意还元. 如本题最后要解出未知数 x, 而不是只求出未知数 t.

拔尖角度 3 巧用逆向思维解题

例 7: 甲、乙两学生解同一个关于 x 的一元二次方程(二次项系数为 1), 甲将一次项系数看错, 解得两根为 -4 与 8; 乙将常数项看错, 解得两根为 4 与 10, 试求出正确的方程.

导引: 根据一元二次方程的根与因式分解法之间的关系, 先还原出两个错误的方程, 然后确定正确的方程.

解: 甲将一次项系数看错得 $x=-4$ 或 $x=8$,

$\therefore (x+4)(x-8)=0, \therefore x^2-4x-32=0$;

乙将常数项看错得 $x=4$ 或 $x=10$,

$\therefore (x-4)(x-10)=0$,

$\therefore x^2-14x+40=0$.

$\therefore$ 正确的方程为 $x^2-14x-32=0$.

技巧点拨: 由因式分解法解一元二次方程的逆向可知, 以 x_1, x_2 为两根的一元二次方程(二次项系数为 1)为 $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见266页）

基础巩固练

1. 方程$(x-2)(x-3)=0$的解是(　　)

A. $x_1=2,x_2=3$　　B. $x_1=2,x_2=-3$

C. $x_1=-2,x_2=-3$　　D. $x_1=-2,x_2=3$

2. [中考·铜仁]关于x的一元二次方程$x^2-4x+3=0$的解为(　　)

A. $x_1=-1,x_2=3$　　B. $x_1=1,x_2=-3$

C. $x_1=1,x_2=3$　　D. $x_1=-1,x_2=-3$

3. 方程$(x-3)(x+1)=x-3$的解是(　　)

A. $x=0$　　B. $x=3$

C. $x_1=3,x_2=-1$　　D. $x_1=3,x_2=0$

4. [中考·攀枝花]若$x=-2$是关于x的一元二次方程$x^2+\frac{3}{2}ax-a^2=0$的一个根,则a的值为(　　)

A. -1或4　　B. -1或-4

C. 1或-4　　D. 1或4

5. 用因式分解法解下列方程:

(1)$(x-1)^2-2(x-1)=0$;

(2)$(2+x)^2-9=0$;

(3)$(2x+1)^2=3(2x+1)$.

6. 用恰当的方法解下列方程:

(1)$9(x-1)^2=5$;

(2)$(x-3)^2+x^2=9$;

(3)$x^2-\sqrt{2}x-1=0$;

(4)$(2y+1)^2+2(2y+1)+1=0$.

7. 已知三角形的两边长分别为3和7,第三边长是方程$x(x-7)-10(x-7)=0$的一个根,求这个三角形的周长.

能力提升练

8. 若一元二次方程$x^2-8x-3\times11=0$的两根为a,b,且$a>b$,则$a-2b$的值为(　　)

A. -25　　B. -19　　C. 5　　D. 17

9. 若实数x,y满足$(x^2+y^2+2)(x^2+y^2-2)=0$,则x^2+y^2的值为(　　)

A. 1　　B. 2

C. 2或-2　　D. -2

10. 已知实数x满足$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$,则代数式x^2-x+1的值为_____.

11. 设a,b是一个直角三角形两条直角边的长,且$(a^2+b^2)(a^2+b^2+1)=12$,则这个直角三角形的斜边长为_____.

12. 用因式分解法解方程$x^2-kx-16=0$时,得到的两根均为整数,则k的值可以为_____.

13. 用一根长20厘米的铁丝,折成一个面积为16平方厘米的矩形框,应该怎样折?能否折成一个面积为30平方厘米的矩形框呢?

14. 已知实数$x<0$,且满足$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$,求$x+\frac{1}{x}$的值.

思维拓展练

15. [中考·遂宁]阅读下列材料,并用相关的思想方法解决问题.

计算:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right).$$

令$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=t$,则,

$$\text{原式}=(1-t)\cdot\left(t+\frac{1}{5}\right)-\left(1-t-\frac{1}{5}\right)t=t+\frac{1}{5}-t^2-\frac{1}{5}t-\frac{4}{5}t+t^2=\frac{1}{5}.$$

问题:(1)计算:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2\,014}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\,015}\right)-\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{2\,014}-\frac{1}{2\,015}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,014}\right);$$

(2)解方程$(x^2+5x+1)(x^2+5x+7)=7$.

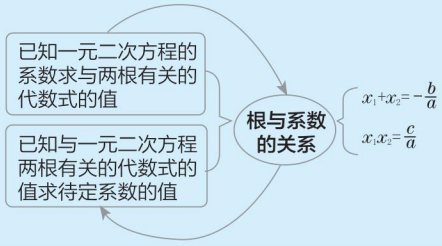
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.3 一元二次方程根与系数的关系*

核心知识

- 已知一元二次方程的系数求两根之和与两根之积
- 已知一元二次方程两根之间的关系式的值求待定系数的值

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 根与系数的关系

一元二次方程根与系数的关系：

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根分别为 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

要点精析///

(1)应用一元二次方程根与系数的关系的前提是二次项系数不为0和方程有实数根.

(2)根与系数的关系刻画了一元二次方程的两根之和、两根之积与系数 a,b,c 之间的关系.

(3)利用根与系数的关系可以不解方程而求出与两根有关系的一些代数式(对称式)的值.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 已知方程的各项系数求两根的和与积

例1： 不解方程，求下列方程的两根 x_1,x_2 的和与积.

(1)$x^2-5x+2=0$；　(2)$4x^2-2x-7=0$；

(3)$3x^2+10=2x^2+8x$.

导引： 根与系数的关系是建立在一元二次方程有根的前提下的；系数是方程化为一般形式后的系数.

解： (1)$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$.

(2)$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-7}{4}=-\frac{7}{4}$.

(3)原方程整理得 $x^2-8x+10=0$，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=8$，

$x_1x_2=\frac{c}{a}=10$.

方法点拨

求一元二次方程两根的和与积时，先要将方程整理成一般形式，然后利用根与系数的关系求出两根的和与积.

同类变式 (答案见267页)

1-1. [中考·金华]一元二次方程 $x^2+4x-3=0$ 的两根为 x_1，x_2，则 $x_1\cdot x_2$ 的值是(　　)

A.4　　B.-4　　C.3　　D.-3

1-2. [中考·泸州]设 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-5x-1=0$ 的两实数根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的值为_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 已知一元二次方程的一根求另一根

例2： 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+p^2-2p+5=0$ 的一个根是2，求方程的另一个根和 p 的值.

导引： 已知二次项系数与一次项系数，利用两根之和可求出另一根，再运用两根之积求出常数项中 p 的值.

解： 设方程的两根为 x_1 和 x_2，

$\because x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=6, x_1=2, \therefore x_2=4.$

又 $\because x_1x_2=\dfrac{c}{a}=p^2-2p+5=2\times4=8,$

$\therefore p^2-2p-3=0$，解得 $p=3$ 或 $p=-1.$

方法点拨

已知一元二次方程的一个根求另一根的方法：若已知二次项系数和常数项，则利用两根之积求另一根；若已知二次项系数和一次项系数，则利用两根之和求另一根.

考查角度3 已知两根的关系式的值求待定系数的值

例3： [中考·荆门] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+3)x+m+1=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2，若 $x_1^2+x_2^2=4$，则 m 的值为_____.

导引： 根据题意可得 $x_1+x_2=-m-3, x_1x_2=m+1,$

又因为 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$

所以 $(-m-3)^2-2(m+1)=4$，解得 $m_1=-1, m_2=-3,$

并且当 $m=-1$ 或 $m=-3$ 时方程都有解，

所以 m 的值为 -1 或 $-3.$

答案： -1 或 -3

方法点拨

已知一元二次方程两根的关系求待定字母系数的值时，先根据根与系数的关系用待定的字母表示两根之和与两根之积，然后将已知两根的关系式进行变形，再将两根的和与积整体代入，列出以待定字母为未知数的方程，进而求得待定字母的值.

同类变式 （答案见267页）

3. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+2m-1=0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2，且 $x_1^2+x_2^2=7$，则 $(x_1-x_2)^2$ 的值是（　　）

A. 1　　B. 12　　C. 13　　D. 25

考查角度4 运用根与系数的关系时忽视前提

例4： [易错题] 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+k=0$ 的两个实数根，且 $x_1^2x_2^2-x_1-x_2=115.$

(1) 求 k 的值；　　(2) 求 $x_1^2+x_2^2+8$ 的值.

解： (1) $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2-6x+k=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=k. \because x_1^2x_2^2-x_1-x_2=115,$

$\therefore k^2-6=115$，解得 $k_1=11, k_2=-11.$

当 $k=11$ 时，$\Delta=36-4k=36-44<0,$

$\therefore k=11$ 不合题意，舍去；

当 $k=-11$ 时，$\Delta=36-4k=36+44>0,$

$\therefore k=-11$ 符合题意，$\therefore k$ 的值为 $-11.$

(2) $\because x_1+x_2=6, x_1x_2=-11, \therefore x_1^2+x_2^2+8=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+8=36+2\times11+8=66.$

易错警示

运用根与系数的关系的前提是方程有实数根，如“方程 $x^2-x+2=0$ 的两根之和为1”这个说法就是错误的；如果利用根与系数的关系求得待定系数的值，必须要通过根的判别式进行检验.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用根与系数的关系构造一元二次方程

例5： 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2+3x-5=0$ 的两根，求以 x_1+1 和 x_2+1 为根的一个一元二次方程.

导引： 逆用一元二次方程根与系数的关系，但要注意新方程的两个实数根是 x_1+1 和 x_2+1，而不是 x_1, x_2.

解： ∵ x_1, x_2 是方程 $x^2+3x-5=0$ 的两根，

∴ $x_1+x_2=-3, x_1\cdot x_2=-5$.

∴ $(x_1+1)+(x_2+1)=x_1+x_2+2=-3+2=-1$,

$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=-5-3+1=-7$.

∴ 以 x_1+1 和 x_2+1 为根的一个一元二次方程为 $x^2+x-7=0$.

方法点拨： 已知一个一元二次方程，求一个新的一元二次方程，使它的根与原方程的根符合某种关系的一般方法：(1) 设出已知方程的两根，并依据所知关系写出所求方程的两根；(2) 由根与系数的关系写出所设两根的和与积；(3) 求新方程两根的和与积；(4) 写出新方程.

拔尖角度 2 利用根的定义及根与系数的关系求非对称代数式的值

例6： [中考·呼和浩特] 已知 m, n 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个实数根，则 $m^2-mn+3m+n=$ _____.

导引： 从要求的代数式看是非对称的，所以要单独代入方程的解，得到与待求值的代数式相关的结构. 代数式中有 m^2，所以将 $x=m$ 代入方程中，然后结合两根之和与积进行整体代入求值.

∵ m, n 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个实数根，

∴ $m^2+2m-5=0, m+n=-2, m\cdot n=-5$,

∴ $m^2+2m=5$,

∴ $m^2-mn+3m+n=m^2+2m-mn+m+n=5-(-5)+(-2)=8$.

答案： 8

技巧点拨： 求与根有关的代数式的值时，看代数式是否具有对称性，若具有对称性，则直接变形，将两根之和或积代入求值；若不具有对称性，则将其中的某一个根单独代入方程中，得到与待求值的代数式相关的结构，进行整体代入求值.

拔尖角度 3 利用根与系数的关系探究存在性问题

例7： 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2+4x-3=0$ 的两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围.

(2) 是否存在这样的实数 k，使 $2x_1+2x_2-\frac{3}{x_1x_2}=2$ 成立？若存在，求出 k 的值，若不存在，说明理由.

导引： (1) 根据方程有两个不相等的实数根得 $\Delta>0$，可求出 k 的取值范围，同时注意 $k\neq0$；(2) 先假设存在，根据根与系数的关系列出以 k 为未知数的方程，求出 k 的值，然后结合(1)中 k 的取值范围检验.

解： (1) 由题意得 $\Delta=4^2-4k\cdot(-3)>0$,

∴ $k>-\frac{4}{3}$. 又 $k\neq0$,

∴ $k>-\frac{4}{3}$ 且 $k\neq0$.

(2) 存在. ∵ $x_1+x_2=-\frac{4}{k}, x_1x_2=-\frac{3}{k}$,

$2x_1+2x_2-\frac{3}{x_1x_2}=2$,

∴ $-\frac{8}{k}+k=2$，解得 $k_1=4, k_2=-2$（不符合题意，舍去）. ∴ $k=4$.

方法规律： 判断由根与系数的关系求出的待定系数的值是否存在，关键就是看求出的待定系数的值能否使根的判别式大于或等于零.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见267页）

基础巩固练

1. [中考·贵港] 已知 α,β 是一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，则 $\alpha+\beta-\alpha\beta$ 的值是(　　)

A. 3　　B. 1　　C. -1　　D. -3

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m-1)x-(2m-2)=0$ 的两根之和等于两根之积，则 m 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. [中考·遵义] 已知 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2+bx-3=0$ 的两根，且满足 $x_1+x_2-3x_1x_2=5$，那么 b 的值为(　　)

A. 4　　B. -4　　C. 3　　D. -3

4. 若关于 x 的方程 $x^2-5x+k=0$ 的一个根是0，则另一个根是_____.

5. 不解方程，求下列方程的两根 x_1,x_2 的和与积.

(1) $x^2-3x-5=0$;

(2) $2x^2+5x-9=0$;

(3) $4x-2=x^2$.

6. [中考·黄石] 已知关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $x_1-x_2=2$，求实数 m 的值.

能力提升练

7. 设 a,b 是方程 $x^2+x-2\,017=0$ 的两个实数根，则 a^2+2a+b 的值为(　　)

A. 2 015　　B. 2 016

C. 2 017　　D. 2 018

8. 若方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根为 x_1,x_2，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值为(　　)

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

9. 已知 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+nx-1=0$ 的两实数根，则式子 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值是(　　)

A. n^2+2　　B. $-n^2+2$

C. n^2-2　　D. $-n^2-2$

10. [中考·烟台] 若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，则 $x_1^2-x_1+x_2$ 的值为(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 2　　D. 3

思维拓展练

11. [中考·日照] 如果 m,n 是两个不相等的实数，且满足 $m^2-m=3$，$n^2-n=3$，那么代数式 $2n^2-mn+2m+2\,015$ 的值是多少?

12. [中考·鄂州] 关于 x 的方程 $(k-1)x^2+2kx+2=0$. 【导学号:3572905】

(1) 求证:无论 k 为何值，方程总有实数根.

(2) 设 x_1,x_2 是方程 $(k-1)x^2+2kx+2=0$ 的两个根，记 $S=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+x_1+x_2$，$S$ 的值能为2吗? 若能，求出此时 k 的值. 若不能，请说明理由.

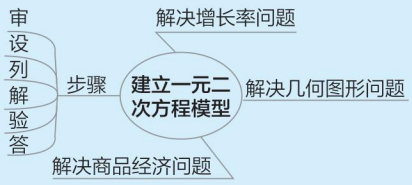
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.4 一元二次方程的应用

核心知识

- 列方程解应用题的步骤
- 增长率问题
- 商品经济问题
- 几何图形问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 列一元二次方程解应用题的一般步骤

列一元二次方程解实际问题的一般步骤：

（1）**审题：**仔细阅读题目，分析题意，明确题目要求，弄清已知量、未知量以及它们之间的关系.

（2）**设未知数：**一种方法是直接设法，另一种方法是间接设法.

（3）**列代数式：**用含有未知数 x 的代数式表示出相关的未知量.

（4）**列方程：**根据题目中已知量和未知量的关系列出方程.

（5）**解方程：**利用配方法、公式法、因式分解法等求出未知数的值.

（6）**检验：**检验求出的未知数的值是不是满足实际问题的要求.

（7）**写出答案：**根据题意选择合理的答案.


利用一元二次方程建模

拨考向

提分·秘诀

考查角度 利用列一元二次方程解实际问题的步骤解决问题

例1：［中考·乌鲁木齐］某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件. 市场调查反映：每降价1元，每星期可多卖出20件. 已知商品的进价为每件40元，在顾客多得实惠的前提下，商家还想获得6 080元的利润，应将售价定为每件多少元？

导引：因为商品的销售量与降价数额有关，所以本题需要间接地设未知数. 设每件降价 x 元，则每件售价为 $(60-x)$ 元，每件的利润为 $(60-x-40)$ 元，每星期销量为 $(300+20x)$ 件，根据商家获利数额为6 080元列方程，求解即可.

解：设每件降价 x 元，则每件售价为 $(60-x)$ 元，每星期销量为 $(300+20x)$ 件，

根据题意，得 $(60-x-40)(300+20x)=6\,080$.

解得 $x_1=1$，$x_2=4$.

因为是在顾客多得实惠的前提下进行降价，

所以取 $x=4$.

所以售价为每件 $60-x=56$（元）.

答：应将售价定为每件56元.

方法点拨

利用方程解应用题的关键是找出等量关系，分析等量关系时，抓住关键词，联想基本关系式，剔除实际背景的文字描述，呈现数学化的形式，列出方程.对解方程得到的根取舍时，要紧扣题意中的每个细节.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 建立一元二次方程模型的常见类型

1 几何图形问题

与几何图形有关的一元二次方程的应用题主要是将数量与数量之间的关系隐藏在图形中，用图形表示出来，这样的图形有三角形、四边形（后面还有圆），主要涉及图形的周长、面积以及三角形边之间的关系、三角形全等等知识点.

2 增长率的问题

如果增长率中的基数为 a，平均增长率为 x，则第一次增长后的数量为 $a(1+x)$，第二次增长后的数量为 $a(1+x)^2$，第 n 次增长后的数量为 $a(1+x)^n$.

3 商品经济问题

这类问题中，主要涉及一件商品的利润、售价、进价及利润率、总利润等量，基本等量关系为：(1)一件商品的利润 = 售价 − 进价；(2)商品的利润率 = $\frac{\text{商品的利润}}{\text{商品进价}}$ ×100%；(3)商品的总利润 = 一件商品的利润 ×销售商品的数量.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 建立一元二次方程的模型解决几何图形问题

例2： ［中考·巴中］如图 24.4-1，某农场有一块长40 m，宽32 m 的矩形种植地，为方便管理，准备沿平行于两边的方向纵、横各修建一条等宽的小路. 要使种植面积为1 140 m^2，求小路的宽.

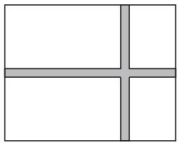


图 24.4-1

导引： 设小路的宽为 x m，图中小路平移到矩形种植地边上时，种植面积仍为 1 140 m^2，建立方程 $(40-x)(32-x)=1\,140$，解此方程即可.

解： 设小路的宽为 x m. 图中的小路平移到矩形种植地边上时，种植面积是不变的.

根据题意，得 $(40-x)(32-x)=1\,140$.

解得 $x_1=2$，$x_2=70$（不合题意，舍去）.

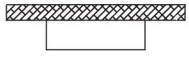
答：小路的宽为 2 m.

技巧点拨

一元二次方程应用题中对于根的取舍，关键是要体会未知数 x 所代表的实际意义及限制条件.如“平均增长率 x 不能为负”、“小路的宽不能超过矩形种植地的宽”等这些细节问题都是根取舍的关键所在.

▲**同类变式** 答案见 268 页

2. 如图，一边利用一面墙（墙的长度不限），另三边用 58 米长的篱笆围成一个面积为200 平方米的矩形场地，求矩形的长和宽.



（第 2 题）

考查角度2 建立一元二次方程模型解决增长率问题

例3： 某镇 2016 年有绿地面积 57.5 公顷，该镇近几年不断增加绿地面积，2018 年达到 82.8 公顷.

(1)求该镇 2016 年至 2018 年绿地面积的年平均增长率；

(2)若年平均增长率保持不变，则 2019 年该镇的绿地面积能否达到 100 公顷？

导引： (1)2016 年的绿地面积 ×(1 + 年平均增长率)^2 = 2018 年的绿地面积，列出方程求出年平均增长率；(2)利用 2018 年的绿地面积 ×(1 + 年平均增长率) = 2019 年的绿地面积，求出 2019 年的绿地面积，再与 100 公顷比较即可.

方法点拨

平均增长率中的数量关系：若增长的基数为 a，每次增长的平均增长率为 x，则第一次增长后的数量为 $a(1+x)$，第二次增长是以 $a(1+x)$ 为基数的，两次增长后的数量为 $a(1+x)^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)设该镇2016年至2018年绿地面积的年平均增长率为x，则$57.5(1+x)^2=82.8$.

解得$x_1=-2.2$(舍去)，$x_2=0.2$.

答：该镇2016年至2018年绿地面积的年平均增长率为20%.

(2)2019年的绿地面积为$82.8\times(1+0.2)=99.36$(公顷)，$99.36<100$，

答：2019年该镇的绿地面积不能达到100公顷.



同类变式（答案见268页）

3. 某农机厂四月份生产零件50万个，第二季度共生产零件182万个. 设该厂五、六月份平均每月的增长率为x，那么x满足的方程是(　　)

A. $50(1+x)^2=182$　　B. $50+50(1+x)+50(1+x)^2=182$

C. $50(1+2x)=182$　　D. $50+50(1+x)+50(1+2x)=182$

考查角度3　建立一元二次方程模型解决商品经济问题

例4：西瓜经营户以2元/千克的价格购进一批小型西瓜，以3元/千克的价格出售，每天可售出200千克，为了促销，该经营户决定降价销售，经调查发现，这种小型西瓜每降价0.1元/千克，每天可多售出40千克，另外，每天的房租等固定成本共24元，该经营户要想每天盈利200元，应将每千克小型西瓜的售价降低多少元？

导引：本题的等量关系为：每千克的利润×每天售出数量－固定成本$=200$.

解：设应将每千克小型西瓜的售价降低x元，根据题意，得：

$$(3-2-x)\left(200+\frac{40x}{0.1}\right)-24=200,$$

解这个方程，得：$x_1=0.2$，$x_2=0.3$. 经检验均符合题意.

答：应将每千克小型西瓜的售价降低0.2元或0.3元.

方法点拨

解答此类问题的关键是明确题中的等量关系，结合基本等量关系列出方程.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1　建立一元二次方程模型解决分段收费问题

例5：某电厂规定：该厂家属区的每户居民一个月用电量如果不超过A千瓦时，那么这户居民这个月只交10元电费，如果超过A千瓦时，那么这个月除了交10元电费外，超过部分还要按每千瓦时$\frac{A}{100}$元收费.

(1)若该厂家属区的某户居民2月份用电90千瓦时，超过了规定的A千瓦时，则超过规定部分的电费为多少元？(用含A的式子表示)

(2)下表是这户居民3月份、4月份的用电情况和交费情况：

月份	用电量(千瓦时)	交电费总金额(元)
3	80	25
4	45	10

根据上表数据，求电厂规定的A值为多少.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：（1）该厂家属区的某户居民2月份的用电量超过了规定的A千瓦时，超过的部分为$(90-A)$千瓦时，这部分应交电费$\frac{A}{100}\cdot(90-A)$元.

（2）由上表可以看出这户居民4月份交电费10元，表示他家4月份的用电量没有超过规定的A千瓦时；3月份交电费25元，包括规定用电部分的电费10元和超过规定部分的电费$\frac{A}{100}(80-A)$元.

解：（1）这户居民用电量超过规定部分的电费为$\frac{A}{100}(90-A)$元.

（2）根据3月份用电量为80千瓦时，交电费总金额为25元，可列方程为$10+\frac{A}{100}(80-A)=25$，整理得$A^2-80A+1\,500=0$，解得$A_1=50$，$A_2=30$. 考虑到4月份用电量为45千瓦时，交电费总金额为10元，所以$A=30$不合题意，应舍去.

所以电厂规定的A值为50.

方法点拨：（1）在分段收费问题中的等量关系是：各段的收费之和等于总费用.

（2）每段的收费方式不一样，特别注意超出规定部分电费的计算办法.

（3）对于根的取舍要善于从表格中获取信息.

拔尖角度2 巧借一元二次方程的模型解决几何动态问题

例6： 如图24.4-2所示，A,B,C,D为矩形的四个顶点，$AB=16$ cm，$AD=6$ cm，P,Q分别从点A,C同时出发，点P以3 cm/s的速度向点B移动，一直到达点B为止，点Q以2 cm/s的速度向点D移动，点P停止运动时点Q也停止运动.

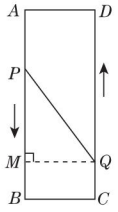


图24.4-2

（1）P,Q两点开始运动几秒后，四边形$PBCQ$的面积为33 cm^2？

（2）P,Q两点开始运动几秒后，点P和点Q的距离第一次是10 cm？

解：（1）设P,Q两点开始运动x s后，四边形$PBCQ$的面积为33 cm^2，

根据题意得$PB=AB-AP=(16-3x)$ cm，$CQ=2x$ cm，

故$\frac{1}{2}(2x+16-3x)\times6=33$，

解得$x=5$.

故P,Q两点开始运动5 s后，四边形$PBCQ$的面积为33 cm^2.

（2）设P,Q两点开始运动y s后，点P和点Q的距离是10 cm.

如图24.4-2所示，

过Q点作$QM\perp AB$于点M，

则$BM=CQ=2y$ cm，

故$PM=(16-5y)$ cm.

在Rt$\triangle PMQ$中，$PM^2+MQ^2=PQ^2$，

所以$(16-5y)^2+6^2=10^2$.

解得$y_1=\frac{8}{5}$，$y_2=\frac{24}{5}$.

因为所求的是第一次满足条件的时间，

所以$y=\frac{8}{5}$.

故P,Q两点开始运动$\frac{8}{5}$ s后，点P和点Q的距离第一次是10 cm.

技巧点拨：在建立一元二次方程模型解决几何动态问题时关键要把握两点：一是利用几何图形的面积作为等量关系；二是利用点运动的路程来表示线段的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3　利用一元二次方程探究图形变化的规律

例 7： 在图 24.4-3 中，每个正方形都是由边长为 1 的小正方形组成的：

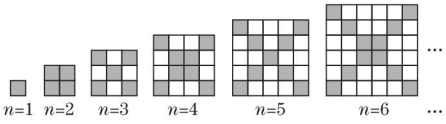


图 24.4-3

(1) 观察图形，请填写下列表格：

正方形边长	1	3	5	7	…	n(奇数)
黑色小正方形个数					…	
正方形边长	2	4	6	8	…	n(偶数)
黑色小正方形个数					…	

(2) 在边长为 $n(n\geqslant 1)$ 的正方形中，设黑色小正方形的个数为 P_1，白色小正方形的个数为 P_2，是否存在偶数 n，使 $P_2=5P_1$？若存在，请写出 n 的值；若不存在，请说明理由.

导引： 本题是一道图案探索题，其中第(1)问观察图形，探索规律是需要对正方形的边长为奇数或偶数两种情况分别探究，第(2)问需要在第(1)问的基础上列出 P_1，P_2 与 n 的关系式，通过假设存在构造方程求解.

解： (1)

正方形边长	1	3	5	7	…	n(奇数)
黑色小正方形个数	1	5	9	13	…	$2n-1$
正方形边长	2	4	6	8	…	n(偶数)
黑色小正方形个数	4	8	12	16	…	$2n$

(2) 由(1)可知在边长为 n(偶数)的正方形中，黑色小正方形的个数为 $P_1=2n$，白色小正方形的个数 P_2 等于小正方形的总个数 n^2 减去黑色小正方形的个数，即 $P_2=n^2-2n$，假设存在偶数 n，使 $P_2=5P_1$，则有 $n^2-2n=5\times 2n$，即 $n^2-12n=0$，解得 $n_1=12$，$n_2=0$(不合题意，舍去).

所以存在偶数 $n=12$，使得 $P_2=5P_1$.

方法规律： 此题属于数形结合类问题，解决此问题的关键是根据图形发现规律，并用含有字母的代数式表示.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 268 页)

基础巩固练

1. [中考·宁夏] 某企业 2018 年初获利润 300 万元，到 2020 年初计划利润达到 507 万元，设这两年的年利润平均增长率为 x，应列方程是(　　)

A. $300(1+x)=507$

B. $300(1+x)^2=507$

C. $300(1+x)+300(1+x)^2=507$

D. $300+300(1+x)+300(1+x)^2=507$

2. [中考·大连] 如图，有一张矩形纸片，长 10 cm，宽 6 cm，在它的四角各剪去一个同样的小正方形，然后折叠成一个无盖的长方体纸盒，若纸盒的底面(图中阴影部分)面积是 32 cm^2，求剪去的小正方形的边长. 设剪去的小正方形边长是 x cm，根据题意可列方程为(　　)



(第 2 题)

A. $10\times 6-4\times 6x=32$

B. $(10-2x)(6-2x)=32$

C. $(10-x)(6-x)=32$

D. $10\times 6-4x^2=32$

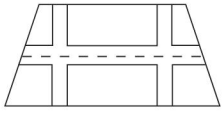
3. 一个容器盛满纯药液 40 L，第一次倒出若干升后，用水加满；第二次又倒出同样体积的溶液，这时容器里只剩下纯药液 10 L，则每次倒出的液体是_____L.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·襄阳]有一人患了流感,经过两轮传染后共有64人患了流感.
(1)求每轮传染中平均一个人传染了几个人?
(2)如果不及时控制,第三轮又将有多少人被传染?

5. [中考·盐城]一商店销售某种商品,平均每天可售出20件,每件盈利40元,为了扩大销售,增加盈利,该店采取了降价措施,在每件盈利不少于25元的前提下,经过一段时间销售,发现销售单价每降低1元,平均每天可多售出2件.
(1)若降价3元,则平均每天销售数量为_____件;
(2)当每件商品降价多少元时,该商店每天销售利润为1 200元?

6. 如图,要设计一个等腰梯形花坛,花坛上底长120 m,下底长180 m,高80 m,在两腰中点连线(虚线)处有一条横向甬道,上、下底之间有两条纵向甬道,各甬道宽度相等,设甬道的宽为x m.

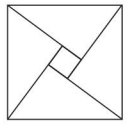


(第6题)

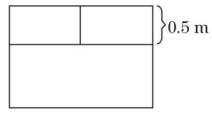
(1)用含x的式子表示甬道的面积;
(2)根据设计要求,甬道的宽不能超过6 m,如果修建甬道的费用(万元)与甬道的宽度成正比例关系,比例系数为5.7,花坛其余部分的绿化费用为每平方米0.02万元,那么甬道宽度为多少米时,所建花坛总费用为239万元?

能力提升练

7. 在北京召开国际数学家大会,大会会徽是由4个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形组成的,如图,若大正方形的面积是32,小正方形的面积是4,则每个直角三角形的周长是_____.



(第7题)



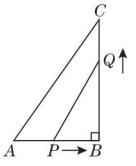
(第8题)

8. 在高度为2.8 m的一面墙上,准备开凿一个矩形窗户.现用9.5 m长的铝合金条制成如图所示的窗框.窗户的高为_____时,其透光面积为3 m^2(铝合金条的宽度忽略不计).

9. 有一批图形计算器,原售价为每台800元,在甲、乙两家公司销售.甲公司用如下方法促销:买一台价格为780元,买两台每台都为760元.依此类推,即每多买一台则所买各台的价格均再减20元,但最低不能低于每台440元;乙公司一律按原售价的75%促销.某单位需购买一批图形计算器.
(1)若此单位需购买6台图形计算器,去哪家公司购买花费较少?
(2)若此单位恰好花费7 500元,在同一家公司购买了一定数量的图形计算器,请问是在哪家公司购买的,数量是多少?

思维拓展练

10. 如图所示,在$\triangle ABC$中,$\angle B=90°$,$AB=5$ cm,$BC=7$ cm,点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动,点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动.
(1)如果点P,Q分别从点A,B同时出发,那么几秒后,$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2?
(2)如果点P,Q分别从点A,B同时出发,那么几秒后,PQ的长度等于5 cm?
(3)在问题(1)中,$\triangle PBQ$的面积能否等于7 cm^2?说明理由.



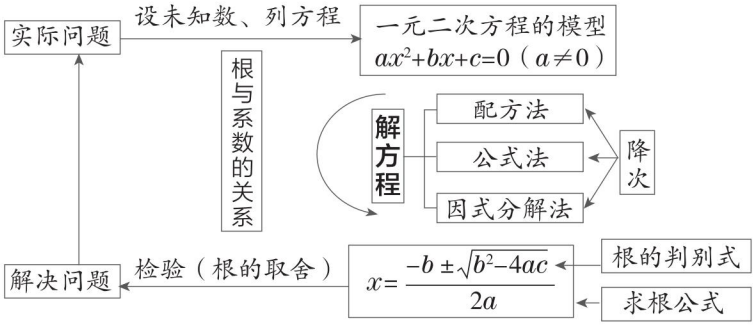
(第10题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.
2. 一元二次方程的解法有：①直接开平方法；②配方法；③公式法；④因式分解法.
3. 一元二次方程根的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$，一元二次方程根的情况有三种：①有两个不相等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac>0$；②有两个相等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac=0$；③无实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac<0$.
4. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

知识方法专题

知识必学

专题一 一元二次方程的解法

链接中考≫一元二次方程的解法是本章的核心，也是本章的基础. 一般的考查方式是选择题，给出一个一元二次方程选择它正确的解，只关注结果；有时作为解答题考查，方法不限，注重对过程的考查.

例1：（1）［中考·重庆］一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的根是（　　）

A. $x_1=0,x_2=-2$　　B. $x_1=1,x_2=2$

C. $x_1=1,x_2=-2$　　D. $x_1=0,x_2=2$

（2）［中考·大连］解方程：$x^2-6x-4=0$.

（1）**答案：** D

（2）**解：** 移项，得 $x^2-6x=4$.

配方，得 $x^2-6x+(-3)^2=4+(-3)^2$，

由此可得 $(x-3)^2=13$. $\therefore x-3=\pm\sqrt{13}$，

$\therefore x_1=3+\sqrt{13},x_2=3-\sqrt{13}$.

方法点拨： 一元二次方程的解法有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法各种解法的选取顺序具体如下：（1）若方程符合 $a(x-n)^2=m(am\geq0,a\neq0)$ 的形式，用直接开平方法解方程比较简单.（2）对于一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当 $b=0$ 时，用直接开平方法求解较好；当 $c=0$ 时，用因式分解法比较简单；当 a，b，c 均不为0且不易分解因式时，一般采用公式法；（3）配方法也是一种重要的解题方法，当二次项系数为1、一次项系数为偶数时，应用该法比较简单；（4）对于复杂的一元二次方程，一般不急于化为一般形式，应观察其特点，看能否用直接开平方法或因式分解法，若不能，再化为一般形式求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 一元二次方程的根

链接中考≫涉及一元二次方程的根的问题有根的定义、根的判别式和根与系数的关系，单独考查时一般以填空题、选择题的形式出现，综合考查时常以解答题的形式出现.

类型一 一元二次方程的根与根的判别式

例2：（1）［中考·云南］下列一元二次方程中，没有实数根的是(　　)

A. $4x^2-5x+2=0$

B. $x^2-6x+9=0$

C. $5x^2-4x-1=0$

D. $3x^2-4x+1=0$

（2）［中考·咸宁］已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$.

①证明：不论 m 为何值，方程总有实数根；

②m 为何整数时，方程有两个不相等的正整数根？

解：（1）A

（2）①证明：$\because a=m, b=-(m+2), c=2$,

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=(m+2)^2-8m$$
$$=m^2+4m+4-8m$$
$$=m^2-4m+4$$
$$=(m-2)^2\geqslant 0,$$

$\therefore$ 方程有实数根.

综上，不论 m 为何值，方程总有实数根.

②解：$\because mx^2-(m+2)x+2=0$,

$\therefore (x-1)(mx-2)=0$.

$\therefore x-1=0$，或 $mx-2=0$.

$\therefore x_1=1, x_2=\dfrac{2}{m}$.

$\because$ 方程有两个不相等的正整数根，

$\therefore m=1$ 或 2，经检验，$m=2$ 不合题意.

$\therefore m=1$.

方法点拨：只要涉及一元二次方程根的情况时，一般都要考虑根的判别式.根据根的判别式值的情况可以判断一元二次方程根的情况，也可以根据一元二次方程根的情况，判断根的判别式值的正负.

类型二 一元二次方程的根和根与系数的关系

例3：（1）［中考·黄冈］若方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根为 x_1, x_2，则 $x_1+x_2-x_1\cdot x_2$ 的值为_____.

（2）［中考·汕尾］已知关于 x 的方程 $x^2+2x+a-2=0$.

①若该方程有两个不相等的实数根，求实数 a 的取值范围；

②当该方程的一个根为 1 时，求 a 的值及方程的另一根.

解：（1）3

（2）①依题意有 $\Delta=2^2-4(a-2)>0$，解得 $a<3$.

②方法一：将 $x=1$ 代入方程得 $1+2+a-2=0$，解得 $a=-1$,

$\therefore$ 原方程为 $x^2+2x-3=0$,

$\therefore (x-1)(x+3)=0$,

$\therefore x_1=1, x_2=-3$.

$\therefore a=-1$，方程的另一根为 -3.

方法二：设另一根为 x_2,

$\because 1+x_2=-2, \therefore x_2=-3$.

$\therefore a-2=1\times(-3)$,

$\therefore a=-1$.

方法点拨：已知方程的一根求另一根及方程中待定字母的值时，可以将已知的根直接代入方程，先求待定字母的值，再求另一根，也可以根据根与系数的关系先求另一根，再求待定字母的值.

类型三 根的判别式和根与系数的关系

例4：［中考·鄂州］关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不等实根 x_1, x_2.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）若方程两实根 x_1, x_2 满足 $|x_1|+|x_2|=x_1\cdot x_2$，求 k 的值.

解：（1）$\because$ 原方程有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=(2k+1)^2-4(k^2+1)=4k^2+4k+1-4k^2-4=4k-3>0$.

解得 $k>\dfrac{3}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)$\because k>\frac{3}{4}$,$\therefore x_1+x_2=-(2k+1)<0$.

$\because x_1x_2=k^2+1>0$,

$\therefore x_1<0$,$x_2<0$.

$\therefore |x_1|+|x_2|=-x_1-x_2=-(x_1+x_2)=2k+1$.

$\because |x_1|+|x_2|=x_1\cdot x_2$,

$\therefore 2k+1=k^2+1$.

$\therefore k=0$ 或 $k=2$.

$\because k>\frac{3}{4}$,$\therefore k=2$.

方法点拨: 1.一元二次方程根的情况与判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的关系:(1)$\Delta>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根;(2)$\Delta=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根;(3)$\Delta<0\Leftrightarrow$方程没有实数根.

2.关于 x_1,x_2 的代数式,通常可以转化成只含 x_1+x_2,x_1x_2 形式的式子,然后将 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$ 代入.另外,要注意应用一元二次方程根与系数的关系的前提是方程必须要有两个实数根.

专题三 一元二次方程的应用

链接中考» 一元二次方程的应用是本章重点考查的知识点,它是学习一元二次方程解法的真正目的,解决有关一元二次方程的应用题,关键就是建立一元二次方程模型,有从实际生活中建立的一元二次方程模型,也有从几何问题中建立的一元二次方程模型.考查的形式主要以解答题为主.

类型一 建立一元二次方程解决实际生活问题

例5: [中考·淮安] 水果店张阿姨以每斤2元的价格购进某种水果若干斤,然后以每斤4元的价格出售,每天可售出100斤.通过调查发现,这种水果每斤的售价每降低0.1元,每天可多售出20斤.为保证每天至少售出260斤,张阿姨决定降价销售.

(1)若将这种水果每斤的售价降低 x 元,则每天的销售量是_____斤(用含 x 的代数式表示);

(2)销售这种水果要想每天盈利300元,张阿姨应将每斤的售价降至多少元?

解: (1)$(100+200x)$

(2)这种水果每斤的售价降低 x 元,

根据题意得$(4-2-x)(100+200x)=300$,

即 $2x^2-3x+1=0$,

解得 $x_1=1$,$x_2=\frac{1}{2}$.

当 $x=1$ 时,每天的销售量为300斤;

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,每天的销售量为200斤.

因为要保证每天至少售出260斤,

所以 $x=\frac{1}{2}$ 不合题意,应舍去.

此时每斤的售价为 $4-1=3$(元).

答:销售这种水果要想每天盈利300元,张阿姨应将每斤的售价降至3元.

方法点拨: 从实际问题中建立一元二次方程模型时,需要从题中提取有效的信息,合理设未知数,找到恰当的数量关系建立方程.在检验时,对一元二次方程的两个根一方面要结合生活实际检验,另一方面要结合具体的问题检验.

类型二 从几何问题中建立一元二次方程模型

例6: [中考·襄阳] 如图24-1,一农户要建一个矩形猪舍,猪舍的一边利用长为12 m的住房墙,另外三边用25 m长的建筑材料围成,为方便进出,在垂直于住房墙的一边留一个1 m宽的门.所围矩形猪舍的长、宽分别为多少时,猪舍面积为80 m^2?



图24-1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解： 设矩形猪舍垂直于住房墙的一边长为 x m，

则矩形猪舍平行于住房墙的一边长为 $(26-2x)$ m.

依题意，得 $x(26-2x)=80$.

化简，得 $x^2-13x+40=0$.

解得 $x_1=5$，$x_2=8$.

当 $x=5$ 时，$26-2x=16>12$（舍去）；

当 $x=8$ 时，$26-2x=10<12$.

答：所围矩形猪舍的长为 10 m，宽为 8 m 时，猪舍面积为 80 m^2.

方法点拨： 在几何问题中建立一元二次方程模型的关键是图形的周长或面积，根的取舍也是由图形边长的限制条件决定的.

Ⅱ 思想方法专题

专题四 整体代入法

专题解读≫ 整体代入法就是在解决问题时，不是着眼于它的局部特征，而是把注意力和着眼点放在问题的整体结构上，通过对整体的把握和运用达到解决问题的目的. 在本章中主要体现在求与根有关的式子的值的问题上.

例 7： 已知 x_1，x_2 是方程 $3x^2-2x-4=0$ 的两实数根，不解方程求 $3x_1^2+2x_2$ 的值.

导引： 所求代数式不是对称式，所以求其值的思路是设法将其变成对称式，然后运用根与系数的关系求值. 注意所求代数式中 x_1^2 的系数与已知方程中二次项系数相同，故可利用方程根的定义将 $3x_1^2$ 代换. 同理也可将 $2x_2$ 代换.

解法一： ∵ x_1 是方程 $3x^2-2x-4=0$ 的根，

∴ $3x_1^2-2x_1-4=0$，即 $3x_1^2=2x_1+4$.

根据根与系数的关系可知 $x_1+x_2=\frac{2}{3}$.

∴ $3x_1^2+2x_2$

$=2x_1+4+2x_2$

$=2(x_1+x_2)+4$

$=\frac{16}{3}$.

解法二： 根据根与系数的关系可知 $x_1+x_2=\frac{2}{3}$，$x_1x_2=-\frac{4}{3}$.

∵ x_2 是方程 $3x^2-2x-4=0$ 的根，

∴ $3x_2^2-2x_2-4=0$，即 $2x_2=3x_2^2-4$.

∴ $3x_1^2+2x_2$

$=3(x_1^2+x_2^2)-4$

$=3[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-4$

$=3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{4}{3}\right)\right]-4$

$=\frac{16}{3}$.

方法点拨： 解决与一元二次方程的根有关的求值问题，通常用到整体代入法，将一元二次方程的根单个代入方程或利用根与系数的关系建立与两根的和与积有关的式子，最后求值时都采用整体代入法求值.

专题五 转化思想

专题解读≫ 转化思想是初中数学最常见的一种思想方法. 运用转化思想可将未知的问题转化为已知的问题，将复杂的问题转化为简单的问题. 在本章中主要体现为将解一元二次方程转化为平方根问题或利用因式分解将其转化为一元一次方程来求解.

例 8： 解方程：$\frac{x+1}{x}+\frac{5x}{x+1}=6$.

解： 设 $\frac{x+1}{x}=y$，则原方程变形为 $y+\frac{5}{y}=6$，

即 $y^2-6y+5=0$，

解得 $y_1=1$，$y_2=5$.

经检验当 $y=1$ 或 5 时，$y+\frac{5}{y}=6$ 有意义.

当 $y=1$ 时，$\frac{x+1}{x}=1$，此时方程无解.

当 $y=5$ 时，$\frac{x+1}{x}=5$，

去分母，得 $x+1=5x$，所以 $x=\frac{1}{4}$.

经检验，$x=\frac{1}{4}$ 是原方程的根.

所以原方程的根为 $x=\frac{1}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见269页

一、选择题

1. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a<2$　　B. $a>2$

C. $a<2$ 且 $a\neq1$　　D. $a<-2$

2. 三角形的两边长分别是 3 和 6，第三边的长是方程 $x^2-6x+8=0$ 的一个根，则这个三角形的周长是(　　)

A. 9　　B. 11

C. 13　　D. 11 或 13

3. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三条边的长，那么方程 $cx^2+(a+b)x+\frac{c}{4}=0$ 的根的情况是(　　)

A. 没有实数根

B. 有两个不相等的正实数根

C. 有两个不相等的负实数根

D. 有两个异号实数根

4. [中考·包头] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-2=0$ 有两个实数根，m 为正整数，且该方程的根都是整数，则符合条件的所有正整数 m 的和为(　　)

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

二、填空题

5. 如图，下面每个图形中的四个数都是按相同的规律填写的，根据此规律若 x 的值为 370，则 n 的值为_____.

1	1	2	3	3	5	4	7	…	n	m
2	1	4	10	6	27	8	52		y	x

(第5题)

6. 已知关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab-1=0$，x_1,x_2 是此方程的两个实数根，现给出三个结论：①$x_1\neq x_2$；②$x_1x_2<ab$；③$x_1^2+x_2^2<a^2+b^2$. 则正确的序号是_____(填上你认为正确结论的所有序号).

7. [中考·益阳] 规定：$a\otimes b=(a+b)b$，如：$2\otimes3=(2+3)\times3=15$，若 $2\otimes x=3$，则 $x=$_____.

三、解答题

8. 解下列方程：

(1) $x(x-5)=24$；　　(2) $2x^2=(2+\sqrt{3})x$.

9. [中考·考感] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m-1=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 当 $x_1^2+x_2^2=6x_1x_2$ 时，求 m 的值.

10. [中考·巴中] 定义新运算：对于任意实数 m,n 都有 $m\☆n=m^2n+n$，等式右边是常用的加法、减法、乘法及乘方运算. 例如：$(-3)\☆2=(-3)^2\times2+2=20$. 根据以上知识解决问题：若 $2\☆a$ 的值小于 0，请判断方程：$2x^2-bx+a=0$ 的根的情况.

11. [中考·黔西南州] 某精品店购进甲乙两种小礼品，已知 1 件甲礼品的进价比 1 件乙礼品的进价多 1 元，购进 2 件甲礼品与 1 件乙礼品共需 11 元.

(1) 求甲礼品的进价；

(2) 经市场调查发现，若甲礼品按 6 元/件销售，每天可卖 40 件；若按 5 元/件销售，每天可卖 60 件. 假设每天销售的件数 y(件)与售价 x(元/件)之间满足一次函数关系，求 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 在(2)的条件下，当甲礼品的售价定为多少时，才能使每天销售甲礼品的利润为 60 元?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 已知△ABC的两边AB,AC的长是关于x的一元二次方程$x^2-(2k+3)x+k^2+3k+2=0$的两个实数根,第三边BC的长是5.

(1)k为何值时,△ABC是以BC为斜边的直角三角形;

(2)k为何值时,△ABC是等腰三角形,并求△ABC的周长.

13. [中考·重庆]在美丽乡村建设中,某县政府投入专项资金,用于乡村沼气池和垃圾集中处理点建设. 该县政府计划:2018年前5个月,新建沼气池和垃圾集中处理点共计50个,且沼气池的个数不低于垃圾集中处理点个数的4倍.

(1)按计划,2018年前5个月至少要修建多少个沼气池?

(2)到2018年5月底,该县按原计划刚好完成了任务,共花费资金78万元,且修建的沼气池个数恰好是原计划的最小值. 据核算,前5个月,修建每个沼气池与垃圾集中处理点的平均费用之比为1:2,为加大美丽乡村建设的力度,政府计划加大投入,今年后7个月,在前5个月花费资金的基础上增加投入$10a\%$,全部用于沼气池和垃圾集中处理点建设. 经测算:从今年6月起,修建每个沼气池与垃圾集中处理点的平均费用在2018年前5个月的基础上分别增加$a\%$,$5a\%$,新建沼气池与垃圾集中处理点的个数将会在2018年前5个月的基础上分别增加$5a\%$,$8a\%$,求a的值.

14. [中考·西宁]青海新闻网讯:2016年2月21日,西宁市首条绿道免费公共自行车租赁系统正式启用. 市政府今年投资了112万元,建成40个公共自行车站点、配置720辆公共自行车. 今后将逐年增加投资,用于建设新站点、配置公共自行车. 预计2018年将投资340.5万元,新建120个公共自行车站点、配置2 205辆公共自行车.

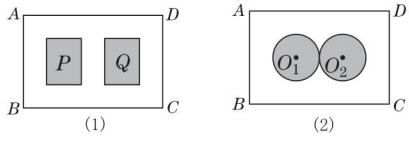
(1)请问每个站点的造价和公共自行车的单价分别是多少万元?

(2)请你求出2016年到2018年市政府配置公共自行车数量的年平均增长率.

15. 要对一块长60米、宽40米的矩形荒地$ABCD$进行绿化和硬化.

(1)设计方案如图(1)所示,矩形P,Q为两块绿地,其余为硬化路面,P,Q两块绿地周围的硬化路面宽都相等,并使两块绿地面积的和为矩形$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$,求P,Q两块绿地周围的硬化路面的宽;

(2)某同学有如下设想:设计绿化区域为紧挨着的两个等圆,圆心分别为O_1和O_2,且O_1到AB,BC,AD的距离与O_2到CD,BC,AD的距离都相等,其余为硬化地面,如图(2)所示,这个设想是否成立?若成立,求出圆的半径;若不成立,说明理由.



(第15题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

参考答案及点拨

第二十三章 数据分析

23.1 平均数与加权平均数

同类变式

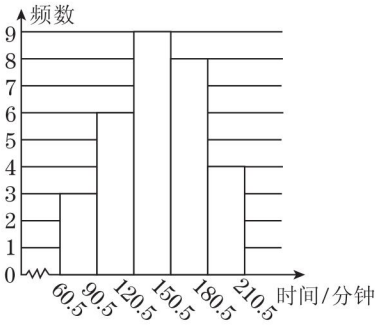
1. 101

2. 8.4 **点拨**：由平均数的定义，得这五次成绩的平均数是$\frac{1}{5}\times(7+9+8+8+10)=8.4$(环).

6. D

7. **解**：(1)甲、乙、丙的民主评议得分分别为
$200\times25\%=50$(分)，
$200\times40\%=80$(分)，
$200\times35\%=70$(分).
(2)甲的平均成绩为$\frac{75+93+50}{3}=\frac{218}{3}\approx72.67$(分)，乙的平均成绩为$\frac{80+70+80}{3}=\frac{230}{3}\approx76.67$(分)，丙的平均成绩为$\frac{90+68+70}{3}=\frac{228}{3}=76$(分). 因为$76.67>76>72.67$，所以候选人乙将被录用.
(3)甲的个人成绩为$\frac{4\times75+3\times93+3\times50}{4+3+3}=72.9$(分)，乙的个人成绩为$\frac{4\times80+3\times70+3\times80}{4+3+3}=77$(分)，丙的个人成绩为$\frac{4\times90+3\times68+3\times70}{4+3+3}=77.4$(分)，因为丙的个人成绩最高，所以候选人丙将被录用.

8. **解**：(1)根据频数分布直方图中各组的频数总和等于数据总个数，知本次被抽查学生中做作业所用的时间在90.5分钟到120.5分钟范围的人数是$30-3-9-8-4=6$.
(2)补全频数分布直方图如图所示.
(3)取每一小组的组中值近似地作为该小组内每名学生做作业所用的时间.
$\frac{75.5\times3+105.5\times6+135.5\times9+165.5\times8+195.5\times4}{30}\approx140$(分钟).



(第8题)

所以估计被抽查的学生做作业所用的平均时间约为140分钟.
点拨：本题考查利用统计图获取信息的能力. 利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能做出正确的判断. 要掌握频数、组中值和平均数的定义.

练中考·练模拟 得满分

1. B

2. D **点拨**：由平均数的定义，知$x_1+x_2+x_3+x_4=4\times2=8$，则$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4+4\times3)=\frac{1}{4}\times(8+12)=5$，故选D. 关于平均数的计算有规律：若$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$，则数据$ax_1+b,ax_2+b,\cdots,ax_n+b$的平均数是$a\bar{x}+b$.

3. C

4. 25 **点拨**：$\bar{x}=\frac{22+25+35+18}{4}=25$(株).

5. **解**：由题意，得$\bar{x}=\frac{0.01\times2+0.02\times1+0.03\times5+0.04\times3+0.05\times1}{2+1+5+3+1}=0.03$(g/m³).
所以这天该市市区的大气飘尘数据的平均值是0.03 g/m³.

6. **解**：(1)九年级捐图书数为$1\,000\times30\%\times4=1\,200$(本)，
八年级捐图书数为$1\,000\times35\%\times6=2\,100$(本)，
七年级捐图书数为$1\,000\times(1-30\%-35\%)\times2=700$(本)，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴该校学生捐图书的总本数为 1 200 + 2 100 + 700 = 4 000(本).

(2)4 000 ÷ 1 000 = 4(本),

因此,该校学生平均每人捐图书 4 本.

7. 解:(1)由题意可得,

甲组的平均成绩是:$\frac{91+80+78}{3}=83$(分),

乙组的平均成绩是:$\frac{81+74+85}{3}=80$(分),

丙组的平均成绩是:$\frac{79+83+90}{3}=84$(分),

∵ 84 > 83 > 80,

∴从高分到低分小组的排名顺序是:丙组第一名,甲组第二名,乙组第三名.

(2)由题意可得,

甲组的成绩是:91 × 40% + 80 × 30% + 78 × 30% = 83.8(分),

乙组的成绩是:81 × 40% + 74 × 30% + 85 × 30% = 80.1(分),

丙组的成绩是:79 × 40% + 83 × 30% + 90 × 30% = 83.5(分),

∵ 83.8 > 83.5 > 80.1,

∴甲组的成绩最高.

8. B 点拨:因为 10 名学生的平均成绩是 x 分,所以这 10 名学生的总成绩是 $10x$ 分,故整个组的平均成绩是$\frac{10x+84\times5}{15}=\frac{10x+420}{15}$(分).

9. 90

10. 解:(1)平均数 $=\frac{5x_1+5x_2+\cdots+5x_n}{n}=\frac{5(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}=5\bar{x}$.

(2)平均数 $=\frac{(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+\cdots+(x_n-y_n)}{n}$

$=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n}$

$=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$

$=\bar{x}-\bar{y}$.

(3)平均数 $=\frac{x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n}{2n}$

$=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{2n}$

$=\frac{n\bar{x}+n\bar{y}}{2n}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$.

11. 解:(1)该班的学生总人数为 4 + 8 + 10 + 16 + 12 = 50(人).

(2)能. 先估算全班总成绩为 54.5 × 4 + 64.5 × 8 + 74.5 × 10 + 84.5 × 16 + 94.5 × 12 = 3 965(分),则估算出平均分为 $\frac{3\,965}{50}=79.3$(分).

点拨:本题考查估算平均分,在计算时选取每一组的组中值近似地作为该组学生成绩的平均分.

12. 解:(1)小聪的平均成绩是:(80 + 90 + 98 + 60) ÷ 4 = 82(分),

小亮的平均成绩是:(85 + 75 + 75 + 95) ÷ 4 = 82.5(分).

(2)小聪的毕业成绩是:(80 × 2 + 90 × 3 + 98 × 3 + 60 × 2) ÷ (2 + 3 + 3 + 2) = 84.4(分),

小亮的毕业成绩是:(85 × 2 + 75 × 3 + 75 × 3 + 95 × 2) ÷ (2 + 3 + 3 + 2) = 81(分),

84.4 > 80,81 > 80,故小聪和小亮都达到了"优秀毕业生"水平;84.4 > 81,故小聪的毕业成绩更好些.

(3)(答案不唯一)小聪要加强体育锻炼,注意培养综合素质;小亮在学习文化知识方面还要努力,成绩有待进一步提高.

方法规律:当数据信息以表格或统计图的形式呈现时,要结合条件读懂表格或统计图,并从中获取有用的信息. 此题从条形统计图中得出每人各项成绩后计算平均成绩,再根据不同的权重计算两人的毕业成绩,充分体现了数形结合思想.

23.2 中位数和众数

同类变式

1. C 点拨:这组数据的中位数为$\frac{48+49}{2}=48.5$. 故选 C.

2. 1.65

3. 20 点拨:∵捐 100 元的 15 人占全班总人数的 25%,∴全班总人数为 15 ÷ 25% = 60(人),∴捐款 20 元的有 60 − 20 − 15 − 10 = 15(人),进而根据中位数的定义可求出本次捐款的中位数为 20 元. 本题考查了中位数的求法,解题的关键是求出总人数和捐款 20 元的人数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. C　**7**. B

9. **解**:(1)将说课成绩(单位:分)按从低到高的顺序排列为78,85,85,86,88,94.

∴ 说课成绩的中位数是$\frac{85+86}{2}$=85.5(分),众数是85分.

(2)序号是3,6号的候选人将被录用.

理由如下:

5,6号候选人的总成绩如下:

5号:$\frac{65\times2+88\times3+94\times5}{2+3+5}$=86.4(分);

6号:$\frac{84\times2+92\times3+85\times5}{2+3+5}$=86.9(分).

∵ 88.1>86.9>86.4>84.6>84.2>80.8,

∴ 序号是3,6号的候选人将被录用.

练中考·练模拟 得满分

1. A　**2**. D

3. =　**点拨**:$a=15$,$b=15$.

4. 18　**点拨**:该市中学生女生"一分钟仰卧起坐"合格标准应定为18次比较合适.理由是:众数和中位数都是18次,50名女生中有41名达到该次数,百分比为82%,是大多数女生都可以达到的次数.若以平均数20.5次为合格标准,50名女生中有一半多难以达标,所以选用众数或中位数作为合格标准比较合适.

5. **解**:(1)88　(2)86

(3)不能,因为全班学生考试成绩的中位数是86分,所以张华同学的成绩处于中游偏下.

(或者指出高于83分的有30名学生,而低于83分的仅有15名学生,所以张华的分数为中游偏下)

6. **解**:众数是鞋厂最关注的.

点拨:鞋厂通常关心各种尺码的鞋的销售情况,特别是关心哪种尺码的鞋销售得最多,这对掌握市场需求情况和确定今后生产量具有重要参考价值.

7. C　**点拨**:利用条形统计图知这组数据有40个,然后按照从小到大(或从大到小)的顺序排列,找出第20个数据和第21个数据,它们都是14岁,则中位数为14岁,故选C.

8. 2

9. **解**:(1)平均数为

$\frac{6\,000\times20+4\,500\times40+3\,800\times60+3\,000\times30}{20+40+60+30}$=4 120(元),

中位数为3 800元,众数为3 800元.

(2)从销售的数量来看,价格为3 800元的电脑销售量最大,说明比较畅销,应适当多进货,价格为6 000元的电脑销售量最少,应少进货.

10. **解**:(1)填表如下:

	平均数/分	众数/分	中位数/分
七年级	85.5	80	87
八年级	85.5	85	86
九年级	85.5	78	84

(2)①∵ 平均数都相同,八年级成绩的众数最高,

∴ 八年级的成绩更好一些;

②∵ 平均数都相同,七年级成绩的中位数最高,

∴ 七年级的成绩更好一些.

(3)九年级.

∵ 七、八、九年级前3名学生决赛成绩的平均数分别是$\frac{99+91+89}{3}$=93(分),

$\frac{97+88+88}{3}$=91(分),$\frac{96+97+89}{3}$=94(分),

∴ 如果在每个年级参加决赛的选手中分别选出3人参加总决赛,九年级的实力更强一些.

11. (1)①乙　②甲　(2)乙

点拨:重点考查了理解统计图的能力.由题图可知甲、乙成绩的平均数相等,但乙的合格次数比甲多,甲成绩的中位数大于乙成绩的中位数,据此进行判断.

23.3 方　差

同类变式

1. C　**2**. B　**3**. A

4. A　**点拨**:首先比较平均数,平均数相同时,选择方差较小的运动员参加.

5. C　**点拨**:$\bar{x}_{甲}=(5.05+5.02+5+4.96+4.97)\div5=5$(mm),

$\bar{x}_{乙}=(5+5.01+5+4.97+5.02)\div5=5$(mm),

故$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$.

$s_{甲}=\sqrt{\frac{(5.05-5)^2+(5.02-5)^2+(5-5)^2+(4.96-5)^2+(4.97-5)^2}{5}}=\sqrt{0.001\,08}\approx0.033$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$s_{乙}=\sqrt{\frac{(5-5)^2+(5.01-5)^2+(5-5)^2+(4.97-5)^2+(5.02-5)^2}{5}}=\sqrt{0.000\ 28}\approx 0.017$.

故 $s_{甲}>s_{乙}$. 故选 C.

6. 解:(1)因为 28 − 22 = 6(天),

所以这 10 盆花的花期最多相差 6 天.

(2)由平均数计算公式,得 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(25+23+28+22+27)=25$(天),

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(27+24+24+27+23)=25$(天).

因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$,所以无论用哪种保花肥,花的平均花期都一样长.

(3)由标准差计算公式,得

$s_{甲}=\sqrt{\frac{(25-25)^2+(23-25)^2+(28-25)^2+(22-25)^2+(27-25)^2}{5}}=\sqrt{5.2}$,

$s_{乙}=\sqrt{\frac{(27-25)^2+(24-25)^2+(24-25)^2+(27-25)^2+(23-25)^2}{5}}=\sqrt{2.8}$.

因为 $s_{甲}>s_{乙}$,

所以用乙种保花肥的效果比较可靠.

练中考·练模拟 得满分

1. A **点拨**:由题意可得,

甲的平均数为:$\frac{9+8+7+7+9}{5}=8$,方差为:$\frac{(9-8)^2+(8-8)^2+(7-8)^2+(7-8)^2+(9-8)^2}{5}=0.8$;

乙的平均数为:$\frac{10+8+9+7+6}{5}=8$,方差为:$\frac{(10-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(7-8)^2+(6-8)^2}{5}=2$.

∵ 8 = 8,0.8 < 2,

∴ 应选择甲参加.

2. B **点拨**:因为数据 1,2,3,x,5 的平均数是 3,所以 $x=4$.

方差为 $\frac{1}{5}\times[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=2$. 故选 B.

3. A **4.** D

5. 解:(1) $\bar{x}_{甲}=\frac{79+86+82+85+83}{5}=83$(分), $\bar{x}_{乙}=\frac{88+79+90+81+72}{5}=82$(分).

(2)选拔甲参加比赛更合适,理由如下:

∵ $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$,且 $s^2_{甲}<s^2_{乙}$,

∴ 甲的平均成绩高于乙,且甲的成绩更稳定,故选拔甲参加比赛更合适.

点拨:(1)根据平均数的定义可列式计算;(2)由平均数所表示的平均水平及方差所衡量的成绩稳定性判断可知.

6. 解:$\bar{x}_{甲}=(-3+4+2-1-2-2+1-2+2+1)\div 10=0$(秒),

$s^2_{甲}=\frac{1}{10}\times[(-3)^2+4^2+\cdots+1^2]=\frac{24}{5}$;

$\bar{x}_{乙}=(-4+2-3+2+4+2-3-1+4-3)\div 10=0$(秒), $s^2_{乙}=\frac{1}{10}\times[(-4)^2+2^2+\cdots+(-3)^2]=\frac{44}{5}$;

显然 $s^2_{甲}<s^2_{乙}$,所以甲种手表日走时稳定性好.

7. A **点拨**:换人前,平均数为 $\frac{180+184+188+190+192+194}{6}=188$(cm),

方差为 $\frac{1}{6}\times[(180-188)^2+(184-188)^2+(188-188)^2+(190-188)^2+(192-188)^2+(194-188)^2]=\frac{68}{3}$;

换人后,平均数为 $\frac{180+184+186+188+190+194}{6}=187$(cm),

方差为 $\frac{1}{6}\times[(180-187)^2+(184-187)^2+(186-187)^2+(188-187)^2+(190-187)^2+(194-187)^2]=\frac{59}{3}$.

所以换人后,平均数变小,方差变小.

8. $\frac{25}{6}$

9. 解:由题意可知 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.

(1) $\bar{x}'=\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')=\frac{1}{n}[(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots+(ax_n+b)]=\frac{1}{n}[a(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nb]=a\bar{x}+b$.

(2) $s'^2=\frac{1}{n}[(x_1'-\bar{x}')^2+(x_2'-\bar{x}')^2+\cdots+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(x_n'-\bar{x}')^2]=\frac{1}{n}[(ax_1+b-a\bar{x}-b)^2+(ax_2+b-a\bar{x}-b)^2+\cdots+(ax_n+b-a\bar{x}-b)^2]=\frac{1}{n}[a^2(x_1-\bar{x})^2+a^2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\bar{x})^2]=a^2s^2$.

10. 解:(1)

	平均数/分	中位数/分	众数/分
甲	80	79.5	78
乙	80	80	80

(2)13

(3)选乙同学. 从平均数看,两人平均成绩相同;从中位数看,乙高于甲;从众数看,乙高于甲;从方差看,乙比甲稳定,故选乙同学参加该数学邀请赛.

11. (1)甲　(2)甲

23.4　用样本估计总体

同类变式

1. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(0.8+0.9+1.2+1.3+0.8+0.9+1.1+1.0+1.2+0.8)=1(\text{kg})$.

∴估计总质量为 $1\times20\,000\times70\%=14\,000(\text{kg})$.

答:估计这塘鱼的总质量是 14 000 kg.

(2)销售额约为 $4\times14\,000=56\,000$(元),利润约为 $56\,000-16\,000=40\,000$(元).

答:销售额约是 56 000 元,利润约是 40 000 元.

点拨:当所要考察的对象很多或考察本身带有破坏性时,统计中常常用样本来估计总体.

2. 解:利用公式计算得

$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(12+13+15+15+10)=13$(厘米),$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(13+14+16+12+10)=13$(厘米);

$s^2_{甲}=\frac{1}{5}\times[(12-13)^2+(13-13)^2+(15-13)^2+(15-13)^2+(10-13)^2]=3.6$,

$s^2_{乙}=\frac{1}{5}\times[(13-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2+(12-13)^2+(10-13)^2]=4$.

因为 $s^2_{甲}<s^2_{乙}$,由样本方差估计总体方差,推断甲种水稻出苗更整齐.

方法规律:本题运用了定义法和统计思想,根据公式计算平均数和方差,然后利用样本方差估计总体方差,方差越小,数据波动越小,水稻出苗越整齐.

练中考·练模拟　得满分

1. C　方法规律:本题运用了定义法和统计思想,选出的 10 名同学的家庭一个月平均节约用水量为 $(0.5\times2+1\times3+1.5\times4+2\times1)\div10=1.2$(吨),由样本平均数估计总体平均数,可得 $1.2\times200=240$(吨).

2. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(106+99+100+113+111+97+104+112+98+110)=105$(克). ∴估计这批油桃的平均质量为 105 克.

(2)$\frac{4}{10}\times100\%=40\%$,$900\times40\%=360$(千克).

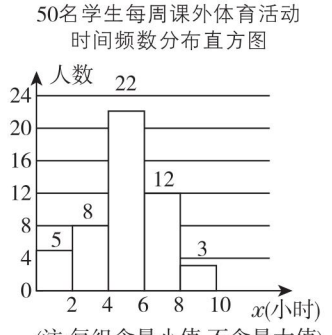
∴估计这批油桃中,优级油桃占油桃总数的 40%,达到优级的油桃有 360 千克.

3. 解:(1)抽样;50

(2)由题意可得,每周课外体育活动时间在 $6\leqslant x<8$ 小时的学生有:$50\times24\%=12$(名),

则每周课外体育活动时间在 $2\leqslant x<4$ 小时的学生有:$50-5-22-12-3=8$(名),

补全的频数分布直方图如图所示:



(第 3 题)

(3)由题意可得,

$\frac{1\times5+3\times8+5\times22+7\times12+9\times3}{50}=5$(小时),即这 50 名学生每周课外体育活动时间的平均数是 5 小时.

(4)由题意可得,

全校学生每周课外体育活动时间不少于 6

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

小时的学生约有:$1\ 000\times\frac{12+3}{50}=300$(名),

即估计全校学生每周课外体育活动时间不少于6小时的学生有300名.

4. 20 000

5. **解**:(1)填表如下:

	平均数/环	中位数/环	众数/环
小亮	7	7	7
小莹	7	7.5	9

(2)平均数相等,说明两人整体水平相当,成绩一样好;小莹投标环数的中位数大,说明小莹的成绩比小亮好.

点拨:根据题意得:小亮投中的环数(单位:环)为:9,5,7,8,7,6,8,6,7,7.

平均数为$\frac{1}{10}\times(9+5+7+8+7+6+8+6+7+7)=7$(环),众数为7环;

小莹投中的环数(单位:环)为:3,4,6,9,5,7,8,9,9,10,

中位数为7.5环.

6. **解**:(1)16;10

(2)从优等品数量的角度看,因为A技术种植的西瓜优等品数量较多,所以A技术较好;

从平均数的角度看,因为A技术种植的西瓜质量的平均数更接近5 kg,所以A技术较好;

从方差的角度看,因为B技术种植的西瓜质量的方差更小,所以B技术种植的西瓜质量更为稳定;

从市场销售角度看,因优等品更畅销,A技术种植的西瓜优等品数量更多,且平均质量更接近5 kg,因而推广A种植技术较好.

7. **解**:(1)根据所给扇形统计图可知,喝剩约$\frac{1}{3}$的人数是总人数的50%,

$\therefore 25\div 50\%=50$(人),

$\therefore$ 参加这次会议的有50人,

$\because\frac{5}{50}\times 360^\circ=36^\circ$,

$\therefore$ D所在扇形的圆心角是36°,

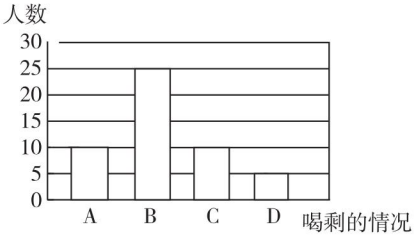
补全条形统计图如图.

(2)根据条形统计图可得平均每人浪费矿泉水量约为:

$\left(25\times\frac{1}{3}\times 500+10\times 500\times\frac{1}{2}+5\times 500\right)\div 50=\frac{27\ 500}{3}\div 50\approx 183$(mL).

(3)$\frac{40+60}{2}\times 60\times 183\div 500=1\ 098$(瓶).

$\therefore$ 该单位一年中因此类会议浪费的矿泉水(500 mL/瓶)约有1 098瓶.



(第7题)

章末核心知识分类整合

好题必解:

一、**1.** D **点拨**:观察发现,5出现了两次,出现次数最多,所以这组数据的众数是5,选项A正确;将这组数据按从小到大的顺序排列是:3,5,5,7,10,最中间的数是5,所以这组数据的中位数是5,选项B正确;

$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(7+5+3+5+10)=6$,选项C正确;

$s^2=\frac{1}{5}\times[(7-6)^2+(5-6)^2\times 2+(3-6)^2+(10-6)^2]=5.6$,选项D不正确.

2. B

3. B **点拨**:这里中位数是预赛成绩排序后第13名同学的成绩,成绩大于或等于中位数则能进入决赛,否则不能.

4. B **点拨**:根据平均数的计算公式先求出编号3的得分,再根据方差公式进行计算即可得出答案.

5. B

二、**6.** 50 **7.** 50%;2.8

8. 9 **9.** 37 **10.** 甲

三、**11.** **解**:(1)$\frac{15\times 40+25\times 40+30\times 20}{100}=22$(元/千克)

答:该什锦糖的单价为22元/千克.

(2)设加入丙种糖果x千克,则加入甲种糖果$(100-x)$千克,由题意,得

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

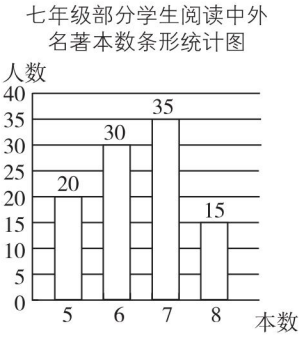
$\frac{30x+15(100-x)+22\times100}{200}\leqslant22-2$，解得：$x\leqslant20$.

答：最多可加入丙种糖果 20 千克.

12. 解：根据题意，得阅读了 6 本的人数为 $100\times30\%=30$（人），

阅读了 7 本的人数为 $100-20-30-15=35$（人），

补全条形统计图如图：



（第 12 题）

平均每名学生的阅读本数为

$\frac{5\times20+6\times30+7\times35+8\times15}{100}=6.45$（本），

所以估计该校七年级全体学生在 2018 年全年阅读中外名著的总本数为 $800\times6.45=5\ 160$（本）.

答：估计该校七年级全体学生在 2018 年全年阅读中外名著的总本数约为 5 160本.

点拨：由阅读了 6 本的人数占被调查人数的 30% 可求得阅读了 6 本的人数，将总人数减去阅读本数是 5，6，8 本的人数可得阅读了 7 本的人数，据此补全条形统计图；根据样本计算出平均每人的阅读本数，再用平均本数乘以七年级学生总人数即可得答案.

13. 解：（1）$a=\frac{5\times1+6\times2+7\times4+8\times2+9\times1}{1+2+4+2+1}=7$.

∵ 乙射击的成绩（单位：环）从小到大排列为：3，4，6，7，7，8，8，8，9，10，

∴ $b=\frac{7+8}{2}=7.5$，

其方差 $c=\frac{1}{10}\times[(3-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+2\times(7-7)^2+3\times(8-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2]=\frac{1}{10}\times(16+9+1+3+4+9)=4.2$.

（2）从平均成绩看，甲、乙二人的成绩相等，均为 7 环；从中位数看，甲射中 7 环以上的次数少于乙；从众数看，甲射中 7 环的次数最多，乙射中 8 环的次数最多；从方差看，甲的成绩比乙的成绩稳定. 综合以上各因素，若选派一名队员参加比赛，可选择乙参赛，因为乙获得高分的可能性更大.（答案不唯一，说法合理即可）

14. 解：（1）6；0.4；6

（2）甲、乙两人射靶成绩的平均数都是 6 环，但甲比乙的方差要小，说明甲的成绩较为稳定，所以甲的成绩比乙的成绩要好些.

15. 解：（1）在专业知识方面 3 人得分的极差是 $18-14=4$（分）.

在工作经验方面 3 人得分的众数是 15 分.

在仪表形象方面丙最有优势.

（2）应该录用乙. 理由：$10+7+3=20$，甲得分：$14\times\frac{10}{20}+17\times\frac{7}{20}+12\times\frac{3}{20}=\frac{295}{20}$（分），

乙得分：$18\times\frac{10}{20}+15\times\frac{7}{20}+11\times\frac{3}{20}=\frac{318}{20}$（分），

丙得分：$16\times\frac{10}{20}+15\times\frac{7}{20}+14\times\frac{3}{20}=\frac{307}{20}$（分）.

∵ $\frac{295}{20}<\frac{307}{20}<\frac{318}{20}$，

∴ 应该录用乙.

（3）对甲而言，应加强专业知识的学习，同时要注意自己的仪表形象.

对丙而言，三方面都要努力，重点在专业知识和工作经验.（答案不唯一，合理即可）

16. 解：（1）100　（2）5

（3）居民月人均用水量标准定为 3 吨时较为合适. 因为月人均用水量低于 3 吨的居民占 86%.

第二十四章 一元二次方程

24.1 一元二次方程

同类变式

3. A　**点拨**：根据方程是一元二次方程，知 $|a-2|=2$，且 $a-4\neq0$，所以 $a=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:根据题意,得 $x(x-1)=1\,980$,
将方程化成一般形式为 $x^2-x-1\,980=0$.

5. C **6.** D

7. 解:将 $x=-1$ 代入方程 $x^2+x+m^2-2m=0$ 中,得 $(-1)^2+(-1)+m^2-2m=0$,
整理得 $m^2-2m=0$,即 $m(m-2)=0$,
$\therefore m=0$ 或 $m=2$.

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** B **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** $m\geqslant 0$ 且 $m\neq 1$

5. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$

6. 解:原式 $=\frac{a^2-a}{a+1}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}-a^2$
$=a-a^2$.
$\because a$ 是方程 $x^2-x-\frac{7}{2}=0$ 的根,
$\therefore a^2-a-\frac{7}{2}=0$,
$\therefore a^2-a=\frac{7}{2}$.
$\therefore$ 原式 $=-\frac{7}{2}$.

7. 解:乙正确. 证明:$\because$ 二次项系数 $m^2-8m+19=m^2-8m+16+3=(m-4)^2+3>0$,
$\therefore$ 二次项系数不为 0,$\therefore$ 原方程是一元二次方程.

8. C **点拨**:将 $x=m$ 代入方程得 $m^2-2m=1$,所以 $7m^2-14m=7$;将 $x=n$ 代入方程得 $n^2-2n=1$,所以 $3n^2-6n=3$. 因为 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$,所以 $(7+a)\times(3-7)=8$,所以 $a=-9$.

9. -3

10. $x^2+2x-3=0$ **点拨**:本题答案不唯一. 设关于 x 的一元二次方程为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,因为它的一个根为 1,所以把 $x=1$ 代入方程得 $a+b+c=0$,所以只要能够满足 $a+b+c=0$,且 $a\neq 0$ 即可.

11. 解:(1)设所求方程的根为 y,则 $y=3x$,
$\therefore x=\frac{y}{3}$. 把 $x=\frac{y}{3}$ 代入已知方程得 $\left(\frac{y}{3}\right)^2+\frac{y}{3}-1=0$,化简得 $y^2+3y-9=0$,故所求方程为 $y^2+3y-9=0$.

(2)设所求方程的根为 y,则 $y=\frac{1}{x}(x\neq 0)$,$\therefore x=\frac{1}{y}$. 把 $x=\frac{1}{y}$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$,得 $a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\cdot\frac{1}{y}+c=0$,去分母,得 $a+by+cy^2=0$. 若 $c=0$,则 $ax^2+bx=0$,于是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 0,不符合题意,
$\therefore c\neq 0$. 故所求方程为 $cy^2+by+a=0(c\neq 0)$.

(3)设所求方程的根为 y,则 $y=x^2$,
$\therefore x=\pm\sqrt{y}$.
①当 $x=\sqrt{y}$ 时,把 $x=\sqrt{y}$ 代入已知方程得 $(\sqrt{y})^2-m\sqrt{y}+n=0$,即 $y-m\sqrt{y}+n=0$;
②当 $x=-\sqrt{y}$ 时,把 $x=-\sqrt{y}$ 代入已知方程得 $(-\sqrt{y})^2+m\sqrt{y}+n=0$,即 $y+m\sqrt{y}+n=0$.

12. 解:$\because a$ 是已知方程的一个根,
$\therefore a^2-3a+1=0$,
$\therefore a^2-3a=-1$,$a^2+1=3a$.
$\therefore\frac{a^3-2a^2-5a+1}{a^2+1}$
$=\frac{a^3-3a^2+a^2-3a-2a+1}{a^2+1}$
$=\frac{a(a^2-3a)+(a^2-3a)-2a+1}{a^2+1}$
$=\frac{(-a)+(-1)-2a+1}{a^2+1}=\frac{-3a}{3a}=-1$.

13. 5 **点拨**:$\because a$ 是一元二次方程 $x^2-5x+m=0$ 的一个根,$-a$ 是一元二次方程 $x^2+5x-m=0$ 的一个根,$\therefore a^2-5a+m=0$①,$a^2-5a-m=0$②,①+②,得 $2(a^2-5a)=0$,$\because a>0$,$\therefore a=5$.

24.2 解一元二次方程

24.2.1 配方法

同类变式

1. $p\geqslant 2$

4. 解:将方程化为一般形式为 $3x^2-20x+32=0$.
二次项系数化为 1,得 $x^2-\frac{20}{3}x+\frac{32}{3}=0$. 移项,得 $x^2-\frac{20}{3}x=-\frac{32}{3}$. 配方,得 $x^2-\frac{20}{3}x+\left(-\frac{10}{3}\right)^2=-\frac{32}{3}+\left(-\frac{10}{3}\right)^2$,$\left(x-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. 由此可得 $x-\frac{10}{3}=\pm\frac{2}{3}$,
$\therefore x_1=4$,$x_2=\frac{8}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分

1. B

2. B

3. $x_1=3, x_2=-1$

4. 4;2;±3;$\pm\frac{3}{2}$

5. 解:(1)移项,得$2x^2=8, x^2=4$,于是$x=\pm2$,$x_1=2, x_2=-2$.

(2)移项,得$(y-5)^2=36, y-5=\pm6$,于是$y_1=11, y_2=-1$.

(3)$x^2-1=1$,移项、合并同类项,得$x^2=2$,于是$x=\pm\sqrt{2}, x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}$.

(4)$x-1=\pm(2x+3)$,于是$x_1=-4, x_2=-\frac{2}{3}$.

6. 解:(1)配方,得$x^2+4x+4=4, (x+2)^2=4$,于是$x+2=\pm2, x_1=0, x_2=-4$.

(2)移项,得$x^2-2x=2$,配方,得$x^2-2x+1=3, (x-1)^2=3$,于是$x-1=\pm\sqrt{3}, x_1=\sqrt{3}+1, x_2=-\sqrt{3}+1$.

(3)二次项系数化为1,得$x^2-\frac{3}{2}x-3=0$,移项,得$x^2-\frac{3}{2}x=3$,配方,得$x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=3+\left(-\frac{3}{4}\right)^2, \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{57}{16}$,$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{57}}{4}$,于是$x_1=\frac{3+\sqrt{57}}{4}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{57}}{4}$.

(4)二次项系数化为1,得$x^2+\frac{1}{2}x-3=0$,移项,得$x^2+\frac{1}{2}x=3$,配方,得$x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=3+\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}, x+\frac{1}{4}=\pm\frac{7}{4}$,于是$x_1=\frac{3}{2}, x_2=-2$.

7. D **8.** B **9.** B

10. A **点拨:**将M与N代入$N-M$中,利用完全平方公式变形后,根据完全平方式恒大于等于0得到差为正数,即可判断出大小.$\because M=\frac{2}{9}a-1, N=a^2-\frac{7}{9}a$($a$为任意实数),$\therefore N-M=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,$\therefore N>M$,即$M<N$.

11. D **点拨:**设丁的一直角边长为a,且$a<2$,$\because$甲的面积+乙的面积=丙的面积+丁的面积,

$\therefore 2a+2a=\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times a^2$,

$\therefore 4a=2+\frac{1}{2}a^2$,

$\therefore a^2-8a+4=0$,配方法解方程得$a=4\pm2\sqrt{3}$,

$\because 4+2\sqrt{3}>2$,不合题意,$4-2\sqrt{3}<2$,符合题意,

$\therefore a=4-2\sqrt{3}$.

12. 解:(1)$\because a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,

$\therefore (a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$,

$\therefore a-3=0, b-4=0, c-5=0$.

$\therefore a=3, b=4, c=5$.

(2)$\because a=3, b=4, c=5$,

$\therefore a^2+b^2=25, c^2=25$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$为直角三角形.

24.2.2 公式法

同类变式

2. B

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** D

3. $m\leqslant4$且$m\neq0$

4. 解:(1)$\because a=3, b=-2, c=-2$,

$\therefore b^2-4ac=4-4\times3\times(-2)=28$,

$\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{28}}{2\times3}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$,

$\therefore x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}, x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

(2)原方程化为$3x^2+x-1=0$,

$\because a=3, b=1, c=-1$,

$\therefore b^2-4ac=1-4\times3\times(-1)=13$,

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$,

$\therefore x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

(3)原方程化为$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$,

$\because a=1, b=-2\sqrt{2}, c=2$,

$\therefore b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0$,

$\therefore x=\frac{2\sqrt{2}\pm0}{2}$,

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 证明: $\because (4m+1)^2-4(2m-1)=16m^2+5>0$,$\therefore$ 不论 m 为任何实数,关于 x 的一元二次方程 $x^2+(4m+1)x+2m-1=0$ 总有两个不相等的实数根.

6. 解:(1)由题意得 $\Delta=[-2(k-3)]^2-4\times(k^2-4k-1)\geqslant 0$,

化简得 $-k+5\geqslant 0$,解得 $k\leqslant 5$.

(2)将 $x=1$ 代入方程,整理得 $k^2-6k+6=0$,解这个方程得 $k_1=3-\sqrt{3}$,$k_2=3+\sqrt{3}$.

7. D **点拨:** 由于 $x=2$ 是方程的一个根,直接把它代入方程即可求出 m 的值,再解原方程即可.

8. D **点拨:** $(x+1)(x-3)=2x-5$

整理得:$x^2-2x-3=2x-5$,

则 $x^2-4x+2=0$,

解得:$x_1=2+\sqrt{2}>3$,$x_2=2-\sqrt{2}>0$,

故有两个正根,且有一根大于3.

9. D **点拨:** 把 $x=3$ 代入方程得 $9-3(m+1)+2m=0$,解得 $m=6$,则原方程为 $x^2-7x+12=0$,解得 $x_1=3$,$x_2=4$,因为这个方程的两个实数根恰好是等腰 $\triangle ABC$ 的两条边的边长,

①当 $\triangle ABC$ 的腰为4,底边为3时,则 $\triangle ABC$ 的周长为 $4+4+3=11$;

②当 $\triangle ABC$ 的腰为3,底边为4时,则 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+3+4=10$.

综上所述,该 $\triangle ABC$ 的周长为10或11.

10. 0

11. 解: $\because$ 一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta=0$,即 $b^2-4a=0$.

$\because \dfrac{ab^2}{(a-2)^2+b^2-4}=\dfrac{ab^2}{a^2-4a+4+b^2-4}=\dfrac{ab^2}{a^2-4a+b^2}=\dfrac{ab^2}{a^2}$,

$\because ax^2+bx+1=0$ 为一元二次方程,$\therefore a\neq 0$,

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{b^2}{a}=4$.

12. 解:(1)$\Delta=b^2-4ac=4-4(2k-4)=20-8k$.

$\because$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore 20-8k>0$,

$\therefore k<\dfrac{5}{2}$.

(2)$\because k$ 为正整数,且 $k<\dfrac{5}{2}$,

$\therefore k$ 为1或2.

由公式法易得 $x=-1\pm\sqrt{5-2k}$.

$\because$ 方程的根为整数,

$\therefore 5-2k$ 为完全平方数. 当 $k=1$ 时,$5-2k=3$(不符合题意,舍去);当 $k=2$ 时,$5-2k=1$.

$\therefore k=2$.

13. 解:(1)因为 $x=-1$ 是方程的一个根,所以将 $x=-1$ 代入方程得 $1+m-2=0$,解得 $m=1$,

方程为 $x^2-x-2=0$,

解得 $x_1=-1$,$x_2=2$.

所以方程的另一个根为 $x=2$.

(2)对于任意的实数 m,方程都有两个不相等的实数根. 理由:$\Delta=b^2-4ac=m^2+8$.

因为对于任意的实数 m,都有 $m^2\geqslant 0$,

所以 $m^2+8>0$,

所以对于任意的实数 m,方程都有两个不相等的实数根.

24.2.3 因式分解法

同类变式

3. $8\sqrt{5}$ 或 24 **点拨:** $\because$ 第三边长是方程 $x^2-16x+60=0$ 的一个根,$\therefore$ 第三边长为6或10.

又$\because$ 三角形的另两边长为6和8,

$\therefore$ 第三边长的范围为2~14(不包括2和14).

$\therefore$ 当第三边长为6时,三角形的面积为 $8\sqrt{5}$.

当第三边长为10时,三角形的面积为24.

练中考·练模拟 得满分

1. A **2.** C **3.** D

4. C **点拨:** 把 $x=-2$ 代入已知方程,列出关于 a 的新方程,通过解新方程可以求得 a 的值.

5. 解:(1)$(x-1)(x-1-2)=0$,

$\therefore x-1=0$,或 $x-3=0$,

$\therefore x_1=1$,$x_2=3$.

(2)$(x+2)^2-3^2=0$,

$\therefore (x+2+3)(x+2-3)=0$,

$\therefore x+5=0$,或 $x-1=0$,

$\therefore x_1=-5$,$x_2=1$.

(3)移项,得 $(2x+1)^2-3(2x+1)=0$,

$\therefore (2x+1)(2x+1-3)=0$,

$\therefore 2x+1=0$,或 $2x-2=0$,

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{2}$,$x_2=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)原方程可化为$(x-1)^2=\frac{5}{9}$,

即$x-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}+1$,

即$x_1=\frac{\sqrt{5}}{3}+1, x_2=-\frac{\sqrt{5}}{3}+1$.

(2)$(x-3)^2+x^2=9$,移项,得$(x-3)^2=9-x^2$,$(x-3)^2=(3+x)(3-x)$,$(x-3)(x-3+x+3)=0$,$(x-3)\cdot 2x=0$,

即$x_1=3, x_2=0$.

(3)$a=1, b=-\sqrt{2}, c=-1, \Delta=b^2-4ac=2+4=6$,$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$,即$x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$,

$x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

(4)原方程化为$[(2y+1)+1]^2=0$,即$(2y+2)^2=0$,于是$2y+2=0$,

$\therefore y_1=y_2=-1$.

7. 解:解方程$x(x-7)-10(x-7)=0$,

得$x=7$或$x=10$,

$\because$当$x=10$时,$3+7=10$,

$\therefore x=10$舍去,

$\therefore x=7$,

$\therefore$这个三角形的周长为$3+7+7=17$.

8. D **9.** B **10.** 7 **11.** $\sqrt{3}$

12. $-15, -6, 0, 6, 15$ **点拨**:$-16=-1\times 16=1\times(-16)=-2\times 8=2\times(-8)=4\times(-4)$.

13. 解:设折成的矩形框的一边长为x厘米,则它的邻边长为$(10-x)$厘米,由题意得$x(10-x)=16$,

解得$x_1=2, x_2=8$,

$\therefore$矩形的长为8厘米,宽为2厘米.假设能折成一个面积为30平方厘米的矩形框,设折成的矩形框的一边长为y厘米,则它的邻边长为$(10-y)$厘米,由题意得$y(10-y)=30$,此方程无解,

$\therefore$不能折成一个面积为30平方厘米的矩形框.

14. 解:原方程可化为$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$,

设$x+\frac{1}{x}=y$,则原方程变形为$y^2+2y-2=0$.

$\therefore y=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$.

又$\because x<0$,

$\therefore x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{3}$.

15. 解:(1)设$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,014}=t$,

则原式$=(1-t)\left(t+\frac{1}{2\,015}\right)-\left(1-t-\frac{1}{2\,015}\right)t$

$=t+\frac{1}{2\,015}-t^2-\frac{1}{2\,015}t-t+t^2+\frac{1}{2\,015}t$

$=\frac{1}{2\,015}$.

(2)设$x^2+5x=t$,

则原方程化为$(t+1)\cdot(t+7)=7$,

$\therefore t^2+8t=0$,解得$t=0$或$t=-8$,

当$t=0$时,$x^2+5x=0$,$x(x+5)=0$,$x_1=0, x_2=-5$;

当$t=-8$时,$x^2+5x=-8$,$x^2+5x+8=0$,$\Delta=b^2-4ac=25-4\times 1\times 8<0$,此时方程无解.

所以原方程的解为$x_1=0, x_2=-5$.

点拨:(1)设$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,014}=t$,则原式$=(1-t)\left(t+\frac{1}{2\,015}\right)-\left(1-t-\frac{1}{2\,015}\right)t$,进行计算即可;(2)设$x^2+5x=t$,则原方程化为$(t+1)(t+7)=7$,求出$t$的值,再解一元二次方程即可.

24.3 一元二次方程根与系数的关系*

同类变式

1-1. D **1-2.** 27 **3.** C

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** A

3. A **4.** 5

5. 解:(1)$x_1+x_2=3, x_1x_2=-5$.

(2)$x_1+x_2=-\frac{5}{2}, x_1x_2=-\frac{9}{2}$.

(3)原方程整理为$x^2-4x+2=0$,$x_1+x_2=4, x_1x_2=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)由题意得:$b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times m=4-4m>0$,
解得:$m<1$,
即实数 m 的取值范围是 $m<1$.
(2)由根与系数的关系得:$x_1+x_2=2$,即 $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_1-x_2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2,\\x_2=0.\end{cases}$
由根与系数的关系得:$m=2\times0=0$.

7. B **8.** B **9.** D

10. D **点拨**:由根与系数的关系得出:$x_1+x_2=2$. 将代数式 $x_1^2-x_1+x_2$ 变形为 $x_1^2-2x_1-1+x_1+1+x_2$,代入数据即可得出结论.

11. 解:因为 m,n 是两个不相等的实数,且满足 $m^2-m=3$,$n^2-n=3$,所以可构造方程 $x^2-x-3=0$,
其中 m,n 是 $x^2-x-3=0$ 的两个不相等的实数根,
则根据根与系数的关系可知 $m+n=1$,$mn=-3$,
又 $n^2=n+3$,
所以 $2n^2-mn+2m+2\,015$
$=2(n+3)-mn+2m+2\,015$
$=2n+6-mn+2m+2\,015$
$=2(m+n)-mn+2\,021$
$=2\times1-(-3)+2\,021$
$=2+3+2\,021$
$=2\,026$.

12. 解:(1)①当 $k-1=0$ 即 $k=1$ 时,方程为一元一次方程 $2x+2=0$,
解得 $x=-1$,有一个解;
②当 $k-1\neq0$ 即 $k\neq1$ 时,方程为一元二次方程,
$\Delta=(2k)^2-4\times(k-1)\times2=4k^2-8k+8=4(k-1)^2+4>0$,
方程有两不等根,综合①②得不论 k 为何值,方程总有实数根.
(2)S 的值能为 2,求解过程如下:$\because x_1+x_2=\dfrac{-2k}{k-1}$,$x_1x_2=\dfrac{2}{k-1}$,$S=\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}+x_1+x_2$,
$\therefore S=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}+(x_1+x_2)=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+(x_1+x_2)=\dfrac{4k^2-8k+4}{2(k-1)}=2$,
化简得 $k^2-3k+2=0$,解得 $k_1=1$,$k_2=2$.
$\because$ 方程为一元二次方程,$k-1\neq0$,
$\therefore k_1=1$ 应舍去. $\therefore$ 当 $k=2$ 时,S 的值为 2.
$\therefore S$ 的值能为 2,此时 k 的值为 2.
点拨:(1)本题二次项系数为 $(k-1)$,可能为 0,可能不为 0,故要分情况讨论;要保证一元二次方程总有实数根,就必须使 $\Delta\geqslant0$ 恒成立;(2)欲求 k 的值,先把此代数式变形为两根之积或两根之和的形式,代入数值计算即可.

24.4 一元二次方程的应用

同类变式

2. 解:设垂直于墙的一边长为 x 米,得
$x(58-2x)=200$.
解得 $x_1=25$,$x_2=4$.
$\therefore$ 另一边长是 8 米或 50 米.
答:当矩形的长为 25 米时宽为 8 米,当矩形的长为 50 米时宽为 4 米.

3. B

练中考·练模拟 得满分

1. B

2. B

3. 20 **点拨**:设每次倒出液体 x L,由题意得:$40-x-\dfrac{40-x}{40}\cdot x=10$,解得 $x_1=60$(舍去),$x_2=20$.

4. 解:(1)设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人,由题意得 $1+x+x(1+x)=64$,
解得 $x_1=7$,$x_2=-9$(不合题意,舍去).
答:每轮传染中平均一个人传染了 7 个人.
(2)$7\times64=448$(人).
答:第三轮又将有 448 人被传染.

5. 解:(1)26
(2)设当每件商品降价 x 元时,该商店每天销售利润为 1 200 元,根据题意,得
$(40-x)(20+2x)=1\,200$,
整理,得 $x^2-30x+200=0$,
解得:$x_1=10$,$x_2=20$.
$\because$ 要求每件盈利不少于 25 元,
$\therefore x_2=20$ 应舍去,
$\therefore x=10$.
答:当每件商品降价 10 元时,该商店每天销售利润为 1 200 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)横向甬道的面积为$\frac{120+180}{2}x=150x(m^2)$.

纵向甬道的面积为$80x\times2=160x(m^2)$.

甬道的面积为$150x+160x-2x^2=-2x^2+310x(m^2)$.

(2)根据题意,得$0.02\times\left[\frac{120+180}{2}\times80-(-2x^2+310x)\right]+5.7x=239$.

整理,得$2x^2-25x+50=0$,即$(x-10)(2x-5)=0$.

解得$x_1=10$,$x_2=\frac{5}{2}$.

$\because x=10>6$(舍去),

$\therefore x=\frac{5}{2}$. 即甬道的宽度为$\frac{5}{2}$ m时,所建花坛总费用为239万元.

7. $2\sqrt{15}+4\sqrt{2}$

8. 1.5 m

9. 解:(1)在甲公司购买6台图形计算器需要用$6\times(800-20\times6)=4\ 080$(元);在乙公司购买需要用$75\%\times800\times6=3\ 600$(元)$<4\ 080$元. 所以去乙公司购买花费较少.

(2)设此单位购买了x台,若在甲公司购买则需要花费$x(800-20x)$元;若在乙公司购买则需要花费$75\%\times800x=600x$(元).

①若此单位是在甲公司花费7 500元购买的图形计算器,

则有$x(800-20x)=7\ 500$,解得$x_1=15$,$x_2=25$.

当$x=15$时,$800-20\times15=500>440$,符合题意;

当$x=25$时,$800-20\times25=300<440$,不符合题意,舍去.

②若此单位是在乙公司花费7 500元购买的图形计算器,则有$600x=7\ 500$,解得$x=12.5$,不符合题意,舍去.

故此单位是在甲公司购买的图形计算器,购买了15台.

10. 解:(1)设x s后,$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2,此时,$AP=x$ cm,$BP=(5-x)$cm,$BQ=2x$ cm.

由$\frac{1}{2}BP\cdot BQ=4$得$\frac{1}{2}(5-x)\cdot2x=4$.

整理,得$x^2-5x+4=0$. 解方程,得$x_1=1$,$x_2=4$.

当$x=4$时,$2x=8>7$,说明此时点Q越过点C,不符合要求.

答:1 s后,$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2.

(2)设y s后,PQ的长度等于5 cm. 由$BP^2+BQ^2=5^2$,得$(5-y)^2+(2y)^2=5^2$.

整理,得$y^2-2y=0$,解得$y_1=0$(不合题意,舍去),$y_2=2$.

答:2 s后,PQ的长度等于5 cm.

(3)不能. 假设z s后,$\triangle PBQ$的面积等于7 cm^2. 由题意得$\frac{1}{2}(5-z)\cdot2z=7$,整理,得$z^2-5z+7=0$. $\Delta=(-5)^2-4\times1\times7=-3<0$,此方程无解. 所以$\triangle PBQ$的面积不能等于7 cm^2.

章末核心知识分类整合

好题必解:

一、1. C　**点拨**:根据题意得$\Delta=4-4(a-1)>0$,$a-1\neq0$,故$a<2$且$a\neq1$.

2. C　**点拨**:方程$x^2-6x+8=0$的两根为$x_1=2$,$x_2=4$,三角形的两边长分别是3和6,则第三边长为4,故周长为13.

3. C　**点拨**:$\Delta=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$,因为$a$,$b$,$c$是$\triangle ABC$的三条边的长,所以$a+b+c>0$,$a+b-c>0$,即$\Delta>0$. 设方程的两根为$x_1$,$x_2$,则$x_1+x_2=-\frac{a+b}{c}<0$,$x_1x_2=\frac{1}{4}>0$,所以$x_1<0$,$x_2<0$.

4. B　**点拨**:$\because a=1$,$b=2$,$c=m-2$,关于x的一元二次方程$x^2+2x+m-2=0$有实数根,

$\therefore b^2-4ac=2^2-4(m-2)=12-4m\geqslant0$,

$\therefore m\leqslant3$.

$\because m$为正整数,且该方程的根都是整数,

$\therefore m=2$或3.

$\therefore 2+3=5$. 故选B.

二、5. 10　**6.** ①②

7. 1或-3　**点拨**:依题意得:$(2+x)x=3$,

整理,得$x^2+2x=3$,

所以$(x+1)^2=4$,

所以$x+1=\pm2$,

所以$x=1$或$x=-3$.

三、8. 解:(1)原方程化为$x^2-5x-24=0$,

$(x+3)(x-8)=0$,即$x_1=-3$,$x_2=8$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)原方程化为 $2x^2-(2+\sqrt{3})x=0$,$x[2x-(2+\sqrt{3})]=0$,即 $x_1=0$,$x_2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

9. **解**:(1)∵ 原方程有两个实数根,
∴ $\Delta=(-2)^2-4(m-1)\geqslant 0$,
整理得,$4-4m+4\geqslant 0$,解得 $m\leqslant 2$;
(2)∵ $x_1+x_2=2$,$x_1x_2=m-1$,$x_1^2+x_2^2=6x_1x_2$,
∴ $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6x_1x_2$,
即 $4=8(m-1)$,解得 $m=\frac{3}{2}$.
∵ $m=\frac{3}{2}<2$,∴ 符合条件的 m 的值为 $\frac{3}{2}$.

10. **解**:∵ $2\☆a$ 的值小于 0,
∴ $2^2a+a=5a<0$,解得 $a<0$. 在方程 $2x^2-bx+a=0$ 中,$\Delta=(-b)^2-8a\geqslant -8a>0$,
∴ 方程 $2x^2-bx+a=0$ 有两个不相等的实数根.
点拨:根据 $2\☆a$ 的值小于 0 结合新运算可得出关于 a 的一元一次不等式,解不等式可得出 a 的取值范围,再由根的判别式得出 $\Delta=(-b)^2-8a$,结合 a 的取值范围即可得知 Δ 的正负,由此即可得出结论.

11. **解**:(1)设甲礼品的进价为 m 元/件,乙礼品的进价为 n 元/件.
依题意得 $\begin{cases}m-n=1,\\2m+n=11.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}m=4,\\n=3.\end{cases}$
即甲礼品的进价为 4 元/件.
(2)设每天销售的件数 y(件)与售价 x(元/件)之间的函数关系式为 $y=kx+b$.
依题意可得 $\begin{cases}6k+b=40,\\5k+b=60.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=-20,\\b=160.\end{cases}$
即 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-20x+160$.
(3)设当甲礼品的售价定为 z 元/件时,才能使每天销售甲礼品的利润为 60 元.
依题意得 $(z-4)(-20z+160)=60$.
解得 $z_1=5$,$z_2=7$.
即当甲礼品的售价定为 5 元/件或 7 元/件时,才能使每天销售甲礼品的利润为 60 元.

12. **解**:(1)设方程的两根(即 AB,AC 的长)为 x_1,x_2,根据题意得
$x_1+x_2=2k+3$,$x_1x_2=k^2+3k+2$.
又∵ $x_1^2+x_2^2=25$,
∴ $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2k+3)^2-2(k^2+3k+2)=25$. 解得 $k_1=2$,$k_2=-5$.
当 $k=-5$ 时,方程的两根均为负数,不符合题意,舍去. ∴ $k=2$.
(2)∵ $\Delta=(2k+3)^2-4(k^2+3k+2)=1>0$,
∴ 方程一定有两个不相等的实数根,
∴ $BC=5$ 一定是腰长,即方程有一根为 5.
将 $x=5$ 代入方程中得 $25-5(2k+3)+k^2+3k+2=0$,解得 $k_3=3$,$k_4=4$.
故当 k 为 3 或 4 时,$\triangle ABC$ 是等腰三角形.
当 $k=3$ 时,$x_1+x_2=2k+3=9$,$\triangle ABC$ 的周长为 14;
当 $k=4$ 时,$x_1+x_2=2k+3=11$,$\triangle ABC$ 的周长为 16.

13. **解**:(1)设按计划,2018 年前 5 个月要修建 x 个沼气池,则 2018 年前 5 个月要修建 $(50-x)$ 个垃圾集中处理点,
根据题意得:$x\geqslant 4(50-x)$,
解得:$x\geqslant 40$.
答:按计划,2018 年前 5 个月至少要修建 40 个沼气池.
(2)修建每个沼气池的平均费用为 $78\div[40+(50-40)\times 2]=1.3$(万元),
修建每个垃圾集中处理点的平均费用为 $1.3\times 2=2.6$(万元).
根据题意得:$1.3\times(1+a\%)\times 40\times(1+5a\%)+2.6\times(1+5a\%)\times 10\times(1+8a\%)=78\times(1+10a\%)$,
设 $y=a\%$,整理得:$50y^2-5y=0$,
解得:$y_1=0$(不合题意,舍去),$y_2=0.1$,
∴ a 的值为 10.

14. **解**:(1)设每个站点的造价为 x 万元,公共自行车的单价为 y 万元. 根据题意可得:
$\begin{cases}40x+720y=112,\\120x+2\,205y=340.5,\end{cases}$
解得:$\begin{cases}x=1,\\y=0.1.\end{cases}$
答:每个站点的造价为 1 万元,公共自行车的单价为 0.1 万元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设2016年到2018年市政府配置公共自行车数量的年平均增长率为a.

根据题意可得:$720(1+a)^2=2\ 205$,

即:$(1+a)^2=\frac{49}{16}$,

解得:$a_1=\frac{3}{4}=75\%$,$a_2=-\frac{11}{4}$(不符合题意,舍去).

答:2016年到2018年市政府配置公共自行车数量的年平均增长率为75%.

15. **解**:(1)设P,Q两块绿地周围的硬化路面的宽都为x米,根据题意,得

$(60-3x)\times(40-2x)=60\times40\times\frac{1}{4}$,

解得$x_1=10$,$x_2=30$.

经检验,$x=30$不符合题意,舍去.

所以,P,Q两块绿地周围的硬化路面的宽都为10米.

(2)设想成立. 设圆的半径为r米,O_1到AB的距离为y米,根据题意,得:$\begin{cases}2y=40,\\2y+2r=60,\end{cases}$

解得$\begin{cases}y=20,\\r=10,\end{cases}$符合实际.

所以,设想成立,此时,圆的半径是10米.

第二十五章 图形的相似

25.1 比例线段

同类变式

2. D **5.** B

7. **解**:$\because AD^2=BD\cdot AB$,

$\therefore$点D是线段AB的黄金分割点,且$AD>BD$.

$\therefore AD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times2=\sqrt{5}-1$. 同理$BC=\sqrt{5}-1$.

$\therefore AC=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$,$CD=AD-AC=(\sqrt{5}-1)-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}-4$.

$\therefore\frac{CD}{AC}=\frac{2\sqrt{5}-4}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8. 7.6;4.8 **点拨**:一条线段的黄金分割点有两个,距离A点较近的那个到点A的距离为$20\times(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\approx7.6$(m),这两个黄金分割点之间的距离是$20-2\times20\times(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\approx4.8$(m).

练中考·练模拟 得满分

1. D **点拨**:如果其中两条线段的乘积等于另外两条线段的乘积,则四条线段是成比例线段. 对选项一一分析,排除错误答案.

2. B

3. A **点拨**:根据黄金比的定义列方程,设书的宽为x cm,则有$(20+x)$∶$20=20$∶x,解得$x\approx12.36$(舍去大于20的值).

4. 1∶50 000 **点拨**:注意单位的统一.

5. ±1

6. = **点拨**:$\because P$是线段AB的黄金分割点,且$PA>PB$,$\therefore PA^2=PB\cdot AB$,又$\because S_1$表示以$PA$为一边的正方形的面积,$S_2$表示长是$AB$,宽是$PB$的矩形的面积,$\therefore S_1=PA^2$,$S_2=PB\cdot AB$,$\therefore S_1=S_2$.

7. **解**:$x(1-2x)=2(5-x^2)$,$x-2x^2=10-2x^2$,解得$x=10$.

8. **解**:(1)设$a=4k$,$b=3k$,$c=2k(k\neq0)$.

$\because a+3b-3c=14$,

$\therefore4k+9k-6k=14$.

$\therefore7k=14$,$\therefore k=2$.

$\therefore a=8$,$b=6$,$c=4$.

(2)$4a-3b+c=32-18+4=18$.

点拨:辅助字母k成为a,b,c之间的桥梁.

9. D **点拨**:先根据正方形的性质以及勾股定理,求得DF的长,再根据$DF=GF$求得CG的长,最后根据CG与CD的比值为黄金比,判断矩形$DCGH$为黄金矩形. 设正方形的边长为2,则$CD=2$,$CF=1$,在直角三角形DCF中,$DF=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,$\therefore FG=\sqrt{5}$,$\therefore CG=\sqrt{5}-1$,$\therefore\frac{CG}{CD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore$矩形$DCGH$为黄金矩形.

10. **解**:(1)分两种情况:

①当$a+b+c\neq0$时,由已知得$k=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$;

②当$a+b+c=0$时,$a+b=-c$,

$\therefore k=\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$.

$\therefore k$的值为2或-1.

(2)分两种情况:①当$k=2$时,一次函数$y=kx-k$的图像经过第一、三、四象限;

②当$k=-1$时,一次函数$y=kx-k$的图像经过第一、二、四象限.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

11. 证明：设 $EB=1$，则 $AB=BC=2$，$AE=\sqrt{AB^2+EB^2}=\sqrt{5}$，∵ $EB'=EB=1$，

∴ $AB''=AB'=AE-EB'=\sqrt{5}-1$，

∴ AB''∶ $AB=(\sqrt{5}-1)$∶ 2，

∴ B''是 AB 的黄金分割点.

12. A　**点拨**：由题意知 $AB=AC$，$\angle BAC=108°$，根据中垂线性质得 $\angle B=\angle DAB=\angle C=\angle CAE=36°$，从而 $\angle ADC=\angle AEB=72°$，所以 $BD=AD=AE=CE$，进而可知 $\frac{BD}{BC}<\frac{1}{2}$，可判断 A 错误；根据 $\angle DAB=\angle CAE=36°$ 知 $\angle DAE=36°$ 可判断 B 正确；根据 $\angle BAD+\angle DAE=\angle CAE+\angle DAE=72°$ 可得 $\angle BAE=\angle CAD$，可证 $\triangle BAE\backsimeq\triangle CAD$，即可判断 C 正确；由 $\triangle BAE\backsimeq\triangle CAD$ 知 $S_{\triangle BAD}=S_{\triangle CAE}$，根据 DH 垂直平分 AB，EG 垂直平分 AC 可得 $S_{\triangle ADH}=S_{\triangle CEG}$，可判断 D 正确. 故选 A.

25.2　平行线分线段成比例

同类变式

1. C

3. $\frac{2}{5}$

4. $\frac{14}{3}$　**点拨**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$，$AB=CD$，∵ AE∶ $BE=4$∶ 3，

∴ BE∶ $AB=3$∶ 7，∴ BE∶ $CD=3$∶ 7.

∵ $AB\parallel CD$，∴ BF∶ $DF=BE$∶ $CD=3$∶ 7，

即 2∶ $DF=3$∶ 7，∴ $DF=\frac{14}{3}$.

练中考·练模拟 得满分

1. C

2. D

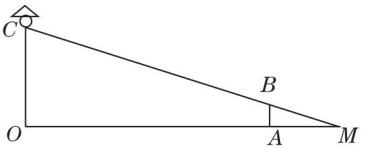
3. C　**点拨**：∵ $DE\parallel BC$，∴ $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$，故选 C.

4. 2　**点拨**：∵ $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}$，∴ $\frac{BC}{AB}=2$，

∵ $l_1\parallel l_2\parallel l_3$，∴ $\frac{EF}{DE}=\frac{BC}{AB}=2$.

5. $\frac{3}{5}$　**点拨**：首先求出 AD 的长度，然后根据平行线分线段成比例的基本事实，列出比例式 $\frac{BC}{CE}=\frac{AD}{DF}$ 即可得到结论.

6. 5　**点拨**：如图所示，根据题意，易得 $AB\parallel OC$，所以 $\frac{AB}{OC}=\frac{AM}{OA+AM}$，即 $\frac{1.6}{8}=\frac{AM}{20+AM}$，得 $AM=5$ 米.



（第 6 题）

7. 解：∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$.

∵ $DE=2$，$BC=3$，

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$.

8. (1) **证明**：在 $\square ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=CD$，

∴ $\angle BAE=\angle FEC$，$\angle ABF=\angle ECF$，

∵ $CE=CD$，

∴ $AB=CE$.

∴ $\triangle AFB\backsimeq\triangle EFC$(ASA).

(2) **解**：∵ $AB\parallel CD$，

∴ $\frac{BG}{DG}=\frac{AB}{DE}=\frac{1}{2}$，

∴ $BG=\frac{1}{2}DG$，

∵ $BD=DG+BG=\frac{3}{2}DG=12$ 厘米，

∴ $DG=8$ 厘米.

9. A　**点拨**：延长 BC 至 F 点，使 $CF=BD$，连接 EF，∵ $ED=EC$，∴ $\angle EDC=\angle ECD$，∴ $\angle EDB=\angle ECF$，在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle EFC$ 中，

$\begin{cases}DB=CF,\\ \angle BDE=\angle FCE,\\ DE=CE,\end{cases}$ ∴ $\triangle EBD\backsimeq\triangle EFC$(SAS).

∴ $\angle B=\angle F$，∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle ACB$，∴ $\angle ACB=\angle F$，

∴ $AC\parallel EF$，∴ $\frac{BA}{AE}=\frac{BC}{CF}$，∵ $BA=BC$，

∴ $AE=CF=2$，∴ $BD=AE=CF=2$.

10. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　**点拨**：∵ $\angle BAC+\angle ACD=90°+90°=180°$，

∴ $AB\parallel CD$，∴ $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CD}$.

∵ 在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle B=45°$，

∴ $AB=AC$.

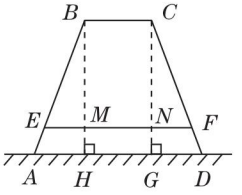
∵ 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle D=30°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AD = 2AC$，由勾股定理可得 $CD = \sqrt{3}AC$.

$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{AC}{\sqrt{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. **解**：如图所示，过点 B 作 $BH \perp AD$ 交 EF，AD 于 M，H，过点 C 作 $CG \perp AD$ 交 EF，AD 于 N，G. 由题意得，$MH = 8$ cm，$BH = 40$ cm，则 $BM = 32$ cm，



（第 11 题）

$\because BC \parallel AD$，$BA = CD$，$AD = 50$ cm，$BC = 20$ cm，$\therefore AH = (AD - BC) \div 2 = 15$ cm.

$\because EF \parallel AD$，$\therefore \frac{EM}{AH} = \frac{BM}{BH}$，即 $\frac{EM}{15} = \frac{32}{40}$，解得 $EM = 12$ cm，故 $EF = EM + NF + BC = 2EM + BC = 44$ cm.

答：横梁 EF 应为 44 cm.

12. **解**：(1)证明过程中用到的定理有：

①平行线的性质定理；

②等腰三角形的判定定理.（答案不唯一）

(2)②

(3)$\because AD$ 是角平分线，$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

又 $\because AB = 5$ cm，$AC = 4$ cm，$BC = 7$ cm，

$\therefore \frac{BD}{7 - BD} = \frac{5}{4}$，$\therefore BD = \frac{35}{9}$ cm.

25.3 相似三角形

同类变式

2. 2；$\frac{1}{2}$　**点拨**：相似比就是对应边的比，而对应边根据书写的对应性去找.

由 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ 可知，AE 与 AC 是对应边，$AE = 4$，$AC = AD + DC = 8$.

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的相似比是 2，$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 $\frac{1}{2}$.

归纳：相似三角形的相似比是有顺序的，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k，则 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{1}{k}$.

5. 3　**点拨**：$\because AB \parallel EF \parallel DC$，$\therefore \triangle HEG \backsim \triangle HDC$，$\triangle BFG \backsim \triangle BCD$，$\triangle DGE \backsim \triangle DBA$，共 3 对.

6. C

7. (1)**证明**：$\because$ 点 E 是 AB 的中点.

$\therefore AB = 2EB$. 又 $\because AB = 2CD$，

$\therefore CD = BE$.

又 $\because AB \parallel CD$，

$\therefore$ 四边形 $CBED$ 是平行四边形.

$\therefore CB \parallel DE$. $\therefore \triangle EDM \backsim \triangle FBM$.

(2)**解**：$\because \triangle EDM \backsim \triangle FBM$，

$\therefore \frac{DM}{BM} = \frac{ED}{FB}$.

又 $\because CF = BF$，$CB = DE$，

$\therefore DE = 2BF$. $\therefore DM = 2BM$.

$\therefore DB = 3BM$.

又 $\because DB = 9$，

$\therefore BM = 3$.

练中考·练模拟 得满分

1. B

2. C　**点拨**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$，$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle BCF$，$\triangle AEF \backsim \triangle DEC$，$\therefore$ 与 $\triangle AEF$ 相似的三角形有 2 个.

3. C

4. 3∶5　**点拨**：$\because DE : EC = 1 : 2$，

$\therefore EC : CD = 2 : 3$，即 $EC : AB = 2 : 3$，

$\because AB \parallel CD$，$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle CEF$，

$\therefore BF : EF = AB : EC = 3 : 2$，

$\therefore BF : BE = 3 : 5$.

5. **错解**：不相似，因为 $\angle A = 85.5°$，$\angle A' = 85.5°$，$\angle B = 52.9°$，$\angle B' = 41.6°$，所以 $\angle C = 180° - 85.5° - 52.9° = 41.6°$，$\angle C' = 180° - 85.5° - 41.6° = 52.9°$，又因为 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3.6} = \frac{5}{9}$，$\frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3}$，$\frac{AC}{A'C'} = \frac{2.4}{3} = \frac{4}{5}$，所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应角不相等，对应边不成比例，故 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 不相似.

错解分析：判断 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，不能按 $\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$ 的对应方法去对应.

正确解法：相似，因为 $\angle A = 85.5°$，$\angle A' = 85.5°$，$\angle B = 52.9°$，$\angle B' = 41.6°$，所以 $\angle C = 180° - 85.5° - 52.9° = 41.6°$，$\angle C' = 180° - 85.5° - 41.6° = 52.9°$，所以 $\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle C'$，$\angle C = \angle B'$；因为 $\frac{AB}{A'C'} =$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{2}{3}$,$\frac{BC}{B'C'}=\frac{3}{4.5}=\frac{2}{3}$,$\frac{AC}{A'B'}=\frac{2.4}{3.6}=\frac{2}{3}$,所以$\frac{AB}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'B'}=\frac{2}{3}$,所以$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似.

6. 解:(1)∵ $\triangle AOB\backsim\triangle COD$,$\angle D=60°$,

∴ $\angle B=\angle D=60°$. 在$\triangle AOB$中,

$\angle A=35°$,

∴ $\angle AOB=180°-\angle A-\angle B=180°-35°-60°=85°$.

(2)$AB\parallel DC$. 理由如下:

由(1)知$\angle B=\angle D$,∴ $AB\parallel DC$.

7. 解:∵ $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$,

∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{4}{AC}=\frac{1}{2}$,

∴ $AC=8$,同理$\frac{CD}{BC}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{6}{BC}=\frac{1}{2}$,

∴ $BC=12$.

8. (1)**证明**:∵ 四边形$ABCD$是平行四边形,

∴ $AQ\parallel BC$,

∴ $\triangle DQP\backsim\triangle CBP$.

(2)**解**:∵ $\triangle DQP\cong\triangle CBP$,

∴ $DP=CP=\frac{1}{2}CD$,

∵ $CD=AB=8$,

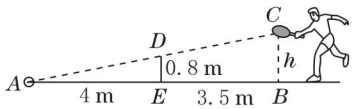
∴ $DP=4$.

9. B　**点拨**:当6,8为直角边长时,则另一个与它相似的直角三角形的直角边长为3,4,得x的值为5;当8为直角三角形的斜边长时,则另一个与它相似的三角形的斜边长是4,得x的值为$\sqrt{7}$,故x的值可以为5或$\sqrt{7}$. 解答本题容易出现漏解情况.

10. 1.5 m　**点拨**:本题运用相似三角形解答,如图,由题意可知$DE\parallel BC$,∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$,

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}$,即$\frac{0.8}{h}=\frac{4}{4+3.5}$,

∴ $h=1.5$ m.

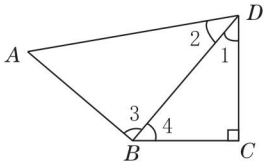


(第10题)

11. 解:如图,

∵ $\triangle ABD\backsim\triangle BCD$,

∴ $\angle 3=\angle C$,$\angle 2=\angle 1$,$\angle A=\angle 4$.



(第11题)

∵ $BC\perp CD$,∴ $\angle C=90°$. ∵ $\angle 1=40°$,

∴ $\angle 4=90°-\angle 1=90°-40°=50°$,

$\angle ADC=\angle 2+\angle 1=40°+40°=80°$,

∴ $\angle A=50°$,$\angle ABC=\angle 3+\angle 4=90°+50°=140°$,

∴ 四边形$ABCD$四个内角的度数分别为$\angle A=50°$,$\angle ABC=140°$,$\angle C=90°$,$\angle ADC=80°$.

12. $(2,4-2\sqrt{2})$　**点拨**:∵ 四边形$OABC$是边长为2的正方形,

∴ $OA=OC=2$,$OB=2\sqrt{2}$,

∵ $OQ=OC$,

∴ $BQ=OB-OQ=2\sqrt{2}-2$,

∵ 正方形$OABC$的边$AB\parallel OC$,

∴ $\triangle BPQ\backsim\triangle OCQ$,

∴ $\frac{BP}{OC}=\frac{BQ}{OQ}$,即$\frac{BP}{2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}$,

解得$BP=2\sqrt{2}-2$,

∴ $AP=AB-BP=2-(2\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$,

∴ 点P的坐标为$(2,4-2\sqrt{2})$.

13. 解:∵ $\triangle ABD\backsim\triangle ECA$,

∴ $\angle DAB=\angle E$.

∵ $AB=AC$,$\angle BAC=40°$,

∴ $\angle ACB=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$.

∵ $\angle ACB=\angle CAE+\angle E$,

∴ $\angle ACB=\angle CAE+\angle DAB$.

∵ $\angle DAE=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE$,

∴ $\angle DAE=\angle ACB+\angle BAC=70°+40°=110°$.

25.4　相似三角形的判定

同类变式

1. 解:$\triangle ECH$与$\triangle DBE$相似. 证明如下:

∵ $\triangle ABC$,$\triangle DEF$均为等边三角形,

∴ $\angle B=\angle C=\angle DEF=60°$,

∴ $\angle BDE+\angle BED=120°$,$\angle CEH+\angle BED=120°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle BDE = \angle CEH$，又$\angle B = \angle C$，

$\therefore \triangle ECH \backsim \triangle DBE$.

点拨：答案不唯一.

2. 证明：(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，O 是对角线交点，$\therefore OB = OD$.

又$\because OE = OB$，$\therefore OD = OB = OE$，

$\therefore \angle OBE = \angle OEB$，$\angle ODE = \angle OED$.

又$\because \angle OBE + \angle OEB + \angle OED + \angle ODE = 180°$.

$\therefore \angle OEB + \angle OED = 90°$，即$\angle BED = 90°$，即 $DE \perp BE$.

(2)设 OE 交 CD 于 H，

$\because OE \perp CD$ 于 H，

$\therefore \angle CHE = 90°$，

$\therefore \angle CEH + \angle HCE = 90°$.

$\because \angle CED = 90°$，

$\therefore \angle CDE + \angle DCE = 90°$，

$\therefore \angle CDE = \angle CEH$.

$\because \angle OEB = \angle OBE$，

$\therefore \angle OBE = \angle CDE$.

在$\triangle CED$与$\triangle DEB$中，

$$\begin{cases} \angle CED = \angle DEB, \\ \angle CDE = \angle DBE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle CED \backsim \triangle DEB$，

$\therefore \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{CD}{DB}$，即 $BD \cdot CE = CD \cdot DE$.

4. C　**5**. D

7. 证明：$\because AD$ 是$\triangle ABC$的高，

$\therefore AD \perp BD$.

又$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore$ 在Rt$\triangle ABD$中，DE 为斜边 AB 上的中线.

$\therefore DE = \dfrac{1}{2}AB$，即$\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{1}{2}$. 同理$\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

又易知 EF 为$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore EF = \dfrac{1}{2}BC$，即$\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC}$，

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

点拨：由题意可得 EF 为$\triangle ABC$的中位线，可得 $EF = \dfrac{1}{2}BC$. 又 DE 和 DF 分别是Rt$\triangle ABD$和Rt$\triangle ACD$斜边上的中线，故 $DE = \dfrac{1}{2}AB$，$DF = \dfrac{1}{2}AC$. 因此考虑用三边对应成比例判定两个三角形相似.

8. 解：$\because \angle ACB = \angle ADC = 90°$，

$\therefore$ 当$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$或$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$时，$\triangle ABC$与$\triangle ACD$相似.

$\because \angle ADC = 90°$，$AC = \sqrt{6}$，$AD = 2$，

$\therefore$ 由勾股定理，得 $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{2}$.

设 $AB = x$，则有$\dfrac{\sqrt{6}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$或$\dfrac{\sqrt{6}}{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

解得 $x = 3$ 或$x = 3\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当 AB 的长为 3 或 $3\sqrt{2}$ 时，$\triangle ABC$与$\triangle ACD$相似.

练中考·练模拟 得满分

1. D　**2**. B　**3**. D　**4**. A　**5**. B　**6**. A

7. $AB /\!/ DE$　**点拨**：答案不唯一.

8. 解：(1)$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$.

(2)①说明$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

$\because \angle BAD = \angle CAE$，

$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC$，

即$\angle BAC = \angle DAE$.

又$\because \angle ABC = \angle ADE$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

②说明$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$.

$\because \triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$，即$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$.

又$\because \angle BAD = \angle CAE$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ACE$.

9. B　**10**. C

11. (1)**证明**：由四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD /\!/ BC$，

易得$\angle C = \angle B = 60°$.

$\because \angle APC = \angle B + \angle BAP$，

$\therefore \angle APE + \angle CPE = \angle B + \angle BAP$.

又$\because \angle APE = \angle B$，$\therefore \angle BAP = \angle CPE$.

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle PEC$.

(2)**解**：如图，过点 A 作 $AF /\!/ CD$ 交 BC 于 F.

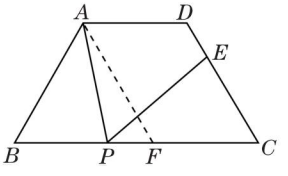
$\because AD /\!/ BC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 为平行四边形.

$\therefore CF = AD = 3$，

$AF = DC$.

又$\because AB = DC$.



(第 11 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AB=AF$. 又$\angle B=60°$,

$\therefore \triangle ABF$ 为等边三角形.

$\therefore AB=BF=7-3=4$.

$\because \triangle APB\backsim\triangle PEC$,$\therefore \frac{BP}{CE}=\frac{AB}{PC}$.

设$BP=x$,则$PC=7-x$. 又$CE=3$,$AB=4$,

$\therefore \frac{x}{3}=\frac{4}{7-x}$,整理得$x^2-7x+12=0$.

解得$x_1=3$,$x_2=4$.

经检验,$x_1=3$,$x_2=4$均是所列方程的根,

$\therefore BP$的长为3或4.

12. **解**:存在这样的P点.

由题意可知$\angle AOB=90°$,$OA=8$,$OB=6$,

$\therefore AB=10$.

$\because C$是线段AB的中点,

$\therefore AC=5$.

如果P与B对应,那么$\triangle PAC\backsim\triangle BAO$.

$\therefore PA:BA=AC:AO$.

$\therefore PA=\frac{25}{4}$.

$\therefore OP=OA-PA=\frac{7}{4}$.

$\therefore P\left(\frac{7}{4},0\right)$.

如果P与O对应,那么$\triangle PAC\backsim\triangle OAB$.

$\therefore PA:OA=AC:AB$.

$\therefore PA=4$.

$\therefore OP=OA-AP=4$.

$\therefore P(4,0)$.

综上,P点坐标为$\left(\frac{7}{4},0\right)$或$(4,0)$.

点拨:在以P,A,C为顶点的三角形与$\triangle AOB$中,$\angle A$是公共角,如果两个三角形相似,有两种情况,即P与B,P与O分别对应,因此要分类讨论.

13. 3 **点拨**:作$CD/\!/PQ$,交AB于D,由平行线的性质和等腰三角形的性质得出$\angle B=\angle ACB=\angle CDB$,得出$CD=BC=3$,$\triangle BCD\backsim\triangle BAC$,得出对应边成比例求出$BD=\frac{9}{5}$,得出$AD=AB-BD=\frac{16}{5}$,由平行线的性质得出$\triangle APQ\backsim\triangle ACD$,得出对应边成比例求出$AP=\frac{25}{16}AQ$,再代入$AQ$的长求出$AP$的长,满足$AP<5$即可. 故可以作为$AQ$长的有3,2,$\frac{5}{3}$.

25.5 相似三角形的性质

同类变式

1. C **方法规律**:本题运用方程思想. 设AB与CD间的距离是x m,那么点P到AB的距离是$(2.7-x)$m,根据相似三角形对应高的比等于相似比,得$\frac{AB}{CD}=\frac{2.7-x}{2.7}$,即$\frac{2}{6}=\frac{2.7-x}{2.7}$,解得$x=1.8$.

2. 4或25 **方法规律**:本题运用分类讨论思想解答,

$\because$相似三角形的相似比为2∶5,其中一个三角形的一条中线长为10,而这条中线可能是大三角形的,也可能是小三角形的,

$\therefore$另一个三角形对应的中线长可能是4,也可能是25.

3. 9 cm、6 cm

4. **解**:设$\triangle ABC$的周长为x cm.

因为$\frac{AB}{EB}=\frac{BC}{BD}=\frac{5}{3}$,$\angle B=\angle B$,

所以$\triangle ABC\backsim\triangle EBD$,所以$\triangle ABC$与$\triangle EBD$的周长的比等于$\frac{5}{3}$. 又因为$\triangle ABC$与$\triangle EBD$的周长之差为10 cm,所以$\frac{x}{x-10}=\frac{5}{3}$,解得$x=25$. 故$\triangle ABC$的周长是25 cm.

5. C

6. **解**:因为四边形$EFGH$是矩形,所以$EH/\!/BC$,所以$\triangle AEH\backsim\triangle ABC$. 因为$AD\perp BC$,所以$AM\perp EH$,$MD=EF$. 因为矩形两邻边之比为1∶2,所以设$EF=x$ cm,则$EH=2x$ cm. 由相似三角形对应高的比等于相似比,得$\frac{AM}{AD}=\frac{EH}{BC}$,所以$\frac{10-x}{10}=\frac{2x}{30}$,解得$x=6$. 所以$EF=6$ cm,$EH=12$ cm. 所以$S_{矩形EFGH}=6\times12=72(\text{cm}^2)$.

7. C

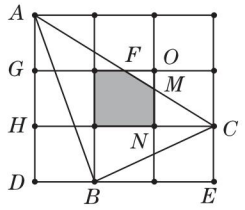
练中考·练模拟 得满分

1. A **2.** D **3.** A **4.** C **5.** 1∶3 **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\frac{11}{12}$ **点拨**:如图所示,

$\because GF/\!/HC$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第7题）

$\therefore \triangle AGF \backsim \triangle AHC, \therefore \dfrac{GF}{HC}=\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore GF=\dfrac{1}{2}HC=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore OF=OG-GF=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

同理 $MN=\dfrac{2}{3}$，则有 $OM=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore S_{\triangle OFM}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$,

$\therefore S_{阴影}=1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$.

8. **解：**(1)$\because AB\parallel CD$,

$\therefore \angle A+\angle D=180°$.

$\because \angle A=90°$,

$\therefore \angle D=90°$,

$\therefore \angle A=\angle D$.

$\because PE\perp BP$,

$\therefore \angle APB+\angle DPE=90°$.

又 $\angle APB+\angle ABP=90°$,

$\therefore \angle ABP=\angle DPE$.

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle DPE$.

$\therefore \dfrac{AB}{DP}=\dfrac{AP}{DE}$，即 $\dfrac{2}{5-x}=\dfrac{x}{y}$.

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x(0<x<5)$.

(2)能构成矩形. 欲使四边形 $ABED$ 为矩形，只需 $DE=AB=2$，即 $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x=2$.

解得 $x_1=1, x_2=4$.

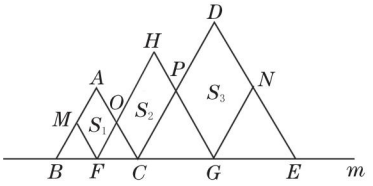
$\because 0<x<5, \therefore x_1=1, x_2=4$ 均符合题意，故 $AP=1$ 或 4.

9. B　**点拨：**如图，设 AC 与 HF 相交于点 O，HG 与 DC 相交于点 P，a，b 分别表示 $\triangle OFC$，$\triangle GNE$ 的面积.

$\because F, G$ 分别是 BC, CE 的中点，$MF\parallel AC$，$GN\parallel DC$，$\therefore$ $\triangle BMF$ 与 $\triangle OFC$，$\triangle CPG$ 与 $\triangle GNE$ 分别是全等的等边三角形.

$\therefore S_{\triangle CPG}=b$.

设 M 到 AC 的距离为 h，则 $S_1=OA\cdot h, a=\dfrac{1}{2}OC\cdot h$. $\because OA=MF=OC, \therefore S_1=2a$.



（第9题）

同理可得 $S_3=2b$.

易知 $\triangle OFC\backsim\triangle NGE, FC=\dfrac{1}{2}GE$,

$\therefore a:b=(FC:GE)^2=1:4$，即 $b=4a$.

$\because a+b=\dfrac{1}{2}(S_1+S_3)=10$,

$\therefore a=2, b=8$.

$\therefore S_{\triangle CPG}=b=8$.

$\because PH=OC, OC=FC=\dfrac{1}{2}CG=\dfrac{1}{2}PG$,

$\therefore PH=\dfrac{1}{2}PG$.

$\therefore S_2=S_{\triangle CPG}=8$，故选 B.

10. D　**点拨：**$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$AB=CD=6$，$AD=BC=9$，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\therefore \angle BAF=\angle DAF$，$\because AB\parallel DF, AD\parallel BC$，

$\therefore \angle BAF=\angle F, \angle DAF=\angle AEB$，

$\therefore \angle BAE=\angle AEB, \angle DAF=\angle F$，

$\therefore AB=BE=6, AD=DF=9$，

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰三角形，$\triangle ADF$ 是等腰三角形，$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \triangle EFC$ 是等腰三角形，且 $FC=CE$，

$\therefore EC=FC=9-6=3$，在 $\triangle ABG$ 中，$BG\perp AE, AB=6, BG=4\sqrt{2}$，

$\therefore AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=2$，

$\therefore AE=2AG=4$，

$\therefore \triangle ABE$ 的周长等于 16，

又 $\because \triangle CEF\backsim\triangle BEA, CE:BE=1:2$，

$\therefore \triangle CEF$ 的周长为 8.

11. $\dfrac{3}{2}$　**点拨：**设 $EH=x$，则 $EF=\dfrac{2}{3}x$，$\triangle AEH$ 的边 EH 上的高为 $2-\dfrac{2}{3}x$，根据 $\triangle AEH$ 与 $\triangle ABC$ 相似，利用相似三角形对应边上的高之比等于相似比求出 x 的值，即为 EH 的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

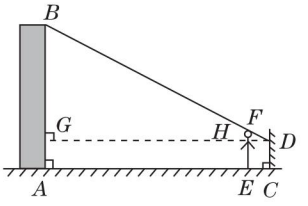
12. (1)**证明**:∵ AD 平分 $\angle CAE$,
∴ $\angle DAE = \angle CAD$. ∵ $AB = AC$,
∴ $\angle B = \angle ACB$.
∵ $\angle CAE = \angle B + \angle ACB$,
∴ $\angle B = \angle DAE$.
∴ $AD \parallel BC$.
(2)**解**:∵ $CG \perp AD$,
∴ $\angle AFC = \angle AFG = 90°$.
在 $\triangle AFC$ 和 $\triangle AFG$ 中,
$$\begin{cases} \angle CAF = \angle GAF, \\ AF = AF, \\ \angle AFC = \angle AFG, \end{cases}$$
∴ $\triangle AFC \cong \triangle AFG$(ASA).
∴ $CF = GF$.
∵ $AD \parallel BC$,
∴ $\triangle AGF \backsim \triangle BGC$.
∴ $GF : GC = AF : BC = 1 : 2$.
∴ $BC = 2AF = 2 \times 4 = 8$.

13. **解**:设①②③④四块地的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4. 因为 $\triangle PMN$ 和 $\triangle QMN$ 同底等高,所以 $S_{\triangle PMN} = S_{\triangle QMN}$,所以 $S_3 + S_2 = S_4 + S_2$,所以 $S_3 = S_4$. 因为 $PQ \parallel MN$,所以 $\triangle POQ \backsim \triangle NOM$,所以 $\frac{OQ}{OM} = \frac{m}{n}$,所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m^2}{n^2}$,所以 $S_2 = \frac{n^2}{m^2} \times S_1$. 因为 $\frac{S_1}{S_3} = \frac{OQ}{OM} = \frac{m}{n}$,所以 $S_3 = \frac{n}{m} \times S_1$. 所以 $(S_1 + S_2) - (S_3 + S_4) = S_1 + \frac{n^2}{m^2} \times S_1 - 2 \times \frac{n}{m} \times S_1 = S_1\left(1 + \frac{n^2}{m^2} - 2 \times \frac{n}{m}\right) = S_1\left(1 - \frac{n}{m}\right)^2$. 因为 $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^2 > 0$,所以 $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$. 故小禹应选择①和②两块地种植价格较便宜的花草.

25.6 相似三角形的应用

同类变式

1. **解**:如图,过点 D 作 $DG \perp AB$,分别交 AB,EF 于点 G,H,则 $EH = AG = CD = 1.2$ m,$DH = CE = 0.8$ m,$DG = CA = 30$ m.
∵ $EF \parallel AB$,
∴ $\frac{FH}{BG} = \frac{DH}{DG}$.
由题意,知 $FH = EF - EH = 1.7 - 1.2 = 0.5$(m).
∴ $\frac{0.5}{BG} = \frac{0.8}{30}$,解之得 $BG = 18.75$ m.
∴ $AB = BG + AG = 18.75 + 1.2 = 19.95 \approx 20.0$(m).
∴ 楼高 AB 约为 20.0 m.



(第1题)

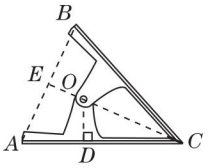
3. **解**:∵ $BA \perp AC$,$DC \perp AC$,
∴ $\angle BAP = \angle DCP = 90°$.
又∵ $\angle BPM = \angle DPM$,$PM \perp AC$,
∴ $\angle BPA = \angle DPC$,
∴ $\triangle BAP \backsim \triangle DCP$,
∴ $\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{CP}$.
设 $PC = x$ 米,则 $AP = (9 - x)$ 米,即 $\frac{1.8}{6.3} = \frac{9 - x}{x}$. 解得 $x = 7$,
∴ $PC = 7$ 米.
∴ 排球落地点 P 距墙脚 C 点的距离为 7 米.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** B
3. C **点拨**:在同一时刻物高和影长成正比,即在同一时刻的两个物体,影子,经过物体顶部的太阳光线三者构成的两个直角三角形相似.
4. B **点拨**:设竹竿的长为 x 尺,
∵ 竹竿的影长 = 一丈五尺 = 15 尺,小标杆长 = 一尺五寸 = 1.5 尺,影长五寸 = 0.5 尺,
∴ $\frac{x}{15} = \frac{1.5}{0.5}$,解得 $x = 45$. 故选 B.
5. C **点拨**:∵ $AB \perp BD$,$CD \perp BD$,
∴ $\angle ABO = \angle CDO = 90°$.
又∵ $\angle AOB = \angle COD$,
∴ $\triangle ABO \backsim \triangle CDO$,则 $\frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD}$.
∵ $AO = 4$ m,$AB = 1.6$ m,$CO = 1$ m,
∴ $\frac{4}{1} = \frac{1.6}{CD}$,解得:$CD = 0.4$ m.
6. 5.6 m **7.** 30 **8.** 30

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：如图，连接 CO，AB，设 AB 与 CO 的延长线交于 E.



（第 9 题）

∵ 夹子是轴对称图形，对称轴是直线 CE，A，B 为一组对称点，

∴ $CE \perp AB$，$AE = EB$.

在 Rt△AEC 和 Rt△ODC中，

∵ $\angle AEC = \angle ODC$，

$\angle OCD$ 为公共角，

∴ Rt△AEC∽Rt△ODC.

∴ $\dfrac{AE}{OD} = \dfrac{AC}{OC}$.

又 $OC = \sqrt{OD^2 + DC^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26(\text{mm})$，

∴ $AE = \dfrac{AC \cdot OD}{OC} = \dfrac{39 \times 10}{26} = 15(\text{mm})$.

∴ $AB = 2AE = 30$ mm.

10. **解**：由题意可得：$\angle ABC = \angle EDC = \angle GFH = 90°$，

$\angle ACB = \angle ECD$，$\angle AFB = \angle GHF$，

故△ABC∽△EDC，△ABF∽△GFH，

则 $\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC}$，$\dfrac{AB}{GF} = \dfrac{BF}{FH}$，

即 $\dfrac{AB}{1.5} = \dfrac{BC}{2}$，$\dfrac{AB}{1.65} = \dfrac{BC + 18}{2.5}$，

解得：$AB = 99$.

答：“望月阁”的高 AB 的长度为 99 m.

11. 100　**点拨**：∵ $\angle ADB = \angle EDC$，$\angle B = \angle C = 90°$，

∴ △ABD∽△ECD，

∴ $\dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BD}{CD}$，

∴ $AB = \dfrac{BD \cdot EC}{CD} = \dfrac{120 \times 50}{60} = 100(\text{m})$.

12. 16

13. **解**：(1) 过 P 点作 $PN' \perp BC$，垂足为 N'，PN'交 AD 于 N，易知 $PN \perp AD$.

∵ $AD /\!/ A'D'$，

∴ △PAD∽△$PA'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{PN}{PN'}$.

设灯泡离地面的距离为 x cm，则 $\dfrac{30}{36} = \dfrac{x - 30}{x}$. 解得 $x = 180$.

∴ 灯泡离地面的距离是 180 cm.

(2) 设横向影子 $A'B$，$D'C$ 的长度和为 y cm.

同(1)可得 $\dfrac{60}{60 + y} = \dfrac{150}{180}$.

解得 $y = 12$.

∴ 横向影子 $A'B$，$D'C$ 的长度和为 12 cm.

(3) 过点 P 作 $PM \perp BC$，垂足为 M，PM 交 AD 于点 N，易知 $PN \perp AD$.

∵ $AD /\!/ A'D'$，

∴ △PAD∽△$PA'D'$.

根据相似三角形对应高的比等于相似比，可得 $\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{PN}{PM}$.

设灯泡离地面的距离为 z. 由题意，得 $PM = z$，$PN = z - a$，$AD = na$，$A'D' = na + b$.

∴ $\dfrac{na}{na + b} = \dfrac{z - a}{z}$. 解得 $z = \dfrac{na^2 + ab}{b}$.

∴ 灯泡离地面的距离为 $\dfrac{na^2 + ab}{b}$.

25.7　相似多边形和图形的位似

同类变式

3. ③

4. **解**：不相似. 理由：新矩形的长和宽分别为 $a + 2x$ 和 $b + 2x$. 假设原来的矩形与新矩形相似，则有 $\dfrac{a + 2x}{a} = \dfrac{b + 2x}{b}$，

化简得 $x(a - b) = 0$.

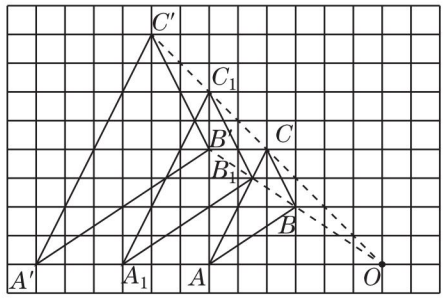
∵ $a > b$，

∴ $x = 0$. 这与已知矛盾.

因此，原来的矩形与新矩形不相似.

7. (9，0)　**8.** 1∶2　**9.** 2∶3

10. **解**：(1) 位似中心 O 的位置如图所示.



（第 10 题）

(2) ∵ $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{1}{2}$，

∴ △ABC 与△$A'B'C'$的相似比为 1∶2.

(3) △$A_1B_1C_1$ 如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

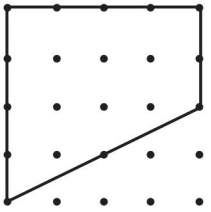
练中考·练模拟 得满分

1. B　**2**. B　**3**. B

4. D　**点拨**:先求出位似比,再根据位似比等于相似比,以及相似三角形的面积比等于相似比的平方求解即可.

5. 2∶5

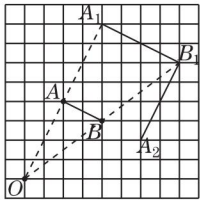
6. **解**:所画的格点图形如图所示.



(第6题)

7. **解**:(1)如图所示,线段 A_1B_1 即为所求.

(2)如图所示,线段 A_2B_1 即为所求.



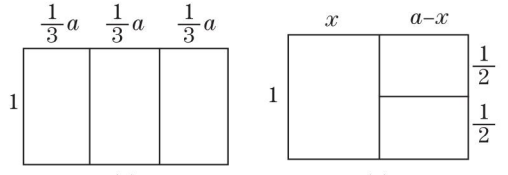
(第7题)

(3)20

8. D

9. **解**:方法一:如图(1),∵ 每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同,

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{3}a}{1}$,解得 $a=\sqrt{3}$.

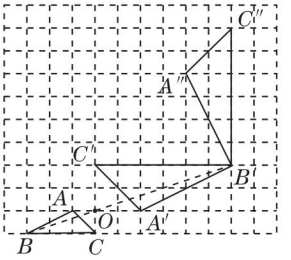


(第9题)

方法二:如图(2),由每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同,得 $\frac{1}{a}=\frac{x}{1}=\frac{\frac{1}{2}}{a-x}$,$\therefore a=\sqrt{2}$.

点拨:本题答案不唯一,符合要求即可.

10. **解**:(1)$\triangle A'B'C'$ 如图所示.



(第10题)

(2)$\triangle A''B'C''$ 如图所示.

$S=\frac{90}{360}\pi(2^2+4^2)=\frac{1}{4}\pi\cdot 20=5\pi$.

章末核心知识分类整合

好题必解:

一、1. D

2. C　**点拨**:∵ $DE/\!/BC$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$.

∵ $S_{\triangle ADE}=S_{四边形BCED}$,

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{AB-AD}{AD}=\sqrt{2}-1$. 故选 C.

3. D　**点拨**:首先证明 $\triangle ACD\backsim\triangle BCA$,由相似三角形的性质可得:$\triangle ACD$ 的面积∶$\triangle BCA$ 的面积为 1∶4,由 $\triangle ABD$ 的面积为 15,进而求出 $\triangle ACD$ 的面积.

4. D　**5**. A

二、6. 9　**7**. $\frac{4}{7}$

8. 3 或 $\frac{4}{3}$　**点拨**:∵ $\angle ACE=\angle ACD+\angle DCE=\angle ABC+\angle A$,$\angle ACD=\angle ABC$,

$\therefore \angle A=\angle DCE$,

∴ 当 $\triangle DCE$ 和 $\triangle ABC$ 相似时,可以确定 BC 与 DE 为对应边,其余两对应边不能确定,∴ 分 $\frac{AB}{CD}=\frac{AC}{CE}$ 和 $\frac{AB}{CE}=\frac{AC}{CD}$ 两种情况讨论,即 $\frac{4}{2}=\frac{6}{CE}$ 或 $\frac{4}{CE}=\frac{6}{2}$,解得,$CE=3$ 或 $CE=\frac{4}{3}$.

9. (8,0)　**10**. $\frac{1}{2n+1}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、**11.** 解：(1)∵ $AD=BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

∴ $AD^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

∵ $AC=1$，

∴ $CD=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

∴ $AD^2=AC\cdot CD$.

(2) ∵ $AD^2=AC\cdot CD$，

∴ $BC^2=AC\cdot CD$，即$\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC}$.

又 $\angle C=\angle C$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle BDC$.

∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{BC}$.

又 $AB=AC$，

∴ $BD=BC=AD$.

∴ $\angle A=\angle ABD$，$\angle ABC=\angle C=\angle BDC$.

设 $\angle A=\angle ABD=x$，

则 $\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2x$.

∴ $\angle ABC=\angle C=\angle BDC=2x$.

∴ $\angle A+\angle ABC+\angle C=x+2x+2x=180°$.

解得 $x=36°$，

∴ $\angle ABD=36°$.

12. 证明：(1)∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，

∴ $AC=BC$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle DCE=60°$，

∴ $\angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$，即 $\angle ACE=\angle BCD$，

∴ $\triangle ACE\cong\triangle BCD$(SAS).

(2)∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，

∴ $AB=AC$，$CD=ED$，$\angle ABC=\angle DCE=60°$，

∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{AC}{ED}$，$AB/\!/DC$，

∴ $\angle ABG=\angle GDC$，$\angle BAG=\angle GCD$.

∴ $\triangle ABG\backsim\triangle CDG$.

∴ $\frac{AG}{GC}=\frac{AB}{CD}$.

同理，$\frac{AF}{FE}=\frac{AC}{ED}$.

∴ $\frac{AG}{GC}=\frac{AF}{FE}$.

13. 解：∵ $CB\perp AD$，$ED\perp AD$，

∴ $BC/\!/DE$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，

∴ $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$，

∴ $\frac{1}{1.5}=\frac{AB}{AB+8.5}$，

∴ $AB=17$(m).

答：河宽 AB 为 17m.

14. 证明：(1)∵ $EC/\!/AB$，

∴ $\angle EDA=\angle DAB$.

又∵ $\angle EDA=\angle ABF$，

∴ $\angle DAB=\angle ABF$，

∴ $AD/\!/BC$.

又∵ $DC/\!/AB$，

∴ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

(2)∵ $EC/\!/AB$，

∴ $\triangle OAB\backsim\triangle OED$，

∴ $\frac{OA}{OE}=\frac{OB}{OD}$.

∵ $AD/\!/BC$，

∴ $\triangle OBF\backsim\triangle ODA$，

∴ $\frac{OB}{OD}=\frac{OF}{OA}$，

∴ $\frac{OA}{OE}=\frac{OF}{OA}$，

∴ $OA^2=OE\cdot OF$.

15. 解：(1)由已知得：$k=-2$，

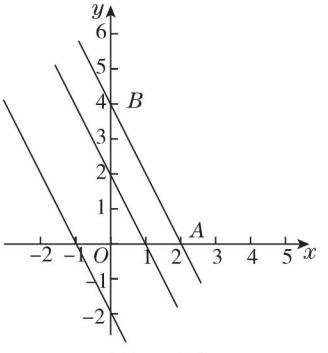
把点(3,1)的坐标和 $k=-2$ 代入 $y=kx+b$ 中得：$1=-2\times3+b$，

∴ $b=7$.

(2)根据位似比为 1∶2 得：函数 $y=kx+b$ 的图像有两种情况(如图)：

①不经过第三象限时，过点(1,0)和点(0,2)，这时表达式为 $y=-2x+2$；

②不经过第一象限时，过点(−1,0)和点(0,−2)，这时表达式为 $y=-2x-2$.



(第 15 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记

点拨®

荣德基初中频道

特高
教师

点拨

九年级

数学

上

(J版)

荣德基 主编

陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料