教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法55招·七八九年级共370招



九年级
数学（上）
荣德基 主编
（BS版）
赠教材习题答案

陕西新华出版传媒集团　陕西人民教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

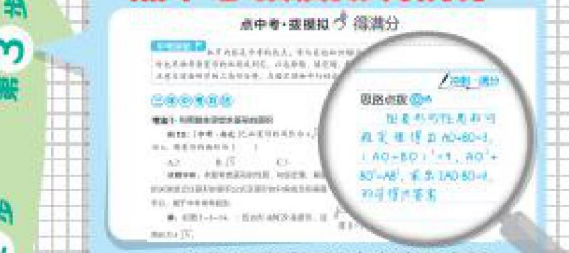
简约的知识梳理总结　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　培优拔尖题的破解策略　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

考法得满分

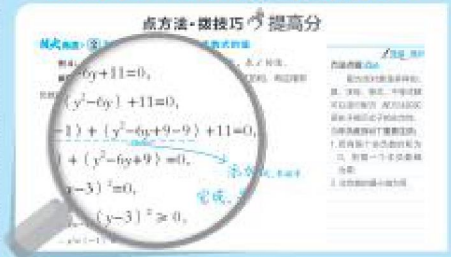
点中考 拨模拟 得满分



» 让你从默默无闻走向优秀卓越

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分



» 为你提供解题秘方

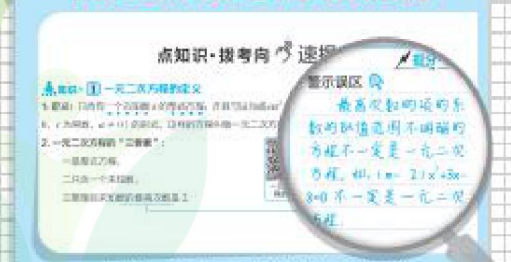
第3步　第2步　第1步

三个维度打造极致



基础速提分

点知识 拨考向 速提分



» 给你一把打开数学之门的钥匙

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

数学（BS版） 九年级（上）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
　　范志刚



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 60 个 必得分

第一章 特殊平行四边形

	页码
01 菱形的定义及其性质	2
02 菱形的判定	4
03 菱形的面积	5
04 矩形的定义及其性质	11
05 直角三角形斜边上的中线的性质	13
06 矩形的判定	14
07 正方形的定义	20
08 正方形的性质	21
09 正方形的判定	22
10 中点四边形	23

第二章 一元二次方程

01 一元二次方程的定义	43
02 一元二次方程的一般形式	43
03 一元二次方程的解（根）	44
04 用估算法求一元二次方程的近似解	45
05 直接开平方法	49
06 配方法	50
07 用公式法解一元二次方程	54
08 一元二次方程根的判别式	55
09 因式分解法	61
10 一元二次方程的解法	62
11 一元二次方程根与系数的关系	66
12 建立一元二次方程的模型解应用题的一般步骤	70

第三章 概率的进一步认识

01 画树状图法	86
02 列表法	87
03 用频率估计概率	94

考向点 77 个 速提分

	页码
01 利用菱形的定义和性质解相关问题	2
02 利用菱形的判定定理判定菱形	4
03 利用菱形的面积公式求菱形的面积	5
04 利用矩形的定义与性质解相关问题	11
05 利用直角三角形斜边上中线的性质证明线段垂直	13
06 利用矩形的判定方法判定矩形	14
07 利用正方形的定义判定正方形	20
08 利用正方形的性质解与三角形有关应用	21
09 利用正方形的判定方法判定正方形	22
10 利用中点四边形的性质求中点四边形的面积	23
11 利用线段代换法求正方形中三角形的周长	24
12 利用截长补短法证明正方形中的和差关系	25

01 利用一元二次方程的定义识别一元二次方程	43
02 利用方程的变形化一元二次方程为一般形式	44
03 利用一元二次方程根的定义判定方程的根	44
04 利用构造一元二次方程法求代数式的值	46
05 利用直接开平方法解一元二次方程	49
06 利用配方法解一元二次方程	50
07 利用公式法解一元二次方程	54
08 利用一元二次方程根的判别式解决相关问题	55
09 利用因式分解法解一元二次方程	61
10 利用适当方法解一元二次方程	62
11 利用根与系数的关系求值	66
12 利用一元二次方程解实际应用问题	70
13 利用化不规则为规则法用一元二次方程解几何问题	71
14 利用图象信息法用一元二次方程解一次函数的问题	72

01 利用画树状图法求概率	86
02 利用列表法求概率	87
03 利用比较概率大小法说明游戏规则的公平性	88
04 利用树状图法求含三步的概率的应用	89
05 利用频率估计试验对象的个数	96
06 利用频率估计概率解几何应用	96

微信 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ↑ 方法 ↑ 学霸

方法点 55 个 得高分

	页码
01 证明一个四边形是菱形的方法	4
02 菱形面积的计算方法	5
03 探求点的位置的方法	6
04 逆向思维法	6
05 求特定线段和的最小值的方法	7
06 解决矩形折叠问题的方法	15
07 面积法	17
08 判定四边形是正方形的方法	23
09 截长补短法	25
01 求代数式的值的方法	46
02 用直接开平方法解一元二次方程的方法	49
03 利用根的判别式判断一元二次方程的根的情况的方法	55
04 估算含无理数式子的大小的方法	58
05 常用的因式分解的方法	61
06 待定系数法	62
07 换元法	63
08 利用根与系数的关系求代数式值的方法	67
09 平移法	71
10 整数的常用表示方法	72
11 列方程求解数字问题的方法	73
01 用画树状图法求概率的方法	89
02 用频率估计概率的方法	95
03 根据频率确定试验对象个数的方法	96
04 数形结合思想	105

考法点 56 个 争满分

	页码
第一章 特殊平行四边形	
01 利用整体思想求菱形的面积	8
02 利用三角形的性质判定菱形	9
03 利用面积法求矩形中线段的长	17
04 利用三角形的相关性质求矩形中线段的长	18
05 利用矩形的判定和性质探求矩形的条件	18
06 利用三角形三边关系解正方形中的作图问题	27
07 利用整体思想解正方形中的线段的求和问题	27
08 利用三角形、菱形性质解判定正方形的条件问题	28
第二章 一元二次方程	
01 利用方程根的定义求字母式子的值	47
02 利用建一元二次方程模型解实际应用	47
03 利用直接开平方法求字母式子的值	52
04 利用配方求字母系数的值	53
05 利用公式法求根的范围	58
06 利用根的判别式求方程整数解问题	59
07 利用根的判别式及方程的根解有关根的应用	59
08 利用因式分解法说明方程解间的关系	64
09 利用因式分解法解与三角形有关应用	64
10 利用根与系数的关系求涉根的非对称式的值	68
11 利用涉根的式子的值求字母的值	68
12 利用一元二次方程解数字问题	72
13 利用一元二次方程解增长率问题	73
14 利用一元二次方程解商品销售问题	74
第三章 概率的进一步认识	
01 利用概率解函数相关应用	90
02 利用概率解统计图的相关应用	91
03 利用频率与概率的关系说明统计图的信息	97
04 利用频率估计概率解实际应用	98

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 60 个 必得分

第四章 图形的相似

	页码
01 两条线段的比	111
02 成比例线段	111
03 比例的性质	112
04 平行线分线段成比例的基本事实	116
05 平行线分线段成比例的推论	117
06 相似多边形	121
07 相似三角形	126
08 两角分别相等的两个三角形相似	127
09 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似	128
10 三边成比例的两个三角形相似	128
11 黄金分割	129
12 相似三角形判定定理的证明	134
13 利用影子测量物体的高度	140
14 利用标杆测量物体的高度	140
15 利用镜子的反射测量物体的高度	141
16 相似三角形对应线段的比	147
17 相似三角形的周长比与面积比	148
18 位似多边形的定义	154
19 位似多边形的性质	155
20 位似图形的画法	156
21 平面直角坐标系中的位似	157

第五章 投影与视图

01 投影	173
02 中心投影	174
03 平行投影	174
04 正投影	176
05 视图及相关概念	182
06 由几何体画三视图	183
07 由三视图确定几何体	184

第六章 反比例函数

01 反比例函数的定义	199
02 反比例关系与反比例函数的关系	200
03 求反比例函数表达式	200
04 反比例函数的图象	205
05 反比例函数的性质	206
06 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 的几何性质	207
07 建立反比例函数模型解实际问题	217

考向点 77 个 速提分

	页码
01 利用线段的比解决比例尺问题	111
02 利用成比例线段的定义判断成比例线段	112
03 利用比例的性质解相关应用	112
04 利用平行线分线段成比例解与平行相关问题	116
05 利用中间量转换法证明比例（等积）式成立	118
06 利用相似多边形的定义和性质解与相似有关问题	121
07 利用相似三角形的定义求边和角	126
08 利用两角分别相等判定两三角形相似	127
09 利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似	128
10 利用三边成比例判定三角形相似	129
11 利用黄金分割解决问题	129
12 利用“中间比法”证明线段成比例	130
13 利用“成比例法”证等积式	131
14 利用“对应关系法”探求线段长	131
15 利用“三点定形法”找相似的三角形证等积式	136
16 利用阳光测量物高解决实际应用问题	140
17 利用标杆（直尺）测量物高解实际应用	141
18 利用镜子的反射测量物高的实际应用	142
19 利用相似三角形对应线段比的性质求线段的长	147
20 利用相似三角形的周长比和面积比解决问题	148
21 利用位似多边形的定义识别位似图形	154
22 利用位似图形的定义和性质作位似图形	156
23 利用位似变换坐标的变化规律作图	157
24 利用位似图形的定义法判定图形位似	158
25 利用相似比法解坐标平面中的计算问题	159
01 利用投影及其特点识别投影与投影线的方向	173
02 利用中心投影的定义和性质辨析中心投影	174
03 利用平行投影解决物体投影问题	175
04 利用正投影的定义和性质解有关正投影问题	177
05 利用“光线方向法”判定投影的类型	177
06 利用“光线相交法”确定中心投影的点光源	178
07 利用三视图的画法画物体的三视图	183
08 利用三视图与立体图形之间的关系判断几何体的名称	184
09 利用“三视图关系法”计算视图中线段长	185
10 利用“三视图确定几何体法”求面积	185
01 利用反比例函数定义识别反比例函数	199
02 利用待定系数法求反比例函数表达式	201
03 利用定义法求反比例函数中的字母的值	201
04 利用反比例函数图象的特点用描点法作图象	206
05 利用反比例函数的性质解与求字母值有关的应用	207
06 利用比例系数 k 的几何性质解面积问题	208
07 利用增减性法比较函数值的大小	209
08 利用反比例函数模型解实际应用问题的常用方法	217
09 利用挖掘关系法解反比例函数的应用问题	221
10 利用分段法解双函数的应用问题	223

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法学霸

方法点55个 得高分

	页码
01 判断四条线段是否是成比例线段的方法	112
02 利用比例的性质求代数式的值的方法	113
03 利用平行线分线段成比例的基本事实求线段长的方法	117
04 利用平行线分线段成比例的基本事实的推论求线段长的方法	117
05 利用两边成比例且夹角相等证两三角形相似的方法	128
06 利用三边成比例判定两三角形相似的方法	129
07 利用相似三角形证明等积式的方法	131
08 三点定形法	136
09 判断两个图形是否为位似图形的方法	154
10 位似图形中坐标的变化规律	159
11 等量过渡法	163
12 等比过渡法	164
13 等积过渡法	164
01 中心投影光源的确定方法	174
02 画物体的平行投影的方法	175
03 分类观察法	179
04 三视图的画法	183
05 由三视图描述几何体的方法	184
06 分类讨论思想	193
07 方程思想	193
01 判断反比例函数的方法	199
02 待定系数法	200
03 等面积法	208
04 求阴影部分面积的方法	208
05 判断点是否在反比例函数图象上的方法	209
06 利用反比例函数的增减性比较函数值大小的求解思路	209
07 求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法	210
08 求反比例函数表达式常用的两种方法	217
09 排除法	218
10 根据几何公式确定反比例函数表达式的思路	219
11 由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的函数值的范围求自变量的范围的方法	221

考法点56个 争满分

	页码
01 利用比例的性质对等式进行变形	114
02 利用平行线分线段成比例求线段的长	119
03 利用相似多边形的性质解与全等有关的综合问题	124
04 利用相似多边形的性质解决实际问题	124
05 利用相似三角形的判定定理判定三角形相似	132
06 利用相似三角形的判定和性质判定角的关系	132
07 利用相似三角形的判定解与全等三角形的综合应用	138
08 利用相似三角形的性质解实际中测距离的应用	144
09 利用光的反射原理测量反射镜不在地面的测物高的应用	145
10 利用相似三角形的性质求比值	151
11 利用相似三角形的判定和性质解与平行四边形的综合应用	151
12 利用位似图形的性质求面积比	160
13 利用位似变换的性质求坐标系中点的坐标	160
14 利用图形变换在坐标系中作图计算	161
01 利用平行投影的定义判断物体投影的形状	179
02 利用中心投影的特征识别中心投影现象	180
03 利用物高与影长的关系求物高	180
04 利用物体的三视图比较视图面积	186
05 利用三视图间的关系补全物体的三视图	187
06 利用三视图确定几何体进行计算	187
01 利用反比例的意义解电学应用问题	203
02 利用反比例函数解实际应用问题	203
03 利用反比例函数的性质与三角形的性质求待定系数的范围	211
04 利用反比例函数 k 的几何性质求几何中的最值问题	211
05 利用反比例函数图象与一次函数图象的交点解相关问题	212
06 利用反比例函数的图象与性质探究反比例函数与一次函数的函数值大小关系的条件	213
07 利用反比例函数关系与图象信息解实际应用问题	224
08 利用反比例关系及自变量、函数值的范围解实际中图象应用问题	224
09 利用几何体的体积公式解函数图象的应用	225
10 利用反比例函数解与一次函数的综合应用	226

第四章 图形的相似

第五章 投影与视图

第六章 反比例函数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

看微课
菱形的性质…… 2
菱形的判定…… 4
矩形的性质…… 12
矩形的判定…… 14

学方法
配方法…… 50
公式法…… 54
因式分解法…… 61

看微课
一元二次方程的定义…… 43
根的判别式…… 55
利用一元二次方程建模…… 71

看微课
用列表法求概率…… 87
用频率估计概率…… 94

学方法
三点定形法……136

第一章 特殊平行四边形

1 菱形的性质与判定 …… 2
2 矩形的性质与判定 …… 11
3 正方形的性质与判定 …… 20

素养提分

行动篇：解密中考——“习题改造” ☞ P30
技巧篇：特殊平行四边形的特殊解题技巧 ☞ P31
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P34

第二章 一元二次方程

1 认识一元二次方程 …… 43
2 用配方法求解一元二次方程…… 49
3 用公式法求解一元二次方程…… 54
4 用因式分解法求解一元二次方程…… 61
*5 一元二次方程的根与系数的关系…… 66
6 应用一元二次方程…… 70

素养提分

思维篇：逆向思维在一元二次方程中的应用 ☞ P76
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P78

第三章 概率的进一步认识

1 用树状图或表格求概率 …… 86
2 用频率估计概率 …… 94

素养提分

思想篇：概率思想在学科中的渗透 ☞ P101
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P103

第四章 图形的相似

1 成比例线段 …… 111
2 平行线分线段成比例 …… 116

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 相似多边形 …… 121
4 探索三角形相似的条件 …… 126
*5 相似三角形判定定理的证明 …… 134
6 利用相似三角形测高 …… 140
7 相似三角形的性质 …… 147
8 图形的位似 …… 154

素养提分
方法篇：利用三角形相似证明乘积式的策略 ☞ P163
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P165

第五章 投影与视图
1 投影 …… 173
2 视图 …… 182

素养提分
技巧篇：投影与视图的解题技巧 ☞ P189
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P190

第六章 反比例函数
1 反比例函数 …… 199
2 反比例函数的图象与性质 …… 205
3 反比例函数的应用 …… 217

素养提分
行动篇：反比例函数中比例系数 k 的妙用 ☞ P214
思维篇：反比例函数中的数形结合思想 ☞ P229
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P231

参考答案及点拨（单独成册）

观动画
位似图形……156

看微课
成比例线段…… 112
平行线分线段成比例…… 116
相似多边形……122
相似三角形的判定……127
相似三角形的性质……147

学方法
三视图的画法……183

观动画
利用中心投影作图……174
利用平行投影作图……175

看微课
投影及其相关概念……173

观动画
画反比例函数的图象…… 205

看微课
反比例函数的定义……199
用待定系数法求表达式… 200
反比例函数的性质…… 206
比例系数 k 的几何意义…… 208

微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

01. **分类讨论思想：**把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

02. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

03. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

04. **建模思想：**建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

05. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数解形，以形助数，数形结合考虑问题的一种思想方法.

06. **转化思想：**转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

07. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，得出一般的结论.

08. **面积法：**运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法.

09. **整体代入求值：**当整式中未知数的值求出比较麻烦甚至无法求出时，把注意力和着眼点放在问题的整体结构上，把联系紧密的量作为一个整体代入已知的整式，进而求出数值.

10. **换元法：**所谓换元，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，将问题简化，易于解决.

11. **逆向思维法：**逆向思维法是指为实现某一创新或解决某一因常规思路难以解决的问题，而采取反向思维寻求解决问题的方法.

12. **割补法：**割补法就是把图形分割，将切下来的部分移动到其他位置，从而使不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，让题目便于解答.有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到简化的目的.

13. **待定系数法：**待定系数法是求函数关系式的重要方法，求解时要先设出符合题意的函数关系式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数关系式.

14. **定义法：**所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的.因此，用定义法解题，是最直接的方法.

15. **截长补短法：**是初中数学几何题中一种辅助线的添加方法，也是把几何题化难为易的一种思想.所谓“截长”，就是将三者中最长的那条线段一分为二，使其中的一条线段等于已知的两条较短线段中的一条，然后证明其中的另一段与已知的另一条线段相等.所谓“补短”，就是将一条已知的较短的线段延长与另一条已知的较短的线段长度相等的一段，然后求出延长后的线段与最长的已知线段的关系.

16. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁.其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法.主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

几何图形性质的探秘











第一章 特殊平行四边形

核心考点

你将见到的

- 菱形的性质与判定
- 矩形的性质与判定
- 正方形的性质与判定

核心方法

我们为你提供的

- 分类讨论思想
- 数形结合思想
- 构造法
- 转化思想
- 截长补短法
- 逆向思维法

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 菱形的性质与判定

核心知识

- 菱形的定义
- 菱形的性质
- 菱形的判定

知识链接

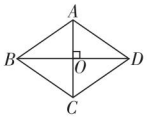


点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 菱形的定义及其性质

1. **定义**：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

2. **性质如下表**：

图形	性质	数学表达式
	菱形的四条边相等.	∵四边形 $ABCD$ 是菱形， ∴ $AB=BC=CD=AD$.
	菱形的对角线互相垂直.	∵四边形 $ABCD$ 是菱形， ∴ $BD \perp AC$.
	菱形是轴对称图形，有两条对称轴.	

特别提醒：（1）菱形的性质可以用来证明线段相等，角相等以及直线平行、垂直等关系. 并可用以进行相关的计算.

（2）菱形的性质与勾股定理联系，可得对角线与边之间的关系，即边长的平方等于两条对角线长一半的平方和.

（3）如果菱形的一个内角为 $60°$，那么菱形的两条边与较短的对角线构成的三角形为等边三角形.

提分·必记

特别提醒

菱形必须满足两个条件：一是平行四边形；二是一组邻边相等. 二者必须同时具备，缺一不可.

菱形的定义既是菱形的基本性质，也是菱形的基本判定方法.


菱形的性质

拔考向▸ 利用菱形的定义和性质解相关问题

题型 1：菱形的定义在判定菱形中的应用

例 1 如图 1-1-1，在△ ABC 中，CD 平分∠ ACB 交 AB 于点 D，$DE \parallel AC$ 交 BC 于点 E，$DF \parallel BC$ 交 AC 于点 F. 四边形 $DECF$ 是菱形吗？为什么？

解题秘方：紧扣定义中“两个条件”进行判断.

解：四边形 $DECF$ 是菱形. 理由如下：

∵ $DE \parallel FC$，$DF \parallel EC$，

∴四边形 $DECF$ 为平行四边形.

∵ $AC \parallel DE$，∴∠ 2= ∠ 3.

∵ CD 平分∠ ACB，∴∠ 1= ∠ 2. ∴∠ 1= ∠ 3. ∴ $DE=EC$.

∴四边形 $DECF$ 为菱形.

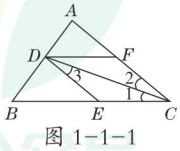


图 1-1-1

提分·秘诀

解法提醒

菱形的定义既是菱形的性质，也是菱形的一种判定方法.

在用菱形的定义判定一个四边形是菱形时，首先判定这个四边形是平行四边形，再证一组邻边相等.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：菱形的性质在求角中的应用

例 2 如图 1−1−2，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 上的点，且 $\angle B=\angle EAF=60°$，$\angle BAE=18°$，求 $\angle CEF$ 的度数.

解题秘方：紧扣菱形的性质、三角形外角的性质求解.

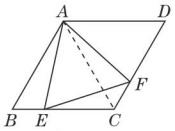


图 1−1−2

解：如图 1−1−2，连接 AC.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle B=60°$，

$\therefore AB=BC=CD=DA$，$\angle EAF=\angle B=60°$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，$\angle BCD=120°$.

$\therefore AB=AC$，$\angle B=\angle ACF=60°$.

$\because \angle BAE+\angle EAC=\angle FAC+\angle EAC$，

$\therefore \angle BAE=\angle CAF$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACF$（ASA）.

$\therefore AE=AF$.

又 $\because \angle EAF=\angle D=60°$，

$\therefore \triangle EAF$ 是等边三角形.

$\therefore \angle AEF=60°$.

又 $\because \angle AEC=\angle B+\angle BAE=78°$，

$\therefore \angle CEF=78°-60°=18°$.

在菱形中如果出现“30°”“60°”“120°”“一边等于最短对角线”这些词语时，往往都指向等边三角形，我们可用等边三角形的知识来解决

技巧点拨

在求有关菱形的角的问题时，由于菱形的每条对角线把菱形分成两个全等的等腰三角形，因此通常通过连接**对角线**，把四边形问题**转化**为特殊三角形（等腰三角形）问题来解答.

题型 3：菱形的性质在求线段长中的应用

例 3 如图 1−1−3，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$BD=12$ cm，$AC=6$ cm. 求菱形的周长.

解题秘方：紧扣菱形边的性质、对角线的性质进行解答.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，

$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

$\because AC=6$ cm，$BD=12$ cm，

$\therefore AO=3$ cm，$BO=6$ cm.

在 Rt $\triangle ABO$ 中，由勾股定理

得 $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$（cm），

$\therefore$ 菱形的周长 $=4AB=4\times3\sqrt{5}=12\sqrt{5}$（cm）.

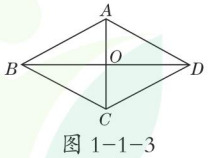


图 1−1−3

解法提醒

菱形的两条对角线将菱形分成四个全等的直角三角形，我们通常将菱形问题中求相关线段的长转化为求直角三角形中相关线段的长，再利用勾股定理来计算.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 菱形的判定

1. 判定定理 1：对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

数学表达式：如图 1−1−4，

在 $\square ABCD$ 中，

$\because AC \perp BD$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

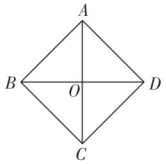


图 1−1−4

2. 判定定理 2：四边相等的四边形是菱形.

数学表达式：如图 1−1−5，

在四边形 $ABCD$ 中，

$\because AB=BC=CD=DA$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

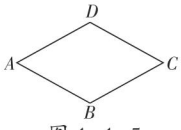


图 1−1−5


菱形的判定

拔考向▶ 利用菱形的判定定理判定菱形

题型 1：对角线关系在判定菱形中的应用

例 4 如图 1−1−6，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 O 作直线 $EF \perp BD$，分别交 AD，BC 于点 E 和点 F，连接 BE，DF. 求证：四边形 $BEDF$ 是菱形.

解题秘方： 紧扣“对角线垂直”这一条件，从判定平行四边形入手判定菱形.

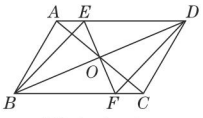


图 1−1−6

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB=OD$，$AD \parallel BC$. $\therefore \angle EDO=\angle FBO$，$\angle OED=\angle OFB$.

$\therefore \triangle OED \cong \triangle OFB$. $\therefore DE=BF$.

又 $\because DE \parallel BF$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\because EF \perp BD$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

题型 2：边的关系在判定菱形中的应用

例 5 如图 1−1−7，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB=CD$，点 E，F，G，H 分别是 AD，BD，BC，AC 的中点. 试证明：四边形 $EFGH$ 是菱形.

解题秘方： 紧扣题中中点条件与线段相等这一特征，从证四边相等入手判定菱形.

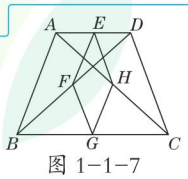


图 1−1−7

证明： $\because$ 点 E，H 分别为 AD，AC 的中点，

$\therefore EH$ 为 $\triangle ACD$ 的中位线. $\therefore EH=\frac{1}{2}CD$.

同理可得：$EF=\frac{1}{2}AB$，$FG=\frac{1}{2}CD$，$HG=\frac{1}{2}AB$.

$\because AB=CD$，$\therefore EH=EF=FG=HG$. $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

提分·必记

特别提醒

判定菱形的常见思路：

- 四边形
  - 四条边都相等→菱形
  - 对角线互相垂直且平分→菱形
- 平行四边形
  - 对角线互相垂直→菱形
  - 有一组邻边相等→菱形

可依据题目特点选取不同的思路.

提分·秘诀

解法提醒

证明一个四边形是菱形的方法：

若已知要证的四边形的对角线互相垂直，则要考虑证明这个四边形是平行四边形，用“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”进行证明.

技巧点拨

判定菱形的方法：

1. 若用对角线进行判定：

先证明四边形是平行四边形，再证明对角线互相垂直，或直接证明四边形的对角线互相垂直平分；

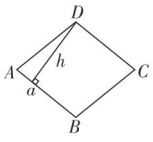
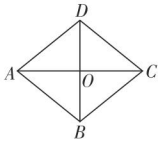
2. 若用边进行判定：

先证明四边形是平行四边形，再证明一组邻边相等，或直接证明四边形的四条边都相等.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 菱形的面积

计算方法	一般方法	特殊方法
基本图形		
计算公式	$S=ah$	$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$
常见关系	若菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，则 （1）Rt△ AOD ≌ Rt△ COD ≌ Rt△ COB ≌ Rt△ AOB； （2）$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle COB}=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}S_{菱形ABCD}$； （3）$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{菱形ABCD}$.	

提分·必记

特别提醒

在对角线互相垂直的四边形中，一条对角线将四边形分成有公共底边的两个三角形，这两个三角形的高的和恰好是四边形的另一条对角线的长，由三角形的面积公式可得，对角线互相垂直的四边形的面积等于两条对角线乘积的一半.

拔考向▶ 利用菱形的面积公式求菱形的面积

例 6 如图 1-1-8，已知菱形 $ABCD$ 的周长为 40 cm，两个相邻内角度数之比为 2 ∶ 1，求菱形的对角线长和面积.

解题秘方： 紧扣菱形的边和对角线的性质以及面积计算公式求解.

解： ∵菱形 $ABCD$ 的周长为 40 cm，

∴ $AB=BC=CD=DA=40\div4=10$（cm）（菱形的四条边相等）.

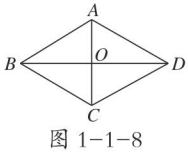


图 1-1-8

∵∠ BAD+∠ ABC=180°，

∠ BAD ∶ ∠ ABC=2 ∶ 1，

∴∠ $BAD=180°\times\frac{2}{3}=120°$，

∠ $ABC=180°\times\frac{1}{3}=60°$.

∴△ ABC 是等边三角形.

∴ $AC=AB=10$ cm.

∴ $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times10=5$（cm）.

在 Rt△ AOB 中，由勾股定理，得

$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$（cm）.

∴ $BD=2BO=2\times5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$（cm）.

∴ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}\times10\sqrt{3}\times10=50\sqrt{3}$（cm²）.

综上：菱形的对角线长分别为 10 cm，$10\sqrt{3}$ cm，面积为 $50\sqrt{3}$ cm².

提分·秘诀

方法技巧

菱形面积的计算方法：

1. 边长与两对边之间的距离（即菱形的高）的积；
2. 被两条对角线分成的四个小直角三角形的面积之和（或其中一个小直角三角形面积的 4 倍）；
3. 两条对角线乘积的一半.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用特殊位置法确定点的位置

例 7 [中考·泰安]如图 1-1-9，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，E 是 CD 上一点，BE 交 AC 于 F，连接 DF.

（1）求证：$\angle BAC=\angle DAC$，$\angle AFD=\angle CFE$；

（2）若 $AB\parallel CD$，试证明：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（3）在（2）的条件下，试确定 E 点的位置，使 $\angle EFD=\angle BCD$，并说明理由.

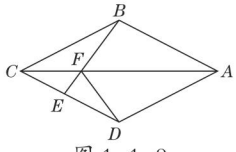


图 1-1-9

解题秘方：用特殊位置法（E 为垂足或中点）探求 E 点的位置：$BE\perp CD$ 时，$\angle EFD=\angle BCD$.

（1）**证明：**在△ ABC 和△ ADC 中，

$$\begin{cases}AB=AD,\\CB=CD,\\AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore$△ $ABC\cong$△ ADC.

$\therefore\angle BAC=\angle DAC$.

在△ ABF 和△ ADF 中，$\begin{cases}AB=AD,\\\angle BAF=\angle DAF,\\AF=AF,\end{cases}$

$\therefore$△ $ABF\cong$△ ADF. $\therefore\angle AFB=\angle AFD$.

又$\because\angle AFB=\angle CFE$，

$\therefore\angle AFD=\angle CFE$.

（2）**证明：**$\because AB\parallel CD$，

$\therefore\angle BAC=\angle ACD$.

又$\because\angle BAC=\angle DAC$，

$\therefore\angle DAC=\angle ACD$.

$\therefore AD=CD$.

又$\because AB=AD$，$CB=CD$，

$\therefore AB=CB=CD=AD$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形.

（3）**解：**当 $BE\perp CD$ 时，$\angle EFD=\angle BCD$.

理由如下：$\because$四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore$由菱形的轴对称性得$\angle CBF=\angle CDF$.

$\because BE\perp CD$，$\therefore\angle BEC=\angle DEF=90°$.

$\therefore\angle EFD=\angle BCD$.

挑战·高分

技巧点拨

探求点的位置的方法：

1. 特殊位置法：

倍分点法（含中点）和垂足法，分别用这些点作为条件进行推理，从而找出符合条件的点.

2. 逆向思维法：

将结论作为已知条件，结合其他已知条件，推理出与要探求条件相关的结论，并用这个结论作为确定点的位置的方法.

如：本例中，结论为 $\angle EFD=\angle BCD$，若将它作为条件，结合 $\angle CDF=\angle CBF$，很容易得出若要 $\angle CEB=\angle DEF$，则需 $BE\perp CD$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用对称法求菱形的最值

例 8 如图 1−1−10，菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle A=120°$，点 E 是 BC 边上的动点，点 P 是对角线 BD 上的动点，若使 $PC+PE$ 的值最小，则这个最小值为_____.

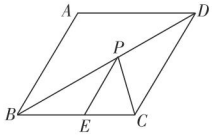


图 1−1−10

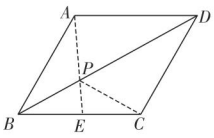


图 1−1−11

解题秘方： 将菱形中的最值问题，转化为求“两点一线”的最值问题，结合菱形的对称性求解.

解： ∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ A，C 关于直线 BD 对称.

如图 1−1−11，连接 AE 交 BD 于点 P，连接 PC，

则 $PE+PC=PE+AP=AE$，

当 $AE\perp BC$ 时，AE 取得最小值.

∵$\angle BAD=120°$，

∴$\angle ABC=60°$.

∴$\angle BAE=30°$.

∴ $BE=\frac{1}{2}AB=1$.

∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3}$.

答案： $\sqrt{3}$

挑战·高分

解法提醒

求特定线段和的最小值的方法：

先通过轴对称的方式将同侧两点转化为异侧两点，再通过两点间线段最短求得两线段和的最小值.

详解

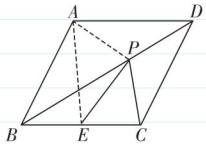


图 1−1−12

如图 1-1-12，在△APE 中，PE+AP>AE，因此当点 A，P，E 三点共线时，PE+AP 取得最小值，此时 PE+AP=AE.

拔尖角度▸ 3 利用动中取静法探究构成特殊四边形的条件

例 9 如图 1−1−13，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=4$ cm，$BC=8$ cm，点 P 从点 D 出发向点 A 运动，运动到点 A 立即停止；同时点 Q 从点 B 出发向点 C 运动，运动到点 C 立即停止，点 P，Q 的速度都是 1 cm/s，连接 PQ，AQ，CP，设点 P，Q 运动的时间为 t s.

（1）当 t 为何值时，四边形 $AQCP$ 是菱形；

（2）求出（1）中菱形 $AQCP$ 的周长和面积.

解题秘方： 解动态条件问题的几何题，常利用逆向思维，即交换问题中的条件与结论的呈现方式，进行解答，如将“当 t 为何值时，四边形 $AQCP$ 是菱形”改为“当四边形 $AQCP$ 是菱形时，t 的值是多少？”求出 t 的值即可.

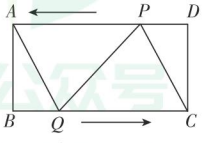


图 1−1−13

挑战·高分

方法点拨

解决条件探索题，通常利用逆向思维，将结论作为条件，去探索结论成立时的条件，通过列方程求满足条件时变量的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题意知 $AP=CQ$，

∵四边形 $ABCD$ 是长方形，

∴ $AD \parallel BC$.

∴四边形 $AQCP$ 是平行四边形.

∴要使四边形 $AQCP$ 是菱形，只需满足 $AP=CP$，

由题意可知，$DP=t$ cm，则 $AP=CP=(8-t)$ cm，

∵ $DP^2+CD^2=CP^2$，∴ $t^2+16=(8-t)^2$，解得 $t=3$，

∴当 $t=3$ 时，四边形 $AQCP$ 是菱形.

（2）由第（1）题，得菱形 $AQCP$ 的边长为 5cm，

∴菱形 $AQCP$ 的周长 $=5\times4=20$（cm），

菱形 $AQCP$ 的面积 $=5\times4=20$（cm^2）.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考的热点，常与其他知识综合考查，常以解答题的形式出现，有时也单独考查菱形的性质或判定，以选择题、填空题、解答题的形式出现，在解决相关问题时，注意与前面所学的三角形全等，勾股定理和平行四边形等知识的联系.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用整体思想求菱形的面积

例10 [中考·南充]已知菱形的周长为 $4\sqrt{5}$，两条对角线的和为 6，则菱形的面积为（　　）

A.2　　B. $\sqrt{5}$　　C.3　　D.4

试题评析：本题考查菱形的性质、勾股定理，解题的关键是记住菱形的面积公式及菱形的对角线互相垂直平分，属于中考常考题型.

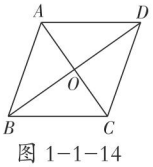


图 1-1-14

解：如图 1-1-14，∵四边形 $ABCD$ 是菱形，且周长为 $4\sqrt{5}$，

∴ $AB=\sqrt{5}$，$AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵ $AC+BD=6$，∴ $AO+BO=3$.

∴ $(AO+BO)^2=9$.

∴ $AO^2+2AO\cdot BO+BO^2=9$.

又∵ $AO^2+BO^2=AB^2=(\sqrt{5})^2=5$，∴ $2AO\cdot BO=4$.

∴菱形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2AO\cdot BO=4$.

答案：D

思路点拨

由菱形的性质和勾股定理得出 $AO+BO=3$，$(AO+BO)^2=9$，$AO^2+BO^2=AB^2$，求出 $2AO\cdot BO=4$，即可得出答案.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用三角形的性质判定菱形

例 11 [中考·贵阳]如图 1-1-15，在△ ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D，E 分别是边 BC，AB 上的中点，连接 DE 并延长至点 F，使 $EF=2DE$，连接 CE，AF.

（1）求证：$AF=CE$；

（2）当 $\angle B=30°$ 时，试判断四边形 $ACEF$ 的形状并说明理由.

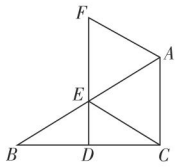


图 1-1-15

试题评析：本题考查平行四边形的判定和性质，菱形的判定，三角形的中位线的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，等边三角形的判定和性质；熟练掌握平行四边形的判定和性质，等边三角形的判定是解决问题的关键.

（1）**证明**：∵点 D，E 分别是边 BC，AB 上的中点，

∴ $DE \parallel AC$，$AC=2DE$.

∵ $EF=2DE$，

∴ $EF=AC$，$EF \parallel AC$.

∴四边形 $ACEF$ 是平行四边形.

∴ $AF=CE$.

（2）**解**：当 $\angle B=30°$ 时，四边形 $ACEF$ 是菱形.

理由如下：∵ $\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，

∴ $\angle BAC=60°$，$AE=BE=EC$.

∴△ AEC 是等边三角形.

∴ $AC=CE$.

又∵四边形 $ACEF$ 是平行四边形，

∴四边形 $ACEF$ 是菱形.

解法提醒

由三角形的中位线的性质得出 DE // AC，AC=2DE，再结合已知条件 EF=2DE，得出 EF=AC，EF // AC，从而得出四边形 ACEF 是平行四边形，即可得出 AF=CE；

由直角三角形的性质得出∠BAC=60°，分别利用 D 是 BC 的中点，E 是 AB 的中点．证出△ AEC 是等边三角形，得出 AC=CE，即可得出结论.

两年模拟兵法 ☞答案见 241 页

1. [中考·河北]求证：菱形的两条对角线互相垂直.

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC，BD 交于点 O.

求证：$AC \perp BD$.

以下是排乱的证明过程：

①又 $BO=DO$；

②∴ $AO \perp BD$，即 $AC \perp BD$；

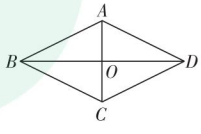
③∵四边形 $ABCD$ 是菱形；

④∴ $AB=AD$.

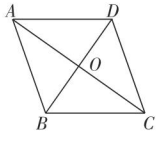
证明步骤正确的顺序是（　　）

A. ③→②→①→④　　B. ③→④→①→②

C. ①→②→④→③　　D. ①→④→③→②



（第 1 题）



（第 2 题）

2. [中考·海南]如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AC=8$，$BD=6$，则△ ABC 的周长是（　　）

A.14　　B.16　　C.18　　D.20

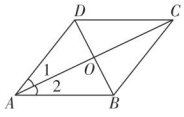
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

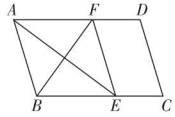
3. [中考·河南]如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，添加下列条件不能判定▱$ABCD$是菱形的只有（　　）

A. $AC \perp BD$　　B. $AB=BC$

C. $AC=BD$　　D. $\angle 1=\angle 2$



（第3题）



（第4题）

4. [期末·蒙阴]如图，在平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线交BC于点E，$\angle ABC$的平分线交AD于点F，若$BF=12$，$AB=10$，则AE的长为（　　）

A.10　　B.12　　C.16　　D.18

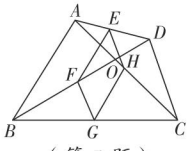
5. [模拟·安徽]如图，在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，E，F，G，H分别是AD，BD，BC，AC的中点，要使四边形$EFGH$是菱形，则四边形$ABCD$需满足的条件是（　　）

A. $AB=AD$

B. $AC=BD$

C. $AD=BC$

D. $AB=CD$

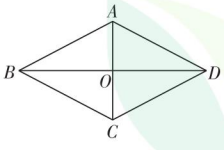


（第5题）

6. [中考·贺州]如图，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，BD平分$\angle ABC$，$AC \perp BD$，垂足为点O.

（1）求证：四边形$ABCD$是菱形；

（2）若$CD=3$，$BD=2\sqrt{5}$，求四边形$ABCD$的面积.　　【导学号：6872150】

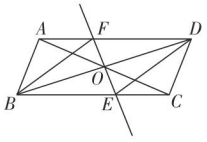


（第6题）

7. 如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，将直线AC绕点O顺时针旋转，分别交BC，AD于点E，F，连接BF，DE.

（1）试证明在旋转过程中，线段AF与EC总保持相等；

（2）在旋转过程中，四边形$BEDF$可能是菱形吗？请说明理由.



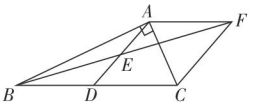
（第7题）

8. [中考·遵义]如图，在Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，D是BC的中点，E是AD的中点，过点A作$AF \parallel BC$交BE的延长线于点F.

（1）求证：△AEF≌△DEB；

（2）求证：四边形$ADCF$是菱形；

（3）若$AC=4$，$AB=5$，求菱形$ADCF$的面积.

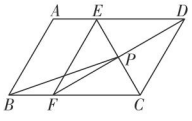


（第8题）

9. 如图，在▱$ABCD$中，CE平分$\angle BCD$，交AD于点E，DF平分$\angle ADC$，交BC于点F，CE与DF交于点P，连接EF，BP.

（1）求证：四边形$CDEF$是菱形；

（2）若$AB=2$，$BC=3$，$\angle A=120°$，求BP的值.



（第9题）

微信公众号
教辅资料站

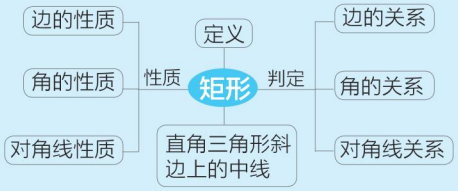
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 矩形的性质与判定

核心知识

- 矩形的定义
- 矩形的性质
- 直角三角形斜边上的中线
- 矩形的判定

知识链接

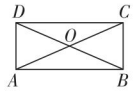


点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 矩形的定义及其性质

1. **定义**：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

2. **性质**：矩形的性质如下表：

图形	性质	数学表达式
	矩形的四个角都是直角.	∵四边形 $ABCD$ 是矩形， ∴∠ DAB= ∠ DCB= ∠ ADC= ∠ ABC=90°.
	矩形的对角线相等.	∵四边形 $ABCD$ 是矩形， ∴ AC=BD，AO=OC=OB=OD.
	矩形是轴对称图形，它有两条对称轴.	

特别提醒：（1）利用矩形的性质可以证明线段相等或倍分关系、直线平行、角相等等.

（2）矩形的一条对角线把矩形分成两个直角三角形，矩形的两条对角线将矩形分成两对全等的等腰三角形，分成四个面积相等的等腰三角形，因此有关矩形的计算问题经常转化到直角三角形和等腰三角形中来解决.

提分·必记

特别提醒

1. 矩形必须具备两个条件：（1）它是一个平行四边形；（2）它有一个角是直角，这两个条件缺一不可.
2. 由矩形的定义知，矩形一定是平行四边形，但平行四边形不一定是矩形. 矩形的定义可以作为判定一个四边形是矩形的一种方法.

拨考向▸利用矩形的定义与性质解相关问题

题型 1：矩形的定义在判断矩形中的应用

例 1 如图 1-2-1，在▱$ABCD$ 中，点 E，F 分别为 BC 边上的点，且 BE=CF，AF=DE，求证：▱$ABCD$ 是矩形.

解题秘方：紧扣矩形定义的“两个条件”进行证明.

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ AB=CD，∠ B+ ∠ C = 180°.

∵ BE=CF，∴ BE+EF=CF+EF，即 BF=CE.

又∵ AF=DE，

∴△ ABF ≌△ DCE.

∴∠ B= ∠ C=90°.

∴▱$ABCD$ 是矩形.

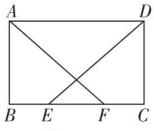


图 1-2-1

提分·秘诀

解法提醒

由定义来判定矩形，要在确定平行四边形的前提下，判定有一个角是90°，若在四边形的前提下，则需先证平行四边形，再判定有一个角是90°，矩形的定义既是矩形的性质也是矩形的判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：矩形的性质在计算中的应用

例 2 如图 1−2−2，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$\angle BOC=120°$，$AB=6$.

求：（1）对角线的长；

（2）BC 的长；

（3）矩形 $ABCD$ 的面积.

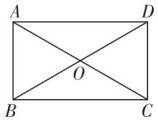


图 1−2−2

解题秘方：紧扣矩形的“角、对角线的性质”进行计算.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC=BD$，$OA=OC=OB=OD$.

又∵$\angle BOC=120°$，∴$\angle AOB=60°$.

∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形.

∴ $OA=AB=6$.

∴ $BD=AC=2OA=2\times6=12$.

（2）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle ABC=90°$.

∴ $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

（3）$S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=6\times6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$.

矩形的性质

解法提醒

有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

矩形的两条对角线把矩形分成四个等腰三角形；另外，矩形的对角线与两邻边构成四个直角三角形，矩形中的有关计算通常需要用到等腰三角形的性质或直角三角形的有关知识来解决.

题型 3：矩形的对称性在计算中的应用

例 3 ［一题多解］如图 1−2−3，直线 EF 过矩形 $ABCD$ 对角线的交点 O，分别交 AB，CD 于点 E，F，若 $AB=3$，$BC=4$，则阴影部分的面积为_____.

解题秘方：紧扣矩形的对称性，将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积进行计算.

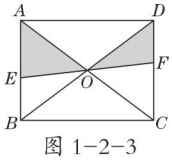


图 1−2−3

解：方法一 ∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴由矩形中心对称的性质知 $S_{▱AEFD}=S_{▱BCFE}$.

$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}$.

∴ $S_{阴影部分}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\times S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3$.

方法二 在 $\triangle OEB$ 与 $\triangle OFD$ 中，

$$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle EOB=\angle FOD,\end{cases}$$

∴ $\triangle OEB\cong\triangle OFD$. ∴ $S_{\triangle EBO}=S_{\triangle FDO}$.

∴ $S_{阴影部分}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3$.

答案：3

方法点拨

矩形既是轴对称图形又是中心对称图形，根据对称性将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积求解. 体现了**转化思想**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 直角三角形斜边上的中线的性质

1. 直角三角形斜边上的中线的性质：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

数学表达式：如图 1−2−4，在 Rt △ ABC 中，

∵ ∠ ACB=90° ，AD=BD，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB$（或 CD=AD=BD）.

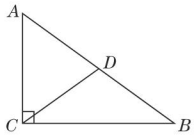


图 1−2−4

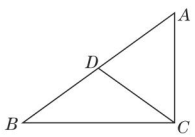


图 1−2−5

说明：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，是根据矩形的两条对角线相等且互相平分推导出来的. 将矩形沿某条对角线剪掉一半，剩下的一半就是直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的模型.

2. 直角三角形斜边上的中线的性质的逆命题：

如果三角形一边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

数学表达式：如图 1−2−5，在△ ABC 中，

∵ CD=BD=AD=$\frac{1}{2}AB$. ∴ ∠ ACB=90° .

拓考向▶利用直角三角形斜边上中线的性质证明线段垂直

例 4 如图 1−2−6，BD，CE 分别是△ ABC 的两条高，M，N 分别是 BC，DE 的中点.

求证：MN ⊥ DE.

解题秘方：紧扣“N 为 DE 中点这一条件，MN ⊥ DE 这一结论”，联想建立等腰三角形“三线合一”模型，结合直角三角形斜边上中线的性质求解.

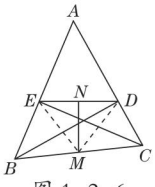


图 1−2−6

证明：连接 EM，DM，如图 1−2−6.

∵ BD，CE 分别为△ ABC 的两条高，

∴ ∠ BEC= ∠ CDB=90° .

在 Rt △ BEC 中，∵ M 为斜边 BC 的中点，

∴ $EM=\frac{1}{2}BC$.

在 Rt △ CDB 中，∵ M 为斜边 BC 的中点，

∴ $DM=\frac{1}{2}BC$. ∴ EM=DM.

又∵在等腰△ MDE 中，N 为 DE 的中点，∴ MN ⊥ DE.

提分·必记

特别提醒

- 直角三角形斜边上的中线把直角三角形分成两个面积相等的等腰三角形.
- 此性质与“直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半”都是解决线段倍分关系的重要依据，但后者只在含 30° 角的直角三角形中才成立，而“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”适用于所有直角三角形，更具一般性.

提分·秘诀

技巧点拨

1. 若题目中出现了一边的中点，往往需要用到中线，若又有直角，往往需要用到直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质.
2. 在直角三角形中，若遇斜边的中点，则常作斜边的中线，从而利用直角三角形斜边上的中线的性质把问题转化为等腰三角形的问题，利用等腰三角形的性质解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 矩形的判定

1. 判定定理 1： 对角线相等的平行四边形是矩形.

数学表达式： 如图 1−2−7，

在▱$ABCD$ 中，

∵ $AC=BD$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

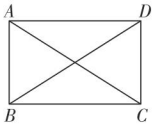


图 1−2−7

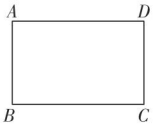


图 1−2−8

2. 判定定理 2： 有三个角是直角的四边形是矩形.

数学表达式： 如图 1−2−8，

在四边形 $ABCD$ 中，

∵ $\angle A=\angle B=\angle C=90°$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.



提分·必记

特别提醒

1. 矩形的判定和性质互为逆定理.
2. 矩形判定的常见思路

从角上证明：

（1）四边形 —有三个直角→ 矩形；

（2）平行四边形 —有一个直角→ 矩形.

从对角线上证明：

（1）平行四边形 —对角线相等→ 矩形；

（2）四边形 —对角线互相平分且相等→ 矩形.

拔考向▶ 利用矩形的判定方法判定矩形

题型 1：对角线相等关系在判定矩形中的应用

例 5 如图 1−2−9，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E，F 两点在边 BC 上，$AB\parallel DE$，$AF\parallel DC$，且四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

（1）AD 与 BC 有何数量关系？请说明理由.

（2）当 $AB=DC$ 时，求证：▱$AEFD$ 是矩形.

解题秘方： 紧扣“平行四边形”这一前提，从“对角线相等”入手（或有一直角入手）进行证明.

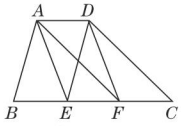


图 1−2−9

（1）**解：** $BC=3AD$. 理由如下：

∵ $AD\parallel BC$，$AB\parallel DE$，$AF\parallel DC$，

∴ 四边形 $ABED$ 和四边形 $AFCD$ 都是平行四边形.

∴ $AD=BE$，$AD=FC$.

又∵ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

∴ $AD=EF$. ∴ $AD=BE=EF=FC$. ∴ $BC=3AD$.

（2）**证明：** ∵ 四边形 $ABED$ 和四边形 $AFCD$ 都是平行四边形，

∴ $DE=AB$，$AF=DC$.

又∵ $AB=DC$，∴ $DE=AF$.

又∵ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

∴ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

提分·秘诀

方法点拨

证明一个平行四边形为矩形的两种方法：

一种是证明有一个角是直角，

另一种是证明两条对角线相等.

本例采用的是对角线相等的方法. 若采用有一个角是直角的方法，可证 DE=DC，EF=FC，利用等腰三角形“三线合一”可得∠DFE=90°. 用这种方法证明请读者独立完成.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：角的关系在判定矩形中的应用

例 6 如图 1-2-10，$\square ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E，F，G，H.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

解题秘方：题中条件建立在四边形基础上，且都与角相关，可从证直角入手进行判定.

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$.

$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180^\circ$.

∵ BG 平分 $\angle ABC$，CG 平分 $\angle BCD$，

$\therefore \angle GBC+\angle GCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$.

$\therefore \angle BGC=90^\circ$.

同理可得 $\angle AFB=\angle AED=90^\circ$.

$\therefore \angle GFE=\angle FEH=\angle FGH=90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

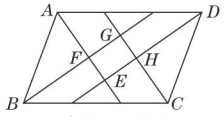


图 1-2-10

思路点拨

判定矩形的常见思路：要判定一个四边形是矩形，通常选用“三个角是直角的四边形是矩形”来证明；也可以先判定它是平行四边形，再根据平行四边形成为矩形应满足的条件，证明有一个角是直角或对角线相等.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用折叠法解矩形中的计算问题

挑战·高分

例 7 如图 1-2-11，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，点 C 的对应点为点 C'，BC' 与 AD 交于点 E. 若 $AD=8\text{cm}$，$AB=4\text{cm}$，求 $\triangle BDE$ 的面积.

解题秘方：先将求面积的问题转化为求 DE 的长的问题；再紧扣折叠中角的不变性，由三角形的边角关系将求 DE 的长转化成求 BE 的长，将要求的边与已知边都集中在同一个三角形中进行求解.

解：设 $DE=x\text{cm}$，则 $AE=(8-x)\text{cm}$.

由折叠的性质知 $\triangle BCD$ 与 $\triangle BC'D$ 全等，则 $\angle 1=\angle 2$.

在矩形 $ABCD$ 中，∵ $AD \parallel BC$，

$\therefore \angle 1=\angle 3$. $\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\therefore BE=DE=x\text{ cm}$.

在 Rt $\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $BE^2=AB^2+AE^2$，即 $x^2=4^2+(8-x)^2$，解得 $x=5$.

$\therefore \triangle BDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}DE\cdot AB=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10(\text{cm}^2)$.

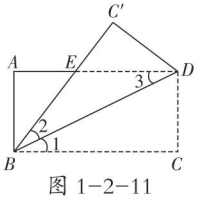


图 1-2-11

将数量关系集中到 Rt $\triangle ABE$ 中，利用勾股定理列方程求解

方法点拨

解决矩形折叠问题的方法：

1. 利用折叠的性质：折叠前后的图形能够完全重合，折叠前后的图形对应边相等，对应角相等.
2. 此类问题往往通过图形间的折叠找出折叠部分与原图形中线段或角的关系，从而得到折叠部分与原图形或其他图形中线段或角的关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用逆向思维法解确定矩形条件问题

挑战·高分

例 8 如图 1-2-12，在△ ABC 中，点 O 是 AC 边上一动点，过点 O 作直线 $MN \parallel BC$，设 MN 交 $\angle BCA$ 的平分线于点 E，交 $\angle ACD$ 的平分线于点 F.

（1）证明：$EO=FO$；

（2）当点 O 运动到何处时，四边形 $AECF$ 是矩形？简要说明理由.

思路点拨

求点O运动到何处时四边形AECF是矩形，可以先把矩形当作已知条件，求出O点与AC的位置关系，然后将这个位置关系作为需添加的条件，经过说理，证明四边形AECF是矩形.这种逆向思维的方法是条件探索题的一般解题思路.

解题秘方： 紧扣“三角形的边角关系”和矩形的定义解答.

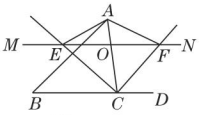


图 1-2-12

（1）**证明：** ∵ $MN \parallel BC$，∴ $\angle CEO = \angle ECB$.

∵ CE 是 $\angle BCA$ 的平分线，∴ $\angle ECO = \angle ECB$.

∴ $\angle CEO = \angle ECO$. ∴ $EO=OC$. 同理 $FO=OC$. ∴ $EO=FO$.

（2）**解：** 当点 O 运动到 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下：由（1）知 $OE=OF$. 又∵ $AO=CO$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

∵ $OE=OC$，∴ $AC=EF$. ∴四边形 $AECF$ 是矩形.

拔尖角度▸ 3 利用数形结合法解动点问题

挑战·高分

例 9 如图 1-2-13，在矩形 $ABCD$ 中，AB=24cm，BC=10cm，点 P 从 A 开始沿 AB 边以 4cm/s 的速度运动，点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 2cm/s 的速度运动，如果点 P，Q 分别从 A，C 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动，设运动时间为 t s.

（1）当 t=2 时，求 P，Q 两点之间的距离.

（2）当 t 为何值时，线段 AQ 与 DP 互相平分？

（3）当 t 为何值时，四边形 $APQD$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{8}$？

思路点拨

解决动态几何探究题的关键：

抓住点在运动过程中的一个瞬间（或一个确定的位置），动中取静，如本例（1）求 PQ 的长时，可构造直角三角形，利用勾股定理求解.（2）中 AQ 与 DP 互相平分，只需保证四边形 $APQD$ 是平行四边形即可，结合四边形 $ABCD$ 是矩形可判断此时四边形 $APQD$ 是矩形，用含 t 的式子分别表示 AP，DQ 的长，列出方程求解.

解题秘方： 将运动过程中某一时刻动点的运动距离转化为几何图形的条件或满足几何图形条件时动点需运动的距离作为条件进行解答.

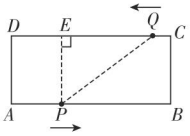


图 1-2-13

解：（1）如图 1-2-13，连接 PQ，过点 P 作 $PE \perp DQ$ 于点 E. 则 $DE=AP$，$PE=BC$.

∵ 点 P 从 A 开始沿 AB 边以 4cm/s 的速度运动，点 Q 从 C 开始沿 CD 边以 2cm/s 的速度运动，

∴当 t=2 时，QC=4cm，AP=8cm.

在矩形 $ABCD$ 中，$DC=AB$=24 cm，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DQ=DC-QC=20$（cm）. $\therefore EQ=12$cm.

$\therefore PQ=\sqrt{QE^2+PE^2}=\sqrt{12^2+10^2}=2\sqrt{61}$（cm）.

（2）$AP=4t$ cm，$DQ=(24-2t)$ cm，

当线段 AQ 与 DP 互相平分时，四边形 $APQD$ 为矩形，

则 $AP=DQ$，即 $4t=24-2t$，解得 $t=4$.

故当 t 为 4 时，线段 AQ 与 DP 互相平分.

（3）$\because P$ 在 AB 上，

$\therefore S_{四边形APQD}=\frac{1}{2}(AP+DQ)\cdot AD=\frac{1}{2}(4t+24-2t)\times 10=10t+120$（$cm^2$）（$0<t\leqslant 6$）.

$\because S_{矩形ABCD}=10\times 24=240$（$cm^2$），$\therefore 10t+120=\frac{5}{8}\times 240$，解得 $t=3$.

$\therefore$ 当 t 为 3 时，四边形 $APQD$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{8}$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

利用矩形的性质和判定解决问题是中考命题的重点，题型较全，有难度不大的选择题、填空题，也有与其他知识相结合的证明题、解答题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用面积法求矩形中线段的长

例 10 [中考·陕西]如图 1-2-14，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，若点 E 是边 CD 的中点，连接 AE，过点 B 作 $BF\perp AE$ 交 AE 于点 F，则 BF 的长为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$　B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

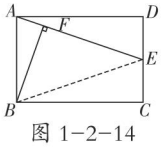


图 1-2-14

试题评析：本题考查矩形的性质、勾股定理、三角形的面积公式等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会用面积法解决有关线段问题，属于中考常考题型.

解：如图 1-2-14，连接 BE.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB=CD=2$，$BC=AD=3$，$\angle D=90^\circ$.

$\therefore DE=1$.

在 Rt $\triangle ADE$ 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

$\because S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=3=\frac{1}{2}AE\cdot BF$，$\therefore BF=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

答案：B

方法点拨

面积法求垂线段长在解题中有较多的应用，特别是在特殊四边形中应用更广泛，本例先用勾股定理求 AE，然后借助矩形面积和三角形面积的关系：$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$，即 $\frac{1}{2}AE\cdot BF=3$，即可求出 BF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用三角形的相关性质求矩形中线段的长

例 11 [中考·西宁]如图 1-2-15，点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点，$OM \parallel AB$ 交 AD 于点 M，若 $OM=3$，$BC=10$，则 OB 的长为（　　）

A.5　　B.4　　C. $\frac{\sqrt{34}}{2}$　　D. $\sqrt{34}$

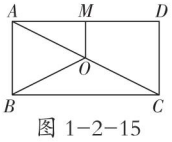


图 1-2-15

试题评析： 本题考查了矩形的性质，勾股定理，直角三角形斜边上中线的性质以及三角形的中位线的应用，解此题的关键是求出 AC 的长.

解： ∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴∠ $D=90°$.

∵ O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点，$OM \parallel AB$，

∴ OM 是△ ADC 的中位线.

∵ $OM=3$，∴ $DC=6$. ∵ $AD=BC=10$，

∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{34}$. ∴ $BO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{34}$.

答案： D

思路点拨

易知 OM 是△ ADC 的中位线，再结合已知条件可求出 DC 的长，利用勾股定理可求出 AC 的长，由直角三角形斜边上中线的性质可求出 BO 的长.

考法 3 利用矩形的判定和性质探求矩形的条件

例 12 [中考·徐州]如图 1-2-16，在□ $ABCD$ 中，点 O 是边 BC 的中点，连接 DO 并延长，交 AB 的延长线于点 E，连接 BD，EC.

（1）求证：四边形 $BECD$ 是平行四边形；

（2）若∠ $A=50°$，则当∠ $BOD=$_____° 时，四边形 $BECD$ 是矩形.

试题评析： 此题主要考查了矩形的判定、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识；熟练掌握平行四边形的判定与性质是解决问题的关键.

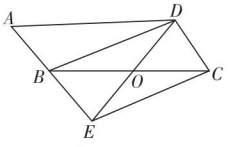


图 1-2-16

（1）**证明：** ∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB \parallel DC$，$AB=CD$. ∴∠ $OEB=$ ∠ ODC.

又∵ O 为 BC 的中点，∴ $BO=CO$.

又∵∠ $BOE=$ ∠ COD，∴△ $BOE \cong$△ COD. ∴ $OE=OD$.

∴四边形 $BECD$ 是平行四边形.

（2）**解：** 若∠ $A=50°$，则当∠ $BOD=100°$ 时，四边形 $BECD$ 是矩形，理由如下：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴∠ $BCD=$ ∠ $A=50°$.

∵∠ $BOD=$ ∠ $BCD+$ ∠ ODC，∴∠ $ODC=100°-50°=50°=$ ∠ BCD. ∴ $OC=OD$. ∵ $BO=CO$，$OD=OE$，∴ $DE=BC$.

∵四边形 $BECD$ 是平行四边形，∴四边形 $BECD$ 是矩形.

答案： 100

思路点拨

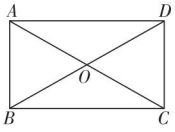
- 由 AAS 证明△ BOE ≌△ COD，得出 OE=OD，即可得出结论；
- 由平行四边形的性质得出∠ BCD= ∠ A=50°，由三角形的外角的性质求出∠ ODC= ∠ BCD，得出 OC=OD，证出 DE=BC，即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

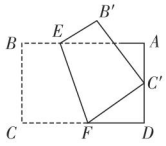
1.[中考·怀化]如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$\angle AOB=60°$，$AC=6$ cm，则AB的长是（　　）

A.3 cm　　B.6 cm

C.10 cm　　D.12 cm



（第1题）

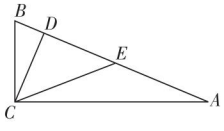


（第2题）

2.[中考·葫芦岛]如图，将矩形纸片$ABCD$沿直线EF折叠，使点C落在AD边的中点C'处，点B落在点B'处，其中$AB=9$，$BC=6$，则FC'的长为（　　）

A.$\frac{10}{3}$　　B.4　　C.4.5　　D.5

3.[中考·大连]如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为D，点E是AB的中点，$CD=DE=a$，则AB的长为（　　）



（第3题）

A.$2a$　　B.$2\sqrt{2}\,a$　　C.$3a$　　D.$\frac{4\sqrt{3}}{3}a$

4.[中考·上海]已知平行四边形$ABCD$，AC，BD是它的两条对角线，那么下列条件中，能判断这个平行四边形为矩形的是（　　）

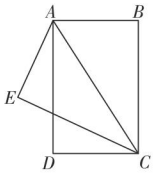
A.$\angle BAC=\angle DCA$　　B.$\angle BAC=\angle DAC$

C.$\angle BAC=\angle ABD$　　D.$\angle BAC=\angle ADB$

5.[中考·日照]如图，已知$BA=AE=DC$，$AD=EC$，$CE\perp AE$，垂足为E.

（1）求证：$\triangle DCA\cong\triangle EAC$；

（2）只需添加一个条件，即_____，可使四边形$ABCD$为矩形，请加以证明.

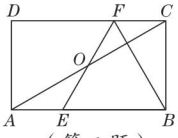


（第5题）

6.如图，在矩形$ABCD$中，E，F分别是AB，CD上的点，$AE=CF$，连接EF，BF，EF与对角线AC交于点O，且$BE=BF$，$\angle BEF=2\angle BAC$.

（1）求证：$OF=OE$；

（2）若$FC=2$，求AB的长.



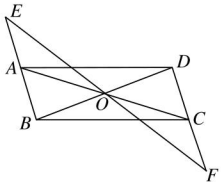
（第6题）

7.如图，$\square ABCD$中，点O是AC与BD的交点，过点O的直线与BA，DC的延长线分别交于点E，F.

（1）求证：$\triangle AOE\cong\triangle COF$.

（2）请连接EC，AF，则EF与AC满足什么条件时，四边形$AECF$是矩形？并说明理由.

【导学号：6872150】



（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 正方形的性质与判定

核心知识

- 正方形的定义
- 正方形的性质
- 正方形的判定
- 特殊四边形间的关系

知识链接



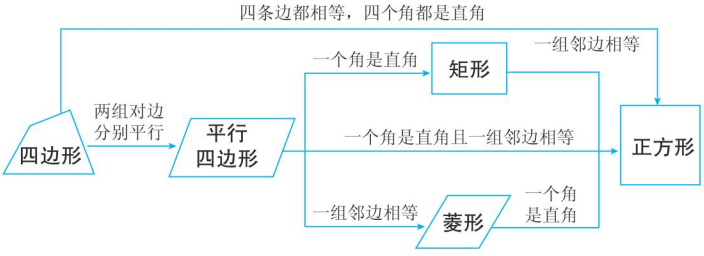
点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 正方形的定义

1. 正方形的定义：

有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形；

2. 四边形定义间的关系：



拔考向▸利用正方形的定义判定正方形

例 1 如图 1-3-1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，BD 平分 $\angle ABC$，$DE \perp BC$，$DF \perp AB$，求证：四边形 $BEDF$ 是正方形.

解题秘方：紧扣定义中“四条边都相等，四个角都是直角”进行判定.

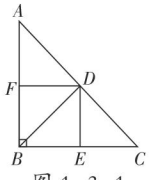


图 1-3-1

证明： $\because DE \perp BC$，$DF \perp AB$，$\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle DEB=\angle EBF=\angle BFD=90°$.

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是矩形.

$\therefore \angle DEB=\angle EBF=\angle BFD=\angle FDE=90°$，

$BE=FD$，$BF=ED$.

又 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$DE \perp BC$，$DF \perp AB$，

$\therefore DE=DF$.

$\therefore DE=DF=BF=BE$.

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是正方形.

提分·必记

特别提醒

1. 正方形在平行四边形的基础上还必须具备两个条件：
   （1）一组邻边相等.
   （2）一个角是直角.
2. 正方形的四条边都相等，说明正方形既是平行四边形，又是菱形；正方形的四个角都是直角，说明正方形是矩形，即正方形不仅是平行四边形，也是矩形和菱形.

提分·秘诀

解法提醒

利用正方形的定义判定正方形，它是建立在四边形的基础上，因此，既要有四条边相等，又要有四个角是直角，两者缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 正方形的性质

1. 正方形的性质：

具有矩形、菱形、平行四边形的一切性质，即：

（1）**边**：四条边相等，邻边垂直，对边平行；

（2）**角**：四个角都是直角；

（3）**对角线**：对角线相等，互相垂直平分，每条对角线平分一组对角；

（4）**是轴对称图形**，有 4 条对称轴；

（5）**面积**为边长的平方或对角线平方的一半．

2. 特殊四边形的性质间的关系：

类型		平行四边形	矩形	菱形	正方形
边	共性	对边平行且相等			
	特性			四条边都相等	
角	共性	对角相等且邻角互补			
	特性		四个角都是直角		四个角都是直角
对角线	共性	对角线互相平分			
	特性		对角线相等	对角线互相垂直	对角线相等且互相垂直

技考向▶利用正方形的性质解与三角形有关应用

例 2 如图 1-3-3，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 上一点，F 为 BC 延长线上一点，$CE=CF$.

（1）求证：$\triangle BCE \cong \triangle DCF$；

（2）若 $\angle BEC=60°$，求 $\angle EFD$ 的度数．

解题秘方：从正方形中获取边、角相等的信息．

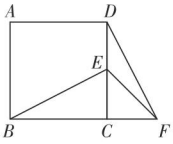


图 1-3-3

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC=DC$，$\angle BCE=\angle DCF=90°$．

又∵ $CE=CF$，

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$.

（2）**解**：∵ $\triangle BCE \cong \triangle DCF$，$\angle BEC=60°$，

$\therefore \angle DFC=\angle BEC=60°$．

∵ $CE=CF$，$\angle ECF=90°$，

$\therefore \angle CFE=45°$．

$\therefore \angle EFD=\angle DFC-\angle CFE=60°-45°=15°$．

提分·必记

特别提醒

1. 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们之间的关系如图 1-3-2.



图 1-3-2

2. 正方形的特殊性质：

（1）正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形；两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形；

（2）周长相等的四边形中，正方形的面积最大．

提分·秘诀

解法提醒

利用正方形的性质解题，由于正方形的性质较多，解题时不宜一一列出来，需要根据题中已知条件，结合要证明的结论，选择证明结论成立所必需的性质，使解题思路更简洁．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 正方形的判定

1. 判定方法：

（1）**从四边形出发：**①四条边相等，四个角都是直角的四边形是正方形；②对角线互相平分、垂直且相等的四边形是正方形；

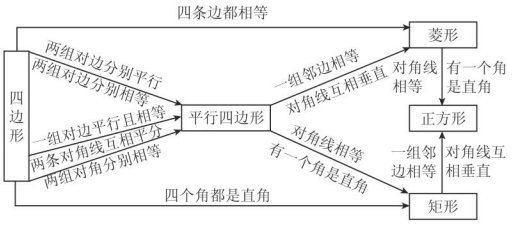
（2）**从平行四边形出发：**①有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形是正方形；②对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形；

（3）**从矩形出发：**①有一组邻边相等的矩形是正方形；②对角线互相垂直的矩形是正方形；

（4）**从菱形出发：**①有一个角是直角的菱形是正方形；②对角线相等的菱形是正方形.

2. 四边形间的关系：

四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形间的转化关系如下.



拔考向▶ 利用正方形的判定方法判定正方形

例 3 如图 1-3-4，点 A'，B'，C'，D' 分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA'=BB'=CC'=DD'$，求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形.

解题秘方：“先确定一种特殊的四边形，再加上边或角或对角线的关系”确定正方形.

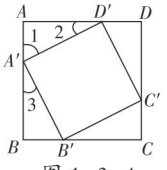


图 1-3-4

证明：∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $BC=CD=DA=AB$，

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$.

又∵ $AA'=BB'=CC'=DD'$，

∴ $D'A=A'B=B'C=C'D$.

∴ $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'\cong\triangle CC'B'\cong\triangle DD'C'$（SAS）.

∴ $D'A'=A'B'=B'C'=C'D'$，$\angle 2=\angle 3$.

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为菱形.

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$.

∴ $\angle D'A'B'=180°-(\angle 1+\angle 3)=90°$.

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为正方形.

提分·必记

特别提醒

常见的判定思路：

从边上证明：

矩形 —邻边相等→ 正方形；

从角上证明：

菱形 —有一个角是直角→ 正方形；

从对角线上证明：

1. 矩形 —对角线互相垂直→ 正方形；
2. 菱形 —对角线相等→ 正方形；
3. 平行四边形 —对角线相等且互相垂直→ 正方形；
4. 四边形 —对角线相等且互相垂直平分→ 正方形.

提分·秘诀

另解

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AD=AB$，

$\angle A=\angle B=90°$.

又 $DD'=AA'$，

∴ $AD'=BA'$.

又∵ $AA'=BB'$，

∴ $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'$.

∴ $\angle 2=\angle 3$，$A'D'=B'A'$.

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$.

∴ $\angle D'A'B'=90°$.

同理：$\angle A'B'C'=\angle B'C'D'=90°$.

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为矩形.

又 $A'D'=B'A'$，

∴四边形 $A'B'C'D'$ 为正方形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教你一招：判定四边形是正方形的方法：

1. 如果已知条件是平行四边形，需证它既是矩形又是菱形；

2. 如果已知条件是四边形，若按边角关系证明，则需证它的四条边相等，四个角是直角；若按特殊四边形证明，则要先证它是平行四边形，再证它既是矩形又是菱形；

3. 如果已知条件是矩形，再证它的邻边相等或对角线互相垂直；

4. 如果已知条件是菱形，再证它有一个角是直角或对角线相等．

点知识▶4 中点四边形

1. 中点四边形概念：

顺次连接任意四边形各边中点所组成的四边形叫做中点四边形．

如图 1−3−5，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，则四边形 $EFGH$ 就是中点四边形．

2. 常见的中点四边形：

（1）任意四边形的中点四边形是平行四边形．

（2）平行四边形的中点四边形是平行四边形．

（3）矩形的中点四边形是菱形．

（4）菱形的中点四边形是矩形．

（5）正方形的中点四边形是正方形．

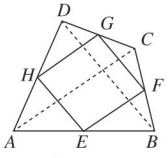


图 1−3−5

提分·必记

特别提醒

中点四边形的形状实质取决于原四边形两条对角线的位置关系和数量关系．如两条对角线互相垂直的四边形的中点四边形的四个角是直角（矩形或正方形）；两条对角线相等的四边形的中点四边形的四条边相等（菱形或正方形）．

技考向▶利用中点四边形的性质求中点四边形的面积

例 4 如图 1−3−6，顺次连接菱形 $ABCD$ 的各边中点 E，F，G，H，若 $AC=a$，$BD=b$，求四边形 $EFGH$ 的面积．

解题秘方：要求解中点四边形的面积，确定中点四边形的形状以及边的长度是关键．

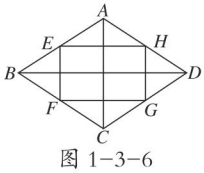


图 1−3−6

解：∵点 E，F 分别是 AB，BC 边的中点，

∴ EF 是△ ABC 的中位线．∴ $EF=\frac{1}{2}AC$ 且 $EF \parallel AC$. 同理，$HG=\frac{1}{2}AC$ 且 $HG \parallel AC$.

∴ $EF=HG$ 且 $EF \parallel HG$. ∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

∴ $EH \parallel FG$，$EH=FG$.

∵点 E，H 分别是 AB，AD 边的中点，∴ EH 是△ ABD 的中位线．

∴ $EH=\frac{1}{2}BD$.

又∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AC \perp BD$. ∴ $EF \perp EH$.

∴∠ $HEF=90°$ ．∴四边形 $EFGH$ 是矩形．

∴四边形 $EFGH$ 的面积 $=EF \cdot EH=\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b=\frac{1}{4}ab$.

提分·秘诀

解法提醒

首先根据中位线定理、菱形的性质、矩形的判定定理可以证得四边形 EFGH 是矩形，然后由三角形中位线定理求得 EF，EH 的长，最后根据矩形的面积公式进行计算即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用线段代换法求正方形中三角形的周长

例5 如图 1-3-7，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E，F 分别在边 AD，CD 上，若 $\angle EBF=45°$，则 $\triangle EDF$ 的周长等于_____.

解题秘方： 将三角形的三条边转移到正方形的边上.

解： 如图 1-3-7，延长 FC 到 G，使 $CG=AE$，连接 BG.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=CB$，$\angle A=\angle ABC=\angle BCD=90°$.

$\therefore \angle A=\angle BCG=90°$. $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBG$.

$\therefore \angle ABE=\angle CBG$，$BE=BG$.

$\therefore \angle ABE+\angle EBC=\angle CBG+\angle EBC$，

即 $\angle EBG=\angle ABC=90°$.

$\because \angle EBF=45°$，$\therefore \angle GBF=\angle EBF=45°$.

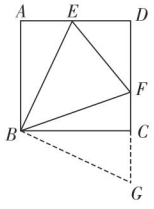


图 1-3-7

在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle BGF$ 中，$\begin{cases} BE=BG, \\ \angle EBF=\angle GBF, \\ BF=BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BGF$.

$\therefore EF=FG=FC+CG=FC+AE$.

将三角形的三边长进行转化，利用等量代换进行求解

$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $DE+DF+EF=DE+DF+AE+CF=AD+CD=4$.

答案： 4

挑战·高分

解法提醒

在正方形中出现以正方形的一边为直角边的直角三角形时，我们经常通过延长或是旋转作辅助线，目的是通过证明三角形全等，得到需要的边、角关系.

拔尖角度 2 利用角度代换法求正方形中的角

例6 如图 1-3-8，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，BD 与 CE 相交于点 F，连接 AF，求 $\angle AFD$ 的度数.

解题秘方： 紧扣三角形外角的性质将所求的角转化为可求的特殊三角形的角.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC=90°$，$\angle CBF=\angle ABF=45°$，

$\angle ABE=60°$，$BC=AB=BE$.

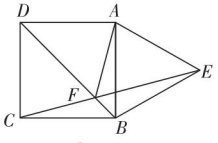


图 1-3-8

$\therefore \angle CBE=150°$，$\angle BCE=\angle BEC$.

$\therefore \angle BCE=\angle BEC=15°$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 关于 BD 轴对称，

$\therefore \angle BAF=\angle BCE=15°$.

又 $\because \angle ABF=45°$，$\angle AFD$ 为 $\triangle AFB$ 的外角，

$\therefore \angle AFD=\angle ABF+\angle BAF=45°+15°=60°$.

挑战·高分

解题流程

正方形及等边三角形的性质

↓

$\angle ABF$，$\angle BAF$ 的度数

↓

$\angle AFD$ 的度数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用特殊位置法探求正方形中旋转变换的定值

挑战·高分

例 7 如图 1-3-9，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 也是正方形 $A'B'C'O$ 的一个顶点，如果两个正方形的边长都等于 1，那么当正方形 $A'B'C'O$ 绕顶点 O 转动时，两个正方形重叠部分的面积大小有什么规律？请说明理由.

解题秘方： 将正方形 $A'B'C'O$ 旋转到 OA' 与 OA 重合或 $OA' \perp AB$ 的位置，易得出两个正方形重叠部分面积大小的规律.

解： 两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

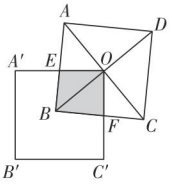


图 1-3-9

理由如下：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC=90°$.

∵四边形 $A'B'C'O$ 是正方形，

∴$\angle EOF=90°$.

∴$\angle BOC=\angle EOF$.

∴$\angle BOC-\angle BOF=\angle EOF-\angle BOF$，

即$\angle COF=\angle BOE$.

又∵ $OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF$，

∴$\triangle BOE \cong \triangle COF$.

∴ $S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$.

∴两个正方形重叠部分的面积等于 $S_{\triangle BOC}$.

∵ $S_{正方形ABCD}=1\times1=1$，

∴ $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}$.

∴两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

技巧点拨

特殊位置法：

求证在某种规律变化的条件下，有着不变的结论产生（如定值、定点、定长等），这类问题统称为几何定值问题，解决几何定值问题通常用特殊位置法，如本题可将正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转到 $OC' \perp BC$ 的特殊位置，易发现 $S_{正方形EBFO}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$，然后根据该猜想进行一般性验证即可.

拔尖角度▸ 4 利用截长补短法证明正方形中的和差关系

挑战·高分

例 8 已知，在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB，DC（或它们的延长线）于点 M，N. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时（如图 1-3-10①），易证 $BM+DN=MN$.

（1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时（如图 1-3-10②），线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？写出猜想，并加以证明.

（2）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 1-3-10③的位置时，线

方法点拨

截长补短法是证明线段的和、差关系中常用的一种基本方法，它有两种思路求线段的和差问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

段 BM，DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系？请写出猜想，并加以证明.

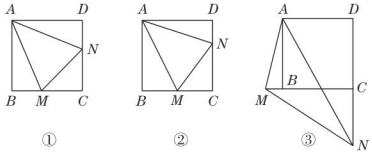


图 1−3−10

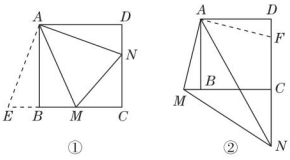


图 1−3−11

解题秘方：用“截长补短法”将分散的求和中的两线段集中成一条线段，再证明这条线段等于长线段.

解：（1）$BM+DN=MN$.

证明如下：如图 1−3−11 ①，在 MB 的延长线上截取 BE，使 $BE=DN$，连接 AE.

易得△ ABE ≌△ ADN，∴ $AE=AN$，∠ EAB= ∠ NAD.

∵∠ BAD=90°，∠ NAM=45°，∴∠ BAM+ ∠ NAD=45°.

∴∠ EAB+ ∠ BAM=45°. ∴∠ EAM= ∠ NAM.

又∵ AM 为公共边，∴△ AEM ≌△ ANM. ∴ $ME=MN$.

∵ $ME=BE+BM=DN+BM$,

∴ $BM+DN=MN$.

（2）$DN-BM=MN$.

证明如下：如图 1−3−11 ②，在 DC 上截取 DF，使 $DF=BM$，连接 AF.

易知 $AB=AD$，∠ ABM= ∠ ADF=90°，

∴△ ABM ≌△ ADF（SAS）.

∴ $AM=AF$，∠ MAB= ∠ FAD.

∴∠ MAB+ ∠ BAF= ∠ FAD+ ∠ BAF=90°，

即∠ MAF= ∠ BAD=90°.

又∠ MAN=45°，∴∠ FAN= ∠ MAN=45°.

又∵ AN 为公共边，∴△ MAN ≌△ FAN. ∴ $MN=FN$.

∴ $MN=FN=DN-DF=DN-BM$,

即 $DN-BM=MN$.

截长法——在长线段上截取一线段使它等于两加数线段中一线段，并证明长线段中余下线段等于另一加数线段.

补短法——即延长两加数线段中一加数线段使延长部分等于另一加数线段，并证明这两线段的和等于长线段.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 运用正方形的性质与判定方法解决有关问题是中考的主要考点，经常与其他特殊四边形的性质和判定方法及全等三角形等知识结合起来考查，多以选择题、证明题的形式出现，有时也会出现在阅读理解题中，在今后的中考中，本节内容仍是考查的重点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用三角形三边关系解正方形中的作图问题

例9 [中考·河北]如图1-3-12是边长为10 cm的正方形铁片，过两个顶点剪掉一个三角形，以下四种剪法中（如图1-3-13），裁剪线长度所标的数据（单位：cm）不正确的是（　　）

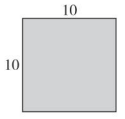


图1-3-12

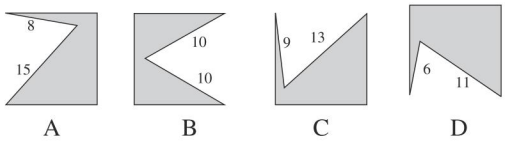


图1-3-13

试题评析：本题考查正方形的性质、勾股定理等知识，解题的关键是利用勾股定理求出正方形的对角线的长.

解：∵正方形的边长为10 cm，∴对角线长为$10\sqrt{2}$ cm.

∵$15>10\sqrt{2}$，∴这个图形不可能存在.

答案：A

思路点拨

由于剪掉的三角形三边长没有具体要求，因此裁剪线长度所标的数据正确与否，只需考虑最长的数据小于或等于正方形的对角线长度的数据即可.

考法2 利用整体思想解正方形中的线段的求和问题

例10 [中考·绍兴]如图1-3-14为某城市部分街道示意图，四边形$ABCD$为正方形，点G在对角线BD上，$GE\perp CD$，$GF\perp BC$，AD=1 500 m，小敏行走的路线为$B\to A\to G\to E$，小聪行走的路线为$B\to A\to D\to E\to F$. 若小敏行走的路程为3 100 m，则小聪行走的路程为_____m.

试题评析：本题考查了正方形的性质、全等三角形的性质和判定、矩形的性质及等腰三角形的性质，解决本题的关键是证明$AG=EF$，$DE=GE$.

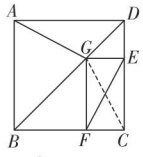


图1-3-14

解：如图1-3-14，连接GC.

∵四边形$ABCD$为正方形，∴$AD=DC$，$\angle ADB=\angle CDB=45°$.

∵$\angle CDB=45°$，$GE\perp DC$，∴$\triangle DEG$是等腰直角三角形.

∴$DE=GE$.

在$\triangle AGD$和$\triangle CGD$中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADG=\angle CDG,\\ DG=DG,\end{cases}$

∴$\triangle AGD\cong\triangle CGD$. ∴$AG=CG$.

易得四边形$GECF$为矩形，∴$EF=CG$. ∴$EF=AG$.

∵小敏行走的路程为$BA+AG+GE$=3 100（m），

∴小聪行走的路程为$BA+AD+DE+EF=AD+BA+GE+AG$=1 500+3 100=4 600（m）.

答案：4 600

思路点拨

连接CG，由△AGD≌△CGD，可知AG=CG，由正方形的对角线互相平分一组对角，GE⊥DC，易得DE=GE，在矩形GECF中，EF=CG，要计算小聪走的路程，只要算出小聪比小敏多走了多少就行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用三角形、菱形性质解判定正方形的条件问题

例 11 [中考·青岛]已知，如图 1-3-15，在菱形 $ABCD$ 中，点 E，O，F 分别为 AB，AC，AD 的中点，连接 CE，CF，OE，OF.

（1）求证：$\triangle BCE \cong \triangle DCF$；

（2）当 AB 与 BC 满足什么关系时，四边形 $AEOF$ 是正方形？请说明理由.

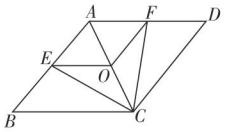


图 1-3-15

试题评析：本题考查了正方形的判定、菱形的性质与判定、全等三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识；熟练掌握菱形的性质和全等三角形的判定是解决问题的关键.

（1）**证明**：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle B=\angle D$，$AB=BC=DC=AD$.

∵点 E，O，F 分别为 AB，AC，AD 的中点，

$\therefore AE=BE=DF=AF$，$OF=\frac{1}{2}DC$，$OE=\frac{1}{2}BC$，$OE \parallel BC$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCF$ 中，$\begin{cases} BE=DF, \\ \angle B=\angle D, \\ BC=DC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$（SAS）.

（2）**解**：当 $AB \perp BC$ 时，四边形 $AEOF$ 是正方形，

理由如下：由（1）易得 $AE=OE=OF=AF$，∴四边形 $AEOF$ 是菱形.

∵ $AB \perp BC$，$OE \parallel BC$，∴ $OE \perp AB$. ∴ $\angle AEO=90°$.

∴四边形 $AEOF$ 是正方形.

解法提醒

由菱形的性质得出 $\angle B=\angle D$，$AB=BC=DC=AD$，由已知和三角形中位线定理证出 $AE=BE=DF=AF$，$OF=\frac{1}{2}DC$，$OE=\frac{1}{2}BC$，$OE \parallel BC$，由 SAS 证明 $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ 即可；

由(1)易得出：$AE=OE=OF=AF$，证出四边形 AEOF 是菱形，再证出 $\angle AEO=90°$，则四边形 AEOF 是正方形.

两年模拟兵法

☞答案见 243 页

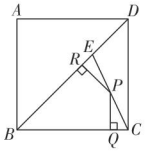
1. [期末·内乡县]用两块完全相同的直角三角形拼下列图形：①平行四边形；②矩形；③菱形；④正方形；⑤等腰三角形；⑥等边三角形，一定能拼成的图形是（　　）

A. ①④⑤　　B. ②⑤⑥

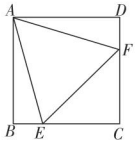
C. ①②③　　D. ①②⑤

2. [模拟·雨城]如图，E 为边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的对角线上一点，$BE=BC$，P 为 CE 上任意一点，$PQ \perp BC$ 于点 Q，$PR \perp BE$ 于点 R，则 $PQ+PR$ 的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$



（第 2 题）



（第 3 题）

3. [模拟·蓬口]如图，在正方形 $ABCD$ 中，边长为 2 的等边三角形 AEF 的顶点 E，F 分别在 BC 和 CD 上，下列结论：①$CE=CF$；②$\angle AEB=75°$；③$BE+DF=EF$；④$S_{正方形ABCD}=2+\sqrt{3}$，其中正确的个数为（　　）

A.1　　B.2

C.3　　D.4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·兰州]在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，要使四边形 $ABCD$ 是正方形，还需添加一组条件，下面给出了四组条件：

① $AB \perp AD$，且 $AB=AD$；

② $AB=BD$，且 $AB \perp BD$；

③ $OB=OC$，且 $OB \perp OC$；

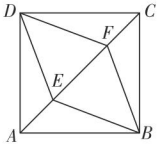
④ $AB=AD$，且 $AC=BD$.

其中正确的序号是_____.

5. [中考·雅安]如图，E，F 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的两点，且 $AE=CF$.

（1）求证：四边形 $BEDF$ 是菱形；

（2）若正方形边长为 4，$AE=\sqrt{2}$，求菱形 $BEDF$ 的面积.

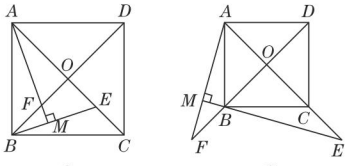


（第 5 题）

6. 如图①，已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 AC 上一点，连接 EB，过点 A 作 $AM \perp BE$，垂足为 M，AM 交 BD 于点 F.

（1）求证：$OE=OF$；

（2）如图②，若点 E 在 AC 的延长线上，$AM \perp BE$ 交 EB 的延长线于点 M，交 DB 的延长线于点 F，其他条件不变，则结论“$OE=OF$”还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.



（第 6 题）

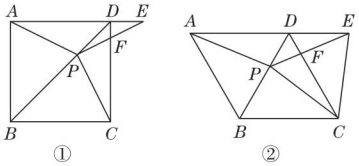
7. [中考·荆州]如图①，在正方形 $ABCD$ 中，P 是 BD 上的一点，点 E 在 AD 的延长线上，且 $PA=PE$，PE 交 CD 于 F.

（1）求证：$PC=PE$；

（2）求 $\angle CPE$ 的度数；

（3）如图②，把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$，其他条件不变，当 $\angle ABC=120°$ 时，连接 CE，试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系，并说明理由.

【导学号：6872150】



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解密中考——“习题改造”

对一道习题的改造是中考命题的精髓.

习题展示

例1 如图1-3-16，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90^\circ$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证：$AE=EF$.（提示：取 AB 的中点 M，连接 EM）

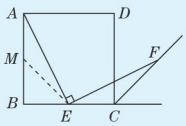


图 1-3-16

改造展示

改造一：变特殊为一般

例2 [中考·黄石]如图1-3-17，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是 BC 边上任意一点，$\angle AEF=90^\circ$，且 EF 交正方形外角的平分线 CF 于点 F. 求证：$AE=EF$.

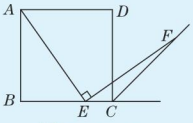


图 1-3-17

【改造点】将“点 E 为 BC 的中点”这一特殊条件改造为“点 E 是 BC 边上任意一点”的一般条件.

改造二：改变条件的呈现方式

例3 [中考·黄冈]如图1-3-18，两个全等的正方形的其中一边 CD 完全重合，点 M 是 BC 边的中点，连接 AM，且 $\angle AMN=90^\circ$，交 CE 于 N. 求证：$CN=EN$.

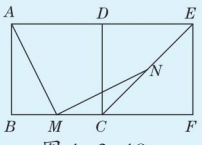


图 1-3-18

【改造点】将“外角平分线”这一条件呈现的方式改为“正方形的对角线”.

改造三：改变问题呈现的背景

例4 [中考·乌鲁木齐]如图1-3-19，边长为5的正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点处，点 A，C 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，点 E 是 OA 边上的点（不与点 A 重合），$EP\perp CE$，且与正方形外角平分线 AG 交于点 P，

（1）当点 E 坐标为（3，0）时，试证明：$CE=EP$.

（2）如果将上述条件“点 E 坐标为（3，0）”改为“点 E 坐标为（t，0）（$t>0$）”，结论 $CE=EP$ 是否仍然成立？请说明理由.

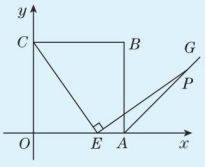


图 1-3-19

（3）在 y 轴上是否存在点 M，使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形？若存在，用 t 表示点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

【改造点】将整个问题由孤立的背景改为在平面直角坐标系中结合坐标去解决问题.

改造四：留其灵魂，换其躯壳

例5 [中考·无锡]（1）如图1-3-20①，在正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 边（不含端点 B，C）上任意一点，P 是 BC 延长线上一点，N 是 $\angle DCP$ 的平分线上一点. 若 $\angle AMN=90^\circ$，求证：$AM=MN$.

下面给出一种证明的思路，你可以按这一思路证明，也可以选择其他方法证明.

证明：在边 AB 上截取 $AE=MC$，连接 ME. 在正方形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle BCD=90^\circ$，$AB=BC$.

$\therefore \angle NMC=180^\circ-\angle AMN-\angle AMB=180^\circ-\angle B-\angle AMB=\angle MAB=\angle MAE$.

（下面请你完成余下的证明过程）

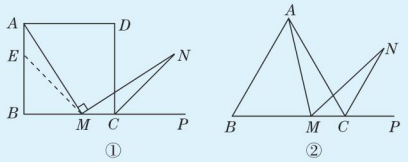


图 1-3-20

（2）若将（1）中的“正方形 $ABCD$”改为“正三角形 ABC”（如图1-3-20②），N 是 $\angle ACP$ 的平分线上一点，则当 $\angle AMN=60^\circ$ 时，结论 $AM=MN$ 是否还成立？请说明理由.

（3）若将（1）中的“正方形 $ABCD$”改为“正 n 边形 $ABCD\cdots\cdots$”，请你作出猜想：当 $\angle AMN=$_____° 时，结论 $AM=MN$ 仍然成立.（直接写出答案，不需要证明）

【改造点】去掉“正方形”的外壳，保留“外角平分线”与“两线的夹角”的灵魂.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特殊平行四边形的特殊解题技巧

荣老师告诉你 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们具有平行四边形的所有性质．因此在解决矩形、菱形和正方形的问题时，可以仿照平行四边形的做法，通过巧添辅助线，将特殊四边形的问题转化为三角形的问题解决．

技巧一 巧添对角线，将四边形问题转化为三角形问题

例 1 阅读下面材料：

在数学课上，老师请同学们思考如下问题：如图 1①，我们把一个四边形 $ABCD$ 的四边中点 E，F，G，H 依次连接起来得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗？

小敏在思考问题时，有如下思路：如图 1①，连接 AC.

点 E，F 分别是 AB，BC 的中点 $\xrightarrow{\text{三角形中位线定理}}$ $EF \parallel AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$

点 G，H 分别是 CD，AD 的中点 $\xrightarrow{\text{三角形中位线定理}}$ $GH \parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$

$\rightarrow$ $EF \parallel GH$，$EF=GH$ $\rightarrow$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形

参考小敏思考问题的方法，解决以下问题：

（1）若只改变图 1①中四边形 $ABCD$ 的形状（如图 1②），则四边形 $EFGH$ 还是平行四边形吗？说明理由．

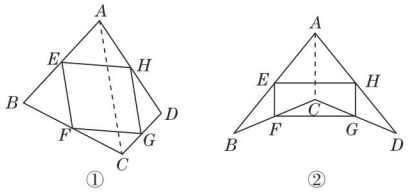


图 1

（2）如图 1②，在（1）的条件下，若连接 AC，BD.

①当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是菱形．写出结论并说明理由．

②当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是矩形．写出结论并说明理由．

解题秘方：（1）连接 AC，①由三角形中位线定理得出 EF 与 AC 的数量关系和位置关系；②再由三角形中位线定理得出 GH 与 AC 的数量关系和位置关系；③利用等量代换与平行线的传递性得出 EF 与 GH 的数量关系和位置关系，从而得到结论．

（2）①由（1）已经证得四边形 $EFGH$ 是平行四边形，所以只需证明邻边 $FG=EF$，由三角形中位线定理可得它们都等于 BD 或 AC 的一半，故易得“当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形”这一结论；②当 $AC \perp BD$ 时，由三角形中位线定理可知 $EF \parallel AC$，$FG \parallel BD$，故可得 $EF \perp FG$，即 $\angle EFG=90°$，故四边形 $EFGH$ 是矩形．

解：（1）四边形 $EFGH$ 还是平行四边形．理由如下：连接 AC，如图 1②．

$\because E$，F 分别是 AB，BC 的中点，

$\therefore EF \parallel AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$.

$\because G$，H 分别是 CD，AD 的中点，

$\therefore GH \parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore EF \parallel GH$，$EF=GH$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形．

（2）①当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形．理由如下：

由（1）可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

当 $AC=BD$ 时，由 $FG=\frac{1}{2}BD$，$EF=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{1}{2}AC$,

得 $FG=EF$,

∴四边形 $EFGH$ 是菱形.

②当 $AC\perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是矩形.

理由如下：

由（1）可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

∵ E，F 分别是 AB，BC 的中点，

∴ $EF\parallel AC$.

∵ $AC\perp BD$，∴ $EF\perp BD$.

∵ G，F 分别是 CD，BC 的中点，

∴ $FG\parallel BD$.

∵ $EF\perp BD$，∴ $EF\perp FG$，

即 $\angle EFG=90°$.

∴$\square EFGH$ 是矩形.

方法点拨：本题的实质是判定中点四边形的形状，而中点四边形的形状是由原四边形的对角线的关系来决定的.

技巧二 ▶ 巧用旋转添全等求线段长

例 2 如图 2，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3，E，F 分别是 AB，BC 边上的点，且 $\angle EDF=45°$. 将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°，得到 $\triangle DCM$. 若 $AE=1$，求 FM 的长.

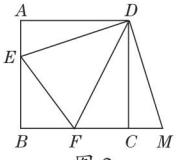


图 2

解题秘方：根据将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$，可得 $\angle FDM=45°$，可进一步得到 $\triangle DEF\cong\triangle DMF$，因此可得 $EF=MF$，若设 $EF=x$，则 BF 可用 x 表示，在 $\triangle BEF$ 中利用勾股定理可得关于 x 的方程，则可求得 FM 的长.

解：∵四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$AE=1$.

∴ $BE=2$，$\angle ADE+\angle EDF+\angle CDF=90°$.

∵ $\angle EDF=45°$，∴ $\angle ADE+\angle CDF=45°$.

∵将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°，得到 $\triangle DCM$，∴ $\angle ADE=\angle CDM$，$DE=DM$，$AE=CM=1$.

∴ $\angle CDM+\angle CDF=\angle MDF=45°$.

∴ $\angle EDF=\angle MDF$.

∵ $DF=DF$，

∴ $\triangle DEF\cong\triangle DMF$.

∴ $EF=FM$.

设 $EF=FM=x$，则 $FC=x-1$，

∴ $BF=BC-FC=3-(x-1)=4-x$.

在 Rt $\triangle EBF$ 中，$BE^2+BF^2=EF^2$，

即 $2^2+(4-x)^2=x^2$，

解得 $x=\frac{5}{2}$.

故 FM 的长为 $\frac{5}{2}$.

方法点拨：（1）题中将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90°，实际上揭示了一种常见的通过旋转来构造全等三角形的方法，只不过要根据不同的题目来确定旋转的角度；（2）涉及求直角三角形的边长时，经常需要根据勾股定理列出方程来进行求解.

技巧三 ▶ 巧用作垂线添全等探究线段之间的关系

例 3 现有正方形 $ABCD$ 和一个以 O 为直角顶点的三角尺，移动三角尺，使三角尺两直角边所在直线分别与直线 BC，CD 交于点 M，N.

（1）如图 3①，若点 O 与点 A 重合，则 OM 与 ON 的数量关系是_____；

（2）如图 3②，若点 O 在正方形的中心（即两条对角线的交点），则（1）中的结论是否仍然成立？请说明理由.

（3）如图 3③，若点 O 在正方形的内部（含边界），当 $OM=ON$ 时，请探究点 O 在移动过程中可形成什么图形？

（4）如图 3④是点 O 在正方形外部的一种情况.

当 $OM=ON$ 时，请你就“点 O 的位置在各种情况下（含外部）移动所形成的图形”提出一个正确的结论（不必说理）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

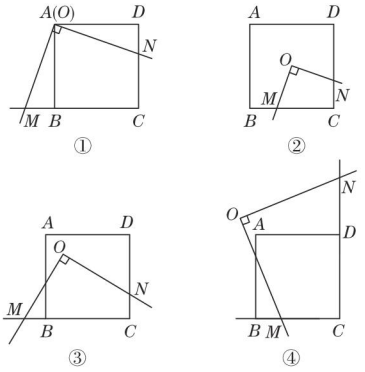


图 3

解题秘方: (1)证明△OBM与△ODN全等;(2)(3)(4)与(1)一脉相承,都是通过添加辅助线构造两个直角三角形全等求解.

解: (1) $OM=ON$

点拨: 如图 4①,∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AB=AD$, 即 $OB=OD$, 且 $\angle OBC=\angle ODN=90°$, $\angle 2+\angle 3=90°$.

∴ $\angle OBM=\angle ODN=90°$.

∵ $\angle MON=90°$, ∴ $\angle 1+\angle 2=90°$. ∴ $\angle 1=\angle 3$. ∴ △OBM ≌ △ODN. ∴ $OM=ON$.

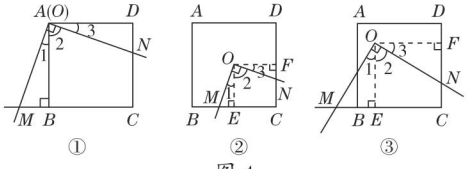


图 4

(2) $OM=ON$ 仍然成立. 理由如下:

如图 4②, 过 O 作 $OE\perp BC$ 于 E, $OF\perp CD$ 于 F, ∴ $\angle OEM=\angle OFN=90°$.

∵ O 是正方形 $ABCD$ 的中心, ∴ $OE=OF$.

易知 $\angle EOF=90°$, ∴ $\angle 2+\angle 3=90°$.

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$, ∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ △OEM ≌ △OFN. ∴ $OM=ON$.

(3) 如图 4③, 过 O 作 $OE\perp BC$ 于 E, $OF\perp CD$ 于 F, ∴ $\angle OEM=\angle OFN=90°$.

∵ $\angle C=90°$, ∴ $\angle 2+\angle 3=90°$.

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$, ∴ $\angle 1=\angle 3$.

∵ $OM=ON$, ∴ △OEM ≌ △OFN.

∴ $OE=OF$. ∴ 点 O 在 $\angle BCD$ 的平分线上.

∴ 点 O 在正方形的内部(含边界)移动过程中所形成的图形是对角线 AC.

(4) 所形成的图形为直线 AC.

方法点拨: 本题的难度不大,仅需掌握好一个原则就可以突破这道题,这个原则就是“以退为进”,可以看到(2)(3)(4)的思路其实与(1)是一脉相承的.

技巧四 ▶ 巧借特殊四边形的对称性解题

例 4 如图 5, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD=120°$, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上, △BEF 与 △GEF 关于直线 EF 对称, 点 B 的对称点是点 G, 且点 G 在边 AD 上. 若 $EG\perp AC$, $AB=6\sqrt{2}$, 求线段 FG 的长.

解题秘方: 先说明△ABC和△ACD都是等边三角形,再说明 GF 是菱形的高,同时也等于△ABC中 BC 边上的高,把求 GF 转化为求△ABC的高.

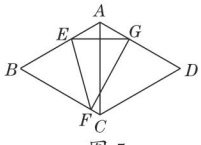


图 5

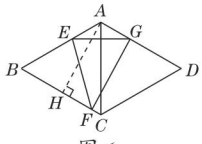


图 6

解: 如图 6, 过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD=120°$,

∴ $AB=BC=CD=AD$, $\angle CAB=\angle CAD=60°$, $AD\parallel BC$. ∴ △ABC和△ACD是等边三角形.

∵ $EG\perp AC$, ∴ $\angle AEG=\angle AGE=30°$.

易知 $\angle EGF=\angle B=60°$,

∴ $\angle AGF=90°$. ∴ $GF\perp AD$.

又∵ $AD\parallel BC$, $AH\perp BC$,

∴ $GF\parallel AH$. ∴ $GF=AH$.

在 Rt△ABH中, $AB=6\sqrt{2}$,

易知 $\angle BAH=30°$, ∴ $BH=3\sqrt{2}$.

∴ $AH=3\sqrt{6}$, 即 $FG=3\sqrt{6}$.

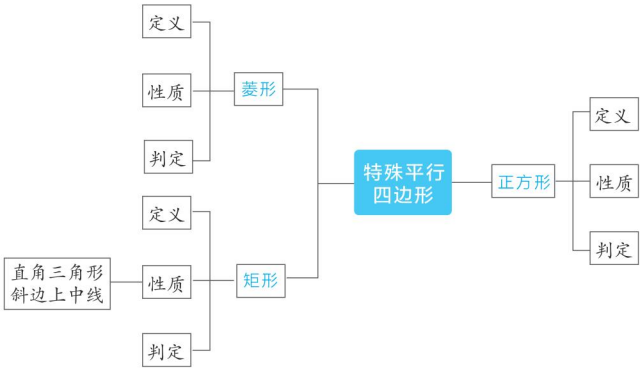
方法点拨: 特殊图形的特殊性质是解题的法宝,用好菱形的对称性、成轴对称的两个图形的性质是将已知条件与待求问题建立联系的核心.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 特殊平行四边形的性质：

菱形的性质：菱形的对边平行且四边相等，对角相等，对角线互相垂直平分．

矩形的性质：矩形的对边平行且相等，四个角都是直角，对角线相等且互相平分．

正方形既具有矩形的性质又具有菱形的性质．

菱形、矩形、正方形既是轴对称图形又是中心对称图形．

2. 直角三角形斜边上的中线长度等于斜边的一半．

3. 特殊平行四边形的判定：

菱形的判定方法：（1）一组邻边相等的平行四边形是菱形；

（2）四条边都相等的四边形是菱形；

（3）对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

矩形的判定方法：（1）有一个角是直角的平行四边形是矩形；

（2）有三个角是直角的四边形是矩形；

（3）对角线相等的平行四边形是矩形．

正方形的判定方法：（1）有一个角是直角的菱形是正方形；

（2）对角线相等的菱形是正方形；

（3）有一组邻边相等的矩形是正方形；

（4）对角线互相垂直的矩形是正方形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 菱形的性质与判定

链接中考» 菱形是特殊的平行四边形，主要有两个特殊：一是四边相等；二是对角线互相垂直.考查菱形的性质和判定时，也是主要从这两个方面考查.

例1 [中考·安顺]如图1，已知点D在$\triangle ABC$的BC边上，$DE \parallel AC$交AB于E，$DF \parallel AB$交AC于F.

（1）求证：$AE=DF$；

（2）若AD平分$\angle BAC$，试判断四边形$AEDF$的形状，并说明理由.

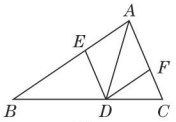


图1

解题秘方：紧扣菱形的判定方法，先判定是平行四边形，再找一组邻边相等或对角线互相垂直解答.

（1）**证明：**$\because DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，

$\therefore$四边形$AEDF$是平行四边形.

$\therefore AE=DF$.

（2）**解：**若AD平分$\angle BAC$，四边形$AEDF$是菱形.

理由如下：$\because DF \parallel AB$，

$\therefore \angle EAD=\angle FDA$.

$\because AD$平分$\angle BAC$，$\therefore \angle EAD=\angle DAF$.

$\therefore \angle DAF=\angle FDA$. $\therefore AF=DF$.

由（1）知四边形$AEDF$为平行四边形，

$\therefore$平行四边形$AEDF$为菱形.

专题二 矩形的性质与判定

链接中考» 矩形是特殊的平行四边形，主要有两个特点：一是内角是直角；二是对角线相等.考查矩形的性质和判定时，也是主要扣住这两个特点进行考查.

例2 [中考·北京]如图2，在$\square ABCD$中，过点D作$DE \perp AB$于点E，点F在边CD上，$DF=BE$，连接AF，BF.

（1）求证：四边形$DEBF$是矩形；

（2）若$CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF平分$\angle DAB$.

解题秘方：紧扣矩形的判定和性质，从角和对角线两个方面入手解决问题.

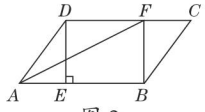


图2

证明：（1）$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore DC \parallel AB$.

又$\because DF=BE$，

$\therefore$四边形$DEBF$是平行四边形.

$\because DE \perp AB$，$\therefore \angle DEB=90^\circ$.

$\therefore$四边形$DEBF$是矩形.

（2）$\because$四边形$DEBF$是矩形，

$\therefore \angle BFC=90^\circ$.

$\because CF=3$，$BF=4$，$\therefore$由勾股定理得$BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC=5$.

又$\because DF=5$，$\therefore AD=DF$.

$\therefore \angle DAF=\angle DFA$.

$\because$在平行四边形$ABCD$中，$DC \parallel AB$，

$\therefore \angle DFA=\angle FAB$.

$\therefore \angle DAF=\angle FAB$，即$AF$平分$\angle DAB$.

专题三 直角三角形斜边上中线的性质

链接中考» 直角三角形斜边上中线的性质是直角三角形的一个重要性质，是常考的知识点，它为证明线段相等、角相等、线段的倍分等问题提供了很好的思路和理论依据.

例3 如图3，过矩形$ABCD$对角线AC的中点O作$EF \perp AC$，分别交AB，DC于E，F点，G为AE的中点，若$\angle AOG=30^\circ$，求证：$OG=\frac{1}{3}DC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：从图形中找出直角三角形斜边上中线的模型，利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半解决问题.

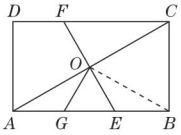


图 3

证明：如图 3，连接 OB，

$\because EF \perp AC$，

$\therefore \triangle AOE$ 是直角三角形.

$\because G$ 为 AE 的中点，

$\therefore OG=AG=GE$.

$\therefore \angle BAC=\angle AOG=30^\circ$.

$\therefore \angle AEO=60^\circ$，$\angle GOE=60^\circ$.

$\therefore \triangle GOE$ 是等边三角形.

$\therefore OE=GE=OG$.

易得 $\angle ABO=\angle BAC=30^\circ$，

$\therefore \angle BOE=\angle AEO-\angle ABO=30^\circ$.

$\therefore OE=EB$.

$\therefore AG=GE=EB$.

$\therefore OG=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}DC$.

方法点拨：本题考查了矩形的性质和直角三角形的性质（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）的应用.

专题四 正方形的性质与判定

链接中考» 正方形既是矩形又是菱形，它具有矩形和菱形的所有性质，判定正方形的思路主要有两种：一种是先证明是矩形，再证明邻边相等或对角线互相垂直；另一种是先证明是菱形，再证明一个内角是直角或对角线相等.在中考中以解答题的形式考查.

例 4 [中考·凉山州]如图 4，在正方形 $ABCD$ 中，G 是 BC 上任意一点，连接 AG，$DE \perp AG$ 于 E，$BF \parallel DE$ 交 AG 于 F，探究线段 AF，BF，EF 三者之间的数量关系，并说明理由.

解题秘方：紧扣正方形特殊的边、角关系证明三角形全等来解决问题.

解：线段 AF，BF，EF 之间的数量关系是：$AF=BF+EF$.

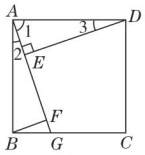


图 4

理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=\angle 1+\angle 2=90^\circ$.

$\because DE \perp AG$，$\therefore \angle DEA=90^\circ$.

$\therefore \angle 1+\angle 3=90^\circ$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

又 $\because \angle DEF=90^\circ$，$BF \parallel DE$，

$\therefore \angle BFA=90^\circ$.

$\therefore \angle DEA=\angle AFB$.

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle ABF$ 中，

$$\begin{cases}\angle DEA=\angle AFB,\\ \angle 3=\angle 2,\\ DA=AB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ABF$（AAS）.

$\therefore AE=BF$.

$\therefore AF=AE+EF=BF+EF$.

专题五 特殊四边形的探索题

链接中考» 与特殊四边形有关的实践探索题，关键是将特殊四边形进行折叠变换，而折叠变换就是全等变换，解决问题时既要运用到特殊四边形的性质与判定，又要运用到全等三角形的性质与判定.

例 5 [中考·龙东]如图 5，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 在直线 BC 上，连接 AE.将 $\triangle ABE$ 沿 AE 所在直线折叠，点 B 的对应点是点 B'，再展开，连接 AB' 并延长交直线 DC 于点 F.

（1）当点 F 与点 C 重合时如图 5①，易证：$DF+BE=AF$（不需证明）.

（2）当点 F 在 DC 的延长线上时如图 5②，当点 F 在 CD 的延长线上时如图 5③，线段 DF，BE，AF 有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想，并选择其中一种情况给予证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

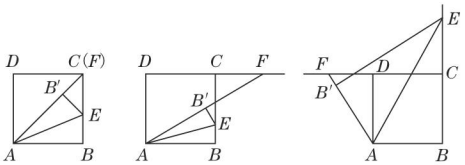


图 5

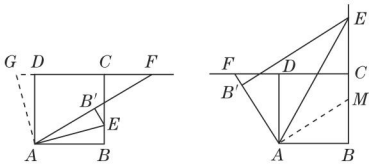


图 6

解题秘方：紧扣从特殊到一般的探究思路，特殊位置的探究过程与一般位置的探究类似.

解：（2）图 5 ②的结论：$DF+BE=AF$，图 5 ③的结论：$BE-DF=AF$.

选择图 5 ②的证明：如图 6 ①，延长 CD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，

∵在正方形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$，$\angle ABE=\angle ADG=90°$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$（SAS）.

$\therefore \angle AEB=\angle G$，$\angle EAB=\angle GAD$.

∵ $CB \parallel AD$，$\therefore \angle AEB=\angle EAD$.

$\therefore \angle G=\angle EAD$.

由折叠可知，$\angle BAE=\angle B'AE$，

$\therefore \angle B'AE=\angle GAD$.

$\therefore \angle GAF=\angle EAD$.

$\therefore \angle G=\angle GAF$. $\therefore GF=AF$.

$\therefore GF=DF+DG=DF+BE$.

$\therefore DF+BE=AF$.

选择图 5 ③的证明：如图 6 ②，在 BC 上取点 M，使 $BM=DF$，连接 AM，

∵在正方形 $ABCD$ 中，

$AB=AD$，$\angle ABM=\angle ADF=90°$，

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF$（SAS）.

$\therefore MA=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$.

由折叠知 $\angle BAE=\angle EAB'$，

$\therefore \angle MAE=\angle DAE$.

∵ $AD \parallel BE$，$\therefore \angle AEM=\angle DAE$.

$\therefore \angle MAE=\angle AEM$.

$\therefore ME=MA=AF$.

$\therefore EM=BE-BM=BE-DF$. $\therefore BE-DF=AF$.

方法点拨：此题属于几何综合证明题，题中包含了较多的基本图形，思考问题的过程中要善于发现与这些基本图形相关的基本结论，以便迅速得到线索，使思路清晰. 如图 7.

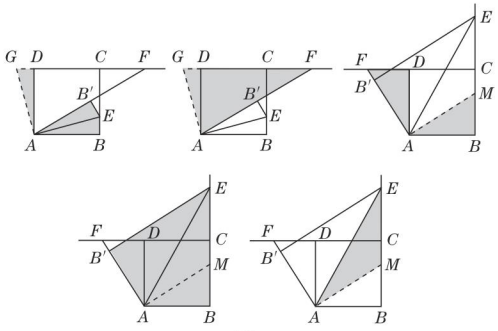


图 7

方法必会

专题六 分类讨论思想

专题解读» 有些问题的答案不止一种，尤其是题目中没有给出图形的几何题，这时需要把问题分为几种可能的情况，然后针对每一种情况给出解答，要求思考问题必须严谨、细致.

例 6 [中考·南京]如图 8，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，请画出以 A 为一个顶点，另外两个顶点在正方形 $ABCD$ 的边上，且含边长为 3 的所有大小不同的等腰三角形.（要求：只要画出示意图，并在所画等腰三角形长为 3 的边上标注数字 3）

解题秘方：紧扣已知边和已知顶点在等腰三角形中的不同位置进行分类讨论.

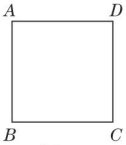


图 8

解：满足条件的三角形有如图 9 的五种情形：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

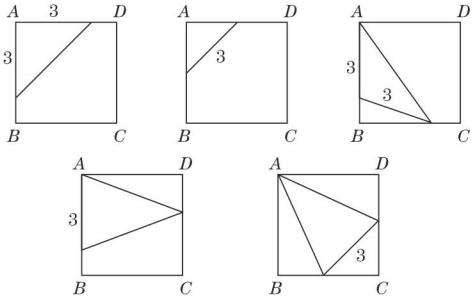


图 9

方法点拨：当一条线段作为等腰三角形的一边时，需要分为等腰三角形的底和腰讨论求解；当它作为等腰三角形的底时，可以利用尺规作该线段的垂直平分线产生等腰三角形顶角的顶点；当它作为等腰三角形的腰时，可以利用尺规画圆产生等腰三角形底角的顶点.

专题七 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想就是把数、式与图形结合起来考虑，用几何图形直观地反映和描述数量关系，用代数方法来分析几何图形中蕴含的数量关系，从而使问题巧妙快速地得到解决.

例 7 [中考·滨州]如图 10，在平面直角坐标系中，将矩形 $AOCD$ 沿直线 AE 折叠（点 E 在边 DC 上），折叠后顶点 D 恰好落在边 OC 上的点 F 处. 若点 D 的坐标为（10，8），则点 E 的坐标为_____.

解题秘方：结合矩形的性质及勾股定理列方程解决问题.

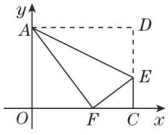


图 10

解：∵点 D 的坐标为（10，8），

∴ $OA=DC=8$，$AD=OC=10$.

根据折叠的性质知，$AF=AD=10$，$DE=EF$.

在 Rt△AOF 中，$OF=\sqrt{AF^2-OA^2}=6$，

∴ $CF=OC-OF=4$.

设 $CE=x$，则 $EF=DE=8-x$，

则在 Rt△CEF 中，$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得 $x=3$.

∴点 E 的坐标为（10，3）.

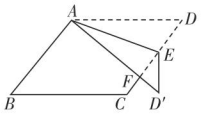
答案：（10，3）

方法点拨：在直角三角形中，若已知两边的长度，可直接利用勾股定理求另一边的长度；若已知一边的长度，又知三边之间的数量关系或角的数量关系时，可设未知数利用勾股定理建立方程求解另两边的长度.

好题必解 ☞答案见 244 页

类型 1：巧用特殊四边形求角的度数

1. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 为边 CD 上一点，将△ADE 沿 AE 折叠至△$AD'E$ 处，AD' 与 CE 交于点 F，若∠$B=52°$，∠$DAE=20°$，求∠FED' 的度数.



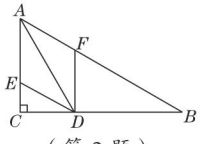
（第 1 题）

类型 2：巧用特殊四边形求线段长度

2. 如图，在△ABC 中，∠$C=90°$，∠$B=30°$，AD 是△ABC 的角平分线，$DE\parallel BA$ 交 AC 于点 E，$DF\parallel CA$ 交 AB 于点 F，已知 $CD=3$.

（1）求 AD 的长；

（2）求四边形 $AEDF$ 的周长.（注意：本题中的计算过程和结果均保留根号）

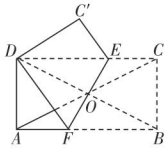


（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：巧用特殊四边形求面积

3. 如图，有矩形纸片 $ABCD$，AC，BD 相交于点 O，且 $AC=4\sqrt{5}$．若 $AD:AB=1:2$，将纸片折叠使 B 与 D 重合，求折叠后纸片重合部分的面积．



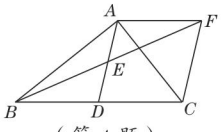
（第 3 题）

类型 4：巧用特殊四边形判定图形形状

4. 如图，在△ ABC 中，∠ $BAC=90°$，AD 是中线，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF\parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连接 CF.

（1）求证：$AD=AF$；

（2）如果 $AB=AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论．



（第 4 题）

类型 5：巧用特殊四边形证线段和差关系

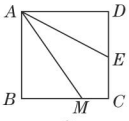
5. 问题情境：如图①，四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 边上的一点，E 是 CD 边的中点，AE 平分∠ DAM.

探究展示：

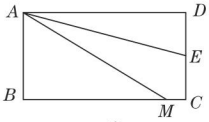
（1）求证：$AM=AD+MC$.

（2）$AM=DE+BM$ 是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由．

（3）若四边形 $ABCD$ 是矩形，其他条件不变，如图②，探究展示（1）（2）中的结论是否成立．请分别作出判断，不需要证明．



①



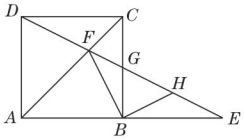
②

（第 5 题）

类型 6：巧用特殊四边形证位置关系

6. 如图，E 为正方形 $ABCD$ 的边 AB 的延长线上一点，DE 交 AC 于点 F，交 BC 于点 G，H 为 GE 的中点．

求证：$FB\perp BH$.



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

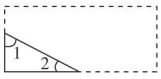
第一章测试卷 ☞答案见245页

（100分 60分钟）

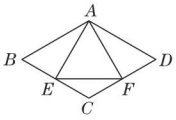
一、选择题（每题4分，共32分）

1. 如图，一张矩形纸片，剪去一部分后得到一个三角形，则$\angle 1+\angle 2$的度数是（　　）

A.30°　　B.60°　　C.90°　　D.120°



（第1题）



（第2题）

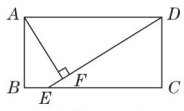
2. 如图，在菱形$ABCD$中，$\angle B=60°$，$AB=2$ cm，E，F分别是BC，CD的中点，连接AE，EF，AF，则$\triangle AEF$的周长为（　　）

A.$2\sqrt{3}$ cm　B.$3\sqrt{3}$ cm　C.$4\sqrt{3}$ cm　D.3 cm

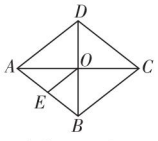
3. 如图，在矩形$ABCD$中（$AD>AB$），点E是BC上一点，且$DE=DA$，$AF\perp DE$，垂足为点F，下列结论中，不一定正确的是（　　）

A. $\triangle AFD\cong\triangle DCE$　B. $AF=\frac{1}{2}AD$

C. $AB=AF$　　D. $BE=AD-DF$



（第3题）



（第5题）

4. 下列说法错误的是（　　）

A. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

B. 四个内角都相等的四边形是矩形

C. 四条边都相等的四边形是菱形

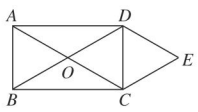
D. 两条对角线互相垂直平分的四边形是正方形

5. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，E为AB的中点，且$OE=a$，则菱形$ABCD$的周长为（　　）

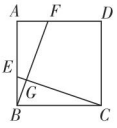
A.$16a$　　B.$12a$　　C.$8a$　　D.$4a$

6. 如图，矩形$ABCD$的对角线AC与BD相交于点O，$CE\parallel BD$，$DE\parallel AC$，$AD=2\sqrt{3}$，$DE=2$，则四边形$OCED$的面积为（　　）

A.$2\sqrt{3}$　　B.4　　C.$4\sqrt{3}$　　D.8



（第6题）



（第8题）

7. 若顺次连接四边形$ABCD$各边的中点，得到的图形是一个矩形，则四边形$ABCD$一定是（　　）

A. 矩形

B. 菱形

C. 对角线相等的四边形

D. 对角线互相垂直的四边形

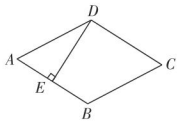
8. 如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在AB，AD上，且$BE=AF$，连接CE，BF相交于点G，则下列结论不正确的是（　　）

A.$BF=CE$　　B. $\angle AFB=\angle ECD$

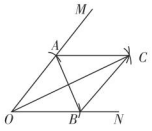
C.$BF\perp CE$　　D. $\angle AFB+\angle BEC=90°$

二、填空题（每题4分，共16分）

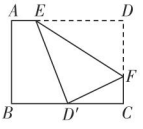
9. 如图，菱形$ABCD$的边长是2 cm，E是AB的中点，且$DE\perp AB$，则菱形$ABCD$的面积为_____cm^2.



（第9题）



（第10题）



（第11题）

10. 如图，在$\angle MON$的两边上分别截取OA，OB，使$OA=OB$；分别以点A，B为圆心，OA长为半径作弧，两弧交于点C；连接AC，BC，AB，OC. 若$AB=2$ cm，四边形$OACB$的面积为4 cm^2，则OC的长为_____cm.

11. 如图，将矩形纸片$ABCD$沿EF折叠，使D点与BC边的中点D'重合. 若$BC=8$，$CD=6$，则$CF=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 BC，CD 上，且 $AE=EF=FA$. 有下列结论：

①$\triangle ABE \cong \triangle ADF$；

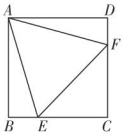
② $CE=CF$；

③$\angle AEB=75°$；

④ $BE+DF=EF$；

⑤ $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle CEF}$.

其中正确的是_____（只填写序号）.



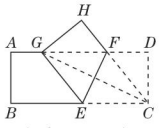
（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（10 分）如图，将矩形纸片 $ABCD$（$AD>AB$）折叠，使点 C 刚好落在线段 AD 上，且折痕分别与边 BC，AD 相交. 设折叠后点 C，D 的对应点分别为点 G，H，折痕分别与边 BC，AD 相交于点 E，F.

（1）判断四边形 $CEGF$ 的形状；

（2）若 $AB=3$，$BC=9$，求线段 CE 的取值范围.

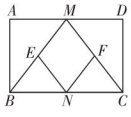


（第 13 题）

14.（10 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，M，N 分别是边 AD，BC 的中点，E，F 分别是线段 BM，CM 的中点.

（1）求证：$\triangle ABM \cong \triangle DCM$；

（2）填空：当 $AB:AD=$_____时，四边形 $MENF$ 是正方形.

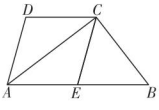


（第 14 题）

15.（10 分）如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，AC 平分 $\angle BAD$，$CE \parallel AD$ 交 AB 于点 E.

（1）求证：四边形 $AECD$ 是菱形；

（2）若点 E 是 AB 的中点，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由.



（第 15 题）

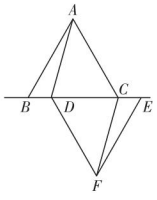
16.（10 分）如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个边长为 10 cm 的等边三角形，且点 B，D，C，E 在同一条直线上，连接 AD，CF.

（1）求证：四边形 $ADFC$ 是平行四边形；

（2）若 $BD=3$ cm，$\triangle ABC$ 沿着 BE 方向以 1 cm/s 的速度运动，设 $\triangle ABC$ 运动的时间为 t s.

①当 t 为何值时，$\square ADFC$ 是菱形？请说明理由；

②$\square ADFC$ 有可能是矩形吗？若可能，求出 t 的值及此矩形的面积；若不可能，请说明理由.

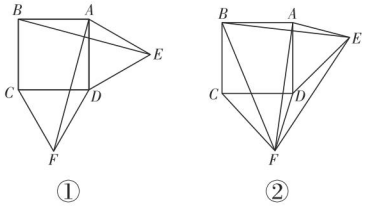


（第 16 题）

17.（12 分）问题背景：在正方形 $ABCD$ 的外侧，作 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$，连接 AF，BE.

特例探究：如图①，若 $\triangle ADE$ 与 $\triangle DCF$ 均为等边三角形，试判断线段 AF 与 BE 的数量关系和位置关系，并说明理由；

拓展应用：如图②，在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle DCF$ 中，$AE=DF$，$ED=FC$，且 $BE=4$，则四边形 $ABFE$ 的面积为_____.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

领会方程的降次思想

领会方程的降次思想



第二章 一元二次方程









核心考点

你将见到的

- 一元二次方程及相关概念
- 一元二次方程的解法：
  配方法 公式法 因式分解法
- 一元二次方程根的判别式
- 一元二次方程的根与系数的关系
- 一元二次方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 整体代入法
- 平移法
- 换元法
- 待定系数法
- 建模思想
- 分类讨论思想

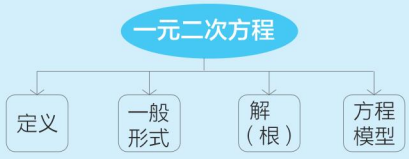
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 认识一元二次方程

核心知识

- 定义及相关概念
- 一般形式
- 解（根）

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 一元二次方程的定义

1. 定义： 只含有一个未知数 x 的整式方程，并且可以化成 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）的形式，这样的方程叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程的“三要素”：

一是整式方程，

二只含一个未知数，

三整理后未知数的最高次数是 2.


一元二次方程的定义

提分·必记

误区警示

最高次数的项的系数的取值范围不明确的方程不一定是一元二次方程，如：$(m-2)x^2+3x-8=0$ 不一定是一元二次方程.

拨考向▸利用一元二次方程的定义识别一元二次方程

例 1 下列方程：① $x^2+y-6=0$；② $x^2+\frac{1}{x}=2$；③ $x^2-x-2=0$；④ $x^2-2+5x^3-6x=0$；⑤ $2x^2-3x=2(x^2-2)$，是一元二次方程的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方： 紧扣一元二次方程的“三要素”进行识别.

解： ①含有两个未知数；②不是整式方程；③符合“三要素”；④最高次数不是 2；⑤整理后最高次数不是 2.

答案： A

提分·秘诀

解法提醒

判断一个方程是否是一元二次方程，要从原方程及整理后的方程两方面进行判断，看其是否符合一元二次方程的“三要素”，三者缺一不可.

点知识▸2 一元二次方程的一般形式

1. 一般形式： 我们把 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）称为一元二次方程的一般形式，其中 ax^2，bx，c 分别称为二次项、一次项和常数项，a，b 分别称为二次项系数和一次项系数.

2. 特殊形式：

特殊形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$ax^2+bx=0$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）	a	b	0
$ax^2+c=0$（$a\neq 0$，$c\neq 0$）	a	0	c
$ax^2=0$（$a\neq 0$）	a	0	0

提分·必记

特别提醒

$a\neq 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的必要条件；反之，如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，那么必隐含 $a\neq 0$ 这一条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用方程的变形化一元二次方程为一般形式

例 2 把下列一元二次方程转化成一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项.

（1）$(x+1)(x-2)=4$；

（2）$2(x-3)(x+4)=x^2-10$；

（3）$(2x+1)(x-2)=5-3x$.

解题秘方：紧扣一元二次方程一般形式的特征及相关概念的意义解答.

解：（1）整理方程，得

$x^2-x-6=0$.

其中二次项系数为 1，一次项系数为 -1，常数项为 -6.

（2）整理方程，得

$x^2+2x-14=0$.

其中二次项系数为 1，一次项系数为 2，常数项为 -14.

（3）整理方程，得

$2x^2-7=0$.

其中二次项系数为 2，一次项系数为 0，常数项为 -7.

提分·秘诀

知识储备

整理方程一般需经过一去（去分母、去括号）、二移、三并、四化这四个步骤.

特别提醒

确定一元二次方程的各项和各项系数时注意不要丢掉各项的符号，一般情况下，将一元二次方程整理为一般形式时，若二次项系数为负数，要把它转化为正数，若有关项是分数，要把它转化为整数.

点知识▶3 一元二次方程的解（根）（拓展点）

1. 定义：

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根.

2. 检验一元二次方程根的步骤：

步骤 1：将已知数值分别代入一元二次方程的左右两边.

步骤 2：若方程左右两边的值相等，则这个数是一元二次方程的根；否则，这个数不是一元二次方程的根.

提分·必记

特别提醒

如果一个数是一元二次方程的根，那么这个数一定能使方程左右两边的值相等.

拔考向▶利用一元二次方程根的定义判定方程的根

例 3 判断 $x=2$，$x=3$ 是不是一元二次方程 $x^2-x=6$ 的根.

解题秘方：紧扣一元二次方程根的定义进行判断.

解：将 $x=2$ 代入方程，

得左边 $=4-2=2$，

$\because$ 右边 $=6$，$2\neq 6$，

$\therefore$ $x=2$ 不是原方程的根.

将 $x=3$ 代入方程，得左边 $=9-3=6$，

$\because$ 右边 $=6$，$6=6$，

$\therefore$ $x=3$ 是原方程的根.

提分·秘诀

特别提醒

判断一个数是不是一元二次方程的根的方法：

将这个数代入方程中，如果该数使方程左右两边相等，那么这个数就是方程的根；反之，如果该数不能使方程左右两边相等，那么这个数就不是方程的根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 用估算法求一元二次方程的近似解

当某一 x 的取值使得这个方程中的 ax^2+bx+c 的值无限接近 0 时，x 的值即可看作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的解.

解法： 当相邻的两个数，一个数使 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$），另一个数使 $ax^2+bx+c>0$（$a\neq0$），则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的解就介于这两个数之间.

提分·必记

特别提醒

估算一元二次方程的解，只是估算“解”的取值范围，比如在哪两个数之间.

拔考向▶ 利用列表取值法求一元二次方程的近似解

例 4 有一根长为 7.2 m 的木料，做成如图 2-1-1 的窗框（宽 < 高），当窗框的宽为多少时，这个窗户的面积约为 2 m^2？（不考虑木料加工时的损耗和中间木框所占的面积）

提分·秘诀

方法点拨

用列表取值法求一元二次方程的近似解的具体步骤：

步骤 1：列表，根据未知数的取值，分别计算 ax^2+bx+c 的值.

步骤 2：在表中找出可能使 ax^2+bx+c 的值等于 0 的符合要求的未知数的取值范围.

步骤 3：进一步在步骤 2 中的范围内列表、计算、估计范围，直到近似解符合题中精确度的要求为止.

解题秘方： 建立一元二次方程的模型，紧扣列表取值法求一元二次方程的近似解.

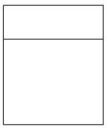


图 2-1-1

解： 设窗框的宽为 x m，则窗框的高为 $\frac{7.2-3x}{2}$ m.

根据题意，得 $x\cdot\frac{7.2-3x}{2}=2$. 整理，得 $15x^2-36x+20=0$.

列表估算方程的解：

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1	…	1.5	1.6
$15x^2-36x+20$	3.8	2.15	0.8	−0.25	−1	…	−0.25	0.8

由表知 $0.8<x<0.9$ 或 $1.5<x<1.6$. 由宽 < 高，得 $x<\frac{7.2-3x}{2}$，

$\therefore x<1.44$. $\therefore 1.5<x<1.6$ 不符合题意，舍去.

继续列表计算：

x	0.85	0.86	0.87	0.88
$15x^2-36x+20$	0.237 5	0.134	0.033 5	−0.064

$\therefore 0.87<x<0.88$.

因此，当窗框的宽大于 0.87 m 且小于 0.88 m 时，其面积约为 2 m^2.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用代入法求一元二次方程中待定字母的值

例 5 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 有一个根是 0，求 m 的值.

解题秘方： 紧扣方程根的定义用代入法求解.

解： $\because x=0$ 是方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的根，

$\therefore m^2-4=0$，即 $m=\pm2$.

又 $\because$ 方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore m-2\neq0$，即 $m\neq2$. $\therefore m=-2$.

特别警示： 解题时，易忽略二次项系数不为零的要求，导致错误.

挑战·高分

方法提醒

方程的根能使方程两边数值相等，**代入法**是根据方程根的定义，将已知方程的根代入原方程中，建立以字母系数或常数为元的新方程，从而求方程中字母系数或常数的一种有效方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用定义法求一元二次方程

例 6 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根是 1，且 a，b 满足等式 $a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4$，求此一元二次方程.

解题秘方： 紧扣二次根式和一元二次方程的根的定义进行求值.

解： ∵ a，b 满足等式 $a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4$，

∴ $b-3\geqslant 0$，$3-b\geqslant 0$，故 $b=3$.

当 $b=3$ 时，$a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4=-4$.

又∵一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根是 1，

∴ $a+b+c=0$.

∴ $c=-a-b=4-3=1$.

∴此一元二次方程是 $-4x^2+3x+1=0$.

把 x=1 代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，得 $a\times1^2+b\times1+c=0$，即 $a+b+c=0$

挑战·高分

知识储备

$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，满足 $\sqrt{a}\geqslant 0$，并且被开方数 $a\geqslant 0$.

拔尖角度▸ 3 利用整体思想求代数式的值

例 7 已知 a 是一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，试求 $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}$ 的值.

解题秘方： 将 $x=a$ 代入一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 中，再对等式变形，利用整体代入法求代数式的值.

解： ∵ a 是 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，∴ $a^2-2\,021a+1=0$.

∴ $a^2+1=2\,021a$，$a^2=2\,021a-1$.

∴ $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}=2\,021a-1-2\,020a+\dfrac{2\,021}{2\,021a}=a-1+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-a+1}{a}=\dfrac{2\,021a-1-a+1}{a}=2\,020$.

解题通法： 求代数式的值的方法：

求代数式的值时，如果可求得字母的值，可以把代数式化简后，代入数值计算；如果不能求得字母的值，可用整体代入的方法求值.

挑战·高分

解法提醒

由于代数式 $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}$ 含有 a^2，且其中一项的分母为 a^2+1，因此把 $a^2-2\,021a+1=0$ 变形为 $a^2+1=2\,021a$ 和 $a^2=2\,021a-1$，从而把 a^2+1 和 a^2 转化为一次式，再代入待求式子中整理化简，计算出结果.

拔尖角度▸ 4 利用构造一元二次方程法求代数式的值

例 8 已知 $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$（$a\neq b$），请构造一个以 a，b 为根的一元二次方程（以 x 为未知数），并求 x^2+3x+2 的值.

解题秘方： 观察两个等式的结构，结合一元二次方程的根的定义可知 a，b 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根. 经过变形可求出要求的代数式的值.

解： ∵ $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$（$a\neq b$），由一元二次方程的根的定义，可知以 a，b 为根的一元二次方程是 $x^2+3x+1=0$，

∴ $x^2+3x+2=(x^2+3x+1)+1=1$.

挑战·高分

技巧提醒

根据一元二次方程的根的定义，若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$（$a\neq 0$）. 反之，结论同样成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节在中考中的主要考点有：一元二次方程的定义，一般形式及一元二次方程的根的理解与应用，建立一元二次方程的模型等；主要以选择题，填空题的形式呈现，难度小.

三年中考兵法

考法1 利用方程根的定义求字母式子的值

例9 [中考·南充]若 $2n$（$n\neq 0$）是关于 x 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，则 $m-n$ 的值为_____.

试题评析：本题考查的是一元二次方程根的定义，其实质是将求未知数的系数问题转化为方程问题.

解：∵ $2n$（$n\neq 0$）是关于 x 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，

$\therefore 4n^2-4mn+2n=0$. $\therefore 4n-4m+2=0$. $\therefore m-n=\dfrac{1}{2}$.

答案：$\dfrac{1}{2}$

考法2 利用建一元二次方程模型解实际应用

例10 [中考·白银]如图 2-1-2，某小区计划在一块长为 32m，宽为 20m 的矩形空地上修建三条同样宽的道路，在剩余的空地上种植草坪，使草坪的面积为 $570m^2$，若道路的宽为 xm，则下面所列方程正确的是（　　）

A. $(32-2x)(20-x)=570$

B. $32x+2\times 20x=32\times 20-570$

C. $(32-2x)(20-x)=32\times 20-570$

D. $32x+2\times 20x-2x^2=570$

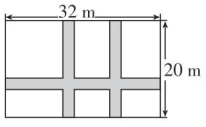


图 2-1-2

试题评析：此题主要考查由实际问题抽象出一元二次方程，这类题目体现了数形结合的思想，需利用平移把不规则的图形变为规则图形，进而即可列出方程.

解：道路的宽为 xm，根据题意得 $(32-2x)(20-x)=570$.

答案：A

冲刺·满分

解法提醒

方程的根是能使方程左右两边的值相等的未知数的值，$2n$ 是关于 x 方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，即 $x=2n$ 时方程左右两边的值相等，即 $(2n)^2-2m\times 2n+2n=0$. 解答本例的关键是将方程两边同除以 $n(n\neq 0)$，从而整体求出 $m-n$ 的值.

图解

把三条道路分别向右，向下平移，如图 2-1-3，将草坪面积转化为长为 $(32-2x)$ m，宽为 $(20-x)$ m 的矩形面积.

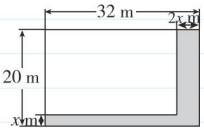


图 2-1-3

两年模拟兵法

☞答案见 246 页

1. [模拟·合川]有下列关于 x 的方程：① $ax^2+bx+c=0$，② $3x(x-4)=0$，③ $x^2+y-3=0$，④ $\dfrac{1}{x^2}+x=2$，⑤ $x^3-3x+8=0$，⑥ $\dfrac{1}{2}x^2-5x+7=0$，⑦ $(x-2)(x+5)=x^2-1$，其中是一元二次方程的有（　　）

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

2. 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，那么 m 的值为（　　）

A. ± 3　　B. 3　　C. -3　　D. 都不对

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [模拟·河北]关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+2x+m^2-5m+4=0$，常数项为 0，则 m 等于（　　）

A. 1　　B. 4　　C. 1 或 4　　D. 0

4. 已知下列表格中的对应值：

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$2x^2-x-2$	−0.68	−0.32	0.08	0.52

则方程 $2x^2-x-2=0$ 的一个根 x 的大致范围是（　　）

A. $1.1<x<1.2$　　B. $1.3<x<1.4$

C. $1<x<1.1$　　D. $1.2<x<1.3$

5. [中考·广东]如果 2 是方程 $x^2-3x+k=0$ 的一个根，则常数 k 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. −1　　D. −2

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个非零根 $-b$，则 $a-b$ 的值为（　　）

A. 1　　B. −1　　C. 0　　D. −2

7. 已知 m，n 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 a 的值等于（　　）

A. −5　　B. 5　　C. −9　　D. 9

8. 已知关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$.

（1）当 m 取何值时，它是一元一次方程？求出此方程的根.

（2）当 m 取何值时，它是一元二次方程？写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数、常数项.　　【导学号：6872150】

9. 关于 x 的方程 $(m^2-8m+19)x^2-2mx-13=0$ 是否是一元二次方程，甲、乙两同学有不同意见.

甲认为：原方程的二次项系数与 m 有关，可能为零，所以不能确定这个方程是一元二次方程.

乙认为：原方程的二次项系数肯定不会为 0，所以可以确定这个方程是一元二次方程. 你认为甲、乙谁正确，证明你的结论.

10. 已知 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a，b 的值. 下面是两位同学的解法.

甲：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$

乙：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\ a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

你认为上述两位同学的解法是否正确，为什么？如果都不正确，请给出正确的答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 用配方法求解一元二次方程

核心知识

- 直接开平方法解一元二次方程
- 配方法解一元二次方程

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 直接开平方法

1. 定义： 利用平方根的意义直接开平方，求一元二次方程解的方法叫做直接开平方法.

2. 方程 $x^2=p$ 解（根）的情况：

（1）当 $p>0$ 时，方程有两个不等实数根 $x_1=\sqrt{p}$，$x_2=-\sqrt{p}$；

（2）当 $p=0$ 时，方程有两个相等实数根 $x_1=x_2=0$；

（3）当 $p<0$ 时，方程没有实数根.

3. 用直接开平方法解一元二次方程的一般步骤：

步骤 1： 移项，将方程变成左边是完全平方式，且完全平方式的系数为 1，右边是非负数的形式（如果方程右边是负数，那么这个方程无实数根）.

步骤 2： 开平方，将方程转化为两个一元一次方程.

步骤 3： 解这两个一元一次方程，得出的两个解即为一元二次方程的两个根.

拨考向 利用直接开平方法解一元二次方程

例 1 用直接开平方法解下列方程：

（1）$9x^2-81=0$；

（2）$2(x-3)^2-50=0$.

解题秘方： 紧扣“直接开平方法”的步骤求解.

解：（1）移项，得 $9x^2=81$.

系数化为 1，得 $x^2=9$.

开平方，得 $x=\pm 3$.

$\therefore x_1=3$，$x_2=-3$.

（2）移项，得 $2(x-3)^2=50$.

系数化为 1，得 $(x-3)^2=25$.

开平方，得 $x-3=\pm 5$.

$\therefore x_1=8$，$x_2=-2$.

提分·必记

知识链接

平方根的定义：若 $x^2=a$（$a\geqslant 0$），则 x 是 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$.

特别警示

直接开平方法利用的是平方根的意义，所以要注意两点：

- 不要只取正的平方根而遗漏负的平方根；
- 只有非负数才有平方根，所以直接开平方法的前提是 $x^2=p$ 中 $p\geqslant 0$.

提分·秘诀

知识链接

用直接开平方法解一元二次方程的方法：

首先将方程化成左边是含有未知数的完全平方式，右边是非负数的形式，

然后化完全平方式的系数为 1，

最后根据平方根的意义开平方求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 配方法

1. 定义： 通过配成完全平方式的方法得到一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法称为配方法.

2. 用配方法解一元二次方程的一般步骤：

（1）移项. 把方程中含有未知数的项移到方程的左边，把常数项移到方程的右边.

（2）二次项系数化为 1. 方程的左、右两边同时除以二次项系数.

（3）配方. 把方程的左、右两边同时加上一次项系数一半的平方，把原方程化为 $(x+m)^2=n$ 的形式.

（4）开方. 如果方程右边是一个非负数，那么就用直接开平方法求解；如果方程右边是一个负数，那么这个方程无实数根；即：

① 当 $n>0$ 时，方程 $(x+m)^2=n$ 有两个不相等的实数根，$x_1=-m-\sqrt{n}$，$x_2=-m+\sqrt{n}$.

②当 $n=0$ 时，方程 $(x+m)^2=n$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-m$.

③当 $n<0$ 时，因为对任意实数 x 都有 $(x+m)^2\geqslant 0$，所以方程 $(x+m)^2=n$ 无实数根.

提分·必记

知识链接

配方的依据是完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，其实质是将 a 看作是未知数，b 看作是常数，则 b^2 即是一元一次方程中一次项系数的一半的平方.



拔考向▶ 利用配方法解一元二次方程

例 2 用配方法解一元二次方程：

（1）$x^2+4x+3=0$；　（2）$x^2+x-\frac{3}{4}=0$；

（3）$2x^2-4x-1=0$；　（4）$(1+x)^2+2(1+x)-3=0$.

解题秘方： 将方程配方化为 $(x+n)^2=p$ 的形式，用直接开平方法解.

解：（1）移项，得 $x^2+4x=-3$. 配方，得 $x^2+4x+2^2=-3+2^2$.

$\therefore (x+2)^2=1$. $\therefore x_1=-1$，$x_2=-3$.

（2）移项，得 $x^2+x=\frac{3}{4}$. 配方，得 $x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$. $\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{3}{2}$.

（3）移项，得 $2x^2-4x=1$.

二次项系数化为 1，得 $x^2-2x=\frac{1}{2}$.

配方，得 $x^2-2x+1^2=\frac{1}{2}+1^2$，即 $(x-1)^2=\frac{3}{2}$.

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

（4）移项，得 $(1+x)^2+2(1+x)=3$.

配方，得 $(1+x)^2+2(1+x)+1^2=3+1^2$，

即 $(1+x+1)^2=4$. $\therefore x_1=0$，$x_2=-4$.

若将方程中的 $(1+x)^2$ 展开，求解时运算量较大，而巧将 $1+x$ 看作一整体进行配方，可达到简化效果

提分·秘诀

解法提醒

- 用配方法解一元二次方程的实质就是对一元二次方程进行变形，将其转化为直接开平方所需要的形式，再利用平方根的意义把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来求解.
- 方程两边同时加上一次项系数的一半的平方的前提是二次项系数为 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用非负数最值法求代数式最值（拓展点）

挑战·高分

例 3 当 x 取何值时，代数式 $2x^2-6x+7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方： 求代数式的最小值，要先将代数式配成 $a(x+m)^2+n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最小值.

解： $2x^2-6x+7$

$=2(x^2-3x)+7$

$=2\left[x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+7$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$，$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$2x^2-6x+7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

解法提醒

代数式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 配成 $a(x+m)^2+n$ 后，若 $a>0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最小值 n；若 $a<0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最大值 n.

拔尖角度 2 利用非负数和为 0 法求代数式的值

挑战·高分

例 4 已知 $2x^2+y^2+4x-6y+11=0$，x，y 为实数，求 x^y 的值.

解题秘方： 将等号左边配方，转化为两个完全平方式的和，再应用非负数的性质求 x，y 的值.

解： $2x^2+y^2+4x-6y+11=0$，

$(2x^2+4x)+(y^2-6y)+11=0$，

$2(x^2+2x+1-1)+(y^2-6y+9-9)+11=0$，

$2(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)=0$，

$2(x+1)^2+(y-3)^2=0$，

$\because (x+1)^2\geqslant 0$，$(y-3)^2\geqslant 0$，

$\therefore x+1=0$，$y-3=0$.

$\therefore x=-1$，$y=3$.

$\therefore x^y=(-1)^3=-1$.

添加常数项要在括号内完成，并要确保代数式的值不变

方法点拨

配方的对象是多样的，数、字母、等式、不等式都可以进行配方. 配方法的实质在于揭示式子的非负性，而非负数有以下重要性质：

1. 若有限个非负数的和为 0，则每一个非负数都为零；
2. 非负数的最小值为零.

拔尖角度 3 利用数形结合法判别三角形的形状

挑战·高分

例 5 已知 a，b，c 为 $\triangle ABC$ 的三边长.

（1）求证：$a^2-b^2+c^2-2ac<0$.

（2）当 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解题秘方：（1）以形的关系判断式的符号：把不等式的左边变形后根据三角形三边关系判断代数式的符号；（2）以数的关系判断形的关系：利用配方判断三边关系，从而判断三角形的形状.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**证明**：$a^2-b^2+c^2-2ac=(a-c)^2-b^2=(a-c+b)(a-c-b)$.

∵ a，b，c 为△ABC 的三边长，

∴ $a-c+b>0$，$a-c-b<0$.

∴ $a^2-b^2+c^2-2ac<0$.

（2）**解**：由 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，

得 $a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$，

∴ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$.

∴ $a=b=c$.

∴ △ABC 为等边三角形.

根据三角形两边之和大于第三边，可知 $a+b>c$，$b+c>a$，所以 $a-c+b>0$，$a-c-b<0$

解题策略

分析 $a^2-b^2+c^2-2ac$ 可知，a^2+c^2-2ac 可以写成 $(a-c)^2$ 的形式，对 $(a-c)^2-b^2$ 因式分解时，可将 $a-c$ 看成一个整体，利用平方差公式分解因式.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中的主要考点是开平方、配方的方法，独立考查的情况不多见，常与由方程根的情况求字母的值，配方求最值，结合二次函数的应用求最值等知识综合在一起进行考查，题目难易度中偏高.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用直接开平方法求字母式子的值

例6 [**中考·济宁**]若一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，则 $\frac{b}{a}=$_____.

试题评析：本题考查了直接开平方法解一元二次方程及根据方程根的特征求字母的值.

解：方程 $x^2=p$（$p\geqslant 0$）的根的情况为：$p>0$ 时，两根不等且互为相反数；当 $p=0$ 时，方程的两根相等且都为 0.

（1）当两根不等时，

∵ $x^2=\frac{b}{a}$（$ab>0$），∴ $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

∴方程的两个根互为相反数.

∴ $m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$.

∴一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 2 与 −2.

∴ $\sqrt{\frac{b}{a}}=2$. ∴ $\frac{b}{a}=4$.

（2）当两根相等时，

∵ $x^2=\frac{b}{a}$，∴ $\frac{b}{a}=0$，这与 $ab>0$ 相矛盾.

∴不可能是两根相等.

答案：4

教你一招

本例无法求出 a、b 的值，因为原方程的解为 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，所以只需要求出方程的解，就可用**整体思想**求出 $\frac{b}{a}$ 的值.

易错警示

涉及待定字母的方程求值的问题时，都必须对三种情况予以讨论，本例解题时易犯两种错误，其一是忽视两根相等的情况，其二是盲目用两根相等而忽视题目条件，将（2）解为：当两根相等时，则 $m+1=2m-4$，∴ $m=5$. ∴方程两根均为 6. ∴ $\sqrt{\frac{b}{a}}=6$，即 $\frac{b}{a}=36$. 它忽视了方程 $x^2=p$ 的两根相等的条件是 $p=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用配方求字母系数的值

例 7 [中考·杭州]已知方程 $x^2-6x+q=0$ 可以配方成 $(x-p)^2=7$ 的形式，那么 $x^2-6x+q=2$ 可以配方成（　　）

A. $(x-p)^2=5$　　B. $(x-p)^2=9$

C. $(x-p+2)^2=9$　　D. $(x-p+2)^2=5$

试题评析：本题考查了待定系数法，配方法等知识，巧妙诠释了求字母的值及数值与字母的替代关系.

解：$x^2-6x+q=0$，

配方，得 $(x-3)^2=9-q$.

∵方程可以配方成 $(x-p)^2=7$，∴ $p=3$，$q=2$.

∴ $x^2-6x+q=2$ 可配方为 $(x-3)^2=9$，即 $(x-p)^2=9$.

答案：B

一题多解

本例也可以不经过配方直接用待定系数法求 p，q 的值，即：

∵ $(x-p)^2=7$，

∴ $x^2-2px+p^2=7$.

又∵ $x^2-6x+q=0$，

∴ $-2p=-6$，$p^2-7=q$，

即 $p=3$，$q=2$.

两年模拟兵法 ☞答案见 247 页

1. [模拟·白云]用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无解的方程为（　　）

A. $x^2-1=0$　　B. $x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $-x^2+3=0$

2. [中考·深圳]给出一种运算：对于函数 $y=x^n$，规定 $y'=nx^{n-1}$，例如：若函数 $y=x^4$，则有 $y'=4x^3$，已知函数 $y=x^3$，则方程 $y'=12$ 的解是（　　）

A. $x_1=4$，$x_2=-4$　　B. $x_1=2$，$x_2=-2$

C. $x_1=x_2=0$　　D. $x_1=2\sqrt{3}$，$x_2=-2\sqrt{3}$

3. [中考·泰安]一元二次方程 $x^2-6x-6=0$ 配方后化为（　　）

A. $(x-3)^2=15$　　B. $(x-3)^2=3$

C. $(x+3)^2=15$　　D. $(x+3)^2=3$

4. [模拟·武穴]若方程 $4x^2-(m-2)x+1=0$ 的左边是一个完全平方式，则 m 等于（　　）

A. -2　　B. -2 或 6

C. -2 或 -6　　D. 2 或 -6

5. 方程 $(x-1)^2=4$ 的解是_____.

6. 用适当的数填空：

x^2-4x+_____$=(x-$_____$)^2$；

m^2+_____$m+\frac{9}{4}=[m+$_____$]^2$.

7. 用直接开平方法解方程：

（1）$2x^2-8=0$；

（2）$(y-5)^2-36=0$.

8. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+4x=0$；

（2）$2x^2-3x-6=0$；

（3）$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=0$.

9. [模拟·黄冈]已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$.

（1）求 a，b，c 的值；

（2）判断△ABC 的形状.【导学号：6872150】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 用公式法求解一元二次方程

核心知识

- 求根公式
- 公式法解一元二次方程
- 根的判别式的定义

知识链接

用公式法解方程 关键 根的判别式 → 有两个不等的实数根 / 有两个相等的实数根 / 无实数根

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用公式法解一元二次方程

1. 求根公式的定义：

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，它的根是：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，这个式子称为一元二次方程的求根公式.

2. 公式法：

（1）**定义：**用求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法.

（2）**用求根公式解方程的步骤：**

①把一元二次方程化成一般形式；

②确定公式中 a，b，c 的值；

③求出 b^2-4ac 的值；

④若 $b^2-4ac\geqslant 0$，则把 a，b 及 b^2-4ac 的值代入求根公式求解，当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数解.

拨考向 利用公式法解一元二次方程

例 1 用公式法解下列方程.

（1）$2x^2-7x+4=0$；

（2）$3x^2-2\sqrt{3}\,x=-1$；

（3）$x^2-2x+3=0$；

（4）$-3x^2-5x+2=0$.

公式法

解题秘方：按照用求根公式解方程的步骤求解.

解：（1）$\because a=2$，$b=-7$，$c=4$，

$\therefore b^2-4ac=(-7)^2-4\times 2\times 4=17$.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$，

$x_2=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$.

求 b^2-4ac 的值时，若代入的字母值是负数，则需将其用括号括起来，不能漏掉“-”号

提分·必记

特别提醒

1. 公式法是解一元二次方程的通用解法（也称万能法），它适用于所有的一元二次方程，但不一定是最高效的解法.
2. 只有当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的 $a\neq 0$，$b^2-4ac\geqslant 0$ 时，才能使用求根公式.
3. 用公式法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）时，若 $b^2-4ac=0$，则方程有两个相等的实数根，即 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

提分·秘诀

知识储备

利用公式法解方程时，需先求出 b^2-4ac 的值，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，可直接套用求根公式求解，当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）方程可化为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

$\because a=3$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=1$，

$\therefore b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$.

$\therefore x_1=x_2=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）$\because a=1$，$b=-2$，$c=3$，

$\therefore b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$.

∴方程无实数根.

（4）方程可化为 $3x^2+5x-2=0$，

$\because a=3$，$b=5$，$c=-2$.

$\therefore b^2-4ac=5^2-4\times3\times(-2)=49>0$，

$\therefore x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=-2$.

解法提醒

用公式法解一元二次方程时，先将方程整理成一元二次方程的一般形式，确定 a，b，c 的值，再求出 b^2-4ac 的值，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，则可代入求根公式求解，当 $b^2-4ac<0$ 时，则方程无实数根，这时若将 a，b，c 的值直接代入求根公式，则算式无意义. 另外，当 a，b，c 中含有分数时，一般先化为整数再计算.

点知识▶2 一元二次方程根的判别式

提分·必记

特别提醒

确定根的判别式时，需先将方程化为一般形式，确定a,b,c后再计算；使用一元二次方程根的判别式的前提是二次项系数不为0.

1. 定义：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的情况可由 b^2-4ac 来判定. 我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式，通常用希腊字母“Δ”来表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

2. 一元二次方程根的个数与根的判别式的关系：

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），

（1）$\Delta>0$ ⇔方程有两个不相等的实数根.

（2）$\Delta=0$ ⇔方程有两个相等的实数根.

（3）$\Delta<0$ ⇔方程没有实数根.


根的判别式

技考向▶利用一元二次方程根的判别式解决相关问题

类型1：根的判别式在判断一元二次方程根的情况中的应用

例2 对于任意实数 k，关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x-k^2+2k-1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个相等的实数根　　B. 没有实数根

C. 有两个不等的实数根　　D. 无法判断

解题秘方：由根的判别式的正负性及是否为0判断根的情况.

解：$\because a=1$，$b=-2(k+1)$，$c=-k^2+2k-1$，

$\therefore\Delta=b^2-4ac=[-2(k+1)]^2-4\times1\times(-k^2+2k-1)=8+8k^2>0$.

∴方程有两个不等的实数根.

答案：C

提分·秘诀

教你一招

利用根的判别式判断一元二次方程的根的情况的方法：

先将方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），当方程中的 a，b，c 是常数时，直接求出 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，确定方程根的情况；当方程中的 a，b，c 含有字母时，需要对含有字母的代数式进行讨论，进而确定该方程根的情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：根的判别式在一元二次方程中字母的取值范围的应用

例 3 ［中考·凉山］关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2x+1=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m \leqslant 3$　　B. $m < 3$

C. $m < 3$ 且 $m \neq 2$　　D. $m \leqslant 3$ 且 $m \neq 2$

解题秘方： 紧扣根的判别式与根的情况的关系进行解答.

解： ∵方程为一元二次方程，

∴ $m-2 \neq 0$，即 $m \neq 2$.

∵一元二次方程有实数根，

∴ $\Delta \geqslant 0$，即 $4-4(m-2) \geqslant 0$.

∴ $m \leqslant 3$.

∴ $m \leqslant 3$ 且 $m \neq 2$.

答案： D

类型 3：根的判别式在实际问题中的应用

例 4 将一条长为 20 cm 的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长做成正方形.

（1）要使这两个正方形的面积之和等于 17 cm^2，那么这段铁丝剪成两段后的长度分别是多少？

（2）两个正方形的面积之和可能等于 12 cm^2 吗？若可能，分别求出两段铁丝的长度；若不可能，请说明理由.

解题秘方： 紧扣根的判别式，判别实际问题中一元二次方程根的情况.

解： 设一个正方形的周长为 x cm，则另一个正方形的周长为 $(20-x)$ cm.

（1）由题意可列方程为 $\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{20-x}{4}\right)^2=17$.

整理，得 $x^2-20x+64=0$.

∴ $x=\frac{20 \pm \sqrt{20^2-4\times 64}}{2}$，∴ $x_1=16$，$x_2=4$.

∴两段铁丝的长度分别为 16 cm 和 4 cm.

（2）不可能. 理由如下：

若两个正方形的面积之和等于 12 cm^2，则可列方程为 $\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{20-x}{4}\right)^2=12$.

整理，得 $x^2-20x+104=0$.

∵ $b^2-4ac=(-20)^2-4\times 1\times 104=-16<0$，∴此方程无解.

∴两个正方形的面积之和不可能等于 12 cm^2.

特别提醒

应用 Δ 的前提是二次项系数不为 0.

方程有两个不相等的实数根 $\Leftrightarrow \Delta > 0$；方程有两个相等的实数根 $\Leftrightarrow \Delta = 0$；方程没有实数根 $\Leftrightarrow \Delta < 0$，这样，就可以根据根的情况构建方程或不等式，从而求出字母的取值范围. 当待求的字母系数出现在二次项中，而无法判定方程为一元二次方程时，解题时要分类讨论.

方法点拨

本题用方程思想和一元二次方程的根的判别式来解决，将实际问题转化为一元二次方程中的相关问题. 对于生活中的应用题，首先要全面理解题意，然后根据实际的要求，确定用哪些数学知识和方法来解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分类法求一元二次方程中字母的范围

挑战·高分

例5 关于x的方程$m^2x^2+(2m+1)x+1=0$有实数根，求m的取值范围.

解题秘方：紧扣“关于x的方程”即“二次项系数可能为0”进行分类解答.

解：当$m=0$时，此方程为一元一次方程，方程有实数根；

当$m\neq 0$时，此方程为一元二次方程.

∵方程$m^2x^2+(2m+1)x+1=0$有实数根，

∴$(2m+1)^2-4m^2\geqslant 0$.

∴$m\geqslant -\frac{1}{4}$.

综上，当$m\geqslant -\frac{1}{4}$时，关于x的方程$m^2x^2+(2m+1)x+1=0$有实数根.

特别提醒

方程有实数根与方程有两个实数根的根本区别：方程有实数根，此方程不一定是一元二次方程，也可以是一元一次方程；方程有两个实数根，则该方程一定是一元二次方程.

拔尖角度 2 利用公式法进行二次三项式的因式分解

挑战·高分

例6 因式分解：

(1) $6x^2-7x+1$；

(2) $4x^2-x-5$.

解题秘方：巧用$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$分解因式.

解：(1) 构造一元二次方程为$6x^2-7x+1=0$.

∵$a=6$，$b=-7$，$c=1$，

∴$\Delta=b^2-4ac=49-4\times 6\times 1=25>0$.

∴$x=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2\times 6}=\frac{7\pm 5}{12}$.

∴$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{6}$.

∴因式分解的结果为$6x^2-7x+1=6(x-1)\left(x-\frac{1}{6}\right)$.

(2) 构造一元二次方程为$4x^2-x-5=0$.

∵$a=4$，$b=-1$，$c=-5$，

∴$\Delta=b^2-4ac=1-4\times 4\times(-5)=81>0$.

∴$x=\frac{1\pm\sqrt{81}}{2\times 4}=\frac{1\pm 9}{8}$.

∴$x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=-1$.

∴因式分解的结果为$4x^2-x-5=4\left(x-\frac{5}{4}\right)(x+1)$.

方法点拨

利用公式法因式分解的理论依据：

若一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根为x_1，x_2，则方程可化为$a(x-x_1)(x-x_2)=0$的形式，因此$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$，所以利用公式法对代数式$ax^2+bx+c(a\neq 0)$进行因式分解时，可以先构造一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，然后利用公式法求出一元二次方程的解，再代入$a(x-x_1)(x-x_2)$完成因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用数形结合法求一元二次方程中字母的值

例 7 等腰三角形边长分别为 a，b，2，且 a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两根，求 n 的值.

解题秘方： 先对三角形的边长分类讨论，再分析三边的数量关系以及根的判别式，求出字母 n 的值.

解： ∵该三角形是等腰三角形，∴分两种情况讨论：

（1）当腰长为 2，即 $a=2$ 或 $b=2$ 时，

∵ a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两个根，

∴ $x=2$ 是方程的一个根.

把 $x=2$ 代入 $x^2-6x+n-1=0$ 得 $2^2-6\times2+n-1=0$，解得 $n=9$.

当 $n=9$ 时，方程的两根分别是 2 和 4，而 2，4，2 不能组成三角形，故 $n=9$ 不合题意，舍去.

（2）当底边长为 2，即 $a=b$ 时，方程 $x^2-6x+n-1=0$ 有两个相等的实数根，则 $\Delta=(-6)^2-4(n-1)=0$，解得 $n=10$.

∴原方程为 $x^2-6x+9=0$. 解得 $x_1=x_2=3$，即 $a=3$，$b=3$.

∵ 3，3，2 可以组成三角形，∴ $n=10$.

挑战·高分

知识储备

当已知等腰三角形的一边的长时，通常要分两种情况讨论：

1. 已知的边长为腰长；
2. 已知的边长为底边长.

详解

求出三角形三边的长度之后，必须检验所求结果是否满足任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中主要考点为一元二次方程的解法及根的判别式的应用；解一元二次方程是中考的热点，以填空或选择的形式出现居多，难度不大，有时也以选择适当的方法解一元二次方程的方式呈现；根的判别式在中考中常独立以选择或填空的形式出现，有时也和后面的根与系数的关系结合在一起考查.

三年中考兵法

考法 1 利用公式法求根的范围

例 8 [中考·荆州]已知 a 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，则下面对 a 的估计正确的是（　　）

A. $0<a<1$　B. $1<a<1.5$　C. $1.5<a<2$　D. $2<a<3$

试题评析： 本题考查了用公式法解一元二次方程及无理数的大小的估算，是一道很经典的题目，难度适中.

解： 解方程 $x^2-x-1=0$，得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

∵ a 是方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，∴ $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

∵ $2<\sqrt{5}<3$，∴ $3<1+\sqrt{5}<4$. ∴ $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$.

答案： C

冲刺·满分

教你一招

估算含无理数式子的大小的方法：

先估算这个无理数在哪两个连续整数之间，再根据不等式的基本性质依次在不等式两边加减或乘除适当的数，将这个无理数转化为含无理数的式子，即可确定它的范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用根的判别式求方程整数解问题

例 9 [中考·包头]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-2=0$ 有两个实数根，m 为正整数，且该方程的根都是整数，则符合条件的所有正整数 m 的和为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

试题评析: 本题考查了根的判别式以及一元二次方程的整数解，牢记“当 $\Delta \geqslant 0$ 时，方程有实数根”是解题的关键.

解： ∵ $a=1$，$b=2$，$c=m-2$，关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-2=0$ 有实数根，

∴ $\Delta=b^2-4ac=2^2-4(m-2)=12-4m \geqslant 0$.

∴ $m \leqslant 3$.

∵ m 为正整数，且该方程的根都是整数，

∴ $m=2$ 或 3.

∴符合条件的所有正整数 m 的和为 $2+3=5$.

答案： B

考法 3 利用根的判别式及方程的根解有关根的应用

例 10 [中考·岳阳]已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

(1) 求证：方程总有两个不等的实数根；

(2) 已知方程的一个根为 $x=0$，求代数式 $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$ 的值（要求先化简再求值）.

试题评析： 本题考查了根的判别式和一元二次方程的解，解题时，逆用一元二次方程解的定义易得出所求式子的值，在解题时要重视解题思路的逆向分析.

(1)**证明：** ∵ $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$，

∴ $\Delta=[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$.

∴方程总有两个不等的实数根.

(2) **解：** ∵ $x=0$ 是此方程的一个根，

∴把 $x=0$ 代入方程中得到 $m(m+1)=0$.

∴ $m=0$ 或 $m=-1$.

∵ $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$

$=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5$

$=3m^2+3m+5$，

把 $m=0$ 代入 $3m^2+3m+5$，得 $3m^2+3m+5=5$；

把 $m=-1$ 代入 $3m^2+3m+5$，得 $3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$.

综上，原代数式的值为 5.

思路点拨

根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta \geqslant 0$，即可得出 $m \leqslant 3$，由 m 为正整数结合该方程的根都是整数，即可求出 m 的值，将其相加即可得出结论.

特别提醒

一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况：

1. 不解方程，由根的判别式的正负性及是否为 0 可直接判定根的情况，即
   (1) 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不等的实数根；
   (2) 当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
   (3) 当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根.
2. 根据方程根的情况，结合根的判别式来确定方程中字母系数的取值范围，若二次项系数中含有字母，则应注意检验二次项系数是否为零.
3. 应用判别式证明方程根的情况（有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见247页

1. [模拟·禹会]方程 $2x^2-6x+3=0$ 较小的根为 p，方程 $2x^2-2x-1=0$ 较大的根为 q，则 $p+q$ 等于（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $2\sqrt{3}$

2. [中考·宁夏]关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+3x-2=0$ 有实数根，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>-\frac{1}{8}$　　B. $a\geqslant-\frac{1}{8}$

C. $a>-\frac{1}{8}$ 且 $a\neq1$　　D. $a\geqslant-\frac{1}{8}$ 且 $a\neq1$

3. [中考·咸宁]已知 a，b，c 为常数，点 $P(a,c)$ 在第二象限，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况是（　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

4. 阅读材料，回答问题.

材料：为了解方程 $x^4-x^2-6=0$，可将方程变形为 $(x^2)^2-x^2-6=0$，然后设 $x^2=y$，则 $(x^2)^2=y^2$，原方程化为 $y^2-y-6=0$ ①，

解得 $y_1=-2$，$y_2=3$.

当 $y=-2$ 时，$x^2=-2$，不可能成立，舍去；

当 $y=3$ 时，$x^2=3$，解得 $x=\pm\sqrt{3}$.

所以原方程的解为 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$.

问题：

（1）在由原方程得到方程①的过程中，利用_____法达到了降次的目的，体现了_____的数学思想.

（2）利用上述解题方法解方程 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$.

5. [中考·北京]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+2k-4=0$ 有两个不等的实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 k 为正整数，且该方程的根都是整数，求 k 的值.

6. [模拟·厦门]关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长.

（1）如果方程有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

（2）如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.　　【导学号：6872150】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 用因式分解法求解一元二次方程

核心知识

- 用因式分解法解一元二次方程
- 灵活选择适当的方法解一元二次方程

知识链接

选择合适的方法解一元二次方程
- 最直接的方法 → 公式法
- 最灵活的方法 → 因式分解法 → 提公因式法 / 公式法
- 硬规定的方法 → 配方法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 因式分解法

1. 定义： 当一元二次方程的一边为 0，而另一边易于分解成两个一次因式的乘积时，可用解两个一元一次方程的方法来求得一元二次方程的解．这种解一元二次方程的方法称为因式分解法．

2. 因式分解法解一元二次方程的一般步骤：

（1）整理方程，使其右边为 0；

（2）将方程左边分解为两个一次式的乘积；

（3）令每个一次式分别为 0，得到两个一元一次方程；

（4）分别解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解．

因式分解法

提分·必记

知识储备

常用的因式分解的方法：

1. 提公因式法；
2. 公式法；
3. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

拨考向 利用因式分解法解一元二次方程

例 1 用因式分解法解下列方程．

（1）$(x-5)(x-6)=x-5$；

（2）$4(x-3)^2-25(x-2)^2=0$；

（3）$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.

解题秘方： 按方程的特点选择恰当的因式分解方法．

解：（1）移项，得 $(x-5)(x-6)-(x-5)=0$.

因式分解，得 $(x-5)(x-7)=0$.

方程(1)的两边不能同时除以 x-5，这样会使方程丢掉一根

$\therefore x-5=0$，或 $x-7=0$. $\therefore x_1=5$，$x_2=7$.

（2）原方程可化为 $[2(x-3)]^2-[5(x-2)]^2=0$，

$[2(x-3)+5(x-2)][2(x-3)-5(x-2)]=0$，

$(7x-16)(-3x+4)=0$，

$\therefore 7x-16=0$，或 $-3x+4=0$. $\therefore x_1=\frac{16}{7}$，$x_2=\frac{4}{3}$.

（3）原方程可化为 $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$.

$\therefore x-\sqrt{2}=0$，或 $x-\sqrt{3}=0$.

$\therefore x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 用因式分解法解一元二次方程，虽然比配方法和公式法简便，但这种方法只适用于部分一元二次方程．
2. 用因式分解法解方程时需将一元二次方程的右边化为 0，再对方程的左边因式分解．
3. 不能随意在方程两边同时除以含未知数的整数式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 一元二次方程的解法

1. 解一元二次方程的方法：

直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法.

2. 解一元二次方程的基本思路：

将二次方程化为一次方程，即降次.

3. 合理选择一元二次方程的解法：

（1）若方程具有$(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$的形式，可用直接开平方法求解；

（2）若一元二次方程一边为0，另一边易于分解成两个一次因式的积时，可用因式分解法求解；

（3）公式法是一种常用的方法，用时一定要把一元二次方程化为一般形式，确定a，b，c的值，在$b^2-4ac\geqslant 0$的条件下代入公式求解.

提分·必记

活用巧记

先考虑直接开平方法和因式分解法，不能用这两种方法时，再用公式法；没有特殊要求的，尽量少用配方法. 可巧用口诀记为：

观察方程选解法，
先看能否开平方，
再看是否能分解，
左分降次右化零，
求根公式最后用，
系数符号要辨明.

拔考向▶ 利用适当方法解一元二次方程

例2 解下列方程.

（1）$4x^2-64=0$；

（2）$2x^2-7x-6=0$；

（3）$(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$.

解题秘方：根据方程的特点，选择适当方法解一元二次方程.

提分·秘诀

选法策略

选择解一元二次方程方法的顺序为：直接开平方法→因式分解法→公式法，如无特殊要求一般不用配方法.

解：（1）$\because 4x^2-64=0$，

$\therefore x^2=16$.

$\therefore x_1=4$，$x_2=-4$.

（2）$2x^2-7x-6=0$，

$\because a=2$，$b=-7$，$c=-6$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=97>0$.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{97}}{4}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{97}}{4}$.

把3x+2看成一个整体，则方程为形如$x^2+(p+q)x+pq=0$的一元二次方程，因此可直接用因式分解法求解

（3）因式分解，得$[(3x+2)-3][(3x+2)-5]=0$，

即$(3x-1)(3x-3)=0$.

$\therefore x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=1$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用待定系数法解错解方程问题

例3 甲、乙两学生解同一个关于x的一元二次方程（二次项系数为1），甲将一次项系数看错，解得两根为-4与8；乙将常数项看错，解得两根为4与10，试求出正确的方程.

挑战·高分

另解

由因式分解法解一元二次方程的逆向可知，以x_1，x_2为两根的一元二次

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：运用待定系数法求出两个错误的方程，采用除错法确定正确方程.

解：设两根为 -4 和 8 的方程为 $x^2+bx+c=0$,

则 $\begin{cases}(-4)^2+(-4)b+c=0,\\ 8^2+8b+c=0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}b=-4,\\ c=-32,\end{cases}$

$\therefore$ 甲看错一次项系数的方程为 $x^2-4x-32=0$,

同样可求乙看错常数项的方程为 $x^2-14x+40=0$.

综上可得正确方程为 $x^2-14x-32=0$.

方程（二次项系数为1）为 $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

甲将一次项系数看错得 $x=-4$ 或 $x=8$,

$\therefore (x+4)(x-8)=0$，$\therefore x^2-4x-32=0$;

乙将常数项看错得 $x=4$ 或 $x=10$,

$\therefore (x-4)(x-10)=0$，$\therefore x^2-14x+40=0$.

$\therefore$ 正确的方程为 $x^2-14x-32=0$.

拔尖角度▸ 2 利用换元法求方程中的代数式的值

挑战·高分

例4 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$，求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

详解

由 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$,

得 $x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1+2$，即 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$.

解题秘方：本题的解题关键是先将原方程转化为只含 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 这样的未知项的方程，再把 $x+\frac{1}{x}$ 看成一个整体用换元法求解.

解：配方，得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$,

设 $x+\frac{1}{x}=y$,

则原方程可变形为 $y^2+2y-3=0$,

$\therefore y_1=-3$，$y_2=1$.

$\therefore x+\frac{1}{x}=-3$ 或 1.

$\because$ 当 $x+\frac{1}{x}=1$ 时，方程没有实数根，

这与 x 为实数相矛盾，舍去.

x 为实数，其隐含条件是关于 x 的方程有实数根，否则求出的 $x+\frac{1}{x}$ 的值就没有意义

$\therefore x+\frac{1}{x}=-3$.

方法点拨：运用换元法解一元二次方程时，先要找出相同的整体进行换元，使方程变得更简易，解完方程后还要注意还元.如本题最后写出 $x+\frac{1}{x}$ 的值，而不是只求出未知数 y 的值就结束答题.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 用因式分解法解一元二次方程是中考的热门考点之一，独立命题以填空、选择题居多，难度不大，解一元二次方程独立考查常以选适当方法解一元二次方程形式出现，综合考查时，渗透到其他知识内较多，是中考的高频考点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用因式分解法说明方程解间的关系

例5 [中考·温州]我们知道方程$x^2+2x-3=0$的解是$x_1=1$，$x_2=-3$，现给出另一个方程$(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$，它的解是(　　)

A. $x_1=1$，$x_2=3$　　B. $x_1=1$，$x_2=-3$

C. $x_1=-1$，$x_2=3$　　D. $x_1=-1$，$x_2=-3$

试题评析：本题考查了因式分解法解一元二次方程，方程的解及不同方程解之间的关系，把$2x+3$看成一个整体是解题的关键.

解：∵$(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$，

∴$2x+3=1$或$2x+3=-3$，∴$x_1=-1$，$x_2=-3$.

答案：D

解法提醒

先把方程$(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$看成关于$2x+3$的一元二次方程，利用题中的解得到$2x+3=1$或$2x+3=-3$，然后解两个一元一次方程即可.

考法2 利用因式分解法解与三角形有关应用

例6 [中考·荆门]已知3是关于x的方程$x^2-(m+1)x+2m=0$的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰△ABC的两条边的边长，则△ABC的周长为(　　)

A. 7　　B. 10　　C. 11　　D. 10或11

试题评析：本题考查了一元二次方程的解、因式分解解一元二次方程及三角形三边的关系，掌握数形结合思想是解题关键.

解：把$x=3$代入方程得$9-3(m+1)+2m=0$，解得$m=6$，

则原方程为$x^2-7x+12=0$，解得$x_1=3$，$x_2=4$，

∵这个方程的两个根恰好是等腰△ABC的两条边长，

(1)当△ABC的腰为4，底边为3时，则△ABC的周长为$4+4+3=11$；

(2)当△ABC的腰为3，底边为4时，则△ABC的周长为$3+3+4=10$；

综上所述，该△ABC的周长为10或11.

答案：D

解法提醒

把x=3代入已知方程求得m的值，然后通过解方程求得该方程的两根，即等腰△ABC的两条边长，由三角形三边关系和三角形的周长公式进行解答即可.

两年模拟兵法

☞答案见248页

1. 方程$(x-2)(x+1)=x-2$的解是(　　)

A. $x=0$　　B. $x=2$

C. $x=2$或$x=-1$　　D. $x=2$或$x=0$

2. [模拟·新区]如果一个等腰三角形的两边长分别为方程$x^2-5x+4=0$的两根，则这个等腰三角形的周长为(　　)

A. 6　　B. 9

C. 6或9　　D. 以上都不正确

3. [模拟·天门]如果三角形的两边长分别是方程$x^2-8x+15=0$的两个根，那么连接这个三角形三边的中点，得到的三角形的周长可能是(　　)

A. 5.5　　B. 5　　C. 4.5　　D. 4

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4.[模拟·高新]对于实数a，b，现定义一种新运算“★”如下：$a★b=\begin{cases}a^2b+a, & \text{当}a\geqslant b\text{时}\\ ab^2+b, & \text{当}a<b\text{时}\end{cases}$.若$2★m=36$，则实数$m$等于(　　)

A. 8.5　　B. 4

C. 4或-4.5　　D. 4或-4.5或8.5

5. 设a，b是一个直角三角形两条直角边的长，且$(a^2+b^2)(a^2+b^2+1)=12$，则这个直角三角形的斜边长为_____.

6. 用因式分解法解方程$x^2-kx-16=0$时，得到的两根均为整数，则k的值可以为_____.

7. 请写出一个以$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$为两根的一元二次方程_____.

8. 用恰当的方法解下列方程：

(1) $9(x-1)^2=5$;

(2) $(x-3)^2+x^2=9$;

(3) $x^2-\sqrt{2}x-1=0$.

9. 利用完全平方公式，可以将多项式ax^2+bx+c($a\neq0$)变形为$a(x+m)^2+n$的形式，我们把这样的变形方法叫做多项式ax^2+bx+c的配方法.运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行分解因式.

例如：$x^2+11x+24=x^2+11x+\left(\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2+24=\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(x+\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{11}{2}-\frac{5}{2}\right)=(x+8)(x+3)$

根据以上材料，解答下列问题：

(1) 用配方法将多项式$x^2-3x-10$化成$(x+m)^2+n$的形式；

(2) 用配方法及平方差公式对多项式$x^2-3x-10$进行分解因式；

(3) 求证：不论x，y取任何实数，多项式$x^2+y^2-2x-4y+16$的值总为正数.

10. [模拟·重庆]请阅读下面解方程$(x^2+1)^2-2(x^2+1)-3=0$的过程.

解：设$x^2+1=y$，则原方程可变形为$y^2-2y-3=0$.

解得$y_1=3$，$y_2=-1$.

当$y=3$时，$x^2+1=3$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

当$y=-1$时，$x^2+1=-1$，$x^2=-2$，此方程无实数解.

$\therefore$原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

我们将上述解方程的方法叫做换元法.

请用换元法解方程：$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x-1}\right)-15=0$.

11. [模拟·防城港]阅读下面的材料，回答问题.

解方程$x^4-5x^2+4=0$，这是一个一元四次方程，根据该方程的特点，它的解法通常是：

设$x^2=y$，那么$x^4=y^2$，于是原方程可变为$y^2-5y+4=0$，解得$y_1=1$，$y_2=4$.

当$y=1$时，$x^2=1$，$\therefore x=\pm1$;

当$y=4$时，$x^2=4$，$\therefore x=\pm2$.

$\therefore$原方程有四个根$x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=2$，$x_4=-2$.

请你按照上述解题思想解方程$(x^2+x)^2-4(x^2+x)-12=0$.　　【导学号：6872150】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*5 一元二次方程的根与系数的关系

核心知识

- 一元二次方程根与系数的关系
- 以两实数为根的一元二次方程
- 常见涉两实数根的变形公式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸一元二次方程根与系数的关系

1. 一元二次方程根与系数的关系：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程有实数根，设这两个实数根分别为 x_1，x_2，这两个根与系数的关系是 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

2. 与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形：

（1）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

（2）$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；

（3）$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$.

提分·必记

特别提醒

一元二次方程根与系数的关系存在的前提是 $a\neq 0$，$b^2-4ac\geqslant 0$.

拨考向▸利用根与系数的关系求值

类型 1：根与系数的关系在求两根的和与积中的应用

例 1 设 x_1，x_2 是方程 $4x^2-7=2x^2+8x$ 的两个实数根，求 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值.

解题秘方： 根据根与系数的关系求值.

解： 整理，得 $2x^2-8x-7=0$.

$\therefore a=2$，$b=-8$，$c=-7$.

$\therefore \Delta=(-8)^2-4\times 2\times(-7)=120>0$.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-8}{2}=4$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-7}{2}=-\dfrac{7}{2}$.

提分·秘诀

特别提醒

已知一元二次方程有根，求两根之和或两根之积时，要把方程化成一元二次方程的一般形式，先确定方程有实数根，然后代入公式直接计算即可.

类型 2：根与系数的关系在已知方程的一个根，求另一个根与字母的值中的应用

例 2 已知一元二次方程 $x^2-6x+q=0$ 有一个根为 2，求方程的另一个根和 q 的值.

解题秘方： 利用两根之和与积求解.

解： 设这个方程的另一个根为 m，则 $m+2=6$，$2m=q$，$\therefore m=4$，$q=8$.

一题多解

本题也可以把 $x=2$ 代入方程中，求得字母 $q=8$，再解 $x^2-6x+8=0$，求得两根分别为 2 和 4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵当 $q=8$ 时，$\Delta=(-6)^2-4\times8=4>0$，∴另一个根为 4，$q$ 的值为 8.

教你一招：已知一根，利用根与系数的关系求方程中字母系数的策略.

求解此类问题时，若字母系数在一次项中，可先用两根之积的关系求出另一根，然后代入求字母系数，或者用两根之和的关系求字母系数.若字母系数在常数项中，可先用两根之和的关系求出另一根，然后代入方程求字母系数，或者用两根之积的关系求字母系数.

误区警示

利用一元二次方程的根与系数的关系求出字母系数的值后，一定要代入 b^2-4ac 中，只有满足 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，求出的值才符合题意.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用根与系数的关系法求涉根的代数式的值

例 3 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，求：

（1）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 的值；（2）$(x_1-x_2)^2$ 的值.

解题秘方：紧扣“与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形”进行解答.

解：（1）∵ x_1，x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$. ∴ $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{4}{2}=2$.

（2）∵ x_1，x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$. ∴ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=8$.

挑战·高分

方法点拨

利用根与系数的关系求代数式值的方法：

求与一元二次方程两根有关的代数式的值时，一般利用恒等变形将代数式转化成含 x_1+x_2，x_1x_2 的形式，从而结合根与系数的关系进行求解.

注意求值前提是：方程有两个实数根，即判别式大于或等于 0.

拔尖角度 2 利用分类讨论思想探究涉根的字母系数值的存在性

例 4 已知关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$，

（1）若方程有实数根，求 a 的取值范围；

（2）是否存在这样的实数 a，使方程的两根 x_1，x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：（1）方程没有指明是一元二次方程，则需考虑二次项系数为 0 和不为 0 两种情况；（2）对于存在性问题，先假设存在求出字母的值，再看它是否满足 $\Delta\geqslant0$ 来确定存在性.

解：（1）当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a\neq5$ 时，方程为一元二次方程，$\Delta=16+4(a-5)=4a-4\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$. ∴ a 的取值范围为 $a\geqslant1$.

（2）根据题意得 $x_1+x_2=\dfrac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\dfrac{1}{a-5}$.

∵ $x_1+x_2+x_1x_2=3$，∴ $\dfrac{4}{a-5}-\dfrac{1}{a-5}=3$.

解这个方程得 $a=6$. 经检验 $a=6$ 是方程的解. 又∵满足 $\Delta\geqslant0$，

∴存在实数 $a=6$，使方程的两根 x_1，x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$.

挑战·高分

解法提醒

- 对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或未指明有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；
- 解答涉一元二次方程根的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于零，最后确定字母值的存在性.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 一元二次方程根与系数的关系是中考的重点内容之一，利用此知识可解决：①已知方程，求两根的和或积，如例 1；②已知方程的一个根，求另一个根及方程的字母系数，如例 2；③求关于两根的代数式的值，如例 3 等问题，这些都是中考考查的内容，题型主要有选择题、填空题和解答题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用根与系数的关系求涉根的非对称式的值

例 5 [中考·天门]若 α，β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为（　　）

A. -13　　B. 12　　C. 14　　D. 15

试题评析： 本题考查了一元二次方程根与系数的关系以及一元二次方程解的定义，利用根与系数的关系整体代入求值是解题的关键.

解： ∵ α 为 $2x^2-5x-1=0$ 的实数根，

∴ $2\alpha^2-5\alpha-1=0$，即 $2\alpha^2=5\alpha+1$.

∴ $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\alpha+1+3\alpha\beta+5\beta=5(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+1$.

∵ α，β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，

∴ $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$，$\alpha\beta=-\frac{1}{2}$.

∴ $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\times\frac{5}{2}+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=12$.

答案： B

教你一招

求与根有关的代数式的值时，看代数式是否具有对称性，若具有对称性，则直接变形，将两根之和或两根之积代入求值；若不具有对称性，则将其中的某一个根单独代入方程中，得到与待求值的代数式相关的结构，进行整体代入求值.

考法 2 利用涉根的式子的值求字母的值

例 6 [中考·十堰]已知关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 x_1，x_2.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）若 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=16+x_1x_2$，求实数 k 的值.

试题评析： 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式，利用根与系数的关系以及根的判别式建立待定字母的方程或不等式是解题的关键.

解：（1）∵ 关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，

∴ $\Delta=(2k-1)^2-4(k^2-1)=-4k+5\geqslant 0$.

解得 $k\leqslant\frac{5}{4}$.

∴ 实数 k 的取值范围为 $k\leqslant\frac{5}{4}$.

特别提醒

实数 k 应满足的条件：

1. 使二次项系数不为 0；
2. 满足 $\Delta\geqslant 0$；
3. 满足给出的条件等式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∵关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，

∴ $x_1+x_2=1-2k$，$x_1x_2=k^2-1$.

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16+x_1x_2$，

∴ $(1-2k)^2-2(k^2-1)=16+(k^2-1)$，

即 $k^2-4k-12=0$.

解得 $k=-2$ 或 $k=6$（不符合题意，舍去）.

∴实数 k 的值为 -2.

误区警示

∵当 $k=6$ 时，$\Delta=(2\times6-1)^2-4\times(6^2-1)=-19<0$，

∴ $k=6$ 不合题意，舍去.

利用根与系数的关系求待定字母的值时，往往会犯单纯满足涉两根的关系式，而不考虑 $\Delta\geq0$ 的错误.

两年模拟兵法

☞答案见 249 页

1. [中考·凉山]一元二次方程 $3x^2-1=2x+5$ 两个实数根的和与积分别是（　　）

A. $\frac{3}{2}$，-2　　B. $\frac{2}{3}$，-2

C. $-\frac{2}{3}$，2　　D. $-\frac{3}{2}$，2

2. [中考·绵阳]关于 x 的方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根是 -2 和 1，则 n^m 的值为（　　）

A. -8　　B. 8　　C. 16　　D. -16

3. [中考·烟台]若 x_1，x_2 是方程 $x^2-2mx+m^2-m-1=0$ 的两个根，且 $x_1+x_2=1-x_1x_2$，则 m 的值为（　　）

A. -1 或 2　　B. 1 或 -2

C. -2　　D. 1

4. [中考·新疆]已知关于 x 的方程 $x^2+x-a=0$ 的一个根为 2，则另一个根是（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 3　　D. 6

5. [中考·黄石]关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x-2m+1=0$ 的两实数根之积为负，则实数 m 的取值范围是_____.

6. 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2+6x+3=0$ 的两个实数根，则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值为_____.

7. 不解方程，求下列方程的两根 x_1，x_2 的和与积.

（1）$x^2-3x-5=0$;

（2）$2x^2+5x-9=0$;

（3）$4x-2=x^2$.

8. [模拟·绵阳]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2=2(1-m)x-m^2$ 的两个实数根为 x_1，x_2.

（1）求实数 m 的最大整数值；

（2）设 $y=x_1+x_2$，当 y 取得最小值时，求相应 m 的值，并求出这个最小值.

9. [中考·鄂州]关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不等的实数根.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）设方程的两个实数根分别为 x_1，x_2，存不存在这样的实数 k，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.　　【导学号：6872150】

10. [中考·日照]如果 m，n 是两个不等的实数，且满足 $m^2-m=3$，$n^2-n=3$，那么代数式 $2n^2-mn+2m+2\,019$ 的值是多少?

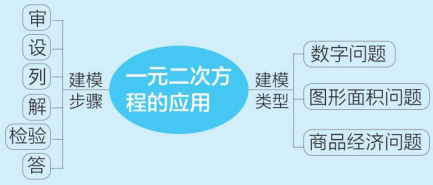
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6 应用一元二次方程

核心知识

- 商品经济问题
- 数字问题
- 图形的面积问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 建立一元二次方程的模型解应用题的一般步骤

1. 列一元二次方程解应用题的一般步骤归纳为：审、设、列、解、检验、答.

审——审题，明确已知量和未知量，找出它们之间的关系.

设——设未知数.

列——根据题目中的等量关系，列出方程.

解——解方程，求出未知数的值.

检验——检验方程的解能否保证实际问题有意义.

答——写出答案，应遵循“问什么，答什么，怎么问，怎么答”的原则.

2. 列一元一次方程解应用题注意事项：

（1）在一道应用题中，往往含有几个未知量，应恰当地选择其中的一个用字母 x 表示，然后根据各量之间的数量关系，将其他几个量用含 x 的代数式表示出来.

（2）设未知数时必须写清单位、用对单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，作答时必须写上单位.

（3）一定要对方程的根加以检验，看它是否符合实际意义.

提分·必记

特别解读

第一步“审”一般不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确已知量、未知量及它们之间的关系才能准确列出方程.

特别解读

列方程，这是解应用题的关键一步，一般先找出能够表达全部含义的一个等量关系，然后列代数式表示等量关系中的各个量，就得到含未知数的等式，即方程.

拨考向▸ 利用一元二次方程解实际应用问题

例 1 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 45 元，为了扩大销售、增加盈利尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施，经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 4 件，若商场平均每天盈利 2 100 元，每件衬衫应降价多少元？请完成下列问题：

（1）未降价之前，该商场销售这批衬衫每天的总盈利为_____元.

（2）降价后，设该商场售出每件衬衫应降价 x 元，则每件衬衫盈利_____元，平均每天可售出_____件.（用含 x 的代数式表示）

（3）请列出方程，求出 x 的值.

提分·秘诀

解法提醒

设未知数时，必须写清单位、正确使用单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致. 答时必须写上单位.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：用关系式“销售盈利 = 每件盈利 × 销售量”，建立方程进行解答.

解：（1）900　（2）$45-x$；$20+4x$

（3）由题意得 $(45-x)(20+4x)=2\,100$，

解得 $x_1=10$，$x_2=30$，

因尽快减少库存，故 $x=30$.

在盈利相同的情况下，尽快减少库存，就是要多卖，降价越多，卖的也越多，所以取降价多的那一种

答：每件衬衫应降价 30 元.

技巧点拨：本题可用列表法分析题目中各个量之间的关系，列表法的优点在于将题目中各个量列在一个表格中，从而理顺它们之间的关系，以便从中找出相等关系，列出方程，如本题分别从降价前后将每件盈利、销售量、销售盈利进行对比呈现，便可找出相等关系.

表格图例

	降价前	降价后
每件盈利	45	$45-x$
销售量	20	$20+4x$
销售盈利	45×20	$(45-x)\cdot(20+4x)$

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用化不规则为规则法用一元二次方程解几何问题

挑战·高分

例 2　如图 2-6-1，在宽为 20 m，长为 32 m 的矩形地面上修筑等宽的道路（图中阴影部分），余下的部分种上草坪，要使草坪的面积为 540 m^2，求道路的宽.

解题秘方 1：利用平移，把不规则图形面积转化为规则图形面积.

解法一　设道路的宽为 x m，由题意，

得 $(20-x)(32-x)=540$，

解得 $x_1=50$（不合题意，舍去），$x_2=2$.

答：道路的宽为 2 m.

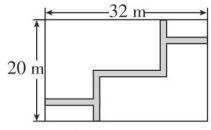


图 2-6-1

解题秘方 2：利用分割，把不规则图形面积转化为规则图形面积的和差，即剩余草坪面积 = 矩形面积 − 道路面积.

解法二　设道路的宽为 x m，由题意，

得 $32\times20-(20x+32x-x^2)=540$.

道路面积是长为 32 m 的横向道路面积与长为 20 m 的纵向道路面积的和减去重叠部分的小正方形面积

解得 $x_1=50$（不合题意，舍去），$x_2=2$.

答：道路的宽为 2 m.

教你一招：解决图形面积问题的关键是把实际问题转化为数学问题，把实际问题中的已知量和未知量归结到某一个几何图形中，然后利用几何知识来寻找它们之间的关系，列出一元二次方程求解，求不规则图形的面积时，一般是将不规则图形平移或分割成规则图形，再利用规则图形的面积公式列方程求解.

方法点拨

平移法是列一元二次方程解面积类应用题常用的方法，其核心思想是将不规则的几块图形通过平移转化为一块规则的图形，通过面积关系列一元二次方程求解.

如此题可将道路平移到矩形的右侧和下侧，则可得草坪的面积等于一个长为 $(32-x)$ m，宽为 $(20-x)$ m的矩形的面积，如图 2-6-2.

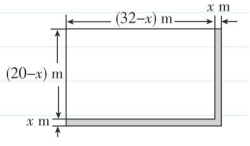


图 2-6-2


利用一元二次方程建模

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用图象信息法用一元二次方程解一次函数的问题

挑战·高分

特别提醒

用待定系数法求游客数量与票价之间的一次函数关系式.

例3 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观,如果游客过多,对馆中的珍贵文物会产生不利影响,但同时考虑到文物的保存费用问题,还要保证一定的门票收入.因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制游客数量,在该方法的实施过程中发现,每周游客数量与票价之间存在着如图 2-6-3 的一次函数关系,在这种情况下,如果要保证每周 4 万元的门票收入,那么每周应限定游客数量为多少?门票价格应是多少?

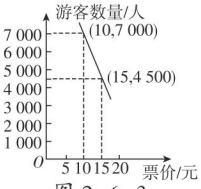


图 2-6-3

特别提醒

直接得出游客数量与票价应满足的方程.

解题秘方: 利用函数图象的信息用待定系数法求游客数量与票价间的数量关系.

解: 设每周参观游客数量 y(人)与票价 x(元)之间的一次函数表达式为 $y=kx+b$($x>0$),

根据题意,得 $\begin{cases}10k+b=7\,000,\\15k+b=4\,500,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\,000.\end{cases}$

$\therefore y=-500x+12\,000$($x>0$).

$\because xy=40\,000$,即 $x(-500x+12\,000)=40\,000$,

$\therefore x^2-24x+80=0$. 解得 $x_1=20$,$x_2=4$.

把 $x_1=20$,$x_2=4$ 分别代入 $y=-500x+12\,000$,

得 $y_1=2\,000$,$y_2=10\,000$.

$\because$ 要控制游客数量,$\therefore$ 取 $x=20$,此时 $y=2\,000$.

$\therefore$ 每周应限定游客数量为 2 000 人,门票价格应是 20 元.

特别提醒

在门票收入相同的情况下,控制游客数量,就是尽量减少游客数量,所以取游客数量少的情况作为符合题意的答案.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

随着课程改革的不断深入,一元二次方程的实际应用近年来与经济相联系的应用题在各地中考题中大量涌现,在中考中单独考查时主要考查利润问题、增长率问题,也常与几何图形的面积问题及函数问题相结合,题型有选择题、填空题和解答题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用一元二次方程解数字问题

例4 [模拟·武汉]有一个两位数,它的十位数字与个位数字之和是 8,如果把十位数字与个位数字调换,所得的两位数与原来的两位数的乘积为 1 855,求原来的两位数.

试题评析: 本题考查的是用一元二次方程解数字问题,弄清数字和数字表示的数间的关系是解题关键.

知识储备

整数的常用表示方法:

1. 两位数 = 十位上的数字 × 10+ 个位上的数字.
2. 三位数 = 百位上的数字 × 100+ 十位上的数字 × 10+ 个位上的数字.
3. 三个连续整数,设中间的

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解：设原来的两位数的十位数字为 x，

则个位数字为 $8-x$，

列方程，得 $[10x+(8-x)][10(8-x)+x]=1\,855$，

整理，得 $x^2-8x+15=0$，

解方程，得 $x_1=3$，$x_2=5$，

由原来的两位数的个位数字为 $8-x$，

可得个位数字为 5 或 3.

答：原来的两位数为 35 或 53.

教你一招：列方程求解数字问题的方法：

解决数字问题的关键是用代数式表示出这个多位数的数值，设未知数时，通常采用间接设元法，即设这个多位数的某一数位上的数字为 x，然后将其他数位上的数字用含 x 的代数式表示出来，最后再根据题中的数量关系列方程即可.

一个为 x，则其余两个分别为 $x-1$，$x+1$.

4. 三个连续偶数可设为 $2x-2$，$2x$，$2x+2$；三个连续奇数可设为 $2x-3$，$2x-1$，$2x+1$.

考法 2 利用一元二次方程解增长率问题

例 5 [中考·安顺] 某地 2015 年为做好“精准扶贫”，投入资金 1 280 万元用于异地安置，并规划投入资金逐年增加，2017 年在 2015 年的基础上增加投入资金 1 600 万元.

（1）从 2015 年到 2017 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为多少？

（2）在 2017 年异地安置的具体实施中，该地计划投入资金不低于 500 万元用于优先搬迁租房奖励，规定前 1 000 户（含第 1 000 户）每户每天奖励 8 元，1 000 户以后每户每天奖励 5 元，按租房 400 天计算，求 2017 年该地至少有多少户享受到优先搬迁租房奖励.

试题评析：本题考查了一元二次方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出一元二次方程；（2）根据各数量之间的关系，列出一元一次不等式.

解：（1）设该地投入异地安置资金的年平均增长率为 x，

根据题意得 $1\,280(1+x)^2=1\,280+1\,600$，

解得 $x_1=0.5=50\%$，$x_2=-2.5$（舍去）.

答：从 2015 年到 2017 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为 50%.

（2）设 2017 年该地有 a 户享受到优先搬迁租房奖励，

根据题意得 $8\times1\,000\times400+5\times400(a-1\,000)\geqslant5\,000\,000$，

解得 $a\geqslant1\,900$.

答：2017 年该地至少有 1 900 户享受到优先搬迁租房奖励.

知识储备

求增长率（降低率）问题的公式：

a 为起始量，b 为终止量，n 为增长（或降低）的次数，求平均增长率：$a(1+x)^n=b$（x 为平均增长率）；求平均降低率：$a(1-x)^n=b$（x 为平均降低率）.

详解

2016 年投入资金 $1\,280(1+x)$ 万元，

2017 年投入资金 $1\,280(1+x)^2$ 万元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用一元二次方程解商品销售问题

例6 [中考·德州]为积极响应新旧动能转换,提高公司经济效益,某科技公司近期研发出一种新型高科技设备,每台设备成本价为30万元,经过市场调研发现,每台售价为40万元时,年销售量为600台;每台售价为45万元时,年销售量为550台.假定该设备的年销售量y(单位:台)和销售单价x(单位:万元)成一次函数关系.

(1)求年销售量y与销售单价x的函数关系式;

(2)根据相关规定,此设备的销售单价不得高于70万元,如果该公司想获得10 000万元的年利润,则该设备的销售单价应是多少万元?

试题评析: 本题考查了待定系数法求一次函数表达式以及一元二次方程的应用,解题的关键是:(1)根据年销售量y(单位:台)和销售单价x(单位:万元)成一次函数关系,利用待定系数法求出函数关系式;(2)找准等量关系,正确列出一元二次方程.

解: (1)设年销售量y与销售单价x的函数关系式为$y=kx+b(k\neq0)$,

将(40,600)、(45,550)代入$y=kx+b$,得:

$$\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-10,\\b=1\,000,\end{cases}$$

$\therefore$年销售量y与销售单价x的函数关系式为$y=-10x+1\,000$.

(2)$\because$此设备的销售单价为x万元,$\therefore$每台设备的利润为$(x-30)$万元,年销售量为$(-10x+1\,000)$台,

根据题意得$(x-30)(-10x+1\,000)=10\,000$,

整理,得$x^2-130x+4\,000=0$,解得$x_1=50$,$x_2=80$.

$\because$此设备的销售单价不得高于70万元,$\therefore x=50$.

答:该设备的销售单价应是50万元.

知识储备

利润=售价-成本;

利润率$=\frac{\text{利润}}{\text{成本}}\times100\%$;

售价=成本×(1+利润率);

总利润=总售价-总成本=单件利润×总销量.

两年模拟兵法

☞答案见250页

1. 有1人患了流感,两轮传染后共有100人患了流感,那么在每轮传染中,平均1人传染了(　　)人

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

2. [模拟·冷水滩]中国古代数学家杨辉的《田亩比类乘除捷法》有这么一道题:“直田积八百六十四步,只云长阔共六十步,问长多阔几何?”意思是:一块矩形田地的面积为864平方步,只知道它的长与宽共60步,问它的长比宽多多少步?经过计算,你的结论是:长比宽多(　　)

A. 12步　　B. 24步

C. 36步　　D. 48步

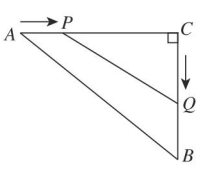
3. [模拟·全椒]如图,在$\triangle ABC$中,$AC=50$ m,$BC=40$ m,$\angle C=90^\circ$,点P从点A开始沿AC边向点C以2 m/s的速度匀速移动,同时另一点Q从C点开始以3 m/s的速度沿着CB匀速移动,点Q到达点B为止,点Q停止时点P也停止运动.当$\triangle PCQ$的面积等于300 m^{2}时,运动时间

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

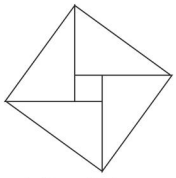
为（　　）

A. 5 s　　B. 20 s

C. 5 s 或 20 s　　D. 不确定



（第 3 题）


（第 4 题）

4. 在北京召开的国际数学家大会的会徽是由 4 个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形，如图，若大正方形的面积是 32，小正方形的面积是 4，则每个直角三角形的周长是_____.

5. [**模拟·嘉祥**]贵阳市某楼盘准备以每平方米 6 000 元的均价对外销售，由于有关房地产的新政策出台后，购房者持币观望，房地产开发商为了加快资金周转，对价格经过两次下调后，决定以每平方米 4 860 元的均价开盘销售.

（1）求平均每次下调的百分率.

（2）某人准备以开盘价均价购买一套 100 平方米的住房，开发商给予以下两种优惠方案以供选择：

①打 9.8 折销售；

②不打折，一次性送装修费每平方米 80 元，试问哪种方案更优惠?

6. [**中考·南宁**]为响应国家全民阅读的号召，某社区鼓励居民到社区阅览室借阅图书，并统计每年的借阅人数和图书借阅总量（单位：本），该阅览室在 2015 年图书借阅总量是 7 500 本，2017 年图书借阅总量是 10 800 本.

（1）求该社区阅览室的图书借阅总量从 2015 年至 2017 年的年平均增长率；

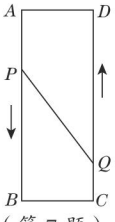
（2）已知 2017 年该社区居民借阅图书人数有 1 350 人，预计 2018 年达到 1 440 人，如果 2017 年至 2018 年图书借阅总量的增长率不低于 2015 年至 2017 年的年平均增长率，那么 2018 年的人均借阅量比 2017 年增长 $a\%$，求 a 的值至少是多少.

7. 如图，A，B，C，D 为矩形的四个顶点，$AB=16\ \text{cm}$，$AD=6\ \text{cm}$，P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动，一直到达点 B 为止，点 Q 以 2 cm/s 的速度向点 D 移动，点 P 停止运动时点 Q 也停止运动.

（1）P，Q 两点开始运动几秒后，四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 cm^2?

（2）P，Q 两点开始运动几秒后，点 P 和点 Q 的距离第一次是 10 cm?

【**导学号：6872150**】



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

逆向思维在一元二次方程中的应用

荣老师告诉你 逆向思维是执果索因，知本求源，从原问题的相反方向着手的一种思维．它是数学思维的一个重要方面，是创造性思维的一个组成部分，也是进行训练的载体，培养学生逆向思维过程，也是培养学生思维敏捷性的过程．

思维点一 ▸ 一元二次方程的定义

正向：利用定义识别一元二次方程

例 1 下列方程中，是关于 x 的一元二次方程的是（　　）

A. $2x-1=5x$　　B. $3x^2+5x=(3x-1)(x+1)$

C. $\frac{1}{x}+3=2x^2$　　D. $x^2+x+1=0$

解题秘方： 利用一元二次方程的定义进行识别．

答案： D

逆向：已知一元二次方程求方程中待定字母的值

例 2 已知关于 x 的方程 $(m-4)x^{|m|-2}+8x+1=0$ 是一元二次方程，则 m 的值为_____.

答案： -4

方法点拨： 正向考查时，若化简合并后二次项系数为零，则该方程不是一元二次方程；逆向考查时，若条件中已说明是一元二次方程，则隐含条件“二次项系数不为零”．

思维点二 ▸ 一元二次方程的根

正向：利用一元二次方程根的定义找根

例 3 ［中考·重庆］ 一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的根是（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=-2$　　B. $x_1=1$，$x_2=2$

C. $x_1=1$，$x_2=-2$　　D. $x_1=0$，$x_2=2$

答案： D

方法点拨： 找一元二次方程的根：可解（直接利用解一元二次方程的方法解），可代（利用根的定义检验）．

逆向 1：已知一元二次方程的根，求待定字母的值

例 4 已知 $x=-2$ 是关于 x 的方程 $x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$ 的一个根，则 a 的值是（　　）

A. 1 或 4　　B. -1 或 -4

C. -1 或 4　　D. 1 或 -4

解题秘方： 根据方程的根的定义将已知的根代入方程中转化为待定字母是未知数的方程，求出待定字母的值．

解： 将 $x=-2$ 代入关于 x 的一元二次方程 $x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$，得 $4+5a+a^2=0$，解得 $a_1=-1$，$a_2=-4$.

答案： B

逆向 2：已知一元二次方程的根，还原方程

※已知方程的一个根，还原方程．

例 5 已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，则代数式 $4x^2+4x+2\,019=$_____.

解题秘方： 将已知条件还原成方程，然后整体代入求值．

解： 由 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 可知 $2x+1=\sqrt{3}$，即 $4x^2+4x=2$，$\therefore 4x^2+4x+2\,019=2\,021$.

答案： 2 021

※已知方程的两个根，还原方程．

例 6 已知一元二次方程的两根分别是 2 和 -3，则这个一元二次方程是（　　）

A. $x^2-6x+8=0$　　B. $x^2+2x-3=0$

C. $x^2-x-6=0$　　D. $x^2+x-6=0$

解题秘方： 采用已知两根还原方程的方法还原方程．

解： **解法 1** 逆用因式分解得 $(x-2)(x+3)=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

0，即 $x^2+x-6=0$.

解法 2 逆用根与系数的关系得 $x^2-(2-3)x+2\times(-3)=0$，即 $x^2+x-6=0$.

答案： D

逆向 3：利用根的定义构造一元二次方程

若 $x=m$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则等式 $am^2+bm+c=0$ 成立；反之，若等式 $an^2+bn+c=0$ 成立，则 $x=n$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

例 7 [中考·呼和浩特] 已知 $a\geqslant 2$，$m^2-2am+2=0$，$n^2-2an+2=0$，则 $(m-1)^2+(n-1)^2$ 的最小值是（　　）

A. 6　　B. 3　　C. −3　　D. 0

解题秘方： 先构造出以 m，n 为两根的一元二次方程，然后利用根与系数的关系进行求值.

解： ∵ $m^2-2am+2=0$，$n^2-2an+2=0$，

∴ m，n 是关于 x 的方程 $x^2-2ax+2=0$ 的两根.

∴ $m+n=2a$，$mn=2$.

∴ $(m-1)^2+(n-1)^2=m^2-2m+1+n^2-2n+1=(m+n)^2-2mn-2(m+n)+2=4a^2-4-4a+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-3$.

∵ $a\geqslant 2$，

∴当 $a=2$ 时，$(m-1)^2+(n-1)^2$ 取最小值，最小值为 $4\times\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-3=6$.

答案： A

方法点拨： 首先由两个等式的结构的相同性，将 m，n 构造成关于 x 的方程 $x^2-2ax+2=0$ 的两根，从而利用根与系数的关系，得到 $m+n=2a$，$mn=2$，然后将原代数式恒等变形成关于 $m+n$，mn 的表达形式后整体代入，然后利用配方法求最小值.

思维点三 ▶ 根的判别式

正向：已知方程的系数——▶计算——▶判断根的情况

例 8 [中考·怀化] 一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个不等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

解题秘方： 先计算出根的判别式的值，再判断方程的根的情况.

答案： A

逆向：已知方程根的情况——▶计算——▶求待定的系数的值或取值范围

例 9 [中考·聊城] 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2-3x-1=0$ 有两个不等的实数根，那么 k 的取值范围是_____.

解题秘方： 根据一元二次方程根的情况，列出关于 k 的不等式进行求解.

答案： $k>-\frac{9}{4}$ 且 $k\neq 0$

思维点四 ▶ 根与系数的关系

正向：已知方程的系数求与两根之和或两根之积有关的代数式的值

例 10 [中考·烟台] 若 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，则 $x_1^2-x_1+x_2$ 的值为（　　）

A. −1　　B. 0　　C. 2　　D. 3

解： 先由 x_1 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，得到 $x_1^2=2x_1+1$，代入 $x_1^2-x_1+x_2$，得 $x_1^2-x_1+x_2=x_1+x_2+1$，利用 $x_1+x_2=2$，可得 $x_1^2-x_1+x_2=3$.

答案： D

逆向：已知与两根之和或两根之积有关的代数式的值求方程中待定的系数

例 11 方程 $x^2+2kx+k^2-2k+1=0$ 的两个实数根 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=4$，则 k 的值为____.

解： 由 $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2-2x_1\cdot x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=4$，得 $4k^2-2(k^2-2k+1)=4$，∴ $k_1=1$，$k_2=-3$.. 又∵ $\Delta=4k^2-4(k^2-2k+1)\geqslant 0$ ∴ $k\geqslant\frac{1}{2}$. ∴ $k=1$.

答案： 1

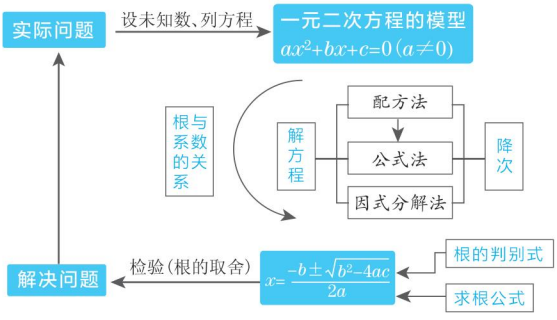
方法点拨： 逆向运用根与系数的关系求待定字母的值时，注意要代入到根的判别式中检验.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）.

2. 一元二次方程的解法有：（1）直接开平方法；（2）配方法；（3）公式法；（4）因式分解法.

3. 一元二次方程根的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$，一元二次方程根的情况有三种：

（1）有两个不等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac>0$；

（2）有两个相等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac=0$；

（3）无实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac<0$.

4. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

知识方法专题

知识必学

专题一 一元二次方程的解法

链接中考» 一元二次方程的解法是本章的核心，也是本章的基础. 一般的考查方式是选择题，给出一个一元二次方程，选择它正确的解，只关注结果；有时作为解答题考查，方法不限，注重对过程的考查.

例1 [中考·岳阳] 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根是_____.

解题秘方： 根据方程的特点选择合适的方法去解.

解：解法一 因式分解，得 $(x-1)(x-2)=0$，

$\therefore x-1=0$ 或 $x-2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

解法二 $\because a=1$，$b=-3$，$c=2$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=1$.

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\times1}$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=2$.

答案： 1，2

方法点拨： 一元二次方程的解法有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法. 各种解法的选取顺序依次为直接开平方法→因式分解法→公式法→配方法.

专题二 一元二次方程的根

链接中考» 涉及一元二次方程的根的问题有根的定义、根的判别式和根与系数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的关系，单独考查时一般以填空题、选择题的形式出现，综合考查时常以解答题的形式出现．

类型一　一元二次方程的根与根的判别式

例2　[中考·咸宁]已知关于x的一元二次方程$mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1)证明：不论m为何值，方程总有实数根；

(2)m为何整数时，方程有两个不等的正整数根？

解题秘方：紧扣一元二次方程根的情况，列出方程中待求字母的关系式解决问题．

(1)**证明：**$\because a=m$，$b=-(m+2)$，$c=2$，

$\therefore\ \Delta=b^2-4ac=(m+2)^2-8m=(m-2)^2\geqslant 0$.

$\therefore$不论m为何值，方程总有实数根．

(2)**解：**$\because mx^2-(m+2)x+2=0$，

$\therefore (x-1)(mx-2)=0$.

$\therefore x-1=0$或$mx-2=0$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{m}$．

$\because$方程有两个不等的正整数根，

$\therefore m=1$.

方法点拨：涉及一元二次方程根的情况时，一般都要考虑根的判别式．根据根的判别式值的情况可以判断一元二次方程根的情况，也可以根据一元二次方程根的情况，判断根的判别式值的正负性．

类型二　一元二次方程的根和根与系数的关系

例3　(1)[中考·黄冈]若方程$x^2-2x-1=0$的两个根为x_1，x_2，则$x_1+x_2-x_1\cdot x_2$的值为_____.

(2)[中考·汕尾]已知关于x的方程$x^2+2x+a-2=0$.

①若该方程有两个不等的实数根，求实数a的取值范围；

②当该方程的一个根为1时，求a的值及方程的另一根．

解题秘方：紧扣根与系数的关系，利用此关系建立方程中待求字母的等量关系和不等关系解决问题．

解：(1)3

(2)①依题意有$\Delta=2^2-4(a-2)>0$，解得$a<3$.

②**方法一**　将$x=1$代入方程得$1+2+a-2=0$，解得$a=-1$，

$\therefore$原方程为$x^2+2x-3=0$.

解得$x_1=1$，$x_2=-3$.

$\therefore a=-1$，方程的另一根为-3.

方法二　设另一根为x_2，

$\because 1+x_2=-2$，

$\therefore x_2=-3$.

$\therefore a-2=1\times(-3)$.

$\therefore a=-1$.

方法点拨：已知方程的一根求另一根及方程中待定字母的值时，可以将已知的根直接代入方程，先求待定字母的值，再求另一根，也可以根据根与系数的关系先求另一根，再求待定字母的值．

专题三　一元二次方程的应用

链接中考≫一元二次方程的应用是本章重点考查的知识点，它是学习一元二次方程解法的真正目的，解决有关一元二次方程的应用题，关键就是建立一元二次方程模型，有从实际生活中建立的一元二次方程模型，也有从几何问题中建立的一元二次方程模型．考查的形式主要以解答题为主．

类型一　建立一元二次方程解决实际问题

例4　某批发商以每件50元的价格购进800件T恤，第一个月以单价80元销售，售出了200件；第二个月如果单价不变，预计仍可售出200件，批发商为增加销售量，决定降价

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

销售，根据市场调查，单价每降低1元，可多售出10件，但最低单价应高于购进的价格；第二个月结束后，批发商将对剩余的T恤一次性清仓销售，清仓时单价为40元．设第二个月单价降低x元．

（1）填表（不需化简）：

时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价/元	80		40
销售量/件	200		

（2）如果批发商希望通过销售这批T恤获利9000元，那么第二个月的单价应是多少元？

解题秘方：根据题意建立一元二次方程模型解决问题．

解：（1）$80-x$；$200+10x$；

$800-200-(200+10x)$

（2）根据题意，得

$80\times200+(80-x)(200+10x)+40\times[800-200-(200+10x)]-50\times800=9000$.

整理，得$x^2-20x+100=0$.

解得$x_1=x_2=10$.

当$x=10$时，$80-x=70>50$.

所以第二个月的单价应是70元．

类型二　建立一元二次方程解决几何问题

例5　李明准备进行如下操作：把一根长40 cm的铁丝剪成两段，并把每段首尾相连各围成一个正方形．

（1）要使这两个正方形的面积之和等于58 cm^2，李明应该怎么剪这根铁丝？

（2）李明认为这两个正方形的面积之和不可能等于48 cm^2，你认为他的说法正确吗？请说明理由．

解题秘方：紧扣题意中提供的面积关系列出一元二次方程解决问题．

解：（1）设剪成的较短的铁丝长为x cm，则较长的铁丝长为$(40-x)$ cm，列方程，得$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2=58$.

解方程，得$x_1=12$，$x_2=28$，

当$x=12$时，较长的铁丝长度为$40-12=28$(cm)；

当$x=28$时，较长的铁丝长度为$40-28=12$(cm)<28 cm，故这种情况舍去．

答：李明应该把铁丝剪成长度为12 cm和28 cm的两段．

（2）李明的说法正确，理由如下：

设剪成的较短的铁丝长度为m cm，较长的铁丝长度为$(40-m)$ cm.

由题意，得$\left(\frac{m}{4}\right)^2+\left(\frac{40-m}{4}\right)^2=48$.

整理，得$m^2-40m+416=0$.

$\because\Delta=(-40)^2-4\times416=-64<0$，

$\therefore$方程$m^2-40m+416=0$无实数根．

$\therefore$李明的说法正确，即这两个正方形的面积之和不可能等于48 cm^2.

方法点拨：解决一元二次方程的应用题把握两个关键：一是根据等量关系建立一元二次方程；二是根据题意进行根的取舍．

方法必会

专题四　整体代入法

专题解读≫整体代入法就是在解决问题时，不是着眼于它的局部特征，而是把注意力和着眼点放在问题的整体结构上，通过对整体的把握和运用达到解决问题的目的．在本章中主要体现在求与根有关的式子的值的问题上．

例6　已知x_1，x_2是方程$3x^2-2x-4=0$的两实数根，不解方程求$3x_1^2+2x_2$的值．

解题秘方：根据根的定义及根与系数的关系整体代入求值．

解：$\because x_1$是方程$3x^2-2x-4=0$的根，

$\therefore 3x_1^2-2x_1-4=0$，即$3x_1^2=2x_1+4$.

根据根与系数的关系可知$x_1+x_2=\frac{2}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 3x_1^2+2x_2=2x_1+4+2x_2$

$=2(x_1+x_2)+4=\frac{16}{3}$.

方法点拨：解决与一元二次方程的根有关的求值问题，通常用到整体代入法．将一元二次方程的根代入方程或利用根与系数的关系建立与两根的和与积有关的式子，最后求值．

专题五 分类讨论思想

专题解读» 分类讨论思想是一种常见的数学思想，在解含字母的一元二次方程的有关问题时经常用到，具体来说，就是把包含多种可能情况的问题，按照某一标准分成若干类，然后分别进行解决．

例7 已知△ABC的两边AB，AC的长是关于x的一元二次方程$x^2-(2k+1)x+k(k+1)=0$的两个实数根，第三边BC的长为5.

（1）k为何值时，△ABC是以BC为斜边的直角三角形？

（2）k为何值时，△ABC是等腰三角形？并求此时△ABC的周长．

解题秘方：紧扣已知的边是等腰三角形的底或腰进行分类讨论．

解：（1）解方程，得$x_1=k$，$x_2=k+1$.

由勾股定理，得$k^2+(k+1)^2=5^2$.

解得$k_1=3$，$k_2=-4$（舍去）．

即当$k=3$时，△ABC是以BC为斜边的直角三角形．

（2）当△ABC是等腰三角形时，讨论如下：

①BC为底，$AB=AC$，此时应有$\Delta=0$，

但$\Delta=[-(2k+1)]^2-4k(k+1)=1\neq 0$，

所以这种情况不存在．

②BC为腰，有$AB=BC$或$AC=BC$这两种情况存在，求解如下：

当BC为△ABC的腰时，它也是已知方程的根，

$5^2-5(2k+1)+k(k+1)=0$.

解得$k_1=4$，$k_2=5$.

当$k=4$时，方程的两个根为$x_1=k=4$，$x_2=k+1=5$，

此时△ABC的周长为$4+5+5=14$；

当$k=5$时，方程的两个根为$x_1=k=5$，$x_2=k+1=6$，

此时△ABC的周长为$6+5+5=16$.

综上所述k为4或5时，△ABC是等腰三角形，△ABC的周长为14或16.

好题必解 ☞答案见251页

题型1：巧解一元二次方程

1. 解方程（平方、换元）：$x^2+\frac{1}{x^2}-2(x+\frac{1}{x})-1=0$.

2. 解方程（特殊值法）：$(x-2\,016)(x-2\,017)=2\,018\times 2\,019$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：巧用根的判别式求式子的值

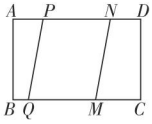
3. 试用根的判别式探求$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$的最值.

题型 3：巧用根与系数的关系求待定字母的值

4. 已知α，β是关于x的一元二次方程$x^2+(2m+3)x+m^2=0$的两个不等的实数根，且满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-1$. 求$m$的值.

题型 4：巧用一元二次方程解几何问题

5. 如图，在矩形$ABCD$中，$BC=20$ cm，点P，Q，M，N分别从点A，B，C，D出发沿AD，BC，CB，DA方向在矩形的边上同时运动，当有一个点先到达所在边的另一个端点时，运动立即停止. 已知在相同时间内，若$BQ=x$ cm$(x\neq 0)$，则$AP=2x$ cm，$CM=3x$ cm，$DN=x^2$ cm. 当x为何值时，以PQ，MN为两边，以矩形的边(AD或BC)的一部分为第三边构成一个三角形?



(第 5 题)

题型 5：巧用一元二次方程解实际问题

6. [中考·宜昌]某市创建“绿色发展模范城市”，针对境内长江段两种主要污染源：生活污水和沿江工厂污染物排放，分别用“生活污水集中处理”(下称甲方案)和“沿江工厂转型升级”(下称乙方案)进行治理，若江水污染指数记为Q，沿江工厂用乙方案进行一次性治理(当年完工)，从当年开始，所治理的每家工厂一年降低的Q值都以平均值n计算. 第一年有 40 家工厂用乙方案治理，共使Q值降低了 12. 经过三年治理，境内长江水质明显改善.

(1) 求n的值;

(2) 从第二年起，每年用乙方案新治理的工厂数量比上一年都增加相同的百分数m，三年来用乙方案治理的工厂数量共 190 家，求m的值，并计算第二年用乙方案新治理的工厂数量;

(3) 该市生活污水用甲方案治理，从第二年起，每年因此降低的Q值比上一年都增加相同的数值a. 在(2)的情况下，第二年，用乙方案所治理的工厂合计降低的Q值与当年因甲方案治理降低的Q值相等，第三年，用甲方案使Q值降低了 39.5. 求第一年用甲方案治理降低的Q值及a的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章测试卷 ☞答案见252页

（100分 60分钟）

一、选择题（每题4分，共32分）

1. 下列方程是关于x的一元二次方程的是（　　）

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=2$

C. $x^2+2x=y^2-1$　　D. $3(x+1)^2=2(x+1)$

2. 一元二次方程$(x-5)^2=x-5$的解是（　　）

A. $x=5$　　B. $x=6$

C. $x=0$　　D. $x_1=5$，$x_2=6$

3. 一元二次方程$x^2-2x+1=0$的根的情况为（　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

4. 已知关于x的一元二次方程$x^2-bx+c=0$的两根分别为$x_1=1$，$x_2=-2$，则b与c的值分别为（　　）

A. $b=-1$，$c=2$　　B. $b=1$，$c=-2$

C. $b=1$，$c=2$　　D. $b=-1$，$c=-2$

5. 用配方法解方程$x^2+10x+9=0$，配方后可得（　　）

A. $(x+5)^2=16$　　B. $(x+5)^2=1$

C. $(x+10)^2=91$　　D. $(x+10)^2=109$

6. 将一块正方形铁皮的四角各剪去一个边长为3 cm的小正方形，做成一个无盖的盒子．已知盒子的容积为300 cm^3，则原铁皮的边长为（　　）

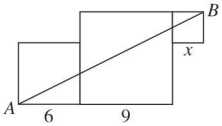
A. 10 cm　　B. 13 cm　　C. 14 cm　　D. 16 cm

7. 已知关于x的一元二次方程$(k-2)^2x^2+(2k+1)x+1=0$有两个不等的实数根，则k的取值范围是（　　）

A. $k>\frac{4}{3}$且$k\neq 2$　　B. $k\geqslant\frac{4}{3}$且$k\neq 2$

C. $k>\frac{3}{4}$且$k\neq 2$　　D. $k\geqslant\frac{3}{4}$且$k\neq 2$

8. 如图是由三个边长分别为6，9和x的正方形所组成的图形，若直线AB将它分成面积相等的两部分，则x的值是（　　）



（第8题）

A. 1或9　　B. 3或5　　C. 4或6　　D. 3或6

二、填空题（每题4分，共16分）

9. 已知实数a，b分别是方程$x^2-x-1=0$的两个根，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值为_____.

10. 六一儿童节当天，九（二）班的每名同学都向本班其他每名同学送一份小礼品，全班共互送306份小礼品，则该班有____名同学．

11. 在一幅长8分米，宽6分米的矩形风景画（如图①）的四周镶上宽度相同的金色纸边，制成一幅矩形挂图（如图②），使整个挂图的面积是80平方分米，设金色纸边宽为x分米，可列方程为_____.


图①


图②

（第11题）

12. 三角形的每条边的长都是方程$x^2-6x+8=0$的根，则三角形的周长是_____.

三、解答题（共52分）

13.（12分）我们已经学习了一元二次方程的四种解法：因式分解法、直接开平方法、配方法和公式法．请选择合适的方法解下列方程．

（1）$x^2-3x+1=0$；（2）$(x-1)^2=3$；

（3）$x^2-3x=0$；　（4）$x^2-2x=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（8分）定义新运算：对于任意实数 m，n 都有 $m \star n=m^2n+n$，等式右边是常用的加法、乘法及乘方运算．例如：$-3 \star 2=(-3)^2\times 2+2=20$．根据以上知识解决问题：若 $2 \star a$ 的值小于0，请判断关于 x 的方程：$2x^2-bx+a=0$ 的根的情况．

15.（10分）关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x-k=0$ 有两个不等的实数根．

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 k 为负整数，试求出方程的根．

16.（10分）某养殖户每年的养殖成本包括固定成本和可变成本，其中固定成本每年均为4万元，可变成本逐年增长，已知该养殖户第1年的可变成本为2.6万元，设可变成本平均年增长率为 x.

（1）用含 x 的代数式表示第3年的可变成本为_____万元；

（2）如果该养殖户第3年的养殖成本为7.146万元，求可变成本平均年增长率 x.

17.（12分）某汽车销售公司6月份销售某厂家的汽车，在一定范围内，每部汽车的进价与销售量有如下关系：若当月仅售出1部汽车，则该部汽车的进价为27万元，每多售出1部，所有售出的汽车的进价均降低0.1万元/部，月底厂家根据销售量一次性返利给销售公司，销售量在10部以内（含10部），每部返利0.5万元；销售量在10部以上，每部返利1万元．

（1）若该公司当月售出3部汽车，则每部汽车的进价为_____万元；

（2）如果汽车的售价为28万元/部，该公司计划当月盈利12万元，那么需要售出多少部汽车？（盈利＝销售利润＋返利）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第一章 特殊平行四边形

1 菱形的性质与判定

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** C

4. C **点拨:** 设 AE、BF 相交于点 O,易证四边形 $ABEF$ 是菱形,

$\therefore AE \perp BF, OA = OE, OB = OF = \frac{1}{2}BF = 6.$

$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$

$\therefore AE = 2OA = 16.$

5. D

6. (1) **证明:** $\because AB = AD$,

$\therefore \angle ABD = \angle ADB.$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD.$

$\therefore \angle ADB = \angle CBD.$

$\because AB = AD, AC \perp BD$,

$\therefore BO = DO.$

在 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COB$ 中, $\begin{cases} \angle AOD = \angle COB, \\ OD = OB, \\ \angle ADO = \angle CBO, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB.$

$\therefore AO = OC.$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) **解:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{5}.$

$\therefore OC = \sqrt{CD^2 - OD^2} = 2.$

$\therefore AC = 4. \therefore S_{菱形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 4\sqrt{5}.$

7. (1) **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AO = CO, AD /\!/ BC.$

$\therefore \angle FAO = \angle ECO.$

又 $\angle AOF = \angle COE$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE. \therefore AF = EC.$

(2) **解:** 四边形 $BEDF$ 可能是菱形,理由如下:

由(1)知, $\triangle AOF \cong \triangle COE, \therefore OE = OF.$

又 $OB = OD, \therefore EF$ 与 BD 互相平分.

$\therefore$ 当 $EF \perp BD$ 时,四边形 $BEDF$ 为菱形.

8. (1) **证明:** $\because AF /\!/ BC$,

$\therefore \angle AFE = \angle DBE.$

$\because E$ 是 AD 的中点, $\therefore AE = DE.$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEB$ 中, $\begin{cases} \angle AFE = \angle DBE, \\ \angle FEA = \angle BED, \\ AE = DE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB$(AAS).

(2) **证明:** 由(1)知, $\triangle AEF \cong \triangle DEB$,

则 $AF = DB.$

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore DB = DC. \therefore AF = CD.$

$\because AF /\!/ BC$,

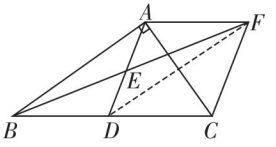
$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

$\because \angle BAC = 90°, D$ 是 BC 的中点,

易得 $AD = DC = \frac{1}{2}BC.$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形.

(3) **解:** 如图,连接 DF,



(第8题)

$\because AF /\!/ BD, AF = BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

$\therefore DF = AB = 5.$

$\because$ 四边形 $ADCF$ 是菱形,

$\therefore S_{菱形ADCF} = \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10.$

9. (1) **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AD /\!/ BC. \therefore \angle EDF = \angle DFC.$

$\because DF$ 平分 $\angle ADC, \therefore \angle EDF = \angle CDF.$

$\therefore \angle DFC = \angle CDF. \therefore CD = CF.$

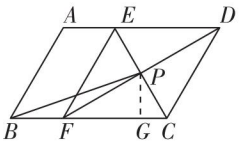
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同理可得 $CD=DE$,$\therefore CF=DE$.

又$\because CF\parallel ED$,$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 为平行四边形.

$\because CD=CF$,$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 为菱形.

(2)**解**:如图,过 P 作 $PG\perp BC$ 于 G,



(第9题)

$\because AB=2$,$BC=3$,$\angle A=120°$,且四边形 $CDEF$ 为菱形,

$\therefore CF=EF=CD=AB=2$,$\angle ECF=\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A=60°$.

$\therefore \triangle CEF$ 为等边三角形.

$\therefore CE=CF=2$.

$\therefore PC=\frac{1}{2}CE=1$.

在 Rt$\triangle PGC$ 中,得$\angle CPG=30°$,

$\therefore CG=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}$,$PG=\sqrt{PC^2-CG^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore BG=BC-CG=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

在 Rt$\triangle BPG$ 中,由勾股定理可得 $BP=\sqrt{BG^2+PG^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$,即 BP 的值为$\sqrt{7}$.

2 矩形的性质与判定

【两年模拟兵法】

1. A

2. D **点拨**:设 $FC'=x$,则 $FD=9-x$,根据矩形的性质结合 $BC=6$,点 C' 为 AD 的中点,即可得出 $C'D$ 的长度,在 Rt$\triangle FC'D$ 中,利用勾股定理即可得出关于 x 的方程,解之即可得出结论.

3. B **4**. C

5. (1)**证明**:在$\triangle DCA$ 和$\triangle EAC$ 中,$\begin{cases}DC=EA,\\AD=CE,\\AC=CA,\end{cases}$

$\therefore \triangle DCA\cong\triangle EAC$(SSS).

(2)**解**:$AD=BC$.

证明如下:

$\because AB=DC$,$AD=BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because CE\perp AE$,$\therefore \angle E=90°$.

由(1)得$\triangle DCA\cong\triangle EAC$,

$\therefore \angle D=\angle E=90°$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形.

((2)题答案不唯一)

6. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

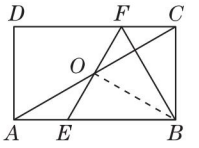
$\therefore CD\parallel AB$. $\therefore \angle FCO=\angle EAO$.

在$\triangle FCO$ 与$\triangle EAO$ 中,$\begin{cases}\angle FOC=\angle EOA,\\\angle FCO=\angle EAO,\\CF=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle FCO\cong\triangle EAO$.

$\therefore OF=OE$.

(2)**解**:如图,连接 OB,



(第6题)

$\because \angle BEF=2\angle BAC$,

$\angle BEF=\angle BAC+\angle AOE$,

$\therefore \angle BAC=\angle AOE$.

$\therefore AE=OE$.

$\because \triangle FCO\cong\triangle EAO$,

$\therefore CF=OF=OE=AE$.

又$\because BE=BF$,

$\therefore BO$ 垂直平分 EF.

易知 Rt$\triangle BCF\cong$Rt$\triangle BOF\cong$Rt$\triangle BOE$.

又$\because \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle CBF=\angle OBF=\angle OBE=30°$.

在 Rt$\triangle BCF$ 中,$\angle CBF=30°$,$CF=2$,

$\therefore BF=4$.

$\therefore AB=AE+BE=CF+BF=2+4=6$.

7. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

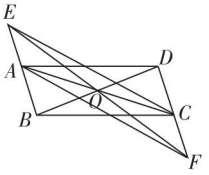
$\therefore OA=OC$,$AB\parallel CD$.

$\therefore \angle E=\angle F$.

又$\because \angle AOE=\angle COF$,

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第7题）

（2）**解**：如图，EF 与 AC 满足 $EF=AC$ 时四边形 $AECF$ 是矩形. 理由如下：

由（1）知 $\triangle AOE\cong\triangle COF$，

$\therefore OE=OF$.

$\because OA=OC$，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\therefore$ 当 $EF=AC$ 时，四边形 $AECF$ 是矩形.

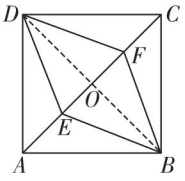
3　正方形的性质与判定

【两年模拟兵法】

1. D　**2**. D　**3**. C

4. ①③④

5.（1）**证明**：如图，连接 BD 交 AC 于点 O，



（第5题）

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore BD\perp AC$，$OD=OB=OA=OC$.

$\because AE=CF$，

$\therefore OA-AE=OC-CF$，

即 $OE=OF$.

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为平行四边形，且 $BD\perp EF$.

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为菱形.

（2）**解**：$\because$ 正方形边长为4，

$\therefore BD=AC=4\sqrt{2}$.

$\because AE=CF=\sqrt{2}$，

$\therefore EF=AC-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

$\therefore S_{\text{菱形}BEDF}=\frac{1}{2}BD\cdot EF=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$.

6.（1）**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore\angle BOE=\angle AOF=90^\circ$，$OB=OA$.

又$\because AM\perp BE$，

$\therefore\angle BEO+\angle MAE=90^\circ=\angle AFO+\angle MAE$.

$\therefore\angle BEO=\angle AFO$. $\therefore\triangle BOE\cong\triangle AOF$.

$\therefore OE=OF$.

（2）**解**：$OE=OF$ 还成立.

证明如下：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore\angle BOE=\angle AOF=90^\circ$，$OB=OA$.

又$\because AM\perp BE$，

$\therefore\angle F+\angle MBF=90^\circ=\angle E+\angle OBE$.

又$\because\angle MBF=\angle OBE$，$\therefore\angle E=\angle F$.

$\therefore\triangle BOE\cong\triangle AOF$. $\therefore OE=OF$.

7.（1）**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP$.

又$\because DP=DP$，$\therefore\triangle ADP\cong\triangle CDP$.

$\therefore PA=PC$.

又$\because PA=PE$，$\therefore PC=PE$.

（2）**解**：由（1）知 $\triangle ADP\cong\triangle CDP$，

$\therefore\angle DAP=\angle DCP$.

$\because PA=PE$，$\therefore\angle DAP=\angle E$.

$\therefore\angle FCP=\angle E$.

又$\because\angle PFC=\angle DFE$，$\angle EDF=90^\circ$，

$\therefore\angle CPE=\angle EDF=90^\circ$.

（3）**解**：$AP=CE$. 理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD=CD$，$\angle ADP=\angle CDP$.

又$\because DP=DP$，

$\therefore\triangle ADP\cong\triangle CDP$.

$\therefore PA=PC$，$\angle DAP=\angle DCP$.

又$\because PA=PE$，$\therefore PC=PE$，$\angle DAP=\angle DEP$.

$\therefore\angle DCP=\angle DEP$.

又$\because\angle PFC=\angle DFE$，

$\therefore\angle CPF=\angle EDF$.

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120^\circ$，

$\therefore\angle ADC=120^\circ$.

$\therefore\angle EDC=60^\circ$.

$\therefore\angle CPE=\angle EDF=60^\circ$.

又$\because PC=PE$，

$\therefore\triangle PCE$是等边三角形.

$\therefore PE=CE$.

又$\because PA=PE$，

$\therefore AP=CE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle B=52°$,

∴ $\angle D=\angle B=52°$.

由折叠可得 $\angle D'AE=\angle DAE=20°$,

$\angle D'=\angle D=52°$,$\angle AED'=\angle AED$,

∴ $\angle AEF=20°+52°=72°$,

$\angle AED'=\angle AED=108°$.

∴ $\angle FED'=\angle AED'-\angle AEF=108°-72°=36°$.

2. 解:(1)∵ $\angle C=90°$,$\angle B=30°$,

∴ $\angle CAB=60°$.

∵ AD 平分 $\angle CAB$,

∴ $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle CAB=30°$.

在 Rt△ACD 中,

∵ $\angle ACD=90°$,$\angle CAD=30°$,$CD=3$,

∴ $AD=2CD=6$.

(2)∵ $DE/\!/BA$ 交 AC 于点 E,

$DF/\!/CA$ 交 AB 于点 F,

∴ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,$\angle EAD=\angle ADF$,

$\angle CDE=\angle B$.

又∵ $\angle EAD=\angle FAD$,∴ $\angle ADF=\angle FAD$.

∴ $AF=DF$.

∴ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

∴ $AE=DE=DF=AF$.

在 Rt△CED 中,

∵ $\angle CDE=\angle B=30°$,

∴ $CE=\frac{1}{2}DE$. 又∵ $CE^2+CD^2=DE^2$,

∴ $\left(\frac{1}{2}DE\right)^2+9=DE^2$.

∴ $DE=2\sqrt{3}$(负值舍去).

∴ 四边形 $AEDF$ 的周长为 $8\sqrt{3}$.

3. 解:设 $AD=x$,则 $AB=2x$.

在矩形 $ABCD$ 中,$CD=AB$.

在 Rt△ADC 中,$AC=4\sqrt{5}$,

∴ $x^2+(2x)^2=(4\sqrt{5})^2$,

解得 $x=4$(负值舍去),即 $AD=4$.

在矩形 $ABCD$ 中,$OD=OB$,$ED/\!/BF$,

∴ $\angle EDO=\angle FBO$,$\angle DEO=\angle BFO$.

∴ △DOE≌△BOF. ∴ $DE=BF$.

由折叠可知 $DF=BF$,∴ $DF=DE$.

设 $DF=DE=y$,则 $AF=8-y$.

在 Rt△ADF 中,$4^2+(8-y)^2=y^2$,解得 $y=5$.

∴ $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot AD=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.

4. (1)证明:∵ $AF/\!/BC$,∴ $\angle EAF=\angle EDB$.

∵ E 是 AD 的中点,∴ $AE=DE$.

又∵ $\angle AEF=\angle DEB$,

∴ △AEF≌△DEB(ASA).

∴ $AF=DB$.

∵ 在△ABC 中,$\angle BAC=90°$,AD 是中线,

∴ $AD=BD=DC=\frac{1}{2}BC$.

∴ $AD=AF$.

(2)解:当 $AB=AC$ 时,四边形 $ADCF$ 是正方形.

证明如下:由(1)可知,$AD=AF=DC$,

∵ $AF/\!/BC$,

∴ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

∵ $AB=AC$,AD 是中线,∴ $AD\perp BC$.

∴ 四边形 $ADCF$ 是矩形.

又∵ $AD=AF$,∴ 四边形 $ADCF$ 是正方形.

5. (1)证明:延长 AE,BC 交于点 N,如图①.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AD/\!/BC$. ∴ $\angle DAE=\angle CNE$.

∵ AE 平分 $\angle DAM$,

∴ $\angle DAE=\angle MAE$.

∴ $\angle CNE=\angle MAE$.

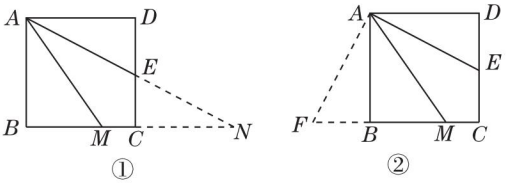
∴ $AM=MN$.

在△ADE 和△NCE 中,

$$\begin{cases}\angle DAE=\angle CNE,\\ \angle AED=\angle NEC,\\ DE=CE,\end{cases}$$

∴ △ADE≌△NCE(AAS). ∴ $AD=NC$.

∴ $AM=MN=NC+MC=AD+MC$.



(第5题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**:$AM=DE+BM$ 成立.

证明如下:过点 A 作 $AF\perp AE$,交 CB 的延长线于点 F,如图②,

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle BAD=\angle D=\angle ABC=90°$,$AB=AD$,

$AB\parallel DC$.

∴ $\angle ABF=\angle D=90°$.

∵ $AF\perp AE$,∴ $\angle FAE=90°$.

∴ $\angle FAB=90°-\angle BAE=\angle DAE$.

在△ABF 和△ADE 中,

$$\begin{cases}\angle FAB=\angle EAD,\\ AB=AD,\\ \angle ABF=\angle D=90°,\end{cases}$$

∴ △ABF≌△ADE(ASA).

∴ $BF=DE$,$\angle F=\angle AED$.

∵ $AB\parallel DC$,∴ $\angle AED=\angle BAE$.

∵ $\angle FAB=\angle EAD=\angle EAM$,

∴ $\angle AED=\angle BAE=\angle BAM+\angle EAM=\angle BAM+\angle FAB=\angle FAM$.

∴ $\angle F=\angle FAM$. ∴ $AM=FM$.

∴ $AM=FB+BM=DE+BM$.

(3)**解**:①结论 $AM=AD+MC$ 仍然成立;

②结论 $AM=DE+BM$ 不成立.

6. **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $CD=CB$,$\angle DCF=\angle BCF=45°$,$DC\parallel AE$,

$\angle CBE=90°$.

∴ $\angle CDF=\angle E$.

又∵ $CF=CF$,∴ △DCF≌△BCF.

∴ $\angle CDF=\angle CBF$. ∴ $\angle CBF=\angle E$.

∵ H 为 GE 的中点,∴ $HB=HG=\frac{1}{2}GE$.

∴ $\angle HGB=\angle HBG$.

∵ $\angle E+\angle HGB=90°$,

∴ $\angle GBF+\angle HBG=90°$,即 $\angle FBH=90°$.

∴ $FB\perp BH$.

【第一章测试卷】

一、**1**. C **2**. B **3**. B **4**. D **5**. C **6**. A **7**. D **8**. D

二、**9**. $2\sqrt{3}$ **10**. 4 **11**. $\frac{5}{3}$ **12**. ①②③⑤

三、**13**. **解**:(1)四边形 $CEGF$ 是菱形. 证明如下:

由题意知 EF 是 CG 的垂直平分线,

∴ $FC=FG$,$EC=EG$.

又∵ $AD\parallel BC$,∴ $\angle GFE=\angle CEF$.

由折叠的性质知 $\angle CEF=\angle GEF$,

∴ $\angle GFE=\angle GEF$. ∴ $EG=GF$.

∴ $EG=FG=FC=EC$.

∴ 四边形 $CEGF$ 是菱形.

(2)如图①,当点 F 与点 D 重合时,四边形 $CEGF$ 是正方形,

此时 CE 最小,且 $CE=CD=3$.

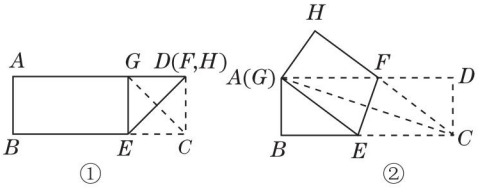
如图②,当点 G 与 A 重合时,CE 最大,

设 $CE=x$,则 $BE=9-x$,由(1)知,$AE=CE=x$,

在 Rt△ABE 中,$AB^2+BE^2=AE^2$,

即 $9+(9-x)^2=x^2$,解得 $x=5$,∴ $CE=5$.

∴ 线段 CE 的取值范围为 $3\leqslant CE\leqslant 5$.



(第 13 题)

14. (1)**证明**:在矩形 $ABCD$ 中,$AB=DC$,$\angle A=\angle D=90°$,

又∵ M 是 AD 的中点,∴ $AM=DM$.

∴ △ABM≌△DCM(SAS).

(2)1∶2

15. (1)**证明**:∵ $AB\parallel CD$,$CE\parallel AD$,

∴ 四边形 $AECD$ 为平行四边形,$\angle CAE=\angle DCA$.

∵ AC 平分 $\angle BAD$,∴ $\angle DAC=\angle CAE$.

∴ $\angle DAC=\angle DCA$. ∴ $AD=DC$.

∴ 四边形 $AECD$ 是菱形.

(2)**解**:△ABC 是直角三角形.

理由:∵ 四边形 $AECD$ 是菱形,

∴ $AE=EC$.

∴ $\angle CAE=\angle ACE$.

∵ $AE=EB$,∴ $EB=EC$.

∴ $\angle BCE=\angle B$.

又∵ 三角形内角和为 180°,

∴ $\angle CAE+\angle ACE+\angle BCE+\angle B=180°$.

∴ $\angle ACB=\angle ACE+\angle BCE=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ △ABC 为直角三角形.

16. (1) **证明:** ∵ △ABC 和△DEF 是两个边长为10 cm的等边三角形,

∴ $AC=DF$, $\angle ACD=\angle FDE=60°$.

∴ $AC/\!/DF$.

∴ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形.

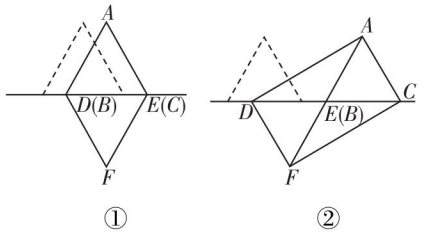
(2) **解:** ①如图①,当 $t=3$ 时,$\square ADFC$ 是菱形.

理由: ∵ $t=3$,

∴ 点 B 与点 D 重合,点 C 与点 E 重合.

又∵ △ABC 和△DEF 是两个边长为10 cm的等边三角形,

∴ $AD=DF=FE=EA$. ∴ $\square ADFC$ 是菱形.



(第16题)

②有可能是矩形. 如图②,

∵ $\square ADFC$ 是矩形, ∴ $\angle DAC=90°$.

又∵ $\angle ACD=60°$, ∴ $\angle ADC=30°$.

∴ $DC=2AC=20$ cm, $AD=10\sqrt{3}$ cm.

∴ $t=[20-(10-3)]\div 1=13$(s),

$S_{矩形ADFC}=AD\cdot AC=10\sqrt{3}\times 10=100\sqrt{3}$(cm^2).

17. **解:** 特例探究: $AF=BE$, $AF\perp BE$.

理由: ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形, △ADE 与△DCF 均为等边三角形,

∴ $AB=AD=CD=AE=DF$, $\angle BAD=\angle ADC$, $\angle DAE=\angle CDF$.

∴ $\angle BAD+\angle DAE=\angle ADC+\angle CDF$,

即 $\angle BAE=\angle ADF$.

在△ABE 和△DAF 中, $\begin{cases} AB=DA, \\ \angle BAE=\angle ADF, \\ AE=DF, \end{cases}$

∴ △ABE≌△DAF(SAS).

∴ $AF=BE$, $\angle ABE=\angle DAF$.

∵ $\angle DAF+\angle BAF=90°$,

∴ $\angle ABE+\angle BAF=90°$. ∴ $AF\perp BE$.

拓展应用:8

第二章 一元二次方程

1 认识一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. A

2. C **点拨:** 本题考查的是一元二次方程的定义,紧扣定义的"三要素"是解题的关键.

3. B **点拨:** 本题考查的是一元二次方程的一般形式,需要注意二次项系数不能为0,求字母 m 的值时可采用尝试验证法,即将各个选项中 m 的值代入题中,选出满足题意的选项.

4. D

5. B **点拨:** 把 $x=2$ 代入已知方程列出关于 k 的新方程,通过解方程来求 k 的值.

6. A

7. C **点拨:** 将 $x=m$ 代入方程得 $m^2-2m=1$,所以 $7m^2-14m=7$;将 $x=n$ 代入方程得 $n^2-2n=1$,所以 $3n^2-6n=3$. 因为 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$,所以 $(7+a)\times(3-7)=8$,所以 $a=-9$.

8. **解:** (1) 当 $\begin{cases} m-2\neq 0, \\ m+1=0 \end{cases}$ 时,解得 $m=-1$.

当 $\begin{cases} m^2+1=1, \\ m+1+(m-2)\neq 0 \end{cases}$ 时,解得 $m=0$.

故当 $m=-1$ 或 $m=0$ 时,原方程为一元一次方程. 当 $m=-1$ 时,方程为: $(-1-2)x-1=0$, $x=-\frac{1}{3}$;当 $m=0$ 时,方程为: $x+(0-2)x-1=0$. $x=-1$.

(2) 当 $m^2+1=2$ 且 $m+1\neq 0$,即 $m=1$ 时,

原方程是一元二次方程.

当 $m=1$ 时,原方程即为 $2x^2-x-1=0$,二次项系数为2,一次项系数为 -1,常数项为 -1.

9. **解:** 乙正确.

证明: ∵ 二次项系数 $m^2-8m+19=m^2-8m+16+3=(m-4)^2+3>0$,

∴ 二次项系数不为0.

∴ 原方程是一元二次方程.

10. **解:** 两位同学的解法都不正确,均考虑不全面.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

正确解法如下:因为关于 x 的方程 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是一元二次方程,

所以 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=0\end{cases}$

或 $\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=0,\\a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{4}{3},\\b=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

或 $\begin{cases}a=1,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\b=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

2 用配方法求解一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**本题考查的是直接开平方法,紧扣平方根定义是解题的关键.

2. B **点拨:**首先根据新定义求出函数 $y=x^3$ 中对应的 n,再由方程 $y'=12$ 得出方程 $3x^2=12$,用直接开平方法解方程即可.

3. A **点拨:**本题考查的是配方的方法,熟悉完全平方公式的特征是解题的关键.

4. B **5.** $x_1=3,x_2=-1$ **6.** 4;2;±3;$\pm\dfrac{3}{2}$

7. **解:**(1)移项,得 $2x^2=8$.

系数化为 1,得 $x^2=4$.

开平方,得 $x=\pm2$.

$\therefore x_1=2,x_2=-2$.

(2)移项,得 $(y-5)^2=36$.

开平方,得 $y-5=\pm6$.

$\therefore y_1=11,y_2=-1$.

8. **解:**(1)配方,得 $x^2+4x+4=4$,$(x+2)^2=4$.

两边开平方,得 $x+2=\pm2$,$\therefore x_1=0,x_2=-4$.

(2)二次项系数化为 1,得 $x^2-\dfrac{3}{2}x-3=0$,移项,得 $x^2-\dfrac{3}{2}x=3$,配方,得 $x^2-\dfrac{3}{2}x+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2=3+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$,$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{57}{16}$,两边开平方,得 $x-\dfrac{3}{4}=\pm\dfrac{\sqrt{57}}{4}$,$\therefore x_1=\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}$,$x_2=\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}$.

(3)二次项系数化为 1,得 $x^2+\dfrac{1}{2}x-3=0$,移项,得 $x^2+\dfrac{1}{2}x=3$,配方,得 $x^2+\dfrac{1}{2}x+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=3+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$,$\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{49}{16}$,两边开平方,得 $x+\dfrac{1}{4}=\pm\dfrac{7}{4}$,$\therefore x_1=\dfrac{3}{2}$,$x_2=-2$.

9. **解:**(1)$\because a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,

$\therefore (a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

$\therefore a-3=0,b-4=0,c-5=0$.

$\therefore a=3,b=4,c=5$.

(2)$\because a=3,b=4,c=5$,

$\therefore a^2+b^2=25,c^2=25$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

3 用公式法求解一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**本题考查了利用公式法解一元二次方程及实数的大小比较,先分别求出两个方程的根,确定出 p 与 q,再求出 $p+q$ 的值.

2. D **点拨:**本题考查了根的判别式的使用,根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到 $a\neq1$ 且 $\Delta=3^2-4\times(a-1)\times(-2)\geqslant0$,然后求出两个不等式的公共部分即可得解.

3. B **点拨:**本题考查的是根的判别式及平面直角坐标系的坐标符号特征,由第二象限点的坐标特征得到 $a<0,c>0$,则 $ac<0$,所以 $b^2-4ac>0$,从而判断此方程有两个不等的实数根.

4. **解:**(1)换元 转化

(2)设 $x^2-x=y$,

则原方程可化为 $y^2-4y-12=0$.

$\because a=1,b=-4,c=-12$,

$\therefore b^2-4ac=16-4\times1\times(-12)=64>0$.

$\therefore y=\dfrac{4\pm\sqrt{64}}{2}$,即 $y_1=-2,y_2=6$.

当 $y=-2$ 时,$x^2-x=-2$,

即 $x^2-x+2=0$,此方程无解;

当 $y=6$ 时,$x^2-x=6$,

解得 $x_1=-2,x_2=3$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=-2,x_2=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:本题运用换元法和转化思想,用 y 来替换 x^2-x,达到降次的目的.

5. 解:(1)$\Delta=b^2-4ac=4-4(2k-4)=20-8k$.

∵ 方程有两个不等的实数根,

∴ $20-8k>0$. ∴ $k<\frac{5}{2}$.

(2)∵ k 为正整数,且 $k<\frac{5}{2}$,

∴ k 为 1 或 2.

由公式法易得 $x=-1\pm\sqrt{5-2k}$.

∵ 方程的根为整数,

∴ $5-2k$ 为完全平方数.

当 $k=1$ 时,$5-2k=3$(不符合题意,舍去);

当 $k=2$ 时,$5-2k=1$.

∴ $k=2$.

6. 解:(1)∵ 方程有两个相等的实数根,

∴ $(2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$.

∴ $4b^2-4a^2+4c^2=0$. ∴ $a^2=b^2+c^2$.

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

∴ $a=b=c$.

∵ $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$,

∴ $2ax^2+2ax=0$.

∴ $x_1=0, x_2=-1$.

4 用因式分解法求解一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. D **点拨**:本题考查用因式分解法解方程,把 $x-2$ 看成一个整体是解题的关键,解本题时切忌在方程两边同时除以 $x-2$,从而出现漏根的情况.

2. B **点拨**:本题考查用因式分解与等腰三角形的定义,理解三角形的三边关系是解题的关键.

3. A **点拨**:解方程得 $x_1=3, x_2=5$. 故三角形的第三边 c 的取值范围是 $2<c<8$. ∴ 三角形的周长 C 的取值范围是 $10<C<16$. 故连接这个三角形三边的中点,得到的三角形的周长 m 的范围是 $5<m<8$. 故选 A.

4. B **点拨**:根据题意,得

①当 $2\geqslant m$ 时,$2\bigstar m=4m+2=36$,

即 $4m+2=36$,解得 $m=\frac{17}{2}>2$(不合题意,舍去);

②当 $2<m$ 时,$2\bigstar m=2m^2+m=36$,

即 $2m^2+m-36=0$,

∴ $(m-4)(2m+9)=0$,

∴ $m-4=0$ 或 $2m+9=0$,

∴ $m=4$ 或 $m=-4.5<2$(不合题意,舍去),

综合①②得 $m=4$,

故选 B.

5. $\sqrt{3}$

6. $-15,-6,0,6,15$ **点拨**:$-16=-1\times16=1\times(-16)=-2\times8=2\times(-8)=4\times(-4)$.

7. $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$(答案不唯一)

8. 解:(1)$(x-1)^2=\frac{5}{9}$, $x-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}+1$,即 $x_1=\frac{\sqrt{5}}{3}+1$, $x_2=-\frac{\sqrt{5}}{3}+1$.

(2)$(x-3)^2+x^2=9$, $(x-3)^2=9-x^2$, $(x-3)^2=(3+x)(3-x)$, $(x-3)(x-3+x+3)=0$,

$(x-3)\cdot2x=0$,即 $x_1=3, x_2=0$.

(3)$a=1, b=-\sqrt{2}, c=-1$, $\Delta=b^2-4ac=2+4=6$, $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$,即 $x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

9. (1)**解**:$x^2-3x-10$

$=x^2-3x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-10$

$=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{49}{4}$.

(2)**解**:$x^2-3x-10$

$=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{49}{4}$

$=(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{7}{2})^2$

$=(x+2)(x-5)$.

(3)**证明**:$x^2+y^2-2x-4y+16$

$=(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+11$

$=(x-1)^2+(y-2)^2+11\geqslant11$,

故不论 x, y 取任何实数时,多项式 $x^2+y^2-2x-4y+16$ 的值总为正数.

10. 解:$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x-1}\right)-15=0$,

设 $\frac{x}{x-1}=a$,则 $a^2-2a-15=0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $a=-3$ 或 $a=5$，

当 $a=-3$ 时，$\frac{x}{x-1}=-3$，

解得 $x=\frac{3}{4}$，

经检验 $x=\frac{3}{4}$ 是分式方程的解，

当 $a=5$ 时，$\frac{x}{x-1}=5$，

解得 $x=\frac{5}{4}$，

经检验 $x=\frac{5}{4}$ 是分式方程的解，

∴ 原方程的解是 $x_1=\frac{3}{4}$，$x_2=\frac{5}{4}$.

点拨：根据材料的提示，可利用换元法将所求方程转化为一元二次方程，解方程求出根后要检验.

11. 解：设 $m=x^2+x$，则由原方程，

得 $m^2-4m-12=0$，

整理，得 $(m-6)(m+2)=0$，

解得 $m=6$ 或 $m=-2$，

当 $m=6$ 时，$x^2+x=6$，即 $(x+3)(x-2)=0$，

解得 $x_1=-3$，$x_2=2$.

当 $m=-2$ 时，$x^2+x=-2$，

即 $x^2+x+2=0$，该方程无解.

综上所述，原方程的解为 $x_1=-3$，$x_2=2$.

点拨：本题主要考查了换元法，即把 x^2+x 看成一个整体，用字母 m 去代替它，实行等量替换. 通过解方程求得 m 即 x^2+x 的值，然后再来解关于 x 的一元二次方程.

*5 一元二次方程的根与系数的关系

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**：设这个一元二次方程的两个根分别为 x_1、x_2，方程 $3x^2-1=2x+5$ 化为一元二次方程的一般形式为 $3x^2-2x-6=0$，∴ $x_1+x_2=\frac{2}{3}$，$x_1x_2=\frac{-6}{3}=-2$. 故选 B.

2. C **点拨**：∵ 两个根是 -2 和 1，∴ $-\frac{m}{2}=-1$，$\frac{n}{2}=-2$，∴ $m=2$，$n=-4$，∴ $n^m=(-4)^2=16$. 故选 C.

3. D **点拨**：∵ $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=2m$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=m^2-m-1$，又∵ $x_1+x_2=1-x_1x_2$，∴ $2m=1-(m^2-m-1)$，整理得，$m^2+m-2=0$，∴ $m=1$ 或 $m=-2$（不合题意，舍去），∴ m 的值为 1.

4. A **点拨**：方法 1：用根的定义求解. 方法 2：用根与系数的关系求解.

5. $m>\frac{1}{2}$ **6.** 10

7. 解：(1) $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=-5$.

(2) $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$，$x_1x_2=-\frac{9}{2}$.

(3) 原方程整理为 $x^2-4x+2=0$，$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$.

8. 解：(1) 将原方程整理为

$x^2+2(m-1)x+m^2=0$.

∵ 原方程有两个实数根，

∴ $\Delta=[2(m-1)]^2-4m^2=-8m+4\geqslant 0$，

∴ $m\leqslant\frac{1}{2}$，∴ 实数 m 的最大整数值为 0.

(2) ∵ x_1，x_2 为 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ 的两个实数根，

∴ $y=x_1+x_2=-2m+2$，且 $m\leqslant\frac{1}{2}$.

∵ y 的值随 m 值的增大而减小，

∴ 当 $m=\frac{1}{2}$ 时，y 的最小值为 1.

点拨：本题考查的是根的判别式和根与系数的关系，运用一次函数的性质求最值是解题的关键.

9. 解：(1) ∵ 方程有两个不等的实数根，

∴ $\Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$，解得 $k>\frac{11}{4}$.

(2) 存在.

∵ $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$，∴ 将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边求平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$，即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，

∴ $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$，

∴ $4k-11=5$，解得 $k=4$.

10. 解：∵ m，n 是两个不等的实数，且满足 $m^2-m=3$，$n^2-n=3$，∴ 可构造关于 x 的方程 x^2-

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x-3=0$,

则 m,n 是 $x^2-x-3=0$ 的两个不等的实数根,

根据根与系数的关系可知 $m+n=1$,$mn=-3$,

又 $n^2=n+3$,

$\therefore 2n^2-mn+2m+2\,019$

$=2(n+3)-mn+2m+2\,019$

$=2n+6-mn+2m+2\,019$

$=2(m+n)-mn+2\,025$

$=2\times1-(-3)+2\,025$

$=2+3+2\,025$

$=2\,030$.

6 应用一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**设平均 1 人传染了 x 人,则可列方程 $1+x+x(1+x)=100$,解得 $x_1=9$,$x_2=-11$(不合题意,舍去). 故选 B.

2. A **点拨:**设矩形田地的长为 x 步($x>30$),则宽为($60-x$)步,

根据题意得 $x(60-x)=864$,

整理得 $x^2-60x+864=0$,

解得 $x=36$ 或 $x=24$(舍去),

$\therefore x-(60-x)=12$.

故选 A.

3. A **点拨:**根据三角形的面积公式列出方程即可解决问题. 设运动时间为 t s 时,$\triangle PCQ$ 的面积为 300 m^2,由题意得 $AP=2t$,$CQ=3t$,

$\therefore PC=50-2t$.

$\therefore \frac{1}{2}\times(50-2t)\times3t=300$,

解得 $t_1=20$(舍),$t_2=5$.

$\therefore$ 当 $t=5$ s 时,$\triangle PCQ$ 的面积为 300 m^2.

4. $2\sqrt{15}+4\sqrt{2}$

5. 解:(1)设平均每次下调的百分率为 x,由题意,得

$6\,000(1-x)^2=4\,860$.

解得 $x_1=0.1$,$x_2=1.9$(舍去).

答:平均每次下调的百分率为 10%.

(2)由题意,得方案①优惠:$4\,860\times100\times(1-0.98)=9\,720$(元).

方案②优惠:$80\times100=8\,000$(元).

$\because 9\,720>8\,000$,

$\therefore$ 方案①更优惠.

6. 解:(1)设该社区阅览室的图书借阅总量从 2015 年至 2017 年的年平均增长率为 x,根据题意得 $7\,500(1+x)^2=10\,800$,

即 $(1+x)^2=1.44$,

解得 $x_1=0.2=20\%$,$x_2=-2.2$(舍去).

答:该社区阅览室的图书借阅总量从 2015 年至 2017 年的年平均增长率为 20%.

(2)$10\,800\times(1+0.2)=12\,960$(本),

$10\,800\div1\,350=8$(本),

$12\,960\div1\,440=9$(本),

$(9-8)\div8\times100\%=12.5\%$,

故 a 的值至少是 12.5.

7. 解:(1)设 P,Q 两点开始运动 x s 后,四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 cm^2,

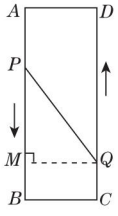
根据题意得 $PB=AB-AP=(16-3x)$ cm,$CQ=2x$ cm,故 $\frac{1}{2}(2x+16-3x)\times6=33$,

解得 $x=5$.

故 P,Q 两点开始运动 5 s 后,四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 cm^2.

(2)设 P,Q 两点开始运动 y s 后,点 P 和点 Q 的距离是 10 cm.

如图,过 Q 点作 $QM\perp AB$ 于点 M,



(第 7 题)

则 $BM=CQ=2y$ cm,故 $PM=(16-5y)$ cm.

在 $Rt\triangle PMQ$ 中,$PM^2+MQ^2=PQ^2$,

$\therefore (16-5y)^2+6^2=10^2$.

解得 $y_1=\frac{8}{5}$,$y_2=\frac{24}{5}$.

$\because$ 所求的是第一次满足条件的时间,$\therefore y=\frac{8}{5}$.

故 P,Q 两点开始运动 $\frac{8}{5}$ s 后,点 P 和点 Q 的距离第一次是 10 cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:在建立一元二次方程模型解决几何动态问题时关键要把握两点:一是利用几何图形的面积作为等量关系;二是利用点运动的路程来表示线段的长.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$,

设 $x+\frac{1}{x}=y$,则原方程化为 $y^2-2y-3=0$.

解得 $y_1=3,y_2=-1$.

当 $y=3$ 时,$x+\frac{1}{x}=3$,

$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

当 $y=-1$ 时,$x+\frac{1}{x}=-1$ 无实数根.

经检验,$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2. 解:方程组 $\begin{cases}x-2\,016=2\,019,\\x-2\,017=2\,018\end{cases}$ 的解一定是原方程的解,解得 $x=4\,035$.

方程组 $\begin{cases}x-2\,016=-2\,018,\\x-2\,017=-2\,019\end{cases}$ 的解也一定是原方程的解,解得 $x=-2$.

$\because$ 原方程最多有两个实数解,

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=4\,035,x_2=-2$.

点拨:解本题也可采用换元法. 设 $x-2\,017=t$,则 $x-2\,016=t+1$,原方程可化为 $t(t+1)=2\,018\times 2\,019$,先求出 t,进而求出 x.

3. 解:$\because x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$,

$\therefore x$ 取任何实数分式总有意义.

令 $\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=a$,整理得 $(a-1)x^2+(a+2)x+(a-1)=0$,

(1)当 $a\neq 1$ 时,由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $(a+2)^2-4(a-1)^2\geqslant 0$,解得 $0\leqslant a\leqslant 4$;

(2)当 $a=1$ 时,$x=0$.

综上所述,分式 $\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$ 的最大值是 4,最小值是 0.

4. 解:$\because$ 原方程有两个不等的实数根,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(2m+3)^2-4m^2>0$,

解得 $m>-\frac{3}{4}$.

由题意得 $\alpha+\beta=-(2m+3),\alpha\beta=m^2$,

则 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-(2m+3)}{m^2}=-1$,

即 $m^2-2m-3=0$,解得 $m_1=3,m_2=-1$.

又 $m>-\frac{3}{4}$,$\therefore m=3$.

5. 解:当点 Q 与点 M 重合或点 P 与点 N 重合时,以 PQ,MN 为两边,以矩形的边(AD 或 BC)的一部分为第三边可构成一个三角形.

(1)当点 P 与点 N 重合时,由 $x^2+2x=20$,

得 $x_1=\sqrt{21}-1,x_2=-\sqrt{21}-1$(舍去).

$\because BQ+CM=x+3x=4(\sqrt{21}-1)\text{ cm}<20\text{ cm}$,此时点 Q 与点 M 不重合.

$\therefore x=\sqrt{21}-1$ 符合题意.

(2)当点 Q 与点 M 重合时,由 $x+3x=20$,得 $x=5$. 此时 $DN=x^2=25\text{ cm}>20\text{ cm}$,不符合题意.

$\therefore$ 所求 x 的值为 $\sqrt{21}-1$.

点拨:利用一元二次方程解决动点问题,要先分析出动点的运动轨迹,然后结合具体的几何图形列出相应的方程并求解,最后还要对结果进行检验,看是否符合题意.

6. 解:(1)由题意可得 $40n=12$,

解得 $n=0.3$.

(2)由题意可得

$40+40(1+m)+40(1+m)^2=190$,

解得 $m_1=\frac{1}{2},m_2=-\frac{7}{2}$(舍去),

$\therefore$ 第二年用乙方案新治理的工厂数量为

$40(1+m)=40\times(1+50\%)=60$(家),

(3)第二年用乙方案治理合计降低了 $(40+60)=100\times 0.3=30$,

则 $(30-a)+2a=39.5$,

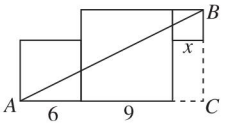
解得 $a=9.5$,则 $Q=20.5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

【第二章测试卷】

一、1. D 2. D 3. A 4. D 5. A 6. D 7. C

8. D 点拨:如图. ∵ 直线 AB 将它分成面积相等的两部分,∴ $\frac{1}{2}\times(6+9+x)\times 9-x\cdot(9-x)=\frac{1}{2}\times(6^2+9^2+x^2)$. 解得 $x_1=3, x_2=6$. 故选 D.



(第8题)

二、9. -3 10. 18

11. $(2x+6)(2x+8)=80$

12. 6 或 10 或 12

三、13. 解:方程(1)用公式法解:

∵ $a=1, b=-3, c=1$,

∴ $b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$.

∴ 方程(1)的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

方程(2)用直接开平方法解:$x-1=\pm\sqrt{3}$,

∴ 方程(2)的根为 $x_1=-\sqrt{3}+1, x_2=\sqrt{3}+1$.

方程(3)用因式分解法解:$x(x-3)=0$,

∴ 方程(3)的根为 $x_1=0, x_2=3$.

方程(4)用配方法解:

$x^2-2x+1=4+1, (x-1)^2=5, x-1=\pm\sqrt{5}$,

∴ 方程(4)的根为 $x_1=-\sqrt{5}+1, x_2=\sqrt{5}+1$.

14. 解:∵ $2\text{☆}a$ 的值小于 0,

∴ $2^2a+a=5a<0$,解得 $a<0$.

在关于 x 的方程 $2x^2-bx+a=0$ 中,

$\Delta=(-b)^2-8a\geqslant-8a>0$,

∴ 关于 x 的方程 $2x^2-bx+a=0$ 有两个不等的实数根.

15. 解:(1)∵ 方程有两个不等的实数根,

∴ $\Delta=(-3)^2-4\times(-k)>0$,即 $4k>-9$.

解得 $k>-\frac{9}{4}$.

(2)若 k 是负整数,则 k 只能为 -1 或 -2.

①当 $k=-1$ 时,原方程为 $x^2-3x+1=0$.

解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$;

②当 $k=-2$ 时,原方程为 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_3=2, x_4=1$.

16. 解:(1)$2.6(1+x)^2$

(2)由题意,得 $4+2.6(1+x)^2=7.146$,

解得 $x_1=0.1=10\%, x_2=-2.1$(不合题意,舍去).

答:可变成本平均年增长率为 10%.

17. 解:(1)26.8

(2)设需要售出 x 部汽车,

由题意可知,每部汽车的销售利润为

$28-[27-0.1(x-1)]=(0.1x+0.9)$.

当 $0\leqslant x\leqslant10$,根据题意,

得 $x(0.1x+0.9)+0.5x=12$.

整理,得 $x^2+14x-120=0$.

解得 $x_1=-20$(不合题意,舍去), $x_2=6$.

当 $x>10$ 时,根据题意,

得 $x(0.1x+0.9)+x=12$.

整理,得 $x^2+19x-120=0$.

解得 $x_3=-24$(不合题意,舍去), $x_4=5$.

∵ $5<10$, ∴ $x_4=5$ 舍去.

答:需要售出 6 部汽车.

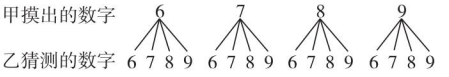
第三章 概率的进一步认识

1 用树状图或表格求概率

【两年模拟兵法】

1. B

2. B 点拨:画树状图如图:



(第2题)

由树状图可知,共有 16 种等可能结果,其中满足 $|m-n|\leqslant1$ 的有 10 种结果,

∴ 两人"心领神会"的概率是 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$,故选 B.

3. C 4. D 5. A

6. 解:(1)根据题意画图如图:

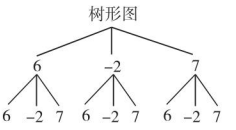
所有可能出现的结果共有 9 种;

(2)∵ 共有 9 种情况,两次取出小球上的数相同

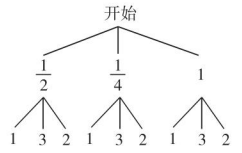
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

的有3种情况，

∴ 两次取出的小球上的数相同的概率 $P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.



（第6题）



（第7题）

7. 解：(1)画树状图如图：

由图可知，共有9种等可能的结果；

(2)∵ (a,b) 的可能结果有 $\left(\frac{1}{2},1\right)$、$\left(\frac{1}{2},3\right)$、$\left(\frac{1}{2},2\right)$、$\left(\frac{1}{4},1\right)$、$\left(\frac{1}{4},3\right)$、$\left(\frac{1}{4},2\right)$、$(1,1)$、$(1,3)$及$(1,2)$，

∴ 当 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$ 时，$\Delta=b^2-4ac=-1<0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 无实数根，

当 $a=\frac{1}{2}$，$b=3$ 时，$\Delta=b^2-4ac=7>0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根，

当 $a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时，$\Delta=b^2-4ac=2>0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根，

当 $a=\frac{1}{4}$，$b=1$ 时，$\Delta=b^2-4ac=0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个相等的实数根，

当 $a=\frac{1}{4}$，$b=3$ 时，$\Delta=b^2-4ac=8>0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根，

当 $a=\frac{1}{4}$，$b=2$ 时，$\Delta=b^2-4ac=3>0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个不相等的实数根，

当 $a=1$，$b=1$ 时，$\Delta=b^2-4ac=-3<0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 无实数根，

当 $a=1$，$b=3$ 时，$\Delta=b^2-4ac=5>0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根，

当 $a=1$，$b=2$ 时，$\Delta=b^2-4ac=0$，此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个相等的实数根，

∴ P(甲获胜) $=P(\Delta>0)=\frac{5}{9}$，P(乙获胜) $=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$，

∴ P(甲获胜) $>P$(乙获胜).

∴ 这样的游戏规则对甲有利，不公平.

8. 解：(1)米粒落在阴影部分的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$；

(2)列表：

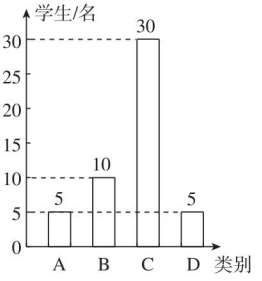
第一次＼第二次	A	B	C	D	E	F
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)	(A,F)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)	(B,E)	(B,F)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)	(C,E)	(C,F)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)		(D,E)	(D,F)
E	(E,A)	(E,B)	(E,C)	(E,D)		(E,F)
F	(F,A)	(F,B)	(F,C)	(F,D)	(F,E)	

共有30种等可能的情况，其中图案是轴对称图形的有10种，

故图案是轴对称图形的概率为 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$；

9. 解：(1)50；216°

(2)如图.



（第9题）

(3)180

(4)列表如下：

	男1	男2	女1	女2	女3
男1		男2 男1	女1 男1	女2 男1	女3 男1
男2	男1 男2		女1 男2	女2 男2	女3 男2
女1	男1 女1	男2 女1		女2 女1	女3 女1
女2	男1 女2	男2 女2	女1 女2		女3 女2
女3	男1 女3	男2 女3	女1 女3	女2 女3	

被抽到的两名学生性别相同的概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 用频率估计概率

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D **3.** D

4. (1)0.9;0.9

(2)①4.5

②设还需移植这种树苗 x 万棵,

根据题意,得$(x+5)\times0.9=18$,解得 $x=15$.

答:该地区还需移植这种树苗约 15 万棵.

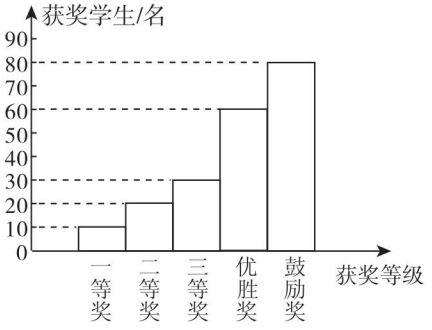
5. (1)从左到右依次填:0.25;0.33;0.28;0.33;0.32;0.30;0.28;0.31;0.31;0.31

(2)随着试验次数的增加,频率稳定在 0.31 附近.

(3)从试验数据看,从盒中摸出一张卡片是 3 的倍数的概率约是 0.31.

(4)盒中共有 20 张卡片,上面的数字是 3 的倍数的有 6 张,所以从中摸出一张卡片是 3 的倍数的概率为$6\div20=0.3$.

6. 解:(1)60;0.15;补全条形统计图如图.



(第 6 题)

(2)$360°\times0.30=108°$.

(3)列表如下:

	甲	乙	丙	丁
甲		甲乙	甲丙	甲丁
乙	乙甲		乙丙	乙丁
丙	丙甲	丙乙		丙丁
丁	丁甲	丁乙	丁丙	

由表格可知共有 12 种等可能的结果,其中恰好选中甲、乙二人的有 2 种,故所求的概率为$\frac{2}{12}$,即$\frac{1}{6}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)由①,得 $x>-2$;由②,得 $x\leqslant2$,

∴ 原不等式组的解集为 $-2<x\leqslant2$,

∴ 原不等式组的所有整数解为 $-1,0,1,2$.

(2)用列表法,得

	−1	0	1	2
−1		0	−1	−2
0	0		0	0
1	−1	0		2
2	−2	0	2	

由上表可知,共有 12 种等可能的结果,其中积为正数的结果有 2 种,∴ P(积为正数)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. 解:(1)P(标号数字为奇数)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)列表如下:

乙\甲	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

由表可知,共有 36 种等可能的结果,其中摸到小球的标号数字同为奇数或同为偶数的结果有 18 种,摸到小球的标号数字为一奇一偶的结果有 18 种. 所以 P(甲赢)$=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$,$P$(乙赢)$=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$. 所以这个游戏对甲、乙两人是公平的.

3. 解:(1)三辆车开来的先后顺序有 6 种可能:(上,中,下)、(上,下,中)、(中,上,下)、(中,下,上)、(下,中,上)、(下,上,中).

(2)乙采取的方案使自己乘坐上等车的可能性大. 理由:假定 6 种顺序出现的可能性相同. 我们来研究在各种可能性的顺序之下,甲、乙两人分别会上哪一辆汽车:

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

来车顺序	甲上的车	乙上的车
(上,中,下)	上	下
(上,下,中)	上	中
(中,上,下)	中	上
(中,下,上)	中	上
(下,上,中)	下	上
(下,中,上)	下	中

由表不难看出:甲乘坐上等车的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

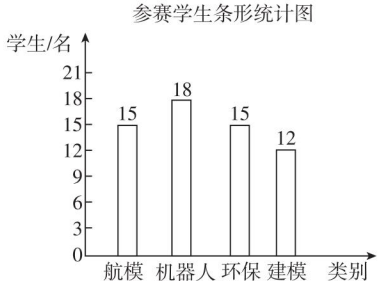
而乙乘坐上等车的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

∴ 乙采取的方案使自己乘坐上等车的可能性大.

4. 解:(1)60;72°

(2)"环保"类人数为 $60\times25\%=15$,

"建模"类人数为 $60-15-18-15=12$,补全条形统计图如图.



[第4(2)题]

(3)画树状图如图.



[第4(3)题]

由树状图可知,可能出现的结果有 6 种,而且每种结果出现的可能性相同,其中两人恰为 1 男生 1 女生的结果有 3 种,所以所求的概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

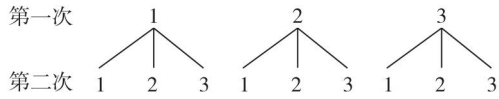
【第三章测试卷】

一、1. D **2.** C **3.** D **4.** A **5.** C **6.** D **7.** A **8.** B

二、9. $\frac{1}{3}$ **10.** 10

11. $\frac{1}{8}$ **12.** $\frac{2}{9}$

三、13. 解:根据题意画出如下树状图:



(第 13 题)

从树状图可以看出,可能出现的结果共有 9 种,并且它们出现的可能性相等,其中两次摸出的小球标号相同的结果共有 3 种.

所以 P(两次摸出的小球标号相同)$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

14. 解:不公平. 列表表示所有可能的结果:

第二张 \ 第一张	4	5	6
4	8	9	10
5	9	10	11
6	10	11	12

由上表可知,共有 9 种等可能结果,其中和为偶数的有 5 种结果,和为奇数的有 4 种结果,

∴ P(参加敬老服务活动)$=\frac{5}{9}$,P(参加文明礼仪宣传活动)$=\frac{4}{9}$.

∵ $\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$,∴ 这个游戏不公平.

15. 解:(1)4;0.15

(2)0.32;0.30

(3)列表得:

	A	B	C
A		BA	CA
B	AB		CB
C	AC	BC	

∵ 共有 6 种等可能的结果,A,B 都被采访到的情况有 2 种,

∴ P(A,B 都被采访到)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

16. 解:(1)由题意得,所抽取班级有学生:

$8\div20\%=40$(名).

该班等级为 A 的学生有:$40-25-8-2=40-$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记

点拨®

荣德基初中频道

特高
教

点拨

九年级

数学

上

(BS版)

荣德基 主编

陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料