教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法69招·七八九年级共439招



九年级
数学(上)
荣德基 主编
(HS版)
赠教材习题答案

吉林教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

简约的知识梳理总结　　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

考法得满分

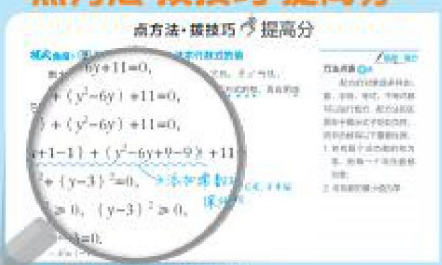
点中考 拨模拟 得满分



» 让你从默默无闻走向优秀卓越

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分



» 为你提供解题秘方

第3步　第2步　第1步

三个维度打造极致



基础速提分

点知识 拨考向 速提分



» 给你一把打开数学之门的钥匙

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

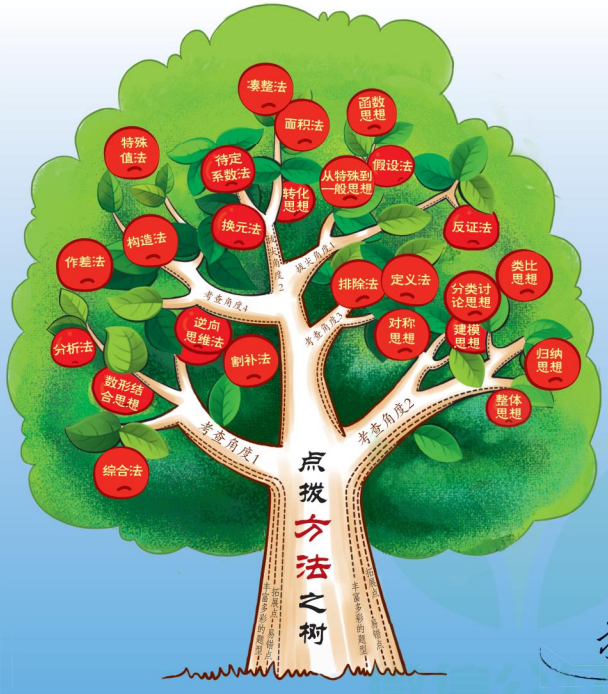
特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

数学（HS版） 九年级（上）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
　　范志刚



提分一定有方法

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 69 个 必得分

第21章 二次根式

	页码
01 二次根式的定义	2
02 二次根式的性质	4
03 二次根式的乘法	9
04 积的算术平方根	10
05 二次根式的除法	10
06 商的算术平方根	11
07 最简二次根式	13
08 合并同类二次根式	18
09 二次根式的加减	18
10 二次根式的混合运算	19

第22章 一元二次方程

	页码
01 一元二次方程的定义	35
02 一元二次方程的一般形式	35
03 一元二次方程的解（根）	36
04 直接开平方法	41
05 因式分解法	42
06 配方法	46
07 公式法	51
08 一元二次方程的解法	52
09 一元二次方程根的判别式	56
10 一元二次方程根与系数的关系	61
11 二次项系数为 1 的一元二次方程的性质	62
12 建立一元二次方程的模型解应用题的一般步骤	66

第23章 图形的相似

	页码
01 相似图形	82
02 成比例线段	82
03 比例的性质	83
04 平行线分线段成比例的基本事实	87
05 平行线分线段成比例的推论	88
06 相似多边形的性质	92
07 相似多边形的判定	93
08 相似三角形	97
09 平行线截三角形相似的定理	98
10 角的关系判定三角形相似定理	102
11 边角关系判定三角形相似定理	103
12 三边关系判定三角形相似定理	104
13 相似三角形对应线段的比	110
14 相似三角形面积的比	111
15 利用相似测量物体的高度	116

考向点 79 个 速提分

	页码
01 利用二次根式的性质计算化简	4
02 利用“数轴法”化简含二次根式的代数式	5
03 利用“三边关系法”化简含二次根式的代数式	6
04 利用积的算术平方根的性质进行化简	10
05 利用商的算术平方根的性质进行计算化简	12
06 利用“非负数（式）平方内移法”变形	14
07 利用“被开方数比较法”或“平方法”比较二次根式的大小	14
08 利用二次根式的混合运算顺序及运算律进行计算	20
09 利用整体思想巧求对称式的值	21
10 利用化简求值法求代数式的值	22
11 利用数形结合法解几何应用问题	22
01 利用代入法求一元二次方程中待定字母的值	37
02 利用整体思想求代数式的值	37
03 利用非负数最值法求代数式最值	48
04 利用数形结合法判别三角形的形状	48
05 利用适当方法解一元二次方程	52
06 利用换元法求方程中的代数式的值	53
07 一元二次方程根的判别式的应用类型	56
08 利用定义法解方程与函数问题	57
09 根与系数的关系的应用类型	61
10 利用根与系数的关系构造方程	62
11 利用根与系数的关系法求涉根的代数式的值	62
12 利用化不规则为规则法用一元二次方程解几何问题	67
13 利用图象信息法用一元二次方程解一次函数的问题	68
01 利用相似图形的定义判断图形相似	82
02 利用成比例线段的定义判断成比例线段	83
03 利用“模型构造法”解决线段之间的数量关系	89
04 相似多边形的性质在计算中的应用	92
05 相似多边形的判定在判定多边形相似中的应用	93
06 利用相似三角形的定义求边和角	97
07 利用平行线判定相似三角形及相关计算问题	98
08 利用“中间比法”证明线段成比例	99
09 利用“平行线法”证明三角形相似求线段比	99
10 利用两角分别相等判定两三角形相似	103
11 利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似	103
12 利用三边成比例判定三角形相似	104
13 利用“三点定形法”找相似的三角形证等积式	106
14 利用相似三角形对应线段的性质求线段的长	110
15 利用相似三角形面积的比求三角形的面积	111

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分↑方法↑学霸

方法点 69 个 得高分

	页码
01 求含有字母的式子有意义的字母取值范围的方法	3
02 在实数范围内分解因式的策略	5
03 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a \geqslant 0$，$b > 0$）的运算方法	11
04 二次根式乘除混合运算的方法	13
05 比较两个二次根式的大小的方法	14
06 二次根式加减运算的技巧	19
07 用整体思想求代数式的值的方法	21
08 化简求值问题的常用技巧	22
09 倒数法比较大小	23
10 整体思想	29
11 数形结合思想	29
01 检验一元二次方程根的步骤	36
02 代入法	37
03 用直接开平方法解一元二次方程的方法	41
04 常用的因式分解的方法	42
05 用配方法解一元二次方程的一般步骤	46
06 等面积替换法	47
07 换元法	53
08 估算含无理数式子的大小的方法	54
09 利用根的判别式判断一元二次方程的根的情况的方法	56
10 利用根与系数的关系求代数式值的方法	62
11 列表法	67
12 平移法	67
13 整体代入法	76
14 分类讨论思想	77
01 判断四条线段是否是成比例线段的方法	83
02 利用比例的性质求代数式的值的常用方法	84
03 利用平行线分线段成比例的基本事实或推论求线段长的方法	88
04 判定相似多边形的条件	93
05 利用成比例线段求线段的长的方法	98
06 巧添辅助线解决相似三角形问题	99
07 利用两边成比例且夹角相等证两三角形相似的方法	103
08 利用三边成比例判定两三角形相似的方法	104
09 利用相似三角形证明等积式的方法	105

考法点 58 个 争满分

	页码
01 利用二次根式的定义求字母的值	6
02 利用二次根式的性质化简	6
03 利用最简二次根式的定义判断最简二次根式	15
04 利用分母有理化找规律计算	16
05 利用二次根式的混合运算进行计算	23
06 利用二次根式的运算解几何应用问题	24
01 利用方程解的定义求字母式子的值	38
02 利用建一元二次方程模型解实际应用	38
03 利用直接开平方法求字母式子的值	44
04 利用因式分解法说明方程解间的关系	44
05 利用因式分解法解与三角形有关应用	44
06 利用配方法解一元二次方程	49
07 利用配方求字母系数的值	49
08 利用公式法求根的范围	54
09 利用数形结合思想验证用公式法求得的一元二次方程的根	54
10 利用根的判别式求方程整数解问题	59
11 利用根的判别式及方程的根解有关根的应用	59
12 利用根与系数的关系求涉根的非对称式的值	64
13 利用涉根的式子的值求字母的值	64
14 利用一元二次方程解增长（降低）率问题	69
15 利用一元二次方程解商品销售问题	69
01 利用比例的性质对等式进行变形	85
02 利用平行线分线段成比例的推论求线段长	90
03 利用相似多边形的性质解与全等有关的综合问题	95
04 利用平行线判定三角形相似求线段的长	100
05 利用相似三角形的判定定理判定三角形相似	107
06 利用相似三角形的判定和性质判定角的关系	107
07 利用相似三角形的判定和性质解开放性探求条件的应用	107
08 利用相似三角形的性质求比值	114
09 利用相似三角形的性质与平行四边形的性质解综合问题	114
10 利用相似三角形的性质解实际中测距离的应用	120

第21章 二次根式

第22章 一元二次方程

第23章 图形的相似

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 69 个 必得分

第23章 图形的相似

16 利用相似测量宽度 118
17 三角形的中位线 123
18 三角形的重心 125
19 位似图形的定义 130
20 位似图形的性质 131
21 位似图形的画法 132
22 用坐标表示地理位置 137
23 用方位角及距离表示平面内点的位置 138
24 平移变换与坐标变化 139
25 轴对称变换与坐标变化 139
26 平面直角坐标系中的位似 140

第24章 解直角三角形

01 利用相似三角形的性质进行测量 161
02 利用勾股定理进行测量 163
03 直角三角形斜边上的中线的性质 167
04 含 30° 角的直角三角形的性质 168
05 锐角三角函数的定义 173
06 锐角三角函数之间的关系 175
07 特殊角的三角函数值 176
08 用计算器求锐角三角函数值 178
09 解直角三角形 185
10 解直角三角形在实际问题中的应用 187
11 解直角三角形在方向角中的应用 189
12 解直角三角形在仰角和俯角中的应用 190
13 解直角三角形在坡度、坡角中的应用 191

第25章 随机事件的概率

01 事件的认识 210
02 事件发生的机会 211
03 用频率估计随机事件发生的机会的大小 211
04 概率 215
05 概率的应用 217
06 用频率估计概率 224
07 画树状图法 229
08 列表法 230

考向点 79 个 速提分

16 利用相似测量物高解实际应用 117
17 利用相似测量河道宽度 118
18 利用三角形的中位线说明线段间的关系 123
19 利用三角形重心的性质解决与重心有关的问题 125
20 利用中位线法解中点四边形问题 126
21 利用坐标表示地理位置 137
22 利用“方位角 + 距离”确定位置 138
23 利用轴对称变换求点的坐标 140
24 利用位似中坐标的变化规律作图 141
25 利用相似比法解坐标平面中的计算问题 142
26 利用归纳法探究图形的变换与坐标变化的规律 143

01 利用相似三角形的性质进行测量 162
02 利用勾股定理进行测量计算 163
03 利用直角三角形斜边上中线的性质证明线段垂直 167
04 利用含 30° 角的直角三角形的性质解线段关系问题 168
05 利用三角函数的定义求函数值 174
06 利用锐角三角函数间的关系求值 175
07 利用特殊角的三角函数值解计算问题 177
08 利用计算器求任一锐角的函数值问题 178
09 利用平移构造直角三角形法求网格中的函数值 179
10 利用分类思想计算不确定的三角形的面积 179
11 利用直角三角形的边角关系解直角三角形 186
12 利用解直角三角形解实际中方向角问题 189
13 利用解直角三角形解实际中仰角和俯角问题 190
14 利用解直角三角形解实际中坡度和坡角问题 191
15 利用补形法求非直角三角形中的面积 192
16 利用旋转法求非直角三角形中的角度 192

01 利用事件的定义识别事件的类型 210
02 利用随机事件发生的机会的意义判断事件发生机会的大小 211
03 利用随机事件发生机会的大小设计方案 213
04 利用概率的计算公式求几何问题的概率 217
05 利用公式法解概率问题的实际应用 218
06 利用改变概率大小法设计概率问题的游戏规则 218
07 利用频率估计概率解实际应用 224
08 利用频率估计概率解几何应用 226
09 利用画树状图法求概率 229
10 利用列表法求概率 230
11 利用比较概率大小法说明游戏规则的公平性 232
12 利用列举法求两步概率的应用 233
13 利用画树状图法求含三步操作的试验的概率的应用 234

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分方法 学霸

方法点 69 个 得高分

	页码
10 三点定形法	106
11 利用相似三角形测量高度、宽度等的一般步骤	118
12 证明线段倍分关系的方法	123
13 归一法	126
14 判断两个图形是否为位似图形的方法	130
15 平面直角坐标系表示地理位置的方法	137
16 位似图形中坐标的变化规律	142
17 分类讨论思想	153
18 方程思想	154
01 用影子测量法求物高的两种方法	161
02 测量河宽的常用方法	163
03 证线段数量关系的思路	169
04 整体思想	169
05 求锐角三角函数值的方法	174
06 等角转换法	175
07 30°，45°，60° 角的三角函数值的记忆法	176
08 有关特殊角的三角函数值的计算方法	177
09 在网格中求锐角三角函数值的方法	179
10 归纳法	181
11 从特殊到一般思想	181
12 解直角三角形的一般方法	186
13 解直角三角形选择关系式常遵循的原则	186
14 构造直角三角形解非直角三角形问题的方法	187
15 解直角三角形的实际应用问题的求解方法	188
16 求解是否触礁或是否受台风或噪声影响等问题的方法	189
17 作辅助线的技巧	192
18 割补法	204
19 方程思想	205
01 判断一个事件的类型的方法	210
02 判断随机事件发生的机会的大小的方法	211
03 利用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求概率的方法	216
04 用频率估计概率的方法	225
05 用列表法求概率的步骤	230
06 用画树状图法求含三步操作的试验的概率的方法	234
07 方程思想	244

考法点 58 个 争满分

	页码
11 利用光的反射原理测量反射镜不在地面的测物高的应用	121
12 利用三角形中位线的性质求线段长	127
13 利用三角形的中位线求角的度数	128
14 利用位似图形的性质求面积比	135
15 利用建立平面直角坐标系表示几何应用中点的位置	144
16 利用位似变换的性质求坐标系中点的坐标	144
17 利用图形变换在坐标系中作图计算	145
01 利用相似三角形的性质测量河宽	165
02 利用勾股定理计算曲面上两点之间的距离	165
03 利用直角三角形的性质求线段长	170
04 利用三角函数的定义说明网格中锐角三角函数的关系	180
05 利用互余两角三角函数的关系说明互余两角的正弦的平方关系	181
06 利用三角函数解与反比例函数有关的综合应用	182
07 利用锐角三角函数求相似中线段长	182
08 利用解直角三角形构造三角形模型求距离	194
09 利用解直角三角形构造三角形模型求物高	194
10 利用解直角三角形构建“△”式模型解实际问题	195
11 利用解直角三角形构建“△”式模型解实际问题	196
12 利用解直角三角形构建“◺”式模型解实际问题	196
01 利用事件的定义识别必然事件	213
02 利用概率公式解与统计综合问题	219
03 利用概率公式解与方程综合问题	220
04 利用概率公式解与几何综合问题	221
05 利用频率与概率的关系说明统计图的信息	227
06 利用概率解函数的相关应用	234
07 利用概率解统计图的相关应用	235
08 利用概率解几何相关的应用	236

第23章 图形的相似

第24章 解直角三角形

第25章 随机事件的概率

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法

二次根式比较大小的方法… 14

看微课

二次根式的定义…… 2
二次根式的化简…… 13

学方法

因式分解法…… 42
配方法…… 46
公式法…… 51

看微课

一元二次方程的定义…… 35
根的判别式…… 56
利用一元二次方程建模…… 67

学方法

三点定形法……106

看微课

成比例线段…… 82
平行线分线段成比例…… 87
推论的应用…… 88
相似多边形…… 93

第 21 章 二次根式

21.1 二次根式 …… 2
21.2 二次根式的乘除 …… 9
21.3 二次根式的加减 …… 18

素养提分

行动篇：解密“非负数”的意义及性质 ☞ P8
技巧篇：二次根式运算的技巧 ☞ P26
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P27

第 22 章 一元二次方程

22.1 一元二次方程 …… 35
22.2 一元二次方程的解法 …… 41
22.2.1 直接开平方法和因式分解法…… 41
22.2.2 配方法…… 46
22.2.3 公式法…… 51
22.2.4 一元二次方程根的判别式…… 56
*22.2.5 一元二次方程的根与系数的关系 …… 61
22.3 实践与探索 …… 66

素养提分

行动篇：用二分法确定一元二次方程的近似解 ☞ P40
思维篇：逆向思维在一元二次方程中的应用 ☞ P72
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P74

第 23 章 图形的相似

23.1 成比例线段 …… 82
23.1.1 成比例线段 …… 82
23.1.2 平行线分线段成比例 …… 87
23.2 相似图形 …… 92
23.3 相似三角形 …… 97
23.3.1 相似三角形 …… 97
23.3.2 相似三角形的判定 …… 102
23.3.3 相似三角形的性质 …… 110
23.3.4 相似三角形的应用 …… 116

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.4 中位线 …… 123
23.5 位似图形 …… 130
23.6 图形与坐标 …… 137
素养提分
方法篇：利用三角形相似证明乘积式的策略 ☞ P148
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P150

第 24 章 解直角三角形
24.1 测量 …… 161
24.2 直角三角形的性质 …… 167
24.3 锐角三角函数 …… 173
24.4 解直角三角形 …… 185
素养提分
类型篇：解直角三角形常见应用举例 ☞ P199
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P201

第 25 章 随机事件的概率
25.1 在重复试验中观察不确定现象 …… 210
25.2 随机事件的概率 …… 215
25.2.1 概率及其意义 …… 215
25.2.2 频率与概率 …… 224
25.2.3 列举所有机会均等的结果 …… 229
素养提分
应用篇：概率思想在学科中的应用 ☞ P240
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P242
参考答案及点拨（单独成册）

相似三角形的判定……104
相似三角形的性质…… 110
观动画
中点四边形……126
位似图形……130

学方法
化斜为直法……187
看微课
锐角三角函数的定义……173
解直角三角形的应用……187
方向角问题……189
仰角俯角问题……190

看微课
事件的判断……210
概率的定义……215
用频率估计概率…… 224



微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

01. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

02. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

03. **分类讨论思想**：把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想．

04. **数形结合思想**：数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

05. **转化思想**：转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

06. **建模思想**：建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段．使用数学语言描述的事物就称为数学模型．

07. **定义法**：所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的．因此，用定义法解题，是最直接的方法．

08. **直接开平方法**：形如 $ax^2=b$ 或 $a(x+c)^2=b$ 的一元二次方程，若 a、b 同号且 $a\neq 0$，则可根据开平方的意义求未知数 x 的值，这种解一元二次方程的方法就是直接开平方法．

09. **因式分解法**：把一元二次方程的一边化为 0，而另一边分解成两个一次因式的乘积，令每一个因式等于 0，得到两个一元一次方程，解这两个方程便得到原一元二次方程的两个根，这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法．

10. **配方法**：通过配方，把一元二次方程的一边化为完全平方式，另一边化为非负数，然后利用开平方的方法求出一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法叫做配方法．

11. **公式法**：运用数学公式解决问题的一种方法．

12. **换元法**：所谓换元法，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元（通常把未知数称为元）去代替原式的一个部分或改造原来的式子，使它简化，使问题易于解决．

13. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

14. **消元法**：当一个题目中含有两个或两个以上的未知数时，我们可以通过比较条件，分析对应的未知数量的变化情况，设法消去其中的一个未知数量，从而把一道数量关系复杂的题目变成简单的题目解出来，这种解题方法就是消元法．

15. **三点定形法**：三点定形法是证明线段等积式或比例式中找相似三角形的最常用且最有效的方法，它就是设法找出比例式或等积式中（或转化后的式子中）所蕴含的几个字母，是否存在可由“三点”确定的两个相似的三角形．

16. **参数法**：参数法是指在解题过程中，通过适当引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，使问题得以解决的方法．

17. **割补法**：割补法用于几何题之中，就是把图形切开，把切下来的那部分移动到其他位置转化为常规图形，或者是将一个不规则的图形通过补图成为完整的常规图形，使题目便于解答，割补法主要用于数学中解决不规则图形转化为规则图形的问题．

18. **化斜为直法**：在斜三角形中观察图形的特征，通过作辅助线把斜三角形恰当构造出直角三角形，再利用勾股定理或三角函数解直角三角形．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

再探从数到式的奥秘

再探从数到式的奥秘











第21章 二次根式

核心考点

你将见到的

- 二次根式的定义
- 二次根式有意义的条件
- 二次根式的性质
- 二次根式的运算

核心方法

我们为你提供的

- 内移法
- 平方法
- 拆项法
- 整体代入法
- 数形结合思想
- 分类讨论思想

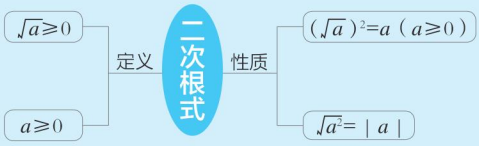
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.1 二次根式

核心知识
- 二次根式的定义
- 二次根式有意义的条件
- 二次根式的性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 二次根式的定义

1. 二次根式的定义： 一般地，我们把形如$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）的式子叫做二次根式；“$\sqrt{\ }$”叫做二次根号.

2. 二次根式的特征：

（1）必须含有二次根号“$\sqrt{\ }$”，“$\sqrt{\ }$”的根指数为2，即“$\sqrt[2]{\ }$”，我们一般省略根指数2，写作“$\sqrt{\ }$”.


二次根式的定义

（2）二次根式中的被开方数既可以是一个数，也可以是一个含有字母的式子.

（3）**双重非负性：** 二次根式$\sqrt{a}$表示非负数a的算术平方根，因此$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$.

提分·必记

特别解读

二次根式应满足两个条件：
- 含有二次根号“$\sqrt{\ }$”；
- 被开方数是正数或0.

特别地：形如$b\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$的式子也是二次根式，它表示$b$与$\sqrt{a}$的乘积，当$b$是带分数时，要写成假分数的形式.

拔考向▸利用二次根式的定义解辨识求值问题

题型1：二次根式的定义在识别二次根式中的应用

例1： 给出下列式子：

①$\sqrt{(-2)^2}$；②$\sqrt[3]{7}$；③$\sqrt{9}$；④$\sqrt{x+y}$；⑤$\sqrt{a^2+1}$；⑥$\sqrt{-2a^2-1}$，其中一定是二次根式的是_____.（只填序号）

解题秘方： 紧扣二次根式定义中“两个条件”进行识别.

解： ①中含有二次根号，且被开方数$(-2)^2$是非负数，故①是二次根式；

②中“$\sqrt[3]{\ }$”是三次根号，不是二次根号，故②不是二次根式；

③中虽然$\sqrt{9}=3$，但它的初始的外在形态符合二次根式的条件，故③是二次根式；

④中虽然含有二次根号，但被开方数$x+y$可能为负数，故④不一定是二次根式；

⑤中含有二次根号，且被开方数a^2+1大于0，故⑤是二次根式；

⑥中含有二次根号，但被开方数$-2a^2-1$小于0，故⑥不是二次根式.

答案： ①③⑤

提分·秘诀

特别提醒

1. 二次根式是在初始的外在形式上定义的，不能从化简结果上判断，如$\sqrt{9}$等都是二次根式.
2. 像$\sqrt{a}+1(a\geqslant 0)$这样的式子只能称为含有二次根式的式子，不能称为二次根式.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：二次根式的定义在求式子有意义时字母的取值范围中的应用

例 2： 当 x 取怎样的数时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{-2x-6}+(x+5)^0$；　　（2）$\sqrt{\dfrac{1}{3x+7}}$；

（3）$\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$；　　（4）$\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

解题秘方： 紧扣二次根式的定义求式子有意义时字母的取值范围.

解：（1）欲使$\sqrt{-2x-6}+(x+5)^0$有意义，

则必有$\begin{cases}-2x-6\geqslant 0,\\ x+5\neq 0,\end{cases}$　$\therefore x\leqslant -3$ 且 $x\neq -5$.

（2）欲使$\sqrt{\dfrac{1}{3x+7}}$有意义，则必有$\begin{cases}\dfrac{1}{3x+7}\geqslant 0,\\ 3x+7\neq 0,\end{cases}$　$\therefore x>-\dfrac{7}{3}$.

（3）欲使$\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$有意义，则必有$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 5-x\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore 2\leqslant x\leqslant 5$.

（4）欲使$\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-2}$有意义，则必有$\begin{cases}x+4\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$

$\therefore x\geqslant -4$ 且 $x\neq 2$.

题型 3：二次根式的双重非负性在求字母值中的应用

例 3：（1）[中考·攀枝花] 若 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2$，则 $x^y=$_____.

（2）[中考·泰州] 实数 a，b 满足$\sqrt{a+1}+4a^2+4ab+b^2=0$，则 b^a 的值为（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\dfrac{1}{2}$

解题秘方： 紧扣二次根式定义中的双重非负性：“$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$”进行解答.

解：（1）由二次根式$\sqrt{a}$中的被开方数的非负性“$a\geqslant 0$”，

得$\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\end{cases}$　$\therefore x=3$.

$\because y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2$，$\therefore y=2$. $\therefore x^y=3^2=9$.

答案： 9

（2）整理，得$\sqrt{a+1}+(2a+b)^2=0$.

由二次根式的非负性“$\sqrt{a}\geqslant 0$”及平方的非负性“$a^2\geqslant 0$”，

得$\begin{cases}a+1=0,\\ 2a+b=0,\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}a=-1,\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore b^a=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

答案： B

方法归纳

求含有字母的式子有意义的字母取值范围的方法：

1. 如果一个式子含有多个二次根式，那么各个二次根式中的被开方数（式）都必须是非负数.
2. 如果一个式子中既含有二次根式又含有分式，那么二次根式中的被开方数（式）是非负数，分式的分母不等于 0.
3. 如果一个式子中既含有二次根式又含有零指数幂或负整数指数幂，那么二次根式中的被开方数(式)是非负数且零指数幂或负整数指数幂的底数不等于 0.

解法提醒

二次根式的双重非负性“$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$”在解题中的应用有两种情况：

一是当一个式子有两个二次根式，且被开方数互为相反数时，通常先利用二次根式$\sqrt{a}$的被开方数的非负性 $a\geqslant 0$，建立不等式组，再解不等式组确定字母的值；

二是当一个式子含有几个非负数，且式子的和为 0 时，通常先利用每个式子都为 0 建立方程组，再解这个方程组确定字母的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 二次根式的性质

1. 二次根式的性质：

（1）$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，即一个非负数的算术平方根的平方等于它本身；

（2）$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0),\end{cases}$即一个数的平方的算术平方根等于它的绝对值.

注意：（1）无论应用 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ 进行化简，还是逆用，都要注意前提：$a\geqslant 0$.

（2）化简形如$\sqrt{a^2}$的式子时，先转化为 $|a|$ 的形式，再根据 a 的符号去绝对值符号.

2. $\sqrt{a^2}$与 $(\sqrt{a})^2\ (a\geqslant 0)$ 的异同点：

表达式		$\sqrt{a^2}$	$(\sqrt{a})^2$
区别	取值范围不同	a 为全体实数	$a\geqslant 0$
	运算顺序不同	$\sqrt{a^2}$ 是先平方后开方	$(\sqrt{a})^2$ 是先开方后平方
	运算结果不同	$\sqrt{a^2}=\|a\|=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0)\end{cases}$	$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$
联系		$\sqrt{a^2}$ 与 $(\sqrt{a})^2$ 均为非负数，当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$	

拔考向▶ 利用二次根式的性质计算化简

题型 1：二次根式的性质在计算中的应用

例 4：计算：

（1）$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$；（2）$\sqrt{(-6)^2}$；（3）$\sqrt{10^{-2}}$；

（4）$(-2\sqrt{2})^2$；（5）$\sqrt{(3.14-\pi)^2}$.

解题秘方：紧扣“二次根式的性质的两公式”进行计算.

解：（1）$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=\frac{3}{5}$.

（2）$\sqrt{(-6)^2}=|-6|=6$.

（3）$\sqrt{10^{-2}}=\sqrt{(10^{-1})^2}=|10^{-1}|=10^{-1}=\frac{1}{10}$.

（4）$(-2\sqrt{2})^2=(-2)^2\times(\sqrt{2})^2=8$.

（5）$\sqrt{(3.14-\pi)^2}=|3.14-\pi|=\pi-3.14$.

题型 2：二次根式的性质的逆用在因式分解中的应用

例 5：在实数范围内分解因式：

（1）x^2-5；　　（2）x^4-4x^2+4.

解题秘方：逆用 $(\sqrt{a})^2=a$ 分解因式.

解：（1）$x^2-5=x^2-(\sqrt{5})^2=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

（2）$x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$.

提分·必记

应用提醒

1. 正用公式：$(\sqrt{5})^2=5$，$(\sqrt{m^2+1})^2=m^2+1$；
2. 逆用公式：若 $a\geqslant 0$，则 $a=(\sqrt{a})^2$，如 $2=(\sqrt{2})^2$，$\frac{1}{2}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$.

应用提醒

1. 正用公式：$\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$；
2. 逆用公式：$3\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3^2\times\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$（以后将会学习）.

提分·秘诀

特别提醒

计算二次根式的注意事项：

1. 计算二次根式要严格按照 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=|a|$ 进行.
2. 正确区分 $(\sqrt{a})^2\ (a\geqslant 0)$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的异同点是计算二次根式的关键.
3. 计算 $\sqrt{a^2}$ 一般有两步：

（1）去掉根号及被开方数的指数，写成绝对值的形式；

（2）去掉绝对值符号，根据绝对值的意义进行化简.

警示误区

逆用二次根式的性质时，必须先确定该数为非负数，若无法确定为非负数，则不能进行变形，故一般只对数进行变形，对字母必须谨慎.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：在实数范围内分解因式的策略：

1. 在实数范围内分解因式时，常常把正数 a 转化为 $(\sqrt{a})^2$，以便于使用平方差公式或完全平方公式进行因式分解.

2. 一般地，如果题目没有指明在什么范围内分解因式，都是指在实数范围内分解因式.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用“定义法”求二次根式中的字母的值

挑战·高分

例 6： 若 $\sqrt{12-n}$ 为一个整数，试求自然数 n 的值.

解题秘方： 紧扣二次根式定义中被开方数的非负性及“整数的定义及其性质”进行解答.

解： 由题意，得 $12-n \geqslant 0$ 且 $n \geqslant 0$，

$\therefore 0 \leqslant n \leqslant 12$.

$\therefore 0 \leqslant 12-n \leqslant 12$.

又 $\because \sqrt{12-n}$ 为一个整数，即 $12-n$ 是一个完全平方数，在 0 ~12 之间的完全平方数有 0，1，4，9，

$\therefore$ 当 $12-n=0$ 时，$n=12$；当 $12-n=1$ 时，$n=11$；

当 $12-n=4$ 时，$n=8$；当 $12-n=9$ 时，$n=3$.

$\therefore$ 自然数 n 的值为 3 或 8 或 11 或 12.

解法提醒

“$\sqrt{12-n}$ 为一个整数”给我们提供了如下信息：它是二次根式，所以有 $12-n \geqslant 0$；被开方数 $12-n$ 是一个完全平方数；“自然数 n”给我们提供了 $n \geqslant 0$ 且 n 为整数这一条件.

拔尖角度 2 利用“数轴法”化简含二次根式的代数式

挑战·高分

例 7： [中考·广州] 已知实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图 21.1-1，试化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$.

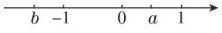


图 21.1-1

解题秘方： 紧扣表示数的点在数轴上的位置判断字母式子的正负性，结合二次根式的性质 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简含二次根式的代数式.

解： 由数轴上点的位置可知：$a>b$，$0<a<1$，$b<-1$，

$\therefore a-b>0$，$b-1<0$，$a-1<0$.

$$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}$$
$$=|a|+|b|+|a-b|+|b-1|-|a-1|$$
$$=a-b+(a-b)+(1-b)-(1-a)$$
$$=3a-3b.$$

解法提醒

数轴分析法：

利用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行化简的关键是确定绝对值内式子的正负，此题在判断正负时要根据字母在数轴上的对应点的位置来确定.

技巧点拨

本例题是由“形”的位置来确定“数(式)”的符号，反之由“数(式)”的符号也可以确定“形”的位置，这充分体现了“数”与“形”是一个有机结合体；利用二次根式的性质化简关键是确保去掉根号后的结果是非负数.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用“三边关系法”化简含二次根式的代数式

挑战·高分

例 8： 设 a，b，c 分别为一三角形的三边长，试化简：$\sqrt{(a+b+c)^2}+|a-b-c|+\sqrt{(b-a-c)^2}-\sqrt{(c-b-a)^2}$.

解题秘方： 紧扣三角形“三边关系”判断要化简式子的符号进行化简.

解： ∵ a，b，c 分别为一三角形的三边长，

∴ $a+b+c>0$，$a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$.

∴原式 $=|a+b+c|+|a-b-c|+|b-a-c|-|c-b-a|$

$=(a+b+c)-(a-b-c)-(b-a-c)+(c-b-a)$

$=a+b+c-a+b+c-b+a+c+c-b-a$

$=4c$.

解题通法

运用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行化简时，其关键步骤是去绝对值符号，而去绝对值符号的关键是判断绝对值符号内的代数式的符号，因此一定要结合具体问题（如数轴、几何图形的特征等）确定其符号，然后进行化简.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是：（1）二次根式的概念，主要考查二次根式有意义的条件，也常与分式知识相结合进行考查，题型主要是选择题和填空题，难度较小，以基础题为主；（2）二次根式的性质，主要考查二次根式非负性的应用及 $\sqrt{a^2}$ 的化简，题型主要是选择题和填空题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用二次根式的定义求字母的值

例 9：［中考·绵阳］使代数式 $\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\sqrt{4-3x}$ 有意义的整数 x 有（　　）

A. 5 个　　B. 4 个　　C. 3 个　　D. 2 个

试题评析： 本题考查了二次根式有意义的条件，利用被开方数是非负数，分母不能为零得出不等式是解题关键.

解： 由题意，得 $x+3>0$ 且 $4-3x\geqslant 0$，解得 $-3<x\leqslant\frac{4}{3}$，

∴整数 x 的值为 -2，-1，0，1.

答案： B

知识储备

求代数式有意义的条件的方法：

对于单个的二次根式，只需满足被开方数为非负数；对于含有多个二次根式的式子，则必须满足多个被开方数同时为非负数；对于零指数幂，则必须满足底数不能为零；对于含有分式的式子，则需满足分母不能为零.

考法 2 利用二次根式的性质化简

例 10：［中考·枣庄］实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图 21.1-2，化简 $|a|+\sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是（　　）

A. $-2a+b$　　B. $2a-b$　　C. $-b$　　D. b

试题评析： 此题主要考查了二次根式的性质以及实数与数轴，正确得出各项符号是解题关键.



图 21.1-2

解： 由图可知：$a<0$，$a-b<0$，

则 $|a|+\sqrt{(a-b)^2}=-a-(a-b)=-2a+b$.

答案： A

思路点拨

直接利用实数 a，b 在数轴上对应点的位置，得出 $a<0$，$a-b<0$，再利用绝对值以及二次根式的性质化简得出答案.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见249页

1. 已知 a 为任意实数，下列式子一定是二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt[3]{a}$

C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a^2}$

2. 下列计算结果正确的是（　　）

A. $(-\sqrt{5})^2=-5$　　B. $\sqrt{5^{-4}}=5^{-2}$

C. $-(-\sqrt{5})^2=5$　　D. $\sqrt{(-5)^2}=-5$

3. [中考·济宁] 若 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+1$ 在实数范围内有意义，则 x 满足的条件是（　　）

A. $x\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x\neq\frac{1}{2}$

4. 如果一个三角形的三边长分别为 1，k，4，那么化简 $|2k-5|-\sqrt{k^2-12k+36}$ 的结果是（　　）

A. $3k-11$　　B. $k+1$

C. 1　　D. $11-3k$

5. [中考·宿迁] 若实数 m，n 满足等式 $|m-2|+\sqrt{n-4}=0$，且 m，n 恰好是等腰三角形 ABC 的两条边的长，则△ABC 的周长是（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

6. 若 $\sqrt{(x-6)^2}=6-x$，则 x 的取值范围是_____.

7. 实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图，化简：$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$.



（第7题）

8. 在实数范围内分解因式：

（1）x^4-4；　　（2）$3x^2-6y^2$；

（3）$x^4-3x^2y^2+2y^4$；　　（4）$-x^2+2\sqrt{2}x-2$.

9. 阅读甲、乙两人的解答过程，并回答问题：

甲、乙两人计算当 $a=5$ 时，$a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值得到不同的答案.

甲的解答是：$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+|a-1|$，∵ $a=5$，∴ $a+|a-1|=a+a-1=2a-1=2\times5-1=9$；

乙的解答是：$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1$.

谁的解答是正确的？错误的解答错在哪里？为什么？

10. 已知 a，b 为实数，且 $\sqrt{a-5}+2\sqrt{10-2a}=b+4$，求 a，b 的值.

11. 已知 n 是正整数，$\sqrt{52n}$ 是整数，求 n 的最小正整数值.　　【导学号：1927962】

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.[易错题]已知 $|x-1|=2$，求 $\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}$ 的值.

13. 已知 $-1<a<0$，化简代数式 $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$.

素养提分 行动篇

解密“非负数”的意义及性质

实数的绝对值、实数的偶次幂和非负数的算术平方根是初中阶段学习的三个重要的非负数，其表达式是 $|a|\geqslant 0$，$a^{2n}\geqslant 0$（n 为正整数），$\sqrt{a}\geqslant 0$（$a\geqslant 0$）.

非负数的性质：

（1）所有的非负数都有最小值，为 0；

（2）有限个非负数之和仍然是非负数；

（3）非负数与正数之和是正数；

（4）几个非负数的和为零，则每个非负数都为零.

非负数的性质的几种常见运用形式：

（1）求某个代数式的最大值或最小值. 如：当 $x=2$ 时，式子 $7-|x-2|$ 有最大值，为 7.

（2）求二次函数的最大值或最小值（以后会学到）. 将二次函数表达式化成含有非负数的顶点式：$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，利用完全平方的非负性，可知当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值或最小值，为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

（3）已知一个等式求多个未知数的值：

①利用二次根式的双重非负性. 如由 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}-4$ 可以求出 x 与 y 的值；

②利用几个非负数的和等于零，则每个非负数都为零. 如：由 $|x-1|+(y+3)^2+\sqrt{z-4}=0$ 可以求出 x，y，z 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.2 二次根式的乘除

核心知识

- 二次根式的乘除法
- 积（商）的算术平方根
- 最简二次根式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 二次根式的乘法

1. 二次根式的乘法法则：

一般地，有 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）. 这就是说，两个算术平方根的积，等于它们被开方数的积的算术平方根.

2. 二次根式的乘法法则的推广：

（1）当二次根式根号外有因数（式）时，可类比单项式乘单项式的法则进行运算，即根号外因数（式）之积作为积的根号外因数（式），被开方数之积作为积的被开方数，即：$a\sqrt{b}\cdot c\sqrt{d}=ac\sqrt{bd}$（$b\geqslant 0$，$d\geqslant 0$）.

（2）几个二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变，即：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$）.

（3）几个二次根式相乘，可利用乘法交换律、结合律使运算简便.

拔考向▸ 利用二次根式乘法法则进行二次根式计算

例 1： 计算：

（1）$\sqrt{28}\times\sqrt{7}$；　（2）$\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y}}$；

（3）$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})$；　（4）$\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{2\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{1\dfrac{3}{5}}$.

解题秘方： 紧扣“二次根式乘法法则”计算.

解：（1）$\sqrt{28}\times\sqrt{7}=\sqrt{28\times 7}=\sqrt{196}=14$.

（2）$\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{y}}=\sqrt{xy\cdot\dfrac{1}{y}}=\sqrt{x}$.

（3）$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})$

$=6\times(-2)\times\sqrt{27\times 3}$

$=-12\times\sqrt{81}=-12\times 9=-108$.

（4）$\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{2\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{1\dfrac{3}{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{8}{5}}=\sqrt{2}$.

提分·必记

特别提醒

1. 法则中被开方数 a，b 既可以是数，也可以是式子，但都必须是非负的.
2. 如果没有特别说明，本章中的所有字母都表示正数.
3. 二次根式相乘，被开方数的积中有开得尽方的因数或因式时一定要开方.
4. 二次根式相乘的结果是一个二次根式或一个有理式.

提分·秘诀

解法提醒

（1）（2）直接用法则计算，且（2）中字母取值未加说明为正数，不需讨论.

（3）按推广中（1）计算.

（4）按推广中（2）计算，但注意要将带分数化为假分数计算.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 积的算术平方根

1. 积的算术平方根的性质： $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

这就是说，积的算术平方根，等于各因式算术平方根的积.

2. 性质的应用：

（1）积的算术平方根的性质的实质是逆用二次根式的乘法法则，它对两个以上因数（式）的积的算术平方根同样适用；

（2）运用此公式化简二次根式时，关键是将被开方数分解因数（或因式），把含有 a^2 形式的 a 移到根号外面.

提分·必记

特别提醒

公式中的 a，b 既可以是一个数，也可以是一个式子. 积中各个因式必须都为非负数，若不是非负数，应将其化成非负数再运用公式化简.

拔考向▶利用积的算术平方根的性质进行化简

例 2：［易错题］化简：

（1）$\sqrt{(-7)\times(-14)}$；

（2）$\sqrt{36^2+48^2}$；

（3）$\sqrt{0.49x^5y^6}$；

（4）$\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

解题秘方： 紧扣“积的算术平方根的性质”的特征进行化简.

解：（1）$\sqrt{(-7)\times(-14)}=\sqrt{7\times 14}=\sqrt{2\times 7^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{7^2}=7\sqrt{2}$.

（2）$\sqrt{36^2+48^2}=\sqrt{(12\times 3)^2+(12\times 4)^2}=\sqrt{12^2\times(3^2+4^2)}=\sqrt{12^2}\times\sqrt{25}=12\times 5=60$.

（3）$\sqrt{0.49x^5y^6}=\sqrt{0.7^2(x^2)^2(y^3)^2\cdot x}=0.7x^2y^3\sqrt{x}$.

（4）$\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-a^2+b^2)}$

$=\sqrt{2a^2\cdot 2b^2}$

$=2ab$.

提分·秘诀

特别提醒

逆用二次根式的乘法法则时，利用积的算术平方根的性质，要注意以下两点：

- 被开方数（式）的范围；
- 被开方数（式）一定是乘积的形式，不要出现“$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$”这样的错误.

点知识▶3 二次根式的除法

1. 二次根式的除法法则： 一般地，有 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）.

这就是说，两个算术平方根的商，等于被开方数的商的算术平方根.

2. 二次根式的除法法则的推广：

（1）如果是几个二次根式相除，应按除法法则依次计算；即：$\sqrt{a}\div\sqrt{b}\div\sqrt{c}=\sqrt{a\div b\div c}$（$a\geqslant 0$，$b>0$，$c>0$）.

（2）当二次根式根号外有因数（式）时，可类比单项式除以单项式的法则进行运算，将根号外的因数（式）之商作为商的根号外因数（式），被开方数（式）之商作为商的被开方数（式），即：$a\sqrt{b}\div c\sqrt{d}=(a\div c)\sqrt{b\div d}$（$b\geqslant 0$，$d>0$，$c\neq 0$）.

提分·必记

特别提醒

法则中的被开方数 a，b 既可以是数，也可以是式子，但都必须是非负的且 b 不为 0；若 $b=0$，则式子无意义；

进行二次根式的除法运算时，若两个被开方数可以整除，就直接运用二次根式的除法法则进行计算；若两个被开方数不能整除，可以对二次根式化简或变形后再相除.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核考向▶利用二次根式的除法法则求字母取值范围与化简问题

题型1：二次根式的除法法则在求字母取值范围中的应用

例3： 如果$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-8}}=\sqrt{\frac{a}{a-8}}$成立，那么（　　）

A.$a\geqslant 8$　　B.$0\leqslant a\leqslant 8$　　C.$a\geqslant 0$　　D.$a>8$

解题秘方： 紧扣“二次根式除法法则”成立的条件求解.

解： 根据二次根式除法法则成立的条件，

得$\begin{cases}a\geqslant 0,\\ a-8>0,\end{cases}$ $\therefore a>8$.

答案： D

题型2：二次根式的除法法则在计算中的应用

例4： 计算：

（1）$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$；　　（2）$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$；

（3）$\sqrt{4(a-1)^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a-1}{b}}\right)(a>1,\ b>0)$.

解题秘方： 紧扣“二次根式除法法则”进行计算.

解：（1）$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

（2）$\sqrt{1\frac{1}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\div\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times 6}=3$.

（3）$\sqrt{4(a-1)^3b}\div\left(-\sqrt{\frac{a-1}{b}}\right)$

$=-\sqrt{4(a-1)^3b\div\frac{a-1}{b}}$

$=-\sqrt{4(a-1)^3b\cdot\frac{b}{a-1}}$

$=-\sqrt{4(a-1)^2b^2}$

$=-2b(a-1)$.

点知识▶4 商的算术平方根

1. 商的算术平方根的性质： $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,\ b>0)$.

这就是说，商的算术平方根，等于算术平方根的商.

2. 去掉分母中的根号（分母有理化）的方法：

（1）当分母是$\sqrt{a}$或$b\sqrt{a}$的形式时，分子与分母同乘$\sqrt{a}$；

（2）当分母是$a+\sqrt{b}$的形式时，分子与分母同乘$a-\sqrt{b}$，利用平方差公式将分母中的根号去掉；

（3）当分母是$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的形式时，分子与分母同乘$\sqrt{a}-\sqrt{b}$，利用平方差公式将分母中的根号去掉.

提分·秘诀

解法提醒

要求使等式成立的字母的取值范围，只需使等式的每部分都有意义.这里包括二次根式的被开方数是非负数，分式的分母不为零，零指数幂和负整数指数幂的底数不为零等.

技巧点拨

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,\ b>0)$的运算方法：

1. 当a是b的倍数或a，b为分数时，常先利用$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$计算.
2. 当$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$中的被开方数含有完全平方数（式）时，常先将完全平方数（式）“开方”出来，再进行除法运算.
3. 当根号前含有系数时，根号前的系数与系数对应相除，根号内的被开方数与被开方数对应相除，再把除得的结果相乘.

提分·必记

特别提醒

1. 商的算术平方根的性质的实质是逆用二次根式的除法法则.
2. 公式中的a,b既可以是一个数，也可以是一个式子，但必须满足$a\geqslant 0$，$b>0$.
3. 利用商的算术平方根的性质可以把被开方数中含有分母的二次根式化成被开方数不含分母的二次根式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用商的算术平方根的性质进行计算化简

题型1：商的算术平方根的性质在化简中的应用

例5： 将下列各式化简：

（1）$\sqrt{1\frac{7}{9}}$；　（2）$\sqrt{\frac{1}{32}}$；

（3）$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}$；　（4）$\frac{xy}{x-y}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}}$（$x>y>0$）.

解题秘方： 紧扣“商的算术平方根的性质”进行化简.

解：（1）$\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$.

（2）$\sqrt{\frac{1}{32}}=\sqrt{\frac{2}{64}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

（3）$a\sqrt{\frac{28}{a^3}}=a\sqrt{\frac{2^2\times7}{a^2\cdot a}}=a\sqrt{\frac{2^2\times7\times a}{a^2\cdot a^2}}=a\cdot\frac{2\sqrt{7a}}{a^2}=\frac{2}{a}\sqrt{7a}$.

（4）$\frac{xy}{x-y}\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}}=\frac{xy}{x-y}\cdot\sqrt{\frac{xy(x-y)^2}{x^2y^2}}=\frac{xy}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}\sqrt{xy}$

$=\sqrt{xy}$.

题型2：商的算术平方根的性质在去掉分母中的根号中的应用

例6： 去掉下列分母中的根号：

（1）$\frac{3}{\sqrt{3}}$；　（2）$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}$；

（3）$\frac{2}{\sqrt{2ab}}$；　（4）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

解题秘方： 紧扣“去掉分母中的根号的方法”进行变形.

解：（1）$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

（2）方法一：$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{12}{32}}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times2}{8\times2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

方法二：$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{4\times3}{16\times2}}=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{\sqrt{16}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=$

$\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

（3）$\frac{2}{\sqrt{2ab}}=\frac{2\times\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2ab}}=\frac{2\sqrt{2ab}}{2ab}=\frac{\sqrt{2ab}}{ab}$.

（4）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$

$\frac{5+2\sqrt{6}}{3-2}=5+2\sqrt{6}$.

提分·秘诀

方法点拨

利用商的算术平方根的性质化简二次根式的方法：

1. 若被开方数（式）的分母是一个完全平方数（式），则可以直接利用商的算术平方根的性质，先将分子、分母分别开平方，然后求商；
2. 若被开方数（式）的分母不是完全平方数（式），可根据分式的基本性质，先将分式的分子、分母同时乘一个不等于0的数或整式，使分母变成一个完全平方数（式），然后利用商的算术平方根的性质进行化简.

解法提醒

有多种方法：可以先运用二次根式的除法法则，再把被开方数进行化简，然后进行开方运算；

也可以先分别把分子、分母进行化简，再将分子、分母同乘一个适当的数（式），化去分母中的根号；

解题通法

去掉分母中的根号一般经历以下三步：

“一移”，即将分子、分母中能开得尽方的因数（式）开方后移到根号外；

“二乘”，即将分子、分母同乘分母的有理化因数（式）；

“三化”，即化简计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸5 最简二次根式

1. **定义：**二次根式被开方数中不含分母，并且被开方数中所有因数（或因式）的幂的指数都小于2，像这样的二次根式称为最简二次根式.

2. **二次根式化简成最简二次根式的步骤：**

（1）“一分”，即利用因数（式）分解的方法把被开方数的分子、分母都化成质因数（式）的幂的乘积形式；

（2）“二移”，即把能开得尽方的因数（式）用它的算术平方根代替，移到根号外，其中把根号内的分母中的因式移到根号外时，要注意应写在分母的位置上；

（3）“三化”，即化去被开方数中的分母.


二次根式的化简

提分·必记

特别提醒

判断一个二次根式是否是最简二次根式，要紧扣两个条件：

- 被开方数不含分母；
- 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

注意：分母中含有根式的式子不是最简二次根式.

拔考向▸利用最简二次根式的定义识别最简二次根式

例7：下列各式中，哪些是最简二次根式？哪些不是最简二次根式？不是最简二次根式的，请说明理由.

（1）$\sqrt{\frac{1}{3}}$；（2）$\sqrt{x^2+1}$；（3）$\sqrt{0.2}$；（4）$\sqrt{24x}$；

（5）$\sqrt{x^3+6x^2+9x}$；（6）$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

解题秘方：紧扣最简二次根式定义的条件进行判断.

解：（1）不是最简二次根式，因为被开方数中含有分母.

（2）是最简二次根式.

（3）不是最简二次根式，因为被开方数是小数（即含有分母）.

（4）不是最简二次根式，因为被开方数$24x$中含有能开得尽方的因数4，$4=2^2$.

（5）不是最简二次根式，因为$x^3+6x^2+9x=x(x^2+6x+9)=x(x+3)^2$，被开方数中含有能开得尽方的因式.

（6）不是最简二次根式，因为分母中有二次根式.

提分·秘诀

特别警示

判断最简二次根式有两大思维误区：

- 是被开方数不含分母而不是式子不含分母，如$\frac{\sqrt{2}}{3}$有分母但$\frac{\sqrt{2}}{3}$是最简二次根式；
- 被开方数中不能含有能开得尽方的因数或因式，如$\sqrt{x^2+y^2}$是最简二次根式.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸1 利用“顺序法”进行二次根式混合运算

例8：计算：

（1）$-\sqrt{18}\times 2\sqrt{\frac{4}{9}}\div\left(-\frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{3}}\right)$；（2）$\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

解题秘方：紧扣二次根式的乘除运算的法则及混合运算顺序进行计算.

解：（1）原式$=\left(2\div\frac{2}{3}\right)\sqrt{18\times\frac{4}{9}\div\frac{4}{3}}$

挑战·高分

解法提醒

二次根式乘除混合运算的方法：

二次根式乘除混合运算的方法与整式乘除混合运算的方法相同，整式乘除法的一些法则、公式在二次根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$=\left(2\times\frac{3}{2}\right)\sqrt{18\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}}$$
$$=3\sqrt{6}.$$

（2）原式 $=\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$$
$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}$$
$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{ab}$$
$$=\frac{\sqrt{ab}}{a^2b}.$$

式乘除法中**同样适用**．其一般步骤为：

1. 将算式中的除法转化为乘法；
2. 利用乘法运算律转化为系数和被开方数的运算；
3. 将系数和被开方数分别相乘；
4. 结果化成最简二次根式或整式．

拔尖角度▶ 2 利用“非负数（式）平方内移法”变形

例 9： 把下列各式中根号外的因数（式）移到根号内：

（1）$3\sqrt{\frac{2}{3}}$；（2）$-2\sqrt{3}$；（3）$x\sqrt{-\frac{1}{x}}$．

解题秘方： 紧扣“二次根式的性质 $a=\sqrt{a^2}$（$a\geqslant 0$）和 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）”对式子进行变形．

解：（1）$3\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{3^2\times\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$．

（2）$-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\times 3}=-\sqrt{12}$．

（3）$\because -\frac{1}{x}>0$，$\therefore x<0$．

$$\therefore x\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\sqrt{(-x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)}=-\sqrt{-x}.$$

挑战·高分

特别警示

（3）容易忽视隐含条件 $x<0$，而产生如下错误：

$$x\sqrt{-\frac{1}{x}}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{x}}$$
$$=\sqrt{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{-x}.$$

拔尖角度▶ 3 利用“被开方数比较法”或“平方法”比较二次根式的大小

例 10： 比较大小：（1）$7\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{11}$；（2）$-2\sqrt{11}$ 与 $-3\sqrt{5}$．

解题秘方： 紧扣“被开方数大的算术平方根大”或“两个正数，平方大的正数大”的规律比较．

解：（1）方法一：$\because 7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\times 2}=\sqrt{98}$，

$3\sqrt{11}=\sqrt{3^2\times 11}=\sqrt{99}$，$98<99$，$\therefore\sqrt{98}<\sqrt{99}$，即 $7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$．

方法二：$\because 7\sqrt{2}>0$，$3\sqrt{11}>0$，且 $(7\sqrt{2})^2=49\times 2=98$，

$(3\sqrt{11})^2=9\times 11=99$，$98<99$，

$\therefore(7\sqrt{2})^2<(3\sqrt{11})^2$．$\therefore 7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$．

（2）$\because -2\sqrt{11}=-\sqrt{44}$，$-3\sqrt{5}=-\sqrt{45}$，$44<45$，

$\therefore\sqrt{44}<\sqrt{45}$．$\therefore -\sqrt{44}>-\sqrt{45}$，即 $-2\sqrt{11}>-3\sqrt{5}$．

二次根式比较大小的方法

挑战·高分

解法提醒

比较两个二次根式的大小的方法：

1. 可以转化成比较两个被开方数的大小，即可以将根号外的正因数平方后移到根号内，比较移后的被开方数的大小，被开方数大的，其算术平方根也大；
2. 可以将两个二次根式分别平方，计算出结果，再比较大小，依据是：当 $a>0$，$b>0$ 时，若 $a^2>b^2$，则 $a>b$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用“从特殊到一般思想”探究等式变化规律

例 11： 先观察下列等式，再回答问题：

① $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1\frac{1}{2}$；

② $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=1\frac{1}{6}$；

③ $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=1\frac{1}{12}$.

（1）请根据上面三个等式提供的信息，猜想 $\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$ 的结果；

（2）请按照上面各等式反映的规律，试写出用 n（n 为正整数）表示的等式.

解题秘方： 紧扣“等式提供的数据信息”，运用“对比分析、猜想”发现规律.

解：（1）$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}=1\frac{1}{20}$.

（2）$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1\frac{1}{n(n+1)}$.

挑战·高分

解法提醒

寻找通式的一般步骤：

1. 将所给的已知结论进行编号；

2. 确定已知结论中的每一部分与序号的关系；

3. 用序号及确定的关系表示通式.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的内容主要是二次根式的乘除法及最简二次根式. 中考命题主要考查二次根式的化简，多以选择题和填空题的形式出现，有时出现在代数式的化简求值中，试题的难度不大，只要灵活掌握 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$），$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）及其逆运算，就能解决中考试题中有关二次根式的化简问题.

三年中考兵法

考法 1 利用最简二次根式的定义判断最简二次根式

例 12：［中考·荆州］下列根式是最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　B. $\sqrt{0.3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{20}$

试题评析： 本题考查了最简二次根式的定义，熟悉最简二次根式的两个条件是解答本题的关键.

解： A. 该二次根式的被开方数中含有分母，不是最简二次根式，故本选项错误；B. 该二次根式的被开方数中含有小数，不是最简二次根式，故本选项错误；C. 该二次根式符合最简二次根式的定义，故本选项正确；D.$20=2^2\times 5$，该二次根式的被开方数中含能开得尽方的因数，不是最简二次根式，故本选项错误.

答案： C

冲刺·满分

知识链接

化简二次根式的常用技巧：

1. 把被开方数中能开得尽方的因数或因式进行开方.
2. 若被开方数中含有带分数，应先将带分数化为假分数.
3. 若被开方数中含有小数，应先将小数化为分数.
4. 若被开方数是多项式，则先进行因式分解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用分母有理化找规律计算

例 13：[中考·黄石]观察下列等式：

第 1 个等式：$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

第 2 个等式：$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

第 3 个等式：$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

第 4 个等式：$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

按上述规律，回答以下问题：

（1）请写出第 n 个等式：$a_n=$_____；

（2）$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$_____.

试题评析：此题考查了分母有理化及数字变化规律，会用对比分析、猜想法是解题的关键.

解：（1）∵第 1 个等式：$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

第 2 个等式：$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

第 3 个等式：$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

第 4 个等式：$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

∴第 n 个等式：$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

（2）$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$.

答案：（1）$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$　　（2）$\sqrt{n+1}-1$

思路点拨

根据题意可知，

$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，

$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，

$a_4=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

由此得出第 n 个等式：

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

将每一个等式化简的结果代入即可求得答案.

两年模拟兵法

☞答案见 250 页

1. [中考·包头]下列计算结果正确的是（　　）

A. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$

C. $(-2a^2)^3=-6a^6$　　D. $(a+1)^2=a^2+1$

2. [中考·兰州]下列二次根式中，是最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{18}$　　B. $\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{27}$　　D. $\sqrt{12}$

3. [期末·南陵县]已知：$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，则 a 与 b 的关系是（　　）

A. 相等　　B. 互为相反数

C. 互为倒数　　D. 平方相等

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 等式$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-1}$成立的条件是（　　）

A.$x\geqslant 1$　　B.$x\geqslant -1$

C.$-1\leqslant x\leqslant 1$　　D.$x\geqslant 1$或$x\leqslant -1$

5.[**中考·上海**]在下列各式中，二次根式$\sqrt{a-b}$的有理化因式是（　　）

A.$\sqrt{a+b}$　　B.$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

C.$\sqrt{a-b}$　　D.$\sqrt{a}-\sqrt{b}$

6.[**中考·杭州**]已知$m=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times(-2\sqrt{21})$，则有（　　）

A.$5<m<6$　　B.$4<m<5$

C.$-5<m<-4$　　D.$-6<m<-5$

7. 计算：

（1）[**易错题**]$\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}$；

（2）$\frac{1}{4}\sqrt{18}\times 8\sqrt{\frac{1}{36}}\div\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}$.

8.[**中考·黄石**]先化简，后计算：

$\frac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\frac{9-a}{2a+6}\cdot\frac{1}{a+9}$，其中$a=\sqrt{3}-3$.

9. 已知a，b满足$\sqrt{4a-b+1}+\sqrt{\frac{1}{3}b-4a-3}=0$.

求$2a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{-\frac{1}{b}}\right)$的值.

【导学号：1927962】

10. 已知$\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$，且$x$为偶数，求$(1+x)\cdot\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 二次根式的加减

核心知识
- 同类二次根式
- 二次根式的加减
- 二次根式的混合运算

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 合并同类二次根式

1. 同类二次根式： 与整式中同类项相类似，我们把像 $3\sqrt{a}$、$-2\sqrt{a}$ 与 $4\sqrt{a}$ 这样的几个二次根式，称为同类二次根式.

2. 合并的方法：

合并同类二次根式与合并同类项相类似，将根号外的因数或因式相加，根指数和被开方数不变，合并的依据是乘法分配律的逆向运用，

即：$a\sqrt{m}+b\sqrt{m}=(a+b)\sqrt{m}\ (m\geqslant 0)$.

提分·必记

特别提醒

同类二次根式必须同时满足：

最简二次根式和被开方数相同这两个条件，它与根号前面的因数（式）无关.

拨考向▸利用同类二次根式的定义识别同类二次根式

例 1： 下列根式中，与$\sqrt{3}$不是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　B. $\frac{3}{\sqrt{3}}$　　C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$　　D. $\sqrt{12}$

解题秘方： 紧扣“同类二次根式”的定义中的两个必要条件进行识别.

解： 首先把选项中每个根式化成最简二次根式，然后找出被开方数不是 3 的二次根式，即

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3};\ \sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}.$$

答案： C

提分·秘诀

解法提醒

判断两个二次根式是否为同类二次根式的方法：

先把二次根式化为最简二次根式，然后判断被开方数是否相同，相同就是，否则不是.

点知识▸2 二次根式的加减

1. 二次根式加减的法则： 二次根式相加减，先把各个二次根式化简，再将同类二次根式合并.

2. 二次根式加减运算的步骤：

（1）“化”：将每个二次根式都化成最简二次根式；

（2）“找”：找出被开方数相同的最简二次根式（即同类二次根式）；

（3）“并”：将同类二次根式合并成一项.

提分·必记

特别提醒

1. 化成最简二次根式后被开方数不相同的二次根式不能合并，但是不能丢弃，它们也是结果的一部分.

2. 整式加减运算中的交换律、结合律、去括号法则、

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 二次根式的乘除法与二次根式的加减法的区别

运算	二次根式的乘除法	二次根式的加减法
系数	系数相乘除	系数相加减
被开方数	被开方数相乘除	被开方数不变
化简	结果化为最简二次根式或整数	先化为最简二次根式，再合并同类二次根式

核心考向▶利用二次根式加减法的法则进行计算

例2： 计算：

$$(1)\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128}+\sqrt{2};\quad (2)\sqrt{27}+\frac{\sqrt{18}}{3}-\sqrt{0.5}-\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

解题秘方： 紧扣“二次根式加减法法则”，按“化简→判断→合并”的顺序计算.

解： $(1)\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

$(2)\sqrt{27}+\frac{\sqrt{18}}{3}-\sqrt{0.5}-\frac{6}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{6\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

知识点▶3 二次根式的混合运算

1. 二次根式的混合运算种类：

二次根式的加、减、乘、除、乘方（或开方）的混合运算.

2. 二次根式的混合运算顺序：

与整式的混合运算顺序相同，先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，如果有括号就先算括号里面的.

3. 二次根式混合运算中的运算律：

实数运算中的运算律（交换律、结合律、分配律）和整式乘法中的乘法公式（平方差公式和完全平方公式）在二次根式的运算中仍然适用.

4. 二次根式混合运算的几种常见类型及计算方法

$(1)\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$;

$(2)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})=\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$;

$(3)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$;

$(4)(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\pm2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a\pm2\sqrt{ab}+b$;

$(5)(\sqrt{a}+\sqrt{b})\div\sqrt{c}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{c}$;

$(6)(\sqrt{a}+\sqrt{b})\div(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$.

添括号法则在二次根式运算中仍然适用.

3. 根号外的因式就是这个二次根式的系数，二次根式的系数是带分数的要化为假分数的形式.

提分·秘诀

解法提醒

二次根式加减运算的技巧：

1. 将每个二次根式都化为最简二次根式，若被开方数中含有带分数，则要先化成假分数；若含有小数，则要化成分数，进而化为最简二次根式.
2. 原式中若有括号，要先去括号，再应用加法交换律、结合律将被开方数相同的二次根式进行合并.

提分·必记

特别提醒

1. 二次根式混合运算的结果应写成最简二次根式（或整式）的形式并且分母中不含二次根式.
2. 进行二次根式的开方运算时应使开出的因数（式）是非负数（式）.
3. 在进行计算时，能用乘法公式的要尽量使用乘法公式，同时注意合理地运用运算律.

活学巧记

二次根式混合算，
加减乘除和乘方，
运算顺序同实数，
恰到好处运算律，
乘法公式用到位，
计算过程变容易.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用二次根式的混合运算顺序及运算律进行计算

题型 1：二次根式的混合运算顺序在计算中的应用

例 3： 计算：

（1）$\left(\sqrt{\frac{8}{27}}-5\sqrt{3}\right)\times\sqrt{6}$；

（2）$(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$；

（3）$\left(4\sqrt{8}-8\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{32}\right)\div 2\sqrt{2}$.

解题秘方： 紧扣二次根式的混合运算顺序运算即可.

解：（1）原式 $=\sqrt{\frac{8}{27}}\times\sqrt{6}-5\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

$=\sqrt{\frac{8}{27}\times 6}-5\sqrt{3\times 6}$

$=\frac{4}{3}-15\sqrt{2}$.

（2）原式 $=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}$

$=25\sqrt{2}-10\sqrt{3}+10\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

$=19\sqrt{2}$.

（3）原式 $=(8\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\div 2\sqrt{2}$

$=10\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}=5$.

题型 2：运算律和乘法公式在二次根式混合运算中的应用

例 4： 计算：

（1）$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})^2$；

（2）$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

（3）$(3+2\sqrt{2})^{2019}(3-2\sqrt{2})^{2020}$.

解题秘方： 紧扣“乘法公式”和“幂的运算法则”的特征，进行灵活运算.

解：（1）原式 $=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$

$=(2\sqrt{2}-2\sqrt{6})\times 2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{6}-12\sqrt{2}$.

（2）原式 $=[1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})][1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]$

$=1^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

$=1-5+2\sqrt{6}$

$=2\sqrt{6}-4$.

（3）原式 $=(3+2\sqrt{2})^{2019}(3-2\sqrt{2})^{2019}(3-2\sqrt{2})$

$=[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^{2019}(3-2\sqrt{2})$

$=1^{2019}\times(3-2\sqrt{2})$

$=3-2\sqrt{2}$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 在进行二次根式混合运算过程中，每个根式可以看成是一个“单项式”，多个被开方数不同的二次根式的和可以看成“多项式”，然后**类比整式的运算法则进行运算**. 二次根式混合运算的结果应写成最简二次根式或整式的形式.
2. 在进行二次根式的计算时，能用乘法公式的要尽量使用乘法公式，这样可以使计算过程大大简化.

技巧点拨

当题目出现平方差形式的计算式时，如果先利用完全平方公式计算比较麻烦，可逆用平方差公式转化为乘积的形式计算；

当题目中出现两个三项式的乘积的形式时，一般将相同的数看成 m，相反的数看成 n，利用平方差公式计算；

当题目中出现两个大指数幂的积的形式时，一般先逆用同底数幂相乘和积的乘方的运算法则，把算式化为底数相乘的幂再进行计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“定义法”巧求字母值

挑战·高分

例 5： 已知 a，b 是正整数，且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\,020}$，求 a，b 的值.

解题秘方： 紧扣“$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\,020}$，即 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 是同类二次根式”这一特征解答.

解： 由 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\,020}$，

可知 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{2\,020}$ 是同类二次根式.

$\because \sqrt{2\,020}=\sqrt{4\times505}=2\sqrt{505}$，

$\therefore$ 可设 $\sqrt{a}=m\sqrt{505}$，$\sqrt{b}=n\sqrt{505}$，

则 $m\sqrt{505}+n\sqrt{505}=2\sqrt{505}$，

即 $(m+n)\sqrt{505}=2\sqrt{505}$，

$\therefore m+n=2.$

又 $\because a$，b 为正整数，

$\therefore m$，n 为正整数，

$\therefore m=n=1.$

$\therefore a=b=505.$

技巧提醒

解答本题的技巧在于巧用“$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\,020}$”，即 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{2\,020}$ 是可以合并的二次根式，也就是说它们可以化为同类二次根式. 如按思维习惯把已知等式两边平方，这样等式中的两个未知量 a，b 是无法求出的.

拔尖角度▸ 2 利用整体思想巧求对称式的值

挑战·高分

例 6： 已知 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，求代数式 x^2-xy+y^2 的值.

解题秘方： 根据所求代数式的结构特点，将其转化为含有 $x+y$ 与 xy 的代数式；求 $x+y$ 与 xy 的值，整体代入进行计算.

解： $\because x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，

$\therefore x+y=\sqrt{7}$，$xy=\frac{1}{2}$.

$\therefore x^2-xy+y^2$

$=(x+y)^2-3xy$

$=(\sqrt{7})^2-3\times\frac{1}{2}$

$=7-\frac{3}{2}$

$=\frac{11}{2}$.

解法提醒

用整体思想求代数式的值的方法：

求关于 x，y 的对称式（即交换两个字母的位置后，代数式不变）的值，一般先求出 $x+y$，xy，$x-y$，$\frac{x}{y}$ 等的值，然后将所求对称式进行适当变形，使之成为只含有 $x+y$，xy，$x-y$，$\frac{x}{y}$ 等的式子，最后将其值整体代入即可求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 3 利用化简求值法求代数式的值

挑战·高分

例 7： 已知 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\dfrac{1-2a+a^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

解题秘方： 分别对已知字母值和所求代数式进行化简，再代入求值.

解： $\because a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$，

显然 $0<a<1$，

$\therefore \sqrt{(a-1)^2}=1-a.$

$\therefore \dfrac{1-2a+a^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}=\dfrac{(1-a)^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}=a-1-\dfrac{1-a}{a(a-1)}=a-1+\dfrac{1}{a}.$

$\because a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{a}=2+\sqrt{3}.$

$\therefore a-1+\dfrac{1}{a}=(2-\sqrt{3})-1+(2+\sqrt{3})=3.$

解法提醒

化简求值问题的常用技巧：

1. 当代数式复杂而字母取值单一时，一般先化简代数式，再把字母取值代入；

2. 当代数式复杂且字母取值含有运算时，一般先将代数式和字母取值的式子化简，再把字母取值式子的结果代入化简后的代数式求值；

3. 当代数式含有关于某个字母的式子且条件含有或可化为这个式子时，可考虑整体代入求值.

拔尖角度▶ 4 利用数形结合法解几何应用问题

挑战·高分

例 8： 已知 a，b，c 满足 $(a-\sqrt{8})^2+\sqrt{b-5}+|c-3\sqrt{2}|=0.$

（1）求 a，b，c 的值.

（2）用长为 a，b，c 的三条线段能否围成三角形？若能围成，说明理由并求出三角形的周长；若不能围成，请说明理由.

解题秘方： 先利用代数知识求出相关字母的值，再结合几何性质说明以这些字母值为长的线段能否组成三角形.

解：（1）$\because (a-\sqrt{8})^2+\sqrt{b-5}+|c-3\sqrt{2}|=0,$

且 $(a-\sqrt{8})^2\geqslant 0$，$\sqrt{b-5}\geqslant 0$，$|c-3\sqrt{2}|\geqslant 0$，

$\therefore \begin{cases} a-\sqrt{8}=0, \\ b-5=0, \\ c-3\sqrt{2}=0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=2\sqrt{2}, \\ b=5, \\ c=3\sqrt{2}. \end{cases}$

（2）用长为 a，b，c 的三条线段能围成三角形.

理由如下：

由（1）可知，$b>c>a.$

$\because a+c=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$，$5\sqrt{2}>5,$

$\therefore a+c>b.$

$\therefore$ 用长为 a，b，c 的三条线段能围成三角形.

三角形的周长为 $a+b+c=2\sqrt{2}+5+3\sqrt{2}=5+5\sqrt{2}$.

解法提醒

数形结合思想是数学中的一种重要思想，它能将数与形有机地融为一体，本题是关于三角形以及非负数的综合题，由非负数的特性求出 a，b，c 的值，再根据三角形的三边关系判断能否围成三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 5 利用倒数法比较二次根式的大小

挑战·高分

解题通法

倒数法比较大小

此题先求出a，b，c的倒数，再根据一个正数的倒数越大，则这个正数越小，进行几个数的大小比较.

例9： 已知$a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-2$，那么a，b，c的大小关系是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

解题秘方： 紧扣“两个正数，倒数大的正数反而小”这一规律用倒数法比较大小.

解： $\because a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}-2$，

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，$\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

$\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+1=\sqrt{\frac{3}{2}}+1$.

$\because \sqrt{\frac{3}{2}}+1<\sqrt{2}+1<\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$\therefore 0<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

$\therefore b<a<c$.

答案： C

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

二次根式的加减运算及混合运算是中考的必考内容，题型有选择题、填空题、化简求值题，有时也渗透到其他混合运算中，与其他知识综合在一起进行考查，在今后的中考中，对本节知识的考查仍将以基础题与中档题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

思路点拨

(1) 中先把二次根式化为最简二次根式，然后把括号内合并后进行二次根式的除法运算；

(2) 中首先利用完全平方公式来计算乘方，化简二次根式，乘方，然后合并同类二次根式及同类项即可.

考法1 利用二次根式的混合运算进行计算

例10： （1）[中考·聊城]计算$\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}-2\sqrt{45}\right)\div(-\sqrt{5})$的结果为（　　）

A. 5　　B. -5　　C. 7　　D. -7

（2）[中考·大连]计算：$(\sqrt{2}+1)^2-\sqrt{8}+(-2)^2$.

试题评析： 本题考查了二次根式的混合运算，正确掌握混合运算顺序和理解乘法公式的结构是解题关键.

解：（1）原式$=(\sqrt{5}-6\sqrt{5})\div(-\sqrt{5})$

$=(-5\sqrt{5})\div(-\sqrt{5})$

$=5$.

答案： A

（2）原式$=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4$

$=7$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用二次根式的运算解几何应用问题

例 11：[中考·泸州]已知三角形的三边长分别为 a、b、c，求其面积问题，中外数学家曾经进行过深入研究，古希腊的几何学家海伦给出求其面积的海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$；我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求其面积的秦九韶公式 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$，若一个三角形的三边长分别为 2，3，4，则其面积是（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{15}}{8}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

试题评析：本题考查二次根式的应用，解答本题的关键是明确题意，求出三角形的面积.

解： $\because S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$，

$\therefore$若一个三角形的三边长分别为 2,3,4，则其面积是：

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times3^2-\left(\frac{2^2+3^2-4^2}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

答案：B

巧记口诀

周半、周半减各边，
乘积、开方三角面.

思路点拨

根据题目中给出的秦九韶公式，可以求得三边长分别为 2,3,4 的三角形的面积，从而可以解答本题. 本题也可应用海伦公式进行计算.

两年模拟兵法

☞答案见 250 页

1. 下列二次根式中，与其他三个不是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{98}$

C. $\sqrt{48}$　　D. $\sqrt{50}$

2. [中考·重庆]计算 $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$ 的值是（　　）

A.2　　B.3

C. $\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{2}$

3. 下列计算正确的是（　　）

A. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2=7-3=4$

B. $(\sqrt{x}+\sqrt{2x})(-\sqrt{x}+\sqrt{2x})=2x-x=x$

C. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})\times\sqrt{10}=\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

D. $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{2b})=a-4b$

4. 已知最简二次根式 $\sqrt{2b+1}$ 和 $\sqrt{7-b}$ 是同类二次根式，那么 $b=$_____.

5. 计算：

(1) $\sqrt{48}\div\sqrt{3}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{12}+\sqrt{24}$；

(2) $4\sqrt{24}-6\sqrt{54}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$；

(3) $2b\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{3}{a}\sqrt{a^3b}-\left(4a\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{9ab}\right)$；

(4) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{xy}-\dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\div\sqrt{xy}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 先化简，再求值：

$\dfrac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{\sqrt{xy}-y}{x-\sqrt{xy}}$，其中 $x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{3}-1$.

7. 已知 $(a-\sqrt{2}+1)^2$ 与 $\sqrt{b-2}$ 互为相反数，求 a^b 的值. 【导学号：1927962】

8. 已知 $a=\sqrt{7}+2$，$b=\sqrt{7}-2$，求下列各式的值：（1）a^2b+b^2a；（2）a^2-ab+b^2；（3）a^2-b^2.

9. 阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. 善于思考的小明进行了以下探索：设 $a+b\sqrt{2}=(m+n\sqrt{2})^2$（其中 a，b，m，n 均为正整数），则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$.

$\therefore a=m^2+2n^2$，$b=2mn$. 这样小明就找到了一种把类似 $a+b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

（1）当 a，b，m，n 均为正整数时，若 $a+b\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，用含 m，n 的式子分别表示 a，b，得：$a=$_____，$b=$_____；

（2）利用所探索的结论，找一组正整数 a，b，m，n 填空：_____+_____$\sqrt{3}=$（_____+_____$\sqrt{3}$）^{2}；

（3）若 $a+4\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，且 a，m，n 均为正整数，求 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二次根式运算的技巧

荣老师告诉你 二次根式的运算通常是根据其运算法则进行计算的，但在计算过程中若能巧妙地运用一些数学思想方法，可使问题化繁为简，易于计算．下面举例说明二次根式的运算技巧．

技巧一 ▶ 巧移因式，避繁就简

例 1: 计算 $(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-4\sqrt{3})$．

解题秘方： 将二次根式适当变形，构成平方差公式模型计算．

解: 原式 $=(\sqrt{3^2\times2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-\sqrt{4^2\times3})$

$=(\sqrt{18}+\sqrt{48})(\sqrt{18}-\sqrt{48})$

$=18-48$

$=-30.$

方法点拨： 利用二次根式的性质可以将根号内的因式移到根号外，也可以将根号外的因式移到根号内．注意由内向外是开方；由外向内是乘方．

技巧二 ▶ 巧提公因数，化难为易

例 2: 计算 $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$．

解题秘方： $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ 提出公因数 $\sqrt{2}$ 后，再用平方差公式计算．

解: 原式 $=(5+\sqrt{6})[5\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}]$

$=(5+\sqrt{6})[\sqrt{2}(5-\sqrt{6})]$

$=\sqrt{2}(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})$

$=\sqrt{2}(25-6)$

$=19\sqrt{2}$．

方法点拨： 先提公因数，然后运用乘法公式计算．提公因数时，要注意打破思维习惯，对于一个有理数和一个无理数，可先将一个有理数化成一个无理数的乘方形式，然后再提公因数．

技巧三 ▶ 巧分组，出奇制胜

例 3: 计算 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$．

解题秘方： 将 $(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ 看成一个整体，构造符合平方差公式的结构，利用平方差公式计算．

解: 原式 $=[(\sqrt{2}-\sqrt{6})+\sqrt{3}][(\sqrt{2}-\sqrt{6})-\sqrt{3}]$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2$

$=2-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6-3$

$=5-4\sqrt{3}$．

方法点拨： 整式的乘法公式对二次根式同样适用，只要符合乘法公式的结构即可．

技巧四 ▶ 巧分解，独占鳌头

例 4: 计算 $(x+2\sqrt{xy}+y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$．

解题秘方： 直接计算显然很麻烦，先将被除式因式分解，然后直接与除式约分即可．

解: 原式 $=[(\sqrt{x})^2+2\sqrt{xy}+(\sqrt{y})^2]\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=\sqrt{x}+\sqrt{y}$．

方法点拨： 因式分解在整式范围内使用，对于二次根式，只要符合公式的结构特征，同样可以运用公式进行因式分解．

技巧五 ▶ 巧拆项，独具一格

例 5: 化简 $\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$．

解题秘方： 直接计算相当麻烦，可将整个式子拆成分母相同的两个式子的和，然后进行化简．

解: 原式 $=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$．

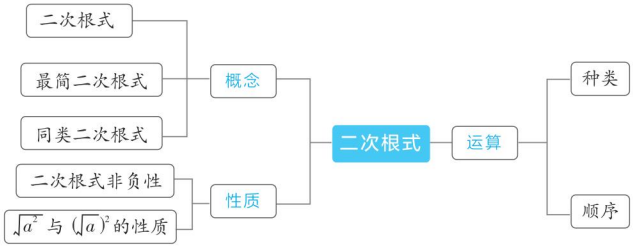
方法点拨： 将式子看成分式 $\dfrac{a+b}{ab}$ 的形式，然后拆成 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的形式计算．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

—— 核心结构专题 ——

结构必知



核心必读

1. 二次根式 $\sqrt{a}$，具有双重非负性：一是 $a \geqslant 0$，二是 $\sqrt{a} \geqslant 0$.

2. 二次根式的性质：

（1）$(\sqrt{a})^2 = a\ (a \geqslant 0)$；

（2）$\sqrt{a^2} = |a|$；

（3）$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$；

（4）$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a \geqslant 0,\ b > 0)$.

3. 二次根式的运算包括二次根式的加减乘除以及乘方等几种运算，二次根式的运算不仅要考虑运算的法则、运算的顺序和运算律，还要注意与整式的乘法公式相结合应用.

4. 两个互逆过程：

（1）$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \xrightleftharpoons[\text{积的算术平方根}]{\text{二次根式的乘法}} \sqrt{ab}\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$；

（2）$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \xrightleftharpoons[\text{商的算术平方根}]{\text{二次根式的除法}} \sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a \geqslant 0,\ b > 0)$.

5. 常用的有理化因式有：$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$；$\sqrt{a+b}$ 与 $\sqrt{a+b}$；$\sqrt{a-b}$ 与 $\sqrt{a-b}$；$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$；$a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ 等.

6. “根号外的非负因数（式）移到根号内”的方法：

先根据二次根式有意义的条件判断根号外的因数（式）的正负性.

（1）如果根号外的因数（式）是正数，则直接把该因数（式）变成其平方放在根号内；

（2）如果根号外的因数（式）是负数，则把负号留在根号外，把根号外的因数（式）变成其相反数的平方放在根号内.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 二次根式有意义的条件

链接中考» 二次根式有意义的条件是二次根式的核心，也是解决很多二次根式问题的隐含条件．在中考中单独考查时较多，有时也与分式进行综合考查．一般都以选择题形式出现．

例 1：[中考·莱芜] 要使二次根式$\sqrt{3-2x}$有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x \geqslant \frac{3}{2}$　　B. $x \leqslant \frac{3}{2}$

C. $x \geqslant \frac{2}{3}$　　D. $x \leqslant \frac{2}{3}$

解题秘方： 先根据二次根式有意义的条件建立关于 x 的不等式，再解这个不等式．

解： $3-2x \geqslant 0$，解得 $x \leqslant \frac{3}{2}$，故选择 B.

答案： B

方法点拨： 形如$\sqrt{a}\,(a \geqslant 0)$的式子是二次根式，因此二次根式的被开方数 a 应满足条件 $a \geqslant 0$. 解答与二次根式概念有关的问题通常是根据这个条件建立不等式来求解．

专题二 二次根式的性质

链接中考» 二次根式的性质是对二次根式进行化简和计算的关键，特别是二次根式的双重非负性在中考中考查特别多，一般都以填空题、选择题的形式出现．

例 2：[中考·日照] 若$\sqrt{(x-3)^2}=3-x$，则 x 的取值范围是_____.

解题秘方： 根据二次根式的性质得出 $3-x \geqslant 0$，求解即可．

解： $\because \sqrt{(x-3)^2}=3-x$，

$\therefore 3-x \geqslant 0$，

解得 $x \leqslant 3$.

答案： $x \leqslant 3$

例 3：[中考·巴中] 若 a，b，c 分别为三角形的三边长，且 a，b 满足$\sqrt{a^2-9}+(b-2)^2=0$，则第三边长 c 的取值范围是_____.

解题秘方： 首先根据非负数的性质，得出 a，b 的值，然后根据三角形的三边关系得出 c 的取值范围．

解： $\because a$，b 满足$\sqrt{a^2-9}+(b-2)^2=0$，

$\therefore \begin{cases} a^2-9=0, \\ b-2=0. \end{cases}$

又 $\because a>0$，$\therefore \begin{cases} a=3, \\ b=2. \end{cases}$

根据三角形的三边关系，

得 $3-2<c<3+2$，即 $1<c<5$.

答案： $1<c<5$

方法点拨： 初中阶段学习了三个非负数：① $|a| \geqslant 0$；② $a^2 \geqslant 0$；③$\sqrt{a} \geqslant 0$. 题目一般是其中两个的和（少数有三个的和）为零，根据非负数的性质，得到方程组，求得方程组的解，再代入求值即可．

专题三 最简二次根式

链接中考» 最简二次根式是二次根式运算的最后结果，对最简二次根式的识别是最常见的考查形式，关键就是扣住最简二次根式的几个条件．在中考中一般以选择题的形式出现．

例 4：[中考·扬州] 下列二次根式中的最简二次根式是（　　）

A. $\sqrt{30}$　　B. $\sqrt{12}$　　C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

解题秘方： 对照最简二次根式的概念，逐一判断．

解： B 选项中，$\sqrt{12}$ 可以化为 $2\sqrt{3}$；C 选项中，$\sqrt{8}$ 可以化为 $2\sqrt{2}$；D 选项中，$\sqrt{\frac{1}{2}}$ 的根号内含有分母，它们都不是最简二次根式，故选择 A.

答案： A

方法点拨： 最简二次根式要满足以下几个要求：根号内不含分母，且不含开得尽方的因式，分母中也不含有根式．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题四 二次根式的运算

链接中考» 二次根式的运算包括二次根式的加减乘除以及乘方等几种运算，二次根式的运算不仅要考虑运算的法则、运算的顺序和运算律，还要注意与整式的乘法公式相结合应用．在中考中一般以填空题、选择题的形式出现，有的地区也以解答题的形式考查．

例5：[中考·滨州]计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$的结果为_____.

解题秘方：根据平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$进行运算即可．

解：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=2-3=-1$.

答案：-1

方法点拨：二次根式的乘法运算中，若式子符合整式的乘法公式的特点，可使用整式的乘法公式，使运算简便．

方法必会

专题五 整体思想

专题解读» 整体思想就是在数学问题中，对于某些问题，可以从整体角度去思考，即将局部放在整体中去观察分析、探究问题的解决方法，从而使问题得以巧妙解决．在二次根式的运算中，遇到对称式、倒数式的求值问题时经常用到整体思想．

例6：已知$xy=6$，$x+y=-5$，求$x\sqrt{\frac{x}{y}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}$的值．

解：由题意可知$x<0$，$y<0$.

$$\therefore \text{原式}=x\cdot\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}+y\cdot\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}}$$

$$=\frac{x\sqrt{xy}}{-y}+\frac{y\sqrt{xy}}{-x}$$

$$=-\sqrt{xy}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$=-\sqrt{xy}\cdot\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}.$$

将$xy=6$，$x+y=-5$代入，

则原式$=-\frac{13\sqrt{6}}{6}$.

方法点拨：如果把$x+y=-5$，$xy=6$联立成方程组，目前我们还未学解此类的方程组，因此可以考虑用整体思想求解．

专题六 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想就是根据数学问题的题设和结论之间的内在联系，既分析其数量关系，又揭示其几何意义，使数量关系和几何图形巧妙地结合起来，并充分地利用这种结合，使问题得到解决．在进行二次根式的化简时，可以借助数轴确定字母的取值范围，然后对式子进行化简．

例7：已知实数a，b在数轴上对应点的位置如图21-1，试化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$.

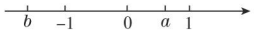


图21-1

解题秘方：由实数a，b在数轴上对应点的位置可判断出a，b的大小，从而可根据二次根式的性质及绝对值的有关知识进行化简．

解：由实数a，b在数轴上对应点的位置可知$0<a<1$，$b<-1$.

$\therefore a+b<0$，$b+1<0$，$a-1<0$.

$$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}$$

$$=|a|+|b|+|a+b|+|b+1|+|a-1|$$

$$=a-b-a-b-b-1+1-a$$

$$=-a-3b.$$

方法点拨：先将二次根式的问题转化为绝对值的问题，然后根据数轴上各点的位置确定相应代数式的符号，再去绝对值符号进行化简．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见251页

类型1　利用被开方数的非负性求值

1. 已知 $y=3\sqrt{x-4}+2\sqrt{4-x}+\frac{1}{2}$，求 x^2+y^2 的值.

类型2　利用二次根式的非负性求值

题型1　利用二次根式的非负性求字母的值

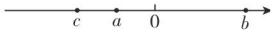
2. 已知 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+y-6}=0$，求 x，y 的值.

题型2　利用二次根式的非负性求最值

3. 当 x 取什么实数时，式子 $\sqrt{5x-2}+3$ 的取值最小？并求出这个最小值.

类型3　利用二次根式的性质化简代数式（数形结合思想）

4. 已知实数 a，b，c 在数轴上的对应点的位置如图，化简：$\sqrt{a^2}-|a+c|+\sqrt{(c-b)^2}-|b|$.



（第4题）

类型4　巧比较二次根式的大小

题型1　平方法

5. 比较 $\sqrt{5}+\sqrt{13}$ 与 $\sqrt{7}+\sqrt{11}$ 的大小.

题型2　作商法

6. 比较 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}$ 与 $\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$ 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3　作差法

7. 比较$\frac{\sqrt{11}-1}{3}$与$\frac{2}{3}$的大小.

题型 2　换元法

10. 化简：$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

题型 4　倒数法

8. 已知$x=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$，$y=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$，试比较x，y的大小.

题型 3　配方法

11. 已知$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=2$，求$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+14}$的值.

类型 5　巧用二次根式化简求值

题型 1　因式分解法

9. 化简：$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$.

题型 4　辅元法

12. 已知$x:y:z=1:2:3$（$x>0$，$y>0$，$z>0$），求$\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+z}+\sqrt{x+2y}}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 21 章测试卷 ☞答案见 252 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（　　）

A.$-\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{12}$　　C.$\sqrt{\frac{1}{5}}$　　D.$\sqrt{a^2}$

2. 在式子$\frac{1}{x-2}$，$\frac{1}{x-3}$，$\sqrt{x-2}$，$\sqrt{x-3}$中，x可以取 2 和 3 的是（　　）

A.$\frac{1}{x-2}$　　B.$\frac{1}{x-3}$

C.$\sqrt{x-2}$　　D.$\sqrt{x-3}$

3. 下列各组数中，两数相乘，积为 1 的是（　　）

A.2 和 −2　　B.−2 和$\frac{1}{2}$

C.$\sqrt{3}$和$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$

4. 下列运算正确的是（　　）

A.$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$　　B.$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

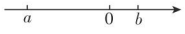
C.$(\sqrt{3}-1)^2=3-1$　　D.$\sqrt{5^2-3^2}=5-3$

5. 若$\sqrt{75n}$是整数，则正整数n的最小值是（　　）

A.2　　B.3

C.4　　D.5

6. 实数a，b在数轴上的对应点的位置如图，且$|a|>|b|$，则化简$\sqrt{a^2}-|a+b|$的结果为（　　）



（第 6 题）

A.$2a+b$　　B.$-2a+b$

C.b　　D.$2a-b$

7. 若$\sqrt{x-2y+9}$与$|x-y-3|$互为相反数，则$x+y$的值为（　　）

A.3　　B.9

C.12　　D.27

8. 已知$x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，则$x_1^2+x_2^2$等于（　　）

A.8　　B.9　　C.10　　D.11

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 已知三角形三边的长分别为$\sqrt{27}$ cm，$\sqrt{12}$ cm，$\sqrt{48}$ cm，则它的周长为_____cm.

10. 已知$xy>0$，化简二次根式$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$的正确结果是_____.

11. 若$y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-2x}+1$，则$x^{-y}$=_____.

12. 对于任意实数a，b，定义一种运算“*”如下：$a*b=a(a-b)+b(a+b)$，　如：$3*2=3\times(3-2)+2\times(3+2)=13$，那么$\sqrt{3}*\sqrt{2}$=_____.

三、解答题（共 52 分）

13.（8 分）计算：

（1）$4\sqrt{5}+\sqrt{45}-\sqrt{8}+4\sqrt{2}$；

（2）$\sqrt{2\frac{1}{2}}\div3\sqrt{28}\times\left(-5\sqrt{2\frac{2}{7}}\right)$.

14.（8 分）若$a=3-\sqrt{10}$，求代数式a^2-6a-2的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.（8分）如果最简二次根式$\sqrt{2m+n+3}$与$\sqrt[m-n-1]{m+10}$是同类二次根式，求正整数m，n的值.

16.（8分）有三根钢条长分别为$\sqrt{8}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{32}$，那么这三根钢条首尾相连能焊成一个三角形钢架吗？为什么？

17.（10分）先化简，再求值：

$\left(a-\dfrac{2ab-b^2}{a}\right)\div\dfrac{a^2-b^2}{a}$，其中$a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$.

18.（10分）已知等式$|a-2\,019|+\sqrt{a-2\,020}=a$成立，求$a-2\,019^2$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

领会方程的降次思想

领会方程的降次思想



第22章 一元二次方程

核心考点

你将见到的

- 一元二次方程及相关概念
- 一元二次方程的解法：
  配方法 公式法 因式分解法
- 一元二次方程根的判别式
- 一元二次方程的根与系数的关系
- 一元二次方程的应用









核心方法

我们为你提供的

- 整体代入法
- 构造法
- 换元法
- 逆向思维法
- 建模思想
- 分类讨论思想

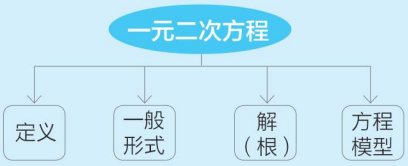
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.1 一元二次方程

核心知识

- 定义及相关概念
- 一般形式
- 解（根）

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 一元二次方程的定义

1. 定义： 整式方程中只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2，这样的方程叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程的“三要素”：

一是整式方程，

二只含一个未知数，

三整理后未知数的最高次数是 2.



提分·必记

警示误区

最高次数的项的系数的取值范围不明确的方程不一定是一元二次方程，如：$(m-2)x^2+3x-8=0$ 不一定是一元二次方程.

拨考向▸利用一元二次方程的定义识别一元二次方程

例 1： 下列方程：① $x^2+y-6=0$；② $x^2+\frac{1}{x}=2$；③ $x^2-x-2=0$；④ $x^2-2+5x^3-6x=0$；⑤ $2x^2-3x=2(x^2-2)$，是一元二次方程的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方： 紧扣一元二次方程的“三要素”进行识别.

解： ①含有两个未知数；②不是整式方程；③符合“三要素”；④最高次数不是 2；⑤整理后最高次数不是 2.

答案： A

提分·秘诀

解法提醒

要判断一个方程是否是一元二次方程，要从原方程及整理后的方程两方面进行判断，看其是否符合一元二次方程的“三要素”，三者缺一不可.

点知识▸2 一元二次方程的一般形式

1. 一元二次方程的一般形式： $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 是已知数，$a\neq 0$），其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数，bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项.

2. 特殊形式：

特殊形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$ax^2+bx=0$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）	a	b	0
$ax^2+c=0$（$a\neq 0$，$c\neq 0$）	a	0	c
$ax^2=0$（$a\neq 0$）	a	0	0

提分·必记

特别提醒

$a\neq 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程的必要条件；反之，如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，则必隐含 $a\neq 0$ 这一条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用方程的变形化一元二次方程为一般形式

例2：把下列一元二次方程化成一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项.

（1）$(x+1)(x-2)=4$；

（2）$2(x-3)(x+4)=x^2-10$；

（3）$(2x+1)(x-2)=5-3x$.

解题秘方：紧扣一元二次方程一般形式的特征及相关概念的意义解答.

解：（1）整理方程，得：

$x^2-x-6=0$.

其中二次项系数为1，一次项系数为-1，常数项为-6.

（2）整理方程，得：

$x^2+2x-14=0$.

其中二次项系数为1，一次项系数为2，常数项为-14.

（3）整理方程，得：

$2x^2-7=0$.

其中二次项系数为2，一次项系数为0，常数项为-7.

提分·秘诀

知识储备

整理方程一般需经过一去（去分母、去括号）、二移、三并、四化这四个步骤.

特别提醒

确定一元二次方程的各项和各项系数时注意不要丢掉各项的符号，一般情况下，将一元二次方程整理为一般形式时，若二次项系数为负数，要把它转化为正数，若有关项是分数，要把它转化为整数.

点知识▶3 一元二次方程的解（根）

1. 定义：

能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根.

2. 检验一元二次方程根的步骤：

步骤1：将已知数值分别代入一元二次方程的左右两边.

步骤2：若方程左右两边的值相等，则这个数是一元二次方程的根；否则，这个数不是一元二次方程的根.

提分·必记

特别提醒

如果一个数是一元二次方程的根，那么这个数一定能使方程左右两边的值相等，由此可求字母系数的值.

拔考向▶利用一元二次方程根的定义判定方程的根

例3：判断$x=2$，$x=3$是不是一元二次方程$x^2-x=6$的根.

解题秘方：紧扣一元二次方程根的定义进行判断.

解：将$x=2$代入方程，

得左边$=4-2=2$，

$\because$右边$=6$，$2\neq 6$，

$\therefore x=2$不是原方程的根.

将$x=3$代入方程，得左边$=9-3=6$，

$\because$右边$=6$，$6=6$，

$\therefore x=3$是原方程的根.

提分·秘诀

特别提醒

判断一个数是不是一元二次方程的根的方法：

可将这个数代入方程中，如果该数使方程左右两边相等，那么这个数就是方程的根；反之，如果该数不能使方程左右两边相等，那么这个数就不是方程的根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用代入法求一元二次方程中待定字母的值

例4： 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 有一个根是 0，求 m 的值.

解题秘方： 紧扣方程根的定义用代入法求解.

解： ∵ $x=0$ 是方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的根，

∴ $m^2-4=0$，即 $m=\pm 2$.

又∵方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

∴ $m-2\neq 0$，即 $m\neq 2$. ∴ $m=-2$.

特别警示： 解题时，易忽略二次项系数不为零的要求，导致错误.

挑战·高分

方法提醒

方程的根能使方程两边数值相等，代入法是根据方程根的定义，将已知方程的根代入原方程中，建立以字母系数或常数为元的新方程，从而求方程中字母系数或常数的一种有效方法.

拔尖角度 2 利用定义法求一元二次方程

例5： 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根是 1，且 a，b 满足等式 $a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4$，求此一元二次方程.

解题秘方： 紧扣二次根式和一元二次方程的根的定义进行求值.

解： ∵ a，b 满足等式 $a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4$，

∴ $b-3\geqslant 0$，$3-b\geqslant 0$，故 $b=3$.

当 $b=3$ 时，$a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4=-4$.

又∵一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根是 1，

∴ $a+b+c=0$. → 把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，

∴ $c=-a-b=4-3=1$. 得 $a\times 1^2+b\times 1+c=0$，即 $a+b+c=0$.

∴此一元二次方程是 $-4x^2+3x+1=0$.

挑战·高分

知识储备

$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，满足 $\sqrt{a}\geqslant 0$，并且被开方数 $a\geqslant 0$.

拔尖角度 3 利用整体思想求代数式的值

例6： 已知 a 是一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，试求 $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}$ 的值.

解题秘方： 将 $x=a$ 代入一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 中，再对等式变形，利用整体代入法求代数式的值.

解： ∵ a 是 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，

∴ $a^2-2\,021a+1=0$.

∴ $a^2+1=2\,021a$，$a^2=2\,021a-1$.

$$\therefore a^2-2\,020a+\frac{2\,021}{a^2+1}=2\,021a-1-2\,020a+\frac{2\,021}{2\,021a}=a-1+\frac{1}{a}=\frac{a^2-a+1}{a}=\frac{2\,021a-1-a+1}{a}=2\,020.$$

挑战·高分

解法提醒

由于代数式 $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}$ 含有 a^2，且其中一项的分母为 a^2+1，所以把 $a^2-2\,021a+1=0$ 变形为 $a^2+1=2\,021a$ 和 $a^2=2\,021a-1$，从而把 a^2+1 和 a^2 转化为一次式，再代入待求式子中整理化简，计算出结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用构造一元二次方程法求代数式的值

挑战·高分

技巧提醒

根据一元二次方程的根的定义，若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$. 反之，结论同样成立.

例 7: 已知 $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$（$a\neq b$），请构造一个以 a，b 为根的一元二次方程（以 x 为未知数），并求 x^2+3x+2 的值.

解题秘方: 观察两个等式的结构，结合一元二次方程的根的定义可知 a，b 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根. 经过变形可求出要求的代数式的值.

解: ∵ $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$（$a\neq b$），由一元二次方程的根的定义，可知以 a，b 为根的一元二次方程是 $x^2+3x+1=0$，

∴ $x^2+3x+2=(x^2+3x+1)+1=1$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中的主要考点有：一元二次方程的定义，一般形式及一元二次方程的根的理解与应用，建立一元二次方程的模型等；主要以选择题、填空题的形式呈现，难度小.

三年中考兵法

考法 1 利用方程解的定义求字母式子的值

例 8: [中考·南充] 若 $2n$（$n\neq 0$）是关于 x 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，则 $m-n$ 的值为_____.

试题评析: 本题考查的是一元二次方程根的定义，其实质是将求未知数的系数问题转化为方程问题.

解: ∵ $2n$（$n\neq 0$）是关于 x 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，

∴ $4n^2-4mn+2n=0$，∴ $4n-4m+2=0$. ∴ $m-n=0.5$.

答案: 0.5

冲刺·满分

解法提醒

方程的解是能使方程左右两边的值相等的未知数的值，$2n$ 是方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，即 $x=2n$ 时方程左右两边的值相等，即 $(2n)^2-2m\times 2n+2n=0$. 解答本例的关键是将方程两边同除以 $n(n\neq 0)$ 而整体求出 $m-n$ 的值.

考法 2 利用建一元二次方程模型解实际应用

例 9: [中考·白银] 如图 22.1-1，某小区计划在一块长为 32m，宽为 20m 的矩形空地上修建三条同样宽的道路，剩余的空地上种植草坪，使草坪的面积为 $570m^2$，若道路的宽为 xm，则下面所列方程正确的是（　　）

A. $(32-2x)(20-x)=570$　　B. $32x+2\times 20x=32\times 20-570$

C. $(32-2x)(20-x)=32\times 20-570$　　D. $32x+2\times 20x-2x^2=570$

试题评析: 此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，这类题目体现了数形结合的思想，需利用平移把不规则的图形变为规则图形，进而即可列出方程.

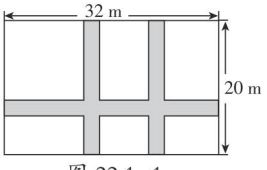


图 22.1-1

解: 道路的宽为 x m，根据题意得 $(32-2x)(20-x)=570$.

答案: A

图解

把三条道路分别向右，向下平移，如图 22.1-2，将草坪面积转化为长为 $(32-2x)$ m，宽为 $(20-x)$ m 的矩形面积.

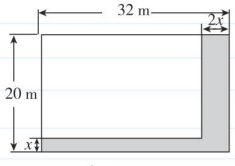


图 22.1-2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见253页

1.[模拟·合川]有下列关于x的方程：

①$ax^2+bx+c=0$，　②$3x(x-4)=0$，

③$x^2+y-3=0$，　④$\frac{1}{x^2}+x=2$，

⑤$x^3-3x+8=0$，　⑥$\frac{1}{2}x^2-5x+7=0$，

⑦$(x-2)(x+5)=x^2-1$，

其中是一元二次方程的有(　　)

A. 2个　　B. 3个

C. 4个　　D. 5个

2.[模拟·夏涞]如果方程$(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$是关于x的一元二次方程，那么m的值为(　　)

A. ±3　　B. 3

C. -3　　D. 都不对

3.[模拟·河北]关于x的一元二次方程$(m-1)x^2+2x+m^2-5m+4=0$，常数项为0，则m等于(　　)

A. 1　　B. 4

C. 1或4　　D. 0

4.[模拟·寿光]一同学将方程$x^2-4x-3=0$化成了$(x+m)^2=n$的形式，则m，n的值应为(　　)

A. $m=-2$，$n=7$　　B. $m=2$，$n=7$

C. $m=-2$，$n=1$　　D. $m=2$，$n=-7$

5.[中考·广东]如果2是方程$x^2-3x+k=0$的一个根，则常数k的值为(　　)

A. 1　　B. 2

C. -1　　D. -2

6.已知关于x的一元二次方程$x^2+ax+b=0$有一个非零根$-b$，则$a-b$的值为(　　)

A. 1　　B. -1

C. 0　　D. -2

7.[中考·黔南州]“一带一路”国际合作高峰论坛于2017年5月14日至15日在北京举行，在论坛召开之际，福田欧辉陆续向缅甸仰光公交公司应付1 000台清洁能源公交车，以2017客车海外出口第一大单的成绩，创下了客车行业出口之最，同时，这也是在国家“一带一路”倡议下，福田欧辉代表“中国制造”走出去的成果，预计到2019年，福田公司将向海外出口清洁能源公交车达到3 000台，设平均每年的出口增长率为x，可列方程为(　　)

A. $1\,000(1+x\%)^2=3\,000$

B. $1\,000(1-x\%)^2=3\,000$

C. $1\,000(1+x)^2=3\,000$

D. $1\,000(1-x)^2=3\,000$

8.已知m，n是方程$x^2-2x-1=0$的两根，且$(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则$a$的值等于(　　)

A. -5　　B. 5

C. -9　　D. 9

9.已知关于x的方程$(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$.

(1)当m取何值时，它是一元一次方程？求出此方程的根.

(2)当m取何值时，它是一元二次方程？写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数、常数项.　　【导学号：1927962】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 关于 x 的方程 $(m^2-8m+19)x^2-2mx-13=0$ 是否是一元二次方程，甲、乙两同学有不同意见．

甲认为：原方程的二次项系数与 m 有关，可能为零，所以不能确定这个方程就是一元二次方程．

乙认为：原方程的二次项系数肯定不会为 0，所以可以确定这个方程是一元二次方程．你认为甲、乙谁正确，证明你的结论．【**导学号：1927962**】

11. 已知 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a，b 的值．下面是两位同学的解法．

甲：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$

乙：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

你认为上述两位同学的解法是否正确，为什么？如果都不正确，请给出正确的答案．

素养提分 行动篇

用二分法确定一元二次方程的近似解

我们通过不断缩小范围得到了一元二次方程的近似解，在数学学习和生产生活中，有很多这样通过缩小范围确定结果的例子，例如，估计 $\sqrt{2}$ 的近似值，在某段线路上找到发生故障的那个点……

缩小范围的常用方法是二分法．具体做法是：找出初始范围的中间点，判断解在中间点的哪一侧，得到一个新的范围，然后对这个新的范围重复上述操作……直到最终的结果符合实际问题的精确度要求为止．

比如，一个具体问题中，x 满足方程 $(x-10)(x-20)=140$，其中 $x>20$．

第一步：估计 x 的大致范围，根据题意，可知 $x>20$，且 x 越大，方程左边的值就越大，不妨设 $x=30$，可以算出此时方程左边的值是 200，$200>140$，因此可以确定 $20<x<30$；

第二步：缩小 x 的范围，令 x 取 20 和 30 的中间值 25，此时方程左边的值是 75，$75<140$，因此可以将 x 的范围缩小为 $25<x<30$．

不断重复第二步的操作，依次得到 x 的范围：

$27.5<x<30$，$27.5<x<28.75$，$27.5<x<28.125$……

最后按照实际需要确定近似解，如果实际问题中要求 x 精确到个位，那么 $x\approx 28$．

可以看出，用二分法缩小范围时，操作过程是完全类似的，因此可以在计算机中借助程序进行“机械”操作．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

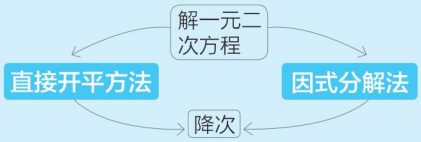
22.2 一元二次方程的解法

22.2.1 直接开平方法和因式分解法

核心知识

- 直接开平方法解一元二次方程
- 因式分解法解一元二次方程

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 直接开平方法

1. **定义**：利用平方根的定义直接开平方，求一元二次方程解的方法叫做直接开平方法.

2. **方程 $x^2=p$ 解（根）的情况**：

（1）当 $p>0$ 时，方程有两个不等实数根，$x_1=\sqrt{p}$，$x_2=-\sqrt{p}$；

（2）当 $p=0$ 时，方程有两个相等实数根，$x_1=x_2=0$；

（3）当 $p<0$ 时，方程没有实数根.

3. **用直接开平方法解一元二次方程的一般步骤**：

步骤 1：移项，将方程变成左边是完全平方式，且完全平方式的系数为 1，右边是非负数的形式（如果方程右边是负数，那么这个方程无实数根）.

步骤 2：开平方，将方程转化为两个一元一次方程.

步骤 3：解这两个一元一次方程，得出的两个解即为一元二次方程的两个根.

拨考向▸利用直接开平方法解一元二次方程

题型 1：直接开平方法在解一元二次方程中的应用

例 1：用直接开平方法解下列方程：

（1）$9x^2-81=0$；　（2）$2(x-3)^2-50=0$.

解题秘方：紧扣“直接开平方法”的步骤求解.

解：（1）移项，得 $9x^2=81$.

系数化为 1，得 $x^2=9$.

开平方，得 $x=\pm 3$.

$\therefore x_1=3$，$x_2=-3$.

（2）移项，得 $2(x-3)^2=50$.

系数化为 1，得 $(x-3)^2=25$.

开平方，得 $x-3=\pm 5$.

$\therefore x_1=8$，$x_2=-2$.

提分·必记

知识链接

平方根的定义：

若 $x^2=a(a\geqslant 0)$，则 x 是 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$.

特别警示

直接开平方法利用的是平方根的意义，所以要注意两点：

- 不要只取正的平方根而遗漏负的平方根；
- 只有非负数才有平方根，所以用直接开平方法的前提是 $x^2=p$ 中 $p\geq 0$.

提分·秘诀

知识储备

用直接开平方法解一元二次方程的方法：

首先将方程化成左边是含有未知数的完全平方式，右边是非负数的形式，

然后化完全平方式的系数为 1，

最后根据平方根的意义开平方求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：直接开平方法在解决实际问题中的应用

例 2： 学校重新布置校园，准备将校园中心边长为 40 m 的正方形草坪扩展为面积为 2 500 m^2 的正方形草坪，那么边长应该增加多少？

解题秘方： 建立一元二次方程的模型，紧扣直接开平方法的步骤求解．

解： 设边长应该增加 x m，

根据题意，得 $(40+x)^2=2\,500$.

直接开平方，得 $40+x=\pm 50$.

移项，得 $x=-40\pm 50$.

解得 $x_1=-90$（不符合题意，舍去），$x_2=10$.

所以边长应该增加 10 m.

解法提醒

用一元二次方程解决实际问题与用一元一次方程解决实际问题大同小异，设出未知数，找出等量关系，列出方程求解即可．取舍根时要紧扣未知数的实际意义．

点知识 ▸ 2 因式分解法

1. 定义： 先因式分解，使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0，从而实现降次．这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法．

2. 因式分解法解一元二次方程的一般步骤：



（1）整理方程，使其右边为 0；

（2）将方程左边分解为两个一次式的乘积；

（3）令每个一次式分别为 0，得到两个一元一次方程；

（4）分别解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解．

提分·必记

知识储备

常用的因式分解的方法：

1. 提公因式法；

2. 公式法；

3. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

拔考向 ▸ 利用因式分解法解一元二次方程

例 3： 用因式分解法解下列方程．

（1）$(x-5)(x-6)=x-5$；

（2）$4(x-3)^2-25(x-2)^2=0$；

（3）$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.

解题秘方： 按方程的特点选择恰当的因式分解方法．

解：（1）移项，得 $(x-5)(x-6)-(x-5)=0$.

$\therefore (x-5)(x-7)=0$.

$\therefore x-5=0$，或 $x-7=0$. $\therefore x_1=5$，$x_2=7$.

（2）原方程可化为 $[2(x-3)]^2-[5(x-2)]^2=0$，

$\therefore [2(x-3)+5(x-2)][2(x-3)-5(x-2)]=0$，

$\therefore (7x-16)(-3x+4)=0$，$\therefore 7x-16=0$，或 $-3x+4=0$.

$\therefore x_1=\dfrac{16}{7}$，$x_2=\dfrac{4}{3}$.

（3）原方程可化为 $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$.

$\therefore x-\sqrt{2}=0$，或 $x-\sqrt{3}=0$. $\therefore x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$.

方程的两边不能同时除以 x-5，这样会使方程丢一根．

提分·秘诀

解法提醒

1. 用因式分解法解一元二次方程，虽然比配方法和公式法简便，但这种方法只适用于部分一元二次方程．

2. 用因式分解法解方程时需将一元二次方程的右边化为 0，再对方程的左边因式分解．

3. 不能随意在方程两边同时除以含未知数的整式．

教你一招

采用因式分解法解一元二次方程的技巧：右化零，左分解，两因式，各求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度 1 利用待定系数法解错解方程问题

例4： 甲、乙两学生解同一个关于 x 的一元二次方程（二次项系数为1），甲将一次项系数看错，解得两根为 -4 与 8；乙将常数项看错，解得两根为 4 与 10，试求出正确的方程．

解题秘方： 运用待定系数法求出两个错误的方程，采用除错法确定正确方程．

解： 设两根为 -4 和 8 的方程为 $x^2+bx+c=0$，

则 $\begin{cases}(-4)^2+(-4)\times b+c=0,\\ 8^2+8b+c=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}b=-4,\\ c=-32,\end{cases}$

$\therefore$ 甲看错一次项系数后的方程为 $x^2-4x-32=0$.

同理可求乙看错常数项后的方程为：$x^2-14x+40=0$.

综上可得正确方程为：$x^2-14x-32=0$.

挑战·高分

另解

由因式分解法解一元二次方程的逆向可知，以 x_1，x_2 为两根的一元二次方程（二次项系数为1）为 $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

甲将一次项系数看错得 $x=-4$ 或 $x=8$，$\therefore(x+4)(x-8)=0$，$\therefore x^2-4x-32=0$；乙将常数项看错得 $x=4$ 或 $x=10$，$\therefore(x-4)(x-10)=0$．$\therefore x^2-14x+40=0$．$\therefore$ 正确的方程为 $x^2-14x-32=0$.

拨尖角度 2 利用“回归定义”法解决公共根问题

例5： 若关于 x 的方程 $x^2-6x-k-1=0$ 与 $x^2-kx-7=0$ 有相同的实数根，试求 k 的值和相同的根．

解题秘方： 设出相同的实数根，利用根的定义解决问题．

解： 设这两个方程的相同的实数根为 α，则它同时满足两个方程，

即 $\begin{cases}\alpha^2-6\alpha-k-1=0,\\ \alpha^2-k\alpha-7=0.\end{cases}$

$\therefore\alpha^2-6\alpha-k-1=\alpha^2-k\alpha-7$，即 $(6-k)\alpha=6-k$.

当 $k\neq6$ 时，$\alpha=1$，代入方程 $x^2-6x-k-1=0$，得 $1-6\times1-k-1=0$，

解得 $k=-6$；

当 $k=6$ 时，两方程均为 $x^2-6x-7=0$，

即 $(x+1)(x-7)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=7$.

综上所述，当 $k=-6$ 时，两方程有一相同的实数根1；当 $k=6$ 时，两方程相同，根也相同，根是 -1 和7.

挑战·高分

方法点拨

解决此类与公共根有关的问题，一般先设出公共根，采用“回归定义”法将根代入原方程，再通过等式变形求出公共根的值，从而求出方程中字母系数的值．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 用直接开平方法或因式分解法解一元二次方程是中考的热门考点之一，独立命题以填空、选择题居多，难度不大，解一元二次方程独立考查常以选适当方法解一元二次方程形式出现，综合考查时，渗透到其他知识内较多，是中考的高频考点．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用直接开平方法求字母式子的值

例 6：［中考·济宁］若一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，则 $\frac{b}{a}=$_____.

试题评析：本题考查了直接开平方法解一元二次方程及根据方程根的特征求字母的值.

解：方程 $x^2=p$（$p\geqslant 0$）的根的情况为：当 $p>0$ 时，两根不等且互为相反数；当 $p=0$ 时，方程的两根相等且都为 0.

（1）当两根不等时，$\because x^2=\frac{b}{a}$（$ab>0$），$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

$\therefore$ 方程的两个根互为相反数.

$\therefore m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$.

$\therefore$ 一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 2 与 -2.

$\therefore\sqrt{\frac{b}{a}}=2$. $\therefore\frac{b}{a}=4$.

（2）当两根相等时，$\because x^2=\frac{b}{a}$,

$\therefore\frac{b}{a}=0$，这与 $ab>0$ 相矛盾.

$\therefore$ 不可能两根相等.

答案：4

考法 2 利用因式分解法说明方程解间的关系

例 7：［中考·温州］我们知道方程 $x^2+2x-3=0$ 的解是 $x_1=1$，$x_2=-3$，现给出另一个方程 $(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$，它的解是（　　）

A. $x_1=1$，$x_2=3$　　B. $x_1=1$，$x_2=-3$

C. $x_1=-1$，$x_2=3$　　D. $x_1=-1$，$x_2=-3$

试题评析：本题考查了因式分解法解一元二次方程，方程的解及不同方程解间的关系，把 $2x+3$ 看作一个整体是解题的关键.

解：$\because (2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$，$\therefore 2x+3=1$ 或 $2x+3=-3$，

$\therefore x_1=-1$，$x_2=-3$.

答案：D

考法 3 利用因式分解法解与三角形有关应用

例 8：［中考·荆门］已知 3 是关于 x 的方程 $x^2-(m+1)x+2m=0$ 的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰三角形 ABC 的两条边的长，则 $\triangle ABC$ 的周长为（　　）

A. 7　　B. 10　　C. 11　　D. 10 或 11

冲刺·满分

教你一招

本例在无法求出 a、b 的值的情况下，由于原方程的解为 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，用整体思想求出 $\frac{b}{a}$ 的值.

易错警示

一元二次方程的解的情况有三种，解涉及待定字母系数的方程求值的问题时，都必须对三种情况予以讨论，本例解题时易犯两种错误，其一是忽视两根相等情况，其二是盲目用两根相等而忽视题目条件，将(2)解为：当两根相等时，$m+1=2m-4$，$\therefore m=5$. $\therefore$ 方程两根均为 6. $\therefore\sqrt{\frac{b}{a}}=6$，即 $\frac{b}{a}=36$. 它忽视了方程 $x^2=p$ 的两根相等的条件是 $p=0$.

解法提醒

先把方程 $(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$ 看作关于 $2x+3$ 的一元二次方程，利用题中的解得到 $2x+3=1$ 或 $2x+3=-3$，然后解两个一元一次方程即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了一元二次方程的解、因式分解解一元二次方程及三角形三边的关系，掌握数形结合思想是解题关键.

解：把 $x=3$ 代入方程得 $9-3(m+1)+2m=0$，解得 $m=6$，

则原方程为 $x^2-7x+12=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=4$，

∵这个方程的两个根恰好是等腰三角形 ABC 的两条边长，

∴应分两种情况讨论：

（1）当 $\triangle ABC$ 的腰为 4，底边为 3 时，则 $\triangle ABC$ 的周长为 $4+4+3=11$；

（2）当 $\triangle ABC$ 的腰为 3，底边为 4 时，则 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+3+4=10$；

综上所述，$\triangle ABC$ 的周长为 10 或 11.

答案：D

解法提醒

把 x=3 代入已知方程求得 m 的值，然后通过解方程求得该方程的两根，即等腰三角形 ABC 的两条边长，由三角形三边关系和三角形的周长公式进行解答即可.

两年模拟兵法 ☞答案见 254 页

1. 一元二次方程 $x^2=c$ 有解的条件是（　　）

A. $c<0$　　B. $c>0$

C. $c\leqslant 0$　　D. $c\geqslant 0$

2. 方程 $(x-2)(x-3)=0$ 的解是（　　）

A. $x_1=2$，$x_2=3$　　B. $x_1=2$，$x_2=-3$

C. $x_1=-2$，$x_2=-3$　　D. $x_1=-2$，$x_2=3$

3. [中考·天津]方程 $x^2+x-12=0$ 的两个根为（　　）

A. $x_1=-2$，$x_2=6$　　B. $x_1=-6$，$x_2=2$

C. $x_1=-3$，$x_2=4$　　D. $x_1=-4$，$x_2=3$

4. 方程 $(x-3)(x+1)=x-3$ 的解是（　　）

A. $x=0$　　B. $x=3$

C. $x_1=3$，$x_2=-1$　　D. $x_1=3$，$x_2=0$

5. 用因式分解法把方程 $(2x-1)(x+3)=4$ 分解成两个一次方程，正确的分法是（　　）

A. $2x-1=2$，$x+3=2$　　B. $2x-1=1$，$x+3=4$

C. $x-1=0$，$2x+7=0$　　D. $x+1=0$，$2x-7=0$

6. 关于 x 的方程 $2x^2+3ax-2=0$ 有一个根是 $x=2$，则关于 y 的方程 $y^2+2ay=0$ 的解是（　　）

A. $y=-2$　　B. $y=2$

C. $y_1=0$，$y_2=2$　　D. $y=0$

7. 已知 $A=x^2-1$，$B=4x-5$，则当 $x=$_____时，$A=B$.

8. 已知实数 x 满足 $x^4-4x^2-12=0$，则代数式 x^2+1 的值为_____.

9. 设 a、b 是一个直角三角形两条直角边的长，且 $(a^2+b^2)(a^2+b^2+1)=12$，则这个直角三角形的斜边长为_____.

10. 用因式分解法解下列方程：

（1）$(x-1)^2-2(x-1)=0$；

（2）$(2+x)^2-9=0$；

（3）$(2x+1)^2=3(2x+1)$.

11. 已知三角形的两边长分别为 3 和 7，第三边的长是方程 $x(x-7)-10(x-7)=0$ 的一个根，求这个三角形的周长.　　【导学号：1927962】

12. 用一根长 20 厘米的铁丝，折成一个面积为 16 平方厘米的矩形框，怎样折呢？能否折成一个面积为 30 平方厘米的矩形框？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2.2 配方法

核心知识

- 用配方法解二次项系数为 1 的一元二次方程
- 用配方法解二次项系数不为 1 的一元二次方程

知识链接

直接开平方法 → 转化 → 配方法 → 解 → 二次项系数为1 / 二次项系数不为1

点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 配方法

1. 定义： 通过方程的简单变形，将左边配成一个含有未知数的完全平方式，右边是一个非负常数，从而可以直接开平方求解，这种解一元二次方程的方法叫做配方法.

2. 用配方法解一元二次方程的一般步骤：

（1）**移项**. 把方程中含有未知数的项移到方程的左边，把常数项移到方程的右边.

（2）**二次项系数化为 1**. 方程的左、右两边同时除以二次项系数.

（3）**配方**. 把方程的左、右两边同时加上一次项系数一半的平方，把原方程化为 $(x+n)^2=p$ 的形式.

（4）**开方**. 如果方程右边是一个非负数，那么就用直接开平方法求解；如果方程右边是一个负数，那么这个方程无实数根；即：

①当 $p>0$ 时，方程 $(x+n)^2=p$ 有两个不相等的实数根，$x_1=-n-\sqrt{p}$，$x_2=-n+\sqrt{p}$.

②当 $p=0$ 时，方程 $(x+n)^2=p$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-n$.

③当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x 都有 $(x+n)^2\geqslant 0$，所以方程 $(x+n)^2=p$ 无实数根.

提分·必记

知识链接

配方的依据是完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，其实质是将 a 看作是未知数，b 看作是常数，则 b^2 即是一次项系数的一半的平方.



拔考向▶ 利用配方法解一元二次方程

题型 1：配方法在解一元二次方程中的应用

例 1： 用配方法解一元二次方程：

（1）$x^2+4x+3=0$；　（2）$x^2+x-\frac{3}{4}=0$；

（3）$2x^2-4x-1=0$；　（4）$(1+x)^2+2(1+x)-3=0$.

解题秘方： 将方程配方化为 $(x+n)^2=p$ 的形式，用直接开平方法解.

解：（1）移项，得 $x^2+4x=-3$.

配方，得 $x^2+4x+2^2=-3+2^2$.

$\therefore (x+2)^2=1$.　$\therefore x_1=-1$，$x_2=-3$.

提分·秘诀

解法提醒

1. 用配方法解一元二次方程的实质就是对一元二次方程进行变形，**将其转化为直接开平方所需要的形式**，再利用平方根的意义把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）移项，得 $x^2+x=\frac{3}{4}$. 配方，得 $x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$\therefore\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$. $\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{3}{2}$.

（3）移项，得 $2x^2-4x=1$. 二次项系数化为 1，得 $x^2-2x=\frac{1}{2}$.

配方，得 $x^2-2x+1^2=\frac{1}{2}+1^2$，即 $(x-1)^2=\frac{3}{2}$.

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

（4）移项，得 $(1+x)^2+2(1+x)=3$.

配方，得 $(1+x)^2+2(1+x)+1^2=3+1^2$.

即 $(1+x+1)^2=4$. $\therefore x_1=0$，$x_2=-4$.

巧将 1+x 看作一整体进行配方，可达到简化效果.

2. 方程两边同时加上一次项系数的一半的平方的前提是二次项系数为 1.

题型 2：配方法在解决实际问题中的应用

例 2： 如图 22.2-1 ①，设计一幅宽 20 cm，长 30 cm 的矩形图案，其中有两横、两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为 2 ∶ 3，如果要使所有彩条所占面积为原矩形图案面积的三分之一，应如何设计每个彩条的宽度？

分析：由横、竖彩条的宽度比为 2 ∶ 3，可设每个横彩条的宽度为 $2x$ cm，则每个竖彩条的宽度为 $3x$ cm. 为更好地寻找题目中的等量关系，将横、竖彩条分别集中，如图 22.2-1 ②，得到矩形 $ABCD$.

结合以上分析完成填空：如图 22.2-1 ②，用含 x 的代数式表示：$AB=$_____cm，$AD=$_____cm，矩形 $ABCD$ 的面积为_____cm^2.

列出方程并完成本题的解答.

解题秘方： 根据题意建立一元二次方程的模型，紧扣配方法的步骤解决实际问题.

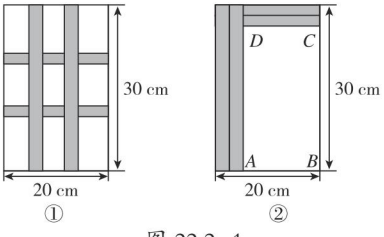


图 22.2-1

解：（$20-6x$）；（$30-4x$）；（$24x^2-260x+600$）

根据题意，得

$24x^2-260x+600=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times 20\times 30$.

整理，得 $6x^2-65x+50=0$.

解得 $x=\frac{5}{6}$（$x=10$ 不合题意，舍去），

则 $2x=\frac{5}{3}$，$3x=\frac{5}{2}$.

故每个横彩条的宽度为 $\frac{5}{3}$ cm，每个竖彩条的宽度为 $\frac{5}{2}$ cm.

方法点拨

等面积替换法是解决关于分散图形的面积问题的常用方法. 利用平移、旋转等方法将分散的图形集中在一起，组成一个规则图形后再列方程求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用非负数最值法求代数式最值（拓展点）

例 3： 当 x 取何值时，代数式 $2x^2-6x+7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方： 求代数式的最小值，要先将代数式配成 $a(x+m)^2+n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最小值.

解： $2x^2-6x+7$

$=2(x^2-3x)+7$

$=2\left[x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+7$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}.$

$\because 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0,$

$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$2x^2-6x+7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

代数式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 配成 $a(x+m)^2+n$ 后，若 $a>0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最小值 n；若 $a<0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最大值 n.

拔尖角度 2 利用非负数和为 0 法求代数式的值

例 4： 已知 $2x^2+y^2+4x-6y+11=0$，x，y 为实数，求 x^y 的值.

解题秘方： 将等号左边配方，转化为两个完全平方式的和，再应用非负数的性质求 x，y 的值.

解： $2x^2+y^2+4x-6y+11=0,$

$(2x^2+4x)+(y^2-6y)+11=0,$

$2(x^2+2x)+(y^2-6y)+11=0,$

$2(x^2+2x+1-1)+(y^2-6y+9-9)+11=0,$

$2(x+1)^2+(y-3)^2=0,$

$\because (x+1)^2\geqslant 0,\ (y-3)^2\geqslant 0,$

$\therefore x+1=0,\ y-3=0.$

$\therefore x=-1,\ y=3.$

$\therefore x^y=(-1)^3=-1.$

添加常数项要在括号内完成，并要确保代数式的值不变.

挑战·高分

方法点拨

配方的对象是多样的，数、字母、等式、不等式都可以进行配方. 配方法的实质在于揭示式子的非负性，而非负数有以下重要性质：

1. 若有限个非负数的和为零，则每一个非负数都为零；
2. 非负数的最小值为零.

拔尖角度 3 利用数形结合法判别三角形的形状

例 5： 已知 a，b，c 为 $\triangle ABC$ 的三边长.

（1）求证：$a^2-b^2+c^2-2ac<0.$

（2）当 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解题秘方： （1）以形的关系判断式的符号，把不等式的左边变形后根

挑战·高分

解题策略

分析 $a^2-b^2+c^2-2ac<0$ 可知，a^2+c^2-2ac 可以写成 $(a-c)^2$ 的形式，对 $(a-c)^2-b^2$ 因式分解时，可

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

据三角形三边关系判断代数式的符号；（2）以数的关系判断形的边的大小关系，利用配方判断三边关系，从而判断三角形的形状．

解：（1）**证明：** $a^2-b^2+c^2-2ac=(a-c)^2-b^2=(a-c+b)(a-c-b)$，

$\because a$，b，c 为△ABC 的三边长，

$\therefore a-c+b>0$，$a-c-b<0$. $\therefore a^2-b^2+c^2-2ac<0$.

（2）**解：** 由 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，

得 $a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$，

$\therefore (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$.

$\therefore a=b=c$. $\therefore$△ABC 为等边三角形．

将 a-c 看成一个整体，利用平方差公式分解因式．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

配方法是一元二次方程的基础解法，是下节学习的用公式法解一元二次方程的依据，在中考试卷中一般以选择题或填空题的形式出现，题目比较简单．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用配方法解一元二次方程

例 6：［中考·临沂］一元二次方程 $y^2-y-\frac{3}{4}=0$ 配方后可化为（　　）

A. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$　B. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$　C. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$　D. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

试题评析： 本题主要考查配方法的基本步骤，解题的关键是正确利用配方法的步骤将一元二次方程化成 $(x+b)^2=a$ 的形式．

解： 由 $y^2-y-\frac{3}{4}=0$ 得 $y^2-y=\frac{3}{4}$，配方得 $y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$，

$\therefore \left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$.

答案： B

方法提醒

一元二次方程的配方过程是等式的恒等变形的过程，判断配方的结果是否正确，可以利用配方的步骤将一元二次方程进行配方后识别，也可以对每个选项进行逆向还原，与原方程进行对比选择．

考法 2 利用配方求字母系数的值

例 7：［中考·杭州］已知方程 $x^2-6x+q=0$ 可以配方成 $(x-p)^2=7$ 的形式，那么 $x^2-6x+q=2$ 可以配方成（　　）

A. $(x-p)^2=5$　　B. $(x-p)^2=9$

C. $(x-p+2)^2=9$　　D. $(x-p+2)^2=5$

试题评析： 本题考查了待定系数法，配方法等知识，巧妙诠释了求字母的值及数值与字母的替代关系．

解： $\because x^2-6x+q=0$，$\therefore$配方，得 $(x-3)^2=9-q$.

$\because$已知方程可以配方成 $(x-p)^2=7$，$\therefore p=3$，$q=2$.

$\therefore x^2-6x+q=2$ 可配方为 $(x-3)^2=9$，即 $(x-p)^2=9$.

答案： B

一题多解

本例也可以不经过配方直接用待定系数法求 p，q 的值，即：

$\because (x-p)^2=7$，

$\therefore x^2-2px+p^2=7$.

又 $\because x^2-6x+q=0$，

$\therefore -2p=-6$，$p^2-7=q$，

即 $p=3$，$q=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见254页

1. 用配方法解下列方程，其中应在方程左右两边同时加上4的是（　　）

A. $x^2+4x=5$　　B. $2x^2-4x=5$

C. $x^2-2x=5$　　D. $x^2+2x=5$

2. 将一元二次方程 $x^2-2x-5=0$ 化成 $(x+a)^2=b$ 的形式，则 b 等于（　　）

A. -4　　B. 4

C. -6　　D. 6

3. [中考·泰安]一元二次方程 $x^2-6x-6=0$ 配方后化为（　　）

A. $(x-3)^2=15$　　B. $(x-3)^2=3$

C. $(x+3)^2=15$　　D. $(x+3)^2=3$

4. [模拟·武穴]若方程 $4x^2-(m-2)x+1=0$ 的左边是一个完全平方式，则 m 等于（　　）

A. -2　　B. -2 或 6

C. -2 或 -6　　D. 2 或 -6

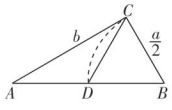
5. [中考·舟山]欧几里得的《原本》记载，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是：如图，画 Rt△ABC，使 $\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边 AB 上截取 $BD=\frac{a}{2}$. 则该方程的一个正根是（　　）

A. AC 的长

B. AD 的长

C. BC 的长

D. CD 的长



（第5题）

6. 方程 $(x-1)^2=4$ 的解是_____.

7. 用适当的数填空：

x^2-4x+_____$=(x-$_____$)^2$;

m^2+(_____)$m+\frac{9}{4}=[m+$(_____)$]^2$.

8. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+4x=0$;

(2) $2x^2-3x-6=0$;

(3) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=0$.

9. [模拟·黄冈]已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$.

(1) 求 a，b，c 的值；

(2) 判断△ABC 的形状. 【导学号：1927962】

10. 先阅读理解下面的例题，再按要求解答下列问题：

例题：求代数式 y^2+4y+8 的最小值.

解：$y^2+4y+8=y^2+4y+4+4=(y+2)^2+4$.

$\because (y+2)^2\geqslant 0$,

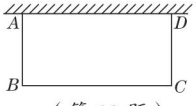
$\therefore (y+2)^2+4\geqslant 4$.

$\therefore y^2+4y+8$ 的最小值是 4.

(1) 求代数式 m^2+m+4 的最小值.

(2) 求代数式 $4-x^2+2x$ 的最大值.

(3) 某居民小区要在一块一边靠墙（墙长 15 m）的空地上建一个矩形花园 $ABCD$，花园一边靠墙，另三边用总长为 20 m 的栅栏围成. 如图，设 $AB=x$ m，请问：当 x 取何值时，花园的面积最大？最大面积是多少？



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2.3 公式法

核心知识

- 用公式法解一元二次方程
- 解一元二次方程方法的选用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 公式法

1. 求根公式的定义：

当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）的实数根可写为 $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式.

2. 公式法

（1）**定义：**

将一元二次方程中系数 a、b、c 的值，直接代入求根公式，就可以求得方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做公式法.

（2）**用求根公式解方程的步骤：**


公式法

①把一元二次方程化成一般形式；

②确定公式中 a，b，c 的值；

③求出 b^2-4ac 的值；

④若 $b^2-4ac \geqslant 0$，则把 a，b 及 b^2-4ac 的值代入求根公式求解，当 $b^2-4ac < 0$ 时，方程无实数根.

拨考向 利用公式法解一元二次方程

例 1： 用公式法解下列方程.

（1）$2x^2-7x+4=0$；

（2）$3x^2-2\sqrt{3}\,x=-1$；

（3）$x^2-2x+3=0$；

（4）$-3x^2-5x+2=0$.

解题秘方： 按照用求根公式解方程的步骤求解.

解：（1）$\because a=2$，$b=-7$，$c=4$，

$\therefore b^2-4ac=(-7)^2-4\times 2\times 4=17$.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$.

提分·必记

特别提醒

1. 公式法是解一元二次方程的通用解法(也称万能法)，它运用于所有的一元二次方程，但不一定是最高效的解法.
2. 只有当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的 $a \neq 0$，$b^2-4ac \geqslant 0$ 时，才能使用求根公式.
3. 用公式法解一元二次方程时，若 $b^2-4ac=0$，则方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）有两个相等的实数根，即 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

提分·秘诀

知识储备

利用公式法解方程时，需先求出 b^2-4ac 的值，当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，可直接套用求根公式求解，若 $b^2-4ac<0$，则方程无实数根.

特别警示

求 b^2-4ac 的值时，若代入的字母值是负数，则需将其用括号括起来，不能漏掉“-”号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）方程可化为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

∵ $a=3$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=1$，∴ $b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$.

∴ $x_1=x_2=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）∵ $a=1$，$b=-2$，$c=3$，

∴ $b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$. ∴方程无实数根.

（4）∵ $a=-3$，$b=-5$，$c=2$，

∴ $b^2-4ac=(-5)^2-4\times(-3)\times2=49$.

∴ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times(-3)}=\dfrac{5\pm7}{-6}$. ∴ $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=-2$.

解法提醒

用公式法解一元二次方程时，先将方程整理成一般形式，确定 a，b，c 的值，再求出 b^2-4ac 的值，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，则可代入求根公式求解，当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根，这时若将 a，b，c 的值直接代入求根公式，则算式无意义．另外，当 a，b，c 中含有分数时，一般先化为整数再计算．

点知识 ▶ 2 一元二次方程的解法

1. 解一元二次方程的方法：

直接开平方法、因式分解法、配方法、公式法．

2. 解一元二次方程的基本思路：

将二次方程化为一次方程，即降次．

3. 合理选择一元二次方程的解法：

（1）若方程具有 $(mx+n)^2=p(p\geqslant0)$ 的形式，可用直接开平方法求解；

（2）若一元二次方程一边为 0，另一边易于分解成两个一次因式的积时，可用因式分解法求解；

（3）公式法是一种常用的方法，用时一定要把一元二次方程化为一般形式，确定 a，b，c 的值，在 $b^2-4ac\geqslant0$ 的条件下代入公式求解．

提分·必记

活用巧记

先特殊后一般，即先考虑直接开平方法和因式分解法，不能用这两种方法时，再用公式法；没有特殊要求的，尽量少用配方法．可巧用口诀记为：

观察方程选解法，
先看能否开平方，
再看是否能分解，
左分降次右化零，
求根公式最后用，
系数符号要辨明．

拔考向 ▶ 利用适当方法解一元二次方程

例 2： 解下列方程．

（1）$4x^2-64=0$；　　（2）$2x^2-7x-6=0$；

（3）$(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$.

解题秘方： 根据方程的特点，选择适当方法解一元二次方程．

解：（1）∵ $4x^2-64=0$，

∴ $x^2=16$. ∴ $x_1=4$，$x_2=-4$.

（2）$2x^2-7x-6=0$，

∵ $a=2$，$b=-7$，$c=-6$，∴ $b^2-4ac=97>0$.

∴ $x_1=\dfrac{7+\sqrt{97}}{4}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{97}}{4}$.

（3）因式分解，得 $[(3x+2)-3][(3x+2)-5]=0$，

即 $(3x-1)(3x-3)=0$.

∴ $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=1$.

把 3x+2 看作一个整体，则方程为形如 $x^2+(p+q)x+pq=0$ 的一元二次方程，因此可直接用因式分解法求解．

提分·秘诀

选法策略

选择解一元二次方程方法的顺序为：

直接开平方法→因式分解法→公式法，如无特殊要求一般不用配方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用求根公式法进行二次三项式的因式分解

例 3： 因式分解：

（1）$6x^2-7x+1$；　　（2）$4x^2-x-5$.

解题秘方： 巧用 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 分解因式.

解：（1）构造一元二次方程为 $6x^2-7x+1=0$.

$\because a=6,\ b=-7,\ c=1,$

$\therefore b^2-4ac=49-4\times6\times1=25>0.$

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{25}}{2\times6}=\dfrac{7\pm5}{12}$. $\therefore x_1=1,\ x_2=\dfrac{1}{6}$.

$\therefore$ 因式分解的结果为 $6x^2-7x+1=6(x-1)\left(x-\dfrac{1}{6}\right)$.

（2）构造一元二次方程为 $4x^2-x-5=0$.

$\because a=4,\ b=-1,\ c=-5,\ \therefore b^2-4ac=1-4\times4\times(-5)=81>0.$

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{81}}{2\times4}=\dfrac{1\pm9}{8}$. $\therefore x_1=\dfrac{5}{4},\ x_2=-1.$

$\therefore$ 因式分解的结果为 $4x^2-x-5=4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x+1)$.

挑战·高分

解法提醒

利用求根公式法进行因式分解的理论依据是：

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 $x_1,\ x_2$，则方程可化为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的形式，因此 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，所以利用求根公式法进行代数式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的因式分解时，可以先构造一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，然后利用求根公式法求出一元二次方程的解，再代入 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 完成因式分解.

拔尖角度 2 利用换元法求方程中的代数式的值

例 4： 已知实数 x 满足 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$，求 $x+\dfrac{1}{x}$ 的值.

解题秘方： 本题的解题关键是先将原方程转化为只含 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 这样的未知项的方程，再把 $x+\dfrac{1}{x}$ 看成一个整体用换元法求解.

解： 配方，得 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3=0$,

设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则原方程可变形为 $y^2+2y-3=0$,

$\therefore y_1=-3,\ y_2=1.\ \therefore x+\dfrac{1}{x}=-3$ 或 1.

$\because$ 当 $x+\dfrac{1}{x}=1$ 时，方程没有实数根，这与 x 为实数相矛盾，舍去.

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=-3.$

方法点拨： 运用换元法解一元二次方程时，先要找出相同的整体进行换元，使方程变得更简易，解完方程后还要注意还元. 如本题最后写出 $x+\dfrac{1}{x}$ 的值，而不是只求出未知数 y 的值就结束答题.

挑战·高分

详解

由 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$，得 $x^2+2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1+2$，即 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3=0$.

特别警示

x 为实数，其隐含条件是关于 x 的方程有实数根，否则求出的 $x+\dfrac{1}{x}$ 的值就没有意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节知识是继直接开平方法、因式分解法和配方法解一元二次方程后的又一种方法，它比配方法的步骤更简单、明了，同时，其他方法都不“好用”时，可选用公式法，它是中考中解方程的常用手段之一.

三年中考兵法

考法1 利用公式法求根的范围

例5: [中考·荆州] 已知 a 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，则下面对 a 的估计正确的是（　　）

A. $0<a<1$　　B. $1<a<1.5$　　C. $1.5<a<2$　　D. $2<a<3$

试题评析: 本题考查了用公式法解一元二次方程及无理数的大小的估算，是一道很经典的题目，难度适中.

解: 解方程 $x^2-x-1=0$，得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because a$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，$\therefore a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\because 2<\sqrt{5}<3$，$\therefore 3<1+\sqrt{5}<4$.

$\therefore \dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$.

答案: C

考法2 利用数形结合思想验证用公式法求得的一元二次方程的根

例6: [改编·杭州] 如图 22.2-2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以点 B 为圆心，BC 的长为半径画弧，交线段 AB 于点 D；以点 A 为圆心，AD 长为半径画弧，交线段 AC 于点 E，连结 CD.

设 $BC=a$，$AC=b$，则线段 AD 的长度是方程 $x^2+2ax-b^2=0$ 的一个根吗？说明理由.

试题评析: 本题主要考查勾股定理和用公式法解一元二次方程，解题的关键有两个：一是用勾股定理表示线段 AD 的长；二是用公式法解出含有字母的一元二次方程的根.

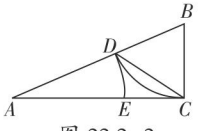


图 22.2-2

解: 是的. 理由如下：$\because \angle ACB=90°$，$BC=a$，$AC=b$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

又 $BD=BC=a$，$\therefore AD=AB-BD=\sqrt{a^2+b^2}-a$.

又 $\because$ 方程 $x^2+2ax-b^2=0$ 的根为 $x=\dfrac{-2a\pm\sqrt{4a^2+4b^2}}{2}=-a\pm\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore AD=\sqrt{a^2+b^2}-a$ 恰为其中的一个根.

冲刺·满分

教你一招

估算含无理数式子的大小的方法：

先估算这个无理数在哪两个连续整数之间，再根据不等式的基本性质依次在不等式两边加减或乘除适当的数，将这个无理数转化为含无理数的式子，即可确定它的范围.

方法点拨

将一元二次方程的根巧妙地用图中某条线段的长来表示，充分体现了数形结合思想，结合的关键点是 $\sqrt{b^2-4ac}$ 刚好可以转化为直角三角形中利用勾股定理表示的某边长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见255页

1. 方程 $4x^2+x=5$ 化为一般形式后的 a，b，c 值分别为（　　）

A. $a=4$，$b=1$，$c=5$　B. $a=1$，$b=4$，$c=5$

C. $a=4$，$b=1$，$c=-5$　D. $a=4$，$b=-5$，$c=1$

2. 方程 $x^2-4x=0$ 中，b^2-4ac 的值为（　　）

A. -16　B. 16　C. 4　D. -4

3. 方程 $7x=2x^2-4$ 中，$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$b^2-4ac=$_____.

4. 用求根公式解方程 $(2x-1)^2+4=(x+2)^2-4$，先把它整理为_____，它的根为_____.

5. [模拟·杭州]一元二次方程 $x^2-2x-2=0$ 的根为_____.

6. 已知 $2-\sqrt{2}$ 是一元二次方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根，则方程的另一个根为_____.

7. 在实数范围内定义一种运算“※”：$a※b=a^2-b$，按照这个规则，$(x+3)※25$ 的结果刚好为 0，则 x 的值为_____.

8. 已知代数式 $7x(x+5)$ 与代数式 $-6x^2-37x-9$ 的值互为相反数，则 $x=$_____.

9. 若满足 $|m-2|+\sqrt{n+4}=0$，则方程 $x^2+mx+nm=0$ 的解是_____.

10. 已知一个三角形的两边长为 6 和 8，第三边长是方程 $x^2-16x+60=0$ 的一个根，则这个三角形的面积为_____.

11. 用公式法解方程：

(1) $2x^2-3x+1=0$；　(2) $16x^2+8x=3$；

(3) $1-x=3x^2$；　(4) $3y^2+1=2\sqrt{3}y$.

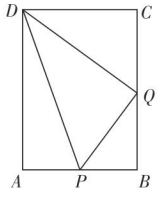
12. 用适当的方法解一元二次方程：

(1) $(x-5)(x+7)=1$；　(2) $x^2-4x+3=0$；

(3) $2x^2-3x-1=0$；　(4) $4x^2-4x-1=0$.

13. 我国南宋数学家杨辉在 1275 年提出一个问题：直田积（矩形面积）八百六十四步（平方步），只云阔（宽）不及长一十二步（宽比长少十二步），问阔及长各几步.　【导学号：1927962】

14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=12$，点 P 从点 B 开始沿 AB 边向点 A 以 1 厘米每秒的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 厘米每秒的速度移动. 如果 P，Q 从 B 同时出发，问几秒钟时△ PDQ 的面积等于 8？



（第 14 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2.4 一元二次方程根的判别式

核心知识

- 利用根的判别式判断根的情况
- 利用根的情况求方程中参数的取值

知识链接

用公式法解方程 —关键→ 根的判别式 → 有两个不等的实数根 / 有两个相等的实数根 / 无实数根

点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 一元二次方程根的判别式

1. **定义**：式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）根的判别式，通常用希腊字母“Δ”表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

2. 一元二次方程根的个数与根的判别式的关系：

（1）$\Delta>0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个不等实数根.

（2）$\Delta=0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个相等实数根.

（3）$\Delta<0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）没有实数根.

提分·必记

特别提醒

确定根的判别式时，需先将方程化为一般形式，确定 a，b，c 后再计算. 使用一元二次方程根的判别式的前提是二次项系数不为 0.

拨考向▶ 一元二次方程根的判别式的应用类型

题型 1：根的判别式在求值中的应用

例 1：求下列一元二次方程的根的判别式的值.

（1）$-\frac{1}{4}x^2-x=1$；　　（2）$x^2=-\sqrt{2}x-\frac{1}{3}$.



解题秘方：紧扣“根的判别式”的结构求判别式的值.

解：（1）原方程化为 $\frac{1}{4}x^2+x+1=0$，$\Delta=1^2-4\times1\times\frac{1}{4}=0$.

（2）原方程化为 $x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{3}=0$，$\Delta=(\sqrt{2})^2-4\times1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

题型 2：根的判别式在判断一元二次方程根的情况中的应用

例 2：对于任意实数 k，关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x-k^2+2k-1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个相等的实数根　　B. 没有实数根

C. 有两个不等的实数根　　D. 无法判断

解题秘方：由根的判别式的正负性及是否为 0 判断根的情况.

解：∵ $a=1$，$b=-2(k+1)$，$c=-k^2+2k-1$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=[-2(k+1)]^2-4\times1\times(-k^2+2k-1)=8+8k^2>0$.

∴方程有两个不等的实数根.

答案：C

教你一招

利用根的判别式判断一元二次方程的根的情况的方法：

先将方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$，当方程中的 a，b，c 是常数时，直接求出 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，确定方程根的情况；当方程中的 a，b，c 含有字母时，需要对含有字母的代数式进行讨论，进而确定该方程根的情况.

提分·秘诀

方法点拨

求一元二次方程的根的判别式时应注意两点：

一是将方程化成一般形式后才能确定 a，b，c 的值；

二是确定 a，b，c 的值时不要漏掉符号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：根的判别式在求一元二次方程中字母的取值中的应用

例 3：［中考·凉山］关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2x+1=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m \leqslant 3$　　B. $m < 3$

C. $m < 3$ 且 $m \neq 2$　　D. $m \leqslant 3$ 且 $m \neq 2$

解题秘方：紧扣根的判别式与根的情况的关系进行解答.

解：∵方程为一元二次方程，

∴ $m-2 \neq 0$，即 $m \neq 2$.

∵一元二次方程有实数根，

∴ $\Delta \geqslant 0$，即 $4-4(m-2) \geqslant 0$.

∴ $m \leqslant 3$.

∴ $m \leqslant 3$ 且 $m \neq 2$.

答案：D

特别提醒

应用 Δ 的前提条件是二次项系数不为 0.

方程有两个不相等的实数根 $\leftrightarrow \Delta > 0$；方程有两个相等的实数根 $\leftrightarrow \Delta = 0$；方程没有实数根 $\leftrightarrow \Delta < 0$，这样，就可以根据根的情况构建方程或不等式，从而求出字母的取值范围. 当待求的字母系数出现在二次项中，而无法判定方程为一元二次方程时，解题时要分类讨论.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分类法求一元二次方程中字母的范围

例 4：关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，求 m 的取值范围.

解题秘方：紧扣“关于 x 的方程”即“二次项系数可能为 0”进行分类解答.

解：当 $m=0$ 时，此方程为一元一次方程，方程有实数根；

当 $m \neq 0$ 时，此方程为一元二次方程.

∵方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，

∴ $(2m+1)^2-4m^2 \geqslant 0$. ∴ $m \geqslant -\frac{1}{4}$.

综上，当 $m \geqslant -\frac{1}{4}$ 时，关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根.

挑战·高分

特别提醒

方程有实数根与方程有两个实数根的根本区别是：

方程有实数根，此方程不一定是一元二次方程，也可以是一元一次方程；方程有两个实数根，则该方程一定是一元二次方程.

拔尖角度 2 利用定义法解方程与函数问题

例 5：已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(4k+1)x+3k+3=0$（k 是整数）.

（1）求证：方程有两个不等的实数根；

（2）若方程的两个实数根分别为 x_1，x_2（其中 $x_1<x_2$），设 $y=x_2-x_1$，判断 y 是不是变量 k 的函数，如果是，请写出 y 关于 k 的函数解析式；如果不是，请说明理由.

解题秘方：（1）根据所给方程求出判别式 Δ，再证明判别式 $\Delta>0$；（2）先根据求根公式求出一元二次方程的根，再结合已知条件表示出方程的两根，求得函数解析式.

挑战·高分

解法提醒

求 y 关于 k 的函数解析式，首先要求出 x_1，x_2，利用求根公式求得已知方程的两个根后，要根据已知条件判断出 x_1，x_2 对应的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**证明：** ∵ $a=k\neq 0$，$b=-(4k+1)$，$c=3k+3$，

∴ $\Delta=[-(4k+1)]^2-4k(3k+3)=(2k-1)^2$，

∵ k 是整数，∴ $2k-1\neq 0$. ∴ $\Delta=(2k-1)^2>0$.

∴方程有两个不等的实数根.

（2）**解：** y 是变量 k 的函数.

解方程，得 $x=\dfrac{(4k+1)\pm\sqrt{(2k-1)^2}}{2k}=\dfrac{4k+1\pm(2k-1)}{2k}$.

又已知 $x_1<x_2$，∴ $x_1=1+\dfrac{1}{k}$，$x_2=3$. ∴ $y=x_2-x_1=3-\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=2-\dfrac{1}{k}$.

∴由函数的定义知 y 是变量 k 的函数，函数解析式为 $y=2-\dfrac{1}{k}$.

详解

∵k 是整数，

∴$\dfrac{1}{k}\leqslant 1$.

∴$1+\dfrac{1}{k}\leqslant 2<3$.

∴$x_1=1+\dfrac{1}{k}$，$x_2=3$.

挑战·高分

拔尖角度▸ 3 利用数形结合法求一元二次方程中字母的值

例6： 等腰三角形边长分别为 a，b，2，且 a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两根，求 n 的值.

解题秘方： 先对三角形的边长分类讨论，再分析三边的数量关系以及根的判别式，求出字母 n 的值.

解： ∵该三角形是等腰三角形，∴分两种情况讨论：

（1）当腰长为 2，即 $a=2$ 或 $b=2$ 时，

∵ a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两根，

∴ $x=2$ 是方程的一个根.

把 $x=2$ 代入 $x^2-6x+n-1=0$ 得 $2^2-6\times 2+n-1=0$，

解得 $n=9$.

当 $n=9$ 时，方程的两根分别是 2 和 4，

而边长 2，4，2 不能组成三角形，

故 $n=9$ 不合题意，舍去.

（2）当底边长为 2，即 $a=b$ 时，方程 $x^2-6x+n-1=0$ 有两个相等的实数根，则 $\Delta=(-6)^2-4(n-1)=0$，解得 $n=10$.

∴原方程为 $x^2-6x+9=0$.

解方程 $x^2-6x+9=0$ 得 $x_1=x_2=3$，即 $a=3$，$b=3$.

∵边长 3，3，2 可以组成三角形，

∴ $n=10$.

知识储备

当已知等腰三角形的一边的长时，通常要分两种情况讨论：

（1）当已知的边长为腰长时；

（2）当已知的边长为底边长时.

详解

求出三角形三边的长度之后，必须检验所求结果是否满足任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节在中考中主要考点为根的判别式及其应用；根的判别式在中考中常独立以选择或填空的形式出现，有时也和后面的根与系数的关系结合在一起考查.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用根的判别式求方程整数解问题

例 7：［中考·包头］已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-2=0$ 有两个实数根，m 为正整数，且该方程的根都是整数，则符合条件的所有正整数 m 的和为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

试题评析： 本题考查了根的判别式以及一元二次方程的整数解，牢记“当 $\Delta \geqslant 0$ 时，方程有实数根”是解题的关键.

解： ∵ $a=1$，$b=2$，$c=m-2$，关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m-2=0$ 有实数根，

∴ $\Delta=b^2-4ac=2^2-4(m-2)=12-4m \geqslant 0$，

∴ $m \leqslant 3$.

∵ m 为正整数，且该方程的根都是整数，

∴ $m=2$ 或 3.　∴ $2+3=5$.

答案： B

考法 2 利用根的判别式及方程的根解有关根的应用

例 8：［中考·岳阳］已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

（1）求证：方程总有两个不等的实数根；

（2）已知方程的一个根为 $x=0$，求代数式 $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$ 的值（要求先化简再求值）.

试题评析： 本题考查了根的判别式和一元二次方程的解，解题时，逆用一元二次方程解的定义易得出所求式子的值，在解题时要重视解题思路的逆向分析.

解：（1）**证明：** ∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$，

∴ $\Delta=[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$.

∴方程总有两个不等的实数根.

（2）解：∵ $x=0$ 是此方程的一个根，

∴把 $x=0$ 代入方程中得到 $m(m+1)=0$.

∴ $m=0$ 或 $m=-1$.

∵ $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$

$=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5$

$=3m^2+3m+5$，

把 $m=0$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=5$；

把 $m=-1$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$.

综上，原代数式的值为 5.

冲刺·满分

思路点拨

根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta \geqslant 0$，即可得出 $m \leqslant 3$，由 m 为正整数结合该方程的根都是整数，即可求出 m 的值，将其相加即可得出结论

解法提醒

一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况：

1. 不解方程，由根的判别式的正负性及是否为 0 可直接判定根的情况，即
   （1）当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不等的实数根；
   （2）当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
   （3）当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根.
2. 根据方程根的情况，结合根的判别式来确定方程中字母系数的取值范围，若二次项系数中含有字母，则应注意检验二次项系数是否为零.
3. 应用判别式证明方程根的情况（有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见256页

1. [中考·娄底]关于x的一元二次方程$x^2-(k+3)x+k=0$的根的情况是（　　）

A. 有两不相等实数根　B. 有两相等实数根

C. 无实数根　D. 不能确定

2. [中考·宁夏]关于x的一元二次方程$(a-1)x^2+3x-2=0$有实数根，则a的取值范围是（　　）

A. $a>-\frac{1}{8}$　B. $a\geqslant-\frac{1}{8}$

C. $a>-\frac{1}{8}$且$a\neq1$　D. $a\geqslant-\frac{1}{8}$且$a\neq1$

3. [中考·安徽]若关于x的一元二次方程$x(x+1)+ax=0$有两个相等的实数根，则实数a的值为（　　）

A. -1　B. 1

C. -2或2　D. -3或1

4. [中考·咸宁]已知a，b，c为常数，点$P(a,c)$在第二象限，则关于x的方程$ax^2+bx+c=0$根的情况是（　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

5. [中考·张家界]若关于x的一元二次方程$x^2-2x+k=0$无实数根，则实数k的取值范围是_____.

6. 若关于x的方程$2x^2-2x+3a-4=0$有两个不相等的实数根，则化简$|a-2|-\sqrt{a^2-8a+16}$=_____.

7. 已知关于x的一元二次方程$x^2+p_1x+q_1=0$与$x^2+p_2x+q_2=0$. 求证：当$p_1p_2=2(q_1+q_2)$时，这两个方程中至少有一个方程有实数根.

8. [中考·北京]已知关于x的一元二次方程$x^2+2x+2k-4=0$有两个不等的实数根.

（1）求k的取值范围；

（2）若k为正整数，且该方程的根都是整数，求k的值.

9. [模拟·厦门]关于x的一元二次方程$(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中a，b，c分别为$\triangle ABC$三边的长.

（1）如果方程有两个相等的实数根，试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由；

（2）如果$\triangle ABC$是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.　【导学号：1927962】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*22.2.5 一元二次方程的根与系数的关系

核心知识

- 一元二次方程根与系数的关系
- 以两实数为根的一元二次方程
- 常见涉两实数根的变形公式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 一元二次方程根与系数的关系

提分·必记

1. 一元二次方程根与系数的关系：

（1）设二次项系数为 1 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$.

（2）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，方程有实数根，设这两个实数根分别为 x_1，x_2，这两个根与系数的关系是 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

特别提醒

一元二次方程根与系数的关系存在的前提是 $a\neq0$，$b^2-4ac\geqslant0$.

2. 与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形：

（1）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

（2）$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；

（3）$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$.

拨考向 根与系数的关系的应用类型

提分·秘诀

特别提醒

已知一元二次方程有根，求两根之和或两根之积时，要把方程化成一元二次方程的一般形式，先确定方程有实数根，然后代入公式直接计算即可.

题型 1：根与系数的关系在求两根之和或积中的应用

例 1： 设 x_1，x_2 是方程 $4x^2-7=2x^2+8x$ 的两个实数根，求 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值.

解题秘方： 根据根与系数的关系求值.

解： 整理，得 $2x^2-8x-7=0$.

$\therefore a=2$，$b=-8$，$c=-7$.

$\therefore \Delta=(-8)^2-4\times2\times(-7)=120>0$.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-8}{2}=4$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-7}{2}=-\dfrac{7}{2}$.

一题多解

本题也可以把 x=2 代入方程中，求得字母 q=8，再解 $x^2-6x+8=0$，求得两根分别为 2 和 4.

题型 2：根与系数的关系在求方程中字母系数值时的应用

例 2： 已知一元二次方程 $x^2-6x+q=0$ 有一个根为 2，求方程的另一根和 q 的值.

解题秘方： 利用两根之和与积求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设这个方程的另一个根为 m，则

$m+2=6$，$2m=q$，$\therefore m=4$，$q=8$.

$\because$ 当 $q=8$ 时，$\Delta=(-6)^2-4\times8=4>0$，

$\therefore$ 另一个根为 4，q 的值为 8.

教你一招：已知一根，利用根与系数的关系求方程中字母系数值的策略

求解此类问题时，若字母系数在一次项中，可先用两根之积的关系求出另一根，然后代入求字母系数值，或者用两根之和的关系求字母系数值. 若字母系数在常数项中，可先用两根之和的关系求出另一根，然后代入方程求字母系数值，或者用两根之积的关系求字母系数值.

警示误区

利用一元二次方程的根与系数的关系求出字母系数的值后，一定要代入 b^2-4ac 中检验，只有满足 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，求出的字母系数值才符合题意.

点知识 2 二次项系数为 1 的一元二次方程的性质

1. 以 x_1，x_2 为根的一元二次方程是：

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

2. 如果方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=n$.

提分·必记

特别解读

应用性质 1 能求一元二次方程，应用性质 2 能转化记忆根与系数关系.

拔考向 利用根与系数的关系构造方程

例 3：[中考·来宾]已知实数 x_1，x_2 满足 $x_1+x_2=7$，$x_1x_2=12$，则以 x_1，x_2 为根的一元二次方程是（　　）

A. $x^2-7x+12=0$　　B. $x^2+7x+12=0$

C. $x^2+7x-12=0$　　D. $x^2-7x-12=0$

解题秘方：直接用以 x_1，x_2 为根的一元二次方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$ 求解.

解：设所求方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$，

$\therefore$ 所求的一元二次方程是 $x^2-7x+12=0$.

答案：A

提分·秘诀

方法提醒

二次项系数为 1 的一元二次方程与两根的关系是：两根之和是一次项系数的相反数，两根之积等于常数项.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用根与系数的关系法求涉根的代数式的值

例 4：已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，求：

（1）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 的值；（2）$(x_1-x_2)^2$ 的值.

解题秘方：紧扣“与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形”进行解答.

解：（1）$\because x_1$，x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$.

挑战·高分

方法点拨

利用根与系数的关系求代数式值的方法：

求与一元二次方程两根有关的代数式的值时，一般利用恒等变形将代数式转化成含 x_1+x_2，x_1x_2 的形式，从而结合根与系数的关系进

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{4}{2}=2.$

（2）$\because x_1$，x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2.$

$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times 2=8.$

行求解.

注意求值前提是：方程有两个实数根，即判别式大于或等于 0.

拔尖角度▶ 2 利用阅读法解与根与系数的关系有关的新定义问题

例 5： 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）有两个实数根，且其中一个根是另一个根的 2 倍，那么称这样的方程为“倍根方程”. 例如，一元二次方程 $x^2-6x+8=0$ 的两个根是 2 和 4，那么方程 $x^2-6x+8=0$ 就是“倍根方程”.

（1）若关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+c=0$ 是“倍根方程”，则 $c=$_____；

（2）若 $(x-2)(mx-n)=0$（$m\neq 0$）是“倍根方程”. 求代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 的值.

（3）若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$m\neq 0$）是“倍根方程”. 求 a，b，c 之间的关系.

解题秘方： 紧扣“倍根方程”的定义，结合根与系数的关系求解.

解：（1）2

（2）解方程 $(x-2)(mx-n)=0$（$m\neq 0$），得 $x_1=2$，$x_2=\frac{n}{m}$.

由题意可知，方程的两根是 2 倍关系，故 $x_2=1$ 或 $x_2=4$.

当 $x_2=1$ 时，$\frac{n}{m}=1$，即 $m=n$. 把 $m=n$ 代入代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 中，得 $4m^2-5mn+n^2=4m^2-5m\times m+m^2=0.$

当 $x_2=4$ 时，$\frac{n}{m}=4$，即 $n=4m$.

把 $n=4m$ 代入代数式 $4m^2-5mn+n$ 中，得 $4m^2-5m\times 4m+(4m)^2=0.$

综上所述，代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 的值为 0.

（3）由“倍根方程”的概念可设 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根为 t 和 $2t$. 此时 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0.$

由根与系数的关系，知 $t+2t=-\frac{b}{a}$，$t\cdot(2t)=\frac{c}{a}$，

即 $3t=-\frac{b}{a}$，$2t^2=\frac{c}{a}$. 消去 t，得 $2b^2-9ac=0.$

此时 $ac=\frac{2}{9}b^2\geqslant 0$，满足 $\Delta=b^2-4ac=b^2-\frac{8}{9}b^2=\frac{1}{9}b^2\geqslant 0.$

$\therefore a$，b，c 之间的关系是 $2b^2-9ac=0.$

挑战·高分

详解第（1）问

设关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+c=0$ 的两个根为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

由根与系数的关系，可得 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=c$.

∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+c=0$ 是“倍根方程”.

$\therefore x_2=2x_1.$

$\therefore x_1+2x_1=3$，$2x_1^2=c.$

$\therefore c=2.$

另解第（3）问

由“倍根方程”的概念可设 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 t 和 $2t$. 此时 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0.$

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 可化为 $a(x-t)(x-2t)=0(a\neq 0)$.

$\therefore ax^2+bx+c=ax^2-3atx+2at^2.$

$\therefore b=-3at$，$c=2at^2.$

又 $a\neq 0$，$\therefore t=\frac{b}{-3a}$.

把 $t=\frac{b}{-3a}$ 代入 $c=2at^2$ 中，得 $2b^2-9ac=0$，

此时 $ac=\frac{2}{9}b^2\geqslant 0$，满足 $\Delta=b^2-4ac=b^2-\frac{8}{9}b^2=\frac{1}{9}b^2\geqslant 0.$

$\therefore a$，b，c 之间的关系是 $2b^2-9ac=0.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

一元二次方程根与系数的关系是中考的重点内容之一，利用此知识可解决：（1）已知方程，求两根的和或积，如例1；（2）已知方程的一个根，求另一个根及方程的字母系数值，如例2；（3）求关于两根的代数式的值，如例4等问题，这些都是中考考查的内容，题型主要有选择题、填空题和解答题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用根与系数的关系求涉根的非对称式的值

例6: [中考·天门]若 α，β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为（　　）

A. -13　　B. 12　　C. 14　　D. 15

试题评析: 本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根时，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，也考查了一元二次方程解的定义.

解: $\because$ α 为 $2x^2-5x-1=0$ 的实数根，

$\therefore 2\alpha^2-5\alpha-1=0$，即 $2\alpha^2=5\alpha+1$.

$\therefore 2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\alpha+1+3\alpha\beta+5\beta=5(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+1$.

$\because$ α，β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，

$\therefore \alpha+\beta=\frac{5}{2}$，$\alpha\beta=-\frac{1}{2}$.

$\therefore 2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\times\frac{5}{2}+3\times(-\frac{1}{2})+1=12$.

答案: B

教你一招

求与根有关的代数式的值的方法：

看代数式是否具有对称性，若具有对称性，则直接变形，将两根之和或两根之积代入求值；若不具有对称性，则将其中的某一个根单独代入方程中，得到与待求值的代数式相关的结构，进行整体代入求值.

考法2 利用涉根的式子的值求字母的值

例7: [中考·十堰]已知关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 x_1，x_2.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）若 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=16+x_1x_2$，求实数 k 的值.

试题评析: 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式，解题的关键是：（1）根据方程的系数结合根的判别式，找出 $\Delta=-4k+5\geqslant0$；（2）根据根与系数的关系结合 $x_1^2+x_2^2=16+x_1x_2$，找出关于 k 的一元二次方程.

解: （1）$\because$ 关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，$\therefore \Delta=(2k-1)^2-4(k^2-1)=-4k+5\geqslant0$. 解得 $k\leqslant\frac{5}{4}$.

特别提醒

实数k应满足的条件：

1. 使二次项系数不为0；

2. 满足 $\Delta\geqslant0$；

3. 满足给出的条件等式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴实数 k 的取值范围为 $k \leqslant \frac{5}{4}$.

（2）∵关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，

∴ $x_1+x_2=1-2k$，$x_1x_2=k^2-1$.

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16+x_1x_2$，

∴ $(1-2k)^2-2(k^2-1)=16+(k^2-1)$，即 $k^2-4k-12=0$.

解得 $k=-2$ 或 $k=6$（不符合题意，舍去）.

∴实数 k 的值为 -2.

警示误区

∵当 $k=6$ 时，$\Delta=(2\times6-1)^2-4\times(6^2-1)=-19<0$，

∴ $k=6$ 不合题意，舍去.

利用根与系数的关系求待定字母的值时，往往会犯单纯满足涉两根的关系式，而不考虑 $\Delta\geq0$ 的错误.

两年模拟兵法

☞答案见 256 页

1. [中考·凉山]一元二次方程 $3x^2-1=2x+5$ 两实根的和与积分别是（　　）

A. $\frac{3}{2}$，-2　　B. $\frac{2}{3}$，-2

C. $-\frac{2}{3}$，2　　D. $-\frac{3}{2}$，2

2. [中考·绵阳]关于 x 的方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根是 -2 和 1，则 n^m 的值为（　　）

A. -8　　B. 8　　C. 16　　D. -16

3. [中考·烟台]若 x_1，x_2 是方程 $x^2-2mx+m^2-m-1=0$ 的两个根，且 $x_1+x_2=1-x_1x_2$，则 m 的值为（　　）

A. -1 或 2　　B. 1 或 -2

C. -2　　D. 1

4. [中考·新疆]已知关于 x 的方程 $x^2+x-a=0$ 的一个根为 2，则另一个根是（　　）

A. -3　　B. -2

C. 3　　D. 6

5. [中考·黄石]关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x-2m+1=0$ 的两实数根之积为负，则实数 m 的取值范围是_____.

6. 已知 x_1，x_2 是方程 $x^2+6x+3=0$ 的两个实数根，则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值为_____.

7. 不解方程，求下列方程的两根 x_1，x_2 的和与积.

（1）$x^2-3x-5=0$;

（2）$2x^2+5x-9=0$;

（3）$4x-2=x^2$.

8. [模拟·绵阳]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2=2(1-m)x-m^2$ 的两个实数根为 x_1，x_2.

（1）求实数 m 的最大整数值；

（2）设 $y=x_1+x_2$，当 y 取得最小值时，求相应 m 的值，并求出最小值.

9. [中考·鄂州]关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不等的实数根.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）设方程的两个实数根分别为 x_1，x_2，存不存在这样的实数 k，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出这样的 k 值；若不存在，说明理由.　　【导学号：1927962】

10. [中考·日照]如果 m，n 是两个不等的实数，且满足 $m^2-m=3$，$n^2-n=3$，那么代数式 $2n^2-mn+2m+2\,019$ 的值是多少？

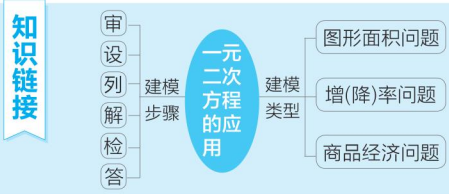
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.3 实践与探索

核心知识

- 图形面积问题
- 增（降）率问题
- 商品经济问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 建立一元二次方程的模型解应用题的一般步骤

1. 列一元二次方程解应用题的一般步骤归纳为： 审、设、列、解、检验、答.

审——审题，明确已知量和未知量，找出它们之间的关系

设——设未知数

列——根据题目中的等量关系，列出方程

解——解方程，求出未知数的值

检验——检验方程的解能否保证实际问题有意义

答——写出答案，应遵循“问什么，答什么，怎么问，怎么答”的原则.

2. 列一元二次方程解应用题注意事项：

（1）在一道应用题中，往往含有几个未知量，应恰当地选择其中的一个用字母 x 表示，然后根据各量之间的数量关系，将其他几个量用含 x 的代数式表示出来.

（2）设未知数时必须写清单位、用对单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，作答时必须写上单位.

（3）一定要对方程的根加以检验，看它是否符合实际意义.

提分·必记

特别解读

第一步“审”一般不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确已知量、未知量及它们之间的关系才能准确列出方程.

特别解读

列方程，这是解应用题的关键一步，一般先找出能够表达全部含义的一个等量关系，然后列代数式表示等量关系中的各个量，就得到含未知数的等式，即方程.

拔考向▶ 利用一元二次方程解实际应用问题

例 1： 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 45 元，为了扩大销售、增加盈利尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施，经调查发现，每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 4 件，若商场平均每天盈利 2 100 元，每件衬衫应降价多少元？请完成下列问题：

（1）未降价之前，某商场衬衫每天的总盈利为_____元.

（2）降价后，设某商场每件衬衫应降价 x 元，则每件衬衫盈利_____元，平均每天可售出_____件.（用含 x 的代数式表示）

（3）请列出方程，求出 x 的值.

提分·秘诀

解法提醒

设未知数时，必须写清单位、正确使用单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，答时必须写上单位.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方: 用关系式“销售盈利 = 每件盈利 × 件数”,建立方程进行解答.

解: (1) 900

(2) $(45-x)$; $(20+4x)$

(3) 由题意得 $(45-x)(20+4x)=2\,100$,

解得 $x_1=10$, $x_2=30$,

因尽快减少库存,故 $x=30$.

答:每件衬衫应降价 30 元.

技巧点拨: 本题可用列表法分析题目中各个量之间的关系,列表法的优点在于将题目中各个量列在一个表格中,从而理顺它们之间的关系,以便从中找出相等关系,列出方程,如本题分别从降价前后将每件盈利、销售量、总盈利进行对比呈现,便可找出相等关系.

表格图例

	降价前	降价后
每件盈利	45	$45-x$
销售量	20	$20+4x$
总盈利	45×20	$(45-x)\cdot(20+4x)$

在盈利相同的情况下,尽快减少库存,就是要多卖,降价越多,卖的也越多.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用化不规则为规则法用一元二次方程解几何问题

挑战·高分

例 2: 如图 22.3-1,在宽为 20 m,长为 32 m 的矩形地面上修筑等宽的道路(图中阴影部分),余下的部分种上草坪,要使草坪的面积为 540 m^2,求道路的宽.

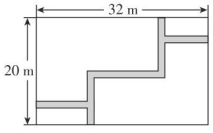


图 22.3-1

解题秘方一: 利用平移,把不规则图形面积转化为规则图形面积.

解法一: 设道路宽为 x m,由题意,

得 $(20-x)(32-x)=540$,

解得 $x_1=50$(不合题意,舍去), $x_2=2$.

答:道路的宽为 2 m.


利用一元二次方程建模

解题秘方二: 利用分割,把不规则图形面积转化为规则图形面积的和差,即剩余草坪面积 = 矩形面积 − 道路面积.

解法二: 设道路宽为 x m,由题意,

得 $32\times20-(20x+32x-x^2)=540$.

解得 $x_1=50$(不合题意,舍去), $x_2=2$.

答:道路的宽为 2 m.

道路面积为长为 32m 的横向道路面积与长为 20m 的纵向道路面积的和减去重叠部分的小正方形面积.

教你一招: 解决图形面积问题的关键是把实际问题转化为数学问题,把实际问题中的已知量和未知量归结到某一个几何图形中,然后利用几何知识来寻找它们之间的关系,列出一元二次方程求解,求不规则图形的面积时,一般是将不规则图形平移或分割成规则图形,再利用规则图形的面积公式列方程求解.

方法点拨

平移法是列一元二次方程解面积类应用题常用的方法,其核心思想是将不在一起的几块图形通过平移转化为一块规则的图形,通过面积关系列一元二次方程求解.

如此题可将道路平移到矩形的右侧和下侧,则可得草坪的面积等于一个长为 $(32-x)$ m,宽为 $(20-x)$ m 的矩形的面积,如图 22.3-2.

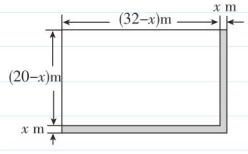


图 22.3-2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用图象信息法用一元二次方程解一次函数的问题

挑战·高分

例3： 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观，如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，但同时考虑到文物的保存费用问题，还要保证一定的门票收入．因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数，在该方法的实施过程中发现，每周参观人数与票价之间存在着如图22.3-3的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周4万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少？门票价格应是多少？

特别提醒：用待定系数法求每周参观人数与票价之间的一次函数关系式．

直接得出每周参观人数与票价之间的函数关系式

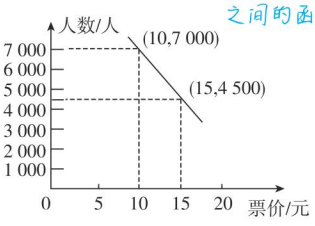


图 22.3-3

解题秘方： 利用函数图象的信息用待定系数法求每周参观人数与票价之间的函数关系式．

解： 设每周参观人数 y（人）与票价 x（元）之间的一次函数表达式为 $y=kx+b$（$x>0$），

根据题意，得 $\begin{cases}10k+b=7\,000,\\15k+b=4\,500,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\,000.\end{cases}$

$\therefore y=-500x+12\,000$（$x>0$）．

$\because xy=40\,000$，

即 $x(-500x+12\,000)=40\,000$，

$\therefore x^2-24x+80=0$．

解得 $x_1=20$，$x_2=4$．

把 $x_1=20$，$x_2=4$ 分别代入 $y=-500x+12\,000$，

得 $y_1=2\,000$，$y_2=10\,000$．

$\because$ 要控制参观人数，$\therefore$ 取 $x=20$，此时 $y=2\,000$．

$\therefore$ 每周应限定参观人数为2 000人，门票价格应是20元．

提醒：在门票收入相同的情况下，控制参观人数，就是尽量减少参观人数，所以取参观人数少的情况作为符合题意的答案．

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘 随着课程改革的不断深入，一元二次方程的实际应用近年来与经济相联系的应用题在各地中考中大量涌现，在中考中单独考查时主要考查利润问题、增长率问题，也常与几何图形的面积问题及函数问题相结合，题型有选择题、填空题和解答题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用一元二次方程解增长（降低）率问题

例 4：［**中考·安顺**］某地 2015 年为做好“精准扶贫”，投入资金 1 280 万元用于异地安置，并规划投入资金逐年增加，2017 年在 2015 年的基础上增加投入资金 1 600 万元.

（1）从 2015 年到 2017 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为多少？

（2）在 2017 年异地安置的具体实施中，该地计划投入资金不低于 500 万元用于优先搬迁租房奖励，规定前 1 000 户（含第 1 000 户）每户每天奖励 8 元，1 000 户以后每户每天奖励 5 元，按租房 400 天计算，求 2017 年该地至少有多少户享受到优先搬迁租房奖励.

试题评析：本题考查了一元二次方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出一元二次方程；（2）根据各数量之间的关系，列出关于 a 的一元一次不等式.

解：（1）设该地投入异地安置资金的年平均增长率为 x，

根据题意，得 $1\,280(1+x)^2=1\,280+1\,600$，

解得 $x_1=0.5=50\%$，$x_2=-2.5$（舍去）.

答：从 2015 年到 2017 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为 50%.

（2）设 2017 年该地有 a 户享受到优先搬迁租房奖励，

根据题意，得 $8\times1\,000\times400+5\times400(a-1\,000)\geqslant5\,000\,000$，

解得 $a\geqslant1\,900$.

答：2017 年该地至少有 1 900 户享受到优先搬迁租房奖励.

考法 2 利用一元二次方程解商品销售问题

例 5：［**中考·德州**］为积极响应新旧动能转换，提高公司经济效益，某科技公司近期研发出一种新型高科技设备，每台设备成本价为 30 万元，经过市场调研发现，每台售价为 40 万元时，年销售量为 600 台；每台售价为 45 万元时，年销售量为 550 台. 假定该设备的年销售量 y（单位：台）和销售单价 x（单位：万元）成一次函数关系.

（1）求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式；

（2）根据相关规定，此设备的销售单价不得高于 70 万元，如果该公司想获得 10 000 万元的年利润，则该设备的销售单价应是多少万元？

冲刺·满分

知识储备

增长率（降低率）问题的公式：

a 为起始量，b 为终止量，n 为增长（或降低）的次数，平均增长率公式：$a(1+x)^n=b$（x 为平均增长率）；平均降低率公式：$a(1-x)^n=b$（x 为平均降低率）.

详解

2016 年投入资金为 $1\,280(1+x)$ 万元，2017 年投入资金为 $1\,280(1+x)^2$ 万元.

知识储备

利润 = 售价 − 进价；

利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%$；

售价 = 进价 ×（1 + 利润率）；

总利润 = 总售价 − 总成本 = 单件利润 × 总销量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了待定系数法求一次函数表达式以及一元二次方程的应用，解题的关键是：（1）根据年销售量 y（单位：台）和销售单价 x（单位：万元）成一次函数关系，利用待定系数法求出函数关系式；（2）找准等量关系，正确列出一元二次方程.

解：（1）设年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

将（40，600），（45，550）代入 $y=kx+b$，得

$$\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-10,\\b=1\,000.\end{cases}$$

∴年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\,000$.

（2）设此设备的销售单价为 x 万元，则每台设备的利润为（$x-30$）万元，销售数量为（$-10x+1\,000$）台，

根据题意，得（$x-30$）（$-10x+1\,000$）$=10\,000$，

整理，得 $x^2-130x+4\,000=0$，

解得 $x_1=50$，$x_2=80$.

∵此设备的销售单价不得高于 70 万元，

∴ $x=50$.

答：该设备的销售单价应是 50 万元.

两年模拟兵法

☞答案见 257 页

1. 有 1 人患了流感，两轮传染后共有 100 人患了流感，那么在每轮传染中，平均 1 人传染了（　　）

A. 8 人　　B. 9 人

C. 10 人　　D. 11 人

2. [模拟·冷水滩]中国古代数学家杨辉的《田亩比类乘除捷法》有这么一道题：“直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问长多阔几何？”意思是：一块矩形田地的面积为 864 平方步，只知道它的长与宽共 60 步，问它的长比宽多多少步？经过计算，你的结论是：长比宽多（　　）

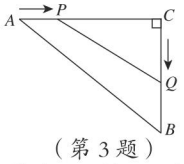
A. 12 步　　B. 24 步

C. 36 步　　D. 48 步

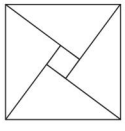
3. [模拟·全椒]如图，在△ ABC 中，$AC=50$ m，$BC=40$ m，∠ $C=90°$，点 P 从点 A 开始沿 AC 边向点 C 以 2 m/s 的速度匀速移动，同时另一点 Q 由 C 点开始以 3 m/s 的速度沿着 CB 匀速移动，点 Q 到达点 B 为止，点 Q 停止时点 P 也停止运动. 当△ PCQ 的面积等于 300 m^2，运动时间为（　　）

A. 5 s　　B. 20 s

C. 5 s 或 20 s　　D. 不确定



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 在北京召开的国际数学家大会的会徽是由 4 个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形组成的，如图，若大正方形的面积是 32，小正方形的面积是 4，则每个直角三角形的周长是_____.

5. [模拟·嘉祥]贵阳市某楼盘准备以每平方米 6 000 元的均价对外销售，由于国务院有关房地产的新政策出台后，购房者持币观望，房地产开发商为了加快资金周转，对价格经过两次下调后，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

决定以每平方米 4 860 元的均价开盘销售.

（1）求平均每次下调的百分率.

（2）某人准备以开盘价均价购买一套 100 平方米的住房，开发商给予以下两种优惠方案以供选择：

①打 9.8 折销售；

②不打折，一次性送装修费每平方米 80 元，试问哪种方案更优惠?

6. [**中考·南宁**]为响应国家全民阅读的号召，某社区鼓励居民到社区阅览室借阅读书，并统计每年的借阅人数和图书借阅总量（单位：本），该阅览室在 2014 年图书借阅总量是 7 500 本，2016 年图书借阅总量是 10 800 本.

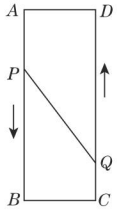
（1）求该社区的图书借阅总量从 2014 年至 2016 年的年平均增长率；

（2）已知 2016 年该社区居民借阅图书人数有 1 350 人，预计 2017 年达到 1 440 人，如果 2016 年至 2017 年图书借阅总量的增长率不低于 2014 年至 2016 年的年平均增长率，那么 2017 年的人均借阅量比 2016 年增长 $a\%$，求 a 的值至少是多少.

7. 如图，A，B，C，D 为矩形的四个顶点，$AB=16\ \text{cm}$，$AD=6\ \text{cm}$，P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动，一直到达点 B 为止，点 Q 以 2 cm/s 的速度向点 D 移动，点 P 停止运动时点 Q 也停止运动.

（1）P，Q 两点开始运动几秒后，四边形 $PBCQ$ 的面积为 $33\ \text{cm}^2$?

（2）P，Q 两点开始运动几秒后，点 P 和点 Q 的距离第一次是 $10\ \text{cm}$?



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

逆向思维在一元二次方程中的应用

荣老师告诉你 逆向思维是执果索因，知本求源，从原问题的相反方向着手的一种思维．它是数学思维的一个重要方面，是创造性思维的一个组成部分，也是进行训练的载体，培养学生逆向思维过程，也是培养学生思维敏捷性的过程．

思维点一 一元二次方程的定义

正向：利用定义识别一元二次方程

例1： 下列方程中，是关于x的一元二次方程的是（　　）

A. $2x-1=5x$　　B. $3x^2+5x=(3x-1)(x+1)$

C. $\frac{1}{x}+3=2x^2$　　D. $x^2+x+1=0$

解题秘方： 利用一元二次方程的定义进行识别．

答案： D

逆向：已知一元二次方程求方程中待定字母的值

例2： 已知关于x的方程$(m-4)x^{|m|-2}+8x+1=0$是一元二次方程，则m的值为_____.

答案： -4

方法点拨： 正向考查时，若化简合并后二次项系数为零，则该方程不是一元二次方程；逆向考查时，若条件中已说明是一元二次方程，则隐含条件“二次项系数不为零”．

思维点二 一元二次方程的根

正向：利用一元二次方程根的定义找根

例3： [中考·重庆]一元二次方程$x^2-2x=0$的根是（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=-2$　　B. $x_1=1$，$x_2=2$

C. $x_1=1$，$x_2=-2$　　D. $x_1=0$，$x_2=2$

答案： D

方法点拨： 找一元二次方程的根：可解（直接利用解一元二次方程的方法解），可代（利用根的定义检验）．

逆向1：已知一元二次方程的根，求待定字母的值

例4： 已知$x=-2$是关于x的方程$x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$的一个根，则a的值是（　　）

A. 1或4　　B. -1或-4

C. -1或4　　D. 1或-4

解题秘方： 根据方程的根的定义，将已知的根代入方程中将其转化为以待定字母为未知数的方程，求出待定字母的值．

解： 将$x=-2$代入关于x的一元二次方程$x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$，得$4+5a+a^2=0$，解得$a_1=-1$，$a_2=-4$.

答案： B

逆向2：已知一元二次方程的根，还原方程

※ 已知方程的一个根，还原方程．

例5： （1）已知$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，则代数式$4x^2+4x+2\,019$的值为_____.

解题秘方： 将已知条件还原成方程，然后整体代入求值．

解： 由$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$可知$2x+1=\sqrt{3}$，

$\therefore 4x^2+4x=2$.

$\therefore 4x^2+4x+2\,019=2+2\,019=2\,021$.

答案： 2 021

※ 已知方程的两个根，还原方程．

例6： 已知一元二次方程的两根分别是2和-3，则这个一元二次方程是（　　）

A. $x^2-6x+8=0$　　B. $x^2+2x-3=0$

C. $x^2-x-6=0$　　D. $x^2+x-6=0$

解题秘方： 采用已知两根还原方程的方法还原方程．

解： 方法一：逆用因式分解法得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(x-2)(x+3)=0$，即 $x^2+x-6=0$，

方法二：逆用根与系数的关系得

$x^2-(2-3)x+2\times(-3)=0$，即 $x^2+x-6=0$.

答案： D

逆向 3：利用根的定义构造一元二次方程

若 $x=m$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则等式 $am^2+bm+c=0$ 成立；反之，若等式 $an^2+bn+c=0$ 成立，则 $x=n$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

例 7：［中考·呼和浩特］已知 $a\geqslant 2$，$m^2-2am+2=0$，$n^2-2an+2=0$，则 $(m-1)^2+(n-1)^2$ 的最小值是（　　）

A. 6　　B. 3　　C. −3　　D. 0

解题秘方： 先构造出以 m，n 为两根的一元二次方程，然后利用根与系数的关系进行求值.

解： ∵ $m^2-2am+2=0$，$n^2-2an+2=0$，

∴ m，n 是关于 x 的方程 $x^2-2ax+2=0$ 的两根.

∴ $m+n=2a$，$mn=2$.

∴ $(m-1)^2+(n-1)^2=m^2-2m+1+n^2-2n+1=(m+n)^2-2mn-2(m+n)+2=4a^2-4-4a+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-3$.

∵ $a\geqslant 2$，

∴当 $a=2$ 时，$(m-1)^2+(n-1)^2$ 取最小值，最小值为 $4\times\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-3=6$.

答案： A

思维点三 ▶ 根的判别式

正向：已知方程的系数⟶计算⟶判断根的情况

例 8：［中考·怀化］一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个不等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

解题秘方： 先计算出根的判别式的值，再判断方程的根的情况.

答案： A

逆向：已知方程根的情况⟶计算⟶求待定的系数的值或取值范围

例 9：［中考·聊城］如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2-3x-1=0$ 有两个不等的实数根，那么 k 的取值范围是_____.

解题秘方： 根据一元二次方程根的情况，列出关于 k 的不等式进行求解.

答案： $k>-\frac{9}{4}$ 且 $k\neq 0$

思维点四 ▶ 根与系数的关系

正向：已知方程的系数求与两根之和或两根之积有关的代数式的值

例 10：［中考·烟台］若 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，则 $x_1^2-x_1+x_2$ 的值为（　　）

A. −1　　B. 0　　C. 2　　D. 3

解： 先由 x_1 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，

得到 $x_1^2=2x_1+1$，代入 $x_1^2-x_1+x_2$，

得 $x_1^2-x_1+x_2=x_1+x_2+1$.

又∵ $x_1+x_2=2$，∴ $x_1+x_2+1=2+1=3$.

答案： D

逆向：已知与两根之和或两根之积有关的代数式的值求方程中待定的系数

例 11： 方程 $x^2+2kx+k^2-2k+1=0$ 的两个实数根 x_1，x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=4$，则 k 的值为_____.

解： ∵ x_1，x_2 是方程 $x^2+2kx+k^2-2k+1=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=-2k$，$x_1x_2=k^2-2k+1$.

又∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$，

∴ $(-2k)^2-2(k^2-2k+1)=4$，

解得 $k_1=1$，$k_2=-3$. 当 $k=-3$ 时，$(2k)^2-4(k^2-2k+1)<0$，∴ $k=1$.

答案： 1

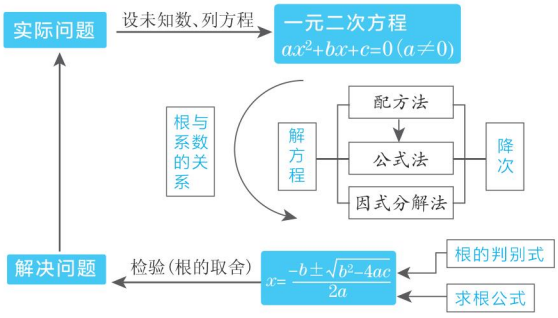
方法点拨： 逆向运用根与系数关系求待定字母的取值时，注意要将求得的值代入根的判别式中检验.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）.

2. 一元二次方程的解法有：（1）直接开平方法；（2）配方法；（3）公式法；（4）因式分解法.

3. 一元二次方程根的判别式是 $\Delta=b^2-4ac$，一元二次方程根的情况有三种：

（1）有两个不等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac>0$；

（2）有两个相等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac=0$；

（3）无实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac<0$.

4. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

知识方法专题

知识必学

专题一 一元二次方程的解法

链接中考» 一元二次方程的解法是本章的核心，也是本章的基础. 一般的考查方式是选择题，给出一个一元二次方程，选择它正确的解，只关注结果；有时作为解答题考查，方法不限，注重对过程的考查.

例1：［中考·岳阳］方程 $x^2-3x+2=0$ 的根是_____.

解题秘方：根据方程的特点选择合适的方法去解.

解：方法一：因式分解，得 $(x-1)(x-2)=0$，

$\therefore x-1=0$ 或 $x-2=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

方法二：$\because a=1$，$b=-3$，$c=2$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=1$.

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\times1}$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=2$.

答案：$x_1=1$，$x_2=2$

方法点拨：一元二次方程的解法有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法. 各种解法的选取顺序依次为直接开平方法→因式分解法→公式法→配方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 一元二次方程的根

链接中考» 涉及一元二次方程的根的问题有根的定义、根的判别式和根与系数的关系，单独考查时一般以填空题、选择题的形式出现，综合考查时常以解答题的形式出现.

类型一 一元二次方程的根与根的判别式

例2：[中考·咸宁]已知关于x的一元二次方程$mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1)证明：不论m为何值，方程总有实数根；

(2)m为何整数时，方程有两个不等的正整数根？

解题秘方：紧扣一元二次方程根的情况，列出方程中待求字母的关系式解决问题.

解：(1)**证明：**$\because a=m$，$b=-(m+2)$，$c=2$，

$\therefore \Delta = b^2-4ac=[-(m+2)]^2-8m=(m-2)^2\geqslant 0$.

$\therefore$不论m为何值，方程总有实数根.

(2)**解：**$\because mx^2-(m+2)x+2=0$，

$\therefore (x-1)(mx-2)=0$.

$\therefore x-1=0$或$mx-2=0$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{m}$.

$\because$方程有两个不等的正整数根且m为整数，

$\therefore m=1$.

方法点拨：涉及一元二次方程根的情况时，一般都要考虑根的判别式.根据根的判别式值的情况可以判断一元二次方程根的情况，也可以根据一元二次方程根的情况，判断根的判别式值的正负性.

类型二 一元二次方程的根和根与系数的关系

例3：(1)[中考·黄冈]若方程$x^2-2x-1=0$的两个根为x_1，x_2，则$x_1+x_2-x_1\cdot x_2$的值为_____.

(2)[中考·汕尾]已知关于x的方程$x^2+2x+a-2=0$.

①若该方程有两个不等的实数根，求实数a的取值范围；

②当该方程的一个根为1时，求a的值及方程的另一根.

解题秘方：紧扣根与系数的关系，利用此关系建立方程中待求字母的等量关系和不等关系解决问题.

解：(1)3

(2)①依题意有$\Delta=2^2-4(a-2)>0$，

解得$a<3$.

②方法一：将$x=1$代入方程得$1+2+a-2=0$，解得$a=-1$，

$\therefore$原方程为$x^2+2x-3=0$.

解得$x_1=1$，$x_2=-3$.

$\therefore a=-1$，方程的另一根为-3.

方法二：设另一根为x_2，

$\because 1+x_2=-2$，$\therefore x_2=-3$.

$\therefore a-2=1\times(-3)$.$\therefore a=-1$.

方法点拨：已知方程的一根求另一根及方程中待定字母的值时，可以将已知的根直接代入方程，先求待定字母的值，再求另一根，也可以根据根与系数的关系先求另一根，再求待定字母的值.

专题三 一元二次方程的应用

链接中考» 一元二次方程的应用是本章重点考查的知识点，它是学习一元二次方程解法的真正目的，解决有关一元二次方程的应用题，关键就是建立一元二次方程模型，有从实际生活中建立的一元二次方程模型，也有从几何问题中建立的一元二次方程模型.考查的形式主要以解答题为主.

类型一 建立一元二次方程解决实际问题

例4：某批发商以每件50元的价格购进800件T恤，第一个月以单价80元销售，售出了200件；第二个月如果单价不变，预计仍可售出200件，批发商为增加销售量，决定降价销售，根据市场调查，单价每降低1元，可多售出10件，但最低单价应高于购进的价格；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二个月结束后，批发商将对剩余的T恤一次性清仓销售，清仓时单价为40元．设第二个月单价降低x元．

（1）填表（不需化简）：

时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价/元	80		40
销售量/件	200		

（2）如果批发商希望通过销售这批T恤获利9 000元，那么第二个月的单价应是多少元？

解题秘方：根据题意建立一元二次方程模型解决问题．

解：（1）$80-x$；$200+10x$；

$800-200-(200+10x)$

（2）根据题意，得

$80\times200+(80-x)(200+10x)+40\times[800-200-(200+10x)]-50\times800=9\,000$.

整理，得$x^2-20x+100=0$.

解得$x_1=x_2=10$.

当$x=10$时，$80-x=70>50$.

∴第二个月的单价应是70元．

类型二　建立一元二次方程解决几何问题

例5：李明准备进行如下操作：把一根长40 cm的铁丝剪成两段，并把每段首尾相连各围成一个正方形．

（1）要使这两个正方形的面积之和等于58 cm^2，李明应该怎么剪这根铁丝？

（2）李明认为这两个正方形的面积之和不可能等于48 cm^2，你认为他的说法正确吗？请说明理由．

解题秘方：紧扣题意中提供的面积关系列出一元二次方程解决问题．

解：（1）设剪成的较短的铁丝长为x cm，则较长的铁丝长为$(40-x)$ cm，列方程，

得$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2=58$.

解方程，得$x_1=12$，$x_2=28$.

当$x=12$时，较长的铁丝长为$40-12=28$(cm)；

当$x=28$时，较长的铁丝长为$40-28=12$(cm)，12 cm<28 cm，故这种情况舍去．

答：李明应该把铁丝剪成长为12 cm和28 cm的两段．

（2）李明的说法正确，理由如下：

设剪成的较短的铁丝长为m cm，较长的铁丝长为$(40-m)$ cm.

由题意，得$\left(\frac{m}{4}\right)^2+\left(\frac{40-m}{4}\right)^2=48$.

整理，得$m^2-40m+416=0$.

∵$\Delta=(-40)^2-4\times416=-64<0$，

∴方程$m^2-40m+416=0$无实数根．

∴李明的说法正确，即这两个正方形的面积之和不可能等于48 cm^2.

方法点拨：解决一元二次方程的应用题把握两个关键：一是根据等量关系建立一元二次方程；二是根据题意进行根的取舍．

方法必会

专题四　整体代入法

专题解读 ≫ 整体代入法就是在解决问题时，不是着眼于它的局部特征，而是把注意力和着眼点放在问题的整体结构上，通过对整体的把握和运用达到解决问题的目的．在本章中主要体现在求与根有关的式子的值的问题上．

例6：已知x_1，x_2是方程$3x^2-2x-4=0$的两实数根，不解方程求$3x_1^2+2x_2$的值．

解题秘方：根据根的定义及根与系数的关系整体代入求值．

解：∵x_1是方程$3x^2-2x-4=0$的根，

∴$3x_1^2-2x_1-4=0$，

即$3x_1^2=2x_1+4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据根与系数的关系可知 $x_1+x_2=\frac{2}{3}$.

$\therefore 3x_1^2+2x_2=2x_1+4+2x_2=2(x_1+x_2)+4=\frac{16}{3}$.

方法点拨：解决与一元二次方程的根有关的求值问题，通常用到整体代入法，将一元二次方程的根单个代入方程或利用根与系数的关系建立与两根的和与积有关的式子，最后求值时都采用整体代入法求值.

专题五 分类讨论思想

专题解读 » 分类讨论思想是一种常见的数学思想，在解含字母的一元二次方程的有关问题时经常用到，具体来说，就是把包含多种可能情况的问题，按照某一标准分成若干类，然后分别进行解决.

例 7: 已知△ ABC 的两边 AB，AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k(k+1)=0$ 的两个实数根，第三边 BC 的长为 5.

（1）k 为何值时，△ ABC 是以 BC 为斜边的直角三角形?

（2）k 为何值时，△ ABC 是等腰三角形? 并求此时△ ABC 的周长.

解题秘方：紧扣已知的边在等腰三角形中是底还是腰进行分类讨论.

解：（1）解方程，得 $x_1=k$，$x_2=k+1$.

由勾股定理，得 $k^2+(k+1)^2=5^2$.

解得 $k_1=3$，$k_2=-4$（舍去）.

$\therefore$ 当 $k=3$ 时，△ ABC 是以 BC 为斜边的直角三角形.

（2）当△ ABC 是等腰三角形时，讨论如下：

① BC 为底，即 $AB=AC$，此时应有 $\Delta=0$，但 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4k(k+1)=1\neq 0$，

$\therefore$ 这种情况不存在.

② BC 为腰，有 $AB=BC$ 或 $AC=BC$ 这两种情况存在，求解如下：

当 BC 为△ ABC 的腰时，它也是已知方程的根，

$\therefore 5^2-5(2k+1)+k(k+1)=0$.

解得 $k_1=4$，$k_2=5$.

当 $k=4$ 时，方程的两个根为 $x_1=k=4$，$x_2=k+1=5$，

此时△ ABC 的周长为 $4+5+5=14$；

当 $k=5$ 时，方程的两个根为 $x_1=k=5$，$x_2=k+1=6$，

此时△ ABC 的周长为 $6+5+5=16$.

$\therefore$ k 为 4 或 5 时，△ ABC 是等腰三角形，△ ABC 的周长为 14 或 16.

方法点拨：当等腰三角形的边长为一元二次方程的解时，分类列出边的情况，可得出方程解的情况，进而可求出方程中待定字母的值.

好题必解 ☞答案见 258 页

类型 1 巧解一元二次方程

1. 解方程（平方、换元）：$x^2+\frac{1}{x^2}-2(x+\frac{1}{x})-1=0$.

2. 解方程（特殊值法）：$(x-2\,016)(x-2\,017)=2\,018\times 2\,019$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2　巧用根的判别式求式子的值

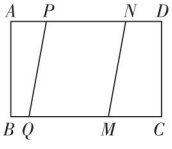
3. 试用根的判别式探求$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$的最值.

类型 3　巧用根与系数的关系求待定字母的值

4. 已知 α，β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+3)x+m^2=0$ 的两个不等的实数根，且满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-1$. 求 m 的值.

类型 4　巧用一元二次方程解几何问题

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=20$ cm，点 P，Q，M，N 分别从点 A，B，C，D 出发沿 AD，BC，CB，DA 方向在矩形的边上同时运动，当有一个点先到达所在边的另一个端点时，运动立即停止. 已知在相同时间内，若 $BQ=x$ cm（$x\neq 0$），则 $AP=2x$ cm，$CM=3x$ cm，$DN=x^2$ cm. 当 x 为何值时，以 PQ，MN 为两边，以矩形的边（AD 或 BC）的一部分为第三边构成一个三角形?



（第 5 题）

类型 5　巧用一元二次方程解实际问题

6. [中考·宜昌]某市创建“绿色发展模范城市”，针对境内长江段两种主要污染源：生活污水和沿江工厂污染物排放，分别用“生活污水集中处理”（下称甲方案）和“沿江工厂转型升级”（下称乙方案）进行治理，若江水污染指数记为 Q，沿江工厂用乙方案进行一次性治理（当年完工），从当年开始，所治理的每家工厂一年降低的 Q 值都以平均值 n 计算. 第一年有 40 家工厂用乙方案治理，共使 Q 值降低了 12. 经过三年治理，境内长江水质明显改善.

（1）求 n 的值；

（2）从第二年起，每年用乙方案新治理的工厂数量比上一年都增加相同的百分数 m，三年来用乙方案治理的工厂数量共 190 家，求 m 的值，并计算第二年用乙方案新治理的工厂数量；

（3）该市生活污水用甲方案治理，从第二年起，每年因此降低的 Q 值比上一年都增加相同的数值 a. 在（2）的情况下，第二年，用乙方案所治理的工厂合计降低的 Q 值与当年用甲方案治理降低的 Q 值相等，第三年，用甲方案使 Q 值降低了 39.5. 求第一年用甲方案治理降低的 Q 值及 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 章测试卷 ☞答案见 259 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是（　　）

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=2$

C. $x^2+2x=y^2-1$　　D. $3(x+1)^2=2(x+1)$

2. 一元二次方程 $(x-5)^2=x-5$ 的解是（　　）

A. $x=5$　　B. $x=6$

C. $x=0$　　D. $x_1=5$，$x_2=6$

3. 一元二次方程 $x^2-2x+1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1=1$，$x_2=-2$，则 b 与 c 的值分别为（　　）

A. $b=-1$，$c=2$　　B. $b=1$，$c=-2$

C. $b=1$，$c=2$　　D. $b=-1$，$c=-2$

5. 用配方法解方程 $x^2+10x+9=0$，配方后可得（　　）

A. $(x+5)^2=16$　　B. $(x+5)^2=1$

C. $(x+10)^2=91$　　D. $(x+10)^2=109$

6. 将一块正方形铁皮的四角各剪去一个边长为 3 cm 的小正方形，做成一个无盖的盒子．已知盒子的容积为 300 cm^3，则原铁皮的边长为（　　）

A. 10 cm　　B. 13 cm

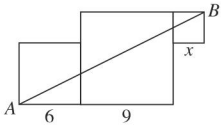
C. 14 cm　　D. 16 cm

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k-2)^2x^2+(2k+1)x+1=0$ 有两个不等的实数根，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k>\frac{4}{3}$ 且 $k\neq 2$　　B. $k\geqslant\frac{4}{3}$ 且 $k\neq 2$

C. $k>\frac{3}{4}$ 且 $k\neq 2$　　D. $k\geqslant\frac{3}{4}$ 且 $k\neq 2$

8. 如图是由三个边长分别为 6，9 和 x 的正方形所组成的图形，若直线 AB 将它分成面积相等的两部分，则 x 的值是（　　）



（第 8 题）

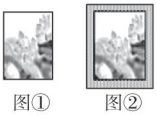
A. 1 或 9　　B. 3 或 5　　C. 4 或 6　　D. 3 或 6

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 已知实数 a，b 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值为_____.

10. 六一儿童节当天，某班同学每人向本班其他每个同学送一份小礼品，全班共互送 306 份小礼品，则该班有_____名同学．

11. 在一幅长 8 分米，宽 6 分米的矩形风景画（如图①）的四周镶上宽度相同的金色纸边，制成一幅矩形挂图（如图②），使整个挂图的面积是 80 平方分米，设金色纸边宽为 x 分米，可列方程为_____.



图①　图②

（第 11 题）

12. 三角形的每条边的长都是方程 $x^2-6x+8=0$ 的根，则三角形的周长是_____.

三、解答题（共 52 分）

13.（12 分）我们已经学习了一元二次方程的四种解法：因式分解法、直接开平方法、配方法和公式法．请选择合适的方法解下列方程．

（1）$x^2-3x+1=0$；（2）$(x-1)^2=3$；

（3）$x^2-3x=0$；　（4）$x^2-2x=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（12 分）关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x-k=0$ 有两个不等的实数根．

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 k 为负整数，试求出方程的根．

15.（14 分）某养殖户每年的养殖成本包括固定成本和可变成本，其中固定成本每年均为 4 万元，可变成本逐年增长，已知该养殖户第 1 年的可变成本为 2.6 万元，设可变成本平均每年增长的百分率为 x.

（1）用含 x 的代数式表示第 3 年的可变成本为_____万元；

（2）如果该养殖户第 3 年的养殖成本为 7.146 万元，求可变成本平均每年增长的百分率 x.

16.（14 分）某汽车销售公司 6 月份销售某厂家的汽车，在一定范围内，每部汽车的进价与销售量有如下关系：若当月仅售出 1 部汽车，则该部汽车的进价为 27 万元，每多售出 1 部，所有售出的汽车的进价均降低 0.1 万元／部，月底厂家根据销售量一次性返利给销售公司，销售量在 10 部以内（含 10 部），每部返利 0.5 万元；销售量在 10 部以上，每部返利 1 万元．

（1）若该公司当月售出 3 部汽车，则每部汽车的进价为_____万元；

（2）如果汽车的售价为 28 万元／部，该公司计划当月盈利 12 万元，那么需要售出多少部汽车？（盈利 = 销售利润 + 返利）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第21章 二次根式

21.1 二次根式

【两年模拟兵法】

1. D　**点拨：**紧扣二次根式的定义：①根指数为2（通常省略不写）；②被开方数（式）为非负数进行判断.

2. B　**3.** C　**4.** A　**5.** B　**6.** $x\leqslant 6$

7. **解：**由题图知 $a<0,b>0$，

$\therefore a-b<0.$

$\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|-|b|+|a-b|=-a-b-(a-b)=-2a.$

点拨：本题首先利用数轴判断出 a,b 的符号，进一步确定 $a-b$ 的符号，然后利用 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a,a>0,\\0,a=0,\\-a,a<0\end{cases}$ 化简.

8. **解：**(1)原式 $=(x^2-2)(x^2+2)$

$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2).$

(2)原式 $=3(x^2-2y^2)$

$=3[x^2-(\sqrt{2}y)^2]$

$=3(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y).$

(3)原式 $=(x^2-y^2)(x^2-2y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y).$

(4)原式 $=-(x^2-2\sqrt{2}x+2)$

$=-(x-\sqrt{2})^2.$

点拨：(1)两次应用平方差公式分解；(2)先提取公因数3，再应用平方差公式分解；(3)先应用“十字相乘法”分解，再应用平方差公式分解；(4)先提取 -1，再应用完全平方公式分解.

9. **解：**甲的解答是正确的. 乙的解答错在 $\sqrt{(1-a)^2}=1-a$，$\because a=5$，$\therefore 1-a<0$，

$\therefore \sqrt{(1-a)^2}=a-1.$

10. **解：**由二次根式有意义可得 $\begin{cases}a-5\geqslant 0,\\10-2a\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\geqslant 5,\\a\leqslant 5,\end{cases}$

$\therefore a=5.\therefore b+4=0$，即 $b=-4.$

11. **解：**$\because \sqrt{52n}=\sqrt{4\times 13n}$，且 $\sqrt{52n}$ 是整数，

$\therefore n$ 的最小正整数值为13.

点拨：如果一个二次根式化简后是整数，那么其被开方数是完全平方数. 解决本题首先要把被开方数分解因数，把能化为完全平方数的部分找出来，然后确定 n 的最小正整数值.

12. **错解：**$\because |x-1|=2$，$\therefore x-1=2$，$\therefore x=3.$

$\therefore \sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}$

$=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}$

$=x-4-(2x-1)$

$=x-4-2x+1$

$=-x-3.$

将 $x=3$ 代入，得原式 $=-6.$

错解分析：①若 $|x|=a(a\geqslant 0)$，则 $x=\pm a$，而不是 $x=a$；② $\sqrt{a^2}=|a|$，而不是 $\sqrt{a^2}=a.$

正确解法：$\because |x-1|=2,$

$\therefore x-1=\pm 2.$

$\therefore x=3$ 或 $x=-1.$

$\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}=|x-4|-|2x-1|.$

当 $x=3$ 时，原式 $=|x-4|-|2x-1|=|-1|-|5|=1-5=-4$；

当 $x=-1$ 时，原式 $=|x-4|-|2x-1|=|-5|-|-3|=5-3=2.$

点拨：本题运用了分类讨论思想. 去绝对值符号常常需要分类讨论：当绝对值符号内的代数式大于或等于0时，去掉绝对值符号后是它本身；当绝对值符号内的代数式小于0时，去掉绝对值符号后是它的相反数.

13. **解：**$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}$

$=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a-\frac{1}{a}\right|+\left|a+\frac{1}{a}\right|.$

$\because -1<a<0,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore a+\frac{1}{a}<0, a-\frac{1}{a}>0.$

$\therefore$ 原式 $=a-\frac{1}{a}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-\frac{2}{a}.$

21.2 二次根式的乘除

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨:**本题考查最简二次根式的定义,最简二次根式必须满足两个条件:被开方数不含分母;被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

3. C

4. A **点拨:**由题意可知 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$.

5. C **点拨:**一般来说,最简二次根式 $\sqrt{a}$ 的有理化因式为它本身,即 $\sqrt{a}$.

6. A **点拨:** $m=\frac{2\sqrt{63}}{3}=\frac{6\sqrt{7}}{3}=2\sqrt{7}$, $\because 2\sqrt{7}=\sqrt{28}$, $5<\sqrt{28}<6$, $\therefore 5<m<6$,故选 A.

7. (1) **错解:** $\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{ab}\div\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=\sqrt{ab}\div 1=\sqrt{ab}.$

错解分析:二次根式的乘除混合运算,应按从左到右的顺序进行计算,或先将除法统一为乘法再计算,错解错在没有按运算顺序计算.

正确解法: $\sqrt{ab}\div\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{ab\div a\times\frac{1}{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}.$

(2) **解:** $\frac{1}{4}\sqrt{18}\times 8\sqrt{\frac{1}{36}}\div\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\times 8\div\frac{2}{3}\right)\sqrt{18\times\frac{1}{36}\times\frac{2}{9}}=3\sqrt{\frac{1}{9}}=3\times\frac{1}{3}=1.$

8. **解:** $\frac{81-a^2}{a^2+6a+9}\div\frac{9-a}{2a+6}\cdot\frac{1}{a+9}$

$=\frac{(9+a)(9-a)}{(a+3)^2}\cdot\frac{2(a+3)}{9-a}\cdot\frac{1}{a+9}$

$=\frac{2}{a+3}.$

当 $a=\sqrt{3}-3$ 时,原式 $=\frac{2}{\sqrt{3}-3+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

点拨:先将所求式子化为最简形式,然后代值计算. 本题的结果要通过分母有理化化为最简二次根式.

9. **解:**根据二次根式的非负性及已知条件可得 $\begin{cases}4a-b+1=0,\\ \frac{1}{3}b-4a-3=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$

$\therefore 2a\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{-\frac{1}{b}}\right)$

$=2a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\div\left(-\frac{1}{b}\right)}$

$=2a\cdot\sqrt{-\frac{b^2}{a}}$

$=-2\times\sqrt{-\frac{(-3)^2}{-1}}$

$=-2\times 3$

$=-6.$

点拨:本题巧用了非负数的性质和方程思想,利用二次根式的非负性构建方程组,求出字母的值,然后进行化简求值.

10. **解:** $\because\sqrt{(9-x)(x-7)}=\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-7}$,

$\therefore 9-x\geqslant 0, x-7\geqslant 0$,即 $7\leqslant x\leqslant 9$.

又 $\because x$ 为偶数, $\therefore x=8$.

$\therefore$ 原式 $=(1+x)\cdot\sqrt{\frac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)}}$

$=\sqrt{(1+x)^2\cdot\frac{x-4}{x+1}}$

$=\sqrt{(x-4)(x+1)}$

$=\sqrt{(8-4)\times(8+1)}$

$=\sqrt{4\times 9}$

$=6.$

21.3 二次根式的加减

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**化成最简二次根式后即可判断.

2. D

3. B

4. 2 **点拨:**题中的二次根式已经是最简二次根式,直接令被开方数相等即可, $2b+1=7-b$,解得 $b=2$.

5. **解:**(1)原式 $=\sqrt{\frac{48}{3}}-\sqrt{\frac{12}{2}}+2\sqrt{6}$

$=4-\sqrt{6}+2\sqrt{6}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=4+\sqrt{6}$.

(2)原式$=8\sqrt{6}-18\sqrt{6}+3-2$

$=1-10\sqrt{6}$.

(3)原式$=2b\cdot\frac{\sqrt{ab}}{b}+\frac{3}{a}\cdot a\sqrt{ab}-\left(4a\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a}+3\sqrt{ab}\right)$

$=2\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}$

$=-2\sqrt{ab}$.

(4)原式$=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{xy}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}$

$=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}$

$=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$=0$.

6. 解: $\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+y}+\frac{\sqrt{xy}-y}{x-\sqrt{xy}}$

$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

$=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$.

当$x=\sqrt{3}+1$,$y=\sqrt{3}-1$时,原式$=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.

7. 解: $\because(a-\sqrt{2}+1)^2$与$\sqrt{b-2}$互为相反数,

$\therefore(a-\sqrt{2}+1)^2+\sqrt{b-2}=0$,

$\therefore a-\sqrt{2}+1=0$,$b-2=0$,

$\therefore a=\sqrt{2}-1$,$b=2$.

$\therefore a^b=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$.

8. 解: $\because a=\sqrt{7}+2$,$b=\sqrt{7}-2$,

$\therefore a+b=\sqrt{7}+2+\sqrt{7}-2=2\sqrt{7}$,

$a-b=\sqrt{7}+2-(\sqrt{7}-2)=4$,

$ab=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$.

(1)$a^2b+b^2a=ab(a+b)=3\times2\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

(2)$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=4^2+3=16+3=19$.

(3)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\sqrt{7}\times4=8\sqrt{7}$.

9. 解: (1)m^2+3n^2;$2mn$

(2)13;4;1;2(答案不唯一)

(3)由题意,得$a=m^2+3n^2$,$4=2mn$.

$\because m$,n为正整数,$\therefore m=2$,$n=1$或$m=1$,$n=2$.

$\therefore a=2^2+3\times1^2=7$或$a=1^2+3\times2^2=13$.

点拨: (1)运用完全平方公式求解;(2)首先确定好m,n的值,然后根据(1)的结论即可求出a,b的值,答案不唯一;(3)根据题意,得$4=2mn$,首先确定m,n的值,通过分析知$m=2$,$n=1$或$m=1$,$n=2$,然后即可确定a的值. 本题主要考查二次根式的运算与完全平方公式,解题的关键在于熟练运用完全平方公式和二次根式的运算法则.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解: 由题意得$x-4\geqslant0$,$4-x\geqslant0$,

$\therefore x=4$,$\therefore y=\frac{1}{2}$.

$\therefore x^2+y^2=4^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=16\frac{1}{4}$.

2. 解: $\because\sqrt{x+3}\geqslant0$,$\sqrt{x+y-6}\geqslant0$,且其和为0,

$\therefore x+3=0$,$x+y-6=0$,

解得$x=-3$,$y=9$.

$\therefore x$,y的值分别为-3,9.

3. 解: 由题意得$\sqrt{5x-2}\geqslant0$且$5x-2\geqslant0$,

即$x\geqslant\frac{2}{5}$.

$\therefore$当$x=\frac{2}{5}$时,式子$\sqrt{5x-2}+3$的取值最小,最小值为3.

4. 解: 由题图可知,$a<0$,$c<0$,$b>0$,$\therefore a+c<0$,$c-b<0$,

$\therefore$原式$=-a-[-(a+c)]+[-(c-b)]-b$

$=-a+a+c-c+b-b$

$=0$.

点拨: 先根据a,b,c在数轴上的对应点的位置确定a,$a+c$,$c-b$,b的符号,再利用二次根式的性质进行化简.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解: $\because (\sqrt{5}+\sqrt{13})^2=18+2\sqrt{65}$,

$(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2=18+2\sqrt{77}$,

$18+2\sqrt{65}<18+2\sqrt{77}$,

$\therefore (\sqrt{5}+\sqrt{13})^2<(\sqrt{7}+\sqrt{11})^2$.

又$\because \sqrt{5}+\sqrt{13}>0,\sqrt{7}+\sqrt{11}>0$,

$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{13}<\sqrt{7}+\sqrt{11}$.

6. 解: 易知$\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}>0,\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}>0$,

$\because \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}\div\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}+2)^2}$

$=\dfrac{a+4\sqrt{a}+3}{a+4\sqrt{a}+4}<1$,

$\therefore \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$.

点拨: 作商比较两个二次根式的大小的方法:当两个二次根式(均为正数)均由分母和分子两部分组成时,常通过作商比较它们的大小,先计算两个二次根式的商,然后比较商与1的大小关系. 已知$a>0,b>0$,若$\dfrac{a}{b}>1$,则$a>b$;若$\dfrac{a}{b}=1$,则$a=b$;若$\dfrac{a}{b}<1$,则$a<b$.

7. 解: $\because \dfrac{\sqrt{11}-1}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{11}-3}{3},\sqrt{11}-3>0$,

$\therefore \dfrac{\sqrt{11}-3}{3}>0$.

$\therefore \dfrac{\sqrt{11}-1}{3}>\dfrac{2}{3}$.

8. 解: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}>0$,

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}>0$,

$\because \sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>0$,

$\therefore \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>0,\therefore x<y$.

9. 解: 原式$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2\times5}+\sqrt{2\times7}+\sqrt{3\times5}+\sqrt{3\times7}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

10. 解: 设$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=a,\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=b$,

则$a+b=2\sqrt{x+1},ab=1$.

$\therefore$ 原式$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}$

$=\dfrac{(2\sqrt{x+1})^2-2\times1}{1}$

$=4x+2$.

11. 解: 将$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$两边同时平方,

得$x+\dfrac{1}{x}-2=4$,

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=6$.

$\therefore \sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}$

$=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+12}$

$=\sqrt{6^2+12}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

点拨: 本题先将条件式两边同时平方,求出$x+\dfrac{1}{x}$的值,再将$\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}$配方成含$x+\dfrac{1}{x}$的二次根式,从而运用整体代入法就可求出二次根式$\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+14}$的值.

12. 解: 设$x=k(k>0)$,则$y=2k,z=3k$,

$\therefore$ 原式$=\dfrac{\sqrt{3k}}{\sqrt{4k}+\sqrt{5k}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

【第21章测试卷】

一、1. A **2.** C **3.** C **4.** B **5.** B **6.** C **7.** D **8.** C

二、9. $9\sqrt{3}$ **10.** $-\sqrt{-y}$ **11.** $\dfrac{2}{3}$ **12.** 5

三、13. 解: (1)原式$=4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=7\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)原式 $=\left(-1\times\frac{1}{3}\times5\right)\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{28}\times\frac{16}{7}}$

$=-\frac{5}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{7}$

$=-\frac{5\sqrt{10}}{21}$.

14. 解:$a^2-6a-2=(a-3)^2-11$.

当 $a=3-\sqrt{10}$ 时,

$(a-3)^2-11=(3-\sqrt{10}-3)^2-11=-1$.

15. 解:根据题意得 $\begin{cases}m-n-1=2,\\2m+n+3=m+10,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=5,\\n=2.\end{cases}$

16. 解:能. 理由如下:

$\because\sqrt{8}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}$,

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$,

$\therefore\sqrt{8}+\sqrt{18}>\sqrt{32}$.

$\therefore$ 这三根钢条能焊成一个三角形钢架.

17. 解:$\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)\div\frac{a^2-b^2}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}\div\frac{(a+b)(a-b)}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\frac{a}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a-b}{a+b}$.

当 $a=2+\sqrt{3}$,$b=2-\sqrt{3}$ 时,

原式 $=\frac{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. 解:由题意,得 $a-2\,020\geqslant0$. $\therefore a\geqslant2\,020$.

则原等式变形为 $a-2\,019+\sqrt{a-2\,020}=a$.

整理,得 $\sqrt{a-2\,020}=2\,019$.

两边平方,得 $a-2\,020=2\,019^2$.

$\therefore a-2\,019^2=2\,020$.

第22章 一元二次方程

22.1 一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. A

2. C 点拨:本题考查的是一元二次方程的定义,紧扣定义的"三要素"是解题的关键.

3. B 点拨:本题考查的是一元二次方程的一般形式,二次项系数不为0,是易忽视点,求字母 m 的值时可采用尝试验证法,即将各个选项中 m 的值代入题中,选出满足题意的选项.

4. A 点拨:先把 $(x+m)^2=n$ 展开,化为一元二次方程的一般形式,再分别使其与方程 $x^2-4x-3=0$ 的一次项系数、二次项系数及常数项分别相等即可.

5. B 点拨:把 $x=2$ 代入已知方程列出关于 k 的新方程,通过解方程来求 k 的值.

6. A **7.** C

8. C 点拨:将 $x=m$ 代入方程得 $m^2-2m=1$,

$\therefore7m^2-14m=7$;将 $x=n$ 代入方程得 $n^2-2n=1$,

$\therefore3n^2-6n=3$. $\because(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$,$\therefore(7+a)\times(3-7)=8$,$\therefore a=-9$.

9. 解:(1)当 $\begin{cases}m-2\neq0,\\m+1=0\end{cases}$ 时,解得 $m=-1$.

当 $\begin{cases}m^2+1=1,\\m+1+(m-2)\neq0\end{cases}$ 时,解得 $m=0$.

故当 $m=-1$ 或 $m=0$ 时,原方程为一元一次方程.

当 $m=-1$ 时,方程为 $-3x-1=0$,解得 $x=-\frac{1}{3}$.

当 $m=0$ 时,方程为 $-x-1=0$,解得 $x=-1$.

(2)根据题意,得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\m+1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=1$.

当 $m=1$ 时,原方程即为 $2x^2-x-1=0$,它的二次项系数是2,一次项系数是 -1,常数项是 -1.

10. 解:乙正确.

证明:$\because$ 二次项系数 $m^2-8m+19=m^2-8m+16+3=(m-4)^2+3>0$,

$\therefore$ 二次项系数不为0,

$\therefore$ 原方程是一元二次方程.

11. 解:两位同学的解法都不正确,均考虑不全面.

正确解法如下:

$\because$ 关于 x 的方程 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是一元二次方程,

$\therefore\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=0\end{cases}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

或$\begin{cases}2a+b=1,\\ a-b=2\end{cases}$或$\begin{cases}2a+b=0,\\ a-b=2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{4}{3},\\ b=-\frac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}$

或$\begin{cases}a=1,\\ b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\ b=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

22.2 一元二次方程的解法

22.2.1 直接开平方法和因式分解法

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** D **4.** D **5.** C 6. C **7.** 2

8. 7 **点拨:**原方程可化为$(x^2)^2-4x^2-12=0$,$(x^2-6)(x^2+2)=0$,$\therefore x^2=6$或$x^2=-2$(舍去).

$\therefore x^2+1=6+1=7$.

9. $\sqrt{3}$ **点拨:**本题可将a^2+b^2看成一个整体进行求解.

10. 解:(1)原方程可化为$(x-1)(x-1-2)=0$,即$(x-1)(x-3)=0$,$\therefore x_1=1$,$x_2=3$.

(2)原方程可化为$(2+x+3)(2+x-3)=0$,即$(x+5)(x-1)=0$,$\therefore x_1=-5$,$x_2=1$.

(3)原方程可化为$(2x+1)(2x+1-3)=0$,即$(2x+1)(2x-2)=0$,$\therefore x_1=-\frac{1}{2}$,$x_2=1$.

11. 解:解方程$x(x-7)-10(x-7)=0$,

得$x=7$或$x=10$,

若第三边的长为10,$3+7=10$,不能组成三角形.

$\therefore$第三边的长为7,

$\therefore$这个三角形的周长为$3+7+7=17$.

12. 解:设折成的矩形框的一边长为x厘米,则它的邻边长为$(10-x)$厘米,

由题意得,$x(10-x)=16$,

解之得,$x_1=2$,$x_2=8$,

$\therefore$矩形框的相邻两边的长分别为8厘米,2厘米.

假设能折成一个面积为30平方厘米的矩形框,设折成的矩形框的一边长为y厘米,

由题意得,$y(10-y)=30$,

整理得,$(y-5)^2=-5$,此方程无解,

$\therefore$不能折成一个面积为30平方厘米的矩形框.

22.2.2 配方法

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D

3. A **点拨:**本题考查的是配方的方法,熟悉完全平方公式的特征是解题的关键.

4. B

5. B **点拨:**利用配方法解方程$x^2+ax=b^2$,得到$(x+\frac{a}{2})^2=b^2+\frac{a^2}{4}$,解得$x=\pm\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}$,根据勾股定理知道$AB=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$,

$\because BD=\frac{a}{2}$,

$\therefore AD=AB-BD=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}$,$\therefore AD$的长是方程的一个正根,故正确答案为B.

6. $x_1=3$,$x_2=-1$

7. 4;2;±3;$\pm\frac{3}{2}$

8. 解:(1)配方,得$x^2+4x+4=4$,即$(x+2)^2=4$,

于是$x+2=\pm2$,$\therefore x_1=0$,$x_2=-4$.

(2)二次项系数化为1,得$x^2-\frac{3}{2}x-3=0$,

移项,得$x^2-\frac{3}{2}x=3$,

配方,得$x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=3+\left(-\frac{3}{4}\right)^2$,

即$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{57}{16}$,于是$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{57}}{4}$,

$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{57}}{4}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{57}}{4}$.

(3)二次项系数化为1,得$x^2+\frac{1}{2}x-3=0$,

移项,得$x^2+\frac{1}{2}x=3$,

配方,得$x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=3+\left(\frac{1}{4}\right)^2$,

即$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$,于是$x+\frac{1}{4}=\pm\frac{7}{4}$,

$\therefore x_1=\frac{3}{2}$,$x_2=-2$.

9. 解:(1)$\because a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,

$\therefore (a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

$\therefore a-3=0$,$b-4=0$,$c-5=0$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore a=3,b=4,c=5.$

(2)$\because a=3,b=4,c=5,$

$\therefore a^2+b^2=25,c^2=25.$

$\therefore a^2+b^2=c^2.$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

10. 解:(1)$m^2+m+4=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}.$

$\because \left(m+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0,$

$\therefore \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geqslant\frac{15}{4}.$

$\therefore m^2+m+4$ 的最小值是$\frac{15}{4}.$

(2)$4-x^2+2x=-(x-1)^2+5.$

$\because -(x-1)^2\leqslant 0,$

$\therefore -(x-1)^2+5\leqslant 5.$

$\therefore 4-x^2+2x$ 的最大值为5.

(3)由题意,得花园的面积是 $x(20-2x)=-2x^2+20x(\mathrm{m}^2).$

$\because -2x^2+20x=-2(x-5)^2+50$,且 $-2(x-5)^2\leqslant 0,$

$\therefore -2(x-5)^2+50\leqslant 50.$

$\therefore -2x^2+20x$ 的最大值是50,

此时 $x=5,20-2x=10<15$ 符合题意.

故当 $x=5$ 时,花园的面积最大,最大面积是 $50\ \mathrm{m}^2.$

22.2.3 公式法

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B

3. 2;-7;-4;81

4. $3x^2-8x+5=0;x_1=1,x_2=\frac{5}{3}$

5. $x_1=1+\sqrt{3},x_2=1-\sqrt{3}$

6. $2+\sqrt{2}$ **点拨:**将 $2-\sqrt{2}$ 代入 $x^2-4x+c=0$ 得$(2-\sqrt{2})^2-4\times(2-\sqrt{2})+c=0$,解得 $c=2.$

$\therefore$ 原方程为 $x^2-4x+2=0.$ 解得 $x_1=2+\sqrt{2},x_2=2-\sqrt{2}.$

$\therefore$ 方程的另一根为 $2+\sqrt{2}.$

7. 2 或 -8

8. $1+\sqrt{10}$ 或 $1-\sqrt{10}$

9. $x_1=2,x_2=-4$ **点拨:**由 $|m-2|+\sqrt{n+4}=0,$ 得 $m=2,n=-4,\therefore$ 方程 $x^2+mx+nm=0$ 化为 $x^2+2x-8=0$,解得 $x_1=2,x_2=-4.$

10. 24 或 $8\sqrt{5}$

11. 解:(1)$\because a=2,b=-3,c=1,$

$\therefore b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=1.$

$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3\pm1}{4}.$

$\therefore x_1=1,x_2=\frac{1}{2}.$

(2)原方程化为一般形式为

$16x^2+8x-3=0.$

$\therefore a=16,b=8,c=-3.$

$\therefore b^2-4ac=8^2-4\times16\times(-3)=256.$

$\therefore x=\frac{-8\pm\sqrt{256}}{2\times16}=\frac{-8\pm16}{32}.$

$\therefore x_1=\frac{1}{4},x_2=-\frac{3}{4}.$

(3)原方程化为一般形式为

$3x^2+x-1=0,$

$\therefore a=3,b=1,c=-1.$

$\therefore b^2-4ac=1^2-4\times3\times(-1)=13.$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2\times3}.$

$\therefore x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{6},x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}.$

(4)原方程化为一般形式为

$3y^2-2\sqrt{3}y+1=0.$

$\therefore a=3,b=-2\sqrt{3},c=1.$

$\therefore b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0.$

$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{2\times3}.\therefore y_1=y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

12. 解:(1)$(x-5)(x+7)=1.$

$x^2+2x-36=0.$

$(x+1)^2=37.$

$x+1=\pm\sqrt{37}.$

$\therefore x_1=-1+\sqrt{37},x_2=-1-\sqrt{37}.$

(2)$x^2-4x+3=0.$

$(x-1)(x-3)=0.$

$x_1=1,x_2=3.$

(3)$2x^2-3x-1=0.$

$\because a=2,b=-3,c=-1,$

$\therefore b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-1)=17.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2\times2}$.

$\therefore x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$.

(4) $4x^2-4x-1=0$.

$\because a=4, b=-4, c=-1$.

$\therefore b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-1)=32$.

$\therefore x=\dfrac{4\pm\sqrt{32}}{2\times4}=\dfrac{4\pm4\sqrt{2}}{8}$.

$\therefore x_1=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, x_2=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

13. **解:** 设阔(宽)为 x 步,则长为 $(x+12)$ 步,

根据题意得 $x(x+12)=864$.

解这个方程得 $x_1=24, x_2=-36$(舍去).

答:阔为 24 步,长为 36 步.

14. **解:** 设 x 秒钟时 $\triangle PDQ$ 的面积等于 8,由题意得,

$\dfrac{12(6+x)}{2}-x^2-\dfrac{6(12-2x)}{2}=8$.

解得 $x_1=6+2\sqrt{7}$(不合题意,舍去),

$x_2=6-2\sqrt{7}$.

$\therefore$ 当 $x=6-2\sqrt{7}$ 时, $\triangle PDQ$ 的面积等于 8.

22.2.4 一元二次方程根的判别式

【两年模拟兵法】

1. A

2. D **点拨:** 本题考查的是根的判别式的使用,根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到 $a\neq1$ 且 $\Delta=3^2-4\times(a-1)\times(-2)\geqslant0$,然后求出两个不等式的公共部分即可得解.

3. A

4. B **点拨:** 本题考查的是根的判别式及平面直角坐标系的坐标符号特征,由第二象限点的坐标特征得到 $a<0, c>0$,则 $ac<0$, $\therefore b^2-4ac>0$. 从而判断此方程有两个不等的实数根.

5. $k>1$

6. -2 **点拨:** 由方程 $2x^2-2x+3a-4=0$ 有两个不相等的实数根,得 $\Delta=(-2)^2-4\times2\times(3a-4)>0$,

解得 $a<\dfrac{3}{2}$,从而 $a-2<0, a-4<0$, $\therefore |a-2|-\sqrt{a^2-8a+16}=|a-2|-\sqrt{(a-4)^2}=|a-2|-|a-4|=2-a-(4-a)=-2$.

7. **证明:** 设这两个方程的根的判别式分别为 Δ_1, Δ_2,

则 $\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)$.

$\because p_1p_2=2(q_1+q_2)$,

$\therefore \Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2\geqslant0$.

$\therefore \Delta_1\geqslant0$ 与 $\Delta_2\geqslant0$ 中至少有一个成立,即两个方程中至少有一个方程有实数根.

8. **解:** (1) $\Delta=b^2-4ac=4-4(2k-4)=20-8k$.

$\because$ 方程有两个不等的实数根,

$\therefore 20-8k>0, \therefore k<\dfrac{5}{2}$.

(2) $\because k$ 为正整数,且 $k<\dfrac{5}{2}$,

$\therefore k$ 为 1 或 2.

由公式法易得 $x=-1\pm\sqrt{5-2k}$.

$\because$ 方程的根为整数,

$\therefore 5-2k$ 为完全平方数.

当 $k=1$ 时, $5-2k=3$(不符合题意,舍去);

当 $k=2$ 时, $5-2k=1$.

$\therefore k=2$.

9. **解:** (1) $\because$ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore (2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$.

$\therefore 4b^2-4a^2+4c^2=0$.

$\therefore a^2=b^2+c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(2) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore a=b=c$,

$\because (a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$,

$\therefore 2ax^2+2ax=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=-1$.

*22.2.5 一元二次方程的根与系数的关系

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:** 设这个一元二次方程的两个根分别为 x_1, x_2,方程 $3x^2-1=2x+5$ 化为一元二次方程的一般形式为 $3x^2-2x-6=0$, $\therefore x_1+x_2=\dfrac{2}{3}$, $x_1x_2=\dfrac{-6}{3}=-2$. 故选 B.

2. C **点拨:** 由方程的两根结合根与系数的关系可求出 m, n 的值,将其代入 n^m 中即可求出其值.

3. D **点拨:** 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式,根据根与系数的关系以及 $x_1+x_2=1-x_1x_2$,找出关于 m 的一元二次方程是解题的

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

关键.

4. A　**点拨**:本题方法1:用根的定义求解. 方法2:用根与系数的关系求解.

5. $m>\frac{1}{2}$

6. 10

7. **解**:(1)$x_1+x_2=3$,$x_1x_2=-5$.

(2) $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$,$x_1x_2=-\frac{9}{2}$.

(3)原方程整理为 $x^2-4x+2=0$,$x_1+x_2=4$,

$x_1x_2=2$.

8. **解**:(1)将原方程整理为 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$.

∵ 原方程有两个实数根,

∴ $\Delta=[2(m-1)]^2-4m^2=-8m+4\geqslant 0$.

∴ $m\leqslant\frac{1}{2}$. ∴ 实数 m 的最大整数值为0.

(2)∵ x_1,x_2 为 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ 的两个实数根,

∴ $y=x_1+x_2=-2m+2$,且 $m\leqslant\frac{1}{2}$.

∵ y 的值随 m 值的增大而减小,

∴ 当 $m=\frac{1}{2}$时,y 取得最小值为1.

点拨:本题考查的是根的判别式与根与系数的关系,运用一次函数的性质求最值是解题的关键.

9. **解**:(1)∵ 方程有两个不等的实数根,

∴ $\Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$,

解得 $k>\frac{11}{4}$.

(2)存在.

∵ $x_1+x_2=2k-1$,$x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$,

∴ 将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$,

即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$.

代入得 $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$.

解得 $4k-11=5$,解得 $k=4$.

10. **解**:∵ m,n 是两个不等的实数,且满足 $m^2-m=3$,$n^2-n=3$,

∴ 可构造方程 $x^2-x-3=0$,

则 m,n 是 $x^2-x-3=0$ 的两个不等的实数根.

根据根与系数的关系可知 $m+n=1$,$mn=-3$,

又 $n^2=n+3$,

∴ $2n^2-mn+2m+2\,019$

$=2(n+3)-mn+2m+2\,019$

$=2n+6-mn+2m+2\,019$

$=2(m+n)-mn+2\,025$

$=2\times1-(-3)+2\,025$

$=2+3+2\,025$

$=2\,030$.

22.3　实践与探索

【两年模拟兵法】

1. B　**点拨**:设平均一人传染了 x 人,则可列方程 $1+x+x(1+x)=100$,解得 $x_1=9$,$x_2=-11$(不合题意,舍去),故选B.

2. A　**点拨**:设矩形田地的长为 x 步($x>30$),则宽为($60-x$)步,

根据题意得 $x(60-x)=864$,

整理得 $x^2-60x+864=0$,

解得 $x=36$ 或 $x=24$(舍去),

∴ $x-(60-x)=12$.

故选A.

3. A　**点拨**:根据三角形的面积公式列出方程即可解决问题. 设运动时间为 t s时,$\triangle PCQ$ 的面积为 300m^2,由题意得 $AP=2t$,$CQ=3t$,

∴ $PC=50-2t$.

∴ $\frac{1}{2}\times(50-2t)\times3t=300$,

解得 $t_1=20$(舍),$t_2=5$.

∴ 当 $t=5$s时,$\triangle PCQ$ 的面积为 300m^2.

4. $2\sqrt{15}+4\sqrt{2}$

5. **解**:(1)设平均每次下调的百分率为 x,由题意,得

$6\,000(1-x)^2=4\,860$.

解得 $x_1=0.1$,$x_2=1.9$(舍去).

答:平均每次下调的百分率为10%.

(2)由题意,得方案①优惠:$4\,860\times100\times(1-0.98)=9\,720$(元).

方案②优惠:$80\times100=8\,000$(元).

∵ $9\,720>8\,000$,

∴ 方案①更优惠.

6. **解**:(1)设该社区的图书借阅总量从2014年至2016年的年平均增长率为 x,根据题意得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$7\,500(1+x)^2=10\,800$,

即$(1+x)^2=1.44$,

解得$x_1=0.2=20\%$,$x_2=-2.2$(舍去).

答:该社区的图书借阅总量从2014年至2016年的年平均增长率为20%.

(2)$10\,800\times(1+0.2)=12\,960$(本),

$10\,800\div1\,350=8$(本),

$12\,960\div1\,440=9$(本),

$(9-8)\div8\times100\%=12.5\%$,

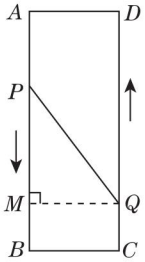
故a的值至少是12.5.

7. 解:(1)设P,Q两点开始运动x s后,四边形$PBCQ$的面积为33 cm^2,

根据题意得$PB=AB-AP=(16-3x)$ cm,$CQ=2x$ cm,故$\frac{1}{2}(2x+16-3x)\times6=33$,

解得$x=5$.

故P,Q两点开始运动5 s后,四边形$PBCQ$的面积为33 cm^2.



(第7题)

(2)设P,Q两点开始运动y s后,点P和点Q的距离是10 cm. 如图,过Q点作$QM\perp AB$于点M,

则$BM=CQ=2y$ cm,故$PM=|16-5y|$ cm.

在Rt$\triangle PMQ$中,$PM^2+MQ^2=PQ^2$,

$\therefore|16-5y|^2+6^2=10^2$.

解得$y_1=\frac{8}{5}$,$y_2=\frac{24}{5}$.

$\because$所求的是第一次满足条件的时间,$\therefore y=\frac{8}{5}$.

故P,Q两点开始运动$\frac{8}{5}$ s后,点P和点Q的距离第一次是10 cm.

点拨:在建立一元二次方程模型解决几何动态问题时关键要把握两点:一是利用几何图形的面积作为等量关系;二是利用点运动的路程来表示线段的长.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$,

设$x+\frac{1}{x}=y$,则原方程为$y^2-2y-3=0$.

解得$y_1=3$,$y_2=-1$.

当$y=3$时,$x+\frac{1}{x}=3$,

$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

当$y=-1$时,$x+\frac{1}{x}=-1$无实数根.

经检验,$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根为$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2. 解:方程组$\begin{cases}x-2\,016=2\,019,\\x-2\,017=2\,018\end{cases}$的解一定是原方程的解,解得$x=4\,035$.

方程组$\begin{cases}x-2\,016=-2\,018,\\x-2\,017=-2\,019\end{cases}$的解也一定是原方程的解,解得$x=-2$.

$\because$原方程最多有两个实数根,

$\therefore$原方程的根为$x_1=4\,035$,$x_2=-2$.

点拨:解本题也可采用换元法. 设$x-2\,017=t$,则$x-2\,016=t+1$,原方程可化为$t(t+1)=2\,018\times2\,019$,先求出$t$,进而求出$x$.

3. 解:$\because x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$,

$\therefore x$取任何实数分式总有意义.

令$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=a$,整理得$(a-1)x^2+(a+2)x+(a-1)=0$,

(1)当$a\neq1$时,由$\Delta\geqslant0$得$(a+2)^2-4(a-1)^2\geqslant0$,

解得$0\leqslant a\leqslant4$;

(2)当$a=1$时,$x=0$.

综上所述,分式$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$的最大值是4,最小值是0.

4. 解:$\because$原方程有两个不等的实数根,

$\therefore\Delta=b^2-4ac=(2m+3)^2-4m^2>0$,

解得$m>-\frac{3}{4}$.

由题意得$\alpha+\beta=-(2m+3)$,$\alpha\beta=m^2$,

则$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-(2m+3)}{m^2}=-1$,

即$m^2-2m-3=0$,解得$m_1=3$,$m_2=-1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

又 $m>-\frac{3}{4}$，

$\therefore m=3$.

5. 解：当点 Q 与点 M 重合或点 P 与点 N 重合时，以 PQ，MN 为两边，以矩形的边（AD 或 BC）的一部分为第三边可构成一个三角形.

（1）当点 P 与点 N 重合时，由 $x^2+2x=20$，

得 $x_1=\sqrt{21}-1$，$x_2=-\sqrt{21}-1$（舍去）.

$\because BQ+CM=x+3x=4(\sqrt{21}-1)$ cm <20 cm，此时点 Q 与点 M 不重合.

$\therefore x=\sqrt{21}-1$ 符合题意.

（2）当点 Q 与点 M 重合时，由 $x+3x=20$，得 $x=5$. 此时 $DN=x^2=25$ cm >20 cm，不符合题意.

$\therefore$ 所求 x 的值为 $\sqrt{21}-1$.

点拨：利用一元二次方程解决动点问题，要先分析出动点的运动轨迹，然后结合具体的几何图形列出相应的方程并求解，最后还要对结果进行检验，看是否符合题意.

6. 解：（1）由题意可得 $40n=12$，

解得 $n=0.3$.

（2）由题意可得：

$40+40(1+m)+40(1+m)^2=190$，

解得 $m_1=\frac{1}{2}=50\%$，$m_2=-\frac{7}{2}$（舍去），

$\therefore$ 第二年用乙方案新治理的工厂数量为：

$40(1+m)=40\times(1+50\%)=60$（家）.

（3）设第一年用甲方案治理降低的 Q 值为 x，

第二年 Q 值因乙方案治理降低了 $100n=100\times0.3=30$，

解法一：$(30-a)+2a=39.5$，

$a=9.5$. $x=30-a=20.5$.

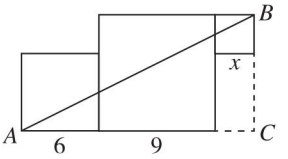
解法二：$\begin{cases}x+a=30,\\x+2a=39.5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=20.5,\\a=9.5.\end{cases}$

【第 22 章测试卷】

一、1. D **2.** D **3.** A **4.** D **5.** A **6.** D **7.** C

8. D **点拨**：如图. $\because$ 直线 AB 将它分成面积相等的两部分，$\therefore\frac{1}{2}\times(6+9+x)\times9-x\cdot(9-x)=\frac{1}{2}\times(6^2+9^2+x^2)$，解得 $x_1=3$，$x_2=6$. 故选 D.



（第 8 题）

二、9. -3 **10.** 18

11. $(2x+6)(2x+8)=80$

12. 6 或 10 或 12

三、13. 解：（1）用公式法解：

$\because a=1$，$b=-3$，$c=1$，

$\therefore b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$.

$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

（2）用直接开平方法解：$x-1=\pm\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=-\sqrt{3}+1$，$x_2=\sqrt{3}+1$.

（3）用因式分解法解：$x(x-3)=0$，

$\therefore x_1=0$，$x_2=3$.

（4）用配方法解：

$x^2-2x+1=4+1$，$(x-1)^2=5$，$x-1=\pm\sqrt{5}$，

$\therefore x_1=-\sqrt{5}+1$，$x_2=\sqrt{5}+1$.

14. 解：（1）$\because$ 方程有两个不等的实数根，

$\therefore\Delta=(-3)^2-4(-k)>0$，即 $4k>-9$.

解得 $k>-\frac{9}{4}$.

（2）若 k 是负整数，k 只能为 -1 或 -2.

①当 $k=-1$ 时，原方程为 $x^2-3x+1=0$.

解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

②当 $k=-2$ 时，原方程为 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_3=2$，$x_4=1$.

15. 解：（1）$2.6(1+x)^2$

（2）由题意，得 $4+2.6(1+x)^2=7.146$，

解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（不合题意，舍去）.

答：可变成本平均每年增长的百分率为 10%.

16. 解：（1）26.8

（2）设需要售出 x 部汽车，

由题意可知，每部汽车的销售利润为

$28-[27-0.1(x-1)]=(0.1x+0.9)$ 万元.

当 $0\leqslant x\leqslant10$，根据题意，

得 $x(0.1x+0.9)+0.5x=12$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

整理,得 $x^2+14x-120=0$.

解得 $x_1=-20$(不合题意,舍去),$x_2=6$.

当 $x>10$ 时,根据题意,

得 $x(0.1x+0.9)+x=12$.

整理,得 $x^2+19x-120=0$.

解得 $x_3=-24$(不合题意,舍去),$x_4=5$.

$\because 5<10$,$\therefore x_4=5$ 舍去.

答:需要售出 6 部汽车.

第23章 图形的相似

23.1 成比例线段

23.1.1 成比例线段

【两年模拟兵法】

1. D

2. D 点拨:设实际长度为 x cm,则 $\frac{1}{8\,000}=\frac{25}{x}$.

$\therefore x=200\,000$,$200\,000$ cm $=2\,000$ m.

3. C **4.** D **5.** D

6. ①②

7. ± 9;$5\sqrt{3}$ cm

8. $\frac{4}{9}$ 点拨:设 $b=5k(k\neq 0)$,则 $a=13k$,$\therefore \frac{a-b}{a+b}=\frac{13k-5k}{13k+5k}=\frac{8k}{18k}=\frac{4}{9}$.

9. 解:(1)$AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,$BC=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$,$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

(2)$A'B'=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$,$B'C'=\sqrt{2^2+10^2}=2\sqrt{26}$,$A'C'=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

(3)$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 六条线段分别对应成比例.

10. 解:设 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=k(k\neq 0)$,则 $a=2k$,$b=3k$,

$\therefore$ 原式 $=\frac{5a-2b}{(a+2b)(a-2b)}\cdot(a-2b)$

$=\frac{5a-2b}{a+2b}$

$=\frac{10k-6k}{2k+6k}$

$=\frac{4k}{8k}$

$=\frac{1}{2}$.

11. 解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,且 $AD=2$,$CD=1$,

$\therefore BC=AD=2$,$AB=CD=1$,$\angle ABC=\angle C=90°$,$AB\parallel DC$.

$\therefore EB=AB=1$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle DCE$ 中,$DE=\sqrt{DC^2+CE^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

$\because AB\parallel DC$,$\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{EB}{BC}=\frac{1}{2}$.

设 $EF=x$,则 $DF=2x$.

$\because EF+DF=DE$,$\therefore x+2x=\sqrt{10}$,

$\therefore x=\frac{\sqrt{10}}{3}$. $\therefore DF=2x=\frac{2}{3}\sqrt{10}$.

23.1.2 平行线分线段成比例

【两年模拟兵法】

1. B

2. B 点拨:$\because BN\parallel AM$,$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PM}{PN}$.

$\because ND\parallel MC$,$\therefore \frac{PC}{PD}=\frac{PM}{PN}$. $\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PD}$.

3. 14 cm 点拨:$\because DE\parallel AB$,$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{2}{3}$,即 $\frac{BE}{6}=\frac{2}{3}$. $\therefore BE=4$ cm. 同理可求 $BF=3$ cm. 又易知四边形 $BEDF$ 是平行四边形,$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 的周长为 $(4+3)\times 2=14$(cm).

4. $\frac{10}{3}$

5. 解:$\because l_1\parallel l_2\parallel l_3$,

$\therefore AB:BC=DE:EF$.

$\because AB=3$,$BC=5$,$DF=12$,

$\therefore 3:5=DE:(12-DE)$.

$\therefore DE=4.5$.

$\therefore EF=12-4.5=7.5$.

6. 证明:过点 D 作 $DG\parallel AB$ 交 BC 于 G.

$\because DG\parallel AB$,$\therefore \frac{AD}{BG}=\frac{AC}{BC}$,$\frac{EB}{BG}=\frac{EF}{FD}$.

$\because \frac{AC}{BC}=\frac{EF}{FD}$,$\therefore \frac{AD}{BG}=\frac{EB}{BG}$.

$\therefore AD=EB$.

7. 证明:过点 A 作 $AM\parallel DF$ 交 BD 于 M,

则 $\frac{AE}{EC}=\frac{MD}{DC}$,$\frac{FA}{FB}=\frac{DM}{BD}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又 $BD=DC$，$\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{FA}{FB}$.

点拨：证明比例式时用等线段去代换是常用的方法.

8. 解：延长 BC 至 F 点，使得 $CF=BD$，连接 EF.

$\because ED=EC$，

$\therefore \angle EDC=\angle ECD$. $\therefore \angle EDB=\angle ECF$.

在$\triangle EBD$ 和$\triangle EFC$ 中，

$DB=CF$，$\angle BDE=\angle FCE$，$DE=EC$，

$\therefore \triangle EBD\cong\triangle EFC$.

$\therefore \angle B=\angle F$.

又$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle B=\angle ACB$. $\therefore \angle ACB=\angle F$.

$\therefore AC/\!/EF$. $\therefore \dfrac{BA}{AE}=\dfrac{BC}{CF}$.

又$\because BA=BC$，

$\therefore FC=AE=2$. $\therefore BD=FC=2$.

9. 证明：在$\square ABCD$ 中，$AD=BC$，$AD/\!/BC$，P，Q 是边 AD 上的三等分点，R，S 是边 BC 上的三等分点，

$\therefore PQ=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{1}{3}BC=BR$.

$\therefore$ 四边形 $BRQP$ 是平行四边形，

$\therefore PB/\!/QR$.

同理 $QR/\!/DS$，$\therefore PB/\!/QR/\!/DS$.

$\because AP=PQ=QD$，

$\therefore \dfrac{AK}{KL}=\dfrac{AP}{PQ}=1$，$\dfrac{KL}{LM}=\dfrac{PQ}{QD}=1$，

$\therefore AK=KL=LM$.

$\because RS=SC$，$\therefore \dfrac{LM}{MC}=\dfrac{RS}{SC}=1$，$\therefore LM=MC$.

$\therefore AK=KL=LM=MC$.

23.2 相似图形

【两年模拟兵法】

1. D

2. D **点拨**：由等比性质可得出两个相似多边形对应周长的比等于对应边的比，$\therefore$ 大多边形的周长 $=36\times\dfrac{16}{9}=64(\text{cm})$.

3. $\dfrac{4}{3}$ **点拨**：$\because$ 矩形 $ABCD$ 与矩形 $ADFE$ 相似，

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$. $\therefore \dfrac{C_{\text{矩形}ABCD}}{C_{\text{矩形}ADFE}}=\dfrac{4}{3}$.

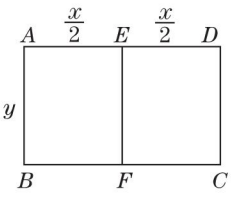
4. 15 **点拨**：根据五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$相似，且$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{1}{3}$. 得$\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{1}{3}$. 又 $CD=5$，$\therefore C'D'=15$.

5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **点拨**：设原正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，则正方形 $EFGH$ 的边长为 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$. $\therefore$ 正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 对应边的比为$\dfrac{\sqrt{2}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$EF/\!/CD$，

$\therefore \angle AFE=\angle D=\angle B$，$\angle BEF=\angle C=\angle A$. 要使$\square ABCD$ 与$\square AFEB$相似成立，则必须有$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AD}{AB}$，即$AB^2=AF\cdot AD$.

7. 解：不一定相似. 如图，沿直线 EF 对折. 设原矩形的长为 x，宽为 y，则新矩形的长为 y，宽为 $\dfrac{x}{2}$. $\because$ 矩形 $ABCD$ 与矩形$AEFB$ 相似，



（第 7 题）

$\therefore \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{\frac{x}{2}}$. $\therefore \dfrac{x^2}{y^2}=2$. $\therefore \dfrac{x}{y}=\sqrt{2}$. $\therefore$ 当原矩形的长与宽之比为$\sqrt{2}$∶1 时，新矩形与原矩形相似.

8. 解：（1）$\because$ 多边形 $ABCDEF$ 与多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，且 $\angle C$ 和 $\angle C_1$，$\angle D$ 和 $\angle D_1$，$\angle E$ 和 $\angle E_1$ 是对应角，$\therefore \angle C=95°$，$\angle D=135°$，$\angle E=120°$. 由多边形内角和定理，知 $\angle F=720°-(135°+120°+95°+135°+120°)=115°$.

（2）$\because$ 多边形 $ABCDEF$ 与多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，$AB:A_1B_1=1:1.5$，且$CD=15$ cm，

$\therefore C_1D_1=15\times1.5=22.5(\text{cm})$.

9. 解：(1)设每块地砖的长为 a cm，宽为b cm，由题图可知$4b=60$，即 $b=15$. $\because a+b=60$，$\therefore a=60-b=45$. $\therefore$ 每块地砖的长为 45 cm，宽为 15 cm.

(2)不相似. 理由：$\because$ 所铺成的矩形地面的长为 $2\times45=90(\text{cm})$，宽为 60 cm，$\therefore \dfrac{\text{长}}{\text{宽}}=\dfrac{90}{60}=\dfrac{3}{2}$.

而$\dfrac{a}{b}=\dfrac{45}{15}=\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{3}{1}$，即所铺成的矩形地面的长与宽和地砖的长与宽不成比例，$\therefore$ 它们不相似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.3 相似三角形

23.3.1 相似三角形

【两年模拟兵法】

1. C 2. B 3. A 4. D 5. C

6. $\triangle ADF\backsim\triangle EBA$(答案不唯一) 7. $\frac{2}{3}$ 8. 3:5

9. **解**:共有 3 对相似三角形. 分别是 $\triangle AEG$ 与 $\triangle ABD$,$\triangle AGF$ 与 $\triangle ADC$,$\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$.

10. (1)**解**:$\triangle CEF\backsim\triangle CDA$,$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$,$\triangle ADE\backsim\triangle BCE$.

(2)**证明**:$\because EF/\!/AD$,$\therefore\triangle EFC\backsim\triangle DAC$,

$\therefore\frac{EF}{DA}=\frac{FC}{AC}$.

易知 $EF/\!/BC$,

$\therefore\triangle AFE\backsim\triangle ACB$,$\therefore\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$.

$\therefore\frac{EF}{DA}+\frac{EF}{BC}=\frac{FC}{AC}+\frac{AF}{AC}$,即$\frac{EF}{AD}+\frac{EF}{BC}=1$,

$\therefore\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{EF}$.

23.3.2 相似三角形的判定

【两年模拟兵法】

1. B 2. A

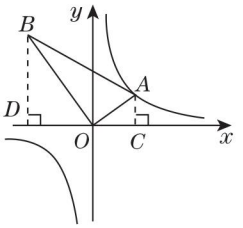
3. B **点拨**:$\because\angle A=\angle A$,$\angle ADC=\angle ACB$,$\therefore\triangle ADC\backsim\triangle ACB$,$\therefore\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$,$\therefore\frac{2}{AC}=\frac{AC}{2+6}$,$\therefore AC=4$.

4. B **点拨**:$\because$ 截得的小三角形与 $\triangle ABC$ 相似,$\therefore$ 过 P 作 AC 的垂线,作 AB 的垂线,作 BC 的垂线,所截得的小三角形满足题意. 则 D 点的位置最多有 3 处,故选 B.

5. A **点拨**:由题意得 $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}=\sqrt{2}$,$\angle BAE=\angle CAD=135°$,$\therefore\triangle BAE\backsim\triangle CAD$,故①正确;

$\because\triangle BAE\backsim\triangle CAD$,$\therefore\angle BEA=\angle CDA$,又$\because\angle PME=\angle AMD$,$\therefore\triangle PME\backsim\triangle AMD$,$\therefore\frac{MP}{MA}=\frac{ME}{MD}$,$\therefore MP\cdot MD=MA\cdot ME$,故②正确;$\because MP\cdot MD=MA\cdot ME$,$\therefore\frac{MP}{ME}=\frac{MA}{MD}$,又$\because\angle PMA=\angle EMD$,$\therefore\triangle PMA\backsim\triangle EMD$,$\therefore\angle APM=\angle DEM=90°$,$\therefore\angle APC=90°$,而 $\angle CAE=90°$,$\therefore\angle APC=\angle CAE$. 又 $\angle ACP=\angle MCA$,$\therefore\triangle CAP\backsim\triangle CMA$,$\therefore\frac{CP}{AC}=\frac{AC}{CM}$,$\therefore CP\cdot CM=AC^2=2CB^2$,故③正确. 故选 A.

6. A **点拨**:要求 k 的值,只要求出点 B 的坐标即可,分别过点 A,B 作 $AC\perp x$ 轴,$BD\perp x$ 轴,垂足分别为 C,D,如图.



(第 6 题)

设点 A 的坐标是(m,n),

则 $AC=n$,$OC=m$.

$\because\angle AOB=90°$,$\therefore\angle AOC+\angle BOD=90°$.

又$\because\angle OBD+\angle BOD=90°$,

$\therefore\angle OBD=\angle AOC$.

又$\because\angle BDO=\angle OCA=90°$,

$\therefore\triangle BDO\backsim\triangle OCA$.

$\therefore\frac{BD}{OC}=\frac{OD}{AC}=\frac{OB}{OA}$.

$\because OB=2OA$,$\therefore BD=2m$,$OD=2n$.

$\therefore$ 点 B 的坐标是($-2n$,$2m$).

$\because$ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上,

$\therefore mn=1$.

$\because$ 点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上,

$\therefore k=-2n\cdot 2m=-4mn=-4$. 故选 A.

7. C

8. **解**:(1)$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

(2)①说明 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

$\because\angle BAD=\angle CAE$,

$\therefore\angle BAD+\angle DAC=\angle CAE+\angle DAC$,

即 $\angle BAC=\angle DAE$.

又$\because\angle ABC=\angle ADE$,

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

②说明 $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

$\because\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,

$\therefore\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,即$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$.

又$\because\angle BAD=\angle CAE$,

$\therefore\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

9. (1)**证明**:由四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,$AD/\!/BC$,易证得 $\angle C=\angle B=60°$.

$\because\angle APC=\angle B+\angle BAP$,

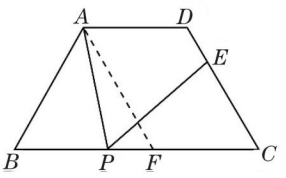
$\therefore\angle APE+\angle CPE=\angle B+\angle BAP$.

又$\because\angle APE=\angle B$,$\therefore\angle BAP=\angle CPE$.

$\therefore\triangle APB\backsim\triangle PEC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**:如图,过点 A 作 $AF\parallel CD$,交 BC 于 F.



(第 9 题)

$\because AD\parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 为平行四边形.

$\therefore CF=AD=3$,$AF=DC$.

又$\because AB=DC$,$\therefore AB=AF$.

又$\angle B=60^\circ$,$\therefore \triangle ABF$ 为等边三角形.

$\therefore AB=BF=7-3=4$.

$\because \triangle APB\backsim\triangle PEC$,$\therefore \dfrac{BP}{CE}=\dfrac{AB}{PC}$.

设 $BP=x$,则 $PC=7-x$. 又 $CE=3$,$AB=4$,

$\therefore \dfrac{x}{3}=\dfrac{4}{7-x}$. 整理,得 $x^2-7x+12=0$.

解得 $x_1=3$,$x_2=4$.

经检验,$x_1=3$,$x_2=4$ 均是所列方程的根,

$\therefore BP$ 的长为 3 或 4.

10.(1)**解**:$\angle DEF=\angle AEF$,证明如下:

$\because EF\parallel AB$,

$\therefore \angle DEF=\angle EBA$,$\angle AEF=\angle EAB$.

又$\because \angle EAB=\angle EBA$,

$\therefore \angle DEF=\angle AEF$.

(2)**解**:$\triangle EOA\backsim\triangle AGB$,

证明如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=AD$,$AC\perp BD$.

$\therefore \angle GAB=\angle ABE+\angle ADB=2\angle ABE$.

又$\because \angle AEO=\angle ABE+\angle BAE=2\angle ABE$,

$\therefore \angle GAB=\angle AEO$.

又$\angle AGB=\angle AOE=90^\circ$,

$\therefore \triangle EOA\backsim\triangle AGB$.

(3)**证明**:如图,连结 DM.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore$ 由对称性可知 $BM=DM$,$\angle ADM=\angle ABM$.

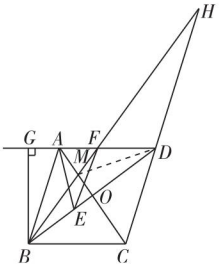
$\because AB\parallel CH$,

$\therefore \angle ABM=\angle H$,

$\therefore \angle ADM=\angle H$.

又$\because \angle DMH=\angle FMD$,

$\therefore \triangle MFD\backsim\triangle MDH$,



(第 10 题)

$\therefore \dfrac{DM}{MH}=\dfrac{MF}{DM}$,

$\therefore DM^2=MF\cdot MH$,

$\therefore BM^2=MF\cdot MH$.

11.**解**:(1)存在.

设 $BP=x$,则 $DP=10-x$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle CDP$,则$\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{CD}{DP}$,

即$\dfrac{9}{x}=\dfrac{4}{10-x}$. 解得$x=\dfrac{90}{13}$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle PDC$,则$\dfrac{AB}{PD}=\dfrac{BP}{CD}$,即$\dfrac{9}{10-x}=\dfrac{x}{4}$.

整理,得 $x^2-10x+36=0$,方程无解.

$\therefore$ 存在满足题意的点 P,且 $BP=\dfrac{90}{13}$.

(2)设 $BP=x$,则 $DP=12-x$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle CDP$,则$\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{CD}{DP}$,

即$\dfrac{9}{x}=\dfrac{4}{12-x}$. 解得 $x=\dfrac{108}{13}$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle PDC$,则$\dfrac{AB}{PD}=\dfrac{BP}{CD}$,即$\dfrac{9}{12-x}=\dfrac{x}{4}$.

整理,得 $x^2-12x+36=0$. 解得 $x_1=x_2=6$.

$\therefore$ 存在两个满足题意的点 P,且 $BP=6$ 或$\dfrac{108}{13}$.

(3)设 $BP=x$,则 $DP=15-x$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle CDP$,则$\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{CD}{DP}$,

即$\dfrac{9}{x}=\dfrac{4}{15-x}$. 解得 $x=\dfrac{135}{13}$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle PDC$,则$\dfrac{AB}{PD}=\dfrac{BP}{CD}$,即$\dfrac{9}{15-x}=\dfrac{x}{4}$.

整理,得 $x^2-15x+36=0$. 解得 $x_1=3$,$x_2=12$.

$\therefore$ 存在三个满足题意的点 P,且 $BP=\dfrac{135}{13}$或 3 或 12.

(4)设 $BP=x$,则 $DP=l-x$,

若$\triangle ABP\backsim\triangle CDP$,则$\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{CD}{DP}$,

即$\dfrac{m}{x}=\dfrac{n}{l-x}$. 解得 $x=\dfrac{ml}{m+n}$.

若$\triangle ABP\backsim\triangle PDC$,则$\dfrac{AB}{PD}=\dfrac{BP}{CD}$,即$\dfrac{m}{l-x}=\dfrac{x}{n}$.

整理,得 $x^2-lx+mn=0$,$\Delta=l^2-4mn$.

当 $\Delta=l^2-4mn<0$ 时,存在使以 P,A,B 三点为顶点的三角形与以 P,C,D 三点为顶点的三角

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

形相似的一个点 P;

当 $\Delta=l^2-4mn=0$ 时,存在使以 P,A,B 三点为顶点的三角形与以 P,C,D 三点为顶点的三角形相似的两个点 P;

当 $\Delta=l^2-4mn>0$ 时,存在使以 P,A,B 三点为顶点的三角形与以 P,C,D 三点为顶点的三角形相似的三个点 P.

23.3.3 相似三角形的性质

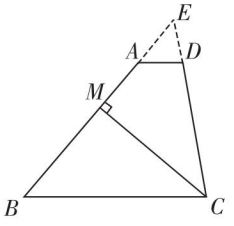
【两年模拟兵法】

1. A **2.** D

3. A **点拨:**设 $A'B'$ 与 BC 交于点 E,$A'C'$ 与 BC 交于点 F,由平移知,$A'B'\parallel AB$,$A'C'\parallel AC$,$C'B'\parallel CB$,$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle A'EF$,$\because\triangle ABC$ 的面积为 9,$\triangle A'EF$ 的面积为 4,$\therefore$ 相似比为 3∶2,$\therefore AD:A'D=3:2$,故有 $(A'D+1):A'D=3:2$,解得 $A'D=2$.

4. C

5. 1 **点拨:**如图,延长 BA、CD,交点为 E,依据题意可知 $MB=ME$,然后证明 $\triangle EAD\backsim\triangle EBC$,依据相似三角形的性质可求得 $\triangle EAD$ 和 $\triangle EBC$ 的面积,最后依据 $S_{四边形AMCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle EBC}-S_{\triangle EAD}$,求解即可.



(第 5 题)

6. **解:**(1)将点 A 的坐标(2,3)代入 $y=\frac{k}{x}$,得 $k=6$.

(2)将点 $D(3,m)$ 的坐标代入 $y=\frac{6}{x}$,得 $m=\frac{6}{3}=2$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为(3,2).

设直线 AD 对应的函数表达式为 $y=k_1x+b$,

将点 $A(2,3)$,$D(3,2)$ 的坐标分别代入 $y=k_1x+b$,得 $\begin{cases}2k_1+b=3,\\3k_1+b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\b=5.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AD 对应的函数表达式为 $y=-x+5$.

(3)过点 C 作 CN 垂直于 y 轴,垂足为 N,延长 BA 交 y 轴于点 M.

$\because AB\parallel x$ 轴,$\therefore BM\perp y$ 轴.

$\therefore BM\parallel CN$,$\therefore\triangle OCN\backsim\triangle OBM$.

$\because C$ 是 OB 的中点,

$\therefore\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$,$\therefore\frac{S_{\triangle OCN}}{S_{\triangle OBM}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$\because$ 点 A,C 都在双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 上,

$\therefore S_{\triangle OCN}=S_{\triangle OAM}=3$.

$\therefore\frac{3}{3+S_{\triangle OAB}}=\frac{1}{4}$,解得 $S_{\triangle OAB}=9$.

因此 $\triangle OAB$ 的面积为 9.

7. (1)**证明:**(方法一)$\because$ 四边形 $EFGH$ 为矩形,

$\therefore EF\parallel GH$,

$\therefore\triangle AHG\backsim\triangle ABC$,

又$\because AD\perp BC$,

$\therefore AM\perp HG$,

$\therefore\frac{AM}{AD}=\frac{HG}{BC}$.

(方法二)$\because$ 四边形 $EFGH$ 为矩形,

$\therefore EF\parallel GH$,

$\therefore\triangle AHG\backsim\triangle ABC$,$\triangle AHM\backsim\triangle ABD$,

$\therefore\frac{HG}{BC}=\frac{AH}{AB}$,$\frac{AM}{AD}=\frac{AH}{AB}$,

$\therefore\frac{AM}{AD}=\frac{HG}{BC}$.

(2)**解:**由题意知 $HG=2HE$,设 $HE=x$ cm,则 $HG=2x$ cm.

$\because AD\perp BC$,$\therefore DM=HE$,

$\therefore AM=AD-DM=AD-HE=30-x$(cm).

由(1)得 $\frac{AM}{AD}=\frac{HG}{BC}$,

$\therefore\frac{30-x}{30}=\frac{2x}{40}$,解得 $x=12$,

$\therefore 2x=2\times12=24$.

$\therefore$ 矩形 $EFGH$ 的周长为 $2\times(12+24)=72$(cm).

8. (1)**证明:**$\because EF\parallel BC$,

$\therefore\triangle AEF\backsim\triangle ABC$,

$\therefore\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$,$\therefore\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE^2}{AB^2}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}$.

(2)**解:**若 EF 不与 BC 平行,(1)中的结论仍然成立. 理由如下:

如图,分别过 F、C 作 AB 的垂线,垂足为 N、H.

$\because FN\perp AB$,$CH\perp AB$,

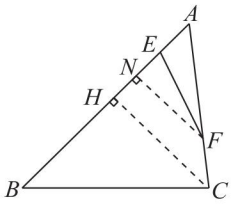
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore FN/\!/CH$,

$\therefore \triangle AFN\backsim\triangle ACH$,

$\therefore \dfrac{FN}{CH}=\dfrac{AF}{AC}$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AE\cdot FN}{\frac{1}{2}AB\cdot CH}=\dfrac{AE\cdot FN}{AB\cdot CH}=\dfrac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}$.



(第8题)

23.3.4 相似三角形的应用

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. C **点拨:** 先证明$\triangle PQR\backsim\triangle PST$,再利用相似比得到$\dfrac{PQ}{PQ+60}=\dfrac{80}{120}$,最后根据比例的性质求出$PQ$.

4. 解: $\because CB\perp AD, ED\perp AD$,

$\therefore \angle CBA=\angle EDA=90°$.

$\because \angle CAB=\angle EAD, \therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$,

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}, \therefore \dfrac{AB}{AB+8.5}=\dfrac{1}{1.5}, \therefore AB=17$.

检验:$AB=17$为分式方程的根.

答:河宽AB为17米.

5. 解: 由题意知$\angle ACB=\angle ECF$, $\angle AC'B=\angle E'C'F'$,

又$\angle ABC=\angle EFC=\angle E'F'C'=90°$,

$\therefore \triangle BAC\backsim\triangle FEC$, $\triangle AC'B\backsim\triangle E'C'F'$,

$\therefore \dfrac{AB}{EF}=\dfrac{BC}{FC}, \dfrac{AB}{E'F'}=\dfrac{BC'}{C'F'}$,

设$AB=x$ m, $BC=y$ m,

则$\begin{cases}\dfrac{x}{1.6}=\dfrac{y}{2},\\ \dfrac{x}{1.6}=\dfrac{7+y}{3}.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=11.2,\\ y=14.\end{cases}$

答:这棵古松树AB的高为11.2m.

点拨: 本题考查相似三角形性质的应用,解题时关键是找出相似的三角形,然后根据对应边成比例列出方程,建立适当的数学模型来解决问题.

6. 解: 如图,延长AD交BC的延长线于点E,若无墙阻挡,则标杆AB落在地面上的影子应该是BE.

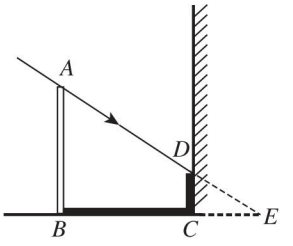
由题意,知$AB/\!/DC$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$,

$\therefore \dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BE}{CE}$,即$\dfrac{3}{1}=\dfrac{3+CE}{CE}$,

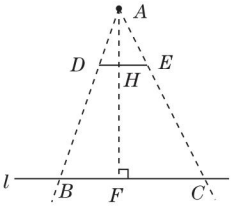
解得$CE=1.5$ m,则$BE=BC+CE=3+1.5=4.5$(m).

故若无墙阻挡,标杆AB在地面上的影子的长为4.5 m.



(第6题)

7. 解: (1)如图,作射线AD,AE,分别交l于点B,C,BC即为视点A盲区内的那段公路.



(第7题)

(2)如图,过点A作$AF\perp BC$,垂足为点F,交DE于点H,易知$AH\perp DE$.

$\because DE/\!/BC, \therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC. \therefore \dfrac{AH}{AF}=\dfrac{DE}{BC}$.

由题意,知$DE=30$ m, $AH=40$ m, $HF=80$ m,

$AF=AH+HF=120$ m,

$\therefore \dfrac{40}{120}=\dfrac{30}{BC}. \therefore BC=90$ m. $90\div3=30$(m/s).

因此,该汽车的速度是30 m/s.

23.4 中位线

【两年模拟兵法】

1. A **2.** A **3.** D

4. D **点拨:** $\because BD\perp DC, BD=4, CD=3, \therefore$由勾股定理得$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=5$, $\because E, F, G, H$分别是AB, AC, CD, BD的中点,

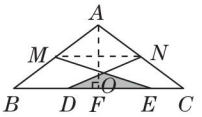
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore EF=HG=\frac{1}{2}BC=2.5, EH=FG=\frac{1}{2}AD=3.$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长是 $EF+FG+HG+EH=2\times(2.5+3)=11$. 故选 D.

5. 3

6. 1.5 cm^2 **点拨:** 如图,连结 MN,作 $AF\perp BC$ 于点 F. $\because AB=AC$, $\therefore BF=CF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times8=4(cm)$. 在



(第6题)

Rt$\triangle ABF$ 中, $AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(cm)$. $\because M,N$ 分别是 AB,AC 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,即 MN 平分三角形的高且 $MN/\!/BC, MN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times8=4(cm)$.

$\therefore NM=DE$. 易得 $\triangle MNO\cong\triangle EDO$, $\therefore O$ 是 ME, ND 的中点. $\therefore$ 阴影三角形的边 DE 上的高是 $\frac{1}{2}AF\div2=1.5\div2=0.75(cm)$. $\therefore S_{阴影}=4\times0.75\div2=1.5(cm^2)$.

7. 15.5 **点拨:** $\because \triangle EDF$ 是 $\triangle EAF$ 折叠以后形成的图形, $\therefore AD\perp EF$, $\triangle EDF\cong\triangle EAF$. $\therefore \angle AEF=\angle DEF, ED=EA, DF=AF$. $\because AD$ 是 BC 边上的高, $\therefore EF/\!/CB$. $\therefore \angle AEF=\angle B, \angle BDE=\angle DEF$. $\therefore \angle B=\angle BDE$. $\therefore BE=DE$. 同理, $DF=CF$, $\therefore AE=BE, AF=CF$. $\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线. $\therefore \triangle DEF$ 的周长 $=\triangle EAF$ 的周长 $=AE+EF+AF=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=\frac{1}{2}\times(12+9+10)=15.5$.

8. (1) **证明:** $\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线, $AB=BC$, $\therefore D$ 是 AC 的中点.

又 $\because E$ 是 AB 的中点,

$\therefore ED$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore DE/\!/BC$.

(2) **解:** $\because DE/\!/BC$,

$\therefore \angle EDB=\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=50°$.

9. **证明:** 如图,连结 AC,作 $EM/\!/AD$ 交 AC 于点 M,连结 MF.

$\because E$ 是 CD 的中点,且 $EM/\!/AD$,

$\therefore$ 易知 M 是 AC 的中点.

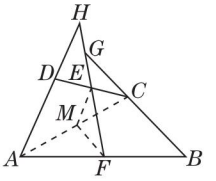
$\therefore EM$ 是 $\triangle ADC$ 的中位线. $\therefore EM=\frac{1}{2}AD$.

又 $\because F$ 是 AB 的中点,

$\therefore MF/\!/BC$, 且 $MF=\frac{1}{2}BC$.

$\because AD=BC$, $\therefore EM=MF$.

$\therefore$ 三角形 MEF 为等腰三角形,即 $\angle MEF=\angle MFE$.



(第9题)

$\because EM/\!/AH$, $\therefore \angle MEF=\angle AHF$.

$\because FM/\!/BG$, $\therefore \angle MFE=\angle BGF$.

$\therefore \angle AHF=\angle BGF$.

10. **证明:** $\because BD=CD$, $\therefore \angle1=\angle BCD$.

$\because \angle1=\angle2$, $\therefore \angle BCD=\angle2$.

$\therefore CD/\!/AB$. $\therefore \angle CDA=\angle3$.

又 $\because \angle BCD=\angle2=\angle3$,

$\therefore \angle CDA=\angle BCD, BE=AE$.

$\therefore DE=CE$.

又 $\because \angle BED=\angle AEC$,

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle ACE$.

$\therefore \angle1=\angle4, \angle ACE=\angle BDE=90°$.

$\therefore \angle ACH=90°-\angle BCH$.

又 $\because CH\perp AB$,

$\therefore \angle2=90°-\angle BCH$,

$\therefore \angle ACH=\angle2=\angle1=\angle4, \therefore AF=CF$.

又 $\because \angle AEC=90°-\angle4, \angle ECF=90°-\angle ACH$,

$\therefore \angle AEC=\angle ECF$.

$\therefore CF=EF$. $\therefore EF=AF$.

又 $\because O$ 为 AB 的中点,

$\therefore OF$ 为 $\triangle ABE$ 的中位线.

$\therefore OF=\frac{1}{2}BE$.

11. (1) **证明:** 对于 $\triangle CAE$ 和 $\triangle CBD$,

$\because AC=BC, \angle ACE=\angle BCD=90°, CE=CD$,

$\therefore \triangle CAE\cong\triangle CBD, \therefore \angle CAE=\angle CBD$.

(2) **证明:** 取 BC 的中点 M,连接 FM.

易得 FM 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$\therefore FM/\!/DC$.

$\because \angle BCD=90°, \therefore \angle FMB=90°$.

$\therefore FM$ 是 BC 的垂直平分线.

$\therefore CF=BF=DF$.

$\therefore \angle FCB=\angle FBC$.

又 $\angle FBC=\angle CAE$,

$\therefore \angle FCB=\angle FBC=\angle CAE$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle CEA + \angle FCB = \angle CEA + \angle CAE = 90°$,

$\therefore AE \perp CF$.

(3)**解**:记 AE 与 CF 交于点 H,

$\because AC = 2\sqrt{2}, CE = 1$,

$\therefore AE = BD = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$.

由 F, G 为中点,

易得 $CF = \frac{1}{2}BD = \frac{3}{2}, GE = \frac{3}{2}$.

易知 $\triangle ACE \backsim \triangle CHE$,

$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{CE}{HE}$,即 $\frac{3}{1} = \frac{1}{HE}$,

$\therefore HE = \frac{1}{3}, \therefore GH = GE - HE = \frac{7}{6}$,

$\therefore S_{\triangle CGF} = \frac{1}{2} \times CF \times GH = \frac{7}{8}$.

23.5 位似图形

【两年模拟兵法】

1. B **2**. A

3. B **点拨**:由位似图形的定义,通过判断对应边是否互相平行(或在同一直线上),对应顶点的连线所在直线是否相交于一点,不难得出①与③是位似图形,②与④是位似图形,故选 B.

4. D **5**. B **6**. D

7. **解**:(1)根据勾股定理,得 $AC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, AB = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$,

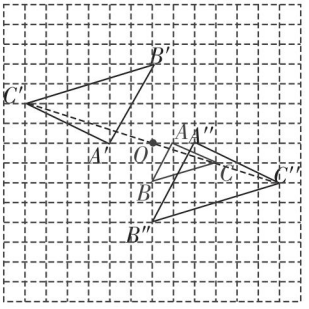
$\therefore AB^2 + AC^2 = 10, BC^2 = 10$,

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形,

$\therefore$ 面积为 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}$.

(2)$\triangle ABC$ 的位似图形有两种情况,如图.



(第 7 题)

8. (1)D

(2)**证明**:$\because E'C' /\!/ EC, E'D' /\!/ ED$,

$\therefore \triangle OCE \backsim \triangle OC'E', \triangle ODE \backsim \triangle OD'E'$.

$\therefore CE : C'E' = OE : OE', DE : D'E' = OE : OE'$,

$\angle CEO = \angle C'E'O, \angle DEO = \angle D'E'O$.

$\therefore CE : C'E' = DE : D'E', \angle CED = \angle C'E'D'$,

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle C'D'E'$.

$\because \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore \triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

23.6 图形与坐标

【两年模拟兵法】

1. B **2**. A **3**. B **4**. D

5. (1)略 (2)(3,7);图书馆;芳草亭

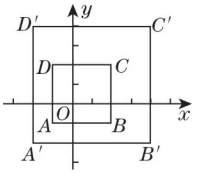
6. (15,18) **7**. 1; −2 **8**. $(2, 2\sqrt{3})$

9. $-\frac{1}{2n}$

10. $(2^{2\,018}, 2^{2\,017})$

11. **解**:(1)四边形 $ABCD$ 是正方形.

(2)把这个四边形各顶点的坐标都乘 2,得到 $A'(-2,-2), B'(4,-2), C'(4,4), D'(-2,4)$.



(第 11 题)

画出这个图形,如图,它为正方形,边长为 6,可以看出正方形 $A'B'C'D'$ 的面积是正方形 $ABCD$ 的面积的 4 倍,即 2^2 倍.

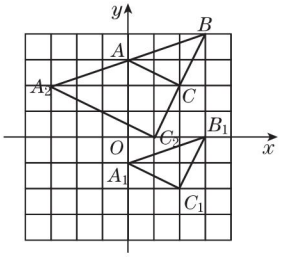
(3)如果把各顶点的坐标都乘 $k(|k|>1)$,那么所得图形的面积扩大为原图形面积的 k^2 倍.

如果把各顶点的坐标都乘 $k(0<|k|<1)$,那么所得图形的面积缩小为原图形面积的 k^2.

12. **解**:(1)$\triangle A_1B_1C_1$ 如图,$C_1(2,-2)$.

(2)$\triangle A_2BC_2$ 如图,$C_2(1,0)$.

$\triangle A_2BC_2$ 的面积等于 10.



(第 12 题)

13. **解**:(1)由已知得 $k = -2$,

把点(3,1)的坐标和 $k = -2$ 代入 $y = kx + b$,得 $1 = -2 \times 3 + b$,

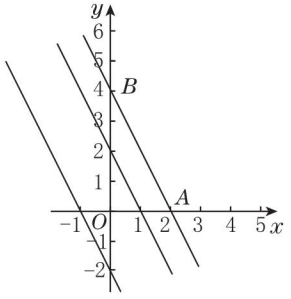
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore b=7$.

(2)如图,根据相似比为1:2得,函数$y=kx+b$的图象有两种情况:

①不经过第三象限时,过点(1,0)和(0,2),这时函数表达式为$y=-2x+2$;

②不经过第一象限时,过点$(-1,0)$和$(0,-2)$,这时函数表达式为$y=-2x-2$.



(第13题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 证明:$\because AD=CD, DF\perp AC$,

$\therefore AF=CF, \angle DAF=\angle DCF, \angle DFA=\angle DFC=90°$.

又$\because \angle DAB=\angle DAF+\angle CAB=90°, \angle CAB+\angle ABC=90°$,

$\therefore \angle DCF=\angle DAF=\angle ABC$.

在$\triangle DCF$和$\triangle ABC$中,$\angle DFC=\angle ACB=90°$, $\angle DCF=\angle ABC$,

$\therefore \triangle DCF\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{CF}{CB}$,即$\frac{CD}{AB}=\frac{AF}{CB}$,

$\therefore AB\cdot AF=CB\cdot CD$.

2. (1)证明:$\because DE/\!/BC, EF/\!/AB$,

$\therefore$四边形$DEFB$为平行四边形.

$\therefore DE=BF$.

$\because DE/\!/BC$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

又$\because DE=BF$,

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{BF}{BC}$.

(2)解:$\because AD:DB=3:5$,$\therefore BD:AB=5:8$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore CE:AC=BD:AB=5:8$.

$\because EF/\!/AB$,$\therefore CF:CB=CE:AC=5:8$.

3. 证明:$\because DE/\!/BC$,$\therefore \triangle PDE\backsim\triangle PBC$.

$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}$.

$\therefore PD\cdot PC=PE\cdot PB$.

$\because DF/\!/AC$,$\therefore \triangle PDF\backsim\triangle PAC$.

$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{PD}{PA}$. $\therefore PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

$\therefore PE\cdot PB=PF\cdot PA$. $\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$.

4. 解:OC^2与$OA\cdot OE$相等.理由如下:

$\because AD/\!/BC$,$\therefore \triangle COB\backsim\triangle AOD$. $\therefore \frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$.

同理$\triangle OBE\backsim\triangle ODC$.

$\therefore \frac{OE}{OC}=\frac{OB}{OD}$. $\therefore \frac{OC}{OA}=\frac{OE}{OC}$,

即$OC^2=OA\cdot OE$.

5. (1)证明:$\because AB/\!/DC$,$\therefore \angle A=\angle C$,

$\because AB=CD, \angle B=\angle D$,

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$;

(2)解:$\because E, G$分别为线段FC, FD的中点,

$\therefore EG=\frac{1}{2}CD$,

$\because EG=5$,$\therefore CD=10$,

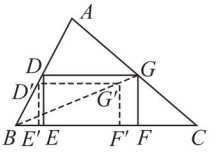
$\because \triangle ABE\cong\triangle CDF$,$\therefore AB=CD=10$.

6. 解:如图,在AB边上靠近B点处任取一点D',过点D'作$D'E'\perp BC$于点E',

在BC上截取$E'F'$,使$E'F'=2D'E'$,过点F'作$F'G'\perp BC$,

过点D'作$D'G'/\!/BC$交$F'G'$于点G',作射线BG'交AC于点G,

过点G作$GF/\!/G'F'$,$DG/\!/D'G'$,GF交BC于点F,DG交AB于点D,过点D作$DE/\!/D'E'$交BC于点E,则四边形$DEFG$为$\triangle ABC$的内接矩形,且$DE:EF=1:2$.



(第6题)

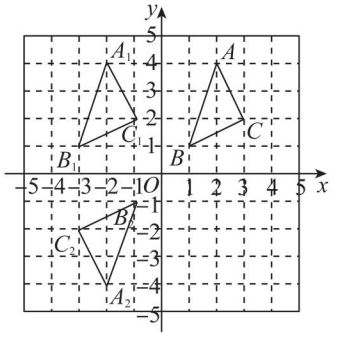
7. 解:(1)如图①,点C_1的坐标为$(-1,2)$;

(2)如图①,点C_2的坐标是$(-3,-2)$;

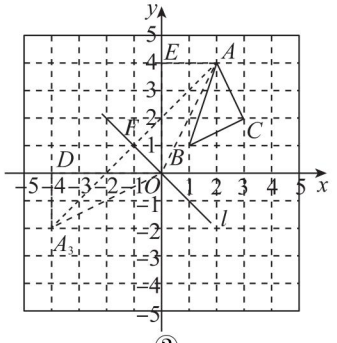
(3)直线l的表达为$y=-x$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点拨:(3)如图②,连结 AA_3,OA,OA_3,过点 A 作 $AE\perp y$ 轴于 E,过点 A_3,$D\perp x$ 轴于 D. 设直线 l 交 AA_3 于点 F. 易得 $OA_3=OA$,所以直线 l 必经过点 O,且 $\angle A_3OF=\angle AOF$,易证 $\triangle OA_3D\cong\triangle OAE$,$\therefore$ $\angle A_3OD=\angle AOE$,$\therefore$ $\angle DOF=\angle EOF$,即直线 OF 平分第二、四象限,$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y=-x$.



①



②

(第 7 题)

8. 解:$\because$ $CD\perp FB$,$AB\perp FB$,

$\therefore$ $CD/\!/AB$,

$\therefore$ $\triangle CGE\backsim\triangle AHE$,

$\therefore$ $\dfrac{CG}{AH}=\dfrac{EG}{EH}$,

即 $\dfrac{CD-EF}{AH}=\dfrac{FD}{FD+BD}$,

$\therefore$ $\dfrac{3-1.6}{AH}=\dfrac{2}{2+15}$,

$\therefore$ $AH=11.9$ m.

$\therefore$ $AB=AH+HB=AH+EF=11.9+1.6=13.5$(m).

因此旗杆 AB 的高度为 13.5 m.

【第 23 章测试卷】

一、1. A **2.** C **3.** A **4.** B **5.** B **6.** B **7.** B **8.** C

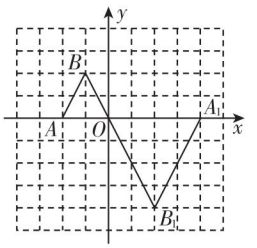
二、9. $\angle D=\angle B$ **点拨**:答案不唯一.

10. 3

11. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$或$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

12. $\left(-\dfrac{3^n}{2^n},\dfrac{3^n}{2^{n+1}}\right)$

三、13. 解:(1)如图.



(第 13 题)

(2)$A_1(4,0)$,$B_1(2,-4)$.

14. 证明:(1)$\because$ $\angle BAE=\angle DAC$,$\angle BAC=\angle BAE-\angle CAE$,$\angle DAE=\angle DAC-\angle CAE$,

$\therefore$ $\angle BAC=\angle DAE$.

$\because$ $\angle ACB=\angle ADE$,

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$.

(2)$\because$ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$,

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AD}$.

又$\because$ $\angle BAE=\angle CAD$,

$\therefore$ $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

$\therefore$ $\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$,

即 $BE\cdot AC=CD\cdot AB$.

15. 解:由题意,得 $AB=1.5$ m,$BC=0.5$ m,$DC=4$ m,易知 $\triangle ABC\backsim\triangle EDC$,

则 $\dfrac{AB}{ED}=\dfrac{BC}{DC}$,即 $\dfrac{1.5}{DE}=\dfrac{0.5}{4}$. 解得 $DE=12$ m.

答:旗杆 DE 的高度为 12 m.

16. 解:(1)由题意得 $AP=4x$ cm,$CQ=3x$ cm,$AQ=(30-3x)$ cm,$0\leqslant x\leqslant 5$.

当 $PQ/\!/BC$ 时,有 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AC}$,

$\therefore$ $\dfrac{4x}{20}=\dfrac{30-3x}{30}$. 解得 $x=\dfrac{10}{3}$.

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{10}{3}$时,$PQ/\!/BC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)能. ∵ $AB=CB$,

∴ $\angle A=\angle C$. 分两种情况讨论.

①若$\triangle APQ\backsim\triangle CBQ$,则$\frac{AP}{CB}=\frac{AQ}{CQ}$,

即$\frac{4x}{20}=\frac{30-3x}{3x}$.

解得 $x=5$ 或 $x=-10$(舍去).

此时 $AP=20$ cm.

②若$\triangle APQ\backsim\triangle CQB$,则$\frac{AP}{CQ}=\frac{AQ}{CB}$,

即$\frac{4x}{3x}=\frac{30-3x}{20}$.

解得 $x=\frac{10}{9}$或 $x=0$(为分式方程的增根,舍去).

此时 $AP=\frac{40}{9}$ cm.

综上,当 $AP=20$ cm 或 $AP=\frac{40}{9}$ cm 时,$\triangle APQ$ 与 $\triangle CQB$ 相似.

17. 解:(1)把点 $A(-2,0)$ 的坐标代入 $y=ax+1$ 中,求得 $a=\frac{1}{2}$,

∴ $y=\frac{1}{2}x+1$.

把 $y=2$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+1$ 中,得 $x=2$,

∴ $P(2,2)$.

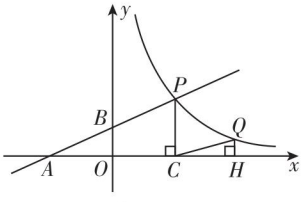
把点 $P(2,2)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$得 $k=4$.

则双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2)如图,设 $Q(m,b)$,

∵ 点 $Q(m,b)$在双曲线 $y=\frac{4}{x}$上,

∴ $b=\frac{4}{m}$. 易知 $OA=2$,$OB=1$,$QH=b$,$CH=m-2$.



(第17题)

当$\triangle QCH\backsim\triangle BAO$ 时,$\frac{CH}{AO}=\frac{QH}{BO}$,即$\frac{m-2}{2}=\frac{b}{1}$.

∴ $m-2=2b$,即 $m-2=\frac{8}{m}$.

解得 $m=4$ 或 $m=-2$(舍去).

∴ $Q(4,1)$.

当$\triangle QCH\backsim\triangle ABO$ 时,可得$\frac{CH}{BO}=\frac{QH}{AO}$,

即$\frac{m-2}{1}=\frac{b}{2}$.

∴ $2m-4=b$,即 $2m-4=\frac{4}{m}$.

解得 $m=1+\sqrt{3}$或 $m=1-\sqrt{3}$(舍去).

∴ $Q(1+\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$.

综上可得,$Q(4,1)$或 $Q(1+\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$.

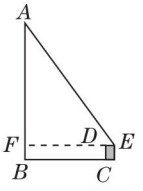
第24章 解直角三角形

24.1 测量

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B

3. C **点拨:**画出示意图如图,其中,AB 表示树高,DC 表示台阶高,DE 表示落在台阶上的影长. 由题意知 $BC=4.4$ m,$CD=0.3$ m,$DE=0.2$ m. 延长 ED 交 AB 于 F,则 $EF\perp AB$,根据在太阳光下相同时刻的物高与影长成正比可得$\frac{1}{0.4}=\frac{AF}{FE}$,即



(第3题)

$\frac{1}{0.4}=\frac{AF}{4.4+0.2}$,∴ $AF=11.5$ m. ∴ $AB=AF+BF=AF+CD=11.5+0.3=11.8$(m).

4. D **点拨:**∵ $PM/\!/BD$,∴ $\triangle APM\backsim\triangle ABD$. ∴ $\frac{AP}{AB}=\frac{PM}{BD}$,设 $AP=x$ m,$AB=y$ m,则$\frac{x}{y}=\frac{1.5}{9}$ ①.

∵ $QN/\!/AC$,∴ $\triangle BQN\backsim\triangle BAC$. ∴ $\frac{BQ}{BA}=\frac{QN}{AC}$,即$\frac{y-x-20}{y}=\frac{1.5}{9}$ ②. 联立①②组成方程组为$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{1.5}{9},\\ \frac{y-x-20}{y}=\frac{1.5}{9},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=5,\\ y=30.\end{cases}$

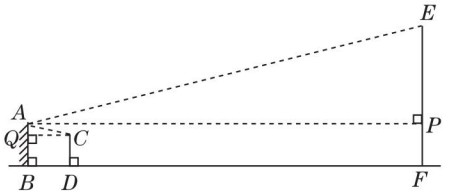
∴ 两路灯之间的距离 $AB=30$ m. 本题运用数形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

结合思想和方程思想，根据相似三角形的对应边成比例列出比例式，构建方程组解决问题.

5. 13　**6.** 4.8

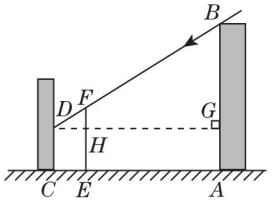
7. 7　**点拨：**如图，作 $AP\perp EF$ 于点 P，$CQ\perp AB$ 于点 Q，则 $CQ/\!/AP$，易证 $\triangle CAQ\backsim\triangle AEP$，$\therefore \dfrac{AQ}{EP}=\dfrac{QC}{PA}$. 由题意知 $AQ=AB-BQ=0.5$ m，$CQ=BD=2$ m，$AP=BF=20$ m，$\therefore \dfrac{0.5}{EP}=\dfrac{2}{20}$，$\therefore EP=5$ m，$\therefore EF=EP+PF=EP+AB=7$ m.



（第7题）

8. **解：**如图，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，交 EF 于点 H，

则 $DH=CE=0.8$ m，$DG=CA=30$ m，$HE=AG=CD=1.2$ m.



（第8题）

$\therefore FH=EF-HE=1.7-1.2=0.5$(m).

易得 $\triangle DFH\backsim\triangle DBG$，$\therefore \dfrac{DH}{DG}=\dfrac{FH}{BG}$，

$\therefore \dfrac{0.8}{30}=\dfrac{0.5}{BG}$，解得 $BG=18.75$ m.

$\therefore AB=BG+AG=18.75+1.2=19.95$(m)，

即教学楼 AB 的高度为 19.95 m.

24.2　直角三角形的性质

【两年模拟兵法】

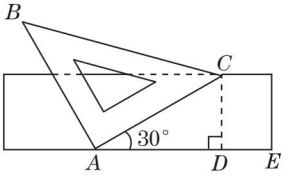
1. C　**点拨：**根据等边对等角的性质可得 $\angle BAC=\angle B$，再根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式求出 $\angle ACD=30°$，然后根据直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半解答即可. $\because AC=BC$，$\therefore \angle BAC=\angle B=15°$，$\therefore \angle ACD=\angle B+\angle BAC=15°+15°=30°$. $\because AD\perp BC$，$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 10=5$(cm).

2. C　**点拨：**$\because$ 在 Rt$\triangle ACB$ 中，CD 是斜边 AB 上的中线，$\therefore CD=\dfrac{1}{2}AB=BD$，

又 $\because BC=CD$，$\therefore BD=CD=BC$，

$\therefore \triangle BDC$ 是等边三角形，$\therefore \angle B=60°$.

3. D　**点拨：**如图，过点 C 作 $CD\perp AE$ 于点 D，可得直角三角形 ACD，根据直角三角形中 30°角所对的直角边等于斜边的一半，可得 $AC=6$ cm，从而可得三角板的最大边 BC 的长为 $6\sqrt{2}$ cm.



（第3题）

4. C　**点拨：**$\because OP$ 平分 $\angle AOB$，$\angle AOB=60°$，

$\therefore \angle AOP=\angle COP=30°$. $\because CP/\!/OA$，$\therefore \angle PCE=\angle AOB=60°$.

$\because PE\perp OB$，$\therefore \angle CPE=30°$，$\therefore CE=\dfrac{1}{2}CP=1$，

$\therefore PE=\sqrt{CP^2-CE^2}=\sqrt{3}$，$\therefore OP=2PE=2\sqrt{3}$.

$\because PD\perp OA$，点 M 是 OP 的中点，$\therefore DM=\dfrac{1}{2}OP=\sqrt{3}$.

5. B　**6.** C

7. 6　**点拨：**根据直角三角形的面积是 12，斜边上的高是 2，可得斜边长是 $12\times 2\div 2=12$，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可得斜边上的中线长是 $12\times\dfrac{1}{2}=6$.

8. 15°

9. **证明：**$\because CD$ 是 AB 边上的中线，且 $\angle ACB=90°$，

$\therefore CD=AD$. $\therefore \angle CAD=\angle ACD$.

又 $\because$ $\triangle ACE$ 是由 $\triangle ACD$ 沿 AC 边所在的直线翻折而成的，

$\therefore \angle ECA=\angle ACD$. $\therefore \angle ECA=\angle CAD$.

$\therefore EC/\!/AB$.

10. **证明：**连结 AF.

$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

$\therefore \angle B=\angle C=\dfrac{1}{2}(180°-\angle BAC)=\dfrac{1}{2}\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(180°-120°)=30°$.

又∵ EF 垂直平分 AB,

∴ $AF=BF$,∴ $\angle BAF=\angle B=30°$,

∴ $\angle FAC=\angle BAC-\angle BAF=120°-30°=90°$.

∴ $AF=\frac{1}{2}FC$,∴ $BF=\frac{1}{2}FC$.

11. **解**:如图,过点 A 作 $AD\perp ON$ 于点 D,则点 A 到 ON 的最短距离为 AD 的长,在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中,$\angle O=30°$,$OA=80$ 米,可得 $AD=40$ 米 <50 米,

故小学会受到拖拉机的影响;

在 D 点两侧分别取两点 E、F,使得 $AE=AF=50$ 米,在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,$AE=50$ 米,$AD=40$ 米,可得 $DE=30$ 米,

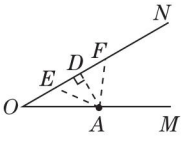
又易证 $\triangle ADE\cong\triangle ADF$,可得 $DF=DE=30$ 米,

即 $EF=60$ 米,

又拖拉机的速度为 18 千米/时,

故拖拉机经过 EF 段所用的时间为 $\frac{0.06}{18}\times 3\,600=12$(秒).

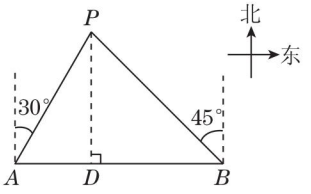
即受影响的时间为 12 秒.



(第 11 题)

12. **解**:如图,过点 P 作 $PD\perp AB$,垂足为 D,

由题意可得 $\angle APD=30°$,$\angle BPD=45°$.



(第 12 题)

设 $AD=x$ 千米,则在 $\mathrm{Rt}\triangle APD$ 中,$AP=2x$ 千米,

∴ $PD=\sqrt{3}x$ 千米,

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBD$ 中,$BD=PD=\sqrt{3}x$ 千米,

又∵ $AD+BD=AB=100$ 千米,

∴ $x+\sqrt{3}x=100$,

∴ $x=50(\sqrt{3}-1)$,

∴ $PD=50(3-\sqrt{3})\approx 63.4$(千米) >50 千米,

∴ 计划修筑的这条高等级公路不会穿越森林保护区.

13. **解**:过 C 作 $CD\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 D,

由已知得,$AB=100$ 海里,$\angle BAC=\angle BCD=30°$,$\angle ACD=60°$,

∴ $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD=30°$,

∴ $\angle BAC=\angle ACB$,

∴ $BC=AB=100$ 海里.

又∵ $CD\perp AD$,

∴ $BD=\frac{1}{2}BC=50$ 海里,

∴ $DC=\sqrt{BC^2-BD^2}=50\sqrt{3}$ 海里.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$AC=2CD=100\sqrt{3}$ 海里,

∴ "救助一号"赶到 C 处所用时间 $t_1=\frac{AC}{40}=\frac{5}{2}\sqrt{3}\approx 4.25$(小时),

"救助二号"赶到 C 处所用时间 $t_2=\frac{BC}{30}=\frac{10}{3}$(小时).

∵ $\frac{10}{3}<4.25$,

∴ 搜救中心应派"救助二号"救助轮才能尽早赶到 C 处救援.

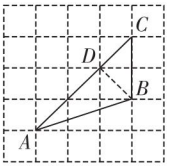
24.3 锐角三角函数

【两年模拟兵法】

1. A

2. B **点拨**:由折叠可知,$C'D=CD$,$\angle C'=\angle C=90°$根据在直角三角形中,如果一条直角边等于斜边的一半,那么这条直角边所对的锐角等于 30°,由特殊角的三角函数值选择答案.

3. D **点拨**:如图,连结 BD,易知 $\angle ADB=90°$,$AD=2\sqrt{2}$,$BD=\sqrt{2}$,∴ $\tan A=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$. 故答案是 D.

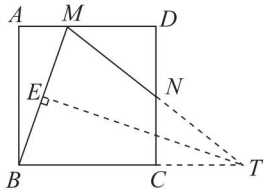


(第 3 题)

4. B **5.** B **6.** A **7.** A

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 解:如图,延长 BC,MN,两者交于点 T.



(第 8 题)

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1,$DM=k$,

则 $AM=1-k$.

$\therefore BM^2=1^2+(1-k)^2=k^2-2k+2$.

由 N 是 DC 的中点,

易证得 $\triangle MND\cong\triangle TNC$,

$\therefore CT=DM=k$,$\therefore BT=1+k$.

$\because \angle NMB=\angle MBC$,

$\therefore TB=TM$.

过点 T 作 $TE\perp MB$ 于点 E,

$\therefore EB=EM=\frac{1}{2}MB$.

易知 $\angle ETB=\angle ABM$,

又$\because \angle BET=\angle A=90°$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ETB\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABM$.

$\therefore \frac{BT}{MB}=\frac{EB}{AM}=\frac{\frac{1}{2}MB}{AM}$,

$\therefore MB^2=2AM\cdot BT=2(1-k)(1+k)$.

于是 $k^2-2k+2=2-2k^2$,解得 $k=0$(舍去)或 $k=\frac{2}{3}$.

当 $DM=k=\frac{2}{3}$,即 $AM=\frac{1}{3}$ 时,

$\tan\angle ABM=\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$.

9. 解:(1)过点 A 作 $AD\perp x$ 轴,垂足为点 D,

则 $OD=OA\cdot\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$,

$AD=OA\cdot\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,

故点 A 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$.

(2)设直线 AB 对应的函数解析式为 $y=kx+b$,

$\because$ 直线过 $A(1,\sqrt{3})$ 和 $B(3,0)$ 两点,

则有 $\begin{cases}k+b=\sqrt{3},\\3k+b=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{3}{2}\sqrt{3},\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 对应的函数解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

令 $x=0$,得 $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

$\therefore OC=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times1=\frac{3}{4}\sqrt{3}$,

点拨:过点 A 作 x 轴的垂线是求点 A 的坐标及 $\triangle AOC$ 面积的重要步骤,本题也可过点 A 作 y 轴的垂线.

10. 解:(1)$\because \tan\angle AOC=\frac{AC}{OC}=\frac{3}{2}$,$OC=2$,

$\therefore AC=3$.$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,3)$.

$\because$ 点 $A(2,3)$ 在 $y_2=\frac{k}{x}$ 上,

$\therefore 3=\frac{k}{2}$.$\therefore k=6$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{6}{x}$.

当 $y_2=-2$ 时,$m=\frac{6}{-2}=-3$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-3,-2)$.

将点 A,B 的坐标代入 $y_1=ax+b$ 得

$\begin{cases}2a+b=3,\\-3a+b=-2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y_1=x+1$.

(2)当 $y_1>y_2$ 时,x 的取值范围是 $x>2$ 或 $-3<x<0$.

24.4 解直角三角形

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:**在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\therefore\cos A=\frac{AC}{AB}$,即 $\cos72°=\frac{AC}{10}$,$\therefore AC=10\cdot\cos72°\approx3.1$.

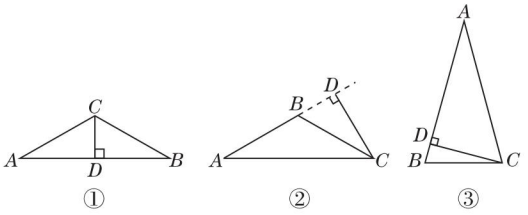
2. B

3. B

4. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $4\sqrt{3}$ 或 4 **点拨:**本题运用数形结合思想和分类讨论思想解题,如图①,当 $\angle A=\angle B=30°$ 时,$AD=\frac{1}{2}AB=4$,$\therefore CD=4\times\tan30°=\frac{4}{3}\sqrt{3}$;如图②,当 $\angle A=\angle ACB=30°$ 时,$BC=AB=8$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle CBD=60°$,$\therefore CD=8\sin 60°=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$;如图③,当$\angle A=30°$,$AB=AC=8$时,$CD=\frac{1}{2}AC=4$,本题易因只考虑一种情况而漏解.



(第4题)

5. $\sqrt{3}$ **6.** 24.1 **7.** $\frac{125}{48}$

8. **解:**$\because$ $\triangle ABD$是等边三角形,

$\therefore \angle B=60°$.

在Rt$\triangle ABC$中,$\cos B=\frac{AB}{BC}$,$\tan B=\frac{AC}{AB}$,

$\therefore BC=\frac{AB}{\cos B}=\frac{2}{\cos 60°}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$,

$AC=AB\cdot\tan B=2\tan 60°=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ $\triangle ABC$的周长为$AB+BC+AC=2+4+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$.

9. **解:**在Rt$\triangle ABC$中,

$\because AB=600$ m,$\alpha=75°$,

$\therefore BC=AB\cdot\cos 75°\approx 600\times 0.26=156$(m),

在Rt$\triangle BDF$中,

$\because \beta=45°$,

$\therefore DF=BD\cdot\sin 45°=600\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 300\times 1.41=423$(m),

由题易知四边形$BCEF$是矩形,

$\therefore EF=BC\approx 156$ m,

$\therefore DE=DF+EF\approx 423+156=579$(m).

故DE的长约为579 m.

点拨:本题考查解直角三角形的应用,锐角三角函数,矩形的性质等知识,解题的关键是学会利用直角三角形解决问题,属于中考常考题型.

10. **解:**(1)由题意,得$AB=60$,$\angle BCA=60°$,

$\angle BAC=90°$,

在Rt$\triangle ABC$中,$\tan\angle BCA=\frac{AB}{AC}=\tan 60°=\sqrt{3}$,

$\therefore AC=\frac{60}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$.

答:坡底C点到大楼距离AC的值为$20\sqrt{3}$米;

(2)过点D作$DF\perp AB$,垂足为F,

设$DE=x$,在Rt$\triangle CDE$中,$\angle DCE=30°$,

则$CE=\sqrt{3}x$,$CD=2x$,

由题意得,$AE=DF=AC+CE=20\sqrt{3}+\sqrt{3}x$,

$AF=DE=x$,

在Rt$\triangle BDF$中,$\angle BDF=45°$,则有$BF=DF=20\sqrt{3}+\sqrt{3}x$.

由于$AB=60$,由题意,得$60=20\sqrt{3}+\sqrt{3}x+x$,

解这个方程得$x=40\sqrt{3}-60$,则$CD=2x=80\sqrt{3}-120$.

答:斜坡CD的长度为$(80\sqrt{3}-120)$米.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解:**如图,过点A作$AD\perp BC$,垂足为点D.

设$BD=x$,在Rt$\triangle ABD$中,

$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$.

在Rt$\triangle ACD$中,$\because \angle C=45°$,

$\therefore \angle CAD=90°-\angle C=45°$,

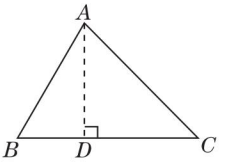
$\therefore \angle C=\angle CAD$,$\therefore CD=AD=\sqrt{3}x$.

$\because BC=1+\sqrt{3}$,$\therefore \sqrt{3}x+x=1+\sqrt{3}$,

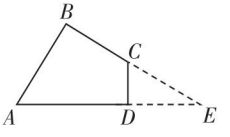
解得$x=1$,即$BD=1$.

在Rt$\triangle ABD$中,$\because \cos B=\frac{BD}{AB}$,

$\therefore AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{1}{\cos 60°}=2$.



(第1题)



(第2题)

2. **解:**如图,延长AD,BC交于点E.

$\because \angle A=60°$,$\angle B=90°$,

$\therefore \angle E=30°$.

在Rt$\triangle ABE$中,$\tan A=\frac{BE}{AB}$,$BE=AB\cdot\tan A=4\sqrt{3}$,

$AE=2AB=8$,

$\therefore DE=AE-AD=8-5=3$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

易得 $CD=\sqrt{3}$.

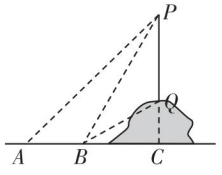
$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}CD\cdot DE$

$=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3$

$=\frac{13}{2}\sqrt{3}$.

3. 解: 如图,延长 PQ 交直线 AB 于点 C.



(第 3 题)

(1) $\angle BPQ=90°-60°=30°$.

(2) 设 $PQ=x$ m,则易知 $QB=QP=x$ m,

在 Rt$\triangle BCQ$ 中,$BC=x\cdot\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}x$(m),$QC=\frac{1}{2}x$ m,

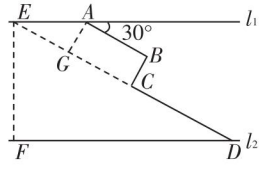
在 Rt$\triangle ACP$ 中,易得 $CA=CP$,

$\therefore 6+\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{2}x+x$,

$\therefore x=2\sqrt{3}+6$,$\therefore PQ=2\sqrt{3}+6\approx9$(m),

即该电线杆 PQ 的高度约为 9 m.

4. 解: 如图,延长 DC 交 l_1 于点 E,过点 A 作 $AG\perp DE$ 于点 G,过点 E 作 $EF\perp l_2$ 于点 F.



(第 4 题)

则四边形 $AGCB$ 是矩形,

$\therefore GC=AB=20$ km,$AG=BC=10$ km.

由 $AB/\!/DE$,得 $\angle AEG=30°$,

$\therefore EG=\sqrt{3}AG=10\sqrt{3}$ km.

$\therefore DE=EG+GC+CD$

$=10\sqrt{3}+20+30$

$=50+10\sqrt{3}$(km).

$\because l_1/\!/l_2$,$\therefore \angle EDF=\angle AEG=30°$,

$\therefore EF=\frac{1}{2}ED=(25+5\sqrt{3})$ km.

$\therefore$ 两条高速公路之间的距离为$(25+5\sqrt{3})$ km.

5. 解: 在 Rt$\triangle ABE$ 中,$\angle BEA=90°$,$\angle BAE=45°$,$BE=20$ 米,$\therefore AE=20$ 米.

在 Rt$\triangle BEF$ 中,$\angle BEF=90°$,$\angle F=30°$,$BE=20$ 米,

$\therefore EF=\frac{BE}{\tan30°}=\frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=20\sqrt{3}$(米).

$\therefore AF=EF-AE=20\sqrt{3}-20\approx20\times1.732-20=14.64\approx15$(米).

即 AF 的长度约是 15 米.

6. 解: 如图,作 $CH\perp AD$ 于点 H. 设 $CH=x$ km,

在 Rt$\triangle ACH$ 中,$\angle A=37°$,$\therefore \tan37°=\frac{CH}{AH}$,

$\therefore AH=\frac{CH}{\tan37°}=\frac{x}{\tan37°}$ km.

在 Rt$\triangle CEH$ 中,$\because \angle CEH=45°$,

$\therefore CH=EH=x$ km.

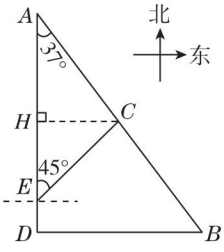
$\because CH\perp AD$,$BD\perp AD$,$\therefore CH/\!/BD$,$\therefore \frac{AH}{HD}=\frac{AC}{CB}$.

$\because AC=CB$,$\therefore AH=HD$.

$\therefore \frac{x}{\tan37°}=x+5$. $\therefore x\approx15$.

$\therefore AE=AH+HE\approx\frac{15}{\tan37°}+15\approx35$(km),

$\therefore E$ 处距离港口 A 约 35 km.



(第 6 题)

【第 24 章测试卷】

一、**1.** C **2.** A **3.** A **4.** D **5.** C **6.** B **7.** D **8.** A

二、**9.** $3\sqrt{7}$ **10.** 5 **11.** $(9+3\sqrt{3})$ **12.** $\frac{1}{3}$

三、**13. 解:** 原式 $=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-|\sqrt{3}-2|-1+4$

$=1-(2-\sqrt{3})-1+4$

$=\sqrt{3}+2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解:(1)根据题意,得 $BD/\!/AE$,

$\therefore \angle ADB=\angle EAD=45°$.

$\because \angle ABD=90°$,

$\therefore \angle BAD=\angle ADB=45°$,

$\therefore BD=AB=60$ 米.

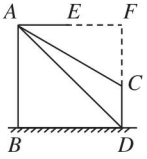
故两建筑物底部之间水平距离 BD 为 60 米.

(2)如图,延长 AE,DC 交于点 F.

根据题意,得四边形 $ABDF$ 为正方形,

$\therefore AF=BD=DF=60$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFC$ 中,$\angle FAC=30°$,



(第 14 题)

$\therefore CF=AF\cdot\tan\angle FAC=60\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3}$(米).

又$\because FD=60$ 米,

$\therefore CD=FD-FC=60-20\sqrt{3}$(米).

故建筑物 CD 的高度为$(60-20\sqrt{3})$米.

15. 解:在 $\triangle ABE$ 中,$AE\perp BC$,$AB=5$,$\sin B=\dfrac{4}{5}$,

$\therefore BE=3$,$AE=4$.

$\therefore EC=BC-BE=8-3=5$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore CD=AB=5$. $\therefore CD=EC$.

$\therefore \triangle CED$ 为等腰三角形.

$\therefore \angle CDE=\angle CED$.

$\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle ADE=\angle CED$.

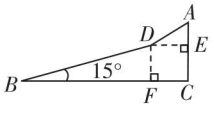
$\therefore \angle CDE=\angle ADE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,$AE=4$,$AD=BC=8$,

$\therefore \tan\angle ADE=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \tan\angle CDE=\dfrac{1}{2}$.

16. 解:如图,过 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F,$DE\perp AC$ 于点 E.



(第 16 题)

$\because$ 沿坡比为 1:$\sqrt{3}$的坡面以 3 千米/时的速度到达山顶 A 点,

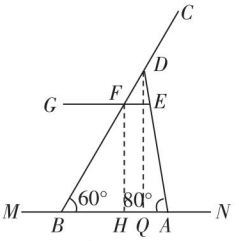
$\therefore \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. $\therefore \angle ADE=30°$.

$\because BD=\dfrac{10}{60}\times5=\dfrac{5}{6}$(千米),$AD=\dfrac{5}{60}\times3=\dfrac{1}{4}$(千米),

$\therefore AC=AE+EC=AE+DF=AD\sin30°+BD\sin15°\approx\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\times0.258\,8\approx0.34$(千米).

答:小山坡的高约为 0.34 千米.

17. 解:如图,作 $FH\perp AB$ 于 H,$DQ\perp AB$ 于 Q,则 $FH=42$ cm,



(第 17 题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFH$ 中,$\because \sin\angle FBH=\dfrac{FH}{BF}$,

$\therefore BF=\dfrac{42}{\sin60°}\approx48.28$(cm).

$\therefore BC=BF+CF\approx48.28+42\approx90.3$(cm).

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDQ$ 中,

$\because \tan\angle DBQ=\dfrac{DQ}{BQ}$,$\therefore BQ=\dfrac{DQ}{\tan60°}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADQ$ 中,

$\because \tan\angle DAQ=\dfrac{DQ}{AQ}$,$\therefore AQ=\dfrac{DQ}{\tan80°}$.

$\because BQ+AQ=AB=43$ cm,

$\therefore \dfrac{DQ}{\tan60°}+\dfrac{DQ}{\tan80°}=43$ cm,

$\therefore DQ\approx56.999$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADQ$ 中,$\because \sin\angle DAQ=\dfrac{DQ}{AD}$,

$\therefore AD\approx\dfrac{56.999}{\sin80°}\approx58.2$(cm).

答:两根较粗钢管 AD 和 BC 的长分别约为 58.2 cm、90.3 cm.

第25章 随机事件的概率

25.1 在重复试验中观察不确定现象

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. D　**点拨：**A. 甲乙两组学生身高的平均数均为1.58，方差分别为$S_{甲}^2=2.3$，$S_{乙}^2=1.8$，则乙组学生的身高较整齐，故此选项错误；

B. 为了了解某县七年级4 000名学生的期中数学成绩，从中抽取100名学生的数学成绩进行调查，这个问题中样本容量为100，故此选项错误；

C. 在“童心向党，阳光下成长”合唱比赛中，30个参赛队的决赛成绩如下表：

比赛成绩/分	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9
参赛队个数	9	8	6	4	3

则这30个参赛队决赛成绩的中位数是9.6，故此选项错误；

D. 有13名同学出生于2003年，那么在这个问题中“至少有两名同学出生在同一个月”属于必然事件，正确.

4. **解：**必然事件：(1)(4)(5)(7)；

不可能事件：(2)(3)(6)；

随机事件：(8).

5. **解：**摸出黄球的机会最大.

∵ 黄球有20－4－2－3＝11(个)，数量最多，

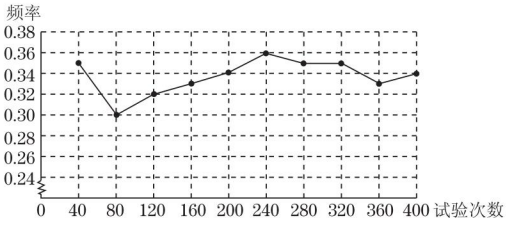
∴ 摸出黄球的机会最大.

6. **解：**(1)0.30；0.36

(2)绘制折线统计图如图.

(3)观察折线统计图可以发现，随着试验次数的增加，摸出黄球的频率逐渐稳定.

(4)观察折线统计图可知，摸出黄球的频率逐渐稳定在0.34附近，故估计从该盒中摸出1个球是黄球的机会为34%.



(第6题)

25.2　随机事件的概率

25.2.1　概率及其意义

【两年模拟兵法】

1. A　**2.** D　**3.** C　**4.** C　**5.** A

6. C　**点拨：**A. 本次抽样测试的学生人数是12÷30%＝40(人)，故选此项正确，不合题意；

B. ∵ $\frac{40-8-12-6}{40}\times360°=126°$，$\angle\alpha$的度数是126°，故此选项正确，不合题意；

C. 该校九年级有学生500名，估计D级的人数为$500\times\frac{6}{40}=75$(人)，故此选项错误，符合题意；

D. 从被测学生中随机抽取一位，则这位学生的成绩是A级的概率为$\frac{8}{40}=0.2$，故此选项正确，不合题意；

故选C.

7. C　**点拨：**有①与②，①与③，①与④，②与③，②与④，③与④六种情况，

①与④根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形，能推出四边形$ABCD$是平行四边形；

①与③根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，能推出四边形$ABCD$是平行四边形；

①与②，②与④根据对角线互相平分的四边形是平行四边形，能推出四边形$ABCD$是平行四边形；

∴ 能推出四边形$ABCD$是平行四边形的有4组，

∴ 能推出四边形$ABCD$是平行四边形的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. 故选C.

8. B

9. C

10. **解：**(1)$290\times\frac{1}{29}=10$(个)，

290－10＝280(个)，

(280－40)÷(2＋1)＝80(个)，

280－80＝200(个)，

故袋中红球的个数是200个.

(2)$80\div290=\frac{8}{29}$.

故从袋中任取一个球是黑球的概率是$\frac{8}{29}$.

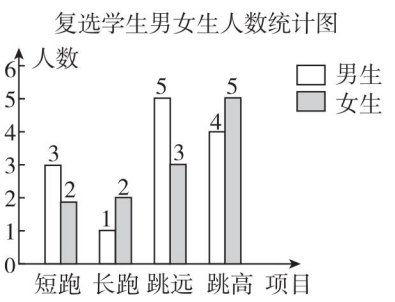
11. **解：**(1)25；72°

(2)长跑项目的男生人数为25×12%－2＝1(人)，

跳高项目的女生人数为25－3－2－1－2－5－3－4＝5(人)，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

补全条形统计图如下图:



(第11题)

(3)∵ 复选中的跳高项目总人数为4+5=9(人),

跳高项目中的男生共有4人,

∴ 跳高项目中男生被选中的概率=$\frac{4}{9}$.

12. **解:**∵ 不等式组$\begin{cases}k-3\leqslant 0,\\2k+5>0\end{cases}$的解集为$-\frac{5}{2}<k\leqslant 3$,

∴ 其整数解为$k=-2,-1,0,1,2,3$,

其中,当$k=-2,-1$时,方程$2x+k=-1$的解为非负数,

∴ 所求概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

13. **解:**(1)转盘被平均分成6等份,转到每个数字的机会相等,共有6种等可能结果,大于3的结果有4种,

∴ 转出的数字大于3的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$;

(2)①转盘被平均分成6等份,转到每个数字的机会相等,共有6种等可能结果,能构成三角形的结果有5种,

∴ 这三条线段能构成三角形的概率是$\frac{5}{6}$;

②转盘被平均分成6等份,转到每个数字的机会相等,共有6种等可能结果,能构成等腰三角形的结果有2种,

∴ 这三条线段能构成等腰三角形的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

25.2.2 频率与概率

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D **3.** 0.9

4. (1)0.9 0.9

(2)①4.5

②设还需移植这种树苗x万棵,

根据题意,得$(x+5)\times 0.9=18$,解得$x=15$.

故还需移植这种树苗约15万棵.

5. (1)从左到右依次填:0.25;0.33;0.28;0.33;0.32;0.30;0.28;0.31;0.31;0.31.

(2)随着试验次数的增加,频率稳定在0.31附近.

(3)从试验数据看,从盒中摸出一张卡片是3的倍数的概率约是0.31.

(4)盒中共有20张卡片,上面的数字是3的倍数的有6张,

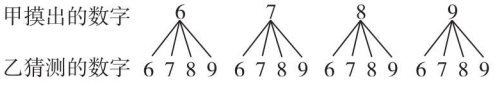
∴ 从盒中摸出一张卡片是3的倍数的概率应该是$6\div 20=0.3$.

25.2.3 列举所有机会均等的结果

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨:**画树状图如下:



(第2题)

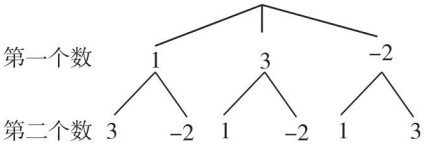
由树状图可知,共有16种等可能结果,其中满足$|m-n|\leqslant 1$的有10种结果,

∴ 两人"心领神会"的概率是$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

故选B.

3. C **4.** D **5.** A **6.** A

7. **解:**(1)画树状图得:



(第7题)

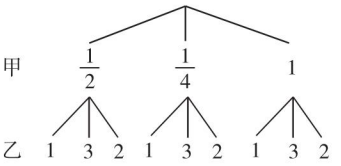
∴ 所有可能的坐标为(1,3);(1,-2);(3,1);(3,-2);(-2,1);(-2,3);

(2)∵ 共有6种等可能的结果,其中(1,3),(3,1)在第一象限,

∴ 该点在第一象限的概率$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 解:(1)画树状图如下:



(第 8 题)

由图可知,共有 9 种等可能的结果.

(2)不公平. ∵ (a,b) 的可能结果有 $\left(\frac{1}{2},1\right)$、$\left(\frac{1}{2},3\right)$、$\left(\frac{1}{2},2\right)$、$\left(\frac{1}{4},1\right)$、$\left(\frac{1}{4},3\right)$、$\left(\frac{1}{4},2\right)$、$(1,1)$、$(1,3)$及$(1,2)$,

∴ 当 $a=\frac{1}{2}$,$b=1$ 时,$\Delta=b^2-4ac=-1<0$,

此时 $ax^2+bx+1=0$ 无实数根,

当 $a=\frac{1}{2}$,$b=3$ 时,$\Delta=b^2-4ac=7>0$,

此时$ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根,

当 $a=\frac{1}{2}$,$b=2$ 时,$\Delta=b^2-4ac=2>0$,

此时$ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根,

当 $a=\frac{1}{4}$,$b=1$ 时,$\Delta=b^2-4ac=0$,

此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个相等的实数根,

当 $a=\frac{1}{4}$,$b=3$ 时,$\Delta=b^2-4ac=8>0$,

此时$ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根,

当 $a=\frac{1}{4}$,$b=2$ 时,$\Delta=b^2-4ac=3>0$,

此时$ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根,

当 $a=1$,$b=1$ 时,$\Delta=b^2-4ac=-3<0$,

此时$ax^2+bx+1=0$ 无实数根,

当 $a=1$,$b=3$ 时,$\Delta=b^2-4ac=5>0$,

此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个不等的实数根,

当 $a=1$,$b=2$ 时,$\Delta=b^2-4ac=0$,

此时 $ax^2+bx+1=0$ 有两个相等的实数根,

∴ P(甲获胜)$=P(\Delta>0)=\frac{5}{9}$,

P(乙获胜)$=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$,

∴ P(甲获胜)$>P$(乙获胜).

∴ 这样的游戏规则对甲有利,不公平.

9. 解:(1)米粒落在阴影部分的概率是$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;

(2)列表:

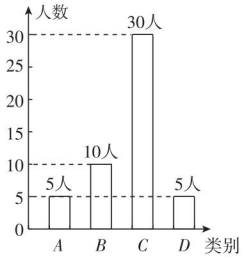
第一次 \ 第二次	A	B	C	D	E	F
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)	(A,F)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)	(B,E)	(B,F)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)	(C,E)	(C,F)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)		(D,E)	(D,F)
E	(E,A)	(E,B)	(E,C)	(E,D)		(E,F)
F	(F,A)	(F,B)	(F,C)	(F,D)	(F,E)	

共有 30 种等可能的情况,其中新图案是轴对称图形的有 10 种,

故新图案是轴对称图形的概率为$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

10. 解:(1)50;216°

(2)如图.



(第 10 题)

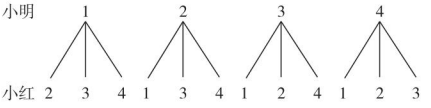
(3)180

(4)列表如下:

第二次 \ 第一次	男 1	男 2	女 1	女 2	女 3
男 1		男 2 男 1	女 1 男 1	女 2 男 1	女 3 男 1
男 2	男 1 男 2		女 1 男 2	女 2 男 2	女 3 男 2
女 1	男 1 女 1	男 2 女 1		女 2 女 1	女 3 女 1
女 2	男 1 女 2	男 2 女 2	女 1 女 2		女 3 女 2
女 3	男 1 女 3	男 2 女 3	女 1 女 3	女 2 女 3	

被抽到的两个学生性别相同的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

11. 解:(1)根据题意,可以画出如下的树状图:



(第 11 题)

由树状图可以看出,点 Q 所有可能的坐标共有 12 个,即$(1,2)$,$(1,3)$,$(1,4)$,$(2,1)$,$(2,3)$,$(2,4)$,$(3,1)$,$(3,2)$,$(3,4)$,$(4,1)$,$(4,2)$,$(4,3)$.

(2)∵ 共有 12 种等可能的结果,其中点 Q 在直

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

线 $y=-x+5$ 上的结果有 4 种,即(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),

∴点 $Q(x,y)$ 在直线 $y=-x+5$ 上的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

(3)这个游戏不公平.

理由:∵满足 $xy>6$ 的结果有 4 种,即(2,4),(3,4),(4,2),(4,3),满足 $xy<6$ 的结果有 6 种,即(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(3,1),(4,1),∴ P(小明胜)$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,

P(小红胜)$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,

∵ $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}$,

∴这个游戏不公平.

公平的游戏规则为若 x,y 满足 $xy\geqslant 6$,则小明胜;若 x,y 满足 $xy<6$,则小红胜.(游戏规则不唯一)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)由①,得 $x>-2$;由②,得 $x\leqslant 2$,

∴原不等式组的解集为 $-2<x\leqslant 2$,

∴原不等式组的所有整数解为 $-1,0,1,2$.

(2)列表如下:

第一次 / 第二次 / 积	−1	0	1	2
−1		0	−1	−2
0	0		0	0
1	−1	0		2
2	−2	0	2	

由上表可知,共有 12 种等可能的结果,其中积为正数的结果有 2 种,

∴ P(积为正数)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. 解:(1) P(摸到标号数字为奇数的小球)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)列表如下:

甲 / 乙	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

由表可知,共有 36 种等可能的结果,其中摸到小球的标号数字同为奇数或同为偶数的结果有 18 种,摸到小球的标号数字为一奇一偶的结果有 18 种.

∴ P(甲赢)$=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$, P(乙赢)$=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$. ∴这个游戏对甲、乙两人是公平的.

3. 解:(1)三辆车开来的先后顺序有 6 种不同的可能:(上,中,下)、(上,下,中)、(中,上,下)、(中,下,上)、(下,中,上)、(下,上,中).

(2)乙采用的方案使自己乘坐上等车的机会大.

理由:假定 6 种顺序出现的机会相同.我们来研究在各种顺序之下,甲、乙两人分别会上哪一辆汽车:

来车顺序	甲上的车	乙上的车
(上,中,下)	上	下
(上,下,中)	上	中
(中,上,下)	中	上
(中,下,上)	中	上
(下,上,中)	下	上
(下,中,上)	下	中

由表不难看出:甲乘坐上、中、下等车的概率都是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,而乙乘坐上等车的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$,

∴乙采用的方案使自己乘坐上等车的机会大.

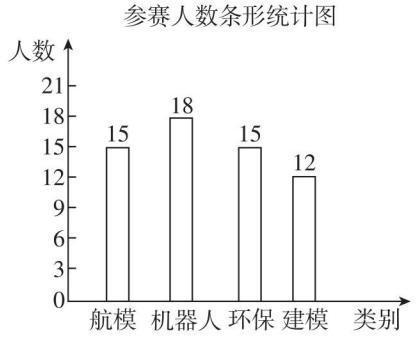
4. 解:(1)60;72°

(2)“环保”类人数为 $60\times 25\%=15$(人),

“建模”类人数为 $60-15-18-15=12$(人),补

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全条形统计图如下.



(第4(2)题)

(3)画树状图如下.



(第4(3)题)

由树状图可知,可能出现的结果有6种,而且每种结果出现的机会相同,其中两人恰为1男生1女生的结果有3种,∴ 所求的概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

【第25章测试卷】

一、**1**. C **2**. C **3**. A **4**. A **5**. C **6**. D **7**. D **8**. A

二、**9**. 10 **10**. $\frac{4}{5}$ **11**. $\frac{1}{3}$ **12**. $\frac{1}{8}$

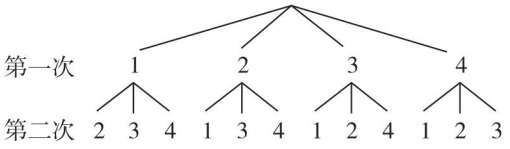
三、**13**. **解**:(1)当 $n=7$ 或8或9时,这个事件必然发生.

(2)当 $n=1$ 或2时,这个事件不可能发生.

(3)当 $n=3$ 或4或5或6时,这个事件可能发生.

14. **解**:(1)0

(2)画树状图如下:

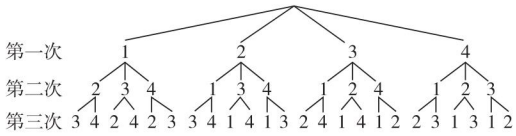


(第14题)

∴ 共有12种等可能的结果,其中恰好关掉第一排和第三排灯有2种情况,

故 P(恰好关掉第一排和第三排灯)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

15. **解**:(1)树状图如下图:



(第15题)

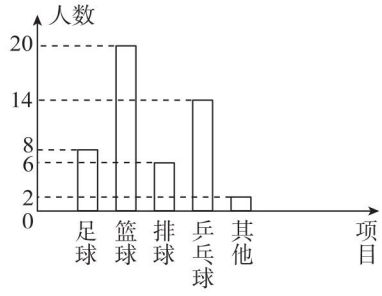
所有可能得到的三位数有24个,分别为123,124,132,134,142,143,213,214,231,234,241,243,312,314,321,324,341,342,412,413,421,423,431,432.

(2)这个游戏不公平.

理由如下:组成的三位数中是"伞数"的有132,142,143,231,241,243,341,342,共8个,

∴ 甲胜的概率为 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$,乙胜的概率为 $\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$,故这个游戏不公平.

16. **解**:(1)所调查的总人数为:$20\div40\%=50$(人),最喜欢乒乓球的学生有 $50-8-20-6-2=14$(人),最喜欢乒乓球的学生所占的百分比为 $14\div50=28\%$. 补全条形统计图如下图:



(第16(1)题)

(2)估计全校500名学生中最喜欢"排球"项目的有 $500\times12\%=60$(名);

(3)"篮球"部分所对应的圆心角是 $360°\times40\%=144°$;

(4)画树状图为:



(第16(4)题)

一共有12种等可能情况,抽取的两人恰好为甲、乙两人的共有2种情况,所以抽取的两人恰好是甲和乙的概率是 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第21章 二次根式

21.1 二次根式

练习:

1. 解:(1)$(\sqrt{8})^2=8$.

(2)$(\sqrt{9})^2=9$.

(3)$\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$.

(4)$\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$.

点拨:本题主要应用$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$和$\sqrt{a^2}=|a|$来解题.

2. 解:(1)由题意,得$x+3\geqslant 0$,得$x\geqslant -3$,

∴ 当$x\geqslant -3$时,$\sqrt{x+3}$有意义.

(2)由题意,得$2x-5\geqslant 0$,得$x\geqslant \frac{5}{2}$,

∴ 当$x\geqslant \frac{5}{2}$时,$\sqrt{2x-5}$有意义.

(3)由题意,得$\frac{1}{x}\geqslant 0$且$x\neq 0$,得$x>0$,

∴ 当$x>0$时,$\sqrt{\frac{1}{x}}$有意义.

(4)由题意,得$\frac{5}{1-x}\geqslant 0$且$1-x\neq 0$,得$x<1$,

∴ 当$x<1$时,$\sqrt{\frac{5}{1-x}}$有意义.

3. 解:不一样. 理由:

∵ $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$,而$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0),\end{cases}$

∴ $(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$不一样.

习题21.1:

1. 解:(1)由题意,得$x+1\geqslant 0$,得$x\geqslant -1$,

∴ 当$x\geqslant -1$时,$\sqrt{x+1}$有意义.

(2)由题意,得$3x-2\geqslant 0$,得$x\geqslant \frac{2}{3}$,

∴ 当$x\geqslant \frac{2}{3}$时,$\sqrt{3x-2}$有意义.

(3)由题意,得$\frac{3}{2x+1}\geqslant 0$且$2x+1\neq 0$,得$x>-\frac{1}{2}$,

∴ 当$x>-\frac{1}{2}$时,$\sqrt{\frac{3}{2x+1}}$有意义.

(4)由题意,得$\frac{1}{3-2x}\geqslant 0$且$3-2x\neq 0$,得$x<\frac{3}{2}$,

∴ 当$x<\frac{3}{2}$时,$\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$有意义.

2. 解:(1)$(\sqrt{7})^2=7$.

(2)$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$.

(3)$\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$.

(4)$\sqrt{9a^4}=\sqrt{(3a^2)^2}=3a^2$.

点拨:应用$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$及$\sqrt{a^2}=|a|$来解此类题.

3. 解:∵ $2<x<3$,

∴ $0<x-2<1$,$-1<x-3<0$.

∴ $\sqrt{(x-2)^2}+|x-3|=x-2+3-x=1$.

点拨:注意x的取值范围:$2<x<3$.

21.2 二次根式的乘除

练习:

1. 解:(1)$\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

(2)$\sqrt{200}=\sqrt{100\times 2}=\sqrt{100}\times\sqrt{2}=10\sqrt{2}$.

(3)$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(4)$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

2. 解:(1)$\sqrt{21}\times\sqrt{35}=\sqrt{21\times 35}=\sqrt{49\times 15}=7\sqrt{15}$.

(2)$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{8}{20}}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times 5}{5\times 5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

3. 解:剪下的正方形的边长是$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(m),$\frac{\sqrt{2}}{2}$ m≈ 0.71 m.

∴ 剪下的正方形边长约是0.71 m.

习题21.2:

1. 解:(1)$\sqrt{250}=\sqrt{25\times 10}=\sqrt{25}\times\sqrt{10}=5\sqrt{10}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\sqrt{54}=\sqrt{9\times6}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$.

(3) $\frac{14}{\sqrt{7}}=\frac{14\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=2\sqrt{7}$.

(4) $\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

2. 解: (1) $\sqrt{18}\times\sqrt{30}=\sqrt{18\times30}=\sqrt{36\times15}=\sqrt{36}\times\sqrt{15}=6\sqrt{15}$.

(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{2}{75}}=\sqrt{3\times\frac{2}{75}}=\sqrt{\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

(3) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{98}}=\frac{\sqrt{4}\times\sqrt{10}}{\sqrt{49}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{10}}{7\sqrt{2}}=\frac{2}{7}\sqrt{\frac{10}{2}}=\frac{2}{7}\sqrt{5}$.

(4) $\frac{\sqrt{20}-1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{20\times5}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{10-\sqrt{5}}{5}=2-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. 解: 设该液晶显示屏的长为 $4k$ cm,宽为 $3k$ cm,其中 $k>0$,

则 $(4k)^2+(3k)^2=36^2$,

整理得 $25k^2=36^2$,即 $k=\sqrt{\frac{36^2}{25}}=\frac{36}{5}$,

$4\times\frac{36}{5}=\frac{144}{5}$(cm),$3\times\frac{36}{5}=\frac{108}{5}$(cm).

答: 该液晶显示屏的长为 $\frac{144}{5}$ cm,宽为 $\frac{108}{5}$ cm.

21.3 二次根式的加减

练习:

1. 解: (1) $2\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$=\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

(2) $5\sqrt{3}-3\sqrt{75}$

$=5\sqrt{3}-3\sqrt{25\times3}$

$=5\sqrt{3}-15\sqrt{3}$

$=-10\sqrt{3}$.

点拨: 二次根式相加减,先把各个二次根式化简,再将同类二次根式合并.

2. 解: (1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=3-2$

$=1$.

(2) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=5-2\sqrt{6}$.

点拨: 乘法公式对二次根式的运算同样适用.

习题 21.3:

1. 解: (1) $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-4\sqrt{2}$

$=(3\sqrt{5}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}+4\sqrt{2})$

$=4\sqrt{5}-5\sqrt{2}$.

(2) $2\sqrt{75}-3\sqrt{27}+\sqrt{12}$

$=10\sqrt{3}-9\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{72}+\sqrt{18}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$=6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$=9\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

(4) $2\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{24}$

$=2\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}-3\sqrt{\frac{3\times2}{2\times2}}+\sqrt{4\times6}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{3\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{6}$

$=\frac{7}{6}\sqrt{6}$.

点拨: 二次根式相加减,先把各个二次根式化简,再将同类二次根式合并.

2. 解: (1) $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$

$=1^2-(\sqrt{3})^2$

$=1-3$

$=-2$.

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$=5+2\sqrt{6}$.

(3) $(2\sqrt{5}-3)(3\sqrt{5}+2)$

$=2\times3\times(\sqrt{5})^2+4\sqrt{5}-9\sqrt{5}-6$

$=24-5\sqrt{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)$(3\sqrt{2}-2)^2$

$=18-12\sqrt{2}+4$

$=22-12\sqrt{2}$.

3. 解:由题图可知该正方形的对角线恰为圆的直径,故设该正方形的边长是 x cm,

则有 $x^2+x^2=20^2$,得 $x^2=200$,

即 $x=-10\sqrt{2}$(不合题意,舍去)或 $x=10\sqrt{2}\approx14.14$,

$4\times14.14\approx56.6$(cm).

答:这根铁丝的长度约是 56.6 cm.

点拨:通过观察题图,得出该正方形的对角线恰为圆的直径为解此题的关键.

复习题

A 组:

1. 解:(1)$\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\sqrt{10}$.

(2)$\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

(3)$\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(4)$\sqrt{52}+2\sqrt{13}$

$=2\sqrt{13}+2\sqrt{13}$

$=4\sqrt{13}$.

(5)$\dfrac{5\sqrt{24}}{2}-3\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$=\dfrac{10\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}$

$=5\sqrt{6}-\sqrt{6}$

$=4\sqrt{6}$.

(6)$(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{12}\times\sqrt{3}+5\sqrt{8}\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{36}+5\sqrt{24}$

$=6+10\sqrt{6}$.

(7)$\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=2-\sqrt{2}$.

(8)$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{9}$

$=\dfrac{19}{36}$.

2. 解:(1)$3x-4\geqslant0$,即 $x\geqslant\dfrac{4}{3}$,

$\therefore$ 当 $x\geqslant\dfrac{4}{3}$时,$\sqrt{3x-4}$有意义.

(2)$2+\dfrac{2}{3}x\geqslant0$,即 $x\geqslant-3$,

$\therefore$ 当 $x\geqslant-3$ 时,$\sqrt{2+\dfrac{2}{3}x}$有意义.

3. 解:要使 $\sqrt{(x-2)(3-x)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}$ 成立,

则$\begin{cases}x-2\geqslant0,\\3-x\geqslant0,\end{cases}$

解得 $2\leqslant x\leqslant3$.

点拨:要使 $\sqrt{(x-2)(3-x)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}$ 成立,必须满足 $x-2\geqslant0$ 且 $3-x\geqslant0$.

4. 解:设每块方砖的边长为 x 米,

则 $32x^2=8\times8$,$\therefore x^2=2$,

即 $x=-\sqrt{2}$(不合题意,舍去)或 $x=\sqrt{2}\approx1.41$.

答:每块方砖的边长约为 1.41 米.

B 组:

5. $a\leqslant0$ **点拨:**若 $\sqrt{a^2}+a=0$,则 $\sqrt{a^2}=-a$,由此可见 $a\leqslant0$.

6. 3 **点拨:**由 $a-3\geqslant0$,知 $a\geqslant3$;由 $3-a\geqslant0$,知 $a\leqslant3$,故 $a=3$.

7. $x\geqslant2$ **点拨:**要使原题中的式子成立,则必须满足 $x-2\geqslant0$,即 $x\geqslant2$.

8. 解:由实数 a、b 在数轴上的位置,知 $-2<a<-1$,$1<b<2$,

$\therefore a+1<0$,$b-1>0$,$a-b<0$.

$\therefore\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-b)^2}=-(a+1)+b-1+(a-b)=-a-1+b-1+a-b=-2$.

点拨:要化简此式,关键是判断 $a+1$,$b-1$,$a-b$ 的符号,通过数轴,获得信息:$-2<a<-1$,$1<b<2$,此题便可迎刃而解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

C 组：

9. 解：$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+$

$\cdots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{(\sqrt{9}+\sqrt{8})(\sqrt{9}-\sqrt{8})}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}+\cdots+$

$\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{(\sqrt{9})^2-(\sqrt{8})^2}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{9}-\sqrt{8}$

$=-1+\sqrt{9}$

$=-1+3$

$=2$.

10. 解：由题意知，巴霍姆所走的路线围成的图形为直角梯形，

所走的路程为：$10+\sqrt{15^2-(10-2)^2}+2+15=27+\sqrt{161}$（俄里），

所围成的土地面积为：$(2+10)\times\sqrt{161}\times\frac{1}{2}=6\sqrt{161}$（平方俄里）.

答：巴霍姆这一天走了$(27+\sqrt{161})$俄里. 他走过的路线围成的土地面积是$6\sqrt{161}$平方俄里.

第 22 章 一元二次方程

22.1 一元二次方程

练习：

解：(1)化为一般形式为：$3x^2-x-2=0$；二次项系数为 3，一次项系数为 -1，常数项为 -2.

(2)化为一般形式为：$2x^2-7x+3=0$；二次项系数为 2，一次项系数为 -7，常数项为 3.

(3)化为一般形式为：$x^2-5x=0$；二次项系数为 1，一次项系数为 -5，常数项为 0.

(4)化为一般形式为：$2x^2-5x-11=0$；二次项系数为 2，一次项系数为 -5，常数项为 -11.

习题 22.1：

1. 解：原方程可变形为$(m-1)x^2-(3-m)x-2=0$.

根据题意，得 $m-1\neq0$，

$\therefore m\neq1$.

即要使原方程为关于 x 的一元二次方程，m 应满足的条件是$m\neq1$.

2. 解：把 $x=0$ 代入$(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$，

得 $m^2-4=0$，$\therefore m=\pm2$.

又∵ 方程$(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore m-2\neq0$，即 $m\neq2$.

$\therefore m=-2$.

3. 解：设花坛的半径为 x 米，根据题意，

可得 $2\times\pi x^2=\frac{1}{2}(80\times60-2\times\pi x^2)$.

整理，得 $\pi x^2-800=0$.

22.2 一元二次方程的解法

练习：

解：(1)直接开平方，得 $x=\pm13$.

即 $x_1=13$，$x_2=-13$.

(2)移项，得 $x^2=45$.

直接开平方，得 $x=\pm3\sqrt{5}$，

即 $x_1=3\sqrt{5}$，$x_2=-3\sqrt{5}$.

(3)移项，得 $12y^2=25$.

两边同除以 12，得 $y^2=\frac{25}{12}$.

直接开平方，得 $y=\pm\frac{5\sqrt{3}}{6}$，

即 $y_1=\frac{5\sqrt{3}}{6}$，$y_2=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

(4)将方程左边分解因式，得 $x(x-2)=0$.

$\therefore x=0$ 或 $x-2=0$，

得 $x_1=0$，$x_2=2$.

(5)由原方程可得 $t-2=0$ 或 $t+1=0$，

得 $t_1=2$，$t_2=-1$.

(6)整理，得 $x^2-4x=0$.

将方程左边分解因式，

得 $x(x-4)=0$.

$\therefore x=0$ 或 $x-4=0$，

得 $x_1=0$，$x_2=4$.

练习：

解：(1)原方程可变形为$(x+2)^2=16$.

直接开平方，得 $x+2=\pm4$.

$\therefore x_1=2$，$x_2=-6$.

(2)原方程可变形为$(2x+3)^2=25$.

直接开平方，得 $2x+3=\pm5$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=-4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)原方程可变形为$(1-3x)^2=\frac{1}{4}$.

直接开平方,得$1-3x=\pm\frac{1}{2}$.

$\therefore x_1=\frac{1}{6},x_2=\frac{1}{2}$.

(4)原方程可变形为$(x-1)^2=6$.

直接开平方,得$x-1=\pm\sqrt{6}$.

$\therefore x_1=1+\sqrt{6},x_2=1-\sqrt{6}$.

练习:

1. (1)9;3　(2)16;4

(3)$\frac{9}{16};\frac{3}{4}$　(4)$\frac{9}{4};\frac{3}{4};\frac{3}{2}$

2. 解:(1)原方程可化为$x^2+8x=2$.

配方,得$x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2=2+\left(\frac{8}{2}\right)^2$,

即$(x+4)^2=18$.

直接开平方,得$x+4=\pm3\sqrt{2}$.

$\therefore x_1=3\sqrt{2}-4,x_2=-3\sqrt{2}-4$.

(2)原方程可化为$x^2-5x=6$.

配方,得$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=6+\left(\frac{5}{2}\right)^2$,

即$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$.

直接开平方,得$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{7}{2}$.

$\therefore x_1=6,x_2=-1$.

练习:

解:(1)$\because b^2-4ac=32$,

$\therefore x=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=3\pm2\sqrt{2}$,

即$x_1=3+2\sqrt{2},x_2=3-2\sqrt{2}$.

(2)原方程可化为$2x^2-x-6=0$.

$\because b^2-4ac=49$,

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{1\pm7}{4}$,

即$x_1=2,x_2=-\frac{3}{2}$.

(3)原方程可化为$4x^2-4x+1=0$.

$\because b^2-4ac=0$,

$\therefore x=\frac{4\pm0}{8}=\frac{1}{2}$,

即$x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

(4)原方程可化为$x^2-9x+2=0$.

$\because b^2-4ac=73$,

$\therefore x=\frac{9\pm\sqrt{73}}{2}$,

即$x_1=\frac{9+\sqrt{73}}{2},x_2=\frac{9-\sqrt{73}}{2}$.

练习:

1. 解:(1)原方程可变形为$3x^2+5x-4=0$.

$\because b^2-4ac=5^2-4\times3\times(-4)=73>0$,

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根.

(2)原方程可变形为$x^2-2x+2=0$.

$\because b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times2=-4<0$,

$\therefore$原方程无实数根.

(3)原方程可化为$4y^2-4y+1=0$.

$\because b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times1=0$,

$\therefore$原方程有两个相等的实数根.

(4)原方程可化为$2x^2-x+2=0$.

$\because b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times2=-15<0$,

$\therefore$原方程无实数根.

2. 解:他的说法正确.

理由:$\because a,c$异号,$\therefore ac<0$.

$\therefore -4ac>0$.

又$\because b^2\geqslant0,\therefore b^2-4ac>0$.

$\therefore$方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$一定有两个不相等的实数根.

练习:

1. 解:设方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根分别为x_1和x_2. $\because x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$\therefore x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a}=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$.

2. 解:(1)$b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-3)=28>0$,

$\therefore$方程有两个不相等的实数根.

设两根分别为x_1,x_2,可得$x_1+x_2=-4$,

$x_1x_2=-3$.

(2)$b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times0=16>0$,

$\therefore$方程有两个不相等的实数根.

设两根分别为x_1,x_2,可得$x_1+x_2=\frac{4}{3},x_1x_2=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)整理,得$\frac{1}{4}x^2+1=0$.

$b^2-4ac=-1<0$,

∴原方程无实数根.

(4)整理,得$3x^2+9x-2=0$.

$b^2-4ac=105>0$,

∴原方程有两个不相等的实数根.

设两根分别为x_1,x_2,可得$x_1+x_2=-3$,

$x_1x_2=-\frac{2}{3}$.

3. **解:**(1)由一元二次方程根与系数的关系,

可得$-m=1-3,2n=-3$,

∴$m=2,n=-\frac{3}{2}$.

其他解法略.

(2)把$x=-4$代入方程$x^2+mx-20=0$,

得$16-4m-20=0$,解得$m=-1$,

∴原方程为$x^2-x-20=0$,

∴另一个根为$1-(-4)=5$. 其他解法略.

习题22.2:

1. **解:**(1)移项,得$2x^2=6$.

方程两边同时除以2,得$x^2=3$.

直接开平方,得$x=\pm\sqrt{3}$,

即$x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3}$.

(2)原方程可化为$4x^2=27$.

方程两边同时除以4,得$x^2=\frac{27}{4}$.

直接开平方,得$x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

即$x_1=\frac{3\sqrt{3}}{2},x_2=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(3)原方程可化为$3x^2-4x=0$.

将方程左边分解因式,得$(3x-4)x=0$,

∴$3x-4=0$或$x=0$,

得$x_1=\frac{4}{3},x_2=0$.

(4)将方程左边分解因式,得$(x+3)(x-1)=0$.

∴$x+3=0$或$x-1=0$,

得$x_1=-3,x_2=1$.

(5)直接开平方,得$x+1=\pm\sqrt{2}$,

∴$x_1=\sqrt{2}-1,x_2=-\sqrt{2}-1$.

(6)原方程可化为$3(x-5)^2+2(x-5)=0$.

将方程左边分解因式,得$[3(x-5)+2](x-5)=0$,

即$(3x-13)(x-5)=0$,

∴$3x-13=0$或$x-5=0$.

得$x_1=\frac{13}{3},x_2=5$.

2. **解:**(1)移项,得$(2x-1)^2=1$.

直接开平方,得$2x-1=\pm1$,

∴$x_1=1,x_2=0$.

(2)方程两边同乘以2,得$(x+3)^2=4$,

直接开平方,得$x+3=\pm2$,

∴$x_1=-1,x_2=-5$.

(3)∵$b^2-4ac=36$,

∴$x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=-1\pm3$,

即$x_1=2,x_2=-4$.

(4)原方程可化为$3x^2-4x+1=0$.

∵$b^2-4ac=4$,

∴$x=\frac{4\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{2\pm1}{3}$,

即$x_1=1,x_2=\frac{1}{3}$.

(5)原方程可化为$3x^2+2x=0$.

将方程左边分解因式,得$(3x+2)x=0$,

∴$3x+2=0$或$x=0$.

得$x_1=-\frac{2}{3},x_2=0$.

(6)原方程可化为$x^2-4x+3=0$.

将方程左边分解因式,得$(x-1)(x-3)=0$.

∴$x-1=0$或$x-3=0$,得$x_1=1,x_2=3$.

3. **解:**(1)$3x^2-6=21$,

整理,得$x^2=9$.

∴$x_1=3,x_2=-3$.

(2)$3x^2-6=x-2$,

整理,得$3x^2-x-4=0$.

将方程左边分解因式,得$(x+1)(3x-4)=0$.

∴$x+1=0$或$3x-4=0$,

得$x_1=-1,x_2=\frac{4}{3}$.

4. **解:**(1)整理,得$3x^2-6x=0$.

将方程左边分解因式,得$3x(x-2)=0$,

∴$3x=0$或$x-2=0$,

得$x_1=0,x_2=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)方程两边同乘以3,得$(x+3)^2=3$.

直接开平方,得$x+3=\pm\sqrt{3}$,

$\therefore x_1=\sqrt{3}-3,x_2=-\sqrt{3}-3$.

(3)将方程左边分解因式,得$x(x+\sqrt{3}+1)=0$,

$\therefore x=0$或$x+\sqrt{3}+1=0$.

$\therefore x_1=0,x_2=-\sqrt{3}-1$.

(4)整理,得$x^2-8x+16=0$,

即$(x-4)^2=0$,

$\therefore x_1=x_2=4$.

(5)整理,得$x^2-2\sqrt{2}x-1=0$.

$\because b^2-4ac=12$,

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{12}}{2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$,

即$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3},x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

(6)整理,得$x^2+8x-16=0$.

$\because b^2-4ac=128$,

$\therefore x=\dfrac{-8\pm\sqrt{128}}{2}=-4\pm4\sqrt{2}$,

即$x_1=-4+4\sqrt{2},x_2=-4-4\sqrt{2}$.

(7)整理,得$x^2-3x-11=0$.

$\because b^2-4ac=53$,

$\therefore x=\dfrac{3\pm\sqrt{53}}{2}$,

即$x_1=\dfrac{3+\sqrt{53}}{2},x_2=\dfrac{3-\sqrt{53}}{2}$.

(8)原方程可化为$(2x+1)^2-2(2x+1)=0$.

将方程左边分解因式,得$(2x+1)(2x+1-2)=0$,

$\therefore 2x+1=0$或$2x+1-2=0$,

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{1}{2}$.

5. 解:根据题意,得$2x^2+7x-1=6x+2$.

整理,得$2x^2+x-3=0$.

将方程左边分解因式,得$(x-1)(2x+3)=0$,

$\therefore x-1=0$或$2x+3=0$,得$x_1=1,x_2=-\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$当x的值为1或$-\dfrac{3}{2}$时,$A=B$.

6. 解:设较小的奇数为x,则较大的奇数为$x+2$.

根据题意,得$x(x+2)=255$,

整理,得$x^2+2x-255=0$,

解得$x_1=15,x_2=-17$.

当$x=15$时,$x+2=17$;

当$x=-17$时,$x+2=-15$.

$\therefore$这两个奇数分别为15,17或$-17,-15$.

7. 解:(1)原方程可变形为$3x^2-4x-2=0$,

$\because b^2-4ac=40>0$,

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根.

(2)整理,得$2x^2+9x=0$,

$\because b^2-4ac=81>0$,

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根.

(3)原方程可变形为$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$,

$\because b^2-4ac=0$,

$\therefore$原方程有两个相等的实数根.

(4)原方程可变形为$13y^2-24y+13=0$,

$\because b^2-4ac=-100<0$,

$\therefore$原方程无实数根.

8. 解:将方程$x^2-(2k+1)x+k^2=2$变形为$x^2-(2k+1)x+k^2-2=0$,

$b^2-4ac=(2k+1)^2-4(k^2-2)=4k+9$,当$b^2-4ac<0$时,即$4k+9<0$,解得$k<-\dfrac{9}{4}$,

$\therefore$当$k<-\dfrac{9}{4}$时,方程没有实数根;

当$b^2-4ac\geqslant0$时,即$4k+9\geqslant0$,解得$k\geqslant-\dfrac{9}{4}$,

$\therefore$当$k\geqslant-\dfrac{9}{4}$时,方程有实数根.

9. 证明:$b^2-4ac=(-2m)^2-4(2m-2)$

$=4m^2-8m+8$

$=4(m^2-2m+1)+4$

$=4(m-1)^2+4$,

$\because (m-1)^2\geqslant0$,

$\therefore 4(m-1)^2+4>0$.

$\therefore$对于任何实数m,关于x的方程$x^2-2mx+2m-2=0$总有两个不相等的实数根.

10. 解:(1)原方程可变形为$x^2-x-4=0$.

$\because a=1,b=-1,c=-4$,

$\therefore b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-4)=17>0$.

$\therefore$原方程有两个不相等的实数根,设两根分别为x_1,x_2,

可得$x_1+x_2=1,x_1x_2=-4$.

(2)移项,得$3x^2+7x-6=0$.

$\because a=3,b=7,c=-6$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore b^2-4ac=7^2-4\times3\times(-6)=121>0$.

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根,设两根分别为 x_1,x_2,可得 $x_1+x_2=-\frac{7}{3}$,$x_1x_2=-2$.

11. 解法一:(1)$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根是 0 和 -3,

$\therefore\begin{cases}0^2-p\times0+q=0,\\(-3)^2-p\times(-3)+q=0.\end{cases}$

解此方程组,得 $\begin{cases}p=-3,\\q=0.\end{cases}$

(2)$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-6x+p^2-2p+5=0$ 的一个根是 2,

$\therefore 2^2-6\times2+p^2-2p+5=0$.

解此方程,得 $p=-1$ 或 $p=3$.

$\therefore$ 原方程为 $x^2-6x+8=0$,即 $(x-2)(x-4)=0$.

$\therefore x_1=2,x_2=4$.

$\therefore$ 方程的另一个根是 4,p 的值是 -1 或 3.

解法二:(1)$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根是 0 和 -3,

$\therefore\begin{cases}0+(-3)=p,\\0\times(-3)=q,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-3,\\q=0.\end{cases}$

(2)$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-6x+p^2-2p+5=0$ 的一个根是 2,设另一个根为 x_2.

$\therefore\begin{cases}2+x_2=6,①\\2x_2=p^2-2p+5,②\end{cases}$

解方程①,得 $x_2=4$,将 $x_2=4$ 代入②,得 $p^2-2p+5=8$,

解得 $p=-1$ 或 $p=3$.

$\therefore$ 方程的另一个根是 4,p 的值是 -1 或 3.

点拨:解法一是由根的定义来解决问题的. 解法二是由一元二次方程根与系数之间的关系来解决问题的,相比之下,解法二较为简单.

22.3 实践与探索

练习:

1. 解:设所镶彩纸的宽为 x 厘米,则镶上彩纸后总面积为 $[(18+2x)\times(12+2x)]$ 平方厘米,彩纸面积为 $[(18+2x)\times(12+2x)-18\times12]$ 平方厘米,

依题意,得 $(18+2x)\times(12+2x)-18\times12=\frac{2}{3}\times18\times12$.

整理,得 $x^2+15x-36=0$,

$\because a=1,b=15,c=-36,b^2-4ac=15^2-4\times1\times(-36)=369$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{369}}{2}$,

即 $x_1=\frac{-15+3\sqrt{41}}{2}\approx2.1$,$x_2=\frac{-15-3\sqrt{41}}{2}$(不合题意,舍去).

答:所镶彩纸的宽约为 2.1 厘米.

2. 解:设经过 t 秒爆竹离地 15 米,

根据题意,得 $15=20t-\frac{1}{2}\times10\times t^2$,

整理,得 $t^2-4t+3=0$,

解得 $t_1=1,t_2=3$.

经检验,$t_1=1,t_2=3$ 都符合题意.

答:经过 1 秒或 3 秒爆竹离地 15 米.

点拨:离地 15 米包括两种情况:一是在上升过程中经过该高度,二是在下落过程中经过该高度,故 1 秒和 3 秒均符合题意.

3. 解:设这两个月的产值平均月增长的百分率是 x.

根据题意,得 $50\,000(1+x)^2=60\,000$.

解得 $x_1=\frac{\sqrt{30}}{5}-1$,$x_2=-\frac{\sqrt{30}}{5}-1$(不合题意,舍去).

$\therefore x=\frac{\sqrt{30}}{5}-1\approx9.5\%$.

答:这两个月的产值平均月增长的百分率约是 9.5%.

4. 解:设这两年中获奖人次的平均年增长率为 x. 根据题意,得 $48(1+x)^2=183-48-48(1+x)$.

整理,得 $16x^2+48x-13=0$.

解得 $x_1=\frac{1}{4}$,$x_2=-\frac{13}{4}$(不合题意,舍去).

$\therefore x=\frac{1}{4}=25\%$.

答:这两年中获奖人次的平均年增长率为 25%.

练习:

1. 解:设新品种花生的出油率增加 x,则每公顷产量的增长率为 $2x$.

根据题意,有 $3\,000(1+2x)\times(55\%+x)=2\,025$,

整理,得 $80x^2+84x-5=0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=\frac{\sqrt{541}-21}{40}$，$x_2=\frac{-\sqrt{541}-21}{40}$（不合题意，舍去）.

$\therefore x=\frac{\sqrt{541}-21}{40}\approx 6\%$，$\therefore 2x\approx 12\%$.

答：两者的增长率分别约为 6%，12%.

2. 解：设销售定价为 x 元.

根据题意，得 $[180+10(52-x)](x-40)=2\,000$.

整理，得 $x^2-110x+3\,000=0$，

解得 $x_1=50$，$x_2=60$，

经检验，$x_1=50$，$x_2=60$ 均符合本题要求，

则 $180+10(52-x)=180+10\times(52-50)=200$ 或 $180+10(52-x)=180+10\times(52-60)=100$.

答：应进货 200 台，销售定价为 50 元；或应进货 100 台，销售定价为 60 元.

（1）可设应进货 y 台，则销售定价为 $\left(\frac{180-y}{10}+52\right)$ 元，每台获利 $\left(\frac{180-y}{10}+12\right)$ 元；也可设销售定价为 x 元，则进货 $[180+10(52-x)]$ 台，每台获利 $(x-40)$ 元. 本题设销售定价为未知数列方程较适宜.

（2）都符合题意. 将所求未知数的值（正数或正整数）代入关于进货量（或销售定价）的代数式，若结果为正整数（或正数）即符合题意.

（3）设所获利润为 W 元.

则 $W=[180+10(52-x)](x-40)=-10(x^2-110x+2\,800)=-10(x^2-110x+3\,025)+2\,250=-10(x-55)^2+2\,250$.

$\because (x-55)^2\geqslant 0$，$\therefore -10(x-55)^2\leqslant 0$.

$\therefore W\leqslant 2\,250$.

$\therefore$ 商店要获得最大利润，销售定价应为 55 元，应进货 $180+10\times(52-55)=150$（台）.

3. 解：补充：若该市现有人口为 a（a 为正整数）人，这两年的人口平均增长率为 m（m 为正数）. 则这两年平均每年的住房面积增长率为多少？

解答：设这两年平均每年的住房面积增长率为 x. 则可列方程为 $14.6a(1+x)^2=18a(1+m)^2$.

解方程即可. **点拨**：答案不唯一.

习题 22.3：

1. 解：设小道的宽为 x 米.

根据题意，得 $35\times 20-35x-2\times 20x+2x^2=600$.

整理，得 $2x^2-75x+100=0$.

用公式法解得 $x_1=\frac{75+5\sqrt{193}}{4}$（不合题意，舍去），$x_2=\frac{75-5\sqrt{193}}{4}\approx 1.4$.

答：小道的宽约为 1.4 米.

2. 解：设 4 月份的营业额增长率是 x，则 5 月份的营业额增长率是 $x+5\%$，

根据题意，得 $50\times(1-30\%)\times(1+x)\times(1+x+5\%)=48.3$.

整理，得 $x^2+2.05x-0.33=0$.

解得 $x_1=0.15$，$x_2=-2.2$.

$\because$ 4 月份的营业额增长率是正数，

$\therefore x=0.15=15\%$，

$\therefore x+5\%=20\%$.

答：4，5 两月的营业额增长率分别是 15% 和 20%.

3. 解：设与图书馆的后墙平行的一条边长为 x 米，则与其相邻的两条边长都为 $\frac{25-x}{2}$ 米，

根据题意，得 $x\cdot\frac{25-x}{2}=50$，

解得 $x_1=20$，$x_2=5$，

经检验，$x_1=20$，$x_2=5$ 都符合题意.

当 $x=20$ 时，$\frac{25-x}{2}=2.5$；

当 $x=5$ 时，$\frac{25-x}{2}=10$.

答：有两种搭建方法，一种是与图书馆的后墙平行的一条边长为 20 米，与其相邻的两条边长都为 2.5 米；另一种是与图书馆的后墙平行的一条边长为 5 米，与其相邻的两条边长都为 10 米.

点拨：一般应采用第一种，若图书馆的后墙长不足 20 米，则采用第二种. 除按题意列方程求解外，还应考虑到实际情况.

4. 解：设长应增加 $3x$ 米，则宽应增加 $2x$ 米，

根据题意，得 $(30+3x)\times(20+2x)=2\times 30\times 20$.

整理，得 $(x+10)^2=200$，

解得 $x_1=10\sqrt{2}-10$，$x_2=-10\sqrt{2}-10$（不合题意，舍去），

$\therefore x=10\sqrt{2}-10\approx 4.14$，则 $3x\approx 12.4$，$2x\approx 8.3$.

答：矩形操场的长应增加约 12.4 米，宽应增加约

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.3 米.

5. 解:设每次降价的百分率是 x,

由题意,得 $1\,500\times(1+50\%)\times(1-x)^2=1\,500+500$,

整理,得 $(1-x)^2=\frac{8}{9}$,

解此方程,得 $x_1=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$x_2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

∵ 降价的百分率不可能大于 1,

∴ $x_2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 不符合题意,

∴ $x=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.057$,则 $1-x\approx0.94$.

答:每次约打九四折.

6. 解:设这些学生后两年植树数的平均年增长率为 x,

由题意,得 $[400+400(1+x)+400(1+x)^2]\times95\%=2\,000$.

整理,得 $19x^2+57x-43=0$,

解此方程,得 $x_1=\frac{7\sqrt{133}-57}{38}$,$x_2=\frac{-7\sqrt{133}-57}{38}$(不合题意,舍去),

∴ $x=\frac{7\sqrt{133}-57}{38}\approx62\%$.

答:这些学生后两年植树数的平均年增长率约为 62%.

复习题

A 组:

1. 解:(1)移项,得 $3x^2-2x=0$.

将方程左边分解因式,得 $x(3x-2)=0$,

∴ $x=0$ 或 $3x-2=0$.

∴ $x_1=0$,$x_2=\frac{2}{3}$.

(2)移项,得 $6x^2=40$.

方程两边同除以 6,得 $x^2=\frac{20}{3}$,直接开平方,得

$x=\pm\frac{2\sqrt{15}}{3}$,

即 $x_1=\frac{2\sqrt{15}}{3}$,$x_2=-\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

(3)整理,得 $3x^2-3=0$.

移项,得 $3x^2=3$,

∴ $x^2=1$.

直接开平方,得 $x=\pm1$.

∴ $x_1=-1$,$x_2=1$.

(4)整理,得 $y^2-y-4=0$.

用公式法解得 $y_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$,$y_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

(5)整理,得 $4x^2-4x+1=0$,即 $(2x-1)^2=0$,

直接开平方,得 $2x-1=0$,

∴ $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

(6)整理,得 $t^2+t=0$.

将方程左边分解因式,得 $t(t+1)=0$,

∴ $t=0$ 或 $t+1=0$.

∴ $t_1=0$,$t_2=-1$.

2. 解:(1)根据题意,得 $b^2-4ac=9-4k>0$,

∴ $k<\frac{9}{4}$,

即当 $k<\frac{9}{4}$ 时,方程有两个不相等的实数根.

(2)根据题意,得 $9-4k=0$,

∴ $k=\frac{9}{4}$,

即当 $k=\frac{9}{4}$ 时,方程有两个相等的实数根.

(3)根据题意,得 $9-4k<0$,

∴ $k>\frac{9}{4}$,

即当 $k>\frac{9}{4}$ 时,方程没有实数根.

3. 解:(1)∵ $a=2$,$b=5$,$c=-1$,$b^2-4ac=33>0$,

∴ 方程有两个不相等的实数根. 设两根分别为 x_1,x_2,

可得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{2}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$.

(2)原方程可以变形为 $x^2-4x+2=0$.

∵ $a=1$,$b=-4$,$c=2$,$b^2-4ac=8>0$,

∴ 方程有两个不相等的实数根.

设两根分别为 x_1,x_2,可得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4$,

$x_1x_2=\frac{c}{a}=2$.

4. 解:(1)由题意,得 $2x^2+7x-1+4x+1=0$.

整理,得 $2x^2+11x=0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将方程左边分解因式,得$x(2x+11)=0$,

$\therefore x=0$ 或 $2x+11=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=-\frac{11}{2}$.

$\therefore$ 当 x 的值为 0 或 $-\frac{11}{2}$时满足要求.

(2)由题意,得 $2x^2+7x-1-(4x+1)=3$.

整理,得 $2x^2+3x-5=0$,

将方程左边分解因式,得$(x-1)(2x+5)=0$,

$\therefore x-1=0$ 或 $2x+5=0$.

$\therefore x_1=1, x_2=-\frac{5}{2}$.

$\therefore$ 当 x 的值为 1 或 $-\frac{5}{2}$时满足要求.

5. **解:**将 $x=0$ 代入方程,得$(2\times0-m)(m\times0+1)=(3\times0+1)(m\times0-1)$,解得 $m=1$,

则原方程为$(2x-1)(x+1)=(3x+1)(x-1)$,

整理,得 $x^2-3x=0$,

将方程左边分解因式,得 $x(x-3)=0$,

$\therefore x=0$ 或 $x-3=0$,解得 $x_1=0, x_2=3$.

$\therefore$ 它的另一个根是 3,m 的值是 1.

6. **解:**设这三个连续奇数中最小的为 x,则另两个奇数依次为 $x+2, x+4$,

根据题意,列方程为 $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=371$,

整理,得 $3x^2+12x+20=371$,即 $x^2+4x-117=0$,

解得 $x_1=9, x_2=-13$.

经检验,$x_1=9$ 和 $x_2=-13$ 都符合题意.

当 $x=9$ 时,$x+2=11, x+4=13$;

当 $x=-13$ 时,$x+2=-11, x+4=-9$.

答:这三个奇数分别为 9,11,13 或 $-13, -11, -9$.

7. **解:**设原正方形广场的边长为 x 米,

根据题意,得 $x(x-4)=100$,

解得 $x_1=2+2\sqrt{26}, x_2=2-2\sqrt{26}$(不合题意,舍去),$\therefore x=2+2\sqrt{26}\approx12.2$.

答:原正方形广场的边长约为 12.2 米.

8. **解:**设灌溉渠的深度为 x 米,则灌溉渠横截面的上底边的长为$(x+2)$米,下底边的长为$(x+0.4)$米,

根据题意,得$\frac{1}{2}x(x+2+x+0.4)=1.6$,

解得 $x_1=0.8, x_2=-2$(不合题意,舍去),

$\therefore x=0.8$,则 $x+2=2.8, x+0.4=1.2$.

答:灌溉渠横截面上、下底边的长和灌溉渠的深度分别为 2.8 米、1.2 米和 0.8 米.

9. **解:**设经过 x 时能赶上.

根据题意,得 $30^2+(60x)^2=(75x)^2$.

整理,得 $2\,025x^2=900$.

解得 $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{2}{3}$(不合题意,舍去).

$\therefore x=\frac{2}{3}$.

答:经过$\frac{2}{3}$时能赶上.

B 组:

10. **解:**(1)整理,得 $-5x^2-10x+15=0$,

即$x^2+2x-3=0$,将方程左边分解因式,得$(x+3)(x-1)=0$.

$\therefore x+3=0$ 或 $x-1=0$.

$\therefore x_1=-3, x_2=1$.

(2)将方程左边分解因式,得$[(2x-1)+1][(2x-1)+2]=0$,

即 $x(2x+1)=0$,

$\therefore x=0$ 或 $2x+1=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=-\frac{1}{2}$.

(3)原方程可化为 $x^2-2\sqrt{5}x+(\sqrt{5})^2=0$,

即$(x-\sqrt{5})^2=0$.

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{5}$.

(4)根据公式法,得

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})}}{2\times\sqrt{3}}=\frac{1\pm5}{2\sqrt{3}},$$

$\therefore x_1=\sqrt{3}, x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. **解:**把 $x=1$ 代入方程$(a-2)x^2+(a^2-3)x-a+1=0$ 中,得 $a^2=4$,解得 $a=-2$ 或 $a=2$(不合题意,舍去). 故 a 的值为 -2.

点拨:当 $a=2$ 时,二次项系数 $a-2=2-2=0$,原方程就不是关于 x 的一元二次方程了,故 a 的值不能为 2.

12. **解:**把 $x=1-\sqrt{2}$代入关于 x 的方程 $2x^2-4x+3q=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

0 中，得 $2+3q=0$，解得 $q=-\frac{2}{3}$，

则原方程为 $2x^2-4x-2=0$，即 $x^2-2x-1=0$，

用公式法解得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$，

即 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$.

故方程的另一个根是 $1+\sqrt{2}$，q 的值为 $-\frac{2}{3}$.

13. 解：它不总是二次方程，

当 $m=1$ 时，原方程变为 $x-2=0$，是一元一次方程. 此时解得 $x=2$；

当 $m\neq1$ 时，原方程是二次方程，将方程左边分解因式，得 $[(m-1)x+m](x-2)=0$，解得 $x_1=\frac{m}{1-m}$，$x_2=2$.

14. 解：x^2-5x+7

$=x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，

∴ 不论 x 取何值，代数式 x^2-5x+7 的值总是正数，

当 $x=\frac{5}{2}$ 时，x^2-5x+7 的值最小，其最小值是 $\frac{3}{4}$.

15. 解：设现在场地的一边长为 x 米，则与其相邻的另一边长为 $\left[\frac{1\,500\times(1+10\%)}{x}\right]$ 米，

根据题意，得 $(x-5)\left[\frac{1\,500\times(1+10\%)}{x}+5\right]=1\,500$，

整理，得 $x^2+25x-1\,650=0$，

解得 $x_1=30$，$x_2=-55$.

经检验，$x_1=30$，$x_2=-55$ 都是原方程的解.

但 $x_2=-55$ 不符合题意，舍去.

∴ $x=30$，则 $\frac{1\,500\times(1+10\%)}{x}=\frac{1\,650}{30}=55$.

答：现在场地的长为 55 米，宽为 30 米.

C 组：

16. 解：(1) 原方程可变形为 $(x^2-x-2)(x^2-x-3)=0$，

即 $(x-2)(x+1)(x^2-x-3)=0$，

∴ $x-2=0$ 或 $x+1=0$ 或 $x^2-x-3=0$.

解得 $x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，

$x_4=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

(2) 原方程可变形为 $(x^3-1)(2x+1)=0$.

∴ $x^3-1=0$ 或 $2x+1=0$.

∴ $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

经检验都为原方程的解.

17. 证明：由 $(x-1)(x-2)=m^2$，

得 $x^2-3x+2-m^2=0$.

$b^2-4ac=9-4\times1\times(2-m^2)=4m^2+1=(2m)^2+1$，

∵ $(2m)^2\geqslant0$，

∴ $(2m)^2+1>0$.

∴ 方程总有两个不相等的实数根.

18. 解：$3x^2-2xy-8y^2=0$，

将方程左边分解因式，得 $(3x+4y)(x-2y)=0$，

∴ $3x+4y=0$ 或 $x-2y=0$.

∵ $y\neq0$，

∴ $\frac{x}{y}=-\frac{4}{3}$ 或 $\frac{x}{y}=2$，

即 $\frac{x}{y}$ 的值为 $-\frac{4}{3}$ 或 2.

点拨：把题中方程左边分解因式是解答本题的关键，另外还应注意条件 $y\neq0$.

19. 解：(1) 关于 x 的方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 有两个不相等的实数根，

则 $m\neq0$，且 $b^2-4ac=[-(2m-1)]^2-4m(m-2)=4m+1>0$，

即 $m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq0$.

∴ 当 $m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq0$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 当方程为一次方程时，$m=0$，此时方程为 $x-2=0$，方程有实数根；

当方程为二次方程时，$m\neq0$，且 $b^2-4ac=4m+1\geqslant0$，即 $m\geqslant-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq0$.

综上所述，当 $m\geqslant-\frac{1}{4}$ 时，方程有实数根.

20. 略. (答案不唯一)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第23章 图形的相似

23.1 成比例线段

练习:

1. 解:(1)∵ $\frac{a}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{c}{d}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

∴ 线段 a,b,c,d 是成比例线段.

(2)∵ $\frac{a}{c}=\frac{0.8}{0.64}=\frac{5}{4}$, $\frac{b}{d}=\frac{3}{2.4}=\frac{5}{4}$,

∴ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

∴ 线段 a,c,b,d 是成比例线段.

2. 16 **点拨:**由 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,得 $ac=b^2=16$.

3. 解:∵ $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$,

∴ $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$.

∵ $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$,∴ $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$,

∴ $\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$,

∴ $\frac{a-b}{a}=\frac{1}{3}$,∴ $\frac{a}{a-b}=3$.

点拨:本题还可以这样做:设 $a=3k$, $b=2k(k\neq 0)$,则 $\frac{a+b}{b}=\frac{3k+2k}{2k}=\frac{5}{2}$, $\frac{a}{a-b}=\frac{3k}{3k-2k}=3$.

4. 解:(1) $\frac{AC}{CD}=\frac{1}{2}$, $\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2+4}=\frac{1}{6}$, $\frac{CD}{DB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)线段 AC,CD,CD,DB 是成比例线段;线段 AC,AD,CD,CB,线段 CD,AD,DB,CB 也分别是成比例线段.

练习:

1. 解:∵ $AD\parallel BE\parallel CF$,

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

(1)∵ $AB=BC=4$, $DE=5$,

∴ $EF=DE=5$.

(2)∵ $AB=5$, $BC=6$, $DE=7$,

∴ $EF=\frac{BC\cdot DE}{AB}=\frac{6\times 7}{5}=\frac{42}{5}$.

2. 解:∵ $AD\parallel BE\parallel CF$,

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

∵ $DF=9$,∴ $DE=9-EF$.

∴ $\frac{4}{3}=\frac{9-EF}{EF}$. 解得 $EF=\frac{27}{7}$.

习题23.1:

1. 解:设两地间的实际距离是 x 厘米,

由题意得 $\frac{1}{5\ 000\ 000}=\frac{25}{x}$,解得 $x=125\ 000\ 000$.

125 000 000 厘米 = 1 250 千米.

答:两地间的实际距离是 1 250 千米.

2. 解:(1)不是. (2)是. (3)不是. (4)是.

3. 解:∵ $\frac{288}{192}=\frac{144}{96}=\frac{3}{2}$,∴ 这两种规格的国旗的长与宽的比相等.

4. 证明:∵ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,∴ $ad=bc$.

∴ $\sqrt{ad}\cdot\sqrt{ad}=bc(a,b,c,d>0)$.

∴ $\frac{b}{\sqrt{ad}}=\frac{\sqrt{ad}}{c}(a,b,c,d>0)$.

5. 解:∵ $\frac{a-b}{b}=\frac{3}{5}$,

∴ $5a-5b=3b$,即 $5a=8b$.

∴ $a=\frac{8}{5}b$,∴ $\frac{a}{b}=\frac{\frac{8}{5}b}{b}=\frac{8}{5}$.

点拨:本题也可令 $a-b=3k$, $b=5k$(k 不为 0)来解答.

6. 证明:设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k(k\neq 0)$,

∴ $a=bk$, $c=dk$,

∴ $\frac{a+c}{a-c}=\frac{bk+dk}{bk-dk}=\frac{b+d}{b-d}$.

7. 解:∵ $l_1\parallel l_2\parallel l_3$,

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{3}{2}$.

∴ $EF=\frac{2}{3}DE$.

∴ $\frac{DE}{DF}=\frac{DE}{DE+\frac{2}{3}DE}=\frac{3}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.2 相似图形

练习：

1. 解：它们相似. $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EH}=\frac{AC}{DH}$.

2. 解：不相似，

$\because \frac{70}{140}=\frac{60}{120}\neq\frac{33}{60}\neq\frac{47}{90}$，

$\therefore$ 两个多边形不相似.

习题 23.2：

1. 解：所有的矩形不一定都相似，所有的正方形都相似.

2. 解：题图中小矩形的长与宽分别是 $20-3-3=14$，$12-3-3=6$.

两个矩形的宽之比为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，长之比为 $\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$，

$\because \frac{1}{2}\neq\frac{7}{10}$，即 $\frac{6}{12}\neq\frac{14}{20}$，

$\therefore$ 两个矩形不相似.

3. 略.

4. 解：设新图片的宽为 x cm，

由题意得 $\frac{10}{30}=\frac{6}{x}$，解得 $x=18$，

$\therefore$ 新图片的面积是 $18\times30=540(\text{cm}^2)$. 原来矩形图片的面积为 $10\times6=60(\text{cm}^2)$，

$540\div60=9$.

答：新图片的面积是原来的 9 倍.

5. 解：由题意，得 $\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{AD}$，$AB=EF$，

设 $AE=x$，则 $AD=2x$.

$\therefore AB^2=2x^2$，得 $AB=\sqrt{2}x$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{2x}{\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{2}}{1}$，

即原矩形纸片的长与宽之比为 $\sqrt{2}:1$.

23.3 相似三角形

练习：

1. 解：$\triangle AOD\backsim\triangle COD\backsim\triangle BOC\backsim\triangle AOB\backsim\triangle ABC\backsim\triangle BCD\backsim\triangle CDA\backsim\triangle DAB$.

2. 解：设较大三角形最短的边长为 x，较长的边长为 y，

由题意得 $\frac{5}{x}=\frac{12}{y}=\frac{13}{39}$，

解得 $x=15$，$y=36$.

$\therefore$ 较大三角形的周长为 $15+36+39=90$.

又$\because$ 较小三角形的周长为 $5+12+13=30$，

$\therefore$ 较小三角形与较大三角形周长的比为 $\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$.

3. 解：$\because DE/\!/AC$，$DF/\!/BC$，

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形，

$\frac{DF}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{4}$，

又$\because BC=12$，$\therefore DF=\frac{1}{4}\times12=3$.

$\because DE/\!/AC$，$\therefore \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{3}{4}$，

又$\because AC=8$，$\therefore DE=\frac{3}{4}\times8=6$.

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 的周长为 $(DF+DE)\times2=(3+6)\times2=18$.

练习：

1. 解：题图中的相似三角形有：$\triangle ADG\backsim\triangle AEH$，$\triangle ADG\backsim\triangle AFI$，$\triangle ADG\backsim\triangle ABC$，$\triangle AEH\backsim\triangle AFI$，$\triangle AEH\backsim\triangle ABC$，$\triangle AFI\backsim\triangle ABC$.

2. 解：$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，$\triangle CBD\backsim\triangle ABC$. 理由如下：

$\because \angle A=\angle A$，$\angle ADC=\angle ACB=90°$，

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

$\because \angle ADC=90°$，

$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle ACD+\angle BCD=90°$，

$\therefore \angle A=\angle BCD$.

又$\because \angle ADC=\angle CDB=90°$，

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle CBD$，

$\because \angle B=\angle B$，$\angle CDB=\angle ACB=90°$，

$\therefore \triangle CBD\backsim\triangle ABC$.

练习：

1. 解：(1)$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$，$\frac{BC}{B'C'}=\frac{8}{12.8}=\frac{5}{8}$，

$\frac{AC}{A'C'}=\frac{16}{25.6}=\frac{5}{8}$，

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$，

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似.

(2)$\because \angle A'=80°$，$\angle B'=40°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle C' = 180° - 80° - 40° = 60°$,

$\therefore \angle A = \angle A', \angle C = \angle C'$,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似.

(3) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \frac{AC}{A'C'} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

又∵ $\angle A = \angle A' = 40°$,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似.

2. 解: ∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似,

$\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{a}{B'C'} = \frac{1}{2}, \therefore B'C' = 2a$.

∵ $\angle B = \alpha, \therefore \angle B' = \alpha$,

$\therefore \angle C' = 180° - \angle A' - \angle B' = 140° - \alpha$.

3. 略.

练习:

1. 解: 对应角的平分线的比等于 3∶5.

2. 0.4;0.4;0.4;0.16

3. 解: 相似. 证明如下:设正方形方格图中每个小正方形的边长均为 1,则有 $A_1B_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$A_1C_1 = 4, B_1C_1 = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$,

$A_2B_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$A_2C_2 = 2, B_2C_2 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

$\therefore \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = 2$.

$\therefore \triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$,且相似比为 2∶1.

又∵ 相似三角形面积的比等于相似比的平方,

$\therefore \triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积比为 4∶1.

练习:

1. 解: 设这幢高楼的高度是 x 米.

由题意,得 $\frac{1.8}{3} = \frac{x}{60}$,

解得 $x = 36$.

答: 这幢高楼的高度是 36 米.

2. 解: ∵ $DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

设 $\triangle ADE$ 的面积为 x,则梯形 $DBCE$ 的面积为 $3x$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $x + 3x = 4x$,

$\therefore \triangle ADE$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积的比为 $\frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$.

又∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$,相似三角形面积的比等于相似比的平方,

$\therefore \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$.

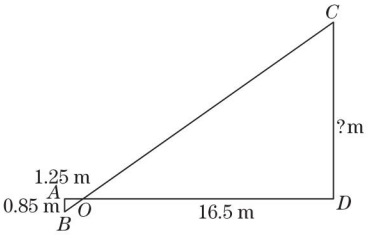
∵ $BC = 6, \therefore DE = 3$.

3. 解: 画出示意图如图. 由题意可知 $\angle BAO = \angle CDO = 90°, \angle AOB = \angle DOC$,

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle DOC$,

$\therefore \frac{AO}{DO} = \frac{AB}{DC}$.

$\therefore DC = \frac{DO \cdot AB}{AO} = \frac{16.5 \times 0.85}{1.25} = 11.22(\text{m})$.



(第 3 题)

答: 当短臂端点下降 0.85 m 时,长臂端点升高 11.22 m.

习题 23.3:

1. 解: (1) 相似. 证明如下:

∵ $\angle B = \angle ADE, \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

(2) 相似. 证明如下:

∵ $\angle E = \angle C, \angle EAD = \angle CAB$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

2. 解: 设 $\triangle A'B'C'$ 的最短边长为 x,较长边长为 y.

∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似,

$\therefore \frac{6}{x} = \frac{8}{y} = \frac{10}{30}$,

$\therefore x = 18, y = 24$.

$\therefore \triangle A'B'C'$ 的另两条边长分别为 18 和 24,周长为 $18 + 24 + 30 = 72$.

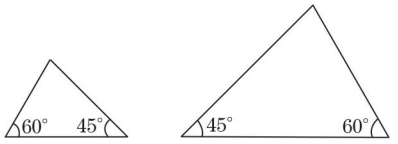
∵ $18^2 + 24^2 = 30^2$,

$\therefore \triangle A'B'C'$ 是直角三角形,

$\therefore \triangle A'B'C'$ 的最大角的大小为 90°.

3. 解: 如图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第3题）

4. 解：(1)相似. 证明如下：

$\because \angle C = 180° - \angle A - \angle B = 64°$,

$\therefore \angle C = \angle C'$,

又$\because \angle A = \angle A'$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(2)相似. 证明如下：

$\because AB : A'B' = 10 : 150 = 1 : 15$,

$BC : B'C' = 12 : 180 = 1 : 15$,

$AC : A'C' = 15 : 225 = 1 : 15$,

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(3)相似. 证明如下：

由题意可知在$\triangle ABD$与$\triangle A'B'D'$中，有$\angle B = \angle B' = 35°$，$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$,

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$,

则$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{7}{3.5} = 2$,

又$\because \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{10}{5} = 2$,

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$,

又$\because \angle B = \angle B'$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

5. 解：(1)相似. 证明如下：

$\because \angle A = \angle A'$，且分别为两个等腰三角形的顶角，

$\therefore \angle B = \dfrac{180° - \angle A}{2} = \dfrac{180° - \angle A'}{2} = \angle B'$,

即$\angle B = \angle B'$,

又$\because \angle A = \angle A'$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(2)相似. 证明如下：

$\because \angle A$、$\angle A'$分别为两个等腰三角形的顶角，

$\therefore \angle B$和$\angle C$、$\angle B'$和$\angle C'$分别为两个等腰三角形的底角，

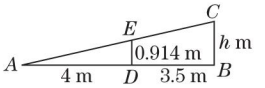
$\therefore \angle B = \angle C$，$\angle B' = \angle C'$,

又$\because \angle B = \angle B'$(或$\angle C = \angle C'$)，

$\therefore \angle C = \angle C'$(或$\angle B = \angle B'$)，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

6. 解：根据题意画出示意图，如图.



（第6题）

由题意可知$\angle EDA = \angle CBA = 90°$.

又$\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$,

$\therefore BC = \dfrac{AB \cdot DE}{AD} = \dfrac{(4 + 3.5) \times 0.914}{4} \approx 1.71$(m).

$\therefore$球拍击球的高度h约为1.71 m.

7. 解：$\because$四边形$ABCD$是矩形，$AF \perp DE$,

$\therefore \angle C = \angle ADC = \angle AFD = 90°$,

$\therefore \angle DAF + \angle ADF = 90°$，$\angle EDC + \angle ADF = 90°$,

$\therefore \angle DAF = \angle EDC$,

$\therefore \triangle AFD \backsim \triangle DCE$.

$\because \angle C = 90°$,

$\therefore DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

$\because \triangle AFD \backsim \triangle DCE$,

$\therefore \dfrac{AF}{DC} = \dfrac{AD}{DE}$，即$\dfrac{AF}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$,

$\therefore AF = \dfrac{3\sqrt{10}}{5} \approx 1.9$.

$\therefore$点A至直线DE的距离约为1.9.

8. 略.（答案不唯一）

23.4 中位线

练习：

1. 解：在$\triangle ABC$中，$AB = 6$，$BC = 10$，$AC = 8$,

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$,

$\therefore \triangle ABC$为直角三角形.

$\because D$、E、F分别为边BC、AC、AB的中点，

$\therefore DE$、DF、EF为$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore DE = \dfrac{1}{2}AB = 3$，$DF = \dfrac{1}{2}AC = 4$，$EF = \dfrac{1}{2}BC = 5$,

$\therefore EF^2 = DE^2 + DF^2$,

$\therefore \triangle EDF$是直角三角形，

$\therefore \angle EDF = 90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易知$\angle DEA=\angle BAC=90°$,

$\therefore AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=5$,

又易知点O是$\triangle ABC$的重心,

$\therefore OA=\frac{2}{3}AD=\frac{10}{3}$,

在Rt$\triangle CAF$中,$AF=3$,$AC=8$,

$\therefore CF=\sqrt{AF^2+AC^2}=\sqrt{73}$,

$\therefore OF=\frac{1}{3}CF=\frac{1}{3}\sqrt{73}$.

综上可知:$DE=3$,$OA=\frac{10}{3}$,$OF=\frac{1}{3}\sqrt{73}$,$\angle EDF=90°$.

2. 解:已知:如图,四边形$ABCD$为任意四边形,其各边中点依次为H、E、F、G.

求证:四边形$HEFG$为平行四边形.

证明:连结BD,在$\triangle ABD$中,H、G分别为AB、AD的中点,

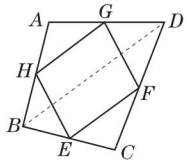
$\therefore HG$为$\triangle ABD$的中位线,

$\therefore HG/\!/BD$,且$HG=\frac{1}{2}BD$;

同理可证$EF/\!/BD$,且$EF=\frac{1}{2}BD$,

$\therefore HG/\!/EF$,且$HG=EF$,

$\therefore$四边形$HEFG$为平行四边形.



(第2题)

习题23.4:

1. 28

2. 证明:$\because E$、G分别是OA、OB的中点,

$\therefore EG$是$\triangle ABO$的中位线,

$\therefore EG/\!/AB$,$EG=\frac{1}{2}AB$.

同理,$HF/\!/DC$,$HF=\frac{1}{2}DC$.

$\because$四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore AB/\!/DC$,$AB=DC$.

$\therefore EG/\!/HF$,$EG=HF$.

$\therefore$四边形$EGFH$为平行四边形.

$\because AC=BD$,且E、F、G、H分别为OA、OC、OB、OD的中点,$\therefore EF=GH$,

$\therefore$四边形$EGFH$是矩形.

点拨:本题先证四边形为平行四边形,再证它为矩形.

3. 证明:$\because P$、M分别为BD、DC的中点,

$\therefore PM$为$\triangle DBC$的中位线,$\therefore PM=\frac{1}{2}BC$.

同理,PN为$\triangle ABD$的中位线,

$\therefore PN=\frac{1}{2}AD$.

$\because AD=BC$,$\therefore PM=PN$,

$\therefore \angle PMN=\angle PNM$.

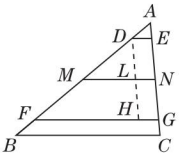
4. 证明:$\because MN$是$\triangle ABC$的中位线,

$\therefore MN/\!/BC$,$AM=BM$.

又$\because DE/\!/FG/\!/BC$,$AD=BF$,

$\therefore DM=MF$,$DE/\!/MN/\!/FG$,

过点D作$DH/\!/EG$,交MN于点L,交FG于点H,如图,



(第4题)

则点L是DH的中点,四边形$DENL$是平行四边形,四边形$LNGH$是平行四边形,

$\therefore DE=LN=HG$,$ML=\frac{1}{2}FH$,

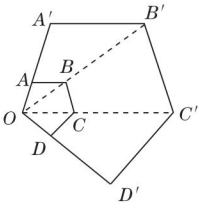
$\therefore MN=ML+LN=\frac{1}{2}FH+\frac{1}{2}(DE+HG)=\frac{1}{2}DE+\frac{1}{2}(FH+HG)=\frac{1}{2}DE+\frac{1}{2}FG$,

即$DE+FG=2MN$.

23.5 位似图形

练习:

解:如图.



点拨:答案不唯一.

习题23.5:

1. 略(画法不唯一).

2. 略(画法不唯一).

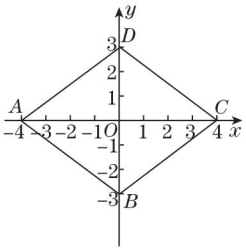
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

23.6 图形与坐标

练习：

1. 略.（建立平面直角坐标系方法不唯一）

2. **解：**建立平面直角坐标系如图（方法不唯一）. 它的四个顶点的坐标依次为 $A(-4,0)$、$B(0,-3)$、$C(4,0)$、$D(0,3)$.



（第 2 题）

练习：

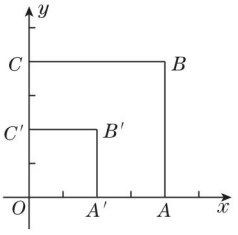
1. **解：**矩形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标分别为 $(-1,4)$，$(-5,4)$，$(-5,1)$，$(-1,1)$.

2. **解：**$\triangle A'B'C'$ 三个顶点的坐标分别为 $(-2,0)$，$(-2,4)$，$(1,0)$；$\triangle A''B''C''$ 三个顶点的坐标分别为 $(-2,-3)$，$(-2,1)$，$(1,-3)$.

3. **解：**四边形 $OABC$ 各个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A(4,0)$，$B(4,4)$，$C(0,4)$. 画图如图.

所得新图形为正方形 $OA'B'C'$.

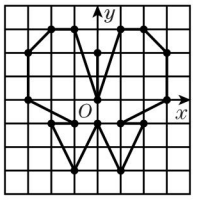
由题意可知新图形与原图形关于点 O 成位似图形，且相似比为 1∶2.



（第 3 题）

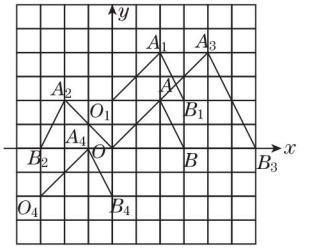
习题 23.6：

1. **解：**描点后如图. 它像什么，同学们可以自由发挥，答案不唯一.



（第 1 题）

2. **解：**$\triangle OAB$ 三个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A(2,2)$，$B(3,0)$.



（第 2 题）

（1）如图，沿 y 轴正方向平移 2 个单位，对应的三角形的三个顶点的坐标分别为 $O_1(0,2)$，$A_1(2,4)$，$B_1(3,2)$. 三个顶点的横坐标都没有改变，纵坐标都增加了 2.

（2）如图，关于 y 轴对称的三角形的三个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A_2(-2,2)$，$B_2(-3,0)$. 三个顶点的纵坐标都没有改变，横坐标都变成原来的相反数.

（3）如图，放大后的三角形的三个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$，$A_3(4,4)$，$B_3(6,0)$. 三个顶点的横纵坐标都变成原来的 2 倍.

（4）如图，平移后的三角形的三个顶点的坐标分别为 $O_4(-3,-2)$，$A_4(-1,0)$，$B_4(0,-2)$. 三个顶点的横坐标都减少了 3，纵坐标都减少了 2.

复习题

A 组：

1. 30 000

2. $\frac{27}{7}$　**点拨：**$\because \frac{x-y}{13}=\frac{y}{7}$，即 $7(x-y)=13y$，

$\therefore 7x-7y=13y$，$\therefore 20y=7x$，即 $\frac{x}{y}=\frac{20}{7}$，

$\therefore \frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+1=\frac{20}{7}+1=\frac{27}{7}$.

3. 15；7.5　**4.** 略.

5. **解：**（1）$AE=EG=2GC$.（2）$EG=3GC$.

6. **解：**所有的直角三角形不都相似，所有的等腰直角三角形都相似. $\because$ 两个直角三角形的锐角不一定对应相等，但两个等腰直角三角形的锐角都对应相等，都等于 45°.

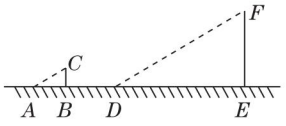
7. **解：**所有的正方形都相似，所有的菱形不都相似. $\because$ 任意两个正方形的对应角都相等，对应边成比

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例,而任意两个菱形的对应边成比例,但对应角不一定相等.

点拨:对于两个 n 边形($n>3$,且 n 为正整数),必须是对应角相等,对应边成比例时才相似.

8. 解:画出题意所描述的草图,如图,$\triangle ABC$ 为旗杆与光线和影子所围成的三角形,$\triangle DEF$ 为建筑物与光线和影子所围成的三角形,



(第 8 题)

$\because AC, DF$ 为太阳光线,

$\therefore AC \parallel DF$,

$\therefore \angle CAB = \angle FDE$,

又$\because \angle CBA = \angle FED = 90°$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$,

$\therefore \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{DE}$,

$\therefore EF = \dfrac{BC \cdot DE}{AB} = \dfrac{4 \times 24}{6} = 16$(米).

答:建筑物的高度是 16 米.

9. 略.

10. 解:(1)相似.

证明:$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 60°$,

$\therefore \angle C = \angle C'$,

又$\because \angle B = \angle B'$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(2)相似.

证明:$\because$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

11. 解:$\because \square ABCD$ 与 $\square A'B'C'D'$ 相似,

$\therefore \left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2 = \dfrac{S_{\square ABCD}}{S_{\square A'B'C'D'}}$,即 $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{10}{S_{\square A'B'C'D'}}$,

解得 $S_{\square A'B'C'D'} = 14.4$,

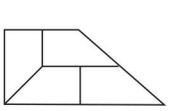
即 $\square A'B'C'D'$ 的面积为 14.4.

B 组:

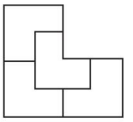
12. 3

13. 解:如图.

(1)



(2)



(第 13 题)

14. 略.

15. 解:当 $BD = \dfrac{a^2}{b}$ 时,$\triangle ACB \backsim \triangle CBD$.

16. 证明:$\because D、E$ 分别为 $AB、BC$ 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel AC$,且 $DE = \dfrac{1}{2}AC$.

又$\because F$ 为 AC 的中点,

$\therefore DE = AF$,

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 为平行四边形.

又$\because E、F$ 分别为 $BC、AC$ 的中点,

$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore EF \parallel AB, EF = \dfrac{1}{2}AB$.

又$\because AB = AC$,$\therefore DE = EF$,

$\therefore$ 平行四边形 $ADEF$ 是菱形.

17. 解:$AB = 3CD, AB \parallel CD$.

理由如下:

在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 中,$\dfrac{OA}{OD} = 3, \dfrac{OB}{OC} = 3$,

$\therefore \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OB}{OC}$,

又$\because \angle AOB = \angle DOC$,$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle DOC$,

$\therefore \angle ABO = \angle DCO, \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AO}{OD} = 3$,即 $AB = 3CD$.

$\therefore AB \parallel CD$.

18. 解:由题意可知 3 丈 = 5 步,由题图可知 $CB \parallel AH, DE \parallel AH$,

$\therefore \triangle AHF \backsim \triangle CBF, \triangle AHG \backsim \triangle EDG$,

$\therefore \dfrac{HF}{BF} = \dfrac{AH}{CB}, \dfrac{HG}{DG} = \dfrac{AH}{DE}$.

又$\because CB = DE$,

$\therefore \dfrac{BF}{HF} = \dfrac{DG}{HG}$,即有 $\dfrac{123}{HB + 123} = \dfrac{127}{HB + 1\,000 + 127}$,

$\therefore HB = 30\,750$ 步,

$\therefore \dfrac{CB}{AH} = \dfrac{BF}{HF} = \dfrac{123}{30\,750 + 123}$,

$\therefore AH = \dfrac{(30\,750 + 123) \times 5}{123} = 1\,255$(步).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 山峰的高度 AH 为 1 255 步，点 H、B 间的距离 HB 为 30 750 步.

C 组：

19. 解：如图①，过点 P 作直线 $PE \parallel BC$ 交 AB 于 E，则 $\triangle APE \backsim \triangle ACB$. 理由如下：

$\because PE \parallel BC$，

$\therefore \angle APE = \angle C = 90°$，

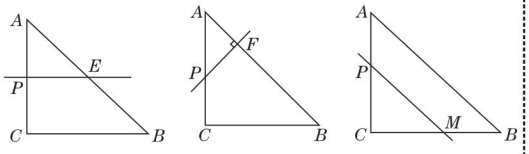
又$\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle APE \backsim \triangle ACB$.

如图②，过点 P 作 $PF \perp AB$ 于 F，

则 $\triangle APF \backsim \triangle ABC$.

理由如下：



① ② ③

（第 19 题）

$\because PF \perp AB$，

$\therefore \angle AFP = \angle C = 90°$，

又$\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle APF \backsim \triangle ABC$.

如图③，过点 P 作 $PM \parallel AB$ 交 BC 于 M，则 $\triangle PCM \backsim \triangle ACB$.

理由如下：$\because PM \parallel AB$，

$\therefore \angle A = \angle CPM$，

又$\because \angle C = \angle C$，

$\therefore \triangle PCM \backsim \triangle ACB$.

20. 解：由题意可知当 BC 移动 x 秒时，设在 $\triangle ABC$ 内所截线段为 $B'C'$，则 $y = B'C'$.

又$\because B'C' \parallel BC$，

$\therefore \angle AB'C' = \angle ABC$.

又$\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$，

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，交 $B'C'$ 于 D'，

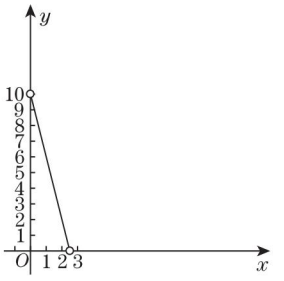
则 $AD = 4.8$，$AD' \perp B'C'$，

$\therefore \dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

又$\because$ 当 BC 移动 x 秒时，$DD' = 2x$，

$\therefore \dfrac{4.8 - 2x}{4.8} = \dfrac{y}{10}$，

$\therefore y = 10 - \dfrac{25}{6}x\ (0 < x < 2.4)$. 图象如图.



（第 20 题）

21.（1）证明：$\because \angle BQA = 90°$，

$\therefore \angle BAQ + \angle ABQ = 90°$，

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore \angle ABE = 90°$，

$\therefore \angle ABQ + \angle EBP = 90°$，

$\therefore \angle EBP = \angle BAQ$，又 $\angle EPB = \angle BQA = 90°$，

$\therefore \triangle PBE \backsim \triangle QAB$.

（2）**解：**$\triangle PBE$ 和 $\triangle BAE$ 相似. 证明如下：

$\because \triangle PBE \backsim \triangle QAB$，

$\therefore \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{PE}{QB}$.

$\because QB = BP$，

$\therefore \dfrac{BE}{AB} = \dfrac{PE}{BP}$，即 $\dfrac{BE}{PE} = \dfrac{AB}{BP}$.

又$\because \angle EPB = \angle EBA = 90°$，$\therefore \triangle PBE \backsim \triangle BAE$.

22. 略.

第 24 章 解直角三角形

24.1 测量

练习：

1. 解：设他的朋友的身高为 x cm. 他朋友的影子的长度是 $100 - 5 = 95$（cm）.

根据题意，得 $\dfrac{160}{100} = \dfrac{x}{95}$，解得 $x = 152$.

答：他的朋友的身高是 152 cm.

2. 解：设旗杆的高度为 h 米，由勾股定理，得 $h^2 + 5^2 = (h+1)^2$，解得 $h = 12$.

答：旗杆的高度为 12 米.

习题 24.1：

1. 略.

2. 解：设旗杆的高度是 x 米.

$4.10 + 20.20 = 24.30$（米）.

$\dfrac{4.10}{1.42} = \dfrac{24.30}{x}$，解得 $x \approx 8.42$.

答：旗杆的高度约是 8.42 米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解: 设 $BD=x$ 米,则 $AD=(30-x)$ 米.

由勾股定理,得 $(10+x)^2+20^2=(30-x)^2$,

解得 $x=5$,

$\therefore CD=10+5=15$(米),

$\therefore$ 这棵树高 15 米.

24.2 直角三角形的性质

练习:

1. 解: 斜边长为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$(cm),则斜边上中线的长为 $\frac{2}{2}=1$(cm).

2. 解: 由题意易知 $\angle AOD=30°$,$\angle ADO=90°$,

$\because OA=30\sqrt{3}$ 海里,

$\therefore AD=15\sqrt{3}$ 海里,

$\because 15\sqrt{3}>20$,

$\therefore$ 没有触暗礁的危险.

3. 解: $\because \angle BAC=30°$,$\angle BCA=90°$,$BC=6$ 米,

$\therefore AB=2BC=12$(米).

习题 24.2:

1. 解: 由题意知,山顶的高度为 $120\times\frac{1}{2}=60$(m).

2. 解: $\because \angle BAC=120°$,$AB=AC$,$AE\perp BC$,

$\therefore BE=EC$,$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=60°$,$\angle AEB=90°$,

$\therefore \angle B=30°$.

$\because AB=5$ m,

$\therefore AE=\frac{5}{2}$ m,

$\therefore BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$(m),

$\therefore EC=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ m.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,

$\because AB=5$ m,D 为 AB 的中点,

$\therefore DE=AD=BD=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$ m,

又$\because DF\perp BC$,$AE\perp BC$,

$\therefore DF=\frac{1}{2}AE=\frac{5}{4}$ m,$BF=EF$,

在Rt$\triangle BDF$中,$BF=\sqrt{BD^2-DF^2}=\frac{5}{4}\sqrt{3}$ m,

$\therefore EF=\frac{5}{4}\sqrt{3}$ m.

3. 解: 如图,$\because \angle B=15°$,$\angle ADC=30°$,

$\therefore \angle BAD=15°$,

$\therefore \angle BAD=\angle B$,

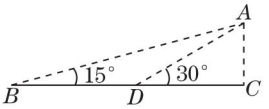
$\therefore BD=AD=4$ 千米,

在$\triangle ADC$ 中,

$\because \angle ADC=30°$,$\angle C=90°$,

$\therefore AC=\frac{1}{2}AD=2$ 千米,

$\therefore$ 气象站离地面的高度是 2 千米.



(第 3 题)

24.3 锐角三角函数

练习:

1. MN;PN;PN;MN

点拨: 直角所对的边称为斜边,锐角所对的直角边为对边,相邻的直角边为邻边.

2. 解: 由题意及勾股定理,

得 $EC=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$,

$\therefore \sin D=\frac{CE}{CD}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$,

$\cos D=\frac{DE}{CD}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$\tan D=\frac{CE}{ED}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

点拨: $\sin D=\frac{\angle D\text{的对边}}{\text{斜边}}$,

$\cos D=\frac{\angle D\text{的邻边}}{\text{斜边}}$,

$\tan D=\frac{\angle D\text{的对边}}{\angle D\text{的邻边}}$.

3. 解: (1) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$,

$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$,

$\tan B=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

(2) $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,

$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{12}{13}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{5}{13}$,

$\tan B=\frac{b}{a}=\frac{12}{5}$.

练习：

1. $\sin 60°$；$\cos 30°$；$\sin 45°$；$\cos 45°$；$\tan 45°$；$\tan 60°$

2. 解：(1) $\sin^2 60°+\cos^2 60°$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=1$.

(2) $2\cos 60°+2\sin 30°+4\tan 45°$

$=2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+4\times 1$

$=6$.

(3) $\frac{\cos 30°}{1+\sin 30°}+\frac{1}{\tan 60°}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

3. 解：$\because \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \angle A=45°$.

练习：

1. 解：(1) $\sin 24°\approx 0.406\ 7$.

(2) $\cos 51°42'20''\approx 0.619\ 7$.

(3) $\tan 70°21'\approx 2.800\ 6$.

2. 解：(1) $\alpha\approx 14°20'$.

(2) $\alpha\approx 65°20'$.

(3) $\alpha\approx 10°42'$.

习题 24.3：

1. 解：$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{29^2-21^2}=20$,

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{20}{29}$,

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{21}{29}$,

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{20}{21}$.

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{21}{29}$,

$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{20}{29}$,

$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{21}{20}$.

点拨：锐角 α 的三个三角函数：$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}}$,

$\cos\alpha=\frac{\alpha\text{的邻边}}{\text{斜边}}$,$\tan\alpha=\frac{\alpha\text{的对边}}{\alpha\text{的邻边}}$.

2. 解：由 $BC:AC=3:4$,$\angle C=90°$,

得 $BC:AC:AB=3:4:5$,

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$,

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$,

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$.

点拨：本题要求熟练掌握正弦、余弦、正切的定义.

3. 解：(1) $\sin 30°+\sin^2 45°-\frac{1}{3}\tan^2 60°$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\times(\sqrt{3})^2$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1$

$=0$.

(2) $\sqrt{(4\sin 30°-\tan 60°)(\tan 60°+4\cos 60°)}$

$=\sqrt{(2-\sqrt{3})\times(\sqrt{3}+2)}$

$=\sqrt{4-3}$

$=1$.

4. 解：$\sin 81°32'17''+\cos 38°43'47''$

$\approx 0.989\ 11+0.780\ 11$

$=1.769\ 22$

$\approx 1.769\ 2$.

5. 解：$\angle A\approx 72°31'$.

24.4 解直角三角形

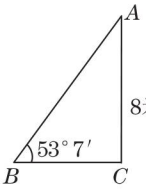
练习：

1. 解：如图，$\because \sin B=\frac{AC}{AB}$,$\tan B=\frac{AC}{BC}$,$\angle B=53°7'$,

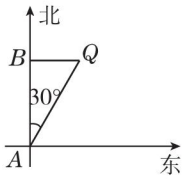
$\therefore BC=\frac{AC}{\tan B}\approx 6.0$ 米,$AB=\frac{AC}{\sin B}\approx 10.0$ 米,

$\therefore$ 该缆绳的长及缆绳地面固定点到电线杆底部的距离分别约为10.0 米,6.0 米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第1题)



(第2题)

2. 解:如图,由题意,得 $BQ\perp AB$, $\angle BAQ=30°$,

而 $AB=32.6\times\frac{1}{2}=16.3$(海里),

$\tan\angle BAQ=\frac{BQ}{AB}$,

则 $BQ=AB\cdot\tan\angle BAQ=16.3\times\tan30°=16.3\times\frac{\sqrt{3}}{3}\approx9.4$(海里).

答:灯塔 Q 到 B 处的距离约为 9.4 海里.

练习:

1. 解:由题意,得 $\angle BCA=90°$, $\angle ABC=\alpha=16°31'$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}$,

则 $AB=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{1\ 200}{\sin16°31'}\approx4\ 221$(米).

答:A 处到控制点 B 的距离约为 4 221 米.

2. 解: $DA=EC=DC\cdot\tan35°=50.4\times\tan35°\approx35.3$(米), $CB=EC+BE=EC+AE\cdot\tan20°=50.4\times\tan35°+50.4\times\tan20°\approx50.4\times0.700+50.4\times0.364\approx53.6$(米).

答:建筑物 DA 的高约为 35.3 米,建筑物 CB 的高约为 53.6 米.

练习:

解:(1)如图,过 B, C 分别作 $BE\perp AD$ 于 E, $CF\perp AD$ 于 F,在 Rt$\triangle ABE$ 中, $i_1=\tan A=\frac{BE}{AE}=\frac{1}{3}$,

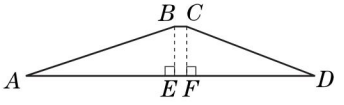
又∵ $BE=23.5$ 米,

∴ $AE=3BE=23.5\times3=70.5$(米),

则由勾股定理,得 $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{70.5^2+23.5^2}\approx74.3$(米). 在 Rt$\triangle CDF$ 中, $i_2=\tan D=\frac{CF}{DF}=\frac{1}{2.5}$,

则 $DF=2.5CF=2.5\times23.5=58.75$(米).

坝底 $AD=AE+EF+DF=AE+BC+DF=70.5+6.2+58.75\approx135.5$(米).



(2)∵ $\tan D=i_2=1:2.5$,∴ 通过计算器可得 $\angle D\approx22°$,即斜坡 CD 的坡角 α 约为 22°.

习题 24.4:

1. 解:(1)∵ $BC^2+AC^2=AB^2$,

∴ $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{(6\sqrt{15})^2+(6\sqrt{5})^2}=\sqrt{720}=12\sqrt{5}$.

(2) $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{20}{20\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ $\angle B=45°$.

(3) $\cos A=\frac{AC}{AB}$,

则 $AC=AB\cdot\cos A=30\times\cos60°=30\times\frac{1}{2}=15$.

(4) $\tan A=\frac{BC}{AC}$,

则 $BC=AC\cdot\tan A=15\times\tan30°=15\times\frac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}$.

2. 解:设水平距离为 x 米,

则 $\tan9°=\frac{1.2}{x}$,即 $x=\frac{1.2}{\tan9°}\approx7.6$(米).

答:从斜坡的起点至房屋门的最短的水平距离约是7.6米.

3. 解: $110\times\tan26°+35\approx89$(米).

答:乙楼的高约为 89 米.

4. 解: $\angle ABC=90°-59°=31°$,

航行速度为 $72\times\cos31°\div2=36\times\cos31°\approx36\times0.86\approx31$(海里/时).

答:这艘船航行的速度约为31 海里/时.

复习题

A 组:

1. 解:塑料薄膜的宽 $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$(m),

塑料薄膜的面积 $=5\times35=175$(m^2).

答:覆盖在顶上的塑料薄膜的面积为 175 m^2.

2. 解: E、A、B 三点在同一条直线上.

理由:∵ 正方形 $ACDE$ 的面积是 25 cm^2,

∴ $AC=5$ cm,

∵ $AC^2+AB^2=5^2+12^2=169$, $BC^2=13^2=169$,

∴ $AC^2+AB^2=BC^2$,

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle BAC=90°$,

又∵ $\angle EAC=90°$,

∴ E、A、B 三点在同一条直线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：∵ 斜边长 $=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴ 斜边上的中线的长为 $\frac{1}{2}\times 10=5$.

答：斜边上的中线的长为 5.

4. 解：(1) $2\cos 30^\circ-2\tan 45^\circ=\sqrt{3}-2$.

(2) $\sin^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

(3) $\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ+\frac{\tan^2 60^\circ}{\tan^2 30^\circ}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{(\sqrt{3})^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+9=10$.

5. 解：(1) $a=\frac{5}{\cos 60^\circ}=5\times 2=10$，

$b=5\tan 60^\circ=5\sqrt{3}$.

(2) $c=20\times\sin 60^\circ=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$，

$d=20\times\cos 60^\circ=20\times\frac{1}{2}=10$.

(3) $e=\frac{17}{\cos 30^\circ}=17\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{34}{3}\sqrt{3}$，

$f=17\times\tan 30^\circ=17\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{17}{3}\sqrt{3}$.

6. 解：$125\times\sin 39^\circ\approx 78.67$(米).

$78.67+1.40\approx 80$(米).

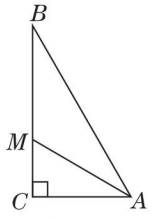
答：他的风筝的高度约为 80 米.

7. 解：如图，在 Rt△ACM 中，

$\angle MAC=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$，

$\cos\angle MAC=\frac{AC}{AM}$，

则 $AC=AM\cdot\cos\angle MAC=15\times\cos 30^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{2}\approx 13.0$(cm).



(第 7 题)

在 Rt△ABC 中，$AB=\frac{AC}{\cos 60^\circ}=\frac{AM\cdot\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}=15\sqrt{3}\approx 26.0$(cm).

答：直角边 AC 和斜边 AB 的长分别约为 13.0 cm，26.0 cm.

8. 解：设 $AC=2k$，则 $BC=k(k>0)$，

则 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(2k)^2+k^2}=\sqrt{5}k$，

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{k}{\sqrt{5}k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{2k}{k}=2$.

9. 解：(1) $\tan\alpha=\frac{y}{6}$，即 $\frac{4}{3}=\frac{y}{6}$，

∴ $y=8$.

(2)∵ $OP=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴ $\sin\alpha=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

点拨：在本题中，应明确点的坐标与直角三角形直角边的关系，纵坐标是点 P 到 x 轴的距离，横坐标是点 P 到 y 轴的距离.

10. 解：由题意知 $\angle CAB=60^\circ$，

在 Rt△ABC 中，$BC=AB\cdot\tan 60^\circ=1\,000\times\sqrt{3}\approx 1732.1$(米).

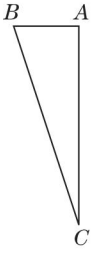
答：B、C 之间的距离约是 1 732.1 米.

点拨：本题应找准俯角与直角三角形 ABC 的内角的关系.

11. 解：根据题意画出示意图，如图，$\tan\angle ABC=\frac{24}{8}=3$，则 $\angle ABC\approx 71°34'$，

B 点到文物的距离 $=\sqrt{8^2+24^2}=8\sqrt{10}\approx 8\times 3.16\approx 25.3$(米).

答：应以与地平面形成约 71°34′的角度进行挖掘才能沿最短路线挖到文物，他们需要挖约 25.3 米.



(第 11 题)

B 组

12. 解：由 $i=1:\sqrt{3}$，知 $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\alpha=30^\circ$，

∴ $\angle ECD=60^\circ$，

∴ $DE=4\times\tan 60^\circ=4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$(m).

∵ $AE=4.5+\sqrt{5^2-4^2}=4.5+3=7.5$(m)，

∴ 坝底宽 $AD=AE+DE=(7.5+4\sqrt{3})$ m.

答：坡角 α 和坝底宽 AD 分别为 30°，$(7.5+4\sqrt{3})$ m.

点拨：解决本题的关键是熟练应用坡度的定义来求角.

13. 解：∵ $\beta=60^\circ$，∴ $\angle BAC=30^\circ$，

∴ $\angle ACB=60^\circ$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AB = BC \cdot \tan 60° = 24 \times \sqrt{3} = 24\sqrt{3} \approx 41.6$(米),

$\therefore CD = AB - BC \cdot \tan 30° = 24\sqrt{3} - 24 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3} \approx 27.7$(米).

答:建筑物 AB 的高约为 41.6 米,DC 的高约为 27.7 米.

点拨:解决本题的关键是找准所要解的直角三角形.

14. 解:由题意可得,$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$,$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AC = 4$,$\sin A = \frac{CD}{AC}$,则 $CD = AC \cdot \sin A = 2.4$,

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3.2$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AB = 5$,则 $AE = \frac{1}{2}AB = 2.5$,

$\therefore DE = AD - AE = 3.2 - 2.5 = 0.7$.

C 组:

15. 解:如图,记点 C 右边的两个点分别为 E、F.

由题意可得,$EF = \frac{AF}{\tan 61°} \approx 0.6AF$,

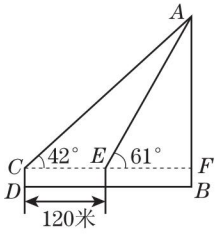
$\tan 42° = \frac{AF}{CE + EF} \approx \frac{AF}{120 + 0.6AF}$,

即 $\frac{AF}{120 + 0.6AF} \approx 0.9$,

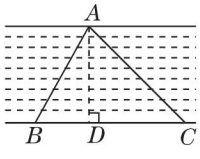
解得 $AF \approx 235$ 米,

$\therefore$ 电视塔的高度 $AB \approx 235 + 1.2 \approx 236$(米).

点拨:在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中利用锐角三角函数求解.



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 解:(1)如图,过 A 点作 $AD \perp BC$ 于 D.

$\because \angle ABC = 60°$,$\therefore \angle BAD = 30°$.

$\because \angle ACD = 45°$,$\therefore \angle DAC = 45°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$BD = AD \cdot \tan 30°$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$CD = AD \cdot \tan 45°$,

由题意知:$BD + CD = BC = 30$,

则 $AD \times (\tan 30° + \tan 45°) = 30$,$AD \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) = 30$,

解得 $AD \approx 19$ 米.

答:河的宽度约为 19 米.

(2)方案略.(只要设计的方案合理,便于测量、计算即可,答案不唯一)

点拨:本题利用解直角三角形的相关知识解决简单的实际问题.

17. 解:设秋千的绳索的长为 x 尺.

根据题意,得 $(x + 1 - 5)^2 + 10^2 = x^2$,

解得 $x = 14.5$.

答:秋千的绳索长 14.5 尺.

第 25 章 随机事件的概率

25.1 在重复试验中观察不确定现象

练习:

1. 解:(1)随机事件. $\because$ 打开电视机,可能正在播广告,也可能没有播广告.

(2)不可能事件. $\because$ 抛掷 10 枚硬币,正面朝上和反面朝上的一共有 10 个,$\therefore$ 此事件是不可能事件.

(3)随机事件. $\because$ 此事件可能发生,也可能不发生.

(4)必然事件. $\because$ 此事件一定发生.

(5)随机事件. $\because$ 此事件可能发生,也可能不发生.

2. 解:没有.

3. 解:(1)不同意. $\because$ 骰子上有奇数,$\therefore$ "掷得的数是奇数"是可能发生的.

(2)不同意. $\because$ 骰子上既有奇数,又有偶数,$\therefore$ "掷得的数是奇数"是可能发生而不是必然发生的.

(3)不同意."掷得的数不会超过 7"是必然发生的.

练习:

1. 解:(1)没有道理,抛掷一枚质量分布均匀的硬币,正面朝上和反面朝上的机会均等.

(2)没有道理. 抛掷一枚质量分布均匀的硬币,出现正面和出现反面的机会均等,但抛掷 1 000 次的话,不一定会有 500 次"正",500 次"反".

2. 解:买 1 张可能会中奖,买 100 张不一定会中奖. 谈看法略.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 略.

习题 25.1：

1. 解：(1)成功了 3 次,成功率是 30% ,不是他所在小组同学中成功率最高的人.

(2)一样,不一定.

(3)成功率 $=\frac{\text{成功总次数}}{\text{试验总次数}}\times 100\%$.

第一组成功率 $=\frac{30}{100}\times 100\% =30\%$.

第二组成功率 $=\frac{25}{100}\times 100\% =25\%$.

第三组成功率 $=\frac{20}{100}\times 100\% =20\%$.

第四组成功率 $=\frac{26}{100}\times 100\% =26\%$.

∴ 第一组成功率最高.

(4)

抛掷次数	50	100	150	200	250	300	350	400
出现两个正面的频数	12	30	40	55	63	75	86	101
出现两个正面的频率	24.0%	30.0%	26.7%	27.5%	25.2%	25.0%	24.6%	25.3%

如果把这张表画成相应的折线图,会看到出现两个正面的频率稳定在 25% 左右.

点拨：累计顺序不同,所填的表格数据也可能不同.

2. 解：(1)

投掷次数	1	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
出现 1 点的频数	1	2	4	6	6	8	9	14	15	17	21	21
出现 1 点的频率	100%	40.0%	40.0%	40.0%	30.0%	32.0%	30.0%	35.0%	30.0%	28.3%	30.0%	26.3%
投掷次数	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
出现 1 点的频数	22	26	30	32	33	36	40	41	45	49	51	57
出现 1 点的频率	24.4%	26.0%	27.3%	26.7%	25.4%	25.7%	26.7%	25.6%	26.5%	27.2%	26.8%	28.5%

点拨：整理数据的顺序不同,所填表格数据也可能不同.

(2)略. (3)略.

(4)发现其他点数出现的频率稳定在 25% 左右.

(5)能. 不同点数出现的机会大小都约为 0.25.

3. 略.

25.2 随机事件的概率

练习：

解：(1)掷得“7”的概率等于 $\frac{1}{8}$,这个数值表示大数次重复试验后,掷得“7”的频率会逐渐稳定在 $\frac{1}{8}$ 左右.

(2)掷得的数不是“7”的概率等于 $\frac{7}{8}$,这个数值表示大数次重复试验后,掷得的数不是“7”的频率会逐渐稳定在 $\frac{7}{8}$ 左右.

(3)掷得的数小于或等于“6”的概率等于 $\frac{3}{4}$,这个数值表示大数次重复试验后,掷得的数小于或等于“6”的频率会逐渐稳定在 $\frac{3}{4}$ 左右.

练习：

解：(1)$P(\text{摸出绿球})=\frac{3}{3+3+6}=\frac{1}{4}$.

(2)$P(\text{摸出白球})=0$.

(3)$P(\text{摸出蓝球})=\frac{6}{3+3+6}=\frac{1}{2}$.

(4)$P(\text{摸出黑球})=\frac{3}{3+3+6}=\frac{1}{4}$.

(5)$P(\text{摸出黑球或绿球})=\frac{3+3}{3+3+6}=\frac{1}{2}$.

(6)$P(\text{摸出蓝球或黑球或绿球})=1$.

练习：

解：两个指针都停在白色区域的概率是 $\frac{1}{6}$.

练习：

1. 解：拼成房子的概率为 $\frac{2}{3}$.

2. 解：(1)$\frac{1}{2}$. (2)$\frac{1}{2}$. (3)$\frac{9}{16}$.

3. 解：事件(4)发生的概率 < 事件(5)发生的概率 < 事件(3)发生的概率 < 事件(2)发生的概率 < 事件(6)发生的概率 < 事件(1)发生的概率

习题 25.2：

1. 解：(1)不同意,概率是 99% 表示重复做多次试验,取出 1 个红球的频率逐渐稳定在 99% 左右,但不能说一定会取出 1 个红球.

(2)不同意,概率是 0 说明是不可能事件,即布袋中没有红球,所以一定不会取出红球.

(3)不同意,从布袋中取出 1 个红球的概率是多少是由布袋中红球的个数和球的总个数决定的.

(4)不同意,概率很小不表示一定不会发生,也可能会发生.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)每位同学的名字被抽中的概率是$\frac{1}{42}$,男同学名字被抽中的概率是$\frac{27}{42}$,即$\frac{9}{14}$,女同学名字被抽中的概率是$\frac{15}{42}$,即$\frac{5}{14}$.

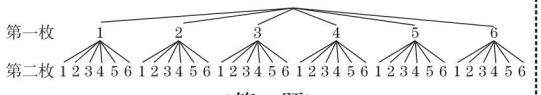
(2)余下的每位同学的名字被抽中的概率是$\frac{1}{36}$,男同学名字被抽中的概率是$\frac{23}{36}$,女同学名字被抽中的概率是$\frac{13}{36}$.

3. 解:(1)取出的球是白球的概率是$\frac{5}{9}$,取出的球是红球的概率是$\frac{1}{3}$,取出的球是黑球的概率是$\frac{1}{9}$. (2)从袋中余下的球中再随机取出 1 个球,这时,取出白球的概率是$\frac{5}{8}$,取出红球的概率是$\frac{1}{4}$,取出黑球的概率是$\frac{1}{8}$. (3)从袋中余下的球中再随机取出 1 个球,这时,取出白球的概率是$\frac{5}{8}$,取出红球的概率是$\frac{3}{8}$,取出黑球的概率是 0.

4. 解:(1)$\frac{1}{5}$. (2)$\frac{4}{5}$. (3)$\frac{2}{5}$. (4)$\frac{3}{5}$.

5. 解:所有机会均等的结果有 16 种,第 1 枚"出现正面"的概率为$\frac{1}{2}$.

6. 解:画树状图如下.



(第 6 题)

由图可知,一共有 36 种等可能情况,掷得两个 6 的情况有 1 种,∴ 掷得两个 6 的概率为$\frac{1}{36}$.

7. 解:(1)$\frac{1}{4}$. (2)$\frac{1}{8}$. (3)0. (4)$\frac{1}{8}$. (5)$\frac{1}{8}$.

8. 略. **9.** 略.

复习题

A 组:

1. 解:(1)不正确. 可能性很大的事情也可能不发生.

(2)不正确. 可能性很小的事情也可能发生.

(3)不正确. 结果恰好是"3"是可能发生的.

(4)不正确. 掷出"2"的机会和掷出其他数字的机会一样大.

(5)不正确. 中奖的机会不变.

2. 解:事件(4)发生的概率 < 事件(2)发生的概率 < 事件(5)发生的概率 < 事件(1)发生的概率 < 事件(3)发生的概率.

3. 解:概率为$\frac{1}{5}$.

4. 解:(1)$\frac{1}{9}$. (2)$\frac{1}{9}$. (3)$\frac{2}{9}$. (4)$\frac{1}{9}$. (5)$\frac{8}{9}$.

5. 解:两个转盘的指针停下后指向绿色的概率一样大. 检验略.

B 组:

6. 解:有可能一模一样. 原因略. **7.** 略.

8. 解:(1)(3)(4)是随机事件,可能发生,也可能不发生.

(2)是不可能事件,∵ 只有 3 个蓝球,不可能取出 5 个蓝球.

(5)是必然事件. ∵ 一共有 10 个球,其中任意两种颜色的球的个数之和小于 9,∴ 任意取 9 个,必定 3 种颜色的球都有.

9. 解:(1)$\frac{1}{13}$. (2)$\frac{1}{52}$. (3)$\frac{1}{4}$. (4)$\frac{1}{2}$.

10. 解:(1)$\frac{1}{4}$. (2)$\frac{1}{4}$. (3)$\frac{1}{2}$. (4)0.

C 组:

11. 解:每袋垃圾都放对位置的概率为$\frac{1}{24}$.

12. 解:(1)不均等. 分成"出现两个正面或两个反面"和"出现一个正面一个反面"这两个事件. (分类方法不唯一)

(2)不均等. 分成"掷得的两数之和为奇数"和"掷得的两数之和为偶数"这两个事件. (分类方法不唯一)

13. 解:∵ 正好拼成原图的概率是$\frac{1+1+1}{15}=\frac{1}{5}=0.2$,

∴ 正好拼成原图的频率会稳定在 0.2 附近.

14. 解:正是他最喜欢的搭配的概率是$\frac{1}{8}$,正是他最不喜欢的搭配的概率是$\frac{1}{4}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记



荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料