教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法106招·七八九年级共281招



九年级
数学（上）
荣德基 主编
（HK版）
赠教材习题答案

吉林教育出版社

特高级教师
点拨
九年级数学（上）（HK版）
荣德基 主编
吉林教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

简约的知识梳理总结　精准的重难疑惑点拨

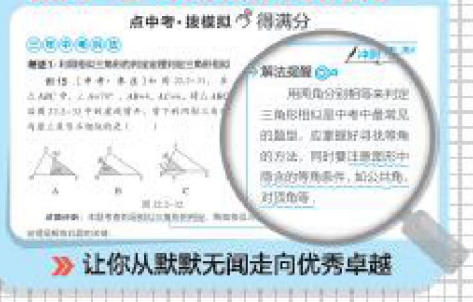
实用的方法技巧揭秘　培优拔尖题的破解策略　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

第3步

考法得满分

点中考 拨模拟 得满分



» 让你从默默无闻走向优秀卓越

第2步

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分

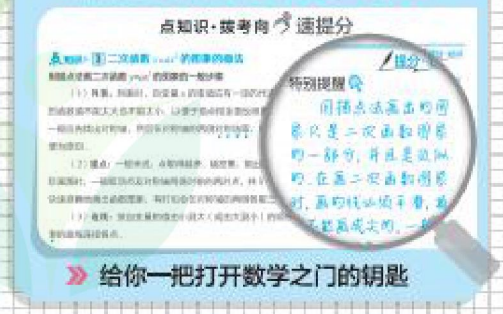


» 为你提供解题秘方

第1步

基础速提分

点知识 拨考向 速提分



» 给你一把打开数学之门的钥匙



三个维度打造极致

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

九年级 数学 上 （HK 版）

荣德基 主编

本册主编：范志刚



老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点106个 得高分

第21章 二次函数与反比例函数

		页码
1	分类法	3
2	静态法	4
3	定义法	4
4	割补法	5
5	判断二次函数的增减性的技巧	8
6	在同一坐标系中确定两个函数图象是否同时成立的方法	10
7	代入比较法	10
8	增减性比较法	10
9	作差法	11
10	建模法	11
11	特殊位置抛物线对应的函数表达式的设法技巧	20
12	顶点式法	21
13	根据二次函数的增减性求待定字母的取值范围的方法	21
14	图象法	22
15	二次函数最值的求法	22
16	建坐标系法	22
17	作图法	23
18	比较抛物线上两点对应的函数值大小的方法	24
19	对称轴法	29
20	估计一元二次方程的解的方法	29
21	分类讨论思想	33
22	判别式法	33
23	确定直线与抛物线交点个数的方法	34
24	函数思想	39
25	利用二次函数的性质求最大利润的方法	41
26	建立二次函数模型法	41
27	求抛物线最高点坐标的方法	44
28	判断一个函数是不是反比例函数的方法	47
29	求阴影部分面积的方法	52
30	建立反比例函数表达式常用的两种方法	52
31	特殊值法	55
32	对称法	55
33	交点坐标法	55
34	求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法	56
35	挖掘关系法	57
36	由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的函数值的范围求自变量的范围的方法	57
37	利用分段函数求最大利润的一般步骤	67
38	分段法	68
39	最值的求解思路	69
40	数形结合思想	83
41	方程思想	83

第22章 相似形

		页码
1	判断四条线段是不是成比例线段的方法	94
2	利用比例的性质求代数式的值的方法	95
3	利用平行线分线段成比例的基本事实或推论求线段长的方法	97
4	分类法	98
5	计算比较法	98
6	二次函数最值法	99
7	利用成比例线段求线段长的方法	106
8	利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似的方法	108
9	利用三边成比例判定两三角形相似的方法	108
10	判定两三角形相似的思路	109
11	判定两直角三角形相似的方法	109
12	中间比法	110
13	成比例法	110
14	利用相似三角形证明等积式的方法	110
15	对应关系法	111
16	分类讨论思想在相似三角形中的应用策略	111

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 106 个 得高分

第22章 相似形

	页码
17 三点定形法	111
18 构造平行线法	112
19 作平行线构造成比例线段及相似三角形的思路	113
20 对应边成比例法	113
21 相似比法	114
22 “A 型”法	122
23 “X 型”法	122
24 建相似比模型法	123
25 分类建立函数模型法	124
26 判断两个图形是否为位似图形的方法	128
27 画位似图形的步骤	130
28 位似图形中坐标的变化规律	133
29 位似变换法	133
30 用相似三角形测物高的两个原则	139
31 利用相似三角形测量高度、宽度等的一般步骤	140
32 割补法	142
33 构造相似三角形法	142
34 利用三角形相似证明乘积式的策略	148
35 分类讨论思想	155
36 方程思想	156

第23章 解直角三角形

1 定义法	166
2 参数法	166
3 构造法	166
4 求锐角三角函数值的方法	167
5 等角转换法	167
6 平移法	168
7 在网格中求锐角三角函数值的方法	168
8 分类讨论思想	168
9 换元法	169
10 从特殊到一般的思想	169
11 解决规律探究类问题的秘诀	169
12 30°，45°，60° 角的三角函数值的记忆法	173
13 有关特殊角的三角函数值的计算方法	174
14 构造特殊角的方法	175
15 利用特殊角的三角函数值解决实际问题的一般步骤	176
16 割补法	177
17 建模思想	183
18 口诀记忆法	187
19 解直角三角形的一般方法	187
20 解直角三角形选择表达式常遵循的原则	188
21 构造直角三角形解非直角三角形问题的方法	188
22 化斜为直法	189
23 旋转法	189
24 分段计算法	190
25 利用解直角三角形解决实际问题的一般步骤	195
26 解直角三角形的实际应用问题的求解方法	196
27 求解是否触礁问题的方法	198
28 方程思想	210
29 转化思想	211



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法
五点法作图…… 18
特殊值法…… 55

看微课
反比例函数的定义…… 47
反比例函数的性质…… 50
比例系数 k 的几何意义…… 51

观动画
二次函数的图象和性质…… 18

第 21 章 二次函数与反比例函数

21.1 二次函数 …… 2

21.2 二次函数的图象和性质 …… 7

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质 …… 7

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质 …… 14

21.3 二次函数与一元二次方程 …… 28

21.4 二次函数的应用 …… 38

21.5 反比例函数 …… 47

21.6 综合与实践 获取最大利润 …… 65

素养提分

行动篇：反比例函数中比例系数 k 的妙用 ☞ P64

技巧篇：对称轴在二次函数中的巧妙应用 ☞ P73

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P75

学方法
三点定形法…… 111

看微课
相似多边形…… 91
成比例线段…… 93
平行线分线段成比例…… 96

第 22 章 相似形

22.1 比例线段 …… 91

22.2 相似三角形的判定 …… 104

22.3 相似三角形的性质 …… 120

22.4 图形的位似变换 …… 128

22.5 综合与实践 测量与误差 …… 138

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分

方法篇：利用三角形相似证明乘积式的策略 ☞ P148

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P150

观动画

位似图形……128

第 23 章 解直角三角形

23.1 锐角的三角函数 …… 163

1. 锐角的三角函数…… 163

2. 30° ，45° ，60° 角的三角函数值…… 173

3. 一般锐角的三角函数值…… 181

23.2 解直角三角形及其应用 …… 186

1. 解直角三角形…… 186

2. 解直角三角形的应用…… 195

学方法

化斜为直法……189

看微课

锐角三角函数的定义……165

解直角三角形的应用……195

仰角、俯角问题……197

方向角问题……198

素养提分

类型篇：解直角三角形常见应用举例 ☞ P205

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P208

参考答案及点拨（单独成册）

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

2. **转化思想：**转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

3. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

4. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称之为分类讨论思想．

5. **建模思想：**建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段．使用数学语言描述的事物就称为数学模型．

6. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论．它的特点：由特殊→一般．

7. **函数思想：**是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题的一种思想．

8. **待定系数法：**待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数表达式．这种方法就叫做待定系数法．

9. **图象法：**利用图象这种特殊且形象的数学语言工具，来表达各种现象的过程和规律，这种方法称为图象法．

10. **特殊值法：**又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，从而通过简单的运算，得出最终答案的一种方法．这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要跟最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干中给出的等量关系是一个不可或缺的量．

11. **割补法：**割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

12. **三点定形法：**三点定形法是证明线段等积式或比例式中找相似三角形的最常用且最有效的方法，它就是设法找出比例式或等积式中（或转化后的式子中）所蕴含的几个字母，是否存在可由“三点”确定的两个相似的三角形．

13. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造不等式法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等．

14. **参数法：**参数法是指在解题过程中，通过适当引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，从而使问题得以解决的方法．

15. **定义法：**定义法就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的．因此，用定义法解题，是最直接的方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

构建数形世界的桥梁

构建数形世界的桥梁



第21章 二次函数与反比例函数

核心考点

你将见到的

- 二次函数的几种常见模型

  $y=ax^2$　$y=ax^2+c$　$y=a(x+h)^2$

  $y=a(x+h)^2+k$　$y=ax^2+bx+c$
- 二次函数的图象和性质
- 用待定系数法求二次函数表达式
- 二次函数与一元二次方程之间的关系
- 建立二次函数模型解决实际问题
- 反比例函数的图象和性质

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 割补法
- 建模法
- 待定系数法
- 数形结合思想
- 方程思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.1 二次函数

核心知识

- 二次函数的定义
- 二次函数的一般形式
- 二次函数自变量的取值范围

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数

1. 二次函数的定义

一般地，表达式形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$）的函数叫做 x 的二次函数，其中 x 是自变量.

2. 二次函数的特征

（1）自变量的最高次数必须是 2；

（2）等号右边的 ax^2+bx+c 是关于自变量 x 的整式；

（3）二次项系数 a 不等于零.

3. 二次函数的一般形式

$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$）是二次函数的一般形式. ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项.

提分·必记

详解

二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的特殊形式：

特殊形式	二次项	一次项	常数项
$y=ax^2$（$a\neq 0$）	ax^2	无	0
$y=ax^2+bx$（$a\neq 0$）	ax^2	bx	0
$y=ax^2+c$（$a\neq 0$）	ax^2	无	c

拨考向 利用二次函数的定义求待定字母的值

例 1 当 m 取何值时，函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-2m-1}+(m-5)x+m^2$ 是关于 x 的二次函数？并求出这时二次函数的表达式.

解题秘方： 紧扣二次函数定义的“三要素”进行解答.

解： 由题意，得 $\begin{cases}m^2-2m-1=2,\\ m^2+m\neq 0.\end{cases}$

要注意二次项系数不为 0

解 $m^2-2m-1=2$，得 $m=3$ 或 $m=-1$.

由 $m^2+m\neq 0$，得 $m\neq 0$ 且 $m\neq -1$.

$\therefore m=3$.

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，该函数是二次函数，表达式为 $y=(3^2+3)x^{3^2-2\times 3-1}+(3-5)x+3^2$，

即 $y=12x^2-2x+9$.

提分·秘诀

特别提醒

解此类题易只关注满足指数的要求，而忽略对二次项系数的限制，从而导致错误.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 建立二次函数模型表示变量间的关系

建立二次函数模型的一般步骤

1. **审清题意**：找出问题中的已知量（常量）和未知量（变量），把问题中的文字或图形语言转化成数学语言.

2. **找相等关系**：分析常量和变量之间的关系，列出等式.

3. **列二次函数表达式**：设出表示变量的字母，把相等关系用含字母的式子表示并把它整理成二次函数的一般形式.

4. **确定自变量的取值范围**：根据自变量所表示的实际意义确定其取值范围.

提分·必记

特别提醒

1. 建立二次函数模型与建立一元二次方程模型类似，不同的是需将它转化为用含一个变量的代数式表示另一个变量.
2. 自变量的取值范围应使实际问题有意义.

拔考向▶ 利用实际问题中的数量关系建立二次函数模型

例 2 某网店销售某款童装，每件售价 60 元，每星期可卖 300 件. 新冠肺炎疫情期间，该网店决定降价销售. 市场调查反映，每降价 1 元，每星期可多卖 30 件. 已知该款童装每件的成本价为 40 元，设该款童装每件的售价为 x 元，每星期的销售量为 y 件.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量的取值范围；

（2）设每星期的销售利润为 W 元，求 W 与 x 之间的函数表达式.

解题秘方：紧扣销售量和销售利润的基本关系式解答.

解：（1）$y=300+30(60-x)=-30x+2\,100\ (40\leqslant x\leqslant 60)$.

降价后的销售量=降价前可卖件数+降价后多卖的件数，每件降价(60-x)元.

（2）$W=(x-40)(-30x+2\,100)=-30x^2+3\,300x-84\,000$.

销售利润=每件利润×销售量，每件的利润为(x-40)元.

方法点拨：在实际问题中建立二次函数关系时，关键要找出两个变量之间的数量关系，用类似建立一元二次方程模型的方法，借助方程思想求出二次函数的表达式.

提分·秘诀

知识储备

销售利润=每件利润×销售量.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用分类法求二次函数表达式中待定字母的值

例 3 若关于 x 的函数 $y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数，求 m 的值.

解题秘方：紧扣二次函数定义的“三要素”，按系数与指数的不同情况分类求解.

解：当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3$ 是二次函数；

当 $\begin{cases}m^2-2=2,\\ m+1\neq -2,\end{cases}$ 即 $m=\pm 2$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3$ 是二次函数；

当 $m^2-2=1$，即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3$ 是二次函数；

当 $m^2-2=0$，即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数.

在讨论指数是0的时候，需指出底数不为0这一条件.

综上，$m=-1$，± 2，$\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{2}$.

挑战·高分

解法提醒

在进行分类讨论时，首先考虑首项系数等于0的情况，然后考虑首项系数不等于0的情况. 当首项系数不等于0时，要根据首项次数必须小于或等于2进行分类.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用静态法建立涉及几何动态问题的二次函数模型

例4 已知等腰直角三角形ABC的直角边长与正方形$MNPQ$的边长均为20 cm，AC与MN在同一条直线上，如图21.1-1，开始时点A与点N重合，让△ABC以2 cm/s的速度向左运动，最终点A与点M重合，求重叠部分的面积y（cm^2）与运动时间t（s）之间的函数表达式.

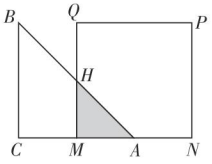


图 21.1-1

解题秘方： 利用等腰直角三角形的性质，用含t的代数式表示AM，MH的长是求y与t之间的函数表达式的切入点.

解： ∵△ABC为等腰直角三角形，∴∠CAB=∠CBA=45°.

∵∠QMN=90°，∴∠MHA=∠MAH=45°.

∴$MH=AM$.

又∵$AN=2t$ cm，∴$AM=MN-AN=(20-2t)$ cm.

∴$MH=AM=(20-2t)$ cm.

∴$y=\frac{1}{2}(20-2t)^2=2t^2-40t+200$.

又∵$t\geqslant 0$，$20-2t\geqslant 0$，∴$0\leqslant t\leqslant 10$.

∴$y=2t^2-40t+200\ (0\leqslant t\leqslant 10)$.

挑战·高分

解法提醒

在几何动态问题中建立二次函数模型关键要掌握两点：

一是掌握用点运动的路程表示线段长；

二是掌握几何图形的面积公式.

遇到动态问题时，我们要将其固定在某一时刻或某一状态，从而转化成静态问题.本题中，当图形运动时，重叠部分是等腰直角三角形，因此可以用含t的代数式来表示直角边的长，然后根据直角三角形的面积公式求出y与t之间的函数表达式.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘▶

二次函数的定义及列表达式表示函数关系是中考命题的热点，特别是利用二次函数定义确定字母系数的取值更是常考内容.从命题形式上看，有选择题、填空题，也有解答题，难度适中.对列表达式表示二次函数关系的考查，既有单纯的命题，也有与解决实际问题有关的综合题，难度相对较大.

三年中考兵法

考法1 利用二次函数定义法识别二次函数表达式

例5 [中考·兰州]下列函数表达式中，一定为二次函数的是(　　)

A. $y=3x-1$　B. $y=ax^2+bx+c$　C. $s=2t^2-2t+1$　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

试题评析： 本题考查了二次函数的定义，$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$是二次函数，注意二次函数表达式右边是整式.

解： A. $y=3x-1$是一次函数，故A错误；

B. $y=ax^2+bx+c$不一定是二次函数，故B错误；

C. $s=2t^2-2t+1$是二次函数，故C正确；

D. $y=x^2+\frac{1}{x}$不是二次函数，故D错误.

答案： C

冲刺·满分

教你一招

判断一个函数是否为二次函数的一般步骤：

1. 将函数表达式进行整理，使其右边是含自变量的代数式，左边是因变量；
2. 判断右边含自变量的代数式是不是整式；
3. 判断含自变量的项的最高次数是不是2；
4. 判断二次项的系数是不是0.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用割补法建立几何问题的二次函数模型

例 6 [中考·丽水]如图 21.1−2，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ACB=90°$，$AB=AD$，$AC=4BC$，设 CD 的长为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，则 y 与 x 之间的函数表达式是（　　）

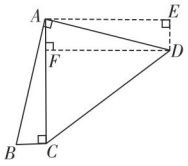


图 21.1−2

A. $y=\frac{2}{25}x^2$　　B. $y=\frac{4}{25}x^2$

C. $y=\frac{2}{5}x^2$　　D. $y=\frac{4}{5}x^2$

试题评析：本题运用了割补法，将求不规则四边形的面积转化为求梯形的面积，充分体现了全等三角形、勾股定理在解题中的作用.

解：由于 $AB=AD$，故以 AD 为斜边作 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle ABC$，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F，如图 21.1−2 所示.

易知 $BC=DE$，$AC=AE$，四边形 $AFDE$ 是矩形，$S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}$.

设 $BC=a$，则 $DE=AF=a$，$DF=AE=AC=4BC=4a$，$CF=AC-AF=3a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，由勾股定理得 $CF^2+DF^2=CD^2$，即 $(3a)^2+(4a)^2=x^2$.

解得 $a_1=\frac{x}{5}$，$a_2=-\frac{x}{5}$（舍去）.

$\therefore\ y=S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}=\frac{1}{2}\cdot(DE+AC)\cdot DF=\frac{1}{2}\cdot(a+4a)\cdot 4a=10a^2=\frac{2}{5}x^2$.

答案：C

技巧点拨

1. 本题是用割（$\triangle ABC$）补（$\triangle ADE$）法，将不规则的四边形 $ABCD$ 转化为规则的梯形 $ACDE$，从而建立两个变量间的函数关系.
2. 当几何图形不能通过已知条件直接建立两个变量的函数关系时，应考虑通过割补法来建立两个变量间的函数关系.

两年模拟兵法 ☞答案见 217 页

1. 下列式子中，属于二次函数的是（　　）

A. $y=\frac{2}{x^2-1}$　　B. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

C. $y=(x-2)^2-2x^2$　　D. $2x^2-3x=5$

2. [模拟·石家庄桥西]某工厂 2019 年某产品的产量为 100 t，该产品产量的年平均增长率为 x（$x>0$），设 2021 年该产品的产量为 y t，则 y 关于 x 的函数表达式为（　　）

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\frac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [模拟·北京] 某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件，市场调查反映，如果调整商品售价，每降价 1 元，每星期可多卖出 20 件，设每件商品降价 x 元后，每星期售出商品的总销售额为 y 元，则 y 与 x 之间的函数表达式为(　　)

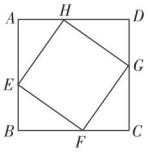
A. $y=60(300+20x)$

B. $y=(60-x)(300+20x)$

C. $y=300(60-20x)$

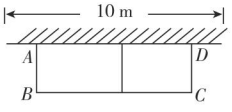
D. $y=(60-x)(300-20x)$

4. [中考·常德] 如图，正方形 $EFGH$ 的顶点在边长为 2 的正方形的边上，若设 $AE=x$，正方形 $EFGH$ 的面积为 y，则 y 与 x 之间的函数表达式为_____.



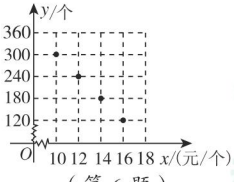
(第 4 题)

5. [模拟·青岛] 如图，有长为 24 m 的篱笆，一面利用墙(墙的最大可用长度为 10 m)，围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃. 设花圃的一边 AB 为 x m，面积为 S m^2，则 S 与 x 之间的函数表达式为_____，自变量的取值范围为_____.



(第 5 题)

6. 在“母亲节”期间，某校部分团员参加社会公益活动，准备购进一批许愿瓶进行销售，并将所得利润捐给慈善机构. 根据市场调查，这种许愿瓶一段时间内销售量 y(个)与售价 x(元/个)(x 为整数)之间的对应关系如图所示.



(第 6 题)

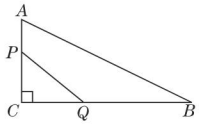
(1) 试判断 y 与 x 之间的函数关系，并求出函数表达式；

(2) 若许愿瓶的进价为 6 元/个，按照上述市场调查的销售规律，求销售利润 W(元)与售价 x(元/个)之间的函数表达式.

7. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$ mm，$BC=12$ mm，动点 P 从点 A 开始沿边 AC 向 C 以 1 mm/s 的速度移动，动点 Q 从点 C 开始沿边 CB 向 B 以 2 mm/s 的速度移动.

(1) 如果 P，Q 两点同时出发，求出△PCQ 的面积 S_1(mm^2)关于运动时间 t(s)的函数表达式及 t 的取值范围；

(2) 在(1)的条件下，请求出四边形 $APQB$ 的面积 S_2(mm^2)关于运动时间 t(s)的函数表达式.　　【导学号：8618152】



(第 7 题)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

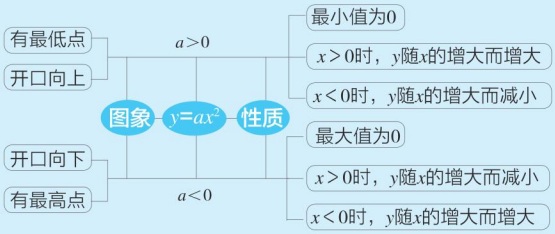
21.2 二次函数的图象和性质

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

核心知识

- 抛物线 $y=ax^2$ 的画法
- 抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向
- 抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴
- $y=ax^2$ 的增减性

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象的画法

用描点法画二次函数 $y=ax^2$ 的图象的一般步骤

（1）**列表**：列表时，自变量 x 的取值应有一定的代表性，并且所对应的函数值不能太大也不能太小，以便于描点和全面反映图象情况．选点时，一般应先找出对称轴，然后在对称轴的两侧对称选取，以计算简单、描点方便为原则．

（2）**描点**：一般来说，点取得越多、越密集，画出的图象就越准确．实际画图时，一般取顶点及对称轴两侧对称的两对点，共 5 个点，用“五点法”快速准确地画出函数图象，有时也会在对称轴的两侧各取三个点画图．

（3）**连线**：按自变量的值由小到大（或由大到小）的顺序，顺次用平滑的曲线连接各点．

拨考向 利用描点法作二次函数 $y=ax^2$ 的图象

例 1 在同一平面直角坐标系中作出 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象．

解题秘方：用描点法，按列表→描点→连线这三个步骤作图．

解：列表如下：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	−8	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5	−8	…
$y=\frac{1}{4}x^2$	…	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	…

提分·必记

特别提醒

用描点法画出的图象只是二次函数图象的一部分，并且是近似的．在画二次函数图象时，画的线必须平滑，顶端不能画成尖的，一般来说，选点越多，图象越精确，但也要具体问题具体分析．

提分·秘诀

作图通法

1. 列表、描点、连线是画函数图象的基本方法，用这种方法可以画出任意一个函数的图象．
2. 利用列表、描点、连线画二次函数 $y=ax^2$ 的图象时，列表中的 x 的值要在坐标原点（0，0）的左右两边对称选取，选点时，应以计算简单、描点方便为原则．
3. 在同一坐标系中作多个函数图象时，要在图象旁边标明对应的函数表达式．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

描点、连线，即得三个函数的图象，如图 21.2−1 所示．

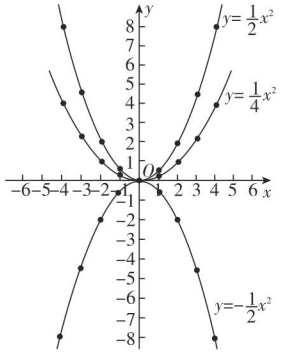


图 21.2−1

解法提醒

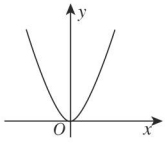
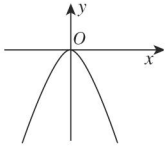
连线时，必须按照自变量的值由小到大（或由大到小）的顺序，并且用光滑的曲线顺次连接，初始点和末端点处要注意适当“向外延伸”，切忌用线段连接或漏点、跨点连接．

知识 2 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

1. 抛物线的概念

观察函数 $y=x^2$ 的图象知它是一条关于 y 轴对称的曲线，我们把这条曲线叫做抛物线．二次函数 $y=ax^2$ 的图象都是抛物线，二次函数 $y=ax^2$ 的图象可以简称为抛物线 $y=ax^2$.

2. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

$y=ax^2$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$(0,0)$	
对称轴	y 轴（或直线 $x=0$）	
增减性	在对称轴的左侧，即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧，即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$

提分·必记

要点解读

1. 判断二次函数的增减性的技巧：从抛物线的对称轴分开，自左向右看，“上坡路”就是 y 随 x 的增大而增大，“下坡路”就是 y 随 x 的增大而减小．
2. 在二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 中，a 的正负性决定开口方向，$|a|$ 决定开口的大小．$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线开口越大．
3. 二次函数 $y=-ax^2(a\neq0)$ 与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象关于 x 轴对称．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质的应用题型

题型 1：二次函数 $y=ax^2$ 的图象的应用

例 2 如图 21.2-2，四个二次函数的图象分别对应① $y=ax^2$；② $y=bx^2$；③ $y=cx^2$；④ $y=dx^2$，且①与③、②与④分别关于 x 轴对称.

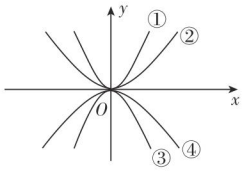


图 21.2-2

（1）比较 a，b，c，d 的大小；

（2）说明 a 与 c，b 与 d 的数量关系.

解题秘方： 紧扣 $y=ax^2$ 中“a 的符号”及“$|a|$ 的大小”，采用数形结合思想进行解答.

解：（1）由抛物线的开口方向，知 $a>0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$，

由抛物线的开口大小，知 $|a|>|b|$，$|c|>|d|$，因此 $a>b$，$c<d$.

$\therefore a>b>d>c$.

（2）∵①与③，②与④分别关于 x 轴对称，

∴①与③，②与④的开口大小相同，方向相反.

$\therefore a+c=0$，$b+d=0$.

题型 2：二次函数 $y=ax^2$ 的性质的应用

例 3 已知函数 $y=(m+2)x^{m^2+m-4}$ 是关于 x 的二次函数.

（1）求满足条件的 m 的值.

（2）当 m 为何值时，其图象有最低点？求出这个最低点，这时当 x 为何值时，y 随 x 的增大而增大？

（3）当 m 为何值时，函数有最大值？最大值是多少？这时当 x 为何值时，y 随 x 的增大而减小？

解题秘方： 按对称轴的左、右两侧，分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况讨论函数的增减性.

解：（1）由题意得 $\begin{cases} m^2+m-4=2, \\ m+2\neq 0, \end{cases}$ 解得 $m=2$ 或 $m=-3$.

∴当 $m=2$ 或 $m=-3$ 时，函数为二次函数.

（2）若抛物线有最低点，则抛物线的开口向上，

$\therefore m+2>0$，即 $m>-2$. $\therefore m=2$.

∵这个最低点为抛物线的顶点，

∴最低点的坐标为（0，0）.

当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

（3）若函数有最大值，则抛物线的开口向下，

$\therefore m+2<0$，即 $m<-2$. $\therefore m=-3$.

∵函数的最大值为抛物线顶点的纵坐标，顶点坐标为（0，0），

∴当 $m=-3$ 时，函数有最大值 0.

当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

提分·秘诀

解法提醒

$y=ax^2$ 中 a 与其图象开口方向、开口大小之间的关系：

1. a 的符号：

$a>0$ ⇔开口向上；

$a<0$ ⇔开口向下.

2. a 的绝对值：

$|a|$ 越大⇔开口越小；

$|a|$ 相等⇔开口大小相同.

巧题妙解

当 $x=1$ 时，四个函数值分别等于二次项系数，

∴直线 $x=1$ 与四条抛物线的交点从上到下依次为 $(1,a)$，$(1,b)$，$(1,d)$，$(1,c)$.

∴ $a>b>d>c$.

知识储备

满足条件即满足二次函数的“三要素”：

1. 整式；
2. 最高次数为 2；
3. 二次项系数不为 0.

解法提醒

在分析二次函数的增减性时，都是以对称轴为分界线进行讨论：

1. 开口向下的抛物线，在对称轴左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧 y 随 x 的增大而减小；
2. 开口向上的抛物线，在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用基础图象位置法识别图象

例 4 ［模拟·淄博博山］当 $ab>0$ 时，$y=ax^2$ 与 $y=ax+b$ 的图象大致是图 21.2-3 中的（　　）

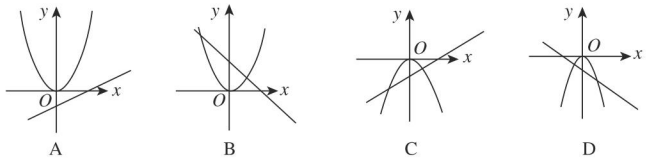


图 21.2-3

解题秘方：对 a，b 的符号情况进行分类讨论．

解：$ab>0$，即 a，b 同号．

当 $a>0$ 时，$b>0$，$y=ax^2$ 的图象开口向上，过原点；$y=ax+b$ 的图象过第一、二、三象限，此时，没有选项符合．

当 $a<0$ 时，$b<0$，$y=ax^2$ 的图象开口向下，过原点；$y=ax+b$ 的图象过第二、三、四象限，此时，D 选项符合．

答案：D

挑战·高分

解题通法

在同一坐标系中确定两个函数图象是否同时成立的方法：

先确定一个基础函数图象；

再根据这个基础函数图象的位置确定待定系数的取值范围；

最后看求出的待定系数的范围是否满足另一个函数图象．

拔尖角度 2 利用代入比较法或增减性比较法比较函数值的大小

例 5 已知点 $A(-4,y_1)$，$B(\sqrt{2},y_2)$，$C(2,y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_____（用“<”连接）．

解题秘方一：用代入比较法比较大小．

解法一：∵点 $A(-4,y_1)$，$B(\sqrt{2},y_2)$，$C(2,y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，

∴ $y_1=(-4)^2=16$，$y_2=(\sqrt{2})^2=2$，$y_3=2^2=4$．

∴ $y_2<y_3<y_1$．

答案：$y_2<y_3<y_1$

解题秘方二：用函数的增减性比较法比较大小．

解法二：抛物线 $y=x^2$ 的对称轴是 y 轴，点 $A(-4,y_1)$ 关于 y 轴的对称点是 $(4,y_1)$，由二次函数 $y=x^2$ 的图象开口向上，对称轴为 y 轴可知，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大．

∵$\sqrt{2}<2<4$，

∴ $y_2<y_3<y_1$．

答案：$y_2<y_3<y_1$

挑战·高分

技巧 1

代入比较法：若已知二次函数的表达式，则将几个点的横坐标分别代入二次函数的表达式，求出对应的函数值，再比较大小．

技巧 2

增减性比较法：

当所给的几个点在抛物线的对称轴的同一侧时，直接利用增减性即可比较；

当所给的几个点不在抛物线的对称轴的同一侧时，需先利用抛物线的对称性将点转化到对称轴的同一侧，再利用函数的增减性或点在抛物线上的大致位置来比较函数值的大小．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用分割法解二次函数图象中的面积问题

例6 如图 21.2−4，已知 $y=-2x+3$ 的图象与 $y=x^2$ 的图象交于 A，B 两点，且与 x 轴、y 轴分别交于 D，C 两点，O 为坐标原点.

（1）求点 A，B 的坐标；

（2）求 $S_{\triangle AOB}$.

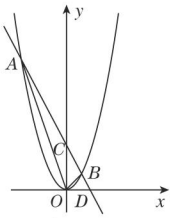


图 21.2−4

解题秘方： 用分割法求面积.

解：（1）依题意，可列方程组 $\begin{cases}y=-2x+3,\\y=x^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-3,\\y_1=9,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=1.\end{cases}$ ∴ $A(-3,9)$，$B(1,1)$.

（2）直线 $y=-2x+3$ 与 y 轴的交点 C 的坐标为 $(0,3)$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times1=6.$

方法技巧： 求斜置于平面直角坐标系中的三角形的面积时，一般可用分割法将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解. 当三角形的一边在坐标轴上时，这条边的长度容易求得，这条边上的高为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值.

挑战·高分

另解

也可以采用作差法求面积. 直线 $y=-2x+3$ 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times9-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1=6.$

拔尖角度▸ 4 利用建模法解抛物线型实际应用问题

例7 有一条抛物线形状的隧道，隧道的最大高度为 6 m，跨度为 8 m，把它放在如图 21.2−5 所示的平面直角坐标系中.

（1）求这条抛物线对应的函数表达式；

（2）若要在隧道壁上点 P 处安装一盏照明灯，灯离地面的高度为 4.5 m，求照明灯与点 B 的距离.

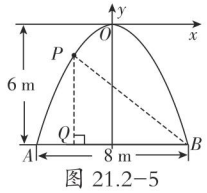


图 21.2−5

解题秘方： 根据抛物线在坐标系中的位置建立二次函数模型，求出抛物线对应的函数表达式，然后结合图象求照明灯与点 B 的距离.

解：（1）由题意，设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2$.

∵点 $A(-4,-6)$ 在抛物线上，∴ $a\cdot(-4)^2=-6$，解得 $a=-\frac{3}{8}$.

∴故抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{8}x^2$.

（2）过点 P 作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，连接 PB，如图 21.2−5，则 $PQ=4.5$ m.

∴点 P 的纵坐标为 -1.5. 将 $y=-1.5$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x^2$，得 $x=\pm2$.

∵点 P 在第三象限，∴点 P 的坐标为 $(-2,-1.5)$.

∴ $BQ=6$m，∴ $PB=\sqrt{PQ^2+BQ^2}=\sqrt{4.5^2+6^2}=7.5$（m）.

答：照明灯与点 B 的距离为 7.5 m.

挑战·高分

解题策略

一般地，求二次函数 $y=ax^2$ 的表达式时，只需已知一个点（坐标原点除外）的坐标即可，本题中点 A 和点 B 关于 y 轴对称，将点 A 或点 B 的坐标代入表达式所得方程相同，故任选一点坐标代入即可.

警示误区

易因未考虑坐标轴的位置，误将点 P 的纵坐标看作 -4.5 进行计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 二次函数 $y=ax^2$ 的图象是历年中考的常考点，抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向、顶点坐标、增减性等性质在中考中常有体现，题目为中、低档题，有些中考压轴题也会涉及，预计在以后几年的考题中仍会出现.

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质辨析相关函数的性质

例 8 [中考·玉林]抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=x^2$、$y=-x^2$ 的共同性质是：

①都是开口向上；　②都以点（0，0）为顶点；

③都以 y 轴为对称轴；　④都关于 x 轴对称.

其中正确的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

试题评析：本题考查了二次函数的图象与性质；熟记抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标是解决问题的关键.

解：抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=x^2$ 的开口向上，$y=-x^2$ 的开口向下，①错误；抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=x^2$、$y=-x^2$ 的顶点都为（0，0），对称轴都为 y 轴，②③正确；④错误.

答案：B

考法 2 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象求其与几何图形的交点坐标

例 9 [中考·淄博]如图 21.2-6，Rt △ OAB 的顶点 A（-2，4）在抛物线 $y=ax^2$ 上，将 Rt △ OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到 △ OCD，边 CD 与该抛物线交于点 P，则点 P 的坐标为（　　）

A. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　B.（2，2）　C. $(\sqrt{2},2)$　D. $(2,\sqrt{2})$

试题评析：本题考查了二次函数的综合知识，解题时首先求得抛物线对应的函数表达式，再求得点 P 的纵坐标，将点 P 的纵坐标代入函数表达式求解即可.

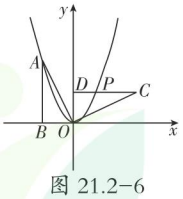


图 21.2-6

解：∵ Rt △ OAB 的顶点 A（-2，4）在抛物线 $y=ax^2$ 上，∴ $4=a\times(-2)^2$，解得 $a=1$.

∴抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2$.

∵ Rt △ OAB 的顶点 A 的坐标为（-2，4），∴ $OB=2$.

∵ Rt △ OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到△ OCD，

∴ $CD\parallel x$ 轴，$OD=OB=2$. ∴点 D 和点 P 的纵坐标均为 2.

在 $y=x^2$ 中，令 $y=2$，得 $2=x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

∵点 P 在第一象限，∴点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},2)$.

答案：C

冲刺·满分

解题通法

1. 解二次函数 $y=ax^2$ 的图象问题时，一般应从分析图象的形状及位置，开口大小及方向，顶点坐标、对称轴等入手.
2. 解二次函数 $y=ax^2$ 的增减性问题时，一般应分析函数的最大(小)值，增(减)区间等.

解题策略

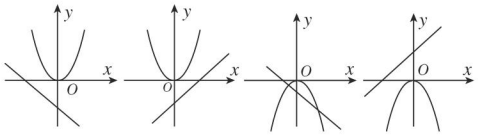
解答二次函数的图象与几何图形的综合题要抓住以下几点：

1. 读懂抛物线与几何图形找出有用信息；
2. 将抛物线看作几何图形的组成部分进行解答；
3. 由几何图形中的结论，回归到抛物线上点的坐标时，要注意带上符号.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象为（　　）



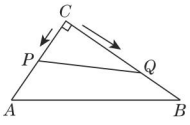
A　　B　　C　　D

2. 已知 $a<-1$，点 $(a-1, y_1)$，(a, y_2)，$(a+1, y_3)$ 都在函数 $y=-x^2$ 的图象上，则（　　）

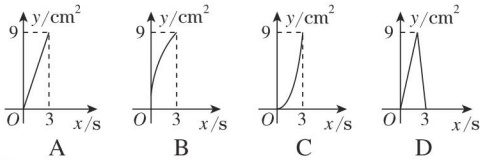
A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

3. [中考·黔西南州]如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$ cm，$BC=6$ cm，动点 P 从点 C 沿 CA 以 1 cm/s 的速度向 A 点运动，同时动点 Q 从点 C 沿 CB 以 2 cm/s 的速度向 B 点运动，其中一个动点到达终点时，另一个动点也停止运动，则运动过程中所构成的 $\triangle CPQ$ 的面积 y（cm^2）与运动时间 x（s）之间的函数图象大致是（　　）

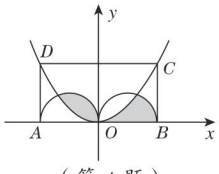


（第 3 题）



A　　B　　C　　D

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的长 $AB=4$ cm，宽 $AD=2$ cm，O 是 AB 的中点，以 O 为顶点的抛物线经过 C，D 两点，以 OA，OB 为直径在矩形内画两个半圆，则图中阴影部分的面积为_____.



（第 4 题）

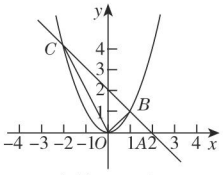
5. 如图，直线 AB 过 x 轴上一点 $A(2, 0)$，且与抛物线 $y=ax^2$ 相交于 B，C 两点，B 点坐标为 $(1, 1)$.

（1）求直线 AB 及抛物线 $y=ax^2$ 对应的函数表达式；

（2）求点 C 的坐标；

（3）求 $S_{\triangle OBC}$；

（4）若抛物线上有一点 D（在第一象限内），使得 $S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$，求点 D 的坐标.

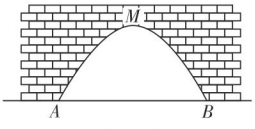


（第 5 题）

6. 如图是抛物线形拱桥，水面在 AB 时，拱顶 M 离水面 4 m，水面宽为 8 m.

（1）若以 M 为坐标原点建立平面直角坐标系，求出抛物线对应的函数表达式；

（2）若水位上升 1 m，水面宽度减少多少？（结果保留根号）　　【导学号：8618152】



（第 6 题）

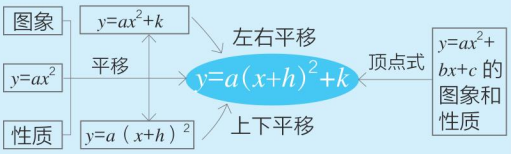
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

核心知识

- $y=ax^2+k$ 的图象和性质
- $y=a(x+h)^2$ 的图象和性质
- $y=a(x+h)^2+k$ 的图象和性质
- $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

知识链接



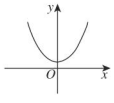
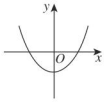
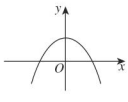
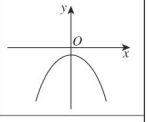
点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

它们的形状（开口大小、方向）相同，只是上、下位置不同，二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象上下平移 $|k|$ 个单位得到.

2. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与性质

a 的符号	$a>0$		$a<0$	
k 的符号	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
图象				
开口方向	向上		向下	
对称轴	y 轴（直线 $x=0$）		y 轴（直线 $x=0$）	
函数的增减性	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大		当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大	
最大（小）值	当 $x=0$ 时，y 取得最小值，最小值为 k		当 $x=0$ 时，y 取得最大值，最大值为 k	

3. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象的画法

（1）**描点法**：类比作二次函数 $y=ax^2$ 图象的描点法，即按列表→描点→连线的顺序作图.

（2）**平移法**：将二次函数 $y=ax^2$ 的图象，向上（$k>0$）或向下（$k<0$）平移 $|k|$ 个单位，即可得二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象.

拔考向 利用二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象解相关应用问题

例 1 画出函数 $y=-x^2+1$ 与 $y=-x^2-1$ 的图象，并根据图象回答下列问题：

（1）抛物线 $y=-x^2+1$ 经过怎样的平移才能得到抛物线 $y=-x^2-1$？

（2）对于函数 $y=-x^2+1$，其图象与 x 轴的交点坐标是_____；对称轴是_____；顶点坐标是_____.

提分·必记

要点提醒

a 决定抛物线的开口方向和开口大小，所以 $y=ax^2(a\neq0)$ 与 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图象开口方向和开口大小相同，只是位置不同.

平移规律口诀

上加下减，纵变横不变.

“上加下减”表示抛物线上下平移的规律，即抛物线 $y=ax^2+k$ 是由抛物线 $y=ax^2$ 上下平移 $|k|$ 个单位得到的，“上加”表示当 k 为正数时，向上平移；“下减”表示当 k 为负数时，向下平移.

“纵变横不变”表示坐标的平移规律，即抛物线平移时其对应点的纵坐标改变而横坐标不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣抛物线 $y=ax^2+k$ 与抛物线 $y=ax^2$ 间的关系及图象的平移规律解答．

解：列表如下：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-x^2+1$	…	−8	−3	0	1	0	−3	−8	…
$y=-x^2-1$	…	−10	−5	−2	−1	−2	−5	−10	…

描点、连线，即得这两个函数的图象，如图 21.2−7 所示．

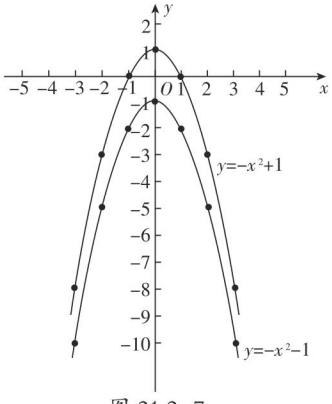


图 21.2−7

（1）由图象可以看出，抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位得到抛物线 $y=-x^2-1$.

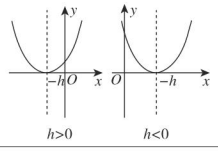
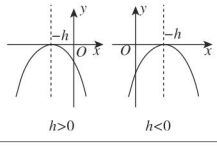
（2）（−1，0），（1，0）；y 轴；（0，1）

知识点 2 二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

它们的形状（开口大小、方向）相同，只是左、右位置不同，二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移 $|h|$ 个单位得到．

2. 二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的图象和性质

$y=a(x+h)^2$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-h$	
顶点坐标	$(-h, 0)$	
增减性	当 $x<-h$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-h$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-h$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-h$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-h$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=-h$ 时，$y_{最大值}=0$

提分·秘诀

方法 1

以抛物线 $y=-x^2$ 作中介平移：

抛物线 $y=-x^2+1$ 是由抛物线 $y=-x^2$ 向上平移 1 个单位得到的，抛物线 $y=-x^2-1$ 是由抛物线 $y=-x^2$ 向下平移 1 个单位得到的，因此抛物线 $y=-x^2-1$ 是由抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位得到的．

方法 2

以对应点作中介平移：

观察图 21.2−7 中的两条抛物线，抛物线 $y=-x^2+1$ 的顶点是（0，1），抛物线 $y=-x^2-1$ 的顶点是（0，−1），因为顶点向下平移了 2 个单位，所以将抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位可得到抛物线 $y=-x^2-1$.

提分·必记

平移规律口诀

左加右减，横变纵不变：

1.“左加”表示当 $h>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴向左平移 h 个单位得到抛物线 $y=a(x+h)^2$；

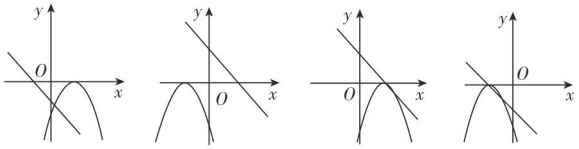
2.“右减”表示当 $h<0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴向右平移 $|h|$ 个单位得到抛物线 $y=a(x+h)^2$；

3.“横变纵不变”表示坐标的平移规律，即抛物线平移时对应点的横坐标改变而纵坐标不变．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的系数识别图象

例 2 在平面直角坐标系中，函数 $y=-x-1$ 与 $y=-\frac{3}{2}(x-1)^2$ 的图象大致是图 21.2-8 中的（　　）



A　　B　　C　　D

图 21.2-8

解题秘方： 由两个函数图象的位置与系数的关系判断.

解： ∵ $k=-1<0$，$b=-1<0$，

∴ $y=-x-1$ 的图象经过二、三、四象限.

又∵ $a=-\frac{3}{2}<0$，$-h=1$，

∴ $y=-\frac{3}{2}(x-1)^2$ 的图象开口向下，顶点为（1，0）.

∴同时符合条件的图象只有 A.

答案： A

提分·秘诀

知识储备

直线 $y=kx+b$（$k\neq0$，$b\neq0$）的位置与 k，b 符号的关系：

1. $k>0$ 时，若 $b>0$，则直线经过一、二、三象限；若 $b<0$，则直线经过一、三、四象限.
2. $k<0$ 时，若 $b>0$，则直线经过一、二、四象限；若 $b<0$，则直线经过二、三、四象限.

知识点▶3 二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象之间的关系

$y=a(x+h)^2+k$ 的图象是由 $y=ax^2$ 的图象先向左（或向右）平移 $|h|$ 个单位，再向上（或向下）平移 $|k|$ 个单位得到的. 具体平移规律如下：

$y=ax^2$ 的图象 —（$h>0$，向左平移 h 个单位；$h<0$，向右平移 $|h|$ 个单位）→ $y=a(x+h)^2$ 的图象 —（$k>0$，向上平移 k 个单位；$k<0$，向下平移 $|k|$ 个单位）→ $y=a(x+h)^2+k$ 的图象

2. 二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象和性质

a 的符号	$a>0$	$a<0$
图象的开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-h$	
顶点坐标	$(-h,\ k)$	
函数的增减性	当 $x>-h$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x<-h$ 时，y 随 x 的增大而减小	当 $x>-h$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x<-h$ 时，y 随 x 的增大而增大
最大（小）值	当 $x=-h$ 时，$y_{最小值}=k$	当 $x=-h$ 时，$y_{最大值}=k$

提分·必记

特别解读

1. 从 $y=a(x+h)^2+k$（$a\neq0$）中可以直接得出抛物线的顶点坐标，所以通常把它称为二次函数的顶点式，顶点坐标是（$-h$，k）.
2. 对二次项系数相同的二次函数，可以根据两抛物线的顶点位置来判断平移的方式. 例如：抛物线 $y=(x+3)^2+2$ 的顶点是（-3，2），可以看成是把 $y=x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位得到的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象和性质解相关应用问题

例 3 对于抛物线 $y=-(x+1)^2+3$，下列结论：

① 抛物线的开口向下；

② 对称轴为直线 $x=1$；

③ 顶点坐标为（-1，3）；

④ $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小．

其中正确结论有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方： 紧扣二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象和性质逐一判断．

解： ①∵ $a=-1<0$，∴ 抛物线的开口向下，正确；

②对称轴为直线 $x=-1$，错误；

③顶点坐标为（-1，3），正确；

④ $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，正确．

综上所述，结论正确的是①③④，共 3 个．

答案： C

提分·秘诀

解题策略

解答抛物线 $y=a(x+h)^2+k$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标、最值、增减性规律等问题，先弄清顶点式 $y=a(x+h)^2+k$ 中 a，h，k 与开口方向、对称轴、顶点坐标、最值间的关系，比较题中给出的相关数据与 a，h，k 间的关系，再结合相关知识按题目要求解答．

点知识▶ 4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 之间的关系

1. 二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c$ 与顶点式 $y=a(x+h)^2+k$ 的互化

$$h=\frac{b}{2a},\ k=\frac{4ac-b^2}{4a},\ \text{即}\ y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

提分·必记

详解

$$\begin{aligned}
&y=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c\\
&=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的画法

方法一：描点法，画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的步骤

（1）把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式；

（2）确定抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标；

（3）在对称轴两侧，以顶点为中心，左右对称描点并用光滑的曲线顺次连接．

方法二：平移法，画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的步骤

（1）把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，其图象的顶点坐标为（$-h$，k）；

（2）作出二次函数 $y=ax^2$ 的图象；

（3）将二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移，使其顶点平移到（$-h$，k）．

3. 拓展 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，若 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称，则 $y_1=y_2$，$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用一般式与顶点式的关系解题

例 4 对于抛物线 $y=x^2-4x+3$.

（1）将抛物线对应的函数表达式化为顶点式；

（2）在坐标系中利用五点法画出此抛物线.

"五点"包括顶点及关于对称轴对称的两对点.

解题秘方： 先用配方法将一般式转化为顶点式，再进行解答.

解：（1）$\because y=x^2-4x+3=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1$,

$\therefore$ 顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

（2）列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	−1	0	3	…

函数图象如图 21.2−9 所示.

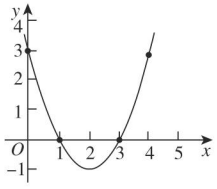


图 21.2−9

画图通法： 若二次函数图象与 x 轴和 y 轴有交点，则最好选取交点进行描点，特别是在画二次函数的大致图象时，应注意以下五点：（1）开口方向；（2）对称轴；（3）顶点；（4）与 x 轴的交点；（5）与 y 轴的交点. 这种画法先研究函数图象的特点，确定图象的大致形状后，选点就有了依据，避免了盲目性.

提分·秘诀

五点法作图

特别解读

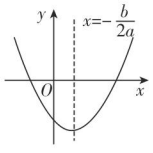
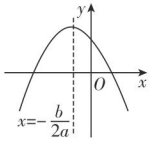
化一般式为顶点式也可用公式求，即：

$h=\frac{b}{2a}=\frac{-4}{2\times1}=-2$,

$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times3-(-4)^2}{4\times1}=-1$.

$\therefore$ 顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

点知识▶5 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

函数	$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）	
	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
增减性	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

提分·必记

活学巧记

曲线名叫抛物线，
线轴交点是顶点，
顶点纵标是最值.
如果要画抛物线，
描点平移两条路；
提取配方定顶点，
描点平移皆成图.
列表描点后连线，
五点大致定全图；
若要平移也不难，
先画基础抛物线，
顶点移到新位置，
开口大小都不变.

二次函数的图象和性质

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拔考向▶利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质说明函数图象的特征

例 5 已知抛物线 $y=2x^2-4x-6$.

（1）直接写出抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标；

（2）求抛物线与 x 轴、y 轴的交点坐标；

（3）当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？

解题秘方：（2）类比一次函数的方法，求图象与 x 轴的交点坐标，令 $y=0$，再解方程；求图象与 y 轴的交点坐标，令 $x=0$，再代入求值．本题可以不画图象，利用二次函数表达式中的系数来说明函数图象的特征．

解：（1）开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为（1，−8）．

（2）令 $y=0$，得 $2x^2-4x-6=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

∴与 x 轴的交点坐标为（−1，0），（3，0）．

令 $x=0$，得 $y=-6$，

∴与 y 轴的交点坐标为（0，−6）．

（3）当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大．

提分·秘诀

方法总结

若不画图象直接得出函数图象的特征，则必须根据函数图象的特征与二次函数表达式中系数之间的关系来确定．

对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，其中 a 决定开口方向，c 为抛物线与 y 轴交点的纵坐标．对称轴和顶点坐标可直接根据公式 $x=-\frac{b}{2a}$，$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 来确定．

点知识▶6 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特征与 a，b，c 的符号关系

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，a 的符号决定抛物线的开口方向，ab 的符号决定抛物线对称轴的大致位置，c 的符号决定抛物线与 y 轴交点的大致位置．具体如下表：

字母（或式子）	符号	特征
a	$a>0$	开口向上
	$a<0$	开口向下
$-\frac{b}{2a}$	$b=0$	对称轴为 y 轴
	$ab>0$（a，b 同号）	对称轴在 y 轴左侧
	$ab<0$（a，b 异号）	对称轴在 y 轴右侧
c	$c=0$	图象过原点
	$c>0$	图象与 y 轴正半轴相交
	$c<0$	图象与 y 轴负半轴相交

提分·必记

收藏夹

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$：

当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$，此时，

若 $y=0$，则 $a+b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a+b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a+b+c<0$.

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$，此时，

若 $y=0$，则 $a-b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a-b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a-b+c<0$.

拔考向▶利用二次函数的图象确定代数式的符号

例 6 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 21.2−10，有下列结论：① $a+b+c<0$；② $a-b+c>0$；③ $abc>0$；④ $b=2a$. 其中正确的结论有（　　）

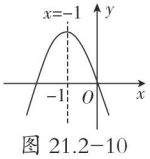


图 21.2−10

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

解题秘方：根据二次函数的图象特征与字母系数之间的关系判断．

解：当 $x=1$ 时，对应的函数值 $y<0$，即 $a+b+c<0$，故①正确；

提分·秘诀

详解

当 $x=1$ 时，对应的函数值 $y=ax^2+bx+c=a+b+c$，观察图象可知此时抛物线上对应的点在 x 轴下方，说明此时的函数值 $y<0$，即 $a+b+c<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $x=-1$ 时，对应的函数值 $y>0$，即 $a-b+c>0$，故②正确；

观察图象知抛物线过原点，$\therefore c=0$，则 $abc=0$，故③错误；

$\because$ 此抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-1$，即 $b=2a$，故④正确.

答案： B

特别提醒

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$. 判断 a,b 之间的关系时，往往需要根据抛物线的对称轴的位置来判断.

点知识 ▸ 7 用待定系数法求二次函数的表达式

1. 常见的二次函数表达式的适用条件

（1）一般式 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$），当已知抛物线上三点的坐标时，设此二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$；

（2）顶点式 $y=a(x+h)^2+k$（a，h，k 为常数，$a\neq 0$），当已知抛物线的顶点坐标或对称轴或最大（小）值时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x+h)^2+k$；

（3）交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$（a，x_1，x_2 为常数，$a\neq 0$），当已知抛物线与 x 轴的两个交点（x_1，0），（x_2，0）时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

提分·必记

技巧点拨

特殊位置抛物线对应的函数表达式的设法技巧：

1. 顶点在原点，可设为 $y=ax^2$；
2. 对称轴是 y 轴（或顶点在 y 轴上），可设为 $y=ax^2+k$；
3. 顶点在 x 轴上，可设为 $y=a(x+h)^2$；
4. 抛物线过原点，可设为 $y=ax^2+bx$.

2. 用待定系数法求二次函数表达式的步骤

（1）**设**：根据题中已知条件，合理设出二次函数的表达式，如 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a(x+h)^2+k$ 或 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 $a\neq 0$；

（2）**代**：把已知点的坐标代入所设的二次函数表达式中，得到关于表达式中待定系数的方程（组）；

（3）**解**：解此方程（组），求出待定系数的值；

（4）**还原**：将求出的待定系数还原到表达式中，求得表达式.

拔考向 ▸ 利用待定系数法求二次函数的表达式

例 7 已知二次函数图象的顶点坐标为 $(1,-3)$，且过点 $P(2,0)$，求这个二次函数的表达式.

解题秘方一： 设顶点式，将点 P 的坐标代入求解.

解法一：（顶点式）设所求二次函数的表达式为 $y=a(x+h)^2+k(a\neq 0)$.

$\because$ 抛物线的顶点坐标为（1，−3），

$\therefore h=-1$，$k=-3$.

$\therefore$ 这个二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2-3$.

又 $\because$ 函数图象过点 $P(2,0)$，

$\therefore (2-1)^2a-3=0$，解得 $a=3$.

$\therefore$ 这个二次函数的表达式为 $y=3(x-1)^2-3$，即 $y=3x^2-6x$.

提分·秘诀

另解

（一般式）设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

$\because$ 其图象的顶点坐标为（1，−3），且过点（2，0），

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=-3, \\ 4a+2b+c=0, \\ -\dfrac{b}{2a}=1, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=3, \\ b=-6, \\ c=0. \end{cases}$$

$\therefore$ 这个二次函数的表达式为 $y=3x^2-6x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方二：根据抛物线与 x 轴两交点关于对称轴对称的性质求出抛物线与 x 轴的另一个交点，设交点式，将顶点坐标代入求解.

解法二：（交点式）设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(a\neq 0)$.

∵抛物线与 x 轴的一个交点为 $P(2,0)$，对称轴为直线 $x=1$，

∴抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为 $(0,0)$.

∴ $y=a(x-0)(x-2)$，即 $y=ax(x-2)$.

又∵二次函数图象的顶点坐标为 $(1,-3)$，

∴ $-3=a\times 1\times(1-2)$，解得 $a=3$.

∴这个二次函数的表达式为 $y=3x(x-2)$，即 $y=3x^2-6x$.

学习札记

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用顶点式法求函数表达式

挑战·高分

例 8 已知二次函数图象的顶点为 $(-2,-3)$，且图象过点 $(-3,-2)$，求此二次函数的表达式.

解题秘方：根据顶点式及点的坐标与函数表达式的关系，用方程思想解答.

解：∵二次函数图象的顶点为 $(-2,-3)$，

∴设此二次函数的表达式为 $y=a(x+2)^2-3$.

又∵图象过点 $(-3,-2)$，

∴ $-2=a\times(-3+2)^2-3$.

∴ $a=1$.

∴此二次函数的表达式为 $y=(x+2)^2-3$.

警示误区

本题设表达式时一定要注意 $y=a(x+h)^2+k$ 中 h 与 k 的符号，千万不要设成 $y=a(x-2)^2-3$.

拔尖角度 2 利用函数的增减性法确定待定字母的取值范围

挑战·高分

例 9 若二次函数 $y=(x-m)^2-1$，当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m=1$　　B. $m>1$

C. $m\geqslant 1$　　D. $m\leqslant 1$

解题秘方：紧扣对称轴两侧的增减性求解.

解：二次函数 $y=(x-m)^2-1$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=m$，故在对称轴的左侧，即当 $x\leqslant m$ 时，y 随 x 的增大而减小.

又因为当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，

所以直线 $x=1$ 应在对称轴 $x=m$ 的左侧或与对称轴重合.

故 $m\geqslant 1$.

答案：C

解题通法

根据二次函数的增减性求待定字母的取值范围的方法：

首先将二次函数化为顶点式，确定其图象的对称轴；

然后根据图象的开口方向确定对称轴左、右两侧的增减性；

最后结合图象确定待定字母的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用图象法求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在指定自变量取值范围内的最值

例 10 分别在下列范围内求函数 $y=x^2-2x-3$ 的最值；

（1）$0<x<2$；（2）$2\leqslant x\leqslant 3$.

解题秘方：紧扣抛物线的位置特征用图象法求解.

解： $\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为（1，−4），如图 21.2−11 所示.

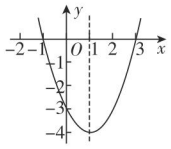


图 21.2−11

（1）当 $0<x<2$ 时，函数 $y=x^2-2x-3$ 有最小值，当 $x=1$ 时，$y_{最小值}=-4$.

（2）$\because$ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，y 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，$y_{最大值}=3^2-2\times3-3=0$；当 $x=2$ 时，$y_{最小值}=2^2-2\times2-3=-3$.

拔尖角度 4 利用建坐标系法解抛物线型实际应用问题

例 11 有一座抛物线形状的拱桥，当水位涨至 AB 时，水面 AB 的宽度为 14 m，如果水位再上升 4 m，就到达警戒水位 CD，这时水面的宽度是 10 m.

（1）建立直角坐标系，求抛物线对应的函数表达式.

（2）某日上午 7 时，洪水已涨至警戒水位，并继续以每小时 0.5 m 的速度上升. 有一条满载抗洪物资的小船，小船露出水面部分的横截面是矩形，且高为 1.5 m，宽为 2 m，问小船必须在几时之前才能安全通过该桥的拱洞？

解题秘方：利用拱桥的形状特征建立适当的直角坐标系，构建二次函数模型，结合抛物线的性质解答.

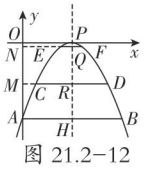


图 21.2−12

解：（1）如图 21.2−12，建立直角坐标系，由条件可知抛物线的顶点坐标为（7，0）.

设该抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-7)^2$，由题知 $AH=7$ m，$CR=5$ m，延长 DC 交 y 轴于点 M，则 $MC=7-5=2$（m）.

当 $x=2$ 时，$y=25a$，则 $OM=-25a$ m；当 $x=0$ 时，$y=49a$，则 $OA=-49a$ m. $\therefore AM=OA-OM=-24a$ m.

$\because AM=4$ m，$\therefore a=-\frac{1}{6}$.

$\therefore y=-\frac{1}{6}(x-7)^2$.（答案不唯一）

（2）如图 21.2−12，$EF=2$ m，则 $EQ=1$ m. 延长 FE 交 y 轴于 N，则 $NQ=7$ m，$\therefore NE=6$ m. 当 $x=6$ 时，$y=-\frac{1}{6}$，则 $PQ=\frac{1}{6}$ m.

当 $x=2$ 时，$y=-\frac{1}{6}\times25=-\frac{25}{6}$，则 $PR=\frac{25}{6}$ m. $\therefore QR=4$ m.

挑战·高分

技巧点拨

二次函数最值的求法：

1. 若自变量的取值范围是全体实数，则函数在顶点处取得最大值或最小值，即当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 若自变量的取值范围是 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$：

（1）若 $-\frac{b}{2a}$ 在自变量的取值范围内，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是其中的一个最值，另一个最值在 $x=x_1$ 或 $x=x_2$ 处取得；

（2）若 $-\frac{b}{2a}$ 不在自变量的取值范围内，则函数的最值即为当 $x=x_1$，$x=x_2$ 时的函数值，且较大的为最大值，较小的为最小值，最大值和最小值是同时存在的.

挑战·高分

特别提醒

可根据不同的表达式建立直角坐标系，先想好所用的表达式. 当用 $y=a(x+h)^2$ 的形式解决问题时，建系的方法是将过抛物线的顶点且垂直于对称轴的直线作为 x 轴，平行于对称轴的直线作为 y 轴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵船露出水面部分的高为 1.5 m，∴安全通过该桥的拱洞时水位最多上升 2.5 m，2.5÷0.5=5（h），7+5=12（时）.

∴小船必须在 12 时之前才能安全通过该桥的拱洞.

解法提醒：用函数知识解决实际问题的关键是建立适当的平面直角坐标系，把实际问题转化为数学问题，本题可用建模思想，将桥的拱洞看成抛物线的一部分，利用二次函数知识来解决问题.

拔尖角度▸ 5 利用作图法解二次函数图象上点的存在性问题

挑战·高分

例 12 如图 21.2−13，已知抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，与 y 轴交于 $C(0,3)$.

（1）求抛物线对应的函数表达式.

（2）设抛物线的顶点为 D，在其对称轴的右侧的抛物线上是否存在点 P，使得△PDC 是等腰三角形？若存在，求出符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

解题秘方：用作图法以 CD 为边作等腰三角形，再结合图象的性质求点 P 的坐标.

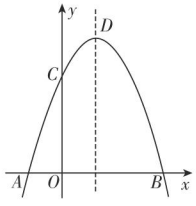


图 21.2−13

解：（1）∵抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，

∴设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x+1)\cdot(x-3)$.

∵抛物线与 y 轴交于点 $C(0,3)$，

∴ $a(0+1)(0-3)=3$，解得 $a=-1$.

∴抛物线对应的函数表达式为 $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

（2）存在. 由 $y=-x^2+2x+3$ 得，点 D 的坐标为（1，4），对称轴为直线 $x=1$. ①若 $PC=PD$，设点 P 的坐标为（m，n），

根据勾股定理，得 $m^2+(3-n)^2=(m-1)^2+(4-n)^2$，即 $n=4-m$.

∵点 $P(m,n)$ 在抛物线上，∴ $4-m=-m^2+2m+3$，

即 $m^2-3m+1=0$，解得 $m=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

∵$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$，∴ $m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

∴ $n=4-m=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$，即点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

②若 $DC=DP$，∵点 P 在对称轴右侧的抛物线上，∴由抛物线的对称性知，点 P 与点 C 关于直线 $x=1$ 对称，此时点 P 的坐标为（2，3）.

③若 $CD=CP$，由图象知此种情况不存在.

∴符合条件的点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或（2，3）.

学习札记

解法提醒

点 A，B 是抛物线与 x 轴的交点，可设交点式解题.

特别提醒

1. 对于是否存在的探究问题，一般先假设存在，在存在的前提下求出结论，则说明存在，否则说明不存在.
2. 第（2）问中没有明确哪两条线段是等腰三角形的腰，需分类讨论，即分 $PC=PD$，$DC=DP$，$CD=CP$ 三种情况，防止漏解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

二次函数是历年中考的热点与难点，题型既有选择题和填空题，也有中档的解答题，还有与其他知识相结合的难度较大的压轴题．近几年，各地的中考试卷中还出现了设计新颖、贴近生活、反映时代特点的阅读理解题以及开放性探究题，主要考查学生分析问题和解决问题的能力以及计算能力和空间想象能力，解题的关键是掌握二次函数的有关性质及图象特征．

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数最大值的性质求字母的值

例 13 [中考·潍坊]已知二次函数 $y=-(x-h)^2$（h 为常数），当自变量 x 的值满足 $2\leqslant x\leqslant 5$ 时，与其对应的函数值 y 的最大值为 -1，则 h 的值为（　　）

A. 3 或 6　　B. 1 或 6　　C. 1 或 3　　D. 4 或 6

试题评析： 本题考查了二次函数的最值以及二次函数的性质，分 $h<2$、$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况求出 h 的值是解题的关键．

解： 如图 21.2-14，当 $h<2$ 时，有 $-(2-h)^2=-1$，

解得 $h_1=1$，$h_2=3$（舍去）；

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时，$y=-(x-h)^2$ 的最大值为 0，不符合题意；

当 $h>5$ 时，有 $-(5-h)^2=-1$，

解得 $h_3=4$（舍去），$h_4=6$．

综上所述，h 的值为 1 或 6．

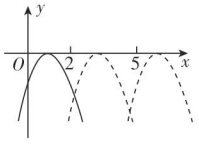


图 21.2-14

答案： B

考法 2 利用二次函数的性质比较函数值的大小

例 14 [中考·兰州]点 $P_1(-1,y_1)$，$P_2(3,y_2)$，$P_3(5,y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图象上，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_3>y_2>y_1$　　B. $y_3>y_1=y_2$　　C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1=y_2>y_3$

试题评析： 本题考查了二次函数的增减性和其图象的对称性，解题的关键是利用二次函数图象的对称性将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题．

解： ∵ $y=-x^2+2x+c=-(x-1)^2+1+c$，

∴该抛物线的对称轴为直线 $x=1$，且开口向下．

∴ $P_2(3,y_2)$，$P_3(5,y_3)$ 在对称轴的右侧．

∵在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小，$3<5$，∴ $y_2>y_3$．

根据二次函数图象的对称性可知，$P_1(-1,y_1)$ 与 $P_2(3,y_2)$ 关于抛物线的对称轴对称，故 $y_1=y_2$．

综上，$y_1=y_2>y_3$．

答案： D

点拨微课堂

冲刺·满分

思路点拨

分 $h<2$，$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况考虑：

当 $h<2$ 时，根据二次函数的性质可得出关于 h 的一元二次方程，解之即可得出结论；

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时，函数的最大值为 0，与题意不符，可得出该情况不存在；

当 $h>5$ 时，根据二次函数的性质可得出关于 h 的一元二次方程，解之即可得出结论．综上即可得出结论．

解法提醒

比较抛物线上两点对应的函数值大小的方法：

1. 如果两点在对称轴的同侧，可以用二次函数的增减性比较大小；
2. 如果两点在对称轴的两侧，则可以利用二次函数图象的对称性将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题；
3. 如果无法确定这两点是否在对称轴的同侧，可以把两点的坐标代入函数表达式中，用作差法比较大小．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用特殊二次函数的性质求最值

例 15 [中考·泸州] 已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 具有如下性质：该抛物线上任意一点到定点 $F(0,2)$ 的距离与到 x 轴的距离始终相等，如图 21.2−15，点 M 的坐标为 $(\sqrt{3},3)$，P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上一个动点，则△ PMF 周长的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

试题评析： 本题考查了二次函数的性质、垂线段最短、三角形三边关系，根据垂线段最短确定点 P 的位置是解题的关键.

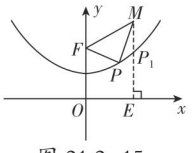


图 21.2−15

解： 如图 21.2−15，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 于点 P_1，当 P 与 P_1 重合时△ PMF 的周长最小，且最小值是 $ME+FM$. ∵ $F(0,2)$，$M(\sqrt{3},3)$，∴ $ME=3$，$FM=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(3-2)^2}=2$. ∴△ PMF 周长的最小值 $=ME+FM=3+2=5$.

答案： C

详解

在抛物线上任取一点 P'（不同于点 P_1），连接 $P'F$、$P'M$，过 P' 作 $P'E'\perp x$ 轴于 E'，连接 ME'.

由已知得 $P'E'=P'F$，

∴△ $P'MF$ 的周长 $=P'F+P'M+FM=P'E'+P'M+FM$.

∵△ P_1MF 的周长 $=ME+FM$，$P'M+P'E'>ME'$（两边之和大于第三边），$ME'>ME$（垂线段最短），

∴△ $P'MF$ 的周长 > △ P_1MF 的周长.

考法 4 利用二次函数性质求抛物线中的最短距离问题

例 16 [中考·宁波] 如图 21.2−16，已知抛物线 $y=-x^2+mx+3$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，点 B 的坐标为 $(3,0)$.

（1）求 m 的值及抛物线的顶点坐标.

（2）点 P 是抛物线对称轴 l 上的一个动点，当 $PA+PC$ 的值最小时，求点 P 的坐标.

试题评析： 此题考查了二次函数的性质、用待定系数法求表达式以及最短距离问题，找到点 P 的位置是解此题的关键.

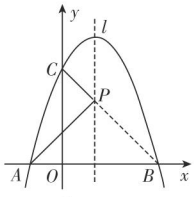


图 21.2−16

解：（1）把点 $B(3,0)$ 的坐标代入 $y=-x^2+mx+3$，得 $0=-3^2+3m+3$，解得 $m=2$.

∴ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$.

∴顶点坐标为 $(1,4)$.

（2）如图 21.2−16，连接 BC 交抛物线的对称轴 l 于点 P，则此时 $PA+PC$ 的值最小.

设直线 BC 对应的函数表达式为 $y=kx+b$.

∵ $B(3,0)$，$C(0,3)$，∴ $\begin{cases}0=3k+b,\\3=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴直线 BC 对应的函数表达式为 $y=-x+3$.

当 $x=1$ 时，$y=-1+3=2$.

∴当 $PA+PC$ 的值最小时，点 P 的坐标为 $(1,2)$.

详解

要在直线 l 上找一点 P 使 $PA+PC$ 最小，可先找出点 A（或点 C）关于直线 l 的对称点，再将找出的对称点与点 C（或点 A）连接，连线与直线 l 的交点就是所求的点.

理由：连接 CB 交直线 l 于点 P.

∵点 A 关于直线 l 的对称点为点 B，

∴ $PA=PB$.

∴ $PA+PC=CB$.

在 l 上任取点 P'（不同于点 P），连接 $P'A$，$P'B$，$P'C$，

∴ $P'A=P'B$.

∴ $P'A+P'C=P'B+P'C$.

∵ $P'B+P'C>BC$，

∴ $PA+PC$ 的值最小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·长沙]抛物线 $y=2(x-3)^2+4$ 的顶点坐标是(　　)

A.(3，4)　　B.(−3，4)

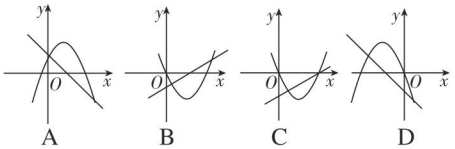
C.(3，−4)　　D.(2，4)

2. [中考·山西]将抛物线 $y=(x-2)^2-8$ 向左平移3个单位，再向上平移5个单位，得到抛物线对应的函数表达式为(　　)

A. $y=(x+1)^2-13$　　B. $y=(x-5)^2-3$

C. $y=(x-5)^2-13$　　D. $y=(x+1)^2-3$

3. [模拟·太原]一次函数 $y=ax+b$ 和二次函数 $y=ax^2+bx$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是(　　)



A　B　C　D

4. [中考·临沂]二次函数 $y=ax^2+bx+c$，自变量 x 与函数 y 的对应值如下表：

x	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	…
y	…	4	0	−2	−2	0	4	…

下列说法正确的是(　　)

A. 抛物线的开口向下

B. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 二次函数的最小值是 −2

D. 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{5}{2}$

5. [中考·绍兴]抛物线 $y=x^2+bx+c$(其中 b，c 是常数)过点 $A(2，6)$，且抛物线的对称轴与线段 $y=0(1\leqslant x\leqslant 3)$ 有交点，则 c 的值不可能是(　　)

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

6. [模拟·重庆]在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y_1=ax^2+bx$ 与直线 $y_2=kx$ 如图所示，当 $y_1\neq y_2$ 时，取 y_1，y_2 中的较大值记为 N；当 $y_1=y_2$ 时，$N=y_1=y_2$，则下列说法：

①当 $0<x<2$ 时，$N=y_1$；

②N 随 x 的增大而增大时，x 的取值范围是 $x<0$；

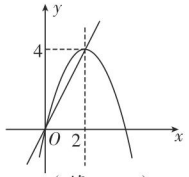
③取 y_1，y_2 中的较小值记为 M，则使得 M 大于4的 x 值不存在；

④若 $N=2$，则 $x=2-\sqrt{2}$ 或 $x=1$.

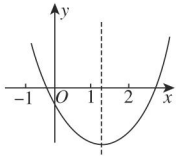
其中正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个



(第6题)



(第7题)

7. [中考·天水]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，若 $M=4a+2b$，$N=a-b$，则 M，N 的大小关系为 M_____N(填“>”“=”或“<”).

8. 新型冠状病毒爆发，使得人们人心惶惶，足不出户.杨明关注肺炎的发展情况，于是统计了从爆发开始，某第一批受感染区所受传染的人数，每四天为一次统计单元，统计得到以下三组数据.有心的杨明发现每四天的人数增长满足二次函数 $y=ax^2+bx+c$.

次数 x	1	2	3
人数 y	10	200	570

(1)求此二次函数的表达式；

(2)如果该区有1 850人感染此病毒，请问此时经历了多少天?

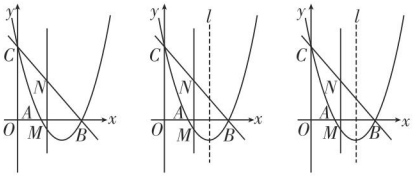
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [**中考·漳州**]如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(3,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,3)$.

（1）求抛物线对应的函数表达式.

（2）若点 M 是抛物线在 x 轴下方上的动点，过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交直线 BC 于点 N，求线段 MN 的最大值.

（3）在（2）的条件下，当 MN 取得最大值时，在抛物线的对称轴 l 上是否存在点 P，使 $\triangle PBN$ 是等腰三角形？若存在，请直接写出所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



备用图1　　备用图2

（第 9 题）

10. [**中考·黄冈**]如图，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 与 x 轴交于点 A、点 B，与 y 轴交于点 C，点 D 与点 C 关于 x 轴对称，点 P 是 x 轴上一个动点. 设点 P 的坐标为（m，0），过点 P 作 x 轴的垂线 l 交抛物线于点 Q.


点拨微课堂

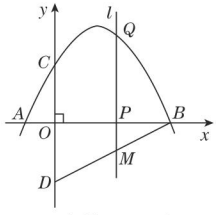
（1）求点 A，B，C 的坐标.

（2）求直线 BD 对应的函数表达式.

（3）当点 P 在线段 OB 上运动时，直线 l 交 BD 于点 M，试探究 m 为何值时，四边形 $CQMD$ 是平行四边形.

（4）在点 P 的运动过程中，是否存在点 Q，使 $\triangle BDQ$ 是以 BD 为直角边的直角三角形？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

【导学号：8618152】



（第 10 题）

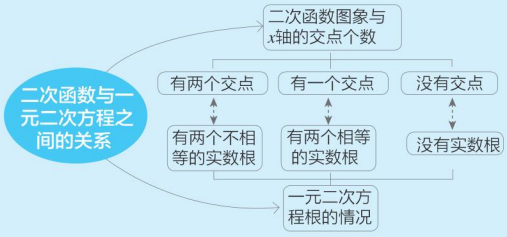
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 二次函数与一元二次方程

核心知识

- 二次函数与一元二次方程之间的关系
- 一元二次方程的近似解
- 二次函数与一元二次不等式之间的关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

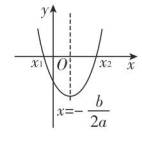
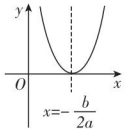
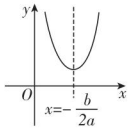
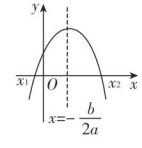
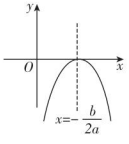
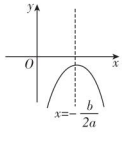
点知识 1 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. 二次函数图象与 x 轴的交点横坐标与一元二次方程根的关系

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可知：如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有交点，交点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数值是 0，因此 $x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

2. 二次函数与一元二次方程的联系与区别

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 之间的内在联系列表如下：

b^2-4ac 的符号	$b^2-4ac>0$		$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况	有两个不等实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$		有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	$a>0$			
	$a<0$			
抛物线与 x 轴的交点	$(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$		$\left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$	没有交点

提分·必记

拓宽视野

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，求当 $y=m$ 时自变量 x 的值，可以解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$；反之，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 可以看成是已知 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y=m$，求自变量 x 的值. 方程 $ax^2+bx+c=m$ 的解是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 的交点的横坐标.
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系密切，二者可以相互转化. 已知二次函数的值为 0，求自变量 x 的值，可以看作解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$；反之，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，可以看作已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 0，求自变量 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用二次函数与一元二次方程的关系解与字母系数相关问题

例1 二次函数 $y=x^2-6x+n$ 的图象如图 21.3-1 所示，若关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n=0$ 的一个解为 $x_1=1$，则另一个解 $x_2=$_____.

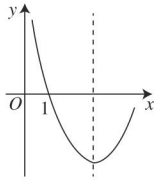


图 21.3-1

解题秘方： 紧扣抛物线与 x 轴两交点和对称轴的关系求解.

解： 由图象知抛物线与 x 轴的一个交点为（1，0）.

由题知抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-6}{2}=3$，

∴抛物线与 x 轴的另一个交点是（5，0）.

∴方程的另一个解为 $x_2=5$.

答案： 5

点知识▶2 二次函数图象法求一元二次方程的近似解

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，因此可以借助二次函数的图象求一元二次方程的解.

1. 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解

（1）作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，确定图象与 x 轴的交点的横坐标；

（2）函数图象与 x 轴的交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解；

（3）当函数图象与 x 轴的交点的横坐标不是整数时，可通过不断缩小解所在的范围估计一元二次方程的解.

2. 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象与直线 $y=-bx-c$ 的交点求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解

（1）将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 化为 $ax^2=-bx-c$ 的形式；

（2）在平面直角坐标系中画出抛物线 $y=ax^2$ 和直线 $y=-bx-c$，并确定抛物线与直线的交点的横坐标；

（3）交点的横坐标即为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

提分·秘诀

技巧点拨

利用对称轴法求一元二次方程的根：根据一元二次方程与二次函数的关系，当已知抛物线与x轴的一个交点的坐标和对称轴时，可根据轴对称的性质求出抛物线与x轴的另一个交点的坐标，从而求得对应一元二次方程的根.

提分·必记

方法提醒

估计一元二次方程的解的方法： 在难以读出交点的坐标时，我们可以通过不断缩小解所在范围估计一元二次方程的解.

对于 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，如果 $ax_1^2+bx_1+c>0$，且 $ax_2^2+bx_2+c<0$，那么在 x_1 与 x_2 之间存在一个解，取 $x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，若 $ax_3^2+bx_3+c>0$，则取 $x_4=\dfrac{x_3+x_2}{2}$；若 $ax_3^2+bx_3+c<0$，则取 $x_4=\dfrac{x_1+x_3}{2}$. 这样不停地取下去，直到达到所要求的精确度为止.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用图象法求一元二次方程的近似解

例 2 利用二次函数的图象求一元二次方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的近似解（结果精确到 0.1）.

解题秘方一： 画出二次函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象，利用二次函数的图象与 x 轴的交点求方程的近似解.

解法一： 整理方程，得 $-x^2+2x+5=0$.

作函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象如图 21.3-2 所示.

由图象可知，抛物线与 x 轴交点的横坐标分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，即方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的两个实数解分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，用取平均数的方法不断缩小解的取值范围，从而确定方程的近似解.

由图象可知，当 $x=3$ 时，$y>0$；当 $x=4$ 时，$y<0$，

取 3 和 4 的平均数 3.5，当 $x=3.5$ 时，$y=-0.25$，与 $x=3$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3 和 3.5 之间.

取 3 和 3.5 的平均数 3.25，当 $x=3.25$ 时，$y=0.937\ 5$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.25 和 3.5 之间.

取 3.25 和 3.5 的平均数 3.375，当 $x=3.375$ 时，$y=0.359\ 375$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.375 和 3.5 之间.

由此方法可得到原方程的一个近似解为 3.4.

用同样的方法可得到原方程的另一个近似解为 -1.4.

所以方程 $-x^2+2x-3=-8$ 精确到 0.1 的解为 $x_1=-1.4$，$x_2=3.4$.

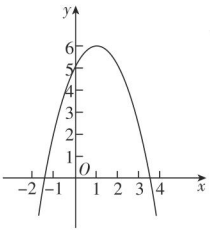


图 21.3-2

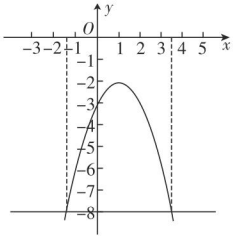


图 21.3-3

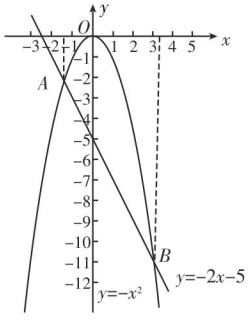


图 21.3-4

解题秘方二： 画出二次函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象和直线 $y=-8$，利用两图象的交点求方程的近似解.

解法二： 画出函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象和直线 $y=-8$，如图 21.3-3 所示.

由图象知，方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解是抛物线 $y=-x^2+2x-3$ 与直线 $y=-8$ 的交点的横坐标，一个交点的横坐标在 -2 与 -1 之间，另一个交点的横坐标在 3 与 4 之间.

同样用取平均数的方法，可得方程 $-x^2+2x-3=-8$ 精确到 0.1 的解为 $x_1=-1.4$，$x_2=3.4$.

提分·秘诀

特别提醒

用图象法解一元二次方程是数形结合思想的具体应用，通过画函数图象解一元二次方程是数的直观化的体现，但由于作图或观察存在误差，因此通过这种方法求得的方程的解一般是近似的.

另解

将原方程变形，得 $-x^2=-2x-5$，画出函数 $y=-x^2$ 和 $y=-2x-5$ 的图象，如图 21.3-4 所示.

由图可知，抛物线和直线交于 A，B 两点，分别过 A，B 两点向 x 轴作垂线，可知 A，B 两点的横坐标约为 −1.4 和 3.4，所以方程 $-x^2+2x-3=-8$ 精确到 0.1 的解是 $x_1=-1.4$，$x_2=3.4$.

解题通法

用图象法求一元二次方程的近似解：

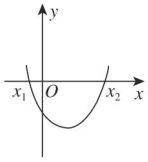
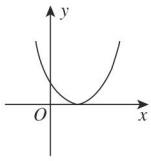
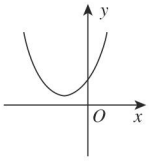
用图象法求一元二次方程的近似解时，一般先作出相应的二次函数的图象，确定其图象与 x 轴交点的横坐标的大致范围，即一元二次方程的解的大致范围；

然后利用取平均数的方法缩小解所在的范围，通过反复计算求出满足精确度要求的近似解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 二次函数与一元二次不等式之间的关系

求不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a\neq0$）的解集，就是求 x 为何值时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y>0$；求不等式 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$）的解集，就是求 x 为何值时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y<0$. 列表如下：（以 $a>0$ 为例）

b^2-4ac 的符号		$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的图象与 x 轴的交点		 两个交点	 一个交点（即顶点）	 没有交点
$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）的根		两不等实数根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	两相等实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0$（$a>0$）	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\dfrac{b}{2a}$	全体实数
	$ax^2+bx+c<0$（$a>0$）	$x_1<x<x_2$	无解	无解

拔考向▶利用二次函数图象解一元二次不等式

例 3 画出抛物线 $y=-x^2+4x+5$，观察抛物线，回答下列问题：

（1）x 为何值时，函数值 $y>0$？

（2）x 为何值时，函数值 $y=0$？

（3）x 为何值时，函数值 $y<0$？

解题秘方：紧扣二次函数图象与一元二次不等式的关系，根据函数图象与 x 轴的交点的横坐标，确定一元二次不等式的解集.

解：∵ $y=-x^2+4x+5=-(x^2-4x)+5=-(x^2-4x+4)+9=-(x-2)^2+9$，

∴抛物线的顶点坐标为（2，9），对称轴为直线 $x=2$.

令 $-x^2+4x+5=0$，即 $x^2-4x-5=0$，

∴ $x_1=5$，$x_2=-1$，

∴抛物线与 x 轴的两个交点为（-1，0），（5，0）.

令 $x=0$，则 $y=5$，即抛物线与 y 轴的交点为（0，5）.

由抛物线的对称性知抛物线上与点（0，5）关于抛物线的对称轴对称的点为（4，5）.

提分·必记

深度理解

二次函数与一元二次不等式的关系：

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象在 x 轴上方的部分对应的自变量取值范围就是 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，在 x 轴下方的部分对应的自变量取值范围就是 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

当抛物线开口向上且与 x 轴无交点时，$ax^2+bx+c>0$ 的解集是全体实数，$ax^2+bx+c<0$ 无解；

当抛物线开口向下且与 x 轴无交点时，$ax^2+bx+c>0$ 无解，$ax^2+bx+c<0$ 的解集是全体实数.

提分·秘诀

方法点拨

求一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，先画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，再求该图象与 x 轴的两个交点的坐标，最后结合图象找出函数值 y 大于 0 的部分对应的 x 的取值范围，即为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在坐标系中描出各点，并连线得到如图 21.3−5 所示的抛物线．

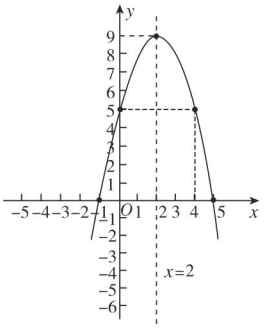


图 21.3−5

观察抛物线发现：

（1）当 $-1<x<5$ 时，函数值 $y>0$；

（2）当 $x=-1$ 或 $x=5$ 时，函数值 $y=0$；

（3）当 $x<-1$ 或 $x>5$ 时，函数值 $y<0$.

学习札记

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用抛物线与 x 轴的交点情况用判别式法求字母的值（范围）

挑战·高分

例 4 已知二次函数 $y=2x^2-(m+1)x+m-1$.

（1）试说明不论 m 为何值，函数的图象与 x 轴总有交点，并指出当 m 为何值时，函数图象与 x 轴只有一个交点．

（2）当 m 为何值时，函数的图象经过原点？

（3）在（2）的条件下，求当 $y<0$ 时 x 的取值范围及当 $y>0$ 时 x 的取值范围．

解题秘方：（1）用判别式法求解；

（2）将点（0，0）的坐标代入函数表达式，即可求出 m 的值；

（3）用图象法确定 x 的取值范围．

解：（1）函数对应的方程为 $2x^2-(m+1)x+m-1=0$，$\Delta=[-(m+1)]^2-4\times2\times(m-1)=m^2+2m+1-8m+8=m^2-6m+9=(m-3)^2$.

显然不论 m 为何值，均有 $\Delta=(m-3)^2\geqslant0$，故不论 m 为何值，函数的图象与 x 轴总有交点．

当 $m=3$ 时，函数图象与 x 轴只有一个交点．

（2）∵函数的图象经过原点（0，0），

∴ $0=2\times0^2-(m+1)\times0+m-1$，解得 $m=1$.

即当 $m=1$ 时，函数的图象经过原点．

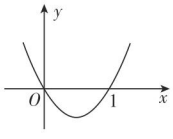


图 21.3−6

（3）由（2）得 $y=2x^2-2x$，其图象大致如图 21.3−6 所示．

∵抛物线与 x 轴的两个交点分别为（0，0），（1，0），

∴当 $y<0$ 时，$0<x<1$；当 $y>0$ 时，$x<0$ 或 $x>1$.

拓宽视野

利用二次函数的图象分析自变量的取值范围（或求不等式的解集）：

1. 从“形”的方面看，不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a\neq0$）的解是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴上方的所有点的横坐标；不等式 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$）的解是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴下方的所有点的横坐标．

2. 从“数”的方面看，当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y>0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y<0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用函数与方程的关系分类讨论求交点坐标

例5 如果函数 $y=kx^2-kx+3x+1$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，那么交点坐标是_____.

本例条件中并未说明函数是哪类函数，所以对它的不同情况都要予以讨论.

解题秘方： 用分类讨论思想求交点坐标.

解：（1）当 $k=0$ 时，函数为 $y=3x+1$，其图象与 x 轴有且只有一个交点，是 $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$.

（2）当 $k\neq 0$ 时，原函数为二次函数.

∵其图象与 x 轴有且只有一个交点，∴ $b^2-4ac=(3-k)^2-4k=0$，

即 $k^2-10k+9=0$，解得 $k_1=1$，$k_2=9$.

当 $k=1$ 时，$y=x^2+2x+1$，其图象与 x 轴交于点 $(-1,\ 0)$；

当 $k=9$ 时，$y=9x^2-6x+1$，其图象与 x 轴交于点 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$.

答案： $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$ 或 $(-1,\ 0)$ 或 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$

挑战·高分

特别提醒

解本题时，先由系数 k 的取值情况确定函数是哪类函数，再求其图象与 x 轴的交点坐标. 若抛物线与 x 轴只有一个交点，则这个交点就是抛物线的顶点.

拔尖角度▶ 3 利用判别式法解函数图象的交点个数问题

例6 已知抛物线 G 对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，且抛物线 G 经过 $(-5,\ 0)$，$\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$，$(1,\ 6)$ 三点，直线 l 对应的函数表达式为 $y=2x-3$.

（1）求抛物线 G 对应的函数表达式；

（2）求证：抛物线 G 与直线 l 没有交点；

（3）若与直线 l 平行的直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个交点，求该交点的坐标.

解题秘方： 利用一元二次方程根的判别式的符号与函数图象交点的个数的关系解答.

（1）**解：**∵抛物线 G 经过 $(-5,\ 0)$，$\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$，$(1,\ 6)$ 三点，

$$\therefore\begin{cases}0=25a-5b+c,\\ \frac{5}{2}=c,\\ 6=a+b+c,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=3,\\ c=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

∴抛物线 G 对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

- 把已知的三点坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$，解关于 a，b，c 的方程组即可.
- 证明抛物线 G 与直线 l 没有交点，就是证明抛物线 G 与直线 l 对应的函数表达式组成的方程组无实数解.
- 若直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个交点，则由它们对应的函数表达式组成的方程组有唯一解，即消去 y 后所得关于 x 的一元二次方程的根的判别式等于 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）**证明**：由$\begin{cases}y=2x-3,\\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2},\end{cases}$ 消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=0$.

$\because\ \Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}=-10<0$,

$\therefore$ 方程无实根，即抛物线 G 与直线 l 没有交点.

（3）**解**：由$\begin{cases}y=2x+m,\\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2},\end{cases}$ 消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}-m=0$. ①

$\because$ 抛物线 G 与直线 $y=2x+m$ 只有一个交点，

$\therefore\ \Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-m\right)=0$，解得 $m=2$.

把 $m=2$ 代入方程①，解得 $x_1=x_2=-1$.

把 $x=-1$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$，得 $y=0$,

$\therefore$ 该交点的坐标为（-1，0）.

技巧点拨

确定直线与抛物线交点个数的方法：

解关于直线与抛物线的交点个数问题，即求直线与抛物线对应的函数表达式联立组成的方程组消去 y 后得到的一元二次方程的解的情况，从而转化为所得到的一元二次方程的根的判别式的符号问题.

有两个交点，则 $\Delta>0$;

有一个交点，则 $\Delta=0$;

没有交点，则 $\Delta<0$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

中考中关于二次函数与一元二次方程的联系，主要考查从二次函数的角度看一元二次方程，有时还与一元二次不等式、一次函数及几何中的一些知识联系在一起综合考查函数的性质和方程思想，解答此类题的关键是熟悉函数与方程的关系以及能从图象上获取有价值的信息，题型主要有选择题和解答题.

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数的图象和性质解不等关系问题

例 7 ［中考·咸宁］如图 21.3-7 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，下列结论：①二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为 4；

② $4a+2b+c<0$;

③一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -1;

④使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$.

其中正确的有（　　）

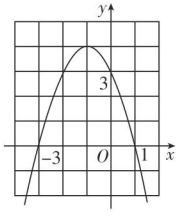


图 21.3-7

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

冲刺·满分

思路点拨

- 根据抛物线的顶点坐标确定二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值.
- 由图象知当 $x=2$ 时，$y<0$，即 $4a+2b+c<0$.
- 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$，由抛物线的对称性知抛物线上关于对称轴对称的两点的横坐标之和为 -2，所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -2.
- 利用图象法确定 x 的范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了二次函数的图象、二次函数的最值、二次函数与不等式，掌握二次函数的性质、正确获取图象信息是解题的关键.

解：∵抛物线的顶点坐标为（−1，4），

∴二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为 4，①正确；

∵ $x=2$ 时，$y<0$，∴ $4a+2b+c<0$，②正确；

根据抛物线的对称性可知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 −2，③错误；

使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -2$，④错误.

答案：B

考法 2 利用抛物线与直线的关系求交点横坐标和的范围

例 8 [中考·北京]在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C.

（1）求直线 BC 对应的函数表达式；

（2）垂直于 y 轴的直线 l 与抛物线交于点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，与直线 BC 交于点 $N(x_3, y_3)$，若 $x_1<x_2<x_3$，结合函数的图象，求 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围.

试题评析：本题考查了抛物线与 x 轴的交点，解答（2）问时，利用了“数形结合”的数学思想，降低了解题的难度.

解：（1）由 $y=x^2-4x+3$，得 $C(0, 3)$，$A(1, 0)$，$B(3, 0)$.

设直线 BC 对应的函数表达式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$），

则 $\begin{cases}b=3,\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴直线 BC 对应的函数表达式为 $y=-x+3$.

（2）如图 21.3−8 所示.

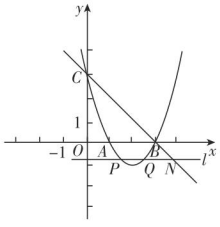


图 21.3−8

∵ $y=x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3=(x-2)^2-1$，

∴抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的顶点坐标为（2，−1），对称轴为直线 $x=2$.

∵ $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 两点关于抛物线的对称轴对称，

∴ $2=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_1+x_2=4$.

由 $x_1<x_2<x_3$，结合函数的图象可得 $-1<y_3<0$，即 $-1<-x_3+3<0$.

∴ $3<x_3<4$.

∴ $7<x_1+x_2+x_3<8$.

学习札记

详解

∵方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=3$，

∴ $A(1, 0)$，$B(3, 0)$.

特别提醒

解答(2)问的关键是确定 x_3 的范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用抛物线与直线的交点解与面积相关的问题

例 9 [中考·黄冈]已知直线 l：$y=kx+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x$.

（1）求证：直线 l 与该抛物线总有两个交点；

（2）设直线 l 与该抛物线两交点为 A，B，O 为原点，当 $k=-2$ 时，求 $\triangle OAB$ 的面积.

试题评析：本题考查二次函数的综合问题，涉及解二元二次方程组、根的判别式、三角形的面积公式等知识，综合程度较高，弄清二次函数与一元二次方程之间的关系、点的坐标与表示几何的量的关系是解题的关键.

（1）**证明**：联立$\begin{cases}y=kx+1,\\y=x^2-4x,\end{cases}$ 消去 y，化简可得 $x^2-(4+k)x-1=0$.

则 $\Delta=(4+k)^2+4>0$，故直线 l 与该抛物线总有两个交点.

（2）**解**：当 $k=-2$ 时，$y=-2x+1$.

如图 21.3−9，过点 A 作 $AF\perp x$ 轴于 F，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于 E.

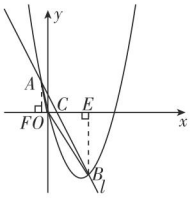


图 21.3−9

联立$\begin{cases}y=x^2-4x,\\y=-2x+1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1+\sqrt{2},\\y=-1-2\sqrt{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\y=2\sqrt{2}-1.\end{cases}$

$\therefore A(1-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-1)$，$B(1+\sqrt{2},\ -1-2\sqrt{2})$.

$\therefore AF=2\sqrt{2}-1$，$BE=1+2\sqrt{2}$.

易求得直线 $y=-2x+1$ 与 x 轴的交点 C 为 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\therefore OC=\frac{1}{2}$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OC\cdot AF+\frac{1}{2}OC\cdot BE=\frac{1}{2}OC\cdot(AF+BE)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-1+1+2\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

方法技巧

- 关于两个函数图象交点的问题，一般要将函数问题转化为由两个函数表达式组成的方程组来解.
- 解图象与几何的综合题，要注意表示几何的量与点的坐标的区别：表示几何的量都是正数，点的坐标有正、有负.

两年模拟兵法 答案见 219 页

1. [模拟·天津滨海]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解的范围是（　　）

x	6.17	6.18	6.19
y	−0.03	−0.01	0.02

A. $-0.03<x<-0.01$

B. $-0.01<x<0.02$

C. $6.18<x<6.19$

D. $6.17<x<6.18$

2. [中考·兰州]下表是二次函数 $y=x^2+3x-5$ 的自变量 x 与函数 y 的对应值：

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y	−1	−0.49	0.04	0.59	1.16

那么方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个近似根是（　　）

A. 1　　B. 1.1

C. 1.2　　D. 1.3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [中考·苏州]若二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点 $(-2,0)$，则关于 x 的方程 $a(x-2)^2+1=0$ 的实数根为（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=4$　　B. $x_1=-2$，$x_2=6$

C. $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{5}{2}$　　D. $x_1=-4$，$x_2=0$

4. [中考·广安]如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $B(-1,3)$，与 x 轴的交点 A 在点 $(-3,0)$ 和 $(-2,0)$ 之间，以下结论：

① $b^2-4ac=0$；

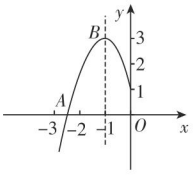
② $a+b+c>0$；

③ $2a-b=0$；

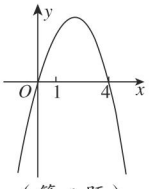
④ $c-a=3$.

其中正确的有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第 4 题）



（第 6 题）

5. [中考·泰安]已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	-1	0	1	3
y	-3	1	3	1

下列结论：①抛物线的开口向下；

②其图象的对称轴为直线 $x=1$；

③当 $x<1$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；

④方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根大于 4.

其中正确的结论有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

6. [模拟·西安蓝田]二次函数 $y=-x^2+mx$ 的图象如图，对称轴为直线 $x=2$，若关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$（t 为实数）在 $1<x<5$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是（　　）

A. $t>-5$　　B. $-5<t<3$

C. $3<t\leqslant 4$　　D. $-5<t\leqslant 4$

7. 已知抛物线 $y=(x-m)^2-(x-m)$，其中 m 是常数.

（1）求证：不论 m 为何值，该抛物线与 x 轴一定有两个交点.

（2）若该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$.

①求该抛物线对应的函数表达式；

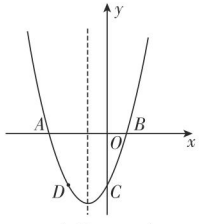
②把该抛物线沿 y 轴向上平移多少个单位后，得到的抛物线与 x 轴只有一个交点.

8. [模拟·广安岳池]如图，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，其中 A 点坐标为 $(-3,0)$，与 y 轴交于点 C，点 D $(-2,-3)$ 在抛物线上.

（1）求抛物线对应的函数表达式；

（2）抛物线的对称轴上有一动点 P，求 $PA+PD$ 的最小值；

（3）若抛物线上有一动点 N，使△ ABN 的面积为 6，求点 N 的坐标.　【导学号：8618152】



（第 8 题）

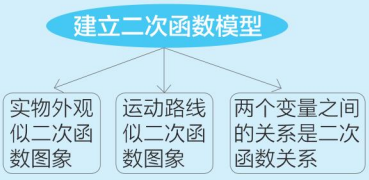
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.4 二次函数的应用

核心知识

- 图形型的面积最大与最小
- 实物型的高度与宽度计算
- 路线型的最高与最远

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 用二次函数解决实际问题

1. 常用方法

利用二次函数解决实际问题，首先要建立数学模型，把实际问题转化为二次函数问题，利用题中存在的等量关系，求出函数表达式，然后利用函数的图象和性质解决问题.

2. 一般步骤

（1）**审**：仔细审题，理清题意；

（2）**找**：找出问题中的变量和常量，分析它们之间的关系，与图形相关的问题要结合图形具体分析；

（3）**列**：用二次函数表示出变量和常量之间的关系，建立二次函数模型，把实际问题转化成数学问题，根据题中的数量关系列出二次函数的表达式；

（4）**解**：依据已知条件，借助二次函数的表达式、图象和性质等求解实际问题；

（5）**检**：检验结果，得出符合实际意义的结论.

拔考向▶ 利用二次函数解实际问题的常用方法解应用题

例 1 [中考·青岛]青岛市某大酒店豪华间实行淡季、旺季两种价格标准，旺季每间价格比淡季上涨$\frac{1}{3}$，下表是去年该酒店豪华间某两天的相关记录：

	淡季	旺季
未入住房间数	10	0
日总收入 / 元	24 000	40 000

（1）该酒店豪华间有多少间？旺季每间价格为多少元？

（2）今年旺季来临，豪华间的间数不变，经市场调查发现，如果豪华间仍旧实行去年旺季价格，那么每天都客满；如果价格继续上涨，那么每增加 25 元，每天未入住房间数增加 1 间，不考虑其他

提分·必记

要点解读

1. 用二次函数解实际问题时，审题是关键. 检验容易被忽略，求得的结果除了要满足题中的数量关系，还要符合实际问题的意义.
2. 在实际问题中求最值时，解题思路是列二次函数表达式，用配方法把函数表达式化为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式求函数的最值，或者针对函数表达式用顶点坐标公式求函数的最值.

提分·秘诀

特别提醒

1. 要按照用二次函数解实际问题的步骤解答.
2. 列函数表达式时，要找能包含全部题意的等量关系，并且要考虑自变量的取值范围.
3. 求函数的最值时，既可以化为顶点式求，也可以根据顶点坐标公式求.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因素，该酒店将豪华间的价格上涨多少元时，豪华间的日总收入最高？最高日总收入是多少元？

解题秘方：紧扣“总收入 = 每间价格 × 房间数”列式解答．

解：（1）设淡季每间价格为 x 元，酒店豪华间有 y 间．

由题意得$\begin{cases} x(y-10)=24\,000, \\ x\left(1+\dfrac{1}{3}\right)y=40\,000, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=600, \\ y=50. \end{cases}$

$\therefore x+\dfrac{1}{3}x=600+\dfrac{1}{3}\times 600=800.$

答：该酒店豪华间有 50 间，旺季每间价格为 800 元．

（2）设该酒店豪华间的价格上涨 m 元，日总收入为 W 元，

$W=(800+m)\left(50-\dfrac{m}{25}\right)=-\dfrac{1}{25}(m-225)^2+42\,025.$

$\therefore$ 当 $m=225$ 时，W 取得最大值，$W_{\text{最大值}}=42\,025.$

答：该酒店将豪华间的价格上涨 225 元时，豪华间的日总收入最高，最高日总收入是 42 025 元．

4. 写答案时，要特别注意函数的最值是否是实际问题的最值．顶点的横坐标在实际问题的自变量的取值范围内，则函数的最值是实际问题的最值，否则就不是．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用函数思想求几何图形中的最值问题

挑战·高分

例 2 [中考·潍坊]如图 21.4-1，工人师傅用一块长为 10 dm，宽为 6 dm 的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形．（厚度不计）

（1）在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求长方体底面面积为 12 dm^2 时，裁掉的正方形的边长多大？

（2）若要求制作的长方体容器的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器内侧进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为 0.5 元，底面每平方分米的费用为 2 元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，最低为多少？

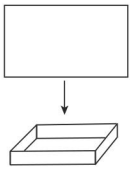


图 21.4-1



图 21.4-2

解题秘方：紧扣长方形面积与边长的关系列式解答．

解：（1）裁剪示意图如图 21.4-2 所示．

设裁掉的正方形的边长为 x dm，由题意可得 $(10-2x)(6-2x)=12$，

即 $x^2-8x+12=0$，解得 $x=2$ 或 $x=6$（舍去）．

答：当长方体底面面积为 12 dm^2 时，裁掉的正方形的边长为 2 dm．

解法提醒

求满足什么条件时几何图形（几何体）有最大面积（最大体积）的问题，往往可转化成求二次函数的最值问题，需要借助几何图形（几何体）的面积（体积）公式及相关性质，建立变量之间的二次函数关系，利用二次函数的性质求最值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∵长方体容器的底面长不大于底面宽的五倍，

∴ $10-2x \leqslant 5(6-2x)$，解得 $x \leqslant 2.5$. ∴ $0<x \leqslant 2.5$.

设总费用为 w 元，由题意可知 $w=0.5\times 2x(16-4x)+2(10-2x)\cdot(6-2x)=4x^2-48x+120=4(x-6)^2-24$，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=6$，开口向上，

∴当 $0<x \leqslant 2.5$ 时，w 随 x 的增大而减小.

∴当 $x=2.5$ 时，w 有最小值，最小值为 25.

答：当裁掉的正方形边长为 2.5 dm 时，总费用最低，最低费用为 25 元.

警示误区

本例不要误认为当 $x=6$ 时，$w=-24$ 是实际问题的最小值，因为 $x=6$ 不在实际问题的自变量的范围内，所以只能根据函数的增减性来求最值.

拔尖角度▸ 2 利用二次函数增减性法求销售利润中的最值问题

挑战·高分

例 3 新冠肺炎疫情期间，某商场要经营一种新上市的口罩，进价为 20 元/个，试销阶段发现：当销售价格为 25 元/个时，每天的销售量为 250 个，每个的销售价格每上涨 1 元，每天的销售量就减少 10 个.

（1）请你写出商场销售这种口罩，每天所得的销售利润 w（元）与销售价格 x（元/个）之间的函数表达式.

（2）销售价格为多少时，该口罩每天的销售利润最大？

（3）商场的营销部结合上述情况，提出了 A，B 两种营销方案.

方案 A：该口罩的销售价格高于进价且不超过 30 元/个；

方案 B：每天销售量不少于 10 个，且每个口罩的利润至少为 25 元. 请通过计算说明哪种方案的最大利润更高.

解题秘方：用比较法对求出的两种方案的最大利润进行比较，优选营销方案.

详解

销售价格（元/个）	销售量（个）
25	250
25+1	250−10
25+2	250−20
…	…
25+m	250−10m
x	250−10(x−25)

解：（1）$w=(x-20)[250-10(x-25)]=-10x^2+700x-10\,000$.

（2）∵ $w=-10x^2+700x-10\,000=-10(x-35)^2+2\,250$，

∴当 $x=35$ 时，w 有最大值，

即销售价格为 35 元/个时，该口罩每天的销售利润最大.

（3）方案 A：由题意得 $w=-10(x-35)^2+2\,250$（$20<x \leqslant 30$），

∵ $-10<0$，抛物线的对称轴为直线 $x=35$，

∴在对称轴的左侧，w 随 x 的增大而增大.

∴当 $x=30$ 时，w 取得最大值，最大值为 2 000.

方案 B：由题意得 $\begin{cases} x \geqslant 20+25, \\ 250-10(x-25) \geqslant 10, \end{cases}$ 解得 $45 \leqslant x \leqslant 49$.

∴ $w=-10(x-35)^2+2\,250$（$45 \leqslant x \leqslant 49$）.

∵在对称轴的右侧，w 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=45$ 时，w 取得最大值，最大值为 1 250.

∵ $2\,000>1\,250$，∴方案 A 的最大利润更高.

特别提醒

第(3)问中由于受自变量取值范围的限制，方案 A 和方案 B 中所求的最大值都不是抛物线顶点的纵坐标.

图解

$w=-10(x-35)^2+2\,250$ 的大致图象如图 21.4-3 所示.

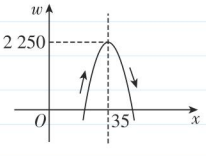


图 21.4-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题通法：利用二次函数的性质求最大利润的方法

1. 列出二次函数表达式，并根据自变量的实际意义，确定自变量的取值范围；

2. 在自变量的取值范围内，运用公式法或配方法求出二次函数的最大值，需要注意的是：当二次函数图象的顶点的横坐标不在自变量的取值范围内时，需结合二次函数的图象，根据二次函数的增减性，在自变量的取值范围内求出函数的最值.

学习札记

拔尖角度 3 利用建立二次函数模型法解实际中抛物线型最值问题

挑战·高分

例 4 [中考·德州]随着新农村的建设和旧城的改造，我们的家园越来越美丽.小明家附近广场中央新修了一个圆形喷水池（如图 21.4−4），在水池中心竖直安装了一根高为 2 m 的喷水管，它喷出的抛物线形水柱在与水池中心的水平距离为 1 m 处达到最高，水柱落地处离水池中心 3 m.

（1）请你建立适当的平面直角坐标系，并求出水柱抛物线对应的函数表达式；

（2）求出水柱的最大高度是多少.



图 21.4−4

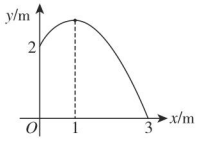


图 21.4−5

解题秘方：求水柱的最大高度，关键是建立适当的平面直角坐标系，求出其顶点坐标.

解：（1）如图 21.4−5，以喷水管与地面交点为原点，原点与水柱落地点所在直线为 x 轴，喷水管所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+h$，把点 $(3,0)$ 和 $(0,2)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}4a+h=0,\\a+h=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\h=\dfrac{8}{3}.\end{cases}$

∴水柱抛物线对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{2}{3}(x-1)^2+\dfrac{8}{3}$，

即 $y=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+2\ (0\leqslant x\leqslant 3)$.（答案不唯一）

（2）$y=-\dfrac{2}{3}(x-1)^2+\dfrac{8}{3}\ (0\leqslant x\leqslant 3)$，

∴当 $x=1$ 时，$y_{最大值}=\dfrac{8}{3}$，即水柱的最大高度为 $\dfrac{8}{3}$ m.

解题通法

许多实际问题（如与隧道洞口、桥洞、球的运动轨迹、喷泉喷出的水的轨迹等相关的实际问题）中都存在抛物线形状的图形，此类问题可以通过构建二次函数表达式来求解.

求解的一般步骤是：

1. 建立适当的平面直角坐标系，将抛物线形状的图形放在坐标系中；
2. 结合图形和已知条件，分析变量间的关系；
3. 用待定系数法求函数表达式；
4. 利用二次函数的表达式及其性质，求解实际问题.

技巧提醒

同一个问题中，建立平面直角坐标系的方法有多种，建立适当的平面直角坐标系能简化求解过程.因此，建立平面直角坐标系，以方便求解为原则.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用二次函数解决实际问题是中考考查的重点和热点，命题形式多样，试题背景新颖多元，简单的实际问题多以选择题和填空题的形式出现；综合性较强的实际问题常与一次函数、方程、不等式等知识综合考查，有时也会结合三角形、四边形等几何知识综合考查，以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法1 利用二次函数图象和性质解几何中的实际应用问题

例5 [中考·荆州]为响应荆州市“创建全国文明城市”号召，某单位不断美化环境，拟在一块矩形空地上修建绿色植物园，其中一边靠墙，可利用的墙长不超过18 m，另外三边由36 m长的栅栏围成.设矩形空地$ABCD$中，垂直于墙的边$AB=x$ m，面积为y m^2（如图21.4-6）.

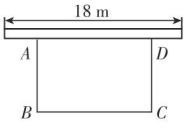


图21.4-6

（1）求y与x之间的函数表达式，并写出自变量x的取值范围.

（2）若矩形空地的面积为160 m^2，求x的值.

（3）若该单位用8 600元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共400棵（每种植物的单价和每棵栽种的合理用地面积如下表）.问丙种植物最多可以购买多少棵？此时，这批植物可以全部栽种到这块空地上吗？请说明理由.

	甲	乙	丙
单价（元/棵）	14	16	28
合理用地（m^2/棵）	0.4	1	0.4

试题评析：此题主要考查了由实际问题列二次函数表达式以及求二次函数的最值，同时也考查了矩形的性质，正确理解题意，列出符合题意的方程（组）、不等式组、函数表达式是解题的关键.

解：（1）∵四边形$ABCD$是矩形，垂直于墙的边$AB=x$ m，

∴ $CD=AB=x$ m，$BC=(36-2x)$ m.

∴ $y=x(36-2x)$，即$y=-2x^2+36x$.

由矩形的任一边都大于0 m且靠墙的一边不超过18 m得

$$\begin{cases} x>0, \\ 36-2x>0, \\ 36-2x\leqslant 18, \end{cases}$$ 解得$9\leqslant x<18$,

∴ y与x之间的函数表达式为$y=-2x^2+36x$（$9\leqslant x<18$）.

冲刺·满分

思路点拨

- 用含x的代数式表示矩形的另一边BC，根据矩形面积的计算方法列出函数表达式.由矩形的任一边都大于0m且靠墙的一边不超过18m列出关于x的不等式组，从而确定x的取值范围.
- 令函数表达式中的y=160，得到关于x的一元二次方程，解之即可.
- 设甲、乙、丙三种植物分别购买了m棵、n棵、k棵，利用题中的等量关系列出方程组，解方程组（用含有k的代数式表示m，n），由m，n，k都为正整数得到关于k的不等式组，即可得到最多购买丙种植物的数量；再比较栽种这批树需要的土地面积与矩形的最大面积，便可判断这批植物是否可以全部栽种到这块空地上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∵矩形空地的面积为 160 m^2，即 $y=160$，

∴ $-2x^2+36x=160$，解得 $x_1=10$，$x_2=8$.

∵ $9 \leqslant x<18$，∴ $x=8$ 舍去．∴ x 的值为 10.

（3）设甲、乙、丙三种植物分别购买了 m 棵、n 棵、k 棵．

由题意得 $\begin{cases} m+n+k=400, \\ 14m+16n+28k=8\,600, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=6k-1\,100, \\ n=1\,500-7k. \end{cases}$

∵ m，n，k 分别表示三种植物的数量，∴ m，n，k 为正整数，

∴ $\begin{cases} 6k-1\,100>0, \\ 1\,500-7k>0, \end{cases}$ 解得 $\frac{550}{3}<k<\frac{1\,500}{7}$.

∵ k 为正整数，∴ k 能取的最大正整数为 214，即丙种植物最多可以购买 214 棵．当 $k=214$ 时，$m=6k-1\,100=184$，$n=1\,500-7k=2$.

∵ $y=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$，

∴当 $x=9$ 时，y 有最大值，最大值为 162，即当垂直于墙的一边长为 9 m 时，矩形空地的面积最大，最大为 162 m^2.

∵ $0.4\times184+1\times2+0.4\times214=161.2\ (m^2)<162\ m^2$，

∴这批植物可以全部栽种到这块空地上．

考法 2 利用二次函数图象和性质解图表信息的实际应用问题

例 6 **[中考·黄冈]** 我市某乡镇在“精准扶贫”活动中销售一农产品，经分析发现月销售量 y（万件）与月份 x（月）的关系为：$y=\begin{cases} x+4\ (1 \leqslant x \leqslant 8,\ x \text{ 为整数}), \\ -x+20\ (9 \leqslant x \leqslant 12,\ x \text{ 为整数}), \end{cases}$ 每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）的关系如下表：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	10	10

（1）请你根据表格求出每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）之间的函数表达式；

（2）若月利润 w（万元）= 当月销售量 y（万件）× 当月每件产品的利润 z（元），求月利润 w（万元）与月份 x（月）之间的函数表达式；

（3）当 x 为何值时，w 有最大值，最大值为多少？

试题评析： 本题考查二次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，找出解决问题需要的条件，利用二次函数的性质解答.

解：（1）由表格可知：1~10 月每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）之间的函数关系为一次函数，11、12 月 z 值均为 10.

①当 $1 \leqslant x \leqslant 10$，$x$ 为整数时，设 $z=kx+b$，当 $x=1$ 时，$z=19$；当 $x=2$ 时，$z=18$. 即有方程组 $\begin{cases} 19=k+b, \\ 18=2k+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=20. \end{cases}$

故 $z=-x+20$，经检验其他数据均满足该表达式．

学习札记

思路点拨

- 观察表格发现：1~10 月，随着月份（x）的增加，每件产品的利润（z）不断减少，且依次减少 1 元；11、12 月每件产品的利润保持不变，故能得出两个结论：一是 z 与 x 之间的函数关系是一个分段函数；二是 1~10 月 z 与 x 之间的函数关系为一次函数.
- 利用等量关系式 w=yz 写出函数表达式，注意是分段函数，自变量范围分为 1~8、9~10、11~12 三段.
- 先分别求出每段函数的最大值，再比较得出 w 的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②当 $11 \leqslant x \leqslant 12$，$x$ 为整数时，$z=10$.

综上，每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）之间的函数表达式为

$$z=\begin{cases}-x+20\ (1 \leqslant x \leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ 10\ (11 \leqslant x \leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

（2）$$w=\begin{cases}(-x+20)(x+4)\ (1 \leqslant x \leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ (-x+20)(-x+20)\ (9 \leqslant x \leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ 10(-x+20)\ (11 \leqslant x \leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

化简得 $$w=\begin{cases}-x^2+16x+80\ (1 \leqslant x \leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ (-x+20)^2\ (9 \leqslant x \leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ -10x+200\ (11 \leqslant x \leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

（3）①当 $1 \leqslant x \leqslant 8$，$x$ 为整数时，$w=-x^2+16x+80=-(x-8)^2+144$，当 $x \leqslant 8$ 时，w 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=8$ 时，$w_{最大值}=-(8-8)^2+144=0+144=144$；

②当 $9 \leqslant x \leqslant 10$，$x$ 为整数时，$w=(-x+20)^2$，

当 $x<20$ 时，w 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=9$ 时，$w_{最大值}=(-9+20)^2=121$；

③当 $11 \leqslant x \leqslant 12$，$x$ 为整数时，$w=-10x+200$，

$\because k=-10$，$\therefore w$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=11$ 时，$w_{最大值}=-10\times11+200=90$.

$\because 90<121<144$，

$\therefore$ 当 $x=8$ 时，w 有最大值，最大值为 144.

考法 3 利用二次函数的图象与性质解抛物线型运动问题

例 7 [中考·金华]甲、乙两人进行羽毛球比赛，羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分，如图 21.4-7，甲在 O 点正上方 1 m 的 P 处发出一球，羽毛球飞行的高度 y（m）与水平距离 x（m）之间满足函数表达式 $y=a(x-4)^2+h$，已知点 O 与球网的水平距离为 5 m，球网的高度为 1.55 m.

（1）当 $a=-\frac{1}{24}$ 时，①求 h 的值；②通过计算判断此球能否过网.

（2）若甲发球过网后，羽毛球飞行到与点 O 的水平距离为 7m，离地面的高度为 $\frac{12}{5}$ m 的 Q 处时，乙扣球成功，求 a 的值.

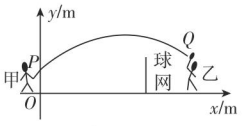


图 21.4-7

试题评析：本题主要考查二次函数的应用，熟练掌握待定系数法求函数表达式是解题的关键.

解：（1）①当 $a=-\frac{1}{24}$ 时，$y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+h$，将点 $P(0,1)$ 的坐标代入，得 $-\frac{1}{24}\times16+h=1$，解得 $h=\frac{5}{3}$.

学习札记

解题通法

求抛物线最高点坐标的方法：

已知二次函数的表达式，求抛物线的最高点坐标，可以把函数表达式配方，转化成二次函数的顶点式，写出顶点坐标；也可以根据二次函数的一般式，用公式法直接计算出顶点坐标.

若二次函数的表达式是未知的，可根据抛物线上的已知点、对称轴等条件，用待定系数法求得表达式，再求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②把 $x=5$ 代入 $y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$，得 $y=-\frac{1}{24}(5-4)^2+\frac{5}{3}=1.625$.

∵ $1.625>1.55$，∴此球能过网.

（2）把点 $P(0,1)$，$Q\left(7,\frac{12}{5}\right)$ 的坐标代入 $y=a(x-4)^2+h$，

得 $\begin{cases}16a+h=1,\\9a+h=\frac{12}{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\h=\frac{21}{5}.\end{cases}$

∴ $a=-\frac{1}{5}$.

学习札记

两年模拟兵法

☞答案见 220 页

1. [中考·临沂]足球运动员将足球沿与地面成一定角度的方向踢出，足球飞行的路线是一条抛物线，不考虑空气阻力，足球距离地面的高度 h（单位：m）与足球被踢出后经过的时间 t（单位：s）之间的关系如下表：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	…
h	0	8	14	18	20	20	18	14	…

下列结论：

①足球距离地面的最大高度为 20 m；

②足球飞行路线的对称轴是直线 $t=\frac{9}{2}$；

③足球被踢出 9 s 时落地；

④足球被踢出 1.5 s 时，距离地面的高度是 11 m.

其中正确结论的个数是（　　）

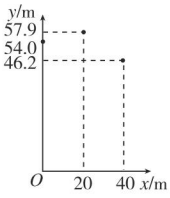
A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

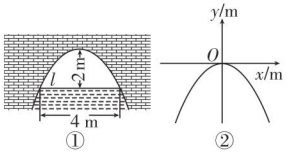
2. [中考·北京]跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，运动员起跳后的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）. 如图记录了某运动员起跳后的 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时，水平距离为（　　）

A. 10 m　　B. 15 m

C. 20 m　　D. 22.5 m



（第 2 题）



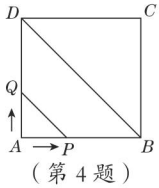
（第 3 题）

3. [模拟·兰州西固]如图①是一个横断面为抛物线形状的拱桥，当水面在 l 时，拱顶（拱桥洞的最高点）离水面 2 m，水面宽 4 m，如图②建立平面直角坐标系，则抛物线对应的函数表达式是（　　）

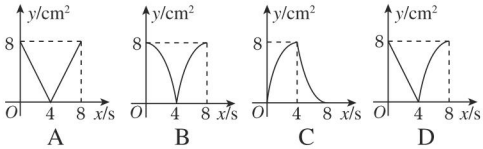
A. $y=-2x^2$　　B. $y=2x^2$

C. $y=-0.5x^2$　　D. $y=0.5x^2$

4. [中考·临沂]如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 cm，动点 P，Q 同时从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度分别沿 $A\to B\to C$ 和 $A\to D\to C$ 的路径向点 C 运动. 设运动时间为 x（单位：s），四边形 $PBDQ$ 的面积为 y（单位：cm^2），则 y 与 x（$0\leqslant x\leqslant8$）之间的函数关系可用图象表示为（　　）



（第 4 题）



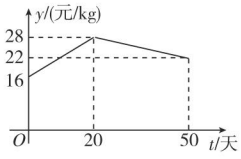
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [**中考·荆门**]随着龙虾节的火热举办，某龙虾养殖大户为了发挥技术优势，一次性收购了10 000 kg小龙虾，计划养殖一段时间后再出售．已知每天养殖龙虾的成本相同，放养10天的总成本为166 000元；放养30天的总成本为178 000元．设这批小龙虾放养t天后的质量为a kg，销售单价为y元/kg，根据往年的行情预测，a与t的函数关系为$a=\begin{cases}10\,000\ (0\leqslant t\leqslant 20),\\ 100t+8\,000\ (20<t\leqslant 50).\end{cases}$ y与t的函数关系如图所示．

（1）设每天的养殖成本为m元，收购成本为n元，求m与n的值．

（2）求y与t之间的函数表达式．

（3）如果将这批小龙虾放养t天后一次性出售所得利润为W元，问该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大？最大利润是多少？（总成本＝放养总费用＋收购成本；利润＝销售总额－总成本）

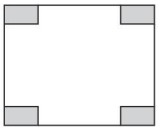


（第5题）

6. 某小区有一块长100 m、宽80 m的空地，现将其建成花园广场，设计图案如图，阴影区域为绿化区（四块绿化区是全等矩形），空白区域为活动区，且四周出口一样宽，宽度不小于50 m，不大于60 m，预计活动区每平方米造价60元，绿化区每平方米造价50元．【**导学号：8618152**】

（1）设其中一块绿化区的长边长为x（m），写出工程总造价y（元）与x（m）之间的函数表达式（写出x的取值范围）．

（2）如果小区投资46.9万元，问能否完成工程任务？若能，请写出x为整数的所有可能取值；若不能，请说明理由．



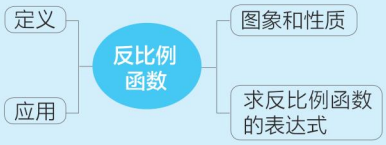
（第6题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.5 反比例函数

核心知识
- 反比例函数的定义及表达式
- 反比例函数的图象和性质
- 反比例函数的应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 反比例函数的定义

1. 定义 一般地，表达式形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq 0$）的函数叫做反比例函数. 其中 x 是自变量，y 是函数. 自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数.

2. 反比例函数的三种形式

① $y=\frac{k}{x}$，② $y=kx^{-1}$，③ $xy=k$.（其中 k 为常数，且 $k\neq 0$）

特别提醒： 形如 $y=\frac{1}{x}+1$、$(x+1)y=3$、$y=(x+1)^{-1}$ 等的函数都不是反比例函数.

拨考向 利用反比例函数的定义识别反比例函数

例 1 有下列函数：① $y=\sqrt{2}x^{-1}$；② $y=\frac{4}{x}$；③ $xy=8$；④ $y=\frac{4}{x}+1$；⑤ $y=\frac{3}{x-1}$；⑥ $y=\frac{x}{3}$；⑦ $y=-\frac{1}{2x}$；⑧ $y=\frac{a-2}{x}$（$a\neq 2$，且 a 为常数）. 其中，y 是 x 的反比例函数的有_____（填序号）.

解题秘方： 紧扣反比例函数的定义及其“三种形式”进行识别.

解： ①即为 $y=\frac{\sqrt{2}}{x}$，是反比例函数；

②是反比例函数；

③即为 $y=\frac{8}{x}$，是反比例函数；

④⑤不符合反比例函数的定义；

⑥是正比例函数；

⑦是反比例函数；

⑧因为 $a\neq 2$，且 a 为常数，所以 $a-2$ 是不等于 0 的常数，故该函数是反比例函数.

答案： ①②③⑦⑧



提分·必记

特别提醒

反比例函数的表达式 $y=\frac{k}{x}$ 中无论变量 x，y 怎样变化，k 的值始终等于 x 与 y 的乘积，因此人们习惯上称 k 为比例系数. 若 $k=0$，则 $y=\frac{k}{x}=0$ 恒成立，为一常数函数，失去了反比例函数 x，y 成反比例的意义，所以 $k\neq 0$.

提分·秘诀

方法提醒

判断一个函数是不是反比例函数的方法：

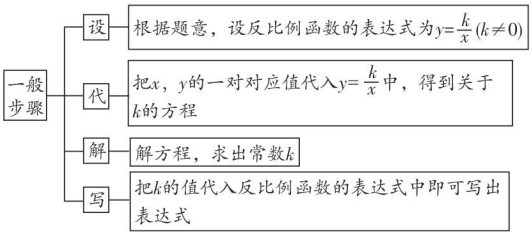
1. 按照反比例函数的定义判断；
2. 看两个变量的表达式是否符合反比例函数的三种形式中的一种.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 求反比例函数的表达式

1. 确定反比例函数表达式的方法 由于在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）中只有一个待定系数，因此只需要一对 x，y 的对应值或图象上一个点的坐标，用待定系数法即可求出 k 的值，从而确定其表达式.

2. 用待定系数法求反比例函数表达式的一般步骤



拔考向▶ 利用待定系数法求反比例函数的表达式

题型 1：求反比例函数的表达式在求值中的应用

例 2 已知 y 是 x 的反比例函数，当 $x=3$ 时，$y=6$.

（1）写出 y 关于 x 的函数表达式；

（2）当 $x=-2$ 时，求 y 的值；

（3）若 $y=4.5$，求 x 的值.

解题秘方： 紧扣反比例函数的表达式，用待定系数法求解.

解：（1）由题意，设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）.

把 $x=3$，$y=6$ 代入表达式，得 $6=\frac{k}{3}$，所以 $k=3\times6=18$.

所以 y 关于 x 的函数表达式是 $y=\frac{18}{x}$.

（2）把 $x=-2$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，得 $y=\frac{18}{-2}=-9$.

（3）把 $y=4.5$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，得 $4.5=\frac{18}{x}$，解得 $x=4$.

题型 2：求反比例函数的表达式在实际中的应用

例 3 （1）某住宅小区要种植一块面积为 $1\,000\ m^2$ 的矩形草坪，其相邻两边长为 x m，y m，试写出 y 关于 x 的函数表达式，并写出自变量的取值范围；

（2）食堂存煤 $15\,000$ kg，试写出可使用的天数 t（天）关于平均每天的用煤量 Q（kg）的函数表达式，并写出自变量的取值范围.

解题秘方：（1）根据矩形的面积公式写出函数表达式；

（2）根据“可使用的天数 $=\frac{\text{存煤量}}{\text{平均每天的用煤量}}$”写出函数表达式.

解：（1）$y=\frac{1\,000}{x}$（$x>0$）.（2）$t=\frac{15\,000}{Q}$（$Q>0$）.

提分·必记

特别解读

用待定系数法求反比例函数的表达式的实质是代入一对对应值，解一元一次方程.

当题目中已经明确“y 是 x 的反比例函数”或“y 与 x 成反比例关系”时，可直接设函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）.

提分·秘诀

解法提醒

已知 y 是 x 的反比例函数，即 x，y 满足表达式 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$），因此要求出此反比例函数的表达式，只需求出 k 即可，而求 k 的值，只需将 x，y 的一对对应值代入表达式即可求出.

特别提醒

在实际问题中，确定函数表达式后，通常都要写出自变量的取值范围，特别注意自变量的取值要使实际问题有意义.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 反比例函数的图象

1. 图象的画法（描点法）

（1）**列表**：先取一些自变量的值，在原点的两边取三对或三对以上互为相反数的值，如1和−1、2和−2、3和−3等．求y的值时，只需计算原点一侧的函数值，另一侧的函数值可以随之得出．

（2）**描点**：根据表中提供的数据，即点的坐标，在平面直角坐标系中描出对应的点．

（3）**连线**：用平滑的曲线顺次把这些点连接起来并延伸，注意双曲线的两支是断开的，延伸部分有逐渐靠近坐标轴的趋势，但永远不与坐标轴相交．

2. 图象的特点

（1）反比例函数$y=\frac{k}{x}$（k为常数，且$k\neq 0$）的图象是双曲线；

（2）反比例函数图象的两支分别位于第一、第三象限或第二、第四象限；

（3）双曲线的两支都无限接近坐标轴，但永远不与坐标轴相交；

（4）双曲线既是中心对称图形（对称中心是原点），又是轴对称图形（对称轴是直线$y=x$和直线$y=-x$）．

示图（如图21.5−1所示）：

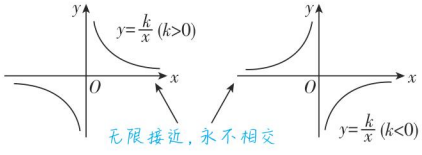


图21.5−1

技考向▶利用反比例函数图象的特点用描点法作图象

例4 在同一平面直角坐标系中画出反比例函数$y=\frac{5}{x}$和$y=-\frac{5}{x}$的图象．

解题秘方：紧扣画图象的“一列、二描、三连”的步骤作图．

解：（1）列表如下：

x	…	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5	…
$y=\frac{5}{x}$	…	−1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	−5	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1	…
$y=-\frac{5}{x}$	…	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	5	−5	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	−1	…

提分·必记

特别提醒

由于反比例函数图象的两个分支关于原点对称，因此只要画出它在一个象限内的分支，就可以对称地画出另一个分支．

画实际问题中的反比例函数的图象时，要考虑自变量取值范围的限制，一般地，实际问题的图象是反比例函数图象在第一象限内的一支或其中一部分．

提分·秘诀

技巧点拨

列表时，自变量的值可以以0为中心，在0的两边选择绝对值相等而符号相反的值，既可简化运算又便于描点；要尽量多取一些数据，多描一些点，方便连线．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）描点、连线得到如图 21.5−2 所示的图象．

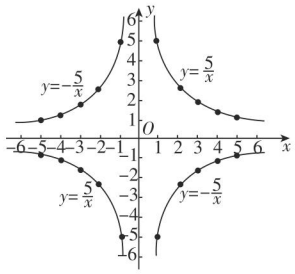
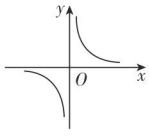
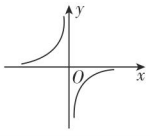


图 21.5−2


反比例函数的性质

点知识▶4 反比例函数的性质

反比例函数的性质主要研究它的图象的位置和函数值的增减情况，如下表所示．

反比例函数	$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$	
k 的符号	$k>0$	$k<0$
图象		
图象位置	第一、第三象限	第二、第四象限
增减性	在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小	在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大

拔考向▶利用反比例函数的性质解与求字母值有关的应用

例 5 已知反比例函数 $y=\frac{m^2}{x}(m\neq 0)$ 的图象过点 $(-3,-12)$，且反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象位于第二、第四象限．

（1）求 m 的值；

（2）对于 $y=\frac{m}{x}$，当 $x>2$ 时，求 y 的取值范围．

解题秘方：紧扣“k 的符号、双曲线的位置、函数的增减性三者相互依存，知一推二”这一规律解题．

解：（1）把点 $(-3,-12)$ 的坐标代入 $y=\frac{m^2}{x}$，得 $-12=\frac{m^2}{-3}$，

$\therefore m^2=36.\ \therefore m=\pm 6.$

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象位于第二、第四象限，$\therefore m<0.$

$\therefore m=-6.$

活学巧记

点越多，越精确，
平滑曲线把点过；
两个分支不能少，
对称关系很奇妙．

提分·必记

特别提醒

在描述反比例函数的增减性时，必须指明“在每一个象限内”．

因为当 $k>0(k<0)$ 时，整个函数不是 y 随 x 的增大而减小（增大），而是函数在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小（增大），

所以笼统地说“对于函数 $y=\frac{1}{x}$，y 随 x 的增大而减小”是错误的．

提分·秘诀

活学巧记

反比例函数两性质，
掌握性质要记清．
k 正图象在一三，
k 负图象在二四；
图象一三函数减，
图象二四函数增．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）由 $m=-6$ 知反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∵ $x>2$，∴此部分图象在第四象限. 当 $x=2$ 时，$y=-\frac{6}{2}=-3$.

∵在第四象限内，y 随 x 的增大而增大，

∴当 $x>2$ 时，$-3<y<0$.

点知识▶ 5 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 的几何性质

1. 矩形的面积

如图 21.5−3，过双曲线上任意一点 $P(x, y)$ 分别作 x 轴、y 轴的垂线 PM，PN，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$. 因为 $y=\frac{k}{x}$，所以 $xy=k$. 所以 $S=|k|$，即过双曲线上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线，所得矩形的面积为 $|k|$.

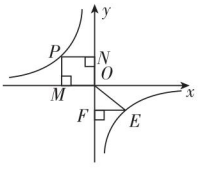


图 21.5−3

2. 三角形的面积

如图 21.5−3，过双曲线上的任意一点 E 作 EF 垂直于 y 轴，垂足为 F，连接 EO，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线上任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$.


比例系数 k 的几何意义

技考向▶ 利用比例系数 k 的几何性质解面积问题

题型 1：比例系数 k 的矩形面积性质在求表达式中的应用

例 6 ［中考·齐齐哈尔］如图 21.5−4，点 A 是反比例函数图象上一点，过点 A 作 $AB\perp y$ 轴于点 B，点 C，D 在 x 轴上，且 $BC\parallel AD$，四边形 $ABCD$ 的面积为 3，则这个反比例函数的表达式为_____.

解题秘方：紧扣 k 的几何性质，用等面积法将四边形的面积转化为符合 k 的几何性质的矩形面积来求解.

解：设这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$），过点 A 向 x 轴作垂线，垂足为 E，如图 21.5−4 所示. 易知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，根据反比例函数中 k 的几何性质，可得 $|k|=S_{四边形AEOB}=S_{四边形ABCD}=3$.

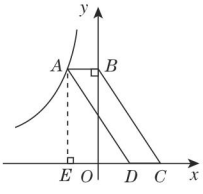


图 21.5−4

又∵函数图象有一支在第二象限，∴ $k=-3$，即函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

答案： $y=-\frac{3}{x}$

学习札记

提分·必记

特别提醒

在利用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 的几何性质确定 k 的值时，不仅要注意矩形面积的大小，还要注意函数图象的位置.

因为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 有正、负之分，所以在利用函数表达式求矩形或三角形面积时，都要加上绝对值符号.

提分·秘诀

解题通法

1. 若已知反比例函数的表达式，则利用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 的几何性质可求相关几何图形的面积；
若已知相关几何图形的面积及函数图象的位置，则可求比例系数 k，进而可求反比例函数的表达式.
2. 过反比例函数图象上任意一点作两坐标轴的垂线，这两条垂线与坐标轴围成的矩形的面积是一个不变的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：比例系数 k 的三角形面积性质在求面积中的应用

例 7 ［中考·永州］如图 21.5-5，两个反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 和 $y=\frac{2}{x}$ 在第一象限内的图象分别是 C_1 和 C_2，设点 P 在 C_1 上，$PA\perp x$ 轴于点 A，交 C_2 于点 B，则 $\triangle POB$ 的面积为_____.

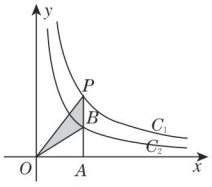


图 21.5-5

解题秘方：紧扣 k 的几何性质，用作差法将阴影部分的面积转化为符合 k 的几何性质的三角形面积的差来求解.

解：根据反比例函数中比例系数 k 的几何性质，可得 $S_{\mathrm{Rt}\triangle POA}=\frac{1}{2}\times 4=2$，$S_{\mathrm{Rt}\triangle BOA}=\frac{1}{2}\times 2=1$. 所以 $S_{\triangle POB}=S_{\mathrm{Rt}\triangle POA}-S_{\mathrm{Rt}\triangle BOA}=2-1=1$.

答案：1

知识 6 建立反比例函数模型解实际问题

1. 在生活与生产中，如果某些问题的两个量成反比例关系，那么可以根据这种关系建立反比例函数模型，再利用反比例函数的有关知识解决实际问题.

运用反比例函数解决实际问题时常用的两种思路：

（1）通过问题提供的信息，明确变量之间的函数关系，设出相应的函数表达式，再根据题目条件确定函数表达式中的待定系数的值；

（2）已知反比例函数模型的表达式，运用反比例函数的图象及性质解决问题.

2. 建立反比例函数表达式常用的两种方法

（1）**待定系数法：**若题目提供的信息中明确此函数是反比例函数，则设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq 0$），再求出 k 的值；

（2）**列方程法：**若题目所给的信息中两个变量之间的函数关系不明确，通常列出关于两个变量的方程，通过变形得到反比例函数表达式.

3. 用反比例函数解决实际问题的一般步骤

（1）**审：**审清题意，找出题目中的常量、变量；

（2）**设：**根据常量、变量间的关系，设出函数表达式，待定的系数用字母表示；

（3）**列：**由题目中的已知条件列出方程，求出待定系数；

（4）**写：**写出函数表达式，并注意表达式中自变量的取值范围；

（5）**解：**用函数的图象和性质去解决实际问题.

技巧点拨

求阴影部分面积的方法：当阴影部分面积无法直接求出时，一般采用“转化”的方法，将它转化为简单图形面积的和或差来进行计算.

如本例就是将阴影部分的面积转化为两个与比例系数 k 相关的特殊三角形的面积的差来求，要注意转化思想和作差法的运用.

提分·必记

特别提醒

利用反比例函数解决实际问题时应注意：

1. 要理清题目中的常量与变量及其基本数量关系，将实际问题抽象成数学问题，建立数学模型；
2. 要分清自变量和因变量，从而写出正确的函数表达式，结合问题的实际意义，确定自变量的取值范围；
3. 要熟练掌握反比例函数的意义、图象和性质，特别是图象，要做到数形结合，这样有利于分析和解决问题.

活学巧用

反比例函数应用广，
解决思路有两条，
建立模型列方程；
求表达式两方法，
待定系数与变形；
解决问题五步骤，
审设列写后再解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用反比例函数模型解实际应用

题型1：反比例关系在生活中的应用

例8 某地区上一年度每度电价格为0.8元，年用电量为1亿度，本年度计划将电价调到0.55~0.75元（不包括端点值）．经测算，若电价调至x元，则本年度新增用电量y（亿度）与（$x-0.4$）（元）成反比例，且当$x=0.65$时，$y=0.8$.

（1）求y与x之间的函数表达式.

（2）若每度电的成本价为0.3元，当电价调至0.72元时，本年度电力部门的收益是多少元？［收益＝用电量×（实际电价－成本价）］

解题秘方：紧扣反比例关系，用待定系数法设形如$y=\frac{k}{x}$的函数表达式求解.

解：（1）设y与x之间的函数表达式为$y=\frac{k}{x-0.4}$（$k\neq 0$）.

因为当$x=0.65$时，$y=0.8$，

所以$k=(x-0.4)y=(0.65-0.4)\times 0.8=0.2$.

所以$y=\frac{0.2}{x-0.4}$，即$y=\frac{1}{5x-2}$（$0.55<x<0.75$）.

（2）当电价调至0.72元时，新增用电量为$\frac{1}{5\times 0.72-2}=\frac{1}{1.6}=0.625$（亿度），

则本年度用电量为$1+0.625=1.625$（亿度）$=1.625\times 10^8$（度）.

所以$(0.72-0.3)\times 1.625\times 10^8=6.825\times 10^7$（元）.

所以当电价调至0.72元时，本年度电力部门的收益是6.825×10^7元.

题型2：反比例关系在跨学科中的应用

例9 某闭合电路中，其电压恒定，电流I（A）与电阻R（Ω）成反比例函数关系，其图象如图21.5-6所示，根据图象回答下列问题.

（1）写出电流I与电阻R之间的函数表达式.

（2）如果一个用电器的电阻为5 Ω，其允许通过的最大电流是1 A，那么这个用电器接在这个闭合电路中，会不会被烧毁？请说明理由.

（3）若允许通过的电流不超过4 A，那么电阻R的取值应该控制在什么范围？

解题秘方：紧扣“电压恒定，电流和电阻成反比例函数关系”用待定系数法求反比例函数表达式，并结合函数表达式求解.

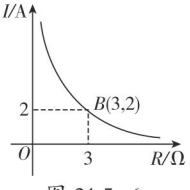


图21.5-6

提分·秘诀

特别提醒

这里的y与$(x-0.4)$成反比例，用待定系数法求出的是y与x之间的函数表达式，而不是反比例函数的表达式.

写函数表达式时，不要忽略自变量的取值范围.

知识储备

在电学中，当电压U一定时，闭合电路的电流I与电阻R之间是反比例函数关系，即：电流(I)$=\frac{\text{电压(U)}}{\text{电阻(R)}}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设 $I=\frac{k}{R}$，由图象过点 B（3，2），得 $2=\frac{k}{3}$，

解得 $k=6$.

即函数表达式为 $I=\frac{6}{R}$.

（2）会被烧毁．理由如下：

由（1）知，闭合电路的电压恒为 6 V，该用电器接到这个闭合电路中，通过的电流为 $\frac{6}{5}=1.2$（A），大于此用电器允许通过的最大电流 1 A，

所以该用电器接在这个电路中会被烧毁．

（3）由 $I=\frac{6}{R}$ 可知，当 $I=4$ 时，$R=1.5$，

所以电阻至少应是 1.5 Ω.

也可由 $\frac{6}{R}\leqslant 4$，即 $4R\geqslant 6$，解得 $R\geqslant 1.5$，所以电阻至少应是 1.5 Ω.

另解

在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，k 的值等于反比例函数图象上任意一点的横坐标与纵坐标的乘积，即 $k=3\times 2=6$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用定义法求反比例函数中字母的值

挑战·高分

例 10 若函数 $y=(k^2+k)x^{k^2-2k-1}$ 是反比例函数，试求 $(k-3)^{2021}$ 的值．

解题秘方：紧扣反比例函数定义中的三种表达形式求解．

解：由题意得 $\begin{cases}k^2-2k-1=-1,\\ k^2+k\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=0\text{ 或 }k=2,\\ k\neq 0\text{ 且 }k\neq -1,\end{cases}$

所以 $k=2$.

因此 $(k-3)^{2021}=(2-3)^{2021}=-1$.

特别提醒

利用反比例函数的定义求字母的值时，一定要注意比例系数 $k\neq 0$ 这一条件，否则易造成错误．

拔尖角度 2 利用增减性法比较反比例函数值的大小

挑战·高分

例 11 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）的图象上有三点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$，若 $x_1<x_2<0<x_3$，则下列结论正确的是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_1<y_3<y_2$

点拨微课堂

解题秘方：紧扣“反比例函数的增减性及不同象限的函数值的关系”比较大小．

解：∵ $k<0$，∴ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、第四象限，且在每个象限内，y 随 x 的增大而增大．

∵ $x_1<x_2<0$，∴ $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 都在第二象限内．

∴ $0<y_1<y_2$.

另解

方法一：图象法

因为 $k<0$，所以反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、四象限，如图 21.5-7 所示．在图中描出符合条件的三个点，观察图象可知 $y_3<y_1<y_2$.

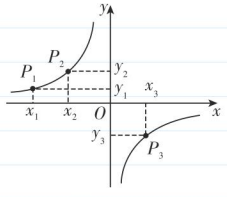


图 21.5-7

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $x_3>0$，∴ $P_3(x_3, y_3)$ 在第四象限内．

∴ $y_3<0$.

∴ $y_3<y_1<y_2$.

答案： B

解题通法：利用反比例函数的增减性比较函数值大小的求解思路

比较反比例函数的函数值的大小时，在同一分支上的点可以通过比较其横坐标的大小来判断函数值的大小；不在同一分支上的点，依据与 x 轴的相对位置来进行函数值大小的比较．另外，图象法和特殊值法也是解决此类问题的常用方法，图象法形象直观，特殊值法简单直接．

方法二：特殊值法

设该反比例函数表达式为 $y=-\frac{2}{x}$．取满足 $x_1<x_2<0<x_3$ 的三个特殊值 $x_1=-2$，$x_2=-1$，$x_3=1$，则 $y_1=1$，$y_2=2$，$y_3=-2$，所以 $y_3<y_1<y_2$.



拔尖角度▸3 利用对称法求与对称点坐标有关的式子的值

例 12 如图 21.5−8，直线 $y=kx$（$k<0$）与双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点，则 $3x_1y_2-8x_2y_1$ 的值为（　　）

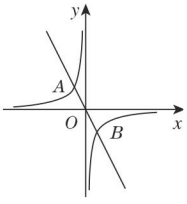


图 21.5−8

A. −5　　B. −10　　C. 5　　D. 10

挑战·高分

解法提醒

反比例函数的图象关于原点对称，正比例函数的图象关于原点对称，因此反比例函数的图象和正比例函数的图象相交时，其交点关于原点对称．

解题秘方： 紧扣“反比例函数图象与正比例函数图象的交点关于原点对称”这一特征求解．

解： 根据对称性可知，当正比例函数的图象和反比例函数的图象相交时，交点关于原点对称，而关于原点对称的两点的坐标分别为 (x, y) 和 $(-x, -y)$，

∴ $x_1=-x_2$，$y_1=-y_2$.

又∵ $x_2y_2=-2$，

∴ $3x_1y_2-8x_2y_1=3\cdot(-x_2)\cdot y_2-8x_2\cdot(-y_2)=5x_2y_2=5\times(-2)=-10$.



答案： B

拔尖角度▸4 利用交点坐标法求两个函数的表达式

例 13 已知关于 x 的一次函数 $y=mx+3n$ 和反比例函数 $y=\frac{2m+5n}{x}$ 的图象都经过点 $(1, -2)$．求：

（1）一次函数和反比例函数的表达式；

（2）两个函数图象的另一个交点的坐标．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“两函数图象交点坐标满足两函数表达式”求解.

解：（1）∵两函数的图象都过点（1，−2），

$\therefore \begin{cases} m+3n=-2, \\ 2m+5n=-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=4, \\ n=-2. \end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=4x-6$，反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

（2）根据题意，列出方程组 $\begin{cases} y=4x-6, \\ y=-\frac{2}{x}. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-4. \end{cases}$

∴两个函数图象的另一个交点的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$.

挑战·高分

解法点拨

直线与双曲线的交点既在直线上，也在双曲线上，交点的坐标既满足直线对应的函数表达式，也满足双曲线对应的函数表达式.

要求交点的坐标，应将两个函数的表达式组成方程组，通过解方程组求出交点坐标.

拔尖角度▸ 5 利用分割法解双函数的面积问题

挑战·高分

技巧点拨

求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法：

一般可采用割补法将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解，因为三角形一边在坐标轴上时，这边的长易求，这边上的高则为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值，所以求面积的实质就是求点的坐标.

例 14 ［中考·遂宁］如图 21.5−9，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=x+b$ 的图象交于点 A（1，4），点 B（−4，n）.

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）求△ OAB 的面积；

（3）直接写出一次函数值大于反比例函数值时自变量 x 的取值范围.

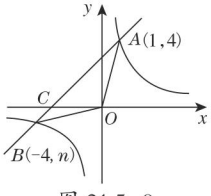


图 21.5−9

解题秘方：（1）用待定系数法求解；

（2）用分割法求解；

（3）用图象法求解.

解：（1）把点 A（1，4）的坐标分别代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 和一次函数 $y=x+b$，得 $\frac{k}{1}=4$，$1+b=4$. 解得 $k=4$，$b=3$.

∴反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$，一次函数的表达式是 $y=x+3$.

（2）在 $y=x+3$ 中，当 $x=-4$ 时，$y=-1$，∴ B（−4，−1）.

当 $y=0$ 时，$x+3=0$，∴ $x=-3$. ∴ C（−3，0）.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{15}{2}$.

（3）当 $x>1$ 或 $-4<x<0$ 时，一次函数值大于反比例函数值.

方法解读

一次函数图象在反比例函数图象上方时，x 的取值范围就是使一次函数的函数值大于反比例函数的函数值的自变量的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 6 利用挖掘关系法解反比例函数的应用问题

挑战·高分

题型1：数量关系中含反比例关系在实际中的应用

例15 某地计划用120~180天（含120与180）的时间建设一项水利工程，工程需要运送的土石方总量为360万米^3.

（1）写出运输公司完成任务所需的时间y（单位：天）与平均每天的工作量x（单位：万米^3）之间的函数表达式，并给出自变量x的取值范围.

（2）由于工程进度的需要，实际平均每天运送土石方比原计划多5 000米^3，工期比原计划减少了24天，原计划和实际平均每天运送土石方各多少万米^3？

解题秘方：（1）利用“平均每天的工作量 × 天数 = 土石方总量”可以得到两个变量之间的函数表达式；

（2）根据“工期比原计划减少了24天”找到等量关系并列出方程求解即可.

表示的等量关系为：原计划工作天数－实际工作天数=24天.

解：（1）由题意得$y=\dfrac{360}{x}$.

把$y=120$代入$y=\dfrac{360}{x}$，得$x=3$；把$y=180$代入$y=\dfrac{360}{x}$，得$x=2$，

∴自变量x的取值范围为$2\leqslant x\leqslant 3$.

∴$y=\dfrac{360}{x}(2\leqslant x\leqslant 3)$.

（2）设原计划平均每天运送土石方a万米^3，则实际平均每天运送土石方$(a+0.5)$万米^3.

根据题意，得$\dfrac{360}{a}-\dfrac{360}{a+0.5}=24$，

解得$a=2.5$或$a=-3$.

经检验，$a=2.5$和$a=-3$均为原方程的根，但$a=-3$不符合题意，故舍去.

即原计划平均每天运送土石方2.5万米^3，实际平均每天运送土石方3万米^3.

题型2：图象信息中含反比例关系在实际中的应用

例16 某汽车销售商推出分期付款购车促销活动，支付首付款后，余额要在30个月内结清，不计算利息.王先生在活动期间购买了价格为12万元的汽车，交了首付款后平均每个月付款y万元，x个月结清.y与x的函数图象如图21.5-10所示，根据图象回答下列问题.

（1）确定y与x之间的函数表达式，并求出首付款的数目.

（2）王先生若用20个月结清，平均每个月应付多少万元？

（3）如果打算每个月付款不超过4 000元，王先生至少要几个月才能结清余额？

解法提醒

由反比例函数$y=\dfrac{k}{x}$（$x>0$）的函数值的范围求自变量的范围的方法：

1. 当$a\leqslant y\leqslant b$，且$y=a$，b时，对应的x的值为a'，b'，若$a'<b'$，则$a'\leqslant x\leqslant b'$；若$a'>b'$，则$b'\leqslant x\leqslant a'$.
2. 当$y\geqslant a$，且$y=a$时，对应的x的值为a'，若$k>0$，则$0<x\leqslant a'$；若$k<0$，则$x\geqslant a'$.
3. 若y的范围不含等号，则x的范围也不含等号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“函数图象是双曲线的一支，说明 y 与 x 成反比例函数关系”用待定系数法求函数表达式，再结合反比例函数的性质进行解答.

解：（1）由图象的特征知 y 是 x 的反比例函数，因此可设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$.

∵函数图象经过点（5，1.8），

∴ $1.8=\frac{k}{5}$，解得 $k=9$.

∴ $y=\frac{9}{x}$（x 为整数，$0\leqslant x\leqslant 30$）.

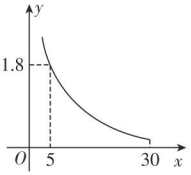


图 21.5-10

∴余额为 9 万元.

∴首付款为 12−9=3（万元）.

要注意实际问题中自变量的取值范围.

（2）把 $x=20$ 代入 $y=\frac{9}{x}$，得 $y=\frac{9}{20}=0.45$.

∴平均每个月应付 0.45 万元.

（3）根据题意，月付款额最大为 4 000 元，即 0.4 万元.

把 $y=0.4$ 代入 $y=\frac{9}{x}$，得 $0.4=\frac{9}{x}$，解得 $x=22.5$.

由反比例函数的性质知，对于 $y=\frac{9}{x}$（$0\leqslant x\leqslant 30$），y 随 x 的增大而减小，即 x 的最小值为 22.5，因此王先生至少要 23 个月才能结清余额.

解法提醒

由“每个月付款数×月数=余额总数”、余额总数不变，可知 y 是 x 的反比例函数，可设 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$），由图象信息求出 k 值，再由“总价−余额总数=首付款”求出首付款.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是反比例函数的图象、性质及 k 的几何意义，主要考查反比例函数的图象和性质随 k 的正负的变化而变化的规律、以反比例函数图象上的点为顶点的矩形或三角形的面积的求解. 本节知识常与一次函数、二次函数、方程、三角形、四边形、图形变换和圆（以后将学）等知识综合考查，题型有选择题、填空题和解答题，难度中等.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用反比例函数的图象及一次函数的图象的位置判断二次函数图象的位置

例 17 [中考·菏泽] 一次函数 $y=ax+b$ 和反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 在同一个平面直角坐标系中的图象如图 21.5-11 所示，则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可能是图 21.5-12 中的（　　）

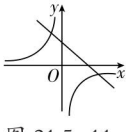


图 21.5-11

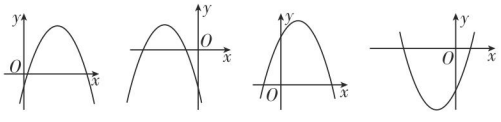


图 21.5-12

特别提醒

判断多个函数的图象在同一坐标系中的大致位置，即多个函数图象共存问题，一定要明确“同一字母在每个函数表达式中的取值应相同”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了反比例函数的图象、一次函数的图象以及二次函数的图象，根据反比例函数图象和一次函数图象经过的象限，得出 $a<0$，$b>0$，$c<0$ 是解题的关键．

答案：A

考法 2 利用反比例函数的性质与三角形的性质求待定系数的范围

例 18 ［中考·海南］如图 21.5-13，△ ABC 的三个顶点分别为 $A(1,2)$，$B(4,2)$，$C(4,4)$．若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象与△ ABC 有交点，则 k 的取值范围是（　　）

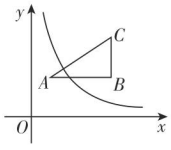


图 21.5-13

A. $1 \leqslant k \leqslant 4$　　B. $2 \leqslant k \leqslant 8$

C. $2 \leqslant k \leqslant 16$　　D. $8 \leqslant k \leqslant 16$

试题评析：本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数图象上点的坐标特点是解答此题的关键．

解：易知△ ABC 是直角三角形，

∴当反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 A 时 k 最小，经过点 C 时 k 最大．

∴ $k_{最小值}=1\times2=2$，$k_{最大值}=4\times4=16$，即 $2 \leqslant k \leqslant 16$．

答案：C

考法 3 利用物理电学的表达式解函数图象的应用

例 19 ［中考·台州］已知电流 I（安培）、电压 U（伏特）、电阻 R（欧姆）之间的关系为 $I=\frac{U}{R}$，当电压为定值时，闭合电路的 I 关于 R 的函数图象是图 21.5-14 中的（　　）

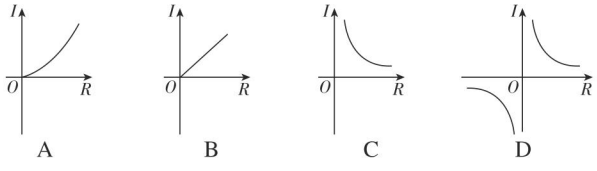


图 21.5-14

试题评析：本题考查反比例函数的图象，解题的关键是理解反比例函数的定义，灵活运用所学知识解决问题．

解：∵ $I=\frac{U}{R}$，电压为定值，

∴ I 关于 R 的函数是反比例函数，且图象在第一象限．

答案：C

学习札记

解法提醒

因为△ ABC 为直角三角形，且两直角边 BC，AB 分别与 x 轴，y 轴垂直，所以△ ABC 边上所有点中，点 A 的横、纵坐标的积最小，点 C 的横、纵坐标的积最大．

知识储备

物理学科中常见的反比例函数关系：

1. 压强问题：固体压强(p)=$\frac{压力(F)}{受力面积(S)}$，当压力（F）一定时，压强（p）与受力面积（S）成反比例函数关系．
2. 杠杆问题：在杠杆原理中，共有四个变量，如果动力、动力臂已知或阻力、阻力臂已知，那么其余两个变量之间是反比例函数关系．
3. 电压问题：在电学中，当电压一定时，闭合电路的电流 I 与电阻 R 之间是反比例函数关系．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用反比例函数图象与一次函数图象的交点解几何综合问题

例 20 [中考·山西] 如图 21.5-15，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，其边长为 2，点 A、点 C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，函数 $y=2x$ 的图象与 CB 交于点 D，函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象经过点 D，与 AB 交于点 E，与函数 $y=2x$ 的图象在第三象限内交于点 F，连接 AF，EF.

（1）求函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式，并直接写出 E，F 两点的坐标；

（2）求△ AEF 的面积.

试题评析： 本题主要考查了待定系数法求函数表达式，以及正方形的性质，解题的关键是求得 $D(1,2)$，$E(2,1)$，$F(-1,-2)$.

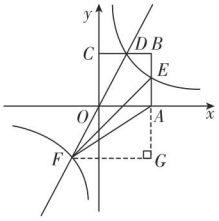


图 21.5-15

解：（1）∵正方形 $OABC$ 的边长为 2，

∴点 D 的纵坐标为 2，即 $y=2$.

将 $y=2$ 代入 $y=2x$，得 $x=1$，

∴点 D 的坐标为（1，2）.

∵函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D，

∴ $2=\frac{k}{1}$，解得 $k=2$.

∴函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式为 $y=\frac{2}{x}$. $E(2,1)$，$F(-1,-2)$.

（2）如图 21.5-15，过点 F 作 $FG\perp AB$，与 BA 的延长线交于点 G.

∵ $E(2,1)$，$F(-1,-2)$，$A(2,0)$，

∴ $AE=1$，$FG=2-(-1)=3$.

∴△ AEF 的面积为 $\frac{1}{2}AE\cdot FG=\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$.

解法提醒

根据正方形的性质，以及函数图象上点的坐标特征可求出点 D 的坐标为 (1, 2)，根据待定系数法可求出反比例函数表达式，进一步得到 E, F 两点的坐标.

过点 F 作 FG ⊥ AB，与 BA 的延长线交于点 G，由点 A, E, F, G 的坐标可求出 AE=1, FG=3，再根据三角形面积公式可求出△ AEF 的面积.

考法 5 利用反比例函数的图象与性质探究反比例函数与一次函数的函数值大小关系成立的条件

例 21 [中考·大庆] 如图 21.5-16，P_1，P_2 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）在第一象限的图象上的两点，点 A_1 的坐标为（4，0）. 若△ P_1OA_1 与△ $P_2A_1A_2$ 均为等腰直角三角形，其中点 P_1，P_2 为直角顶点.

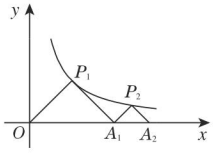


图 21.5-16

解法提醒

1. 先根据点 A_1 的坐标为（4，0），△ P_1OA_1 为等腰直角三角形，求得 P_1 的坐标；

再代入反比例函数表达式求解.

2. 先根据△ $P_2A_1A_2$ 为等腰直角三角形，设 $A_1A_2=2a$，则 P_2 的坐标为（$4+a$，a），代入反比例函数表达式求得 a 的值，得到 P_2 的坐标；

再根据 P_1 的横坐标和 P_2 的横坐标，判断 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）求反比例函数的表达式.

（2）①求点 P_2 的坐标；

②一次函数的图象过点 P_1，P_2，根据图象直接写出在第一象限内当 x 满足什么条件时，一次函数的函数值大于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的函数值.

试题评析：本题主要考查了反比例函数与一次函数，解决问题的关键是根据等腰直角三角形的性质求得点 P_1 和 P_2 的坐标. 等腰直角三角形是一种特殊的三角形，具备等腰三角形和直角三角形的所有性质.

解：（1）如图 21.5−17，作 $P_1H_1 \perp x$ 轴于 H_1.

$\because \triangle P_1OA_1$ 是以 P_1 为直角顶点的等腰直角三角形，$A_1(4, 0)$，

$\therefore P_1H_1=OH_1=\frac{1}{2}OA_1=2.$

$\therefore P_1(2, 2)$.

$\because$ 点 P_1 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象上，

$\therefore k=xy=2\times 2=4.$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

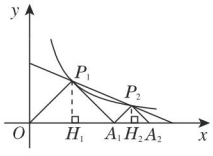


图 21.5−17

（2）①设 $A_1A_2=2a$，作 $P_2H_2 \perp x$ 轴于 H_2，如图 21.5−17 所示.

$\because \triangle P_2A_1A_2$ 是以 P_2 为直角顶点的等腰直角三角形，

$\therefore P_2H_2=A_1H_2=\frac{1}{2}A_1A_2=a.$

$\because OA_1=4,$

$\therefore P_2(4+a, a)$.

又 $\because$ 点 P_2 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上，

$\therefore (4+a)a=4,$

解得 $a=2\sqrt{2}-2$（负值不合题意，已舍去）.

$\therefore P_2(2\sqrt{2}+2, 2\sqrt{2}-2)$.

②当 $2<x<2\sqrt{2}+2$ 时，一次函数的函数值大于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的函数值.

教你一招

解数形结合的题型，一般先设出几何图形中的未知边的长，然后结合函数的图象用含未知数的代数式表示出几何图形与图象的交点坐标，再由函数表达式及几何图形的性质写出含未知数或待定的字母系数的方程（组），解方程（组）即可得所要求的几何图形中的未知量或函数表达式中待定字母的值.

这种“数”“形”交替变换的思想方法是解“数形结合”题型的最好“钥匙”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·凉山州]已知函数 $y=(m+1)\cdot x^{m^2-5}$ 是反比例函数，且图象在第二、四象限内，则 m 的值是（　　）

A. 2　　B. -2　　C. ± 2　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知一个函数满足下表（x 为自变量）：

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	2	$\frac{8}{3}$	4	8	-8	-4	$-\frac{8}{3}$	-2

则这个函数的表达式为（　　）

A. $y=\frac{8}{x}$　　B. $y=-\frac{8}{x}$

C. $y=\frac{x}{8}$　　D. $y=-\frac{x}{8}$

3.[中考·黑龙江]关于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列说法正确的是（　　）

A. 图象过（1，2）点

B. 图象在第一、三象限

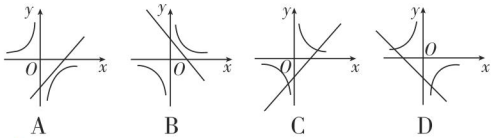
C. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小

D. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

4.[中考·黑龙江]已知反比例函数 $y=\frac{5}{x}$，当 $1<x\leqslant 4$ 时，y 的最大整数值是（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5.[中考·潍坊]一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{a-b}{x}$，其中 $ab<0$，a，b 为常数，它们在同一坐标系中的图象可以是（　　）

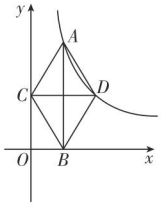


A　　B　　C　　D

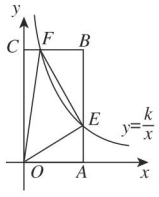
6.[中考·衢州]如图，在直角坐标系中，点 A 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，$AB\perp x$ 轴于点 B，AB 的垂直平分线与 y 轴交于点 C，与函数 $y=\frac{4}{x}$（$x>0$）的图象交于点 D，连接 AC，CB，BD，DA，则四边形 $ACBD$ 的面积等于（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $4\sqrt{3}$



（第6题）



（第7题）

7.[中考·锦州]如图，在矩形 $OABC$ 中，$A(1,0)$，$C(0,2)$，双曲线 $y=\frac{k}{x}(0<k<2)$ 分别交 AB，CB 于点 E，F，连接 OE，OF，EF，$S_{\triangle OEF}=2S_{\triangle BEF}$，则 k 的值为（　　）

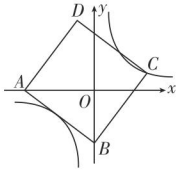
A. $\frac{2}{3}$　　B. 1

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\sqrt{2}$

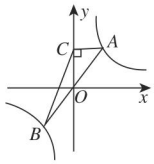
8.[中考·威海]如图，正方形 $ABCD$ 的边长为5，点 A 的坐标为（-4，0），点 B 在 y 轴上，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象过点 C，则该反比例函数的表达式为（　　）

A. $y=\frac{3}{x}$　　B. $y=\frac{4}{x}$

C. $y=\frac{5}{x}$　　D. $y=\frac{6}{x}$



（第8题）



（第9题）

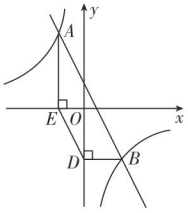
9.[中考·黄冈]如图，一直线经过原点 O，且与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象相交于点 A，B，过点 A 作 $AC\perp y$ 轴，垂足为 C，连接 BC，若 $\triangle ABC$ 的面积为8，则 $k=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. [中考·黄冈]如图，一次函数 $y=-2x+1$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象有两个交点 $A(-1, m)$ 和 B，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴，垂足为点 E；过点 B 作 $BD \perp y$ 轴，垂足为点 D，且点 D 的坐标为 $(0, -2)$，连接 DE.

(1) 求 k 的值；

(2) 求四边形 $AEDB$ 的面积.



(第 10 题)

11. [中考·泸州]一次函数 $y=kx+b$ $(k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(2, -6)$，且与反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象交于点 $B(a, 4)$.

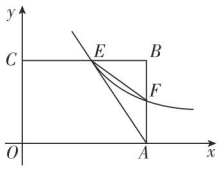
(1) 求一次函数的表达式；

(2) 将直线 AB 向上平移 10 个单位后得到直线 l：$y_1=k_1x+b_1$ $(k_1 \neq 0)$，l 与反比例函数 $y_2=\frac{6}{x}$ 的图象相交，求使 $y_1 < y_2$ 成立的 x 的取值范围.

12. [中考·枣庄]如图，在矩形 $OABC$ 中，$OA=3$，$OC=2$，F 是 AB 上的一个动点(F 不与 A，B 重合)，过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0)$ 的图象与 BC 边交于点 E.

(1) 当 F 为 AB 的中点时，求该函数的表达式.

(2) 当 k 为何值时，$\triangle EFA$ 的面积最大？最大面积是多少？ 【导学号：8618152】

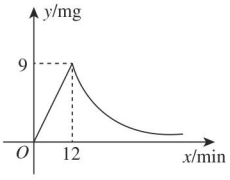


(第 12 题)

13. 近来新型冠状病毒已经夺去很多人的生命，某公司为了员工们的身心健康，在休息日用药薰消毒法进行消毒. 已知药物燃烧时，室内每立方米空气中的含药量 y(mg)与时间 x(min)成正比例；药物释放过程中，y 与 x 成反比例，如图所示. 根据题中提供的信息，解答下列问题：

(1) 写出从药物燃烧到释放过程中，y 与 x 之间的两个函数表达式及相应的自变量的取值范围；

(2) 据测定，当空气中每立方米的含药量低到 0.45 mg 以下时，人员方可入室，那么从药物燃烧开始，至少需要经过多少分钟后，才能进入室内？



(第 13 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

反比例函数中比例系数 k 的妙用

反比例函数中比例系数 k 对反比例函数起决定性作用，例如：

①确定了 k 的值就确定了反比例函数的表达式；

② k 的正负性决定双曲线所在的象限；

③ $|k|$ 越大，双曲线离坐标原点越远，等等．

反比例函数的系数 k 还有其他几种妙用，在中考中经常出现．

（1）比例系数 k 代表两个变量的乘积是定值；反之，若两个变量的乘积是定值，也可断定两个变量是反比例函数关系．例如：

①［中考·无锡］若点 $A(3,-4)$，$B(-2,m)$ 在同一个反比例函数的图象上，则 m 的值为（　　）

A. 6　　B. −6　　C. 12　　D. −12

点拨：利用 k 的不变性求解．

②［中考·武汉］科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节，科学家把一种珍奇的植物分别放在不同温度的环境中，经过一天后，测试出这种植物高度的增长情况（如下表）：

温度 x/℃	…	−4	−2	0	2	4	4.5	…
植物每天高度增长量 y/mm	…	41	49	49	41	25	19.75	…

由这些数据，科学家推测出植物每天高度增长量 y 是温度 x 的函数，且这种函数是反比例函数、一次函数和二次函数中的一种．请你选择一种适当的函数，求出它的函数表达式，并简要说明不选择另外两种函数的理由．

点拨：表中有 $x=0$ 的数据，可判断不是反比例函数．

（2）顶点在反比例函数图象上的图形的面积与 k 之间有密切的关系．如图 1，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点 $P(x,y)$ 分别作 x 轴、y 轴的垂线 PM，PN，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$．因为 $y=\frac{k}{x}$，所以 $xy=k$．所以 $S=|k|$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线，所得的矩形面积为 $|k|$．过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点 E 作 EF 垂直于 y 轴，垂足为 F，连接 EO，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$．

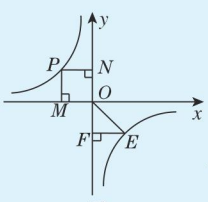


图 1

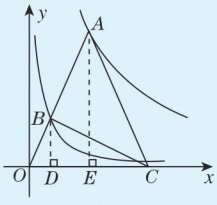


图 2

①在解决与反比例函数图象有关的图形面积问题时，通常把它转化为顶点在图象上的三角形或矩形的面积问题．例如：

［中考·宁波］如图 2，点 A 为函数 $y=\frac{9}{x}(x>0)$ 的图象上一点，连接 OA，交函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的图象于点 B，点 C 是 x 轴上一点，且 $AO=AC$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____．

点拨：如图 2，分别过点 A，B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 E，D，巧妙利用 k 的几何性质解决．

②已知某个图形的面积，求 k 的值时，将这个图形的面积转化为顶点在反比例函数图象上的几个三角形或矩形的面积之和（差），然后用含 k 的代数式表示出面积，建立方程求出 k 的值．例如：

［中考·深圳］如图 3，Rt $\triangle ABC$ 的直角边 BC 在 x 轴的负半轴上，斜边 AC 上的中线 BD 的反向延长线交 y 轴的正半轴于点 E，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图象经过点 A．若 $S_{\triangle BEC}=8$，则 $k=$_____．

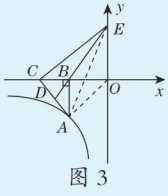


图 3

点拨：如图 3，连接 AE，AO，将 $\triangle BEC$ 的面积转化为 $\triangle AOB$ 的面积．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.6 综合与实践 获取最大利润

核心知识

- 利润计算公式
- 建立函数模型求最大利润

知识链接

一次函数、反比例函数、二次函数 → 建模 → 求获取的最大利润

点知识·拨考向 速提分

点知识▸获取最大利润

1. 运用二次函数的代数模型解决实际问题，实际上就是根据实际问题中常量和变量之间的具体数量关系，建立 $y=ax^2+bx+c$ 的二次函数的模型，再运用二次函数的性质解决实际问题的过程.
2. 运用二次函数的性质求最大利润关键有两点：一是根据等量关系列出相应的函数表达式，二是确定实际问题中自变量的取值范围.

拨考向▸建立函数模型求最大利润

题型 1：建立反比例函数模型求最大利润

例 1 某商场出售一批进价为 2 元的贺卡，在市场销售中发现，此贺卡的日销售单价 x（单位：元）与日销售量 y（单位：张）之间有如下关系：

日销售单价 x/ 元	3	4	5	6
日销售量 y/ 张	20	15	12	10

（1）确定 y 与 x 之间的函数表达式.

（2）设销售此贺卡的日销售利润为 w 元，试求 w 与 x 之间的函数表达式. 若物价局规定该贺卡售价每张最高不超过 10 元，请你求出日销售单价 x 定为多少时，才能获得最大日销售利润.

解题秘方：（1）紧扣“两个变量的对应值的乘积为同一常数，则这两个变量成反比例”求函数表达式；

（2）紧扣“被除数一定，除数越大、商越小及被减数一定，减数越小、差越大”进行解答.

提分·必记

特别提醒

确定二次函数的最值时，当顶点的横坐标在自变量的取值范围之内时，顶点的纵坐标为一个最值；当顶点的横坐标不在自变量的取值范围之内时，结合函数的增减性，在自变量的取值范围内求最值.

提分·秘诀

思路点拨

- 由表格确定两个变量之间的函数关系是否为反比例函数关系，其思路是观察对应数据的乘积是否相等，若乘积相等，则是反比例函数关系；否则，不是反比例函数关系.
- 利用表格中的一组数据求出反比例函数的表达式后，还要将其他各组数据代入进行验证.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）根据每组数据之积均为 60，猜测 y 与 x 成反比例函数关系．

设 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，把 $x=3$，$y=20$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=60$，

$\therefore y=\frac{60}{x}(x\geqslant 2)$．

把 $x=4$，$y=15$；$x=5$，$y=12$；$x=6$，$y=10$ 代入上式均成立．

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{60}{x}(x\geqslant 2)$．

（2）$w=(x-2)y=(x-2)\cdot\frac{60}{x}=60-\frac{120}{x}(2\leqslant x\leqslant 10)$．

当 $x=10$ 时，w 有最大值．

在 $w=60-\frac{120}{x}(2\leqslant x\leqslant 10)$ 中，因为 w 随着 x 的增大而增大，所以当 $x=10$ 时，w 有最大值．

即日销售单价 x 定为 10 时，才能获得最大日销售利润．

特别提醒

表格中的每一组对应值必须都符合函数 $y=\frac{60}{x}$，才能说明 y 是 x 的反比例函数．

题型 2：建立二次函数模型求最大利润

例 2 ［中考·安徽］某超市销售一种商品，成本为每千克 40 元，规定每千克售价不低于成本，且不高于 80 元，经市场调查，每天的销售量 y（kg）与每千克售价 x（元）满足一次函数关系，部分数据如下表：

每千克售价 x/元	50	60	70
销售量 y/kg	100	80	60

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）设商品每天的总利润为 W（元），求 W 与 x 之间的函数表达式（总利润 = 每千克商品的利润 × 销售量）；

（3）试说明（2）中总利润 W 随每千克售价 x 的变化而变化的情况，并指出每千克售价为多少元时获得最大利润，最大利润是多少？

解题秘方：紧扣“总利润 = 每千克商品的利润 × 销售量”这一关系解答．

解：（1）设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}50k+b=100,\\60k+b=80,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200.\end{cases}$

即 y 与 x 之间的函数表达式是 $y=-2x+200$．

（2）由题意可得，$W=(x-40)(-2x+200)=-2x^2+280x-8\,000$，

即 W 与 x 之间的函数表达式是 $W=-2x^2+280x-8\,000$．

（3）$\because W=-2x^2+280x-8\,000=-2(x-70)^2+1\,800$，$40\leqslant x\leqslant 80$，

$\therefore$ 当 $40\leqslant x\leqslant 70$ 时，W 随 x 的增大而增大；

当 $70<x\leqslant 80$ 时，W 随 x 的增大而减小．

当 $x=70$，即每千克售价为 70 元时获得最大利润，最大利润是 1 800 元．

知识储备

用二次函数解决商品销售问题中的最大利润、最低成本等问题，要熟练掌握相关数量的意义、常用的数量关系，根据具体问题，建立函数表达式，解决实际问题．

常见销售问题中的数量关系：

1. 利润 = 售价 − 成本；
2. 总利润 = 每千克商品的利润 × 销售量；
3. 利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{成本}}\times 100\%$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用分段函数求最大利润问题

例3 [中考·云南]某驻村扶贫小组实施产业扶贫，帮助贫困农户进行西瓜种植和销售. 已知西瓜的成本为6元/kg，规定销售单价不低于成本，又不高于成本的两倍. 经过市场调查发现，某天西瓜的销售量y（kg）与销售单价x（元/kg）的函数关系如图21.6-1所示. 求：

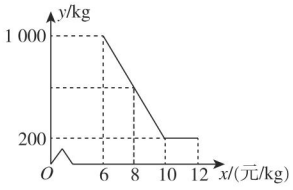


图21.6-1

（1）y与x之间的函数表达式；

（2）这一天销售西瓜获得的利润W（元）的最大值.

解题秘方： 根据分段图象求出分段函数表达式，求出每段函数的最大值，通过比较确定最大利润.

解：（1）当$6 \leqslant x \leqslant 10$时，设$y=kx+b$（$k \neq 0$），

根据题意，得$\begin{cases}1\,000=6k+b,\\200=10k+b,\end{cases}$



解得$\begin{cases}k=-200,\\b=2\,200,\end{cases}$

$\therefore y=-200x+2\,200$；

当$10 < x \leqslant 12$时，$y=200$.

$\therefore$ y与x之间的函数表达式为$y=\begin{cases}-200x+2\,200\ (6 \leqslant x \leqslant 10),\\200\ (10<x \leqslant 12).\end{cases}$

（2）由已知得$W=(x-6)y$.

当$6 \leqslant x \leqslant 10$时，$W=(x-6)(-200x+2\,200)=-200(x-8.5)^2+1\,250$.

$\because -200 < 0$，

$\therefore$抛物线的开口向下.

$\therefore$当$x=8.5$时，W取得最大值，且$W_{最大值}=1\,250$.

当$10 < x \leqslant 12$时，$W=(x-6)\cdot 200=200x-1\,200$.

$\because$ W随x的增大而增大，

$\therefore$当$x=12$时，W取得最大值，且$W_{最大值}=200\times 12-1\,200=1\,200$.

综上，这一天销售西瓜获得的利润W（元）的最大值为1 250.

挑战·高分

方法点拨

利用分段函数求最大利润的一般步骤：

一是利用函数图象折点坐标确定自变量的分段；

二是利用函数图象上点的坐标求出各段的函数表达式；

三是利用函数的增减性，结合自变量的取值范围，求出每段函数的最大值. 最后综合比较确定最大利润.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用分段法解双函数的应用问题

题型 1：反比例函数与一次函数综合在实际中的应用

例 4 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个程序，即需要将材料煅烧到 800 ℃，然后停止煅烧进行锻造操作．如图 21.6−2，煅烧时，温度 y（℃）与时间 x（min）成一次函数关系；锻造时，温度 y（℃）与时间 x（min）成反比例函数关系．已知该材料初始温度是 32 ℃，第 8 min 时，材料温度降为 600 ℃．

（1）分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数表达式，并且写出自变量 x 的取值范围；

（2）根据工艺要求，锻造期间当材料温度低于 480 ℃时，须停止操作，那么锻造的操作时间有多长？

解题秘方：（1）根据点 C 的坐标可求得锻造阶段的函数表达式，进而可确定点 B 的坐标，根据点 A，B 的坐标可求得线段 AB 所在直线的函数表达式；

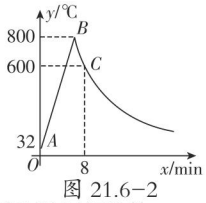


图 21.6−2

（2）求当材料温度为 480℃时的时间与最高温度时的时间的差．

解：（1）设锻造时的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，则 $600=\frac{k}{8}$，$\therefore k=4\,800$．

$\therefore y=\frac{4\,800}{x}$．当 $y=800$ 时，$x=6$．

$\therefore$ 锻造时的函数表达式为 $y=\frac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$）．

点 B 的坐标为（6，800）．设煅烧时的函数表达式为 $y=ax+b$，

则 $\begin{cases}b=32,\\6a+b=800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=128,\\b=32.\end{cases}$

$\therefore$ 煅烧时的函数表达式为 $y=128x+32$（$0\leqslant x<6$）．

（2）在 $y=\frac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$）中，当 $y=480$ 时，$x=\frac{4\,800}{480}=10$，$10-6=4$（min）．$\therefore$ 锻造的操作时间有 4 min．

题型 2：反比例函数与二次函数综合在实际中的应用

例 5 ［中考·嘉兴］实验数据显示，一般成人喝半斤低度白酒后，1.5 小时内其血液中酒精含量 y（毫克/百毫升）与时间 x（小时）的关系可近似地用二次函数 $y=-200x^2+400x$ 刻画，1.5 小时后（包括 1.5 小时）y 与 x 可近似地用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）刻画，如图 21.6−3 所示．

（1）根据上述数学模型计算：

①喝酒后几小时血液中的酒精含量达到最大值？最大值为多少？

②当 $x=5$ 时，$y=45$，求 k 的值；

挑战·高分

解法提醒

反比例函数与其他函数的综合，往往涉及函数表达式的求解、交点坐标以及面积等问题．在解决此类问题时，要注意以下两点：

1. 对于特殊的点，如两个函数图象的交点、函数图象与坐标轴的交点等，通常需要先求出交点坐标；
2. 反比例函数与一次函数相关的问题，通常要先求出反比例函数的表达式，然后利用其表达式求出特殊点的坐标，进而求出一次函数的表达式，再利用它们的性质解决相关问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）按国家规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于20毫克/百毫升时属于“酒后驾驶”，不能驾车上路. 参照上述数学模型，假设某驾驶员20:00在家喝完半斤低度白酒，第二天7:00能否驾车去上班？请说明理由.

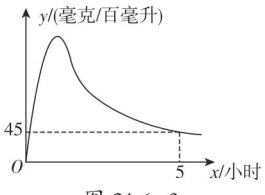


图 21.6-3

解题秘方：（1）①观察图象可知，图象的最高点即为二次函数图象的顶点；②利用待定系数法求出 k 的值.（2）把 $y=20$ 代入反比例函数的表达式中，根据对应的自变量的值，计算出可以驾车的时间.

解：（1）① $y=-200x^2+400x=-200(x-1)^2+200$.

$\because -200<0, 0\leqslant x<1.5$，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_{最大值}=200$.

$\therefore$ 喝酒后1小时血液中的酒精含量达到最大值，最大值为200毫克/百毫升.

②把 $x=5$，$y=45$ 代入反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，解得 $k=225$.

（2）不能. 理由如下：

把 $y=20$ 代入反比例函数 $y=\dfrac{225}{x}$，

解得 $x=11.25$.

喝完酒经过11.25小时为第二天7：15.

11.25小时=11小时15分钟，从20:00开始，经过11小时15分钟后是第二天7:15.

$\therefore$ 第二天7：15以后才可以驾车，7：00不能驾车去上班.

解题通法

最值的求解思路：

若函数是二次函数，一般运用配方法将函数配方成顶点式，并结合自变量的取值范围，确定函数的最值；

若函数是反比例函数，一般情况下没有最值，但若自变量的取值范围有特殊的规定，则可根据自变量的取值范围的极端值确定函数的最值.

另解

$y=-200x^2+400x$.

$\because a=-200<0$，$0\leqslant x<1.5$，

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{400}{2\times(-200)}=1$ 时，

$y_{最大值}=-200\times1^2+400\times1=200$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用函数的性质求最大利润，是历年中考的热门考点，一般以解答题的形式考查，属较难的题目.

三年中考兵法

考法 利用二次函数的性质确定最大利润

例6 [中考·宿迁]超市销售某种儿童玩具，如果每件利润为40元（市场管理部门规定，该种玩具每件利润不能超过60元），每天可售出50件. 根据市场调查发现，销售单价每增加2元，每天销售量会减少1件，设销售单价增加 x 元，每天售出 y 件.

（1）请写出 y 与 x 之间的函数表达式.

（2）当 x 为多少时，超市每天销售这种玩具可获利润2 250元？

（3）设超市每天销售这种玩具可获利 w 元，当 x 为多少时，w 最大，最大值是多少？

冲刺·满分

方法点拨

涉及销售利润，利用总利润=单件利润×销售量，建立总利润与售价之间的函数表达式，利用二次函数的增减性，确定其最大利润.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查建立二次函数模型求最大利润，根据题意求出函数表达式及自变量的取值范围是解决的关键．

学习札记

解：（1）$y=50-\frac{x}{2}$．

（2）由题意得$\left(50-\frac{x}{2}\right)(40+x)=2\,250$，解得$x_1=10$，$x_2=50$．

∵ $x+40\leqslant 60$，∴ $x\leqslant 20$．

∴当$x=10$时，超市每天销售这种玩具可获利润2 250元．

（3）$w=\left(50-\frac{x}{2}\right)(40+x)=-\frac{1}{2}(x-30)^2+2\,450$．

∵ $-\frac{1}{2}<0$，∴当$x<30$时，w随x的增大而增大．

∵ $0<x\leqslant 20$，∴当$x=20$时，w最大，$w_{最大值}=2\,400$．

两年模拟兵法

☞答案见223页

1. [中考·黔东南州]某山区不仅有美丽风光，也有许多令人喜爱的土特产，为实现脱贫奔小康，某村组织村民加工包装土特产销售给游客，以增加村民收入．已知某种土特产每袋成本为10元，试销阶段每袋的销售价x（元）与该土特产的日销售量y（袋）之间的关系如下表：

x/元	15	20	30	…
y/袋	25	20	10	…

若日销售量y是销售价x的一次函数，试求：

（1）日销售量y（袋）与销售价x（元）之间的函数表达式．

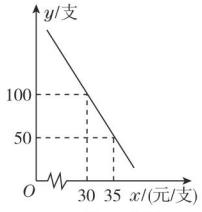
（2）假设后续销售情况与试销阶段效果相同，要使这种土特产每日销售的利润最大，每袋的销售价应定为多少元？每日销售的最大利润是多少元？

2. 某网店专售一款电动牙刷，其成本为20元/支，销售中发现，该商品每天的销售量y（支）与销售单价x（元/支）之间存在如图所示的关系．

（1）请求出y与x的函数表达式．

（2）该款电动牙刷的销售单价定为每支多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少元？

（3）近期武汉爆发了“新型冠状病毒”疫情，该网店店主决定从每天获得的利润中抽出200元捐赠给武汉，为了保证捐款后每天剩余利润不低于550元，如何确定该款电动牙刷的销售单价？



（第2题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [**中考·十堰**]某超市拟于中秋节前50天里销售某品牌月饼，其进价为18元/kg，设第x天的销售价格为y（元/kg），销售量为m（kg）.该超市根据以往的销售经验得出以下的销售规律：

①当$1 \leqslant x \leqslant 30$时，$y=40$；当$31 \leqslant x \leqslant 50$时，$y$与$x$满足一次函数关系，且当$x=36$时，$y=37$；$x=44$时，$y=33$.

②m与x的关系为$m=5x+50$.

（1）当$31 \leqslant x \leqslant 50$时，$y$与$x$的关系式为_____.

（2）x为多少时，当天的销售利润W（元）最大？最大利润为多少？

（3）若超市希望第31天到第35天的日销售利润W（元）随x的增大而增大，则需要在当天销售价格的基础上涨a元/kg，求a的最小值.

4. [**中考·舟山**]某农作物的生长率p与温度t（℃）有如下关系：如图，当$10 \leqslant t \leqslant 25$时可近似用函数$p=\frac{1}{50}t-\frac{1}{5}$刻画；当$25<t \leqslant 37$时可近似用函数$p=-\frac{1}{160}(t-h)^2+0.4$刻画.

（1）求h的值.

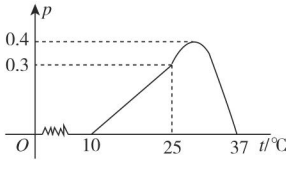
（2）按照经验，该作物提前上市的天数m（天）与生长率p之间满足已学过的函数关系，部分数据如下：

生长率p	0.2	0.25	0.3	0.35
提前上市的天数m/天	0	5	10	15

求：①m关于p的函数表达式.

②用含t的代数式表示m.

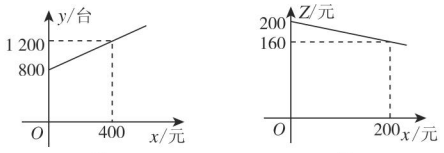
③天气寒冷，大棚加温可改变农作物生长速度.大棚恒温20℃时每天的成本为100元，计划该作物30天后上市.现根据市场调查：每提前一天上市售出（一次售完），销售额可增加600元.因此决定给大棚继续加温，但加温导致成本增加，估测加温到$20<t \leqslant 25$时的成本为200元/天，但若欲加温到$25<t \leqslant 37$，由于要采用特殊方法，成本增加到400元/天.问加温到多少摄氏度时增加的利润最大？并说明理由.（注：农作物上市售出后大棚暂停使用）



（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [中考·黄石]为了扩大内需，让惠于农民，丰富农民的业余生活，鼓励送彩电下乡，国家决定对购买彩电的农户实行政府补贴．规定每购买一台彩电，政府补贴若干元，经调查，某商场销售彩电台数 y（台）与补贴款额 x（元）之间大致满足如图①所示的一次函数关系．随着补贴款额 x 的不断增大，销售量也不断增加，但每台彩电的收益 Z（元）会相应降低且 Z 与 x 之间也大致满足如图②所示的一次函数关系．



（第 5 题）

（1）在政府未出台补贴措施前，该商场销售彩电的总收益额为多少元?

（2）在政府补贴政策实施后，分别求出该商场销售彩电台数 y 和每台彩电的收益 Z 与政府补贴款额 x 之间的函数表达式．

（3）要使该商场销售彩电的总收益 W（元）最大，政府应将每台补贴款额定为多少? 并求出总收益 W 的最大值．【导学号：8618152】

6. [中考·黄冈]我市某镇的一种特产由于运输原因，长期只能在当地销售．当地政府对该特产的销售投资收益为每投入 x 万元，可获得利润 P 万元，且 $P=-\frac{1}{100}(x-60)^2+41$．当地政府拟在“十二·五”规划中加快开发该特产的销售，其规划方案为在规划前后对该项目每年最多可投入 100 万元的销售投资，在实施规划五年的前两年中，每年都从 100 万元中拨出 50 万元用于修建一条公路，两年修成，通车前该特产只能在当地销售；公路通车后的三年中，该特产既在本地销售，也在外地销售．在外地销售的投资收益为每投入 x 万元，可获利润 Q 万元，且 $Q=-\frac{99}{100}(100-x)^2+\frac{294}{5}(100-x)+160$．

（1）若不进行开发，五年所获利润的最大值是多少?

（2）若按规划实施，五年所获利润（扣除修路费用后）的最大值是多少?

（3）根据（1）（2），该方案是否具有实施价值?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对称轴在二次函数中的巧妙应用

荣老师告诉你 二次函数的图象——抛物线是一个轴对称图形，对称轴是过顶点且垂直于 x 轴的一条直线．由一般式 $y=ax^2+bx+c$，可得对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；由顶点式 $y=a(x+h)^2+k$ 可知对称轴为直线 $x=-h$；由交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 可知对称轴为直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$；若知抛物线上纵坐标相同的两个点（m，a），（n，a），则对称轴为直线 $x=\frac{m+n}{2}$．

技巧一 利用对称轴求抛物线与 x 轴或垂直于 x 轴的直线的交点坐标

例 1 [中考·齐齐哈尔]抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴的一个交点坐标为（-1，0），其部分图象如图 1 所示．下列结论：

① $4ac<b^2$；

② 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$，$x_2=3$；

③ $3a+c>0$；

④ 当 $y>0$ 时，x 的取值范围是 $-1\leqslant x<3$；

⑤ 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大．

其中正确结论的个数是（　　）

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

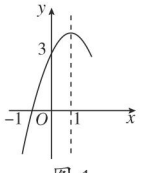


图 1

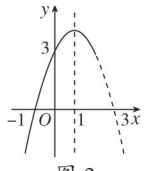


图 2

解题秘方： 先根据抛物线的对称性得到抛物线与 x 轴的另一个交点坐标，再由交点个数得到 b^2-4ac 的符号；根据图象得到：$y>0$ 时，x 的范围以及 $x<0$ 时，函数的增减性．

解： 如图 2，根据抛物线的对称性可知抛物线与 x 轴的另一个交点为（3，0），∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与 x 轴有两个公共点（-1，0）和（3，0），∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$，$x_2=3$．∴结论②正确．

∵ $b^2-4ac>0$，∴ $4ac<b^2$．∴结论①正确．

∵ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$．

∵当 $x=-1$ 时，$y=0$，∴ $a-b+c=0$．

∴ $a-(-2a)+c=0$．∴ $3a+c=0$．∴结论③错误．

由图象可知，只有当 $-1<x<3$ 时，对应的函数图象才在 x 轴上方，∴结论④不正确．

由图象可知，在 $x\leqslant 1$ 的范围之内，y 都随 x 的增大而增大，∴结论⑤正确．

答案： B

例 2 [中考·宿迁]当 $x=m$ 或 $x=n$（$m\neq n$）时，代数式 x^2-2x+3 的值相等，则 $x=m+n$ 时，代数式 x^2-2x+3 的值为_____．

解题秘方： 由代数式 x^2-2x+3 联想到二次函数，根据题意代数式的值相等，转译为函数语言就是：当 $x=m$ 或 $x=n$ 时，函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值相等．根据抛物线的对称性可以列出关于 m，n 的等式，进而求出 $m+n$ 的值，进而获得答案．

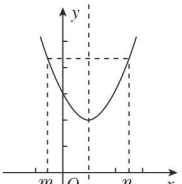


图 3

解： 如图 3，将代数式 x^2-2x+3 的值可以看成关于 x 的二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值．此抛物线的对称轴为直线 $x=1$，同时对称轴又可以表示为直线 $x=\frac{m+n}{2}$，所以 $m+n=2$．将 $x=2$ 代入 x^2-2x+3，计算得到结果为 3．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答案： 3

方法点拨： 数形结合思想是解决二次函数图象问题的基本数学思想，在解题时应关注抛物线顶点、与坐标轴（x 轴、y 轴）的交点、与 x 轴的位置关系、象限分布等关键元素，最关键是要充分利用对称轴，因为这些元素都与对称轴有关.

技巧二 ▶ 利用对称轴比较函数值的大小

例 3 已知点 $A(4, y_1)$，$B(\sqrt{3}, y_2)$，$C(-2, y_3)$ 都在二次函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_____.

解题秘方：思路一 由顶点式可知抛物线的对称轴是直线 $x=2$，A，B，C 三点在对称轴两侧，可以利用 A 点的对称点转化到对称轴左侧，依据开口向上和在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小进行比较.

思路二 抛物线开口向上，顶点纵坐标最小，由图象的变化趋势可知抛物线上的点距离对称轴越近（即离顶点越近）纵坐标越小，从而进行比较.

解：方法一 $\because y=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore$ 点 $A(4, y_1)$ 关于 $x=2$ 的对称点是 $(0, y_1)$.

$\because -2<0<\sqrt{3}<2$，且抛物线开口向上，

$\therefore y_2<y_1<y_3$.

方法二 设 A，B，C 三点到抛物线对称轴的距离分别为 d_1，d_2，d_3.

$\because y=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore d_1=2$，$d_2=2-\sqrt{3}$，$d_3=4$.

$\because 2-\sqrt{3}<2<4$，且抛物线开口向上，

$\therefore y_2<y_1<y_3$.

答案： $y_2<y_1<y_3$

方法点拨：抛物线上点的纵坐标比较大小的基本方法

（1）利用抛物线上的对称点的纵坐标相等，把各点转化到对称轴的同侧，再利用二次函数的增减性进行比较；

（2）利用“开口向上，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越小；开口向下，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越大”进行比较.

技巧三 ▶ 利用对称轴确定函数的最值

例 4 [中考·天津] 已知二次函数 $y=(x-h)^2+1$（h 为常数），在自变量 x 的值满足 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的情况下，与其对应的函数值 y 的最小值为 5，则 h 的值为（　　）

A. 1 或 −5

B. −1 或 5

C. 1 或 −3

D. 1 或 3

解题秘方： 先分析出 x 取何值时 y 取最小值，此时对称轴在哪个位置，再按照对称轴的位置分类讨论是解题的关键.分如下两种情况：（1）若 $1\leqslant x\leqslant 3<h$，当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5；（2）若 $h<1\leqslant x\leqslant 3$，当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5，分别列出关于 h 的方程求解即可.

解： 根据题意知，最小值肯定不是当 $x=h$ 时 y 的值，

$\therefore$ 对称轴 $x=h$ 中的 h 不在 $1\leqslant x\leqslant 3$ 范围内.

由抛物线开口向上知，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 若 $h<1\leqslant x\leqslant 3$，则当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5，于是有 $(1-h)^2+1=5$，

解得 $h=-1$ 或 $h=3$（舍去）；

若 $1\leqslant x\leqslant 3<h$，则当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5，于是有 $(3-h)^2+1=5$，

解得 $h=5$ 或 $h=1$（舍去）.

综上，h 的值为 −1 或 5.

答案： B

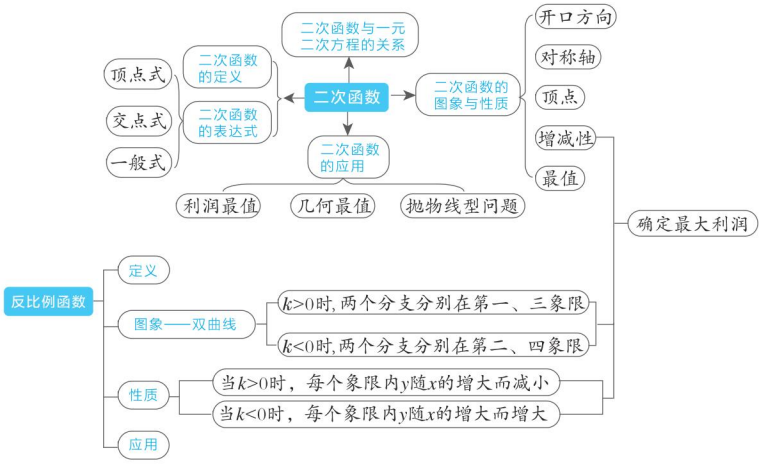
方法点拨： 仔细分析本题会发现函数值 y 的最小值为 5 时是在自变量 x 的某一范围内，本题就是用这一函数最小值去确定自变量 x 的值，进而确定 h 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 二次函数的表达式的几种形式 ① $y=ax^2$；② $y=ax^2+bx$；③ $y=ax^2+c$；④ $y=ax^2+bx+c$；⑤ $y=a(x+h)^2$；⑥ $y=a(x+h)^2+k$；⑦ $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$，当 $a>0$ 时，开口向上，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，最小值为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，开口向下，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，最大值为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

4. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况有关，一元二次方程的两根就是抛物线与 x 轴交点的横坐标.

5. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象是双曲线，图象上的点（x，y）的横纵坐标的积是定值 k，即 $xy=k$.

6. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的基本性质

当 $k>0$ 时，图象分别位于第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；

当 $k<0$ 时，图象分别位于第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.

7. 双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 中 k 的几何性质 设 P 是双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上任意一点，过 P 向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别为 H，G，连接 PO（O 为坐标原点），则 $S_{\triangle POH}=\dfrac{|k|}{2}$，$S_{矩形\,PHOG}=|k|$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 二次函数的图象

链接中考» 二次函数图象的特征主要从开口方向、对称轴、顶点坐标、与坐标轴的交点坐标几个方面考查；两个二次函数图象之间的关系主要有平移、轴对称、中心对称（从后将学）等，考查的形式主要是选择题.

类型一 单个图象的位置特征

例1 [中考·深圳]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 21-1 所示，给出以下结论：

① $a>0$；② $b>0$；③ $c<0$；④ $b^2-4ac>0$.

其中所有正确结论的序号是（　　）

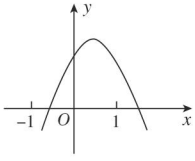


图 21-1

A. ②④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②③

解：图象开口向下，$\therefore a<0$，①错误；

对称轴在 y 轴右侧，$\therefore -\dfrac{b}{2a}>0$，则 $b>0$，②正确；

图象与 y 轴交点在 y 轴正半轴上，$\therefore c>0$，③错误；

图象与 x 轴有两个不同的交点，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，$\therefore b^2-4ac>0$，④正确.

答案：A

类型二 两个图象之间的位置变换

例2 [中考·荆州]将抛物线 $y=x^2-2x+3$ 向上平移 2 个单位，再向右平移 3 个单位后，得到的抛物线对应的函数表达式为（　　）

A. $y=(x-1)^2+4$　　B. $y=(x-4)^2+4$

C. $y=(x+2)^2+6$　　D. $y=(x-4)^2+6$

解：将抛物线 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 向上平移 2 个单位，得 $y=(x-1)^2+4$，再向右平移 3 个单位后，得到的抛物线对应的函数表达式为 $y=(x-4)^2+4$.

答案：B

方法点拨：两个函数图象作全等变换，则这两个函数图象上所有的点都作同样的变换，求变换后的图象对应的函数表达式时，一般利用顶点式，确定顶点坐标是关键，再任找一点作为辅助的条件即可.

专题二 反比例函数的图象

链接中考» 反比例函数的图象是学好反比例函数性质的重要基础，也是区别于一次函数、二次函数的关键所在，因此，在中考中占有重要地位. 一般以选择题形式考查.

例3 [中考·兰州]在同一直角坐标系中，一次函数 $y=kx-k$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象大致是图 21-2 中的（　　）

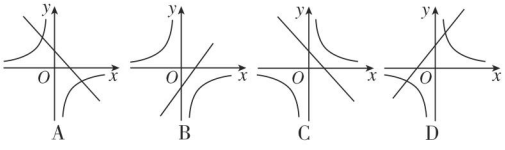


图 21-2

解题秘方：采取一一判断排除的方法，先从两个函数图象中选择一个判断 k 的符号，再根据 k 的符号判断另一函数图象的正确性.

解：A，B 的图象中，由反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象可知 $k<0$，那么一次函数 $y=kx-k$ 的图象应该经过一、二、四象限，A 正确，B 错误；C，D 的图象中，由反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象可知 $k>0$，那么一次函数 $y=kx-k$ 的图象应该经过一、三、四象限，C 错误，D 错误.

答案：A

专题三 二次函数的性质

链接中考» 二次函数的性质主要有两个：一是轴对称性，二次函数的图象关于对称轴对称；二是增减性，在对称轴的同侧具

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

有相同的增减性，当开口向上时，在对称轴的左侧，y随x的增大而减小，在对称轴的右侧，y随x的增大而增大；当开口向下时，在对称轴的左侧，y随x的增大而增大，在对称轴的右侧，y随x的增大而减小．考查时两个性质有时同时考查，一般以填空题、选择题形式出现．

例4 ［中考·常州］已知二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m=-1$　　B. $m=3$

C. $m\leqslant -1$　　D. $m\geqslant -1$

解：由二次项系数为正，可知抛物线开口向上，在对称轴右侧，y 的值随 x 值的增大而增大，可得对称轴应为直线 $x=1$ 或在其左侧．

因为抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{m-1}{2}$，

所以 $-\dfrac{m-1}{2}\leqslant 1$，

解得 $m\geqslant -1$.

答案：D

专题四 反比例函数的性质

链接中考» 利用反比例函数的性质主要解决一些函数值的大小比较问题，中考中以选择题和填空题为主，有时也与不等式结合在一起命题．

例5 ［中考·遵义］在函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上有三个点的坐标分别为 $(1,\ y_1)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ y_2\right)$，$(-3,\ y_3)$，函数值 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_2<y_1$

C. $y_2<y_1<y_3$　　D. $y_3<y_1<y_2$

解：对于反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$，在每一象限内，y 随 x 的增大而减小；

对于点 $(1,\ y_1)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ y_2\right)$，

因为 $1>\dfrac{1}{2}$，

所以 $y_1<y_2$.

而点 $(1,\ y_1)$ 在第一象限，点 $(-3,\ y_3)$ 在第三象限，显然 $y_3<y_1$.

故 $y_3<y_1<y_2$.

答案：D

方法点拨：运用反比例函数的性质时，一定要紧扣在同一象限．不在同一象限的，分象限确定正负；在同一象限的，利用增减性比较大小．

专题五 求二次函数的表达式

链接中考» 二次函数的表达式是两个变量之间的表达式，所以求二次函数的表达式的方法有两种：一种是直接根据两个变量之间的等量关系列出函数表达式；另一种是用待定系数法先设出函数表达式，然后根据函数图象上点的坐标或几对对应值求出函数表达式．考查的形式多样，填空题、选择题和解答题都会考查．

类型一　根据两个变量之间的关系求表达式

例6　如图 21-3，已知抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 $A(0,\ 8)$，$B(8,\ 0)$ 和点 E，动点 C 从原点 O 开始沿 OA 方向以每秒 1 个单位的速度移动，动点 D 从点 B 开始沿 BO 方向以每秒 1 个单位的速度移动，动点 C，D 同时出发，当动点 D 到达原点 O 时，点 C，D 停止运动．

（1）求抛物线对应的函数表达式．

（2）求 $\triangle CED$ 的面积 S 关于 D 点运动时间 t（s）的函数表达式．当 t 为何值时，$\triangle CED$ 的面积最大？最大面积是多少？

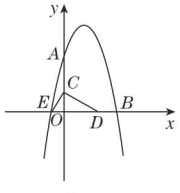


图 21-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）把点 A，B 的坐标代入表达式，用待定系数法求解即可；

（2）$\triangle CED$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times DE\times CO$，分别用含 t 的式子表示 DE，CO，然后把二次函数配方，求最值即可．

解：（1）将点 $A(0,8)$、点 $B(8,0)$ 的坐标分别代入抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$，得：

$$\begin{cases} c=8, \\ -\frac{1}{2}\times 64+8b+c=0, \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} b=3, \\ c=8. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$.

（2）$\because$ 点 $B(8,0)$，$\therefore OB=8$.

令 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}x^2+3x+8=0$，

解得 $x_1=8$，$x_2=-2$，

$\therefore$ 点 $E(-2,0)$.

$\therefore OE=2$.

根据题意得：当 D 点运动 t s 时，$BD=t$，$OC=t$，$\therefore OD=8-t$.

$\therefore DE=OE+OD=10-t$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times DE\times OC=\frac{1}{2}\times(10-t)\times t=-\frac{1}{2}t^2+5t\ (0<t\leqslant 8)$，

即 $S=-\frac{1}{2}t^2+5t=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$.

$\therefore$ 当 $t=5$ 时，S 有最大值，$S_{最大值}=\frac{25}{2}$.

方法点拨：利用两个变量之间的关系求表达式，关键是要分析出两点：一是两个变量中每个变量表示的实际意义，二是两个变量之间的数量关系．

类型二　根据图象上的点的坐标求表达式

例 7　[中考·龙东] 如图 21-4，抛物线 $y=x^2-bx+c$ 交 x 轴于点 $A(1,0)$，交 y 轴于点 B，对称轴是直线 $x=2$.

（1）求抛物线对应的函数表达式．

（2）点 P 是抛物线对称轴上的一个动点，是否存在点 P，使 $\triangle PAB$ 的周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

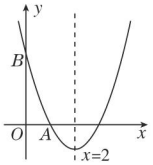


图 21-4

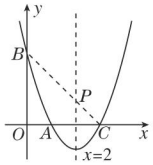


图 21-5

解：（1）由题意得 $\begin{cases} 1-b+c=0, \\ \frac{b}{2}=2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=4, \\ c=3. \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-4x+3$.

（2）存在．如图 21-5 所示．

$\because$ 点 A 与点 C 关于直线 $x=2$ 对称，

$\therefore$ 连接 BC，与直线 $x=2$ 交于点 P，则点 P 即为所求．

根据抛物线的对称性可知，点 C 的坐标为 $(3,0)$.

抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 y 轴的交点为 $B(0,3)$.

设直线 BC 对应的函数表达式为 $y=kx+b_1$，

则 $\begin{cases} 3k+b_1=0, \\ b_1=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b_1=3, \end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 对应的函数表达式为 $y=-x+3$.

当 $x=2$ 时，$y=-2+3=1$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2,1)$.

方法点拨：求有函数图象的函数表达式，一般都是采用待定系数法，根据函数图象提供的信息求出函数表达式．

专题六　反比例函数与一次函数的综合

链接中考» 解答反比例函数与其他函数结合在一起的综合题时，要根据题目中的条件，并结合图象找出图象中的关键点，求出函数表达式，并根据题中数量之间的关系，列出所需要的方程或表达式进行解答．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 8 ［中考·黄冈］如图 21−6，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象过点 $A(-1,4)$，直线 $y=-x+b$（$b\neq 0$）与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 在第二、四象限分别相交于 P，Q 两点，与 x 轴、y 轴分别相交于 C，D 两点．

（1）求 k 的值．

（2）当 $b=-2$ 时，求△ OCD 的面积．

（3）连接 OQ，是否存在实数 b，使得 $S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$？若存在，请求出 b 的值；若不存在，请说明理由．

解题秘方：（1）把点 A 的坐标代入反比例函数的表达式即可求出 k 的值；

（2）利用一次函数的表达式求出直线与 x 轴、y 轴的交点坐标，即可得到线段 OC，OD 的长度，进而可求出△ OCD 的面积；

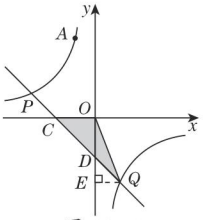


图 21−6

（3）假设存在实数 b，对字母 b 的范围分类讨论，根据两个三角形的面积相等构建关于字母 b 的方程求解，然后进行取舍．

解：（1）∵ $A(-1,4)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，

∴ $k=-1\times 4=-4$.

（2）∵ $b=-2$，

∴直线 CD 对应的函数表达式为 $y=-x-2$.

∴ $C(-2,0)$，$D(0,-2)$.

∴ $CO=2$，$DO=2$.

∴ $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO=2$.

（3）存在．理由如下：

如图 21−6，过 Q 作 $QE\perp y$ 轴，垂足为 E.

①当 $b<0$ 时，由 $y=-x+b$，可得 $C(b,0)$，$D(0,b)$，∴ $OC=-b$，$OD=-b$.

∴ $OC=OD$. ∴∠ $OCD=$∠ $ODC=45°$.

∴∠ $EDQ=$∠ $DQE=45°$.

∴ $DE=EQ$.

∵ $S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$，

∴ $\frac{1}{2}DO\cdot CO=\frac{1}{2}DO\cdot QE$.

∴ $CO=QE$.

∴ $Q(-b,2b)$.

∵点 Q 在双曲线 $y=\frac{-4}{x}$ 上，

∴ $-b\cdot 2b=-4$，即 $b^2=2$.

∴ $b=\pm\sqrt{2}$.

∵ $b<0$，∴ $b=-\sqrt{2}$.

②当 $b>0$ 时，$S_{\triangle OCD}<S_{\triangle ODQ}$.

综上所述，当 $b=-\sqrt{2}$ 时，$S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$.

方法点拨：（1）求函数表达式一般采用待定系数法．用待定系数法解题，首先要设出待定系数，再根据题目中的已知条件求出待定系数．

若是反比例函数，因为只有一个待定系数，所以只要将一个点的坐标代入函数表达式，就可以求出待定系数；

若是一次函数，则一般需要两个独立的条件；

若是二次函数，则一般需要三个独立的条件．

（2）求坐标平面内图形的面积，往往转化为三角形的面积，并将在坐标轴上的边或者与坐标轴平行的边作为三角形面积公式中的“底”，这样计算会容易一些．

专题七 反比例函数中比例系数 k 的几何意义

链接中考» 反比例函数的比例系数 k 具有一定的几何意义，k 的绝对值等于反比例函数图象上任意一点向两坐标轴所作垂线与两坐标轴围成的矩形的面积．在反比例函数的图象中，涉及三角形或矩形的面积时，常用比例系数 k 的几何意义求解．

例 9 ［中考·烟台］如图 21−7，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的面积为 12，点 B 在 y 轴上，点 C 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，则 k 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：连接 AC，交 y 轴于点 D. 由四边形 $ABCO$ 为菱形，得到对角线垂直且互相平分，进而得到△ CDO 的面积为菱形面积的四分之一；根据菱形的面积求出△ CDO 的面积，利用反比例函数中 k 的几何意义确定出 k 的值即可.

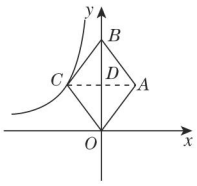


图 21−7

解：如图 21−7，连接 AC，交 y 轴于点 D.

∵四边形 $ABCO$ 为菱形，

∴ $AC \perp OB$，且 $CD=AD$，$BD=OD$.

∵菱形 $OABC$ 的面积为 12，

∴△ CDO 的面积为 3. ∴ $|k|=6$.

∵反比例函数的部分图象位于第二象限，

∴ $k<0$. ∴ $k=-6$.

答案：-6

方法点拨：解反比例函数的图象与几何图形的面积问题一般分为两类：一类是根据面积求反比例函数的表达式，另一类是已知反比例函数的表达式求几何图形的面积. 而求面积时，有时可利用反比例函数中比例系数 k 的绝对值，有时则需利用几个几何图形面积的和差来求得.

专题八 二次函数与一元二次方程或不等式之间的关系

链接中考» 判断二次函数与一元二次方程的关系，就是看函数图象与 x 轴的交点坐标；解决函数值大于零或小于零的问题，就是看函数图象在 x 轴上方或下方时自变量的取值范围，主要以解答题的形式出现.

例 10 [**中考·滨州**]根据下列要求，解答相关问题.

（1）请补全以下求不等式 $-2x^2-4x \geqslant 0$ 的解集的过程.

①构造函数，画出图象：根据不等式特征构造二次函数 $y=-2x^2-4x$；并在下面的坐标系中（如图 21−8）画出二次函数 $y=-2x^2-4x$ 的图象（只画出图象即可）.

②求得界点，标示所需：当 $y=0$ 时，求得方程 $-2x^2-4x=0$ 的解为_____；并用线标示出函数 $y=-2x^2-4x$ 图象中 $y \geqslant 0$ 的部分.

③借助图象，写出解集：由所标示图象，可得不等式 $-2x^2-4x \geqslant 0$ 的解集为_____.

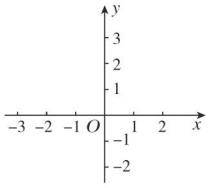


图 21−8

（2）利用（1）中求不等式解集的步骤，求不等式 $x^2-2x+1<4$ 的解集.

①构造函数，画出图象；

②求得界点，标示所需；

③借助图象，写出解集.

（3）参照以上两个求不等式解集的过程，借助一元二次方程的求根公式，直接写出关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）的解集.

解：（1）①如图 21−9 ①所示.

② $x_1=0$，$x_2=-2$；图略.

③ $-2 \leqslant x \leqslant 0$

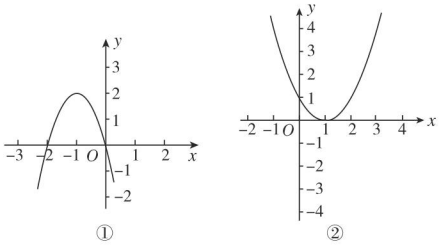


图 21−9

（2）①构造二次函数 $y=x^2-2x+1$，并画出图象，如图 21−9 ②所示.

②当 $y=4$ 时，求得方程 $x^2-2x+1=4$ 的解为 $x_1=3$，$x_2=-1$. 图略.

③借助图象，直接写出不等式 $x^2-2x+1<4$ 的解集为 $-1<x<3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）①当 $b^2-4ac>0$ 时，解集为

$x>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 或 $x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②当 $b^2-4ac=0$ 时，解集为 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$；

③当 $b^2-4ac<0$ 时，解集为全体实数.

专题九 二次函数的应用

链接中考» 二次函数的应用主要有两种形式，第一种是在实际问题中建立二次函数模型，利用二次函数的性质求解；第二种是二次函数与其他知识的综合应用.考查时多以解答题的形式出现.

类型一 二次函数的实际应用

例 11 [中考·鄂州] 鄂州市化工材料经销公司购进一种化工材料若干千克，价格为每千克 30 元，物价部门规定其销售单价不高于每千克 60 元，不低于每千克 30 元.经市场调查发现，日销售量 y（kg）是销售单价 x（元）的一次函数，且当 $x=60$ 时，$y=80$；$x=50$ 时，$y=100$.在销售过程中，每天还要支付其他费用 450 元.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围.

（2）求该公司销售该材料日获利 w（元）与销售单价 x（元）之间的函数表达式.

（3）当销售单价为多少元时，该公司日获利最大？最大利润是多少元？

解：（1）设 $y=kx+b$，由题意得 $\begin{cases}80=60k+b,\\100=50k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200.\end{cases}$

$\therefore y=-2x+200\ (30\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$w=(x-30)(-2x+200)-450=-2x^2+260x-6\,450$.

（3）$w=-2x^2+260x-6\,450=-2(x-65)^2+2\,000$.

$\because -2<0$，$\therefore$ 当 $x<65$ 时，w 随 x 的增大而增大.

又 $\because 30\leqslant x\leqslant 60$，

$\therefore$ 当 $x=60$ 时，w 有最大值，$w_{最大值}=1\,950$.

$\therefore$ 当销售单价为 60 元时，该公司日获利最大，最大利润是 1 950 元.

方法点拨：解此类题的关键是理清各种数量关系，能根据数量关系列函数表达式、利用函数的增减性以及自变量的取值范围解决问题.

类型二 二次函数在几何中的应用

例 12 [中考·铜仁] 如图 21-10，已知：关于 x 的二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(1,0)$ 和点 B，与 y 轴交于点 $C(0,3)$，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D.

（1）求二次函数的表达式.

（2）在 y 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle PBC$ 为等腰三角形？若存在，请求出点 P 的坐标.

（3）有一个点 M 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度在 AB 上向点 B 运动，另一个点 N 从点 D 与点 M 同时出发，以每秒 2 个单位的速度在抛物线的对称轴上运动，当点 M 到达点 B 时，点 M，N 同时停止运动，问 M，N 运动到何处时，$\triangle MNB$ 的面积最大？试求出最大面积.

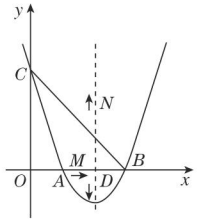


图 21-10

解：（1）$\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore\begin{cases}1+b+c=0,\\c=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=3.\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）存在.

易得 B 点坐标为（3，0）.

①当以 BC 为底边时，

∵ $OB=OC=3$，

∴点 O 符合条件，即存在点 P（0，0），使△ PBC 为等腰三角形；

②当以 PB 为底边，BC 为腰时，

$PC=BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

当点 P 在 C 点上方时，P 点坐标为 $(0, 3\sqrt{2}+3)$；

当点 P 在 C 点下方时，P 点坐标为 $(0, 3-3\sqrt{2})$；

③当以 PC 为底边，BC 为腰时，$OP=OC$，

∴点 P 坐标为（0，−3）.

综上所述，符合条件的 P 点有四个，分别为（0，0），$(0, 3\sqrt{2}+3)$，$(0, 3-3\sqrt{2})$，（0，−3）.

（3）易得抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

设点 M 的运动时间为 t 秒.

∵点 A（1，0），B（3，0），

∴ $OA=1$，$OB=3$.

∴ $BM=3-1-t=2-t$.

∵点 N 的速度是点 M 的 2 倍，

∴ $DN=2t$.

∴ $S_{\triangle MNB}=\frac{1}{2}(2-t)\times 2t=-(t-1)^2+1$.

∴当 $t=1$ 时，$S_{\triangle MNB}$ 有最大值，为 1.

即当 M（2，0），N（2，2）或 N（2，−2）时，△ MNB 的面积最大，最大面积为 1.

方法点拨：（1）用待定系数法求函数表达式；

（2）利用“数形结合”的思想，按照“表达式→坐标→距离（线段长度）→几何图形性质及应用”的思路思考；

（3）在运动中求最大值或最小值时，通常可以考虑将问题转化为函数的最值问题，利用二次函数的顶点坐标结合自变量的取值范围解决.

专题十 反比例函数的实际应用

链接中考» 用反比例函数刻画实际问题中两个变量之间的关系以及用反比例函数的性质解决实际问题是中考命题的重点，尤其用反比例函数的图象来反映实际问题的变量之间的关系是中考命题的热点.解决这类问题，一是要表示出表达式，二是要注意自变量的取值范围.

例 13 ［中考·衡阳］某药品研究所开发一种抗菌新药，经多年动物实验，首次用于临床人体实验.测得成人服药后血液中药物浓度 y（μg/mL）与服药时间 x（h）之间的函数关系如图 21−11 所示（当 $4\leqslant x\leqslant 10$ 时，y 与 x 成反比例）.

（1）根据图象，分别求出血液中药物浓度上升和下降阶段 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）问血液中药物浓度不低于 4 μg/mL 的持续时间为多少小时？

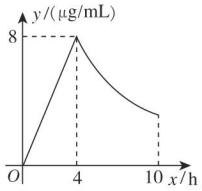


图 21−11

解：（1）由图象可知，当 $0\leqslant x<4$ 时，y 与 x 成正比例关系，设 $y=kx$.

由图象可知，当 $x=4$ 时，$y=8$，

∴ $4k=8$，解得 $k=2$.

∴ $y=2x$（$0\leqslant x<4$）.

又由题意可知，当 $4\leqslant x\leqslant 10$ 时，y 与 x 成反比例关系，设 $y=\frac{m}{x}$.

由图象可知，当 $x=4$ 时，$y=8$，

∴ $m=4\times 8=32$.

∴ $y=\frac{32}{x}$（$4\leqslant x\leqslant 10$）.

∴血液中药物浓度上升时，$y=2x$（$0\leqslant x<4$）；

血液中药物浓度下降时，$y=\frac{32}{x}$（$4\leqslant x\leqslant 10$）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）血液中药物浓度不低于 4 μg/mL，

即 $y \geqslant 4$，

$\therefore 2x \geqslant 4$，且 $\frac{32}{x} \geqslant 4$.

解得 $x \geqslant 2$，且 $x \leqslant 8$.

$\therefore 2 \leqslant x \leqslant 8$，

即持续时间为 6 h.

方法点拨：与函数相关的问题，往往涉及待定系数法、交点坐标以及面积问题等．在解决此类问题时，有以下两点需要注意：（1）对于特殊的点，如两个函数图象的交点、函数图象与坐标轴的交点等，通常需要先求出其坐标；（2）反比例函数与一次函数相关的问题，通常的做法是先求反比例函数的表达式，然后利用其表达式求出特殊点的坐标．

方法必会

专题十一 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想是将数（量）与形（图）结合起来进行分析、研究，从而解决问题的一种思维策略．反比例函数的图象可以体现反比例函数的性质，所以解决有关反比例函数问题时，可以把函数图象与表达式有机地结合起来，使数学问题更直观，而且更容易解决．

例 14 如图 21-12，一次函数 $y=kx+3$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$（$x>0$）的图象交于点 P，$PA \perp x$ 轴于点 A，$PB \perp y$ 轴于点 B．一次函数的图象分别交 x 轴、y 轴于点 C，D，且 $S_{\triangle DBP}=27$，$\frac{OD}{AP}=\frac{1}{2}$.

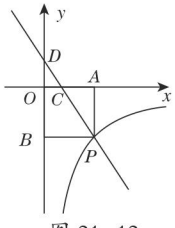


图 21-12

（1）求点 D 的坐标；

（2）求一次函数与反比例函数的表达式；

（3）根据图象，写出当 x 取何值时，一次函数的值小于反比例函数的值．

解：（1）∵一次函数 $y=kx+3$ 的图象与 y 轴相交于点 D，∴可令 $x=0$，得 $y=3$.

$\therefore D(0, 3)$.

（2）∵$\frac{OD}{AP}=\frac{1}{2}$，$OD=3$，$\therefore AP=6$.

$\therefore OB=6$.

$\therefore DB=9$.

在 Rt△DBP 中，根据三角形的面积公式，得 $\frac{DB \cdot BP}{2}=27$，$\therefore BP=6$.

$\therefore P(6, -6)$.

把点 $P(6, -6)$ 的坐标代入 $y=kx+3$，得 $k=-\frac{3}{2}$.

∴一次函数的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x+3$.

把点 $P(6, -6)$ 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $m=-36$.

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{36}{x}(x>0)$.

（3）根据图象可得，当 $x>6$ 时，一次函数的值小于反比例函数的值．

方法点拨：本例（3）中，利用数形结合思想可直接得出两个函数的值的大小关系．

专题十二 方程思想

专题解读» 方程思想就是从问题情境的数量关系入手，运用数学语言将题目中的条件转化为方程（或方程组），然后通过解方程（或方程组）使问题获解．反比例函数中的方程思想主要体现在运用方程组求函数图象的交点坐标．

例 15 在平面直角坐标系中，一次函数 $y=x+\frac{1}{2}m$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第一象限内交于点 A，与 x 轴交于点 C，$AB \perp x$ 轴，垂足为 B，且 $S_{\triangle AOB}=1$.

（1）求 m 的值；

（2）求△ABC 的面积 S.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设点 A 的坐标为（x_0，y_0），

则 $OB=x_0$，$AB=y_0$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}x_0y_0$.

又 $\because y_0=\frac{m}{x_0}$，

$\therefore x_0y_0=m$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}x_0y_0=\frac{1}{2}m=1$.

$\therefore m=2$.

（2）$\because m=2$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$，

一次函数的表达式为 $y=x+1$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为（-1，0），即 $OC=1$.

解方程组 $\begin{cases}y=\frac{2}{x},\\y=x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2,\end{cases}\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=-1.\end{cases}$

$\because$ 点 A 在第一象限，

$\therefore$ 点 A 的坐标为（1，2）.

$\therefore OC=OB=1$.

$\therefore S=2S_{\triangle AOB}=2$.

方法点拨：本题运用了方程思想．首先由直线 $y=x+\frac{1}{2}m$ 对应的函数表达式求出点 C 的坐标，再将 $y=x+\frac{1}{2}m$ 与 $y=\frac{m}{x}$ 联立得到方程组，进而得出点 A 的坐标，这样即可求出△ ABC 的面积．

专题十三 分类讨论思想

专题解读》当被研究的问题包含多种可能情况，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情况分别进行讨论，从而得出相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想．

例16 关于 x 的二次函数 $y=-x^2+(k^2-4)x+2k-2$ 的图象以 y 轴为对称轴，且与 y 轴的交点在 x 轴的上方．

（1）求此抛物线对应的函数表达式，并在直角坐标系中画出函数的大致图象；

（2）设 A 是 y 轴右侧抛物线上的一个动点，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B，再过点 A 作 x 轴的平行线交抛物线于点 D，过点 D 作 $DC\perp x$ 轴于点 C，得到矩形 $ABCD$. 设矩形 $ABCD$ 的周长为 l，点 A 的横坐标为 x，试求 l 关于 x 的函数表达式；

（3）当点 A 在 y 轴右侧的抛物线上运动时，矩形 $ABCD$ 能否成为正方形？若能，请求出此时正方形的周长；若不能，请说明理由．

解：（1）根据题意，得 $k^2-4=0$，

解得 $k=\pm2$.

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴的上方，

$\therefore 2k-2>0$，解得 $k>1$.

$\therefore k=2$.

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-x^2+2$.

函数的大致图象如图 21−13 所示．

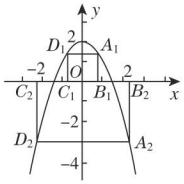


图 21−13

（2）令 $-x^2+2=0$，得 $x=\pm\sqrt{2}$.

如图 21−13，当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，

$A_1D_1=2x$，$A_1B_1=-x^2+2$，

$\therefore l=2(A_1B_1+A_1D_1)=-2x^2+4x+4$.

当 $x>\sqrt{2}$ 时，

$A_2D_2=2x$，$A_2B_2=-(-x^2+2)=x^2-2$，

$\therefore l=2(A_2B_2+A_2D_2)=2x^2+4x-4$.

综上所述，l 关于 x 的函数表达式是

$l=\begin{cases}-2x^2+4x+4\ (0<x<\sqrt{2}),\\2x^2+4x-4\ (x>\sqrt{2}).\end{cases}$

（3）能．

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，

令 $A_1D_1=A_1B_1$，得 $x^2+2x-2=0$，

解得 $x_1=-1-\sqrt{3}$（舍去），$x_2=-1+\sqrt{3}$.

将 $x=-1+\sqrt{3}$ 代入 $l=-2x^2+4x+4$，

得 $l=8\sqrt{3}-8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $x>\sqrt{2}$ 时，令 $A_2D_2=A_2B_2$，

得 $x^2-2x-2=0$，

解得 $x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$（舍去）.

将 $x=1+\sqrt{3}$ 代入 $l=2x^2+4x-4$，

得 $l=8\sqrt{3}+8$.

综上可知，矩形 $ABCD$ 能成为正方形，且当 $x=-1+\sqrt{3}$ 时，正方形的周长为 $8\sqrt{3}-8$；

当 $x=1+\sqrt{3}$ 时，正方形的周长为 $8\sqrt{3}+8$.

好题必解 ☞答案见 224 页

类型 1：巧用待定系数法求函数表达式

1. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 $x+1$ 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且 $x=1$ 时，$y=0$；$x=4$ 时，$y=9$.

（1）求 y 与 x 的函数表达式；

（2）求当 $x=-1$ 时，y 的值.

类型 2：巧用图象法解一元二次方程或一元二次不等式

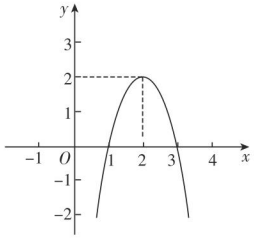
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图所示，根据图象解答下列问题：

（1）写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根；

（2）写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；

（3）写出 y 随 x 的增大而减小的自变量 x 的取值范围；

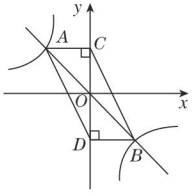
（4）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.



（第 2 题）

类型 3：巧用反比例函数中比例系数 k 的几何意义求面积

3. 如图，函数 $y=-x$ 与函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，过 A，B 两点分别作 y 轴的垂线，垂足分别为点 C，D，求四边形 $ACBD$ 的面积.



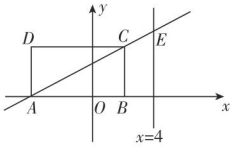
（第 3 题）

类型 4：巧用二次函数求几何最值

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的顶点 A，B 的坐标分别为（-4，0）和（2，0），且 $BC=2\sqrt{3}$. 直线 AC 与直线 $x=4$ 交于点 E.

（1）求以直线 $x=4$ 为对称轴，且过点 C 与原点 O 的抛物线对应的函数表达式，并说明此抛物线一定过点 E；

（2）设（1）中的抛物线与 x 轴的另一个交点为 N，点 M 是该抛物线上位于点 C，N 之间的一个动点，求 $\triangle CMN$ 面积的最大值.

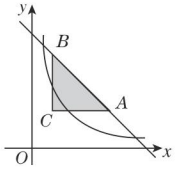


（第 4 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 5：巧解反比例函数与一次函数图象公共点问题

5. 如图，过点 C（1，2）分别作 x 轴，y 轴的平行线，交直线 $y=-x+6$ 于点 A，B，若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$x>0$）的图象与△ ABC 有公共点，求 k 的取值范围.



（第 5 题）

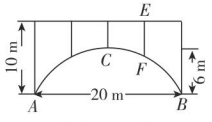
类型 6：巧建坐标系解抛物线型问题

6. 一座抛物线形的拱桥如图，拱桥的最大高度为 6 m，跨度为 20 m，相邻两支柱间的距离均为 5 m.

（1）建立适当的平面直角坐标系，求抛物线对应的函数表达式.

（2）求支柱 EF 的长度.

（3）拱桥下地平面是双向行车道（正中间是一条宽 2 m 的隔离带），其中的一条行车道能否并排行驶宽 2 m，高 3 m 的三辆汽车（汽车间的间隔忽略不计）？请说明你的理由.



（第 6 题）

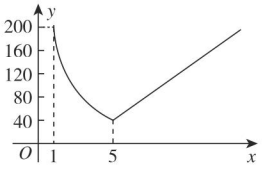
类型 7：巧解与反比例函数有关的实际应用问题

7. 保护生态环境，建设绿色社会已经从理念变为人们的行动. 某化工厂 2020 年 1 月的利润为 200 万元. 设 2020 年 1 月为第 1 个月，第 x 个月的利润为 y 万元. 由于排污超标，该厂从 2020 年 1 月底起适当限产，并投入资金进行治污改造，导致月利润明显下降，从 1 月到 5 月，y 与 x 成反比例. 到 5 月底，治污改造工程顺利完工，从这时起，该厂每月的利润比前一个月增加 20 万元（如图）.

（1）分别求该化工厂治污期间及治污改造工程顺利完工后 y 与 x 之间的函数表达式.

（2）治污改造工程顺利完工后经过几个月，该厂月利润才能达到 2020 年 1 月的水平?

（3）当月利润少于 100 万元时为该厂资金紧张期，问该厂资金紧张期共有几个月?



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 21 章测试卷 ☞答案见 226 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 3 个单位，再向右平移 2 个单位，所得到的抛物线对应的表达式为（　　）

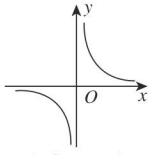
A. $y=2(x+2)^2+3$　　B. $y=2(x-2)^2+3$

C. $y=2(x-2)^2-3$　　D. $y=2(x+2)^2-3$

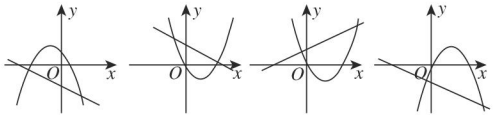
2. 已知点 $A(1,-3)$ 关于 x 轴的对称点 A' 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，则实数 k 的值为（　　）

A.3　　B. $\frac{1}{3}$　　C.-3　　D.$-\frac{1}{3}$

3. 已知反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 的图象如图所示，则二次函数 $y=ax^2-2x$ 和一次函数 $y=bx+a$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）



（第 3 题）



A　　B　　C　　D

4. 已知点 $A(1,y_1)$，$B(2,y_2)$ 在抛物线 $y=-(x+1)^2+2$ 上，则下列结论正确的是（　　）

A. $2>y_1>y_2$　　B. $2>y_2>y_1$

C. $y_1>y_2>2$　　D. $y_2>y_1>2$

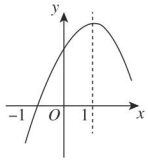
5. 若点 $A(-4,y_1)$，$B(-2,y_2)$，$C(2,y_3)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_3>y_2>y_1$

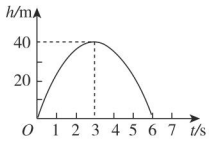
C. $y_2>y_1>y_3$　　D. $y_1>y_3>y_2$

6. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的部分图象如图所示，图象过点 $(-1,0)$，对称轴为直线 $x=1$，下列结论：①$abc<0$；②$b<c$；③$3a+c=0$；④当 $y>0$ 时，$-1<x<3$. 其中正确的结论有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h（单位：m）与小球的运动时间 t（单位：s）之间的函数关系如图所示，下列结论：

①小球在空中经过的路程是 40 m；

②小球抛出 3 s 后，速度越来越快；

③小球抛出 3 s 时速度为 0；

④小球的高度 $h=30$ m 时，$t=1.5$ s.

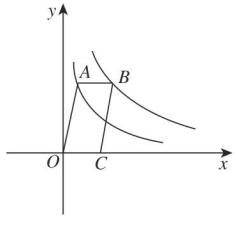
其中正确的是（　　）

A. ①④　　B. ①②

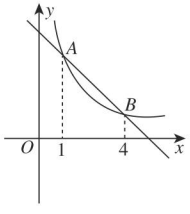
C. ②③④　　D. ②③

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，平行四边形 $OABC$ 的顶点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，顶点 B 在反比例函数 $y=\frac{5}{x}$ 的图象上，顶点 C 在 x 轴的正半轴上，则平行四边形 $OABC$ 的面积是（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C.4　　D.6



（第 8 题）



（第 9 题）

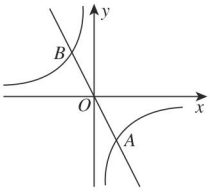
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 如图，一次函数 $y_1=(k-5)x+b$ 的图象在第一象限与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 $1<x<4$，则 $k=$_____.

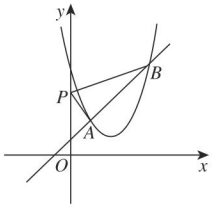
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 在平面直角坐标系中，垂直于 x 轴的直线 l 分别与函数 $y=x-a+1$ 和 $y=x^2-2ax$ 的图象相交于 P，Q 两点．若平移直线 l，可以使 P，Q 都在 x 轴的下方，则实数 a 的取值范围是_____.

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知正比例函数 $y=-2x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A（a，-4），B 两点．过原点 O 的另一条直线 l 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交于 P，Q 两点（P 点在第二象限），若以点 A，B，P，Q 为顶点的四边形面积为 24，则点 P 的坐标是_____.



（第 11 题）



（第 12 题）

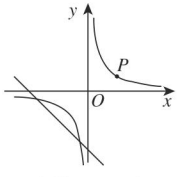
12. 如图，直线 $y=x+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 交于 A，B 两点，点 P 是 y 轴上的一个动点，当△ PAB 的周长最小时，$S_{△PAB}$=_____.

三、解答题（共 52 分）

13.（8 分）如图，双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 经过点 P（2，1），且与直线 $y=kx-4$（$k<0$）有两个不同的交点．

（1）求 m 的值；

（2）求 k 的取值范围．



（第 13 题）

14.（8 分）已知 k 是常数，抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 y 轴，并且与 x 轴有两个交点．

（1）求 k 的值；

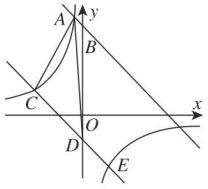
（2）若点 P 在抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 上，且点 P 到 y 轴的距离是 2，求点 P 的坐标．

15.（10 分）如图，平面直角坐标系中，直线 AB 与 y 轴交于点 B（0，7），与反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 在第二象限内的图象相交于点 A（-1，a）．

（1）求直线 AB 对应的函数表达式；

（2）将直线 AB 向下平移 9 个单位后与反比例函数的图象交于点 C 和点 E，与 y 轴交于点 D，求△ ACD 的面积；

（3）设直线 CD 的表达式为 $y=mx+n$，根据图象直接写出不等式 $mx+n\leqslant\frac{-8}{x}$ 的解集．



（第 15 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

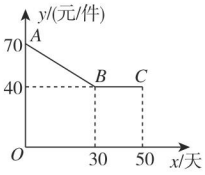
16.（12 分）某工厂用 50 天时间生产一款新型节能产品，每天生产的该产品被某网店以每件 80 元的价格全部订购，在生产过程中，由于技术的不断更新，该产品第 x 天的生产成本 y（元/件）与 x（天）之间的关系如图所示，第 x 天该产品的生产量 z（件）与 x（天）满足表达式 $z=-2x+120$.

（1）第 40 天，该厂生产该产品的利润是____元.

（2）设第 x 天该厂生产该产品的利润为 w 元.

①求 w 与 x 之间的函数表达式，并指出第几天的利润最大，最大利润是多少?

②在生产该产品的过程中，当天利润不低于 2 400 元的共有多少天?



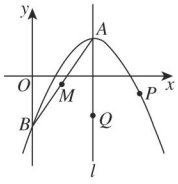
（第 16 题）

17.（14 分）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 A（4，3），与 y 轴相交于点 B（0，−5），对称轴为直线 l，点 M 是线段 AB 的中点.

（1）求抛物线对应的函数表达式;

（2）写出点 M 的坐标并求出直线 AB 对应的函数表达式;

（3）设动点 P，Q 分别在抛物线和对称轴 l 上，当以 A，P，Q，M 为顶点的四边形是平行四边形时，求 P，Q 两点的坐标.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

体验图形的缩放

体验图形的缩放



第22章 相似形









核心考点

你将见到的

- 比例线段
- 平行线分线段成比例
- 相似三角形的判定与性质
- 图形的位似变换

核心方法

我们为你提供的

- 中间比法
- 三点定形法
- 构造法
- 位似变换法
- 分类讨论思想
- 方程思想

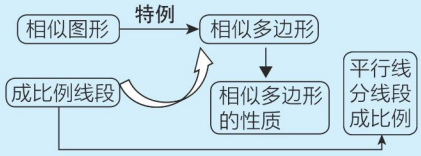
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.1 比例线段

核心知识

- 相似多边形的定义与性质
- 成比例线段
- 比例的性质
- 平行线分线段成比例

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 相似图形

1. 定义 我们把形状相同的两个图形说成是相似的图形.

2. 两个关系

（1）**相似图形之间的关系：**两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形放大或缩小得到.

（2）**相似与全等的关系：**当两个图形的形状相同、大小也相同时，它们是全等图形. 全等图形是相似图形的特殊情况，即全等图形一定是相似图形，但相似图形不一定是全等图形，只有相似图形的大小相同时，它们才全等.

提分·必记

特别解读

1. “形状相同”是判定相似图形的唯一条件.
2. 两个图形相似是指它们的形状相同，与它们的位置、大小无关.

拨考向▸利用相似图形的定义判断图形相似

例 1 下列图形不是相似图形的是（　　）

A. 同一底版打印出来的两张大小不同的照片

B. 用放大镜将一个细小物体图案放大过程中原有图案和放大图案

C. 某人的侧身照片和正面照片

D. 大小不同的两张同版本的中国地图

解题秘方：紧扣“相似图形的定义及相似图形之间的关系”解答.

解：用“排除法”.B 符合相似图形之间的关系；A，D 符合相似图形的定义，因此 A，B，D 都是相似图形.

答案：C

提分·秘诀

特别提醒

判断两个图形是否相似，只看其形状是否相同，而不考虑其他因素. 对于选项 C，不要误解为是某人的照片就相似.

点知识▸2 相似多边形的定义与性质



1. 相似多边形的定义

一般地，两个边数相同的多边形，如果它们的对应角相等，对应边长度的比相等，那么这两个多边形叫做相似多边形.

提分·必记

要点提醒

判定相似多边形的条件：

1. 边数相同；
2. 所有的角分别对应相等；
3. 所有的边对应成比例.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 相似比的定义　相似多边形对应边长度的比叫做相似比或相似系数.

3. 相似多边形的性质　相似多边形对应边长度的比相等，对应角相等.

特别解读：（1）相似比的值与两个多边形的前后顺序有关.

（2）相似多边形的定义可用来判断两个多边形是否相似.

（3）相似多边形的性质常用来求相似多边形未知的边或角.

特别提醒

求相似比或利用相似比解答问题时，一定要注意两个相似多边形的先后顺序.

考向▶利用相似多边形的定义和性质解与相似有关的问题

题型1：相似多边形的定义在判定多边形相似中的应用

例2　如图22.1-1，有一块长3 m，宽1.5 m的矩形黑板$ABCD$，镶在其外围的木质边框宽7.5 cm. 边框的内边缘所成的矩形$ABCD$与边框的外边缘所成的矩形$EFGH$相似吗？为什么？

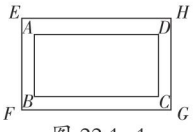


图22.1-1

解题秘方：紧扣“相似多边形的定义”进行说明.

解：不相似. 理由如下：

∵在矩形$ABCD$中，AB=1.5 m，AD=3 m，镶在其外围的木质边框宽7.5 cm=0.075 m，

∴ EF=1.5+2×0.075=1.65（m），EH=3+2×0.075=3.15（m）.

$$\therefore \frac{AB}{EF}=\frac{1.5}{1.65}=\frac{10}{11},\ \frac{AD}{EH}=\frac{3}{3.15}=\frac{20}{21}.$$

$$\because \frac{10}{11}\neq\frac{20}{21},$$ ∴边框的内边缘所成的矩形$ABCD$与边框的外边缘所成的矩形$EFGH$不相似.

特别警示

判断两个多边形是不是相似多边形，不仅要看它们的对应角是否相等，还要看它们的对应边是否成比例；而仅靠眼睛去看容易出现错误解答，误认为这两个矩形相似.

题型2：相似多边形的性质在计算中的应用

例3　如图22.1-3，梯形$ABCD$与梯形$A'B'C'D'$相似，$AD\parallel BC$，$A'D'\parallel B'C'$，$\angle A=\angle A'$，AD=4，$A'D'$=6，AB=6，$B'C'$=12，$\angle C$=60°.

（1）求梯形$ABCD$与梯形$A'B'C'D'$的相似比k；

（2）求$A'B'$和BC的长；

（3）求$\angle D'$的大小.

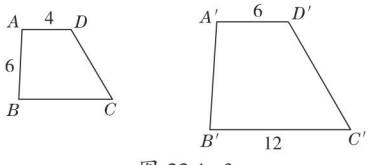


图22.1-3

解题秘方：紧扣“相似多边形的性质及相似比的定义”进行计算.

解：（1）相似比$k=\frac{AD}{A'D'}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

（2）∵梯形$ABCD$与梯形$A'B'C'D'$相似，且由（1）知相似比$k=\frac{2}{3}$，∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$，$\frac{BC}{B'C'}=\frac{2}{3}$.

∵AB=6，$B'C'$=12，∴$A'B'$=9，BC=8.

（3）由题意知$\angle D'=\angle D$. ∵$AD\parallel BC$，$\angle C$=60°，

∴$\angle D$=180°−$\angle C$=120°. ∴$\angle D'$=120°.

提分·秘诀

图解

两个矩形的边长示意图如图22.1-2所示.

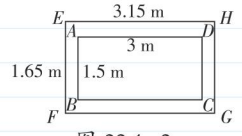


图22.1-2

解法提醒

利用相似多边形的性质求边长或角度，关键抓住“对应”二字，找准对应边和对应角是解决问题的关键. 需要注意的是对应边是比相等，而对应角是相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 成比例线段



1. 两条线段的比

用同一个长度单位去度量两条线段 a，b，得到它们的长度，我们把这两条线段长度的比叫做这两条线段的比，记作$\frac{a}{b}$或 $a:b$.

2. 成比例线段

在四条线段 a，b，c，d 中，如果其中两条线段 a，b 的比，等于另外两条线段 c，d 的比，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（或 $a:b=c:d$），那么这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段. 这时，线段 a，b，c，d 叫做组成比例的项，线段 a，d 叫做比例外项，线段 b，c 叫做比例内项.

3. 比例中项

如果作为比例内项的两条线段是相等的，即线段 a，b，c 之间有 $a:b=b:c$，那么线段 b 叫做线段 a，c 的比例中项.

核考向▶利用成比例线段解决问题

题型 1：利用反比例线段解决比例尺问题

例 4 某市的两个旅游景区之间的距离为 105 km，则在一张比例尺为 1 ∶ 2 000 000 的交通旅游图上，它们之间的距离大约相当于（　　）

A. 一根火柴的长度　　B. 一支钢笔的长度

C. 一支铅笔的长度　　D. 一根筷子的长度

解题秘方： 根据“图上距离∶实际距离 =1 ∶ 2 000 000”列方程求解.

解： 设图上距离为 x cm，则 $x:10\ 500\ 000=1:2\ 000\ 000$，解得 $x=5.25$. 所以它们之间的图上距离为 5.25 cm，约为一根火柴的长度.

在列式进行计算时，容易忽视单位的统一，而出现错误.

答案： A

题型 2：四条线段成比例的定义在判断成比例线段中的应用

例 5 下列各组不同长度的线段中，是成比例线段的是（　　）

A. 3 cm，6 cm，7 cm，9 cm

B. 2 cm，5 cm，0.6 dm，8 cm

C. 3 cm，9 cm，1.8 dm，6 cm

D. 1 cm，2 cm，3 cm，4 cm

解题秘方： 紧扣“成比例线段的定义”进行判断.

解： 根据成比例线段的定义，对各选项进行一一分析.

A. $\frac{3}{6}\neq\frac{7}{9}$，故不是成比例线段；

B. 0.6 dm=6 cm，$\frac{2}{5}\neq\frac{6}{8}$，故不是成比例线段；

提分·必记

特别提醒

1. 求两条线段比的注意事项：
（1）求两条线段的比时，线段长度的单位一定要统一；
（2）两条线段的比值是一个没有单位的正数，与所取的长度单位无关；
（3）两条线段的比是有顺序的，如$\frac{a}{b}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$，而$\frac{b}{a}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

2. 判断四条线段是否成比例，首先统一单位，然后将这四条线段按长度的大小顺序排列，最后计算前两条线段的比值和后两条线段的比值，看是否相等.

提分·秘诀

知识储备

比例尺 $=\frac{\text{图上距离}}{\text{实际距离}}$.

在“比例尺、图上距离、实际距离”三个量中，知道其中任意两个量都可以求出第三个量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

C. 1.8 dm=18 cm，从小到大排序为 3 cm，6 cm，9 cm，18 cm，$\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$，故是成比例线段；

D. $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{4}$，故不是成比例线段.

答案： C

点知识 4 比例的性质

1. 基本性质

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$（b，$d\neq0$）.

（1）比例的基本性质中的等积式是依据等式的性质得出的.

（2）比例的基本性质可以逆用，即由等积式可以直接得出比例式.

提示： 已知比例式中的三个量，可以根据比例的基本性质求出第四个量.

2. 合比性质

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（$b$，$d\neq0$）.

3. 等比性质

如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n\neq0$，

那么$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$.

这是等比性质成立的前提

证明：设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$，

则 $a_1=b_1k$，$a_2=b_2k$，…，$a_n=b_nk$，

$\therefore\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{k(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=k=\frac{a_1}{b_1}$.

拓展

（1）如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$（$b_1+b_2\neq0$，…，$b_1+b_2+\cdots+b_n\neq0$），那么$\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=\cdots=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

（2）利用分式的基本性质，将连等式中一个比的前项与后项都乘同一个非零数后，仍可利用等比性质. 如：$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\rightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{-2a_2}{-2b_2}=\frac{3a_3}{3b_3}\rightarrow\frac{a_1-2a_2+3a_3}{b_1-2b_2+3b_3}=\frac{a_1}{b_1}$（$b_1-2b_2+3b_3\neq0$）.

解题通法

判断四条线段是不是成比例线段的方法： 先将线段长度统一单位并按长度的大小排序，然后用下面两种方法判断.

方法 1：判断前两条线段的比是否与后两条线段的比相等；

方法 2：判断最长的线段与最短的线段的乘积是否与另外两条线段的乘积相等. 若相等，则这四条线段为成比例线段；若不相等，则这四条线段不是成比例线段.

提分·必记

特别提醒

如果 $ad=bc$，那么$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（$b,d\neq0$）或$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$（$c,d\neq0$）或$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$（$a,b\neq0$）或$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$（$a,c\neq0$）.

详解

推导过程如下：

1. 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（$b,d\neq0$），等式两边同时加上 1，得$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

2. 如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（$b,d\neq0$），等式两边同时减去 1，得$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用比例的性质解决问题

题型1：比例的性质在等式变形中的应用

例6 设$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$（$b\neq4$），则下列式子中正确的是（　　）

A. $\frac{a}{4}=\frac{3}{b}$　　B. $3a=4b$　　C. $4a+3b=0$　　D. $\frac{a-3}{b-4}=\frac{3}{4}$

解题秘方：紧扣比例的性质进行识别.

解：分析如下表所示.

选项	分析	判断
A	由$\frac{a}{4}=\frac{3}{b}$得$\frac{a}{3}=\frac{4}{b}$，与$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$即$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$不同	错误
B	由$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$得$4a=3b$，与$3a=4b$不同	错误
C	由$4a+3b=0$得$4a=-3b$，与$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$即$4a=3b$不同	错误
D	由$\frac{a-3}{b-4}=\frac{3}{4}$得$4(a-3)=3(b-4)$，即$4a=3b$，与$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$即$4a=3b$相同	正确

答案：D

题型2：比例的性质在求代数式值中的应用

例7 ［一题多解］已知$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}\neq0$，求$\frac{2a-b+c}{a+3b}$的值.

解题秘方：紧扣“比例的性质”用消元法或参数法求解.

解：方法一　由$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$，得$b=\frac{4a}{3}$；由$\frac{a}{3}=\frac{c}{5}$，得$c=\frac{5a}{3}$.

$$\therefore\text{原式}=\frac{2a-\frac{4a}{3}+\frac{5a}{3}}{a+3\times\frac{4a}{3}}=\frac{2-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}{1+4}=\frac{7}{15}.$$

方法二　设$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k(k\neq0)$，则$a=3k$，$b=4k$，$c=5k$.

$$\therefore\text{原式}=\frac{6k-4k+5k}{3k+12k}=\frac{7}{15}.$$

知识▶5 黄金分割

黄金分割　把一条线段分成两部分，使其中较长线段为全线段与较短线段的比例中项，这样的线段分割叫做黄金分割，分割点叫做这条线段的黄金分割点，比值$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$叫做黄金数. 一条线段的黄金分割点有两个.

要点精析：（1）一般地，点C把线段AB分成两条线段AC和BC，如果$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$，那么称线段$AB$被点$C$黄金分割，点$C$叫做线段$AB$的黄金分割点，$AC$与$AB$的比叫做黄金分割比.

（2）应用黄金分割比时，如果精确计算就要使用$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

提分·秘诀

特别提醒

比例的基本性质、合比性质、等比性质是判断比例变形是否正确的重要依据.

教你一招

利用比例的性质求代数式的值的方法：

1. 消元法，即用含有一个字母的代数式表示其他的字母，然后代入求值；
2. 参数法，即当条件中出现多个比值相等时，根据比例式设出合适的参数，然后用含此参数的代数式表示出相应的字母，再代入代数式求值.

提分·必记

拓展

顶角为36°的等腰三角形底角的平分线把对边黄金分割.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用黄金分割的定义解决问题

题型1：利用黄金分割的概念比较面积的大小

例8 ［期末·常熟］如图22.1-4，已知点C是线段AB的黄金分割点，且$BC>AC$. 若S_1表示以BC为边的正方形面积，S_2表示长为AB、宽为AC的矩形面积，则S_1与S_2的大小关系为（　　）

A.$S_1>S_2$　　B.$S_1=S_2$

C.$S_1<S_2$　　D. 不能确定

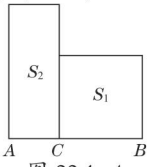


图22.1-4

解题秘方：紧扣黄金分割的定义进行比较.

解：根据黄金分割的定义得到$BC^2=AC\cdot AB$.

$\because S_1$表示以BC为边的正方形面积，S_2表示长为AB、宽为AC的矩形面积，$\therefore S_1=BC^2$，$S_2=AC\cdot AB$.

$\therefore S_1=S_2$.

答案：B

题型2：利用黄金分割的概念进行辨析

例9 已知点C为线段AB的黄金分割点，且$AC>BC$，下列结论正确的有（　　）

①$AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$；②$AC=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}AB$；③$AB:AC=AC:BC$；④$AC\approx 0.618AB$.

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

解题秘方：紧扣黄金分割的概念，写出线段之间数量关系的几种形式，然后逐一判断.

解：$\because$点C是线段AB的黄金分割点，且$AC>BC$，$\therefore AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，①正确，②错误；$AB:AC=AC:BC$，③正确；$AC\approx 0.618AB$，④正确.

答案：C

点知识▶6 平行线分线段成比例

1. 平行线分线段成比例的基本事实　两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

数学表达式：如图22.1-5所示.

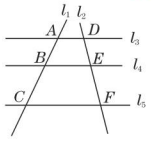


图22.1-5

$\because l_3 // l_4 // l_5$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$，$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}$.

可简记为：$\dfrac{上}{下}=\dfrac{上}{下}$，$\dfrac{上}{全}=\dfrac{上}{全}$，$\dfrac{下}{全}=\dfrac{下}{全}$.

平行线分线段成比例

提分·秘诀

易错警示

一条线段有两个黄金分割点，在实际问题中应明确哪条是较长线段，哪条是较短线段.

提分·必记

要点解读

1. 一组平行线两两平行，被截直线不一定平行.
2. 所有的成比例线段是指被截直线上的线段，与这组平行线上的线段无关.
3. 利用平行线分线段成比例的基本事实写比例式时，一定要注意对应线段写在对应的位置上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 平行线分线段成比例的基本事实的推论 平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边延长线），所得的对应线段成比例.

数学表达式： 如图 22.1−6，若 $DE \parallel BC$，则有 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 或 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 或 $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$.

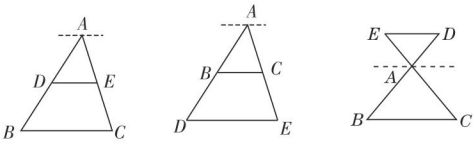


图 22.1−6

考向▶利用平行线分线段成比例解与平行相关的问题

题型 1：平行线分线段成比例的基本事实及其推论在找成比例线段中的应用

例 10 如图 22.1−7，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$，$AF$ 交 BE 于点 H. 下列结论中，错误的是（　　）

A. $\frac{BH}{HC}=\frac{AH}{HD}$　　B. $\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$

C. $\frac{HC}{HE}=\frac{HD}{DF}$　　D. $\frac{AF}{DF}=\frac{BE}{CE}$

解题秘方： 利用平行线分线段成比例的基本事实及其推论，从图形中找出成比例线段进行判断.

解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$，

$\therefore \frac{BH}{HC}=\frac{AH}{HD}$，$\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$，$\frac{AF}{DF}=\frac{BE}{CE}$，故选项 A，B，D 正确.

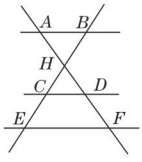


图 22.1−7

$\because CD \parallel EF$，

$\therefore \frac{HC}{HE}=\frac{HD}{HF}$，故选项 C 错误.

答案： C

题型 2：平行线分线段成比例的基本事实的推论在求线段长中的应用

例 11 ［中考·临沂］如图 22.1−8，已知 $AB \parallel CD$，AD 与 BC 相交于点 O. 若 $\frac{BO}{OC}=\frac{2}{3}$，$AD=10$，则 $AO=$_____.

解题秘方： 紧扣“推论中基本图形中的比例式”的特征，结合已知条件找出合适的比例式求解.

解： $\because AB \parallel CD$，$\therefore \frac{AO}{OD}=\frac{BO}{OC}=\frac{2}{3}$，

即 $\frac{AO}{10-AO}=\frac{2}{3}$，解得 $AO=4$.

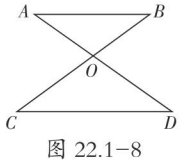


图 22.1−8

答案： 4

特别提醒

1. 本推论的实质是平行线分线段成比例的基本事实中一组平行线中的一条过三角形的一个顶点，一条在三角形一边上的特殊情况.
2. 成比例线段不涉及平行线上的线段.
3. 当被截的两条直线相交时，其交点处可看作含一条隐形的平行线（如图 22.1−6）.

提分·秘诀

解法提醒

在题目中如遇到与直线平行相关的问题时，可从两个方面获取信息：

一是位置角之间的关系（同位角相等、内错角相等、同旁内角互补）；

二是线段之间的关系，即平行线分线段成比例.

技巧点拨

利用平行线分线段成比例的基本事实或推论求线段长的方法：

先确定图中的平行线，由此联想到平行线截得的线段间的比例关系；

再结合待求线段和已知线段写出一个含有它们的比例式；

从而构造出方程，解方程求出待求线段的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用分类法解等比中求比值问题

例 12 设$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{b+c-a}{a}=k$，则 k 的值为（　　）

A. 1　　B. −2　　C. −2 或 1　　D. 以上都不对

解题秘方： 解决连比的比例问题，常用等比性质求解.

解： 根据等比性质，分 $a+b+c=0$ 和 $a+b+c\neq 0$ 两种情况讨论.

若 $a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，$\therefore k=\frac{a+b-c}{c}=\frac{-2c}{c}=-2$；

若 $a+b+c\neq 0$，则由等比性质得$\frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(b+c-a)}{c+b+a}=k$，

$\therefore k=1$.

答案： C

挑战·高分

特别提醒

运用等比性质的前提是各个分母的和不能等于零. 如果题目中没有此条件，在运用等比性质之前应分类讨论，否则将会出现漏解的错误.

拔尖角度▶ 2 利用计算比较法解矩形折叠中的长、宽之比问题

例 13 如图 22.1−9，将一张长、宽之比为$\sqrt{2}$的矩形纸 $ABCD$ 依次不断对折，可以得到矩形 $BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$.

（1）判断矩形 $BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$ 的长、宽之比是否改变，并说明理由；

（2）你认为这些大小不同的矩形相似吗？

解题秘方： 紧扣“线段的比的定义和相似多边形的定义”判断即可.

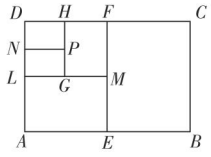


图 22.1−9

解：（1）矩形 $BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$ 的长、宽之比不改变. 理由如下：

设矩形纸的宽 $BC=a$，长 $AB=\sqrt{2}a$，

则有 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$ME=\frac{a}{2}$，$MF=\frac{a}{2}$，$HF=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$LG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$LN=\frac{a}{4}$.

$$\therefore \frac{BC}{BE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2},\ \frac{AE}{ME}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2},\ \frac{MF}{HF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2},$$

$$\frac{LG}{LN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}.$$

$\therefore$ 这四个矩形的长、宽之比不改变.

（2）这些大小不同的矩形都相似.

挑战·高分

解法提醒

1. 此类题目只要按照题目的要求一步步思考，将操作过程转换为数量关系，根据线段的比的定义进行计算求出比值即可解题.
2. 用相似多边形的定义进行判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用二次函数最值法求解与相似多边形有关的最值问题

挑战·高分

技巧点拨

解此题的技巧是根据相似多边形的对应边的比相等探究线段间的长度关系，进而得到面积 S 关于 x 的二次函数表达式，然后利用二次函数的性质求矩形面积的最值.

例 14 如图 22.1−10，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，$EF=10$，在 EF 上取一点 M，分别以 EM 和 MF 为一边作矩形 $EMNH$ 和矩形 $MFGN$（$MF>MN$），使矩形 $MFGN$ 与矩形 $ABCD$ 相似. 令 $MN=x$，当 x 为何值时，矩形 $EMNH$ 的面积 S 有最大值？最大值是多少？



图 22.1−10

解题秘方： 利用相似多边形对应边的性质建立二次函数模型，借助二次函数性质求解.

解： ∵矩形 $MFGN$ 与矩形 $ABCD$ 相似，∴$\dfrac{AB}{MF}=\dfrac{AD}{MN}$.

∵ $AB=2AD$，∴$\dfrac{MF}{MN}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2AD}{AD}=2$.

又∵ $MN=x$，∴ $MF=2x$.

∵ $EF=10$，∴ $EM=10-2x$. ∴ $S=x(10-2x)=-2x^2+10x$.

∵ S 是关于 x 的二次函数，∴当 $x=\dfrac{5}{2}$ 时，S 有最大值，最大值为 $\dfrac{25}{2}$.

拔尖角度▸ 4 利用“平行线分线段成比例”求线段的长

挑战·高分

解题通法

利用平行线分线段成比例求线段长的思路：

利用平行线分线段成比例求线段长，需先确定图形中的平行线，由此找出线段间的比例关系，结合待求线段与已知线段写出一个含有它们的比例式，构造出方程，然后解方程求出线段长.

例 15 如图 22.1−11，$l_1 // l_2 // l_3$，$AB=3$，$AD=2$，$DE=4$，$EF=9$，求 BC，BF 的长.

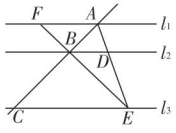


图 22.1−11

解题秘方： 根据“平行线分线段成比例”列出和已知与要求线段有关的等式，求出 BC，BF 的长.

解： ∵ $l_1 // l_2 // l_3$，∴$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DE}$.

∵ $AB=3$，$AD=2$，$DE=4$，

∴$\dfrac{3}{BC}=\dfrac{2}{4}$，解得 $BC=6$.

∵ $l_1 // l_2 // l_3$，∴$\dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AB}{AC}$.

∴$\dfrac{BF}{9}=\dfrac{3}{3+6}$，解得 $BF=3$.

也可由 $l_1 // l_2 // l_3$，得到 $\dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AD}{AE}$，∴$\dfrac{BF}{9}=\dfrac{2}{2+4}$，解得 $BF=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容在中考中主要考查图形的相似、相似多边形的性质和判定，题目以选择题和填空题为主，其中四条线段成比例是命题的热点，以计算的形式和多边形的其他性质综合起来出题，难度较低.

三年中考兵法

考法1 利用相似多边形的定义判别相似图形

例16 [中考·莆田]下列四组图形中，一定相似的是（　　）

A. 正方形与矩形

B. 正方形与菱形

C. 菱形与菱形

D. 正五边形与正五边形

试题评析：本题考查了相似图形的定义，熟悉各种图形的性质和相似图形的定义是解题的关键.

解：A. 正方形与矩形，对应角相等，对应边不一定成比例，故不符合题意；

B. 正方形与菱形，对应边成比例，对应角不一定相等，不符合相似的定义，故不符合题意；

C. 菱形与菱形，对应边成比例，对应角不一定相等，故不符合题意；

D. 正五边形与正五边形，对应角相等，对应边一定成比例，符合相似的定义，故符合题意.

答案：D

考法2 利用相似多边形的性质解与全等有关的综合问题

例17 [中考·南通]如图 22.1−12，点 E 是菱形 $ABCD$ 对角线 CA 的延长线上任意一点，以线段 AE 为边作一个菱形 $AEFG$，且菱形 $AEFG$ 与菱形 $ABCD$ 相似，连接 EB，GD.

（1）求证：$EB=GD$；

（2）若 $\angle DAB=60°$，$AB=2$，$AG=\sqrt{3}$，求 GD 的长.

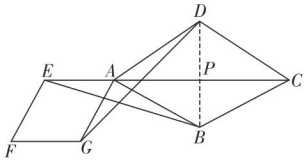


图 22.1−12

试题评析：本题考查了全等三角形的判定、勾股定理、菱形的性质及相似多边形的性质. 解题的关键是了解相似多边形的对应角相等.

冲刺·满分

活学巧记

两个相似多边形，
边数相同形状同；
各角对应都相等，
各边对应成比例.

知识储备

- 两边且夹角对应相等的两三角形全等；
- 菱形的四边相等，对角线互相垂直平分且平分一组对角；
- 勾股定理.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**证明**：∵菱形 $AEFG$ 与菱形 $ABCD$ 相似，∴∠ EAG= ∠ BAD.

∴∠ EAG + ∠ GAB = ∠ BAD + ∠ GAB.

∴∠ EAB = ∠ GAD.

又易知 AE=AG，AB=AD，∴△ AEB ≌△ AGD.

∴ EB=GD.

（2）**解**：如图 22.1−12，连接 BD，交 AC 于点 P，则 BP ⊥ AC.

∵∠ DAB=60°，∴∠ PAB=30°. ∴ BP= $\frac{1}{2}$ AB=1.

∴ AP= $\sqrt{AB^2-BP^2}$ = $\sqrt{3}$.

∵ AE=AG= $\sqrt{3}$，∴ EP=2 $\sqrt{3}$.

∴ EB= $\sqrt{EP^2+BP^2}$ = $\sqrt{12+1}$ = $\sqrt{13}$. ∴ GD= $\sqrt{13}$.

考法 3 利用相似多边形的性质解决实际问题

例 18 ［中考·鞍山］在 AB=20 m，AD=30 m 的矩形花坛 $ABCD$ 的四周修筑小路.

（1）如果四周小路的宽均相等，如图 22.1−13 ①，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似吗？请说明理由.

（2）如果相对着的两条小路的宽均相等，如图 22.1−13 ②，试问小路的宽 x（m）与 y（m）的比值是多少时（x<y），能使小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似？请说明理由.

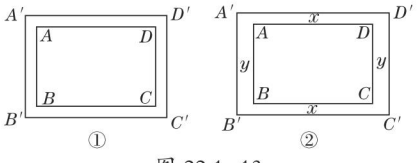


图 22.1−13

试题评析：本题考查了相似多边形的判定和性质，理解相似多边形的对应边成比例是解题的关键.

解：（1）矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似. 理由如下：

若两个矩形相似，设小路的宽为 a m，则 $\frac{30+2a}{30}$ = $\frac{20+2a}{20}$，解得 a=0.

∵小路宽不可能为 0 m，∴矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似.

（2）当 x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似. 理由如下：

若矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，则 $\frac{30+2y}{30}$ = $\frac{20+2x}{20}$.

∴ $\frac{x}{y}$ = $\frac{2}{3}$.

∴当 x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

思路点拨

利用相似多边形的对应角相等和菱形的四边相等证得三角形全等后即可证得两条线段相等.

连接 BD，交 AC 于点 P，则 BP ⊥ AC，根据∠ DAB=60° 得到∠ PAB=30°，进而得到 BP= $\frac{1}{2}$ AB=1，然后求得 EP=2 $\sqrt{3}$，最后利用勾股定理求得 EB 的长即可求得线段 GD 的长.

特别提醒

本题通过逆向思维，借助相似多边形的对应边成比例这一性质，列出关于 x，y 的方程，求出题中要求的比值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见227页

1. [中考·兰州]已知 $2x=3y$（$y\neq 0$），则下列结论成立的是（　　）

A. $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$　　B. $\frac{x}{3}=\frac{2}{y}$

C. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$　　D. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$

2. 下列图形中一定相似的是（　　）

A. 所有矩形

B. 所有等腰三角形

C. 所有等边三角形

D. 所有菱形

3. 下列各组线段中，成比例的是（　　）

A.3 cm，6 cm，8 cm，9 cm

B.3 cm，5 cm，6 cm，9 cm

C.3 cm，6 cm，7 cm，9 cm

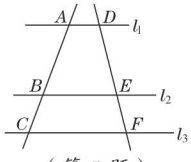
D.3 cm，6 cm，9 cm，18 cm

4. 在中华经典美文阅读中，小明同学发现自己的一本书的宽与长的比值为黄金数．已知这本书的长为 20 cm，则它的宽约为（　　）

A.12.36 cm　　B.13.6 cm

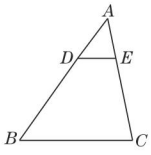
C.32.36 cm　　D.7.64 cm

5. 如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$BC=3$，$\frac{DE}{EF}=2$，则 AB 的长为_____.



（第 5 题）

6. 如图，$DE /\!/ BC$，$AD=3$，$AB=9$，$AE=2.5$，则 $EC=$_____.



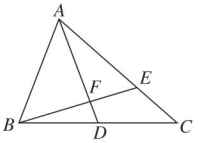
（第 6 题）

7. 已知 $a:b:c=4:3:2$，且 $a+3b-3c=14$. 求：

（1）a，b，c 的值；

（2）$4a-3b+c$ 的值．

8. 如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点，E 是 AC 的三等分点，AD 交 BE 于点 F，求 $\frac{BF}{FE}$ 的值．

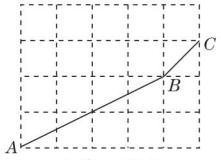


（第 8 题）

9. 如图，A，B，C 是 5×4 的网格中的三个格点，网格中的每个小正方形的边长为 1.

（1）求线段 AB 与 BC 的比．

（2）请问在网格中是否存在格点 D，使线段 BC 与 BD 的比为 1 ∶ 2？如果存在，请在图中标出点 D；如果不存在，请说明理由．



（第 9 题）

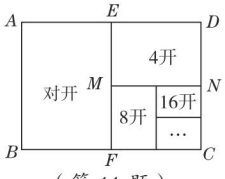
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 已知 $k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{a+b}{c}$.

（1）求 k 的值；

（2）一次函数 $y=kx-k$ 的图象经过哪些象限？

11. 如图，一般书本的纸张是原纸张多次对开得到的．矩形 $ABCD$ 沿 EF 对开后，再把矩形 $EFCD$ 沿 MN 对开，以此类推，若各种开本的矩形都相似，求 $\dfrac{AB}{AD}$ 的值．



（第 11 题）

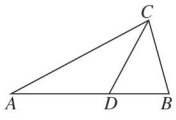
12. 某研究小组由黄金分割点联想到“黄金分割线”，给出“黄金分割线”的定义：直线 l 将一个面积为 S 的图形分成两部分，这两部分的面积分别为 S_1，S_2，如果 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S}{S_1}$，那么直线 l 为该图形的黄金分割线．问题解决：　【导学号：8618152】

如图①，在△ ABC 中，若点 D 是 AB 的黄金分割点．

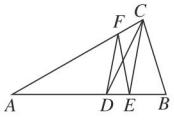
（1）研究小组猜想直线 CD 是△ ABC 的黄金分割线，你认为对吗？为什么？

（2）三角形的中线所在的直线是否也是该三角形的黄金分割线？请说明理由．

（3）研究小组探究发现：过点 C 作直线交 AB 于点 E，过点 D 作 $DF\parallel CE$ 交 AC 于点 F，连接 EF，如图②所示，则直线 EF 也是△ ABC 的黄金分割线．请说明理由．



①



②

（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2 相似三角形的判定

核心知识
- 相似三角形
- 相似三角形的判定
- 直角三角形相似的判定

知识链接

相似三角形的判定
- 相似三角形的定义
- 平行线的性质 — 平行线截三角形相似
- 相似三角形判定定理 — 直角三角形相似

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 相似三角形

1. 定义 如果两个三角形中，对应角相等，对应边成比例，那么这两个三角形相似.

数学表达式：如图 22.2−1，在△ ABC 和△ $A'B'C'$ 中，

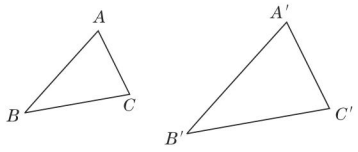


图 22.2−1

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C' \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}\end{array}\right\}\leftrightarrow\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

2. 相似三角形的表示方法 相似用符号“∽”表示，读作“相似于”. 如图 22.2−2，△ ABC 与△ $A'B'C'$ 相似，记作“△ ABC ∽△ $A'B'C'$”，读作“△ ABC 相似于△ $A'B'C'$”.

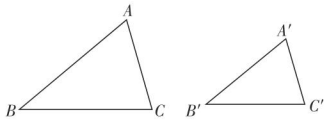


图 22.2−2

特别警示：用符号“∽”表示两个三角形相似时，要把表示对应顶点的大写字母写在对应的位置上. △ ABC ∽△ $A'B'C'$ 表示顶点 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 分别对应；如果仅说“△ ABC 与△ $A'B'C'$ 相似”，没有用“∽”连接，则需要分类讨论它们之间的对应关系.

提分·必记

特别解读

- 相似三角形的定义可以作为相似三角形的判定方法，也是相似三角形最重要的性质.
- 相似三角形具有传递性，即若△ ABC ∽△ A′ B′ C′，△ A′ B′ C′ ∽△ A″ B″ C″，则△ ABC ∽△ A″ B″ C″.
- 相似三角形的相似比具有顺序性，即如果△ ABC 与△ A′ B′ C′ 的相似比为 k，那么△ A′ B′ C′ 与△ ABC 的相似比为 $\frac{1}{k}$.
- 全等三角形是特殊的相似三角形，即全等三角形是相似比为 1 的相似三角形，而相似三角形不一定是全等三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用相似三角形的定义求边和角

例 1 如图 22.2−3，已知 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，$\angle A=70°$，$\angle B=40°$，$AB=6$，$BC=6$，$AD=3$.

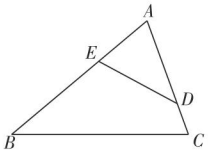


图 22.2−3

（1）求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的相似比；

（2）求 $\angle AED$ 的度数和 DE 的长.

解题秘方：紧扣“相似三角形定义中对应角相等，对应边成比例”求解.

解：（1）$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的相似比为 $\frac{AB}{AD}=\frac{6}{3}=2$.

（2）$\because \angle A=70°$，$\angle B=40°$，

$\therefore \angle C=180°-70°-40°=70°$.

$\because \triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \angle AED=\angle C=70°$，$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$.

又 $\because AB=6$，$BC=6$，$AD=3$，

$\therefore \frac{6}{3}=\frac{6}{DE}$，

解得 $DE=3$.

由 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ 可知 AB 与 AD 对应、BC 与 DE 对应，根据相似三角形对应边成比例列出比例式 $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$.

提分·秘诀

特别提醒

利用相似三角形对应角相等，对应边成比例解决问题时，应明确相似三角形的对应关系.

本题中，因为 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，所以点 A 与点 A 对应、点 B 与点 D 对应、点 C 与点 E 对应.

知识点▶2 平行线截三角形相似的定理

1. 定理 平行于三角形一边的直线与其他两边（或两边的延长线）相交，截得的三角形与原三角形相似.

数学表达式：如图 22.2−4 所示.

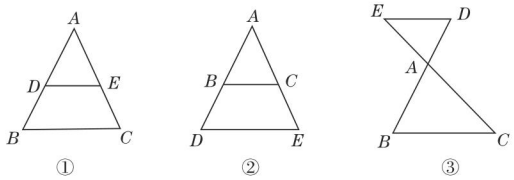


图 22.2−4

$\because DE \parallel BC$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

2. 作用 本定理是相似三角形判定定理的预备定理，它通过平行证三角形相似，再由相似证对应角相等、对应边成比例.

提分·必记

特别提醒

1. 书写两个三角形相似时，要把表示对应顶点的大写字母写在对应的位置上.

2. 根据定理得到的相似三角形的三个基本图形中都有 $BC \parallel DE$，图 22.2−4①②很像大写字母 A，故我们称之为“A”型相似；图 22.2−4③很像大写字母 X，故我们称之为“X”型相似（也像阿拉伯数字“8”）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用平行线判定三角形相似及相关计算问题

题型1：平行线在找相似三角形中的应用

例2 如图22.2-5，已知在▱$ABCD$中，E为AB延长线上的一点，$AB=3BE$，DE与BC相交于点F，请找出图中各对相似三角形，并求出相应的相似比.

解题秘方：紧扣“平行线截三角形两边的两种基本图形——‘A’型和‘X’型”进行查找.

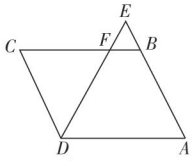


图22.2-5

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$AB=CD$.

∴△$BEF\backsim$△CDF，△$BEF\backsim$△AED.

∴△$BEF\backsim$△$CDF\backsim$△AED.

∵$AB=3BE$，∴△$BEF\backsim$△CDF，相似比$k_1=\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1}{3}$；

△$BEF\backsim$△AED，相似比$k_2=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{4}$；

△$CDF\backsim$△AED，相似比$k_3=\dfrac{CD}{AE}=\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{3}{4}$.

题型2：相似三角形的判定和性质在求线段长中的应用

例3 如图22.2-6，在▱$ABCD$中，$AE=EB$，$AF=2$，则$CF=$_____.

解题秘方：判断是用平行线截线段成比例，还是用平行线截三角形相似的对应边成比例是解题关键.

解：在▱$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$AB=CD$，

∴△$AEF\backsim$△CDF. ∴$\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{AF}{CF}$.

∵$AE=EB$，∴$\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{1}{2}$.

又∵$AF=2$，∴$CF=4$.

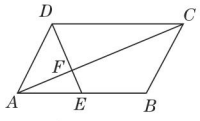


图22.2-6

答案：4

知识▶3 角的关系判定三角形相似定理

1. 定理 如果一个三角形的两个角分别与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似. 简单说成：两角分别相等的两个三角形相似.

2. 数学表达式 如图22.2-7所示.

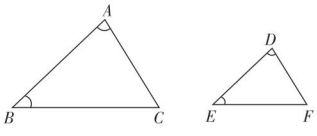


图22.2-7

在△ABC和△DEF中，∵∠$A=$∠D，且∠$B=$∠E，

∴△$ABC\backsim$△DEF.

提分·秘诀

特别提醒

由▱ABCD可知AB∥CD，AD∥BC，再根据平行线及相似三角形的传递性找相似三角形，得到△BEF，△CDF，△AED都相似，共构成三对相似三角形.

求相似比不仅要找准对应边，还需注意两个三角形的先后次序，若次序颠倒，则相似比成为原来相似比的倒数.

教你一招

利用成比例线段求线段长的方法：

对于被平行线所截形成“A”型或“X”型的图形，当所求的线段或已知线段在平行的边上时，通常考虑通过证三角形相似，再利用相似三角形的对应边的比相等构建包含已知与未知线段的比例式，即可求出线段的长；当所求的线段或已知线段不在平行的边上时，则考虑直接用平行线截线段成比例求线段的长.

提分·必记

特别提醒

由两组角分别相等判定两个三角形相似，其关键是找准对应角. 一般地，相等的角是对应角，如：公共角对顶角同(等)角的余角(补角)等都是相等的角，解题时要注意挖掘题目中的隐含条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 常见的相似三角形的类型

（1）平行线型：如图 22.2-8 ①，若 $DE \parallel BC$，则 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$；

（2）相交线型：如图 22.2-8 ②，若 $\angle AED = \angle B$，则 $\triangle AED \backsim \triangle ABC$；

（3）“子母”型：如图 22.2-8 ③，若 $\angle ACD = \angle B$，则 $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$；

（4）“K”型：如图 22.2-8 ④，若 $\angle A = \angle D = \angle BCE = 90°$，则 $\triangle ACB \backsim \triangle DEC$，整体像一个横放的字母 K，所以称为“K”型相似.

点拨微课堂

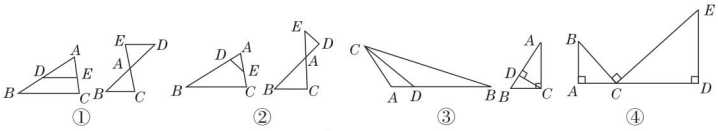


图 22.2-8

核考向▶利用两角分别相等判定两三角形相似

例 4 如图 22.2-9，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，AD 的垂直平分线交 AD 于点 E，交 BC 的延长线于点 F.

求证：$\triangle ABF \backsim \triangle CAF$.

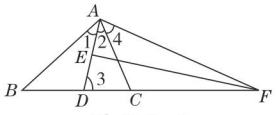


图 22.2-9

解题秘方：紧扣“两组对应角相等的两三角形相似”，如图 22.2-9，由于 $\angle BFA$ 是公共角，因此只需说明 $\angle B = \angle 4$ 即可证明.

证明：如图 22.2-9，$\because EF$ 垂直平分 AD，

$\therefore AF = DF$. $\therefore \angle FAD = \angle 3$.

$\because \angle B = \angle 3 - \angle 1$，$\angle 4 = \angle FAD - \angle 2$，$\angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle B = \angle 4$.

又 $\because \angle BFA = \angle AFC$，$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle CAF$.

提分·秘诀

思路点拨

当两个三角形已具备一角对应相等的条件时，往往先找是否有另一角对应相等. 找角相等时，应注意挖掘公共角、对顶角、同角的余角（或补角）等.

点知识▶4 边角关系判定三角形相似定理

1. 定理 如果一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似. 简单说成：两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

2. 数学表达式 如图 22.2-10 所示.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$\because \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$，且 $\angle B = \angle E$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

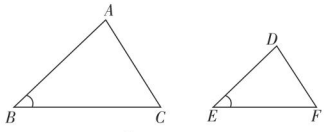


图 22.2-10

提分·必记

特别提醒

运用该定理证明相似时，一定要注意边角的关系，相等的角一定是成比例的两组对应边的夹角. 类似于判定三角形全等的 *SAS* 的方法.

学习札记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似

例 5 如图 22.2−11，在正方形 $ABCD$ 中，P 是 BC 上的一点，且 $BP=3PC$，Q 是 CD 的中点．求证：$\triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

解题秘方：紧扣“边角关系判定三角形相似定理”证明即可．

证明：设正方形 $ABCD$ 的边长为 $4a$，

则 $AD=CD=BC=4a$.

$\because Q$ 是 CD 的中点，$BP=3PC$，

$\therefore DQ=CQ=2a$，$PC=a$.

$\therefore \dfrac{DQ}{CP}=\dfrac{AD}{QC}=2$.

又 $\because \angle D=\angle C=90^\circ$，$\therefore \triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

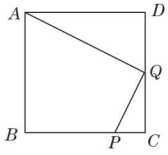


图 22.2−11

点知识▶5 三边关系判定三角形相似定理

1. 定理 如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似．简单说成：三边成比例的两个三角形相似．

2. 数学表达式 如图 22.2−12 所示．

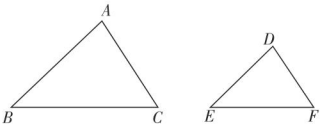


图 22.2−12

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$\because \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

拔考向▶利用三边成比例判定三角形相似

例 6 图 22.2−13、图 22.2−14 中小正方形的边长均为 1，则图 22.2−14 中的哪一个三角形（阴影部分）与图 22.2−13 中的 $\triangle ABC$ 相似？

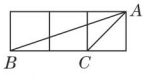


图 22.2−13

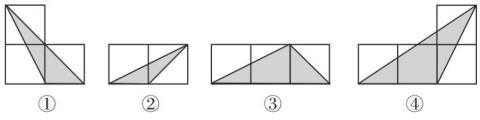


图 22.2−14

解题秘方：利用网格的特征用勾股定理求各边的长，紧扣“三边成比例的两个三角形相似”，用计算比较法判断．

解：易知 $AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AB=\sqrt{10}$.

图 22.2−14 ①中，三角形的三边长分别为 1，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$；

图 22.2−14 ②中，三角形的三边长分别为 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$；

图 22.2−14 ③中，三角形的三边长分别为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，3；

图 22.2−14 ④中，三角形的三边长分别为 2，$\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$.

$\because \dfrac{\sqrt{2}}{1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 图 22.2−14 ②中的三角形与 $\triangle ABC$ 相似．

提分·秘诀

技巧点拨

利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似的方法：

先找出两个三角形中相等的那个角；

再分别找出两个三角形中夹这个角的两条边，并按大小排列找出对应边；

最后看这两组对应边是否成比例，若成比例，则两个三角形相似，否则不相似．

提分·必记

特别提醒

- 由三边成比例判定两三角形相似的方法与三边对应相等判定三角形全等的方法类似，只需把三边对应相等改为三边成比例即可．
- 应用时要注意比的顺序性，即分子为同一个三角形的三边，分母为另一个三角形的三边，同时要注意边的对应情况，用大边对大边、小边对小边的思路找对应边．

提分·秘诀

解法提醒

利用三边成比例判定两三角形相似的方法：

先把两个三角形的边分别按照从小到大的顺序排列，找出两个三角形的对应边；

再分别计算小、中、大三组对应边的比；

最后看三个比是否相等，若相等，则两个三角形相似，否则不相似．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸6 直角三角形相似的判定

1. 定理 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似．简单说成：斜边、一组直角边对应成比例的两个直角三角形相似．

2. 直角三角形相似的判定定理

（1）一组锐角相等的两个直角三角形相似；

（2）两组直角边对应成比例的两个直角三角形相似；

（3）斜边、一组直角边对应成比例的两个直角三角形相似．

3. 数学表达式 如图 22.2−15，在 Rt △ ABC 和 Rt △ $A'B'C'$ 中：

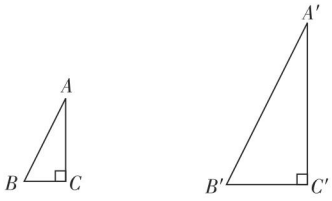


图 22.2−15

（1）∵ ∠ C = ∠ C' =90°，∠ A = ∠ A'，

∴ Rt △ ABC ∽ Rt △ $A'B'C'$．

（2）∵ ∠ C = ∠ C' =90°，$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$，

∴ Rt △ ABC ∽ Rt △ $A'B'C'$．

（3）∵ ∠ C= ∠ C' =90°，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，

∴ Rt △ ABC ∽ Rt △ $A'B'C'$．

拔考向▸利用直角三角形相似的判定方法判定两直角三角形相似

例 7 在 Rt △ ABC 和 Rt △ DEF 中，∠ C = ∠ F=90°，下列条件中，不能判定这两个三角形相似的是（　　）

A. ∠ A=55°，∠ D=35°

B. AC=9，BC=12，DF=6，EF=8

C. AC=3，BC=4，DF=6，DE=8

D. AB=10，AC=8，DE=15，EF=9

解题秘方： 紧扣“判定直角三角形相似的思路”——进行验证．

解： A. ∵ ∠ A=55°，∴ ∠ B=90° −55° =35°．

∵ ∠ D=35°，∴ ∠ B = ∠ D.

又∵ ∠ C = ∠ F=90°，∴ △ ABC ∽ △ EDF.

B. ∵ AC=9，BC=12，DF=6，EF=8，∴ $\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{3}{2}$．

又∵ ∠ C = ∠ F=90°，∴ △ ABC ∽ △ DEF.

提分·必记

思路点拨

判定两三角形相似的思路：

1. 已知平行于三角形一边的直线，找两个三角形；
2. 已知一角对应相等，找另一角对应相等，或夹这个角的两边对应成比例；
3. 已知两边对应成比例，找夹角相等，或与第三边成比例；
4. 已知直角三角形，找一组锐角相等，或两组直角边对应成比例，或斜边、一组直角边对应成比例．

提分·秘诀

解法提醒

判定两直角三角形相似的方法：一组锐角相等或两组直角边对应成比例或斜边、一组直角边对应成比例．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

C. 由题干中知$\angle C=\angle F=90°$，但由已知条件不能得出两组对应边成比例，故不能判定两三角形相似.

D. $\because AB=10$，$AC=8$，$\therefore$由勾股定理可得$BC=6$.

$\because DE=15$，$EF=9$，$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{2}{3}$.

又$\because \angle C=\angle F=90°$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

答案： C

活学巧记

证相似，比线段，
添线平行成习惯；
一证两对角相等，
或证三边成比例；
两边成比也能用，
夹角相等才可行.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用中间比法证线段成比例

例 8 如图 22.2−16，P是$\square ABCD$的边BC的延长线上一点，AP分别交BD和CD于点M和N.

求证：$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{MP}{AM}$.

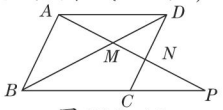


图 22.2−16

解题秘方： 当利用平行线和相似三角形的性质无法得到所证比例式时，用“等比过渡法”（即中间比法）进行代换是常用的证明方法.

证明： $\because AB\parallel DN$，$\therefore\triangle AMB\backsim\triangle NMD$.

$\therefore \dfrac{AM}{NM}=\dfrac{BM}{DM}$.

$\because AD\parallel BP$，$\therefore\triangle BMP\backsim\triangle DMA$.

$\therefore \dfrac{MP}{AM}=\dfrac{BM}{DM}$. $\therefore \dfrac{AM}{MN}=\dfrac{MP}{AM}$.

挑战·高分

解法提醒

先利用平行线得到相似三角形，再由相似三角形对应边的比相等，可求某些线段的长或证明比例式和等积式.

当直接利用相似三角形对应边的比相等或平行线截得的比例线段无法解决时，可找中间比进行过渡，“中间比法”是证比例关系常用的方法.

拔尖角度▶ 2 利用成比例法证等积式

例 9 如图 22.2−17，已知在四边形$ABCD$中，$\angle ADB=\angle ACB$，延长AD，BC相交于点E.

求证：（1）$\triangle ACE\backsim\triangle BDE$；

（2）$BE\cdot CD=AB\cdot DE$.

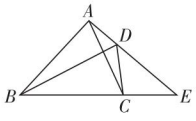


图 22.2−17

解题秘方： 紧扣“等积式与比例式的互化关系”找对应的相似三角形求解.

证明： （1）$\because\angle ADB=\angle ACB$，

$\therefore\angle BDE=\angle ACE$.

又$\because\angle E=\angle E$，

$\therefore\triangle ACE\backsim\triangle BDE$.

（2）$\because\triangle ACE\backsim\triangle BDE$，$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{DE}$，即$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BE}{DE}$.

又$\because\angle E=\angle E$，$\therefore\triangle EAB\backsim\triangle ECD$.

$\therefore \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AB}{CD}$. $\therefore BE\cdot CD=AB\cdot DE$.

等积式中BE，AB和CD，DE分别在△ABE和△CDE中，因此要想证$BE\cdot CD=AB\cdot DE$，即证$\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AB}{CD}$，故只需证明△EAB∽△ECD即可.

挑战·高分

解题通法

利用相似三角形证明等积式的方法：在证明等积式时，一般先把等积式中的四条线段分别看作两个三角形中的两组边，然后通过证明这两个三角形相似得出比例式，再转化为等积式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用对应关系法求线段长

例 10 如图 22.2−18，$AD \parallel BC$，$\angle D=90°$，$DC=7$，$AD=2$，$BC=4$. 若边 DC 上有一点 P 使 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 相似，求此时 DP 的长度.

解题秘方： 紧扣相似三角形对应点的不确定性，对 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 相似的不同对应情况进行分类讨论，分别计算出 DP 的长度.

解： 设 $DP=x$，则 $CP=7-x$，

①当点 A 和点 B 是对应点，即 $\triangle ADP \backsim \triangle BCP$ 时，

$\frac{AD}{BC}=\frac{DP}{CP}$，即 $\frac{2}{4}=\frac{x}{7-x}$，解得 $x=\frac{7}{3}$.

②当点 A 和点 P 是对应点，

即 $\triangle ADP \backsim \triangle PCB$ 时，

$\frac{AD}{PC}=\frac{DP}{CB}$，即 $\frac{2}{7-x}=\frac{x}{4}$.

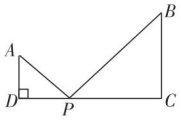


图 22.2−18

整理，得 $x^2-7x+8=0$，解得 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$.

综上所述，当 DP 的长度为 $\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$ 或 $\frac{7}{3}$ 时，$\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 相似.

解题通法：分类讨论思想在相似三角形中的应用策略

运用相似三角形求边长时，若两个三角形相似关系不明确，则需运用分类讨论思想，再结合方程思想来求解，在求解的过程中，还要注意检验方程的根是否满足题意.

挑战·高分

特别提醒

如果两个三角形相似写成 $\triangle PAD \backsim \triangle PBC$ 的形式，则表示 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 的对应关系是唯一确定的；

如果仅说“$\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 相似”，没有用“$\backsim$”连接，则需要分类讨论它们顶点的对应关系.

因为 $\angle D=\angle C=90°$ 已确定，所以点 D 的对应点 C 也已确定，所以只需对点 A，B，P 的对应关系分类讨论即可.

拔尖角度▸ 4 利用三点定形法找相似三角形证等积式

例 11 如图 22.2−19，CD 是 Rt $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，E 为 CB 的中点，ED 的延长线交 CA 的延长线于点 F.

求证：$AC \cdot CF=CB \cdot DF$.

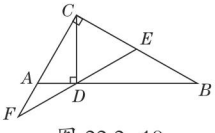


图 22.2−19

解题秘方： 用“三点定形法”将比例式中的四条线段划归到两个相似三角形中进行证明.

证明： ∵ CD 是 Rt $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，E 为 CB 的中点，

∴ $CE=EB=DE$.

∴ $\angle B=\angle BDE=\angle FDA$.

∵ $\angle B+\angle CAB=90°$，$\angle ACD+\angle CAB=90°$，

∴ $\angle B=\angle ACD$.

挑战·高分

思路点拨

比例式：$\frac{AC}{CB}=\frac{DF}{CF}$.

横看：比例式的两个分子中的字母对应的点是 A, C, D, F 四点，不能确定三角形.

竖看：比例式的左端所含字母对应的点构成△ABC，比例式的右端所含字母对应的点构成△DCF，很明显看出这两个三角形不相似，故需要找一个中间比 $\frac{AD}{CD}$ 来联系 $\frac{AC}{CB}$ 和 $\frac{DF}{CF}$；将证 $\frac{AC}{CB}=\frac{DF}{CF}$ 转化为证 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{CD}$ 和 $\frac{DF}{CF}=\frac{AD}{CD}$ 后，再用横看或竖看找相似三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle FDA = \angle ACD$.

又$\because \angle F = \angle F$，$\therefore \triangle FDA \backsim \triangle FCD$.

$\therefore \dfrac{DF}{CF} = \dfrac{AD}{DC}$.

$\because \angle ADC = \angle CDB = 90°$，$\angle ACD = \angle B$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle CBD$.

$\therefore \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AC}{CB}$.

$\therefore \dfrac{DF}{CF} = \dfrac{AC}{CB}$，即$AC \cdot CF = CB \cdot DF$.

拔尖角度▸ 5 利用构造平行线法证线段相等

例 12 如图 22.2-20，在$\triangle ABC$中，点D是AB上的点，且$AB=3AD$，E是AC的中点，DE的延长线交BC的延长线于点F.

求证：$BC=CF$.

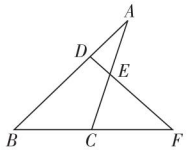


图 22.2-20

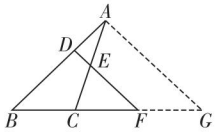


图 22.2-21

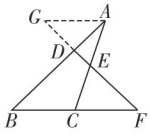


图 22.2-22

解题秘方： 紧扣“平行线或相似三角形”使线段成比例的特征作辅助线.

证明：方法一 如图 22.2-21，过点A作$AG \parallel DF$，交BF的延长线于点G.

$\because E$是AC的中点，$\therefore F$是CG的中点.

$\because AB=3AD$，

$\therefore BD = \dfrac{2}{3} AB$.

$\because AG \parallel DF$，

$\therefore \dfrac{BF}{BG} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{2}{3}$.

$\therefore BF = \dfrac{2}{3} BG$.

$\therefore BF=2FG$.

$\because F$是CG的中点，$\therefore FG=CF$.

$\therefore BF=2CF$.

$\therefore BC=CF$.

技巧提醒

运用三点定形法时，要设法找出比例式或等积式中（或转化后的式子中）所蕴含的几个字母，看是否存在可由“三点”确定的两个相似的三角形，且式子中所有点要在这两个三角形中.“横看”与“竖看”是“三点定形法”找相似三角形的常用方法，要做到“一比两用”.

挑战·高分

另解

本题还有其他多种解法，下面仅给出添加辅助线的思路，举例如下：

1. 如图 22.2-23，过点 B 作 BG // AC，交 FD 的延长线于点 G.

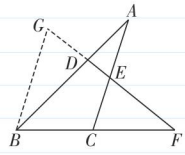


图 22.2-23

2. 如图 22.2-24，过点 B 作 BG // DF，交 AC 的延长线于点 G.

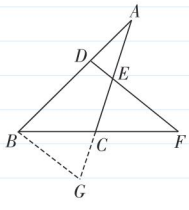


图 22.2-24

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法二 如图 22.2−22，过点 A 作 $AG \parallel BC$，交 FD 的延长线于点 G.

$\because E$ 是 AC 的中点，可得 $\triangle AGE \cong \triangle CFE$，$\therefore AG=CF$.

$\because AB=3AD$，$\therefore AD=\frac{1}{2}BD$.

$\because AG \parallel BC$，$\therefore \triangle AGD \backsim \triangle BFD$，

$\therefore \frac{AG}{BF}=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$. $\therefore AG=\frac{1}{2}BF$.

$\therefore CF=\frac{1}{2}BF$. $\therefore BC=CF$.

教你一招：作平行线构造成比例线段及相似三角形的思路

作平行线构造成比例线段及相似三角形的实质是构造“A”型或“X”型图形，常用的添加辅助线的规律：

（1）原图中的每条直线都可以看作平行线中的一条，针对每一条直线都可以过不在这条直线上的点作它的平行线.

（2）过图中任一点都可作不经过这点的直线的平行线.

拔尖角度▸ 6 利用对应边成比例法求函数表达式

例 13 如图 22.2−27，$\triangle ABC$ 为等边三角形，D，E 分别是 AC，BC 边上的点（不是顶点），$\angle BDE=60°$.

（1）求证：$\triangle DEC \backsim \triangle BDA$；

（2）若等边三角形的边长为 4，并设 $DC=x$，$BE=y$，试求 y 关于 x 的函数表达式.

解题秘方：紧扣“相似三角形对应边成比例的性质”用方程思想求函数表达式.

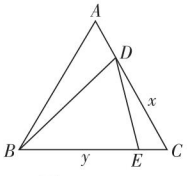


图 22.2−27

（1）**证明：**$\because \angle BDE=60°$，

$\therefore \angle EDC+\angle ADB=120°$.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore \angle C=\angle A=60°$.

$\therefore \angle DBA+\angle ADB=120°$.

$\therefore \angle EDC=\angle DBA$.

$\therefore \triangle DEC \backsim \triangle BDA$.

（2）**解：**$\because AB=BC=CA=4$，$BE=y$，$DC=x$，

$\therefore EC=4-y$，$AD=4-x$.

$\because \triangle DEC \backsim \triangle BDA$，$\therefore \frac{EC}{DA}=\frac{DC}{BA}$.

即 $\frac{4-y}{4-x}=\frac{x}{4}$，整理，得 $y=\frac{1}{4}x^2-x+4$.

$\therefore y$ 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{1}{4}x^2-x+4$（$0<x<4$）.

3 如图 22.2-25，过点 C 作 CG // DE，交 AB 于点 G.

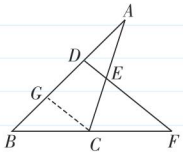


图 22.2−25

4. 如图 22.2-26，过点 C 作 CG // AB，交 DF 于点 G.

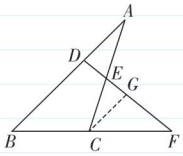


图 22.2−26

同理，还可过点 D，E，F 作平行线.

挑战·高分

解法规律

解决此类问题时，一般要从已知入手，找出三角形相似的条件，证得三角形相似后得出与两个变量相关的线段比例式，再把 x，y 代到比例式中化简得到两个变量间的关系的方程，然后化简成函数表达式，同时注意 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 7 利用相似比法探究坐标系中的动点问题

挑战·高分

例 14 如图 22.2−28，在直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的顶点 A，C 分别在 x 轴和 y 轴正半轴上，点 B 的坐标是（5，2），点 P 是 CB 边上一动点（不与点 C，点 B 重合），连接 OP，AP，过点 O 作射线 OE 交 AP 的延长线于点 E，交 CB 边于点 M，且 $\angle AOP = \angle COM$，令 $CP=x$，$MP=y$.

（1）当 x 为何值时，$OP \perp AP$？

（2）求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出 x 的取值范围.

（3）在点 P 的运动过程中，是否存在 x，使 $\triangle OCM$ 的面积与 $\triangle ABP$ 的面积之和等于 $\triangle EMP$ 的面积？若存在，请求出 x 的值；若不存在，请说明理由.

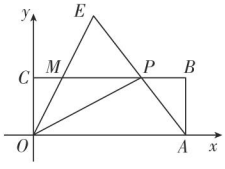


图 22.2−28

解题秘方：（1）若 $OP \perp AP$，可得 $\triangle OPC \backsim \triangle PAB$，根据相似三角形的性质列出比例式求解；

（2）证明 $\triangle OCM \backsim \triangle PCO$，根据相似三角形的性质建立关于 x，y 的比例式，从而得到 y 与 x 的函数表达式；

（3）过点 E 作 $ED \perp OA$ 于点 D，交 MP 于点 F，先根据题意得到 $\triangle EOA$ 的面积 = 矩形 $OABC$ 的面积，求出 ED 的长，再根据相似三角形的性质求出 PM 的长，最后由（2）的表达式计算 x 的值即可.

解：由题意知，$OA=BC=5$，$AB=OC=2$，$\angle B = \angle OCM=90°$，$BC \parallel OA$.

（1）若 $OP \perp AP$，则 $\angle OPC + \angle APB = \angle APB + \angle PAB=90°$，

$\therefore \angle OPC = \angle PAB$. $\therefore \triangle OPC \backsim \triangle PAB$.

$\therefore \dfrac{CP}{BA} = \dfrac{OC}{PB}$，即 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{5-x}$，解得 $x_1=4$，$x_2=1$（不合题意，舍去）.

$\therefore$ 当 $x=4$ 时，$OP \perp AP$.

（2）$\because BC \parallel OA$，$\therefore \angle CPO = \angle AOP$.

又 $\because \angle AOP = \angle COM$，$\therefore \angle CPO = \angle COM$.

$\because \angle OCM = \angle PCO$，$\therefore \triangle OCM \backsim \triangle PCO$.

$\therefore \dfrac{CM}{CO} = \dfrac{CO}{CP}$，即 $\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2}{x}$.

$\therefore y=x-\dfrac{4}{x}$（$2<x<5$）.

容易忽视 x 的取值范围是 $2<x<5$，而错误地得到 $x=1$ 或 $x=4$.

图解

如图22.2−29，$\angle OCM=\angle PCO=90°$，又易知 $\angle COM=\angle CPO$，根据“两角分别相等的三角形相似”，得 $\triangle OCM \backsim \triangle PCO$.

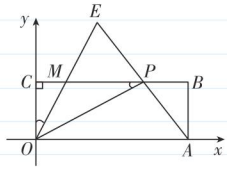


图 22.2−29

详解

由 $y>0$，得 $x-\dfrac{4}{x}>0$，

又 $x>0$，$\therefore x^2-4>0$，

$\therefore x>2$.

$\because$ 点 P 不与点 B 重合，

$\therefore x<5$，

$\therefore 2<x<5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）存在.

如图22.2−30，过点E作$ED\perp OA$于点D，交MP于点F，则$DF=AB=2$.

若△OCM的面积与△ABP的面积之和等于△EMP的面积，则$S_{\triangle OEA}=S_{矩形OABC}$.

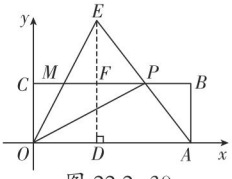


图 22.2−30

即$\frac{1}{2}\times 5\times ED=2\times 5$，

$\therefore ED=4$. $\therefore EF=2$.

$\because PM\parallel OA$，$\therefore \frac{EP}{EA}=\frac{EF}{ED}$，△$EMP\backsim$△$EOA$.

$\therefore \frac{MP}{OA}=\frac{EP}{EA}$. $\therefore \frac{EF}{ED}=\frac{MP}{OA}$，即$\frac{2}{4}=\frac{y}{5}$，解得$y=\frac{5}{2}$.

由$y=x-\frac{4}{x}$，得$x-\frac{4}{x}=\frac{5}{2}$，

解得$x_1=\frac{5+\sqrt{89}}{4}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{89}}{4}$（舍去）.

容易忽视线段长为正数，而得到错误的结果.

$\therefore$当$x=\frac{5+\sqrt{89}}{4}$时，△OCM的面积与△ABP的面积之和等于△EMP的面积.

学习札记

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

相似三角形的判定不但是本节知识的重点，也是平面几何知识的重点，其中相似三角形的判定、利用相似三角形进行有关的计算或证明一直是中考的必考内容. 在中考中，或单独考查或与特殊四边形、函数等知识相结合考查，题型既有选择题、填空题，也有解答题，与其他知识相结合时还经常以压轴题的形式出现.

三年中考兵法

考法1 利用相似三角形的判定定理判定三角形相似

例15 [中考·枣庄]如图22.2−31，在△ABC中，$\angle A=78°$，$AB=4$，$AC=6$，将△ABC沿图22.2−32中的虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是（　　）

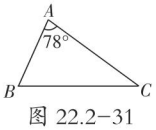
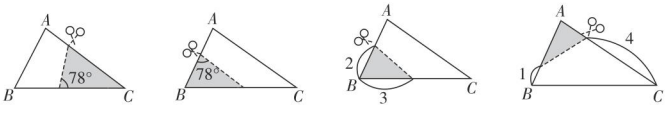


图 22.2−31



A　　B　　C　　D

图 22.2−32

试题评析：本题考查的是相似三角形的判定，熟知相似三角形的判定定理是解答此题的关键.

冲刺·满分

解法提醒

用两角分别相等来判定三角形相似是中考中最常见的题型，应掌握好寻找等角的方法，同时要注意图形中隐含的等角条件，如公共角、对顶角等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：A. 阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项不符合题意；

B. 阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项不符合题意；

C. 两三角形的对应边不成比例，故两三角形不相似，故本选项符合题意；

D. 三角形两组对应边成比例且夹角相等，故两三角形相似，故本选项不符合题意.

答案：C

学习札记

考法 2 利用相似三角形的判定和性质判断角的变化情况

例 16 ［中考·河北］若△ ABC 的每条边长增加各自的 10% 得到△ $A'B'C'$，则∠ B' 的度数与其对应角∠ B 的度数相比（　　）

A. 增加了 10%　　B. 减少了 10%

C. 增加了（1+10%）　　D. 没有改变

试题评析：本题考查了相似三角形，熟练掌握相似三角形的判定是解题的关键.

解：∵△ ABC 的每条边长增加各自的 10% 得到△ $A'B'C'$，

∴△ ABC 与△ $A'B'C'$ 的三边对应成比例.

∴△ ABC ∽△ $A'B'C'$. ∴∠ B' = ∠ B.

答案：D

解法提醒

先根据三边对应成比例的两个三角形相似得出两个三角形相似，再根据相似三角形对应角相等解答.

考法 3 利用相似三角形的判定和性质解决开放性探求条件问题

例 17 ［中考·潍坊］如图 22.2-33，在△ ABC 中，$AB \neq AC$，D，E 分别为边 AB，AC 上的点，$AC=3AD$，$AB=3AE$，点 F 为 BC 边上一点，添加一个条件，使得△ FDB 与△ ADE 相似，并说明理由.

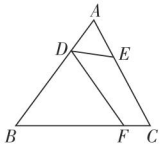


图 22.2-33

试题评析：本题考查相似三角形的判定和性质，平行线的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

解：（答案不唯一）$DF \parallel AC$.

理由：∵∠ A= ∠ A，$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}$，

∴△ ADE ∽△ ACB.

当 $DF \parallel AC$ 时，△ DFB ∽△ ACB，

∴△ DFB ∽△ ADE.

解法提醒

本题解题关键是由已知条件易得：△ ADE ∽ △ ACB，再根据相似三角形的传递性，只需补充一个条件，使△ BDF 与 △ BAC 相似即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 全等三角形与相似三角形的综合

例 18 [中考·株洲]如图 22.2-34，正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在等腰直角三角形 DEF 的斜边 EF 上，EF 与 BC 相交于点 G，连接 CF.

（1）求证：$\triangle DAE \cong \triangle DCF$；

（2）求证：$\triangle ABG \backsim \triangle CFG$.

试题评析：此题考查了全等三角形的判定与性质，以及相似三角形的判定，熟练掌握这些知识是解本题的关键.

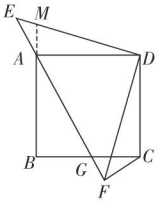


图 22.2-34

证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle EDF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ADC = \angle EDF = 90°$，$AD = CD$，$DE = DF$.

$\therefore \angle ADE + \angle ADF = \angle ADF + \angle CDF$.

$\therefore \angle ADE = \angle CDF$.

在$\triangle DAE$和$\triangle DCF$中，$\begin{cases} DE = DF, \\ \angle ADE = \angle CDF, \\ DA = DC, \end{cases}$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCF$（$SAS$）.

（2）如图 22.2-34，延长 BA，交 ED 于点 M.

∵$\triangle DAE \cong \triangle DCF$，

$\therefore \angle EAD = \angle FCD$，

即$\angle EAM + \angle MAD = \angle BCD + \angle BCF$，

∵$\angle MAD = \angle BCD = 90°$，

$\therefore \angle EAM = \angle BCF$.

∵$\angle EAM = \angle BAG$，

$\therefore \angle BAG = \angle BCF$.

又∵$\angle AGB = \angle CGF$，

$\therefore \triangle ABG \backsim \triangle CFG$.

思路点拨

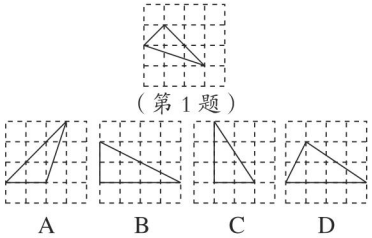
由正方形 ABCD 与等腰直角三角形 DEF，得到两对边相等、一对角相等，利用 SAS 即可得证.

由第一问的全等三角形的对应角相等，根据等量代换得到 $\angle BAG = \angle BCF$，再由对顶角相等，利用两对角相等的三角形相似即可得证.

两年模拟兵法

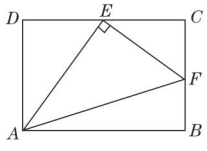
答案见 229 页

1. 与图中的三角形相似的是（　　）


（第 1 题）

A　　B　　C　　D

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 CD，BC 边上的点. 若$\angle AEF = 90°$，则一定有（　　）



（第 2 题）

A. $\triangle ADE \backsim \triangle ECF$

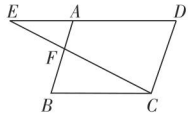
B. $\triangle ECF \backsim \triangle AEF$

C. $\triangle ADE \backsim \triangle AEF$

D. $\triangle AEF \backsim \triangle ABF$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [中考·盐城]如图，点 F 在平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，射线 CF 交 DA 的延长线于点 E，在不添加辅助线的情况下，与△ AEF 相似的三角形有（　　）

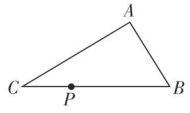


（第 3 题）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

4. [模拟·合肥]如图，已知点 P 是 Rt△ ABC 的斜边 BC 上任意一点，若过点 P 作直线 PD 与直角边 AB 或 AC 相交于点 D，截得的小三角形与△ ABC 相似，那么 D 点的位置最多有（　　）

A. 2 处　　B. 3 处　　C. 4 处　　D. 5 处

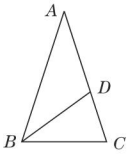


（第 4 题）

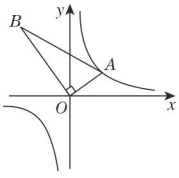
5. [中考·孝感]如图，在△ ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，BD 平分 $\angle ABC$，交 AC 于点 D. 若 $AC=2$，则 AD 的长是（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

C. $\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}+1$



（第 5 题）

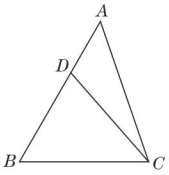


（第 6 题）

6. [中考·孝感]如图，△ AOB 是直角三角形，$\angle AOB=90°$，$OB=2OA$，点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上. 若点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，则 k 的值为（　　）

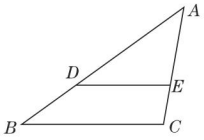
A. -4　　B. 4　　C. -2　　D. 2

7. [中考·毕节]如图，在△ ABC 中，D 为 AB 边上一点，且 $\angle BCD=\angle A$，已知 $BC=2\sqrt{2}$，$AB=3$，则 $BD=$_____.



（第 7 题）

8. 如图，在△ ABC 中，点 D，E 分别在边 AB，AC 上，若 $DE\parallel BC$，$DE=2$，$BC=3$，求 $\frac{AE}{AC}$ 的值.

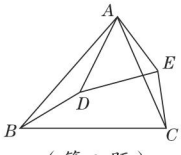


（第 8 题）

9. [中考·滨州]如图，在△ ABC 和△ ADE 中，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle ABC=\angle ADE$.

（1）写出图中两对相似三角形（不得添加辅助线）；

（2）请分别说明两对三角形相似的理由.



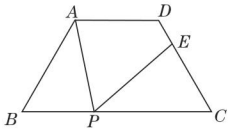
（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. [中考·南充]如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=3$，$BC=7$，$\angle B=60°$，P 为 BC 边上一点（不与 B，C 重合），过点 P 作 $\angle APE=\angle B$，PE 交 CD 于 E.

（1）求证：$\triangle APB \backsim \triangle PEC$；

（2）若 $CE=3$，求 BP 的长.

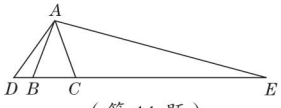


（第 10 题）

11. 如图，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，D 为 CB 延长线上一点，E 为 BC 延长线上一点，$AB^2=DB \cdot CE$.

（1）求证：$\triangle ADB \backsim \triangle EAC$；

（2）若 $\angle BAC=40°$，求 $\angle DAE$ 的度数.

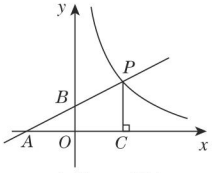


（第 11 题）

12. [中考·资阳]如图，直线 $y=ax+1$ 与 x 轴，y 轴分别相交于 A，B 两点，与双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）相交于点 P，$PC \perp x$ 轴于点 C，且 $PC=2$，点 A 的坐标为（-2，0）. 【导学号：8618152】

（1）求双曲线对应的函数表达式；

（2）若点 Q 为双曲线上点 P 右侧的一点，且 $QH \perp x$ 轴于 H，当以点 Q，C，H 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 相似时，求点 Q 的坐标.



（第 12 题）

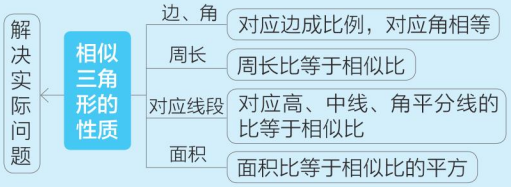
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.3 相似三角形的性质

核心知识

- 相似三角形对应线段的性质
- 相似三角形面积的性质
- 相似三角形性质的实际应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 相似三角形对应线段的比

1. **定理 1** 相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比. 即：相似三角形对应线段的比等于相似比.

特别提醒：（1）注意“对应”二字，应用时要找准对应线段；

（2）相似比是有顺序的，不能颠倒相似三角形中元素的顺序.

2. **定理 2** 相似三角形周长的比等于相似比.

拨考向 利用相似三角形对应线段的性质求线段的长

题型 1：相似三角形对应高的性质在求线段长中的应用

例 1 如图 22.3-1，在△ABC中，AD是BC边上的高，矩形$EFGH$内接于△ABC，且长边FG在BC上，AD与EH的交点为P，矩形相邻两边的比为 1 ∶ 2. 若BC=30 cm，AD=10 cm，求矩形$EFGH$的周长.

解题秘方：利用“相似三角形对应高的比等于相似比”求解.

解：设HG=x cm，则EH=2x cm.

易得$AP \perp EH$，PD=HG.

∵ AD=10 cm，

∴ AP=（10−x）cm.

∵四边形$EFGH$为矩形，∴ $EH \parallel BC$.

∴△AEH∽△ABC.

$\therefore \dfrac{AP}{AD}=\dfrac{EH}{BC}$，即$\dfrac{10-x}{10}=\dfrac{2x}{30}$.

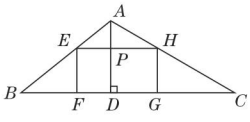


图 22.3-1

解得x=6.

∴ HG=6 cm，EH=12 cm.

∴矩形$EFGH$的周长为 2×（12+6）=36（cm）.

提分·必记

深度理解

对应高、对应中线与对应角平分线分别是指相似三角形对应边上的高、中线与对应内角的平分线.

提分·秘诀

详解

∵四边形EFGH是矩形，

∴ EH // FG，HG ⊥ FG.

又∵AD是BC边上的高，

∴ AD ⊥ FG.

∴ AP ⊥ EH.

∵ EH // FG，PD ⊥ FG，HG ⊥ FG，

∴ PD=HG.

方法点拨

相似三角形中对应线段的比等于相似比，其中“对应线段”除对应边外，还有对应边上的高、中线，对应角的平分线. 即：对应线段成比例.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：相似三角形对应周长的性质在求周长中的应用

例 2 如果两个相似三角形的相似比是 3 ∶ 2，它们的周长差为 8，那么较大的三角形的周长为_____.

解题秘方： 紧扣“相似三角形周长的比等于相似比”列方程求解.

解： 设较大的三角形的周长为 x，则较小的三角形的周长为 $x-8$.

∵这两个相似三角形的相似比为 3 ∶ 2，

∴这两个三角形的周长比为 3 ∶ 2.

$\therefore \dfrac{x}{x-8}=\dfrac{3}{2}$，解得 $x=24$.

答案： 24

解题通法： **用方程求解周长的思路**

当问题中出现两个相似三角形的周长差求周长时，一般先将两个三角形的周长都用含未知数的代数式表示，再根据“相似三角形周长的比等于相似比”列方程，解方程即可解决问题.

特别提醒

利用相似三角形周长的比等于相似比时，要注意对应关系，即较大的三角形的周长∶较小的三角形的周长 = 3 ∶ 2.

也可设较小的三角形的周长为 2x，较大的三角形的周长为 3x.
则 3x−2x=8，∴ x=8，
∴较大的三角形的周长为 3x=24.

知识▶ 2 相似三角形面积的比

1. 定理 3 相似三角形面积的比等于相似比的平方. 若 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且它们的相似比为 k，则 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=k^2$.

特别提醒： 面积的比是相似比的平方，不要与对应线段的比、周长的比等于相似比混淆.

2. 相似多边形周长的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

提分·必记

活学巧记

两个相似三角形，
各角对应都相等，
各边对应成比例，
周长比等于相似比，
面积比等于相似比平方.

考向▶ 利用相似三角形面积的比求三角形的面积

例 3 如图 22.3−2，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$BC=6$，$B'C'=4$，$AD \perp BC$，$AD=4$，求 $\triangle A'B'C'$ 的面积.

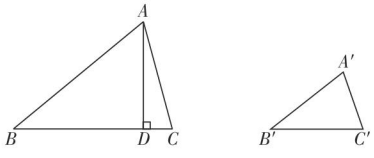


图 22.3−2

解题秘方： 利用“相似三角形面积的比等于相似比的平方”求解.

解： $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC \cdot AD=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

$\because \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\dfrac{BC}{B'C'}\right)^2$，

即 $\dfrac{12}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\dfrac{6}{4}\right)^2=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{12\times 4}{9}=\dfrac{16}{3}$，即 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $\dfrac{16}{3}$.

不要误认为面积的比等于相似比.

提分·秘诀

另解

例 3 也可以用另一种方法求解，如：过点 A′ 作 A′D′ ⊥ B′C′ 于 D′，利用相似三角形的性质先求出 △A′B′C′ 中 B′C′ 边上的高 A′D′ 的长，再利用 $S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}B'C' \cdot A'D'$ 求面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拨尖角度 1 利用“A型”法找相似比求线段的长

例4 如图22.3-3，在Rt△ABC中，AC=4，BC=3，∠C=90°，DE // AB.

（1）当△CDE的面积与四边形$DABE$的面积相等时，求DE的长；

（2）当△CDE的周长与四边形$DABE$的周长相等时，求DE的长.

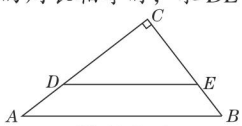


图22.3-3

解题秘方：紧扣“平行线构成A型图形相似”的特征，利用相似三角形的性质进行求解.

解：∵AC=4，BC=3，∠C=90°，∴AB=5.

∵DE // AB，∴△ABC∽△DEC.

（1）当△CDE的面积与四边形$DABE$的面积相等时，$S_{\triangle CDE}$ ∶ $S_{\triangle CAB}$=1 ∶ 2.

又∵$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CAB}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2$，∴$\frac{DE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$DE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

（2）当△CDE的周长与四边形$DABE$的周长相等时，$CD+CE=AD+AB+BE$.

∴$CD+CE=\frac{AB+AC+BC}{2}=6$.

∵△ABC∽△DEC，∴$\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{AC}=\frac{CE}{BC}$.

∴$\frac{DE}{AB}=\frac{CD+CE}{AC+BC}=\frac{6}{7}$.

∴$DE=\frac{6}{7}AB=\frac{30}{7}$.

挑战·高分

解法提醒

- 相似三角形周长的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方；反之，两个三角形相似，相似比等于周长比，相似比等于面积比的算术平方根.
- 解题时，若题中涉及“对应线段”（中线、高线、角平分线）或面积时，利用“相似三角形对应线段的比等于相似比，相似三角形面积的比等于相似比的平方”是常用的解题途径.

拨尖角度 2 利用“X型”法找相似比求面积

例5 如图22.3-4，在平行四边形$ABCD$中，点E是AD的中点，连接EC交对角线BD于点F，若$S_{\triangle DEC}$=3，则$S_{\triangle BCF}$=_____.

解题秘方：紧扣“相似三角形的面积比的性质”，先求出与之相似的三角形的面积及相似比.

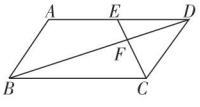


图22.3-4

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴AD // BC.

∴△DEF∽△BCF. ∴$\frac{DE}{BC}=\frac{EF}{CF}$.

挑战·高分

知识储备

1. 平行四边形的对边平行且相等.
2. 等高三角形面积的比等于底的比.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵点 E 是 AD 的中点，∴ $DE=AE=\frac{1}{2}AD$.

又∵ $AD=BC$，∴ $DE=\frac{1}{2}BC$.

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{EF}{CF}=\frac{1}{2}$. ∴ $\frac{EF}{EC}=\frac{1}{3}$.

∴ $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DEC}}=\frac{EF}{EC}=\frac{1}{3}$.

又∵ $S_{\triangle DEC}=3$，∴ $S_{\triangle DEF}=1$.

而 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BCF}}=\left(\frac{EF}{CF}\right)^2=\frac{1}{4}$，∴ $S_{\triangle BCF}=4$.

答案： 4

详解

如图 22.3-5，过点 D 作 DH 垂直 EC 于点 H，

则 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}EF\cdot DH$，

$S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}EC\cdot DH$，

∴ $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle DEC}=EF:EC$.

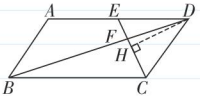


图 22.3-5

拔尖角度▸ 3 利用建相似比模型法解实际应用问题

挑战·高分

例 6 某小区的居民筹集资金 1 600 元，计划在一块梯形空地 $ABCD$ 上种植花木（如图 22.3-6），其中 $AD\parallel BC$，$AD=10$ m，$BC=20$ m.

（1）他们在△ AMD 和△ CMB 地带上种植太阳花，价格为 8 元/m^2，当△ AMD 地带上种满太阳花后（图 22.3-6 中阴影部分），共花了 160 元，请计算种满△ CMB 地带所需的费用；

（2）若其余地带有玫瑰花和茉莉花两种花木可供选择，价格分别为 12 元/m^2 和 10 元/m^2，则应选择种哪种花木可以刚好用完所筹集的资金？

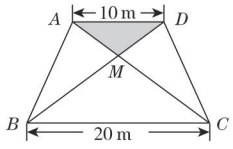


图 22.3-6

解题秘方： 紧扣“相似三角形面积的比”的性质，建立相似三角形的模型求解.

思路点拨

- 先证明△ AMD 与△ CMB 相似，然后根据相似三角形的性质来求解.
- 根据(1)可得△ AMD 和△ CMB 的面积，进而可求出△ AMD 的边 AD 上的高和△ CMB 的边 BC 上的高；由于梯形 ABCD 的高为△ AMD 的边 AD 上的高与△ BMC 的边 BC 上的高之和，故可求得梯形的面积，进而分别计算种植两种花木的费用.

解：（1）∵ $AD\parallel BC$，∴△ $AMD\backsim$△ CMB.

∴ $\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle CMB}}=\left(\frac{AD}{BC}\right)^2=\frac{1}{4}$.

∵在△ AMD 地带上种满太阳花共花费 160 元，价格为 8 元/m^2，

∴ $S_{\triangle AMD}=20$ m^2. ∴ $S_{\triangle CMB}=80$m^2.

则在△ CMB 地带上种满太阳花所需的费用为 $8\times80=640$（元）.

（2）设△ AMD 的边 AD 上的高为 h_1 m，△ BMC 的边 BC 上的高为 h_2 m，则梯形 $ABCD$ 的高为（h_1+h_2）m.

∵ $\frac{1}{2}\times10h_1=20$，∴ $h_1=4$；∵ $\frac{1}{2}\times20h_2=80$，∴ $h_2=8$.

∵ $S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)(h_1+h_2)=\frac{1}{2}\times(10+20)\times(4+8)=180$（m^2），

∴ $S_{\triangle AMB}+S_{\triangle DMC}=180-20-80=80$（m^2）.

∵ $160+640+80\times12=1\,760$（元），$160+640+80\times10=1\,600$（元），

∴选择种植茉莉花可以刚好用完所筹集的资金.

另解

∵△ $AMD\backsim$△ CMB，

∴ $\frac{AM}{CM}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$.

∴ $CM=2AM$.

又∵△ AMD 与△ DMC 是等高三角形，

∴ $S_{\triangle DMC}=2S_{\triangle AMD}=40$ m^2.

同理可得 $S_{\triangle AMB}=40$m^2，

∴ $S_{\triangle AMB}+S_{\triangle DMC}=40+40=80$（m^2）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 4 利用分类建立函数模型法巧求最值

例 7 如图 22.3−7 ①，已知一张三角形纸片 ABC，BC 的长为 8，BC 边上的高为 6，$\angle B$ 和 $\angle C$ 都为锐角，M 为 AB 上一动点（点 M 与点 A，B 不重合），过点 M 作 $MN \parallel BC$，交 AC 于点 N，在 $\triangle AMN$ 中，设 MN 的长为 x，MN 上的高为 h.

（1）请你用含 x 的代数式表示 h；

（2）将 $\triangle AMN$ 沿 MN 折叠，使 $\triangle AMN$ 落在四边形 $BCNM$ 所在的平面，设点 A 落在平面上的点为 A_1，$\triangle A_1MN$ 与四边形 $BCNM$ 重叠部分的面积为 y，当 x 为何值时，y 最大，最大值为多少？

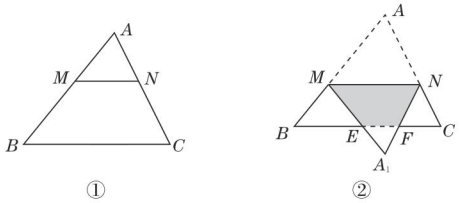


图 22.3−7

解题秘方：（1）可以利用相似三角形对应高的比等于相似比求解；

（2）由于折叠后点 A_1 的位置可能在四边形 $BCNM$ 内部，也可能在 BC 边上，也可能在四边形 $BCNM$ 外部，故需分类讨论.

解：（1）$\because MN \parallel BC$，$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

$$\therefore \frac{h}{6}=\frac{x}{8}. \therefore h=\frac{3x}{4}\ (0<x<8).$$

（2）易知 $\triangle AMN \cong \triangle A_1MN$，$\therefore \triangle A_1MN$ 的边 MN 上的高为 h.

①当点 A_1 落在四边形 $BCNM$ 内部或 BC 边上时，

$$y=S_{\triangle A_1MN}=\frac{1}{2}MN\cdot h=\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{4}x=\frac{3}{8}x^2\ (0<x\leqslant 4).$$

②当点 A_1 落在四边形 $BCNM$ 外部时，如图 22.3−7 ②所示.

设 A_1M，A_1N 与 BC 分别相交于点 E，F，$\triangle A_1EF$ 的边 EF 上的高为 h_1，则 $h_1=2h-6=\frac{3}{2}x-6$.

$\because EF \parallel MN$，$\therefore \triangle A_1EF \backsim \triangle A_1MN$.

又易知 $\triangle A_1MN \backsim \triangle ABC$，$\therefore \triangle A_1EF \backsim \triangle ABC$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle A_1EF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{h_1}{6}\right)^2.$$

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24,$$

$$\therefore S_{\triangle A_1EF}=\left(\frac{\frac{3}{2}x-6}{6}\right)^2\times 24=\frac{3}{2}x^2-12x+24.$$

$$\therefore y=S_{\triangle A_1MN}-S_{\triangle A_1EF}=\frac{3}{8}x^2-\left(\frac{3}{2}x^2-12x+24\right)=-\frac{9}{8}x^2+12x-24\ (4<x<8).$$

挑战·高分

解法提醒

本题运用了分类讨论思想，对点 A_1 与四边形 BCNM 的位置情况进行分类.

注意多种情况的存在，利用相似找函数关系往往需要考虑相似比与对应线段的比，以及相似比与面积比之间的关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综上所述，当 $0<x\leqslant 4$ 时，$y=\frac{3}{8}x^2$，当 $x=4$ 时，$y_{最大值}=6$；

当 $4<x<8$ 时，$y=-\frac{9}{8}x^2+12x-24$，当 $x=\frac{16}{3}$ 时，$y_{最大值}=8$.

$\because 8>6$，$\therefore$ 当 $x=\frac{16}{3}$ 时，y 最大，$y_{最大值}=8$.

学习札记

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

相似三角形的性质是中考命题的热点，主要考查利用相似三角形的性质求角的度数或线段的长度，证明及运用性质解决实际问题，还常与相似三角形的判定、方程、函数等知识结合在一起考查，题型有选择题、填空题、解答题.

三年中考兵法

冲刺·满分

解法提醒

- 相似三角形对应角相等，对应边的比等于相似比，对应线段（中线、高、角平分线）的比等于相似比，周长的比等于相似比.
- 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

考法 1 利用相似三角形的性质求比值

例 8 [中考·连云港]如图 22.3-8，已知 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$AB:DE=1:2$，则下列等式一定成立的是（　　）

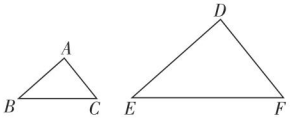


图 22.3-8

A. $\frac{BC}{DF}=\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\angle A\text{ 的度数}}{\angle D\text{ 的度数}}=\frac{1}{2}$

C. $\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle DEF\text{ 的面积}}=\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle DEF\text{ 的周长}}=\frac{1}{2}$

试题评析：本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形的对应角相等、对应边的比相等，相似三角形周长的比等于相似比、面积的比等于相似比的平方是解题的关键.

解：由 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，可得：

$\frac{BC}{EF}=\frac{1}{2}$，A 不一定成立；

$\frac{\angle A\text{ 的度数}}{\angle D\text{ 的度数}}=1$，B 不成立；

$\frac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle DEF\text{ 的面积}}=\frac{1}{4}$，C 不成立；

$\frac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle DEF\text{ 的周长}}=\frac{1}{2}$，D 成立.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用相似三角形的判定和性质解与平行四边形的综合应用

例 9 [中考·绥化]如图 22.3-9，在▱$ABCD$中，AC，BD相交于点O，点E是OA的中点，连接BE并延长交AD于点F，已知$S_{\triangle AEF}=4$，则下列结论：①$\frac{AF}{FD}=\frac{1}{2}$；②$S_{\triangle BCE}=36$；③$S_{\triangle ABE}=12$；④$\triangle AEF\backsim\triangle ACD$. 其中一定正确的是（　　）

A. ①②③④　　B. ①④

C. ②③④　　D. ①②③

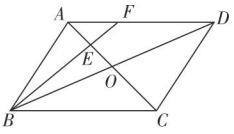


图 22.3-9

试题评析：本题考查了相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$AO=\frac{1}{2}AC$.

∵点E是OA的中点，∴$AE=\frac{1}{3}CE$.

∵$AD\parallel BC$，∴$\triangle AFE\backsim\triangle CBE$. ∴$\frac{AF}{BC}=\frac{AE}{CE}=\frac{1}{3}$.

∵$AD=BC$，∴$AF=\frac{1}{3}AD$. ∴$\frac{AF}{FD}=\frac{1}{2}$，故①正确.

∵$S_{\triangle AEF}=4$，$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCE}}=\left(\frac{AF}{BC}\right)^2=\frac{1}{9}$，∴$S_{\triangle BCE}=36$，故②正确.

∵$\triangle AFE\backsim\triangle CBE$，∴$\frac{EF}{BE}=\frac{AE}{CE}=\frac{1}{3}$. ∴$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABE}}=\frac{1}{3}$.

∴$S_{\triangle ABE}=12$，故③正确.

∵$\triangle AEF$与$\triangle ACD$只有一对角相等.

∴$\triangle AEF$与$\triangle ACD$不一定相似，故④错误.

答案：D

解法提醒

根据平行四边形的性质得到$AE=\frac{1}{3}CE$，根据相似三角形的性质得到$\frac{AF}{BC}=\frac{AE}{CE}=\frac{1}{3}$，等量代换得到$AF=\frac{1}{3}AD$，于是得到$\frac{AF}{FD}=\frac{1}{2}$，故①正确；

根据相似三角形的性质得到$S_{\triangle BCE}=36$，故②正确；

根据三角形的面积公式得到$S_{\triangle ABE}=12$，故③正确；

由于$\triangle AEF$与$\triangle ACD$只有一对角相等，因此$\triangle AEF$与$\triangle ACD$不一定相似，故④错误.

两年模拟兵法

☞答案见 230 页

1. [中考·重庆]已知$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，且相似比为 1∶2，则$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的面积比为（　　）

A. 1∶4　　B. 4∶1

C. 1∶2　　D. 2∶1

2. [中考·白银]如果两个相似三角形的面积比是 1∶4，那么它们的周长比是（　　）

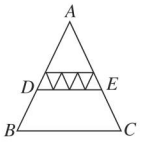
A. 1∶16　　B. 1∶4

C. 1∶6　　D. 1∶2

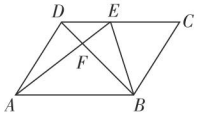
3. [中考·常德]如图，在等腰三角形$\triangle ABC$中，$AB=AC$，图中所有三角形均相似，其中最小的三角形面积为 1，$\triangle ABC$的面积为 42，则四边形$DBCE$的面积是（　　）

A. 20　　B. 22

C. 24　　D. 26



（第 3 题）



（第 4 题）

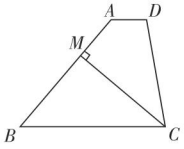
4. 如图，在平行四边形$ABCD$中，E是CD上的一点，$DE∶EC=2∶3$，连接AE，BE，BD，且AE，BD交于点F，则$S_{\triangle DEF}∶S_{\triangle EBF}∶S_{\triangle BAF}=$（　　）

A. 2∶2∶25　　B. 4∶9∶25

C. 2∶3∶5　　D. 4∶10∶25

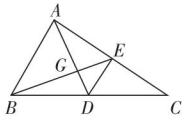
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，CM 是 $\angle BCD$ 的平分线，且 $CM \perp AB$，M 为垂足，$AM=\frac{1}{3}AB$，若四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{15}{7}$，则四边形 $AMCD$ 的面积是_____.



（第 5 题）

6. 如图，在△ ABC 中，D，E 分别为 BC，AC 的中点，AD，BE 相交于点 G. 若 $S_{\triangle GDE}=1$，求 $S_{\triangle ABC}$.

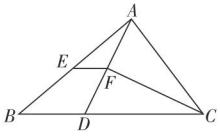


（第 6 题）

7. 如图，在△ ABC 中，$BC>AC$，点 D 在 BC 上，且 $DC=AC$，$\angle ACB$ 的平分线 CF 交 AD 于点 F，点 E 是 AB 的中点，连接 EF.

（1）求证：$EF \parallel BC$；

（2）若四边形 $BDFE$ 的面积为 6，求△ ABD 的面积.



（第 7 题）

8. 有一道题：

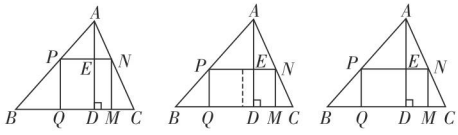
如图①，有一块三角形余料 ABC，它的边 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm. 要把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，问：加工成的正方形零件的边长为多少?

小颖解得此题的答案为 48 mm，小颖善于反思，她又提出了如下的问题：

（1）如果原题中所要加工的零件是一个矩形，且此矩形是由两个并排放置的正方形组成，如图②，此时，这个矩形零件相邻的两条边长分别是多少?

（2）如果原题中所要加工的零件只是一个矩形，如图③，这样，此矩形零件两条相邻的边长就不能确定，但这个矩形面积有最大值，求面积达到这个最大值时矩形零件相邻的两条边长.

【导学号：8618152】



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.4 图形的位似变换

核心知识
- 位似图形的定义及性质
- 位似变换作图
- 位似变换的坐标的特征

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 位似图形的定义



1. 位似图形与位似变换 一般地，如果一个图形上的点 A_1，B_1，…，P_1 和另一个图形上的点 A，B，…，P 分别对应，并且满足下面两点：

（1）直线 AA_1，BB_1，…，PP_1 都经过同一点 O；

（2）$\dfrac{OA_1}{OA}=\dfrac{OB_1}{OB}=\cdots=\dfrac{OP_1}{OP}=k$.

那么，这两个图形叫做位似图形，点 O 叫做位似中心．这两个图形之间的变换叫做位似变换．

注意： 两个位似图形的位似中心有且只有一个．

2. 位似与相似的关系

（1）相似仅要求两个图形形状完全相同，而位似是在相似的基础上要求对应顶点的连线相交于一点；

（2）如果两个图形是位似图形，那么这两个图形必是相似图形，但是相似的两个图形不一定是位似图形，因此，位似是相似的特殊情况．

提分·必记

特别提醒

位似中心可能位于两个位似图形的同侧，也可能位于两个位似图形之间，还可能位于两个位似图形的内部或边上或某一个顶点处．常见位似图形的构成如图 22.4−1 所示．

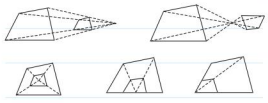


图 22.4−1

拔考向 利用位似图形的定义识别位似图形

例 1 判断如图 22.4−2 所示的各图中的两个图形是否是位似图形，如果是，请指出其位似中心．

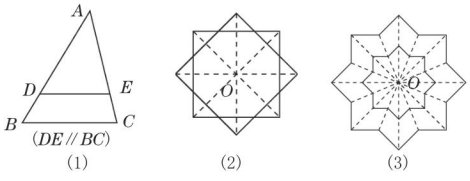


图 22.4−2

解题秘方： 紧扣“位似图形的定义”进行判断．

解：（1）是位似图形，位似中心为点 A；

（2）不是位似图形；

（3）是位似图形，位似中心为点 O.

提分·秘诀

方法提醒

判断两个图形是否为位似图形的方法：

首先看这两个图形是否相似；

然后看每组对应顶点的连线是否交于一点．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 位似图形的性质

位似图形具有的性质

（1）位似图形每组对应顶点的连线必过位似中心；

（2）位似图形任意一组对应点到位似中心的距离之比等于相似比；

（3）位似图形的对应线段平行（或在一条直线上），且对应线段之比相等；

（4）两个图形位似，则两个图形必相似，其周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方.

特别解读：（1）我们利用位似图形的性质，可以作出已知图形的位似图形，把一个图形放大或缩小，同时也可以利用位似图形的性质确定位似中心，求相似比及图形的周长与面积等；

（2）利用位似图形的性质求两个位似图形的相似比，先要确定相似的顺序，再确定相似比.

提分·必记

示例图

如图 22.4-3，△ ABC 与△ DEF 位似.

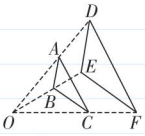


图 22.4-3

$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OF}=k$；

直线 AD，BE，CF 交于一点 O；

$AB\parallel DE$，$BC\parallel EF$，$AC\parallel DF$；

△ $ABC\backsim$△ DEF，相似比为 k.

相等

考向 利用位似图形的性质解相关应用

题型 1：位似图形的性质在确定位似中心中的应用

例 2 找出如图 22.4-4 所示的位似图形的位似中心.

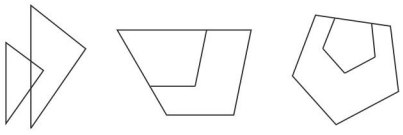


图 22.4-4

解题秘方：紧扣“位似图形每组对应顶点的连线必过位似中心”进行查找.

解：如图 22.4-5，点 P_1，P_2，P_3 即为所求的位似中心.

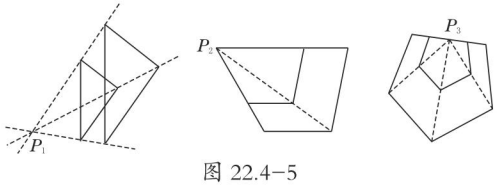


图 22.4-5

提分·秘诀

方法提醒

确定位似图形的位似中心时，要认真观察图形，寻找对应顶点，然后经过每组对应顶点作直线，它们的交点即为位似中心.

注意：实际作图时，只需作出两组对应顶点的连线即可.

题型 2：位似图形相似比的性质在求值中的应用

例 3 如图 22.4-6，△ ABC 与△ $A'B'C'$ 关于点 O 位似，$BO=3$，$B'O=6$.

（1）若 $AC=5$，求 $A'C'$ 的长；

（2）若△ ABC 的面积为 7，求△ $A'B'C'$ 的面积.

解题秘方：紧扣位似图形相似比的性质进行计算.

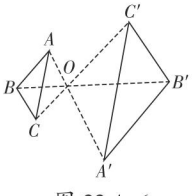


图 22.4-6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵ △ABC与△$A'B'C'$是位似图形，$BO:B'O=3:6=1:2$，

∴ △$ABC\backsim$△$A'B'C'$，且相似比为$\frac{1}{2}$.

∴$\frac{AC}{A'C'}=\frac{1}{2}$，即$\frac{5}{A'C'}=\frac{1}{2}$.

∴$A'C'=10$.

（2）根据题意，得$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

即$\frac{7}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{1}{4}$，

∴$S_{\triangle A'B'C'}=7\times4=28$.

特别提醒

1. 位似图形是相似图形，所以它具有相似图形的一切特征.
2. 位似与平移、轴对称、旋转一样，是图形的变换方式，但位似可以改变图形的位置和大小，其他变换只能改变图形的位置，即位似是图形的相似变换，而其他变换是图形的全等变换.

点知识▶3 位似图形的画法

提分·必记

画位似图形的步骤

（1）确定位似中心（位似中心可以在图形外部，也可以在图形内部，还可以在图形的边上或在某一个顶点处）；

（2）分别连接位似中心和能代表原图的关键点，并延长；

（3）根据相似比，确定所画位似图形的关键点的位置；

（4）顺次连接所作各点，得到放大或缩小的图形.

注意：画位似图形时，要弄清相似比，即分清是已知图形与新图形的相似比，还是新图形与已知图形的相似比.

特别提醒

位似中心的选取一般考虑使画图方便且符合要求.

从一点为位似中心画位似图形时，符合要求的图形往往不唯一. 一般情况下，同一个位似中心的两侧各有一个符合要求的图形.

拔考向▶利用位似图形的定义和性质作位似图形

提分·秘诀

例4 ［开放题］如图22.4-7，已知四边形$ABCD$，将四边形$ABCD$放大，使放大后的图形与原图形是位似图形，且放大后的图形与原图形对应线段的比为2∶1.

解题秘方：紧扣“位似图形的定义和性质”，按画位似图形的步骤作图（画法不唯一）.

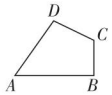


图22.4-7

解：根据位似中心的不同位置情况进行作图.

画法一 位似中心在四边形的顶点上，如图22.4-8，以点A为位似中心，四边形$AB_1C_1D_1$就是所求作的图形.

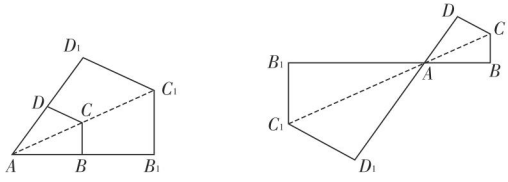


图22.4-8

另解

位似中心在四边形内部，如图22.4-10，以四边形$ABCD$内部一点为位似中心，四边形$A_1B_1C_1D_1$就是所求作的图形.

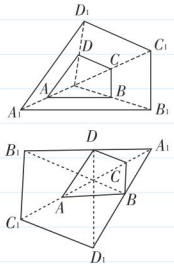


图22.4-10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

画法二 位似中心在四边形的边上，如图 22.4−9，以 AD 边上一点为位似中心，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是所求作的图形．

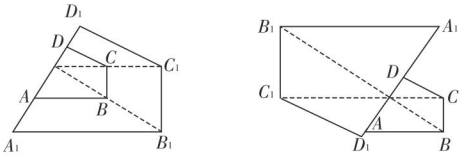


图 22.4−9

位似中心在四边形外部，如图 22.4−11，以四边形 $ABCD$ 外部一点为位似中心，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是所求作的图形．

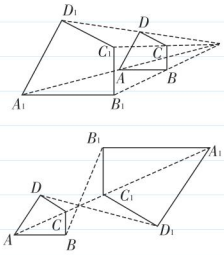


图 22.4−11

点知识▶ 4 平面直角坐标系中图形的位似变换

1. 位似变换时对应点的坐标变化规律

在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$. 即若原图形的某一顶点坐标为 (x_0, y_0)，则其位似图形对应顶点的坐标为 (kx_0, ky_0) 或 $(-kx_0, -ky_0)$.

注意： 这里的相似比指的是新图形与原图形的对应边的比．

2. 位似变换与平移、轴对称、旋转三种变换的联系和区别

（1）位似、平移、轴对称、旋转都是图形变换的基本形式，它们的本质区别在于：平移、轴对称、旋转三种图形变换是全等变换，而位似变换是相似变换．

（2）在直角坐标系中，把一个图形进行平移、轴对称、旋转或位似变换，其对应点的坐标都有各自的变化规律：

①平移变换是横坐标或纵坐标加上（或减去）平移的距离；

②在轴对称变换中，以 x 轴为对称轴，则对应点的横坐标相等，纵坐标互为相反数；以 y 轴为对称轴，则纵坐标相等，横坐标互为相反数；

③在旋转变换中，一个图形绕原点旋转 $180°$，则旋转前后两个图形对应点的横坐标与纵坐标都分别互为相反数；

④在位似变换中，当以原点为位似中心时，变换后与变换前两个图形对应点的横坐标之比的绝对值、纵坐标之比的绝对值都等于变换后的图形与变换前的图形的相似比．

提分·必记

特别提醒

- 在平面直角坐标系中，以原点为位似中心时，使位似图形与原图形的相似比为 k，那么：当位似图形与原图形在原点的同侧时，原图形上的点 (x, y) 对应的位似图形上的点的坐标为 (kx, ky)；当位似图形与原图形在原点的两侧时，原图形上的点 (x, y) 对应的位似图形上的点的坐标为 $(-kx, -ky)$.
- 当 $k>1$ 时，图形扩大为原来的 k 倍；当 $0<k<1$ 时，图形缩小为原来的 k.

拔考向▶ 利用位似变换中对应点的坐标的变化规律作图

例 5 如图 22.4−12，已知 O 是坐标原点，B，C 两点的坐标分别为 $(3, -1)$，$(2, 1)$.

（1）画出以点 O 为位似中心，在 y 轴的左侧将 $\triangle OBC$ 放大为原来的 2 倍（即新图与原图的相似比为 2）的位似图形 $\triangle OB'C'$；

（2）分别写出 B，C 两点的对应点 B'，C' 的坐标；

（3）如果 $\triangle OBC$ 内部一点 M 的坐标为 (x, y)，试写出点 M 的对应点 M' 的坐标．

提分·秘诀

特别提醒

以原点为位似中心的位似图形的坐标变化一定要注意坐标符号的变化，简单地说，若两图形在原点同侧，则坐标符号不变；若两图形在原点异侧，则坐标符号相反．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

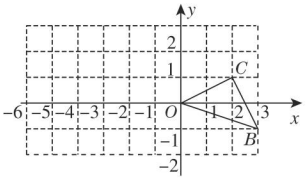


图 22.4−12

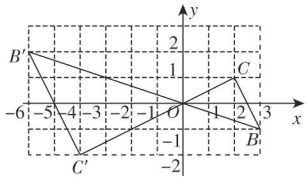


图 22.4−13

解题秘方：根据位似中心及相似比作图，再利用位似变换时对应点的坐标变化规律求对应点的坐标.

解：（1）如图 22.4−13，延长 BO 到点 B'，使 $OB'=2OB$；延长 CO 到点 C'，使 $OC'=2OC$，连接 $B'C'$，则△ $OB'C'$ 就是要画的图形.

（2）点 B'，C' 的坐标分别为（−6，2），（−4，−2）.

（3）点 $M(x,y)$ 的对应点 M' 的坐标为（$-2x$，$-2y$）.

另解

①把点 B（3，−1），C（2，1）的横、纵坐标都乘 −2，得 B'（−6，2），C'（−4，−2）；

②在坐标系中描出点 B'，C'；

③连接 OB'，$B'C'$，$C'O$，则△ $OB'C'$ 就是要画的图形.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用位似图形的定义法判断图形位似

挑战·高分

例 6 如图 22.4−14，图中的小方格都是边长为 1 的正方形，△ ABC 与△ $A'B'C'$ 的顶点都在格点上，△ $A'B'C'$ 与△ ABC 是位似图形吗？如果是，在图形上画出位似中心并求出相似比；如果不是，请说明理由.

解法提醒

判断两个多边形是否位似，可以先判断这两个多边形是否相似，再确定对应顶点的连线是否相交于同一点.

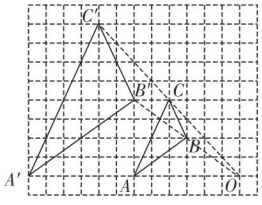


图 22.4−14

解题秘方：紧扣“位似图形的定义”进行说理.

解：是位似图形.

由勾股定理得 $AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$BC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$A'B'=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，

$B'C'=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$A'C'=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

$\because \dfrac{A'B'}{AB}=2$，$\dfrac{B'C'}{BC}=2$，$\dfrac{A'C'}{AC}=2$，

$\therefore \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{A'C'}{AC}$.

$\therefore$ △ $ABC\backsim$△ $A'B'C'$.

特别警示

在判断△ $A'B'C'$ 与△ ABC 是不是位似图形时，容易出现只考虑两个三角形的对应顶点的连线相交于一点，而没有证明两个三角形相似的情况.

如图 22.4−14，连接 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 并延长相交于一点 O，因此△ $A'B'C'$ 与△ ABC 是位似图形，点 O 为位似中心.

$\because OA'=12$，$OA=6$，$\therefore$ 相似比为 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{12}{6}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用相似比法解坐标平面中的计算问题

挑战·高分

例 7 如图 22.4-15，每个小方格的边长均为 1 个单位长度．已知△ ABC 的顶点坐标分别为 $A(-1,-1)$，$B(-3,0)$，$C(-2,2)$．

（1）在方格中，将△ ABC 以原点 O 为位似中心，放大为原来的 2 倍，请画出放大后的图形，并求出各顶点的坐标；

（2）若已知△ ABC 的面积为 $\frac{5}{2}$，求放大后的图形的面积．

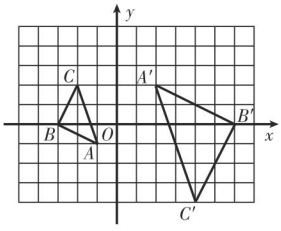


图 22.4-15

解题秘方：（1）利用位似变换中对应点的坐标的变化规律可画出放大后的图形，也可求出各顶点的坐标；

（2）因为位似图形是相似图形，所以面积比等于相似比的平方，从而放大后的图形的面积可求．

解：（1）放大为原来的 2 倍后的图形如图 22.4-15 中的△ $A'B'C'$，其顶点的坐标分别为 $A'(2,2)$，$B'(6,0)$，$C'(4,-4)$．

（2）∵△ $A'B'C'$ 与△ ABC 是位似图形，

∴△ $A'B'C'$ ∽△ ABC，且相似比为 2 ∶ 1.

$$\therefore \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=2^2=4.$$

又∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{5}{2}$，

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=4\times\frac{5}{2}=10,$$

即放大后的图形的面积为 10.

方法提醒

位似图形中坐标的变化规律：将一个图形按照一定的相似比（k）放大或缩小，设位似中心的坐标为（a,b），如果图形中某个点的坐标为 $A(m,n)$，那么变换后对应点 A' 的横坐标为 $k(m-a)+a$ 或 $k(a-m)+a$，对应的纵坐标为 $k(n-b)+b$ 或 $k(b-n)+b$.

拔尖角度▸ 3 利用位似变换法探究位置作图问题

例 8 如图 22.4-16，△ ABC 是一块等边三角形的废铁片，利用其剪裁一个正方形 $DEFG$，使正方形的边 DE 落在 BC 上，顶点 F，G 分别落在 AC，AB 上．

（1）证明：△ BDG ≌△ CEF.

（2）探究：怎样在铁片上准确地画出正方形 $DEFG$？

小聪和小明各给出了一种想法，请你在（a）和（b）两个问题中选择一个你喜欢的问题解答．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（a）小聪想：只要能计算出正方形的边长就能求出 BD 和 CE 的长，从而确定 D 点和 E 点，再画正方形 $DEFG$ 就容易了．

设△ ABC 的边长为 2，请你帮小聪求出正方形的边长（结果用含根号的式子表示）．

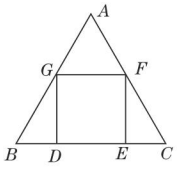


图 22.4−16

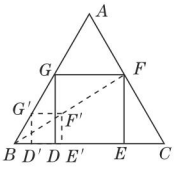


图 22.4−17

（b）小明想：不求正方形的边长也能画出正方形 $DEFG$. 具体作法如图 22.4−17 所示．

①在 AB 边上任取一点 G'，作正方形 $G'D'E'F'$；

②连接 BF' 并延长，交 AC 于 F；

③作 $FE \parallel F'E'$，交 BC 于 E，$FG \parallel F'G'$，交 AB 于 G，$GD \parallel G'D'$，交 BC 于 D，则四边形 $DEFG$ 即为所求．

你认为小明的作法正确吗？说明理由．

解题秘方：根据位似图形的作法，紧扣“位似图形的定义和性质”说明理由．

（1）**证明：**∵四边形 $DEFG$ 为正方形，

∴ $GD=FE$，$\angle GDE=\angle FED=90°$．

∴ $\angle GDB=\angle FEC=90°$．

∵△ ABC 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=60°$．

∴△ $BDG\cong$△ CEF.

（2）**解：**（a）设正方形的边长为 x.

由勾股定理，得 $(2-x)^2=x^2+\left(\frac{2-x}{2}\right)^2$.

解得 $x_1=4\sqrt{3}-6$，$x_2=-4\sqrt{3}-6$（舍去）．

∴ $x=4\sqrt{3}-6$.

∴正方形的边长为 $4\sqrt{3}-6$.

（b）正确．理由如下：

由已知得四边形 $DEFG$ 为矩形．

∵ $FE \parallel F'E'$，∴△ $BEF\backsim$△ $BE'F'$．∴ $\frac{FE}{F'E'}=\frac{FB}{F'B}$.

同理，$\frac{FG}{F'G'}=\frac{FB}{F'B}$．∴ $\frac{FE}{F'E'}=\frac{FG}{F'G'}$.

又∵ $F'E'=F'G'$，∴ $FE=FG$.

∴四边形 $DEFG$ 为正方形．

挑战·高分

解法提醒

利用位似解决实际问题，关键是先将实际问题转化为数学问题，把实物图转化为几何图形，再结合位似图形的性质解决问题．

利用位似可以将一个图形放大或缩小，在一些作图问题中，可以利用位似的知识作出题目要求的图形．

详解

根据四边形 $DEFG$ 为正方形，△ ABC 为等边三角形，可求出 $BD=\frac{2-x}{2}$，$GB=2-x$.

在 Rt△ BDG 中，$GB^2=DG^2+BD^2$，

∴ $(2-x)^2=x^2+\left(\frac{2-x}{2}\right)^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容在中考中主要考查在平面直角坐标系中画位似图形或求位似变换后对应点的坐标，题型主要是选择题、填空题和解答题，题目难度较小.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用位似图形的性质求面积比

例9 [中考·成都]如图22.4-18，四边形$ABCD$和四边形$A'B'C'D'$是以点O为位似中心的位似图形，若$OA:OA'=2:3$，则四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$的面积比为（　　）

A. 4 : 9　　B. 2 : 5　　C. 2 : 3　　D. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

试题评析： 本题考查的是位似图形的性质，掌握位似图形的性质是解题的关键.

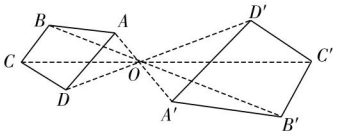


图22.4-18

解： ∵四边形$ABCD$和四边形$A'B'C'D'$是以点O为位似中心的位似图形，$OA:OA'=2:3$，

∴四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$的面积比为$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

答案： A

思路点拨

根据位似图形的面积比等于相似比的平方解答.

考法2 利用位似变换的性质求坐标系中点的坐标

例10 [中考·烟台]如图22.4-19，在平面直角坐标系中，正方形$ABCD$与正方形$BEFG$是以原点O为位似中心的位似图形，且相似比为$\frac{1}{3}$，点A，B，E在x轴上，若正方形$BEFG$的边长为6，则C点的坐标为（　　）

A.（3，2）　　B.（3，1）　　C.（2，2）　　D.（4，2）

试题评析： 此题主要考查了位似变换以及相似三角形的判定与性质，正确得出AO的长是解题的关键.

解： ∵正方形$ABCD$与正方形$BEFG$是以原点O为位似中心的位似图形，且相似比为$\frac{1}{3}$，∴$\frac{AD}{BG}=\frac{1}{3}$.

∵$BG=6$，∴$AD=2$. ∴$BC=AB=2$.

易知$AD\parallel BG$，∴$\triangle OAD\backsim\triangle OBG$.

∴$\frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BG}=\frac{1}{3}$，即$\frac{OA}{2+OA}=\frac{1}{3}$，

解得$OA=1$. ∴$OB=3$. ∴C点的坐标为（3，2）.

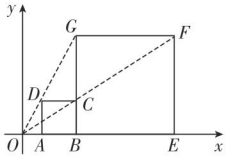


图22.4-19

答案： A

解法提醒

直接利用位似图形的性质结合相似比得出AD的长，从而得$BC=AB=2$. 根据$AD\parallel BG$，得出$\triangle OAD\backsim\triangle OBG$，进而得出$AO$的长，从而得出$OB$的长，即可得出答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用图形变换在坐标系中作图计算

例 11 [中考·凉山州]如图 22.4−20，在边长为 1 的正方形网格中建立平面直角坐标系，已知△ ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(4,5)$.

（1）画出△ ABC 关于 x 轴对称的△ $A_1B_1C_1$；

（2）以原点 O 为位似中心，在 x 轴的上方画出△ $A_2B_2C_2$，使△ $A_2B_2C_2$ 与△ ABC 位似，且相似比为 2，并求出△ $A_2B_2C_2$ 的面积.

试题评析：本题考查位似变换、轴对称变换的知识，解题的关键是理解位似变换、轴对称变换的定义，属于中考常考题型.

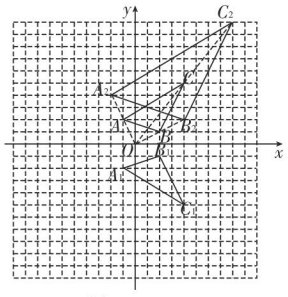


图 22.4−20

解：（1）如图 22.4−20，△ $A_1B_1C_1$ 就是所求作的三角形.

（2）如图 22.4−20，△ $A_2B_2C_2$ 就是所求作的三角形，

∵ $A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(4,5)$，△ $A_2B_2C_2$ 与△ ABC 位似，且相似比为 2，

∴ $A_2(-2,4)$，$B_2(4,2)$，$C_2(8,10)$.

$$\therefore S_{\triangle A_2B_2C_2}=8\times10-\frac{1}{2}\times6\times2-\frac{1}{2}\times4\times8-\frac{1}{2}\times6\times10=28.$$

解法提醒

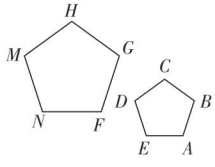
1. 画出点 A，B，C 关于 x 轴的对称点 A_1，B_1，C_1 即可解决问题；
2. 连接 OB 并延长到 B_2，使得 $BB_2=OB$，同样的方法可得点 A_2，C_2，顺次连接 A_2，B_2，C_2，则△ $A_2B_2C_2$ 就是所求作的三角形.

两年模拟兵法 ☞答案见 231 页

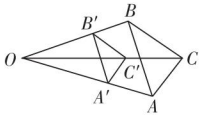
1. 如图，正五边形 $FGHMN$ 是由正五边形 $ABCDE$ 经过位似变换得到的，若 $AB:FG=2:3$，则下列结论正确的是（　　）

A. $2DE=3MN$　　B. $3DE=2MN$

C. $3\angle A=2\angle F$　　D. $2\angle A=3\angle F$



（第 1 题）



（第 2 题）

2. [中考·绥化]如图，△ $A'B'C'$ 是△ ABC 以点 O 为位似中心经过位似变换得到的，若△ $A'B'C'$ 的面积与△ ABC 的面积比是 4：9，则 $OB':OB$ 为（　　）

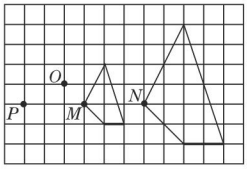
A. 2：3　　B. 3：2

C. 4：5　　D. 4：9

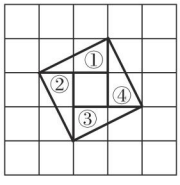
3. 如图，两个四边形是位似图形，它们的位似中心是（　　）

A. 点 M　　B. 点 N

C. 点 O　　D. 点 P



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在每个小正方形的边长都为 1 个单位长度的网格中有编号为①②③④的四个小三角形，在这四个小三角形中，是位似图形的有（　　）

A. 1 对　　B. 2 对

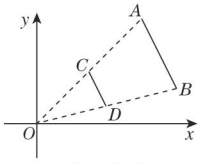
C. 3 对　　D. 4 对

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

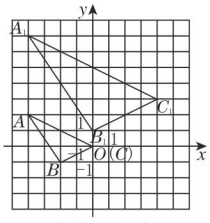
5. [中考·武汉]如图，线段 AB 的两个端点的坐标分别为 $A(6,6)$，$B(8,2)$，以原点 O 为位似中心，在第一象限内将线段 AB 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 后得到线段 CD，则端点 C 的坐标为（　　）

A. $(3,3)$　　B. $(4,3)$

C. $(3,1)$　　D. $(4,1)$



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，将 $\triangle ABC$ 的三边分别扩大为原来的 2 倍得到 $\triangle A_1B_1C_1$（顶点均在格点上），它们是以点 P 为位似中心的位似图形，则点 P 的坐标是（　　）

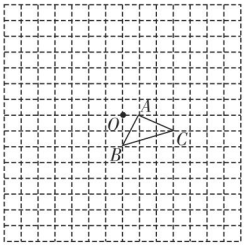
A. $(-4,-3)$　　B. $(-3,-3)$

C. $(-4,-4)$　　D. $(-3,-4)$

7. 如图，在边长为 1 的正方形网格纸中，$\triangle ABC$ 为格点三角形（顶点都在格点上）.

（1）求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）在网格纸中，以点 O 为位似中心画出 $\triangle ABC$ 的位似图形，使 $\triangle ABC$ 与它的相似比为 $\frac{1}{2}$（不要求写画法）.



（第 7 题）

8. （1）选择：如图①，点 O 是等边三角形 PQR 的中心，点 P'，Q'，R' 分别是 OP，OQ，OR 的中点，则三角形 $P'Q'R'$ 与三角形 PQR 是位似三角形，此时，三角形 $P'Q'R'$ 与三角形 PQR 的相似比、位似中心分别为（　　）　　【导学号：8618152】

A. 2，点 P　　B. $\frac{1}{2}$，点 P

C. 2，点 O　　D. $\frac{1}{2}$，点 O

（2）如图②，用下面的方法可以画 $\triangle AOB$ 的内接等边三角形，阅读后证明相应的问题.

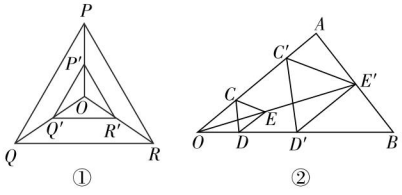
画法如下：

①在 $\triangle AOB$ 内画等边三角形 CDE，使点 C 在 OA 上，点 D 在 OB 上；

②连接 OE 并延长，交 AB 于点 E'，过点 E' 作 $E'C' \parallel EC$，交 OA 于点 C'，作 $E'D' \parallel ED$，交 OB 于点 D'；

③连接 $C'D'$，则 $\triangle C'D'E'$ 是 $\triangle AOB$ 的内接等边三角形.

求证：$\triangle C'D'E'$ 是等边三角形.



（第 8 题）

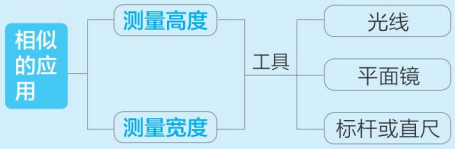
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.5 综合与实践 测量与误差

核心知识

- 利用影子测量物体的高度
- 利用标杆测量物体的高度
- 利用平面镜的反射测量物体的高度
- 利用相似测量河的宽度

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 利用影子测量物体的高度

1. 测量原理

测量不能到达顶部的物体的高度，在有太阳光的前提下，通常将参照物高及其影长、被测物高及其影长构造相似三角形模型，利用“相似三角形对应边成比例”的原理解决.

2. 测量方法

在同一时刻测量出太阳光下参照物和被测物体的影长，再根据参照物的高度和根据“在同一时刻太阳光下物体的高度与影长成比例”的原理计算出被测物体的高度.（如图 22.5−1）

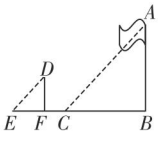


图 22.5−1

提分·必记

特别提醒

运用此测量方法时，要符合下面两个条件：

1. 被测物体的底部能够到达；
2. 由于影长可能随着太阳的运动而变化，因此要在同一时刻测量参照物与被测物体的影长.

拔考向 利用太阳光测量物高解实际应用问题

例 1 某一时刻，身高 1.6 m 的小明在太阳光下的影长是 0.4 m，同一时刻同一地点，测得某旗杆的影长是 5 m，则该旗杆的高度是（　　）

A. 1.25 m　　B. 10 m

C. 20 m　　D. 8 m

解题秘方： 建立相似三角形的模型，用“在同一时刻太阳光下物体的高度与影长成比例”求解.

解： 设该旗杆的高度是 x m，根据题意，得 $1.6 : 0.4 = x : 5$，解得 $x=20$，即该旗杆的高度是 20 m.

答案： C

提分·秘诀

知识储备

同一时刻，同一地点，有比例式：

$$\frac{\text{被测物体的实际高度}}{\text{被测物体影子的长度}} = \frac{\text{参照物体的高度}}{\text{参照物体影子的长度}}.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 利用标杆测量物体的高度

1. 测量原理 用标杆与被测物体平行构造相似三角形.

2. 测量方法

（1）测量出标杆的长度、观测者眼睛到地面的高度;

（2）让标杆竖直立于地面，调整观测者的位置，使观测者的眼睛、标杆顶端和被测物体顶端恰好在一条直线上，测量出观测者的脚距标杆底端的距离和距被测物体底端的距离;

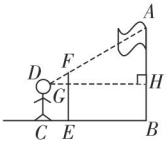


图 22.5-2

（3）根据标杆与被测物体平行推导出两个三角形相似，利用对应边成比例求出被测物体的高度.（如图 22.5-2）

提分·必记

特别提醒

利用标杆测量物体的高度是生活中经常采用的方法，使用这种方法时，观测者的眼睛、标杆顶端和被测物体顶端必须“三点共线”，注意标杆与地面要垂直，同时被测物体底部必须可到达.

拔考向▶ 利用标杆（三角尺）测量物高的实际应用

例 2 如图 22.5-3，小明同学用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树的高度 AB，他调整自己的位置，设法使斜边 DF 保持水平，并且边 DE 与点 B 在同一直线上. 已知纸板的两条直角边 DE=40 cm，EF=20 cm，测得边 DF 离地面的高度 AC=1.5 m，CD=8 m，则树高 AB=_____m.

解题秘方： 本题关键是找出相似的三角形，然后根据对应边的比相等列出方程求解.

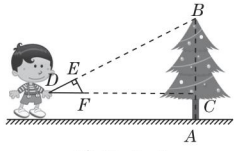


图 22.5-3

解： $\because \angle DEF=\angle BCD=90^\circ$，$\angle D=\angle D$,

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle DCB$. $\therefore \dfrac{BC}{EF}=\dfrac{DC}{DE}$.

$\because DE$=40 cm=0.4 m，EF=20 cm=0.2 m，CD=8 m，

$\therefore \dfrac{BC}{0.2}=\dfrac{8}{0.4}$. $\therefore BC$=4 m. $\therefore AB=AC+BC$=1.5+4=5.5（m）.

答案： 5.5

提分·秘诀

要点解读

用相似三角形测物高的两个原则：

1. 核心是构造相似三角形，在构造的三角形中，被测物体的高度一般是其中的一边;
2. 构造三角形的方法多种多样，只需把握住所构造的三角形除被测量的边以外，其余的对应边易测这一原则.

点知识▶ 3 利用镜子的反射测量物体的高度

1. 测量原理 利用镜子的反射，先根据反射角等于入射角的原理构造相似三角形，再计算所求物体的高度.

2. 测量方法

（1）在观测者与被测物体之间的地面上平放一面镜子，在镜子上做一个标记;

（2）测出观测者眼睛到地面的高度;

（3）观测者看着镜子来回走动，直至看到被测物体顶端在镜子中的像与镜子上的标记重合，此时测出镜子上的标记位置到观测者脚底的距离及到被测物体底端的距离;

（4）根据两角分别对应相等推导出两个三角形相似，利用对应边成比例求出被测物体的高度.（如图 22.5-4）

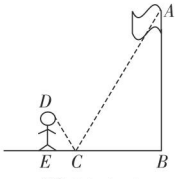


图 22.5-4

提分·必记

特别提醒

- 测量时被测物体与人之间不能有障碍物，且镜子要水平放置.
- 利用物理学中的“反射角等于入射角”及“等角的余角相等”的知识可以知道，反射光线和入射光线与镜面的夹角相等. 找到一对锐角对应相等，创造相似条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用镜子的反射测量物高的实际应用

例 3 如图 22.5−5 是一位同学设计的用手电筒来测量某古城墙高度的示意图，在点 P 处水平放一平面镜，光线从点 A 出发经平面镜反射后刚好照到古城墙 CD 的顶端 C 处，已知 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，测得 AB=2 m，BP=3 m，PD=12 m，求该古城墙 CD 的高度.

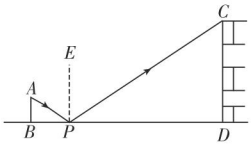


图 22.5−5

解题秘方： 由反射原理及 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，可得 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$，利用相似三角形的性质即可求出 CD 的长.

解： 如图 22.5−5，由题意可得 $\angle CPE = \angle APE$，

$\therefore \angle CPD = \angle APB$.

$\because AB \perp BD$，$CD \perp BD$，

$\therefore \angle ABP = \angle CDP = 90°$.

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle CDP$.

$\therefore \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BP}{PD}$.

$\because AB$=2 m，BP=3 m，PD=12 m，

$\therefore \dfrac{2}{CD} = \dfrac{3}{12}$，

解得 CD=8 m.

答：该古城墙 CD 的高度为 8 m.

知识▶4 利用相似测量宽度

1. 测量原理 测量不能直接到达的两点间的距离，常常构造相似三角形，利用相似三角形的性质计算两点间的距离.

2. 常见的测量方式

（1）构造“A”型相似，如图 22.5−6 所示.

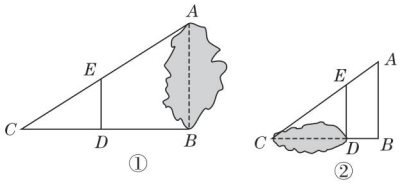


图 22.5−6

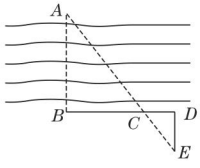


图 22.5−7

（2）构造“X”型相似，如图 22.5−7 所示.

提分·秘诀

知识储备

在利用镜子的反射测量物体的高度时，反射角与入射角相等是判定两个三角形相似的隐含条件.

提分·必记

特别解读

利用相似三角形测量高度、宽度等的一般步骤：

1. 利用平行线、标杆等构造相似三角形；
2. 测量与表示未知量的线段相对应的边长以及另外任意一组对应边的长度；
3. 画出示意图，利用相似三角形的性质，列出以上包括未知量在内的四个量的比例式，解出未知量；
4. 检验并得出答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用相似测量河道宽度

例 4 如图 22.5−8，我们想要测量河两岸相对的两点 A，B 之间的距离（即河宽）. 方案：先从 B 点出发向与 AB 成 90° 角的方向走 50 m 到 O 处立一标杆，然后方向不变，继续向前走 10 m 到 C 处，在 C 处向右转 90°，沿 CD 方向再走 17 m 到 D 处，使得点 A，O，D 在同一条直线上，那么点 A，B 之间的距离是多少？

解题秘方： 根据测量过程中的数据建立几何（相似三角形）模型，利用相似三角形对应边成比例求解.

解： 由题意知 $\angle ABO = \angle DCO = 90°$.

又 $\because \angle AOB = \angle DOC$，$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle DOC$.

$\therefore \dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BO}{CO}$.

$\because BO = 50$ m，$CO = 10$ m，$CD = 17$ m，

$\therefore \dfrac{AB}{17} = \dfrac{50}{10}$，解得 $AB = 85$ m.

答：点 A，B 之间的距离是 85 m.

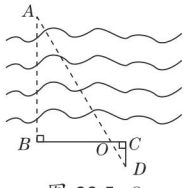


图 22.5−8

提分·秘诀

特别提醒

测河宽也可采用构造全等三角形进行测量的方法. 在实际应用中，这种方法虽然能直接通过测量对应边的长得出未知量，但是往往会受到场地、测量仪器等的限制，而利用相似三角形的知识，通过能测量的三角形的边长及相似三角形的性质求此距离可以减少限制，所以其应用面更广.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用中间比法求测量中的物高

例 5 如图 22.5−9，王华晚上由路灯 A 下的 B 处走到 C 处时，测得影子 CD 的长为 1 m，继续往前走 3 m 到达 E 处时，测得影子 EF 的长为 2 m，已知王华的身高是 1.5 m，试求路灯 A 的高度 AB.

解题秘方： 紧扣“人与路灯的平行关系”两次构造相似三角形，人的高度与路灯的高度的比不变作为中间比进行解答.

解： $\because GC \perp BC$，$AB \perp BC$，$\therefore AB \parallel GC$，

$\therefore \triangle GDC \backsim \triangle ADB$. $\therefore \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{GC}{AB}$.

设 $BC = x$ m，则 $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1.5}{AB}$.

同理得 $\triangle HEF \backsim \triangle ABF$，$\therefore \dfrac{EF}{BF} = \dfrac{HE}{AB}$.

$\therefore \dfrac{2}{x+3+2} = \dfrac{1.5}{AB}$，即 $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x+5}$，解得 $x = 3$.

经检验，$x = 3$ 是方程的解且符合题意.

$\therefore \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1.5}{AB}$. $\therefore AB = 6$ m.

答：路灯 A 的高度 AB 是 6 m.

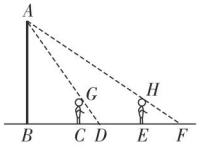


图 22.5−9

挑战·高分

解法提醒

$\dfrac{GC}{AB}$ 和 $\dfrac{HE}{AB}$ 均为人身高与路灯高的比，而人身高、路灯高是不变的，因此其比值也不变，而人与路灯杆平行，由此可以得到和人与路灯杆的比相关的结论. 即 $\triangle GDC \backsim \triangle ADB$，$\triangle HEF \backsim \triangle ABF$.

方法规律

测量高度和距离时，往往需要建立几何模型构造相似三角形，利用不同相似三角形对应边成比例的性质直接求解或列方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用割补法求测量中的物高

例 6 如图 22.5−10，在离某建筑物 CE 4 m 处有一棵树 AB，在某时刻，1.2 m 的竹竿 FG 垂直地面放置，影子 GH 的长为 2 m，此时树的影子有一部分落在地面上，还有一部分落在建筑物的墙上，墙上的影子 CD 高为 2 m，那么这棵树的高度是多少？

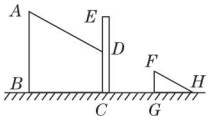


图 22.5−10

解题秘方： 添加辅助线构造相似三角形，利用相似三角形的对应边成比例求解.

解： 延长 AD，与地面交于点 M，如图 22.5−11 ①所示.

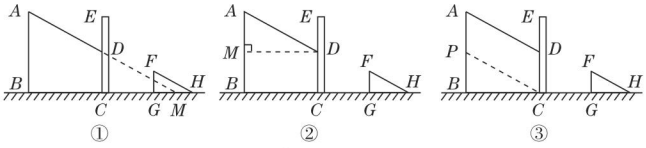


图 22.5−11

由 $AM \parallel FH$，知 $\angle AMB = \angle FHG$.

$\because AB \perp BG$，$FG \perp BG$，$DC \perp BG$，$\therefore \angle ABM = \angle DCM = \angle FGH = 90°$.

$\therefore \triangle ABM \backsim \triangle DCM \backsim \triangle FGH$. $\therefore \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{CD}{CM} = \dfrac{FG}{GH}$.

$\because CD = 2$ m，$FG = 1.2$ m，$GH = 2$ m，

$\therefore \dfrac{2}{CM} = \dfrac{1.2}{2}$，解得 $CM = \dfrac{10}{3}$ m.

$\because BC = 4$ m，$\therefore BM = BC + CM = 4 + \dfrac{10}{3} = \dfrac{22}{3}$（m）.

$\therefore \dfrac{AB}{\frac{22}{3}} = \dfrac{1.2}{2}$，解得 $AB = 4.4$ m.

答：这棵树的高度是 4.4 m.

挑战·高分

另解 1

如图 22.5−11 ②，过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M，则四边形 $BCDM$ 为矩形，易知 $\triangle ADM \backsim \triangle FHG$，得 $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{FG}{GH}$，则树高 AB 可求.

另解 2

如图 22.5−11 ③，过点 C 作 $CP \parallel AD$ 交 AB 于点 P，则四边形 $ADCP$ 为平行四边形，易知 $\triangle PBC \backsim \triangle FGH$，得 $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{FG}{GH}$，则树高 AB 可求.

教你一招

构造相似三角形，利用相似三角形的性质解决实际问题的关键是能够找出或构造出相似三角形.

构造相似三角形常用的方法有“三线”：作平行线、作垂线、作延长线.

拔尖角度▸ 3 利用构造相似三角形法解实际中的设计问题

例 7 某高中学校为高一新生设计的学生板凳从正面看到的平面图形如图 22.5−12 所示，其中 $BA = CD$，$BC = 20$ cm，BC 与 EF 平行于地面 AD，且到地面 AD 的距离分别为 40 cm，8 cm，为使板凳两腿底端 A，D 之间的距离为 30 cm，那么横梁 EF 应为多长？（材质及其厚度等忽略不计）

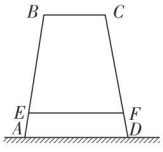


图 22.5−12

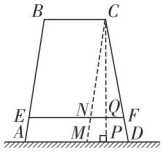


图 22.5−13

挑战·高分

另解

如图 22.5−14，过点 B 作 $BH \perp AD$ 于点 H，交 EF 于点 M，过点 C 作 $CG \perp AD$ 于点 G，交 EF 于点 N.

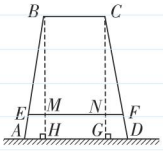


图 22.5−14

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：先把实际问题转化为数学问题，然后作辅助线构造相似三角形求 EF 的长.

解：如图 22.5−13，过点 C 作 $CM \parallel AB$，分别交 EF，AD 于点 N，M，作 $CP \perp AD$，分别交 EF，AD 于点 Q，P.

$\because BC \parallel AD$，$EN \parallel AD$，$CM \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $ABCM$ 和四边形 $AENM$ 均是平行四边形.

$\therefore EN=AM=BC=20$ cm.

$\therefore MD=AD-AM=30-20=10$（cm）.

由题意知 $CP=40$ cm，$PQ=8$ cm，$\therefore CQ=CP-PQ=40-8=32$（cm）.

$\because EF \parallel AD$，$\therefore \triangle CNF \backsim \triangle CMD$.

$\therefore \dfrac{NF}{MD}=\dfrac{CQ}{CP}$，即 $\dfrac{NF}{10}=\dfrac{32}{40}$，解得 $NF=8$ cm.

$\therefore EF=EN+NF=20+8=28$（cm）.

答：横梁 EF 应为 28 cm.

易得 $\triangle AHB \cong \triangle DGC$，$HG=MN=BC=20$ cm，

$\therefore AH=GD=\dfrac{1}{2}(AD-HG)=5$ cm.

易得 $\triangle EMB \cong \triangle FNC$，

$\therefore EM=NF$.

$\because MH=8$ cm，$BH=40$ cm，

$\therefore BM=32$ cm.

$\because EF \parallel AD$，

$\therefore \triangle BEM \backsim \triangle BAH$.

$\therefore \dfrac{EM}{AH}=\dfrac{BM}{BH}$，

即 $\dfrac{EM}{5}=\dfrac{32}{40}$，

解得 $EM=4$ cm，故 $EF=EM+NF+MN=28$ cm.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用相似三角形对应边成比例解决实际问题中的高度问题是本节的重点内容，也是近几年中考命题的热点，题型多样.

三年中考兵法

考法 1 利用相似三角形的性质解实际中测距离的应用

例 8 [中考·菏泽]如图 22.5−15，M，N 为山两侧的两个村庄，为了两村交通方便，根据国家的惠民政策，政府决定打一直线涵洞，工程人员为计算工程量，必须计算 M，N 两点之间的距离，选择测量点 A，B，C，点 B，C 分别在 AM，AN 上，现测得 $AM=1\ 000$ m，$AN=1\ 800$ m，$AB=54$ m，$BC=45$ m，$AC=30$ m，求 M，N 两点之间的距离.

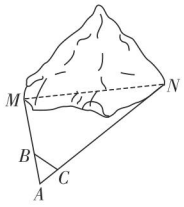


图 22.5−15

试题评析：本题考查了“斜交型”相似三角形的判定和性质，读懂题意，建立相似三角形的模型是解题的关键.

解：如图 22.5−15，连接 MN.

$\because \dfrac{AC}{AM}=\dfrac{30}{1\ 000}=\dfrac{3}{100}$，$\dfrac{AB}{AN}=\dfrac{54}{1\ 800}=\dfrac{3}{100}$，$\therefore \dfrac{AC}{AM}=\dfrac{AB}{AN}$.

又 $\because \angle BAC=\angle NAM$，$\therefore \triangle BAC \backsim \triangle NAM$.

$\therefore \dfrac{BC}{MN}=\dfrac{3}{100}$，即 $\dfrac{45}{MN}=\dfrac{3}{100}$，解得 $MN=1\ 500$ m.

答：M，N 两点之间的距离为 1 500 m.

冲刺·满分

知识储备

三边对应成比例 →
两边对应成比例且夹角相等 →
两角对应相等 →
} 相似三角形

解法提醒

把实际问题转化成数学问题，建立三角形相似，运用相似三角形对应边成比例求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用光的反射原理测量反射镜不在地面的物高的应用

例 9 [中考·兰州]如图 22.5-16，小明为了测量一凉亭的高度 AB（顶端 A 到水平地面 BD 的距离），在凉亭的旁边放置一个与凉亭台阶 BC 等高的台阶 DE（$DE=BC=0.5$ m，A，B，C 三点共线），把一面镜子水平放置在平台上的点 G 处，测得 $CG=15$ m，然后沿着直线 CG 后退到点 E 处，这时恰好在镜子里看到凉亭的顶端 A，测得 $EG=3$ m，小明身高 $EF=1.6$ m，则凉亭的高度 AB 约为（　　）

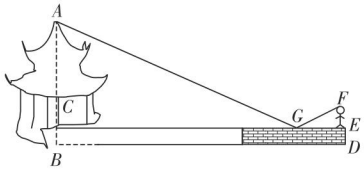


图 22.5-16

A. 8.5 m　　B. 9 m　　C. 9.5 m　　D. 10 m

试题评析： 本题考查相似三角形的判定和性质，解题的关键是理解光的反射原理，属于基础题，中考常考题型.

解： 由题意知 $\angle AGC=\angle FGE$，又 $\because \angle ACG=\angle FEG=90°$，

$\therefore \triangle ACG \backsim \triangle FEG$. $\therefore \dfrac{AC}{EF}=\dfrac{CG}{GE}$.

$\therefore \dfrac{AC}{1.6}=\dfrac{15}{3}$，解得 $AC=8$ m.

$\therefore AB=AC+BC=8+0.5=8.5$（m）.

答案： A

考法 3 利用光的反射原理测量到底部有障碍物的物高的应用

例 10 [中考·陕西]某市为了打造森林城市，树立城市新地标，实现绿色、共享发展理念，在城南建起了“望月阁”及环阁公园. 小亮、小芳等同学想用一些测量工具和所学的几何知识测量“望月阁”的高度，来检验自己掌握知识和运用知识的能力. 他们经过观察发现，观测点与“望月阁”底部间的距离不易测得，因此经过研究需要两次测量. 于是他们首先用平面镜进行测量. 方法如下：如图 22.5-17，小芳在小亮和“望月阁”之间的直线 BM 上平放一平面镜，在镜面上做了一个标记，这个标记在直线 BM 上的对应位置为点 C. 镜子不动，小亮看着镜面上的标记，他来回走动，走到点 D 时，看到“望月阁”顶端点 A 在镜面中的像与镜面上的标记重合. 这时，测得小亮眼睛与地面的高度 $ED=1.5$ m，$CD=2$ m；然后，在阳光下，他们用测量影长的方法进行了第二次测量，方法如下：如图 22.5-17，小亮从 D 点沿 DM 方向走了 16 m，到达“望月阁”影子的末端 F 点处，此时，测得小亮身高 FG 的影长 $FH=2.5$ m，$FG=1.65$ m.

思路提醒

先利用物理中的光的反射原理结合相似三角形的性质求出高于平台部分的凉亭的高度（AC 长）；

再求凉亭的高（AB 长）为：台阶高（BC 长）与台阶以上部分的高（AC 长）的和.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如图 22.5-17，已知：$AB \perp BM$，$ED \perp BM$，$GF \perp BM$，其中，测量时所使用的平面镜的厚度忽略不计．请你根据题中提供的相关信息，求出“望月阁”的高 AB 的长度．

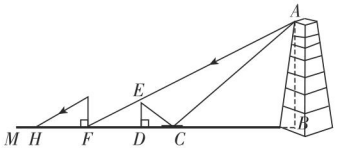


图 22.5-17

试题评析：此题主要考查了相似三角形的判定与性质，正确利用已知条件得出相似三角形是解题的关键．

解：由题意可得：$\angle ABC = \angle EDC = \angle GFH = 90°$，

$\angle ACB = \angle ECD$，$\angle AFB = \angle GHF$，

故 $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$，$\triangle ABF \backsim \triangle GFH$.

则 $\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC}$，$\dfrac{AB}{GF} = \dfrac{BF}{FH}$，即 $\dfrac{AB}{1.5} = \dfrac{BC}{2}$，$\dfrac{AB}{1.65} = \dfrac{BC+18}{2.5}$.

解得 $AB=99$ m.

答：“望月阁”的高 AB 为 99 m.

详解

设 $AB=x$ m，$BC=y$ m，

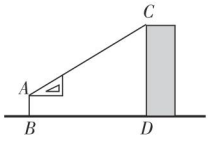
则 $\begin{cases} \dfrac{x}{1.5} = \dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{x}{1.65} = \dfrac{y+18}{2.5}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=99, \\ y=132. \end{cases}$

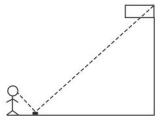
两年模拟兵法 ☞答案见 232 页

1. [模拟·宁波江东]如图是小华利用含 30° 角的三角板测量楼房高度的示意图，已知桌子高 AB 为 1 m，地面上 B 和 D 之间的距离为 100 m，则楼高 CD 约为（　　）

A. 51 m　　B. 59 m　　C. 88 m　　D. 174 m



（第 1 题）



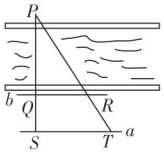
（第 2 题）

2. [模拟·北京西城]如图，小明在地面上放了一个平面镜（平面镜的厚度忽略不计），选择合适的位置，刚好在平面镜中看到旗杆的顶部，此时小明与平面镜的水平距离为 2 m，旗杆底部与平面镜的水平距离为 16 m，若小明的眼睛与地面距离为 1.5 m，则旗杆的高度为（　　）

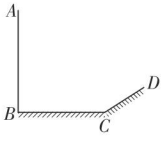
A. $\dfrac{16}{3}$ m　　B. 9 m　　C. 12 m　　D. $\dfrac{64}{3}$ m

3. [模拟·福建]如图，为了估计河的宽度，在河的对岸选定一个目标点 P，在近岸取点 Q 和 S，使点 P，Q，S 在一条直线上，且直线 PS 与河垂直，在过点 S 且与 PS 垂直的直线 a 上选择适当的点 T，PT 与过点 Q 且与 PS 垂直的直线 b 的交点为 R. 如果 $QS=60$ m，$ST=120$ m，$QR=80$ m，则河的宽度 PQ 为（　　）

A. 40 m　　B. 60 m　　C. 120 m　　D. 180 m



（第 3 题）



（第 4 题）

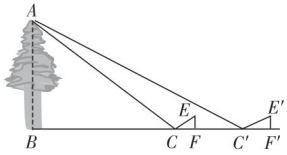
4. [模拟·临沂]如图，小阳发现电线杆 AB 的影子落在土坡的坡面 CD 和地面 BC 上，量得 $CD=8$ m，$BC=20$ m，CD 与地面成 30° 角，且此时测得 1 m 杆的影长为 2 m，则电线杆的高度为（　　）

A. 9 m　　B. 28 m

C. $(7+\sqrt{3})$ m　　D. $(14+2\sqrt{3})$ m

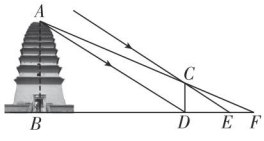
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [模拟·韶关曲江]如图，小明想用镜子测量一棵古松树 AB 的高，但因树旁有一条小河，不能测量镜子与树之间的距离，于是他两次利用镜子，第一次他把镜子放在点 C 处，人在点 F 处正好看到树尖 A，第二次他把镜子放在点 C' 处，人在点 F' 处正好看到树尖 A. 已知小明眼睛距地面 1.6 m，量得 $CC'=7$ m，$CF=2$ m，$C'F'=3$ m，求这棵古松树 AB 的高.



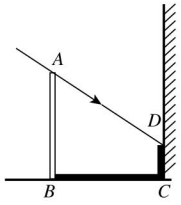
（第 5 题）

6. [模拟·西安蓝田]如图是位于陕西省西安市荐福寺内的小雁塔，是中国早期方形密檐式砖塔的典型作品，并作为丝绸之路的一处重要遗址点，被列入《世界遗产名录》. 小铭、小希等几位同学想利用一些测量工具和所学的几何知识测量小雁塔的高度，由于观测点与小雁塔底部间的距离不易测量，因此经过研究需要进行两次测量，于是在阳光下，他们首先利用影长进行测量，方法如下：小铭在小雁塔的影子顶端 D 处竖直立一根木棒 CD，并测得此时木棒的影长 $DE=2.4$ m；然后，小希在 BD 的延长线上找出一点 F，使得 A，C，F 三点在同一直线上，并测得 $DF=2.5$ m. 已知图中所有点均在同一平面内，木棒高 $CD=1.72$ m，$AB\perp BF$，$CD\perp BF$，试根据以上测量数据，求小雁塔 AB 的高度.



（第 6 题）

7. 如图，某时刻垂直于地面的标杆 AB 在阳光下的影子一部分落在地面上如图中的 BC，一部分落在高楼的墙上如图中的 CD. 已知 $AB=3$ m，$BC=3$ m，$CD=1$ m. 问：若无墙阻挡，则标杆 AB 在地面上的影子有多长?

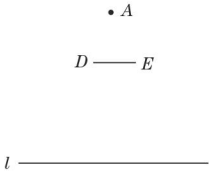


（第 7 题）

8. 某数学兴趣小组在学校操场上想测量汽车的速度，利用如下方法：如图，小王站在点 A 处，点 A 处和公路 l 之间竖立着一块 30 m 长且平行于公路的广告牌 DE. 广告牌挡住了小王的视线.

（1）请在图中画出视点 A 盲区内的那段公路 BC；

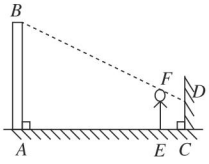
（2）已知一辆匀速行驶的汽车经过公路 BC 段的时间是 3 s，小王到广告牌和广告牌到公路的距离分别是 40 m 和 80 m，求该汽车的速度.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 小明想利用太阳光测量楼高，他带着皮尺来到一幢楼下，发现对面墙上有这幢楼的影子．针对这种情况，他设计了一种测量方案，具体测量情况如下：示意图如图所示，小明边移动边观察，发现站到点 E 处时，可以使自己落在墙上的影子与这幢楼落在墙上的影子重叠，且高度恰好相同．此时，测得小明落在墙上的影子的高度 CD=1.2 m，且测得 CE=0.8 m，CA=30 m（点 A，E，C 在同一直线上）．已知小明的身高 EF 是 1.7 m，请你帮小明求出楼高 AB（结果精确到 0.1 m）．



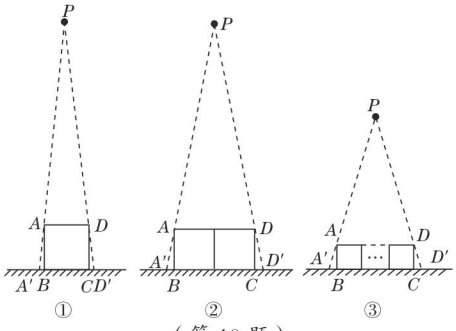
（第 9 题）

10.（1）如图①，垂直于地面放置的正方形框架 $ABCD$，边长 AB 为 30 cm，在其正上方有一灯泡 P，在灯泡的照射下，正方形框架的横向影子 $A'B$，$D'C$ 的长度和为 6 cm，那么灯泡离地面的距离是多少?

（2）不改变（1）中灯泡离地面的距离，将两个边长均为 30 cm 的正方形框架按图②所示摆放，此时横向影子 $A'B$，$D'C$ 的长度和为多少?

（3）有 n 个边长均为 a 的正方形框架按图③所示摆放，在其正上方有一灯泡 P，在灯泡的照射下，横向影子 $A'B$，$D'C$ 的长度和为 b，求灯泡离地面的距离（写出解题过程，结果用含 a，b，n 的代数式表示）．

【导学号：8618152】



（第 10 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

利用三角形相似证明乘积式的策略

荣老师告诉你 线段乘积式是相似三角形性质的一种体现形式，所以对于线段乘积式的证明，往往都是通过证明三角形相似得到的．解决此类问题的关键是通过线段分析出要证明相似的三角形——三点定形法．有直接可定形的，也有间接定形的——通过等量进行过渡，采用的方法都是分析归纳法．

一、直接法：找同一三角形的两条边

三点定形法，即由有关线段的三个不同的端点来确定三角形的方法．具体做法是：先看比例式前项和后项所代表的两条线段的三个不同的端点能否分别确定一个三角形，若能，则只要证明这两个三角形相似即可，这叫做“横定”；若不能，再看每个比的前后两项的两条线段的三个不同的端点能否分别确定一个三角形，若能，则只要证明这两个三角形相似即可，这叫做“竖定”．

例 1 如图 1，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，AB 的垂直平分线交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，交 BC 的延长线于点 F. 求证：$CD^2=DE\cdot DF$.

解题秘方： 先将乘积式化成比例式为 $\frac{CD}{DE}=\frac{DF}{CD}$，然后不管是“横定”还是“竖定”，都是△$CDF$ 和△CDE，证明这两个三角形相似即可．

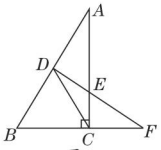


图 1

证明： ∵ $\angle ACB=90°$，

∴ $\angle F+\angle FEC=90°$．

又∵ $DF\perp AB$，∴ $\angle A+\angle AED=90°$．

∵ $\angle AED=\angle FEC$，∴ $\angle A=\angle F$.

∵ CD 是 Rt△ACB 的斜边 AB 的中线，

∴ $CD=DA$. ∴ $\angle A=\angle ACD$. ∴ $\angle ACD=\angle F$.

又∵ $\angle CDE=\angle FDC$，∴ △$CDE\backsim$△FDC.

∴ $\frac{CD}{DF}=\frac{DE}{CD}$. ∴ $CD^2=DE\cdot DF$.

方法点拨： 证乘积式，先将乘积式转化成比例式，然后利用三点定形法——“横定”或“竖定”找出要证明的两个三角形，再通过已知条件证明两个三角形相似．

二、间接法

对线段比例式或等积式的证明，常用等线段代换法、中间比过渡法、面积法等．若比例式或等积式所涉及的线段在同一直线上时，应将线段比“转移”（必要时需添加辅助线），使其分别构成两个相似三角形来证明．

1. 3 种代换

（1）等线段代换；

（2）等比代换；

（3）等积代换．

2. 创造条件

（1）添加平行线——创造“A”型、“X”型；

（2）先证其他三角形相似——创造边、角条件．

方法一 等线段过渡法（等线段代换法）

遇到三点定形法无法解决欲证的问题时，即如果线段比例式中的四条线段都在图形中的同一条直线上，不能组成三角形，或四条线段虽然组成两个三角形，但这两个三角形并不相似，那么就需要根据已知条件找到与比例式中某条线段相等的一条线段来代替这条线段；如果没有，可考虑添加辅助线，然后应用三点定形法确定相似三角形．只要代换得当，问题往往可以得到解决．当然，还要注意最后将代换的线段再代换回来．

例 2 如图 2，在△ABC 中，AD 平分 $\angle BAC$，AD 的垂直平分线 FE 交 BC 的延长线于点 E. 求证：$DE^2=BE\cdot CE$.

解题秘方： 观察图形发现，乘积式中的线段都在一条直线上，无法直接利用三点定形法找三角形，连接 AE，易得 $DE=AE$，将乘积式中的 DE 换成 AE，即可找出△ABE 和△ACE，证明这两个三角形相似即可．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明： 如图2，连接AE.

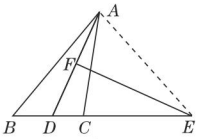


图2

$\because EF$是AD的垂直平分线，

$\therefore AE=DE$.

$\therefore \angle ADE=\angle DAE$.

$\because AD$平分$\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$.

$\because \angle ACE=\angle ADC+\angle DAC$，

$\angle BAE=\angle DAE+\angle BAD$，

$\therefore \angle ACE=\angle BAE$.

又$\because \angle AEC=\angle BEA$，$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BAE$.

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{AE}$.

$\therefore AE^2=BE\cdot CE$，即$DE^2=BE\cdot CE$.

方法二 ▶ 等比过渡法（等比代换法）

当用三点定形法不能确定三角形，同时也无等线段代换时，可以考虑用等比代换法，也就是通过对已知条件或图形的深入分析，找到与求证的结论中某个比相等的比，并进行代换，然后用三点定形法来确定三角形.

例3 如图3，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$，E是AC的中点，延长ED，交AB的延长线于点F. 求证：$AB\cdot AF=DF\cdot AC$.

解题秘方： 乘积式可变形为$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{AF}$. 运用“竖定”的两个三角形（$\triangle ABC$和$\triangle ADF$）明显不相似，因为一个是直角三角形，另一个是钝角三角形.

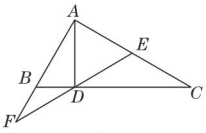


图3



由条件“直角三角形斜边上的高”这一基本图形，可知$\triangle ABD\backsim\triangle CAD$，即$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{AD}$，所以利用$\dfrac{BD}{AD}$这个桥梁，只需证明$\dfrac{DF}{AF}=\dfrac{BD}{AD}$即可.

证明： $\because AD\perp BC$，E是AC的中点，

$\therefore DE=EC$.

$\therefore \angle EDC=\angle C$.

$\because \angle BAC=90^\circ$，$\therefore \angle BAD+\angle DAC=90^\circ$.

$\because \angle C+\angle DAC=90^\circ$，$\therefore \angle BAD=\angle C$.

$\because \angle BDF=\angle EDC$，$\therefore \angle BDF=\angle BAD$.

又$\because \angle F=\angle F$，$\therefore \triangle BDF\backsim\triangle DAF$.

$\therefore \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DF}{AF}$.

$\because \angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，$\angle BAD=\angle C$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CAD$.

$\therefore \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$.

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{AF}$，即$AB\cdot AF=DF\cdot AC$.

方法三 ▶ 等积过渡法（等积代换法）

思考问题的基本途径是：用三点定形法确定两个三角形，然后通过三角形相似推出线段成比例；若三点定形法不能确定两个相似三角形，则考虑用等量（线段）代换，或用等比代换，然后用三点定形法确定相似三角形. 若以上方法行不通，则考虑用等积代换法.

例4 如图4，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，CD是斜边AB上的高，G是DC延长线上一点，过点B作$BE\perp AG$，垂足为E，交CD于点F. 求证：$CD^2=DF\cdot DG$.

解题秘方： 由“CD是Rt$\triangle ABC$斜边AB上的高”这一基本模型可知$CD^2=AD\cdot BD$，只需证明$AD\cdot BD=DF\cdot DG$即可.

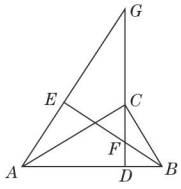


图4

证明： $\because \angle ACB=90^\circ$，$CD$是斜边$AB$上的高，

$\therefore \angle ACD=\angle CBD$，$\angle ADC=\angle CDB$.

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle CBD$. $\therefore \dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$.

$\therefore CD^2=AD\cdot BD$.

$\because BE\perp AG$，$\therefore \angle G+\angle CFE=90^\circ$.

又$\because \angle DBF+\angle BFD=90^\circ$，$\angle EFG=\angle BFD$，

$\therefore \angle G=\angle DBF$.

$\therefore \triangle BDF\backsim\triangle GDA$.

$\therefore \dfrac{BD}{DG}=\dfrac{DF}{AD}$.

$\therefore AD\cdot BD=DF\cdot DG$.

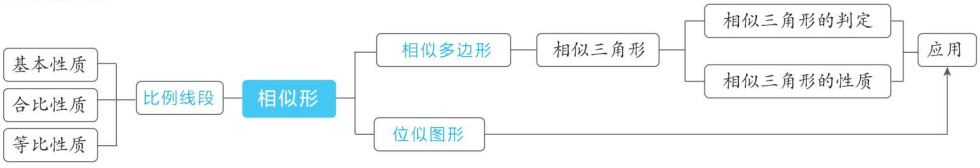
$\therefore CD^2=DF\cdot DG$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 比例的性质

（1）**基本性质**：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$ad=bc$（b，$d\neq0$）；

（2）**合比性质**：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（$b$，$d\neq0$）；

（3）**等比性质**：如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，且$b_1+b_2+\cdots+b_n\neq0$，那么$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$.

2. **平行线分线段成比例的基本事实及其推论** 两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例；平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例.

3. **相似三角形的判定**

（1）平行于三角形一边的直线与其他两边（或两边的延长线）相交，截得的三角形与原三角形相似；

（2）如果一个三角形的两个角分别与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似；

（3）如果一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似；

（4）如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似；

（5）如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

4. **相似三角形的性质**

（1）相似三角形的对应角相等，对应边的比等于相似比；

（2）相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比；

（3）相似三角形周长的比等于相似比；

（4）相似三角形面积的比等于相似比的平方.

知识方法专题

知识必学

专题一 平行线分线段成比例

链接中考» 平行线分线段成比例是三角形相似的基础，也是求线段长的一种方法.在中考命题时，常以选择题和填空题的形式出现.

例1 [中考·淮安]如图22-1，$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，直线$a$，$b$与$l_1$，$l_2$，$l_3$分别交于点$A$，$B$，$C$和点$D$，$E$，$F$.若$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$，$DE=4$，则$EF$的长是（　　）

A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{20}{3}$　　C. 6　　D. 10

解题秘方： 根据$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，可得$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，再根据条件可求得$EF$的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：∵ $l_1 // l_2 // l_3$，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

又∵ $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$，$DE=4$，

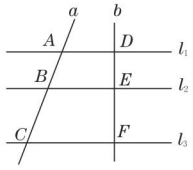


图 22-1

$\therefore \frac{2}{3}=\frac{4}{EF}$，解得 $EF=6$.

答案：C

误区警示：此类问题容易出错的地方是线段没有对应，应用平行线分线段成比例时，要注意“对应”一词的含义．为减少错误，应用时，可把在同一条直线上被截得的两条线段安排在比例的一边．

专题二 相似三角形的判定

链接中考» 图形的相似是平面几何中非常重要的内容，也是中考中常见的考点．三角形相似的判定方法有多种，解题时要合理选用判定方法．

例 2 [中考·南京]如图 22-2，在△ ABC 中，CD 是边 AB 上的高，且 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$.

（1）求证：△ ACD ∽△ CBD；

（2）求∠ ACB 的大小．

解题秘方：（1）由两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似，即可证明△ ACD ∽△ CBD；

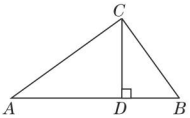


图 22-2

（2）由（1）知△ ACD ∽△ CBD，然后根据相似三角形的对应角相等，可得∠ A= ∠ BCD，然后由 ∠ A+ ∠ ACD=90°，可得 ∠ BCD + ∠ ACD=90°，即∠ ACB=90°．

（1）**证明**：∵ CD 是边 AB 上的高，

$\therefore$ ∠ ADC = ∠ CDB=90°．

又∵ $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，

$\therefore$ △ ACD ∽△ CBD.

（2）**解**：由（1）知△ ACD ∽△ CBD，

$\therefore$ ∠ A = ∠ BCD.

∵在△ ACD 中，∠ ADC=90°，

$\therefore$ ∠ A + ∠ ACD=90°．

$\therefore$ ∠ BCD + ∠ ACD=90°，即∠ ACB=90°．

方法点拨：相似三角形的判定方法

（1）平行法；

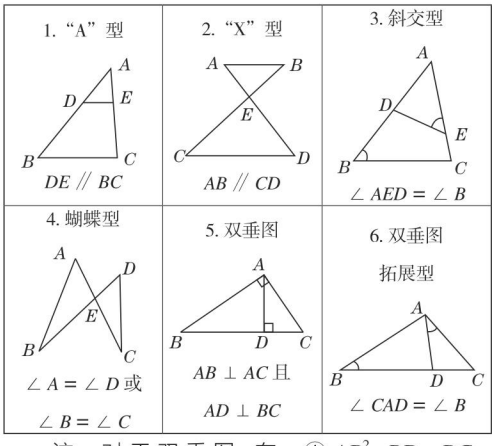
（2）三组对应边的比相等（类似于三角形全等的判定方法“SSS”）；

（3）两组对应边的比相等，且夹角相等（类似于三角形全等的判定方法“SAS”）；

（4）两角对应相等；

（5）直角三角形中斜边、直角边对应成比例（类似于直角三角形全等的判定方法“HL”）．

相似三角形的基本图形如下：



注：对于双垂图，有：① $AB^2=BD\cdot BC$；② $AC^2=CD\cdot BC$；③ $AD^2=BD\cdot CD$.

对于双垂图拓展型，仅有 $AC^2=CD\cdot BC$.

判断两个三角形相似，若已知一角对应相等，可先考虑另一角对应相等，注意公共角或对顶角或同角（等角）的余角（补角）相等；若找不到第二对角相等，就考虑夹这个角的两组对应边的比相等；若无法得到角相等，就考虑三组对应边的比相等．

专题三 相似三角形的性质

链接中考» 相似三角形的性质归纳起来有三点：(1)相似三角形的对应边成比例，对应角相等；

(2)相似三角形的对应线段（对应边上的中线、高线，对应角的平分线）的比等于相似比；

(3)相似三角形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方．相似三角形的性质既可以进行线段相等、平行、垂直的证明，也可以进行线段和面积的计算．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 3 ［中考·武威］如图 22–3，D，E 分别是△ ABC 的边 AB，BC 上的点，且 $DE \parallel AC$. 若 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE}=1 : 3$，则 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle AOC}$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{16}$

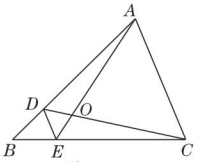


图 22–3

解：由 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE}=1 : 3$，可得 $BE : EC=1 : 3$，所以 $BE : BC=1 : 4$. 易证 $\triangle BDE \backsim \triangle BAC$，$\triangle DOE \backsim \triangle COA$，所以 $\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{4}$. 所以 $\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle AOC}}=\left(\frac{DE}{AC}\right)^2=\frac{1}{16}$.

答案：D

方法点拨：三角形面积比的处理方法

（1）利用三角形的面积公式；

（2）利用相似三角形面积的比等于相似比的平方.

专题四 相似三角形的应用

链接中考» 相似三角形的知识在实际生活中有广泛的应用，这一应用是建立在数学建模和数形结合思想基础上的，把实际问题转化为数学问题，通过数学问题达到解决实际问题的目的. 在中考中以选择题、填空题和解答题的形式都有考查.

例 4　一天，数学课外活动小组的同学们，带着皮尺去测量某河道因挖沙形成的“圆锥形坑”的深度，来评估这些坑道对河道的影响，如图 22–4 是同学们选择（确保测量过程中无安全隐患）的测量对象，测量方案如下：

①先测出沙坑坑沿的圆周长为 34.54 m；

②甲同学直立于沙坑坑沿的圆周所在的平面上，经过适当调整自己所处的位置，当他位于点 B 时，他的视线恰好经过沙坑坑沿圆周上一点 A 看到坑底 S（甲同学的视线起点 C 与点 A，S 在同一条直线上），经测量 AB=1.2 m，BC=1.6 m.

根据以上测量数据，求“圆锥形坑”的深度（圆锥的高）.（π 取 3.14，结果精确到 0.1 m）

解：如图 22–4，设圆锥底面圆的圆心为 O，连接 OS，OA，则 $\angle O=\angle ABC=90°$，$OS \parallel BC$，

$\therefore \angle ASO=\angle ACB$.

$\therefore \triangle SOA \backsim \triangle CBA$.

$\therefore \frac{OS}{BC}=\frac{OA}{BA}$，

即 $\frac{OS}{1.6}=\frac{OA}{1.2}$　①.

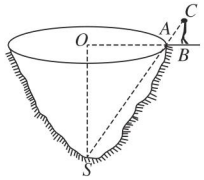


图 22–4

由沙坑坑沿的圆周长为 34.54 m，得 $2\pi \times OA=34.54$，

解得 $OA \approx 5.5$ m，代入①中解得 $OS \approx 7.3$ m.

答：“圆锥形坑”的深度约为 7.3 m.

方法点拨：运用相似三角形的知识解决实际问题时，要能够从实际问题中抽象出简单的数学模型，然后列出相关数据的比例表达式构建方程求解.

专题五 位似变换

链接中考» 位似图形是特殊的相似图形，此内容常与平移、旋转进行综合命题，主要考查学生的动手操作能力，一般都以解答题的形式考查.

例 5　［中考·齐齐哈尔］如图 22–5，在边长为 1 个单位的小正方形网格中：

（1）画出△ ABC 向上平移 6 个单位，再向右平移 5 个单位后的△ $A_1B_1C_1$；

（2）以点 B 为位似中心，将△ ABC 放大为原来的 2 倍，得到△ A_2BC_2，请在网格中画出△ A_2BC_2；

（3）求△ CC_1C_2 的面积.

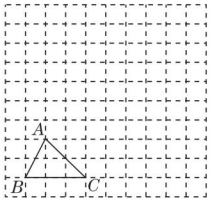


图 22–5

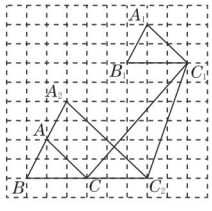


图 22–6

解题秘方：首先确定变换规则，然后根据规则进行作图. 作图时，首先确定图形的关键点，再依次作出图形关键点的对应点，最后顺次连接各关键点的对应点即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）分别将 A，B，C 三点向上平移 6 个单位，再向右平移 5 个单位，再顺次连接各对应点，得到平移后的△ $A_1B_1C_1$，如图 22−6 所示．

（2）分别作出 A，B，C 三点关于点 B 的位似点，再顺次连接各对应点，得到位似图形△ A_2BC_2，如图 22−6 所示．

（3）如图 22−6，易知 $CC_2=3$，△ CC_1C_2 的 CC_2 边上的高为 6，所以△ CC_1C_2 的面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 6=9$.

方法点拨：平移图形，首先确定图形当中的关键点，然后将图形的关键点按平移规则进行平移确定各关键点的对应点，再顺次连接各关键点的对应点即可．同理，作图形的位似图形，先确定位似中心，然后分别确定各关键点的对应点，再顺次连接各关键点的对应点．

专题六 相似与函数

链接中考» 利用三角形相似的性质建立函数关系，主要就是将两个变量放在相似三角形的对应边中，利用对应边的比相等列出等量关系，建立函数表达式．这种解决问题的方法在中考中很常见．

例 6 ［中考·来宾］如图 22−7，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$AD=b$，点 M 为 BC 边上一动点（点 M 与点 B，C 不重合），连接 AM，过点 M 作 $MN\perp AM$，垂足为 M，MN 交 CD 或 CD 的延长线于点 N.

（1）求证：△ $CMN\backsim$△ BAM；

（2）设 $BM=x$，$CN=y$，求 y 关于 x 的函数表达式，当 x 取何值时，y 有最大值，并求出 y 的最大值；

（3）当点 M 在 BC 上运动时，求使得下列两个条件都成立的 b 的取值范围：①点 N 始终在线段 CD 上；②点 M 在某一位置时，点 N 恰好与点 D 重合．

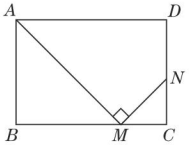


图 22−7

解题秘方：（1）由 $MN\perp AM$，可得出 $\angle AMB+\angle NMC=90°$，易得 $\angle NMC=\angle BAM$，从而得证；

（2）由（1）易得 $\frac{CM}{AB}=\frac{CN}{BM}$，即 $\frac{b-x}{a}=\frac{y}{x}$．从而得 $y=-\frac{1}{a}x^2+\frac{b}{a}x$，经过配方，即可求得 y 的最大值；

（3）分析题意，根据条件得出 b 的取值范围．

（1）**证明：**∵ $MN\perp AM$，

∴ $\angle AMB+\angle NMC=90°$．

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle C=\angle B=90°$．

∴ $\angle BAM+\angle AMB=90°$．

∴ $\angle NMC=\angle BAM$.

∴ △ $CMN\backsim$△ BAM.

（2）**解：**由（1）得 $\frac{CM}{AB}=\frac{CN}{BM}$，

即 $\frac{b-x}{a}=\frac{y}{x}$.

∴ $y=-\frac{1}{a}x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4a}$.

∴当 $x=\frac{b}{2}$ 时，y 有最大值，$y_{最大值}=\frac{b^2}{4a}$.

（3）**解：**①由点 N 始终在线段 CD 上，

得 $\frac{b^2}{4a}\leqslant a$.

∴ $b^2\leqslant 4a^2$，即（$b+2a$）（$b-2a$）$\leqslant 0$.

∵ $b+2a>0$，

∴ $b-2a\leqslant 0$，即 $b\leqslant 2a$.

②由点 M 在某一位置时，点 N 恰好与点 D 重合，得△ ABM，△ CDM，△ ADM 均为直角三角形．

在 Rt△ ABM 中，$AB^2+BM^2=AM^2$，

即 $a^2+x^2=AM^2$.

在 Rt△ CDM 中，$CM^2+CD^2=DM^2$，

即 $(b-x)^2+a^2=DM^2$.

在 Rt△ ADM 中，$AM^2+DM^2=AD^2$，

即 $(a^2+x^2)+[(b-x)^2+a^2]=b^2$，

整理，得 $x^2-bx+a^2=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易知 $\Delta=b^2-4a^2\geqslant 0$，

即 $(b+2a)(b-2a)\geqslant 0$.

$\because b+2a>0$，

$\therefore b-2a\geqslant 0$，即 $b\geqslant 2a$.

综合①②可知，$b=2a$.

方法点拨：利用相似建立函数关系，将函数的两个变量置于两个相似三角形的对应边中，利用相似三角形的性质建立等量关系，通过变形建立两个变量的函数关系.

专题七 存在性探索问题

链接中考» 由于相似三角形的不确定性，因此，在动点问题中出现两个三角形有时存在相似的情况，有时存在不相似的情况，需要我们进行判定.

例7 [中考·昆明]如图 22-8，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$（$a\neq 0$）与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 的右侧），与 y 轴交于点 C，点 A 的坐标为（4，0），抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$.

（1）求抛物线对应的函数表达式.

（2）M 为第一象限内抛物线上的一个点，过点 M 作 $MG\perp x$ 轴于点 G，交 AC 于点 H，当线段 $CM=CH$ 时，求点 M 的坐标.

（3）在（2）的条件下，将线段 MG 绕点 G 顺时针旋转一个角度 α（$0°<\alpha<90°$），在旋转过程中，设线段 MG 与抛物线交于点 N，在线段 GA 上是否存在点 P，使得以 P，N，G 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？如果存在，请求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.

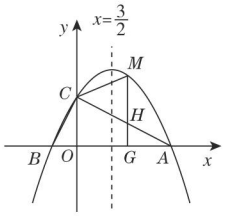


图 22-8

解题秘方：（1）根据抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$，可求得 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 中 a 的值，再把点 A（4，0）的坐标代入 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 可求得 c 的值. 也可根据抛物线的对称性先求出点 B 的坐标，再把点 A，B 的坐标分别代入 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 求解.

（2）先求出直线 AC 对应的函数表达式，设点 M 的横坐标为 m，则点 M 的纵坐标及点 H 的坐标均可用 m 来表示，点 M 与点 H 的纵坐标的差即为 MH 的长. 过点 C 作 $CE\perp MH$ 于点 E. 根据等腰三角形“三线合一”的性质，得 $MH=2EH$，于是可列方程. 解之即可求得点 M 的坐标.

（3）根据勾股定理的逆定理可判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 线段 MG 绕点 G 旋转的过程中，与抛物线交于点 N，当 $NP\perp x$ 轴时，$\angle NPG=90°$，以 P，N，G 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，只能是 $\triangle NPG\backsim\triangle ACB$ 或 $\triangle NPG\backsim\triangle BCA$ 两种情况，根据夹直角的两边对应成比例可求得点 P 的坐标.

解：（1）$\because$ 抛物线与 x 轴交于 A，B 两点，A（4，0），A，B 两点关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 成轴对称，

$\therefore B(-1,0)$.

把点 A（4，0），B（-1，0）的坐标分别代入 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$，得 $\begin{cases}16a+6+c=0,\\ a-\frac{3}{2}+c=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ c=2.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

（2）当 $x=0$ 时，$y=2$，则 $C(0,2)$.

设直线 AC 对应的函数表达式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$）.

把点 A（4，0），C（0，2）的坐标分别代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}4k+b=0,\\ b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ b=2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴直线 AC 对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

由题意知，点 M 在抛物线上，点 H 在 AC 上，$MG\perp x$ 轴.

设点 M 的坐标为 $\left(m,\ -\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$，

则点 H 的坐标为 $\left(m,\ -\frac{1}{2}m+2\right)$.

$\therefore MH=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2-\left(-\frac{1}{2}m+2\right)=-\frac{1}{2}m^2+2m$.

过点 C 作 $CE\perp MH$ 于点 E，如图 22−9 所示.

易知 $OC=GE=2$.

$\because CM=CH$,

$\therefore MH=2EH=2\left[2-\left(-\frac{1}{2}m+2\right)\right]=m$.

$\therefore -\frac{1}{2}m^2+2m=m$，即 $m^2-2m=0$.

解得 $m_1=2$，$m_2=0$（不合题意，舍去）.

当 $m=2$ 时，$y=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2=3$,

$\therefore M(2,\ 3)$.

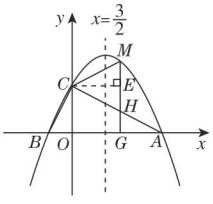


图 22−9

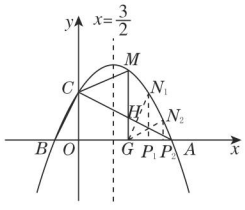


图 22−10

（3）存在点 P，使得以 P，N，G 为顶点的三角形与△ ABC 相似.

由题意知，点 A 的坐标为（4，0），由（1）知点 B 的坐标为（−1，0），由（2）知点 C 的坐标为（0，2），

$\therefore AC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AB=5$.

在 △ ABC 中，$AC^2+BC^2=(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=25=AB^2$,

$\therefore$△ ABC 是直角三角形，且∠ $ACB=90°$.

线段 MG 绕点 G 旋转的过程中，与抛物线交于点 N，当 $NP\perp x$ 轴时，∠ $NPG=90°$.

设点 P 的坐标为（n，0），则点 N 的坐标为 $\left(n,\ -\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2\right)$. 分两种情况：如图 22−10,

①当 $\frac{N_1P_1}{AC}=\frac{P_1G}{CB}$ 时，

$\because\angle N_1P_1G=\angle ACB=90°$,

$\therefore\triangle N_1P_1G\backsim\triangle ACB$.

$\therefore\frac{-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2}{2\sqrt{5}}=\frac{n-2}{\sqrt{5}}$.

解得 $n=3$ 或 $n=-4$（不合题意，舍去）.

$\therefore P_1(3,\ 0)$.

②当 $\frac{N_2P_2}{BC}=\frac{P_2G}{CA}$ 时，

$\because\angle N_2P_2G=\angle BCA=90°$,

$\therefore\triangle N_2P_2G\backsim\triangle BCA$.

$\therefore\frac{-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2}{\sqrt{5}}=\frac{n-2}{2\sqrt{5}}$.

解得 $n=1+\sqrt{7}$ 或 $n=1-\sqrt{7}$（不合题意，舍去）.

$\therefore P_2(1+\sqrt{7},\ 0)$.

综上所述，满足条件的点 P 的坐标为（3，0）或（$1+\sqrt{7}$，0）.

方法点拨： 本题是一道关于二次函数的综合性问题，解决这类问题的关键在于结合点的坐标表示线段的长. 对于存在性问题，先假设存在，由此进行探究，若能求出点的坐标或线段的长，则存在，否则不存在. 对于不确定顺序的三角形三个顶点的相似问题，还必须分类讨论，做到不重不漏.

方法必会

专题八 分类讨论思想

专题解读» 在解答有关相似形的某些问题时，往往需要按某一标准把问题分成若干个部分或情况分别加以研究，逐一解决，从而得到完整的结果. 这种分类讨论思想要求对这类问题审题要仔细，分类要注意两点：一是正确选择分类标准；二是分类科学，既不重复也不遗漏.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 8 如图 22−11，在△ ABC 中，AB=8 cm，BC=16 cm，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 2 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 4 cm/s 的速度移动. 如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，经几秒钟△ PBQ 与△ ABC 相似?

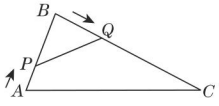


图 22−11

解题秘方： △ PBQ 与△ ABC 有一个公共角相等，所以要使△ PBQ 与△ ABC 相似，应存在两种情况，即△ PBQ ∽△ ABC 与△ PBQ ∽△ CBA.

解： 设经过 t s，△ PBQ 与△ ABC 相似.

①∵△ PBQ 与△ ABC 有公共角∠ B，

∴当 PQ // AC，即$\frac{PB}{AB}=\frac{QB}{CB}$时，

△ PBQ ∽△ ABC.

∵ AP=2t cm，AB=8 cm，

∴ PB=（8−2t）cm.

又∵ BQ=4t cm，BC=16 cm，

$$\therefore \frac{8-2t}{8}=\frac{4t}{16},$$

解得 t=2.

②∵∠ B 为△ PBQ 与△ ABC 的公共角，

∴当$\frac{PB}{CB}=\frac{QB}{AB}$时，△ PBQ ∽△ CBA.

由①知 PB=（8−2t）cm，QB=4t cm，

$$\therefore \frac{8-2t}{16}=\frac{4t}{8},$$

解得 t=0.8.

∴如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，经过 0.8 s 或 2 s △ PBQ 与△ ABC 相似.

方法点拨： 当两个三角形有一个角相等，在没有确定两个三角形相似的对应关系时，两个三角形相似应存在两种情况.

专题九 方程思想

专题解读» 当两个图形相似时，周长及面积具有一定的关系，在求图形的周长或面积时，有时利用方程或方程组会给解题带来很大的方便.

例 9 [中考·佛山]如图 22−12，在 Rt△ ABC 中，AB=BC，∠ B=90°，AC=10$\sqrt{2}$. 四边形 $BDEF$ 是△ ABC 的内接正方形（点 D，E，F 在三角形的边上），则此正方形的面积是_____.

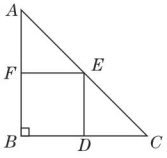


图 22−12

解题秘方： 由已知可得到△ AFE ∽△ ABC，根据相似三角形的对应边成比例即可求得 EF 的长.

解：∵在 Rt△ ABC 中，AB^2+BC^2=AC^2，AB=BC，AC=10$\sqrt{2}$，∴ 2AB^2=200.

∴ AB=BC=10.

∵四边形 $BDEF$ 是正方形，

∴ EF // BC，EF=BF.

设 EF=x，则 AF=10−x.

∵ EF // BC，

∴△ AFE ∽△ ABC.

$$\therefore \frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AB},\ 即\frac{x}{10}=\frac{10-x}{10}.$$

解得 x=5.

∴ EF=5.

∴此正方形的面积为 5×5=25.

答案： 25

方法点拨： 求线段的长的一般思路是运用勾股定理或相似三角形，当有直角三角形且已知两边时，常采用勾股定理；当没有直角三角形时，常采用证明三角形相似，根据相似三角形的性质求解. 本题是利用相似三角形的性质求解的.

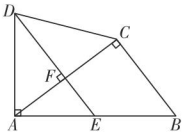
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见233页

类型1：巧用“三点定形法”证两三角形相似

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle DAB=\angle ACB=90^\circ$，过点 D 作 $DE\perp AC$，垂足为 F，DF 的延长线与 AB 相交于点 E.

求证：$AB\cdot AF=CB\cdot CD$.



（第1题）

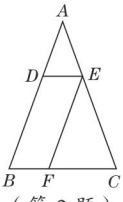
类型2：巧用平行线构造两三角形相似

方法1：等线段代换法

2. 如图，已知在△ ABC 中，D，E，F 分别是边 AB，AC，BC 上的点，$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$.

（1）求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BF}{BC}$；

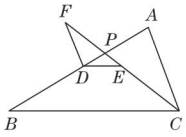
（2）若 $AD:DB=3:5$，求 $CF:CB$.



（第2题）

方法2：等积代换法

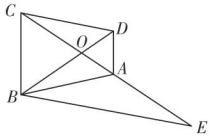
3. 如图，在△ ABC 中，D 是 AB 上一点，E 是△ ABC 内一点，$DE\parallel BC$，过点 D 作 AC 的平行线交 CE 的延长线于点 F，CF 与 AB 交于点 P. 求证：$\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PA}{PB}$.



（第3题）

方法3：等比代换法

4. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，AC 与 BD 相交于点 O，过点 B 作 $BE\parallel CD$ 交 CA 的延长线于点 E. 试问：OC^2 与 $OA\cdot OE$ 相等吗？请说明理由.

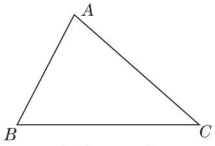


（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：巧用位似解三角形中的内接多边形问题

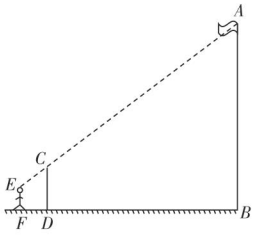
5. 如图，求作：内接于已知△ABC的矩形$DEFG$，使它的边EF在BC上，顶点D，G分别在AB，AC上，并且有$DE:EF=1:2$.



（第 5 题）

类型 4：巧用相似三角形解实际问题

6. 如图（示意图），八（1）班课外活动小组利用标杆测量学校旗杆的高度. 已知标杆高度$CD=3$ m，标杆与旗杆的水平距离$BD=15$ m，人的眼睛与地面的高度$EF=1.6$ m，人与标杆CD的水平距离$DF=2$ m，求旗杆AB的高度.



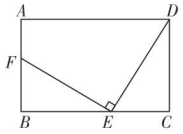
（第 6 题）

类型 5：巧用相似三角形解与函数综合问题

7. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=m$，$BC=8$，E为线段BC上的动点（不与点B，C重合）. 连接DE，过点E作$EF\perp DE$，EF与线段BA交于点F，设$CE=x$，$BF=y$.

（1）写出y关于x的函数表达式.

（2）若$m=8$，当x为何值时，y的值最大？最大值是多少？



（第 7 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 章测试卷 ☞ 答案见 234 页

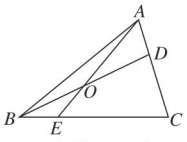
（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 已知△ $ABC \backsim$ △ $A'B'C'$，$AB=8$，$A'B'=6$，则 $\dfrac{BC}{B'C'}=$（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 3　　D. $\dfrac{16}{9}$

2. 如图，在△ ABC 中，D 在 AC 边上，$AD:DC=1:2$，O 是 BD 的中点，连接 AO 并延长交 BC 于 E，则 $BE:EC=$（　　）

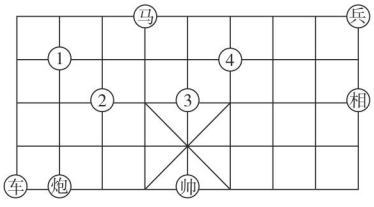


（第 2 题）

A. 1 : 2　　B. 1 : 3

C. 1 : 4　　D. 2 : 3

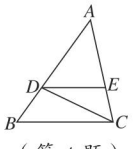
3. 在如图所示的象棋盘（各个小正方形的边长均相等）中，根据“马走日”的规则，“马”应落在下列哪个位置处，能使“马”“车”“炮”所在位置的格点构成的三角形与“帅”“相”“兵”所在位置的格点构成的三角形相似（　　）



（第 3 题）

A. ①处　　B. ②处　　C. ③处　　D. ④处

4. 如图，在△ ABC 中，点 D，E 分别在 AB，AC 边上，$DE \parallel BC$，$\angle ACD=\angle B$，若 $AD=2BD$，$BC=6$，则线段 CD 的长为（　　）



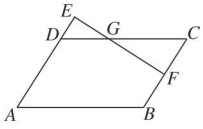
（第 4 题）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. 5

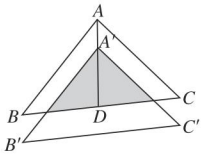
5. 如图，在▱ $ABCD$ 中，F 为 BC 的中点，延长 AD 至 E，使 $DE:AD=1:3$，连接 EF 交 DC 于点 G，则 $S_{\triangle DEG}:S_{\triangle CFG}=$（　　）

A. 2 : 3　　B. 3 : 2

C. 9 : 4　　D. 4 : 9



（第 5 题）



（第 6 题）

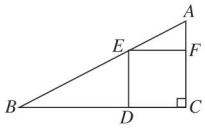
6. 如图，将△ ABC 沿 BC 边上的中线 AD 平移到△ $A'B'C'$ 的位置，已知△ ABC 的面积为 9，重叠部分（阴影部分）的面积为 4. 若 $AA'=1$，则 $A'D$ 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

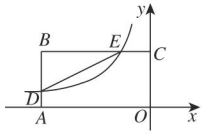
7. 如图，在一块斜边长为 30 cm 的直角三角形木板（即 Rt△ ACB）中截取一个正方形 $CDEF$，点 D 在边 BC 上，点 E 在斜边 AB 上，点 F 在边 AC 上，若 $AF:AC=1:3$，则这块木板截取正方形 $CDEF$ 后，剩余部分的面积为（　　）

A. 200 cm^2　　B. 170 cm^2

C. 150 cm^2　　D. 100 cm^2



（第 7 题）



（第 8 题）

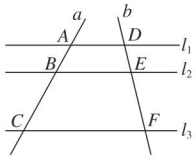
8. 如图，在平面直角坐标系中，$A(-8,0)$，$B(-8,4)$，$C(0,4)$，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$x<0$）的图象分别与线段 AB，BC 交于点 D，E，连接 DE. 若点 B 关于 DE 的对称点恰好在 OA 上，则 $k=$（　　）

A. −20　　B. −16　　C. −12　　D. −8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题（每题4分，共16分）

9. 如图，$l_1 // l_2 // l_3$，直线 a，b 与 l_1，l_2，l_3 分别相交于点 A，B，C 和点 D，E，F. 若 $AB=3$，$DE=2$，$BC=6$，则 $EF=$_____.



（第9题）

10. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，CE 平分 $\angle BCD$ 交 AB 于点 E，交 BD 于点 F，且 $\angle ABC=60°$，$AB=2BC$，连接 OE. 下列结论：

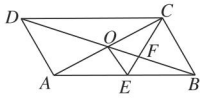
① $EO \perp AC$；

② $S_{\triangle AOD}=4S_{\triangle OCF}$；

③ $AC : BD=\sqrt{21} : 7$；

④ $FB^2=OF \cdot DF$.

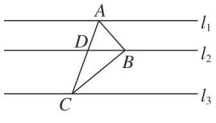
其中正确的结论有_____（填写所有正确结论的序号）.



（第10题）

11. 在平面直角坐标系中，A，B，C 三点的坐标分别为（4，0），（4，4），（0，4），点 P 在 x 轴上，点 D 在直线 AB 上，$DA=1$，$CP \perp DP$ 于点 P，则点 P 的坐标为_____.

12. 如图，直线 $l_1 // l_2 // l_3$，A，B，C 分别为直线 l_1，l_2，l_3 上的动点，连接 AB，BC，AC，线段 AC 交直线 l_2 于点 D. 设直线 l_1，l_2 之间的距离为 m，直线 l_2，l_3 之间的距离为 n，若 $\angle ABC=90°$，$BD=4$，且 $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$，则 $m+n$ 的最大值为_____.



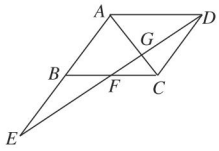
（第12题）

三、解答题（共52分）

13.（10分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，延长 AB 至点 E，使 $BE=AB$，连接 DE，分别交 BC，AC 于点 F，G.

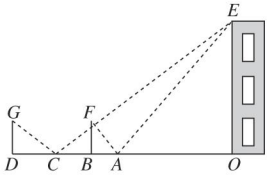
（1）求证：$BF=CF$；

（2）若 $BC=6$，$DG=4$，求 FG 的长.



（第13题）

14.（8分）如图，为了测量一栋楼的高度 OE，小明同学先在操场上 A 处放一面镜子，向后退到 B 处，恰好在镜子中看到楼的顶部 E；再将镜子放到 C 处，然后后退到 D 处，恰好再次在镜子中看到楼的顶部 E（点 O，A，B，C，D 在同一条直线上）. 测得 $AC=2$ m，$BD=2.1$ m，如果小明眼睛距地面高度 BF，DG 为 1.6 m，试确定楼的高度 OE.



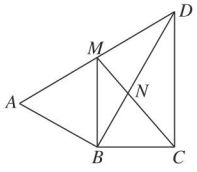
（第14题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15.（10 分）如图，$\angle ABD=\angle BCD=90^\circ$，$DB$ 平分 $\angle ADC$，过点 B 作 $BM\parallel CD$ 交 AD 于 M. 连接 CM 交 DB 于 N.

（1）求证：$BD^2=AD\cdot CD$；

（2）若 $CD=6$，$AD=8$，求 MN 的长.



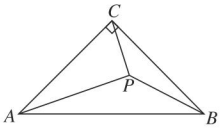
（第 15 题）

16.（12 分）如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，P 为 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle APB=\angle BPC=135^\circ$.

（1）求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$；

（2）求证：$PA=2PC$；

（3）若点 P 到三角形的边 AB，BC，CA 的距离分别为 h_1，h_2，h_3，求证：$h_1^2=h_2\cdot h_3$.



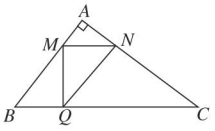
（第 16 题）

17.（12 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，点 M，Q 分别是边 AB，BC 上的动点（点 M 不与点 A，B 重合），且 $MQ\perp BC$，过点 M 作 BC 的平行线 MN，交 AC 于点 N，连接 NQ，设 BQ 为 x.

（1）求证：不论 x 为何值时，总有 $\triangle QBM\backsim\triangle ABC$.

（2）是否存在一点 Q，使得四边形 $BMNQ$ 为平行四边形？试说明理由.

（3）当 x 为何值时，四边形 $BMNQ$ 的面积最大？并求出最大值.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第21章 二次函数与反比例函数

21.1 二次函数

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B

3. B **点拨:** 根据降价 x 元,知售价为 $(60-x)$ 元,销售量为 $(300+20x)$ 件,由题意可得等量关系:总销售额 = 销售量 × 售价,根据等量关系列出函数表达式即可.

4. $y=2x^2-4x+4$ **点拨:** 本题可以先证 $\triangle AHE\cong\triangle BEF$,$\therefore AH=BE$.

$\because AE=x$,$\therefore AH=BE=2-x$.

在 Rt $\triangle AHE$ 中,由勾股定理得 $EH^2=AE^2+AH^2=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4$,

即 $y=2x^2-4x+4$.

5. $S=-3x^2+24x$;$\frac{14}{3}\leqslant x<8$

6. **解:** (1) 由题图知 y 与 x 是一次函数关系,设 $y=kx+b$.

$\because y=kx+b$ 的图象过点 $(10,300)$,$(12,240)$,

$\therefore \begin{cases}10k+b=300,\\12k+b=240,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-30,\\b=600.\end{cases}$

$\therefore y=-30x+600$.

当 $x=14$ 时,$y=180$;当 $x=16$ 时,$y=120$,

即点 $(14,180)$,$(16,120)$ 均在函数 $y=-30x+600$ 的图象上.

$\because -30x+600>0$ 且 $x>0$,

$\therefore 0<x<20$.

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=-30x+600(0<x<20$ 且 x 为整数).

(2) 根据题意,得 $W=(x-6)(-30x+600)=-30x^2+780x-3\,600$,

即 W 与 x 之间的函数表达式为 $W=-30x^2+780x-3\,600(6<x<20$ 且 x 为整数).

点拨: 在求二次函数表达式的过程中,二次函数的某个量与自变量之间呈一次函数的关系,所以必须要先求一次函数的表达式,再来确定二次函数的表达式.

7. **解:** (1) $\because$ 出发时间为 t s,点 P 的速度为 1mm/s,点 Q 的速度为 2mm/s,

$\therefore PC=(6-t)$ mm,$CQ=2t$ mm.

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times(6-t)\times2t=-t^2+6t$,

即 $S_1=-t^2+6t$.

$\because \begin{cases}t>0,\\6-t>0,\end{cases}\therefore 0<t<6$.

(2) $S_2=S_{\triangle ABC}-S_1=\frac{1}{2}\times12\times6-(-t^2+6t)=t^2-6t+36$,

即 $S_2=t^2-6t+36(0<t<6)$.

21.2 二次函数的图象和性质

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:** A,B 选项中二次函数图象开口向上,说明 $a>0$,则一次函数的图象必经过第一、二、三象限,故 A,B 都不正确;C,D 选项中二次函数的图象开口向下,说明 $a<0$,则一次函数的图象必经过第二、三、四象限,故 C 正确.

2. A **点拨:** $\because a<-1$,$\therefore a-1<a<a+1<0$.

$\therefore$ 这三个点都在函数 $y=-x^2$ 的图象的对称轴左侧.

$\because$ 在对称轴左侧,y 随 x 的增大而增大,

$\therefore y_1<y_2<y_3$.

3. C

4. $\frac{\pi}{2}$cm^2 **点拨:** 本题考查不规则图形面积的求法,根据图形的对称性和割补法转化为规则图形,再进行求解.

5. **解:** (1) 设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$.

$\because$ 直线 AB 过点 $A(2,0)$ 和点 $B(1,1)$,

$\therefore \begin{cases}2k+b=0,\\k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-x+2$.

$\because$ 抛物线 $y=ax^2$ 过点 $B(1,1)$,

$\therefore a\times1^2=1$,

解得 $a=1$.

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)解方程组$\begin{cases}y=-x+2,\\y=x^2,\end{cases}$

得$\begin{cases}x=-2,\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

∴点C的坐标为$(-2,4)$.

(3)易知$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$,

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$,

∴$S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}=4-1=3$.

(4)设D点的坐标为(x,y),

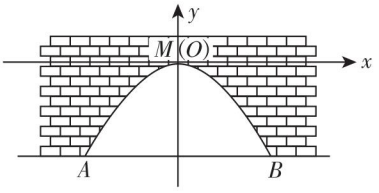
则$S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot|y|=\frac{1}{2}\times2\cdot y=y=3$.

把$y=3$代入$y=x^2$,得$x=\pm\sqrt{3}$.

∵点D在第一象限,∴$x=\sqrt{3}$.

∴点D的坐标为$(\sqrt{3},3)$.

6. **解:**(1)如图所示.



(第6题)

设这条抛物线对应的函数表达式为$y=ax^2$.

易知点B的坐标为$(4,-4)$,把点B的坐标代入$y=ax^2$,得$-4=a\times4^2$,

解得$a=-\frac{1}{4}$.

∴抛物线对应的函数表达式为$y=-\frac{1}{4}x^2$,

(2)当$y=-3$时,$-3=-\frac{1}{4}x^2$,

解得$x=\pm2\sqrt{3}$.

∴水位上升1m,水面宽度减少$(8-4\sqrt{3})$m.

2. 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象和性质

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** C **4.** D **5.** A **6.** B **7.** <

8. **解:**(1)将$A(-2,0)$,$O(0,0)$的坐标代入表达式$y=-x^2+bx+c$,得$\begin{cases}-4-2b+c=0,\\c=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=-2,\\c=0.\end{cases}$

∴二次函数表达式为$y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$.

∴顶点B的坐标为$(-1,1)$.

(2)点P的坐标为$(-1,1)$或$(-1+\sqrt{2},-1)$或$(-1-\sqrt{2},-1)$.

9. **解:**(1)将点$B(3,0)$,$C(0,3)$的坐标代入$y=x^2+bx+c$,得$\begin{cases}0=9+3b+c,\\3=c,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=-4,\\c=3.\end{cases}$

∴抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-4x+3$.

(2)设点M的坐标为(m,m^2-4m+3),设直线BC对应的函数表达式为$y=kx+3$.

把点$B(3,0)$的坐标代入$y=kx+3$,得$0=3k+3$,

解得$k=-1$.

∴直线BC对应的函数表达式为$y=-x+3$.

∵$MN\parallel y$轴,

∴点N的坐标为$(m,-m+3)$.

∵抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$,

∴抛物线的对称轴为直线$x=2$.

∴点$(1,0)$在抛物线上.

∴$1<m<3$.

∵$MN=-m+3-(m^2-4m+3)=-m^2+3m=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,

∴当$m=\frac{3}{2}$时,线段MN取最大值,最大值为$\frac{9}{4}$.

(3)存在.点P的坐标为$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,$\left(2,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$,$\left(2,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$,$\left(2,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$或$\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

10. **解:**(1)在$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$中,

当$x=0$时,$y=2$,

∴$C(0,2)$.

当$y=0$时,$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$,

解得$x_1=4$,$x_2=-1$.

∴$B(4,0)$,$A(-1,0)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)∵ 点 D 与点 C 关于 x 轴对称,

∴ $D(0,-2)$.

设直线 BD 对应的函数表达式为 $y=kx+b$.

由题意得 $\begin{cases}4k+b=0,\\ b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\ b=-2.\end{cases}$

∴ $y=\frac{1}{2}x-2$.

(3)∵ $CD/\!/QM$,

∴ 当 $CD=QM$ 时四边形 $CQMD$ 是平行四边形.

∵ $Q\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$, $M\left(m,\frac{1}{2}m-2\right)$,

∴ $QM=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2+2-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}m^2+m+4$.

∵ $CD=4$, ∴ $-\frac{1}{2}m^2+m+4=4$,

解得 $m_1=0$, $m_2=2$.

∵ $m=0$ 时, MQ 与 DC 重合,不能构成平行四边形,

∴ $m=0$ 不符合题意,舍去.

∴ $m=2$.

(4)存在. ①当 $\angle QBD=90°$,即 $QB\perp DB$ 时,

设直线 BQ 对应的函数表达式为 $y=-2x+b_1$,

将 $B(4,0)$ 的坐标代入,得 $b_1=8$,

∴ $y=-2x+8$.

∵ 点 Q 是直线 BQ 与抛物线的交点,

∴ $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=-2x+8$,

解得 $x_1=3$, $x_2=4$.

∵ $B(4,0)$,

∴ $Q_1(3,2)$.

②当 $\angle QDB=90°$,即 $QD\perp DB$ 时,

设直线 QD 对应的函数表达式为 $y=-2x+b_2$,

将 $D(0,-2)$ 的坐标代入,得 $b_2=-2$,

∴ $y=-2x-2$.

∵ 点 Q 是直线 QD 与抛物线的交点,

∴ $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=-2x-2$,

解得 $x_1=8$, $x_2=-1$.

∴ $Q_2(8,-18)$, $Q_3(-1,0)$.

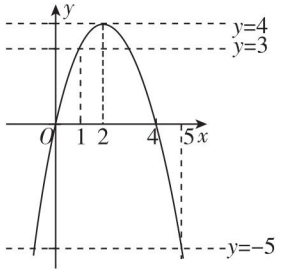
综上所述,点 Q 的坐标为 $(3,2)$, $(8,-18)$, $(-1,0)$.

21.3 二次函数与一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** A **4.** B **5.** B

6. D **点拨:** 如图,关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$ 的解就是抛物线 $y=-x^2+mx$ 与直线 $y=t$ 的交点的横坐标.



(第6题)

由题易知 $m=4$,

∴ 在 $y=-x^2+4x$ 中,当 $x=1$ 时, $y=3$;当 $x=5$ 时, $y=-5$;当 $x=2$ 时, $y=4$.

由图象可知,要使关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$ (t 为实数)在 $1<x<5$ 的范围内有解,必须使直线 $y=t$ 在直线 $y=-5$ 和直线 $y=4$ 之间(包含直线 $y=4$),

∴ $-5<t\leqslant 4$.

7. (1) **证明:** $y=(x-m)^2-(x-m)=x^2-(2m+1)x+m^2+m$.

∵ $b^2-4ac=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$,

∴ 不论 m 为何值,该抛物线与 x 轴一定有两个交点.

(2) **解:** ①由题意得 $-\frac{-(2m+1)}{2}=\frac{5}{2}$,

∴ $m=2$.

∴ 该抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-5x+6$.

②设抛物线沿 y 轴向上平移 k 个单位后,得到的抛物线与 x 轴只有一个交点,则平移后抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-5x+6+k$.

∵ 抛物线 $y=x^2-5x+6+k$ 与 x 轴只有一个交点,

∴ $b^2-4ac=5^2-4(6+k)=0$,解得 $k=\frac{1}{4}$.

即把该抛物线沿 y 轴向上平移 $\frac{1}{4}$ 个单位后,得到的抛物线与 x 轴只有一个交点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:(1)∵ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(-3,0),D(-2,-3)$,

∴ $\begin{cases}9-3b+c=0,\\4-2b+c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=-3.\end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-1$,

$D(-2,-3),C(0,-3)$,

∴ C,D 关于抛物线的对称轴对称,连接 AC,AC 与对称轴的交点就是 $PA+PD$ 取最小值时的点 P,

此时 $PA+PD=PA+PC=AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

(3)设点 N 的坐标为 (m,m^2+2m-3).

在 $y=x^2+2x-3$ 中,令 $y=0$,则 $x^2+2x-3=0$,

解得 $x=-3$ 或 $x=1$.

∴ 点 B 的坐标为 $(1,0)$.

∴ $AB=4$.

∵ $S_{\triangle ABN}=6$,

∴ $\frac{1}{2}\times4\times|m^2+2m-3|=6$.

∴ $m^2+2m=0$ 或 $m^2+2m-6=0$,

解得 $m=0$ 或 $m=-2$ 或 $m=-1+\sqrt{7}$ 或 $m=-1-\sqrt{7}$.

∴ 点 N 的坐标为 $(0,-3)$ 或 $(-2,-3)$ 或 $(-1+\sqrt{7},3)$ 或 $(-1-\sqrt{7},3)$.

21.4 二次函数的应用

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**由题意,设抛物线对应的函数表达式为 $h=at(t-9)$,把 $t=1,h=8$ 代入可得 $a=-1$,

∴ $h=-t^2+9t=-(t-4.5)^2+20.25$.

由此即可一一判断.

2. B **点拨:**根据题意知,抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $(0,54.0),(40,46.2),(20,57.9)$,

则 $\begin{cases}c=54.0,\\1\,600a+40b+c=46.2,\\400a+20b+c=57.9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.0195,\\b=0.585,\\c=54.0.\end{cases}$

∴ $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{0.585}{2\times(-0.0195)}=15$.

3. C

4. B **点拨:**(1)当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时,由题意可知,$y=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{1}{2}x^2+8$;

(2)当 $4<x\leqslant8$ 时,$y=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}(8-x)(8-x)=-\frac{1}{2}(x-8)^2+8$.

∴ y 与 x 之间的函数关系可以用两段二次函数图象表示,分析可知 B 选项符合.

5. 解:(1)依题意得 $\begin{cases}10m+n=166\,000,\\30m+n=178\,000,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=600,\\n=160\,000.\end{cases}$

(2)①当 $0\leqslant t\leqslant20$ 时,设 $y=k_1t+b_1$,由图象得

$\begin{cases}b_1=16,\\20k_1+b_1=28,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=\frac{3}{5},\\b_1=16.\end{cases}$

∴ $y=\frac{3}{5}t+16$.

②当 $20<t\leqslant50$ 时,设 $y=k_2t+b_2$,由图象得

$\begin{cases}20k_2+b_2=28,\\50k_2+b_2=22,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-\frac{1}{5},\\b_2=32.\end{cases}$

∴ $y=-\frac{1}{5}t+32$.

综上,$y=\begin{cases}\frac{3}{5}t+16(0\leqslant t\leqslant20),\\-\frac{1}{5}t+32(20<t\leqslant50).\end{cases}$

(3)$W=ya-mt-n$.

①当 $0\leqslant t\leqslant20$ 时,$W=10\,000\left(\frac{3}{5}t+16\right)-600t-160\,000=5\,400t$.

∵ $5\,400>0$,

∴ 当 $t=20$ 时,$W_{最大值}=5\,400\times20=108\,000$.

②当 $20<t\leqslant50$ 时,$W=\left(-\frac{1}{5}t+32\right)(100t+8\,000)-600t-160\,000=-20t^2+1\,000t+96\,000=-20(t-25)^2+108\,500$.

∵ $-20<0$,∴ 抛物线的开口向下.

∴ 当 $t=25$ 时,$W_{最大值}=108\,500$.

∵ $108\,500>108\,000$,

∴ 当 $t=25$ 时,W 取得最大值,该最大值为 108 500.

答:该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养 25 天后一次性出售所得利润最大,最大利润是 108 500 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:(1)由题可得活动区出口的宽度为$(100-2x)$ m,则其中一块绿化区的短边长为$\frac{80-(100-2x)}{2}=(x-10)$ m.

$\therefore y=60\times[100\times80-4x(x-10)]+50\times4x(x-10)=-40x^2+400x+480\,000.$

$\because 50\leqslant100-2x\leqslant60,$

$\therefore 20\leqslant x\leqslant25.$

$\therefore y$与x之间的函数表达式为$y=-40x^2+400x+480\,000(20\leqslant x\leqslant25).$

(2)能. 要完成工程任务,则$y=-40x^2+400x+480\,000\leqslant469\,000,$

化简并整理,得$(x-5)^2-300\geqslant0,$

解得$x\geqslant10\sqrt{3}+5$或$x\leqslant-10\sqrt{3}+5$(舍去).

$\therefore 10\sqrt{3}+5\leqslant x\leqslant25.$

$\because x$为整数,

$\therefore x$的可能取值为23,24,25.

21.5 反比例函数

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** D **4.** A **5.** C **6.** C

7. A **点拨:**由题意得点E的坐标为$(1,k)$,点F的坐标为$\left(\frac{k}{2},2\right)$.

$\therefore S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)(2-k),S_{\triangle OFC}=S_{\triangle OAE}=\frac{1}{2}k.$

$\therefore S_{\triangle OEF}=S_{矩形ABCO}-S_{\triangle OFC}-S_{\triangle OAE}-S_{\triangle BEF}=2-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)(2-k).$

$\because S_{\triangle OEF}=2S_{\triangle BEF},$

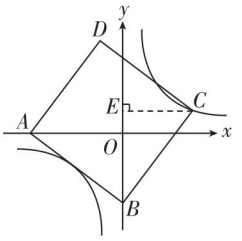
$\therefore 2-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)(2-k)=2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)(2-k).$

化简,得$3k^2-8k+4=0,$

解得$k_1=2$(舍去),$k_2=\frac{2}{3}.$

$\therefore k$的值为$\frac{2}{3}$.

8. A **点拨:**如图,过点C作$CE\perp y$轴于E.



(第8题)

易知$\angle ABO+\angle CBE=90°.\because\angle OAB+\angle ABO=90°,$

$\therefore\angle OAB=\angle CBE.$

$\because$点A的坐标为$(-4,0),\therefore OA=4.$

$\because AB=5,\therefore OB=\sqrt{5^2-4^2}=3.$

在$\triangle ABO$和$\triangle BCE$中,

$$\begin{cases}\angle OAB=\angle EBC,\\ \angle AOB=\angle BEC=90°,\\ AB=BC,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABO\cong\triangle BCE.$

$\therefore OA=BE=4,CE=OB=3.$

$\therefore OE=BE-OB=4-3=1.$

$\therefore$点C的坐标为$(3,1).$

$\because$反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$的图象过点$C,$

$\therefore k=xy=3\times1=3.$

$\therefore$反比例函数的表达式为$y=\frac{3}{x}.$

9. 8

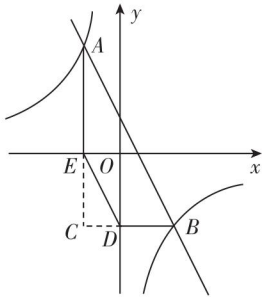
10. 解:(1)$\because$一次函数$y=-2x+1$的图象经过点$A(-1,m),\therefore m=2+1=3.$

$\therefore A(-1,3).$

$\because$反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点$A(-1,3),$

$\therefore k=-1\times3=-3.$

(2)如图,延长AE,BD交于点C,则$\angle ACB=90°.$



(第10题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∵ $BD \perp y$ 轴,垂足为点 D,且点 D 的坐标为 $(0,-2)$,∴ $C(-1,-2)$.

在 $y=-2x+1$ 中,令 $y=-2$,则 $-2=-2x+1$,

∴ $x=\frac{3}{2}$,即 $B\left(\frac{3}{2},-2\right)$.

易知 $AC=3-(-2)=5$,$BC=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$,

∴ 四边形 $AEDB$ 的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 − $\triangle CDE$ 的面积 = $\frac{1}{2}AC\times BC-\frac{1}{2}CE\times CD=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{21}{4}$.

11. 解:(1)∵ 反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象过点 $B(a,4)$,

∴ $4=-\frac{12}{a}$,解得 $a=-3$.

∴ 点 B 的坐标为 $(-3,4)$.

将 $A(2,-6)$,$B(-3,4)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}2k+b=-6,\\-3k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=-2.\end{cases}$

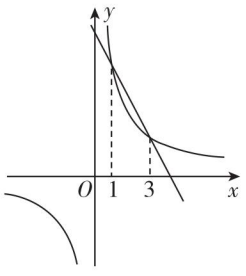
∴ 一次函数的表达式为 $y=-2x-2$.

(2)将直线 AB 向上平移 10 个单位后得到的直线 l 对应的函数表达式为 $y_1=-2x+8$.

由题意得 $\begin{cases}y=-2x+8,\\y=\frac{6}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=6,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2.\end{cases}$

∴ 直线 l 与反比例函数 $y_2=\frac{6}{x}$ 图象的交点坐标为(1,6)和(3,2).

画出函数图象,如图所示.



(第 11 题)

观察函数图象可知当 $0<x<1$ 或 $x>3$ 时,反比例函数图象在直线 l 的上方,

∴ 使 $y_1<y_2$ 成立的 x 的取值范围为 $0<x<1$ 或 $x>3$.

12. 解:(1)∵ 在矩形 $OABC$ 中,$OA=3$,$OC=2$,

∴ $B(3,2)$.

∵ 点 F 为 AB 的中点,∴ $F(3,1)$.

∵ 点 F 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上,

∴ $k=3$.

∴ 该函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}(x>0)$.

(2)由题意知 E,F 两点的坐标分别为 $\left(\frac{k}{2},2\right)$,$\left(3,\frac{k}{3}\right)$,

∴ $S_{\triangle EFA}=\frac{1}{2}AF\cdot BE=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}k\left(3-\frac{1}{2}k\right)=\frac{1}{2}k-\frac{1}{12}k^2=-\frac{1}{12}(k^2-6k+9-9)=-\frac{1}{12}(k-3)^2+\frac{3}{4}$.

∵ 点 F 在边 AB 上,且不与 A,B 重合,

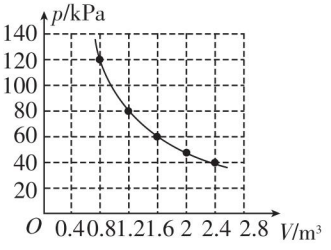
∴ $0<\frac{k}{3}<2$,解得 $0<k<6$.

∴ 当 $k=3$ 时,$S_{\triangle EFA}$ 有最大值,最大值为 $\frac{3}{4}$.

即当 $k=3$ 时,$\triangle EFA$ 的面积最大,最大面积是 $\frac{3}{4}$.

13. 解:(1)②

(2)设 $p=\frac{k}{V}$,将 $V=1.2$,$p=80$ 代入,得 $k=1.2\times80=96$,∴ p 与 V 的函数表达式为 $p=\frac{96}{V}(V>0)$,图象如图所示.



(第 13 题)

(3)$V\geqslant\frac{24}{35}$ **点拨:**将 $p=140$ 代入 $p=\frac{96}{V}$,得 $V=\frac{24}{35}$,若 $p\leqslant140$,则 $V\geqslant\frac{24}{35}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.6 综合与实践 获取最大利润

【两年模拟兵法】

1. **解:**(1)设日销售量 y(袋)与销售价 x(元)之间的函数表达式为 $y=kx+b$.

依题意,得 $\begin{cases}25=15k+b,\\20=20k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=40.\end{cases}$

$\therefore y=-x+40$,且另一组数据(30,10)也满足该表达式.

(2)设每日销售的利润是 w 元,则 $w=(x-10)y$,

$\therefore w=(x-10)(-x+40)=-x^2+50x-400=-(x-25)^2+225$.

$\therefore$ 当 $x=25$ 时,w 有最大值,最大值为 225.

答:要使这种土特产每日销售的利润最大,每袋的销售价应定为 25 元,每日销售的最大利润是 225 元.

2. **解:**(1)设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$.

将(30,100)、(45,70)的坐标代入上式,得 $\begin{cases}30k+b=100,\\45k+b=70,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=160,\end{cases}$

$\therefore$ 该商品每天的销售量 y 与销售单价 x 之间的函数表达式为 $y=-2x+160$.

(2)根据题意,得 $w=y(x-30)=(-2x+160)(x-30)=-2x^2+220x-4\,800=-2(x-55)^2+1\,250$.

$\therefore$ 当 $x\leqslant 55$ 时,w 随 x 的增大而增大.

$\because 30\leqslant x\leqslant 50$,$\therefore$ 当 $x=50$ 时,$y_{最大值}=1\,200$.

答:销售单价定为 50 元时,才能使销售该商品每天获得的利润 w(元)最大,最大利润是 1 200 元.

(3)将 $w=800$ 代入 $w=-2(x-55)^2+1\,250$,得 $x_1=40$,$x_2=70$.

$\therefore$ 当 $40\leqslant x\leqslant 70$ 时,$w\geqslant 800$.

对于 $y=-2x+160$,y 随 x 的增大而减小,故当 $x=70$ 时,$y_{最小值}=20$.

答:若商店要使销售该商品每天获得的利润不低于 800 元,则每天的销售量最少应为 20 件.

3. **解:**(1)$y=-\frac{1}{2}x+55$

(2)依题意,$W=(y-18)\cdot m$,

$\therefore W=\begin{cases}(40-18)(5x+50)(1\leqslant x\leqslant 30),\\\left(-\frac{1}{2}x+55-18\right)(5x+50)(31\leqslant x\leqslant 50).\end{cases}$

整理,得 $W=$

$\begin{cases}110x+1\,100(1\leqslant x\leqslant 30),\\-\frac{5}{2}x^2+160x+1\,850(31\leqslant x\leqslant 50).\end{cases}$

当 $1\leqslant x\leqslant 30$ 时,$\because W$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore x=30$ 时,W 取得最大值,为 $110\times 30+1\,100=4\,400$;

当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时,$W=-\frac{5}{2}x^2+160x+1\,850=-\frac{5}{2}(x-32)^2+4\,410$,$\because -\frac{5}{2}<0$,

$\therefore x=32$ 时,W 取得最大值 4 410.

综上所述,x 为 32 时,当天的销售利润 W(元)最大,最大利润为 4 410 元.

(3)依题意,$W=(y+a-18)\cdot m=-\frac{5}{2}x^2+(160+5a)x+1\,850+50a$.

$\because$ 第 31 天到第 35 天的日销售利润 W(元)随 x 的增大而增大,

$\therefore -\frac{160+5a}{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)}\geqslant 35$,解得 $a\geqslant 3$.

$\therefore a$ 的最小值为 3.

4. **解:**(1)把点(25,0.3)的坐标代入 $p=-\frac{1}{160}(t-h)^2+0.4$,得 $0.3=-\frac{1}{160}(25-h)^2+0.4$,

解得 $h=29$ 或 $h=21$.

$\because h>25$,$\therefore h=29$.

(2)①由表格可知 m 是 p 的一次函数.

设这个一次函数表达式为 $m=kp+b$.

由题意得 $\begin{cases}0=0.2k+b,\\5=0.25k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=100,\\b=-20.\end{cases}$

$\therefore m=100p-20$.

当 $p=0.3$ 时,$m=100\times 0.3-20=10$;

当 $p=0.35$ 时,$m=100\times 0.35-20=15$.

$\therefore m$ 关于 p 的函数表达式为 $m=100p-20$.

②由(1)得,当 $10\leqslant t\leqslant 25$ 时,$p=\frac{1}{50}t-\frac{1}{5}$.

把 p 代入 m,得 $m=100\left(\frac{1}{50}t-\frac{1}{5}\right)-20=2t-40$.

当 $25<t\leqslant 37$ 时,$p=-\frac{1}{160}(t-29)^2+0.4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

把 p 代入 m,得 $m=100\left[-\frac{1}{160}(t-29)^2+0.4\right]-20=-\frac{5}{8}(t-29)^2+20$.

③设增加的利润为 y 元,则当 $20<t\leqslant 25$ 时,$y=600m+[100\times 30-(30-m)\times 200]=800m-3\,000=1\,600t-35\,000$.

∵ 当 $20<t\leqslant 25$ 时,y 随着 t 的增大而增大,

∴ 当 $t=25$ 时,$y_{最大值}=5\,000$.

当 $25<t\leqslant 37$ 时,$y=600m+[100\times 30-(30-m)\times 400]=1\,000m-9\,000=-625(t-29)^2+11\,000$.

∵ $-625<0$,

∴ 当 $t=29$ 时,$y_{最大值}=11\,000$.

∵ $11\,000>5\,000$,

∴ 当加温到 29 ℃时,增加的利润最大.

5. 解:(1)该商场销售彩电的总收益额为 $800\times 200=160\,000$(元).

(2)依题意可设 $y=k_1x+800$,$Z=k_2x+200$,

所以 $400k_1+800=1\,200$,$200k_2+200=160$,

解得 $k_1=1$,$k_2=-\frac{1}{5}$.

所以 $y=x+800$,$Z=-\frac{1}{5}x+200$.

(3)$W=yZ=(x+800)\left(-\frac{1}{5}x+200\right)=-\frac{1}{5}(x-100)^2+162\,000$.

因为 $-\frac{1}{5}<0$,所以当 $x=100$ 时,W 有最大值,最大值为 162 000.

所以政府应将每台补贴款额定为 100 元,总收益有最大值. 其最大值为162 000元.

6. 解:(1)当 $x=60$ 时,P 最大且为 41,故五年所获利润的最大值是 $41\times 5=205$(万元).

(2)前两年:$0\leqslant x\leqslant 50$,此时因为 P 随 x 的增大而增大,所以当 $x=50$ 时,$P=-\frac{1}{100}\times(50-60)^2+41=40$,此时 P 最大且为 40,所以这两年获利最大为 $40\times 2=80$(万元).

后三年:设每年获利为 y 万元,当地投资额为 m 万元,则外地投资额为(100 − m)万元,所以 $y=P+Q=\left[-\frac{1}{100}(m-60)^2+41\right]+\left(-\frac{99}{100}m^2+\frac{294}{5}m+160\right)=-m^2+60m+165=-(m-30)^2+1\,065$,

表明 $m=30$ 时,y 最大且为 1 065,那么三年获利最大为 $1\,065\times 3=3\,195$(万元),

故五年所获利润的最大值为 $80+3\,195-50\times 2=3\,175$(万元).

(3)有极大的实施价值.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:(1)根据题意,设 $y_1=k_1(x+1)$,$y_2=\frac{k_2}{x}$,

∴ $y=k_1(x+1)+\frac{k_2}{x}$.

把 $x=1$,$y=0$;$x=4$,$y=9$ 代入,得 $\begin{cases}2k_1+k_2=0,\\5k_1+\frac{k_2}{4}=9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=2,\\k_2=-4.\end{cases}$

∴ $y=2(x+1)-\frac{4}{x}$.

(2)当 $x=-1$ 时,$y=2\times(-1+1)-\frac{4}{-1}=4$.

2. 解:(1)由二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象可知,抛物线与 x 轴交于(1,0),(3,0)两点,即 $x_1=1$,$x_2=3$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

(2)求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集,就是求 $y>0$ 的解集,由题图可知 $1<x<3$.

(3)∵ $a<0$,∴ 在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而减小,即当 $x>2$ 时,y 随 x 的增大而减小.

(4)若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根,即函数图象与平行于 x 轴的直线有两个不同的交点,观察图象可知,当 $k<2$ 时,满足条件.

3. 解:由题意,易得出 $S_{\triangle ODB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times|-4|=2$.

易得 $OC=OD$,$AC=BD$,

∴ $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ODA}=S_{\triangle ODB}=S_{\triangle OBC}=2$.

∴ 四边形 $ACBD$ 的面积为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle ODA}+S_{\triangle ODB}+S_{\triangle OBC}=2\times 4=8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:(1)由题意得点 C 的坐标为$(2,2\sqrt{3})$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-4)^2+m$ $(a\neq0)$.

由抛物线经过点 $O(0,0)$,$C(2,2\sqrt{3})$,

可得$\begin{cases}16a+m=0,\\4a+m=2\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\\m=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

设直线 AC 对应的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

由直线 AC 过点 $A(-4,0)$,$C(2,2\sqrt{3})$,

可得$\begin{cases}-4k+b=0,\\2k+b=2\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

∴ 直线 AC 对应的函数表达式为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

对于 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,令 $x=4$,则 $y=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$,

∴ 点 E 的坐标为$\left(4,\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)$.

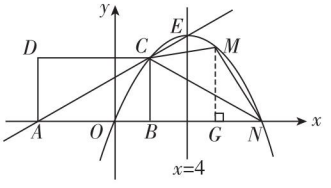
把 $x=4$ 代入抛物线对应的函数表达式,

得 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(4-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

∴ 此抛物线一定过点 E.

(2)由题意知,(1)中的抛物线与 x 轴的另一个交点为 $N(8,0)$.

设点 M 的坐标为(x,y),过点 M 作 $MG\perp x$ 轴于点 G,如图所示.



(第4题)

则 $S_{\triangle CMN}=S_{\triangle MGN}+S_{四边形MGBC}-S_{\triangle BCN}=\dfrac{1}{2}(8-x)y+\dfrac{1}{2}(y+2\sqrt{3})(x-2)-\dfrac{1}{2}\times(8-2)\times2\sqrt{3}=3y+\sqrt{3}x-8\sqrt{3}=3\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right]+\sqrt{3}x-8\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+5\sqrt{3}x-8\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-5)^2+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

∵ $2<x<8$,

∴ 当 $x=5$ 时,$S_{\triangle CMN}$ 有最大值,且最大值为$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

故△CMN 面积的最大值为$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

5. 解:当点 $C(1,2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上时,$k=2$.

由$\dfrac{k}{x}=-x+6$,得 $x^2-6x+k=0$.

当$(-6)^2-4k=0$,即 $k=9$ 时,直线与双曲线有且只有一个公共点(3,3),点(3,3)在线段 AB 上.

因此反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象与△ABC 有公共点时,k 的取值范围是 $2\leqslant k\leqslant9$.

6. 解:(1)建坐标系方法不唯一. 以 AB 所在直线为横轴,AB 的垂直平分线为纵轴建立如图的平面直角坐标系,则 A,B,C 三点的坐标分别是$(-10,0)$,$(10,0)$,$(0,6)$.

由此设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+6$ $(a\neq0)$,将点 B 的坐标代入,得 $100a+6=0$,

解得 $a=-\dfrac{3}{50}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式是 $y=-\dfrac{3}{50}x^2+6$.

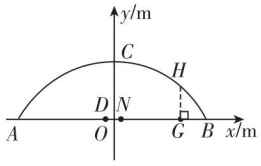
(2)可设 $F(5,y_F)$,于是 $y_F=-\dfrac{3}{50}\times5^2+6=4.5$.

∴ 支柱 EF 的长度是 $10-4.5=5.5$(m).

(3)其中的一条行车道能并排行驶宽 2m,高 3m 的三辆汽车. 理由如下:

如图,设 DN 为隔离带的宽,NG 是三辆汽车的宽度和,则易得点 G 的坐标是(7,0).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第6题)

过点 G 作 $GH\perp AB$,交抛物线于点 H,则 $y_H=-\frac{3}{50}\times7^2+6=3.06>3$.

故其中的一条行车道能并排行驶宽2 m,高3 m的三辆汽车.

7. 解:(1)①当 $1\leqslant x\leqslant5$ 时,设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$,把点 $(1,200)$ 的坐标代入,得 $k=200$,即 $y=\frac{200}{x}$.

②∵ 当 $x=5$ 时,$y=40$,

∴ 当 $x>5$ 时,$y=40+20(x-5)=20x-60$.

综上可知,y 与 x 之间的函数表达式为

$$y=\begin{cases}\frac{200}{x}(1\leqslant x\leqslant5),\\20x-60(x>5).\end{cases}$$

(2)当 $y=200$ 时,$20x-60=200$,解得 $x=13$.

∴ 治污改造工程顺利完工后经过 $13-5=8$(个)月,该厂月利润才能达到2020年1月的水平.

(3)对于 $y=\frac{200}{x}$,当 $y=100$ 时,$x=2$;

对于 $y=20x-60$,当 $y=100$ 时,$x=8$,

∴ 该厂资金紧张期共有 $8-2-1=5$(个)月.

【第21章测试卷】

一、1. B **2.** A **3.** C **4.** A **5.** C **6.** D **7.** D **8.** C

二、9. 4 **10.** $a>1$ 或 $a<-1$ **11.** $(-4,2)$或$(-1,8)$

12. $\frac{12}{5}$

三、13. 解:(1)把点 $P(2,1)$ 的坐标代入反比例函数 $y=\frac{m}{x}$,得 $1=\frac{m}{2}$,$m=2$.

(2)由(1)可知反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$,

∴ $\frac{2}{x}=kx-4$.

整理,得 $kx^2-4x-2=0$.

∵ 双曲线与直线有两个不同的交点,

∴ $\Delta>0$.

即 $(-4)^2-4k\times(-2)>0$,

解得 $k>-2$.

又∵ $k<0$,

∴ k 的取值范围为 $-2<k<0$.

14. 解:(1)∵ 抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 y 轴,

∴ $x=\frac{-(k^2+k-6)}{2}=0$,

即 $k^2+k-6=0$,

解得 $k=-3$ 或 $k=2$.

当 $k=2$ 时,二次函数表达式为 $y=x^2+6$,它的图象与 x 轴无交点,不满足题意,舍去;

当 $k=-3$ 时,二次函数表达式为 $y=x^2-9$,它的图象与 x 轴有两个交点,满足题意.

∴ $k=-3$.

(2)∵ 点 P 到 y 轴的距离为2,

∴ 点 P 的横坐标为 -2 或2.

当 $x=2$ 时,$y=-5$;

当 $x=-2$ 时,$y=-5$.

∴ 点 P 的坐标为$(2,-5)$或$(-2,-5)$.

15. 解:(1)∵ 反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$的图象经过点 $A(-1,a)$,

∴ $a=\frac{-8}{-1}=8$.

∴ $A(-1,8)$.

设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$.

∵ 直线 AB 经过点 $B(0,7)$,$A(-1,8)$,

∴ $\begin{cases}b=7,\\8=-k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=7,\\k=-1.\end{cases}$

∴ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-x+7$.

(2)根据题意得直线 CE 对应的函数表达式为 $y=-x-2$.

由 $\begin{cases}y=\frac{-8}{x},\\y=-x-2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=-4,\\y_1=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=-4.\end{cases}$

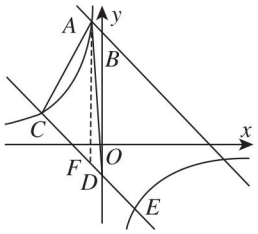
∴ $C(-4,2)$,$E(2,-4)$.

在 $y=-x-2$ 中,令 $x=0$,得 $y=-2$,

∴ 点 D 的坐标为$(0,-2)$.

如图,过点 $A(-1,8)$ 作 $AF\parallel y$ 轴,交直线 CE 于点 F,则点 F 的坐标为$(-1,-1)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 15 题）

∴ $AF=8-(-1)=9$.

∴ $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AF\times|x_D-x_C|=\frac{1}{2}\times 9\times|0-(-4)|=18$.

（3）不等式 $mx+n\leqslant\frac{-8}{x}$的解集为 $-4\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 2$.

16. 解：（1）1 600

（2）①设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，把（0，70）、（30，40）的坐标代入，得 $\begin{cases}b=70,\\30k+b=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=70,\\k=-1.\end{cases}$

∴ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-x+70$.

（i）当 $0<x\leqslant 30$ 时，$w=[80-(-x+70)]\cdot(-2x+120)=-2x^2+100x+1\ 200=-2(x-25)^2+2\ 450$，

∴ 当 $x=25$ 时，$w_{最大值}=2\ 450$.

（ii）当 $30<x\leqslant 50$ 时，$w=(80-40)\times(-2x+120)=-80x+4\ 800$.

∵ w 随 x 的增大而减小，

∴ 当 $x=31$ 时，$w_{最大值}=2\ 320$.

∴ $w=\begin{cases}-2x^2+100x+1\ 200(0<x\leqslant 30),\\-80x+4\ 800(30<x\leqslant 50).\end{cases}$

第 25 天的利润最大，最大利润为 2 450 元.

②（i）当 $0<x\leqslant 30$ 时，令 $-2(x-25)^2+2\ 450=2\ 400$，解得 $x_1=20$，$x_2=30$.

∵ 抛物线 $w=-2(x-25)^2+2\ 450$ 的开口向下，

∴ 由其图象可知，当 $20\leqslant x\leqslant 30$ 时，$w\geqslant 2\ 400$.

此时，当天利润不低于 2 400 元的天数为 $30-20+1=11$（天）.

（ii）当 $30<x\leqslant 50$ 时，由①可知当天利润均低于 2 400 元.

综上，当天利润不低于 2 400 元的共有 11 天.

17. 解：（1）根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $A(4,3)$，设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-4)^2+3$.

将 $B(0,-5)$ 的坐标代入，得 $16a+3=-5$，

解得 $a=-\frac{1}{2}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+3=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$.

（2）∵ $A(4,3)$，$B(0,-5)$，点 M 是线段 AB 的中点，

∴ $M(2,-1)$.

设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b'$，将 $A(4,3)$，$B(0,-5)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}4k+b'=3,\\b'=-5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=2,\\b'=-5.\end{cases}$

∴ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=2x-5$.

（3）设 $Q(4,m)$.

①当 AQ 为对角线时，$P(6,m+4)$，代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$，得 $m=-3$，

∴ $P(6,1)$，$Q(4,-3)$；

②当 MQ 为对角线时，$P(2,m-4)$，代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$，得 $m=5$，

∴ $P(2,1)$，$Q(4,5)$；

③当 AM 为对角线时，$P(2,2-m)$，代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$，得 $m=1$，

∴ $P(2,1)$，$Q(4,1)$.

第22章 相似形

22.1 比例线段

【两年模拟兵法】

1. A

2. C　**点拨：**等边三角形虽然大小不一定相同，但形状一定相同，所以所有的等边三角形一定相似.

3. D　**4.** A　**5.** 6　**6.** 5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:(1)设 $a=4k,b=3k,c=2k$.

$\because a+3b-3c=14$,

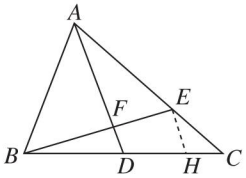
$\therefore 4k+9k-6k=14$.

$\therefore 7k=14,k=2$.

$\therefore a=8,b=6,c=4$.

(2)$4a-3b+c=32-18+4=18$.

8. 解:如图,过点 E 作 $EH/\!/AD$ 交 BC 于点 H.



(第 8 题)

$\because E$ 是 AC 的三等分点,

$\therefore \dfrac{CH}{CD}=\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore CH=\dfrac{1}{3}CD$.

$\therefore DH=\dfrac{2}{3}CD=\dfrac{2}{3}BD$.

$\because DF/\!/EH$,

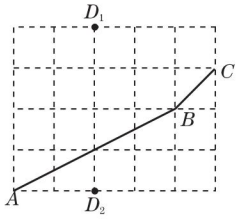
$\therefore \dfrac{BF}{FE}=\dfrac{BD}{DH}=\dfrac{BD}{\frac{2}{3}BD}=\dfrac{3}{2}$.

9. 解:(1)利用勾股定理计算,得 $BC=\sqrt{2}$,

$AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$\therefore$ 线段 AB 与 BC 的比是 $2\sqrt{5}:\sqrt{2}=\sqrt{10}:1$.

(2)存在. 如图,有两个符合题意的点:D_1,D_2.



(第 9 题)

10. 解:(1)分两种情况:

①当 $a+b+c\neq 0$ 时,由已知得 $k=\dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$;

②当 $a+b+c=0$ 时,$a+b=-c$,

$\therefore k=\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{-c}{c}=-1$.

$\therefore k$ 的值为 2 或 -1.

(2)分两种情况:

①当 $k=2$ 时,一次函数 $y=kx-k$ 的图象经过第一、三、四象限;

②当 $k=-1$ 时,一次函数 $y=kx-k$ 的图象经过第一、二、四象限.

11. 解:由题意可知 $AD=2AE=2ED=2MN,AB=2EM$,矩形 $EMND$ 和矩形 $EABF$ 相似.

$\therefore EM:EA=MN:AB$,

即 $\dfrac{1}{2}AB:\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}AD:AB,\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AD}{2AB}$.

$\therefore 2AB^2=AD^2$.

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(负值舍去).

12. 解:(1)直线 CD 是△ABC 的黄金分割线.

理由:设△ABC 的 AB 边上的高为 h,

则 $\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{\frac{1}{2}AD\cdot h}{\frac{1}{2}BD\cdot h}=\dfrac{AD}{BD}$,

$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot h}{\frac{1}{2}AD\cdot h}=\dfrac{AB}{AD}$.

$\because D$ 是 AB 的黄金分割点,

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AB}{AD}$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}$.

$\therefore$ 直线 CD 是△ABC 的黄金分割线.

(2)三角形的中线所在的直线不是该三角形的黄金分割线. 理由如下:

设在△ABC 中,CD 是 AB 边上的中线,

$\therefore AD=BD=\dfrac{1}{2}AB$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{AD}{BD}=1,\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{AB}{AD}=2$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}\neq\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}$.

$\therefore$ 三角形的中线所在的直线不是该三角形的黄金分割线.

(3)理由:$\because CE/\!/DF$,

$\therefore S_{\triangle CDF}=S_{\triangle EDF},S_{\triangle DEC}=S_{\triangle FEC}$.

$\therefore S_{\triangle ACD}=S_{\triangle AEF},S_{\triangle BCD}=S_{四边形BCFE}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由(1)知$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{四边形BCFE}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}}$.

$\therefore$ 直线 EF 是$\triangle ABC$ 的黄金分割线.

22.2 相似三角形的判定

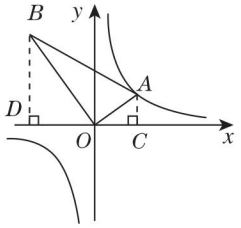
【两年模拟兵法】

1. B **2**. A **3**. C

4. B **点拨:**$\because$ 截得的小三角形与$\triangle ABC$ 相似,$\therefore$ 过 P 作 AC 的垂线,作 AB 的垂线,作 BC 的垂线,所截得的小三角形均满足题意. 则 D 点的位置最多有 3 处.

5. C

6. A **点拨:**要求 k 的值,只要求出点 B 的坐标即可,分别过点 A,B 作 $AC\perp x$ 轴,$BD\perp x$ 轴,垂足分别为 C,D,如图所示.



(第 6 题)

设点 A 的坐标是(m,n),则 $AC=n$,$OC=m$.

$\because \angle AOB=90°$,

$\therefore \angle AOC+\angle BOD=90°$.

$\because \angle OBD+\angle BOD=90°$,

$\therefore \angle OBD=\angle AOC$.

又$\because \angle BDO=\angle OCA=90°$,

$\therefore \triangle BDO\backsim\triangle OCA$.

$\therefore \frac{BD}{OC}=\frac{OD}{AC}=\frac{OB}{OA}$.

$\because OB=2OA$,

$\therefore BD=2m$,$OD=2n$.

$\therefore$ 点 B 的坐标是$(-2n,2m)$.

$\because$ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象上,

$\therefore mn=1$.

$\because$ 点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象上,

$\therefore k=-2n\cdot 2m=-4mn=-4$.

7. $\frac{8}{3}$

8. **解:**$\because DE/\!/BC$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$.

$\because DE=2$,$BC=3$,

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$.

9. **解:**(1)$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

(2)①说明$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

$\because \angle BAD=\angle CAE$,

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=\angle CAE+\angle DAC$,

即$\angle BAC=\angle DAE$.

又$\because \angle ABC=\angle ADE$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

②说明$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

$\because \triangle ABC\backsim\triangle ADE$,

$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,即$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$.

又$\because \angle BAD=\angle CAE$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

10. (1)**证明:**由四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,$AD/\!/BC$,易证得$\angle C=\angle B=60°$.

$\because \angle APC=\angle B+\angle BAP$,

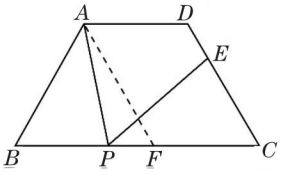
$\therefore \angle APE+\angle CPE=\angle B+\angle BAP$.

又$\because \angle APE=\angle B$,

$\therefore \angle BAP=\angle CPE$.

$\therefore \triangle APB\backsim\triangle PEC$.

(2)**解:**如图,过点 A 作 $AF/\!/CD$,交 BC 于 F.



(第 10 题)

$\because AD/\!/BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 为平行四边形.

$\therefore CF=AD=3$,$AF=DC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AB=DC$,

$\therefore AB=AF$.

又$\because \angle B=60°$,

$\therefore \triangle ABF$ 为等边三角形.

$\therefore AB=BF=7-3=4$.

$\because \triangle APB\backsim\triangle PEC$,

$\therefore \frac{BP}{CE}=\frac{AB}{PC}$.

设 $BP=x$,则 $PC=7-x$,

$\therefore \frac{x}{3}=\frac{4}{7-x}$.

整理,得 $x^2-7x+12=0$.

解得 $x_1=3$, $x_2=4$.

经检验,$x_1=3$,$x_2=4$ 均是所列方程的根,

$\therefore BP$ 的长为 3 或 4.

11. (1)**证明:**$\because AB=AC$,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore \angle ABD=\angle ECA$.

又$\because AB^2=DB\cdot CE$,

$\therefore \frac{AB}{EC}=\frac{DB}{AB}=\frac{DB}{AC}$.

$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle EAC$.

(2)**解:**$\because \angle ABC=\angle ACB$,$\angle BAC=40°$,

$\therefore \angle ABC=70°$.

又$\because \triangle ADB\backsim\triangle EAC$,

$\therefore \angle D=\angle CAE$.

$\therefore \angle DAE=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE=\angle DAB+\angle BAC+\angle D=(\angle DAB+\angle D)+\angle BAC=\angle ABC+\angle BAC=70°+40°=110°$.

12. **解:**(1)把 $A(-2,0)$ 的坐标代入 $y=ax+1$,求得 $a=\frac{1}{2}$,$\therefore y=\frac{1}{2}x+1$.

由 $PC=2$,易求得 P 点坐标为(2,2).

把 $P(2,2)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$,求得 $k=4$,

$\therefore$ 双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2)设点 Q 的坐标为 $(m,b)(m>2,b>0)$.

$\because Q(m,b)$ 在双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 上,

$\therefore b=\frac{4}{m}$.

易知 $OA=2$,$OB=1$.

当$\triangle QCH\backsim\triangle BAO$ 时,$\frac{CH}{AO}=\frac{QH}{BO}$,即$\frac{m-2}{2}=\frac{b}{1}$,

$\therefore m-2=2b$. $\therefore m-2=2\cdot\frac{4}{m}$,解得 $m=4$ 或 $m=-2$(舍去). $\therefore$ 点 Q 的坐标为(4,1).

当$\triangle QCH\sim\triangle ABO$ 时,$\frac{CH}{BO}=\frac{QH}{AO}$,即$\frac{m-2}{1}=\frac{b}{2}$,

$\therefore 2m-4=b$. $\therefore 2m-4=\frac{4}{m}$,解得 $m=1+\sqrt{3}$或 $m=1-\sqrt{3}$(舍去).

$\therefore$ 点 Q 的坐标为$(1+\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$.

综上,点 Q 的坐标为(4,1)或$(1+\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$.

22.3 相似三角形的性质

【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** D

4. D **点拨:**根据图形知$\triangle DEF$ 的边 DF 上的高与$\triangle BFE$ 的边 BF 上的高相等,设这个高为 h.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CD=AB$,$CD\parallel AB$.

$\because DE:EC=2:3$,

$\therefore DE:AB=2:5$.

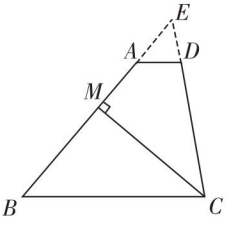
$\because CD\parallel AB$,$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle BAF$.

$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BAF}}=\left(\frac{DE}{BA}\right)^2=\frac{4}{25}$,$\frac{DE}{BA}=\frac{DF}{BF}=\frac{2}{5}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle EBF}}=\frac{\frac{1}{2}DF\cdot h}{\frac{1}{2}BF\cdot h}=\frac{DF}{BF}=\frac{2}{5}$.

$\therefore S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EBF}:S_{\triangle BAF}=4:10:25$.

5. 1 **点拨:**如图,延长 BA,CD,交点为 E. 依据题意可知 $MB=ME$,然后证明$\triangle EAD\backsim\triangle EBC$,依据相似三角形的性质可求得$\triangle EAD$ 和$\triangle EBC$ 的面积,最后依据 $S_{四边形AMCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle EBC}-S_{\triangle EAD}$求解即可.



(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解:** ∵ D,E 分别是 BC,AC 的中点,

∴ $DE \parallel AB, DE = \frac{1}{2}AB$.

∴ $\triangle AGB \backsim \triangle DGE$.

∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle GDE}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = 2^2 = 4$.

又∵ $S_{\triangle GDE} = 1$, ∴ $S_{\triangle ABC} = 4$.

∵ $\triangle AGE$ 的边 AG 上的高与 $\triangle GDE$ 的边 GD 上的高相等, ∴ $\frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle GDE}} = \frac{AG}{DG} = \frac{AB}{DE} = 2$.

又∵ $S_{\triangle GDE} = 1$, ∴ $S_{\triangle AGE} = 2$. 同理, $S_{\triangle GBD} = 2$.

∴ $S_{四边形ABDE} = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$.

∵ $DE \parallel AB$, ∴ $\triangle EDC \backsim \triangle ABC$.

设 $S_{\triangle ABC} = x$, 则 $\frac{x}{x-9} = \left(\frac{2}{1}\right)^2$,

解得 $x = 12$, 即 $S_{\triangle ABC} = 12$.

点拨: 遇到面积关系问题时,若两个三角形相似,则面积比等于相似比的平方;若两个三角形不相似但等高(等底),则等高(等底)的两个三角形的面积比等于底的比(高的比).

7. (1) **证明:** ∵ CF 平分 $\angle ACB, DC = AC$,

∴ CF 是 $\triangle ACD$ 的中线.

∴ 点 F 是 AD 的中点.

又∵ 点 E 是 AB 的中点,

∴ $EF \parallel BD$, 即 $EF \parallel BC$.

(2) **解:** 由(1)知 $EF \parallel BD$, ∴ $\triangle AEF \backsim \triangle ABD$.

∴ $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$.

又∵ $AE = \frac{1}{2}AB$, $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABD} - S_{四边形BDFE} = S_{\triangle ABD} - 6$, ∴ $\frac{S_{\triangle ABD} - 6}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

∴ $S_{\triangle ABD} = 8$.

8. **解:** (1) ∵ 四边形 $PNMQ$ 是矩形, ∴ $PN \parallel QM$.

∴ $\triangle APN \backsim \triangle ABC$. ∴ $\frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD}$.

设 $PQ = ED = x$ mm, 则 $PN = 2x$ mm, $AE = (80 - x)$ mm, ∴ $\frac{2x}{120} = \frac{80-x}{80}$.

解得 $x = \frac{240}{7}$, ∴ $2x = 2 \times \frac{240}{7} = \frac{480}{7}$.

即这个矩形零件相邻的两条边长分别是 $\frac{240}{7}$ mm 和 $\frac{480}{7}$ mm.

(2) ∵ 四边形 $PNMQ$ 是矩形, ∴ $PN \parallel QM$.

∴ $\triangle APN \backsim \triangle ABC$. ∴ $\frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD}$.

设 $PQ = ED = x$ mm, 则 $AE = (80 - x)$ mm.

∴ $\frac{PN}{120} = \frac{80-x}{80}$,

即 $PN = \frac{80-x}{80} \times 120 = \frac{3(80-x)}{2}$ (mm).

∴ $S_{矩形PNMQ} = PN \cdot PQ = \frac{3(80-x)}{2} \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 120x = -\frac{3}{2}(x-40)^2 + 2\,400$ (mm^2).

∴ 当 $x = 40$ 时, $S_{矩形PNMQ}$ 有最大值, 此时 $PN = \frac{3 \times (80-40)}{2} = 60$ (mm).

∴ 面积达到最大值时矩形零件相邻的两条边长分别为 40 mm 和 60 mm.

22.4 图形的位似变换

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** D **4.** B **5.** A **6.** A

7. **解:** (1) 根据勾股定理,得 $AC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$,

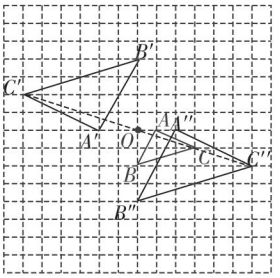
∴ $AB^2 + AC^2 = 10$, $BC^2 = 10$.

∴ $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形且 $\angle A = 90°$.

∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}$.

(2) $\triangle ABC$ 的位似图形有两种情况,如图所示.



(第 7 题)

8. (1) D

(2) **证明:** ∵ $E'C' \parallel EC$, $E'D' \parallel ED$,

∴ $\triangle OCE \backsim \triangle OC'E'$, $\triangle ODE \backsim \triangle OD'E'$.

∴ $CE : C'E' = OE : OE'$, $DE : D'E' = OE : OE'$, $\angle CEO = \angle C'E'O$, $\angle DEO = \angle D'E'O$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore CE:C'E'=DE:D'E'$, $\angle CED=\angle C'E'D'$.

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle C'D'E'$.

$\because \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore \triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

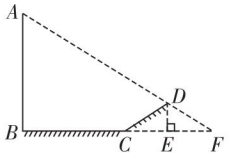
22.5 综合与实践 测量与误差

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C

3. C **点拨:** 先证明 $\triangle PQR\backsim\triangle PST$,再利用相似比得到 $\frac{PQ}{PQ+60}=\frac{80}{120}$,最后根据比例的性质求出 PQ.

4. D **点拨:** 如图,连接 AD 并延长交 BC 的延长线于点 F,过点 D 作 $DE\perp BF$ 于点 E.



(第4题)

$\because \angle DCE=30°$, $CD=8$ m, $\angle CED=90°$,

$\therefore DE=4$ m.

$\therefore CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=4\sqrt{3}$ m.

设 $AB=x$ m, $EF=y$ m, $\because DE\perp BF$, $AB\perp BF$,

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle ABF$.

$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BF}$,即 $\frac{4}{x}=\frac{y}{20+4\sqrt{3}+y}$. ①

$\because$ 此时测得 1 m 杆的影长为 2 m,

$\therefore$ 根据同一时刻物高与影长成正比可得 $\frac{1}{2}=\frac{x}{20+4\sqrt{3}+y}$. ②

①②联立,解得 $x=14+2\sqrt{3}$.

5. 解: 由题意知 $\angle ACB=\angle ECF$, $\angle AC'B=\angle E'C'F'$.

又 $\angle ABC=\angle EFC=\angle E'F'C'=90°$,

$\therefore \triangle BAC\backsim\triangle FEC$, $\triangle AC'B\backsim\triangle E'C'F'$.

$\therefore \frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FC}$, $\frac{AB}{E'F'}=\frac{BC'}{C'F'}$.

设 $AB=x$ m, $BC=y$ m,

则 $\begin{cases}\frac{x}{1.6}=\frac{y}{2},\\ \frac{x}{1.6}=\frac{7+y}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=11.2,\\ y=14.\end{cases}$

答: 这棵古松树 AB 的高为 11.2 m.

6. 解: 由题意得 $\angle ABD=\angle CDE=90°$, $\angle ADB=\angle CED$,

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle ABD$.

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BD}$.

$\because \angle F=\angle F$, $\angle ABF=\angle CDF=90°$,

$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle ABF$.

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DF}{BF}$.

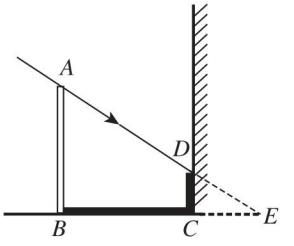
$\therefore \frac{DE}{BD}=\frac{DF}{BF}$,即 $\frac{2.4}{BD}=\frac{2.5}{BD+2.5}$,

解得 $BD=60$ m.

$\therefore \frac{1.72}{AB}=\frac{2.4}{60}$,解得 $AB=43$ m.

答: 小雁塔 AB 的高度是 43 m.

7. 解: 如图,延长 AD 交 BC 的延长线于点 E,若无墙阻挡,则标杆 AB 落在地面上的影子应该是 BE.



(第7题)

由题意知 $AB/\!/DC$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$.

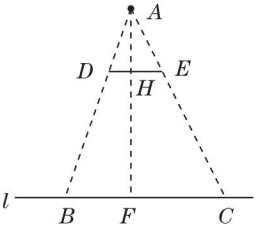
$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}$,即 $\frac{3}{1}=\frac{3+CE}{CE}$,

解得 $CE=1.5$ m.

则 $BE=BC+CE=3+1.5=4.5$(m).

答: 若无墙阻挡,标杆 AB 在地面上的影子的长为 4.5 m.

8. 解: (1) 如图,作射线 AD, AE,分别交 l 于点 B, C, BC 即为视点 A 盲区内的那段公路.



(第8题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图,过点 A 作 $AF\perp BC$,垂足为点 F,交 DE 于点 H,易知 $AH\perp DE$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AH}{AF}=\dfrac{DE}{BC}$.

由题意知 $DE=30$ m,$AH=40$ m,$HF=80$ m,

$AF=AH+HF=120$ m,

$\therefore \dfrac{40}{120}=\dfrac{30}{BC}$,解得 $BC=90$ m.

$90\div 3=30(\text{m/s})$.

答:该汽车的速度是 30 m/s.

9. **解**:过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M,交 EF 于点 N,得 $FN/\!/BM$.

由题意易得四边形 $AMNE$ 和四边形 $ENDC$ 都是矩形,$\therefore DN=CE=0.8$ m,$MD=AC=30$ m,$MA=CD=1.2$ m,且 $FN=EF-CD=1.7-1.2=0.5(\text{m})$.

$\because FN/\!/BM$,

$\therefore \triangle DNF\backsim\triangle DMB$.

$\therefore \dfrac{FN}{BM}=\dfrac{DN}{DM}$.

则 $BM=\dfrac{DM\cdot FN}{DN}=\dfrac{30\times 0.5}{0.8}=18.75(\text{m})$.

$\therefore AB=BM+MA=18.75+1.2=19.95\approx 20.0(\text{m})$.

答:楼高 AB 约为 20 m.

10. **解**:(1)过点 P 作 $PN'\perp BC$,垂足为 N',交 AD 于点 N,易知 $PN\perp AD$.

$\because AD/\!/A'D'$,$\therefore \triangle PAD\backsim\triangle PA'D'$.

根据相似三角形对应高的比等于相似比,可得 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{PN}{PN'}$.

设灯泡离地面的距离为 x cm,

则 $\dfrac{30}{30+6}=\dfrac{x-30}{x}$,解得 $x=180$.

答:灯泡离地面的距离是 180 cm.

(2)设横向影子 $A'B$,$D'C$ 的长度和为 y cm.

同(1)可得 $\dfrac{60}{60+y}=\dfrac{180-30}{180}$,

解得 $y=12$.

答:横向影子 $A'B$,$D'C$ 的长度和为 12 cm.

(3)过点 P 作 $PM\perp BC$,垂足为 M,交 AD 于点 N,易知 $PN\perp AD$.

$\because AD/\!/A'D'$,$\therefore \triangle PAD\backsim\triangle PA'D'$.

根据相似三角形对应高的比等于相似比,可得 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{PN}{PM}$. 设灯泡离地面的距离为 z.

由题意,得 $PM=z$,$PN=z-a$,$AD=na$,

$A'D'=na+b$,

$\therefore \dfrac{na}{na+b}=\dfrac{z-a}{z}$,解得 $z=\dfrac{na^2+ab}{b}$.

答:灯泡离地面的距离为 $\dfrac{na^2+ab}{b}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **证明**:$\because AD=CD$,$DE\perp AC$,

$\therefore AF=CF$,$\angle DAF=\angle DCF$,$\angle DFA=\angle DFC=90°$.

又$\because \angle DAB=\angle DAF+\angle CAB=90°$,$\angle CAB+\angle ABC=90°$,

$\therefore \angle DCF=\angle DAF=\angle ABC$.

在 $\triangle DCF$ 和 $\triangle ABC$ 中,$\angle DFC=\angle ACB=90°$,$\angle DCF=\angle ABC$,

$\therefore \triangle DCF\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{CF}{CB}$,即 $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{AF}{CB}$.

$\therefore AB\cdot AF=CB\cdot CD$.

2. (1)**证明**:$\because DE/\!/BC$,$EF/\!/AB$,

$\therefore$ 四边形 $DEFB$ 为平行四边形.

$\therefore DE=BF$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$.

又$\because DE=BF$,$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BF}{BC}$.

(2)**解**:$\because AD:DB=3:5$,$\therefore BD:AB=5:8$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore CE:AC=BD:AB=5:8$.

$\because EF/\!/AB$,$\therefore CF:CB=CE:AC=5:8$.

3. **证明**:$\because DE/\!/BC$,$\therefore \triangle PDE\backsim\triangle PBC$.

$\therefore \dfrac{PD}{PB}=\dfrac{PE}{PC}$.

$\therefore PD\cdot PC=PE\cdot PB$.

$\because DF/\!/AC$,$\therefore \triangle PDF\backsim\triangle PAC$.

$\therefore \dfrac{PF}{PC}=\dfrac{PD}{PA}$.

$\therefore PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PE \cdot PB = PF \cdot PA$.

$\therefore \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{PA}{PB}$.

4. 解:OC^2 与 $OA \cdot OE$ 相等. 理由如下:

$\because AD /\!/ BC, \therefore \triangle COB \backsim \triangle AOD$.

$\therefore \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OD}$.

同理,$\triangle OBE \backsim \triangle ODC$.

$\therefore \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$.

$\therefore \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OE}{OC}$,

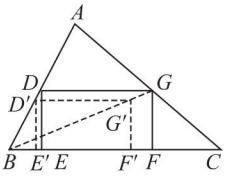
即 $OC^2 = OA \cdot OE$.

5. 解:如图,在 AB 边上靠近 B 点处任取一点 D',过点 D' 作 $D'E' \perp BC$ 于点 E',

在 BC 上截取 $E'F'$,使 $E'F' = 2D'E'$,过点 F' 作 $F'G' \perp BC$,

过点 D' 作 $D'G' /\!/ BC$ 交 $F'G'$ 于点 G',作射线 BG' 交 AC 于点 G,

过点 G 作 $GF /\!/ G'F'$,$DG /\!/ D'G'$,GF 交 BC 于点 F,DG 交 AB 于点 D,过点 D 作 $DE /\!/ D'E'$ 交 BC 于点 E,则四边形 $DEFG$ 为 $\triangle ABC$ 的内接矩形,且 $DE : EF = 1 : 2$.



(第5题)

6. 解:过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H,交 CD 于点 G,易知四边形 $FDGE$ 和四边形 $DBHG$ 均为矩形,

$\therefore DG = EF, GH = DB, EG = FD$.

$\because CD \perp FB, AB \perp FB$,

$\therefore CD /\!/ AB$.

$\therefore \triangle CGE \backsim \triangle AHE$.

$\therefore \dfrac{CG}{AH} = \dfrac{EG}{EH}$,即 $\dfrac{CD - EF}{AH} = \dfrac{FD}{FD + BD}$.

$\therefore \dfrac{3 - 1.6}{AH} = \dfrac{2}{2 + 15}$,解得 $AH = 11.9$ m.

$\therefore AB = AH + HB = AH + EF = 11.9 + 1.6 = 13.5$(m).

答:旗杆 AB 的高度为 13.5 m.

7. 解:(1)在矩形 $ABCD$ 中,$\angle B = \angle C = 90°$,

$\therefore \angle DEC + \angle CDE = 90°$.

$\because EF \perp DE, \therefore \angle BEF + \angle DEC = 90°$.

$\therefore \angle BEF = \angle CDE$.

$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle CDE$.

$\therefore \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BE}{CD}$.

$\therefore \dfrac{y}{x} = \dfrac{8 - x}{m}$.

$\therefore y = \dfrac{-x^2 + 8x}{m} (0 < x < 8)$.

(2)当 $m = 8$ 时,$y = \dfrac{-x^2 + 8x}{8} = -\dfrac{1}{8}(x - 4)^2 + 2$.

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时,y 取最大值,最大值是 2.

【第22章测试卷】

一、**1.** B **2.** B **3.** B **4.** C **5.** D **6.** A **7.** D **8.** C

二、**9.** 4 **10.** ①③④

11. (2,0)或$(2 + 2\sqrt{2}, 0)$或$(2 - 2\sqrt{2}, 0)$ **12.** $\dfrac{25}{3}$

三、**13.** (1)证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AE /\!/ CD, AB = CD$.

$\therefore \angle EBF = \angle DCF, \angle BEF = \angle CDF$.

$\because AB = BE, \therefore BE = CD$.

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CDF$.

$\therefore BF = CF$.

(2)解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD /\!/ BC. \therefore \triangle ADG \backsim \triangle CFG$.

$\therefore \dfrac{CF}{AD} = \dfrac{FG}{DG}$,即 $\dfrac{3}{6} = \dfrac{FG}{4}$,解得 $FG = 2$.

14. 解:设 $OE = x$ m,$OA = a$ m,$BC = b$ m,

则 $AB = (2 - b)$ m,$CD = (2.1 - b)$ m,$CO = (2 + a)$ m.

由光的反射原理可知 $\triangle AFB \backsim \triangle AEO$,$\triangle CGD \backsim \triangle CEO$,$\therefore \dfrac{BF}{OE} = \dfrac{AB}{AO}, \dfrac{GD}{OE} = \dfrac{DC}{OC}$.

$\therefore \dfrac{1.6}{x} = \dfrac{2 - b}{a}$,①

$\dfrac{1.6}{x} = \dfrac{2.1 - b}{2 + a}$. ②

由①②得 $a = 20(2 - b)$. ③

将③代入①,得 $\dfrac{1.6}{x} = \dfrac{2 - b}{20(2 - b)}$,解得 $x = 32$.

答:楼的高度 OE 是 32 m.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

15. (1)**证明**:∵ DB 平分$\angle ADC$,

∴ $\angle ADB = \angle BDC$.

又∵ $\angle ABD = \angle BCD = 90°$,

∴ $\triangle DAB \backsim \triangle DBC$.

∴ $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD}$.

∴ $BD^2 = AD \cdot CD$.

(2)**解**:由(1)可知 $BD^2 = AD \cdot CD$.

∵ $CD = 6, AD = 8$,∴ $BD = 4\sqrt{3}$.

∴ $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{48 - 36} = 2\sqrt{3}$.

∵ $BM /\!/ CD$,∴ $\angle MBD = \angle CDB = \angle ADB$.

∴ $DM = BM$.

∵ $\angle ADB + \angle A = \angle MBD + \angle MBA = 90°$,

∴ $\angle A = \angle MBA$.

∴ $AM = BM = DM = \frac{1}{2}AD = 4$.

∵ $\triangle DAB \backsim \triangle DBC$,∴ $\angle A = \angle DBC = \angle MBA$.

∴ $\angle MBC = 90°$.

∴ $CM = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7}$.

∵ $BM /\!/ CD$,

∴ $\frac{MN}{CN} = \frac{BM}{CD}$,即$\frac{MN}{2\sqrt{7} - MN} = \frac{4}{6}$,

解得 $MN = \frac{4}{5}\sqrt{7}$.

16. **证明**:(1)∵ $\angle ACB = 90°, AC = BC$,

∴ $\angle ABC = 45° = \angle PBA + \angle PBC$.

∵ $\angle APB = 135°$,

∴ $\angle PAB + \angle PBA = 45°$.

∴ $\angle PBC = \angle PAB$.

又∵ $\angle APB = \angle BPC = 135°$,

∴ $\triangle PAB \backsim \triangle PBC$.

(2)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2}BC$,

∴ $\frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$.

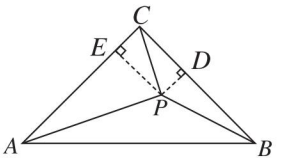
由(1)得$\triangle PAB \backsim \triangle PBC$,

∴ $\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$.

∴ $PB = \sqrt{2}PC, PA = \sqrt{2}PB$.

∴ $PA = 2PC$.

(3)如图,过点 P 分别作 $PD \perp BC, PE \perp AC$,垂足分别为点 D, E.



(第 16 题)

∵ $\angle CPB + \angle APB = 135° + 135° = 270°$,

∴ $\angle APC = 90°$.

∴ $\angle EAP + \angle ACP = 90°$.

∵ $\angle ACB = \angle ACP + \angle PCD = 90°$,

∴ $\angle EAP = \angle DCP$.

又∵ $\angle AEP = \angle CDP = 90°$,

∴ Rt$\triangle AEP \backsim$ Rt$\triangle CDP$.

∴ $\frac{PE}{DP} = \frac{AP}{PC} = 2$,即$\frac{h_3}{h_2} = 2$.

∴ $h_3 = 2h_2$.

由(1)得$\triangle PAB \backsim \triangle PBC$,∴ $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$.

∴ $h_1 = \sqrt{2}h_2$.

∴ $h_1^2 = 2h_2^2 = 2h_2 \cdot h_2 = h_2 \cdot h_3$.

17. (1)**证明**:∵ $MQ \perp BC$,∴ $\angle BQM = 90°$.

在$\triangle QBM$ 和$\triangle ABC$ 中,

∵ $\angle B = \angle B, \angle BQM = \angle A = 90°$,

∴ $\triangle QBM \backsim \triangle ABC$.

故不论 x 为何值时,总有$\triangle QBM \backsim \triangle ABC$.

(2)**解**:存在. 理由如下:

在 Rt$\triangle BAC$ 中,∵ $\angle A = 90°, AB = 3, AC = 4$,

∴ $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

∵ $\triangle QBM \backsim \triangle ABC$,

∴ $BQ : MQ : BM = AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$.

∵ $BQ = x$,∴ $BM = \frac{5}{3}x$.

∴ $AM = 3 - \frac{5}{3}x$.

∵ $MN /\!/ BC$,

∴ $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

∴ $AM : AN : MN = AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$.

∴ $MN = \frac{5}{3}AM = \frac{5}{3}\left(3 - \frac{5}{3}x\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $MN=BQ$ 时,$\frac{5}{3}\left(3-\frac{5}{3}x\right)=x$,

解得 $x=\frac{45}{34}$,此时 $BM=\frac{5}{3}x=\frac{75}{34}<AB$.

又∵ $MN/\!/BC$,

∴ 四边形 $BMNQ$ 为平行四边形.

(3)**解:**∵ $MN/\!/BC$,

∴ $\angle QMN=\angle BQM=90°$.

由(2)知 $BQ:MQ:BM=3:4:5$.

∵ $BQ=x$,∴ $MQ=\frac{4}{3}x$.

由(2)知 $MN=\frac{5}{3}\left(3-\frac{5}{3}x\right)=5-\frac{25}{9}x$,

∴ $S_{四边形BMNQ}=\frac{1}{2}MQ\cdot BQ+\frac{1}{2}MQ\cdot MN=\frac{1}{2}MQ\cdot(BQ+MN)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}x\cdot\left(x+5-\frac{25}{9}x\right)=-\frac{32}{27}x^2+\frac{10}{3}x=-\frac{32}{27}\left(x-\frac{45}{32}\right)^2+\frac{75}{32}$.

∵ 当 $x=\frac{45}{32}$ 时,$BM=\frac{5}{3}x=\frac{75}{32}<AB$,

∴ 当 $x=\frac{45}{32}$ 时,四边形 $BMNQ$ 的面积最大,最大值为 $\frac{75}{32}$.

第23章 解直角三角形

23.1 锐角的三角函数

1. 锐角的三角函数

【两年模拟兵法】

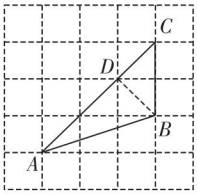
1. B **2.** C **3.** A

4. B **点拨:**由折叠的性质可知,$C'D=CD$,$\angle C'=\angle C=90°$. ∵ $AB=CD$,∴ $C'D=AB=4$.

∴ $\sin\angle C'ED=\frac{C'D}{DE}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

5. D **点拨:**如图,连接 BD,易得 $AD=2\sqrt{2}$,$BD=\sqrt{2}$,$AB=\sqrt{10}$,∴ $AB^2=AD^2+BD^2$. ∴ $\angle ADB=90°$.

∴ $\tan A=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.



(第5题)

6. B

7. C **点拨:**本题采用分类讨论思想,"4"可能是较长的直角边长,也可能是斜边长,因此分两种情况讨论.

(1)当"4"为较长的直角边长时,较小的锐角的正切值为 $\frac{3}{4}$;

(2)当"4"为斜边长时,另一直角边长为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$,则较小的锐角的正切值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

8. 4 m

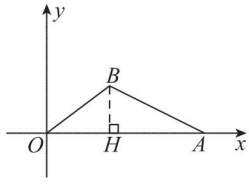
9. 24 **点拨:**过点 C 作 $CE\perp BD$ 于点 E.

在 Rt△CDE 中,∵ $\sin\angle EDC=\frac{3}{5}=\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{AB}$,

$AB=4$,∴ $CE=\frac{12}{5}$.

∴ $S_{□ABCD}=2\times\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CE=24$.

10. **解:**(1)如图,过点 B 作 $BH\perp OA$,垂足为点 H.



(第10题)

∵ 在 Rt△OHB 中,$BO=5$,$\sin\angle BOH=\frac{3}{5}$,

∴ $BH=3$. ∴ $OH=4$.

∴ 点 B 的坐标为(4,3).

(2)∵ 点 A 的坐标为(10,0),∴ $OA=10$.

∵ $OH=4$,∴ $AH=6$.

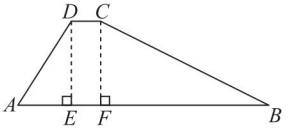
又∵ 在 Rt△AHB 中,$BH=3$,

∴ $AB=\sqrt{BH^2+AH^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$.

∴ $\cos\angle BAO=\frac{AH}{AB}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

11. 解：如图，分别过点 D，C 作 $DE\perp AB$，$CF\perp AB$，垂足分别为点 E，F.



（第 11 题）

∵ 迎水坡 AD 的坡度为 $1:0.6$，即 $\frac{DE}{AE}=\frac{1}{0.6}$，

又 $DE=30$ m，

∴ $AE=18$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=6\sqrt{34}$ m.

∵ 背水坡 BC 的坡度为 $1:2$，即 $\frac{CF}{BF}=\frac{1}{2}$，

又 $CF=DE=30$ m，

∴ $FB=60$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中，$BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=30\sqrt{5}$ m.

易知 $EF=DC=10$ m，

∴ 大坝横截面的周长为 $DC+AD+AE+EF+FB+BC=10+6\sqrt{34}+18+10+60+30\sqrt{5}=6\sqrt{34}+30\sqrt{5}+98$(m).

2. 30°，45°，60° 角的三角函数值

【两年模拟兵法】

1. D　**2.** B

3. C　点拨：由题意得 $\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，$\sqrt{3}-\tan\beta=0$，

∴ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=\sqrt{3}$.

∵ α，β 是一个三角形的两个锐角，

∴ $\alpha=60°$，$\beta=60°$.

∴ 此三角形为等边三角形.

4. 30°　点拨：∵ $\angle A$ 为锐角，且 $\sin(\angle A+15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\angle A+15°=45°$.

∴ $\angle A=30°$.

5. $\frac{1}{2}$　点拨：∵ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，

$BC=\sqrt{3}$，∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $\angle A=60°$.

∴ $\sin\frac{A}{2}=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

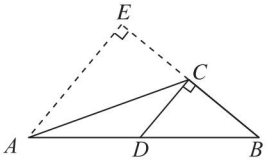
6. 解：(1) 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$.

(2) 原式 $=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}-2=2+\sqrt{3}-2=\sqrt{3}$.

(3) 原式 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1-(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+1=0$.

(4) 原式 $=1-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1-2=1-\sqrt{3}+1-2=-\sqrt{3}$.

7. 解：如图，过点 A 作 $AE\perp BC$，交 BC 的延长线于点 E.



（第 7 题）

∵ $DC\perp BC$，∴ $AE/\!/DC$.

∴ $EC:CB=AD:DB$.

又∵ $AD=BD$，∴ $EC=CB=4$.

∵ $\angle ACB=120°$，∴ $\angle ACE=60°$.

∴ $AE=EC\cdot\tan 60°=4\sqrt{3}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

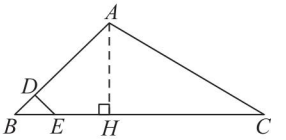
8. 解：(1) ∵ $\angle ABC=\angle DEB=45°$，

∴ $\triangle BDE$ 为等腰直角三角形.

∴ $DE=BE\cdot\sin\angle ABC=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$(m).

答：最短的斜拉索 DE 的长为 $3\sqrt{2}$ m.

(2) 如图，作 $AH\perp BC$ 于点 H.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because BD=DE=3\sqrt{2}$ m,

$\therefore AB=5BD=5\times3\sqrt{2}=15\sqrt{2}$(m).

在Rt△ABH中,$\because\angle B=45°$,

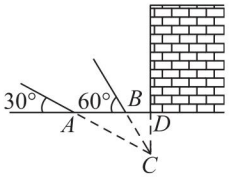
$\therefore AH=AB\cdot\sin B=15\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15$(m).

在Rt△ACH中,$\because\angle C=30°$,

$\therefore AC=2AH=30$ m.

答:最长的斜拉索AC的长为30 m.

9. 解:如图,过点C作$CD\perp AB$于点D.



(第9题)

易知$\angle CAB=30°$,$\angle CBD=60°$,$\therefore\angle ACB=30°$.

$\therefore\angle CAB=\angle ACB$.

$\therefore BC=AB=4$ m.

在Rt△CDB中,$BC=4$ m,$\angle CBD=60°$,

$\sin\angle CBD=\frac{CD}{BC}$,$\therefore\sin60°=\frac{CD}{4}$.

$\therefore CD=4\sin60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\approx3.5$(m).

答:该生命迹象所在C处与地面的距离约为3.5 m.

10. 解:(1)过点A作$AD\perp x$轴,垂足为点D,

则$OD=OA\cdot\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$,

$AD=OA\cdot\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,

$\therefore$点A的坐标为$(1,\sqrt{3})$.

(2)设直线AB对应的函数表达式为$y=kx+b$.

$\because$直线过$A(1,\sqrt{3})$和$B(3,0)$两点,

则有$\begin{cases}k+b=\sqrt{3},\\3k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{3}{2}\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$直线AB对应的函数表达式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

令$x=0$,得$y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,$\therefore OC=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times1=\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

点拨:过点A作x轴的垂线是求点A的坐标及△AOC面积的重要步骤,本题也可过点A作y轴的垂线.

3. 一般锐角的三角函数值

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** C **4.** D **5.** B **6.** 2.03

7. 解:(1)①$\sin33°=0.5446$.

②$\sin21°18'=0.3633$.

③$\cos31°=0.8572$.

④$\tan71°=2.9042$.

(2)①$\alpha\approx18°26'$.

②$\alpha\approx42°56'$.

③$\alpha\approx25°58'$.

8. 解:在Rt△ACE中,$\because\tan\angle CAE=\frac{CE}{AE}$,

$\therefore AE=\frac{CE}{\tan\angle CAE}=\frac{155}{\tan82.4°}\approx\frac{155}{7.495}\approx20.7$(cm).

在Rt△DBF中,$\because\tan\angle DBF=\frac{DF}{BF}$,

$\therefore BF=\frac{DF}{\tan\angle DBF}=\frac{234}{\tan80.3°}\approx\frac{234}{5.850}=40$(cm).

$\therefore EF=AE+AB+BF\approx20.7+90+40=150.7(cm)\approx151$cm.

$\because CE\perp EF$,$CH\perp DF$,$DF\perp EF$,

$\therefore$四边形$CEFH$是矩形.

$\therefore CH=EF\approx151$ cm.

答:高、低杠间的水平距离CH的长约为151 cm.

23.2 解直角三角形及其应用

1. 解直角三角形

【两年模拟兵法】

1. C **2.** A

3. A **点拨**:由题意得菱形的边长为5 cm,又$\cos A=\frac{AE}{AD}=\frac{4}{5}$,$\therefore AE=4$ cm.$\therefore DE=3$ cm,$EB=1$ cm.

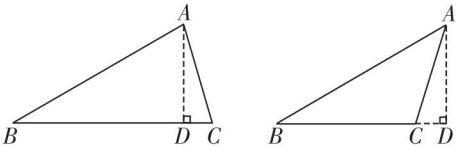
$\therefore S_{菱形ABCD}=AB\cdot DE=5\times3=15$(cm^2).

故①②③均正确.

4. $(10-2\sqrt{6})$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. $21\sqrt{3}$或$15\sqrt{3}$　**点拨：**(1)如图①，过点A作$AD\perp BC$，垂足为点D.



①　②

(第5题)

在Rt△ABD中，∵ $AB=12$，$\angle B=30°$，

∴ $AD=\frac{1}{2}AB=6$，$BD=AB\cdot\cos B=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

在Rt△ACD中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{39})^2-6^2}=\sqrt{3}$，

∴ $BC=BD+CD=6\sqrt{3}+\sqrt{3}=7\sqrt{3}$.

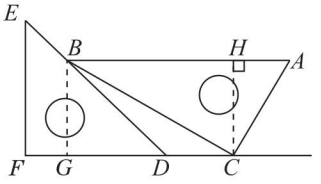
∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times7\sqrt{3}\times6=21\sqrt{3}$.

(2)如图②，过点A作$AD\perp BC$，交BC的延长线于点D，易得$AD=6$，$BD=6\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{3}$，

∴ $BC=BD-CD=5\sqrt{3}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times6=15\sqrt{3}$.

6. $15-5\sqrt{3}$　**点拨：**如图，过点C作$CH\perp AB$于点H，过点B作$BG\perp FC$于点G.



(第6题)

∵ $AB/\!/CF$，

∴ $\angle BHC=\angle HCG=\angle CGB=\angle GBH=90°$.

∴ 四边形$BGCH$为矩形.

∴ $BG=CH$，$BH=GC$.

∵ $\angle A=60°$，$CH\perp AB$，$AC=10$，

∴ $CH=BG=5\sqrt{3}$，$AH=5$.

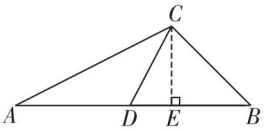
在Rt△ABC中，$AC=10$，∴ $AB=20$.

∴ $BH=GC=15$.

在Rt△BGD中，$\angle BDG=45°$，∴ $DG=BG=5\sqrt{3}$.

∴ $CD=CG-DG=15-5\sqrt{3}$.

7. 解：(1)如图，过点C作$CE\perp AB$于E，设$CE=x$.



(第7题)

在Rt△ACE中，∵ $\tan A=\frac{CE}{AE}=\frac{1}{2}$，∴ $AE=2x$.

∴ $AC=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$.

∴ $\sqrt{5}x=3\sqrt{5}$，解得$x=3$.

∴ $CE=3$，$AE=6$.

在Rt△BCE中，∵ $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\angle B=45°$.

∴ △BCE为等腰直角三角形.

∴ $BE=CE=3$.

∴ $AB=AE+BE=9$.

(2)∵ CD为中线，∴ $BD=\frac{1}{2}AB=4.5$.

∴ $DE=BD-BE=4.5-3=1.5$.

∴ $\tan\angle CDE=\frac{CE}{DE}=\frac{3}{1.5}=2$，

即$\tan\angle CDB$的值为2.

8. 解：(1)∵ AD是边BC上的高，∴ $\angle BDA=90°$.

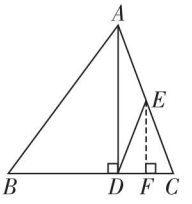
又∵ $AD=12$，$\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{4}{5}$，

∴ $AB=\frac{AD}{\sin B}=\frac{12}{\frac{4}{5}}=15$.

∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$.

∴ $DC=BC-BD=14-9=5$.

(2)如图，过点E作$EF\perp DC$，垂足为点F，则$\angle EFC=90°$.



(第8题)

由题意得$\angle ADC=90°$，∴ $\angle EFC=\angle ADC$.

∵ $\angle C=\angle C$，∴ △$EFC\backsim$△ADC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{CE}{CA}=\frac{CF}{CD}=\frac{EF}{AD}$.

$\because E$ 是 AC 的中点，$AD=12$，$DC=5$，

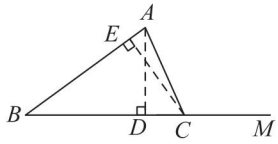
$\therefore EF=\frac{1}{2}AD=6$，$CF=\frac{1}{2}DC=\frac{5}{2}$.

$\therefore DF=DC-CF=\frac{5}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，$\angle EFD=90°$，

$\therefore \tan\angle EDC=\frac{EF}{DF}=\frac{6}{\frac{5}{2}}=\frac{12}{5}$.

9. 解：(1)如图，作 $AD\perp BC$ 于点 D，则 $\angle ADB=90°$.



(第9题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=AB\cdot\sin B\approx12$.

$\therefore$ 点 A 到 BM 的距离约为 12.

(2)②③ **点拨：**①以点 A 为圆心、13 为半径画圆，与 BM 有两个交点，故 BC 的长不能唯一确定；

②由 $\tan\angle ACB=\frac{12}{5}$，知 $\angle ACB$ 的大小确定，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$，$\angle B$ 及边 AB 确定，此时的三角形唯一，故 BC 的长能唯一确定；

③AB 的长度和 $\triangle ABC$ 的面积均确定，则点 C 到 AB 的距离确定，即 BM 上的点 C 是唯一的，故 BC 的长能唯一确定.

(3)选条件②.

由(1)得 $AD\approx12$，$BD=AB\cdot\cos B\approx16$.

$\because \angle ADC=90°$，$\tan\angle ACB=\frac{AD}{CD}$，

$\therefore CD=\frac{AD}{\tan\angle ACB}\approx\frac{12}{\frac{12}{5}}=5$.

$\therefore BC=BD+CD\approx21$.

选条件③.

如图，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，则 $\angle BEC=90°$.

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=126$，得 $CE=12.6$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中，$\sin B=\frac{CE}{BC}$，

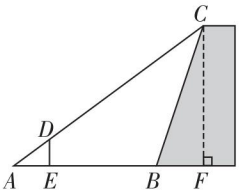
$\therefore BC=\frac{CE}{\sin B}\approx21$.

2. 解直角三角形的应用

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨：**如图，过 C 作 $CF\perp AB$ 于 F，则 $DE/\!/CF$，



(第2题)

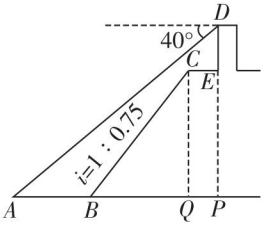
$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{DE}{CF}$，即 $\frac{1}{5}=\frac{0.6}{CF}$，解得 $CF=3$ m.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，$AF=\sqrt{5^2-3^2}=4$(m).

又$\because AB=3$ m，$\therefore BF=4-3=1$(m).

$\therefore$ 石坝的坡度为 $\frac{CF}{BF}=\frac{3}{1}=3$.

3. A **点拨：**如图，延长 DE 交 AB 的延长线于点 P，作 $CQ\perp AP$ 于点 Q.



(第3题)

由题易知四边形 $CEPQ$ 为矩形，

$\therefore CE=PQ=2$ m，$CQ=PE$.

$\because i=\frac{CQ}{BQ}=\frac{1}{0.75}=\frac{4}{3}$，

$\therefore$ 设 $CQ=4x$ m，则 $BQ=3x$ m.

由 $BQ^2+CQ^2=BC^2$，可得 $(4x)^2+(3x)^2=10^2$，

解得 $x=2$ 或 $x=-2$(舍去).

则 $CQ=PE=8$ m，$BQ=6$ m，

$\therefore DP=DE+PE=11$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，易知 $\angle A=40°$，

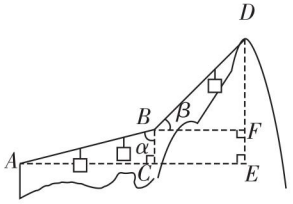
$\therefore AP=\frac{DP}{\tan A}=\frac{11}{\tan 40°}\approx13.10$(m).

$\therefore AB=AP-BQ-PQ\approx13.10-6-2=5.1$(m).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. A　**5**. B　**6**. 12

7. **解**：如图所示.



（第 7 题）

在 Rt△ABC 中，∵ $AB=600$ m，$\alpha=75°$，

∴ $BC=AB\cdot\cos 75°\approx 600\times 0.26=156$(m).

在 Rt△BDF 中，∵ $BD=600$ m，$\beta=45°$，

∴ $DF=BD\cdot\sin 45°=600\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 300\times 1.41=423$(m).

由题易知四边形 $BCEF$ 是矩形，

∴ $EF=BC\approx 156$ m.

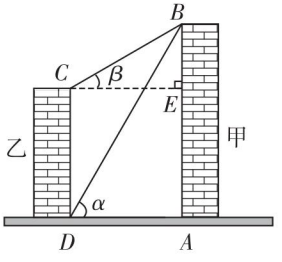
∴ $DE=DF+EF\approx 423+156=579$ (m).

答：DE 的长约为 579 m.

8. **解**：(1) 在 Rt△ABD 中，$AD=\frac{AB}{\tan\alpha}=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$(m).

答：甲、乙两建筑物之间的距离 AD 为 $10\sqrt{3}$ m.

(2) 如图，作 $CE\perp AB$ 于点 E.



（第 8 题）

由题易知 $AE=CD$，$CE=AD=10\sqrt{3}$ m，

∴ 在 Rt△BCE 中，$BE=CE\cdot\tan\beta=10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=10$(m).

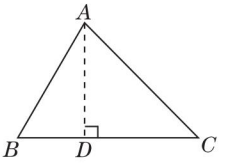
则 $CD=AE=AB-BE=30-10=20$(m).

答：乙建筑物的高 CD 为 20 m.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D.



（第 1 题）

设 $BD=x$，在 Rt△ABD 中，$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$.

在 Rt△ACD 中，∵ $\angle C=45°$，

∴ $\angle CAD=90°-\angle C=45°$.

∴ $\angle C=\angle CAD$.

∴ $CD=AD=\sqrt{3}x$.

∵ $BC=1+\sqrt{3}$，

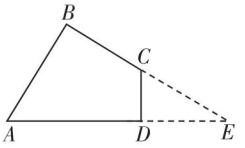
∴ $\sqrt{3}x+x=1+\sqrt{3}$，

解得 $x=1$，即 $BD=1$.

在 Rt△ABD 中，∵ $\cos B=\frac{BD}{AB}$，

∴ $AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{1}{\cos 60°}=2$.

2. **解**：如图，延长 AD，BC 交于点 E.



（第 2 题）

∵ $\angle A=60°$，$\angle B=90°$，∴ $\angle E=30°$.

在 Rt△ABE 中，$\tan A=\frac{BE}{AB}$，$\sin E=\frac{AB}{AE}$，

∴ $BE=AB\cdot\tan A=4\sqrt{3}$，$AE=\frac{AB}{\sin E}=8$.

∴ $DE=AE-AD=8-5=3$.

∵ $\angle ADC=90°$，∴ $\angle CDE=90°$.

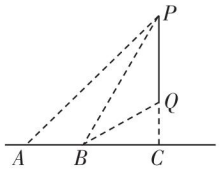
在 Rt△CDE 中，$\tan E=\frac{CD}{DE}$，

∴ $CD=DE\cdot\tan E=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}CD\cdot DE=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{13}{2}\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解: 如图,延长 PQ 交直线 AB 于点 C,易知 $\angle PCB=90°$.



(第3题)

(1)由题可知 $\angle PBC=60°$,

$\therefore \angle BPQ=90°-60°=30°$.

(2)由题易知 $\angle PAC=45°$,$\angle QBC=30°$.

$\therefore \angle PBQ=\angle PBC-\angle QBC=60°-30°=30°$.

$\therefore \angle BPQ=\angle PBQ$,

$\therefore QB=PQ$.

设 $PQ=x$ m,则 $QB=QP=x$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCQ$ 中,$BC=x\cdot\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ m,$QC=\frac{1}{2}x$ m;

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACP$ 中,易得 $CA=CP$,

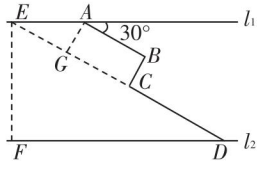
$\therefore 6+\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{2}x+x$,

解得 $x=2\sqrt{3}+6$.

$\therefore PQ=(2\sqrt{3}+6)\text{m}\approx9$ m.

答: 该电线杆 PQ 的高度约为 9 m.

4. 解: 如图,延长 DC 交 l_1 于点 E,过点 A 作 $AG\perp DE$ 于点 G,过点 E 作 $EF\perp l_2$ 于点 F,则四边形 $AGCB$ 是矩形.



(第4题)

$\therefore GC=AB=20$ km,$AG=BC=10$ km.

由题易知 $AB/\!/DE$,

$\therefore \angle AEG=30°$.

$\therefore EG=\sqrt{3}AG=10\sqrt{3}$ km.

$\therefore DE=EG+GC+CD=10\sqrt{3}+20+30=50+10\sqrt{3}$(km).

$\because l_1/\!/l_2$,$\therefore \angle EDF=30°$.

$\therefore EF=\frac{1}{2}ED=(25+5\sqrt{3})$ km.

答: 两条高速公路之间的距离为$(25+5\sqrt{3})$ km.

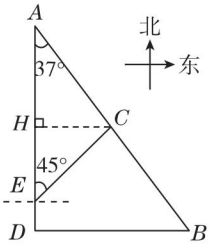
5. 解: 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$\angle BEA=90°$,$\angle BAE=45°$,$BE=20$ m,$\therefore AE=20$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中,$\angle BEF=90°$,$\angle F=30°$,$BE=20$ m,$\therefore EF=\frac{BE}{\tan30°}=\frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=20\sqrt{3}$(m).

$\therefore AF=EF-AE=20\sqrt{3}-20\approx20\times1.732-20=14.64\approx15$(m).

答: AF 的长度约是 15 m.

6. 解: 如图,作 $CH\perp AD$ 于点 H,设 $CH=x$ km.



(第6题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中,$\angle A=37°$,$\tan37°=\frac{CH}{AH}$,

$\therefore AH=\frac{CH}{\tan37°}=\frac{x}{\tan37°}$ km.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CEH$ 中,$\because \angle CEH=45°$,

$\therefore CH=EH=x$ km.

$\because CH\perp AD$,$BD\perp AD$,$\therefore CH/\!/BD$.

$\therefore \frac{AH}{HD}=\frac{AC}{CB}$.

$\because AC=CB$,$\therefore AH=HD$.

$\therefore \frac{x}{\tan37°}=x+5$.

$\therefore x\approx15$.

$\therefore AE=AH+HE\approx\frac{15}{\tan37°}+15\approx35$(km).

答: E 处距离港口 A 约 35 km.

7. 解: (1)在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=180°-\angle B-\angle BAC=180°-37°-53°=90°$.

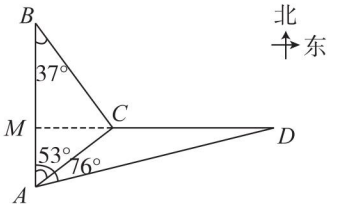
$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\sin B=\frac{AC}{AB}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即 $AC = AB \cdot \sin 37° \approx 25 \times \frac{3}{5} = 15$(n mile).

答:观察哨所 A 与走私船所在的位置 C 的距离约为 15 n mile.

(2)如图,过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M.



(第 7 题)

由题易知 D, C, M 在一条直线上.

在 Rt$\triangle AMC$ 中,$CM = AC \cdot \sin \angle CAM \approx 15 \times \frac{4}{5} = 12$(n mile),$AM = AC \cdot \cos \angle CAM \approx 15 \times \frac{3}{5} = 9$(n mile).

在 Rt$\triangle AMD$ 中,$\tan \angle DAM = \frac{DM}{AM}$,$\therefore DM = AM \cdot \tan 76° \approx 9 \times 4 = 36$(n mile),

$\therefore AD \approx 9\sqrt{17}$ n mile,$CD = DM - CM \approx 36 - 12 = 24$(n mile).

设缉私艇的速度为 x n mile/h,则有 $\frac{24}{16} = \frac{9\sqrt{17}}{x}$,

解得 $x = 6\sqrt{17}$.

经检验,$x = 6\sqrt{17}$ 是原方程的解.

答:当缉私艇的速度为 $6\sqrt{17}$ n mile/h 时,恰好在 D 处成功拦截.

【第 23 章测试卷】

一、1. A **2.** D **3.** D **4.** C **5.** D **6.** A **7.** C **8.** B

二、9. $\frac{1}{2}$ **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **11.** $\sqrt{5}$ **12.** 2

三、13. 解:原式 $= \left[\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-2}{(x+1)(x-1)}\right] \cdot (x+1) = \frac{1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x+1) = \frac{1}{x-1}$.

当 $x = 2\sin 30° + 1 = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$ 时,

原式 $= \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1$.

14. (1)**证明**:在矩形 $ABCD$ 中,$\because EF \perp EC$,

$\therefore \angle CEF = 90°$.

$\therefore \angle AEF + \angle DEC = 180° - \angle CEF = 90°$.

$\because \angle A = 90°$,

$\therefore \angle AEF + \angle AFE = 90°$.

$\therefore \angle AFE = \angle DEC$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DCE$ 中,$\begin{cases} \angle AFE = \angle DEC, \\ \angle A = \angle D = 90°, \\ AE = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DCE$.

$\therefore AF = DE$.

(2)**解**:设 $DE = 2x$.

$\because DE = \frac{2}{5}AD$,$\therefore AD = 5x$.

$\therefore AE = 3x$.

由(1)可知 $AF = DE = 2x$.

$\therefore$ 在 Rt$\triangle AEF$ 中,$\tan \angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

15. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB = AD$,AC 平分 $\angle BAD$.

$\because BE = DF$,

$\therefore AE = AF$.

$\therefore AC \perp EF$.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$,$CG // AB$,$BO = \frac{1}{2}BD = 2$.

$\because AC \perp EF$,

$\therefore BD // EF$.

$\therefore$ 四边形 $EBDG$ 是平行四边形.

$\therefore \angle ABD = \angle G$.

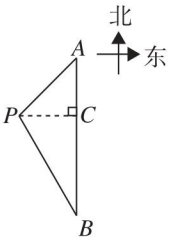
$\therefore \tan \angle ABD = \tan G = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{AO}{2} = \frac{1}{2}$,

解得 $AO = 1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. **解:**(1)如图,过点 P 作 $PC\perp AB$,垂足为点 C.



(第 16 题)

∵ 海轮在 A 处时位于灯塔 P 的东北方向,

∴ $\angle A=45°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 中,$\sin 45°=\dfrac{PC}{AP}$,

∴ $PC=AP\cdot\sin 45°=80\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=40\sqrt{2}$(n mile).

答:海轮从 A 处到 B 处的途中与灯塔 P 之间的最短距离为 $40\sqrt{2}$ n mile.

(2)不能. 理由如下:

∵ $\angle A=45°$,

∴ $AC=PC=40\sqrt{2}$ n mile.

∵ 点 B 位于灯塔 P 的南偏东 30°方向上,

∴ $\angle B=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPC$ 中,$\tan 30°=\dfrac{PC}{BC}$,

∴ $BC=\dfrac{PC}{\tan 30°}=\dfrac{40\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=40\sqrt{6}$(n mile).

∴ $AB=40\sqrt{2}+40\sqrt{6}\approx 154.4$(n mile).

∵ $30\times 5=150$(n mile) <154.4n mile,

∴ 海轮不能在 5 h 内到达 B 处.

17. **解:**(1)①160

②如图①,延长 OA 交 BC 于点 G.

易知 $\angle BGA=90°$.

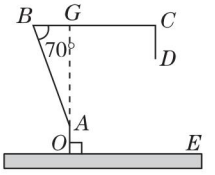
∵ $AB=30$ cm, $OA=6.8$ cm, $\angle ABC=70°$,

∴ $AG=30\sin 70°\approx 28.2$(cm).

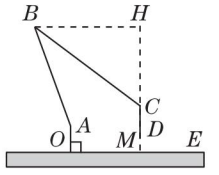
∴ $OG=OA+AG\approx 6.8+28.2=35$(cm).

∴ $OG-CD\approx 27$ cm.

答:点 D 到桌面 OE 的距离约是 27 cm.



①



②

(第 17 题)

(2)如图②,延长 CD 交 OE 于点 M,过点 B 作 OE 的平行线交 DC 的延长线于点 H.

∵ $CD\perp OE$, $OE\parallel BH$,

∴ $CD\perp BH$, $\angle ABH=70°$.

由题意得 $CM=14$ cm,由(1)得 $HM\approx 35$ cm,

∴ $CH\approx 21$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCH$ 中,$\sin\angle CBH=\dfrac{CH}{BC}\approx\dfrac{21}{35}=0.60$,

∴ $\angle CBH\approx 36.8°$.

∴ $\angle ABC=\angle ABH-\angle CBH\approx 70°-36.8°=33.2°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第21章 二次函数与反比例函数

21.1 二次函数

练习(教材第3页)

1. (1)$2\pi r$;一次　(2)πr^2;二次

2. 解:(2)(3)(4)是二次函数.

习题21.1

1. 解:$y=3x^2-1$、$y=5x^2-2x$、$y=-2x^2+x-1$、$y=(x-2)(2x+1)$是二次函数.

2. 解:边长增加x后,正方形的边长为$x+5$,面积为$(x+5)^2$,所以$y=(x+5)^2-5^2$,即$y=x^2+10x$.

点拨:本题关键是用x表示出边长增加x后的正方形的面积,然后用两个正方形的面积差表示y.

3. 解:$S=x^2\times2+8x\times4$,即$S=2x^2+32x$.

点拨:长方体的上、下两个面的面积都是x^2,前、后、左、右四个面的面积都是$8x$.

4. 解:$S=\pi R^2-\pi r^2$,即$S=-\pi r^2+\pi R^2$.

点拨:所剩圆环面积等于大圆面积减去小圆面积.

5. 解:$y=35\times20-2\times35x-2(20-2x)x$.

整理,得$y=4x^2-110x+700(0<x<10)$.

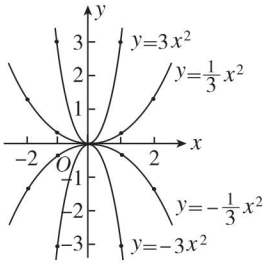
点拨:解本题的关键是求出小路的面积,可以把小路分割成四个一边长都是x m的矩形,其中较大的两个矩形的另一边长都是35 m,较小的两个矩形的另一边长均为$(20-2x)$ m.

6. 解:$y=50(1+x)^2$,即$y=50x^2+100x+50$.

21.2 二次函数的图象和性质

练习(教材第10页)

1. 解:(1)如图所示.



(第1题)

(2)抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$的顶点坐标为(0,0),开口向上,对称轴为y轴;

抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2$的顶点坐标为(0,0),开口向下,对称轴为y轴;

抛物线$y=3x^2$的顶点坐标为(0,0),开口向上,对称轴为y轴;

抛物线$y=-3x^2$的顶点坐标为(0,0),开口向下,对称轴为y轴.

(3)抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$、$y=3x^2$的最低点的坐标为(0,0),

抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2$、$y=-3x^2$的最高点的坐标为(0,0).

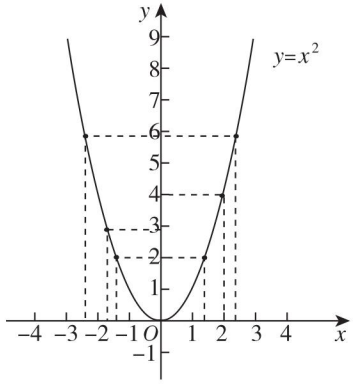
(4)对于抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$、$y=3x^2$,在对称轴左侧,y均随x的增大而减小;在对称轴右侧,y均随x的增大而增大.

对于抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2$、$y=-3x^2$,在对称轴左侧,y均随x的增大而增大;在对称轴右侧,y均随x的增大而减小.

2. 解:开口最大的是抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2$,开口最小的是抛物线$y=(2+\sqrt{2})x^2$.

3. 解:各组中两个函数的图象的位置关系均是关于x轴对称,且关于原点成中心对称.

4. 解:函数$y=x^2$的图象如图所示.



(第4题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

根据图象可得,(1)当 $x=2$ 时,$y=4.0$;当 $x=-1.7$ 时,$y\approx2.9$.

(2)当 $y=2$ 时,$x\approx1.4$ 或 -1.4;当 $y=5.8$ 时,$x\approx2.4$ 或 -2.4.

(3)图象上最低点的坐标是(0,0).

5. 解:(1)把点(2,−2)的坐标代入 $y=ax^2$,

得 $4a=-2$,

解得 $a=-\frac{1}{2}$.

∴ 这个函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

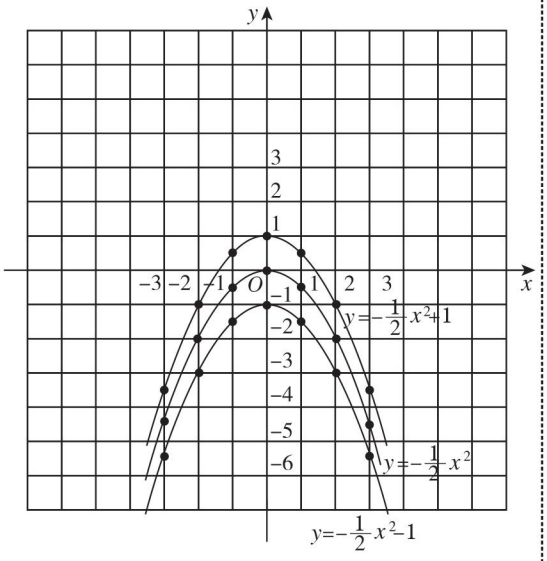
(2)当 $x<0$ 时,函数 y 随 x 的增大而增大.

练习(教材第 12 页)

1. 解:(1)

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	$-\frac{9}{2}$	−2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−2	$-\frac{9}{2}$	…
$y=-\frac{1}{2}x^2-1$	…	$-\frac{11}{2}$	−3	$-\frac{3}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	−3	$-\frac{11}{2}$	…
$y=-\frac{1}{2}x^2+1$	…	$-\frac{7}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{7}{2}$	…

(2)如图所示.



(第 1 题)

2. (1)向下;0;−1;y 轴;下;1　(2)减小;增大　(3)0;大;大值;0;0;大;大值;−1;0;大;大值;1

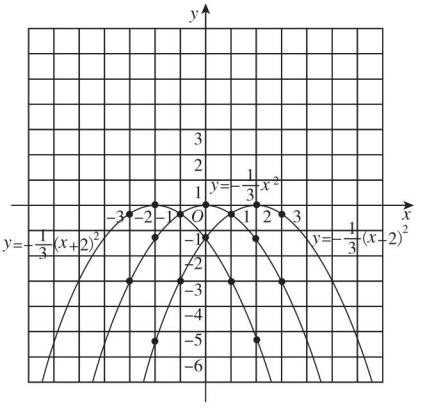
3. 解:得到新抛物线对应的函数表达式是 $y=3x^2+2$.

练习(教材第 15 页)

1. 解:(1)

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{3}x^2$	…	−3	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	−3	…
$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$	…	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	−3	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{25}{3}$	…
$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2$	…	$-\frac{25}{3}$	$-\frac{16}{3}$	−3	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	…

(2)如图所示.



(第 1 题)

2. 向下;−2;0;直线 $x=-2$;<-2;>-2;左;2

3. 向上;$-h$;0;直线 $x=-h$;$-h$;小;小值;0;向下;$-h$;0;直线 $x=-h$;$-h$;大;大值;0

4. 解:抛物线 $y=4(x-1)^2$ 可由抛物线 $y=4x^2$ 向右平移 1 个单位得到.

5. 解:(1)∵ 抛物线 $y=a(x+b)^2$ 的顶点为(−2,0),

∴ $b=2$.

∵ 抛物线 $y=a(x+b)^2$ 的形状与抛物线 $y=5x^2$ 相同,但开口方向相反,

∴ $a=-5$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-5(x+2)^2$.

(2)令 $x=0$,得 $y=-5\times4=-20$.

∴ 抛物线与 y 轴交点坐标为(0,−20).

练习(教材第 17 页)

1. 向上;1;−1;直线 $x=1$;>1;<1;1;小;小值;−1

2. 略.

练习(教材第 20 页)

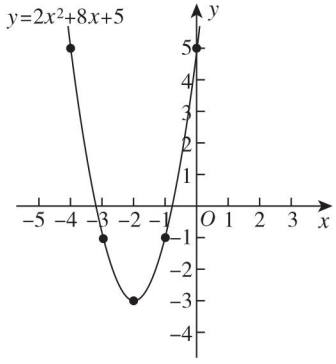
1. 解:(1)$y=2x^2+8x+5$ 可化为 $y=2(x+2)^2-3$.

抛物线的开口向上,顶点坐标为(−2,−3),对

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

称轴为直线 $x=-2$.

描点、画图如图所示.



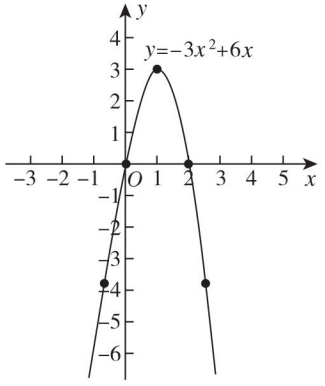
[第1(1)题]

(2) $y=-3x^2+6x$ 可化为 $y=-3(x-1)^2+3$.

抛物线的开口向下,顶点坐标为(1,3),

对称轴为直线 $x=1$.

描点、画图如图所示.



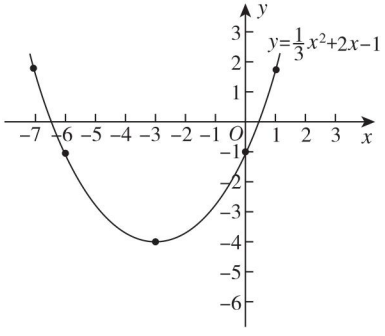
[第1(2)题]

(3) $y=\frac{1}{3}x^2+2x-1$ 可化为 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2-4$.

抛物线的开口向上,顶点坐标为 $(-3,-4)$,

对称轴为直线 $x=-3$.

描点、画图如图所示.



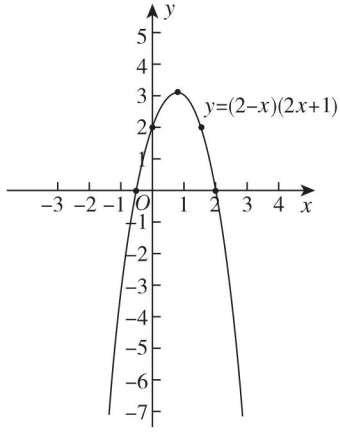
[第1(3)题]

(4) $y=(2-x)(2x+1)$ 可化为 $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$.

抛物线的开口向下,顶点坐标为 $\left(\frac{3}{4},\frac{25}{8}\right)$,

对称轴为直线 $x=\frac{3}{4}$.

描点、画图如图所示.



[第1(4)题]

2. $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$;向下;3;2;直线 $x=3$;3;大;大值;2;右;3;上;2(后4个空答案不唯一)

3. $\frac{5}{6}$;$-\frac{25}{12}$;右;$\frac{5}{6}$;下;$\frac{25}{12}$;$<\frac{5}{6}$;$>\frac{5}{6}$;$\frac{5}{6}$;小;小值;$-\frac{25}{12}$(第3~6个空答案不唯一)

4. B

5. **解**:抛物线 $y=x^2-4x+a$ 的顶点坐标为(2,$a-4$),且顶点在直线 $y=-4x-1$ 上,

$\therefore a-4=-4\times2-1$. $\therefore a=-5$.

$\therefore$ 此抛物线的顶点坐标为(2,−9).

练习(教材第23页)

1. **解**:设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$),由函数图象经过(0,0),(−1,−11),(1,9)三点,得

$$\begin{cases}c=0,\\a-b+c=-11.\\a+b+c=9.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}a=-1,\\b=10,\\c=0.\end{cases}$$

因此,所求二次函数的表达式为 $y=-x^2+10x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. C

3. 解: 假设 A 点在 B 点的左侧.

由 $\begin{cases} y=2x+3, \\ y=x^2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=9, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=1. \end{cases}$

$\therefore A(-1,1)$, $B(3,9)$.

设直线 $y=2x+3$ 与 y 轴交于点 C, 则 C 点的坐标为 $(0,3)$.

$\therefore S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times 3\times 1+\frac{1}{2}\times 3\times 3=6.$

习题 21.2

1. (1)A (2)A (3)B

2. 解: (1)当 $x_1=x_2=2$ 时, $y_1=\frac{3}{2}x_1^2=\frac{3}{2}\times 2^2=6$,

$y_2=\frac{5}{2}x_2^2=\frac{5}{2}\times 2^2=10.$

$\therefore y_1-y_2=6-10=-4.$

$\therefore$ 当 $x_1=x_2=2$ 时, y_1 比 y_2 小 4.

(2)令 $y_1=y_2=2$,

则 $\frac{3}{2}x_1^2=2$, $\therefore x_1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore |x_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

$\frac{5}{2}x_2^2=2$, $\therefore x_2=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore |x_2|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore |x_1|-|x_2|=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{10\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{15}>0.$

$\therefore$ 当 $y_1=y_2=2$ 时, $|x_1|$ 比 $|x_2|$ 大 $\frac{10\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{15}$.

3. 解: 设点 A 的坐标为 (x_1,y_1), 点 B 的坐标为 (x_2,y_2),

则 $x_1<x_2$, $y_1=y_2$.

$\because \triangle ABO$ 为正三角形,

$\therefore AO=OB=AB=2.$

设 AB 与 y 轴交于点 C.

由题意可知 $AC=BC=\frac{1}{2}AB=1$,

$\therefore OC=\sqrt{3}.$

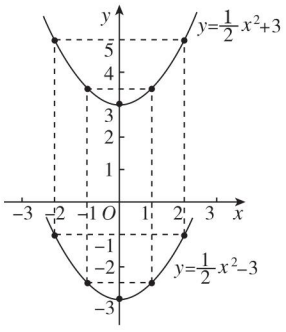
$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-1,\sqrt{3})$, 点 B 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$.

设过 A, B, O 三点的抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2$, 则 $\sqrt{3}=a\cdot(-1)^2$.

解得 $a=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 此抛物线对应的函数表达式为 $y=\sqrt{3}x^2$.

4. 解: (1)图象如图所示.

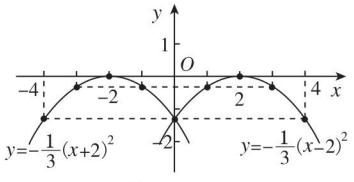


[第4(1)题]

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+3$ 的对称轴是 y 轴, 顶点坐标是 $(0,3)$;

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ 的对称轴是 y 轴, 顶点坐标是 $(0,-3)$.

(2)图象如图所示.

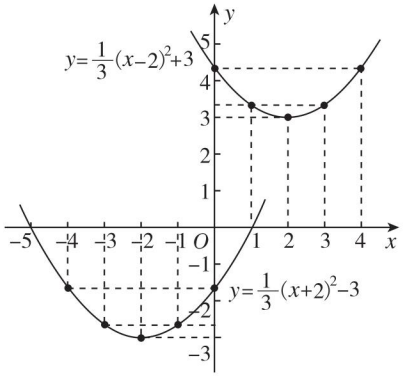


[第4(2)题]

抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 的对称轴是直线 $x=-2$, 顶点坐标是 $(-2,0)$;

抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2$ 的对称轴是直线 $x=2$, 顶点坐标是 $(2,0)$.

(3)图象如图所示.



[第4(3)题]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

抛物线 $y=\frac{1}{3}(x+2)^2-3$ 的对称轴是直线 $x=-2$，顶点坐标是 $(-2,-3)$；

抛物线 $y=\frac{1}{3}(x-2)^2+3$ 的对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是 $(2,3)$.

5. 解：(1)$\because y=x^2+3x-2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$，

$\therefore$ 对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{17}{4}\right)$.

(2)$\because y=1-6x-x^2=-(x+3)^2+10$，

$\therefore$ 对称轴是直线 $x=-3$，顶点坐标是 $(-3,10)$.

(3)$\because y=3x^2-2x+4=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$，

$\therefore$ 对称轴是直线 $x=\frac{1}{3}$，顶点坐标是 $\left(\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$.

(4)$\because y=-\frac{1}{2}x^2-2x+7=-\frac{1}{2}(x+2)^2+9$，

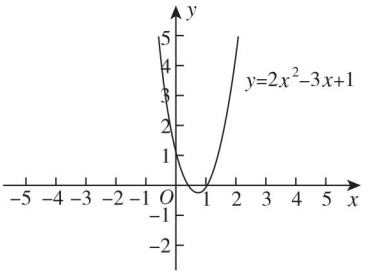
$\therefore$ 对称轴是直线 $x=-2$，顶点坐标是 $(-2,9)$.

6. 解：(1) 将 $y=2x^2-3x+1$ 配方，得 $y=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$，

所以抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=\frac{3}{4}$，

顶点坐标为 $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)$.

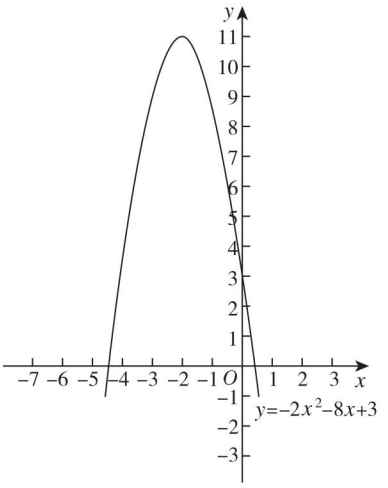
画图如图所示.



[第6(1)题]

当 $x=\frac{3}{4}$ 时，二次函数 $y=2x^2-3x+1$ 取得最小值，最小值是 $-\frac{1}{8}$.

(2) 将 $y=-2x^2-8x+3$ 配方，得 $y=-2(x+2)^2+11$，所以抛物线的开口向下，对称轴是直线 $x=-2$，顶点坐标为 $(-2,11)$，画图如图所示.



[第6(2)题]

当 $x=-2$ 时，函数 $y=-2x^2-8x+3$ 取得最大值，最大值是 11.

7. (1) $-\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{4}$

8. 解：$\because$ 点 A,B,C 在抛物线 $y=-x^2-4x+5$ 上，

$\therefore y_1=-(-4)^2-4\times(-4)+5=5$，$y_2=-(-3)^2-4\times(-3)+5=8$，$y_3=-2^2-4\times2+5=-7$.

$\therefore y_2>y_1>y_3$.

9. 解：设所求二次函数的表达式为 $y=a(x+1)^2-3$，把点 $(1,5)$ 的坐标代入，得 $5=a\times(1+1)^2-3$，解得 $a=2$.

所以所求二次函数的表达式为 $y=2(x+1)^2-3$，

即 $y=2x^2+4x-1$.

10. 解：(1)$\because$ 平移后顶点坐标为 $(-1,-2)$，

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=a(x+1)^2-2$.

又$\because$ 图象经过点 $B(1,10)$，

$\therefore 10=a(1+1)^2-2$，解得 $a=3$.

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=3(x+1)^2-2$，

即 $y=3x^2+6x+1$.

(2)$\because$ 对称轴为直线 $x=3$，最大值为 -1，

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=a(x-3)^2-1$.

又$\because$ 图象经过点 $C(4,-3)$，

$\therefore -3=a(4-3)^2-1$，解得 $a=-2$.

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-2(x-3)^2-1$，

即 $y=-2x^2+12x-19$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解:(1)∵ 原点 O 和点 $A(-4,0)$ 在二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图象上,

$\therefore \begin{cases}0=c,\\0=a\cdot(-4)^2-4\times(-4)+c.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\c=0.\end{cases}$

∴ 此二次函数的表达式为 $y=-x^2-4x$.

(2)点 P 的坐标为 $(-2,4)$,$(-2+2\sqrt{2},-4)$ 或 $(-2-2\sqrt{2},-4)$.

12. 解:将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 4 个单位,再向下平移 2 个单位得到抛物线 $y=(x-4)^2-2$,即 $y=x^2-8x+14$. 所以 $b=-8$,$c=14$.

13. 解:(1)$y=x^2+4x-5$.

(2)$y=-x^2+4x+5$.

14. 解:(1)将点 $A(3,0)$,$B(0,-3)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx-c$,得 $\begin{cases}9+3b-c=0,\\-c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=3.\end{cases}$

∴ 这个抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)抛物线顶点 D 的坐标为 $(1,-4)$.

令 $x^2-2x-3=0$,解得 $x=3$ 或 $x=-1$.

∴ 点 C 的坐标为 $(-1,0)$.

∴ $AC=4$.

设点 P 的坐标为 (x_0,y_0).

∵ $S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$,

∴ $S_{\triangle PAC}=3S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}AC\cdot|y_0|=24$.

∴ $|y_0|=12$.

∴ $x_0^2-2x_0-3=12$ 或 $x_0^2-2x_0-3=-12$.

解得 $x_0=5$ 或 $x_0=-3$.(后一个方程无解)

∴ 点 P 的坐标为 $(5,12)$ 或 $(-3,12)$.

15. 解:(1)∵ 抛物线 $y=-x^2-2x+c$ 经过点 A,

∴ $4=-(-2)^2-2\times(-2)+c$,解得 $c=4$.

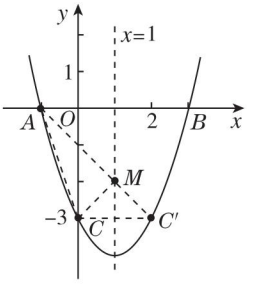
(2)$1<m<3$.

16. 解:(1)∵ 抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 的对称轴为直线 $x=1$,且过点 $A(-1,0)$,

∴ $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=1,\\0=(-1)^2a-b-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

∴ 这条抛物线所对应的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)如图,作点 C 关于直线 $x=1$ 的对称点 C',连接 AC' 交直线 $x=1$ 于点 M,点 M 即为所求点,连接 AC,CM,则 $CM=C'M$.



(第 16 题)

在 $y=x^2-2x-3$ 中,令 $x=0$,则 $y=-3$,

∴ 点 C 的坐标为 $(0,-3)$,点 C' 的坐标为 $(2,-3)$.

$C_{\triangle AMC}=AM+MC+CA=AM+MC'+CA=AC'+CA=\sqrt{3^2+3^2}+\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{18}+\sqrt{10}=3\sqrt{2}+\sqrt{10}$.

设直线 AC' 对应的函数表达式为 $y=kx+m$,则

$\begin{cases}0=-1\cdot k+m,\\-3=2\cdot k+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=-1.\end{cases}$

∴ $y=-x-1$.

令 $x=1$,得 $y=-1-1=-2$.

∴ 点 M 的坐标为 $(1,-2)$.

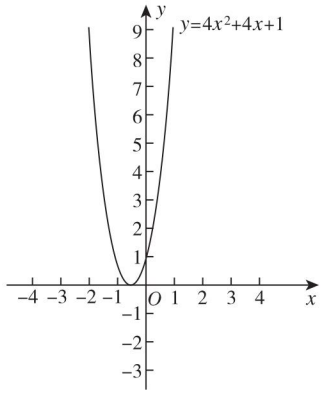
21.3 二次函数与一元二次方程

练习(教材第 33 页)

1. 有两个不相等的实数根;有两个交点;有两个相等的实数根;有一个交点;无实数根;没有交点;

$\frac{4ac-b^2}{4a}=0$;$-\frac{b}{2a}=0$

2. 解:(1)图象如图所示.



[第 2(1)题]

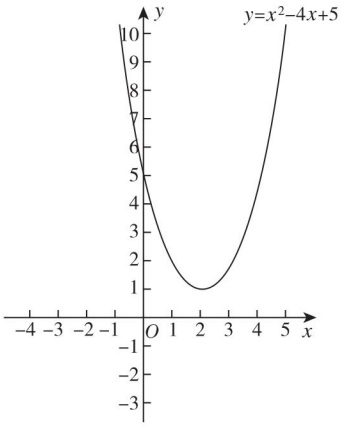
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $y=0$ 时，有 $4x^2+4x+1=0$.

解得 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$.

∴ 当 x 为 $-\frac{1}{2}$ 时，$y=0$.

(2)图象如图所示.



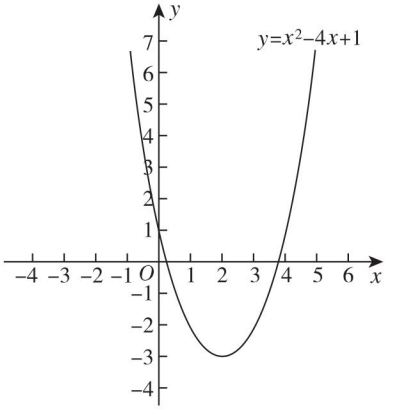
[第2(2)题]

不论 x 为何值，y 都不等于0.

3. 证明： $b^2-4ac=[-(2p-1)]^2-4(p^2-p)=4p^2-4p+1-4p^2+4p=1$，即 $b^2-4ac=1>0$，

故抛物线 $y=x^2-(2p-1)x+p^2-p$ 与 x 轴必有两个不同的交点.

4. 解： 二次函数 $y=x^2-4x+1$ 的图象如图所示.



(第4题)

从图象上可以看出，图象与 x 轴的交点的横坐标一个在0和1之间，另一个在3和4之间，利用计算器进行探索得，当 x 取0.3或3.7时，y 更接近于0. 所以方程 $x^2-4x+1=0$ 精确到0.1的解为0.3和3.7.

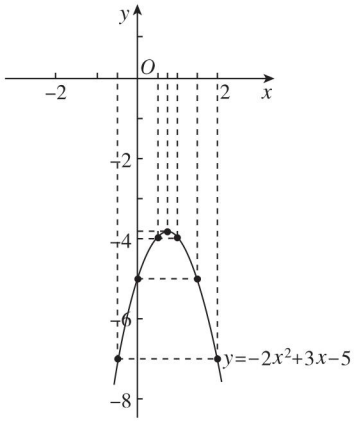
练习(教材第34页)

1. 解： 由 $a=1,b=2,c=-1$，知 $x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$，即 $x_1=-1-\sqrt{2},x_2=-1+\sqrt{2}$.

图象在 x 轴上方，则 $y=x^2+2x-1>0$，此时 x 的取值范围为 $x<-1-\sqrt{2}$ 或 $x>-1+\sqrt{2}$；

图象在 x 轴下方，则 $y=x^2+2x-1<0$，此时 x 的取值范围为 $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$.

2. 解： 函数 $y=-2x^2+3x-5$ 的图象如图所示.



(第2题)

由图象可知：(1) $-2x^2+3x-5>0$ 无解.

(2) $-2x^2+3x-5<0$ 的解集为全体实数.

习题21.3

1. 解： 函数 $y=x^2-4x+3$ 的值等于0，即 $x^2-4x+3=0$，解得 $x_1=1,x_2=3$.

所以当 $x=1$ 或 $x=3$ 时，函数 $y=x^2-4x+3$ 的值等于0.

2. 解： (1)有两个交点，交点坐标为 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$.

(2)无交点. 因为方程 $x^2+x+1=0$ 中，$b^2-4ac=-3<0$，所以方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根.

故函数 $y=x^2+x+1$ 的图象与 x 轴无交点.

(3)有一个交点，交点坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(4)无交点. 因为方程 $-\frac{1}{2}x^2+x-4=0$ 中，$b^2-4ac=-7<0$，所以方程 $-\frac{1}{2}x^2+x-4=0$ 无实数根.

故函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$ 的图象与 x 轴无交点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解: 令 $y=0$,得 $-6x^2-x+2=0$,

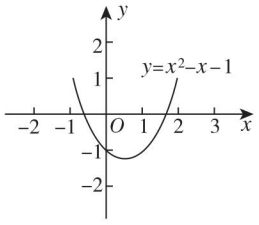
解得 $x_1=-\frac{2}{3}$,$x_2=\frac{1}{2}$.

所以抛物线 $y=-6x^2-x+2$ 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

把 $x=0$ 代入 $y=-6x^2-x+2$,得 $y=2$,

所以抛物线 $y=-6x^2-x+2$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0,2)$.

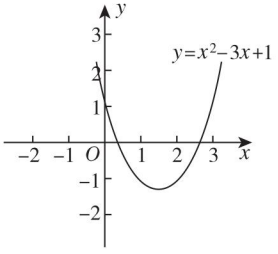
4. 解: (1)画出函数 $y=x^2-x-1$ 的图象,如图所示.



[第4(1)题]

由图象知,方程有两个根,一个在 -1 和 0 之间,另一个在 1 和 2 之间,利用计算器进行探索,可得两个近似根分别为 $x_1=-0.6$,$x_2=1.6$.

(2)画出函数 $y=x^2-3x+1$ 的图象,如图所示.



[第4(2)题]

由图象知,方程有两个根,一个在 0 和 1 之间,另一个在 2 和 3 之间,利用计算器进行探索,可得两个近似根分别为 $x_1=0.4$,$x_2=2.6$.

5. 解: ∵ 图象与 x 轴只有一个交点,即一元二次方程 $(k-8)x^2-6x+k=0$ 有两个相等的实数根,

∴ $b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot(k-8)\cdot k=0$,

即 $k^2-8k-9=0$,解得 $k=9$ 或 $k=-1$.

当 $k=9$ 时,函数表达式为 $y=x^2-6x+9$,故交点坐标为 $(3,0)$;

当 $k=-1$ 时,函数表达式为 $y=-9x^2-6x-1$,故交点坐标为 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

6. 解: (1)∵ 当 $x=5$ 时,函数有最小值,

∴ $-\frac{p}{2}=5$,即 $p=-10$.

又∵ 当 $x=5$ 时,最小值为 -2,

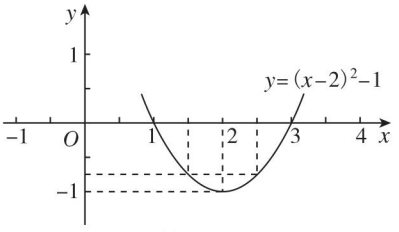
∴ $5^2-10\times5+q=-2$,解得 $q=23$.

∴ $p=-10$,$q=23$.

(2)∵ 函数图象与 x 轴的交点坐标是 $(-4,0)$ 和 $(-1,0)$,∴ 将这两点的坐标代入函数表达式,得 $\begin{cases}16-4p+q=0,\\1-p+q=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=5,\\q=4.\end{cases}$

7. B **点拨:** 因为图象过点 $(-1,0)$,所以把 $(-1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$,得 $a-b+c=0$. 因为对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=2$,所以可得 $4a+b=0$. 所以③④正确.

8. 解: 函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象如图所示.



(第8题)

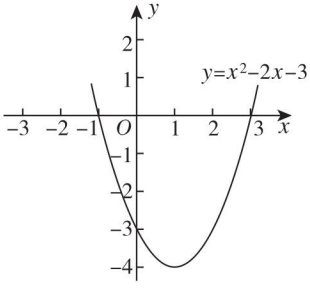
结合图象知:

(1)当 $x=1$ 或 $x=3$ 时,$y=0$.

(2)当 $x<1$ 或 $x>3$ 时,$y>0$.

(3)当 $1<x<3$ 时,$y<0$.

9. 解: 函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象如图所示.



(第9题)

根据图象知:

(1)当 $x=-1$ 或 $x=3$ 时,$x^2-2x-3=0$.

(2)当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时,$x^2-2x-3>0$.

(3)当 $-1<x<3$ 时,$x^2-2x-3<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.4 二次函数的应用

练习(教材第36页)

1. 解:在21.1节中,得 $y=(190-10x)(15+x)=-10x^2+40x+2\,850$.

将这个函数的表达式配方,得 $y=-10(x-2)^2+2\,890$($0\leqslant x<19$ 且 x 为整数).

当 $x=2$ 时,函数取得最大值,即 $y_{最大值}=2\,890$.

答:增加2人才能使每天装配玩具总数最多,玩具总数最多是2 890个.

2. 解:设其中一条直角边的长为 x,直角三角形的面积为 S,则另一条直角边的长为 $10-x$.

由题意得 $S=\frac{1}{2}x(10-x)=-\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2}$ ($0<x<10$).

当 $x=5$ 时,函数取得最大值,即 $S_{最大值}=\frac{25}{2}$.

此时,另一条直角边的长为 $10-5=5$.

答:当两直角边的边长均为5时,这个三角形的面积最大,最大面积是 $\frac{25}{2}$.

练习(教材第38页)

1. 解:(1)设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+6$.

将点(4,2)的坐标代入上式,得 $a=-\frac{1}{4}$,

所以此抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+6(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

(2)当 $x=2.4$ 时,$y=-\frac{1}{4}\times 2.4^2+6=4.56$,而 $4.56>4.3$,

所以这辆货运车能在一侧行道内通过该隧道.

2. 解:(1)由题意知,抛物线过点(0.6,0.6),

所以 $a\times 0.6^2=0.6$,解得 $a=\frac{5}{3}$.

所以抛物线对应的函数表达式为 $y=\frac{5}{3}x^2$.

(2)当 $x=0.2$ 时,$y=\frac{5}{3}\times 0.2^2=\frac{1}{15}$;

当 $x=0.4$ 时,$y=\frac{5}{3}\times 0.4^2=\frac{4}{15}$,

所以5根立柱的总长度为 $\left(0.6-\frac{1}{15}\right)\times 2+\left(0.6-\frac{4}{15}\right)\times 2+0.6=\frac{7}{3}$(m).

练习(教材第41页)

1. 解:(1)炮弹能达到的最大高度为 $\frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{4\times\left(-\frac{1}{54\,000}\right)}=4\,500$(m).

(2)令 $y=0$,则 $-\frac{1}{54\,000}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x=0$,

解得 $x_1=18\,000\sqrt{3}$,$x_2=0$(舍去).

所以炮弹最远射程为 $18\,000\sqrt{3}$ m.

2. 解:(1)$y=-0.1x^2+2.6x+43=-0.1(x-13)^2+59.9$,所以当 $0\leqslant x<13$ 时,学生的接受能力逐步增强;当 $13<x\leqslant 30$ 时,学生的接受能力逐步降低.

(2)当 $x=10$ 时,$y=-0.1\times 10^2+2.6\times 10+43=59$,即第10 min时,学生的接受能力是59.

(3)当 $x=13$ 时,y 取得最大值,即第13 min时,学生的接受能力最强.

3. 解:(1)设 Q 与 t 之间的函数表达式是 $Q=a(t-150)^2+1$,把点(50,1.5)的坐标代入上式,得 $a=\frac{1}{20\,000}$. 所以种植成本 Q 元/kg与时间 t 天之间的函数表达式为 $Q=\frac{1}{20\,000}t^2-\frac{3}{200}t+\frac{17}{8}$.

(2)从图象可以看出,西红柿上市150天其种植成本最低,最低成本是1元/kg.

习题21.4

1. 解:(1)$y=\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x+2=\sqrt{3}(x^2-x)+2=\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2-\frac{\sqrt{3}}{4}$,则当 $x=\frac{1}{2}$ 时,函数取得最小值,为 $2-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(2)$y=(x+1)(2-x)=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2+\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,则当 $x=\frac{1}{2}$ 时,函数取得最大值,为 $\frac{9}{4}$.

2. 解:(1)$y=60\times(1-10\%)\times(1+x)^2=54(1+x)^2$.

(2)令 $54(1+x)^2=81$,解得 $x=\frac{\sqrt{6}-2}{2}\approx 22.5\%$(另一值不合题意,舍去).

答:三、四月份平均月增长率约是22.5%.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 解: 设每件商品涨价 x 元,每周得到的利润为 y 元.

由题意得 $y=(10+x-8)\cdot(50-5x)=-5x^2+40x+100$,

配方,得 $y=-5(x-4)^2+180$.

当 $x=4$ 时,y 取得最大值.

答: 每件商品涨价4元,才能使每周得到的利润最多.

4. 解: (1)根据图象可知,抛物线的顶点坐标为(4,3).

设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=a(x-4)^2+3$.

把点 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ 的坐标代入 $y=a(x-4)^2+3$,

解得 $a=-\frac{1}{12}$.

所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

(2)由 $y=0$,得 $-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}=0$,

解得 $x_1=10$,$x_2=-2$(舍去).

所以 C 点的坐标为(10,0),即 $OC=10$ m.

5. 解: 根据题意可知,抛物线的顶点坐标为(20,16),故设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-20)^2+16$.

∵ 抛物线过原点,

∴ 把点(0,0)的坐标代入 $y=a(x-20)^2+16$,得 $a=-\frac{1}{25}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{25}(x-20)^2+16$.

不妨设在点 M 左边 5 m 处竖立铁柱,则可得 $x=15$,把 $x=15$ 代入 $y=-\frac{1}{25}(x-20)^2+16$,得 $y=15$,

∴ 该铁柱的长度应是 15 m.

21.5 反比例函数

练习(教材第44页)

1. 解: (1)S 与 a 不成反比例关系.

(2)h 与 S 成反比例关系,$h=\frac{150}{S}$.

(3)y 与 x 成反比例关系,$y=\frac{90}{x}$.

2. 解: (1)根据题意,得 $\rho V=14.3$ kg,所以 $\rho=\frac{14.3}{V}$.

(2)当 $V=2$ m^3 时,$\rho=\frac{14.3}{2}=7.15$ (kg/m^3).

练习(教材第47页)

1. (1)$x\neq0$;<;>　(2)增大;增大

(3)-1;-2;1;2

2. 解: 不会. 设 P 点的坐标为 (x,y),则 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|x||y|=\frac{1}{2}|k|$,$k$ 为定值,所以 $S_{\triangle OPQ}$ 为定值,即△OPQ 的面积不会因点 P 位置的变化而变化.

3. 解: 由题意,设点 A 的坐标为 $\left(m,\frac{2}{m}\right)(m>0)$.

∵ $AB\parallel x$ 轴,∴ 点 B 的纵坐标为 $\frac{2}{m}$.

又∵ 点 B 在反比例函数 $y=-\frac{3}{x}(x<0)$ 的图象上,∴ 点 B 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}m,\frac{2}{m}\right)$.

∴ $AB=\frac{5}{2}m$.

∴ $S_{\square ABCD}=\frac{5}{2}m\cdot\frac{2}{m}=5$.

习题21.5

1. 解: (1)由题意可得 $Qt=15\times20=300$(m^3),

即水池的容量为 300 m^3,所以可得 $Q=\frac{300}{t}$.

(2)当 $t=25$ min 时,$Q=\frac{300}{25}=12$(m^3/min).

2. 解: 由题意,得 $xy=24$,所以 $y=\frac{24}{x}(x>0)$.

3. 解: ∵ $(3-y)$ 与 $(x+1)$ 成反比例,

∴ 设 $3-y=\frac{k}{x+1}$(k 为常数,且 $k\neq0$).

把 $x=1$,$y=2$ 代入上式,得 $k=2$,

∴ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-\frac{2}{x+1}+3$.

4. ②④⑥

5. 解: 由题意得 $S_1+S_2=9$,$S_2+S_3=9$,

所以 $S_1+S_3=9+9-2S_2=18-2\times3=12$.

6. 解: (1)∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过 $N(-1,-4)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 把点 $N(-1,-4)$ 的坐标代入上式，得 $-4=\frac{k}{-1}$，即 $k=4$.

∴ 反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$.

把点 $M(2,m)$ 的坐标代入 $y=\frac{4}{x}$，得 $m=2$.

∵ $M(2,2)$ 和 $N(-1,-4)$ 都在直线 $y=ax+b$ 上，

∴ 把点 $M(2,2)$ 和点 $N(-1,-4)$ 的坐标分别代入 $y=ax+b$，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\-a+b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-2.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=2x-2$.

(2)根据图象得，当 $0<x<2$ 或 $x<-1$ 时，反比例函数值大于一次函数值.

(3)令 $2x-2=0$，解得 $x=1$.

设直线 $y=2x-2$ 与 x 轴的交点为 A，则 A 的坐标为 $(1,0)$.

∴ $S_{\triangle OMN}=S_{\triangle OMA}+S_{\triangle ONA}=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times4=3$.

7. 解：设正比例函数的表达式为 $y=k_1x(k_1\neq0)$，反比例函数的表达式为 $y=\frac{k_2}{x}(k_2\neq0)$.

把点 $P(-3,4)$ 的坐标分别代入上面两式，得 $k_1=-\frac{4}{3}$，$k_2=-12$.

所以正比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x$，反比例函数的表达式为 $y=-\frac{12}{x}$.

8. D

9. 解：(1)由题意可得 $\begin{cases}y=\frac{k_1}{x},\\y=k_2x.\end{cases}$ 故 $k_2x^2-k_1=0$.

若直线与双曲线有两个交点，则 $0-4k_2(-k_1)>0$，∴ $k_1k_2>0$.

∴ 当 k_1，k_2 同号时，直线与双曲线有两个交点.

(2)∵ 点 A 在直线 $y=k_2x$ 与双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 上，

∴ $k_2=2$，$k_1=2$.

∴ 双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 对应的函数表达式为 $y=\frac{2}{x}$，直线 $y=k_2x$ 对应的函数表达式为 $y=2x$.

解 $\begin{cases}y=\frac{2}{x},\\y=2x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2,\end{cases}\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=-2.\end{cases}$

∴ 点 B 的坐标为 $(-1,-2)$.

(3)是，对称轴的函数表达式为 $y=-x$ 和 $y=x$.

21.6 综合与实践　获取最大利润(无)

A 组复习题

1. 解：$V=\frac{h}{4\pi}\cdot C^2$.

2. 解：(1)x 的取值范围是全体实数.

(2)因为 $4x^2-4x+2=(2x-1)^2+1>0$，所以 x 的取值范围为全体实数.

(3)解 $\begin{cases}x-3\geqslant0,\\5-x\geqslant0,\end{cases}$ 得 $3\leqslant x\leqslant5$，即 x 的取值范围为 $3\leqslant x\leqslant5$.

3. 解：

抛物线	开口方向	对称轴	顶点坐标	使得函数 y 随 x 的增大而减小的 x 的范围
$y=\frac{1}{2}x^2$	向上	直线 $x=0$（或 y 轴）	$(0,0)$	$x<0$
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$	向上	直线 $x=1$	$(1,0)$	$x<1$
$y=\frac{1}{2}x^2-2$	向上	直线 $x=0$（或 y 轴）	$(0,-2)$	$x<0$
$y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$	向上	直线 $x=-2$	$(-2,1)$	$x<-2$
$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{13}{2}$	向下	直线 $x=3$	$(3,-2)$	$x>3$

4. 解：(1)抛物线的开口向上，顶点坐标为 $(3,-1)$，对称轴为直线 $x=3$.

(2)当 $x=3$ 时，函数取得最小值，$y_{最小值}=-1$.

(3)当 $x<3$ 时，函数 y 随 x 的增大而减小；

当 $x>3$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大.

(4)当 $x=3\pm\sqrt{2}$ 时，函数 $y=0$.

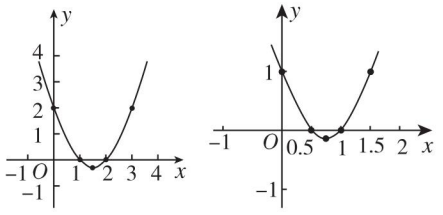
5. 解：抛物线 $y=ax^2+k$、$y=a(x+h)^2$ 和 $y=a(x+h)^2+k$ 与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的形状相同，位置不同，把抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 向上(下)平移，可以得到抛物线 $y=ax^2+k$；把抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 向左(右)平移，可以得到抛物线 $y=a(x+h)^2$；把抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 向上(下)且向左(右)平移，可以得到抛物线 $y=a(x+h)^2+k$，平移的方向、距离由 h，k 的值来决定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. (1) $\pm 4\sqrt{3}$ (2)0;0;0 (3)(-2,0)或(-1,0)

7. **解**:(1)画出二次函数 $y=x^2-3x+2$ 的图象,如图①所示.

由图象可知方程 $x^2-3x+2=0$ 的解为 $x_1=1.0$, $x_2=2.0$.



① ②

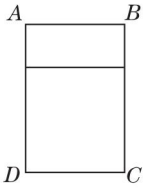
(第7题)

(2)画出二次函数 $y=2x^2-3x+1$ 的图象,如图②所示.

由图象可知方程 $2x^2-3x+1=0$ 的解为 $x_1=1.0$, $x_2=0.5$.

8. **解**:如图,设 $AB=x$ m,窗子面积为 S m^2,则 $BC=\frac{6-3x}{2}$ m,则 $S=x\cdot\frac{6-3x}{2}=-\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$.

当 $x=1$ 时,S 取得最大值,此时 $AB=1$ m,$BC=\frac{3}{2}$ m.



(第8题)

9. **解**:设 $AP=BQ=CR=DS=x$,正方形 $PQRS$ 的面积为 y,则 $y=a^2-\frac{(a-x)x}{2}\cdot 4=a^2-2x(a-x)=2x^2-2ax+a^2$.

当 $x=-\frac{-2a}{2\times 2}=\frac{a}{2}$ 时,y 取得最小值. 所以要使正方形 $PQRS$ 的面积最小,所截取的四条线段每条应该长 $\frac{a}{2}$.

10. **解**:设增加 x 人,收入为 y 元,则 $y=(5\,000-100x)(30+x)=-100(x-10)^2+160\,000$.

所以增加10人可使该旅行社一次收入最多,最多是160 000元.

11. **解**:(1)当 $x=3$ 时,$\frac{1}{3}(x-6)^2+1=\frac{1}{3}\times(3-6)^2+1=4$.

$5-4=1$(元).

答:在3月份出售这种蔬菜,每千克的收益是1元.

(2)5月份出售这种蔬菜的收益最大. 理由如下:

设 x 月份出售这种蔬菜,每千克的收益为 S 元,

则 $S=-\frac{2}{3}x+7-\frac{1}{3}(x-6)^2-1$.

整理,得 $S=-\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x-6$.

因为 $a=-\frac{1}{3}<0$,

所以当 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{10}{3}}{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=5$ 时,S 取得最大值.

所以5月份出售这种蔬菜的收益最大.

12. **解**:(1)令 $x=0$,得 $y=4$,故 $OA=4$.

又△AOB 的面积为6,故 $OB=3$.

所以 $A(0,4)$,$B(-3,0)$.

(2)将点 $B(-3,0)$ 的坐标代入 $y=-x^2+(k-1)x+4$,得 $0=-(-3)^2-3(k-1)+4$,

解得 $k=-\frac{2}{3}$.

所以该二次函数的表达式为 $y=-x^2-\frac{5}{3}x+4$.

(3)若 $AB=AP$,则点 P 的坐标为(3,0)或(0,-1)或(0,9);

若 $AB=BP$,则点 P 的坐标为(0,-4)或(2,0)或(-8,0);

若 $AP=BP$,则点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{7}{8}\right)$ 或 $\left(\frac{7}{6},0\right)$.

13. **解**:解方程组 $\begin{cases}y=x,\\ y=\frac{1}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\end{cases}$

所以点 A 的坐标为(1,1),点 C 的坐标为(-1,-1).

所以 $BD=2$,$AB=1$.

所以 $S_{四边形ABCD}=2S_{△ABD}=2\times\frac{1}{2}BD\cdot AB=2\times\frac{1}{2}\times 2\times 1=2$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

B 组复习题

1. (1)C　(2)B　(3)C　(4)C

2. 解: ∵ 平移后抛物线的顶点坐标为(t,t^2),

∴ $y=\frac{1}{2}(x-t)^2+t^2$.

又∵ 平移后抛物线经过点(2,4),

∴ $4=\frac{1}{2}(2-t)^2+t^2$.

解得 $t=2$ 或 $t=-\frac{2}{3}$.

∴ 平移后抛物线对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$或 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$.

3. 解: 以 O 为坐标原点,向右与向上方向分别为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系,设第一象限内抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,

则$\begin{cases}c=1.25,\\ -\frac{b}{2a}=1,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=2.25,\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\\ c=1.25.\end{cases}$

所以在第一象限内抛物线对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+1.25$.

当 $y=0$ 时, $-x^2+2x+1.25=0$,

所以$x_1=\frac{-2+\sqrt{4+5}}{2\times(-1)}=\frac{-2+3}{-2}=-\frac{1}{2}$(舍去),

$x_2=\frac{-2-\sqrt{4+5}}{2\times(-1)}=\frac{-2-3}{-2}=2.5$.

答: 水池的半径至少要 2.5 m,才能使水不落到池外.

4. 解: 由题意知 $A(1,k)$, $B\left(2,\frac{k}{2}\right)$,设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=mx+n$.

将点 $A(1,k)$、点 $B\left(2,\frac{k}{2}\right)$ 的坐标分别代入,

得$\begin{cases}m+n=k,\\ 2m+n=\frac{k}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-\frac{k}{2},\\ n=\frac{3}{2}k,\end{cases}$

∴ $y=-\frac{k}{2}x+\frac{3}{2}k$. 令 $y=0$,得 $x=3$.

∴ $C(3,0)$.

∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot k=\frac{1}{2}\times3\cdot k=6$.

∴ $k=4$.

5. 解: (1)因为函数 $y=\frac{k}{x}$中 $k>0$,

所以函数 $y=\frac{k}{x}$的图象在第一、三象限内,且在每一个象限内,y 随 x 的增大而减小.

又因为$x_1<x_2<0<x_3$,

所以点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$在第三象限内,且 $y_2<y_1<0$,点 $C(x_3,y_3)$在第一象限内,且 $y_3>0$,由此可得 $y_2<y_1<y_3$.

(2)因为函数 $y=\frac{k}{x}$中 $k<0$,

所以函数 $y=\frac{k}{x}$的图象在第二、四象限内,且在每一个象限内,y 随 x 的增大而增大.

若 $x_1<x_2<0$ 或 $0<x_1<x_2$,则 $y_1<y_2$;

若 $x_1<0<x_2$,则 $y_1>0$, $y_2<0$,则 $y_1>y_2$.

6. 解: (1)由题意知$\begin{cases}c=1,\\ -\frac{b}{2a}=2,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=-3,\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-4,\\ c=1,\end{cases}$

所以该抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-4x+1$.

(2)当 $2-m=m+2-2$,即 $m=1$ 时,点 M, N 关于直线 $x=2$ 对称,此时 $y_1=y_2$;

当$m<1$ 时,$y_1>y_2$;

当 $m>1$ 时,$y_1<y_2$.

7. 解: (1)由题意知 $OA=3$, $OB=4$, ∴ $AB=5$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴ $BC=5$.

∴ $C(-4,-5)$.

∴ 所求的反比例函数表达式为$y=\frac{20}{x}$.

(2)∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $AB=5$,

∴ $AD=5$.

∵ $A(0,3)$, ∴ $D(0,-2)$.

∴ $S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{\triangle POA}=4$.

设 $P\left(x,\frac{20}{x}\right)$,则 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\times 3\times|x|=4$,

解得 $x=\pm\frac{8}{3}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{8}{3},\frac{15}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{8}{3},-\frac{15}{2}\right)$.

8. $\frac{2}{3}$ **点拨:**设点 A 的坐标为 $\left(m,\frac{3}{m}\right)$,则点 B,C,D,E 的坐标分别为 $\left(\frac{m}{3},\frac{3}{m}\right)$, $\left(0,\frac{3}{m}\right)$, $\left(m,\frac{1}{m}\right)$, $(m,0)$.

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{\left(m-\frac{m}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{m}-\frac{1}{m}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}m^2+\frac{4}{m^2}}$, $CE=\sqrt{AC^2+AE^2}=\sqrt{m^2+\left(\frac{3}{m}\right)^2}=\sqrt{m^2+\frac{9}{m^2}}$.

$\therefore \frac{BD}{CE}=\frac{\sqrt{\frac{4}{9}m^2+\frac{4}{m^2}}}{\sqrt{m^2+\frac{9}{m^2}}}=\frac{\sqrt{\frac{4}{9}\left(m^2+\frac{9}{m^2}\right)}}{\sqrt{m^2+\frac{9}{m^2}}}=\frac{2}{3}$.

C 组复习题

1. 解:图象略.

(1)当 $x=-1$ 或 $x=\frac{5}{2}$ 时,$y=0$.

(2)当 $-1<x<\frac{5}{2}$ 时,$y>0$.

(3)当 $x<-1$ 或 $x>\frac{5}{2}$ 时,$y<0$.

2. 解:(1)因为 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$,且 $0\leqslant x\leqslant 3$,

所以函数在给定范围内能取得最小值,当 $x=2$ 时,y 最小,为 1;也能取得最大值,当 $x=0$ 时,y 最大,为 5.

(2)因为 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-4=-\frac{1}{2}(x-4)^2+4$,且 $1\leqslant x\leqslant 5$,

所以函数在给定范围内能取得最大值,当 $x=4$ 时,y 最大,为 4;也能取得最小值,当 $x=1$ 时,y 最小,为 $-\frac{1}{2}$.

(3)因为 $y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$,且 $2<x\leqslant 4$,所以函数在给定范围内能取得最小值,当 $x=4$ 时,y 最小,为 -6;在给定范围内不能取得最大值.

3. 解:设甲、乙两船的航行时间为 x h,两船之间距离为 y n mile.

由题意知,$y=\sqrt{(15x)^2+(125-20x)^2}$

$=\sqrt{625x^2-5\,000x+15\,625}$

$=\sqrt{625(x-4)^2+5\,625}$.

当 $625(x-4)^2+5\,625$ 取得最小值时,y 取得最小值,此时 $x=4$.

所以 4 h 后两船靠得最近.

4. 解:(1)根据题意列方程组为 $\begin{cases}y=2x+b,\\ y=x^2-2x+3,\end{cases}$

整理,得 $x^2-4x+3-b=0$.

有一个公共点,则 $(-4)^2-4\times(3-b)=0$,

解得 $b=-1$;

有两个公共点,则 $(-4)^2-4\times(3-b)>0$,

解得 $b>-1$.

(2)根据题意列方程组为 $\begin{cases}y=2x+b,\\ y=-\frac{2}{x},\end{cases}$

整理,得 $2x^2+bx+2=0$.

有一个公共点,

则 $b^2-4\times2\times2=0$,

解得 $b=\pm4$;

有两个公共点,

则 $b^2-4\times2\times2>0$,

解得 $b>4$ 或 $b<-4$.

5. 解:(1)$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2=2x^2-2(a_1+a_2)x+a_1^2+a_2^2$.

当 $x=-\frac{-2(a_1+a_2)}{2\times2}=\frac{a_1+a_2}{2}$ 时,y 取得最小值.

(2)$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2=3x^2-2(a_1+a_2+a_3)x+a_1^2+a_2^2+a_3^2$.

当 $x=-\frac{-2(a_1+a_2+a_3)}{2\times3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ 时,y 取得最小值.

(3)$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

当 $x=-\frac{-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 时,y 取得最小值.

6. 解:在直线 $x+y=2$ 上与原点距离最近的点的坐标为 $(1,1)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第22章 相似形

22.1 比例线段

练习(教材第64页)

1. 解:不相似,因为两个矩形的对应边长度的比不相等.

2. 解:不相似,因为两个菱形的对应角不相等.

3. 解:图形(B)是由图形(1)放大得到的.

图形(E)是由图形(2)缩小得到的.

练习(教材第66页)

1. (1)D (2)C (3)C

2. 解:(1)$AC:AB=2:1$.

(2)$AB:BC=1:1$.

(3)$BC:AC=1:2$.

练习(教材第69页)

1. 解:设这个零件的实际长为 x m,则有$\frac{0.32}{x}=\frac{1}{50}$,

解得 $x=16$.

答:这个零件的实际长为16 m.

2. 解:$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,$a=2.4$ cm,$b=3.6$ cm,$c=5.4$ cm,$\therefore \frac{2.4}{3.6}=\frac{5.4}{d}$.

$\therefore d=8.1$ cm.

3. 解:由 $5x-4y=0$,得 $5x=4y$.

因为当 $x\neq 0$ 时,有 $y\neq 0$,所以$\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$.

由合比性质,得 $\frac{x+y}{y}=\frac{9}{5}$.

4. 解:由$\frac{a-b}{b}=\frac{2}{3}$,得$\frac{a}{b}-1=\frac{2}{3}$,

所以$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$,即 $a:b=5:3$.

5. 解:因为 $ad=bc$,所以当 $ab\neq 0$ 时有 $ad:ab=bc:ab$,即 $d:b=c:a$,还能得到 $a:b=c:d$,$a:c=b:d$,$d:c=b:a$(a,b,c,d 都不等于0).

6. 解:因为$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{5}$,且 $b+d+f\neq 0$,

所以$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{3}{5}$.

7. 解:由题意易得点 C 靠近点 A,$\frac{CB}{AC+CB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

所以$\frac{AC+2}{AC+AC+2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 所以 $AC=1+\sqrt{5}$.

练习(教材第71页)

1. 解:$\because DE\parallel BC$,$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$.

$\because AB=14$,$AC=18$,$AE=11$,$\therefore \frac{11}{18}=\frac{AD}{14}$.

$\therefore AD=\frac{77}{9}$.

2. 解:$\because DE\parallel BC$,$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,

即$\frac{5}{2}=\frac{6}{AE}$,则 $AE=\frac{12}{5}$.

3. 解:$\because l_1\parallel l_2\parallel l_3$,$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

又$\because \frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$,$DE=6$,$\therefore \frac{3}{2}=\frac{6}{EF}$.

$\therefore EF=4$.

$\therefore DF=DE+EF=6+4=10$.

4. 解:$\because l_1\parallel l_2\parallel l_3$,

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$,即$\frac{a}{b}=\frac{DE}{c}$.

$\therefore DE=\frac{ac}{b}$.

5. 解:$\because DE\parallel BC$,$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$.

又$\because AD=2$,$BD=6$,$AE=1.5$,$\therefore \frac{2}{6}=\frac{1.5}{EC}$.

$\therefore EC=4.5$.

6. 解:$\because AD$ 是$\triangle ABC$的中线,$\therefore D$ 是 BC 的中点.

$\because EF=FC$,$\therefore F$ 是 EC 的中点.

$\therefore DF\parallel BE$. $\therefore \frac{AG}{AD}=\frac{AE}{AF}$.

$\because AE=EF$,$\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{AG}{AD}=\frac{1}{2}$.

习题22.1

1. 解:(1)由$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$,得$\frac{2a}{2b}=\frac{-c}{-d}=\frac{7e}{7f}=\frac{5}{7}$.

因为 $2b-d+7f\neq 0$,所以由等比性质,得$\frac{2a-c+7e}{2b-d+7f}=\frac{5}{7}$.

(2)因为 $x+y+z\neq 0$,所以由等比性质,得$\frac{x+y+x+z+y+z}{x+y+z}=k$,即$\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=k$.

所以 $k=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解: 由 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{8}{5}$,得

$\frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}=\frac{8}{5}$.

因为四边形 $A'B'C'D'$ 的周长为 80 cm,

所以 $\frac{AB+BC+CD+DA}{80}=\frac{8}{5}$.

即 $AB+BC+CD+DA=128$ cm.

所以四边形 $ABCD$ 的周长为 128 cm.

3. 解: 因为 $AP:PB=2:5$,所以设 $AP=2k$,$PB=5k$ $(k>0)$,则 $AB=7k$.

因此 $AB:PB=7:5$,$AP:AB=2:7$.

4. 证明: $\because DE\parallel BC$,$EF\parallel AB$,

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$,$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$,且有四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

$\therefore DE=BF$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}=\frac{DE}{BC}$.

5. 解: $\because l_1\parallel l_2\parallel l_3$,

$\therefore \frac{AM}{BM}=\frac{CM}{DM}=\frac{KE}{KF}$.

$\because AM=3$,$BM=5$,$CM=4.5$,

$\therefore DM=\frac{5\times 4.5}{3}=7.5$,$\frac{KE}{KF}=\frac{3}{5}$.

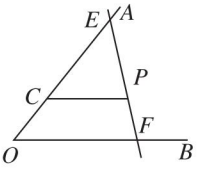
又$\because KE+KF=EF=16$,

$\therefore EK=6$,$KF=10$.

6. 解: 过点 E 作平行于 BC(或 AD)的直线,与 CD 的交点,就是要找的点 F.

7. 解: 如图,作 $PC\parallel OB$ 交 OA 于点 C,在 CA 上截取 $CE=2OC$,作直线 EP 交 OB 于点 F.

直线 EF 即为所求.



(第 7 题)

8. 证明: $\because DN\parallel AM$,

$\therefore AD:AB=MN:MB$,$AE:AC=MN:MC$.

又$\because AM$ 是 BC 边上的中线,$\therefore MB=MC$.

$\therefore AD:AB=AE:AC$.

9. 解: 过点 D 作 $DF\parallel BE$,交 AC 于点 F,

则 $\frac{AG}{GD}=\frac{AE}{EF}$,$\frac{BD}{DC}=\frac{EF}{FC}$.

$\because AG:GD=4:1$,

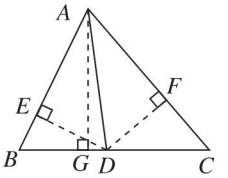
$\therefore AE=4EF$.

$\because BD:DC=2:3$,

$\therefore FC=\frac{3}{2}EF$.

$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{4EF}{EF+\frac{3}{2}EF}=\frac{8}{5}$,即 $AE:EC=8:5$.

10. 证明: 如图,作 $DE\perp AB$ 于点 E,$DF\perp AC$ 于点 F,作 $AG\perp BC$ 于点 G.



(第 10 题)

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore DE=DF$.

$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE$,$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot DF$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AB}{AC}$.

又$\because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot AG}{\frac{1}{2}DC\cdot AG}=\frac{BD}{DC}$,

$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

22.2 相似三角形的判定

练习(教材第 78 页)

解: (1)(2)(4)成立.

点拨: 因为 $DE\parallel BC$,$DF\parallel AC$,所以 $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$,$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,$\frac{DF}{AC}=\frac{BF}{BC}$,$\frac{AD}{DB}=\frac{FC}{BF}$,四边形 $DFCE$ 为平行四边形. 所以 $DE=FC$. 所以 $\frac{AD}{DB}=\frac{DE}{BF}$.

故(1)(2)(4)成立,(3)不成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习(教材第79页)

1. 证明:(1)∵ $AB=AC$, $A'B'=A'C'$,

∴ $\angle B=\angle C$, $\angle B'=\angle C'$.

又∵ $\angle A=\angle A'$,由三角形内角和定理可证得 $\angle B=\angle B'$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

(2)∵ $AB=AC$,∴ $\angle B=\angle C$.

∵ $A'B'=A'C'$,∴ $\angle B'=\angle C'$.

又∵ $\angle B=\angle B'$,∴ $\angle C=\angle C'$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 解:$\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

理由:∵ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$,

∴ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle A_1=\angle A_2$, $\angle B_1=\angle B_2$.

∴ $\angle A=\angle A_2$, $\angle B=\angle B_2$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

3. 解:$\triangle DOC\backsim\triangle BOA$, $\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$.

练习(教材第80页)

1. 解:(1)相似. 因为 $\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{EF}{AB}$,且 $\angle E=\angle A$,所以 $\triangle DEF\backsim\triangle CAB$.

(2)相似. 因为 $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$,且 $\angle A=\angle D$,所以 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

2. 解:相似. 因为在 Rt$\triangle ABC$ 中,两直角边分别为3 cm,4 cm,而在 Rt$\triangle A'B'C'$ 中斜边为25 cm,一条直角边为15 cm,则另一条直角边为20 cm,在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle A'B'C'$ 中,两条直角边对应成比例,夹角都为90°,所以这两个直角三角形相似.

练习(教材第82页)

1. 解:(1)当 $\angle ACP=\angle B$ 时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$.

(2)当 $AP:AC=AC:AB$ 时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$.

2. 解:∵ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{4}{4+\frac{8}{3}}=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{3+2}=\dfrac{3}{5}$,

∴ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}$.

又∵ $\angle EAD=\angle CAB$,

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

∴ $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{3}{5}$.

∴ $\dfrac{2.4}{BC}=\dfrac{3}{5}$,则 $BC=4$ cm,即 BC 的长为4 cm.

3. 解:①当4是最短边长时,其余两边长为5,6.

②当4是最长边长时,其余两边长为 $\dfrac{8}{3}$, $\dfrac{10}{3}$.

③当4既不是最长边长也不是最短边长时,其余两边长为 $\dfrac{16}{5}$, $\dfrac{24}{5}$.

所以所画的三角形不唯一.

4. 解:相似. 因为小三角形的三边长分别是原三角形三边长的一半,即两个三角形的三边对应成比例,所以小三角形与原三角形相似.

练习(教材第84页)

1. 解:$\triangle BDE\backsim\triangle CDF$, $\triangle AEC\backsim\triangle AFB$.

2. 证明:(1)∵ $\angle ACB=90°$, CD 是边 AB 上的高,

∴ $\angle A+\angle B=90°$, $\angle DCB+\angle B=90°$, $\angle A+\angle ACD=90°$.

∴ $\angle A=\angle DCB$, $\angle ACD=\angle B$.

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

∴ $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$,即 $CD^2=AD\cdot BD$.

(2)由(1)可知 $\angle A=\angle DCB$,又∵ $\angle B=\angle B$,

∴ $\triangle ACB\backsim\triangle CDB$.

∴ $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AB}{BC}$,即 $BC^2=AB\cdot BD$.

由(1)可知 $\angle ACD=\angle B$,又∵ $\angle A=\angle A$,

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

∴ $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$,即 $AC^2=AB\cdot AD$.

3. 解:(1)相似. 因为在 Rt$\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{10^2-8^2}=6$(cm),所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{2}{3}$.

所以 Rt$\triangle ABC\backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.

(2)相似. 因为在 Rt$\triangle A'B'C'$ 中, $A'B'=\sqrt{12^2+9^2}=15$(cm). 所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{1}{3}$.

所以 Rt$\triangle ABC\backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.

4. 解:能. 因为由第2(2)题可得 $BC^2+AC^2=AB\cdot BD+AB\cdot AD=AB\cdot(BD+AD)=AB\cdot AB=AB^2$,即勾股定理成立.

习题22.2

1. (1)× (2)√ 点拨:(1)中相等的角不一定是夹角,也可能是对角,所以不正确.

(2)中由三角形的内角和定理可得 $\angle C=60°$,满足三角形中有两个角对应相等,所以这两个三角形相似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解: $\triangle CBE$, $\triangle BDC$, $\triangle BOE$, $\triangle COD$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

3. 解: (1) $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. 因为易知 $\angle A = \angle A' = 25°$, $\angle B = \angle B' = 65°$, 所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(2) $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. 因为 $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{3}$ 且 $\angle C = \angle C' = 90°$, 所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(3) $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. 因为 $A'B' = 1.5\ \text{m} = 150\ \text{cm}$, $B'C' = 1.8\ \text{m} = 180\ \text{cm}$, $A'C' = 2.25\ \text{m} = 225\ \text{cm}$,

所以 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{15}$.

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

4. 解: $\because BB' // CC'$,

$\therefore \triangle ABB' \backsim \triangle ACC'$.

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}$, 即 $\frac{38.5}{10\,000} = \frac{0.1}{CC'}$, 解得 $CC' = \frac{2\,000}{77}$ cm.

即弹着点偏差 CC' 的长为 $\frac{2\,000}{77}$ cm.

5. 证明: $\because AC^2 = AD \cdot AB$,

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADC \backsim \triangle ACB$,

$\therefore \angle ADC = \angle ACB$.

6. 证明: $\because AD$ 是直角三角形 ABC 斜边上的中线,

$\therefore AD = BD = CD$.

$\therefore \angle DBA = \angle DAB$, $\angle DAC = \angle C$.

又 $\because \angle BAC = \angle EAD = 90°$,

$\therefore \angle EAB = \angle DAC$.

$\therefore \angle EAB = \angle C$.

$\because \angle AEB = \angle CEA$,

$\therefore \triangle BAE \backsim \triangle ACE$.

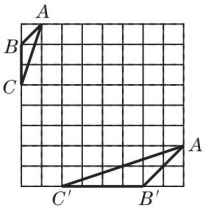
7. 解: 设 $\triangle A'B'C'$ 的第三边长是 x, 如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, 那么 (1) 当 x 是 $\triangle A'B'C'$ 的最长边长时, $\frac{\sqrt{2}}{1} \neq \frac{2}{\sqrt{5}}$, 所以此种情况不存在.

(2) 当 x 是 $\triangle A'B'C'$ 的最短边长时, $\frac{2}{1} \neq \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$, 所以此种情况不存在.

(3) 当 x 不是最长边长也不是最短边长时, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$, 解得 $x = \sqrt{2}$.

综上知, $\triangle A'B'C'$ 的第三边长应是 $\sqrt{2}$.

8. 解: 所画的两个相似三角形如图所示.



(第 8 题)

证明: 设方格纸中每个小方格的边长为 1, 则 $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{10}$, $A'B' = 2\sqrt{2}$, $B'C' = 4$, $A'C' = 2\sqrt{10}$. 所以 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$,

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

(答案不唯一)

9. 解: $\because AC = AE + EC = 7.5$, $AD = AB - DB = 5$,

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{5}{7.5} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{AE}{AB}$.

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$.

10. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD = \angle D = 90°$.

又 $\because BF \perp AE$, 所以 $\angle BFA = 90° = \angle D$,

$\therefore \angle BAF + \angle DAE = 90°$.

又 $\because \angle DAE + \angle AED = 90°$,

$\therefore \angle BAF = \angle AED$.

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle EAD$.

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{DE}$, 即 $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{DE}$.

11. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle D = 90°$, $AD // BC$.

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$, 即 $\angle OCM = \angle DAC$.

又 $\because MN$ 垂直平分 AC,

$\therefore \angle MOC = 90°$.

$\therefore \angle MOC = \angle D = 90°$.

$\therefore \triangle OMC \backsim \triangle DCA$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.3 相似三角形的性质

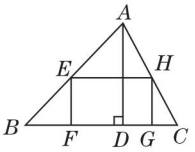
练习(教材第90页)

1. 解: 根据题意得$\frac{AE}{A'E'}=\frac{BC}{B'C'}$,即$\frac{2.4}{A'E'}=\frac{3.6}{6}$,

解得$A'E'=4$ cm,

即$\triangle A'B'C'$中对应中线$A'E'$的长为4 cm.

2. 解: 如图所示,矩形$EFGH$是$\triangle ABC$的内接矩形,AD是边BC上的高.



(第2题)

设矩形$EFGH$的边FG的长是x mm,EF的长是y mm.

$\because$ 四边形$EFGH$是矩形,

$\therefore EF\parallel AD\parallel GH$.

$\therefore \frac{GH}{AD}=\frac{CG}{CD},\frac{EF}{AD}=\frac{BF}{BD}$.

而$EF=GH$,$\therefore \frac{CG}{CD}=\frac{BF}{BD}$,

则$\frac{CG+BF}{CD+BD}=\frac{CG}{CD}=\frac{EF}{AD}$,即$\frac{BC-FG}{BC}=\frac{EF}{AD}$,故有$\frac{120-x}{120}=\frac{y}{80}$,

$\therefore y=80-\frac{2}{3}x$.

$\therefore$ 矩形$EFGH$的面积$S=x\cdot y=x\cdot\left(80-\frac{2}{3}x\right)=80x-\frac{2}{3}x^2=-\frac{2}{3}(x-60)^2+2\ 400$ $(0<x<120)$.

$\therefore$ 当$x=60$时,S取得最大值2 400,此时$y=40$,

$\therefore$ 它的边长分别是60 mm,40 mm.

3. 解: $\because DE\parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2$,

即$\frac{S_{\triangle ADE}}{20}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$.

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{16}{5}$.

4. 解: 周长比是$\sqrt{3}:2$.

习题22.3

1. 解: $\because$ 另一个三角形与已知三边之比为2∶5∶4的三角形相似,

$\therefore$ 另一个三角形的三边之比也为2∶5∶4.

又它的周长为55 cm,

$\therefore$ 它的三边长分别为$55\times\frac{2}{2+5+4}=10$(cm),

$55\times\frac{5}{2+5+4}=25$(cm),$55\times\frac{4}{2+5+4}=20$(cm).

2. 解: $\because \angle A=\angle A'$,$AB:A'B'=AC:A'C'$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

$\therefore BC:B'C'=AB:A'B'=4:5$.

又$BC+B'C'=45$,$\therefore B'C'=25$.

3. 解: $\because \angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

又$\because BC=7$ cm,$A'C'=8$ cm,

$\therefore B'C'=14$ cm,$AC=4$ cm.

4. 解: (1)设小三角形的周长为x cm,则大三角形的周长为$(x+45)$ cm.

$\because$ 两个三角形相似,

$\therefore$ 可得$\frac{x}{x+45}=\frac{12}{32}$,解得$x=27$,$x+45=72$.

$\therefore$ 这两个三角形的周长分别为72 cm和27 cm.

(2)设小三角形的面积为S cm^2,则大三角形的面积为$(S+550)$ cm^2,

$\therefore$ 可得$\frac{S}{S+550}=\left(\frac{12}{32}\right)^2$,解得$S=90$,$S+550=640$.

$\therefore$ 这两个三角形的面积分别为90 cm^{2}和640 cm^2.

5. 解: $\because AB\parallel CD$,

$\therefore \triangle AOB\backsim\triangle COD$.

$\therefore \left(\frac{AO}{CO}\right)^2=\frac{5}{20}$.

$\therefore \frac{AO}{CO}=\frac{1}{2}$.

又$\because \triangle AOD$中AO边上的高和$\triangle COD$中OC边上的高相同,

$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AO}{CO}=\frac{1}{2}$,从而求得$S_{\triangle AOD}=10$ cm^2.

$\therefore S_{\triangle ACD}=10+20=30$(cm^2).

$\therefore \frac{AO}{CO}=\frac{1}{2}$,$S_{\triangle ACD}=30$ cm^2.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. **解:** $\because DE \parallel BC$,

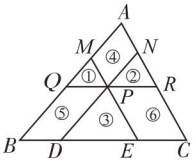
$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{\triangle ADE \text{ 的周长}}{\triangle ABC \text{ 的周长}} = \dfrac{AD}{AB}$.

又$\because \dfrac{AD}{DB} = 2$, $\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AD}{AD + DB} = \dfrac{2}{3}$.

$\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长比为 2∶3.

7. **解:** 如图所示.



(第 7 题)

由题意,易得 $\triangle MQP \backsim \triangle NPR \backsim \triangle PDE$.

$\because S_{①} = 4, S_{②} = 9, S_{③} = 16$,

$\therefore QP : PR : DE = 2 : 3 : 4$.

$\because QR \parallel BC, DN \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $QPDB$ 为平行四边形,

$\therefore QP = BD$.

$\therefore BD : DE = 2 : 4 = 1 : 2$.

$\therefore S_{⑤} : S_{③} = 1 : 1$, $\therefore S_{⑤} = 16$.

同理可得 $S_{④} = 12, S_{⑥} = 24$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = 4 + 9 + 16 + 12 + 16 + 24 = 81$.

8. **解:** (1) 在 $\square ABCD$ 中, $\because AB \parallel CD$,

$\therefore AE \parallel CD$.

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle CDF$.

$\because AE : EB = 1 : 2$, $\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{3}$, 即 $\dfrac{AE}{CD} = \dfrac{1}{3}$.

$\therefore \triangle AEF$ 与 $\triangle CDF$ 的周长比为 1∶3.

(2) 由 (1) 知 $\triangle AEF \backsim \triangle CDF$,

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CDF}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, 即 $\dfrac{6}{S_{\triangle CDF}} = \dfrac{1}{9}$.

$\therefore S_{\triangle CDF} = 54$.

9. (1) **证明:** $\because \angle ABC = 2\angle C$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle ABD = \angle C$.

又$\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ACB$.

(2) **解:** 由 (1) 知 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$, 且 $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{4}{7}$,

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ACB$ 的周长比是 4∶7, 面积比是 16∶49.

10. **解:** 设电线杆的高为 x m.

由题意可得 $\dfrac{0.12}{x} = \dfrac{0.6}{30}$, 解得 $x = 6$.

答: 电线杆的高为 6 m.

11. **解:** 设这棵树的高度是 x m.

根据题意,得 $\dfrac{x - 1.2}{2.7} = \dfrac{1}{0.9}$, 解得 $x = 4.2$.

答: 这棵树的高度是 4.2 m.

点拨: 因为树影有一部分在墙上,所以用树高减去 1.2 m 后的高度对应的影长是 2.7 m,根据同一时刻,物高与影长的比是定值来求解.

12. **证明:** $\because AC = BC$, $\therefore \angle CAB = \angle CBA$.

$\because \angle PAB = \angle PBC$, $\therefore \angle CAP = \angle ABP$.

又$\because \angle PAB = \angle PCA$, $\therefore \triangle ACP \backsim \triangle BAP$,

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCA}} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

又$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\therefore \dfrac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCA}} = 2$, 即 $S_{\triangle PAB} = 2S_{\triangle PCA}$.

13. **解:** (1) $\triangle BCP \backsim \triangle BER$, $\triangle PCQ \backsim \triangle PAB$, $\triangle PCQ \backsim \triangle RDQ$, $\triangle PAB \backsim \triangle RDQ$.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $ACED$ 都是平行四边形, $\therefore BC = AD = CE$, $AC \parallel DE$.

$\therefore PB = PR$, $\dfrac{PC}{RE} = \dfrac{1}{2}$.

$\because PC \parallel DR$,

$\therefore \triangle PCQ \backsim \triangle RDQ$.

又$\because$ 点 R 是 DE 的中点,

$\therefore DR = RE$, $\dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{PC}{DR} = \dfrac{PC}{RE} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore QR = 2PQ$.

$\because BP = PR = PQ + QR = 3PQ$,

$\therefore BP : PQ : QR = 3 : 1 : 2$.

14. **解:** 由原矩形和小矩形相似得出 $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{\frac{1}{2}AB}$,

整理得 $AB^2 = 2AD^2$, 所以 $AB = \sqrt{2}AD$.

即矩形 $ABCD$ 的长边是短边的 $\sqrt{2}$ 倍.

15. **解:** $\because DE \parallel AB$,

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle CAB$, $\angle BDE = \angle ABD$.

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{CE}{CB}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD=\angle EBD.\ \therefore \angle BDE=\angle EBD.$

$\therefore BE=DE.$

设 $BE=x$,则由 $AB=9$,$BC=6$ 知 $\frac{x}{9}=\frac{6-x}{6}$,

解得 $x=3.6$.

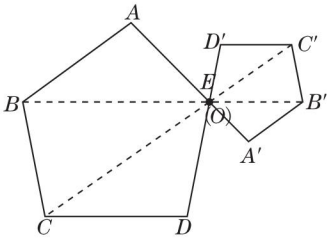
$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{3.6}{9}=\frac{2}{5}.\ \therefore \frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{4}{25}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DCE}}{S_{四边形ABED}}=\frac{4}{21}$.

22.4 图形的位似变换

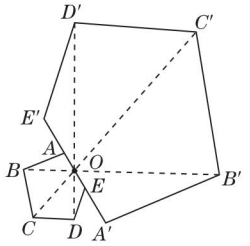
练习(教材第 97 页)

解:(1)如图,将位似中心 O 取在已知五边形 $ABCDE$ 的顶点 E 处,连接 BO,CO,分别延长 AO,BO,CO,DO 到 A',B',C',D',使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$,顺次连接 A',B',C',D',E,则五边形 $A'B'C'D'E$ 就是要求作的五边形.



[练习(1)题]

(2)如图,位似中心 O 取在已知五边形 $ABCDE$ 的边 AE 上,连接 BO,CO,DO,分别延长 AO,BO,CO,DO,EO 到 A',B',C',D',E',使 $\frac{A'O}{AO}=\frac{B'O}{BO}=\frac{C'O}{CO}=\frac{D'O}{DO}=\frac{E'O}{EO}=\frac{3}{1}$. 顺次连接 A',B',C',D',E',则五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是要求作的五边形.

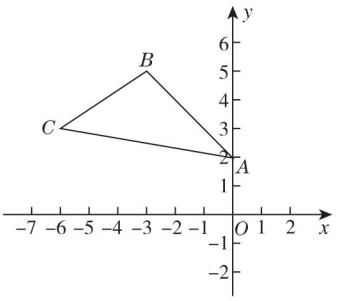


[练习(2)题]

(作法不唯一)

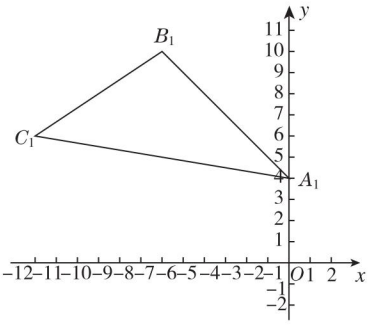
练习(教材第 98 页)

1. 解:$\triangle ABC$ 如图所示.



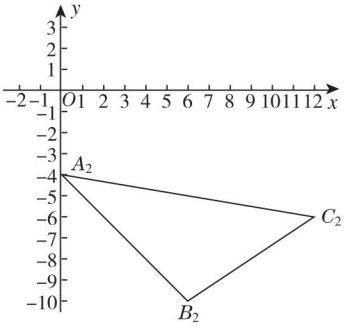
(第 1 题)

(1)变换后的 $\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示.



[第 1(1)题]

(2)变换后的 $\triangle A_2B_2C_2$ 如图所示.



[第 1(2)题]

两个变换后的三角形均与原三角形相似,因为它们的对应边成比例.

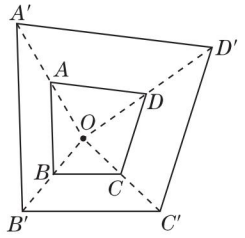
2. 解:(1)四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2)四边形 $A'B'C'D'$ 是平行四边形,它与四边形 $ABCD$ 相似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 22.4

1. 解:已知四边形 $ABCD$ 如图所示.



(第 1 题)

(1)在四边形 $ABCD$ 内任取一点 O.

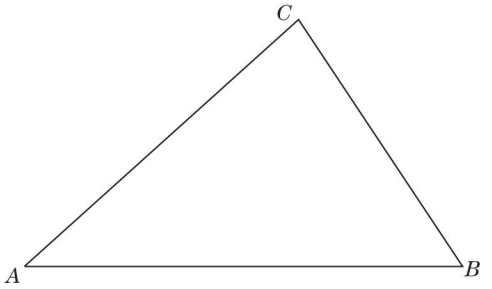
(2)连接 OA,OB,OC,OD.

(3)分别延长 OA,OB,OC,OD 至点 A',B',C',D',使$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=2$.

(4)连接 $A'B'$,$B'C'$,$C'D'$,$D'A'$,所得四边形 $A'B'C'D'$即为所求.

2. 解:$\triangle ABC$ 如图所示.

量出 BC 的长约为 3.5 cm,所以 B,C 两点间的实际距离约为 $3.5\times1\,000=3\,500$(cm),3 500 cm = 35 m.

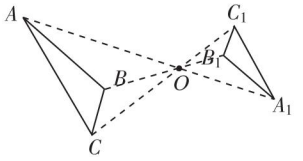


(第 2 题)

3. 解:$\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 是位似图形.

位似中心是 $\triangle ABC$ 的重心.

4. 解:如图,O 点为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位似中心.



(第 4 题)

22.5 综合与实践 测量与误差(无)

A 组复习题

1. (1)$\frac{4}{3}$ (2)4;$\frac{4}{3}$

2. 解:$\because AB\parallel CD$,$\therefore\triangle AOB\backsim\triangle DOC$.

$\therefore\frac{OD}{OA}=\frac{OC}{OB}$,即$\frac{OD}{4}=\frac{6}{9-6}$,解得 $OD=8$.

3. 解:$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$MN\perp AB$ 于点 M,

$\therefore\angle AMN=\angle C=90°$.

又$\because\angle A=\angle A$,$\therefore$ Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle ANM$.

$\therefore\frac{AB}{AN}=\frac{AC}{AM}$.

$\therefore AN=\frac{AB\cdot AM}{AC}=\frac{AB\times8}{\frac{4}{5}AB}=8\times\frac{5}{4}=10$(cm).

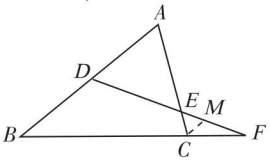
4. 解:(1)由 CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高可以证得 Rt$\triangle ACD\backsim$Rt$\triangle CBD$,$\therefore\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$.

$\therefore BD=\frac{CD^2}{AD}=\frac{6\times6}{9}=4$(cm).

(2)由 CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高可以证得 Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle CBD$,$\therefore\frac{AB}{CB}=\frac{BC}{BD}$.

$\therefore BD=\frac{BC\cdot BC}{AB}=\frac{15\times15}{25}=9$(cm).

5. 证明:如图,过点 C 作 $CM\parallel AB$ 交 DF 于点 M,则$\triangle CFM\backsim\triangle BFD$,$\triangle CME\backsim\triangle ADE$.



(第 5 题)

$\therefore\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CM}$,$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CM}$.

又$\because D$ 为 AB 的中点,$\therefore AD=BD$.

$\therefore\frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$.

6. 解:$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

$\because A'B'\parallel AB$,$\therefore\triangle DA'B'\backsim\triangle DAB$.

$\therefore\angle DB'A'=\angle DBA$,$\frac{A'B'}{AB}=\frac{DB'}{DB}$.

$\because B'C'\parallel BC$,$\therefore\triangle DB'C'\backsim\triangle DBC$.

$\therefore\angle DB'C'=\angle DBC$,$\frac{B'C'}{BC}=\frac{DB'}{DB}$.

$\therefore\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$,$\angle DB'A'+\angle DB'C'=\angle DBA+\angle DBC$,即$\angle A'B'C'=\angle ABC$.

$\therefore\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 证明：∵ $DE // BC$，∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

又∵ $AD^2=AF\cdot AB$，∴ $\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AD}$.

∴ $\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AE}$.

又∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ACD$.

8. 证明：∵ BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高，

∴ $\angle AEB=\angle AFC=90°$.

又∵ $\angle A=\angle A$，

∴ $\triangle AEB\backsim\triangle AFC$，则有 $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$，即 $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

又∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

9. 解：分为两种情况，第一种：当 $\triangle ABP\backsim\triangle PCE$ 时，则有 $\frac{AB}{PC}=\frac{BP}{CE}$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AB=BC=CD$.

∴ $CE=\frac{1}{4}CD=\frac{1}{4}BC$，则有 $\frac{BC}{PC}=\frac{BP}{\frac{1}{4}BC}$.

而 $BC=PC+BP$，∴ $PC=BP$.

第二种：当 $\triangle ABP\backsim\triangle ECP$ 时，则有 $\frac{AB}{CE}=\frac{BP}{CP}$.

又∵ $CE=\frac{1}{4}AB$，∴ $\frac{BP}{CP}=4$，即 $BP=4CP$.

综上可知，当 $PC=BP$ 或 $BP=4CP$ 时，$\triangle ABP$ 与 $\triangle PCE$ 相似.

10. 解：$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle CBD}$ 与 $AO:OC$ 相等.

理由：过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，则 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot BE}{\frac{1}{2}OC\cdot BE}=\frac{OA}{OC}$，同理可得 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{OA}{OC}$，

∴ $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{OA}{OC}$，

∴ $\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}}=\frac{OA}{OC}$，即 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{OA}{OC}$.

11. 解：由题意知 $CD // BE$，∴ $\triangle ACD\backsim\triangle ABE$.

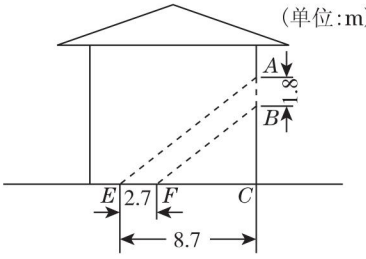
∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}$，即 $\frac{0.48}{1.2}=\frac{AD}{1}$.

∴ $AD=\frac{0.48}{1.2}=0.4(\text{m})$.

∴ $DE=AE-AD=1-0.4=0.6(\text{m})$.

答：桶内油面高度 DE 的值为 0.6 m.

12. 解：如图，由太阳光线可以看成平行线可知 $AE // BF$，∴ $\triangle ACE\backsim\triangle BCF$.



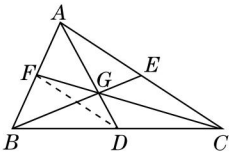
(第 12 题)

∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CF}$，即 $\frac{AB+BC}{BC}=\frac{CE}{CE-EF}$.

∴ $\frac{1.8+BC}{BC}=\frac{8.7}{8.7-2.7}$，解得 $BC=4$ m.

答：窗口底边离地面的高度 BC 的值为 4 m.

13. 证明：如图，AD，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，交点为 G，连接 FD.



(第 13 题)

∵ F，D 分别是 AB，BC 的中点，

∴ $FD // AC$，且 $FD=\frac{1}{2}AC$.

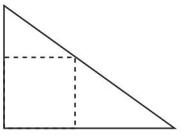
∴ $\triangle FGD\backsim\triangle CGA$.

∴ $AG:GD=AC:DF=2$.

同理可证 $BG:GE=CG:GF=2$.

B 组复习题

1. 解：如图，沿图中虚线裁剪，裁剪出的正方形最大.



(第 1 题)

2. 解：∵ $DC // AB$，

∴ $\triangle AOB\backsim\triangle COD$.

∴ $\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}=\frac{3}{2}$.

∴ $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}}=\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle COD}}=\frac{3}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $S_{\triangle COD}=2k$,则 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}=3k$,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{3}{2}\times 3k=\frac{9}{2}k$.

$\therefore S_{\triangle AOD}:S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COD}=3k:\frac{9}{2}k:3k:2k$.

即 $S_{\triangle AOD}:S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COD}$ 的值为 6:9:6:4.

3. 解:由 $\triangle ABC$ 是等边三角形得 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$. $\because DE\perp BC, EF\perp AC, FD\perp AB$,

$\therefore \angle AFD=\angle BDE=\angle CEF=90°-60°=30°$,

$\therefore \angle FDE=\angle DEF=\angle EFD=60°$.

$\therefore \triangle DEF$ 也是等边三角形.

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle ABC$ 且 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle BED\cong\mathrm{Rt}\triangle CFE$.

$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2=\left(\frac{DE}{BD+BE}\right)^2$,

即 $\frac{S_{\triangle DEF}}{72}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2+1}\right)^2$.

$\therefore S_{\triangle DEF}=72\times\frac{3}{9}=24(\mathrm{cm}^2)$.

4. 解:(1)4 个.

(2)过 P 点作 AC 的垂线,若垂线过 B 点,则有 4 个;若垂线不过 B 点,则有 3 个.

5. 解:$DG=123\times 5\div 10=61.5$(丈),$FH=127\times 5\div 10=63.5$(丈),$DF=5\ 000$ 尺 $=500$ 丈,$DH=DF+FH=500+63.5=563.5$(丈).

由题意知:$AB\perp BH, CD\perp BH, EF\perp BH$,

$\therefore AB\parallel CD\parallel EF$.

$\therefore \triangle CDG\backsim\triangle ABG, \triangle EFH\backsim\triangle ABH$.

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DG}{BG}, \frac{EF}{AB}=\frac{FH}{BH}$.

又$\because CD=EF=3$ 丈,

$\therefore \frac{DG}{BG}=\frac{FH}{BH}$,即 $\frac{61.5}{BD+61.5}=\frac{63.5}{BD+563.5}$,

解得 $BD=15\ 375$ 丈.

$\therefore BG=BD+DG=15\ 375+61.5=15\ 436.5$(丈).

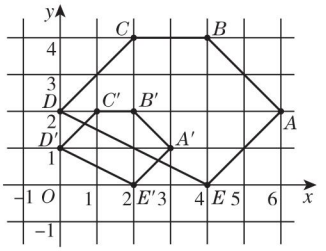
又$\because \frac{CD}{AB}=\frac{DG}{BG}$,

$\therefore AB=\frac{CD\cdot BG}{DG}=\frac{3\times 15\ 436.5}{61.5}=753$(丈).

答:山峰高度 AB 为 753 丈,山峰与标杆 CD 的水平距离 BD 为 15 375 丈.

6. 解:(1)将 $A(6,2), B(4,4), C(2,4), D(0,2), E(4,0)$ 各点的横、纵坐标都除以 2,得到五个新的点. 可表示为:$A'(3,1), B'(2,2), C'(1,2), D'(0,1), E'(2,0)$.

将以上 10 个点描点、画图如图所示.



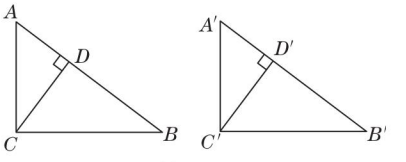
(第 6 题)

由图可知 $B'C'\parallel\frac{1}{2}BC$, $A'B'\parallel\frac{1}{2}AB$, $C'D'\parallel\frac{1}{2}CD$, $D'E'\parallel\frac{1}{2}DE$, $E'A'\parallel\frac{1}{2}EA$, $\angle BAE=\angle B'A'E'$, $\angle ABC=\angle A'B'C'$, $\angle BCD=\angle B'C'D'$, $\angle CDE=\angle C'D'E'$, $\angle DEA=\angle D'E'A'$,且各对应顶点的连线交于点 O,所以五边形 $A'B'C'D'E'$ 与五边形 $ABCDE$ 是以 O 为位似中心的位似图形.

(2)新的五个顶点分别表示为 A'', B'', C'', D'', E'',则它们的坐标分别为(12,4),(8,8),(4,8),(0,4),(8,0).

与(1)同理可有如下结论:$A''B''\parallel 2AB$, $B''C''\parallel 2BC$, $C''D''\parallel 2CD$, $D''E''\parallel 2DE$, $E''A''\parallel 2EA$, $\angle A''=\angle A$, $\angle B''=\angle B$, $\angle C''=\angle C$, $\angle D''=\angle D$, $\angle E''=\angle E$,且各对应顶点的连线交于点 O,所以新五边形 $A''B''C''D''E''$ 与五边形 $ABCDE$ 是以 O 为位似中心的位似图形.

7. 证明:如图所示.



(第 7 题)

$\because CD\perp AB, C'D'\perp A'B'$,且 $\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle A'C'D'$.

$\therefore \angle A=\angle A'$.

又$\because \angle ACB=\angle A'C'B'$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 证明: $\because AB \parallel CD, l \parallel AB, \therefore CD \parallel l.$

$\therefore \frac{CP}{CA}=\frac{DR}{DA}, \frac{CQ}{CB}=\frac{DS}{DB}.$

又$\because AB \parallel l,$

$\therefore \triangle DRS \backsim \triangle DAB, \triangle CPQ \backsim \triangle CAB.$

$\therefore \frac{DR}{DA}=\frac{DS}{DB}=\frac{RS}{AB}, \frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PQ}{AB}.$

$\therefore \frac{PQ}{AB}=\frac{RS}{AB}, \therefore PQ=RS.$

9. 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore DC \parallel AB,$

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle AEB, \therefore \frac{DF}{AB}=\frac{DE}{AE}.$

又$\because DE=nAD, \therefore \frac{DE}{AE}=\frac{n}{n+1}.$

即 $DF:AB=n:(n+1).$

$\because AB=DC, \therefore DF:DC=n:(n+1).$

$\because FC=DC-DF, \therefore FC:DC=1:(n+1).$

10. 证明: 设正方形的边长为 1, 则 $DE=1, DH=2.$

由勾股定理得 $BD=\sqrt{2}.$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDH$ 中,

$\because \frac{DE}{BD}=\frac{BD}{DH}$ 且 $\angle BDE=\angle HDB,$

$\therefore \triangle BDE \backsim \triangle HDB,$

$\therefore \angle 1=\angle DBH.$

由 $AH \parallel BG$, 可得 $\angle 2=\angle GBH,$

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle DBH+\angle GBH=\angle DBC.$

又$\because \angle DBC=45°,$

$\therefore \angle 1+\angle 2=45°.$

11. (1) **证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore BE=EC.$

又$\because EF \perp BC,$

$\therefore BF=FC,$ 即点 F 是线段 BC 的 2 等份点.

(2) **证明:** $\because EF \perp BC, DC \perp BC,$

$\therefore EF \parallel DC.$

$\therefore \triangle GEF \backsim \triangle GCD.$

$\therefore \frac{EF}{DC}=\frac{FG}{GD}=\frac{1}{2}.$

又$\because GH \perp BC,$

$\therefore GH \parallel DC.$

$\therefore \frac{FG}{GD}=\frac{FH}{HC}=\frac{1}{2}.$

$\therefore \frac{HC}{BC}=\frac{1}{3},$ 即点 H 是线段 BC 的 3 等份点.

(3) **解:** 能. 作图略.

C 组复习题

1. 略. **2.** 略.

第 23 章 解直角三角形

23.1 锐角的三角函数

练习(教材第 114 页)

1. 解: 图 23-2 中坡面 AB 的坡度 $i=\frac{BC}{AC}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},$

坡面 A_1B_1 的坡度 $i_1=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}.$

图 23-3 中坡面 AB 的坡度 $i=\frac{BC}{AC}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},$

坡面 A_1B_1 的坡度 $i_1=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}.$

2. 解: $\because \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}, AC=12,$

$\therefore BC=AC \cdot \tan A=12 \times \frac{3}{4}=9.$

3. 解: 根据勾股定理, 得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{200^2-12^2} \approx 199.640(\text{m}).$

则引桥的坡度 $i=\frac{BC}{AC} \approx \frac{12}{199.640} \approx 0.06.$

练习(教材第 116 页)

1. 解: 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8,$

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}, \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}, \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}, \sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}, \cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}, \tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}.$

点拨: 从结果中易知, 若 $\angle A+\angle B=90°$, 则有 $\sin A=\cos B, \cos A=\sin B, \tan A \cdot \tan B=1.$

2. 解: 根据勾股定理, 得 $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}.$

由题易知 $\angle ACD=\angle B, \angle BCD=\angle A.$

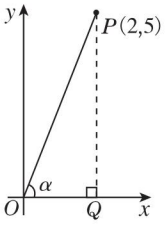
所以 $\sin \angle ACD=\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \angle BCD=\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:(1)因为 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$,所以 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{5}$,$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{21}}{5}$,$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$,$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{21}}{5}$,$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{5}$,$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

(2)因为 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{9^2-5^2}=2\sqrt{14}$,所以 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$,$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{9}$,$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{14}}{5}$,$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{9}$,$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$,$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{5\sqrt{14}}{28}$.

4. 解:如图,过点 P 向 x 轴作垂线,垂足为 Q.



(第4题)

在Rt△PQO中,易知 $OQ=2$,$QP=5$,

所以 $OP=\sqrt{29}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{QP}{OP}=\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$,$\cos\alpha=\frac{OQ}{OP}=\frac{2}{\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$,$\tan\alpha=\frac{QP}{OQ}=\frac{5}{2}$.

5. 解:设 AC 与 BD 交于点 O. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,

所以 $\angle AOB=90°$,$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8=4(\text{cm})$,

$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times6=3(\text{cm})$.

所以 $\tan\angle BAC=\frac{BO}{AO}=\frac{3}{4}$.

6. 解:因为 $\sin A=\frac{3}{5}$,且可得 $\sin A=\frac{BC}{AB}$,

所以 $\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$.

设 $BC=3k$,$AB=5k$,则 $AC=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$,

所以 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$.

练习(教材第118页)

1.

三角函数值 \ α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. 解:(1)原式 $=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

(2)原式 $=2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+4\times1=6$.

(3)原式 $=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}$.

(4)原式 $=\frac{2\times\frac{1}{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(5)原式 $=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{3}-2\times1}=\frac{1}{2}$.

练习(教材第119页)

1. 解:(1)$\cos(90°-\angle A)=\sin A$.

(2)$\sin(90°-\angle B)=\cos B$.

2. 解:(1)因为 $\angle B=90°-\angle A$,

所以 $\angle A+\angle B=90°$.

所以 $\sin B=\cos A=\frac{1}{3}$.

(2)因为 $22°+68°=90°$,

所以 $\sin 68°=\cos 22°=0.927\,2$,$\cos 68°=\sin 22°=0.374\,6$.

练习(教材第122页)

1.

α	sin α	cos α	tan α
0°	0	1	0
90°	1	0	不存在

2. 解:(1)$\sin 10°=0.173\,6$.

(2)$\cos 50°18'=0.638\,8$.

(3)$\tan 13°12'=0.234\,5$.

(4)$\sin 14°36'=0.252\,1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：(1)因为 $\sin A=0.7083$，所以$\angle A\approx45°6'$；

因为 $\sin B=0.5688$，所以$\angle B\approx34°40'$.

(2)因为 $\cos A=0.8290$，所以$\angle A\approx34°0'$；

因为 $\cos B=0.9931$，所以$\angle B\approx6°44'$.

(3)因为 $\tan A=0.9131$，所以$\angle A\approx42°24'$；

因为 $\tan B=31.80$，所以$\angle B\approx88°12'$.

4. 解：(1)$\sin 46°>\sin 44°$；

(2)$\cos 20°>\cos 50°$；

(3)$\tan 33°15'>\tan 33°14'$.

5. (1)< (2)> (3)<

习题 23.1

1. 解：(1)原式 $=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$.

(2)原式 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=2$.

(3)原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{24}$.

(4)原式 $=\sqrt{(\tan 30°-1)^2}+|\cos 30°-1|=1-\frac{\sqrt{3}}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12-5\sqrt{3}}{6}$.

2. 解：(1)$\sin 25°=0.4226$，$\sin 18°24'=0.3156$.

(2)$\cos 33°19'=0.8356$，$\cos 53°29'=0.5951$.

(3)$\tan 38°24'=0.7926$，$\tan 42°21'=0.9115$.

3. 解：(1)$\angle A\approx19°30'$.

(2)$\angle A\approx45°24'$.

(3)$\angle A\approx38°18'$.

4. 解：(1)不等于. 因为 $\sin 30°+\sin 45°\approx1.21$，而 $\sin 75°\approx0.97$，所以 $\sin 30°+\sin 45°$ 不等于 $\sin 75°$.

(2)不等于. 因为 $\cos 45°-\cos 15°\approx-0.26$，而 $\cos 30°\approx0.87$，所以 $\cos 45°-\cos 15°$ 不等于 $\cos 30°$.

(3)不等于. 因为 $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $2\sin 30°=1$，所以 $\sin 60°$ 不等于 $2\sin 30°$.

5. 解：(1)$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)=\cos 35°$，

所以 $90°-\alpha=35°$，即 $\alpha=55°$.

(2)$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)=\sin 40°$，

所以 $90°-\alpha=40°$，即 $\alpha=50°$.

6. 解：设 $BC=x$.

$\because\angle BDC=30°$，$\angle C=90°$，

$\therefore DB=2x$.

$\therefore CD=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$.

$\therefore AC=AD+CD=DB+CD=2x+\sqrt{3}x=(2+\sqrt{3})x$.

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2x^2+x^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})x$.

$\therefore\tan 15°=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{(2+\sqrt{3})x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

$\sin 15°=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})x}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

$\cos 15°=\frac{AC}{AB}=\frac{(2+\sqrt{3})x}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})x}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

23.2 解直角三角形及其应用

练习(教材第 125 页)

1. 解：(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=80°$，

$\therefore\angle A=90°-80°=10°$.

又$\because\tan B=\frac{b}{a}$，

$\therefore b=a\tan B=30\times\tan 80°=30\times5.6713\approx170$.

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}\approx\sqrt{30^2+170^2}\approx173$.

(2)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$c=8$，$b=3$，

由勾股定理得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$.

又$\because\sin B=\frac{b}{c}=\frac{3}{8}=0.375$，$\therefore\angle B\approx22°$.

$\therefore\angle A=90°-\angle B\approx90°-22°=68°$.

(3)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=40°$，

$\therefore\angle B=90°-\angle A=90°-40°=50°$.

又$\because\sin A=\frac{a}{c}$，$c=10$，

$\therefore a=c\sin A=10\times\sin 40°=10\times0.6428\approx6.4$.

$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}\approx\sqrt{10^2-6.4^2}\approx7.7$.

2. 解：(1)$\because\angle C=90°$，$\angle A=30°$，

$\therefore\angle B=60°$.

又$\because c=8$，$\therefore a=c\sin 30°=8\times\frac{1}{2}=4$.

$\therefore$ 由勾股定理，得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

(2)$\because\angle C=90°$，$a=35$，$c=35\sqrt{2}$，

$\therefore$ 由勾股定理，得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(35\sqrt{2})^2-35^2}=35$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \tan A=\frac{a}{b}=1.$

$\therefore \angle A=45°.$

$\therefore \angle B=45°.$

(3)$\because \angle C=90°,\angle A=36°,$

$\therefore \angle B=90°-36°=54°.$

$\because \sin A=\frac{a}{c},$

$\therefore c=\frac{a}{\sin A}=\frac{14}{\sin 36°}=\frac{14}{0.587\ 8}\approx 24.$

又$\because \tan B=\frac{b}{a},$

$\therefore b=a\tan B=14\times\tan 54°=14\times 1.\ 376\ 4\approx 19.$

(4)$\because \angle C=90°,$

$\therefore$ 根据勾股定理,得$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{30^2+15^2}=15\sqrt{5}.$

$\because \tan A=\frac{a}{b}=\frac{30}{15}=2,$

$\therefore \angle A\approx 63°26'.$

$\therefore \angle B=90°-\angle A\approx 90°-63°26'=26°34'.$

3. 解:过点A作$AE\perp CD$于点E,则$\angle AED=90°.$

在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中,$\angle D=43°,\angle AED=90°,$

$\therefore \sin D=\frac{AE}{AD}.$

$\therefore AE=AD\cdot\sin D=6\times\sin 43°=6\times 0.682\ 0=4.092.$

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{(AB+CD)\cdot AE}{2}\approx 24.55.$

练习(教材第126页)

1. 解:在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,易知$\angle C=18°,\angle B=90°,$

所以$\sin C=\frac{AB}{AC}.$

所以$AC=\frac{AB}{\sin C}=\frac{1\ 000}{\sin 18°}=\frac{1\ 000}{0.309\ 0}\approx 3\ 236(\mathrm{m}).$

答:飞机到着陆点的距离AC约是3 236 m.

2. 解:连接CE,假设A,C,E在一条直线上,

则有$\angle BED=\angle ABD-\angle D=140°-50°=90°.$

因为在$\mathrm{Rt}\triangle BED$中,$\angle BED=90°,\angle D=50°,$

所以$\cos D=\frac{DE}{BD}.$

所以$DE=BD\cdot\cos D=520\times\cos 50°\approx 334(\mathrm{m}).$

答:开挖点E离点D约334 m远,才能使点A,C,E正好在一条直线上.

练习(教材第128页)

1. 解:过点C作$CD\perp AB$交AB的延长线于点D,则$\angle CDA=90°.$

$\because \tan A=\frac{CD}{AD},\tan\angle CBD=\frac{CD}{BD},$

$\therefore AD=\frac{CD}{\tan A},BD=\frac{CD}{\tan\angle CBD}.$

$\therefore \frac{CD}{\tan A}-\frac{CD}{\tan\angle CBD}=AD-BD,$

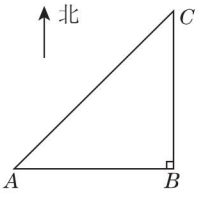
即$CD\left(\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan\angle CBD}\right)=AB.$

$\therefore CD=\frac{AB}{\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan\angle CBD}}=\frac{1\ 000}{\frac{1}{\tan 30°}-\frac{1}{\tan 45°}}=\frac{1\ 000}{\sqrt{3}-1}=500\sqrt{3}+500(\mathrm{m}).$

$\therefore BD=CD=(500\sqrt{3}+500)\mathrm{m}.$

答:直升机再向前飞行$(500\sqrt{3}+500)$ m,与地面控制点C的距离最近.

2. 解:(1)如图所示.



(第2题)

(2)在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,易知$\angle A=45°,\angle B=90°,$

$AC=60$ n mile,

所以$\cos A=\frac{AB}{AC}.$

所以$AB=AC\cdot\cos A=60\cdot\cos 45°=30\sqrt{2}$(n mile).

所以这船的航行速度为$\frac{30\sqrt{2}}{10-9}=30\sqrt{2}$(n mile/h).

练习(教材第129页)

1. 解:(1)因为$\tan\alpha=i=\frac{1}{3}$,所以$\alpha\approx 18°.$

答:斜坡AB的坡角α约为18°.

(2)分别过B,C作$BE\perp AD$于点$E,CF\perp AD$于点F,则$\angle AEB=\angle CFD=90°$,且四边形$BEFC$是矩形.

所以$\frac{BE}{AE}=i=\frac{1}{3},\frac{CF}{DF}=i'=\frac{2}{5}.$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以$AE=3BE=3\times23=69$(m),$DF=\frac{5}{2}CF=\frac{5}{2}\times23=57.5$(m).

所以$AD=AE+EF+DF=AE+BC+DF=69+6+57.5=132.5$(m).

在Rt△ABE中,$\angle AEB=90°$,

所以$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{69^2+23^2}\approx72.7$(m).

答:坝底宽AD为132.5 m,斜坡AB约为72.7 m.

2. 解:过点D作$DF\perp BC$于点F,易知$\angle DFC=90°$,$CF=BE$,且$EF=AD$.

在Rt△ABE中,$\angle B=55°$,$\angle AEB=90°$,

所以$\tan B=\frac{AE}{BE}$.

所以$BE=\frac{AE}{\tan B}=\frac{70}{\tan 55°}=\frac{70}{1.428\,1}\approx49.0$(mm).

所以$BC=BE+EF+CF=2BE+AD\approx49.0\times2+180=278$(mm).

答:它的里口宽BC约为278 mm.

练习(教材第130页)

解:设所求的夹角为α,则有$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

又α为锐角,所以$\alpha=60°$.

习题23.2

1. 解:设两峰间的水平距离为x m.

$1\,864-1\,810=54$(m).

$\therefore\tan1°29'=\frac{54}{x}$,解得$x\approx2\,085$.

答:两峰间的水平距离约为2 085 m.

2. 解:由题意,得$AC=43.74-2.63=41.11$(m),$\angle ABC=\alpha=8°14'$.

在Rt△ABC中,$\tan8°14'=\frac{AC}{BC}$,则$BC=\frac{AC}{\tan8°14'}=\frac{41.11}{0.144\,7}\approx284$(m).

答:观察所A到船只B的水平距离约为284 m.

3. 解:设山高BE为x m,则在Rt△DBE中,$\tan30°=\frac{BE}{DE}$,所以$DE=\frac{BE}{\tan30°}=\sqrt{3}x$(m).

因为$\angle AEC=90°$,$\angle C=45°$,所以$AE=CE$.

而$AE=(250+x)$m,$CE=(50+\sqrt{3}x)$m,

所以$250+x=50+\sqrt{3}x$,解得$x\approx273$.

答:山高BE约为273 m.

4. 解:设光线交CD于E,连接BD.

由题意知$\angle DBE=30°$,$BD=AC=24$ m.

在Rt△BDE中,$\tan30°=\frac{DE}{BD}$,即$DE=BD\cdot\tan30°=24\times\frac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}\approx13.86$(m).

故$CE=CD-DE\approx30-13.86\approx16.1$(m).

答:甲楼的影子在乙楼上高约为16.1 m.

5. 解:根据题意得$\frac{DE}{AE}=\frac{1.2}{1}$.

因为$DE=CF=4.5$ m,所以$AE=3.75$ m.

在Rt△BCF中,因为$\angle B=30°$,所以$BC=2CF=9$ m,$BF=\sqrt{3}CF=\sqrt{3}\times4.5\approx7.8$(m).

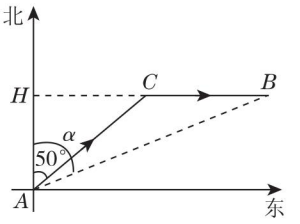
所以$AB=AE+EF+BF\approx3.75+2.5+7.8\approx14$(m).

答:它的坝底宽AB约为14 m,迎水坡BC为9 m.

6. 解:由题意得,重叠部分为菱形,且高为1 dm,底边长为$\frac{1}{\sin\alpha}$ dm.

所以重叠部分的面积为$\frac{1}{\sin\alpha}\times1=\frac{1}{\sin\alpha}$(dm^2).

7. 解:(1)如图,延长BC交向北的方向线于点H,由题意知$BH\perp AH$.



(第7题)

在Rt△ACH中,$\sin50°=\frac{CH}{AC}$,$\cos50°=\frac{AH}{AC}$,

所以$CH=50\times\sin50°=50\times0.766\,0=38.3$(n mile),

$AH=50\times\cos50°=50\times0.642\,8\approx32.1$(n mile).

所以$BH=CH+CB=38.3+40=78.3$(n mile).

在Rt△ABH中,$\tan\angle BAH=\frac{BH}{AH}\approx\frac{78.3}{32.1}$,

故$\alpha=\angle BAH\approx68°$.

(2)在Rt△ABH中,$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}\approx\sqrt{32.1^2+78.3^2}\approx85$(n mile).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:在 Rt△OAP 中,$\angle APO=60°$,

$\therefore \tan 60°=\frac{AO}{OP}$.

又∵ $OP=100$ m,

$\therefore AO=OP\cdot\tan 60°=100\sqrt{3}$ m.

在 Rt△BOP 中,$\angle BPO=45°$,$\therefore \tan 45°=\frac{OB}{OP}$,

$\therefore OB=OP\cdot\tan 45°=100$ m.

$\therefore AB=AO-BO=100\sqrt{3}-100\approx 73$(m).

$\frac{73}{4}=18.25$(m/s)$=65.7$ km/h<70 km/h,

$\therefore$ 此车没有超过该公路 70 km/h 的限速.

A 组复习题

1. 解:因为$\angle C=90°$,$a=5$,$b=\sqrt{7}$,

所以根据勾股定理,得$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+7}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

所以 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{5}{4\sqrt{2}}=\frac{5}{8}\sqrt{2}$,$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{8}$,$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$.

2. 解:过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则 $BD=CD=\frac{1}{2}\times 6=3$,所以 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$.

所以 $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{55}}{8}$,$\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{3}{8}$,$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{55}}{3}$.

3. 解:(1)原式$=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{3}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\frac{3}{4}=\frac{19}{12}$.

(2)原式$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

(3)原式$=\sqrt{(\cos 45°-1)^2}=|\cos 45°-1|=1-\cos 45°=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

4. 解:$\sin 27°49'=0.4666$,$\cos 21°23'=0.9312$,$\tan 86°7'=14.7317$.

5. (1)B (2)C

6. (1)50° (2)35°10′ (3)$c\cos B$;$c\sin B$ (4)2;$2\sqrt{10}$

7. (1)30° (2)30°

8. 解:∵ $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$,且 $AC=12$,$\therefore AB=13$.

由勾股定理,得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.

$\therefore \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}$.

9. 解:∵ $CD\perp AB$,且 $CD=\sqrt{3}$,$BD=1$,$\therefore BC=2$.

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \angle B=60°$.

$\therefore \angle A=30°$.

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$.

又∵ $\sin A=\frac{BC}{AB}$,$BC=2$,$\therefore AB=4$.

根据勾股定理,得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

即在 Rt△ABC 中,$\angle A=30°$,$\angle B=60°$,$AB=4$,$BC=2$,$AC=2\sqrt{3}$.

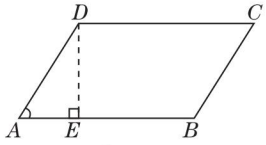
10. 解:由题意知,矩形相邻的两边长为:

$10\times\sin 40°=10\times 0.6428\approx 6.4$(cm),

$10\times\cos 40°=10\times 0.7660\approx 7.7$(cm).

所以矩形的面积为$6.4\times 7.7\approx 49$(cm^2).

11. 证明:如图,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E.



(第 11 题)

在Rt△AED中,$\sin A=\frac{DE}{AD}$,则 $DE=AD\cdot\sin A$.

故 $S_{□ABCD}=AB\cdot DE=AB\cdot AD\sin A$.

12. 解:过点 D,C 分别作 $DE\perp AB$ 于 E,$CF\perp AB$ 于 F,则 $DE\parallel CF$.

∵ $AB\parallel CD$,$DE\parallel CF$,$\angle DEF=90°$,

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 是矩形.

$\therefore DE=CF$.

易证 Rt△ADE≌Rt△BCF.

$\therefore AE=BF=\frac{AB-CD}{2}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ADE 中，$\tan 60° = \frac{DE}{AE}$，

∴ $DE = AE \cdot \tan 60° = 2\sqrt{3}$.

∴ 四边形 $ABCD$ 的面积为：$S_{\triangle ADE} + S_{矩形EFCD} + S_{\triangle BCF} = 2S_{\triangle ADE} + S_{矩形EFCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} + 2 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

13. **解**：根据题意知，△PMN 是直角三角形，且 $\angle PNM = 90°$，$\angle PMN = \angle MPN = 45°$.

∴ $MN = PM \cdot \cos 45° = 68 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 34\sqrt{2}$(n mile).

故这船的航行速度为 $\frac{34\sqrt{2}}{11-9} = 17\sqrt{2}$(n mile/h).

14. **解**：在 B 处测得建筑物 CD 顶的仰角为 α，则可得 $CD = 24\tan\alpha$ m. 在 D 处测得建筑物 AB 顶的仰角为 β，则可得 $AB = 24\tan\beta$ m.

（答案不唯一）

15. **解**：根据题意，在 Rt△ABC 中，$\tan\theta_1 = \frac{AB}{d_1}$，

则 $AB = d_1\tan\theta_1 = 4 \times \tan 40° = 4 \times 0.839\ 1 \approx 3.356$(m).

在 Rt△ADB 中，$\tan\theta_2 = \frac{AB}{d_2}$，则 $d_2 = \frac{AB}{\tan\theta_2} \approx \frac{3.356}{\tan 36°} = \frac{3.356}{0.726\ 5} \approx 4.619$(m).

故 $d_2 - d_1 \approx 4.619 - 4 \approx 0.62$(m).

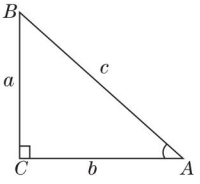
答：楼梯占用地板的长度增加了约 0.62 m.

B 组复习题

1. $\frac{y}{r}$；$\frac{x}{r}$；$\frac{y}{x}$

2. (1)30°　(2)60°，60°，60°

3. **证明**：设∠A 为Rt△ABC中的锐角，如图所示.



（第 3 题）

(1)由三角函数的定义，得 $\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$.

又 $a^2 + b^2 = c^2$，

则 $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$，

即 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

(2)因为 $\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$，

所以 $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A$，

即 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

4. **解**：在 Rt△ABC 中，$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$，可设 $BC = 3x$，$AB = 5x$，

则 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4x$.

∴ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$，

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$.

5. **解**：过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D.

由题意得 $AC = 20 \times 1.5 = 30$(n mile).

在Rt△ACD中，易得∠$CAD = 45°$，

所以 $CD = AC \cdot \sin 45° = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$(n mile).

在 Rt△BCD 中，可以求得∠$B = 30°$，

所以 $\sin 30° = \frac{CD}{BC}$.

所以 $BC = 2CD = 2 \times 15\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$(n mile).

答：此时航船与灯塔相距$30\sqrt{2}$ n mile.

6. **解**：过 D 点作 $DF \perp AC$，垂足为点 F.

在 Rt△ADF 中，根据 $\tan\angle DAF = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，得∠$DAF = 30°$.

因为 $AD = 1\ 000$ m，

所以 $DF = AD \cdot \sin 30° = 1\ 000 \times \frac{1}{2} = 500$(m)，

$AF = AD \cdot \cos 30° = 1\ 000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3}$(m).

在 Rt△BDE 中，设 $DE = x$ m，则 $BE = \sqrt{3}x$ m.

又在Rt△ABC中，∠$BAC = 45°$，则有 $AC = BC$.

故 $500\sqrt{3} + x = \sqrt{3}x + 500$，解得$x = 500$.

故 $BC = BE + EC = 500(\sqrt{3}+1)$ m.

答：山高 BC 为 $500(\sqrt{3}+1)$ m.

7. **解**：四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，且 $\angle ABC = \angle DCB = 120°$，易证 Rt△$ABK$≌Rt△$DCH$，

∴ $AB = CD = x$.

则 $BK = CH = x\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，$AK = DH = \frac{1}{2}x$，

$BC = l - AB - CD = l - 2x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = S_{\triangle ABK} + S_{矩形BCHK} + S_{\triangle CDH} = 2S_{\triangle ABK} + S_{矩形BCHK} = 2 \times \frac{1}{2}AK \cdot BK + BC \cdot BK = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x(l-2x) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}lx = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{3}l\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}l^2$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{1}{3}l$ 时,S 取得最大值.

答:当 AB,CD 的值均为 $\frac{1}{3}l$ 时,水渠的流量最大.

8. 解:由 $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$,得 $a = b$ 或 $a = 2b$.

当 $a = b$ 时,$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$,

$\therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

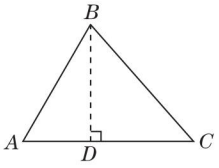
当 $a = 2b$ 时,$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$,

$\therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

9. 略.

C 组复习题

1. 解:如图,过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D.



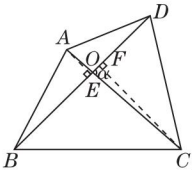
(第 1 题)

由 $AB = 8$,得 $BD = AB \cdot \sin A = 8\sin A$.

$\because S_{\triangle ABC} = 20\sqrt{3}$,$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 10 \times 8\sin A = 20\sqrt{3}$. $\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore \angle A = 60°$.

$\therefore \cos A = \cos 60° = \frac{1}{2}$,$\tan A = \tan 60° = \sqrt{3}$.

2. 证明:如图,四边形 $ABCD$ 中,$AC = l_1$,$BD = l_2$,O 为 AC,BD 的交点,$\angle COD = \alpha$,作 $AE \perp BD$,$CF \perp BD$,垂足分别为 E,F.

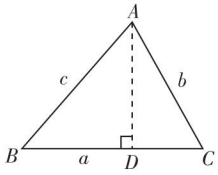


(第 2 题)

则有 $S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AE + \frac{1}{2}BD \cdot CF = \frac{1}{2}BD \cdot OA\sin\alpha + \frac{1}{2}BD \cdot OC\sin\alpha = \frac{1}{2}BD \cdot (OA + OC)\sin\alpha = \frac{1}{2}l_1 l_2 \sin\alpha$,

即 $S = \frac{1}{2}l_1 l_2 \sin\alpha$.

3. 证明:如图所示的锐角三角形 ABC.



(第 3 题)

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D,则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$\angle ADB = 90°$,

所以 $\sin B = \frac{AD}{c}$①.

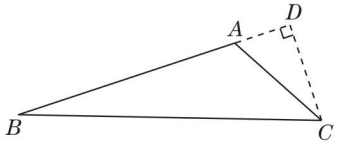
在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\angle ADC = 90°$,所以 $\sin C = \frac{AD}{b}$②.

由①②知 $AD = c\sin B = b\sin C$,即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

4. 解:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,交 BA 的延长线于点 D.



(第 4 题)

$\because \angle BAC = 120°$,

$\therefore \angle DAC = 60°$.

$\therefore \angle ACD = 30°$.

$\therefore AD = \frac{1}{2}AC = 1$,$CD = AC \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$.

$\therefore BD = AB + AD = 4 + 1 = 5$.

$\therefore \tan B = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

5. 略.

6. 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记



荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料