教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

# 点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法55招·七八九年级共338招




九年级
数学(上)
荣德基 主编
(XJ版)
赠教材习题答案

吉林教育出版社

# 买书？看完点拨再做决定！

简约的知识梳理总结　　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

三个维度打造极致

第1步

**基础速提分**

点知识 拨考向 速提分

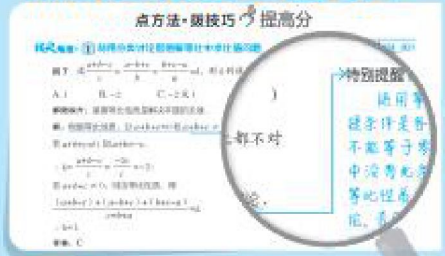



» 给你一把打开数学之门的钥匙

第2步

**方法提高分**

点方法 拨技巧 提高分

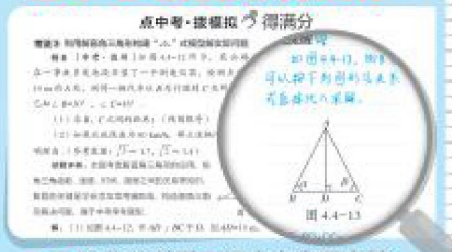



» 为你提供解题秘方

第3步

**考法得满分**

点中考 拨模拟 得满分




» 让你从默默无闻走向优秀卓越

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

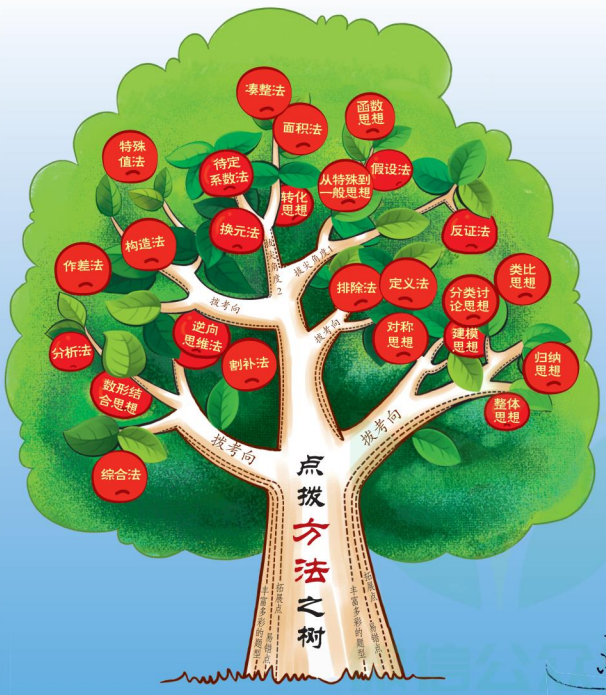
# 点拨®

知识
方法
素养

## 九年级 数学 上 （XJ版）

荣德基 主编

本册主编：范志刚




老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 老师批注方法

## 方法点 55 个 得高分


第1章 反比例函数

| | | 页码 |
|---|---|---|
| 1 | 判断一个函数是不是反比例函数的两种方法 | 2 |
| 2 | 待定系数法 | 3 |
| 3 | 等面积法 | 6 |
| 4 | 求阴影部分面积的方法 | 12 |
| 5 | 判断点是否在反比例函数图象上的方法 | 13 |
| 6 | 图象法 | 13 |
| 7 | 特殊值法 | 13 |
| 8 | 求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法 | 14 |
| 9 | 割补法 | 14 |
| 10 | 数形结合思想 | 33 |
| 11 | 数学建模思想 | 38 |

第2章 一元二次方程

| | | 页码 |
|---|---|---|
| 1 | 判断一个数是不是一元二次方程的根的方法 | 51 |
| 2 | 直接开平方法 | 51 |
| 3 | 用直接开平方法解一元二次方程的方法 | 52 |
| 4 | 配方法 | 53 |
| 5 | 待定系数法 | 56 |
| 6 | 公式法 | 57 |
| 7 | 求解含字母系数的方程的方法 | 58 |
| 8 | 估算含无理数式子的大小的方法 | 59 |
| 9 | 常用的因式分解的方法 | 60 |
| 10 | 因式分解法 | 60 |
| 11 | 换元法 | 62 |
| 12 | 数形结合思想 | 63 |
| 13 | 利用根的判别式判断一元二次方程的根的情况的方法 | 65 |
| 14 | 利用根与系数的关系求涉根代数式值的方法 | 71 |
| 15 | 求与根有关的代数式的值的方法 | 73 |
| 16 | 整体代入法 | 74 |
| 17 | 平移法 | 77 |
| 18 | 分类讨论思想 | 87 |


微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点拨只为高分

## 方法点 55 个 得高分


第3章 图形的相似

| | | 页码 |
|---|---|---|
| 1 | 利用比例的基本性质求代数式的值的方法 | 94 |
| 2 | 消元法 | 94 |
| 3 | 参数法 | 94 |
| 4 | 判断四条线段是否是成比例线段的方法 | 95 |
| 5 | 利用平行线分线段成比例的基本事实或推论求线段长的方法 | 102 |
| 6 | 利用成比例线段求线段的长的方法 | 114 |
| 7 | 利用两边成比例且夹角相等证两三角形相似的方法 | 115 |
| 8 | 利用三边成比例判定两三角形相似的方法 | 116 |
| 9 | 利用相似三角形证明等积式的方法 | 117 |
| 10 | 三点定形法 | 117 |
| 11 | 判断两个图形是否为位似图形的方法 | 140 |
| 12 | 数形结合思想 | 154 |
| 13 | 分类讨论思想 | 155 |
| 14 | 方程思想 | 155 |

第4章 锐角三角函数

| | | 页码 |
|---|---|---|
| 1 | 定义法 | 166 |
| 2 | 设参数法 | 166 |
| 3 | 构造法 | 166 |
| 4 | 等角转换法 | 166 |
| 5 | 整体思想 | 168 |
| 6 | 含有特殊角的三角函数的式子的计算方法 | 171 |
| 7 | 求锐角三角函数值的方法 | 174 |
| 8 | 在网格中求锐角三角函数值的方法 | 174 |
| 9 | 归纳法 | 176 |
| 10 | 从特殊到一般的思想 | 176 |
| 11 | 解直角三角形的一般方法 | 180 |
| 12 | 构造直角三角形解非直角三角形问题的方法 | 181 |
| 13 | 解直角三角形的实际应用问题的求解方法 | 188 |
| 14 | 求解是否触礁或是否受台风或噪声影响等问题的方法 | 191 |
| 15 | 方程思想 | 203 |
| 16 | 转化思想 | 203 |

第5章 推断总体用样本

| | | 页码 |
|---|---|---|
| 1 | 样本估计总体的思想 | 211 |
| 2 | 定义法 | 212 |
| 3 | 统计思想 | 231 |
| 4 | 方程思想 | 232 |




微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 目录

## 二维码索引

**学方法**

特殊值法…… 13

**看微课**

反比例函数的定义…… 2
反比例函数的性质…… 10
反比例函数 $k$ 的几何意义… 11

**学方法**

配方法…… 52
公式法…… 57
因式分解法…… 60

**看微课**

一元二次方程的定义…… 46
根的判别式…… 65
利用一元二次方程建模…… 76

**学方法**

三点定形法…… 118

**第 1 章 反比例函数**

1.1 反比例函数 ……2
1.2 反比例函数的图象与性质 ……9
1.3 反比例函数的应用 …… 21

**素养提分**

行动篇：反比例函数中比例系数 $k$ 的妙用 ☞ P18
思维篇：反比例函数中的数形结合思想 ☞ P33
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P35

**第 2 章 一元二次方程**

2.1 一元二次方程 …… 46
2.2 一元二次方程的解法 …… 51
2.2.1 配方法 …… 51
2.2.2 公式法 …… 57
2.2.3 因式分解法 …… 60
2.3 一元二次方程根的判别式 …… 65
*2.4 一元二次方程根与系数的关系 …… 70
2.5 一元二次方程的应用 …… 76

**素养提分**

思维篇：逆向思维在一元二次方程中的应用 ☞ P83
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P85

**第 3 章 图形的相似**

3.1 比例线段 …… 93
3.2 平行线分线段成比例 ……100
3.3 相似图形 ……106

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.4 相似三角形的判定与性质 ……113
3.4.1 相似三角形的判定 ……113
3.4.2 相似三角形的性质 ……124
3.5 相似三角形的应用 ……131
3.6 位 似 ……140
素养提分
方法篇：利用三角形相似证明乘积式的策略 ☞ P150
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P152

观动画
位似图形……140

看微课
成比例线段…… 95
推论的应用…… 101
相似三角形的判定…… 116

## 第4章 锐角三角函数

4.1 正弦和余弦 ……163
4.2 正 切 ……170
4.3 解直角三角形 ……179
4.4 解直角三角形的应用 ……187
素养提分
类型篇：解直角三角形常见应用举例 ☞ P197
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P200

学方法
化斜为直法…… 181

看微课
锐角三角函数的定义……163
解直角三角形的应用……188

## 第5章 用样本推断总体

5.1 总体平均数与方差的估计 ……211
5.2 统计的简单应用 ……217
素养提分
行动篇：平均数与方差的变化规律揭秘及其应用 ☞ P213
论“决策” ☞ P226
应用篇：统计量在统计中的应用 ☞ P227
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P230
参考答案及点拨（单独成册）

看微课
用样本估计总体…… 217



微信公众号 教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

揭示反比例函数的奥秘

揭示反比例函数的奥秘











# 第1章 反比例函数

## 核心考点

### 你将见到的

- 反比例函数的定义
- 反比例函数的图象
- 反比例函数的性质
- 实际问题与反比例函数

## 核心方法

### 我们为你提供的

- 待定系数法
- 图象法
- 特殊值法
- 割补法
- 数形结合思想
- 数学建模思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.1 反比例函数

**核心知识**

- 反比例函数
- 反比例关系与反比例函数的区别
- 求反比例函数的表达式

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 1 反比例函数的定义

**1. 定义：** 一般地，如果两个变量 $y$ 与 $x$ 的关系可表示成 $y=\frac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq 0$）的形式，那么称 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，其中 $x$ 是自变量，常数 $k$（$k\neq 0$）称为反比例函数的比例系数.

**2. 反比例函数的三种形式：**

① $y=\frac{k}{x}$，

② $y=kx^{-1}$，

③ $xy=k$.（其中 $k$ 为常数，$k\neq 0$）

三种基本形式要牢记，这是识别反比例函数的关键.


反比例函数的定义

**特别提醒：** 形如 $y=\frac{1}{x}+1$，$(x+1)y=3$，$y=(x+1)^{-1}$ 等的函数都不是 $y$ 关于 $x$ 的反比例函数.

提分·必记

特别提醒

反比例函数的表达式 $y=\frac{k}{x}$ 中无论变量 $x$，$y$ 怎样变化，$k$ 的值始终等于 $x$ 与 $y$ 的乘积，因此人们习惯上称 $k$ 为比例系数. 若 $k=0$，则 $y=\frac{k}{x}=0$ 恒成立，为常数函数，失去了反比例函数 $x$，$y$ 成反比例的意义，所以 $k\neq 0$

### 拨考向 利用反比例函数定义识别反比例函数

**例 1** 有下列函数：① $y=\sqrt{2}x^{-1}$；② $y=\frac{4}{x}$；③ $xy=8$；④ $y=\frac{4}{x}+1$；⑤ $y=\frac{3}{x-1}$；⑥ $y=\frac{x}{3}$；⑦ $y=-\frac{1}{2x}$；⑧ $y=\frac{a-2}{x}$（$a\neq 2$，且 $a$ 为常数）.

其中，$y$ 是 $x$ 的反比例函数的有_____.（填写序号）

**解题秘方：** 紧扣反比例函数的定义及其“三种形式”进行识别.

**解：** ①即为 $y=\frac{\sqrt{2}}{x}$，是反比例函数；②是反比例函数；③即为 $y=\frac{8}{x}$，是反比例函数；④⑤不符合反比例函数的定义；⑥是正比例函数；⑦是反比例函数；⑧中，因为 $a\neq 2$，且 $a$ 为常数，所以 $a-2$ 是不等于 0 的常数，所以该函数是反比例函数.

**答案：** ①②③⑦⑧

提分·秘诀

方法提醒

判断一个函数是不是反比例函数的两种方法：

1. 按照反比例函数的定义判断；
2. 看两个变量的关系式是否符合反比例函数的三种形式中的一种.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 点知识▶ 2 反比例关系与反比例函数的关系

1. 如果两个量 $x$，$y$ 满足 $xy=k$（$k$ 为常数，$k\neq0$），那么 $x$，$y$ 就成反比例关系，这里的 $x$ 和 $y$ 既可以代表单项式，也可以代表多项式；当 $x$，$y$ 只代表一次单项式时，$x$，$y$ 这两个量才成反比例函数关系．

2. 成反比例关系不一定是反比例函数，但反比例函数中的两个变量必成反比例关系．

示例：$y=\dfrac{k}{x^2}$（$k$ 为不等于 0 的常数），$y$ 与 $x^2$ 成反比例，但 $y$ 不是关于 $x$ 的反比例函数．

3. 反比例函数中有自变量和函数的区分，而反比例关系中的两个变量没有这种区分．

提分·必记

示例解读

若 $y+2$ 与 $x-5$ 成反比例，则 $y+2=\dfrac{k}{x-5}$（$k$ 为常数，$k\neq0$）；若 $y$ 与 $x^2$ 成反比例，则 $y=\dfrac{k}{x^2}$（$k$ 为常数，$k\neq0$）．

## 拔考向▶ 利用反比例关系求函数表达式

**例 2** 已知 $y=y_1+y_2$，$y_1$ 与 $x$ 成正比例，$y_2$ 与 $x$ 成反比例，并且当 $x=2$ 时，$y=-4$，当 $x=-1$ 时，$y=5$，求 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式．

**解题秘方：**紧扣“比例关系”解答．

**解：**∵ $y_1$ 与 $x$ 成正比例，∴设 $y_1=k_1x$（$k_1\neq0$）．

∵ $y_2$ 与 $x$ 成反比例，∴设 $y_2=\dfrac{k_2}{x}$（$k_2\neq0$）．

∴ $y=k_1x+\dfrac{k_2}{x}$．

把 $x=2$，$y=-4$ 及 $x=-1$，$y=5$ 分别代入，

得 $\begin{cases}2k_1+\dfrac{k_2}{2}=-4,\\-k_1-k_2=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\k_2=-4.\end{cases}$

∴ $y=-x-\dfrac{4}{x}$．

点拨微课堂

提分·秘诀

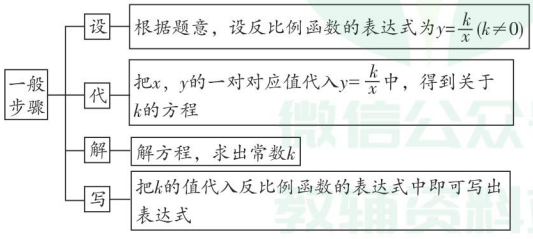
解法提醒

根据题意可设 $y_1=k_1x$（$k_1\neq0$），$y_2=\dfrac{k_2}{x}$（$k_2\neq0$），则 $y=k_1x+\dfrac{k_2}{x}$，那么 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式中就有两个待定系数 $k_1$，$k_2$，因此解决问题需代入两对 $x$，$y$ 的对应值，解关于 $k_1$，$k_2$ 的方程组，进而求出表达式．

## 点知识▶ 3 求反比例函数表达式

1. 确定反比例函数表达式的方法是待定系数法，由于在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$）中只有一个待定系数，因此只需要一对 $x$，$y$ 的对应值或图象上一个点的坐标，即可求出 $k$ 的值，从而确定其表达式．

2. 用待定系数法求反比例函数表达式的一般步骤：




提分·必记

特别解读

- 用待定系数法求反比例函数的表达式的实质是代入一对对应值，解一元一次方程．
- 当题目中已经明确“$y$ 是 $x$ 的反比例函数”或“$y$ 与 $x$ 成反比例关系”时，可直接设函数的表达式为 $y=\dfrac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq0$）．

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔考向▶利用待定系数法求反比例函数表达式

### 题型1：求反比例函数表达式在求值中的应用

**例3** 已知 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，当 $x=3$ 时，$y=6$.

（1）写出 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式；

（2）当 $x=-2$ 时，求 $y$ 的值；

（3）若 $y=4.5$，求 $x$ 的值.

**解题秘方：**紧扣反比例函数表达式用待定系数法求解.

**解：**（1）由题意，设反比例函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，把 $x=3$，$y=6$ 代入表达式，得 $6=\frac{k}{3}$，$k=3\times 6=18$，所以 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式是 $y=\frac{18}{x}$.

（2）把 $x=-2$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，得 $y=\frac{18}{-2}=-9$.

（3）把 $y=4.5$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，得 $4.5=\frac{18}{x}$，解得 $x=4$.

### 题型2：求反比例函数表达式在实际中的应用

**例4** （1）某住宅小区要种植一块面积为 $1\,000\ m^2$ 的矩形草坪，其相邻两边长为 $x$ m，$y$ m，试写出 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式，并写出自变量的取值范围；

（2）食堂存煤 $15\,000$ kg，试写出可使用的天数 $t$（天）关于平均每天的用煤量 $Q$（kg）的函数表达式，并写出自变量的取值范围.

**解题秘方：**（1）根据矩形的面积公式写出函数表达式；

（2）根据“可使用的天数 $=\frac{\text{存煤量}}{\text{平均每天的用煤量}}$”写出函数表达式.

**解：**（1）$y=\frac{1\,000}{x}(x>0)$.（2）$t=\frac{15\,000}{Q}(Q>0)$.

提分·秘诀

解法提醒

已知 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，即 $x$，$y$ 满足关系式 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，因此要求出此反比例函数表达式，只需求出 $k$ 即可，而求 $k$ 的值，只需将 $x$，$y$ 的一对对应值代入关系式就可求出.

特别提醒

在实际问题中，确定函数表达式后，通常要写出自变量的取值范围，特别注意自变量的取值要使实际问题有意义.

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度▶1 利用定义法求反比例函数中的字母的值

**例5** 若函数 $y=(k^2+k)x^{|k-2|-3}$ 是反比例函数，试求 $(k-3)^{2021}$ 的值.

**解题秘方：**紧扣反比例函数的定义求解.

**解：**由题意得，$|k-2|-3=-1$，解得 $k=0$ 或 $k=4$.

当 $k=0$ 时，$k^2+k=0$，不合题意，舍去，

当 $k=4$ 时，$k^2+k=20$，符合题意. 所以 $k=4$.

因此 $(k-3)^{2021}=(4-3)^{2021}=1$.

挑战·高分

特别提醒

利用反比例函数的定义求字母的值时，一定要注意比例系数 $k\neq 0$ 这一条件，否则易造成错误.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度▸ 2 利用待定系数法求函数表达式

**例 6** 已知 $y$ 是 $x$ 的函数，下表给出了 $x$ 与 $y$ 的一些对应值：

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | 1 | 2 | 4 | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{2}{3}$ |

猜想 $y$ 是 $x$ 的正比例函数还是反比例函数？求出这个函数的表达式，并完成上表．

**解题秘方：**紧扣不同函数定义，用分类思想分两种情况讨论，通过表中一对对应值求出函数表达式，再利用另一对对应值来检验．

**解：**假设 $y$ 是 $x$ 的正比例函数，设函数表达式为 $y=mx$（$m\neq 0$），

把 $x=-1$，$y=2$ 代入 $y=mx$ 中，解得 $m=-2$，所以 $y=-2x$.

把 $x=3$ 代入 $y=-2x$ 中，得 $y=-6\neq -\frac{2}{3}$，所以 $y$ 不是 $x$ 的正比例函数．

假设 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$），

把 $x=-1$，$y=2$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，解得 $k=-2$，所以 $y=-\frac{2}{x}$．把 $x=3$ 代入 $y=-\frac{2}{x}$ 中，得 $y=-\frac{2}{3}$．所以 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，表达式为 $y=-\frac{2}{x}$．

补全表格如下：

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | 2 | 4 | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{2}{3}$ |

挑战·高分

**知识储备**

解决此类给出表格，判断函数类型的题目，需要熟练掌握所学过的正比例函数、反比例函数的概念．从表格中获取有用信息，从已知的几对对应值入手，观察其特征，求出相应的函数表达式，进而判断验证．

**另解**

因为 $(-1)\times 2=-2$，$3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$，所以 $xy$ 是定值，所以 $y$ 是 $x$ 的反比例函数．

设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，把 $x=-1$，$y=2$ 代入，得 $k=-2$，所以反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$．

## 拔尖角度▸ 3 利用反比例函数解跨学科问题

**例 7** 由欧姆定律可知，电压不变时，电流 $I$（单位：A）与电阻 $R$（单位：Ω）成反比例．已知电压不变，电阻为 12.5 Ω 时，电流为 0.2 A.

（1）求 $I$ 关于 $R$ 的函数表达式；

（2）当电阻为 5 Ω 时，电流是多少？

**解题秘方：**（1）紧扣 $I$ 与 $R$ 成反比例可设 $I=\frac{k}{R}$，将 $R=12.5$，$I=0.2$ 这对对应值代入，可求得 $k$；（2）将 $R=5$ 代入反比例函数表达式，即可求解．

**解：**（1）∵ $I$ 与 $R$ 成反比例，∴可设 $I=\frac{k}{R}$．

把 $R=12.5$，$I=0.2$ 代入上式得 $k=2.5$，∴ $I=\frac{2.5}{R}$．

（2）把 $R=5$ 代入 $I=\frac{2.5}{R}$，得 $I=\frac{2.5}{5}=0.5$.

因此当电阻为 5 Ω 时，电流是 0.5 A.

挑战·高分

**知识储备**

1. 由物理中的欧姆定律可知，电流与电阻的乘积为电压，利用待定系数法确定函数表达式；
2. 将电阻值代入反比例函数表达式，即可求出对应的电流值．

**另解**

根据欧姆定律可知 $R\,I=12.5\times 0.2=2.5$，∴ $I=\frac{2.5}{R}$．

微信公众号 数辅资料站



关注微信公众号“数辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度 4 利用数形结合思想求几何问题中的反比例函数表达式

**例 8** 李贝说："在如图 1.1-1 所示的矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，$P$ 是 $BC$ 边上一动点，过点 $D$ 作 $DE \perp AP$ 于点 $E$. 设 $AP=x$（$6 \leqslant x \leqslant 10$），$DE=y$，则 $y$ 是 $x$ 的反比例函数."你认为李贝的说法正确吗？若正确，请给出证明；若不正确，请说明理由.

**解题秘方：**紧扣"若 $xy$ 等于非零定值，则有 $y$ 是 $x$ 的反比例函数"，利用 $xy$ 的积的几何性质求解.

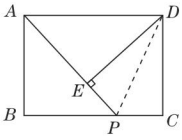


图 1.1-1

**解：**李贝的说法正确. 证明如下：

如图 1.1-1，连接 $DP$.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD=BC=8$，$AB \perp AD$.

∴△ $APD$ 的 $AD$ 边上的高等于 $AB$ 的长，

∴ $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$.

又∵ $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}AP\cdot DE=\frac{1}{2}xy$，∴ $\frac{1}{2}xy=24$，∴ $xy=48$.

∴ $y=\frac{48}{x}$（$6 \leqslant x \leqslant 10$），即 $y$ 是 $x$ 的反比例函数.

挑战·高分

解法提醒

运用等面积法建立等量关系，即用两种方法求△APD 的面积：

- $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}$ AP×AP 边上的高；
- $S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}$ AD×AD 边上的高.

从而得到一个等式，再运用等式的性质将等式化成用含 x 的代数式来表示 y 的形式，即为 y 关于 x 的函数表达式. 等面积法在求与几何图形面积相关的函数问题中经常用到.

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘**

本节的中考考点是反比例函数的概念、反比例函数表达式的确定以及实际问题中的反比例函数，其中反比例函数表达式的确定是中考常考内容之一. 命题形式多种多样，有时单独命题，有时与一次函数、二次函数（以后将学到）综合命题，题型有选择题、填空题和简单的解答题. 单独考查时难度不大，当与其他知识综合考查时，难度中等.

## 三年中考兵法

### 考法 1 利用反比例的意义解电学应用问题

**例 9** [中考·黑龙江]用电器的输出功率 $P$ 与通过的电流 $I$、用电器的电阻 $R$ 之间的关系是 $P=I^2R$，下面说法正确的是（　　）

A. $P$ 为定值，$I$ 与 $R$ 成反比例　B. $P$ 为定值，$I^2$ 与 $R$ 成反比例

C. $P$ 为定值，$I$ 与 $R$ 成正比例　D. $P$ 为定值，$I^2$ 与 $R$ 成正比例

**试题评析：**本题渗透初中物理中与"电流"有关的知识，当 $P$ 为定值时，把 $I^2$ 看成一个整体，$I^2$ 与 $R$ 成反比例，而不是 $I$ 与 $R$ 成反比例，这是易忽略的地方，应引起注意.

**解：**根据 $P=I^2R$ 可以得到当 $P$ 为定值时，$I^2$ 与 $R$ 的乘积是定值，所以 $I^2$ 与 $R$ 成反比例.

**答案：**B

冲刺·满分

解法提醒

在本题中，$P=I^2R$，即当 P 为定值时，$I^2$ 和 R 的乘积为定值，所以根据反比例的概念应该是 $I^2$ 与 R 成反比例，而并非 I 与 R 成反比例.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

## 考法 2 利用反比例函数解实际应用问题

**例 10** [中考·云南] 将油箱注满 $k$ 升油后，轿车可行驶的总路程 $s$（单位：千米）与平均耗油量 $a$（单位：升/千米）之间是反比例函数关系：$s=\frac{k}{a}$（$k$ 是常数，$k\neq 0$）. 已知某轿车油箱注满油后，以平均耗油量为每千米 0.1 升的速度行驶，可行驶 700 千米.

（1）求该轿车可行驶的总路程 $s$ 与平均耗油量 $a$ 之间的函数表达式；

（2）当平均耗油量为 0.08 升/千米时，该轿车可以行驶多少千米？

**试题评析**：本题考查了反比例函数的应用，解题的关键是从实际问题中抽象出反比例函数模型.

**解**：（1）由题意，得 $a=0.1$ 时，$s=700$，

代入 $s=\frac{k}{a}$，

解得 $k=700\times 0.1=70$.

所以函数表达式为 $s=\frac{70}{a}$.

（2）将 $a=0.08$ 代入 $s=\frac{70}{a}$，

得 $s=\frac{70}{0.08}=875$.

故该轿车可以行驶 875 千米.

解法提醒

- 将 $a=0.1$，$s=700$ 代入 $s=\frac{k}{a}$ 中即可求得 $k$ 的值，从而确定表达式；
- 将 $a=0.08$ 代入求得的函数表达式即可求得 $s$ 的值.

## 两年模拟兵法 ☞答案见 241 页

**1.** [模拟·津南区] 下列函数中，是反比例函数的为（　　）

A. $y=\frac{1}{5x}$　　B. $y=\frac{2}{x^2}$

C. $y=2x+1$　　D. $2y=x$

**2.** [模拟·和平区] 下列关系中，两个量之间为反比例函数关系的是（　　）

A. 正方形的面积 $S$ 与边长 $a$ 的关系

B. 正方形的周长 $L$ 与边长 $a$ 的关系

C. 矩形的长为 $a$，宽为 20，其面积 $S$ 与 $a$ 的关系

D. 矩形的面积为 40，长为 $a$，宽为 $b$，$a$ 与 $b$ 的关系

**3.** 反比例函数 $y=-\frac{3}{2x}$ 中常数 $k$ 为（　　）

A. $-3$　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

**4.** [模拟·杭州] 下列问题情境中的两个变量是反比例函数关系的是（　　）

A. 汽车沿一条公路从 $A$ 地驶往 $B$ 地所需的时间 $t$ 与平均速度 $v$

B. 圆的周长 $C$ 与圆的半径 $r$

C. 圆的面积 $S$ 与圆的半径 $r$

D. 在电阻不变的情况下，电流 $I$ 与电压 $U$

**5.** [月考·灌云县] 已知函数 $y=(m-2)x^{m^2-5}$ 是反比例函数，则 $m$ 的值为（　　）

A. 2　　B. $-2$

C. 2 或 $-2$　　D. 任意实数

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**6.** 已知一个函数满足下表（$x$ 为自变量）：

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $\frac{8}{3}$ | $4$ | $8$ | $-8$ | $-4$ | $-\frac{8}{3}$ | $-2$ |

则这个函数的表达式为（　　）

A. $y=\frac{8}{x}$　　B. $y=-\frac{8}{x}$

C. $y=\frac{x}{8}$　　D. $y=-\frac{x}{8}$

**7.** 一司机驾驶轿车从甲地去乙地，他以 120 千米/时的平均速度用了 5 小时到达乙地．当他按原路匀速返回时，轿车的平均速度 $v$（千米/时）与时间 $t$（小时）的函数关系式是（　　）

A. $v=600t$　　B. $v=\frac{600}{t}$

C. $v=24t$　　D. $v=\frac{24}{t}$

**8.** 下列问题：

①小明完成 100 m 赛跑时，时间 $t$（s）与他跑步的平均速度 $v$（m/s）之间的关系；

②一个玻璃容器的容积为 30 L，所盛液体的质量 $m$ 与所盛液体的体积 $V$ 之间的关系；

③压力为 600 N，压强 $p$ 与受力面积 $S$ 之间的关系．

其中两个变量之间是反比例函数关系的是_____.

**9.** 已知函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$，当 $m$ 取何值时，$y$ 是 $x$ 的正比例函数？当 $m$ 取何值时，$y$ 是 $x$ 的反比例函数？　　**【导学号：7097546】**

**10.** 下表反映了 $x$ 和 $y$ 之间存在某种函数关系，现给出了几种可能的函数关系式：$y=x+7$，$y=x-5$，$y=-\frac{6}{x}$，$y=\frac{1}{3}x-1$.

| $x$ | … | $-6$ | $-5$ | $3$ | $4$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | … | $1$ | $1.2$ | $-2$ | $-1.5$ | … |

（1）从所给出的几个式子中选出一个你认为满足上表的函数关系式：_____；

（2）请说明你选择这个函数关系式的理由．

**11.** 启明星中学广场有一段 25 m 长的旧围栏，用如图所示的线段 $AB$ 表示．现打算利用该围栏的一部分（或全部）为一边围成一块面积为 100 $m^2$ 的矩形草坪 $CDEF$. 已知整修旧围栏的价格是 1.75 元/m，建新围栏的价格是 4.5 元/m，设利用旧围栏 $CF$ 的长度为 $x$ m，$CD$ 的长度为 $z$ m，求 $z$ 关于 $x$ 的函数表达式．若修建草坪围栏所需的总费用为 $y$ 元，求 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式．（写出自变量 $x$ 的取值范围）




（第 11 题）

微信公众号
教辅资料站



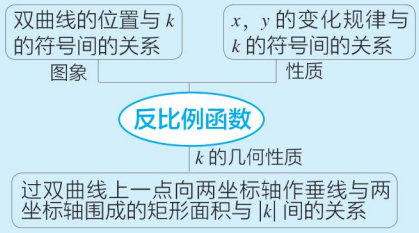
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.2 反比例函数的图象与性质

**核心知识**

- 反比例函数的图象
- 反比例函数的性质
- 反比例函数中比例系数 $k$ 的几何性质

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 1 反比例函数的图象

**1. 图象的画法（描点法）：**

（1）**列表：**先取一些自变量的值，在原点的两边取三对或三对以上互为相反数的值，如 1 和 −1，2 和 −2，3 和 −3 等．求 $y$ 值时，只需计算原点一侧的函数值，另一侧的函数值可以随之得出．

（2）**描点：**根据表中提供的数据，即点的坐标，在平面直角坐标系中描出对应的点．

（3）**连线：**用平滑的曲线顺次把这些点连接起来并延伸，注意双曲线的两支是断开的，延伸部分有逐渐靠近坐标轴的趋势，但永远不与坐标轴相交．

**2. 图象的特点：**

（1）反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq 0$）的图象是双曲线．

（2）反比例函数图象的两支分别位于第一、三象限或第二、四象限．

（3）双曲线的两支都无限接近坐标轴，但永远不与坐标轴相交．

（4）双曲线既是中心对称图形（对称中心是原点），又是轴对称图形（对称轴是直线 $y=x$ 和直线 $y=-x$）．

示图（如图 1.2−1）．

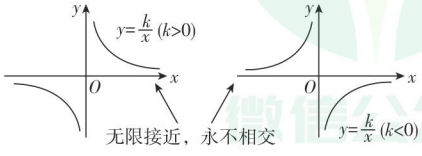



图 1.2−1

提分·必记

特别提醒

- 由于反比例函数图象的两个分支关于原点对称，所以只要画出它在一个象限内的分支，就可以对称地画出另一个分支．
- 画实际问题中的反比例函数的图象时，要考虑自变量的取值范围，一般地，实际问题的图象是反比例函数图象在第一象限内的一支或其中一部分．

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔考向▶利用反比例函数图象的特点用描点法作图象

**例 1** 在同一平面直角坐标系中画出反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 和 $y=-\frac{8}{x}$ 的图象.

**解题秘方：**紧扣画图象的“一列、二描、三连”的步骤作图.

**解：**列表：

| $x$ | … | −8 | −4 | −2 | −1 | 1 | 2 | 4 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{8}{x}$ | … | −1 | −2 | −4 | −8 | 8 | 4 | 2 | 1 | … |
| $y=-\frac{8}{x}$ | … | 1 | 2 | 4 | 8 | −8 | −4 | −2 | −1 | … |

描点、连线得到如图 1.2−2 所示的图象.

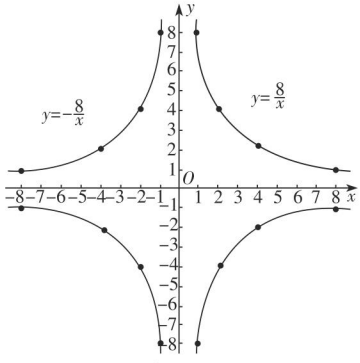
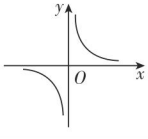
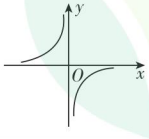



图 1.2−2

## 点知识▶2 反比例函数的性质

反比例函数的性质主要研究它的图象的位置和函数值的增减情况，如下表所示.

| 反比例函数 | $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ | |
|---|---|---|
| $k$ 的取值 | $k>0$ | $k<0$ |
| 图象 |  |  |
| 图象位置 | 第一、三象限 | 第二、四象限 |
| 增减性 | 在每个象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而减小 | 在每个象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而增大 |



反比例函数的性质

提分·秘诀

技巧点拨

列表时，自变量的值可以以0为中心，在0的两边选择绝对值相等而符号相反的值，既可简化运算又便于描点；列表时，要尽量多取一些数据，多描一些点，方便连线.

活学巧记

点越多，越精确，
平滑曲线把点过，
两个分支不能少，
对称关系很奇妙.

提分·必记

特别提醒

在描述反比例函数的增减性时，必须指明“在每个象限内”.因为当 $k>0$（$k<0$）时，整个函数不是 $y$ 随 $x$ 的增大而减小（增大）的，而是函数在每个象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而减小（增大），所以笼统地说“对于函数 $y=\frac{1}{x}$，$y$ 随 $x$ 的增大而减小”是错误的.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 核心考向▶利用反比例函数的性质解与求字母值有关的应用

**例2** 已知反比例函数 $y=\frac{m^2}{x}$（$m\neq 0$）的图象过点（$-3$，$-12$），且反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象位于第二、四象限.

（1）求 $m$ 的值；

（2）对于 $y=\frac{m}{x}$，当 $x>2$ 时，求 $y$ 的取值范围.

**解题秘方：**紧扣“比例系数的正负、双曲线的位置、函数的增减性三者相互依存，知一推二”这一规律解题.

**解：**（1）把点（$-3$，$-12$）的坐标代入 $y=\frac{m^2}{x}$ 中，

得 $-12=\frac{m^2}{-3}$，$\therefore m^2=36$，$\therefore m=\pm 6$.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象位于第二、四象限，$\therefore m<0$.

$\therefore m=-6$.

（2）由 $m=-6$ 知反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

$\because x>2$，$\therefore$ 此部分图象在第四象限. 当 $x=2$ 时，$y=-\frac{6}{2}=-3$.

$\because$ 在第四象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$-3<y<0$.

提分·秘诀

**技巧点拨**

由双曲线的位置可确定比例系数的正负，反之亦可；实际上，在比例系数的正负、双曲线的位置、函数的增减性这三者中，它们是“相互依存、知一推二”的关系.

**活学巧记**

反比例函数两性质，
掌握性质要记清：
$k$ 正图象在一、三，
$k$ 负图象在二、四；
图象一、三函数减，
图象二、四函数增.

## 知识点▶3 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 $k$ 的几何性质

**1. 矩形的面积：**

如图 1.2-3 所示，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）上任意一点 $P(x,y)$ 分别作 $x$ 轴、$y$ 轴的垂线 $PM$，$PN$，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$. 因为 $y=\frac{k}{x}$，所以 $xy=k$，所以 $S=|k|$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）上任意一点作 $x$ 轴、$y$ 轴的垂线，所得的矩形面积为 $|k|$.

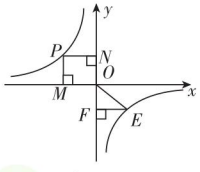


图 1.2-3

**2. 三角形的面积：**

如图 1.2-3，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）上的任意一点 $E$ 作 $EF$ 垂直于 $y$ 轴，垂足为 $F$，连接 $EO$，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）上任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$.

反比例函数 $k$ 的几何意义

提分·必记

**特别提醒**

- 在利用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 $k$ 的几何性质确定 $k$ 的值时，不仅要注意矩形面积的大小，还要注意函数图象的位置.
- 因为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 $k$ 有正、负之分，所以在利用函数表达式求矩形或三角形面积时，都要加上绝对值符号.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 考向▶利用比例系数 $k$ 的几何性质解面积问题

### 题型 1：比例系数 $k$ 的几何性质在求表达式中的应用

**例 3** ［中考·齐齐哈尔］如图 1.2−4 所示，点 $A$ 是反比例函数图象上一点，过点 $A$ 作 $AB \perp y$ 轴于点 $B$，点 $C$，$D$ 在 $x$ 轴上，且 $BC \parallel AD$，四边形 $ABCD$ 的面积为 3，则这个反比例函数的表达式为_____.

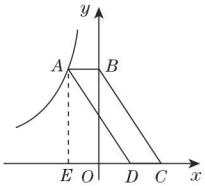



图 1.2−4

**解题秘方：**紧扣“$k$ 的几何性质”，用“等面积法”将四边形的面积转化为符合 $k$ 的几何性质的矩形面积来求解.

**解：**设这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k \neq 0$），过点 $A$ 向 $x$ 轴作垂线，垂足为 $E$，如图 1.2−4 所示. 易知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，四边形 $AEOB$ 是矩形，从而得 $S_{四边形\,AEOB}=S_{四边形\,ABCD}$. 根据反比例函数中 $k$ 的几何性质，可得 $|k|=S_{四边形\,AEOB}=S_{四边形\,ABCD}=3$.

又∵函数图象有一支在第二象限，∴ $k=-3$，即函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

**答案：** $y=-\frac{3}{x}$

### 题型 2：比例系数 $k$ 的几何性质在求面积中的应用

**例 4** ［中考·永州］如图 1.2−5，两个反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 和 $y=\frac{2}{x}$ 在第一象限内的图象分别是 $C_1$ 和 $C_2$，设点 $P$ 在 $C_1$ 上，$PA \perp x$ 轴于点 $A$，交 $C_2$ 于点 $B$，则 $\triangle POB$ 的面积为_____.

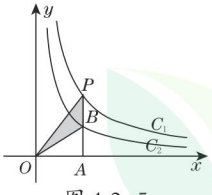



图 1.2−5

**解题秘方：**紧扣“$k$ 的几何性质”，用“作差法”将阴影部分的面积转化为符合 $k$ 的几何性质的三角形面积的差来求解.

**解：**根据反比例函数中比例系数 $k$ 的几何性质，可得 $S_{Rt\triangle POA}=\frac{1}{2}\times 4=2$，$S_{Rt\triangle BOA}=\frac{1}{2}\times 2=1$. 所以 $S_{\triangle POB}=S_{Rt\triangle POA}-S_{Rt\triangle BOA}=2-1=1$.

**答案：** 1

**提分·秘诀**

**解题通法**

- 若已知反比例函数表达式，则利用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k \neq 0$）中 $k$ 的几何性质可求相关几何图形的面积；反之，若已知相关几何图形的面积及函数图象的位置，则可求比例系数 $k$，进而可求反比例函数表达式.
- 过反比例函数图象上任意一点作两坐标轴的垂线，这两条垂线与坐标轴围成的矩形的面积是一个不变的值.

**技巧点拨**

求阴影部分面积的方法：

当它无法直接求出时，一般都采用“转化”的方法，将它转化为图形面积的和或差来进行计算. 如本例就是将阴影部分的面积转化为两个与比例系数 $k$ 相关的特殊三角形的面积的差来求，要注意转化思想和作差法的运用.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度 1 利用横、纵坐标之积为定值判断点是否在双曲线上

**例 5** 已知点 $M(-2,3)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，则下列各点一定在该双曲线上的是（　　）

A. $(3,-2)$　　B. $(-2,-3)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,2)$

**解题秘方：** 紧扣“双曲线上所有点的横、纵坐标的积等于定值”进行解答.

**解：** 只要计算出四个选项中哪个点的横、纵坐标的积即可. 因为 $(-2)\times3=-6$，而 $3\times(-2)=-6$，$(-2)\times(-3)=6$，$2\times3=6$，$3\times2=6$，所以选 A.

**答案：** A

## 拔尖角度 2 利用增减性比较函数值的大小

**例 6** 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）的图象上有三点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$，若 $x_1<x_2<0<x_3$，则下列结论正确的是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_1<y_3<y_2$

特殊值法

**解题秘方：** 紧扣“反比例函数的增减性及不同象限的函数值的关系”比较大小.

**解：** $\because k<0$，$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、四象限，且在每个象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而增大.

$\because x_1<x_2<0$，$\therefore P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 都在第二象限内，

$\therefore 0<y_1<y_2$.

$\because x_3>0$，$\therefore P_3(x_3,y_3)$ 在第四象限内，

$\therefore y_3<0$.

$\therefore y_3<y_1<y_2$.

**答案：** B

**解题通法：** 利用反比例函数的增减性比较函数值大小的求解思路为在同一分支上的点可以通过比较其横坐标的大小来判断函数值的大小，不在同一分支上的点，依据与 $x$ 轴的相对位置来进行函数值大小的比较. 另外，图象法和特殊值法也是解决此类问题的常用方法，图象法形象直观，特殊值法简单直接.

挑战·高分

**解题通法**

判断点是否在反比例函数图象上的方法：

对于反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，其比例系数 $k$ 为非零常数，且 $k=xy$，所以该反比例函数图象上点的横、纵坐标之积都等于 $k$，这样可以迅速地从选项中找到符合要求的正确答案. 也可以先求出函数表达式，再将选项中点的横坐标作为 $x$ 的值代入表达式，计算出 $y$ 的值，看点的纵坐标是否与 $y$ 值相等.

挑战·高分

**另解**

图象法：

$\because k<0$，$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象.

在第二、四象限，如图 1.2-6 所示. 在图中描出符合条件的三个点，观察图象可知 $y_3<y_1<y_2$.

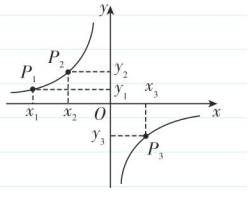



图 1.2-6

特殊值法：

设该反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$. 取满足 $x_1<x_2<0<x_3$ 的三个特殊值 $x_1=-2$，$x_2=-1$，$x_3=1$，则 $y_1=1$，$y_2=2$，$y_3=-2$，$\therefore y_3<y_1<y_2$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度▶ 3 利用对称法求与对称点坐标有关的式子的值

**例 7** 如图 1.2-7 所示，直线 $y=kx$（$k<0$）与双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点，则 $3x_1y_2-8x_2y_1$ 的值为（　　）

A. −5　　B. −10　　C. 5　　D. 10

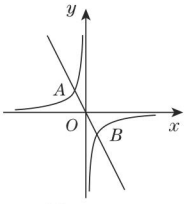


图 1.2-7

**解题秘方：** 紧扣“双曲线与正比例函数图象的交点关于原点对称”这一特征求解.

**解：** 根据对称性，当正比例函数的图象和反比例函数的图象相交时，交点关于原点对称，

$\therefore x_1=-x_2$，$y_1=-y_2$. 又$\because x_2y_2=-2$，

$\therefore 3x_1y_2-8x_2y_1=3\cdot(-x_2)\cdot y_2-8x_2\cdot(-y_2)=5x_2y_2=5\times(-2)=-10$.

**答案：** B

挑战·高分

解法提醒

反比例函数的图象关于原点对称，正比例函数的图象关于原点对称，因此反比例函数的图象和正比例函数的图象相交时，其交点关于原点对称.




## 拔尖角度▶ 4 利用分割法解双函数的面积问题

**例 8** [中考·遂宁] 已知：如图 1.2-8，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=x+b$ 的图象交于点 $A(1, 4)$，点 $B(-4, n)$.

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）求△ $OAB$ 的面积；

（3）直接写出一次函数值大于反比例函数值时自变量 $x$ 的取值范围.

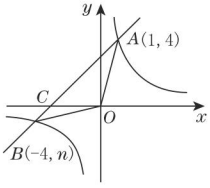


图 1.2-8

**解题秘方：** （1）用“待定系数法”求解；（2）用“分割法”求解；（3）用“图象法”求解.

**解：** （1）把点 $A(1, 4)$ 的坐标分别代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，一次函数 $y=x+b$，得 $\frac{k}{1}=4$，$1+b=4$. 解得 $k=4$，$b=3$.




$\therefore$ 反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$，一次函数的表达式是 $y=x+3$.

（2）如图 1.2-8，设直线 $y=x+3$ 与 $x$ 轴的交点为 $C$. 在 $y=x+3$ 中，当 $x=-4$ 时，$y=-1$，$\therefore B(-4, -1)$.

当 $y=0$ 时，$x+3=0$，

$\therefore x=-3$. $\therefore C(-3, 0)$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{15}{2}$.

（3）$\because B(-4, -1)$，$A(1, 4)$，

$\therefore$ 根据图象可知，当 $x>1$ 或 $-4<x<0$ 时，一次函数值大于反比例函数值.

挑战·高分

方法解读

求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法：

一般可采用割补法将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解，因为三角形一边在坐标轴上时，这边的长易求，这边上的高则为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值，所以求面积的实质就是求点的坐标.

方法解读

一次函数图象在反比例函数图象上方时 x 的取值范围就是使一次函数的函数值大于反比例函数的函数值的自变量的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘**

本节的主要考点是反比例函数的图象、性质及 $k$ 的几何意义，主要考查反比例函数的图象和性质随 $k$ 的正负的变化而变化的规律、以反比例函数图象上的点为顶点的矩形或三角形的面积的求解. 本节知识常与一次函数、二次函数（后边会学到）、方程、三角形、四边形、图形变换和圆（后边会学到）等知识综合考查，题型有选择题、填空题和解答题，难度中等.

## 三年中考兵法

冲刺·满分

### 考法 1 利用反比例函数的性质求待定系数的范围

**例 9** [中考·海南] 如图 1.2-9，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1, 2)$，$B(4, 2)$，$C(4, 4)$. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象与 $\triangle ABC$ 有交点，则 $k$ 的取值范围是（　　）

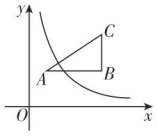



图 1.2-9

A. $1 \leqslant k \leqslant 4$　　B. $2 \leqslant k \leqslant 8$

C. $2 \leqslant k \leqslant 16$　　D. $8 \leqslant k \leqslant 16$

**试题评析：** 本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数图象上点的坐标特点是解答此题的关键.

**解：** 易知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，

$\therefore$ 当反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A$ 时 $k$ 最小，经过点 $C$ 时 $k$ 最大，

$\therefore k_{最小}=1\times 2=2$，$k_{最大}=4\times 4=16$，

$\therefore 2 \leqslant k \leqslant 16$.

**答案：** C

解法提醒

由于△ABC为直角三角形，且两直角边BC，AB分别与x轴，y轴垂直，因此△ABC边上所有点中，点A的横、纵坐标的积最小，点C的横、纵坐标的积最大.

### 考法 2 利用反比例函数中 $k$ 的几何性质求几何中的最值问题

**例 10** 如图 1.2-10，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象与边长是 6 的正方形 $OABC$ 的两边 $AB$，$BC$ 分别相交于 $M$，$N$ 两点. $\triangle OMN$ 的面积为 10. 若动点 $P$ 在 $x$ 轴上，则 $PM+PN$ 的最小值是（　　）

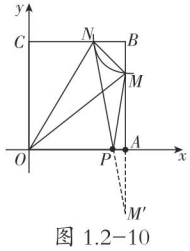



图 1.2-10

A. $6\sqrt{2}$　　B. 10

C. $2\sqrt{26}$　　D. $2\sqrt{29}$

思路点拨

由正方形OABC的边长是6，得到点M的横坐标和点N的纵坐标均为6，求得$M\left(6, \frac{k}{6}\right)$，$N\left(\frac{k}{6}, 6\right)$，根据三角形的面积列方程求出k，可得到M(6, 4)，N(4, 6)，作M关于x轴的对称点M′，连接NM′交x轴于P，



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**试题评析：**本题考查了反比例函数的系数 $k$ 的几何性质．正确构造“两点一线”型最小值的基本图形是解题的关键．

**解：**由题知 $k>0$，∵正方形 $OABC$ 的边长是 6，

∴点 $M$ 的横坐标和点 $N$ 的纵坐标均为 6，

∴ $M\left(6,\ \frac{k}{6}\right)$，$N\left(\frac{k}{6},\ 6\right)$，∴ $BN=6-\frac{k}{6}$，$BM=6-\frac{k}{6}$．

∵△ $OMN$ 的面积为 10，∴ $6\times6-\frac{k}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\times\left(6-\frac{k}{6}\right)^2=10$，

∴ $k=24$（$k=-24$ 舍去），∴ $M(6,\ 4)$，$N(4,\ 6)$．

如图 1.2−10，作 $M$ 关于 $x$ 轴的对称点 $M'$，连接 $NM'$ 交 $x$ 轴于 $P$，则 $NM'$ 为 $PM+PN$ 的最小值，

易知 $AM=AM'=4$，∴ $BM'=10$．

又∵ $BN=2$，∠ $B=90°$，

∴ $NM'=\sqrt{BM'^2+BN^2}=\sqrt{10^2+2^2}=2\sqrt{26}$．

**答案：**C

则 $NM'$ 为 $PM+PN$ 的最小值，根据勾股定理即可求得 $NM'$ 的长．

## 考法 3 利用反比例函数图象与一次函数图象的交点解相关问题

**例 11** ［中考·北京］如图 1.2−11，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象与直线 $y=x-2$ 交于点 $A(3,\ m)$．

（1）求 $k$，$m$ 的值；

（2）已知点 $P(n,\ n)$（$n>0$），过点 $P$ 作平行于 $x$ 轴的直线，交直线 $y=x-2$ 于点 $M$，过点 $P$ 作平行于 $y$ 轴的直线，交函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象于点 $N$．

①当 $n=1$ 时，判断线段 $PM$ 与 $PN$ 的数量关系，并说明理由；

②若 $PN\geqslant PM$，结合函数的图象，直接写出 $n$ 的取值范围．

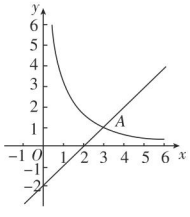



图 1.2−11

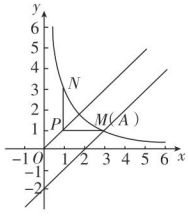



图 1.2−12

**试题评析：**本题考查反比例函数与一次函数的综合问题，解题的关键是求出反比例函数与一次函数的表达式，本题属于基础题型．

**解：**（1）将 $A(3,\ m)$ 的坐标代入 $y=x-2$，

得 $m=3-2=1$，∴ $A(3,\ 1)$，

将 $A(3,\ 1)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=3\times1=3$．

（2）① $PM=PN$．理由：当 $n=1$ 时，$P(1,\ 1)$，

解法提醒

- 将 A 点的坐标代入 $y=x-2$ 中即可求出 $m$ 的值，然后将 A 点的坐标代入反比例函数中即可求出 $k$ 的值．
- ①当 $n=1$ 时，分别求出 M，N 两点的坐标即可求出 PM 与 PN 的关系；②由题意可知 P 的坐标为 $(n,\ n)$，由于 $PN\geqslant PM$，从而可知 $PN\geqslant2$，根据图象可求出 $n$ 的范围．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

令 $y=1$，代入 $y=x-2$，得 $x-2=1$，

$\therefore x=3$，$\therefore M(3,1)$，

$\therefore PM=2$，令 $x=1$，代入 $y=\dfrac{3}{x}$，得 $y=3$，

$\therefore N(1,3)$，$\therefore PN=2$ $\therefore PM=PN$.

②如图 1.2-12，$0<n\leqslant 1$ 或 $n\geqslant 3$.

### 考法 4 利用反比例函数图象与一次函数图象的交点解几何综合问题

**例 12** ［中考·山西］如图 1.2-13，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 $O$ 与坐标原点重合，其边长为 2，点 $A$，点 $C$ 分别在 $x$ 轴，$y$ 轴的正半轴上，函数 $y=2x$ 的图象与 $CB$ 交于点 $D$，函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq 0$）的图象经过点 $D$，与 $AB$ 交于点 $E$，与函数 $y=2x$ 的图象在第三象限内交于点 $F$，连接 $AF$，$EF$.

（1）求函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的表达式，并直接写出 $E$，$F$ 两点的坐标；

（2）求 $\triangle AEF$ 的面积.

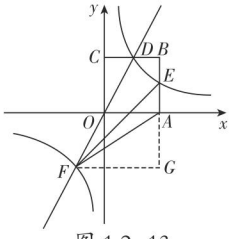



图 1.2-13

**试题评析：**本题主要考查了待定系数法求函数表达式，以及正方形的性质.

**解：**（1）∵正方形 $OABC$ 的边长为 2，

∴点 $D$ 的纵坐标为 2，

将 $y=2$ 代入 $y=2x$，得 $x=1$，

∴点 $D$ 的坐标为（1，2）.

∵函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过点 $D$，$\therefore 2=\dfrac{k}{1}$，解得 $k=2$，

∴函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的表达式为 $y=\dfrac{2}{x}$. $E(2,1)$，$F(-1,-2)$.

（2）如图 1.2-13，过点 $F$ 作 $FG\perp AB$，与 $BA$ 的延长线交于点 $G$，

∵ $E(2,1)$，$F(-1,-2)$，

∴ $AE=1$，$FG=2-(-1)=3$，

∴ $\triangle AEF$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AE\cdot FG=\dfrac{1}{2}\times 1\times 3=\dfrac{3}{2}$.

解法提醒

- 根据正方形的性质，以及函数图象上点的坐标特征可求出点 D 的坐标为（1，2），根据待定系数法可求出反比例函数表达式，进一步得到 E，F 两点的坐标；
- 过点 F 作 FG ⊥ AB，与 BA 的延长线交于点 G，求出 AE=1，FG=3，再根据三角形面积公式可求出△ AEF 的面积.






关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 反比例函数中比例系数 $k$ 的妙用

反比例函数中比例系数 $k$ 对反比例函数起决定性作用，例如：①确定了 $k$ 的值就确定了反比例函数的表达式；②$k$ 的正负性决定双曲线所在的象限；③$|k|$ 越大，双曲线离坐标原点越远，等等．反比例函数的系数 $k$ 还有其他几种妙用，在中考中经常出现．

（1）比例系数 $k$ 代表两个变量的乘积是定值；反之，若两个变量的乘积是定值，也可断定两个变量是反比例函数关系．例如：

①［中考·无锡］若点 $A(3,-4)$，$B(-2,m)$ 在同一个反比例函数的图象上，则 $m$ 的值为（　　）

A. 6　　B. −6　　C. 12　　D. −12

点拨：利用 $k$ 的不变性求解．

②［中考·武汉］科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节，科学家把一种珍奇的植物分别放在不同温度的环境中，经过一天后，测试出这种植物高度的增长情况（如下表）：

| 温度 $x$/℃ | … | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | 4.5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 植物每天高度增长量 $y$/mm | … | 41 | 49 | 49 | 41 | 25 | 19.75 | … |

由这些数据，科学家推测出植物每天高度增长量 $y$ 是温度 $x$ 的函数，且这种函数是反比例函数、一次函数和二次函数（以后会学到）中的一种．请你选择一种适当的函数，求出它的函数关系式，并简要说明不选择另外两种函数的理由．

点拨：表中有 $x=0$ 的数据，可判断不是反比例函数．

（2）顶点在反比例函数图象上的图形的面积与 $k$ 之间有密切的关系．如图 1.2−14，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点 $P(x,y)$ 分别作 $x$ 轴、$y$ 轴的垂线段 $PM$，$PN$，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$．∵ $y=\frac{k}{x}$，∴ $xy=k$．∴ $S=|k|$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点作 $x$ 轴、$y$ 轴的垂线，所得的矩形面积为 $|k|$．过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点 $E$ 作 $EF$ 垂直于 $y$ 轴，垂足为 $F$，连接 $EO$，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$．

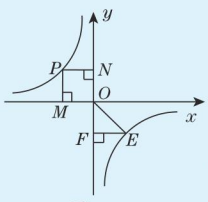


图 1.2−14

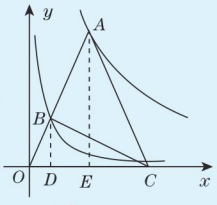


图 1.2−15

①在解决与反比例函数图象有关的图形面积问题时，通常把它转化为顶点在图象上的三角形或矩形的面积问题．例如：

［中考·宁波］如图 1.2−15，点 $A$ 为函数 $y=\frac{9}{x}$（$x>0$）的图象上一点，连接 $OA$，交函数 $y=\frac{1}{x}$（$x>0$）的图象于点 $B$，点 $C$ 是 $x$ 轴上一点，且 $AO=AC$，则△ $ABC$ 的面积为_____．

点拨：如图 1.2−15，分别过点 $A$，$B$ 作 $x$ 轴的垂线，垂足分别为 $E$，$D$，巧妙利用 $k$ 的几何性质解决．

②已知某个图形的面积，求 $k$ 的值时，将这个图形的面积转化为顶点在反比例函数图象上的几个三角形或矩形的面积之和（差），然后用含 $k$ 的代数式表示出面积，建立方程求出 $k$ 的值．例如：

［中考·深圳］如图 1.2−16，Rt△ $ABC$ 的直角边 $BC$ 在 $x$ 轴的负半轴上，斜边 $AC$ 上的中线 $BD$ 的反向延长线交 $y$ 轴的正半轴于点 $E$，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x<0$）的图象经过点 $A$．若 $S_{\triangle BEC}=8$，则 $k=$_____．

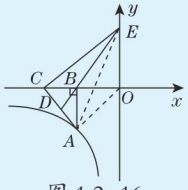


图 1.2−16

点拨：如图 1.2−16，连接 $AE$，$AO$，将△ $BEC$ 的面积转化为△ $AOB$ 的面积．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**1.**[中考·凉山州]已知函数 $y=(m+1)\cdot x^{m^2-5}$ 是反比例函数，且图象在第二、四象限内，则 $m$ 的值是（　　）

A. 2　　B. $-2$　　C. $\pm 2$　　D. $-\frac{1}{2}$

**2.**[中考·黑龙江]关于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列说法正确的是（　　）

A. 图象过点（1，2）

B. 图象在第一、三象限

C. 当 $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小

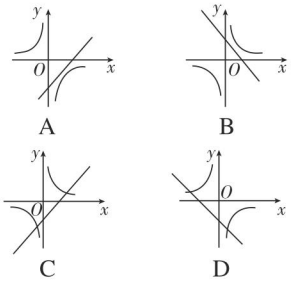
D. 当 $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大

**3.**[中考·黑龙江]已知反比例函数 $y=\frac{5}{x}$，当 $1<x\leqslant 4$ 时，$y$ 的最大整数值是（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

**4.**[中考·潍坊]一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{a-b}{x}$，其中 $ab<0$，$a$，$b$ 为常数，它们在同一坐标系中的图象可以是（　　）




A　　B

C　　D

**5.**[中考·天津]若点 $A(-3,y_1)$，$B(-2,y_2)$，$C(1,y_3)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象上，则 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 的大小关系是（　　）

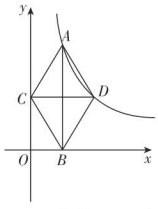
A. $y_2<y_1<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_1<y_2<y_3$　　D. $y_3<y_2<y_1$

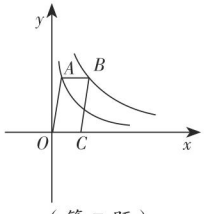
**6.**[中考·衢州]如图，在直角坐标系中，点 $A$ 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，$AB\perp x$ 轴于点 $B$，$AB$ 的垂直平分线与 $y$ 轴交于点 $C$，与函数 $y=\frac{4}{x}$（$x>0$）的图象交于点 $D$，连接 $AC$，$CB$，$BD$，$DA$，则四边形 $ACBD$ 的面积等于（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $4\sqrt{3}$




（第6题）



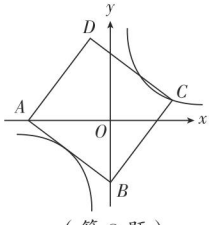

（第7题）

**7.**[中考·龙东]如图，在平面直角坐标系中，点 $O$ 为坐标原点，平行四边形 $OABC$ 的顶点 $A$ 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 上，顶点 $B$ 在反比例函数 $y=\frac{5}{x}$ 上，点 $C$ 在 $x$ 轴的正半轴上，则平行四边形 $OABC$ 的面积是（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$

C. 4　　D. 6

**8.**[中考·威海]如图，正方形 $ABCD$ 的边长为5，点 $A$ 的坐标为（$-4$，0），点 $B$ 在 $y$ 轴上，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象过点 $C$，则该反比例函数的表达式为（　　）




（第8题）

A. $y=\frac{3}{x}$　　B. $y=\frac{4}{x}$

C. $y=\frac{5}{x}$　　D. $y=\frac{6}{x}$

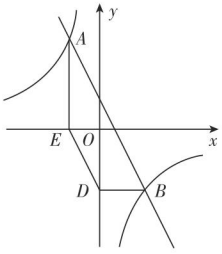


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**9.** [**中考·黄冈**]已知：如图，一次函数 $y=-2x+1$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象有两个交点 $A(-1,m)$ 和 $B$，过点 $A$ 作 $AE\perp x$ 轴，垂足为点 $E$；过点 $B$ 作 $BD\perp y$ 轴，垂足为点 $D$，且点 $D$ 的坐标为 $(0,-2)$，连接 $DE$.

（1）求 $k$ 的值；

（2）求四边形 $AEDB$ 的面积.

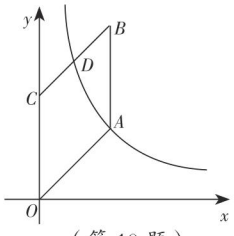



（第 9 题）

**10.** [**中考·常州**]如图，在 $\square OABC$ 中，$OA=2\sqrt{2}$，$\angle AOC=45°$，点 $C$ 在 $y$ 轴上，点 $D$ 是 $BC$ 的中点，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 $A$, $D$.

（1）求 $k$ 的值；

（2）求点 $D$ 的坐标.

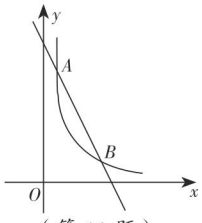



（第 10 题）

**11.** [**中考·巴中**]如图，一次函数 $y_1=k_1x+b$（$k_1$，$b$ 为常数，$k_1\neq 0$）的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$（$k_2\neq 0$，$x>0$）的图象交于点 $A$（$m$，8）与点 $B$（4，2）.

（1）求一次函数与反比例函数的表达式.

（2）根据图象说明，当 $x$ 为何值时，$k_1x+b-\frac{k_2}{x}<0$.

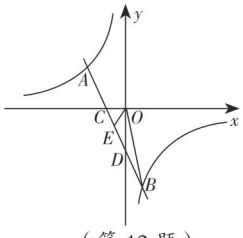



（第 11 题）

**12.** [**中考·南充**]双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k$ 为常数，且 $k\neq 0$）与直线 $y=-2x+b$ 交于 $A$（$-\frac{1}{2}m$，$m-2$），$B$（1，$n$）两点.

（1）求 $k$ 与 $b$ 的值；

（2）如图，直线 $AB$ 交 $x$ 轴于点 $C$，交 $y$ 轴于点 $D$，若 $E$ 为 $CD$ 的中点，求 $\triangle BOE$ 的面积.




（第 12 题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.3 反比例函数的应用

**核心知识**

- 实际问题中的反比例函数
- 几何图形中的反比例函数
- 跨学科中的反比例函数

**知识链接**

反比例函数的应用
- 步骤：审、设、列、写、解
- 常见类型
  - 数学问题
  - 跨学科问题
  - 实际问题

## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 建立反比例函数模型解实际问题

1. 在生活与生产中，如果某些问题的两个量成反比例关系，那么可以根据这种关系建立反比例函数模型，再利用反比例函数的有关知识解决实际问题.

运用反比例函数解决实际问题时常用的两种思路：

（1）通过问题提供的信息，明确变量之间的函数关系，设出相应的函数表达式，再根据题目条件确定函数表达式中的待定系数的值；

（2）已知反比例函数模型的表达式，运用反比例函数的图象及性质解决问题.

**2. 建立反比例函数表达式常用的两种方法：**

（1）**待定系数法：**

若题目提供的信息中明确此函数是反比例函数，则设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq 0$），再求出 $k$ 的值；

（2）**列方程法：**

若题目所给的信息中两个变量之间的函数关系不明确，通常列出关于两个变量的方程，通过变形得到反比例函数表达式.

**3. 用反比例函数解决实际问题的一般步骤：**

（1）**审**：审清题意，找出题目中的常量、变量；

（2）**设**：根据常量、变量间的关系，设出函数表达式，待定的系数用字母表示；

（3）**列**：由题目中的已知条件列出方程，求出待定系数；

（4）**写**：写出函数表达式，并注意表达式中自变量的取值范围；

（5）**解**：用函数的图象和性质去解决实际问题.

提分·必记

**特别提醒**

利用反比例函数解决实际问题时应注意：

1. 要理清题目中的常量与变量及其基本数量关系，将实际问题抽象成数学问题，建立数学模型；
2. 要分清自变量和因变量，以便写出正确的函数表达式，结合问题的实际意义，确定自变量的取值范围；
3. 要熟练掌握反比例函数的意义、图象和性质，特别是图象，要做到数形结合，这样有利于分析和解决问题.

**活学巧用**

反比例函数应用广，
解决思路有两种，
建立模型列方程；
求表达式两方法，
待定系数与变形；
解决问题五步骤，
审设列写后再解.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 考向▶利用反比例函数模型解决实际应用问题的常用方法

### 方法 1：利用待定系数法求表达式在实际中的应用

**例 1** 某校科技小组进行野外考察，途中遇到一片十几米宽的烂泥湿地，为了安全、迅速地通过这片湿地，他们沿着前进路线铺了若干块木板，构筑成一条临时通道，木板对地面的压强 $p$（单位：Pa）是木板面积 $S$（单位：$m^2$）的反比例函数，其图象如图 1.3-1.

（1）请写出这一函数表达式和自变量的取值范围.

（2）当木板面积为 0.2 $m^2$ 时，压强是多少？

（3）如果要求压强不超过 6 000 Pa，木板面积至少要多大？

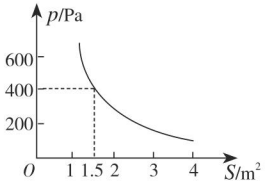



图 1.3-1

**解题秘方：** 紧扣图象上点的坐标，运用待定系数法求反比例函数表达式解决实际问题.

**解：**（1）设函数表达式为 $p=\frac{k}{S}(S>0,\ k\neq 0)$.

将点（1.5,400）的坐标代入上式，得 $400=\frac{k}{1.5}$，

解得 $k=600$,

$\therefore$ 函数表达式为 $p=\frac{600}{S}$（$S>0$）.

（2）当 $S=0.2\ m^2$ 时，$p=\frac{600}{0.2}=3\,000$（Pa）.

即当木板面积为 0.2 $m^2$ 时，压强是 3 000 Pa.

（3）由题意知，$\frac{600}{S}\leqslant 6\,000$,

$\because S>0$,

$\therefore S\geqslant 0.1$.

即如果要求压强不超过 6 000 Pa，木板面积至少要 0.1 $m^2$.

### 方法 2：利用列方程法求表达式在实际中的应用

**例 2** 某机床加工一批机器零件，如果每小时加工 30 个，那么 12 小时可以完成.

（1）设每小时加工 $x$ 个零件，所需时间为 $y$ 小时，写出 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式；

（2）若要在一个工作日（8 小时）内完成，则每小时要比原来多加工几个零件？

提分·秘诀

规律点拨

固体压强($p$)=压力(F)/受力面积(S)，当压力(F)一定时，压强($p$)与受力面积(S)是反比例函数关系.



爱学习的孩子，美呀！

知识储备

工程问题中的反比例函数关系：

工作总量=工作效率×工作时间，即当工作总量一定时，工作时间与工作效率成反比例.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解题秘方：**紧扣工程问题中“工作量与工作时间、工作效率”间的关系列方程，变形求出函数表达式.

**解：**（1）由题意得，$xy=30\times12=360$，

所以函数表达式为 $y=\dfrac{360}{x}(x>0)$.

（2）当 $y=8$ 时，代入得 $8=\dfrac{360}{x}$，

解得 $x=45$.

所以 $45-30=15$（个）.

所以若要在一个工作日（8 小时）内完成，则每小时要比原来多加工 15 个零件.

方法点拨

当实际问题中没有明显的形式给出反比例函数关系时，可通过列方程的方法，经过变形求出反比例函数表达式再解决其他相关问题.

## 点方法·拨技巧 提高分

### 拔尖角度 1 利用分类验证法解反比例函数有关的方案问题

挑战·高分

**例 3** 如图 1.3-2，科技小组准备用材料围建一个面积为 60 $m^2$ 的矩形科技园 $ABCD$，其中一边 $AB$ 靠墙，墙长为 12 m. 设 $AD$ 的长为 $x$ m，$DC$ 的长为 $y$ m.

（1）求 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式；

（2）若围成的矩形科技园 $ABCD$ 的三边材料总长不超过 26 m，边 $AD$ 和 $DC$ 的长都是整数，求出满足条件的所有围建方案.

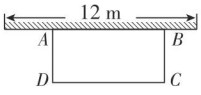



图 1.3-2

**解题秘方：**利用矩形的面积公式建立模型，求函数关系式；用“分类验证法”求围建方案.

**解：**（1）由题意，得 $xy=60$，即 $y=\dfrac{60}{x}$.

$\therefore$ $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式为 $y=\dfrac{60}{x}$.

（2）$\because$ $y=\dfrac{60}{x}$，且 $x$，$y$ 都是正整数，

$\therefore$ $x$ 可取 1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60.

$\because$ $2x+y\leqslant26$，$0<y\leqslant12$，

$\therefore$ 符合条件的有：$x=5$ 时，$y=12$；

$x=6$ 时，$y=10$；

$x=10$ 时，$y=6$.

**答：**满足条件的所有围建方案：$AD=5$ m，$DC=12$ m 或 $AD=6$ m，$DC=10$ m 或 $AD=10$ m，$DC=6$ m.

思路点拨

根据几何公式确定函数关系式的思路：

当问题中涉及几何图形时，可根据图形的面积公式或体积公式列出等式，通过变形得到函数关系式.

避免因对 60 的所有因数列举不全而导致漏解.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度▶ 2 利用待定系数法解反比例函数的应用问题

挑战·高分

### 应用1：反比例关系在生活中的应用

**例4** 某地区上一年度每度电价格为0.8元，年用电量为1亿度，本年度计划将电价调到0.55~0.75元（不包括端点值）．经测算，若电价调至$x$元，则本年度新增用电量$y$（亿度）与（$x-0.4$）（元）成反比例，且当$x=0.65$时，$y=0.8$.

（1）求$y$与$x$之间的函数表达式.

（2）若每度电的成本价为0.3元，当电价调至0.72元时，本年度电力部门的收益是多少元？［收益＝用电量×（实际电价－成本价）］

特别提醒

这里的$y$与$x-0.4$成反比例，用待定系数法求出的是$y$与$x$之间的函数表达式，而不是反比例函数表达式.

**解题秘方：** 紧扣反比例关系用待定系数法设形如$y=\frac{k}{x}$的函数表达式求解.

**解：**（1）设$y$与$x$之间的函数表达式为$y=\frac{k}{x-0.4}(k\neq 0)$.

因为当$x=0.65$时，$y=0.8$，

所以$k=(x-0.4)y=(0.65-0.4)\times 0.8=0.2$.

所以$y=\frac{0.2}{x-0.4}$，

即$y=\frac{1}{5x-2}(0.55<x<0.75)$.

（2）当电价调至0.72元时，新增用电量$y=\frac{1}{5\times 0.72-2}=\frac{1}{1.6}=0.625$（亿度），

则本年度用电量为$1+0.625=1.625$（亿度）$=1.625\times 10^8$（度）.

所以$(0.72-0.3)\times 1.625\times 10^8=6.825\times 10^7$（元）.

所以当电价调至0.72元时，本年度电力部门的收益是$6.825\times 10^7$元.

### 应用2：反比例关系在跨学科中的应用

**例5** 某闭合电路中，其电压恒定，电流$I$（A）与电阻$R$（Ω）成反比例函数关系，其图象如图1.3-3所示，根据图象回答下列问题.

（1）写出电流$I$与电阻$R$之间的函数关系式；

（2）如果一个用电器的电阻为5 Ω，其允许通过的最大电流是1 A，那么这个用电器接在这个闭合电路中，会不会被烧毁？请说明理由；

（3）若允许通过的电流不超过4 A，那么电阻$R$的取值应该控制在什么范围？

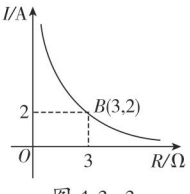


图1.3-3

知识储备

在电学中，当电压$U$一定时，闭合电路的电流$I$与电阻$R$之间是反比例函数关系，即：电流（$I$）＝$\frac{\text{电压}(U)}{\text{电阻}(R)}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解题秘方：**紧扣“电压恒定，电流和电阻成反比例函数关系”用待定系数法求反比例函数关系式，并结合函数关系式求解.

**解：**（1）设 $I=\frac{k}{R}$，由图象过点 $B(3,2)$，

得 $2=\frac{k}{3}$，解得 $k=6$. 即函数关系式为 $I=\frac{6}{R}$.

（2）会被烧毁. 理由：由（1）知，闭合电路的电压恒为 6 V，该用电器接到这个闭合电路中，通过的电流为 $\frac{6}{5}=1.2$（A），大于此用电器允许通过的最大电流 1 A，所以该用电器接在这个闭合电路中，会被烧毁.

（3）由 $I=\frac{6}{R}$，可知当 $I=4$ 时，$R=1.5$，

所以电阻 $R$ 大于或等于 1.5 Ω.

另解

在反比例函数 $I=\frac{k}{R}$ 中，$k$ 的值等于反比例函数图象上任意一点的横坐标与纵坐标的乘积，即 $k=3\times2=6$.

也可由 $R>0$，$\frac{6}{R}\leqslant4$，即 $4R\geqslant6$，解得 $R\geqslant1.5$.

## 拔尖角度▶ 3 利用挖掘关系法解反比例函数的应用问题

挑战·高分

### 应用 1：表格信息中含反比例关系在实际中的应用

**例 6** 某商场出售一批进价为 2 元的贺卡，在市场销售中发现，此贺卡的日销售单价 $x$（单位：元）与日销售量 $y$（单位：张）之间有如下关系：

| 日销售单价 $x$/ 元 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 日销售量 $y$/ 张 | 20 | 15 | 12 | 10 |

（1）确定 $y$ 与 $x$ 之间的函数表达式；

（2）设销售此贺卡的日销售利润为 $w$ 元，试求 $w$ 与 $x$ 之间的函数表达式. 若物价局规定该贺卡售价最高不超过 10 元/张，请你求出日销售单价定为多少时，才能获得最大日销售利润.

思路点拨

- 由表格确定两个变量之间的函数关系是否为反比例函数关系，其思路是观察对应数据的乘积是否相等，若乘积相等，则是反比例函数关系；否则，不是反比例函数关系.
- 利用表格中的一组数据求出反比例函数的表达式后，还要将其他各组数据代入进行验证.

**解题秘方：**（1）紧扣“两个变量的对应值的乘积为同一常数，则这两个变量成反比例”求函数表达式；（2）紧扣“被除数一定，除数越大、商越小及被减数一定，减数越小、差越大”进行解答.

**解：**（1）根据每组数据之积均为 60，猜测 $y$ 与 $x$ 成反比例函数关系.

设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，把 $x=3$，$y=20$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=60$，

$\therefore y=\frac{60}{x}(x\geqslant2)$.

把 $x=4$，$y=15$；$x=5$，$y=12$；$x=6$，$y=10$ 分别代入上式均成立.

$\therefore y$ 与 $x$ 之间的函数表达式为 $y=\frac{60}{x}(x\geqslant2)$.

特别提醒

表中的每一组对应值都必须符合函数 $y=\frac{60}{x}$ 才能说明 $y$ 是 $x$ 的反比例函数.

（2）$w=(x-2)y=(x-2)\cdot\frac{60}{x}=60-\frac{120}{x}(2\leqslant x\leqslant10)$.

当 $x=10$ 时，$w$ 有最大值.

即当日销售单价定为 10 元时，才能获得最大日销售利润.

特别提醒

在 $w=60-\frac{120}{x}(2\leqslant x\leqslant10)$ 中，$\because w$ 随着 $x$ 的增大而增大，$\therefore$ 当 $x=10$ 时，$w$ 有最大值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

### 应用 2：图象信息中含反比例关系在实际中的应用

**例 7** 某汽车销售商推出分期付款购车促销活动，支付首付款后，余额要在 30 个月内结清，不计算利息．王先生在活动期间购买了价格为 12 万元的汽车，交了首付款后平均每个月付款 $y$ 万元，$x$ 个月结清．$y$ 与 $x$ 的函数图象如图 1.3-4 所示，根据图象回答下列问题．

（1）确定 $y$ 与 $x$ 的函数表达式，并求出首付款的数目．

（2）王先生若用 20 个月结清，平均每个月应付多少万元？

（3）如果打算每个月付款不超过 4 000 元，王先生至少要几个月才能结清余额？

另解

由“每个月付款数×月数＝余额总数”、余额总数不变，可知 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，可设 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$），由图象信息求出 $k$ 值，再由“总价－余额总数＝首付款”求出首付款．

**解题秘方：** 紧扣“函数图象是双曲线的一支，说明 $y$ 与 $x$ 成反比例函数关系”用待定系数法求函数表达式，再结合反比例函数的性质进行解答．

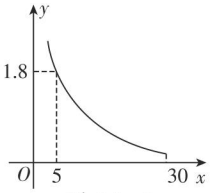


图 1.3-4

**解：**（1）由题意知 $y$ 是 $x$ 的反比例函数，因此可设 $y$ 与 $x$ 的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$．

∵函数图象经过点（5，1.8），∴ $1.8=\frac{k}{5}$，$k=9$，

∴ $y=\frac{9}{x}(0\leqslant x\leqslant30)$，∴余额为 9 万元，

∴首付款为 12−9=3（万元）．

要注意实际问题中自变量的取值范围．

（2）把 $x=20$ 代入 $y=\frac{9}{x}$，得 $y=\frac{9}{20}=0.45$．

∴平均每个月应付 0.45 万元．

（3）根据题意，月付款额最大为 4 000 元，即 0.4 万元．

把 $y=0.4$ 代入 $y=\frac{9}{x}$，得 $0.4=\frac{9}{x}$，$x=22.5$．

由反比例函数的性质知，对于 $y=\frac{9}{x}$（$0\leqslant x\leqslant30$），$y$ 随 $x$ 的增大而减小，即 $x$ 的最小值为 22.5，因此王先生至少要 23 个月才能结清余额．

## 拔尖角度▸ 4 利用分段法解双函数的应用问题

挑战·高分

**例 8** 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个程序，即需要将材料煅烧到 800 ℃，然后停止煅烧进行锻造操作．如图 1.3-5 所示，煅烧时，温度 $y$（℃）与时间 $x$（min）成一次函数关系；锻造时，温度 $y$（℃）与时间 $x$（min）成反比例函数关系．已知该材料初始温度是 32 ℃，第 8 min 时，材料温度降为 600 ℃．

（1）分别求出材料煅烧和锻造时 $y$ 与 $x$ 的函数表达式，并且写出自变量 $x$ 的取值范围；

解法提醒

反比例函数与其他函数的综合，往往涉及函数表达式的求解、交点坐标以及面积等问题，在解决此类问题时，要注意以下几点：

- 对于特殊的点，如两个函数图象的交点、



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）若根据工艺要求，锻造期间当材料温度低于 480 ℃时，须停止操作，那么锻造的操作时间有多长？

**解题秘方：**（1）根据点 $C$ 的坐标可求得锻造阶段的函数表达式，进而可确定点 $B$ 的坐标，根据点 $A$，$B$ 的坐标可求得线段 $AB$ 所在直线对应的函数表达式；

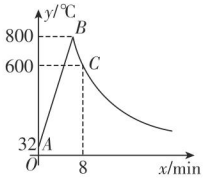


图 1.3-5

（2）求当材料温度为 480℃时的时间与最高温度时的时间的差．

**解：**（1）设锻造时的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

则 $600=\frac{k}{8}$，$\therefore k=4\,800$，$\therefore y=\frac{4\,800}{x}$．当 $y=800$ 时，$x=6$．

$\therefore$ 锻造时的函数表达式为 $y=\frac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$），

点 $B$ 的坐标为（6，800）．设煅烧时的函数表达式为 $y=ax+b$，

则 $\begin{cases}b=32,\\6a+b=800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=128,\\b=32.\end{cases}$

$\therefore$ 煅烧时的函数表达式为 $y=128x+32$（$0\leqslant x<6$）．

（2）在 $y=\frac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$）中，当 $y=480$ 时，$x=\frac{4\,800}{480}=10$，

$10-6=4$（min）．$\therefore$ 锻造的操作时间有 4 min．

函数图象与坐标轴的交点等，通常需要先求出交点坐标；

反比例函数与一次函数相关的问题，通常要先求出反比例函数的表达式，然后利用其表达式求出特殊点的坐标，进而求出一次函数的表达式，再利用它们的性质解决相关问题．

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘**

利用反比例函数解决跨学科性的综合题是近几年中考的热点，题型以选择题、填空题、解答题的形式均有出现．近两年各地中考常把反比例函数与一次函数、二次函数（后边会学到）、几何知识综合起来设计题目，考查反比例函数的图象及性质在实际问题中的应用，体现了数形结合思想和函数思想，这也是初中数学常用的思想方法．

## 三年中考兵法

### 考法 1 利用反比例函数关系与图象信息解实际应用问题

**例 9** ［中考·海南］某村耕地总面积为 50 公顷，且该村人均耕地面积 $y$（单位：公顷）与总人口 $x$（单位：人）的函数图象如图 1.3-6 所示，则下列说法正确的是（　　）

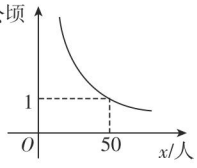


图 1.3-6

A. 该村人均耕地面积随总人口的增多而增多

B. 该村人均耕地面积 $y$ 与总人口 $x$ 成正比例

C. 若该村人均耕地面积为 2 公顷，则总人口有 100 人

D. 当该村总人口为 50 人时，人均耕地面积为 1 公顷

冲刺·满分

思路点拨

由图 1.3-6 易知，人均耕地面积 $y$ 与总人口 $x$ 的函数关系是反比例函数关系，它的图象在第一象限，可推出 A，B 错误．

利用图象信息求出函数表达式，再根据函数表达式求出 $y=2$ 时，$x$ 的值，可判断 C 错误．易知 D 正确．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**试题评析：**本题主要考查了反比例函数的性质、图象、求自变量的值，根据图象找出正确信息是解题的关键.

**解：**由图 1.3−6 易知，人均耕地面积 $y$ 与总人口 $x$ 的函数关系是反比例函数关系，它的图象在第一象限，

∴ $y$ 随 $x$ 的增大而减小，∴ A，B 错误.

设 $y=\frac{k}{x}(k>0,\ x>0)$，把 $x=50$，$y=1$ 代入得 $k=50$，

∴ $y=\frac{50}{x}$，把 $y=2$ 代入上式得 $x=25$，∴ C 错误.

易知 D 正确.

**答案：**D

### 考法 2 利用反比例关系及自变量、函数值的范围解实际中图象应用问题

**例 10** ［中考·宜昌］某学校要种植一块面积为 $100\ m^2$ 的长方形草坪，要求相邻两边长均不小于 5 m，则草坪的一边长 $y$（单位：m）随其邻边长 $x$（单位：m）的变化而变化的图象可能是图 1.3−7 中的（　　）

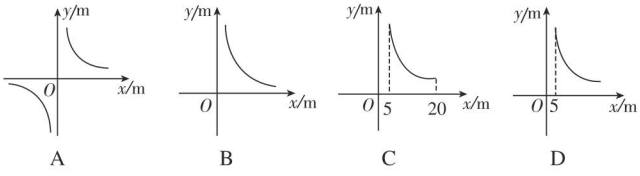



图 1.3−7

**试题评析：**本题考查反比例函数的应用，根据反比例函数表达式确定 $x$ 的取值范围，熟练掌握实际问题的反比例函数图象是解题的关键.

**解：**∵草坪面积为 $100\ m^2$，

∴ $y=\frac{100}{x}$.

∵相邻两边长均不小于 5 m，

∴ $x\geqslant 5$，$y\geqslant 5$，则 $5\leqslant x\leqslant 20$.

**答案：**C

### 考法 3 利用几何体的体积公式解函数图象的应用

**例 11** ［中考·宜昌］如图 1.3−8，市煤气公司计划在地下修建一个容积为 $10^4\ m^3$ 的圆柱形煤气储存室，则储存室的底面积 $S$（单位：$m^2$）与其深度 $d$（单位：m）的函数图象大致是图 1.3−9 中的（　　）

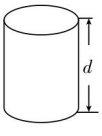



图 1.3−8

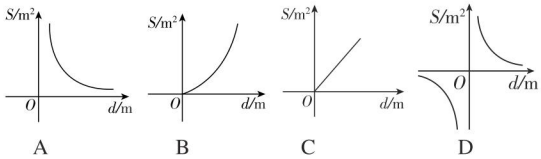



图 1.3−9




**解法提醒**

判定实际应用中的反比例函数图象要注意：

- 图象分支的个数；
- 图象分支中的端点的位置，即需求出自变量、函数值的范围；由 $x\geqslant 5$，$y\geqslant 5$ 及 $y=\frac{100}{x}$，可求出 $5\leqslant x\leqslant 20$，$5\leqslant y\leqslant 20$.

**知识储备**

常见几何图形的相关公式：

1. 三角形面积 = $\frac{1}{2}$ × 底 × 高；
2. 矩形面积 = 长 × 宽；
3. 梯形面积 = $\frac{1}{2}$ ×（上底 + 下底）× 高；
4. 平行四边形面积 = 底 × 高；



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**试题评析**：本题考查了反比例函数的应用及反比例函数的图象，解题的关键是根据自变量的取值范围确定双曲线的具体位置，难度不大．

**解**：由圆柱的体积公式知 $10^4=Sd$，

故储存室的底面积 $S$（单位：$m^2$）与其深度 $d$（单位：m）之间的函数关系式为 $S=\dfrac{10^4}{d}(d>0)$，为反比例函数．

**答案**：A

### 考法 4 利用物理电学的关系式解函数图象的应用

**例 12** ［中考·台州］已知电流 $I$（A）、电压 $U$（V）、电阻 $R$（Ω）之间的关系为 $I=\dfrac{U}{R}$，当电压为定值时，$I$ 关于 $R$ 的函数图象是图 1.3-10 中的（　　）

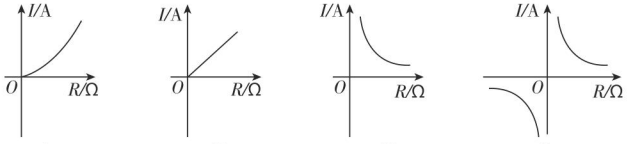



图 1.3-10

**试题评析**：本题考查反比例函数的图象，解题的关键是理解反比例函数的定义，灵活运用所学知识解决问题．

**解**：∵ $I=\dfrac{U}{R}$，电压为定值，

∴ $I$ 关于 $R$ 的函数是反比例函数，且图象在第一象限．

**答案**：C

### 考法 5 利用反比例函数解与一次函数的综合应用

**例 13** ［中考·绍兴］教室里的饮水机接通电源就进入自动程序，开机加热时每分钟上升 10℃，加热到 100℃，停止加热，水温开始下降，此时水温与开机后的时间成反比例关系．直至水温降至 30℃，饮水机关机．饮水机关机后即刻自动开机，重复上述自动程序．若在水温为 30℃时，接通电源后，水温 $y$（℃）和时间 $x$（min）的关系如图 1.3-11，为了在上午第一节下课时（8：45）能喝到不超过 50℃的水，则接通电源的时间可以是当天上午的（　　）

A. 7：20　　B. 7：30

C. 7：45　　D. 7：50

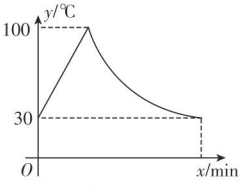



图 1.3-11

**试题评析**：本题主要考查了一次函数及反比例函数的应用，还有时间的讨论问题，同学们在解答时要读懂题意，才不易出错．

5. 菱形面积 = 底 × 高（或菱形面积 = $\dfrac{1}{2}$ × 对角线的积）；
6. 长方体体积 = 长 × 宽 × 高；
7. 柱体体积 = 底面积 × 高．

**知识储备**

物理学科中常见的反比例函数关系：

1. 压强问题：固体压强（$p$）= $\dfrac{\text{压力}(F)}{\text{受力面积}(S)}$，当压力（$F$）一定时，压强（$p$）与受力面积（$S$）成反比例函数关系．
2. 杠杆问题：在杠杆原理中，共有四个变量，如果动力、动力臂已知或阻力、阻力臂已知，那么其余两个变量之间是反比例函数关系．
3. 电压问题：在电学中，当电压一定时，闭合电路的电流 $I$ 与电阻 $R$ 之间是反比例函数关系．

**思路点拨**

第 1 步：求出两个函数的表达式；

第 2 步：求出饮水机完成一个循环周期所需要的时间；

第 3 步：求出每一个循环周期内，水温不超过 50℃的时间段；

第 4 步：结合 4 个选项，逐一进行分析计算，得出结论．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解**：∵开机加热时每分钟上升 10℃，∴从 30℃上升到 100℃需要 7min，

设一次函数关系式为 $y=k_1x+b$，

将（0，30），（7，100）的坐标分别代入 $y=k_1x+b$ 得 $k_1=10$，$b=30$.

∴ $y=10x+30$（$0\leqslant x\leqslant 7$）. 在 $y=10x+30$ 中，令 $y=50$，解得 $x=2$.

设反比例函数关系式为 $y=\frac{k}{x}$，将（7，100）的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $k=700$，∴ $y=\frac{700}{x}$. 将 $y=30$ 代入 $y=\frac{700}{x}$，解得 $x=\frac{70}{3}$.

∴ $y=\frac{700}{x}$（$7\leqslant x\leqslant\frac{70}{3}$）. 令 $y=50$，解得 $x=14$.

∴饮水机的一个循环周期为 $\frac{70}{3}$ min，每一个循环周期内，在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 及 $14\leqslant x\leqslant\frac{70}{3}$ 时间段内，水温不超过 50℃.

逐一分析如下：

选项 A：7：20 至 8：45 有 85min. $85-\frac{70}{3}\times 3=15$（min），位于 $14\leqslant x\leqslant\frac{70}{3}$ 时间段内，故可行；

选项 B：7：30 至 8：45 有 75min. $75-\frac{70}{3}\times 3=5$（min），不在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 及 $14\leqslant x\leqslant\frac{70}{3}$ 时间段内，故不可行；

选项 C：7：45 至 8：45 有 60min. $60-\frac{70}{3}\times 2=\frac{40}{3}\approx 13.3$（min），不在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 及 $14\leqslant x\leqslant\frac{70}{3}$ 时间段内，故不可行；

选项 D：7：50 至 8：45 有 55min. $55-\frac{70}{3}\times 2=\frac{25}{3}\approx 8.3$（min），不在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 及 $14\leqslant x\leqslant\frac{70}{3}$ 时间段内，故不可行.

综上所述，四个选项中，唯有 7：20 符合题意.

**答案**：A

请开始你的表演



## 两年模拟兵法 ☞答案见 243 页

**1.** [中考·广州]一司机驾驶汽车从甲地去乙地，他以平均 80 千米/时的速度用了 4 小时到达乙地，当他按原路匀速返回时，汽车的速度 $v$（千米/时）与时间 $t$（小时）的函数关系式是（　　）

A. $v=320t$　　B. $v=\frac{320}{t}$

C. $v=20t$　　D. $v=\frac{20}{t}$

**2.** [月考·隆回县]某工厂现有原材料 100 吨，每天平均用去 $x$ 吨，这批原材料能用 $y$ 天，则 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式为（　　）

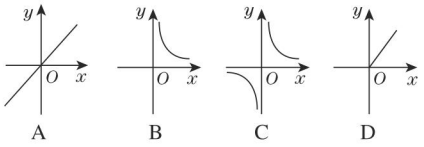
A. $y=100x$　　B. $y=\frac{100}{x}$

C. $y=\frac{x}{2}+100$　　D. $y=100-x$



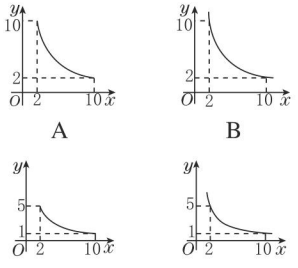
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**3.** [中考·漳州]矩形的面积为4，它的相邻两边长$y$，$x$之间的函数关系用图象大致可表示为（　　）

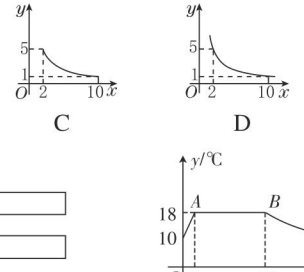



A　　B　　C　　D

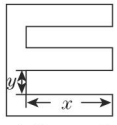
**4.** 一张正方形的纸片，剪去两个一样的小矩形得到一个“E”形图案，如图所示．设小矩形的相邻两边长分别为$x$，$y$，剪去部分的面积为20，若$2 \leqslant x \leqslant 10$，则$y$与$x$的函数图象是（　　）



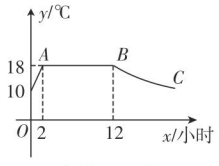

A　　B




C　　D




（第4题）




（第6题）

**5.** [中考·孝感]公元前3世纪，古希腊科学家阿基米德发现了杠杆平衡．后来人们把它归纳为“杠杆原理”，即：阻力 × 阻力臂 = 动力 × 动力臂．小伟欲用撬棍撬动一块大石头，已知阻力和阻力臂分别是1 200 N和0.5 m，则动力$F$（单位：N）关于动力臂$l$（单位：m）的函数表达式正确的是（　　）

A. $F=\dfrac{1\,200}{l}$　　B. $F=\dfrac{600}{l}$

C. $F=\dfrac{500}{l}$　　D. $F=\dfrac{0.5}{l}$

**6.** [模拟·兴庆区]在大棚中栽培新品种的蘑菇，该种蘑菇在18℃的条件下生长最快，因此用装有恒温系统的大棚栽培，如图是某天恒温系统从开启升温到保持恒温及关闭，大棚内温度$y$（℃）随时间$x$（小时）变化的函数图象，其中$BC$段是函数$y=\dfrac{k}{x}$（$k>0$）图象的一部分．若该种蘑菇适宜生长的温度不低于12℃，则这天该种蘑菇适宜生长的时间为（　　）

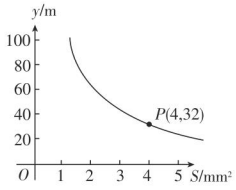
A. 18小时　　B. 17.5小时

C. 12小时　　D. 10小时

**7.** [模拟·钦南区]你吃过拉面吗？实际上在做拉面的过程中就渗透着数学知识：一定体积的面团做成拉面，面条的总长度$y$（m）是面条的粗细（横截面积）$S$（$mm^2$）的反比例函数，其图象如图所示．

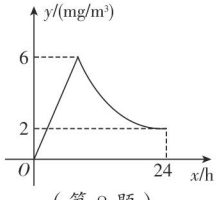
（1）写出$y$与$S$的函数关系式：_____．

（2）当面条粗16 $mm^2$时，面条总长度是_____m．




（第7题）

**8.** 最近的新型冠状病毒夺去了很多人的生命．某公司为了员工的身心健康，在休息日用药熏消毒法进行消毒．已知药物燃烧过程及燃烧完后空气中的含药量$y$（$mg/m^3$）与时间$x$（h）之间的关系如图所示．请你帮助计算一下，当空气中的含药量不低于3 $mg/m^3$时，持续时间可以达到_____h．




（第8题）

**9.** 在研究气体压强和体积关系的物理实验中，一个气球内充满了一定质量的气体，实验中气体温度保持不变，实验人员记录了实验过程中气球内的气体压强$p$（kPa）与气体体积$V$（$m^3$）的数据如下表：

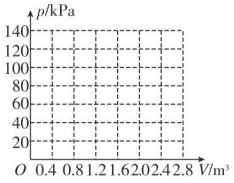
| $V$/$m^3$ | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$/kPa | 120 | 80 | 60 | 48 | 40 |



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）根据表中的数据判断 $p$ 是 $V$ 的_____；（①一次函数，②反比例函数，填序号即可）

（2）确定 $p$ 与 $V$ 的函数关系式，并在如图所示的直角坐标系内画出该函数的大致图象；




（第 9 题）

（3）当气球内的气体压强大于 140 kPa 时，气球将爆炸，为了安全起见，气体的体积 $V$（$m^3$）的取值范围是_____.

**10.** 用洗衣粉洗衣物时，漂洗的次数与衣物中洗衣粉的残留量近似地满足反比例函数关系．寄宿生小红、小敏晚饭后用同一种洗衣粉各自洗一件同样的衣服，漂洗时，小红每次用一盆水（约 10 升），小敏每次用半盆水（约 5 升）．如果她们都用了 5 克洗衣粉，第一次漂洗后，小红的衣服中残留的洗衣粉还有 1.5 克，小敏的衣服中残留的洗衣粉还有 2 克．　**【导学号：7097546】**

（1）请帮助小红、小敏求出各自衣服中洗衣粉的残留量 $y_1$（克），$y_2$（克）与漂洗次数 $x$ 的函数关系式；

（2）当洗衣粉的残留量降至 0.5 克时，便视为衣服漂洗干净，从节约用水的角度来看，你认为谁的漂洗方法值得提倡，为什么？

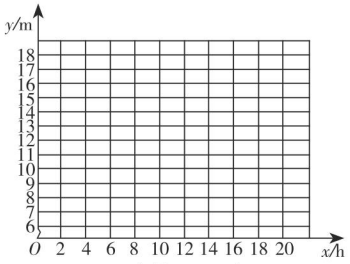
**11.** **[中考·临沂]** 汛期到来，山洪暴发．下表记录了某水库 20 h 内水位的变化情况，其中 $x$ 表示时间（单位：h），$y$ 表示水位高度（单位：m）．当 $x = 8$（h）时达到警戒水位，开始开闸放水．

| $x$/h | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$/m | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14.4 | 12 | 10.3 | 9 | 8 | 7.2 |

（1）在给出的平面直角坐标系中，根据表格中的数据描出相应的点；

（2）请分别求出开闸放水前和放水后最符合表中数据的函数表达式；

（3）据估计，开闸放水后，水位的这种变化规律还会持续一段时间，预测何时水位达到 6 m？




（第 11 题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 反比例函数中的数形结合思想

**荣老师告诉你** 所有的函数都是一个数形结合体，反比例函数也不例外．数形结合思想在反比例函数中主要体现在两个方面：一是借助形的直观性解决函数中点的坐标、比较函数值的大小等问题；二是利用方程思想解决反比例函数图象中有关图形的面积问题．解决问题时要数形相通，灵活应用．

## 一、借助"形"的直观性来解决数学问题，从"形"到"数"的思想的应用

### 应用一 ▶ 利用函数图象的对称性求值

**例 1** ［中考·娄底］如图 1，圆 $O$ 的半径为 2，双曲线的表达式分别为 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=-\frac{1}{x}$，则阴影部分的面积是（　　）

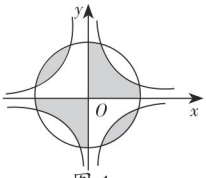


图 1

A. $4\pi$　　B. $3\pi$

C. $2\pi$　　D. $\pi$

**解题秘方：** 紧扣反比例函数图象是中心对称图形，利用中心对称图形的性质解决问题．

**解：** 反比例函数的图象关于原点对称，而易知圆是中心对称图形，故阴影部分的面积可以转化为半圆的面积，$S_{阴影}=\frac{1}{2}\times 4\pi=2\pi$，故选 C.

**答案：** C

**方法点拨：** 反比例函数图象和圆都是中心对称图形，利用中心对称图形的性质将几个阴影部分组合在一起求．

### 应用二 ▶ 利用图形与图象之间的关系求 $k$ 的值

**例 2** ［中考·桂林］如图 2，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象和△$ABC$都在第一象限内，

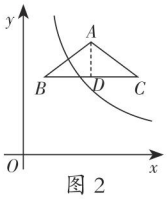


图 2

$AB=AC=\frac{5}{2}$，$BC\parallel x$ 轴，且 $BC=4$，点 $A$ 的坐标为（3，5），若将△$ABC$ 向下平移 $m$ 个单位长度，$A$，$C$ 两点同时落在反比例函数图象上，则 $k$ 的值为_____.

**解：** 如图 2 过点 $A$ 作 $AD$ 垂直 $BC$ 于点 $D$，由 $AB=AC$，可得点 $D$ 是线段 $BC$ 的中点，所以 $DC=BD=4\div 2=2$，则 $AD=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-2^2}=\frac{3}{2}$，把△$ABC$ 向下平移 $m$ 个单位长度，平移后，点 $A$ 对应点的坐标是（3，$5-m$），点 $C$ 对应点的坐标是（2+3，$5-m-\frac{3}{2}$），即坐标为（5，$\frac{7}{2}-m$），由于点 $A$ 和点 $C$ 向下平移 $m$ 个单位长度后对应点同时落在反比例函数的图象上，因此点 $A$ 和点 $C$ 的坐标均适合函数表达式，易得方程 $3(5-m)=5\left(\frac{7}{2}-m\right)$，解得 $m=\frac{5}{4}$．因此平移后点 $A$ 对应点的坐标是（3，$\frac{15}{4}$），因此 $k=3\times\frac{15}{4}=\frac{45}{4}$．

**答案：** $\frac{45}{4}$

**方法点拨：** 图形与图象之间的关系从形上可以直观反映，根据图形上的点在图象上，转化为方程来解决．

### 应用三 ▶ 利用图象位置的高低比较函数值的大小

**例 3** ［中考·宁夏］如图 3，正比例函数 $y_1=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 $A$，$B$ 两点，其中点 $B$ 的横坐标为 $-2$，当 $y_1<y_2$ 时，$x$ 的取值范围是（　　）

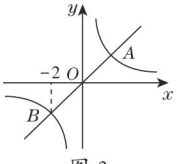


图 3



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

A. $x < -2$ 或 $x > 2$

B. $x < -2$ 或 $0 < x < 2$

C. $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 2$

D. $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$

**解**：∵正比例函数和反比例函数的图象均关于原点 $O$ 对称，且点 $B$ 的横坐标为 $-2$，

∴点 $A$ 的横坐标为 2.

观察函数图象，发现：当 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$ 时，一次函数的图象在反比例函数图象的下方，

∴当 $y_1 < y_2$ 时，$x$ 的取值范围是 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$.

故选 B.

**答案**：B

**方法点拨**：利用函数图象解不等式时，（1）函数图象交点对应的横坐标是分界点；（2）判断函数值谁大谁小就是看谁的图象在上，谁的图象在下，上方的值大于下方的值；（3）注意写不等式的解集时，要满足双方的自变量的取值范围.

## 二、在处理“数”的问题时，要有转化为“形”的意识，用“形”的直观性引发出直觉，从而定位解题方向

### 应用一 ▶ 利用反比例函数中 $k$ 的几何性质求面积

**例 4** [中考·漳州]如图 4，点 $A$，$B$ 是双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 上的点，分别过点 $A$，$B$ 作 $x$ 轴和 $y$ 轴的垂线段. 若图中阴影部分的面积为 2，则两个空白矩形面积的和为_____.

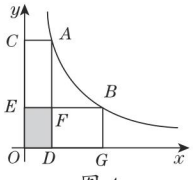



图 4

**解**：由题意，知点 $A$ 在双曲线上，且四边形 $ACOD$ 为矩形，

∴矩形 $ACOD$ 的面积为 6.

∵图中阴影部分的面积为 2，

∴矩形 $ACEF$ 的面积为 4.

同理，可得矩形 $BFDG$ 的面积为 4.

故两个空白矩形面积的和为 8.

**答案**：8

**方法点拨**：一般地，若点 $A$ 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k \neq 0$）上任意一点，$AB \perp x$ 轴于点 $B$，$AC \perp y$ 轴于点 $C$，坐标原点为点 $O$，连接 $AO$，则 $S_{矩形ABOC}=|k|$，$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|k|$（即各面积均为常数）.

### 应用二 ▶ 利用图形的面积求反比例函数中 $k$ 的值

**例 5** [中考·云南]如图 5，位于第一象限的点 $E$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，点 $F$ 在 $x$ 轴的正半轴上，$O$ 是坐标原点. 若 $EO=EF$，$\triangle EOF$ 的面积等于 2，则 $k$ 等于(　　)

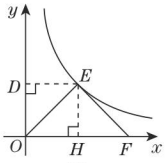



图 5

A. 4　　B. 2

C. 1　　D. $-2$

**解**：如图 5，过 $E$ 作 $ED \perp y$ 轴于点 $D$，过 $E$ 作 $EH \perp x$ 轴于点 $H$，

由 $EO=EF$，

易得 $\triangle OEH \cong \triangle FEH \cong \triangle OED$.

∵$\triangle EOF$ 的面积等于 2，

∴四边形 $OHED$ 的面积为 2，

易知 $k > 0$，∴ $k=2$.

故选 B.

**答案**：B

**方法点拨**：根据面积求 $k$ 时，注意图象所在的象限. 运用数形结合思想，借助于图形，使问题变得更简单.

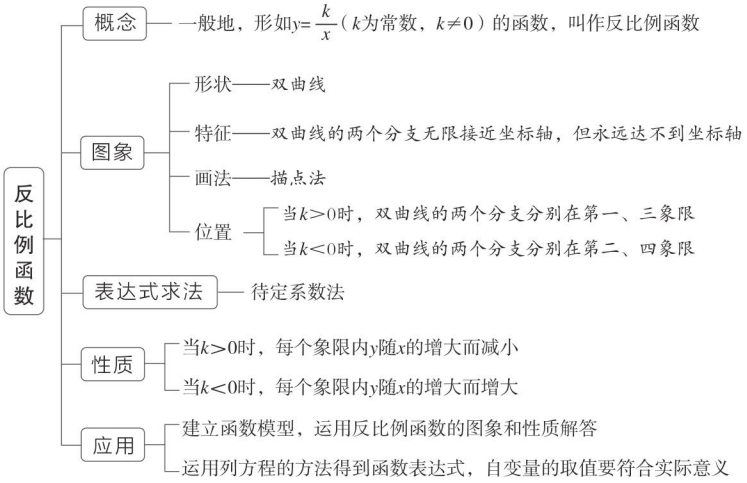


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 章末核心知识分类整合

## 核心结构专题

### 结构必知




### 核心必读

1. **双曲线$y=\frac{k}{x}$中$k$的几何性质：** 设$P$是双曲线$y=\frac{k}{x}$上任意一点，过$P$向$x$轴，$y$轴作垂线，垂足分别为$H$，$G$，连接$PO$（$O$为坐标原点），则$S_{\triangle POH}=\frac{|k|}{2}$，$S_{矩形PHOG}=|k|$.

2. **用待定系数法求反比例函数表达式的步骤：** 一设、二代、三解、四写.

3. **用反比例函数解实际问题的五步骤：** 审、设、列、写、解.

## 知识方法专题

### 知识必学

#### 专题一 反比例函数的图象

链接中考» 反比例函数的图象是学好反比例函数性质的重要基础，也是区别于一次函数、二次函数（以后会学到）的关键所在，因此，在中考中占有重要地位.一般以选择题形式考查.

**例1** [中考·兰州]在同一直角坐标系中，一次函数$y=kx-k$与反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的图象大致是图1-1中的（　　）

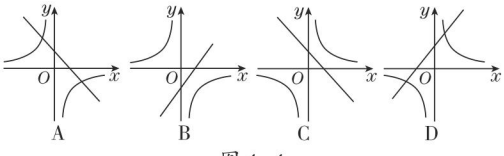



图1-1

**解题秘方：** 采取一一判断排除的方法，先从两个函数图象中选择一个判断$k$的符号，再根据$k$的符号判断另一函数图象的正确性.

**解：** A、B的图象中，由反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的图象可知$k<0$，那么一次函数$y=kx-k$的图象应该经过第一、二、四象限，A正确，B错误；C、



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

D的图象中，由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象可知 $k>0$，那么一次函数 $y=kx-k$ 的图象应该经过第一、三、四象限，C错误，D错误．故选A.

**答案：** A

## 专题二 反比例函数的性质

**链接中考≫** 利用反比例函数的性质主要解决一些函数值的大小比较问题，中考中以选择题和填空题为主，有时也与不等式结合在一起命题．

**例2** ［中考·遵义］在函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上有三个点的坐标分别为（1，$y_1$），$\left(\frac{1}{2},\ y_2\right)$，（$-3$，$y_3$），函数值 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$

B. $y_3<y_2<y_1$

C. $y_2<y_1<y_3$

D. $y_3<y_1<y_2$

**解：** 对于反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，在每一象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，对于点（1，$y_1$），$\left(\frac{1}{2},\ y_2\right)$，

$\because 1>\frac{1}{2}$，$\therefore y_1<y_2$. 而点（1，$y_1$）在第一象限，点（$-3$，$y_3$）在第三象限，显然，$y_3<y_1$.

**答案：** D

**方法点拨：** 运用反比例函数的性质时，一定要紧扣在同一象限．不在同一象限的，分象限确定正负；在同一象限的，利用增减性比较大小．

## 专题三 反比例函数与一次函数的综合

**链接中考≫** 解答反比例函数与其他函数结合在一起的综合题时，要挖掘题目中的条件，并结合图象找出图象中的关键点，求出函数表达式，并根据题中数量之间的关系，列出所需要的方程或关系式进行解答．

**例3** ［中考·黄冈］如图1-2，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象过点 $A(-1,\ 4)$，直线 $y=-x+b$（$b\neq 0$）与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 在第二、四象限分别相交于 $P$，$Q$ 两点，与 $x$ 轴、$y$ 轴分别相交于 $C$，$D$ 两点．

（1）求 $k$ 的值；

（2）当 $b=-2$ 时，求△ $OCD$ 的面积；

（3）连接 $OQ$，是否存在实数 $b$，使得 $S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$？若存在，请求出 $b$ 的值；若不存在，请说明理由．

**解题秘方：**（1）把点 $A$ 的坐标代入反比例函数的表达式即可求出 $k$ 的值；

（2）利用一次函数的表达式求出直线与 $x$ 轴、$y$ 轴的交点坐标，即可得到线段 $OC$，$OD$ 的长度，进而可求出△ $OCD$ 的面积；

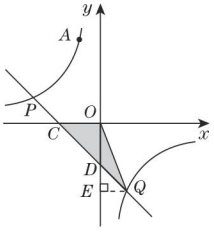


图1-2

（3）假设存在实数 $b$，对 $b$ 的范围分类讨论，根据两个三角形的面积相等构建关于 $b$ 的方程求解，然后进行取舍．

**解：**（1）$\because A(-1,\ 4)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，

$\therefore k=-1\times 4=-4$.

（2）$\because b=-2$，$\therefore$ 直线 $CD$ 的表达式为 $y=-x-2$.

$\therefore C(-2,\ 0)$，$D(0,\ -2)$. $\therefore CO=2$，$DO=2$.

$\therefore S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO=2$.

（3）存在．

如图1-2，过 $Q$ 作 $QE\perp y$ 轴，垂足为 $E$.

①当 $b<0$ 时，由 $y=-x+b$，可得 $C(b,\ 0)$，$D(0,\ b)$，$\therefore OC=-b$，$OD=-b$. $\therefore OC=OD$.

$\therefore \angle OCD=\angle ODC=45^\circ$.

易知 $\angle EDQ=\angle DQE=45^\circ$. $\therefore DE=EQ$.

$\because S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$，

$\therefore \frac{1}{2}DO\cdot CO=\frac{1}{2}DO\cdot QE$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore CO=QE$. $\therefore Q(-b, 2b)$.

$\because$ 点 $Q$ 在双曲线 $y=\dfrac{-4}{x}$ 上，

$\therefore -b\cdot 2b=-4$.

$\therefore b^2=2$. $\therefore b=\pm\sqrt{2}$.

$\because b<0$，$\therefore b=-\sqrt{2}$.

②当 $b>0$ 时，$S_{\triangle OCD}<S_{\triangle ODQ}$.

综上所述，当 $b=-\sqrt{2}$ 时，$S_{\triangle OCD}=S_{\triangle ODQ}$.

**方法点拨：**（1）求函数表达式一般采用待定系数法. 用待定系数法解题，一般先要设出待定系数. 再根据题目中的已知条件求出待定系数. 对反比例函数而言，因为只有一个待定系数，所以只要将一个点的坐标代入函数表达式，就可以求出待定系数；若是一次函数，则一般需要两个独立的条件.

（2）求坐标平面内图形的面积，往往转化为三角形的面积，并将在坐标轴上的边或者与坐标轴平行的边作为三角形面积公式中的“底”，这样计算会容易一些.

## 专题四 反比例函数中比例系数 $k$ 的几何意义

**链接中考»** 反比例函数的比例系数 $k$ 具有一定的几何意义，$k$ 的绝对值等于反比例函数图象上任意一点向两坐标轴作垂线段与两坐标轴围成的矩形的面积. 在反比例函数的图象中，涉及三角形或矩形的面积时，常用比例系数 $k$ 的几何意义求解.

**例 4** ［中考·烟台］如图 1–3，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的面积为 12，点 $B$ 在 $y$ 轴上，点 $C$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上，则 $k$ 的值为_____.

**解题秘方：**连接 $AC$，交 $y$ 轴于点 $D$，由四边形 $ABCO$ 为菱形，得到对角线垂直且互相平分，进而得到△ $CDO$ 的面积为菱形面积的四分之一，根据菱形的面积求出△ $CDO$ 的面积，利用反比例函数中 $k$ 的几何意义确定出 $k$ 的值即可.

**解：**如图 1–3，连接 $AC$，交 $y$ 轴于点 $D$.

$\because$ 四边形 $ABCO$ 为菱形，

$\therefore AC\perp OB$，且 $CD=AD$，$BD=OD$.

$\because$ 菱形 $OABC$ 的面积为 12，

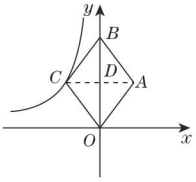


图 1–3

$\therefore$ △ $CDO$ 的面积为 3. $\therefore |k|=6$.

$\because$ 反比例函数的部分图象位于第二象限，

$\therefore k<0$，$\therefore k=-6$.

**答案：**$-6$

**方法点拨：**解反比例函数的图象与几何图形的面积问题一般分为两类：一类是根据面积求反比例函数的表达式，另一类是已知反比例函数的表达式求几何图形的面积，而求面积时，有时可利用反比例函数中比例系数 $k$ 的绝对值，有时则需利用几个几何图形面积的和差来求得.

## 专题五 反比例函数的实际应用

**链接中考»** 用反比例函数刻画实际问题中两个变量之间的关系以及用反比例函数的性质解决实际问题是中考命题的重点，尤其用反比例函数的图象来反映实际问题的变量之间的关系是中考命题的热点. 解决这类问题，一是要表示出表达式，二是要注意自变量的取值范围.

**例 5** ［中考·衡阳］某药品研究所开发一种抗菌新药，经多年动物实验，首次用于临床人体实验. 测得成人服药后血液中药物浓度 $y$（微克/毫升）与服药时间 $x$（小时）之间的函数关系如图 1–4 所示（当 $4\leqslant x\leqslant 10$ 时，$y$ 与 $x$ 成反比例）.

（1）根据图象，分别求出血液中药物浓度上升和下降阶段 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式；

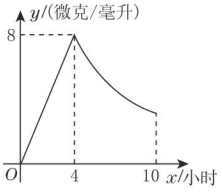


图 1–4

（2）问血液中药物浓度不低于 4 微克/毫升的持续时间为多少小时？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解：**（1）由图象可知，当 $0 \leqslant x < 4$ 时，$y$ 与 $x$ 成正比例关系，设 $y=kx$.

对于 $y=kx$，当 $x=4$ 时，$y=8$，$\therefore 4k=8$.

解得 $k=2$. $\therefore y=2x\ (0 \leqslant x < 4)$.

由题意可知，当 $4 \leqslant x \leqslant 10$ 时，$y$ 与 $x$ 成反比例关系，设 $y=\dfrac{m}{x}$.

由图象可知，当 $x=4$ 时，$y=8$，

$\therefore m=4\times 8=32$. $\therefore y=\dfrac{32}{x}\ (4 \leqslant x \leqslant 10)$.

$\therefore$ 血液中药物浓度上升时，$y=2x\ (0 \leqslant x < 4)$；

血液中药物浓度下降时，$y=\dfrac{32}{x}\ (4 \leqslant x \leqslant 10)$.

（2）血液中药物浓度不低于 4 微克/毫升，

即 $y \geqslant 4$，$\therefore 2x \geqslant 4$，且 $\dfrac{32}{x} \geqslant 4$.

解得 $x \geqslant 2$，

$\therefore 2 \leqslant x \leqslant 8$，即持续时间为 6 小时.

## 方法必会

### 专题六 数形结合思想

**专题解读》** 数形结合思想是将数与形结合起来进行分析、研究，从而解决问题的一种思维策略. 反比例函数的图象可以体现反比例函数的性质，所以解决有关反比例函数问题时，可以把函数图象与表达式有机地结合起来，使数学问题更直观，而且更容易解决.

**例 6** 如图 1-5，一次函数 $y=kx+3$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}\ (x>0)$ 的图象交于点 $P$，$PA \perp x$ 轴于点 $A$，$PB \perp y$ 轴于点 $B$. 一次函数的图象分别交 $x$ 轴、$y$ 轴于点 $C$，$D$，且 $S_{\triangle DBP}=27$，$\dfrac{OD}{AP}=\dfrac{1}{2}$.

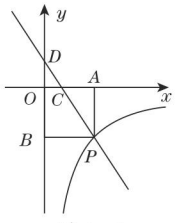


图 1-5

（1）求点 $D$ 的坐标；

（2）求一次函数与反比例函数的表达式；

（3）根据图象，写出当 $x$ 取何值时，一次函数的值小于反比例函数的值.

**解：**（1）$\because$ 一次函数 $y=kx+3$ 的图象与 $y$ 轴交于点 $D$，$\therefore$ 可令 $x=0$，得 $y=3$. $\therefore D\ (0,\ 3)$.

（2）$\because \dfrac{OD}{AP}=\dfrac{1}{2}$，$OD=3$，

$\therefore AP=6$. $\therefore OB=6$. $\therefore DB=9$.

在 Rt $\triangle DBP$ 中，根据三角形的面积公式，得 $\dfrac{DB\cdot BP}{2}=27$. $\therefore BP=6$. $\therefore P\ (6,\ -6)$.

把点 $P\ (6,\ -6)$ 的坐标代入 $y=kx+3$，得 $k=-\dfrac{3}{2}$. $\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-\dfrac{3}{2}x+3$.

把点 $P\ (6,\ -6)$ 的坐标代入 $y=\dfrac{m}{x}$，得 $m=-36$. $\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\dfrac{36}{x}\ (x>0)$.

（3）根据图象可得，当 $x>6$ 时，一次函数的值小于反比例函数的值.

**方法点拨：** 本例（3）中，利用数形结合思想可直接得出两个函数的值的大小关系.

### 专题七 数学建模思想

**专题解读》** 数学建模思想是解决实际问题的一种思想方法，它从数学的角度出发去分析实际问题，并尽可能通过抽象（或简化）确定出主要的参数，应用与各学科有关的定律、原理建立起各变量之间的函数模型，进而解决实际问题.

**例 7** 制作一种产品，需先将材料加热到 120℃，再进行加工，制作人员在材料加热过程和加工过程中采集到的材料的温度 $y$（℃）与相应的从加热开始计算的时间 $x$（min）如下表所示：

| $x$/min | 加热过程 | | | | 加工过程 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 | 10 | 16 | 20 |
| $y$/℃ | 24 | 56 | 88 | 120 | 120 | 72 | 45 | 36 |

（1）以表中 $x$，$y$ 的对应值为坐标，在直角坐标系中描出相应的点，并用光滑的线连接；

（2）从一次函数、反比例函数中选择合



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

适的函数来分别表示加热过程和加工过程中 $y$（℃）与 $x$（min）的函数关系，并求出相应的函数表达式；

（3）根据加工要求，当材料温度低于24℃时须停止加工，重新加热，那么每次加热后，进行加工的时间是多长？

**解**：（1）在直角坐标系中描出相应的点并连线如图 1−6.

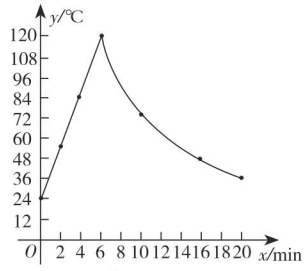



图 1−6

（2）由图 1−6 可知，加热过程中 $y$ 与 $x$ 满足一次函数关系，设函数表达式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$），将（0,24）代入，得 $b=24$，再将（2,56）代入，得 $k=16$. 所以 $y=16x+24$，将 $x=4$、$x=6$ 分别代入 $y=16x+24$，得 $y=88$、$y=120$，均符合题意，所以加热过程中 $y$ 与 $x$ 的函数表达式为 $y=16x+24$（$0\leqslant x\leqslant 6$）.

由图 1−6 可知，加工过程中 $y$ 与 $x$ 满足反比例函数关系，设函数表达式为 $y=\dfrac{m}{x}$（$m\neq 0$），将（10,72）代入，得 $m=720$. 所以 $y=\dfrac{720}{x}$，将 $x=6$、$x=16$、$x=20$ 分别代入 $y=\dfrac{720}{x}$，得 $y=120$、$y=45$、$y=36$，均符合题意，

所以加工过程中 $y$ 与 $x$ 的函数表达式为 $y=\dfrac{720}{x}$（$x\geqslant 6$）.

（3）由于在加工过程中，当 $y=24$ 时，$x=\dfrac{720}{24}=30$，所以每次加热后，进行加工的时间为 30−6=24（min）.

**方法点拨**：一次函数的图象是一条直线，反比例函数的图象是双曲线，根据在平面直角坐标系中描出的函数图象的大致形状，可以估计函数的类型，进而利用待定系数法求出函数的表达式.

## 好题必解 ☞答案见 244 页

### 类型 1：巧用待定系数法求函数表达式

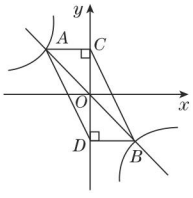
**1.** 已知 $y=y_1+y_2$，$y_1$ 与 $x+1$ 成正比例，$y_2$ 与 $x$ 成反比例，且 $x=1$ 时，$y=0$；$x=4$ 时，$y=9$.

（1）求 $y$ 与 $x$ 的函数表达式；

（2）求当 $x=-1$ 时，$y$ 的值.

### 类型 2：巧用反比例函数中比例系数 $k$ 的几何意义求面积

**2.** 如图，函数 $y=-x$ 与函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象相交于 $A$，$B$ 两点，过 $A$，$B$ 两点分别作 $y$ 轴的垂线，垂足分别为点 $C$，$D$，求四边形 $ACBD$ 的面积.



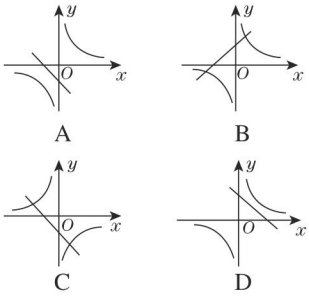

（第 2 题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

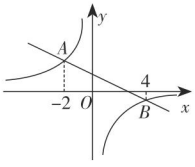
## 类型 3：巧用反比例函数图象特点解两图象共存问题

**3.** 函数 $y=\frac{k}{x}$ 与 $y=kx+2$（$k\neq 0$）在同一直角坐标系中的大致图象是（　　）




## 类型 4：巧解反比例函数与一次函数图象公共点问题

**4.** [中考·泸州]如图，一次函数 $y_1=ax+b$ 和反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 $A$，$B$ 两点，则使 $y_1>y_2$ 成立的 $x$ 的取值范围是（　　）




（第 4 题）

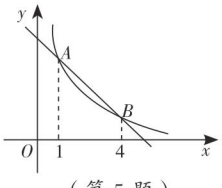
A. $-2<x<0$ 或 $0<x<4$

B. $x<-2$ 或 $0<x<4$

C. $x<-2$ 或 $x>4$

D. $-2<x<0$ 或 $x>4$

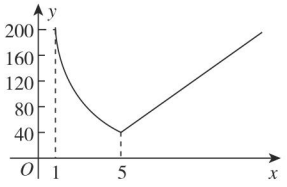
**5.** [中考·玉林]如图，一次函数 $y_1=(k-5)x+b$ 的图象在第一象限与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 $A$，$B$ 两点，当 $y_1>y_2$ 时，$x$ 的取值范围是 $1<x<4$，则 $k=$_____.




（第 5 题）

## 类型 5：巧解与反比例函数有关的实际应用问题

**6.** 保护生态环境，建设绿色社会已经从理念变为人们的行动．某化工厂 2019 年 1 月的利润为 200 万元．设 2019 年 1 月为第 1 个月，第 $x$ 个月的利润为 $y$ 万元．由于排污超标，该厂从 2019 年 1 月底起适当限产，并投入资金进行治污改造，导致月利润明显下降，从 1 月到 5 月，$y$ 与 $x$ 成反比例．到 5 月底，治污改造工程顺利完工，从这时起，该厂每月的利润比前一个月增加 20 万元（如图）．




（第 6 题）

（1）分别求该厂治污期间及治污改造工程完工后 $y$ 与 $x$ 之间对应的函数关系式．

（2）治污改造工程完工后经过几个月，该厂月利润才能达到 2019 年 1 月的水平？

（3）当月利润少于 100 万元时为该厂资金紧张期，问该厂资金紧张期共有几个月？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第 1 章测试卷

☞答案见 244 页

（120 分 120 分钟）

**一、选择题**（每题 3 分，共 30 分）

**1.** 下列函数中，变量 $y$ 是 $x$ 的反比例函数的是（　　）

A. $y=\dfrac{1}{x^2}$　　B. $y=x^{-1}$

C. $y=\dfrac{2}{x+3}$　　D. $y=\dfrac{1}{x}-1$

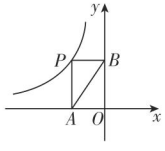
**2.** 若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过点（2，−6），则 $k$ 的值为（　　）

A. −12　　B. 12

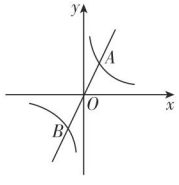
C. −3　　D. 3

**3.** 如图，点 $P$ 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上，$PA\perp x$ 轴于点 $A$，$PB\perp y$ 轴于点 $B$，且△$APB$ 的面积为 2，则 $k$ 等于（　　）

A. −4　　B. −2　　C. 2　　D. 4




（第 3 题）




（第 5 题）

**4.** 对于函数 $y=\dfrac{4}{x}$，下列说法错误的是（　　）

A. 这个函数的图象位于第一、三象限

B. 这个函数的图象既是轴对称图形又是中心对称图形

C. 当 $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大

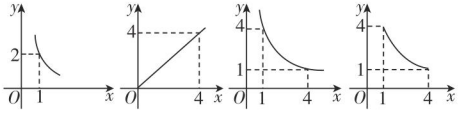
D. 当 $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小

**5.** 如图，在同一平面直角坐标系中，直线 $y=k_1x$（$k_1\neq 0$）与双曲线 $y=\dfrac{k_2}{x}$（$k_2\neq 0$）相交于 $A$，$B$ 两点，已知点 $A$ 的坐标为（1，2），则点 $B$ 的坐标为（　　）

A.（−1，−2）　　B.（−2，−1）

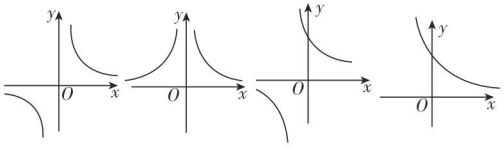
C.（−1，−1）　　D.（−2，−2）

**6.** 面积为 2 的直角三角形一直角边长为 $x$，另一直角边长为 $y$，则 $y$ 与 $x$ 的关系用图象大致表示为（　　）




A　　B　　C　　D

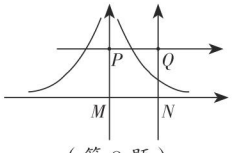
**7.** 函数 $y=\dfrac{2}{x+1}$ 的图象可能是（　　）



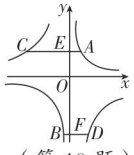

A　　B　　C　　D

**8.** 如图，函数 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ (x>0),\\ -\dfrac{1}{x}\ (x<0)\end{cases}$ 的图象所在坐标系的原点是（　　）

A. 点 $M$　　B. 点 $N$　　C. 点 $P$　　D. 点 $Q$




（第 8 题）




（第 10 题）

**9.** 若点 $A(-1,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(3,y_3)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象上，则 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 的大小关系是（　　）

A. $y_3<y_2<y_1$　　B. $y_2<y_1<y_3$

C. $y_1<y_3<y_2$　　D. $y_1<y_2<y_3$

**10.** 如图，$A$，$B$ 两点在反比例函数 $y=\dfrac{k_1}{x}$ 的图象上，$C$，$D$ 两点在反比例函数 $y=\dfrac{k_2}{x}$ 的图象上，$AC\perp y$ 轴于点 $E$，$BD\perp y$ 轴于点 $F$，$AC=2$，$BD=1$，$EF=3$，则 $k_1-k_2$ 的值是（　　）

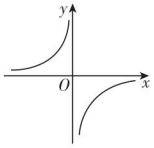
A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2



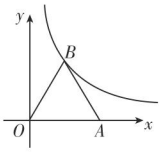
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

**11.** 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象如图所示，则 $k$ 的值可能是_____.（写一个即可）



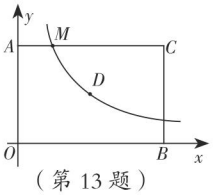
（第 11 题）



（第 12 题）

**12.** 如图，点 $A$ 的坐标是（2，0），△ $ABO$ 是等边三角形，点 $B$ 在第一象限．若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $B$，则 $k$ 的值是_____.

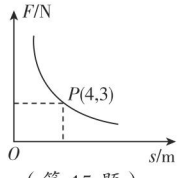
**13.** 如图，$D$ 是矩形 $AOBC$ 的对称中心，$A$（0，4），$B$（6，0），若一个反比例函数的图象经过点 $D$，交 $AC$ 于点 $M$，则点 $M$ 的坐标为_____.



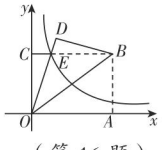
（第 13 题）

**14.** 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A(a,b)(a>0,b>0)$ 在双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 上，点 $A$ 关于 $x$ 轴的对称点 $B$ 在双曲线 $y=\frac{k_2}{x}$ 上，则 $k_1+k_2$ 的值为_____.

**15.** 在对物体做功一定的情况下，力 $F$（N）与此物体在力的方向上移动的距离 $s$（m）成反比例函数关系，其图象如图所示，点 $P$（4，3）在图象上，则当力达到 10 N 时，物体在力的方向上移动的距离是_____m.



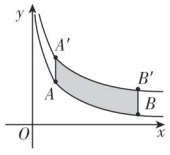
（第 15 题）



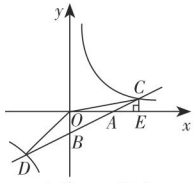
（第 16 题）

**16.** 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 $A$ 在 $x$ 轴上，顶点 $C$ 在 $y$ 轴上，$B$（4，3），连接 $OB$，将△ $OAB$ 沿直线 $OB$ 翻折，得△ $ODB$，$OD$ 与 $BC$ 相交于点 $E$．若双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 经过点 $E$，则 $k$=_____.

**17.** 如图，点 $A$（$m$，2），$B$（5，$n$）在函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$，$x>0$）的图象上，将该函数图象向上平移 2 个单位长度得到一条新的曲线，点 $A$，$B$ 的对应点分别为 $A'$，$B'$，图中阴影部分的面积为 8，则 $k$ 的值为_____.



（第 17 题）



（第 18 题）

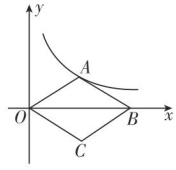
**18.** 如图，已知在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $y=\frac{1}{2}x-1$ 分别交 $x$ 轴，$y$ 轴于点 $A$ 和点 $B$，分别交反比例函数 $y_1=\frac{k}{x}$（$k>0$，$x>0$），$y_2=\frac{2k}{x}$（$x<0$）的图象于点 $C$ 和点 $D$，过点 $C$ 作 $CE\perp x$ 轴于点 $E$，连接 $OC$，$OD$．若△ $COE$ 的面积与△ $DOB$ 的面积相等，则 $k$ 的值是_____.

## 三、解答题（66 分）

**19.**（8 分）如图，在平面直角坐标系中，点 $O$ 为原点，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点（1，4），菱形 $OABC$ 的顶点 $A$ 在函数的图象上，对角线 $OB$ 在 $x$ 轴上．

（1）求反比例函数的表达式；

（2）直接写出菱形 $OABC$ 的面积．

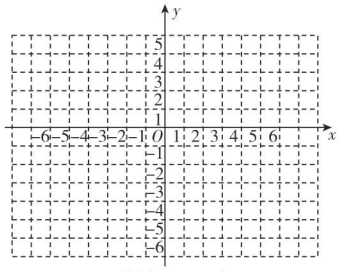


（第 19 题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**20.**（8分）在如图所示的平面直角坐标系中，作出函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象，并根据图象回答下列问题：



（第20题）

（1）当 $x=-2$ 时，求 $y$ 的值；

（2）当 $2<y<4$ 时，求 $x$ 的取值范围；

（3）当 $-1<x<2$ 且 $x\neq 0$ 时，求 $y$ 的取值范围.

**21.**（8分）已知反比例函数 $y=\frac{m-8}{x}$（$m$ 为常数）.

（1）若函数图象经过点 $A(-1,6)$，求 $m$ 的值；

（2）若函数图象在第二、四象限，求 $m$ 的取值范围；

（3）若当 $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，求 $m$ 的取值范围.

**22.**（8分）某乡镇要在生活垃圾存放区建一个老年活动中心，这样必须把 $1\,200\ m^3$ 的生活垃圾运走.

（1）假如每天能运 $x\ m^3$，所需时间为 $y$ 天，写出 $y$ 与 $x$ 之间的函数表达式；

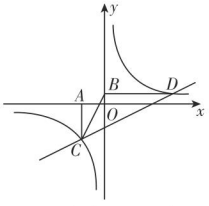
（2）若每辆拖拉机一天能运 $12\ m^3$，则5辆这样的拖拉机要用多少天才能运完？

（3）在（2）的情况下，运了8天后，剩下的任务要在不超过6天的时间内完成，那么至少需要增加多少辆这样的拖拉机才能按时完成任务？

**23.**（8分）如图，已知双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 $D(6,1)$，点 $C$ 是第三象限内双曲线上的动点，过 $C$ 作 $CA\perp x$ 轴，过 $D$ 作 $DB\perp y$ 轴，垂足分别为 $A$，$B$，连接 $BC$.

（1）求 $k$ 的值；

（2）若 $\triangle BCD$ 的面积为12，求直线 $CD$ 的表达式.



（第23题）



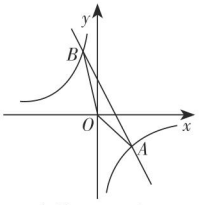
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**24.**（8分）如图，已知$A(n,-2)$，$B(-1,4)$是一次函数$y=kx+b$和反比例函数$y=\frac{m}{x}$的图象的两个交点.

（1）求反比例函数和一次函数的表达式；

（2）求△$AOB$的面积；

（3）根据图象直接写出不等式$kx+b<\frac{m}{x}$的解集.




（第24题）

**25.**（8分）水产公司有一种海产品共2 104千克，为寻求合适的销售价格，进行了8天试销，试销情况如下：

| | 第1天 | 第2天 | 第3天 | 第4天 | 第5天 | 第6天 | 第7天 | 第8天 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 销售价格$x$/（元/千克） | 400 | 300 | 250 | 240 | 200 | 150 | 125 | 120 |
| 销售量$y$/千克 | 30 | 40 | 48 | 50 | 60 | 80 | 96 | 100 |

观察表中数据，发现可以用反比例函数刻画这种海产品的每天销售量$y$（千克）与销售价格$x$（元/千克）之间的关系.现假定在这批海产品的销售中，每天的销售量$y$（千克）与销售价格$x$（元/千克）之间都满足这一关系.

（1）直接写出这个反比例函数的表达式；

（2）在试销8天后，公司决定将这种海产品的销售价格定为150元/千克，并且每天都按这个价格销售，那么余下的这些海产品预计再用多少天可以全部售出？

（3）在按（2）中定价继续销售15天后，公司发现剩余的这些海产品必须在不超过2天内全部售出，此时需要重新确定一个销售价格，使后面两天都按新的价格销售，那么新确定的销售价格最高不超过每千克多少元才能完成销售任务？

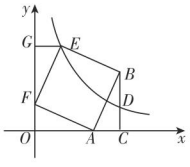
**26.**（10分）如图，在平面直角坐标系中，Rt△$ABC$的直角边$AC$在$x$轴上，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=1$，反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象经过$BC$边的中点$D(3,1)$.

（1）求这个反比例函数的表达式；

（2）若△$ABC$与△$EFG$成中心对称，且△$EFG$的边$FG$在$y$轴的正半轴上，点$E$在这个函数的图象上.

①求$OF$的长；

②连接$AF$，$BE$，证明：四边形$ABEF$是正方形.




（第26题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

领会方程的降次思想

领会方程的降次思想











# 第2章 一元二次方程

## 核心考点

你将见到的

- 一元二次方程及相关概念
- 一元二次方程的解法：
  配方法 公式法 因式分解法
- 一元二次方程根的判别式
- 一元二次方程根与系数的关系
- 一元二次方程的应用

## 核心方法

我们为你提供的

- 配方法
- 待定系数法
- 换元法
- 数形结合思想
- 整体代入法
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.1 一元二次方程

**核心知识**
- 定义及相关概念
- 一般形式
- 建立一元二次方程的模型

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识▸1 一元二次方程的定义

**1. 定义：** 如果一个方程通过整理可以使右边为 0，而左边是只含有一个未知数的二次多项式，那么这样的方程叫作一元二次方程.

**2. 一元二次方程的“三要素”：**

一是整式方程，

二是只含一个未知数，

三是整理后未知数的最高次数是 2.

作为一元二次方程，三要素缺一不可.


一元二次方程的定义

提分·必记

警示误区

最高次数是 2 的项的系数的取值范围不明确的方程不一定是一元二次方程，如：$(m-2)x^2+3x-8=0$ 不一定是一元二次方程.

### 拨考向▸利用一元二次方程的定义识别一元二次方程

**例 1** 下列方程：① $x^2+y-6=0$；② $x^2+\frac{1}{x}=2$；③ $x^2-x-2=0$；④ $x^2-2+5x^3-6x=0$；⑤ $2x^2-3x=2(x^2-2)$，其中是一元二次方程的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

**解题秘方：** 紧扣一元二次方程的“三要素”进行识别.

**解：** ①含有两个未知数；②不是整式方程；

③符合一元二次方程的“三要素”；④未知数的最高次数不是 2；

⑤整理后未知数的最高次数不是 2.

**答案：** A

提分·秘诀

解法提醒

判断一个方程是否是一元二次方程，要从原方程及整理后的方程两方面进行判断，看其是否符合一元二次方程的“三要素”，三者缺一不可.

### 点知识▸2 一元二次方程的一般形式

**1. 一般形式：** 关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，这种形式叫作一元二次方程的一般形式. 其中 $ax^2$ 是二次项，$bx$ 是一次项，$c$ 是常数项.

**2. 特殊形式：**

| 特殊形式 | 二次项系数 | 一次项系数 | 常数项 |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx=0\ (a\neq 0,\ b\neq 0)$ | $a$ | $b$ | 0 |
| $ax^2+c=0\ (a\neq 0,\ c\neq 0)$ | $a$ | 0 | $c$ |
| $ax^2=0\ (a\neq 0)$ | $a$ | 0 | 0 |

提分·必记

特别提醒

$a\neq 0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的前提；反之，如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，则必隐含 $a\neq 0$ 这一条件.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 考向▶利用方程的变形化一元二次方程为一般形式

**例 2** 把下列一元二次方程化成一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项.

（1）$(x+1)(x-2)=4$；

（2）$2(x-3)(x+4)=x^2-10$；

（3）$(2x+1)(x-2)=5-3x$.

**解题秘方：**紧扣一元二次方程一般形式的特征及相关概念解答.

**解：**（1）整理方程，得 $x^2-x-6=0$.

其中二次项系数为 1，一次项系数为 $-1$，常数项为 $-6$.

（2）整理方程，得 $x^2+2x-14=0$.

其中二次项系数为 1，一次项系数为 2，常数项为 $-14$.

（3）整理方程，得 $2x^2-7=0$.

其中二次项系数为 2，一次项系数为 0，常数项为 $-7$.

提分·秘诀

知识储备

整理方程一般需经过一去（去分母、去括号）、二移、三并、四化这四个步骤.

特别提醒

确定一元二次方程的各项和各项系数时注意不要丢掉各项的符号，一般情况下，将一元二次方程整理为一般形式时，若二次项系数为负数，要把它转化为正数，若有关项系数是分数，要把它转化为整数.

## 知识▶3 建立一元二次方程的模型

**1. 一元二次方程模型：**

一元二次方程是刻画现实世界的一个有效数学模型，它是把实际问题中语言叙述的数量关系通过设未知数用一元二次方程来表达.

**2. 建立一元二次方程模型的一般步骤：**

（1）审题，认真阅读题目，弄清未知量和已知量；

（2）设出合适的未知数，一般设为 $x$；

（3）确定等量关系；

（4）根据等量关系列出一元二次方程，有时要化为一般形式.

提分·必记

特别提醒

常用一元二次方程来建模的问题：图形的面积问题、增长（利润）率问题、行程问题、工程问题等.

## 考向▶利用条件中的等量关系建立一元二次方程模型

**类型 1：在实际代数问题中建立一元二次方程模型**

**例 3** [中考·巴中]某种品牌运动服经过两次降价，每件零售价由 560 元降为 315 元. 已知两次降价的百分率相同，求每次降价的百分率. 设每次降价的百分率为 $x$，下面所列的方程中正确的是（　　）

A. $560(1+x)^2=315$　　B. $560(1-x)^2=315$

C. $560(1-2x)^2=315$　　D. $560(1+x^2)=315$

**解题秘方：**紧扣百分率问题中的等量关系，建立一元二次方程.

**解：**百分率问题的表达式为 $a(1\pm x)^n=b$. 根据题意，得每次降价的百分率为 $x$，降价的基数 $a$ 是 560，降价后的数量 $b$ 是 315，“两次降价”表明 $n=2$，所以可得方程 $560(1-x)^2=315$，故选 B.

**答案：**B

方法点拨

解决百分率问题，关键是要掌握其表达式 $a(1\pm x)^n=b$. 其中 $a$ 是增长（减少）的基数，$b$ 是增长（减少）后的数量，$x$ 是平均增长（减少）率，$n$ 是增长（减少）的次数. 要仔细审题，从题中找到对应的数量，列方程即可.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

### 类型 2：在实际几何图形中建立一元二次方程模型

**例 4** ［中考·哈尔滨］今年我市计划扩大城区绿地面积，现有一块长方形绿地，它的短边长为 60 m，若将短边增长到与长边相等（长边不变），使扩大后的绿地的形状是正方形，则扩大后的绿地面积比原来增加 1 600 $m^2$，设扩大后的正方形绿地边长为 $x$ m，下面所列方程正确的是（　　）

A. $x(x-60)=1\,600$　　B. $x(x+60)=1\,600$

C. $60(x+60)=1\,600$　　D. $60(x-60)=1\,600$

**解题秘方：** 紧扣几何图形中揭示的等量关系建立一元二次方程模型.

**解：** 根据面积 = 长 × 宽，建立方程模型. 根据题意，得扩大后的正方形绿地边长为 $x$ m，则扩大部分长方形的长为 $x$ m，宽为 $(x-60)$ m，所以可得方程 $x(x-60)=1\,600$.

**答案：** A

提分·秘诀

**方法点拨**

根据实际问题建一元二次方程模型

| 步骤 | 解题注意事项 |
| --- | --- |
| 一：审题 | 认真阅读题目，明确未知量是什么，已知量是什么 |
| 二：设未知数 | 设出合适的未知数，把题中的未知量用未知数或含未知数的式子表示出来 |
| 三：确定等量关系 | 这是列一元二次方程最关键的一步，需要根据题目中提供的信息找出能够表达应用题全部含义的等量关系 |
| 四：列出方程 | 根据等量关系列出方程 |

## 点方法·拨技巧 提高分

### 拔尖角度 1 利用定义法求一元二次方程中参数的值

**例 5** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的常数项为 0，求 $m$ 的值.

**解题秘方：** 紧扣一元二次方程的定义及一般形式求解.

**解：** ∵一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的常数项为 0，

∴ $m^2-4=0$，即 $m=\pm 2$.

又∵方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 $x$ 的一元二次方程，

∴ $m-2\neq 0$，即 $m\neq 2$. ∴ $m=-2$.

挑战·高分

**方法提醒**

含有参数的一元二次方程中，不含有未知数的项为常数项，求出参数值后，要注意含有参数的二次项系数不能为零.

### 拔尖角度 2 利用分类讨论思想确定方程中参数的值

**例 6** 已知关于 $x$ 的方程 $(k^2-1)x^2+(k+1)x-2=0$.

（1）当 $k$ 取何值时，此方程为一元一次方程？请求出此方程的根.

（2）当 $k$ 取何值时，此方程为一元二次方程？请写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项.

**解题秘方：** 紧扣一元一次方程和一元二次方程的定义确定参数值.

**解：** （1）若原方程为一元一次方程，则应满足 $\begin{cases}k^2-1=0,\\ k+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $k=1$.

所以当 $k=1$ 时，此方程为一元一次方程，即 $2x-2=0$，解得 $x=1$.

（2）若原方程为一元二次方程，则应满足 $k^2-1\neq 0$，解得 $k\neq\pm 1$.

所以当 $k\neq\pm 1$ 时，此方程为一元二次方程，它的二次项系数为 $k^2-1$，一次项系数为 $k+1$，常数项为 $-2$.

挑战·高分

**方法点拨**

对含有字母参数的方程进行分类讨论时，应注意：

- 对于 $ax^2+bx+c=0$，当 $a=0, b\neq 0$ 时，它是一元一次方程.
- 对于 $ax^2+bx+c=0$，只要 $a\neq 0$，它就是一元二次方程，字母 $b, c$ 可以取任意实数. 反之，如果明确指出方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，那么就隐含了 $a\neq 0$ 这个条件.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘** 本节在中考中的主要考点有一元二次方程的定义及一般形式，建立一元二次方程的模型等．主要以选择题、填空题的形式呈现，难度较小．

## 三年中考兵法

**考法** 利用建立一元二次方程模型解实际应用问题

**例7** [中考·白银]如图2.1-1，某小区计划在一块长为32 m，宽为20 m的矩形空地上修建三条同样宽的道路，剩余的空地上种植草坪，使草坪的面积为570 $m^2$，若设道路的宽为$x$ m，则下面所列方程正确的是（　　）

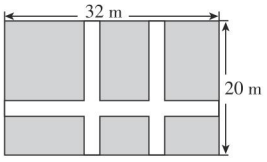


图2.1-1

A. $(32-2x)(20-x)=570$

B. $32x+2\times20x=32\times20-570$

C. $(32-x)(20-x)=32\times20-570$

D. $32x+2\times20x-2x^2=570$

**试题评析**：此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，这类题目需利用平移把不规则的图形变为规则图形，进而即可列出方程．

**解**：道路的宽为$x$ m，根据题意得$(32-2x)(20-x)=570$.

**答案**：A

冲刺·满分

图解

把三条道路分别向右、向下平移，如图2.1-2，将草坪面积转化为长为$(32-2x)$m，宽为$(20-x)$m的矩形面积．

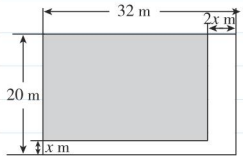


图2.1-2

## 两年模拟兵法

☞答案见246页

**1.** [模拟·合川]有下列关于$x$的方程：

① $ax^2+bx+c=0$，② $3x(x-4)=0$，

③ $x^2+y-3=0$，④ $\frac{1}{x^2}+x=2$，

⑤ $x^3-3x+8=0$，⑥ $\frac{1}{2}x^2-5x+7=0$，

⑦ $(x-2)(x+5)=x^2-1$，

其中是一元二次方程的有（　　）

A. 2个　　B. 3个

C. 4个　　D. 5个

**2.** [模拟·天津]如果方程$(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$是关于$x$的一元二次方程，那么$m$的值为（　　）

A. $\pm3$　　B. 3

C. $-3$　　D. 以上都不对

**3.** [模拟·河北]关于$x$的一元二次方程$(m-1)x^2+2x+|m|-1=0$，常数项为0，则$m$等于（　　）

A. 1　　B. $-1$

C. $\pm1$　　D. 0

**4.** [中考·赤峰]某品牌手机三月份销售400万部，四月份、五月份销售量连续增长，五月份销售量达到900万部，求月平均增长率．设月平均增长率为$x$，根据题意列方程为（　　）

A. $400(1+x^2)=900$

B. $400(1+2x)=900$

C. $400(1-x)^2=900$

D. $400(1+x)^2=900$



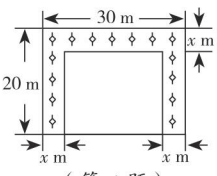
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**5.** [中考·新疆]在某篮球邀请赛中，参赛的每两个队之间都要比赛一场，共比赛 36 场．设有 $x$ 个队参赛，根据题意，可列方程为（　　）

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=36$

C. $x(x-1)=36$　　D. $x(x+1)=36$

**6.** [中考·广西省北部湾]扬帆中学有一块长 30 m，宽 20 m 的矩形空地，计划在这块空地上划出四分之一的区域种花，小禹同学设计方案如图所示，求花带的宽度．设花带的宽度为 $x$ m，则可列方程为（　　）



（第 6 题）

A. $(30-x)(20-x)=\frac{3}{4}\times 20\times 30$

B. $(30-2x)(20-x)=\frac{1}{4}\times 20\times 30$

C. $30x+2\times 20x=\frac{1}{4}\times 20\times 30$

D. $(30-2x)(20-x)=\frac{3}{4}\times 20\times 30$

**7.** 已知关于 $x$ 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$.

（1）当 $m$ 取何值时，它是一元一次方程？求出此方程的根．

（2）当 $m$ 取何值时，它是一元二次方程？写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项．

**8.** 已知 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 $x$ 的一元二次方程，求 $a$，$b$ 的值．下面是两位同学的解法．

甲：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$

乙：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\ a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

你认为这两位同学的解法是否正确？如果都不正确，请给出正确的解法．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.2 一元二次方程的解法

## 2.2.1 配方法

**核心知识**

- 直接开平方法解一元二次方程
- 配方法解一元二次方程

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 1 一元二次方程的解（根）

**1. 定义：**

使一元二次方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫作一元二次方程的根.

**2. 检验一元二次方程根的步骤：**

**步骤 1**：将已知数值分别代入一元二次方程的左右两边.

**步骤 2**：若方程左右两边的值相等，则这个数是一元二次方程的根；否则，这个数不是一元二次方程的根.

提分·必记

特别提醒

如果一个数是一元二次方程的根，那么这个数一定能使方程左右两边的值相等，由此可求待定字母的值.

### 拨考向 利用一元二次方程根的定义判断方程的根

**例 1** 判断 $x=2$，$x=3$ 是不是一元二次方程 $x^2-x=6$ 的根.

**解题秘方**：紧扣一元二次方程根的定义进行判断.

**解**：将 $x=2$ 代入方程，得左边 $=4-2=2$，

$\because$ 右边 $=6$，$2 \neq 6$，

$\therefore$ $x=2$ 不是原方程的根.

将 $x=3$ 代入方程，得左边 $=9-3=6$，

$\because$ 右边 $=6$，$6=6$，

$\therefore$ $x=3$ 是原方程的根.




提分·秘诀

特别提醒

判断一个数是不是一元二次方程的根的方法：

可将这个数代入方程中，如果该数使方程左右两边相等，那么这个数就是方程的根；反之，如果该数不能使方程左右两边相等，那么这个数就不是方程的根.

### 点知识 2 直接开平方法

**1. 定义：**利用平方根的意义直接开平方，求一元二次方程解的方法叫作直接开平方法.

**2. 方程 $x^2=p$ 的解（根）的情况：**

（1）当 $p>0$ 时，方程有两个不等的实数根 $x_1=-\sqrt{p}$，$x_2=\sqrt{p}$；

（2）当 $p=0$ 时，方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=0$；

（3）当 $p<0$ 时，方程没有实数根.

提分·必记

特别警示

直接开平方法利用的是平方根的意义，所以要注意两点：

- 不要只取正的平方根而遗漏负的平方根；
- 只有非负数才有平方



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**3. 用直接开平方法解一元二次方程的一般步骤：**

**步骤 1**：移项，将方程变成左边是完全平方式，且完全平方式的系数为 1，右边是非负数的形式（如果方程右边是负数，那么这个方程无实数根）.

**步骤 2**：开平方，将方程转化为两个一元一次方程.

**步骤 3**：解这两个一元一次方程，则得出的两个解即为一元二次方程的两个根.

### 考向▶利用直接开平方法解一元二次方程

**例 2** 用直接开平方法解下列方程：

（1）$9x^2-81=0$；

（2）$2(x-3)^2-50=0$.

**解题秘方**：紧扣“直接开平方法”的步骤求解.

**解**：（1）移项，得 $9x^2=81$.

系数化为 1，得 $x^2=9$.

开平方，得 $x=\pm 3$.

$\therefore x_1=3$，$x_2=-3$.

（2）移项，得 $2(x-3)^2=50$.

系数化为 1，得 $(x-3)^2=25$.

开平方，得 $x-3=\pm 5$.

$\therefore x_1=8$，$x_2=-2$.

## 知识▶3 配方法

**1. 定义**：通过配方、整理后就可以直接根据平方根的意义来解一元二次方程的方法叫作配方法.


配方法

**2. 用配方法解一元二次方程的一般步骤：**

（1）**移项**：把方程中含有未知数的项移到方程的左边，把常数项移到方程的右边.

（2）**二次项系数化为 1**：方程的左、右两边同时除以二次项系数.

（3）**配方**：把方程的左、右两边同时加上一次项系数一半的平方，把原方程化为 $(x+n)^2=p$ 的形式.

（4）**开方**：如果方程右边是一个非负数，那么就用直接开平方法求解；如果方程右边是一个负数，那么这个方程无实数根. 即

①当 $p>0$ 时，方程 $(x+n)^2=p$ 有两个不等的实数根 $x_1=-n-\sqrt{p}$，$x_2=-n+\sqrt{p}$.

②当 $p=0$ 时，方程 $(x+n)^2=p$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-n$.

③当 $p<0$ 时，因为对任意实数 $x$，都有 $(x+n)^2\geqslant 0$，所以方程 $(x+n)^2=p$ 无实数根.

提分·秘诀

知识储备

用直接开平方法解一元二次方程的方法：

首先将方程化成左边是含有未知数的完全平方式，右边是非负数.

然后化完全平方式的系数为 1.

最后根据平方根的意义开平方求解.

根，所以直接开平方法的前提是 $x^2=p$ 中 $p\geq 0$

提分·必记

知识链接

配方的依据是完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，其实质是将 a 看成未知数，b 看成常数，则 $b^2$ 即是一次项系数的一半的平方.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔考向▶利用配方法解一元二次方程

**例 3** 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+4x+3=0$；　（2）$x^2+x-\frac{3}{4}=0$；

（3）$2x^2-4x-1=0$；　（4）$(1+x)^2+2(1+x)-3=0$.

**解题秘方：** 先将方程配方化为$(x+n)^2=p$的形式，再用直接开平方法求解.

**解：**（1）移项，得$x^2+4x=-3$. 配方，得$x^2+4x+2^2=-3+2^2$.

$\therefore (x+2)^2=1$.

$\therefore x_1=-1$，$x_2=-3$.

（2）移项，得$x^2+x=\frac{3}{4}$. 配方，得$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$.

$\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{3}{2}$.

（3）移项，得$2x^2-4x=1$.

二次项系数化为 1，得$x^2-2x=\frac{1}{2}$.

配方，得$x^2-2x+(-1)^2=\frac{1}{2}+(-1)^2$，即$(x-1)^2=\frac{3}{2}$.

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

（4）移项，得$(1+x)^2+2(1+x)=3$.

巧将 1+x 看作整体进行配方，可达到简化效果.

配方，得$(1+x)^2+2(1+x)+1^2=3+1^2$.

$\therefore (1+x+1)^2=4$.

$\therefore x_1=0$，$x_2=-4$.

提分·秘诀

解法提醒

用配方法解一元二次方程的实质就是对一元二次方程进行变形，将其转化为直接开平方所需要的形式，再利用平方根的意义把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来求解.

方程两边同时加上一次项系数一半的平方的前提是二次项系数为 1.

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度▶1 利用定义法求一元二次方程

**例 4** 已知关于$x$的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的一个根是 1，且$a$，$b$满足等式$a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4$，求此一元二次方程.

**解题秘方：** 紧扣二次根式和一元二次方程的根的定义进行求解.

**解：**$\because a$，$b$满足等式$a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4$，

$\therefore b-3\geqslant 0$，$3-b\geqslant 0$，故$b=3$.

当$b=3$时，$a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-4=-4$.

又$\because$一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的一个根是 1，

$\therefore a+b+c=0$.

把 x=1 代入方程$ax^2+bx+c=0$中，得$a\times1^2+b\times1+c=0$，即$a+b+c=0$.

$\therefore c=-a-b=4-3=1$.

$\therefore$此一元二次方程是$-4x^2+3x+1=0$.

挑战·高分

知识储备

$\sqrt{a}$表示$a$的算术平方根，满足$\sqrt{a}\geqslant 0$，并且被开方数$a\geqslant 0$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度 2 利用整体思想求代数式的值

**例 5** 已知 $a$ 是一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，试求 $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}$ 的值.

**解题秘方：** 将 $x=a$ 代入一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 中，再对等式变形，利用整体代入法求代数式的值.

**解：** ∵ $a$ 是 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，

∴ $a^2-2\,021a+1=0$.

∴ $a^2+1=2\,021a$，$a^2=2\,021a-1$.

$$\therefore a^2-2\,020a+\frac{2\,021}{a^2+1}=2\,021a-1-2\,020a+\frac{2\,021}{2\,021a}=a-1+\frac{1}{a}=$$

$$\frac{a^2-a+1}{a}=\frac{2\,021a-1-a+1}{a}=2\,020.$$

挑战·高分

**解法提醒**

由于代数式 $a^2-2\,020a+\dfrac{2\,021}{a^2+1}$ 含有 $a^2$，且其中一项的分母为 $a^2+1$，所以把 $a^2-2\,021a+1=0$ 变形为 $a^2+1=2\,021a$ 和 $a^2=2\,021a-1$，从而把 $a^2+1$ 和 $a^2$ 转化为一次式，再代入待求式子中整理化简，计算出结果.

## 拔尖角度 3 利用定义法构造一元二次方程求代数式的值

**例 6** 已知 $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$（$a\neq b$），请构造一个以 $a$，$b$ 为根的一元二次方程（以 $x$ 为未知数），并求 $x^2+3x+2$ 的值.

**解题秘方：** 观察两个等式的结构，结合一元二次方程的根的定义可知 $a$，$b$ 是一元二次方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根. 经过变形可求出要求的代数式的值.

**解：** ∵ $a^2+3a+1=0$，$b^2+3b+1=0$（$a\neq b$），

∴由一元二次方程的根的定义，可知以 $a$，$b$ 为根的一元二次方程是 $x^2+3x+1=0$，∴ $x^2+3x+2=(x^2+3x+1)+1=1$.

挑战·高分

**技巧提醒**

根据一元二次方程的根的定义，若 $x_1$，$x_2$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$. 反之，结论同样成立.

## 拔尖角度 4 利用非负数最值法求代数式最值（拓展点）

**例 7** 当 $x$ 取何值时，代数式 $2x^2-6x+7$ 的值最小？并求出这个最小值.

**解题秘方：** 求代数式的最小值，要先将代数式配成 $a(x+m)^2+n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最小值.

**解：** $2x^2-6x+7$

$=2(x^2-3x)+7$

$=2\left[x^2-3x+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\right]+7$

$=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$.

∵ $2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$,

∴当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$2x^2-6x+7$ 的值最小，最小值为 $\dfrac{5}{2}$.

挑战·高分

**解法提醒**

代数式 $ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）配成 $a(x+m)^2+n$ 的形式后，若 $a>0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最小值 $n$；若 $a<0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最大值 $n$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘** 本节在中考中的主要考点是一元二次方程的根、开平方、配方法，一元二次方程根的定义考查较多，配方法常通过由方程根的情况求字母值、配方求最值、结合二次函数（以后会学到）的应用求最值等问题进行考查，题目难易度中偏高.

## 三年中考兵法

### 考法1 利用一元二次方程根的定义求式子的值

**例8** [中考·南充]若 $2n$（$n\neq 0$）是关于 $x$ 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，则 $m-n$ 的值为_____.

**试题评析：** 本题考查的是一元二次方程根的定义，其实质是将求式子的值的问题转化为方程问题.

**解：** ∵ $2n$（$n\neq 0$）是关于 $x$ 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，

∴ $4n^2-4mn+2n=0$. ∴ $4n-4m+2=0$. ∴ $m-n=0.5$.

**答案：** 0.5

### 考法2 利用直接开平方法求字母式子的值

**例9** [中考·济宁]若一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，则 $\frac{b}{a}=$_____.

**试题评析：** 本题考查了直接开平方法解一元二次方程及根据方程根的特征求字母的值.

**解：** 方程 $x^2=p$（$p\geqslant 0$）的根的情况：当 $p>0$ 时，方程的两根不等且互为相反数；当 $p=0$ 时，方程的两根相等且都为 0.

①当两根不等时，

∵ $x^2=\frac{b}{a}$（$ab>0$），∴ $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

∴方程的两个根互为相反数.

∴ $m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$.

∴一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 2 与 −2.

∴ $\sqrt{\frac{b}{a}}=2$. ∴ $\frac{b}{a}=4$.

②当两根相等时，∵ $x^2=\frac{b}{a}$，

∴ $\frac{b}{a}=0$，这与 $ab>0$ 相矛盾.

∴两根不可能相等.

**答案：** 4

冲刺·满分

**解法提醒**

方程的根是能使方程左、右两边的值相等的未知数的值，$2n$ 是关于 $x$ 的方程 $x^2-2mx+2n=0$ 的根，所以当 $x=2n$ 时方程左、右两边的值相等，即 $(2n)^2-2m\times 2n+2n=0$. 解答本例的关键是将方程两边同除以 $n(n\neq 0)$ 从而求出 $m-n$ 的值.

**易错警示**

涉及含待定字母的方程的根的问题时，都必须对根的三种情况予以讨论，本例解题时易犯两种错误，其一是忽视两根相等的情况，其二是盲目用两根相等而忽视题目条件，将②解为当两根相等时，$m+1=2m-4$，∴ $m=5$. ∴方程的两根都为 6. ∴ $\sqrt{\frac{b}{a}}=6$，即 $\frac{b}{a}=36$. 它忽视了方程 $x^2=p$ 的两根相等的条件是 $p=0$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 考法 3 利用配方法求字母系数的值

**例 10** [中考·杭州]已知方程 $x^2-6x+q=0$ 可以配方成 $(x-p)^2=7$ 的形式，那么 $x^2-6x+q=2$ 可以配方成（　　）

A. $(x-p)^2=5$　　B. $(x-p)^2=9$

C. $(x-p+2)^2=9$　　D. $(x-p+2)^2=5$

**试题评析**：本题考查了待定系数法、配方法等知识，巧妙诠释了求字母的值及数值与字母的替代关系.

**解**：∵ $x^2-6x+q=0$，∴配方，得 $(x-3)^2=9-q$.

∵已知方程可以配方成 $(x-p)^2=7$，∴ $p=3$，$q=2$.

∴ $x^2-6x+q=2$ 可配方为 $(x-3)^2=9$，

即 $(x-p)^2=9$.

**答案**：B

一题多解

本例也可以不经过配方直接用待定系数法求 $p$，$q$ 的值，过程如下：

∵ $(x-p)^2=7$，

∴ $x^2-2px+p^2=7$.

又∵ $x^2-6x+q=0$ 可以配方成 $(x-p)^2=7$ 的形式，

∴ $-2p=-6$，$p^2-7=q$，

即 $p=3$，$q=2$.

## 两年模拟兵法

☞答案见 246 页

**1.** [模拟·白云]用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无解的方程为（　　）

A. $x^2-1=0$　　B. $x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $-x^2+3=0$

**2.** [中考·泰安]一元二次方程 $x^2-6x-6=0$ 配方后化为（　　）

A. $(x-3)^2=15$　　B. $(x-3)^2=3$

C. $(x+3)^2=15$　　D. $(x+3)^2=3$

**3.** [中考·广东]如果 2 是方程 $x^2-3x+k=0$ 的一个根，则常数 $k$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. −1　　D. −2

**4.** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个非零根 $-b$，则 $a-b$ 的值为（　　）

A. 1　　B. −1　　C. 0　　D. −2

**5.** 已知 $m$，$n$ 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 $a$ 的值为（　　）　　【导学号：7097546】

A. −5　　B. 5　　C. −9　　D. 9

**6.** 方程 $(x-1)^2=4$ 的解是_____.

**7.** 用适当的数填空：

$x^2-4x+$_____$=(x-$_____$)^2$；

$m^2+($_____$)m+\frac{9}{4}=[m+($_____$)]^2$.

**8.** 用直接开平方法解下列方程：

（1）$2x^2-8=0$；

（2）$(y-5)^2-36=0$.

**9.** 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+4x=0$；

（2）$2x^2-3x-6=0$；

（3）$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=0$.

**10.** [模拟·黄冈]已知 $a$，$b$，$c$ 是△$ABC$ 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$.

（1）求 $a$，$b$，$c$ 的值；

（2）判断△$ABC$ 的形状.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.2.2 公式法

**核心知识**
- 求根公式
- 用公式法解一元二次方程

**知识链接**

配方法 → 求根公式 → 公式法解一元二次方程

## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识▸公式法

**1. 求根公式的定义：** 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）在 $b^2-4ac\geqslant 0$ 的条件下，它的根为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geqslant 0$），我们通常把这个式子叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的求根公式.

**2. 公式法：**

（1）**定义：** 运用一元二次方程的求根公式直接求每一个一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法叫作公式法.

（2）**用求根公式解方程的步骤：**




①把一元二次方程化成一般形式；

②确定公式中 $a$，$b$，$c$ 的值；

③求出 $b^2-4ac$ 的值；

④若 $b^2-4ac\geqslant 0$，则把 $a$，$b$ 及 $b^2-4ac$ 的值代入求根公式求解，若 $b^2-4ac<0$，则方程无实数根.

### 拨考向▸利用公式法解一元二次方程

**例 1** 用公式法解下列方程.

（1）$2x^2-7x+4=0$；　　（2）$3x^2-2\sqrt{3}\,x=-1$；

（3）$x^2-2x+3=0$；　　（4）$-3x^2-5x+2=0$.

**解题秘方：** 按照用求根公式解方程的步骤求解.

**解：**（1）$\because a=2$，$b=-7$，$c=4$，

$\therefore b^2-4ac=(-7)^2-4\times 2\times 4=17$.

求 $b^2-4ac$ 的值时，若代入的字母值是负数，则需将其用括号括起来，不能漏掉“-”号.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$.

（2）方程可化为 $3x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$.

$\because a=3$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=1$，$\therefore b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times 3\times 1=0$.

$\therefore x_1=x_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**提分·必记**

**特别提醒**

1. 由求根公式可知：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根是由 $a$，$b$，$c$ 决定的，只要确定了 $a$，$b$，$c$ 的值就可以代入公式求出一元二次方程的根.
2. 求根公式专指一元二次方程的求根公式，只有确认方程是一元二次方程时，才能代入求根公式求解.
3. 当方程的字母系数中已含有字母 $a$，$b$，$c$ 时，在书写时应注意回避，如解方程 $x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0$ 时，不能写成 $a=1$，$b=-3a$，$c=2a^2-ab-b^2$.

**提分·秘诀**

**解法提醒**

用公式法解一元二次方程时，先将方程整理成一元二次方程的一般形式，确定 $a$，$b$，$c$ 的值，再求出 $b^2-4ac$ 的值，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，可代入求根公式求解，当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）∵ $a=1$，$b=-2$，$c=3$，

∴ $b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$. ∴方程无实数根.

（4）∵ $a=-3$，$b=-5$，$c=2$，

∴ $b^2-4ac=(-5)^2-4\times(-3)\times2=49$.

∴ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times(-3)}=-\dfrac{5\pm7}{6}$. ∴ $x_1=-2$，$x_2=\dfrac{1}{3}$.

数根，这时，若将a，b，c的值直接代入求根公式，则算式无意义．另外，当a，b，c中含有分数时，一般先化为整数再计算．

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度 1 利用公式法解含有字母系数的一元二次方程

挑战·高分

**例2** 用公式法解关于 $x$ 的方程 $2x^2+(3m-n)x-2m^2+3mn-n^2=0$.

**解题秘方：** 紧扣公式法的一般步骤求解．

**解：** ∵ $a=2$，$b=3m-n$，$c=-2m^2+3mn-n^2$，

∴ $b^2-4ac=(3m-n)^2-4\times2\times(-2m^2+3mn-n^2)=9m^2-6mn+n^2+16m^2-24mn+8n^2=25m^2-30mn+9n^2=(5m-3n)^2\geqslant0$，

∴ $x=\dfrac{-(3m-n)\pm\sqrt{(5m-3n)^2}}{2\times2}=\dfrac{-3m+n\pm(5m-3n)}{4}$，

∴ $x_1=\dfrac{m-n}{2}$，$x_2=n-2m$.

**方法点拨**

求解含字母系数的方程的方法：先判断二次项的系数是否为0，若为0，则按一元一次方程来求解；若不为0，将方程化为一般形式后，再确定a，b，c的值，进而求出$b^2-4ac$的值，当$b^2-4ac\geqslant0$时，套用求根公式进行求解．

## 拔尖角度 2 利用公式法进行二次三项式的因式分解

挑战·高分

**例3** 因式分解：

（1）$6x^2-7x+1$；　　（2）$4x^2-x-5$.

**解题秘方：** 巧用 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 分解因式．

**解：**（1）构造一元二次方程 $6x^2-7x+1=0$.

∵ $a=6$，$b=-7$，$c=1$，

∴ $b^2-4ac=49-4\times6\times1=25>0$.

∴ $x=\dfrac{7\pm\sqrt{25}}{2\times6}=\dfrac{7\pm5}{12}$.

∴ $x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{6}$.

∴因式分解的结果为 $6x^2-7x+1=6(x-1)\left(x-\dfrac{1}{6}\right)$.

（2）构造一元二次方程 $4x^2-x-5=0$.

∵ $a=4$，$b=-1$，$c=-5$，∴ $b^2-4ac=1-4\times4\times(-5)=81>0$.

∴ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{81}}{2\times4}=\dfrac{1\pm9}{8}$. ∴ $x_1=\dfrac{5}{4}$，$x_2=-1$.

∴因式分解的结果为 $4x^2-x-5=4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x+1)$.

**解法提醒**

利用公式法因式分解的理论依据：

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 $x_1$，$x_2$，则方程可化为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的形式，因此 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，所以利用公式法进行代数式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的因式分解时，可以先构造一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，然后利用求根公式求出一元二次方程的解，再代入 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 完成因式分解．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘** 用公式法解一元二次方程是历年来中考命题的重点，公式法适用于解任何一个有解的一元二次方程．题型以选择题、填空题和解答题中的计算题为主，在解答题的综合试题中也有可能涉及．

## 三年中考兵法

### 考法 利用公式法求根的范围

**例4** [中考·荆州]已知 $a$ 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，则下面对 $a$ 的估计正确的是（　　）

A. $0<a<1$　　B. $1<a<1.5$　　C. $1.5<a<2$　　D. $2<a<3$

**试题评析**：本题考查了用公式法解一元二次方程及无理数的大小的估算，是一道很经典的题目，难度适中．

**解**：解 $x^2-x-1=0$，得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$．∵ $a$ 是 $x^2-x-1=0$ 较大的根，

∴ $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．∵ $2<\sqrt{5}<3$，∴ $3<1+\sqrt{5}<4$．∴ $1.5<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$．

**答案**：C

冲刺·满分

**教你一招**

估算含无理数式子的大小的方法：

先估算这个无理数在哪两个连续整数之间，再根据不等式的基本性质依次在不等式两边加、减、乘或除以适当的数，将这个无理数转化为含无理数的式子，即可确定它的范围．

## 两年模拟兵法

☞答案见247页

**1.** 方程 $2x^2-6x+3=0$ 较小的根为 $p$，方程 $2x^2-2x-1=0$ 较大的根为 $q$，则 $p+q$ 等于（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $2\sqrt{3}$

**2.** 用公式法解方程 $3x^2+4=12x$，下列代入公式正确的是（　　）

A. $x=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-3\times4}}{2}$

B. $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-3\times4}}{2}$

C. $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times3\times4}}{2\times3}$

D. $x=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times3\times4}}{2\times3}$

**3.** 方程 $x^2+3x=14$ 的解是（　　）

A. $x=\dfrac{3\pm\sqrt{65}}{2}$　　B. $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{2}$

C. $x=\dfrac{3\pm\sqrt{23}}{2}$　　D. $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}}{2}$

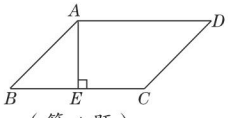
**4.** 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于 $E$，$AE=EB=EC=a$，且 $a$ 是一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的根，则 $\square ABCD$ 的周长为（　　）

A. $4+2\sqrt{2}$

B. $12+6\sqrt{2}$

C. $2+2\sqrt{2}$

D. $2+\sqrt{2}$ 或 $12+6\sqrt{2}$



（第4题）

**5.** 你能找到适当的 $x$ 的值使得多项式 $A=4x^2+2x+1$ 与 $B=3x^2+2$ 相等吗？

**6.** 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-3x+1=0$；

（2）$1-x=3x^2$；

（3）$x^2+2=2\sqrt{2}\,x$．

**7.** 当 $x$ 满足条件 $\begin{cases}x+1<3x-3,\\ \dfrac{1}{2}(x-4)<\dfrac{1}{3}(x-4)\end{cases}$ 时，求方程 $x^2-2x-4=0$ 的根．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.2.3 因式分解法

**核心知识**

- 用因式分解法解一元二次方程
- 灵活选择适当的方法解一元二次方程

**知识链接**

选择合适的方法解一元二次方程
- 最直接的方法 → 公式法
- 最灵活的方法 → 因式分解法 → 提公因式法 / 公式法
- 硬规定的方法 → 配方法

## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 1 因式分解法

1. **定义**：利用因式分解来解一元二次方程的方法叫作因式分解法.

2. **因式分解法解一元二次方程的一般步骤**：




（1）整理方程，使其右边为 0；

（2）将方程左边分解为两个一次式的乘积；

（3）令每个一次式分别为 0，得到两个一元一次方程；

（4）分别解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

### 拨考向 利用因式分解法解一元二次方程

**例 1** 用因式分解法解下列方程.

（1）$(x-5)(x-6)=x-5$；

（2）$4(x-3)^2-25(x-2)^2=0$；

（3）$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.

**解题秘方**：按方程的特点选择恰当的因式分解方法.

**解**：（1）移项，得 $(x-5)(x-6)-(x-5)=0$，

因式分解，得 $(x-5)(x-7)=0$.

方程的两边不能同时除以 $x-5$，这样会使方程丢一根.

$\therefore x-5=0$ 或 $x-7=0$. $\therefore x_1=5$，$x_2=7$.

（2）原方程可化为 $[2(x-3)]^2-[5(x-2)]^2=0$，

因式分解，得 $[2(x-3)+5(x-2)][2(x-3)-5(x-2)]=0$，即 $(7x-16)(-3x+4)=0$，

$\therefore 7x-16=0$ 或 $-3x+4=0$.

$\therefore x_1=\frac{16}{7}$，$x_2=\frac{4}{3}$.

（3）原方程可化为 $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$.

$\therefore x-\sqrt{2}=0$ 或 $x-\sqrt{3}=0$.

$\therefore x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$.

**提分·必记**

**知识储备**

常用的因式分解的方法：

1. 提公因式法；
2. 公式法；
3. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

**提分·秘诀**

**解法提醒**

1. 用因式分解法解一元二次方程，虽然比配方法和公式法简便，但这种方法只适用于部分一元二次方程.
2. 用因式分解法解方程时需将一元二次方程的右边化为 0，再对方程的左边因式分解.
3. 不能随意在方程两边同时除以含未知数的整式.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 点知识▶ 2 一元二次方程的解法

**1. 解一元二次方程的方法：** 直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法.

**2. 解一元二次方程的基本思路：** 将一元二次方程化为一元一次方程，即降次.

**3. 合理选择一元二次方程的解法：**

（1）若方程具有$(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$的形式，可用直接开平方法求解；

（2）若一元二次方程一边为0，另一边易于分解成两个一次因式的积时，可用因式分解法求解；

（3）公式法是一种常用的方法，用公式法解方程时一定要把一元二次方程化为一般形式，确定$a$，$b$，$c$的值，在$b^2-4ac\geqslant 0$的条件下代入公式求解.

### 拔考向▶ 选择适当的方法解一元二次方程

**例2** 解下列方程.

（1）$4x^2-64=0$；（2）$2x^2-7x-6=0$；

（3）$(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$.

**解题秘方：** 根据方程的特点，选择适当的方法解一元二次方程.

**解：**（1）$\because 4x^2-64=0$，$\therefore x^2=16$. $\therefore x_1=4$，$x_2=-4$.

（2）$\because a=2$，$b=-7$，$c=-6$，$\therefore b^2-4ac=97>0$.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{97}}{4}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{97}}{4}$.

（3）因式分解，得$[(3x+2)-3][(3x+2)-5]=0$，

即$(3x-1)(3x-3)=0$. $\therefore x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=1$.

提分·必记

**活用巧记**

先考虑直接开平方法和因式分解法，不能用这两种方法时，再用公式法；没有特殊要求的，尽量少用配方法. 可巧用口诀记为：

观察方程选解法，
先看能否开平方，
再看是否能分解，
左边降次右化零，
求根公式最后用，
系数符号要辨明.

提分·秘诀

**解法策略**

如果展开原方程$(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$中的$(3x+2)^2$，求解时运算量较大，若把$3x+2$看作一个整体，则方程为形如$x^2+(p+q)x+pq=0$的一元二次方程，因此可直接用因式分解法求解.

# 点方法·拔技巧 提高分

## 拔尖角度▶ 1 利用待定系数法解错解方程问题

**例3** 甲、乙两学生解同一个关于$x$的一元二次方程（二次项系数为1）时，甲将一次项系数看错，解得两根为$-4$与8；乙将常数项看错，解得两根为4与10，试求出正确的方程.

**解题秘方：** 运用待定系数法求出两个错误的方程，再结合题意确定正确的方程.

**解：** 设两根为$-4$和8的方程为$x^2+bx+c=0$，

则$\begin{cases}(-4)^2+(-4)\times b+c=0,\\ 8^2+8b+c=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}b=-4,\\ c=-32.\end{cases}$

$\therefore$甲看错一次项系数的方程为$x^2-4x-32=0$.

同理可求出乙看错常数项的方程为$x^2-14x+40=0$.

综上可得正确的方程为$x^2-14x-32=0$.

点拨微课堂

挑战·高分

**另解**

由因式分解法解一元二次方程的逆向运用可知，以$x_1$，$x_2$为两根的一元二次方程（二次项系数为1）为$(x-x_1)(x-x_2)=0$.

甲将一次项系数看错得$x_1=-4$，$x_2=8$，$\therefore(x+4)(x-8)=0$，$\therefore x^2-4x-32=0$；乙将常数项看错得$x_1=4$，$x_2=10$，$\therefore(x-4)\cdot(x-10)=0$. $\therefore x^2-14x+40=0$. $\therefore$正确的方程为$x^2-14x-32=0$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度▶ 2 利用换元法求方程中的代数式的值

挑战·高分

**例 4** 已知实数 $x$ 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$，求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

**解题秘方：** 本题的解题关键是先将原方程转化为只含 $x+\frac{1}{x}$ 这样的未知项的方程，再把 $x+\frac{1}{x}$ 看成一个整体用换元法求解.

**解：** 配方，得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$，

设 $x+\frac{1}{x}=y$，

则原方程可变形为 $y^2+2y-3=0$，

$\therefore y_1=-3$，$y_2=1$. $\therefore x+\frac{1}{x}=-3$ 或 1.

$\because$ 当 $x+\frac{1}{x}=1$ 时，方程没有实数根，

这与 $x$ 为实数相矛盾，舍去.

$\therefore x+\frac{1}{x}=-3$.

x 为实数，其隐含条件是关于 x 的方程有实数根，否则求出的 $x+\frac{1}{x}$ 的值就没有意义.

详解

由 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$，得 $x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1+2$，即 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$.

方法点拨

运用换元法解一元二次方程时，先要找出相同的整体进行换元，使方程变得更简易，解完方程后还要注意还原. 如本题最后写出 $x+\frac{1}{x}$ 的值，而不是只求出未知数 y 的值就结束答题.

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘▶** 用因式分解法解一元二次方程是中考的热门考点之一，独立命题以填空、选择题居多，难度不大，解一元二次方程独立考查时常以选适当方法解一元二次方程的形式出现，综合考查时，渗透到其他知识内较多，是中考的高频考点.

## 三年中考兵法

冲刺·满分

### 考法 1 利用因式分解法解新定义问题

**例 5** [中考·十堰]对于实数 $a$，$b$，定义运算“◎”如下：$a$ ◎ $b=(a+b)^2-(a-b)^2$. 若 $(m+2)$ ◎ $(m-3)=24$，则 $m=$_____.

**试题评析：** 本题考查了用因式分解法解一元二次方程，利用新定义得到 $[(m+2)+(m-3)]^2-[(m+2)-(m-3)]^2=24$，整理得到 $(2m-1)^2-49=0$，然后利用因式分解法解方程.

**解：** 根据题意得 $[(m+2)+(m-3)]^2-[(m+2)-(m-3)]^2=24$，

整理得 $(2m-1)^2-49=0$，

因式分解得 $(2m-1+7)(2m-1-7)=0$，

所以 $2m-1+7=0$ 或 $2m-1-7=0$，所以 $m=-3$ 或 $m=4$.

**答案：** $-3$ 或 4

方法点拨

因式分解法就是利用因式分解求出方程的根的方法，这种方法简便易用，是解一元二次方程最常用的方法.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

### 考法 2 利用因式分解法解与三角形有关的应用问题

**例 6** [中考·荆门]已知 3 是关于 $x$ 的方程 $x^2-(m+1)x+2m=0$ 的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰三角形 $ABC$ 的两条边的长，则△ $ABC$ 的周长为（　　）

A. 7　　B. 10　　C. 11　　D. 10 或 11

**试题评析**：本题考查了一元二次方程的解、用因式分解法解一元二次方程及三角形三边的关系，掌握数形结合思想是解题关键.

**解**：把 $x=3$ 代入方程得 $9-3(m+1)+2m=0$，解得 $m=6$，

则原方程为 $x^2-7x+12=0$，易得 $(x-3)(x-4)=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=4$.

∵这个方程的两个根恰好是等腰三角形 $ABC$ 的两条边的长，

∴应分两种情况讨论：

（1）当△ $ABC$ 的腰长为 4，底边长为 3 时，满足三角形三边关系，则△ $ABC$ 的周长为 $4+4+3=11$；

（2）当△ $ABC$ 的腰长为 3，底边长为 4 时，满足三角形三边关系，则△ $ABC$ 的周长为 $3+3+4=10$.

综上所述，△ $ABC$ 的周长为 10 或 11.

**答案**：D

解法提醒

把 $x=3$ 代入已知方程求得 $m$ 的值，然后通过解方程求得该方程的两根，即等腰三角形 $ABC$ 的两条边的长，再根据三角形三边关系和三角形的周长公式进行解答即可.

## 两年模拟兵法

☞答案见 247 页

**1.** 方程 $(x-2)(x+1)=x-2$ 的解是（　　）

A. $x=0$　　B. $x=2$

C. $x=2$ 或 $x=-1$　　D. $x=2$ 或 $x=0$

**2.** [模拟·咸阳]如果一个等腰三角形的两边长分别为方程 $x^2-5x+4=0$ 的两根，则这个等腰三角形的周长为（　　）

A. 6　　B. 9

C. 6 或 9　　D. 以上都不正确

**3.** [模拟·天门]如果三角形的两边长分别是方程 $x^2-8x+15=0$ 的两个根，那么连接这个三角形三边的中点，得到的三角形的周长可能是（　　）

A. 5.5　　B. 5　　C. 4.5　　D. 4

**4.** [模拟·高新]对于实数 $a$，$b$，先定义一种新运算“★”如下：$a\bigstar b=\begin{cases}a^2b+a, & \text{当 } a\geqslant b \text{ 时},\\ ab^2+b, & \text{当 } a<b \text{ 时}.\end{cases}$

若 $2\bigstar m=36$，则实数 $m$ 等于（　　）

A. 8.5　　B. 4

C. 4 或 −4.5　　D. 4 或 −4.5 或 8.5

**5.** 设 $a$，$b$ 是一个直角三角形两条直角边的长，且 $(a^2+b^2)(a^2+b^2+1)=12$，则这个直角三角形的斜边长为_____.

**6.** 用因式分解法解方程 $x^2-kx-16=0$ 时，得到的两根均为整数，则 $k$ 的值可以为_____.

**7.** 请写出一个以 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 为两根的一元二次方程：_____.

**8.** 用恰当的方法解下列方程：

（1）$9(x-1)^2=5$；

（2）$(x-3)^2+x^2=9$；

（3）$x^2-\sqrt{2}x-1=0$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**9.** 利用完全平方公式，可以将多项式 $ax^2+bx+c$（$a\neq0$）变形为 $a(x+m)^2+n$ 的形式，我们把这样的变形方法叫作多项式的配方法.

运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解.

例如：$x^2+11x+24=x^2+11x+\left(\frac{11}{2}\right)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2+24=\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(x+\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{11}{2}-\frac{5}{2}\right)=(x+8)(x+3)$.

根据以上材料，解答下列问题：

（1）用配方法将多项式 $x^2-3x-10$ 化成 $(x+m)^2+n$ 的形式；

（2）用配方法及平方差公式对多项式 $x^2-3x-10$ 进行因式分解；

（3）求证：不论 $x$，$y$ 取任何实数，多项式 $x^2+y^2-2x-4y+16$ 的值总为正数.

**10.** [模拟·重庆]请阅读下面解方程 $(x^2+1)^2-2(x^2+1)-3=0$ 的过程.

解：设 $x^2+1=y$，则原方程可变形为 $y^2-2y-3=0$.

解得 $y_1=3$，$y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$x^2+1=3$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

当 $y=-1$ 时，$x^2+1=-1$，$x^2=-2$，此方程无实数根.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

我们将上述解方程的方法叫作换元法.

请用换元法解方程：$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x-1}\right)-15=0$.

**11.** 阅读下列式子：$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$，

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$，

$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$，

$(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$，

$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$，

$(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$.

（1）总结：若 $a$，$b$ 是常数，则 $(x+a)(x+b)$ 的结果是关于 $x$ 的_____次_____项式，其中二次项系数是_____，一次项系数是_____，常数项是_____.

（2）上面六个式子是整式的乘法，反之也是成立的，如 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$，

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$，

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，

$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$，

$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$，

$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$，反过来变成因式分解，即将一个二次三项式分解成两个一次因式的乘积形式. 仔细观察原式，寻找规律，利用因式分解法解下列一元二次方程：

① $x^2+7x+10=0$；② $x^2-2x-15=0$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.3 一元二次方程根的判别式

**核心知识**

- 根的判别式
- 利用根的判别式判断根的情况

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识▸一元二次方程根的判别式

**1. 定义：** 我们把 $b^2-4ac$ 叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式，记作“$\Delta$”，即 $\Delta=b^2-4ac$.

**2. 一元二次方程根的情况与根的判别式的关系：**

（1）$\Delta>0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个不等的实数根.

（2）$\Delta=0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个相等的实数根.

（3）$\Delta<0\Leftrightarrow$方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）没有实数根.


根的判别式

### 拔考向▸一元二次方程根的判别式的应用类型

**类型 1：利用 $\Delta$ 的符号判断一元二次方程根的情况**

**例 1** 对于任意实数 $k$，关于 $x$ 的方程 $x^2-2(k+1)x-k^2+2k-1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 没有实数根

C. 有两个不等的实数根

D. 无法判断

**解题秘方：** 由根的判别式的正负性及是否为 0 判断根的情况.

**解：** ∵在 $x^2-2(k+1)x-k^2+2k-1=0$ 中，

$a=1$，$b=-2(k+1)$，$c=-k^2+2k-1$，

∴ $\Delta=b^2-4ac$

$=[-2(k+1)]^2-4\times1\times(-k^2+2k-1)$

$=8+8k^2>0$.

∴方程有两个不等的实数根. 故选 C.

**答案：** C

提分·必记

**特别提醒**

确定根的判别式时，需先将方程化为一般形式，确定 a,b,c 后再计算；使用一元二次方程根的判别式的前提是二次项系数不为 0.

提分·秘诀

**教你一招**

利用根的判别式判断一元二次方程的根的情况的方法：

先将一元二次方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$，当方程中的 $a$，$b$，$c$ 是常数时，直接求出 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，确定方程根的情况；当方程中的 $a$，$b$，$c$ 含有字母时，求出 $\Delta=b^2-4ac$ 后再对含有字母的代数式进行讨论，进而确定该方程根的情况.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用根的情况确定一元二次方程中字母的取值范围

**例 2** ［中考·凉山］关于 $x$ 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2x+1=0$ 有实数根，则 $m$ 的取值范围是（　　）

A. $m \leqslant 3$　　B. $m < 3$

C. $m < 3$ 且 $m \neq 2$　　D. $m \leqslant 3$ 且 $m \neq 2$

**解题秘方：** 紧扣根的判别式与根的情况的关系进行解答.

**解：** ∵方程为一元二次方程，

∴ $m-2 \neq 0$，即 $m \neq 2$.

∵一元二次方程有实数根，

∴ $\Delta \geqslant 0$，即 $4-4(m-2) \geqslant 0$.

∴ $m \leqslant 3$.

∴ $m \leqslant 3$ 且 $m \neq 2$.

**答案：** D

特别提醒

应用 $\Delta$ 的前提是二次项系数不为 0.

方程有两个不等的实数根 $\leftrightarrow \Delta > 0$；方程有两个相等的实数根 $\leftrightarrow \Delta = 0$；方程没有实数根 $\leftrightarrow \Delta < 0$，这样，就可以根据根的情况构建方程或不等式，从而求出字母的值或取值范围. 当待求的字母出现在二次项系数中，而无法判定方程为一元二次方程时，解题时要分类讨论.

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度 1 利用根的情况求方程中待定字母的取值范围

挑战·高分

**例 3** 关于 $x$ 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，求 $m$ 的取值范围.

**解题秘方：** 紧扣“关于 $x$ 的方程”即“二次项系数可能为 0”进行分类解答.

**解：** 当 $m=0$ 时，此方程为一元一次方程，方程有实数根.

当 $m \neq 0$ 时，此方程为一元二次方程.

∵方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根，

∴ $(2m+1)^2-4m^2 \geqslant 0$.

∴ $m \geqslant -\frac{1}{4}$.

综上，当 $m \geqslant -\frac{1}{4}$ 时，关于 $x$ 的方程 $m^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有实数根.

特别提醒

方程有实数根与方程有两个实数根的根本区别：

方程有实数根，此方程不一定是一元二次方程，也可能是一元一次方程；方程有两个实数根，则该方程一定是一元二次方程.

## 拔尖角度 2 利用判别式与根的关系解方程与函数问题

挑战·高分

**例 4** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $kx^2-(4k+1)x+3k+3=0$（$k$ 是整数）.

（1）求证：方程有两个不等的实数根；

（2）若方程的两个实数根分别为 $x_1$，$x_2$（其中 $x_1<x_2$），设 $y=x_2-x_1$，判断 $y$ 是不是变量 $k$ 的函数，如果是，请写出 $y$ 关于 $k$ 的函数表达式；如果不是，请说明理由.

**解题秘方：** （1）根据所给方程求出判别式 $\Delta$，再证明判别式 $\Delta>0$；（2）先根据求根公式求出一元二次方程的根，再结合已知条件表示出方程的两根，求得函数表达式.

解法提醒

求 $y$ 关于 $k$ 的函数表达式，关键是要求出 $x_1$，$x_2$，利用求根公式求得已知方程的两个根后，要根据已知条件判断出 $x_1$，$x_2$ 对应的值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**证明：** ∵ $a=k\neq 0$，$b=-(4k+1)$，$c=3k+3$，

∴ $\Delta=[-(4k+1)]^2-4k(3k+3)=(2k-1)^2$.

∵ $k$ 是整数，∴ $2k-1\neq 0$.

∴ $\Delta=(2k-1)^2>0$.

∴方程有两个不等的实数根.

（2）**解：** $y$ 是变量 $k$ 的函数.

解方程，得 $x=\dfrac{4k+1\pm\sqrt{(2k-1)^2}}{2k}=\dfrac{4k+1\pm(2k-1)}{2k}$.

又已知 $x_1<x_2$，∴ $x_1=1+\dfrac{1}{k}$，$x_2=3$.

∴ $y=x_2-x_1=3-\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=2-\dfrac{1}{k}$.

由函数的定义知 $y$ 是变量 $k$ 的函数，函数表达式为 $y=2-\dfrac{1}{k}$.

详解

∵ $k$ 是整数，且 $k\neq 0$，

∴ $\dfrac{1}{k}\leqslant 1$.

∴ $1+\dfrac{1}{k}\leqslant 2<3$.

∴ $x_1=1+\dfrac{1}{k}$，$x_2=3$.

## 拔尖角度▸ 3 利用分类讨论思想求一元二次方程中待定字母的值

挑战·高分

**例 5** 等腰三角形的边长分别为 $a$，$b$，2，且 $a$，$b$ 是关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两根，求 $n$ 的值.

**解题秘方：** 先对三角形的边长分类讨论，再利用三角形三边的数量关系以及根的判别式，求出字母 $n$ 的值.

**解：** ∵该三角形是等腰三角形，

∴分两种情况讨论：

①当腰长为 2，即 $a=2$ 或 $b=2$ 时，

∵ $a$，$b$ 是关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-6x+n-1=0$ 的两根，

∴ $x=2$ 是方程的一个根.

把 $x=2$ 代入 $x^2-6x+n-1=0$，得 $2^2-6\times 2+n-1=0$，

解得 $n=9$.

当 $n=9$ 时，方程的两根分别是 2 和 4，而边长为 2，4，2 时不能组成三角形，故 $n=9$ 不合题意，舍去.

②当底边长为 2，即 $a=b$ 时，方程 $x^2-6x+n-1=0$ 有两个相等的实数根，则 $\Delta=(-6)^2-4(n-1)=0$，

解得 $n=10$.

∴原方程为 $x^2-6x+9=0$.

解方程 $x^2-6x+9=0$，得 $x_1=x_2=3$，

即 $a=3$，$b=3$.

∵边长为 3，3，2 时可以组成三角形，

∴ $n=10$.

知识储备

当已知等腰三角形中一边的长时，通常要分两种情况讨论：

- 当已知的边长为腰长时；
- 当已知的边长为底边长时.

详解

求出三角形三边的长度之后，必须检验所求结果是否满足任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘**

一元二次方程根的判别式在整个数学中占有重要的地位，既可直接判断一元二次方程根的情况，也可为不等式、二次函数（以后会学到）的研究奠定基础，故在各省市中考试题中出现频率较高．题型常以选择题、填空题为主，考查根的情况或由根的情况确定方程中字母的值（或取值范围）．有时也以解答题的形式出现，与函数相结合，综合考查学生分析问题和解决问题的能力．

## 三年中考兵法

冲刺·满分

### 考法1 利用根的判别式求方程的整数解问题

**例6** [中考·包头]已知关于$x$的一元二次方程$x^2+2x+m-2=0$有两个实数根，$m$为正整数，且该方程的根都是整数，则符合条件的所有正整数$m$的和为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

**试题评析:** 本题考查了根的判别式以及一元二次方程的整数解，牢记“当$\Delta \geqslant 0$时，方程有实数根”是解题的关键．

**解：** ∵ $a=1$，$b=2$，$c=m-2$，关于$x$的一元二次方程$x^2+2x+m-2=0$有实数根，∴ $\Delta=b^2-4ac=2^2-4(m-2)=12-4m \geqslant 0$，∴ $m \leqslant 3$．

∵ $m$为正整数，且该方程的根都是整数，∴ $m=2$或3．∴ $2+3=5$．

**答案：** B

### 考法2 利用根的判别式及方程的根解有关根的应用问题

**例7** [中考·岳阳]已知关于$x$的方程$x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$．

（1）求证：方程总有两个不等的实数根；

（2）已知方程的一个根为$x=0$，求代数式$(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$的值（要求先化简再求值）．

**试题评析：** 本题考查了根的判别式和一元二次方程的根，解题时，逆用一元二次方程根的定义易得出所求式子的值，在解题时要重视解题思路的逆向分析．

（1）**证明:** ∵关于$x$的方程$x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$是一元二次方程，

∴ $\Delta=[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$．∴方程总有两个不等的实数根．

（2）**解：** ∵ $x=0$是此方程的一个根，∴把$x=0$代入方程中得到$m(m+1)=0$．

∴ $m=0$或$m=-1$．$(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5=3m^2+3m+5$，

把$m=0$代入$3m^2+3m+5$得$3m^2+3m+5=5$；

把$m=-1$代入$3m^2+3m+5$得$3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$．

综上，原代数式的值为5．

**思路点拨**

根据方程的系数结合根的判别式$\Delta \geqslant 0$，即可得出$m \leqslant 3$，由$m$为正整数以及该方程的根都是整数，即可求出$m$的值，将其相加即可得出结论．

**解法提醒**

一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况：

1. 不解方程，由根的判别式的正负性及是否为0可直接判定根的情况．
2. 根据方程根的情况，结合根的判别式来确定方程中待定字母的取值范围，若二次项系数中含有字母，则应注意检验二次项系数是否为零．
3. 应用判别式证明方程根的情况（有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根）．



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 两年模拟兵法 ☞答案见248页

**1.** [中考·自贡]关于$x$的一元二次方程$x^2-2x+m=0$无实数根，则实数$m$的取值范围是(　　)

A. $m<1$　　B. $m\geqslant 1$　　C. $m\leqslant 1$　　D. $m>1$

**2.** [中考·河南]一元二次方程$(x+1)(x-1)=2x+3$的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

**3.** [中考·烟台]当$b+c=5$时，关于$x$的一元二次方程$3x^2+bx-c=0$的根的情况为(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

**4.** 若关于$x$的一元二次方程$x^2-4x+m=0$有实数根，则实数$m$的取值范围是(　　)

A. $m<4$　　B. $m\leqslant 4$

C. $m>4$　　D. $m\geqslant 4$

**5.** [中考·新疆]若关于$x$的一元二次方程$(k-1)x^2+x+1=0$有两个实数根，则$k$的取值范围是(　　)

A. $k\leqslant\frac{5}{4}$　　B. $k>\frac{5}{4}$

C. $k<\frac{5}{4}$且$k\neq 1$　　D. $k\leqslant\frac{5}{4}$且$k\neq 1$

**6.** [中考·河北]小刚在解关于$x$的方程$ax^2+bx+c=0$($a\neq 0$)时，只抄对了$a=1$，$b=4$，解出其中一个根是$x=-1$. 他核对时发现所抄的$c$比原方程的$c$值小2，则原方程的根的情况是(　　)

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是$x=-1$

D. 有两个相等的实数根

**7.** [中考·广元]若关于$x$的一元二次方程$ax^2-x-\frac{1}{4}=0$($a\neq 0$)有两个不相等的实数根，则点$P(a+1,\ -a-3)$在第_____象限.

**8.** [中考·遂宁]若关于$x$的方程$x^2-2x+k=0$有两个不相等的实数根，则$k$的取值范围为_____.

**9.** [中考·武威]关于$x$的一元二次方程$x^2+\sqrt{m}\,x+1=0$有两个相等的实数根，则$m$的取值为_____.

**10.** [中考·北京]关于$x$的方程$x^2-2x+2m-1=0$有实数根，且$m$为正整数，求$m$的值及此时方程的根.

**11.** [中考·衡阳]关于$x$的一元二次方程$x^2-3x+k=0$有实数根.

(1) 求$k$的取值范围；

(2) 如果$k$是符合条件的最大整数，且一元二次方程$(m-1)x^2+x+m-3=0$与方程$x^2-3x+k=0$有一个相同的根，求此时$m$的值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# *2.4 一元二次方程根与系数的关系

**核心知识**

- 一元二次方程根与系数的关系
- 以两实数为根的一元二次方程
- 常见涉及两实数根的变形公式

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 1 一元二次方程根与系数的关系

提分·必记

**1. 一元二次方程根与系数的关系：** 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程有实数根，设这两个实数根分别为 $x_1$，$x_2$，这两个根与系数的关系是 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. 即一元二次方程两根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两根的积等于常数项与二次项系数的比.

特别提醒

一元二次方程根与系数的关系存在的前提是 $a\neq 0$，$b^2-4ac\geqslant 0$.

**2. 与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形：**

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

(2) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；

(3) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$.




### 拨考向 根与系数的关系的应用类型

提分·秘诀

特别提醒

求一元二次方程两根之和或两根之积时，要把方程化成一元二次方程的一般形式，先确定方程有实数根，再代入公式直接计算即可.

**类型 1：求两根的和与积**

**例 1** 设 $x_1$，$x_2$ 是方程 $4x^2-7=2x^2+8x$ 的两个实数根，求 $x_1+x_2$ 和 $x_1x_2$ 的值.

**解题秘方：** 根据根与系数的关系求值.

**解：** 将方程整理，得 $2x^2-8x-7=0$.

$\therefore a=2$，$b=-8$，$c=-7$.

$\therefore \Delta=(-8)^2-4\times 2\times(-7)=120>0$.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-8}{2}=4$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-7}{2}=-\dfrac{7}{2}$.

**类型 2：已知方程的一个根，求另一个根与待定字母的值**

**例 2** 已知一元二次方程 $x^2-6x+q=0$ 有一个根为 2，求方程的另一个根和 $q$ 的值.

**解题秘方：** 利用两根之和与积求解.

**解：** 设这个方程的另一个根为 $m$，则



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$m+2=6$，$2m=q$，

$\therefore m=4$，$q=8$.

也可以把 $x=2$ 代入方程中，求得字母 $q=8$，再解 $x^2-6x+8=0$，求得两根分别为 2 和 4.

$\because$ 当 $q=8$ 时，$\Delta=(-6)^2-4\times8=4>0$，$\therefore$ 另一个根为 4，$q$ 的值为 8.

**教你一招：** 已知一根，利用根与系数的关系求方程中待定字母的值的策略：

求解此类问题时，若待定字母在一次项中，可先用两根之积的关系求出另一根，然后代入求待定字母的值，或者用两根之和的关系求待定字母的值．若待定字母在常数项中，可先用两根之和的关系求出另一根，然后代入方程求待定字母的值，或者用两根之积的关系求待定字母的值．

**警示误区**

利用一元二次方程的根与系数的关系求出待定字母的值后，一定要代入 $b^2-4ac$ 中，只有满足 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，求出的字母值才符合题意．

## 点知识 ▸ 2 二次项系数为 1 的一元二次方程的性质

1. 以 $x_1$，$x_2$ 为根的一元二次方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

2. 如果方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个实数根为 $x_1$，$x_2$，那么 $x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=n$.

提分·必记

**特别解读**

应用性质 1 能求一元二次方程，应用性质 2 能转化记忆一元二次方程根与系数的关系．

## 拔考向 ▸ 利用根与系数的关系构造方程

**例 3** [中考·来宾] 已知实数 $x_1$，$x_2$ 满足 $x_1+x_2=7$，$x_1x_2=12$，则以 $x_1$，$x_2$ 为根的一元二次方程是（　　）

A. $x^2-7x+12=0$　　B. $x^2+7x+12=0$

C. $x^2+7x-12=0$　　D. $x^2-7x-12=0$

**解题秘方：** 直接用以 $x_1$，$x_2$ 为根的一元二次方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$ 求解．

**解：** 由题可知所求方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$，

$\therefore$ 所求的一元二次方程是 $x^2-7x+12=0$.

**答案：** A

提分·秘诀

**方法提醒**

二次项系数为 1 的一元二次方程与两根的关系是：两根之和是一次项系数的相反数，两根之积等于常数项．

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度 ▸ 1 利用根与系数的关系求涉根的代数式的值

**例 4** 已知 $x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，求：

（1）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ 的值；（2）$(x_1-x_2)^2$ 的值．

**解题秘方：** 紧扣“与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形”解答．

**解：**（1）$\because x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$. $\therefore \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{4}{2}=2$.

（2）$\because x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$.

$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=8$.

挑战·高分

**方法点拨**

利用根与系数的关系求涉根代数式值的方法：

一般利用恒等变形将代数式转化成含 $x_1+x_2$，$x_1x_2$ 的形式，再结合根与系数的关系进行求解．

注意求值的前提：方程有两个实数根，即判别式大于或等于 0.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度▶ 2 利用分类思想探究涉根的字母系数值的存在性

挑战·高分

**例5** 已知关于 $x$ 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$,

(1) 若方程有实数根，求 $a$ 的取值范围；

(2) 是否存在这样的实数 $a$，使方程的两根 $x_1$，$x_2$ 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$？若存在，求出实数 $a$ 的值；若不存在，请说明理由.

**解题秘方：** (1) 方程没有指明是一元二次方程，则需考虑二次项系数为 0 和不为 0 两种情况；

(2) 对于存在性问题，先假设存在求出字母值，再看它是否满足 $\Delta \geqslant 0$，从而确定存在性.

**解：** (1) 当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a \neq 5$ 时，方程为一元二次方程，

$\Delta=16+4(a-5)=4a-4 \geqslant 0$，解得 $a \geqslant 1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $a \geqslant 1$.

(2) 根据题意得 $x_1+x_2=\dfrac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\dfrac{1}{a-5}$.

$\because x_1+x_2+x_1x_2=3$,

$\therefore \dfrac{4}{a-5}-\dfrac{1}{a-5}=3.$

解这个方程得 $a=6$.

经检验，$a=6$ 是分式方程的解.

又 $\because a=6$ 满足 $\Delta \geqslant 0$,

$\therefore$ 存在实数 $a$，使方程的两根 $x_1$，$x_2$ 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，此时 $a=6$.

解法提醒

- 对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；
- 解答涉及一元二次方程根的存在性问题时，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于零，最后确定字母值的存在性.

## 拔尖角度▶ 3 利用根与系数的关系解新定义问题

挑战·高分

**例6** 如果关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有两个实数根，且其中一个根是另一个根的 2 倍，那么称这样的方程为“倍根方程”. 例如，一元二次方程 $x^2-6x+8=0$ 的两个根是 2 和 4，那么方程 $x^2-6x+8=0$ 就是“倍根方程”.

(1) 若关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-3x+c=0$ 是“倍根方程”，则 $c=$_____；

(2) 若 $(x-2)(mx-n)=0$ ($m \neq 0$) 是“倍根方程”，求代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 的值；

(3) 若关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 是“倍根方程”，求 $a$，$b$，$c$ 之间的关系.

**解题秘方：** 紧扣“倍根方程”的定义，结合根与系数的关系求解.

**解：** (1) 2

详解

设关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+c=0$ 的两个根为 $x_1$，$x_2$，且 $x_1<x_2$.

由根与系数的关系，可得 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=c$.

$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+c=0$ 是“倍根方程”.

$\therefore x_2=2x_1$.

$\therefore x_1+2x_1=3$，$2x_1^2=c$.

$\therefore c=2$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）解方程 $(x-2)(mx-n)=0$ $(m\neq 0)$，

得 $x_1=2$，$x_2=\dfrac{n}{m}$，

由题意，可知方程的两根是 2 倍关系，故 $x_2=1$ 或 $x_2=4$.

当 $x_2=1$ 时，$\dfrac{n}{m}=1$，即 $n=m$.

把 $n=m$ 代入代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 中，

得 $4m^2-5mn+n^2=4m^2-5m^2+m^2=0$.

当 $x_2=4$ 时，$\dfrac{n}{m}=4$，即 $n=4m$.

把 $n=4m$ 代入代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 中，

得 $4m^2-5mn+n^2=4m^2-5m\times 4m+(4m)^2=0$.

综上所述，代数式 $4m^2-5mn+n^2$ 的值为 0.

（3）由“倍根方程”的概念可设 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两个根为 $t$ 和 $2t$；

此时 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$. 由根与系数的关系，知 $t+2t=-\dfrac{b}{a}$，$t\cdot(2t)=\dfrac{c}{a}$，即 $3t=-\dfrac{b}{a}$，$2t^2=\dfrac{c}{a}$. 消去 $t$，得 $2b^2-9ac=0$.

此时 $ac=\dfrac{2}{9}b^2\geqslant 0$，$b^2=\dfrac{9}{2}ac$，$\therefore\ \Delta=b^2-4ac=\dfrac{9}{2}ac-4ac=\dfrac{1}{2}ac\geqslant 0$.

$\therefore$ $a$，$b$，$c$ 之间的关系是 $2b^2-9ac=0$.

另解

由“倍根方程”的概念可设 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 $t$ 和 $2t$，此时 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$.

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 可化为 $a(x-t)(x-2t)=0(a\neq 0)$.

$\therefore$ $ax^2+bx+c=ax^2-3atx+2at^2$.

$\therefore$ $b=-3at$，$c=2at^2$.

又 $a\neq 0$，$\therefore t=\dfrac{b}{-3a}$.

把 $t=\dfrac{b}{-3a}$ 代入 $c=2at^2$ 中，

得 $2b^2-9ac=0$，

此时 $ac=\dfrac{2}{9}b^2\geqslant 0$，

$b^2=\dfrac{9}{2}ac$，

$\therefore\ \Delta=b^2-4ac=\dfrac{9}{2}ac-4ac=\dfrac{1}{2}ac\geqslant 0$.

$\therefore$ $a$，$b$，$c$ 之间的关系是 $2b^2-9ac=0$.

# 点中考·拨模拟 得满分

**中考探秘**

一元二次方程根与系数的关系是中考的重点内容之一，利用此知识可解决：（1）已知方程，求两根的和或积，如例 1；（2）已知方程的一个根，求另一个根及方程中待定字母的值，如例 2；（3）求关于两根的代数式的值，如例 4 等问题，这些都是中考考查的内容，题型主要有选择题、填空题和解答题.

## 三年中考兵法

冲刺·满分

### 考法 1 利用根与系数的关系求涉根的非对称式的值

**例 7** [中考·天门] 若 $\alpha$，$\beta$ 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为（　　）

A. $-13$　　B. 12　　C. 14　　D. 15

**试题评析：** 本题考查了根与系数的关系：若 $x_1$，$x_2$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的两根，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，也考查了一元二次方程解的定义.

解法提醒

求与根有关的代数式的值的方法：

看代数式是否具有对称性，若具有对称性，则直接变形，将两根之和或两根之积代入求值；若不具有对称性，则将其中



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解：** ∵ $\alpha$ 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的实数根，

∴ $2\alpha^2-5\alpha-1=0$，即 $2\alpha^2=5\alpha+1$.

∴ $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\alpha+1+3\alpha\beta+5\beta=5(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+1$.

∵ $\alpha$，$\beta$ 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，

∴ $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$，$\alpha\beta=-\frac{1}{2}$.

∴ $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\times\frac{5}{2}+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=12$.

**答案：** B

的某一个根单独代入方程中，得到与待求值的代数式相关的结构，进行整体代入求值.

## 考法 2 利用涉根的式子的值求字母的值

**例 8** [中考·十堰]已知关于 $x$ 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 $x_1$，$x_2$.

（1）求实数 $k$ 的取值范围；

（2）若 $x_1$，$x_2$ 满足 $x_1^2+x_2^2=16+x_1x_2$，求实数 $k$ 的值.

**试题评析：** 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式，解题的关键：（1）根据方程的系数结合根的判别式，得出 $\Delta=-4k+5\geqslant 0$；（2）根据根与系数的关系结合 $x_1^2+x_2^2=16+x_1x_2$，得出关于 $k$ 的一元二次方程.

**解：**（1）∵ 关于 $x$ 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 $x_1$，$x_2$，∴ $\Delta=(2k-1)^2-4(k^2-1)=-4k+5\geqslant 0$. 解得 $k\leqslant\frac{5}{4}$.

∴实数 $k$ 的取值范围为 $k\leqslant\frac{5}{4}$.

（2）∵关于 $x$ 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 有两个实数根 $x_1$，$x_2$，

∴ $x_1+x_2=1-2k$，$x_1x_2=k^2-1$.

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16+x_1x_2$，

∴ $(1-2k)^2-2(k^2-1)=16+(k^2-1)$，即 $k^2-4k-12=0$.

解得 $k=-2$ 或 $k=6$（不符合题意，舍去）.

∴实数 $k$ 的值为 $-2$.

**特别提醒**

实数 $k$ 应满足的条件：

- 满足 $\Delta\geqslant 0$；
- 满足给出的条件等式.

**警示误区**

∵当 $k=6$ 时，$\Delta=(2\times6-1)^2-4\times(6^2-1)=-19<0$，

∴$k=6$ 不合题意，舍去.

利用根与系数的关系求待定字母的值时，往往会犯单纯满足涉根的关系式，而不考虑 $\Delta\geqslant 0$ 的错误.

## 两年模拟兵法 ☞答案见 248 页

**1.** [中考·凉山]一元二次方程 $3x^2-1=2x+5$ 两实根的和与积分别是（　　）

A. $\frac{3}{2}$，$-2$　　B. $\frac{2}{3}$，$-2$

C. $-\frac{2}{3}$，$2$　　D. $-\frac{3}{2}$，$2$

**2.** [中考·绵阳]关于 $x$ 的方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根是 $-2$ 和 $1$，则 $n^m$ 的值为（　　）

A. $-8$　　B. $8$　　C. $16$　　D. $-16$

**3.** [中考·烟台]若 $x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2-2mx+m^2-m-1=0$ 的两个根，且 $x_1+x_2=1-x_1x_2$，则 $m$ 的值为（　　）

A. $-1$ 或 $2$　　B. $1$ 或 $-2$

C. $-2$　　D. $1$

**4.** [中考·新疆]已知关于 $x$ 的方程 $x^2+x-a=0$ 的一个根为 $2$，则另一个根是（　　）

A. $-3$　　B. $-2$　　C. $3$　　D. $6$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**5.** [中考·黄石]关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+2x-2m+1=0$ 的两实数根之积为负，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

**6.** 已知 $x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2+6x+3=0$ 的两个实数根，则 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值为_____.

**7.** 不解方程，求下列方程的两根 $x_1$，$x_2$ 的和与积.

（1）$x^2-3x-5=0$；

（2）$2x^2+5x-9=0$；

（3）$4x-2=x^2$.

**8.** [模拟·绵阳]已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2=2(1-m)x-m^2$ 的两个实数根为 $x_1$，$x_2$.

（1）求实数 $m$ 的最大整数值；

（2）设 $y=x_1+x_2$，当 $y$ 取得最小值时，求相应的 $m$ 的值，并求出 $y$ 的最小值.

**9.** [中考·鄂州]关于 $x$ 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不等的实数根.

（1）求实数 $k$ 的取值范围；

（2）设方程的两个实数根分别为 $x_1$，$x_2$，存不存在这样的实数 $k$，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出这样的 $k$ 值；若不存在，说明理由.

**10.** [中考·日照]如果 $m$，$n$ 是两个不等的实数，且满足 $m^2-m=3$，$n^2-n=3$，那么代数式 $2n^2-mn+2m+2\,019$ 的值是多少？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.5 一元二次方程的应用

**核心知识**

- 增长（降低）率问题
- 商品经济问题
- 数字问题
- 图形面积问题

**知识链接**




## 点知识·拨考向 速提分

### 点知识 建立一元二次方程的模型解应用题的一般步骤

**1. 列一元二次方程解应用题的一般步骤归纳为：审、设、列、解、检、答.**

审——审题，明确已知量和未知量，找出它们之间的关系

设——设未知数

列——根据题目中的等量关系，列出方程

解——解方程，求出未知数的值

检——检验方程的解能否保证实际问题有意义

答——写出答案，应遵循“问什么，答什么，怎么问，怎么答”的原则

**2. 列一元二次方程解应用题的注意事项：**

（1）在一道应用题中，往往含有几个未知量，应恰当地选择其中的一个用字母 $x$ 表示，然后根据各量之间的数量关系，将其他几个量用含 $x$ 的代数式表示出来.

（2）设未知数时必须写清单位、用对单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，作答时必须写上单位.


利用一元二次方程建模

（3）一定要对方程的根加以检验，看它是否符合实际意义.

提分·必记

特别解读

第一步“审”一般不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确已知量、未知量及它们之间的关系才能准确列出方程.

特别解读

列方程，这是解应用题的关键一步，一般先找出一个能够表达全部含义的等量关系，然后列代数式表示等量关系中的各个量，就得到含未知数的等式即方程.

### 拔考向 利用一元二次方程解实际应用问题

**例 1** 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 45 元，为了扩大销售、增加盈利、尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施，经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 4 件，若商场平均每天盈利 2 100 元，每件衬衫应降价多少元？请完成下列问题：

（1）降价前，该商场衬衫平均每天的总盈利为_____元.

（2）降价后，设该商场每件衬衫应降价 $x$ 元，则每件衬衫盈利_____元，平均每天可售出_____件.（用含 $x$ 的代数式表示）

（3）请列出方程，求出 $x$ 的值.

提分·秘诀

解法提醒

设未知数时，必须写清单位、正确使用单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，作答时必须写上单位.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解题秘方:** 用关系式“销售盈利 = 每件盈利 × 件数”,建立方程进行解答.

**解:** (1) 900

(2) $(45-x)$; $(20+4x)$

(3) 由题意得 $(45-x)(20+4x)=2\,100$,

解得 $x_1=10$, $x_2=30$,

为了尽快减少库存,故 $x=30$.

答:每件衬衫应降价 30 元.

在盈利相同的情况下,尽快减少库存,就是要多卖,降价越多,卖的也越多.

表格图例

| | 降价前 | 降价后 |
|---|---|---|
| 每件盈利 | 45 元 | $(45-x)$ 元 |
| 销售量 | 20 件 | $(20+4x)$ 件 |
| 总盈利 | $45\times20$ 元 | $(45-x)\cdot(20+4x)$ 元 |

**技巧点拨:** 本题可用列表法分析题目中各个量之间的关系,列表法的优点在于将题目中各个量列在一个表格中,从而理顺它们之间的关系,以便从中找出相等关系,列出方程,如本题分别从降价前后将每件盈利、销售量、总盈利进行对比呈现,便可找出相等关系.

# 点方法·拨技巧 提高分

## 拔尖角度▸ 1 利用平移法用一元二次方程解几何问题

挑战·高分

**例 2** [中考·巴中] 如图 2.5-1,某农场有一块长 40 m,宽 32 m 的矩形种植地,为方便管理,准备沿平行于两边的方向纵、横各修建一条等宽的小路.要使种植面积为 1 140 $m^2$,求小路的宽.

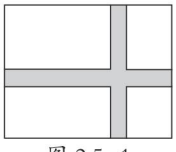


图 2.5-1

**解题秘方:** 设小路的宽为 $x$ m,图中小路平移到矩形种植地边上时,种植面积仍为 1 140 $m^2$,建立方程 $(40-x)(32-x)=1\,140$,解此方程即可.

**解:** 设小路的宽为 $x$ m. 图中的小路平移到矩形种植地边上时,种植面积是不变的.

根据题意,得 $(40-x)(32-x)=1\,140$.

解得 $x_1=2$, $x_2=70$(不合题意,舍去).

答:小路的宽为 2 m.

**教你一招:** 解决图形面积问题的关键是把实际问题转化为数学问题,把实际问题中的已知量和未知量归结到某一个几何图形中,然后利用几何知识来寻找它们之间的关系,列出一元二次方程求解,求不规则图形的面积时,一般是将不规则图形平移或分割成规则图形,再利用规则图形的面积公式列方程求解.

方法点拨

平移法是列一元二次方程解面积类应用题常用的方法,其核心思想是将不在一起的几个图形通过平移转化为一个规则的图形,通过面积关系列一元二次方程求解.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 拔尖角度 2 利用图象信息法用一元二次方程解一次函数问题

挑战·高分

**例 3** 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观，如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，但同时考虑到文物的保存费用问题，还要保证一定的门票收入．因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数，在该方法的实施过程中发现，每周参观人数与票价之间存在着如图 2.5-2 的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周 4 万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少？门票价格应是多少？

特别提醒：用待定系数法求每周参观人数与票价之间的一次函数关系式．

直接得出每周参观人数与票价之间的关系式．

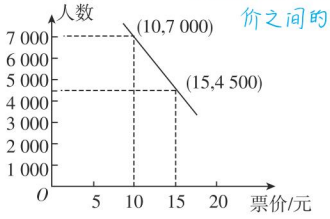



图 2.5-2

**解题秘方：** 利用函数图象的信息用待定系数法求每周参观人数与票价之间的函数关系式．

**解：** 设每周参观人数 $y$ 与票价 $x$（元）之间的一次函数关系式为 $y=kx+b$（$x>0$），根据题意，得 $\begin{cases}10k+b=7\,000,\\15k+b=4\,500,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\,000.\end{cases}$

$\therefore y=-500x+12\,000$（$x>0$）．

$\because xy=40\,000$，即 $x(-500x+12\,000)=40\,000$，

$\therefore x^2-24x+80=0$．解得 $x_1=20$，$x_2=4$．

把 $x_1=20$，$x_2=4$ 分别代入 $y=-500x+12\,000$，得 $y_1=2\,000$，$y_2=10\,000$．

$\because$ 要控制参观人数，$\therefore$ 取 $x=20$，此时 $y=2\,000$．

$\therefore$ 每周应限定参观人数为 2 000，门票价格应是 20 元．

特别提醒：在门票收入相同的情况下，控制参观人数，就是尽量减少参观人数，所以取参观人数少的情况作为符合题意的答案．

# 点中考·拔模拟 得满分

**中考探秘** 随着课程改革的不断深入，近年来一元二次方程的实际应用问题在各地中考中大量涌现，在中考中单独考查时主要考查利润问题、增长率问题，也常与几何图形的面积问题及函数问题相结合，题型有选择题、填空题和解答题．

## 三年中考兵法

冲刺·满分

### 考法 1 利用一元二次方程解数字问题

**例 4** ［模拟·武汉］有一个两位数，它的十位数字与个位数字之和是 8，如果把十位数字与个位数字调换，所得的两位数与原来的两位数的乘积为 1 855，求原来的两位数．

知识储备

整数的常用表示方法：

1. 两位数 = 十位上的数字 ×10+ 个位上的数字．
2. 三位数 = 百位上的数



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**试题评析**：本题考查的是用一元二次方程解数字问题，弄清数字和数字表示的数间的关系是解题关键.

**解**：设原来的两位数的十位数字为 $x$，则个位数字为 $8-x$，

列方程，得 $[10x+(8-x)][10(8-x)+x]=1\,855$，

整理，得 $x^2-8x+15=0$，

解方程，得 $x_1=3$，$x_2=5$，

由原来的两位数的个位数字为 $8-x$，

可得个位数字为 5 或 3.

答：原来的两位数为 35 或 53.

**教你一招**：解决数字问题的关键是用代数式表示出这个多位数，设未知数时，通常采用间接设元法，即设这个多位数的某一数位上的数字为 $x$，然后将其他数位上的数字用含 $x$ 的代数式表示出来，最后再根据题中的数量关系列方程即可.

字 ×100+ 十位上的数字 ×10+ 个位上的数字.

3. 三个连续整数，设中间的一个为 $x$，则其余两个分别为 $x-1$，$x+1$.

4. 三个连续偶数可设为 $2x-2$，$2x$，$2x+2$；三个连续奇数可设为 $2x-3$，$2x-1$，$2x+1$.

## 考法 2 利用一元二次方程解增长率问题

**例 5** 某地 2017 年为做好“精准扶贫”，投入资金 1 280 万元用于异地安置，并规划投入资金逐年增加，2019 年在 2017 年的基础上增加投入资金 1 600 万元.

（1）从 2017 年到 2019 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为多少？

（2）在 2019 年异地安置的具体实施中，该地计划投入资金不低于 500 万元用于优先搬迁租房奖励，规定前 1 000 户（含第 1 000 户）每户每天奖励 8 元，1 000 户以后每户每天奖励 5 元，按租房 400 天计算，求 2019 年该地至少有多少户享受到优先搬迁租房奖励.

**试题评析**：本题考查了一元二次方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键：（1）找准等量关系，正确列出一元二次方程；（2）根据各数量之间的关系，列出一元一次不等式.

**解**：（1）设该地投入异地安置资金的年平均增长率为 $x$，

根据题意得 $1\,280(1+x)^2=1\,280+1\,600$，

解得 $x_1=0.5=50\%$，$x_2=-2.5$（舍去）.

答：从 2017 年到 2019 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为 50%.

（2）设 2019 年该地有 $a$ 户享受到优先搬迁租房奖励，

根据题意得 $8\times1\,000\times400+5\times400(a-1\,000)\geqslant5\,000\,000$，

解得 $a\geqslant1\,900$.

答：2019 年该地至少有 1 900 户享受到优先搬迁租房奖励.

**知识储备**

增长率（降低率）问题的公式：

$a$ 为起始量，$b$ 为终止量，$n$ 为增长（或降低）的次数，增长率问题的公式：$a(1+x)^n=b$（$x$ 为平均增长率）；降低率问题的公式：$a(1-x)^n=b$（$x$ 为平均降低率）.

**详解**

2018 年投入资金 $1\,280(1+x)$ 万元，

2019 年投入资金 $1\,280(1+x)^2$ 万元.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 考法 3 利用一元二次方程解商品销售问题

**例 6** [中考·德州]为积极响应新旧动能转换,提高公司经济效益,某科技公司近期研发出一种新型高科技设备,每台设备成本价为 30 万元,经过市场调研发现,每台售价为 40 万元时,年销售量为 600 台;每台售价为 45 万元时,年销售量为 550 台. 假定该设备的年销售量 $y$(单位:台)和销售单价 $x$(单位:万元)成一次函数关系.

(1)求年销售量 $y$ 与销售单价 $x$ 的函数关系式;

(2)根据相关规定,此设备的销售单价不得高于 70 万元,如果该公司想获得 10 000 万元的年利润,则该设备的销售单价应是多少万元?

**试题评析**:本题考查了用待定系数法求一次函数关系式以及一元二次方程的应用,解题的关键:(1)根据年销售量 $y$(单位:台)和销售单价 $x$(单位:万元)成一次函数关系,利用待定系数法求出函数关系式;(2)找准等量关系,正确列出一元二次方程.

**解**:(1)设年销售量 $y$ 与销售单价 $x$ 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

根据题意,得 $\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=1\,000,\end{cases}$

∴年销售量 $y$ 与销售单价 $x$ 的函数关系式为 $y=-10x+1\,000$.

(2)此设备的销售单价为 $x$ 万元,则每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元,年销售量为 $(-10x+1\,000)$ 台,

根据题意,得 $(x-30)(-10x+1\,000)=10\,000$.

整理,得 $x^2-130x+4\,000=0$. 解得 $x_1=50$,$x_2=80$.

∵此设备的销售单价不得高于 70 万元,∴ $x=50$.

答:该设备的销售单价应是 50 万元.

## 考法 4 利用一元二次方程解新定义问题

**例 7** [中考·常州]阅读材料:各类方程的解法.

求解一元一次方程,根据等式的基本性质,把方程转化为 $x=a$ 的形式. 求解二元一次方程组,把它转化为一元一次方程来解;类似地,求解三元一次方程组,把它转化为解二元一次方程组. 求解一元二次方程,把它转化为两个一元一次方程来解. 求解分式方程,把它转化为整式方程来解,由于“去分母”可能产生增根,所以解分式方程必须检验. 各类方程的解法不尽相同,但是它们有一个共同的基本数学思想——转化,把未知转化为已知.

用“转化”的数学思想,我们还可以解一些新的方程. 例如,一

**知识储备**

利润 = 售价 − 进价;

利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$;

售价 = 进价 ×(1+利润率);

总利润 = 总售价 − 总成本 = 单件利润 × 总销量.

**思路点拨**

1. 因式分解多项式,然后得结论;
2. 两边平方,把含根号的方程转化为整式方程,再求解,注意验根;
3. 设 AP 的长为 x m,根据勾股定理和 BP+CP=10 m,可列出方程,



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

元三次方程 $x^3+x^2-2x=0$，可以通过因式分解把它转化为 $x(x^2+x-2)=0$，解方程 $x=0$ 和 $x^2+x-2=0$，可得方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解.

（1）问题：方程 $x^3+x^2-2x=0$ 的解是 $x_1=0$，$x_2=$_____，$x_3=$_____；

（2）拓展：用“转化”思想求方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解；

（3）应用：如图 2.5-3，已知矩形草坪 $ABCD$ 的长 $AD=8$ m，宽 $AB=3$ m，小华把一根长为 10 m 的绳子的一端固定在点 $B$，沿草坪边沿 $BA$，$AD$ 走到点 $P$ 处，把绳子拉直并固定在点 $P$，然后沿草坪边沿 $PD$、$DC$ 走到点 $C$ 处，把绳子剩下的一段拉直，绳子的另一端恰好落在点 $C$ 处. 求 $AP$ 的长.

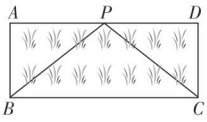


图 2.5-3

**试题评析**：本题考查了转化的思想方法、一元二次方程的解法. 解含根号的方程要注意验根. 解决（3）时，根据勾股定理和绳长，列出方程是关键.

**解**：（1）$-2$；1

（2）$\sqrt{2x+3}=x$，

方程的两边平方，得 $2x+3=x^2$，

解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，

当 $x=-1$ 时，$\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1\neq -1$，

$\therefore x=-1$ 不是原方程的解.

当 $x=3$ 时，$\sqrt{2x+3}=\sqrt{9}=3$，

$\therefore$ 方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解是 $x=3$.

（3）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=\angle D=90^\circ$，$AB=CD=3$ m.

设 $AP=x$ m，则 $PD=(8-x)$ m.

$\because BP+CP=10$m，$BP=\sqrt{AB^2+AP^2}$，$CP=\sqrt{PD^2+CD^2}$，

$\therefore \sqrt{9+x^2}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10$. $\therefore x=4$.

答：$AP$ 的长为 4 m.

由于方程含有根号，两边平方，把含根号的方程转化为整式方程，再求解.

$x^3+x^2-2x=0$，$x(x+2)(x-1)=0$，

$\therefore x=0$ 或 $x+2=0$ 或 $x-1=0$.

$\therefore x_1=0$，$x_2=-2$，$x_3=1$.

详解

由 $\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10$，

得 $\sqrt{(8-x)^2+9}=10-\sqrt{9+x^2}$.

两边平方，

得 $(8-x)^2+9=100-20\sqrt{9+x^2}+9+x^2$.

整理，得 $5\sqrt{9+x^2}=4x+9$.

两边平方并整理，

得 $x^2-8x+16=0$，

即 $(x-4)^2=0$，

$\therefore x=4$.

经检验，$x=4$ 是方程的解.

## 两年模拟兵法

☞答案见 249 页

**1.** [模拟·迁安]小明在解决一个关于计算机病毒传播的问题时，设计算机有 $x$ 台，列方程 $3+x+x(x+3)=48$，则方程的解中一定不合题意的是（　　）

A. 5　　B. 9　　C. $-5$　　D. $-9$

**2.** [中考·荆州]《九章算术》中的“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去根六尺. 问折高者几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈 $=10$ 尺），一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部 6 尺远，问折断处离地面的高度是多少？设折断处离地面的高度为 $x$ 尺，则可列方程为（　　）

A. $x^2-6=(10-x)^2$　　B. $x^2-6^2=(10-x)^2$

C. $x^2+6=(10-x)^2$　　D. $x^2+6^2=(10-x)^2$

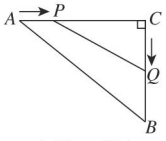


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

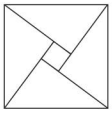
**3.** [模拟·全椒]如图，在△$ABC$中，$AC$=50 m，$BC$=40 m，∠$C$=90°，点$P$从点$A$开始沿$AC$边向点$C$以2 m/s的速度匀速运动，同时另一点$Q$由$C$点开始以3 m/s的速度沿$CB$匀速运动，点$Q$到达点$B$时停止运动，点$Q$停止时点$P$也停止运动．当△$PCQ$的面积等于300 m$^2$时，运动时间为（　　）

A. 5 s　　B. 20 s

C. 5 s或20 s　　D. 不确定



（第3题）


（第4题）

**4.** 在北京召开的国际数学家大会的会徽是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形，如图，若大正方形的面积是32，小正方形的面积是4，则每个直角三角形的周长是_____.

**5.** 某市某楼盘准备以每平方米9 000元的均价对外销售，由于国务院有关房地产的新政策出台后，购房者持币观望，房地产开发商为了加快资金周转，对价格经过两次下调后，决定以每平方米7 290元的均价开盘销售．

（1）求平均每次下调的百分率．

（2）某人准备以开盘时的均价购买一套100平方米的住房，开发商给予以下两种优惠方案以供选择：

①打9.8折销售；

②不打折，一次性送装修费每平方米110元．试问哪种方案更优惠?

**6.** 为响应国家全民阅读的号召，某社区鼓励居民到社区阅览室借阅图书，并统计每年的借阅人数和图书借阅总量（单位：本），该阅览室在2017年图书借阅总量是7 500本，2019年图书借阅总量是10 800本．

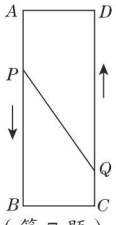
（1）求该社区的图书借阅总量从2017年至2019年的年平均增长率；

（2）已知2019年该社区居民借阅图书人数有1 350人，预计2020年达到1 440人，如果2019年至2020年图书借阅总量的增长率不低于2017年至2019年的年平均增长率，那么2020年的人均借阅量比2019年增长$a$%，求$a$的值至少是多少．

**7.** 如图，$A$，$B$，$C$，$D$为矩形的四个顶点，$AB$=16 cm，$AD$=6 cm，$P$，$Q$分别从点$A$，$C$同时出发，点$P$以3 cm/s的速度向点$B$运动，一直到达点$B$为止，点$Q$以2 cm/s的速度向点$D$运动，点$P$停止运动时点$Q$也停止运动．**【导学号：7097546】**

（1）$P$，$Q$两点开始运动几秒后，四边形$PBCQ$的面积为33 cm$^2$?

（2）$P$，$Q$两点开始运动几秒后，点$P$和点$Q$的距离第一次是10 cm?



（第7题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 逆向思维在一元二次方程中的应用



荣老师告诉你 逆向思维是执果索因，知本求源，从原问题的相反方向着手的一种思维方式．它是数学思维的一个重要方面，是创造性思维的一个组成部分，也是进行训练的载体，培养学生逆向思维的过程，也是培养学生思维敏捷性的过程．

## 一、一元二次方程的定义

### 正向 ▶ 利用定义识别一元二次方程

**例 1** 下列方程中，是关于 $x$ 的一元二次方程的是（　　）

A. $2x-1=5x$

B. $3x^2+5x=(3x-1)(x+1)$

C. $\frac{1}{x}+3=2x^2$

D. $x^2+x+1=0$

**解题秘方：** 利用一元二次方程的定义进行识别．

**答案：** D

### 逆向 ▶ 已知一元二次方程求方程中待定字母的值

**例 2** 已知关于 $x$ 的方程 $(m-4)x^{|m|-2}+8x+1=0$ 是一元二次方程，则 $m$ 的值为_____.

**答案：** $-4$

**方法点拨：** 正向考查时，若化简合并后二次项系数为零，则该方程不是一元二次方程；逆向考查时，若条件中已说明是一元二次方程，则隐含条件“二次项系数不为零”．

## 二、一元二次方程的根

### 正向 ▶ 利用一元二次方程根的定义找根

**例 3** ［中考·重庆］ 一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的根是（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=-2$　　B. $x_1=1$，$x_2=2$

C. $x_1=1$，$x_2=-2$　　D. $x_1=0$，$x_2=2$

**答案：** D

**方法点拨：** 找一元二次方程的根：可解（直接利用解一元二次方程的方法解），可代（利用根的定义检验）．

### 逆向一 ▶ 已知一元二次方程的根，求待定字母的值

**例 4** 已知 $x=-2$ 是关于 $x$ 的方程 $x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$ 的一个根，则 $a$ 的值是（　　）

A. 1 或 4　　B. $-1$ 或 $-4$

C. $-1$ 或 4　　D. 1 或 $-4$

**解题秘方：** 将 $x=-2$ 代入关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$，再解关于 $a$ 的一元二次方程即可．

**答案：** B

**方法点拨：** 方程的根就是使方程左右两边相等的未知数的值，因此利用方程的根求含有字母系数的一元二次方程中字母的值时，只需把已知方程的根代入原方程就可求出相关的待定字母的值．

### 逆向二 ▶ 已知一元二次方程的根，还原方程

※ 已知方程的一个根，还原方程．

如：$x=2-\sqrt{3}$，逆向运用“配方法”．

$x-2=-\sqrt{3}$，$(x-2)^2=3$，$x^2-4x+4=3$，$x^2-4x+1=0$.

※ 已知方程的两个根，还原方程．

如：$x_1=2$，$x_2=3$.

（1）逆用“因式分解法”．

$(x-3)(x-2)=0$，$x^2-5x+6=0$.

（2）逆用“根与系数的关系”．

$x^2-(2+3)x+2\times3=0$，$x^2-5x+6=0$.

**例 5** （1）已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，则代数式 $4x^2+4x+2\,019=$_____.

**答案：** 2 021



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**方法点拨**：将已知条件还原成方程，然后整体代入求值.

（2）已知一元二次方程的两根分别是2和−3，则这个一元二次方程是（　　）

A. $x^2-6x+8=0$　　B. $x^2+2x-3=0$

C. $x^2-x-6=0$　　D. $x^2+x-6=0$

**答案**：D

**方法点拨**：采用已知两根还原方程的方法还原方程.

### 逆向三▸利用根的定义构造一元二次方程

若 $x=m$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则等式 $am^2+bm+c=0$ 成立；反之，若等式 $an^2+bn+c=0$ 成立，则 $x=n$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

**例6**　［中考·呼和浩特］已知 $a\geqslant 2$，$m^2-2am+2=0$，$n^2-2an+2=0$，则 $(m-1)^2+(n-1)^2$ 的最小值是（　　）

A. 6　　B. 3　　C. −3　　D. 0

**解题秘方**：先构造出以 $m$，$n$ 为两根的一元二次方程，然后利用根与系数的关系进行求值.

**解**：∵ $m^2-2am+2=0$，$n^2-2an+2=0$，

∴ $m$，$n$ 是关于 $x$ 的方程 $x^2-2ax+2=0$ 的两根.

∴ $m+n=2a$，$mn=2$.

∴ $(m-1)^2+(n-1)^2=m^2-2m+1+n^2-2n+1=(m+n)^2-2mn-2(m+n)+2=4a^2-4-4a+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-3$.

∵ $a\geqslant 2$，

∴当 $a=2$ 时，$(m-1)^2+(n-1)^2$ 取最小值，最小值为 $4\times\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-3=6$.

**答案**：A

**方法点拨**：首先由两个等式的结构的相同性，构造以 $m$，$n$ 为根的关于 $x$ 的方程 $x^2-2ax+2=0$，从而利用根与系数的关系，得到 $m+n=2a$，$mn=2$，然后将原代数式恒等变形成关于 $m+n$，$mn$ 的表达形式，再整体代入，最后利用配方法求最小值.

## 三、根的判别式

### 正向▸已知方程的系数——→计算——→判断根的情况

**例7**　一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个不等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

**答案**：A

### 逆向▸已知方程根的情况——→计算——→求待定的系数的值或取值范围

**例8**　［中考·聊城］如果关于 $x$ 的一元二次方程 $kx^2-3x-1=0$ 有两个不等的实数根，那么 $k$ 的取值范围是_____.

**解题秘方**：根据一元二次方程根的情况，列出关于 $k$ 的不等式进行求解.

**答案**：$k>-\frac{9}{4}$ 且 $k\neq 0$

## 四、根与系数的关系

### 正向▸已知方程的系数求与两根之和或两根之积有关的代数式的值

**例9**　［中考·烟台］若 $x_1$，$x_2$ 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，则 $x_1^2-x_1+x_2$ 的值为（　　）

A. −1　　B. 0　　C. 2　　D. 3

**答案**：D

**方法点拨**：先由 $x_1$ 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，得到 $x_1^2=2x_1+1$，代入 $x_1^2-x_1+x_2$，得 $x_1^2-x_1+x_2=x_1+x_2+1$，利用 $x_1+x_2=-(-2)=2$ 即可求值.

### 逆向▸已知与两根之和或两根之积有关的代数式的值求方程中待定字母的值

**例10**　方程 $x^2+2kx+k^2-2k+1=0$ 的两个实数根 $x_1$，$x_2$ 满足 $x_1^2+x_2^2=4$，则 $k$ 的值为_____.

**答案**：1

**方法点拨**：$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$，根据根与系数的关系即可得到一个关于 $k$ 的方程，从而求得 $k$ 的值.

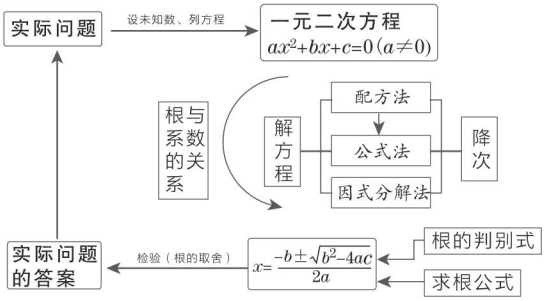


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 章末核心知识分类整合

## 核心结构专题

### 结构必知




### 核心必读

**1.** 一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）.

**2.** 一元二次方程的解法：（1）直接开平方法；（2）配方法；（3）公式法；（4）因式分解法.

**3.** 一元二次方程根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$，一元二次方程根的情况有三种：

（1）有两个不等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac>0$；

（2）有两个相等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac=0$；

（3）无实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac<0$.

**4.** 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$ 且 $b^2-4ac\geqslant0$）的两根为 $x_1$，$x_2$，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

## 知识方法专题

### 知识必学

#### 专题一 一元二次方程的解法

链接中考» 一元二次方程的解法是本章的核心，也是本章的基础. 一般的考查方式是选择题，给出一个一元二次方程，选择它正确的解，只关注结果；有时作为解答题考查，方法不限，注重对过程的考查.

**例1** [中考·岳阳] 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根是_____.

**解题秘方：** 根据方程的特点选择合适的方法.

**解：** 方法一　因式分解，得 $(x-1)(x-2)=0$，

$\therefore x-1=0$ 或 $x-2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

方法二　$\because a=1$，$b=-3$，$c=2$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$.

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\times1}$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=2$.

**答案：** $x_1=1$，$x_2=2$

**方法点拨：** 一元二次方程的解法有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法. 各种解法的选取顺序依次为直接开平方法→因式分解法→公式法→配方法.

#### 专题二 一元二次方程的根

链接中考» 涉及一元二次方程的根的问题有根的定义、根的判别式和根与系数的关系，单独考查时一般以填空题、选择题的形式出现，综合考查时常以解答题的形式出现.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

### 类型 1：一元二次方程的根与根的判别式

**例 2** [中考·咸宁]已知关于 $x$ 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1) 证明：不论 $m$ 为何值，方程总有实数根；

(2) $m$ 为何整数时，方程有两个不等的正整数根？

(1) **证明：** $\because a=m$，$b=-(m+2)$，$c=2$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(m+2)^2-8m=m^2-4m+4=(m-2)^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 不论 $m$ 为何值，方程总有实数根.

(2) **解：** $\because mx^2-(m+2)x+2=0$ 是一元二次方程，$\therefore (x-1)(mx-2)=0$ 且 $m\neq 0$.

$\therefore x-1=0$ 或 $mx-2=0$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{m}$.

$\because$ 方程有两个不等的正整数根，且 $m$ 为整数，

$\therefore m=1$.

**方法点拨：** 涉及一元二次方程根的情况时，一般都要考虑根的判别式. 根据根的判别式值的情况可以判断一元二次方程根的情况，也可以根据一元二次方程根的情况，判断根的判别式值的正负性.

### 类型 2：一元二次方程的根和根与系数的关系

**例 3** (1)[中考·黄冈]若方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根为 $x_1$，$x_2$，则 $x_1+x_2-x_1x_2$ 的值为_____.

(2)[中考·汕尾]已知关于 $x$ 的方程 $x^2+2x+a-2=0$.

①若该方程有两个不等的实数根，求实数 $a$ 的取值范围；

②当该方程的一个根为 1 时，求 $a$ 的值及方程的另一个根.

**解：** (1) 3

(2) ①依题意有 $\Delta=2^2-4(a-2)>0$，解得 $a<3$.

②方法一　将 $x=1$ 代入方程得 $1+2+a-2=0$，解得 $a=-1$，

$\therefore$ 原方程为 $x^2+2x-3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=-3$.

$\therefore a=-1$，方程的另一个根为 $-3$.

方法二　设另一个根为 $x_2$，

$\because 1+x_2=-2$，$\therefore x_2=-3$.

$\therefore a-2=1\times(-3)$. $\therefore a=-1$.

**方法点拨：** 已知方程的一根求另一根及方程中待定字母的值时，可以将已知的根直接代入方程，先求待定字母的值，再求另一根，也可以根据根与系数的关系先求另一根，再求待定字母的值.

## 专题三　一元二次方程的应用

**链接中考»** 一元二次方程的应用是本章重点考查的知识点，它是学习一元二次方程解法的真正目的，解决有关一元二次方程的应用题，关键就是建立一元二次方程模型，有从实际生活中建立的一元二次方程模型，也有从几何图形中建立的一元二次方程模型. 考查的形式主要以解答题为主.

**例 4** 某批发商以每件 50 元的价格购进 800 件 T 恤，第一个月以单价 80 元销售，售出了 200 件；第二个月如果单价不变，预计仍可售出 200 件，批发商为增加销售量，决定降价销售，根据市场调查，单价每降低 1 元，可多售出 10 件，但最低单价应高于购进的价格；第二个月结束后，批发商将对剩余的 T 恤一次性清仓销售，清仓时单价为 40 元. 设第二个月单价降低 $x$ 元.

(1) 填表（不需化简）：

| 时间 | 第一个月 | 第二个月 | 清仓时 |
|---|---|---|---|
| 单价 / 元 | 80 | | 40 |
| 销售量 / 件 | 200 | | |

(2) 近期爆发了“新型冠状病毒”疫情，如果批发商希望通过销售这批 T 恤获利 9 000 元，并全部捐赠给疫情最严重的武汉地区，那么第二个月的单价应是多少元？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**解题秘方：**根据题意建立一元二次方程模型解决问题.

**解：**（1）$80-x$；$200+10x$；

$800-200-(200+10x)$

（2）根据题意，得 $80\times200+(80-x)(200+10x)+40\times[800-200-(200+10x)]-50\times800=9000$.

整理，得 $x^2-20x+100=0$. 解得 $x_1=x_2=10$.

当 $x=10$ 时，$80-x=70>50$.

所以第二个月的单价应是 70 元.

## Ⅱ 方法必会

### 专题四 整体代入法

**专题解读»** 整体代入法就是在解决问题时，不是着眼于局部特征，而是把注意力和着眼点放在问题的整体结构上，通过对整体的把握和运用达到解决问题的目的. 在本章中主要体现在求与根有关的式子的值的问题上.

**例 5** 已知 $x_1$，$x_2$ 是方程 $3x^2-2x-4=0$ 的两实数根，不解方程求 $3x_1^2+2x_2$ 的值.

**解题秘方：**根据根的定义及根与系数的关系整体代入求值.

**解：**方法一 ∵ $x_1$ 是方程 $3x^2-2x-4=0$ 的根，

∴ $3x_1^2-2x_1-4=0$，即 $3x_1^2=2x_1+4$.

根据根与系数的关系可知 $x_1+x_2=\frac{2}{3}$.

∴ $3x_1^2+2x_2=2x_1+4+2x_2=2(x_1+x_2)+4=\frac{16}{3}$.

方法二 根据根与系数的关系可知

$x_1+x_2=\frac{2}{3}$，$x_1x_2=-\frac{4}{3}$.

∵ $x_2$ 是方程 $3x^2-2x-4=0$ 的根，

∴ $3x_2^2-2x_2-4=0$，即 $2x_2=3x_2^2-4$.

∴ $3x_1^2+2x_2=3x_1^2+3x_2^2-4=3(x_1^2+x_2^2)-4$

$=3[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-4$

$=3\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\frac{4}{3}\right)\right]-4$

$=\frac{16}{3}$.

**方法点拨：**解决与一元二次方程的根有关的求值问题，通常用到整体代入法，将一元二次方程的根代入方程或利用根与系数的关系建立与两根的和与积有关的式子，最后都采用整体代入法求值.

### 专题五 分类讨论思想

**专题解读»** 分类讨论思想是一种常见的数学思想，在解含字母的一元二次方程的有关问题时经常用到，具体来说，就是把包含多种可能情况的问题，按照某一标准分成若干类，然后分别进行解决.

**例 6** 已知△$ABC$ 的两边 $AB$，$AC$ 的长是关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k(k+1)=0$ 的两个实数根，第三边 $BC$ 的长为 5.

（1）$k$ 为何值时，△$ABC$ 是以 $BC$ 为斜边的直角三角形？

（2）$k$ 为何值时，△$ABC$ 是等腰三角形？并求此时△$ABC$ 的周长.

**解：**（1）解方程，得 $x_1=k$，$x_2=k+1$.

由勾股定理，得 $k^2+(k+1)^2=5^2$.

解得 $k_1=3$，$k_2=-4$（舍去）.

∴当 $k=3$ 时，△$ABC$ 是以 $BC$ 为斜边的直角三角形.

（2）当△$ABC$ 是等腰三角形时，分类讨论如下：

① $BC$ 为底，即 $AB=AC$，此时应有 $\Delta=0$，但 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4k(k+1)=1\neq0$，

∴这种情况不存在.

② $BC$ 为腰，有 $AB=BC$ 或 $AC=BC$ 这两种情况存在，求解如下：当 $BC$ 为△$ABC$ 的腰时，它的长也是已知方程的根，

∴ $5^2-5(2k+1)+k(k+1)=0$.

解得 $k_1=4$，$k_2=5$.

当 $k=4$ 时，方程的两个根为 $x_1=k=4$，$x_2=k+1=5$，此时△$ABC$ 的周长为 $4+5+5=14$；

当 $k=5$ 时，方程的两个根为 $x_1=k=5$，$x_2=k+1=6$，此时△$ABC$ 的周长为 $6+5+5=16$.

∴ $k$ 为 4 或 5 时，△$ABC$ 是等腰三角形，△$ABC$ 的周长为 14 或 16.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 好题必解 ☞答案见250页

### 题型1：巧解一元二次方程

**1.** 解方程（**平方、换元**）：

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

**2.** 解方程（**特殊值法**）：

$(x-2016)(x-2017)=2\,018\times 2\,019.$

### 题型2：巧用根的判别式求式子的最值

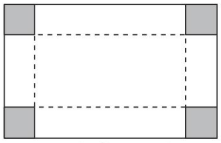
**3.** 试用根的判别式探求$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$的最值.

### 题型3：巧用根与系数的关系求待定字母的值

**4.** 已知$\alpha$、$\beta$是关于$x$的一元二次方程$x^2+(2m+3)x+m^2=0$的两个不等的实数根，且满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-1$. 求$m$的值.

### 题型4：巧用一元二次方程解几何问题

**5.** [**中考·徐州**]如图，有一块矩形硬纸板，长30 cm，宽20 cm，在其四角各剪去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子，当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为200 $cm^2$？



（第5题）

### 题型5：巧用一元二次方程解实际问题

**6.** [**中考·宜昌**]某市创建“绿色发展模范城市”，针对境内长江段两种主要污染源：生活污水和沿江工厂污染物排放，分别用“生活污水集中处理”（下称甲方案）和“沿江工厂转型升级”（下称乙方案）进行治理，若江水污染指数记为$Q$，沿江工厂用乙方案进行一次性治理（当年完工），从当年开始，所治理的每家工厂一年降低的$Q$值都以平均值$n$计算. 第一年有40家工厂用乙方案治理，共使$Q$值降低了12. 经过三年治理，境内长江水质明显改善.

（1）求$n$的值；

（2）从第二年起，每年用乙方案新治理的工厂数量比上一年都增加相同的百分数$m$，三年来用乙方案治理的工厂数量共190家，求$m$的值，并计算第二年用乙方案新治理的工厂数量；

（3）该市生活污水用甲方案治理，从第二年起，每年因此降低的$Q$值比上一年都增加一个相同的数值$a$. 在（2）的情况下，第二年，用乙方案所治理的工厂合计降低的$Q$值与当年因甲方案治理降低的$Q$值相等，第三年，用甲方案使$Q$值降低了39.5. 求第一年用甲方案治理降低的$Q$值及$a$的值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第 2 章测试卷

☞答案见 251 页

（120 分　120 分钟）

**一、选择题**（每题 3 分，共 30 分）

**1.** 下列方程是关于 $x$ 的一元二次方程的是（　　）

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=2$

C. $x^2+2x=y^2-1$　　D. $3(x+1)^2=2(x+1)$

**2.** 一元二次方程 $(x-5)^2=x-5$ 的根是（　　）

A. $x=5$　　B. $x=6$

C. $x=0$　　D. $x_1=5$，$x_2=6$

**3.** 一元二次方程 $x^2-2x+1=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

**4.** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根分别为 $x_1=1$，$x_2=-2$，则 $b$ 与 $c$ 的值分别为（　　）

A. $b=-1$，$c=2$　　B. $b=1$，$c=-2$

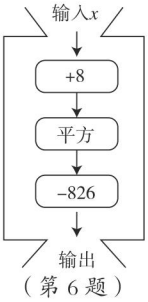
C. $b=1$，$c=2$　　D. $b=-1$，$c=-2$

**5.** 用配方法解方程 $x^2+10x+9=0$，配方后可得（　　）

A. $(x+5)^2=16$　　B. $(x+5)^2=1$

C. $(x+10)^2=91$　　D. $(x+10)^2=109$

**6.** 输入一组数据，按如图的程序进行计算，输出结果如表：




（第 6 题）

| $x$ | 20.5 | 20.6 | 20.7 | 20.8 | 20.9 |
|---|---|---|---|---|---|
| 输出 | −13.75 | −8.04 | −2.31 | 3.44 | 9.21 |

分析表格中的数据，估计方程 $(x+8)^2-826=0$ 的一个正数解 $x$ 的大致范围为（　　）

A. $20.5<x<20.6$　　B. $20.6<x<20.7$

C. $20.7<x<20.8$　　D. $20.8<x<20.9$

**7.** 老师出示了小黑板上的题目（如方框中所示）后，小敏回答：“方程有一根为 4.”小聪回答：“方程有一根为 −1.”你认为（　　）

> 已知方程 $x^2-3x+k+1=0$，试添加一个条件，使它的两根之积为 −4.

A. 只有小敏回答正确

B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都正确

D. 小敏、小聪回答都不正确

**8.** 将一块正方形铁皮的四角各剪去一个边长为 3 cm 的小正方形，做成一个无盖的盒子．已知盒子的容积为 300 $cm^3$，则原铁皮的边长为（　　）

A. 10 cm　　B. 13 cm

C. 14 cm　　D. 16 cm

**9.** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $(k-2)^2x^2+(2k+1)x+1=0$ 有两个不等的实数根，则 $k$ 的取值范围是（　　）

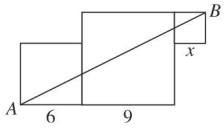
A. $k>\frac{4}{3}$ 且 $k\neq 2$

B. $k\geqslant\frac{4}{3}$ 且 $k\neq 2$

C. $k>\frac{3}{4}$ 且 $k\neq 2$

D. $k\geqslant\frac{3}{4}$ 且 $k\neq 2$

**10.** 如图是由三个边长分别为 6，9 和 $x$ 的正方形所组成的图形，若直线 $AB$ 将它分成面积相等的两部分，则 $x$ 的值是（　　）




（第 10 题）

A. 1 或 9　　B. 3 或 5

C. 4 或 6　　D. 3 或 6



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

**11.** 把方程 $3x(x-1)=(x+2)(x-2)+9$ 化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式为_____.

**12.** 解一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 时，可转化为解两个一元一次方程，请写出其中的一个一元一次方程：_____.

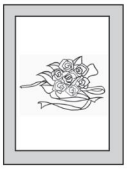
**13.** 已知关于 $x$ 的方程 $ax^2+2x-3=0$ 有两个不相等的实数根，则 $a$ 的取值范围是_____.

**14.** 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+2x+2-c=0$ 有两个相等的实数根，则 $\frac{1}{a}+c$ 的值等于_____.

**15.** 已知实数 $a$，$b$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值为_____.

**16.** 六一儿童节当天，某班同学每人向本班其他每名同学送一份小礼品，全班共互送 306 份小礼品，则该班有_____名同学.

**17.** 在一幅长 8 分米，宽 6 分米的矩形画的四周镶上宽度相同的金色纸边，制成一幅矩形挂图（如图），使整个挂图的面积是 80 平方分米，设金色纸边宽为 $x$ 分米，可列方程为_____.


（第 17 题）

**18.** 三角形的每条边的长都是方程 $x^2-6x+8=0$ 的根，则三角形的周长是_____.

## 三、解答题（共 66 分）

**19.**（8 分）我们已经学习了一元二次方程的四种解法：因式分解法、直接开平方法、配方法和公式法. 请选择合适的方法解下列方程.

（1）$x^2-3x+1=0$；（2）$(x-1)^2=3$；

（3）$x^2-3x=0$；　（4）$x^2-2x=4$.

**20.**（8 分）定义新运算：对于任意实数 $m$，$n$ 都有 $m \star n=m^2n+n$，等式右边是常用的加法、乘法及乘方运算.

例如：$-3 \star 2=(-3)^2\times 2+2=20$.

根据以上知识解决问题：

若 $2 \star a$ 的值小于 0，请判断方程：$2x^2-bx+a=0$ 的根的情况.

**21.**（8 分）关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-3x-k=0$ 有两个不等的实数根.

（1）求 $k$ 的取值范围；

（2）若 $k$ 为负整数，试求出方程的根.

**22.**（8 分）已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+(2m+1)x+m^2-1=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 $m$ 的取值范围；

（2）设 $x_1$，$x_2$ 是方程的两根且 $x_1^2+x_2^2+x_1x_2-17=0$，求 $m$ 的值.



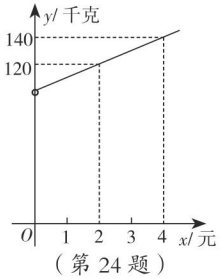
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**23.**（8分）某养殖户每年的养殖成本包括固定成本和可变成本，其中固定成本每年均为4万元，可变成本逐年增长，已知该养殖户第1年的可变成本为2.6万元，设可变成本平均每年增长的百分率为$x$.

（1）用含$x$的代数式表示第3年的可变成本为_____万元；

（2）如果该养殖户第3年的养殖成本为7.146万元，求可变成本平均每年增长的百分率$x$.

**24.**（8分）安顺市某商贸公司以每千克40元的价格购进一种干果，计划以每千克60元的价格销售，为了让顾客得到更大的实惠，现决定降价销售，已知这种干果销售量$y$（千克）与每千克降价$x$（元）（$0<x<20$）之间满足一次函数关系，其图象如图所示：



（第24题）

（1）求$y$与$x$之间的函数关系式；

（2）商贸公司要想获利2 090元，则这种干果每千克应降价多少元?

**25.**（8分）某汽车销售公司6月份销售某厂家的汽车，在一定范围内，每辆汽车的进价与销售量有如下关系：若当月仅售出1辆汽车，则该辆汽车的进价为27万元，每多售出1辆，所有售出的汽车的进价均降低0.1万元/辆，月底厂家根据销售量一次性返利给销售公司，销售量在10辆以内（含10辆），每部返利0.5万元；销售量在10辆以上，每辆返利1万元.

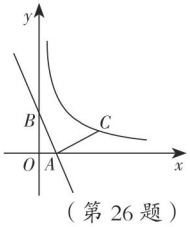
（1）若该公司当月售出3辆汽车，则每辆汽车的进价为_____万元；

（2）如果汽车的售价为28万元/辆，该公司计划当月盈利12万元，那么需要售出多少辆汽车?（盈利=销售利润+返利）

**26.**（10分）如图，直线$AB$与$x$轴交于点$A$（1，0），与$y$轴交于点$B$（0，2），将线段$AB$绕点$A$顺时针旋转90°得到线段$AC$，反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$，$x>0$）的图象经过点$C$.

（1）求直线$AB$和反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$，$x>0$）的表达式；

（2）已知点$P$是反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$，$x>0$）图象上的一个动点，求点$P$到直线$AB$距离最短时的坐标.



（第26题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 参考答案及点拨

## 第1章 反比例函数

### 1.1 反比例函数

【两年模拟兵法】

**1.** A **2.** D **3.** D

**4.** A **点拨:** 本题考查了正比例函数及反比例函数的定义,注意区分:正比例函数的一般形式是 $y=kx(k\neq0)$,反比例函数的一般形式是 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

**5.** B **点拨:** ∵ 函数 $y=(m-2)x^{m^2-5}$ 是反比例函数,∴ $\begin{cases}m-2\neq0,\\m^2-5=-1,\end{cases}$ 解得 $m=-2$,故选 B.

**6.** B **7.** B **8.** ①③

**9. 解:** 若函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$ 是正比例函数,则需满足 $|2m|-1=1$,且 $m+1\neq0$. 解得 $m=1$. 所以当 $m=1$ 时,$y$ 是 $x$ 的正比例函数. 若函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$ 是反比例函数,则需满足 $|2m|-1=-1$,且 $m+1\neq0$. 解得 $m=0$. 所以当 $m=0$ 时,$y$ 是 $x$ 的反比例函数.

**10. 解:** (1) $y=-\frac{6}{x}$

(2)表中所给的 $x,y$ 的对应值的符号均相反,且 $xy=(-6)\times1=(-5)\times1.2=3\times(-2)=4\times(-1.5)=-6$,故所给出的几个式子中只有 $y=-\frac{6}{x}$ 符合条件.

**11. 解:** ∵ 矩形 $CDEF$ 的面积为 100 $m^2$,$CF=x$ m,$CD=z$ m,

∴ $z=\frac{100}{x}$,

即 $z$ 关于 $x$ 的函数表达式为 $z=\frac{100}{x}(0<x\leqslant25)$.

∴ $y=1.75x+4.5\times\left(x+\frac{100}{x}\times2\right)=6.25x+\frac{900}{x}$ $(0<x\leqslant25)$.

### 1.2 反比例函数的图象与性质

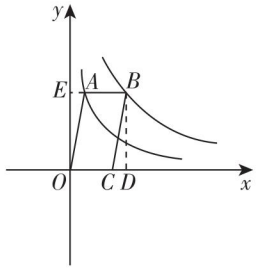
【两年模拟兵法】

**1.** B **2.** D **3.** A

**4.** C **点拨:** 根据一次函数图象的位置确定 $a$、$b$ 的大小,看是否符合 $ab<0$,再确定 $a-b$ 的符号,从而确定双曲线的位置.

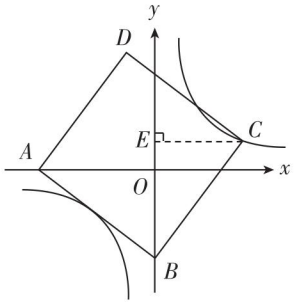
**5.** B **6.** C

**7.** C **点拨:** 如图,作 $BD\perp x$ 轴于 $D$,延长 $BA$ 交 $y$ 轴于 $E$,∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,∴ $AB/\!/OC$,$OA=BC$,∴ $BE\perp y$ 轴,∴ $OE=BD$,∴ $\mathrm{Rt}\triangle AOE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBD$(HL),易知 $S_{矩形BDOE}=5$,$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}$,∴ 四边形 $OABC$ 的面积 $=5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=4$,因此本题选 C.




(第 7 题)

**8.** A **点拨:** 如图,过点 $C$ 作 $CE\perp y$ 轴于 $E$,在正方形 $ABCD$ 中,$AB=BC$,$\angle ABC=90°$,




(第 8 题)

∴ $\angle ABO+\angle CBE=90°$.

∵ $\angle OAB+\angle ABO=90°$,

∴ $\angle OAB=\angle CBE$,

∵ 点 $A$ 的坐标为 $(-4,0)$,

∴ $OA=4$.

∵ $AB=5$,∴ $OB=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BCE$ 中,$\begin{cases}\angle AOB=\angle BEC=90°,\\\angle OAB=\angle EBC,\\AB=BC,\end{cases}$

∴ $\triangle ABO\cong\triangle BCE$(AAS),

∴ $OA=BE=4$,$CE=OB=3$,

∴ $OE=BE-OB=4-3=1$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 $C$ 的坐标为(3,1).

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象过点 $C$,

∴ $k=xy=3\times1=3$,

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}$,故选 A.

**9. 解:**(1)∵ 一次函数 $y=-2x+1$ 的图象经过点 $A(-1,m)$,

∴ $m=2+1=3$,∴ $A(-1,3)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(-1,3)$,

∴ $k=-1\times3=-3$.

(2)如图,延长 $AE$,$BD$ 交于点 $C$,则 $\angle ACB=90°$.

∵ $BD\perp y$ 轴,垂足为点 $D$,且点 $D$ 的坐标为 $(0,-2)$,

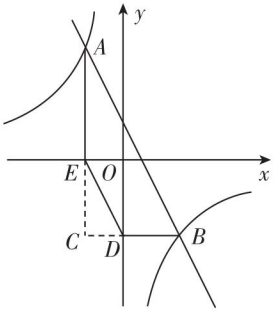
∴ $C(-1,-2)$.

在 $y=-2x+1$ 中,令 $y=-2$,则 $-2=-2x+1$,

∴ $x=\frac{3}{2}$,即 $B\left(\frac{3}{2},-2\right)$.

易知 $AC=3-(-2)=5$,$BC=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$,

∴ 四边形 $AEDB$ 的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 − $\triangle CDE$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\times BC-\frac{1}{2}CE\times CD=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{21}{4}$.

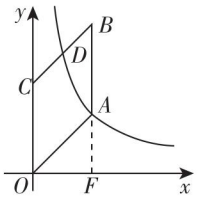



(第 9 题)

**点拨:**本题主要考查了反比例函数与一次函数的图象的交点问题,解决问题的关键是掌握反比例函数与一次函数的图象的交点坐标同时满足反比例函数与一次函数表达式.

**10. 解:**(1)如图,延长 $BA$ 交 $x$ 轴于点 $F$,则 $AF\perp x$ 轴于点 $F$. ∵ $\angle AOC=45°$,∴ $\angle AOF=90°-\angle AOC=45°$.

在 Rt$\triangle AOF$ 中,$OA=2\sqrt{2}$,$\angle AOF=45°$,可得 $OF=AF=2$,从而 $A(2,2)$.




(第 10 题)

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 $A$,

∴ $k=2\times2=4$.

(2)∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,∴ $AB\parallel OC$,

∴ $AB\perp x$ 轴,∴ $B$ 点的横坐标为 2,

∵ 点 $D$ 是 $BC$ 的中点,

∴ 点 $D$ 的横坐标是 1.

由(1)知 $y=\frac{4}{x}$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象经过点 $D$,

∴ $y=\frac{4}{1}=4$,

∴ 点 $D$ 的坐标为(1,4).

**11. 解:**(1)把 $B(4,2)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{k_2}{x}$,得 $k_2=4\times2=8$,∴ 反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{8}{x}$.

把 $A(m,8)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{8}{x}$,得 $8=\frac{8}{m}$,解得 $m=1$.

∴ $A(1,8)$.

把 $A(1,8)$,$B(4,2)$ 的坐标分别代入 $y_1=k_1x+b$,得 $\begin{cases}k_1+b=8,\\4k_1+b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-2,\\b=10.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y_1=-2x+10$.

(2)由图象可知,当 $0<x<1$ 或 $x>4$ 时,$y_1<y_2$,即 $k_1x+b<\frac{k_2}{x}$,$k_1x+b-\frac{k_2}{x}<0$.

**12. 解:**(1)∵ 点 $A\left(-\frac{1}{2}m,m-2\right)$ 在直线 $y=-2x+b$ 上,

∴ $-2\left(-\frac{1}{2}m\right)+b=m-2$,∴ $b=-2$,

∴ $y=-2x-2$.

∵ 点 $B(1,n)$ 在直线 $y=-2x-2$ 上,

∴ $n=-2\times1-2=-4$,∴ $B(1,-4)$.

∵ $B(1,-4)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore k=1\times(-4)=-4.$

(2)易知直线 $y=-2x-2$ 交 $x$ 轴于 $C(-1,0)$，交 $y$ 轴于 $D(0,-2)$，

$\therefore S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times|-1|\times|-2|=1.$

$\because$ 点 $E$ 为 $CD$ 的中点，

$\therefore S_{\triangle COE}=\frac{1}{2}S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}.$

$\because S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}\times|-1|\times|-4|=2,$

$\therefore S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COB}-S_{\triangle COE}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

## 1.3 反比例函数的应用

【两年模拟兵法】

**1.** B **2.** B **3.** B **4.** C **5.** B

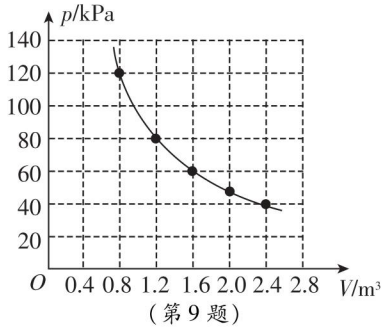
**6.** B **点拨:**本题是反比例函数和一次函数的综合，考查了反比例函数和一次函数的性质和应用，解答此题时要先利用待定系数法确定函数的表达式，再观察图象特点，结合反比例函数和一次函数的性质作答.

**7.** (1)$y=\frac{128}{S}$ (2)8 **点拨:**本题考查了反比例函数的应用，现实生活中存在大量成反比例函数的两个变量，解答该类问题的关键是确定两个变量之间的函数关系，然后利用待定系数法求出它们的关系式.

**8.** 12 **点拨:**首先根据已知点的坐标确定反比例函数的表达式，然后确定两个函数的交点的横坐标，从而确定正比例函数的表达式，最后令两个函数值等于3求得时间，相减即可.

**9.** **解:**(1)②

(2)设 $p=\frac{k}{V}$，将 $V=1.2$，$p=80$ 代入，得 $k=1.2\times80=96$，$\therefore p$ 与 $V$ 的函数关系式为 $p=\frac{96}{V}(V>0)$，图象如图所示.



(第9题)

(3)$V\geqslant\frac{24}{35}$ **点拨:**将 $p=140$ 代入 $p=\frac{96}{V}$，得 $V=\frac{24}{35}$，若 $p\leqslant140$，则 $V\geqslant\frac{24}{35}$.

**10.** **解:**(1)设小红衣服中洗衣粉残留量与漂洗次数的函数关系式为 $y_1=\frac{k_1}{x}$，小敏衣服中洗衣粉残留量与漂洗次数的函数关系式为 $y_2=\frac{k_2}{x}$，把 $\begin{cases}x=1,\\y_1=1.5\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=1,\\y_2=2\end{cases}$ 分别代入两个函数关系式，得 $1.5=\frac{k_1}{1}$，$2=\frac{k_2}{1}$，解得 $k_1=1.5$，$k_2=2$，所以小红衣服中洗衣粉残留量与漂洗次数的函数关系式为 $y_1=\frac{1.5}{x}$($x$ 为正整数)，小敏衣服中洗衣粉残留量与漂洗次数的函数关系式为 $y_2=\frac{2}{x}$($x$ 为正整数).

(2)小敏的漂洗方法值得提倡. 理由如下：

把 $y_1=0.5$ 代入函数关系式 $y_1=\frac{1.5}{x}$ 中，

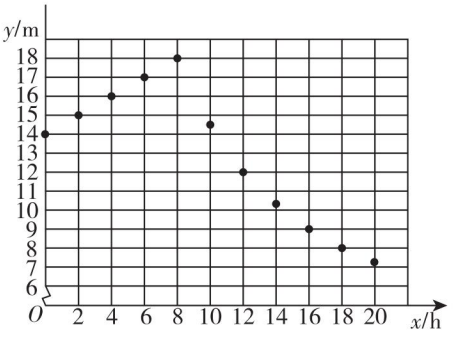
得 $\frac{1.5}{x}=0.5$，解得 $x=3$；

把 $y_2=0.5$ 代入函数关系式 $y_2=\frac{2}{x}$ 中，得 $\frac{2}{x}=0.5$，解得 $x=4$.

而 $10\times3=30$(升)，$5\times4=20$(升)，

所以衣服漂洗干净时，小红共用水约30升，小敏共用水约20升，故小敏的漂洗方法值得提倡.

**11.** **解:**(1)描点如图所示.



(第11题)

(2)根据描点，可以猜想开闸放水前和放水后最符合表中数据的函数表达式分别为一次函数与反比例函数.

设开闸放水前函数的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

把 $x=0, y=14$ 和 $x=2, y=15$ 分别代入上式，得 $\begin{cases} b=14, \\ 2k+b=15, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=14, \\ k=\frac{1}{2}, \end{cases}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+14$.

当 $x=4$ 时，$y=\frac{1}{2}\times4+14=16$；当 $x=6$ 时，$y=\frac{1}{2}\times6+14=17$；当 $x=8$ 时，$y=\frac{1}{2}\times8+14=18$. 均符合题意. $\therefore$ 开闸放水前的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x+14(0\leqslant x\leqslant8)$.

设开闸放水后的函数表达式为 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$，

把 $x=12, y=12$ 代入，得 $m=12\times12=144$，

$\therefore y=\frac{144}{x}$.

把 $x=8, 10, 16, 18, 20$ 分别代入 $y=\frac{144}{x}$，得 $y=18, 14.4, 9, 8, 7.2$，把 $x=14$ 代入 $y=\frac{144}{x}$，得 $y\approx10.3$，均符合题意.

$\therefore$ 开闸放水后的函数表达式为 $y=\frac{144}{x}(x>8)$.

(3) 当 $y=6$ 时，$\frac{144}{x}=6$，解得 $x=24$.

答：预测 24 h 水位达到 6 m.

## 素养提分整合篇

【好题必解】

**1. 解：**(1) 根据题意，设 $y_1=k_1(x+1)(k_1\neq0)$，$y_2=\frac{k_2}{x}(k_2\neq0)$，

所以 $y=k_1(x+1)+\frac{k_2}{x}$.

把 $x=1, y=0; x=4, y=9$ 分别代入，得 $\begin{cases} 2k_1+k_2=0, \\ 5k_1+\frac{k_2}{4}=9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1=2, \\ k_2=-4. \end{cases}$

所以 $y=2(x+1)-\frac{4}{x}$.

(2) 当 $x=-1$ 时，$y=2\times(-1+1)-\frac{4}{-1}=4$.

**2. 解：**由题意，易得出 $S_{\triangle ODB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times|-4|=2$. 因为 $OC=OD, AC=BD$（易求得），所以 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ODA}=S_{\triangle ODB}=S_{\triangle OBC}=2$. 所以四边形 $ACBD$ 的面积为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle ODA}+S_{\triangle ODB}+S_{\triangle OBC}=2\times4=8$.

**3.** B **4.** B **5.** 4

**6. 解：**(1) ①在该厂治污期间，即 $1\leqslant x\leqslant5$ 时，设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，把 $(1, 200)$ 代入，得 $k=200$，即 $y=\frac{200}{x}(1\leqslant x\leqslant5)$.

②对于 $y=\frac{200}{x}$，当 $x=5$ 时，$y=40$，所以在治污改造工程完工后，即 $x>5$ 时，$y=40+20(x-5)=20x-60$.

(2) 当 $y=200$ 时，$20x-60=200$，解得 $x=13$，$x-5=8$，所以治污改造工程完工后经过 8 个月，该厂月利润才能达到 2019 年 1 月的水平.

(3) 对于 $y=\frac{200}{x}$，当 $y=100$ 时，$x=2$；对于 $y=20x-60$，当 $y=100$ 时，$x=8$，所以该厂资金紧张期共有 $8-2-1=5$（个）月.

【第 1 章测试卷】

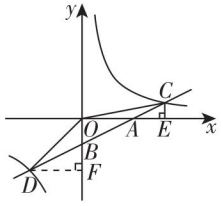
**一、1.** B **2.** A **3.** A **4.** C **5.** A **6.** C **7.** C **8.** A **9.** C **10.** D

**二、11.** $-1$ **点拨：**答案不唯一.

**12.** $\sqrt{3}$ **13.** $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ **14.** 0 **15.** 1.2 **16.** $\frac{21}{8}$

**17.** 2

**18.** 2 **点拨：**如图，过点 $D$ 作 $DF\perp y$ 轴于 $F$. 由题意易得 $A$ 点坐标为 $(2, 0)$，$\therefore AO=2$.




（第 18 题）

由反比例函数比例系数的几何意义，可得 $S_{\triangle COE}=\frac{1}{2}k, S_{\triangle DOF}=k$. $\because S_{\triangle DOB}=S_{\triangle COE}=\frac{1}{2}k$，

$\therefore S_{\triangle DBF}=S_{\triangle DOF}-S_{\triangle DOB}=\frac{1}{2}k=S_{\triangle DOB}$，

$\therefore OB=FB$. 易证 $\triangle DBF\cong\triangle ABO$，从而 $DF=AO=2$，即 $D$ 的横坐标为 $-2$，而 $D$ 在直线 $AC$ 上，

$\therefore D(-2, -2)$，$\therefore k=\frac{1}{2}\times(-2)\times(-2)=2$.

**三、19. 解：**(1) $\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(1, 4)$，

$\therefore 4=\frac{k}{1}$，即 $k=4$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2) $S_{\text{菱形}OABC}=8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**20. 解:**作图略. (1)当 $x=-2$ 时,$y=-3$.

(2)当 $2<y<4$ 时,$1.5<x<3$.

(3)由图象可得:当 $-1<x<2$ 且 $x\neq 0$ 时,$y<-6$ 或 $y>3$.

**21. 解:**(1)∵ 函数图象经过点 $A(-1,6)$,

∴ $m-8=xy=-1\times 6=-6$,解得 $m=2$.

∴ $m$ 的值是 2.

(2)∵ 函数图象在第二、四象限,

∴ $m-8<0$,解得 $m<8$.

∴ $m$ 的取值范围是 $m<8$.

(3)∵ 当 $x>0$ 时,$y$ 随 $x$ 的增大而减小,

∴ $m-8>0$,解得 $m>8$.

∴ $m$ 的取值范围是 $m>8$.

**22. 解:**(1)∵ $xy=1\ 200$,∴ $y=\dfrac{1\ 200}{x}$.

(2)$x=12\times 5=60$,代入函数表达式,

得 $y=\dfrac{1\ 200}{60}=20$.

∴ 20 天才能运完.

(3)运了 8 天后剩余的垃圾有 $1\ 200-8\times 60=720(\mathrm{m}^3)$. 剩下的任务要在不超过 6 天的时间内完成,则每天至少运 $720\div 6=120(\mathrm{m}^3)$,

则需要的拖拉机数是 $120\div 12=10$(辆),

则至少需要增加 $10-5=5$(辆)这样的拖拉机才能按时完成任务.

**23. 解:**(1)∵ 双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 经过点 $D(6,1)$,

∴ $\dfrac{k}{6}=1$. ∴ $k=6$.

(2)∵ 点 $D(6,1)$,∴ $BD=6$,$OB=1$.

设△$BCD$ 中边 $BD$ 上的高为 $h$.

∵ △$BCD$ 的面积为 12,

∴ $\dfrac{1}{2}BD\cdot h=12$,即 $\dfrac{1}{2}\times 6h=12$,解得 $h=4$.

∴ $CA=3$. 由(1)知 $y=\dfrac{6}{x}$,令 $\dfrac{6}{x}=-3$,

解得 $x=-2$.

∴ 点 $C(-2,-3)$.

设直线 $CD$ 的表达式为 $y=k'x+b$,

则 $\begin{cases}-2k'+b=-3,\\ 6k'+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k'=\dfrac{1}{2},\\ b=-2.\end{cases}$

∴ 直线 $CD$ 的表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

**24. 解:**(1)∵ $B(-1,4)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象上,∴ $4=\dfrac{m}{-1}$,得 $m=-4$,

∴ $y=-\dfrac{4}{x}$.

∵ $A(n,-2)$ 在反比例函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象上,

∴ $-2=-\dfrac{4}{n}$,得 $n=2$,

∴ 点 $A(2,-2)$,

由题意得 $\begin{cases}2k+b=-2,\\ -k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=2.\end{cases}$

∴ $y=-2x+2$,

即反比例函数的表达式为 $y=-\dfrac{4}{x}$,一次函数的表达式为 $y=-2x+2$.

(2)设直线 $y=-2x+2$ 与 $y$ 轴的交点为 $C$,

当 $x=0$ 时,$y=-2\times 0+2=2$,

∴ 点 $C$ 的坐标是 $(0,2)$,

∵ 点 $A(2,-2)$,点 $B(-1,4)$,

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2+\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=3$.

(3)$-1<x<0$ 或 $x>2$.

**25. 解:**(1)函数表达式为 $y=\dfrac{12\ 000}{x}(x>0)$.

(2)$2\ 104-(30+40+48+50+60+80+96+100)=1\ 600$(千克).

当 $x=150$ 时,$y=\dfrac{12\ 000}{150}=80$.

$1\ 600\div 80=20$(天).

答:余下的这些海产品预计再用 20 天可以全部售出.

(3)$1\ 600-80\times 15=400$(千克).

$400\div 2=200$(千克).

即如果正好用 2 天售完,那么每天需要售出 200 千克.

当 $y=200$ 时,$x=\dfrac{12\ 000}{200}=60$.

答:新确定的销售价格最高不超过 60 元/千克才能完成销售任务.

**26.** (1)**解:**∵ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 的图象经过点 $D(3,1)$,

∴ $k=3\times 1=3$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{3}{x}$.

(2)①**解:**由 $D$ 为 $BC$ 的中点,易得 $BC=2$.

∵ △$ABC$ 与△$EFG$ 成中心对称,

∴ △$ABC$≌△$EFG$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore GF=BC=2, GE=AC=1,$

$\angle FGE=\angle ACB=90°.$

由点 $E$ 在反比例函数的图象上，

易得 $E(1,3)$，即 $OG=3.$

$\therefore OF=OG-GF=1.$

②**证明**：$\because AC=1, OC=3, \therefore OA=2, \therefore OA=GF.$

在$\triangle AOF$和$\triangle FGE$中，$\because \begin{cases} AO=FG, \\ \angle AOF=\angle FGE=90°, \\ OF=GE=1, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle FGE(\mathrm{SAS}).$

$\therefore \angle GFE=\angle FAO, AF=EF.$

$\therefore \angle GFE+\angle AFO=\angle FAO+\angle AFO=90°,$

$\therefore \angle EFA=90°.$

易知 $EF/\!/AB, EF=AB,$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形.

$\because AF=EF,$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为菱形.

又$\because \angle EFA=90°,$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为正方形.

# 第2章 一元二次方程

## 2.1 一元二次方程

【两年模拟兵法】

**1.** A

**2.** C **点拨**：本题考查的是一元二次方程定义的应用，紧扣定义的“三要素”是解题的关键.

**3.** B **4.** D **5.** A **6.** D

**7.** **解**：(1)当$\begin{cases} m-2\neq 0, \\ m+1=0 \end{cases}$时，

解得 $m=-1.$

当$\begin{cases} m^2+1=1, \\ m+1+(m-2)\neq 0 \end{cases}$时，解得 $m=0.$

故当 $m=-1$ 或 $m=0$ 时，

原方程为一元一次方程.

当 $m=-1$ 时，方程为 $-3x-1=0,$

解得 $x=-\frac{1}{3}.$

当 $m=0$ 时，方程为 $-x-1=0,$

解得 $x=-1.$

(2)根据题意，得$\begin{cases} m^2+1=2, \\ m+1\neq 0, \end{cases}$

解得 $m=1.$

故当 $m=1$ 时，原方程为 $2x^2-x-1=0$，是一元二次方程，它的二次项系数是 2，一次项系数是 $-1$，常数项是 $-1.$

**8.** **解**：这两位同学的解法都不正确，均考虑不全面.

正确解法如下：

已知关于 $x$ 的方程 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是一元二次方程，

则$\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=2 \end{cases}$或$\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=1 \end{cases}$或$\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=0 \end{cases}$

或$\begin{cases} 2a+b=1, \\ a-b=2 \end{cases}$或$\begin{cases} 2a+b=0, \\ a-b=2. \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=\frac{4}{3}, \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases}$或$\begin{cases} a=1, \\ b=0 \end{cases}$或$\begin{cases} a=\frac{2}{3}, \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}$

或$\begin{cases} a=1, \\ b=-1 \end{cases}$或$\begin{cases} a=\frac{2}{3}, \\ b=-\frac{4}{3}. \end{cases}$

## 2.2 一元二次方程的解法

### 2.2.1 配方法

【两年模拟兵法】

**1.** C **点拨**：本题考查的是直接开平方法，紧扣平方根的定义是解题的关键.

**2.** A **点拨**：本题考查的是配方的方法，熟悉完全平方公式的特征是解题的关键.

**3.** B **4.** A

**5.** C **点拨**：将 $x=m$ 代入方程得 $m^2-2m=1,$

$\therefore 7m^2-14m=7.$

将 $x=n$ 代入方程得 $n^2-2n=1,$

$\therefore 3n^2-6n=3.$

$\because (7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8,$

$\therefore (7+a)\times(3-7)=8,$

$\therefore a=-9.$

**6.** $x_1=3, x_2=-1$

**7.** $4;2;\pm 3;\pm\frac{3}{2}$

**8.** **解**：(1)移项，得 $2x^2=8, x^2=4,$

于是 $x=\pm 2, \therefore x_1=2, x_2=-2.$

(2)移项，得 $(y-5)^2=36$，于是 $y-5=\pm 6,$

$\therefore y_1=11, y_2=-1.$

**9.** **解**：(1)配方，得 $x^2+4x+4=4, (x+2)^2=4,$

于是 $x+2=\pm 2,$

解得 $x_1=0, x_2=-4.$

(2)二次项系数化为 1，

得 $x^2-\frac{3}{2}x-3=0,$

移项，得 $x^2-\frac{3}{2}x=3,$

配方，得 $x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=3+\left(-\frac{3}{4}\right)^2,$

$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{57}{16}$，于是 $x-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{57}}{4},$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{57}}{4}, x_2=\frac{3-\sqrt{57}}{4}$.

(3)二次项系数化为1,

得 $x^2+\frac{1}{2}x-3=0$,

移项,得 $x^2+\frac{1}{2}x=3$,

配方,得 $x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=3+\left(\frac{1}{4}\right)^2$,

$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$,于是 $x+\frac{1}{4}=\pm\frac{7}{4}$,

解得 $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-2$.

**10. 解:**(1)$\because a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,

$\therefore (a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

$\therefore a-3=0, b-4=0, c-5=0$.

$\therefore a=3, b=4, c=5$.

(2)$\because a=3, b=4, c=5$,

$\therefore a^2+b^2=25, c^2=25$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

## 2.2.2 公式法

【两年模拟兵法】

**1.** B **点拨:**本题考查了利用公式法解一元二次方程及实数的大小比较,先分别求出两方程的根,确定出 $p$ 与 $q$,再求出 $p+q$ 的值.

**2.** D **3.** B **4.** A

**5. 解:**若 $A=B$,即 $4x^2+2x+1=3x^2+2$,整理得 $x^2+2x-1=0$,解得 $x=-1\pm\sqrt{2}$. $\therefore$ 当 $x=-1\pm\sqrt{2}$ 时,$A=B$.

**6. 解:**(1)$\because a=2, b=-3, c=1$,

$\therefore b^2-4ac=9-4\times2\times1=1$.

$\therefore x=\frac{3\pm1}{4}$.

$\therefore x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$.

(2)原方程化为 $3x^2+x-1=0$,

$\because a=3, b=1, c=-1$,

$\therefore b^2-4ac=1-4\times3\times(-1)=13$.

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$.

$\therefore x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

(3)原方程化为 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$,

$\because a=1, b=-2\sqrt{2}, c=2$,

$\therefore b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0$.

$\therefore x=\frac{2\sqrt{2}\pm0}{2}$.

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{2}$.

**7. 解:**由 $\begin{cases}x+1<3x-3,\\ \frac{1}{2}(x-4)<\frac{1}{3}(x-4),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>2,\\ x<4,\end{cases}$

即 $2<x<4$.

解方程 $x^2-2x-4=0$ 可得 $x_1=1+\sqrt{5}, x_2=1-\sqrt{5}$.

$\because 1-\sqrt{5}<0$,

$\therefore x_2=1-\sqrt{5}$ 不符合题意,舍去.

$\because 2<\sqrt{5}<3$,

$\therefore 3<1+\sqrt{5}<4$,符合题意.

$\therefore$ 方程 $x^2-2x-4=0$ 的根为 $x=1+\sqrt{5}$.

## 2.2.3 因式分解法

【两年模拟兵法】

**1.** D **点拨:**本题考查的是用因式分解法解一元二次方程,把 $x-2$ 看作一个整体是解题的关键,解本题时切忌在方程两边同时除以 $x-2$,从而出现漏根的情况.

**2.** B **点拨:**本题考查的是用因式分解法解一元二次方程与等腰三角形的定义,理解三角形的三边关系是解题的关键.

**3.** A **点拨:**解方程得 $x_1=3, x_2=5$. 故三角形的第三边 $c$ 的取值范围是 $2<c<8$. $\therefore$ 三角形的周长 $C$ 的取值范围是 $10<C<16$. 故连接这个三角形三边的中点,得到的三角形的周长 $m$ 的取值范围是 $5<m<8$. 故选 A.

**4.** B **点拨:**根据题意,得

(1)当 $2\geqslant m$ 时,$2\bigstar m=4m+2=36$,

即 $4m=34$,解得 $m=\frac{17}{2}>2$(不合题意,舍去);

(2)当 $2<m$ 时,$2\bigstar m=2m^2+m=36$,

即 $2m^2+m-36=0$,

$\therefore (m-4)(2m+9)=0$,

$\therefore m-4=0$ 或 $2m+9=0$,

$\therefore m=4$ 或 $m=-4.5<2$(不合题意,舍去),

综合(1)(2)得 $m=4$,

故选 B.

**5.** $\sqrt{3}$

**6.** $-15, -6, 0, 6, 15$ **点拨:** $-16=-1\times16=1\times(-16)=-2\times8=2\times(-8)=4\times(-4)$.

**7.** $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$(答案不唯一)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**8.** 解：(1)$9(x-1)^2=5$，

$(x-1)^2=\frac{5}{9}$，$x-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}+1$，

即 $x_1=\frac{\sqrt{5}}{3}+1$，$x_2=-\frac{\sqrt{5}}{3}+1$.

(2)$(x-3)^2+x^2=9$，

$(x-3)^2=9-x^2$，

$(x-3)^2=(3+x)(3-x)$，

$(x-3)(x-3+x+3)=0$，

$2x(x-3)=0$，

即 $x_1=3$，$x_2=0$.

(3)$a=1$，$b=-\sqrt{2}$，$c=-1$，

$b^2-4ac=2+4=6$，

$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$，

即 $x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

**9.** (1)解：$x^2-3x-10$

$=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-10$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$.

(2)解：$x^2-3x-10$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=(x+2)(x-5)$.

(3)证明：$x^2+y^2-2x-4y+16$

$=(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+11$

$=(x-1)^2+(y-2)^2+11\geqslant 11$，

故不论 $x$，$y$ 取任何实数，多项式 $x^2+y^2-2x-4y+16$ 的值总为正数.

**10.** 解：$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x-1}\right)-15=0$，

设 $\frac{x}{x-1}=a$，则 $a^2-2a-15=0$，

解得 $a=-3$ 或 $a=5$，

当 $a=-3$ 时，$\frac{x}{x-1}=-3$，

解得 $x=\frac{3}{4}$，

经检验 $x=\frac{3}{4}$ 是分式方程的根，

当 $a=5$ 时，$\frac{x}{x-1}=5$，

解得 $x=\frac{5}{4}$，

经检验 $x=\frac{5}{4}$ 是分式方程的根，

∴ 原方程的根是 $x_1=\frac{3}{4}$，$x_2=\frac{5}{4}$.

**点拨：**根据材料的提示，可利用换元法将所求方程转化为一元二次方程，注意解分式方程求出根后要检验.

**11.** 解：(1)二；三；1；$a+b$；$ab$

(2)①把一元二次方程 $x^2+7x+10=0$ 的左边因式分解，得 $(x+2)(x+5)=0$，所以 $x+2=0$ 或 $x+5=0$，故原方程的根为 $x_1=-2$，$x_2=-5$.

②把一元二次方程 $x^2-2x-15=0$ 的左边因式分解，得 $(x+3)(x-5)=0$. 所以 $x+3=0$ 或 $x-5=0$，所以原方程的根为 $x_1=-3$，$x_2=5$.

## 2.3 一元二次方程根的判别式

【两年模拟兵法】

**1.** D **2.** A **3.** A **4.** B **5.** D **6.** A **7.** 四

**8.** $k<1$ **9.** 4

**10.** 解：∵ 方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，

∴ $(-2)^2-4(2m-1)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant 1$.

∵ $m$ 为正整数，

∴ $m=1$，

∴ 原方程为 $x^2-2x+1=0$，解得 $x_1=x_2=1$.

**11.** 解：(1)由一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根，得判别式 $\Delta=9-4k\geqslant 0$，∴ $k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2)由(1)可得 $k$ 的最大整数为 2，把 $k=2$ 代入 $x^2-3x+k=0$ 得方程 $x^2-3x+2=0$，解得该方程的根为 $x=1$ 或 $x=2$. 由方程 $x^2-3x+k=0$ 与一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 有一个相同的根，得 $(m-1)\times 1^2+1+m-3=0$，即 $m=\frac{3}{2}$，或 $(m-1)\times 2^2+2+m-3=0$，即 $m=1$. 当 $m=1$ 时，$m-1=0$ 不合题意，舍去，故 $m=\frac{3}{2}$.

## *2.4 一元二次方程根与系数的关系

【两年模拟兵法】

**1.** B **点拨：**设这个一元二次方程的两个根分别为 $x_1$、$x_2$，方程 $3x^2-1=2x+5$ 化为一般形式为 $3x^2-2x-6=0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x_1+x_2=\frac{2}{3}, x_1x_2=\frac{-6}{3}=-2$. 故选 B.

**2.** C　**点拨:** 由方程的两根结合根与系数的关系可求出 $m$、$n$ 的值,将其代入 $n^m$ 中即可求出其值.

**3.** D　**点拨:** 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式,根据根与系数的关系以及 $x_1+x_2=1-x_1x_2$,得出关于 $m$ 的一元二次方程是解题的关键.

**4.** A　**点拨:** 方法 1:用根的定义求解. 方法 2:用根与系数的关系求解.

**5.** $m>\frac{1}{2}$　**6.** 10

**7. 解:** (1) $x_1+x_2=3, x_1x_2=-5$.

(2) $x_1+x_2=-\frac{5}{2}, x_1x_2=-\frac{9}{2}$.

(3)原方程整理为 $x^2-4x+2=0$,

所以 $x_1+x_2=4, x_1x_2=2$.

**8. 解:** (1)将原方程整理为

$x^2+2(m-1)x+m^2=0$.

∵ 原方程有两个实数根,

$\therefore \Delta=[2(m-1)]^2-4m^2=-8m+4\geqslant 0$,

$\therefore m\leqslant\frac{1}{2}$,

∴ 实数 $m$ 的最大整数值为 0.

(2)∵ $x_1, x_2$ 为 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ 的两个实数根,

$\therefore y=x_1+x_2=-2m+2$,且 $m\leqslant\frac{1}{2}$.

∵ $y$ 的值随 $m$ 值的增大而减小,

∴ 当 $m=\frac{1}{2}$ 时,$y$ 取得最小值为 1.

**点拨:** 本题考查的是根的判别式和根与系数的关系,运用一次函数的性质求最值是解题的关键.

**9. 解:** (1)∵ 方程有两个不等的实数根,

$\therefore \Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$,

解得 $k>\frac{11}{4}$.

(2)存在.

$x_1+x_2=2k-1, x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$.

将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$,

即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$,

代入得 $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$,

解得 $k=4$. 满足 $\Delta>0$,∴ $k=4$.

**10. 解:** ∵ $m, n$ 是两个不等的实数,且满足 $m^2-m=3, n^2-n=3$,

∴ 可构造方程 $x^2-x-3=0$,

则 $m, n$ 是 $x^2-x-3=0$ 的两个不等的实数根,

根据根与系数的关系可知 $m+n=1, mn=-3$,

又 $n^2=n+3$,

$\therefore 2n^2-mn+2m+2\,019$

$=2(n+3)-mn+2m+2\,019$

$=2n+6-mn+2m+2\,019$

$=2(m+n)-mn+2\,025$

$=2\times1-(-3)+2\,025$

$=2+3+2\,025$

$=2\,030$.

## 2.5　一元二次方程的应用

【两年模拟兵法】

**1.** D　**2.** D

**3.** A　**点拨:** 根据三角形的面积公式列出方程即可解决问题. 设运动时间为 $t$ s,由题意得 $AP=2t$ m, $CQ=3t$ m,

$\therefore PC=(50-2t)$ m.

$\therefore \frac{1}{2}\times(50-2t)\times3t=300$,

解得 $t_1=20$(舍去), $t_2=5$.

∴ 当运动时间为 5s 时,$\triangle PCQ$ 的面积为 $300\text{m}^2$.

**4.** $2\sqrt{15}+4\sqrt{2}$

**5. 解:** (1)设平均每次下调的百分率为 $x$,

由题意,得 $9\,000(1-x)^2=7\,290$.

解得 $x_1=0.1=10\%, x_2=1.9$(舍去).

答:平均每次下调的百分率为 10%.

(2)由题意,得方案①优惠:$7\,290\times100\times(1-0.98)=14\,580$(元).

方案②优惠:$110\times100=11\,000$(元).

∵ $14\,580>11\,000$,

∴ 方案①更优惠.

**6. 解:** (1)设该社区的图书借阅总量从 2017 年至 2019 年的年平均增长率为 $x$,根据题意得 $7\,500(1+x)^2=10\,800$,即 $(1+x)^2=1.44$,

解得 $x_1=0.2=20\%, x_2=-2.2$(舍去).

答:该社区的图书借阅总量从 2017 年至 2019 年的年平均增长率为 20%.

(2) $10\,800\times(1+0.2)=12\,960$(本),

$10\,800\div1\,350=8$(本),

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12 960 ÷ 1 440 = 9（本），

（9 − 8）÷ 8 × 100% = 12.5%，

故 $a$ 的值至少是 12.5.

**7. 解：**（1）设 $P$，$Q$ 两点开始运动 $x$ s 后，四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 $cm^2$，

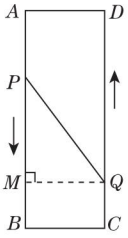
根据题意得 $PB = AB - AP = (16 - 3x)$ cm，$CQ = 2x$ cm，故 $\frac{1}{2}(2x + 16 - 3x) \times 6 = 33$，

解得 $x = 5$.

故 $P$，$Q$ 两点开始运动 5 s 后，四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 $cm^2$.

（2）设 $P$，$Q$ 两点开始运动 $y$ s 后，点 $P$ 和点 $Q$ 的距离是 10 cm.

如图，过 $Q$ 点作 $QM \perp AB$ 于点 $M$，




（第 7 题）

则 $BM = CQ = 2y$ cm，故 $PM = (16 - 5y)$ cm.

在 $Rt\triangle PMQ$ 中，$PM^2 + MQ^2 = PQ^2$，

$\therefore (16 - 5y)^2 + 6^2 = 10^2$.

解得 $y_1 = \frac{8}{5}$，$y_2 = \frac{24}{5}$.

∵ 所求的是第一次满足条件的时间，

$\therefore y = \frac{8}{5}$.

故 $P$，$Q$ 两点开始运动 $\frac{8}{5}$ s 后，点 $P$ 和点 $Q$ 的距离第一次是 10 cm.

**点拨：**在建立一元二次方程模型解决几何动态问题时关键要把握两点，一是利用几何图形的面积作为等量关系；二是利用点运动的路程来表示线段的长.

## 素养提分整合篇

【好题必解】

**1. 解：**$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$，

设 $x + \frac{1}{x} = y$，则 $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

$\therefore$ 原方程为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

解得 $y_1 = 3$，$y_2 = -1$.

当 $y = 3$ 时，$x + \frac{1}{x} = 3$，

$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$，$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

当 $y = -1$ 时，$x + \frac{1}{x} = -1$ 无实数根.

经检验，$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$，$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$，$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

**2. 解：**方程组 $\begin{cases} x - 2\,016 = 2\,019, \\ x - 2\,017 = 2\,018 \end{cases}$ 的解一定是原方程的解，解得 $x = 4\,035$.

方程组 $\begin{cases} x - 2\,016 = -2\,018, \\ x - 2\,017 = -2\,019 \end{cases}$ 的解也一定是原方程的解，解得 $x = -2$.

∵ 原方程是一元二次方程，最多有两个实数根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1 = 4\,035$，$x_2 = -2$.

**点拨：**解本题也可采用换元法. 设 $x - 2\,017 = t$，则 $x - 2\,016 = t + 1$，原方程可化为 $t(t + 1) = 2\,018 \times 2\,019$，先求出 $t$，进而求出 $x$.

**3. 解：**∵ $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$，

$\therefore x$ 取任何实数分式总有意义.

令 $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = a$，整理得 $(a - 1)x^2 + (a + 2)x + (a - 1) = 0$，

①当 $a \neq 1$ 时，由 $\Delta \geqslant 0$ 得 $(a + 2)^2 - 4(a - 1)^2 \geqslant 0$，

解得 $0 \leqslant a \leqslant 4$；

②当 $a = 1$ 时，$x = 0$.

综上所述，分式 $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$ 的最大值是 4，最小值是 0.

**4. 解：**∵ 原方程有两个不等的实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2m + 3)^2 - 4m^2 > 0$，

解得 $m > -\frac{3}{4}$.

由题意得 $\alpha + \beta = -(2m + 3)$，$\alpha\beta = m^2 \neq 0$，

则 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-(2m + 3)}{m^2} = -1$，

即 $m^2 - 2m - 3 = 0$，

解得 $m_1 = 3$，$m_2 = -1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又 $m > -\frac{3}{4}$，

$\therefore m = 3$.

**5. 解：**设剪去正方形的边长为 $x$ cm，则做成无盖长方体盒子的底面长为 $(30-2x)$ cm，宽为 $(20-2x)$ cm，高为 $x$ cm，

依题意，得 $2\times[(30-2x)+(20-2x)]x = 200$，

整理，得 $2x^2-25x+50=0$，

解得 $x_1 = \frac{5}{2}$，$x_2 = 10$.

当 $x=10$ 时，$20-2x=0$，不合题意，舍去.

**答：**当剪去正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm 时，所得长方体盒子的侧面积为 200 $cm^2$.

**6. 解：**(1)由题意可得 $40n = 12$，

解得 $n = 0.3$.

(2)由题意可得

$40+40(1+m)+40(1+m)^2 = 190$，

解得 $m_1 = \frac{1}{2}$，$m_2 = -\frac{7}{2}$(舍去)，

$\therefore m = 50\%$.

$\therefore$ 第二年用乙方案新治理的工厂数量为 $40\times(1+50\%) = 60$(家).

(3)设第一年用甲方案治理降低的 $Q$ 值为 $x$，第二年用乙方案治理使 $Q$ 值降低了 $(40+60)\times 0.3 = 30$，

方法一：$(30-a)+2a = 39.5$，

解得 $a = 9.5$.

则 $x = 20.5$.

方法二：$\begin{cases} x+a=30, \\ x+2a=39.5, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=20.5, \\ a=9.5. \end{cases}$

$\therefore$ 第一年用甲方案治理降低的 $Q$ 值为 20.5，$a$ 的值为 9.5.

【第 2 章测试卷】

**一、1.** D **2.** D **3.** A **4.** D **5.** A

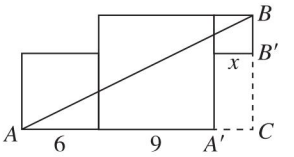
**6.** C **7.** C **8.** D **9.** C

**10.** D **点拨：**如图，延长 $AA'$，$BB'$ 交于点 $C$.

$\because$ 直线 $AB$ 将它分成面积相等的两部分，

$\therefore \frac{1}{2}\times(6+9+x)\times 9 - x(9-x) = \frac{1}{2}\times(6^2+9^2+x^2)$.

解得 $x_1 = 3$，$x_2 = 6$. 故选 D.




(第 10 题)

**二、11.** $2x^2-3x-5=0$

**12.** $x+3=0$(或 $x-1=0$)

**13.** $a > -\frac{1}{3}$ 且 $a \neq 0$

**14.** 2 **15.** −3 **16.** 18

**17.** $(2x+6)(2x+8) = 80$

**18.** 6 或 10 或 12

**三、19. 解：**(1)用公式法解：

$\because a=1$，$b=-3$，$c=1$，

$\therefore b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times1 = 5 > 0$.

$\therefore$ 方程的根为 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(2)用直接开平方法解：$x-1 = \pm\sqrt{3}$，

$\therefore$ 方程的根为 $x_1 = -\sqrt{3}+1$，$x_2 = \sqrt{3}+1$.

(3)用因式分解法解：$x(x-3)=0$，

$\therefore$ 方程的根为 $x_1 = 0$，$x_2 = 3$.

(4)用配方法解：

$x^2-2x+1 = 4+1$，$(x-1)^2 = 5$，$x-1 = \pm\sqrt{5}$，

$\therefore$ 方程的根为 $x_1 = -\sqrt{5}+1$，$x_2 = \sqrt{5}+1$.

**20. 解：**$\because 2\text{☆}a$ 的值小于 0，

$\therefore 2^2a+a = 5a < 0$，解得 $a < 0$.

在方程 $2x^2-bx+a=0$ 中，

$\Delta = (-b)^2-8a \geqslant -8a > 0$，

$\therefore$ 方程 $2x^2-bx+a=0$ 有两个不等的实数根.

**21. 解：**(1)$\because$ 方程有两个不等的实数根，

$\therefore \Delta = (-3)^2-4(-k) > 0$，即 $4k > -9$.

解得 $k > -\frac{9}{4}$.

(2)若 $k$ 是负整数，则 $k$ 只能为 −1 或 −2.

①当 $k=-1$ 时，原方程为 $x^2-3x+1=0$.

解得 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$；

②当 $k=-2$ 时，原方程为 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_3 = 2$，$x_4 = 1$.

**22. 解：**(1)根据题意，得 $\Delta = b^2-4ac = (2m+1)^2-4(m^2-1) > 0$，

化简，得 $4m+5 > 0$，解得 $m > -\frac{5}{4}$.

(2)由一元二次方程根与系数的关系，得 $x_1+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x_2=-(2m+1)$，$x_1x_2=m^2-1$.

$x_1^2+x_2^2+x_1x_2-17=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1x_2-17=[-(2m+1)]^2-(m^2-1)-17=0$，

化简，得 $3m^2+4m-15=0$，

解得 $m_1=\frac{5}{3}$，$m_2=-3$.

又∵ $m>-\frac{5}{4}$，∴ $m=-3$ 不合题意.

∴ $m=\frac{5}{3}$.

**23. 解：**(1)$2.6(1+x)^2$

(2)由题意，得 $4+2.6(1+x)^2=7.146$，

解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（不合题意，舍去）.

答：可变成本平均每年增长的百分率为 10%.

**24. 解：**(1)设一次函数关系式为 $y=kx+b$，当 $x=2$ 时，$y=120$；当 $x=4$ 时，$y=140$，

∴ $\begin{cases}2k+b=120,\\4k+b=140,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=10,\\b=100,\end{cases}$

∴ $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式为 $y=10x+100$.

(2)由题意得 $(60-40-x)(10x+100)=2\,090$，

整理得 $x^2-10x+9=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=9$.

∵ 让顾客得到更大的实惠，∴ $x=9$.

答：商贸公司要想获利 2 090 元，则这种干果每千克应降价 9 元.

**25. 解：**(1)26.8

(2)设需要售出 $x$ 辆汽车，

由题意可知，每辆汽车的销售利润为

$28-[27-0.1(x-1)]=0.1x+0.9$（万元）.

当 $0<x\leqslant 10$ 时，根据题意，

得 $x(0.1x+0.9)+0.5x=12$.

整理，得 $x^2+14x-120=0$.

解得 $x_1=-20$（不合题意，舍去），$x_2=6$.

当 $x>10$ 时，根据题意，

得 $x(0.1x+0.9)+x=12$.

整理，得 $x^2+19x-120=0$.

解得 $x_3=-24$（不合题意，舍去），$x_4=5$.

∵ $5<10$，∴ $x_4=5$ 舍去.

答：需要售出 6 辆汽车.

**26. 解：**(1)设直线 $AB$ 的表达式为 $y=mx+b$，

将点 $A(1,0)$，$B(0,2)$ 的坐标代入 $y=mx+b$，

得 $\begin{cases}m+b=0,\\b=2,\end{cases}$

∴ $b=2$，$m=-2$，

∴ 直线 $AB$ 的表达式为 $y=-2x+2$.

如图，过点 $C$ 作 $CD\perp x$ 轴.

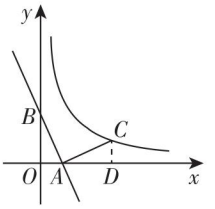
∵ 线段 $AB$ 绕点 $A$ 顺时针旋转 90°得到线段 $AC$，

易得 $\triangle ABO\cong\triangle CAD$，

∴ $AD=OB=2$，$CD=OA=1$，

∴ 点 $C$ 的坐标为 $(3,1)$，∴ $k=3$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}(x>0)$.




（第 26 题）

(2)设过点 $P$ 与 $AB$ 平行的直线 $l$ 的表达式为 $y=-2x+h$，与 $y=\frac{3}{x}$ 联立得 $-2x+h=\frac{3}{x}(x>0)$，

∴ $-2x^2+hx-3=0(x>0)$，

当 $\Delta=h^2-24=0$ 时，$h=2\sqrt{6}$ 或 $h=-2\sqrt{6}$（舍去），此时点 $P$ 到直线 $AB$ 距离最短，

∴ $-2x^2+2\sqrt{6}x-3=0(x>0)$，解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

∴ $y=\frac{3}{\frac{\sqrt{16}}{2}}=\sqrt{6}$，

∴ 点 $P$ 到直线 $AB$ 距离最短时的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6}\right)$.

# 第3章 图形的相似

## 3.1 比例线段

【两年模拟兵法】

**1.** D　**点拨：**设 $b=5k(k\neq 0)$，则 $a=13k$，∴ $\frac{a-b}{a+b}=\frac{8k}{18k}=\frac{4}{9}$.

**2.** B　**点拨：**由 $\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$，得 $c^2=ab$，即 $c^2=4\times 16=64$，∴ $c=8$（负值舍去）.

**3.** A　**点拨：**A. ∵ $2:3=4:6$，∴ 长度为 2，3，4，6 的线段能构成比例线段；B. 长度为 2，3，4，5 的线段不能构成比例线段；C. 长度为 2，3，5，7 的线段不能构成比例线段；D. 长度为 3，4，5，6 的线段不能构成比例线段.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**4**. D

**5**. B　**点拨**：设 $2a=3b=4c=12k(k\neq0)$，则 $a=6k$，$b=4k$，$c=3k$，所以 $\frac{a+b}{c-2b}=\frac{6k+4k}{3k-2\times4k}=\frac{10k}{-5k}=-2$.

**6**. C　**点拨**：$\because\frac{a}{a+b}=\frac{2}{3}$，

$\therefore a=2b$，且 $b\neq0$，

$\therefore\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{3b^2}{5b^2}=\frac{3}{5}$.

**7**. $\frac{1}{2}$　**点拨**：$\because\frac{a}{2a-b}=\frac{2}{3}$，$\therefore 3a=4a-2b$，$\therefore a=2b$，$\therefore\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

**8**. **解**：设 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=k$，

则 $x=2k$，$y=3k$，$z=5k$，

$\therefore 6k+6k-5k=14$，

$\therefore k=2$，

$\therefore x=4$，$y=6$，$z=10$.

**9**. **解**：设 $a=2k(k\neq0)$，则 $b=3k$，

$\therefore\frac{5a-2b}{a^2-4b^2}\cdot(a-2b)=\frac{5a-2b}{a+2b}=\frac{10k-6k}{2k+6k}=\frac{4k}{8k}=\frac{1}{2}$.

**10**. **证明**：设正方形纸片 $ABCD$ 的边长为2 m.

$\because E$ 为 $BC$ 的中点，

$\therefore BE=1$ m.

在Rt△$ABE$中，

$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{5}$ m.

$\because B'E=BE=1$ m，

$\therefore AB'=AE-B'E=(\sqrt{5}-1)$ m.

又 $AB''=AB'$，

$\therefore AB''=(\sqrt{5}-1)$ m，

$\therefore\frac{AB''}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore$ 点 $B''$ 是线段 $AB$ 的黄金分割点.

## 3.2　平行线分线段成比例

【两年模拟兵法】

**1**. B

**2**. A　**点拨**：$\because AD:DB=3:5$，$\therefore DB:AB=5:8$.

$\because DE/\!/BC$，$\therefore CE:AC=DB:AB=5:8$.

$\because EF/\!/AB$，$\therefore CF:CB=CE:AC=5:8$.

**3**. B　**点拨**：$\because a/\!/b/\!/c$，$\therefore AC:CE=BD:DF$.

$\because AC=4$，$CE=6$，$BD=3$，$\therefore 4:6=3:DF$，解得 $DF=\frac{9}{2}$，$\therefore BF=BD+DF=3+\frac{9}{2}=7.5$.

**4**. C　**点拨**：由点 $E$，$F$ 分别是边 $AD$，$AB$ 的中点，易知 $AH=HO$.

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$，$BD$ 相交于点 $O$，$\therefore AO=CO$，$\therefore HC=3AH$，$\therefore\frac{AH}{HC}=\frac{1}{3}$.

**5**. A　**点拨**：如图，延长 $BC$ 至 $F$ 点，使得 $CF=BD$.

$\because ED=EC$，$\therefore\angle EDC=\angle ECD$，$\therefore\angle EDB=\angle ECF$. 在△$EBD$ 和△$EFC$ 中，

$\begin{cases}DB=CF,\\\angle BDE=\angle FCE,\\ED=EC,\end{cases}$

$\therefore\triangle EBD\cong\triangle EFC$，

$\therefore\angle B=\angle F$.

$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore\angle B=\angle ACB$，

$\therefore\angle ACB=\angle F$，

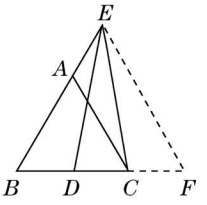
$\therefore AC/\!/EF$，

$\therefore BA:AE=BC:CF$.

$\because BA=BC$，

$\therefore CF=AE=2$，

$\therefore BD=2$.



（第5题）

**6**. C

**7**. **证明**：$\because$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形，

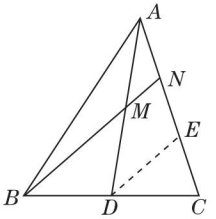
$\therefore DE/\!/CF$，$DF/\!/CE$，

$\therefore\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{AD}$，$\frac{CF}{FA}=\frac{BD}{AD}$，

$\therefore\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}$.

**点拨**：根据平行四边形的性质推出 $DE/\!/CF$，$DF/\!/CE$，根据平行线分线段成比例的基本事实的推论得出 $\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{AD}$，$\frac{CF}{FA}=\frac{BD}{AD}$，进而可推出结论.

**8**. **证明**：如图，过点 $D$ 作 $DE/\!/BN$，交 $AC$ 于点 $E$，则 $\frac{CE}{NE}=\frac{CD}{BD}$.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $AD$ 是 $BC$ 边上的中线，

∴ $BD=CD$.

∴ $CE=NE$.

∵ $DE/\!/MN$，

∴ $\frac{AM}{DM}=\frac{AN}{NE}$，

又∵ $M$ 是 $AD$ 的中点，

∴ $AM=DM$，

∴ $AN=NE$.

∴ $AN=NE=CE$.

∴ $CN=NE+CE=2AN$.

∴ $AN=\frac{1}{2}CN$.

## 3.3 相似图形

【两年模拟兵法】

**1.** D

**2.** C　**点拨：**等边三角形虽然大小不一定相同，但形状一定相同，所以所有的等边三角形一定相似.

**3.** C　**点拨：**根据题意得两图形相似，故有$\frac{10}{15}=\frac{8}{x}$.

解得 $x=12$.

**4.** C　**点拨：**相似多边形对应边的比相等，20 cm长的边可能与三角形框架甲的三条边分别对应.

**5.** B

**6.** $\frac{5}{3}$或$\frac{12}{5}$

**7.** **解：**原正方形与新正方形的相似比为$1:\sqrt{2}$，周长比为 $1:\sqrt{2}$，面积比为 $1:2$.

**8.** **解：**设 $BP=x$.

∵ 等边三角形 $ABC$ 的边长为 8，

∴ $CP=8-x$.

∵ $E$ 为 $AC$ 的中点，

∴ $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4$.

①当 $BD$ 和 $CP$ 是对应边时，$\triangle BDP\backsim\triangle CPE$，

∴ $\frac{BD}{CP}=\frac{BP}{CE}$，即$\frac{3}{8-x}=\frac{x}{4}$，

整理得 $x^2-8x+12=0$，

解得 $x_1=2$，$x_2=6$.

经检验，$x=2$ 或 $x=6$ 都是原方程的解.

即 $BP=2$ 或 $BP=6$；

②当 $BD$ 和 $CE$ 是对应边时，$\triangle BDP\backsim\triangle CEP$，

∴ $\frac{BD}{CE}=\frac{BP}{CP}$，即$\frac{3}{4}=\frac{x}{8-x}$，

解得 $x=\frac{24}{7}$. 经检验，$x=\frac{24}{7}$是原方程的解.

即 $BP=\frac{24}{7}$. 综上所述，$BP$ 的长是 2 或 6 或$\frac{24}{7}$.

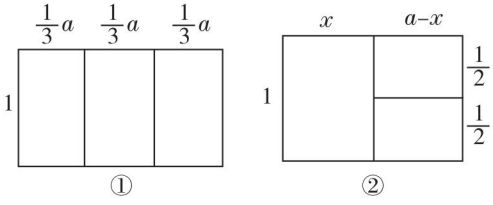
**点拨：**分 $BD$ 和 $CP$ 是对应边与 $BD$ 和 $CE$ 是对应边两种情况，利用相似三角形的对应边成比例列式计算即可得解.

**9.** **解：**方法一　如图①，∵ 每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同，

∴ $\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{3}a}{1}$. 解得 $a=\sqrt{3}$（负值舍去）.

方法二　如图②，由每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同，得$\frac{1}{a}=\frac{x}{1}=\frac{\frac{1}{2}}{a-x}$.

∴ $a=\sqrt{2}$（负值舍去）.




（第 9 题）

**点拨：**本题答案不唯一，符合要求即可.

## 3.4 相似三角形的判定与性质

### 3.4.1 相似三角形的判定

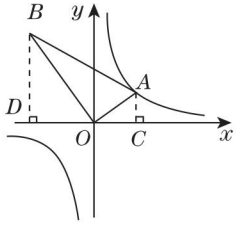
【两年模拟兵法】

**1.** B　**2.** A　**3.** C

**4.** B　**点拨：**∵ 截得的小三角形与 $\triangle ABC$ 相似，∴ 过 $P$ 作 $AC$ 的垂线，作 $AB$ 的垂线，作 $BC$ 的垂线，所截得的小三角形均满足题意. 则 $D$ 点的位置最多有 3 处，故选 B.

**5.** C　**6.** B

**7.** A　**点拨：**要求 $k$ 的值，只要求出点 $B$ 的坐标即可. 分别过点 $A$，$B$ 作 $AC\perp x$ 轴，$BD\perp x$ 轴，垂足分别为 $C$，$D$，如图.




（第 7 题）

设点 $A$ 的坐标是 $(m,n)$，

则 $AC=n$，$OC=m$.

∵ $\angle AOB=90°$，

∴ $\angle AOC+\angle BOD=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle OBD+\angle BOD=90°$，∴ $\angle OBD=\angle AOC$.

又∵ $\angle BDO=\angle OCA=90°$，

∴ $\triangle BDO\backsim\triangle OCA$. ∴ $\frac{BD}{OC}=\frac{OD}{AC}=\frac{OB}{OA}$.

∵ $OB=2OA$，∴ $BD=2m$，$OD=2n$.

∴ 点 $B$ 的坐标是$(-2n,2m)$.

∵ 点 $A$ 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，

∴ $mn=1$.

∵ 点 $B$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴ $k=-2n\cdot 2m=-4mn=-4$. 故选 A.

**8.** **解：**(1) $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

(2)①说明 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

∵ $\angle BAD=\angle CAE$，

∴ $\angle BAD+\angle DAC=\angle CAE+\angle DAC$，

即 $\angle BAC=\angle DAE$.

又∵ $\angle ABC=\angle ADE$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

②说明 $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

∵ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，

∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$.

又∵ $\angle BAD=\angle CAE$，

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

**9.** (1) **证明：**由四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD/\!/BC$，

易得 $\angle C=\angle B=60°$.

∵ $\angle APC=\angle B+\angle BAP$，

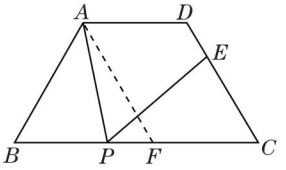
∴ $\angle APE+\angle CPE=\angle B+\angle BAP$.

又∵ $\angle APE=\angle B$，

∴ $\angle BAP=\angle CPE$.

∴ $\triangle APB\backsim\triangle PEC$.

(2) **解：**如图，过点 $A$ 作 $AF/\!/CD$，交 $BC$ 于 $F$.




（第 9 题）

∵ $AD/\!/BC$，

∴ 四边形 $ADCF$ 为平行四边形.

∴ $CF=AD=3$，$AF=DC$.

又∵ $AB=DC$，

∴ $AB=AF$.

又∵ $\angle B=60°$，

∴ $\triangle ABF$ 为等边三角形.

∴ $AB=BF=7-3=4$.

∵ $\triangle APB\backsim\triangle PEC$，

∴ $\frac{BP}{CE}=\frac{AB}{PC}$.

设 $BP=x$，则 $PC=7-x$.

∵ $CE=3$，$AB=4$，

∴ $\frac{x}{3}=\frac{4}{7-x}$.

整理，得 $x^2-7x+12=0$.

解得 $x_1=3$，$x_2=4$.

经检验，$x_1=3$，$x_2=4$ 均是所列方程的根，

∴ $BP$ 的长为 3 或 4.

**10.** (1) **证明：**∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle ACB$.

∵ $\angle ADE+\angle CDE=\angle B+\angle BAD$，$\angle ADE=\angle B$，

∴ $\angle BAD=\angle CDE$.

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle DCE$.

(2) **解：**过点 $A$ 作 $AM\perp BC$ 于点 $M$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，设 $BM=4k$，

则 $AM=BM\cdot\tan B=4k\cdot\frac{3}{4}=3k$.

由勾股定理，得 $AB^2=AM^2+BM^2$，

即 $20^2=(3k)^2+(4k)^2$，解得 $k=4$.

∵ $AB=AC$，$AM\perp BC$，

∴ $BC=2BM=8k=32$.

∵ $DE/\!/AB$，

∴ $\angle BAD=\angle ADE$.

又∵ $\angle ADE=\angle B$，$\angle B=\angle ACB$，

∴ $\angle BAD=\angle ACB$.

∵ $\angle ABD=\angle CBA$，

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle CBA$，

∴ $\frac{AB}{CB}=\frac{DB}{AB}$，

∴ $DB=\frac{AB^2}{CB}=\frac{20^2}{32}=\frac{25}{2}$.

∵ $DE/\!/AB$，

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{BD}{BC}$，

∴ $AE=\frac{AC\cdot BD}{BC}=\frac{20\times\frac{25}{2}}{32}=\frac{125}{16}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**11. 解：**(1)存在.

设 $BP=x$，则 $DP=10-x$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle CDP$，则 $\frac{AB}{BP}=\frac{CD}{DP}$，

即 $\frac{9}{x}=\frac{4}{10-x}$. 解得 $x=\frac{90}{13}$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle PDC$，则 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$，即 $\frac{9}{10-x}=\frac{x}{4}$.

整理，得 $x^2-10x+36=0$，方程无解.

所以存在满足题意的点 $P$，且 $BP=\frac{90}{13}$.

(2)设 $BP=x$，则 $DP=12-x$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle CDP$，则 $\frac{AB}{BP}=\frac{CD}{DP}$，

即 $\frac{9}{x}=\frac{4}{12-x}$. 解得 $x=\frac{108}{13}$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle PDC$，则 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$，即 $\frac{9}{12-x}=\frac{x}{4}$.

整理，得 $x^2-12x+36=0$. 解得 $x_1=x_2=6$.

所以存在两个满足题意的点 $P$，且 $BP=6$ 或 $\frac{108}{13}$.

(3)设 $BP=x$，则 $DP=15-x$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle CDP$，则 $\frac{AB}{BP}=\frac{CD}{DP}$，

即 $\frac{9}{x}=\frac{4}{15-x}$. 解得 $x=\frac{135}{13}$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle PDC$，则 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$，即 $\frac{9}{15-x}=\frac{x}{4}$.

整理，得 $x^2-15x+36=0$. 解得 $x_1=3$，$x_2=12$.

所以存在三个满足题意的点 $P$，且 $BP=\frac{135}{13}$ 或 3 或 12.

(4)设 $BP=x$，则 $DP=l-x$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle CDP$，则 $\frac{AB}{BP}=\frac{CD}{DP}$，

即 $\frac{m}{x}=\frac{n}{l-x}$. 解得 $x=\frac{ml}{m+n}$.

若 $\triangle ABP\backsim\triangle PDC$，则 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$，即 $\frac{m}{l-x}=\frac{x}{n}$.

整理，得 $x^2-lx+mn=0$，$\Delta=l^2-4mn$.

当 $\Delta=l^2-4mn<0$ 时，存在使以 $P,A,B$ 三点为顶点的三角形与以 $P,C,D$ 三点为顶点的三角形相似的一个点 $P$；

当 $\Delta=l^2-4mn=0$ 时，存在使以 $P,A,B$ 三点为顶点的三角形与以 $P,C,D$ 三点为顶点的三角形相似的两个点 $P$；

当 $\Delta=l^2-4mn>0$ 时，存在使以 $P,A,B$ 三点为顶点的三角形与以 $P,C,D$ 三点为顶点的三角形相似的三个点 $P$.

## 3.4.2 相似三角形的性质

【两年模拟兵法】

**1.** A **2.** D **3.** D

**4.** D **点拨：**根据图形知 $\triangle DEF$ 的边 $DF$ 上的高与 $\triangle BFE$ 的边 $BF$ 上的高相等，设这个高为 $h$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore CD=AB$，$CD\parallel AB$.

$\because DE:EC=2:3$，

$\therefore DE:AB=2:5$.

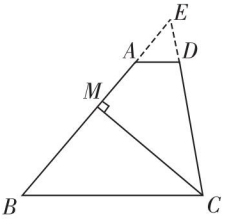
$\because CD\parallel AB$，$\therefore\triangle DEF\backsim\triangle BAF$，

$\therefore\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BAF}}=\left(\frac{DE}{BA}\right)^2=\frac{4}{25}$，$\frac{DE}{BA}=\frac{DF}{BF}=\frac{2}{5}$，

$\therefore\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle EBF}}=\frac{\frac{1}{2}DF\cdot h}{\frac{1}{2}BF\cdot h}=\frac{DF}{BF}=\frac{2}{5}$.

$\therefore S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EBF}:S_{\triangle BAF}=4:10:25$.

**5.** 1 **点拨：**如图，延长 $BA$，$CD$，交点为 $E$，依据题意可知 $MB=ME$，然后证明 $\triangle EAD\backsim\triangle EBC$，依据相似三角形的性质可求得 $\triangle EAD$ 和 $\triangle EBC$ 的面积，最后依据 $S_{四边形AMCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle EBC}-S_{\triangle EAD}$ 求解即可.




（第 5 题）

**6. 解：**$\because D,E$ 分别是 $BC,AC$ 的中点，

$\therefore DE\parallel AB$，$DE=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore\triangle AGB\backsim\triangle DGE$，

$\therefore\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle GDE}}=\left(\frac{AB}{DE}\right)^2=2^2=4$，

又$\because S_{\triangle GDE}=1$，

$\therefore S_{\triangle ABG}=4$.

$\because\triangle AGE$ 与 $\triangle GDE$ 等高，

$\therefore\frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle GDE}}=\frac{AG}{DG}=\frac{AB}{DE}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $S_{\triangle GDE}=1$，

∴ $S_{\triangle AGE}=2$，

同理可得 $S_{\triangle GBD}=2$.

∴ $S_{四边形ABDE}=4+2+2+1=9$.

∵ $DE/\!/AB$，

∴ $\triangle EDC\backsim\triangle ABC$，

设 $S_{\triangle ABC}=x$，则$\frac{x}{x-9}=\left(\frac{2}{1}\right)^2$，

解得 $x=12$，即 $S_{\triangle ABC}=12$.

**点拨**：遇到面积关系问题时，若两个三角形相似，则面积比等于相似比的平方；若两个三角形不相似但等高（等底），则等高（等底）的两个三角形的面积比等于底的比（高的比）.

**7.** (1)**证明**：∵ $CF$ 平分 $\angle ACB$，

∴ $\angle 1=\angle 2$，

又∵ $DC=AC$，

∴ $CF$ 是 $\triangle ACD$ 的中线，

∴ 点 $F$ 是 $AD$ 的中点，

又∵ 点 $E$ 是 $AB$ 的中点，

∴ $EF/\!/BD$，即 $EF/\!/BC$.

(2)**解**：由(1)知 $EF/\!/BD$，

∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABD$，

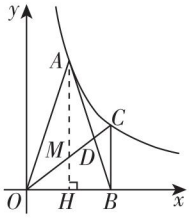
∴ $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABD}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2$.

又∵ $AE=\frac{1}{2}AB$，$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABD}-S_{四边形BDFE}=S_{\triangle ABD}-6$，

∴ $\frac{S_{\triangle ABD}-6}{S_{\triangle ABD}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$，

∴ $S_{\triangle ABD}=8$.

**8.** **解**：(1)如图，过点 $A$ 作 $AH\perp OB$ 交 $x$ 轴于点 $H$，交 $OC$ 于点 $M$.




（第 8 题）

∵ $OA=AB=2\sqrt{10}$，$OB=4$，

∴ $OH=2$，

∴ $AH=6$，

∴ $A(2,6)$，

∴ $k=12$.

(2)将 $x=4$ 代入 $y=\frac{12}{x}$，得 $y=3$，

∴ $BC=3$.

由题意得 $\triangle OMH\backsim\triangle OCB$，

∴ $\frac{MH}{BC}=\frac{OH}{OB}=\frac{1}{2}$，

∴ $MH=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$，

∴ $AM=\frac{9}{2}$.

∵ $AH\perp x$ 轴，$BC\perp x$ 轴，

∴ $AH/\!/BC$，

∴ $\triangle ADM\backsim\triangle BDC$，

∴ $\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BC}=\frac{3}{2}$.

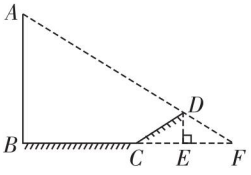
## 3.5 相似三角形的应用

【两年模拟兵法】

**1.** B **2.** C

**3.** C **点拨**：先证明 $\triangle PQR\backsim\triangle PST$，再利用相似三角形的性质得到$\frac{PQ}{PQ+60}=\frac{80}{120}$，最后根据比例的基本性质求出 $PQ$.

**4.** D **点拨**：如图，连接 $AD$ 并延长交 $BC$ 的延长线于点 $F$，过点 $D$ 作 $DE\perp BF$ 于点 $E$.




（第 4 题）

∵ $\angle DCE=30°$，$CD=8$ 米，$\angle CED=90°$，

∴ $DE=4$ 米.

∴ $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=4\sqrt{3}$（米）.

设 $AB=x$ 米，$EF=y$ 米.

∵ $DE\perp BF$，$AB\perp BF$，

∴ $\triangle DEF\backsim\triangle ABF$，

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BF}$，即$\frac{4}{x}=\frac{y}{20+4\sqrt{3}+y}$. ①

∵ 此时测得 1 米杆的影长为 2 米，

∴ 根据同一时间物高与影长成正比可得$\frac{1}{2}=\frac{x}{20+4\sqrt{3}+y}$. ②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

①②联立，解得 $x=14+2\sqrt{3}$.

故选 D.

**5.** **解：**由题意得，$\angle ABD=\angle CDE=90°$，$\angle ADB=\angle CED$，

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BD}$.

$\because \angle F=\angle F$，$\angle ABF=\angle CDF=90°$，

$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle ABF$，

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DF}{BF}$，$\therefore \frac{DE}{BD}=\frac{DF}{BF}$，

即 $\frac{2.4}{BD}=\frac{2.5}{BD+2.5}$，

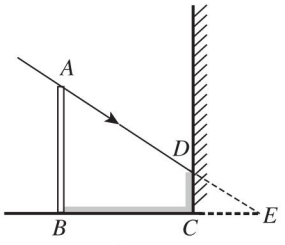
$\therefore BD=60$ 米，

$\therefore \frac{1.72}{AB}=\frac{2.4}{60}$，

$\therefore AB=43$ 米.

答：小雁塔 $AB$ 的高度是 43 米.

**6.** **解：**如图，延长 $AD$ 交 $BC$ 的延长线于点 $E$，若无墙阻挡，则标杆 $AB$ 落在地面上的影子应该是 $BE$.




（第 6 题）

由题意知 $AB/\!/DC$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$，

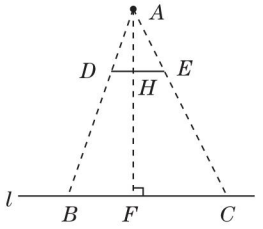
$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}$，即 $\frac{3}{1}=\frac{3+CE}{CE}$，

解得 $CE=1.5$ m，

则 $BE=BC+CE=3+1.5=4.5$(m).

即若无墙阻挡，则标杆 $AB$ 在地面上的影子的长为4.5 m.

**7.** **解：**(1) 如图，作射线 $AD$，$AE$，分别交 $l$ 于点 $B$，$C$，$BC$ 即为视点 $A$ 盲区内的那段公路.




（第 7 题）

(2) 如图，过点 $A$ 作 $AF\perp BC$，垂足为点 $F$，交 $DE$ 于点 $H$，易知 $AH\perp DE$.

$\because DE/\!/BC$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{AH}{AF}=\frac{DE}{BC}$.

由题意知 $DE=30$ m，$AH=40$ m，$HF=80$ m，

$\therefore AF=AH+HF=120$ m，

$\therefore \frac{40}{120}=\frac{30}{BC}$.

$\therefore BC=90$ m.

$90\div3=30$(m/s).

**答：**该汽车的速度是 30 m/s.

## 3.6 位 似

【两年模拟兵法】

**1.** B **2.** A

**3.** B **点拨：**由位似图形的定义，通过判断对应边是否互相平行(或在同一直线上)，对应顶点的连线是否相交于一点，不难得出①与③是位似图形，②与④是位似图形，故选 B.

**4.** D **5.** A **6.** A

**7.** **解：**(1) 根据勾股定理，得 $AC=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

$AB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$，

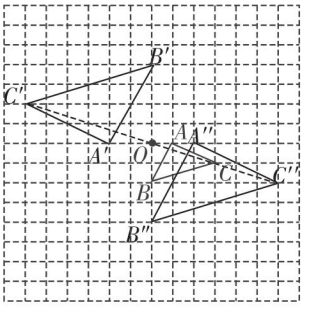
$\therefore AB^2+AC^2=10$，$BC^2=10$，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{5}{2}$.

(2) $\triangle ABC$ 的位似图形有两种情况，如图所示.




（第 7 题）

**8.** (1) D

(2) **证明：**$\because E'C'/\!/EC$，$E'D'/\!/ED$，

$\therefore \triangle OCE\backsim\triangle OC'E'$，$\triangle ODE\backsim\triangle OD'E'$.

$\therefore CE:C'E'=OE:OE'$，$DE:D'E'=OE:OE'$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle CEO=\angle C'E'O,\angle DEO=\angle D'E'O.$

$\therefore CE:C'E'=DE:D'E',\ \angle CED=\angle C'E'D',$

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle C'D'E'.$

$\because \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore \triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

## 素养提分整合篇

【好题必解】

**1.** 证明:$\because AD=CD,DE\perp AC,$

$\therefore AF=CF,\angle DAF=\angle DCF,\angle DFA=\angle DFC=90°.$

又$\because\ \angle DAB=\angle DAF+\angle CAB=90°,\angle CAB+\angle ABC=90°,$

$\therefore \angle DCF=\angle DAF=\angle ABC.$

在$\triangle DCF$ 和 $\triangle ABC$ 中,$\angle DFC=\angle ACB=90°,$

$\angle DCF=\angle ABC,$

$\therefore \triangle DCF\backsim\triangle ABC,$

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{CF}{CB}$,即$\frac{CD}{AB}=\frac{AF}{CB},$

$\therefore AB\cdot AF=CB\cdot CD.$

**2.** (1)证明:$\because DE/\!/BC,EF/\!/AB,$

$\therefore$ 四边形 $DEFB$ 为平行四边形,

$\therefore DE=BF.$

$\because DE/\!/BC,$

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC.$

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}.$

又$\because DE=BF,$

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{BF}{BC}.$

(2)解:$\because AD:DB=3:5,$

$\therefore BD:AB=5:8.$

$\because DE/\!/BC,$

$\therefore CE:AC=BD:AB=5:8.$

$\because EF/\!/AB,$

$\therefore CF:CB=CE:AC=5:8.$

**3.** 证明:$\because DE/\!/BC,$

$\therefore \triangle PDE\backsim\triangle PBC.$

$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}.$

$\therefore PD\cdot PC=PE\cdot PB.$

$\because DF/\!/AC,$

$\therefore \triangle PDF\backsim\triangle PAC.$

$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{PD}{PA}.$

$\therefore PD\cdot PC=PF\cdot PA.$

$\therefore PE\cdot PB=PF\cdot PA.$

$\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}.$

**4.** 解:$OC^2$ 与 $OA\cdot OE$ 相等. 理由如下:

$\because AD/\!/BC,$

$\therefore \triangle COB\backsim\triangle AOD.$

$\therefore \frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}.$

同理$\triangle OBE\backsim\triangle ODC.$

$\therefore \frac{OE}{OC}=\frac{OB}{OD}.$

$\therefore \frac{OC}{OA}=\frac{OE}{OC},$

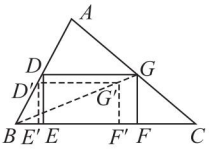
即 $OC^2=OA\cdot OE.$

**5.** 解:如图,在 $AB$ 边上靠近 $B$ 点处任取一点 $D'$,过点 $D'$ 作 $D'E'\perp BC$ 于点 $E'$,

在 $BC$ 上截取 $E'F'$,使 $E'F'=2D'E'$,过点 $F'$ 作$F'G'\perp BC$,

过点 $D'$作$D'G'/\!/BC$ 交$F'G'$于点 $G'$,作射线 $BG'$ 交 $AC$ 于点 $G$,

过点 $G$ 作 $GF/\!/G'F',DG/\!/D'G',GF$ 交 $BC$ 于点 $F,DG$ 交 $AB$ 于点 $D$,过点 $D$ 作$DE/\!/D'E'$交 $BC$ 于点 $E$,则四边形 $DEFG$ 为 $\triangle ABC$ 的内接矩形,且 $DE:EF=1:2$.




(第 5 题)

**6.** 解:由题意知 $\angle ACB=\angle ECF,\angle AC'B=\angle E'C'F',$

又$\angle ABC=\angle EFC=\angle E'F'C'=90°,$

$\therefore \triangle BAC\backsim\triangle FEC,\triangle AC'B\backsim\triangle E'C'F',$

$\therefore \frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FC},\frac{AB}{E'F'}=\frac{BC'}{C'F'}.$

设 $AB=x$ m,$BC=y$ m,

则$\begin{cases}\frac{x}{1.6}=\frac{y}{2},\\ \frac{x}{1.6}=\frac{7+y}{3},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=11.2,\\ y=14.\end{cases}$

答:这棵古松树 $AB$ 的高为 11.2 m.

**点拨:**本题考查相似三角形性质的应用,解题时关键是找出相似的三角形,然后根据对应边成比例列出方程即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**7. 解：**(1)∵ $x^2-7x+12=0$，

∴ $x_1=3, x_2=4$.

∵ $BC>AB$，

∴ $BC=4, AB=3$，

∵ $OA=2OB$，

∴ $OA=2, OB=1$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ 点 $D$ 的坐标为 $(-2,4)$.

(2)设 $BP$ 交 $y$ 轴于点 $F$.

当 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时，如图①，$PE=t$.

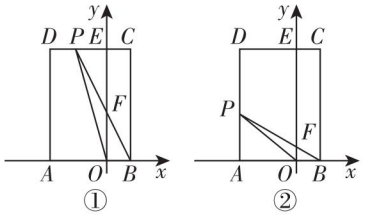
∵ $CD/\!/AB$，

∴ $\triangle OBF\backsim\triangle EPF$，

∴ $\dfrac{OF}{EF}=\dfrac{OB}{EP}$，即 $\dfrac{OF}{4-OF}=\dfrac{1}{t}$，

∴ $OF=\dfrac{4}{t+1}$，

∴ $S=\dfrac{1}{2}OF\cdot PE=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{t+1}\cdot t=\dfrac{2t}{t+1}$；




（第 7 题）

当 $2<t<6$ 时，如图②，$AP=6-t$.

∵ $OE/\!/AD$，

∴ $\triangle OBF\backsim\triangle ABP$，

∴ $\dfrac{OF}{AP}=\dfrac{OB}{AB}$，即 $\dfrac{OF}{6-t}=\dfrac{1}{3}$，

∴ $OF=\dfrac{6-t}{3}$，

∴ $S=\dfrac{1}{2}OF\cdot OA=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6-t}{3}\times 2=-\dfrac{1}{3}t+2$.

综上所述，$S=\begin{cases}\dfrac{2t}{t+1}(0\leqslant t\leqslant 2),\\ -\dfrac{1}{3}t+2(2<t<6).\end{cases}$

(3)由题意知，当点 $P$ 在 $DE$ 上时，显然不能构成等腰三角形；

当点 $P$ 在 $DA$ 上运动时，设 $P(-2,m)(0\leqslant m\leqslant 4)$，

∵ $B(1,0), E(0,4)$，

∴ $BP^2=9+m^2, BE^2=1+16=17, PE^2=4+(4-m)^2=m^2-8m+20$，

①当 $BP=BE$ 时，$9+m^2=17$，解得 $m=\pm 2\sqrt{2}$，

∵ $m\geqslant 0$，∴ $m=2\sqrt{2}$. 即 $P(-2,2\sqrt{2})$；

②当 $BP=PE$ 时，$9+m^2=m^2-8m+20$，解得 $m=\dfrac{11}{8}$，则 $P\left(-2,\dfrac{11}{8}\right)$；

③当 $BE=PE$ 时，$17=m^2-8m+20$，解得 $m=4\pm\sqrt{13}$，

∵ $m\leqslant 4$，∴ $m=4-\sqrt{13}$. 即 $P(-2,4-\sqrt{13})$.

综上，$P(-2,2\sqrt{2})$ 或 $\left(-2,\dfrac{11}{8}\right)$ 或 $(-2,4-\sqrt{13})$.

【第 3 章测试卷】

**一、1.** D **2.** B **3.** A **4.** C **5.** A **6.** B **7.** B **8.** B **9.** B **10.** C

**二、11.** $\angle D=\angle B$ **点拨：**答案不唯一.

**12.** 16 cm **13.** 3

**14.** 6 m **点拨：**设电线杆的高为 $x$ m，则 $\dfrac{0.12}{x}=\dfrac{0.6}{30}$，解得 $x=6$. 则电线杆的高为 6 m.

**15.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ **16.** ①③④

**17.** $(2,0)$ 或 $(2+2\sqrt{2},0)$ 或 $(2-2\sqrt{2},0)$

**18.** $\left(-\dfrac{3^n}{2^n},\dfrac{3^n}{2^{n+1}}\right)$

**三、19. 解：**∵ $DE/\!/BC$，

∴ $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$.

∵ $EC=AD, AE=2$ cm, $AB=7.5$ cm，

∴ $\dfrac{BD}{7.5}=\dfrac{7.5-BD}{2+7.5-BD}$.

解得 $BD=4.5$(cm) 或 $BD=12.5$(cm)(舍去).

∴ $BD=4.5$ cm.

**20. 证明：**∵ $AD=DB$，

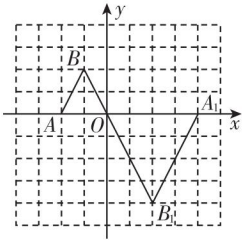
∴ $\angle B=\angle EAD$.

∵ $\angle BDA=\angle 1+\angle C=\angle 2+\angle ADE, \angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle C=\angle ADE$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle EAD$.

**21. 解：**(1)如图.




（第 21 题）

(2) $A_1(4,0), B_1(2,-4)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**22. 证明:**(1)∵ $\angle BAE=\angle DAC$, $\angle BAC=\angle BAE-\angle CAE$, $\angle EAD=\angle DAC-\angle CAE$,

∴ $\angle BAC=\angle EAD$.

∵ $\angle ACB=\angle ADE$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$.

(2)∵ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$,

∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$,即$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

又∵ $\angle BAE=\angle CAD$,

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$. ∴ $\frac{BE}{CD}=\frac{AB}{AC}$,

即 $BE\cdot AC=CD\cdot AB$.

**23.** (1)**证明:**∵ $DB$ 平分$\angle ADC$,

∴ $\angle ADB=\angle BDC$.

∵ $\angle ABD=\angle BCD=90°$,

∴ $\triangle DAB\backsim\triangle DBC$,

∴ $\frac{BD}{CD}=\frac{AD}{BD}$, ∴ $BD^2=AD\cdot CD$.

(2)**解:**由(1)可知,$BD^2=AD\cdot CD$,

∵ $CD=6$, $AD=8$, ∴ $BD=4\sqrt{3}$,

∴ $BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{48-36}=2\sqrt{3}$.

∵ $BM/\!/CD$,

∴ $\angle MBD=\angle CDB=\angle ADB$,

∴ $DM=BM$.

∵ $\angle ADB+\angle A=\angle MBD+\angle MBA=90°$,

∴ $\angle A=\angle MBA$,

∴ $AM=BM=DM=\frac{1}{2}AD=4$.

∵ $BM/\!/CD$,

∴ $\angle MBC=180°-\angle BCD=90°$, $\frac{MN}{CN}=\frac{BM}{CD}$.

∴ $CM=\sqrt{BM^2+BC^2}=\sqrt{16+12}=2\sqrt{7}$.

∴ $\frac{MN}{2\sqrt{7}-MN}=\frac{4}{6}$,解得 $MN=\frac{4}{5}\sqrt{7}$.

**24. 解:**由题意,得 $AB=1.54-0.04=1.5$(m), $BC=0.5$ m, $DC=4$ m, $\triangle ABC\backsim\triangle EDC$,

则$\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{DC}$,即$\frac{1.5}{DE}=\frac{0.5}{4}$.

解得 $DE=12$(m).

答:旗杆 $DE$ 的高度为 12 m.

**25. 解:**(1)把点 $A$ 的坐标$(-2,0)$代入 $y=ax+1$中,求得 $a=\frac{1}{2}$, ∴ $y=\frac{1}{2}x+1$.

把 $y=2$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+1$ 中,得 $x=2$,

∴ $P(2,2)$.

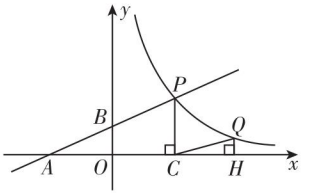
把点 $P$ 的坐标$(2,2)$代入 $y=\frac{k}{x}$,得 $k=4$.

∴ 双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2)如图,设 $Q(m,b)$,

∵ 点 $Q(m,b)$在双曲线 $y=\frac{4}{x}$上,

∴ $b=\frac{4}{m}$. 易知 $OA=2$, $OB=1$, $QH=b$, $CH=m-2$.




(第 25 题)

当$\triangle QCH\backsim\triangle BAO$时,$\frac{CH}{AO}=\frac{QH}{BO}$,即$\frac{m-2}{2}=\frac{b}{1}$.

∴ $m-2=2b$,即 $m-2=\frac{8}{m}$.

解得 $m=4$ 或 $m=-2$(舍去). 当 $m=4$ 时, $b=1$.

∴ $Q(4,1)$.

当$\triangle QCH\backsim\triangle ABO$时,$\frac{CH}{BO}=\frac{QH}{AO}$,即$\frac{m-2}{1}=\frac{b}{2}$.

∴ $2m-4=b$,即 $2m-4=\frac{4}{m}$.

解得 $m=1+\sqrt{3}$或 $m=1-\sqrt{3}$(舍去). 当 $m=1+\sqrt{3}$时, $b=\frac{4}{1+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2$.

∴ $Q(1+\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$.

综上可得,$Q(4,1)$或 $Q(1+\sqrt{3},2\sqrt{3}-2)$.

**26. 解:**$\frac{3}{2}$

(1)过点 $A$ 作 $AF/\!/DB$,交 $BP$ 的延长线于点 $F$,设$DC=k$,

∵ $DC:BC=1:2$, ∴ $BC=2k$.

∴ $DB=DC+BC=3k$.

∵ $E$ 是 $AC$ 的中点, ∴ $AE=CE$.

∵ $AF/\!/DB$,

∴ $\angle F=\angle EBC$.

又∵ $\angle AEF=\angle CEB$,

∴ $\triangle AEF\cong\triangle CEB$.

∴ $AF=BC=2k$.

∵ $AF/\!/DB$,

∴ $\triangle AFP\backsim\triangle DBP$.

∴ $\frac{AP}{PD}=\frac{AF}{DB}$, ∴ $\frac{AP}{PD}=\frac{2}{3}$.

(2)6 **点拨:**根据 $DC:BC:AC=1:2:3$, $DC=2$,可得 $BC=4$, $AC=6$. 由 $E$ 为 $AC$ 的中点,可以求出 $CE=\frac{1}{2}AC=3$. 在 Rt$\triangle BEC$ 中,由勾股定理求出 $BE=5$. 结合 $\triangle AEF\cong\triangle CEB$,从而得出 $EF=BE=5$, ∴ $BF=10$. 再根据 $\triangle AFP\backsim\triangle DBP$,得出$\frac{FP}{BP}=\frac{AP}{PD}=\frac{2}{3}$,即$\frac{10-BP}{BP}=\frac{2}{3}$,解得 $BP=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第4章 锐角三角函数

## 4.1 正弦和余弦

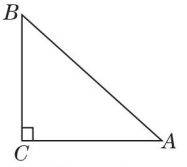
【两年模拟兵法】

**1.** D **2.** B **3.** C

**4.** B **点拨：**∵ 关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-\sqrt{2}x+\sin\alpha=0$ 有两个相等的实数根，∴ $\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\sin\alpha=2-4\sin\alpha=0$，解得 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，∵ $\alpha$ 为锐角，∴ $\alpha=30°$.

**5.** B

**6.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **点拨：**如图，由 $\cos B=\frac{2}{3}$，可设 $BC=2k$，$AB=3k$（$k\neq0$）.



（第6题）

则 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5}k$.

∴ $\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**7.** 75° **点拨：**∵ $\left|\cos A-\frac{1}{2}\right|+\left(\sin B-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$，

∴ $\cos A-\frac{1}{2}=0$，$\sin B-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 易知 $\angle A=60°$，$\angle B=45°$. ∴ $\angle C=180°-\angle A-\angle B=180°-60°-45°=75°$.

**8.** $\frac{7}{10}$或$\frac{5}{14}$ **方法规律：**本题利用分类讨论思想，因为此三角形的腰长、底长不明确，所以要分类讨论.

**9.** $\pm\frac{1}{5}$ **点拨：**∵ 在△$ABC$ 中，$\angle C=90°$，∴ $\angle A+\angle B=90°$，∴ $\sin B=\cos A$. ∵ $(\sin A+\sin B)^2=(\frac{7}{5})^2$，∴ $(\sin A+\cos A)^2=\frac{49}{25}$，即 $\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\cos A=\frac{49}{25}$，

∴ $2\sin A\cos A=\frac{49}{25}-1=\frac{24}{25}$，则 $(\sin A-\sin B)^2=(\sin A-\cos A)^2=\sin^2A+\cos^2A-2\sin A\cos A=1-\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$，

∴ $\sin A-\sin B=\pm\frac{1}{5}$.

**10.** **解：**(1) ∵ $DE/\!/BC$，

∴ △$AED$∽△$ACB$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{3}$.

(2) ∵ $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，$BD=10$，

∴ $\frac{AD}{AD+10}=\frac{1}{3}$，∴ $AD=5$.

∵ $\angle C=90°$，$AB=AD+DB=15$，

∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$.

**点拨：**根据已知条件可得△$AED$∽△$ACB$，利用相似三角形的性质可以求出$\frac{AD}{AB}$的值，再根据 $BD=10$，求出 $AD$ 的长，最后利用正弦的定义就可以求出 $\sin A$ 的值.

**11.** **解：**过点 $D$ 作 $DF\perp BC$，垂足为点 $F$. 易知△$BFD$∽△$BEA$，

∴ $\frac{DF}{AE}=\frac{BD}{BA}$.

∵ $BD=2AD$，∴ $AB=3AD$，

∴ $\frac{DF}{AE}=\frac{BD}{BA}=\frac{2}{3}$.

∵ 在 Rt△$DFC$ 中，$\sin\angle FCD=\frac{DF}{CD}=\frac{3}{5}$，$CD=10$，

∴ $DF=\frac{3}{5}CD=10\times\frac{3}{5}=6$.

∴ $\frac{6}{AE}=\frac{2}{3}$，∴ $AE=9$.

**点拨：**本题作辅助线有两个目的，一是为应用 $\sin\angle BCD=\frac{3}{5}$ 构造了直角三角形；二是为求 $AE$ 的长构造了相似三角形.

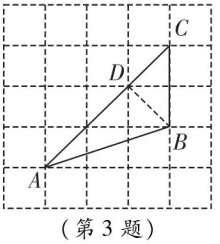
## 4.2 正 切

【两年模拟兵法】

**1.** A

**2.** D **点拨：**由折叠可知，$C'D=CD$，$\angle C'=\angle C=90°$. 根据在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的锐角等于30°，由特殊角的三角函数值选择答案.

**3.** D **点拨：**如图，作 $BD\perp AC$，易知点 $D$ 落在网格格点上，$AD=2\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{2}$，∴ $\tan A=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$. 故答案是 D.



（第3题）

**4.** B **5.** B **6.** A

**7.** B **点拨：**设 $x_1$，$x_2$ 是方程 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$ 的两

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

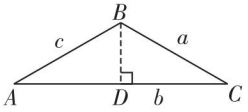
个根，则 $x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

由 $|x_1-x_2|=\sqrt{2}$ 得 $(x_1-x_2)^2=2$，则 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=2$，∴ $\frac{2b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=2$.

∵ $a=c$，∴ $\frac{b}{c}=\sqrt{3}$.

如图，过点 $B$ 作 $BD\perp AC$ 于 $D$，

∵ $a=c$，∴ $AD=\frac{b}{2}$，




（第 7 题）

$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，∴ $\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{\frac{b}{2}}{c}=\frac{b}{2c}$.

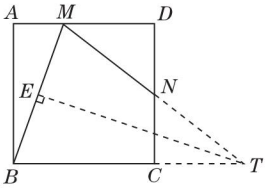
∵ $\frac{b}{c}=\sqrt{3}$，∴ $\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\angle ABD=60°$，∴ $\angle ABC=2\angle ABD=120°$.

故选 B.

**8.** A

**9.** **解：**如图，延长 $BC$，$MN$，两者交于点 $T$.




（第 9 题）

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$DM=k$，

则 $AM=1-k$.

所以 $BM^2=1^2+(1-k)^2=k^2-2k+2$.

由 $N$ 是 $DC$ 的中点，

易证得 $\triangle MND\cong\triangle TNC$，

所以 $CT=DM=k$，所以 $BT=1+k$.

因为 $\angle NMB=\angle MBC$，

所以 $TB=TM$.

过点 $T$ 作 $TE\perp MB$ 于点 $E$，

所以 $EB=EM=\frac{1}{2}MB$.

易知 $\angle ETB=\angle ABM$，

又因为 $\angle BET=\angle A=90°$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle ETB\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABM$.

所以 $\frac{BT}{MB}=\frac{EB}{AM}=\frac{\frac{1}{2}MB}{AM}$，

所以 $MB^2=2AM\cdot BT=2(1-k)(1+k)$.

于是 $k^2-2k+2=2-2k^2$，解得 $k=0$（舍去）或 $k=\frac{2}{3}$.

当 $DM=k=\frac{2}{3}$，即 $AM=\frac{1}{3}$ 时，

$\tan\angle ABM=\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$.

**10.** **解：**（1）过点 $A$ 作 $AD\perp x$ 轴，垂足为点 $D$，

则 $OD=OA\cdot\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$，

$AD=OA\cdot\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

故点 $A$ 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$.

（2）设直线 $AB$ 对应的函数表达式为 $y=kx+b$，

由直线过 $A(1,\sqrt{3})$ 和 $B(3,0)$ 两点，

可得 $\begin{cases}k+b=\sqrt{3},\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{3}{2}\sqrt{3},\end{cases}$

∴ 直线 $AB$ 对应的函数表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，∴ $OC=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times1=\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

**点拨：**过点 $A$ 作 $x$ 轴的垂线是求点 $A$ 的坐标及 $\triangle AOC$ 面积的重要步骤，本题也可过点 $A$ 作 $y$ 轴的垂线.

**11.** （1）**证明：**∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=AD$，$AC$ 平分 $\angle BAD$.

∵ $BE=DF$，即 $AE=AF$，

∴ $AC\perp EF$.

（2）**解：**∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，$CG/\!/AB$，$BO=\frac{1}{2}BD=2$.

∵ $AC\perp EF$，

∴ $BD/\!/EF$，

∴ 四边形 $EBDG$ 是平行四边形，

∴ $\angle ABD=\angle G$.

∴ $\tan\angle ABD=\tan G=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{AO}{2}=\frac{1}{2}$，解得 $AO=1$.

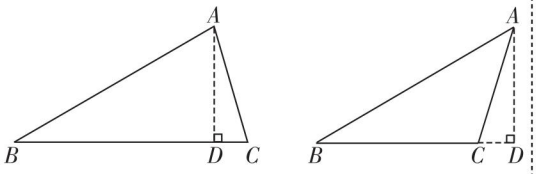
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 4.3 解直角三角形

【两年模拟兵法】

**1.** C **2.** A **3.** B **4.** A

**5.** $21\sqrt{3}$或$15\sqrt{3}$ **点拨：**当$\triangle ABC$为锐角三角形时，如图①，作$AD\perp BC$，垂足为点$D$，




①　　②

（第5题）

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，

$\because AB=12,\angle B=30^\circ$，

$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=6,BD=AB\cdot\cos B=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，

$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{39})^2-6^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore BC=BD+CD=6\sqrt{3}+\sqrt{3}=7\sqrt{3}$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times7\sqrt{3}\times6=21\sqrt{3}$；

当$\triangle ABC$为钝角三角形时，如图②，作$AD\perp BC$，交$BC$延长线于点$D$，

$\because AD=6,BD=6\sqrt{3},CD=\sqrt{3}$，

$\therefore BC=BD-CD=5\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times6=15\sqrt{3}$.

故$\triangle ABC$的面积为$21\sqrt{3}$或$15\sqrt{3}$.

**6.** （1）**证明：**$\because AB=AD$，

$\therefore\angle ABD=\angle ADB$，

又$\because\angle ABC=\angle ADC$，

$\therefore\angle ABC-\angle ABD=\angle ADC-\angle ADB$，

即$\angle CBD=\angle CDB$，

$\therefore CB=CD$.

（2）**解：**$\because CB=CD,AB=AD$，

$\therefore AC$垂直平分$BD$，

$\therefore\angle AOD=90^\circ,BO=DO$，

$\because\angle BCD=90^\circ$，

$\therefore OC=OD=\frac{1}{2}BD$，

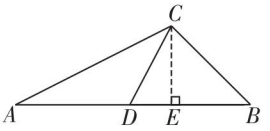
$\because AO=2OC$，

$\therefore AO=2OD$，即$\frac{AO}{OD}=2$.

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中，$\tan\angle ADO=\frac{AO}{OD}=2$.

**点拨：**本题考查了等腰三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定，解直角三角形，熟练掌握解直角三角形的方法是解题的关键.

**7.** **解：**（1）如图，作$CE\perp AB$于$E$，设$CE=x$，




（第7题）

在$\mathrm{Rt}\triangle ACE$中，

$\because\tan A=\frac{CE}{AE}=\frac{1}{2}$，

$\therefore AE=2x$，

$\therefore AC=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$，

$\therefore\sqrt{5}x=3\sqrt{5}$，解得$x=3$，

$\therefore CE=3,AE=6$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，

$\because\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\angle B=45^\circ$，

$\therefore\triangle BCE$为等腰直角三角形，

$\therefore BE=CE=3$，

$\therefore AB=AE+BE=9$.

（2）$\because CD$为边$AB$上的中线，

$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=4.5$，

$\therefore DE=BD-BE=4.5-3=1.5$，

$\therefore\tan\angle CDE=\frac{CE}{DE}=\frac{3}{1.5}=2$，

即$\tan\angle CDB$的值为2.

**点拨：**本题考查了解直角三角形，即在直角三角形中，由已知元素求未知元素的过程，解决此类题目的关键是熟练应用勾股定理和锐角三角函数的定义.

**8.** **解：**（1）$\because AD$是边$BC$上的高，

$\therefore\angle BDA=90^\circ$.

又$\because AD=12,\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{4}{5}$，

$\therefore AB=\frac{AD}{\sin B}=\frac{12}{\frac{4}{5}}=15$，

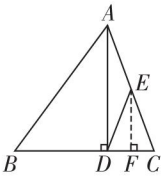
$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$，

$\therefore DC=BC-BD=14-9=5$.

（2）如图，过点$E$作$EF\perp DC$，垂足为点$F$，则

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle EFC=90°$,




(第 8 题)

在 Rt△$ADC$ 中,$\angle ADC=90°$,

$\therefore \angle EFC=\angle ADC$.

$\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle EFC\backsim\triangle ADC$.

$\therefore \dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{EF}{AD}$.

$\because E$ 是 $AC$ 的中点,$AD=12$,

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AD=6$,$CF=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore DF=DC-CF=\dfrac{5}{2}$.

在 Rt△$DEF$ 中,$\angle EFD=90°$,

$DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\dfrac{13}{2}$,

$\therefore \cos\angle EDC=\dfrac{DF}{DE}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{13}{2}}=\dfrac{5}{13}$.

**9.** **解:**(1)如图,过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于点 $D$,则 $\angle ADB=90°$. 在 Rt△$ABD$ 中,$AD=AB\cdot\sin B\approx12$.

$\therefore$ 点 $A$ 到 $BM$ 的距离约为 12.

(2)②③ **点拨:**①以点 $A$ 为圆心、13 为半径画圆,与 $BM$ 有两个交点,故 $BC$ 的长不能唯一确定;②由 $\tan\angle ACB=\dfrac{12}{5}$,知 $\angle ACB$ 的大小确定,在△$ABC$ 中,$\angle ACB$,$\angle B$ 及边 $AB$ 确定,此时的三角形唯一,故 $BC$ 的长能唯一确定;③$AB$ 的长度和△$ABC$ 的面积均确定,则点 $C$ 到 $AB$ 的距离确定,即 $BM$ 上的点 $C$ 是唯一的,故 $BC$ 的长能唯一确定.

(3)方案一 选条件②.

如图,$AD=AB\cdot\sin B\approx12$,$BD=AB\cdot\cos B\approx16$.

$\because \angle ADC=90°$,$\tan\angle ACB=\dfrac{AD}{CD}$,

$\therefore CD=\dfrac{AD}{\tan\angle ACB}\approx\dfrac{12}{\frac{12}{5}}=5$,

$\therefore BC=BD+CD\approx21$.

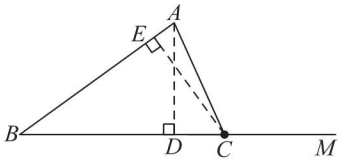
方案二 选条件③.

如图,过点 $C$ 作 $CE\perp AB$ 于点 $E$,则 $\angle BEC=90°$.

由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=126$,得 $CE=12.6$.

在 Rt△$BEC$ 中,$\sin B=\dfrac{CE}{BC}$,

$\therefore BC=\dfrac{CE}{\sin B}\approx21$.



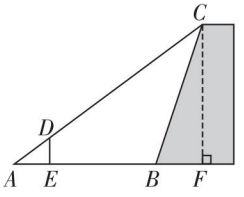

(第 9 题)

## 4.4 解直角三角形的应用

【两年模拟兵法】

**1.** B **2.** B

**3.** B **点拨:**如图,过点 $C$ 作 $CF\perp AB$ 于 $F$,则 $DE/\!/CF$,




(第 3 题)

$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{CF}$,即 $\dfrac{1}{5}=\dfrac{0.6}{CF}$,解得 $CF=3$ m,

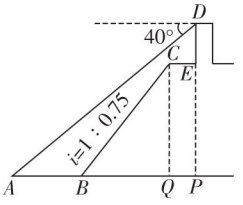
$\therefore$ 在 Rt△$ACF$ 中,$AF=\sqrt{5^2-3^2}=4$(m),

又$\because AB=3$ m,

$\therefore BF=4-3=1$(m),

$\therefore$ 石坝的坡度为 $\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{3}{1}=3$,故选 B.

**4.** A **点拨:**如图,延长 $DE$ 交 $AB$ 的延长线于点 $P$,作 $CQ\perp AP$ 于点 $Q$,




(第 4 题)

由题易知,四边形 $CEPQ$ 为矩形,

$\therefore CE=PQ=2$ 米,$CQ=PE$,

$\because i=\dfrac{CQ}{BQ}=\dfrac{1}{0.75}=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore$ 设 $CQ=4x$ 米,则 $BQ=3x$ 米,

由 $BQ^2+CQ^2=BC^2$ 可得 $(3x)^2+(4x)^2=10^2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x=2$ 或 $x=-2$（舍），则 $CQ=PE=8$ 米，$BQ=6$ 米，

$\therefore DP=DE+PE=3+8=11$（米），

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，

$\because AP=\dfrac{DP}{\tan A}=\dfrac{11}{\tan 40^\circ}\approx 13.1$ 米，

$\therefore AB=AP-BQ-PQ=13.1-6-2=5.1$（米），故选 A.

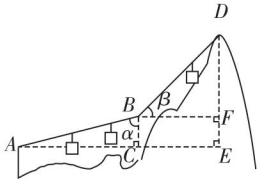
**5.** A

**6.** B　**点拨：**先根据 $CD=20$ m，$DE=10$ m，得出 $\angle DCE=30^\circ$，故可得出 $\angle DCB=90^\circ$，再由 $\angle BDF=30^\circ$ 可知 $\angle DBF=60^\circ$，由 $DF\parallel AE$ 可得出 $\angle BGF=\angle BCA=60^\circ$，故 $\angle GBF=30^\circ$，所以 $\angle DBC=30^\circ$，再由锐角三角函数的定义进行求解.

**7.** 12

**8.** **解：**如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because AB=600$ m，$\alpha=75^\circ$，




（第 8 题）

$\therefore BC=AB\cdot\cos 75^\circ\approx 600\times 0.26=156$（m），

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 中，

$\because \beta=45^\circ$，$BD=600$ m，

$\therefore DF=BD\cdot\sin 45^\circ=600\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 300\times 1.41=423$（m），

由题易知四边形 $BCEF$ 是矩形，

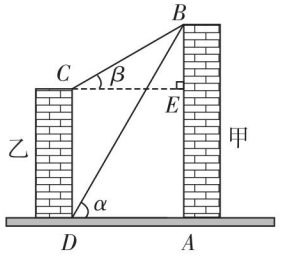
$\therefore EF=BC\approx 156$ m，

$\therefore DE=DF+EF\approx 423+156=579$（m）.

故 $DE$ 的长约为 579 m.

**点拨：**本题考查解直角三角形的应用，锐角三角函数、矩形的性质等知识，解题的关键是学会利用直角三角形解决问题，属于中考常考题型.

**9.** **解：**（1）如图，作 $CE\perp AB$ 于点 $E$，




（第 9 题）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=\dfrac{AB}{\tan\alpha}=\dfrac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$（米）.

$\therefore$ 甲、乙两建筑物之间的距离 $AD$ 为 $10\sqrt{3}$ 米.

（2）由题易知 $AE=CD$，$CE=AD=10\sqrt{3}$ 米，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$BE=CE\cdot\tan\beta=10\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=10$（米），

则 $CD=AE=AB-BE=30-10=20$（米）.

故乙建筑物的高 $CD$ 为 20 米.

**点拨：**本题考查了直角三角形中三角函数的应用，考查了特殊角的三角函数值，本题中求得 $AD$ 的长是解题的关键.

## 素养提分整合篇

【好题必解】

**1.** A

**2.** **解：**如图，过点 $C$ 作 $CD\perp AB$，交 $BA$ 的延长线于点 $D$，

$\because \angle B=30^\circ$，$\angle ACB=15^\circ$，$\therefore \angle CAD=45^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$\angle ADC=90^\circ$，$\angle CAD=45^\circ$，$AC=6$ km，

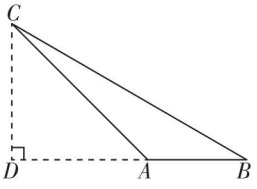
$\therefore CD=AC\sin\angle CAD=3\sqrt{2}$ km，$AD=CD=3\sqrt{2}$ km.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$\angle CDB=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$CD=3\sqrt{2}$ km，

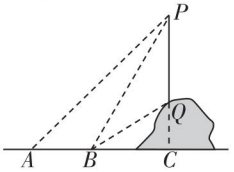
$\therefore BD=\dfrac{CD}{\tan B}=3\sqrt{6}$ km.

$\therefore AB=BD-AD=(3\sqrt{6}-3\sqrt{2})$ km.




（第 2 题）

**3.** **解：**如图，延长 $PQ$ 交直线 $AB$ 于点 $C$.




（第 3 题）

（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中，$\angle PBC=60^\circ$，

$\therefore \angle BPQ=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

（2）设 $PQ=x$ m，

$\because \angle PBQ=\angle PBC-\angle QBC=30^\circ$，

$\therefore \angle PBQ=\angle BPQ$.

$\therefore QB=QP=x$ m，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCQ$ 中，

$BC=x\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$（m），$QC=\dfrac{1}{2}x$ m，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△$ACP$ 中，易得 $CA=CP$，

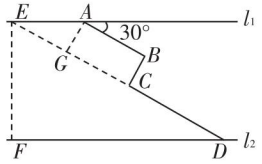
$\therefore 6+\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{2}x+x$，

$\therefore x=2\sqrt{3}+6$，

$\therefore PQ=2\sqrt{3}+6\approx 9$(m)，

即该电线杆 $PQ$ 的高度约为 9 m.

**4.** **解：**如图，延长 $DC$ 交 $l_1$ 于点 $E$，过点 $A$ 作 $AG\perp DE$ 于点 $G$，过点 $E$ 作 $EF\perp l_2$ 于点 $F$.




（第 4 题）

易得四边形 $AGCB$ 是矩形，

$\therefore GC=AB=20$ km，$AG=BC=10$ km.

由 $AB\parallel DE$，得 $\angle AEG=30°$，

$\therefore EG=\sqrt{3}AG=10\sqrt{3}$ km.

$\therefore DE=EG+GC+CD=10\sqrt{3}+20+30=50+10\sqrt{3}$(km).

$\because l_1\parallel l_2$，$\therefore \angle EDF=\angle AEG=30°$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}ED=(25+5\sqrt{3})$ km.

$\therefore$ 两条高速公路之间的距离为$(25+5\sqrt{3})$ km.

**5.** **解：**在 Rt△$ABE$ 中，$\angle BEA=90°$，$\angle BAE=45°$，$BE=20$ 米，

$\therefore AE=20$ 米.

在 Rt△$BEF$ 中，$\angle BEF=90°$，$\angle F=30°$，$BE=20$ 米，

$\therefore EF=\frac{BE}{\tan 30°}=\frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=20\sqrt{3}$(米).

$\therefore AF=EF-AE=20\sqrt{3}-20\approx 20\times 1.732-20=14.64\approx 15$(米)，

即 $AF$ 的长度约是 15 米.

**6.** **解：**如图，过点 $C$ 作 $CH\perp AD$ 于点 $H$. 设 $CH=x$ km，

在 Rt△$ACH$ 中，$\angle A=37°$，$\tan 37°=\frac{CH}{AH}$，

$\therefore AH=\frac{CH}{\tan 37°}=\frac{x}{\tan 37°}$ km.

在 Rt△$CEH$ 中，

$\because \angle CEH=45°$，

$\therefore EH=CH=x$ km.

$\because CH\perp AD$，$BD\perp AD$，

$\therefore CH\parallel BD$，

$\therefore \frac{AH}{HD}=\frac{AC}{CB}$.

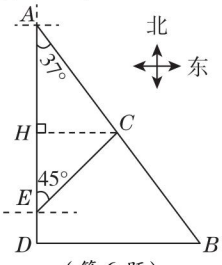
$\because AC=CB$，

$\therefore AH=HD$.

$\therefore \frac{x}{\tan 37°}=x+5$. $\therefore x\approx 15$.

$\therefore AE=AH+HE\approx\frac{15}{\tan 37°}+15\approx 35$(km)，

$\therefore E$ 处距离港口 $A$ 约 35 km.




（第 6 题）

【第 4 章测试卷】

**一、1.** C **2.** A **3.** A **4.** D **5.** C **6.** B **7.** D **8.** C **9.** C **10.** D

**二、11.** $\frac{1}{2}$ **12.** $3\sqrt{7}$ **13.** 5 **14.** $\sqrt{5}$ **15.** 2

**16.** $(9+3\sqrt{3})$ **17.** $(20\sqrt{3}-20)$ **18.** $\frac{1}{3}$

**三、19.** **解：**原式 $=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-|\sqrt{3}-2|-1+4$

$=1-(2-\sqrt{3})-1+4$

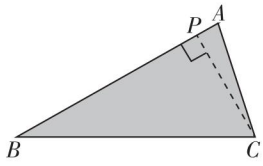
$=\sqrt{3}+2$.

**20.** **解：**(1) $\angle B=30°$，$a=12$，$b=4\sqrt{3}$.

(2) $\angle B=45°$，$b=3\sqrt{6}$，$c=6\sqrt{3}$.

**21.** **解：**(1)30

(2)如图，过点 $C$ 作 $CP\perp AB$，垂足为 $P$，则由 $\angle B=30°$，得 $BC=2PC$.




（第 21 题）

在 Rt△$APC$ 中，$\sin A=\frac{PC}{AC}$，

$\therefore PC=AC\sin A=10\sin 78°\approx 10\times 0.98=9.8$.

$\therefore BC=2PC\approx 2\times 9.8=19.6$.

$\therefore GC=BC-BG=BC-AC\approx 19.6-10=9.6$.

$\therefore$ 正五边形 $GHMNC$ 的边 $GC$ 的长约为 9.6.

**22.** **解：**在△$ABE$ 中，$AE\perp BC$，$AB=5$，$\sin B=\frac{4}{5}$，

$\therefore AE=4$，$BE=3$.

$\therefore EC=BC-BE=8-3=5$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore CD=AB=5$.

$\therefore CD=EC$.

$\therefore$ △$CED$ 为等腰三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle CDE = \angle CED$.

$\because AD // BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle CED$, $\angle EAD = \angle AEB = 90°$.

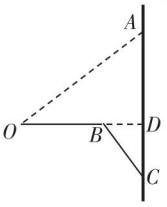
$\therefore \angle CDE = \angle ADE$.

在 Rt△$ADE$ 中，$AE = 4$，$AD = BC = 8$，

$\therefore \tan\angle ADE = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

$\therefore \tan\angle CDE = \frac{1}{2}$.

**23.** **解**：如图，延长 $OB$ 交 $AC$ 于点 $D$，




（第 23 题）

由题意可知 $BD \perp CA$，

设 $BC = x$ cm，则 $BO = OA - BC = (75 - x)$ cm.

在 Rt△$CBD$ 中，

$\because BD = BC \cdot \sin\angle ACB = x \cdot \sin37° \approx 0.6x$(cm)，

$\therefore DO = OB + BD \approx 75 - x + 0.6x = 75 - 0.4x$(cm).

在 Rt△$AOD$ 中，

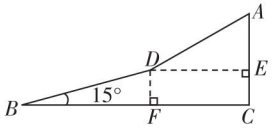
$DO = AO \cdot \cos\angle AOD = 75 \cdot \cos37° \approx 60$(cm).

$\therefore 75 - 0.4x \approx 60$. 解得 $x \approx 37.5$.

$\therefore BD \approx 22.5$ cm.

答：点 $B$ 到 $AC$ 的距离约为 22.5 cm.

**24.** **解**：如图，过 $D$ 作 $DF \perp BC$ 于点 $F$，$DE \perp AC$ 于点 $E$. 易得 $DF = EC$.




（第 24 题）

$\because$ 沿坡比为 $1:\sqrt{3}$ 的坡面以 3 千米/时的速度到达山顶 $A$ 点，

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

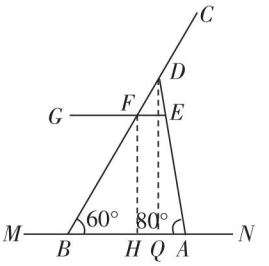
$\therefore \angle ADE = 30°$.

$\because BD = \frac{10}{60} \times 5 = \frac{5}{6}$（千米），$AD = \frac{5}{60} \times 3 = \frac{1}{4}$（千米），

$\therefore AC = AE + EC = AE + DF = AD\sin 30° + BD\sin 15° \approx \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times 0.258\ 8 \approx 0.34$（千米）.

答：小山坡的高约为 0.34 千米.

**25.** **解**：如图，过点 $F$ 作 $FH \perp AB$ 于 $H$，过点 $D$ 作 $DQ \perp AB$ 于 $Q$，则 $FH = 42$ cm，




（第 25 题）

在 Rt△$BFH$ 中，

$\because \sin\angle FBH = \frac{FH}{BF}$，

$\therefore BF = \frac{42}{\sin 60°} \approx 48.28$(cm).

$\therefore BC = BF + CF \approx 48.28 + 42 \approx 90.3$(cm).

在 Rt△$BDQ$ 中，

$\because \tan\angle DBQ = \frac{DQ}{BQ}$，

$\therefore BQ = \frac{DQ}{\tan 60°}$.

在 Rt△$ADQ$ 中，

$\because \tan\angle DAQ = \frac{DQ}{AQ}$，

$\therefore AQ = \frac{DQ}{\tan 80°}$.

$\because BQ + AQ = AB = 43$cm，

$\therefore \frac{DQ}{\tan 60°} + \frac{DQ}{\tan 80°} = 43$ cm，

$\therefore DQ \approx 56.999$ cm.

在 Rt△$ADQ$ 中，

$\because \sin\angle DAQ = \frac{DQ}{AD}$，

$\therefore AD \approx \frac{56.999}{\sin 80°} \approx 58.2$(cm).

答：两根较粗钢管 $AD$ 和 $BC$ 的长分别为 58.2 cm、90.3 cm.

**26.** (1) **证明**：$\because DE // BC$，$EC // AB$，

$\therefore$ 四边形 $DBCE$ 是平行四边形.

$\therefore EC = DB$.

在 Rt△$ABC$ 中，$CD$ 是边 $AB$ 上的中线，

$\therefore AD = DB = CD$.

$\therefore EC = AD$.

又$\because EC // AB$，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

$\because ED // BC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AOD = \angle ACB = 90°$.

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形.

(2)**解**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$,

设 $BC = x$,$\therefore AC = 2BC = 2x$.

由勾股定理,得 $x^2 + (2x)^2 = 10^2$,

解得 $x = 2\sqrt{5}$.

由(1)知四边形 $DBCE$ 是平行四边形,

$\therefore DE = BC = 2\sqrt{5}$.

$\therefore S_{\text{菱形}ADCE} = \frac{1}{2} \times AC \times DE = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20$.

# 第5章 用样本推断总体

## 5.1 总体平均数与方差的估计

【两年模拟兵法】

**1**. C **点拨**:$\bar{x} = \frac{1}{10} \times (0.5 \times 2 + 1 \times 3 + 1.5 \times 4 + 2 \times 1) = 1.2$(吨),估计七年级每名同学的家庭平均一个月节约用水 1.2 吨,所以这 180 名同学的家庭一个月节约用水的总量大约是 $1.2 \times 180 = 216$(吨).

**2**. B

**3**. 8 000 **点拨**:$\bar{x} = \frac{1}{10} \times (65 + 70 + 85 + 74 + 86 + 78 + 74 + 92 + 82 + 94) = 80$(个),估计该小区这 100 户家庭平均每户家庭月使用塑料袋 80 个,所以估计该小区这 100 户家庭月使用塑料袋 $80 \times 100 = 8\,000$(个).

**4**. 乙

**5**. (1)2;2.1 (2)30 **点拨**:(1)平均数:$\frac{1}{10} \times (0.8 \times 1 + 1.2 \times 2 + 1.8 \times 2 + 2.4 \times 3 + 2.8 \times 1 + 3.2 \times 1) = 2$(度),中位数:$\frac{1}{2} \times (1.8 + 2.4) = 2.1$(度);(2)由样本估计总体可知该户家庭平均每天用电量约为 2 度,本月电费支出大约为 $2 \times 0.5 \times 30 = 30$(元).

**6**. 7 600 **点拨**:由样本估计总体可知 $A$ 级每棵的平均产量约为 80 千克,$B$ 级每棵的平均产量约为 75 千克,$C$ 级每棵的平均产量约为 70 千克,所以该果园的苹果总产量约为 $80 \times 30 + 75 \times 60 + 70 \times 10 = 7\,600$(千克).

**7**. 210 **点拨**:$\bar{x} = \frac{1}{6} \times (7 + 8 + 8 + 7 + 6 + 6) = 7$(吨),由样本估计总体可知李师傅所在单位今年四月份的日用水量约为 7 吨,因此估计四月份该单位用水总量为 $7 \times 30 = 210$(吨).

**8**. **解**:(1)抽取的 5 个菠萝去皮前的平均质量为 $\frac{1}{5} \times (1.0 + 1.1 + 1.4 + 1.2 + 1.3) = 1.2$(千克),去皮后的平均质量为 $\frac{1}{5} \times (0.6 + 0.7 + 0.9 + 0.8 + 0.9) = 0.78$(千克),这 200 个菠萝去皮前的总质量约为 $1.2 \times 200 = 240$(千克),去皮后的总质量约为 $0.78 \times 200 = 156$(千克).

(2)原计划的销售总额约为 $2.6 \times 240 = 624$(元).

根据题意,得去皮后的菠萝的售价应是 $624 \div 156 = 4$(元/千克).

**方法规律**:本题利用样本估计总体的思想. 先用抽取的 5 个菠萝去皮前的平均质量、去皮后的平均质量(样本平均数),估计 200 个菠萝去皮前的平均质量、去皮后的平均质量(总体平均数),再解决问题.

**9**. **解**:(1)这些课外书籍中,小说类课外书的阅读数量最多;

(2)$(2.0 + 3.5 + 6.4 + 8.4 + 5.5 + 2.4) \times 100 \div 500 = 5.64 \approx 6$(本),所以这 500 名初中学生一学期平均每人阅读课外书约 6 本;

(3)$2 \times 6 = 12$(万本),所以他们一学期阅读课外书的总数约是 12 万本.

**方法规律**:本题运用了样本估计总体的思想.

**10**. **解**:(1)这 20 户家庭的平均年收入为 $1.5 + \frac{1}{20} \times (0.4 - 0.2 + 0.2 - 0.1 + 0.1 + 0 + 1.2 + 0.6 + 0 - 0.6 + 1.1 + 0.5 + 0.6 - 0.5 + 0.3 + 0.7 + 0.9 + 1.7 - 0.2 + 1.3) = 1.5 + 0.4 = 1.9$(万元),

这 20 户家庭年收入超过 1.5 万元的百分比为 $\frac{13}{20} \times 100\% = 65\%$,

所以可以估计全村家庭的平均年收入约为 1.9 万元,全村家庭年收入超过 1.5 万元的百分比约为 65%.

所以估计全村年收入约为 $1.9 \times 130 = 247$(万元).

因为调查所得数据的中位数是 $1.5 + \frac{0.3 + 0.4}{2} = 1.85$(万元),而 $1.89 > 1.85$,所以推测该家庭的收入情况,大约比全村一半以上的家庭高,比一半以下的家庭低.

(2)不正确,应为 $S$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 5.2 统计的简单应用

【两年模拟兵法】

**1**. A

**2**. A **点拨**：由样本频率可以估计总体相应的频率，所以总体数据落在 54.5～57.5 之间的约有 1 000×0.12=120(个).

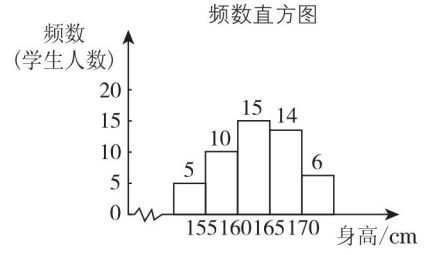
**3**. B **点拨**：样本中近视的学生所占的百分比为 12÷30×100% =40%，由此估计这 500 名学生中，患近视的学生人数约是 500×40% =200.

**4**. A

**5**. 160 **点拨**：样本中“投篮”的喜欢率为 16÷40×100% =40%，估计该校七年级学生中“投篮”的喜欢率为 40%，因此估计该校七年级学生中，最喜欢“投篮”这项活动的有 400×40% =160(人).

**6**. **解**：(1)10；28%

(2)补全的频数直方图如图所示.

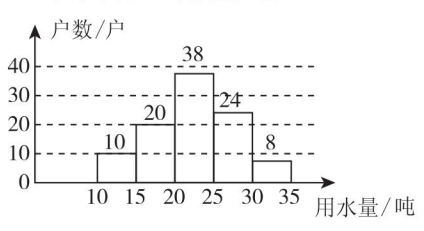



(第 6 题)

(3)600×(28% +12%) =600×40% =240(人)，即身高不低于 165 cm 的学生大约有 240 人.

**7**. **解**：(1)100

(2)100－10－38－24－8=20，补全频数直方图如图所示.




(第 7 题)

$360° \times \frac{20}{100} = 72°$.

∴扇形统计图中“15～20 吨”部分的圆心角的度数为 72°.

(3)$6 \times \frac{10+20+38}{100} = 4.08$(万).

∴该地区 6 万用户中约有 4.08 万用户的用水全部享受基本价格.

**8**. **解**：(1)(400 +600)÷2－260 =1 000÷2－260 =500－260 =240.

∴“跳绳”项目的女生人数是 240.

(2)“掷实心球”项目的平均分：(400×8.7 +600×9.2)÷(400 +600) =(3 480 +5 520)÷1 000 =9 000÷1 000 =9(分)，

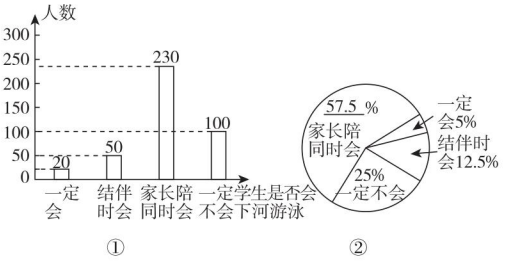
由题图易知，“投篮”项目男、女生总平均成绩大于 9 分，“立定跳远”“跳绳”“游泳”三个项目男、女生总平均成绩都小于 9 分.

故该县上届毕业生的考试项目中达到“优秀”的有“投篮”“掷实心球”两个项目.

(3)建议不唯一，如：“游泳”项目考试的人数最多，可以选考“游泳”项目.

**9**. **解**：(1)400

(2)如图所示.




(第 9 题)

(3)2 000×5% =100(名)，

所以该校2 000名学生中大约有 100 名“一定会下河游泳”.

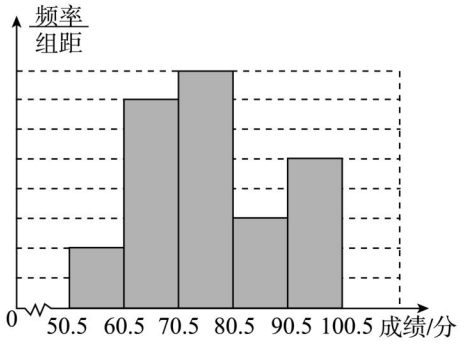
**方法规律**：本题利用数形结合思想和样本估计总体的思想解题，先利用条形统计图与扇形统计图中对应量的关系解题，再利用样本的百分比估计总体中相应的百分比.

**10**. **解**：(1)

| 分组 | 频数 | 频率 |
|---|---|---|
| 50.5～60.5 | 4 | 0.08 |
| 60.5～70.5 | 14 | 0.28 |
| 70.5～80.5 | 16 | 0.32 |
| 80.5～90.5 | 6 | 0.12 |
| 90.5～100.5 | 10 | 0.20 |
| 合计 | 50 | 1.00 |

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

补全频率直方图如图所示.




(第 10 题)

(2)该校学生需要加强心理辅导,理由:0.32 + 0.12 + 0.20 = 0.64 < 0.70,说明该校的学生心理健康状况不正常,需要加强心理辅导.

(或根据题意得 70 分以上的人数为 16 + 6 + 10 = 32(人),∵ 心理健康状况良好的人数占总人数的百分比为 $\frac{32}{50} \times 100\% = 64\% < 70\%$,

∴ 该校学生需要加强心理辅导)

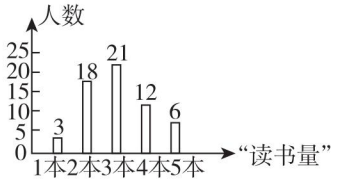
**方法规律**:本题利用样本估计总体的思想解题,先利用频率 = 频数 ÷ 总数,求出样本容量、频率、频数,然后利用样本的频率估计总体的频率,并进行相应的判断.

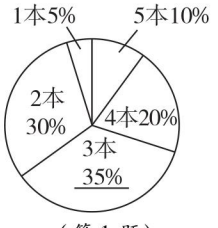
## 素养提分整合篇

【好题必解】

**1.** **解**:(1)补全统计图如图所示;3 本

所抽取该校七年级学生四月份“读书量”的统计图




(第 1 题)

(2)平均数 = $\frac{3\times1+18\times2+21\times3+12\times4+5\times6}{3+18+21+12+6}$ = 3(本).

(3)四月份“读书量”为 5 本的学生人数约为 200 × 10% = 120.

答:估计该校七年级学生中,四月份“读书量”为 5 本的学生人数约为 120.

**2.** **解**:(1)80

(2)八年级 1 班成绩更为优异,理由:平均数:1 班高于 2 班,众数:1 班高于 2 班,中位数:1 班高于 2 班,极差:1 班小于 2 班,方差:1 班小于 2 班.

**3.** **解**:(1)8;5;90;82.5

(2)800 ÷ 20 × 5 = 200(人),

答:甲小区成绩大于 90 分的人数约有 200 人.

(3)理由:甲小区成绩的平均数和中位数均大于乙小区.

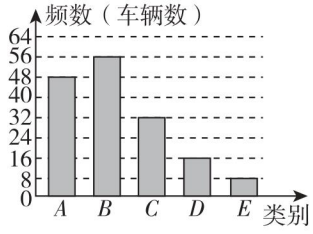
**4.** **解**:(1)本次调查的小型汽车数量为 32 ÷ 0.20 = 160(辆),

$m = 48 \div 160 = 0.30$, $n = 1 - (0.30 + 0.35 + 0.20 + 0.05) = 0.10$.

(2)$B$ 类小型汽车的数量为 0.35 × 160 = 56(辆),

$D$ 类小型汽车的数量为 0.10 × 160 = 16(辆).

补全频数直方图如图.



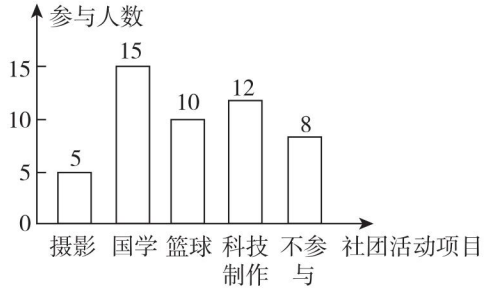

(第 4 题)

(3)估计其中每车只乘坐 1 人的小型汽车数量为 0.30 × 5 000 = 1 500(辆).

**5.** **解**:(1)50

(2)参与篮球社的人数为 50 × 20% = 10,参与国学社的人数为 50 − 5 − 10 − 12 − 8 = 15,

补全条形统计图如图所示.




(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

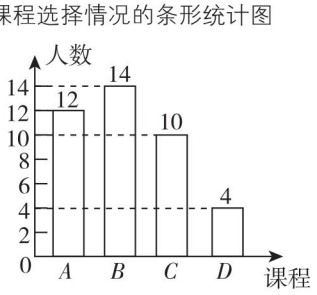
（3）参与科技制作社团所在扇形的圆心角度数为 $360° \times \frac{12}{50} = 86.4°$.

（4）$3\,000 \times 20\% = 600$（名）.

答：估计全校有 600 名学生报名参加篮球社团活动.

**6. 解：**（1）40

（2）选 $C$ 的学生人数为 $40 - (12 + 14 + 4) = 10$，补全条形统计图如图.




（第 6 题）

（3）$1\,000 \times \frac{4}{40} = 100$（人）.

故该校报 $D$ 的学生约有 100 人.

【第 5 章测试卷】

**一、1.** D **2.** D **3.** A

**4.** B **5.** A

**6.** A **点拨：**由题意可得，甲的平均数为 8，方差为 0.8；乙的平均数为 8，方差为 2.

∵ $0.8 < 2$，∴ 选择甲射击运动员.

**7.** B **8.** D

**9.** B **10.** D

**二、11.** 14.4 **12.** 15

**13.** 3.6 **14.** ①②③

**15.** 50%；2.8

**16.** 8 **17.** 甲

**18.** （1）83 分；82 分

（2）甲；甲的平均成绩高于乙，且甲的成绩更稳定

**三、19. 解：**（1）由题图可知，甲山上 4 棵杨梅树的产量分别为 50 kg、36 kg、40 kg、34 kg，

所以甲山样本的平均数为 $\bar{x}_{甲} = \frac{50 + 36 + 40 + 34}{4} = 40$（kg）.

乙山上 4 棵杨梅树的产量分别为 36 kg、40 kg、48 kg、36 kg，

所以乙山样本的平均数为 $\bar{x}_{乙} = \frac{36 + 40 + 48 + 36}{4} = 40$（kg）.

所以甲、乙两山杨梅的产量总和约为 $2 \times 100 \times 98\% \times 40 = 7\,840$（kg）.

（2）$s^2_{甲} = \frac{1}{4} \times [(50 - 40)^2 + (36 - 40)^2 + (40 - 40)^2 + (34 - 40)^2] = 38$，

$s^2_{乙} = \frac{1}{4} \times [(36 - 40)^2 + (40 - 40)^2 + (48 - 40)^2 + (36 - 40)^2] = 24$，

因为 $s^2_{甲} > s^2_{乙}$，

所以乙山上的杨梅产量较稳定.

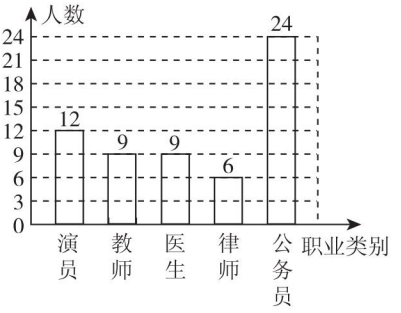
**点拨：**在比较两组数据的稳定性时，一般先看平均数，当平均数相同或相近时，可比较两组数据的方差，方差越小，数据越稳定.

**20. 解：**（1）$12 \div 20\% = 60$（名）.

∴ 本次调查共抽取了 60 名学生.

（2）$60 - 12 - 9 - 6 - 24 = 9$，

即最喜爱教师职业的人数为 9，补全的条形统计图如图所示.



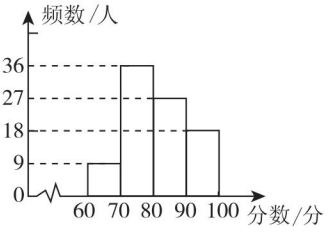

（第 20 题）

（3）$\frac{6}{60} \times 1\,500 = 150$（名）.

∴ 该中学最喜爱律师职业的学生有 150 名.

**21. 解：**（1）0.1；0.3；18

（2）补全的频数直方图如图所示.




（第 21 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$\frac{9\times65+36\times75+27\times85+18\times95}{90}=81$(分),

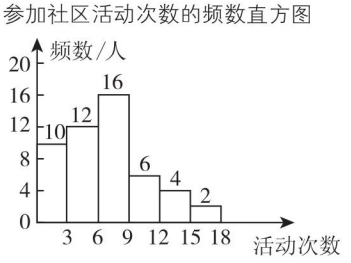
所以估计七年级学生的平均成绩是81分.

(4)800×(0.3+0.2)=800×0.5=400(人),

所以"优秀"等次的学生约有400人.

**22.** **解:**(1)12;0.08

(2)如图所示.




(第22题)

(3)1 200×(1−0.20−0.24)=672(人).

所以该校在上学期参加社区活动超过6次的学生约有672人.

**23.** **解:**算得样本数据的平均数分别是$\bar{x}_{甲}=7.537$(吨),$\bar{x}_{乙}=7.515$(吨),

说明在试验田中,甲、乙两种甜玉米的平均产量相差不大,由此估计在这个地区种植这两种甜玉米,它们的平均产量相差不大.

算得样本数据的方差分别是

$s^2_{甲}\approx0.01$,$s^2_{乙}\approx0.002$,故$s^2_{甲}>s^2_{乙}$,

说明在试验田中,乙种甜玉米的产量比较稳定,进而可以推测这个地区种植乙种甜玉米的产量比甲的稳定.

综合考虑甲、乙两个品种的产量和产量的稳定性,可以推测这个地区更适合种植乙种甜玉米.

**24.** **解:**(1)

| | 平均数/环 | 方差 | 中位数/环 | 命中9环以上(含9环)的次数 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 7 | 1.2 | 7 | 1 |
| 乙 | 7 | 5.4 | 7.5 | 3 |

(2)①∵平均数相同,$s^2_{甲}<s^2_{乙}$,∴甲的成绩较稳定;

②∵平均数相同,甲的中位数<乙的中位数,

∴乙的成绩好些;

③∵平均数相同,甲命中9环以上(含9环)的次数比乙少,

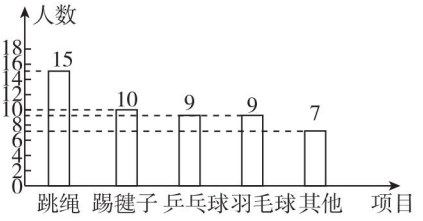
∴乙的成绩好些;

④甲成绩在平均数上下波动,而乙处于上升势头,从第四次以后(含第四次)就没有比甲成绩低的情况,故乙更有潜力.

**点拨:**平均数、众数及中位数都是描述一组数据的集中趋势的特征数,但描述的角度和适用范围有所不同.方差是反映数据波动大小的量.发展趋势也是分析数据时的一个关注点.

**25.** **解:**(1)12;18%

(2)如图所示.



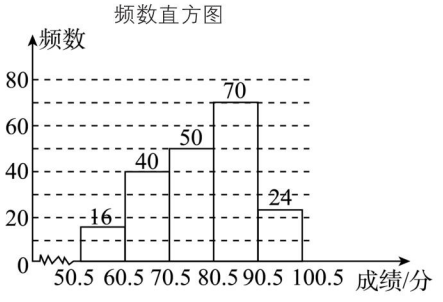

(第25题)

(3)$300\times\frac{8}{50}+300\times\frac{9}{50}+300\times20\%=162$,

故该校最喜欢"羽毛球"项目的学生总人数约为162.

**26.** **解:**(1)200;70;0.12

(2)补全频数直方图如图所示.




(第26题)

(3)1 500×(0.08+0.2)=420(人),所以该校安全意识不强的学生约有420人.

**点拨:**此题主要考查了频数直方图和频数分布表,以及利用样本估计总体,关键是读懂图表,能利用图表获取信息;利用图表获取信息时,必须认真观察、分析、研究图表,才能做出正确的判断,从而解决问题.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 教材习题参考答案及点拨

## 第1章 反比例函数

### 1.1 反比例函数

**练习**

**1.** 解：(1)是反比例函数，比例系数是3.

(2)不是反比例函数.

(3)是反比例函数，比例系数是$\frac{1}{5}$.

(4)是反比例函数，比例系数是$-\frac{1}{11}$.

**2.** 解：(1)因为矩形的面积等于长与宽的乘积，所以$xy=120$，所以$y=\frac{120}{x}$.

(2)因为在直流电路中，电压等于电流与电阻的乘积，所以$IR=220$，所以$I=\frac{220}{R}$.

**习题1.1**

**A组** **1.** 解：(1)是反比例函数，比例系数是2.

(2)是反比例函数，比例系数是1.

(3)是反比例函数，比例系数是$-2$.

(4)是反比例函数，比例系数是$\frac{1}{2}$.

**2.** 解：因为空游泳池的容积等于进水速度与注满该游泳池所需时间的乘积，所以$vt=270$，所以$v=\frac{270}{t}$.

**3.** 解：(1)这个函数的比例系数是$-6$. 自变量的取值范围是$x\neq0$.

(2)当$x=-3$时，$y=-\frac{6}{-3}=2$.

(3)当$y=-2$时，$-2=-\frac{6}{x}$，得$x=3$.

**4.** 解：(1)$-2$；$-\frac{8}{3}$；$-4$；$-8$；8；4；$\frac{8}{3}$；2

(2)当$x$取正数时，随着$x$的增大，$y$的值是减小的；当$x$取负数时，随着$x$的增大，$y$的值是减小的.

**B组** **5.** 解：(1)$s=3t$，是正比例函数.

(2)$R=\frac{220}{I}$，是反比例函数.

(3)$S=\frac{100}{h}$，是反比例函数.

**6.** 解：(1)$y=-x+5$，是一次函数.

(2)$y=\frac{5}{x}$，是反比例函数.

(3)$y=-\frac{1}{4x}$，是反比例函数.

(4)$y=x+\frac{1}{4}$，是一次函数.

### 1.2 反比例函数的图象与性质

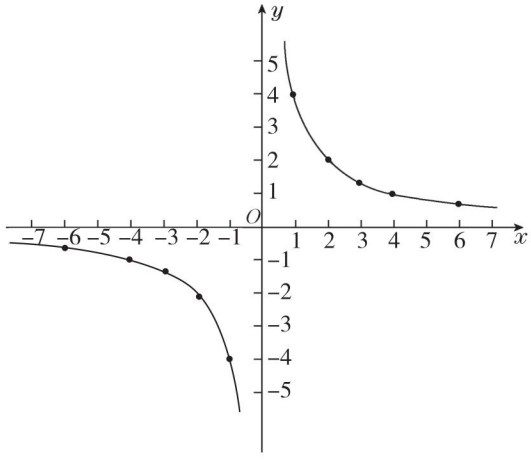
**练习**

解：(1)列表：让$x$分别取一些负数值和一些正数值，并计算出相应的函数值$y$，列成下表.

| $x$ | … | $-6$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{4}{x}$ | … | $-\frac{2}{3}$ | $-1$ | $-\frac{4}{3}$ | $-2$ | $-4$ | 4 | 2 | $\frac{4}{3}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | … |

描点：在平面直角坐标系内，以自变量$x$的取值为横坐标，以相应的函数值$y$为纵坐标，描出相应的点.

连线：把$y$轴左边各点和右边各点分别用一条光滑曲线顺次连接起来，就得到了函数$y=\frac{4}{x}$的图象，如图所示.

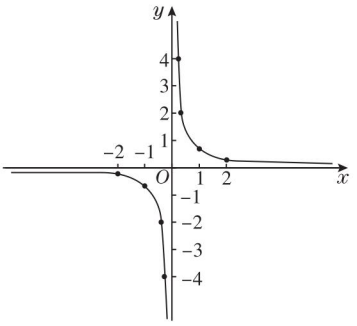



(2)列表：

| $x$ | … | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{2x}$ | … | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-2$ | $-4$ | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | … |

描点，连线，得到了函数$y=\frac{1}{2x}$的图象，如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

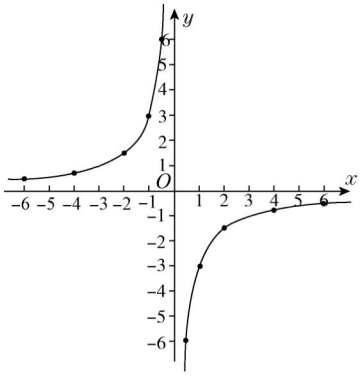


**练习**

**解**:(1)列表:

| $x$ | … | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-\frac{3}{x}$ | … | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | 3 | 6 | $-6$ | $-3$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | … |

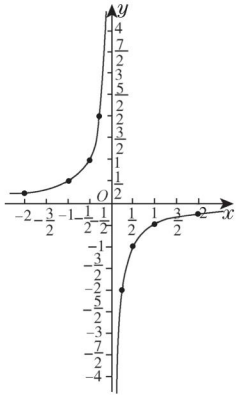
描点,连线,得到函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象,如图所示.



(2)列表:

| $x$ | … | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-\frac{1}{2x}$ | … | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | … |

描点,连线,得到函数 $y=-\frac{1}{2x}$ 的图象,如图所示.



**练习**

**1. 解**:(1)因为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $M(-2,2)$,所以 $2=\frac{k}{-2}$,$k=-4$,所以这个函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$.

(2)把点 $A$,$B$ 的坐标分别代入 $y=-\frac{4}{x}$,可知点 $A$ 的坐标满足函数表达式,点 $B$ 的坐标不满足函数表达式,所以点 $A$ 在这个函数的图象上,点 $B$ 不在这个函数的图象上.

(3)因为 $-4<0$,所以这个反比例函数的图象位于第二、四象限,在每个象限内,函数值 $y$ 随自变量 $x$ 的增大而增大.

**2. 解**:由题意,可知 $m+3<0$,则 $m<-3$,因为点 $M(-2,y_1)$,$N(-4,y_2)$ 是该图象上的两点,且 $-2<0$,$-4<0$,所以点 $M$,$N$ 都位于第二象限,又因为 $-2>-4$,所以 $y_1>y_2$.

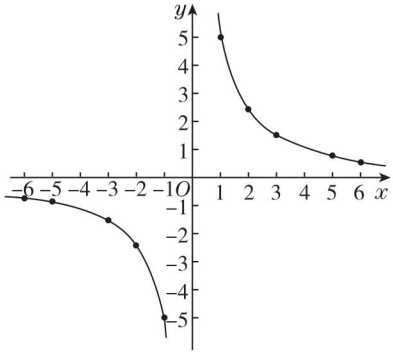
**3. 解**:由题意易知,两个函数图象的一个交点的坐标为(3,3),所以 $3=\frac{k}{3}$,解得 $k=9$,所以反比例函数的表达式为 $y=\frac{9}{x}$,当 $x=-4$ 时,$y=\frac{9}{-4}=-\frac{9}{4}$.

**习题 1.2**

**A 组 1. 解**:列表:

| $x$ | … | $-6$ | $-5$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{5}{x}$ | … | $-\frac{5}{6}$ | $-1$ | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{5}{2}$ | $-5$ | 5 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | 1 | $\frac{5}{6}$ | … |

描点,连线,得到函数 $y=\frac{5}{x}$ 的图象,如图所示.



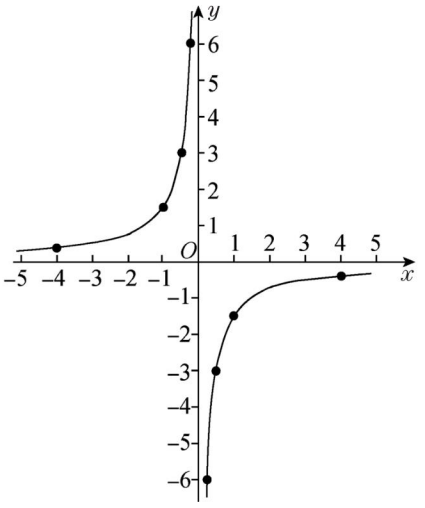
(第 1 题)

**2. 解**:列表:

| $x$ | … | $-4$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-\frac{3}{2x}$ | … | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{2}$ | 3 | 6 | $-6$ | $-3$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{8}$ | … |

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

描点，连线，得到函数 $y=-\frac{3}{2x}$ 的图象，如图所示.




（第2题）

**3. 解：**(1)由题意易知 $-3=\frac{k}{3}$，解得 $k=-9$，所以这个函数的表达式为 $y=-\frac{9}{x}$.

(2)把点 $A$，$B$ 的坐标分别代入 $y=-\frac{9}{x}$，可知点 $A$ 的坐标满足函数表达式，点 $B$ 的坐标不满足函数表达式，所以点 $A$ 在这个函数的图象上，点 $B$ 不在这个函数的图象上.

(3)这个函数的图象位于第二、四象限，在每个象限内，函数值 $y$ 随自变量 $x$ 的增大而增大.

**4. 解：**(1)由题意，可知 $k-2>0$，所以 $k$ 的取值范围为 $k>2$.

(2)因为点 $(-2,y_1)$，$(-3,y_2)$ 在函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上，且 $-2<0$，$-3<0$，所以点 $(-2,y_1)$，$(-3,y_2)$ 都在第二象限，又因为 $-2>-3$，所以 $y_1>y_2$.

**5. 解：**由题意，可知两函数图象的一个交点的坐标为(2,2)，所以 $2=\frac{k}{2}$，所以 $k=4$，所以反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式为 $y=\frac{4}{x}$. 当 $x=-3$ 时，$y=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$.

**B组 6. 解：**(1)设点 $A$ 的坐标为 $(x,y)$，因为 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot AC$，所以 $2=\frac{1}{2}xy$，所以 $y=\frac{4}{x}$，因为点 $A$ 在反比例函数的图象上，所以该反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

(2)因为点 $(-a,y_1)$，$(-2a,y_2)$ 在该反比例函数的图象上，且 $-a<0$，$-2a<0$，所以点 $(-a,y_1)$，$(-2a,y_2)$ 都在第三象限，又因为 $-a>-2a$，所以 $y_1<y_2$.

**7. 解：**(2)(4)是 $y=kx$ 与 $y=\frac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq0$）在同一平面直角坐标系中的图象.

## 1.3 反比例函数的应用

**练习**

**1.** 略.

**2. 解：**(1)因为 $V_{容}=Sd$，且 $V_{容}=10^5\,m^3$，所以 $10^5=Sd$，即储存室的底面积 $S(m^2)$ 关于其深度 $d(m)$ 的函数表达式为 $S=\frac{10^5}{d}$. 所以底面积 $S(m^2)$ 与其深度 $d(m)$ 是反比例函数关系.

(2)因为 $S=5\,000\ m^2$，所以 $d=\frac{10^5}{5\,000}=20(m)$.

(3)因为 $d=15\ m$，所以 $S=\frac{10^5}{15}\approx6\,666.67(m^2)$.

**习题1.3**

**A组 1. 解：**(1)因为 $G_1\cdot l_1=G_2\cdot l_2$，$l_1=6\ m$，$l_2=0.2\ m$，$G_1=1\,200N$，所以装有大象的铁笼及其挂钩的总重量为 $G_2=\frac{1\,200\times6}{0.2}=36\,000(N)$.

(2)弹簧秤的读数减小. 因为 $G_1\cdot l_1=G_2\cdot l_2$，即 $G_1=\frac{G_2\cdot l_2}{l_1}$，$G_2$，$l_2$ 一定，又 $G_2\cdot l_2>0$，所以当 $l_1$ 增大时，$G_1$ 减小，即弹簧秤的读数减小.

**2. 解：**(1)是. 物体的加速度 $a$ 关于它的质量 $m$ 的函数表达式为 $a=\frac{F}{m}$.

(2)空车的加速度大.

因为空车的质量小于装有石头的车的质量，根据反比例函数的图象及性质可知，空车的加速度大.

**B组 3. 解：**压力 $F(N)$、压强 $p(Pa)$ 与受力面积 $S(m^2)$ 之间的关系为 $p=\frac{F}{S}$，$F$ 一定，当受力面

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

积 $S$ 减小时，鞋底所受压强 $p$ 增大，所以用锥子容易穿透鞋底.

**4. 解：**(1)成反比例关系.

因为 $P=UI$，所以 $U=\frac{P}{I}$（$P$ 为常数，$P\neq 0$），所以输出电压 $U$ 与输出电流 $I$ 之间成反比例关系.

(2)根据 $P=UI$，$P$ 在某时段内可看作是恒定不变的，可知若输出电压提高 1 倍，则线路中电流减小为原来的 $\frac{1}{2}$，所以在相同时段内该线路的电能损耗减小为原来的 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

## 复习题 1

**A 组　1. 解：**(1)$S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

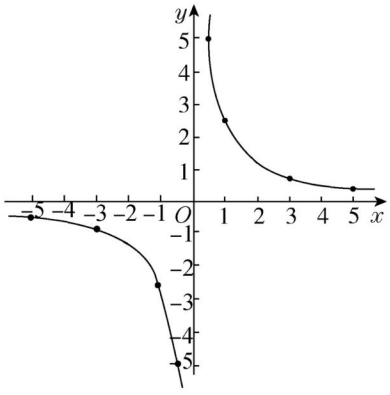
(2)$a=\frac{S}{h}$（$S$ 是常数，$S>0$）.

(2)是反比例函数.

**2. 解：**(1)列表：

| $x$ | … | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 3 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{5}{2x}$ | … | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{5}{6}$ | $-\frac{5}{2}$ | $-5$ | 5 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | … |

描点，连线，得到函数 $y=\frac{5}{2x}$ 的图象，如图所示.

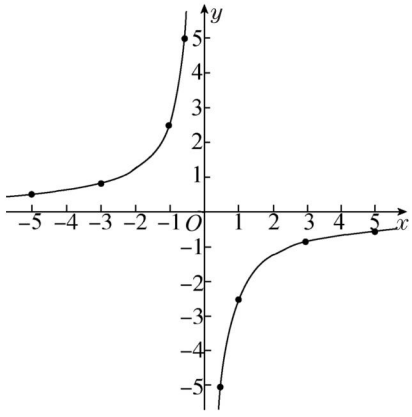



（第 2(1)题）

(2)列表：

| $x$ | … | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 3 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-\frac{5}{2x}$ | … | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{2}$ | 5 | $-5$ | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | … |

描点，连线，得到函数 $y=-\frac{5}{2x}$ 的图象，如图所示.




（第 2(2)题）

**3. 解：**(1)∵ 点 $P(3,-4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，∴ $-4=\frac{k}{3}$，∴ $k=-12$.

(2)∵ 点 $M(7,b)$ 在反比例函数 $y=\frac{21}{x}$ 的图象上，∴ $b=\frac{21}{7}$. ∴ $b=3$.

**4. 解：**点 $A(2,7.5)$，$C(-5,-3)$，$D(3,5)$ 在反比例函数 $y=\frac{15}{x}$ 的图象上，点 $B(-3,5)$ 在反比例函数 $y=-\frac{15}{x}$ 的图象上.

**5. 解：**(1)当质量 $m$ 一定时，$V=\frac{m}{\rho}$，所以当质量 $m$ 一定时，物体的体积 $V$ 与它的密度 $\rho$ 成反比例关系.

(2)质量均为 1 kg 的铁块与泡沫块，泡沫块的体积大. 因为当质量一定时，体积与密度成反比，即密度越小，体积越大，因为泡沫的密度小于铁的密度，所以泡沫块的体积大.

**6. 解：**(1)设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）. ∵ 点 $A(-6,-3)$ 在反比例函数的图象上，

∴ $-3=\frac{k}{-6}$. ∴ $k=18$.

∴ 这个函数的表达式为 $y=\frac{18}{x}$.

(2)将 $x=4$ 代入 $y=\frac{18}{x}$ 中，得 $y=\frac{9}{2}$，故 $B(4,\frac{9}{2})$ 在反比例函数 $y=\frac{18}{x}$ 的图象上. 将 $x=2$ 代入 $y=\frac{18}{x}$ 中得 $y=9\neq -5$，故 $C(2,-5)$ 不在反比例函数 $y=\frac{18}{x}$ 的图象上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）这个函数的图象位于第一、三象限. 在每个象限内，函数值 $y$ 随 $x$ 的增大而减小.

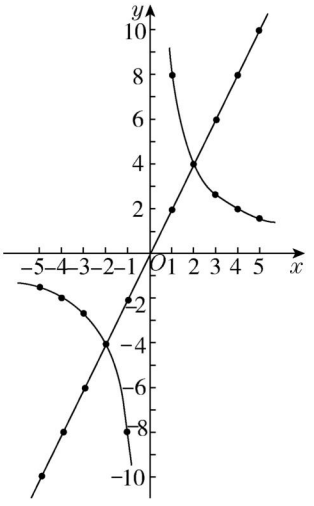
**7. 解：**根据题意，得 $k-2<0$，解得 $k<2$，故 $k$ 的取值范围为 $k<2$.

**8. 解：**由已知条件知，点(2,4)在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，$\therefore 4=\frac{k}{2}$. $\therefore k=8$. $\therefore$ 这个函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

列表：

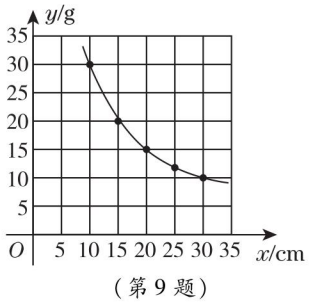
| $x$ | … | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{8}{x}$ | … | $-\frac{8}{5}$ | $-2$ | $-\frac{8}{3}$ | $-4$ | $-8$ | 8 | 4 | $\frac{8}{3}$ | 2 | $\frac{8}{5}$ | … |
| $y=2x$ | … | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | … |

描点，连线，得到函数 $y=\frac{8}{x}$ 和 $y=2x$ 的图象，如图所示.




（第 8 题）

**9. 解：**（1）如图所示.




（第 9 题）

（2）根据图象，猜测 $y$ 是关于 $x$ 的反比例函数，设 $y=\frac{k}{x}$（$k$ 为常数，$k\neq 0$），已知函数图象过点(10,30)，

所以 $30=\frac{k}{10}$，$k=300$，所以 $y=\frac{300}{x}$.

将 $x=15,20,25,30$ 分别代入 $y=\frac{300}{x}$，得 $y=20,15,12,10$，均符合题意，所以该函数表达式为 $y=\frac{300}{x}$.

（3）把 $y=24$ 代入函数表达式，得 $24=\frac{300}{x}$，解得 $x=12.5$，故当砝码质量为24 g时，托盘 $B$ 与点 $O$ 的距离为 12.5 cm.

（4）应往托盘 $B$ 中添加砝码，因为托盘 $B$ 与点 $O$ 的距离 $x$ 与托盘 $B$ 中的砝码的质量 $y$ 成反比例关系，所以当托盘 $B$ 向左移动（不能移动到点 $O$）时，相当于 $B$ 与点 $O$ 的距离在逐渐变小，所以应往托盘 $B$ 中添加砝码.

**B 组 10. 解：**由题意知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象经过第二、四象限，且当 $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，当 $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大.

$\because A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$ 和 $C(2,y_3)$ 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象上，

$\therefore A(-2,y_1)$ 是第二象限内的点，$B(1,y_2)$ 和 $C(2,y_3)$ 是第四象限内的点.

$\therefore y_1>0, y_2<0, y_3<0$.

$\because 1<2, \therefore y_2<y_3<0, \therefore y_2<y_3<y_1$.

**11. 解：**$\because$ 两个灯泡并联接在电路中，$\therefore U_1=U_2$.

$\because P_1=\frac{U_1^2}{R_1}, P_2=\frac{U_2^2}{R_2}, \therefore \frac{P_1}{P_2}=\frac{R_2}{R_1}. \because \frac{P_1}{P_2}=4$，

$\therefore \frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{4}$.

**12. 解：**（1）根据已知条件，得 $\frac{1}{2}\times 2\times m=1$，解得 $m=1, \therefore A(2,1). \therefore k=2\times 1=2$.

$\therefore k=2, m=1$.

（2）由（1）得 $k=2, \therefore y=\frac{2}{x}$. 当 $x=1$ 时，$y=2$，当 $x=3$ 时，$y=\frac{2}{3}$，由图象可知，在第一象限内，$y$ 随 $x$ 的增大而减小. $\therefore$ 当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$\frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 2$.

**13. 解：**当压力一定时，压强与接触面积成反比例关系，$\because S_A : S_B : S_C=4:2:1$，$p_B=a$Pa，$\therefore p_A=\frac{a}{2}$Pa，$p_C=2a$Pa. $\therefore$ 把砖的 $A$ 面和 $C$ 面分别向下放在地上时，地面所受压强分别为 $\frac{a}{2}$ Pa 和 $2a$Pa.

**C 组 14. 解：**（1）$\because$ 一次函数的图象经过原点，

$\therefore$ 设一次函数的表达式为 $y=kx$. 则有 $k=\frac{6}{a}=\frac{\frac{6}{a}}{a}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{6}{a^2}$. ∴ 一次函数的表达式为 $y=\frac{6}{a^2}x$.

(2)令 $\frac{6}{a^2}x=\frac{6}{x}(x<0)$,得 $x_1=-a, x_2=a$(舍去).

∴ $y=-\frac{6}{a}$,∴ $Q\left(-a,-\frac{6}{a}\right)$.

(3)$OP=OQ$.

∵ $OP=\sqrt{a^2+\frac{36}{a^2}}$, $OQ=\sqrt{a^2+\frac{36}{a^2}}$,

∴ $OP=OQ$.

(4)点 $P$ 绕点 $O$ 旋转 180°得到的点是点 $Q$.

(5)得到的图形是该函数图象的左支.

(6)得到的图形是该函数图象的右支.

(7)$y=\frac{6}{x}$的图象是中心对称图形,对称中心是点 $O(0,0)$.

**15. 解:**沿着直线 $y=\pm x$ 翻折,可以使图象在直线两旁的部分互相重合.

这样的直线有两条.

反比例函数 $y=\frac{2}{x}$的图象是轴对称图形,

有两条对称轴.

# 第 2 章 一元二次方程

## 2.1 一元二次方程

**练习**

**1.** $2x^2+5x=x^2-3$, $(x+1)^2-1=x^2+4$ ——一元一次方程

$3x+5=2x-1$ ——一元二次方程

$\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x}$ ——分式方程

**2. 解:**(1)是一元二次方程,二次项系数为 4,一次项系数为 0,常数项为 −49.

(2)是一元二次方程,二次项系数为 5,一次项系数为 −3,常数项为 −2.

(3)是一元二次方程,二次项系数为 0.01,一次项系数为 −2,常数项为 0.

(4)不是一元二次方程.

**习题 2.1**

**A 组 1. 解:**(1)是一元二次方程,其二次项系数为 1,一次项系数为 5,常数项为 −6.

(2)是一元二次方程,其二次项系数为 1,一次项系数为 −3,常数项为 4.

(3)是一元二次方程,其二次项系数为 4,一次项系数为 −32,常数项为 28.

(4)不是一元二次方程.

**2.** (1)C (2)C

**3. 解:**$x(x+2)=35$,是一元二次方程.

**4. 解:**$x^2+\left(\frac{64-4x}{4}\right)^2=160$(或 $x^2+(16-x)^2=160$).

**B 组 5. 解:**(1)是一元二次方程.

**6. 解:**$(x-10)^2\times 5=2\,000$.

**7. 解:**根据勾股定理可知,开始时梯子顶端到地面的距离为 $\sqrt{5^2-3^2}=4$(m),∴ $(4-x)^2+(3+x)^2=25$.

## 2.2 一元二次方程的解法

### 2.2.1 配方法

**练习**

**1.** (1)$9x^2-49=0$.

**解:**原方程可化为 $x^2=\frac{49}{9}$,根据平方根的意义,得 $x=\sqrt{\frac{49}{9}}$ 或 $x=-\sqrt{\frac{49}{9}}$. 因此,原方程的根为 $x_1=\frac{7}{3}, x_2=-\frac{7}{3}$.

(2)$36-x^2=0$.

**解:**原方程可化为 $x^2=36$,根据平方根的意义,得 $x=\sqrt{36}$ 或 $x=-\sqrt{36}$. 因此,原方程的根为 $x_1=6, x_2=-6$.

(3)$(x+3)^2-36=0$.

**解:**原方程可化为 $(x+3)^2=36$,根据平方根的意义,得 $x+3=\sqrt{36}$ 或 $x+3=-\sqrt{36}$. 因此,原方程的根为 $x_1=3, x_2=-9$.

(4)$9(1-2x)^2-16=0$.

**解:**原方程可化为 $(1-2x)^2=\frac{16}{9}$,根据平方根的意义,得 $1-2x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ 或 $1-2x=-\sqrt{\frac{16}{9}}$. 因此,原方程的根为 $x_1=-\frac{1}{6}, x_2=\frac{7}{6}$.

**2. 解:**设宽是 $x(x>0)$ 步,则长是 $2x$ 步,根据题意,得 $x\cdot 2x=240\times 7.5$,即 $x^2=900$,解得 $x_1=30$, $x_2=-30$(舍去),∴ $2x=60$.

答:长是 60 步,宽是 30 步.

**练习**

**1.** (1)4;4;2;3 (2)16;16;4;25 (3)$\frac{9}{4}$;$\frac{9}{4}$;$\frac{3}{2}$;$\frac{25}{4}$

**2.** (1)$x^2+4x+3=0$.

**解:**配方,得 $x^2+4x+4-4+3=0$,因此 $(x+2)^2=1$,由此得 $x+2=1$ 或 $x+2=-1$,解得 $x_1=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-1, x_2 = -3$.

(2) $x^2 + 8x - 9 = 0$.

**解**：配方，得 $x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = 0$，因此 $(x + 4)^2 = 25$，由此得 $x + 4 = 5$ 或 $x + 4 = -5$，解得 $x_1 = 1, x_2 = -9$.

(3) $x^2 + 8x - 2 = 0$.

**解**：配方，得 $x^2 + 8x + 16 - 16 - 2 = 0$，因此 $(x + 4)^2 = 18$，由此得 $x + 4 = \sqrt{18}$ 或 $x + 4 = -\sqrt{18}$，解得 $x_1 = 3\sqrt{2} - 4, x_2 = -3\sqrt{2} - 4$.

(4) $x^2 - 5x - 6 = 0$.

**解**：配方，得 $x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 6 = 0$，

因此 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$，

由此得 $x - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$ 或 $x - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2}$，

解得 $x_1 = 6, x_2 = -1$.

**练习**

(1) $2x^2 = 3x - 1$.

**解**：将二次项系数化为 1，得 $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$. 配方，得 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = 0$，因此，$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$，由此得 $x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ 或 $x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$，解得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$.

(2) $3x^2 + 2x - 3 = 0$.

**解**：将二次项系数化为 1，得 $x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 0$. 配方，得 $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - 1 = 0$，因此，$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$，由此得 $x + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 或 $x + \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$，解得 $x_1 = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}, x_2 = -\frac{\sqrt{10} + 1}{3}$.

(3) $4x^2 - x - 9 = 0$.

**解**：将二次项系数化为 1，得 $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{9}{4} = 0$. 配方，得 $\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} - \frac{9}{4} = 0$，因此，$\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{145}{64}$，由此得 $x - \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{145}}{8}$ 或 $x - \frac{1}{8} = -\frac{\sqrt{145}}{8}$，解得 $x_1 = \frac{\sqrt{145} + 1}{8}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{145}}{8}$.

(4) $-x^2 + 4x - 12 = 0$.

**解**：将二次项系数化为 1，得 $x^2 - 4x + 12 = 0$. 配方，得 $(x - 2)^2 - 4 + 12 = 0$，因此，$(x - 2)^2 = -8$，因为在实数范围内，任何实数的平方都是非负数，所以 $(x - 2)^2 = -8$ 不成立，即原方程无实数根.

## 2.2.2 公式法

**练习**

(1) $x^2 - 6x + 1 = 0$.

**解**：这里 $a = 1, b = -6, c = 1$.

因而 $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0$，

所以 $x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$，

因此，原方程的根为 $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}, x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

(2) $2t^2 - t = 6$.

**解**：移项，得 $2t^2 - t - 6 = 0$.

这里 $a = 2, b = -1, c = -6$.

因而 $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$，

所以 $x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 7}{4}$，

因此，原方程的根为 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{2}$.

(3) $4x^2 - 3x - 1 = x - 2$.

**解**：移项、合并同类项，得 $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

这里 $a = 4, b = -4, c = 1$.

因而 $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$，

所以 $x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$，

因此，原方程的根为 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

(4) $3x(x - 3) = 2(x - 1)(x + 1)$.

**解**：移项、合并同类项，得 $x^2 - 9x + 2 = 0$.

这里 $a = 1, b = -9, c = 2$.

因而 $b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 73 > 0$，

所以 $x = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2 \times 1}$，因此，原方程的根为 $x_1 = \frac{9 + \sqrt{73}}{2}, x_2 = \frac{9 - \sqrt{73}}{2}$.

## 2.2.3 因式分解法

**练习**

**1.** (1) $x^2 - 7x = 0$.

**解**：把方程左边因式分解，得 $x(x - 7) = 0$，

由此得 $x = 0$ 或 $x - 7 = 0$，解得 $x_1 = 0, x_2 = 7$.

(2) $x(x - 3) = 5x$.

**解**：原方程可化为 $x^2 - 8x = 0$.

把方程左边因式分解，得 $x(x - 8) = 0$，

由此得 $x = 0$ 或 $x - 8 = 0$，解得 $x_1 = 0, x_2 = 8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$4x^2-20x+25=0$.

**解**:把方程左边因式分解,得$(2x-5)^2=0$,

因而$2x-5=0$,解得$x_1=x_2=\frac{5}{2}$.

(4)$(x+1)^2-4=0$.

**解**:把方程左边因式分解,得$(x+1+2)(x+1-2)=0$,即$(x+3)(x-1)=0$,

由此得$x+3=0$或$x-1=0$,解得$x_1=-3$,$x_2=1$.

**2**. (1)$2x(x-1)=1-x$.

**解**:原方程可化为$2x(x-1)+(x-1)=0$.

把方程左边因式分解,得$(2x+1)(x-1)=0$,由此得$2x+1=0$或$x-1=0$,解得$x_1=-\frac{1}{2}$,$x_2=1$.

(2)$5x(x+2)=4x+8$.

**解**:原方程可化为$5x(x+2)-4(x+2)=0$. 把方程左边因式分解,得$(5x-4)(x+2)=0$,由此得$5x-4=0$或$x+2=0$,解得$x_1=\frac{4}{5}$,$x_2=-2$.

(3)$(x-3)^2-2=0$.

**解**:把方程左边因式分解,得$(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})=0$,由此得$x-3+\sqrt{2}=0$或$x-3-\sqrt{2}=0$,解得$x_1=3-\sqrt{2}$,$x_2=3+\sqrt{2}$.

(4)$x^2+6x+8=0$.

**解**:把方程左边因式分解,得$(x+2)(x+4)=0$,由此得$x+2=0$或$x+4=0$,解得$x_1=-2$,$x_2=-4$.

**练习**

(1)$3x^2-4x=2x$.

**解**:原方程可化为$3x^2-6x=0$,

系数化为1,得$x^2-2x=0$,把方程左边因式分解,得$x(x-2)=0$,由此得$x=0$或$x-2=0$,解得$x_1=0$,$x_2=2$.

(2)$\frac{1}{3}(x+3)^2=1$.

**解**:方程两边都乘3,得$(x+3)^2=3$.

移项,得$(x+3)^2-3=0$,

把方程左边因式分解,得$(x+3+\sqrt{3})(x+3-\sqrt{3})=0$,

由此得$x+3+\sqrt{3}=0$或$x+3-\sqrt{3}=0$,解得$x_1=-3-\sqrt{3}$,$x_2=-3+\sqrt{3}$.

(3)$x^2+(\sqrt{3}+1)x=0$.

**解**:把方程左边因式分解,得$x(x+\sqrt{3}+1)=0$,由此得$x=0$或$x+\sqrt{3}+1=0$,解得$x_1=0$,$x_2=-\sqrt{3}-1$.

(4)$x(x-6)=2(x-8)$.

**解**:原方程可化为$x^2-8x+16=0$,

把方程左边因式分解,得$(x-4)^2=0$,

由此得$x-4=0$,解得$x_1=x_2=4$.

(5)$(x+1)(x-1)=2\sqrt{2}x$.

**解**:原方程可化为$x^2-2\sqrt{2}x-1=0$,

配方,得$(x-\sqrt{2})^2-2-1=0$,因此$(x-\sqrt{2})^2=3$,

由此得$x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$或$x-\sqrt{2}=-\sqrt{3}$,解得$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,$x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

(6)$x(x+8)=25$.

**解**:原方程可化为$x^2+8x-25=0$,

配方,得$(x+4)^2=41$,由此得$x+4=\sqrt{41}$或$x+4=-\sqrt{41}$,解得$x_1=\sqrt{41}-4$,$x_2=-\sqrt{41}-4$.

(7)$(x+2)(x-5)=1$.

**解**:原方程可化为$x^2-3x-11=0$,

配方,得$(x-\frac{3}{2})^2=\frac{53}{4}$,由此,得$x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{53}}{2}$或$x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{53}}{2}$,解得$x_1=\frac{3+\sqrt{53}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{53}}{2}$.

(8)$(2x+1)^2=2(2x+1)$.

**解**:原方程可化为$(2x+1)(2x+1-2)=0$,即$(2x+1)(2x-1)=0$由此得$2x+1=0$或$2x-1=0$,解得$x_1=-\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1}{2}$.

**习题2.2**

**A组** 1. (1)$25x^2-9=0$.

**解**:原方程可化为$x^2=\frac{9}{25}$,

根据平方根的意义,得$x=\frac{3}{5}$或$x=-\frac{3}{5}$.

因此原方程的根为$x_1=\frac{3}{5}$,$x_2=-\frac{3}{5}$.

(2)$64-9x^2=0$.

**解**:原方程可化为$x^2=\frac{64}{9}$,

根据平方根的意义,得$x=\frac{8}{3}$或$x=-\frac{8}{3}$.

因此原方程的根为$x_1=\frac{8}{3}$,$x_2=-\frac{8}{3}$.

(3)$(3-2x)^2=1$.

**解**:根据平方根的意义,得$3-2x=1$或$3-2x=-1$,所以$x=1$或$x=2$.

因此原方程的根为$x_1=1$,$x_2=2$.

(4)$(1-x)^2-3=0$.

**解**:原方程可化为$(1-x)^2=3$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据平方根的意义，得$1-x=\sqrt{3}$或$1-x=-\sqrt{3}$，所以$x=1-\sqrt{3}$或$x=1+\sqrt{3}$.

因此原方程的根为$x_1=1-\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

**2.** (1)$x^2+2x-8=0$.

**解：**配方，得$(x+1)^2-1-8=0$，

因此$(x+1)^2=9$，由此得$x+1=3$或$x+1=-3$，

解得$x_1=2$，$x_2=-4$.

(2)$x^2-7x+6=0$.

**解：**配方，得$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+6=0$，

因此$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$，由此得$x-\frac{7}{2}=\frac{5}{2}$或$x-\frac{7}{2}=-\frac{5}{2}$，解得$x_1=6$，$x_2=1$.

(3)$x^2+4x-1=0$.

**解：**配方，得$(x+2)^2-4-1=0$，

因此$(x+2)^2=5$，由此得$x+2=\sqrt{5}$或$x+2=-\sqrt{5}$，解得$x_1=\sqrt{5}-2$，$x_2=-\sqrt{5}-2$.

**3.** (1)$2x^2-5x+3=0$.

**解：**系数化为1，得$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$.

配方，得$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{3}{2}=0$，

因此$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，由此得$x-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$或$x-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$，解得$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=1$.

(2)$-3x^2-6x+4=0$.

**解：**系数化为1，得$x^2+2x-\frac{4}{3}=0$.

配方，得$(x+1)^2-1-\frac{4}{3}=0$，因此$(x+1)^2=\frac{7}{3}$，由此得$x+1=\sqrt{\frac{7}{3}}$或$x+1=-\sqrt{\frac{7}{3}}$，解得$x_1=\frac{\sqrt{21}}{3}-1$，$x_2=-\frac{\sqrt{21}}{3}-1$.

(3)$4x^2-6x-3=0$.

**解：**系数化为1，得$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}=0$.

配方，得$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{3}{4}=0$，

因此$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{21}{16}$，由此得$x-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{21}}{4}$或$x-\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{21}}{4}$，解得$x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{4}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{21}}{4}$.

**4.** (1)$x^2-10x+21=0$.

**解：**这里$a=1$，$b=-10$，$c=21$.

因而$b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times21=16>0$，

$\therefore x=\frac{10\pm\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{10\pm4}{2}=5\pm2$，

因此原方程的根为$x_1=7$，$x_2=3$.

(2)$x^2-3x-1=0$.

**解：**这里$a=1$，$b=-3$，$c=-1$.

因而$b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-1)=13>0$，

$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$，因此原方程的根为$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

(3)$x^2-7x+11=0$.

**解：**这里$a=1$，$b=-7$，$c=11$.

因而$b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times11=5>0$，

$\therefore x=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$.

因此原方程的根为$x_1=\frac{7+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$.

(4)$-5x^2=2x-1$.

**解：**原方程可化为$5x^2+2x-1=0$，

这里$a=5$，$b=2$，$c=-1$.

因而$b^2-4ac=2^2-4\times5\times(-1)=24>0$，

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2\times5}=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$，

因此原方程的根为$x_1=\frac{-1+\sqrt{6}}{5}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{6}}{5}$.

**5.** (1)$6x^2+x=0$.

**解：**把方程左边因式分解，得$x(6x+1)=0$，由此得$x=0$或$6x+1=0$，解得$x_1=0$，$x_2=-\frac{1}{6}$.

(2)$0.2t^2-3t=0$.

**解：**原方程可化为$t^2-15t=0$.

把方程左边因式分解，得$t(t-15)=0$，

由此得$t=0$或$t-15=0$，解得$t_1=0$，$t_2=15$.

(3)$x(2-3x)+(3x-2)=0$.

**解：**把方程左边因式分解，得$(3x-2)(1-x)=0$，由此得$3x-2=0$或$1-x=0$，解得$x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=1$.

(4)$3(x-5)^2=x^2-25$.

**解：**原方程可化为$3(x-5)^2-(x-5)(x+5)=0$，把方程左边因式分解，得$(x-5)[3(x-5)-(x+5)]=0$，即$(x-5)(2x-20)=0$，

由此得$x-5=0$或$2x-20=0$，解得$x_1=5$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x_2=10$.

(5)$x^2+3x-28=0$.

**解**:把方程左边因式分解,得$(x-4)(x+7)=0$,

由此得$x-4=0$或$x+7=0$,解得$x_1=4$,$x_2=-7$.

**6. 解**:当$y_1=y_2$时,有$x^2-2x+3=3x-1$.

方程可化为$x^2-5x+4=0$,

把方程左边因式分解,得$(x-1)(x-4)=0$,由此得$x-1=0$或$x-4=0$,解得$x_1=1$,$x_2=4$.

所以,当$x$的值为1或4时,$y_1$与$y_2$相等.

**7.** (1)$3x(2x-7)=5x^2$.

**解**:原方程可化为$x^2-21x=0$,

把方程左边因式分解,得$x(x-21)=0$,

由此得$x=0$或$x-21=0$,解得$x_1=0$,$x_2=21$.

(2)$(1-3x)^2=4x^2$.

**解**:原方程可化为$(1-3x)^2-4x^2=0$,

把方程左边因式分解,得$(1-3x+2x)(1-3x-2x)=0$,即$(1-x)(1-5x)=0$,

由此得$1-x=0$或$1-5x=0$,解得$x_1=1$,$x_2=\frac{1}{5}$.

(3)$(5x-2)^2=3(5x-2)$.

**解**:原方程可化为$(5x-2)^2-3(5x-2)=0$,把方程左边因式分解,得$(5x-2)(5x-2-3)=0$,

由此得$5x-2=0$或$5x-2-3=0$,解得$x_1=\frac{2}{5}$,$x_2=1$.

(4)$x^2-9=2\sqrt{3}x$.

**解**:原方程可化为$x^2-2\sqrt{3}x-9=0$,

配方,得$(x-\sqrt{3})^2=12$,由此得$x-\sqrt{3}=\sqrt{12}$或$x-\sqrt{3}=-\sqrt{12}$,解得$x_1=3\sqrt{3}$,$x_2=-\sqrt{3}$.

**B组 8.** (1)$(x+1)^2-2(x+1)(2-x)+(2-x)^2=0$.

**解**:将方程左边因式分解,得$[x+1-(2-x)]^2=0$,

由此得$x+1-2+x=0$,即$2x-1=0$,

解得$x=\frac{1}{2}$,∴原方程的根为$x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

(2)$(1+2x)^2=(x+4)^2$.

**解**:原方程可化为$(1+2x)^2-(x+4)^2=0$.

把方程左边因式分解,得$(1+2x+x+4)(1+2x-x-4)=0$,由此得$1+2x+x+4=0$或$1+2x-x-4=0$,

解得$x_1=-\frac{5}{3}$,$x_2=3$.

**9. 解**:(1)若方程为一元一次方程,则$\begin{cases}m+1=0,\\m-3\neq0\end{cases}$或$\begin{cases}m^2+1=1,\\m+1+m-3\neq0.\end{cases}$

解得$m=-1$或$m=0$,

所以当$m=-1$或$m=0$时,原方程为一元一次方程.

(2)若方程为一元二次方程,则$\begin{cases}m^2+1=2,\\m+1\neq0,\end{cases}$解得$m=1$,所以当$m=1$时,原方程可化为$2x^2-2x-1=0$. 解得$x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$,$x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

**10. 解**:$(x+1-\frac{3}{x-1})\div\frac{x^2-4x+4}{x-1}$

$=\frac{x^2-1-3}{x-1}\div\frac{x^2-4x+4}{x-1}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{x-1}\times\frac{x-1}{(x-2)^2}$

$=\frac{x+2}{x-2}$.

∵$x$满足方程:$x^2+x-6=0$,

∴解方程得$x_1=2$(舍去),$x_2=-3$.

∴当$x=-3$时,原式$=\frac{x+2}{x-2}=\frac{-3+2}{-3-2}=\frac{1}{5}$.

## 2.3 一元二次方程根的判别式

**练习**

**1.** D

**2. 解**:(1)∵$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-1)=9+4=13>0$,

∴原方程有两个不相等的实数根.

(2)∵$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times9=36-36=0$,

∴原方程有两个相等的实数根.

(3)∵$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$,∴原方程没有实数根.

(4)将原方程化为一般形式,得$x^2-2\sqrt{5}x+5=0$. ∵$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4\times1\times5=20-20=0$,∴原方程有两个相等的实数根.

**习题2.3**

**A组 1.** B

**2. 解**:(1)∵$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times1=16-12=4>0$,

∴原方程有两个不相等的实数根.

(2)∵$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times1=36-12=24>0$,

∴原方程有两个不相等的实数根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)将原方程化为一般形式,得 $x^2+8x-16=0$.
$\because \Delta=b^2-4ac=8^2-4\times1\times(-16)=64+64=128>0$,∴ 原方程有两个不相等的实数根.
(4)将原方程化为一般形式,得 $x^2-3x-11=0$.
$\because \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-11)=9+44=53>0$,
∴ 原方程有两个不相等的实数根.

**B组** **3. 解:** $\because \Delta=b^2-4ac=[-(1+2\sqrt{3})]^2-4\times1\times(3+\sqrt{3})=(1+2\sqrt{3})^2-4\times(3+\sqrt{3})=1+4\sqrt{3}+12-12-4\sqrt{3}=1>0$,∴ 原方程有两个不相等的实数根.

**4. 解:** 关于 $x$ 的一元二次方程可化为 $x^2+x-t+1=0$.
(1)当关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+x+t=2t-1$ 有实数根时,
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(1-t)\geqslant0$,即 $4t-3\geqslant0$,
$\therefore t\geqslant\frac{3}{4}$.
∴ 当 $t\geqslant\frac{3}{4}$ 时,关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+x+t=2t-1$ 有实数根.
(2)当关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+x+t=2t-1$ 没有实数根时,
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(1-t)<0$,即 $4t-3<0$,$\therefore t<\frac{3}{4}$. ∴ 当 $t<\frac{3}{4}$ 时,关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+x+t=2t-1$ 没有实数根.

## *2.4 一元二次方程根与系数的关系

**练习**

**1. 解:** (1) $x_1+x_2=-(-6)=6$, $x_1x_2=1$.
(2)整理,得 $2x^2-x-6=0$,$\therefore x_1+x_2=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$, $x_1x_2=\frac{-6}{2}=-3$.

**2. 解:** 设 $3x^2-19x+m=0$ 的另一个根为 $x_2$,则 $1+x_2=\frac{19}{3}$,解得 $x_2=\frac{16}{3}$,由根与系数的关系,得 $1\times\frac{16}{3}=\frac{m}{3}$,解得 $m=16$. ∴ 它的另一个根是 $\frac{16}{3}$,$m$ 的值是 16.

**习题 2.4**

**A组** **1.** (1) $-1$ (2) $-5$

**2. 解:** (1)$\because x_1, x_2$ 是方程 $3x^2+2x-3=0$ 的两个根,$\therefore x_1+x_2=-\frac{2}{3}$.
(2)$\because x_1, x_2$ 是方程 $3x^2+2x-3=0$ 的两个根,
$\therefore x_1x_2=\frac{-3}{3}=-1$.

**3. 解:** 设关于 $x$ 的方程 $x^2+mx+3=0$ 的另一个根为 $x_2$,则 $(-1)\times x_2=3$,解得 $x_2=-3$,由根与系数的关系,得 $(-1)+(-3)=-m$,解得 $m=4$.
∴ 它的另一个根是 $-3$,$m$ 的值是 4.

**B组** **4. 解:** 由已知条件可知 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=k+1$. $\because x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=24$,∴ $36-2(k+1)=24$. ∴ $k=5$. ∴ $k$ 的值是 5.

**5. 解:** 由已知条件可知 $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=-a$.
$\because \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{2}{3}$,
$\therefore \frac{2}{-a}=-\frac{2}{3}$,∴ $a=3$. ∴ $a$ 的值是 3.

## 2.5 一元二次方程的应用

**练习**

**1. 解:** 设平均每年藏书增长的百分率是 $x$,根据题意,得 $5(1+x)^2=7.2$,整理,得 $(1+x)^2=1.44$,解得 $x_1=0.2=20\%$, $x_2=-2.2$(不合题意,舍去).
答:平均每年藏书增长的百分率是 20%.

**2. 解:** 设应降价 $x$ 元,根据题意,得 $(44-x)(20+5x)=1\,600$,整理,得 $x^2-40x+144=0$,解得 $x_1=36$, $x_2=4$.
经检验,$x_1=36$, $x_2=4$ 都符合题意.
答:若要平均每天盈利 1 600 元,则应降价 36 元或 4 元.

**练习**

**1. 解:** 设道路的宽应为 $x$ m. 根据题意,得 $100\times80-(80x+100x-x^2)=7\,644$,整理,得 $x^2-180x+356=0$,解得 $x_1=178$, $x_2=2$.
当 $x=178$ 时,不符合题意,舍去,∴ $x=2$.
答:道路的宽应为 2 m.

**2. 解:** 设点 $P$, $Q$ 出发 $x$ s 后可使 $\triangle PCQ$ 的面积为 Rt$\triangle ABC$面积的一半. 根据题意,得 $CQ=(6-x)$ cm, $PC=(8-x)$ cm,根据等量关系,得 $\frac{1}{2}\times(6-x)\times(8-x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times6\times8$,整理,得 $x^2-14x+24=0$,解得 $x_1=12$, $x_2=2$. $\because$ 当 $x=12$ 时,$6-x<0$,$8-x<0$,不符合题意,舍去,
∴ $x=2$.
答:点 $P$, $Q$ 出发 2 s 后可使 $\triangle PCQ$ 的面积为 Rt$\triangle ABC$面积的一半.

**习题 2.5**

**A组** **1. 解:** 设这两年中投入资金的年平均增长率

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为 $x$，根据等量关系，得 $3(1+x)^2=12$，整理，得 $(1+x)^2=4$，解得 $x_1=1=100\%$，$x_2=-3$（不合题意，舍去）.

答：这两年中投入资金的年平均增长率为 100%.

**2. 解：**（1）设每千克该种特产应降价 $x$ 元，根据题意，得 $(60-40-x)(100+10x)=2\,240$，整理，得 $x^2-10x+24=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=6$. 经检验，$x_1=4$，$x_2=6$ 都符合题意.

答：每千克该种特产应降价 4 元或 6 元.

（2）为尽可能让利于顾客，则 $x=6$，此时售价为 $60-6=54$（元），$\therefore \frac{54}{60}=0.9$.

答：该店应按原售价的九折出售.

**3. 解：**设小道进出口的宽度应为 $x$ m. 根据题意，得 $30\times20-(30x+20x+20x-2x^2)=532$，整理，得 $x^2-35x+34=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=34$（不合题意，舍去）.

答：小道进出口的宽度应为 1 m.

**4. 解：**设这 9 个数中的最大数为 $x$，则最小数为 $x-2-14$，即 $x-16$，根据题意，得 $x(x-16)=192$，整理，得 $x^2-16x-192=0$，

解得 $x_1=24$，$x_2=-8$（不合题意，舍去）.

答：这 9 个数中的最大数为 24.

**B 组 5. 解：**设每人收费标准定为 $x$ 元时，该旅行社从这个旅游团可获取利润 64 000 元，根据题意，得此时的参加人数为 $\frac{4\,600-x}{100}\times10+20$，

根据等量关系，得 $(x-3\,200)(\frac{4\,600-x}{100}\times10+20)=64\,000$.

整理，得 $x^2-8\,000x+16\,000\,000=0$，

解得 $x_1=x_2=4\,000$.

答：每人收费标准定为 4 000 元时，该旅行社从这个旅游团可获取利润 64 000 元.

**6. 解：**设长为 $x$ 步，则宽为 $(60-x)$ 步. 根据题意，得 $x(60-x)=864$.

整理，得 $x^2-60x+864=0$，

解得 $x_1=36$，$x_2=24$.

当 $x=24$ 时，$60-x=36>24$，不合题意，舍去.

$\therefore x=36$，此时宽为 $60-x=24$（步）.

$36-24=12$（步）.

答：它的长比宽多 12 步.

**7. 解：**（1）当 $P$，$N$ 两点重合时，有 $AP+ND=24$ cm，即 $2x+x^2=24$，

解得 $x_1=4$，$x_2=-6$（不合题意，舍去）.

故当 $x=4$ 时，$P$，$N$ 两点重合.

（2）$Q$，$M$ 两点不能重合. 理由如下：假设 $Q$，$M$ 两点能重合，此时有 $x+3x=24$，

解得 $x=6$，

而当 $x=6$ 时，$DN=x^2=36>24$，不符合题意，

$\therefore$ 假设不成立，$\therefore$ $Q$，$M$ 两点不能重合.

（3）当以 $P$，$Q$，$M$，$N$ 为顶点的四边形是平行四边形时，则有 $AP+ND=BQ+MC$，

即 $2x+x^2=x+3x$，

整理，得 $x^2-2x=0$，

解得 $x_1=2$，$x_2=0$（舍去）.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，以 $P$，$Q$，$M$，$N$ 为顶点的四边形是平行四边形.

**复习题 2**

**A 组 1. 解：**（1）原方程可化为 $5x^2-49=0$，二次项系数为 5，一次项系数为 0，常数项为 $-49$.

（2）原方程可化为 $x^2+3x+5=0$，二次项系数为 1，一次项系数为 3，常数项为 5.

（3）原方程可化为 $0.01t^2-5t+1=0$，二次项系数为 0.01，一次项系数为 $-5$，常数项为 1.

（4）原方程可化为 $4y^2+2y-9=0$，二次项系数为 4，一次项系数为 2，常数项为 $-9$.

**2.** （1）$49x^2-144=0$.

**解：**原方程可化为 $x^2=\frac{144}{49}$，根据平方根的意义，得 $x=\sqrt{\frac{144}{49}}$ 或 $x=-\sqrt{\frac{144}{49}}$. 因此，原方程的根为 $x_1=\frac{12}{7}$，$x_2=-\frac{12}{7}$.

（2）$(1-x)^2=1$.

**解：**根据平方根的意义，得 $1-x=1$ 或 $1-x=-1$. 因此，原方程的根为 $x_1=0$，$x_2=2$.

（3）$x^2+8x+16=0$.

**解：**变形得 $(x+4)^2=0$.

$\therefore x+4=0$，$\therefore x=-4$.

因此，原方程的根为 $x_1=x_2=-4$.

（4）$x(7-x)=4x^2$.

**解：**原方程可化为 $5x^2-7x=0$，把方程左边因式分解，得 $x(5x-7)=0$，由此得 $x=0$ 或 $5x-7=0$，

因此原方程的根为 $x_1=0$，$x_2=\frac{7}{5}$.

（5）$x(x-2)-3x^2=0$.

**解：**原方程可化为 $2x^2+2x=0$，即 $x^2+x=0$，把方程左边因式分解，得 $x(x+1)=0$，由此得 $x=0$ 或

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x+1=0$，

因此原方程的根为 $x_1=0, x_2=-1$.

(6) $x^2-4x+4=64$.

**解**：变形得 $(x-2)^2=64$. 根据平方根的意义，得 $x-2=8$ 或 $x-2=-8$，因此原方程的根为 $x_1=10, x_2=-6$.

**3**. (1) $2x^2-6x-3=0$.

**解**：这里 $a=2, b=-6, c=-3$，$\therefore b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times(-3)=60>0$.

$\therefore x=\dfrac{6\pm\sqrt{60}}{2\times2}=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{2}$，因此原方程的根为 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}$.

(2) $x(x+5)=24$.

**解**：原方程可化为 $x^2+5x-24=0$，把方程左边因式分解，得 $(x-3)(x+8)=0$，因此得 $x-3=0$ 或 $x+8=0$，

因此原方程的根为 $x_1=3, x_2=-8$.

(3) $x(x+1)+2(x-1)=0$.

**解**：原方程可化为 $x^2+3x-2=0$，配方，得 $(x+\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{9}{4}-2=0$，因此 $(x+\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{17}{4}$，

由此得 $x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 或 $x+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，

解得 $x_1=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}, x_2=-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$.

(4) $(x-3)^2+2x(x-3)=0$.

**解**：把方程左边因式分解，得 $(x-3)(x-3+2x)=0$，因而 $x-3=0$ 或 $3x-3=0$.

解得 $x_1=3, x_2=1$.

(5) $3(x-2)^2=x(x-2)$.

**解**：原方程可化为 $3(x-2)^2-x(x-2)=0$.

把方程左边因式分解，得 $(x-2)[3(x-2)-x]=0$，因而 $x-2=0$ 或 $3(x-2)-x=0$.

解得 $x_1=2, x_2=3$.

**4**. **解**：(1) $\because \Delta=b^2-4ac=6^2-4\times4\times9=36-144=-108<0$，

$\therefore$ 原方程没有实数根.

(2) 原方程可化为 $y^2-y-5=0$.

此时 $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-5)=21>0$，

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根.

*5. **解**：因为 $x_1, x_2$ 是方程 $2x^2-6x+3=0$ 的两根，所以 (1) $x_1+x_2=3$，(2) $x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{2}$，(3) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=9-3=6$.

*6. **解**：根据题意，得 $x_1+x_2=3, x_1\cdot x_2=-1$，

$\therefore \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{3}{-1}=-3$.

**7**. **解**：设三个连续奇数中，最小的为 $x$，则另外两个奇数分别为 $x+2, x+4$. 根据题意，得 $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=371$，整理，得 $x^2+4x-117=0$，解得 $x_1=9, x_2=-13$.

$\therefore$ 若 $x=9$，则 $x+2=11, x+4=13$. 若 $x=-13$，则 $x+2=-11, x+4=-9$.

答：这三个奇数分别为 9，11，13 或 $-13$，$-11$，$-9$.

**8**. **解**：根据等量关系，得 $54\,000(1-x)^2=42\,000$，整理，得 $(1-x)^2=\dfrac{7}{9}$，解得 $x_1=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3}, x_2=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}$，$\because x_2=\dfrac{3+\sqrt{7}}{3}>1$，不符合题意，舍去，

$\therefore x=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3}\approx0.12=12\%$.

答：平均每次用钢量降低的百分率 $x$ 约为 12%.

**9**. **解**：设桌布下垂的长度为 $x$ m，根据题意，得桌布的长为 $(1.5+2x)$ m，桌布的宽为 $(1+2x)$ m，根据等量关系，得 $(1.5+2x)(1+2x)=2\times1.5\times1$，整理，得 $8x^2+10x-3=0$，解得 $x_1=0.25, x_2=-1.5$（不合题意，舍去），$\therefore x=0.25$.

答：桌布下垂的长度为 0.25 m.

**10**. **解**：设每个小正方形的边长为 $x$ cm，则此方格纸的面积为 $(4x)^2$ cm$^2$，根据题意得 $(4x)^2-\dfrac{1}{2}\cdot3x\cdot2x-\dfrac{1}{2}\cdot4x\cdot2x-\dfrac{1}{2}x\cdot4x=15.75$，整理，得 $7x^2-15.75=0$，解得 $x_1=1.5, x_2=-1.5$（不合题意，舍去），所以 $(4x)^2=(4\times1.5)^2=36$(cm$^2$).

答：此方格纸的面积为 36 cm$^2$.

**11**. **解**：设 $DF$ 的长为 $x$ m，则 $BE=x$ m，$CF=CP=(5-x)$ m，$EP=7.5-x-(5-x)=2.5$(m)，根据等量关系，得 $(5-x)^2+2.5^2=\dfrac{1}{2}\times7.5\times5$，整理，得 $2x^2-20x+25=0$，解得 $x_1=5-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, x_2=5+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$（不合题意，舍去），$\therefore x=5-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\approx1.5$.

答：$DF$ 的长约为 1.5 m.

**12**. **解**：存在.

根据题意，得 $AP=2x$ cm，$CQ=x$ cm，$\because \angle B=90°$，$AC=10$ cm，$BC=6$ cm，$\therefore AB=8$ cm. $\therefore PB=(8-2x)$ cm，$BQ=(6-x)$ cm. 当四边形 $APQC$ 的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

面积等于 16 $cm^2$ 时，有 $\frac{1}{2}\times6\times8-\frac{1}{2}\times(8-2x)\times(6-x)=16$. 整理，得 $x^2-10x+16=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=8$，当 $x=8$ 时，$CQ=8$ cm，$AP=16$ cm，不符合题意，舍去. $\therefore x=2$. $\therefore$ 当 $x$ 的值为 2 时，四边形 $APQC$ 的面积等于 16 $cm^2$.

**B 组** **13.** (1) $(3x+5)^2-6(3x+5)+9=0$.

**解：**变形得 $(3x+5-3)^2=0$，即 $(3x+2)^2=0$，解得 $x_1=x_2=-\frac{2}{3}$.

(2) $x^2+ax-2a^2=0$（$a$ 为常数）.

**解：**把方程左边因式分解，得 $(x-a)(x+2a)=0$，所以 $x-a=0$ 或 $x+2a=0$，解得 $x_1=a$，$x_2=-2a$.

**14.** **解：**$\because$ 关于 $x$ 的方程 $x^2-4x+b=0$ 有两个相等的实数根，$\therefore\Delta=16-4b=0$，$\therefore b=4$，$\therefore b=c$，

$\therefore\triangle ABC$ 是等腰三角形.

* **15.** **解：**不存在. 理由：$\because x_1$，$x_2$ 是关于 $x$ 的方程 $x^2-4x+k+1=0$ 的两个实数根，$\therefore\Delta=16-4(k+1)\geqslant0$，$\therefore k\leqslant3$，又易知 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=k+1$，$\therefore$ 当 $x_1\cdot x_2>x_1+x_2$ 时，有 $k+1>4$，解得 $k>3$. $\therefore$ 不存在实数 $k$，使得 $x_1\cdot x_2>x_1+x_2$.

**16.** **解：**(1) 当 $AB=AD$ 时，$\square ABCD$ 是菱形，此时，有 $\Delta=(-m)^2-4\times1\times\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)=m^2-2m+1=(m-1)^2=0$，解得 $m=1$. 当 $m=1$ 时，方程可化为 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$，解得 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，$\square ABCD$ 是菱形，这时菱形的边长为 $\frac{1}{2}$.

(2) 由已知条件可知 $x=2$ 是方程 $x^2-mx+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$ 的一个根，把 $x=2$ 代入原方程可得 $4-2m+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$，解得 $m=\frac{5}{2}$，$\therefore$ 原方程为 $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$，设方程的另一个根为 $x_2$，由根与系数的关系，可得 $2+x_2=\frac{5}{2}$，解得 $x_2=\frac{1}{2}$，$\therefore AD=\frac{1}{2}$，$\therefore\square ABCD$ 的周长为 $(2+\frac{1}{2})\times2=5$.

**C 组** **17.** **解：**根据等量关系，得 $120^2+(x-120)^2+3\,200=120x$. 整理，得 $x^2-360x+32\,000=0$，解得 $x_1=160$，$x_2=200$，当 $x=160$ 时，丙区域的长为 $x-120=160-120=40$ (m)，宽为 $120-40=80$(m)，$80>40$，$\therefore x=160$ 不合题意，舍去. $\therefore x=200$.

**18.** **解：**(1) $(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=\frac{(n-1)\times n}{2}$

(2) 设该平面上共有 $x$ 个点，根据题意，得 $\frac{(x-1)\times x}{2}=171$，整理，得 $x^2-x-342=0$，解得 $x_1=19$，$x_2=-18$（舍去）.

所以该平面上共有 19 个点.

# 第 3 章 图形的相似

## 3.1 比例线段

### 3.1.1 比例的基本性质

**练习**

**1.** **解：**(1) $\because$ 四个数 $a$，$b$，$c$，$d$ 成比例，

$\therefore a:b=c:d$，$\therefore -3:9=2:d$，

$\therefore -3d=18$，$\therefore d=-6$.

(2) $\because$ 四个数 $a$，$b$，$c$，$d$ 成比例，$\therefore a:b=c:d$.

$\therefore -3:\sqrt{3}=2:d$，

$\therefore -3d=2\sqrt{3}$，$\therefore d=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

**2.** **解：**(1) $4:15=x:9$，

$15x=4\times9$，

$x=36\div15$，

$x=2.4$.

(2) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{3}{5}:x$，

$\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}$，

$\frac{1}{2}x=\frac{1}{5}$，

$x=\frac{1}{5}\div\frac{1}{2}$，

$x=\frac{2}{5}$.

### 3.1.2 成比例线段

**练习**

**1.** **解：**(1) $\because a$，$b$，$c$，$d$ 是比例线段，

$\therefore a:b=c:d$，即 $0.8:1=1:d$，

$\therefore d=1.25$ cm.

(2) $\because a$，$b$，$c$，$d$ 是比例线段，$\therefore 12:b=3:15$，

$\therefore b=60$ cm.

(3) $\because a$，$b$，$c$，$d$ 是比例线段，$\therefore 5:4=c:8$，

$\therefore c=10$ cm.

**2.** **解：**设 $A$，$B$ 两地之间的实际距离是 $x$ cm，根据题意，得 $25:x=1:1\,000\,000$，解得 $x=25\,000\,000$.

$\because 25\,000\,000$ cm $=250$ km，

$\therefore A$，$B$ 两地之间的实际距离是 250 km.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 3.1

A 组 1. 解：

(1) $5:7=15:x$，

$5x=15\times7$，

$x=105\div5$，

$x=21$.

(2) $144:5=x:25$，

$5x=144\times25$，

$x=3\ 600\div5$，

$x=720$.

(3) $52:x=26:8$，

$26x=52\times8$，

$x=416\div26$，

$x=16$.

(4) $x:13=65:78$，

$78x=65\times13$，

$x=845\div78$，

$x=\frac{65}{6}$.

2. 解：(1)∵ $a,b,c,d$ 是比例线段，∴ $2:3=4:d$，∴ $d=6$.

(2)∵ $a,b,c,d$ 是比例线段，∴ $1.5:b=2.5:4.5$，∴ $b=2.7$.

(3)∵ $a,b,c,d$ 是比例线段，∴ $1.1:2.2=c:4.4$，∴ $c=2.2$.

3. 解：680 km = 68 000 000 cm，

$17:68\ 000\ 000=1:4\ 000\ 000$.

答：该地图的比例尺是 1∶4 000 000.

4. 解：设主持人站在离 $A$ 点 $x$ m 处最自然得体. 由题意得 $x\neq20-x$. 当 $x>20-x$ 时，根据题意得 $\frac{20-x}{x}=\frac{x}{20}$，解得 $x=10(\sqrt{5}-1)$ 或 $x=-10(\sqrt{5}+1)$，经检验，$x=10(\sqrt{5}-1)$ 是方程的解且符合题意，$10(\sqrt{5}-1)\approx12.4$.

当 $x<20-x$ 时，根据题意得 $\frac{20-x}{20}=\frac{x}{20-x}$，解得 $x=10(3+\sqrt{5})$ 或 $x=10(3-\sqrt{5})$，经检验，$x=10(3-\sqrt{5})$ 是方程的解且符合题意，$10(3-\sqrt{5})\approx7.6$.

答：主持人站在离 $A$ 点约 12.4 m 或 7.6 m 处最自然得体.

B 组 5. 解：∵ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$，

∴ $a=\frac{5}{7}b,c=\frac{5}{7}d,e=\frac{5}{7}f$，

∴ $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{\frac{5}{7}(b+d+f)}{b+d+f}=\frac{5}{7}$.

6. 略.

## 3.2 平行线分线段成比例

练习

1. 解：由平行线分线段成比例可知 $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$，即 $\frac{3}{OC}=\frac{1}{2}$，因此，$OC=\frac{2\times3}{1}=6$.

2. 解：∵ $AB=3,AD=2$，∴ $BD=1$. ∵ $DE\parallel BC$，∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，即 $\frac{2}{1}=\frac{AE}{1.8}$，∴ $AE=\frac{1.8\times2}{1}=3.6$，∴ $AC=AE+EC=3.6+1.8=5.4$.

习题 3.2

A 组 1. 解：∵ $DE\parallel BC$，∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，即 $\frac{AB-BD}{DB}=\frac{AE}{AC-AE}$，又∵ $DB=AE,AB=5,AC=10$，

∴ $\frac{5-AE}{AE}=\frac{AE}{10-AE}$，∴ $AE=\frac{10}{3}$.

2. 证明：∵ $DE\parallel BC$，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. ∵ $EF\parallel AB$，

∴ $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{BF}{BC}$.

B 组 3. 解：∵ $l_1\parallel l_2\parallel l_3$，∴ $\frac{AM}{MB}=\frac{CK}{DK}=\frac{EM}{FM}$，又∵ $AM=2,MB=3,EM=4$，∴ $\frac{2}{3}=\frac{CK}{DK}=\frac{4}{FM}$，

∴ $\frac{CK}{DK}=\frac{2}{3},FM=\frac{3\times4}{2}=6$. ∵ $CD=12$，∴ $CK=\frac{2}{5}\times12=\frac{24}{5},DK=\frac{3}{5}\times12=\frac{36}{5}$.

4. 证明：∵ $DM\parallel AB$，∴ $\frac{CB}{CD}=\frac{AC}{MC}$. ∵ $AE\parallel MN$，

∴ $\frac{AC}{MC}=\frac{CE}{CN}$，∴ $\frac{CB}{CD}=\frac{CE}{CN}$.

## 3.3 相似图形

练习

1. 解：∵ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，相似比为 $\frac{2}{5}$，∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{5}$，又∵ $DE=4$ cm，∴ $BC=10$ cm.

2. 解：(1)与(4)相似，(3)与(6)相似.

习题 3.3

A 组 1. 解：由题意得，题图(1)中：$\alpha=180°-(100°+30°)=50°$，$\frac{x}{7.56}=\frac{7.5}{15}$，解得 $x=3.78$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题图(2)中:$\alpha=180°-(60°+70°)=50°$,$\frac{x}{12}=\frac{4}{6}$,解得 $x=8$.

**2.** 解:∵ 两个四边形相似,∴ $\alpha=360°-(45°+120°+135°)=60°$,$\frac{x}{4}=\frac{4}{8}$,解得 $x=2$.

**B 组 3.** 解:(画图略)由题意得,$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'\cong\triangle A'B''C''$,$DE$ 为 $\triangle A'B''C''$ 的中位线,所以 $\angle A=\angle EA'D$,$\angle B=\angle A'DE$,$\angle C=\angle A'ED$,$\frac{AB}{A'D}=\frac{AC}{A'E}=\frac{BC}{DE}=2$.

所以画出的 $\triangle A'DE$ 与 $\triangle ABC$ 是相似图形.

**4.** 解:∵ 矩形 $ABCD$ 与矩形 $EABF$ 相似,

∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{EF}$.

∵ $E,F$ 分别为矩形 $ABCD$ 的边 $AD,BC$ 的中点,$AB=1$,∴ $AD=2AE$,$EF=1$,

∴ $\frac{1}{AE}=\frac{2AE}{1}$,∴ $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$,∴ $AD=\sqrt{2}$,

∴ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$.

## 3.4 相似三角形的判定与性质

### 3.4.1 相似三角形的判定

练习

**1.** 解:∵ $\angle C=90°$,四边形 $EFCD$ 为正方形,∴ $EF=FC$,$EF\parallel AC$,∴ $\triangle BFE\backsim\triangle BCA$,∴ $\frac{BF}{BC}=\frac{EF}{AC}$,又∵ $AC=7.5$,$BC=5$,∴ $\frac{5-FC}{5}=\frac{EF}{7.5}$,即 $\frac{5-FC}{5}=\frac{FC}{7.5}$,解得 $FC=3$,即正方形的边长为 3.

**2.** 解:四边形 $AEOF$ 与四边形 $ABCD$ 相似. 理由:∵ $OE\parallel BC$,∴ $\triangle AEO\backsim\triangle ABC$,∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{EO}{BC}=\frac{AO}{AC}$,$\angle EAO=\angle BAC$,$\angle AEO=\angle B$,$\angle AOE=\angle ACB$.

∵ $OF\parallel CD$,∴ $\triangle AFO\backsim\triangle ADC$,∴ $\frac{AF}{AD}=\frac{FO}{DC}=\frac{AO}{AC}$,$\angle FAO=\angle DAC$,$\angle AFO=\angle D$,$\angle AOF=\angle ACD$,

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{EO}{BC}=\frac{AF}{AD}=\frac{FO}{DC}$,$\angle EAF=\angle BAD$,$\angle AEO=\angle B$,$\angle EOF=\angle BCD$,$\angle AFO=\angle D$,

∴ 四边形 $AEOF$ 与四边形 $ABCD$ 相似.

练习

**1.** 解:图中有 3 对相似三角形,分别是 $\triangle ABE\backsim\triangle FCE$,$\triangle ABE\backsim\triangle FDA$,$\triangle FCE\backsim\triangle FDA$. 理由:

∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴ $CD\parallel AB$,$AD\parallel BE$.

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle FCE$,$\triangle FCE\backsim\triangle FDA$.

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle FDA$.

**2.** 解:∵ $AC\perp CE$,∴ $\angle ACB+\angle ECD=90°$,

又∵ $ED\perp BD$,∴ $\angle D=90°$,

∴ $\angle E+\angle ECD=90°$,∴ $\angle ACB=\angle E$.

又∵ $AB\perp BD$,∴ $\angle B=90°=\angle D$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle CDE$,∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{DE}$.

∵ $BD=4$,点 $C$ 是线段 $BD$ 的中点,

∴ $BC=CD=2$,∴ $\frac{AB}{2}=\frac{2}{1}$,

∴ $AB=4$.

练习

**1.** 解:∵ $AB=6$,$BC=4$,$AC=5$,$CD=7.5$,∴ $\frac{AB}{DC}=\frac{6}{7.5}=\frac{4}{5}$,$\frac{BC}{CA}=\frac{4}{5}$,∴ $\frac{AB}{DC}=\frac{BC}{CA}$,又∵ $\angle B=\angle ACD$,∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DCA$,∴ $\frac{AC}{DA}=\frac{AB}{DC}=\frac{4}{5}$,

∴ $AD=\frac{25}{4}$.

**2.** 证明:∵ $AC=6$,$AB=5$,$EC=4$,$DB=7$,

∴ $AE=AC+CE=6+4=10$,$AD=AB+DB=5+7=12$,∴ $\frac{AC}{AD}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,$\frac{AB}{AE}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,∴ $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}$,又∵ $\angle A=\angle A$,∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$.

练习

**1.** 证明:∵ 点 $D,E,F$ 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点,

∴ $DE,EF,DF$ 分别是 $\triangle ABC$ 的三条中位线,

∴ $\frac{ED}{AC}=\frac{EF}{AB}=\frac{DF}{CB}=\frac{1}{2}$,∴ $\triangle EDF\backsim\triangle ACB$.

**2.** 解:图中的两个三角形相似. 理由:∵ $\triangle ABC$ 为直角三角形,∴ $AC=\sqrt{5^2-3^2}=4$. ∵ $\triangle A'B'C'$ 为直角三角形,∴ $B'C'=\sqrt{10^2-8^2}=6$,∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,$\frac{AC}{A'C'}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,$\frac{BC}{B'C'}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$,∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

### 3.4.2 相似三角形的性质

练习

**1.** 解:∵ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,$AM$,$DN$ 分别是 $\triangle ABC$,$\triangle DEF$ 的一条中线,∴ $\frac{AM}{DN}=\frac{AB}{DE}$. ∵ $AM=6$ cm,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$AB=8$ cm，$DE=4$ cm，$\therefore \frac{6}{DN}=\frac{8}{4}$，$\therefore DN=3$ cm.

**2. 解：**$\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$AD$，$BE$ 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线，$A'D'$，$B'E'$ 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的高和中线，$\therefore \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{BE}{B'E'}=\frac{AB}{A'B'}$，即 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}$.

$\because AD=4$，$A'D'=3$，$BE=6$，$\therefore \frac{4}{3}=\frac{6}{B'E'}$，

$\therefore B'E'=4.5$.

**练习**

**1. 解：**已知：如图，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 $k$.

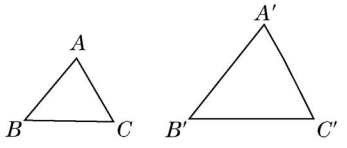
求证：$\frac{\triangle ABC\text{的周长}}{\triangle A'B'C'\text{的周长}}=k$.

证明：$\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，其相似比为 $k$，

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$.

$\therefore AB=kA'B'$，$BC=kB'C'$，$CA=kC'A'$.

$\therefore \frac{\triangle ABC\text{的周长}}{\triangle A'B'C'\text{的周长}}=\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{k(A'B'+B'C'+C'A')}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$.




（第 1 题）

**2. 解：**$\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的周长分别为 60 cm和 72 cm，

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}$.

又$\because AB=15$ cm，$B'C'=24$ cm，

$\therefore \frac{15}{A'B'}=\frac{5}{6}$，$\frac{BC}{24}=\frac{5}{6}$，

$\therefore A'B'=18$ cm，$BC=20$ cm，

$\therefore AC=60-15-20=25$（cm），$A'C'=72-18-24=30$（cm）.

**3. 解：**由题意得，两直角三角形的相似比为3∶7.

$\because$ 题中所给直角三角形的周长是 $3+4+5=12$，面积是 $\frac{1}{2}\times3\times4=6$，$\therefore$ 另一个直角三角形的周长是 $12\times\frac{7}{3}=28$，面积是 $6\times\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{98}{3}$.

**习题 3.4**

**A 组　1. 解：**图中有3对相似三角形，分别是 $\triangle BED\sim\triangle BCA$，$\triangle BED\sim\triangle AFD$，$\triangle BCA\sim\triangle AFD$. 理由：

$\because BD=2BA$，$BE=2BC$，$\therefore \frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=2$，

又$\because \angle B=\angle B$，$\therefore \triangle BED\backsim\triangle BCA$.

$\because DE=2EF$，$\therefore$ 易得 $\frac{DB}{DA}=\frac{DE}{DF}=2$.

又$\because \angle D=\angle D$，

$\therefore \triangle BED\backsim\triangle AFD$.

$\therefore \triangle BCA\backsim\triangle AFD$.

**2. 解：**已知：$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是等腰三角形（$AB=AC$，$DE=DF$），且 $\angle B=\angle E$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

证明：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是等腰三角形（$AB=AC$，$DE=DF$），$\therefore \angle B=\angle C$，$\angle E=\angle F$. $\because \angle B=\angle E$，$\therefore \angle C=\angle F$. $\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

**3. 证明：**$\because AB\cdot AD=AC\cdot AE$，$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$. $\because \angle1=\angle2$，$\therefore \angle BAC=\angle EAD$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle AED$.

**4. 证明：**$\because$ 点 $D$，$E$，$F$ 分别是 $OA$，$OB$，$OC$ 的中点，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AB$，$EF=\frac{1}{2}BC$，$DF=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=2$. $\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

**5. 证明：**$\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$AD$，$BE$ 是 $\triangle ABC$ 的高，$A'D'$，$B'E'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的高，$\therefore \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BE}{B'E'}$，即 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}$，$\therefore AD\cdot B'E'=A'D'\cdot BE$.

**6. 解：**由题意可知，两个三角形的相似比为 $10:20=1:2$.

（1）设较大的三角形的周长是 $2x$ cm，则较小的三角形的周长是 $x$ cm，则有 $2x-x=60$，解得 $x=60$，$\therefore 2x=120$，故较大的三角形的周长是 120 cm.

（2）设较小的三角形的面积是 $y$ cm$^2$，则较大的三角形的面积是 $4y$ cm$^2$，则有 $y+4y=260$，解得 $y=52$，故较小的三角形的面积是 52 cm$^2$.

**B 组　7. 解：**$\because AB=AC$，$\angle A=36°$，$\therefore \angle ABC=\angle C=72°$，又$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle DBA=\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=36°$，$\therefore \angle A=\angle DBA$，$\therefore AD=BD$. $\because \angle C=72°$，$\therefore \angle BDC=180°-\angle C-\angle DBC=72°$，$\therefore \angle C=\angle BDC$，$\therefore BC=BD=AD$. $\because \angle A=\angle DBC$，$\angle C=\angle C$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle BDC$，$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$，$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{AD}{AC-AD}$. $\because AC=2$，$\therefore \frac{2}{AD}=\frac{AD}{2-AD}$，解得 $AD=\sqrt{5}-1$ 或 $AD=-\sqrt{5}-1$（舍去），$\therefore AD$ 的长为 $\sqrt{5}-1$.

**8. 解：**所得的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似. 理由如下：

$\because \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$，$\angle AOB=\angle A'OB'$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle A'OB'$,

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{1}{3}$,

同理可得$\frac{BC}{B'C'}=\frac{1}{3}$,$\frac{AC}{A'C'}=\frac{1}{3}$,

即$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

**9.** 解:设 $AD$ 与 $HG$ 相交于点 $I$. $\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形,$\therefore HG=GF$,$HG \parallel EF$,$\therefore \triangle AHG \backsim \triangle ABC$. $\because AD$ 是边 $BC$ 上的高,$\therefore AI$ 是边 $HG$ 上的高,

$\therefore \frac{HG}{BC}=\frac{AI}{AD}$,$\therefore \frac{HG}{BC}=\frac{AD-HG}{AD}$. $\because BC=30$ cm,$AD=20$ cm,$\therefore \frac{HG}{30}=\frac{20-HG}{20}$,$\therefore HG=12$ cm,即这个正方形的边长为 12 cm.

## 3.5 相似三角形的应用

**练习**

**1.** 解:设长臂端点升高 $x$ m,根据题意,易得$\frac{x}{6}=\frac{0.5}{1}$,解得 $x=3$.

答:长臂端点升高 3 m.

**2.** 解:$\because \angle DEF=\angle DCB=90°$,$\angle D=\angle D$,

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle DCB$,

$\therefore \frac{DE}{DC}=\frac{EF}{CB}$,

又$\because DE=80$ cm,$EF=40$ cm,$CD=8$ m,

$\therefore \frac{80}{800}=\frac{40}{CB}$,

$\therefore CB=400$ cm $=4$ m,

$\therefore AB=AC+CB=1.5+4=5.5$(m).

答:树高 $AB$ 为 5.5 m.

**习题 3.5**

**A 组** **1.** 解:根据题意,易得$\frac{5}{10}=\frac{0.8}{h}$,

$\therefore h=1.6$ m.

答:球拍击球的高度 $h$ 应为 1.6 m.

**2.** 解:$\frac{AB}{CD}=m$,$AB \parallel CD$. 理由:

$\because \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=m$,$\angle AOB=\angle COD$,

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle COD$,

$\therefore \frac{AB}{CD}=\frac{OA}{OC}=m$,$\angle A=\angle C$,

$\therefore AB \parallel CD$.

**3.** 解:延长 $AF$ 交 $DE$ 于点 $G$.

$\because AF \perp BC$,$BC \parallel DE$,

$\therefore AG \perp DG$.

$\because BC \parallel DE$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$,

$\therefore \frac{BC}{DE}=\frac{AF}{AG}$.

由题意知 $DE=2\times5=10$(m).

$\because AF=3$ m,$\therefore AG=3+2=5$(m),

$\therefore \frac{BC}{10}=\frac{3}{5}$,

$\therefore BC=6$ m.

答:宣传栏 $BC$ 的长是 6 m.

**B 组** **4.** 解:过点 $A_1$ 作 $B_1B_5$ 的平行线,分别与 $A_2B_2$,$A_3B_3$,$A_4B_4$,$A_5B_5$ 相交于 $C_2$,$C_3$,$C_4$,$C_5$,则有 $B_2C_2=B_3C_3=B_4C_4=B_5C_5=A_1B_1$,$\therefore A_5C_5=A_5B_5-A_1B_1=0.8-0.5=0.3$(m). 又每相邻两级踏板之间的距离都相等,设为 $h$,则有$\frac{h}{4h}=\frac{A_2C_2}{A_5C_5}$,$\frac{2h}{4h}=\frac{A_3C_3}{A_5C_5}$,$\frac{3h}{4h}=\frac{A_4C_4}{A_5C_5}$,解得 $A_2C_2=0.075$ m,$A_3C_3=0.15$ m,$A_4C_4=0.225$ m,$\therefore A_2B_2=A_2C_2+A_1B_1=0.575$ m,$A_3B_3=A_3C_3+A_1B_1=0.65$ m,$A_4B_4=A_4C_4+A_1B_1=0.725$ m.

**5.** 解:可行.

过点 $F$ 作 $FG \perp AB$ 于点 $G$,交 $EC$ 于点 $H$,易得四边形 $FDCH$ 和四边形 $FDBG$ 是矩形.

$\therefore FD=HC=BG=1.5$ m,$EH=EC-CH=2$ m,$FH=CD=3$ m,$FG=BD=BC+CD=30$ m.

$\because \angle EFH=\angle AFG$,$\angle EHF=\angle AGF=90°$,

$\therefore \triangle EFH \backsim \triangle AFG$,

$\therefore \frac{FH}{FG}=\frac{EH}{AG}$,即$\frac{3}{30}=\frac{2}{AB-1.5}$,

$\therefore AB=21.5$ m.

答:旗杆的高度是 21.5 m.

## 3.6 位 似

**练习**

**1.** 解:$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 是位似图形,位似中心为点 $A$.

**2.** 略.

**练习**

略.

**习题 3.6**

**A 组** **1.** 解:(1)是位似图形,位似中心为 $O$;(2)是位似图形,位似中心为 $O$.

**2.** 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**3.** 解：将四边形 $OABC$ 各顶点坐标分别乘 2，得 $O(0,0)$，$A'(4,0)$，$B'(4,2)$，$C'(0,2)$，依次连接点 $O$，$A'$，$B'$，$C'$，则四边形 $OA'B'C'$ 即为所要求作的图形，画图略.

四边形 $OA'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 是位似图形，位似比是 2.

**4.** 略.

**B 组　5.** 略.

**6.** 解：∵ 以坐标原点 $O$ 为位似中心，$A(-1,3)$ 的对应点 $A'$ 的纵坐标为 $-6$，

∴ $A'(2,-6)$，

∴ 放大后的三角形与原三角形对应点的坐标的比为 $-2$，

∴ 点 $B'$ 的横坐标为 6.

**复习题 3**

**A 组　1.** 解：∵ $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$，

∴ 设 $a=3k(k\neq 0)$，则 $b=5k$.

(1) $\frac{a-b}{b}=\frac{3k-5k}{5k}=-\frac{2}{5}$.

(2) $\frac{2a+b}{2a-b}=\frac{6k+5k}{6k-5k}=11$.

**2.** 解：(1)∵ $a,b,c,d$ 是比例线段，∴ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

∵ $a=2,b=5,c=6$，∴ $\frac{2}{5}=\frac{6}{d}$，∴ $d=15$.

(2)∵ $a,b,c,d$ 是比例线段，∴ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，又 $a=1.5,c=3,d=4.5$，∴ $\frac{1.5}{b}=\frac{3}{4.5}$，∴ $b=2.25$.

(3)∵ $a,b,c,d$ 是比例线段，∴ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，∵ $a=5,b=8,d=44$，∴ $\frac{5}{8}=\frac{c}{44}$，∴ $c=27.5$.

**3.** 解：∵ $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，∴ $\frac{3}{2}=\frac{6}{EF}$，

∴ $EF=4$. ∴ $DF=10$.

**4.** 解：由已知可得 $\angle C=\angle D=90°$，$\angle CAB=\angle DAE$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$. ∴ $\frac{AC}{AD}=\frac{CB}{DE}$.

∴ $DE=\frac{AD\cdot CB}{AC}=\frac{28.4\times 9.8}{14.2}=19.6(\text{m})$.

**5.** 证明：∵ $AC=5,BC=3,EC=10,DC=6$，∴ $\frac{AC}{EC}=\frac{BC}{DC}=\frac{1}{2}$，∵ $\angle ACB=\angle ECD$，∴ $\triangle ACB\backsim\triangle ECD$，

∴ $\angle B=\angle D$，∴ $AB /\!/ DE$.

**6.** 解：平行，理由如下：

∵ $AB=14$ km，$AD=28$ km，$BD=21$ km，$BC=42$ km，$DC=31.5$ km，∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}=\frac{AD}{BC}=\frac{2}{3}$，

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle BDC$，∴ $\angle ABD=\angle BDC$，

∴ $AB /\!/ DC$.

**7.** 解：由题意知，相似比为 $\frac{2}{3}$.

∴ $\triangle DEF$ 的周长 $=16\div\frac{2}{3}=24$，

$\triangle DEF$ 的面积 $=25\div\left(\frac{2}{3}\right)^2=56.25$.

**8.** 解：∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle CED=\angle AEB$. 又 $\angle CDE=\angle ABE=90°$，∴ $\triangle CED\backsim\triangle AEB$，∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}$. 又

∵ $BE=8$ m，$DE=3$ m，$CD=1.5$ m，

∴ $\frac{1.5}{AB}=\frac{3}{8}$，∴ $AB=4$ m.

答：树 $AB$ 的高度是 4 m.

**9.** 解：过点 $F$ 作 $FM\perp DC$ 于 $M$，交 $AB$ 于点 $N$. 易得 $\triangle AFN\backsim\triangle DFM$，则 $\frac{FN}{FM}=\frac{AN}{DM}$，即 $\frac{BE}{BE+30}=\frac{20-1.6}{30-1.6}$，∴ $BE=55.2$ m.

答：此时他与教学楼的距离 $BE$ 为 55.2 m.

**10.** 解：(1)是.　(2)是.

**B 组　11.** 略.

**12.** 证明：(1)∵ $CD$ 是斜边 $AB$ 上的高，∴ $\angle ADC=90°$，在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ACB$ 中，$\angle A=\angle A$，$\angle ADC=\angle ACB=90°$，∴ $\triangle ADC\backsim\triangle ACB$，∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$，

∴ $AC^2=AD\cdot AB$.

(2) 在 Rt $\triangle ABC$ 中，∵ $\angle ACB=90°$，∴ $\angle A+\angle B=90°$. ∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle B+\angle BCD=90°$，∴ $\angle A=\angle BCD$. 又 $\angle BDC=\angle CDA$，∴ $\triangle BDC\backsim\triangle CDA$，∴ $\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}$，∴ $CD^2=BD\cdot AD$.

**13.** 解：∵ $AE /\!/ BD$，∴ $\angle BDC=\angle AEC$.

又 $\angle C=\angle C$，∴ $\triangle BCD\backsim\triangle ACE$，∴ $\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{CE}$，即 $\frac{BC}{BC+AB}=\frac{CE-ED}{CE}$. ∵ $ED=2.7$ m，$EC=8.7$ m，$AB=1.8$ m，∴ $\frac{BC}{BC+1.8}=\frac{8.7-2.7}{8.7}$，∴ $BC=4$ m.

答：窗口底边离地面的高 $BC$ 为 4 m.

**14.** 解：∵ $AB=BC=2$，$BE=CE$，∴ $BE=CE=1$，

∴ $AE=\sqrt{5}$. 当 $\triangle ABE\backsim\triangle NDM$ 时，有 $\frac{BE}{DM}=\frac{AE}{NM}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{1}{DM}=\frac{\sqrt{5}}{1}$，$\therefore DM=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

当$\triangle ABE\backsim\triangle MDN$时，有$\frac{BA}{DM}=\frac{AE}{MN}$，$\therefore \frac{2}{DM}=\frac{\sqrt{5}}{1}$，

$\therefore DM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**15. 解：**相似. $\because \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{1}{3}$，且$\angle A'OB'=\angle AOB$，$\therefore \triangle A'OB'\backsim\triangle AOB$，$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{3}$，$\angle B'A'O=\angle BAO$，$\angle A'B'O=\angle ABO$，同理，$\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{3}$，$\angle C'B'O=\angle CBO$，$\angle B'C'O=\angle BCO$，$\frac{C'D'}{CD}=\frac{1}{3}$，$\angle D'C'O=\angle DCO$，$\angle C'D'O=\angle CDO$，$\frac{A'D'}{AD}=\frac{1}{3}$，$\angle D'A'O=\angle DAO$，$\angle A'D'O=\angle ADO$，$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{A'D'}{AD}$，$\angle D'A'B'=\angle DAB$，$\angle A'B'C'=\angle ABC$，$\angle B'C'D'=\angle BCD$，$\angle C'D'A'=\angle CDA$. $\therefore$ 四边形$A'B'C'D'$与四边形$ABCD$相似.

**16. 解：**画图略. 所得图形各顶点的坐标分别为$(-4,0)$，$(-2,-4)$，$(2,-6)$，$(4,-2)$，$(2,4)$，$(-2,4)$.（答案不唯一）

**C组 17. 解：**能.

过点$P$作$PH\perp AB$交直线$AB$于点$H$，则有$PH/\!/EF$，$PH/\!/CD$. $\therefore \triangle ADC\backsim\triangle AHP$，$\triangle BFE\backsim\triangle BHP$，$\therefore \frac{AD}{AH}=\frac{CD}{PH}$，$\frac{BF}{BH}=\frac{EF}{PH}$，由题意，得

$\frac{0.8}{2.5+BH}=\frac{1}{PH}$①，$\frac{0.6}{BH}=\frac{1.2}{PH}$②，

①②联立，可得$PH\approx 8.3$ m.

**答：**支架顶端$P$到地面的距离约为8.3 m.

# 第4章 锐角三角函数

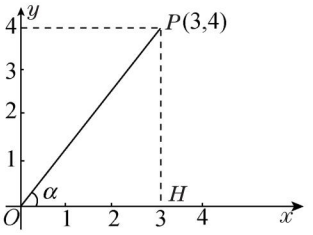
## 4.1 正弦和余弦

**练习**

**1. 解：**在直角三角形$ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A$的对边$BC=5$，斜边$AB=13$，于是$\sin A=\frac{5}{13}$. $\angle B$的对边是$AC$，根据勾股定理，得$AC^2=AB^2-BC^2=13^2-5^2=144$，于是$AC=12$，因此$\sin B=\frac{12}{13}$.

**点拨：**在直角三角形中，要求一个锐角的正弦值，需要求出此角的对边及斜边.

**2. 解：**如图，




（第2题）

在直角三角形$OPH$中，$PH=4$，$OH=3$，根据勾股定理，得$OP^2=OH^2+PH^2=3^2+4^2=25$，于是$OP=5$，因为$\alpha$的对边$PH=4$，斜边$OP=5$，所以$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，即$OP$与$x$轴正方向所夹锐角$\alpha$的正弦值是$\frac{4}{5}$.

**练习**

**1. 解：**(1) $\sin 35°\approx 0.573\,6$.

(2) $\sin 65°36'\approx 0.910\,7$.

(3) $\sin 80°54'\approx 0.987\,4$.

**2. 解：**(1) $\alpha\approx 53.8°$. (2) $\alpha\approx 60.0°$.

**3. 解：**(1) $\sin^2 60°+\sin^2 45°$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$.

(2) $1-2\sin 30°\sin 60°$

$=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**练习**

**1. 解：**在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A$的邻边$AC=5$，斜边$AB=7$，于是$\cos A=\frac{5}{7}$. $\angle B$的邻边是$BC$，根据勾股定理，得$BC^2=AB^2-AC^2=7^2-5^2=24$，于是$BC=2\sqrt{6}$，因此$\cos B=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

**2. 解：**(1) $\cos 35°\approx 0.819\,2$. (2) $\cos 68°12'\approx 0.371\,4$. (3) $\cos 9°42'\approx 0.985\,7$.

**3. 解：**(1) $\alpha\approx 83.8°$. (2) $\alpha\approx 44.9°$.

**4. 解：**(1) $\cos^2 60°-\sin^2 45°$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$.

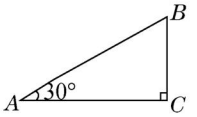
(2) $1-2\cos 30°\cos 45°$

$=1-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**习题4.1**

**A组 1. 解：**(1)构造Rt$\triangle ABC$，如图，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$\angle B=60°$.

由$\angle A=30°$，得$BC=\frac{1}{2}AB$，



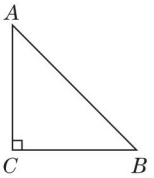

（第1(1)题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sin30°=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$. 根据勾股定理，得 $AC^2=AB^2-BC^2=AB^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=\frac{3}{4}AB^2$，于是 $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，故 $\cos30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos60°=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$.

（2）如图所示，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=\angle B=45°$.

所以 $AC=BC$，由勾股定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2=AC^2+AC^2=2AC^2$，于是 $AB=\sqrt{2}AC$，因此 $\cos45°=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{\sqrt{2}AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



（第1(2)题）

**2. 解：**（1）$\sin^230°+\sin^245°=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

（2）$1+2\sin60°\sin45°=1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**3. 解：**（1）$\sin15°\approx0.258\ 8$.（2）$\sin68°24'\approx0.929\ 8$.（3）$\sin88°36'\approx0.999\ 7$.

**4. 解：**（1）$\alpha\approx18.4°$.　（2）$\alpha\approx85.0°$.

**5. 解：**由勾股定理，得 $AC^2=AB^2-BC^2=8^2-7^2=15$，所以 $AC=\sqrt{15}$. 所以 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{7}{8}$.

**6. 解：**（1）$\cos8°\approx0.990\ 3$.（2）$\cos26°12'\approx0.897\ 3$.（3）$\cos83°24'\approx0.114\ 9$.

**7. 解：**（1）$\alpha\approx71.6°$.（2）$\alpha\approx58.9°$.

**8. 解：**（1）$\sin^245°+\cos^245°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

（2）$\cos30°\cos45°\cos60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

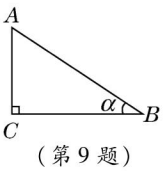
（3）$2\cos^260°-1=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

（4）$\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**B组　9. 证明：**如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=\alpha$.

$\therefore\sin\alpha=\frac{AC}{AB}$，$\cos\alpha=\frac{BC}{AB}$，

$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\frac{AC^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=\frac{AB^2}{AB^2}=1$.



（第9题）

**10. 解：**过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$，$\because AD=45$，$\angle A=60°$，$\therefore DE=AD\cdot\sin A=45\times\sin60°=\frac{45\sqrt{3}}{2}$.

又 $\because AB=60$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 $AB\cdot DE=60\times\frac{45\sqrt{3}}{2}=1\ 350\sqrt{3}$.

## 4.2 正　切

### 练习

**1. 解：**$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{7}$，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{7}{5}$.

**2. 解：**（1）$\tan35°\approx0.700\ 2$.

（2）$\tan68°12'\approx2.500\ 2$.

（3）$\tan9°42'\approx0.170\ 9$.

**3. 解：**（1）$\alpha\approx6.2°$.　（2）$\alpha\approx89.4°$.

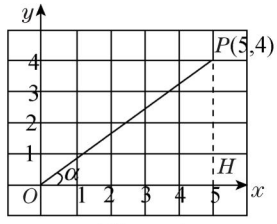
**4. 解：**（1）$1+\tan^260°=1+(\sqrt{3})^2=1+3=4$.

（2）$\tan30°\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

### 习题4.2

**A组　1. 解：**在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $BC^2=AB^2-AC^2=13^2-12^2=25$，$\therefore BC=5$，$\therefore\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}$，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{12}{5}$.

**2. 解：**如图，过 $P$ 作 $PH\perp x$ 轴，交 $x$ 轴于 $H$ 点. 在 $Rt\triangle OPH$ 中，$PH=4$，$OH=5$，$\therefore\tan\alpha=\frac{PH}{OH}=\frac{4}{5}$，即 $OP$ 与 $x$ 轴正方向所夹锐角 $\alpha$ 的正切值是 $\frac{4}{5}$.



（第2题）

**3. 解：**（1）$\frac{\sin30°}{\tan30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）$\tan30°\tan60°=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$.

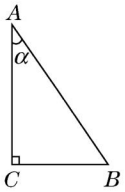
（3）$\frac{2\tan30°}{1-\tan^230°}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4) $\dfrac{\tan60°-\tan45°}{1+\tan60°\tan45°}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\times1}=$

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

**B 组 4. 证明:** 如图,在 Rt△$ABC$ 中,



(第 4 题)

$\angle C=90°$, $\angle A=\alpha$, $\therefore \tan\alpha=\dfrac{BC}{AC}$,

$\sin\alpha=\dfrac{BC}{AB}$, $\cos\alpha=\dfrac{AC}{AB}$, 则 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}}=$

$\dfrac{BC}{AC}=\tan\alpha$.

**5. 解:**

| 锐角 $\alpha$ | … | 10° | 20° | 40° | 50° | 70° | 80° | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | … | 0.174 | 0.342 | 0.643 | 0.766 | 0.940 | 0.985 | … |
| $\cos\alpha$ | … | 0.985 | 0.940 | 0.766 | 0.643 | 0.342 | 0.174 | … |
| $\tan\alpha$ | … | 0.176 | 0.364 | 0.839 | 1.192 | 2.747 | 5.671 | … |

随着锐角 $\alpha$ 度数的不断增大,其正弦值和正切值越来越大,余弦值越来越小.

## 4.3 解直角三角形

**练习**

**1. 解:** $\because \angle C=90°$, $\angle B=45°$, $\therefore \angle A=180°-\angle C-\angle B=180°-90°-45°=45°$,

$\therefore \angle A=\angle B$, $\therefore a=b=3$ cm,

由勾股定理,得 $c^2=a^2+b^2=3^2+3^2=18$,

$\therefore c=3\sqrt{2}$ cm.

**2. 解:** 在 Rt△$ABC$ 中, $\angle C=90°$, 根据勾股定理,得 $b^2=c^2-a^2=10^2-6^2=64$, $\therefore b=8$ cm.

$\because \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$, $\therefore \angle A\approx37°$,

$\because \sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$, $\therefore \angle B\approx53°$.

**3. 解:** 在 Rt△$ABC$ 中, $\because \angle C=90°$, $\angle A=30°$,

$\therefore a=\dfrac{1}{2}c=\dfrac{1}{2}\times16=8$(cm).

根据勾股定理,得 $b^2=c^2-a^2=16^2-8^2=192$,

$\therefore b=8\sqrt{3}$ cm.

**习题 4.3**

**A 组 1. 解:** (1) 在 Rt△$ABC$ 中,

$\angle C=90°$, $\tan A=\dfrac{a}{b}$,

$\therefore a=b\cdot\tan A=10\sqrt{3}\cdot\tan60°=30$.

$\because \cos A=\dfrac{b}{c}$,

$\therefore c=\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\cos60°}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=20\sqrt{3}$.

(2) 在 Rt△$ABC$ 中, $\angle C=90°$,

根据勾股定理,

得 $a^2=c^2-b^2=(2\sqrt{3})^2-3^2=12-9=3$,

$\therefore a=\sqrt{3}$.

$\because \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \angle A=30°$.

**2. 解:** $\because DE\perp AB$, $\cos A=\dfrac{3}{5}$,

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{3}{5}$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD=AB$,

$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{5}$,

设 $AD=5x(x>0)$,

则 $AB=5x$, 可得 $AE=3x$, $BE=2x$.

$\therefore DE^2=AD^2-AE^2=16x^2$,

$\therefore DE=4x$,

$\therefore \tan\angle DBE=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{4x}{2x}=2$.

**3. 解:** $\because \angle C=90°$, $\angle BDC=45°$,

$\therefore \angle DBC=180°-90°-45°=45°$,

$\therefore BC=DC=6$,

$\because \sin A=\dfrac{BC}{AB}$,

$\therefore AB=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{6}{\frac{2}{5}}=15$.

**B 组 4. 解:** 在△$ADE$ 和△$CAB$ 中,

$\angle AED=\angle CBA=90°$, $\angle DAE=\angle ACB$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle CAB$,

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{AD}{CA}$, 即 $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{AB}{CA}$,

$\because \cos\alpha=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{3}{5}$,

$\therefore \dfrac{AB}{CA}=\dfrac{3}{5}$,

又 $\because AB=3$, $\therefore CA=5$,

$\therefore BC^2=CA^2-AB^2=5^2-3^2=16$,

$\therefore BC=4$,

$\therefore AD=BC=4$.

**5. 解:** 由题意知, $OM=2$,

$\because \tan\angle OMN=\dfrac{ON}{OM}$,

$\therefore ON=OM\cdot\tan\angle OMN=2\cdot\tan60°=2\sqrt{3}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $N(0,2\sqrt{3})$，将$(2,0)$和$(0,2\sqrt{3})$代入$y=kx+b$，得$\begin{cases}0=2k+b,\\2\sqrt{3}=b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\sqrt{3},\\b=2\sqrt{3},\end{cases}$

故此一次函数的表达式为$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$.

## 4.4 解直角三角形的应用

**练习**

**1. 解：**由题意得$\angle BAC=30°$，$AB=500$ m，∴ $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times500=250$(m)，∴ $B$处与河岸的距离$BC$为250 m.

**2. 解：**过点$A$作$AD\perp MN$交$MN$于点$D$，则$AD=1$ m，∵ $\tan\angle ABD=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{BD}=\tan8°$，$\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{CD}=\tan15°$，

∴ $\frac{1}{BD}\approx0.140\,5$，$\frac{1}{CD}\approx0.267\,9$，

∴ $BD\approx7.12$ m，$CD\approx3.73$ m，

∴ $BC=BD-CD\approx3.4$(m)，

∴ 该车大灯照亮地面的宽度$BC$约为3.4 m.

**练习**

**1. 解：**∵ $AB^2=h^2+\left(\frac{1}{2}l\right)^2=3.5^2+\left(\frac{1}{2}\times10\right)^2=37.25$，∴ $AB\approx6.1$ m. ∵ $\tan\alpha=\frac{h}{\frac{l}{2}}=\frac{3.5}{\frac{10}{2}}=0.7$，

∴ $\alpha\approx35°$.

**2. 解：**由题意得$\angle CAB=90°-55°=35°$，$\angle ABC=90°-35°=55°$，所以$\angle C=180°-\angle CAB-\angle ABC=180°-35°-55°=90°$. 设$BC=x$ km，则$AC=(x+40)$ km，$\tan\angle CAB=\frac{BC}{AC}=\tan35°$，即$\frac{x}{x+40}\approx0.700\,2$，解得$x\approx93.4$，则$x+40\approx93.4+40=133.4$，即$BC\approx93.4$ km，$AC\approx133.4$ km，由勾股定理得，$AB^2=BC^2+AC^2\approx93.4^2+133.4^2=26\,519.12$，所以$AB\approx162.8$ km，故$A$，$B$两船的距离约为162.8 km.

**习题4.4**

**A组** **1. 解：**(1) ∵ $\sin\angle CBD=\frac{CD}{BC}=\frac{CD}{10}=\sin12°$，

∴ $CD=10\cdot\sin12°\approx2.1$(m)，

∴ 坡高$CD$约为2.1 m.

(2) ∵ $\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\tan5°$，$\tan\angle CBD=\frac{CD}{BD}=\tan12°$，

∴ $AD=\frac{CD}{\tan5°}\approx\frac{2.1}{\tan5°}\approx24.0$(m)，$BD=\frac{CD}{\tan12°}\approx\frac{2.1}{\tan12°}\approx9.9$(m)，

∴ $AB=AD-BD\approx24.0-9.9=14.1$(m)，

∴ 斜坡新起点$A$与原起点$B$的距离约为14.1 m.

**2. 解：**由题意得，$\angle ABC=90°$，$AB=12$ km，$\angle CAB=90°-60°=30°$，

∵ $\tan\angle CAB=\frac{CB}{AB}=\frac{CB}{12}=\tan30°$，

∴ $CB=12\cdot\tan30°=4\sqrt{3}$(km)，

∴ 这时渔船与灯塔$C$的距离是$4\sqrt{3}$ km.

**3. 解：**设射线$AB$交$DE$于点$F$，由题意得，$DF=BC=0.2$ m，$CD=BF$，

∵ $EF=DE-DF=2.3-0.2=2.1$(m)，$\tan\alpha=\frac{EF}{AF}=\frac{EF}{BF+0.02}=\tan40°$，

∴ $\frac{2.1}{BF+0.02}\approx0.839\,1$，

∴ $BF\approx2.5$(m)，

∴ $CD=BF\approx2.5$ m，

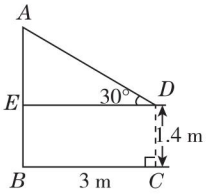
∴ 空调挂机底部位置距离床的高度$CD$约为2.5 m.

**4. 解：**如图所示，由题意得$DE=BC=3$ m，$BE=CD=1.4$ m，在Rt△$ADE$中，$\tan\angle ADE=\frac{AE}{DE}=\frac{AE}{3}=\tan30°$，

∴ $AE=3\cdot\tan30°\approx1.7$(m)，

∴ $AB=AE+EB\approx1.7+1.4=3.1$(m)，

∴ 该圣诞树的高度约为3.1 m.



（第4题）

**5. 解：**由题意得，$\angle BAD=90°-60°=30°$，$\angle CAD=90°-30°=60°$，在Rt△$BAD$中，$\tan\angle BAD=\frac{BD}{AD}=\frac{BD}{30}=\tan30°$，

∴ $BD=30\cdot\tan30°=10\sqrt{3}$(m)$\approx17.32$(m)，

在Rt△$CAD$中，$\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{CD}{30}=\tan60°$，

∴ $CD=30\cdot\tan60°=30\sqrt{3}$(m)，

∴ $BC=CD-BD=30\sqrt{3}-10\sqrt{3}=20\sqrt{3}\approx34.64$(m).

**B组** **6. 解：**(1) 在Rt△$ABC$中，$\tan\angle ACB=\frac{AB}{CB}=\frac{4}{3}$，∴ $\angle ACB\approx53°$，∴ 由$A$测得$C$的方位角的大小约为53°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由题意得,

$\angle PAM=65°$,$\angle PCM=48°$,

在Rt△$ABC$中,

$\because AB=4$ km,$BC=3$ km,

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$(km).

在Rt△$APM$中,$\because \tan\angle PAM=\dfrac{PM}{AM}=\dfrac{h}{AM}=\tan65°$,

$\therefore AM=\dfrac{h}{\tan65°}\approx0.5h$(km),

在Rt△$PCM$中,

$\because \tan\angle PCM=\dfrac{PM}{CM}=\dfrac{h}{CM}=\tan48°$,

$\therefore CM=\dfrac{h}{\tan48°}\approx0.9h$(km),

$\because AC=AM+CM$,

即$5=0.5h+0.9h$,

$\therefore h\approx3.6$(km).

**7. 解:**如图,过点$B$作$BD\perp MN$于点$D$,并反向延长$BD$交$CE$于点$E$,则$BE\perp CE$,过点$C$作$CF\perp MN$于点$F$,则$CF=DE$,$CE=FD$,

$\because AB:BC=2:3$,

$\therefore$设$AB=2k$,则$BC=3k$,

在Rt△$BAD$中,

$\because \cos\angle BAD=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AD}{2k}=\cos25°$,

$\therefore AD=2k\cdot\cos25°\approx1.8k$,

$\because \sin\angle BAD=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{BD}{2k}=\sin25°$,

$\therefore BD=2k\cdot\sin25°\approx0.8k$.

在Rt△$BCE$中,

$\because \cos\angle BCE=\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{CE}{3k}=\cos40°$,

$\therefore CE=3k\cdot\cos40°\approx2.3k$,

$\therefore DF=CE\approx2.3k$.

$\because \sin\angle BCE=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BE}{3k}=\sin40°$,

$\therefore BE=3k\cdot\sin40°\approx1.9k$,

$\therefore DE=BD+BE\approx0.8k+1.9k=2.7k$,$AF=AD+DF\approx1.8k+2.3k=4.1k$,

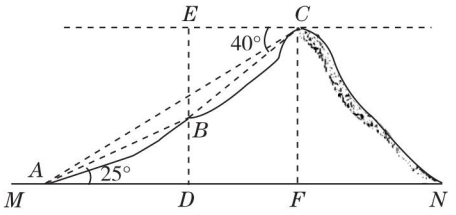
$\therefore CF=DE\approx2.7k$,

在Rt△$CAF$中,

$\tan\angle CAF=\dfrac{CF}{AF}\approx\dfrac{2.7k}{4.1k}=\dfrac{27}{41}$,

$\therefore \angle CAF\approx33.4°$,

$\therefore$由$A$处测得$C$处的仰角约为$33.4°$.



(第7题)

**复习题4**

**A组** **1. 解:**在Rt△$ABC$中,$\angle C=90°$,$AB=12$ cm,$BC=10$ cm,$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{12^2-10^2}=2\sqrt{11}$(cm),$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$,$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{11}}{12}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$,$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{10}{2\sqrt{11}}=\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$,$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{11}}{12}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$,$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$,$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{2\sqrt{11}}{10}=\dfrac{\sqrt{11}}{5}$.

**2. 解:**(1)$1-2\sin^230°=1-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2)$\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(3)$\dfrac{\sin45°}{\cos60°}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

(4)$\dfrac{\tan30°+\tan45°}{1-\tan30°\tan45°}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$.

**3. 解:**由$\tan\alpha=0.625$,且$\alpha$是锐角,得$\alpha\approx32°$,$\sin\alpha\approx\sin32°\approx0.5299$,$\cos\alpha\approx\cos32°\approx0.8480$.

**4. 解:**(1)$\sin3°15'\approx0.0567$. $\cos3°15'\approx0.9984$. $\tan3°15'\approx0.0568$.

(2)$\sin68°6'\approx0.9278$. $\cos68°6'\approx0.3730$. $\tan68°6'\approx2.4876$.

**5. 解:**(1)$\alpha\approx19°$. (2)$\alpha\approx44°$. (3)$\alpha\approx16°$.

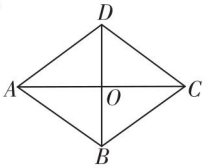
**6. 解:**$\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-30°-90°=60°$,$\because \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{12}=\sin30°$,$\therefore a=12\sin30°=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$12\times\frac{1}{2}=6$(cm). ∵ $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{b}{12}=\cos30°$,

∴ $b=12\cos30°=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$(cm).

**7. 解：** 如图，设 $AC$，$BD$ 交于点 $O$，



（第 7 题）

∵ 四边形$ABCD$是菱形，

∴ $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4.8=2.4$(cm)，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times3.6=1.8$(cm)，$AC\perp BD$，

∴ $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{2.4^2+1.8^2}=3$(cm).

∵ $\tan\angle OAB=\frac{BO}{AO}=\frac{1.8}{2.4}=\frac{3}{4}$，

∴ $\angle OAB\approx37°$，

∴ $\angle DAB=2\angle OAB\approx37°\times2=74°$，$\angle ABO\approx90°-37°=53°$，

∴ $\angle ABC=2\angle ABO\approx2\times53°=106°$，

∴ 菱形的边长为 3 cm，$\angle DAB\approx74°$，$\angle ABC\approx106°$.

**8. 解：**（1）在 Rt△$CDE$ 中，$\sin\angle CED=\frac{CD}{DE}=\frac{CD}{76}=\sin60°$，∴ $CD=76\sin60°=76\times\frac{\sqrt{3}}{2}=38\sqrt{3}$(cm).

答：垂直支架 $CD$ 的长度为 $38\sqrt{3}$ cm.

（2）设 $OD=x$ cm，则 $OB=x$ cm，在 Rt△$AOC$ 中，$\sin A=\frac{OC}{OA}=\frac{OD+DC}{OB+BA}=\frac{x+38\sqrt{3}}{x+150}=\sin30°=\frac{1}{2}$，解得 $x=150-76\sqrt{3}$，即 $OD$ 的长度为 $(150-76\sqrt{3})$ cm.

**9. 解：** 在 Rt△$END$ 中，$\tan\angle END=\frac{ED}{ND}=\tan30°$，

∴ $ND=\frac{ED}{\tan30°}=\sqrt{3}ED$，

在 Rt△$EMD$ 中，$\tan\angle EMD=\frac{ED}{MD}=\tan20°$，

∴ $MD=\frac{ED}{\tan20°}\approx2.747ED$，

∵ $MN=MD-ND=25$ m，

∴ $2.747ED-\sqrt{3}ED\approx25$，解得 $ED\approx24.63$ m，

∴ 点 $E$ 到地面的距离 $ED$ 约为 24.63 m.

**10. 解：** 在 Rt△$ABC$ 中，$\tan\angle ACB=\frac{AB}{CB}=\frac{AB}{d_1}=\tan40°$，∴ $AB=d_1\tan40°=4\times\tan40°\approx3.356$(m)，

在 Rt△$ABD$ 中，$\tan\angle ADB=\tan36°=\frac{AB}{DB}\approx\frac{3.356}{d_2}$，∴ $d_2\approx\frac{3.356}{\tan36°}\approx4.619$(m)，∴ $DC=d_2-d_1\approx4.619-4=0.619\approx0.62$(m). ∴ 楼梯占用地面增加的长度 $DC$ 约为 0.62 m.

**B 组　11. 解：** 由题意，得 $\angle BOR=90°$，$\angle ARO=30°$，$\angle BRO=45°$，

∴ $OB=OR$.

∵ $\sin\angle ARO=\frac{OA}{AR}=\frac{OA}{4}=\sin30°$，

∴ $OA=4\sin30°=4\times\frac{1}{2}=2$(km).

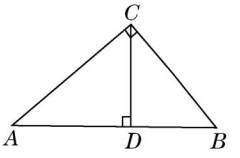
又∵ $\cos\angle ARO=\frac{OR}{AR}=\frac{OR}{4}=\cos30°$，

∴ $OR=4\cos30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx3.464$(km).

∴ $AB=OB-OA=OR-OA\approx3.464-2=1.464$(km).

∴ 火箭从 $A$ 到 $B$ 处的平均速度约为 $1.464\div5=0.2928$(km/s) $\approx293$ m/s.

**12. 解：** 如图，因为 $\tan A=\frac{CD}{AD}=\frac{3.8}{4.6}\approx0.8261$，所以 $\angle A\approx40°$，所以 $\angle B=90°-\angle A\approx90°-40°=50°$. 因为 $AC^2=AD^2+CD^2$，所以



（第 12 题）

$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4.6^2+3.8^2}\approx6.0$(cm)，因为 $\tan A=\frac{BC}{AC}$，所以 $BC=AC\cdot\tan A\approx6.0\times\tan40°\approx5.0$(cm). 因为 $\sin A=\frac{BC}{AB}$，所以 $AB=\frac{BC}{\sin A}\approx\frac{5.0}{\sin40°}\approx7.8$(cm).

**13. 解：** 根据题意，易得 $BD=400-124=276$(m)，$CB_2=1\ 100-400=700$(m)，$\angle BAA_2=30°$，$\angle CBB_2=45°$. 在 Rt△$ABD$ 中，$\sin\angle BAD=\sin30°=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{2}$，所以 $AB=2BD=2\times276=552$(m). 在 Rt△$BCB_2$ 中，$\sin\angle CBB_2=\sin45°=\frac{CB_2}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $BC=\frac{CB_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{700}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx989.95$(m)，所以 $AB+BC\approx552+989.95\approx1\ 542$(m).

答：钢缆 $AB$ 和 $BC$ 的总长度约为1 542 m.

**C 组　14.**（1）**解：** 过 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于 $D$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 $\mathrm{Rt}\triangle CAD$ 中，$\sin A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{CD}{b}$，

$\therefore CD=b\cdot\sin A.$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CD=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin A.$

即 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A.$

(2)**证明**：由(1)可知 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，

同理得 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B.$

$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B,$

$\therefore b\sin A=a\sin B,$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}.$

(3)**解**：由(2)可知 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，

$\therefore \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$，即 $\dfrac{7}{8}=\dfrac{\sin B}{\frac{4}{7}\sqrt{3}}$，

$\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \angle B=60°$，$\therefore \angle BCD=30°.$

又 $\because BD=8,$

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$BC=2BD=16$，$\tan B=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{CD}{8}=\tan 60°$，

$\therefore CD=8\sqrt{3}$，易得 $AC=14.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=2$，

$\therefore AB=AD+BD=2+8=10.$

## 第5章 用样本推断总体

### 5.1 总体平均数与方差的估计

**练习**

**1. 解**：小明这 20 天从起床至到达教室所需的时间的平均数 $\bar{x}=(45\times2+46\times1+47\times1+48\times2+49\times4+50\times5+51\times3+52\times1+53\times1)\div20=49.15(\mathrm{min})$. 由于这 20 天记录的时间是随机的，因此可以估计小明从起床至到达教室所需的平均时间为49. 15 min.

**2. 解**：从甲包装机包装的糖果中随机抽取的 10 袋糖果的质量的平均数 $\bar{x}_{甲}$，方差 $s^2_{甲}$ 分别为 $\bar{x}_{甲}=(202+203+202+196+199+201+200+197+201+199)\div10=200(\mathrm{g})$，$s^2_{甲}=\dfrac{(202-200)^2+(203-200)^2+\cdots+(199-200)^2}{10}$

$=4.6.$

从乙包装机包装的糖果中随机抽取的 10 袋糖果的质量的平均数 $\bar{x}_{乙}$，方差 $s^2_{乙}$ 分别为 $\bar{x}_{乙}=(201+199+200+204+200+202+196+195+202+201)\div10=200(\mathrm{g})$，$s^2_{乙}=\dfrac{(201-200)^2+(199-200)^2+\cdots+(201-200)^2}{10}$

$=6.8.$

因为 $4.6<6.8$，即 $s^2_{甲}<s^2_{乙}$，所以甲包装机包装糖果的质量比较稳定.

**习题 5.1**

**A 组　1. 解**：这 15 名学生用于课外作业的时间的平均数 $\bar{x}=(75+80+85+65+95+100+70+55+65+75+85+110+118+80+90)\div15=83.2(\mathrm{min})$，由于这 15 名学生是随机抽取的，因此可估计该校的学生用于课外作业的平均时间为 83. 2 min.

**2. 解**：甲工人所加工的零件中，随机抽取的 10 个零件的直径的平均数 $\bar{x}_{甲}$，方差 $s^2_{甲}$ 分别为

$\bar{x}_{甲}=(19.9+19.7+19.8+20.0+20.1+19.9+20.2+20.3+20+20.1)\div10=20(\mathrm{mm})$，$s^2_{甲}=\dfrac{(19.9-20)^2+(19.7-20)^2+\cdots+(20.1-20)^2}{10}$

$=0.03.$

乙工人所加工的零件中，随机抽取的 10 个零件的直径的平均数 $\bar{x}_{乙}$，方差 $s^2_{乙}$ 分别为

$\bar{x}_{乙}=(20.0+20.2+19.8+19.9+19.7+20.2+20.1+19.7+20.2+20.2)\div10=20(\mathrm{mm})$，$s^2_{乙}=\dfrac{(20.0-20)^2+(20.2-20)^2+\cdots+(20.2-20)^2}{10}$

$=0.04$，因为 $0.03<0.035$，$0.04>0.035$，

所以乙工人所用的机器生产不正常.

**B 组　3. 解**：从甲班随机抽取的 5 名学生成绩的平均数 $\bar{x}_{甲}$，方差 $s^2_{甲}$ 分别为

$\bar{x}_{甲}=(50+70+70+80+80)\div5=70(分)$，

$s^2_{甲}=\dfrac{(50-70)^2+(70-70)^2\times2+(80-70)^2\times2}{5}=120.$

从乙班随机抽取的 5 名学生成绩的平均数 $\bar{x}_{乙}$，方差 $s^2_{乙}$ 分别为

$\bar{x}_{乙}=(45+55+80+85+85)\div5=70(分)$，$s^2_{乙}=\dfrac{(45-70)^2+(55-70)^2+(80-70)^2+(85-70)^2\times2}{5}$

$=280.$

由于 5 名学生的成绩是随机抽取的，因此可以估计甲班的竞赛成绩的平均数为 70 分，方差为 120，乙班的竞赛成绩的平均数为 70 分，方差为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

280，所以甲班竞赛成绩更稳定.

4. 略.

## 5.2 统计的简单应用

**练习**

1. 解：50 000 × 95% = 47 500（名）.

答：估计该市九年级学生中身体素质达标的学生人数为 47 500 名.

2. 解：（1）补全表格如下.

| 分组 | 频数 | 频率 |
|---|---|---|
| $51 \leqslant x < 61$ | 40 | 0.08 |
| $61 \leqslant x < 71$ | 80 | 0.16 |
| $71 \leqslant x < 81$ | 100 | 0.20 |
| $81 \leqslant x < 91$ | 160 | 0.32 |
| $91 \leqslant x < 101$ | 120 | 0.24 |
| 合计 | 500 | 1 |

（2）由上表可知，成绩在 71 分至 90 分之间（含 71 分，90 分）的频率为 0.20 + 0.32 = 0.52. 又随机抽取的这 500 名学生的成绩组成了一个简单随机样本，因而可以用这个样本的频率（0.52）估计该市 19 000 名中学生的相应频率，因此，估计该市获得二等奖的学生人数为 19 000 × 0.52 = 9 880（名）.

**练习**

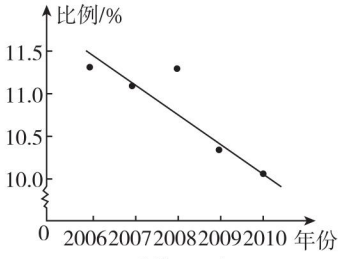
1. 解：计算每种原料的周平均消耗量，结果如下表.

| | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|
| 周平均消耗量/t | 191 | 99 | 101 |

因为 191 ∶ 99 ∶ 101 ≈ 2 ∶ 1 ∶ 1，所以每次进料时 *A*，*B*，*C* 三种原料的进料比例应为 2 ∶ 1 ∶ 1，以使工厂尽量少发生原料过多囤积或短缺的现象.

2. 解：（1）如图.

我国 2006—2010 年第一产业在国民生产总值中的比例




（第 2 题）

（2）如图，第一产业在我国国民生产总值中的比例在近几年内是逐年降低的.

**习题 5.2**

**A 组** 1. 解：120 × 43.5% = 52.2（$km^2$），故估算该城市森林所占面积为 52.2 $km^2$.

2. 解：估计该市九年级的学生有 $2\ 000 \div \frac{1}{14+9+6+1} = 60\ 000$（名），

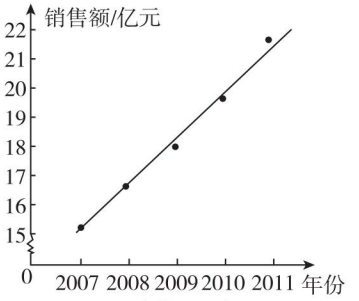
估计该市可以被评为“A”级的学生有 $60\ 000 \times \frac{14}{14+9+6+1} = 28\ 000$（名），

估计该市可以被评为“B”级的学生有 $60\ 000 \times \frac{9}{14+9+6+1} = 18\ 000$（名）.

3. 解：（1）如图.

（2）如图，我国数字音乐市场规模在近几年内是逐年变大的.

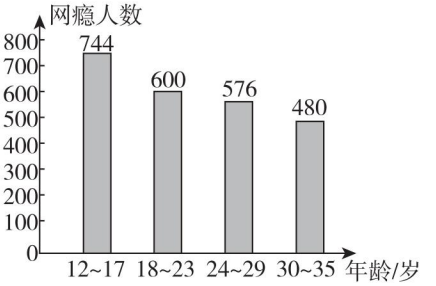
2007—2011 年中国数字音乐销售额




（第 3 题）

**B 组** 4. 解：（1）480 ÷ 20% = 2 400（人）.

2 400 − 600 − 576 − 480 = 744（人）. 如图.




（第 4 题）

（2）$2\ 000 \times \frac{744}{2\ 400} = 620$（万人）.

答：估计我国目前 12 ~ 35 岁的网瘾人群中 12 ~ 17 岁的网瘾人数为 620 万人.

5. 略.

**复习题 5**

**A 组** 1. 解：随机抽取的 40 名学生 5 min 投篮测验成绩的平均数 $\bar{x} = (10 + 16 + 12 + \cdots + 24 + 24 +$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10)÷40=18(个),

由于这40名学生是随机抽取的,因此可以估计该校九年级学生5 min投篮成绩的平均数是18个.

**2.** 解:随机抽取的20户家庭上年度人均收入的平均数$\bar{x}$,方差$s^2$分别为

$\bar{x}=(3.4+3.5+3.4+\cdots+3.2+3.1+3.3)\div 20=3.5$(万元),$s^2=$

$$\frac{(3.4-3.5)^2+(3.5-3.5)^2+\cdots+(3.3-3.5)^2}{20}$$

$=0.071$.

由于这20户家庭是随机抽取的,因此可以估计该镇居民上年度的人均收入为3.5万元,方差为0.071.

**3.** 解:$\bar{x}=(20.2+20.7+\cdots+19.4)\div 20=19.99$(mm),$s^2=$

$$\frac{(20.2-19.99)^2+(20.7-19.99)^2+\cdots+(19.4-19.99)^2}{20}$$

$=0.162\,9$. 因为19.99 mm在$(20\pm 0.05)$mm范围内,方差$0.162\,9<0.2$,所以当日机器在9:00—11:00工作正常.

**4.** 解:$2\,104\div\frac{24}{576}=50\,496$(只).

答:估计该池塘里约有50 496只虾.

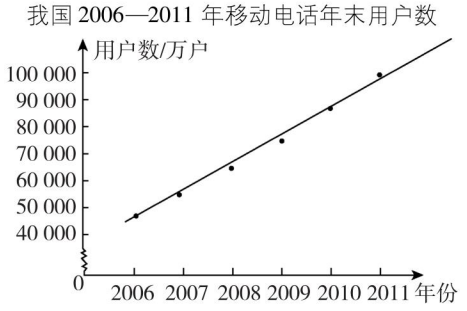
**5.** 解:(1)补全表格如下:

| 等级 | 非常了解 | 比较了解 | 基本了解 | 不太了解 |
|---|---|---|---|---|
| 频数 | 40 | 120 | 36 | 4 |
| 频率 | 0.2 | 0.6 | 0.18 | 0.02 |

(2)$2\,500\times 0.6=1\,500$(人).

答:估计这些学生中“比较了解”垃圾分类知识的人数为1 500人.

**6.** 解:如图,我国移动电话年末用户数在近几年内逐年增加.




(第6题)

**B组 7.** 解:(1)补全表格如下:

| 使用寿命$x$/h | $100\leqslant x<200$ | $200\leqslant x<300$ | $300\leqslant x<400$ | $400\leqslant x<500$ | $500\leqslant x<600$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 个数 | 20 | 30 | 80 | 40 | 30 |

样本频率分布表如下:

| 分组 | 频数 | 频率 |
|---|---|---|
| $100\leqslant x<200$ | 20 | 0.10 |
| $200\leqslant x<300$ | 30 | 0.15 |
| $300\leqslant x<400$ | 80 | 0.40 |
| $400\leqslant x<500$ | 40 | 0.20 |
| $500\leqslant x<600$ | 30 | 0.15 |
| 合计 | 200 | 1 |

(2)估计20 000个该型号电子元件中使用寿命为$100\leqslant x<400$(h)的个数为$20\,000\times(0.10+0.15+0.40)=13\,000$(个).

**8.** 解:(1)视力在5.0以上的频率为

$$\frac{15+5+2}{0+1+2+\cdots+5+2}=\frac{22}{100}=0.22.$$

估计该地区10 000名九年级学生中视力正常的学生有$10\,000\times 0.22=2\,200$(名).

(2)$10\,000\times 70\%-2\,200=4\,800$(名),估计该地区要有4 800名学生通过矫正达到正常.

**C组 9.** 解:能. 推断出该市初中生的人数为$300\times\frac{1\,200}{30\,000}=12$(万),小刘的结果与该市教育局统计的结果不符. 原因是小刘所抽取的样本不具有代表性.

**10.** 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 本册方法总览简释

1. **待定系数法：**待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数表达式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求待定系数的值，从而确定函数表达式，这种方法叫作待定系数法.

2. **特殊值法：**又叫特值法，即通过设题中某个未知量为特殊值，从而通过简单的运算，得出最终答案的一种方法.这个特殊值必须满足三个条件：首先，无论这个量的值是多少，对最终结果所要求的量的值没有影响；其次，这个量应该要跟最终结果所要求的量有相对紧密的联系；最后，这个量在整个题干中给出的等量关系是一个不可或缺的量.

3. **割补法：**割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则图形转化为规则图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答.有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的.

4. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法.数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

5. **建模思想：**建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

6. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

7. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法.

8. **定义法：**所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的.因此，用定义法解题，是最直接的方法.

9. **整体思想：**一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

10. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.

11. **转化思想：**转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记

点拨®

荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料