教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

中国品牌创新发展工程　推荐品牌



本书解题方法50招·七八九年级共258招

九年级
数学（上）

荣德基 主编
（SK版）
赠教材习题答案

吉林教育出版社

扫码后，您将享受10项专属服务

海量资源
一"码"搞定

教师专享服务

1 配套授课课件
2 其他相关教学资源包
3 单元测试卷电子版

学生专享服务

4 重难点点拨微课堂 直通车
5 物理动态实验演示视频
6 化学动态实验演示视频
7 线上答疑解惑服务

惊喜活动

8 尖子生凭成绩单免费领取《点拨》
9 教师免费领取样书试用大礼包
10 优秀教师有机会加入中国品牌创新发展工程推荐品牌《点拨》丛书编委会

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

特高级教师

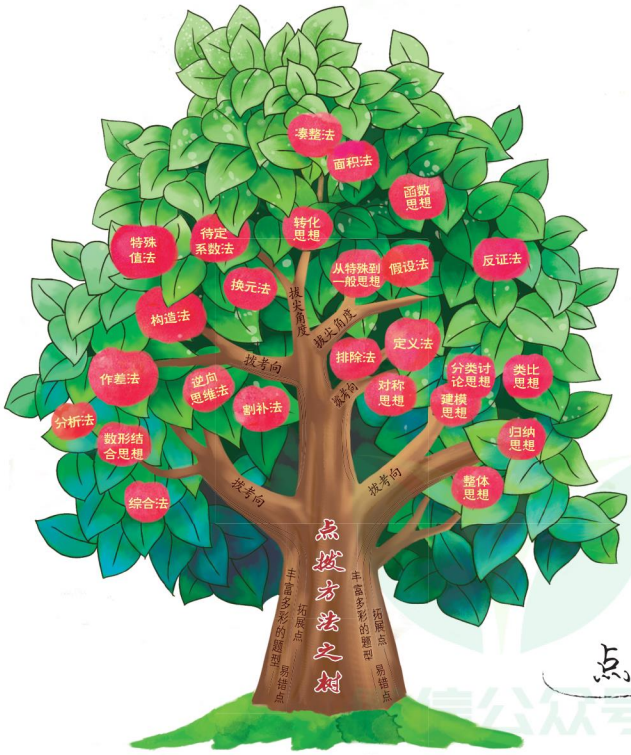
点拨®

知识
方法
素养

九年级 数学 上 （SK 版）

荣德基 主编

本册主编：陈礼军



老师批注方法
点拨只为高分

吉林教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨

批注式学习的践行者

老师批注方法
点拨只为高分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

买书？看完点拨再做决定！

中考压轴题的抢分绝招
培优拔尖题的破解策略
实用的方法技巧揭秘
精准的重难疑惑点拨
简约的知识梳理总结

冲满分

第1步 基础速提分
给你一把打开数学之门的钥匙

点知识·拨考向 速提分

点拨01 直接开平方法

1. 定义　利用平方根的意义直接开平方，求一元二次方程解的方法叫做直接开平方法．若 $x^2=a(a\geq 0)$，则 x 是 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$．

2. 关于 x 的一元二次方程 $(ax+h)^2=k(a、h、k$ 为常数，$a\neq 0)$ 的解（根）的情况：

（1）当 $k>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，$x_1=\frac{-h+\sqrt{k}}{a}$，$x_2=\frac{-h-\sqrt{k}}{a}$；

（2）当 $k=0$ 时，方程有两个相等的实数根，$x_1=x_2=-\frac{h}{a}$；

（3）当 $k<0$ 时，方程没有实数根．

3. 用直接开平方法解一元二次方程的一般步骤

步骤1：移项，将方程变成左边是平方式，且平方式的系数为1，右边是非负数的形式（如果方程右边是负数，那么这个方程无实数根）．

第2步 考法得满分
让你从默默无闻走向优秀卓越

点中考·拨模拟 得满分

中考视点

一元二次方程根与系数的关系是中考的重点内容之一，利用此知识可解决：（1）已知方程，求两根的和或积；（2）已知方程的一个根，求另一个根及方程中待定字母的值；（3）求关于两根的代数式的值等问题，这些都是中考考查的内容，题型主要有选择题、填空题和解答题．

三年中考兵法

考法1 利用根与系数的关系求涉及根的非对称式的值

例7 【中考·南通】若 x_1，x_2 是方程 $x^2-4x-2(2020)=0$ 的两个实数根，则代数式 $x_1^2-2x_1+2x_2$ 的值等于_____．

试题评析：本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，也考查了一元二次方程根的概念．

解法提醒：一元二次方程根与系数的关系的应用主要有以下两种类型：

1. 不解方程，求与根有关的代数式的值：有代数式是否具有对称性，若具有对称性，则直接变形，将两根之和、两根之积代入

解题秘方：

解：∵ $x=0$ 是方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的一个根，

∴ $m^2-4=0$，即 $m=\pm 2$．

又∵方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

∴ $m-2\neq 0$，即 $m\neq 2$，∴ $m=-2$．

特别警示：解题时，易忽略二次项系数不为零这一条件，导致错误．

第3步 方法提高分
为你提供解题秘方

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用代入法求一元二次方程中待定字母的值

例5 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 有一个根是0，求 m 的值．

解题秘方：紧扣方程根的定义用代入法求解．

解：∵ $x=0$ 是方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的一个根，

∴ $m^2-4=0$，即 $m=\pm 2$．

又∵方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

∴ $m-2\neq 0$，即 $m\neq 2$，∴ $m=-2$．

特别警示：解题时，易忽略二次项系数不为零这一条件，导致错误．

方法提醒：代入法是根据方程根的定义，将已知方程的根代入原方程中，建立以字母系数为元的新方程，从而求出方程中字母系数的值的一种重要方法．

二个维度 打造极致

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

老师批注方法

方法点 50 个 得高分

第1章 一元二次方程

		页码
1	检验一元二次方程根的步骤	3
2	用直接开平方法解一元二次方程的一般步骤	8
3	用配方法解一元二次方程的一般步骤	9
4	利用根的判别式判断一元二次方程根的情况的方法	11
5	常用的因式分解的方法	12
6	作差法	13
7	利用非负性最值法求代数式的最值	14
8	估算含无理数式子的大小的方法	16
9	提取公因式法	18
10	求与根有关的代数式的值的方法	24
11	列方程求解数字问题的方法	29
12	平移法	33
13	整体思想	43
14	转化思想	43
15	数形结合思想	43

第2章 对称图形——圆

		页码
1	圆中求角的常用方法	55
2	巧用圆的半径的性质比较线段的大小的方法	55
3	利用垂径定理求线段的长的方法	63
4	利用垂径定理求点的坐标的方法	65
5	求三角形的外接圆半径的方法	72
6	等边三角形的判定方法	80
7	判定直线与圆的位置关系的方法	89
8	作辅助线判定圆的切线的常用方法	91
9	用直角三角形三边长表示其内切圆半径的方法	97
10	解决求图形翻滚中路线长问题的方法	117
11	割补法	119
12	求不规则图形面积的方法	121
13	化曲为直法	128
14	分类讨论思想	136
15	转化思想	137
16	方程思想	137
17	无限逼近思想	138

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨只为高分

方法点 50 个 得高分

第3章 数据的集中趋势和离散程度

		页码
1	算术平均数的计算方法	145
2	用权重解决实际问题的策略	147
3	整体思想	149
4	求中位数的方法	154
5	确定众数的方法	155
6	求极差的方法	166
7	求方差的步骤	166
8	比较两组数据稳定性的方法	167
9	根据方差大小进行决策的方法	170
10	分类讨论思想	178
11	样本估计总体思想	179

第4章 等可能条件下的概率

		页码
1	列举法	188
2	用列表法求概率的具体步骤	192
3	判断一个事件的类型的方法	195
4	判断游戏的公平性的方法	195
5	根据模拟试验估算阴影区域面积大小的方法	206
6	方程思想	214
7	数形结合思想	215



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨微课堂



目录

索引

学方法

配方法…… 9

因式分解法…… 12

一元二次方程的解法…… 40

看微课

一元二次方程的定义…… 2

根的判别式…… 11

确定方程中字母系数的值… 22

用一元二次方程解决营销问题 …… 31

利用一元二次方程建模…… 33

观动画

点和圆的位置关系…… 51

直线与圆的位置关系…… 89

看微课

弧、弦、圆心角之间的关系… 61

三角形的外接圆和外心…… 72

圆周角定理的推论…… 80

切线的判定…… 90

三角形的内切圆…… 97

正多边形和圆的关系……107

运动中的弧长…… 117

圆锥中的最短路径……128

第 1 章 一元二次方程

1.1 一元二次方程 …… 2

1.2 一元二次方程的解法 …… 8

*1.3 一元二次方程的根与系数的关系 …… 21

1.4 用一元二次方程解决问题 …… 27

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P39

第 2 章 对称图形——圆

2.1 圆 …… 50

2.2 圆的对称性 …… 60

2.3 确定圆的条件 …… 71

2.4 圆周角 …… 78

2.5 直线与圆的位置关系 …… 89

2.6 正多边形与圆 …… 106

2.7 弧长及扇形的面积 …… 115

2.8 圆锥的侧面积 …… 125

素养提分

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P132

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 章 数据的集中趋势和离散程度

3.1 平均数 …… 145

3.2 中位数与众数 …… 154

3.3 用计算器求平均数 …… 154

3.4 方差 …… 166

3.5 用计算器求方差 …… 166

看微课

算术平均数和加权平均数…146

众数、中位数……155

利用“三数特点法”对数据进行分析……159

方差在作决策中的应用……167

素养提分

行动篇：论“决策” ☞ P153

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P176

第 4 章 等可能条件下的概率

4.1 等可能性 …… 186

4.2 等可能条件下的概率（一） …… 191

4.3 等可能条件下的概率（二） …… 204

看微课

利用列表法求概率……192

利用树状图法求概率……194

几何概型…… 204

素养提分

行动篇：游戏公平吗 ☞ P212

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P213

参考答案及点拨（单独成册）



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

01. **直接开平方法：** 形如 $ax^2=b$ 或 $a(x+c)^2=b$ 的一元二次方程，若 a，b 同号且 $a\neq 0$，则可根据开平方的意义求未知数 x 的值，这种解一元二次方程的方法就是直接开平方法．

02. **配方法：** 通过配方，把一元二次方程的一边化为完全平方式，另一边化为非负数，然后利用开平方的方法求出一元二次方程的根，这种方法叫做解一元二次方程的配方法．

03. **公式法：** 利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geqslant 0$），求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的解的方法叫做公式法．

04. **因式分解法：** 把一元二次方程的一边化为 0，而另一边分解成两个一次因式的乘积，令每一个因式等于 0，得到两个一元一次方程，解这两个方程便得到原一元二次方程的两个根，这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法．

05. **作差法：** 通过求两个数的差来比较两数大小的方法．

06. **整体思想：** 一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想．它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等．

07. **转化思想：** 转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想．

08. **数形结合思想：** 数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法．数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化．

09. **构造法：** 构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁．其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法．主要包括构造方程法、构造图形法、根据实际问题构造数学模型等．

10. **定义法：** 所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法．从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和基本事实推演出来的．因此，用定义法解题，是最直接的方法．

11. **排除法：** 排除法是一种把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉的方法．它是一种解答选择题的技巧方法，通过已知条件来确定结论（答案）的范围，把不在结论（答案）范围内的其他结论（答案）排除掉．

12. **面积法：** 运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解线段长度或得到线段之间数量关系目的的一种方法．

13. **分类讨论思想：** 把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称之为分类讨论思想．

14. **割补法：** 割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答．有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的．

15. **方程思想：** 方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法．

16. **列表法：** 当事件中涉及两个因素，并且可能出现的结果数目较多时，用表格不重不漏地列出所有可能的结果，这种方法叫做列表法．

17. **树状图法：** 当事件中涉及两个以上的因素时，用树状图的形式不重不漏地列出所有可能的结果的方法叫做树状图法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

领会方程的降次思想

领会方程的降次思想











第1章 一元二次方程

核心考点

你将见到的

- 一元二次方程及相关概念
- 一元二次方程的解法
  直接开平方法 配方法
  因式分解法 公式法
- 一元二次方程根的判别式
- 一元二次方程的根与系数的关系
- 一元二次方程的应用

核心方法

我们为你提供的

- 整体思想
- 转化思想
- 公式法
- 配方法
- 数形结合思想
- 直接开平方法

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1 一元二次方程

核心知识

- 一元二次方程的概念（重点）
- 一元二次方程的一般形式（重点）
- 一元二次方程的解
- 列一元二次方程

知识链接



点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

警示误区：

最高次数是2的项的系数的取值范围不明确的方程不一定是一元二次方程，如：$(m-2)x^2+3x-8=0$不一定是一元二次方程．要使它为一元二次方程，则二次项系数不能为0.

点知识1 一元二次方程的概念

1. 概念

等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是2（二次）的方程，叫做一元二次方程．

一元二次方程的定义

2. 一元二次方程的“三要素”

一是整式方程；二是只含有一个未知数；三是整理后未知数的最高次数是2.

拨考向 利用一元二次方程的概念解相关问题

类型1：识别一元二次方程

例1 下列方程中，一定是一元二次方程的是（　　）

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2=0$　　C. $3x^2+2y-2=0$　　D. $\frac{1}{x^2+2}=0$

解题秘方： 紧扣一元二次方程的“三要素”进行识别.

解： A. 方程中未明确a的取值情况，故此方程不一定是一元二次方程；

B. 符合一元二次方程的“三要素”，故此方程是一元二次方程；

C. 方程中含有两个未知数，故此方程不是一元二次方程；

D. 不是整式方程，故此方程不是一元二次方程．

答案： B

变式训练

☞答案见225页

1. [中考·南通]1275年，我国南宋数学家杨辉在《田亩比类乘除算法》中提出这样一个问题：直田积八百六十四步，只云阔不及长一十二步．问阔及长各几步．意思是：矩形面积864平方步，宽比长少12步，问宽和长各几步．若设长为x步，则可列方程为_____．

根据实际问题列一元二次方程，关键是找题目中的等量关系.

类型2：根据实际问题列一元二次方程

例2 [中考·桂林]参加足球联赛的每2支球队之间都要进行2场比赛，共要比赛110场，设参加比赛的球队有x支，根据题意，下面列出的方程正确的是（　　）

A. $\frac{1}{2}x(x+1)=110$　　B. $\frac{1}{2}x(x-1)=110$

C. $x(x+1)=110$　　D. $x(x-1)=110$

解题秘方： 参加比赛的球队有x支，根据参加足球联赛的每2支球队之间都要进行2场比赛，共要比赛110场，可列出方程$x(x-1)=110$.

答案： D

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 一元二次方程的一般形式

»提分·必记

1. **一般形式** 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 是常数，$a\neq 0$），这种形式叫做一元二次方程的一般形式．其中 ax^2 是二次项，bx 是一次项，c 是常数项．

特别提醒：

$a\neq 0$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的前提；反之，如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则必隐含 $a\neq 0$ 这一条件．

2. **特殊形式**

特殊形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$ax^2+bx=0$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）	a	b	0
$ax^2+c=0$（$a\neq 0$，$c\neq 0$）	a	0	c
$ax^2=0$（$a\neq 0$）	a	0	0

拔考向 利用方程的变形化一元二次方程为一般形式

»提分·秘诀

例 3 把下列一元二次方程化成一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项．

整理方程一般需经过一去（去分母、去括号）、二移、三并、四化这四个步骤．

（1）$(x+1)(x-2)=4$；

（2）$2(x-3)(x+4)=x^2-10$；

（3）$(2x-5)(x+3)+\dfrac{(2x-1)^2}{3}=10$．

特别提醒：

确定一元二次方程的各项和各项系数时注意不要丢掉各项的符号，一般情况下，将一元二次方程整理为一般形式后，若二次项系数为负数，要把它转化为正数，若有关项是分数，要把它转化为整数．

解题秘方：紧扣一元二次方程一般形式的特征及相关概念解答．

解：（1）整理方程，得 $x^2-x-6=0$．其中二次项系数为 1，一次项系数为 −1，常数项为 −6．

（2）整理方程，得 $x^2+2x-14=0$．其中二次项系数为 1，一次项系数为 2，常数项为 −14．

（3）整理方程，得 $10x^2-x-74=0$．其中二次项系数为 10，一次项系数为 −1，常数项为 −74．

点知识 3 一元二次方程的解

»提分·必记

1. **定义** 使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根．

特别提醒：

如果一个数是一元二次方程的根，那么这个数一定能使方程左右两边的值相等，由此可求待定字母的值．

2. **检验一元二次方程根的步骤**

步骤 1：将已知数值分别代入一元二次方程的左右两边．

步骤 2：若方程左右两边的值相等，则这个数就是一元二次方程的根；否则，这个数就不是一元二次方程的根．

3. **拓展** 方程的解是通称，对各种方程都适用，而方程的根是对只有一个未知数的方程的解的特称．如 $x=3$ 是方程 $x-1=2$ 的解，也可以说 $x=3$ 是这个方程的根．又如 $x=2$，$y=1$ 是二元一次方程 $x+y=3$ 的一个解，但不能说 $x=2$，$y=1$ 是这个方程的一个根．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

» 提分·秘诀

特别提醒：

将这个数代入方程中，如果这个数能使方程左右两边相等，那么这个数就是方程的根；反之，如果这个数不能使方程左右两边相等，那么这个数就不是方程的根.

拨考向 利用一元二次方程根的定义判断方程的根

例 4 判断 $x=2$，$x=3$ 是不是一元二次方程 $x^2-x=6$ 的根.

解题秘方： 紧扣一元二次方程根的定义进行判断.

解： 将 $x=2$ 代入方程，得左边 $=4-2=2$，

∵右边 $=6$，左边 $\neq$ 右边，

∴ $x=2$ 不是方程的根.

将 $x=3$ 代入方程，得左边 $=9-3=6$，

∵右边 $=6$，左边 = 右边，

∴ $x=3$ 是方程的根.

点方法·拨技巧 提高分

» 挑战·高分

方法提醒：

代入法是根据方程根的定义，将已知方程的根代入原方程中，建立以字母参数为元的新方程，从而求出方程中字母参数的值的一种有效方法.

拨尖角度 1 利用代入法求一元二次方程中待定字母的值

例 5 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 有一个根是 0，求 m 的值.

解题秘方： 紧扣方程根的定义用代入法求解.

解： ∵ $x=0$ 是方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 的一个根，

∴ $m^2-4=0$，即 $m=\pm 2$.

又∵方程 $(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

∴ $m-2\neq 0$，即 $m\neq 2$. ∴ $m=-2$.

特别警示： 解题时，易忽略二次项系数不为零这一条件，导致错误.

» 挑战·高分

解法提醒：

由于代数式 $a^2-2\,020a+\frac{2\,021}{a^2+1}$ 中含有 a^2，且其中一项的分母为 a^2+1，所以把 $a^2-2\,021a+1=0$ 变形为 $a^2+1=2\,021a$ 和 $a^2=2\,021a-1$，从而把 a^2+1 和 a^2 转化为一次式，再代入待求式子中整理化简，计算出结果.

拨尖角度 2 利用整体思想求代数式的值

例 6 已知 a 是一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，试求 $a^2-2\,020a+\frac{2\,021}{a^2+1}$ 的值.

解题秘方： 将 $x=a$ 代入一元二次方程 $x^2-2\,021x+1=0$ 中，再对等式进行变形，利用整体代入法求代数式的值.

解： ∵ a 是 $x^2-2\,021x+1=0$ 的一个根，

∴ $a^2-2\,021a+1=0$.

∴ $a^2+1=2\,021a$，$a^2=2\,021a-1$.

$$\therefore a^2-2\,020a+\frac{2\,021}{a^2+1}=2\,021a-1-2\,020a+\frac{2\,021}{2\,021a}$$

$$=a-1+\frac{1}{a}=\frac{a^2-a+1}{a}=\frac{2\,021a-1-a+1}{a}=2\,020.$$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 根据一元二次方程的一般形式求待定系数的值

例 7 一元二次方程 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ 化为一般形式后为 $2x^2-3x-1=0$，试求 a，b，c 的值.

解题秘方：根据一元二次方程的一般形式，可得方程组，通过解方程组，可得答案.

解：一元二次方程 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ 化为一般形式后为 $ax^2-(2a-b)x-(b-a-c)=0$.

∵一元二次方程 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ 化为一般形式后为 $2x^2-3x-1=0$，

$$\therefore \begin{cases} a=2, \\ 2a-b=3, \\ b-a-c=1. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=-2. \end{cases}$$

思路点拨：

本题应用待定系数法，将含有字母系数的方程，转化为关于 x 的一元二次方程的一般形式，然后根据恒等式的性质，得出系数满足的方程组，即可求解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中的主要考点有：一元二次方程的概念、一般形式、一元二次方程根的定义与应用，建立一元二次方程的模型等. 主要以选择题、填空题的形式呈现，难度较小.

三年中考兵法

考法 1 利用方程解的定义求式子的值

»冲刺·满分

例 8 [中考·兰州] $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解，则 $2a+4b=$（　　）

A. -2　　B. -3　　C. -1　　D. -6

试题评析：本题考查的是一元二次方程解（根）的定义，其实质是将求待定字母值的问题转化为方程问题.

解：∵ $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解，

∴把 $x=1$ 代入方程 $x^2+ax+2b=0$ 中，得 $1+a+2b=0$，

∴ $a+2b=-1$，∴ $2a+4b=2(a+2b)=2\times(-1)=-2$.

答案：A

解法提醒：

方程的解是能使方程左右两边的值相等的未知数的值，x=1 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解，即当 x = 1 时方程左右两边的值相等，所以有 $1^2+a\times1+2b=0$. 解答本题的关键是得出 $a+2b=-1$，然后利用整体代入的方法计算 $2a+4b$ 的值.

考法 2 利用整体思想及方程解的定义求解

例 9 [中考·温州] 我们知道方程 $x^2+2x-3=0$ 的解是 $x_1=1$，$x_2=-3$，现给出另一个方程 $(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$，它的解是（　　）

A. $x_1=1$，$x_2=3$　　B. $x_1=1$，$x_2=-3$

C. $x_1=-1$，$x_2=3$　　D. $x_1=-1$，$x_2=-3$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了一元二次方程解的定义及不同方程解之间的关系，把 $2x+3$ 看作一个整体是解题的关键.

解：把方程 $(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$ 看成是关于 $2x+3$ 的一元二次方程，

$\therefore 2x+3=1$ 或 $2x+3=-3$，$\therefore x_1=-1$，$x_2=-3$.

答案：D

考法3 利用建立一元二次方程模型解实际应用问题

例10 [中考·衡阳]如图 1.1-1，学校课外生物小组的试验园地的形状是长 35 米、宽 20 米的矩形. 为便于管理，要在中间开辟一横两纵共三条等宽的小道，使种植面积为 600 平方米，则小道的宽为多少米？若设小道的宽为 x 米，则根据题意，列方程为（　　）

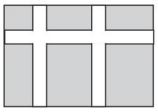


图 1.1-1

A. $35\times20-35x-20x+2x^2=600$　　B. $35\times20-35x-2\times20x=600$

C. $(35-2x)(20-x)=600$　　D. $(35-x)(20-2x)=600$

试题评析：此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，这类题目需利用平移把不规则的图形转化为规则的图形，找准等量关系，正确列出一元二次方程.

解：根据题意，得：$(35-2x)(20-x)=600$.

答案：C

图解：

把三条小道分别向右、向下平移，如图 1.1-2，将种植面积转化为长为（35-2x）米，宽为（20-x）米的矩形面积.

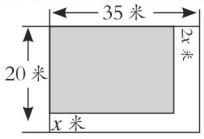


图 1.1-2

两年模拟兵法

☞答案见 225 页

1.[期末·哈尔滨]将方程 $(x-1)^2=6$ 化成一元二次方程的一般形式，正确的是（　　）

A. $x^2-2x+5=0$　　B. $x^2-2x-5=0$

C. $x^2+2x-5=0$　　D. $x^2+2x+5=0$

2. 下列方程中，一定是一元二次方程的是（　　）

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2-2x-5=0$

C. $3x^2+2y-2=0$　　D. $\dfrac{1}{x^2+2}=0$

3.[中考·黑龙江]已知 $2+\sqrt{3}$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+m=0$ 的一个实数根，则实数 m 的值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. −3　　D. −1

4.[期末·苏州]《九章算术》内容丰富，与实际生活联系紧密，在书上讲述了这样一个问题“今有垣高一丈，倚木于垣，上与垣齐. 引木却行一尺，其木至地. 问木长几何？”其内容可以表述为：“有一面墙，高一丈. 将一根木杆斜靠在墙上，使木杆的上端与墙的上端对齐，下端落在地面上. 如果使木杆下端从此时的位置向远离墙的方向移动 1 尺，则木杆上端恰好沿着墙滑落到地面上. 问木杆长多少尺？”（说明：1 丈 = 10 尺）设木杆长 x 尺，根据题意，下列方程正确的是（　　）

A. $x^2=(x-1)^2+10^2$

B. $(x+1)^2=x^2+10^2$

C. $x^2=(x-1)^2+1^2$

D. $(x+1)^2=x^2+1^2$

5.[期末·淮安]关于 x 的方程 $(m+2)x^{|m|}+mx-1=0$ 是一元二次方程，则 $m=$（　　）

A. 2 或 −2　　B. 2　　C. −2　　D. 0

6.[月考·浦东新区]把一元二次方程 $(x+1)(3x-4)=(2x+1)^2$ 化为一般形式为_____，它的一次项系数是_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.[二模·徐州]如果一元二次方程 $x^2-3x-2=0$ 的一个根是 m，则代数式 $4m^2-12m+2$ 的值是_____.

8.[期末·扬州]某县居民投资房产热情有所降低，据调查，今年1月份我县一房地产公司的住房销售量为100套，3月份的住房销售量为64套.若该公司这两个月住房销售量的平均下降率相同，设该公司这两个月住房销售量的平均下降率为 x，根据题意所列方程为_____.

9. 把下列方程先化成一元二次方程的一般形式，再写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

(1) $(3x-1)(x+2)=-x^2+5x+1$;

(2) $(2t+3)^2-3(t-5)^2=-41$;

(3) $3x^2+2=(x-2)(2x+1)$.

10. 某农场计划修建一条横断面为等腰梯形的渠道，横断面面积为1.53 m^2.上口宽比渠底宽多1.4 m，渠深比渠底宽少0.1 m.设渠底宽为 x m.

(1) 写出关于 x 的方程;

(2) 将所列方程整理成二次项系数是1的一般形式，并指出此时的一次项系数和常数项.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $3x^2=(k-1)x-k-6$ 与 $kx^2-(4k-1)x=2k$ 的常数项相等，分别求出这两个方程的一次项系数.

12. 已知关于 x 的方程 $(m-2)x^{m^2}+(m-3)x+1=0$.

(1) 当 m 为何值时，它是一元二次方程?

(2) 当 m 为何值时，它是一元一次方程?

13. 已知方程 $x^2-3x+1=0$.

(1) 求 $x+\frac{1}{x}$ 的值;

(2) 求 $x-\frac{1}{x}$ 的值;

(3) 若 a 为方程 $x^2-3x+1=0$ 的一个根，求 $2a^2-6a+2\,020$ 的值.

微信公众号
教辅资料站

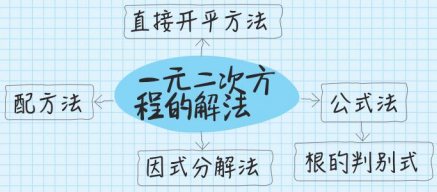
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2 一元二次方程的解法

核心知识

- 直接开平方法
- 配方法（重点）
- 公式法（重点）
- 根的判别式（重点）
- 因式分解法（重点）

知识链接



点知识·拨考向 速提分

»提分·必记

特别警示：

直接开平方法利用的是平方根的意义，所以要注意两点：

①不要只取正的平方根而遗漏负的平方根；

②只有非负数才有平方根，所以直接开平方法的前提是在一元二次方程 $(ax+h)^2=k$（a、h、k 为常数，$a\neq0$）中 $k\geq0$.

点知识 1 直接开平方法

1. **定义** 利用平方根的意义直接开平方，求一元二次方程解的方法叫做直接开平方法.

若 $x^2=a$（$a\geq0$），则 x 是 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$.

2. **关于 x 的一元二次方程 $(ax+h)^2=k$（a、h、k 为常数，$a\neq0$）的解（根）的情况：**

（1）当 $k>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，$x_1=\dfrac{-h+\sqrt{k}}{a}$，$x_2=\dfrac{-h-\sqrt{k}}{a}$；

（2）当 $k=0$ 时，方程有两个相等的实数根，$x_1=x_2=-\dfrac{h}{a}$；

（3）当 $k<0$ 时，方程没有实数根.

3. **用直接开平方法解一元二次方程的一般步骤**

步骤 1：移项，将方程变成左边是平方式，且平方式的系数为 1，右边是非负数的形式（如果方程右边是负数，那么这个方程无实数根）.

步骤 2：开平方，将方程转化为两个一元一次方程.

步骤 3：解这两个一元一次方程，则得出的两个解即为一元二次方程的两个根.

»提分·秘诀

知识储备：

首先将方程化成左边是含有未知数的平方式，右边是非负数；其次化平方式的系数为 1；最后根据平方根的意义开平方求解.

拨考向 利用直接开平方法解一元二次方程

例 1 用直接开平方法解下列方程：

（1）$4x^2-13=12$；　　（2）$4(2x-1)^2-36=0$.

解题秘方：紧扣用“直接开平方法”解一元二次方程的步骤求解.

解：（1）移项、合并同类项，得 $4x^2=25$. 系数化为 1，得 $x^2=\dfrac{25}{4}$.

开平方，得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{25}{4}}$. ∴ $x_1=\dfrac{5}{2}$，$x_2=-\dfrac{5}{2}$.

（2）移项，得 $4(2x-1)^2=36$. 系数化为 1，得 $(2x-1)^2=9$.

开平方，得 $2x-1=\pm3$.

∴ $x_1=2$，$x_2=-1$.

教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 配方法

»提分·必记

1. **定义** 把一个一元二次方程变形为$(x+h)^2=k(h、k$为常数$)$的形式，当$k\geqslant 0$时，就可以用直接开平方法求出方程的解，这种解一元二次方程的方法叫做配方法.

2. **用配方法解一元二次方程的一般步骤**

（1）**移项** 把方程中含有未知数的项移到方程的左边，把常数项移到方程的右边.

（2）**二次项系数化为 1** 方程的左、右两边同时除以二次项系数.

（3）**配方** 把方程的左、右两边同时加上一次项系数一半的平方，把原方程化为$(x+h)^2=k(h、k$为常数$)$的形式.

（4）**开方** 如果方程右边是一个非负数，那么就用直接开平方法求解；如果方程右边是一个负数，那么这个方程无实数根. 即：

① 当$k>0$时，方程有两个不相等的实数根，即$x_1=-h+\sqrt{k}$，$x_2=-h-\sqrt{k}$.

② 当$k=0$时，方程有两个相等的实数根，即$x_1=x_2=-h$.

③ 当$k<0$时，因为对任意实数x，都有$(x+h)^2\geqslant 0$，所以方程$(x+h)^2=k$没有实数根.

3. **拓展** 利用配方法还可以求含一个字母的二次三项式的最值.

知识链接：

配方的依据是完全平方公式$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，其实质是将a看成未知数，b看成常数，则$b^2$即是一次项系数一半的平方.


配方法

拔考向 利用配方法解一元二次方程

»提分·秘诀

例 2 用配方法解下列方程：

（1）$x^2-6x-4=0$；　（2）$x^2+x-\frac{3}{4}=0$；

（3）$2x^2-4x+1=0$；　（4）$(1+x)^2+2(1+x)-3=0$.

解题秘方： 先将方程配方化为$(x+h)^2=k(h、k$为常数$)$的形式，再用直接开平方法求解.

解：（1）移项，得$x^2-6x=4$. 配方，得$x^2-6x+9=4+9$.

$\therefore (x-3)^2=13$. $\therefore x_1=3+\sqrt{13}$，$x_2=3-\sqrt{13}$.

（2）移项，得$x^2+x=\frac{3}{4}$. 配方，得$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=1$. $\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{3}{2}$.

（3）方程两边同时除以 2，得$x^2-2x+\frac{1}{2}=0$.

移项，得$x^2-2x=-\frac{1}{2}$. 配方，得$x^2-2x+1^2=-\frac{1}{2}+1^2$，即$(x-1)^2=\frac{1}{2}$.

$\therefore x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

（4）移项，得$(1+x)^2+2(1+x)=3$.

配方，得$(1+x)^2+2(1+x)+1^2=3+1^2$.

$\therefore (1+x+1)^2=4$. $\therefore x_1=0$，$x_2=-4$.

巧将1+x看成一个整体进行配方，可达到简化的效果.

解法提醒：

① 用配方法解一元二次方程的实质就是对一元二次方程进行变形，将其转化为直接开平方所需要的形式，再利用平方根的意义把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来求解.

② 方程两边同时加上一次项系数一半的平方的前提是二次项系数为1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

»提分·必记

特别提醒：

①公式法是解一元二次方程的通用解法（也称万能解法），它适用于所有的一元二次方程，但不一定是最高效的解法.

②只有当方程 $ax^2+bx+c=0$ 中 $a\neq 0$，$b^2-4ac\geq 0$ 时，才能使用求根公式.

③用公式法解一元二次方程时，若 $b^2-4ac=0$，则方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）有两个相等的实数根，即 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

点知识 3 公式法

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的求根公式是 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$（$b^2-4ac\geqslant 0$）.利用一元二次方程的求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法.

2. 用求根公式解一元二次方程的步骤

（1）把一元二次方程化成一般形式；

（2）确定公式中 a，b，c 的值；

（3）求出 b^2-4ac 的值；

（4）若 $b^2-4ac\geqslant 0$，则把 a，b 及 b^2-4ac 的值代入求根公式求解，若 $b^2-4ac<0$，则方程无实数解.

拔考向 用公式法解一元二次方程

例 3 用公式法解下列方程：

（1）$x^2-2x=2x+1$；

（2）$x(5x-3)=1-7x$；

（3）$x^2+3=2\sqrt{2}\,x$.

解题秘方：根据用公式法解一元二次方程的步骤求解即可.

解：（1）原方程整理为 $x^2-4x-1=0$，

$\because a=1$，$b=-4$，$c=-1$，

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times(-1)=20>0$，

$\therefore x=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}$，

$\therefore x_1=2+\sqrt{5}$，$x_2=2-\sqrt{5}$.

（2）原方程整理为 $5x^2+4x-1=0$，

$\because a=5$，$b=4$，$c=-1$，

$b^2-4ac=4^2-4\times 5\times(-1)=36>0$，

$\therefore x=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2\times 5}=\frac{-4\pm 6}{10}=\frac{-2\pm 3}{5}$，

$\therefore x_1=\frac{1}{5}$，$x_2=-1$.

（3）移项，得 $x^2-2\sqrt{2}\,x+3=0$，

$\because a=1$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=3$，

$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 1\times 3=-4<0$，

$\therefore$ 原方程没有实数解.

变式训练

☞答案见 226 页

1. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-5x-1=0$；

（2）$(3x-2)(x+1)=5x-3$；

（3）$t(t+2\sqrt{2})=-2$；

（4）$x^2-x-1=0$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 一元二次方程根的判别式

»提分·必记

1. 定义　一般地，式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式.

特别提醒：确定根的判别式时，需先将方程化为一般形式，确定 a，b，c 后再计算；使用一元二次方程根的判别式的前提是二次项系数不为 0.

2. 一元二次方程根的情况与根的判别式的关系

（1）$b^2-4ac>0$ ⇔方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个不等的实数根；

（2）$b^2-4ac=0$ ⇔方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个相等的实数根；

（3）$b^2-4ac<0$ ⇔方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）没有实数根.

根的判别式

拔考向 一元二次方程根的判别式的应用类型

类型 1：利用 b^2-4ac 的符号判断一元二次方程根的情况

例 4　［二模·郑州］关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+2(k+1)=0$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有两个实数根

D. 没有实数根

解题秘方：由根的判别式的正负性及是否为 0 判断根的情况.

解：∵ $a=1$，$b=-(k+3)$，$c=2(k+1)$，

$b^2-4ac=[-(k+3)]^2-4\times2(k+1)=(k-1)^2\geqslant0$.

∴方程有两个实数根.

答案：C

教你一招：利用根的判别式判断一元二次方程根的情况的方法：先将一元二次方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），当方程中的 a，b，c 是常数时，直接求出 b^2-4ac 的值，确定方程根的情况；当方程中的 a，b，c 含有字母时，求出 b^2-4ac 后再对含有字母的代数式进行讨论，进而确定该方程根的情况.

类型 2：利用根的情况确定一元二次方程中字母的取值范围

例 5　［月考·徐州］若关于 x 的方程 $(k-1)x^2+4x+1=0$ 有实数解，则 k 的取值范围是_____.

解题秘方：紧扣根的判别式与根的情况的关系进行解答.

解：当 $k-1=0$，即 $k=1$ 时，方程为 $4x+1=0$，

方程是一元一次方程，显然有实数解；

当 $k-1\neq0$，即 $k\neq1$ 时，方程是一元二次方程，

∵一元二次方程有实数解，

∴ $b^2-4ac=4^2-4\times(k-1)\times1\geqslant0$，

∴ $k\leqslant5$ 且 $k\neq1$.

综上可知，$k\leqslant5$.

答案：$k\leqslant5$

应用 b^2-4ac 的前提是二次项系数不为 0. 当待求的字母出现在二次项系数中，而无法判定方程为一元二次方程时，就需要进行分类讨论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 5 因式分解法

1. **定义** 当一个一元二次方程的一边是 0，另一边能分解为两个一次因式的乘积时，就可以把解这样的一元二次方程转化为解两个一元一次方程，这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

2. **因式分解法解一元二次方程的一般步骤**

（1）整理方程，使其右边为 0；

（2）将方程左边分解为两个一次因式的乘积；

（3）令两个一次因式分别为 0，得到两个一元一次方程；

（4）分别解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

提分·必记

知识储备：

常用的因式分解的方法：

①提公因式法：形如 $ax^2+bx=0$（$a\neq0$，$b\neq0$）可用提公因式法分解；

②公式法：形如 $x^2-m^2=0$，可用平方差公式分解；形如 $x^2+2mx+m^2=0$，可用完全平方公式分解；

③特殊方法：形如 $x^2+(a+b)x+ab=0$，可将原方程分解为 $(x+a)(x+b)=0$ 的形式.

拔考向 利用因式分解法解一元二次方程

类型 1：运用方程的特点解一元二次方程

例 6 用因式分解法解下列方程：

（1）$(x-5)(x-6)=x-5$；

（2）$3(x+2)^2=x^2-4$；

（3）$(3m+2)^2-10(3m+2)+25=0$.

解题秘方： 按方程的特点选择恰当的因式分解的方法求解.

解：（1）原方程可变形为 $(x-5)(x-6)-(x-5)=0$，

$(x-5)(x-7)=0$.

$x-5=0$ 或 $x-7=0$. 所以 $x_1=5$，$x_2=7$.

（2）原方程可变形为 $3(x+2)^2-(x+2)(x-2)=0$，

$(x+2)[3(x+2)-(x-2)]=0$，

即 $(x+2)(2x+8)=0$.

$x+2=0$ 或 $2x+8=0$.

所以 $x_1=-2$，$x_2=-4$.

（3）原方程可变形为 $(3m+2-5)^2=0$，

$3m+2-5=0$.

所以 $m_1=m_2=1$.

提分·秘诀

解法提醒：

可以利用整体思想和完全平方公式解决问题. 把 $(3m+2)$ 看作一个整体，如令 $a=3m+2$，解关于 a 的方程 $a^2-10a+25=0$. 然后直接利用完全平方公式因式分解得到 $(a-5)^2=0$. 求得方程的解换元即可.



因式分解法

类型 2：直接除以含有未知数的整式而致错（易错点）

例 7 解一元二次方程 $(2x-1)^2=2x-4x^2$

错解：原方程可化为 $(2x-1)^2=-2x(2x-1)$.

方程两边同时除以 $(2x-1)$，得 $2x-1=-2x$，$\therefore x=\frac{1}{4}$.

错解分析：

错解中，给方程两边直接除以含有 x 的整式 $(2x-1)$，而导致漏解.

正解：移项，得 $(2x-1)^2+2x(2x-1)=0$，将方程的左边因式分解，得 $(2x-1)(2x-1+2x)=0$. $\therefore 2x-1=0$ 或 $2x-1+2x=0$.

$\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{4}$.

变式训练

☞答案见 226 页

2. 用因式分解法解下列方程：

（1）$x^2=5x$；

（2）$(x-3)^2=2x-6$；

（3）$(x-2)^2=(2x+1)^2$；

（4）$2(x+3)^2=x^2-9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 选择合适的方法解一元二次方程

» 挑战·高分

例 8 解下列方程.

(1) $2(x-1)^2=18$;

(2) $3x^2-2x-3=0$;

(3) $(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$.

解法策略：
如果展开原方程$(3x+2)^2-8(3x+2)+15=0$中的$(3x+2)^2$，求解时运算量较大，若把$3x+2$看作一个整体，则方程为形如$x^2+(p+q)x+pq=0$的一元二次方程，因此可直接用因式分解法求解.

解题秘方：根据方程的特点，选择合适的方法解一元二次方程.

解：(1) ∵ $2(x-1)^2=18$,

∴ $(x-1)^2=9$,

∴ $x-1=\pm3$,

∴ $x_1=4$, $x_2=-2$.

直接开平方法→因式分解法→公式法，如无特殊要求一般不用配方法.

(2) ∵ $a=3$, $b=-2$, $c=-3$,

$b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-3)=40>0$,

∴ $x=\dfrac{2\pm2\sqrt{10}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$,

∴ $x_1=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$.

(3) 因式分解，得$[(3x+2)-3][(3x+2)-5]=0$,

即$(3x-1)(3x-3)=0$.

∴ $3x-1=0$或$3x-3=0$,

∴ $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$.

拔尖角度 2 配方法的应用

例 9 比较多项式$3x^2-5x-1$与$x^2+3x-10$的值的大小.

解题秘方：利用作差法比较大小即可.

若$a-b>0$，则$a>b$；
若$a-b=0$，则$a=b$；
若$a-b<0$，则$a<b$.

解：$(3x^2-5x-1)-(x^2+3x-10)$

$=3x^2-5x-1-x^2-3x+10=2x^2-8x+9$

$=2(x-2)^2+1$,

∵ $(x-2)^2\geqslant0$,

∴ $2(x-2)^2\geqslant0$,

∴ $2(x-2)^2+1\geqslant1$,

∴ $3x^2-5x-1>x^2+3x-10$.

变式训练

☞答案见 227 页

3.[期末·烟台]已知$M=m-4$, $N=m^2-3m$，则M与N的大小关系为(　　)

A. $M>N$　　B. $M=N$

C. $M\leqslant N$　　D. $M<N$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

» 挑战·高分

解法提醒：

代数式 ax^2+bx+c（$a\neq0$）配方成 $a(x+m)^2+n$（$a\neq0$）的形式后，若 $a>0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最小值 n；若 $a<0$，则当 $x=-m$ 时，代数式取得最大值 n.

拔尖角度 3 利用非负性最值法求代数式的最值（拓展点）

例 10 当 x 取何值时，代数式 $2x^2-6x+7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方： 求代数式的最小值，要先将代数式配方成 $a(x+m)^2+n$（$a\neq0$）的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最小值.

解： $2x^2-6x+7$

$=2(x^2-3x)+7$

$=2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+7$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant0$,

$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$2x^2-6x+7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

变式训练

☞答案见 227 页

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2-(3m+n)x+mn=0$，且 $m>n>0$. 求证：这个方程有两个不相等的实数根.

拔尖角度 4 判断方程根的情况

例 11 [期末·扬州] 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m-2)x-2=0$（$m\neq0$）.

（1）求证：方程一定有实数根；

（2）若此方程有两个不相等的整数根，求整数 m 的值.

解题秘方： （1）计算根的判别式的值，再配方，据此判断方程根的情况；

（2）先利用方程的求根公式计算出方程的两根，然后利用有理数的整除性及方程有两个不相等的整数根确定整数 m 的值.

（1）**证明：** $\because m\neq0$，$b^2-4ac=[-(m-2)]^2-4m\times(-2)$

$=m^2-4m+4+8m=m^2+4m+4=(m+2)^2\geqslant0$,

$\therefore$ 方程一定有实数根.

（2）**解：** $\because x=\frac{m-2\pm(m+2)}{2m}$，$\therefore x_1=1$，$x_2=-\frac{2}{m}$,

当整数 m 取 ±1，±2 时，x_2 为整数，

$\because$ 方程有两个不相等的整数根，

$\therefore$ 整数 m 为 -1，1，2.

» 挑战·高分

知识储备：

当已知等腰三角形中一边的长时，通常要分两种情况讨论：

① 当已知的边长为腰长时；

② 当已知的边长为底边长时.

拔尖角度 5 一元二次方程根的判别式的综合运用

例 12 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$. 若 $\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 的长是这个方程的两个实数根，第三边 BC 的长为 5，当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时，求 k 的值.

解题秘方： 利用求根公式计算出方程的两根，对三角形的边长进行分类讨论，利用勾股定理可得出关于 k 的一元一次方程或一元二次方程，解出 k，判定其取值情况即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：∵ $b^2-4ac=[-(2k+1)]^2-4\times(k^2+k)=1>0$，

$\therefore x=\dfrac{(2k+1)\pm1}{2}$，

$\therefore x_1=k$，$x_2=k+1$.

（1）当 $BC=5$ 为直角边长时，$k^2+5^2=(k+1)^2$，

解得 $k=12$，则三边长为 5、12、13 时可以组成直角三角形，

$\therefore k=12$.

（2）当 $BC=5$ 为斜边长时，$k^2+(k+1)^2=5^2$，

解得 $k_1=3$，$k_2=-4$（不合题意，舍去），

则三边长为 3、4、5 时可以组成直角三角形，

$\therefore k=3$.

综上所述，k 的值为 12 或 3.

当已知直角三角形中一边的长时，通常分两种情况讨论：
① 当已知的边长为直角边长时；
② 当已知的边长为斜边长时.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节在中考中的主要考点是直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法，独立考查的情况不多，常与配方求最值、结合二次函数的应用（以后将学）求最值等知识综合在一起进行考查，题目较难.

三年中考兵法

考法 1 利用直接开平方法求字母式子的值

»冲刺·满分

例 13 [模拟·泰安] 已知关于 x 的方程 $a(x+c)^2+b=0$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）的两根分别为 -2，1，那么关于 x 的方程 $a(x+c-2)^2+b=0$ 的两根分别为_____.

试题评析：本题考查了用直接开平方法解一元二次方程及方程根的定义，根据两个方程的特点求字母的值.

解：∵方程 $a(x+c)^2+b=0$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）的两根分别为 -2，1，

$\therefore a(-2+c)^2+b=0$ 或 $a(1+c)^2+b=0$，

$\therefore (-2+c)^2=-\dfrac{b}{a}$ 或 $(1+c)^2=-\dfrac{b}{a}$.

根据直接开平方法解法的特征，可知 $(-2+c)$ 与 $(1+c)$ 互为相反数，

$\therefore -2+c+1+c=0$，解得 $c=0.5$.

把 $c=0.5$ 代入 $(-2+c)^2=-\dfrac{b}{a}$ 中，得 $(-2+0.5)^2=-\dfrac{b}{a}$，$\therefore -\dfrac{b}{a}=\dfrac{9}{4}$.

∵ $a(x+c-2)^2+b=0$，

$\therefore (x+0.5-2)^2=\dfrac{9}{4}$，

利用直接开平方法可知 $x_1=3$，$x_2=0$.

答案：3，0

教你一招：
本题在无法求出 a，b 值的情况下，先求出 c 的值，再求出 $-\dfrac{b}{a}$ 的值.

一题多解：
本题也可以把后面一个方程中的 x−2 看作一个整体，相当于前面一个方程中的 x 求解. 先把方程 $a(x+c-2)^2+b=0$ 变形为 $a[(x-2)+c]^2+b=0$，由方程 $a(x+c)^2+b=0$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）的两根分别为 −2，1，可得方程 $x-2=-2$ 或 $x-2=1$，解得 $x=0$ 或 $x=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法提醒：

本题也可以不经过配方法直接用待定系数法求 p、q 的值，即：

$\because (x-p)^2=7$，

$\therefore x^2-2px+p^2-7=0$，

又$\because$方程 $x^2-6x+q=0$ 配方后是 $(x-p)^2=7$，

$\therefore -6=-2p$，$p^2-7=q$，

解得 $p=3$，$q=2$.

考法 2 利用配方法求字母的值

例 14 [模拟·镇江] 已知方程 $x^2-6x+q=0$ 配方后是 $(x-p)^2=7$，那么方程 $x^2+6x+q=0$ 配方后是（　　）

A. $(x-p)^2=5$　　B. $(x+p)^2=9$

C. $(x-p)^2=9$　　D. $(x+p)^2=7$

试题评析：本题考查了配方法等知识，巧妙诠释了求字母的值及数值与字母的替代关系.

解：由 $x^2-6x+q=0$，配方，得 $(x-3)^2=9-q$.

$\because$方程可以配方成 $(x-p)^2=7$，

$\therefore p=3$，$9-q=7$，

$\therefore q=2$.

把 $q=2$ 代入方程 $x^2+6x+q=0$，

得 $x^2+6x+2=0$，配方后是 $(x+3)^2=7$，

即 $(x+p)^2=7$.

答案：D

教你一招：

估算含无理数式子的大小的方法：

①先估算这个无理数在哪两个连续整数之间；

②根据不等式的基本性质依次在不等式的两边加、减、乘或除以适当的数；

③将这个无理数转化为含无理数的式子，即可确定它的范围.

考法 3 利用公式法求根的取值范围

例 15 [一模·常州] 设 x_1 为一元二次方程 $x^2-2x=\frac{5}{8}$ 较小的根，则（　　）

A. $0<x_1<1$　　B. $-1<x_1<0$

C. $-2<x_1<-1$　　D. $-5<x_1<-4$

试题评析：本题考查了用公式法解一元二次方程及无理数的大小估算，是一道很经典的题目.

解：方程 $x^2-2x=\frac{5}{8}$ 可化为 $8x^2-16x-5=0$，由公式法得

$$x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\times8\times(-5)}}{16}=\frac{4\pm\sqrt{26}}{4}.$$

$\because x_1$ 为方程 $x^2-2x=\frac{5}{8}$ 较小的根，

$$\therefore x_1=\frac{4-\sqrt{26}}{4}=1-\frac{\sqrt{26}}{4}.$$

$$\because 5<\sqrt{26}<6,\ \therefore \frac{5}{4}<\frac{\sqrt{26}}{4}<\frac{3}{2},$$

$$-\frac{3}{2}<-\frac{\sqrt{26}}{4}<-\frac{5}{4},\ 1-\frac{3}{2}<1-\frac{\sqrt{26}}{4}<1-\frac{5}{4},$$

即 $-1<x_1<0$.

答案：B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用根的判别式求字母的整数值问题

例 16 [模拟·连云港]若关于 x 的一元二次方程 $(a-6)x^2-2x+3=0$ 有实数根，则整数 a 的最大值是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

试题评析：本题考查了根的判别式以及不等式的整数解．牢记“当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，一元二次方程有实数根”是解题的关键．

解：∵关于 x 的一元二次方程 $(a-6)x^2-2x+3=0$ 有实数根，

∴ $a-6\neq 0$ 且 $b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(a-6)\cdot 3\geqslant 0$，

∴ $a\leqslant\frac{19}{3}$ 且 $a\neq 6$.

∵ a 为整数，且是最大的整数，

∴ $a=5$.

答案：B

思路点拨：

根据一元二次方程的概念，结合根的判别式 $b^2-4ac\geq 0$，即可得出 $a\leq\frac{19}{3}$ 且 $a\neq 6$，再由 a 为最大的整数，即可得到 a 的值．

考法 5 利用根的判别式及方程的根解有关根的应用问题

例 17 [中考·衡阳]关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根．

（1）求 k 的取值范围；

（2）如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值．

试题评析：本题考查了根的判别式和一元二次方程的根．解题时利用（1）中的结论得到 k 的最大整数值，然后根据题意求出 m 的值．

解：（1）∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根，

∴ $b^2-4ac=(-3)^2-4k\geqslant 0$，

∴ $k\leqslant\frac{9}{4}$.

（2）∵ k 是符合条件的最大整数，∴ $k=2$.

∴方程 $x^2-3x+k=0$ 变形为 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

∵一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，

∴把 $x=1$ 代入方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 中，

得 $m-1+1+m-3=0$，解得 $m=\frac{3}{2}$；

把 $x=2$ 代入方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 中，

得 $4(m-1)+2+m-3=0$，解得 $m=1$.

又∵ $m-1\neq 0$，

∴ m 的值为 $\frac{3}{2}$.

解法提醒：

一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况：

① 不解方程，由根的判别式的正负性及是否为零可直接判断根的情况；

② 根据方程根的情况，结合根的判别式来确定方程中待定字母的取值范围或值，若二次项系数中含有字母，则应注意检验二次项系数是否为零；

③ 应用判别式证明方程根的情况（有实数根、无实数根、有两个不等的实数根、有两个相等的实数根）．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 6 利用因式分解法解一元二次方程

例 18 [中考·镇江] 一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的两根分别为_____.

试题评析：本题考查利用因式分解法解一元二次方程，将一元二次方程的左边利用提取公因式法分解因式即可求解.

解：$x^2-2x=0$，

$x(x-2)=0$，

$x=0$ 或 $x-2=0$，

$\therefore x_1=0$，$x_2=2$.

不能将两边同时除以公因式，否则会造成漏根；应该将右边的式子移到左边，然后将左边的式子利用提公因式法因式分解，进而求得一元二次方程的根.

答案：$x_1=0$，$x_2=2$

考法 7 利用根的判别式解与三角形有关的应用问题

例 19 已知：关于 x 的方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$.

（1）求证：无论 k 取任何实数值，方程总有实数根；

（2）若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=1$，另两边长 b，c 恰好是这个方程的两个根，求等腰三角形 ABC 的周长.

试题评析：本题考查了一元二次方程根的判别式及三角形的三边关系.

（1）**证明**：$b^2-4ac=[-(k+2)]^2-4\cdot 2k=(k-2)^2$，

$\because (k-2)^2\geqslant 0$，即 $b^2-4ac\geqslant 0$，

$\therefore$ 无论 k 取任何实数值，方程总有实数根.

（2）**解**：①当 b，c 恰好是等腰三角形 ABC 的两条腰长时，

即 $b=c$，$\therefore (k-2)^2=0$，则 $k=2$，

原方程可转化为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$，则三边长为 2、2、1，符合三角形三边的关系，

$\therefore$ 等腰三角形 ABC 的周长为 $2+2+1=5$；

②当 b，c 中有一条恰好是等腰三角形 ABC 的一条腰长时，

即 $b=a=1$ 或 $c=a=1$，

把 $x=1$ 代入方程得 $1-(k+2)+2k=0$，

解得 $k=1$，

原方程可转化为 $x^2-3x+2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=2$，

则三边长为 1、1、2，不符合三角形三边的关系，此情况舍去.

综上所述，等腰三角形 ABC 的周长为 5.

解法提醒：

本题也可对 a 进行分类讨论：

①当 $a=1$ 是等腰三角形 ABC 的底边长时，则 b，c 恰好是等腰三角形 ABC 的两条腰长，即 $b=c$；

②当 $a=1$ 是等腰三角形 ABC 的一条腰长时，则 b，c 中有一条恰好是等腰三角形 ABC 的另一条腰长，即 $b=a=1$ 或 $c=a=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.[中考·泰安]将一元二次方程$x^2-8x-5=0$化成$(x+a)^2=b$(a，b为常数)的形式，则a，b的值分别是(　　)

A. -4，21　　B. -4，11

C. 4，21　　D. -8，69

2.[模拟·盐城]一元二次方程$x(x-2)=x-2$的根是(　　)

A. $x=2$

B. $x_1=0$，$x_2=2$

C. $x_1=2$，$x_2=1$

D. $x=-1$

3.[中考·黑龙江]已知关于x的一元二次方程$x^2-(2k+1)x+k^2+2k=0$有两个实数根x_1，x_2，则实数k的取值范围是(　　)

A. $k<\frac{1}{4}$　　B. $k\leqslant\frac{1}{4}$

C. $k>4$　　D. $k\leqslant\frac{1}{4}$且$k\neq0$

4. 若一个三角形的两边长分别是2和6，第三边的长是方程$x^2-10x+21=0$的一个根，则这个三角形的周长为(　　)

A. 7　　B. 3或7

C. 15　　D. 11或15

5.[一模·泰州]关于x的一元二次方程$(a-2)x^2-2x-4+a^2=0$有一个根是0，则a的值为_____.

6.[期末·无锡]如果方程$x^2+4x+n=0$可以配方成$(x+m)^2=3$，那么$(n-m)^{2020}=$_____.

7.[期末·宣城]若关于x的方程$kx^2-kx+1=0$有两个相等的实数根，则实数k的值为_____.

8.[一模·烟台]若一元二次方程$ax^2=b(ab>0)$的两个根分别是$m+2$与$2m-5$，则$\frac{b}{a}=$_____.

9. 用直接开平方法解下列方程：

(1)$(x-2)^2=3$;

(2)$2(x-3)^2=72$;

(3)$9(y+4)^2-49=0$;

(4)$4(2y-5)^2=9(3y-1)^2$.

10. 用配方法解下列方程：

(1)$x^2+6x+8=0$;

(2)$x^2=6x+16$;

(3)$2x^2+3=7x$;

(4)$(2x-1)(x+3)=4$.

11. 用公式法解下列方程：

(1)$x^2-5x+2=0$;

(2)$3x^2+1=4x$;

(3)$\sqrt{2}x-2=2x^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 用因式分解法解下列方程：

（1）$2x^2+x=0$；

（2）$3(x-7)^2=2(7-x)$；

（3）$3x(x-1)=2-2x$；

（4）$(2x+1)^2-x^2=0$.

13.[期末·泰州]已知关于x的方程$(m+1)x^2+2mx+m-3=0$.

（1）当m取何值时，方程有两个不相等的实数根？

（2）给m选取一个合适的整数，使方程有两个有理根，并求出这两个根.

14.[一模·达州]已知：关于x的方程$mx^2-3(m+1)x+2m+3=0(m\neq 0)$.

（1）若方程有两个相等的实数根，求m的值；

（2）求此方程的两个根（若所求方程的根不是常数，就用含m的式子表示）；

（3）若m为整数，当m取何值时方程的两个根均为正整数？

15.[期末·成都]先阅读下面的内容，再解决问题.

对于形如$x^2+2ax+a^2$这样的二次三项式，可以用公式法将它分解成$(x+a)^2$的形式. 但对于二次三项式$x^2+2ax-3a^2$，就不能直接运用公式了. 此时，我们可以在二次三项式$x^2+2ax-3a^2$中先加上一项a^2，使它与x^2+2ax成为一个完全平方式，再减去a^2，整个式子的值不变，于是有：

$$\begin{aligned}&x^2+2ax-3a^2\\=&(x^2+2ax+a^2)-a^2-3a^2\\=&(x+a)^2-4a^2\\=&(x+a)^2-(2a)^2\\=&(x+3a)(x-a)\end{aligned}$$

像这样，先添一适当项，使式中出现完全平方式，再减去这项，使整个式子的值不变的方法称为“配方法”. 利用“配方法”，解决下列问题：

（1）分解因式：$a^2-8a+15=$_____；

（2）若$\triangle ABC$的三边长是a，b，c，且满足$a^2+b^2-14a-8b+65=0$，c边的长为奇数，求$\triangle ABC$周长的最小值；

（3）当x为何值时，多项式$-2x^2-4x+3$有最大值？并求出这个最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*1.3 一元二次方程的根与系数的关系



点知识·拨考向 速提分

点知识 一元二次方程的根与系数的关系

»提分·必记

1. 一元二次方程的根与系数的关系　一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，方程有实数根，设这两个实数根分别为 x_1，x_2，这两个根与系数的关系是 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

特别提醒：
一元二次方程的根与系数的关系存在的前提是 $a\neq0$，$b^2-4ac\geqslant0$.

2. 与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形

（1）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；（2）$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；

（3）$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$.

拨考向 利用根与系数的关系解一元二次方程的相关问题

»提分·秘诀

特别提醒：
二次项系数为1的一元二次方程的系数与两根的关系是：两根之和是一次项系数的相反数，两根之积等于常数项.

类型1：求代数式的值

例1 ［二模·南通］若 x_1，x_2 是方程 $x^2-3x-2=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2-x_1\cdot x_2$ 的值是（　　）

A. -5　　B. -1　　C. 5　　D. 1

解题秘方：根据根与系数的关系整体代入进行计算.

解：根据题意，得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=-2$，

∴ $x_1+x_2-x_1\cdot x_2=3-(-2)=5$.

答案：C

类型2：构造一元二次方程

以 $x_1=m$，$x_2=n$ 为实数根构造一元二次方程，可以是 $(x-m)(x-n)=0$；
以 $x_1+x_2=m+n$，$x_1x_2=mn$ 为依据构造一元二次方程，可以是 $x^2-(m+n)x+mn=0$.

例2 ［中考·来宾］已知实数 x_1，x_2 满足 $x_1+x_2=7$，$x_1x_2=12$，则以 x_1，x_2 为根的一元二次方程是（　　）

A. $x^2-7x+12=0$　　B. $x^2+7x+12=0$　　C. $x^2+7x-12=0$　　D. $x^2-7x-12=0$

解题秘方：利用一元二次方程根与系数的关系进行判断.

解：由题可知所求方程是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$，

∴所求的一元二次方程是 $x^2-7x+12=0$.

答案：A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

» 挑战·高分

教你一招：

已知一根，利用根与系数的关系求方程中待定字母的值的策略：

①若待定字母在一次项中，可先用两根之积的关系求出另一根，然后代入方程求待定字母的值，或者用两根之和的关系求待定字母的值.

②若待定字母在常数项中，可先用两根之和的关系求出另一根，然后代入方程求待定字母的值，或者用两根之积的关系求待定字母的值.

拔尖角度 1 已知方程的一个根，可求出另一个根及未知字母的值

例 3 [期末·常州] 已知关于 x 的方程 $2x^2-5x+k=0$ 的一个根是 1，求 k 的值和另一个根.

解题秘方： 利用两根之和，两根之积求解.

解： 设这个方程的另一个根为 m，则

$m+1=\frac{5}{2}$，$1\times m=\frac{k}{2}$

$\therefore m=\frac{3}{2}$，$k=3$.

也可以把 $x=1$ 代入原方程，解得 $k=3$，再解方程 $2x^2-5x+3=0$，得方程的另一个根为 $\frac{3}{2}$.

当 $k=3$ 时，$b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=1>0$.

$\therefore k=3$，方程的另一个根为 $\frac{3}{2}$.


确定方程中字母系数的值

» 挑战·高分

解法提醒：

①对于二次项系数含有字母的方程，当方程中未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；

②解答涉及一元二次方程根的字母值的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母的方程，求出字母的值，再看它是否满足字母的取值范围，最后确定字母值的存在性.

拔尖角度 2 已知方程两个根满足的关系，确定方程中未知字母的值

例 4 [期末·无锡] 关于 x 的方程 $mx^2+(m+2)x+\frac{m}{4}=0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围.

(2) 是否存在实数 m，使方程的两个实数根的倒数和等于 0？若存在，求出 m 的值；若不存在，说明理由.

解题秘方： (1) 根据“方程有两个不相等的实数根”，可得二次项系数不为 0，且根的判别式大于 0，即可得出关于 m 的一元一次不等式组，解之即可；

(2) 对于存在性问题，先假设存在求出字母的值，再看它是否满足字母的取值范围，从而确定存在性.

解： (1) $\because$ 关于 x 的方程 $mx^2+(m+2)x+\frac{m}{4}=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore m\neq0$，且 $b^2-4ac=(m+2)^2-4m\cdot\frac{m}{4}>0$，

解得 $m>-1$ 且 $m\neq0$.

(2) 假设存在实数 m，设方程的两个根分别为 x_1、x_2，

则 $x_1+x_2=-\frac{m+2}{m}$，$x_1x_2=\frac{1}{4}$. $\because\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{4(m+2)}{m}=0$，

$\therefore m=-2$.

$\because m>-1$ 且 $m\neq0$，

$\therefore m=-2$ 不符合题意，舍去.

$\therefore$ 假设不成立，即不存在实数 m，使方程的两个实数根的倒数和等于 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 不解方程，求与方程的根有关的代数式的值

» 挑战·高分

例 5 ［期中·泰州］已知 x_1、x_2 是方程 $2x^2-5x+1=0$ 的两个实数根，求下列各式的值：

（1）$x_1x_2^2+x_1^2x_2$；

（2）$x_1^2+x_2^2$.

解题秘方：紧扣“与一元二次方程两根有关的代数式的常见变形”进行解答.

解：（1）∵ x_1、x_2 是方程 $2x^2-5x+1=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=\frac{5}{2}$，$x_1x_2=\frac{1}{2}$.

原式 $=x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$；

（2）∵ x_1、x_2 是方程 $2x^2-5x+1=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=\frac{5}{2}$，$x_1x_2=\frac{1}{2}$.

原式 $=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(\frac{5}{2})^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$.

方法点拨：

利用根与系数的关系求代数式的值的方法：

一般利用恒等变形将代数式转化成含 x_1+x_2，x_1x_2 的形式，从而结合根与系数的关系进行求解.

注意求值的前提是：一元二次方程有两个实数根，即判别式大于或等于 0.

拔尖角度 4 运用根与系数的关系解决几何问题

例 6 ［模拟·菏泽］已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+2)x+2m=0$.

（1）求证：不论 m 为何值，该方程总有两个实数根；

（2）若直角三角形 ABC 的两直角边 AB、AC 的长是该方程的两个实数根，斜边 BC 的长为 3，求 m 的值.

确保三角形的边长为正数.

解题秘方：（1）根据一元二次方程根的判别式和非负数的性质进行证明；

（2）根据勾股定理和一元二次方程根与系数的关系得到方程，然后解方程即可得到结论.

（1）证明：∵ $b^2-4ac=[-(m+2)]^2-4\times2m=(m-2)^2$，

$(m-2)^2\geqslant0$，

∴不论 m 为何值，该方程总有两个实数根.

（2）解：∵ AB、AC 的长是该方程的两个实数根，

∴ $AB+AC=m+2$，$AB\cdot AC=2m$.

∵三角形 ABC 是直角三角形，∴ $AB^2+AC^2=BC^2$，

即 $(AB+AC)^2-2AB\cdot AC=BC^2$，

∴ $(m+2)^2-2\times2m=9$，解得 $m=\pm\sqrt{5}$.

又∵ $AB\cdot AC=2m$，即 m 为正数，

∴ m 的值是 $\sqrt{5}$.

变式训练

答案见 229 页

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 AB、AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+12=0$ 的两个实数根.

（1）当 m 为何值时，四边形 $ABCD$ 是菱形？

（2）当 $AB=3$ 时，求平行四边形 $ABCD$ 的周长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

一元二次方程根与系数的关系是中考的重点内容之一，利用此知识可解决：（1）已知方程，求两根的和或积；（2）已知方程的一个根，求另一个根及方程中待定字母的值；（3）求关于两根的代数式的值等问题，这些都是中考考查的内容，题型主要有选择题、填空题和解答题.

三年中考兵法

》冲刺·满分

解法提醒：

求与根有关的代数式的值的方法：

看代数式是否具有对称性，若具有对称性，则直接变形，将两根之和，两根之积代入求值；若不具有对称性，则将其中的某一个根单独代入方程中，得到与待求值的代数式相关的结构，进行整体代入求值.

考法1 利用根与系数的关系求涉根的非对称式的值

例7 [中考·南通] 若 x_1，x_2 是方程 $x^2-4x-2\,020=0$ 的两个实数根，则代数式 $x_1^2-2x_1+2x_2$ 的值等于_____.

试题评析：本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，也考查了一元二次方程根的概念.

解：∵ x_1 是方程 $x^2-4x-2\,020=0$ 的一个实数根，

∴ $x_1^2-4x_1-2\,020=0$，即 $x_1^2-4x_1=2\,020$.

∵ x_1，x_2 是方程 $x^2-4x-2\,020=0$ 的两个实数根，∴ $x_1+x_2=4$，

∴原式 $=x_1^2-4x_1+2x_1+2x_2=x_1^2-4x_1+2(x_1+x_2)$

$=2\,020+2\times4=2\,020+8=2\,028$.

答案：2 028

考法2 利用涉根的式子的值求字母的值

例8 [中考·十堰] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x-2k+8=0$ 有两个实数根 x_1，x_2.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 $x_1^3x_2+x_1x_2^3=24$，求 k 的值.

试题评析：本题考查了一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系，解题的关键是：

（1）根据方程结合根的判别式 $b^2-4ac\geqslant0$ 即可求解；

（2）根据根与系数的关系，结合 $x_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=24$，得出关于 k 的一元二次方程，结合（1）中 k 的取值范围求解.

解：（1）∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x-2k+8=0$ 有两个实数根，

∴ $b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-2k+8)=8k-16\geqslant0$，

解得 $k\geqslant2$.

∴ k 的取值范围是 $k\geqslant2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∵ x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x-2k+8=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-2k+8$.

∵ $x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=24$，

∴ $(-2k+8)[4^2-2(-2k+8)]=24$，

即 $k^2-4k+3=0$，

解得 $k_1=1$，$k_2=3$.

又由（1）可知 $k\geqslant 2$，

∴ k 的值为 3.

当 $k=1$ 时，$b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-2\times1+8)=-8<0$，∴ $k=1$ 不合题意，舍去. 利用根与系数的关系求待定字母的值时，往往会犯单纯满足涉根的关系式，而不考虑 $b^2-4ac\geqslant0$ 的错误.

$b^2-4ac\geqslant0$

两年模拟兵法

☞答案见 229 页

1.［中考·黔东南州］已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+5x-m=0$ 的一个根是 2，则另一个根是（　　）

A. −7　　B. 7

C. 3　　D. −3

2.［一模·南通］已知 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2-x_1x_2$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3.［中考·南京］关于 x 的方程 $(x-1)(x+2)=p^2$（p 为常数）的根的情况，下列结论中正确的是（　　）

A. 两个正根　　B. 两个负根

C. 一个正根，一个负根　　D. 无实数根

4.［中考·湖北］关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-m=0$ 有两个实数根 α，β，且 $\alpha^2+\beta^2=12$，那么 m 的值为（　　）

A. −1　　B. −4

C. −4 或 1　　D. −1 或 4

5.［中考·泰州］方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根为 x_1、x_2，则 x_1x_2 的值为_____.

6.［中考·泸州］已知 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2-4x-7=0$ 的两个实数根，则 $x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$ 的值是_____.

7.［中考·宜宾］已知一元二次方程 $x^2+2x-8=0$ 的两根为 x_1、x_2，则 $\dfrac{x_2}{x_1}+2x_1x_2+\dfrac{x_1}{x_2}=$_____.

8.［模拟·成都］设 x_1，x_2 是方程 $x^2-x-2\,020=0$ 的两个实数根，则 $x_1^3+2\,021x_2-2\,020=$_____.

9.［模拟·成都］已知 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2+3x-3=0$ 的两个实数根，求下列代数式的值.

（1）$x_1^2+x_2^2$；

（2）$(x_1+3)(x_2+3)$.

10.［中考·孝感］已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+\dfrac{1}{2}k^2-2=0$.

（1）求证：无论 k 为何实数，方程总有两个不相等的实数根；

（2）若方程的两个实数根 x_1，x_2 满足 $x_1-x_2=3$，求 k 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11.[中考·南充]已知x_1，x_2是一元二次方程$x^2-2x+k+2=0$的两个实数根.

（1）求k的取值范围；

（2）是否存在实数k，使得等式$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=k-2$成立？如果存在，请求出$k$的值；如果不存在，请说明理由.

（2）类比探究：已知实数m，n满足$7m^2-7m-1=0$，$7n^2-7n-1=0$，且$m\neq n$，求m^2n+mn^2的值；

（3）思维拓展：已知实数s、t分别满足$19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$，且$st\neq 1$．求$\frac{st+4s+1}{t}$的值.

12.[期末·达州]阅读材料：

材料1：若一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根为x_1，x_2，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

材料2：已知实数m，n满足$m^2-m-1=0$，$n^2-n-1=0$，且$m\neq n$，求$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$的值.

解：由题知m，n是方程$x^2-x-1=0$的两个不相等的实数根，根据材料1得$m+n=1$，$mn=-1$，所以$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{(m+n)^2-2mn}{mn}=\frac{1+2}{-1}=-3$.

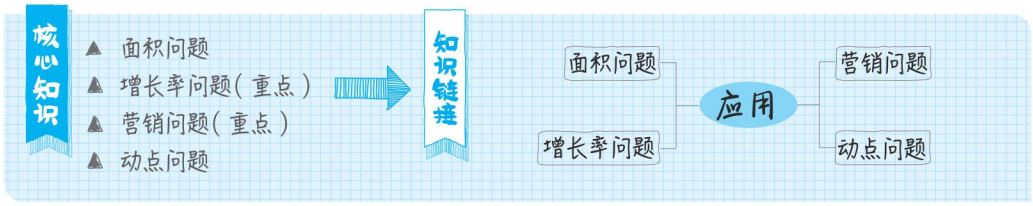
根据上述材料解决以下问题：

（1）材料理解：一元二次方程$5x^2+10x-1=0$的两个根为x_1，x_2，则$x_1+x_2=$_____，$x_1x_2=$_____.

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.4 用一元二次方程解决问题



点知识·拨考向 速提分

点知识1 用一元二次方程解决问题

»提分·必记

1. 列一元二次方程解应用题的一般步骤归纳为 审、设、列、解、检、答.

审——审题，明确已知量和未知量，找出它们之间的关系；

设——设未知数；

列——根据题目中的等量关系，列出方程；

解——解方程，求出未知数的值；

检——检验方程的解能否保证实际问题有意义；

答——写出答案，应遵循“问什么，答什么，怎么问，怎么答”的原则.

特别解读：
第一步“审”一般不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确已知量、未知量及它们之间的关系才能准确列出方程.

列方程，这是解决实际问题的关键一步，一般先找出一个包含问题的等量关系，然后列代数式表示等量关系中的各个量，就得到含未知数的等式，即可列出方程.

2. 列一元二次方程解应用题的注意事项

（1）在一道应用题中，往往含有几个未知量，应恰当地选择其中的一个用字母 x 表示，然后根据各个量之间的数量关系，将其他几个量用含 x 的代数式表示出来；

（2）设未知数时必须写清单位、用对单位.列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，作答时必须写上单位；

（3）一定要对方程的根加以检验，看它是否符合实际意义.

3. 二级结论

（1）能根据具体问题中的数量关系（如①增长率问题；②病毒传播问题；③面积问题；④商品利润问题；⑤动点问题等）列出方程并求解；

（2）能熟练地解决实际问题，并检验所得的结果是否正确.

4. 拓展

可借鉴列代数式、列一元一次方程解应用题的审题方式来审题，可借用线段图、表格来分析题意，找出等量关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

变式训练

答案见 231 页

1.[模拟·武汉]在美化校园的活动中，某兴趣小组想借助如图 1.4-2 所示的直角墙角 DA 和 DC（两边足够长），用 28 m 长的篱笆围一个面积为 192 m^2 的矩形花园 $ABCD$（篱笆只围 AB、BC 两边），在 P 处有一棵树与墙 CD、AD 的距离分别是 15 m 和 6 m，现要将这棵树也围在花园内（含边界，不考虑树的粗细），则 AB 的长为（　　）m.

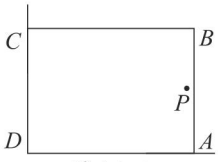


图 1.4-2

A. 8 或 24　B. 16

C. 12　D. 16 或 12

核考向　用一元二次方程解决问题

例 1　[中考·西藏]某驻村工作队，为带动群众增收致富，巩固脱贫攻坚成效，决定在该村山脚下，围一块面积为 600 m^2 的矩形试验茶园，便于成功后大面积推广. 如图 1.4-1，茶园一面靠墙，墙长 35 m，另外三面用 69 m 长的篱笆围成，其中一边开有一扇 1 m 宽的门（不包括篱笆）. 求这个茶园的长和宽.

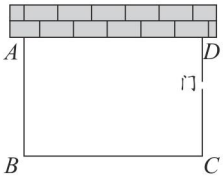


图 1.4-1

解题秘方：设茶园垂直于墙的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为（69+1 − 2x）m，利用矩形的面积公式列出方程并解答，运用一元二次方程解决实际问题时要注意根的取舍.

解：设茶园垂直于墙的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为（69+1 − 2x）m，

根据题意，得 $x(69+1-2x)=600$，

整理，得 $x^2-35x+300=0$，

解这个方程，得 $x_1=15$，$x_2=20$.

当 $x=15$ 时，$69+1-2x=40>35$，不符合题意，舍去；

当 $x=20$ 时，$69+1-2x=30<35$，符合题意.

答：这个茶园的长和宽分别为 30 m、20 m.

点知识 2　数字问题

有关数字的应用题，大致可以分为三类，即一般数目关系问题、连续数问题、数字排列问题. 解答这类问题的关键是掌握其基本的数量关系和连续数以及一般数的表示方法.

要点精析：

（1）一般数目关系问题. 一般数目关系比较简单，只要我们掌握加、减、乘、除、和、差、倍、商、倍数、余数、大于、小于、等于等运算规律，就可以根据题目所给的条件列出方程.

（2）连续数问题. 这里有三种：连续整数、连续偶数和连续奇数，掌握它们的表示方法是解决这类应用题的关键.

（3）数字排列问题：

① 要明确最高位上的数字为不大于 9 的正整数，其他数位上的数字为不大于 9 的非负整数；

② 要会用字母正确地表示数. 两位数 = 十位上的数字 ×10+ 个位上的数字；

三位数 = 百位上的数字 ×100+ 十位上的数字 ×10+ 个位上的数字.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向 用一元二次方程解决数字问题

例 2 [月考·南京]一个两位数，十位数字与个位数字之和为 9，且这两个数字之积等于这两个数字和的 2 倍，这个两位数是（　　）

A. 36　　B. 63　　C. 36 或 63　　D. −36 或 −63

解题秘方：本题考查的是用一元二次方程解数字问题，弄清数字和用数字表示的数之间的关系是解决问题的关键.

解：设十位数字为 x，则个位数字为（$9-x$），根据题意，得

$x(9-x)=9\times2$，

解这个方程，得 $x_1=3$，$x_2=6$，

则个位数字为 $9-x=6$ 或 $9-x=3$，

所以这个两位数是 36 或 63.

答案：C

列方程求解数字问题的方法：设未知数时，通常采用间接设元法，即设多位数的某一数位上的数字为 x，然后将其他数位上的数字用含 x 的代数式表示出来，最后再根据题中的数量关系列方程即可.

点知识 3 面积问题

面积问题是一元二次方程应用的常见题型，解决这类问题的关键是将不规则图形分割或补全成规则图形，找出各部分面积之间的关系，运用面积等计算公式列出方程 . 对图形进行分割或补全的原则：转化成为规则图形时越简单越直观越好 .

拔考向 用一元二次方程解决面积问题

例 3 某校有一块矩形绿地（数据如图 1.4−3，单位：m），现在其中修建一条道路（阴影所示），若所修建道路的面积为 325 m^2，求 x 的值.

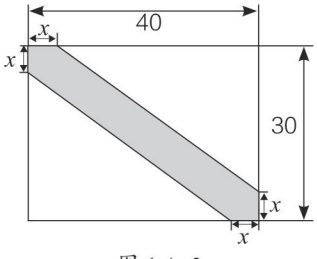


图 1.4−3

解题秘方：通过将已知道路（不规则图形）的面积转化为矩形的面积与两个直角三角形（规则图形）面积的差，然后紧扣图形中直角三角形及矩形的面积公式，建立一元二次方程的模型解决问题.

解：根据题意，得

$40\times30-(40-x)(30-x)=325$，

解这个方程，得 $x=5$ 或 $x=65$，

∵ $65>30$，

∴ $x=65$ 不符合题意，舍去 .

答：x 的值为 5.

提分·秘诀

知识储备：

整数的常用表示方法：

①两位数 = 十位上的数字 ×10+ 个位上的数字 .

②三位数 = 百位上的数字 ×100+ 十位上的数字 ×10+ 个位上的数字 .

③三个连续整数，设中间的一个数为 x，则其余两个数分别为 x−1，x+1.

④三个连续偶数可设为 2x−2，2x，2x+2；三个连续奇数可设为 2x−3，2x−1，2x+1.

提分·秘诀

方法点拨：

此类题除了要准确掌握几何图形的面积、体积或周长公式及计算方法之外，关键是能用未知数表示相关的线段长，以及对方程的根进行取舍 .

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 4 计数问题

计数问题中常用的结论：

（1）当直线上有 n 个点时，线段总条数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

（2）n 边形的对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$.

（3）传播问题中，若每轮传播会传播给 x 个对象，则第一轮后共有（$1+x$）个对象被传播，第二轮后共有（$1+x$）$+x(1+x)$，即 $(1+x)^2$ 个对象被传播，第 n 轮后共有 $(1+x)^n$ 个对象被传播.

》提分·秘诀

1人 $\xrightarrow[\text{传染}]{\text{第一轮}}$ x人

第一轮后共感染（1+x）人

（1+x）人 $\xrightarrow[\text{传染}]{\text{第二轮}}$ x(1+x)人

第二轮后共感染 1+x+x(1+x)人

拔考向 用一元二次方程解决传播问题

例 4 有 1 人患了流感，经过两轮传染后共有 36 人患了流感.

（1）求每轮传染中平均 1 人传染了几人.

（2）如果不及时控制，第三轮将又有多少人被传染？

解题秘方：紧扣传播问题中的等量关系，建立一元二次方程的模型解决问题.

解：（1）设每轮传染中平均 1 人传染了 x 人.

由题意得 $1+x+x(1+x)=36$，解得 $x_1=5$，$x_2=-7$（不符合题意，舍去）.

答：每轮传染中平均 1 人传染了 5 人.

（2）根据题意，得 $5\times36=180$（人）.

答：第三轮将又有 180 人被传染.

点知识 5 增长率问题

平均增长率中的数量关系：若增长的基数为 a，每次增长的增长率为 x，则第一次增长后的数量为 $a(1+x)$，第二次增长是以 $a(1+x)$ 为基数的，第二次增长后的数量为 $a(1+x)^2$；当问题变为下降（或减产）率为 x 时，第二次减少后的数量则为 $a(1-x)^2$.

》提分·秘诀

方法点拨：

①增长率=增量÷原来的量；

②设 a 为原来的量，m 为平均增长率，n 为增长次数，b 为增长后的量，则有 $a(1+m)^n=b$.

拔考向 用一元二次方程解决增长率问题

例 5 ［模拟·镇江］某校为响应全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆 128 人次，进馆人次逐月增加，到第三个月进馆达到 288 人次，若进馆人次的月平均增长率相同.

（1）求进馆人次的月平均增长率；

（2）因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不得超过 500 人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接待第四个月的进馆人次，并说明理由.

解题秘方：紧扣增长率问题中的等量关系，建立一元二次方程的模型解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设进馆人次的月平均增长率为 x，

根据题意，列方程得 $128(1+x)^2 = 288$.

解得 $x_1 = 0.5=50\%$；$x_2 = -2.5$（不符合题意，舍去）.

答：进馆人次的月平均增长率为 50%.

（2）第四个月进馆人次为 $288\times(1+50\%) = 432$（人次），

因为 $432 < 500$，所以满足题意.

答：校园书馆能接待第四个月的进馆人次.


用一元二次方程解决营销问题

点知识 6 营销问题

1. 销售问题中常出现的量 进价（或成本）、售价、标价（或定价）、利润等.

2. 利润问题常用的关系式

商品利润 = 商品售价 − 商品进价 = 商品标价 × 折扣率 − 商品进价；

商品利润率 $= \dfrac{\text{商品利润}}{\text{商品进价}}\times 100\% = \dfrac{\text{商品售价}-\text{商品进价}}{\text{商品进价}}\times 100\%$；

商品销售额 = 商品销售价 × 商品销售量；

商品的销售利润 =（销售价 − 成本价）× 销售量.

3. 商品打几折出售，就是按原标价的百分之几十出售，如商品打 8 折出售，即按原标价的 80% 出售. 即商品售价 = 商品标价 × 折扣率.

拔考向 用一元二次方程解决利润问题

例 6 ［期末·嘉兴］某一皮衣专卖店销售某款皮衣，其进价为每件 750 元，经市场调查发现，按每件 1 100 元出售，平均每天可售出 30 件，每件降价 50 元，平均每天的销售量可增加 10 件，皮衣专卖店若想要平均每天获利 12 000 元，则每件皮衣定价为多少元?

（1）以下是小明和小红的两种不同设法，请帮忙填完整：

小明：设每件皮衣降价 x 元，由题意，可列方程：_____；

小红：设每件皮衣定价为 y 元，由题意，可列方程：_____.

（2）请写出一种完整的解答过程.

解题秘方：用关系式“总利润 = 每件皮衣的利润 × 销售数量”，建立关于 x（y）的一元二次方程进行解答.

解：（1）$(1\,100-x-750)\left(30+\dfrac{x}{50}\times 10\right) = 12\,000$；

$(y-750)\left(30+\dfrac{1\,100-y}{50}\times 10\right) = 12\,000$.

（2）选择小明的设法，根据题意，得

$(1\,100-x-750)\left(30+\dfrac{x}{50}\times 10\right) = 12\,000$，

整理，得 $x^2-200x+7\,500 = 0$，

解这个方程，得 $x_1 = 50$，$x_2 = 150$，

$1\,100-x = 1\,050$ 或 950.

答：每件皮衣定价为 1 050 元或 950 元.

》提分·秘诀

解法提醒：

设未知数时，必须写清单位、正确使用单位. 列方程时，方程两边各个代数式的单位必须一致，答时必须写上单位. 也可选择小红的设法：

小明

	降价前	降价后
每件利润	$(1\,100-750)$ 元	$(1\,100-x-750)$ 元
销售量	30 件	$\left(30+\dfrac{x}{50}\times 10\right)$ 件
总利润	$30\times(1\,100-750)$ 元	$(1\,100-x-750)\times\left(30+\dfrac{x}{50}\times 10\right)$ 元

小红

	降价前	降价后
每件利润	$(1\,100-750)$ 元	$(y-750)$ 元
销售量	30 件	$\left(30+\dfrac{1\,100-y}{50}\times 10\right)$ 件
总利润	$30\times(1\,100-750)$ 元	$(y-750)\left(30+\dfrac{1\,100-y}{50}\times 10\right)$ 元

选择小红的设法：

根据题意，得 $(y-750)\left(30+\dfrac{1\,100-y}{50}\times 10\right) = 12\,000$，

整理，得 $y^2-2\,000y+997\,500 = 0$，解这个方程，得 $y_1 = 1\,050$，$y_2 = 950$.

答：每件皮衣定价为 1 050 元或 950 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 1 动点问题

例 7 [模拟·徐州]如图 1.4-4，在等腰直角三角形 ABC 中，$AB = BC = 8$，点 P 从点 A 开始以每秒 2 个单位长度的速度沿 AB 边向点 B 运动，过点 P 作 $PR \parallel BC$、$PQ \parallel AC$ 分别交 AC、BC 于 R、Q. 问：

（1）平行四边形 $PQCR$ 的面积能否为 7？如果能，请求出 P 点运动所需要的时间；如果不能，请说明理由；

（2）平行四边形 $PQCR$ 的面积能否为 16？能为 20 吗？如果能，请分别求出 P 点运动所需要的时间；如果不能，请说明理由.

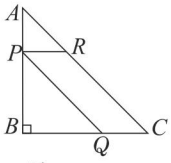


图 1.4-4

解题秘方：紧扣等腰三角形的性质和三角形的面积公式，建立一元二次方程的模型解决问题.

解：（1）设动点 P 从 A 点出发运动 x 个单位长度时，平行四边形 $PQCR$ 的面积为 7，根据题意，得 $\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(8-x)^2=7$，

解得 $x_1=1$，$x_2=7$.

∴运动时间是 $\frac{1}{2}$ 秒或 $\frac{7}{2}$ 秒.

即当动点 P 从点 A 出发运动 $\frac{1}{2}$ 秒或 $\frac{7}{2}$ 秒时，平行四边形 $PQCR$ 的面积为 7.

（2）设当 P 点运动 y 秒时，平行四边形 $PQCR$ 的面积为 16，

根据题意，得

$$\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}\times(2y)^2-\frac{1}{2}\times(8-2y)^2=16,$$

解得 $y_1=y_2=2$.

设当 P 点运动 m 秒时，平行四边形 $PQCR$ 的面积为 20，根据题意，得

$$\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}\times(2m)^2-\frac{1}{2}\times(8-2m)^2=20,\text{ 即 }m^2-4m+5=0.$$

∵ $b^2-4ac=(-4)^2-4\times5=-4<0$，∴此方程无解.

即当 P 点运动 2 秒时，平行四边形 $PQCR$ 的面积为 16. 平行四边形 $PQCR$ 的面积不能为 20.

变式训练

答案见 231 页

2. 如图 1.4-5 所示，在 Rt△ABC 中，∠B = 90°，AB = 6 cm，BC = 8 cm，点 P 由点 A 出发，沿 AB 边以 1 cm/s 的速度向点 B 移动；点 Q 由点 B 出发，沿 BC 边以 2 cm/s 的速度向点 C 移动. 如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，问：

（1）经过几秒后，△PBQ 的面积等于 8 cm²？

（2）经过几秒后，P，Q 两点间的距离是 $\sqrt{53}$ cm？

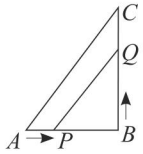


图 1.4-5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用化不规则为规则法用一元二次方程解几何问题

例 8 ［模拟·青岛］如图 1.4-6，在长为 62 米、宽为 42 米的矩形草地上修同样宽的路，余下部分种植草坪. 要使草坪的面积为 2400 平方米，设道路的宽为 x 米，则可列方程为（　　）

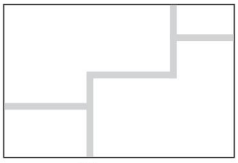


图 1.4-6

A. $(62-x)(42-x)=2400$

B. $(62-x)(42-x)+x^2=2400$

C. $62\times42-62x-42x=2400$

D. $62x+42x=2400$

解题秘方：利用平移法，把不规则图形的面积转化为规则图形的面积，再列方程.

解：根据题意，得 $(62-x)(42-x)=2400$.

答案：A

方法点拨：

平移法是列一元二次方程解面积类应用题常用的方法，其核心思想是将不在一起的几个图形通过平移转化为一个规则的图形，通过面积关系列一元二次方程求解.

如此题可将道路平移到矩形的右侧和下侧，则可得草坪的面积等于一个长为 $(62-x)$ 米，宽为 $(42-x)$ 米的矩形的面积.



利用一元二次方程建模

拔尖角度 3 一元二次方程与一次函数图象的综合应用

例 9 ［二模·漳州］某科技公司为提高经济效益，近期研发了一种新型设备，每台设备成本价为 2 万元. 经过市场调研发现，该设备的月销售量 y（台）和销售单价 x（万元）对应的点 (x,y) 在函数 $y=kx+b$ 的图象上，如图 1.4-7.

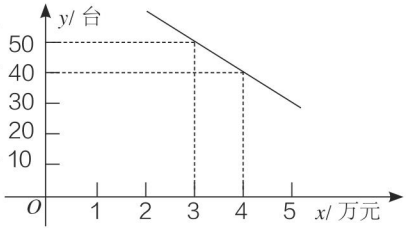


图 1.4-7

（1）求 y 与 x 的函数关系式；

（2）根据相关规定，此设备的销售单价不高于 5 万元，若该公司要获得 80 万元的月利润，则该设备的销售单价是多少万元？

解题秘方：利用函数图象的信息，用待定系数法即可求出月销售量与销售单价的函数关系式.

解：（1）根据题意，得 $\begin{cases}3k+b=50,\\4k+b=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=80,\end{cases}$

故 y 与 x 的函数关系式是 $y=-10x+80$.

（2）根据题意，得 $(x-2)(-10x+80)=80$，

整理，得 $x^2-10x+24=0$，解这个方程，得 $x_1=4$，$x_2=6$.

∵销售单价不高于 5 万元，

∴ $x=6$ 不合题意，舍去，

即 $x=4$.

答：该设备的销售单价是 4 万元.

教你一招：

解决图形面积问题的关键是把实际问题转化为数学问题，把实际问题中的已知量和未知量归结到某一个几何图形中，然后利用几何知识来寻找它们之间的关系，列出一元二次方程求解，求不规则图形的面积时，一般是将不规则图形平移或分割成规则图形，再利用规则图形的面积公式列方程求解.

特别提醒：

在“该公司要获得 80 万元的月利润”的情况下，销售单价 x 可以取 4 万元或者 6 万元，但是“此设备的销售单价不高于 5 万元”，即销售单价 x 只能取 4 万元作为符合题意的答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

随着课程改革的不断深入，近年来一元二次方程与经济相联系的应用题在各地中考中大量涌现，在中考中单独考查时主要考查利润问题、增长率问题，也常与几何图形的面积问题及函数问题相结合，题型有选择题、填空题和解答题.

三年中考兵法

»冲刺·满分

方法点拨：

对于平均增长率问题，正确理解有关"增长"问题的一些词语的含义是解答这类问题的关键，常见的词语有："增加""增加到""增加了几倍""增长到几倍"等. 要弄清基数、增长后的量及增长次数.

考法1 利用一元二次方程解决增长率问题

例10 [中考·上海]去年某商店"十一黄金周"进行促销活动期间，前六天的总营业额为450万元，第七天的营业额是前六天总营业额的12%.

(1)求该商店去年"十一黄金周"这七天的总营业额；

(2)去年，该商店7月份的营业额为350万元，8、9月份营业额的月增长率相同，"十一黄金周"这七天的总营业额与9月份的营业额相等. 求该商店去年8、9月份营业额的月增长率.

试题评析：本题考查了利用一元二次方程解决增长率问题，解题的关键是寻找等量关系，构建方程.

解：(1)$450+450\times12\%=504$(万元).

答：该商店去年"十一黄金周"这七天的总营业额为504万元.

(2)设该商店去年8、9月份营业额的月增长率为x，

根据题意，得$350(1+x)^2=504$，

解得$x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$(不合题意，舍去).

答：该商店去年8、9月份营业额的月增长率为20%.

知识储备：

利润=售价-进价；

利润率=$\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%$；

售价=进价×(1+利润率)；

总利润=总售价-总成本=单件利润×总销量.

考法2 利用一元二次方程解决商品销售问题

例11 [模拟·泰州]在水果销售旺季，某水果店购进一种优质水果，进价为20元/千克，售价不低于20元/千克，且不超过32元/千克，根据销售情况，发现该水果一天的销售量y(千克)与该天的售价x(元/千克)满足的关系为一次函数$y=-2x+80$.

(1)某天这种水果的售价为23.5元/千克，求当天该水果的销售量；

(2)如果某天销售这种水果获利150元，那么该天水果的售价为多少元/千克？

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

试题评析：本题考查了一次函数的应用以及一元二次方程的应用，解题的关键是（1）把售价代入函数关系式即可求出该水果的当天销售量；（2）找准等量关系，正确列出一元二次方程.

解：（1）∵ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x+80$.

∴当 $x=23.5$ 时，$y=-2x+80=33$.

答：当天该水果的销售量为 33 千克.

（2）根据题意，得 $(x-20)(-2x+80)=150$，

解得 $x_1=35$，$x_2=25$.

∵售价不低于 20 元 / 千克，且不超过 32 元 / 千克，

即 $20 \leqslant x \leqslant 32$，

∴ $x=25$.

答：如果某天销售这种水果获利 150 元，那么该天水果的售价为 25 元 / 千克.

考法 3 利用一元二次方程解决图形面积问题

方法点拨：
利用图形的面积建立一元二次方程的模型解决问题时，对于根的取舍要紧扣未知数的实际意义及在图形中隐含的限制条件.

例 12 **［中考·山西］**如图 1.4-8 是一张长 12 cm，宽 10 cm 的矩形铁皮，将其剪去两个全等的正方形和两个全等的矩形，剩余部分（阴影部分）可制成底面积是 24 cm^2 的有盖长方体铁盒. 则剪去的正方形的边长为_____cm.

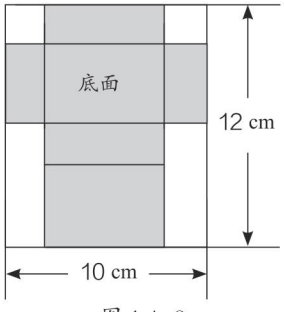


图 1.4-8

试题评析：本题考查了有关图形面积问题的一元二次方程的应用，利用面积公式建立一元二次方程是解决本题的关键.

解：设剪去的正方形的边长为 x cm，则长方体铁盒的底面长为（$10-2x$）cm，宽为（$6-x$）cm，根据题意，得

$(10-2x)(6-x)=24$，解得 $x_1=2$，$x_2=9$（舍去），

即剪去的正方形的边长为 2 cm.

答案：2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

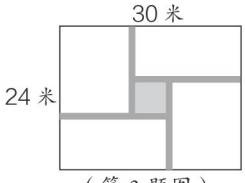
☞答案见232页

1. 目前以5G等为代表的战略性新兴产业蓬勃发展. 某市2019年底有5G用户2万户，计划到2021年底全市5G用户数达到3.92万户. 设全市5G用户数年平均增长率为x，则x的值为（　　）

A. 20%　　B. 30%　　C. 40%　　D. 50%

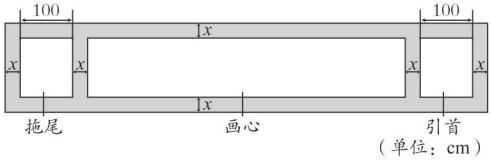
2. 一学校为了绿化校园环境，向某园林公司购买了一批树苗. 园林公司规定：如果购买树苗不超过60棵，每棵售价为120元；如果购买树苗超过60棵，在一定范围内，每增加1棵，所出售的这批树苗每棵售价降低0.5元. 若该校最终向园林公司支付树苗款8 800元，设该校共购买了x棵树苗，则可列出方程 _____.

3.[模拟·盐城]准备在一块长为30米，宽为24米的长方形花圃内修建四条宽度相等，且与各边垂直的小路（如图所示），四条小路围成的中间部分恰好是一个正方形，且边长是小路宽度的4倍，若四条小路所占面积为80平方米，则小路的宽度为_____米.



（第3题图）

4. 手卷是国画装裱中横幅的一种体式，以能握在手中顺序展开阅览得名，它主要由“引首”“画心”“拖尾”三部分组成（这三部分都是矩形形状），分隔这三部分的其余部分统称为“隔水”. 如图的手卷长1 000 cm，宽40 cm，引首和拖尾完全相同，其宽度都为100 cm. 若隔水的宽度为x cm，画心的面积为15 200 cm^2，求x的值.



（第4题图）

5.[二模·沈阳]某商场销售一批名牌衬衫，平均每天能售出20件，每件盈利50元. 经调查发现：这批衬衫的售价每降低1元，平均每天能多售出2件，设每件衬衫降价x元.

（1）降价后，每件衬衫的利润为 _____ 元，平均每天的销量为 _____ 件；（用含x的式子表示）

（2）为了扩大销售，尽快减少库存，商场决定采取降价措施，但需要平均每天盈利1 600元，那么每件衬衫降价多少元?

6.[一模·济南]为帮助人民应对疫情，某药厂下调药品的价格. 某种药品经过连续两次降价后，由每盒200元下调至128元，已知每次下降的百分率相同.

（1）求这种药品每次下降的百分率.

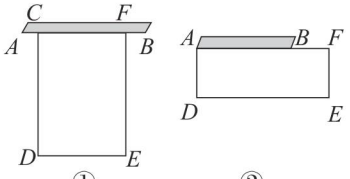
（2）已知这种药品的成本为100元，若按此降价幅度再一次降价，药厂是否亏本?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

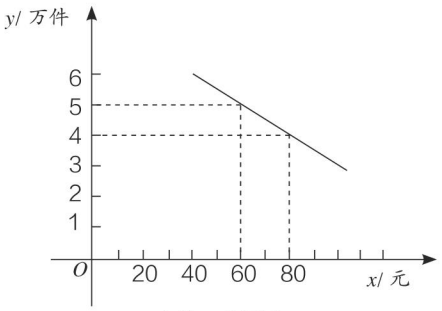
7.[期末·合肥]合肥长江180艺术街区进行绿化改造，用一段长40 m的篱笆和长15 m的墙AB，围成一个矩形的花园，设平行于墙的一边DE的长为x m；

（1）如图①，如果矩形花园的一边靠墙AB，另三边由篱笆$CDEF$围成，当花园面积为150 m^2时，求x的值；

（2）如图②，如果矩形花园的一边由墙AB和一节篱笆BF构成，另三边由篱笆$ADEF$围成，当花园面积是150 m^2时，求BF的长.



（第7题图）

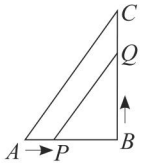


（第8题图）

9.[一模·连云港]如图，在△ABC中，∠B = 90°，AB = 5 cm，BC = 7 cm，点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动，点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动.

（1）如果P，Q分别从A，B两点同时出发，那么几秒后，PQ的长度等于$2\sqrt{10}$ cm？

（2）在（1）中，△PQB的面积能否等于7 cm^2？请说明理由.



（第9题图）

8.[期中·新北区]某通讯器材公司销售一种市场需求较大的新型通讯产品，已知每件产品的进价为40元，每年销售该种产品的总开支（不含进价）为120万元，在销售过程中发现，年销售量y（万件）与销售单价x（元）之间存在着如图所示的一次函数关系.

（1）直接写出y关于x的函数关系式为_____.

（2）市场管理部门规定，该产品的销售单价不得超过100元，该公司销售该种产品当年获利55万元，求当年的销售单价.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 小张准备进行如下实验操作：把一根长为 20 cm 的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长各做一个正方形，设其中一个正方形的边长为 x cm.

（1）要使这两个正方形的面积之和等于 13 cm^2，则这两个正方形的边长分别是多少？

（2）小张认为，这两个正方形的面积之和不可能等于 11 cm^2，你认为他的说法正确吗？请说明理由.

11. [**期中 · 威海**] 悠悠食品店的 A、B 两种菜品，每份成本均为 14 元，售价分别为 20 元、18 元，这两种菜品每天的营业额共为 1 120 元，总利润为 280 元.

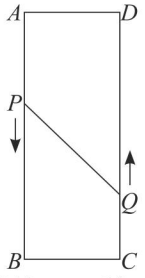
（1）该店每天卖出这两种菜品共多少份？

（2）该店为了增加利润，准备降低 A 种菜品的售价，同时提高 B 种菜品的售价，售卖时发现，A 种菜品售价每降 0.5 元可多卖 1 份；B 种菜品售价每提高 0.5 元就少卖 1 份，如果这两种菜品每天销售的总份数不变，这两种菜品一天的总利润是 316 元. 求 A 种菜品每天销售多少份 .

12. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 16$ cm，$BC = 6$ cm，动点 P、Q 分别以 3 cm/s、2 cm/s 的速度从点 A、C 同时出发.

（1）若点 P 从点 A 移动到点 B 停止，点 Q 随点 P 的停止而停止移动，问经过多长时间，P、Q 两点之间的距离是 10 cm？

（2）若点 P 沿着 $AB \to BC \to CD$ 移动，点 Q 从点 C 移动到点 D 停止时，点 P 随点 Q 的停止而停止移动，试探求经过多长时间△ PBQ 的面积为 12 cm^2.



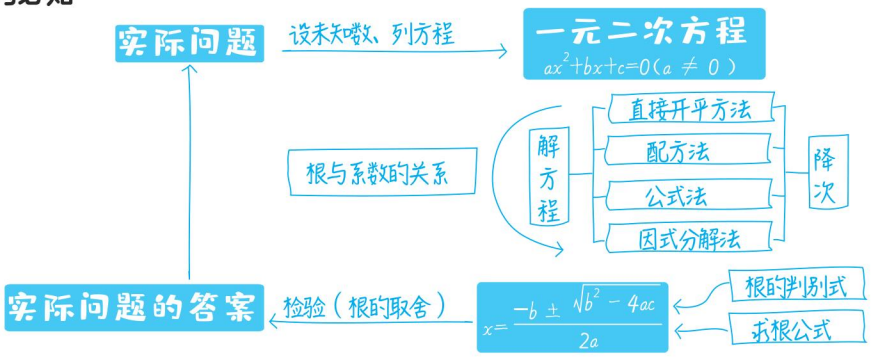
（第 12 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 一元二次方程的一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

2. 一元二次方程的解法：（1）直接开平方法；（2）配方法；（3）公式法；（4）因式分解法.

3. 一元二次方程根的判别式是 b^2-4ac，一元二次方程根的情况有三种：

（1）有两个不等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac>0$；

（2）有两个相等的实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac=0$；

（3）无实数根$\Leftrightarrow b^2-4ac<0$.

4. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$ 且 $b^2-4ac\geqslant0$）的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

知识方法专题

知识必学

专题一 一元二次方程的概念

专题解读≫一元二次方程的概念是本章的基本内容，是学习一元二次方程的解法的基础，在中考中一般不会直接考查.

例1 下列方程中，是一元二次方程的是（　　）

A. $x+2=3$　　B. $x+y=1$

C. $x^2-2x-3=0$　　D. $x^2+\frac{1}{x}=1$

解：A. 方程为一元一次方程，不符合题意，故本选项错误；B. 方程为二元一次方程，不符合题意，故本选项错误；C. 方程为一元二次方程，符合题意，故本选项正确；D. 方程为分式方程，不符合题意，故本选项错误.

答案：C

解法提醒：本题考查了一元二次方程的定义，正确掌握一元二次方程的定义是解决本题的关键.

例2 [期中·镇江] 已知关于 x 的方程 $(m-2)x^{|m|}+(2m+1)x-m=0$ 是一元二次方程，则 $m=$_____.

导引：本题根据一元二次方程的定义求解，一元二次方程必须满足：

（1）未知数的最高次数是 2；

（2）二次项系数不为 0；

（3）是整式方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：根据题意，解得 $m=-2$.

答案：-2

教你一招：在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）中，$a\neq 0$ 是一元二次方程必须满足的条件之一，若不能确定 $a\neq 0$，则需要分类讨论，当 $a\neq 0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程；当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 是一元一次方程.

专题二 一元二次方程的解

专题解读≫一元二次方程的解是每年中考考查的重点内容，主要有两种考查形式，一种是已知方程的解求方程中待定字母的值，解答的思路是将方程的解直接代入方程求解；另一种是求与方程的解有关的代数式的值，解答的基本思路是整体代入求值.

例 3 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，则 $a=$_____.

解：把 $x=0$ 代入方程

$(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$，

整理，得 $a^2-1=0$，

解得 $a_1=1$，$a_2=-1$.

$\because a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$，

$\therefore a=-1$.

答案：-1

教你一招：解答这类问题的基本思路是直接将方程的根代入原方程，再解方程，但要注意二次项系数不能为 0.

例 4 如果一元二次方程 $x^2-3x-2=0$ 的一个根是 m，则代数式 $5m^2-15m+2$ 的值是_____.

解：把 $x=m$ 代入方程，可得 $m^2-3m-2=0$，

$\therefore m^2-3m=2$，

$\therefore 5m^2-15m+2=5(m^2-3m)+2$

$=5\times 2+2$

$=12$.

答案：12

教你一招：解答此类问题的关键是正确理解一元二次方程的根的定义，将方程的根代入原方程，得到与方程的根有关的代数式的值，再整体代入求值.

例 5 [模拟·烟台]若 $x=-2$ 是方程 $ax^2+bx+3=0$（$a\neq 0$）的一个解，则代数式 $1-8a+4b$ 的值是_____.

解：把 $x=-2$ 代入方程

$ax^2+bx+3=0$（$a\neq 0$），

得 $4a-2b+3=0$，

$\therefore 4a-2b=-3$，

$\therefore 1-8a+4b=1-2(4a-2b)$

$=1-2\times(-3)=7$.

答案：7


一元二次方程的解法

专题三 一元二次方程的解法

专题解读≫一元二次方程的解法是本章重点，也是每年中考考查的重要考点，有两种考查形式，一种是根据规定的解法解方程，解答时一定要根据要求解答；另一种是选择合适的方法解方程，需在正确理解四种方法的基础上，选择合适的方法作答.

例 6 用适当的方法解方程：

（1）$x^2-5x+1=0$；

（2）$3(x-2)^2=x(x-2)$；

（3）$x^2-2x=7$；

（4）$(x+2)^2=(3x-1)^2$.

导引：

（1）利用公式法求解可得；

（2）移项后，利用因式分解法求解可得；

（3）利用配方法求解可得；

（4）移项后，利用因式分解法求解可得.

解：（1）$\because a=1$，$b=-5$，$c=1$，

$b^2-4ac=25-4\times 1\times 1=21>0$，

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$，

$\therefore x_1=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）∵ $3(x-2)^2-x(x-2)=0$，

∴ $(x-2)[3(x-2)-x]=0$，

∴ $(x-2)(2x-6)=0$，

∴ $x-2=0$ 或 $2x-6=0$，

∴ $x_1=2$，$x_2=3$；

（3）配方得 $x^2-2x+1=7+1$，

即 $(x-1)^2=8$，∴ $x-1=\pm 2\sqrt{2}$，

∴ $x_1=1+2\sqrt{2}$，$x_2=1-2\sqrt{2}$；

（4）∵ $(x+2)^2-(3x-1)^2=0$，

∴ $(x+2+3x-1)(x+2-3x+1)=0$，

∴ $(4x+1)(-2x+3)=0$，

∴ $4x+1=0$ 或 $-2x+3=0$，

∴ $x_1=-\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

解法提醒：解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

专题四 一元二次方程根的判别式

专题解读≫一元二次方程根的判别式是每年中考考查的重点，考查形式多样，主要有两种考查方式：一种是不解方程，判断方程根的情况，常需运用配方法结合非负数的性质进行判断；另一种是已知方程根的情况，根据判别式列方程或不等式求解，解答时要注意二次项系数不能为0.

例7 [模拟·长沙] 关于 x 的一元二次方程 $(2-a)x^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，则整数 a 的最小值是_____.

解：∵一元二次方程 $(2-a)x^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，

∴ $b^2-4ac=(-2)^2-4\times(2-a)\times 1>0$ 且 $2-a\neq 0$，解得 $a>1$ 且 $a\neq 2$，

∴整数 a 的最小值为3.

答案：3

教你一招：运用根的判别式解题时首先要将原方程化为一般形式，再计算，同时要注意二次项系数不能为0.

例8 [一模·揭阳] 关于 x 的方程 $mx^2-2x+1=0$ 中，如果 $m<1$，那么这个方程的根的情况是（　　）

A. 有实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有两个相等的实数根

D. 以上说法都不对

解：当 $m=0$ 时，方程为一元一次方程，

整理得 $-2x+1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$；

当 $m\neq 0$ 时，方程是一元二次方程，

∵ $m<1$，

∴ $b^2-4ac=(-2)^2-4m=4(1-m)>0$，

∴方程有两个不相等的实数根.

综上所述，当 $m<1$ 时，这个方程的根的情况是有实数根.

答案：A

专题五 一元二次方程的根与系数的关系

专题解读≫一元二次方程的根与系数的关系是选学内容，在中考中考查难度一般不大，主要以选择题或填空题的形式出现. 根据一元二次方程的根与系数的关系解题时要注意方程有解的前提条件.

例9 [期中·苏州] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m-1)x-2(m+3)=0$.

（1）试证：无论 m 取任何实数，方程都有两个不相等的实数根；

（2）设 x_1，x_2 为方程的两个实数根，且 $x_1^2+x_2^2=16$，求 m 的值.

导引：根据根与系数的关系可求出答案.

（1）证明：

$b^2-4ac=[-(m-1)]^2-4\times 1\times[-2(m+3)]$

$=m^2+6m+25$

$=(m+3)^2+16$.

∵ $(m+3)^2\geqslant 0$，

∴ $(m+3)^2+16>0$，即 $b^2-4ac>0$，

∴无论 m 取任何实数，方程都有两个不相等的实数根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）**解**：∵ x_1，x_2 为方程的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=m-1$，$x_1\cdot x_2=-2(m+3)$，

∴ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=16$，

即 $(m-1)^2-2[-2(m+3)]=16$，

∴ $m^2+2m-3=0$，∴ $m_1=-3$，$m_2=1$，

∴ m 的值为 -3 或 1.

解法提醒：解题的关键是熟练运用根与系数的关系以及一元二次方程的解法，在运用根与系数的关系解题时要注意判断方程是否有解.

例 10 **［模拟·无锡］**已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若此方程的两个实数根 x_1，x_2 满足 $(x_1-1)(x_2-1)=5$，求 k 的值.

解：（1）∵关于 x 的一元二次方程有两个不相等的实数根，

∴ $b^2-4ac=(2k-1)^2-4k^2>0$，解得 $k<\frac{1}{4}$，

∴ k 的取值范围是 $k<\frac{1}{4}$.

（2）∵ x_1，x_2 是方程的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2$，

∵ $(x_1-1)(x_2-1)=5$，

∴ $x_1x_2-(x_1+x_2)+1=5$，

即 $k^2-(2k-1)+1=5$，

整理，得 $k^2-2k-3=0$，

解得 $k_1=-1$，$k_2=3$. ∵ $k<\frac{1}{4}$，∴ $k=-1$.

∴ k 的值为 -1.

专题六 用一元二次方程解决实际问题（拓展点）

链接中考» 一元二次方程的应用是中考考查的重点，多以解答题的形式出现，解答这类问题时要注意验证两个解是否符合题意.

例 11 **［中考·宿迁］**某超市经销一种商品，每千克成本为 50 元. 经试销发现，该种商品的每天销售量 y（千克）与销售单价 x（元/千克）满足一次函数关系，其销售单价、每天销售量的四组对应值如下表所示：

销售单价 x（元/千克）	55	60	65	70
每天销售量 y（千克）	70	60	50	40

（1）求 y（千克）与 x（元/千克）之间的函数表达式；

（2）为保证某天获得 600 元的销售利润，则该天的销售单价应定为多少？

（3）当销售单价定为多少时，才能使当天的销售利润最大？最大利润是多少？

导引：（1）根据表格内的数据，利用待定系数法可求出 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）根据总利润 = 每千克利润 × 销售量，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取符合题意的解即可得出答案.

（3）可设当天的销售利润为 w 元，根据总利润 = 每千克利润 × 销售量，即可得出关于 x 的代数式，然后利用配方法求出最值即可得出答案.

解：（1）设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$（$k\neq0$），将（55，70），（60，60）这两组数据代入 $y=kx+b$ 中得，$\begin{cases}55k+b=70,\\60k+b=60,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=180.\end{cases}$

∴ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x+180$.

（2）根据题意，得

$(x-50)(-2x+180)=600$，

解得 $x_1=60$，$x_2=80$.

答：为保证某天获得 600 元的销售利润，则该天的销售单价应定为 60 元/千克或 80 元/千克.

（3）设当天的销售利润为 w 元，根据题意，得 $w=(x-50)(-2x+180)$

$=-2(x-70)^2+800$，

∵ $-2(x-70)^2\leqslant0$，

∴ $-2(x-70)^2+800\leqslant800$，

且当 $x=70$ 时，w 有最大值，为 800.

答：当销售单价定为 70 元/千克时，才能使当天的销售利润最大，最大利润是 800 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题七 整体思想

专题解读≫所谓的整体思想就是从问题的整体性质出发，突出对问题的整体结构的分析和改造，发现问题的整体结构的特征，善于用“集成”的眼光，把某些式子或图形看成一个整体，把握它们之间的关联．整体思想广泛运用于数学解题的每一个角落，尤其是在一元二次方程中的运用，在利用因式分解法解一元二次方程时，时常要将方程中的某一个代数式视为一个整体来提取公因式．

例 12 [月考·扬州] 已知 m，n 是一元二次方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=100$，则 $a=$_____.

解：根据一元二次方程根的定义，得到 $m^2-2m-4=0$，$n^2-2n-4=0$，

即 $m^2-2m=4$，$n^2-2n=4$.

所以 $7m^2-14m=7\times4=28$，

$3n^2-6n=3\times4=12$，

由 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=100$，

可以得到 $(28+a)(12-7)=100$，

解得 $a=-8$.

答案：-8

例 13 [期末·长沙] 若 a，b 是方程 $x^2-x-5=0$ 的两个不同的实数根，则 $a^3-a^2+5b-2=$_____.

解：由 a 是方程 $x^2-x-5=0$ 的一个实数根，

得到 $a^2-a=5$，

$\therefore a^3-a^2=5a$.

$\because a$，b 是方程 $x^2-x-5=0$ 的两个不同的实数根，

$\therefore a+b=1$，

$\therefore a^3-a^2+5b-2$

$=5a+5b-2$

$=5(a+b)-2=5\times1-2=3$.

答案：3

专题八 转化思想

专题解读≫运用转化思想可将未知转化为已知，将复杂转化为简单，将分散转化为集中，将多元转化为一元，将高次转化为低次等．在一元二次方程中，运用转化思想将高次转化为低次．

例 14 [期末·威海] 如图 1-1，某小区规划在一个长 30 m，宽 20 m 的矩形场地上，修建两横两竖四条同样宽的道路，且横、竖道路分别与矩形的长、宽平行，其余部分种草坪，若使每块草坪的面积都为 56 m^2，应如何设计道路的宽度？

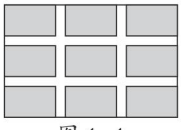


图 1-1

导引：运用平移将不规则图形转化为规则图形，根据等量关系解题．

解：设道路的宽度应设计为 x m.

根据题意，得

$(30-2x)(20-2x)=56\times9$，

整理得 $x^2-25x+24=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=24$.

$\because 24>20$，

$\therefore x=24$ 不符合题意，舍去.

答：道路的宽度应设计为 1 m.

专题九 数形结合思想

专题解读≫数形结合思想是数学解题中常用的思想方法，数形结合思想可以使某些抽象的数学问题直观化、生动化，能够变抽象思维为形象思维，有助于把握题目的本质．巧妙地运用数形结合的思想方法解决一些抽象的数学问题可起到事半功倍的效果，数形结合的重点是“以形助数”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 15 如图 1–2，在 Rt △ ABC 中，AC = 24 cm，BC = 7 cm，P 点在 BC 上，从 B 点到 C 点运动（不包括 C 点），运动的速度为 2 cm/s；Q 点在 AC 上，从 C 点到 A 点运动（不包括 A 点），运动速度为 5 cm/s. 若点 P、Q 分别从 B、C 两点同时运动，且运动时间记为 t s，请解答下面的问题.

（1）当 t 为何值时，P、Q 两点的距离为 $5\sqrt{2}$ cm？

（2）当 t 为何值时，△ PCQ 的面积为 15 cm^2？

（3）请用配方法说明，当点 P 运动多少时间时，四边形 $BPQA$ 的面积最小？最小面积是多少？

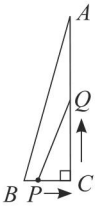


图 1–2

导引：（1）根据勾股定理，可得 $PC^2+CQ^2 = PQ^2$，然后列出方程求解即可；

（2）根据三角形的面积公式列出方程求解即可；

（3）根据△ PCQ 的面积最大，则四边形 $BPQA$ 的面积最小，结合三角形的面积公式、配方法求解即可.

解：（1）在 Rt △ PCQ 中，根据勾股定理，可知 $PC^2+CQ^2 = PQ^2$，

∵ PC = （7 − 2t）cm，CQ = 5t cm，

PQ=5$\sqrt{2}$ cm，

∴ （7 − 2t）^{2}+（5t）^{2} = （5$\sqrt{2}$）^{2}，

解得 t = 1 或 $t = -\frac{1}{29}$（不合题意，舍去）.

答：当 t 为 1 时，P、Q 两点的距离为 $5\sqrt{2}$ cm；

（2）根据题意，可得

$\frac{1}{2}$ ×（7 − 2t）×5t = 15.

解得 t_1 = 2，t_2 = 1.5.

答：当 t 为 2 或 1.5 时，△ PCQ 的面积为 15 cm^2.

（3）要使四边形 $BPQA$ 的面积最小，则△ PCQ 的面积要最大，

根据题意，可得

$S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2} \times PC \times CQ = \frac{1}{2} \times (7-2t) \times 5t = \frac{5}{2} \times (-2t^2+7t) = -5(t-1.75)^2 + \frac{245}{16}$，

∴当 t = 1.75 时，△ PCQ 的面积最大，为 $\frac{245}{16}$.

即四边形 $BPQA$ 的面积的最小值为

$\frac{1}{2} \times 7 \times 24 - \frac{245}{16} = \frac{1\,099}{16}$（cm^2）.

答：当点 P 运动 1.75 s 时，四边形 $BPQA$ 的面积最小，为 $\frac{1\,099}{16}$ cm^2.

例 16 如图 1–3，在△ ABC 中，∠ B = 90°，AB = 6 cm，BC = 8 cm.

（1）点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动，如果 P，Q 分别从 A，B 同时出发，经过几秒，点 P，Q 之间的距离为 $\sqrt{6}$ cm？

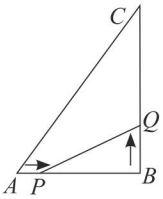


图 1–3

（2）点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动，如果 P，Q 分别从 A，B 同时出发，经过几秒，△ PBQ 的面积等于 8 cm^2？

（3）若点 P 沿射线 AB 方向从点 A 出发以 1 cm/s 的速度移动，点 Q 沿射线 CB 方向从点 C 出发以 2 cm/s 的速度移动，P，Q 同时出发，几秒后，△ PBQ 的面积为 1 cm^2？

解：(1)设经过 t s，点 P，Q 之间的距离为 $\sqrt{6}$ cm.

由题意得 AP = t cm，QB = 2t cm，

∴ PB = （6 − t）cm，

在△ PBQ 中，∠ B = 90°，

由勾股定理得（6 − t）^{2}+（2t）^{2} = 6，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

整理，得 $5t^2-12t+30=0$.

$\because b^2-4ac=(-12)^2-4\times5\times30$

$=144-600<0$,

$\therefore$ 点 P，Q 之间的距离不可能为 $\sqrt{6}$ cm.

（2）设经过 x s，$\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm^2，

根据题意，得 $\frac{1}{2}(6-x)\cdot 2x=8$,

解得 $x_1=2$, $x_2=4$，检验发现 x_1, x_2 均符合题意，

$\therefore$ 经过 2 s 或 4 s，$\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm^2.

（3）①当点 P 在线段 AB 上，点 Q 在线段 CB 上时，设经过 m s，$0<m\leqslant4$,

根据题意，得 $\frac{1}{2}(6-m)(8-2m)=1$,

$\therefore m^2-10m+23=0$,

解得 $m_1=5+\sqrt{2}$（舍去），$m_2=5-\sqrt{2}$.

$\therefore m=5-\sqrt{2}$;

②当点 P 在线段 AB 上，点 Q 在射线 CB 上时，设经过 n s，$4<n\leqslant6$，根据题意，得

$\frac{1}{2}(6-n)(2n-8)=1$,

$\therefore n^2-10n+25=0$,

解得 $n_1=n_2=5$, $\therefore n=5$;

③当点 P 在射线 AB 上，点 Q 在射线 CB 上时，设经过 k s，$k>6$，根据题意，得

$\frac{1}{2}(k-6)(2k-8)=1$,

解得 $k_1=5+\sqrt{2}$，$k_2=5-\sqrt{2}$（舍去），

$\therefore k=5+\sqrt{2}$.

$\therefore$ 经过（$5-\sqrt{2}$）s 或 5 s 或（$5+\sqrt{2}$）s 后，$\triangle PBQ$ 的面积为 1 cm^2.

好题必解 ☞答案见 234 页

题型一 巧解一元二次方程

1.[期末·南通] 已知实数 x 满足 $(x^2-x)^2-2(x^2-x)-3=0$，求代数式 $x^2-x+2\,020$ 的值.

2. 已知 $(x-2\,019)^2+(x-2\,021)^2=36$，则 $(x-2\,020)^2$ 的值是（　　）

A. 2　　B. 7　　C. 12　　D. 17

题型二 巧用根的判别式求与最值有关的问题

3. 阅读理解：

材料 1：求 x^2+2x+5 的取值范围：

解：令 $x^2+2x+5=y$,

$\therefore x^2+2x+(5-y)=0$,

$\therefore b^2-4ac=4-4\times(5-y)\geqslant0$,

$\therefore y\geqslant4$,

$\therefore x^2+2x+5\geqslant4$;

材料 2：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2（$x_1>x_2$），则关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geqslant0(a>0)$ 的解集为 $x\geqslant x_1$ 或 $x\leqslant x_2$

关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0(a>0)$ 的解集为 $x_2\leqslant x\leqslant x_1$;

请根据上述材料，解答下列问题：

（1）若关于 x 的二次三项式 x^2+ax+3（a 为常数）的最小值为 -7，则 $a=$_____.

（2）求出代数式 $\frac{x^2-4x+2}{2x-1}$ 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型三 巧用根与系数的关系求代数式的值

4.[模拟·成都]已知$a^2-2a-1=0$,$b^2+2b-1=0$,且$ab\neq 1$,则$\dfrac{ab+b+1}{b}$的值为_____.

题型四 巧用一元二次方程解几何问题

5.[模拟·泰州]新定义:如果一个矩形,它的周长和面积分别是另外一个矩形的周长和面积的一半,则这个矩形是另外一个矩形的“减半”矩形.

(1)已知矩形$ABCD$的长为12、宽为2,矩形$EFGH$的长为4、宽为3,试说明矩形$EFGH$是矩形$ABCD$的“减半”矩形.

(2)矩形的长和宽分别为2,1时,它是否存在“减半”矩形?请作出判断,并说明理由.

题型五 巧用一元二次方程解实际问题

6.[月考·重庆]今年奉节脐橙喜获丰收,某村委会将全村农户的脐橙统一装箱出售.经核算,每箱成本为40元,统一零售价定为每箱50元,可以根据买家订货量的多少给出不同的折扣价销售.

(1)问最多打几折销售,才能保证每箱脐橙的利润率不低于10%?

(2)该村最开始几天每天可卖5 000箱,因脐橙的保鲜周期短,需要尽快打开销路,减少积压,村委会决定在零售价的基础上每箱降价3m%,这样每天可多销售$\dfrac{20}{3}m$%;为了保护农户的收益与种植积极性,政府用“精准扶贫基金”给该村按每箱脐橙m元给予补贴进行奖励,结果该村每天脐橙销售的利润为49 000元,求m的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 1 章测试卷 ☞答案见 235 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1.[期末·南京]下列方程是一元二次方程的是（　　）

A. $x^2=2x+3$　　B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=2$

C. $x^2+\frac{1}{x}=3$　　D. $2x+y=1$

2.[期末·泰州]方程 $x^2=x$ 的根是（　　）

A. $x=0$　　B. $x=1$

C. $x=0$ 或 $x=1$　　D. $x=0$ 或 $x=-1$

3.[一模·连云港]一元二次方程 $x^2-4x+2=0$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个相等的实数根　　B. 只有一个实数根

C. 有两个不相等的实数根　　D. 没有实数根

4. 已知 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2+x-6=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2-x_1x_2$ 的值为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 3　　D. 4

5.[模拟·南通]把方程 $\frac{1}{3}x^2-x-5=0$ 化成 $(x+m)^2=n$ 的形式得（　　）

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$　　B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{69}{4}$　　D. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{51}{4}$

6.[模拟·连云港]若 $(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)-3=0$，则代数式 a^2+b^2 的值是（　　）

A. −1 或 3　　B. 1 或 −3

C. −1　　D. 3

7.[模拟·盐城]若关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k>1$　　B. $k>-1$ 且 $k\neq 0$

C. $k\geqslant -1$ 且 $k\neq 0$　　D. $k<1$ 且 $k\neq 0$

8.[模拟·武汉]某电影上映第一天票房收入约 3 亿元，以后每天票房收入按相同的增长率增长，三天后累计票房收入达到 10 亿元．若增长率为 x，则下列方程正确的是（　　）

A. $3(1+x)=10$

B. $3(1+x)^2=10$

C. $3+3(1+x)^2=10$

D. $3+3(1+x)+3(1+x)^2=10$

9.[期中·宿迁]关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的根是 $x_1=5$，$x_2=-6$，（a，b，m 均为常数，$a\neq 0$），则关于 x 的方程 $a(x-m+2)^2+b=0$ 的根是（　　）

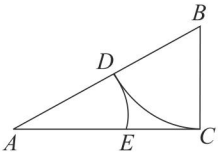
A. $x_1=7$，$x_2=-4$

B. $x_1=3$，$x_2=-8$

C. $x_1=-7$，$x_2=8$

D. $x_1=-7$，$x_2=4$

10.[期中·无锡]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC=a$，$AC=b$．以点 B 为圆心，BC 的长为半径画弧，交线段 AB 于点 D，以点 A 为圆心，AD 的长为半径画弧，交线段 AC 于点 E．下列哪条线段的长度是方程 $x^2+2ax-b^2=0$ 的一个根？（　　）



（第 10 题图）

A. 线段 BC 的长

B. 线段 AD 的长

C. 线段 EC 的长

D. 线段 AC 的长

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11.[期中·苏州]已知 a 是关于 x 的方程 $x^2-2x-8=0$ 的一个根，则 a^2-2a 的值为_____.

12. 在实数范围内定义一种运算“$*$”，其规则为 $a*b=a^2-b^2$，根据这个规则，方程 $(x+1)*3=0$ 的解为_____.

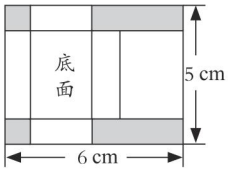
13.[期末·扬州]若 $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+(k+1)x+2=0$ 的一个实数根，则另一个实数根为_____.

14.[中考·天水]一个三角形的两边长分别为 2 和 5，第三边长是方程 $x^2-8x+12=0$ 的根，则该三角形的周长为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系，每盆植 3 株时，平均每株盈利 4 元；若每盆增加 1 株，平均每株盈利减少 0.5 元，要使每盆的盈利达到 15 元，每盆应多植多少株？设每盆应多植 x 株，可列出的方程是_____.

16. [期末 · 盐城] 如图是一张长 6 cm，宽 5 cm 的矩形铁皮，将其剪去两个全等的正方形和两个全等的矩形（阴影部分），剩余部分可制成底面积是 6 cm^2 的有盖的长方体铁盒．则剪去的正方形的边长为____cm.



（第 16 题图）

三、解答题（共 52 分）

17.（12 分）我们已经学习了一元二次方程的四种解法：因式分解法、直接开平方法、配方法和公式法．请选择合适的方法解下列方程．

（1）$x^2-3x+1=0$；　　（2）$(x-1)^2=3$；

（3）$x^2-3x=0$；　　（4）$x^2-2x=4$.

18.（12 分）[三模 · 北京] 已知关于 x 的方程 $ax^2+2x-3=0$ 有实数根.

（1）求 a 的取值范围；

（2）若该方程有两个相等的实数根，求 a 的值及方程的根.

19.（14 分）[期末 · 十堰] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+3)x+m+2=0$.

（1）求证：无论 m 取何值，方程总有两个实数根；

（2）若 x_1，x_2 是方程的两根，且 $x_1^2+x_2^2=2$，求 m 的值.

20.（14 分）[期末 · 西安]“十一”黄金周期间，享有“中国长城之祖”美誉的七峰山生态旅游区为吸引游客组团来此旅游，特推出了如下门票收费标准：

标准一：如果人数不超过20人,门票价格为70元/人;

标准二：如果人数超过 20 人，每超过 1 人，门票价格降低 2 元 / 人，但门票价格不低于 55 元 / 人.

（1）若某单位组织 22 名员工去七峰山生态旅游区旅游，购买门票共需费用多少元?

（2）若某单位支付七峰山生态旅游区门票费用共计 1 500 元，试求该单位这次共有多少名员工去七峰山生态旅游区旅游．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



荣德基 主编

荣德基

参考答案及点拨

（225页~295页）

另赠送 教材习题参考答案及点拨

（296页~332页）

九年级 数学 上

（SK版）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1章 一元二次方程

1.1 一元二次方程

【变式训练】

1. $x(x-12)=864$ **点拨:**长为 x 步,宽比长少 12 步,则宽为 $(x-12)$ 步,根据矩形的面积公式可得方程.

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**$\because (x-1)^2=6$,$\therefore x^2-2x+1-6=0$,$x^2-2x-5=0$,即将方程 $(x-1)^2=6$ 化成一般形式为 $x^2-2x-5=0$.

2. B **点拨:**A. 此方程中未明确 a 的取值情况,所以此方程不一定是一元二次方程;

B. $x^2-2x-5=0$ 是一元二次方程;

C. $3x^2+2y-2=0$ 中含有两个未知数,所以此方程不是一元二次方程;

D. $\dfrac{1}{x^2+2}=0$ 不是整式方程,所以此方程不是一元二次方程.

3. B **点拨:**根据题意,得 $(2+\sqrt{3})^2-4\times(2+\sqrt{3})+m=0$,解得 $m=1$.

4. A

5. B **点拨:**根据题意,得 $|m|=2$,所以 $m=\pm2$,又因为 $m+2\neq0$,所以 $m\neq-2$. 所以 $m=2$.

6. $x^2+5x+5=0$;5

7. 10 **点拨:**根据题意,得 $m^2-3m-2=0$,

即 $m^2-3m=2$,

$\therefore 4m^2-12m+2=4(m^2-3m)+2=4\times2+2=10$.

8. $100(1-x)^2=64$ **点拨:**根据题意,得 2 月份的住房销售量为 $100(1-x)$ 套,3 月份的住房销售量为 $100(1-x)^2$ 套,所以 $100(1-x)^2=64$.

9. **解:**(1)$(3x-1)(x+2)=-x^2+5x+1$,

$3x^2+6x-x-2=-x^2+5x+1$,

$4x^2-3=0$,

所以二次项系数是4,一次项系数是0,常数项是 -3.

(2)$(2t+3)^2-3(t-5)^2=-41$,

$4t^2+12t+9-3(t^2-10t+25)=-41$,

$4t^2+12t+9-3t^2+30t-75+41=0$,

$t^2+42t-25=0$,

所以二次项系数是 1,一次项系数是 42,常数项是 -25.

(3)$3x^2+2=(x-2)(2x+1)$,

$3x^2+2=2x^2+x-4x-2$,

$3x^2+2-2x^2-x+4x+2=0$,

$x^2+3x+4=0$,

所以二次项系数是1,一次项系数是3,常数项是4.

10. **解:**(1)依题意,得 $\dfrac{1}{2}(1.4+x+x)(x-0.1)=1.53$.

(2)由(1)知 $\dfrac{1}{2}(1.4+x+x)(x-0.1)=1.53$,

即 $x^2+0.6x-1.6=0$.

所以此时的一次项系数是 0.6,常数项是 -1.6.

11. **解:**关于 x 的一元二次方程 $3x^2=(k-1)x-k-6$ 与 $kx^2-(4k-1)x=2k$ 的一般形式分别是 $3x^2-(k-1)x+k+6=0$ 与 $kx^2-(4k-1)x-2k=0$.

由常数项相等,得 $k+6=-2k$,解得 $k=-2$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $3x^2=(k-1)x-k-6$ 与 $kx^2-(4k-1)x=2k$ 的一次项系数分别为 $1-k=1-(-2)=3$,$-4k+1=-4\times(-2)+1=9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 解:(1)∵ 方程$(m-2)x^{m^2}+(m-3)x+1=0$为一元二次方程,

∴ $m^2=2$且$m-2\neq0$,

解得$m=\pm\sqrt{2}$,

∴ 当m为$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$时,方程$(m-2)x^{m^2}+(m-3)x+1=0$为一元二次方程;

(2)∵ 方程$(m-2)x^{m^2}+(m-3)x+1=0$为一元一次方程,

∴ 当$m-2=0$,且$m-3\neq0$时,方程为$(m-3)x+1=0$,是一元一次方程,

即$m=2$,满足题意;

当$m^2=1$时,方程为$(m-2)x+(m-3)x+1=0$,是一元一次方程,

即$m=\pm1$,满足题意;

当$m=0$时,方程为$-2-3x+1=0$,是一元一次方程,

即$m=0$,满足题意.

综上所述,当m为2或±1或0时,方程$(m-2)x^{m^2}+(m-3)x+1=0$为一元一次方程.

13. 解:(1)∵ $x^2-3x+1=0$,

∴ $x\neq0$,方程两边同时除以x,得$x-3+\frac{1}{x}=0$,

∴ $x+\frac{1}{x}=3$.

(2)∵ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=9-4=5$,

∴ $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$.

(3)∵ a为方程$x^2-3x+1=0$的一个根,

∴ $a^2-3a+1=0$,

∴ $a^2-3a=-1$,

∴ $2a^2-6a+2\,020=2(a^2-3a)+2\,020=-2+2\,020=2\,018$.

1.2 一元二次方程的解法

变式训练

1. 解:(1)∵ $a=2,b=-5,c=-1$,$b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-1)=33>0$,

∴ $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{4}$,

$x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{4}$.

(2)原方程整理为$3x^2-4x+1=0$,

∵ $a=3,b=-4,c=1$,

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times1=4>0$,

∴ $x_1=1,x_2=\frac{1}{3}$.

(3)原方程整理为$t^2+2\sqrt{2}t+2=0$,

∵ $a=1,b=2\sqrt{2},c=2$,

$b^2-4ac=(2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0$,

∴ $t_1=t_2=\frac{-2\sqrt{2}}{2\times1}=-\sqrt{2}$.

(4)∵ $a=1,b=-1,c=-1,b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5>0$,

∴ $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2. 解:(1)原方程可化为$x^2-5x=0$,

因式分解,得$x(x-5)=0$,

∴ $x_1=0,x_2=5$.

(2)原方程可化为$(x-3)^2-2(x-3)=0$,

因式分解,得$(x-3)(x-3-2)=0$,

∴ $x-3=0$或$x-3-2=0$,

∴ $x_1=3,x_2=5$.

(3)原方程可化为$(x-2)^2-(2x+1)^2=0$,

因式分解,得$[(x-2)+(2x+1)][(x-2)-(2x+1)]=0$,

∴ $(3x-1)(-x-3)=0$,

∴ $3x-1=0$或$-x-3=0$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore x_1=\frac{1}{3}, x_2=-3.$

(4)原方程可化为$2(x+3)^2-(x+3)(x-3)=0$,

因式分解,得$(x+3)(2x+6-x+3)=0$,

$\therefore x+3=0$ 或 $2x+6-x+3=0$,

$\therefore x_1=-3, x_2=-9.$

3. C　**点拨:** $M-N=(m-4)-(m^2-3m)$

$=m-4-m^2+3m$

$=-m^2+4m-4$

$=-(m^2-4m+4)$

$=-(m-2)^2\leqslant 0$,

$\therefore M-N\leqslant 0$,即 $M\leqslant N$.

4. **证明:** $\because b^2-4ac=[-(3m+n)]^2-4\times 2\times mn=(3m-n)^2+4mn, m>n>0$,

$\therefore b^2-4ac>0$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根.

【两年模拟兵法】

1. A　**点拨:** $\because x^2-8x-5=0$,

$\therefore x^2-8x=5$,

则 $x^2-8x+16=5+16$,即$(x-4)^2=21$,

$\therefore a=-4, b=21.$

2. C　**点拨:** $\because x(x-2)=x-2$,

$\therefore x(x-2)-(x-2)=0$,

$\therefore (x-2)(x-1)=0$,

$\therefore x_1=2, x_2=1.$

3. B　**点拨:** $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+2k=0$ 有两个实数根 x_1, x_2,

$\therefore b^2-4ac=[-(2k+1)]^2-4\times 1\times(k^2+2k)$

$=-4k+1\geqslant 0$,

解得 $k\leqslant\frac{1}{4}$.

4. C　**点拨:** $\because x^2-10x+21=0$,

$\therefore x=3$ 或 $x=7.$

当 $x=3$ 时,

$\because 2+3<6$,

$\therefore 2、3、6$ 不能组成三角形.

当 $x=7$ 时,

$\because 2+6>7$,

$\therefore 2、6、7$ 能组成三角形,

$\therefore$ 这个三角形的周长为 $2+6+7=15.$

5. -2　**点拨:** 把 $x=0$ 代入方程$(a-2)x^2-2x-4+a^2=0$ 得 $-4+a^2=0$,

解得 $a=2$ 或 $a=-2$,

因为 $a-2\neq 0$,

所以 a 的值为 $-2.$

6. 1　**点拨:** 移项,得 $x^2+4x=-n$,

$\therefore x^2+4x+4=4-n$,即$(x+2)^2=4-n$,

又$(x+m)^2=3$,

$\therefore m=2, n=1$,

则$(n-m)^{2\,020}=(1-2)^{2\,020}=1.$

7. 4　**点拨:** 根据题意,得 $b^2-4ac=k^2-4k=0$,

解得 $k_1=0, k_2=4$. 又因为 $k\neq 0$,所以 $k=4.$

8. 9　**点拨:** $\because$ 方程 $ax^2=b(ab>0)$

$\therefore x^2=\frac{b}{a}, \therefore x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$,

即方程的两个根互为相反数,

$\therefore m+2+2m-5=0$,解得 $m=1$,

$\therefore$ 方程的两个根为 $x=3$ 或 $x=-3$,

$\therefore \frac{b}{a}=(\pm 3)^2=9.$

9. **解:** (1)由题意知 $x-2=\pm\sqrt{3}$,

$\therefore x_1=2+\sqrt{3}, x_2=2-\sqrt{3}.$

(2)由题意知$(x-3)^2=36$,

$\therefore x-3=\pm 6$,

$\therefore x_1=9, x_2=-3.$

(3)由题意知$9(y+4)^2=49$,

即$(y+4)^2=\frac{49}{9}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore y+4=\pm\frac{7}{3}$,

$\therefore y_1=-\frac{5}{3}, y_2=-\frac{19}{3}$.

(4)由题意知$2(2y-5)=3(3y-1)$或$2(2y-5)=-3(3y-1)$,

$\therefore 4y-10=9y-3$或$4y-10=-9y+3$,

$\therefore -5y=7$或$13y=13$,

$\therefore y_1=-\frac{7}{5}, y_2=1$.

10. **解:**(1)移项,得$x^2+6x=-8$,

配方,得$x^2+6x+9=-8+9$,

即$(x+3)^2=1$,

开方,得$x+3=\pm1$,

$\therefore x_1=-2, x_2=-4$.

(2)移项,得$x^2-6x=16$,

配方,得$x^2-6x+9=16+9$,

即$(x-3)^2=25$,

开方,得$x-3=\pm5$,

$\therefore x_1=8, x_2=-2$.

(3)移项,得$2x^2-7x=-3$,

二次项系数化为1,得$x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$,

配方,得

$x^2-\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^2$,

即$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$,

开方,得$x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$,

$\therefore x_1=3, x_2=\frac{1}{2}$.

(4)整理,得$2x^2+5x=7$,

二次项系数化为1,得$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{7}{2}$,

配方,得$x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2$,

即$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$,

开方,得$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{9}{4}$,

$\therefore x_1=1, x_2=-\frac{7}{2}$.

11. **解:**(1)$\because a=1, b=-5, c=2$,

$b^2-4ac=25-8=17>0$,

$\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}, x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

(2)原方程整理,得$3x^2-4x+1=0$,

$\because a=3, b=-4, c=1$,

$b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times1=4>0$,

$\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\times3}=\frac{4\pm2}{6}$,

$\therefore x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$.

(3)原方程整理,得$2x^2-\sqrt{2}x+2=0$,

$\because a=2, b=-\sqrt{2}, c=2$,

$b^2-4ac=2-16=-14<0$,

$\therefore$ 原方程无实数解.

12. **解:**(1)将方程左边因式分解,得

$x(2x+1)=0$,

$\therefore x=0$或$2x+1=0$,

解得$x_1=0, x_2=-\frac{1}{2}$.

(2)移项整理得$3(x-7)^2+2(x-7)=0$,

将方程左边因式分解,得

$(x-7)[3(x-7)+2]=0$,

$\therefore x-7=0$或$3x-19=0$,

解得$x_1=7, x_2=\frac{19}{3}$.

(3)移项,得$3x(x-1)+2x-2=0$,

将方程左边因式分解,得$(x-1)(3x+2)=0$,

$\therefore x-1=0$或$3x+2=0$,

解得$x_1=1, x_2=-\frac{2}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)将方程左边因式分解,得

$[(2x+1)+x][(2x+1)-x]=0$,

$\therefore 3x+1=0$ 或 $x+1=0$,

解得 $x_1=-\frac{1}{3}$,$x_2=-1$.

13. 解:(1)$\because$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore b^2-4ac=(2m)^2-4\times(m+1)(m-3)=8m+12>0$ 且 $m+1\neq 0$,

解得 $m>-\frac{3}{2}$且 $m\neq -1$.

(2)取 $m=3$,此时方程为 $4x^2+6x=0$,

解得 $x_1=0$,$x_2=-\frac{3}{2}$.(答案不唯一,合理即可)

14. 解:(1)$\because m\neq 0$,且方程有两个相等的实数根,

$\therefore b^2-4ac=[-3(m+1)]^2-4m(2m+3)=0$,

$\therefore (m+3)^2=0$,

$\therefore m_1=m_2=-3$.

(2)$\because mx^2-3(m+1)x+2m+3=0$,

$\therefore [mx-(2m+3)](x-1)=0$,

解得 $x_1=1$,$x_2=\frac{2m+3}{m}$.

(3)$\because x_1=1$,$x_2=\frac{2m+3}{m}=2+\frac{3}{m}$均为正整数,且 m 为整数,

$\therefore \frac{3}{m}=1$、-1 或 3.

当$\frac{3}{m}=1$ 时,$m=3$,

当$\frac{3}{m}=-1$ 时,$m=-3$,

当$\frac{3}{m}=3$ 时,$m=1$.

综上所述,当 m 取 1、3 或 -3 时,方程的两个根均为正整数.

15. 解:(1)$(a-3)(a-5)$ **点拨:**$a^2-8a+15=(a^2-8a+16)-1=(a-4)^2-1^2=(a-3)\times(a-5)$.

(2)$\because a^2+b^2-14a-8b+65=0$,

$\therefore (a^2-14a+49)+(b^2-8b+16)=0$,

$\therefore (a-7)^2+(b-4)^2=0$,

$\therefore a-7=0$,$b-4=0$,

解得 $a=7$,$b=4$.

$\because a$,b,c 是$\triangle ABC$ 的三边长,

$\therefore 3<c<11$.

又$\because c$ 边的长为奇数,

$\therefore c=5$,7 或 9.$\because$ $\triangle ABC$ 的周长最小,$\therefore c=5$,

即当 $a=7$,$b=4$,$c=5$ 时,$\triangle ABC$ 的周长最小,最小值是 $7+4+5=16$.

(3)多项式 $-2x^2-4x+3=-2(x^2+2x+1-1)+3=-2(x+1)^2+5$,

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时,多项式 $-2x^2-4x+3$ 有最大值,最大值是 5.

*1.3 一元二次方程的根与系数的关系

【变式训练】

1. 解:(1)若四边形 $ABCD$ 是菱形,则 $AB=AD$,

所以方程有两个相等的实数根,

即 $b^2-4ac=(-m)^2-4\times 1\times 12=0$,

解得 $m=\pm 4\sqrt{3}$,

当 $m=-4\sqrt{3}$时,不符合题意舍去,

所以 $m=4\sqrt{3}$.

(2)因为边 AB、AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+12=0$ 的两个实数根,$AB=3$,

所以 $9-3m+12=0$,

解得 $m=7$,

所以原方程为 $x^2-7x+12=0$,由根与系数的关系,

可得 $AB+AD=7$,

所以平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $2(AB+AD)=14$.

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:**设一元二次方程的另一个根为 n,则根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

据根与系数的关系可得 $n+2=-5$,

解得 $n=-7$,即另一个根为 -7.

2. B **点拨:**∵ x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根,

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1,x_1x_2=\frac{c}{a}=-3$,

则 $x_1+x_2-x_1x_2=-1-(-3)=-1+3=2$.

3. C **点拨:**∵ 关于 x 的方程 $(x-1)(x+2)=p^2$(p 为常数),

$\therefore x^2+x-2-p^2=0$,

$\therefore b^2-4ac=1+8+4p^2=9+4p^2>0$,

∴ 方程有两个不相等的实数根. 设该方程的两个实数根分别为 x_1,x_2,

∵ $x_1x_2=\frac{c}{a}=-2-p^2<0$,

∴ 方程有一个正根,一个负根.

4. A **点拨:**∵ 关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-m=0$ 有两个实数根,

$\therefore b^2-4ac=[2(m-1)]^2-4\times1\times(m^2-m)=-4m+4\geqslant0$,

解得 $m\leqslant1$.

∵ 关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-m=0$ 有两个实数根 α,β,

$\therefore \alpha+\beta=-2(m-1),\alpha\beta=m^2-m$,

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=[-2(m-1)]^2-2(m^2-m)=12$,即 $m^2-3m-4=0$,

解得 $m=-1$ 或 $m=4$(不符合 $m\leqslant1$,舍去).

即 m 的值为 -1.

5. -3 **点拨:**∵ 方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根为 x_1,x_2,

$\therefore x_1x_2=\frac{c}{a}=-3$.

6. 2 **点拨:**∵ x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-4x-7=0$ 的两个实数根,∴ $x_1+x_2=4,x_1x_2=-7$,

$\therefore {x_1}^2+4x_1x_2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2+2x_1x_2=16-14=2$.

7. $-\frac{37}{2}$ **点拨:**∵ 一元二次方程 $x^2+2x-8=0$ 的两根为 x_1,x_2,

$\therefore x_1+x_2=-2,x_1x_2=-8$.

$$\because \frac{x_2}{x_1}+2x_1x_2+\frac{x_1}{x_2}=2x_1x_2+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$$

$$=2x_1x_2+\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1x_2}$$

$$=2\times(-8)+\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{-8}$$

$$=-16+\frac{(-2)^2-2\times(-8)}{-8}$$

$$=-\frac{37}{2},\therefore \frac{x_2}{x_1}+2x_1x_2+\frac{x_1}{x_2}=-\frac{37}{2}.$$

8. 2 021 **点拨:**∵ x_1 是方程 $x^2-x-2\,020=0$ 的一个实数根,

$\therefore {x_1}^2-x_1-2\,020=0$,

$\therefore {x_1}^2=x_1+2\,020$,

$\therefore {x_1}^3=x_1\cdot{x_1}^2=x_1(x_1+2\,020)={x_1}^2+2\,020x_1$

$=x_1+2\,020+2\,020x_1=2\,021x_1+2\,020$,

$\therefore {x_1}^3+2\,021x_2-2\,020=2\,021x_1+2\,020+2\,021x_2-2\,020=2\,021(x_1+x_2)$.

∵ x_1,x_2 是方程 $x^2-x-2\,020=0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1+x_2=1$,

$\therefore {x_1}^3+2\,021x_2-2\,020=2\,021\times1=2\,021$.

9. **解:**根据题意得 $x_1+x_2=-3,x_1x_2=-3$.

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=9+6=15$;

(2) $(x_1+3)(x_2+3)=x_1x_2+3(x_1+x_2)+9=-3-9+9=-3$.

10. (1) **证明:** $b^2-4ac=[-(2k+1)]^2-4\times1\times(\frac{1}{2}k^2-2)$

$=4k^2+4k+1-2k^2+8$

$=2k^2+4k+9$

$=2(k+1)^2+7$,

∵ 无论 k 为何实数,$2(k+1)^2\geqslant0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 2(k+1)^2+7>0$,

$\therefore$ 无论 k 为何实数,方程总有两个不相等的实数根.

(2)**解:**$\because x_1,x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+\frac{1}{2}k^2-2=0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1+x_2=2k+1,x_1x_2=\frac{1}{2}k^2-2.$

$\because x_1-x_2=3$,

$\therefore (x_1-x_2)^2=9$,

$\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$,

$\therefore (2k+1)^2-4\times(\frac{1}{2}k^2-2)=9$,

整理得 $k^2+2k=0$,

解得 $k=0$ 或 $k=-2$.

11. **解:**(1)$\because$ 一元二次方程 $x^2-2x+k+2=0$ 有两个实数根,

$\therefore b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(k+2)\geqslant0$,

解得 $k\leqslant-1$.

(2)假设存在实数 k,使得等式 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=k-2$ 成立.

$\because x_1,x_2$ 是一元二次方程 $x^2-2x+k+2=0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1+x_2=2,x_1x_2=k+2.$

$\because \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=k-2$,

$\therefore \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{k+2}=k-2$,

$\therefore k^2-6=0$,

解得 $k_1=-\sqrt{6},k_2=\sqrt{6}.$

又$\because k\leqslant-1$,

$\therefore k=-\sqrt{6}.$

$\therefore$ 存在这样的实数 k,使得等式 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=k-2$ 成立,k 的值为 $-\sqrt{6}$.

12. **解:**(1)$-2;-\frac{1}{5}$

(2)$\because$ 实数 m,n 满足 $7m^2-7m-1=0,7n^2-7n-1=0$,且 $m\neq n$,

$\therefore m、n$ 可看作方程 $7x^2-7x-1=0$ 的两个不相等的实数根,

$\therefore m+n=1,mn=-\frac{1}{7}$,

$\therefore m^2n+mn^2=mn(m+n)=-\frac{1}{7}\times1=-\frac{1}{7}$;

(3)由题知 $t\neq0$,把 $t^2+99t+19=0$ 两边同时除以 t^2,方程可变形为 $19\cdot(\frac{1}{t})^2+99\cdot\frac{1}{t}+1=0$. $\because 19s^2+99s+1=0$,$\therefore$ 实数 $\frac{1}{t}$ 和 s 可看作方程 $19x^2+99x+1=0$ 的两个实数根,

$\therefore s+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19},s\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{19}$,

$\therefore \frac{st+4s+1}{t}=s+4\cdot\frac{s}{t}+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19}+4\times\frac{1}{19}=-5.$

1.4 用一元二次方程解决问题

【变式训练】

1. C **点拨:**设 $AB=x$m,则 $BC=(28-x)$m,

根据题意,得 $x(28-x)=192$,

解得 $x_1=12,x_2=16.$

$\because P$ 处有一棵树与墙 $CD、AD$ 的距离分别是 15m 和 6m,

$\therefore x=16$ 不符合题意,舍去,

$\therefore x=12.$

2. **解:**(1)设经过 x s 后,$\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm^2,则 $BP=(6-x)$cm,$BQ=2x$ cm,

根据题意,得 $\frac{1}{2}(6-x)\times2x=8$,

整理,得 $x^2-6x+8=0$,

解得 $x_1=2,x_2=4.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答:经过2 s或4 s后,△PBQ的面积等于8 cm^2.

(2)设经过y s后,P,Q两点间的距离是$\sqrt{53}$ cm,则$BP=(6-y)$cm,$BQ=2y$ cm,

根据题意,得$(6-y)^2+(2y)^2=(\sqrt{53})^2$,

整理,得$5y^2-12y-17=0$,

解得$y_1=\frac{17}{5}$,$y_2=-1$(不合题意,舍去).

答:经过$\frac{17}{5}$ s后,P,Q两点间的距离是$\sqrt{53}$cm.

【两年模拟兵法】

1. C

2. $x[120-0.5(x-60)]=8\ 800$

3. $\frac{5}{4}$ **点拨:**设小路的宽度为x米,则正方形的边长为$4x$米,

根据题意,得$(30+4x+24+4x)x=80$,

整理得$4x^2+27x-40=0$,

解得$x_1=-8$(舍去),$x_2=\frac{5}{4}$. 即小路的宽度为$\frac{5}{4}$米.

4. **解:**根据题意,得$(1\ 000-4x-200)(40-2x)=15\ 200$.

解这个方程,得$x_1=210$(不合题意,舍去),$x_2=10$.

所以x的值为10.

5. **解:**(1)$(50-x)$;$(20+2x)$

(2)根据题意,得$(50-x)(20+2x)=1\ 600$,

整理,得$x^2-40x+300=0$,

解得$x_1=10$,$x_2=30$.

∵为了扩大销售,尽快减少库存,

∴$x=30$.

答:每件衬衫降价30元.

6. **解:**(1)设这种药品每次下降的百分率是x,

根据题意,得$200(1-x)^2=128$,

解得$x_1=0.2=20\%$,$x_2=1.8$(不合题意,舍去).

答:这种药品每次下降的百分率是20%.

(2)$128\times(1-20\%)=102.4$(元),

∵$102.4>100$,

∴按此降价幅度再一次降价,药厂不会亏本.

7. **解:**(1)由题意得$\frac{1}{2}(40-x)x=150$,

解这个方程,得$x_1=10$,$x_2=30$.

∵$30>15$,

∴$x=30$舍去,

∴$x=10$.

即x的值为10.

(2)由题意得$\frac{1}{2}[40-(x-15)-x]x=150$,整理得$2x^2-55x+300=0$,解得$x_1=20$,$x_2=7.5$(不合题意,舍去),

即DE的长为20 m,

∴BF的长为$20-15=5$(m).

8. **解:**(1)$y=-\frac{1}{20}x+8$

(2)根据题意得$(x-40)(-\frac{1}{20}x+8)-120=55$,

解得$x=90$或$x=110$,

∵$x\leqslant100$,

∴$x=90$.

答:当年的销售单价为90元.

9. **解:**(1)设x s后,PQ的长度等于$2\sqrt{10}$ cm,

由题得$BP=(5-x)$cm,$BQ=2x$ cm,

∵$BP^2+BQ^2=PQ^2$,

∴$(5-x)^2+(2x)^2=(2\sqrt{10})^2$,

解得$x_1=3$,$x_2=-1$(舍去).

∴3 s后,PQ的长度等于$2\sqrt{10}$ cm.

(2)设t s后,△PQB的面积等于7 cm^2,$PB=(5-t)$cm,$QB=2t$ cm,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \frac{1}{2}\times(5-t)\times 2t=7$,

$\therefore t^2-5t+7=0$.

$\because b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$,

$\therefore$ 方程没有实数根.

$\therefore$ 在(1)中,$\triangle PQB$ 的面积不能等于 7 cm^2.

10. **解:**(1)根据题意列方程得 $x^2+(5-x)^2=13$,

整理,得 $x^2-5x+6=0$,

解这个方程,得 $x_1=2$,$x_2=3$,

$\therefore$ 这两个正方形的边长分别是 2 cm、3 cm.

(2)他的说法正确. 理由如下:

设这两个正方形的面积和为 y cm^2,则

$y=x^2+(5-x)^2=2(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{2}$,

$\therefore$ 当 $x=\frac{5}{2}$时,y 有最小值为 12.5.

$\because 12.5>11$,

$\therefore$ 这两个正方形的面积之和不可能等于 11 cm^2.

11. **解:**(1)设该店每天卖出 A、B 两种菜品分别为 x 份、y 份,根据题意得,

$$\begin{cases}(20-14)x+(18-14)y=280\\20x+18y=1120\end{cases}.$$

解得 $\begin{cases}x=20,\\y=40,\end{cases}$ $20+40=60$(份)

答:该店每天卖出这两种菜品共 60 份.

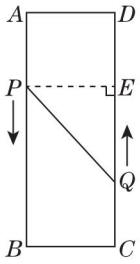
(2)设 A 种菜品的售价降 $0.5a$ 元,即每天卖 $(20+a)$ 份,则 B 种菜品每天卖 $(40-a)$ 份,每份售价提高 $0.5a$ 元.

根据题意,得 $(20-14-0.5a)(20+a)+(18-14+0.5a)(40-a)=316$.

即 $a^2-12a+36=0$,解得 $a_1=a_2=6$,所以 $20+a=26$.

答:A 种菜品每天销售 26 份.

12. **解:**(1)过点 P 作 $PE\perp CD$ 于 E,如图,



第 12 题图)

设经过 x s,P、Q 两点之间的距离是 10 cm,则 $(16-2x-3x)^2+6^2=10^2$ 或 $(2x+3x-16)^2+6^2=10^2$,$\therefore (16-5x)^2=64$,

$\therefore 16-5x=\pm8$,

$\therefore x_1=\frac{8}{5}$,$x_2=\frac{24}{5}$;

$\therefore$ 经过 $\frac{8}{5}$ s 或 $\frac{24}{5}$ s,P、Q 两点之间的距离是10 cm;

(2)设经过 y s,$\triangle PBQ$ 的面积为 12 cm^2.

①当 $0\leqslant y\leqslant\frac{16}{3}$时,点 P 在 AB 边上,

则 $PB=(16-3y)$ cm,

$\therefore S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}PB\cdot BC=\frac{1}{2}\times(16-3y)\times6$

$=12$,

解得 $y=4$;

②当 $\frac{16}{3}<y\leqslant\frac{22}{3}$时,点 P 在 BC 边上,

则 $BP=3y-AB=(3y-16)$ cm,$QC=2y$ cm,

$\therefore S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}BP\cdot CQ=\frac{1}{2}(3y-16)\times2y=12$,

解得 $y_1=6$,$y_2=-\frac{2}{3}$(舍去);

③$\frac{22}{3}<y\leqslant8$ 时,点 P 在 CD 边上,

则 $QP=CQ-CP=(22-y)$ cm,

$\therefore S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}QP\cdot CB=\frac{1}{2}(22-y)\times6=12$,

解得 $y=18$(舍去).

综上所述,经过 4 s 或 6 s,$\triangle PBQ$ 的面积为 12 cm^2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:令 $x^2-x=m$,

$\therefore$ 原方程整理为 $m^2-2m-3=0$,

解得 $m_1=3$,$m_2=-1$,

当 $m=3$ 时,$x^2-x=3$,即 $x^2-x-3=0$,

$\because b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-3)>0$,

$\therefore x^2-x+2\,020=3+2\,020=2\,023$.

当 $m=-1$ 时,$x^2-x=-1$,即 $x^2-x+1=0$,

$\because b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times1<0$,

$\therefore m=-1$ 不合题意,舍去,

$\therefore$ $x^2-x+2\,020$ 的值为 2 023.

2. D 点拨:$\because (x-2\,019)^2+(x-2\,021)^2=36$,

$\therefore (x-2\,020+1)^2+(x-2\,020-1)^2=36$,

$\therefore (x-2\,020)^2+2(x-2\,020)+1+(x-2\,020)^2-2(x-2\,020)+1=36$,

整理得 $2(x-2\,020)^2=34$,

$\therefore (x-2\,020)^2=17$.

3. 解:(1) $\pm2\sqrt{10}$ 点拨:令 $x^2+ax+3=y$,

移项,得 $x^2+ax+(3-y)=0$,

$\therefore$ $b^2-4ac=a^2-4\times1\times(3-y)\geqslant0$,

$\therefore$ $y\geqslant\dfrac{12-a^2}{4}$.

$\because y$ 的最小值是 -7,

$\therefore \dfrac{12-a^2}{4}=-7$,

解得 $a=\pm2\sqrt{10}$.

(2)令 $\dfrac{x^2-4x+2}{2x-1}=y$,

整理,得 $x^2-(4+2y)x+(y+2)=0$,

$\therefore b^2-4ac=(4+2y)^2-4(y+2)\geqslant0$,

整理,得 $y^2+3y+2\geqslant0$,

令 $y^2+3y+2=0$,

解得 $y_1=-1$,$y_2=-2$,

$\therefore \dfrac{x^2-4x+2}{2x-1}\geqslant-1$ 或 $\dfrac{x^2-4x+2}{2x-1}\leqslant-2$.

4. 3 点拨:把 $b^2+2b-1=0$ 两边同时除以 b^2,整理,得 $(\dfrac{1}{b})^2-2\cdot\dfrac{1}{b}-1=0$,

$\because ab\neq1$,由 $a^2-2a-1=0$,$(\dfrac{1}{b})^2-2\cdot\dfrac{1}{b}-1=0$,可得 a 和 $\dfrac{1}{b}$ 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根,根据根与系数的关系可知

$a+\dfrac{1}{b}=2$,

$\therefore \dfrac{ab+b+1}{b}=a+1+\dfrac{1}{b}=2+1=3$.

5. 解:(1)根据题意,可知矩形 $ABCD$ 的周长为 $(12+2)\times2=28$,面积为 $12\times2=24$,矩形 $EFGH$ 的周长为 $(4+3)\times2=14$,面积为 $3\times4=12$,因为矩形 $EFGH$ 的周长和面积是矩形 $ABCD$ 周长和面积的一半,

所以矩形 $EFGH$ 是矩形 $ABCD$ 的"减半"矩形;

(2)不存在. 理由如下:

假设存在,不妨设"减半"矩形的长和宽分别为 x、y,根据题意,可得方程组

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{2} & ① \\ xy=1 & ② \end{cases}$$

由①得 $y=\dfrac{3}{2}-x$③,

把③代入②可得方程 $x^2-\dfrac{3}{2}x+1=0$,

因为 $b^2-4ac=\dfrac{9}{4}-4=-\dfrac{7}{4}<0$,

所以矩形的长和宽为 2,1 时,它不存在"减半"矩形.

6. 解:(1)设打 x 折销售,才能保证每箱脐橙的利润率不低于 10%,

根据题意,得 $\dfrac{50\cdot\dfrac{x}{10}-40}{40}\geqslant10\%$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得 $x \geqslant 8.8$.

答:最多打 8.8 折销售,才能保证每箱脐橙的利润率不低于 10%;

(2)根据题意,得

$5000(1+\frac{20}{3}m\%)[50(1-3m\%)+m-40]=49000$,

整理,得 $m^2-5m-6=0$,

解得 $m_1=6, m_2=-1$(不合题意,舍去).

$\therefore m$ 的值为 6.

【第 1 章测试卷】

一、**1.** A　2. C

3. C　**点拨:** $b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times2=8>0$,

所以方程有两个不相等的实数根.

4. B　**点拨:** $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2+x-6=0$ 的两个根,

$\therefore x_1+x_2=-1, x_1x_2=-6$,

则原式 $=-1-(-6)=-1+6=5$.

5. C　**点拨:** $\because \frac{1}{3}x^2-x-5=0$,

$\therefore x^2-3x=15$,

即 $x^2-3x+\frac{9}{4}=15+\frac{9}{4}$,

$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{69}{4}$.

6. D　**点拨:** 令 $x=a^2+b^2$,

则原方程可变形为 $x^2-2x-3=0$,

解得 $x_1=3, x_2=-1$,

又 $\because x=a^2+b^2\geqslant0$,

$\therefore a^2+b^2=3$.

7. B　**点拨:** $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore k\neq0$ 且 $b^2-4ac>0$,即 $(-2)^2-4\times k\times(-1)>0$,

解得 $k>-1$ 且 $k\neq0$.

$\therefore k$ 的取值范围是 $k>-1$ 且 $k\neq0$.

8. D

9. D　**点拨:** $\because$ 关于 x 的方程 $a(x-m+2)^2+b=0$, $\therefore a[-(x-m+2)]^2+b=0$,

整理,得 $a(-x-2+m)^2+b=0$.

$\because$ 关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的根是 $x_1=5, x_2=-6$,

$\therefore$ 方程 $a(-x-2+m)^2+b=0$ 满足 $-x-2=5$ 或 $-x-2=-6$,

$\therefore x_1=-7, x_2=4$.

10. B　**点拨:** 根据勾股定理,得 $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\therefore AD=\sqrt{a^2+b^2}-a$,

解方程 $x^2+2ax-b^2=0$ 得 $x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+4b^2}}{2}=\pm\sqrt{a^2+b^2}-a$,

$\therefore$ 线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-b^2=0$ 的一个根.

二、**11.** 8　**点拨:** 把 $x=a$ 代入方程 $x^2-2x-8=0$,

可得 $a^2-2a-8=0$,即 $a^2-2a=8$.

12. $x_1=2, x_2=-4$　**点拨:** $\because (x+1)*3=0$,

$\therefore (x+1)^2-3^2=0$, $\therefore (x+1)^2=9$,

$x+1=\pm3$,

$\therefore x_1=2, x_2=-4$.

13. 2　**点拨:** 设一元二次方程 $x^2+(k+1)x+2=0$ 的两个实数根分别为 1 和 m,

$\therefore 1\times m=2$,

$\therefore m=2$. 即另一个实数根为 2.

14. 13　**点拨:** $\because x^2-8x+12=0$,

$\therefore x_1=2, x_2=6$.

$\because$ 三角形的两边长分别为 2 和 5,

$\therefore 5-2<$第三边长$<2+5$,

$\therefore$ 三角形的第三边长是 6,

$\therefore$ 该三角形的周长为 $2+5+6=13$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $(3+x)(4-0.5x)=15$

16. 1　**点拨:**设剪去的正方形的边长为 x cm,则底面的长为$(5-2x)$cm,宽为 $\frac{6-2x}{2}=(3-x)$cm.

根据题意,得$(5-2x)(3-x)=6$.

整理,得 $2x^2-11x+9=0$.

解这个方程,得 $x_1=1$,$x_2=\frac{9}{2}$.

当 $x=1$ 时,$5-2x=3$,$3-x=2$,符合题意;

当 $x=\frac{9}{2}$时,$5-2x=-4<0$,不合题意,舍去.

所以剪去的正方形的边长为1cm.

三、17. **解:**(1)用公式法解:

$\because a=1$,$b=-3$,$c=1$,

$b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times1=5>0$.

$\therefore$ 方程的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(2)用直接开平方法解:$x-1=\pm\sqrt{3}$.

$\therefore$ 方程的根为 $x_1=-\sqrt{3}+1$,$x_2=\sqrt{3}+1$.

(3)用因式分解法解:$x(x-3)=0$,

$\therefore$ 方程的根为 $x_1=0$,$x_2=3$.

(4)用配方法解:

$x^2-2x+1=4+1$,$(x-1)^2=5$,$x-1=\pm\sqrt{5}$,

$\therefore$ 方程的根为 $x_1=-\sqrt{5}+1$,$x_2=\sqrt{5}+1$.

18. **解:**(1)当 $a=0$ 时,$2x-3=0$ 是一元一次方程,此时方程有实数根;

当 $a\neq0$ 时,方程是一元二次方程.

$\because$ 原方程有实数根,

$\therefore b^2-4ac=2^2-4\times a\times(-3)=4+12a\geqslant0$,

解得 $a\geqslant-\frac{1}{3}$,$\therefore a\geqslant-\frac{1}{3}$且 $a\neq0$.

综上所述,a 的取值范围为 $a\geqslant-\frac{1}{3}$;

(2)$\because$ 原方程有两个相等的实数根,

$\therefore a\neq0$,且 $b^2-4ac=2^2-4\times a\times(-3)=0$,

解得 $a=-\frac{1}{3}$,

原方程变形为 $-\frac{1}{3}x^2+2x-3=0$,

$\therefore x_1=x_2=3$.

19. (1)**证明:**$\because b^2-4ac=(m+3)^2-4(m+2)=(m+1)^2$,

无论 m 取何值,$(m+1)^2\geqslant0$ 总成立,

$\therefore$ 无论 m 取何值,方程总有两个实数根.

(2)**解:**$\because x_1$,x_2 是方程的两根,

$\therefore x_1+x_2=-(m+3)$,$x_1x_2=m+2$.

$\because x_1^2+x_2^2=2$,

$\therefore (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2$,

$\therefore m^2+4m+3=0$,

解得 $m_1=-3$,$m_2=-1$,

$\therefore m$ 的值是 -3 或 -1.

20. **解:**(1)$70-2\times(22-20)=66$(元/人),

$66\times22=1\,452$(元).

答:购买门票共需费用1 452元.

(2)设该单位这次共有 x 名员工去七峰山生态旅游区旅游,

$\because 1\,500\div70=21\frac{3}{7}$(人),$1\,500\div55=27\frac{3}{11}$(人),

$\therefore 20<x\leqslant27$.

根据题意,得 $x[70-2(x-20)]=1\,500$,

整理,得 $x^2-55x+750=0$,

解得 $x_1=25$,$x_2=30$(不合题意,舍去).

答:该单位这次共有25名员工去七峰山生态旅游区旅游.

第2章 对称图形——圆

2.1 圆

【变式训练】

1. 相等;半径

点拨:圆上各点到圆心的距离等于半径.

2. D　**点拨:**在$\triangle ABC$中,$AC=1$,$AB=x$,$BC=3-x$,根据题意,可知 $1+x>3-x$,$1+3-x>x$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得 $1<x<2$.

∵ 以点 B 为圆心，1.6 为半径作⊙B，使点 M 和点 N 都在⊙B 外，

∴ $1+x>1.6$ 且 $3-x>1.6$，

∴ $0.6<x<1.4$，

∴ x 的取值范围是 $1<x<1.4$.

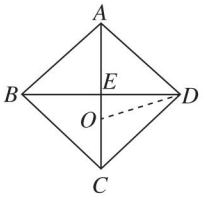
3. $\frac{25}{6}$ **点拨：**如图，设 AC 交 BD 于点 E，当 A、B、C、D 四点在同一个圆上时，设该圆的半径为 r，圆心为 O，连接 OD.

∵ $AB=AD=5$，$CB=CD$，

∴ AC 垂直平分线段 BD，

∴ $BE=DE=4$，∴ $AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=3$.

在 Rt△ODE 中，则有 $r^2=(r-3)^2+4^2$，



（第 3 题图）

解得 $r=\frac{25}{6}$.

【两年模拟兵法】

1. B

2. B **点拨：**∵ 连接 OP. 点 P 的坐标为 $(-8,6)$，

∴ $OP=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

∵ ⊙O 的直径为 10，∴ ⊙O 的半径为 5，

∴ 点 P 在⊙O 外.

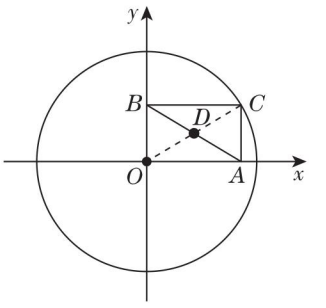
3. D **点拨：**如图，连接 OC，

∵ $CA\perp x$ 轴，$CB\perp y$ 轴，

∴ 四边形 $OACB$ 是矩形.

∵ D 为 AB 的中点，

∴ 点 D 在 OC 上，且 $OD=\frac{1}{2}OC$.



（第 3 题图）

∵ ⊙O 的半径为 2，∴ $OD=1$.

如果点 C 在圆上运动一周，那么点 D 运动的轨迹是以 O 为圆心，半径为 1 的圆，

∴ 点 D 运动的路程为 $2\pi\cdot 1=2\pi$.

4. 点 C 在圆 A 外 **点拨：**连接 AC. 在矩形 $ABCD$ 中，$CD=AB=3$，$AD=5$，由勾股定理，得

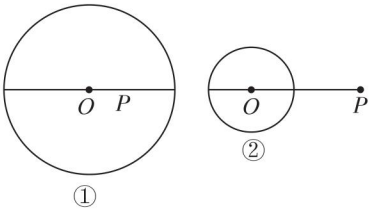
$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

∵ $AC>4$，

∴ 点 C 在圆 A 外.

5. 3 cm 或 8 cm **点拨：**当点 P 在圆内时，到圆的最小距离为 5 cm，最大距离为 11 cm，如图①，则圆的直径是 16 cm，因而半径是 8 cm；

当点 P 在圆外时，到圆的最小距离为 5 cm，最大距离为 11 cm，如图②，则圆的直径是 6 cm，因而半径是 3 cm.



（第 5 题图）

6. 30 **点拨：**如图，连接 OC，

∵ $OC=OB$，

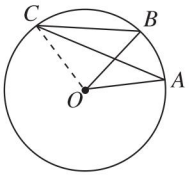
∴ $\angle OCB=\angle OBC=50°$，

∴ $\angle BOC=180°-50°\times 2=80°$，

∴ $\angle AOC=80°+40°=120°$.

∵ $OC=OA$，

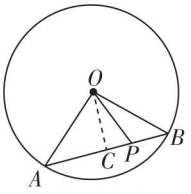
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第6题图)

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 30°$.

7. 4 **点拨:** 如图,过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C,则 $AC = BC$,



(第7题图)

设 $OC = x$, $AC = y$,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的一条弦, $\odot O$ 的半径为 6,

$\therefore AB < 12$. 由勾股定理可知 $x^2 + y^2 = 36$①.

$\because \triangle OAB$ 的面积为 18,

$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x = 18$②,

由②可得 $y = \frac{18}{x}$③,

把③代入①,可得 $x^2 + \left(\frac{18}{x}\right)^2 = 36$,

解得 $x = 3\sqrt{2}$ 或 $x = -3\sqrt{2}$(舍去),

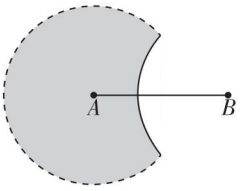
$\therefore OC = 3\sqrt{2} > 4$,

$\therefore 4 < OP \leqslant 6$.

$\therefore$ 当 OP 长为整数时, $OP = 5$ 或 6,

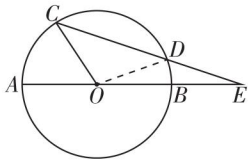
$\therefore P$ 点有 4 个.

8. **解:** 到点 A 的距离小于 2 cm,且到点 B 的距离不小于 2 cm 的所有点的集合如图所示.



(第8题图)

9. **解:** 连接 OD,如图.



(第9题图)

$\because AB = 2OD$, $AB = 2DE$,

$\therefore OD = DE$,

$\therefore \angle DOE = \angle E = 20°$,

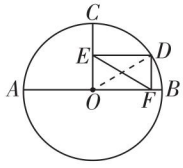
$\therefore \angle CDO = \angle DOE + \angle E = 40°$.

$\because OC = OD$,

$\therefore \angle C = \angle ODC = 40°$,

$\therefore \angle AOC = \angle C + \angle E = 60°$.

10. **解:** 连接 OD,如图.



(第10题图)

$\because OC \perp AB$, $DE \perp OC$, $DF \perp AB$,

$\therefore \angle EOF = \angle DEO = \angle DFO = 90°$,

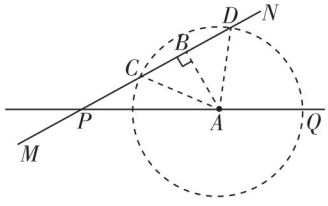
$\therefore$ 四边形 $DEOF$ 为矩形,

$\therefore EF = OD = OC = 5$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF$ 中, $OE^2 + OF^2 = EF^2 = 5^2 = 25$.

11. **解:** (1)小区会受到噪声影响. 理由:

如图,过 A 作 $AB \perp MN$ 于点 B,则 $AB = 80$ 米.



(第11题图)

$\because 80 < 100$,

$\therefore$ 小区会受到噪声影响.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)如图,以点 A 为圆心,100 米为半径作圆,交 MN 于点 C、D,则卡车行驶到 C 处时刚好开始受到影响,行驶到 D 处时结束了噪声影响.

连接 CA,DA,则有 $CA=DA=100$ 米.

在 Rt△ABC 中,$CB=\sqrt{100^2-80^2}=60$(米).

∵ $AB\perp CD$,∴ $CD=2CB=120$ 米,

∵ 18 千米/时 $=5$ 米/秒,

∴ 小区受影响的时间为 $120\div5=24$(秒).

答:小区受噪声影响的时间为 24 秒.

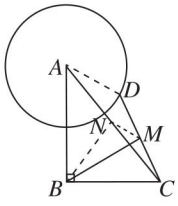
12. **解:**如图,取 AC 的中点 N,连接 MN、BN、AD.

∵ $\angle ABC=90°$,$AB=4$,$BC=3$,

∴ $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

∵ $AN=NC$,

∴ $BN=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$.



(第 12 题图)

∵ $AN=NC$,$DM=MC$,

∴ $MN=\frac{1}{2}AD=1$,

∵ $BM\leqslant BN+NM$,

∴ $BM\leqslant\frac{5}{2}+1$,

∴ $BM\leqslant\frac{7}{2}$,

∴ BM 的最大值为$\frac{7}{2}$.

2.2 圆的对称性

【变式训练】

1. A **点拨:**连接 OA,过 O 作 $OD\perp AB$,交$\overset{\frown}{AB}$于点 D,交弦 AB 于点 E,

∴ $AE=\frac{1}{2}AB$.

∵ $\overset{\frown}{AB}$折叠后恰好经过圆心 O,⊙O 的半径为 4 cm,

∴ $OE=DE=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}\times4=2$(cm).

在 Rt△AOE 中,

$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$(cm).

∴ $AB=2AE=4\sqrt{3}$ cm.

2. **解:**连接 OC,设 AB 交 CD 于 E,

由题意知 $AB=1.6+6.4+4=12$(m),

∴ $OC=OB=6$ m,

$OE=OB-BE=6-4=2$(m),

由题意可知 $AB\perp CD$,

∴ $CD=2CE$.

在 Rt△OCE 中,由勾股定理得 $CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$(m),

∴ $CD=2CE=8\sqrt{2}\approx11.3$(m),

答:路面 CD 的宽度约为 11.3 m.

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:**A 选项中等弧指的是能够完全重合的弧,正确,符合题意;

B 选项中应该是平分弦(此弦非直径)的直径垂直弦并平分弦所对的弧,错误,不符合题意;

C 选项中必须在同圆或等圆中,错误,不符合题意;

D 选项中必须在同圆或等圆中,错误,不符合题意.

2. D **点拨:**连接 OB、OD.

∵ $AB=CD$,∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,即①正确;

∵ $OM\perp AB$,$ON\perp CD$,

∴ $AM=MB$,$CN=ND$,

∴ $BM=DN$,

又∵ $OB=OD$,

∴ Rt△OMB≌Rt△OND,

∴ $OM=ON$,即②正确;

又∵ $OP=OP$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OPM \cong \mathrm{Rt}\triangle OPN$,

$\therefore PM = PN$, $\angle OPB = \angle OPD$,即④正确;

$\because AM = CN$, $\therefore PA = PC$,即③正确.

3. B **点拨:**连接 OC,设 $OC = OB = r$ cm,则 $OE = (r-1)$ cm,

$\because AB \perp CD$, $\therefore EC = DE = 3$ cm,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEC$ 中, $OC^2 = CE^2 + OE^2$,

$\therefore r^2 = 3^2 + (r-1)^2$,解得 $r = 5$,

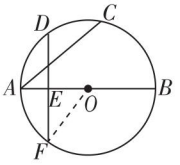
$\therefore OE = 4$ cm,

$\therefore AE = OA + OE = 5 + 4 = 9$(cm).

4. C **点拨:**如图,连接 OF.

$\because DE \perp AB$, $\therefore DE = EF$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AF}$.

$\because$ 点 D 是弧 AC 的中点,



(第4题图)

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$, $\therefore \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AF}$,即 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DF}$,

$\therefore AC = DF = 12$,

$\therefore EF = \frac{1}{2}DF = 6$,设 $OA = OF = r$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF$ 中, $r^2 = 6^2 + (r-3)^2$,

解得 $r = \frac{15}{2}$,

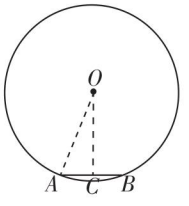
$\therefore AB = 2r = 15$.

5. 12 **点拨:**如图,作 $OC \perp AB$ 于 C,连接 OA,

则 $AC = BC = \frac{1}{2}AB = 5$ cm,

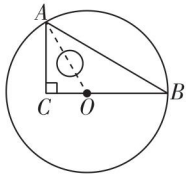
在 $\mathrm{Rt}\triangle OAC$ 中, $OC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$(cm),

$\therefore$ 圆心 O 到 AB 的距离为 12 cm.



(第5题图)

6. 120° **点拨:**如图,连接 OA.



(第6题图)

$\because OA = OB$,

$\therefore \angle OAB = \angle B = 30°$,

$\therefore \angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle B = 180° - 30° - 30° = 120°$,

$\therefore$ 劣弧 AB 的度数等于 120°.

7. 64° **点拨:**$\because \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AC}$,

$\therefore \angle AOE = \angle COA = 32°$,

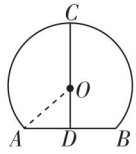
$\therefore \angle COE = \angle AOE + \angle COA = 64°$.

8. 8 **点拨:**连接 OA,如图所示.

$\because CD \perp AB$,

$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB$.

$\because OA = OC = 5$ m, $OD = CD - OC = 3$ m, $\angle ADO = 90°$,



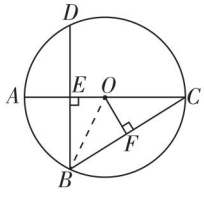
(第8题图)

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中,

$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$(m),

$\therefore AB = 2AD = 8$ m.

9. $\sqrt{13}$ **点拨:**如图,连接 OB,



(第9题图)

$\because BD \perp AC$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore BE=\frac{1}{2}BD=6$ cm.

$\because OE=OA-AE=(OB-4)$ cm,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle OEB$ 中,$OB^2=(OB-4)^2+6^2$,

解得 $OB=\frac{13}{2}$cm,

则 $AC=13$ cm,

$\therefore EC=AC-AE=9$ cm,

$\therefore BC=\sqrt{EC^2+BE^2}=\sqrt{9^2+6^2}=3\sqrt{13}$(cm).

$\because OF\perp BC$,

$\therefore CF=\frac{1}{2}BC=\frac{3\sqrt{13}}{2}$cm,

$\therefore OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{13}$(cm).

10. (1)**证明:**$\because AB=CD$,

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

$\because M$ 是$\overset{\frown}{AC}$的中点,

$\therefore \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{CM}$,

$\therefore \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{DM}$,

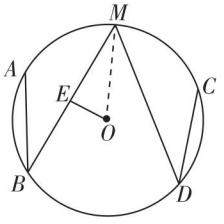
$\therefore BM=DM$.

(2)**解:**如图,连接 OM.

$\because DM=BM=4$,$OE\perp BM$,

$\therefore EM=BE=2$.

$\because OE=1$,$\angle OEM=90°$,



(第 10 题图)

$\therefore OM=\sqrt{OE^2+EM^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$.

11. **证明:**连接 OC、OD,如图,

$\because OA=OB$,$AE=BF$,

$\therefore OE=OF$.

$\because CE\perp AB$,$DF\perp AB$,

$\therefore \angle OEC=\angle OFD=90°$.

在 Rt$\triangle OEC$ 和 Rt$\triangle OFD$ 中,

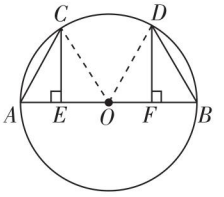
$\begin{cases}OE=OF,\\OC=OD,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle OEC\cong$Rt$\triangle OFD$(HL),

$\therefore \angle COE=\angle DOF$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore AC=BD$.

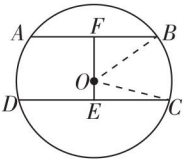


(第 11 题图)

12. **解:**如图,连接 OB、OC.

设 $BF=EF=x$,$OF=y$.

$\because AB/\!/CD$,$EF\perp AB$,



(第 12 题图)

$\therefore EF\perp CD$,

$\therefore \angle CEF=\angle BFO=90°$,

$\therefore AF=BF=x$,$DE=EC=2\sqrt{6}$.

根据勾股定理可得$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\(2\sqrt{6})^2+(x-y)^2=25,\end{cases}$

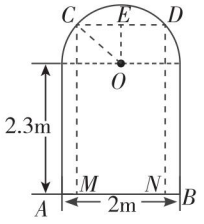
解得$\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$(舍去)或$\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$

$\therefore BF=4$,$\therefore AB=2BF=8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解:这辆卡车能通过厂门. 理由如下:

如图,O 为半圆的圆心,MN 为卡车的宽,且 $AM=BN$,过 M、N 作 AB 的垂线交半圆于 C、D,连接 CD、OC,过 O 作 $OE\perp CD$,E 为垂足,



(第13题图)

则 $CD=MN=1.6$ m,

$CE=DE=0.8$ m.

$\because OC=\frac{1}{2}\times 2=1$(m),

$\therefore$ 在 Rt $\triangle OCE$ 中,$OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{1^2-0.8^2}=0.6$(m),

$\therefore CM=2.3+0.6=2.9$(m) >2.5 m.

$\therefore$ 这辆卡车能通过厂门.

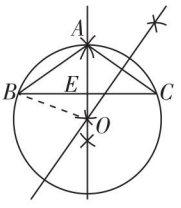
2.3 确定圆的条件

【变式训练】

1. 解:(1)如图,$\odot O$ 即为所求.

(2)如图,连接 OB,设 OA 交 BC 于点 E,$OA=OB=x$.

$\because OA\perp BC$,$\therefore BE=EC=\frac{5}{2}$. $\because AB=3$,



(第1题图)

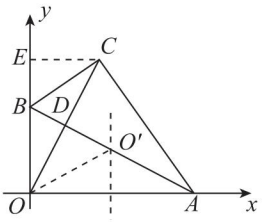
$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABE$ 中,$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle OBE$ 中,$x^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(x-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2$,

$\therefore x=\frac{9}{\sqrt{11}}=\frac{9\sqrt{11}}{11}$.

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆$\odot O$ 的半径为$\frac{9\sqrt{11}}{11}$.

2. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ **点拨:**如图所示,



(第2题图)

设 OC 与 AB 的交点为 D,

根据翻折可知 AB 是 OC 的垂直平分线,

作 AO 的垂直平分线交 AB 于点 O',

则点 O'即为$\triangle AOC$ 的外心,

过点 C 作 $CE\perp y$ 轴于点 E,

$\because$ 点 $C(4,8)$,

$\therefore CE=4$,$OE=8$,

则 $OC=\sqrt{CE^2+OE^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$,

$\therefore CD=OD=2\sqrt{5}$.

设 $OB=CB=x$,

在 Rt$\triangle CEB$ 中,根据勾股定理,得

$x^2=(8-x)^2+4^2$,解得 $x=5$,

即 $OB=BC=5$,

$\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{25-20}=\sqrt{5}$.

易证$\triangle OBD\backsim\triangle AOD$,

$\therefore \frac{OD}{AD}=\frac{BD}{OD}$,$\therefore OD^2=BD\cdot AD$,

$\therefore AD=4\sqrt{5}$.

连接 OO',设 $OO'=AO'=r$,

则 $DO'=4\sqrt{5}-r$,

$\therefore (4\sqrt{5}-r)^2+(2\sqrt{5})^2=r^2$

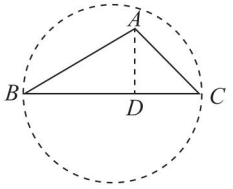
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $r=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore$ $\triangle AOC$ 的外接圆半径为$\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

3. $(4+2\sqrt{3})\pi$ **点拨:** $\because \angle BAC=180°-\angle B-\angle C=105°>90°$,$\therefore$ 点 A 在以 BC 为直径的圆的内部,$\therefore$ 能够将 $\triangle ABC$ 完全覆盖的最小圆是以 BC 为直径的圆.

如图,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,



(第 3 题图)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$\angle B=30°$,$AB=4$ cm,

则 $AD=2$ cm,$BD=2\sqrt{3}$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\angle C=45°$,

$\therefore CD=AD=2$ cm,

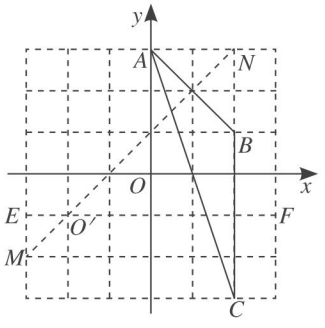
$\therefore BC=(2\sqrt{3}+2)$ cm,

故所求圆的面积 $=(\sqrt{3}+1)^2\pi=(4+2\sqrt{3})\pi(\mathrm{cm}^2)$.

【两年模拟兵法】

1. D **点拨:** 根据题意,花猫应该到三个洞口的距离相等,则此点就是三角形三边垂直平分线的交点.

2. A **点拨:** 如图,由作图可知 EF 与 MN 的交点 O' 即为 $\triangle ABC$ 的外心,则 $\triangle ABC$ 的外心坐标是 $(-2,-1)$.



(第 2 题图)

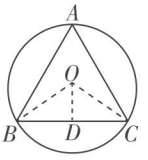
3. C **点拨:** 根据 $3^2+4^2=5^2$,

可得三角形是直角三角形,

所以三角形的外接圆的直径就是斜边的长为 5,

所以三角形的外接圆半径是 2.5.

4. C **点拨:** 如图所示,连接 OB、OC,作 $OD\perp BC$ 于 D,则 $BD=CD$.



(第 4 题图)

$\because \triangle ABC$ 是正三角形,$\therefore \angle OBC=30°$,

$\therefore OD=\frac{1}{2}OB=1$.

根据题意,可得 $BD=\sqrt{3}$,$\therefore BC=2BD=2\sqrt{3}$,

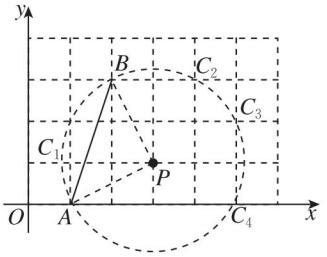
$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $=3S_{\triangle OBC}=3\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=3\sqrt{3}$.

5. (1,2)或(4,3) **点拨:** 如图,连接 AP、BP,

$\because P(3,1)$ 是钝角三角形 ABC 的外心,

$AP=BP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$\therefore$ 以点 P 为圆心,AP 为半径作圆,格点 A、C_1、B、C_2、C_3、C_4 一定在此圆上.

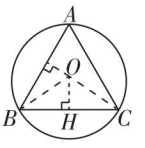


(第 5 题图)

由 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,可知点 C_1、C_2 符合条件,

$\therefore C$ 的坐标为(1,2)或(4,3).

6. $6\sqrt{3}$ **点拨:** 如图,



(第 6 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\odot O$ 为等边三角形 ABC 的外接圆,连接 OB、OC,作 $OH\perp BC$,$OE\perp AB$,可得 $BH=CH$,$AE=BE$.

∵ 外接圆的面积是 8π,即 $\pi\cdot OB^2=8\pi$,

∴ $OB=2\sqrt{2}$.

由 $AB=BC$,可知 $BE=BH$. ∵ $\angle OEB=\angle OHB=90°$,$OB=OB$,

∴ Rt $\triangle OBE\cong$ Rt $\triangle OBH$,∴ $\angle OBH=\angle OBE=30°$,

在 Rt$\triangle BOH$ 中,$OH=\frac{1}{2}OB=\sqrt{2}$,∴ $BH=\sqrt{6}$,

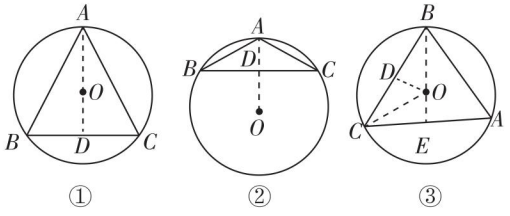
∴ $BC=2BH=2\sqrt{6}$,

∴ $\triangle ABC$ 的面积 $=3S_{\triangle OBC}=3\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=6\sqrt{3}$.

7. 8 或 2 或 $\frac{32}{5}$ **点拨:**(1)当 BC 是底,$\triangle ABC$ 是锐角三角形时,如图①,

连接 AO 并延长交 BC 于点 D,

∵ $AB=AC$,∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,



(第 7 题图)

∴ $AD\perp BC$.

∵ $OA=5$,$OD=3$,

∴ $AD=5+3=8$,

(2)当 BC 是底,$\triangle ABC$ 是钝角三角形时,如图②,连接 AO 交 BC 于点 D,则 $AO\perp BC$,同理可得 $AD=OA-OD=5-3=2$.

(3)当 BC 是腰时,连接 BO 并延长交 AC 于 E,作 $OD\perp BC$ 于点 D,连接 OC.

∵ $BC=AB$,∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AB}$,∴ $BE\perp AC$.

在 Rt$\triangle BOD$ 中,$OB=5$,$OD=3$,

∴ $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

∴ $BC=2BD=8$.

设 $OE=x$,在 Rt$\triangle COE$ 中,$CE^2=OC^2-OE^2=5^2-x^2$,

在 Rt$\triangle BCE$ 中,$CE^2=BC^2-BE^2=8^2-(5+x)^2$,

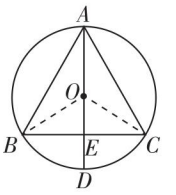
∴ $5^2-x^2=8^2-(5+x)^2$,

解得 $x=\frac{7}{5}$,

∴ $BE=5+\frac{7}{5}=\frac{32}{5}$.

8. 解:(1)$AD\perp BC$,

理由:如图,连接 OB、OC.



(第 8 题图)

在$\triangle BOE$ 与$\triangle COE$ 中,$\begin{cases}BE=CE,\\OE=OE,\\OB=OC,\end{cases}$

∴ $\triangle BOE\cong\triangle COE$(SSS),

∴ $\angle BEO=\angle CEO=90°$,

∴ $AD\perp BC$.

(2)设半径 $OC=r$,

则 $OE=r-2$.

∵ $AD\perp BC$,

∴ $CE=\frac{1}{2}BC=3$.

在 Rt$\triangle OCE$ 中,$CE^2+OE^2=OC^2$,

∴ $3^2+(r-2)^2=r^2$,

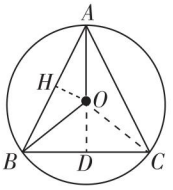
解得 $r=\frac{13}{4}$,

∴ $AD=\frac{13}{2}$,

∴ $AE=AD-DE=\frac{13}{2}-2=\frac{9}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)如图,连接 OC,延长 AO 交 BC 于点 D,



(第 9 题图)

$\because AB=AC, OB=OC$,

$\therefore AD$ 是 BC 的中垂线,

$\therefore BD=DC, AD\perp BC$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}AD\times 8=32$,

$\therefore AD=8$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中, $OD=8-r, BO=r, BD=\frac{1}{2}BC=4$,根据勾股定理,得

$r^2=(8-r)^2+4^2$,

解得 $r=5$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 5.

(2)由(1)得 $AD=8, BD=4$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,

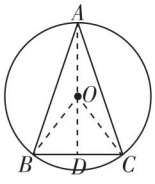
如图,过 O 作 $OH\perp AB$ 于 H,

$\therefore BH=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{5}$,

$\therefore OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OH=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times\sqrt{5}=10$.

10. 解:(1)如图,连接 AO 并延长交 BC 于 D,连接 OB、OC,



(第 10 题图)

$\because AB=AC, OB=OC$,

$\therefore$ 点 A、O 在 BC 的垂直平分线上,

$\therefore AD$ 垂直平分 BC,

即 $AD\perp BC, BD=\frac{1}{2}BC=2$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ADB=90^\circ, AB=2\sqrt{10}$,

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=6$.

设 $OA=OB=r$,则 $OD=6-r$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中, $\angle ODB=90^\circ$,

$\therefore OD^2+BD^2=OB^2$,即 $(6-r)^2+2^2=r^2$.

解得 $r=\frac{10}{3}$,

即 $\odot O$ 的半径为 $\frac{10}{3}$.

(2) $\odot P$ 的半径的长为 $2\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{17}$.

点拨:当 $\odot P$ 也经过 B、C 两点时,

点 P 在 AD 上或在 DA 的延长线上,连接 BP.

$\because PA=2, \therefore PD=6-2=4$ 或 $PD=6+2=8$,

$\because BD=2$,

$\therefore PB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

或 $PB=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$.

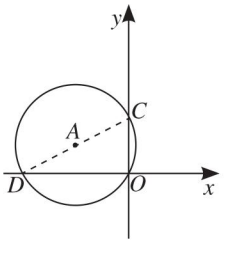
$\therefore \odot P$ 的半径的长为 $2\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{17}$.

2.4 圆周角

【变式训练】

1. C **点拨:**弧 AE 所对的圆周角为 $\angle ABE$ 和 $\angle ACE$.

2. $4\sqrt{2}$ **点拨:**连接 CD,如图,



(第 2 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $\angle COD=90°$,

∴ CD 为⊙A 的直径,

∴ $CD=6$.

∵ 点 $C(0,2)$,

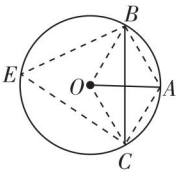
∴ $OC=2$.

在 Rt△OCD 中,∵ $\angle COD=90°$,

∴ $OD^2+OC^2=CD^2$,即 $OD^2+2^2=6^2$.

解得 $OD=4\sqrt{2}$.

3. 60°或 120° **点拨:**如图,连接 AC、AB、OB、OC,在优弧 BC 上任取一点 E,连接 BE、CE.



(第 3 题图)

根据弦 BC 垂直平分半径 OA,可知 $OB=AB$.

因为 $OB=OA$,

所以△OAB 是等边三角形,所以 $\angle BOA=60°$.

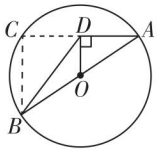
由 $OB=OC$ 可知

$\angle BOC=2\times\angle BOA=120°$,

所以 $\angle E=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$,$\angle BAC=180°-\angle E=120°$,

所以弦 BC 所对的圆周角等于 60°或 120°.

4. C **点拨:**延长 AD 交⊙O 于 C,连接 BC,如图,



(第 4 题图)

因为 $OD\perp AC$,所以利用垂径定理可得到 $AD=CD$. 在 Rt△OAD 中,利用勾股定理可得 $AD=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

所以 $CD=4$,所以 $AC=8$.

因为 AB 为直径,所以根据"直径所对的圆周角是直角"可知 $\angle ACB=90°$.

在 Rt△ABC 中,可得 $BC=\sqrt{10^2-8^2}=6$,

在 Rt△BCD 中,可得 $BD=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

【两年模拟兵法】

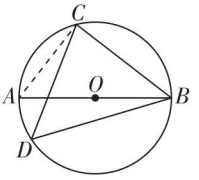
1. C **点拨:**∵ $\angle ACB=54°$,

∴ $\angle AOB=2\angle ACB=108°$.

∵ $OB=OA$,

∴ $\angle ABO=\angle BAO=\frac{1}{2}\times(180°-\angle AOB)=36°$.

2. B **点拨:**如图,连接 AC,



(第 2 题图)

∵ AB 是⊙O 的直径,

∴ $\angle ACB=90°$.

∵ $\angle ABC=38°$,

∴ $\angle BAC=90°-\angle ABC=52°$,

∴ $\angle BDC=\angle BAC=52°$.

3. C **点拨:**∵ $BC=CD$,

∴ $\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}$.

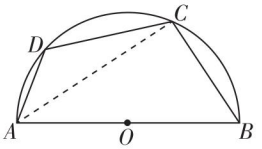
∴ $\angle BAC=\angle DAC=35°$.

∵ $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 所对的弧都是 $\overset{\frown}{AD}$,

∴ $\angle ABD=\angle ACD=45°$,

∴ $\angle ADB=180°-\angle BAD-\angle ABD=180°-(35°+35°)-45°=65°$.

4. A **点拨:**如图,连接 AC,



(第 4 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∵ 四边形 $ABCD$ 是半圆的内接四边形，

∴ $\angle DAB + \angle BCD = 180°$，

∴ $\angle DAB = 180° - \angle BCD = 70°$.

∵ $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{CB}$，

∴ $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle DAB = 35°$.

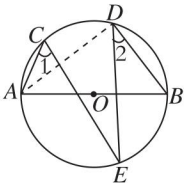
∵ AB 是直径，

∴ $\angle ACB = 90°$，

∴ $\angle ABC + \angle CAB = 90°$，

∴ $\angle ABC = 90° - \angle CAB = 55°$.

5. 35　**点拨：**如图，连接 AD，



（第 5 题图）

∵ AB 是直径，

∴ $\angle ADB = 90°$.

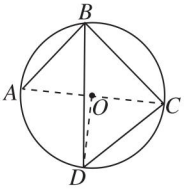
根据圆周角定理得到 $\angle 1 = \angle ADE$.

∵ $\angle ADE + \angle 2 = 90°$，∴ $\angle 1 + \angle 2 = 90°$.

∵ $\angle 1 = 55°$，

∴ $\angle 2 = 35°$.

6. 6　**点拨：**如图，连接 AC、OD，



（第 6 题图）

∵ $\angle ABC = 90°$，

∴ AC 为⊙O 的直径.

∵ BD 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle DBC = 90° \div 2 = 45°$，

∴ $\angle DOC = 90°$，

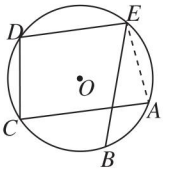
∴ $\triangle ODC$ 为等腰直角三角形，

根据勾股定理，可得 $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 5\sqrt{2} = 5$，

∴ $AC = 10$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

7. 155　**点拨：**如图，连接 EA，



（第 7 题图）

∵ $\overset{\frown}{AB}$ 为 50°，

∴ $\angle BEA = 50° \div 2 = 25°$.

∵ 四边形 $DCAE$ 为⊙O 的内接四边形，

∴ $\angle DEA + \angle C = 180°$，

∴ $\angle DEB + \angle C = 180° - 25° = 155°$.

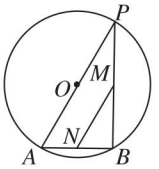
8. 4　**点拨：**∵ M、N 分别是 BP、AB 的中点，

∴ $MN = \frac{1}{2}PA$.

当 PA 的长最大时，MN 的长最大.

当 PA 为直径时，PA 的长最大，如图，

此时 $\angle PBA = 90°$.



（第 8 题图）

在 Rt$\triangle PBA$ 中，$\angle APB = 30°$，∴ $PA = 2AB = 8$，

∴ PA 长的最大值为 8，

∴ MN 长的最大值为 4.

9. **解：**(1) ∵ $AB \perp CD$，

∴ $\angle BAD + \angle ADC = 90°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAD = 90° - 20° = 70°$.

根据圆周角定理可得$\angle BOD = 2\angle BAD = 2 \times 70° = 140°$.

(2)$\because \angle BAD + \angle ADC = 90°$,

$\therefore \angle BAD = 90° - \alpha$.

根据圆周角定理可得$\angle BOD = 2\angle BAD = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$;

$\because \angle AOC = 2\angle ADC = 2\alpha$.

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 2\alpha + 180° - 2\alpha = 180°$.

10. (1)**证明:**$\because \angle CDE = \frac{1}{2}\angle CDF = 60°$,

$\therefore \angle CDE = \angle EDF = 60°$.

$\because$ 四边形$ABCD$内接于$\odot O$,

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180°$.

又$\because \angle CDE + \angle ADC = 180°$,

$\therefore \angle CDE = \angle ABC = 60°$.

由圆周角定理可得$\angle ACB = \angle ADB$,

$\therefore \angle ACB = \angle EDF = 60°$,

$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \angle BAC = 60°$,

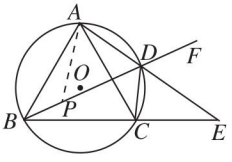
$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

(2)**解:**$DA + DC = DB$.

证明如下:如图,在BD上截取$PD = AD$,连接AP.

$\because \angle ADP = 60°$,

$\therefore \triangle APD$为等边三角形,



(第10题图)

$\therefore AD = AP$, $\angle APD = 60°$,

$\therefore \angle APB = 120°$.

$\because \angle CDE = 60°$,

$\therefore \angle ADC = 120°$.

在$\triangle APB$和$\triangle ADC$中,

$$\begin{cases} \angle APB = \angle ADC, \\ \angle ABP = \angle ACD, \\ AP = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle APB \cong \triangle ADC$(AAS),

$\therefore BP = CD$,

$\therefore DB = BP + PD = DC + DA$.

11. (1)**证明:**$\because C$为$\overset{\frown}{BD}$的中点,

$\therefore \angle BAC = \angle CAP$.

$\because AB$是直径,

$\therefore \angle ACB = \angle ACP = 90°$,

$\therefore \angle ABC + \angle BAC = 90°$, $\angle P + \angle CAP = 90°$,

$\therefore \angle ABC = \angle P$,

$\therefore AB = AP$.

(2)**解:**如图,连接BD.

$\because AB$是直径,

$\therefore \angle ADB = \angle BDP = 90°$.

$\because AB = AP = 10$, $DP = 2$,

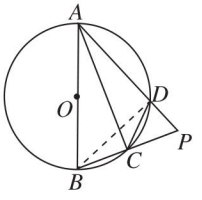
$\therefore AD = 10 - 2 = 8$.

在Rt$\triangle ABD$中,$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$,

在Rt$\triangle PBD$中,$PB = \sqrt{BD^2 + PD^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$\because AB = AP$, $AC \perp BP$,

$\therefore PC = BC = \frac{1}{2}PB = \sqrt{10}$.



(第11题图)

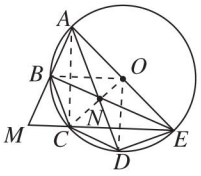
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. (1)**证明:**如图,连接 BO、CO、DO,

$\because CD \parallel BE$,

$\therefore \angle DCE = \angle CEB$.

$\because \angle DCE = \frac{1}{2}\angle DOE$, $\angle CEB = \frac{1}{2}\angle COB$,



(第 12 题图)

$\therefore \angle DOE = \angle COB$,

$\therefore BC = DE$.

(2)**证明:**如图,连接 AC,

$\because BC \parallel AD$,

$\therefore \angle CAD = \angle BCA$,根据(1)中的证明方法可得 $AB = DC$.

$\because$ 点 D 是$\overset{\frown}{CE}$的中点,

$\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$,

$\therefore CD = DE$,

又由(1)知 $BC = DE$,

$\therefore AB = BC$.

$\therefore \angle CAB = \angle BCA$.

又$\because BM = BC$,$\therefore \angle BMC = \angle BCM$.

在 $\triangle ACM$ 中, $\angle CAB + \angle ACB + \angle BMC + \angle BCM = 180°$,

$\therefore \angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$,

$\therefore \angle ACE = 90°$,

$\therefore AE$ 是圆 O 的直径.

(3)**解:**由(1)(2)得$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$,

$\because AE$ 是圆 O 的直径,

$\therefore \angle BEA = \angle DAE = 22.5°$, $\angle BAN = 45°$, $\angle ABN = 90°$,

$\therefore NA = NE$,

$\angle BNA = \angle BAN = 45°$,

$\therefore AB = BN$.

$\because AB = BC = 1$,

$\therefore BN = 1$,

$\therefore AN = NE = \sqrt{2}$.

由勾股定理得 $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 1^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 圆 O 的面积 $= \pi\left(\frac{AE}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot AE^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$.

13. (1)**证明:**$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle AEB = 90°$,

$\therefore AE \perp BC$.

$\because AB = AC$,

$\therefore BE = CE$.

$\because AE = EF$,

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

$\because AC = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是菱形.

(2)**解:**设 $CD = x$,则 $AB = AC = \frac{7}{2} + x$. 由(1)知 $BC = 2BE = 2$.

如图,连接 BD,

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中,$BD^2 = AB^2 - AD^2$,

$BD^2 = CB^2 - CD^2$,

即 $AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$,

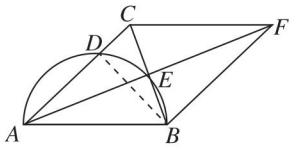
$\therefore \left(\frac{7}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2^2 - x^2$,

解得 $x = \frac{1}{2}$或 $x = -4$(不符合题意,舍去),

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AC=4$,$\therefore$ 半圆的半径为2,

$\therefore S_{半圆形}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$.



(第13题图)

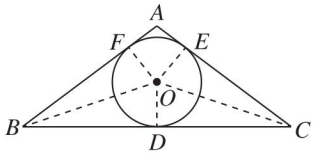
2.5 直线与圆的位置关系

【变式训练】

1. **解:**(1)如图①,过A作$AD\perp BC$于D,

则$AD=30$ cm,$BD=CD=\frac{1}{2}BC=40$ cm,

$AB=AC=\sqrt{30^2+40^2}=50$(cm).



(第1题图①)

由题易知最大圆为$\triangle ABC$的内切圆. 设圆心为O,AB,AC与$\odot O$的切点分别为F,E. 则O在AD上. 连接BO,CO,OE,OF.

根据题意,可得$OD=OE=OF$,

设$\odot O$的半径为r cm,

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}$,

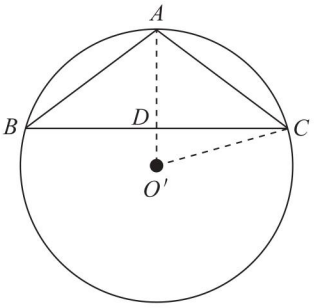
得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)r$,

即$\frac{1}{2}\times 80\times 30=\frac{1}{2}\times(50+80+50)r$,

解得$r=\frac{40}{3}$.

$\therefore$ 从这块钢板上截得的最大圆的半径为$\frac{40}{3}$cm.

(2)设$\triangle ABC$外接圆的半径为R cm,圆心为O',如图②,



(第1题图②)

过A作$AD\perp BC$于D,

易知O'在直线AD上,连接$O'C$,

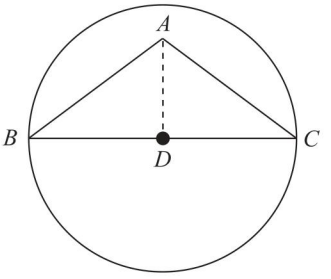
在Rt$\triangle O'DC$中,

由$R^2=40^2+(R-30)^2$,

解得$R=\frac{125}{3}$;$\because 2R>BC$,

$\therefore$ 若以$BD=40$ cm长为半径画圆,也可以完全覆盖,如图③,

即完全覆盖这块钢板的圆的最小半径是40 cm.



(第1题图③)

2. C **点拨:**利用切线长定理可得$PA=PB$,$\therefore$ ①正确;

$\because OA=OB$,$PA=PB$,

$\therefore OP$垂直平分AB,$\therefore$ ②正确;

$\because PA$,PB是$\odot O$的两条切线,A,B为切点,

$\therefore OA\perp PA$,$OB\perp PB$,

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90°$,

$\therefore$ 点A、B在以OP为直径的圆上,

$\therefore$ 四边形$OAPB$有外接圆,$\therefore$ ③正确;

$\because$ 只有当$\angle APO=30°$时,$OP=2OA$,此时

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$PM=OM$,

$\therefore M$ 不一定为 $\triangle AOP$ 外接圆的圆心,$\therefore$ ④错误.

3. 3 或 $\sqrt{13}$ **点拨:**根据点 A 的坐标为 $(-2,3)$,

可得点 A 到 x 轴的距离为 3,到 y 轴的距离为 2,

当 $\odot A$ 与 x 轴相切时,与 y 轴有两个交点,圆与坐标轴恰好有三个公共点,此时 $r=3$;

当 $\odot A$ 经过原点时,圆与坐标轴恰好有三个公共点,此时 $r=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,

综上所述,r 的值为 3 或 $\sqrt{13}$.

4. (1)**证明:**$\because OM/\!/AC$,

$\therefore \angle OEB=\angle ACB$,

$\because AB$ 是圆 O 的直径,

$\therefore \angle OEB=\angle ACB=90°$,

$\therefore OD\perp BC$,由垂径定理得 OD 垂直平分 BC,

$\therefore DB=DC$,

$\therefore \angle DBE=\angle DCE$,

又$\because OC=OB$,

$\therefore \angle OBE=\angle OCE$,

$\therefore \angle DBE+\angle OBE=\angle DCE+\angle OCE$,

即 $\angle DBO=\angle OCD$,

$\because DB$ 为圆 O 的切线,

$\therefore \angle DBO=90°$,

$\therefore \angle OCD=\angle DBO=90°$,

即 $OC\perp DC$,

$\therefore DC$ 是圆 O 的切线;

(2)60° **点拨:**$\because \angle BAC=60°$,

$\therefore \angle BOC=120°$,

$\because OD$ 垂直平分 BC,$OC=OB$,

$\therefore \angle COM=\angle BOM=60°$,

又$\because OC=OM=OB$,

$\therefore \triangle COM$ 和 $\triangle BOM$ 是等边三角形,

$\therefore OC=CM=OM=OB=BM$,

$\therefore$ 四边形 $OBMC$ 为菱形.

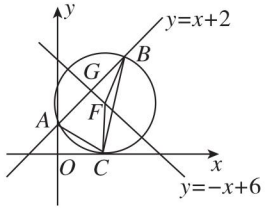
5. B **点拨:**根据点 $B(a,a+2)$,

可得点 B 在 $y=x+2$ 这条直线上,

又 $AB=4\sqrt{2}$,$A(0,2)$,

可得 $B(4,6)$,

如图,



(第 5 题图)

当 $\triangle ABC$ 的外接圆与 x 轴相切时,$\angle ACB$ 有最大值.

取点 G 为 AB 的中点,

$\therefore G(2,4)$,

过点 G 且垂直于 AB 的直线为 $y=-x+6$,

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 F,连接 FC,FB.

易知圆心 F 的坐标为 $(b,-b+6)$,

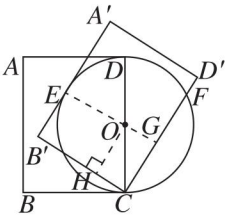
$\because FC=FB$,

$\therefore (-b+6)^2=(b-4)^2+(-b+6-6)^2$,

解得 $b=2\sqrt{6}-2$(负值舍去).

6. 4 **点拨:**如图,连接 OE,延长 EO 交 CD' 于点 G,作 $OH\perp B'C$ 于点 H,

则 $\angle OEB'=\angle OHB'=90°$,



(第 6 题图)

$\because$ 矩形 $ABCD$ 绕点 C 旋转所得图形为矩形 $A'B'CD'$,

$\therefore \angle B'=\angle B'CD'=90°$,$AB=CD=5$,$BC=B'C=4$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴四边形 $OEB'H$ 和四边形 $EB'CG$ 都是矩形，

$OE=OD=OC=2.5$，

∴ $B'H=OE=2.5$，

∴ $CH=B'C-B'H=1.5$，

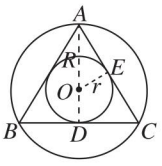
∴ $CG=B'E=OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$，

∵四边形 $EB'CG$ 是矩形，

∴ $\angle OGC=90°$，即 $OG\perp CD'$，

∴ $CF=2CG=4$.

7. C **点拨：**如图，



（第7题图）

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\triangle ABC$ 的内切圆和外接圆是同心圆，设圆心为 O，

作 $AD\perp BC$ 于 D，易知点 O 在 AD 上. 设 AC 与三角形内切圆的切点为 E，连接 OE，则 $OE\perp AC$.

∵等边三角形的高、内切圆的半径、外接圆的半径分别为 h、r、R，

则 $AD=h$，$OD=OE=r$，$AO=R$，

∴ $h=R+r$，∴ A 正确；

∵ $AD\perp BC$，

∴ $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$，

在 Rt$\triangle AOE$ 中，∵ $\angle OAE=30°$，

∴ $R=2r$，∴ B 正确；

易知 $AE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$，

∴ $\left(\frac{1}{2}a\right)^2+r^2=(2r)^2$，$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}R\right)^2=R^2$，

∴ $r=\frac{\sqrt{3}a}{6}$，$R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

∴ C 错误，D 正确.

【两年模拟兵法】

1. D **点拨：**∵ M 点的坐标为 $(-2,3)$，

∴ M 点到 x 轴的距离为3，到 y 轴的距离为2，

∵ $\odot M$ 的半径为2，

∴圆心 M 到 x 轴的距离大于半径，到 y 轴的距离等于半径，

∴ $\odot M$ 与 x 轴相离，与 y 轴相切.

2. B **点拨：**∵ $OC\perp OA$，

∴ $\angle AOC=90°$，

∵ $\angle APO=\angle BPC=70°$，

∴ $\angle A=180°-90°-70°=20°$，

∵ $OA=OB$，

∴ $\angle OBA=\angle A=20°$，

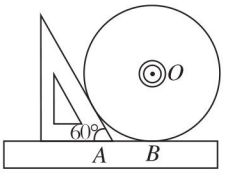
∵ BC 为 $\odot O$ 的切线，

∴ $OB\perp BC$，

∴ $\angle OBC=90°$，

∴ $\angle ABC=90°-20°=70°$.

3. A **点拨：**设三角板与光盘的切点为 C，光盘的圆心为 O，连接 OA、OB，如图，易知 AB 与 $\odot O$ 相切，$OB\perp AB$.



（第3题图）

由切线长定理知 $AB=AC=3$，推理可得 AO 平分 $\angle BAC$，

易知 $\angle OAB=60°$，

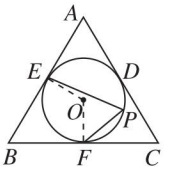
在 Rt$\triangle ABO$ 中，$\angle AOB=90°-60°=30°$，

∴ $AO=2AB=2\times 3=6$，∴ $OB=3\sqrt{3}$，

∴光盘的直径为 $6\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. B　**点拨:**如图,连接 OE,OF.



(第 4 题图)

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,E,F 是切点,

$\therefore OE \perp AB$,$OF \perp BC$,

$\therefore \angle OEB = \angle OFB = 90°$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle B = 60°$,

$\therefore \angle EOF = 120°$,

$\therefore \angle EPF = \frac{1}{2}\angle EOF = 60°$.

5. 25°　**点拨:**$\because AC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OA \perp AC$,

$\therefore \angle OAC = 90°$,

$\therefore \angle AOC = 90° - \angle C = 90° - 40° = 50°$,

$\therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = 25°$.

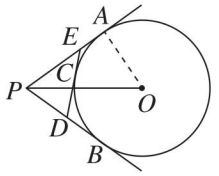
6. 16 cm　**点拨:**如图,连接 OA,

$\because PA$、PB、DE 分别切 $\odot O$ 于 A、B、C,

$\therefore BD = CD$,$CE = AE$,$PA = PB$,$OA \perp AP$.

在直角三角形 OAP 中,根据勾股定理,得 $AP = 8$ cm,

$\therefore \triangle PDE$ 的周长为 $PE + PD + ED = PE + PD + CE + CD = PE + PD + AE + BD = 2AP = 16$ cm.



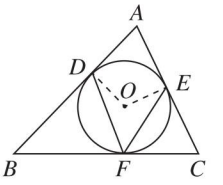
(第 6 题图)

7. 70°　**点拨:**连接 OD,OE,如图所示.

则 $\angle ADO = \angle AEO = 90°$.

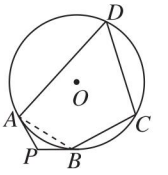
由圆周角定理知,$\angle DOE = 2\angle DFE = 110°$.

$\therefore \angle A = 360° - \angle ADO - \angle AEO - \angle DOE = 70°$.



(第 7 题图)

8. 219°　**点拨:**如图,连接 AB,



(第 8 题图)

$\because PA$、PB 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore PA = PB$,

$\because \angle P = 102°$,

$\therefore \angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2}(180° - 102°) = 39°$,

$\because \angle DAB + \angle C = 180°$,

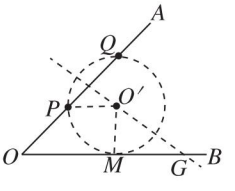
$\therefore \angle PAD + \angle C = \angle PAB + \angle DAB + \angle C = 39° + 180° = 219°$.

9. $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$　**点拨:**$\because$ 过 P、Q、M 三点的圆与 OB 相切,

$\therefore$ 点 M 为切点,

设过 P、Q、M 三点的圆的圆心为 O',

连接 $O'M$,$O'P$,则 $O'M \perp OB$,过 O' 作 $GH \perp PQ$ 交 PQ 于 H,交 OB 于 G,如图,



(第 9 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PH=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}\times(6-2)=2$,

设 $O'P=O'M=x$,

$\because \angle AOB=45°$,

$\therefore \triangle OGH$ 和 $\triangle O'MG$ 都是等腰直角三角形,

$\therefore OH=HG=OP+PH=4$, $O'G=\sqrt{2}x$,

$\therefore HO'=4-\sqrt{2}x$,

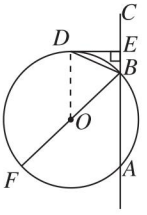
在 Rt$\triangle PHO'$中,根据勾股定理得 $PH^2+HO'^2=PO'^2$,

$\therefore 4+(4-\sqrt{2}x)^2=x^2$,

解得 $x_1=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $x_2=4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$(不合题意,舍去),

$\therefore \odot O'$的半径的长为 $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

10. **证明:**如图,连接 OD,



(第 10 题图)

$\because OD=OB$,

$\therefore \angle ODB=\angle OBD$,

$\because BD$ 平分 $\angle OBC$,

$\therefore \angle OBD=\angle DBE$,

$\therefore \angle ODB=\angle DBE$,

$\therefore OD/\!/AC$,

$\because DE\perp AC$,

$\therefore OD\perp DE$,

$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 DE 是 $\odot O$ 的切线.

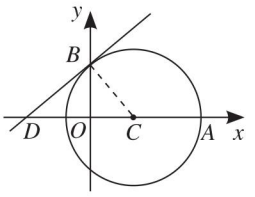
11. (1)**解:**$\because$ 点 $C(2,0)$,圆的半径为 3,

$\therefore OC=2$, $AC=3$,

$\therefore OA=OC+CA=5$,

$\therefore A(5,0)$,

如图,连接 CB,



(第 11 题图)

在 Rt $\triangle OCB$ 中,根据勾股定理得 $OB=\sqrt{CB^2-OC^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$,

$\therefore B(0,\sqrt{5})$;

(2)**证明:**$\because$ 点 $D\left(-\frac{5}{2},0\right)$,

$\therefore OD=\frac{5}{2}$.

$\therefore$ 在 Rt $\triangle DBO$ 中,根据勾股定理得 $DB^2=BO^2+DO^2=5+\frac{25}{4}=\frac{45}{4}$,

又$\because DC=DO+OC=\frac{9}{2}$, $CB=3$,

$\therefore$ 在$\triangle DBC$ 中, $DB^2+CB^2=\frac{45}{4}+9=\frac{81}{4}=DC^2$,

$\therefore \triangle DBC$ 是直角三角形,且 $\angle DBC=90°$,

$\therefore BC\perp DB$.

$\because BC$ 是 $\odot C$ 的半径,

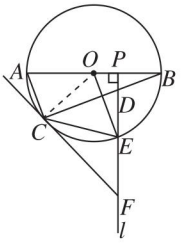
$\therefore$ 直线 BD 是 $\odot C$ 的切线.

12. (1)**证明:**如图,连接 CO,

$\because OC=OB$,

$\therefore \angle OCB=\angle ABC$.

$\because CF=DF$,



(第 12 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle DCF = \angle CDF.$

$\because \angle BDP = \angle CDF,$

$\therefore \angle DCF = \angle BDP.$

又$\because l \perp AB,$

$\therefore \angle BPD = 90°.$

$\therefore \angle BDP + \angle ABC = 90°,$

$\therefore \angle DCF + \angle OCB = 90°,$

即$\angle OCF = 90°,$

$\therefore OC \perp FC.$

又$\because OC$ 是$\odot O$ 的半径,

$\therefore FC$ 是$\odot O$ 的切线;

(2)**解**:以 O,A,C,E 为顶点的四边形是菱形,

理由如下:

$\because \triangle CFD$ 为等边三角形,

$\therefore \angle DCF = 60°,$

$\therefore \angle OCB = 90° - 60° = 30°.$

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90°,$

$\therefore \angle ACO = 90° - \angle OCB = 60°,$

又$\because OA = OC,$

$\therefore \triangle ACO$ 是等边三角形,

$\therefore AO = AC = OE,$

$\because OE /\!/ AC,$

$\therefore$ 四边形 $OACE$ 是平行四边形.

又$\because AO = AC,$

$\therefore$ 四边形 $OACE$ 是菱形.

13. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ADCH$ 是圆内接四边形,

$\therefore \angle ADC + \angle AHC = 180°,$

又$\because \angle AHC + \angle AHB = 180°,$

$\therefore \angle ADC = \angle AHB,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

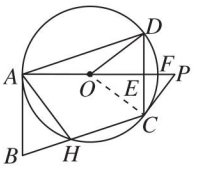
$\therefore \angle ADC = \angle B,$

$\therefore \angle AHB = \angle B,$

$\therefore AB = AH,$

$\therefore \triangle ABH$ 是等腰三角形;

(2)**证明**:如图,连接 $OC,$



(第13题图)

$\because$ 边 AB 与$\odot O$ 相切于点 $A,$

$\therefore BA \perp AF,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB /\!/ CD,$

$\therefore CD \perp AF,\therefore \angle OEC = 90°,$

又$\because AF$ 经过圆心 $O,$

$\therefore \overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{CF},$

$\therefore \angle COF = \angle DOF = 2\angle DAF,$

又$\because \angle PCD = 2\angle DAF,$

$\therefore \angle COF = \angle PCD,$

$\because \angle COF + \angle OCE = 90°,$

$\therefore \angle PCD + \angle OCE = 90°,$

即$\angle OCP = 90°,$又$\because OC$ 是$\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 PC 是$\odot O$ 的切线;

(3)**解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore DC = AB = 2,$

$\because FA \perp CD,$

$\therefore DE = CE = 1,$

又$\because \angle AED = 90°, AD = \sqrt{17},$

$\therefore AE = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 1^2} = \sqrt{17-1} = \sqrt{16} = 4,$

设$\odot O$ 的半径为 $r,$则 $OA = OD = r, OE = AE - OA = 4 - r,$

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中,$OD^2 = OE^2 + DE^2,$

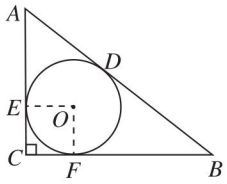
$\therefore r^2 = (4-r)^2 + 1^2,$

解得 $r = \dfrac{17}{8},$

即$\odot O$ 的半径是$\dfrac{17}{8}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解:(1)如图,连接 OE、OF,



(第14题图)

设⊙O 的半径为 r,

在 Rt△ABC 中,$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

∵ ⊙O 是 Rt△ABC 的内切圆,

∴ $OE\perp AC$,$OF\perp BC$,$CE=CF$,$AE=AD$,$BF=BD$,

易得四边形 $CFOE$ 为正方形,

∴ $CE=CF=OE=r$,

∴ $AD=AE=3-r$,$BD=BF=4-r$,

∴ $3-r+4-r=5$,解得 $r=1$,

即△ABC 的内切圆半径为 1;

(2)设⊙O 的半径为 r,

由(1)得 $AE=AD=5$,$BF=BD=7$,

∴ $AC=5+r$,$BC=7+r$,

在 Rt△ABC 中,$(5+r)^2+(7+r)^2=(5+7)^2$,

解得 $r=\sqrt{71}-6$ 或 $r=-\sqrt{71}-6$(舍去),

∴ $AC=\sqrt{71}-6+5=\sqrt{71}-1$,$BC=\sqrt{71}-6+7=\sqrt{71}+1$,

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(\sqrt{71}-1)(\sqrt{71}+1)=35$;

(3)mn **点拨:**设⊙O 的半径为 r,

由(1)得 $AE=AD=m$,$BF=BD=n$,

∴ $AC=m+r$,$BC=n+r$,

在 Rt△ABC 中,$(m+r)^2+(n+r)^2=(m+n)^2$,解得 $r=\frac{-m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{2}$ 或 $r=\frac{-m-n-\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{2}$(舍去),

∴ $AC=\frac{1}{2}(m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn})$,

$BC=\frac{1}{2}(-m+n+\sqrt{m^2+n^2+6mn})$,

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn})\times\frac{1}{2}(-m+n+\sqrt{m^2+n^2+6mn})=\frac{1}{8}[(\sqrt{m^2+n^2+6mn})^2-(m-n)^2]=mn$.

2.6 正多边形与圆

【变式训练】

1. C **点拨:**∵ 五边形 $ABCDE$ 是⊙O 的内接正五边形,

∴ $AB=AE$,$\angle BAE=\frac{(5-2)\times180°}{5}=108°$,

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AE}$,

∵ AF 是⊙O 的直径,

∴ $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{EF}$,

∴ $\angle BAF=\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAE=54°$,

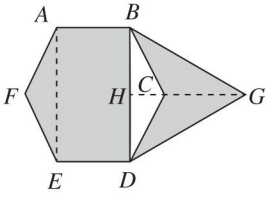
∴ $\angle BDF=\angle BAF=54°$.

2. C **点拨:**如图,连接 GC 并延长交 BD 于点 H,连接 AE,易知 GH 垂直平分 BD,

在正六边形 $ABCDEF$ 中,

可得 $AB=BC=CD=DE=EF=AF$,

$\angle F=\angle FAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEF=120°$,



(第2题图)

∴ $\angle CBD=\angle CDB=30°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ △BDG 是等边三角形，

∴ $BG=DG=BD$，$\angle GBD=\angle GDB=60°$.

在△BCG 和△DCG 中，$\begin{cases}BC=DC,\\CG=CG,\\BG=DG,\end{cases}$

∴ △BCG≌△DCG.

∵ $\angle GBC=\angle GBD-\angle CBD=30°$，

∴ $\angle GBC=\angle DBC$.

在△GBC 和△DBC 中，$\begin{cases}BC=BC,\\\angle GBC=\angle DBC,\\BG=BD,\end{cases}$

∴ △GBC≌△DBC，

∴ $S_{\triangle BCG}=S_{\triangle DCG}=S_{\triangle BCD}=2$.

又易知△AFE≌△BCD，

∴ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BCD}=2$，

设 $CH=x$，易知 $CG=BC=2x$，$BH=\sqrt{3}x$，

∴ $BD=2\sqrt{3}x$.

∵ $S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}CG\cdot BH=2$，

即$\frac{1}{2}\times 2x\times\sqrt{3}x=2$，

∴ $\sqrt{3}x^2=2$.

易知四边形 $ABDE$ 为矩形，

∴ $S_{四边形ABDE}=AB\cdot BD=2x\cdot 2\sqrt{3}x=4\sqrt{3}x^2=8$.

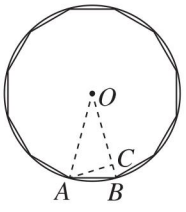
∴ 五边形 $ABDEF$ 的面积为 $2+8=10$.

3. B　**点拨：**如图，连接 OA，OB，过 A 作 $AC\perp OB$，垂足为 C，

根据题意，可知 $\angle AOB=\frac{360°}{12}=30°$，

在 Rt△AOC 中，$\angle AOB=30°$，$OA=1$，

∴ $AC=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$，



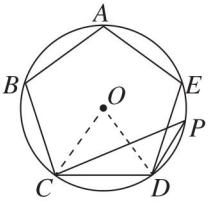
（第 3 题图）

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

∴ 圆的内接正十二边形的面积 $S=12\times\frac{1}{4}=3$.

【两年模拟兵法】

1. B　**点拨：**如图，连接 OC，OD.



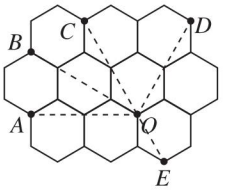
（第 1 题图）

∵ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

∴ $\angle COD=\frac{360°}{5}=72°$，

∴ $\angle CPD=\frac{1}{2}\angle COD=36°$.

2. D　**点拨：**如图，连接 OA，OB，OC，OD，OE.



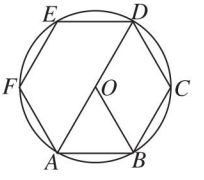
（第 2 题图）

观察点 O 分别到 A，B，C，D，E 的距离，可知只有 $OA=OC=OD$，

而三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等，

∴ 点 O 是△ACD 的外心.

3. B　**点拨：**如图，



（第 3 题图）

根据题意，可知△AOB 是等边三角形，

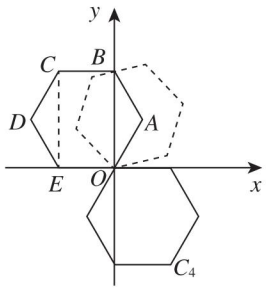
设圆内接正六边形的半径为 r，则圆内接正六边

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

形的周长 $L=6r$,圆的直径 $d=2r$,根据题意,可知 $\pi\approx\dfrac{L}{d}$,所以 $\pi\approx\dfrac{L}{d}=\dfrac{6r}{2r}=3$.

4. A **点拨:**如图,

正六边形 $OABCDE$ 绕点 O 顺时针旋转,根据题意,可知旋转 8 次点的坐标应该循环,



(第 4 题图)

$\because 2\,020\div 8=252\cdots\cdots 4$,

$\therefore C_{2\,020}$ 的坐标与 C_4 的坐标相同,

由题意,可知 $C(-1,\sqrt{3})$,点 C 与 C_4 关于原点对称,

$\therefore C_4(1,-\sqrt{3})$,

$\therefore$ 顶点 C_{2020} 的坐标是 $(1,-\sqrt{3})$.

5. 80 **点拨:**多边形 $ABCDEFGHI$ 为正九边形,

则 $\angle AOB=360^\circ\div 9=40^\circ$,

$\therefore \angle MON=2\angle AOB=80^\circ$.

6. 66° **点拨:**$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形,

$\therefore AE=AB$,$\angle EAB=\dfrac{(5-2)\times 180^\circ}{5}=108^\circ$,

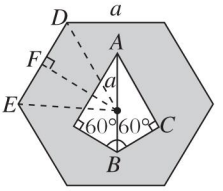
$\because$ $\triangle ABF$ 是等边三角形,

$\therefore AB=AF$,$\angle FAB=60^\circ$,

$\therefore \angle EAF=108^\circ-60^\circ=48^\circ$,$AE=AF$,

$\therefore \angle AEF=\angle AFE=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-48^\circ)=66^\circ$.

7. $\dfrac{1}{5}$ **点拨:**如图,过 O 作 $OF\perp DE$,连接 OE,OD.



(第 7 题图)

根据题意,可知 $EO=ED=a$,$EF=\dfrac{1}{2}a$,$FO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore S_{\triangle EOD}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

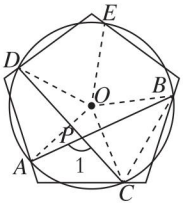
在 Rt$\triangle ABC$ 中,可知 $BC=\dfrac{1}{2}a$,$AC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore S_{正六边形}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$,$S_{空白}=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

$\therefore S_{阴影}=S_{正六边形}-S_{空白}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}a^2$,

$\therefore \dfrac{S_{空白}}{S_{阴影}}=\dfrac{1}{5}$.

8. 108° **点拨:**如图,设 AB 与 CD 交于点 P,连接 OA、OB、OC、OD、OE、BC,



(第 8 题图)

$\because$ 正五边形的中心与$\odot O$ 的圆心重合,

$\therefore$ 组合图形是轴对称图形,则 A、C、B、E、D 是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\odot O$ 的五等分点，

$\therefore \angle AOC = \angle COB = \angle BOE = \angle EOD = \angle AOD = \frac{360°}{5} = 72°$，

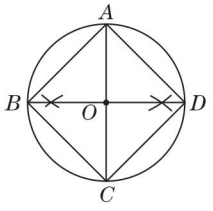
$\because \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \times 72° = 36°$，

$\angle BOD = \angle BOE + \angle EOD = 72° + 72° = 144°$，

$\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2} \times 144° = 72°$，

$\therefore \angle 1 = \angle PBC + \angle BCP = 36° + 72° = 108°$.

9. **解**：如图所示，四边形 $ABCD$ 即为所求.

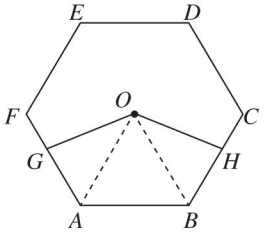


（第 9 题图）

10. （1）**解**：$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore \angle FAB = \frac{(6-2) \times 180°}{6} = 120°$；

（2）**证明**：如图，连接 OA、OB，



（第 10 题图）

$\because OA = OB$，

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$，

$\because \angle FAB = \angle CBA$，

$\therefore \angle OAG = \angle OBH$，

在 $\triangle AOG$ 和 $\triangle BOH$ 中，

$$\begin{cases} AG = BH, \\ \angle OAG = \angle OBH, \\ OA = OB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOG \cong \triangle BOH$.

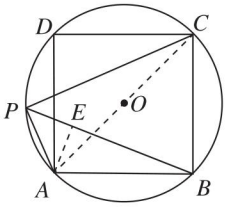
$\therefore OG = OH$.

11. **解**：如图，连接 AC，作 $AE \perp PB$ 于 E，垂足为 E，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD$，$\angle ABC = \angle D = \angle BCD = 90°$，

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的直径，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，



（第 11 题图）

$\therefore \angle APC = 90°$，$\angle ACB = 45°$，$AC = \sqrt{2}AB$，

在 Rt$\triangle APC$ 中，$AC = \sqrt{AP^2 + PC^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$，

$\therefore AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$，

$\because \angle APB = \angle ACB = 45°$，$AE \perp PB$，

$\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore PE = AE = \frac{AP}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore PB = PE + BE = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

即正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{5}$，PB 的长为 $2\sqrt{2}$.

12. （1）**证明**：$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore AB = BC = CD = DE = EF = FA$，$\angle FAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = 120°$，

根据题意，易知 $AP = DQ = t$ cm，$PF = QC = (FA - t)$ cm，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在$\triangle ABP$和$\triangle DEQ$中,$\begin{cases} AB=DE, \\ \angle PAB=\angle QDE, \\ AP=DQ, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle DEQ$,

$\therefore BP=EQ$,

同理可证$\triangle EFP\cong\triangle BCQ$,$\therefore PE=QB$,

$\therefore$四边形$PEQB$为平行四边形;

(2)**解**:如图①,连接BE、OA、BD、AE,易知BE经过点O.

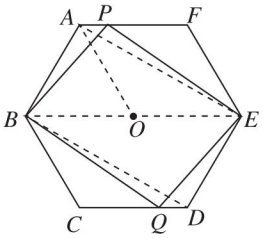
则$\angle AOB=\frac{360°}{6}=60°$,

$\because OA=OB$,

$\therefore \triangle AOB$是等边三角形,

$\therefore AB=OA=6$ cm,$BE=2OB=12$ cm,

当$t=0$ s时,点P与A重合,Q与D重合,四边形$PBQE$即为四边形$ABDE$,如图①所示:



(第12题图①)

易知$\angle EAF=\angle AEF=30°$,

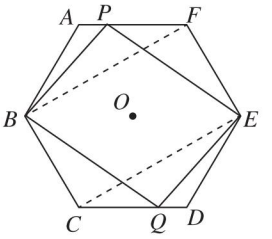
$\therefore \angle BAE=120°-30°=90°$,

$\therefore$四边形$ABDE$是矩形,即此时四边形$PBQE$是矩形.

如图②,连接BF、CE,当$t=6$ s时,点P与F重合,Q与C重合,四边形$PBQE$即为四边形$FBCE$,如图②所示:

同理可知$\angle BFE=90°$,此时四边形$PBQE$是矩形.

综上所述,$t=0$ s或6 s时,四边形$PBQE$是矩形,且两种情况下的矩形面积相等.



(第12题图②)

在Rt$\triangle BAE$中,$AE=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$(cm),

$\therefore S_{矩形PBQE}=S_{矩形ABDE}=AB\times AE=6\times6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$(cm^2);

$\because S_{正六边形ABCDEF}=6S_{\triangle AOB}=6\times\frac{1}{4}S_{矩形ABDE}=6\times\frac{1}{4}\times36\sqrt{3}=54\sqrt{3}$(cm^2),

$\therefore \frac{S_{矩形PBQE}}{S_{正六边形ABCDEF}}=\frac{2}{3}$.

即矩形$PBQE$的面积与正六边形$ABCDEF$的面积之比为$\frac{2}{3}$.

13. (1)**证明**:如图①,延长BP至E,使$PE=PC$,连接CE.$\because A$、B、P、C四点共圆,

$\therefore \angle BAC+\angle BPC=180°$.

$\because \angle BPC+\angle CPE=180°$,

$\therefore \angle BAC=\angle CPE=60°$.

$\because PE=PC$,

$\therefore \triangle PCE$是等边三角形.

又易知$\angle BCE=60°+\angle BCP$,$\angle ACP=60°+\angle BCP$,

$\therefore \angle BCE=\angle ACP$.

$\because \triangle ABC$、$\triangle ECP$都为等边三角形,

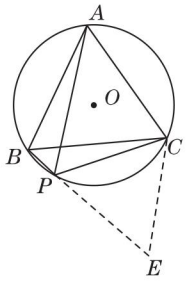
$\therefore CE=PC$,$AC=BC$,

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle APC$,

$\therefore PA=BE=PB+PE=PB+PC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**证明**:如图②,过点 B 作 $BE \perp PB$ 交 PA 于 E.



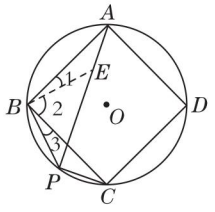
(第 13 题图①)

$\because \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 90°$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

易得 $\angle APB = 45°$,

$\therefore BP = BE$,



(第 13 题图②)

$\therefore PE = \sqrt{2}PB$.

又$\because AB = BC$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBP$,

$\therefore PC = AE$.

$\therefore PA = AE + PE = PC + \sqrt{2}PB$.

(3)**解**:$PA = PC + \sqrt{3}PB$.

证明:如图③,过点 B 作 $BM \perp AP$ 于 M,在 AP 上截取 $AQ = PC$,连接 BQ,

$\because \angle BAP = \angle BCP, AB = CB, AQ = CP$,

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle CBP$,

$\therefore BQ = BP$.

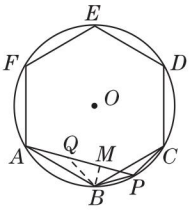
$\therefore MP = QM$.

易得 $\angle APB = 30°$,

$\therefore BM = \frac{1}{2}PB, PM = \frac{\sqrt{3}}{2}PB$,

$\therefore PQ = \sqrt{3}PB$.

$\therefore PA = PQ + AQ = \sqrt{3}PB + PC$.



(第 13 题图③)

2.7 弧长及扇形的面积

【变式训练】

1. B **点拨**:设这个扇形的圆心角为 $n°$,

根据题意,得 $\frac{n\pi \times 6}{180} = 2\pi$,

解得 $n = 60$.

2. C **点拨**:设扇形的半径为 r.

根据题意,得 $\frac{60 \cdot \pi \cdot r^2}{360} = 6\pi$,

$\therefore r^2 = 36$,

$\because r > 0$,

$\therefore r = 6$.

3. $(30\pi + 30)$ **点拨**:根据题意,得 $OC = AC = \frac{1}{2}$

$OA = 15\ \text{cm} = DB$,

$\overset{\frown}{AB}$的长:$\frac{120\pi \times 30}{180} = 20\pi(\text{cm})$,

$\overset{\frown}{CD}$的长:$\frac{120\pi \times 15}{180} = 10\pi(\text{cm})$,

$\therefore$ 扇面 $ABDC$ 的周长 $= 20\pi + 10\pi + 15 + 15 = (30\pi + 30)\text{cm}$.

4. 6π **点拨**:根据题意,可知以 AB' 为直径的半圆形的面积 = 以 AB 为直径的半圆形的面积,而阴影部分的面积 = 图形全部的面积 − 以 AB 为直径的半圆形的面积 = 以 AB' 为直径的半圆形的面积 + 扇形 ABB' 的面积 − 以 AB 为直径的半圆形的面积 = 扇形 ABB' 的面积,即阴影部分的面积是 $\frac{60\pi \times 6^2}{360} = 6\pi$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

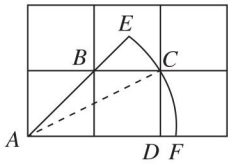
【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**∵ 分针经过 60 分钟,转过 360°,

∴ 经过 45 分钟转过 270°,

则分针的针尖经过的路程是$\frac{n\pi r}{180}=\frac{270\times\pi\times10}{180}=15\pi$(cm).

2. B **点拨:**如图,连接 AC,



(第 2 题图)

易知 $AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

∵ $\angle EAF=45°$,$AE=AF=AC=\sqrt{5}$,

∴ $S_{扇形AEF}=\frac{45\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{5}{8}\pi$.

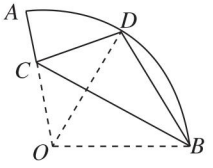
3. A **点拨:**如图,连接 OD,

由折叠的性质可知,$OB=BD$,

∴ $OD=OB=BD$,

∴ $\triangle OBD$ 为等边三角形,

∴ $\angle BOD=60°$,



(第 3 题图)

∵ $\angle AOB=100°30'=100.5°$,

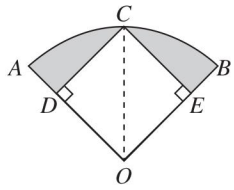
∴ $\angle AOD=100.5°-60°=40.5°$,

∴ $\overset{\frown}{AD}$的长 $=\frac{40.5\pi\times20}{180}=4.5\pi$.

4. A **点拨:**$AD=1$,$BE=2$,$CF=3$,$DG=4$,

所以四个扇形(阴影部分)的面积和 $=S_{扇形ADE}+S_{扇形BEF}+S_{扇形CFG}+S_{扇形DGH}=\frac{90\cdot\pi\cdot1^2}{360}+\frac{90\cdot\pi\cdot2^2}{360}+\frac{90\cdot\pi\cdot3^2}{360}+\frac{90\cdot\pi\cdot4^2}{360}=\frac{15}{2}\pi$.

5. B **点拨:**如图,连接 OC,



(第 5 题图)

∵ $CD\perp OA$,$CE\perp OB$,

∴ $\angle CDO=\angle CEO=\angle AOB=90°$,

∴ 四边形 $CDOE$ 是矩形,

∵ 点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,

∴ $\angle AOC=\angle BOC$,

∵ $OC=OC$,

∴ $\triangle COD\cong\triangle COE$,

∴ $OD=OE$,

∴ 矩形 $CDOE$ 是正方形,

∵ $OC=OA=\sqrt{2}$,

∴ $OE=1$,

∴ 图中阴影部分的面积为$\frac{90\cdot\pi\times2}{360}-1\times1=\frac{\pi}{2}-1$.

6. 12 **点拨:**设弧所在圆的半径是 r cm,

∵ 75°的圆心角所对的弧长是$\frac{5}{2}\pi$cm,

∴ $\frac{5}{2}\pi=\frac{75\pi\times r}{180}$,

解得 $r=6$,

则直径为 12 cm.

7. 20° **点拨:**设扇形的圆心角是 $n°$,根据扇形的面积公式得

$2\pi=\frac{n\pi\times6^2}{360}$,

解得 $n=20$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 16　**点拨:**∵ 边长为4的正方形铁丝框 $ABCD$ 变形为以 A 为圆心,AB 为半径的扇形,

∴ $\overset{\frown}{DCB}$的长度为8,

∴ 所得的扇形 ABD 的面积 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$.

9. $\left(\frac{5\pi}{2}+2\right)$　**点拨:**由题图可知,

阴影部分的周长是$\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{BE}+DE+DF$ 的长,

即阴影部分的周长是$\frac{90\pi\times 3}{180}+\frac{90\pi\times 2}{180}+(3-2)+(3-2)=\left(\frac{5\pi}{2}+2\right)(\mathrm{cm})$.

10. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

点拨:∵ $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

∴ $AB=OB$,$\angle A=\angle AOB=45°$,

∵ 将 $\triangle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转 $90°$,线段 BE 也随之旋转到 DF,

∴ $\angle EOF=\angle BOD=90°$,$\angle DOF=\angle AOB=45°$,$OF=OE$,

设 $AB=OB=a$,

∴ $OA=\sqrt{2}a$,

∵ 点 E 是斜边 OA 的中点,

∴ $OE=OF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

根据题意,可知 $\triangle DFO\backsimeq\triangle BEO$,

∴ 图中阴影部分的面积为 $S_{扇形ODB}-S_{扇形OFE}$,

又∵ 图中阴影部分的面积为$\frac{\pi}{4}$,

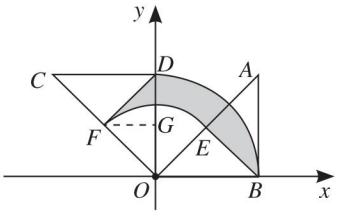
∴ $\frac{90\cdot\pi\times a^2}{360}-\frac{90\cdot\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{360}=\frac{\pi}{4}$,

解得 $a=\sqrt{2}$(负值已舍),

∴ $OA=2$,

∴ $OF=1$,

如图,过 F 作 $FG\perp OD$ 于 G,



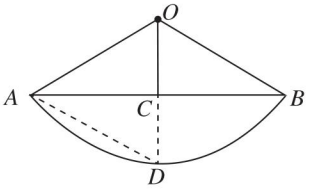
(第10题图)

则 $\triangle OFG$ 是等腰直角三角形,

∴ $OG=FG=\frac{\sqrt{2}}{2}OF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ 点 F 的坐标为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11. **解:**(1)如图,延长 OC 交$\overset{\frown}{AB}$于点 D,连接 AD,



(第11题图)

∵ $\angle AOC=60°$,$OA=OD=2$,

∴ $\triangle OAD$ 是等边三角形,

∵ $OC\perp AB$,

∴ $OC=CD=\frac{1}{2}\times 2=1$,

又∵ $OA=2$,∴ $AC=\sqrt{3}$,

∵ $OC\perp AB$ 于点 C,

∴ $AB=2AC=2\sqrt{3}$;

(2)∵ $OA=OB$,$OC\perp AB$,$\angle AOC=60°$,

∴ $\angle AOB=120°$,

∵ $OA=2$,

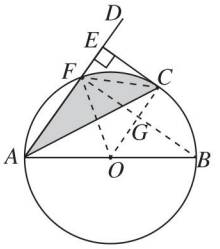
∴ $\overset{\frown}{AB}$的长是$\frac{120\pi\times 2}{180}=\frac{4\pi}{3}$.

12. (1)**证明:**如图,连接 BF,

∵ AB 是⊙O 的直径,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AFB=90°$,



(第12题图)

$\because CE\perp AD$,

$\therefore \angle AEC=\angle AFB=90°$,

$\therefore BF/\!/CE$,

连接OF,OC,设OC交BF于点G,

$\because$点C为劣弧BF的中点,

$\therefore \angle FOC=\angle BOC$,

$\because OF=OB$,$\therefore OC\perp BF$,

$\therefore \angle OGF=90°$,

$\because BF/\!/CE$,

$\therefore \angle OCE=\angle OGF=90°$,

$\therefore OC\perp CE$.

$\therefore CE$是$\odot O$的切线;

(2)**解**:如图,连接CF,

$\because OA=OC$,$\angle BAC=30°$,

$\therefore \angle BAC=\angle ACO=30°$.

$\therefore \angle BOC=60°$,

$\because$点C为劣弧BF的中点,

$\therefore \overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{BC}$,

$\therefore \angle FOC=\angle BOC=60°$,

$\because OF=OC$,

$\therefore \triangle OCF$是等边三角形,

$\therefore \angle OCF=\angle COB=60°$,

$\therefore CF/\!/AB$,

$\therefore S_{\triangle ACF}=S_{\triangle COF}$,

$\therefore$所求阴影部分的面积$=S_{扇形OFC}$,

$\because AB=4$,

$\therefore FO=OC=2$,

$\therefore S_{扇形OFC}=\dfrac{60\cdot\pi\times2^2}{360}=\dfrac{2}{3}\pi$,

即阴影部分的面积为$\dfrac{2}{3}\pi$.

13. (1)**证明**:$\because \angle AOC=\angle BOD$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\because$点B恰好为$\overset{\frown}{DE}$的中点,

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{EB}$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EB}$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{EB}+\overset{\frown}{CE}$,

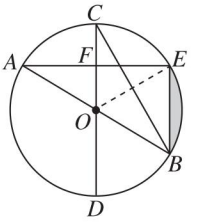
$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}$,

$\therefore AE=BC$;

(2)**解**:如图,连接OE,

$\because AB$为$\odot O$的直径,

$\therefore \angle AEB=90°$.



(第13题图)

$\because AE\perp CD$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EC}$,

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EB}$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{EB}$,

$\therefore \angle AOC=\angle COE=\angle BOE=60°$,

$\because OB=OE$,

$\therefore \triangle BOE$是等边三角形,

$\therefore BE=OB=\dfrac{1}{2}AB$,

由$AE=2\sqrt{3}$,易得$BE=2$,$AB=4$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴ ⊙O 的半径为 2.

(3)**解**:由 $\angle EOB=60°, OB=OE=2$,

易得 $S_{\triangle EOB}=\sqrt{3}$,

∴ $S_{阴影}=S_{扇形OEB}-S_{\triangle EOB}=\dfrac{60\pi\times2^2}{360}-\sqrt{3}=\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

2.8 圆锥的侧面积

【变式训练】

1. 10

2. B **点拨**:设圆锥的母线长为 R,

根据题意得 $\dfrac{120\pi R}{180}=2\pi r$,

解得 $R=3r$.

根据勾股定理得圆锥的高为 $\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{(3r)^2-r^2}=2\sqrt{2}r$.

3. **解**:底面半径为 20 cm,高为 $40\sqrt{2}$ cm,由勾股定理可知:圆锥的母线(展开扇形的半径)$R=\sqrt{(40\sqrt{2})^2+20^2}=60$(cm),

∵ 圆锥底面圆的周长(展开扇形的弧长)$l=40\pi\text{cm}=\dfrac{n\pi\times60}{180}$ cm,

∴ 扇形的圆心角为 120°,

在一矩形内画出一半径为 60 cm,圆心角为 120°的扇形,

如图,在矩形 $ABCD$ 中,$EF\perp AB$, $\angle AFG=120°$, $AD=EF=AF=FG=60$ cm,

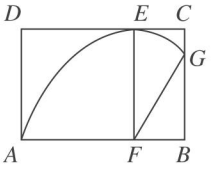
∴ $EF/\!/BC$.

∴ $\angle FGB=\angle EFG=\angle AFG-\angle AFE=120°-90°=30°$,

∴ $FB=\dfrac{1}{2}FG=30$ cm,

$AB=AF+FB=60+30=90$(cm).

∴ 长为 90 cm. 宽为 60 cm.



(第 3 题图)

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:设这个圆锥的底面圆的半径为 r,

根据题意,得 $2\pi r=\dfrac{(360-252)\times\pi\times12}{180}$,

解得 $r=3.6$,

即这个圆锥的底面圆的半径是 3.6.

2. B **点拨**:圆锥的底面圆周长为 $2\pi\times4=8\pi$(cm),即为展开图扇形的弧长,

由弧长公式得 $\dfrac{120\times\pi\times R}{180}=8\pi$($R$ 为展开图扇形的半径),

解得 $R=12$ cm,即圆锥的母线长为 12 cm.

3. C **点拨**:根据勾股定理,可知这个圆锥的母线长为 $\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$,

这个圆锥的侧面积 $=\dfrac{1}{2}\times2\pi\times10\times10\sqrt{5}=100\sqrt{5}\pi$.

4. C **点拨**:设 $\angle\alpha=n°$,圆锥底面圆周长 $=2\times8\pi=16\pi$,

根据圆锥底面圆周长是展开扇形的弧长,可知 $16\pi=\dfrac{n\pi\times15}{180}$, $n=192$.

∴ 扇形的圆心角 $\angle\alpha$ 的度数为 192°.

5. 30π **点拨**:圆锥侧面积 $=\pi rl=\pi\times5\times6=30\pi$.($l$ 为母线,r 为圆锥的底面圆半径).

6. $\dfrac{\pi}{4}$ **点拨**:根据圆锥的侧面展开扇形的面积公式:$S=\dfrac{1}{2}l\cdot R$(l 为扇形的弧长,R 为扇形的半

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

径),得圆锥的侧面积 $=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times1=\frac{\pi}{4}$(平方分米).

7. $\frac{4}{3}$ **点拨:**设圆锥底面圆的半径为 r,扇形的弧长为 $\frac{120\pi\times4}{180}=\frac{8}{3}\pi$,

根据题意,得 $2\pi r=\frac{8}{3}\pi$,

解得 $r=\frac{4}{3}$.

8. 120° **点拨:**设圆锥的底面圆半径为 r,圆锥的母线长(展开扇形的半径)为 R,所求圆心角为 $n°$,则 $R=3r$,从而可得出圆锥的底面圆周长 $=2\pi r$,扇形的弧长 $=\frac{n\pi R}{180}$,根据扇形的弧长等于圆锥的底面圆周长,得 $\frac{n\pi R}{180}=2\pi r$,而 $R=3r$,

$\therefore n=120$,即侧面展开图的圆心角是 120°.

9. **解:**∵ 两个圆锥的底面圆相同,

∴ 可设底面圆的周长为 l,

∴ 上面圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}l\cdot AB$,

下面圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}l\cdot BD$,

∵ $AB=AC=3$,$BD=CD=2$,

$\therefore\frac{\frac{1}{2}l\cdot AB}{\frac{1}{2}l\cdot BD}=\frac{3}{2}$,

即以 AB、BD 为母线的上下两个圆锥的侧面积之比的值为 $\frac{3}{2}$.

10. **解:**(1)$(-2,0)$;

(2)连接 AC、AD、CD,

⊙D 的半径长 $=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$,$AC=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$,

∵ $AD^2+CD^2=20+20=40$,$AC^2=40$,

$\therefore AD^2+CD^2=AC^2$,

$\therefore\angle ADC=90°$.

设圆锥的底面圆的半径长为 r,

则 $2\pi r=\frac{90\pi\times2\sqrt{5}}{180}$,

解得 $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

∴ 该圆锥底面圆的半径长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

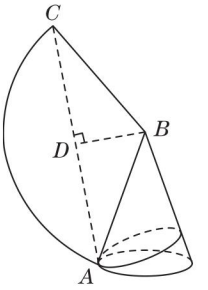
11. **解:**(1)由题意可得圆锥的高 $=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

设圆锥侧面展开图的圆心角为 $n°$,则

$2\pi\times2=\frac{n\pi\times6}{180}$,

解得 $n=120$,即 $\angle ABC=120°$.

(2)如图,连接 AC,过 B 作 $BD\perp AC$ 于 D,



(第 11 题图)

则 $\angle ABD=60°$,$AD=CD$.

$\therefore\angle BAD=30°$.

由 $AB=6$,可求得 $BD=3$,

$\therefore AD=3\sqrt{3}$,

$\therefore AC=2AD=6\sqrt{3}$,

即这根绳子的最短长度是 $6\sqrt{3}$.

素养提分整合篇

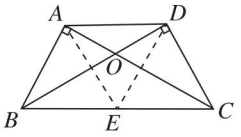
【好题必解】

1. **解:**如图,取 BC 的中点 E,连接 AE,DE.

∵ $BA\perp AC$,$BD\perp CD$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AE=\frac{1}{2}BC$,



（第1题图）

$DE=\frac{1}{2}BC$.

又$\because BE=CE=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore BE=AE=DE=CE$.

$\therefore A,B,C,D$四点共圆.

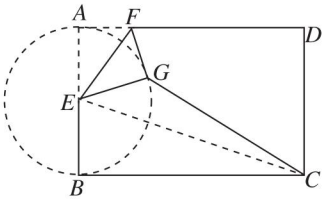
$\therefore \angle DAC=\angle DBC$.

在Rt$\triangle BCD$中,$\angle DCB=60°$,

$\therefore \angle DBC=90°-60°=30°$.

$\therefore \angle DAC=30°$.

2. A　**点拨:**如图,以点E为圆心,AE长为半径作圆,连接CE,



（第2题图）

根据折叠可知$GE=AE=\frac{1}{2}AB=2$.

$\therefore$点G在$\odot E$上.

在Rt$\triangle BCE$中,$BE=\frac{1}{2}AB=2$,$BC=6$,

$\angle B=90°$,

$\therefore CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=2\sqrt{10}$,

根据题意可知当点G在线段CE上时,GC的长取最小值,

$\therefore GC$长的最小值$=CE-GE=2\sqrt{10}-2$.

3. B　**点拨:**$\because CD=AE,BC=AC$,

$\therefore BD=CE$,

在$\triangle ABD$和$\triangle BCE$中,

$$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABD=\angle BCE,\\ BD=CE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle BCE$,

$\therefore \angle BAD=\angle CBE$,

又$\because \angle APE=\angle ABE+\angle BAD,\angle ABE+\angle CBE=\angle ABC=60°$,

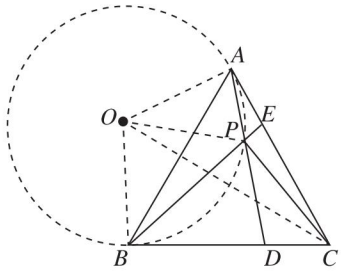
$\therefore \angle BPD=\angle APE=\angle ABC=60°$,

$\therefore \angle APB=120°$,

在$\triangle ABP$中,$AB=2\sqrt{3}$,$\angle APB=120°$,

$\therefore$点P在$\triangle ABP$的外接圆上的$\overset{\frown}{AB}$上进行运动,

如图,设$\triangle ABP$的外接圆为圆O,作出圆O. 连接OA,OB,



（第3题图）

根据题意,可得$\angle AOB=120°$,连接CO,OP,

$\because OA=OB,CA=CB,OC=OC$,

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOC$,

$\therefore \angle OAC=\angle OBC,\angle ACO=\angle BCO=30°$,

$\because \angle AOB+\angle ACB=180°$,

$\therefore \angle OAC+\angle OBC=180°$,

$\therefore \angle OAC=\angle OBC=90°$,

在Rt$\triangle AOC$中,$AC=2\sqrt{3}$,$\angle ACO=30°$,

易知$OC=4,OA=2$,

$\therefore OP=2$,

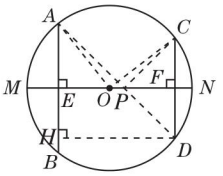
根据题意可知当点P在线段OC上时,PC的长取最小值,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

此时 $PC = OC - OP = 4 - 2 = 2$,

$\therefore$ PC 的最小值为 2.

4. **解**:如图,易知点 C 关于 MN 的对称点为点 D,连接 AD,交 MN 于点 P,连接 PC,易知此时 $PA + PC$ 的值最小且 $PA + PC = AD$. 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H,连接 OA,OC.



(第 4 题图)

易知 $AE = 4$,$CF = 3$,$EH = DF = \frac{1}{2}CD = 3$,

$HD = EF$.

由勾股定理易得 $OE = 3$,$OF = 4$,

$\therefore$ $DH = EF = 7$.

又 $AH = AE + EH = 4 + 3 = 7$,

$\therefore$ $AD = 7\sqrt{2}$.

即 $PA + PC$ 的最小值为 $7\sqrt{2}$.

点拨:本题运用了转化思想,将分散的线段转化为一条线段,然后运用勾股定理求出线段的长度.

5. **解**:修筑的这条公路不会穿过公园. 理由:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,垂足为点 D.

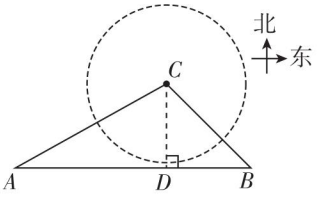
由题易知 $\angle B = 45°$,$\angle A = 30°$,

$\therefore$ $\angle BCD = 45°$,

$\therefore$ $CD = BD$.

设 $CD = x$ km,则 $BD = x$ km.

由 $\angle A = 30°$ 可知 $AC = 2x$ km,



(第 5 题图)

$\therefore$ $AD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$(km).

$\because$ $AD + BD = AB$,

$\therefore$ $\sqrt{3}x + x = 2$.

解得 $x = \sqrt{3} - 1$.

即 $CD = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$(km) > 0.7 km.

也就是说,以点 C 为圆心且以 0.7 km 为半径的圆与直线 AB 相离,即修筑的这条公路不会穿过公园.

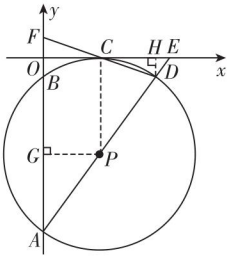
6. (1)**证明**:如图,作 $DH \perp x$ 轴于点 H.

$\because$ $F(0,1)$,$D(6,-1)$,

$\therefore$ $OF = DH = 1$,

易知 $\angle FCO = \angle DCH$,$\angle FOC = \angle DHC = 90°$,

$\therefore$ $\triangle OCF \cong \triangle HCD$,$\therefore$ $DC = FC$.



(第 6 题图)

(2)**解**:如图,连接 PC,作 $PG \perp y$ 轴于点 G,易得 $PC \perp x$ 轴. 设 $\odot P$ 的半径为 r.

由(1)易知 $OC = HC = 3$,

$\therefore$ $GP = 3$.

易知 C,P 分别为 FD,AD 的中点,

$\therefore$ CP 是 $\triangle DFA$ 的中位线,

$\therefore$ $AF = 2CP = 2r$.

$\because$ $F(0,1)$,$OG = CP = r$,

$\therefore$ $AG = AF - OF - OG = r - 1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AGP$ 中,$AP^2 = AG^2 + GP^2$,

$\therefore$ $r^2 = (r-1)^2 + 3^2$,

$\therefore$ $r = 5$,

$\therefore$ $A(0,-9)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设直线 AD 的表达式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}-9=b,\\-1=6k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\dfrac{4}{3},\\b=-9.\end{cases}$

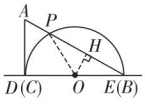
∴ 直线 AD 的表达式为 $y=\dfrac{4}{3}x-9$.

7. 解:(1)分四种情况:

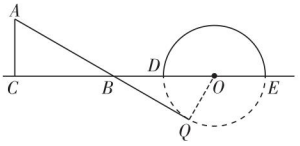


甲

乙



丙



丁

(第 7 题图)

①如图甲,$t=\dfrac{2}{2}=1$(s).

②如图乙,$t=\dfrac{8}{2}=4$(s).

③如图丙,$t=\dfrac{14}{2}=7$(s).

④如图丁,过点 O 作 $OQ\perp AB$ 所在直线于点 Q.

易知 $t=\dfrac{32}{2}=16$(s).

∵ 半圆 O 在运动的过程中,它所在的圆与 AC 所在的直线相切只有上述甲、丙两种情形;与 AB 所在的直线相切只有上述乙、丁两种情形;与 BC 所在的直线始终相交.

∴ 只有当 t 为 1 s,4 s,7 s,16 s 时,$\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切.

(2)当 $\triangle ABC$ 的一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切时,半圆 O 与直径 DE 围成的区域与 $\triangle ABC$ 三边围成的区域有重叠部分的只有图乙与图丙所示的两种情形.

①如图乙,$S_{重叠}=S_{扇形OEM}=\dfrac{1}{4}\pi\cdot6^2=9\pi(\text{cm}^2)$.

②如图丙,过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H,设半圆 O 与 AB 的另一个交点为 P,连接 OP,$S_{重叠}=S_{\triangle POB}+S_{扇形ODP}=(9\sqrt{3}+6\pi)\ \text{cm}^2$.

点拨:在半圆 O 运动过程中,半圆 O 所在的圆与 $\triangle ABC$ 的边 AC,AB 所在直线相切有多种可能,所以要分类讨论.

8. 解:由题意知 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 6π cm,$\overset{\frown}{CD}$ 的长为 4π cm.

设 $\angle AOB=n^\circ$,$OA=R$ cm,

则 $OC=(R-8)$ cm,

∴ $\dfrac{n\pi R}{180}=6\pi$,$\dfrac{n\pi(R-8)}{180}=4\pi$.

解得 $n=45$,$R=24$.

∴ 扇形 OAB 的圆心角为 45°,$OA=24$ cm,$OC=16$ cm.

∴ $S_{纸杯表}=S_{扇形OAB}-S_{扇形OCD}+S_{纸杯底}$

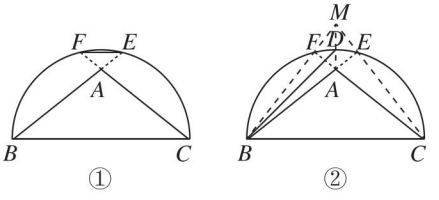
$=\dfrac{1}{2}\times6\pi\times24-\dfrac{1}{2}\times4\pi\times16+\pi\times(4\div2)^2$

$=44\pi\ (\text{cm}^2)$.

∴ 纸杯的表面积为 $44\pi\ \text{cm}^2$.

9. 解:(1)如图①,EF 为所作;

(2)如图②,$\angle DBC$ 为所作.



(第 9 题图)

点拨:(1)分别延长 BA、CA 交半圆于 E、F,连接 EF. 根据 $AB=AC$,可知 $\angle B=\angle C$,利用圆周角定理的推论得到 $\angle E=\angle C$,$\angle B=\angle F$,所以 $\angle E=\angle B=\angle C=\angle F$,则可判断 $EF/\!/BC$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)分别延长 BA、CA 交半圆于 E、F,连接 BF、CE,并分别延长 BF、CE,它们相交于 M,则连接 AM 交半圆于 D,连接 BD,可判断 MA 垂直平分 BC,从而根据圆周角定理可判断 $\angle DBC=45°$.

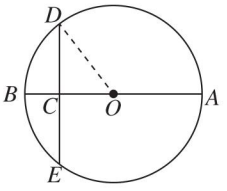
【第 2 章测试卷】

一、1. D **点拨:** $\because \odot O$ 的半径 OA 长为 1,$OB=\sqrt{2}$,

$\therefore OA<OB$,

$\therefore$ 点 B 在 $\odot O$ 外.

2. C **点拨:** 如图,连接 OD,



(第 2 题图)

$\because$ 直径 $AB=15$,

$\therefore OB=OD=7.5$,

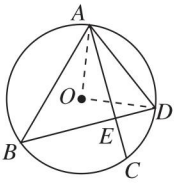
$\because OC:OB=3:5$,

$\therefore OC=4.5$,

$\therefore DC=\sqrt{DO^2-OC^2}=6$,

$\therefore DE=2DC=12$.

3. A **点拨:** 如图,连接 OA,OD,



(第 3 题图)

$\because$ 弦 $AC=BD$,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$,

$\therefore \angle ABD=\angle BAC$,

$\therefore AE=BE$.

$\because AC\perp BD$,$AE=BE$.

$\therefore \angle ABE=\angle BAE=45°$,

$\therefore \angle AOD=2\angle ABE=90°$,

$\because OA=OD$,

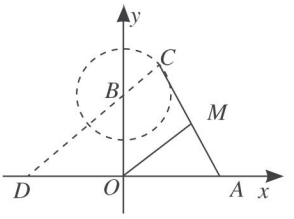
$\therefore AD=\sqrt{2}R$,

$\because AD=\sqrt{2}$,

$\therefore R=1$.

4. B **5.** B **6.** B **7.** C **8.** A

9. B **点拨:** $\because$ 点 C 为坐标平面内一点,$BC=1$,根据同圆的半径相等可知,点 C 在半径为 1 的 $\odot B$ 上,如图,取 $OD=OA=2$,连接 CD,



(第 9 题图)

$\because AM=CM$,$OD=OA$,

$\therefore OM$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$\therefore OM=\frac{1}{2}CD$.

当 OM 最大时,即 CD 最大,故 D,B,C 三点共线,即当点 C 在 DB 的延长线上时,OM 最大,

$\because OB=OD=2$,$\angle BOD=90°$,

$\therefore BD=2\sqrt{2}$,

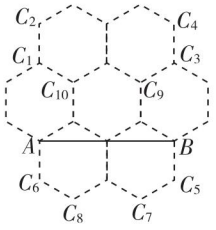
$\therefore CD=2\sqrt{2}+1$,

$\therefore OM=\frac{1}{2}CD=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$,即 OM 的最大值为 $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

10. D **点拨:** 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时,线段 AB 可能是直角边,也可能是斜边. 如图,当线段 AB 为直角边时,点 A 和点 B 都可能为直角顶点,当点 A 为直角顶点时,点 C 的位置可以是 C_1,C_2,C_6,当点 B 为直角顶点时,点 C 的位置可以是 C_3,C_4,C_5,当线段 AB 为斜边时,点 C 在以线段 AB 为直径的圆上,所以点 C 的位置可

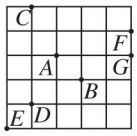
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

以是 C_7,C_8,C_9,C_{10},所以△ABC 是直角三角形的个数为 10,故选 D.



(第 10 题图)

二、11. $\sqrt{5}<r\leqslant 3$ **点拨:**如图,



(第 11 题图)

$\because AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,$AC=AD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,$AG=3$,$AF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$AE=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,

$\because \sqrt{2}<\sqrt{5}<3<\sqrt{10}<\sqrt{13}$,

$\therefore$ 以点 A 为圆心,r 为半径画圆,选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个点在圆内,

这三个点只能为 B、C、D 点,

$\therefore \sqrt{5}<r\leqslant 3$.

12. 1.6

13. $2\sqrt{3}-\pi$ **点拨:**$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ACB=90°$,

$\because \angle ABC=60°$,

$\therefore \angle CAB=30°$.

在 Rt△ABC 中,$AB=4$,$\angle CAB=30°$,则 $BC=\frac{1}{2}AB=2$,$AC=2\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$.

$\because \angle CAB=30°$,

$\therefore$ 扇形 ACD 的面积 $=\frac{30}{360}\pi\cdot AC^2=\frac{1}{12}\pi\cdot(2\sqrt{3})^2=\pi$,

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $2\sqrt{3}-\pi$.

14. $2\sqrt{2}$ **15.** $\sqrt{5}$ **16.** 3

三、17. 解:(1)补全图形如图所示.

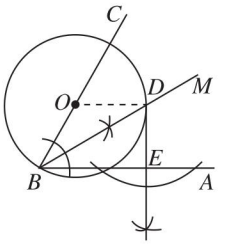
(2)直线 DE 与⊙O 相切,交点只有一个.

理由:如图,连接 OD.$\because OB=OD$,

$\therefore \angle ODB=\angle OBD$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABM=\angle CBM$,



(第 17 题图)

$\therefore \angle ODB=\angle ABD$,

$\therefore OD/\!/AB$,

又$\because DE\perp AB$,

$\therefore DE\perp OD$,

$\therefore DE$ 是⊙O 的切线,

$\therefore$ ⊙O 与 DE 只有一个交点.

18. 解:$\because$ ⊙O 的半径 $OD\perp$ 弦 AB 于点 C,$AB=8$,

$\therefore AC=BC=\frac{1}{2}AB=4$.

设⊙O 的半径为 r,则 $OC=r-2$,

在 Rt△AOC 中,

$\because AC=4$,$OC=r-2$,$OA^2=AC^2+OC^2$,

$\therefore r^2=4^2+(r-2)^2$,

解得 $r=5$.$\therefore AE=2r=10$.

连接 BE.

$\because AE$ 是⊙O 的直径,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ABE = 90°$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中,

$\because AE = 10, AB = 8$,

$\therefore BE = \sqrt{AE^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

在 $Rt\triangle BCE$ 中,$\because BE = 6, BC = 4$,

$\therefore EC = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.

19. (1)**证明:**由题意可知图形 G 为过 A, B, C 三点的圆,作出图形如图所示.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$.

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore AD = CD$.

(2)**解:**$\because DF \perp BC$,

$\therefore \angle DFC = \angle CFM = 90°$.

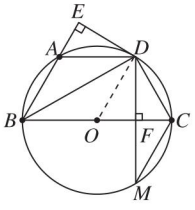
又$\because CD = AD = CM, CF = CF$,

$\therefore Rt\triangle CDF \cong Rt\triangle CMF$.

$\therefore DF = MF$.

$\therefore BC$ 为 $\odot O$ 的直径.

如图,连接 OD.



(第 19 题图)

$\because \angle COD = 2\angle CBD, \angle ABC = 2\angle CBD$,

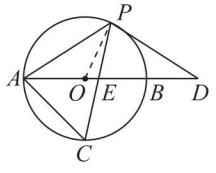
$\therefore \angle ABC = \angle COD$. $\therefore OD /\!/ BE$.

$\because DE \perp BA, \therefore OD \perp DE$.

$\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.

即直线 DE 与图形 G 的公共点个数为 1.

20. (1)**证明:**如图①,连接 OP.



(第 20 题图①)

$\because \angle ACP = 60°, \therefore \angle AOP = 120°$.

$\because OA = OP, \therefore \angle PAO = \angle APO = 30°$.

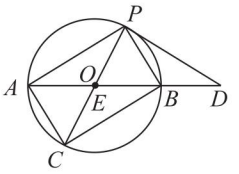
$\because PA = PD, \therefore \angle D = \angle PAD = 30°$.

$\therefore \angle APD = 180° - \angle PAD - \angle D = 120°$.

$\therefore \angle OPD = \angle APD - \angle APO = 90°$,即 $PD \perp OP$.

$\therefore PD$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2)**解:**①4 **点拨:**如图②,



(第 20 题图②)

由四边形 $APBC$ 是矩形,

可知 $\angle ACB = \angle APB = \angle PAC = \angle PBC = 90°$.

所以 PC 是 $\odot O$ 的直径,

可知点 O 与点 E 重合.

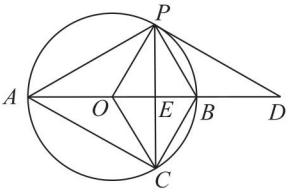
在 $\triangle APB$ 和 $\triangle DPE$ 中,

根据 $\angle PAB = \angle D, AP = DP, \angle APB = \angle DPE = 90°$,

得 $\triangle APB \cong \triangle DPE$(ASA).

所以 $DE = AB = 4$;

②3 **点拨:**如图③,



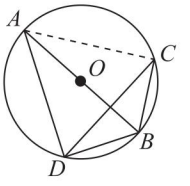
(第 20 题图③)

根据四边形 $OPBC$ 是菱形,得 PC、OB 互相垂直平分.

所以 $OE = BE = 1$. 易得 $AE = 3$.

由于 $PA = PD$,所以 $DE = AE = 3$.

21. (1)**证明:**如图①,连接 AC.



(第 21 题图①)

$\because BD = BC, \therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

又$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.

$\therefore AC = AD$.

$\because CD = AD, \therefore AC = AD = CD$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ADC = \angle DAC = 60°$.

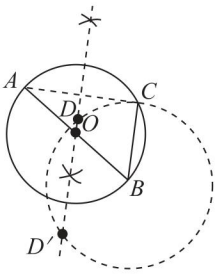
$\because \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}, \therefore \angle BAC = \angle BAD = 30°$.

$\therefore \angle BDC = \angle BAC = 30°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ADC = 2\angle BDC$;

(2)**解**:①如图②,点 D,D' 即为所作.



(第 21 题图②)

②当 $0 < m < \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 时,点 D 的个数为 0;

当 $m = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 时,点 D 的个数为 1;

当 $\frac{4\sqrt{5}}{5} < m < 4$ 时,点 D 的个数为 2.

第3章 数据的集中趋势和离散程度

3.1 平均数

【两年模拟兵法】

1. 1 **点拨**:根据题意,得

$\frac{4+3+2+x+5}{5} = 3$,解得 $x = 1$.

2. B **点拨**:去掉一个最高分 9.8,去掉一个最低分 8.8 之后,只剩下五个数据,

则该名选手的最后得分为:

$\frac{9\times3+9.5+9.8}{5} = 9.26$.

3. A **点拨**:设成绩为 8 环的人数为 x,根据题意,得

$7\times2+8x+9\times3 = 8.1\times(2+x+3)$,

解得 $x = 5$.

4. $\frac{30x+32y+40z}{x+y+z}$ **点拨**:先求出这种“什锦糖”的总价,即 $(30x+32y+40z)$ 元,再除以总数量,即 $(x+y+z)$ 千克,即可得到这种“什锦糖”的单价为 $\frac{30x+32y+40z}{x+y+z}$ 元/千克.

5. 7 **点拨**:因为原数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数是 3,

所以 $\frac{1}{5}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = 3$,

则有 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 15$,

那么新数据 $3x_1-2, 3x_2-2, 3x_3-2, 3x_4-2, 3x_5-2$ 的平均数是:

$\frac{1}{5}(3x_1-2+3x_2-2+3x_3-2+3x_4-2+3x_5-2) = \frac{1}{5}(3x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5-2-2-2-2-2) = \frac{1}{5}\times(3\times15-2\times5) = 7$.

6. 74 **点拨**:根据题意,可知甲的成绩为 $\frac{70\times5+60\times2+90\times3}{5+2+3} = 74$.

7. 100 **点拨**:将 A、B、C、D、E 五人的总分看作一个整体,先求出全班 38 名学生的总分,再求出 A、B、C、D、E 五人的总分,最后进行判断.

设 A、B、C、D、E 五人的总分为 x 分.

根据“其余人的平均分是 62 分”,

则有 $(38\times67-x)\div(38-5) = 62$,

因此 $x = 500$.

由于最高满分为 100 分,因此 A、B、C、D、E 五人的成绩都是 100 分,即 C 的成绩是 100 分.

8. **解**:与标准质量的差值的和为 $-5\times1+(-2)\times4+0\times3+1\times4+3\times5+6\times3 = 24$(克),其平均数为 $24\div20 = 1.2$(克),即这批样品的平均质量比标准质量多,多 1.2 克.

则抽样检测的总质量是

$(450+1.2)\times20 = 9\,024$(克).

9. **解**:(1)$\frac{5\times1.5+10\times1.8+15\times2.1}{30} = 1.9$(千克),

答:这次捕捞的每条鱼的平均质量是 1.9 千克;

(2)$1.9\times2\,000 = 3\,800$(千克),

$3\,800\times7.5 = 28\,500$(元),

答:小明家的收入大约有 28 500 元.

10. **解**:(1)甲的平均成绩为:$\frac{95+82+81}{3} = 86$(分),

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

乙的平均成绩为:$\frac{80+82+90}{3}=84$(分),

∵ 86 > 84,∴ 甲将被录用;

(2)甲的最后成绩为:$\frac{95\times2+82\times2+81\times6}{2+2+6}$

=84(分),

乙的最后成绩为:$\frac{80\times2+82\times2+90\times6}{2+2+6}$

=86.4(分),

∵ 84 < 86.4, ∴ 乙将被录用;

(3)公司决定由高分到低分录用8名员工,由频数分布直方图可知,不小于85分的有7人,按(2)的计算方法,乙的成绩排在前7名,故乙一定被录用. 甲是84分,低于85分,又不小于80分,且不超过85分的有10人,所以不能保证甲是第8名,故甲不一定能被录用.

3.2 中位数与众数

3.3 用计算器求平均数

【变式训练】

1. $3m+7;3k+7$ **点拨:**已知一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的平均数是 m,中位数是 k,那么 $3x_1+7$,$3x_2+7,3x_3+7,\cdots,3x_n+7$ 的中位数是$3k+7$;其平均数是 $3\times[\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)]+7=3m+7$.

2. C **点拨:**根据数学计算器按键顺序,可知求的是3、3、0、2的平均数是多少,用3、3、0、2的和除以4即可. 即$(3+3+0+2)\div4=8\div4=2$,

∴ 输出结果为2.

3. D **点拨:**根据"求30个数据的平均数时,错将其中一个数据75输入为15",可知错误的输入使30个数据的总和减少了75 − 15 = 60,

则由此求出的这组数据的平均数与实际平均数的差是:$-\frac{60}{30}=-2$.

4. B **点拨:**由题意得,$\frac{1}{4}(85+90+x+80)=x$,

解得 $x=85$.

∴ 这组数据为85分,90分,85分,80分,

∴ 中位数为85分. 故选B.

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:**这组数据的平均数是:$(21+23+25+25+26)\div5=24$;

把这组数据从小到大排列为:21,23,25,25,26,

最中间的数是25,

则中位数是25.

2. C **点拨:**根据题意,得 $x=3$,

这组数据从小到大排列为:2,3,3,4,5,6,9,

处于中间位置的数是4,

所以这组数据的中位数是4.

3. A **点拨:**根据折线统计图,可知6名学生的体育成绩(分)是:47,47,48,48,48,50,这组数据48出现的次数最多,出现了3次,则这组数据的众数是48;

把这组数据从小到大排列,最中间两个数的平均数是$(48+48)\div2=48$,则中位数是48;

这组数据的平均数是:$(47\times2+48\times3+50)\div6=48$.

4. 16岁和15岁 **点拨:**由表可知16岁出现次数最多,出现了3次,所以众数为16岁,

因为共有 $1+2+2+3+1=9$(个)数据,

所以中位数为按从小到大排列的第5个数据,即中位数为15岁.

5. 1 **点拨:**根据"从小到大排列的五个数 x,3,6,8,12"可知中位数是6,

根据"再加入一个数,这六个数的中位数与原来

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

五个数的中位数相等”，

可知加入的一个数是6，

根据“这六个数的平均数与原来五个数的平均数相等”，

可得$\frac{1}{5}(x+3+6+8+12)=\frac{1}{6}(x+3+6+6+8+12)$，

解得$x=1$.

6. 21　**点拨：**因为五个正整数从小到大排列后，其中位数是4，这组数的唯一众数是6，则还有两个数不知道，设这两个数分别是$x,y(x<y)$，

则这五个数分别是$x,y,4,6,6$，其中满足题意的x,y值为$x=1,y=3$，或$x=1,y=2$，或$x=2,y=3$.

所以这五个数的和的最大值是$2+3+4+6+6=21$.

7. **解：**(1) 10；10　**点拨：**中位数是$\frac{10+10}{2}=10$(次)，众数为10次.

(2)中位数和众数　**点拨：**中位数和众数没有改变，依然是10次，平均数发生改变，变大了.

(3)样本的平均数为

$$\frac{0\times1+5\times1+10\times4+15\times3+20\times1}{10}=11(\text{次}),$$

$11\times2\,000=22\,000$(次).

答：估计该小区居民一周内使用共享单车的总次数为22 000次.

8. **解：**(1)30；10；10

(2)这组数据的平均数为$\bar{x}=\frac{1}{30}(5\times6+10\times11+15\times8+20\times5)=12$(元).

(3)$12\times600=7\,200$(元)，

答：估计该校学生的捐款总数为7 200元.

9. **解：**(1)85；85；85；80　**点拨：**由条形统计图可得，九(1)班成绩的平均数为$(75+80+85+85+100)\div5=85$(分)，

将九(1)班的成绩(分)按照从小到大的顺序排列为：75，80，85，85，100，所以中位数为85分，

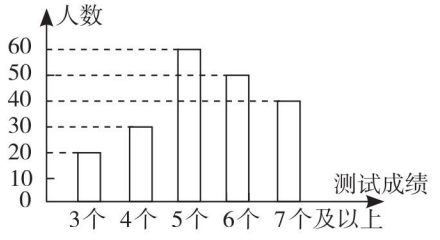
因为九(1)班的成绩中，85分出现次数最多，所以众数为85分；

将九(2)班的成绩(分)按照从小到大的顺序排列为：70，75，80，100，100，则中位数为80分，

(2)因为两个班复赛成绩的平均数相同，九(1)班的中位数高，所以九(1)班的高分数段人数多，因此复赛成绩较好.

10. **解：**(1)25

补全条形统计图如图：



(第10题图)

(2)5；5　**点拨：**由条形统计图可知，引体向上5个的学生有60人，人数最多，所以众数是5个；共200名同学，排序后第100名与第101名同学的成绩都是5个，所以中位数为$(5+5)\div2=5$(个).

(3)$\frac{50+40}{200}\times1\,800=810$(名).

答：估计该区体育中考中选报引体向上的男生能获得满分的有810名.

11. **解：**(1)平均数、中位数和众数分别是23，23，25.

点拨：平均数：$\bar{x}=\frac{1}{10}(40+30+25+25+21+18+10+16+20+25)=23$.

把这组数据按从小到大的顺序排列为：10，16，18，20，21，25，25，25，30，40，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以中位数$\frac{21+25}{2}=23$;

因为25在这组数据中出现的次数最多,所以众数为25.

(2)该班学生第一天中午吃盒饭的平均价格:

$\frac{1}{40}\times(5\times8+8\times20+10\times12)=8$(元).

(3)学生丙这10天总消费:

$232-(5\times10\times20\%+8\times10\times30\%+10\times10\times50\%)-(5\times10\times20\%+8\times10\times60\%+10\times10\times20\%)=70$(元),

设学生丙这10天消费5元盒饭的天数为x,消费10元盒饭的天数为y,

则有$5x+10y+8(10-x-y)=70$,

整理得:$3x-2y=10$,

因为x,y是非负整数,

所以$\begin{cases}x=4,\\y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$

答:学生丙这10天消费5元盒饭的天数为4天或6天.

3.4 方差

3.5 用计算器求方差

【变式训练】

1. 17;18 **点拨:**$\because x_1,x_2,x_3$的平均数是4,$\therefore 3x_1+5,3x_2+5,3x_3+5$的平均数是$3\times4+5=17$.

$\because x_1,x_2,x_3$的方差是2,$\therefore 3x_1+5,3x_2+5,3x_3+5$的方差是$3^2\times2=18$.

2. **解:**(1)85;85;80

(2)$\because$ 七年级代表队与八年级代表队的平均分相同,而七年级代表队的中位数高,

$\therefore$ 七年级代表队的决赛成绩较好.

(3)$s^2_{七年级}=\frac{(75-85)^2+(80-85)^2+2\times(85-85)^2+(100-85)^2}{5}$

$=70$,

$\because s^2_{七年级}<s^2_{八年级}$,

$\therefore$ 七年级代表队选手成绩较为稳定.

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**根据表格可知$\bar{x}_{乙}=\bar{x}_{丙}>\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{丁}$,

所以四名同学中乙、丙的平均成绩较好,

又因为$s^2_{乙}<s^2_{丙}$,

所以乙的成绩比丙的成绩更加稳定,

综上可知,乙的成绩好且稳定.

2. D **点拨:**根据题意知,这组数据为2、3、3、4,

所以这组数据的样本容量为4,中位数为$\frac{3+3}{2}=3$,众数为3,平均数为$\frac{2+3+3+4}{4}=3$.

3. D

4. B **点拨:**因为小亮的成绩和其他39人的平均分相同,都是90分,

所以该班40人的测试成绩的平均分为90分,方差变小.

5. $\frac{5}{3}$ **点拨:**根据数据1,2,3,4,5,a的众数是3,

可知$a=3$,

则这组数据为1,2,3,3,4,5,

所以这组数据的平均数为$\frac{1+2+3+3+4+5}{6}=3$,

则这组数据的方差为$\frac{1}{6}\times[(1-3)^2+(2-3)^2+2\times(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=\frac{5}{3}$.

6. $\frac{8}{7}$ **点拨:**因为2,x,2,4,2,5,3的平均数是3,

所以$\frac{1}{7}(2+x+2+4+2+5+3)=3$,

解得$x=3$.

所以$s^2=\frac{1}{7}[(2-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(2-3)^2+(5-3)^2+(3-3)^2]$

$=\frac{1}{7}(1+0+1+1+1+4+0)$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$=\frac{8}{7}$.

7. 287.1;207.49　**点拨:**利用科学计算器的说明书进行操作即可.

8. 12　**点拨:**因为一组数据1,3,5,a,8的方差是3,所以另一组数据2,6,10,2a,16的方差是$3\times2^2=12$.

9. <

10. **解:**(1)35;45;40　**点拨:**5年的总收入$=25\div12.5\%=200$(亿元),

2017年的收入$=200\times17.5\%=35$(亿元),

2019年的收入$=200\times22.5\%=45$(亿元),

这5年该县地方财政收入的平均值为$200\div5=40$(亿元).

(2)画图如图:



(第10题图)

72°;99°

(3)100

11. **解:**(1)130;10　**点拨:**乙的平均分为:$\frac{1}{5}(130+125+130+135+130)=130$(分),

乙的方差为:$\frac{1}{5}[(130-130)^2+(125-130)^2+(130-130)^2+(135-130)^2+(130-130)^2]=10$(分^2).

(2)支持甲的观点的理由:甲的数学成绩逐渐进步,更有潜力;

支持乙的观点的理由:乙的数学成绩在130分以上(含130分)的次数更多.(答案不唯一,合理即可)

12. **解:**(1)8.5;8.5;0.7;8　**点拨:**甲班的平均数为$\frac{8.5+7.5+8+8.5+10}{5}=8.5$,甲班的众数为8.5,

甲班的方差为$\frac{1}{5}[(8.5-8.5)^2+(7.5-8.5)^2+(8-8.5)^2+(8.5-8.5)^2+(10-8.5)^2]=0.7$,

乙班的中位数是8,

(2)因为0.7<1.6,所以从方差看,甲班的方差小,所以甲班的成绩比较稳定.

13. **解:**(1)24;24;24

(2)初三(1)班10名学生的优秀率为$\frac{7}{10}$,

所以初三(1)班成绩优秀的学生有$50\times\frac{7}{10}=35$(名);

初三(2)班10名学生的优秀率为$\frac{6}{10}$,

所以初三(2)班成绩优秀的学生有$50\times\frac{6}{10}=30$(名);

(3)初三(1)班10名学生的得分的方差:$s_1^2=\frac{1}{10}[(21-24)^2\times3+(24-24)^2\times4+(27-24)^2\times3]$

$=\frac{1}{10}\times(27+27)$

$=5.4$(分^2).

初三(2)班10名学生的得分的方差:$s_2{}^2=\frac{1}{10}[(21-24)^2\times3+(24-24)^2\times2+(27-24)^2\times2+(30-24)^2\times2+(15-24)^2]$

$=\frac{1}{10}\times198$

$=19.8$(分^2).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

因为 $s_1^2 < s_2^2$,所以初三(1)班的学生纠错的得分情况更稳定.

14. (1)**证明:**设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$,方差为 s^2,$x_1 - a, x_2 - a, \cdots, x_n - a$ 的平均数为 $\bar{x}'$,方差为 s'^2,

则 $\bar{x}' = \frac{1}{n}[(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_n - a)]$

$= \bar{x} - a$,

$\therefore s'^2 = \frac{1}{n}\{[(x_1 - a) - \bar{x}']^2 + [(x_2 - a) - \bar{x}']^2 + \cdots + [(x_n - a) - \bar{x}']^2\}$

$= \frac{1}{n}\{[(x_1 - a) - (\bar{x} - a)]^2 + [(x_2 - a) - (\bar{x} - a)]^2 + \cdots + [(x_n - a) - (\bar{x} - a)]^2\}$

$= \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$

$= s^2$;

(2)**证明:** $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$

$= \frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\bar{x} + n\bar{x}^2]$

$= \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2 \times \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2$

$= \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$

$= \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - \bar{x}^2$;

(3)**解:**由(1)得,将这 10 个数都减去 170 得:

$-1, 2, -7, 3, 5, -2, 0, -3, 0, 1$,

由公式计算得方差是 10.16.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. C **点拨:**这天销售的四种商品的平均单价是:$50 \times 10\% + 30 \times 15\% + 20 \times 55\% + 10 \times 20\% = 22.5$(元).

2. B **点拨:**根据题意,可得样本的平均数是 $\frac{800 \times 78 + 2\,000 \times 85 + 1\,200 \times 92}{4\,000} = 85.7$,

所以估计这 4 万个数据的平均数约为 85.7.

3. **解:**(1)根据题意,可知七年级成绩是 6 分的有:$10 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 5$(人).

所以七年级的平均分是:$\frac{1}{10}(3 + 5 \times 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 6.7$(分);

把七年级成绩按从小到大的顺序排列,位于第 5,6 两个成绩均为 6 分,所以中位数为 6 分;

根据题意,可知八年级成绩是 8 分的有:$10 - 2 - 1 - 2 - 1 = 4$(人).

把八年级成绩按从小到大的顺序排列,位于第 5,6 两个成绩分别为 7 分,8 分,这两个成绩的平均数为 7.5 分.

所以中位数为 7.5 分.

答案:6.7;6;7.5;

(2)第一条:七年级的平均分是 6.7 分,八年级的平均分是 7.1 分,八年级选手的平均分高于七年级;

第二条:七年级的中位数是 6 分,八年级的中位数为 7.5 分,八年级的中位数大于七年级的中位数,即八年级选手的成绩大部分集中在中上游.

4. **解:**(1)这组数据的平均数没有实际意义.

(2)这组数据共有 110 个数据,中位数应是从小到大排列后第 55 个和第 56 个数据的平均数,这两个数据都是 228,这组数据中 228 出现的次数最多,所以这组数据的中位数、众数都是 228.

(3)商场总经理关心的是众数. 理由:众数是 228,表明容积为 228 升的冰箱的销量最大,它能为商场带来较多的利润,因此,这种型号的冰箱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

要多进货,其他的型号则要少进货.

5. **解**:(1)正方的平均成绩:

$\bar{x}_{正}=\frac{9\times10+20\times8+5\times6+6\times4}{9+20+5+6}=7.6$(分),

反方的平均成绩:$\bar{x}_{反}=10\times40\%+8\times25\%+6\times20\%+4\times15\%=7.8$(分);

(2)由(1)可知,$\bar{x}_{正}<\bar{x}_{反}$,所以从平均数看,反方的成绩要比正方好;

根据数据从小到大排列可知,正、反两方的中位数都是8分,所以从中位数看,正、反两方是一样的;因为正方的众数是8分,反方的众数是10分,所以从众数看,反方要好,总体上看,反方要比正方好.(答案不唯一,合理即可)

6. **解**:(1)因为$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(15+16+16+14+14+15)=15$;

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{6}\times(11+15+18+17+10+19)=15$.

甲路段的中位数为15;乙路段的中位数为16.

甲路段的极差为$16-14=2$;乙路段的极差为$19-10=9$.

$s^2_{甲}=\frac{2}{3}$,$s^2_{乙}=\frac{35}{3}$.

所以相同点:两段台阶路每一级台阶高度的平均数相同. 不同点:两段台阶路每一级台阶高度的中位数、方差和极差不同.

(2)甲段台阶路走起来更舒服,因为它的每一级台阶高度的方差小.

(3)每一级台阶高度均整修为15 cm(原数据的平均数),使得方差为0,此时游客行走最方便.

7. **解**:(1)样本中平均每条鱼的质量:$\frac{20\times1.6+15\times2.0+15\times1.8}{20+15+15}=1.78$(kg);

(2)估计鱼塘中该种鱼的总质量为$1.78\times5\,000=8\,900$(kg);

(3)所求函数表达式为$y=14x$,

估计自变量x的取值范围为$0\leqslant x\leqslant8\,900$.

【第3章测试卷】

一、1. D **点拨**:这10次射击的平均成绩为

$\frac{10\times6+9\times1+8\times3}{10}$

$=\frac{60+9+24}{10}$

$=\frac{93}{10}$

$=9.3$(环),

即该军人这10次射击的平均成绩为9.3环.

2. B **点拨**:因为13出现了4次,出现的次数最多,所以这组数据的众数是13.

3. D **点拨**:平均数为:$(76+78+80+82+84)\div5=80$,

方差为:$s^2=\frac{1}{5}[(76-80)^2+(78-80)^2+(80-80)^2+(82-80)^2+(84-80)^2]=8$.

4. D

5. C **点拨**:小林同学的最终成绩为$\frac{80\times2+90\times3+70\times5}{2+3+5}=78$(分).

6. C

7. D **点拨**:因为整数a是这组数据的中位数,

所以$a=2$、3、4.

当$a=2$时,这组数据的平均数是$\frac{1}{5}(1+2+2+4+8)=3.4$,

当$a=3$时,这组数据的平均数是$\frac{1}{5}(1+2+3+4+8)=3.6$,

当$a=4$时,这组数据的平均数是$\frac{1}{5}(1+2+4+4+8)=3.8$,

所以这组数据的平均数不可能是4.

8. C **点拨**:设x_1,x_2,x_3的平均数是$\bar{x}$,则数据$2x_1+3$,$2x_2+3$,$2x_3+3$的平均数是$2\bar{x}+3$,

根据方差的计算公式可以得到:$\frac{1}{3}[(x_1-\bar{x})^2+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2]=1$,

则数据 $2x_1+3,2x_2+3,2x_3+3$ 的方差 $=\frac{1}{3}$

$[(2x_1+3-2\bar{x}-3)^2+(2x_2+3-2\bar{x}-3)^2+$

$(2x_3+3-2\bar{x}-3)^2]$

$=4\times\frac{1}{3}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2]$

$=4\times1=4$.

9. C **点拨:**由统计表知甲组的中位数为:$\frac{6+6}{2}=6$(h),

乙组学生网上学习平均一天所需时间为 8 h 的人数有:$12\times\frac{60°}{360°}=2$(人),

乙组学生网上学习平均一天所需时间为 5 h 的人数有:$12\times\frac{90°}{360°}=3$(人),

乙组学生网上学习平均一天所需时间为 7 h 的人数有:$12\times\frac{90°}{360°}=3$(人),

乙组学生网上学习平均一天所需时间为 6 h 的人数有:$12-2-3-3=4$(人),

乙组的中位数为$\frac{6+6}{2}=6$(h),

则甲组和乙组的中位数相等.

10. B **点拨:**设这个班有 n 个同学,数据分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_n$,

第 i 个同学没登记,

第一次计算时总分是$(n-1)\bar{x}$,

方差是 $s^2=\frac{1}{n-1}[(a_1-\bar{x})^2+\cdots+(a_{i-1}-\bar{x})^2+$

$(a_{i+1}-\bar{x})^2+\cdots+(a_n-\bar{x})^2]$,

第二次计算时,$\bar{x}_1=\frac{(n-1)\cdot\bar{x}+\bar{x}}{n}=\bar{x}$,

方差 $s_1^2=\frac{1}{n}[(a_1-\bar{x})^2+\cdots+(a_{i-1}-\bar{x})^2+(a_i-$

$\bar{x})^2+(a_{i+1}-\bar{x})^2+\cdots+(a_n-\bar{x})^2]=\frac{n-1}{n}s^2$,

所以 $s^2>s_1^2$.

二、11. 84

12. 甲队 **点拨:**因为 $s_{甲}^2=1.4,s_{乙}^2=18.8,s_{丙}^2=25$,

所以 $s_{甲}^2<s_{乙}^2<s_{丙}^2$,

即她应选甲队.

13. 2.4 **点拨:**根据题意,可知 $a=2$.

则其平均数为$(2-1+8+1+2)\div5=2.4$.

14. 5 **点拨:**因为 1、-1、2、3、x 的平均数是 2,

所以$\frac{1-1+2+3+x}{5}=2$,

解得 $x=5$.

15. ①②

16. (1)$\frac{4}{3}$;(2) $-2\leqslant x\leqslant4$ **点拨:**(1)根据题意,可

知$M\{(-2)^2,2^2,-2^2\}=\frac{(-2)^2+2^2-2^2}{3}=\frac{4}{3}$;

(2)因为 $\min\{3-2x,1+3x,-5\}=-5$,

所以 $\begin{cases}3-2x\geqslant-5,\\1+3x\geqslant-5,\end{cases}$

解得 $-2\leqslant x\leqslant4$,

即 x 的取值范围为 $-2\leqslant x\leqslant4$.

三、17. 解:(1)甲的平均成绩:

$\frac{70\times2+50\times3+80\times5}{2+3+5}=69$(分),

乙的平均成绩:

$\frac{50\times2+60\times3+85\times5}{2+3+5}=70.5$(分),

$\therefore 70.5>69$,

$\therefore$ 应该录取乙;

(2)甲的平均成绩:$70\times50\%+50\times30\%+80\times20\%=66$(分),

乙的平均成绩:$50\times50\%+60\times30\%+85\times20\%=60$(分),

$\therefore 66>60$,

$\therefore$ 应该录取甲.

18. 解:(1)因为甲队成绩中 8 分出现 3 次,次数最多,所以甲队成绩的众数为 8 分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为乙队成绩(分)按从小到大排列为5、7、9、9、10,

所以乙队成绩的中位数是9分,

答案:8;9;

(2)乙队成绩的平均数为$\frac{5+7+9+9+10}{5}=8$(分),

乙队成绩的方差为$\frac{1}{5}\times[(5-8)^2+(7-8)^2+(9-8)^2\times2+(10-8)^2]=3.2$;

(3)甲队成绩较为整齐,

因为$s_{甲}^2=1.6$,$s_{乙}^2=3.2$,

可知$s_{甲}^2<s_{乙}^2$,

所以甲队成绩较为整齐.

19. **解:**(1)$36\div36\%=100$(个).

答案:100

(2)$a=100\times16\%=16$.

答案:16

(3)C

(4)根据题意,可得$500\times36\%=180$(人).

答:该校九年级竞赛成绩达到90分以上(含90分)的学生约有180人.

20. **解:**(1)这个班共有男生$1+2+6+3+5+3=20$(人),共有女生$45-20=25$(人).

答案:20;25.

(2)男生的平均分为$\frac{1}{20}\times(5+6\times2+7\times6+8\times3+9\times5+10\times3)=7.9$(分),女生的众数为8分,

补全表格如下:

初二(1)班体育模拟测试成绩分析表

	平均分	方差	中位数	众数
男生	7.9	1.99	8	7
女生	7.92	1.993 6	8	8

(3)(答案不唯一)女生队表现更突出.

理由:女生队的平均分较高,表示女生队测试成绩较好;

女生队的众数较高,女生队的众数为8分,中位数也为8分,而男生队众数为7分,低于中位数8分,表示女生队的测试成绩高分较多.

第4章 等可能条件下的概率

4.1 等可能性

【两年模拟兵法】

1. C

2. D **点拨:**∵袋中白球有5个,且从袋中随机取出1个球,取出红球的可能性大,

∴红球的个数比白球的个数多,

∴红球的个数是6个或6个以上.

3. B **点拨:**从长度分别为2、4、6、7的四条线段中任选三条有如下4种情况:2、4、6;2、4、7;2、6、7;4、6、7;

能组成三角形的结果有2个(2、6、7;4、6、7),

∴能组成三角形的可能性与不能组成三角形的可能性相同.

4. 大于

5. ②①③

6. B

7. **解:**当人或车随意经过该路口时,根据绿灯60秒,绿灯持续的时间最长,遇到绿灯的可能性最大;根据黄灯4秒,黄灯持续的时间最短,遇到黄灯的可能性最小.

8. 乙

9. **解:**①指针指向红色的有3种等可能的结果;

②指针指向绿色的有1种等可能的结果;

③指针指向黄色的有2种等可能的结果;

④指针不指向黄色的有4种等可能的结果.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)可能性最大的是④,最小的是②;

(2)②<③<①<④.

10. **解:**(1)当抽到 -10,-9,10 时,乘积为 900,不管对方抽到其他怎样的三张,都会赢;

(2)结果等于 4 的可能性有 2 种:

$-1\times(-2)\times2=4$; $-1\times1\times(-4)=4$.

11. **解:**"红桃"5 张,"黑桃"2 张,"方块"1 张,"梅花"2 张.

4.2 等可能条件下的概率(一)

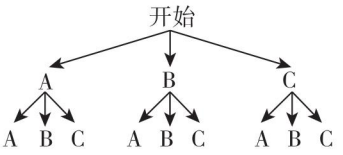
【变式训练】

1. **解:**(1)根据题意,可得:

$P(\text{选择用微信支付})=\frac{1}{3}$;

答案:$\frac{1}{3}$;

(2)根据题意画树状图如下:



共有 9 种等可能的结果,其中两人恰好选择同一种支付方式的有 3 种,

$\therefore P(\text{两人恰好选择同一种支付方式})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

即两人恰好选择同一种支付方式的概率为$\frac{1}{3}$.

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:**掷小正方体后共有 6 种等可能结果,其中朝上一面的数字出现偶数的有 2、4、6 这 3 种可能,

$\therefore P(\text{朝上一面的数字出现偶数})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2. C **点拨:**由图可知,在每个交叉口都有向左或向右两种可能,且可能性相等,

小球最终落出的点共有 E、F、G、H 四个,

所以小球从 E 出口落出的概率是$\frac{1}{4}$.

3. B **点拨:**根据菱形的判定定理,

可推出平行四边形 $ABCD$ 是菱形的有①或③,

概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

4. A **点拨:**根据题意,电流在一定时间段内正常通过电子元件的概率是 0.5,

则某一个电子元件不正常工作的概率为 0.5,

所以两个元件同时不正常工作的概率为 0.25;

所以在一定时间段内 A、B 之间电流能够正常通过的概率为 0.75.

5. $\frac{3}{8}$ **点拨:**从八卦中任取一卦,总共有 8 种等可能结果,其中这一卦中恰有 2 根—和 1 根--的有☲、☳、☶这 3 种结果,

$\therefore P(\text{恰有 2 根—和 1 根--})=\frac{3}{8}$.

6. 2 **点拨:**∵ 袋中装有 6 个黑球和 n 个白球,

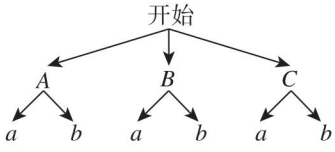
∴ 袋中一共有球$(6+n)$个,

∵ 从中任摸一个球,恰好是黑球的概率为$\frac{3}{4}$,

$\therefore\frac{6}{6+n}=\frac{3}{4}$,

解得:$n=2$.

7. B **点拨:**用 A、B、C 分别表示三把钥匙,用 a、b 表示两把不同的锁,其中 A、B 分别能打开 a、b 这两把锁,画树状图如图:



(第 7 题图)

共有 6 种等可能的结果,其中一次打开锁的结果有 2 种,

所以任意取出一把钥匙去开任意一把锁,一次

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

打开锁的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

8. $\frac{2}{3}$ **点拨:**当$a+b>0$时,反比例函数$y=\frac{a+b}{x}$的图像经过第一、三象限,列表如下:

	−3	−1	2	4
−3		(−1,−3)	(2,−3)	(4,−3)
−1	(−3,−1)		(2,−1)	(4,−1)
2	(−3,2)	(−1,2)		(4,2)
4	(−3,4)	(−1,4)	(2,4)	

4个完全相同的小球,随机摸出两个小球,总共有12种等可能的结果,其中$a+b>0$的有(−3,4);(4,−3);(−1,4);(4,−1);(4,2);(2,4);(2,−1);(−1,2)这8种,

$\because 8\div12=\frac{2}{3}$,

$\therefore$使得反比例函数$y=\frac{a+b}{x}$的图像经过第一、三象限的概率为$\frac{2}{3}$.

9. **解:**(1)根据题意,得:$\frac{4}{4+n}=\frac{1}{3}$,解得:$n=8$;

(2)根据题意,得:$\frac{8+m}{8+4+m}=\frac{3}{4}$,解得:$m=4$.

10. **解:**(1)如果将这个红球放回,再摸出一球,

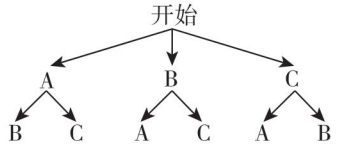
那么摸到红球的概率是$\frac{8}{7+8+5}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$;

(2)如果将这个红球不放回,再摸出一球,

那么它不是红球的概率是$\frac{7+5}{20-1}=\frac{12}{19}$.

11. **解:**(1)随机;不可能;

(2)画树状图如图:



(第11题图)

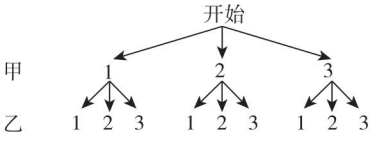
由树状图可知:

共有6种等可能的结果,

其中"客厅和楼梯灯都亮了"的有2种,

所以$P_{(客厅和楼梯灯都亮了)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

12. **解:**(1)画树状图如图:

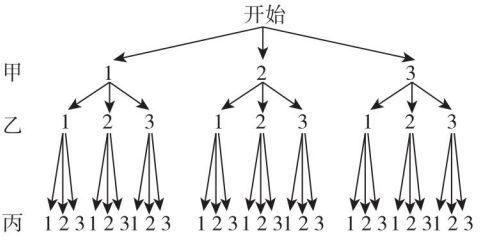


(第12(1)题图)

共有9种等可能结果,甲、乙两人从同一层楼出电梯的结果有3种,

所以甲、乙两人从同一层楼出电梯的概率为$\frac{1}{3}$;

(2)画树状图如图:



(第12(2)题图)

由树状图可知共有27种等可能结果,其中甲、乙、丙三人从同一层楼出电梯的结果有3种,

所以甲、乙、丙三人从同一层楼出电梯的概率为$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

答案:$\frac{1}{9}$.

13. D;12 **点拨:**(1)$\because$男生共有2+4+8+12+14=40(人),

$\therefore$中位数是第20、21个数据的平均数,

$\therefore$男生身高的中位数落在D组;

女生身高在B组的有$40\times(1-20\%-30\%-$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

15% −5%)=12(人).

(2)估计身高在155≤x<165范围内的学生约有$500\times\frac{12+14}{40}+480\times(30\%+15\%)=541$(人);

(3)列表如下:

	$A1$	$A2$	$B1$	$B2$	$B3$	$B4$
$A1$		×	√	√	√	√
$A2$	×		√	√	√	√
$B1$	√	√		×	×	×
$B2$	√	√	×		×	×
$B3$	√	√	×	×		×
$B4$	√	√	×	×	×	

由表可知,共有30种等可能结果,其中恰好是1人在A组、1人在B组的有16种结果,

故恰好是1人在A组、1人在B组的概率$P=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$.

14. **解:**(1)丫丫随机掷一次骰子,当骰子着地的一面的数字是3时,她跳跃后可以落回到圈A,

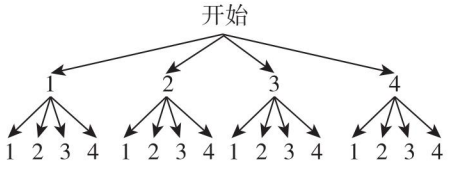
P(跳跃后落回到圈A)$=\frac{1}{4}$;

答案:$\frac{1}{4}$;

(2)这个游戏规则不公平.

理由如下:

画树状图如图:



(第14题图)

共有16种等可能的结果,其中甲甲随机投掷两次骰子,当两次骰子着地的一面的数字之和是3、6时,最终跳跃后可以落回到圈A,其中符合条件的有5种等可能的结果,

所以甲甲随机投掷两次骰子,

P(甲甲最终落回到圈A)$=\frac{5}{16}$,

因为$\frac{1}{4}<\frac{5}{16}$,

所以这个游戏规则不公平.

4.3 等可能条件下的概率(二)

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:**∵图中共有15块方砖,其中阴影方砖有5块,

∴阴影方砖在整个图中所占面积的比值为$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$,

∴最终停在阴影方砖上的概率为$\frac{1}{3}$.

2. C **点拨:**∵大正方形的面积为$2^2+1^2=5$,其中阴影部分的面积为$5-4\times\frac{1}{2}\times2\times1=1$,

∴飞镖落在阴影部分的概率是$\frac{1}{5}$.

3. B **点拨:**∵指针恰好指向白色扇形的概率为$\frac{7}{8}$,

∴黑、白两种颜色的扇形的面积比为1∶7,

∴$\angle AOB=\frac{1}{8}\times360°=45°$.

4. $\frac{5}{16}$ **点拨:**由题图可知:阴影部分的面积相当于5个小正方形的面积,阴影部分的面积占总面积的$\frac{5}{16}$,故所求概率为$\frac{5}{16}$.

5. $\frac{1}{3}$

6. $\frac{1}{3}$ **点拨:**设阴影部分的面积是x,

∵点E是AC边的中点,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{\triangle ACD}=2x$,

$\because CD=2BD$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=3x$,

则这个点取在阴影部分的概率是$\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$.

7. π **点拨:**$\because$ 圆的半径为3,

$\therefore$ 面积为9π.

$\because$ 小球落在阴影部分的概率是$\frac{1}{6}$,

$\therefore$ 扇形的面积为$\frac{9\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$.

设扇形的弧长为l,则$\frac{1}{2}l\times3=\frac{3\pi}{2}$,

解得:$l=\pi$,

$\therefore \overset{\frown}{AB}$的长为$\pi$.

8. **解:**(1)10个数中正数有1,$\frac{1}{3}$,6,8,9,共5个,

故转得正数的概率为$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$;

(2)10个数中正整数有1,6,8,9,共4个,故转得正整数的概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$;

(3)10个数中绝对值小于6的数有0,1,-2,$\frac{1}{3}$,-1,$-\frac{1}{3}$,共6个,故转得绝对值小于6的数的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$;

(4)10个数中绝对值大于等于8的数有-10,8,9,共3个,故转得绝对值大于等于8的数的概率为$\frac{3}{10}$.

9. **解:**(1)P(获得代金券)$=\frac{5}{5+7+8}=\frac{1}{4}$;

(2)选择方案二更合算.

理由:在矩形$ABCD$中,O为对角线交点,$\triangle AOB$是等边三角形,

则$\angle AOB=\angle COD=60°$,$\angle BOC=\angle AOD=120°$,

则P(指针指向区域①)$=\frac{120°}{360°}=\frac{1}{3}$,

因为$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$,

所以方案二更合算.

10. **解:**(1)$\because$ 半径为5 cm的圆的面积为

$\pi\cdot5^2=25\pi(\text{cm}^2)$,

边长为30 cm的正方形$ABCD$的面积为

$30^2=900(\text{cm}^2)$,

$\therefore P$(飞镖落在圆内)$=$

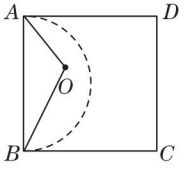
$\frac{\text{半径为5 cm的圆的面积}}{\text{边长为30 cm的正方形}ABCD\text{的面积}}=$

$\frac{25\pi}{900}=\frac{\pi}{36}$;

(2)如图,以AB为直径在正方形内画半圆,当点O落在以AB为直径的半圆内时,$\triangle OAB$为钝角三角形.

$\because S_{\text{半圆形}}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(30\div2)^2=\frac{225}{2}\pi(\text{cm}^2)$,

$\therefore P(\triangle OAB$为钝角三角形$)=\frac{\frac{225}{2}\pi}{900}=\frac{\pi}{8}$.



(第10题图)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解:**(1)由①,得$x>-2$;

由②,得$x\leqslant2$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为$-2<x\leqslant2$,

$\therefore$ 原不等式组的所有整数解为-1,0,1,2.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)列表如下:

	−1	0	1	2
−1		0	−1	−2
0	0		0	0
1	−1	0		2
2	−2	0	2	

由上表可知,共有12种等可能的结果,其中积为正数的结果有2种,∴ $P(\text{积为正数})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. $\frac{11}{16}$ **点拨:**∵ 关于 x 的一元二次方程 $(m-\frac{3}{2})x^2+2x+1=0$ 有实数解,

∴ $b^2-4ac\geqslant 0$,且 $m-\frac{3}{2}\neq 0$,

∴ $4-4(m-\frac{3}{2})\geqslant 0$,且 $m-\frac{3}{2}\neq 0$,

∴ $m\leqslant\frac{5}{2}$且 $m\neq\frac{3}{2}$.

列表如下:

$a+b=m$ (a / b)	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	−1	−0.5	0.5	1.5
0	−0.5	0	1	2
1	0.5	1	2	3
2	1.5	2	3	4

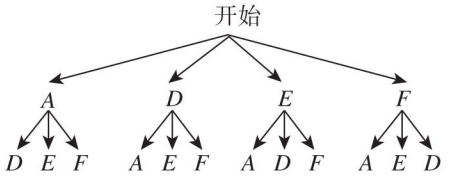
共有16种等可能的结果,其中 $m\leqslant\frac{5}{2}$且 $m\neq\frac{3}{2}$ 的有11种,

∴ m 的值使关于 x 的一元二次方程 $(m-\frac{3}{2})x^2+2x+1=0$ 有实数解的概率为 $\frac{11}{16}$.

3. **解:**(1)从 A、D、E、F 四个点中任意取一点,一共有4种可能,只有选取 D 点时,以这点及点 B、C 为顶点所画三角形是等腰三角形,

故 $P(\text{所画三角形是等腰三角形})=\frac{1}{4}$;

(2)画树状图如图:

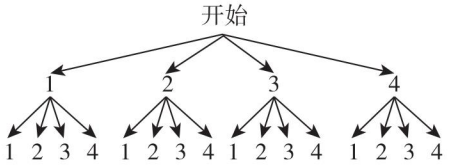


(第3题图)

从 A、D、E、F 四个点中任意取两点,一共有12种等可能结果,只有选取 A、E 或 E、A 或 D、F 或 F、D 两点时,以这两点及点 B、C 为顶点所画四边形是平行四边形,

故 $P(\text{所画四边形是平行四边形})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

4. **解:**(1)画树状图如图:



(第4题图)

(x,y) 所有可能出现的结果总数为16;

(2)这个游戏对双方公平. 理由:$x+y$ 为奇数的结果有8种,$x+y$ 为偶数的结果有8种,

∴ $P(\text{甲获胜})=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$,$P(\text{乙获胜})=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$,

∵ 甲获胜的概率等于乙获胜的概率,

∴ 这个游戏对双方公平.

5. **解:**(1)根据题意,可知三辆车按出现的先后顺序共有(上、中、下)、(上、下、中)、(中、上、下)、(中、下、上)、(下、中、上)、(下、上、中)6种不同的可能;

(2)列表如下:

顺序	A	B
上、中、下	上	下
上、下、中	上	中
中、上、下	中	上
中、下、上	中	上
下、上、中	下	上
下、中、上	下	中

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据表格可知 A 乘上等车有 2 种可能；
而 B 乘上等车有 3 种可能；
所以 B 采用的方案使自己乘上等车的可能性大.

6. 解：(1)调查部分市民的总人数：$80\div20\%=400$(人)，$m=400\times10\%=40$(人)，E 组所占的百分比为 $60\div400=15\%$，
答案：40；15%；
(2)使用华为手机的人数：$30\times\frac{120}{400}=30\times30\%=9$(万人)
答：其中使用华为手机的用户数量为 9 万人；
(3)P(使用小米手机)$=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$，
答案：$\frac{1}{4}$.

【第 4 章测试卷】

一、**1.** D

2. D　**点拨：**∵ 掷质地均匀硬币的试验，每次正面向上和向下的概率相同，
∴ 再次掷出这枚硬币，正面朝下的概率是 $\frac{1}{2}$.

3. D　**点拨：**根据同心圆的半径分别为 1，2，3，可求最小圆的面积为 π，最大圆的面积为 9π，
所以往这个图案中随机扔一颗石子，
P(这颗石子恰好落在区域 C)$=\frac{\pi}{9\pi}=\frac{1}{9}$.

4. D　**点拨：**∵ 在 10 000 张奖券中，设特等奖 1 张、一等奖 10 张、二等奖 100 张，
∴ 他中奖的概率是 $\frac{1+10+100}{10\,000}=\frac{111}{10\,000}$.

5. B　**点拨：**∵ 不等式 $2x-1\geqslant3$ 的解集为：$x\geqslant2$，
∴ x 满足不等式 $2x-1\geqslant3$ 的概率是 $\frac{2}{5}$.

6. B　**点拨：**设所有被调查的总数为 n，其中生长到 30 年和 50 年的树的数目分别为 m_1，m_2，
由题意，得
P(生长到 30 年)$=\frac{m_1}{n}=\frac{1}{2}$，
P(生长到 50 年)$=\frac{m_2}{n}=\frac{1}{5}$，
∴ $m_1=\frac{1}{2}n$，$m_2=\frac{1}{5}n$.
∴ P(生长了 30 年的这种树木生长到 50 年)$=\frac{m_2}{m_1}=\frac{\frac{1}{5}n}{\frac{1}{2}n}=\frac{2}{5}$.

7. B　**点拨：**列表如下：

	S_1	S_2	S_3
S_1	——	(S_1,S_2)	(S_1,S_3)
S_2	(S_2,S_1)	——	(S_2,S_3)
S_3	(S_3,S_1)	(S_3,S_2)	——

共有 6 种情况，必须闭合开关 S_3 灯泡才亮，
∴ P(灯泡发光)$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

8. D　**点拨：**根据“指针所落区域标注的数字大于 8”的概率是 $\frac{5}{6}$，
可得：$\frac{n-4}{n}=\frac{5}{6}$，解得：$n=24$.

9. B　**点拨：**设每个小方格的边长为 1，
则阴影部分的面积为：
$4^2-\frac{1}{2}\times(1\times4+2\times4+2\times3)=7$，
所以当蚂蚁停下来时，停在地板中阴影部分的概率是 $\frac{7}{36}$.

10. A　**点拨：**∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+(2a-4)x+a-8=0$ 有实数解，
∴ $a\neq0$ 且 $(2a-4)^2-4\cdot a\cdot(a-8)\geqslant0$，
解得：$a\geqslant-1$ 且 $a\neq0$.
分式方程 $\frac{x+a}{x-1}+\frac{2a}{1-x}=3$，
去分母得 $x+a-2a=3(x-1)$，解得 $x=\frac{3-a}{2}$.
∵ 分式方程 $\frac{x+a}{x-1}+\frac{2a}{1-x}=3$ 有正数解，
∴ $\frac{3-a}{2}>0$ 且 $\frac{3-a}{2}\neq1$，解得 $a<3$ 且 $a\neq1$，
∴ a 的取值范围为 $-1\leqslant a<3$ 且 $a\neq0$，$a\neq1$，
∴ 从 -2，0，1，2，3 中任取一个数作为 a，符合条

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

件的 a 的值是2,只有1个,

故符合条件的概率是$\frac{1}{5}$.

二、11. ④①③② **点拨:**∵ 有6杯同样型号的杯子,其中1杯白糖水,2杯矿泉水,3杯凉白开,

∴ ①取到凉白开的概率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

②取到白糖水的概率是$\frac{1}{6}$,

③取到矿泉水 的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

④没有取到矿泉水的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

∴ 按事件发生的可能性从大到小排列:④①③②.

12. $\frac{3}{7}$ **点拨:**根据题意,可知:①当 $m+1=0$,且 $m+4\neq0$ 时,$m=-1$;

②当 $m+4=1$ 时,$m=-3$;

③当 $m+4=-1$ 且 $m+1$ 是偶数时,$m=-5$,

∴ $m=-1$ 或 -3 或 -5,

∴ 使$(m+4)^{m+1}=1$ 成立的概率是$\frac{3}{7}$.

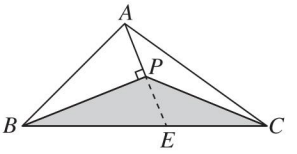
13. $\frac{1}{6}$ **点拨:**列表如下:

	红	黄	蓝	绿
红		(黄,红)	(蓝,红)	(绿,红)
黄	(红,黄)		(蓝,黄)	(绿,黄)
蓝	(红,蓝)	(黄,蓝)		(绿,蓝)
绿	(红,绿)	(黄,绿)	(蓝,绿)	

所有等可能的情况有12种,其中抓到红、绿两球的情况有2种,

∴ P(抓到红、绿两球)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

14. $\frac{1}{2}$ **点拨:**如图,延长 AP 交 BC 于 E,



(第14题图)

∵ BP 平分$\angle ABC$,

∴ $\angle ABP=\angle EBP$,

∵ $AP\perp BP$,

∴ $\angle APB=\angle EPB=90°$,

在$\triangle ABP$ 和$\triangle EBP$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABP=\angle EBP,\\ BP=BP,\\ \angle APB=\angle EPB,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle EBP$(ASA),

∴ $AP=PE$,

∴ $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle EBP}$,$S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ECP}$,

∴ $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,

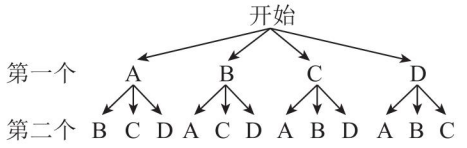
∴ 点 M 落在$\triangle BPC$ 内(包括边界)的概率为$\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$.

三、15. 解:(1)由题意,得

P(D)$=\frac{1}{4}$,

即小明一家选择D:沧浪亭游玩的概率是$\frac{1}{4}$;

(2)画树状图如下:



(第15题图)

由树状图可知,共有12种等可能的结果,其中选择B,C两个园林游玩的结果有2种,

∴ P(B,C)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$,

即选择B,C两个园林游玩的概率为$\frac{1}{6}$.

16. 解:(1)根据题意可知,顾客正好消费220元,不足300元,所以不可以转动转盘.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)顾客转一次转盘,

$P(\text{获得九折})=\frac{90°\times2}{360°}=\frac{1}{2}$,

$P(\text{获得八折})=\frac{60°\times2}{360°}=\frac{1}{3}$,

$P(\text{获得七折})=\frac{30°\times2}{360°}=\frac{1}{6}$.

(3)根据题意,得

$300\times0.9=270(\text{元})>252$ 元,

所以他没有获得九折优惠;

因为 $300\times0.8=240(\text{元})<252$ 元,

所以 $252\div0.8=315(\text{元})$,

因为 $300\times0.7=210(\text{元})<252$ 元,

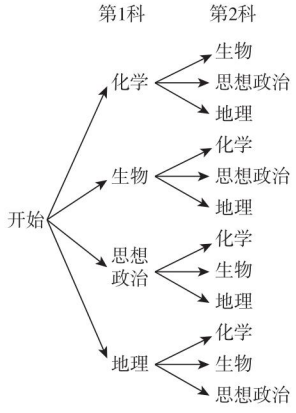
所以 $252\div0.7=360(\text{元})$,

答:他消费所购物品的原价应为315元或360元.

17. **解:**(1)在"2"中已选择了地理,从剩下的化学、生物、思想政治三科中选一科,因此 $P(\text{选择生物})=\frac{1}{3}$;

答案:$\frac{1}{3}$;

(2)画树状图如图:



(第17题图)

共有12种等可能的结果,其中选中化学、生物的有2种,

所以 $P(\text{选化学、生物})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

18. **解:**(1)顾客购买该商品使用APP支付的概率是 $60\%=\frac{3}{5}$;

答案:$\frac{3}{5}$;

(2)顾客购买该商品获得的优惠超过20%的概率为 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\times60\%=\frac{2}{5}$;

(3)$10\%\,a\times0.9+30\%\,a\times0.8+60\%\,a\times\frac{1}{3}\times0.4+60\%\,a\times\frac{1}{3}\times0.6+60\%\,a\times\frac{1}{3}\times0.8=0.69a$,

则该商品在促销优惠期间平均每件商品优惠 $a-0.69a=0.31a$(元).

期末选优拔尖测试

一、1. B **点拨:**当 $k=0$ 时,$-x+3=0$ 是一元一次方程,解得 $x=3$;

当 $k\neq0$ 时,方程 $kx^2-x+3=0$ 是一元二次方程,

根据题意可得:$b^2-4ac=1-4k\times3\geqslant0$,

解得 $k\leqslant\frac{1}{12}$.

综上可知 $k\leqslant\frac{1}{12}$.

2. B **点拨:**85分的有4人,人数最多,故众数为85分;

10个数据从大到小依次排列,处于中间位置的数为第5、6两个数,分别为90分,85分,所以中位数为87.5分.

3. D **点拨:**∵ $(x-3)(x-2)=p^2$(p 为常数)是关于 x 的方程,

∴ $x^2-5x+6-p^2=0$.

根据根与系数的关系,方程的两个根的积为 $6-p^2$.

∴ 根的符号与 p 的值有关.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. D **点拨:** $S_{正方形}=4\times4=16$,

$S_{\triangle ABC}=16-\frac{1}{2}\times4\times3-\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times2\times1$

$=5$,

P(针尖落在$\triangle ABC$内部)$=\frac{5}{16}$.

5. A **点拨:** 如图,连接OA、OB,

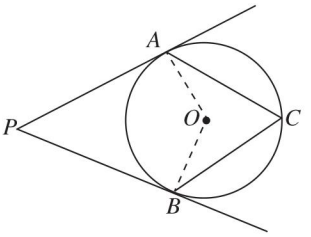
$\because PA$、PB是$\odot O$的切线,

$\therefore PA\perp OA$,$PB\perp OB$,

$\therefore \angle PAO=\angle PBO=90°$,

$\because \angle P+\angle PAO+\angle AOB+\angle PBO=360°$,

$\therefore \angle P=180°-\angle AOB$,



(第5题图)

$\because \angle C=65°$,

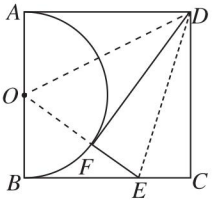
$\therefore \angle AOB=2\angle C=130°$,

$\therefore \angle P=180°-130°=50°$.

6. D **点拨:** 根据"第一季度的营业额=1、2、3月的营业额的总和",

可得:$250+250(1+x)+250(1+x)^2=900$.

7. B **点拨:** 如图,连接DO,OF,



(第7题图)

$\because$ 四边形$ABCD$是正方形,将$\triangle DCE$沿DE翻折得到$\triangle DFE$,

$\therefore DC=DA$,$DC=DF$,

$\therefore DA=DF$.

在$\triangle DAO$和$\triangle DFO$中,

$$\begin{cases}DA=DF,\\OA=OF,\\OD=OD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DAO\cong\triangle DFO$(SSS),

$\therefore \angle A=\angle DFO=90°$,

又$\because \angle DFE=\angle C=90°$,

$\therefore \angle DFO+\angle DFE=180°$,

$\therefore$ 点O、F、E三点共线.

设$CE=x$,则$OE=OF+EF=2+x$,$BE=4-x$,

$OB=2$,

$\because \angle OBE=90°$,

$\therefore$ 在Rt$\triangle OBE$中,$OB^2+BE^2=OE^2$,即

$2^2+(4-x)^2=(2+x)^2$,

解得$x=\frac{4}{3}$,

即CE的长为$\frac{4}{3}$.

8. B **点拨:** 如图,连接AC,取AC的中点H,连接EH,OH,PA.

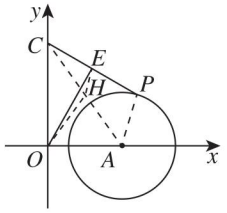
$\because CE=EP$,$CH=AH$,

$\therefore EH=\frac{1}{2}PA=1$,

$\therefore$ 点E的运动轨迹是以H为圆心,半径为1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

的圆，



（第8题图）

∵ $C(0,4)$，$A(3,0)$，

∴ $H(1.5,2)$，

∴ $OH=\sqrt{2^2+1.5^2}=2.5$，

∴ OE 的最小值 $=OH-EH=2.5-1=1.5$.

二、**9.** $x_1=2\,021$，$x_2=-2\,019$

点拨：∵ $(x-1)^2=2\,020^2$，

∴ $x-1=2\,020$ 或 $x-1=-2\,020$，

解得 $x_1=2\,021$，$x_2=-2\,019$.

10. 2.25

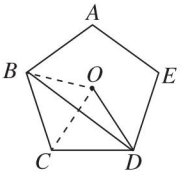
点拨：这天销售的矿泉水的平均单价是 $5\times10\%+3\times15\%+2\times55\%+1\times20\%=2.25$（元）.

11. $y=3x+4$

点拨：根据题意，得 $\dfrac{3+x}{3+5+x+y}=\dfrac{1}{4}$，

整理，得 $y=3x+4$.

12. 18　**点拨：**如图，连接 OB，OC，



（第12题图）

∵ 点 O 是正五边形 $ABCDE$ 的中心，

∴ $\angle BOC=\angle COD=360°\div5=72°$，

∴ $\angle BOD=2\times72°=144°$.

又∵ $OB=OD$，

∴ $\angle BDO=\angle OBD=\dfrac{180°-144°}{2}=18°$.

13. $x=-1$　**点拨：**因为 $x+\sqrt{x+5}=1$，

所以 $\sqrt{x+5}=1-x$，

两边平方，得

$x+5=1-2x+x^2$，

解得 $x_1=4$，$x_2=-1$，

检验：当 $x=4$ 时，$4+\sqrt{5+4}=7$，左边≠右边，

所以 $x=4$ 不是原方程的解.

当 $x=-1$ 时，$-1+2=1$，左边＝右边，

所以 $x=-1$ 是原方程的解，

所以原方程的解是 $x=-1$.

14. 4　**点拨：**∵ $S_{侧}=\pi rl$，

∴ $3\pi l=12\pi$，

∴ $l=4$.

即这个圆锥的母线长为4.

15. 2 028　**点拨：**∵ x_1，x_2 是方程 $x^2-4x-2\,020=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=4$，$x_1^2-4x_1-2\,020=0$，

∴ $x_1^2-4x_1=2\,020$，

则原式 $=x_1^2-4x_1+2x_1+2x_2$

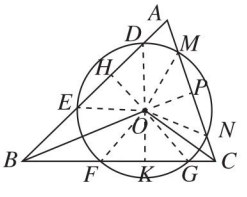
$=x_1^2-4x_1+2(x_1+x_2)$

$=2\,020+2\times4$

$=2\,020+8$

$=2\,028$.

16. 122.5　**点拨：**如图，过点 O 作 $OH\perp DE$ 于 H，$OK\perp FG$ 于 K，$OP\perp MN$ 于 P，连接 OD、OE、OF、OG、ON、OM，



（第16题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由 $DE=FG=MN$，可知 $\angle DOE=\angle FOG=\angle MON$，可证 $\triangle EOH\cong\triangle FOK\cong\triangle MOP$，

$\therefore OH=OK=OP$，

$\therefore BO$ 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$，

$\therefore \angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle A$，

$\therefore \angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)$

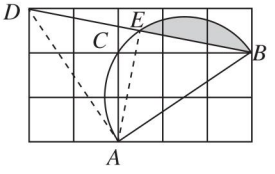
$=180°-\left(90°-\frac{1}{2}\angle A\right)$

$=90°+\frac{1}{2}\angle A$

$=90°+\frac{1}{2}\times 65°$

$=122.5°$.

17. $\frac{13\pi}{16}-\frac{13}{8}$ **点拨：**如图，连接 AD，AE，



（第17题图）

$\because AD=AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

$BD=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$，

$\therefore AD^2+AB^2=BD^2$，

$\therefore \angle BAD=90°$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABD=45°$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore AB$ 是圆弧所在圆的直径，

$\therefore \angle AEB=90°$，

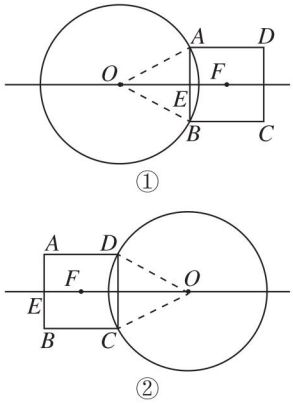
$\therefore BE\perp AE$，

$\therefore \angle ABE=\angle BAE=45°$，

$\therefore$ 弧 BE 所对的圆心角为 $90°$，

$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $=\frac{90\cdot\pi\times\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}{360}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{2}=\frac{13\pi}{16}-\frac{13}{8}$.

18. 1或$(11+6\sqrt{3})$ **点拨：**如图①，连接 OA，OB，当点 A，B 落在$\odot O$ 上时，$\odot O$ 与正方形重叠部分的面积为 $\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$，



（第18题图）

此时，运动时间为 $(2-\sqrt{3})\div(2-\sqrt{3})=1(\text{s})$；

如图②，连接 OD，OC，当点 C，D 落在$\odot O$ 上时，$\odot O$ 与正方形重叠部分的面积为 $\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$，

此时，运动时间为

$[4+2-(2-\sqrt{3})]\div(2-\sqrt{3})=11+6\sqrt{3}(\text{s})$.

三、19. **解：**(1)$\because (x+4)^2-5(x+4)=0$，

$\therefore (x+4)(x-1)=0$，

则 $x+4=0$ 或 $x-1=0$，

解得 $x_1=-4$，$x_2=1$；(方法不唯一，合理即可)

(2)$\because x^2+4x=-c$，

$\therefore x^2+4x+4=4-c$，

$\because c$ 为负数，$\therefore 4-c>0$.

则 $(x+2)^2=4-c$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x+2=\pm\sqrt{4-c}$,

$\therefore x_1=-2+\sqrt{4-c}, x_2=-2-\sqrt{4-c}$.

20. **解**:(1)24;7.6　**点拨**:七年级平均训练时间的中位数是24分钟;

八年级平均训练时间的平均数是

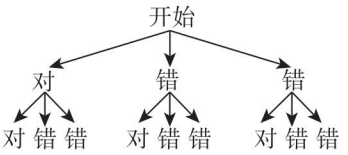
$\frac{1}{5}(23+25+27+30+30)=27$(分钟),

则八年级平均训练时间的方差是$\frac{1}{5}[(23-27)^2+(25-27)^2+(27-27)^2+2\times(30-27)^2]=7.6$(分钟^2).

(2)八年级的平均训练时间的中位数比七年级的平均训练时间的中位数大;

八年级平均训练时间的方差小于七年级平均训练时间的方差,说明八年级的平均训练时间更加稳定.

21. **解**:(1)画树状图如图:



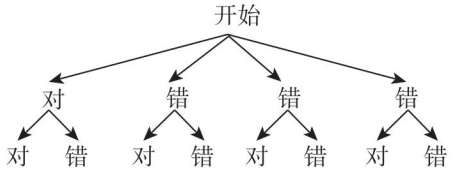
(第21(1)题图)

共有9种等可能的结果,其中小新都选对的结果有1种,

所以P(小新顺利通过第一关)$=\frac{1}{9}$;

(2)如果小新在第二题使用"求助卡",

画树状图如图:



(第21(2)题图)

共有8种等可能的结果,其中小新都选对的结果有1种,

所以P(小新顺利通过第一关)$=\frac{1}{8}$.

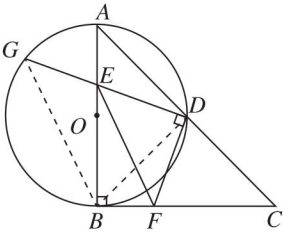
因为$\frac{1}{8}>\frac{1}{9}$,

所以小新在第二题使用"求助卡",顺利通过第一关的概率大,

所以建议小新在第二题使用"求助卡".

22. **证明**:(1)如图,连接BD.

在Rt$\triangle ABC$中,$\angle ABC=90°$,$AB=BC$,



(第22题图)

$\therefore \angle A=\angle C=45°$.

$\because AB$是$\odot O$的直径,

$\therefore \angle ADB=90°$,即$BD\perp AC$,

$\therefore BD=AD=CD$,$\angle CBD=\angle C=45°$,

$\because DF\perp DG$,$\therefore \angle FDG=90°$,

$\therefore \angle FDB+\angle BDG=90°$,

又$\because \angle EDA+\angle BDG=90°$,

$\therefore \angle EDA=\angle FDB$,

在$\triangle AED$和$\triangle BFD$中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle FBD,\\ AD=BD,\\ \angle EDA=\angle FDB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AED\cong\triangle BFD$(ASA),

$\therefore AE=BF$;

(2)如图,连接BG,

由(1)知$\triangle AED\cong\triangle BFD$,

$\therefore DE=DF$.

$\because \angle EDF=90°$.

$\therefore \triangle EDF$是等腰直角三角形,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle DEF=45°$,

$\because \angle G=\angle A=45°$.

$\therefore \angle G=\angle DEF$,

$\therefore GB/\!/EF$,

$\therefore \angle FEB=\angle EBG$,

$\because \angle EBG=\angle GDA$,

$\therefore \angle FEB=\angle GDA$.

23. (1)**证明:** $b^2-4ac=[-(k+2)]^2-4\times 2k=(k-2)^2$,

$\because (k-2)^2\geqslant 0$,即 $b^2-4ac\geqslant 0$,

$\therefore$ 无论 k 取何实数值,方程总有实数根;

(2)**解:** 根据题意,得 $b^2-4ac=(k-2)^2=0$,

$\therefore k=2$,

方程整理为 $x^2-4x+4=0$,解得 $x_1=x_2=2$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $=2+2+1=5$.

24. **解:** (1)当售价为每件 300 元时,月利润为 $(300-200)\times 100=10\ 000$(元).

设售价应定为每件 x 元,则每件的利润为($x-200$)元,月销售量为

$$100+\frac{20(300-x)}{10}=700-2x(\text{件}),$$

依题意,得$(x-200)(700-2x)=10\ 000$,

整理,得 $x^2-550x+75\ 000=0$,

解得 $x_1=250$,$x_2=300$.

$\because$ 要尽快销售完毕,

$\therefore x=250$.

答:售价应定为每件 250 元.

(2)线上购买所需费用为

$250\times 38=9\ 500$(元);

$\because$ 线下购买,买五送一,

$\therefore$ 线下超市购买只需付 32 件的费用,

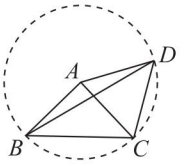
$\therefore$ 线下超市购买所需费用为

$300\times 32=9\ 600$(元).

$9\ 500<9\ 600$.

答:应选择在线上购买.

25. **解:** (1)45 **点拨:** 如图①.



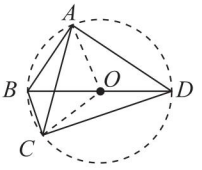
(第 25 题图①)

$\because AB=AC$,$AD=AC$,

$\therefore$ 以点 A 为圆心,AB 为半径作$\odot A$,点 B、C、D 必在$\odot A$ 上.

根据题意,得$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BAC=45°$.

(2)如图②,取 BD 的中点 O 为圆心,BD 为直径作$\odot O$,连接 AO、CO.



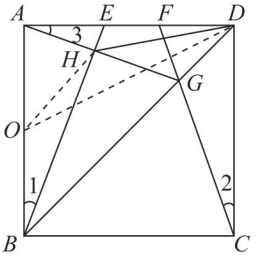
(第 25 题图②)

$\because \angle BAD=\angle BCD=90°$,$\therefore$ 点 A、B、C、D 共圆.

$\therefore \angle BDC=\angle BAC$.

$\because \angle BDC=25°$,$\therefore \angle BAC=25°$.

(3)$\sqrt{5}-1$ **点拨:** 如图③.



(第 25 题图③)

在正方形 $ABCD$ 中,$AB=AD=CD$,$\angle BAD=\angle CDA$,$\angle ADG=\angle CDG$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle DCF$ 中,$\begin{cases}AE=DF,\\ \angle BAE=\angle CDF,\\ AB=DC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DCF(\text{SAS})$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

根据题意,易得

$\triangle ADG\cong\triangle CDG(\text{SAS})$. $\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because \angle BAH+\angle 3=\angle BAD=90°$,

$\therefore \angle 1+\angle BAH=90°$,$\therefore \angle AHB=180°-90°=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

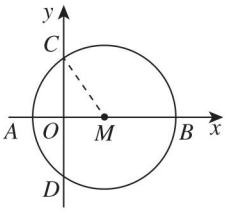
取 AB 的中点 O，连接 OH、OD. 则 $OH=AO=\frac{1}{2}AB=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OD=\sqrt{AO^2+AD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

根据三角形的三边关系，得 $OH+DH>OD$.

∴ 当 O、D、H 三点共线时，DH 的长度最小. 最小值 $=OD-OH=\sqrt{5}-1$.

26. 解：(1)如图，连接 CM，



(第26(1)题图)

在 $\mathrm{Rt}\triangle COM$ 中，$OC=4$，$OM=3$，$CM=\sqrt{OC^2+OM^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴ $\odot M$ 的半径为 5，

∴ $AM=5$，

∴ $OA=2$，

∴ $A(-2,0)$；

(2)假设存在这样的点 $P(x,y)$，根据题意，

可知$\triangle CMP$ 为等腰直角三角形，且 $CM=PM=5$，

可得 $CP=5\sqrt{2}$；

结合题意，可得方程组

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=25,\\ x^2+(y-4)^2=50,\end{cases}$$

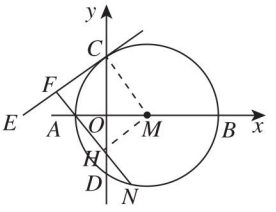
解得

$$\begin{cases}x_1=7,\\ y_1=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=-3,\end{cases}$$

即存在两个这样的点 P，

$P_1(7,3)$，$P_2(-1,-3)$；

(3) AN 的长不变，如图，连接 CM，作 $MH\perp AN$ 于 H，



(第26(3)题图)

则 $AH=HN$，

∵ CE 是 $\odot M$ 的切线，

∴ $\angle ECM=90°$，

又 $AN\perp CE$，

∴ $\angle CFH=90°$.

∵ $MH\perp AN$，

∴ 四边形 $HMCF$ 是矩形，

∴ $\angle CMH=90°$，

可知 $\angle CMO=\angle MAH=90°-\angle AMH$.

在$\triangle AMH$ 和$\triangle MCO$ 中，

$$\begin{cases}\angle CMO=\angle MAH,\\ \angle COM=\angle AHM=90°,\\ CM=AM,\end{cases}$$

∴ $\triangle AMH\cong\triangle MCO(\mathrm{AAS})$，

∴ $AH=MO=3$，

∴ $AN=AH+HN=3+3=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第1章 一元二次方程

1.1 一元二次方程

练习:

1. (1)$x(x+8)=240$ (2)$\frac{1}{9}\pi x^2=1$

2. **解:**(1)将方程化为一般形式为$x^2-x-2=0$. 二次项系数,一次项系数和常数项分别是1,-1,-2.

(2)将方程化为一般形式为$-x^2+4x+1=0$. 二次项系数,一次项系数和常数项分别是-1,4,1.

(3)将方程化为一般形式为$2x^2+3x-1=0$. 二次项系数,一次项系数和常数项分别是2,3,-1.

(4)将方程化为一般形式为$x^2+3x+2=0$. 二次项系数,一次项系数和常数项分别是1,3,2.

点拨:本题主要考查了一元二次方程的一般形式,即$ax^2+bx+c=0(a,b,c$是常数,$a\neq0)$. 其中a,b,c分别叫做二次项系数,一次项系数,常数项.

习题1.1:

1. (1)$6x^2=150$ (2)$2x\cdot x=7\ 200$

(3)$x(x+2)=323$(或$x(x-2)=323$)

(4)$14\ 400(1+x)^2=16\ 900$

2. **解:**能. 原方程可化为$x^2=25$,开方,得$x=\pm5$. 因为x取正数,所以$x=5$.

1.2 一元二次方程的解法

练习:

1. **解:**(1)因为x是16的平方根,所以$x=\pm\sqrt{16}$,即$x_1=4,x_2=-4$. (2)移项,得$x^2=0.81$. 因为x是0.81的平方根,所以$x=\pm\sqrt{0.81}$,即$x_1=0.9,x_2=-0.9$. (3)移项,得$y^2=144$. 因为y是144的平方根,所以$y=\pm\sqrt{144}$,即$y_1=12,y_2=-12$. (4)方程两边同时除以9,得$x^2=\frac{4}{9}$. 因为x是$\frac{4}{9}$的平方根,所以$x=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}$,即$x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{2}{3}$.

点拨:能利用直接开平方法解的方程的特点:左边是未知数的平方,右边是非负数,方程的根实质上是这个非负数的平方根. 注意:求得的两根分开表示.

2. **解:**(1)因为$(x-1)$是4的平方根,所以$x-1=\pm\sqrt{4}$,即$x_1=3,x_2=-1$. (2)因为$(x+2)$是3的平方根,所以$x+2=\pm\sqrt{3}$,即$x_1=-2+\sqrt{3},x_2=-2-\sqrt{3}$. (3)移项,得$(x-4)^2=25$,因为$(x-4)$是25的平方根,所以$x-4=\pm\sqrt{25}$,即$x_1=9,x_2=-1$. (4)移项,得$(2x+3)^2=5$,因为$(2x+3)$是5的平方根,所以$2x+3=\pm\sqrt{5}$,即$x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

点拨:观察方程的特征,以上四个方程是或可化为$(ax+h)^2=k(h,k$为常数,$k\geqslant0)$的形式,因此,利用直接开平方法求解较方便. 注意把$(ax+h)$看成一个整体.

练习:

1. (1)1;1 (2)16;4 (3)$\frac{25}{4};\frac{5}{2}$ (4)$\frac{9}{16};\frac{3}{4}$

2. **解:**(1)配方,得$x^2+2\cdot x+1^2=3+1^2$,即$(x+1)^2=4$. 开方,得$x+1=\pm2$,所以$x_1=1,x_2=-3$. (2)配方,得$x^2-2\cdot3\cdot x+3^2=4+3^2$,即$(x-3)^2=13$. 开方,得$x-3=\pm\sqrt{13}$,所以$x_1=3+\sqrt{13},x_2=3-\sqrt{13}$. (3)移项,得$x^2+$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$10x=-20$. 配方，得 $x^2+2\cdot5\cdot x+5^2=-20+5^2$，即 $(x+5)^2=5$. 开方，得 $x+5=\pm\sqrt{5}$. 所以 $x_1=-5+\sqrt{5}$，$x_2=-5-\sqrt{5}$. (4)移项，得 $x^2-x=1$. 配方，得 $x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. 开方，得 $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

点拨：利用配方法解一元二次方程(二次项系数为1)的一般步骤：把常数项移到方程的另一边，在方程的两边同时加上一次项系数一半的平方，左边写成完全平方的形式，右边合并同类项，利用直接开平方法，从而得解.

练习：

解：(1)两边同时除以2，得 $x^2-4x+\frac{1}{2}=0$，移项，得 $x^2-4x=-\frac{1}{2}$，配方，得 $x^2-2\cdot2x+2^2=-\frac{1}{2}+2^2$，即 $(x-2)^2=\frac{7}{2}$，开方，得 $x-2=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$，所以 $x_1=2+\frac{\sqrt{14}}{2}$，$x_2=2-\frac{\sqrt{14}}{2}$. (2)两边同时乘2，得 $x^2+4x-2=0$，移项，得 $x^2+4x=2$，配方，得 $x^2+2\cdot2x+2^2=2+2^2$，即 $(x+2)^2=6$，开方，得 $x+2=\pm\sqrt{6}$，所以 $x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$. (3)两边同时除以2，得 $x^2+\frac{3}{2}x=0$，配方，得 $x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$，开方，得 $x+\frac{3}{4}=\pm\frac{3}{4}$，所以 $x_1=0$，$x_2=-\frac{3}{2}$. (4)两边同时除以3，得 $x^2-\frac{1}{3}=2x$，移项，得 $x^2-2x=\frac{1}{3}$，配方，得 $x^2-2\cdot x+1^2=\frac{1}{3}+1^2$，即 $(x-1)^2=\frac{4}{3}$，开方，得 $x-1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $x_1=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (5)两边同时除以 -1，得 $x^2+x-\frac{1}{2}=0$，移项，得 $x^2+x=\frac{1}{2}$，配方，得 $x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，开方，得 $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (6)两边同时除以 -5，得 $x^2-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}=0$，移项，得 $x^2-\frac{2}{5}x=\frac{1}{5}$，配方，得 $x^2-\frac{2}{5}x+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{6}{25}$，开方，得 $x-\frac{1}{5}=\pm\frac{\sqrt{6}}{5}$，所以 $x_1=\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{6}}{5}$，$x_2=\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{6}}{5}$.

练习：

解：(1)因为 $a=1$，$b=-3$，$c=-4$，所以 $b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=25>0$，所以 $x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{3\pm5}{2}$，所以 $x_1=4$，$x_2=-1$. (2)因为 $a=2$，$b=1$，$c=-1$，所以 $b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-1)=9>0$，所以 $x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{-1\pm3}{4}$，所以 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-1$. (3)移项，得 $x^2-2x-3=0$，因为 $a=1$，$b=-2$，$c=-3$，所以 $b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-3)=16>0$，所以 $x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{2\pm4}{2}$，所以 $x_1=3$，$x_2=-1$. (4)把方程 $20x^2=8x+1$ 化成一般形式，得 $20x^2-8x-1=0$. 因为 $a=20$，$b=-8$，$c=-1$，所以 $b^2-4ac=(-8)^2-4\times20\times(-1)=144>0$，所以 $x=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2\times20}=\frac{8\pm12}{40}$，所以 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{10}$. (5)整理，得 $x^2-6x=6$，移项，得 $x^2-6x-6=0$，因为 $a=1$，$b=-6$，$c=-6$，所以 $b^2-4ac=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(-6)^2-4\times1\times(-6)=60>0$，所以 $x=\frac{6\pm\sqrt{60}}{2\times1}=\frac{6\pm2\sqrt{15}}{2}$，所以 $x_1=3+\sqrt{15}$，$x_2=3-\sqrt{15}$. (6)把方程 $4x(x-1)=1$ 化成一般形式，得 $4x^2-4x-1=0$. 因为 $a=4,b=-4,c=-1$，所以 $b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-1)=32>0$，所以 $x=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2\times4}=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{8}$，所以 $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

点拨：利用公式法解一元二次方程的关键是确定方程中 a,b,c 的值，注意 a,b,c 的符号.

练习：

1. 解：(1)因为 $a=1,b=3,c=-1$，所以 $b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-1)=13>0$，所以方程有两个不相等的实数根.

(2)因为 $a=1,b=-6,c=5$，所以 $b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times5=16>0$，所以方程有两个不相等的实数根. (3)因为 $a=2,b=-3,c=4$，所以 $b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times4=-23<0$，所以方程没有实数根. (4)移项，得 $x^2-2\sqrt{5}x+5=0$，因为 $a=1,b=-2\sqrt{5},c=5$，所以 $b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4\times1\times5=0$，所以方程有两个相等的实数根.

点拨：利用根的判别式 b^2-4ac 判断根的情况时，先把方程化成一元二次方程的一般形式，注意 a,b,c 的符号.

2. 解：因为 $a=1,b=-k,c=4$，所以由题意得 $b^2-4ac=(-k)^2-4\times1\times4=0$，所以 $k^2-16=0$，解得 $k_1=4,k_2=-4$，所以当 $k=\pm4$ 时，方程 $x^2-kx+4=0$ 有两个相等的实数根. (1)当 $k=4$ 时，$x^2-4x+4=0$，配方，得 $(x-2)^2=0$，解这个方程，得 $x_1=x_2=2$. (2)当 $k=-4$ 时，$x^2+4x+4=0$，配方，得 $(x+2)^2=0$，解这个方程，得 $x_1=x_2=-2$.

点拨：方程有两个相等的实数根应满足的条件是 $b^2-4ac=0$，利用这一条件计算出 k 的值，进一步求出方程的根.

练习：

1. 解：(1)原方程可变形为 $x(x-3)=0$，即 $x=0$ 或 $x-3=0$，所以 $x_1=0,x_2=3$. (2)原方程可变形为 $x(3x-1)=0$，即 $x=0$ 或 $3x-1=0$，所以 $x_1=0$，$x_2=\frac{1}{3}$.

(3)原方程可变形为 $(x-1)(2+x)=0$，即 $x-1=0$ 或 $2+x=0$，所以 $x_1=1,x_2=-2$. (4)原方程可变形为 $(2x-1)(4x-3)=0$，即 $2x-1=0$ 或 $4x-3=0$，所以 $x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{3}{4}$.

点拨：利用因式分解法解一元二次方程应符合条件：方程的一边是0，另一边能分解为两个一次因式的乘积，利用两个因式的乘积为零，则至少有一个因式为零求解.

2. 解：(1)原方程可变形为 $(x+1+3)(x+1-3)=0$，$(x+4)(x-2)=0$，即 $x+4=0$ 或 $x-2=0$，所以 $x_1=-4,x_2=2$. (2)原方程可变形为 $[(x-2)+3(x+1)][(x-2)-3(x+1)]=0$，$(4x+1)(-2x-5)=0$，即 $4x+1=0$ 或 $-2x-5=0$，所以 $x_1=-\frac{1}{4},x_2=-\frac{5}{2}$. (3)原方程可变形为 $(x-1-1)^2=0$，$(x-2)^2=0$，即 $x-2=0$，所以 $x_1=x_2=2$.

习题 1.2：

1. 解：(1)原方程可变形为 $x^2=36$，因为 x 是36的平方根，所以 $x=\pm\sqrt{36}$，所以 $x_1=6,x_2=-6$. (2)原方程可变形为 $3x^2=\frac{1}{3}$，即 $x^2=\frac{1}{9}$，因为 x 是 $\frac{1}{9}$ 的平方根，所以 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}$，所以 $x_1=\frac{1}{3},x_2=-\frac{1}{3}$. (3)原方程可变形为 $(x+4)^2=2$，因为 $(x+4)$ 是2的平方根，所以 $x+4=\pm\sqrt{2}$，所以 $x_1=-4+\sqrt{2},x_2=-4-\sqrt{2}$. (4)原方程可变形为 $(2x+1)^2=3$，因为 $(2x+1)$ 是3的平方

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根，所以 $2x+1=\pm\sqrt{3}$，所以 $x_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. (5)原方程可变形为 $(x-1)^2=\frac{5}{2}$，因为 $(x-1)$ 是 $\frac{5}{2}$ 的平方根，所以 $x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$，所以 $x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$. (6)原方程可变形为 $(x+1)^2=3$，因为 $(x+1)$ 是 3 的平方根，所以 $x+1=\pm\sqrt{3}$，所以 $x_1=-1+\sqrt{3}$，$x_2=-1-\sqrt{3}$.

点拨：利用直接开平方法解一元二次方程时，必须使方程变形为左边是完全平方式，右边是非负数的形式，再开方得方程的根.

2. 解：(1)移项，得 $x^2-7x=-12$，配方，得 $x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-12+\left(\frac{7}{2}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，开方，得 $x-\frac{7}{2}=\pm\frac{1}{2}$，所以 $x_1=4$，$x_2=3$. (2)移项，得 $x^2+6x=16$，配方，得 $x^2+6x+3^2=16+3^2$，即 $(x+3)^2=25$，开方，得 $x+3=\pm5$，所以 $x_1=2$，$x_2=-8$. (3)配方，得 $x^2-4x+2^2=2+2^2$，即 $(x-2)^2=6$，开方，得 $x-2=\pm\sqrt{6}$，所以 $x_1=2+\sqrt{6}$，$x_2=2-\sqrt{6}$. (4)移项，得 $x^2+5x=-5$，配方，得 $x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-5+\left(\frac{5}{2}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，开方，得 $x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $x_1=\frac{\sqrt{5}-5}{2}$，$x_2=-\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. (5)移项，得 $x^2-0.2x=0.03$，配方，得 $x^2-0.2x+(0.1)^2=0.03+(0.1)^2$，即 $(x-0.1)^2=0.04$，开方，得 $x-0.1=\pm0.2$，所以 $x_1=0.3$，$x_2=-0.1$. (6)移项，得 $x^2+\frac{2}{5}x=\frac{3}{5}$，配方，得 $x^2+\frac{2}{5}x+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$，开方，得 $x+\frac{1}{5}=\pm\frac{4}{5}$，所以 $x_1=\frac{3}{5}$，$x_2=-1$.

3. 解：(1)两边同时除以 4，得 $x^2-5x+\frac{21}{4}=0$，移项，得 $x^2-5x=-\frac{21}{4}$，配方，得 $x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{21}{4}+\left(\frac{5}{2}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=1$，开方，得 $x-\frac{5}{2}=\pm1$，所以 $x_1=\frac{7}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$. (2)两边同时除以 2，得 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$，移项，得 $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$，配方，得 $x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，开方，得 $x-\frac{1}{4}=\pm\frac{3}{4}$，所以 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$. (3)两边同时除以 2，得 $y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=0$，移项，得 $y^2-\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}$，配方，得 $y^2-\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$，即 $\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$，开方，得 $y-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$，所以 $y_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$y_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. (4)两边同时除以 $\frac{1}{2}$，得 $t^2+6t=2$，配方，得 $t^2+6t+3^2=2+3^2$，即 $(t+3)^2=11$，开方，得 $t+3=\pm\sqrt{11}$，所以 $t_1=-3+\sqrt{11}$，$t_2=-3-\sqrt{11}$. (5)两边同时除以 -3，得 $x^2+5=-6x$，移项，得 $x^2+6x=-5$，配方，得 $x^2+6x+3^2=-5+3^2$，即 $(x+3)^2=4$，开方，得 $x+3=\pm2$，所以 $x_1=-1$，$x_2=-5$. (6)两边同时除以 $\frac{1}{2}$，得 $x^2+\frac{2}{3}x-2=0$，移项，得 $x^2+\frac{2}{3}x=2$，配方，得 $x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=2+\left(\frac{1}{3}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{9}$，开方，得 $x+\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$，所以 $x_1=\frac{\sqrt{19}-1}{3}$，$x_2=-\frac{\sqrt{19}+1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. **解:**(1)$\because a=1,b=4,c=-5,\therefore b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-5)=36>0,\therefore x=\dfrac{-4\pm\sqrt{36}}{2\times1}=\dfrac{-4\pm6}{2},\therefore x_1=-5,x_2=1$. (2)$\because a=3,b=-1,c=-2,\therefore b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times(-2)=25>0,\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\times3}=\dfrac{1\pm5}{6},\therefore x_1=1,x_2=-\dfrac{2}{3}$. (3)$\because a=2,b=-5,c=1,\therefore b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=17>0,\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2\times2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4},\therefore x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4},x_2=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$. (4)把方程$4x(x-2)=1$化成一般形式为$4x^2-8x-1=0,\because a=4,b=-8,c=-1,\therefore b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times(-1)=80>0,\therefore x=\dfrac{8\pm\sqrt{80}}{2\times4}=\dfrac{8\pm4\sqrt{5}}{8},\therefore x_1=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2},x_2=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}$. (5)$\because a=-2,b=2\sqrt{2},c=1,\therefore b^2-4ac=(2\sqrt{2})^2-4\times(-2)\times1=16>0,\therefore x=\dfrac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{16}}{2\times(-2)}=\dfrac{-2\sqrt{2}\pm4}{-4},\therefore x_1=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2},x_2=\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$. (6)把方程$2(x-2)^2=7x-5$化成一般形式为$2x^2-15x+13=0,\because a=2,b=-15,c=13,\therefore b^2-4ac=(-15)^2-4\times2\times13=121>0,\therefore x=\dfrac{15\pm\sqrt{121}}{2\times2}=\dfrac{15\pm11}{4},\therefore x_1=\dfrac{13}{2},x_2=1$.

5. **解:**(1)原方程可变形为$x(x+6)=0$,即$x=0$或$x+6=0$,所以$x_1=0,x_2=-6$.

(2)原方程可变形为$(x-2)(3x-1)=0$,即$x-2=0$或$3x-1=0$,所以$x_1=2,x_2=\dfrac{1}{3}$.

(3)原方程可变形为$(x-1+2)(x-1-2)=0$,$(x+1)(x-3)=0$,即$x+1=0$或$x-3=0$,所以$x_1=-1,x_2=3$. (4)原方程可变形为$(3t+t-1)(3t-t+1)=0,(4t-1)(2t+1)=0$,即$4t-1=0$或$2t+1=0$,所以$t_1=\dfrac{1}{4},t_2=-\dfrac{1}{2}$. (5)原方程可变形为$\left(5x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$,即$5x-\dfrac{1}{2}=0$,所以$x_1=x_2=\dfrac{1}{10}$. (6)原方程可变形为$(x+1+4)^2=0,(x+5)^2=0$,即$x+5=0$,所以$x_1=x_2=-5$.

点拨:利用因式分解法解一元二次方程较简便,但不是所有的一元二次方程都能用此方法,这就需要同学们解题时先认真审题,再选用适当的方法求解.

6. **解:**(1)原方程可变形为$(x+1)(x-6)=0$,即$x+1=0$或$x-6=0$,所以$x_1=-1,x_2=6$. (2)原方程可变形为$(x+3)(x+9)=0$,即$x+3=0$或$x+9=0$,所以$x_1=-3,x_2=-9$. (3)原方程可变形为$(x+2)(x-5)=0$,即$x+2=0$或$x-5=0$,所以$x_1=-2,x_2=5$. (4)原方程可变形为$(x-1)(2x+7)=0$,即$x-1=0$或$2x+7=0$,所以$x_1=1,x_2=-\dfrac{7}{2}$.

点拨:利用因式分解法解一元二次方程一定要保证方程一边为零,另一边可以分解成两个一次因式的积的形式,否则就不能利用因式分解法求解.

7. **解:**(1)因为$a=1,b=-4,c=-5$,所以$b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-5)=36>0$,所以原方程有两个不相等的实数根. (2)因为$a=3,b=-1,c=1$,所以$b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times1=-11<0$,所以原方程没有实数根. (3)因为$a=5,b=4,c=-1$,所以$b^2-4ac=4^2-4\times5\times(-1)=36>0$,所以原方程有两个不相等的实数根. (4)原方程可变形为$2x^2-4x+3=0$,因为$a=2,b=-4,c=3$,所以$b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times3=-8<0$,所以原方程没有实数根.

8. **解:**根据题意,得$x^2-2x+3=3x-1$,方程可变形为$x^2-5x+4=0$,因为$a=1,b=-5,c=4$,所以

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times4=9>0$，所以 $x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{5\pm3}{2}$，所以 $x_1=1$，$x_2=4$. 所以当 x 为 1 或 4 时，y_1 与 y_2 相等.

点拨：由题意知，要使 y_1 和 y_2 相等，必须使 x^2-2x+3 与 $3x-1$ 相等，列方程整理成关于 x 的一元二次方程. 本题既可以利用公式法求解，也可以利用因式分解法求解，后一种方法更简便，同学们不妨一试.

9. 解：$\because a=1,b=-2,c=k-1$，$\therefore b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(k-1)=8-4k$，$\therefore$ 当 $8-4k=0$，即 $k=2$ 时，原方程有两个相等的实数根. 当 $8-4k>0$，即 $k<2$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

*1.3 一元二次方程的根与系数的关系

练习：

***1. 解**：(1)设方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=1,b=-4,c=1$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=1$.

(2)原方程可变形为 $2x^2-3x-2=0$，设它的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=2,b=-3,c=-2$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-1$.

(3)设方程 $3x^2+2x=0$ 的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=3,b=2,c=0$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=0$.

(4)原方程可变形为 $4x^2-1=0$，设它的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=4,b=0,c=-1$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{4}$.

***2. 解**：(1)不正确.

(2)不正确.

习题 1.3：

***1. 解**：(1)设方程 $x^2+6x-6=0$ 的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=1,b=6,c=-6$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-6$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-6$.

(2)设方程 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ 的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=3,b=-2\sqrt{3},c=1$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.

(3)原方程可变形为 $x^2+x-1=0$，设它的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=1,b=1,c=-1$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-1$.

(4)原方程可变形为 $5x^2-6x=0$，设它的两根分别是 x_1、x_2，$\because a=5,b=-6,c=0$，$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{6}{5}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=0$.

***2. 解**：设方程 $2x^2+mx+50=0$ 的另一个根是 x_2，$\because a=2,b=m,c=50$，$\therefore 10+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{m}{2}$，$10\cdot x_2=\frac{c}{a}=25$，$\therefore x_2=2.5,m=-25$.

***3. 解**：$\because a=1$，$\therefore(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=-\frac{b}{a}=-b$，$\therefore b=-2\sqrt{2}$，又$\because(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=\frac{c}{a}=c$，$\therefore c=1$.

1.4 用一元二次方程解决问题

练习：

1. 解：设这个长方形菜地的宽为 x m，则长为 $(x+5)$ m. 根据题意，得 $x(x+5)=150$，解这个方程，得 $x_1=10$，$x_2=-15$(不合题意，舍去)，所以 $x=10$，$x+5=15$.

答：这个长方形菜地的宽为 10 m，长为 15 m.

点拨：因为这个长方形菜地的长减少 5 m，菜地

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

就变成正方形,所以设这个长方形菜地的宽为 x m,则这个长方形菜地的长为$(x+5)$ m,利用长×宽=面积列方程.

2. 解:设金属丝围成的矩形的一条边长是x cm,则其邻边长是$(50-x)$ cm. 假设能制成面积是600 cm^{2}的矩形框子. 根据题意,得$x(50-x)=600$,整理,得$x^2-50x+600=0$. 解这个方程,得$x_1=20$,$x_2=30$. 所以当这个矩形框子的长、宽分别是30 cm、20 cm时,面积是600 cm^2. 假设能制成面积是800 cm^{2}的矩形框子,根据题意,得$x(50-x)=800$,整理,得$x^2-50x+800=0$,因为$b^2-4ac=(-50)^2-4\times1\times800=-700<0$,所以此方程没有实数解,所以长为100 cm的金属丝不能制成面积是800 cm^{2}的矩形框子.

点拨:本题的等量关系非常明确,即矩形的长×矩形的宽=矩形的面积,因此只需设适当的未知数,用代数式把各个量准确表示出来即可.

3. 解:设该种服装平均每次降价的百分率为x. 根据题意,得$80(1-x)^2=51.2$,解这个方程,得$x_1=0.2$,$x_2=1.8$(不合题意,舍去).

答:该种服装平均每次降价的百分率是20%.

练习:

1. 解:设该公司第二批参加旅游的员工有x人.

因为$800\times30=24\,000<29\,250$,

所以$x>30$. 根据题意,得$x\cdot[800-10(x-30)]=29\,250$.

整理,得$x^2-110x+2\,925=0$.

解这个方程,得$x_1=65$,$x_2=45$.

当$x=65$时,$800-10(x-30)=800-350=450<550$,不符合题意,舍去;

当$x=45$时,$800-10(x-30)=800-150=650>550$,符合题意.

答:该公司第二批参加旅游的员工有45人.

2. 解:设每件售价x元,该商店销售了这种商品$[200-10(x-50)]$件.

由题意,得$(x-40)[200-10(x-50)]=2\,000$,

整理,得$x^2-110x+3\,000=0$,解这个方程,得$x_1=60$,$x_2=50$.

当$x=60$时,$200-10(x-50)=100$;

当$x=50$时,$200-10(x-50)=200$.

答:当每件售价60元时,该商店销售了这种商品100件;当每件售价50元时,该商店销售了这种商品200件.

练习:

1. 解:设一条直角边的长为x cm,则另一条直角边的长为$(28-x)$ cm.

根据题意,得$\frac{1}{2}x\cdot(28-x)=96$.

解这个方程,得$x_1=12$,$x_2=16$.

当$x=12$时,$28-x=16$;

当$x=16$时,$28-x=12$.

则这个直角三角形的斜边的长为

$\sqrt{16^2+12^2}=20$(cm).

答:这个直角三角形两条直角边的长分别为12 cm,16 cm,斜边的长为20 cm.

2. 解:设点P出发$x(0\leqslant x\leqslant7)$ s后,点P、A的距离是点P、C的距离的2倍.

由题意得,$PA=x$ cm,$PB=(7-x)$ cm,

$PC=\sqrt{PB^2+BC^2}=\sqrt{x^2-14x+57}$ cm.

列方程得$x=2\sqrt{x^2-14x+57}$. 整理得$3x^2-56x+228=0$. 解这个方程,得$x_1=\frac{38}{3}$(不合题意,舍去),$x_2=6$.

答:点P出发6 s后,点P、A的距离是点P、C的距离的2倍.

习题1.4:

1. 解:设这个两位数的个位数字是x,则十位数字是$9-x$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由题意得$[10(9-x)+x]\cdot[10x+(9-x)]=1\ 458$.

解这个方程,得$x_1=1$,$x_2=8$.

当$x=1$时,$9-x=8$;当$x=8$时,$9-x=1$.

答:原两位数是81或18.

2. **解**:设平均每次降价的百分率是x. 根据题意,得$60(1-x)^2=48.6$,整理,得$(1-x)^2=0.81$,$1-x=\pm0.9$,所以$x_1=0.1$,$x_2=1.9$(不合题意,舍去).

答:平均每次降价的百分率是10%.

3. **解**:设平均每年增产的百分率是x,根据题意,得$3\ 000(1+x)^2=3\ 630$,整理,得$(1+x)^2=1.21$,解这个方程,得$x_1=0.1$,$x_2=-2.1$(不合题意,舍去).

答:平均每年增产的百分率是10%.

点拨:增长后的量=原来的量$\times(1+x)^n$,其中x为平均增长率,n为增长次数.

4. **解**:设该水管原来的内径为x mm,则现在的内径为$(x-6)$ mm. 根据题意,得$\frac{4}{9}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{x-6}{2}\right)^2$,整理,得$5x^2-108x+324=0$,解这个方程,得$x_1=18$,$x_2=3.6$(不合题意,舍去).

答:该水管原来的内径为18 mm.

5. **解**:设道路的宽应为x m,则根据题意,有$40\times22-22x-40x+x^2=760$,整理,得$x^2-62x+120=0$,解这个方程,得$x_1=60$(不合题意,舍去),$x_2=2$.

答:道路的宽应为2 m.

6. **解**:设其中一个正方形的边长是x cm,则另一个正方形的边长是$\frac{80-4x}{4}$cm.

(1)根据题意,得$x^2+\left(\frac{80-4x}{4}\right)^2=200$,整理,得$x^2-20x+100=0$,解这个方程,得$x_1=x_2=10$,所以$4x=40$. 所以要使这两个正方形的面积的和等于200 cm^2,应从这根绳子的中点剪.

(2)若能,则根据题意,得$x^2+\left(\frac{80-4x}{4}\right)^2=488$.

整理,得$x^2-20x-44=0$,解这个方程,得$x_1=22$,$x_2=-2$(不合题意,舍去). 因为$4x=88>80$,不合题意,所以这两个正方形面积的和不可能等于488 cm^2.

点拨:解答本题的关键是确定两个正方形的边长,结合实际意义判断.

7. **解**:设这种服装每件售价是$(60+5x)$元,则销售量为$(800-100x)$件,每件盈利$(10+5x)$元. 根据题意,得$(10+5x)(800-100x)=12\ 000$,整理,得$x^2-6x+8=0$,解这个方程,得$x_1=2$,$x_2=4$.

当$x=2$时,$60+5x=70$;

当$x=4$时,$60+5x=80$.

答:这种服装每件售价是70元或80元.

8. **解**:设这位顾客买了x双. $240\times10=2\ 400<3\ 600$,所以这位顾客购买运动鞋超过10双,单价为$[240-6(x-10)]$元.

由题意得$x\cdot[240-6(x-10)]=3\ 600$. 整理,得$x^2-50x+600=0$. 解这个方程,得$x_1=30$,$x_2=20$. 当$x=30$时,$240-6(x-10)=120<150$,不合题意,舍去;当$x=20$时,$240-6(x-10)=180>150$,符合题意. 所以$x=20$.

答:这位顾客买了20双.

9. **解**:设这个直角三角形两直角边长分别为$x-1$,x,则$x+1$为斜边长. 根据勾股定理,得$(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$,整理,得$x^2-4x=0$,解这个方程,得$x_1=0$(不合题意,舍去),$x_2=4$. 所以$x+1=5$.

答:这个三角形的斜边长为5.

点拨:利用勾股定理列方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解:设该水池池底的边长为 x m. 根据题意,得 $4\cdot100\cdot2x+200x^2=6\ 400$,整理,得 $x^2+4x-32=0$,解这个方程,得 $x_1=4$,$x_2=-8$(不合题意,舍去).

答:该水池池底的边长为4 m.

点拨:注意池壁前、后、左、右四个面,加上一个底面共5个面,利用各个面造价之和等于总造价,列方程即可.

11. 解:设点 D 出发 t s 后四边形 $DFCE$ 的面积为 20 cm². 根据题意,得 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\cdot2t\cdot2t=2t^2(\text{cm}^2)$,$S_{\triangle DFB}=\frac{1}{2}(12-2t)(12-2t)=(6-t)(12-2t)=2t^2-24t+72(\text{cm}^2)$. $S_{四边形DFCE}=\frac{1}{2}\times12\times12-2t^2-2t^2+24t-72=24t-4t^2(\text{cm}^2)$,即 $24t-4t^2=20$,整理,得 $t^2-6t+5=0$,所以 $t_1=5$,$t_2=1$.

答:点 D 出发1 s或5 s后四边形 $DFCE$ 的面积为20 cm².

点拨:本题是动点问题,注意设适当的未知数,把题目中的线段表示出来即可.

复习题

【复习巩固】

1. 解:(1)移项,得 $x^2-4x=45$,配方,得 $x^2-4x+4=45+4$,整理,得 $(x-2)^2=49$,解这个方程,得 $x_1=9$,$x_2=-5$. (2)原方程可变形为 $(x+3)(x+4)=0$,即 $x+3=0$ 或 $x+4=0$,所以 $x_1=-3$,$x_2=-4$. (3)移项,得 $(4y-1)^2=5$,解这个方程,得 $y_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$,$y_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. (4)原方程可变形为 $x^2+4x+4=0$,$(x+2)^2=0$,所以 $x_1=x_2=-2$. (5)原方程可变形为 $2x^2-5x+3=0$. 因为 $a=2$,$b=-5$,$c=3$,$b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=1>0$,所以 $x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{5\pm1}{4}$,所以 $x_1=1$,$x_2=\frac{3}{2}$. (6)原方程可变形为 $(x-2\sqrt{2})^2=0$,所以 $x_1=x_2=2\sqrt{2}$.

2. 解:根据题意,得 $2x^2-3=x$,整理得 $2x^2-x-3=0$,解这个方程,得 $x_1=\frac{3}{2}$,$x_2=-1$.

所以当 x 等于 $\frac{3}{2}$ 或 -1 时,代数式 $2x^2-3$ 的值与 x 的值相等.

3. 解:根据题意,令 $x^2-2mx+4=-4$,整理得 $x^2-2mx+8=0$. 当 $x=2$ 时,原方程可化为 $4-4m+8=0$,解得 $m=3$,所以此二次三项式为 x^2-6x+4. 当二次三项式的值是 -1 时,即 $x^2-6x+4=-1$,解这个方程,得 $x_1=1$,$x_2=5$. 所以当 $x=1$ 或5时,这个二次三项式的值是 -1.

点拨:根据题意,利用一元二次方程的知识求解.

4. 解:根据题意,得 $x^2-9=3-x$,原方程可变形为 $x^2+x-12=0$,$(x+4)(x-3)=0$,即 $x_1=-4$,$x_2=3$. 所以当 $x=-4$ 或3时,y_1 与 y_2 相等.

点拨:由 $y_1=y_2$ 得 $x^2-9=3-x$,利用一元二次方程的知识求解.

5. 解:把 $x=-1$ 代入方程 $x^2-6x+m^2-3m-5=0$,得 $(-1)^2-6\times(-1)+m^2-3m-5=0$,整理,得 $m^2-3m+2=0$,$(m-1)(m-2)=0$,即 $m_1=1$,$m_2=2$.

点拨:方程的根必满足方程,因此把 $x=-1$ 代入方程,转化成关于 m 的一元二次方程求解.

6. 解:设这个数是 x,根据题意,得 $x^2-25=x+5$,原方程可变形为 $x^2-x-30=0$,$(x-6)(x+5)=0$,解这个方程,得 $x_1=6$,$x_2=-5$.

答:这个数是6或 -5.

点拨:根据题意列方程求解,考查同学们分析问题、解决问题的能力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:设这群猴子的总数是 x 只,根据题意,得 $\left(\frac{1}{8}x\right)^2+12=x$,整理得 $x^2-64x+768=0$,解这个方程,得 $x_1=16$,$x_2=48$.

答:这群猴子的总数是 16 只或 48 只.

8. 解:设该工厂原产值为 a,年平均增长的百分率为 x. 根据题意,得 $a(1+x)^2=2a$,整理,得 $(1+x)^2=2$,解这个方程,得 $x_1=-1+\sqrt{2}$,$x_2=-1-\sqrt{2}$(不合题意,舍去). 所以 $x\approx0.414=41.4\%$.

答:该工厂产值年平均增长的百分率约为 41.4%.

点拨:增长率问题往往符合关系式:$b=a(1+x)^n$,a 表示原产量,b 表示增产后的产量,x 表示平均增长率,n 表示增长次数.

9. 解:设一条直角边的长是 x cm,则另一条直角边的长为 $(6-x)$ cm,根据题意,得 $x^2+(6-x)^2=(2\sqrt{5})^2$,整理,得 $x^2-6x+8=0$,$(x-2)(x-4)=0$,解这个方程,得 $x_1=2$,$x_2=4$. 当 $x=2$ 时,$6-x=4$;当 $x=4$ 时,$6-x=2$.

答:这两条直角边的长分别是 2 cm,4 cm.

点拨:把两条直角边的长用适当的代数式表示出来,利用勾股定理列方程求解.

10. 解:设与墙平行的篱笆的长为 x m,则与墙垂直的篱笆的长为 $\frac{16-x}{2}$ m.

根据题意,得 $x\cdot\frac{16-x}{2}=30$.

解这个方程,得 $x_1=10$,$x_2=6$.

当 $x=10$ 时,$\frac{16-x}{2}=3$;

当 $x=6$ 时,$\frac{16-x}{2}=5$.

答:生物园的长是 10 m,宽是 3 m 或长是 6 m,宽是 5 m.

11. 解:设窗框的宽为 x m,则高为 $\frac{6-3x}{2}$ m. 根据题意,得 $x\cdot\frac{6-3x}{2}=1.5$,整理,得 $x^2-2x+1=0$,解这个方程,得 $x_1=x_2=1$,所以 $\frac{6-3x}{2}=\frac{6-3\times1}{2}=1.5$.

答:窗框的宽为 1 m,高为 1.5 m.

【灵活运用】

12. 解:设票价应定为 $(30+x)$ 元,则售出门票为 $(1\,200-30x)$ 张. 根据题意,得 $(30+x)\cdot(1\,200-30x)=36\,750$,整理,得 $x^2-10x+25=0$,解这个方程,得 $x_1=x_2=5$. 所以 $30+x=35$.

答:票价应定为 35 元.

13. 解:设每次倒出的液体是 V L,根据题意,得 $63-V-\frac{63-V}{63}\cdot V=28$,整理,得 $V^2-126V+2\,205=0$,即 $(V-21)(V-105)=0$,所以 $V_1=21$,$V_2=105$(不合题意,舍去).

答:每次倒出的液体是 21 L.

14. 解:设经过 t s P、Q 两点之间的距离是 10 cm,由题意,得 $(16-2t-3t)^2+6^2=10^2$,解得 $t_1=4.8$,$t_2=1.6$.

答:经过 1.6 s 或 4.8 s P、Q 两点之间的距离是 10 cm.

点拨:本题是动点问题,解题时,注意把动态问题转化成静态问题.

15. 解:这 5 个数中间的数为 $\frac{m}{5}$,则其前面的数为 $\frac{m}{5}-1$,$\frac{m}{5}-2$,其后面的数为 $\frac{m}{5}+1$,$\frac{m}{5}+2$,根据题意,得 $\left(\frac{m}{5}\right)^2+\left(\frac{m}{5}-1\right)^2+\left(\frac{m}{5}-2\right)^2+\left(\frac{m}{5}+1\right)^2+\left(\frac{m}{5}+2\right)^2=2(6m+5)$,整理,得 $m^2-60m=0$,即 $m(m-60)=0$,所以 $m_1=0$,$m_2=60$. 当 $m=0$ 时,这 5 个连续整数为 -2,-1,0,1,2;当 $m=60$ 时,这 5 个连续整数为 10,11,12,13,14. 所以这 5 个连续整数为 10,11,12,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13,14 或 -2, -1,0,1,2.

点拨:设适当的未知数,列方程求解.

16. 解:设平均亩产量的增长率为 x,则种植面积的增长率为 $2x$.

根据题意,得 $\frac{20\,000}{10}(1+x)=\frac{60\,000}{10(1+2x)}$,即 $2x^2+3x-2=0$,解这个方程,得 $x_1=-2$(不合题意,舍去),$x_2=0.5$.

答:平均亩产量的增长率为 50%.

【探索研究】

17. 解:答案不唯一,例如 $x^2-x-6=0$.

18. 解:设 AE 长为 x m,根据题意,得 $\frac{1}{2}x^2\cdot 20+\frac{1}{2}\left(\frac{8}{2}-x\right)\times 1\times 20+\left[\left(\frac{8}{2}\right)^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{2}-x\right)\times 1\right]\times 10=\frac{715}{4}$,即 $4x^2-4x+1=0$. 解这个方程,得 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

答:点 E 在距 A 点 $\frac{1}{2}$ m 处时,正方形花坛种植花卉所需的总费用是 715 元.

第 2 章 对称图形——圆

2.1 圆

练习:

1. 解:点 P 在 $\odot O$ 外;点 P 在 $\odot O$ 上;点 P 在 $\odot O$ 内.

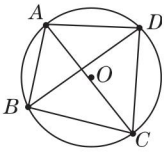
2. 略.

3. 解:点 A、B、C、D 在以点 O 为圆心的同一个圆上. 理由:因为矩形的对角线互相平分且相等,所以 $OA=OB=OC=OD$.

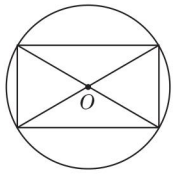
练习:

1. 解:如图. 这样的弦共有 6 条,分别是弦 AB,弦 AC,弦 AD,弦 BC,弦 BD,弦 CD.

点拨:紧扣"连接圆上任意两点的线段叫做弦",先画出图形,再确定有几条弦.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 解:如图. 这个四边形是矩形.

理由:对角线相等且互相平分的四边形是矩形.

点拨:根据圆的半径相等易说明对角线互相平分,再由直径相等进一步说明对角线相等,从而判定这个四边形为矩形.

3. 解:$\triangle OCD$ 是等腰三角形. 理由:因为 $AO=BO$,所以 $\angle A=\angle B$. 又因为 $AC=BD$,$AO=BO$,所以 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$. 所以 $OC=OD$,所以 $\triangle OCD$ 是等腰三角形.

点拨:除通过证明 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$ 说明 $\triangle OCD$ 是等腰三角形外,本题也可以证明 $\triangle OAD\cong\triangle OBC$,同学们不妨试一试.

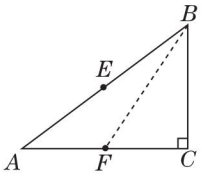
习题 2.1:

1. 解:(1)点 A 在 $\odot O$ 内;(2)点 A 在 $\odot O$ 上;(3)点 A 在 $\odot O$ 外.

点拨:点与圆的位置关系的判断方法:当 $d>r$ 时,点在圆外;当 $d=r$ 时,点在圆上;当 $d<r$ 时,点在圆内,即通过比较点到圆心的距离 d 与半径 r 的大小进行判断.

2. 解:点 A、F 在 $\odot B$ 外,点 C 在 $\odot B$ 上,点 E 在 $\odot B$ 内,理由如下:如图,连接 BF. 因为 $\angle C=90°$,$AC=4$,$BC=3$,所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 又因为 E、F 分别为 AB、AC 的中点,所以 $BE=\frac{1}{2}AB=2.5$,$CF=\frac{1}{2}AC=2$,所以 $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. 因为以点 B 为圆心,BC 为半径画圆,而 $AB>BC$,$BC=BC$,$BE<BC$,$BF>BC$,所以点 A、F 在 $\odot B$ 外,点 C 在 $\odot B$ 上,点 E 在 $\odot B$ 内.

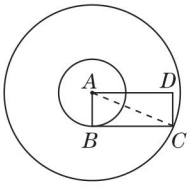
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第2题图）

点拨：判断点与圆的位置关系必须知道两个条件：一是圆的半径，二是点到圆心的距离．然后通过比较点到圆心的距离与半径的大小得出正确结论．

3. 解：如图，连接 AC，在矩形 $ABCD$ 中，$BC = AD = 12$，当点 B 恰好在⊙A 上时，半径 $r = AB = 5$；当点 C 恰好在⊙A 上时，半径 $r = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$．所以要使点 B 在⊙A 内，点 C 在⊙A 外，⊙A 的半径 r 的取值范围应是 $5 < r < 13$．

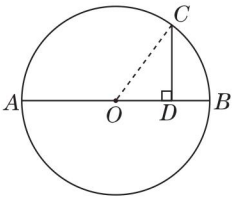


（第3题图）

4. 解：点 B、C、D、E 在以点 M 为圆心的同一个圆上．理由如下：连接 ME、MD．因为 BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的高，所以 $\triangle BEC$ 和 $\triangle BDC$ 均为直角三角形．又因为 M 为 BC 的中点，所以 $ME = MD = \frac{1}{2}BC$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），所以 $ME = MD = MB = MC$．所以点 B、C、D、E 在以点 M 为圆心的同一个圆上．

点拨：利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半易证明 $BM = CM = ME = MD$，再根据圆是到定点的距离等于定长的点的集合得出结论成立．

5. 解：如图，连接 OC．在 Rt$\triangle ODC$ 中，$CD = 4$，$OD = 3$，$\angle ODC = 90°$，所以 $OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$．因为 $AB = AO + BO$，$AO = BO = CO$（同圆的半径相等），所以 $AB = 2OC = 2 \times 5 = 10$．



（第5题图）

点拨：连接 OC 是解答本题的关键，结合已知条件，根据勾股定理，可计算出半径 OC 的长，于是可求出直径 AB 的长．

6. 解：相等．理由：因为 C 是 OA 的中点，D 是 OB 的中点，所以 $OC = \frac{1}{2}OA$，$OD = \frac{1}{2}OB$．又因为 OA、OB 为⊙O 的半径，所以 $OA = OB$，所以 $OC = OD$．又因为 $\angle AOD = \angle BOC$，所以 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$，所以 $AD = BC$．

点拨：根据同一个圆的半径相等及中点的定义，易得 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$，利用全等三角形的性质即可说明 $AD = BC$．

7. 解：$AB \parallel CD$．理由：因为 OA、OB 均为大圆的半径，所以 $OA = OB$．所以 $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180° - \angle O}{2}$．因为 OC、OD 均为小圆的半径，所以 $OC = OD$．所以 $\angle OCD = \angle ODC = \frac{180° - \angle O}{2}$．所以 $\angle OAB = \angle OCD$，所以 $AB \parallel CD$．

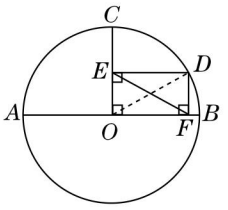
点拨：顶角相等的两个等腰三角形的底角也相等，由此可得出 $\angle OAB = \angle OCD$，因此 $AB \parallel CD$．

8. 解：如图，连接 OD．因为 $OC \perp AB$，$DE \perp OC$，$DF \perp AB$，所以 $\angle EOB = \angle DEO = \angle DFO = 90°$，所以四边形 $EDFO$ 为矩形，所以 $EF = OD = \frac{1}{2}AB$．又因为 $AB = 4$，所以 $EF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$．

点拨：连接 OD 得到圆的半径是关键，根据已知

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

条件易得四边形 $EDFO$ 是矩形,利用矩形对角线相等的性质可说明 $EF=OD$,而 $OD=\frac{1}{2}AB$,AB 已知,所以 EF 的长可求.



(第8题图)

2.2 圆的对称性

练习:

1. **解法一:**因为 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,所以 $\angle AOC=\angle BOD$. 又因为 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$,$\angle BOD=\angle COD+\angle BOC$,所以 $\angle COD=\angle AOB=50°$.

解法二:因为 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,所以 $\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{BC}$,即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,所以 $\angle COD=\angle AOB=50°$.

点拨:在同圆或等圆中,相等的弧所对的圆心角相等.

2. **解:**因为在 $\odot O$ 中,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,所以 $AB=AC$,所以 $\angle ABC=\angle ACB$. 又因为 $\angle A=40°$,所以 $\angle ABC=\frac{180°-\angle A}{2}=\frac{180°-40°}{2}=70°$.

点拨:根据条件易证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,利用等腰三角形两底角相等的性质及三角形内角和定理求 $\angle ABC$ 的度数.

3. **解:**连接 CD,则 $CA=CD$,所以 $\angle A=\angle ADC$. 因为 $\angle ACB=90°$,$\angle B=28°$,所以 $\angle A=\angle ADC=62°$. 在 $\triangle ADC$ 中,因为 $\angle A+\angle ADC+\angle ACD=180°$,所以 $\angle ACD=56°$,所以 $\angle DCE=\angle ACB-\angle ACD=34°$,所以 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 $56°$,$\overset{\frown}{DE}$ 的度数为 $34°$.

点拨:由"圆心角的度数与它所对的弧的度数相等",可知欲求 $\overset{\frown}{AD}$ 和 $\overset{\frown}{DE}$ 的度数,只需连接 CD,求 $\angle ACD$ 和 $\angle DCE$ 的度数.

练习:

1. **解:**答案不唯一. 如:先把圆形纸片对折成半圆,再对折成半圆的一半,即四分之一圆,展开圆形纸片,内部有一交点,即为圆心.

点拨:根据圆是轴对称图形,直径所在的直线是圆的对称轴确定圆心.

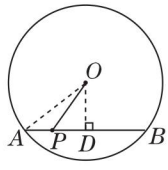
2. **解:**(1)①是轴对称图形. 对称轴是 CD 所在的直线;②不具有对称性;③是中心对称图形. 对称中心是点 O;④既是中心对称图形又是轴对称图形. 对称中心是点 O. 对称轴有两条,分别是过四边形 $ABCD$ 两组对边中点的直线;⑤既是中心对称图形又是轴对称图形. 对称中心是点 O. 对称轴是任意一条直径所在的直线.

(2)题图①中的弦 AB 为直径时,图形既是中心对称图形,又是轴对称图形.

(3)题图②中的点 B 运动到使弦 AB 等于弦 AC 的位置时,图形成为轴对称图形.

点拨:根据轴对称图形的概念和性质及中心对称图形的概念和性质,对图形①~⑤进行全面分析.

*3. **解:**如图,过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D,连接 OA,则 $AD=BD=4$. 当点 P 与点 A 重合时,$OP=OA=5$;当点 P 与点 D 重合时,$OP=OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. 所以 OP 的取值范围为 $3\leqslant OP\leqslant 5$.



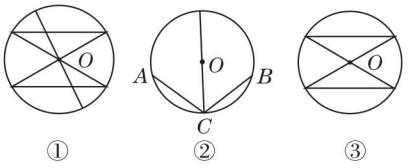
(第3题图)

点拨:确定 OP 的取值范围,只需确定 OP 的最大值和最小值即可,当 OP 为半径时,最大;当 OP 等于点 O 到 AB 的距离时,最小,因此 $3\leqslant OP\leqslant 5$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

习题 2.2：

1. 解：(1)如图①所示．(2)如图②所示．(3)如图③所示．



①　②　③

（第 1 题图）

点拨：本题答案不唯一，同学们可以尝试其他的画法．

2. 解：相等．理由：因为$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$，所以$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{BC}$，即$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，所以 $AC=BD$.

3. 解：相等．理由：因为$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，所以 $\angle AOC=\angle BOC$. 又因为 D、E 分别是 OA、OB 的中点，且 $OA=OB$，所以 $OD=OE$. 又因为 $OC=OC$，所以 $\triangle COD\cong\triangle COE$，所以 $CD=CE$（全等三角形的对应边相等）．

点拨：本题综合考查同学们利用圆的有关性质及全等三角形的判定和性质解决问题的能力．

4. 解：连接 OE. 因为 $OC=OE$，所以 $\angle C=\angle E$. 又因为$\overset{\frown}{CE}$的度数为 40°，所以 $\angle COE=40°$，所以 $\angle C=\angle E=\dfrac{180°-\angle COE}{2}=70°$. 又因为 $CE\parallel AB$，所以 $\angle AOC=\angle C=70°$（两直线平行，内错角相等）．

点拨：在圆这一部分知识中，作半径构造等腰三角形是常用的作辅助线的方法之一．

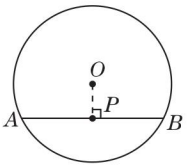
***5. 解：**连接 OC. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COE$ 中，$OC=\dfrac{1}{2}AB=5$，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

因为弦 $CD\perp AB$，所以 $CE=DE$，所以 $CD=2CE=2\times4=8$.

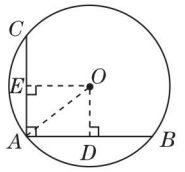
点拨：欲求 CD 的长，根据“垂直于弦的直径平分弦”可知求出 CE 的长即可．因此，连接 OC，利用勾股定理求解．

***6. 解：**如图，弦 AB 即为所求作的弦．

点拨：本题实质上是根据“垂直于弦的直径平分弦”这一结论作图，即连接 OP，OP 所在的直线为直径所在的直线，再过点 P 作 OP 的垂线与⊙O 交于 A、B 两点，弦 AB 即为所求作的弦．



（第 6 题图）



（第 7 题图）

***7. 解：**过点 O 作 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$，垂足分别为 D、E，连接 OA，如图．

$\because AB\perp AC$，

$\therefore$ 四边形 $ADOE$ 是矩形，

$\therefore OD=AE$.

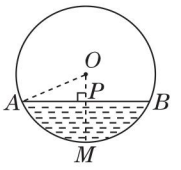
$\because OD\perp AB$，$OE\perp AC$，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB=4$，$OD=AE=\dfrac{1}{2}AC=3$，

$\therefore OA=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

即⊙O 的半径为 5.

***8. 解：**如图，过点 O 作 $OP\perp AB$ 于点 P，交⊙O 于点 M，连接 AO，则 $AP=BP=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times600=300(\mathrm{mm})$．在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$AO=\dfrac{1}{2}\times650=325(\mathrm{mm})$，所以 $OP=\sqrt{AO^2-AP^2}=\sqrt{325^2-300^2}=125(\mathrm{mm})$．所以 $PM=OM-OP=325-125=200(\mathrm{mm})$，即油的最大深度为 200 mm.



（第 8 题图）

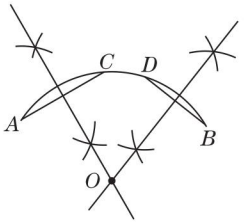
点拨：过点 O 作 AB 的垂线是解决问题的关键，利用勾股定理计算．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 确定圆的条件

练习:

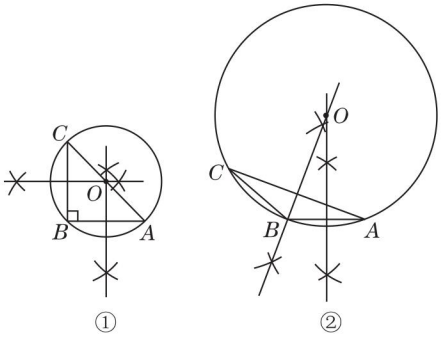
1. 解:如图,点 O 即为$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心.



(第 1 题图)

点拨:确定圆心的关键是作两条不平行的弦的垂直平分线,其交点即为圆心.

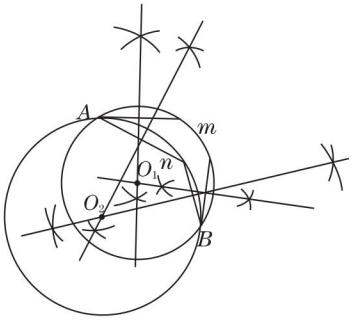
2. 解:当△ABC 是直角三角形时,外心 O 在直角三角形斜边的中点处,如图①;当△ABC 是钝角三角形时,外心 O 在三角形的外部,如图②.



(第 2 题图)

习题 2.3:

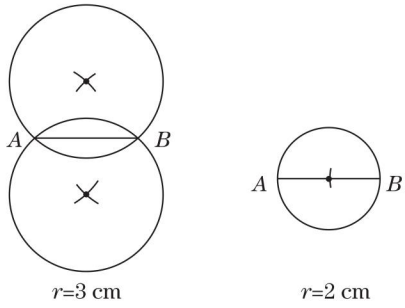
1. 解:$\overset{\frown}{AnB}$的半径较大. 如图.



(第 1 题图)

点拨:本题考查圆心的确定方法.

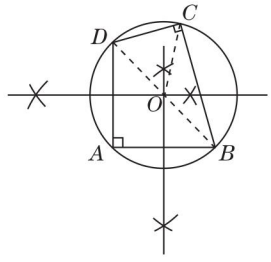
2. 解:能作 2 个半径为 3 cm 的圆,能作 1 个半径为 2 cm 的圆. 如图.



(第 2 题图)

3. 解:点 C 在⊙O 上.

理由:如图,连接 BD、OC,易知 O 为 BD 的中点,则 BD 是直径. 因为∠BCD = 90°,所以 OC = $\frac{1}{2}BD$,所以点 C 在⊙O 上.



(第 3 题图)

点拨:本题主要考查点与圆的位置关系的判断.

2.4 圆周角

练习:

1. 解:②是圆周角,①③④都不是圆周角. 理由:圆周角是顶点在圆上,并且两边都和圆相交的角,只有②符合.

点拨:判定一个角是圆周角的依据有两点:①顶点在圆上;②两边都和圆相交.

2. 解:∠BDC = ∠BAC = 35°(同弧所对的圆周角相等).

∠BOC = 2∠BAC = 70°(圆周角的度数等于它所

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

对弧上的圆心角度数的一半).

3. 解:∵ $\angle BDC=60°$,∴ $\angle BAC=\angle BDC=60°$. 又∵ $\angle ACB=60°$,∴ $\angle ABC=180°-\angle ACB-\angle BAC=180°-60°-60°=60°$. ∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形,∴ $AB=BC=AC$. 又∵ $BC=3$,

∴ $\triangle ABC$ 的周长 $=AB+BC+AC=3+3+3=9$.

点拨:利用"同弧所对的圆周角相等"解题.

练习:

1. 解:90°的圆周角所对的弦是直径. 能.

点拨:利用三角尺先确定圆的一条直径,画出来,再用同样方法画出另一条直径,其交点就是圆心.

2. 解:相等. 理由:连接 DE,交 AB 于点 F. 因为 CD 是⊙O 的直径,所以 $\angle CED=90°$. 又因为 $CE/\!/AB$,所以 $\angle OFD=\angle CED=90°$,即 $DE\perp AB$. 又因为 AB 是⊙O 的直径,所以$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BE}$.

点拨:解答本题的关键是连接 DE,根据题意,得 $\angle CED=90°$,进而得到 $DE\perp AB$,然后利用垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的弧进行说明.

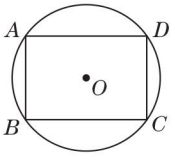
3. 解:连接 CD,则 $\angle ADC=\angle ABC$. 又因为 $\angle ABC=\angle DAC$,所以 $\angle ADC=\angle DAC$,所以 $AC=CD$. 因为 AD 是直径,所以 $\angle ACD=90°$,故 $AC^2+CD^2=AD^2$,即 $2AC^2=4^2$,所以 $AC=2\sqrt{2}$.

点拨:构造直径所对的圆周角是常用的一种辅助线的作法.

练习:

1. 解:是矩形. 理由:如图,$\square ABCD$ 是⊙O 的内接四边形,则 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$.

又∵ $\angle A=\angle C$,$\angle B=\angle D$,∴ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$,∴ $\square ABCD$ 是矩形.



(第 1 题图)

2. 解:∵ $\angle D=100°$,$\angle D+\angle ABC=180°$(圆内接四边形的对角互补),∴ $\angle ABC=180°-\angle D=180°-100°=80°$,∴ $\angle CBE=180°-\angle ABC=180°-80°=100°$.

3. 解:∵ $\angle C=130°$,$\angle A+\angle C=180°$(圆内接四边形的对角互补),∴ $\angle A=180°-\angle C=180°-130°=50°$. 又∵ $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOD$(圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半),∴ $\angle BOD=2\angle A=50°\times2=100°$.

习题 2.4:

1. 解:4 对. 分别是 $\angle ADB$ 和 $\angle ACB$,$\angle BAC$ 和 $\angle BDC$,$\angle CBD$ 和 $\angle CAD$,$\angle ABD$ 和 $\angle ACD$.

2. 解:连接 OA,OE,DE.

∵ $\overset{\frown}{AE}$ 为 40°,

∴ $\angle AOE=40°$,

∴ $\angle ADE=\frac{1}{2}\angle AOE=20°$.

又∵ 四边形 $BEDC$ 是⊙O 的内接四边形,

∴ $\angle B+\angle EDC=180°$,

∴ $\angle B+\angle ADC=160°$.

3. 解:连接 OD. ∵ D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,∴ $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times100°=50°$. ∴ $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times50°=25°$(圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半).

又∵ $\angle OBC=55°$,∴ $\angle OEC=\angle OBC+\angle BCD=55°+25°=80°$.

点拨:找出 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆周角和圆心角,利用它们之间的关系解题.

*4. 解:相等. 理由:因为 $CD\perp AB$,所以 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$,所以 $\angle APC=\angle APD$.

点拨:运用"垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的弧"得出 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$ 是解题关键.

5. 解:因为 $\angle DCB=30°$,所以 $\angle DAB=\angle DCB=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

30°. 因为 AB 是⊙O 的直径,所以 $\angle ADB = 90°$. 于是在 Rt△ADB 中, $\angle ABD = 90° - \angle DAB = 90° - 30° = 60°$.

*6. **解:**连接 OC. 因为 AO 是小圆的直径,所以 $\angle ACO = 90°$,即 $OC \perp AB$ 于点 C. 又因为 $AB = 10$,所以 $AC = \frac{1}{2}AB = 5$.

点拨:OA 是直径,连接 OC,得出 $OC \perp AB$,进而利用垂径定理解题.

7. **解:**CD 与 CE 相等. 理由:连接 BC. ∵ AB 是⊙O 的直径,∴ $\angle ACB = 90°$,即 $BC \perp AD$. 又∵ $AC = CD$,∴ $AB = DB$,∴ $\angle A = \angle D$. 又∵ $\angle A = \angle E$,∴ $\angle E = \angle D$,∴ $CD = CE$.

点拨:构造直径所对的圆周角是解决圆的问题中常用的方法.

8. **解:**$EF \perp BC$. 理由:∵ AF、AE 分别是 $\angle BAD$、$\angle BAC$ 的平分线,∴ $\angle BAF = \frac{1}{2}\angle BAD$, $\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAC$. ∵ $\angle BAC + \angle BAD = 180°$,∴ $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle BAC) = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$. ∴ EF 是⊙O 的直径(90°的圆周角所对的弦是直径).

又∵ AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,∴ $\angle BAE = \angle CAE$,∴ $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$,∴ $EF \perp BC$.

9. **解:**由题意可知, $\angle A + \angle C = 180°$(圆内接四边形的对角互补),且 $\angle A : \angle C = 3 : 6 = 1 : 2$,∴ $\angle A = 180° \times \frac{1}{3} = 60°$, $\angle C = 180° \times \frac{2}{3} = 120°$.

又∵ $\angle A : \angle B = 3 : 4$,∴ $\angle B = \frac{4}{3}\angle A = 60° \times \frac{4}{3} = 80°$. 又∵ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$,∴ $\angle D = 360° - 60° - 80° - 120° = 100°$.

10. **解:**在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$(圆内接四边形的对角互补).

∵ $\angle BAD = 60°$,∴ $\angle BCD = 180° - 60° = 120°$.

∴ $\angle ACB + \angle ACD = 120°$.

又∵ $\angle ACB = 70°$,

∴ $\angle ACD = 120° - 70° = 50°$.

∴ $\angle ABD = \angle ACD = 50°$(同弧所对的圆周角相等).

点拨:利用“圆内接四边形的对角互补”得出 $\angle BAD + \angle BCD = 180°$,从而可求出 $\angle BCD$ 的度数. 进而可求出 $\angle ACD$ 的度数,最后利用“同弧所对的圆周角相等”得出 $\angle ABD$ 的度数.

11. **解:**∵ AB 是半圆的直径,∴ $\angle ACB = 90°$(直径所对的圆周角是直角). 又∵ $\angle BAC = 20°$,∴ $\angle B = 180° - 20° - 90° = 70°$. 又∵ $\angle B + \angle D = 180°$,∴ $\angle D = 180° - 70° = 110°$.

又∵ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$,∴ $\angle ACD = \angle CAD$(等弧所对的圆周角相等).

∴ $\angle ACD = \angle CAD = \frac{1}{2}(180° - \angle D) = \frac{1}{2} \times (180° - 110°) = 35°$,

∴ $\angle DAB = 35° + 20° = 55°$,

$\angle BCD = 90° + 35° = 125°$.

点拨:利用“直径所对的圆周角是直角”得出 $\angle ACB = 90°$,进而可求出 $\angle B$、$\angle D$ 的度数,再利用“等弧所对的圆周角相等”求出 $\angle ACD$ 和 $\angle CAD$ 的度数,进而可求出 $\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 的度数.

12. **解:**$\angle DAE = \angle DAC$.

理由:∵ $DB = DC$,∴ $\angle DBC = \angle DCB$.

∵ $\angle DCB + \angle BAD = 180°$,

$\angle DAE + \angle BAD = 180°$,

∴ $\angle DAE = \angle DCB$.

∴ $\angle DAE = \angle DBC$.

又∵ $\angle DBC = \angle DAC$,

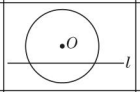
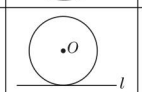
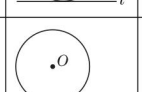
∴ $\angle DAE = \angle DAC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.5 直线与圆的位置关系

练习：

1.

直线与圆的位置关系	图形	公共点个数	直线的名称	公共点名称	圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系
相交		2			$d<r$
相切		1	切线	切点	$d=r$
相离		0			$d>r$

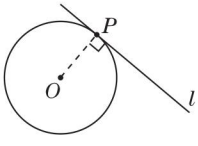
点拨：已知直线与圆的位置关系，可以判断直线与圆的公共点个数；反过来，已知直线与圆的公共点个数，可以确定直线与圆的位置关系．

2. 解：设圆心 O 到直线 l 的距离为 d，$\odot O$ 的半径为 r，则 $r=4$．当 $d=5$ 时，因为 $d>r$，所以直线 l 与 $\odot O$ 相离．当 $d=4$ 时，因为 $d=r$，所以直线 l 与 $\odot O$ 相切．当 $d=3$ 时，因为 $d<r$，所以直线 l 与 $\odot O$ 相交．

点拨：根据圆心到直线的距离与半径的关系，可以判断直线与圆的位置关系．反之亦然．

练习：

1. 解：如图，连接 OP，过点 P 作直线 $l\perp OP$，则直线 l 即为 $\odot O$ 的切线．



（第 1 题图）

2. 解：直线 AC 与 $\odot O$ 相切．理由：因为 $AB=AC$，所以 $\angle ABC=\angle C=45°$，所以 $\angle ABC+\angle C=90°$，所以 $\angle BAC=90°$，即 $AC\perp OA$．所以直线 AC 与 $\odot O$ 相切．

点拨：根据“经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线”，结合题意，易说明 $AC\perp OA$，故 AC 与 $\odot O$ 相切．

***3. 解：**相等．理由：连接 OP．因为大圆的弦 AB 切小圆于点 P，所以 $OP\perp AB$．所以 $PA=PB$（垂径定理）．

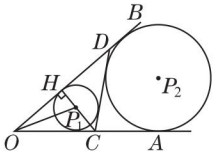
点拨：连接 OP，根据“圆的切线垂直于经过切点的半径”，得 $OP\perp AB$，从而根据垂径定理可得到 $PA=PB$．

练习：

1. 解：（1）因为 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=25°$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$．所以 $\angle BOC=180°-\angle OBC-\angle OCB=180°-25°-30°=125°$．

（2）因为 $\angle A=50°$，所以 $\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=180°-50°=130°$，所以 $\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times130°=65°$，所以 $\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-65°=115°$．**点拨：**三角形的内心是三角形三条内角平分线的交点，利用角平分线的定义计算．

2. 解：如图，①分别作 $\angle AOB$，$\angle OCD$ 的平分线交于点 P_1；②过点 P_1 作 $P_1H\perp OD$，垂足为 H；③以点 P_1 为圆心，P_1H 长为半径作 $\odot P_1$，$\odot P_1$ 就是所求作的圆，同理可作 $\odot P_2$．



（第 2 题图）

练习：

***1. 解：**因为 AB、AC、BD 是 $\odot O$ 的切线，切点分别是 P、C、D，所以 $AC=AP$，$BP=BD$．因为 $AC=3$，所以 $AP=AC=3$．因为 $AB=AP+BP$，$AB=5$，所以 $BP=AB-AP=5-3=2$，所以 $BD=BP=2$．

点拨：根据“过圆外一点所画的圆的两条切线长相等”，得出 $AP=AC$，$BP=BD$ 是关键．

***2. 解：**①$PA=PB$．理由：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$. 理由:∵ PA、PB 是⊙O 的切线,∴ $\angle PAO=\angle PBO=90°$(圆的切线垂直于经过切点的半径). 又∵ $AO=BO$,$OP=OP$,∴ Rt△AOP≌Rt△BOP,∴ $\angle AOP=\angle BOP$,∴ $\angle AOD=\angle BOD$,∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

③OP 垂直平分线段 AB. 理由:∵ PA、PB 是⊙O 的切线,A、B 为切点,∴ $PA=PB$. 又∵ $OA=OB$,∴ OP 垂直平分线段 AB.

点拨:本题答案不唯一,结论正确,说理合理即可.

习题 2.5:

1. 解:由题意知,⊙O 的半径 $R=5$. ①当圆心 O 到直线 l 的距离 $d=3$ 时,$d<R$,所以直线 l 与⊙O 相交. ②当圆心 O 到直线 l 的距离 $d=5$ 时,$d=R$,所以直线 l 与⊙O 相切. ③当圆心 O 到直线 l 的距离 $d=8$ 时,$d>R$,所以直线 l 与⊙O 相离.

2. 解:过点 O 分别作 $OD\perp AB$ 于点 D,$OE\perp AC$ 于点 E,连接 OA,则 $OA=2\sqrt{2}$. 设新作的圆的半径为 R. 易知 $AE=EC=\frac{1}{2}AC=2$,$BD=AD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$. 在 Rt△$OEA$ 中,$R=OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$. 在 Rt△$OAD$ 中,$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$. 因为 $OD=\sqrt{5}>R$,所以新作的圆与 AB 所在直线相离.

点拨:解答本题的关键是确定点 O 到 AB 的距离及点 O 到 AC 的距离,然后根据直线与圆的位置关系的判断方法进行判断.

3. 解:过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,则易知 $CD\cdot AB=AC\cdot BC$,所以 $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times4}{5}=2.4$.

(1)当 $r=2$ 时,$CD>r$,所以 AB 所在直线与⊙C 相离;(2)当 $r=2.4$ 时,$CD=r$,所以 AB 所在直线与⊙C 相切;(3)当 $r=3$ 时,$CD<r$,所以 AB 所在直线与⊙C 相交.

点拨:先计算点 C 到直线 AB 的距离,再根据直线与圆的位置关系的判断方法进行判断.

4. 解:因为 AB 是⊙O 的直径,所以 $\angle ADB=\angle CDB=90°$. 又因为 $AD=CD$,$BD=BD$,所以△BDA≌△BDC. 所以 $\angle DBA=\angle CBD$. 因为 CB 为⊙O 的切线,所以 $AB\perp BC$,即 $\angle ABC=90°$,所以 $\angle ABD=45°$.

5. 解:连接 OC. 因为 CD 是⊙O 的切线,C 为切点,所以 $OC\perp CD$,即 $\angle OCD=90°$. 又因为 $\angle D=30°$,所以 $\angle COD=60°$. 因为 $OA=OC$,所以 $\angle A=\angle ACO$. 因为 $\angle A+\angle ACO=\angle COD$,所以 $\angle A=30°$.

点拨:连接圆心和圆上一点作圆的半径是解决有关圆的问题时常作的辅助线之一.

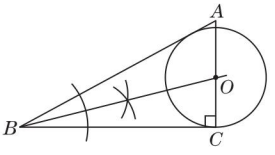
6. 解:相切. 理由:连接 OC. 因为 $OA=OB$,$CA=CB$,所以 $OC\perp AB$. 又因为 C 为⊙O 上一点,所以直线 AB 与⊙O 相切.

7. 解:△CBP 为等腰三角形. 理由:∵ $AO=BO$,∴ $\angle OAP=\angle OBP$. ∵ $OC\perp OA$,∴ $\angle AOP=90°$. ∴ $\angle APO+\angle OAP=90°$. 又∵ $\angle CPB=\angle APO$,∴ $\angle CPB+\angle OAP=90°$. ∵ BC 为⊙O 的切线,∴ $OB\perp BC$,即 $\angle OBC=90°$. ∴ $\angle CBP+\angle OBP=90°$,∴ $\angle CBP=\angle CPB$,∴ $CP=CB$,∴ △CBP 为等腰三角形.

8. 解:相切. 理由:过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E. 因为 P 是∠BAC 的平分线上一点,$PE\perp AB$,$PD\perp AC$,所以 $PE=PD$. 又因为 $PE\perp AB$,所以 AB 与以点 P 为圆心,PD 为半径的圆相切.

点拨:判定直线与圆相切的常用方法是说明圆心到直线的距离等于圆的半径.

9. 解:如图,⊙O 即为所求作的圆.



(第9题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

理由：角平分线上的点到角两边的距离相等.

10. 解：相等. 理由：连接 BI. 因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $\angle BAD = \angle CAD$，$\angle ABI = \angle IBC$. 又因为 $\angle CAD = \angle CBD$，所以 $\angle BAD = \angle CBD$. 又因为 $\angle IBD = \angle IBC + \angle CBD$，$\angle BID = \angle BAD + \angle ABI$，所以 $\angle IBD = \angle BID$，所以 $BD = ID$.

点拨：三角形的顶点与三角形内心的连线平分三角形的内角，利用这一性质，可以得到相等的角.

11. 解：设它的内切圆 $\odot O$ 的半径为 r. 连接 AO、BO、CO. 由题意可知，$\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle AOC$ 的 AB、BC、AC 边上的高均为 r，则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r = \frac{1}{2} \cdot r(AB + BC + AC) = 24$. $\because$ $\triangle ABC$ 的周长为 24，$\therefore AB + BC + AC = 24$，$\therefore \frac{1}{2} \cdot r \cdot 24 = 24$，$\therefore r = 2$. $\therefore$ 它的内切圆的半径为 2.

***12. 解：**因为 DC、DA 是 $\odot O$ 的切线，所以 $DC = DA$. 因为 EC、EB 是 $\odot O$ 的切线，所以 $EC = EB$. 因为 PA、PB 是 $\odot O$ 的切线，所以 $PA = PB$. 所以 $\triangle PDE$ 的周长 $= PD + DC + CE + PE = PD + DA + EB + PE = PA + PB = 20$.

***13. 解：**$AB + CD = BC + DA$. 理由：因为四边形 $ABCD$ 的各边与 $\odot O$ 分别相切于点 E、F、G、H，所以 $DH = DG$，$CG = CF$，$BF = BE$，$AH = AE$，所以 $AB + CD = AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH = BC + DA$.

***14. 解：**$\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线，CD 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore CD = BD$. 又 $\because CD = 2$，$\therefore BD = 2$. $\because AD = 2BD$，$\therefore AD = 4$，$\therefore AB = AD + BD = 6$. 又易知 $CD \perp OC$，$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. 设 $\odot O$ 的半径为 r，连接 BO，易得 $BO \perp AB$. 由勾股定理，得 $AO^2 = AB^2 + BO^2$，即 $(r + 2\sqrt{3})^2 = 6^2 + r^2$，解得 $r = 2\sqrt{3}$，即 $\odot O$ 的半径为 $2\sqrt{3}$.

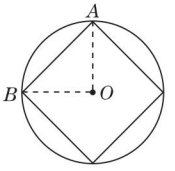
点拨：利用切线的性质和勾股定理解题.

2.6 正多边形与圆

练习：

1. 解：如图，设圆心为 O，作半径 OA、OB. 根据题意，得 $\angle AOB = \frac{360°}{4} = 90°$，$OA = OB = r$，$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$，$\therefore$ 正方形的面积 $S = \sqrt{2}r \times \sqrt{2}r = 2r^2$.

$\therefore$ 半径为 r 的圆内接正方形的边长为 $\sqrt{2}r$，面积为 $2r^2$.



（第 1 题图）

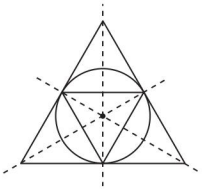
2. 解：$\because AB = BC = 5$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形，又由题意知 $\angle B = 120°$，$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 30°$. 过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M，则 $BM = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$，$AM = CM = \frac{1}{2}AC$，则 $AM = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$. $\therefore AC = 5\sqrt{3}$. 又 $\because \angle BCD = 120°$，$\angle BCA = 30°$，$\therefore \angle ACD = 90°$. $\therefore AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10$.

点拨：利用正多边形的性质以及勾股定理解题是解决本题的关键.

练习：

1. 解：将正十边形绕它的中心至少旋转 36°，就能与它自身重合，将正五边形绕它的中心至少旋转 72°，就能与它自身重合.

2. 解：这个图形是轴对称图形，画对称轴如图.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

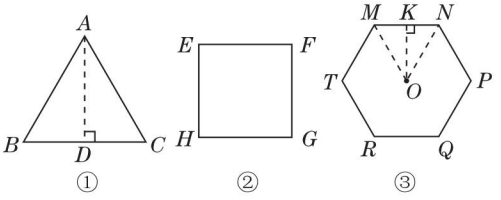
3. 略.

习题 2.6:

1. **解:**5 个. 这些等腰三角形全等. 理由:因为 5 个等腰三角形的腰长都相等,且这 5 个等腰三角形两腰的夹角都相等,所以它们都全等. 正六边形被过它的顶点的半径分成 6 个全等的等腰三角形,正八边形被过它的顶点的半径分成 8 个全等的等腰三角形.

2. **解:**剪去的 3 个小三角形的边长应是$\frac{a}{3}$. 理由:因为剪成的是正六边形,所以剪去的小三角形的边长应与正六边形的边长相等,设正六边形的边长为 l,则$3l=a$,所以 $l=\frac{a}{3}$,即剪去的 3 个小三角形的边长应是$\frac{a}{3}$.

3. **解:**围成的正六边形绿地的面积最大.



(第 3 题图)

理由:如图①,在正三角形 ABC 中,$AB=BC=CA=8$ m,作 $AD\perp BC$ 交 BC 于点 D,则 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$ m. 由勾股定理可得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$(m),则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$(m^2). 如图②,正方形 $EFGH$ 的边长为 6 m,则 $S_{正方形EFGH}=6^2=36$(m^2). 如图③,正六边形 $MNPQRT$ 的边长为 4 m,过中心 O 作半径 OM、ON,可知 $OM=ON$,作$OK\perp MN$ 于点 K,则 $MK=NK=\frac{1}{2}MN$,由题意易得 $OM=ON=MN=4$ m,则 $OK=\sqrt{ON^2-KN^2}=2\sqrt{3}$ m,则 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$(m^2),则 $S_{正六边形MNPQRT}=6\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$(m^2). 因为 $16\sqrt{3}<36<24\sqrt{3}$,所以围成的正六边形绿地的面积最大.

4. 略.

5. **解:**AB 为$\odot O$ 的内接正 n 边形的一边. 连接 OB,因为 AC 是$\odot O$ 的内接正六边形的一边,所以$\angle AOC=\frac{360°}{6}=60°$. 因为 BC 是$\odot O$ 的内接正八边形的一边,所以$\angle BOC=\frac{360°}{8}=45°$,所以$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC=60°-45°=15°$,所以$n=\frac{360°}{15°}=24$.

6. **解:**(1) 1 个,是 $\triangle ADB$;2 个,分别是 $\triangle ABJ$、$\triangle ABG$.

(2)1 个,是$\triangle ABF$;2 个,分别是$\triangle ABE$、$\triangle ABC$.

2.7 弧长及扇形的面积

练习:

1. **解:**因为 $l=\frac{n\pi R}{180}$,所以 $l=\frac{60\times\pi\times24}{180}=8\pi$.

答:所求的弧长是 8π.

点拨:利用弧长公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$代入求值,本题考查同学们对弧长公式的理解.

2. **解:**因为 $l=\frac{n\pi R}{180}$,所以 $20\pi=\frac{120\pi R}{180}$,所以 $R=30$. 所以 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\times20\pi\times30=300\pi$.

答:这个扇形的面积是 300π.

点拨:利用弧长公式先计算出扇形所在圆的半径,再利用扇形的面积公式 $S=\frac{n\pi R^2}{360}$或$S=\frac{1}{2}lR$计算扇形的面积.

习题 2.7:

1. **解:**因为 $l=\frac{n\pi R}{180}$,所以 $5\pi=\frac{75\pi R}{180}$,所以 $R=12$.

答:这条弧所在圆的半径为 12.

点拨:利用弧长公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$代入求值,本题考查同学们对弧长公式的理解与应用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：因为 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$，所以 $6\pi=\frac{1}{2}l\times4$，所以 $l=3\pi$.

答：这个扇形的弧长为 3π.

点拨：利用扇形的面积公式 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$ 代入求值，本题考查同学们对扇形面积公式的理解和运用.

3. 解：相等. 理由：连接 O_1C，设 $OA=OB=R$，$\angle AOB=n°$. 由题意得 $\angle AO_1C=(2n)°$，$O_1A=O_1C=\frac{1}{2}R$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{n\pi R}{180}$，$\overset{\frown}{AC}$ 的长为 $\frac{2n\pi\cdot\frac{1}{2}R}{180}=\frac{n\pi R}{180}$，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{AC}$ 的长相等.

4. 解：(1) 连接 OB. 因为 AB 切 $\odot O$ 于点 B，所以 $OB\perp AB$. 又因为在 $Rt\triangle OBA$ 中，$OA=OC+CA=2OC=2OB$，所以 $\angle A=30°$，所以 $\angle AOB=60°$，所以 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数为 $60°$.

(2) 因为 $OC=OB=5$，所以 $OA=2OC=10$，所以 $AB=\sqrt{OA^2-OB^2}=5\sqrt{3}$，$\overset{\frown}{BC}$ 的长 $l=\frac{60\cdot\pi\cdot5}{180}=\frac{5}{3}\pi$.

则 $S_{阴影}=S_{\triangle AOB}-S_{扇形OBC}=\frac{1}{2}AB\cdot OB-\frac{1}{2}\times5\times l=\frac{1}{2}(AB\cdot OB-5l)=\frac{1}{2}\times\left(5\sqrt{3}\times5-5\times\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\times\left(25\sqrt{3}-\frac{25}{3}\pi\right)=\frac{25(3\sqrt{3}-\pi)}{6}$.

2.8 圆锥的侧面积

练习：

1. 解：$S_{侧}=\frac{1}{2}\cdot2\pi r\cdot l=\pi rl$，所以全面积 $S=S_{底}+S_{侧}=\pi r^2+\pi rl$.

2. 解：扇形的弧长为 $\frac{120\pi\cdot30}{180}=20\pi$，则圆锥的底面圆半径 $=\frac{20\pi}{2\pi}=10$.

答：这个圆锥的底面圆半径为 10.

点拨：将扇形围成圆锥的侧面后，弄清各个量之间的对应关系，即扇形的半径等于圆锥的母线长，扇形的弧长等于圆锥的底面圆周长.

习题 2.8：

1. 解：∵ 圆锥形零件的底面圆周长为 $\pi\times12=12\pi(cm)$，∴ 需涂漆的面积 $S=\frac{1}{2}\times12\pi\times12=72\pi(cm^2)\approx226\ cm^2$.

答：需涂漆的面积约为 $226\ cm^2$.

2. 解：连接 AE. 因为 BC 与圆相切于点 E，所以 $AE\perp BC$ 且 $AE=AD=2$. 又因为 $AB=2\sqrt{2}$，所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=2$，所以 $AE=BE$，所以 $\angle BAE=45°$. 因为 $AD/\!/BC$，$AE\perp BC$，所以 $AE\perp AD$，即 $\angle DAE=90°$，所以 $\angle BAD=\angle BAE+\angle DAE=45°+90°=135°$. 设这个圆锥底面圆的半径为 r，则 $\frac{135\cdot\pi\cdot2}{180}=2\pi r$，解得 $r=\frac{3}{4}$，即这个圆锥底面圆的半径为 $\frac{3}{4}$.

3. 解：因为 $AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°$，所以 $AB=5$.

(1) 以直线 AC 为轴，则所得圆锥的底面圆半径 $r_{BC}=4$，母线 $l_{AB}=5$，所以 $S_{侧}=\pi r_{BC}l_{AB}=\pi\times4\times5=20\pi$；以直线 BC 为轴，则所得圆锥的底面圆半径 $r_{AC}=3$，母线 $l_{AB}=5$，所以 $S_{侧}=\pi r_{AC}l_{AB}=\pi\times3\times5=15\pi$. (2) 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则 $\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，所以 $CD=\frac{12}{5}$，所以 $S_{表}=\pi r_{CD}l_{BC}+\pi r_{CD}l_{AC}=\frac{12}{5}\pi\cdot7=\frac{84}{5}\pi$.

点拨：在解决直角三角形绕直角边所在直线旋转 1 周所得到的圆锥体的问题时，弄清圆锥的母线长及底面圆半径是关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

复习题

【复习巩固】

1. 解:∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$, $\angle AOC=40°$, ∴ $\angle COD=\angle DOE=\angle AOC=40°$. 又∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle AOB=180°$, ∴ $\angle BOE=180°-\angle AOC-\angle COD-\angle DOE=180°-40°-40°-40°=60°$.

点拨:掌握等弧所对的圆心角相等是解决本题的关键.

2. 解:∵ $\angle AOB=40°$, ∴ $\angle ACB=20°$. 由三角形内角和定理,可知 $\angle ACB+\angle OBC=\angle AOB+\angle OAC$,即 $20°+50°=40°+\angle OAC$, ∴ $\angle OAC=20°+50°-40°=30°$.

***3.** 解:连接 OB. ∵ BC 是⊙O 的弦,半径 $OA\perp BC$, ∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$, ∴ $\angle AOB=\angle AOC$. 又∵ $\angle AOB=2\angle ADB=2\times25°=50°$, ∴ $\angle AOC=50°$.

点拨:连接 OB,利用垂直于弦的半径平分弦所对的两条弧,得出 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,进而得出 $\angle AOB=\angle AOC$,再利用同弧所对的圆周角是圆心角的一半求出 $\angle AOB$ 的度数,即可得出 $\angle AOC$ 的度数.

***4.** 解:连接 CO. 因为 $AB=AE+BE=1+5=6$,所以 $CO=AO=3$. 因为 $OF\perp CD$, $OF=1$,所以 $CF=\sqrt{CO^2-OF^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,所以 $CD=2CF=4\sqrt{2}$.

点拨:作半径是解决圆的有关问题中常作的辅助线,同学们要注意总结、积累.

5. 解:相等. 理由如下:∵ $CD\perp AB$, ∴ $\angle CDB=90°$, ∴ $\angle B+\angle DCB=90°$. 又∵ $\angle ACB=90°$, ∴ $\angle B+\angle BAC=90°$, ∴ $\angle DCB=\angle BAC$. 又∵ $\angle DFE=\angle DCB$, ∴ $\angle DFE=\angle BAC$.

6. 解:BD 与⊙O 相切. 理由:连接 OD, CD. 由题意知 $\angle ADC=90°$. 又∵ $\angle A=30°$, ∴ $\angle OCD=60°$. ∵ $OA=OD$, ∴ $\angle ADO=\angle A=30°$, ∴ $\angle ODC=60°$. 又∵ $\angle OCD=\angle B+\angle CDB=60°$, ∴ $\angle CDB=30°$, ∴ $\angle ODB=\angle ODC+\angle CDB=60°+30°=90°$, ∴ $OD\perp BD$, ∴ BD 与⊙O 相切.

7. 解:∵ AB 是⊙O 的直径, AD 为⊙O 的切线, ∴ $\angle ACB=\angle OAD=90°$, ∴ $\angle BAC+\angle B=90°$. 又∵ $\angle BAC=2\angle B$, ∴ $\angle BAC=60°$, $\angle B=30°$, ∴ $\angle AOC=60°$, ∴ $\angle D=30°$, ∴ $OD=2OA=4$, ∴ $AD=\sqrt{OD^2-OA^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

点拨:本题利用圆周角定理及其推论和切线的性质解题. 关键是求出 $\angle D$ 的度数为 30°,利用直角三角形中,30° 角所对的直角边为斜边的一半,求出 OD 的长度,进而利用勾股定理求出 AD 的长.

8. 解:连接 OC. 因为 CD 是⊙O 的切线,所以 $OC\perp CD$. 又因为 $AD\perp CD$,所以 $AD\parallel OC$,所以 $\angle DAC=\angle OCA$. 又因为 $OA=OC$,所以 $\angle OCA=\angle CAO$,所以 $\angle DAC=\angle CAO$,即 AC 是 $\angle BAD$ 的平分线,所以 $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAD=40°$.

点拨:本题考查了圆的切线的性质及等腰三角形的性质等.

9. 解:相等. 理由:∵ AE 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ABE=90°$. 易知 $\angle ADC=90°$, ∴ $\angle ABE=\angle ADC$. 又∵ $\angle AEB=\angle ACB$, ∴ $\angle BAE=\angle CAF$, ∴ $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}$, ∴ $BE=CF$.

10. 解:∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ACB=90°$. 又∵ $AB=10$, $AC=6$, ∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$. ∵ CD 为 $\angle ACB$ 的平分线, ∴ $\angle ACD=\angle BCD=45°$. ∵ $\angle ACD=\angle ABD$, ∴ $\angle ABD=45°$. 连接 AD. ∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ADB=90°$, ∴ $\angle BAD=45°$, ∴ $AD=BD$, ∴ $AB^2=AD^2+BD^2=2BD^2$, ∴ $BD=5\sqrt{2}$.

11. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O, ∴ $\angle A+\angle BCD=180°$. 又∵ $\angle BCD$ 是△CBF 的一个外角, ∴ $\angle BCD=\angle F+\angle CBF$. 又∵ $\angle CBF$ 是△ABE 的一个外角, ∴ $\angle CBF=\angle A+\angle E$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

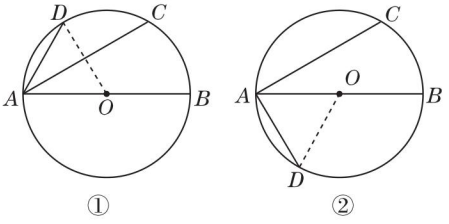
$\therefore \angle A+\angle F+\angle A+\angle E=180°$,

$\therefore 2\angle A=180°-\angle F-\angle E=180°-30°-50°=100°$,$\therefore \angle A=50°$.

点拨:利用圆内接四边形的性质以及三角形外角的性质进行解题.

12. **解**:当 AD 与 AC 在直径 AB 的同侧时,如图①,连接 DO. 因为 $AD=1$,$AO=\frac{AB}{2}=1$,所以 $AO=AD=DO$,所以 $\triangle AOD$ 是等边三角形,所以 $\angle DAO=60°$,所以 $\angle CAD=\angle DAO-\angle BAC=60°-30°=30°$. 当 AD 与 AC 在直线 AB 的异侧时,如图②,连接 DO. 同理可得 $\triangle AOD$ 是等边三角形,所以 $\angle DAO=60°$,所以 $\angle CAD=\angle DAO+\angle CAB=60°+30°=90°$.

点拨:连接 DO,易证 $\triangle AOD$ 是等边三角形,则 $\angle DAO=60°$,进而计算 $\angle CAD$ 的度数.



(第 12 题图)

*13. **解**:$OP\parallel CB$. 理由:连接 OB. $\because PA$、PB 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore PA=PB$,$OA\perp PA$,$OB\perp PB$,即 $\angle OAP=\angle OBP=90°$. 在 $\triangle OAP$ 和 $\triangle OBP$ 中,$\because OA=OB$,$\angle OAP=\angle OBP$,$PA=PB$,$\therefore \triangle OAP\cong\triangle OBP$,$\therefore \angle AOP=\angle BOP=\frac{1}{2}\angle AOB$. $\because \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$,$\therefore \angle ACB=\angle AOP$,$\therefore OP\parallel CB$.

点拨:连接 OB,利用三角形全等证出对应角相等,再利用圆周角定理得出两角相等,进而证出两直线平行.

14. **解**:(1) $\angle BAC>\angle BDC$. 理由:设 BD 与 $\odot O$ 的交点为 E,连接 CE.

$\because \angle BEC$ 是 $\triangle CDE$ 的一个外角,

$\therefore \angle BEC>\angle BDC$.

又 $\because \angle BEC=\angle BAC$,

$\therefore \angle BAC>\angle BDC$.

(2) $\angle BAC<\angle BDC$. 理由:延长 BD 交 $\odot O$ 于点 E,连接 CE.

$\because \angle BDC$ 是 $\triangle CDE$ 的一个外角,

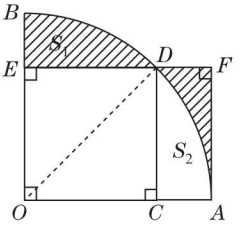
$\therefore \angle BEC<\angle BDC$.

又 $\because \angle BEC=\angle BAC$,

$\therefore \angle BAC<\angle BDC$.

【灵活运用】

15. **解**:如图,连接 OD. 因为四边形 $OCDE$ 为正方形,所以 $S_{\triangle OED}=S_{\triangle OCD}$,$\angle BOD=\angle AOD=45°$,$OA=OB=OD=\sqrt{2}$. 所以 $S_{扇形OBD}=S_{扇形ODA}$,所以 $S_1=S_2$,所以 $S_{阴影}=S_{矩形ACDF}=(\sqrt{2}-1)\times 1=\sqrt{2}-1$.



(第 15 题图)

*16. **解**:因为 BD 和 BE 分别切 $\odot O$ 于点 D 和 E,所以 $BD=BE=6$. 因为 AD 和 AF 分别切 $\odot O$ 于点 D 和 F,所以 $AD=AF=4$. 同理 $CE=CF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AB=AD+BD=10$,设 $CF=x$,则 $BC=6+x$,$AC=4+x$. 因为 $AB^2=BC^2+AC^2$,所以 $10^2=(6+x)^2+(4+x)^2$,解得 $x=2$ 或 $x=-12$(舍去). 连接 OE、OF,则 $OE\perp BC$,$OF\perp AC$. 又因为 $\angle C=90°$,所以四边形 $OECF$ 为矩形. 又因为 $CF=CE$,所以四边形 $OECF$ 为正方形,所以 $r=OE=CF=2$,即 $\odot O$ 的半径 r 等于 2.

17. **解**:(1) 连接 OB. $\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 B,$\therefore OB\perp AB$,$\therefore AB=\sqrt{AO^2-OB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中,过点 B 作 $BD\perp OA$ 于 D,则 $\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$AB \cdot OB = \frac{1}{2}AO \cdot BD$, $\therefore BD = \frac{AB \cdot OB}{AO} = \frac{\sqrt{3} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 在 Rt $\triangle OBD$ 中, $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$, $\therefore$ B 点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设直线 AC 相应的一次函数表达式为 $y = kx + b$.

将 A, B 两点坐标代入 $y = kx + b$, 得 $\begin{cases} 0 = 2k + b, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}k + b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \end{cases}$ $\therefore$ 直线 AC 相应的一次函数表达式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

18. **解:** (1) $\because \angle APB = 30°$,

$\therefore \angle AOB = 2\angle APB = 2 \times 30° = 60°$.

又 $\because OA = OB$, $\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形,

$\therefore OA = OB = AB = 2$, 即 $\odot O$ 的半径为 2.

(2) 过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C. $\because OA = OB$,

$\therefore AC = \frac{1}{2}AB = 1$, $\therefore OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, $\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$. 又 $\because S_{扇形OAB} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi$,

$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AB \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$,

$\therefore$ 阴影部分的面积 $y = S_{扇形OAB} - S_{\triangle AOB} + S_{\triangle APB} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} + x (0 < x \leqslant 2 + \sqrt{3})$.

*19. **解:** $OF = \frac{1}{2}CD$. 理由: 过点 A 作 $\odot O$ 的直径 AG, 交 $\odot O$ 于点 G, 连接 BG, CG, $\therefore AB \perp BG$, $AC \perp CG$. 又 $\because OF \perp AB$, 点 O 为 AG 的中点,

$\therefore OF$ 为 $\triangle ABG$ 的中位线, $\therefore OF = \frac{1}{2}BG$.

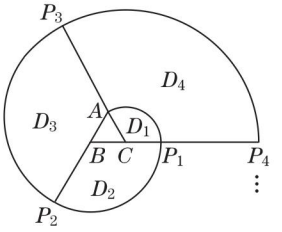
$\because BD \perp AC$, $CG \perp AC$, $\therefore CG // BD$, $\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BG}$,

$\therefore CD = BG$, $\therefore OF = \frac{1}{2}CD$.

20. **解:** (1) 2 (2) 8 (3) 当 $0 < r < 2$ 时, $\odot O$ 上不存在到直线 l 的距离等于 3 的点; 当 $r = 2$ 时, $\odot O$ 上只有 1 个点到直线 l 的距离等于 3; 当 $2 < r < 8$ 时, $\odot O$ 上有 2 个点到直线 l 的距离等于 3; 当 $r = 8$ 时, $\odot O$ 上有 3 个点到直线 l 的距离等于 3; 当 $r > 8$ 时, $\odot O$ 上有 4 个点到直线 l 的距离等于 3.

【探索研究】

21. **解:** (1) 如图.



(第 21 题图)

(2) $\frac{2}{3}\pi$ cm; $\frac{4}{3}\pi$ cm; 2π cm; $\frac{8}{3}\pi$ cm

由题意, 得 $\frac{2}{3}\pi \cdot n \geqslant 2\pi \times 6\,400 \times 10^5$, 解得 $n \geqslant 1.92 \times 10^9$,

所以 n 至少为 1.92×10^9 时, 扇形 D_n 的弧长能够绕地球赤道 1 周.

点拨: 解决本题的关键是观察规律, 另外要注意单位的统一.

22. **解:** (1) $BF = \frac{1}{2}BD$. 理由:

连接 AC. $\because F$ 是 EC 的中点,

$\therefore CF = EF$. 又 $\because BE = AB$,

$\therefore BF$ 是 $\triangle EAC$ 的中位线,

$\therefore BF = \frac{1}{2}AC$. 又 $\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$,

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$, $\therefore BD = AC$.

$\therefore BF = \frac{1}{2}BD$.

(2) 在 $\odot O$ 上存在点 P, 使 $PG = PF$.

理由: 过点 B 作 $BP \perp AE$ 交 $\odot O$ 于点 P,

连接 PG, PF. 由 (1) 知 $BF = \frac{1}{2}BD$.

关注微信公众号 "教辅资料站" 获取更多学习资料

$\because G$ 是 BD 的中点，$\therefore BG=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore BG=BF$.

$\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，$\therefore \angle BAC=\angle ABD$.

易知 $\angle BAC=\angle EBF$，

$\therefore \angle EBF=\angle ABD$.

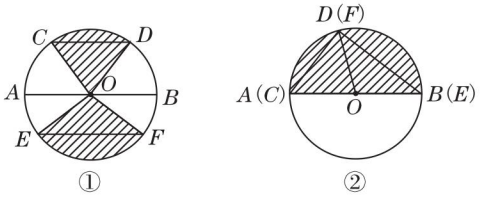
$\because BP\perp AE$，$\therefore \angle ABP=\angle EBP=90°$.

$\therefore \angle PBG=\angle PBF$. 在 $\triangle PBG$ 和 $\triangle PBF$ 中，

$$\begin{cases} PB=PB, \\ \angle PBG=\angle PBF, \\ BG=BF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle PBG\cong\triangle PBF$. $\therefore PG=PF$.

23. **解**：连接 OC，OD，OE，OF，$\because CD\parallel AB\parallel EF$，$\therefore$ 易知 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle OCD}$，$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle OEF}$，$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OCD}+S_{扇形OEF}$（如图①）. $\because AB=10$，$CD=6$，$EF=8$，$\therefore AB^2=CD^2+EF^2$，即以 AB，CD，EF 为边可组成直角三角形，其中 AB 为斜边，$\therefore$ 把图①中阴影部分绕点 O 旋转，可得图②，$\therefore S_{阴影}=\frac{1}{2}S_{\odot O}=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\pi$.



（第 23 题图）

第 3 章 数据的集中趋势和离散程度

3.1 平均数

练习：

1. **解**：小丽该周每天的平均睡眠时间 $\bar{x}=\frac{8+9+7+9+7+8+8}{7}=8(\text{h})$.

2. **解**：由平均数的定义可知 $85=\frac{85+80+x+90}{4}$，解得 $x=85$，所以 x 的值为 85.

3. **解**：首先整理数据，列频数分布表，然后再计算.

身高/cm	160	162	164	165	167	168	169	170	171	172	174	175
划记	一	一	一	下	下	下	下	正	一	正	一	一
频数	1	1	1	2	2	2	2	3	1	3	1	1

$$\bar{x}=\frac{160\times1+162\times1+164\times1+\cdots+171\times1+172\times3+174\times1+175\times1}{20}$$

$=168.5(\text{cm})\approx169\ \text{cm}$.

所以这些队员的平均身高约是 169 cm.

练习：

1. **解**：这 15 天在这个时段通过该路口的汽车平均流量为 $\frac{142\times2+145\times2+157\times5+156\times6}{2+2+5+6}=153$（辆）.

2. **解**：$\bar{x}=5\times25\%+6\times60\%+8\times15\%=6.05$（元），即该食堂销售午餐盒饭的平均价格为 6.05 元.

点拨：由于各价格的“权”不同，因此应用加权平均数来求.

3. **解**：我赞成游客的说法. 理由：

调价前风景区的日平均收入为 $40\times1+40\times1+60\times2+80\times3+100\times3=740$（千元），

调价后风景区的日平均收入为 $30\times1+30\times1+60\times2+90\times3+110\times3=780$（千元）.

因为 $\frac{780-740}{740}\approx5.4\%$，所以我赞成游客的说法.

习题 3.1：

1. **解**：这个班级学生的平均年龄 $\bar{x}=\frac{13\times5+14\times30+15\times5}{5+30+5}=14$（岁）.

2. 略.

3. **解**：$\bar{x}=\frac{4\times1+8\times2+6\times3+2\times4}{20}=2.3$（个），即该足球队平均每场的进球数是 2.3 个.

4. **解**：设在每根钢材上截下部分的长度为 x m. 由题意得

$$x+\frac{1}{5}\times(0.30+0.25+0.15+0.10+0.20)$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=3.21$,

即 $x+\frac{1}{5}\times 1=3.21$,解得 $x=3.01$.

即在每根钢材上截下部分的长度为3.01 m.

5. **解**:这5个人可能的年龄是12岁,13岁,13岁,13岁,14岁或8岁,9岁,10岁,14岁,24岁等.如果按年龄从大到小的顺序排列,小丽可以排第一、二、三或四.

6. **解**:甲的平均成绩为

$$\frac{90\times 3+80\times 3+85\times 2+78\times 2}{3+3+2+2}=83.6(\text{分}),$$

乙的平均成绩为

$$\frac{78\times 3+82\times 3+85\times 2+88\times 2}{3+3+2+2}=82.6(\text{分}).$$

所以如果把听、说、读、写的成绩按3∶3∶2∶2计算素质测试平均成绩,那么甲的平均成绩最高.

甲的平均成绩为

$$\frac{90\times 2+80\times 2+85\times 3+78\times 3}{2+2+3+3}=82.9(\text{分}),$$

乙的平均成绩为

$$\frac{78\times 2+82\times 2+85\times 3+88\times 3}{2+2+3+3}=83.9(\text{分}),$$

所以如果把听、说、读、写的成绩按2∶2∶3∶3计算素质测试平均成绩,那么乙的平均成绩最高.

7. **解**:(1)$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(90\times 1+93\times 1+102\times 2+113\times 3+114\times 1+120\times 2)=108$(度).

(2)估计该公司该月的用电量为 $108\times 30=3\,240$(度).

8. **解**:(1)总体指该灯泡厂生产的所有的这种型号灯泡的使用寿命,样本指抽取的400只这种型号灯泡的使用寿命.

(2)$\bar{x}=$

$$\frac{550\times 20+650\times 80+750\times 108+850\times 92+950\times 76+1\,050\times 24}{400}$$

$=799$(h),即样本平均数是799 h.

(3)估计该灯泡厂生产的这种型号灯泡的平均使用寿命为799 h.

3.2 中位数与众数

练习:

1. **解**:(1)$\bar{x}=\frac{50+96+100+90+90+120+500+90}{8}=142$(册),即平均每个班级捐书142册.

(2)捐书册数的中位数是$\frac{96+90}{2}=93$(册),众数是90册.

2. **解**:(1)$\bar{x}=\frac{5\times 1+6\times 2+7\times 7+8\times 6+9\times 3+10\times 1}{20}$

$=7.55$(环),即该小组这次射击的平均成绩是7.55环.

(2)这组数据的中位数是$\frac{7+8}{2}=7.5$(环),众数是7环.

练习:

1. **解**:(1)甲厂家的理由是抽取的8件产品使用寿命的众数是8年;乙厂家的理由是抽取的8件产品使用寿命的平均数 $\bar{x}_{乙}=\frac{4+6+6+6+8+9+12+13}{8}=8$(年);丙厂家的理由是抽取的8件产品使用寿命的中位数是$\frac{7+9}{2}=8$(年).

(2)乙厂家的产品使用寿命更长一些.理由:从甲厂家抽取的8件产品的平均使用寿命 $\bar{x}_{甲}=\frac{3+4+5+6+8+8+8+10}{8}=6.5$(年),从丙厂家抽取的8件产品的平均使用寿命 $\bar{x}_{丙}=\frac{3+3+4+7+9+10+11+12}{8}=7.375$(年).因为$8>7.375>6.5$,所以乙厂家的产品使用寿命更长一些.(答案不唯一)

2. **解**:(1)$\bar{x}=\frac{12\,000\times 1+8\,000\times 1+2\,000\times 18}{1+1+18}=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2 800(元),即该公司职工月工资的平均数是2 800 元.中位数是2 000 元,众数是2 000元.

(2)我认为用中位数或众数描述该公司职工月工资的"集中趋势"较为合适.因为这组数据中有个别数据与其他数据的大小差异很大,所以用中位数或众数来描述这组数据的"集中趋势"较为合适.

习题 3.2:

1. 解:鞋厂最感兴趣的是这组数据的众数.

2. 解:由题可知这 10 天中该市最低气温的众数是7 ℃,中位数是$\frac{7+8}{2}=7.5$(℃).

3. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{40}(10+40+\cdots+20)=27$(min),即平均数是27 min. 将这组数据按从小到大的顺序排列,第20 个数据为20 min,第 21 个数据为30 min,故中位数为$\frac{20+30}{2}=25$(min). 数据20 min出现的次数最多,为 12 次,故众数为20 min.

(2)我认为用中位数描述该班全体同学上学路上所花时间的"集中趋势"较为合适.因为这组数据中有个别数据与其他数据的大小差异很大且中位数比众数更接近于平均数,所以用中位数来描述该班全体同学上学路上所花时间的"集中趋势"较为合适.(答案不唯一) **点拨:**根据一组数据的总体情况,确定选择哪一种"数"作为这组数据的代表比较合情合理,除了正确区分平均数、众数、中位数的特征外,还要结合实际情况.

4. 解:(1)$\bar{x}=$

$$\frac{600\times1+500\times4+400\times4+350\times6+300\times7+200\times3}{25}$$

=360(件),即该公司营销人员该月销售量的平均数是 360 件. 中位数是 350 件,众数是300 件.

(2)我认为应制定每位营销人员的月销售量指标为350 件. 因为它是中位数,所以多数人能完成或超额完成,少数人经过努力也能完成.(答案不唯一)

5. 解:(1)$\bar{x}_{七}=\frac{80+86+88+80+88+99+80+74+91+89}{10}$

=85.5(分),即七年级参赛学生成绩的平均数是85.5 分. 中位数是$\frac{86+88}{2}=87$(分),众数是80 分.

$\bar{x}_{八}=\frac{85+85+87+97+85+76+88+77+87+88}{10}=$85.5(分),即八年级参赛学生成绩的平均数是85.5 分.中位数是$\frac{85+87}{2}=86$(分),众数是 85分.

$\bar{x}_{九}=\frac{82+80+78+78+81+96+97+88+89+86}{10}=$85.5(分),即九年级参赛学生成绩的平均数是85.5 分. 中位数是$\frac{82+86}{2}=84$(分),众数是78 分.

因为3 个年级参赛学生成绩的平均数相同,所以从中位数的角度分析,七年级参赛学生的成绩最好;从众数的角度分析,八年级参赛学生的成绩最好.

(2)九年级的选手实力更强一些. 因为七年级选出的参加决赛的3 名学生的成绩是89 分、91分、99 分,八年级是88 分、88 分、97 分,九年级是89 分、96 分、97 分,而九年级3 名学生成绩的平均数最高.

6. 略.

3.3 用计算器求平均数

练习:

1. 解:利用计算器计算,得$\bar{x}=3$ 个.

2. 解:利用计算器计算,得$\bar{x}=62.2$ 字/分.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

习题 3.3:

1. 解:利用计算器计算,得 $\bar{x}\approx 806.8$ mm.

2. 解:利用计算器计算,得 $\bar{x}=161$ cm.

3.4 方差

练习:

1. 解:$12-(-7)=19(℃)$.

点拨:某日最高气温与最低气温的差就是该日气温的极差.

2. 解:甲组数据的极差为 $15-5=10$,乙组数据的极差为 $14-6=8$. $\because 10>8$,$\therefore$ 甲组数据的变化范围比乙组大.

$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(5+15+\cdots+9.9)=10$,$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(9+11+\cdots+10)=10$,$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(5-10)^2+(15-10)^2+\cdots+(9.9-10)^2]=\frac{1}{10}\times 51.3=5.13$,$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(9-10)^2+(11-10)^2+\cdots+(10-10)^2]=\frac{1}{10}\times 60=6$,于是 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$,$\therefore$ 甲组数据比乙组整齐.

点拨:求方差必须先求平均数.

3. 解:该市这两年中,2012 年 3 月上旬的日最高气温比较稳定. 理由:$\bar{x}_{2011年}=\frac{1}{10}\times(11+12+\cdots+17)=13(℃)$,$\bar{x}_{2012年}=\frac{1}{10}\times(12+13+\cdots+16)=13(℃)$.

$s_{2011年}^2=\frac{1}{10}\times[(11-13)^2+(12-13)^2+\cdots+(17-13)^2]=\frac{1}{10}\times 90=9(℃^2)$,$s_{2012年}^2=\frac{1}{10}\times[(12-13)^2+(13-13)^2+\cdots+(16-13)^2]=\frac{1}{10}\times 66=6.6(℃^2)$,因为 $s_{2011年}^2>s_{2012年}^2$,所以该市这两年中,2012 年 3 月上旬的日最高气温比较稳定.

习题 3.4:

1. 解:(1)甲机床所加工的零件直径的极差是 $10.05-9.96=0.09$(mm),乙机床所加工的零件直径的极差是 $10.02-9.97=0.05$(mm);

$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(10.05+10.02+9.97+9.96+10.00)=\frac{1}{5}\times 50=10$(mm),$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(10.00+10.01+10.02+9.97+10.00)=\frac{1}{5}\times 50=10$(mm);

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(10.05-10)^2+(10.02-10)^2+\cdots+(10.00-10)^2]=\frac{1}{5}\times 5.4\times 10^{-3}=1.08\times 10^{-3}$(mm^2),$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(10.00-10)^2+(10.01-10)^2+\cdots+(10.00-10)^2]=\frac{1}{5}\times 1.4\times 10^{-3}=2.8\times 10^{-4}$(mm^2).

(2)因为 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$,所以乙机床加工的产品质量比较稳定.

点拨:此题考查刻画数据离散程度的两个量:极差和方差. 一组数据的极差和方差越小,这组数据就越稳定.

2. 解:$\bar{x}=\frac{1}{18}\times(30.0+29.8+30.1+\cdots+29.9)=\frac{1}{18}\times 540=30.0$(mm).

$s^2=\frac{1}{18}\times[(30.0-30.0)^2+(29.8-30.0)^2+\cdots+(29.9-30.0)^2]=\frac{1}{18}\times 0.36=0.02$(mm^2). 故估计该商店采购的这批零件直径的方差为 0.02 mm^2.

3. 解:我认为选派乙运动员参赛更好些. 理由:$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(12.8+12.9+\cdots+12.9)=\frac{1}{10}\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$129=12.9(s)$，$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(12.9+12.8+\cdots+12.8)=\frac{1}{10}\times129=12.9(s)$，$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(12.8-12.9)^2+(12.9-12.9)^2+\cdots+(12.9-12.9)^2]=\frac{1}{10}\times0.24=0.024(s^2)$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(12.9-12.9)^2+(12.8-12.9)^2+\cdots+(12.8-12.9)^2]=\frac{1}{10}\times0.08=0.008(s^2)$.

因为$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$，所以选派乙运动员参赛更好些.

点拨：在平均数相同时，比较方差的大小，方差越小，越稳定.

4. 解：(1)$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{6}\times(7+10+8+10+12+13)=10(台)$，

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{6}\times(9+10+11+9+12+9)=10(台)$，$s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[(7-10)^2+(10-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(13-10)^2]=\frac{13}{3}(台^2)$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(9-10)^2+(12-10)^2+(9-10)^2]=\frac{4}{3}(台^2)$.

(2)略.

3.5 用计算器求方差

练习：

1. 解：用计算器计算可得：$\bar{x}_{甲}=540\ kg$，$\bar{x}_{乙}=540\ kg$，$s_{甲}^2\approx3\ 267\ kg^2$，$s_{乙}^2\approx533\ kg^2$.

2. 解：(1)将两组数据分别减去 400 g，则两组新数据分别为(单位：g)：甲：1，0，8，6，10，9，0，−7，−6，−6；乙：3，4，2，−4，−1，1，5，−3，2，−1.

$\bar{x'}_{甲}=\frac{1}{10}\times[1+0+\cdots+(-6)]=1.5(g)$，则$\bar{x}_{甲}=\bar{x'}_{甲}+400=401.5(g)$.

$\bar{x'}_{乙}=\frac{1}{10}\times[3+4+\cdots+(-1)]=0.8(g)$，则$\bar{x}_{乙}=\bar{x'}_{乙}+400=400.8(g)$.

用计算器计算可得 $s_{甲}^2=38.05(g^2)$，$s_{乙}^2=7.96(g^2)$.

(2)因为$s_{甲}^2>s_{乙}^2$，所以乙包装机包装的质量较稳定.

习题 3.5：

1. 解：用计算器计算可得：$\bar{x}_{甲}\approx14.68$ 元，$\bar{x}_{乙}\approx16.16$ 元. 甲股票收盘价格的极差为 15.12 − 14.11 = 1.01(元)，乙股票收盘价格的极差为 16.80 − 15.49 = 1.31(元). $s_{甲}^2\approx0.09(元^2)$，$s_{乙}^2\approx0.16(元^2)$.

2. 解：(1)序号为 1 ~ 10 的试验中，“正面朝上的频率”的极差为：0.571 − 0.400 = 0.171. 用计算器计算可得其方差 $s_1^2\approx0.003\ 9$.

序号为 11 ~ 20 的试验中，“正面朝上的频率”的极差为：0.506 − 0.462 = 0.044. 用计算器计算可得其方差 $s_2^2\approx0.000\ 2$.

(2)因为$s_2^2<s_1^2$，所以序号为 11 ~ 20 的试验中，“正面朝上的频率”更为稳定.

复习题

【复习巩固】

1. 解：$\bar{x}=\frac{80\times3+85\times2}{5}=82(分)$，即小明这 5 门学科的平均成绩为 82 分.

2. 解：$\bar{x}=0\times15\%+2\times10\%+4\times25\%+6\times30\%+8\times15\%+10\times5\%=4.7(分)$，即该题的平均得分为 4.7 分.

3. 解：$\bar{x}=\frac{14\times4+15\times21+16\times24+17\times1}{50}=15.44$(岁)，即这个班级学生年龄的平均数是 15.44 岁，众数是 16 岁，中位数是$\frac{15+16}{2}=15.5$(岁).

4. 解：若取 $a=76$，则每个数据与 a 的差分别为：−1，1，−2，4，2，1，3，−2，4，0，0，1，0，4，−2，1，4，2，−2，2. $\bar{x'}=\frac{1}{20}\times[(-1)+1+\cdots+2]=1$，则$\bar{x}=\bar{x'}+76=77$. 用计算器计算，得 $s^2=4.3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解: $\bar{x}_{甲}=\frac{132\times1+134\times1+135\times5+136\times2+137\times1}{10}$

$=135$(个),

$\bar{x}_{乙}=\frac{133\times1+134\times4+135\times1+136\times2+137\times2}{10}=135$(个),

用计算器计算,得 $s_{甲}^2=1.6$ 个^2,$s_{乙}^2=1.8$个^2.

所以甲班参赛学生比赛成绩的平均数为135个,中位数为135个,众数为135个,方差为1.6个^2.

乙班参赛学生比赛成绩的平均数为135个,中位数为134.5个,众数为134个,方差为1.8个^2.

6. 解:(1)$88\times10-(97+91+85+91+84+86+85+82+88)=91$(分),即第10场比赛的得分为91分.

(2)这10场比赛得分的中位数是$\frac{86+88}{2}=87$(分),众数是91分.

$s^2=\frac{1}{10}\times[(97-88)^2+(91-88)^2+\cdots+(91-88)^2]=\frac{1}{10}\times182=18.2$(分^2),即这10场比赛得分的方差为18.2分^2.

7. 解:选派乙运动员参赛更好些. 因为 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{8}\times(52.1+52.2+\cdots+52.2)=\frac{1}{8}\times420=52.5$(s),$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{8}\times(52+52.4+\cdots+52.5)=\frac{1}{8}\times420=52.5$(s).

选手甲成绩的极差为$53.1-52.1=1$(s),选手乙成绩的极差为$53-52=1$(s).

$s_{甲}^2=\frac{1}{8}\times[(52.1-52.5)^2+(52.2-52.5)^2+\cdots+(52.2-52.5)^2]=\frac{1}{8}\times0.96=0.12$(s^2),

$s_{乙}^2=\frac{1}{8}\times[(52-52.5)^2+(52.4-52.5)^2+\cdots+(52.5-52.5)^2]=\frac{1}{8}\times0.82=0.1025$(s^2).

由以上计算可知:$s_{甲}^2>s_{乙}^2$,所以选手乙的成绩更稳定些,故选派乙运动员参赛更好些.

点拨:本题在平均数和极差都相同的条件下,通过方差可比较哪位运动员成绩更稳定.

8. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{14}\times(20\times1+17\times1+13\times2+8\times5+5\times3+4\times2)=9$(辆),众数为8辆,中位数为8辆.

(2)不合理,若平均数9辆为销售定额,则多数人无法或不可能完成,会挫伤销售人员的积极性.销售定额为8辆比较合理,因为它既是众数,又是中位数,所以多数人能完成或超额完成,少数人经过努力也能完成.

【灵活运用】

9. 解:若这组数据从小到大排列为x,6,8,10,

则$\frac{x+6+8+10}{4}=\frac{6+8}{2}$,解得$x=4$.

若这组数据从小到大排列为6,x,8,10,

则$\frac{6+x+8+10}{4}=\frac{x+8}{2}$,解得$x=8$.

若这组数据从小到大排列为6,8,x,10,

则$\frac{6+8+x+10}{4}=\frac{8+x}{2}$,解得$x=8$.

若这组数据从小到大排列为6,8,10,x,

则$\frac{6+8+10+x}{4}=\frac{8+10}{2}$,解得$x=12$.

所以x的值为4,8或12.

10. 解:(1)

	平均数	方差	中位数	命中10环次数
甲	7环	1.2环^2	7环	0
乙	7环	5.4环^2	7.5环	1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

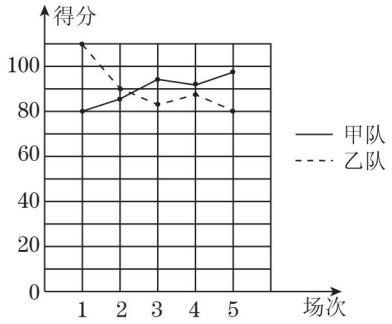
(2)(答案不唯一)①因为 $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$,所以甲的成绩比乙稳定;②甲的成绩在平均数上下波动,而乙处于上升趋势,从第4次以后乙的成绩不低于甲,乙较有潜力.

点拨:在分析处理数据时,如果分析角度不同,那么所得结论也会不同.

11. 解:(1)如图所示.

(2)$\bar{x}_{甲} = \frac{1}{5} \times (80 + 86 + 95 + 91 + 98) = 90$(分),

$\bar{x}_{乙} = \frac{1}{5} \times (110 + 90 + 83 + 87 + 80) = 90$(分).



(第11题图)

$s_{甲}^2 = \frac{1}{5} \times [(80 - 90)^2 + (86 - 90)^2 + \cdots + (98 - 90)^2] = 41.2$(分^2),$s_{乙}^2 = \frac{1}{5} \times [(110 - 90)^2 + (90 - 90)^2 + \cdots + (80 - 90)^2] = 111.6$(分^2).

(3)甲、乙两队这5场比赛成绩的平均数相同,而甲队比赛成绩呈上升趋势,甲队后3场比赛成绩均高于乙队,并且 $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$,所以我认为甲队参赛更能取得好成绩.

12. 解:(1)$\bar{x} = \frac{15 \times 1.6 + 15 \times 2.0 + 10 \times 1.8}{15 + 15 + 10} = 1.8$(kg),

即样本中平均每条鱼的质量为1.8 kg.

(2)估计鱼塘中该种鱼的总质量为 $1.8 \times 2\,000 = 3\,600$(kg).

(3)出售该种鱼的收入 y(元)与出售该种鱼的质量 x(kg)之间的函数关系式为 $y = 12x$,且 $0 \leqslant x \leqslant 3\,600$.

【探索研究】

13. 解:(1)$\bar{x}_{甲} = \frac{1}{10} \times (12 + 13 + 11 + \cdots + 11) = 13$,$\bar{x}_{乙} = \frac{1}{10} \times (11 + 16 + 6 + \cdots + 16) = 13$,$T_{甲} = \frac{1}{10} \times (|12 - 13| + |13 - 13| + |11 - 13| + \cdots + |11 - 13|) = 1.6$,$T_{乙} = \frac{1}{10} \times (|11 - 13| + |16 - 13| + |6 - 13| + \cdots + |16 - 13|) = 3.4$.

因为 $T_{甲} < T_{乙}$,所以乙组数据波动较大.

(2)$s_{甲}^2 = \frac{1}{10} \times [(12 - 13)^2 + (13 - 13)^2 + \cdots + (11 - 13)^2] = \frac{1}{10} \times 36 = 3.6$,$s_{乙}^2 = \frac{1}{10} \times [(11 - 13)^2 + (16 - 13)^2 + \cdots + (16 - 13)^2] = \frac{1}{10} \times 158 = 15.8$,$s_{甲}^2 < s_{乙}^2$,所以乙组数据波动较大.

14. 解:$\bar{x} = \frac{1}{n} \times (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$,$\bar{y} = \frac{1}{n} \times (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$,由 $y_1 = kx_1 + b$,$y_2 = kx_2 + b$,$\cdots$,$y_n = kx_n + b$,得 $\bar{y} = \frac{1}{n} \times (kx_1 + b + kx_2 + b + \cdots + kx_n + b) = \frac{k}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + b = k\bar{x} + b$. $s_x^2 = \frac{1}{n} \times [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$,$s_y^2 = \frac{1}{n} \times [(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2] = \frac{1}{n}[(kx_1 + b - k\bar{x} - b)^2 + (kx_2 + b - k\bar{x} - b)^2 + \cdots + (kx_n + b - k\bar{x} - b)]^2 = \frac{1}{n} \times [k^2(x_1 - \bar{x})^2 + k^2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + k^2(x_n - \bar{x})^2] = \frac{k^2}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] = k^2 s_x^2$.

15. 略.

第4章 等可能条件下的概率

4.1 等可能性

练习:

1. 解:断点出现在电缆的各个位置的可能性相同.

2. 解:会出现5种可能的结果:摸到写有C的纸

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

条,摸到写有 H 的纸条,摸到写有 I 的纸条,摸到写有 N 的纸条,摸到写有 A 的纸条. 每张纸条被摸到的机会都相同,因此摸到写有 C、H、I、N、A 的纸条的可能性相同,这 5 种结果的出现是等可能的.

3. **解**:把 7 个红球编号为红球 1、红球 2、…、红球 7,3 个白球编号为白球 1、白球 2、白球 3. 搅匀后从中任意摸出 1 个球,会出现 10 种可能的结果:摸到红球 1、…、摸到红球 7、摸到白球 1、…、摸到白球 3. 这些结果的出现是等可能的.

习题 4.1:

1. **解**:所有可能摆放的结果:上中下、上下中、中上下、中下上、下中上、下上中. 因为是任意摆放的,所以这些结果的出现是等可能的.

2. **解**:把两名女生编号为女生 1、女生 2,会出现选男生,选女生 1,选女生 2 这 3 种可能的结果. 每名学生被选到的机会都相同,因此选男生、女生 1、女生 2 的可能性相同,这 3 种结果的出现是等可能的.

3. **解**:(1)会出现红桃 2、红桃 3、红桃 4、红桃 5、红桃 6、红桃 7、红桃 8、红桃 9、红桃 10 这 9 种可能的结果. 这些结果的出现是等可能的.

(2)由(1)可知这 9 种结果的出现是等可能的,因为牌面是奇数的牌与牌面是偶数的牌的张数不同,所以抽到牌面是奇数的牌与抽到牌面是偶数的牌不是等可能的.

4. **解**:摸到白球的可能性大,因为每个球被摸到的可能性都相同,但白球的个数多于红球,所以摸到白球的可能性大.

4.2 等可能条件下的概率(一)

练习:

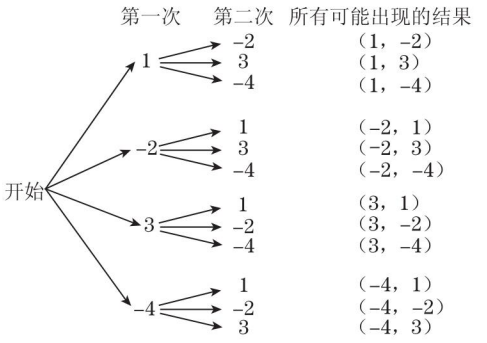
1. **解**:四个选项中,每个选项被选到的可能性是相同的,所以所选选项恰好正确的概率是$\frac{1}{4}$.

2. $\frac{3}{10}$;$\frac{7}{10}$;0;1

3. 略.

练习:

1. **解**:(1)树状图如图.

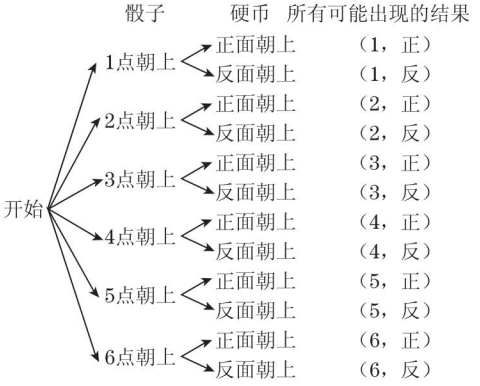


(第 1 题图)

(2)由第 1 题图知,共有 12 种可能出现的结果,并且它们都是等可能的. "2 次摸出的乒乓球球面上数字的积为偶数"记为事件 A,它的发生有 10 种可能,所以 $P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

2. **解**:(1)树状图如图.

(2)由第 2 题图可知,共有 12 种可能出现的结果,并且它们都是等可能的. 所以各种结果出现的概率都是$\frac{1}{12}$.



(第 2 题图)

练习:

1. **解**:用表格列出所有可能出现的结果:

结果 第一次摸球 \ 第二次摸球	白	红
白	(白,白)	(白,红)
红	(红,白)	(红,红)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由表格可知,共有4种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.“2次摸到的球颜色相同”记为事件A,它的发生有2种可能,所以事件A发生的概率$P(A)=\frac{1}{2}$,即2次摸到的球颜色相同的概率是$\frac{1}{2}$.

2. **解**:(1)用表格列出所有可能出现的结果:

结果 / 甲 \ 乙	-2	1	6
-7	(-7,-2)	(-7,1)	(-7,6)
-1	(-1,-2)	(-1,1)	(-1,6)
3	(3,-2)	(3,1)	(3,6)

(2)由表格可知,共有9种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.“这个点落在第三象限”记为事件A,它的发生有2种可能,所以事件A发生的概率$P(A)=\frac{2}{9}$.

习题4.2:

1. **解**:(1)不正确.该篮球运动员投篮1次,“投中”和“未投中”的可能性不尽相同,所以这种说法不正确.

(2)不正确.因为这3种豆子大小和形状都不相同,所以从中摸出每一种豆子的可能性是不同的,从中摸出1颗豆子有3种可能的结果:摸到黄豆、摸到绿豆、摸到豌豆,这3种结果不是等可能的,所以这种说法不正确.

2. **解**:(1)“朝上一面的点数是7”记为事件A,则事件A发生的概率$P(A)=0$.

(2)当朝上一面的点数是2、4、6之一时,“朝上一面的点数是偶数”这一事件(记为事件B)才能发生,于是事件B发生的概率$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(3)当朝上一面的点数是1、2、3、4、5、6之一时,“朝上一面的点数不大于6”这一事件(记为事件C)才能发生,于是事件C发生的概率$P(C)=\frac{6}{6}=1$.

3. **解**:(1)一副扑克牌中,每一张牌被抽到的可能性是相同的,因此P(抽到“大王”)$=\frac{1}{54}$;(2)P(抽到“A”)$=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$;(3)$P$(抽到“红桃”)$=\frac{13}{54}$.

4. **解**:把袋中的球编号为白1,白2,红,用表格列出所有可能出现的结果.

结果 / 第一次摸球 \ 第二次摸球	白1	白2	红
白1	(白1,白1)	(白1,白2)	(白1,红)
白2	(白2,白1)	(白2,白2)	(白2,红)
红	(红,白1)	(红,白2)	(红,红)

由表格可知,共有9种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.“2次都摸到红球”记为事件A,它的发生有1种可能,所以事件A发生的概率$P(A)=\frac{1}{9}$,即2次都摸到红球的概率是$\frac{1}{9}$.

5. **解**:把3种图案编号为1、2、3,用表格列出所有可能出现的结果.

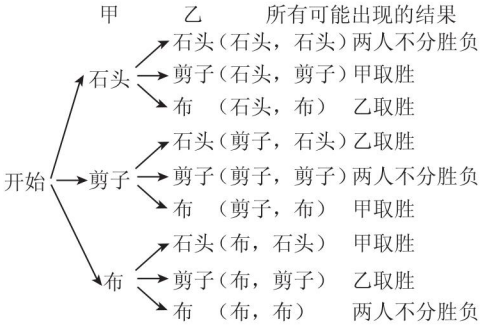
第一次抛掷 \ 结果 / 第二次抛掷	1	2	3	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)

由表格可知,共有36种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.“朝上一面出现相同图案”记为事件B,它的发生有12种可能,所以事件B发生的概率$P(B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$,即朝上一面出现相同图案的概率是$\frac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解:由题易知,共有16种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.“所选的两个选项都正确”记为事件A,它的发生有1种可能,所以事件A发生的概率$P(A)=\frac{1}{16}$,即所选的两个选项都正确的概率为$\frac{1}{16}$.

7. 解:画树状图如图.



(第7题图)

由图可知,共有9种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.

(1)“甲取胜”的发生有3种可能,所以P(甲取胜)$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(2)“乙取胜”的发生有3种可能,所以P(乙取胜)$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

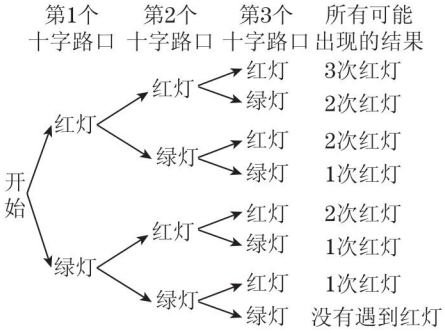
(3)“甲、乙两人不分胜负”的发生有3种可能,所以P(甲、乙两人不分胜负)$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

8. 解:抛掷一枚质地均匀的骰子2次,朝上一面的点数之和会出现11种可能结果:2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12. 它们不是等可能的. 点数之和为8的概率是$\frac{5}{36}$. 点数之和为7时,概率最大.

9. 解:如图,用树状图列出所有可能的结果.

由图可知,共有8种可能出现的结果,并且它们都是等可能的.“至少遇到1次红灯”的发生有7种可能,所以P(至少遇到1次红灯)$=\frac{7}{8}$.

“没有遇到红灯”的发生有1种可能,所以P(没有遇到红灯)$=\frac{1}{8}$.



(第9题图)

4.3 等可能条件下的概率(二)

练习:

1. 解:(1)P(指针指向6)$=\frac{1}{6}$;(2)P(指针指向偶数)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;(3)P(指针指向小于4的数)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;(4)P(指针指向不大于4的数)$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$;(5)P(指针指向大于0的数)$=\frac{6}{6}=1$.

2. 解:击中白色小正方形的概率较大. 因为飞镖击中每一块小正方形是等可能的,所以投掷飞镖1次,P(击中白色小正方形)$=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$,$P$(击中黑色小正方形)$=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$,$\frac{7}{12}>\frac{5}{12}$,所以击中白色小正方形的概率较大.

习题4.3:

1. 略. **2.** 略.

3. 解:(1)不公平. 因为P(积是偶数)$=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$,$P$(积是奇数)$=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$,$\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$,所以甲获胜的概率大,所以这样的规则不公平.

(2)设计新规则:当转盘停止转动时,将指针指

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

向的2个数字相加，如果所得的和是偶数，那么甲获胜；如果所得的和是奇数，那么乙获胜．因为$P(\text{和是偶数})=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$，$P(\text{和是奇数})=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$，所以这样的规则公平．

复习题

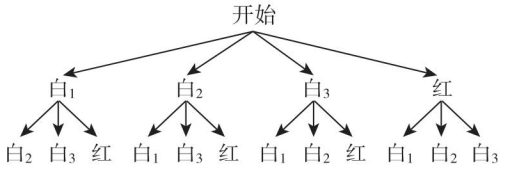
【复习巩固】

1. 解：因为每件产品被抽到的可能性相同，所以$P(\text{恰好抽到次品})=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$.

2. 解：(1)$P(\text{摸到白球})=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$；(2)$P(\text{摸到的球不是白球})=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$；(3)$P(\text{摸到黄球})=\frac{3}{10}$；(4)$P(\text{摸到的球不是黄球})=\frac{7}{10}$；(5)$P(\text{摸到红球})=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$；(6)$P(\text{摸到的球不是红球})=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

3. 解：小丽的说法不正确．因为出现1次正面朝上和1次反面朝上包含两种情况：第1次正面朝上、第2次反面朝上和第1次反面朝上、第2次正面朝上，所以她的说法不正确．

4. 解：树状图如图．



（第4题图）

由图可知，共有12种可能出现的结果，且它们是等可能的，所以$P(\text{摸出2个球恰好是1个红球、1个白球})=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

5. 解：列出所有可能出现的结果：(左1，左2)，(左1，右1)，(左1，右2)，(左2，左1)，(左2，右1)，(左2，右2)，(右1，左1)，(右1，左2)，(右1，右2)，(右2，左1)，(右2，左2)，(右2，右1)，共有12种可能出现的结果，并且它们都是等可能的．“两只手套恰好配成一副”记为事件A，它的发生有8种可能，所以$P(A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

6. 解：任选一条从甲地到丙地的路线，会出现6种可能的结果：A_1B_1，A_1B_2，A_1B_3，A_2B_1，A_2B_2，A_2B_3，它们是等可能的．所以$P(\text{恰好选到最短路线})=\frac{1}{6}$.

7. 解：从中任取3根细木棒，会出现10种等可能的结果：(1 cm，3 cm，5 cm)、(1 cm，3 cm，7 cm)、(1 cm，3 cm，9 cm)、(1 cm，5 cm，7 cm)、(1 cm，5 cm，9 cm)、(1 cm，7 cm，9 cm)、(3 cm，5 cm，7 cm)、(3 cm，5 cm，9 cm)、(3 cm，7 cm，9 cm)、(5 cm，7 cm，9 cm)．当取得的3根木棒的长度为(3 cm，5 cm，7 cm)、(3 cm，7 cm，9 cm)、(5 cm，7 cm，9 cm)之一时，“3根恰好能搭成一个三角形”这一事件（记为事件A）才能发生，于是$P(A)=\frac{3}{10}$.

8. 解：从由5人组成的班委会中任选2人，共有20种等可能的结果，其中主持人为“1名男生和1名女生”有12种可能的结果，所以所选主持人恰好为1名男生和1名女生的概率为$\frac{3}{5}$.

9. 解：乙、丙、丁3人等可能地坐到其他3个座位上，会出现6种等可能的结果：（按逆时针顺序）甲乙丙丁、甲乙丁丙、甲丙乙丁、甲丙丁乙、甲丁乙丙、甲丁丙乙．当出现甲丙乙丁或甲丁乙丙时，“乙与甲不相邻而坐”这一事件（记为事件A）才能发生，于是事件A发生的概率$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$．当出现甲乙丙丁、甲乙丁丙、甲丙丁乙、甲丁丙乙时，“丙与丁相邻而坐”这一事件

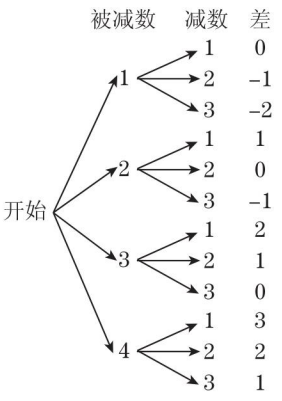
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(记为事件 B)才能发生,于是事件 B 发生的概率 $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

10. 略.

【灵活运用】

11. **解:**画树状图如图.



(第 11 题图)

(1)由图可知,共有 12 种可能出现的结果,并且它们都是等可能的."这两个数的差为 0"记为事件 A,它的发生有 3 种可能,所以 $P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

(2)P(甲获胜)$=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$,$P$(乙获胜)$=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

所以这样的规则不公平. 设计新规则:当抽到的这两个数的差为非正数时,甲获胜;否则,乙获胜.(设计新规则不唯一)

12. **解:**从题图中 7 个无阴影的小正方形中任选 1 个,会出现 7 种等可能的结果. 只有当选取上面 4 个小正方形中任一个时,"所选小正方形与题图中 5 个有阴影的小正方形能折叠成一个正方体"这一事件(记为事件 A)才能发生,于是 $P(A)=\frac{4}{7}$.

13. **解:**棱长为 4 的正方体可以分割成 64 个棱长为 1 的小正方体. 其中没有涂红色的小正方体有 8 个,一个面涂有红色的有 24 个,两个面涂有红色的有 24 个,三个面涂有红色的有 8 个. 记这个小正方体至少有一个面涂有红色为事件 A,则 $P(A)=\frac{24+24+8}{64}=\frac{56}{64}=\frac{7}{8}$.

14. **解:**有放回地先后摸球 3 次,会出现 64 种等可能的结果. 有 1 次摸到红球有 24 种可能的结果,有 2 次摸到红球有 24 种可能的结果,3 次都摸到红球有 8 种可能的结果,3 次摸到的球的颜色都不相同有 12 种可能的结果.

(1)P(3 次都摸到红球)$=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$;

(2)P(至少有 1 次摸到红球)$=\frac{24+24+8}{64}=\frac{7}{8}$;

(3)P(至少有 2 次摸到红球)$=\frac{24+8}{64}=\frac{1}{2}$;

(4)P(3 次摸到的球的颜色都不相同)$=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$.

【探索研究】

15. 略.

16. **解:**用表格列出所有可能出现的结果:

结果 \ 第一次 \ 第二次	−1	−5	2	4
−1		(−1, −5)	(−1,2)	(−1,4)
−5	(−5, −1)		(−5,2)	(−5,4)
2	(2, −1)	(2, −5)		(2,4)
4	(4, −1)	(4, −5)	(4,2)	

由表格可知,共有 12 种可能出现的结果,并且它们都是等可能的."这个一次函数的图像经过第二、三、四象限"这一事件(记为事件 A)的发生有 2 种可能的结果,所以 $P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

"这个一次函数的图像经过第一、三、四象限"这一事件(记为事件 B)的发生有 4 种可能的结果,所以 $P(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

荣德基教育微官网

关注荣德基教育微官网，获取海量学习资源。

荣德基教育微官网：http://www.rongdeji.cn

荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

客服热线：182 1039 5892

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记

荣德基初中频道

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料