教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法55招·七八九年级共360招



九年级
数学（上）
荣德基 主编
（QD版）
赠教材习题答案

陕西新华出版传媒集团　陕西人民教育出版社

买书？看完点拨再做决定！

简约的知识梳理总结　　精准的重难疑惑点拨

实用的方法技巧揭秘　　培优拔尖题的破解策略　　中考压轴题的抢分绝招

冲满分

第1步　第2步　第3步

三个维度打造极致

基础速提分

点知识 拨考向 速提分

给你一把打开数学之门的钥匙

方法提高分

点方法 拨技巧 提高分

为你提供解题秘方

考法得满分

点中考 拨模拟 得满分

让你从默默无闻走向优秀卓越

出色由于用心　卓越源自专业

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

数学（QD版） 九年级（上）

主　　编：荣德基
本册主编：崔金玲



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第1章 图形的相似

知识点60个 必得分

	页码
01 相似形	2
02 相似多边形的定义和表示方法	2
03 相似比的定义和相似多边形的性质	3
04 平行线分线段成比例	10
05 相似三角形的判定定理1	11
06 相似三角形的判定定理2	13
07 相似三角形的判定定理3	14
08 利用影子测量物体的高度	14
09 利用镜子的反射测量物体的高度	15
10 构造相似三角形测量不能直接测量的两点的距离	16
11 相似三角形对应线段的比	27
12 相似三角形面积的比	28
13 位似图形的定义	35
14 位似图形的性质	36
15 位似图形的画法	37
16 平面直角坐标系中的位似	38

考向点60个 速提分

	页码
01 利用相似形的定义判断图形相似	2
02 利用相似多边形的定义判断两个多边形是否相似	3
03 利用相似多边形的性质进行计算	4
04 利用平行线分线段成比例解与平行相关问题	10
05 利用两角分别相等判定两三角形相似	12
06 利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似	13
07 利用三边成比例判定两三角形相似	14
08 利用阳光测量物高解实际应用	15
09 利用镜子的反射测量物高的实际应用	15
10 利用相似测量河道宽度	16
11 利用相似三角形对应线段的比求线段的长	27
12 利用相似三角形面积的比的关系解决比的问题	28
13 利用位似图形的定义识别位似图形	35
14 根据位似图形的性质解决相关问题	36
15 利用位似图形的定义和性质作位似图形	37
16 利用位似变换坐标的变化规律作图	38

第2章 解直角三角形

知识点60个 必得分

	页码
01 锐角三角比的定义	57
02 特殊角的三角比	62
03 任一锐角的三角比	67
04 锐角三角比的规律	68
05 解直角三角形的定义	73
06 解直角三角形的四种基本类型	74
07 非直角三角形问题的解法	75
08 解直角三角形在实际中的应用	82
09 解直角三角形在解仰角和俯角问题中的应用	84
10 解直角三角形在解方向角中的应用	85
11 解直角三角形在解坡角、坡度中的应用	87

考向点60个 速提分

	页码
01 利用锐角三角比的定义进行计算	58
02 利用特殊角的三角比解计算问题	62
03 利用计算器解有关三角比的问题	67
04 利用锐角三角比的规律解答问题	68
05 根据解直角三角形的定义判定解直角三角形的条件	73
06 利用解直角三角形的基本类型解决问题	74
07 利用作辅助线构造直角三角形解非直角三角形	75
08 利用解直角三角形解实际问题	83
09 利用解直角三角形解实际中仰角和俯角问题	85
10 利用解直角三角形解实际中方向角问题	86
11 利用解直角三角形解实际中坡角和坡度问题	87

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分↑方法↑学霸

方法点 63 个 得高分

	页码
01 反证法	7
02 利用相似三角形证明等积式的方法	18
03 三点定形法	18
04 分割（补形）法	20
05 找位似图形的对应点的方法	37
06 等线段代换法（等量过渡法）	44
07 等比代换法（等比过渡法）	45
08 等积代换法（等积过渡法）	45
09 相似三角形的判定方法	47
10 三角形面积比的处理方法	48
11 分类讨论思想	50
12 方程思想	50
01 数形结合思想	58
02 构造法	59
03 求锐角三角比的方法	59
04 等角转换法	59
05 定义法	59
06 参数法	59
07 求某个不在直角三角形中的锐角的三角比的方法	64
08 特殊值法	68
09 从特殊到一般的思想	71
10 解直角三角形的一般方法	74
11 构造直角三角形解非直角三角形问题的方法	75
12 补形法	76
13 作辅助线的技巧	76
14 解直角三角形的实际应用问题的求解方法	83
15 设未知数的技巧	88
16 割补法	100
17 方程思想	100
18 化斜为直法	101

考法点 60 个 争满分

	页码
01 利用相似多边形的定义判别相似图形	6
02 利用相似多边形的性质解与全等有关的综合问题	6
03 利用相似多边形的性质解决实际问题	7
04 利用相似三角形的判定定理判定三角形相似	21
05 利用相似三角形的判定解开放性探求条件的应用	21
06 四边形问题与相似三角形的综合应用	22
07 利用相似三角形的性质解决实际生活中的测量问题	22
08 利用光的反射原理解决反射镜不在地面的测物高的问题	23
09 利用光的反射原理测量到底部有障碍物的物高的应用	23
10 利用相似三角形的性质求比值	33
11 相似三角形性质的简单应用	33
12 利用位似图形的性质确定位似中心和相似比	41
13 利用位似图形的性质求坐标系中点的坐标	41
14 利用位似变换的性质求坐标系中点的坐标	42
01 利用锐角三角比的定义解常规三角比问题	60
02 利用三角比的定义说明网格中锐角三角比的关系	60
03 与特殊角有关的计算	65
04 根据特殊角的三角比求角	65
05 利用计算器解实际问题	70
06 利用互余两角三角比的关系说明互余两角的正弦的平方关系	70
07 利用解直角三角形求三角比	78
08 利用解直角三角形求线段长	78
09 利用解直角三角形与旋转的性质求点的坐标	79
10 利用解直角三角形的方法解非直角三角形问题	80
11 仰角、俯角的应用	89
12 方向角的应用	90
13 坡度、坡角的应用	91

第1章 图形的相似

第2章 解直角三角形



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 60 个 必得分

第3章 对圆的进一步认识

	页码
01 圆的轴对称性	108
02 垂径定理	108
03 垂径定理的推论	110
04 圆的旋转对称性、圆心角	116
05 弧、弦、圆心角之间的关系定理	116
06 圆的确定	122
07 三角形的外接圆	123
08 反证法	124
09 圆周角	128
10 圆周角定理的推论	129
11 圆内接多边形	130
12 直线与圆的位置关系	137
13 切线的判定定理	138
14 切线的性质定理	139
15 切线长定理	141
16 三角形的内切圆	148
17 弧长公式	153
18 扇形	154
19 正多边形及有关概念	161
20 正多边形的性质	162
21 正多边形的有关概念	163
22 正 n 边形的画法	164

第4章 一元二次方程

01 一元二次方程的定义	182
02 一元二次方程的一般形式	183
03 一元二次方程的解（根）	184
04 直接开平方法	188
05 配方法	189
06 用公式法解一元二次方程	194
07 因式分解法	199
08 一元二次方程的解法	200
09 一元二次方程根的判别式的定义	204
10 一元二次方程根与系数的关系	209
11 建立一元二次方程的模型解应用题的一般步骤	214

考向点 60 个 速提分

	页码
01 利用圆的轴对称性判断轴对称图形	108
02 利用垂径定理解与线段有关问题	109
03 利用垂径定理的推论证明弦相等	111
04 利用特殊的圆心角探究半径与弦之间的关系	116
05 利用弧、弦、圆心角之间的关系定理解决问题	117
06 利用圆的定义判定圆和圆心的位置	122
07 利用三角形外接圆的定义求外接圆的半径	123
08 利用反证法证明正面不易证的命题	124
09 利用圆周角定理求角	128
10 利用圆周角定理的推论解边角应用问题	129
11 利用圆内接四边形的性质求角的度数	130
12 利用直线与圆的位置关系解圆心到直线的距离和半径的相关应用	138
13 利用切线的判定定理判定圆的切线	139
14 利用切线的性质解边角问题	140
15 利用切线长定理解边角问题	141
16 利用三角形内切圆求边角问题	148
17 利用弧长公式求弧长	153
18 利用扇形的面积公式求面积	155
19 利用正多边形的定义证明圆内接正多边形	161
20 利用正多边形的性质进行计算	162
21 利用正多边形的相关概念进行计算	163
22 利用正多边形与圆的关系作正多边形	165

01 利用一元二次方程的定义识别一元二次方程	182
02 利用一元二次方程的一般形式解决问题	183
03 利用一元二次方程的根的定义解决问题	184
04 利用直接开平方法解一元二次方程	188
05 利用配方法解一元二次方程	189
06 利用公式法解一元二次方程	194
07 利用因式分解法解一元二次方程	199
08 利用适当方法解一元二次方程	200
09 一元二次方程根的判别式的应用类型	204
10 利用一元二次方程根与系数的关系解决问题	209
11 利用一元二次方程解实际应用问题	214

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 方法 学霸

方法点 63 个 得高分

	页码
01 利用垂径定理求线段的长的方法	109
02 证明两条弦相等的方法	111
03 利用垂径定理求点的坐标的方法	112
04 证弧、弦、圆心角关系常用的作辅助线的方法	118
05 求解两弧成倍数关系问题的方法	118
06 利用弧、弦、圆心角之间的关系证明线段相等的方法	118
07 确定一个圆的圆心的方法	123
08 求三角形的外接圆半径的方法	123
09 反证法	124
10 作三角形的外接圆的方法	125
11 等边三角形的判定方法	129
12 常见的作辅助线的方法	130
13 作辅助线判定圆的切线的常用方法	139
14 割补法	156
15 求图形翻滚中路线长问题的方法	157
16 求不规则图形面积的方法	158
17 证明一个多边形是圆内接正多边形的方法	161
18 分类讨论思想	170
19 数形结合思想	175
20 转化思想	175
01 直接开平方法	188
02 配方法	189
03 公式法	194
04 换元法	196
05 估算无理数式子的大小的方法	197
06 因式分解法	199
07 常用的因式分解的方法	199
08 用 Δ 判断一元二次方程的解的情况的方法	204
09 平移法	214
10 待定系数法	217
11 整体代入法	228
12 分类讨论思想	229
13 建模思想	229

考法点 60 个 争满分

	页码
第3章 对圆的进一步认识	
01 利用垂径定理求圆周长	113
02 利用垂径定理解决实际问题	114
03 利用“等弧所对的圆心角相等”证线段相等	119
04 利用弧度与圆心角的关系求弧度	120
05 利用等边三角形的性质求外接圆的半径	126
06 利用反证法解决结论反面不唯一的问题	126
07 利用圆周角定理的推论求线段长	133
08 利用圆的有关性质判断正误	133
09 利用圆内接四边形的性质求角的度数	134
10 利用直线与圆的位置关系、一次函数图象性质求字母的取值范围	145
11 利用切线的判定与性质判定切线、求线段长	145
12 利用三角形的内切圆和内心求角度	150
13 利用三角形的内切圆求线段的长	151
14 利用弧长公式求圆中的弧长	157
15 利用扇形的面积公式求环形的面积	158
16 利用扇形的面积公式求阴影图形的面积	158
17 利用正多边形的相关概念计算	167
18 利用同圆的内接正多边形的计算求面积	167
第4章 一元二次方程	
01 利用一元二次方程解的定义求字母的值	186
02 利用列表法估计一元二次方程的解	186
03 利用直接开平方法求方程的解	192
04 利用配方法解方程	192
05 利用公式法解常规一元二次方程	197
06 利用公式法求根的范围	197
07 利用因式分解法解方程	202
08 利用“新定义”解一元二次方程	202
09 利用根的判别式求角的度数	206
10 利用根的判别式及根的情况解一元二次方程	207
11 利用根与系数的关系及方程的根求代数式的值	211
12 利用根与系数的关系求方程中字母的值	212
13 根据实际问题列一元二次方程	218
14 利用一元二次方程解决情景对话问题	219
15 利用一元二次方程解决函数与营销的综合问题	219

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法

三点定形法…… 18

观动画

位似图形…… 35

看微课

平行线分线段成比例…… 10
推论的应用…… 11
相似三角形的判定…… 11

学方法

化斜为直法…… 75

看微课

解直角三角形的应用…… 82
仰角俯角问题…… 84
方向角问题…… 85

学方法

反证法……124

观动画

直线与圆的位置关系……137

第 1 章 图形的相似

1.1 相似多边形 ……2
1.2 怎样判定三角形相似 …… 10
1.3 相似三角形的性质 …… 27
1.4 图形的位似 …… 35

素养提分

方法篇：利用三角形相似证明乘积式的策略 ☞ P44
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P46

第 2 章 解直角三角形

2.1 锐角三角比 …… 57
2.2 30°，45°，60° 角的三角比…… 62
2.3 用计算器求锐角三角比 …… 67
2.4 解直角三角形 …… 73
2.5 解直角三角形的应用 …… 82

素养提分

应用篇：解直角三角形常见应用举例 ☞ P94
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P97

第 3 章 对圆的进一步认识

3.1 圆的对称性 ……108
（一）垂径定理 ……108
（二）弧、弦、圆心角 ……116
3.2 确定圆的条件 ……122

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.3 圆周角 ……128
3.4 直线与圆的位置关系 ……137
3.5 三角形的内切圆 ……148
3.6 弧长及扇形面积的计算 ……153
3.7 正多边形与圆 ……161

素养提分

行动篇：浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题☞ P136
应用篇：分类讨论思想在圆中的应用☞ P170
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P172

看微课

垂径定理……108
垂径定理的推论…… 110
切线的判定……138
切线长定理…… 141
三角形的内切圆……148

第 4 章 一元二次方程

4.1 一元二次方程 ……182
4.2 用配方法解一元二次方程 ……188
4.3 用公式法解一元二次方程 ……194
4.4 用因式分解法解一元二次方程 ……199
4.5 一元二次方程根的判别式 ……204
*4.6 一元二次方程根与系数的关系 ……209
4.7 一元二次方程的应用 ……214

学方法

配方法……189
公式法……194
因式分解法……199

看微课

一元二次方程的定义……182
根的判别式…… 204

素养提分

应用篇：恒等变形在整式的运算和因式分解中的应用 ☞ P222
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P225



参考答案及点拨（单独成册）

微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **反证法：**先假设结论不成立，再从这个假设出发，经过正确的推理，说明假设错误，从而证明原命题成立，这样的证明方法叫做反证法.

2. **三点定形法：**三点定形法是证明线段等积式或比例式中找相似三角形的最常用且最有效的方法，它就是设法找出比例式或等积式中（或转化后的式子中）所蕴含的几个字母，是否存在可由“三点”确定的两个相似的三角形.

3. **分类讨论思想：**把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

4. **方程思想：**方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的思想方法.

5. **数形结合思想：**数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法.数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

6. **构造法：**构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁，其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法，主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

7. **定义法：**所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推导出来的，因此用定义法解题是最直接的方法.

8. **参数法：**参数法是指在解题过程中，先通过适当地引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，使问题得以解决的方法.

9. **从特殊到一般的思想：**从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，作出一般的结论.

10. **转化思想：**转化也称化归，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

11. **待定系数法：**待定系数法是求函数表达式的最重要的方法，求解时要先设出符合题意的函数关系式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求待定系数的值，从而确定函数关系式，这种方法叫做待定系数法.

12. **建模思想：**建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

体验图形的缩放

体验图形的缩放











第1章 图形的相似

核心考点

你将见到的

- 相似多边形的定义和性质
- 平行线分线段成比例
- 相似三角形的性质与判定
- 位似图形的变换

核心方法

我们为你提供的

- 反证法
- 三点定形法
- 分割（补形）法
- 方程思想
- 分类讨论思想

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1 相似多边形



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 相似形

1. **定义：** 形状相同的平面图形叫做相似形.

2. **两个关系：**

（1）**相似形之间的关系：** 两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形放大或缩小得到.

（2）**相似与全等的关系：** 两个图形的形状相同、大小也相同时，它们是全等形. 全等形是相似形的特殊情况，即全等形一定是相似形，但相似形不一定是全等形，只有两个图形的大小相同时，它们才全等.

提分·必记

特别提醒

- “形状相同”是判定相似图形的唯一条件.
- 两个图形相似是指它们的形状相同，与它们的位置、大小无关.

拨考向▸利用相似形的定义判断图形相似

例1： 下列图形不是相似图形的是（　　）

A. 同一底版打印出来的两张大小不同的照片

B. 用放大镜将一个小物体图案放大过程中原图案和放大图案

C. 某人的侧身照片和正面照片

D. 大小不同的两张同版本的中国地图

解题秘方： 紧扣“相似形的定义及相似形之间的关系”解答.

解： 用“排除法”：B符合相似形之间的关系，A、D符合相似形的定义，因此A、B、D都是相似形. 所以选C.

答案： C

提分·秘诀

特别提醒

判断两个图形是否相似，只看其形状是否相同，而不考虑其他因素. 对于选项C，不要误认为是某人的照片就相似.

点知识▸2 相似多边形的定义和表示方法

1. **定义：** 两个边数相同的多边形，如果一个多边形的各个角与另一个多边形的各个角对应相等，各边对应成比例，那么这两个多边形叫做相似多边形.

2. **表示方法：** 相似用符号“∽”表示，读作“相似于”，如：四边形 $ABCD$ ∽四边形 $EFGH$，读作“四边形 $ABCD$ 相似于四边形 $EFGH$”.

特别解读： （1）相似多边形的定义可用来判断两个多边形是否相似.

（2）用符号“∽”表示两个图形相似时，对应顶点写在对应的位置.

提分·必记

要点提醒

- 判定相似多边形的条件：①边数相同；②所有的角分别对应相等；③所有的边对应成比例.
- 相似具有传递性.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用相似多边形的定义判断两个多边形是否相似

题型1：利用相似多边形的定义判断相似图形

例2：下列两个图形一定相似的是（　　）

A. 两个矩形　　B. 两个菱形

C. 两个正方形　　D. 两个等腰三角形

解题秘方：根据相似多边形的定义判断.

解：A. 两个矩形边的比不一定相等；B. 两个菱形的角不一定对应相等；D. 两个等腰三角形角不一定对应相等，边的比也不一定相等；C. 两个正方形所有角都是90°，边的比都相等.

答案：C

题型2：相似多边形的定义在判定多边形相似中的应用

例3：如图1.1-1，有一块长3 m，宽1.5 m的矩形黑板，镶在其外围的木质边框宽7.5 cm. 边框的内边缘所成的矩形$ABCD$与边框的外边缘所成的矩形$EFGH$相似吗？为什么？

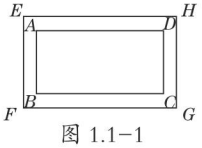


图1.1-1

解题秘方：利用相似多边形的定义进行判断.

解：不相似. 理由如下：∵在矩形$ABCD$中，

AB=1.5 m，AD=3 m，镶在其外围的木质边框宽7.5 cm=0.075 m，

∴EF=1.5+2×0.075=1.65（m），EH=3+2×0.075=3.15（m）.

$\therefore \frac{AB}{EF}=\frac{1.5}{1.65}=\frac{10}{11}$，$\frac{AD}{EH}=\frac{3}{3.15}=\frac{20}{21}$. $\because \frac{10}{11}\neq\frac{20}{21}$，

∴边框的内边缘所成的矩形$ABCD$与边框的外边缘所成的矩形$EFGH$不相似.

知识点▶3 相似比的定义和相似多边形的性质

1. **相似比的定义：**相似多边形对应边的比叫做相似比.
2. **相似多边形的性质：**相似多边形的对应边的比相等，对应角相等.
3. **土方法：**找相似多边形对应边、对应角的方法：

（1）大小找法：

边：两个图形中，长边对应长边，短边对应短边.

角：大角对应大角，小角对应小角.

（2）符号找法：因为对应顶点的字母写在对应的位置，所以对应边、对应角也写在对应位置，如：四边形$ABCD$∽四边形$EFGH$，AB和EF、BC和FG、CD和GH是对应边，∠B和∠F是对应角.

（3）对应找法：在相似图形中，对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边.

提分·秘诀

方法点拨

当说明两个多边形不相似时，最好的方法是举反例.

要点提醒

相似多边形的定义既是相似多边形的判定，也是相似多边形的性质.

方法点拨

判断两个多边形是不是相似多边形，不仅要看它们的角是否分别相等，还要看它们的对应边是否成比例；而仅靠视觉去看容易出现错误解答，误认为这两个矩形相似.

提分·必记

特别提醒

求相似比或利用相似比解答问题时，一定要注意两个相似多边形的先后顺序.

特别解读

相似多边形的性质常用来求相似多边形未知边的长度或未知角的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用相似多边形的性质进行计算

题型1：利用相似多边形的性质求线段的比

例4： 一般书本的纸张是原纸张多次对开得到的，如图1.1-2，矩形$ABCD$沿EF对开后，再把矩形$EFCD$沿MN对开，依次类推，若各种开本的矩形都相似，那么$\frac{AB}{AD}=$_____.

解题秘方： 根据相似多边形的对应边成比例求解.

解： ∵矩形$ABCD$∽矩形$BFEA$，

∴$AB:BF=AD:BA$.

∴$AD\cdot BF=AB\cdot AB$.

又∵$BF=\frac{1}{2}AD$，∴$\frac{1}{2}AD^2=AB^2$.

∴$\frac{AB}{AD}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

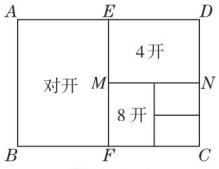


图1.1-2

答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$

题型2：相似多边形的性质及相似比在计算中的应用

例5： 如图1.1-3，梯形$ABCD$与梯形$A'B'C'D'$相似，$AD\parallel BC$，$A'D'\parallel B'C'$，$\angle A=\angle A'$，$AD=4$，$A'D'=6$，$AB=6$，$B'C'=12$，$\angle C=60°$.

（1）求梯形$ABCD$与梯形$A'B'C'D'$的相似比k；

（2）求$A'B'$和BC的长；

（3）求$\angle D'$的大小.

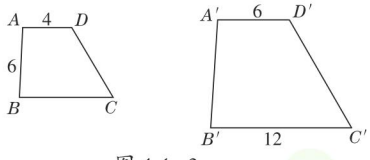


图1.1-3

解题秘方： 紧扣“相似多边形的性质及相似比的定义”进行计算.

解：（1）相似比$k=\frac{AD}{A'D'}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

（2）∵梯形$ABCD$与梯形$A'B'C'D'$相似，且由（1）知相似比$k=\frac{2}{3}$，∴$\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$，$\frac{BC}{B'C'}=\frac{2}{3}$.

∵$AB=6$，$B'C'=12$，∴$A'B'=9$，$BC=8$.

（3）由题意知，$\angle D'=\angle D$. ∵$AD\parallel BC$，$\angle C=60°$，

∴$\angle D=180°-\angle C=120°$. ∴$\angle D'=120°$.

提分·秘诀

方法技巧

- 若矩形相似，找对应边的方法是长对应长，宽对应宽.
- 解决折叠问题时，一定要注意边角的相等关系，折叠时重合的边相等，重合的角相等.

易错点

- 求两个相似多边形的相似比时，要注意这两个多边形的先后顺序；
- 利用相似多边形的性质求边长或角度，关键抓住“对应”二字，找准对应边和对应角是解决问题的关键.需要注意的是对应边是比相等，而对应角是相等.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用相似多边形性质解决与多边形有关的问题

挑战·高分

例 6：［期中·阳关］如图 1.1−4，矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，在 BC 上取一点 E，沿 AE 将△ ABE 向上折叠，使 B 点落在 AD 上的 F 点．若四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，由对应边成比例，可得只含 AD 的一个比例式是_____．

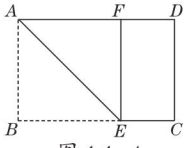


图 1.1−4

解题秘方：根据矩形相似得比例式，再根据折叠得到正方形，转化为只含 AD 的比例式．

解：∵四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，∴$\dfrac{FD}{AB}=\dfrac{CD}{BC}$．

∵沿 AE 将△ ABE 向上折叠，使 B 点落在 AD 上的 F 点，

∴四边形 $ABEF$ 是正方形．∵ $AB=1$，∴ $AF=AB=CD=1$．

∴ $FD=AD-AF=AD-1$．∴$\dfrac{AD-1}{1}=\dfrac{1}{AD}$．

答案：$\dfrac{AD-1}{1}=\dfrac{1}{AD}$

解法提醒

根据折叠得到四边形 $ABEF$ 是正方形，从而得到 $AB=AF=1$，所以 $FD=AD-1$，这样就可以把比例式中的线段都用数字和 AD 表示出来．

拔尖角度 2 利用计算比较法解矩形折叠中的长宽的比问题

挑战·高分

例 7：如图 1.1−5，将一张长、宽之比为$\sqrt{2}$的矩形纸 $ABCD$ 依次不断对折，可以得到矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$．

（1）判断矩形 $ABCD$，矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长、宽之比是否改变，并说明理由．

（2）你认为这些大小不同的矩形相似吗？

解题秘方：紧扣“相似多边形对应边的性质”，用计算比较法解答．

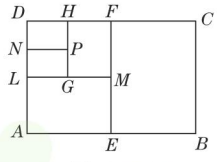


图 1.1−5

解：（1）矩形 $ABCD$，矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长、宽之比不改变．理由如下：

设矩形纸的宽 $BC=a$，长 $AB=\sqrt{2}a$，则有 $BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$ME=\dfrac{a}{2}$，$MF=\dfrac{a}{2}$，$HF=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，$LG=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，$LN=\dfrac{a}{4}$．

∴$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$，$\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}$，

解法关键

解决此类题目的关键是通过折叠找到相等的线段，以及找到线段的对应关系求出对应线段的比．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\frac{AE}{ME}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2},\quad \frac{MF}{HF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2},$$

$$\frac{LG}{LN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}.$$

∴长、宽之比不改变.

（2）这些大小不同的矩形都相似.

易错点

判断多边形相似时，既要考虑边是否成比例，也要考虑对应角是否相等，不能顾此失彼.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容在中考中主要考查相似形、相似多边形的性质和判定，题目以选择题和填空题为主，其中利用多边形相似求线段长为热点，以计算的形式和多边形的其他性质综合起来出题，难度较低.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用相似多边形的定义判别相似图形

例8：[中考·莆田]下列四组图形中，一定相似的是（　　）

A. 正方形与矩形　　B. 正方形与菱形

C. 菱形与菱形　　D. 正五边形与正五边形

试题评析：本题考查了相似图形的定义，熟悉各种图形的性质和相似图形的定义是解题的关键.

解：A. 正方形与矩形，对应角相等，对应边不一定成比例，故不符合题意；

B. 正方形与菱形，对应边成比例，对应角不一定相等，不符合相似图形的定义，故不符合题意；

C. 菱形与菱形，对应边比值相等，但是对应角不一定相等，故不符合题意；

D. 正五边形与正五边形，对应角相等，对应边成比例，符合相似图形的定义，故符合题意. 故选D.

答案：D

活学巧记

两个相似多边形，
边数相同形状同；
各角对应都相等，
各边对应成比例.

考法2 利用相似多边形的性质解与全等有关的综合问题

例9：[中考·南通]如图1.1-6，点E是菱形$ABCD$对角线CA的延长线上任意一点，以线段AE为边作一个菱形$AEFG$，且菱形$AEFG$∽菱形$ABCD$，连接EB，GD.

（1）求证：$EB=GD$；

（2）若∠$DAB=60°$，$AB=2$，$AG=\sqrt{3}$，求GD的长.

解法关键

连接BD交AC于点P，则$BP\perp AC$，根据∠$DAB=60°$得到∠$PAB=30°$，从而有$BP=\frac{1}{2}AB=1$，然后求得$EP=2\sqrt{3}$，最后利用

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了全等三角形的判定、勾股定理、菱形的性质及相似多边形的性质；解题的关键是了解相似多边形的对应角相等.

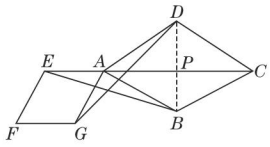


图 1.1−6

（1）**证明**：∵菱形 $AEFG$ ∽菱形 $ABCD$，

∴∠ EAG=∠ BAD.

∴∠ EAG + ∠ GAB = ∠ BAD + ∠ GAB，

即∠ EAB = ∠ GAD.

又易知 AE=AG，AB=AD，

∴△ AEB ≌△ AGD. ∴ EB=GD.

（2）**解**：如图 1.1−6，连接 BD 交 AC 于点 P，则 BP ⊥ AC.

∵∠ DAB=60°，∴∠ PAB=30°.

∴ $BP=\frac{1}{2}AB=1$. ∴ $AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3}$.

∵ $AE=AG=\sqrt{3}$，∴ $EP=2\sqrt{3}$.

∴ $EB=\sqrt{EP^2+BP^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$.

∴ $GD=\sqrt{13}$.

勾股定理求得 EB 的长即可求得线段 GD 的长.

方法点拨

利用相似多边形的对应角相等和菱形的四边相等证得三角形全等后即可证得两条线段相等.

考法 3 利用相似多边形的性质解决实际问题

例 10：[中考·鞍山]在 AB=20 m，AD=30 m 的矩形花坛 $ABCD$ 的四周修筑小路.

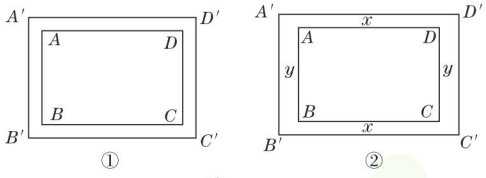


图 1.1−7

（1）如果四周小路的宽相等，如图 1.1−7①，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似吗？请说明理由.

（2）如果相对着的两条小路的宽相等，如图 1.1−7②，试问小路的宽 x（m）与 y（m）的比值是多少时（$x<y$），能使小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似？请说明理由.

试题评析：本题考查了相似多边形的判定和性质，理解相似多边形的对应边成比例的性质是解题的关键.

解题技巧

如果不能直接判定图形相似，可采用反证法（也叫间接法），先假设图形相似，然后根据相似的性质求线段的长，如果求出的长不符合题目要求，说明假设错误，得到图形不相似；如果求出的长符合题目要求，说明图形相似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似．

理由如下：假设两个矩形相似，设小路的宽为 a m，

则 $\frac{30+2a}{30}=\frac{20+2a}{20}$，解得 $a=0$．

∵小路宽不可能为 0 m，

∴矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似．

（2）当 x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似．

理由如下：若矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，

则 $\frac{30+2y}{30}=\frac{20+2x}{20}$．∴ $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$．

∴当 x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似．

特别提醒

本题通过逆向思维，借助相似多边形的对应边成比例这一性质，列出关于 x，y 的方程，求出题中要求的比值．

详解

$20(30+2y)=30(20+2x)$，

$60x=40y$，

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{2}{3}$．

两年模拟兵法

答案见 233 页

1. [期中·泰安]下列说法中，一定正确的是（　　）

A. 有一个锐角相等的两个等腰三角形相似

B. 底角为 45° 的两个等腰梯形相似

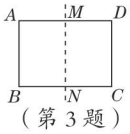
C. 任意两个菱形相似

D. 两个等腰直角三角形相似

2. 下列说法：①放大（或缩小）的图片与原图片是相似形；②比例尺不同的中国地图是相似形；③放大镜下的五角星与原来的五角星是相似形；④放电影时胶片上的图象和它映射到屏幕上的图象是相似形；⑤平面镜中，你的形象与你本人是相似的，其中正确的说法有（　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

3. 如图，将一个矩形纸片 $ABCD$ 沿 AD 和 BC 的中点 M，N 所在的直线对折，要使矩形 $DMNC$ 与原矩形相似，则原矩形的长和宽的比应为（　　）



（第 3 题）

A. 2 ∶ 1　　B. $\sqrt{3}$ ∶ 1

C. $\sqrt{2}$ ∶ 1　　D. 1 ∶ 1

4. 一个多边形的各边长分别为 2，3，4，5，6，另一个和它相似的多边形的最长边长为 24，则它的最短边长为（　　）

A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12

5. 要制作甲、乙两个形状相同的三角形框架，已知三角形框架甲的三边长分别为 50 cm，60 cm，80 cm，三角形框架乙的一边长为 20 cm，那么符合条件的三角形框架乙共有（　　）

A. 1 种　　B. 2 种

C. 3 种　　D. 4 种

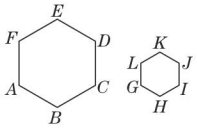
6. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 与正六边形 $GHIJKL$ 的对应边的比为 2 ∶ 1，则下列结论正确的是（　　）

A. $\angle E=2\angle K$

B. $BC=2HI$

C. 六边形 $ABCDEF$ 的周长 = 六边形 $GHIJKL$ 的周长

D. $S_{六边形ABCDEF}=2S_{六边形GHIJKL}$

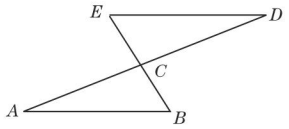


（第 6 题）

微信公众号 教辅资料站

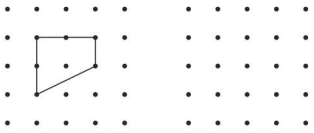
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，已知△ ABC ∽△ DEC，则成比例线段的比例式为_____.



（第 7 题）

8. 如图，格点图①中有一个四边形，请你在格点图②中画一个与该四边形形状相同但大小不同的格点图形.



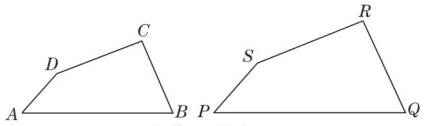
（第 8 题）

9. 如图，四边形 $ABCD$ ∽四边形 $PQRS$，BC=8，QR=10，PS=6，∠ B=64°. 求：

（1）∠ Q 的度数.

（2）AD 的长.

（3）四边形 $ABCD$ 与四边形 $PQRS$ 的相似比.



（第 9 题）

10. 以正方形的一条对角线为边新作一个正方形，求原正方形与新正方形的相似比、周长比及面积比.

11. 为了参加校运动会开幕式，九（2）班的同学要制作彩旗，如果有两邻边长分别为 1，a（其中 a > 1）的一块矩形绸布，要将它裁剪成三面矩形彩旗（面料没有剩余），要求每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同，试画出两种不同的裁剪方法的示意图，并写出相应的 a 的值.

【导学号：7199732】

错题笔记

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2 怎样判定三角形相似

核心知识

- 平行线分线段成比例
- 相似三角形的判定
- 相似三角形的应用举例

知识链接

相似三角形的判定
- 平行线分线段成比例
- 相似三角形的判定定理
- 相似三角形的应用举例

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行线分线段成比例

1. **平行线分线段成比例的基本事实：**两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

数学表达式：如图 1.2–1，$\because l_3 // l_4 // l_5$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$，$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$，$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}$. 可简记为：$\dfrac{\text{上}}{\text{下}}=\dfrac{\text{上}}{\text{下}}$，$\dfrac{\text{上}}{\text{全}}=\dfrac{\text{上}}{\text{全}}$，$\dfrac{\text{下}}{\text{全}}=\dfrac{\text{下}}{\text{全}}$.

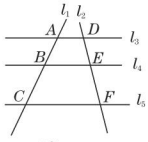


图 1.2–1

2. **平行线分线段成比例的基本事实的推论：**平行于三角形的一边，并且与其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

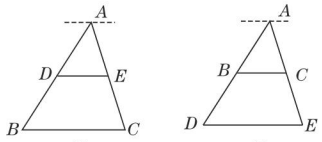


图 1.2–2



数学表达式：如图 1.2–2，若 $DE // BC$，则有 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$.

拨考向 利用平行线分线段成比例解与平行相关问题

题型 1：平行线分线段成比例的基本事实在找成比例线段中的应用

例 1：如图 1.2–3，已知 $AB // CD // EF$，AF 交 BE 于点 H. 下列结论中，错误的是（　　）

A. $\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{AH}{HD}$　　B. $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{BC}{CE}$

C. $\dfrac{HC}{HE}=\dfrac{HD}{DF}$　　D. $\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{BE}{CE}$

提分·必记

要点解读

1. 一组平行线两两平行，被截直线不一定平行；
2. 所得的成比例线段是指被截直线上的线段，与这组平行线上的线段无关；
3. 由基本事实写比例式时，一定要注意对应线段写在对应的位置上.

特别提醒

- 本推论的实质是平行线分线段成比例的基本事实中一组平行线中的一条过三角形的一个顶点，一条在三角形一边上的特殊情况.
- 当被截的两条直线相交时，其交点处可看作含一条隐形的平行线.

提分·秘诀

解法提醒

在题目中如果遇到与直线平行相关的问题时，可以从两个方面获取信息：一是位置角之间的关系（同位角相等、内错角相等、同旁内角

关注公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用平行线分线段成比例的基本事实的图形主要有“A”型和“X”型，从每种图形中找出成比例线段进行判断.

解：$\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$\therefore \dfrac{BH}{HC}=\dfrac{AH}{HD}$, $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{BC}{CE}$, $\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{BE}{CE}$,

故选项 A，B，D 正确.

$\because CD \parallel EF$,

$\therefore \dfrac{HC}{HE}=\dfrac{HD}{HF}$,

故选项 C 错误.

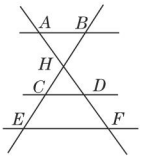


图 1.2−3

答案：C

题型 2：平行线分线段成比例的基本事实的推论在求线段长中的应用

例 2：[中考·临沂]如图 1.2−4，已知 $AB \parallel CD$，AD 与 BC 相交于点 O. 若 $\dfrac{BO}{OC}=\dfrac{2}{3}$，$AD=10$，则 $AO=$_____.

解题秘方：根据平行线分线段成比例的基本事实的推论列出比例式，计算即可.

解：$\because AB \parallel CD$，$\therefore \dfrac{AO}{OD}=\dfrac{BO}{OC}=\dfrac{2}{3}$,

即 $\dfrac{AO}{10-AO}=\dfrac{2}{3}$,

解得 $AO=4$.

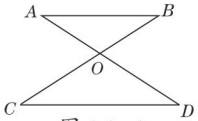


图 1.2−4


推论的应用

答案：4

知识▸2 相似三角形的判定定理 1

1. 相似三角形的判定定理 1：两角分别相等的两个三角形相似.

2. 数学表达式：如图 1.2−5，在△ABC 和△DEF 中，

$\because \angle A=\angle D$，且 $\angle B=\angle E$,

$\therefore$ △ABC ∽ △DEF.

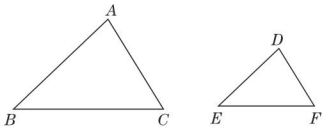


图 1.2−5


相似三角形的判定

3. 常见的相似三角形的类型：

（1）平行线型：如图1.2−6①，若$DE \parallel BC$，则△ADE ∽ △ABC.

（2）相交线型：如图 1.2−6②，若 $\angle AED=\angle B$，则△AED ∽ △ABC.

互补）；二是线段之间的关系，即平行线分线段成比例.

方法点拨

利用平行线分线段成比例的基本事实或推论求线段的长，首先要确定出哪些对应线段成比例，然后根据问题列出与所求线段有关的比例式，代入数值求解.

提分·必记

特别提醒

- 利用两角相等判定两三角形相似时，要注意题目中隐含的角相等的条件，如：公共角，对顶角，等角（或同角）的余角，等角（或同角）的补角，由平行得到的同位角、内错角等等，这些相等的角都是常用到的.
- 利用两角相等判定两三角形相似是应用最多的一种，希望同学们识记这些常见的类

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）“子母”型：如图 1.2−6③，若 $\angle ACD=\angle B$，则 $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

（4）“K”型：如图 1.2−6④，若 $\angle A=\angle D=\angle BCE=90°$，则 $\triangle ACB\backsim\triangle DEC$.

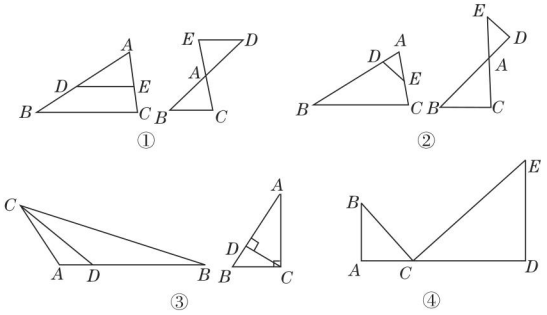


图 1.2−6

4. 土方法：在图 1.2−6④“K”型相似中，只要 $\angle A=\angle D=\angle BCE$（不一定非得等于 90°），就有 $\triangle ACB\backsim\triangle DEC$.

理由如下：$\because\angle BCD=\angle B+\angle A=\angle BCE+\angle ECD$，$\angle BCE=\angle A$，

$\therefore\angle ECD=\angle B$. 又 $\because\angle A=\angle D$，$\therefore\triangle ACB\backsim\triangle DEC$.

上面方法可简写为：一线三等角两三角形相似.

考向▶利用两角分别相等判定两三角形相似

题型 1：利用“子母”型相似判定三角形相似

例 3：如图 1.2−8，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，AD 的垂直平分线交 AD 于点 E，交 BC 的延长线于点 F.

求证：$\triangle ABF\backsim\triangle CAF$.

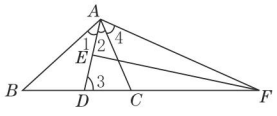


图 1.2−8

解题秘方：紧扣“两组对应角相等的两三角形相似”. 由于 $\angle BFA$ 是公共角，因此只需利用图形的相关性质说明 $\angle B=\angle 4$ 即可证明.

解：$\because EF$ 垂直平分 AD，

$\therefore AF=DF$. $\therefore\angle FAD=\angle 3$.

又 $\because\angle B=\angle 3-\angle 1$，$\angle 4=\angle FAD-\angle 2$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore\angle B=\angle 4$.

又 $\because\angle BFA=\angle AFC$，

$\therefore\triangle ABF\backsim\triangle CAF$.

型，可以提高你的解题能力.

常见题型

一线三等角两三角形相似常见题型：如图 1.2−7，在等边三角形 ABC 中，D 为 BC 边上一点，E 为 AC 边上一点，且 $\angle ADE=60°$，$BD=3$，$CE=2$，求 $\triangle ABC$ 的边长.

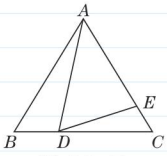


图 1.2−7

提分·秘诀

思路点拨

证明三角形相似时，首先要寻找相等的角，找不到角相等的条件时，再去寻找别的条件. 解决本题时，要注意题目中所给的角平分线和垂直平分线这两个条件，这两个条件都能证得角相等，尤其是垂直平分线这个条件，可得到等腰三角形，从而得两个底角相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：利用平行线型相似判定三角形相似

例 4： 如图 1.2−9，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是边 AD 的中点，连接 EC 交对角线 BD 于点 F，则 $EF:FC$ 等于（　　）

A. 2 : 3　　B. 1 : 3　　C. 1 : 1　　D. 1 : 2

解题秘方： 根据题意得出 $\triangle DEF \backsim \triangle BCF$，从而得出 $DE:BC=EF:FC$，利用点 E 是边 AD 的中点得出其比值.

解： ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$.

$\therefore \angle DEF=\angle BCF$，$\angle FDE=\angle FBC$.

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle BCF$. $\therefore DE:BC=EF:FC$.

∵点 E 是边 AD 的中点，$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD$.

$\therefore EF:FC=1:2$.

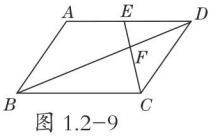


图 1.2−9

答案： D

解题关键

要注意平行四边形的对边相等（AD=BC），由 DE : AD=1 : 2，得到 DE : BC=1 : 2. 另外，找相似三角形的对应边时，可按照图形中长比长等于短比短方法找对应边.

点知识 ▸ 3 相似三角形的判定定理 2

提分·必记

1. **相似三角形的判定定理 2：** 两边成比例，且夹角相等的两个三角形相似.

2. **数学表达式：** 如图 1.2−10，

在△ ABC 和△ DEF 中，

∵$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，且∠ $B=\angle E$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

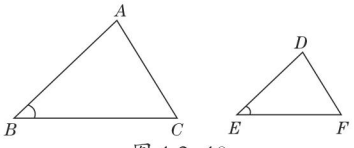


图 1.2−10

3. **土方法：** 运用该定理寻找条件证明相似时，若已知两边成比例，再去证夹角相等；若已知夹角相等，再去找角的两边对应成比例.

特别提醒

运用判定定理 2 证明三角形相似时，要注意相等的角必须是这两边的夹角. 对于该定理的识记，可从类比三角形全等的 SAS 判定.

拔考向 ▸ 利用两边成比例且夹角相等判定两三角形相似

提分·秘诀

例 5： 如图 1.2−11，在正方形 $ABCD$ 中，P 是 BC 上的一点，且 $BP=3PC$，Q 是 CD 的中点.

求证：△ $ADQ \backsim$ △ QCP.

解题秘方： 紧扣“两边成比例，且夹角相等”证明即可.

证明： 设正方形 $ABCD$ 的边长为 $4a$，

则 $AD=CD=BC=4a$.

∵ Q 是 CD 的中点，$BP=3PC$，

$\therefore DQ=CQ=2a$，$PC=a$. $\therefore \frac{DQ}{CP}=\frac{AD}{QC}=2$.

又∵ $\angle D=\angle C=90°$，

$\therefore \triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

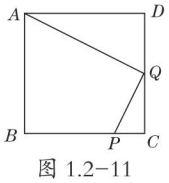


图 1.2−11

技巧点拨

利用两边成比例且夹角相等证两三角形相似的方法：先找出两个三角形中相等的那个角，再分别找出两个三角形中夹这个角的两条边，并按大小排列找出对应边，最后看这两组对应边是否成比例，若成比例，则两个三角形相似，否则不相似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 相似三角形的判定定理 3

1. **相似三角形的判定定理 3**：三边成比例的两个三角形相似.

2. **数学表达式**：如图 1.2−12，在△ ABC 和△ DEF 中，

$$\because \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD},\ \therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF.$$

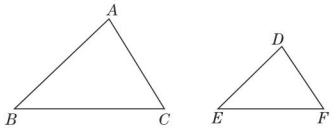


图 1.2−12

提分·必记

易错点

应用时要注意比的顺序性，即分子为同一个三角形的三边，分母为另一个三角形的三边，同时要注意边的对应情况，用长边对长边，短边对短边的思路找对应边.

拔考向▶ 利用三边成比例判定两三角形相似

例 6：图 1.2−13，图 1.2−14 中小正方形的边长均为 1，则图 1.2−14 中的哪一个三角形（阴影部分）与图 1.2−13 中的△ ABC 相似?

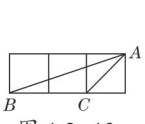


图 1.2−13

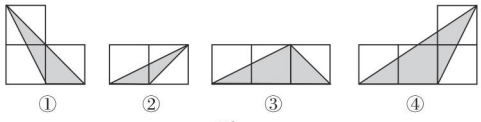


图 1.2−14

解题秘方：利用网格的特征用勾股定理求各边的长，紧扣“三边成比例的两个三角形相似”，用计算比较法判断.

解：易知 $AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AB=\sqrt{10}$.

图 1.2−14 ①中，三角形的三边长分别为 1，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$；

图 1.2−14 ②中，三角形的三边长分别为 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$；

图 1.2−14 ③中，三角形的三边长分别为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，3；

图 1.2−14 ④中，三角形的三边长分别为 2，$\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$.

$\because \frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$，∴图 1.2−14 ②中的三角形与△ ABC 相似.

提分·秘诀

解题技巧

在网格图中证三角形相似，一般采用三边成比例这一方法. 第一步：找到线段所在的直角三角形，利用勾股定理求出线段长；第二步：根据两三角形的长边对应长边，短边对应短边，中间边对应中间边，求出线段比；第三步：根据线段比相等列出比例式，从而判定三角形相似.

点知识▶ 5 利用影子测量物体的高度

1. **测量原理**：测量不能到达顶部的物体的高度，在有太阳光的前提下，通常将参照物高及其影长、被测物体高及其影长构造相似三角形模型，利用“相似三角形对应边成比例”的原理解决.

2. **测量方法**：在同一时刻测量出太阳光下参照物和被测物体的影长，再根据参照物的高度和“在同一时刻太阳光下物体的高度与影长成比例”计算出被测物体的高度.

特别提醒：运用此测量方法时，要符合下列两个条件：

（1）被测物体的底部能够到达；（2）由于影长可能随着太阳的运动而变化，因此要在同一时刻测量参照物与被测物体的影长.

提分·必记

知识储备

同一时刻，同一地点，有比例式：

$$\frac{\text{被测物体的实际高度}}{\text{被测物体影子的长度}}=\frac{\text{参照物的高度}}{\text{参照物影子的长度}}.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用阳光测量物高解实际应用

提分·秘诀

特别提醒

在同一时刻太阳光下已知一种物体的高度与影长的关系求另外一种物体的高度时，一般构造相似三角形求解，计算时要注意单位的统一.

例 7： 某一时刻，身高 1.6 m 的小明在阳光下的影长是 0.4 m，同一时刻同一地点，测得某旗杆的影长是 5 m，则该旗杆的高度是（　　）

A. 1.25 m　　B. 10 m　　C. 20 m　　D. 8 m

解题秘方： 建立相似三角形的模型，用“在同一时刻太阳光下物体的高度与影长成比例”求解.

解： 设该旗杆的高度是 x m，根据题意，得 $1.6 : 0.4 = x : 5$，解得 $x=20$，即该旗杆的高度是 20 m.

答案： C

点知识▶6 利用镜子的反射测量物体的高度

提分·必记

特别提醒

测量时被测物体与人之间不能有障碍物，且镜子要水平放置.

利用物理学中的“反射角等于入射角”及“等角的余角相等”的知识可以知道，反射光线和入射光线与镜面的夹角相等.找到一对锐角对应相等，创造相似条件.

1. 测量原理： 利用镜子的反射，先根据反射角等于入射角的原理构造相似三角形，再计算所求物体的高度.

2. 测量方法：

（1）在观测者与被测物体之间的地面上平放一面镜子，在镜子上做一个标记；

（2）测出观测者眼睛到地面的高度；

（3）观测者看着镜子来回走动，直至看到被测物体顶端在镜子中的像与镜子上的标记重合，此时测出镜子上的标记位置到观测者脚底的距离及到被测物体底端的距离；

（4）根据两角分别对应相等推导出两个三角形相似，利用对应边成比例求出被测物体的高度.

拔考向▶利用镜子的反射测量物高的实际应用

提分·秘诀

方法解读

根据 AB 和 CD 都垂直于 BD，可得一组直角相等；根据入射角等于反射角和等角的余角相等又得到一组锐角相等，进而得到相似三角形，再用相似三角形的性质解题即可.

例 8： 如图 1.2−15 是一位同学设计的用手电筒来测量某古城墙高度的示意图，在点 P 处水平放一平面镜，光线从点 A 出发经平面镜反射后刚好照到古城墙 CD 的顶端 C 处，已知 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，测得 AB=2 米，BP=3 米，PD=12 米，求该古城墙 CD 的高度.

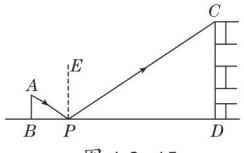


图 1.2−15

解题秘方： 由反射原理及 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，可得 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$，利用相似三角形的性质即可求出 CD 的长.

解： 如图 1.2−15，由题意可得 $\angle CPE = \angle APE$，所以 $\angle CPD = \angle APB$. 因为 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，所以 $\angle ABP = \angle CDP = 90°$. 所以 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$. 所以 $\frac{AB}{CD} = \frac{BP}{DP}$. 所以 $\frac{2}{CD} = \frac{3}{12}$. 所以 CD=8 米. 故该古城墙 CD 的高度为 8 米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 7 构造相似三角形测量不能直接测量的两点的距离

1. **测量原理**：测量不能直接到达的两点间的距离，常常构造相似三角形，利用相似三角形的性质计算两点间的距离.

2. **常见的测量方式**：（1）构造“A”型相似，如图 1.2−16.

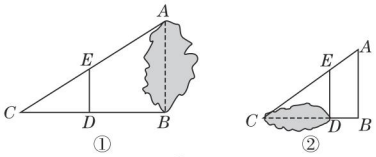


图 1.2−16

（2）构造“X”型相似，如图 1.2−17.

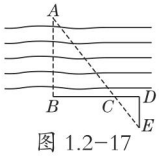


图 1.2−17

拔考向▶ 利用相似测量河道宽度

例 9：如图 1.2−18，我们想要测量河两岸相对的两点 A，B 之间的距离（即河宽）. 方案：先从 B 点出发向与 AB 成 90° 角的方向走 55 m 到 O 处立一标杆，然后方向不变，继续向前走 10 m 到 C 处，在 C 处向右转 90° ，沿 CD 方向再走 18 m 到 D 处，使得点 A，O，D 在同一条直线上. 那么点 A，B 之间的距离是多少?

解题秘方：建立几何（相似三角形）模型，根据测量过程中的数据，利用相似三角形对应边成比例求解.

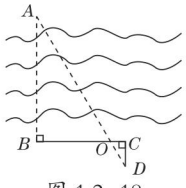


图 1.2−18

解：$\because AB \perp BC$，$CD \perp BC$，$\therefore \angle ABO = \angle DCO = 90°$.

又 $\because \angle AOB = \angle DOC$，

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle DOC$. $\therefore \dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BO}{CO}$.

$\because BO = 55$ m，$CO = 10$ m，$CD = 18$ m，

$\therefore \dfrac{AB}{18} = \dfrac{55}{10}$. $\therefore AB = 99$ m.

因此，点 A，B 之间的距离为 99 m.

提分·必记

特别解读

利用相似三角形测量高度、宽度等的一般步骤：

1. 利用平行线、标杆等构造相似三角形；
2. 测量与表示未知量的线段相对应的边长以及另外任意一组对应边的长度；
3. 画出示意图，利用相似三角形的性质，列出以上包括未知量在内的四个量的比例式，解出未知量；
4. 检验并得出答案.

提分·秘诀

特别提醒

测河宽时也可采用构造全等三角形进行测量的方法. 在实际应用中，这种方法虽然能直接通过测量对应边的长得出未知量，但是往往会受到场地、测量仪器等的限制. 根据相似三角形的知识，利用能测量的三角形的边长及相似三角形的性质求此距离，可以减少限制，所以其应用面更广.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“平行线分线段成比例”求线段的长

例 10： 如图 1.2−19，$l_1 // l_2 // l_3$，$AB=3$，$AD=2$，$DE=4$，$EF=9$，求 BC，BF 的长．

解题秘方： 根据“平行线分线段成比例”列出与已知及要求线段有关的等式，求出 BC，BF 的长．

解： $\because l_1 // l_2 // l_3$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DE}$．

$\because AB=3$，$AD=2$，$DE=4$，

$\therefore \dfrac{3}{BC}=\dfrac{2}{4}$，

解得 $BC=6$．

$\because l_1 // l_2 // l_3$，

$\therefore \dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AB}{AC}$．

$\therefore \dfrac{BF}{9}=\dfrac{3}{3+6}$，

解得 $BF=3$．

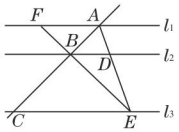


图 1.2−19

挑战·高分

解题通法

利用平行线分线段成比例求线段长的思路：

利用平行线分线段成比例求线段长，需先确定图形中的平行线，由此找出线段间的比例关系，结合待求线段与已知线段写出一个含有它们的比例式，构造出方程，然后解方程求出线段长．

另解

$\because l_1 // l_2 // l_3$，$\therefore \dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AD}{AE}$，$\therefore \dfrac{BF}{9}=\dfrac{2}{2+4}$，

解得 $BF=3$．

拔尖角度▸ 2 利用“中间比法”证明线段成比例

例 11： 如图 1.2−20，P 是 $\square ABCD$ 的边 BC 的延长线上一点，AP 分别交 BD 和 CD 于点 M 和 N．

求证：$\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{MP}{AM}$．

解题秘方： 当利用平行线和相似三角形的性质无法得到所证比例式时，用“等比过渡法”（即中间比）进行代换是常用的证明方法．

证明： $\because AB // DN$，

$\therefore \triangle AMB \backsim \triangle NMD$．

$\therefore \dfrac{AM}{NM}=\dfrac{BM}{DM}$．

又 $\because AD // BP$，

$\therefore \triangle BMP \backsim \triangle DMA$．

$\therefore \dfrac{MP}{MA}=\dfrac{BM}{DM}$．

$\therefore \dfrac{AM}{MN}=\dfrac{MP}{AM}$．

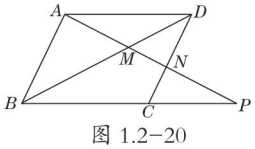


图 1.2−20

挑战·高分

解法提醒

利用平行线得到相似三角形，再由相似三角形对应边的比相等，可求某些线段的长或证明比例式和等积式．当直接利用相似三角形的性质或平行线截得的比例线段无法解决时，可找中间比进行过渡．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用“成比例法”证等积式

挑战·高分

例 12： 如图 1.2−21，已知在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADB=\angle ACB$，延长 AD，BC 相交于点 E.

求证：（1）$\triangle ACE\backsim\triangle BDE$；

（2）$BE\cdot CD=AB\cdot DE$.

解题秘方： 紧扣“等积式与比例式的互化关系”找对应的相似三角形求解.

证明：（1）$\because\angle ADB=\angle ACB$，

$\therefore\angle BDE=\angle ACE$.

又 $\angle E=\angle E$，

$\therefore\triangle ACE\backsim\triangle BDE$.

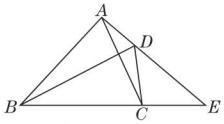


图 1.2−21

（2）$\because\triangle ACE\backsim\triangle BDE$，

$\therefore\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{DE}$，即 $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BE}{DE}$.

又 $\angle E=\angle E$，$\therefore\triangle EAB\backsim\triangle ECD$. $\therefore\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AB}{CD}$.

$\therefore BE\cdot CD=AB\cdot DE$.

解题通法

利用相似三角形证明等积式的方法：

在证明等积式时，一般是把等积式中的四条线段分别看作两个三角形中的两组边，然后通过证明这两个三角形相似得出比例式，再转化为等积式.

拔尖角度▸ 4 利用“三点定形法”找相似的三角形证等积式

挑战·高分

例 13： 已知：如图 1.2−22，CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，E 为 CB 的中点，ED 的延长线交 CA 的延长线于点 F.

求证：$AC\cdot CF=CB\cdot DF$.

解题秘方： 用“三点定形法”将比例式中的四条线段划归到两个相似三角形中进行证明.

证明： $\because CD$ 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，E 为 CB 的中点，

$\therefore CE=EB=DE$.

$\therefore\angle B=\angle BDE=\angle FDA$.

$\because\angle B+\angle CAB=90^\circ$，

$\angle ACD+\angle CAB=90^\circ$，

$\therefore\angle B=\angle ACD$. $\therefore\angle FDA=\angle ACD$.

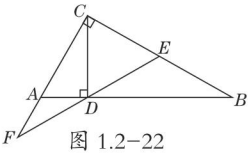


图 1.2−22

又 $\because\angle F=\angle F$，$\therefore\triangle FDA\backsim\triangle FCD$. $\therefore\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{AD}{DC}$.

$\because\angle ADC=\angle CDB=90^\circ$，$\angle ACD=\angle B$，

$\therefore\triangle ACD\backsim\triangle CBD$. $\therefore\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AC}{CB}$.

$\therefore\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{AC}{CB}$，

即 $AC\cdot CF=CB\cdot DF$.

三点定形法

思路点拨

比例式：$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{DF}{CF}$. 横看：比例式的两个分子中的字母对应的点是 A, C, D, F 四点，不能确定三角形；竖看：比例式的左端所含字母对应的点构成△ABC，比例式的右端所含字母对应的点构成△DCF，很明显看出这两个三角形不相似，故需要找一个中间比 $\dfrac{AD}{CD}$ 来联系 $\dfrac{AC}{CB}$ 和 $\dfrac{DF}{CF}$；将证 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{DF}{CF}$ 转化为证 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AD}{CD}$ 和 $\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{AD}{CD}$ 后，再用横看或竖看找相似三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 5 利用对应边成比例法求函数表达式

挑战·高分

例 14： 如图 1.2−23，△ ABC 为等边三角形，D，E 分别是 AC，BC 边上的点（不是顶点），∠ BDE=60° .

（1）求证：△ DEC ∽△ BDA；

（2）若等边三角形的边长为 4，并设 DC=x，BE=y，试求 y 关于 x 的函数表达式.

解题秘方： 紧扣“相似三角形对应边成比例的性质”用方程思想求函数表达式.

（1）**证明：** ∵∠ BDE=60° ，

∴∠ EDC + ∠ ADB=120°.

∵△ ABC 为等边三角形，

∴∠ C = ∠ A=60° ，

∴∠ DBA + ∠ ADB=120°.

∴∠ EDC = ∠ DBA.

∴△ DEC ∽△ BDA.

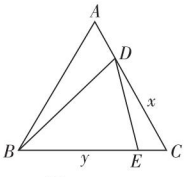


图 1.2−23

（2）**解：** ∵ AB=BC=CA=4，BE=y，DC=x，

∴ EC=4−y，AD=4−x.

∵△ DEC ∽△ BDA，∴ $\frac{EC}{DA}=\frac{DC}{BA}$，

即 $\frac{4-y}{4-x}=\frac{x}{4}$，

整理，得 $y=\frac{1}{4}x^2-x+4$.

∴ y 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{1}{4}x^2-x+4$（0 < x < 4）.

解法规律

解决此类问题时，一般要从已知入手，找出三角形相似的条件，证得三角形相似后得出与两个变量相关的线段比例式，再把 x，y 代到比例式中化简，得到两个变量间的关系的方程，然后化简成函数表达式，同时注意 x 的取值范围.

拔尖角度▸ 6 相似三角形的应用中的双次测量问题

挑战·高分

例 15： 如图 1.2−24，水平地面上某建筑物 AB，在点 D 和点 F 处分别竖立高是 2 米的标杆 CD 和 EF，两标杆相隔 52 米，并且建筑物 AB、标杆 CD 和 EF 在同一竖直平面内. 从标杆 CD 后退 2 米到点 G 处，在 G 处测得建筑物顶端 A 和标杆顶端 C 在同一条直线上；从标杆 FE 后退 4 米到点 H 处，在 H 处测得建筑物顶端 A 和标杆顶端 E 在同一条直线上，则建筑物的高是_____米.

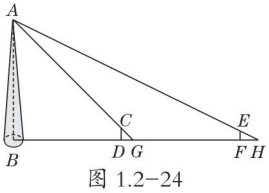


图 1.2−24

解题秘方： 根据题意可得出△ CDG ∽△ ABG，△ EFH ∽△ ABH，再根据相似三角形的对应边成比例即可得出结论.

解题关键

本题测量了两次，每测量一次可得一对相似三角形. 如果只利用一次相似得到的比例式求不出问题的答案，我们可以利用两次相似列出两个比例式，通过解方程求出问题的答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： 设建筑物的高为 x 米，根据题意得

$\triangle CDG \backsim \triangle ABG$，$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DG}{BG}$.

$\because CD=DG=2$，$\therefore BG=AB=x$.

再由$\triangle EFH \backsim \triangle ABH$可得$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{FH}{BH}$，

即$\dfrac{2}{x}=\dfrac{4}{BH}$，$\therefore BH=2x$，即 $BD+DF+FH=2x$，即 $x-2+52+4=2x$，

解得 $x=54$，即建筑物的高是 54 米.

答案： 54

特别提醒

这两个相似三角形属于常见的相似三角形的类型中的平行线型.

拔尖角度▸ 7 利用分割（补形）法求测量中的物高

挑战·高分

例 16： 如图 1.2-25 ①，在离某建筑物 CE 4 m 处有一棵树 AB，在某时刻，1.2 m 的竹竿 FG 垂直地面放置，影子 GH 的长为 2 m，此时树的影子有一部分落在地面上，还有一部分落在建筑物的墙上，墙上的影子 CD 高为 2 m，那么这棵树的高度是多少？

解题秘方： 添加辅助线构造相似三角形，利用相似三角形的对应边成比例求解.

解： 延长 AD，与地面交于点 M，如图 1.2-25 ①.

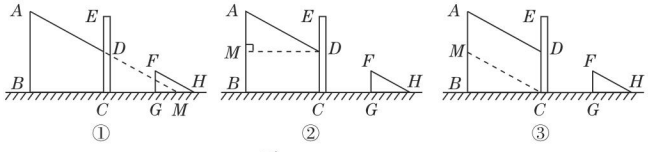


图 1.2-25

由题意知 $AM \parallel FH$，$\therefore \angle AMB = \angle FHG$.

$\because AB \perp BG$，$FG \perp BG$，$DC \perp BG$，

$\therefore \angle ABM= \angle DCM= \angle FGH=90°$.

$\therefore \triangle ABM \backsim \triangle DCM \backsim \triangle FGH$. $\therefore \dfrac{AB}{BM}=\dfrac{CD}{CM}=\dfrac{FG}{GH}$.

$\because CD=2$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

$\therefore \dfrac{2}{CM}=\dfrac{1.2}{2}$，解得 $CM=\dfrac{10}{3}$ m.

$\because BC=4$ m，$\therefore BM=BC+CM=4+\dfrac{10}{3}=\dfrac{22}{3}$（m）.

$\therefore \dfrac{AB}{\frac{22}{3}}=\dfrac{1.2}{2}$，解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

解题技巧

在相似三角形的应用中，添加平行线是常见的作辅助线的方法.通过平行线可以构造出相似三角形，从而求得线段的长.同学们可以按照图 1.2-25 ②，1.2-25 ③的辅助线的作法自己尝试解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

相似三角形的判定不但是本节知识的重点，也是平面几何知识的重点，其中相似三角形的判定、利用相似三角形进行有关的计算或证明一直是中考的必考内容. 在中考中，或单独考查或与特殊四边形、函数等知识相结合考查，题型既有选择题、填空题，也有解答题. 与其他知识相结合时还经常以压轴题的形式出现.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用相似三角形的判定定理判定三角形相似

例17：[中考·枣庄]如图1.2-26，在△ABC中，$\angle A=78°$，$AB=4$，$AC=6$，将△ABC沿图1.2-27中的虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是（　　）

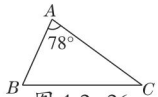


图1.2-26

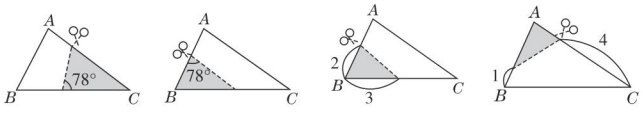


图1.2-27

试题评析：本题考查的是相似三角形的判定，熟知相似三角形的判定定理是解答此题的关键.

解：A. 阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项错误；B. 阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项错误；C. 两三角形的对应边不成比例，故两三角形不相似，故本选项正确；D. 三角形两组对应边成比例且夹角相等，故两三角形相似，故本选项错误.

答案：C

解法提醒

解答本题时要注意题目中隐含的条件：公共角相等，再根据相似三角形的判定方法寻求别的条件：找另一组角相等或找角的两边对应成比例，组成两角相等的两个三角形相似或两边对应成比例且夹角相等的两三角形相似.

考法2 利用相似三角形的判定解开放性探求条件的应用

例18：[中考·潍坊]如图1.2-28，在△ABC中，$AB\neq AC$，D、E分别为边AB、AC上的点. $AC=3AD$，$AB=3AE$，点F为BC边上一点，添加一个条件：_____，可以使得△FDB与△ADE相似.（只需写出一个）

试题评析：本题考查相似三角形的判定，平行线的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

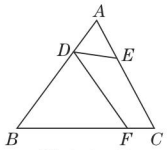


图1.2-28

解：（答案不唯一）$DF\parallel AC$.

理由：$\because\angle A=\angle A$，$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}$，

解法提醒

由已知条件易得△$ADE\backsim$△ACB，再根据相似三角形的传递性，只需补充一个条件，使△BDF与△BAC相似即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACB$.

当 $DF /\!/ AC$ 时，$\triangle BDF \backsim \triangle BAC$，$\therefore \triangle BDF \backsim \triangle EAD$.

答案： $DF /\!/ AC$（答案不唯一）

考法 3 四边形问题与相似三角形的综合应用

例 19：［中考·北京］如图 1.2–29，在矩形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 的中点，连接 DE 交对角线 AC 于点 F，若 $AB=4$，$AD=3$，则 CF 的长为_____.

试题评析： 本题考查了矩形的性质，勾股定理，相似三角形的性质及判定.

解： ∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=CD=4$，$AB /\!/ CD$，$\angle ADC=90°$.

在 Rt $\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=5$.

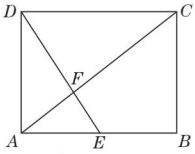


图 1.2–29

∵ E 是 AB 中点，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$.

∵ $AB /\!/ CD$，$\therefore \frac{AF}{CF}=\frac{AE}{CD}=\frac{1}{2}$. $\therefore CF=\frac{2}{3}AC=\frac{10}{3}$.

答案： $\frac{10}{3}$

考法 4 利用相似三角形的性质解决实际生活中的测量问题

例 20：［中考·陕西］周末，小华和小亮想用所学的数学知识测量家门前小河的宽. 测量时，他们选择了河对岸岸边的一棵大树，将其底部作为点 A，在他们所在的岸边选择了点 B，使得 AB 与河岸垂直，并在 B 点竖起标杆 BC，再在 AB 的延长线上选择点 D，竖起标杆 DE，使得点 E 与点 C、A 共线. 已知：$CB \perp AD$，$ED \perp AD$，测得 $BC=1$ m，$DE=1.5$ m，$BD=8.5$ m. 测量示意图如图 1.2–30 所示. 请根据相关测量信息，求河宽 AB.

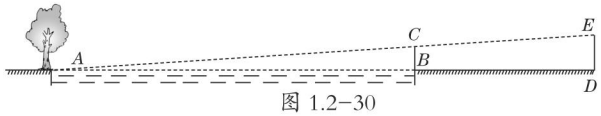


图 1.2–30

试题评析： 本题考查相似三角形的应用、平行线的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

解： ∵ $BC \perp AD$，$DE \perp AD$，

$\therefore BC /\!/ DE$. $\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

$\therefore \frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$. $\therefore \frac{1}{1.5}=\frac{AB}{AB+8.5}$. $\therefore AB=17$ m.

故河宽 AB 为 17 m.

解答思路

判定相似得比例式求线段长是一种常见的解题思路，在平面图形中，这种方法经常与勾股定理、平面图形的性质综合在一起考查.

解法关键

解决实际问题时，要注意提取题目中的有用信息，标识在图形上，再考虑用什么方法解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 5 利用光的反射原理解决反射镜不在地面的测物高的问题

例 21: [中考·兰州]如图 1.2−31,小明为了测量一凉亭的高度 AB(顶端 A 到水平地面 BD 的距离),在凉亭的旁边放置一个与凉亭台阶 BC 等高的台阶 DE($DE=BC=0.5$ 米,A,B,C 三点共线),把一面镜子水平放置在平台上的点 G 处,测得 $CG=15$ 米,然后沿着直线 CG 后退到点 E 处,这时恰好在镜子里看到凉亭的顶端 A,测得 $EG=3$ 米,小明身高 $EF=1.6$ 米,则凉亭的高度 AB 约为(　　)

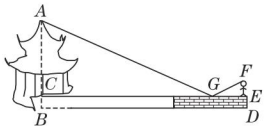


图 1.2−31

A. 8.5 米　　B. 9 米　　C. 9.5 米　　D. 10 米

试题评析: 本题考查相似三角形的判定与性质等知识,解题的关键是灵活运用所学知识解决问题,属于中考常考题型.

解: 由题意易知 $\angle AGC=\angle FGE$,

又 $\because \angle ACG=\angle FEG=90°$,

$\therefore \triangle ACG\backsim\triangle FEG.\ \therefore \dfrac{AC}{FE}=\dfrac{CG}{EG}$.

$\therefore \dfrac{AC}{1.6}=\dfrac{15}{3}.\ \therefore AC=8$ 米.

$\therefore AB=AC+BC=8+0.5=8.5$(米).

答案: A

思路提醒

先利用物理中的光的反射原理结合相似三角形的性质求出高于平台部分的凉亭的高度(AC 长),再求凉亭的高(AB 长):台阶高(BC 长)与台阶以上部分的高(AC 长)的和.

考法 6 利用光的反射原理测量到底部有障碍物的物高的应用

例 22: [中考·陕西]某市为了打造森林城市,树立城市新地标,实现绿色、共享发展理念,在城南建起了“望月阁”及环阁公园.小亮、小芳等同学想用一些测量工具和所学的几何知识测量“望月阁”的高度,来检验自己掌握知识和运用知识的能力.他们经过观察发现,观测点与“望月阁”底部间的距离不易测得,因此经过研究需要两次测量,于是他们首先用平面镜进行测量.方法如下:如图 1.2−32,小芳在小亮和“望月阁”之间的直线 BM 上平放一平面镜,在镜面上做了一个标记,这个标记在直线 BM 上的对应位置为点 C.镜子不动,小亮看着镜面上的标记,他来回走动,走到点 D 时,看到“望月阁”顶端点 A 在镜面

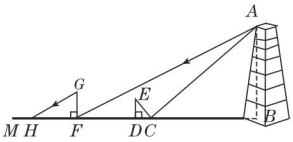


图 1.2−32

思路分析

本题属于双次测量问题,先得到两组相似三角形,再运用相似三角形的对应边成比例求解即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中的像与镜面上的标记重合，这时，测得小亮眼睛与地面的高度 ED=1.5 米，CD=2 米．然后，在阳光下，他们用测量影长的方法进行了第二次测量，方法如下：如图 1.2-32，小亮从 D 点沿 DM 方向走了 16 米，到达“望月阁”影子的末端 F 点处，此时，测得小亮身高 FG 的影长 FH=2.5 米，FG=1.65 米．

如图，已知 $AB \perp BM$，$ED \perp BM$，$GF \perp BM$，其中，测量时所使用的平面镜的厚度忽略不计，请你根据题中提供的相关信息，求出“望月阁”的高 AB 的长度．

试题评析：此题主要考查了相似三角形的判定与性质，正确利用已知得出相似三角形是解题的关键．

解：由题意可得：$\angle ABC = \angle EDC = \angle GFH = 90°$，

$\angle ACB = \angle ECD$，$\angle AFB = \angle GHF$，

故 $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$，$\triangle ABF \backsim \triangle GFH$，

则 $\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC}$，$\dfrac{AB}{GF} = \dfrac{BF}{FH}$，

即 $\dfrac{AB}{1.5} = \dfrac{BC}{2}$，$\dfrac{AB}{1.65} = \dfrac{BC+18}{2.5}$，

解得 AB=99 米．

故“望月阁”的高 AB 的长度为 99 米．

另解

设 $AB=x$ 米，$BC=y$ 米，

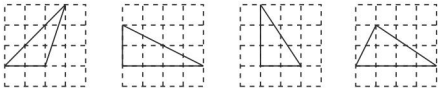
则 $\begin{cases} \dfrac{x}{1.5} = \dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{x}{1.65} = \dfrac{y+18}{2.5}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=99, \\ y=132. \end{cases}$

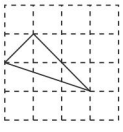
两年模拟兵法

☞ 答案见 233 页

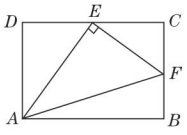
1. 与如图所示三角形相似的是（　　）



A　　B　　C　　D



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 CD，BC 上的点．若 $\angle AEF$=90°，则一定有（　　）

A. $\triangle ADE \backsim \triangle ECF$

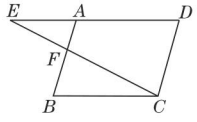
B. $\triangle ECF \backsim \triangle AEF$

C. $\triangle ADE \backsim \triangle AEF$

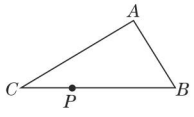
D. $\triangle AEF \backsim \triangle ABF$

3. [中考·盐城]如图，点 F 在平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，射线 CF 交 DA 的延长线于点 E，在不添加辅助线的情况下，与 $\triangle AEF$ 相似的三角形有（　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个



（第 3 题）



（第 4 题）

4. [模拟·合肥]如图，已知点 P 是 Rt $\triangle ABC$ 的斜边 BC 上任意一点，若过点 P 作直线 PD 与直角边 AB 或 AC 相交于点 D，截得的小三角形与 $\triangle ABC$ 相似，那么 D 点的位置最多有（　　）

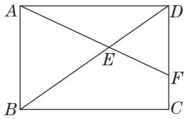
A. 2 处　　B. 3 处

C. 4 处　　D. 5 处

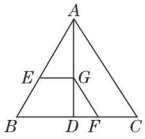
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [模拟·潍坊]如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{6}$，点 E 在对角线 BD 上，且 $BE=1.8$，连接 AE 并延长交 DC 于点 F，则 $\dfrac{CF}{CD}$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$



（第 5 题）



（第 6 题）

6. [中考·哈尔滨]如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 边上，连接 AD，点 G 在线段 AD 上，$GE \parallel BD$，且交 AB 于点 E，$GF \parallel AC$，且交 CD 于点 F，则下列结论一定正确的是（　　）

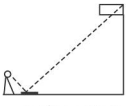
A. $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AG}{AD}$　　B. $\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{DG}{AD}$

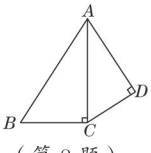
C. $\dfrac{FG}{AC}=\dfrac{EG}{BD}$　　D. $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CF}{DF}$

7. [模拟·西城区]如图，小明在地面上放了一个平面镜，选择合适的位置，刚好在平面镜中看到旗杆的顶部，此时小明与平面镜的水平距离为 2 m，旗杆底部与平面镜的水平距离为 16 m，若小明的眼睛与地面距离为 1.5 m，则旗杆的高度为（　　）

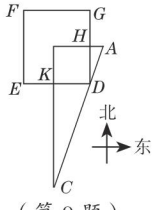
A. $\dfrac{16}{3}$ m　　B. 9 m

C. 12 m　　D. $\dfrac{64}{3}$ m


（第 7 题）



（第 8 题）

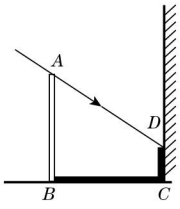


（第 9 题）

8. [期中·东昌府]如图，在两个直角三角形中，$\angle ACB=\angle ADC=90°$，$AC=\sqrt{6}$，$AD=2$. 问：当 AB 等于_____时，这两个直角三角形相似.

9. [中考·泰安]《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，在“勾股”章中有这样一个问题：“今有邑方二百步，各中开门，出东门十五步有木，问：出南门几步而见木？”用今天的话说，大意是：如图，$DEFG$ 是一座边长为 200 步（“步”是古代的长度单位）的正方形小城，东门 H 位于 GD 的中点，南门 K 位于 ED 的中点，出东门 15 步的 A 处有一树木，求出南门多少步恰好看到位于 A 处的树木（即点 D 在直线 AC 上），请你计算 KC 的长为_____步.

10. 如图，某时刻垂直于地面的标杆 AB 在阳光下的影子一部分落在地面上（BC），一部分落在高楼的墙上（CD）. 已知 $AB=3$ m，$BC=3$ m，$CD=1$ m. 问：若无墙阻挡，标杆 AB 在地面上的影子有多长？

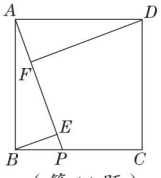


（第 10 题）

11. [中考·上海]已知：如图，正方形 $ABCD$ 中，P 是边 BC 上一点，$BE \perp AP$，$DF \perp AP$，垂足分别是点 E，F.

（1）求证：$EF=AE-BE$；

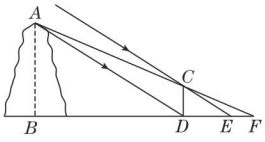
（2）连接 BF，如果 $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{DF}{AD}$，求证：$EF=EP$.



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. [模拟·蓝田县]如图是位于陕西省西安市荐福寺内的小雁塔，是中国早期方形密檐式砖塔的典型作品，并作为丝绸之路的一处重要遗址点，被列入《世界遗产名录》. 小铭、小希等几位同学想利用一些测量工具和所学的几何知识测量小雁塔的高度，由于观测点与小雁塔底部间的距离不易测量，因此经过研究需要进行两次测量，于是在阳光下，他们首先利用影长进行测量，方法如下：小铭在小雁塔的影子顶端 D 处竖直立一根木棒 CD，并测得此时木棒的影长 $DE=2.4$ 米；然后，小希在 BD 的延长线上找出一点 F，使得 A、C、F 三点在同一直线上，并测得 $DF=2.5$ 米. 已知图中所有点均在同一平面内，木棒高 $CD=1.72$ 米，$AB \perp BF$，$CD \perp BF$，试根据以上测量数据，求小雁塔的高度 AB.

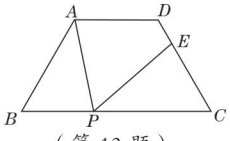


（第 12 题）

13. [中考·南充]如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=3$，$BC=7$，$\angle B=60°$，P 为 BC 边上一点（不与 B，C 重合），过点 P 作 $\angle APE=\angle B$，PE 交 CD 于 E.

（1）求证：$\triangle APB \backsim \triangle PEC$；

（2）若 $CE=3$，求 BP 的长.



（第 13 题）

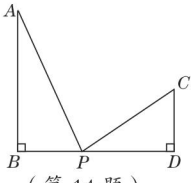
14. 如图，已知 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$.

（1）若 $AB=9$，$CD=4$，$BD=10$，请问：在 BD 上是否存在点 P，使以 P，A，B 三点为顶点的三角形与以 P，C，D 三点为顶点的三角形相似？若存在，求 BP 的长；若不存在，请说明理由.

（2）若 $AB=9$，$CD=4$，$BD=12$，请问：在 BD 上存在多少个点 P，使以 P，A，B 三点为顶点的三角形与以 P，C，D 三点为顶点的三角形相似？求出 BP 的长.

（3）若 $AB=9$，$CD=4$，$BD=15$，请问：在 BD 上存在多少个点 P，使以 P，A，B 三点为顶点的三角形与以 P，C，D 三点为顶点的三角形相似？求出 BP 的长.

（4）若 $AB=m$，$CD=n$，$BD=l$，请问：在 m，n，l 满足什么关系时，存在使以 P，A，B 三点为顶点的三角形与以 P，C，D 三点为顶点的三角形相似的一个点 P？两个点 P？三个点 P？（点 P 在 BD 上）



（第 14 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3 相似三角形的性质

核心知识

- 相似三角形的边角性质
- 相似三角形对应线段的性质
- 相似三角形周长和面积的性质

知识链接

相似三角形的性质
- 边、角：对应边成比例，对应角相等
- 周长：周长比等于相似比
- 对应线段：对应高、中线、角平分线的比等于相似比
- 面积：面积比等于相似比的平方

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 相似三角形对应线段的比

提分·必记

1. **定理**：相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比，

   即：相似三角形对应线段的比等于相似比.

   特别提醒：（1）注意“对应”二字，应用时要找准对应线段；

   （2）相似比是有顺序的，不能颠倒相似三角形中元素的顺序.

2. **相似三角形周长的比**：相似三角形周长的比等于相似比.

深度理解

对应高、对应中线与对应角平分线分别是指相似三角形对应边上的高、中线与对应内角的平分线.

拨考向 利用相似三角形对应线段的比求线段的长

提分·秘诀

题型 1：相似三角形对应高的比在求线段长中的应用

例 1：如图 1.3−1，在△ABC中，AD是BC边上的高，矩形$EFGH$内接于△ABC，且长边FG在BC上，AD与EH的交点为P，矩形相邻两边的比为 1∶2. 若BC=30 cm，AD=10 cm，求矩形$EFGH$的周长.

解题秘方：将矩形周长问题转化为相似三角形对应高的比求解.

解：设$HG=x$ cm，则$EH=2x$ cm.

易得$AP\perp EH$，$PD=HG$.

$\because AD=10$ cm，

$\therefore AP=(10-x)$ cm.

$\because$四边形$EFGH$为矩形，$\therefore EH\parallel BC$.

$\therefore\triangle AEH\backsim\triangle ABC$.

$\therefore\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{EH}{BC}$，即$\dfrac{10-x}{10}=\dfrac{2x}{30}$，

解得$x=6$. $\therefore HG=6$ cm，$EH=12$ cm.

$\therefore$矩形$EFGH$的周长为 36 cm.

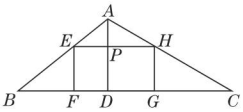


图 1.3−1

详解

$\because$四边形$EFGH$是矩形，

$\therefore EH\parallel FG$，$HG\perp FG$.

又$\because AD$是BC边上的高，

$\therefore AD\perp FG$.

$\therefore AP\perp EH$.

$\because EH\parallel FG$，

$PD\perp FG$，$HG\perp FG$，

$\therefore PD=HG$.

方法点拨

相似三角形中对应线段的比等于相似比，其中“对应线段”除对应边外，还有对应边上的高、中线，对应角的平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：相似三角形对应周长的比在求周长中的应用

例 2： 如果两个相似三角形的相似比是 3 ∶ 2，它们的周长差为 8，那么较大的三角形的周长为_____.

解题秘方： 紧扣“相似三角形周长的比等于相似比”列方程求解.

解： 设较大的三角形的周长为 x，则较小的三角形的周长为 $x-8$.

∵这两个相似三角形的相似比为 3 ∶ 2，

∴这两个相似三角形的周长比为 3 ∶ 2，∴$\frac{x}{x-8}=\frac{3}{2}$，

解得 $x=24$.

答案： 24

解题通法： 用方程求解周长的思路：当问题中出现两个相似三角形的周长差求周长时，一般先将两个三角形的周长都用含未知数的代数式表示，再根据“相似三角形周长的比等于相似比”列方程，解方程即可解决问题.

特别提醒

利用相似三角形周长的比等于相似比时，要注意对应关系，即较大的三角形的周长∶较小的三角形的周长=3∶2.

另解

∵这两个相似三角形的相似比为 3 ∶ 2，

∴这两个三角形的周长比为 3 ∶ 2. 设较小的三角形的周长为 $2x$，较大的三角形的周长为 $3x$，则 $3x-2x=8$，∴$x=8$，∴较大的三角形的周长为 $3x=24$.

点知识 ▸ 2 相似三角形面积的比

1. 相似三角形面积的比： 相似三角形面积的比等于相似比的平方. 若 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且它们的相似比为 k，则 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=k^2$.

特别提醒： 相似三角形面积的比等于相似比的平方，不要与对应线段的比、周长的比混淆.

2. 相似多边形面积的比： 相似多边形面积的比等于相似比的平方.

提分·必记

活学巧记

相似三角形性质，
每个方面不尽同，
中线高线角分线，
对应比等相似比，
周长比等相似比，
面积的比有平方.

提分·秘诀

拔考向 ▸ 利用相似三角形面积的比的关系解决比的问题

类型一：利用线段比求面积比

例 3： [中考·东莞]在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别为边 AB，AC 的中点，则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

解题秘方： 先证明 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求出两三角形的相似比，再根据相似三角形面积比等于相似比的平方求出 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

解： ∵点 D，E 分别为边 AB，AC 的中点，∴DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

∴$DE\parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$. ∴$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

∴$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2=\frac{1}{4}$.

答案： C

思路分析

由点 D，E 分别为边 AB，AC 的中点，可得出 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，进而可得出 $DE\parallel BC$ 及 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，再利用相似三角形的性质即可求出 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型二：利用面积比求线段比

例 4：[中考·随州]如图 1.3−2，平行于 BC 的直线 DE 把△ ABC 分成面积相等的两部分，则 $\frac{BD}{AD}$ 的值为（　　）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{2}+1$

解题秘方：由 $DE \parallel BC$ 可得出△ $ADE \backsim$ △ ABC，利用相似三角形的性质结合 $S_{\triangle ADE}=S_{四边形 BCED}$，可得出 $\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，结合 $BD=AB-AD$ 即可求出 $\frac{BD}{AD}$ 的值，此题得解.

解：$\because DE \parallel BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

$\therefore$ △ $ADE \backsim$ △ ABC.

$\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$.

$\because S_{\triangle ADE}=S_{四边形 BCED}$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{AB-AD}{AD}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

答案：C

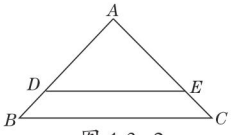


图 1.3−2

易错点

所求的 $\frac{BD}{AD}$ 中，线段 BD 和 AD 不是相似三角形的一组对应边，不能由面积比为 1∶2 开方直接求出线段比. 还要注意比是有顺序性的，注意这两条线段的先后顺序.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用相似三角形的性质解决从三角形中截最大正方形问题

挑战·高分

例 5：[中考·岳阳]《九章算术》是我国古代数学名著，书中有下列问题："今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何？"其意思为："今有直角三角形，勾（短直角边）长为 5 步，股（长直角边）长为 12 步，问该直角三角形能容纳的正方形边长最大是多少步？"该问题的答案是_____步.

解题秘方：如图 1.3−3 ①，根据正方形的性质得：$DE \parallel BC$，则△ $ADE \backsim$ △ ACB，列比例式可得正方形边长；如图 1.3−3 ②，同理可得正方形的边长，比较可得最大值.

解：如图 1.3−3 ①，$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，

$\therefore CD=ED$，$DE \parallel CF$.

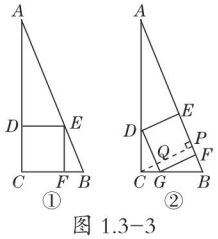


图 1.3−3

解题技巧

从三角形中截一个最大正方形时，正方形一边一定与三角形一边平行，由平行得到一组相似三角形，选取平行的两边为相似三角形的一组对应边，这两边上的高为一组对应高，得到一组比例式，利用这个比例式求线段的长，有时需要设出未知数来表示线段.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

设 $ED=x$，则 $CD=x$，$AD=12-x$.

$\because DE \parallel CF$，$\therefore \angle ADE=\angle C$，$\angle AED=\angle B$.

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{DE}{CB}=\dfrac{AD}{AC}$. $\therefore \dfrac{x}{5}=\dfrac{12-x}{12}$，解得 $x=\dfrac{60}{17}$.

如图 1.3-3 ②，过 C 作 $CP \perp AB$ 于 P，交 DG 于 Q，设 $ED=y$.

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC \cdot BC=\dfrac{1}{2}AB \cdot CP$，$\therefore CP=\dfrac{60}{13}$.

易得 $\triangle CDG \backsim \triangle CAB$，$\therefore \dfrac{DG}{AB}=\dfrac{CQ}{CP}$.

$\therefore \dfrac{y}{13}=\dfrac{\frac{60}{13}-y}{\frac{60}{13}}$，解得 $y=\dfrac{780}{229}<\dfrac{60}{17}$.

$\therefore$ 该直角三角形能容纳的正方形边长最大是 $\dfrac{60}{17}$ 步.

答案： $\dfrac{60}{17}$

详解

$\because DG \parallel AB$，

$\therefore \angle CDG=\angle CAB$，

$\angle CGD=\angle CBA$.

$\therefore \triangle CDG \backsim \triangle CAB$.

拔尖角度▶ 2 利用相似三角形面积比和同（等）高三角形面积比解决面积问题

挑战·高分

例 6： 如图 1.3-4，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是边 AD 的中点，连接 EC 交对角线 BD 于点 F，若 $S_{\triangle DEC}=3$，则 $S_{\triangle BCF}=$_____.

解题秘方： 紧扣“相似三角形的面积比等于相似比的平方”解题.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$. $\therefore \triangle DEF \backsim \triangle BCF$. $\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{EF}{CF}$.

$\because$ 点 E 是边 AD 的中点，$\therefore DE=AE=\dfrac{1}{2}AD$.

又 $AD=BC$，$\therefore DE=\dfrac{1}{2}BC$. $\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{EF}{CF}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{EF}{EC}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DEC}}=\dfrac{EF}{EC}=\dfrac{1}{3}$.

又 $S_{\triangle DEC}=3$，$\therefore S_{\triangle DEF}=1$.

$\because \dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BCF}}=\left(\dfrac{EF}{CF}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$\therefore S_{\triangle BCF}=4$.

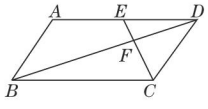


图 1.3-4

答案： 4

详解

如图 1.3-5，过点 D 作 $DH \perp EC$ 于点 H，

则 $S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}EF \times DH$，

$S_{\triangle DEC}=\dfrac{1}{2}EC \times DH$，

$\therefore S_{\triangle DEF}:S_{\triangle DEC}=EF:EC$.

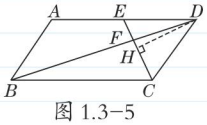


图 1.3-5

方法技巧

相似三角形面积比等于相似比的平方，同高三角形面积比等于底的比，同底三角形面积比等于高的比. 在解决面积比问题时，一定先弄清楚这两个三角形是哪种关系的三角形，再去具体解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用相似三角形的性质解决平行四边形问题

例7: 如图 1.3-6，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 CD 的延长线上一点，BE 与 AD 交于点 F，$DE=\frac{1}{2}CD$.

（1）求证：$\triangle ABF \backsim \triangle CEB$.

（2）若 $\triangle DEF$ 的面积为 2，求 $\square ABCD$ 的面积.

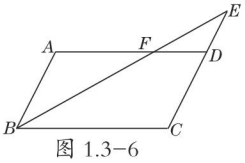


图 1.3-6

解题秘方: （1）根据平行四边形的性质，可得 $\angle A=\angle C$，$AB \parallel CD$，从而可得出 $\angle ABF=\angle CEB$，结论可证；（2）根据条件可证 $\triangle DEF \backsim \triangle CEB$，$\triangle DEF \backsim \triangle ABF$，因为 $S_{\triangle DEF}=2$，所以 $S_{\triangle ABF}=8$，$S_{四边形 BCDF}=S_{\triangle BCE}-S_{\triangle DEF}=16$，所以 $S_{\square ABCD}=24$.

（1）**证明:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle A=\angle C$，$AB \parallel CD$. $\therefore \angle ABF=\angle CEB$. $\therefore \triangle ABF \backsim \triangle CEB$.

（2）**解:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$，且 $AB=CD$.

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle CEB$，$\triangle DEF \backsim \triangle ABF$. $\because DE=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle CEB}}=\left(\frac{DE}{EC}\right)^2=\frac{1}{9}$，$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$.

$\because S_{\triangle DEF}=2$，$\therefore S_{\triangle CEB}=18$，$S_{\triangle ABF}=8$.

$\therefore S_{四边形 BCDF}=S_{\triangle BCE}-S_{\triangle DEF}=16$.

$\therefore S_{\square ABCD}=S_{四边形 BCDF}+S_{\triangle ABF}=16+8=24$.

拔尖角度▸ 4 利用建相似三角形模型法解实际应用问题

例8: 某小区的居民筹集资金 1 600 元，计划在一块四边形的空地 $ABCD$ 上种植花木，其中 $AD \parallel BC$，$AD=10$ m，$BC=20$ m，如图 1.3-7.

（1）他们在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMB$ 地带上种植太阳花，价格为 8 元/m^2，当 $\triangle AMD$ 地带上种满太阳花后（图 1.3-7 中阴影部分），共花了 160 元，请计算种满 $\triangle CMB$ 地带所需的费用；

（2）若其余地带有玫瑰花和茉莉花两种花木可供选择，价格分别为 12 元/m^2 和 10 元/m^2，则应选择种哪种花木可以刚好用完所筹集的资金？

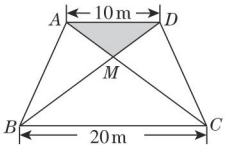


图 1.3-7

挑战·高分

土方法

在“A”型相似三角形 $\triangle DEF$ 与 $\triangle CEB$ 中，当我们已知 $\triangle DEF$ 或 $\triangle CEB$ 的面积求四边形 BCDF 的面积时，可设四边形 BCDF 的面积为 x，利用相似三角形面积比等于相似比的平方列式子，通过解方程直接求出四边形 BCDF 的面积，这也是方程思想的一个应用.

挑战·高分

思路导航

- 先证明 $\triangle AMD$ 与 $\triangle BMC$ 相似，然后根据相似三角形的性质来求解；
- 根据(1)可得 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMB$ 的面积，进而可求出 $\triangle AMD$ 的 AD 边上的高和 $\triangle CMB$ 的 BC 边上的高，由于梯形 ABCD 的高为 $\triangle AMD$ 的 AD 边上的高与 $\triangle BMC$ 的 BC 边上的高之和，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣相似三角形的性质，建立相似三角形的模型求解．

解：（1）∵ $AD \parallel BC$，∴ $\triangle AMD \backsim \triangle CMB$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle CMB}} = \left(\dfrac{AD}{BC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

∵在$\triangle AMD$地带种满太阳花共花费160元，种植太阳花的价格为8元/m^2，∴ $S_{\triangle AMD}=20\ m^2$. ∴ $S_{\triangle CMB}=80\ m^2$.

∴在$\triangle CMB$地带种满太阳花所需的费用为$8\times80=640$（元）．

（2）设$\triangle AMD$的AD边上的高为h_1 m，$\triangle BMC$的BC边上的高为h_2 m，则梯形$ABCD$的高为(h_1+h_2) m.

∵ $\dfrac{1}{2}\times10h_1=20$，∴ $h_1=4$. ∵ $\dfrac{1}{2}\times20h_2=80$，∴ $h_2=8$.

$\therefore S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)(h_1+h_2)=\dfrac{1}{2}\times(10+20)\times(4+8)=180\ (m^2)$，

∴ $S_{\triangle AMB}+S_{\triangle DMC}=180-20-80=80\ (m^2)$.

∵ $160+640+80\times12=1\,760$（元），

$160+640+80\times10=1\,600$（元），

∴选择种植茉莉花可以刚好用完所筹集的资金．

故可求得梯形的面积，进而分别计算种植两种花木的费用．

另解

∵ $\triangle AMD \backsim \triangle CMB$，

$\therefore \dfrac{AM}{CM}=\dfrac{AD}{CB}=\dfrac{1}{2}$.

∴ $CM=2AM$.

又$\triangle AMD$与$\triangle DMC$是等高三角形，

∴ $S_{\triangle DMC}=2S_{\triangle AMD}=40\ m^2$.

同理可得$S_{\triangle AMB}=40\ m^2$.

∴ $S_{\triangle AMB}+S_{\triangle DMC}=40+40=80\ (m^2)$.

拔尖角度▸ 5 利用相似三角形对应边成比例求几何图形中的函数关系式

挑战·高分

例9：如图1.3-8，在长方形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，P是BC边上一动点，过D作$DE \perp AP$于E，设$AP=x$，$DE=y$，试求出y与x之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围．

解题秘方：根据两角相等证明$\triangle ABP \backsim \triangle DEA$，得到对应线段成比例，求得函数关系式．

解：∵四边形$ABCD$是长方形，

∴ $AD \parallel BC$，$\angle ABP=90°$，$AD=BC=8$.

∴ $\angle DAE=\angle APB$.

又∵ $DE \perp AP$，∴ $\angle DEA=90°$.

∴ $\angle ABP=\angle DEA$.

∴ $\triangle ABP \backsim \triangle DEA$.

$\therefore \dfrac{AP}{DA}=\dfrac{AB}{DE}$. ∴ $\dfrac{x}{8}=\dfrac{6}{y}$.

∴ $xy=48$.

∴ $y=\dfrac{48}{x}$ $(6\leqslant x\leqslant10)$.

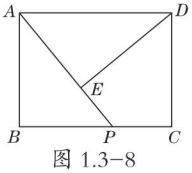


图1.3-8

解题规律

在几何图形中求函数关系式时，先证明相似，再根据相似得比例式，最后用比例式来求函数关系式是常用的方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 相似三角形的性质是中考命题的热点，主要考查利用相似三角形的性质求角的度数或线段的长度，证明及运用性质解决实际问题，题型有选择题、填空题、解答题中的证明题及应用题，还常与相似三角形的判定、方程、函数等知识结合在一起考查.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用相似三角形的性质求比值

例10：[中考·连云港]如图1.3-9，已知$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$AB:DE=1:2$，则下列等式一定成立的是（　　）

A. $\frac{BC}{DF}=\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\angle A\text{的度数}}{\angle D\text{的度数}}=\frac{1}{2}$

C. $\frac{\triangle ABC\text{的面积}}{\triangle DEF\text{的面积}}=\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\triangle ABC\text{的周长}}{\triangle DEF\text{的周长}}=\frac{1}{2}$

试题评析：本题考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的对应角相等，对应边的比等于相似比、周长比等于相似比、面积比等于相似比的平方是关键.

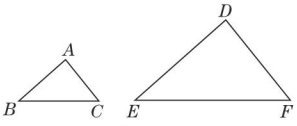


图1.3-9

解：$\because\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$\therefore\frac{BC}{EF}=\frac{1}{2}$，$\frac{\angle A\text{的度数}}{\angle D\text{的度数}}=1$，

$\frac{\triangle ABC\text{的面积}}{\triangle DEF\text{的面积}}=\frac{1}{4}$，$\frac{\triangle ABC\text{的周长}}{\triangle DEF\text{的周长}}=\frac{1}{2}$. 故选D.

答案：D

解法提醒

- 相似三角形对应角相等，对应边的比等于相似比，对应线段（中线、高、角平分线）的比等于相似比，周长的比等于相似比；
- 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

考法2 相似三角形性质的简单应用

例11：如图1.3-10，$\triangle ABC$中，$AC=6$，$AB=4$，D与A在直线BC的同侧，且$\angle ACD=\angle B$，$CD=2$，E是线段BC延长线上的动点，当$\triangle DCE$和$\triangle ABC$相似时，线段CE的长为_____.

试题评析：本题考查相似三角形的性质，找出所求问题需要的条件，利用三角形的相似解答.

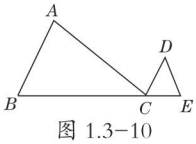


图1.3-10

解：$\because\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，$\angle ACB+\angle ACD+\angle DCE=180^\circ$，$\angle ACD=\angle B$，

$\therefore\angle A=\angle DCE$. $\because\triangle DCE$和$\triangle ABC$相似，$\therefore\frac{AB}{CD}=\frac{AC}{CE}$或$\frac{AB}{CE}=\frac{AC}{CD}$，即$\frac{4}{2}=\frac{6}{CE}$或$\frac{4}{CE}=\frac{6}{2}$，解得$CE=3$或$CE=\frac{4}{3}$.

答案：3或$\frac{4}{3}$

解法提醒

当题目中给出两个三角形相似，但又没有指明相似三角形的对应边时，应分情况讨论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见235页

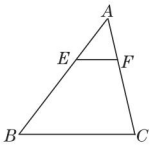
1. [期末·临朐县]若△ABC∽△DEF，△ABC与△DEF的相似比为2∶3，则$S_{\triangle ABC}$∶$S_{\triangle DEF}$为（　　）

A. 2∶3　　B. 4∶9

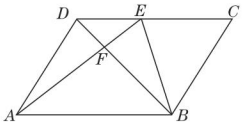
C. $\sqrt{2}$∶$\sqrt{3}$　　D. 3∶2

2. [中考·贵港]如图，在△ABC中，EF∥BC，AB=3AE，若$S_{四边形BCFE}$=16，则$S_{\triangle ABC}$=（　　）

A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 24



（第2题）



（第4题）

3. [中考·重庆]制作一块3 m×2 m长方形广告牌的成本是120元，在每平方米制作成本相同的情况下，若将此广告牌的四边都扩大为原来的3倍，那么扩大后长方形广告牌的成本是（　　）

A. 360元　　B. 720元

C. 1 080元　　D. 2 160元

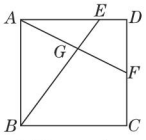
4. 如图，在平行四边形$ABCD$中，E是CD上的一点，DE∶EC=2∶3，连接AE，BE，BD，且AE，BD交于点F，则$S_{\triangle DEF}$∶$S_{\triangle EBF}$∶$S_{\triangle BAF}$=（　　）

A. 2∶2∶25　　B. 4∶9∶25

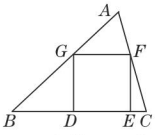
C. 2∶3∶5　　D. 4∶10∶25

5. [中考·泸州]如图，正方形$ABCD$中，E，F分别在边AD，CD上，AF，BE相交于点G，若AE=3ED，DF=CF，则$\frac{AG}{GF}$的值是（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{7}{6}$



（第5题）



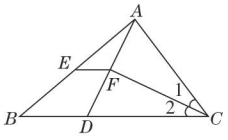
（第6题）

6. [中考·上海]如图，已知正方形$DEFG$的顶点D，E在△ABC的边BC上，顶点G，F分别在边AB，AC上．如果BC=4，△ABC的面积是6，那么这个正方形的边长是_____.

7. 如图，在△ABC中，BC>AC，点D在BC上，且DC=AC，∠ACB的平分线CF交AD于点F，点E是AB的中点，连接EF.

（1）求证：EF∥BC；

（2）若四边形$BDFE$的面积为6，求△ABD的面积.

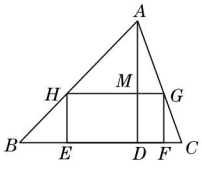


（第7题）

8. 如图，△ABC是一张锐角三角形的硬纸片，AD是边BC上的高，BC=40 cm，AD=30 cm，从这张硬纸片上剪下一个长HG是宽HE的2倍的矩形$EFGH$，使它的一边EF在BC上，顶点G，H分别在AC，AB上，AD与HG的交点为M.　　【导学号：7199732】

（1）求证：$\frac{AM}{AD}=\frac{HG}{BC}$；

（2）求矩形$EFGH$的周长.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.4 图形的位似

核心知识

- 位似图形的概念及性质
- 位似变换作图
- 位似变换的坐标的特征

知识链接

定义、性质 → 位似图形 → 画法、坐标规律

点知识·拨考向 速提分

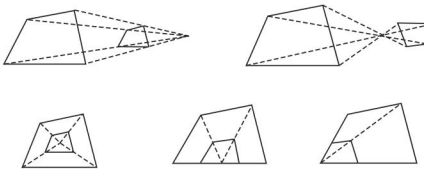
点知识▸ 1 位似图形的定义

1. **定义**：对应边互相平行（或共线）且每对对应点所在的直线都经过同一点的两个相似多边形叫做位似图形，这个点叫做位似中心.

2. **位似与相似的关系**：

（1）相似仅要求两个图形形状完全相同，而位似是在相似的基础上要求对应点的连线相交于一点.

（2）如果两个图形是位似图形，那么这两个图形必是相似图形，但是相似的两个图形不一定是位似图形，因此,位似是相似的特殊情况.



位似图形

图 1.4-1

拨考向▸ 利用位似图形的定义识别位似图形

例 1：如图 1.4-2，不是位似图形的是（　　）

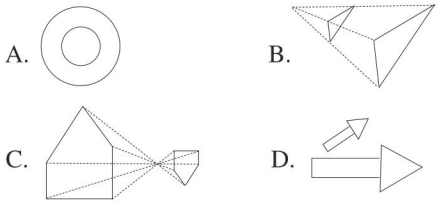


图 1.4-2

解题秘方：根据位似图形的定义进行判断.

解：根据位似图形的概念，A，B，C 中的两个图形都是位似图形，D 中的两个图形不符合位似图形的概念，对应点的连线不能相交于一点，故不是位似图形.

答案：D

提分·必记

特别提醒

- 位似图形的位似中心有且只有一个.
- 位似中心可能位于两个图形的同侧，也可能位于两个图形之间，还可能位于两个图形的内部或边上.常见位似图形的构成如图 1.4-1 所示.

提分·秘诀

解题技巧

根据位似图形的定义，位似图形必须符合下面三个条件：

① 两个图形相似，

② 对应边互相平行（或共线），

③ 对应点所在的直线都经过同一个点，三个条件缺一不可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 位似图形的性质

位似图形的性质：

（1）位似图形每组对应点的连线必过位似中心．

（2）位似图形任意一组对应点到位似中心的距离之比等于相似比．

（3）位似图形的对应线段平行（或在一条直线上），且对应线段之比相等．

（4）两个图形位似，则两个图形必相似，其周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方．

特别解读：

（1）利用位似图形的性质，可以作出已知图形的位似图形，把一个图形放大或缩小，同时也可以利用位似图形的性质确定位似中心，求相似比及图形的周长与面积等．

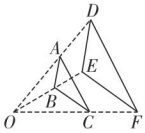


图 1.4−3

（2）利用位似图形的性质求位似图形的相似比，先要确定相似的顺序，再确定相似比．

提分·必记

示例

如图 1.4−3，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 位似．

$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OF}=k$；

直线 AD，BE，CF 交于一点 O；

$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$AC \parallel DF$；（相等）

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，

相似比为 k．

拔考向▶ 根据位似图形的性质解决相关问题

题型 1：利用位似图形的性质找位似中心

例 2： 找出如图 1.4−4 所示的位似图形的位似中心．

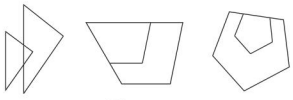


图 1.4−4

解题秘方： 紧扣“位似图形每组对应点的连线必过位似中心”解答．

解： 如图 1.4−5，点 P_1，P_2，P_3 即为所求的位似中心．

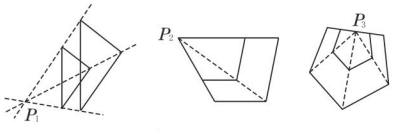


图 1.4−5

提分·秘诀

技巧点拨

位似图形对应点的连线都交于一点，这一点即为位似中心．解题时，我们只需找到两组对应点，分别过每组对应点连线，交点就是位似中心．

题型 2：利用位似图形的性质解决问题

例 3： 如图 1.4−6，四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 是位似图形，且 $AC : AF=2 : 3$，则下列结论不正确的是（　　）

A. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 是相似图形

B. AD 与 AE 的比是 $2 : 3$

C. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的周长比是 $2 : 3$

D. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的面积比是 $4 : 9$

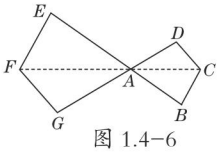


图 1.4−6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：利用位似图形和相似图形的性质进行分析，判断正误.

解：A. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 一定是相似图形，故正确；

B. AD 与 AG 是对应边，故 $AD:AG=2:3$，故错误；

C. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的周长比是 $2:3$，故正确；

D. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的面积比是 $4:9$，故正确.

答案：B

方法点拨

位似图形是特殊的相似图形，所以位似图形具备相似图形的所有性质，还具备自己独有的性质，要把这两种性质合在一起分析解决.

提分·必记

知识▶3 位似图形的画法

画位似图形的步骤：

（1）确定位似中心（位似中心可以在两个图形同侧、中间，也可以在两个图形内部，还可以在两个图形的公共边上或两个图形的公共顶点处）；

（2）分别连接位似中心和能代表原图形的关键点，并延长；

（3）根据相似比，确定新图形的关键点的位置；

（4）顺次连接所作各点，得到放大或缩小的图形.

易错点

利用位似可以把一个图形放大或缩小，作图时先弄清楚相似比，分清楚是放大还是缩小.

考向▶利用位似图形的定义和性质作位似图形

提分·秘诀

例4：如图 1.4−7，在 6×8 的网格图中，每个小正方形边长均为 1，点 O 和 $\triangle ABC$ 的顶点均为小正方形的顶点.

（1）以 O 为位似中心，在网格图中作 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 位似，且相似比为 $1:2$；

（2）连接（1）中的 AA'，求四边形 $AA'C'C$ 的周长（结果保留根号）.

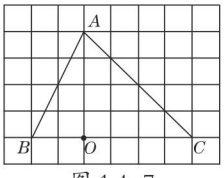


图 1.4−7

解题秘方：（1）利用位似图形的性质得出 A'，B'，C' 的位置，从而得出答案；

（2）利用勾股定理求出 $A'C'$ 及 AC 长即可得出答案.

解：（1）如图 1.4−8 所示.

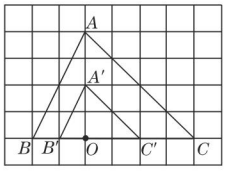


图 1.4−8

（2）如图 1.4−8，由题意可得出：$AA'=2$，$CC'=2$，

$A'C'=2\sqrt{2}$，$AC=4\sqrt{2}$.

$\therefore$ 四边形 $AA'C'C$ 的周长 $=2+2+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=4+6\sqrt{2}$.

土方法

找位似图形的对应点的方法：

若两个图形在中心的同侧，其对应点的对应方式是上对上，下对下，即位置是一致的；若两个图形在位似中心的异侧，其对应方式是上对下，下对上，即位置是相反的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 平面直角坐标系中的位似

1. 位似变换时对应点的坐标变化规律：

在平面直角坐标系中，如果位似变换的位似中心是原点，相似比为 k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$，即若原图形上某一点坐标为（x_0，y_0），则新图形上其对应点的坐标为（kx_0，ky_0）或（$-kx_0$，$-ky_0$）.

注意：这里的相似比指的是新图形与原图形的对应边的比.

2. 平面直角坐标系中多边形的位置特征：

如果多边形有一个顶点在坐标原点，有一条边在 x 轴上，那么将这个多边形的顶点坐标分别扩大（或缩小）相同的倍数，所得到的图形与原图形是位似图形，坐标原点是它们的位似中心.

3. 位似变换与平移、轴对称、旋转三种变换的联系和区别：

（1）位似、平移、轴对称、旋转都是图形变换的基本形式，它们的本质区别在于：平移、轴对称、旋转三种图形变换是全等变换，而位似变换是相似变换.

（2）在直角坐标系中，把一个图形进行平移、轴对称、旋转和位似变换，其对应点的坐标都有各自的变化规律：

①平移变换是横坐标或纵坐标加上（或减去）平移的距离；

②在轴对称变换中，以 x 轴为对称轴，则对应点的横坐标相等，纵坐标互为相反数；以 y 轴为对称轴，则纵坐标相等，横坐标互为相反数；

③在旋转变换中，一个图形绕原点旋转 $180°$，则旋转前后两个图形对应点的横坐标与纵坐标都分别互为相反数；

④在位似变换中，当以原点为位似中心时，变换后与变换前两个图形对应点的横坐标之比的绝对值、纵坐标之比的绝对值都等于相似比.

提分·必记

特别提醒

在平面直角坐标系中，如果以原点为位似中心，相似比为 k 作位似变换，那么当新图形与原图形在原点的同侧时，原图形上的点 (x,y) 对应新图形上的点 (kx,ky)；当新图形与原图形在原点的两侧时，原图形上的点 (x,y) 对应新图形上的点 $(-kx,-ky)$.

当 $k>1$ 时，图形放大为原来的 k 倍；当 $0<k<1$ 时，图形缩小为原来的 k.

拔考向▶ 利用位似变换坐标的变化规律作图

例 5：如图 1.4–9，已知 O 是坐标原点，B，C 两点的坐标分别为（3，−1），（2，1）.

（1）以点 O 为位似中心，在 y 轴的左侧画出将 $\triangle OBC$ 放大为原来的 2 倍（即新图形与原图形的相似比为 2）的图形 $\triangle OB'C'$；

（2）分别写出 B，C 两点的对应点 B'，C' 的坐标；

（3）如果 $\triangle OBC$ 内部一点 M 的坐标为（x，y），试写出点 M 的对应点 M' 的坐标.

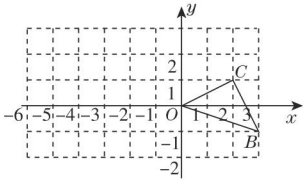


图 1.4–9

提分·秘诀

特别提醒

从原点为位似中心的位似变换的坐标变化一定要注意坐标符号的变化，简单地说，若两图形在原点同侧，则坐标符号不变，若两图形在原点异侧，则坐标符号相反.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据位似中心及相似比作图，再利用位似变换的坐标变化规律求对应点的坐标．

解：（1）如图 1.4−10，延长 BO 到点 B'，使 $OB'=2OB$；延长 CO 到点 C'，使 $OC'=2OC$；连接 $B'C'$，则△ $OB'C'$ 就是要画的图形．

（2）点 B'，C' 的坐标分别为（-6，2），（-4，-2）．

（3）点 $M(x,y)$ 的对应点 M' 的坐标为（$-2x$，$-2y$）．

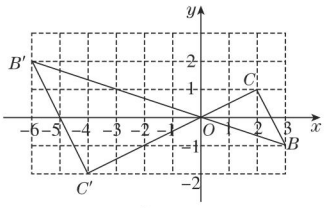


图 1.4−10

土方法

根据位似变换中对应点的坐标变化规律，我们可以把B，C两点的横纵坐标分别乘−2，得到点B′，C′的坐标分别为(−6，2)，(−4，−2)，在平面直角坐标系中描出这两点，画出图形．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用位似图形的定义判定图形位似

挑战·高分

例 6：如图 1.4−11，图中的小方格都是边长为 1 的正方形，△ ABC 与△ $A'B'C'$ 的顶点都在格点上，△ $A'B'C'$ 与△ ABC 是位似图形吗？如果是，画出位似中心并求出相似比；如果不是，请说明理由．

解题秘方：紧扣“位似图形的定义”进行说理．

解：由勾股定理得 $AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

$BC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

$A'B'=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，

$B'C'=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$A'C'=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$．

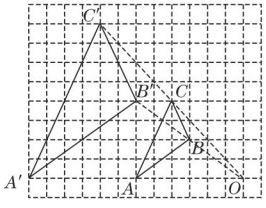


图 1.4−11

所以 $\dfrac{A'B'}{AB}=2$，$\dfrac{B'C'}{BC}=2$，$\dfrac{A'C'}{AC}=2$．

所以 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{A'C'}{AC}$．

所以△ $ABC\backsim$△ $A'B'C'$．

如图 1.4−11，连接 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 并延长相交于一点 O，因此△ $A'B'C'$ 与△ ABC 是位似图形，点 O 为位似中心．

因为 $OA'=12$，$OA=6$，

所以相似比为 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{12}{6}=2$．

解题技巧

位似图形的定义就是位似图形的判定方法，判定位似图形时，严格按照定义的三个条件去分析判断．

易错点

在判断△A′B′C′与△ABC是位似图形时，容易出现只考虑两个三角形的对应顶点的连线相交于一点，而没有证明两个三角形相似的情况．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用对应点的坐标变化规律求坐标

挑战·高分

例 7：[中考·潍坊]在平面直角坐标系中，点 $P(m, n)$ 是线段 AB 上一点，以原点 O 为位似中心把△ AOB 放大到原来的两倍，则点 P 的对应点的坐标为（　　）

A.（$2m, 2n$）　　B.（$2m, 2n$）或（$-2m, -2n$）

C.（$\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n$）D.（$\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n$）或（$-\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}n$）

解题秘方：当位似中心为坐标原点时，其对应点的坐标比为 k 或 $-k$.

解：若 P 和它的对应点在位似中心同侧，则其对应点和 P 点的坐标比为 2，这时其对应点的坐标为（$2m$，$2n$）；若 P 和它的对应点在位似中心异侧，则其对应点和 P 点的坐标比为 -2，这时其对应点的坐标为（$-2m$，$-2n$）.

答案：B

易错点

本题中没有明确说明位似图形在位似中心哪一侧，所以应分两种情况讨论，不能丢掉其中一种.

拔尖角度▶ 3 利用相似比法解坐标平面中的计算问题

挑战·高分

例 8：如图 1.4−12，方格纸中的每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形. 已知△ ABC 的顶点坐标分别为 A（-1，-1），B（-3，0），C（-2，2）.

（1）在方格纸中，将△ ABC 以原点 O 为位似中心，放大为原来的 2 倍，请画出放大后的图形，并求出各顶点的坐标；

（2）若已知△ ABC 的面积为 $\frac{5}{2}$，求放大后的图形的面积.

解题秘方：（1）利用位似变换中对应点的坐标的变化规律可画出放大后的图形，也可求出各顶点的坐标.

（2）因为位似图形是相似图形，所以面积比等于相似比的平方，从而放大后的图形的面积可求.

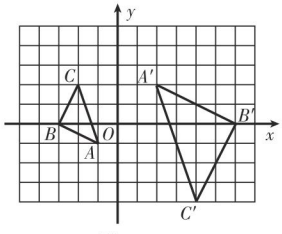


图 1.4−12

解：（1）放大为原来的 2 倍后的图形如图 1.4−12 中的△ $A'B'C'$，其顶点的坐标分别为 A'（2，2），B'（6，0），C'（4，-4）.

（2）∵△ ABC 与△ $A'B'C'$ 是位似图形，

∴△ ABC ∽△ $A'B'C'$，且相似比为 1 ∶ 2.

$\therefore \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = 2^2 = 4.$

又∵ $S_{\triangle ABC} = \frac{5}{2}$，∴ $S_{\triangle A'B'C'} = 4 \times \frac{5}{2} = 10$，

即放大后的图形的面积为 10.

方法提醒

位似图形坐标的变化规律：

将一个图形按照一定的相似比（k）放大或缩小，设位似中心的坐标为（a, b），如果图形中某个点的坐标为 $A(m, n)$，那么变换后对应点 A' 的横坐标为 $k(m-a)+a$ 或 $k(a-m)+a$，纵坐标为 $k(n-b)+b$ 或 $k(b-n)+b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 图形的位似在近几年的中考中主要考查在平面直角坐标系中画位似图形或求位似变换后对应点的坐标，题型主要是选择题、填空题和解答题，题目难度较小.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用位似图形的性质确定位似中心和相似比

例9：[中考·阿坝州]如图1.4-13，在平面直角坐标系中，已知$A(1,0)$，$D(3,0)$，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$位似，原点O是位似中心. 若$AB=1.5$，则$DE=$_____.

试题评析：此题主要考查了位似图形的性质，根据已知点的坐标得出$\frac{AO}{DO}=\frac{AB}{DE}=\frac{1}{3}$是解题关键.

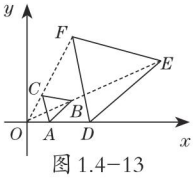


图1.4-13

解：$\because\triangle ABC$与$\triangle DEF$是位似图形，位似中心为原点O，A点坐标为$(1,0)$，D点坐标为$(3,0)$，

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$AO=1$，$DO=3$. $\therefore\frac{AO}{DO}=\frac{AB}{DE}=\frac{1}{3}$.

$\because AB=1.5$，$\therefore DE=4.5$.

答案：4.5

解法提醒

根据点A,D的坐标求出OA,OD的长，再结合位似图形的性质求解即可.

考法2 利用位似图形的性质求坐标系中点的坐标

例10：[中考·烟台]如图1.4-14，在平面直角坐标系中，正方形$ABCD$与正方形$BEFG$是以原点O为位似中心的位似图形，且相似比为$\frac{1}{3}$，点A，B，E在x轴上，若正方形$BEFG$的边长为6，则C点的坐标为（　　）

A.（3，2）　B.（3，1）　C.（2，2）　D.（4，2）

试题评析：此题主要考查了位似图形的性质以及相似三角形的判定与性质，正确得出AO的长是解题的关键.

解：$\because$正方形$ABCD$与正方形$BEFG$是以原点O为位似中心的位似图形，且相似比为$\frac{1}{3}$，$\therefore\frac{AD}{BG}=\frac{1}{3}$.

$\because BG=6$，$\therefore AD=BC=2$.

$\because AD\parallel BG$，$\therefore\triangle OAD\backsim\triangle OBG$.

$\therefore\frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BG}=\frac{1}{3}$. $\therefore\frac{OA}{2+OA}=\frac{1}{3}$，

解得$OA=1$. $\therefore OB=3$. $\therefore C$点的坐标为$(3,2)$.

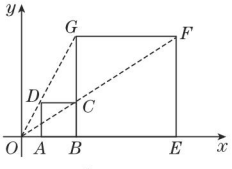


图1.4-14

答案：A

解法提醒

直接利用位似图形的性质结合相似比得出AD的长，进而得出$\triangle OAD\backsim\triangle OBG$，进而得出AO的长，即可得出答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用位似变换的性质求坐标系中点的坐标

例 11：[中考·凉山州]如图 1.4-15，在边长为 1 的正方形网格中建立平面直角坐标系，已知△ABC的三个顶点的坐标分别为$A(-1,2)$、$B(2,1)$、$C(4,5)$.

（1）画出△ABC关于x轴对称的△$A_1B_1C_1$；

（2）以原点O为位似中心，在x轴的上方画出△$A_2B_2C_2$，使△$A_2B_2C_2$与△ABC位似，且相似比为2，并求出△$A_2B_2C_2$的面积.

试题评析：本题考查位似变换、轴对称变换等知识，解题的关键是理解位似变换、轴对称变换的定义，属于中考常考题型.

解：（1）如图 1.4-15，△$A_1B_1C_1$就是所要画的三角形.

（2）如图 1.4-15，△$A_2B_2C_2$就是所要画的三角形.

∵$A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(4,5)$，

△$A_2B_2C_2$与△ABC位似，且相似比为 2，

∴$A_2(-2,4)$，

$B_2(4,2)$，$C_2(8,10)$，

$$\therefore S_{\triangle A_2B_2C_2}=8\times10-\frac{1}{2}\times6\times2-\frac{1}{2}\times4\times8-\frac{1}{2}\times6\times10=28.$$

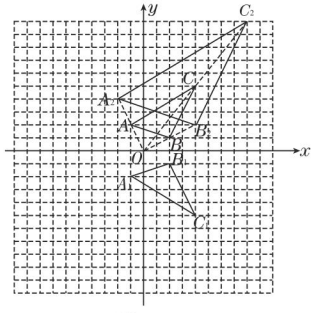


图 1.4-15

解法提醒

画出点 A、B、C 关于 x 轴的对称点 A_1、B_1、C_1 即可解决问题；

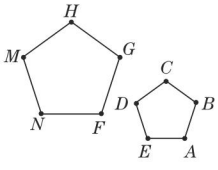
连接 OB 并延长到 B_2，使得 $BB_2=OB$，用同样的方法可得点 A_2、C_2，顺次连接 A_2，B_2，C_2，则 $\triangle A_2B_2C_2$ 就是所要画的三角形.

两年模拟兵法 ☞答案见 237 页

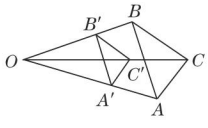
1. 如图，正五边形$FGHMN$是由正五边形$ABCDE$经过位似变换得到的，若$AB:FG=2:3$，则下列结论正确的是（　　）

A. $2DE=3MN$　　B. $3DE=2MN$

C. $3\angle A=2\angle F$　　D. $2\angle A=3\angle F$



（第 1 题）



（第 2 题）

2. [中考·绥化]如图，△$A'B'C'$是△ABC以点O为位似中心经过位似变换得到的，若△$A'B'C'$的面积与△ABC的面积比是 4：9，则OB'：OB为（　　）

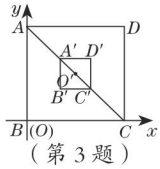
A. 2：3　　B. 3：2

C. 4：5　　D. 4：9

3. [期中·临朐县]如图，正方形$ABCD$的两边BC，AB分别在平面直角坐标系的x轴、y轴的正半轴上，正方形$A'B'C'D'$与正方形$ABCD$是以AC的中点O'为位似中心的位似图形，已知$AC=3\sqrt{2}$，若点A'的坐标为（1，2），则正方形$A'B'C'D'$与正方形$ABCD$的相似比是（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$



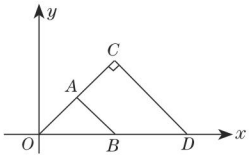
（第 3 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

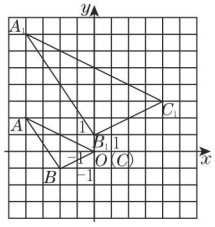
4. [期中·新泰]如图，△ OAB 与△ OCD 是以点 O 为位似中心的位似图形，相似比为 1 ∶ 2，∠ OCD=90°，CO=CD. 若 B（1，0），则点 C 的坐标为（　　）

A.（1，2）　　B.（1，1）

C.（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$）　　D.（2，1）



（第 4 题）



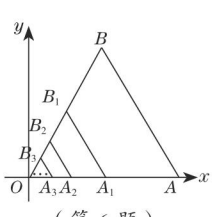
（第 5 题）

5. 如图，将△ ABC 的三边分别扩大为原来的 2 倍得到△ $A_1B_1C_1$（顶点均在格点上），若它们是以点 P 为位似中心的位似图形，则点 P 的坐标是（　　）

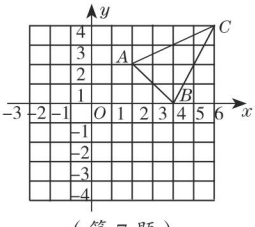
A.（−4，−3）　　B.（−3，−3）

C.（−4，−4）　　D.（−3，−4）

6. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以 O 为位似中心，将边长为 8 的等边三角形 OAB 作 n 次位似变换，经第一次变换后得到等边三角形 OA_1B_1，其边长 OA_1 缩小为 OA 的$\frac{1}{2}$，经第二次变换后得到等边三角形 OA_2B_2，其边长 OA_2 缩小为 OA_1 的$\frac{1}{2}$，经第三次变换后得到等边三角形 OA_3B_3，其边长 OA_3 缩小为 OA_2 的$\frac{1}{2}$，…，按此规律，经第 n 次变换后，所得等边三角形 OA_nB_n 的顶点 A_n 的坐标为（$\frac{1}{2^8}$，0），则 n 的值是_____.



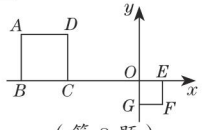
（第 6 题）



（第 7 题）

7. [期末·莘县]如图，△ ABC 三个顶点的坐标分别为 A（2，2），B（4，0），C（6，4），以原点 O 为位似中心，相似比为 1 ∶ 2 将△ ABC 缩小，则线段 AC 的中点 P 变换后对应点的坐标为_____.

8. [模拟·聊城]如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $OEFG$ 中，点 D 和点 F 的坐标分别为（−3，2）和（1，−1），则这两个正方形的位似中心的坐标为_____.



（第 8 题）

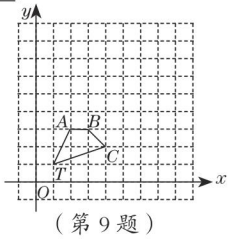
9. [期末·冠县]如图，在正方形网格中，四边形 $TABC$ 的顶点坐标分别为 T（1，1），A（2，3），B（3，3），C（4，2）.

（1）以点 T（1，1）为位似中心，在位似中心的同侧将四边形 $TABC$ 放大为原来的 2 倍，放大后点 A，B，C 的对应点分别为 A'，B'，C'，画出四边形 $TA'B'C'$；

（2）写出点 A'，B'，C' 的坐标：

A' _____，B' _____，C' _____；

（3）在（1）中，若 D（a，b）为线段 TC 上任一点，则变化后点 D 的对应点 D' 的坐标为_____.



（第 9 题）

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

利用三角形相似证明乘积式的策略

荣老师告诉你 线段乘积式是相似三角形性质的一种体现形式，所以对于线段乘积式的证明，往往都是通过证明三角形相似得到的．解决此类问题的关键是通过线段分析出要证明相似的三角形——三点定形法．有直接可定形的，也有间接定形的——通过等量进行过渡．采用的方法都是分析归纳法．

一、直接法：找同一三角形的两条边

三点定形法，即由有关线段的三个不同的端点来确定三角形的方法．具体做法是：先看两个比的前项和后项所代表的两条线段的三个不同的端点能否分别确定一个三角形，若能，则只要证明这两个三角形相似即可，这叫做“横定”；若不能，再看每个比的前后两项的两条线段的三个不同的端点能否分别确定一个三角形，若能，则只要证明这两个三角形相似即可，这叫做“竖定”．

例 1： 已知：如图 1−1，$\angle ACB=90°$，AB 的垂直平分线交 AB 于 D，交 AC 于 E，交 BC 的延长线于 F. 求证：$CD^2=DE\cdot DF$.

解题秘方： 先将乘积式化成比例式 $\frac{CD}{DE}=\frac{DF}{CD}$，然后不管是“横定”还是“竖定”，都是 $\triangle CDF$ 和 $\triangle CDE$，证明这两个三角形相似即可．

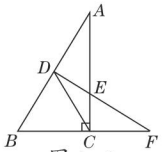


图 1−1

证明： $\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle F+\angle FEC=90°$．又 $\because DF\perp AB$，$\therefore \angle A+\angle AED=90°$．$\because \angle AED=\angle FEC$，$\therefore \angle A=\angle F$.

$\because CD$ 是 Rt $\triangle ACB$ 的斜边 AB 的中线，

$\therefore CD=DA$. $\therefore \angle A=\angle ACD$. $\therefore \angle ACD=\angle F$. 又 $\because \angle CDE=\angle FDC$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle FDC$. $\therefore \frac{CD}{FD}=\frac{DE}{DC}$. $\therefore CD^2=DE\cdot DF$.

方法点拨： 证乘积式，先将乘积式转化成比例式，然后利用三点定形法，找出要证明的两个三角形，再通过已知条件证明两个三角形相似．

二、间接法

对线段比例式或等积式的证明，常用等线段代换法、等比代换法、等积代换法等．若比例式或等积式所涉及的线段在同一直线上时，应将线段比“转移”（必要时需添加辅助线），使其分别构成两个相似三角形．

1. 3 **种代换：**

（1）等线段代换；（2）等比代换；（3）等积代换．

2. **创造条件：**

（1）添加平行线——创造“A”型、“X”型；

（2）先证其他三角形相似——创造边、角条件．

1 等线段代换法（等量过渡法）

遇到三点定形法无法解决欲证的问题时，即如果线段比例式中的四条线段都在图形中的同一条直线上，不能组成三角形，或四条线段虽然组成两个三角形，但这两个三角形并不相似，那么就需要根据已知条件找到与比例式中某条线段相等的一条线段来代替这条线段，如果没有，可考虑添加辅助线，然后应用三点定形法确定相似三角形．只要代换得当，问题往往可以得到解决．当然，还要注意最后将代换的线段再代换回来．

例 2： 如图 1−2，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，AD 的垂直平分线 FE 交 BC 的延长线于 E. 求证：$DE^2=BE\cdot CE$.

解题秘方： 观察图形发现，乘积式中的线段都在一条直线上，无法直接利用“三点定形法”找三

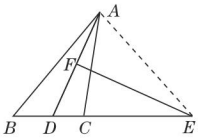


图 1−2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

角形，连接 AE，易得 $DE=AE$，将乘积式中的 DE 换成 AE，找出 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$，证明这两个三角形相似即可.

证明： 如图 1-2，连接 AE. $\because EF$ 是 AD 的垂直平分线，$\therefore AE=DE$. $\therefore \angle ADE=\angle DAE$.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$.

$\because \angle ACE=\angle ADC+\angle DAC$，$\angle BAE=\angle DAE+\angle BAD$. $\therefore \angle ACE=\angle BAE$.

$\because \angle AEC=\angle BEA$，$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BAE$.

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{AE}$. $\therefore AE^2=BE\cdot CE$.

$\therefore DE^2=BE\cdot CE$.

2 等比代换法（等比过渡法）

当用三点定形法不能确定三角形，同时也无等线段代换时，可以考虑用等比代换法，也就是通过对已知条件或图形的深入分析，找到与求证的结论中某个比相等的比，并进行代换，然后用三点定形法来确定三角形.

例 3： 如图 1-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，E 是 AC 的中点，延长 ED，交 AB 的延长线于点 F. 求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{AF}$.

解题秘方： 运用“竖定”的两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADF$ 明显不相似，因为一个是直角三角形，另一个是钝角三角形. 由条件“直角三角形斜边上的高”，可知 $\triangle ABD\backsim\triangle CAD$，从而有 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{AD}$，利用 $\dfrac{BD}{AD}$ 这个桥梁，只需证明 $\dfrac{DF}{AF}=\dfrac{BD}{AD}$ 即可.

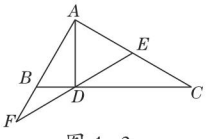


图 1-3

证明： $\because AD\perp BC$，E 是 AC 的中点，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，$DE=EC$.

$\therefore \angle EDC=\angle C$.

$\because \angle BAC=90°$，$\therefore \angle BAD+\angle DAC=90°$.

$\because \angle C+\angle DAC=90°$，$\therefore \angle BAD=\angle C$.

$\because \angle ADB=\angle ADC=90°$，$\angle BAD=\angle C$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CAD$. $\therefore \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{AB}{CA}$.

$\because \angle BDF=\angle EDC$，$\therefore \angle BDF=\angle BAD$.

又 $\angle F=\angle F$，$\therefore \triangle BDF\backsim\triangle DAF$.

$\therefore \dfrac{BD}{DA}=\dfrac{DF}{AF}$. $\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DF}{AF}$.

3 等积代换法（等积过渡法）

思考问题的基本途径：用三点定形法确定两个三角形，然后通过三角形相似推出线段成比例；若三点定形法不能确定两个相似三角形，则考虑用等量（线段）代换，或用等比代换，然后用三点定形法确定相似三角形；若以上方法均行不通，则考虑用等积代换法.

例 4： 如图 1-4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的高，G 是 DC 延长线上一点，过点 B 作 $BE\perp AG$，垂足为 E，交 CD 于点 F. 求证：$CD^2=DF\cdot DG$.

解题秘方： 由“CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高”这一基本模型可知 $CD^2=AD\cdot BD$，只需证明 $AD\cdot BD=DF\cdot DG$ 即可.

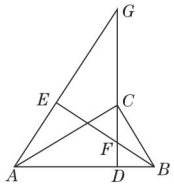


图 1-4

证明： 由 $\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的高，

易得 $\angle ACD=\angle CBD$，$\angle ADC=\angle CDB$.

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle CBD$. $\therefore \dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$.

$\therefore CD^2=AD\cdot BD$.

$\because BE\perp AG$，$\therefore \angle G+\angle CFE=90°$.

又 $\because \angle DBF+\angle BFD=90°$，

$\angle EFG=\angle BFD$，

$\therefore \angle G=\angle DBF$. $\therefore \triangle BDF\backsim\triangle GDA$.

$\therefore \dfrac{BD}{GD}=\dfrac{DF}{DA}$.

$\therefore AD\cdot BD=DF\cdot DG$.

$\therefore CD^2=DF\cdot DG$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.
2. 相似三角形的判定：①如果两个三角形的三边对应成比例，那么这两个三角形相似；②如果两个三角形的两边对应成比例，且夹角相等，那么这两个三角形相似；③如果两个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.
3. 相似三角形的性质：相似三角形对应线段的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

知识方法专题

知识必学

专题一 平行线分线段成比例

链接中考» 平行线分线段成比例是三角形相似的基础，也是求线段长的一种方法.在中考命题中，常以选择题和填空题的形式出现.

例1：[中考·淮安]如图1-1，$l_1 // l_2 // l_3$，直线 a，b 与 l_1，l_2，l_3 分别交于点 A，B，C 和点 D，E，F. 若 $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$，$DE=4$，则 EF 的长是（　　）

A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{20}{3}$

C. 6　　D. 10

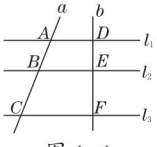


图1-1

解题秘方： 根据 $l_1 // l_2 // l_3$，可得 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，再根据条件可求得 EF 的长.

解： $\because l_1 // l_2 // l_3$，$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$. 又 $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$，$DE=4$，$\therefore \frac{2}{3}=\frac{4}{EF}$，解得 $EF=6$.

答案： C

误区警示： 此类问题容易出错的地方是线段没有对应，应用平行线分线段成比例时，要注意“对应”一词的含义，为减少错误，应用时，可把同一条直线上被截得的两条线段安排在比例的一边.

专题二 相似三角形的判定

链接中考» 图形的相似是平面几何中非常重要的内容，也是中考中常见的考点.三角形相似的判定方法有多种，解题时要合理选用判定方法.

例2：[期末·东阿县]如图1-2，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 G，E 为 AD 的中点，连接 BE 交 AC 于 F，连接 FD，若 $\angle BFA=90°$，求证：$\triangle FED \backsim \triangle DEB$.

解题秘方： 只要证明 $\triangle AFE \backsim \triangle BAE$，得 $\frac{AE}{EF}=\frac{BE}{EA}$，即可推出 $\frac{ED}{EF}=\frac{EB}{ED}$，而 $\angle BED=\angle BED$，可得 $\triangle FED \backsim \triangle DEB$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$\angle BAE=90°$.

∵$\angle BFA=90°$，

∴$\angle AFE=90°$，

∴$\angle AFE=\angle BAE$.

∵ $\angle AEF=\angle BEA$，

∴$\triangle AFE\backsim\triangle BAE$.

∴$\dfrac{AE}{FE}=\dfrac{BE}{AE}$.

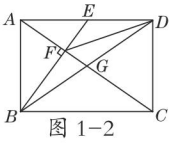


图 1−2

又∵ E 为 AD 的中点，

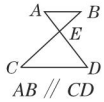
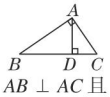
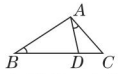
∴$AE=ED$.

∴$\dfrac{ED}{EF}=\dfrac{EB}{ED}$.

∵$\angle BED=\angle DEF$，∴$\triangle FED\backsim\triangle DEB$.

方法点拨：相似三角形的判定方法：①平行法；②三组对应边的比相等（类似于三角形全等的判定方法“SSS”）；③两组对应边的比相等，且夹角相等（类似于三角形全等的判定方法“SAS”）；④两角对应相等；⑤直角三角形中斜边、直角边对应成比例（类似于直角三角形全等的判定方法“HL”）.

相似三角形的基本图形：

1. “A”型	2. “X”型	3. 斜交型
		
$DE\parallel BC$	$AB\parallel CD$	$\angle AED=\angle B$
4. 蝴蝶型	5. 双垂图	6. 双垂图拓展型
		
$\angle A=\angle D$ 或 $\angle B=\angle E$	$AB\perp AC$ 且 $AD\perp BC$	$\angle CAD=\angle B$

注：对于双垂图，有：① $AB^2=BD\cdot BC$；② $AC^2=CD\cdot BC$；③ $AD^2=BD\cdot CD$. 对于双垂图拓展型，仅有 $AC^2=CD\cdot BC$. 判断两个三角形相似，若已知一角对应相等，可先考虑另一角对应相等；若找不到第二对角相等，就考虑夹这个角的两组对应边的比相等；若无法得到角相等，就考虑三组对应边的比相等.

专题三 相似三角形的性质

链接中考» 相似三角形的性质归纳起来有三点：(1)相似三角形的对应边成比例，对应角相等；(2)相似三角形的对应线段（对应边上的中线、高、对应角的平分线）的比等于相似比；(3)相似三角形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方. 相似三角形的性质既可以进行线段相等、平行、垂直的证明，也可以进行线段和面积的计算.

例3：[中考·包头] 如图 1−3，在 $\square ABCD$ 中，AC 是一条对角线，$EF\parallel BC$，且 EF 与 AB 相交于点 E，与 AC 相交于点 F，$3AE=2EB$，连接 DF. 若 $S_{\triangle AEF}=1$，则 $S_{\triangle ADF}$ 的值为_____.

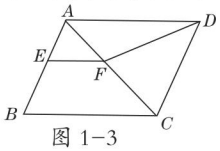


图 1−3

解题秘方：由 $3AE=2EB$ 可设 $AE=2a$，$BE=3a$，根据 $EF\parallel BC$，得 $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2=\dfrac{4}{25}$，结合 $S_{\triangle AEF}=1$ 知 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}=\dfrac{25}{4}$，再由 $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{2}{3}$ 知 $\dfrac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle CDF}}=\dfrac{2}{3}$，继而根据 $S_{\triangle ADF}=\dfrac{2}{5}S_{\triangle ADC}$ 可得答案.

解：设 $AE=2a$，$BE=3a$.

∵$EF\parallel BC$，

∴$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

∴$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2=\left(\dfrac{2a}{2a+3a}\right)^2=\dfrac{4}{25}$.

∵$S_{\triangle AEF}=1$，∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{25}{4}$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}=\dfrac{25}{4}$.

∵$EF\parallel BC$，

∴$\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{2}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle CDF}}=\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore S_{\triangle ADF}=\dfrac{2}{5}S_{\triangle ADC}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{25}{4}=\dfrac{5}{2}$.

答案： $\dfrac{5}{2}$

方法点拨： 三角形面积比的处理方法：（1）利用三角形的面积公式；（2）利用相似三角形面积的比等于相似比的平方.

专题四 相似三角形的应用

链接中考 ≫ 相似三角形的知识在实际生活中有广泛的应用，这一应用是建立在数学建模和数形结合思想基础上的，把实际问题转化为数学问题，通过数学问题达到解决实际问题的目的.在中考中以选择题、填空题和解答题的形式考查.

例 4：[期末·莱阳] 数学实践小组想利用镜子的反射测量池塘边一棵树的高度 AB. 测量和计算的部分步骤如下：

①如图 1-4，树与地面垂直，在地面上的点 C 处放置一面镜子，小明站在 BC 的延长线上，当小明在镜子中刚好看到树的顶点 A 时，测得小明到镜子的距离 CD=2 米，小明的眼睛 E 到地面的距离 ED=1.5 米；

②将镜子从点 C 沿 BC 的延长线向后移动 10 米到点 F 处，小明向后移动到点 H 处时，小明的眼睛 G 又刚好在镜子中看到树的顶点 A，这时测得小明到镜子的距离 FH=3 米；

③计算树的高度 AB.

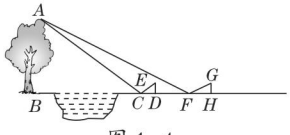


图 1-4

解：设 $AB=x$ 米，$BC=y$ 米. $\because \angle ABC=\angle EDC=90°$，$\angle ACB=\angle ECD$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle EDC$.

$\therefore \dfrac{AB}{ED}=\dfrac{BC}{DC}$……

请你根据材料中得到的测量数据和计算步骤，将剩余的计算部分补充完整.

解题秘方： 根据题意得出 $\triangle ABF\backsim\triangle GHF$，利用相似三角形的性质得出 AB，BC 的长，进而得出答案.

解： 设 $AB=x$ 米，$BC=y$ 米. $\because \angle ABC=\angle EDC=90°$，$\angle ACB=\angle ECD$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle EDC$. $\therefore \dfrac{AB}{ED}=\dfrac{BC}{DC}$.

$\therefore \dfrac{x}{1.5}=\dfrac{y}{2}$. $\because \angle ABF=\angle GHF=90°$，$\angle AFB=\angle GFH$，$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle GHF$.

$\therefore \dfrac{AB}{GH}=\dfrac{BF}{HF}$. $\therefore \dfrac{x}{1.5}=\dfrac{y+10}{3}$. $\therefore \dfrac{y}{2}=\dfrac{y+10}{3}$，解得 y=20. 把 y=20 代入 $\dfrac{x}{1.5}=\dfrac{y}{2}$ 中，得 $\dfrac{x}{1.5}=\dfrac{20}{2}$，解得 x=15.

∴树的高度 AB 为 15 米.

方法点拨： 运用相似三角形的知识解决实际问题时，要能够从实际问题中抽象出简单的数学模型，然后列出相关数据的比例关系式构建方程求解.

专题五 位似变换

链接中考 ≫ 位似图形是特殊的相似图形，此内容常与平移、旋转进行综合命题，主要考查学生的动手操作能力，一般都以解答题的形式考查.

例 5：[中考·齐齐哈尔] 如图 1-5，在边长为 1 个单位长度的小正方形网格中：

（1）画出 $\triangle ABC$ 向上平移 6 个单位长度，再向右平移 5 个单位长度后的 $\triangle A_1B_1C_1$；

（2）以点 B 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 放大为原来的 2 倍，得到 $\triangle A_2BC_2$，请在网格中画出 $\triangle A_2BC_2$；

（3）求 $\triangle CC_1C_2$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

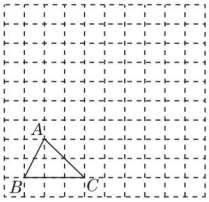


图 1−5

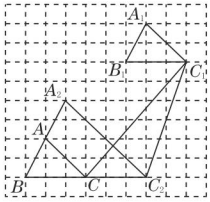


图 1−6

解题秘方： 首先确定变换规则，然后根据规则进行作图，作图时，首先确定图形的关键点，依次作出图形关键点的对应点，再顺次连接各关键点的对应点即可.

解：（1）分别将 A，B，C 三点向上平移 6 个单位长度，再向右平移 5 个单位长度，最后顺次连接各对应点，得到平移后的 $\triangle A_1B_1C_1$，如图 1−6.

（2）分别作出 A，B，C 三点关于点 B 的位似点，再顺次连接各对应点，得到位似图形 $\triangle A_2BC_2$，如图 1−6.

（3）如图 1−6，易知 $CC_2=3$，$\triangle CC_1C_2$ 的 CC_2 边上的高为 6，所以 $\triangle CC_1C_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 6=9$.

方法点拨： 平移图形首先要确定图形中的关键点，然后将图形的关键点按平移规则进行平移确定各关键点的对应点，再顺次连接各关键点的对应点即可. 同理，作位似图形，先确定位似中心，然后分别确定各关键点的对应点，再顺次连接各关键点的对应点. 网格中图形面积的计算：观察图形特征，常常根据图形特征结合网格将图形进行割补，求得图形面积.

专题六 相似与函数

链接中考 ≫ 利用相似三角形的性质建立函数关系，主要就是将两个变量放在相似三角形的对应边中，根据对应边的比相等列出等量关系，建立函数关系式. 这种解决问题的方法在中考中很常见.

例 6： 如图 1−7，有一块直角三角形余料 ABC，现在要把它加工成矩形零件 $DEFG$，要求一条边 EF 在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，已知 $\angle BAC=90°$，AH 是斜边上的高，与 DG 交于点 M，$BH=1$，$AH=2$.

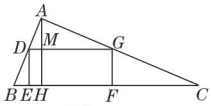


图 1−7

（1）求 CH；

（2）设 DG 为 x，试用含 x 的代数式表示 DE；

（3）求矩形 $DEFG$ 的面积 y 与 x 的关系式.

解题秘方：（1）根据题意容易得出 $\triangle ABH\backsim\triangle CAH$，进而求出 $AH:CH=BH:AH$，即可得出答案；

（2）利用已知得出 $\triangle ADG\backsim\triangle ABC$，进而得出 $AM:AH=DG:BC$，求出即可；

（3）利用矩形的面积得出 y 与 x 的关系式.

解：（1）$\because\angle BAC=90°$，

$\therefore\angle BAH+\angle CAH=90°$.

$\because AH\perp BC$，$\therefore\angle B+\angle BAH=90°$.

$\therefore\angle B=\angle CAH$.

又 $\because\angle AHB=\angle CHA$,

$\therefore\triangle ABH\backsim\triangle CAH$.

$\therefore AH:CH=BH:AH$.

$\therefore 2:CH=1:2$，解得 $CH=4$.

（2）$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形，

$\therefore DG\parallel BC$. $\therefore\triangle ADG\backsim\triangle ABC$.

$\therefore AM:AH=DG:BC$.

$\therefore(2-DE):2=x:5$.

整理得 $DE=\frac{10-2x}{5}$.

（3）$y=x\cdot\frac{10-2x}{5}=-\frac{2}{5}x^2+2x$.

方法点拨： 利用相似建立函数关系，将函数的两个变量置于两个相似三角形的对应边中，利用相似三角形的性质建立等量关系，通过变形建立两个变量的函数关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题七 分类讨论思想

专题解读 ≫ 在解答有关相似形的某些问题时，往往需要按某一标准把问题分成若干个部分或情况分别加以研究，逐一解决，从而得到完整的结果．这类问题审题要仔细，分类要注意两点：一是正确选择分类标准；二是分类科学，既不重复也不遗漏．

例 7： 如图 1−8，在△ ABC 中，AB=8 cm，BC=16 cm，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 2 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 4 cm/s 的速度移动．如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，经过几秒，△ PBQ 与△ ABC 相似？

解题秘方： △ PBQ 与△ ABC 有一个公共角相等，所以要使△ PBQ 与△ ABC 相似，应存在两种情况，即△ PBQ ∽ △ ABC 与△ PBQ ∽ △ CBA.

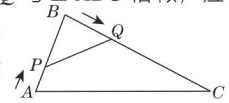


图 1−8

解： 设经过 t s，△ PBQ 与△ ABC 相似．

①∵△ PBQ 与△ ABC 有公共角∠ B，

∴当 PQ // AC，即 $\frac{PB}{AB}=\frac{QB}{CB}$ 时，

△ PBQ ∽ △ ABC.

∵ AP=2t cm，AB=8 cm，

∴ PB=（8−2t）cm.

又 BQ=4t cm，BC=16 cm，

∴ $\frac{8-2t}{8}=\frac{4t}{16}$，解得 t=2.

②∵∠ B 为△ PBQ 与△ ABC 的公共角，

∴当 $\frac{PB}{CB}=\frac{QB}{AB}$ 时，△ PBQ ∽ △ CBA.

由①知 PB=（8−2t）cm，QB=4t cm，

∴ $\frac{8-2t}{16}=\frac{4t}{8}$，解得 t=0.8.

∴如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，经过 0.8 s 或 2 s，△ PBQ 与△ ABC 相似．

方法点拨： 当两个三角形有一个角相等时，在没有确定两个三角形相似的对应关系时，两个三角形相似应存在两种情况．

专题八 方程思想

专题解读 ≫ 当两个图形相似时，周长及面积具有一定的关系，在求图形的周长或面积时，有时利用方程或方程组会给解题带来很大的方便．

例 8： 如图 1−9，在 Rt△ ABC 中，AB=BC，∠ B=90°，AC=10$\sqrt{2}$．四边形 $BDEF$ 是△ ABC 的内接正方形（点 D，E，F 在三角形的边上），则此正方形的面积是_____.

解题秘方： 由已知可得到△ AFE ∽ △ ABC，根据相似三角形的对应边成比例即可求得 EF 的长．

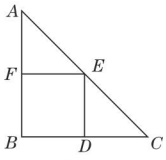


图 1−9

解： ∵△ ABC 是直角三角形，

∠ B=90°，

∴ $AB^2+BC^2=AC^2$.

∵ AB=BC，AC=10$\sqrt{2}$，

∴ $2AB^2$=200. ∴ AB=BC=10.

∵四边形 $BDEF$ 是正方形，

∴ EF // BC，EF=BF.

∴△ AFE ∽ △ ABC.

∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AB}$. 设 EF=x，则 AF=10−x.

∴ $\frac{x}{10}=\frac{10-x}{10}$.

∴ x=5. ∴ EF=5.

∴此正方形的面积为 5×5=25.

答案： 25

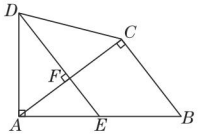
方法点拨： 求线段的长的一般思路是运用勾股定理或相似三角形，若有直角三角形且已知两边时，常采用勾股定理；若没有直角三角形，则常采用三角形相似，根据相似三角形的性质求解．本题是利用相似三角形的性质求解的．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见237页

类型1：巧用“三点定形法”证两三角形相似

1. 如图，在四边形$ABCD$中，$AD=CD$，$\angle DAB=\angle ACB=90°$，过点$D$作$DF\perp AC$，垂足为$F$，$DF$的延长线与$AB$相交于点$E$. 求证：$AB\cdot AF=CB\cdot CD$.



（第1题）

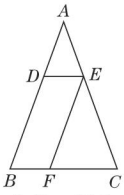
类型2：巧用平行线构造两三角形相似

题型1：等线段代换法

2. 如图，已知在$\triangle ABC$中，D，E，F分别是边AB，AC，BC上的点，$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$.

（1）求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BF}{BC}$；

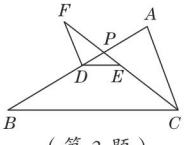
（2）若$AD:DB=3:5$，求$CF:CB$.



（第2题）

题型2：等积代换法

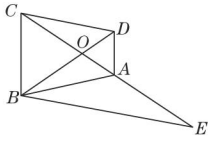
3. 如图，在$\triangle ABC$中，D是AB上一点，E是$\triangle ABC$内一点，$DE\parallel BC$，过点D作AC的平行线交CE的延长线于点F，CF与AB交于点P，求证：$\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PA}{PB}$.



（第3题）

题型3：等比代换法

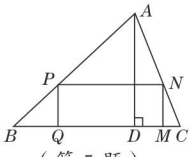
4. 如图，在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，AC与BD相交于点O，过点B作$BE\parallel CD$交CA的延长线于点E. 试问：OC^2与$OA\cdot OE$相等吗？请说明理由.



（第4题）

类型3：利用三角形相似解决三角形中截矩形问题

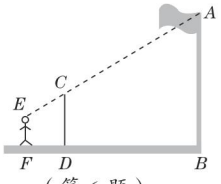
5. 如图，$\triangle ABC$是一块锐角三角形余料，边$BC=12$ cm，高$AD=8$ cm，要把它加工成矩形零件，使一边在BC上，其余两个顶点分别在边AB，AC上. 若这个矩形的长是宽的2倍，求矩形的长和宽.



（第5题）

类型4：巧用相似三角形解决实际问题

6.[期中·潍坊]九年级（1）班课外活动小组利用标杆测量学校旗杆的高度，如图，已知标杆高度$CD=3$ m，标杆与旗杆的水平距离$BD=15$ m，人的眼睛与地面的高度$EF=1.6$ m，人与标杆CD的水平距离$DF=2$ m，求旗杆的高度AB.



（第6题）

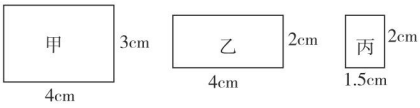
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 1 章测试卷 ☞答案见 238 页

（120 分 90 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 如图，三个矩形中相似的是（　　）



（第 1 题）

A. 甲和乙　　B. 甲和丙

C. 乙和丙　　D. 甲、乙和丙

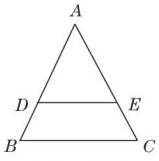
2. 如图，在△ ABC 中，$DE \parallel BC$，则下列等式中不成立的是（　　）

A. $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

B. $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$

C. $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{EC}$

D. $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{DE}{BC}$



（第 2 题）

3. 下列各组图形中一定相似的是（　　）

A. 有一个角相等的两个等腰三角形

B. 邻边之比相等的两个平行四边形

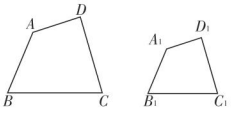
C. 有一个角为 60° 的两个菱形

D. 两个矩形

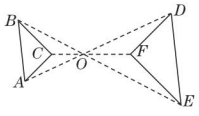
4. 如图，四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$，$AB=12$，$CD=15$，$A_1B_1=9$，则边 C_1D_1 的长是（　　）

A. 10　　B. 12

C. $\dfrac{45}{4}$　　D. $\dfrac{36}{5}$



（第 4 题）



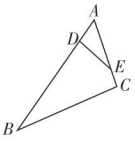
（第 5 题）

5. 如图，△ ABC 与△ DEF 是位似图形，O 为位似中心，相似比为 2 ∶ 3. 已知 $AB=4$，则 DE 的长等于（　　）

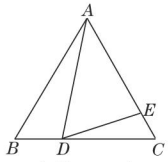
A. 6　　B. 5　　C. 9　　D. $\dfrac{8}{3}$

6. 如图，在△ ABC 中，点 D，E 分别在 AB，AC 边上，$\angle AED=\angle B$，且 $AD=2$，$AE=4$，$BD=10$，则 DE ∶ BC 等于（　　）

A. 1 ∶ 2　B. 1 ∶ 3　C. 2 ∶ 3　D. 1 ∶ 5



（第 6 题）



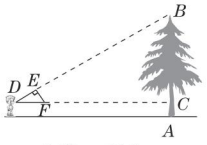
（第 7 题）

7. 如图，在等边三角形 ABC 中，D 为 BC 边上一点，E 为 AC 边上一点，且 $\angle ADB+\angle EDC=120°$，$BD=3$，$CE=2$，则△ ABC 的边长为（　　）

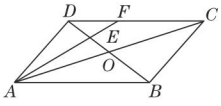
A. 9　　B. 12　　C. 16　　D. 18

8. 如图，一位同学通过调整自己的位置，设法使三角板的斜边保持水平，并且边 DE 与点 B 在同一直线上，已知 $DE=0.4$ m，$EF=0.2$ m，边 DF 离地面的距离 $AC=1.5$ m，$CD=8$ m，则树高为（　　）

A. 6 m　　B. 4 m　　C. 5.5 m　　D. 5 m



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在▱ $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，E 为 OD 的中点，连接 AE 并延长交 DC 于点 F，则 DF ∶ FC=（　　）

A. 1 ∶ 3　　B. 1 ∶ 2

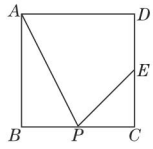
C. 1 ∶ 4　　D. 2 ∶ 3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

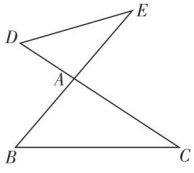
10. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，E 是 CD 的中点，P 是 BC 边上一点，下列条件：①$\angle APB=\angle EPC$；②$\angle APE=\angle APB$；③P 是 BC 的中点；④$BP:BC=2:3$. 其中能推出 $\triangle ABP\backsim\triangle ECP$ 的有（　　）

A. 4个　　B. 3个

C. 2个　　D. 1个



（第 10 题）



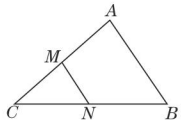
（第 11 题）

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

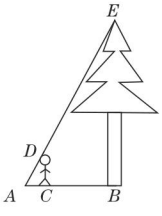
11. 如图，已知 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$，请添加一个条件，使 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，这个条件可以是_____.（写出一个条件即可）

12. 若 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且 $AB:A'B'=3:4$，$\triangle ABC$ 的周长为 12 cm，则 $\triangle A'B'C'$ 的周长为_____.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，M，N 分别为 AC，BC 的中点. 若 $S_{\triangle CMN}=1$，则 $S_{四边形NBAM}=$_____.



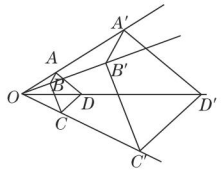
（第 13 题）



（第 14 题）

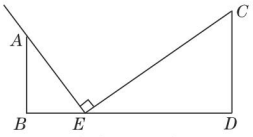
14. 如图，身高为 1.6m 的某学生想测量一棵大树的高度，他沿着树影 BA 由 B 向 A 走去，当走到 C 点时，他的影子顶端正好与树的影子顶端重合，测得 $BC=3.2$m，$CA=0.8$m，则树的高度为_____m.

15. 如图，四边形木框 $ABCD$ 在灯泡 O 发出的光照射下形成的影子是四边形 $A'B'C'D'$，若 $OA:AA'=1:2$，则四边形 $ABCD$ 的面积：四边形 $A'B'C'D'$ 的面积为_____.



（第 15 题）

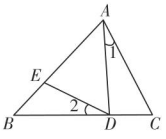
16. 如图，有两堵墙 AB，CD，AB 墙高 2 m，两墙之间的距离 BD 为 8 m，小明将一架木梯放在距 B 点 3 m 的 E 处靠向墙 AB 时，木梯有很多露出墙外，将木梯绕点 E 旋转 90° 靠向墙 CD 时，木梯刚好到达墙的顶端，则墙 CD 的高为_____.



（第 16 题）

三、解答题（共 72 分）

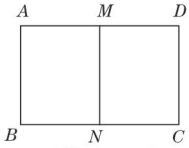
17.（6 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD=DB$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle EAD$.



（第 17 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（6分）如图，把矩形$ABCD$对折，折痕为MN，矩形$DMNC$与矩形$ABCD$相似，已知$AD=8$. 求矩形$DMNC$与矩形$ABCD$的相似比.

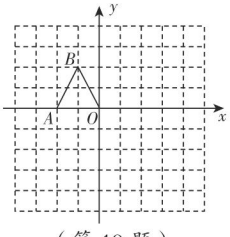


（第18题）

19.（8分）如图，在边长均为1的小正方形网格纸中，$\triangle OAB$的顶点O，A，B均在格点上，且O是直角坐标系的原点，点A在x轴上.

（1）以O为位似中心，将$\triangle OAB$放大，使得放大后的$\triangle OA_1B_1$与$\triangle OAB$对应线段的比为2∶1，画出$\triangle OA_1B_1$（所画$\triangle OA_1B_1$与$\triangle OAB$在原点两侧）；

（2）直接写出点A_1，B_1的坐标.

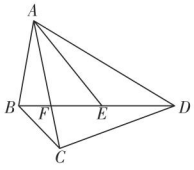


（第19题）

20.（8分）如图，已知四边形$ABCD$的对角线AC，BD交于点F，点E是BD上一点，且$\angle BCA=\angle ADE$，$\angle CAD=\angle BAE$. 求证：

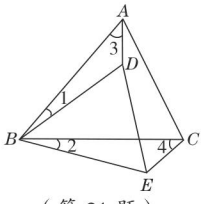
（1）$\triangle ABC\backsim\triangle AED$；

（2）$BE\cdot AC=CD\cdot AB$.



（第20题）

21.（10分）已知：如图，D为$\triangle ABC$内一点，E为$\triangle ABC$外一点，且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求证：$\angle ACB=\angle DEB$.



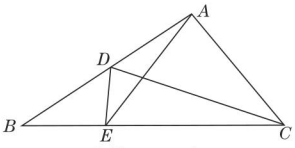
（第21题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.（10 分）已知：如图，在△ ABC 中，点 D，E 分别在边 AB，BC 上，$BA \cdot BD = BC \cdot BE$.

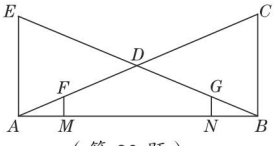
（1）求证：$DE \cdot AB = AC \cdot BE$；

（2）如果 $AC^2 = AD \cdot AB$，求证：$AE = AC$.



（第 22 题）

23.（12 分）如图，大刚在晚上由灯柱 AE 走向灯柱 BC，当他走到 M 点时，发觉他身后影子的顶部刚好接触到灯柱 AE 的底部，当他向前再走 12 米到 N 点时，发觉他身前的影子刚好接触到灯柱 BC 的底部，已知大刚的身高是 1.6 米，两根灯柱的高度都是 9.6 米，设 $AM = x$ 米. 求：两根灯柱之间的距离.



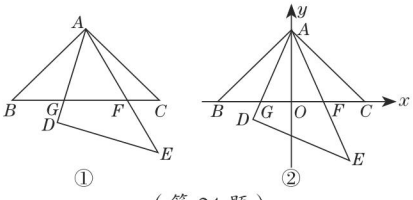
（第 23 题）

24.（12 分）如图，在同一平面内，将两个全等的等腰直角三角形 ABC 和 ADE 摆放在一起，A 为公共顶点，$\angle BAC = \angle ADE = 90°$，它们的斜边长为 2，若△ ABC 固定不动，△ ADE 绕点 A 旋转，AE，AD 与边 BC 的交点分别为 F，G（点 F 不与点 C 重合，点 G 不与点 B 重合），设 $BF = a$，$CG = b$. **【导学号：7199732】**

（1）请在图①中找出两对相似但不全等的三角形，并选取其中一对进行证明.

（2）求 b 与 a 的函数关系式，直接写出自变量 a 的取值范围.

（3）以△ ABC 的斜边 BC 所在的直线为 x 轴，BC 边上的高所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系（如图②）. 若 $BG = CF$，求出点 G 的坐标，猜想线段 BG，FG 和 CF 之间的关系，并通过计算加以验证.



（第 24 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

揭秘三角形的边角关系

揭秘三角形的边角关系

第2章 解直角三角形









核心考点

你将见到的

- 锐角三角比
- 30°，45°，60° 角的三角比
- 解直角三角形
- 解直角三角形的应用

核心方法

我们为你提供的

- 数形结合思想
- 构造法
- 定义法
- 参数法
- 化斜为直法
- 方程思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1 锐角三角比



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 锐角三角比的定义

1. 定义： 如图 2.1−1，在△ ABC 中，∠ C=90°.

（1）正弦：在 Rt △ ABC 中，我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做∠ A 的正弦，记作 $\sin A$，如图 2.1−1 所示，$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$.

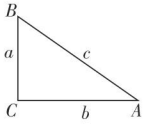


图 2.1−1

（2）余弦：在 Rt △ ABC 中，我们把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做∠ A 的余弦，记作 $\cos A$，如图 2.1−1 所示，$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$.

（3）正切：在 Rt △ ABC 中，我们把锐角 A 的对边与邻边的比叫做∠ A 的正切，记作 $\tan A$，如图 2.1−1 所示，$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$.

锐角 A 的正弦、余弦、正切统称锐角 A 的三角比.

2. 表示法：

（1）在 $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ 中，三角比的符号一定要小写，不能大写.

（2）当锐角是用一个大写英文字母或一个小写希腊字母表示时，它的三角比习惯上省略角的符号，如 $\sin A$，$\cos\alpha$，$\tan B$ 等；当锐角是用三个大写英文字母或数字表示时，它的三角比不能省略角的符号，如 $\sin\angle ABC$，$\sin\angle 1$ 等.

3. 拓展： 锐角 A 的三角比也叫做锐角 A 的三角函数，其中∠ A 是自变量，其取值范围是 $0°<\angle A<90°$，三个比值是因变量.

提分·必记

特别提醒

1. 正弦、余弦、正切的定义是在直角三角形中针对锐角定义的，其本质是两条线段的长度之比.
2. 正弦、余弦、正切都是一个比值，是没有单位的数值，它们只与锐角的大小有关，而与三角形的边的长短无关.
3. 由于直角三角形的斜边大于直角边，且各边的长均为正数，所以锐角三角比的值都是正实数，且 $0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$，$\tan A>0$.

易错警示

“$\sin A$、$\cos A$、$\tan A$”是整体符号，不能理解为“$\sin\cdot A$、$\cos\cdot A$、$\tan\cdot A$”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用锐角三角比的定义进行计算

提分·秘诀

题型 1：利用锐角三角比的定义直接求三角比

例 1： 如图 2.1−2，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，∠ A，∠ B，∠ C 的对边分别为 a，b，c. 求出∠ A 的正弦、余弦、正切的值.

解题秘方： 紧扣“正弦、余弦、正切的定义”求解.

解： 在 Rt △ ABC 中，

∵ ∠ C=90°，a=6，b=8，∴ $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

∴ $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，

$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，

$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.

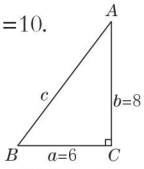


图 2.1−2

技巧点拨

运用数形结合的思想求直角三角形（已知两边长）中某个锐角的正弦、余弦、正切时，首先要画出符合题意的直角三角形的示意图，然后根据勾股定理求出未知边长，最后结合正弦、余弦、正切的定义求值.

题型 2：利用锐角三角比的定义借助网格图求三角比

例 2： 如图 2.1−3，在 4×4 的正方形网格中，小正方形的顶点称为格点，每个小正方形的边长均为 1 个单位长度，△ ABC 的顶点都在格点上，则图中∠ ABC 的正弦值是_____.

解题秘方： 根据勾股定理的逆定理判断出△ ABC 的形状，再由锐角三角比的定义即可得出结论.

解： 由图可知，$AC^2=2^2+4^2=20$，$BC^2=1^2+2^2=5$，

$AB^2=3^2+4^2=25$，∴ $AC^2+BC^2=AB^2$.

∴ △ ABC 是直角三角形，且∠ ACB=90°.

∴ $\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

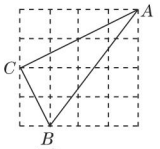


图 2.1−3

答案： $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

方法总结

解答在网格图中求三角比的问题，首先利用勾股定理求出三角形三边的长，若能构成直角三角形，直接利用定义求解；若不能构成直角三角形，则通过作辅助线构造直角三角形再求解，作辅助线时，不能破坏所求角.

题型 3：利用锐角三角比的定义求边长

例 3： 在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，若 AB=10，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，则 AC 的长度为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 4.8

解题秘方： 首先根据锐角三角比的值计算出 BC 长，再利用勾股定理可计算出 AC 长.

解： 如图 2.1−4，在 Rt △ ABC 中，

∵ AB=10，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，∴ $BC=10\times\dfrac{4}{5}=8$.

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$.

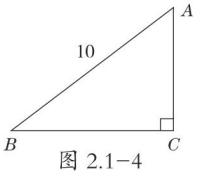


图 2.1−4

答案： A

技巧点拨

在利用锐角三角比解题时，要借助图形分析问题，利用数形结合思想理清题中条件. 由于锐角三角比的问题是基于直角三角形这一条件，所以解题时往往要结合勾股定理.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“构造法”求锐角三角比

挑战·高分

例 4： 如图 2.1−5，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，如果 $2AB=3BC$，求 $\angle B$ 的三个三角比.

解题秘方： 紧扣“三角比的前提是直角三角形”这一条件，用“构造直角三角形法”求解.

解： 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，如图 2.1−5.

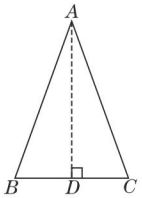


图 2.1−5

$\because AB=AC$，$\therefore BD=DC$.

又 $\because 2AB=3BC$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{2}$.

设 $AB=AC=3k$（$k>0$），则 $BC=2k$. $\therefore BD=CD=k$.

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=\sqrt{8k^2}=2\sqrt{2}\,k$.

$\therefore \sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2\sqrt{2}\,k}{3k}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos B=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{k}{3k}=\dfrac{1}{3}$，

$\tan B=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{2\sqrt{2}\,k}{k}=2\sqrt{2}$.

特别提醒

求锐角三角比的方法：

三角比是在直角三角形的条件下定义的，因此当题目要求某一个角的三角比时，先观察所要求的角是否在某一直角三角形中，当题目中没有直角三角形时，就需要我们作辅助线构造与该角有关的直角三角形.

拔尖角度▸ 2 利用“等角转换法”求锐角三角比

挑战·高分

例 5： 如图 2.1−6，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 D 处，EF 是折痕，若 $AE=3$，则 $\sin\angle BFD$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

解题秘方： 紧扣“角相等则其三角比也相等”这一特征，用“等角转换法”将所要求的角的三角比转化为求直角三角形中与它相等的角的三角比.

解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，$\therefore \angle A=\angle B=45°$.

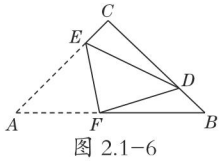


图 2.1−6

由折叠得到 $DE=AE=3$，$\angle EDF=\angle A$，

$\therefore \angle EDF=\angle B$.

$\because \angle CDF=\angle CDE+\angle EDF=\angle B+\angle BFD$，

$\therefore \angle CDE=\angle BFD$.

在 Rt $\triangle CDE$ 中，$\because CE=AC-AE=1$，

$\therefore \sin\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \sin\angle BFD$ 的值为 $\dfrac{1}{3}$.

答案： A

教你一招

求锐角三角比时，用定义法、设参数法、构造法等还是不能求出所要求的锐角的三角比时，我们需转换思维方式，将角进行转化，改求与所求锐角相等的角的三角比，即等角转换法. 找相等的角的方法有很多种，可从借助平行线、三角形外角、等腰三角形、三角形全等、三角形相似等知识来寻找，要根据题目中的条件灵活选用方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要以考查锐角三角比的概念、应用及已知直角三角形的两边求锐角三角比为主，题目以选择题、填空题的形式为主，属于中低档题目.

三年中考兵法

考法1 利用锐角三角比的定义解常规三角比问题

例6：[中考·滨州]在△ABC中，$\angle C=90°$，若$\tan A=\frac{1}{2}$，则$\sin B=$_____.

试题评析：本题考查锐角三角比的求法、勾股定理等知识，解题关键是正确应用三角比的定义.

解：如图2.1−7所示，$\because \angle C=90°$，$\tan A=\frac{1}{2}$，

$\therefore$设$BC=x$，则$AC=2x$，故$AB=\sqrt{5}x$，

则$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2x}{\sqrt{5}x}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

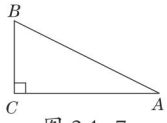


图2.1−7

答案：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

冲刺·满分

技巧点拨

在直角三角形中，给出某一锐角的三角比，求另一个锐角的三角比时，可以用设辅助元，即引入“参数”的方法来解决，注意在最后计算时约去辅助元.

考法2 利用三角比的定义说明网格中锐角三角比的关系

例7：[中考·宜昌]△ABC在网格中的位置如图2.1−8所示（每个小正方形边长为1），$AD\perp BC$于D，下列四个选项中，错误的是（　　）

A. $\sin\alpha=\cos\alpha$　　B. $\tan C=2$

C. $\sin\beta=\cos\beta$　　D. $\tan\alpha=1$

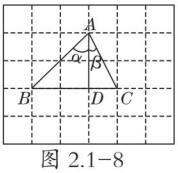


图2.1−8

试题评析：本题考查锐角三角比的应用、等腰直角三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

解：由图2.1−8可知，△ADB是等腰直角三角形，

$BD=AD=2$，$AB=2\sqrt{2}$，$CD=1$，$AC=\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故A正确；$\tan C=\frac{AD}{CD}=2$，

故B正确；$\tan\alpha=1$，故D正确；

$\because \sin\beta=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin\beta\neq\cos\beta$，故C错误.

答案：C

冲刺·满分

思路点拨

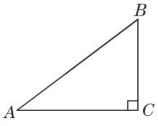
观察图形可知，△ADB是等腰直角三角形，$BD=AD=2$，$AB=2\sqrt{2}$，$CD=1$，$AC=\sqrt{5}$，利用锐角三角比一一计算即可判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

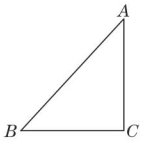
两年模拟兵法 ☞答案见239页

1. 如图，在△ABC中，∠C=90°，AB=5，BC=3，则tan A的值是（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$



（第1题）



（第2题）

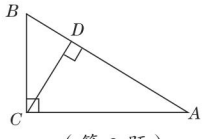
2. [期中·临朐县]如图，在Rt△ABC中，∠C=90°，AB=6，cos B=$\frac{2}{3}$，则BC的长为（　　）

A. 4　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$　　D. $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

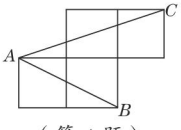
3. 如图，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，CD⊥AB于D，下列式子正确的是（　　）

A. sin A=$\frac{BD}{BC}$　　B. cos A=$\frac{AC}{AD}$

C. cos A=$\frac{CD}{AB}$　　D. cos B=$\frac{AC}{AB}$



（第3题）



（第4题）

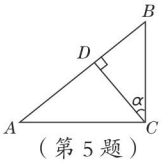
4. [中考·贵阳]如图，A，B，C是小正方形的顶点，且每个小正方形的边长为1，则tan ∠BAC的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

5. [期中·莘县]如图，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，CD⊥AB于D，AC=$2\sqrt{2}$，AB=$2\sqrt{3}$，设∠BCD=α，那么cos α的值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$



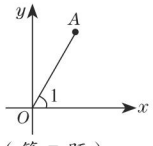
（第5题）

6. 在Rt△ABC中，AC=8，BC=6，则cos A的值等于（　　）

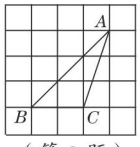
A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

C. $\frac{4}{5}$或$\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$或$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

7. 如图，若点A的坐标为（1，$\sqrt{3}$），则sin ∠1=_____.



（第7题）



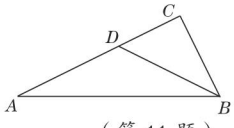
（第8题）

8. 如图，△ABC的顶点是正方形网格的格点，则sin A的值为_____.

9. [期中·临清]已知在Rt△ABC中，∠C=90°，tan A=$\frac{3}{4}$，则sin A=_____.

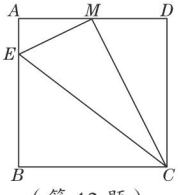
10. 在Rt△ABC中，∠C=90°，若AB=4，sin A=$\frac{3}{5}$，则斜边AB上的高CD的长为_____.

11. 如图，在Rt△ABC中，∠C=90°，D为AC上的一点，CD=3，AD=BD=5. 求∠A的三个三角比.



（第11题）

12. 如图，在正方形$ABCD$中，M是AD的中点，BE=3AE，试求sin ∠ECM的值.



（第12题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 30°,45°,60° 角的三角比

核心知识

- 30°，45°，60° 角的三角比及其应用
- 同角或余角三角比之间的关系

知识链接

特殊角的三角比 ← 计算 → 由特殊角的三角比计算式子的值；由三角比求角的度数

点知识·拨考向 速提分

点知识▸特殊角的三角比

1. 30°，45°，60° 角的三角比：

三角比 \ 角 α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. **拓展：** 30°，45°，60° 角的三角比的记忆法：

三十、四十五、六十度，三角比要记住，

分母弦二切是三，分子要把根号添，

一二三来三二一，切值三、九、二十七，

正弦正切递增值，余弦递减恰相反.

提分·必记

特别提醒

由左表可以计算特殊锐角的三角比的值，也可由特殊角的三角比的值求出相应的锐角.

由左表可知锐角的正弦、正切值随着角度的增大而增大；余弦值随着角度的增大而减小.

拔考向▸利用特殊角的三角比解计算问题

类型 1：特殊角的三角比在计算中的应用

例 1： （1）已知 $\alpha=45°$，求 $2\sin^2\alpha-2\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\tan\alpha+\tan^2\alpha$；

（2）计算 $\frac{1}{4}\tan^2 45°+\frac{1}{\sin^2 30°}-3\cos^2 30°$.

解题秘方： 用“代入法”求值.

解： （1）原式 $=(\sqrt{2}\sin\alpha-\tan\alpha)^2=(\sqrt{2}\sin 45°-\tan 45°)^2=\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2=0$.

（2）原式 $=\frac{1}{4}\times 1^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+4-\frac{9}{4}=2$.

提分·秘诀

易错警示

利用特殊角的三角比进行相关计算，易混淆特殊角的三角比，导致错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：特殊角的三角比在求角中的应用

例 2： 在 Rt △ ABC 中，∠ C=90° ，根据下列条件求∠ A，∠ B 的度数．（1）$a=8\sqrt{5}$，$b=8\sqrt{15}$．（2）$a=4\sqrt{2}$，$c=8$.

解题秘方： 先画出图形，（1）由∠ A 的正切值求出∠ A，利用∠ A，∠ B 的互余关系求出∠ B；（2）由∠ A 的正弦值求出∠ A，利用∠ A，∠ B 的互余关系求出∠ B.

解： （1）如图 2.2−1 ①所示．在 Rt △ ABC 中，$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{8\sqrt{5}}{8\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴∠ A=30°，∴∠ B=90° − ∠ A=90° −30° =60°．

（2）如图 2.2−1 ②所示．在 Rt △ ABC 中，$\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{4\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴∠ A=45°，∴∠ B=90° − ∠ A=90° −45° =45°．

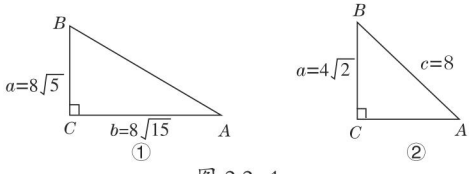


图 2.2−1

解法提醒

已知特殊角的三角比求特殊角的度数时，要注意两点：

- 要求的角是锐角；
- 看准三角比的类别，同样的比值不同类别，角度不一样．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用特殊角的三角比求代数式的值

挑战·高分

例 3： 先化简，再求代数式$\left(\dfrac{2}{a+1}-\dfrac{2a-3}{a^2-1}\right)\div\dfrac{1}{a+1}$的值，其中 $a=\tan 60°+\sqrt{2}\sin 45°$.

解： 原式 $=\left[\dfrac{2a-2}{(a+1)(a-1)}-\dfrac{2a-3}{(a+1)(a-1)}\right]\cdot(a+1)=\dfrac{1}{(a+1)(a-1)}\cdot(a+1)=\dfrac{1}{a-1}$，

∵ $a=\tan 60°+\sqrt{2}\sin 45°=\sqrt{3}+1$，

∴原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

方法解读

先根据分式混合运算法则化简代数式，再将 a 化简并代入计算可得．

拔尖角度▸ 2 利用锐角三角比判定三角形的形状

挑战·高分

例 4： 在△ ABC 中，锐角∠ A，∠ B 满足$\left|\sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\tan B\right)^2=0$，试判断△ ABC 的形状，并说明理由．

解题秘方： 先根据特殊角的三角比求出两个内角的度数，再判断三角形的形状．

方法点拨

当几个非负数的和为 0 时，这几个非负数的值都是 0，常见的几个非负数形式：$(\ )^2$，$\sqrt{\ }$，$|\ |$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： △ABC是直角三角形，理由如下：

$\because \left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B\right)^2=0$，

$\therefore \sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，$\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B=0$，

解得$\angle A=60°$，$\angle B=30°$. $\therefore \angle A+\angle B=60°+30°=90°$.

$\therefore$ △ABC是直角三角形.

解法提醒

$\because \left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\geqslant 0$，

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B\right)^2\geqslant 0$，

$\therefore \sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，

$\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B=0$.

拔尖角度▶ 3 利用全等求特殊角的三角比

例5： 如图2.2-2，在等边三角形ABC中，D是BC边上的一点，延长AD至E，使$AE=AC$，$\angle BAE$的平分线交△ABC的高BF于点O，则$\tan\angle AEO=$_____.

解题秘方： 根据等边三角形性质和三线合一求出$\angle ABF$，根据“SAS”证△$BAO\cong$△EAO，推出$\angle AEO=\angle ABO$，利用正切计算.

解： $\because$ △ABC是等边三角形，$\therefore \angle ABC=60°$，$AB=BC$.

$\because BF\perp AC$，$\therefore \angle ABF=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$.

$\because AB=AC$，$AE=AC$，$\therefore AB=AE$.

$\because AO$平分$\angle BAE$，$\therefore \angle BAO=\angle EAO$.

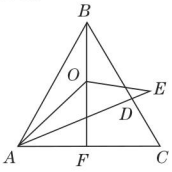


图2.2-2

$\because$在△BAO和△EAO中，$\begin{cases}AB=AE,\\ \angle BAO=\angle EAO,\\ AO=AO,\end{cases}$ $\therefore$ △$BAO\cong$△EAO，

$\therefore \angle AEO=\angle ABO=30°$. $\therefore \tan\angle AEO=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案： $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解题技巧

求某个不在直角三角形中的锐角的三角比的方法：

(1)作辅助线构造直角三角形，利用勾股定理求出各边的长，再利用三角比的定义求解；

(2)把求该锐角的三角比通过全等或相似转化为求其他已知角度的角的三角比.

拔尖角度▶ 4 利用构造非特殊角的方法求非特殊角的三角比

例6： 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle ABC=30°$，求$\tan 15°$的值.

解题秘方： 构造与15°角、30°角有关联的三角形进行计算.

解： 如图2.2-3，延长CB到点D，使$BD=AB$，连接AD.

$\because BD=AB$，$\therefore \angle D=\angle BAD$，

易得$\angle D=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 30°=15°$.

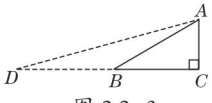


图2.2-3

设$AC=x$（$x>0$），则$AB=BD=2x$，

$BC=AB\cdot\cos\angle ABC=2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}x$，

$\therefore CD=BD+BC=(2+\sqrt{3})x$，

$\therefore \tan D=\frac{AC}{CD}=\frac{x}{(2+\sqrt{3})x}=2-\sqrt{3}$，

即$\tan 15°=2-\sqrt{3}$.

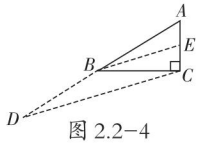


图2.2-4

挑战·高分

异曲同工

如图2.2-4，延长AB至D，使$BD=BC$，连接CD，过B作$BE\parallel CD$交AC于E，易知$\angle EBC=15°$. 设$AC=1$，则$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，$\therefore BD=\sqrt{3}$. $\because BE\parallel CD$，$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{AC-EC}{EC}$，$\therefore EC=2\sqrt{3}-3$. 在Rt△$BEC$中，$\tan\angle EBC=\frac{EC}{BC}=\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，

$\therefore \tan 15°=2-\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要是30°，45°，60°角的三角比的有关计算以及给出特殊角的三角比求角的度数，题型以选择题、填空题为主，偶尔有简单的计算题，属中低档题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 与特殊角有关的计算

例7：[中考·孝感]计算 $2\cos 30°+\tan 45°-\sqrt{(1-\tan 60°)^2}$ 的值是（　　）

A. $2\sqrt{3}-2$　　B. 0　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 2

试题评析：本题考查特殊角的三角比及开平方的应用.

解：原式 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1=2$.

答案：D

易错警示

切记 $\tan 60°=\sqrt{3}>1$，计算 $\sqrt{(1-\tan 60°)^2}$ 时，注意正负号的选取.

考法2 根据特殊角的三角比求角

例8：[中考·青海]在 $\triangle ABC$ 中，若 $\left|\sin A-\frac{1}{2}\right|+\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2=0$，则 $\angle C$ 的度数是_____.

试题评析：此题考查利用特殊角的三角比求角以及非负数的性质.

解：∵在 $\triangle ABC$ 中，$\left|\sin A-\frac{1}{2}\right|+\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2=0$，

∴ $\sin A=\frac{1}{2}$，$\cos B=\frac{1}{2}$，∴ $\angle A=30°$，$\angle B=60°$，

∴ $\angle C=180°-30°-60°=90°$.

答案：90°

方法点拨

先根据非负数的性质求出 $\sin A=\frac{1}{2}$，$\cos B=\frac{1}{2}$，再由特殊角的三角比求出 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的值，根据三角形内角和定理即可得出结论.

两年模拟兵法

☞答案见240页

1.[中考·天津]cos 30° 的值等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1　　D. $\sqrt{3}$

2.[中考·聊城]在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{1}{2}$，那么 $\sin A$ 的值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

3.已知 $\sin A=\frac{1}{2}$，则下列正确的是（　　）

A. $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\tan A=1$

C. $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\tan A=\sqrt{3}$

4.下列计算：① $\sin 60°-\sin 30°=\sin 30°$；② $\sin^2 45°+\cos^2 45°=1$；③ $\tan^2 60°=\frac{1}{3}$；④ $\tan 30°=\frac{\cos 30°}{\sin 30°}$，其中错误的个数是（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 在△ABC中，若∠A，∠B满足$\left|\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+(1-\tan B)^2=0$，则∠$C$的大小为（　　）

A. 45°　　B. 60°　　C. 75°　　D. 105°

6. 因为$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 210°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，我们发现：一般地，当$\alpha$为锐角时，有$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$，由此可知$\cos 240°$的值是（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\sqrt{3}$

7. [期中·潍坊] 计算：$\sqrt{2}\sin 45°+\tan 60°\cdot\tan 30°-\cos 60°=$_____.

8. 已知α为锐角，且满足$\sqrt{3}\tan(\alpha+10°)=1$，则$\alpha$为_____度.

9. [模拟·高密] 已知α、β均为锐角，且满足$\left|\sin\alpha-\frac{1}{2}\right|+\sqrt{(\tan\beta-1)^2}=0$，则$\alpha+\beta=$_____.

10. 已知α为锐角，当$\frac{2}{1-\tan\alpha}$无意义时，$\tan(\alpha+15°)-\tan(\alpha-15°)$的值是_____.

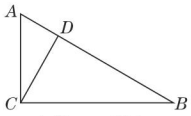
11. 已知$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$，则$\cos 15°=$_____.

12. 计算：

（1）[期中·聊城] $2\sin 30°+4\cos 30°\cdot\tan 60°-\cos^2 45°$.

（2）$2\cos 30°-|1-\tan 60°|+\tan 45°\cdot\sin 45°$.

13. 如图，在Rt△ABC中，∠$ACB=90°$，$CD\perp AB$于D，已知∠$B=30°$，计算$\tan B+\tan\angle BCD$的值.



（第13题）

14. 已知β是锐角，且$\sin(\beta+15°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，计算$\sqrt{8}-4\cos\beta-\tan 45°+\tan^2 30°$的值.

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 用计算器求锐角三角比

核心知识

- 用计算器求锐角三角比
- 用计算器求角的度数

知识链接

计算

- 用计算器求锐角三角比
- 用计算器探索三角比的变化规律
- 用计算器根据三角比求角的度数

点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 任一锐角的三角比

1. 利用计算器求锐角三角比：

（1）当锐角以度为单位时，可先按 sin（或 cos、tan）键，然后输入角度值（可以是整数，也可以是小数），最后按 = 键，就可以在显示屏上显示出结果；

（2）当锐角以度、分、秒为单位时，要借助 DMS 键计算，按键顺序是：sin（或 cos、tan）、度数、DMS、分数、DMS、秒数、DMS、=.

2. 已知锐角三角比求锐角的度数：

如果是特殊角（30°，45°，60° 角）的三角比的值，可直接写出其相应的角的度数；若不是特殊角的三角比的值，应利用计算器求角的度数. 求角的度数要先按 2ndF 键，将 sin、cos、tan 转化成它们的第二功能键；当三角比的值为分数时，应先化成小数.

提分·必记

特别提醒

- 不同计算器的按键顺序不同，大体分两种情形：先按三角函数键，再按数字键；或先输入数字，再按三角函数键.
- 用科学计算器进行运算时，输入的数字符号的顺序与书写时的顺序不一定相同，比如 $\sin^2 13°\ 15'$ 输入时应为 $(\sin\ 13°\ 15')^2$.

拨考向▸利用计算器解有关三角比的问题

题型 1：计算器在求已知度数的锐角三角比中的应用

例 1： 用计算器求 sin 16°，cos 42°，tan 85°，sin 72° 38′ 25″ 的值.

解题秘方： 按计算器的使用说明求值.

解： 如下表：

	按键顺序	显示结果
sin 16°	sin 1 6 =	0.275 637 355
cos 42°	cos 4 2 =	0.743 144 825
tan 85°	tan 8 5 =	11. 430 052 3
sin 72° 38′ 25″	sin 7 2 DMS 3 8 DMS 2 5 DMS =	0.954 450 312

提分·秘诀

特别提醒

要注意不同型号的计算器的操作步骤可能有所不同，使用前要仔细阅读计算器的使用说明书.

易错题

计算 tan 9′.

错解：tan 9 DMS =

正解：

tan 0 DMS 9 DMS =

显示结果为

$2.617\ 999\ 859 \times 10^{-3}$,

$\therefore \tan 9' \approx 0.002\ 6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：计算器在已知锐角的三角比求锐角的度数中的应用

例 2： 根据下列三角比的值求锐角 A（精确到 1″）.

（1）$\sin A=0.981\,6$；（2）$\cos A=0.860\,7$；（3）$\tan A=0.189\,0$.

解题秘方： 按计算器的使用说明依次按键.

解： 在角的度量单位为“度”的状态下，

（1）按下列顺序依次按键：[2ndF] [sin] [0] [·] [9] [8] [1] [6] [=]，屏幕上显示结果为 78.991 840 39°，即锐角 $A\approx 78.991\,840\,39°$. 再按 [DMS] 键，将它换算成“度、分、秒”的形式，屏幕上显示 78° 59′ 30.63″，∴锐角 $A\approx 78°\,59'\,31''$.

（2）按下列顺序依次按键：[2ndF] [cos] [0] [·] [8] [6] [0] [7] [=]，屏幕上显示 30.604 730 07°，即锐角 $A\approx 30.604\,730\,07°$. 再按 [DMS] 键，将它换算成“度、分、秒”的形式，屏幕上显示 30° 36′ 17.03″，∴锐角 $A\approx 30°\,36'\,17''$.

（3）按下列顺序依次按键：[2ndF] [tan] [0] [·] [1] [8] [9] [0] [=]，屏幕上显示 10.702 657 49°，即锐角 $A\approx 10.702\,657\,49°$. 再按 [DMS] 键，将它换算成“度、分、秒”的形式，屏幕上显示 10° 42′ 9.57″，∴锐角 $A\approx 10°\,42'\,10''$.

特别提醒

计算器直接计算出的角的单位是度，而不是度、分、秒，因此，若要得到用度、分、秒表示的角度，可以借助 [DMS] 化成度、分、秒.

点知识 ▶ 2 锐角三角比的规律

提分·必记

1. 当 $0°<\alpha<90°$ 时，$\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值随 α 的增大而增大，而 $\cos\alpha$ 的值随 α 的增大而减小. 任意锐角的正弦、余弦、正切值都是正实数，并且 $0<\sin\alpha<1$，$0<\cos\alpha<1$.
2. 若 $\angle A$，$\angle B$ 都是锐角，且 $\angle A+\angle B=90°$，则 $\sin A=\cos B$，$\sin B=\cos A$.
3. **互余两角的三角比之间的关系：**

   $\sin A=\cos(90°-\angle A)$；$\cos A=\sin(90°-\angle A)$.
4. **同一锐角的三角比之间的关系：**

   （1）平方关系：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；（2）商除关系：$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$.

特别提醒

此知识点的结论可以在解答选择题、填空题时使用，不能在证明题中作为证明依据使用.

拔考向 ▶ 利用锐角三角比的规律解答问题

提分·秘诀

题型 1：利用锐角三角比的增减变化规律解决问题

例 3： 如图 2.3-1，已知 $45°<\angle A<90°$，则下列各式成立的是（　　）

A. $\sin A=\cos A$

B. $\sin A>\cos A$

C. $\sin A>\tan A$

D. $\sin A<\cos A$

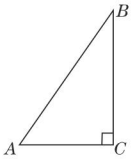


图 2.3-1

土方法（特殊值法）

解：∵ $45°<\angle A<90°$，

故取 $\angle A=60°$，

∴ $\sin A=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos A=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据锐角三角比的增减性，$\sin A$ 随角度的增大而增大，$\cos A$ 随角度的增大而减小，直接得出答案即可.

解：∵ $45°<\angle A<90°$，∴根据 $\sin 45°=\cos 45°$，$\sin A$ 随角度的增大而增大，$\cos A$ 随角度的增大而减小，当$\angle A>45°$ 时，$\sin A>\cos A$.

答案：B

题型 2：利用互余两角三角比的关系解决问题

例 4：在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\cos A=\frac{3}{5}$，则 $\sin B$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

解题秘方：由$\angle C=90°$ 知，$\angle A$ 与$\angle B$ 互余，则由互余两角的三角比的关系得解.

解：∵在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\cos A=\frac{3}{5}$，∴ $\sin B=\cos A=\frac{3}{5}$.

答案：D

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用计算器求锐角三角比的问题

挑战·高分

例 5：如图 2.3−2，将一把刻度尺按下面的方式放置在 45°的$\angle AOB$ 上，顶点 O 与尺下沿的端点重合，OA 与尺下沿重合，OB 与尺上沿的交点 B 在尺上所对的刻度恰好为 2 cm. 若按相同的方式将该刻度尺放置在 37°的$\angle AOC$ 上，则 OC 与尺上沿的交点 C 在尺上所对的刻度约为_____cm.(结果精确到 0.1cm)

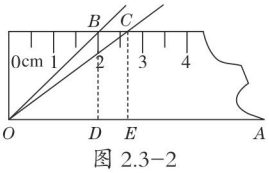


图 2.3−2

解题秘方：过点 B 作 $BD\perp OA$ 于 D，过点 C 作 $CE\perp OA$ 于 E. 首先在等腰直角三角形 BOD 中，得到 $BD=OD=2$ cm，则 $CE=2$ cm，然后在 Rt△COE 中，根据正切函数的定义求出 OE 的长度即可.

解：如图 2.3−2，过点 B 作 $BD\perp OA$ 于 D，过点 C 作 $CE\perp OA$ 于 E，

在△BOD 中，$\angle BDO=90°$，$\angle DOB=45°$，∴ $BD=OD=2$ cm.

在△COE 中，$\angle CEO=90°$，$\angle COE=37°$，

∵ $\tan 37°=\frac{CE}{OE}\approx 0.75$，∴ $OE\approx 2.7$ cm.

∴ OC 与尺上沿的交点 C 在尺上所对的刻度约为 2.7 cm.

答案：2.7

$\tan A=\tan 60°=\sqrt{3}$.

∵ $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}$,

∴ $\cos A<\sin A<\tan A$.

解法提醒

本题巧用了互余两角三角比之间的关系，除此之外，还可以画出图形利用锐角三角比的定义解题.

特别提醒

将求点C所对的刻度转化为求线段OE的长度，把实际问题中的数量关系转化到直角三角形中求解是解题关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用计算器辅助探究一般性的结论

挑战·高分

例 6: （1）用计算器计算并验证 $\sin 25°+\sin 46°$ 与 $\sin 71°$ 之间的大小关系.

（2）若 α、β、$\alpha+\beta$ 都是锐角，猜想 $\sin\alpha+\sin\beta$ 与 $\sin(\alpha+\beta)$ 的大小关系.

（3）请借助如图 2.3-3 的图形证明上述猜想.

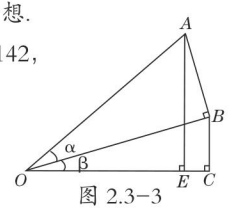


图 2.3-3

（1）**解:** $\sin 25°+\sin 46°\approx 0.423+0.719=1.142$,

$\sin 71°\approx 0.946$,

$\therefore \sin 25°+\sin 46° > \sin 71°$.

（2）**解:** $\sin\alpha+\sin\beta > \sin(\alpha+\beta)$.

（3）**证明:** 由图 2.3-3 得 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{AB}{OA}+\dfrac{BC}{OB}$,

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{AE}{OA}$.

$\because OA > OB$, $\therefore \dfrac{BC}{OB}>\dfrac{BC}{OA}$.

$\therefore \dfrac{AB}{OA}+\dfrac{BC}{OB}>\dfrac{AB}{OA}+\dfrac{BC}{OA}=\dfrac{AB+BC}{OA}$.

$\because AB+BC > AE$, $\therefore \dfrac{AB+BC}{OA}>\dfrac{AE}{OA}$.

$\therefore \sin\alpha+\sin\beta > \sin(\alpha+\beta)$.

方法解读

(1) 利用计算器计算，根据有理数的大小比较即可；

(2) 根据(1)的结果，猜测答案；

(3) 根据正弦定义，可得 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{AB}{OA}+\frac{BC}{OB}$，根据不等式的性质，可得 $\frac{BC}{OB}>\frac{BC}{OA}$，根据边长的关系，可得 $AB+BC>AE$，再根据不等式的性质得出结论.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查用计算器求锐角三角比及由三角比求出对应的锐角，在中考中很少单独考查，一般在实际问题中综合使用.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用计算器解实际问题

例 7: [中考·威海] 为了方便行人推车过某天桥，市政府在 10 m 高的天桥一侧修建了 40 m 长的斜道（如图 2.3-4 所示），我们可以借助科学计算器求这条斜道倾斜角的度数，具体按键顺序是（　　）

A. 2ndF | sin | 0 | · | 2 | 5 | =

B. 2ndF | tan | 0 | · | 2 | 5 | =

C. sin | 0 | · | 2 | 5 | =

D. 2ndF | cos | 0 | · | 2 | 5 | =

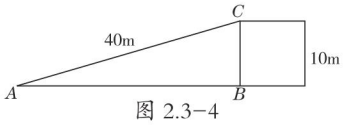


图 2.3-4

解法提醒

用计算器求角的度数，当未给出锐角三角比的值时，应先设法求出所需的锐角三角比的值，在运算中，尽量使用原始数据，以减小误差；然后再使用计算器求出所求的角度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了用计算器由三角比求角度．一般情况下，已知三角比可以直接求出角度，已知三角比求角度需要用第二功能键，按正确顺序按键是关键．

解：∵ $\sin A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{10}{40}=0.25$，∴用科学计算器求这条斜道倾斜角的度数时，按键顺序为 2ndF sin 0 · 2 5 = ．

答案：A

考法 2 利用互余两角三角比的关系说明互余两角的正弦的平方关系

例 8：[**中考·福建**] 小明在某次作业中得到如下结果：

$\sin^2 7°+\sin^2 83°\approx 0.12^2+0.99^2=0.994\,5$，

$\sin^2 22°+\sin^2 68°\approx 0.37^2+0.93^2=1.001\,8$，

$\sin^2 29°+\sin^2 61°\approx 0.48^2+0.87^2=0.987\,3$，

$\sin^2 37°+\sin^2 53°\approx 0.60^2+0.80^2=1.000\,0$，

$\sin^2 45°+\sin^2 45°=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.

据此，小明猜想：对于任意锐角 α，均有 $\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)=1$.

（1）当 $\alpha=30°$ 时，验证 $\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)=1$ 是否成立；

（2）小明的猜想是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请举出一个反例．

试题评析：本题主要考查特殊锐角的三角比及正弦的定义，熟练掌握三角比的定义及勾股定理是解题的关键．

解：（1）∵ 当 $\alpha=30°$ 时，$\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)=\sin^2 30°+\sin^2 60°=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$，∴成立；

（2）小明的猜想成立．证明如下：如图 2.3−5，

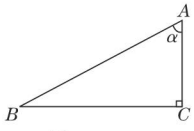


图 2.3−5

在△ABC 中，∠$C=90°$，设∠$A=\alpha$，则∠$B=90°-\alpha$，

$\therefore \sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)$

$=\sin^2 A+\sin^2 B$

$=\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2+\left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$

$=\dfrac{BC^2+AC^2}{AB^2}=\dfrac{AB^2}{AB^2}=1$.

要点提示

此题考查了锐角三角比的内容，掌握锐角三角比的知识结合正确的按键顺序才能解答．

思路点拨

本例题采用归纳法及从特殊到一般思想，通过特殊角的三角比的关系观察比较归纳出一般互余两角正弦值平方和的关系，说明时，既采用了特殊值法验证，又采用了定义法进行证明；

- 将 $\alpha=30°$ 代入，根据三角比计算可得；
- 设∠A=α，则∠B=90°−α，根据正弦的定义及勾股定理即可验证．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见240页

1. [模拟·潍城区] 我们利用课本上的科学计算器计算$\sqrt{2}\sin 35°$，按键顺序正确的是（　　）

A. 2 √ × sin 3 5 =

B. √ 2 sin 3 5 × =

C. √ 2 × sin 3 5 =

D. 2 √ × 3 5 sin =

2. 在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=26°$，$BC=5$. 若用科学计算器求边AC的长，则下列按键顺序正确的是（　　）

A. 5 ÷ tan 2 6 =

B. 5 ÷ sin 2 6 =

C. 5 × cos 2 6 =

D. 5 × tan 2 6 =

3. 下面四个数中，最大的是（　　）

A. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$　　B. $\sin 88°$

C. $\tan 46°$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

4. 如果$3\sin\alpha=\sqrt{3}+1$，则$\alpha\approx$_____.（精确到$0.1°$）

5. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=42°$，$BC=3\sqrt{6}$，则AC的长约为_____.（用科学计算器计算，结果精确到0.01）

6. （1）比较$\sqrt{13}-\sqrt{11}$与$\sqrt{15}-\sqrt{13}$的大小.

（2）计算：$\sin 40°\cdot\cos 40°-\tan 50°$（精确到0.1）.

7. （1）验证下列两组数值的关系：

$2\sin 30°\cdot\cos 30°$ 与 $\sin 60°$；

$2\sin 22.5°\cdot\cos 22.5°$ 与 $\sin 45°$.

（2）用一句话概括上面的关系.

（3）试一试：你自己任选一个锐角，用计算器验证上述结论是否成立.

（4）如果结论成立，试用α表示一个锐角，写出这个关系式.

8. （1）通过计算（可用计算器），比较下列各组数的大小，并提出你的猜想：

① $\sin 30°$ _____ $2\sin 15°\cos 15°$；

② $\sin 36°$ _____ $2\sin 18°\cos 18°$；

③ $\sin 45°$ _____ $2\sin 22.5°\cos 22.5°$；

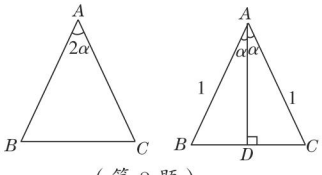
④ $\sin 60°$ _____ $2\sin 30°\cos 30°$；

⑤ $\sin 80°$ _____ $2\sin 40°\cos 40°$.

猜想：已知$0°<\alpha<45°$，则$\sin 2\alpha$____$2\sin\alpha\cos\alpha$.

（2）如图，在△ABC中，$AB=AC=1$，$\angle BAC=2\alpha$，请根据提示，利用面积方法验证猜想.

【导学号：7199732】



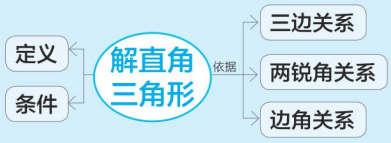
（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4 解直角三角形

核心知识
- 解直角三角形的定义
- 解直角三角形的类型
- 解非直角三角形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 解直角三角形的定义

提分·必记

1. 定义： 由直角三角形中已知的元素求出未知元素的过程，叫做解直角三角形.

注意：在直角三角形中，除直角外的五个元素中，已知其中的两个元素（至少有一个是边），可求出其余的三个未知元素（知二求三）.

活学巧记

有斜求对乘正弦，
有斜求邻乘余弦，
无斜求对乘正切.
“有斜求对乘正弦”的意思是：在一个直角三角形中，对一个锐角而言，如果已知斜边长，要求该锐角的对边，那么就用斜边长乘该锐角的正弦，其他的意思可类推.

2. 直角三角形中的边角关系：

在直角三角形ABC中，$\angle C$为直角，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边分别为a，b，c，那么除$\angle C$外的5个元素之间有如下关系：

（1）三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$（勾股定理）.

（2）两锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90^\circ$.

（3）边角之间的关系：$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$，

$\sin B=\dfrac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$；

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$，$\cos B=\dfrac{\angle B\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{a}{b}$，$\tan B=\dfrac{\angle B\text{的对边}}{\angle B\text{的邻边}}=\dfrac{b}{a}$.

拨考向 根据解直角三角形的定义判定解直角三角形的条件

提分·秘诀

特别提醒

解直角三角形时，选择关系式通常遵循以下原则：①选择可以直接应用原始数据的关系式；②选择便于计算的关系式；③能用乘法计算的要避免用除法计算.

例1： 根据下列所给条件解直角三角形，不能求解的是（　　）

①已知一直角边及其对角；②已知两锐角；③已知两直角边；④已知斜边和一锐角；⑤已知一直角边和斜边.

A. ①②③　　B. ②④　　C. 只有②　　D. ②④⑤

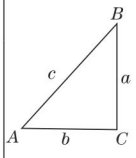
解题秘方： 紧扣解直角三角形中“知二求三”的特征进行解答.

解： ①能够求解；②不能求解；③能够求解；④能够求解；⑤能够求解.

答案： C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 解直角三角形的四种基本类型

图形	已知类型	已知条件	解法步骤
	两边	斜边，一直角边（如 c，a）	（1）$b=\sqrt{c^2-a^2}$； （2）由 $\sin A=\frac{a}{c}$ 求 $\angle A$； （3）$\angle B=90°-\angle A$
		两直角边（a，b）	（1）$c=\sqrt{a^2+b^2}$； （2）由 $\tan A=\frac{a}{b}$ 求 $\angle A$； （3）$\angle B=90°-\angle A$
	一边一锐角	斜边，一锐角（如 c，$\angle A$）	（1）$\angle B=90°-\angle A$； （2）由 $\sin A=\frac{a}{c}$，得 $a=c\cdot\sin A$； （3）由 $\cos A=\frac{b}{c}$，得 $b=c\cdot\cos A$
		一直角边，一锐角（如 a，$\angle A$）	（1）$\angle B=90°-\angle A$； （2）由 $\tan A=\frac{a}{b}$，得 $b=\frac{a}{\tan A}$； （3）由 $\sin A=\frac{a}{c}$，得 $c=\frac{a}{\sin A}$

提分·必记

特别提醒

解直角三角形的一般方法：

在解直角三角形时，应求出所有未知元素，首先要分析出直角三角形中的已知元素，根据已知元素利用适当的边角关系进行求解．求边的长度时，为减小误差，一般要选择题目中的原始数据，尽量避免用中间所得的结果参与计算．

拔考向▶ 利用解直角三角形的基本类型解决问题

类型 1：利用直角三角形的两边解直角三角形

例 2： 根据下列条件，解直角三角形．

（1）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a=20$，$c=20\sqrt{2}$；

（2）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a=2\sqrt{3}$，$b=2$.

解题秘方： 紧扣“直角三角形的边角关系”选择适合的关系式求解．

解：（1）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a=20$，$c=20\sqrt{2}$，

则 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{20}{20\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\angle A=45°$，

$\therefore\angle B=90°-\angle A=45°$，$\therefore b=a=20$.

（2）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，

$\because a=2\sqrt{3}$，$b=2$，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12+4}=4$.

$\because\tan A=\frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$\therefore\angle A=60°$，

$\therefore\angle B=90°-\angle A=90°-60°=30°$.

提分·秘诀

特别提醒

解直角三角形选择关系式常遵循的原则：

当已知中有斜边时，优先考虑用正弦或余弦，无斜边时，就用正切；当所求的元素既可以用乘法又可以用除法求解时，优先考虑用乘法；在解题过程中，既可以用原始数据又可以用解题过程中得到的数据时，优先考虑用原始数据．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：利用直角三角形的一边和一角解直角三角形

例 3： 根据下列条件，解直角三角形.

（1）在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$b=12$；

（2）在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$c=6$.

解题秘方： 紧扣以下两种思路去求解：

（1）求边时，一般用未知边比已知边（或已知边比未知边），去找已知角的某一个锐角三角比.

（2）求角时，一般用已知边比已知边，去找未知角的某一个锐角三角比.

解： （1）在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，

$\therefore \angle B=90°-\angle A=60°$.

$\because \tan A=\dfrac{a}{b}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{a}{12}$，$\therefore a=4\sqrt{3}$，$\therefore c=2a=8\sqrt{3}$.

（2）在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$\therefore \angle B=90°-\angle A=30°$. $\because \sin A=\dfrac{a}{c}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{6}$，$\therefore a=3\sqrt{3}$. 由勾股定理得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{36-27}=3$.

深度理解

已知两个角不能解直角三角形，因为只有角的条件，三角形边的大小不唯一，即有无数个三角形符合条件.

已知一角一边时，角必须为锐角，因为若已知直角，则不能求解.

知识 3 非直角三角形问题的解法

1. 在解非直角三角形时，常用的方法就是通过作高（或作垂线），构造直角三角形来解决.

2. 常见类型：（1）三角形作高法；（2）梯形作高法；（3）四边形两边延长线相交法；（4）四边形对角线连接法.

提分·必记

特别提醒

在通过作高构造直角三角形时，常通过非特殊角的顶点作高，把特殊角转化到直角三角形中，方便求解.

考向 利用作辅助线构造直角三角形解非直角三角形

例 4： 如图 2.4-1，在△ ABC 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，求 BC 的长.

解题秘方： 紧扣“化斜为直法”，通过作高把斜三角形转化为两个直角三角形求解.

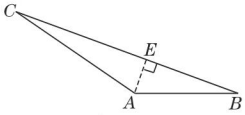


图 2.4-1

解： 如图 2.4-1 所示，过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为点 E.

在 Rt △ ABE 中，$\because \sin B=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$AB=1$，

$\therefore AE=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

在 Rt △ ACE 中，$AC=\sqrt{2}$，

$\therefore CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\dfrac{\sqrt{30}}{4}$. $\therefore BC=BE+CE=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{30}}{4}$.

化斜为直法

提分·秘诀

教你一招

构造直角三角形解非直角三角形问题的方法：

通过作垂线（或作高），将斜三角形分割成两个直角三角形，然后利用解直角三角形求边或角. 在作垂线时，要充分利用已知条件，一般在等腰三角形中作底边上的高，或过特殊角的一边上的点作这个角的另一边的垂线，从而构造含特殊角的直角三角形，再利用解直角三角形的相关知识求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用补形法求非直角三角形中的面积

挑战·高分

例 5： 如图 2.4−2 所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$CD=1$，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle D=90°$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

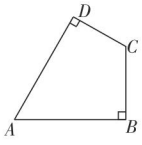


图 2.4−2

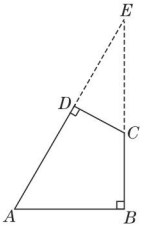


图 2.4−3

解题秘方： 紧扣以下两个原则构造直角三角形将四边形问题转化为三角形问题求解：（1）$\angle B$，$\angle D$ 为三角形的角或外角.（2）AB，CD 为三角形的边.

解： 如图 2.4−3，延长 AD，BC 相交于点 E，$\because \angle B=90°$，$\angle A=60°$，$AB=2$，$\therefore BE=AB\cdot\tan A=2\sqrt{3}$，$\angle E=30°$.

$\because$在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\tan\angle ECD=\dfrac{DE}{CD}$，

$CD=1$，$\angle ECD=90°-\angle E=90°-30°=60°$，

$\therefore DE=CD\cdot\tan\angle ECD=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BE-\dfrac{1}{2}CD\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

技巧提醒

作辅助线的技巧：

四边形问题，通常通过作辅助线将问题转化成直角三角形问题，作辅助线时注意：

- 尽量不破坏题目中原有的已知角，特别是一些特殊角；
- 尽量使已知的边作为构造的直角三角形的边，否则会给解题造成麻烦或不能求解.

拔尖角度▸ 2 利用旋转法求非直角三角形中的角度

挑战·高分

例 6： 如图 2.4−4，将边长为 2 cm 的两张互相重合的正方形纸片按住其中一张不动，另一张绕点 B 逆时针旋转一定角度，使重叠部分的面积为 $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$，求这时旋转的度数.

解题秘方： 将求正方形旋转的度数问题转化为求 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 的角度问题.

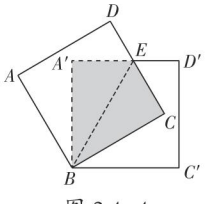


图 2.4−4

解： 如图 2.4−4，连接 BE，

$\because BE=BE$，$A'B=BC$，

$\angle A'=\angle C=90°$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle A'BE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBE$，

$\therefore\angle CBE=\angle A'BE$，

知识储备

图形旋转的性质：

旋转过程中，对应点到旋转中心的距离都相等；图形上每一点都绕旋转中心沿相同的方向旋转相同的角度；任意两组对应点与旋转中心的连线所成的角相等，都等于旋转角；旋转中心是唯一不动的点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{四边形A'BCE}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

$\because S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{2}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$，$BC=2\ \text{cm}$，

$\therefore CE=\frac{2}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}$.

$\because \tan\angle EBC=\frac{CE}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \angle EBC=30^\circ$，$\therefore \angle A'BC=2\angle EBC=60^\circ$，

$\therefore \angle C'BC=30^\circ$，即这时旋转的度数是 30°.

特别解读

本题把求旋转角的度数转化为求 Rt△CBE 中角的度数问题，进而根据解直角三角形的相关知识求解，体现了转化思想的应用.

拔尖角度▸ 3 利用解直角三角形求相似中的线段长

挑战·高分

例 7：［中考·毕节］如图 2.4-5，在▱$ABCD$ 中，过点 A 作 $AE\perp DC$，垂足为 E，连接 BE，F 为 BE 上一点，且 $\angle AFE=\angle D$.

（1）求证：$\triangle ABF\backsim\triangle BEC$；

（2）若 $AD=5$，$AB=8$，$\sin D=\frac{4}{5}$，求 AF 的长.

解题秘方：（1）利用两角对应相等，两三角形相似证明；（2）利用相似三角形对应边成比例计算 AF 的长度.

思路点拨

- 由平行四边形的性质得出 $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，得出 $\angle D+\angle C=180^\circ$，$\angle ABF=\angle BEC$，证出 $\angle C=\angle AFB$，即可得出结论；
- 由三角比求出 AE，由勾股定理求出 BE，再由相似三角形的性质求出 AF 的长.

（1）**证明：**$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

$\therefore \angle D+\angle C=180^\circ$，

$\angle ABF=\angle BEC$.

$\because \angle AFB+\angle AFE=180^\circ$，

$\angle D=\angle AFE$，

$\therefore \angle C=\angle AFB$.

$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle BEC$.

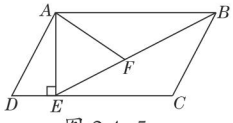


图 2.4-5

（2）**解：**$\because AE\perp DC$，$AB\parallel DC$，

$\therefore \angle AED=\angle BAE=90^\circ$.

在 Rt△ADE 中，$AE=AD\cdot\sin D=5\times\frac{4}{5}=4$，

在 Rt△ABE 中，根据勾股定理得：

$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

$\because BC=AD=5$，

由（1）得$\triangle ABF\backsim\triangle BEC$，

$\therefore\frac{AF}{BC}=\frac{AB}{BE}$，即$\frac{AF}{5}=\frac{8}{4\sqrt{5}}$，

解得 $AF=2\sqrt{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 在中考中，本节内容重点考查运用直角三角形的边角关系解直角三角形或非直角三角形问题．题目难度较小，题型主要是选择题、填空题和解答题，属中档题．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用解直角三角形求三角比

例8：［中考·滨州］如图2.4-6，在△ABC中，$AC\perp BC$，$\angle ABC=30°$，点D是CB延长线上的一点，且$BD=BA$，则$\tan\angle DAC$的值为（　　）

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3+\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

试题评析：本题考查了解直角三角形，利用锐角三角比的概念解直角三角形问题．

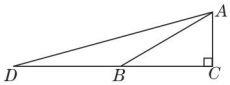


图2.4-6

解：∵在△ABC中，

$AC\perp BC$，$\angle ABC=30°$，

$\therefore AB=2AC$，$BC=\dfrac{AC}{\tan30°}=\sqrt{3}AC$.

∵$BD=BA$，$\therefore DC=BD+BC=(2+\sqrt{3})AC$，

$\therefore\tan\angle DAC=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{(2+\sqrt{3})AC}{AC}=2+\sqrt{3}$.

答案：A

活学巧用

已知斜边求直边，正弦、余弦很方便；
已知直边求直边，用正切理所当然；
已知两边求一边，勾股定理最方便；
已知两边求一角，三角比法要记牢；
已知锐角求锐角，互余关系不能少；
已知直边求斜边，用除还需正余弦．

考法2 利用解直角三角形求线段长

例9：［中考·齐齐哈尔］四边形$ABCD$中，BD是对角线，$\angle ABC=90°$，$\tan\angle ABD=\dfrac{3}{4}$，$AB=20$，$BC=10$，$AD=13$，则线段$CD=$_____.

试题评析：本题考查了勾股定理、锐角三角比的定义、解直角三角形等知识点，熟练掌握解直角三角形的基本类型是解题的关键．

解：（1）当$\angle ADB$为锐角时，

如图2.4-7，作$AH\perp BD$于H，

$CG\perp BD$于G，

∵$\tan\angle ABD=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{3}{4}$.

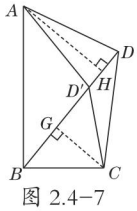


图2.4-7

设$AH=3x$，则$BH=4x$，

由勾股定理得，$(3x)^2+(4x)^2=20^2$，

解得，$x=4$，则$AH=12$，$BH=16$.

解法提醒

作$AH\perp BD$于H，$CG\perp BD$于G，根据正切的定义分别求出AH，BH，根据勾股定理求出HD，得到BD，再得到DG．根据正切的定义求出BG，CG，再根据勾股定理计算CD．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt △ AHD 中，$HD=\sqrt{AD^2-AH^2}=5$，

∴ $BD=BH+HD=16+5=21$.

∵ ∠ ABD + ∠ CBD = 90°，∠ BCG + ∠ CBD = 90°，

∴ ∠ ABD = ∠ BCG，

∴ $\frac{GB}{GC}=\frac{3}{4}$，又 $BC=10$，

∴ $BG=6$，$CG=8$，

∴ $DG=BD-BG=21-6=15$，

∴ $CD=\sqrt{CG^2+DG^2}=17$.

（2）当∠ ADB 为钝角时，如图 2.4−7，

同理得 $CD'=\sqrt{5^2+8^2}=\sqrt{89}$.

答案： 17 或 $\sqrt{89}$

易错提示

在题目中没有给出图形时，具体情况不确定，需分情况讨论，避免造成漏解.

考法 3 利用解直角三角形与旋转的性质求点的坐标

例 10：［**中考·潍坊**］如图 2.4−8，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 A 与原点重合，点 B 在 y 轴的正半轴上，点 D 在 x 轴的负半轴上，将正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 至正方形 $AB'C'D'$ 的位置，$B'C'$ 与 CD 相交于点 M，则点 M 的坐标为_____.

试题评析： 本题考查了正方形的性质、旋转的性质、解直角三角形等，解题的关键是掌握旋转不变性与正方形的性质及三角比的应用.

解： 如图 2.4−8，连接 AM，

∵ 将边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 得到正方形 $AB'C'D'$，

∴ $AD=AB'=1$，∠ $BAB'=30°$，

∴ ∠ $B'AD=60°$.

在 Rt △ ADM 和 Rt △ $AB'M$ 中，

∵ $AD=AB'$，$AM=AM$，

∴ Rt △ ADM ≌ Rt △ $AB'M$（HL）.

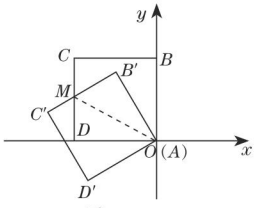


图 2.4−8

∴ ∠ DAM = ∠ $B'AM$ = $\frac{1}{2}$∠ $B'AD$ = 30°.

∴ $DM=AD\cdot\tan\angle DAM=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴ 点 M 的坐标为 $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

答案： $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解题关键

连接 AM，由旋转性质构造 Rt △ ADM 与 Rt △ $AB'M$ 全等的条件，利用全等求出∠ DAM 的度数，再利用正切的定义解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用解直角三角形的方法解非直角三角形问题

例 11：[中考·上海]如图 2.4-9，已知△ABC 中，$AB=BC=5$，$\tan\angle ABC=\frac{3}{4}$.

（1）求边 AC 的长；

（2）设边 BC 的垂直平分线与边 AB 的交点为 D，求$\frac{AD}{DB}$的值.

试题评析：（1）把△ABC 转化为双直角三角形求解；（2）分别计算出 AD，BD 的长，再求比值.

解：（1）如图 2.4-10，过 A 作 $AE\perp BC$，

在 Rt△ABE 中，$\tan\angle ABC=\frac{AE}{BE}=\frac{3}{4}$，

$AB=5$，$\therefore AE=3$，$BE=4$.

$\therefore CE=BC-BE=5-4=1$.

在 Rt△AEC 中，根据勾股定理得：$AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

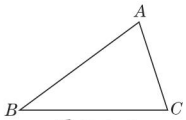


图 2.4-9

（2）如图 2.4-10，设边 BC 的垂直平分线交 BC 于点 F，

$\because DF$ 垂直平分 BC，$\therefore BF=CF=\frac{5}{2}$.

$\because\tan\angle DBF=\frac{DF}{BF}=\frac{3}{4}$，$\therefore DF=\frac{15}{8}$.

在 Rt△BFD 中，根据勾股定理得：

$BD=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{8}\right)^2}=\frac{25}{8}$，

$\therefore AD=5-\frac{25}{8}=\frac{15}{8}$，则$\frac{AD}{BD}=\frac{3}{5}$.

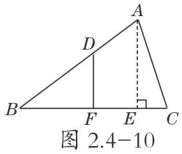


图 2.4-10

方法解读

过 A 作 AE ⊥ BC，在 Rt△ABE 中，利用锐角三角比定义求出 AE，BE 的长，从而求出 EC，在 Rt△AEC 中利用勾股定理求出 AC；

由 DF 垂直平分 BC，求出 BF 的长，利用锐角三角比定义求出 DF 的长，利用勾股定理求出 BD 的长，进而求出 AD 的长，即可得出所求比值.

两年模拟兵法 ☞答案见 241 页

1. [中考·怀化]在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$AC=6$ cm，则 BC 的长度为（　　）

A. 6 cm　　B. 7 cm　　C. 8 cm　　D. 9 cm

2. [模拟·潍坊]如图，厂房屋顶人字形（等腰三角形）的钢架的跨度 $BC=10$ 米，$\angle B=36°$，则中柱 AD（D 为 BC 的中点）的长为（　　）

A. 5sin 36° 米

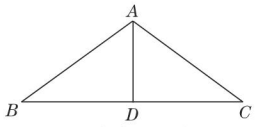
B. 5cos 36° 米

C. 5tan 36° 米

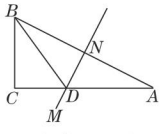
D. 10tan 36° 米

3. [模拟·渠县]如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=8$ cm，AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于 D，连接 BD，若 $\cos\angle BDC=\frac{3}{5}$，则 BC 的长是（　　）

A. 4 cm　　B. 6 cm　　C. 8 cm　　D. 10 cm



（第 2 题）

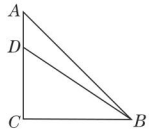


（第 3 题）

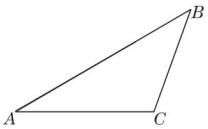
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [模拟·吉安县]如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC=6$，D 是 AC 上一点，若 $\tan\angle DBC=\frac{2}{3}$，则 AD 的长为(　　)

A. 2　　B. 4　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{3}{2}$



(第 4 题)



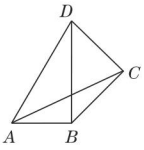
(第 5 题)

5. [月考·新泰]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AC=2\sqrt{3}$，则 AB 的长为(　　)

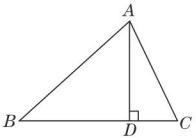
A. 4　　B. $3+\sqrt{3}$　　C. 5　　D. $2+2\sqrt{3}$

6. [模拟·寿光]将一副三角板如图摆放在一起，组成四边形 $ABCD$，连接 AC，则 $\tan\angle ACD$ 的值等于(　　)

A. 2　　B. $2+\sqrt{3}$　　C. $1+\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$



(第 6 题)

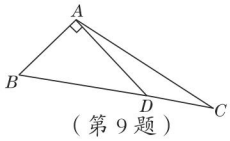


(第 7 题)

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，已知 $\tan B=\cos\angle DAC$，$\sin C=\frac{12}{13}$，$BC=6$，则 $AD=$_____.

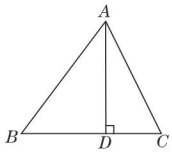
8. [中考·无锡]已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$AC=2\sqrt{7}$，$\angle B=30°$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.

9. [模拟·高密]如图，在 Rt $\triangle BAD$ 中，延长斜边 BD 到点 C，使 $DC=\frac{1}{2}BD$，连接 AC，若 $\tan B=\frac{5}{3}$，则 $\tan\angle CAD$ 的值_____.



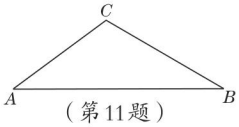
(第 9 题)

10. [期中·莘县]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足是 D，若 $BC=14$，$AD=12$，$\tan\angle BAD=\frac{3}{4}$，求 $\sin C$ 的值.



(第 10 题)

11. [中考·自贡]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=12$，$\tan A=\frac{3}{4}$，$\angle B=30°$，求 AC 和 AB 的长.

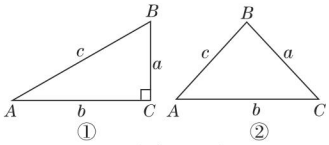


(第 11 题)

12. [中考·贵阳]如图①，在 Rt $\triangle ABC$ 中，以下是小亮探究 $\frac{a}{\sin A}$ 与 $\frac{b}{\sin B}$ 之间关系的方法：

$\because\ \sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\therefore\ c=\frac{a}{\sin A}$，$c=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

根据你掌握的三角比的知识，在图②的锐角三角形 ABC 中，探究 $\frac{a}{\sin A}$、$\frac{b}{\sin B}$、$\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系，并写出探究过程.



(第 12 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.5 解直角三角形的应用

核心知识
- 仰角、俯角
- 方位角、方向角
- 坡角、坡度

知识链接

解直角三角形的应用类型：
- 一般步骤
- 一般测量问题
- 仰角和俯角问题
- 方向角问题
- 坡角和坡度问题

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 解直角三角形在实际中的应用

1. 利用解直角三角形解决实际问题的一般步骤：

（1）画出平面图形，将实际问题抽象为数学问题，转化为解直角三角形的问题；

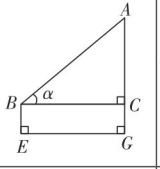
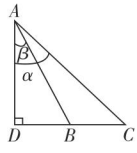
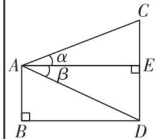
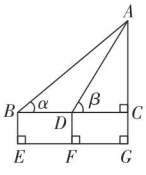
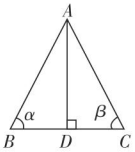
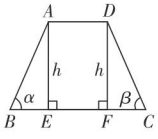
（2）根据已知条件的特点，灵活选用锐角三角比等知识解直角三角形；

（3）得到数学问题的答案；

（4）得到实际问题的答案.


解直角三角形的应用

2. 解决实际问题时，常见的基本图形及相应的关系式如下表所示：

图形	关系式	图形	关系式
	$AC=BC\cdot\tan\alpha$，$AG=AC+BE$		$BC=DC-BD=AD\cdot(\tan\alpha-\tan\beta)$
	$AB=DE=AE\cdot\tan\beta$，$CD=CE+DE=AE\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$		$BD=BC-DC=AC\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\tan\beta}\right)$，$AG=AC+CG=AC+BE$
	$BC=BD+DC=AD\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$		$BC=BE+EF+CF=BE+AD+CF=AD+h\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$

提分·必记

特别提醒

1. 当实际问题中涉及的图形可以直接转化为直角三角形时，可利用解直角三角形的知识直接求解.
2. 在解直角三角形时，若相关的角不是直角三角形的内角，应利用平行线的性质或互余、互补的角的性质将其转化为直角三角形的内角，再利用解直角三角形的知识求解.
3. 问题中有两个或两个以上的直角三角形，当其中一个直角三角形不能求解时，可考虑分别由两个直角三角形找出含有相同未知元素的关系式，运用方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用解直角三角形解实际问题

类型 1：解直角三角形在测量河宽中的应用

例 1：［中考·常州］京杭大运河是世界文化遗产．综合实践活动小组为了测出某段运河的河宽（岸沿是平行的），如图 2.5−1，在岸边分别选定了点 A，B 和点 C，D，先用卷尺量得 $AB=160$ m，$CD=40$ m，再用测角仪测得 $\angle CAB=30°$，$\angle DBA=60°$，求该段运河的河宽（即 CH 的长）．

解题秘方：作高将实际问题转化为解直角三角形问题．

解：如图 2.5−1，过 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E，

可得四边形 $CHED$ 为矩形，

$\therefore HE=CD=40$ m.

设 $CH=DE=x$ m，

在 Rt $\triangle BDE$ 中，$\angle DBA=60°$，

$\therefore BE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ m.

在 Rt $\triangle ACH$ 中，$\angle BAC=30°$，

$\therefore AH=\sqrt{3}x$ m.

由 $AH+HE+EB=AB=160$ m，

得到 $\sqrt{3}x+40+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=160$，

解得：$x=30\sqrt{3}$，即 $CH=30\sqrt{3}$ m，

则该段运河的河宽为 $30\sqrt{3}$ m.

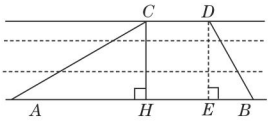


图 2.5−1

类型 2：解直角三角形在筑路问题中的应用

例 2：［中考·长沙］为加快城乡对接，建设全域美丽乡村，某地区对 A、B 两地间的公路进行改建．如图 2.5−2，A、B 两地之间有一座山，汽车原来从 A 地到 B 地需途经 C 地沿折线 ACB 行驶，现开通隧道后，汽车可直接沿直线 AB 行驶．已知 $BC=80$ 千米，$\angle A=45°$，$\angle B=30°$．

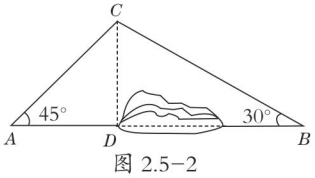


图 2.5−2

（1）开通隧道前，汽车从 A 地到 B 地大约要走多少千米？

（2）开通隧道后，汽车从 A 地到 B 地大约可以少走多少千米？（结果精确到 0.1 千米）（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）

提分·秘诀

方法点拨

过 D 作 $DE\perp AB$，可得四边形 $CHED$ 为矩形，由矩形的对边相等得到两对对边相等，分别在直角三角形 ACH 与直角三角形 BDE 中，设 $CH=DE=x$ m，利用锐角三角比定义表示出 AH 与 BE，由 $AH+HE+EB=AB$ 列出方程，求出方程的解即可得到结果．

教你一招

解直角三角形的实际应用问题的求解方法：

- 根据题目中的已知条件，将实际问题抽象为解直角三角形的数学问题，画出平面几何图形，弄清已知条件中各量之间的关系；
- 若条件中有直角三角形，则直接选择合适的三角比求解即可；若条件中没有直角三角形，一般需添加辅助线构造直角三角形，再选用合适的三角比求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）过点 C 作 AB 的垂线 CD，垂足为 D，解直角三角形 BCD 求出 CD，解直角三角形 ACD，求出 AC，计算 $AC+BC$ 的值；（2）解直角三角形 BCD 求出 BD，再求出 AD，计算 $AC+BC-AB$，求出汽车从 A 地到 B 地比原来少走多少路程.

解：（1）如图 2.5−2，过点 C 作 AB 的垂线 CD，垂足为 D，

$\because AB \perp CD$，$\sin 30^\circ = \dfrac{CD}{BC}$，$BC=80$ 千米，

$\therefore CD=BC\cdot\sin 30^\circ=80\times\dfrac{1}{2}=40$（千米）.

$\because AC=\dfrac{CD}{\sin 45^\circ}=\dfrac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=40\sqrt{2}$（千米），

$\therefore AC+BC=40\sqrt{2}+80\approx 40\times 1.41+80=136.4$（千米）.

答：开通隧道前，汽车从 A 地到 B 地大约要走 136.4 千米.

（2）$\because \cos 30^\circ = \dfrac{BD}{BC}$，$BC=80$ 千米，

$\therefore BD=BC\cdot\cos 30^\circ=80\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$（千米）.

$\because \tan 45^\circ=\dfrac{CD}{AD}$，$CD=40$ 千米，

$\therefore AD=\dfrac{CD}{\tan 45^\circ}=\dfrac{40}{1}=40$（千米）.

$\therefore AB=AD+BD=40+40\sqrt{3}\approx 40+40\times 1.73=109.2$（千米），

$\therefore$ 汽车从 A 地到 B 地比原来少走的路程为：

$AC+BC-AB\approx 136.4-109.2=27.2$（千米）.

答：汽车从 A 地到 B 地比原来少走的路程约为 27.2 千米.

解法提醒

本题作出辅助线构造直角三角形是解题的关键，易知过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，构造 Rt△ACD 与 Rt△BCD，然后根据已知条件解题.

点知识 2 解直角三角形在解仰角和俯角问题中的应用

提分·必记

1. **仰角和俯角的定义：**在实际测量中，从低处观测高处的目标时，视线与水平线所成的锐角叫做仰角；从高处观测低处的目标时，视线与水平线所成的锐角叫做俯角.

2. **示图**（如图 2.5−3）：

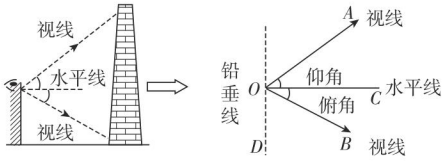


图 2.5−3

仰角俯角问题

特别提醒

- 仰角和俯角是视线相对于水平线而言的，不同位置的仰角和俯角是不同的，可巧记为“上仰下俯”.
- 实际问题中遇到仰角或俯角时，要放在直角三角形中或转化到直角三角形中，注意确定水平线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用解直角三角形解实际中仰角和俯角问题

例 3： 为了测量竖直旗杆 AB 的高度，某综合实践小组在地面 D 处竖直放置标杆 CD，并在地面上水平放置一个平面镜 E，使得 B，E，D 在同一水平线上，如图 2.5−4 所示．该小组在标杆的 F 处通过平面镜 E 恰好观测到旗杆顶 A（此时 $\angle AEB=\angle FED$），在 F 处测得旗杆顶 A 的仰角为 39.3°，平面镜 E 的俯角为 45°，$FD=1.8$ 米，问旗杆 AB 的高度约为多少米．（结果保留整数）（参考数据：$\tan 39.3°\approx 0.82$，$\tan 84.3°\approx 10.02$）

解题秘方： 把实际问题转化为解直角三角形问题．

解： 由题意，可得 $\angle FED=45°$．

在 Rt△DEF 中，

$\because \angle FDE=90°$，$\angle FED=45°$，

$\therefore EF=\sqrt{2}\,DF=\dfrac{9\sqrt{2}}{5}$ 米．

$\because \angle AEB=\angle FED=45°$，

$\therefore \angle AEF=180°-\angle AEB-\angle FED=90°$．

在 Rt△AEF 中，$\because \angle AEF=90°$，$\angle AFE=39.3°+45°=84.3°$，

$\therefore AE=EF\cdot\tan\angle AFE\approx\dfrac{9\sqrt{2}}{5}\times 10.02=\dfrac{4509}{250}\sqrt{2}$（米）．

在 Rt△ABE 中，$\because \angle ABE=90°$，$\angle AEB=45°$，

$\therefore AB=AE\cdot\sin\angle AEB\approx\dfrac{4509}{250}\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 18$（米）．

故旗杆 AB 的高度约为 18 米．

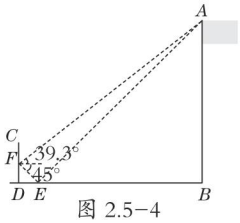


图 2.5−4

提分·秘诀

方法点拨

根据仰角、俯角的定义及平行线的性质得出 $\angle FED=45°$．

解等腰直角三角形 DEF 求出 EF 的长．在 Rt△AEF 中，利用 $\tan\angle AFE=\dfrac{AE}{EF}$ 求出 AE，再在 Rt△ABE 中，利用 $\sin\angle AEB=\dfrac{AB}{AE}$ 即可求出 AB．

知识点▶3 解直角三角形在解方向角中的应用

1. 方向角的定义： 从正北方向或正南方向到目标方向所形成的锐角叫做方向角．

特别警示： 方向角和方位角不同，方位角是指从某点的指北方向线起，按顺时针方向到目标方向线之间的水平夹角，变化范围为 0°~360°，而方向角的变化范围是 0°~90°．

方向角问题

2. 示图： 如图 2.5−5 所示，目标方向线 OA，OB，OC 的方向角分别可以表示为北偏东 30°、南偏东 45°、北偏西 30°，其中南偏东 45° 习惯上又叫做东南方向，北偏东 45° 习惯上又叫做东北方向，北偏西 45° 习惯上又叫做西北方向，南偏西 45° 习惯上又叫做西南方向．

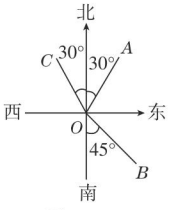


图 2.5−5

提分·必记

特别提醒

- 因为方向角是指北或指南方向线与目标方向线所成的角，所以方向角通常都写成“北偏……”，“南偏……”的形式．
- 解决实际问题时，可利用正南、正北、正西，正东方向线构造直角三角形来求解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用解直角三角形解实际中方向角问题

例4：[中考·本溪]如图2.5-6，某巡逻艇计划以40海里/时的速度从A处向正东方向的D处航行，出发1.5小时到达B处时，突然接到C处的求救信号，于是巡逻艇立刻以60海里/时的速度向北偏东30°方向的C处航行，到达C处后测得A处位于C处的南偏西60°方向，解救后巡逻艇又沿南偏东45°方向航行到D处.

（1）求巡逻艇从B处到C处用的时间.

（2）求巡逻艇实际比原计划多航行了多少海里.（结果精确到1海里）（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{6}\approx2.45$）

解题秘方：（1）根据外角性质和等角对等边求出BC的长，即路程，则时间$=\frac{路程}{速度}$，代入计算；（2）原计划的路程为AD的长，实际的路程为$AB+BC+CD$，相减即可.

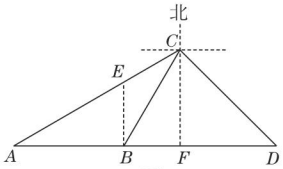


图2.5-6

解：（1）如图2.5-6所示，$AB=1.5\times40=60$（海里），

由题意得：$\angle ACF=60°$，$\angle EBC=30°$，

$\therefore\angle A=90°-60°=30°$，$\angle CBF=90°-30°=60°$.

$\because\angle CBF=\angle A+\angle ACB$，

$\therefore\angle ACB=60°-30°=30°$. $\therefore\angle ACB=\angle A=30°$.

$\therefore BC=AB=60$海里，$\therefore\frac{60}{60}=1$（小时）.

答：巡逻艇从B处到C处用的时间为1小时.

（2）$\because\angle FCD=45°$，$\angle CFD=90°$，

$\therefore\triangle CFD$是等腰直角三角形，

$\therefore FD=FC=BC\cdot\sin60°=30\sqrt{3}$海里，

$\therefore CD=\sqrt{2}FC=30\sqrt{6}$海里.

又$\because BF=BC\cdot\sin30°=30$海里，

$\therefore AB+BC+CD-(AB+BF+FD)$

$=BC+CD-BF-FD$

$=60+30\sqrt{6}-30-30\sqrt{3}$

$=30+30\sqrt{6}-30\sqrt{3}$

$\approx30\times(1+2.45-1.73)$

≈52（海里）.

答：巡逻艇实际比原计划多航行了约52海里.

提分·秘诀

方法技巧

解决方向角问题在解直角三角形中是一个难点，在解决有关方向角的问题中，一般要根据题意理清图形中各角的关系，有时所给的方向角并不一定在直角三角形中，需要用到两直线平行、内错角相等或同一个角的余角相等等知识转化为所需要的角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 解直角三角形在解坡角、坡度中的应用

1. 坡角和坡度（坡比）的定义：（1）坡角：坡面与水平面所成的夹角，如图 2.5−7 中的 α.

（2）坡度（坡比）：我们通常把坡面的铅直高度 h 和水平距离 l 的比叫做坡度（坡比）（如图 2.5−7 所示），坡度（坡比）也可写成 $i = h : l$ 的形式，在实际应用中常表示成 $1 : x$ 的形式.

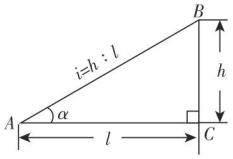


图 2.5−7

2. 坡度与坡角的关系：

$$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha,$$

即坡度是坡角的正切值，坡角越大，坡度也就越大.

提分·必记

特别提醒

1. 坡度是两条线段的比值，不是度数.
2. 表示坡度时，通常把比的前项取作 1，后项可以是小数.
3. 物体的倾斜程度通常可用物体的坡度表示，坡度越大，坡角越大，坡面越陡；反之，坡度越小，坡角越小，坡面越缓.

拔考向▶ 利用解直角三角形解实际中坡角和坡度问题

例 5：小明在参加学校组织的重走长征路的活动中，发现了一个山坡上的亭子，为了测得亭子的高度，如图 2.5−8，他在某一时刻测得 1 米长的竹竿竖直放置时影长是 0.5 米，此时，亭子 AB 顶部的影子落在斜坡坡面上的点 F 处. 经测量，山坡的坡比为 $1 : \sqrt{3}$，坡顶 C 与亭子底部 B 的距离为 4 米，与点 F 的距离为 2 米，坡脚 D 与点 F 的距离为 1 米，且亭子底部所在平面 BC 与地面 DE 平行，求亭子 AB 的高度.（结果保留根号）

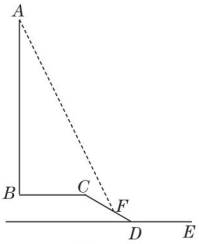


图 2.5−8

解题秘方：作辅助线如图 2.5−9，由山坡的坡比可求出 NF，根据物体与影长的比，可求出 AM、GN，在 $\mathrm{Rt}\triangle CNF$ 中求出 CN，继而得出 CG 后，可求出 AB 的高度.

解：如图 2.5−9 所示，过点 C 作 $CH \perp ED$，交 ED 的延长线于 H，反向延长 CH 交 AF 于 G，过 G 点作 $GM \perp AB$ 于 M，过 F 点作 $FN \perp GH$ 于 N.

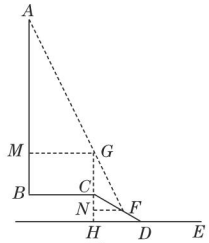


图 2.5−9

由题意得，$\frac{AM}{MG}=\frac{AM}{BC}=\frac{1}{0.5}$，$MB=GC$.

$\because BC=4$ 米，$\therefore AM=8$ 米. $\because$ 山坡的坡比为 $1 : \sqrt{3}$，$CF=2$ 米，

$\therefore NF=\sqrt{3}$ 米，$CN=1$ 米. $\because \frac{GN}{NF}=\frac{1}{0.5}$，$\therefore GN=2\sqrt{3}$ 米.

$\therefore GC=GN-CN=(2\sqrt{3}-1)$ 米，$\therefore AB=AM+CG=(7+2\sqrt{3})$ 米.

答：亭子 AB 的高度为 $(7+2\sqrt{3})$ 米.

提分·秘诀

解法提醒

坡比又叫坡度，是一个比值. 所以解决有关坡比的问题时，常作辅助线利用线段的比例关系求解；有时也会根据坡比求出坡角进行求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用方程解决实际问题中的仰角、俯角问题

挑战·高分

例 6：［中考·镇江］如图 2.5−10，校园内有两幢高度相同的教学楼 AB，CD，大楼的底部 B，D 在同一平面上，两幢楼之间的距离 BD 长为 24 米，小明在点 E（B，E，D 在一条直线上）处测得教学楼 AB 顶部的仰角为 45°，然后沿 EB 方向前进 8 米到达点 G 处，测得教学楼 CD 顶部的仰角为 30°．已知小明的两个观测点 F，H 距离地面的高度均为 1.6 米，求教学楼 AB 的高度．（精确到 0.1 米）（参考值：$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$）

解题秘方：构造直角三角形，利用特殊角的三角比可以求得 AM 的长，从而求得 AB 的长．

解：如图 2.5−11，连接 HF，并延长 HF 交 CD 于点 N，延长 FH 交 AB 于点 M，由题意可得，$MB=HG=FE=ND=1.6$ 米，$HF=GE=8$ 米，$MF=BE$，$HN=GD$，$MN=BD=24$ 米．

设 $AM=x$ 米，则 $CN=x$ 米，

在 Rt△AFM 中，$MF=\dfrac{AM}{\tan 45°}=\dfrac{x}{1}=x$（米），

在 Rt△CNH 中，

$HN=\dfrac{CN}{\tan 30°}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\,x$（米），

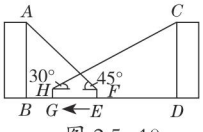


图 2.5−10

$\therefore HF=MF+HN-MN=(x+\sqrt{3}\,x-24)$ 米，

$\therefore 8=x+\sqrt{3}\,x-24$，

解得 $x\approx 11.7$，

$\therefore AB\approx 11.7+1.6=13.3$（米）．

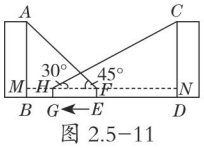


图 2.5−11

答：教学楼 AB 的高度约为 13.3 米．

方法解读

设未知数的技巧：

在实际问题中解决双直角三角形问题时，如果两个三角形之中有一个等腰直角三角形，有一个含 30°角的直角三角形，一般设 30°角所对的直角边为 x，用 x 表示两个三角形中其他的边，根据线段的和或者差列方程求解．

拔尖角度▸ 2 利用解直角三角形解决坡度、坡角与四边形的综合问题

挑战·高分

例 7：如图 2.5−12，某市为方便行人过马路，打算修建一座高为 $4x$ m 的过街天桥．已知天桥的斜面坡度 $i=1:0.75$ 是指斜面的铅直高度 DE（CF）与水平宽度 AE（BF）的比，其中 $DC\parallel AB$，$CD=8x$ m．

（1）请求出天桥总长和马路宽度 AB 的比；

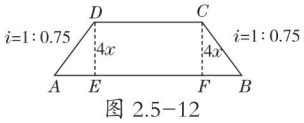


图 2.5−12

方法解读

- 把梯形转化为直角三角形和矩形，用 x 表示天桥总长 $AD+DC+CB$ 和马路宽度 AB，求出其比值；
- 根据时间 $=\dfrac{\text{路程}}{\text{速度}}$ 求出时

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）若某人从 A 处出发，横过马路直行（$A\to E\to F\to B$）到达 B 处，平均速度是 2.5 m/s；返回时从天桥由 $BC\to CD\to DA$ 到达 A 处，平均速度是 1.5 m/s，结果比去时多用了 12.8 s，请求出马路宽度 AB 的长.

解题秘方：把实际问题转化为梯形问题，把梯形问题转化为直角三角形和矩形问题.

解：（1）如图 2.5−12，

$\because \angle DEA=\angle CFE=90°$，$\therefore DE\parallel CF$.

$\because DC\parallel AB$，$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是矩形，$\therefore EF=DC=8x$ m.

$\because \dfrac{DE}{AE}=\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{1}{0.75}$，$DE=CF=4x$ m，

$\therefore EA=BF=3x$ m，$\therefore AD=BC=5x$ m，

$\therefore AB=AE+EF+BF=14x$ m，

天桥总长 $=AD+CD+BC=5x+8x+5x=18x$（m）.

$\therefore$ 天桥总长和马路宽度 AB 的比为 $18x:14x=9:7$.

（2）由（1）可知，$AB=14x$ m，$AD+CD+BC=18x$ m，

由题意得：$\dfrac{14x}{2.5}=\dfrac{18x}{1.5}-12.8$，解得 $x=2$，$\therefore 14x=28$.

答：马路宽度 AB 的长为 28 m.

间，利用时间差构建方程解答.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查：（1）仰角、俯角的实际应用，如求物体的高度、河的宽度等；（2）考查方向角在航海及运动速度、时间、路程中的应用；（3）坡度、坡角问题，主要用于计算坡长、坝宽等问题，题型有选择、填空、解答题，属中档题.

三年中考兵法

考法 1 仰角、俯角的应用

例 8：[中考·潍坊]如图 2.5−13，某数学兴趣小组要测量一栋五层居民楼 CD 的高度.该楼底层为车库，高 2.5 米；上面五层居住，每层高度相等，测角仪支架离地 1.5 米，在 A 处测得五楼顶部点 D 的仰角为 60°，在 B 处测得四楼顶部点 E 的仰角为 30°，$AB=14$ 米，求居民楼的高度.（精确到 0.1 米，参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.73$）

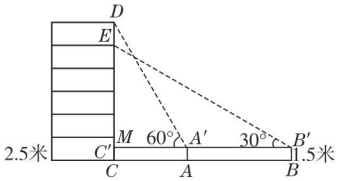


图 2.5−13

冲刺·满分

思路点拨

设每层楼高为 x 米，由 $MC-CC'$ 求出 MC' 的长，进而表示出 DC' 与 EC' 的长，在直角三角形 $DC'A'$ 中，利用锐角三角比的定义表示出 $C'A'$，同理表示出

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：此题属于解直角三角形的应用，仰角、俯角问题，熟练掌握锐角三角比的定义是解本题的关键.

解：设每层楼高为 x 米，由题意得：

$MC'=MC-CC'=2.5-1.5=1$（米），$\therefore DC'=(5x+1)$ 米，$EC'=(4x+1)$ 米. 在 Rt $\triangle DC'A'$ 中，$\angle DA'C'=60°$，

$$\therefore C'A'=\frac{DC'}{\tan 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)\text{ 米}.$$

在 Rt $\triangle EC'B'$ 中，$\angle EB'C'=30°$，

$$\therefore C'B'=\frac{EC'}{\tan 30°}=\sqrt{3}(4x+1)\text{ 米}.$$

$\because A'B'=C'B'-C'A'=AB$，

$$\therefore \sqrt{3}(4x+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)=14,$$

解得 $x\approx 3.18$，则居民楼的高度约为 $5\times 3.18+2.5=18.4$（米）.

$C'B'$，由 $A'B'=C'B'-C'A'$ 可求出每层楼高，从而求出居民楼的高度.

考法 2 方向角的应用

例 9：[中考·贺州] 如图 2.5-14，一艘游轮在 A 处测得北偏东 45° 的方向上有一灯塔 B. 游轮以 $20\sqrt{2}$ 海里/时的速度向正东方向航行 2 小时到达 C 处，此时测得灯塔 B 在 C 处北偏东 15° 的方向上，求 A 处与灯塔 B 相距多少海里.（结果精确到 1 海里，参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$）

试题评析：此题主要考查了解直角三角形的应用，正确作出辅助线是解题关键.

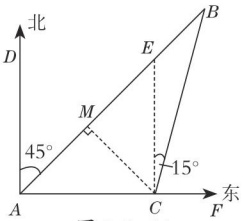


图 2.5-14

解：如图 2.5-14，

过点 C 作 $CM\perp AB$，垂足为 M，

在 Rt $\triangle ACM$ 中，

$\angle MAC=90°-45°=45°$，

则 $\angle MCA=45°$，$\therefore AM=MC$.

由勾股定理得：$AM^2+MC^2=AC^2=(20\sqrt{2}\times 2)^2$，

解得 $AM=CM=40$ 海里.

$\because \angle ECB=15°$，$\therefore \angle BCF=90°-15°=75°$，

$\therefore \angle B=\angle BCF-\angle MAC=75°-45°=30°$.

在 Rt $\triangle BCM$ 中，$\tan B=\tan 30°=\frac{CM}{BM}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{40}{BM}$，

解得 $BM=40\sqrt{3}$ 海里.

$\therefore AB=AM+BM=40+40\sqrt{3}\approx 40+40\times 1.73\approx 109$（海里）.

故 A 处与灯塔 B 相距约 109 海里.

方法点拨

直接过点 C 作 $CM\perp AB$，求出 AM，CM 的长，再利用锐角三角比的定义得出 BM 的长即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 坡度、坡角的应用

冲刺·满分

例 10：[中考·黔东南]如图 2.5−15，某校教学楼 AB 后方有一斜坡，已知斜坡 CD 的长为 12 米，坡角 α 为 60°，根据有关部门的规定，$\angle\alpha \leqslant 39°$ 时，才能避免滑坡危险，学校为了消除安全隐患，决定对斜坡 CD 进行改造，在保持坡脚 C 不动的情况下，学校至少要把坡顶 D 向后水平移动多少米才能保证教学楼的安全？（结果取整数）（参考数据：$\sin 39°\approx 0.63$，$\cos 39°\approx 0.78$，$\tan 39°\approx 0.81$，$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$，$\sqrt{5}\approx 2.24$）

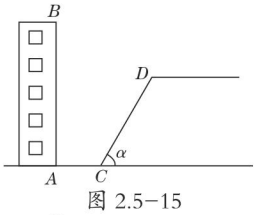


图 2.5−15

试题评析：本题考查了解直角三角形的应用——坡度、坡角问题，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解题的关键.

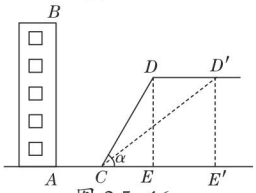


图 2.5−16

解：假设点 D 移动到 D' 的位置时，恰好 $\angle\alpha=39°$，如图 2.5−16，连接 CD'，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，过点 D' 作 $D'E'\perp AC$ 于点 E'，$\because CD=12$ 米，$\angle DCE=60°$，

$\therefore DE=CD\cdot\sin 60°=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$（米），

$CE=CD\cdot\cos 60°=12\times\dfrac{1}{2}=6$（米）. $\because DE\perp AC$，$D'E'\perp AC$，

$DD'\ /\!/\ CE'$，$\therefore$ 四边形 $DEE'D'$ 是矩形. $\therefore D'E'=DE=6\sqrt{3}$ 米.

$\because\angle D'CE'=39°$，$\therefore CE'=\dfrac{D'E'}{\tan 39°}\approx\dfrac{6\sqrt{3}}{0.81}\approx 12.8$（米），

$\therefore EE'=CE'-CE\approx 12.8-6\approx 7$（米）. $\therefore DD'=EE'\approx 7$ 米.

$\therefore$ 学校至少要把坡顶 D 向后水平移动约 7 米才能保证教学楼的安全.

解法提醒

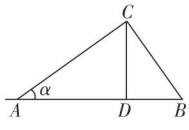
假设点 D 移到点 D' 的位置，此时恰好 $\angle\alpha=39°$，通过过点 D 和 D' 作垂线，构造直角三角形，再利用解直角三角形的方法求解即可.

两年模拟兵法

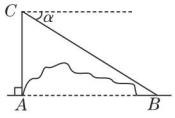
☞答案见 242 页

1. [中考·益阳]如图，电线杆 CD 的高度为 h，两根拉线 AC 与 BC 相互垂直，$\angle CAB=\alpha$，则拉线 BC 的长度为（A、D、B 在同一条直线上）（　　）

A. $\dfrac{h}{\sin\alpha}$　B. $\dfrac{h}{\cos\alpha}$　C. $\dfrac{h}{\tan\alpha}$　D. $h\cdot\cos\alpha$



（第 1 题）



（第 2 题）

2. [中考·长春]如图，某地修建高速公路，要从 A 地向 B 地修一条隧道（点 A、B 在同一水平面上）. 为了测量 A、B 两地之间的距离，一架直升机从 A 地出发，垂直上升 800 米到达 C 处，在 C 处观察 B 地的俯角为 α，则 A、B 两地之间的距离为（　　）

A. $800\sin\alpha$ 米　B. $800\tan\alpha$ 米

C. $\dfrac{800}{\sin\alpha}$ 米　D. $\dfrac{800}{\tan\alpha}$ 米

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

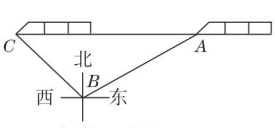
3. [模拟·莘县]如图，在距离铁轨 200 米的 B 处，观察由南宁开往百色的“和谐号”动车，当动车车头在 A 处时，恰好位于 B 处的北偏东 60° 方向上；10 秒钟后，动车车头到达 C 处，恰好位于 B 处的西北方向上，则这时段动车的平均速度是（　　）

A. $20(\sqrt{3}+1)$ 米/秒

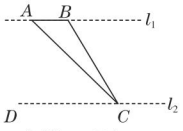
B. $20(\sqrt{3}-1)$ 米/秒

C. 200 米/秒

D. 300 米/秒



（第 3 题）



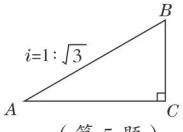
（第 4 题）

4. [模拟·诸城]如图，为了测量河对岸 l_1 上两棵古树 A、B 之间的距离，某数学兴趣小组在河这边沿着与 AB 平行的直线 l_2 上取 C、D 两点，测得 $\angle ACB=15°$，$\angle ACD=45°$，若 l_1、l_2 之间的距离为 50 m，则 A、B 之间的距离为（　　）

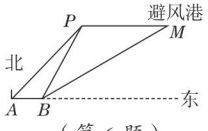
A. 50 m　　B. 25 m

C. $(50-\frac{50\sqrt{3}}{3})$ m　　D. $(50-25\sqrt{3})$ m

5. [模拟·临清]如图，一山坡的坡度 $i=1:\sqrt{3}$，小辰从山脚 A 出发，沿山坡向上走了 200 米到达点 B，则小辰上升了_____米.



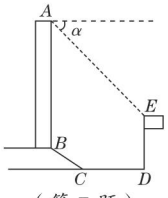
（第 5 题）



（第 6 题）

6. [中考·潍坊]如图，一艘渔船正以 60 海里/小时的速度向正东方向航行，在 A 处测得岛礁 P 在东北方向上，继续航行 1.5 小时后到达 B 处，此时测得岛礁 P 在北偏东 30° 方向，同时测得岛礁 P 正东方向上的避风港 M 在北偏东 60° 方向. 为了在台风到来之前用最短时间到达 M 处，渔船立刻加速以 75 海里/小时的速度继续航行_____小时即可到达.（结果保留根号）

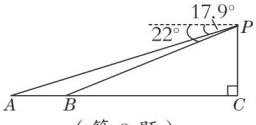
7. [模拟·诸城]如图所示，某办公大楼正前方有一根高度是 15 米的旗杆 ED，从办公楼顶点 A 测得旗杆顶端 E 的俯角 α 是 45°，旗杆底端 D 到大楼前梯坎底端 C 的距离 DC 是 20 米，梯坎坡长 BC 是 13 米，梯坎坡度 $i=1:2.4$，则大楼 AB 的高度为_____米.



（第 7 题）

8. 耸立在临清市城北大运河东岸的舍利宝塔，是“运河四大名塔”之一. 数学兴趣小组的小亮同学在塔上观景点 P 处，利用测角仪测得运河两岸上的 A，B 两点的俯角分别为 17.9°，22°，并测得塔底点 C 到点 B 的距离为 142 米（A、B、C 在同一直线上，如图），求运河两岸上的 A、B 两点的距离（精确到 1 米）.

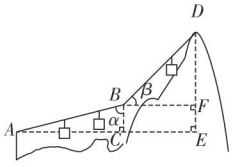
（参考数据：$\sin 22°\approx 0.37$，$\cos 22°\approx 0.93$，$\tan 22°\approx 0.40$，$\sin 17.9°\approx 0.31$，$\cos 17.9°\approx 0.95$，$\tan 17.9°\approx 0.32$）



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [中考·安徽]如图，游客在点A处坐缆车出发，沿$A-B-D$的路线可至山顶D处，假设AB和BD都是直线段，且$AB=BD=600$ m，$\alpha=75°$，$\beta=45°$，求DE的长.（参考数据：$\sin 75° \approx 0.97$，$\cos 75° \approx 0.26$，$\sqrt{2} \approx 1.41$）

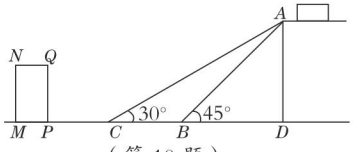


（第9题）

10. 如图是某货站传送货物的平面示意图.为了提高传送过程的安全性，工人师傅欲减小传送带与地面的夹角，使其由45°改为30°，已知原传送带AB长为$4\sqrt{2}$米.

（1）求新传送带AC的长度；

（2）如果需要在货物着地点C的左侧留出2米的通道，试判断距离B点5米的货物$MNQP$是否需要挪走，并说明理由.（参考数据：$\sqrt{2} \approx 1.4$，$\sqrt{3} \approx 1.7$）

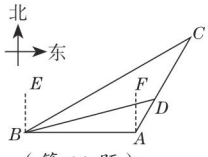


（第10题）

11. [模拟·高密]如图，某天我国一艘海监船巡航到A港口正西方的B处时，发现在B的北偏东60°方向，相距150海里处的C点有一可疑船只正沿CA方向行驶，C点在A港口的北偏东30°方向上，海监船向A港口发出指令，执法船立即从A港口沿AC方向驶出，在D处成功拦截可疑船只，此时D点与B点的距离为$75\sqrt{2}$海里.

（1）求B点到直线CA的距离；

（2）执法船从A到D航行了多少海里？（$\sqrt{2} \approx 1.414$，$\sqrt{3} \approx 1.732$，结果精确到0.1海里）　**【导学号：7199732】**



（第11题）

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解直角三角形常见应用举例

荣老师告诉你 利用锐角三角比解决实际问题，关键是构造直角三角形，在构造时，依据角（视角和方向角）或线进行构造，一般都是作垂线构造一个甚至几个直角三角形.

应用一 一角一线型（构造一个直角三角形）

例1：[中考·吉林]如图2-1，某飞机于空中A处探测到目标C，此时飞行高度AC=1 200 m，从飞机上看地平面指挥台B的俯角α=43°. 求飞机A与指挥台B的距离（结果取整数）.（参考数据：sin 43°≈0.68，cos 43°≈0.73，tan 43°≈0.93）

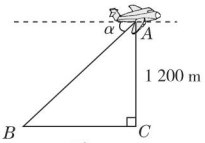


图2-1

解题秘方：解题的关键是借助俯角构造直角三角形，并结合图形利用锐角三角比解直角三角形. 显然，$\angle ABC=\alpha=43°$，利用$\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}$可求$AB$.

解：根据题意，得$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=\alpha=43°$，AC=1 200 m.

在Rt△ABC中，

$\because \sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}$，

$\therefore AB=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{1\,200}{\sin 43°}\approx\frac{1\,200}{0.68}\approx$1 765（m）.

答：飞机A与指挥台B的距离约为1 765 m.

方法点拨：仰角和俯角是视线相对于水平线而言的，仰角和俯角问题是解直角三角形中的常见题型，作辅助线构造直角三角形（一般同时得到两个直角三角形）并解之是解决这类问题的常用方法. 在多个直角三角形中，一定要认真分析各条线段之间的关系（包括三角比关系、相等关系），运用方程求解，有时可起到事半功倍之效.

应用二 一角两线型（构造一个直角三角形和矩形）

例2：[中考·长春]如图2-2，为了测量长春解放纪念碑的高度AB，在与纪念碑底部B相距27米的C处，用高1.5米的测角仪DC测得纪念碑顶端A的仰角为47°. 求纪念碑的高度.（结果精确到0.1米）（参考数据：sin 47°≈0.731，cos 47°≈0.682，tan 47°≈1.072）

解题秘方：解题的关键是作辅助线，构造含已知角的直角三角形. 过点D作$DE\perp AB$于点E，首先解Rt△AED，根据正切的概念求出AE的长，再利用$AB=AE+BE$即可求纪念碑的高度.

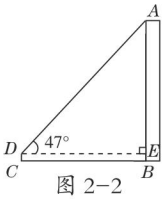


图2-2

解：如图2-2，

过点D作$DE\perp AB$于E.

由题意，得$DE=BC$=27米，

$BE=DC$=1.5米，

$\angle ADE$=47°.

在Rt△ADE中，

$AE=DE\cdot\tan\angle ADE\approx 27\times 1.072=$28.944（米），

所以$AB=AE+BE\approx 28.944+1.5\approx 30.4$（米）.

答：纪念碑的高度约为30.4米.

方法点拨：解直角三角形应用题时，通常会利用仰角、俯角来构造直角三角形，如果题中仰角和俯角在同一点上，就从这个点作垂线，构造直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用三 两角一线型

例 3：[中考·兰州]如图 2-3，一垂直于地面的灯柱 AB 被一钢缆 CD 固定，CD 与地面成 45° 夹角（$\angle CDB=45°$），在点 C 上方 2 米处加固另一条钢缆 ED，ED 与地面成 53° 夹角（$\angle EDB=53°$）. 那么钢缆 ED 的长度约为多少米？（结果精确到 1 米. 参考数据：$\sin 53° \approx 0.80$，$\cos 53° \approx 0.60$，$\tan 53° \approx 1.33$）

解题秘方：①因本题中有两个直角三角形，其中 $\triangle DCB$ 是等腰直角三角形，所以先假设 $BD=x$ 米，再用含 x 的代数式表示 BC 与 BE；②在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，借助 $\angle EDB$ 的正切列方程求 x；③在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中借助 $\angle EDB$ 的正弦求出 ED 的长.

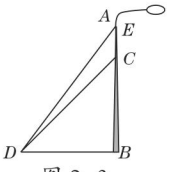


图 2-3

解：设 $BD=x$ 米，易得 $BC=x$ 米，

$BE=(x+2)$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$\dfrac{BE}{DB}=\tan\angle EDB$，

$\therefore \dfrac{x+2}{x}\approx 1.33$，$\therefore x\approx 6.06$.

$\because \dfrac{BE}{ED}=\sin\angle EDB$，

$\therefore ED=\dfrac{BE}{\sin\angle EDB}\approx\dfrac{2+6.06}{0.80}\approx 10$（米）.

答：钢缆 ED 的长度约为 10 米.

方法点拨：在实际问题中，当有多个直角三角形时，一定要认真分析各条线段之间的关系（包括三角比产生的比例关系、相等关系、和差关系等），同时关注方程思想在解题中的应用.

应用四 两角两线型

例 4：如图 2-4，某无人机于空中 A 处探测到目标 B，D，从 A 处看目标 B，D 的俯角分别是 30°，60°，此时无人机的飞行高度 AC 为 60 m，随后无人机从 A 处继续水平飞行 $30\sqrt{3}$ m 到达 A' 处.

（1）求 A，B 之间的距离；

（2）求从 A' 处看目标 D 的俯角的正切值.

解题秘方：（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，求 $\angle BAC$ 或 $\angle B$ 的度数，又知一边 AC 的长度，可通过解 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 直接得到 AB 的长度.（2）连接 $A'D$，则从 A' 处看目标 D 的俯角为 $\angle A'$，要求其正切值，可直接把它构造在一个直角三角形中，于是作 $DE\perp AA'$，交 $A'A$ 的延长线于点 E；通过解 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 求得 AE 的长，进而可知 $A'E$ 的长；在 $\mathrm{Rt}\triangle A'ED$ 中，$\tan A'$ 的值即为所求.

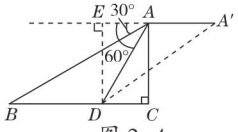


图 2-4

解：根据题意，可知 $AA'\parallel BC$.

又 $AC\perp BC$，

$\therefore AC\perp AA'$.

（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because \angle BAC=90°-30°=60°$，$AC=60$ m，

$\therefore AB=\dfrac{AC}{\cos 60°}=60\div\dfrac{1}{2}=120$（m），

即 A，B 之间的距离为 120 m.

（2）如图 2-4，过点 D 作 $DE\perp AA'$ 交 $A'A$ 的延长线于点 E，

连接 $A'D$，易得 $DE=AC=60$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\tan\angle DAE=\dfrac{DE}{AE}$，

$\therefore AE=\dfrac{60}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$（m）.

$\therefore A'E=AA'+AE=30\sqrt{3}+20\sqrt{3}=50\sqrt{3}$（m）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'ED$ 中，

$\tan A'=\dfrac{DE}{A'E}=\dfrac{60}{50\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

故从 A' 处看目标 D 的俯角的正切值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：解直角三角形的问题中，双直角三角形是常见的基本模型，具体如下：

如图 2−5 ①，若 $BC=m$，设 $AD=x$，

由 $BD+CD=m$，可得 $\dfrac{x}{\tan\alpha}+\dfrac{x}{\tan\beta}=m$，

解得 $x=\dfrac{m\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$；

如图 2−5 ②，若 $BC=m$，设 $AD=x$，同理，

可得 $x=\dfrac{m\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$.

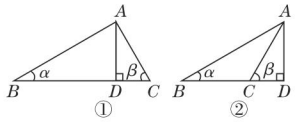


图 2−5

应用五　三角一线型

例 5：如图 2−6，在大楼 AB 的正前方有一斜坡 CD，$CD=4$ 米，坡角 $\angle DCE=30°$，小红在斜坡下的点 C 处测得楼顶 B 的仰角为 60°，在斜坡上的点 D 处测得楼顶 B 的仰角为 45°，其中 A，C，E 在同一直线上.

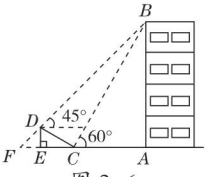


图 2−6

（1）求斜坡 CD 的高度 DE；

（2）求大楼 AB 的高度（结果保留根号）.

解题秘方：（1）在 Rt△DCE 中，根据 $\angle DCE=30°$，$CD=4$ 米，可知 $DE=CD\cdot\sin 30°$，求出 DE；（2）延长 BD，交 AE 的延长线于点 F，构成 Rt△ABF，根据已知条件解此三角形.

解：（1）易知 $\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{CD}=\sin 30°$.

$\therefore DE=CD\cdot\sin 30°=4\times\dfrac{1}{2}=2$（米）.

（2）如图 2−6，延长 BD，交 AE 的延长线于点 F. 由题意知，$\angle F=45°$.

$\because\angle DEF=90°$，$\therefore\angle EDF=\angle F=45°$. $\therefore EF=DE=2$ 米. 设 $AC=x$ 米，则 $AB=AC\cdot\tan\angle ACB=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}\,x$（米）. 在 Rt△$DCE$ 中，$CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=2\sqrt{3}$ 米，

$\therefore AF=EF+EC+CA=(2+2\sqrt{3}+x)$ 米.

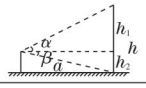
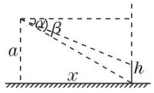
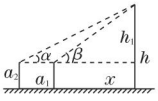
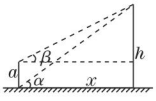
在 Rt△ABF 中，$\tan F=\dfrac{AB}{AF}=1$，

$\therefore\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2+2\sqrt{3}+x}=1$. $\therefore x=4+2\sqrt{3}$.

$\therefore AB=\sqrt{3}\,x=6+4\sqrt{3}$（米）.

$\therefore$大楼 AB 的高度为（$6+4\sqrt{3}$）米.

方法点拨：测量物体的高度的常见模型：

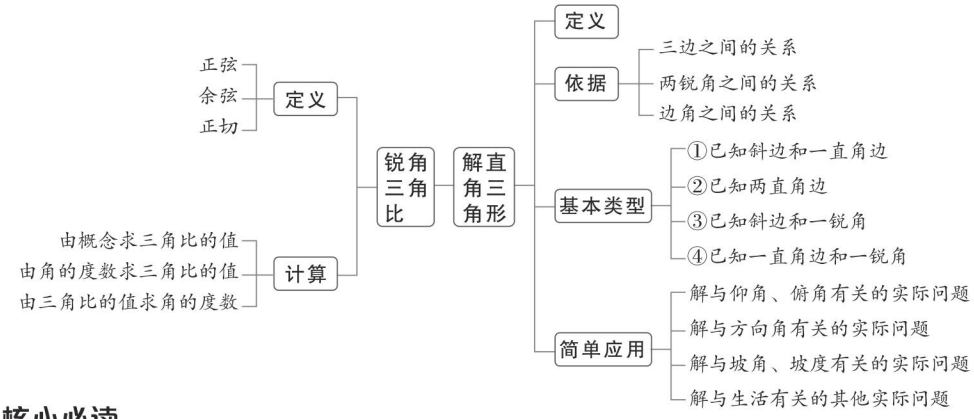
数学模型	已知数据	数学关系
	仰角 α，俯角 β，水平距离 a	$\tan\alpha=\dfrac{h_1}{a}$，$\tan\beta=\dfrac{h_2}{a}$，$\therefore h=h_1+h_2=a(\tan\alpha+\tan\beta)$
	俯角 α，俯角 β，垂直高度 a	$\tan\alpha=\dfrac{a-h}{x}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{x}$，$\therefore x=\dfrac{a-h}{\tan\alpha}=\dfrac{a}{\tan\beta}$. $\therefore h=a-\dfrac{a\tan\alpha}{\tan\beta}$
	仰角 α，仰角 β，水平距离 a_1，测量器高度 a_2	$\tan\alpha=\dfrac{h_1}{a_1+x}$，$\tan\beta=\dfrac{h_1}{x}$，$\therefore h_1=\dfrac{a_1\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$，$\therefore h=a_2+h_1=a_2+\dfrac{a_1\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$
	仰角 α，仰角 β，高度 a	$\tan\alpha=\dfrac{h}{x}$，$\tan\beta=\dfrac{h-a}{x}$，$\therefore h=\dfrac{a\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

—— 核心结构专题 ——

结构必知



核心必读

1. 30°，45°，60° 角的三角比：

三角比 \ α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. 直角三角形中的边角关系（a，b 为直角边，c 为斜边）：

（1）三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$（勾股定理）.（2）两锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90°$.

（3）边角之间的关系：$\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$；$\cos A=\frac{b}{c}$，$\cos B=\frac{a}{c}$；$\tan A=\frac{a}{b}$，$\tan B=\frac{b}{a}$.

3. 利用解直角三角形解决实际问题的步骤：

（1）审题，弄清方向角、仰角、俯角、坡角、坡度、水平距离、垂直距离等概念，将实际问题抽象为数学问题.

（2）认真分析题意，画出平面图形，转化为解直角三角形问题，对于较复杂的问题，往往要通过作辅助线构造直角三角形，或分割成直角三角形或矩形.

（3）根据条件，结合图形，选用适当的锐角三角比解直角三角形.

（4）按照题目中已知数的精确度进行近似计算，检验得到符合实际要求的解，并按题目要求的精确度确定答案，并标注单位.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识必学

专题一 锐角三角比

链接中考» 锐角三角比的有关计算，主要就是求锐角的三角比，解决这类问题的关键是看清锐角所在的图形以及该图形的性质.这类题目一般属中档题，多以填空题或选择题形式考查.

例1：[中考·荆门]如图2-1，在△ABC中，∠BAC=90°，AB=AC，点D为边AC的中点，DE⊥BC于点E，连接BD，则tan∠DBC的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

解题秘方：根据线段之间的关系，以及勾股定理、等角对等边等性质求出线段DE和BE的关系.

解：设DE=x.

∵∠BAC=90°，AB=AC，

∴∠C=45°.

又∵DE⊥BC，

∴∠CDE=45°.

∴EC=DE=x.

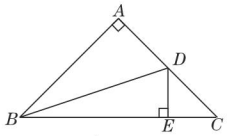


图2-1

在Rt△DEC中，

由勾股定理，得$DC=\sqrt{2}x$. ∴$AC=2\sqrt{2}x$.

在Rt△ABC中，由勾股定理，得BC=4x.

∴BE=3x. 在Rt△DBE中，

$$\tan\angle DBC=\frac{DE}{BE}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

答案：A

例2：[中考·眉山]如图2-2，在边长为1的小正方形网格中，点A、B、C、D都在这些小正方形的顶点上，AB、CD相交于点O，则tan∠AOD=_____.

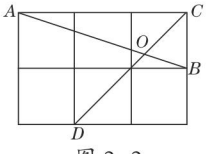


图2-2

解题秘方：如图2-3，首先连接BE，交CK于点F，由题意易得BF=CF，△ACO∽△BKO，然后由相似三角形的对应边成比例，易得KO∶CO=1∶3，即可得OF∶CF=OF∶BF=1∶2，在Rt△OBF中，易得tan∠BOF的值，进而求得tan∠AOD.

解：如图2-3，连接BE，交CK于点F，

∵四边形$BCEK$是正方形，

∴KF=CF=$\frac{1}{2}CK$，

$BF=\frac{1}{2}BE$，

CK=BE，BE⊥CK，

∴BF=CF.

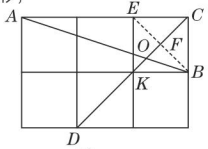


图2-3

根据题意得：AC∥BK，

∴△ACO∽△BKO，

∴KO∶CO=BK∶AC=1∶3，

∴KO∶KF=1∶2，

∴KO=OF=$\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}BF$.

在Rt△OBF中，tan∠$BOF=\frac{BF}{OF}$=2.

∵∠AOD=∠BOF，

∴tan∠AOD=2.

答案：2

专题二 特殊角的三角比

链接中考» 一般情况下，求含有三角比的代数式的值，要先将各角的三角比的值代入，再根据运算法则和运算律进行计算，注意最后结果要化简，这类题目常与零次幂、负整数指数幂、乘方、开方等综合考查.

例3：[中考·天水]计算：$(\pi-3)^0+\sqrt{18}-2\cos 45°-\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$.

解题秘方：按照运算法则和运算顺序运算即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解： 原式 $=1+3\sqrt{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-8=1+3\sqrt{2}-\sqrt{2}-8=-7+2\sqrt{2}$.

方法点拨： 实数的运算通常会结合一些特殊角的三角比、整数指数幂（包括正整数指数幂、零次幂、负整数指数幂）、二次根式、绝对值等来考查．运算时应先“各个击破”，准确记忆特殊角的三角比的值及相关运算的法则．

专题三 解直角三角形

链接中考» 解直角三角形主要是在直角三角形中根据已知的边角条件求未知的边和角．解决这类问题，关键是要结合图形的性质，灵活运用锐角三角比的定义．一般以解答题形式考查．

例 4：[中考·益阳] 如图 2-4，在$\square ABCD$中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle CAB=\angle ACB$. 过点 B 作 $BE\perp AB$，交 AC 于点 E.

（1）求证：$AC\perp BD$；

（2）若 $AB=14$，$\cos\angle CAB=\frac{7}{8}$，求线段 OE 的长．

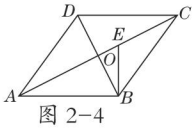


图 2-4

解题秘方：（1）只需证明四边形 $ABCD$ 是菱形，就可得出 $AC\perp BD$；

（2）由于 $OE=AE-AO$，故可先求出 AO 与 AE 的长，AO 与 AE 可利用 $\cos\angle CAB=\frac{7}{8}$ 在相应的直角三角形中求出．

（1）**证明：** $\because\angle CAB=\angle ACB$，$\therefore AB=CB$.

$\therefore\square ABCD$ 是菱形．$\therefore AC\perp BD$.

（2）**解：** 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\cos\angle OAB=\frac{AO}{AB}=\frac{7}{8}$，$AB=14$，$\therefore AO=14\times\frac{7}{8}=\frac{49}{4}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\cos\angle EAB=\frac{AB}{AE}=\frac{7}{8}$，$AB=14$，$\therefore AE=\frac{8}{7}\times14=16$.

$\therefore OE=AE-AO=16-\frac{49}{4}=\frac{15}{4}$.

专题四 解直角三角形的应用

链接中考» 利用解直角三角形解决实际问题是中考的热点，解题的关键是正确理解题意，将实际问题转化为解直角三角形问题，利用直角三角形的知识解决问题．一般都是以解答题形式考查．

例 5：[模拟·潍城区] 如图 2-5，BC 是某一商场 CH 楼顶上的一个广告牌，高度为 3 米，小刚站在商场沿街马路的对面 A 处测得广告牌顶部 B 处的仰角为 30°，又向前走了 20 米到达 D 处，测得广告牌底部 C 处的仰角为 60°，请求出该商场楼顶到地面的高度 CH 的长．（结果精确到 0.1 米，$\sqrt{3}\approx1.73$）

解题秘方： 设 $DH=x$ 米，解直角三角形，用 x 表示出 AH，再用 $AD=AH-DH$ 列方程求解即可．

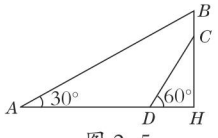


图 2-5

解： 设 $DH=x$ 米，在 $\mathrm{Rt}\triangle CDH$ 中，

$\tan\angle CDH=\frac{CH}{DH}=\sqrt{3}$，

$\therefore CH=\sqrt{3}x$ 米．

则 $BH=BC+CH=(3+\sqrt{3}x)$ 米．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，

$\tan\angle BAH=\frac{BH}{AH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AH=\sqrt{3}BH=(3\sqrt{3}+3x)$ 米．

$\therefore AD=AH-DH=3\sqrt{3}+3x-x=3\sqrt{3}+2x$（米）．

$\therefore 3\sqrt{3}+2x=20$，

解得 $x=10-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

则 $CH=\sqrt{3}x=10\sqrt{3}-\frac{9}{2}\approx12.8$（米）.

答：该商场楼顶到地面的高度 CH 的长约是 12.8 米．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题五 割补法

专题解读≫ 如果题目中所给的图形是正方形、菱形、矩形、平行四边形、等腰三角形、梯形或其他不规则的四边形，一般要根据题意，灵活地添加辅助线（主要是高线或垂线）对图形进行“割”或“补”，构造直角三角形.

例 6： 如图 2-6，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，AC 平分 $\angle DAB$，$CD\perp AD$，$AD=24$，$\cos\angle DAB=\frac{3}{5}$. 求 $\tan\angle CAB$ 的值.

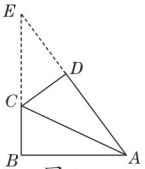


图 2-6

解题秘方： 通过补线构造直角三角形，利用 $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$ 及 $AD=24$ 求出 BC，在直角三角形 ABC 中求 $\tan\angle CAB$ 的值.

解： 如图 2-6，延长 AD,BC 相交于点 E，

$\because\angle B=90°$，$CD\perp AD$，AC 平分 $\angle DAB$，

$\therefore\angle ADC=\angle B$，$\angle CAD=\angle CAB$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle ADC,\\ \angle CAB=\angle CAD,\\ AC=AC,\end{cases}$$

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$，

$\therefore CD=BC$，$AB=AD=24$.

$\because\cos\angle DAB=\frac{AB}{AE}=\frac{3}{5}$，$\therefore\frac{24}{AE}=\frac{3}{5}$，

$\therefore AE=40$，$\therefore DE=AE-AD=40-24=16$，

$BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{40^2-24^2}=32$.

$\because\angle E=\angle E$，$\angle B=\angle CDE$，

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle CDE$，

$\therefore\frac{DC}{AB}=\frac{DE}{BE}$，即 $\frac{DC}{24}=\frac{16}{32}$，

$\therefore DC=12$，$\therefore CB=CD=12$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\tan\angle CAB=\frac{CB}{AB}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

方法点拨： 根据条件把四边形转化为直角三角形，把 $\angle DAB$ 转化到直角三角形 ABE 中，根据锐角三角比转化三角形边的关系.

专题六 方程思想

专题解读≫ 在处理有关直角三角形的问题及利用直角三角形的边角关系解决实际问题时，可依据题意设适当的未知数，再从题目的条件和要求中寻求等量关系，构造出方程或方程组，从而使问题获解.

例 7：[中考·泰州] 日照间距系数反映了房屋日照情况. 如图 2-7 ①，当前后房屋都朝向正南时，日照间距系数 $=L:(H-H_1)$，其中 L 为楼间水平距离，H 为南侧楼房高度，H_1 为北侧楼房底层窗台至地面高度.

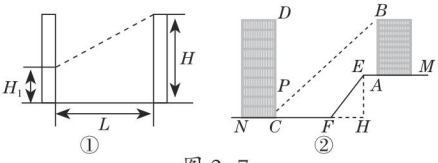


图 2-7

如图 2-7 ②，山坡 EF 朝北，EF 长为 15 m，坡度为 $i=1:0.75$，山坡顶部平地 EM 上有一高为 22.5 m 的楼房 AB，底部 A 到 E 点的距离为 4 m.

（1）求山坡 EF 的水平宽度 FH；

（2）欲在 AB 楼正北侧山脚的平地 FN 上建一楼房 CD，已知该楼底层窗台 P 处至地面 C 处的高度为 0.9 m，要使该楼的日照间距系数不低于 1.25，底部 C 距 F 处至少多远？

解题秘方： （1）在 $\mathrm{Rt}\triangle EFH$ 中，根据坡度的定义得 $\tan\angle EFH=\frac{EH}{FH}$，设 $EH=4x$ m，则 $FH=3x$ m，根据 EF 的长求出 x，即可得到山坡 EF 的水平宽度 FH；

（2）根据该楼的日照间距系数不低于 1.25，列出不等式求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）在 Rt △ EFH 中，∵ ∠ H=90°，

∴ tan ∠ EFH=i=1 ∶ 0.75=$\frac{4}{3}=\frac{EH}{FH}$.

设 EH=4x m，

则 FH=3x m.

∴ $EF=\sqrt{EH^2+FH^2}$ =5x m.

∵ EF=15 m，

∴ 5x=15，x=3.

∴ FH=3x=9（m）.

即山坡 EF 的水平宽度 FH 为 9 m.

（2）由（1）得 EH=12 m.

∵ L=CF+FH+EA=CF+9+4=CF+13（m），

H=AB+EH=22.5+12=34.5（m），

H_1=0.9 m，

∴ 日照间距系数=L ∶（H−H_1）=$\frac{CF+13}{34.5-0.9}=\frac{CF+13}{33.6}$.

∵该楼的日照间距系数不低于 1.25，

∴$\frac{CF+13}{33.6}\geqslant 1.25$，

∴ CF ⩾ 29 m.

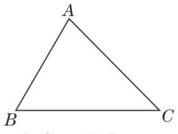
答：要使该楼的日照间距系数不低于 1.25，底部 C 距 F 处至少 29 m 远.

技巧点拨：此题主要考查了直角三角形的应用，通过设适当的未知数，利用直角三角形的边角关系求解是解题的关键.

好题必解 ☞答案见 243 页

类型 1：巧用“化斜为直法”构造直角三角形求线段长度

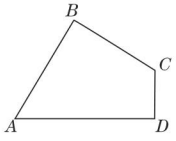
1. 如图，在 △ ABC 中，已知 BC=1+$\sqrt{3}$，∠ B=60°，∠ C=45°，求 AB 的长.



（第 1 题）

类型 2：巧用“割补法”构造直角三角形求面积

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，∠ B=∠ D=90°，∠ A=60°，AB=4，AD=5，求四边形 $ABCD$ 的面积.



（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

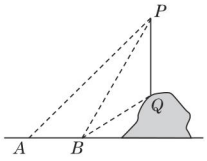
类型 3：巧用建模思想建立直角三角形模型解实际应用问题

题型 1：测高问题

3. 如图，从地面上的点 A 看一山坡上的电线杆 PQ，测得杆顶端点 P 的仰角是 45°，向前走 6 m 到达 B 点，测得杆顶端点 P 和杆底端点 Q 的仰角分别是 60° 和 30°．

（1）求∠ BPQ 的度数；

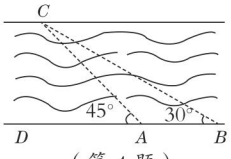
（2）求该电线杆 PQ 的高度（结果精确到 1 m）．（备用数据：$\sqrt{3}\approx1.7$，$\sqrt{2}\approx1.4$）



（第 3 题）

题型 2：测距问题

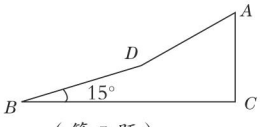
4. [中考·青海]如图，同学们利用所学知识去测量三江源某河段某处的宽度．小宇同学在 A 处观测对岸点 C，测得∠ CAD=45°，小英同学在距点 A 处 60 米远的 B 点测得∠ CBD=30°，请根据这些数据算出河宽（精确到 0.01 米，$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）．



（第 4 题）

题型 3：坡度、坡角问题

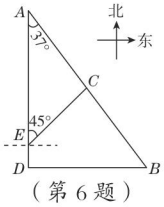
5. 如图，某校八年级（1）班学生利用寒假期间到郊区进行社会实践活动，活动之余，同学们准备攀登附近的一个小山坡，从 B 点出发，沿坡角为 15° 的坡面以 5 千米/时的速度行至 D 点，用了 10 分钟，然后沿坡比为 $1:\sqrt{3}$ 的坡面以 3 千米/时的速度到达山顶 A 点，用了 5 分钟，求小山坡的高（即 AC 的长度）．（精确到 0.01 千米，参考数据：sin 15° ≈ 0.258 8，$\sqrt{3}\approx1.732$）



（第 5 题）

题型 4：航行问题

6. [中考·南京]如图，港口 B 位于港口 A 的南偏东 37°方向，灯塔 C 恰好在 AB 的中点处，一艘海轮位于港口 A 的正南方向，港口 B 的正西方向的 D 处，它沿正北方向航行 5 km 到达 E 处，测得灯塔 C 在北偏东 45° 方向上，这时，E 处距离港口 A 有多远？（参考数据：sin 37° ≈ 0.60，cos 37° ≈ 0.80，tan 37° ≈ 0.75）



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 章测试卷 ☞答案见 245 页

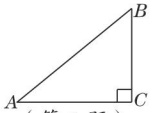
（120 分 90 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 如图，在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，BC=3，AC=4，则 $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=$（　　）

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$

C. $\dfrac{3}{7}$　　D. $\dfrac{3}{4}$



（第 1 题）

2. 在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，AC=9，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，则 AB=（　　）

A. 15　　B. 12

C. 9　　D. 6

3. 在△ ABC 中，∠ C=90°，若 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos A$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

4. 在 △ ABC 中，∠ B=90°，BC=2AB，则 $\cos A$=（　　）

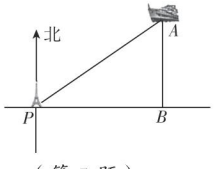
A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

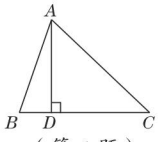
5. 如图，一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 55° 方向，距离灯塔为 2 海里的点 A 处. 如果海轮沿正南方向航行到灯塔的正东方向，海轮航行的距离 AB 长是（　　）

A. 2 海里　　B. 2sin 55° 海里

C. 2cos 55° 海里　　D. 2tan 55° 海里



（第 5 题）



（第 6 题）

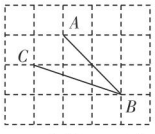
6. 如图，在△ ABC 中，AD ⊥ BC，垂足为点 D，若 AC=6$\sqrt{2}$，∠ C=45°，tan ∠ ABC=3，则 BD 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 3$\sqrt{2}$　　D. 2$\sqrt{3}$

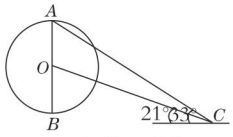
7. 如图，在网格中，小正方形的边长均为 1，点 A，B，C 都在格点上，则∠ ABC 的正切值是（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{1}{2}$



（第 7 题）



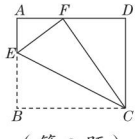
（第 8 题）

8. 聊城“水城之眼”摩天轮是亚洲三大摩天轮之一，也是全球首座建筑与摩天轮相结合的城市地标，如图，点 O 是摩天轮的圆心，长为 110 米的 AB 是其垂直于地面的直径，小莹在地面 C 点处利用测角仪测得摩天轮的最高点 A 的仰角为 33°，测得圆心 O 的仰角为 21°，则小莹所在 C 点到直径 AB 所在直线的距离约为（tan33° ≈ 0.65，tan21° ≈ 0.38）（　　）

A. 169 米　　B. 204 米

C. 240 米　　D. 407 米

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 边上，沿 CE 折叠矩形 $ABCD$，使点 B 落在 AD 边上的点 F 处，若 AB=4，BC=5，则 tan ∠ AFE 的值为（　　）



（第 9 题）

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

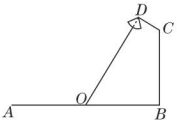
10. 如图，要在宽为 22 米的九洲大道 AB 两边安装路灯，路灯的灯臂 CD 长 2 米，且与灯柱 BC 成 120° 角，路灯采用圆锥形灯罩，灯罩的轴线 DO 与灯臂 CD 垂直．当灯罩的轴线 DO 通过公路路面的中心时照明效果最佳．此时，路灯的灯柱 BC 的高度应该设计为（　　）

A. $(11-2\sqrt{2})$ 米

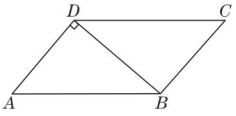
B. $(11\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ 米

C. $(11-2\sqrt{3})$ 米

D. $(11\sqrt{3}-4)$ 米



（第 10 题）



（第 13 题）

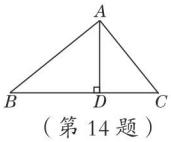
二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 计算：$\sin 60°=$_____.

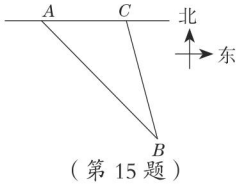
12. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，$\angle D=\frac{1}{2}\angle A$，则 $\sin D=$_____.

13. 如图，在▱$ABCD$ 中，连接 BD，$AD\perp BD$，$AB=4$，$\sin A=\frac{3}{4}$，则▱$ABCD$ 的面积是_____.

14. 如图，已知在 Rt△ABC 中，斜边 BC 上的高 $AD=4$，$\cos B=\frac{4}{5}$，则 $AC=$_____.



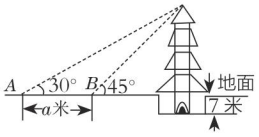
（第 14 题）



（第 15 题）

15. [中考·宁夏] 如图，一艘货轮以 $18\sqrt{2}$ km/h 的速度在海面上沿正东方向航行，当行驶至 A 处时，发现它的东南方向有一灯塔 B，货轮继续向东航行 30 分钟后到达 C 处，发现灯塔 B 在它的南偏东 15° 方向，则此时货轮与灯塔 B 的距离是_____km.

16. [中考·荆州] 荆州市滨江公园旁的万寿宝塔始建于明嘉靖年间，周边风景秀丽．现在塔底低于地面约 7 米，某校学生测得古塔的整体高度约为 40 米．其测量塔顶相对地面高度的过程如下：先在地面 A 处测得塔顶的仰角为 30°，再向古塔方向行进 a 米后到达 B 处，在 B 处测得塔顶的仰角为 45°（如图所示），那么 a 的值约为_____（$\sqrt{3}\approx 1.73$，结果精确到 0.1）．



（第 16 题）

三、解答题（共 72 分）

17.（6 分）计算：$2\cos^2 45°-\sqrt{(\tan 60°-2)^2}-(\sin 60°-1)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

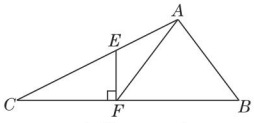
18.（6 分）在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c.

（1）已知：$c=8\sqrt{3}$，$\angle A=60°$，求 $\angle B$，a，b；

（2）已知：$a=3\sqrt{6}$，$\angle A=45°$，求 $\angle B$，b，c.

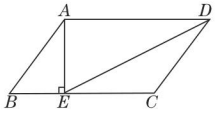
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.（8 分）如图，在△ ABC 中，$\sin B=\frac{4}{5}$，点 F 在 BC 上，$AB=AF=5$，过点 F 作 $EF\perp CB$ 交 AC 于点 E，且 $AE:EC=3:5$，求 BF 的长与 $\sin C$ 的值.



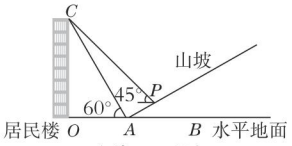
（第 19 题）

20.（8 分）如图，在▱ $ABCD$ 中，$AE\perp BC$，垂足为 E. 如果 $AB=5$，$BC=8$，$\sin B=\frac{4}{5}$，求 $\tan\angle CDE$ 的值.



（第 20 题）

21.（10 分）如图，一居民楼 OC 临近山坡 AP，山坡 AP 的坡度为 $i=1:\sqrt{3}$，小亮在山坡坡脚 A 处测得楼顶 C 的仰角为 60°，当从 A 处沿坡面行走 10 米到达 P 处时，测得楼顶 C 的仰角刚好为 45°，点 O，A，B 在同一直线上，求该居民楼的高度.（结果保留整数，$\sqrt{3}\approx 1.73$）

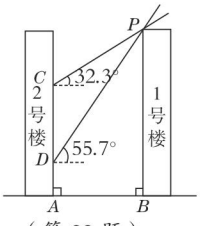


（第 21 题）

22.（10 分）如图，1 号楼在 2 号楼的南侧，两楼高度均为 90 m，楼间距为 AB，冬至日正午，太阳光线与水平面所成的角为 32.3°，1 号楼在 2 号楼墙面上的阴影高为 CA；春分日正午，太阳光线与水平面所成的角为 55.7°，1 号楼在 2 号楼墙面上的阴影高为 DA. 已知 $CD=42$ m.

（1）求楼间距 AB；

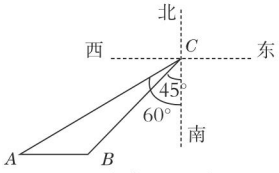
（2）若 2 号楼共 30 层，层高均为 3 m，则点 C 位于第几层？（参考数据：$\sin 32.3°\approx 0.53$，$\cos 32.3°\approx 0.85$，$\tan 32.3°\approx 0.63$，$\sin 55.7°\approx 0.83$，$\cos 55.7°\approx 0.56$，$\tan 55.7°\approx 1.47$）



（第 22 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.（12分）如图所示，在某海域，一艘指挥船在C处收到渔船在B处发出的求救信号，经确定，遇险抛锚的渔船所在的B处位于C处的南偏西45°方向上，且$BC=60$海里；指挥船搜索发现，在C处的南偏西60°方向上有一艘海监船A，恰好位于B处的正西方向．于是命令海监船A前往搜救，已知海监船A的航行速度为30海里/小时，问渔船在B处需要等待多长时间才能得到海监船A的救援．（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{6}\approx2.45$，结果精确到0.1小时）



（第23题）

24.（12分）阅读下列材料：

如图①，在△ABC中，∠BAC、∠B、∠C所对的边分别为a、b、c，可以得到：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC.$$

证明：如图①，过点A作$AD\perp BC$，垂足为D.

∵在Rt△ABD中，$\sin B=\frac{AD}{c}$，

∴$AD=c\sin B$.

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot AD=\frac{1}{2}ac\sin B$.

同理：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC$.

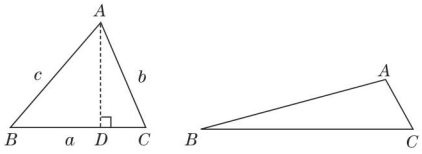
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC$.

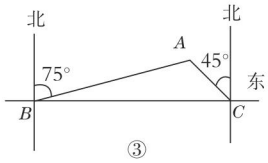
（1）通过上述材料证明：

$$\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

（2）运用（1）中的结论解决问题：

如图②，在△ABC中，∠B=15°，∠C=60°，$AB=20\sqrt{3}$，求AC的长度.





（第24题）

（3）如图③，为了开发公路旁的城市荒地，测量人员选择A、B、C三个测量点，在B点测得A在北偏东75°方向上，沿笔直公路向正东方向行驶18 km到达C点，测得A在北偏西45°方向上，根据以上信息，求A、B、C三点围成的三角形的面积.

（本题参考数值：$\sin15°\approx0.3$，$\sin120°\approx0.9$，$\sqrt{2}\approx1.4$，结果取整数）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1章 图形的相似

1.1 相似多边形

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D

3. C **点拨:** 设矩形 $ABCD$ 的长 $AD=x$,宽 $AB=y$,则 $DM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}x$. 又矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似,∴ $\frac{DM}{AB}=\frac{DC}{AD}$,即 $\frac{\frac{1}{2}x}{y}=\frac{y}{x}$,即 $y^2=\frac{1}{2}x^2$. ∴ $x:y=\sqrt{2}:1$. 故选 C.

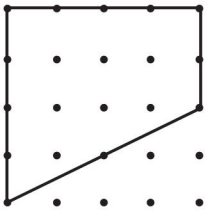
4. B

5. C **点拨:** 相似多边形对应边的比相等,20 cm长的边可能与三角形框架甲的三条边分别对应.

6. B

7. $\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EC}$

8. **解:** 所画的格点图形如图所示.



(第 8 题)

9. **解:** (1)∵ 四边形 $ABCD\backsim$四边形 $PQRS$,

∴ $\angle Q=\angle B=64°$.

(2)∵ 四边形 $ABCD\backsim$四边形 $PQRS$,

∴ $\frac{AD}{PS}=\frac{BC}{QR}$. ∴ $\frac{AD}{6}=\frac{8}{10}$. ∴ $AD=4.8$.

(3)四边形 $ABCD$ 与四边形 $PQRS$ 的相似比为 $BC:QR=8:10=4:5$.

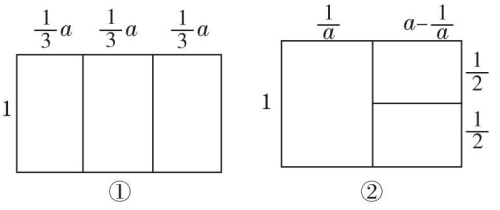
10. **解:** 原正方形与新正方形的相似比为 $1:\sqrt{2}$,周长比为 $1:\sqrt{2}$,面积比为 $1:2$.

11. **解:** 方法一:如图①,∵ 每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同,

∴ $\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{3}a}{1}$. 解得 $a=\sqrt{3}$(负值舍去).

方法二:如图②,由每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同,得 $\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{2}}{a-\frac{1}{a}}$.

∴ $a=\sqrt{2}$(负值舍去).



(第 11 题)

点拨: 本题答案不唯一,符合要求即可.

1.2 怎样判定三角形相似

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** C

4. B **点拨:** 过 P 作 AC 的垂线,作 AB 的垂线,作 BC 的垂线,所截得的小三角形均满足题意,∴ D 点的位置最多有 3 处,故选 B.

5. A **点拨:** 由四边形 $ABCD$ 是矩形,可得 $\angle BAD=90°$,又 $AB=\sqrt{3}$,$BC=\sqrt{6}$,根据勾股定理求出 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=3$,即可得 $DE=3-1.8=1.2$,根据相似三角形的性质得到比例式 $\frac{DF}{AB}=\frac{DE}{BE}$,即 $\frac{DF}{\sqrt{3}}=\frac{1.2}{1.8}$,解得 $DF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $CF=CD-DF=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\frac{CF}{CD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

6. D **点拨:** ∵ $GE/\!/BD$,∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AG}$,故 A 选项错误. ∵ $GF/\!/AC$,∴ $\frac{DF}{CF}=\frac{DG}{AG}$,故 B 选项错误. ∵ $GF/\!/AC$,∴ $\triangle DFG\backsim\triangle DCA$,∴ $\frac{FG}{CA}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{DG}{DA}$. ∵ $GE \parallel BD$, ∴ $\triangle AEG \backsim \triangle ABD$, ∴ $\frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AD}$. ∵ AG 不一定等于 DG, ∴ $\frac{FG}{AC}=\frac{EG}{BD}$ 不一定成立, 故 C 选项错误. ∵ $GE \parallel BD$, ∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{AG}{DG}$. ∵ $GF \parallel AC$, ∴ $\frac{AG}{DG}=\frac{CF}{DF}$, ∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{DF}$, ∴ D 选项正确, 故选 D.

7. C

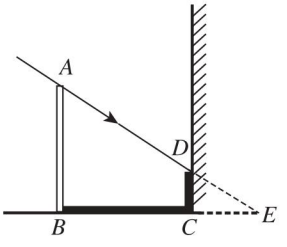
8. 3 或 $3\sqrt{2}$ **点拨:** ∵ $\angle ACB=\angle ADC=90°$, $AC=\sqrt{6}$, $AD=2$, ∴ $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2}$. 当 $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ 时, $AC:AD=AB:AC$, ∴ $\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{AB}{\sqrt{6}}$, 解得 $AB=3$. 当 $\triangle ABC \backsim \triangle CAD$ 时, $AB:AC=CA:CD$, ∴ $\frac{AB}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$, 解得 $AB=3\sqrt{2}$. ∴ $AB=3$ 或 $3\sqrt{2}$.

9. $\frac{2\,000}{3}$ **点拨:** 由题意知 $DH=100$ 步, $DK=100$ 步, $AH=15$ 步, 易知 $AH \parallel DK$, ∴ $\angle CDK=\angle A$. 又 $\angle CKD=\angle DHA=90°$, ∴ $\triangle CDK \backsim \triangle DAH$, ∴ $\frac{CK}{DH}=\frac{DK}{AH}$, 即 $\frac{CK}{100}=\frac{100}{15}$, ∴ $CK=\frac{2\,000}{3}$ 步.

10. **解:** 如图, 延长 AD 交 BC 的延长线于点 E, 若无墙阻挡, 则标杆 AB 落在地面上的影子应该是 BE.

由题意知 $AB \parallel DC$, ∴ $\triangle ABE \backsim \triangle DCE$, ∴ $\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}$, 即 $\frac{3}{1}=\frac{3+CE}{CE}$,

解得 $CE=1.5$ m, 则 $BE=BC+CE=3+1.5=4.5$(m). 故若无墙阻挡, 标杆 AB 在地面上的影子有4.5 m长.



(第 10 题)

11. **证明:** (1) ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形, ∴ $AB=AD$, $\angle BAD=90°$. ∵ $BE \perp AP$, $DF \perp AP$, ∴ $\angle BEA=\angle AFD=90°$. ∵ $\angle BAE+\angle FAD=90°$, $\angle FAD+\angle ADF=90°$, ∴ $\angle BAE=\angle ADF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中,

$$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFD,\\ \angle BAE=\angle ADF,\\ AB=DA,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle DAF$. ∴ $BE=AF$. ∴ $EF=AE-AF=AE-BE$.

(2) 由(1)知 $AF=BE$. ∵ $\frac{AF}{BF}=\frac{DF}{AD}$, ∴ $\frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AD}$. ∴ $\frac{BE}{DF}=\frac{BF}{AD}$.

令 $\frac{BE}{DF}=\frac{BF}{AD}=k$, 则 $BE=kDF$, $BF=kAD$.

在 Rt$\triangle BEF$ 和 Rt$\triangle ADF$ 中, 由勾股定理得 $EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{(kAD)^2-(kDF)^2}=kAF$.

∴ $\frac{EF}{AF}=k=\frac{BE}{DF}=\frac{BF}{AD}$.

∴ $\triangle BEF \backsim \triangle DFA$.

∴ $\angle BFE=\angle DAF$.

∵ $AD \parallel BC$, ∴ $\angle DAF=\angle BPF$.

∴ $\angle BFE=\angle BPF$.

∴ $BP=BF$.

∵ $BE \perp EP$, ∴ $EF=EP$.

12. **解:** 由题意得, $\angle ABD=\angle CDE=90°$, $\angle ADB=\angle CED$,

∴ $\triangle CDE \backsim \triangle ABD$. ∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BD}$.

∵ $\angle F=\angle F$, $\angle ABF=\angle CDF=90°$, ∴ $\triangle CDF \backsim \triangle ABF$.

∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{DF}{BF}$. ∴ $\frac{DE}{BD}=\frac{DF}{BF}$,

即 $\frac{2.4}{BD}=\frac{2.5}{BD+2.5}$. ∴ $BD=60$ 米.

∴ $\frac{1.72}{AB}=\frac{2.4}{60}$. ∴ $AB=43$ 米.

答: 小雁塔的高度 AB 是 43 米.

13. (1) **证明:** 由四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$,

易得 $\angle C=\angle B=60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \angle APC = \angle B + \angle BAP$,

$\therefore \angle APE + \angle CPE = \angle B + \angle BAP$.

又$\because \angle APE = \angle B$,$\therefore \angle BAP = \angle CPE$.

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle PEC$.

(2)**解:**如图,过点 A 作 $AF // CD$,交 BC 于 F.

$\because AD // BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 为平行四边形.

$\therefore CF = AD = 3$,$AF = DC$.

又$\because AB = DC$,

$\therefore AB = AF$.

又 $\angle B = 60°$,

$\therefore \triangle ABF$ 为等边三角形.

$\therefore AB = BF = 7 - 3 = 4$.

$\because \triangle APB \backsim \triangle PEC$,$\therefore \dfrac{BP}{CE} = \dfrac{AB}{PC}$.

设 $BP = x$,则 $PC = 7 - x$. 又 $CE = 3$, $AB = 4$,

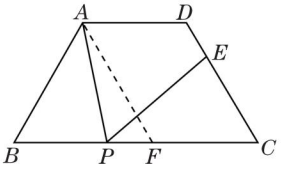
$\therefore \dfrac{x}{3} = \dfrac{4}{7 - x}$,

整理,得 $x^2 - 7x + 12 = 0$,

解得 $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

经检验,$x_1 = 3$,$x_2 = 4$ 均是所列方程的根,

$\therefore BP$ 的长为 3 或 4.



(第 13 题)

14. **解:**(1)存在. 设 $BP = x$,

则 $DP = 10 - x$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$,则 $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{CD}{DP}$,

即 $\dfrac{9}{x} = \dfrac{4}{10 - x}$,解得 $x = \dfrac{90}{13}$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle PDC$,则 $\dfrac{AB}{PD} = \dfrac{BP}{DC}$,

即 $\dfrac{9}{10 - x} = \dfrac{x}{4}$,

整理,得 $x^2 - 10x + 36 = 0$,方程无解.

所以存在满足题意的点 P,且 $BP = \dfrac{90}{13}$.

(2)设 $BP = x$,则 $DP = 12 - x$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$,则 $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{CD}{DP}$,

即 $\dfrac{9}{x} = \dfrac{4}{12 - x}$,解得 $x = \dfrac{108}{13}$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle PDC$,则 $\dfrac{AB}{PD} = \dfrac{BP}{CD}$,

即 $\dfrac{9}{12 - x} = \dfrac{x}{4}$,

整理,得 $x^2 - 12x + 36 = 0$.

解得 $x_1 = x_2 = 6$.

所以存在两个满足题意的点 P,且 $BP = 6$ 或 $\dfrac{108}{13}$.

(3)设 $BP = x$,则 $DP = 15 - x$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$,则 $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{CD}{DP}$,

即 $\dfrac{9}{x} = \dfrac{4}{15 - x}$,解得 $x = \dfrac{135}{13}$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle PDC$,则 $\dfrac{AB}{PD} = \dfrac{BP}{DC}$,

即 $\dfrac{9}{15 - x} = \dfrac{x}{4}$,

整理,得 $x^2 - 15x + 36 = 0$.

解得 $x_1 = 3$,$x_2 = 12$.

所以存在三个满足题意的点 P,且 $BP = \dfrac{135}{13}$ 或 3 或 12.

(4)设 $BP = x$,则 $DP = l - x$,

若 $\triangle ABP \backsim \triangle CDP$,则 $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{CD}{DP}$,

即 $\dfrac{m}{x} = \dfrac{n}{l - x}$,解得 $x = \dfrac{ml}{m + n}$.

若 $\triangle ABP \backsim \triangle PDC$,则 $\dfrac{AB}{PD} = \dfrac{BP}{DC}$,

即 $\dfrac{m}{l - x} = \dfrac{x}{n}$.

整理,得 $x^2 - lx + mn = 0$,$\Delta = l^2 - 4mn$.

当 $\Delta = l^2 - 4mn < 0$ 时,存在使以 P,A,B 三点为顶点的三角形与以 P,C,D 三点为顶点的三角形相似的一个点 P;

当 $\Delta = l^2 - 4mn = 0$ 时,存在使以 P,A,B 三点为顶点的三角形与以 P,C,D 三点为顶点的三角形相似的两个点 P;

当 $\Delta = l^2 - 4mn > 0$ 时,存在使以 P,A,B 三点为顶点的三角形与以 P,C,D 三点为顶点的三角形相似的三个点 P.

1.3 相似三角形的性质

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C

4. D **点拨:**由题图知 $\triangle DEF$ 的边 DF 上的高与 $\triangle BFE$ 的边 BF 上的高相等,设这个高

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为 h.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $CD=AB$, $CD\parallel AB$.

∵ $DE:EC=2:3$, ∴ $DE:AB=2:5$.

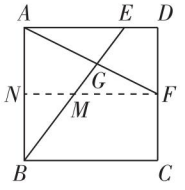
∵ $CD\parallel AB$, ∴ $\triangle DEF\backsim\triangle BAF$.

∴ $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BAF}}=\left(\dfrac{DE}{BA}\right)^2=\dfrac{4}{25}$, $\dfrac{DE}{BA}=\dfrac{DF}{BF}=\dfrac{2}{5}$.

∴ $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle EBF}}=\dfrac{\frac{1}{2}DF\cdot h}{\frac{1}{2}BF\cdot h}=\dfrac{DF}{BF}=\dfrac{2}{5}$.

∴ $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle EBF}:S_{\triangle BAF}=4:10:25$.

5. C **点拨:** 如图,作 $FN\parallel AD$,交 AB 于 N,交 BE 于 M.



(第 5 题)

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形, ∴ $AB=AD$.

∵ $FN\parallel AD$,

∴ 四边形 $ANFD$ 是平行四边形.

∴ $AD=FN$, $DF=AN$.

设 $DE=a$, 则 $AE=3a$, $AD=AB=CD=FN=4a$, $AN=DF=2a$.

∴ $BN=AB-AN=2a$.

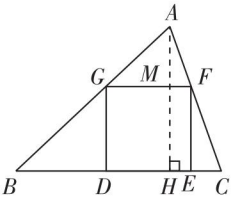
∴ $BN=AN$.

∵ $MN\parallel AE$,

∴ $\dfrac{MN}{AE}=\dfrac{BN}{AB}=\dfrac{1}{2}$. ∴ $MN=\dfrac{3}{2}a$. ∴ $FM=\dfrac{5}{2}a$.

∵ $AE\parallel FM$, ∴ $\dfrac{AG}{GF}=\dfrac{AE}{FM}=\dfrac{3a}{\frac{5}{2}a}=\dfrac{6}{5}$.

6. $\dfrac{12}{7}$ **点拨:** 作 $AH\perp BC$ 于 H,交 GF 于 M,如图.



(第 6 题)

∵ $\triangle ABC$ 的面积是 6, ∴ $\dfrac{1}{2}BC\cdot AH=6$.

∴ $AH=\dfrac{2\times6}{4}=3$.

设正方形 $DEFG$ 的边长为 x, 则 $GF=x$.

∴ $MH=x$, $AM=3-x$.

∵ $GF\parallel BC$,

∴ $\triangle AGF\backsim\triangle ABC$.

∴ $\dfrac{GF}{BC}=\dfrac{AM}{AH}$, 即 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{3-x}{3}$, 解得 $x=\dfrac{12}{7}$,

即正方形 $DEFG$ 的边长为 $\dfrac{12}{7}$.

7. (1) **证明:** ∵ CF 平分 $\angle ACB$, ∴ $\angle1=\angle2$.

又∵ $DC=AC$,

∴ CF 是 $\triangle ACD$ 的中线.

∴ 点 F 是 AD 的中点.

又∵ 点 E 是 AB 的中点,

∴ EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线.

∴ $EF\parallel BD$, 即 $EF\parallel BC$.

(2) **解:** 由(1)知 $EF\parallel BD$,

∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABD$. ∴ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABD}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2$.

又∵ $AE=\dfrac{1}{2}AB$, $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABD}-S_{四边形BDFE}=S_{\triangle ABD}-6$, ∴ $\dfrac{S_{\triangle ABD}-6}{S_{\triangle ABD}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

∴ $S_{\triangle ABD}=8$.

8. (1) **证明:** (方法一)

∵ 四边形 $EFGH$ 为矩形,

∴ $EF\parallel GH$. ∴ $\triangle AHG\backsim\triangle ABC$.

又∵ $AD\perp BC$, ∴ $AM\perp HG$. ∴ $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{HG}{BC}$.

(方法二)∵ 四边形 $EFGH$ 为矩形,

∴ $EF\parallel GH$.

∴ $\triangle AHG\backsim\triangle ABC$, $\triangle AHM\backsim\triangle ABD$.

∴ $\dfrac{HG}{BC}=\dfrac{AH}{AB}$, $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AH}{AB}$. ∴ $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{HG}{BC}$.

(2) **解:** 由题意知 $HG=2HE$, 设 $HE=x$ cm, 则 $HG=2x$ cm. ∵ $AD\perp BC$,

∴ 四边形 $HEDM$ 是矩形.

∴ $DM=HE$.

∴ $AM=AD-DM=AD-HE=(30-x)$ cm.

由(1)得 $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{HG}{BC}$,

∴ $\dfrac{30-x}{30}=\dfrac{2x}{40}$, 解得 $x=12$.

∴ $2x=2\times12=24$.

∴ 矩形 $EFGH$ 的周长为 $2\times(12+24)=72$(cm).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.4 图形的位似

【两年模拟兵法】

1. B **2.** A

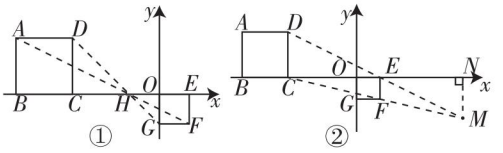
3. B **点拨:** ∵ 在正方形 $ABCD$ 中,$AC=3\sqrt{2}$,
∴ $BC=AB=3$. 延长 $A'B'$ 交 BC 于点 E.
∵ 点 A' 的坐标为(1,2),
∴ $OE=1$,$EC=A'E=3-1=2$.
∴ 正方形 $A'B'C'D'$ 的边长为 1.
∴ 正方形 $A'B'C'D'$ 与正方形 $ABCD$ 的相似比是 $\frac{1}{3}$. 故选 B.

4. B **5.** A

6. 11 **点拨:** ∵ $\triangle OAB$ 是等边三角形,边长为 8,∴ 点 A 的坐标为(8,0). 由位似变换的性质可知,点 A_1 的坐标为 $(8\times\frac{1}{2},0)$,即(4,0),点 A_2 的坐标为 $(8\times\frac{1}{2^2},0)$,即(2,0),点 A_3 的坐标为 $(8\times\frac{1}{2^3},0)$,即(1,0),…,点 A_n 的坐标为 $(8\times\frac{1}{2^n},0)$,即 $(\frac{1}{2^{n-3}},0)$. 令 $\frac{1}{2^{n-3}}=\frac{1}{2^8}$,解得 $n=11$.

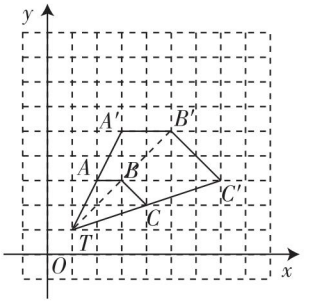
7. $(-2,-\frac{3}{2})$或$(2,\frac{3}{2})$ **点拨:** ∵ $A(2,2)$,$C(6,4)$,∴ 点 P 的坐标为(4,3). 当两个图形位于位似中心同侧时,线段 AC 的中点 P 变换后的对应点的坐标为 $(2,\frac{3}{2})$;异侧时,对应点的坐标为 $(-2,-\frac{3}{2})$.

8. (−1,0)或(5,−2) **点拨:** 当位似中心在两正方形之间时,连接 AF、DG,交于 H,则点 H 为其位似中心,且 H 在 x 轴上,如图①,∵ 点 D 的纵坐标为 2,点 F 的纵坐标的绝对值为 1,∴ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $OEFG$ 的相似比为 2∶1,∴ $CH=2HO$,
即 $OH=\frac{1}{3}OC$. 又易知 $OC=3$,
∴ $OH=1$,∴ $H(-1,0)$. 当位似中心在正方形 $OEFG$ 的右侧时,如图②,连接 DE 并延长,连接 CF 并延长,两延长线交于 M,则点 M 为其位似中心,过 M 作 $MN\perp x$ 轴,同理可得正方形 $ABCD$ 与正方形 $OEFG$ 的相似比为 2∶1,∴ $EF=\frac{1}{2}DC$. 易知 EF 为 $\triangle MDC$ 的中位线,
∴ $ME=DE$.
又 $\angle DEC=\angle MEN$,$\angle DCE=\angle MNE=90°$,
∴ $\triangle DCE\cong\triangle MNE$.
∴ $CE=EN=OC+OE=3+1=4$,
$MN=DC=2$.
∴ $ON=OE+EN=5$. ∴ $M(5,-2)$.
综上,位似中心的坐标为(−1,0)或(5,−2).



(第 8 题)

9. **解:** (1)如图,四边形 $TA'B'C'$ 即为所求.
(2)(3,5);(5,5);(7,3)
(3)$(2a-1,2b-1)$



(第 9 题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **证明:** ∵ $AD=CD$,$DF\perp AC$,
∴ $AF=CF$,$\angle DAF=\angle DCF$,$\angle DFA=\angle DFC=90°$.
又∵ $\angle DAB=\angle DAF+\angle CAB=90°$,$\angle CAB+\angle ABC=90°$,∴ $\angle DCF=\angle DAF=\angle ABC$.
在$\triangle DCF$和$\triangle ABC$中,∵ $\angle DFC=\angle ACB=90°$,$\angle DCF=\angle ABC$,∴ $\triangle DCF\backsim\triangle ABC$.
∴ $\frac{DC}{AB}=\frac{CF}{BC}$. ∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{AF}{CB}$.
∴ $AB\cdot AF=CB\cdot CD$.

2. (1) **证明:** ∵ $DE/\!/BC$,$EF/\!/AB$,
∴ 四边形 $DEFB$ 为平行四边形.
∴ $DE=BF$.
∵ $DE/\!/BC$,∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.
∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{BF}{BC}$.

(2)解:$\because AD:DB=3:5$,

$\therefore BD:AB=5:8$.

$\because DE/\!/BC$,$\therefore CE:AC=BD:AB=5:8$.

$\because EF/\!/AB$,$\therefore CF:CB=CE:AC=5:8$.

3. 证明:$\because DE/\!/BC$,

$\therefore \triangle PDE\backsim\triangle PBC$.

$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}$.

$\therefore PD\cdot PC=PE\cdot PB$.

$\because DF/\!/AC$,$\therefore \triangle PDF\backsim\triangle PAC$.

$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{PD}{PA}$. $\therefore PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

$\therefore PE\cdot PB=PF\cdot PA$. $\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$.

4. 解:OC^2 与 $OA\cdot OE$ 相等. 理由如下:

$\because AD/\!/BC$,$\therefore \triangle COB\backsim\triangle AOD$.

$\therefore \frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$.

同理$\triangle OBE\backsim\triangle ODC$.

$\therefore \frac{OE}{OC}=\frac{OB}{OD}$.

$\therefore \frac{OC}{OA}=\frac{OE}{OC}$,即 $OC^2=OA\cdot OE$.

5. 解:设 AD 与 PN 相交于点 E,

$\because$ 四边形 $PQMN$ 为矩形,

$\therefore PN/\!/BC$,$PQ=DE$.

$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$. $\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$.

设 $PQ=x$,则 $ED=x$,$AE=AD-DE=8-x$.

当 $PN=2PQ$ 时,$PN=2x$,则 $\frac{2x}{12}=\frac{8-x}{8}$,解得 $x=\frac{24}{7}$,所以 $2x=\frac{48}{7}$,此时矩形的长、宽分别为 $\frac{48}{7}$ cm,$\frac{24}{7}$ cm;

当 $PN=\frac{1}{2}PQ$ 时,$PN=\frac{1}{2}x$,则 $\frac{\frac{1}{2}x}{12}=\frac{8-x}{8}$,解得 $x=6$,所以 $\frac{1}{2}x=3$,此时矩形的长、宽分别为 6 cm,3 cm.

综上:矩形的长、宽分别为 $\frac{48}{7}$cm,$\frac{24}{7}$cm 或 6cm,3cm.

6. 解:过点 E 作 $EH\perp AB$ 于点 H,交 CD 于点 G. $\because CD\perp FB$,$AB\perp FB$,$\therefore CD/\!/AB$.

$\therefore \triangle CGE\backsim\triangle AHE$.

$\therefore \frac{CG}{AH}=\frac{EG}{EH}$,即 $\frac{CD-DG}{AH}=\frac{EG}{EG+GH}$.

又易知 $DG=EF=1.6$ m,$EG=DF=2$ m,$GH=BD=15$ m,

$\therefore \frac{3-1.6}{AH}=\frac{2}{2+15}$.

$\therefore AH=11.9$ m.

$\therefore AB=AH+HB=AH+EF=11.9+1.6=13.5$(m).

【第 1 章测试卷】

一、1. B **2.** D **3.** C **4.** C **5.** A **6.** B **7.** A **8.** C **9.** B **10.** C

二、11. $\angle D=\angle B$ 点拨:答案不唯一.

12. 16 cm **13.** 3 **14.** 8 **15.** 1∶9 **16.** 7.5m

三、17. 证明:$\because AD=DB$,

$\therefore \angle B=\angle BAD$.

$\because \angle BDA=\angle 1+\angle C=\angle 2+\angle ADE$,

$\angle 1=\angle 2$,$\therefore \angle C=\angle ADE$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle EAD$.

18. 解:由已知得 $MN=AB$,

$MD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=4$.

$\because$ 矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似,

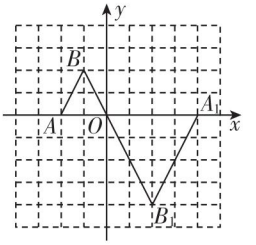
$\therefore \frac{DM}{AB}=\frac{MN}{BC}$.

$\therefore \frac{\frac{1}{2}AD}{AB}=\frac{AB}{AD}$.

$\therefore \frac{1}{2}AD^2=AB^2$. $\because AD=8$,$\therefore AB=4\sqrt{2}$.

$\therefore$ 矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 的相似比为 $\frac{DM}{AB}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. 解:(1)如图.



(第 19 题)

(2)$A_1(4,0)$,$B_1(2,-4)$.

20. 证明:(1)$\because \angle BAE=\angle DAC$,

$\therefore \angle BAE-\angle CAE=\angle DAC-\angle CAE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAC = \angle EAD.$

$\because \angle ACB = \angle ADE,$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AED.$

(2)$\because \triangle ABC \backsim \triangle AED, \therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}.$

又$\because \angle BAE = \angle CAD,$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACD.$

$\therefore \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$,即 $BE \cdot AC = CD \cdot AB.$

21. 证明:$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CBE. \therefore \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BD}{BE}.$

$\because \angle 1 = \angle 2,$

$\therefore \angle 1 + \angle DBC = \angle 2 + \angle DBC.$

$\therefore \angle ABC = \angle DBE. \therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBE.$

$\therefore \angle ACB = \angle DEB.$

22. 证明:(1)$\because BA \cdot BD = BC \cdot BE,$

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{EB}{BD}.$

又$\because \angle B = \angle B, \therefore \triangle ABC \backsim \triangle EBD.$

$\therefore \dfrac{AB}{EB} = \dfrac{AC}{ED}.$

$\therefore DE \cdot AB = AC \cdot BE.$

(2)$\because AC^2 = AD \cdot AB, \therefore \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AC}.$

$\because \angle DAC = \angle CAB, \therefore \triangle ADC \backsim \triangle ACB.$

$\therefore \angle ACD = \angle B.$

$\because BA \cdot BD = BC \cdot BE, \therefore \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BE}{BD}.$

又$\because \angle B = \angle B,$

$\therefore \triangle BAE \backsim \triangle BCD. \therefore \angle BAE = \angle BCD.$

$\because \angle AEC = \angle B + \angle BAE,$

$\angle ACE = \angle ACD + \angle BCD,$

$\therefore \angle AEC = \angle ACE. \therefore AE = AC.$

23. 解:由对称性可知 $AM = BN,$

则 $AM = NB = x$ 米.

$\because MF /\!/ BC, \therefore \triangle AMF \backsim \triangle ABC.$

$\therefore \dfrac{FM}{BC} = \dfrac{AM}{AB}.$

$\therefore \dfrac{1.6}{9.6} = \dfrac{x}{2x + 12}. \therefore x = 3.$

经检验 $x = 3$ 是原方程的根,并且符合题意.

$\therefore AB = 2x + 12 = 2 \times 3 + 12 = 18$(米).

答:两根灯柱之间的距离为 18 米.

24. 解:(1)(答案不唯一)$\triangle ACG \backsim \triangle FAG,$ $\triangle FAG \backsim \triangle FBA.$

证明:$\because \angle GAF = \angle C = 45°, \angle AGF = \angle CGA,$

$\therefore \triangle ACG \backsim \triangle FAG.$

(2)$\because \angle CAG = \angle CAF + 45°,$

$\angle BFA = \angle CAF + 45°,$

$\therefore \angle CAG = \angle BFA.$

$\because \angle B = \angle C = 45°,$

$\therefore \triangle ACG \backsim \triangle FBA.$

$\therefore \dfrac{CG}{BA} = \dfrac{CA}{FB}.$

由题意可得 $CA = BA = \sqrt{2}.$

$\therefore \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{a}.$

$\therefore b = \dfrac{2}{a}.$

自变量 a 的取值范围为 $1 < a < 2.$

(3)由 $BG = CF$ 可得 $BF = CG$,即 $a = b.$

$\because b = \dfrac{2}{a},$

$\therefore a = b = \sqrt{2}.$

$\because OB = OC = \dfrac{1}{2}BC = 1,$

$\therefore OF = OG = \sqrt{2} - 1.$

$\therefore G(1 - \sqrt{2}, 0).$

线段 BG, FG 和 CF 之间的关系为 $BG^2 + CF^2 = FG^2.$

$\because BG = OB - OG = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} = CF,$

$FG = BC - 2BG = 2 - 2 \times (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2.$

$\therefore BG^2 + CF^2 = 2BG^2 = 2 \times (2 - \sqrt{2})^2 = 12 - 8\sqrt{2}, FG^2 = (2\sqrt{2} - 2)^2 = 12 - 8\sqrt{2}.$

$\therefore BG^2 + CF^2 = FG^2.$

第2章 解直角三角形

2.1 锐角三角比

【两年模拟兵法】

1. A **2.** A **3.** A **4.** B **5.** D

6. C **点拨:**存在两种情况:

①当 AB 为斜边,$\angle C = 90°$时,

$\because AC = 8, BC = 6,$

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$

$\therefore \cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5};$

②当 AC 为斜边,$\angle B = 90°$时,

由勾股定理得:$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{2\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

综上所述,$\cos A$ 的值等于$\frac{4}{5}$或$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **8.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **9.** $\frac{3}{5}$

10. $\frac{48}{25}$ **点拨:**在 Rt△ABC 中,

$\because \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$,

$\therefore BC=\frac{3}{5}\times 4=\frac{12}{5}$.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\frac{16}{5}$.

$\because \frac{1}{2}CD\cdot AB=\frac{1}{2}AC\cdot BC$,

$\therefore CD=\frac{\frac{16}{5}\times\frac{12}{5}}{4}=\frac{48}{25}$,

即斜边 AB 上的高 CD 的长为$\frac{48}{25}$.

11. 解:在 Rt△BCD 中,$\because CD=3, BD=5$,

$\therefore BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

又 $AC=AD+CD=8$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,

则 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

12. 解:设 $AE=x$,则 $BE=3x, BC=4x, AM=MD=2x, CD=4x$,

$\therefore EC=\sqrt{(3x)^2+(4x)^2}=5x$,

$EM=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$,

$CM=\sqrt{(2x)^2+(4x)^2}=2\sqrt{5}x$.

$\therefore EM^2+CM^2=CE^2$.

$\therefore$ △CEM 是直角三角形,且$\angle CME=90°$.

$\therefore \sin\angle ECM=\frac{EM}{CE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2.2 30°,45°,60°角的三角比

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C **4.** C **5.** D **6.** A **7.** $\frac{3}{2}$ **8.** 20 **9.** 75° **10.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **11.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

12. 解:(1)原式$=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=1+6-\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}$;

(2)原式$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}+1+1\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

13. 解:$\because CD\perp AB$ 于 D,$\angle B=30°$,

$\therefore \angle BCD=90°-30°=60°$,

$\therefore \tan B+\tan\angle BCD=\tan 30°+\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

14. 解:$\because \sin(\beta+15°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \beta+15°=60°$,$\therefore \beta=45°$.

$\therefore \sqrt{8}-4\cos\beta-\tan 45°+\tan^2 30°=2\sqrt{2}-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=-\frac{2}{3}$.

2.3 用计算器求锐角三角比

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D **3.** C **4.** 65.6° **5.** 8.16

6. 解:(1)$\because \sqrt{13}-\sqrt{11}\approx 0.2889$,$\sqrt{15}-\sqrt{13}\approx 0.2674$,

$\therefore \sqrt{13}-\sqrt{11}>\sqrt{15}-\sqrt{13}$.

(2)$\sin 40°\cdot\cos 40°-\tan 50°\approx 0.64\times 0.77-1.19\approx -0.7$.

7. 解:(1)$\because 2\sin 30°\cdot\cos 30°=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $2\sin 22.5°\cdot\cos 22.5°\approx 2\times 0.38\times 0.92\approx 0.7$,$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.7$,

$\therefore 2\sin 30°\cdot\cos 30°=\sin 60°$,

$2\sin 22.5°\cdot\cos 22.5°=\sin 45°$;

(2)由(1)可知,一个角正弦与余弦积的 2 倍,等于该角 2 倍的正弦值;

(3)(所选角度不唯一)$2\sin 15°\cdot\cos 15°\approx 2\times 0.26\times 0.97\approx\frac{1}{2}$,$\sin 30°=\frac{1}{2}$,故结论

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

成立；

(4)$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin2\alpha$.

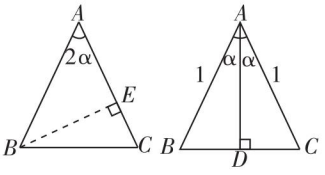
8. 解：(1)①= ②= ③= ④= ⑤= =

(2)证明如下：如图，过点 B 作 $BE\perp AC$，垂足为 E，

易知 $BE=AB\sin2\alpha$，$BC=2AB\sin\alpha$，

$AD=AC\cos\alpha$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\sin2\alpha\cdot AC$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2AB\sin\alpha\cdot AC\cos\alpha$，$\therefore \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.



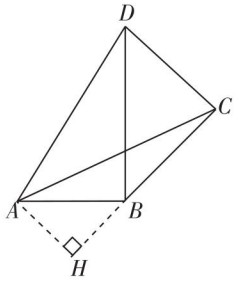
(第 8 题)

2.4 解直角三角形

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** A **4.** A **5.** C

6. C 点拨：如图，作 $AH\perp CB$ 交 CB 的延长线于 H.



(第 6 题)

$\because \angle ABD=90°$，$\angle DBC=45°$，

$\therefore \angle ABH=45°$.

$\because \angle AHB=90°$，

$\therefore \triangle ABH$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AH=BH$.

设 $AH=BH=a$，则 $AB=\sqrt{2}a$，$BD=\sqrt{6}a$，$BC=CD=\sqrt{3}a$，$CH=a+\sqrt{3}a$.

$\because \angle AHB=\angle DCB=90°$，

$\therefore AH/\!/DC$.

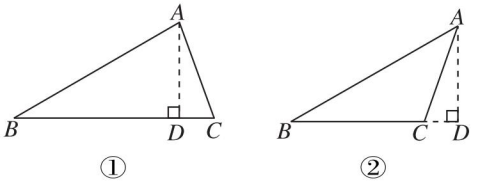
$\therefore \angle ACD=\angle CAH$，

$\therefore \tan\angle ACD=\tan\angle CAH=\frac{CH}{AH}=\sqrt{3}+1$.

7. 4

8. $15\sqrt{3}$或$10\sqrt{3}$ 点拨：作 $AD\perp BC$ 交 BC(或 BC 延长线)于点 D.

如图①，当 AB，AC 位于 AD 异侧时，



(第 8 题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because \angle B=30°$，$AB=10$，

$\therefore AD=AB\cdot\sin B=5$，$BD=AB\cdot\cos B=5\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\because AC=2\sqrt{7}$，

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-5^2}=\sqrt{3}$，

则 $BC=BD+CD=6\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times5=15\sqrt{3}$.

如图②，当 AB，AC 在 AD 的同侧时，

由①知，$BD=5\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{3}$，

则 $BC=BD-CD=4\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times5=10\sqrt{3}$.

综上，$\triangle ABC$ 的面积是 $15\sqrt{3}$或 $10\sqrt{3}$.

9. $\frac{1}{5}$ 点拨：延长 AD，过点 C 作 $CE\perp AD$，垂足为 E，

$\because \tan B=\frac{5}{3}$，即$\frac{AD}{AB}=\frac{5}{3}$，

$\therefore$ 设 $AD=5x$，则 $AB=3x$.

$\because \angle CDE=\angle BDA$，$\angle CED=\angle BAD$，

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle BDA$.

$\therefore \frac{CE}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{2}$.

$\therefore CE=\frac{3}{2}x$，$DE=\frac{5}{2}x$.

$\therefore AE=\frac{15}{2}x$.

$\therefore \tan\angle CAD=\frac{EC}{AE}=\frac{1}{5}$.

10. 解：$\because AD\perp BC$，$\therefore \angle ADB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\tan\angle BAD=\frac{BD}{AD}=\frac{3}{4}$，

$\therefore BD=AD\cdot\tan\angle BAD=9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

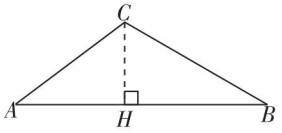
$\because BC=14$,

$\therefore CD=BC-BD=5$.

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=13$.

$\therefore \sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{12}{13}$.

11. 解:如图,作 $CH\perp AB$ 于 H.



(第 11 题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCH$ 中,$\because BC=12$,$\angle B=30°$,

$\therefore CH=\frac{1}{2}BC=6$.

$BH=\sqrt{BC^2-CH^2}=6\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中,$\tan A=\frac{3}{4}=\frac{CH}{AH}$,

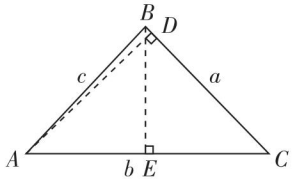
$\therefore AH=8$.

$\therefore AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=10$,

$AB=AH+BH=8+6\sqrt{3}$.

12. 解:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,探究如下:

如图,作 $AD\perp BC$,$BE\perp AC$,垂足分别为 D,E.



(第 12 题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$\sin B=\frac{AD}{c}$,即 $AD=c\sin B$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$\sin C=\frac{AD}{b}$,即 $AD=b\sin C$,

$\therefore c\sin B=b\sin C$,即 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

同理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

则 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

2.5 解直角三角形的应用

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** A

4. C **点拨:**过点 A 作 $AM\perp DC$ 于点 M,过点 B 作 $BN\perp DC$ 于点 N.

则 $AB=MN$,$AM=BN$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 中,

$\because \angle ACM=45°$,$AM=50\mathrm{m}$,

$\therefore CM=AM=50\mathrm{m}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCN$ 中,$\angle BCN=\angle ACB+\angle ACD=60°$,$BN=50\mathrm{m}$,

$\therefore CN=\frac{BN}{\tan 60°}=\frac{50}{\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{3}(\mathrm{m})$,

$\therefore MN=CM-CN=(50-\frac{50\sqrt{3}}{3})\mathrm{m}$.

则 $AB=MN=(50-\frac{50\sqrt{3}}{3})\mathrm{m}$.

5. 100

6. $\frac{18+6\sqrt{3}}{5}$ **点拨:**如图,过点 P 作 $PQ\perp AB$ 交 AB 延长线于点 Q,过点 M 作 $MN\perp AB$ 交 AB 延长线于点 N.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AQP$ 中,$\angle PAQ=45°$,则 $AQ=PQ=60\times 1.5+BQ=90+BQ$,所以 $BQ=PQ-90$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPQ$ 中,$\angle BPQ=30°$,

则 $BQ=PQ\cdot\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}PQ$,

所以 $PQ-90=\frac{\sqrt{3}}{3}PQ$,

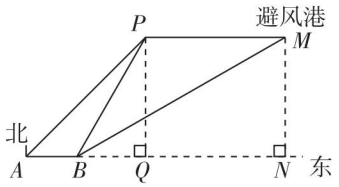
所以 $PQ=45(3+\sqrt{3})$ 海里,

所以 $MN=PQ=45(3+\sqrt{3})$ 海里.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BMN$ 中,$\angle MBN=30°$,

所以 $BM=2MN=90(3+\sqrt{3})$ 海里,

所以 $\frac{90(3+\sqrt{3})}{75}=\frac{18+6\sqrt{3}}{5}$(小时).



(第 6 题)

7. 42 **点拨:**延长 AB 交 DC 于 H,作 $EG\perp AB$ 于 G,如图所示,则 $GH=DE=15$ 米,$EG=DH$.

$\because$ 梯坎坡度 $i=1:2.4$,

$\therefore BH:CH=1:2.4$,

设 $BH=x$ 米,则 $CH=2.4x$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCH$ 中,$BC=13$ 米,

由勾股定理得 $x^2+(2.4x)^2=13^2$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得 $x=5$（负值舍去），∴ $BH=5$ 米，$CH=12$ 米，

∴ $BG=GH-BH=15-5=10$（米），

$EG=DH=CH+CD=12+20=32$（米）.

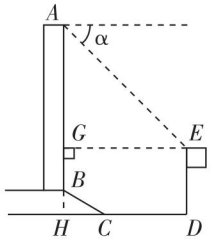
∵ $\angle\alpha=45°$，

∴ $\angle EAG=90°-45°=45°$，

∴ $\triangle AEG$ 是等腰直角三角形，

∴ $AG=EG=32$ 米，

∴ $AB=AG+BG=32+10=42$（米）.



（第 7 题）

8. 解：根据题意，$BC=142$ 米，$\angle PBC=22°$，$\angle PAC=17.9°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中，$\tan\angle PBC=\dfrac{PC}{BC}$，

∴ $PC=BC\cdot\tan\angle PBC=142\cdot\tan22°$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中，$\tan\angle PAC=\dfrac{PC}{AC}$，

∴ $AC=\dfrac{PC}{\tan\angle PAC}=\dfrac{142\cdot\tan22°}{\tan17.9°}\approx\dfrac{142\times0.40}{0.32}=177.5$（米），

∴ $AB=AC-BC\approx177.5-142\approx36$（米）.

答：运河两岸上的 A、B 两点的距离约为 36 米.

9. 解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

∵ $AB=600$ m，$\alpha=75°$，

∴ $BC=AB\cdot\cos75°\approx600\times0.26=156$（m）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 中，∵ $\beta=45°$，∴ $DF=BD\cdot\sin45°=600\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx300\times1.41=423$（m）.

由题易知四边形 $BCEF$ 是矩形，

∴ $EF=BC\approx156$ m，

∴ $DE=DF+EF\approx423+156=579$（m）.

故 DE 的长约为 579 m.

点拨：本题考查解直角三角形的应用，锐角三角比、矩形的性质等知识，解题的关键是学会利用直角三角形解决问题，属于中考常考题型.

10. 解：（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，∵ $\angle ABD=45°$，

∴ $AD=BD$，∴ $2AD^2=AB^2=(4\sqrt{2})^2$，

∴ $AD=4$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，∵ $\angle ACD=30°$，

∴ $AC=2AD=8$ 米，

即新传送带 AC 的长度为 8 米.

（2）货物 $MNQP$ 不用挪走.

理由：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$BD=AD=4$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

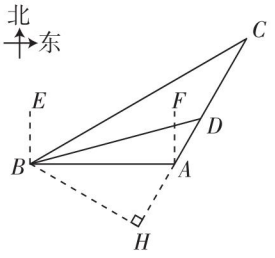
$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=4\sqrt{3}$ 米.

∴ $CB=CD-BD=4\sqrt{3}-4\approx2.8$（米）.

∵ $PC=PB-CB\approx5-2.8=2.2$（米）>2 米，

∴ 货物 $MNQP$ 不用挪走.

11. 解：（1）过点 B 作 $BH\perp CA$ 交 CA 的延长线于点 H，如图.



（第 11 题）

∵ $\angle EBC=60°$，∴ $\angle CBA=30°$.

∵ $\angle FAD=30°$，∴ $\angle BAC=120°$，

∴ $\angle BCA=180°-\angle BAC-\angle CBA=30°$，

∴ $BH=BC\cdot\sin\angle BCA=150\times\dfrac{1}{2}=75$（海里）.

答：B 点到直线 CA 的距离是 75 海里.

（2）∵ $BD=75\sqrt{2}$ 海里，$BH=75$ 海里，

∴ $DH=\sqrt{BD^2-BH^2}=75$ 海里.

∵ $\angle BAH=180°-\angle BAC=60°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，$\tan\angle BAH=\dfrac{BH}{AH}=\sqrt{3}$，

∴ $AH=25\sqrt{3}$ 海里，

∴ $AD=DH-AH=75-25\sqrt{3}\approx31.7$（海里）.

答：执法船从 A 到 D 航行了约 31.7 海里.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D. 设 $BD=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan60°=\sqrt{3}x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ACD 中,∵ $\angle C=45°$,

∴ $\angle CAD=90°-\angle C=45°$,

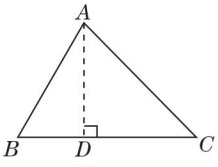
∴ $\angle C=\angle CAD$,∴ $CD=AD=\sqrt{3}x$.

∵ $BC=1+\sqrt{3}$,∴ $\sqrt{3}x+x=1+\sqrt{3}$,

解得 $x=1$,即 $BD=1$.

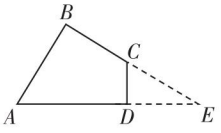
在 Rt△ABD 中,∵ $\cos B=\dfrac{BD}{AB}$,

∴ $AB=\dfrac{BD}{\cos B}=\dfrac{1}{\cos 60°}=2$.



(第 1 题)

2. **解:** 如图,延长 AD,BC 交于点 E.



(第 2 题)

∵ $\angle A=60°$,$\angle B=90°$,

∴ $\angle E=30°$.

在 Rt△ABE 中,∵ $\tan A=\dfrac{BE}{AB}$,

∴ $BE=AB\cdot\tan A=4\sqrt{3}$. 易知 $AE=2AB=8$,

∴ $DE=AE-AD=8-5=3$.

在 Rt△CDE 中,易得 $CD=\sqrt{3}$.

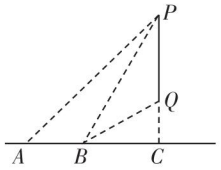
∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}$

$=\dfrac{1}{2}AB\cdot BE-\dfrac{1}{2}CD\cdot DE$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3$

$=\dfrac{13}{2}\sqrt{3}$.

3. **解:** 如图,延长 PQ 交直线 AB 于点 C,易知 $PC\perp AB$.



(第 3 题)

(1) $\angle BPQ=90°-60°=30°$.

(2) 设 $PQ=x$ m,∵ $\angle BPQ=30°$,$\angle PBQ=\angle PBC-\angle QBC=60°-30°=30°$,

∴ $\angle BPQ=\angle PBQ$,∴ $QB=QP=x$ m.

在 Rt△BCQ 中,$BC=x\cdot\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ m,

$QC=\dfrac{1}{2}x$ m.

在 Rt△ACP 中,易得 $CA=CP$,

∴ $6+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{1}{2}x+x$,

∴ $x=2\sqrt{3}+6$,∴ $PQ=2\sqrt{3}+6\approx9$(m),

即该电线杆 PQ 的高度约为 9 m.

4. **解:** 过 C 作 $CE\perp AB$ 于 E,设 $CE=x$ 米,

在 Rt△AEC 中,∵ $\angle CAE=45°$,

∴ $AE=CE=x$ 米.

在 Rt△BCE 中,∵ $\angle CBE=30°$,

∴ $BE=\sqrt{3}CE=\sqrt{3}x$ 米,

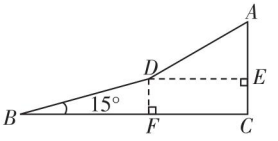
∴ $\sqrt{3}x=x+60$,

解得 $x=30\sqrt{3}+30$,

即 $CE=30\sqrt{3}+30\approx81.96$(米).

答: 河宽约为 81.96 米.

5. **解:** 如图,过 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F,$DE\perp AC$ 于点 E.



(第 5 题)

∵ 沿坡比为 1∶$\sqrt{3}$ 的坡面以 3 千米/时的速度到达山顶 A 点,

∴ $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,∴ $\angle ADE=30°$.

∵ $BD=\dfrac{10}{60}\times5=\dfrac{5}{6}$(千米),

$AD=\dfrac{5}{60}\times3=\dfrac{1}{4}$(千米),

∴ $AC=AE+EC=AE+DF=AD\cdot\sin30°+BD\cdot\sin15°\approx\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\times0.258\approx0.34$(千米).

答: 小山坡的高约为 0.34 千米.

6. **解:** 如图,作 $CH\perp AD$ 于点 H,设 $CH=x$ km.

在 Rt△ACH 中,$\angle A=37°$,∴ $\tan37°=\dfrac{CH}{AH}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AH=\dfrac{CH}{\tan 37^\circ}=\dfrac{x}{\tan 37^\circ}$ km.

在 Rt△CEH 中，

$\because \angle CEH=45^\circ$，$\therefore CH=EH=x$ km.

$\because CH\perp AD$，$BD\perp AD$，$\therefore CH/\!/BD$，

$\therefore \dfrac{AH}{HD}=\dfrac{AC}{CB}$.

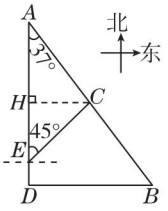
$\because AC=CB$，$\therefore AH=HD$.

$\therefore \dfrac{x}{\tan 37^\circ}=x+5$.

$\therefore x\approx 15$.

$\therefore AE=AH+HE\approx\dfrac{15}{\tan 37^\circ}+15\approx 35$(km)，

$\therefore E$ 处距离港口 A 约 35 km.



（第 6 题）

【第 2 章测试卷】

一、1. B **2.** A **3.** A **4.** D **5.** C **6.** A **7.** D **8.** B **9.** C **10.** D

二、11. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **12.** $\dfrac{1}{2}$ **13.** $3\sqrt{7}$ **14.** 5 **15.** 18

16. 24. 1

三、17. 解： 原式 $=2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-|\sqrt{3}-2|-1+4$

$=1-(2-\sqrt{3})-1+4$

$=\sqrt{3}+2$.

18. 解：（1）$\angle B=90^\circ-\angle A=30^\circ$.

$a=c\sin A=8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12$.

$b=c\cos A=8\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}$.

（2）$\angle B=90^\circ-\angle A=45^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle A$，

$\therefore b=a=3\sqrt{6}$，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{3}$.

19. 解： 过点 A 作 $AD\perp CB$，垂足为点 D，

$\because \sin B=\dfrac{4}{5}$，$\therefore \cos B=\dfrac{3}{5}$.

在 Rt△ABD 中，$BD=AB\cdot\cos B=5\times\dfrac{3}{5}=3$.

$\because AB=AF$，$AD\perp CB$，$\therefore BF=2BD=6$.

$\because EF\perp CB$，$AD\perp CB$，$\therefore EF/\!/AD$，

$\therefore \dfrac{DF}{CF}=\dfrac{AE}{EC}$.

$\because AE:EC=3:5$，$DF=BD=3$，

$\therefore CF=5$，$\therefore CD=8$.

在 Rt△ABD 中，$AD=AB\cdot\sin B=5\times\dfrac{4}{5}=4$，

在 Rt△ACD 中，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=4\sqrt{5}$，

$\therefore \sin C=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

20. 解： $\because$ 在 △ABE 中，$AE\perp BC$，$AB=5$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore BE=3$，$AE=4$.

$\therefore EC=BC-BE=8-3=5$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore CD=AB=5$. $\therefore CD=EC$.

$\therefore$ △CED 为等腰三角形.

$\therefore \angle CDE=\angle CED$.

$\because AD/\!/BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle CED$.

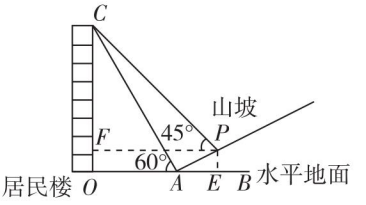
$\therefore \angle CDE=\angle ADE$.

在 Rt△ADE 中，$AE=4$，$AD=BC=8$，

$\therefore \tan\angle ADE=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \tan\angle CDE=\dfrac{1}{2}$.

21. 解： 如图，过点 P 作 $PE\perp OB$ 于点 E，$PF\perp OC$ 于点 F，



（第 21 题）

$\because i=1:\sqrt{3}$，$AP=10$ 米，

$\therefore$ 设 $PE=x$ 米，则 $AE=\sqrt{3}x$ 米.

在 Rt△AEP 中，$x^2+(\sqrt{3}x)^2=10^2$.

解得 $x=5$ 或 $x=-5$（舍去）.

$\therefore PE=5$ 米，则 $AE=5\sqrt{3}$ 米.

$\because \angle CPF=\angle PCF=45^\circ$，

$\therefore CF=PF$.

设 $CF=PF=m$ 米，则 $OC=(m+5)$ 米，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$OA=(m-5\sqrt{3})$米,

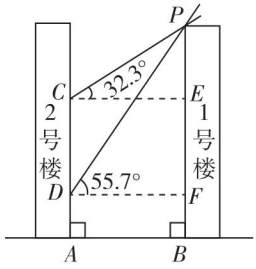
在 Rt△AOC 中,$\tan 60°=\frac{OC}{OA}=\frac{m+5}{m-5\sqrt{3}}$,

即$\frac{m+5}{m-5\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,解得 $m=10(\sqrt{3}+1)$.

$\therefore OC=10(\sqrt{3}+1)+5\approx 32$(米).

答:该居民楼的高度约为 32 米.

22. **解**:(1)如图,过点 C 作 $CE\perp PB$,垂足为 E,过点 D 作 $DF\perp PB$,垂足为 F,



(第 22 题)

则$\angle CEP=\angle PFD=90°$.

设 $AB=x$ m,在 Rt△PCE 中,

$\tan 32.3°=\frac{PE}{x}$,$\therefore PE=x\cdot\tan 32.3°$ m.

在 Rt△PDF 中,

$\tan 55.7°=\frac{PF}{x}$,

$\therefore PF=x\cdot\tan 55.7°$ m.

由 $PF-PE=EF=CD=42$ m,

可得 $x\cdot\tan 55.7°-x\cdot\tan 32.3°=42$,

解得 $x\approx 50$,

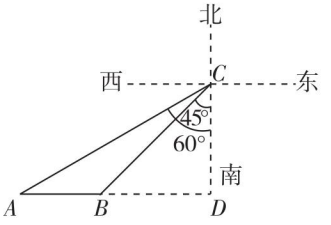
$\therefore$ 楼间距 AB 约为 50 m.

(2)由(1)可得 $PE\approx 50\cdot\tan 32.3°\approx 31.5$(m),

$\therefore CA=EB\approx 90-31.5=58.5$(m).

由 2 号楼每层高 3 m,可知点 C 位于第20 层.

23. **解**:$\because A$ 在 B 的正西方,如图,延长 AB 交南北轴线于点 D,则 $AB\perp CD$ 于点 D.



(第 23 题)

$\because\angle BCD=45°$,$BD\perp CD$,

$\therefore BD=CD$. 在 Rt△BDC 中,

$\because\cos\angle BCD=\frac{CD}{BC}$,$BC=60$ 海里,

即 $\cos 45°=\frac{CD}{60}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore CD=30\sqrt{2}$海里,

$\therefore BD=CD=30\sqrt{2}$海里.

在 Rt△ADC 中,$\because\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}$,

即 $\tan 60°=\frac{AD}{30\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,

$\therefore AD=30\sqrt{6}$海里.$\because AB=AD-BD$,

$\therefore AB=30\sqrt{6}-30\sqrt{2}=30(\sqrt{6}-\sqrt{2})$(海里).

$\because$ 海监船 A 的航行速度为 30 海里/小时,

$\therefore$ 渔船在 B 处需要等待的时间为$\frac{AB}{30}=\frac{30(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{30}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\approx 2.45-1.41=1.04$(小时)$\approx 1.0$ 小时.

24. (1)**证明**:$\because\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B$,

$\therefore b\sin C=c\sin B$,

$\therefore\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 同理得:$\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{c}{\sin C}$.

$\therefore\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(2)**解**:$\because\angle B=15°$,$\angle C=60°$,$AB=20\sqrt{3}$,

$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$,即$\frac{20\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{AC}{\sin 15°}$,

$\therefore\frac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx\frac{AC}{0.3}$,$\therefore AC\approx 40\times 0.3=12$.

(3)**解**:由题意得:$\angle ABC=90°-75°=15°$.

$\angle ACB=90°-45°=45°$,

$\angle A=180°-15°-45°=120°$.

由$\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin\angle ABC}=\frac{c}{\sin\angle ACB}$,

得$\frac{18}{\sin 120°}=\frac{AC}{\sin 15°}$,

$\therefore AC=\frac{18\sin 15°}{\sin 120°}\approx\frac{18\times 0.3}{0.9}=6$(km).

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB\approx\frac{1}{2}\times 6\times 18\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 38$(km^2).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第1章 图形的相似

1.1 相似多边形

练习

1. 解:不能. 不能. 因为它们不满足相似多边形的定义.

2. 解:对应角:$\angle A$ 与 $\angle D$,$\angle B$ 与 $\angle F$,$\angle C$ 与 $\angle E$.

对应边:AB 与 DF,AC 与 DE,BC 与 FE.

对应边之间的比例式:$\frac{AB}{DF}=\frac{BC}{FE}=\frac{AC}{DE}$.

习题 1.1

1. 解:$k_1k_2=1$.

2. 解:(1)$BC/\!/DE$. 理由如下:

因为$\triangle DEA\backsim\triangle BCA$,所以$\angle D=\angle B$,

所以 $BC/\!/DE$(内错角相等,两直线平行).

(2)因为$\triangle DEA\backsim\triangle BCA$,所以$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$.

又因为 $BC=3.6$,$ED=2.4$,$AE=5$,

所以$\frac{2.4}{3.6}=\frac{5}{AC}$,所以 $AC=7.5$.

3. 解:(1)因为四边形 $ABCD\backsim$四边形 $PQRS$,

所以$\angle B=\angle Q$,又因为$\angle B=64°$,

所以$\angle Q=64°$.

(2)因为四边形 $ABCD\backsim$四边形 $PQRS$,

所以$\frac{BC}{QR}=\frac{AD}{PS}$.

又 $BC=8$,$QR=10$,$PS=6$,

所以$\frac{8}{10}=\frac{AD}{6}$,所以 $AD=4.8$.

(3)因为四边形 $ABCD\backsim$四边形 $PQRS$,

$\frac{BC}{QR}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$,所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $PQRS$的相似比为4:5.

4. 解:相等的角:$\angle ADB=\angle BAE$,$\angle E=\angle BAD$,

成比例线段的比例式:$\frac{AB}{BD}=\frac{BE}{AB}=\frac{AE}{DA}$.

5. 解:(1)因为$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,

所以$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$.

因为$\triangle DEF$ 的最短边长为2,

所以 $EF=2$.

因为 $BC=3$,$CA=4$,$AB=6$,

所以$\frac{6}{DE}=\frac{3}{2}=\frac{4}{DF}$.

所以 $DE=4$,$DF=\frac{8}{3}$.

(2)$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的相似比为$\frac{BC}{EF}=\frac{3}{2}$.

1.2 怎样判定三角形相似

练习

1. 解:$\because l_1/\!/l_2/\!/l_3$,$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

又$\because AB=3$ cm,$BC=5$ cm,$DE=2.4$ cm,

$\therefore \frac{3}{5}=\frac{2.4}{EF}$,$\therefore EF=4$ cm.

$\therefore DF=DE+EF=2.4+4=6.4$(cm).

2. 解:题图①,对应线段的比例式是:

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$,$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{EC}$.

题图②,对应线段的比例式是:

$\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BE}$,$\frac{DA}{DE}=\frac{CA}{CB}$,$\frac{DE}{AE}=\frac{CB}{AB}$.

题图③,对应线段的比例式是:

$\frac{GE}{EF}=\frac{DB}{BC}$,$\frac{GE}{GF}=\frac{DB}{DC}$,$\frac{GF}{EF}=\frac{DC}{BC}$,$\frac{AG}{AE}=\frac{AD}{AB}=\frac{DG}{BE}$,$\frac{AG}{AF}=\frac{AD}{AC}=\frac{DG}{CF}$,$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{CF}$,$\frac{GA}{GF}=\frac{DA}{DC}$,$\frac{GF}{AF}=\frac{DC}{AC}$,$\frac{GA}{GE}=\frac{DA}{DB}$,$\frac{GE}{AE}=\frac{DB}{AB}$,$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF}$,$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{AF}$.

练习

1. 解:相似. 理由如下:

在$\triangle ABC$ 中,$\because \angle A=68°$,$\angle B=40°$,

$\therefore \angle C=72°$.

又$\because \angle A'=68°$,$\angle C'=72°$,

$\therefore \angle A=\angle A'$,$\angle C=\angle C'$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 解:(1)相似. 理由如下:$\because CD\perp AB$,

$\therefore \angle ADC=90°$,$\therefore \angle ACB=\angle ADC$.

又$\because \angle A=\angle A$,$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

(2)图中还有 $\triangle ABC\backsim\triangle CBD$,$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$. 理由如下:

①$\triangle ABC\backsim\triangle CBD$.

$\because CD\perp AB$,$\therefore \angle CDB=90°$,

$\therefore \angle ACB=\angle CDB$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle B=\angle B$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle CBD$.

②$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$. ∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle CDA=\angle BDC$. ∵ $\angle A+\angle B=90°$，$\angle DCB+\angle B=90°$，∴ $\angle A=\angle DCB$.

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

练习

1. C

2. 解：相似. 理由如下：

∵ $\frac{AB}{BD}=\frac{A'B'}{B'D'}$，$\angle B=\angle B'$，

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$.

∴ $\angle BAD=\angle B'A'D'$.

又∵ AD 平分 $\angle BAC$，$A'D'$ 平分 $\angle B'A'C'$，

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

又∵ $\angle B=\angle B'$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

练习

1. 解：题图①和题图③中的格点三角形相似.

2. 解：能画出 3 种符合要求的三角形.

练习

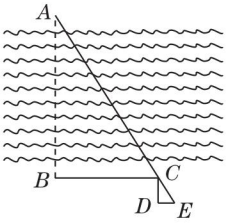
1. 解：由题意易得 $\triangle ABC\backsim\triangle EDC$.

∴ $\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{DC}$.

又∵ $BC=50$ m，$DC=10$ m，$DE=17$ m，

∴ $\frac{AB}{17}=\frac{50}{10}$，∴ $AB=85$ m.

2. 解：要测量河流两岸 A，B 两点间的距离，先从 B 处出发，沿与 AB 成 90° 角的方向前进 50 m 到 C 处，立一竹竿，然后沿与 BC 成 90° 角的方向前进 17 m 到 D 处转 90°，沿 DE 方向再到 E 处，使 A（目标），C（竹竿）与 E 在同一条直线上，量得 $DE=10$ m. 如图，由题意易得 $\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{DE}$.



（第 2 题）

又∵ $BC=50$ m，$CD=17$ m，$DE=10$ m，

∴ $\frac{AB}{17}=\frac{50}{10}$，∴ $AB=85$ m.

点拨：设计方案不唯一.

习题 1.2

1. 解：$\triangle ABC$，$\triangle DBF$ 与 $\triangle ADE$ 相似.

理由如下：①$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

∵ $DE/\!/BC$，∴ $\angle B=\angle ADE$.

又∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

②$\triangle DBF\backsim\triangle ADE$.

∵ $DF/\!/AC$，∴ $\angle BDF=\angle A$，$\angle BFD=\angle C$.

又∵ $DE/\!/BC$，∴ $\angle DEA=\angle C$.

∴ $\angle BFD=\angle DEA$. ∴ $\triangle DBF\backsim\triangle ADE$.

2. 解：（1）相似. 因为 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，

所以 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

又因为 $\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle A_2B_2C_2$，

所以 $A_1B_1=A_2B_2$，$B_1C_1=B_2C_2$，$A_1C_1=A_2C_2$.

所以 $\frac{AB}{A_2B_2}=\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{AC}{A_2C_2}$.

所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

（2）相似. 因为 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，可设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，

所以 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$，

即 $AB=kA_1B_1$，$BC=kB_1C_1$，$AC=kA_1C_1$.

又 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$，可设 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为 $\frac{1}{n}$，

所以 $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{B_1C_1}{B_2C_2}=\frac{A_1C_1}{A_2C_2}=\frac{1}{n}$，

即 $A_2B_2=nA_1B_1$，$B_2C_2=nB_1C_1$，$A_2C_2=nA_1C_1$.

则 $\frac{AB}{A_2B_2}=\frac{k}{n}$，$\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{k}{n}$，$\frac{AC}{A_2C_2}=\frac{k}{n}$.

所以 $\frac{AB}{A_2B_2}=\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{AC}{A_2C_2}=\frac{k}{n}$.

所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

3. 解：（1）$\triangle BDG$，$\triangle EAB$，$\triangle BFE$ 与 $\triangle ECG$ 相似.

（2）EB；CG；BE；GD

4. 解：$\triangle DGM\backsim\triangle DMB$，$\triangle EFM\backsim\triangle EMA$，$\triangle AFM\backsim\triangle BMG$ 等.

$\triangle AFM\backsim\triangle BMG$ 的理由如下：

∵ $\angle DMB=\angle A+\angle AFM$，$\angle DMB=\angle DME+\angle BMG$，$\angle A=\angle DME$，

∴ $\angle AFM=\angle BMG$.

又∵ $\angle A=\angle B$，∴ $\triangle AFM\backsim\triangle BMG$.

5. 解：$DE/\!/BC$. 因为 $AD=\frac{2}{3}AB$，$AE=\frac{2}{3}AC$，

所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$，即 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

又因为 $\angle A=\angle A$，所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

所以 $\angle ADE=\angle B$. 所以 $DE/\!/BC$.

6. 解：相似. 因为 $AB\cdot EF=DE\cdot BC$，

所以 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$. 又因为 $\angle B=\angle E$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

7. 解:(1)$\triangle ABC\backsim\triangle DBE$. 因为$AE=2$,$BE=3$,$DB=AE$,所以$AB=AE+BE=5$,$DB=2$.

所以$\frac{AB}{DB}=\frac{5}{2}=2.5$,又$BC=7.5$,

所以$\frac{BC}{BE}=\frac{7.5}{3}=2.5$,

即$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}$. 又$\angle B=\angle B$,

所以$\triangle ABC\backsim\triangle DBE$.

(2)由(1)知,$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}$.

又$DE=2.5$,所以$\frac{5}{2}=\frac{AC}{2.5}$,

所以$AC=6.25$.

8. 解:因为$a:a'=b:b'$,所以$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

所以当$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$\left(\text{或}\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}\right)$,即$\frac{c}{A'B'}=\frac{a}{a'}$$\left(\text{或}\frac{c}{A'B'}=\frac{b}{b'}\right)$时,$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

所以当$A'B'$为$\frac{a'c}{a}$$\left(\text{或}\frac{b'c}{b}\right)$时,$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

9. 解:设大刚举起手臂超过头顶x m,

由题意,知$\frac{1.7}{0.85}=\frac{1.7+x}{1.1}$,

解得$x=0.5$.

答:大刚举起手臂超过头顶0.5 m.

10. 解:因为$\angle A=\angle A$,所以还需要增加$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$(或$\angle ADC=\angle ACB$或$\angle ACD=\angle B$)这一条件,才能使$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

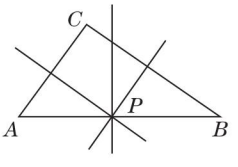
11. 解:因为$\angle BAC=\angle ADC$,$\angle C=\angle C$,

所以$\triangle ABC\backsim\triangle DAC$,所以$\frac{BC}{AC}=\frac{CA}{CD}$,

即$\frac{16}{8}=\frac{8}{CD}$,所以$CD=4$.

12. 解:满足这样条件的直线有3条.

如图,过点P分别作AB,AC,BC的垂线,截得的三角形都与$\triangle ABC$相似.



(第12题)

理由如下:因为都有一个公共的锐角和一个直角,所以根据相似三角形的判定定理1即可判定截得的三角形和$\triangle ABC$相似.

1.3 相似三角形的性质

练习

1. 1:4;1:16

2. 解:设较小的三角形的面积为$4x$ cm^2,则较大的三角形的面积为$9x$ cm^2,

由题意,得$4x+9x=78$,解得$x=6$.

则$9x=54$.

答:较大的三角形的面积为54 cm^2.

习题1.3

1. 解:它们的相似比是3:5,对应高的比是3:5.

2. 解:因为$\angle B=\angle B'$,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{5}{4}$,

所以$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,且相似比为$\frac{5}{4}$,

所以$\frac{AD}{A'D'}=\frac{5}{4}$.

又$AD=1.5$,所以$A'D'=1.2$.

3. 解:$\because CD\perp AB$,$\therefore\angle ADC=\angle CDB=90°$.

$\because\angle A+\angle ACD=90°$,$\angle A+\angle B=90°$,

$\therefore\angle ACD=\angle B$,$\therefore\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

$\therefore\triangle ACD$与$\triangle CBD$的相似比为$\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ACD}:S_{\triangle CBD}=1:4$.

4. 解:$\because DE/\!/BC$,$\therefore\angle ADE=\angle B$.

又$\because\angle A=\angle A$,$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AD+DB}=\frac{2}{3}$,$\therefore\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{4}{9}$.

$\therefore S_{\triangle ADE}:S_{\text{四边形}DBCE}=4:5$.

5. 解:由题意可知$FM/\!/BC$.

所以$\angle AFM=\angle B$.

又因为$\angle FAM=\angle BAC$,

所以$\triangle AFM\backsim\triangle ABC$,所以$\frac{AF}{AB}=\frac{FM}{BC}$.

设菱形$BGMF$的边长为x mm,则

$\frac{100-x}{100}=\frac{x}{150}$,解得$x=60$.

所以$AF=100-60=40$(mm).

由相似三角形的性质,

得$\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AB}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$,

即$\frac{AD-DE}{AD}=\frac{2}{5}$,即$\frac{AD-51}{AD}=\frac{2}{5}$,解得$AD=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

85 mm.

所以 $\triangle ABC$ 的高 $AD = 85$ mm.

6. **解**：因为 $S_{\triangle EFC} = 3S_{\triangle EFD}$，所以 $DF:FC = 1:3$（两三角形的高相等，面积之比等于底边之比）.

由 $DE // BC$，易证 $\triangle DEF \backsim \triangle CBF$.

所以 $DE:BC = DF:FC = 1:3$.

同理可证 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

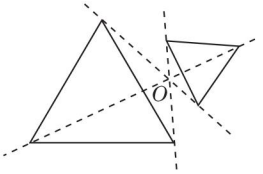
所以 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC} = DE^2:BC^2 = 1:9$.

1.4 图形的位似

练习

1. 略.

2. **解**：是. 如图，点 O 是它的位似中心.



（第 2 题）

3. **解**：是位似图形.

因为 $AC // DB$，

所以 $\angle A = \angle B$，$\angle C = \angle D$，

所以 $\triangle ACE \backsim \triangle BDE$.

又因为 AE 与 BE 共线，CE 与 DE 共线，且对应点所在直线都经过点 E.

所以 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BDE$ 是位似图形.

练习

1. **解**：(1) 点 B 的坐标为 $(6, -2)$.

(2) 略.

2. **解**：图略. 点 E 的对应点 E' 的坐标是 $(-2,1)$ 或 $(2, -1)$. 点 F 的对应点 F' 的坐标是 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

习题 1.4

1. **解**：(1) 不是.

(2) 是，位似中心是点 O.

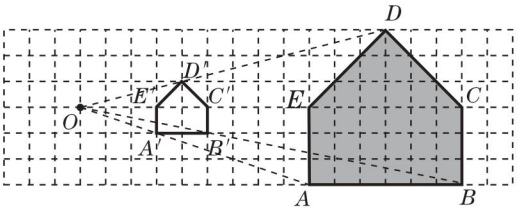
2. **解**：(1) 不是. 因为 E，F 是 AB 的三等分点，$FH // EG // AC$，所以 $\frac{EF}{FA} = \frac{GH}{HC} = 1$，$\frac{GE}{FH} = \frac{1}{2}$，$\frac{FH}{AC} = \frac{2}{3}$，所以 $\frac{EF}{FA} = \frac{GH}{HC} \neq \frac{GE}{FH} \neq \frac{FH}{AC}$，

所以四边形 $EFHG$ 与四边形 $FACH$ 不是相似图形.

所以四边形 $EFHG$ 与四边形 $FACH$ 不是位似图形.

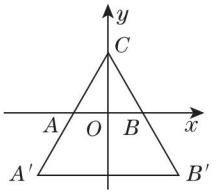
(2) $\triangle BEG$，$\triangle BFH$ 与 $\triangle BAC$ 都是位似图形.

3. **解**：如图，五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是所要画的图形.



（第 3 题）

4. **解**：如图，$\triangle CA'B'$ 就是所要画的图形.



（第 4 题）

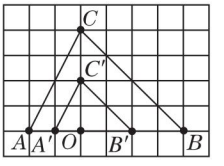
5. **解**：因为 P，Q，R 分别是 OA，OB，OC 的中点，所以 $PQ // AB$，$PQ = \frac{1}{2}AB$，$QR // BC$，$QR = \frac{1}{2}BC$，$PR // AC$，$PR = \frac{1}{2}AC$，

则易得 $\triangle ABC \backsim \triangle PQR$.

又因为对应点所在直线都经过点 O，

所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 是位似图形，它们的相似比为 2:1.

6. **解**：如图，$\triangle A'B'C'$ 就是所要画的图形.



（第 6 题）

7. **解**：小亮的作法正确.

因为 $FE \perp AB$，$F'E' \perp AB$，所以 $EF // E'F'$.

所以 $\angle EFA = \angle E'F'A$.

同理 $\angle GFA = \angle G'F'A$.

所以 $\angle E'F'G' = \angle EFG = 90°$.

又 $\angle F'E'D' = \angle G'D'E' = 90°$，

所以四边形 $D'E'F'G'$ 是矩形.

因为 $EF // E'F'$，

所以 $\frac{EF}{E'F'} = \frac{AF}{AF'}$. 同理可证：$\frac{FG}{F'G'} = \frac{AF}{AF'}$.

所以 $\frac{EF}{E'F'} = \frac{FG}{F'G'}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又 $EF=FG$,所以 $E'F'=F'G'$.

所以四边形 $D'E'F'G'$ 是正方形.

综合练习

1. **解**:相似. 因为它们的对应角相等,对应边成比例. 不一定. 因为它们的对应角相等,但对应边不一定成比例.

2. **解**:(1)∵ 矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似,

$\therefore \frac{DM}{AB}=\frac{DC}{AD}$,即 $\frac{DM}{4}=\frac{4}{2DM}$.

$\therefore DM=2\sqrt{2}$. $\therefore AD=4\sqrt{2}$.

(2)由(1)知,$\frac{DC}{AD}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

∴ 矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 的相似比是 $1:\sqrt{2}$.

3. **解**:成立. 理由如下:

∵ $AD\parallel BE$,$\therefore \frac{OD}{OE}=\frac{OA}{OB}$. ①

又∵ $AC\parallel BD$,$\therefore \frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OB}$. ②

由①②,得 $\frac{OD}{OE}=\frac{OC}{OD}$.

$\therefore OD^2=OC\cdot OE$.

4. **解**:(1)$\angle B=\angle ACD$,$\angle ACB=\angle ADC$.

(2)∵ $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$,$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$.

$\therefore \frac{AB}{6}=\frac{6}{4}$,$\therefore AB=9$ cm.

5. **解**:$\triangle PCD\backsim\triangle APD$,$\triangle ABP\backsim\triangle APD$,$\triangle ABP\backsim\triangle PCD$.

理由如下:∵ $\triangle PBC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle PBC=\angle BPC=\angle PCB=60°$.

①$\triangle PCD\backsim\triangle APD$.

∵ $\angle PCB=60°$,$\therefore \angle PCD=120°$,

$\therefore \angle PCD=\angle APD$.

又∵ $\angle D=\angle D$,$\therefore \triangle PCD\backsim\triangle APD$.

②$\triangle ABP\backsim\triangle APD$.

∵ $\angle PBC=60°$,$\therefore \angle ABP=120°$,

$\therefore \angle ABP=\angle APD$.

又∵ $\angle A=\angle A$,$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle APD$.

③$\triangle ABP\backsim\triangle PCD$.

∵ $\angle BPC=60°$,$\angle APD=120°$,$\therefore \angle APB+\angle CPD=60°$. 又∵ $\angle PBC=\angle PCB=60°$,

$\therefore \angle A+\angle APB=60°$,$\angle ABP=\angle PCD=120°$,$\therefore \angle A=\angle CPD$.

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle PCD$.

6. **解**:$DF\parallel BE$,$DE\parallel BC$.

理由如下:①$DF\parallel BE$.

∵ $AF:AE=AD:AB$,$\angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle ABE$,$\therefore \angle ADF=\angle ABE$.

$\therefore DF\parallel BE$.

②$DE\parallel BC$.

∵ $AD:AB=AE:AC$,$\angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \angle ADE=\angle ABC$,

$\therefore DE\parallel BC$.

7. B

8. **解**:由 $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{ED}$ 能得出 $\angle ABC=\angle AED$,$\angle BAC=\angle EAD$,$\angle BCA=\angle EDA$,$\angle BAD=\angle CAE$.

理由如下:∵ $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{ED}$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle AED$.

$\therefore \angle ABC=\angle AED$,$\angle BAC=\angle EAD$,$\angle BCA=\angle EDA$.

∵ $\angle EAD=\angle BAD+\angle BAE$,$\angle BAC=\angle CAE+\angle BAE$,

$\therefore \angle BAD+\angle BAE=\angle CAE+\angle BAE$,

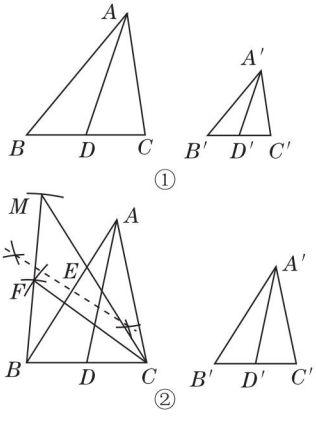
$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

9. **解**:由题图易得 $\frac{AB}{CD}=\frac{45}{30}$,

即 $\frac{36}{CD}=\frac{45}{30}$,$\therefore CD=24$ cm.

∴ 它在暗箱所成的像 CD 的高度是 24 cm.

10. **解**:不一定相似.(1)当其中一边上的中线是三角形对应边上的中线时,这两个三角形相似,理由如下:如图①.



(第 10 题)

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中,D,D' 分别是 BC,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$B'C'$的中点，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AD}{A'D'}$，

可得$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}=\frac{AD}{A'D'}$.

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$. $\therefore \angle B=\angle B'$.

又$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

(2)当其中一边上的中线不是三角形对应边上的中线时，这两个三角形不相似.

理由如下：如图②，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$分别是$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$的中线，则$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AD}{A'D'}$. 作$\triangle MBC$，使中线$CF=AD$，$BM=AB$，所以$\frac{BM}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CF}{A'D'}$，但$\triangle MBC$与$\triangle A'B'C'$显然不相似.

11. 解：(1)$\because \triangle CBD\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \angle B=\angle ACD$，$\angle CDB=\angle ADC$，$\angle BCD=\angle A$.

又$\because \angle CDB+\angle ADC=180°$，

$\therefore \angle CDB=\angle ADC=90°$.

$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$.

$\therefore \angle BCD+\angle ACD=90°$，即$\angle ACB=90°$.

(2)$\because \triangle CBD\backsim\triangle ACD$，$\therefore \frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}$.

$\therefore \frac{9}{CD}=\frac{CD}{4}$. $\therefore CD=6$.

12. 解：$\because BF\perp AE$，$\therefore \angle BFA=90°$，

$\therefore \angle BFA=\angle D$.

$\because \angle BAF+\angle ABF=90°$，$\angle BAF+\angle EAD=90°$，

$\therefore \angle ABF=\angle EAD$. $\therefore \triangle ABF\backsim\triangle EAD$.

$\therefore \frac{AB}{EA}=\frac{BF}{AD}$.

又$\because E$是CD的中点，

$\therefore DE=\frac{a}{2}$.

$\therefore EA=\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$.

$\therefore \frac{a}{\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}=\frac{BF}{b}$.

$\therefore BF=\frac{2ab\sqrt{a^2+4b^2}}{a^2+4b^2}$.

13. C

14. 解：由题意易得$QB=AP=x$ m，则$AB=(2x+20)$ m，由题图易知$\frac{1.7}{9.6}=\frac{x}{2x+20}$，解得$x\approx5.5$.

所以$AB\approx2\times5.5+20=31$(m).

15. 解：(1)图中与Rt$\triangle A_5C_5C_4$相似的三角形有20个.

(2)设$A_1C=x$，则由题意易知$AB=5$，$\triangle CAA_1\backsim\triangle BAC$.

所以$\frac{CA}{BA}=\frac{A_1C}{CB}$，即$\frac{3}{5}=\frac{x}{4}$，$\therefore x=\frac{4}{5}\times3$.

设$A_1C_1=y$，易得$\triangle A_1C_1C\backsim\triangle BCA$，

则可得$\frac{A_1C_1}{A_1C}=\frac{BC}{BA}$，即$\frac{y}{\frac{4}{5}\times3}=\frac{4}{5}$.

$\therefore y=\left(\frac{4}{5}\right)^2\times3$，

以此类推，可得$A_5C_5=\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\times3$.

16. 解：作$OE\perp BC$，$OF\perp AB$，

则有$\angle OEM=\angle OFN=90°$，$OE=\frac{1}{2}AB=2$，$OF=\frac{1}{2}AD=3$，$\angle EOF=90°$，

$\therefore \angle MOE=\angle EOF-\angle FOM=90°-\angle FOM$.

$\because \angle NOM=90°$，$\therefore \angle NOF=\angle NOM-\angle FOM=90°-\angle FOM$.

$\therefore \angle MOE=\angle NOF$.

$\therefore \triangle OEM\backsim\triangle OFN$.

$\therefore \frac{OE}{OF}=\frac{OM}{ON}$. $\therefore \frac{2}{3}=\frac{x}{y}$. $\therefore y=\frac{3}{2}x$.

17. 解：(1)图中与$\triangle ABO$相似的三角形有11个.

(2)有，它是$\triangle GHO$.

18. 略.

第2章 解直角三角形

2.1 锐角三角比

练习

1. 解：$\sin A$等于$\sin A'$，

因为Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle A'B'C'$，

所以$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，即$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}$.

又$\sin A=\frac{BC}{AB}$，$\sin A'=\frac{B'C'}{A'B'}$，

所以$\sin A=\sin A'$.

同理可证$\cos A=\cos A'$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解: 由勾股定理得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5}$,则

$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{2}{3}$,$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

习题 2.1

1. 解: (1) 由勾股定理得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$,

则 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$,$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

(2) 由勾股定理得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{32-7}=5$,

则 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{5}{4\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$,$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{8}$.

$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{8}$,

$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{5}{4\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

2. 解: 由勾股定理得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$,

则 $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{1}{2}AB}=\sqrt{3}$.

3. 解: 由 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$,$BC=8$,得 $AB=10$.

由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{100-64}=6$.

$\therefore \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

4. 解: $\because BD=5$,$DE=2$,$EC=3$,$\therefore DC=5$,

$BC=10$. $\therefore \tan\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

由勾股定理得 $AD=\sqrt{AC^2+DC^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$,

$AE=\sqrt{AC^2+EC^2}=\sqrt{16+9}=5$.

$\therefore \cos\beta=\frac{DC}{AD}=\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

$\sin\gamma=\frac{AC}{AE}=\frac{4}{5}$.

5. 解: $\because \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$,$\therefore AC=2BC$.

由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5}BC$.

$\therefore AC:BC:AB=2BC:BC:\sqrt{5}BC=2:1:\sqrt{5}$.

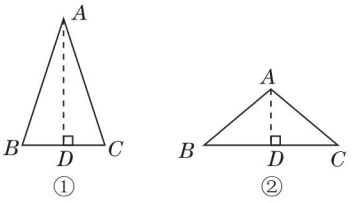
6. 解: 此题分两种情况:

①当底边长为10 cm时,

如图①,$AB=AC=16$ cm,$BC=10$ cm. 过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则 $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times10=5$(cm). 由勾股定理得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{16^2-5^2}=\sqrt{231}$(cm).

$\therefore \sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{231}}{16}$,$\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{5}{16}$,

$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{231}}{5}$.



(第6题)

②当底边长为16 cm时,如图②. $AB=AC=10$ cm,$BC=16$ cm. 过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则 $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times16=8$(cm).

由勾股定理得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$(cm).

$\therefore \sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,$\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$,$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

2.2 30°,45°,60°角的三角比

练习

1. 解: (1) 原式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

(2) 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$.

(3) 原式 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3}{2}$.

2. $45°;\frac{\sqrt{2}}{2}$

习题 2.2

1. **解:**(1)原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)原式 $=\sqrt{3}+9\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$.

(3)原式 $=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

(4)原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

2. **解:**(1)∵ $\cos A=\frac{1}{2}$且$\angle A$为锐角,

∴ $\angle A=60°$.

(2)∵ $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$且$\angle A$为锐角,

∴ $\angle A=45°$.

(3)∵ $\tan A=\sqrt{3}$且$\angle A$为锐角,

∴ $\angle A=60°$.

(4)∵ $\sin A=\frac{1}{2}$且$\angle A$为锐角,

∴ $\angle A=30°$.

3. $30°;\frac{\sqrt{3}}{3}$

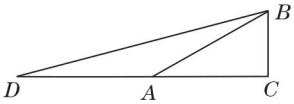
4. **解:**∵ $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴ $\angle A=30°$.

∵ $\tan B=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=\sqrt{3}$,∴ $\angle B=60°$.

5. **解:**如图,作 Rt$\triangle BAC$,使$\angle C=90°$,$\angle BAC=30°$,延长 CA 到 D,使 $AD=AB$,连接 DB,则 $\angle D=15°$,$\angle DBC=75°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,设 $BC=1$,则 $AB=2$,$AC=\sqrt{3}$.



(第 5 题)

∴ $CD=2+\sqrt{3}$,∴ $\tan 15°=\tan D=\frac{BC}{DC}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,$\tan 75°=\tan\angle DBC=\frac{DC}{BC}=2+\sqrt{3}$.

2.3 用计算器求锐角三角比

练习

1. **解:**(1)$\sin 75°\approx0.965\,9$.

(2)$\cos 35.7°\approx0.812\,1$.

(3)$\tan\left(\frac{463}{8}\right)°\approx1.592\,6$.

(4)$\sin 75.61°\approx0.968\,6$.

2. **解:**(1)$\sin 53°49'\approx0.807\,1$.

(2)$\sin 30°4'56''\approx0.501\,2$.

(3)$\cos 55'\approx0.999\,9$.

(4)$\tan 72°8''\approx3.078\,1$.

练习

1. **解:**(1)∵ $\sin\alpha=0.297\,4$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx17.30°$.

(2)∵ $\cos\alpha=0.785\,7$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx38.21°$.

(3)∵ $\tan\beta=\frac{1}{3}$且β为锐角,∴ $\beta\approx18.43°$.

2. **解:**(1)原式 $\approx-0.695\,9$.

(2)原式 $\approx2.682\,6$.

习题 2.3

1. **解:**(1)$\sin 45°\approx0.707\,1$,$\cos 35°\approx0.819\,2$,

$\tan 52°\approx1.279\,9$,$\sin 13.6°\approx0.235\,1$,

$\cos 25.5°\approx0.902\,6$.

(2)$\sin 3°12'\approx0.055\,8$,$\cos 80°25'\approx0.166\,5$,

$\tan 75°36'\approx3.894\,7$,$\sin 56°12'10''\approx0.831\,0$,

$\tan 31°30'21''\approx0.612\,9$,$\sin 50'23''\approx0.014\,7$.

2. **解:**(1)∵ $\sin\alpha=0.6$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx36.87°$.

(2)∵ $\sin\alpha=0.650\,7$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx40.59°$.

(3)∵ $\cos\alpha=0.13$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx82.53°$.

(4)∵ $\cos\alpha=0.265\,9$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx74.58°$.

(5)∵ $\tan\alpha=11.82$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx85.16°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(6)∵ $\tan\alpha=0.3705$ 且 α 为锐角,

∴ $\alpha\approx20.33°$.

3. 解:(1)原式 ≈ -0.0580.

(2)原式 ≈ -16.2426.

4. 解:$\sin13°\approx0.2250$,$\cos77°\approx0.2250$.

$\sin62°18'\approx0.8854$,$\cos27°42'\approx0.8854$.

$\sin83°21'\approx0.9933$,$\cos6°39'\approx0.9933$.

我发现互为余角的两个锐角,一个角的正弦值等于它的余角的余弦值.

5. 解:$\sin62°>\frac{\sqrt{3}}{2}>\cos62°$.

2.4 解直角三角形

练习

1. 解:由勾股定理得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=12\sqrt{5}$.

∵ $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$,∴ $\angle A\approx26°33'54''$.

∴ $\angle B=90°-\angle A\approx90°-26°33'54''=63°26'6''$.

2. 解:(1)由题意知 $\cos B=\frac{a}{c}$,则 $\frac{1}{2}=\frac{a}{15}$,

∴ $a=7.5$.

(2)由题意得 $\tan A=\frac{a}{b}$,则 $\tan35°=\frac{24}{b}$,

∴ $b\approx34.28$. 又∵ $\sin A=\frac{a}{c}$,∴ $\sin35°=\frac{24}{c}$,

∴ $c\approx41.84$.

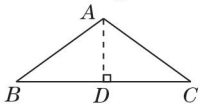
练习

1. 解:在 Rt△ABD 中,$\angle B=60°$,$AD=3$,

由 $\sin B=\frac{AD}{AB}$得 $AB=\frac{AD}{\sin60°}=2\sqrt{3}$.

在 Rt△ABC 中,由 $\cos B=\frac{AB}{BC}$得 $BC=\frac{AB}{\cos60°}=4\sqrt{3}$.

2. 解:如图,在△ABC 中,$AB=AC$,且 $AB:BC=5:8$,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,则在 Rt△ABD中,$\sin B=\frac{AD}{AB}$,$\cos B=\frac{BD}{AB}$. 设 $AB=5x$,则 $BC=8x$,所以 $BD=4x$,所以 $AD=3x$,所以 $\sin B=\frac{3}{5}$,$\cos B=\frac{4}{5}$.



(第2题)

习题 2.4

1. 解:(1)由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2}$.

由 $\tan A=\frac{BC}{AC}$得 $\tan A=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,

∴ $\angle A=60°$,

∴ $\angle B=90°-\angle A=90°-60°=30°$.

(2)由 $\angle A=22.5°$得 $\angle B=90°-\angle A=90°-22.5°=67.5°$.

由 $\tan A=\frac{a}{b}$得 $a=b\tan22.5°\approx5$.

由 $\cos A=\frac{b}{c}$得 $c=\frac{b}{\cos22.5°}\approx13$.

2. 解:(1)由勾股定理得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=15$.

由 $\sin B=\frac{b}{c}$,得 $\sin B=\frac{36}{39}=\frac{12}{13}$,

∴ $\angle B\approx67°23'$.

(2)由 $\tan A=\frac{a}{b}$得 $\tan A=\frac{22.5}{12}=1.875$.

∴ $\angle A\approx61°56'$.

∴ $\angle B=90°-\angle A\approx90°-61°56'=28°4'$.

3. 解:如图,在 Rt△ACD 中,

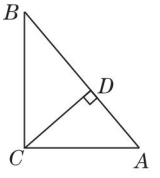
$\tan A=\frac{CD}{AD}=\frac{21}{18}=\frac{7}{6}$,∴ $\angle A\approx49°24'$.

∴ $\angle B=90°-\angle A\approx40°36'$.

由 $\tan\angle BCD=\tan A=\frac{BD}{CD}$,

得 $BD=CD\cdot\tan A=24.5$ cm.

∴ $AB=BD+AD=42.5$ cm.



(第3题)

4. 解:∵ $\angle C=90°$,$\angle A=2\angle B$,

∴ $\angle A=60°$,$\angle B=30°$.

由 $\tan A=\frac{BC}{AC}$得 $BC=AC\cdot\tan60°=7\sqrt{3}$.

由 $\cos A=\frac{AC}{AB}$得 $AB=\frac{AC}{\cos60°}=14$.

5. 解:如图,在△ABC 中,$AB=AC$,

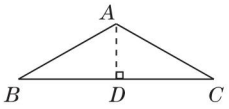
∵ $\angle BAC=120°$,

∴ $\angle B=\angle C=30°$. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则 $AD=30$ cm,$BD=CD$,由 $\tan B=\frac{AD}{BD}$得 $BD=\frac{AD}{\tan30°}=\frac{30}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=30\sqrt{3}$(cm).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore BC=60\sqrt{3}$ cm.

由 $\sin B=\frac{AD}{AB}$ 得 $AB=\frac{AD}{\sin 30°}=\frac{30}{\frac{1}{2}}=60$(cm). $\therefore AC=60$ cm,



(第5题)

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $=60+60+60\sqrt{3}=120+60\sqrt{3}$(cm).

6. 解:过点 B 作 $BD\perp AC$ 交 AC 的延长线于点 D,$\because \angle ACB=118°$,

$\therefore \angle BCD=180°-118°=62°$.

由 $\sin\angle BCD=\frac{BD}{BC}$ 得 $BD=BC\sin 62°=4\sin 62°\approx 3.53$.

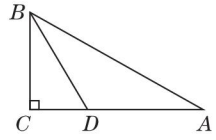
7. 解:如图,由 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\angle C=90°$,得 $\angle A=30°$,$\angle ABC=60°$. 因为 BD 平分 $\angle ABC$,

所以 $\angle CBD=30°$.

在 Rt$\triangle CBD$ 中,$\cos\angle CBD=\frac{BC}{BD}$,所以 $BC=BD\cos 30°=16\times\cos 30°=8\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle ACB$ 中,$\cos\angle ABC=\frac{BC}{AB}$,

所以 $AB=\frac{BC}{\cos 60°}=\frac{8\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=16\sqrt{3}$.



(第7题)

8. 证明:过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,在 Rt$\triangle ACD$中,由 $\sin C=\frac{AD}{AC}$得 $AD=b\sin C$.

又$\because S=\frac{1}{2}BC\cdot AD$,

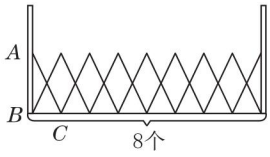
$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C$.

2.5 解直角三角形的应用

练习

1. 解:如图,由题意易知 $AC=1$ m. $\angle BCA=\frac{180°-50°}{2}=65°$. 由 $\cos\angle BCA=\frac{BC}{AC}$ 得 $BC=AC\cos 65°=1\times\cos 65°\approx 0.42$(m),所以这个大门的宽约是 $0.42\times 8\approx 3.4$(m).

答:这个大门的宽约是 3.4 m.



(第1题)

2. 解:(1)由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=4$ m.

由 $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}$得 $\tan\angle BAC=\frac{3.2}{2.4}=\frac{4}{3}$.

$\therefore \angle BAC\approx 53°8'$.

答:梯子的长度是 4 m,梯子与地面所成角的大小约是 53°8′.

(2)若把梯子的底端到墙根的距离减少 0.4 m,则 $AC=2$ m,由 $\cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}$,$AB=4$ m,得 $\cos\angle BAC=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \angle BAC=60°$.

答:梯子与地面所成的角是 60°.

练习

1. 解:在 Rt$\triangle ACD$ 中,由题意易得 $\angle DAC=27°$.

由 $\tan\angle DAC=\frac{CD}{AC}$ 得 $AC=\frac{20}{\tan 27°}\approx 39.3$(m).

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BCA=50°$,由 $\tan\angle BCA=\frac{AB}{AC}$,得 $AB=AC\tan\angle BCA\approx 39.3\times\tan 50°\approx 47$(m).

答:建筑物 AB 的高约是 47 m.

2. 解:过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D,

在 Rt$\triangle ABD$ 中,$\angle BAD=50°$,

由 $\cos\angle BAD=\frac{AD}{AB}$得 $AD=12\cos 50°\approx 7.71$(海里).

在 Rt$\triangle BCD$ 中,由 $\sin\angle CBD=\frac{CD}{BC}$得 $CD=16\sin 50°\approx 12.26$(海里),则 $AC=AD+CD\approx 7.71+12.26\approx 20.0$(海里).

答:从 C 岛再航行约 20.0 海里才能直接返回出发地 A.

点拨:过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D,构造出直角三角形,利用解直角三角形的知识解题即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

1. 解:(1)∵ $i=\frac{h}{l}=\frac{1}{2.5}=\tan\alpha$,

∴ $\alpha\approx21°48'$.

过点 C 作 $CF\perp AD$ 于 F,则 $CF=5.6$ m.

由 $\sin\beta=\frac{CF}{CD}$ 得 $\sin\beta=\frac{5.6}{10}=0.56$,

∴ $\beta\approx34°3'$.

(2)在 Rt△ABE 中,由 $\tan\alpha=\frac{BE}{AE}$ 得

$AE=\frac{BE}{\tan\alpha}=\frac{5.6}{\frac{1}{2.5}}=14$(m),

∴ $AB=\sqrt{BE^2+AE^2}\approx15.1$ m.

在 Rt△CFD 中,由 $\cos\beta=\frac{FD}{CD}$ 得 $FD=CD\cos\beta\approx10\times\cos34°3'\approx8.29$(m).

∴ $AD=AE+BC+FD\approx14+4+8.29\approx26.3$(m).

答:坝底宽 AD 的长约是 26.3 m,斜坡 AB 的长约是 15.1 m.

点拨:(1)理解坡度的含义,即 $i=\frac{h}{l}=\tan\alpha$. (2)过点 C 作 $CF\perp AD$ 于点 F,构造直角三角形,利用解直角三角形的知识求解即可.

2. 解:过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,在 Rt△ACD 中,由 $\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}$ 得

$AD=\frac{CD}{\tan42°}$.

在 Rt△BCD 中,由 $\tan\angle CBD=\frac{CD}{BD}$ 得

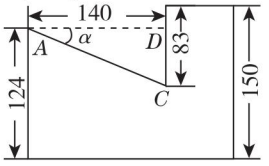
$BD=\frac{CD}{\tan65°}$.

又 $AB=AD+BD=150$ m,所以 $\frac{CD}{\tan42°}+\frac{CD}{\tan65°}=150$,解得 $CD\approx95.1$ m.

答:C 点距离地面的高度约是 95.1 m.

习题 2.5

1. 解:如图,$AD=140$ mm,$CD=83-(150-124)=57$(mm).



(第1题)

在 Rt△ACD 中,$\tan\alpha=\frac{CD}{AD}=\frac{57}{140}$.

∴ $\alpha\approx22°9'$.

2. 解:∵ $\sin35°=\frac{BC}{AB}$,

∴ $BC=AB\sin35°=15\sin35°\approx8.604$(m).

又∵ 每个台阶的高度不能超过 20 cm,

∴ 这段阶梯最少要修建 $8.604\div0.2\approx44$(个)台阶.

点拨:每个台阶的高度×台阶的个数 = BC 的高度.

3. 解:斜坡上相邻两棵树间的坡面距离是 $\frac{4.5}{\cos20°34'}\approx4.8$(m).

4. 解:由题意,得小船航行的路程为 $20\times\tan52°24'\approx26.0$(海里),所以该船行驶的速度约是 $26.0\div1.5\approx17.3$(海里/时).

5. 解:如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,在 Rt△BCE 中,$\tan30°=\frac{BE}{CE}$,则 $BE=21\tan30°\approx12.1$(m).

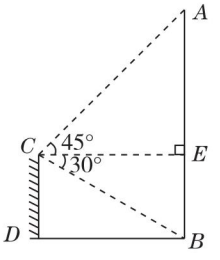
在 Rt△ACE 中,

$\tan45°=\frac{AE}{CE}$,

则 $AE=21\tan45°=21$(m).

∴ $AB\approx12.1+21=33.1$(m).

∵ 33.1 m < 35 m,∴ 离 B 点 35 m 远的一处保护文物不在危险区内.



(第5题)

6. 解:在 Rt△ABC 中,$\sin\angle CAB=\frac{BC}{AC}$,

∴ $\sin\angle CAB=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ $\angle CAB=45°$.

在 Rt△$AB'C'$ 中,$\sin\angle C'AB=\frac{B'C'}{AC'}$,

∴ $\sin\angle C'AB=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴ $\angle C'AB=60°$,∴ $\angle C'AC=60°-45°=15°$.

答:这时鱼竿转过的角度是 15°.

点拨:鱼竿在转动过程中,长度不变.

7. 解:(1)由 $i=1:8$,得缆绳 AB 与水平线所成的角的正切值为 $\frac{1}{8}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴缆绳 AB 与水平线所成的角约是 7°8′.

(2)由(1)可知 $\angle BAE\approx 7°8'$,

由 $\sin\angle BAE=\dfrac{BE}{AB}$,

得 $BE=AB\sin\angle BAE\approx 104\times\sin 7°8'\approx 12.9(\text{m})$.

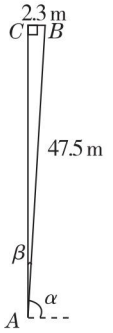
∴ $CG=CF-GF\approx 50-12.9\approx 37.1(\text{m})$.

答:缆车从 B 点到 C 点上升的高度约是 37.1 m.

8. 解:如图,$BC=2.3$ m. $BA=47.5$ m. (1)由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{47.5^2-2.3^2}\approx 47.4(\text{m})$.

答:如今虎丘塔塔顶中心距地面约 47.4 m.

(2)由 $\sin\beta=\dfrac{BC}{AB}$ 得 $\sin\beta=\dfrac{2.3}{47.5}$. ∴ $\beta\approx 2.78°$.



(第 8 题)

答:如今虎丘塔塔中心偏离底层中心铅垂线约 2.78°.

(3)由(2)得 $\alpha=90°-\beta\approx 87.22°$.

答:如今虎丘塔与地平面的倾斜角约是 87.22°.

点拨:画出如今虎丘塔的平面示意图是解题的关键.

9. 解:如图,由题意,得 $PS=32$ cm, $\angle PSB=18°$, $RS=52$ cm, $\angle RSA=72°$.

在 $\text{Rt}\triangle PSB$ 中, $\cos 18°=\dfrac{BS}{PS}$,

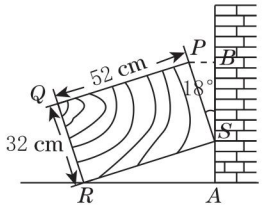
∴ $BS=32\cos 18°\approx 30.4(\text{cm})$.

在 $\text{Rt}\triangle SRA$ 中, $\cos 72°=\dfrac{SA}{RS}$,

∴ $SA=52\cos 72°\approx 16.1(\text{cm})$.

∴ $AB=SA+BS\approx 16.1+30.4\approx 47(\text{cm})$.

答:P 点距地面的高度约是 47 cm.



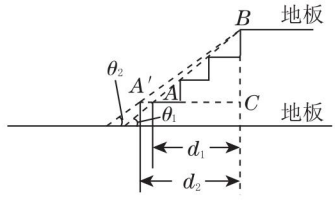
(第 9 题)

10. 解:如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan\theta_1=\dfrac{BC}{d_1}$,则 $BC=4\tan 40°$ m.

在 $\text{Rt}\triangle A'BC$ 中, $\tan\theta_2=\dfrac{BC}{d_2}$,

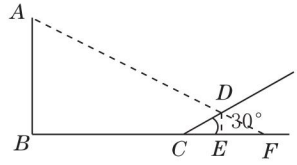
则 $d_2=\dfrac{4\tan 40°}{\tan 36°}\approx 4.6(\text{m})$.

∴楼梯占用地面的长度增加 $d_2-d_1\approx 4.6-4=0.6(\text{m})$.



(第 10 题)

11. 解:如图,过点 D 作 $DE\perp BC$,交 BC 的延长线于点 E,延长 AD 交 BC 的延长线于点 F.



(第 11 题)

∵ $\angle DCE=30°$,

∴ $DE=CD\sin 30°=4$ m.

∴ $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}(\text{m})$.

由题意易知 $DE/\!/AB$,

易得 $\triangle DEF\backsim\triangle ABF$.

∴ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BF}$,即 $\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AB}{BF}$. 由小亮的身高为 1.65 m,他在水平地面上的影子长为 3.3 m,可得 $\dfrac{AB}{BF}=\dfrac{1}{2}$,

∴ $\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{1}{2}$, ∴ $EF=8$ m.

∴ $BF=BC+CE+EF=20+4\sqrt{3}+8=28+4\sqrt{3}(\text{m})$.

∴ $AB=14+2\sqrt{3}\approx 17.5(\text{m})$.

∴电线杆的长度约是 17.5 m.

点拨:本题的解题关键是找出物体本身的高和它在水平地面上的影子长之比是 1∶2.

12. 解:如图,过 B 作 $BE\perp CM$ 于 E, $BF\perp AD$ 于 F,设 $BC=x$ m,

则 $BE=\dfrac{1}{2}x$ m, $CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle CAM=45°$, $CM=200$ m,

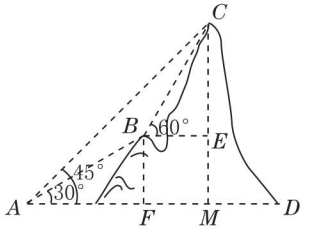
∴ $AM=200$ m, $EM=\left(200-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ m.

∴ $BF=EM=\left(200-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$m,

$AF=AM-FM=AM-BE=\left(200-\frac{1}{2}x\right)$ m.

在 Rt△BAF 中, $\tan 30°=\frac{BF}{AF}=\frac{200-\frac{\sqrt{3}}{2}x}{200-\frac{1}{2}x}$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{200-\frac{\sqrt{3}}{2}x}{200-\frac{1}{2}x}$, 解得 $x\approx146$.



(第 12 题)

答:电缆 BC 应至少长约 146 m.

综合练习

1. (1) BC; CD; BD; AC; $\frac{AD}{AC}$; BC; AC; AD; $\frac{BD}{CD}$

(2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(4) 6; $\frac{3}{5}$

2. 解:由题意易得 $OP=5$,

∴ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

3. 解:(1) 原式 $=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$.

(2) 原式 $=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

4. 解:(1) 原式≈1.158 5.

(2) 原式≈0.352 7.

5. 解:(1)∵ $\sin A=0.082\ 8$ 且∠A 为锐角,

∴ $\angle A\approx4.75°$.

(2)∵ $\cos A=0.372\ 5$ 且∠A 为锐角,

∴ $\angle A\approx68.13°$.

(3)∵ $\tan A=28.38$ 且∠A 为锐角,

∴ $\angle A\approx87.98°$.

6. 解:(1)∵ $\sin A=\frac{a}{c}$, ∴ $a=c\sin 60°=8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$. ∵ $\cos A=\frac{b}{c}$,

∴ $b=c\cos 60°=8\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$.

(2)∵ $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

∴ $\angle A\approx54.74°$.

由勾股定理得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{6-4}=\sqrt{2}$.

7. 解:(1) 过点 A 作 $AE\perp BC$ 于 E,∵ $AB=AC$,∴ $BE=CE=3$. 在 Rt△ACE 中, $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{81-9}=6\sqrt{2}$.

∴ $\sin C=\frac{AE}{AC}=\frac{6\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AC\cdot BD$,

∴ $BD=\frac{BC\cdot AE}{AC}=\frac{6\times6\sqrt{2}}{9}=4\sqrt{2}$.

8. 解:由题意易知 $AB=BD$, 设 $AB=x$, 则在 Rt△ABD 中, $AD^2=AB^2+BD^2$, 即 $(6\sqrt{6})^2=2x^2$, 解得 $x=6\sqrt{3}$(负值舍去). 在 Rt△BDE 中, $BE=BD\tan 30°=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=6$. ∴ $DE=\sqrt{BD^2+BE^2}=12$.

∴ 三角尺各边的长分别是 $6\sqrt{3}$, 6, 12.

9. 解:过 C 作 $CE\perp AB$, 交 AB 的延长线于 E, 过点 D 作 $DF\perp AE$ 于 F, 则 $CE=DF$.

在 Rt△BCE 中, $\tan\angle CBE=\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}$, 设 $CE=x$ m, 则 $BE=2x$ m, 由勾股定理得 $x^2+(2x)^2=12^2$, 解得 $x^2=28.8$.

所以 $CE^2=28.8$. 又因为 $\tan\angle DAB=\frac{DF}{AF}=\frac{1}{3}$, 所以 $AF=3DF=3CE$. 由勾股定理得 $AD=\sqrt{AF^2+DF^2}=\sqrt{9CE^2+CE^2}=\sqrt{10\times28.8}\approx17.0$(m).

答:加固后斜坡 AD 的长约是 17.0 m.

10. 解:过 C 作 $CE\perp AD$ 于 E, 设 $CE=x$ 海里, 易知∠$CAE=45°$, ∠$CBE=60°$, ∠$CDE=45°$, ∴ $AE=x$ 海里, $BE=\frac{CE}{\tan 60°}=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 海里，

$DE=CE=x$ 海里. 又由 $BD=40\times0.5=20$(海里)，$BD=DE-BE$，得 $x-\frac{\sqrt{3}}{3}x=20$，解得 $x\approx47.3$.

$\therefore AB=AE+BE\approx47.3+\frac{\sqrt{3}}{3}\times47.3\approx74.6$(海里).

答：A，B 之间的距离约是 74.6 海里.

11. 解：易知 $AB=AB'$，在 Rt$\triangle AB'C'$ 中，$\angle B'AC'=30°$，$\cos\angle B'AC'=\frac{AC'}{AB'}$，

$\therefore AC'=AB'\cos30°=AB\cos30°=36.7\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx31.8$(m).

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=80°$，

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}$，

$\therefore BC=AB\sin\angle BAC=36.7\times\sin80°\approx36.1$(m).

$\therefore BD=BC+CD=BC+AM\approx36.1+20.5=56.6$(m).

答：这台起重机工作时的最大高度约是 56.6 m，最远水平距离约是 31.8 m.

12. 解：如图，延长 BA 与 CD，两延长线交于点 P. $\because\angle CDA=120°$，

$\therefore\angle ADP=60°$.

$\therefore\angle P=30°$.

$\because DA\perp BP$，

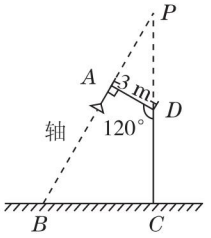
$\therefore\angle P=30°$.

$\because\angle P=\angle P$，

$\angle PAD=\angle PCB=90°$，

$\therefore\triangle PAD\backsim\triangle PCB$，

$\therefore\frac{AD}{CB}=\frac{AP}{CP}$.



(第 12 题)

$\because AD=3$ m，$\therefore AP=\frac{AD}{\tan30°}=3\sqrt{3}$ m，

$PD=6$ m. 由路宽是 28 m，可知 $BC=14$ m，

$\therefore\frac{3}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{CP}$，$\therefore CP=14\sqrt{3}$ m.

$\therefore CD=CP-PD=14\sqrt{3}-6\approx18.2$(m).

答：设计约 18.2 m 高的灯柱，才能取得最佳的照明效果.

13. 解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC=AB=2$.

又$\because$ 在 Rt$\triangle BOC$ 中，$\angle CBO=30°$，

$\therefore BO=BC\cos30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 顶点 B 的坐标是$(-\sqrt{3},0)$.

过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于点 E，在 Rt$\triangle ABE$中，

$\angle ABE=180°-30°-90°=60°$，

$\therefore AE=AB\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

$BE=AB\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$，

$\therefore OE=OB+BE=\sqrt{3}+1$.

$\therefore$ 顶点 A 的坐标是$(-\sqrt{3}-1,\sqrt{3})$.

14. 解：设小亮的身高为 x m，则 $CD=EF=x$ m. 在 Rt$\triangle BEF$ 中，$\angle EBF=60°$，

$\therefore BF=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ m. 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD=30°$，$\therefore AD=\sqrt{3}x$ m. $\because AB=AD+BD$，$BD=DF-BF$，$AB=4$ m，$DF=2$ m，

$\therefore4=\sqrt{3}x+2-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\therefore x=\sqrt{3}\approx1.73$.

答：小亮的身高约为 1.73 m.

15. 解：(1) 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$CD=AC\sin\angle BAC=30\sin24°\approx12.2$(cm).

(2) 在 Rt$\triangle ACE$ 中，$AE=AC\cos12°=30\times\cos12°\approx29.3$(cm).

$CE=AC\sin12°=30\times\sin12°\approx6.2$(cm).

在 Rt$\triangle CDE$ 中，$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}\approx10.5$ cm.

$\therefore AD=AE-DE\approx18.8$ cm 或 $AD=AE+DE\approx39.8$ cm.

16. 解：设 $AB=BF=x$ m，在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\tan D=\frac{1}{1.8}$，即$\frac{AB}{BD}=\frac{1}{1.8}$，

所以 $BD=1.8x$ m.

又因为 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\frac{AB}{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $AC=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ m.

由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\frac{1}{2}x$ m.

因为 $CD=BC+BD$，

所以$\frac{1}{2}x+1.8x=11.5$，

解得 $x=5$，所以 $BF=AB=5$ m，$BD=9$ m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△EFD 中,$\tan D=\frac{EF}{FD}=\frac{1}{1.8}$,

即$\frac{EF}{BD-BF}=\frac{1}{1.8}$,

所以$\frac{EF}{9-5}=\frac{1}{1.8}$,所以 $EF=\frac{20}{9}$ m.

第3章 对圆的进一步认识

3.1 圆的对称性

练习

1. 证明:∵ $CD\perp AB$,

∴ $CM=DM$,$\angle AMC=\angle AMD=90°$.

在△ACM 和△ADM 中,

$$\because \begin{cases} AM=AM,\\ \angle AMC=\angle AMD=90°,\\ CM=DM, \end{cases}$$

∴ △ACM≌△ADM.

∴ $\angle ACD=\angle ADC$.

2. 解:连接 OA,过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D,

∴ $AD=BD=300$ mm.

∵ $OA=\frac{650}{2}=325$(mm),

∴ 在 Rt△AOD 中,由勾股定理得 $OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{325^2-300^2}=125$(mm).

∴ 油的最大深度是 $325-125=200$(mm).

练习

1. 解:不正确. 因为这两个圆不是同圆或等圆,它们的半径不相等,所以它们相同的圆心角所对的弧也不相等.

2. 证明:连接 OC,OD,则 $OC=OD$.

在△AOC 和△AOD 中,

$$\because \begin{cases} AC=AD,\\ OA=OA,\\ OC=OD, \end{cases}$$

∴ △AOC≌△AOD,

∴ $\angle AOC=\angle AOD$,

∴ $\angle COB=\angle DOB$,

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.

3. 解:相等. 理由如下:

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$,

∴ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{CB}$,

即$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}$,∴ $AC=DB$.

练习

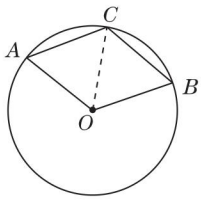
1. 解:(1)真命题;(2)真命题;(3)假命题;(4)假命题.

2. 解:连接 OA,则 $OA=OB$,所以 $\angle A=\angle B=37°$.

所以$\angle AOB=180°-37°-37°=106°$.

所以劣弧$\overset{\frown}{AB}$的度数是 106°.

3. 证明:如图,连接 OC.



(第3题)

∵ $\overset{\frown}{AB}$的度数为 120°,C 为$\overset{\frown}{AB}$的中点,∴ $\overset{\frown}{AC}$,$\overset{\frown}{BC}$ 的度数都是 60°.

∴ $\angle AOC=\angle BOC=60°$.

∵ $OA=OC=OB$,

∴ △AOC 与 △COB 都是等边三角形.

∴ $AC=OA=OC$,$BC=OB=OC$,

∴ $AC=BC=OB=OA$,

∴ 四边形 $OACB$ 是菱形.

习题 3.1

1. 解:连接 OB,∵ $OA\perp BC$,∴ $BD=CD=4$ cm. 设⊙O 的半径为 r cm.

在 Rt△BOD 中,由勾股定理得

$OB^2=BD^2+OD^2$,即 $r^2=4^2+(r-2)^2$,

解得 $r=5$,∴ ⊙O 的半径是 5 cm.

2. 解:过 O 作 $OD\perp BA$ 于 D,连接 OA,则 $BD=AD=1$,

∴ $PD=2+1=3$. ∵ $OP=5$.

∴ $OD=4$. 在 Rt△AOD 中,由勾股定理得

$OA=\sqrt{OD^2+AD^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$,

∴ ⊙O 的半径是 $\sqrt{17}$.

3. 证明:∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,∴ $\angle AOC=\angle BOC$.

∵ M 与 N 分别是 OA 与 OB 的中点,

∴ $OM=\frac{1}{2}OA$,$ON=\frac{1}{2}OB$.

∵ $OA=OB$,

∴ $OM=ON$. 在△MOC 和△NOC 中,

$$\because \begin{cases} OM=ON,\\ \angle MOC=\angle NOC,\\ OC=OC, \end{cases}$$

∴ △MOC≌△NOC.

∴ $MC=NC$.

4. 解:如图,过 O 作 $OE\perp AB$ 于 E,$OF\perp CD$ 于 F,连接 OB,OC,则 $BE=4$,$CF=4$.

由勾股定理得

$OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

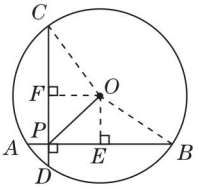
同理可得 $OF=3$，$\therefore OE=OF$.

又$\because AB\perp CD$，$\therefore \angle FPE=90°$.

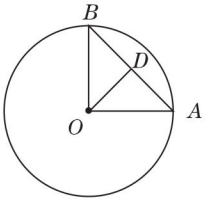
$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是正方形，

$\therefore EP=OF=3$.

$\therefore OP=\sqrt{OE^2+EP^2}=3\sqrt{2}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 解：如图，由题意知 $\angle AOB=90°$，$OD\perp AB$ 且 $OD=1$，$\therefore AB=2$. 设 $OA=OB=r$，由勾股定理得 $OA^2+OB^2=AB^2$，

即 $r^2+r^2=4$，解得 $r=\sqrt{2}$（负值舍去）.

$\therefore \odot O$ 的半径是$\sqrt{2}$.

6. 解：连接 OE，$\because \overset{\frown}{CE}$的度数为 $80°$，

$\therefore \angle COE=80°$.

又$\because OC=OE$，$\therefore \angle OCE=\angle OEC=50°$.

$\because CE/\!/AB$，$\therefore \angle AOC=\angle OCE=50°$，

$\therefore \angle AOD=130°$. $\therefore \overset{\frown}{AD}$的度数是 $130°$.

7. 解：当另一顶点在$\overset{\frown}{AB}$的中点处截才能使三角形木板的面积最大. 理由如下：因为三角形的一边 AB 的长已经确定，只要让该边上的高最大就能截出最大的三角形，当另一顶点在$\overset{\frown}{AB}$的中点时，高最大，所以另一顶点应在$\overset{\frown}{AB}$的中点处.

8. 证明：连接 OM，ON，$\because E$，F 分别是 OA，OB 的中点，

$\therefore OE=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OM$，$OF=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}ON$.

又$\because ME\perp AB$，$NF\perp AB$，

$\therefore \angle MEO=\angle NFO=90°$.

$\therefore \angle OME=\angle ONF=30°$.

$\therefore \angle MOE=\angle NOF=60°$.

$\therefore \angle MON=180°-\angle MOE-\angle NOF=60°$.

$\therefore \angle AOM=\angle MON=\angle BON=60°$.

$\therefore \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$.

9. 解：相等. 证明如下：连接 OA，OB，OC，OD，

$\because \overset{\frown}{ACB}$与$\overset{\frown}{DBC}$的度数相等，

$\therefore \angle AOB=\angle COD$.

在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，

$$\because \begin{cases} OA=OC, \\ \angle AOB=\angle COD, \\ OB=OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle COD$，

$\therefore AB=CD$.

同理可证 $AC=BD$. 连接 BC，

在$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$ 中，

$$\because \begin{cases} AC=DB, \\ BC=CB, \\ AB=DC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$.

$\therefore \angle CAB=\angle BDC$.

在$\triangle AEC$ 和$\triangle DEB$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle AEC=\angle DEB, \\ \angle CAB=\angle BDC, \\ AC=DB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle DEB$，$\therefore AE=DE$.

10.（1）**证明**：在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，

$$\because \begin{cases} AO=CO, \\ \angle AOB=\angle COD, \\ OB=OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle COD$，

$\therefore AB=CD$.

$\because OE\perp AB$，$OF\perp CD$，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore AE=CF$. 又$\because OA=OC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOE\cong\mathrm{Rt}\triangle COF$，$\therefore OE=OF$.

（2）**证明**：$\because OE=OF$，$OA=OC$，

$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}$，$CF=\sqrt{OC^2-OF^2}$，

$\therefore AE=CF$.

$\therefore AB=CD$. 在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，

$$\because \begin{cases} OA=OC, \\ AB=CD, \\ OB=OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle COD$.

$\therefore \angle AOB=\angle COD$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

（3）**解**：在同圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

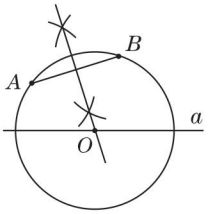
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2 确定圆的条件

练习

1. 解:(1)连接 AB;

(2)作线段 AB 的垂直平分线,与直线 a 交于点 O;(3)以点 O 为圆心,以 OA 长为半径作 $\odot O$,$\odot O$ 就是所求作的经过点 A,B,且圆心在直线 a 上的圆.(如图所示)



(第 1 题)

2. 解:在这块镜片的圆周上任意取三点 A,B,C,连接 AB,BC,分别作线段 AB 与线段 BC 的垂直平分线 l_1,l_2,l_1 与 l_2 相交于点 O,连接 OA,用尺子量出 OA 的长即可.

练习

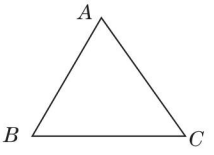
1. 证明:假设一个三角形中有两个角是钝角,则两钝角之和大于 180°,根据三角形内角和等于 180°可知假设不成立,所以原命题是正确的.

2. 解:已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B \neq \angle C$.

求证:$AC \neq AB$.

证明:假设 $AC = AB$,那么根据等边对等角可得 $\angle B = \angle C$,这与已知条件 $\angle B \neq \angle C$ 矛盾,

因此 $AC \neq AB$.



(第 2 题)

习题 3.2

1. 解:(1)真命题;(2)真命题;(3)假命题;(4)真命题;(5)假命题.

2. 解:(1)在弧 AB 上任取一点 C,

连接 AC,BC;

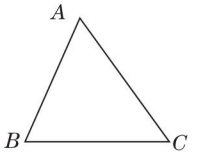
(2)分别作线段 AC,BC 的垂直平分线 l_1,l_2,l_1 与 l_2 相交于点 O.

点 O 就是弧 AB 的圆心.(图略)

3. 解:由勾股定理,得 $AB = 13$,

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径是 $\frac{13}{2}$.

4. 证明:如图,在 $\triangle ABC$ 中,假设所有内角都小于 60°,即 $\angle A < 60°$,$\angle B < 60°$,$\angle C < 60°$,则 $\angle A + \angle B + \angle C < 180°$,这与三角形内角和定理矛盾.所以假设不成立,原命题正确.



(第 4 题)

5. 解:这样的圆能画 2 个.

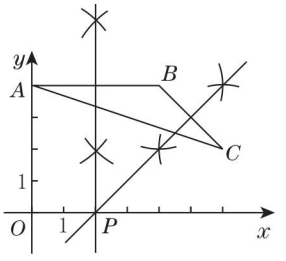
如果 $PQ = 6$ cm,这样的圆能画 1 个.

6. 证明:假设 BE 与 CD 互相平分,连接 DE,易知四边形 $DECB$ 为平行四边形,所以 $BD \parallel EC$. 这和 BD 与 EC 有交点 A 矛盾,所以 BE,CD 不能互相平分.

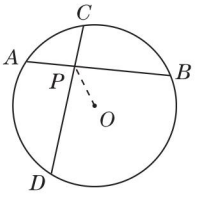
7. 解:(1)能. 因为不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

(2)如图,点 P 即为所求作的圆心 P.

(3)圆心 P 的坐标为(2,0),$\odot P$ 的半径是 $2\sqrt{5}$.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 解:已知:如图,在 $\odot O$ 中,弦 AB,CD 相交于点 P,且 AB,CD 都不是 $\odot O$ 的直径.

求证:AB,CD 不能互相平分.

证明:假设 AB,CD 互相平分,连接 OP,因为 $AP = BP$,所以 $OP \perp AB$.

同理 $OP \perp CD$.

这与过一点有且只有一条直线与已知直线垂直相矛盾,这说明假设错误,所以原命题正确.

3.3 圆周角

练习

1. 解:$\because \angle AOB = 70°$,$\therefore \angle ACB = 35°$.

又 $\because OB \perp AC$,$\therefore \angle BDC = 90°$,

$\therefore \angle OBC = 180° - 90° - 35° = 55°$.

2. 解:$\because AB = AC$,$\therefore \angle B = \angle C$.

$\because \overset{\frown}{AB}$ 的度数为 130°,$\therefore \angle C = 65°$,

$\therefore \angle B = 65°$.

$\therefore \angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 65° - 65° = 50°$.

练习

1. 解:(1)相等. $\because AB \parallel CD$,$\therefore \angle 5 = \angle 1$.

$\therefore \overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)略.

2. 解:(3)　因为直径所对的圆周角是直角.

练习

1. 解:∵ $\angle BOD=98°$,∴ $\angle A=49°$. 又$\overset{\frown}{BAD}$的度数是 $360°-98°=262°$,∴ $\angle C=131°$.

2. 解:由 AC 为直径得 $\angle ABC=\angle ADC=90°$,

又 $\angle BAD=70°$,

则 $\angle BCD=360°-90°-90°-70°=110°$.

习题 3.3

1. 解:连接 OB,∵ $\angle ACB=30°$,

∴ $\angle AOB=60°$.

∵ $OA=OB$,∴ $\triangle ABO$ 是等边三角形,

∴ $\angle BAO=60°$.

2. 证明:连接 AD,

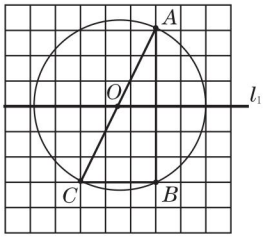
∵ $\angle ADC=\angle P+\angle A$,

∴ $\angle P=\angle ADC-\angle A$,

∵ $\angle ADC$ 的度数等于$\overset{\frown}{AC}$度数的一半,$\angle A$ 的度数等于$\overset{\frown}{BD}$度数的一半,

∴ $\angle P$ 的度数等于$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BD}$度数的差的一半.

3. 解:能. 如图所示,在圆上取三点 A,B,C,使 $\angle ABC$ 为直角,连接 AB,BC,AC,作 AB 的垂直平分线 l_1,与 AC 相交于点 O,点 O 即为所求.



(第 3 题)

理由:因为 $\angle ABC$ 为直角,所以 AC 为直径,而圆的另一条直径在直线 l_1 上,所以 l_1 与 AC 的交点为圆心.

4. 解:∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形,AD 为直径,

∴ $\angle ABD=90°$,$\angle C=60°$,

∴ $\angle ADB=\angle C=60°$,

∴ $\angle CBD=90°-60°=30°$.

5. 解:连接 OD,OE,则 $\angle AOD=40°$,

又∵ $CD=CO$,∴ $\angle D=\angle AOD=40°$,

又∵ $OD=OE$,∴ $\angle DEO=\angle D=40°$,

∴ $\angle DOE=100°$,∴ $\angle AOE=60°$.

∴ $\angle BOE=120°$,∴ $\overset{\frown}{BE}$的度数是 120°.

6. 证明:∵ AD 平分 $\angle EAC$,∴ $\angle EAD=\angle DAC$.

又∵ $\angle EAC=\angle ABC+\angle ACB$,

∴ $2\angle DAC=\angle ABC+\angle ACB$,

∵ $\overset{\frown}{CD}$所对的圆周角是 $\angle DAC$ 和 $\angle DBC$,

∴ $\angle DAC=\angle DBC$. ∵ $\overset{\frown}{AD}$所对的圆周角是 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$,∴ $\angle ABD=\angle ACD$.

又∵ $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$,$\angle ACB=\angle DCB-\angle ACD$,

∴ $2\angle DAC=\angle ABD+\angle DBC+\angle DCB-\angle ACD$.

∴ $2\angle DAC=\angle DBC+\angle DCB$.

∴ $\angle DCB=\angle DAC$.

∴ $\angle DBC=\angle DCB$. ∴ $BD=CD$.

7. 解:过点 O 作 $OD\perp BC$ 于点 D,连接 OB,OC,则 $BD=CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $OD=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\angle BOD=45°$.

同理可得 $\angle COD=45°$,所以 $\angle BOC=90°$.

所以劣弧 BC 的度数为 90°. 当点 A 在优弧 BAC 上时,$\angle A=\dfrac{1}{2}\times 90°=45°$,当点 A 在劣弧 BC 上时,$\angle A=\dfrac{1}{2}\times(360°-90°)=135°$.

8. 解:设圆心为 O,连接 OA,OC,过点 O 作 $OD\perp AC$ 于点 D,则 $AD=CD=\dfrac{3}{2}$,

∵ $\angle B=60°$,∴ $\angle AOC=120°$.

又∵ $OA=OC$,∴ $\angle OAC=\angle OCA=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中,$\cos 30°=\dfrac{AD}{OA}$,

即$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\frac{3}{2}}{OA}$,

∴ $OA=\sqrt{3}$,即 $\triangle ABC$ 外接圆的半径是$\sqrt{3}$.

9. 解:$\triangle APQ$ 是等腰三角形,证明如下:

连接 AE,AF,∵ E 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,F 是$\overset{\frown}{AC}$的中点,

∴ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$,$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{CF}$.

∴ $\angle BAE=\angle AFE$,$\angle CAF=\angle AEF$.

∵ $\angle APQ=\angle AEF+\angle BAE$,$\angle AQP=\angle AFE+\angle CAF$,

∴ $\angle APQ=\angle AQP$. ∴ $AP=AQ$.

∴ $\triangle APQ$ 是等腰三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 证明：连接 AD，$\because AB$ 是直径，$AB \perp CD$，
$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$. $\because \angle AFD$，$\angle ADC$ 分别是 $\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角，$\therefore \angle AFD = \angle ADC$.
$\because$ 四边形 $AFCD$ 是圆内接四边形，
$\therefore \angle ADC + \angle AFC = 180°$，
$\therefore \angle AFD + \angle AFC = 180°$.
$\because \angle AFC + \angle GFC = 180°$，
$\therefore \angle GFC = \angle AFD$.

11. 解：(1) $\because D$，E 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的三等分点，$\therefore \angle BOD = \angle DOE = \angle COE = 60°$，又 $\because OD = OE$，$\therefore \triangle DOE$ 是等边三角形.
$\because OB = OD = OE = OC$，$\therefore \angle B = \angle C = 60°$，$\therefore \angle A = 60°$. 易求出 $\angle ADE = 60°$，$\angle AED = 60°$，$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形.
(2) $\triangle DOE$ 的形状不变，$\triangle ADE$ 的形状改变. 理由如下：$\because \angle A = 60°$ 不变，
$\therefore \angle B + \angle C = 120°$，
$\because OB = OD$，$OC = OE$，
$\therefore \angle B = \angle BDO$，$\angle C = \angle CEO$.
$\therefore \angle BDO + \angle CEO = 120°$.
$\because$ 四边形 $BCED$ 的内角和是 $360°$，
$\therefore \angle ODE + \angle OED = 120°$，
$\because OD = OE$，
$\therefore \angle ODE = \angle OED = 60°$.
$\therefore \triangle DOE$ 是等边三角形.
$\therefore \triangle DOE$ 的形状不变.
又 $\because \angle ADE = 180° - \angle ODE - \angle BDO$，$\angle B = \angle BDO$，$\therefore \angle ADE = 180° - 60° - \angle B = 120° - \angle B$. 随着点 D 的移动，$\angle B$ 的大小在变化，$\therefore \angle ADE$ 的大小在变化.
同理，$\angle AED$ 的大小也在变化，
$\therefore \triangle ADE$ 的形状在改变.

12. 解：(1) $\triangle ABE \backsimeq \triangle ADF$. 证明如下：
$\because \overset{\frown}{AE}$ 所对的圆周角是 $\angle ABE$ 和 $\angle ADF$，
$\therefore \angle ABE = \angle ADF$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中，

$$\because \begin{cases} AB = AD, \\ \angle ABE = \angle ADF, \\ BE = DF, \end{cases}$$

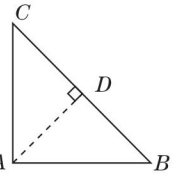
$\therefore \triangle ABE \backsimeq \triangle ADF$.
(2) 由 (1) 知，$\triangle ABE \backsimeq \triangle ADF$，则 $AE = AF$，$\angle BAE = \angle DAF$.
$\because \angle BAF + \angle DAF = 90°$，
$\therefore \angle BAF + \angle BAE = 90°$，
即 $\angle EAF = 90°$，$\therefore EF = \sqrt{2}AE$.
又 $\because DE - DF = EF$，$BE = DF$，
$\therefore DE - BE = \sqrt{2}AE$.

3.4 直线与圆的位置关系

练习

1. 解：直线 l 与 $\odot O$ 相切或相交. 画图略.

2. 解：如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，$AB = AC = 2$ cm，$\therefore BC = 2\sqrt{2}$ cm. 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2}BC \times AD$，



(第 2 题)

$$\therefore AD = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{2 \times 2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(\text{cm}),$$

即圆心 A 到 BC 的距离 $d = \sqrt{2}$ cm.
又 $\because AB = AC = 2$ cm，$\therefore$ 当 $\sqrt{2}$ cm $< r \leqslant 2$ cm 时，斜边 BC 与 $\odot A$ 相交.

练习

1. 解：AB 是 $\odot O$ 的切线. 理由如下：
连接 OC，$\because OA = OB$，$CA = CB$，
$\therefore OC \perp AB$. $\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.

2. 解：AE 与 $\odot O$ 相切. 理由如下：
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ACB = 90°$，
$\therefore \angle B + \angle CAB = 90°$.
又 $\because \angle CAE = \angle B$，$\therefore \angle CAE + \angle CAB = 90°$，即 $\angle BAE = 90°$.
$\therefore BA \perp AE$. $\therefore AE$ 与 $\odot O$ 相切.

练习

1. 证明：$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，
$\therefore \angle ACB = 90°$.
$\therefore \angle A + \angle CBA = 90°$.
又 $\because$ 直线 BE 是 $\odot O$ 的切线，
$\therefore \angle EBA = 90°$，即 $\angle CBA + \angle CBE = 90°$.
$\therefore \angle A = \angle CBE$.

2. 解：连接 OB，则 $OA = OB$，$OB \perp BC$，即 $\angle OBC = 90°$. $\because \angle A = 20°$，$\therefore \angle OBA = \angle A = 20°$，$\therefore \angle ABC = \angle OBA + \angle OBC = 110°$，$\therefore \angle C = 180° - \angle A - \angle ABC = 180° - 20° - 110° = 50°$.

练习

1. 解：连接 OA，OB，则 $OA = OB$.
$\because PA$，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，
$\therefore PA = PB$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $OP=OP$，∴ $\triangle PAO\cong\triangle PBO$.

∴ $\angle APO=\angle BPO$.

∵ PA,PB 是$\odot O$的两条切线.

∴ $OA\perp AP,OB\perp BP$.

在 Rt$\triangle PAO$ 中，由勾股定理，得

$OA^2+AP^2=OP^2$.

设 $OA=r$ cm，则 $r^2+16=(2+r)^2$.

解得 $r=3$. ∴ $\tan\angle APO=\dfrac{OA}{AP}=\dfrac{3}{4}$,

∴ $\angle APO\approx37°$，∴ $\angle APB\approx74°$.

2. **解**：连接 MA,MB，则 $MA=MB$.

∵ $\odot M$ 与 x 轴，y 轴分别相切于点 A,B,

∴ $MA\perp x$ 轴，$MB\perp y$ 轴.

又∵ $\angle AOB=90°$,

∴ 四边形 $AMBO$ 是正方形,

∴ $MA=MB=OB=OA$.

∵ 点 B 的坐标是$(0,3)$,

∴ 点 M 的坐标是$(-3,3)$.

∵ $OB=OA=3$，∴ $AB=3\sqrt{2}$.

过点 M 作 $MD\perp AB$ 于 D，则 $S_{\triangle AMB}=\dfrac{1}{2}MA\times MB=\dfrac{1}{2}AB\times MD$,

∴ $MD=\dfrac{MA\times MB}{AB}=\dfrac{3\times3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

∴ 点 M 到弦 AB 的距离是$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

习题 3.4

1. (1) $a>2$ 或 $a<-2$　(2) $a=\pm2$

(3) $-2<a<2$

2. **解**：由题意，易得 $BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,BG=\dfrac{a}{2}$,

又∵ $BC=a$,

∴ 以点 B 为圆心，以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ 为半径的圆与直线 AC 相切，与直线 FG 相交，与直线 DC 相离.

3. **解**：相切. 理由如下：

连接 OD，则$\angle ODB=90°$.

过点 O 作 $OE\perp AC$ 于 E，则 $\angle OEC=90°$.

∵ $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

∴ $\angle B=\angle C$.

∵ O 是底边 BC 的中点，∴ $OB=OC$.

在$\triangle ODB$ 和$\triangle OEC$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle ODB=\angle OEC=90°,\\ \angle B=\angle C,\\ OB=OC,\end{cases}$

∴ $\triangle ODB\cong\triangle OEC$，∴ $OD=OE$.

又∵ $\odot O$ 与 AB 相切于点 D，∴ OD 为$\odot O$的半径. ∴ $\odot O$ 与 AC 相切.

4. **解**：CD 与$\odot O$相切. 理由如下：连接 OA, OB,OC，且 OC 与 AB 交于点 E，则 $OA=OB=OC$，∵ C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，∴ $\angle AOC=\angle BOC$. 又∵ $OE=OE$，∴ $\triangle AOE\cong\triangle BOE$,

∴ $AE=BE$.

∴ $OE\perp AB$，∵ $CD/\!/AB$，∴ $OC\perp CD$.

∴ CD 与$\odot O$相切.

5. **解**：连接 OA，∵ $l\perp OC$，∴ $AH=BH=4$ cm,

∴ 由勾股定理，得 $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm).

又∵ $OC=5$ cm,

∴ $CH=OC-OH=5-3=2$(cm).

∴ 将直线 l 向下平移 2 cm 时，l 能与$\odot O$相切.

6. **解**：直线 BE 与$\odot O$相切，理由如下：

连接 OB，则 $OA=OB$，∴ $\angle A=\angle OBC$.

∵ $OC\perp OA$，∴ $\angle AOC=90°$,

∴ $\angle A+\angle OCA=90°$.

∵ $\angle OCA=\angle ECB,CE=BE$,

∴ $\angle OCA=\angle EBC$.

∴ $\angle OBC+\angle EBC=90°$，即 $OB\perp BE$.

∴ 直线 BE 与$\odot O$相切.

7. **解**：CE 与 AD 垂直. 理由如下：

连接 OC，则 $OC\perp CE$.

∵ $OA=OC$，∴ $\angle OAC=\angle OCA$.

∵ AC 平分$\angle BAE$，∴ $\angle EAC=\angle BAC$.

又∵ $\angle OCA+\angle ACE=90°$,

∴ $\angle EAC+\angle ACE=90°$,

∴ $\angle AEC=90°$，∴ $CE\perp AD$.

8. **解**：连接 OA,OB,OC,OD,OE，则 $OA=OB=OC,OA\perp PA,OB\perp PB,OC\perp DE$.

在 Rt$\triangle OBE$ 和 Rt$\triangle OCE$ 中，

∵ $\begin{cases}OB=OC,\\ OE=OE,\end{cases}$

∴ Rt$\triangle OBE\cong$Rt$\triangle OCE$，∴ $BE=CE$.

同理可证 $AD=CD$.

∵ $\triangle PDE$ 的周长为 12,

∴ $PD+DC+CE+PE=12$.

∴ $PD+AD+BE+PE=12$，即 $PA+PB=12$.

又∵ PA,PB 分别与$\odot O$相切于点 A,B,

∴ $PA=PB$，∴ $PA=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 证明:连接 AP,OP,

则 $\angle APB=\angle APC=90°$.

$\because AC$ 为 $\odot O$ 的切线,$\therefore \angle BAC=90°$,

即 $\angle OAP+\angle QAP=90°$.

$\because OA=OP$,$\therefore \angle OAP=\angle OPA$.

又$\because Q$ 是 AC 的中点,$\angle APC=90°$,

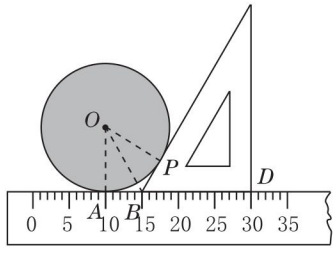
$\therefore AQ=PQ=QC$.

$\therefore \angle QAP=\angle QPA$.

$\therefore \angle OPA+\angle QPA=90°$,即 $OP\perp PQ$.

$\therefore PQ$ 是 $\odot O$ 的切线.

10. 解:如图,设圆的圆心为 O,圆与三角尺的切点为 P,连接 OA,OB,OP,则 $OA\perp AB$,$OP\perp BP$,



(第 10 题)

即 $\angle OAB=\angle OPB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle POB$ 中,

$\because \begin{cases} OA=OP, \\ OB=OB, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle POB$.

$\therefore \angle OBA=\angle OBP$.

$\because \angle PBD=60°$,$\therefore \angle ABP=120°$,

$\therefore \angle OBA=\angle OBP=60°$,

$\because \tan 60°=\dfrac{OA}{AB}$,$AB=5$ cm,

$\therefore OA=5\times\tan 60°=5\sqrt{3}$(cm).

$\therefore$ 圆形工件的直径是 $10\sqrt{3}$ cm.

点拨:本题主要考查了圆的切线的性质和构造直角三角形,利用解直角三角形的知识来解题.

11. 解:连接 OC,$\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCP=90°$.

又$\because AD$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OAD=90°$,$\therefore \angle PAD=90°$.

$\therefore \angle OCP=\angle PAD$.

又$\because \angle P=\angle P$,

$\therefore \triangle POC\backsim\triangle PDA$,$\therefore \dfrac{PO}{PD}=\dfrac{OC}{DA}=\dfrac{PC}{PA}$.

由切线长定理,得 $CD=AD=2$ cm.

又$\because CD:DP=1:2$,

$\therefore DP=4$ cm,

$\therefore PC=CD+PD=6$ cm.

又$\because PO=OA+PA$,

$\therefore \dfrac{OA+PA}{4}=\dfrac{OC}{2}=\dfrac{6}{PA}$.

$\therefore OC=2\sqrt{3}$ cm,

$\therefore \odot O$ 的半径是 $2\sqrt{3}$ cm.

点拨:本题主要考查了圆的切线的性质和相似三角形的判定和性质.

12. 解:连接 OD,CD,$\because DE$ 切 $\odot O$ 于点 D,

$\therefore \angle ODE=90°=\angle OCE$.

$\because OC=OD$,$\therefore \angle OCD=\angle ODC$.

$\therefore \angle OCE-\angle OCD=\angle ODE-\angle ODC$,

即 $\angle DCE=\angle EDC$,$\therefore CE=DE$.

$\because \angle ADC=90°$,$\therefore \angle BDC=90°$.

$\therefore \angle B+\angle BCD=90°$.

又$\because \angle CDE+\angle EDB=90°$.

$\therefore \angle B=\angle EDB$,$\therefore DE=EB$.

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}BC$,$\because BC=10$,$\therefore DE=5$.

13. 解:①$AB^2=AC\cdot AD$;②$\angle DBE$ 的度数等于$\overset{\frown}{BD}$的度数的一半.

证明如下:连接 OB,BC,则 $\angle CBD=90°$,$\angle ABO=\angle OBE=90°$.

$\because OB=OC$,$\therefore \angle OBC=\angle OCB$.

$\because OB=OD$,

$\therefore \angle OBD=\angle D$. $\because \angle ABO=90°$,$\angle A=20°$,$\therefore \angle AOB=70°$,

$\therefore \angle BOD=110°$,$\therefore \angle OBC=\angle OCB=55°$,$\angle OBD=\angle D=35°$.

$\therefore \angle ACB=180°-55°=125°$,$\angle ABC=90°-55°=35°$,$\angle ABD=90°+35°=125°$.

①在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$\because \begin{cases} \angle A=\angle A, \\ \angle ACB=\angle ABD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle ABD$,

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{AD}$,即 $AB^2=AC\cdot AD$.

②$\because \angle BOD=110°$,$\therefore \overset{\frown}{BD}$的度数是 $110°$.

$\because \angle DBE=\angle OBE-\angle OBD=90°-35°=55°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle DBE$ 的度数等于$\overset{\frown}{BD}$的度数的一半.

点拨:本题主要考查了圆的切线的性质和等边对等角以及相似三角形的判定和性质等知识点. 答案不唯一.

14. 解:能. ①先用刻度尺量出从墙角到这张圆桌与墙的切点的距离,再乘 2,即为这张圆桌的直径.

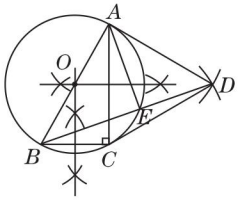
②用刻度尺量出这张圆桌与墙的两切点之间的距离,再根据勾股定理,用量得的距离除以$\sqrt{2}$,再乘 2,即为这张圆桌的直径.

方案①:利用了圆的切线的性质及正方形的判定与性质.

方案②:利用了切线长定理及勾股定理.

点拨:答案不唯一,合理即可.

15. 解:(1)如图.



(第 15 题)

(2)①AD 与$\odot O$相切. 证明如下:

$\because AB=4, BC=2$,

$\therefore \angle BAC=30°$.

$\because \triangle ACD$ 为等边三角形,

$\therefore \angle CAD=60°$,

$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=30°+60°=90°$,$\therefore BA\perp AD$.

$\therefore AD$ 与$\odot O$ 相切.

②$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle AEB=90°$.

$\because AB=4, BC=2$,

$\therefore$ 由勾股定理,得 $AC=2\sqrt{3}$.

$\because \triangle ACD$ 是等边三角形,

$\therefore AC=AD=CD=2\sqrt{3}$.

$\because \angle BAD=90°$,$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$.

$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\times AD=\frac{1}{2}BD\times AE$,

$\therefore AE=\frac{AB\times AD}{BD}=\frac{4\times 2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

3.5 三角形的内切圆

练习

1. 略.

2. 解:$\because \angle BAC=40°, \angle ABC=70°$,

$\therefore \angle ACB=70°$.

$\because I$ 是$\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore \angle IAB=\angle IAC=20°$, $\angle IBA=\angle IBC=35°$, $\angle ICB=\angle ICA=35°$.

$\therefore \angle AIB=180°-\angle IAB-\angle IBA=125°$,

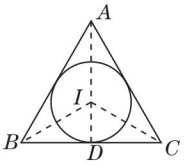
$\angle BIC=180°-\angle IBC-\angle ICB=180°-35°-35°=110°$.

$\angle AIC=180°-\angle IAC-\angle ICA=180°-20°-35°=125°$.

习题 3.5

1. D

2. 解:如图,在$\triangle ABC$ 中,$AB=BC=AC=a$,I 是$\triangle ABC$ 的内心,$\odot I$ 与 BC 相切于点 D,连接 IB, IC, ID, IA,易知 A, I, D 三点共线,则 $AD\perp BC$, $BD=CD=\frac{a}{2}$,$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.



(第 2 题)

由题意易得$\triangle AIB\cong\triangle CIB\cong\triangle AIC$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BIC}$,

$\therefore \frac{1}{2}BC\times AD=3\times\frac{1}{2}BC\times ID$,

即 $AD=3ID$,$\therefore ID=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

$\therefore$ 内切圆的半径是$\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

3. 证明:$\because \odot O$ 与边 BC, CA 分别切于 D, E 两点,$\therefore OD\perp BC$, $OE\perp AC$,即 $\angle ODC=\angle OEC=90°$.

又$\because \angle C=90°$,$\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是矩形.

又$\because OD=OE$,$\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是正方形.

4. 证明:连接 OE, OF,则$\angle AEO=\angle AFO=90°$.

$\because$ 四边形 $AEOF$ 的内角和是 360°,

$\therefore \angle A+\angle EOF=180°$.

$\therefore \frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle EOF=90°$.

又$\because \angle FDE=\frac{1}{2}\angle EOF$,

$\therefore \frac{1}{2}\angle A+\angle FDE=90°$.

* **5. 解**:设 $AD=x, BE=y, CF=z$,

$\because \odot O$ 内切于$\triangle ABC$,切点分别是 D, E, F,

$\therefore AD=AF, BD=BE, CE=CF$.

$\because AB=9, BC=8, CA=7$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases} x+y=9, \\ y+z=8, \\ z+x=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=5, \\ z=3. \end{cases}$

$\therefore AD=4, BE=5, CF=3.$

6. 证明: $\because I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore AI$ 平分 $\angle BAC$, BI 平分 $\angle ABC$.

$\therefore \angle BAI=\angle CAI, \angle ABI=\angle CBI.$

$\because \angle BAI$ 所对的弧是 $\overset{\frown}{BD}$, $\angle CAI$ 所对的弧是 $\overset{\frown}{CD}$,

$\therefore \overset{\frown}{BD}$ 的度数等于 $\overset{\frown}{CD}$ 的度数.

$\therefore \angle DCB=\angle DBC, \therefore DC=DB.$

又 $\because \angle BID=\angle BAI+\angle ABI$, $\angle DBI=\angle DBC+\angle CBI$, 且 $\angle DBC=\angle CAI=\angle BAI$, $\angle ABI=\angle CBI$,

$\therefore \angle BID=\angle DBI, \therefore DI=DB.$

$\therefore DB=DC=DI.$

3.6 弧长及扇形面积的计算

练习

1. 解: 设桥拱 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l, 则 $l=\dfrac{n\pi r}{180}=\dfrac{90\times 30\pi}{180}\approx 47.1(\text{m})$.

所以,桥拱 $\overset{\frown}{AB}$ 的长约为 47.1 m.

2. 解: 连接 OA, OB, 过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D, 则 $AD=BD=5$ cm, 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}(\text{cm})$.

又 $\because OA=10$ cm, $AD=5$ cm, $\therefore \angle AOD=30°$, 即 $\angle AOB=60°$. $\therefore S_{\text{扇形}AOB}=\dfrac{n\pi r^2}{360}=\dfrac{60\pi\times 10^2}{360}=\dfrac{50\pi}{3}(\text{cm}^2)$. 又 $\because S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}AB\times OD=\dfrac{1}{2}\times 10\times 5\sqrt{3}=25\sqrt{3}(\text{cm}^2)$,

$\therefore$ 截面中有水部分的面积 $=S_{\text{扇形}AOB}-S_{\triangle AOB}=\dfrac{50\pi}{3}-25\sqrt{3}\approx 9.0(\text{cm}^2)$.

$\therefore$ 截面中有水部分的面积约是 9.0 cm^2.

点拨: 连接 OA, OB, 过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D, 利用勾股定理求出 OD 的长, 再利用直角三角形的性质求出 $\angle AOB$ 的度数, 然后由 $S_{\text{扇形}AOB}-S_{\triangle AOB}$ 求解即可.

习题 3.6

1. 解: 由 $l=\dfrac{n\pi r}{180}$, 得 $12=\dfrac{81\pi r}{180}$, 解得 $r\approx 8.5$.

所以,这段弧的半径 r 约是 8.5 m.

2. 解: 由 $S_{\text{扇形}}=\dfrac{1}{2}lr$, 得 $S_{\text{扇形}}=\dfrac{1}{2}\times 3\pi\times 8=12\pi(\text{cm}^2)$.

所以,该扇形的面积为 12π cm^2.

3. 解: 由题意,易得 $ME=NE=1$. $\because E$ 是 BC 的中点, $\therefore BE=CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中, $\because \cos\angle BEM=\dfrac{BE}{ME}$,

$\therefore \cos\angle BEM=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \angle BEM=30°$.

同理 $\angle CEN=30°$.

$\therefore \angle MEN=180°-30°-30°=120°$.

$\therefore S_{\text{扇形}EMN}=\dfrac{n\pi r^2}{360}=\dfrac{120\pi\times 1^2}{360}=\dfrac{\pi}{3}$.

4. 解: 过点 O 作 $OE\perp AB$ 于 E, 连接 OA, 则 $AE=BE=\dfrac{a}{2}$. $\because AD$ 与小半圆形相切于点 D, 且 $AB/\!/MN$, $\therefore OE$ 的长就是小圆的半径的长. 设大圆的半径为 R, 小圆的半径为 r, 则在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, $OA^2-OE^2=AE^2$, 即 $R^2-r^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$. $\therefore S_{\text{剩余部分}}=\dfrac{n\pi R^2}{360}-\dfrac{n\pi r^2}{360}=\dfrac{180\pi(R^2-r^2)}{360}=\dfrac{180\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2}{360}=\dfrac{\pi a^2}{8}$.

5. 解: 题图中四个半圆都通过正方形的中心,用正方形的面积减去四个空白的面积,剩下的就是阴影部分的面积,而正方形的面积减去两个半圆的面积就是两个空白的面积,所以所求阴影部分的面积为 $a^2-\left[a^2-\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right]\times 2=\dfrac{\pi a^2}{2}-a^2=\dfrac{\pi-2}{2}a^2$.

6. 证明: 连接 O_1B, O_1C, 设 $\odot O$ 的半径为 R, $\angle COA$ 的度数为 $n_1°$, $\angle BO_1A$ 的度数为 $n_2°$, 则 $\odot O_1$ 的半径为 $\dfrac{R}{2}$. 在 $\odot O$ 中, $\overset{\frown}{AC}$ 的长为 $\dfrac{n_1\pi R}{180}$, 在 $\odot O_1$ 中, $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\dfrac{n_2\pi\times\frac{R}{2}}{180}$.

$\because$ 在 $\odot O_1$ 中, $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AO_1B$ 的度数等于它所对的圆周角 $\angle AOB$ 的 2 倍, 即 $\angle AO_1B=2\angle AOB$. $\therefore n_2=2n_1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \dfrac{n_1\pi R}{180}=\dfrac{\frac{n_2}{2}\pi R}{180}=\dfrac{n_2\pi\times\frac{R}{2}}{180}$.

$\therefore \overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{AB}$的长相等.

7. 解:(1)根据弧长公式可得

点 D 沿三条圆弧运动到点 G 所经过的路线长 $=\dfrac{90\pi\times1}{180}+\dfrac{90\pi\times2}{180}+\dfrac{90\pi\times3}{180}=3\pi$.

(2)由题知,$S_{阴影}=S_{扇形GCF}-S_{\triangle GCB}+S_{扇形DAE}+S_{扇形EBF}=\dfrac{90\pi\times3^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times3\times1+\dfrac{90\pi\times1^2}{360}+\dfrac{90\pi\times2^2}{360}=\dfrac{7\pi-3}{2}$.

点拨:本题的解题关键是掌握弧长公式以及扇形面积公式.

3.7 正多边形与圆

练习

1. 解:(1)不是. 如正方形,它是正多边形,但它的对称轴有的不经过正方形的顶点.

(2)是.

(3)不是. 如有一个角是 60°的菱形,它既是轴对称图形,又是中心对称图形,但它不是正多边形.

(4)不是. 如直角三角形,它有一个外接圆和一个内切圆,但它不是正多边形.

2.

边数 n	内角 α	中心角 α_n	半径 R_n	边长 a_n	边心距 r_n	周长 P_n	面积 S_n
3	60°	120°	2	$2\sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
4	90°	90°	$\sqrt{2}$	2	1	8	4
6	120°	60°	2	2	$\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$

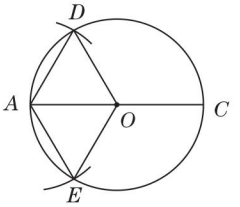
练习

1. 解:已知:⊙O(如图).

求作:⊙O 的三等分点.

作法:(1)过圆心 O 作⊙O 的任意一条直径 AC.

(2)以 A 为圆心,AO 的长为半径画弧交⊙O 于 D,E 两点.



(第 1 题)

(3)连接 OD,OE,AD,AE,则 $\angle AOD=\angle AOE=60°$.

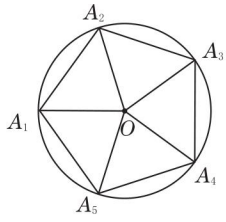
故 $\angle EOD=120°$,

$\angle COD=120°$,

$\angle COE=120°$.

点 C,D,E 就是所求作的三等分点.

2. 解:如图,画一个圆,记为⊙O,在⊙O 上取一点 A_1,连接 A_1O,以 A_1O 为一边,画 $\angle A_1OA_2=\dfrac{360°}{5}=72°$,再以 A_2O 为一边,画 $\angle A_2OA_3=\dfrac{360°}{5}=72°$,同样画 $\angle A_3OA_4=72°$,$\angle A_4OA_5=72°$,其中 A_2,A_3,A_4,A_5 都在⊙O 上,这样就可以把⊙O 分成 5 等份. 顺次连接这 5 个分点,就得到一个正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$.



(第 2 题)

习题 3.7

1. 解:连接 OA,OC,OD,OF,则 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle AOF=60°$,$OA=OB=OC=OD=OE=OF=2$,$AB=BC=CD=DE=EF=FA=2$.

设 AF 与 x 轴交于点 M,CD 与 x 轴交于点 N,∵ x 轴、y 轴分别是正六边形的对称轴,

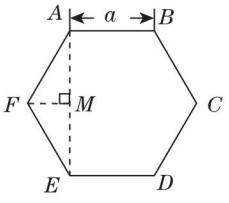
$\therefore \angle AOM=30°$.

在 Rt $\triangle AOM$ 中,$AM=1$,$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

同理可得 $CN=DN=1$,$ON=\sqrt{3}$,$FM=1$.

$\therefore$ 点 A 的坐标是$(\sqrt{3},1)$,点 B 的坐标是$(0,2)$,点 C 的坐标是$(-\sqrt{3},1)$,点 D 的坐标是$(-\sqrt{3},-1)$,点 E 的坐标是$(0,-2)$,点 F 的坐标是$(\sqrt{3},-1)$.

2. 解:如图,连接 AE. 要使扳手夹紧螺帽,扳手的开口 b 最小应是 AE 的长,由题意可知 $AB=AF=FE=a$,$\angle AFE=120°$,过点 F 作 $FM\perp AE$ 于 M,则 $AM=EM$,



(第 2 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle AFM = \angle EFM = 60°$. 在 Rt $\triangle AFM$ 中,

$\sin \angle AFM = \frac{AM}{AF}$. 即 $\sin 60° = \frac{AM}{a}$,

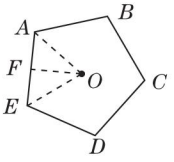
所以 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

所以 $AE = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times 12 = 12\sqrt{3}$(mm).

所以,扳手的开口 b 最小应是 $12\sqrt{3}$ mm.

3. 解:如图,正五边形 $ABCDE$ 中,$AB = BC = CD = DE = EA = 48$ cm,

它的外接圆的圆心为 O,连接 OA,OE,过点 O 作 $OF \perp AE$ 于 F,则 $OA = OE$,$AF = EF = 24$ cm.



(第 3 题)

由题意可知 $\angle AOE = 72°$,则 $\angle AOF = 36°$.

在 Rt $\triangle AOF$ 中,

$\tan \angle AOF = \frac{AF}{OF}$,

即 $\tan 36° = \frac{24}{OF}$,

$\therefore OF = \frac{24}{\tan 36°} \approx 33.0$(cm).

又$\because \sin 36° = \frac{AF}{OA}$,

$\therefore OA = \frac{AF}{\sin 36°} = \frac{24}{\sin 36°} \approx 40.8$(cm).

$\therefore$ 它的半径 R_5 和边心距 r_5 分别是 40.8 cm 和 33.0 cm.

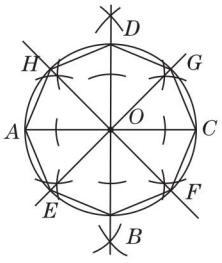
4. 解:已知:$\odot O$(如图).

求作:$\odot O$ 的内接正八边形 $AEBFCGDH$.

作法:(1)过圆心 O 作 $\odot O$ 的任意一条直径 AC.

(2)过点 O 作 AC 的垂线,交 $\odot O$ 于 B,D 两点.

(3)分别作 $\angle AOB$,$\angle BOC$,$\angle COD$,$\angle DOA$ 的平分线,分别交 $\odot O$ 于点 E,F,G,H.



(第 4 题)

(4)顺次连接 A,E,B,F,C,G,D,H,A(如图).

正八边形 $AEBFCGDH$ 就是所求作的 $\odot O$ 的内接正八边形.

5. 略.

6. 解:由题意可知正八边形 $ABCDEFGH$ 的每个内角为 135°,则 $\angle PAH = \angle PHA = 45°$,所以 $PA = PH$.

设 $PA = PH = x$ cm,则 $AH = \sqrt{2}x$ cm,所以正八边形 $ABCDEFGH$ 的每条边长为 $\sqrt{2}x$ cm,

又因为 $\angle SGF = \angle SFG = 45°$,$SG = SF = x$ cm,$SG + GH + PH = SP$,即 $x + \sqrt{2}x + x = 20$,解得 $x = 10(2 - \sqrt{2})$.

所以 $\sqrt{2}x = 10\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) \approx 8.3$.

所以正八边形的边长约是 8.3 cm.

7. 解:因为六边形 $DEFGHI$ 是正六边形,

所以正六边形 $DEFGHI$ 的每个内角是 120°,每条边相等.

由此易得 $\triangle ADI$、$\triangle BEF$、$\triangle CHG$ 是全等的正三角形,$\triangle ABC$ 是正三角形. 设 $AD = x$,则 $AB = 3x$,$AC = 3x$,$BC = 3x$.

所以 $P_3 = 3x + 3x + 3x = 9x$,$P_6 = 6x$,

所以 $P_6 : P_3 = 6 : 9 = 2 : 3$.

过点 A 作 $AM \perp DI$ 于点 M,并延长 AM 交 BC 于点 N,则

$AN \perp BC$,$DM = IM = \frac{x}{2}$,$BN = CN = \frac{3}{2}x$.

在 Rt $\triangle ADM$ 中,$AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

所以 $S_{\triangle ADI} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

所以 $S_6 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

同理在 Rt $\triangle ABN$ 中,$AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{(3x)^2 - \left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x$.

所以 $S_3 = \frac{1}{2} \times 3x \times \frac{3\sqrt{3}}{2}x = \frac{9\sqrt{3}}{4}x^2$.

所以 $S_6 : S_3 = 2 : 3$.

8. 解:(1)在正方形中,设 AC 与 BD 相交于点 O,则易得 $\angle AOD = \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 90°$.

$\therefore \alpha_4 = 90°$.

在正五边形中,设 AC 与 BD 相交于点 O_1,

$\because$ 正五边形 $ABCDE$ 的每个内角是 108°,且每条边相等,

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 36°$,$\angle CBD = \angle CDB = 36°$.

$\therefore \angle BO_1C = 180° - \angle CBD - \angle BCA =$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$180°-36°-36°=108°$.

$\therefore \alpha_5=108°$.

在正六边形中,设 AC 与 BD 相交于点 O_2,

∵ 正六边形的每个内角是 $120°$,且每条边相等,∴ $\angle BAC=\angle BCA=30°$,$\angle CBD=\angle CDB=30°$,∴ $\angle BO_2C=180°-\angle CBD-\angle BCA=180°-30°-30°=120°$,

$\therefore \alpha_6=120°$.

(2)由(1)可知,正 n 边形的"相邻"两条对角线的夹角的度数 $\alpha_n=\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

综合练习

1. (1)D　(2)C

2. (1)$3\leqslant OP\leqslant 5$　(2)$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}\theta$

3. **解**:连接 MC,∵ $A(-2,0)$,$B(6,0)$.

$\therefore AB=2+6=8$,∴ $AM=MC=4$.

$\therefore OM=AM-AO=2$.

则 $OC=\sqrt{MC^2-OM^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,

$\therefore OD=OC=2\sqrt{3}$.

$\therefore C(0,2\sqrt{3})$,$D(0,-2\sqrt{3})$.

4. **解**:$BC=CD$,$\angle BAC=\angle DAC$,

$\angle BCA=\angle DCA$,$\triangle ABC\cong\triangle ADC$,

$\angle ABC=\angle ADC$.

点拨:答案不唯一.

5. (1)**证明**:连接 OE.

∵ BE 是角平分线,∴ $\angle OBE=\angle CBE$.

∵ $OB=OE$,∴ $\angle OBE=\angle OEB$,

$\therefore \angle OEB=\angle CBE$.

$\therefore OE/\!/BC$,∴ $\angle C=\angle OEA$.

∵ $\angle C=90°$,∴ $\angle OEA=90°$.

$\therefore AC$ 是⊙O 的切线.

(2)**解**:相似.

$\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{CE}{ED}$.

6. **解**:连接 AD,BC.

∵ $\angle D=\angle B$,$\angle A=\angle C$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle CBE$.

$\therefore \dfrac{AE}{CE}=\dfrac{ED}{EB}$,∴ $\dfrac{3}{4}=\dfrac{ED}{8}$,

$\therefore ED=6$ cm,

$\therefore CD=4+6=10$(cm).

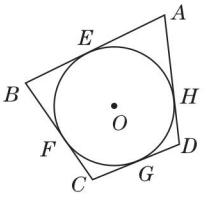
7. **解**:已知:如图,四边形 $ABCD$ 是⊙O 的外切四边形,切点分别是 E,F,G,H.

求证:$AB+CD=AD+BC$.

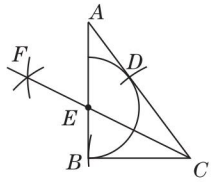
证明:由切线长定理可得 $AE=AH$,

$BE=BF$,$CF=CG$,$GD=DH$,

$\therefore AB+CD=AE+BE+CG+GD=AH+BF+CF+DH=(AH+DH)+(BF+CF)=AD+BC$.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. **解**:(1)已知△ABC,AC 为斜边,$AB>BC$,以 C 为圆心,CB 长为半径画弧,交 AC 于点 D,分别以 B,D 为圆心,大于 $\dfrac{1}{2}BD$ 长为半径画弧,两弧交于点 F,连接 CF 交 AB 于 E,以 E 为圆心,EB 长为半径画半圆,如图.

(2)略.

(3)当圆心在斜边上时作出的半圆的面积最大.

9. **解**:设 AB 与小圆相切于点 M,连接 OM,

则 $OM\perp AB$,$AM=\dfrac{1}{2}AB$.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a,

$\therefore$ 在 Rt△OAB 中,$OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

又∵ 在 Rt△OAM 中,$AM=\dfrac{1}{2}a$,

$\therefore OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2}=\dfrac{1}{2}a$,

即小圆的半径为 $\dfrac{1}{2}a$.

设 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l_1,$\overset{\frown}{EF}$ 的长为 l_2,

则 $l_1-l_2=\dfrac{90\pi}{180}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{90\pi}{180}\times\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)\pi a$,

$S_{阴}=\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2=\dfrac{1}{16}\pi a^2$.

10. **解**:它们的外切正五边形的边心距的比为 2:1,周长的比为 2:1,面积的比为4:1.

11. **解**:连接 OD,BD,则 $\angle ADB=90°$.

∵ $CD\perp AB$,$CF\perp AD$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle CEO = \angle AFO = 90°$, $CE = ED = \frac{1}{2}CD$, $AF = FD = \frac{1}{2}AD$.

$\because \angle COE = \angle AOF$, $OC = OA$,

$\therefore \triangle COE \cong \triangle AOF$,

$\therefore OE = OF$, $CE = AF$, $\angle C = \angle A$.

$\because OC = OD$, $\therefore \angle C = \angle ODE$,

$\therefore \angle A = \angle ODE$.

又$\because \angle BDE = 90° - \angle B$, $\angle A = 90° - \angle B$,

$\therefore \angle BDE = \angle A$, $\therefore \angle BDE = \angle ODE$,

$\therefore OE = BE$,

$\therefore OE = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}$,

$\therefore CE = \sqrt{OC^2 - OE^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - OE^2}$

$= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$.

12. **解**:(1) $\angle BAC = \angle APB = \angle APC$, $\angle B = \angle C = \angle BAP = \angle CAP$.

证明:$\because AP \perp BC$,

$\therefore \angle APB = \angle APC = 90°$.

又$\because \angle BAC = 90°$,

$\therefore \angle BAC = \angle APB = \angle APC$.

$\because AB = AC$, $\angle BAC = 90°$,

$\therefore \angle B = \angle C = 45°$.

又$\because AP \perp BC$, $\therefore AP$ 为$\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle BAP = \angle CAP = 45°$.

$\therefore \angle B = \angle C = \angle BAP = \angle CAP$.

(2) $BP = CP = AP$.

证明:$\because AB = AC$, $AP \perp BC$, $\angle BAC = 90°$,

$\therefore BP = CP = AP$.

(3) $\overset{\frown}{EP} = \overset{\frown}{FP}$.

证明:由(1)知$\angle BAP = \angle CAP$,

$\therefore \overset{\frown}{EP} = \overset{\frown}{FP}$.

(4) $BA \perp AC$.

证明:$\because \angle BAC = 90°$, $\therefore BA \perp AC$.

(5) $\triangle APB \cong \triangle APC$.

证明:$\because AP \perp BC$,

$\therefore \angle APB = \angle APC = 90°$.

$\because AB = AC$, $AP = AP$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle APB \cong \mathrm{Rt}\triangle APC$.

(6) $\triangle APB \backsim \triangle APC \backsim \triangle CAB$.

证明:由(5)知 $\mathrm{Rt}\triangle APB \cong \mathrm{Rt}\triangle APC$,

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle APC$.

$\because \angle B = \angle B$, $\angle APB = \angle BAC = 90°$,

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle CAB$,

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle APC \backsim \triangle CAB$.

13. **解**:$\because$ 正三角形的周长为 S,

$\therefore$ 正三角形的边长为$\frac{S}{3}$.

$\because$ 正三角形的每个内角是 $60°$,

$\therefore$ 曲边三角形的周长为 $3 \times \frac{60\pi}{180} \times \frac{S}{3} = \frac{\pi}{3}S$.

14. **证明**:连接 OB.

$\because OA = OB$, $\therefore \angle A = \angle OBA$.

$\because OC \perp OA$, $\therefore \angle A + \angle APO = 90°$,

$\therefore \angle OBA + \angle APO = 90°$.

又$\because \angle APO = \angle BPC$,

$\therefore \angle OBA + \angle BPC = 90°$.

$\because PC = BC$, $\therefore \angle BPC = \angle PBC$,

$\therefore \angle OBA + \angle PBC = 90°$,

$\therefore \angle OBC = 90°$.

$\therefore BC$ 是$\odot O$ 的切线.

15. 略.

16. (1) **证明**:$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle C = 90°$, $\therefore \angle BAC + \angle B = 90°$.

$\because \angle CAE = \angle B$, $\therefore \angle BAC + \angle CAE = 90°$.

$\therefore \angle BAE = 90°$,

$\therefore AE$ 与$\odot O$ 相切于点 A.

(2) **解**:AE 与$\odot O$ 还相切于点 A. 理由:连接 AO,并延长交$\odot O$ 于点 D,连接 CD.

$\because AD$ 为$\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACD = 90°$.

$\therefore \angle DAC + \angle D = 90°$.

$\because \angle B = \angle D$, $\therefore \angle DAC + \angle B = 90°$.

$\because \angle CAE = \angle B$, $\therefore \angle DAC + \angle CAE = 90°$.

$\therefore \angle DAE = 90°$,

$\therefore AE$ 与$\odot O$ 还相切于点 A.

第4章 一元二次方程

4.1 一元二次方程

练习

1. **解**:(1)是. 因为符合一元二次方程的定义.

(2)不是. 因为整理后未知数的最高次数不是 2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)是. 因为符合一元二次方程的定义.
(4)不是. 因为含有两个未知数.
(5)是. 因为符合一元二次方程的定义.
(6)不是. 因为方程左边不是整式.

2. 解:(1)转化为一般形式是 $3x^2-x+8=0$,二次项系数是 3,一次项系数是 -1,常数项是 8.
(2)转化为一般形式是 $3x^2+x-11=0$,二次项系数是 3,一次项系数是 1,常数项是 -11.
(3)转化为一般形式是 $y^2+8y-2=0$,二次项系数是 1,一次项系数是 8,常数项是 -2.
(4)转化为一般形式是 $t^2+1=0$,二次项系数是 1,一次项系数是 0,常数项是 1.

练习

1. 解:①分别计算当 $x=1$、$x=2$ 时,方程左边的代数式 x^2+5x 的值,并比较它们的值与方程右边的 7 的大小,填写下表:

x	1	2
x^2+5x	6	14
与 7 比较	小于 7	大于 7

说明在 1 和 2 之间有方程的根,并且这个根的整数部分是 1.
②当 $x=1.5$ 时,$x^2+5x=9.75$,大于 7,说明在 1 和 1.5 之间有方程的根.
③当 $x=1.2$ 时,$x^2+5x=7.44$,大于 7,说明在 1 和 1.2 之间有方程的根.
④当 $x=1.1$ 时,$x^2+5x=6.71$,小于 7,说明在 1.1 和 1.2 之间有方程的根.
所以方程 $x^2+5x=7$ 的根的精确到 0.1 的近似值为 $x_1\approx1.1$ 或 $x_1\approx1.2$.
同理,方程 $x^2+5x=7$ 的根的精确到 0.1 的近似值为 $x_2\approx-6.1$ 或 $x_2\approx-6.2$.

2. 解:近似值是 $x\approx-4.3$ 或 $x\approx-4.4$.

习题 4.1

1. 解:(1)二次项系数是 7,一次项系数是 0,常数项是 1.
(2)二次项系数是 3,一次项系数是 $\sqrt{3}$,常数项是 0.
(3)二次项系数是 2,一次项系数是 7,常数项是 -9.

2. 解:(1)是,转化为一般形式是 $x^2+2x=0$,则二次项系数是 1,一次项系数是 2,常数项是 0.
(2)不是.
(3)不是.
(4)是,转化为一般形式是 $x^2-1=0$,则二次项系数是 1,一次项系数是 0,常数项是 -1.

3. 解:(1)$x=5$ 是 $x^2-6x+5=0$ 的根,$x=-3$ 不是 $x^2-6x+5=0$ 的根.
(2)$x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 都是 $2x^2-3x+1=0$ 的根.
(3)$x=\sqrt{3}$ 是 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$ 的根,$x=-\sqrt{3}$ 不是 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$ 的根.
(4)$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 和 $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 都是 $(2x-1)^2=3$ 的根.

4. 解:设甲数为 x,则乙数为 $4-x$.
$x(4-x)=1$,即 $x^2-4x+1=0$.
①当 $x=0$ 时,$x^2-4x+1=1>0$,
当 $x=1$ 时,$x^2-4x+1=-2<0$.
所以在 0 和 1 之间有方程的根,并且这个根的整数部分是 0.
②当 $x=0.5$ 时,$x^2-4x+1=-0.75<0$,
说明在 0 和 0.5 之间有方程的根.
③当 $x=0.2$ 时,$x^2-4x+1=0.24>0$,
说明在 0.2 和 0.5 之间有方程的根.
④当 $x=0.4$ 时,$x^2-4x+1=-0.44<0$.
当 $x=0.3$ 时,$x^2-4x+1=-0.11<0$.
所以方程的根的近似值是 $x_1\approx0.2$ 或 $x_1\approx0.3$.
同理,方程的根的近似值是 $x_2\approx3.7$ 或 $x_2\approx3.8$.

5. 解:(1)当 $x=2$ 时,$x^2+2x=8<10$,
当 $x=3$ 时,$x^2+2x=15>10$,
说明此方程的根的整数部分是 2.
当 $x=2.5$ 时,$x^2+2x=11.25>10$,
说明在 2 和 2.5 之间有方程的根.
当 $x=2.4$ 时,$x^2+2x=10.56>10$,
当 $x=2.3$ 时,$x^2+2x=9.89<10$.
所以此方程的根的近似值是 $x_1\approx2.3$ 或 $x_1\approx2.4$. 同理,方程的根的近似值是 $x_2\approx-4.3$ 或 $x_2\approx-4.4$.
(2)当 $x=1$ 时,$2x^2+5x-10=-3<0$,
当 $x=2$ 时,$2x^2+5x-10=8>0$,
说明此方程的根的整数部分是 1.
当 $x=1.5$ 时,$2x^2+5x-10=2>0$,
说明在 1 和 1.5 之间有方程的根.
当 $x=1.4$ 时,$2x^2+5x-10=0.92>0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $x=1.3$ 时,$2x^2+5x-10=-0.12<0$.
所以此方程的根的近似值是 $x_1\approx1.4$ 或 $x_1\approx1.3$.
同理,方程的根的近似值是 $x_2\approx-3.8$ 或 $x_2\approx-3.9$.

6. **解**:去括号,得 $5x^2+a-ax=3x+1$,
移项,得 $5x^2-ax-3x+a-1=0$,
合并同类项,得 $5x^2-(a+3)x+a-1=0$.

7. **解**:把 $x=-1$ 代入 $x^2-3x+k+1=0$,得 $1+3+k+1=0$,解得 $k=-5$.

8. **解**:将 $x^2=1-x$ 化为一般形式是 $x^2+x-1=0$.
当 $x=1$ 时,$x^2+x-1=1>0$,
当 $x=0$ 时,$x^2+x-1=-1<0$,
说明在 0 和 1 之间有方程的根,并且方程的根的整数部分是 0.
当 $x=0.5$ 时,$x^2+x-1=-0.25<0$,
说明在 0.5 和 1 之间有方程的根.
当 $x=0.7$ 时,$x^2+x-1=0.19>0$,
当 $x=0.6$ 时,$x^2+x-1=-0.04<0$,
说明在 0.6 和 0.7 之间有方程的根,并且方程的根的十分位上的数字是 6.
当 $x=0.65$ 时,$x^2+x-1=0.072\,5>0$,
说明在 0.6 和 0.65 之间有方程的根.
当 $x=0.62$ 时,$x^2+x-1=0.004\,4>0$,
说明在 0.6 和 0.62 之间有方程的根.
当 $x=0.61$ 时,$x^2+x-1=-0.017\,9<0$.
所以方程的根的近似值是 $x_1\approx0.61$ 或 $x_1\approx0.62$.
同理,方程的根的近似值是 $x_2\approx-1.61$ 或 $x_2\approx-1.62$.

9. **解**:方程可化为 $(1-m)x^2+3mx+1=0$,
当 $1-m=0$,即 $m=1$ 时,
原方程是一元一次方程.
当 $1-m\neq0$,即 $m\neq1$ 时,
原方程是一元二次方程.

4.2 用配方法解一元二次方程

练习

1. (1)49;7　(2)100;(-10)
(3)$\frac{9}{16};\frac{3}{4}$　(4)0.01;(-0.1)

2. **解**:(1)配方,方程两边都加 4,得 $x^2+4x+4=-3+4$,即 $(x+2)^2=1$,由平方根的意义,得 $x+2=\pm1$,所以 $x_1=-1,x_2=-3$.
(2)移项,得 $x^2-6x=7$,配方,方程两边都加 9,得 $x^2-6x+9=7+9$,即 $(x-3)^2=16$,由平方根的意义,得 $x-3=\pm4$,
所以 $x_1=-1,x_2=7$.
(3)移项,得 $y^2+2y=8$,配方,方程两边都加 1,得 $y^2+2y+1=8+1$,即 $(y+1)^2=9$,由平方根的意义,得 $y+1=\pm3$,
所以 $y_1=2,y_2=-4$.
(4)移项,得 $t^2-6t=-8$,配方,方程两边都加 9,得 $t^2-6t+9=-8+9$,即 $(t-3)^2=1$,由平方根的意义,得 $t-3=\pm1$,
所以 $t_1=4,t_2=2$.

练习

1. **解**:(1)方程两边都除以 3,得 $x^2-2x=0$,配方,方程两边都加 1,得 $x^2-2x+1=0+1$,即 $(x-1)^2=1$,由平方根的意义,得 $x-1=\pm1$,所以 $x_1=2,x_2=0$.

(2)方程两边都除以 2,得 $x^2-2x-\frac{3}{2}=0$,

移项,得 $x^2-2x=\frac{3}{2}$,配方,方程两边都加 1,得 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$,即 $(x-1)^2=\frac{5}{2}$,

由平方根的意义,得 $x-1=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$,

所以 $x_1=\frac{\sqrt{10}}{2}+1,x_2=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1$.

(3)方程两边都除以 2,得 $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$,

移项,得 $x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$,配方,方程两边都加 $\left(\frac{7}{4}\right)^2$,得 $x^2-\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^2$,即 $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$,

由平方根的意义,得 $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$,

所以 $x_1=3,x_2=\frac{1}{2}$.

(4)方程两边都除以 4,得 $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}=0$,

移项,得 $x^2-\frac{7}{4}x=\frac{1}{2}$,配方,方程两边都加 $\left(\frac{7}{8}\right)^2$,得 $x^2-\frac{7}{4}x+\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{8}\right)^2$,即 $\left(x-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{81}{64}$,由平方根的意

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

义，得 $x-\frac{7}{8}=\pm\frac{9}{8}$，

所以 $x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{4}$.

习题 4.2

1. 解：(1)配方，方程两边都加 16，

得 $x^2+8x+16=9+16$，即 $(x+4)^2=25$，

由平方根的意义，得 $x+4=\pm5$，

所以 $x_1=1$，$x_2=-9$.

(2)配方，方程两边都加 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$，

得 $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$，

即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

由平方根的意义，得 $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{3}{2}$，

所以 $x_1=3$，$x_2=0$.

(3)配方，方程两边都加 4，

得 $x^2+4x+4=-3+4$，

即 $(x+2)^2=1$，

由平方根的意义，得 $x+2=\pm1$，

所以 $x_1=-1$，$x_2=-3$.

(4)移项，得 $x^2-18x=-31$，配方，方程两边都加 81，得 $x^2-18x+81=-31+81$，即 $(x-9)^2=50$，由平方根的意义，得 $x-9=\pm5\sqrt{2}$，所以 $x_1=5\sqrt{2}+9$，$x_2=-5\sqrt{2}+9$.

2. 解：(1)移项，得 $x^2-6x=3$，配方，方程两边都加 9，得 $x^2-6x+9=3+9$，

即 $(x-3)^2=12$，

由平方根的意义，得 $x-3=\pm2\sqrt{3}$，

所以 $x_1=2\sqrt{3}+3$，$x_2=-2\sqrt{3}+3$.

(2)方程两边都除以 -1，得 $x^2-4x=-3$，配方，方程两边都加 4，

得 $x^2-4x+4=-3+4$，

即 $(x-2)^2=1$，

由平方根的意义，得 $x-2=\pm1$，

所以 $x_1=3$，$x_2=1$.

(3)方程两边都除以 2，得 $x^2-\frac{3}{2}x-1=0$.

移项，得 $x^2-\frac{3}{2}x=1$，配方，方程两边都加 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$，得 $x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$，由平方根的意义，得 $x-\frac{3}{4}=\pm\frac{5}{4}$，所以 $x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

(4)方程两边都除以 3，得 $x^2-2x-\frac{1}{3}=0$，

移项，得 $x^2-2x=\frac{1}{3}$，配方，方程两边都加 1，得 $x^2-2x+1=\frac{1}{3}+1$，即 $(x-1)^2=\frac{4}{3}$.

由平方根的意义，得 $x-1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$，$x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$.

3. 解：(1)$x^2-15x+45=-5$，

移项，得 $x^2-15x=-5-45$，即 $x^2-15x=-50$，

配方，两边都加 $\left(\frac{15}{2}\right)^2$，得 $x^2-15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=-50+\left(\frac{15}{2}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{15}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$，由平方根的意义，得 $x-\frac{15}{2}=\pm\frac{5}{2}$，

所以 $x_1=10$，$x_2=5$.

(2)$x^2-13x+40=x-5$，移项，合并同类项，得 $x^2-14x=-45$，配方，两边都加 49，得 $x^2-14x+49=-45+49$，即 $(x-7)^2=4$，由平方根的意义，得 $x-7=\pm2$，

所以 $x_1=9$，$x_2=5$.

4. 解：设这个矩形的长为 x 步，则宽为 $(x-12)$ 步，由题意，得

$x(x-12)=864$，即 $x^2-12x=864$，

$x^2-12x+36=864+36$，$(x-6)^2=900$，

所以 $x-6=\pm30$，

所以 $x_1=36$，$x_2=-24$(舍去).

所以 $x-12=36-12=24$.

答：这个矩形的长和宽分别为 36 步、24 步.

5. 证明：$2x^2-8x+18=2(x^2-4x)+18=2(x^2-4x+4-4)+18=2(x-2)^2-8+18=2(x-2)^2+10$，因为 $2(x-2)^2\geqslant0$，所以 $2(x-2)^2+10\geqslant10$，所以无论 x 取何实数，代数式 $2x^2-8x+18$ 的值不小于 10.

6. 解：$x^2+(x+7)^2=11^2$，化为一般形式为 $x^2+7x-36=0$，移项，得 $x^2+7x=36$，

配方，两边都加 $\left(\frac{7}{2}\right)^2$，得 $x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=36+\left(\frac{7}{2}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{193}{4}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由平方根的意义,得

$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{\sqrt{193}}{2}$,所以 $x_1=\frac{\sqrt{193}-7}{2}$,

$x_2=\frac{-\sqrt{193}-7}{2}$.

借助计算器得出的近似值是 $x_1\approx3.4$,$x_2\approx-10.4$.

比较略.

7. 解:设这 4 个数中最小的数是 x,则最大的数是 $x+8$,由题意,得 $x(x+8)=128$,

解得 $x_1=8$,$x_2=-16$(舍去).

答:这 4 个数中最小的数是 8.

8. 解:把 $x=-2$ 代入 $4x^2+4kx+k^2=1$,

得 $4\times(-2)^2+4k\times(-2)+k^2=1$,

整理得 $16-8k+k^2=1$,

即 $k^2-8k=-15$,解得 $k=3$ 或 $k=5$.

当 $k=3$ 时,$4x^2+4kx+k^2=1$ 可化为 $x^2+3x+2=0$,它的另一个根为 $x=-1$;

当 $k=5$ 时,$4x^2+4kx+k^2=1$ 可化为 $x^2+5x+6=0$,它的另一个根为 $x=-3$.

4.3 用公式法解一元二次方程

练习

1. 解:(1)这里 $a=1$,$b=6$,$c=5$.

$\because b^2-4ac=6^2-4\times1\times5=16>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2\times1}=-3\pm2$,

即 $x_1=-3+2=-1$,$x_2=-3-2=-5$.

(2)这里 $a=6$,$b=-13$,$c=-5$.

$\because b^2-4ac=(-13)^2-4\times6\times(-5)=289>0$,

$\therefore y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-13)\pm\sqrt{289}}{2\times6}=\frac{13\pm17}{12}$,

即 $y_1=\frac{13+17}{12}=\frac{5}{2}$,$y_2=\frac{13-17}{12}=-\frac{1}{3}$.

(3)将方程化为一般形式,

得 $2y^2-4y-1=0$.

这里 $a=2$,$b=-4$,$c=-1$.

$\because b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(-1)=24>0$,

$\therefore y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{24}}{2\times2}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$,

即 $y_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$,$y_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$.

(4)将方程化为一般形式,

得 $3x^2-8x-2=0$.

这里 $a=3$,$b=-8$,$c=-2$.

$\because b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(-2)=88>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{88}}{2\times3}=\frac{4\pm\sqrt{22}}{3}$,

即 $x_1=\frac{4+\sqrt{22}}{3}$,$x_2=\frac{4-\sqrt{22}}{3}$.

练习

1. 解:(1)这里 $a=1$,$b=-12$,$c=20$.

$\because b^2-4ac=(-12)^2-4\times1\times20=64>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{64}}{2\times1}=6\pm4$,

即 $x_1=6+4=10$,$x_2=6-4=2$.

(2)这里 $a=2$,$b=11$,$c=5$.

$\because b^2-4ac=11^2-4\times2\times5=81>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-11\pm\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{-11\pm9}{4}$,

即 $x_1=\frac{-11+9}{4}=-\frac{1}{2}$,

$x_2=\frac{-11-9}{4}=-5$.

(3)这里 $a=5$,$b=-2\sqrt{15}$,$c=3$.

$\because b^2-4ac=(-2\sqrt{15})^2-4\times5\times3=0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2\sqrt{15})\pm0}{2\times5}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

即 $x_1=x_2=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

(4)这里 $a=5$,$b=10$,$c=-6$.

$\because b^2-4ac=10^2-4\times5\times(-6)=220>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-10\pm\sqrt{220}}{2\times5}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=-1\pm\frac{\sqrt{55}}{5}$,

即 $x_1=-1+\frac{\sqrt{55}}{5}, x_2=-1-\frac{\sqrt{55}}{5}$.

2. 解:这里 $a=2, b=-6, c=3$.

$\because b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times3=12>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-6)\pm\sqrt{12}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$,

即 $x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\approx2.37, x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\approx0.63$.

习题 4.3

1. 解:(1)这里 $a=1, b=-3, c=-10$.

$\because b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-10)=49>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\times1}=\frac{3\pm7}{2}$,

即 $x_1=\frac{3+7}{2}=5, x_2=\frac{3-7}{2}=-2$.

(2)这里 $a=3, b=4, c=-7$.

$\because b^2-4ac=4^2-4\times3\times(-7)=100>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2\times3}=\frac{-2\pm5}{3}$,

即 $x_1=\frac{-2+5}{3}=1, x_2=\frac{-2-5}{3}=-\frac{7}{3}$.

(3)将方程化为一般形式,

得 $6x^2-7x+2=0$,

这里 $a=6, b=-7, c=2$.

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times2=1>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\times6}=\frac{7\pm1}{12}$,

即 $x_1=\frac{7+1}{12}=\frac{2}{3}, x_2=\frac{7-1}{12}=\frac{1}{2}$.

(4)将方程化为一般形式,

得 $4x^2-12x-1=0$,

这里 $a=4, b=-12, c=-1$.

$\because b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times(-1)=160>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-12)\pm\sqrt{160}}{2\times4}=\frac{3\pm\sqrt{10}}{2}$,

即 $x_1=\frac{3+\sqrt{10}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{10}}{2}$.

2. 解:(1)将方程化为一般形式,

得 $x^2+2x-10=0$.

这里 $a=1, b=2, c=-10$.

$\because b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-10)=44>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{44}}{2\times1}=$

$-1\pm\sqrt{11}$,

即 $x_1=-1+\sqrt{11}\approx2.3, x_2=-1-\sqrt{11}\approx-4.3$.

比较略.

(2)这里 $a=2, b=5, c=-10$.

$\because b^2-4ac=5^2-4\times2\times(-10)=105>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-5\pm\sqrt{105}}{2\times2}=\frac{-5\pm\sqrt{105}}{4}$,

即 $x_1=\frac{-5+\sqrt{105}}{4}\approx1.3$,

$x_2=\frac{-5-\sqrt{105}}{4}\approx-3.8$.

比较略.

3. 解:(1)将方程化为一般形式,

得 $x^2-2\sqrt{2}x-1=0$.

这里 $a=1, b=-2\sqrt{2}, c=-1$.

$\because b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times(-1)=12>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{12}}{2\times1}=$

$\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$,

即 $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}, x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

(2)这里 $a=2, b=2\sqrt{5}, c=1$.

$\because b^2-4ac=(2\sqrt{5})^2-4\times2\times1=12>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-2\sqrt{5}\pm\sqrt{12}}{2\times2}=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{2}$,

即 $x_1=\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}, x_2=\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:(1)这里 $a=1,b=-3,c=\frac{3}{2}$.

$\because b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times\frac{3}{2}=3>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-3)\pm\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$,

即 $x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\approx2.4,x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\approx0.6$.

(2)将方程化为一般形式为 $3x^2+10x+5=0$.

这里 $a=3,b=10,c=5$.

$\because b^2-4ac=10^2-4\times3\times5=40>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-10\pm\sqrt{40}}{2\times3}=\frac{-5\pm\sqrt{10}}{3}$,

即 $x_1=\frac{-5+\sqrt{10}}{3}\approx-0.6$,

$x_2=\frac{-5-\sqrt{10}}{3}\approx-2.7$.

5. 解:把 $x=2$ 代入 $x^2+kx-6=0$,得 $4+2k-6=0$,解得 $k=1$. 把 $k=1$ 代入 $x^2+kx-6=0$,得 $x^2+x-6=0$,解得 $x_1=2,x_2=-3$,则它的另一个根是 -3,k 的值是 1.

6. 解:$y^2-7y-8=0$,

这里 $a=1,b=-7,c=-8$.

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-8)=81>0$,

$\therefore y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-7)\pm\sqrt{81}}{2\times1}=\frac{7\pm9}{2}$,

即 $y=\frac{7+9}{2}=8$ 或 $y=\frac{7-9}{2}=-1$.

当 $y=8$ 时,$x^2+2x=8$,

解得 $x=2$ 或 $x=-4$.

当 $y=-1$ 时,$x^2+2x=-1$,

解得 $x_1=x_2=-1$.

综上可得 x 的值为 2 或 -4 或 -1.

7. 解:$x^2-7x+12=0$.

这里 $a=1,b=-7,c=12$.

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times12=1>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{7\pm1}{2}$,

即 $x_1=\frac{7+1}{2}=4,x_2=\frac{7-1}{2}=3$(不合题意,舍去).

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的周长是 $4\times4=16$.

8. 解:$x^2-10x+21=0$.

这里 $a=1,b=-10,c=21$.

$\because b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times21=16>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$

$\frac{-(-10)\pm\sqrt{16}}{2\times1}=5\pm2$,

即 $x_1=5+2=7,x_2=5-2=3$(不合题意,舍去).

$\therefore$ 第三边的长是 7.

4.4 用因式分解法解一元二次方程

练习

1. 解:(1)把方程的左边进行因式分解,得 $x(3x+1)=0$,从而 $x=0$ 或 $3x+1=0$.

$\therefore x_1=0,x_2=-\frac{1}{3}$.

(2)把方程的左边进行因式分解,得 $\sqrt{3}y(y+2)=0$,从而 $\sqrt{3}y=0$ 或 $y+2=0$.

$\therefore y_1=0,y_2=-2$.

(3)把方程的左边进行因式分解,得 $(2x+9)(2x-9)=0$,从而 $2x+9=0$ 或 $2x-9=0$.

$\therefore x_1=-\frac{9}{2},x_2=\frac{9}{2}$.

(4)移项,得 $9(x+5)^2-1=0$.

把方程的左边进行因式分解,得 $[3(x+5)+1][3(x+5)-1]=0$.

从而 $3(x+5)+1=0$ 或 $3(x+5)-1=0$.

$\therefore x_1=-\frac{16}{3},x_2=-\frac{14}{3}$.

2. 解:由题意知,$x-x^2=0$,化为一般形式为 $x^2-x=0$,把方程的左边进行因式分解,得 $x(x-1)=0$,从而 $x=0$ 或 $x-1=0$.

$\therefore x_1=0,x_2=1$.

$\therefore$ 当 $x=0$ 或 $x=1$ 时,分式 $\frac{2x}{x-x^2}$ 没有意义.

习题 4.4

1. 解:(1)把方程的左边进行因式分解,得 $(3x+5)(3x-5)=0$,从而 $3x+5=0$ 或

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$3x-5=0$.

$\therefore x_1=-\frac{5}{3}, x_2=\frac{5}{3}$.

(2)方程两边同除以2,得$8x^2+5x=0$.

把方程的左边进行因式分解,

得$x(8x+5)=0$,

从而$x=0$或$8x+5=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=-\frac{5}{8}$.

(3)把方程的左边进行因式分解,

得$2y(y-2\sqrt{2})=0$,

从而$2y=0$或$y-2\sqrt{2}=0$.

$\therefore y_1=0, y_2=2\sqrt{2}$.

(4)移项,得$(x-1)x-2(x-1)=0$.

把方程的左边进行因式分解,

得$(x-1)(x-2)=0$,

从而$x-1=0$或$x-2=0$.

$\therefore x_1=1, x_2=2$.

2. 解:(1)把方程的左边进行因式分解,得

$(2x+1+x)(2x+1-x)=0$,

即$(3x+1)(x+1)=0$,

从而$3x+1=0$或$x+1=0$.

$\therefore x_1=-\frac{1}{3}, x_2=-1$.

(2)移项,得$16(3x+1)^2-9(x+2)^2=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$[4(3x+1)+3(x+2)][4(3x+1)-3(x+2)]=0$,

即$(15x+10)(9x-2)=0$,

从而$15x+10=0$或$9x-2=0$.

$\therefore x_1=-\frac{2}{3}, x_2=\frac{2}{9}$.

(3)移项,得$2(x+2)^2-3(x+2)=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$(x+2)[2(x+2)-3]=0$,

即$(x+2)(2x+1)=0$,

从而$x+2=0$或$2x+1=0$.

$\therefore x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}$.

(4)移项,得$(x-2)(2x+1)-(1+2x)=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$(x-3)(2x+1)=0$,

从而$x-3=0$或$2x+1=0$.

$\therefore x_1=3, x_2=-\frac{1}{2}$.

3. 解:由题意知,$(3x-2)^2=2(2-3x)$.

移项,得$(3x-2)^2-2(2-3x)=0$,

即$(3x-2)^2+2(3x-2)=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$(3x-2)[(3x-2)+2]=0$,

即$3x(3x-2)=0$,

从而$3x=0$或$3x-2=0$.

$\therefore x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$.

4. 解:(1)方程可化为$5x(x-2)-(x-2)=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$(x-2)(5x-1)=0$,

从而$x-2=0$或$5x-1=0$.

$\therefore x_1=2, x_2=\frac{1}{5}$.

(2)方程可化为$x^2-9-(x-3)=0$,

即$(x+3)(x-3)-(x-3)=0$,

把方程的左边进行因式分解,

得$(x+2)(x-3)=0$,

从而$x+2=0$或$x-3=0$. $\therefore x_1=-2, x_2=3$.

5. $a(x-1)(x-2)$

6. 解:$2(x-1)^2-x+1=0$,

$2(x-1)^2-(x-1)=0$,

$(x-1)[2(x-1)-1]=0$,

$(x-1)(2x-3)=0$,

从而$x-1=0$或$2x-3=0$. $\therefore x_1=1, x_2=\frac{3}{2}$.

当$2(x-1)^2-x+1\neq 0$时,该分式有意义,

即当$x\neq 1$且$x\neq\frac{3}{2}$时,该分式有意义.

7. 解法一:移项,得$(2x-5)^2-(x-2)^2=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$[(2x-5)+(x-2)][(2x-5)-(x-2)]=0$,

即$(3x-7)(x-3)=0$,

从而$3x-7=0$或$x-3=0$.

$\therefore x_1=3, x_2=\frac{7}{3}$.

解法二:把方程化为一般形式为$3x^2-16x+21=0$.

这里$a=3, b=-16, c=21$.

$\because b^2-4ac=(-16)^2-4\times 3\times 21=4>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-16)\pm\sqrt{4}}{2\times 3}=\frac{8\pm 1}{3}$,

即$x_1=\frac{8+1}{3}=3, x_2=\frac{8-1}{3}=\frac{7}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法三:把方程化为一般形式为 $3x^2-16x+21=0$.

方程两边都除以3,得 $x^2-\frac{16}{3}x+7=0$.

移项,得 $x^2-\frac{16}{3}x=-7$.

配方,两边都加 $\left(\frac{8}{3}\right)^2$,

得 $x^2-\frac{16}{3}x+\left(\frac{8}{3}\right)^2=-7+\left(\frac{8}{3}\right)^2$,

即 $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

由平方根的意义,得 $x-\frac{8}{3}=\pm\frac{1}{3}$,

$\therefore x_1=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3, x_2=-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$.

我认为解法一最简便.

4.5 一元二次方程根的判别式

练习

1. 解:(1)这里 $a=3, b=-5, c=-2$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times3\times(-2)=49>0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实根.

(2)这里 $a=2, b=-9, c=6$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\times2\times6=33>0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实根.

(3)这里 $a=5, b=10, c=6$.

$\because \Delta=b^2-4ac=10^2-4\times5\times6=-20<0$,

$\therefore$ 方程没有实根.

(4)这里 $a=5, b=-2\sqrt{15}, c=3$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{15})^2-4\times5\times3=0$,

$\therefore$ 方程有两个相等的实根.

2. 解:这里 $a=3, b=-4, c=k+1$,

则 $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times(k+1)=16-12k-12=4-12k$,令 $\Delta=0$,得 $k=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 当 $k=\frac{1}{3}$ 时,关于 x 的一元二次方程 $3x^2-4x+(k+1)=0$ 有两个相等的实根.

习题 4.5

1. 解:(1)这里 $a=2, b=1, c=\frac{1}{4}$.

$\because \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times2\times\frac{1}{4}=-1<0$,

$\therefore$ 方程没有实根.

(2)把原方程化为一般形式,得 $4t^2-4t-3=0$.

这里 $a=4, b=-4, c=-3$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-3)=64>0$,

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实根.

(3)移项,得 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$.

这里 $a=1, b=-2\sqrt{2}, c=2$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=0$,

$\therefore$ 原方程有两个相等的实根.

(4)移项,得 $3z^2-2\sqrt{6}z+2=0$.

这里 $a=3, b=-2\sqrt{6}, c=2$.

$\because \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{6})^2-4\times3\times2=0$,

$\therefore$ 原方程有两个相等的实根.

2. 解:$\Delta=a^2-4\times1\times(-1)=a^2+4$,

$\because a^2\geqslant0, \therefore a^2+4>0, \therefore$ 关于 x 的方程 $x^2+ax-1=0$ 有实根,两个实根不相等.

3. 解:将方程化为一般形式为 $mx^2+mx+5-m=0$.

这里 $a=m, b=m, c=5-m$.

由题意可知,$m\neq0$ 且 $\Delta=0$,

即 $b^2-4ac=m^2-4m(5-m)=5m^2-20m=5m(m-4)=0$,

从而 $5m=0$ 或 $m-4=0$,

$\therefore m_1=0, m_2=4$.

又$\because m\neq0, \therefore m=4$.

4. 解:移项,得 $(k-1)y^2-2ky+k-3=0$.

这里 $a=k-1, b=-2k, c=k-3$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2k)^2-4(k-1)(k-3)=16k-12=4(4k-3)$.

(1)$\because$ 关于 y 的方程 $(k-1)y^2-2ky+k=3$ 有两个不相等的实根,

$\therefore k-1\neq0$ 且 $\Delta=4(4k-3)>0$,

$\therefore k>\frac{3}{4}$ 且 $k\neq1$.

(2)$\because$ 关于 y 的方程 $(k-1)y^2-2ky+k=3$ 有两个相等的实根,

$\therefore k-1\neq0$ 且 $\Delta=4(4k-3)=0$,

$\therefore k=\frac{3}{4}$.

(3)$\because$ 关于 y 的方程 $(k-1)y^2-2ky+k=3$ 没有实根,

$\therefore k-1\neq0$ 且 $\Delta=4(4k-3)<0$,

$\therefore k<\frac{3}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解：由题意知 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4k)^2 - 4k(k-5) = 12k^2 + 20k = 4k(3k+5) = 0$，

从而 $4k = 0$ 或 $3k + 5 = 0$，$\therefore k_1 = 0$（舍去），

$k_2 = -\frac{5}{3}$.

当 $k = -\frac{5}{3}$ 时，方程可化为 $-\frac{5}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{5}{3} - 5 = 0$，

即 $x^2 - 4x + 4 = 0$，$\therefore (x-2)^2 = 0$，

$\therefore x_1 = x_2 = 2$.

6. 证明：$\Delta = [-(a+b)]^2 - 4c \times \frac{c}{4} = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$.

$\because a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三条边的长，

$\therefore a+b+c > 0, a+b-c > 0$，

$\therefore \Delta > 0$，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $cx^2 - (a+b)x + \frac{c}{4} = 0$ 有两个不相等的实根.

*4.6 一元二次方程根与系数的关系

练习

1. 解：(1) 两根之和为 3，两根之积为 1.

(2) 两根之和为 $-\frac{3}{2}$，两根之积为 0.

2. 解：将 $y = 2$ 代入 $5y^2 + ky - 6 = 0$，

得 $20 + 2k - 6 = 0$，解得 $k = -7$.

由两根之积为 $-\frac{6}{5}$，其中一个根为 2，

得另一个根为 $-\frac{6}{5} \div 2 = -\frac{3}{5}$.

3. 解：$\because y_1$ 与 y_2 是方程 $2y^2 - 4y + 1 = 0$ 的两个实数根，

$\therefore y_1 + y_2 = 2, y_1 y_2 = \frac{1}{2}$.

(1) $y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2$

$= (y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 + y_1 y_2$

$= (y_1 + y_2)^2 - y_1 y_2$

$= 2^2 - \frac{1}{2}$

$= \frac{7}{2}$.

(2) $\frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2}$

$= \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1 y_2}$

$= \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{y_1 y_2}$

$= \frac{2^2 - 2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

$= 6$.

习题 4.6

1. D

2. 解：(1) 由一元二次方程根与系数的关系得两根之积为 -1，而 $-4 \times \frac{5}{2} \neq -1$，

$\therefore -4, \frac{5}{2}$ 不同为该方程的根.

(2) 由一元二次方程根与系数的关系，得两根之和为 6，两根之积为 2.

$\because 3 + \sqrt{7} + (3 - \sqrt{7}) = 6$，

$(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) = 2$，

$\therefore 3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$ 同为该方程的根.

3. 解：将 $x = -\frac{1}{2}$ 代入原方程，得

$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (m+1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + m + 2 = 0$，

解得 $m = -4$.

$\therefore$ 原方程为 $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

由两根之积为 -1，其中一个根是 $-\frac{1}{2}$，得方程的另一个根为 $-1 \div \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

4. 解：设方程的一个实根为 m，则另一个实根为 $2m$，

$\therefore m + 2m = 3$，$\therefore m = 1$.

又 $\because m \cdot (2m) = a$，$\therefore a = 2$.

5. 解：$\Delta = [-(4m-3)]^2 - 4 \times 2 \times (m^2 - 2) = 8m^2 - 24m + 25$.

(1) 由题意知 $\frac{4m-3}{2} = 0$，解得 $m = \frac{3}{4}$.

$m = \frac{3}{4}$ 时，满足 $\Delta > 0$，$\therefore m = \frac{3}{4}$.

(2) 由题意知 $\frac{m^2 - 2}{2} = 1$，解得 $m = 2$ 或 $m = -2$.

$m = 2$ 或 $m = -2$ 时，均满足 $\Delta > 0$，

$\therefore m = 2$ 或 $m = -2$.

6. 解：（答案不唯一）这个一元二次方程为 $x^2 + 3x - 28 = 0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:由题意知,$\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=10,\\ \dfrac{10}{a}=10,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-10.\end{cases}$

8. 解:因为方程有两根,所以$(-2m)^2-4(m^2+m)\geqslant 0$,解得$m\leqslant 0$.

设x_1,x_2是方程的两根,则$x_1^2+x_2^2=4$,

$\therefore (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$,

$\therefore (2m)^2-2(m^2+m)=4$,

解得$m=-1$或$m=2$.

又$m\leqslant 0$,$\therefore m=-1$.

4.7 一元二次方程的应用

练习

1. 解:设矩形温室的宽为x m,则长为$3x$ m,

根据题意,得$(x-2)(3x-2\times 3)=300$,

整理,得$x^2-4x-96=0$,

解得$x_1=12$,$x_2=-8$(舍去).

所以$3x=3\times 12=36$.

答:当矩形温室的长为36 m,宽为12 m时,蔬菜种植区的面积是300 m^2.

2. 解:设经过t s时,$\triangle POQ$的面积为1 800 cm^2.

当$0<t\leqslant 50$时,可得$\dfrac{1}{2}(100-2t)\cdot 3t=1\,800$,

整理,得$t^2-50t+600=0$,

解得$t_1=20$,$t_2=30$.

当$50<t\leqslant 100$时,可得$\dfrac{1}{2}(2t-100)\cdot 3t=1\,800$,

整理,得$t^2-50t-600=0$,解得$t_3=60$,$t_4=-10$(舍去).

答:经过20 s,30 s或60 s时,$\triangle POQ$的面积为1 800 cm^2.

练习

1. 解:设2月、3月两个月的平均月增长率为x,则$300(1+x)^2=132+300$,

解这个方程得$x_1=0.2$,$x_2=-2.2$(舍去).

所以2月、3月两个月的平均月增长率为0.2,即20%.

2. 解:设今年产量的月增长率为x,则

$50\,000\times(1+x)^2-50\,000\times(1+x)=12\,000$,

解得$x_1=0.2$,$x_2=-1.2$(舍去).

答:今年产量的月增长率为0.2,即20%.

习题4.7

1. 解:设其中一个数为x,则另一个数为$10-x$,

根据题意得$x(10-x)=-75$,

解这个方程,得$x_1=15$,$x_2=-5$.

当$x=15$时,$10-x=-5$,

当$x=-5$时,$10-x=15$,

即这两个数分别是15和-5.

2. 解:设道路的宽为x m,则

$(20-x)(36-x)=540$,

解这个方程,得$x_1=28+2\sqrt{151}$(舍去),

$x_2=28-2\sqrt{151}\approx 3.4$.

即道路的宽约为3.4 m.

3. 解:设经过x分钟时,他们之间的直线距离仍然是1 000 m,则

$(1\,000-150x)^2+(200x)^2=1\,000^2$,

解这个方程,得$x_1=4.8$,$x_2=0$(舍去).

答:经过4.8分钟时,他们之间的直线距离仍然是1 000 m.

4. 解:设折叠进去的宽度应为x cm,则

$(26+2x)(18.5\times 2+2x+1)=1\,260$,

解这个方程,得$x_1=2$,$x_2=-34$(舍去).

答:折叠进去的宽度应为2 cm.

5. 解:设该汽车这两年的年平均折旧率为x,则$10\times(1-x)^2=7.225$,

解这个方程,得$x_1=0.15$,$x_2=1.85$(舍去).

答:该汽车这两年的年平均折旧率为0.15,即15%.

6. 解:(1)设从2000年到2002年的两年间,我国荒漠化、沙化土地面积的年平均增长率为x,则$216.5\times(1+x)^2=267.4$,

解得$x_1\approx 0.111$,$x_2\approx -2.111$(舍去).

答:从2000年到2002年的两年间,我国荒漠化、沙化土地面积的年平均增长率约为0.111,即11.1%.

(2)设平均每年降低y,则$267.4\times(1-y)^2=263.6$.

解得$y_1\approx 0.007$,$y_2\approx 1.993$(舍去).

答:从2002年到2004年的两年间,我国荒漠化、沙化土地的面积平均每年约降低0.007,即0.7%.

7. 解:设南瓜亩产量的增长率为x,根据题意,得$10\times(1+2x)\times 2\,000\times(1+x)=60\,000$,

解这个方程,得$x_1=0.5$,$x_2=-2$(舍去).

答:南瓜亩产量的增长率为0.5,即50%.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 解:设原两位数的个位数字为 x,根据题意,得 $[10(5-x)+x][10x+(5-x)]=736$,
解这个方程,得 $x_1=2, x_2=3$,
当 $x=2$ 时,原两位数是 32,
当 $x=3$ 时,原两位数是 23,
故原两位数是 32 或 23.

9. 解:设该厂 6,7 两个月产量的平均月增长率是 x,根据题意,得
$500\times(1-10\%)(1+x)^2=648$,
解这个方程,得 $x_1=0.2, x_2=-2.2$(舍去).
答:该厂 6,7 两个月产量的平均月增长率是 0.2,即 20%.

10. 解:设每次倒出溶液 x ml,根据题意,得
$1\ 000\times 80\%\times\left(1-\frac{x}{1\ 000}\right)^2=1\ 000\times 20\%$,解这个方程,
得 $x_1=500, x_2=1\ 500$(舍去).
答:每次倒出溶液 500 ml.

综合练习

1. 解:(1) $x^2-3x-10=0$,

$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=10+\left(\frac{3}{2}\right)^2$,

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$,

$\therefore x-\frac{3}{2}=\pm\frac{7}{2}$,

解得 $x_1=5, x_2=-2$.

(2) $4x^2-12x=1$,

$x^2-3x=\frac{1}{4}$,

$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$,

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$,

$\therefore x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$,

解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{10}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{10}}{2}$.

(3) $3x^2-6x+1=0$,

$x^2-2x+\frac{1}{3}=0$,

$x^2-2x+1=1-\frac{1}{3}$,

$(x-1)^2=\frac{2}{3}$,

$\therefore x-1=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$,

解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{6}}{3}, x_2=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$.

(4) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$,

$x^2+\frac{1}{6}x+\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{12}\right)^2$,

$\left(x+\frac{1}{12}\right)^2=\frac{49}{144}$,

$\therefore x+\frac{1}{12}=\pm\frac{7}{12}$,

解得 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{2}{3}$.

2. 解:(1) $x^2+8x-20=0$,
$\because a=1, b=8, c=-20$,
$\therefore b^2-4ac=8^2-4\times1\times(-20)=144>0$.

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-8\pm\sqrt{144}}{2\times1}$

$=\frac{-8\pm12}{2}=-4\pm6$,

即 $x_1=2, x_2=-10$.

(2) $4x^2-4x+1=0$,
$\because a=4, b=-4, c=1$,
$\therefore b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times1=0$.

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{4\pm0}{2\times4}$

$=\frac{1}{2}$,

即 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

(3) $x^2-3x-28=0$,
$\because a=1, b=-3, c=-28$,
$\therefore b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-28)=121>0$.

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2\times1}$

$=\frac{3\pm11}{2}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即 $x_1=7, x_2=-4$.

(4) $6x^2+2=7x$,

将方程化成一般形式为

$6x^2-7x+2=0$,

$\because a=6, b=-7, c=2$,

$\therefore b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times2=1>0$.

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2\times6}$$

$$=\frac{7\pm1}{12},$$

即 $x_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{2}$.

3. 解: (1) $(2y-1)(y+3)=4$,

将方程整理成一般形式为

$2y^2+5y-7=0$,

$(2y+7)(y-1)=0$,

解得 $y_1=-\frac{7}{2}, y_2=1$.

(2) $2(x+2)^2=3(x+2)$,

移项,得 $2(x+2)^2-3(x+2)=0$.

把方程的左边进行因式分解,得

$[2(x+2)-3](x+2)=0$,

即 $(2x+1)(x+2)=0$,

从而 $2x+1=0$ 或 $x+2=0$.

所以 $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-2$.

(3) $25(x-7)^2=16(x+4)^2$,

移项,得 $25(x-7)^2-16(x+4)^2=0$,把方程的左边进行因式分解,得 $[5(x-7)+4(x+4)][5(x-7)-4(x+4)]=0$,

即 $(9x-19)(x-51)=0$,

解得 $x_1=51, x_2=\frac{19}{9}$.

(4) $16(x+5)^2-8(x+5)+1=0$,

令 $x+5=t$,则

$16t^2-8t+1=0$,

即 $(4t-1)^2=0$,

解得 $t_1=t_2=\frac{1}{4}$.

$\therefore x_1=x_2=\frac{1}{4}-5=-\frac{19}{4}$.

4. 解: 由一元二次方程根与系数的关系,得

另一个根为 $-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{m}{2}=1\times\left(-\frac{3}{2}\right)$,解得 $m=-3$.

5. 解: 令 $x^2+2x=0$,

即 $x(x+2)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=-2$.

$\therefore$ 当 $x=0$ 或 $x=-2$ 时,分式 $\frac{x-4}{x^2+2x}$ 没有意义.

当 $x-4=0$,即 $x=4$ 时,分式的值为 0.

6. 解: (1) 由 $(-2)^2-4\times1\times(m-1)>0$,

得 $m<2$,

即当 $m<2$ 时,这个方程有两个不相等的实根.

(2) 由 $x_1^2+x_1x_2=1$,得 $x_1(x_1+x_2)=1$,

由一元二次方程根与系数的关系,得

$x_1+x_2=2$,

$\therefore 2x_1=1$,即 $x_1=\frac{1}{2}$,$\therefore x_2=\frac{3}{2}$.

$\therefore x_1x_2=m-1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$,

解得 $m=\frac{7}{4}$.

7. 解: (1) 由 $[-2(m+1)]^2-4m^2<0$,

得 $m<-\frac{1}{2}$,

即当 $m<-\frac{1}{2}$ 时,这个方程没有实根.

(2) 由 $[-2(m+1)]^2-4m^2\geqslant0$,

得 $m\geqslant-\frac{1}{2}$,

即当 $m\geqslant-\frac{1}{2}$ 时,这个方程有两个实根,

又 $m\neq0$,于是取 $m=4$,则原方程为 $x^2-10x+16=0$,即 $(x-2)(x-8)=0$,

解得 $x_1=2, x_2=8$.

点拨: (2) 题答案不唯一.

8. 解: 他应当选择用 24 cm 长的铁丝,理由如下:假设选择用 22 cm 长的铁丝,围成的矩形的宽为 x cm$(x<5.5)$,则

$(22\div2-x)x=32$,

整理,得 $x^2-11x+32=0$.

$\because (-11)^2-4\times1\times32=-7<0$,

$\therefore$ 此方程无实根,不合题意.

假设选择用 24 cm 长的铁丝,围成的矩形的宽为 y cm$(y<6)$,则

$(24\div2-y)y=32$,

解这个方程得 $y_1=4, y_2=8$(舍去).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 他应当选择用 24 cm 长的铁丝.

9. 解:设中间一个数为 x,则

$x(x-1)+x(x+1)+(x-1)(x+1)=362$,

解这个方程,得 $x_1=11$,$x_2=-11$.

所以这三个整数分别为 10,11,12 或 -10,-11,-12.

10. 解:设这种环保汽车平均每年增加的百分率为 x,则 $325(1+x)^2=637$,

解这个方程,得 $x_1=0.4=40\%$,$x_2=-2.4$(舍去).

答:这种环保汽车平均每年增加的百分率为 40%.

11. 解:设 x_1 是方程 $x^2-3x+c=0$ 的一个根,则 $-x_1$ 是方程 $x^2+3x-c=0$ 的一个根,

$$\therefore \begin{cases} x_1^2-3x_1+c=0, \\ (-x_1)^2+3(-x_1)-c=0, \end{cases}$$

解得 $c=0$.

将 $c=0$ 代入 $x^2+3x-c=0$,得 $x^2+3x=0$,解得 $x=0$ 或 $x=-3$.

12. 解:他们的判断都正确. 理由如下:

$\because (-2.76)^2-4\times0.25\times0.23=7.3876>0$,

∴ 这个方程有两个不相等的实根.

设 x_1,x_2 是这个方程的两个根,

则 $x_1+x_2=\dfrac{2.76}{0.25}>0$,

$x_1x_2=\dfrac{0.23}{0.25}>0$,

∴ x_1,x_2 均为正数. $\because x_1x_2=\dfrac{0.23}{0.25}<1$,

∴ x_1,x_2 中至少有一个小于 1,

$\because x_1+x_2=\dfrac{2.76}{0.25}=11.04>11$,

∴ 另一个根应大于 10.

综上可知,他们的判断都正确.

13. 解:(1)设 $AC'=x$,则 $BC'=7-x$,

$\because \triangle NBC'\backsimeq\triangle C'AE$,

$\therefore BN=AC'=x$,$\therefore NC'=NC=9-x$.

在 Rt$\triangle NBC'$ 中,由勾股定理,得

$BC'^2+NB^2=NC'^2$,

即 $(7-x)^2+x^2=(9-x)^2$,

解这个方程,得 $x_1=4$,$x_2=-8$(舍去).

∴ 当 $AC'=4$ 时,可以使 $\triangle NBC'\backsimeq\triangle C'AE$.

(2)不存在. 理由如下:设 $AC'=y$,则 $BC'=1-y$,

$\because \triangle NBC'\backsimeq\triangle C'AE$,$\therefore BN=AC'=y$,

$\therefore NC'=NC=1-y$.

在 Rt$\triangle NBC'$ 中,由勾股定理,得

$BC'^2+NB^2=NC'^2$,

即 $(1-y)^2+y^2=(1-y)^2$,

解得 $y_1=y_2=0$,不合题意.

∴ 不存在这样的点 C',使 $\triangle NBC'\backsimeq\triangle C'AE$.

14. 解:(1)捞出的 10 尾鱼的平均质量为:

$\dfrac{1}{10}\times(0.8+0.9+1.2+1.3+0.8+0.9+1.1+1.0+1.2+0.8)=1$(kg).

∴ 估计这池塘中鱼的第一年总产量是 $20\,000\times70\%\times1=14\,000$(kg).

(2)第一年的纯收入约为 $14\,000\times4-16\,000=40\,000$(元).

(3)设第二年与第三年纯收入的平均年增长率为 x,根据题意,得

$40\,000+40\,000\times(1+x)+40\,000\times(1+x)^2=132\,400$,

解这个方程,得 $x_1=-3.1$(舍去),$x_2=0.1$.

答:第二年与第三年纯收入的平均年增长率为 0.1,即 10%.

15. 解:会. 假设会遇到台风,遇到台风的时间为继续航行 x 小时后,

则 $(100-40x)^2+(20x)^2=(20\sqrt{10})^2$,

解这个方程,得 $x_1=1$,$x_2=3$(舍去).

∴ 这艘轮船继续航行,会遇到台风,最初遇到台风的时间为继续航行 1 小时后.

16. 解:(1)由题意知,

$$\begin{cases} (-2\sqrt{k+1})^2-4\times(1-2k)\times(-1)>0, \\ k+1\geqslant0, \\ 1-2k\neq0, \end{cases}$$

解得 $-1\leqslant k<2$ 且 $k\neq\dfrac{1}{2}$.

(2)设方程的两根分别为 x_1,x_2,则

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1x_2}=-1$,

即 $\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}-\dfrac{1}{x_1x_2}=-1$,则 $x_1+x_2+x_1x_2=1$.

又 $x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{k+1}}{1-2k}$,$x_1x_2=-\dfrac{1}{1-2k}$,

$\therefore \dfrac{2\sqrt{k+1}}{1-2k}-\dfrac{1}{1-2k}=1$,

解得 $k=0$,

由(1)知 $-1\leqslant k<2$ 且 $k\neq\dfrac{1}{2}$,$\therefore k=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

学生的随身家教 · 家长的辅导工具 · 教师的备课笔记





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料